Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen e. V.
Abteilung: J 06

Bericht: B 44/J/12.
Auftrag: LA 623
Datum: 24.6.44

Untersuchungen über die Stabilität der Schlagbewegung von Steilschrauben.

Übersicht: Für einen Rotor mit beliebig verwundenem Rechteckblatt und zentrischen Schlaggelenken wird der Einschwingvorgang einer - z.B. durch Böeneinfluss oder durch Übergang in einen anderen Flugzustand - gestörten Schlagbewegung untersucht.

Dabei ist vorausgesetzt, dass bei dem Flugzustand, auf den sich die Blätter einschwingen, der Rotor ausser seiner Eigendrehung in bezug auf ein raumfestes System keinerlei Drehbewegungen ausführt und dass die Fluggeschwindigkeit nach Grösse und Richtung konstant ist.

Ein durchgerechnetes Zahlenbeispiel ergibt sehr stark gedämpfte Schwingungen von 1 ÷ 5 Hz.

Gliederung:
I. Ansatz und Lösung der Bewegungsgleichungen.
II. Durchrechnung eines Zahlenbeispieles.

Der Bericht umfasst 7 Seiten.

Institut für instationäre Vorgänge
der
Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen E.V.

Der Institutsleiter
Küssner
(Küssner)

Der Bearbeiter
Sissingh
(Sissingh)

I. Ansatz und Lösung der Bewegungsgleichungen.

Wenn man den Flügel des Rotors als symmetrischen Kreisel auffasst, dessen Trägheitsmoment in bezug auf seine Figurenachse gegenüber den beiden anderen (gleich grossen) Hauptträgheitsmomenten vernachlässigt werden kann, so ergibt sich folgende Differentialgleichung 1) für die Schlagbewegung:

$$M_{L(\beta,\dot\beta)} - I.\ddot\beta - I\,\omega^2\,\beta - M_G = 0 \qquad ....(1)$$

Darin bedeuten

I	$mkgs^2$	das Massenträgheitsmoment eines Blattes,	sämtlich auf das Schlaggelenk bezogen.
M_L	mkg	das Moment der Luftkräfte eines Blattes,	
M_G	mkg	das Gewichtsmoment eines Blattes,	
ω	s^{-1}	die Winkelgeschwindigkeit des Rotors,	
β	-	der Schlagwinkel des Blattes,	
ψ	-	der Azimutwinkel des Blattes.	

Für das Moment der Luftkräfte eines Rotors mit Rechteckblatt können wir nach [1] schreiben:

$$M_L = R^2U^2t_o c_a' \,\rho/2 \int_0^B v_x^2 . x . \left(\frac{v_y}{v_x} + \vartheta \right) dx \qquad .....(2)$$

Ferner ist

$$v_x = x + \mu \sin\psi \qquad .....(3)$$

$$v_y = \lambda_d - \mu\beta \cos\psi - x . \frac{\dot\beta}{\omega} \qquad .....(4)$$

M_L ist also ebenfalls eine Funktion von β und $\dot\beta$.

---

1) Punkte bedeuten Ableitung nach der Zeit. Falls nicht besonders erwähnt, wurden die bei dem Verfasser üblichen Bezeichnungen verwandt, s. [1] .

Zwecks Lösung der Differentialgleichung (1) ersetzen wir β durch eine Fourier-Reihe von der Form

$$\beta = a_o + \Delta a_o - (a_1 + \Delta a_1)\cos\psi - (b_1 + \Delta b_1)\sin\psi - \ldots \qquad \ldots(5)$$

In diesem Ansatz sind a_o, a_1 und b_1 die Koeffizienten der ungestörten Schlagbewegung, sie sind also von der Zeit unabhängig. Die Störungsglieder Δa_o, Δa_1 und Δb_1 dagegen sind Funktionen der Zeit.

Mit $\frac{d\psi}{dt} = \omega$ erhalten wir durch zweimaliges Differenzieren der Gleichung (5) die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\dot{\beta} = \Delta\dot{a}_o &+ \sin\psi\left\{\omega(a_1 + \Delta a_1) - \Delta\dot{b}_1\right\} \\ &+ \cos\psi\left\{-\omega(b_1 + \Delta b_1) - \Delta\dot{a}_1\right\}\end{aligned} \qquad \ldots\ldots(6)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta} = \Delta\ddot{a}_o &+ \sin\psi\left\{\omega^2(b_1 + \Delta b_1) + 2\Delta\dot{a}_1\omega - \Delta\ddot{b}_1\right\} \\ &+ \cos\psi\left\{\omega^2(a_1 + \Delta a_1) - 2\Delta\dot{b}_1\omega - \Delta\ddot{a}_1\right\}\end{aligned} \qquad \ldots\ldots(7)$$

