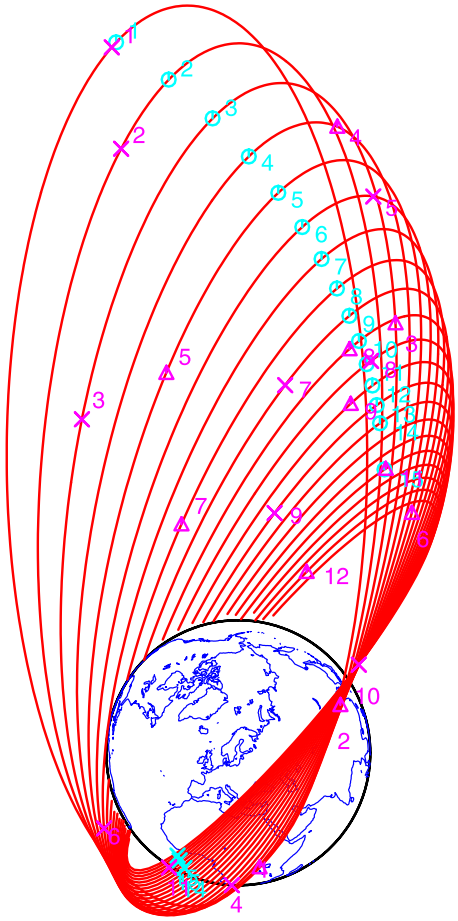
Ernst Friedrich Maria Jochim

Satellitenbewegung



Band III: Natürliche und gesteuerte Bewegung

Herausgeber: Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt
Bibliotheks- und
Informationswesen
D-51170 Köln
Porz-Wahnheide
Linder Höhe
D-51147 Köln

Telephon (022 03) 6 01- 44 44
Telephax (022 03) 6 01- 47 47

Als Manuskript gedruckt.
Abdruck oder sonstige Verwendung
nur nach Absprache mit dem DLR gestattet

ISSN 1434-8454
ISRN DLR-FB-2014-36

© Dr. E. F. M. Jochim (vormals Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, DLR)

\ documents \ SAB \ SAB-zentral \SAB Band III.doc \

Stand der Arbeit: Mittwoch, 9. Februar 2022

Titelbild: Stark überhöhte Bewegung eines erdnahen Satelliten infolge der Einwirkung durch die Abplattung der Erde (zur Demonstration um das 100 fache überhöht): Drehung der Bahnebene im Raum: Knotenwanderung, Rotation der Bahn in ihrer Bahnebene: Apsidendrehung, sowie die Bahnhöhenabnahme durch den Luftwiderstand (um den Faktor 1000 überhöht). Die blauen Markierungen bezeichnen die Schnittpunkte mit der Äquatorebene („Knotendurchgänge“), die roten Markierungen die Apsiden (X für Perigäum, △ für Apogäum)

Die Zahl ist Anfang und Ende des Denkens,
Mit dem Gedanken wird die Zahl geboren,
Über die Zahl hinaus reicht der Gedanke nicht.[1]

Magnus Gustav Mittag-Leffler
1846-1927

[1] Zitiert aus O. VOLK [1995] in: *Mathematik und Erkenntnis*, Litauische Aufsätze, Hrsg. v. Hans-Joachim Vollrath. Das Zitat wird dort in schwedischer Sprache wiedergegeben: „Talet är tänkandets början och slut / Med tanken föddes talet, / Utöfer talet når tanken icke."

Vorwort zu Band III

Im dritten Band der Satellitenbewegung werden in fortlaufender Nummerierung einige für Untersuchungen der Bewegung der künstlichen Satelliten wichtige Grundlagen der Astrodynamik mit ausführlichen mathematischen Formelsystemen behandelt. Dazu zählen die unterschiedlichen Aspekte der Bewegung der natürlichen Himmelskörper, die Steuerung und Kontrolle von künstlichen Objekten, und insbesondere die für eine Satellitenbahnanalyse wichtigen physikalischen Beeinflussungen einer Satellitenbewegung. Mathematisch entscheidend ist die Wahl geeigneter Bahnparameter, die ein bestimmtes Bewegungsproblem widerspruchsfrei und singularitätenfrei zu behandeln gestatten. Für die Behandlung routinemäßiger Aufgabenstellungen der Satellitenbewegung, in erster Linie einer präzisen Bahnbestimmung und Bahnverbesserung, kann auf eine Fülle von lehrbuchartigen Monographien verwiesen werden, so dass diese Problematik in der vorliegenden Arbeit nur angedeutet werden soll.

Mit eingearbeitet wurden in diesen Band Ergebnisse der Kollegen Professor *Dr. Werner Schulz* (DFL-FM und DFVLR-PV), *Dr. Martin C. Eckstein* (ehemals DLR-DF und RB), *Dr. Hauke Fiedler* (DLR-HR und RB), Professor *Dr. Eberhard Gill* (DLR-RB / Universität Delft), *Dr. Michael Kirschner* (DLR-RB). Für sorgfältige und konstruktive Unterstützung an den Arbeiten zu dem vorliegenden Band darf *M. Sebastien Tailhades* und *Dr. Thomas Neff* (beide DLR-HR) sehr herzlich gedankt werden. Große Teile dieses Berichtes wurden dankenswerterweise von Herrn Dipl. Ing. *Alfred Pietrass* (vormals DLR-DF und RB) und seinem Schreibbüro bearbeitet. Für die Veröffentlichung des Bandes in der Reihe der DLR Forschungsberichte geht besonderer Dank an die Herren Professor *Dr. Alberto Moreira* und Professor *Dr. Helmut Süß* (beide DLR-HR).

Die Liste der verwendeten Symbole und die für Band III relevante Literatur sind in diesen Band der Satellitenbewegung aufgenommen.

Inhaltsverzeichnis

VORWORT ZU BAND III V

INHALTSVERZEICHNIS VI

BEWEGUNG DER NATÜRLICHEN UND KÜNSTLICHEN HIMMELSKÖRPER 1

10 DIE SPEZIELLE *KEPLER*BEWEGUNG 1

12.1 DAS INVERSE *KEPLER*SCHE PROBLEM 2
12.1.1 Anmerkungen zur Hermannschen Lösung 2
12.1.2 Anmerkungen zur allgemeinen Keplerbewegung 4
12.1.3 Die Keplersche Umlaufzeit 5
12.1.4 Genäherte Lösung des Zeitintegrals 7
12.1.5 Die Gaußsche Gravitationskonstante 7
12.2 DAS ZWEIKÖRPERPROBLEM 9
12.2.1 Relative Zweikörperbewegung 9
10.1.1.1 Der Schwerpunktsatz 11
10.1.1.2 Absolute Zweikörperbewegung 12
12.2.2 Die absolute Zweikörperbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt 13
12.2.3 Reihenentwicklungen im Zweikörperproblem 16
12.3 ANWENDUNGEN DER ZWEIKÖRPERBEWEGUNG IN DER SATELLITENBAHNMECHANIK 24
12.4 DAS DREIKÖRPERPROBLEM 27
12.4.1 Die Basisgleichungen 27
12.4.2 Die relative Dreikörperbewegung 28
12.4.3 Die allgemeinen Integrale des Dreikörperproblems 29
12.4.4 Die absolute Dreikörperbewegung 30
12.5 DIE EXAKTEN LÖSUNGEN DES DREIKÖRPERPROBLEMS 32
12.5.1 Die kollineare exakte Lösung des Dreikörperproblems 32
10.1.1.3 Das Polynom 5. Grades 32
10.1.1.4 Die Bewegungsgleichungen im Fall der kollinearen Punkte bei Relativbewegung 40
10.1.1.5 Der Fall der kollinearen Punkte bei absoluter Bewegung 45
12.5.2 Die äquidistante exakte Lösung des Dreikörperproblems 50
10.1.1.6 Relativbewegung im Fall der äquidistanten Punkte 50
10.1.1.7 Absolute Bewegung um den Schwerpunkt im Fall der äquidistanten Punkte 54
12.6 WEITERFÜHRENDE LITERATUR ZU PROBLEMEN DES DREIKÖRPERPROBLEMS 58

11 BEWEGUNGSPARAMETER 59

11.1 KEPLERELEMENTE 60
11.1.1 Berechnung der Keplerelemente aus dem Zustandsvektor 60
11.1.2 Berechnung des Zustandsvektors aus den Keplerelementen 63
11.1.3 Berechnung einer elliptischen Keplerbahn aus Randwerten 64
11.1.3.1 Das Sektor zu Dreiecksverhältnis 65
11.1.3.2 Berechnung der Keplerelemente bei bekanntem Kegelschnittparameter 67
11.1.3.3 Eine Modifikation mit Hilfe des Mertonschen Vektors 70
11.1.4 Berechnung des Zustandsvektors aus Randwerten 71
11.1.5 Die Gaußschen Variationsgleichungen in den Keplerelementen 71
11.1.6 Entwicklung nach tangentialen Komponenten 75
11.1.7 Die Lagrangeschen Variationsgleichungen in den Keplerelementen 77
11.2 *LAGRANGE* – ELEMENTE 78
11.2.1 Definition der Lagrange-Elemente 78
11.2.2 Berechnung der Lagrange-Elemente aus dem Zustandsvektor 80
11.2.3 Berechnung des Zustandsvektors aus Lagrange-Elementen 84
11.2.4 Die Gaußschen Variationsgleichungen der Lagrangeschen Elemente 88
11.3 ÄQUINOKTIALE ELEMENTE 91
11.4 REGULÄRE ELEMENTE 93
11.4.1 Definition der regulären Elemente 93
11.4.2 Berechnung der Keplerelemente aus den regulären Elementen 95
11.4.3 Berechnung der regulären Elemente aus dem Zustandsvektor 95
11.4.4 Berechnung des Zustandsvektors aus den regulären Elementen 98

11.4.5 Die Gaußschen Variationsgleichungen der regulären Elemente ... 100
11.5 GEOSTATIONÄRE ELEMENTE ... 103
11.6 POSITIONSELEMENTE ... 103
11.6.1 Definition der Positionselemente ... 103
11.6.2 Berechnung des Zustandsvektors aus den Positionselementen ... 106
11.6.3 Berechnung der Positionselemente aus dem Zustandsvektor ... 106
11.6.4 Die Gaußschen Variationsgleichungen der Positionselemente ... 108
11.7 PARAMETER IM APSIDENSYSTEM ... 108
11.7.1 Definition der Bahnparameter nach Herrick ... 109
11.7.2 Die Variationsgleichungen der Parameter im Apsidensystem ... 111
11.8 IDEALE ELEMENTE ... 113
11.8.1 Definition der idealen Elemente ... 113
11.8.2 Berechnung der idealen Elemente aus dem Zustandsvektor ... 118
11.8.3 Berechnung des Zustandsvektors aus den idealen Elementen ... 121
11.8.4 Die Gaußschen Variationsgleichungen der idealen Elemente ... 123
11.9 KANONISCHE ELEMENTE ... 127
11.9.1 Kanonische Variable ... 127
11.9.2 Kanonische Darstellung einer „gestörten" Keplerbewegung ... 128
11.9.3 Kanonische Transformationen ... 128
11.9.4 Die erzeugende Funktion ... 131
11.9.5 Delaunay- Elemente ... 131
11.9.6 Poincaré – Elemente ... 132
11.9.7 Hillsche – Variable ... 133
11.10 LYDDANE ELEMENTE ... 135
11.11 PARAMETER DER GERADLINIGEN BEWEGUNG ... 135
11.11.1 Parameter der geradlinigen Bewegung in Bezug auf ein Hansen –System ... 136
11.11.1.1 Die Parameter der Bahnkurve in der oskulierenden Bahnebene ... 136
11.11.1.2 Die Parameter einer Bewegung im Rahmen des Formalismus der geradlinigen Bewegung ... 138
11.11.1.3 Die Parameter der räumlichen Orientierung einer Bahnebene im Rahmen des Formalismus der geradlinigen Bewegung ... 138
11.11.2 Berechnung der Parameter der geradlinigen Bewegung aus dem Zustandsvektor ... 140
11.11.3 Berechnung des Zustandsvektors aus Parametern der geradlinigen Bewegung ... 142
11.11.4 Variationsgleichungen im Formalismus der geradlinigen Bewegung ... 143
11.12 DIE PARAMETER IN EINEM ANPASSUNGS-FORMALISMUS BEI BELIEBIGEN BEWEGUNGEN ... 145
11.13 TRANSFORMATIONEN DER ZEIT ... 146

12 NATÜRLICHE UND GESTEUERTE BEWEGUNGSÄNDERUNGEN ... 149

12.1 DAS GESCHWINDIGKEITSINKREMENT ... 149
12.2 KLEINE ÄNDERUNGEN DES GESCHWINDIGKEITSVEKTORS ... 151
12.3 ÄNDERUNGEN DER BAHNEBENE ... 153
12.3.1 Knotenänderung ... 154
12.3.2 Inklinationsänderung im Knoten für kreisnahe Bahnen: ... 156
12.3.3 Kleine Knotenänderungen ... 156
12.3.4 Richtung des Schubvektors bei Bahndrehung ohne Änderung der Bahnform ... 158
12.4 ÄNDERUNGEN DER BAHNFORM ... 158
12.4.1 Ein-Impuls-Manöver auf Zielbahn ... 159
12.4.2 Bahnmanöver mit vorgegebener Drehung der Apsidenlinie ... 169
12.4.3 Hohmann Übergänge ... 172
12.4.4 Kleine Änderungen der Bahnform ... 180
12.4.5 Kleine Positionsänderungen längs der Bahn ... 181
12.4.6 Abschätzung eines Längenfehlers in der Bahn ... 182
12.4.7 Beliebige Zwei-Impuls-Übergangsbahnen ... 184
12.4.8 Gravitationsverluste bei nichtimpulsförmigen Manövern ... 189
12.5 DIE HYPERBOLISCHE BEWEGUNG ... 190
12.5.1 Bahnparameter der hyperbolischen Bewegung ... 191
12.5.2 Der Kollisionskorridor ... 194
12.5.3 Der Umlenkwinkel ... 195
12.5.4 Anmerkungen zur hyperbolischen Bewegung ... 196
12.6 BEWEGUNG IM SONNENSYSTEM – ERSTE ABSCHÄTZUNGEN ... 200
12.6.1 Abflug von der Erde im Sonnensystem ... 200
12.7 „PARADOXA" IN DER RAUMFAHRT ... 203
12.7.1 Das Keplersche Paradoxon ... 203

12.7.2 Das von Pirquetsche Paradoxon *204*
12.7.3 Das Hohmannsche Paradoxon *205*
12.8 AUSWAHL VON EINFLUSSBEREICHEN 210
12.8.1 Die Attraktionssphäre *211*
12.8.2 Der Aktivitätsbereich *215*
12.8.3 Der Gravitationsbereich *218*
12.9 GRAVITATIONSMANÖVER 218
12.10 DIE RAKETENGLEICHUNG 225
12.10.1 Herleitung der Raketengleichung *225*
12.10.2 Anwendungen der Raketengleichung *228*
12.10.2.1 Die Raketenmotor – Strukturmasse 228
12.10.2.2 Die Treibstoffmasse bei gewünschtem Geschwindigkeitsbedarf 228
12.10.2.3 Das Mehrstufenprinzip 230
12.10.2.4 Aufstieg einer Rakete 230

13 KEPLERBEWEGUNG IN UNIVERSALER DARSTELLUNG 231

13.1 EPHEMERIDENRECHNUNG ALS ANFANGSWERTPROBLEM 231
13.2 REGULARISIERUNG MIT DER *SUNDMANN*SCHEN VARIABLEN 234
13.3 DIE STUMPFFSCHEN FUNKTIONEN 237
13.4 UNGESTÖRTE ZWEIKÖRPERBEWEGUNG IN UNIVERSALER DARSTELLUNG 239
13.5 GESTÖRTE ZWEIKÖRPERBEWEGUNG IN UNIVERSALER DARSTELLUNG 242

14 PARAMETERRÄUME 253

14.1 PARAMETERRAUM DER ELLIPTISCHEN KEPLERBEWEGUNG 253
14.2 PARAMETERRÄUME DER BAHNPARAMETER 254
14.3 HODOGRAPH 255
14.3.1 Der Hodograph eines Kegelschnitts *255*
14.3.2 Ebener Transfer von einer Kreisbahn in eine Kegelschnittbahn *258*
14.3.3 Ebener Transfer zwischen Kegelschnittbahnen *261*
14.4 LEVI-CIVITÁ PARAMETERRAUM 263
14.4.1 Herleitung aus der Identität von Vieta *264*
14.4.2 Mathematische Eigenschaften der Levi-Cività-Transformation *265*
14.4.3 Zweiter Schritt einer Regularisierung und Linearisierung *267*
14.4.4 Regularisierung der gestörten Zweikörperbewegung *270*
14.5 KS-PARAMETERRAUM 271
14.6 QUATERNIONEN RÄUME 273
14.7 PHASENRÄUME 274

15 PARTIAL- UND VARIATIONSAUSDRÜCKE 276

15.1 ANMERKUNG ZUR SCHREIBWEISE DER PARTIALAUSDRÜCKE 276
15.2 DIFFERENTIELLE BEZIEHUNGEN DER ANOMALIEN 279
15.2.1 Variationen von v nach e und E *279*
15.2.2 Variationen von E nach e und v *279*
15.2.3 Variationen von E nach e und M *280*
15.2.4 Variationen von M nach e und E *280*
15.2.5 Variation der mittleren Anomalie nach Anfangswerten *281*
15.2.6 Variationen von v nach e und M *281*
15.2.7 Variationen von M nach e und v *282*
15.2.8 Variationen der Exzentrizität e nach den Anomalien *283*
15.2.9 Variationen von (e cosv, e sinv) nach (e cosE, e cosE) *283*
15.2.10 Variationen von v und e nach (esinv), (ecosv) *286*
15.2.11 Variationen von (e cosE, e sinE) nach (e sinM) und (e cosM) *287*
15.2.12 Variationen von (e cosv, e sinv) nach (e sinM) und (e cosM) *290*
15.2.13 Variationen von (e sinM) und (e cosM) nach e, v und M *293*
15.2.14 Variationen des Argumentes der Breite *296*
15.3 VARIATIONEN DES BAHNRADIUS DER ELLIPTISCHEN BEWEGUNG 296
15.4 VARIATIONEN DER RADIALEN GESCHWINDIGKEIT 301
15.5 VARIATIONEN DES FLÄCHENPARAMETERS 305
15.6 WEITERE VARIATIONEN DER WAHREN ANOMALIE 308
15.7 VARIATIONEN DER TRANSVERSALEN GESCHWINDIGKEIT 312
15.8 VARIATIONEN NACH *LYDDANE* ELEMENTEN 317

15.8.1 Variationen der Positionselemente nach Lyddane Elementen ... 317
15.8.2 Variationen des Argumentes der Breite nach Lyddane Elementen ... 325
15.8.3 Variationen der wahren Länge nach Lyddane Elementen ... 325
15.9 Die Transitions-Matrix ... 327
15.10 Partialausdrücke in Hansen-Systemen ... 330
15.10.1 Transformation in ein Basissystem ... 330
15.10.2 Variationen in der Darstellung einer geradlinigen Bewegung ... 334
15.10.3 Variationen einer auf ein Hansen-System bezogenen Kepler-Bewegung ... 337
15.11 Anmerkungen zu den Anwendungen der Partialausdrücke ... 341

16 ÜBERBLICK BAHNBESTIMMUNG ... 342

16.1 Methoden der Erstbahnbestimmung ... 343
16.1.1 Prinzipien der Verfahren von Laplace und Gauß ... 343
16.1.2 Bahnbestimmung aus Winkelmessungen ... 347
16.1.3 Über die Bahnbestimmung nach Kustaanheimo ... 347
16.1.4 Bahnbestimmung aus Winkel- und Entfernungsmessungen ... 354
16.1.4.1 Alternative Berechnung des Kegelschnittparameters ... 354
16.1.4.2 Berechnung des Geschwindigkeitsvektors nach Herrick-Gibbs ... 355
16.1.5 Bahnbestimmung aus Winkel- und Entfernungsänderungsmessungen ... 356
16.1.5.1 Modifikation der Erstbahnbestimmung nach Laplace ... 357
16.1.5.2 Modifikation des Verfahrens mit Stumpffschen Funktionen ... 358
16.1.6 Bahnbestimmung aus Entfernungs- und Entfernungsänderungsmessungen ... 361
16.1.7 Satellite Laser Ranging ... 361
16.1.8 Ortsbestimmung mit Hilfe eines GNSS Systems ... 362
16.2 Bahn-Verbesserung ... 363
16.2.1 Methode der kleinsten Quadrate ... 363
16.2.2 Filtermethoden ... 365

17 BEWEGUNGSEINFLÜSSE ... 367

17.1 Die Keplerbeschleunigung ... 368
17.2 Das Gravitationspotential ... 369
17.2.1 Das Gravitationsfeld, Begriffe und grundlegende Formeln ... 369
17.2.2 Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld ... 374
17.2.3 Aufbereitung des Gravitationspotentials für eine numerische Integration ... 378
17.2.4 Das Gravitationspotential der Erde ... 379
17.2.5 Das Gravitationspotential des Erdmondes ... 381
17.2.6 Das Gravitationspotential des Mars ... 382
17.2.7 Das Gravitationspotential des Jupiter ... 382
17.2.8 Das Gravitationspotential des Saturn ... 382
17.2.9 Das Gravitationspotential des Uranus ... 382
17.2.10 Das Gravitationspotential des Neptun ... 382
17.3 Luftwiderstand ... 383
17.3.1 Der Luftwiderstand ... 384
17.3.2 Die säkulare Variation der großen Bahnhalbachse kreisnaher Bahnen ... 389
17.3.3 Lebensdauer ... 390
17.4 Anziehung durch dritte Körper ... 393
17.5 Strahlungsdruck der Sonne ... 394
17.6 Strahlungsdruck reflektiert von der Erde ... 398
17.7 Strahlungsdruck reflektiert vom Mond ... 398
17.8 Wärmeabstrahlung der Erde ... 399
17.9 Einfluss des Sonnenwindes ... 399
17.10 Relativistischer Effekt erster Ordnung ... 400
17.11 Gezeiten ... 400
17.12 Wechselwirkung des Mondes mit Abplattung der Erde ... 402
17.13 Yarkowski-Effekt ... 402
17.14 Poynting-Robertson-Effekt ... 402
17.15 Künstliche Schubkräfte ... 403
17.16 Lageregelungseinflüsse ... 403
17.17 Antennenabstrahlung ... 403
17.18 Wärmeabstrahlung eines Raumflugkörpers ... 404
17.19 Resonanzen und Kommensurabilitäten ... 404
17.20 Weitere physikalische Bewegungseinflüsse ... 405

18 ZUR INTEGRATION DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN 406

18.1 Zur Unterscheidung analytischer und numerischer Verfahren 406
18.2 Methode von Encke 410
18.3 Numerische Methoden (Cowell und andere) 412

19 ANALYTISCHE STÖRUNGSTHEORIE PERIODICHER BEWEGUNGEN 414

19.1 Die Mittelwertmethode 414
19.1.1 Das (mathematische) Störproblem 414
19.1.2 Quasiperiodische Funktionen 415
19.1.3 Die Elementtransformation 415
19.1.4 Fastidentische Transformationen 416
19.2 Anwendungen der Mittelwertmethode 416
19.2.1 Der Bewegungswinkel 416
19.3 Mittelung über die mittlere Anomalie 418
19.4 Mittlere und Gemittelte Elemente 420
19.4.1 Mittelung ohne gegebenes Bahnmodell 420
19.4.2 Mittlere Elemente bei gegebenem analytischem Bahnmodell 421
19.4.2.1 Verfahren von Eckstein 421
19.4.2.2 Verfahren von Walter 422
19.4.2.3 Verfahren von Gordon 423

20 EINIGE ERGEBNISSE ANALYTISCHER SATELLITENBAHNTHEORIEN 427

20.1 Zerlegung von Bahnelementen nach Einflussanteilen 427
20.2 Bewegungseinflüsse durch das Gravitationsfeld eines Zentralkörpers 431
20.2.1 Mittlere Keplerelemente 432
20.2.2 Langperiodische Einflussterme erster Ordnung der Keplerelemente 434
20.2.3 Kurzperiodische Einflussterme erster Ordnung der Keplerelemente 440
20.2.4 Weitere Bahnparameter 446
20.2.4.1 Exzentrische Anomalie E 447
20.2.4.2 Wahre Anomalie 450
20.2.4.3 Argument der Breite 452
20.2.4.4 Mittleres Argument der Breite M+ ω 454
20.2.4.5 Länge des Perizentrums ϖ 456
20.2.4.6 Die mittlere Länge L 459
20.2.4.7 Exzentrische Länge L_E 460
20.2.4.8 Wahre Länge l 463
20.2.4.9 Die Größen e sin M, e cos M 465
20.2.4.10 Die Größen e sin ω , e cos ω 467
20.2.4.11 Parameter der elliptischen Bewegung p 469
20.2.4.12 Flächenparameter G 470
20.2.4.13 Bahnradius r 472
20.2.4.14 Radiale Geschwindigkeitskomponente V_R 473
20.2.4.15 Transversale Geschwindigkeitskomponente V_T 474
20.2.4.16 Geschwindigkeit in der Bahn V 475
20.2.4.17 Positionselemente p_S und p_C 476
20.3 Bewegungseinflüsse durch den Strahlungsdruck 479
20.3.1 Beispiel einer konstanten radialen Schubbeschleunigung 479
20.3.2 Beispiel einer interplanetaren Sonnensegelbahn mit transversalem und normalem Schub 495

SCHRIFTTUM ZU BAND III 517

LISTE DER VERWENDETEN SYMBOLE 537

Lateinische Symbole 537
Griechische Symbole 550
Mathematische Symbole 561
Astronomische Symbole 563

ABBILDUNGSVERZEICHNIS 566

TABELLENVERZEICHNIS 574

INDEX 575

INHALT VON BAND I

DER BEWEGUNGSBEGRIFF

BEGRIFFLICHE DIMENSIONIERUNG DER BEWEGUNG

1. Die Antike Bewegungslehre

2. Die Klassische Bewegungslehre

3. Ansätze einer Nachklassischen Bewegungslehre

Schrifttum zu Band I

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND II

BEWEGUNG IN RAUM UND ZEIT

4. Bezugssysteme zur Beschreibung von Bewegungen

5. Die mathematische Anpassung beliebiger Bewegungen

6. Bewegungen in geradlinigen Systemen

7. Bewegungen in krummlinigen Systemen

8. Einige spezielle Koordinatensysteme

9. Bewegungen in Zeit

Schrifttum zu Band II

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND IV-A

BEWEGUNGSANALYSE

MUTTERKÖRPER BEZOGENE BEWEGUNGEN

21. Keplerbewegung auf der Grundlage von Hansen Systemen

22. Anomalistische Bewegung

23. Drakonitische Bewegung

24. Tropische Bewegung

25. Siderische Bewegung

26. Meridianbezogene Bewegung

27. Topozentrische Bewegung

Schrifttum zu Band IV-A

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND IV-B

SYNODISCHE BEWEGUNGEN

28. Sonnenbezogene synodische Bewegung

29. Synodische Bewegung in Bezug auf Erdmond und Mondorbiter

30. Synodische Bewegung eines Satelliten in Bezug auf einen Planeten oder ein anderes interplanetares Objekt

31. Synodische Bewegung eines Erdsatelliten in Bezug auf einen anderen Satelliten

Schrifttum zu Band IV

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND V

DIE VERKNÜPFUNG VON BEWEGUNG UND BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

BEWEGUNG IN SPHÄRISCHER BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

32. Sphärische Beobachtungsgeometrie

33. Trigonometrie des sphärischen Breitenkreises

34. Überdeckung eines sphärischen Breitenkreises

35. Lokale Überdeckung

36 Sichtbarkeitsuntersuchungen

BEWEGUNG ÜBER REFERENZELLIPSOID

37. Allgemeine Beziehungen auf einem Rotationsellipsoid

38. Satellitenbewegung über Rotationsellipsoid

ANHANG

A. Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

B. Näherungsausdrücke

C. Tschebyscheff-Approximationen

D. Integraltafel

E. Astronomische Konstante

F. Das julianische Datum

G. Tabellen reproduzierbarer Bahnen

H. Hohmann Übergänge im Interplanetaren Raum

I. Parameter der Attraktionssphären und kollinearen Librationspunkte im Sonnensystem

J. Sichtbarkeitsgrenzen geostationärer Satelliten für einige Bodenstationen

K. Parameter der Luftdichte nach MSIS

Schrifttum zu Band V

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

Bewegung der natürlichen und künstlichen Himmelskörper

Die genaue Beobachtung der physikalischen Bewegung der Planeten lässt darauf schließen, von welcher Art unter den unendlich vielen möglichen Bewegungsarten die Bewegung der Planeten ist. Die Auswertung derartiger Beobachtungen führte *J. Kepler* zur Entdeckung der nach ihm benannten Gesetze. Diese Gesetze beschreiben eine Bewegung, welche als Keplerbewegung bezeichnet wird. In früheren Zeiten wurde der Begriff *Keplerbewegung* allerdings auf den Spezialfall der elliptischen Bewegung von Himmelskörpern eingeschränkt. Abweichungen von dieser sehr speziellen Bewegung wurden als *gestörte* Bewegung bezeichnet. Dadurch wurde der Eindruck erweckt, die elliptische Bewegung sei der „Normalfall", die gestörte Bewegung eine im Grunde genommen lästige Abweichung. Diese Ansicht mag im Fall der Bewegung der großen Planeten noch hingenommen werden, ist aber im Fall der Bewegung der kleinen Planeten, des Erdmondes und vor allem auch von künstlichen Himmelskörpern nicht mehr gerechtfertigt. Es zeigt sich, dass die Keplerschen Gesetze formal alle Arten von Bewegungen der genannten Himmelskörper beschreiben, so dass sich die Bewegungsgleichungen in vollständiger Allgemeinheit direkt aus den Keplerschen Gesetzen herleiten lassen. Es ist somit möglich, den enggefassten Begriff der Keplerbewegung zu erweitern auf die Beschreibung jedweder Art der Bewegung von Himmelskörpern, was im Folgenden unter dem Begriff der *allgemeinen Keplerbewegung* geschehen soll. In einem weiteren Schritt wurde in Kapitel 5 (Band II) gezeigt, dass jede beliebige Ausgangskurve (mit Ausnahme des Kreises) durch Variation ihrer Parameter an eine beliebige Bewegung angepasst werden kann. Dadurch ist es möglich, spezielle Bewegungseinflüsse (häufig als „Störungen" bezeichnet) separat zu untersuchen, eventuell auch wechselseitige Einflüsse verschiedener Bewegungseinflüsse. Hierdurch eröffnen sich detaillierte Untersuchungen zur Satellitenbahnanalyse, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit allerdings nur angerissen werden können.

10 Die spezielle *Kepler*bewegung

Die *Keplerbewegung* ist eine mögliche Basis für alle Untersuchungen der Planeten-, Satelliten-, Orbiter- und Mehrkörperbewegungen. Die Bahnbewegung von Planeten, Satelliten, Orbitern, Sonden, Mehrkörpersystemen kann mit der zugehörigen Bewegungsgleichung durch Anpassung aufbauend auf der *Kepler*bewegung vollständig beschrieben werden. Die geometrisch anschaulichen *Kepler*elemente werden üblicherweise zur Charakterisierung einer Bahn verwendet. Sie charakterisieren eine Bahn so wie diese durch die *Kepler*sche Bewegungsgleichung $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \mathbf{r} / r^3$ definiert wird. In diesem Fall können die Bahnparameter („Elemente") als Konstante aufgefasst werden. Wir wollen in diesem Fall die Bewegung als „spezielle *Kepler*bewegung" bezeichnen. Dies ist eine mathematische Charakterisierung, denn in der Natur kommt

eine solche Bewegung nicht vor. Werden alle bekannten Bewegungseinflüsse berücksichtigt[1], so müssen die *Kepler*parameter[2] als zeitabhängige Größen akzeptiert werden. Dann ist es zwar noch möglich eine Bewegung durch die *Kepler*schen Gesetze im Sinn einer Anpassung[3] zu beschreiben In diesem Fall jedoch ändern sich die Formen des Kegelschnitts als „Anpassungskurve". Es handelt sich dann um eine Oskulation der wahren Bewegung durch die Anpassungskurve mit ihren sich mit der Bewegung ständig ändernden Parametern, die vom Bahnwinkel abhängig sind, bzw. indirekt von der Zeit. Im folgenden Kapitel werden einige Aspekte der speziellen *Kepler*bewegung im Rahmen der Zweikörperbewegung und der exakten Lösungen des Dreikörperproblems als Ergänzung zu den in Abschnitt 2.6 (Band I) gegebenen Herleitungen zusammenfassend dargestellt.

12.1 Das inverse *Kepler*sche Problem

12.1.1 Anmerkungen zur *Hermann*schen Lösung

In der Literatur findet sich gelegentlich der Begriff „Inverses *Newton*sches Problem" für die Berechnung der *Kepler*schen Gesetze aus dem *Newton*schen Gravitationsgesetz[4]. Diese Begriffsbildung ist aber nur dann sinnvoll, wenn die beteiligten Massen als konstant angenommen werden können, wie es in der klassischen Himmelsmechanik der Fall war. Wie in Abschnitt 2.3.2 (Band I) bei der Herleitung des *Newton*schen Attraktionsgesetzes gezeigt wurde, ist die *Kepler*sche Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{r}_0 \tag{10.1}$$

die Grundlage zur Berechnung der Bewegung der Himmelskörper[5]. Daher sollte die Herleitung der *Kepler*schen Gesetzte aus dieser Bewegungsgleichung in konsequenter Weise als das „inverse *Kepler*sche Problem" bezeichnet werden.