Wenn wir die durch die Störungsglieder verursachten Einflüsse allgemein mit dem Zusatz Δ bezeichnen, so ist also

$$\Delta\beta = \Delta a_o - \Delta a_1 \cdot \cos\psi - \Delta b_1 \cdot \sin\psi \qquad \ldots\ldots(8)$$

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\beta} = \Delta\dot{a}_o &+ \sin\psi(\omega \cdot \Delta a_1 - \Delta\dot{b}_1) \\ &+ \cos\psi(-\omega\Delta b_1 - \Delta\dot{a}_1)\end{aligned} \qquad \ldots\ldots(9)$$

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{\beta} = \Delta\ddot{a}_o &+ \sin\psi(\omega^2\Delta b_1 + 2\Delta\dot{a}_1\omega - \Delta\ddot{b}_1) \\ &+ \cos\psi(\omega^2\Delta a_1 - 2\Delta\dot{b}_1\omega - \Delta\ddot{a}_1)\end{aligned} \qquad \ldots\ldots(10)$$

Mit Gl(8) und (9) folgt aus Gl(4)

$$\begin{aligned}\Delta v_y = \tfrac{1}{2}\mu\,\Delta a_1 - x \cdot \frac{\Delta\dot{a}_o}{\omega} &+ \sin\psi\left\{x\left(\frac{\Delta\dot{b}_1}{\omega} - \Delta a_1\right)\right\} \\ &+ \cos\psi\left\{x\left(\frac{\Delta\dot{a}_1}{\omega} + \Delta b_1\right) - \mu\,\Delta a_o\right\} \\ &+ \sin 2\psi \cdot \tfrac{1}{2}\mu\,\Delta b_1 \\ &+ \cos 2\psi \cdot \tfrac{1}{2}\mu\,\Delta a_1\end{aligned} \qquad \ldots\ldots(11)$$

Für den Einfluss der Störungsglieder auf das Luftkraftmoment erhalten wir aus Gl(2)

$$\Delta M_L = R^2 U^2 t_o c_a' \, \varrho/2 \cdot \int_0^B x \cdot v_x \cdot \Delta v_y \cdot dx \qquad \ldots.(12)$$

Die Auswertung des Integrals $\int_0^B x \cdot v_x \cdot \Delta v_y \, dx$ ergibt nach einigen Umformungen, die hier übergangen werden, folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\int_0^B x \, v_x \, \Delta v_y \, dx = {} & \tfrac{1}{6} B^3 \mu \cdot \frac{\Delta \dot{b}_1}{\omega} - \tfrac{1}{4} B^4 \cdot \frac{\Delta \dot{a}_0}{\omega} \\ & + \sin\psi \left\{ -\Delta a_1 \left(\tfrac{1}{4} B^4 - \tfrac{1}{8} B^2 \mu^2 \right) - \tfrac{1}{3} B^3 \mu \cdot \frac{\Delta \dot{a}_0}{\omega} + \tfrac{1}{4} B^4 \cdot \frac{\Delta \dot{b}_1}{\omega} \right\} \\ & + \cos\psi \left\{ + \Delta b_1 \left(\tfrac{1}{4} B^4 + \tfrac{1}{8} B^2 \mu^2 \right) - \tfrac{1}{3} B^3 \mu \, \Delta a_0 + \tfrac{1}{4} B^4 \cdot \frac{\Delta \dot{a}_1}{\omega} \right\} \\ & + \sin 2\psi \left\{ \cdots \right\} \\ & + \cdots \qquad \ldots\ldots(13)\end{aligned}$$

Wir können in Gl(1) die Summanden M_L , $I \ddot{\beta}$ und $I \omega^2 \beta$ aufspalten in einen Anteil, der sich auf die ungestörte Schlagbewegung bezieht, und einen weiteren Anteil, der von den Störungsgliedern herrührt. Die ersten stehen untereinander mit dem Gewichtsmoment M_G im Gleichgewicht, sie heben sich also gegenseitig auf. Es bleibt dann eine Gleichung bestehen, in der nur noch die Störungsglieder auftreten:

$$\Delta M_L = I \Delta \ddot{\beta} + I \omega^2 \Delta \beta \qquad \ldots\ldots.(14)$$