Die Lösung nach dem *Hermann*schen Ansatz[6] ergibt nach Integration den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ und den Ortsvektor $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0$, somit den Bahnnormalenvektor[7]

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0 \qquad , \; G := |\mathbf{c}| \left[\frac{\mathrm{km}^2}{\mathrm{s}}\right] . \tag{10.2}$$

Dies ist der Flächensatz. Im vorliegenden Fall der speziellen *Kepler*bewegung, die eine Zentralbewegung ist, in welcher der Vektor **c** notwendig konstant ist, wird diese Beziehung als das

---

[1] man spricht dann manchmal davon, dass die *Kepler*bewegung durch diese zusätzlichen Beschleunigungen „gestört" wird. Der Begriff „Störung" hat aber nur mathematisch einen Sinn, wenn eine „Störungsrechnung" durchgeführt werden kann. Ein physikalischer Störungsbegriff macht keinen Sinn.

[2] von „Elementen" sollte man dann nicht mehr sprechen, da der Begriff Elemente Konstantheit impliziert

[3] Ein solcher Anpassungsvorgang wird in Kapitel 5 (Band II) allgemeingültig beschrieben

[4] Vgl. in Abschnitt 2.3 (Band I)

[5] Vgl. auch die Herleitung aus den *Kepler*schen Gesetzen nach *J. Hermann* in Abschnitt 2.5.2 (Band I)

[6] siehe in Abschnitt 2.5.2

[7] *Kepler*scher Vektor, *Laplace*scher Vektor, aus Formel (2.68) (Band I)

zweite *Kepler*sche Gesetz bezeichnet. Der Perizentrumsvektor folgt entsprechend Formel (2.70) aus

$$\mathbf{d} = e\,\mu\,\mathbf{d}_0 = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \quad , \quad e\,\mu := |\mathbf{d}| \left[\frac{\mathrm{km}^3}{\mathrm{s}} \right]. \tag{10.3}$$

Multipliziert mit dem Radiusvektor ergibt sich die Polargleichung eines Kegelschnitts, also das erste *Kepler*sche Gesetz,

$$r = \frac{p}{1 + e\,\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}_0} \quad , \quad p = \frac{G^2}{\mu} \quad . \tag{10.4}$$

Mit dem Parametervektor der Zweikörperbewegung aus

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{f} \tag{10.5}$$

kann die Darstellung der Bewegung im Perizentrum-bezogenen Koordinatensystem („Apsidensystem“) erfolgen. Dazu werden die Richtungsvektoren

$$\mathbf{d}_0 = \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = \frac{\mathbf{d}}{e\,\mu} \;,\; \mathbf{f}_0 = \frac{\mathbf{f}}{|\mathbf{f}|} \;,\; \mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|} = \frac{\mathbf{c}}{G} = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{\mu p}} \qquad \langle e \neq 0, \;\; G \neq 0 \tag{10.6}$$

eingeführt. Der Parametervektor hat wegen Beziehung (10.5) den Betrag

$$|\mathbf{f}| = e\,\mu\,G \left[\frac{\mathrm{km}^5}{\mathrm{s}^3} \right] \quad . \tag{10.7}$$

Der auf das Perizentrum bezogene Bahnwinkel υ wird berechnet aus

$$\cos\upsilon = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{d}_0 \quad , \quad \sin\upsilon = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{f}_0 \quad . \tag{10.8}$$

Er ist unter dem Begriff wahre Anomalie bekannt. Damit lautet der Ortsvektor in diesem Apsidensystem

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{d}_0 \cos\upsilon + \mathbf{f}_0 \sin\upsilon\right) = r\,\mathbf{r}_0 \quad . \tag{10.9}$$

Die radiale Geschwindigkeit $V_R = \dot{r}$ ist aus der Beziehung $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ bekannt. Da im Rahmen der speziellen *Kepler*bewegung die Richtungsvektoren des Apsidensystems konstant sind, lautet in diesem Fall der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\left(\mathbf{d}_0 \cos\upsilon + \mathbf{f}_0 \sin\upsilon\right) + r\,\dot{\upsilon}\left(-\mathbf{d}_0 \sin\upsilon + \mathbf{f}_0 \cos\upsilon\right) \;= \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_0 . \tag{10.10}$$

Hier ist $\mathbf{q}_0$ wegen $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = 0$ der transversale Richtungsvektor der Bewegung. Er liegt wegen $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{c}_0 = 0$ in der Bahnebene und ergänzt somit das mitbewegte Dreibein $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$. Dieses ist ein orthonormales System und definiert in der Terminologie des vorliegenden Berichtes den *Leibniz*-Raum. Es ist somit

$$\mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0 \quad . \tag{10.11}$$

Dies in den Flächensatz in der vektoriellen Form (10.2) eingesetzt führt auf das zweite *Kepler*sche Gesetz in der skalaren Form

$$r^2\,\dot{\upsilon} = G \quad . \tag{10.12}$$

Dieses ist in dieser Form mit der Variation der wahren Anomalie ausschließlich in der speziellen *Kepler*bewegung (mit *G*=const.) gültig.

12.1.2 Anmerkungen zur allgemeinen *Kepler*bewegung

Die allgemeine *Kepler*bewegung wird so definiert, dass in ihr die *Kepler*schen Gesetze formal gelten, wobei jedoch alle Parameter als variabel zugelassen werden. Die spezielle *Kepler*bewegung in der hier gegebenen Darstellung ist grundsätzlich nicht zu einer Verallgemeinerung zur allgemeinen *Kepler*bewegung geeignet. Zum einen ist der Bezug auf das Apsidensystem nur eingeschränkt nützlich, da der Ausdruck (10.3) zeigt, dass im Fall einer Kreisbewegung der *Hermann*sche Vektor der Nullvektor ist. Damit ist dann kein Perizentrum definiert, für kleine Exzentrizitäten ist das numerische Rechnen in diesem Fall fehleranfällig und ungenau. Deshalb hatte schon *J. L. Lagrange* die Verwendung von äquinoktialen Parametern vorgeschlagen[1]. Zum zweiten ist die skalare Form des zweiten *Kepler*schen Gesetzes (10.12) nicht erweiterbar. Man kann nicht von einer speziellen Lösung auf eine allgemeine schließen, sondern nur umgekehrt von einer allgemeinen auf eine spezielle. Deshalb ist es sinnvoll, unter Anwendung des im Kapitel 4 hergeleiteten Satzes H10 die Bewegung grundsätzlich auf ein *Hansen*-System zu beziehen[2], das wie dieser Satz aussagt, mit jeder Bewegung notwendig und hinreichend verknüpft ist. Dazu wird der transversale Richtungsvektor aus dem Tangentialvektor in der Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\mathbf{r}}_0 \tag{10.13}$$

mit dem Betrag der Variation des radialen Richtungsvektors

$$\dot{\zeta} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \tag{10.14}$$

berechnet:

$$\mathbf{q}_0 = \frac{1}{r\,\dot{\zeta}}\left(\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\mathbf{r}_0\right) \quad . \tag{10.15}$$

In diesem Ausdruck muss untersucht werden, ob eine Singularität vorliegen kann. Im Rahmen der Keplerbewegung wurde versucht, eine Singularität für $r \to 0$ durch eine Regularisierung zu umgehen. Das kann notwendig werden, wenn der Bezugspunkt, auf den eine Bewegung bezogen wird, ein Gravitationszentrum ist. Im Rahmen einer allgemeinen Untersuchung von Bewegungen kann jedoch jeder andere Punkt als Bezugspunkt gewählt werden, wozu die Untersuchung von geradlinigen Bewegungen in Kapitel 5 Anlass gegeben hat[3]. In einem solchen Fall wird der Bezugspunkt[4] zur Darstellung der Bewegung so gewählt, dass er stets außerhalb der Bahnkurve liegt. Dann kann auch angenommen werden, dass stets eine transversale Bewegungskomponente existiert[5], so dass insgesamt $r\,\dot{\zeta} \neq 0$ vorausgesetzt werden kann. Das Zeitintegral

$$\zeta = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\zeta}\,dt \tag{10.16}$$

---

[1] Siehe in Abschnitt 11.2

[2] Abschnitt 4.3.16 (Band II)

[3] Band II

[4] Man könnte dies als einen Archimedischen Punkt bezeichnen

[5] Wozu eventuell der Bezugspunkt während eines Bewegungsvorganges gewechselt werden muss, was auf eine lineare Transformation des Bezugssystems hinausläuft

liefert nach Satz H9 den auf ein *Hansen* System bezogenen Bahnwinkel ζ. Dieser kann als unabhängige Variable zur Beschreibung der Bewegung gewählt werden. Dann lautet der Flächensatz mit den Beziehungen (10.2), (10.13) und (10.14)

$$r^2 \dot{\zeta} = G \qquad \langle G = G(\zeta) \qquad . \tag{10.17}$$

In dieser allgemein verwendeten Version des Gesetzes kann eine Verallgemeinerung im Sinne einer allgemeinen *Kepler*bewegung oder einer beliebigen Bewegung jederzeit erfolgen. Dazu muss der Flächenparameter G als Funktion der Zeit bzw. des Bahnwinkels ζ akzeptiert werden.

Ein *Hansen* System sei durch die Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{c}_0$ gegeben. Für einen Anfangswert ζ_0 zu einem Zeitpunkt t_0 kann dieses System für die gegebene Bewegung festgelegt werden mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{r}_0(t_0)\cos\zeta_0 - \mathbf{q}_0(t_0)\sin\zeta_0 \\ \mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{r}_0(t_0)\sin\zeta_0 + \mathbf{q}_0(t_0)\cos\zeta_0 \quad . \end{aligned} \tag{10.18}$$

Im Fall der speziellen K*epler*bewegung liegen diese Vektoren für alle Zeiten fest. Im Fall der allgemeinen *Kepler*bewegung oder einer beliebigen Bewegung unterliegen diese Vektoren Beschleunigungen senkrecht zur Bahnebene (vgl. die *Frenet*schen Formeln des *Hansen* Systems in Abschnitt 8.12 in Band II), die aber auf Grund der Eigenschaften von *Hansen* Systemen in der Darstellung eines Zustandsvektors nicht erscheinen. In jedem Fall (spezielle, allgemeine Keplerbewegung oder beliebige Bewegung) haben die Basisvektoren eines *Leibniz* Systems in Bezug auf ein *Hansen* System die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_0(\zeta) = \mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{q}_0(\zeta) = -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(I)} \quad . \end{aligned} \tag{10.19}$$

Damit lautet der Ortsvektor mit kartesischen Koordinaten im *Hansen* System

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0 = r\left(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta\right) = y_1^{(I)}\mathbf{q}_1^{(I)} + y_2^{(I)}\mathbf{q}_2^{(I)} \tag{10.20}$$

und der Geschwindigkeitsvektor bei Bezug auf das *Hansen* System allgemeingültig

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + r\left(-\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta\right) = \frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + r\,\mathbf{q}_0 = \frac{dy_1^{(I)}}{d\zeta}\mathbf{q}_1^{(I)} + \frac{dy_2^{(I)}}{d\zeta}\mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{10.21}$$

In der Praxis wird man so vorgehen, dass der (*Hansen*sche) Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable verwendet wird und der Bezug zur Zeit[1] entsprechend dem skalaren Flächensatz (10.17) erhalten wird durch das Integral

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G}\, d\zeta \quad . \tag{10.22}$$

12.1.3 Die *Kepler*sche Umlaufzeit

In der *Hermann*schen Lösung des inversen *Kepler*problems wird das dritte *Kepler*sche Gesetz im Rahmen der speziellen *Kepler*bewegung (d.h. bei konstanten Parametern („Elementen“) der

[1] Siehe hierzu auch die speziellen Überlegungen zu einer Transformation der Zeit auf andere Parameter in Abschnitt 11.13

Zweikörperbewegung) durch Berechnung der *Kepler*schen Umlaufzeit aus dem Zeitintegral (10.22) hergeleitet:

$$P_K := \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{G} d\zeta \quad . \tag{10.23}$$

Wegen der Konstanz der Parameter ist in diesem Fall der Bahnwinkel ζ gleich der wahren Anomalie υ, die über die *Kepler*schen Formeln[1] mit der exzentrischen Anomalie E gekoppelt ist:

$$\begin{aligned} r\,\cos\upsilon &= a\left(\cos E - e\right) \qquad , \; r\sin\upsilon = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \\ a\cos E &= r\cos\upsilon + a\,e \qquad , \; a\sin E = \frac{r\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}} \quad . \end{aligned} \tag{10.24}$$

In Abhängigkeit von der exzentrischen Anomalie ist der Bahnradius bekannt aus

$$r = a\left(1 - e\cos E\right) \tag{10.25}$$

und es gilt die differentielle Beziehung[2]

$$r\,d\upsilon = a\sqrt{1-e^2}\,dE \quad . \tag{10.26}$$

In der Relation (10.4) $G^2 = \mu p$ ist p der Parameter eines Kegelschnitts, der im Fall der hier allein relevanten elliptischen Bewegung $p = a\left(1-e^2\right)$ lautet. Damit kann das Integral im Rahmen der hier gegebenen Einschränkungen berechnet werden:

$$P_K = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{G}\int_0^{2\pi}\left(1 - e\cos E\right)dE = 2\pi\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\mu}} \quad . \tag{10.27}$$

Entsprechend kann mit Hilfe der mittleren (*Kepler*schen) Bewegung

$$n = \sqrt{\mu / a^3} \tag{10.28}$$

aus dem Zeitintegral (10.22) die *Kepler*gleichung

$$M = n\left(t - t_0\right) = E - e\sin E \tag{10.29}$$

erhalten werden. Die Größe M wird üblicherweise als mittlere Anomalie bezeichnet, n auch als *Kepler*sche mittlere Bewegung.

Aus den Herleitungen ist ersichtlich, dass sowohl das dritte *Kepler*sche Gesetz (10.27), wie auch die *Kepler* Gleichung ausschließlich in der speziellen elliptischen *Kepler*bewegung sinnvoll gebraucht werden können, auch wenn sie im Rahmen einener allgemein *Kepler*bewegung definitorisch zugewiesen werden können.

Für eine Verallgemeinerung im Sinne einer allgemeinen *Kepler*bewegung muss unmittelbar auf das Zeitintegral (10.22) zurückgegangen werden. Die Umlaufzeit kann dann nur in Bezug auf

[1] Siehe in Abschnitt 2.2.3 (Band I)

[2] Siehe in Abschnitt 2.5.2 (Band I)

einen verwendeten Bahnwinkel sinnvoll definiert werden. An Stelle des dritten Gesetzes empfiehlt es sich, die Relation (10.4)

$$G = \sqrt{\mu p} \tag{10.30}$$

zu verwenden, die eine Verknüpfung des ersten Gesetzes (mit Parameter *p*) und des zweiten Gesetzes (mit Parameter *G*) über den dynamischen Faktor μ erlaubt.

Auf die Verwendung einer Anomalie (wahre, exzentrische, mittlere) sollte im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*bewegung oder noch allgemeiner einer beliebigen Bewegung grundsätzlich zugunsten des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ verzichtet werden. Denn nur dieser Winkel kann in jeder Bewegung als unabhängige Variable verwendet werden[1].

12.1.4 Genäherte Lösung des Zeitintegrals

Das iterative Verfahren zur Lösung der *Kepler*gleichung kann mit der Anfangsnäherung $E^{(0)} = M$ gestartet werden, was zu sicherer aber insbesondere bei größeren Exzentrizitäten nicht notwendig rascher Konvergenz führt. Die in der Literatur gelegentlich zu findenden verbesserten Ausgangsnäherungen sind meist nicht allgemeingültig.

BEISPIEL einer Ausgangsnäherung[2]:

$$E^{(0)} \;=\; M + e\,\frac{\sin M}{1-\sin(M+e)+\sin M} \quad . \tag{10.31}$$

Der Iterationsprozess lautet:

$$E^{(n+1)} \;:=\; E^{(n)} - \frac{E^{(n)} - e\sin E^{(n)} - M}{1 - e\cos E^{(n)}} \qquad (n = 1, 2, 3, ...) \quad \blacksquare \tag{10.32}$$

12.1.5 Die Gaußsche Gravitationskonstante

Der Zahlenwert der universellen (*Newton*schen) Gravitationskonstante ist nur mit wenigen geltenden Ziffern bekannt[3]

$$G_N \;=\; 6.67259(85)\times 10^{-11} \quad \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \quad . \tag{10.33}$$

In der Astronomie ist es üblich, die *Gaußsche Gravitationskonstante*

$$k^2 \;:=\; G_N$$

zu verwenden, welche als Dimensionen die astronomischen Definitionen astronomische Einheit (AE) als Längeneinheit, die Sonnenmasse ($m_\odot$) als Masseneinheit und den mittleren Sonnentag (*d*) als Zeiteinheit hat:

---

[1] Dies ist die zentrale Aussage des vorliegenden Berichtes. Siehe hierzu das Kapitel 4, insbesondere die Abschnitte 4.3.10, 4.3.16, 4.4.3 und folgende in Band II

[2] SMITH [1979]: *Cel. Mech.* ***19***, siehe auch: MIKKOLA, S. [1987]: 'A Cubic Approximation for Kepler's Equation', *Cel. Mech.* ***40***, 329–334, mit weiteren Zitaten sowie in: BATTIN [1987], pp. 191–236

[3] Etwa nach SEIDELMANN, P. K. [1992], p. 693

$$k \;=\; 0.017202098950000000 \;\sqrt{\mathrm{AE}^3\, m_\odot^{-1}\, d^{-2}} \quad . \tag{10.34}$$

k wird als *definierende Konstante* verwendet. Das bedeutet, dass der von *C. F. Gauß* berechnete Zahlenwert von *k* als unveränderliche Größe ein für allemal beibehalten wird. Über das dritte *Kepler*sche Gesetz kann dann bei Kenntnis der Sonnen- und Erdmasse sowie der Länge des siderischen Jahres die astronomische Einheitslänge, nämlich die astronomische Einheit berechnet werden. Die Bedeutung des dritten *Kepler*schen Gesetzes reduziert sich dann auf die „einer die Längeneinheit definierenden Gleichung“[1]. Die astronomische Einheit hat dann den Betrag

$$a_E = 1.4959787066 \times 10^8 \text{ km} \tag{10.35}$$

mit der Lichtlaufzeit

$$\tau_A = 499.00478370\, s \tag{10.36}$$

entsprechend der Vakuumlichtgeschwindigkeit (definierende Größe)[2]

$$c = 299792.458 \text{ km/s} \quad . \tag{10.37}$$

Die Berechnung der *Gauß*schen Gravitationskonstante *k* ist ein Beispiel zur Anwendung des Zweikörperproblems in der klassischen Himmelsmechanik. Hierzu wird das Erde-Mond-System als die eine Masse $m_\oplus + m_\leftmoon$, die Sonne als die zweite Masse gewählt. Sei P_{sid} die siderische Umlaufzeit des Baryzentrums des Erde-Mond-Systems um die Sonne, a_B die mittlere Distanz dieses Systems vom Sonnenmittelpunkt, liefert das dritte *Kepler*sche Gesetz (10.27) der elliptischen Bewegung im Rahmen der speziellen *Kepler*bewegung mit $G_N = k^2$

$$\frac{a_B^3}{P_{sid}^2} \;=\; \frac{k^2}{4\pi}\left[m_\odot + \left(m_\oplus + m_\leftmoon\right)\right] \quad . \tag{10.38}$$

Im Erde-Mond-System sei $P_{\leftmoon,sid}$ die siderische Umlaufzeit des Mondes um die Erde, $a_\leftmoon$ die mittlere Distanz des Mondes vom Erdmittelpunkt. Das dritte *Kepler*sche Gesetz liefert

$$\frac{a_\leftmoon^3}{P_{\leftmoon,sid}^2} \;=\; \frac{k^2}{4\pi}\left[m_\oplus + m_\leftmoon\right] \quad . \tag{10.39}$$

Hier wird üblicherweise

$$a_B \;=\; 1\,\mathrm{AE} \quad , \quad \mathrm{m}_\odot \;=\; 1$$

normiert und als Einheit der mittlere Sonnentag gewählt. Elimination der Masse $m_\oplus + m_\leftmoon$ aus den beiden letzten Gleichungen ergibt die *Gauß*sche Gravitationskonstante

$$k \;=\; \frac{2\pi}{P_{sid}}\sqrt{1-\left(\frac{P_{sid}}{P_{\leftmoon,\,sid}}\right)^2 a_\leftmoon^3} \;\approx\; \frac{2\pi}{P_{sid}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{P_{sid}}{P_{\leftmoon,\,sid}}\right)^2 a_\leftmoon^3 + \cdots\right] \tag{10.40}$$

Mit den Werten[3]:

---

[1] BROUWER-CLEMENCE [1961], p. 59. Wie wir gesehen haben (vgl. Abschnitt 2.2.4, Band I), wird diese Deutung der zentralen Bedeutung des 3. Keplerschen Gesetzes in verallgemeinerter Form allerdings nicht gerecht.

[2] Alle Werte aus: SEIDELMANN, P. K. [1992], p. 696

[3] aus AA 1992

$$P_{sid} = 365^d.256363 \quad , \quad P_{\leftmoon,sid} = 27^d.321662$$

$$a_{\leftmoon} = 384\,400\,\text{km} = \frac{1}{389.17240}\,\text{AE}$$

wird

$$k = 0.0172020981\,\text{AE}^3\, m_\odot^{-1}\, d^{-2} \quad . \tag{10.41}$$

Dieser Wert stimmt mit dem von *Gauß* berechnetem Wert (10.34) nicht überein. Um dessen Originalwert *k* jedoch beizubehalten, wird die große Bahnhalbachse des Erde-Mond-Systems neu mit gegebenem *k* berechnet aus der Beziehung

$$a_B = \sqrt[3]{P_{sid}^2 \left(\frac{k^2}{4\pi^2} + \frac{a_{\leftmoon}^3}{P_{\leftmoon,sid}^2} \right)} \quad . \tag{10.42}$$

Mit dem *Gauß*schen Wert (10.34) errechnet sich für die mittlere Entfernung des Baryzentrums des Erde-Mond-Systems vom Sonnenmittelpunkt der Wert

$$a_B = 1.000000032\ \text{AE} \quad . \tag{10.43}$$

12.2 Das Zweikörperproblem

12.2.1 Relative Zweikörperbewegung

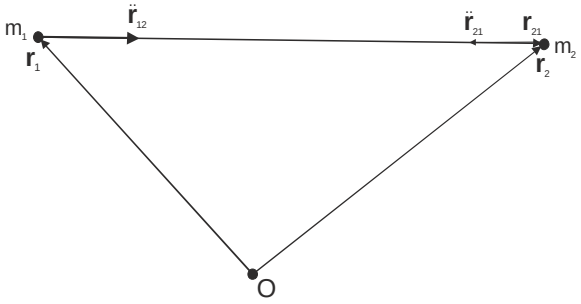


Bild 10-1: Zweikörperbewegung

Es seien zwei Körper der Massen m_1 und m_2 gegeben, die von einem beliebigen Ursprung *O* aus die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ haben (siehe Bild 10-1). Der Verbindungsvektor von m_1 nach m_2 sei

$$\mathbf{r}_{21} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad , \quad \mathbf{r}_{12} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_{21} \quad . \tag{10.44}$$

Auf m_1 wirkt von m_2 nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz bei Vernachlässigung einer Massenänderung (!) die Kraft

$$\mathbf{F}_1 = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G_N \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12} = G_N \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21} \quad , \tag{10.45}$$

auf m_2 von m_1 die Kraft

$$\mathbf{F}_2 \;=\; m_2\,\ddot{\mathbf{r}}_2 \;=\; -G_N\,\frac{m_1\,m_2}{\left|\mathbf{r}_{21}\right|^3}\,\mathbf{r}_{21} \quad . \tag{10.46}$$

Die *relative* Bewegung von m_2 bezogen auf m_1 wird beschrieben durch

$$\ddot{\mathbf{r}}_{21} \;=\; \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 \;=\; -G_N\,\frac{m_1}{\left|\mathbf{r}_{21}\right|^3}\,\mathbf{r}_{21} - G_N\,\frac{m_2}{\left|\mathbf{r}_{21}\right|^3}\,\mathbf{r}_{21} \tag{10.47}$$

bzw.

$$\ddot{\mathbf{r}}_{21} \;=\; -G_N\,\frac{m_1+m_2}{\left|\mathbf{r}_{21}\right|^3}\,\mathbf{r}_{21} \tag{10.48}$$

Sei etwa m_1 gleich der Masse $m_\odot$ der Sonne, so zeigt der Ausdruck (10.47), dass die Zweikörperbewegung eine echte Erweiterung der speziellen Keplerbewegung (10.1) mit

$$\mu \;=\; \mu_\odot \;=\; G_N\,m_\odot$$

ist, da der Anteil

$$-G_N\,\frac{m_2}{\left|\mathbf{r}_{21}\right|^3}\,\mathbf{r}_{21}$$

noch zu ihrer Beschreibung hinzugenommen werden muss. Nur wenn $m_2 \to 0$ wird die Zweikörperbewegung auf die spezielle *Kepler*bewegung zurückgeführt, die deshalb manchmal auch als *Einkörperbewegung* bezeichnet wird. Dieser Begriff ist irreführend, da die spezielle *Kepler*bewegung, welche die Bewegung der Planeten um die Sonne beschreibt, alles andere als eine geradlinige Bewegung ist. Ein Körper allein, auf den also kein anderer und somit keine (Attraktions-) Kraft einwirken kann, bewegt sich aber nach dem 1. *Newton*schen Axiom gleichförmig geradlinig. In der üblichen Sprechweise der Himmelsmechanik sollte (wenn überhaupt noch ein eigener Begriff nötig sein sollte) an Stelle von Einkörperproblem richtiger von *eingeschränktem Zweikörperproblem* gesprochen werden.

Die Sonnenmasse dominiert im Sonnensystem derart, dass in erster Näherung alle Planetenmassen ihr gegenüber mehr oder weniger vernachlässigbar sind, so dass die heliozentrische Gravitationskonstante $\mu_\odot$ im dritten *Kepler*schen Gesetz als Konstante für alle Planetenbewegungen angesehen werden konnte. Ob die *Kepler*schen Gesetze sonst gar nicht hätten gefunden werden können, ist vor dem Hintergrund der mathematischen Anpassung beliebiger Bewegungen reine Spekulation. Gleichung (10.47) auf Seite 10 zeigt, dass schon im Zweikörperproblem die zentrische Gravitationskonstante von beiden Massen abhängig ist

$$\mu \;:=\; G_N\left(m_1+m_2\right) \quad , \tag{10.49}$$

sie somit eine nicht einmal auf das Sonnensystem beschränkte Konstante sein kann. Darüber hinaus ist auch keine Masse eines Himmelskörpers konstant. Die Sonne strahlt erhebliche Massen ab, die Planeten gewinnen Masse durch Auftreffen von Strahlung, Meteoren usw. Diese Massenänderungen sind freilich verschwindend gering im Vergleich zu der Gesamtmasse des betreffenden Himmelskörpers. Es ist daher üblich, ohne erkennbaren quantitativen Fehler bei der Berechnung von Planeten-, Sonden- und Satellitenbahnen die Masse des betreffenden Zentralkörpers und damit die zentrische Gravitationskonstante auch als konstant anzusetzen. Anders ist es bei Massenänderungen, wie bei Raketen und anderen aktiven Raumflugkörpern. Die Massen müssen also in qualitativer Hinsicht prinzipiell als zeitvariabel aufgefasst werden.

Die Zweikörperbewegung, die nur über das Gravitationsgesetz verstanden werden kann, stellt somit eine Erweiterung der speziellen *Kepler*bewegung dar, ist aber ihrerseits nur ein einfacher (wohl der einfachste) Spezialfall der allgemeinen *Kepler*bewegung, da der zweite Teil der rechten Seite in Gleichung (10.47) auf S. 10 als Bestandteil des zusätzlichen Beschleunigungsvektors in Gleichung (10.1) aufgefasst werden kann.

10.1.1.1 Der Schwerpunktsatz

Die Summe der Kräftebeziehungen (10.45) und (10.46) auf S. 10 gibt als Folge des dritten *Newton*schen Axioms $\left(\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2\right)$

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad , \tag{10.50}$$

nach Integration

$$m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{c}_1 \tag{10.51}$$

und

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \quad . \tag{10.52}$$

$\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ sind Integrationskonstante. Die Beziehung (10.51) wird als *Impulssatz*, (10.52) als *Schwerpunktsatz* bezeichnet. Der Ausdruck $\mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2$ weist darauf, dass es im Zweikörperproblem m_1, m_2 offenbar einen Punkt gibt, der sich gleichförmig und geradlinig bewegt, auf den nach dem ersten *Newton*schen Axiom also keine Kraft wirkt. Habe dieser Punkt den Ortsvektor ***S*** (siehe Bild 10-2), so ist notwendig mit einer Konstanten *C*

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{S}} &= 0 \\ C\mathbf{S} &= \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \quad . \end{aligned} \tag{10.53}$$

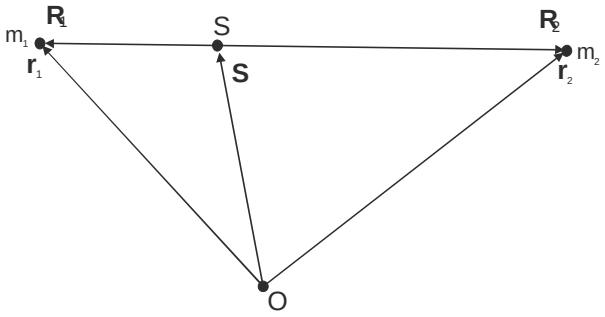


Bild 10-2: Der Schwerpunkt im Zweikörperproblem

Wir beziehen das gesamte (Zweikörper)- System auf den Schwerpunkt **S** durch Einführung der Schwerpunkt-bezogenen Ortsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &:= \mathbf{r}_1 - \mathbf{S} \\ \mathbf{R}_2 &:= \mathbf{r}_2 - \mathbf{S} \quad . \end{aligned} \tag{10.54}$$

Bezogen auf dieses Schwerpunkt-orientierte System als einem mitgeführten System hat der Schwerpunkt selbst keine Bewegung. Der *Schwerpunktsatz* lautet dafür

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0 \quad . \tag{10.55}$$

Mit der auf einen beliebigen Ursprung bezogenen Darstellung (10.52) ist mit den Bezeichnungen (10.54)

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 + (m_1 + m_2)\mathbf{S} = C\mathbf{S} \quad ,$$

also

$$m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{S} \quad . \tag{10.56}$$

Mit Formel (10.55) ist dann offenbar für zu bestimmende Faktoren *A, B*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= A\mathbf{r}_{21} \\ \mathbf{R}_2 &= B\mathbf{r}_{21} \quad . \end{aligned} \tag{*10.57*}$$

Wegen $\ddot{\mathbf{S}} = 0$ ist mit den Formeln (10.45)–(10.48) und (10.54)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 &= G_N \frac{m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3}\mathbf{r}_{21} = A\ddot{\mathbf{r}}_{21} = -AG_N \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3}\mathbf{r}_{21} \\ \ddot{\mathbf{R}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -G_N \frac{m_1}{|\mathbf{r}_{21}|^3}\mathbf{r}_{21} = B\ddot{\mathbf{r}}_{21} = -BG_N \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3}\mathbf{r}_{21} \quad . \end{aligned} \tag{10.58}$$

Dies führt unmittelbar auf

$$A = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad B = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad , \tag{10.59}$$

somit

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_{21} \\ \mathbf{R}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_{21} \quad . \end{aligned} \tag{10.60}$$

Diese Beziehungen erlauben notwendig die Berechnung des Schwerpunktes. Dass sie auch hinreichend Bedingungen für den Schwerpunkt sind, zeigt der Vergleich mit Formel (10.52) auf S. 11. Dies trifft aber nicht mehr zu, wenn die Massen m_1 und m_2 variabel angenommen werden müssen. Dann nämlich ist auch der Schwerpunkt variabel.

10.1.1.2 Absolute Zweikörperbewegung

Unter absoluter Zweikörperbewegung wird (unter der Annahme konstanter Massen) ihre Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt verstanden. Die Bewegungsgleichungen mit den auf den Schwerpunkt *S* bezogenen Vektoren $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ folgen unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen (10.56) und *(10.57)*

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_1 &= -G_N \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} \frac{1}{|\mathbf{R}_1|^3}\mathbf{R}_1 \\ \ddot{\mathbf{R}}_2 &= -G_N \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^3} \frac{1}{|\mathbf{R}_2|^3}\mathbf{R}_2 \quad . \end{aligned} \tag{10.61}$$

Wird hier mit konstant angenommenen Massen m_1 und m_2 zur Abkürzung

$$\mu_1 \;:=\; G_N \frac{m_2^3}{\left(m_1+m_2\right)^3} \quad , \quad \mu_2 \;:=\; G_N \frac{m_1^3}{\left(m_1+m_2\right)^3} \quad , \tag{10.62}$$

gesetzt, lauten die Bewegungsgleichungen der absoluten Zweikörperbewegung

$$\ddot{\mathbf{R}}_i \;=\; -\frac{\mu_i}{\left|\mathbf{R}_i\right|}\mathbf{R}_i \qquad (i=1,2) \tag{10.63}$$

formal gleich wie im Fall der speziellen Keplerbewegung (10.1) und der relativen Zweikörperbewegung (10.48) mit der Beziehung (10.49). Da alle Fälle Spezialfälle der allgemeinen *Kepler*bewegung sind, ist anzunehmen, dass die durch sie beschriebenen Bahnen auch den *Kepler*schen Gesetzen genügen. Da sie darüber hinaus der speziellen *Kepler*bewegung gleichen, deren Parameter Konstante sind, ist zu erwarten, dass auch im Fall der Zweikörperbewegung die Bahnparameter Konstante sind. Dies nachzuweisen ist Aufgabe des inversen *Kepler*schen Problems.