Sämtliche Summanden dieses Ausdruckes sind uns bereits in Form einer Fourier-Reihe bekannt. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir mit

$$\gamma = \frac{R^4 \; t_o \; c_a' \; \rho}{I} \qquad .....(15)$$

folgende Gleichungen:

$$+\omega^2 \Delta a_o + \Delta \ddot{a}_o = \frac{\gamma}{2}\omega^2 \left\{ + \frac{1}{6} B^3 \mu \cdot \frac{\Delta \dot{b}_1}{\omega} - \frac{1}{4} B^4 \cdot \frac{\Delta \dot{a}_o}{\omega} \right\} \qquad ...(16)$$

$$+2 \Delta \dot{a}_1 \omega - \Delta \ddot{b}_1 = \frac{\gamma}{2}\omega^2 \left\{ - \Delta a_1 \cdot \left(\frac{1}{4} B^4 - \frac{1}{8} B^2 \mu^2\right) - \frac{1}{3} B^3 \mu \cdot \frac{\Delta \dot{a}_o}{\omega} + \frac{1}{4} B^4 \cdot \frac{\Delta \dot{b}_1}{\omega} \right\} \qquad ...(17)$$

$$-2 \Delta \dot{b}_1 \omega - \Delta \ddot{a}_1 = \frac{\gamma}{2}\omega^2 \left\{ + \Delta b_1 \left(\frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{8} B^2 \mu^2\right) - \frac{1}{3} B^3 \mu \; \Delta a_o + \frac{1}{4} B^4 \cdot \frac{\Delta \dot{a}_1}{\omega} \right\} \qquad ...(18)$$

Sie werden mit dem üblichen Ansatz

$$\Delta a_o = A.\; e^{\lambda t}$$
$$\Delta a_1 = B.\; e^{\lambda t}$$
$$\Delta b_1 = C.\; e^{\lambda t} \qquad ...(19)$$

gelöst. Mit Gl(19) gehen Gl(16,17,18) über in

$$A(\,k_1 + k_2 \lambda \; + \lambda^2) \qquad -C.\; k_3 \lambda \; = 0 \qquad ..(2o)$$
$$A \;.\; 2\; k_3 \lambda \qquad + B(k_5 + k_6 \lambda\,) \quad -C.(k_2 \lambda + \lambda^2) = 0 \qquad ..(21)$$
$$A \;.\; 2\; \omega\; k_3 \qquad - B(\lambda k_2 + \lambda^2\;) \quad -C.(k_{1o} + \lambda k_6) = 0 \qquad ..(22)$$

In diesen Gleichungen ist

$$k_1 = \omega^2 \qquad ....(23)$$
$$k_2 = \frac{1}{8}\,\gamma\;\omega\; B^4 \qquad ....(24)$$
$$k_3 = \frac{1}{12}\,\gamma\;\omega\; B^3 \mu \qquad ....(25)$$
$$k_5 = \frac{1}{8}\,\gamma\;\omega^2(\;B^4 - o{,}5\; B^2 \mu^2) \qquad ....(26)$$
$$k_6 = 2\;\omega \qquad ....(27)$$
$$k_{1o} = \frac{1}{8}\,\gamma\;\omega^2(B^4 + o{,}5\; B^2 \mu^2) \qquad ....(28)$$

Die drei homogenen, linearen Differentialgleichungen (16,17,18) für die drei Unbekannten Δa_o Δa_1 und Δb_1 haben bekanntlich nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Hauptdeterminate verschwindet. Es muss also sein:

$$\begin{vmatrix} k_1+k_2\lambda+\lambda^2 & 0 & -k_3\lambda \\ 2k_3\lambda & k_5+\lambda k_6 & -(k_2\lambda+\lambda^2) \\ 2\omega k_3 & -(\lambda k_2+\lambda^2) & -(k_{1o}+\lambda k_6) \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots.(29)$$

Die obige Determinante ergibt eine Gleichung 6. Grades für λ von der Form

$$\lambda^6 + a\lambda^5 + b\lambda^4 + c\lambda^3 + d\lambda^2 + e\lambda + f = 0 \qquad \ldots..(3o)$$

Darin ist

$$a = 3k_2 \qquad \ldots..(31)$$

$$b = k_1 + 3k_2^2 - 2k_3^2 + k_6^2 \qquad \ldots..(32)$$

$$c = 2k_1k_{2+} + k_2^3 - 2k_2k_3^2 + k_6k_{1o} + k_6(k_2k_6 + k_5) \qquad \ldots..(33)$$

$$d = k_1k_2^2 - 2\omega k_3^2k_6 + k_6(k_1k_6 + k_2k_5) + k_{1o}(k_2k_6 + k_5) \qquad \ldots..(34)$$

$$e = k_1k_5k_6 - 2\omega k_3^2k_5 + k_{1o}(k_1k_6 + k_2k_5) \qquad \ldots..(35)$$

$$f = k_1k_5k_{1o} \qquad \ldots..(36)$$

Die 6 Lösungen der Gl(3o) ergeben folgende Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta a_o = A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots\ldots + A_6 \cdot e^{\lambda_6 t} \qquad \ldots\ldots(37)$$

$$\Delta a_1 = B_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + B_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots\ldots + B_6 \cdot e^{\lambda_6 t} \qquad \ldots\ldots(38)$$

$$\Delta b_1 = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \ldots\ldots + C_6 \cdot e^{\lambda_6 t} \qquad \ldots\ldots(39)$$