12.2.2 Die absolute Zweikörperbewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt

Die Bewegungen der beiden Körper in der absoluten Zweikörperbewegung werden durch die beiden Bewegungsgleichungen (10.61) beschrieben, deren Integration 12 Integrationskonstante erfordert. Sechs dieser Konstanten werden durch den Schwerpunktsatz

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \;=\; \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \tag{10.64}$$

festgelegt, in dem die Konstanten $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ die gleichförmig geradlinige Bewegung des Schwerpunktes beschreiben. Die übrig bleibenden 6 unabhängigen Konstanten beschreiben nur die Bewegung eines der beiden Körper. Die Bewegung des zweiten Körpers um den gemeinsamen Schwerpunkt muss daher mit der Bewegung des ersten Körpers gekoppelt sein.

Das zweite *Kepler*sche Gesetz der relativen Zweikörperbewegung ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (10.48) auf S. 10

$$\mathbf{r}_{21}\times\dot{\mathbf{r}}_{21} \;=\; \mathbf{c}_{21} \quad . \tag{10.65}$$

Für die Schwerpunkt-bezogenen Ortsvektoren $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ der beiden Körper ist nach Formel (10.55) auf S. 11 mit den in Gleichung (10.59) auf S. 12 berechneten Parametern *A* und *B*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1\times\dot{\mathbf{R}}_1 \;&=\; A^2\mathbf{c} \;=\; \mathbf{c}_{A1} \\ \mathbf{R}_2\times\dot{\mathbf{R}}_2 \;&=\; B^2\mathbf{c} \;=\; \mathbf{c}_{A2} \quad . \end{aligned} \tag{10.66}$$

Die Bahnebenen der beiden Körper sind somit sicher parallel. Die Flächenparameter haben somit die Beziehung

$$G_1 \;=\; A^2\left|\mathbf{c}_{A1}\right| \quad , \quad G_2 \;=\; B^2\left|\mathbf{c}_{A2}\right| \quad , \tag{10.67}$$

nach Einsetzen der Parameter *A*, *B* wird

$$G_2 \;=\; G_1\frac{m_1^2}{m_2^2} \quad . \tag{10.68}$$

Die zweiten *Kepler*schen Vektoren haben also in der absoluten Zweikörperbewegung die Beziehung

$$\mathbf{c}_{A2} = \mathbf{c}_{A1} \frac{m_1^2}{m_2^2} \quad . \tag{10.69}$$

Der Normalenvektor hat bei Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem (eventuell ein Äquatorsystem) die bekannte Darstellung (siehe etwa in Abschnitt 4.3.16, Band II)

$$\mathbf{c}_0 = \sin i \sin \Omega \, \mathbf{p}_1 - \sin i \cos \Omega \, \mathbf{p}_2 + \cos i \, \mathbf{p}_3 \quad . \tag{10.70}$$

Damit ist ersichtlich, dass beide Bewegungen dieselbe Neigung i und denselben Knoten Ω haben. Nach Gleichung (10.4) haben die Bahnparameter der beiden Bewegungen

$$p_1 = \frac{G_1^2}{\mu_1} \quad , \quad p_2 = \frac{G_2^2}{\mu_2} \quad , \tag{10.71}$$

aus den Formeln (10.62) auf S. 13 die Beziehung

$$\mu_2 = \mu_1 \frac{m_1^3}{m_2^3} \tag{10.72}$$

und

$$p_2 = p_1 \frac{m_1}{m_2} \quad . \tag{10.73}$$

Für die ersten *Kepler*schen Vektoren $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ folgt aus Gleichung (10.3) im Fall der absoluten Zweikörperbewegung

$$\dot{\mathbf{R}}_1 \times \mathbf{c}_{A1} = \frac{\mu_1}{|\mathbf{R}_1|} \mathbf{R}_1 + \mu_1 \mathbf{d}_1$$

$$\dot{\mathbf{R}}_2 \times \mathbf{c}_{A2} = \frac{\mu_2}{|\mathbf{R}_2|} \mathbf{R}_2 + \mu_2 \mathbf{d}_2$$

mit $\mathbf{R}_2$ aus Formel (10.58), $\mathbf{c}_{A2}$ aus Formel (10.69) und μ_2 aus Formel (10.72) schließlich die Beziehung

$$\mathbf{d}_2 = -\mathbf{d}_1 \quad . \tag{10.74}$$

Mit Gleichung (10.3) folgt daraus: Die beiden Körper bewegen sich in der absoluten Zweikörperbewegung auf Kegelschnitten mit identischer Exzentrizität

$$|\mathbf{d}_2| = |\mathbf{d}_1| \quad , \quad e_2 = e_1 \quad . \tag{10.75}$$

Da der Schwerpunkt des Zweikörpersystems der gemeinsame Brennpunkt der beiden Kegelschnitte ist, somit in beiden Bahnebenen liegen muss, sind die beiden Bahnebenen identisch. Werden die *Kepler*schen Vektoren in der Bahnebene bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten in der Form

$$\mathbf{d}_1 = e_1 \left(\mathbf{q}_1 \cos \omega_1 + \mathbf{q}_2 \sin \omega_1 \right)$$
$$\mathbf{d}_2 = e_2 \left(\mathbf{q}_1 \cos \omega_2 + \mathbf{q}_2 \sin \omega_2 \right)$$

dargestellt, wobei $\mathbf{q}_1$ hier als der Knotenvektor gewählt wurde, folgt aus Gleichung (10.74) für die Beziehung der Argumente des Perizentrums

$$\omega_2 = \omega_1 + 180° \quad . \tag{10.76}$$

Als Bahnwinkel kann im Fall der Zweikörperbewegung, da die Parameter i, Ω, ω in diesem Fall Konstante sind, die wahre Anomalie verwendet werden. Im Fall der absoluten Zweikörperbewegung ist mit den Gleichungen (10.5) – (10.8)

$$e_1 \cos \upsilon_1 = \frac{\mathbf{R}_1 \mathbf{d}_1}{R_1} \quad , \quad e_1 \sin \upsilon_1 = \dot{R}_1 \sqrt{\frac{p_1}{\mu_1}}$$

$$e_2 \cos \upsilon_2 = \frac{\mathbf{R}_2 \mathbf{d}_2}{R_2} \quad , \quad e_2 \sin \upsilon_2 = \dot{R}_2 \sqrt{\frac{p_2}{\mu_2}}$$

mit

$$R_1 = \left|\mathbf{R}_1\right| \quad , \quad \dot{R}_1 = \frac{\mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{R}}_1}{R_1}$$

$$R_2 = \left|\mathbf{R}_2\right| \quad , \quad \dot{R}_2 = \frac{\mathbf{R}_2 \dot{\mathbf{R}}_2}{R_2} \quad .$$

Wegen der Beziehungen (10.58) und (10.72)–(10.75) folgen

$$e_2 \cos \upsilon_2 = e_1 \cos \upsilon_1 = \frac{\mathbf{R}_2 \mathbf{d}_2}{R_2} = \frac{\mathbf{R}_1 \mathbf{d}_1}{R_1}$$

$$e_2 \sin \upsilon_2 = e_1 \sin \upsilon_1 = \dot{R}_2 \sqrt{\frac{p_2}{\mu_2}} = \dot{R}_1 \sqrt{\frac{p_1}{\mu_1}} \quad .$$

Die Bahnwinkel der beiden Körper im absoluten Zweikörperproblem sind somit identisch

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \quad . \tag{10.77}$$

Die Bahnparameter p_1, p_2 bestimmen eine unterschiedliche Größe der durchlaufenen Kegelschnitte, die sonst die gleiche Form (gleiche Exzentrizitäten) haben, also ähnlich sind und gleichartig durchlaufen werden.

Als BEISPIEL betrachten wir die elliptische Bewegung. In ihr können die großen Bahnhalbachsen, a_1, a_2 aus den Parametern

$$p_1 = a_1 \left(1 - e_1^2\right) \quad , \quad p_2 = a_2 \left(1 - e_2^2\right)$$

berechnet werden. Mit den Gleichungen (10.73) und (10.75) wird

$$a_2 = a_1 \frac{m_1}{m_2} \quad . \tag{10.78}$$

BEISPIEL: Gegeben seien die zwei Körper mit dem Massenverhältnis $m_1 : m_2$ = 1:2. Die Zweikörperbewegung erfolge auf elliptischen Bahnen mit der gegebenen Exzentrizität e= 0.8. Die Bahnhalbachsen verhalten sich nach der letzten Beziehung im Verhältnis $a_1 : a_2$ = 2:1. Siehe Bild 10-3. ■

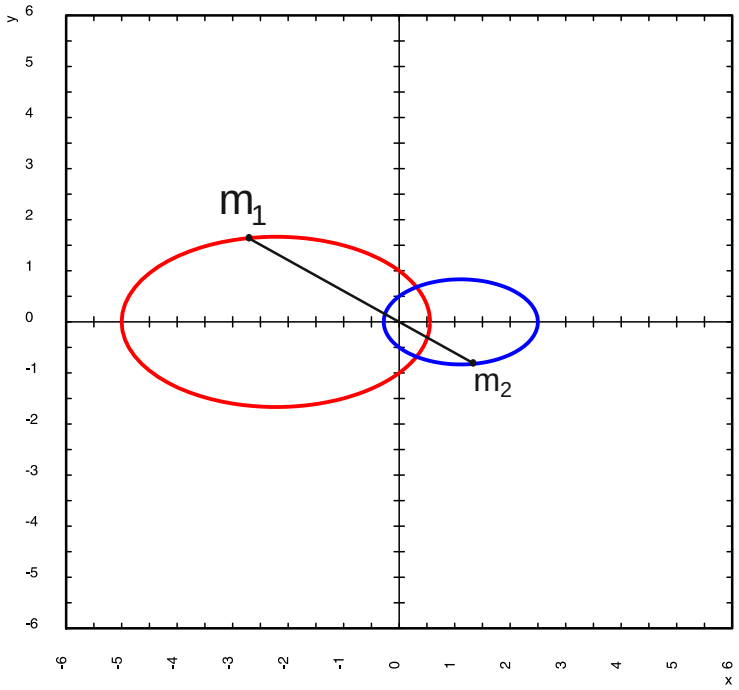


Bild 10-3: Absolute Zweikörperbewegung für das Massenverhältnis 1:2 mit der Exzentrizität e = 0.8

12.2.3 Reihenentwicklungen im Zweikörperproblem

In der klassischen Himmelsmechanik waren Reihenentwicklungen zur Beschreibung der elliptischen Bewegung ein wichtiges Hilfsmittel, insbesondere bei Untersuchungen der Bahnen der Planeten. Eine Reihenentwicklung der Beziehung E-M =e sin$E$ umgeht die iterative Lösung der *Kepler*-Gleichung. Diese musste in den klassischen Verfahren wiederholt angewendet werden, um den Bezug eines Bahnwinkels zur Zeit zu ermöglichen. Neben der Beziehung der exzentrischen zur mittleren Anomalie wurden auch andere Größen der Zweikörperbewegung wie das Verhältnis von Radius zur großen Bahnhalbachse r/a, die trigonometrischen Funktionen der exzentrischen und wahren Anomalie, die ebenen Koordinaten und andere Größen durch Reihenentwicklungen dargestellt. Diese Entwicklungen können auch noch bei der Beschreibung von gering exzentrischen Satellitenbahnen etwa bei Erdbeobachtungssatelliten Unterstützung bieten.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Mittelpunktsgleichung υ-M, also der direkten Beziehung der wahren Anomalie υ als Bahnwinkel zur Zeit über die mittlere Anomalie $M = M_0 + n(t-t_0)$. Sie ist seit *Hipparch* bekannt[1], der im Rahmen seiner Messgenauigkeit das erste Glied dieser Reihe in seiner Mondtheorie bestimmen konnte.

Die übliche Herleitung der Mittelpunktsgleichung (und entsprechend der anderen Reihenentwicklungen[2]) geschieht als *Fourier* Entwicklung unter Verwendung von *Bessel*funktionen. Es

[1] Siehe in Abschnitt 1.6.7 (Band I)

[2] Eine ausführliche Begründung findet sich etwa bei BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961], pp. 60-114; STUMPFF, K. [1959], pp.296-328; TISSERAND, F. [1889], tome I, pp. 206-227; DZIOBEK, O. [1888], pp. 22-36; FITZPATRICK, P., M. [1970], pp.88-100; u.a..; BATTIN, R. H. [1987]: pp. 191-212; eine systematische Zusammenstellung derartiger Entwicklungen findet sich in: JENSEN, J. ET AL. [1962], pp. 25-34

handelt sich um eine doppelt unendliche Reihe[1] nach der numerischen Exzentrizität *e* und Vielfachen der mittleren Anomalie *M*:

$$\upsilon = M + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{J_n(ne) + \sum_{k=1}^{\infty}\beta^k\left[J_{n-k}(ne) + J_{n+k}(ne)\right]\right\}\sin(nM) \quad . \tag{10.79}$$

Hier wird die Abkürzung

$$\beta := \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{16}e^5 + \frac{5}{128}e^7 + \cdots \quad . \tag{10.80}$$

verwendet. Die *Bessel*funktionen der ersten Art von der Ordnung *n* haben die Integraldarstellung

$$J_n(ne) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - ne\sin\varphi)\,d\varphi \quad , \tag{10.81}$$

woraus die Verwandtschaft mit der *Kepler*gleichung deutlich wird. Entsprechend kann die Exzentrische Anomalie mit Hilfe der *Bessel*funktionen entwickelt werden:

$$E - M = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}J_n(ne)\sin(nM) \quad . \tag{10.82}$$

Die *Bessel*funktionen können in Reihen entwickelt werden[2]:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\frac{1}{k!(n+k)!} \tag{10.83}$$

$$\begin{aligned}
J_1(e) &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{16}e^3 + \frac{1}{384}e^5 - \frac{1}{18432}e^7 + \cdots \\
J_2(2e) &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6 - \frac{1}{720}e^8 + \cdots \\
J_3(3e) &= \frac{9}{16}e^3 - \frac{81}{256}e^5 + \frac{729}{10240}e^7 + \cdots \\
J_4(4e) &= \frac{2}{3}e^4 - \frac{8}{15}e^6 + \frac{8}{45}e^8 - \cdots \\
J_5(5e) &= \frac{625}{768}e^5 - \frac{15625}{18432}e^7 + \cdots \quad . \\
J_6(6e) &= \frac{81}{80}e^6 - \frac{729}{560}e^8 + \cdots \\
J_7(7e) &= \frac{117649}{92160}e^7 - \cdots \\
J_8(8e) &= \frac{512}{315}e^8 - \cdots
\end{aligned} \tag{10.84}$$

Damit lautet die Entwicklung der exzentrischen Anomalie

[1] DZIOBEK, O. [1888], p. 26

[2] JENSEN, J. ET AL. [1962], p. 30

$$
\begin{aligned}
E-M = &\left(e-\frac{1}{8}e^3+\frac{1}{192}e^5-\frac{1}{9216}e^7+\cdots\right)\sin M+\\
&+\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{6}e^4+\frac{1}{48}e^6-\cdots\right)\sin 2M+\\
&+\left(\frac{3}{8}e^3-\frac{27}{128}e^5+\frac{243}{5120}e^7-\cdots\right)\sin 3M+\\
&+\left(\frac{1}{3}e^4-\frac{4}{15}e^6+\cdots\right)\sin 4M+\\
&+\left(\frac{125}{384}e^5-\frac{3125}{9216}e^7+\cdots\right)\sin 5M+\\
&+\left(\frac{27}{80}e^6-\cdots\right)\sin 6M+\\
&+\left(\frac{16807}{46080}e^7-\cdots\right)\sin 7M+\cdots \quad .
\end{aligned}
\tag{10.85}
$$

Die Entwicklung für die wahre Anomalie (Mittelpunktsgleichung) nach Potenzen der Exzentrizität lautet

$$
\begin{aligned}
\upsilon = \; & M+\\
&+2e\sin M+\\
&+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+\\
&+\frac{1}{12}e^3\left(13\sin 3M-3\sin M\right)+\\
&+\frac{1}{96}e^4\left(103\sin 4M-44\sin 2M\right)+\\
&+\frac{1}{960}e^5\left(1097\sin 5M-645\sin 3M+50\sin M\right)+\\
&+\frac{1}{960}e^6\left(1223\sin 6M-902\sin 4M+85\sin 2M\right)+\\
&+\frac{1}{32256}e^7\left(47273\sin 7M-41699\sin 5M+5985\sin 3M+749\cos M\right)+\cdots
\end{aligned}
\tag{10.86}
$$

und nach Vielfachen der mittleren Anomalie

$$\begin{aligned}\upsilon = \quad & M + \left(2e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin M + \\ & + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6 - \cdots\right)\sin 2M + \\ & + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{192}e^5 + \frac{95}{512}e^7 - \cdots\right)\sin 3M + \\ & + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6 + \cdots\right)\sin 4M + \\ & + \left(\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin 5M + \\ & + \left(\frac{1223}{960}e^6 - \cdots\right)\sin 6M + \\ & + \left(\frac{47273}{32256}e^7 - \cdots\right)\sin 7M + \cdots .\end{aligned} \tag{10.87}$$

Auf Grund der doppelt unendlichen Entwicklung der Reihen muss die Frage nach der Konvergenz der Reihen unterschiedlich beantwortet werden. Schon *P.S. Laplace* hatte herausgefunden, dass die Entwicklungen der Reihen im Zweikörperproblem nach der Exzentrizität nur für Exzentrizitäten

$$e < 0.6627434194\cdots \tag{10.88}$$

konvergieren. Werden diese Reihen jedoch umgeordnet nach Fourier Sinus-Reihen nach Vielfachen der mittleren Anomalie (wie in der Entwicklung (10.87))[1], wobei die Koeffizienten unendliche Reihen in der Exzentrizität sind, so konvergieren diese Reihen für alle Exzentrizitäten e<1. Diese Aussage ist in der Satellitenbahnanalyse von Interesse bei hochexzentrischen Bahnen, wie etwa den Transferbahnen in die geostationäre Bahn. Allerdings konvergieren diese Reihen so langsam, dass sie für praktische Anwendungen, also höhere Exzentrizitäten, rasch ihre Bedeutung verlieren[2]. Die rechtwinkligen Koordinaten in der (oskulierenden) Bahnebene, deren x-Achse auf das Perizentrum bezogen ist und y-Achse in Richtung des Parametervektors (wahre Anomalie υ=90°) haben die Beziehungen

$$\begin{aligned} x &= r\cos\upsilon = a\left(\cos E - e\right) \\ y &= r\sin\upsilon = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \quad . \end{aligned} \tag{10.89}$$

Ihre Entwicklungen im Rahmen des elliptischen Zweikörperproblems sind

$$\begin{aligned} x &= a\left[-\frac{3}{2}e + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{k-1}(ke)\frac{\cos kM}{k}\right] \\ y &= a\sqrt{1-e^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{k-1}(ke)\sin\frac{\cos kM}{k} \quad . \end{aligned} \tag{10.90}$$

[1] BATTIN, R. H. [1987]: p. 206; siehe hierzu auch die ausführlichen Untersuchungen zur Konvergenz dieser Reihen bei STUMPFF, K. [1959], pp. 317 ff.; siehe auch BROUWER, D. [1959/2], p.153; sowie die Originalarbeit von F. W. BESSEL [1818/1875]

[2] Siehe etwa CHEBOTAREV, G. S. [1967], p. 317

Diese lauten im Einzelnen[1]

$$
\begin{aligned}
x = a\Bigg[& -\frac{3}{2}e + \\
& + \left(1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 - \frac{7}{9216}e^6 + \cdots\right)\cos M + \\
& + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{16}e^5 - \frac{1}{180}e^7 + \cdots\right)\cos 2M + \\
& + \left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{45}{128}e^4 + \frac{567}{5120}e^6 - \cdots\right)\cos 3M + \\
& + \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{5}e^5 + \frac{8}{45}e^7 - \cdots\right)\cos 4M + \\
& + \left(\frac{125}{384}e^4 - \frac{4375}{9216}e^6 + \cdots\right)\cos 5M + \\
& + \left(\frac{81}{240}e^5 - \frac{81}{140}e^7 + \cdots\right)\cos 6M + \\
& + \left(\frac{16807}{46080}e^6 - \cdots\right)\cos 7M + \\
& + \left(\frac{128}{315}e^7 - \cdots\right)\cos 8M + \cdots\cdots\cdots\cdots\Bigg]
\end{aligned}
\tag{10.91}
$$

$$
\begin{aligned}
y = a\Bigg[& \left(1 - \frac{5}{8}e^2 + \frac{11}{192}e^4 - \frac{457}{9216}e^6 + \cdots\right)\sin M + \\
& + \left(\frac{1}{2}e - \frac{5}{12}e^3 + \frac{1}{24}e^5 - \frac{1}{45}e^7 + \cdots\right)\sin 2M + \\
& + \left(\frac{3}{8}e^2 - \frac{51}{128}e^4 + \frac{543}{5120}e^6 - \cdots\right)\sin 3M + \\
& + \left(\frac{1}{3}e^3 - \frac{13}{30}e^5 + \frac{13}{72}e^7 - \cdots\right)\sin 4M + \\
& + \left(\frac{125}{384}e^4 - \frac{4625}{9216}e^6 + \cdots\right)\sin 5M + \\
& + \left(\frac{27}{80}e^5 - \frac{135}{224}e^7 + \cdots\right)\sin 6M + \\
& + \left(\frac{16807}{46080}e^6 - \cdots\right)\sin 7M + \\
& + \left(\frac{128}{315}e^7 - \cdots\right)\sin 8M + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\Bigg]
\end{aligned}
\tag{10.92}
$$

[1] Siehe auch die Beziehungen in Abschnitt 2.2.2 (Band I)

Für das Verhältnis große Bahnhalbachse zu Bahnradius lautet die Entwicklung nach der mittleren Anomalie[1]

$$\begin{aligned}\frac{a}{r} = 1 &+ \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5 - \frac{1}{9216}e^7 + \cdots \right) \cos M + \\ &+ \left(e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \frac{1}{24}e^6 + \cdots \right) \cos 2M + \\ &+ \left(\frac{9}{8}e^3 - \frac{81}{128}e^5 + \frac{729}{5120}e^7 + \cdots \right) \cos 3M + \\ &+ \left(\frac{4}{3}e^4 - \frac{16}{15}e^6 + \cdots \right) \cos 4M + \\ &+ \left(\frac{625}{384}e^5 - \frac{15625}{9216}e^7 + \cdots \right) \cos 5M + \\ &+ \left(\frac{81}{40}e^6 + \cdots \right) \cos 6M + \\ &+ \left(\frac{117649}{46080}e^7 + \cdots \right) \cos 7M + \cdots \end{aligned} \tag{10.93}$$

sowie

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^2 = &\left(1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6 + \cdots \right) + \\ &+ \left(2e + \frac{3}{4}e^3 + \frac{65}{96}e^5 + \frac{2675}{4608}e^7 + \cdots \right) \cos M + \\ &+ \left(\frac{5}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^4 + \frac{21}{32}e^6 + \cdots \right) \cos 2M + \\ &+ \left(\frac{13}{4}e^3 - \frac{25}{64}e^5 + \frac{393}{512}e^7 + \cdots \right) \cos 3M + \\ &+ \left(\frac{103}{24}e^4 - \frac{129}{80}e^6 + \cdots \right) \cos 4M + \\ &+ \left(\frac{1097}{192}e^5 - \frac{16621}{4608}e^7 + \cdots \right) \cos 5M + \\ &+ \left(\frac{1223}{160}e^6 - \cdots \right) \cos 6M + \\ &+ \left(\frac{47273}{4608}e^7 - \cdots \right) \cos 7M + \cdots \end{aligned} \tag{10.94}$$

[1] Zum Beispiel nach JENSEN, J. et al. [1962], p.32

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3 = \; & 1+\frac{3}{2}e^2+\frac{15}{8}e^4+\frac{35}{16}e^6+\cdots+ \\ & +\left(3e+\frac{27}{8}e^3+\frac{261}{64}e^5+\cdots\right)\cos M+ \\ & +\left(\frac{9}{2}e^2+\frac{7}{2}e^4+\frac{141}{32}e^6+\cdots\right)\cos 2M+ \\ & +\left(\frac{53}{8}e^3+\frac{392}{128}e^5+\cdots\right)\cos 3M+ \\ & +\left(\frac{7}{8}e^4+\frac{129}{80}e^6+\cdots\right)\cos 4M+ \\ & +\left(\frac{1773}{128}e^5+\cdots\right)\cos 5M+ \\ & +\left(\frac{3167}{160}e^6+\cdots\right)\cos 6M+\cdots\end{aligned} \tag{10.95}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{r}\right)^3\cos 2\upsilon = \; & \left(-\frac{1}{2}e+\frac{1}{12}e^3+\frac{1}{768}e^5+\cdots\right)\cos M+ \\ & +\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{41}{48}e^4-\frac{133}{1440}e^6+\cdots\right)\cos 2M+ \\ & +\left(\frac{7}{2}e-\frac{123}{16}e^3+\frac{4971}{1280}e^5-\cdots\right)\cos 3M+ \\ & +\left(\frac{17}{2}e^2-\frac{115}{6}e^4+\frac{9079}{720}e^6-\cdots\right)\cos 4M+ \\ & +\left(\frac{845}{48}e^3+\frac{32525}{768}e^5+\cdots\right)\cos 5M+ \\ & +\left(\frac{533}{16}e^4-\frac{13827}{160}e^6+\cdots\right)\cos 6M+ \\ & +\left(\frac{228347}{3840}e^5+\cdots\right)\cos 7M+ \\ & +\left(\frac{73369}{720}e^6+\cdots\right)\cos 8M+\cdots\end{aligned} \tag{10.96}$$

$$\left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin 2\upsilon = \left(-\frac{1}{2}e+\frac{1}{24}e^3-\frac{7}{256}e^5+\cdots\right)\sin M +$$
$$+\left(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{37}{48}e^4-\frac{217}{1440}e^6+\cdots\right)\sin 2M +$$
$$+\left(\frac{7}{2}e-\frac{123}{16}e^3+\frac{4809}{1280}e^5-\cdots\right)\sin 3M +$$
$$+\left(\frac{17}{2}e^2-\frac{115}{6}e^4+\frac{8951}{720}e^6-\cdots\right)\sin 4M +$$
$$+\left(\frac{845}{48}e^3-\frac{32525}{768}e^5+\cdots\right)\sin 5M +$$
$$+\left(\frac{533}{16}e^4-\frac{13827}{160}e^6+\cdots\right)\sin 6M +$$
$$+\left(\frac{228347}{3840}e^5+\cdots\right)\sin 7M +$$
$$+\left(\frac{73369}{720}e^6+\cdots\right)\sin 8M + \cdots \qquad (10.97)$$

Bei Untersuchungen eines Strörungsproblems werden bisweilen die Umkehrungen benötigt[1]:

$$\frac{r}{a} = 1+\frac{1}{2}e^2 -$$
$$-\left(e-\frac{3}{8}e^3+\frac{5}{192}e^5-\frac{7}{9216}e^7+\cdots\right)\cos M -$$
$$-\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{3}e^4+\frac{1}{16}e^6-\cdots\right)\cos 2M -$$
$$-\left(\frac{3}{8}e^3-\frac{45}{128}e^5+\frac{567}{5120}e^7-\cdots\right)\cos 3M -$$
$$-\left(\frac{1}{3}e^4-\frac{2}{5}e^6+\cdots\right)\cos 4M -$$
$$-\left(\frac{125}{384}e^5-\frac{4375}{9216}e^7+\cdots\right)\cos 5M -$$
$$-\left(\frac{27}{80}e^6-\cdots\right)\cos 6M -$$
$$-\left(\frac{16807}{46080}e^7-\cdots\right)\cos 7M -\cdots \qquad (10.98)$$

[1] Siehe zum Beispiel neben JENSEN, J. et al. [1962] in CHEBOTAREV, G. S. [1967], pp. 315-317

12.3 Anwendungen der Zweikörperbewegung in der Satellitenbahnmechanik

Unter Vernachlässigung des gesamten Formelapparates der allgemeinen *Kepler*bewegung können mit den einfachen Formeln der Zweikörperbewegung bereits weitreichende Abschätzungen der Satellitenbewegung erhalten werden, wie sie für manche erste Aussagen einer Satellitenbahnanalyse ausreichend sind:

Beispiele für Umlaufzeiten:

Das dritte *Kepler*sche Gesetz in der von *Kepler* entdeckten Form[1] $P_{Kep}^2 \sim a^3$ liefert einen Zusammenhang zwischen der *Kepler*schen Umlaufzeit P_{Kep} und der großen Bahnhalbachse *a*. Für Kreisbahnen kann damit ein näherungsweiser Zusammenhang zwischen Bahnhöhe (bezogen auf den mittleren Äquator) und der Umlaufzeit erhalten werden. Dies zeigt Bild 10-4 auf Seite 24 für erdnahe Kreisbahnen, Bild 10-5 auf Seite 25 für erdferne Kreisbahnen, sowie Bild 10-6 auf Seite 25 für kreisförmige Bahnen um den Mars.

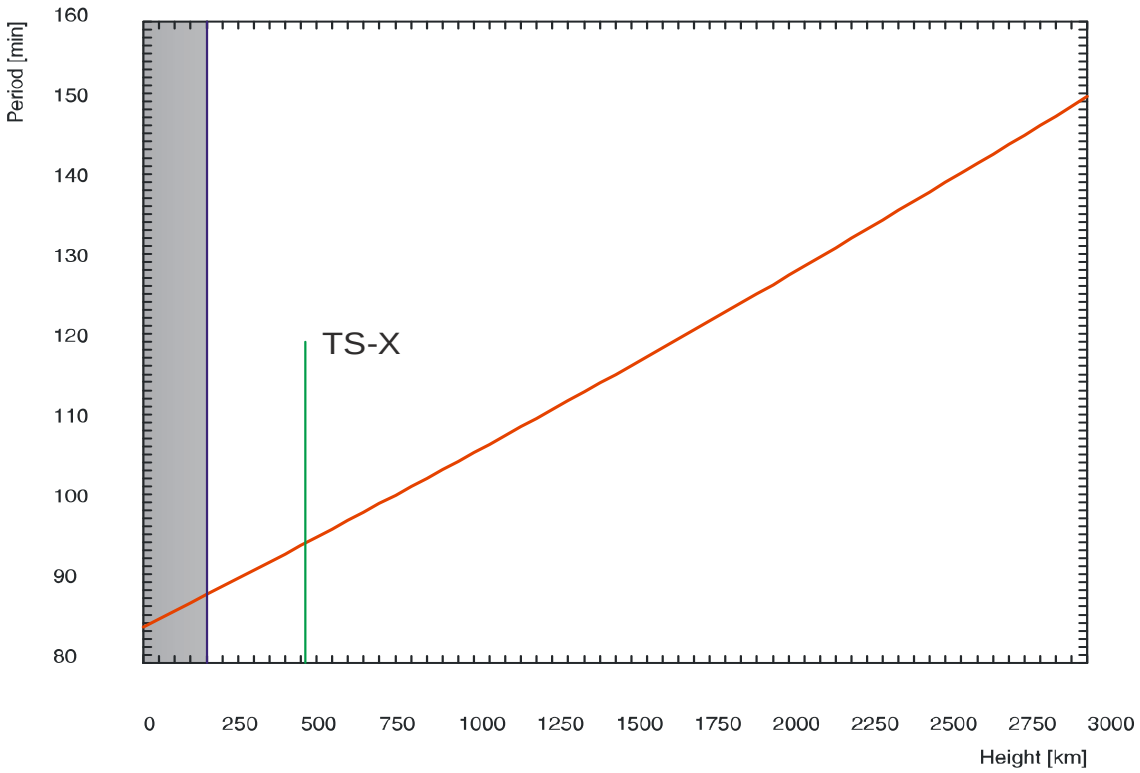


Bild 10-4: Die *Kepler*sche Umlaufzeit erdnaher kreisförmiger Satellitenbahnen in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe, grüne Kurve: Bahnhöhe des TerraSar-X (TS-X), schraffierter Bereich für Satelliten zu niedrig, keine Überlebenschance

Beispiele für Geschwindigkeiten:

Die Geschwindigkeitsbeziehung[2]

[1] Abschnitt 2.2.4 (Band I)

[2] Siehe etwa in Abschnitt 2.4.2 (Band I)

$$V^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{10.99}$$

enthält einen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der großen Bahnhalbachse. Für Kreisbahnen kann damit ein näherungsweiser Zusammenhang zwischen Bahnhöhe (bezogen auf den mittleren Äquator) und der Geschwindigkeit erhalten werden. Dies zeigt Bild 10-7 auf S. 26 für erdnahe Kreisbahnen, Bild 10-8 auf S. 26 für erdferne Kreisbahnen, Bild 10-9 auf S. 27 für kreisförmige Bahnen um den Mars.