Darin sind die Koeffizienten A_i B_i C_i nicht unabhängig voneinander, sondern durch die Gleichungen (2o,21,22) gekoppelt. Wir erhalten letzten Endes 6 unabhängige Konstanten, die durch die Anfangsbedingungen Δa_o, Δa_1, Δb_1, $\Delta \dot{a}_o$, $\Delta \dot{a}_1$ und $\Delta \dot{b}_1$ bedingt sind.

II. Durchrechnung eines Zahlenbeispieles.

Zwecks Diskussion des Ergebnisses wurde die Rechnung an einem der Praxis entnommenen Beispiel durchgeführt; es wurde gesetzt:

$$\gamma = 12$$
$$\omega = 18\ s^{-1}$$
$$B = 0{,}98$$
$$\mu = 0{,}3.$$

Mit diesen Werten erhält man folgende Gleichung 6.Grades für λ

$$\lambda^6 + \lambda^5 . 75 + \lambda^4 . 3430 + \lambda^3 . 94830 + \lambda^2 . 1{,}592 . 10^6 + \lambda . 15{,}053 . 10^6 + 64{,}964 . 10^6 = 0 \qquad .....(40)$$

Diese Gleichung hat folgende konjungiert komplexe Lösungen:[2)]

$$\lambda_{1,2} = -\ 14{,}48 \pm 5{,}71\ i$$
$$\lambda_{3,4} = -\ 11{,}66 \pm 30{,}46\ i$$
$$\lambda_{5,6} = -\ 11{,}54 \pm 10{,}90\ i$$

Die Schwingungszeiten betragen also 1,1 0,21 und 0,58 sec. Da die Schwingungen durch die Luftkräfte äusserst stark gedämpft werden - die Amplituden gehen in $^1/_{10}$ sec. auf 24 ÷ 30% der ursprünglichen Störung zurück - passt sich also die Schlagbewegung bei einem Übergang in einen an-

---

2) Falls man von der Störung des Kegelwinkels a_o absieht

deren Flugzustand bei dem untersuchten Fall fast momentan den neuen Verhältnissen an.[3)]

Um den Einfluss des Fortschrittsgrades auf die Stabilität der Schlagbewegung abzuschätzen, wurde ausserdem die charakteristische Gleichung für den Fortschrittsgrad $\mu = 0$ berechnet. In diesem Falle geht Gl(40) über in

$$\lambda^6 + \lambda^5 .75 + \lambda^4 .3480 + \lambda^3 .96120 + \lambda^2 .1{,}625.10^6 + \lambda .15{,}461.10^6 + 65{,}107.10^6 = 0 \qquad \ldots .(40a)$$

Da sich die charakteristische Gleichung nur unwesentlich geändert hat, ist anzunehmen, dass der Fortschrittsgrad innerhalb des z.Zt. in Betracht kommenden Bereiches auf die Stabilität der Schlagbewegung praktisch keinen Einfluss hat.

<u>Schrifttum</u>:

1 Sissingh, Beitrag zur Aerodynamik der Drehflügelflugzeuge I, Luftf.-Forschg. Band 15 (1938) S.290

2 Adam, Über die Stabilität der Bewegung eines Autogiro-Blattes, Revista de Aeronautica (Aerotecnia) 1934 Nr.30 S.478

3 Hohenemser, Über die dynamische Stabilität des Hubschraubers mit angelenkten Flügeln, Ing. Archiv Bd 9 (1938) S.419

---

und von Gl(29) nur die entsprechende Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} k_5 + \lambda k_6 & -(k_2\lambda + \lambda^2) \\ -(\lambda k_2 + \lambda^2) & -(k_{10} + \lambda \cdot k_6) \end{vmatrix} = 0$$

löst, erhält man

$$\lambda_{1,2} = -12{,}5 \pm 4{,}8\ i$$

$$\lambda_{3,4} = -12{,}5 \pm 31\ i$$

Diese Lösungen entsprechen etwa den beiden ersten Wurzelpaaren der exakten Lösung.

3) Zu ähnlichen Ergebnissen führen die Untersuchungen [2] und [3].