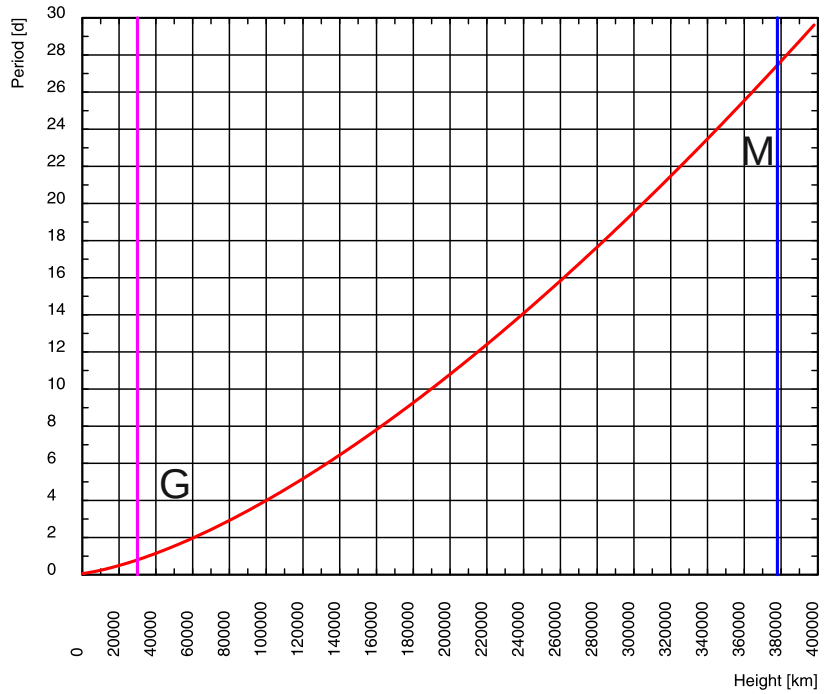


Bild 10-5: Die Umlaufzeit erdferner kreisförmiger Satellitenbahnen in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe, G- geostationäre Bahnhöhe, M-mittlere Mondbahnhöhe in Bezug auf den mittleren Erdäquator

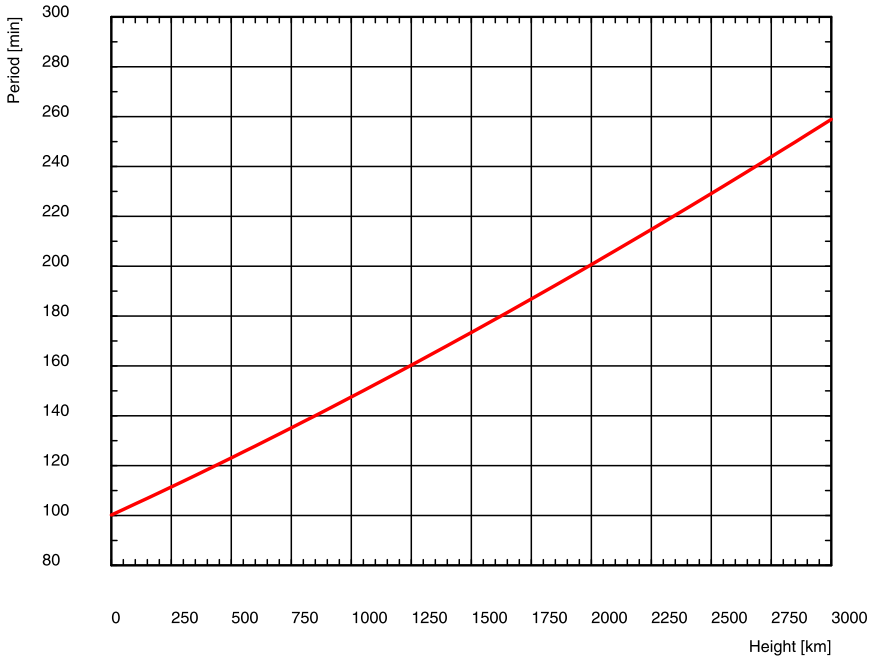


Bild 10-6: Die Umlaufzeit kreisförmiger Mars-Orbiter in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe

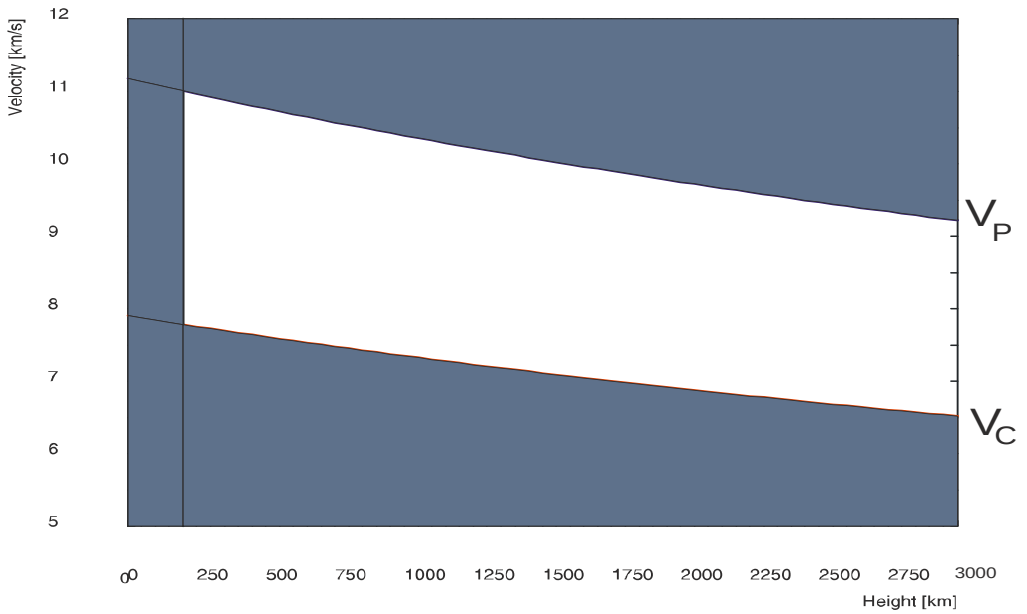


Bild 10-7: Der Geschwindigkeitsbereich erdnaher kreisförmiger Satellitenbahnen in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe: V_C- Kreisbahngeschwindigkeit, V_P-parabolische Geschwindigkeit (Entweichgeschwindigkeit = Fluchtgeschwindigkeit)

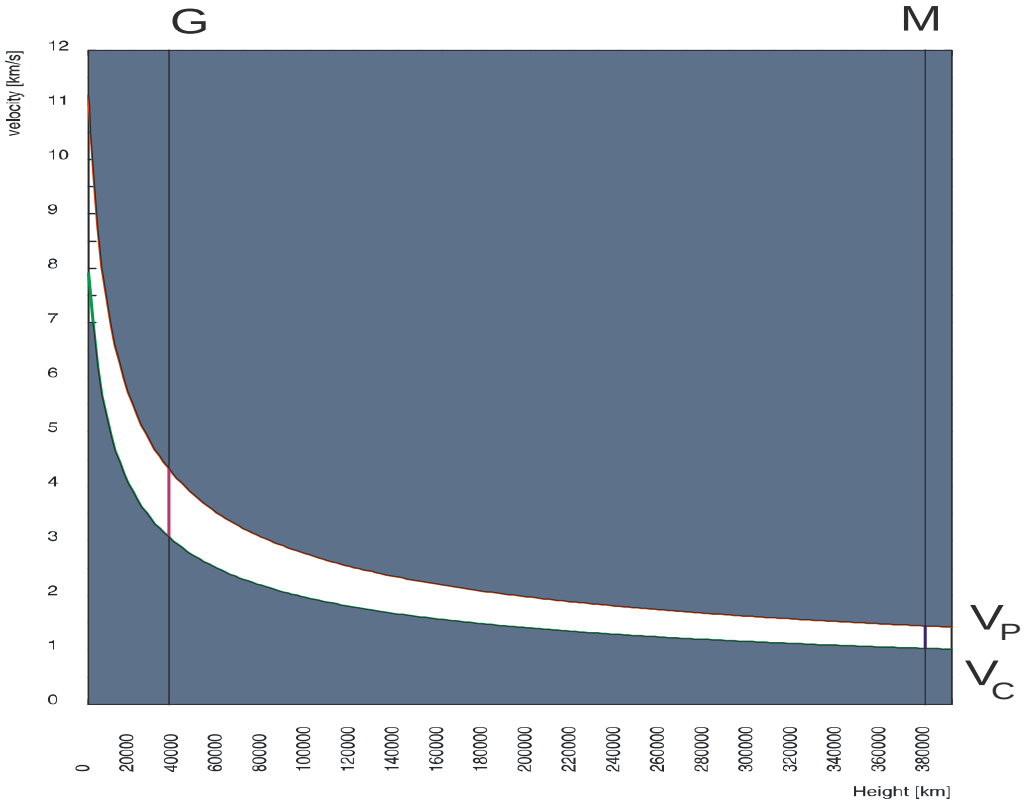


Bild 10-8: Die Geschwindigkeiten erdferner kreisförmiger Satellitenbahnen in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe, eingezeichnet ist die geostationäre Bahnhöhe (G), die Mondbahnhöhe (M), die Kurve für die Kreisbahngeschwindigkeit (V_C), die Kurve für die parabolische Geschwindigkeit (V_P)

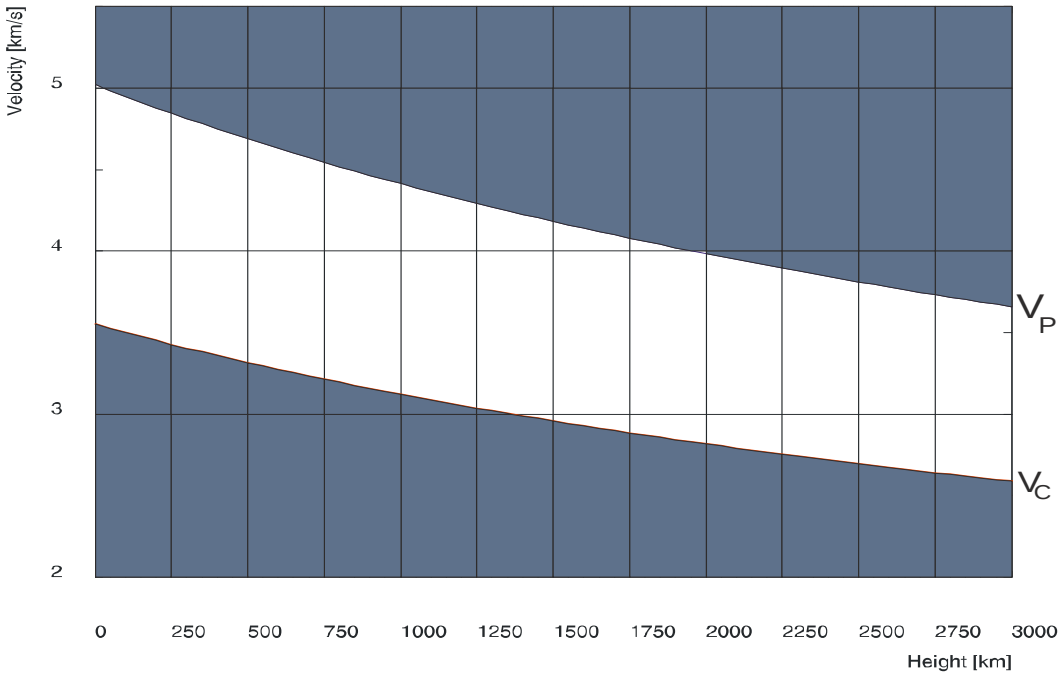


Bild 10-9: Der Geschwindigkeitsbereich kreisförmiger Mars-Orbiter in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe, V_C-Kreisbahngeschwindigkeit, V_P-parabolische Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit)

12.4 Das Dreikörperproblem

12.4.1 Die Basisgleichungen

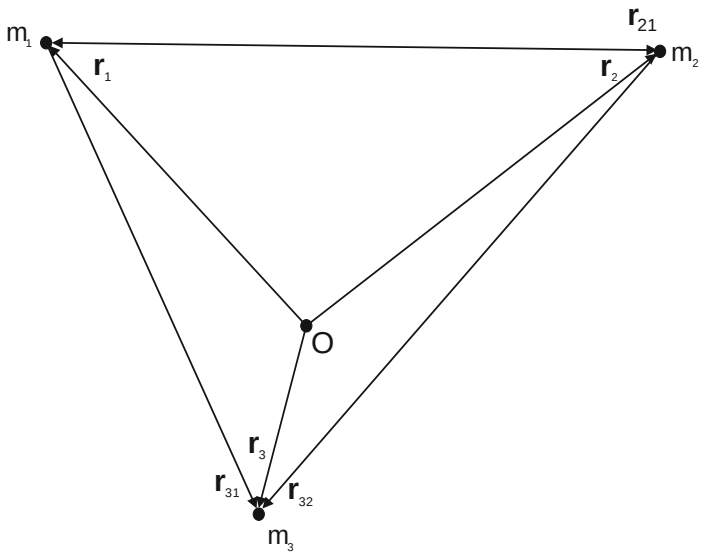


Bild 10-10: Dreikörperbewegung bei Bezug auf einen beliebigen Ursprung O

Die Behandlung des Dreikörperproblems erfolgt im Prinzip nicht anders als die des Zweikörperproblems[1]. Gegeben seien drei Körper mit den Massen m_1, m_2, m_3, die von einem beliebigen

[1] Vgl. auch Abschnitt 2.6.2 (Band I) im Zusammenhang des geschichtlichen Überblicks

Ursprung *O* aus die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ haben (vgl. Bild 10-10). Die Verbindungsvektoren zwischen den drei Körpern sind:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{21} &:= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad , \quad \mathbf{r}_{12} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_{21} \quad , \quad r_{12} = |\mathbf{r}_{12}| = r_{21} \\
\mathbf{r}_{31} &:= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \quad , \quad \mathbf{r}_{13} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = -\mathbf{r}_{31} \quad , \quad r_{13} = |\mathbf{r}_{13}| = r_{31} \\
\mathbf{r}_{32} &:= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \quad , \quad \mathbf{r}_{23} := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3 = -\mathbf{r}_{32} \quad , \quad r_{23} = |\mathbf{r}_{23}| = r_{32} \\
\mathbf{r}_{32} &:= \mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{21} \quad , \quad \mathbf{r}_{23} := \mathbf{r}_{13} - \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21} - \mathbf{r}_{31} \quad .
\end{aligned} \tag{10.100}$$

Auf m_1 wirkt von m_2 und m_3 nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz (10.45) die Kraft[1]

$$\mathbf{F}_1 := m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G_N \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} - G_N \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \quad , \tag{10.101}$$

auf m_2 von m_1 und m_3

$$\mathbf{F}_2 := m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G_N \frac{m_2 m_1}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} - G_N \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad , \tag{10.102}$$

und auf m_3 von m_1 und m_2

$$\mathbf{F}_3 := m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 = -G_N \frac{m_3 m_1}{r_{31}^3} \mathbf{r}_{31} - G_N \frac{m_3 m_2}{r_{32}^3} \mathbf{r}_{32} \quad . \tag{10.103}$$

12.4.2 Die relative Dreikörperbewegung

Die relativen Bewegungen der beiden Körper der Massen m_2 und m_3 bezogen auf m_1 haben mit den zentrischen Gravitationskonstanten

$$\mu_i := G_N m_i \quad , \quad (i = 1,2,3) \tag{10.104}$$

die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}}_{21} &= -\frac{\mu_1 + \mu_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} - \mu_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} - \frac{\mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{21}}{|\mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{21}|^3} \right) \\
\ddot{\mathbf{r}}_{31} &= -\frac{\mu_1 + \mu_3}{r_{31}^3} \mathbf{r}_{31} - \mu_2 \left(\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} - \frac{\mathbf{r}_{21} - \mathbf{r}_{31}}{|\mathbf{r}_{21} - \mathbf{r}_{31}|^3} \right) \quad .
\end{aligned} \tag{10.105}$$

Die erste der Beschleunigungsgleichungen $\ddot{\mathbf{r}}_{21}$ beschreibt die Bewegung des Körpers der Masse m_2 um den Körper m_1, „gestört“ durch den dritten Körper m_3 mit der zentrischen Gravitationskonstanten μ_3. Hierbei wird der Anteil

$$\ddot{\mathbf{R}}_{dir} := \mu_3 \frac{\mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{21}}{|\mathbf{r}_{31} - \mathbf{r}_{21}|^3} = \mu_3 \frac{\mathbf{r}_{32}}{r_{32}^3} \quad , \quad (\mathbf{r}_{32} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \tag{10.106}$$

als der „direkte Anteil“ („Hauptteil“) der Störbeschleunigung auf die Bewegung von m_2 bezeichnet, der Anteil

[1] alle diese Massen werden in diesem Zusammenhang als konstant angenommen

$$\ddot{\mathbf{R}}_{ind} := -\mu_3 \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^{\ 3}} \quad , \quad \left(\mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\right) \quad , \tag{10.107}$$

welcher nicht direkt auf die Bewegung von m_2 um m_1 einwirkt, als der „indirekte Anteil“ der Störbeschleunigung im Dreikörperproblem.

Durch zyklische Vertauschung der Indizes können auch die Bewegungsgleichungen für die relativen Bewegungen von m_1, m_3 bezüglich m_2 sowie die von m_1, m_2 bezüglich m_3 aufgestellt werden.

Die Bewegungsgleichung eines Körpers bezogen auf einen zweiten ist im Rahmen des Dreikörperproblems gleich der Bewegungsgleichung des Zweikörperproblems dieser beiden Körper ergänzt durch einen Beschleunigungsanteil, der durch den dritten Körper verursacht wird. Die Herleitung zeigt, dass keiner dieser beiden Beschleunigungsanteile in besonderer Weise ausgezeichnet ist, ob also der eine Anteil den anderen dominiert. Die relativen Bewegungsgleichungen im Dreikörperproblem sind offenbar Spezialfälle der allgemeinen *Kepler*bewegung.

12.4.3 Die allgemeinen Integrale des Dreikörperproblems

1. Der Schwerpunktsatz

Die Kraftbeziehungen (10.101)–(10.103) ergeben

$$m^i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad , \tag{10.108}$$

damit den *Impulssatz*

$$m^i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{c}_1 \tag{10.109}$$

und den *Schwerpunktsatz*

$$m^i \mathbf{r}_i = \mathbf{c}_2 + t\,\mathbf{c}_1 \quad . \tag{10.110}$$

Es gibt somit auch im Dreikörperproblem offenbar einen Punkt **S**, der gleichförmig und geradlinig bewegt wird, auf den also keine Beschleunigung einwirkt

$$\ddot{\mathbf{S}} = 0 \quad . \tag{10.111}$$

Dieser Punkt wird als *Schwerpunkt* bezeichnet. Das Dreikörperproblem kann auf den Schwerpunkt bezogen werden mit den Ortsvektoren

$$\mathbf{R}_i := \mathbf{r}_i - \mathbf{S} \quad , \quad (i = 1,2,3) \quad , \tag{10.112}$$

so dass der Schwerpunktsatz notwendig

$$m^i \mathbf{R}_i + \mathbf{S} \sum m_i = \mathbf{c}_2 + t\,\mathbf{c}_1$$

mit

$$m^i \mathbf{R}_i = 0 \tag{10.113}$$

und

$$m^i \mathbf{r}_i = \mathbf{S} \sum m_i \tag{10.114}$$

ergibt.

2. Der Flächensatz

Aus den Kräftebeziehungen (10.101)–(10.103) folgt

$$m^i \, \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \;=\; 0 \quad ,$$

nach Integration

$$m^i \, \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \;=\; \mathbf{c}_3 \quad . \tag{10.115}$$

$\mathbf{c}_3$ ist eine Integrationskonstante. Dies bedeutet: Im allgemeinen Dreikörperproblem gilt der *Satz von der Erhaltung des Drehimpulses*. Daraus darf aber nicht geschlossen werden, dass die Einzelbewegungen der drei Körper notwendig je in einer Ebene verlaufen würden.

3. Der Energiesatz

Die Kräftebeziehungen (10.101)–(10.103) liefern auch die Beziehung

$$m^i \, \dot{\mathbf{r}}_i \, \ddot{\mathbf{r}}_i \;=\; -G_N \left[\frac{m_1 \, m_2}{r_{12}^3} \, \dot{\mathbf{r}}_{12} \, \mathbf{r}_{12} + \frac{m_1 \, m_3}{r_{13}^3} \, \dot{\mathbf{r}}_{13} \, \mathbf{r}_{13} + \frac{m_2 \, m_3}{r_{23}^3} \, \dot{\mathbf{r}}_{23} \, \mathbf{r}_{23} \right]$$

mit dem Integral

$$\frac{1}{2} \, m^i \, \dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} \;=\; -G_N \left[\frac{m_1 \, m_2}{r_{12}^3} + \frac{m_1 \, m_3}{r_{13}^3} + \frac{m_2 \, m_3}{r_{23}^3} \right] + h \quad . \tag{10.116}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist die *kinetische Energie* des Systems. Dieses Integral wurde früher auch als *Integral der lebendigen Kraft* bezeichnet. Auf der rechten Seite stehen die *potentielle Energie* und die Energiekonstante *h*. Für die potentielle Energie, kurz auch *Potential* genannt, wird im Fall des Dreikörperproblems auch die Schreibweise

$$U_G \;:=\; G_N \left[\frac{m_1 \, m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 \, m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 \, m_3}{r_{23}} \right] \;=\; G_N \sum_{i<j}^{3} \frac{m_i \, m_j}{r_{ij}} \tag{10.117}$$

benutzt. Damit können die Kräftebeziehungen (10.101)–(10.103) auch in der Form

$$m_i \, \ddot{\mathbf{r}}_i \;=\; \frac{\partial U_G}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{10.118}$$

geschrieben werden, die in der klassischen Himmelsmechanik eine besondere Rolle spielte: Das Kräftefeld im Dreikörperproblem kann als Gradient eines skalaren Potentialfeldes dargestellt werden.

12.4.4 Die absolute Dreikörperbewegung

Die Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ der drei Körper werden durch die Beziehungen

$$\mathbf{R}_i \;=\; \mathbf{r}_i - \mathbf{S} \quad , \quad R_{ij} \;=\; \left| \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j \right| \quad (i \neq j = 1,2,3) \tag{10.119}$$

auf den Schwerpunkt bezogen. Damit können aus den Kräftebeziehungen (10.101)–(10.103) die Schwerpunkt-bezogenen Bewegungsgleichungen im Dreikörperproblem hergeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}}_1 &= -\frac{\mu_2}{R_{12}^3}\left(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2\right)-\frac{\mu_3}{R_{13}^3}\left(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_3\right)\\
\ddot{\mathbf{R}}_2 &= -\frac{\mu_1}{R_{12}^3}\left(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1\right)-\frac{\mu_3}{R_{23}^3}\left(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3\right)\\
\ddot{\mathbf{R}}_3 &= -\frac{\mu_1}{R_{13}^3}\left(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_1\right)-\frac{\mu_2}{R_{23}^3}\left(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_2\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{10.120}
$$

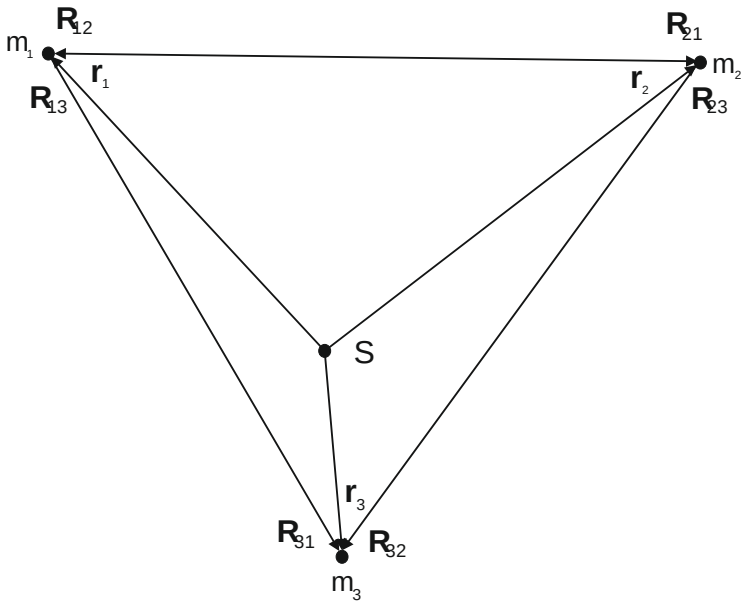


Bild 10-11: Die absolute Dreikörperbewegung bei Bezug auf den Schwerpunkt *S*

Mit Hilfe des Schwerpunktsatzes ist es möglich, einen Ortsvektor auf der rechten Seite, etwa $\mathbf{R}_3$, zu eliminieren. Mit Gleichung (10.113) wird

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}_3 &= -\frac{m_1\mathbf{R}_1+m_2\mathbf{R}_2}{m_3} \quad ,\\
\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_3 &= \frac{m_1+m_3}{m_3}\mathbf{R}_1+\frac{m_2}{m_3}\mathbf{R}_2\\
\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3 &= \frac{m_1}{m_3}\mathbf{R}_1+\frac{m_2+m_3}{m_3}\mathbf{R}_2 \quad .
\end{aligned}
\tag{10.121}
$$

Damit kann die Lösung des Dreikörperproblems auf die Lösung der ersten beiden Differentialgleichungen $\ddot{\mathbf{R}}_1, \ddot{\mathbf{R}}_2$ zurückgeführt werden mit 12 Integralen, während die sechs restlichen Integrale durch den Schwerpunktsatz mit den Integrationskonstanten $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$ gegeben sind.

Mit den bisher bekannten mathematischen Methoden ist es nicht gelungen, weitere (analytische) Integrale des Dreikörperproblems zu finden außer den mit den 10 Konstanten $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$, *h*. Die Bewegungsgleichungen im allgemeinen *n*-Körperproblem werden in analoger Weise hergeleitet. In allen Fällen können nur 10 allgemeingültige (analytische) Integrale gefunden werden.

12.5 Die exakten Lösungen des Dreikörperproblems

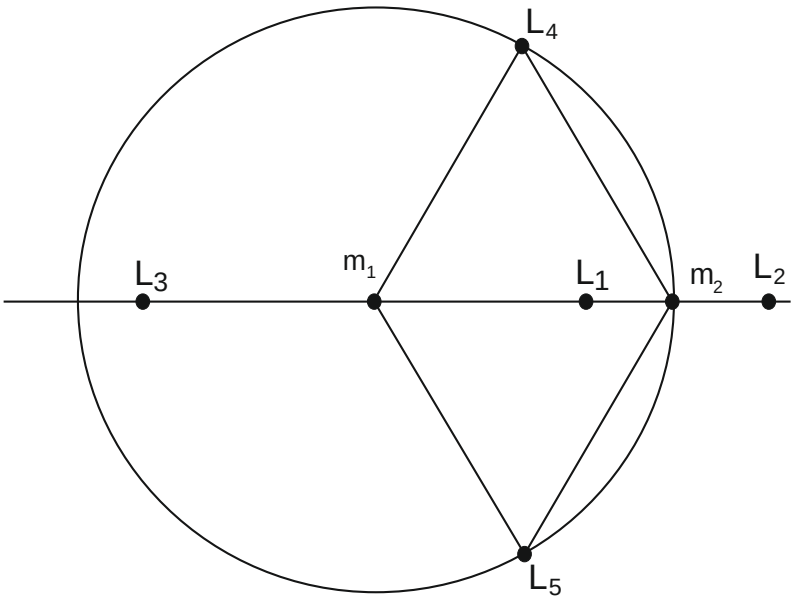


Bild 10-12: Zur Definition der Librationspunkte

Es gibt 5 exakte Lösungen des Dreikörperproblems, die alle nach *J. L. Lagrange* benannt werden. *L. Euler* hatte 1765 das Dreikörperproblem untersucht, wenn die drei Körper stets auf einer Geraden angeordnet sind, und die Gleichung 5. Grades zur Lösung dieses Problems aufgestellt (kollineare Lösung)[1]. *J. L. Lagrange* veröffentlichte diese Lösungen in verallgemeinerter Form 1772 zusammen mit den äquidistanten Lösungen (ohne auf *Euler* hinzuweisen). Die fünf Punkte werden nach einem Vorschlag von *H. Gyldén*[2] *Lagrangesche Librationspunkte* genannt, da in ihnen bei Bezug auf die beiden anderen der drei betrachteten Körper der relative Geschwindigkeitsvektor und der relative Beschleunigungsvektor verschwinden[3]. Diese Punkte werden mit L_1, L_2, … , L_5 bezeichnet. Die übliche Anordnung ist aus Bild 10-12 ersichtlich.

12.5.1 Die kollineare exakte Lösung des Dreikörperproblems

10.1.1.3 Das Polynom 5. Grades

Es werde (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) die relative Bewegung von m_3 bezüglich m_1 und m_2 mit den Bewegungsgleichungen (10.105) betrachtet.

---

[1] L. EULER [1765]: ‚De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium'; L. EULER [1776]: ‚De motu trium corporum se mutuo attrahentium super eadem linea recta'zitiert nach O. VOLK [1983]: ‚Eulers Beiträge zur Theorir der Bewegungen der Himmelskörper', in: L. Euler, Beiträge zu Leben und Werk Basel 1983, pp. 345-362

[2] siehe etwa K. STUMPFF [1965], p. 111

[3] vgl. etwa F. P. J. RIMROTT [1989], p. 157

(1) Unter der Annahme, dass die wechselseitigen Abstände der drei Körper stets im selben Verhältnis zueinander stehen, muss es einen Faktor λ_3 geben, so dass etwa (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) der Ortsvektor von m_1 nach m_3 auf den Ortsvektor von m_1 nach m_2 zurückgeführt werden kann. Nach Bild 10-13 gilt dann

$$\mathbf{r}_{31} = -\lambda_3 \mathbf{r}_{21} \tag{10.122}$$

mit λ_3 = *const.* Dann ist auch

$$\mathbf{r}_{32} = -(\lambda_3 + 1)\mathbf{r}_{21} \quad . \tag{10.123}$$

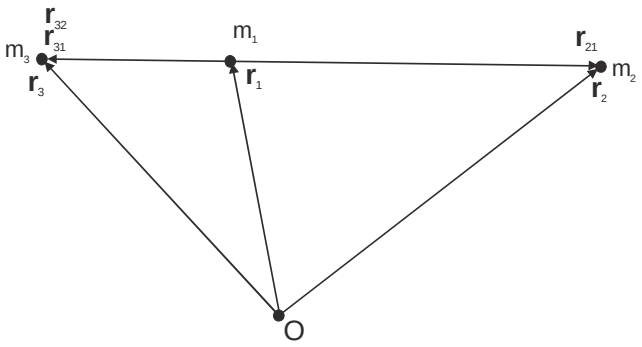


Bild 10-13: Zur Herleitung der kollinearen Lösung des Dreikörperproblems: m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2

Wegen der Beziehungen der beiden Beschleunigungsgleichungen (10.105)

$$\ddot{\mathbf{r}}_{31} = -\lambda_3 \ddot{\mathbf{r}}_{21} \tag{10.124}$$

können sie zusammengefasst werden zu einer Bedingungsgleichung für den Faktor λ_3

$$\begin{aligned} F_3(\lambda_3) \equiv\ & (\mu_1+\mu_2)\lambda_3^5 + (2\mu_1+3\mu_2)\lambda_3^4 + (\mu_1+3\mu_2)\lambda_3^3 - \\ & -(\mu_1+3\mu_3)\lambda_3^2 - (2\mu_1+3\mu_3)\lambda_3 - (\mu_1+\mu_3) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{10.125}$$

Dieses Polynom hat nach der bekannten *Descartes*schen Vorzeichenregel höchstens eine positive Wurzel. Nun ist

$$F_3(\lambda_3 = 0) = -(\mu_1+\mu_3) < 0$$

und

$$F_3(\lambda_3 \to +\infty) = (\mu_1+\mu_2) > 0 \quad .$$

Es gibt also genau eine positive Wurzel von $F_3(\lambda_3)$.

Da keiner der drei Körper vor den beiden anderen prinzipiell ausgezeichnet ist, sind für die Librationspunkte L_1, L_2, L_3 folgende Aussagen äquivalent:

m_1 befindet sich in L_1 bezüglich m_2 und m_3
m_2 befindet sich in L_2 bezüglich m_3 und m_1
m_3 befindet sich in L_3 bezüglich m_1 und m_2 .

Insbesondere hat

$$\begin{aligned} &m_3 \text{ von } m_1 \text{ den Abstand } \quad r_{31} = \lambda_3\, r_{21} \\ &m_3 \text{ von } m_2 \text{ den Abstand } \quad r_{32} = (\lambda_3 + 1)\, r_{21} \quad . \end{aligned} \tag{10.126}$$

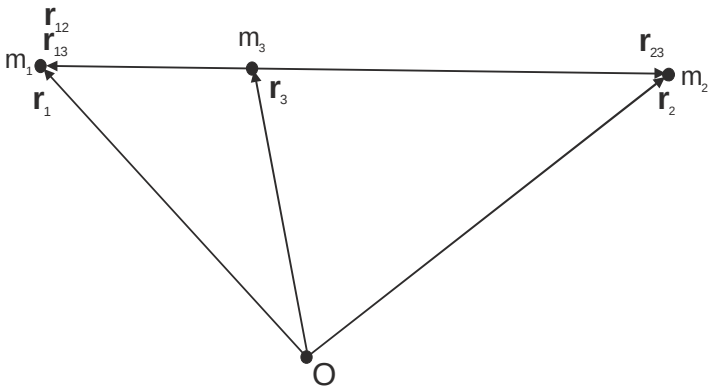


Bild 10-14: m_3 befindet sich in L_1 bezüglich m_1 und m_2

Die Zusammenhänge sind in Tabelle 10-1 aufgelistet.

	Bedingung	Entfernung 1	Entfernung 2
m_3 in L_3	$r_{23} = r_{31} + r_{12}$	$r_{31} = \lambda_3\, r_{12}$	$r_{32} = (\lambda_3+1)\, r_{12}$
m_1 in L_1	$F_3(\lambda_3)$	$r_{12} = \frac{1}{\lambda_3+1}\, r_{32}$	$r_{13} = \frac{\lambda_3}{\lambda_3+1}\, r_{32}$
m_2 in L_2		$r_{21} = \frac{1}{\lambda_3}\, r_{13}$	$r_{23} = \frac{(\lambda_3+1)}{\lambda_3}\, r_{13}$

Tabelle 10-1: m_3 in L_1 bezüglich m_1 und m_2, und Äquivalenzbeziehungen

(2) Wird verlangt, dass m_3 in L_1 bezüglich m_1 und m_2 stehe, sind folgende Aussagen äquivalent (Bild 10-14):

$$\begin{aligned} &m_3 \text{ befindet sich in } L_1 \text{ bezüglich } m_1 \text{ und } m_2 \\ &m_1 \text{ befindet sich in } L_3 \text{ bezüglich } m_2 \text{ und } m_3 \\ &m_2 \text{ befindet sich in } L_2 \text{ bezüglich } m_3 \text{ und } m_1 \quad . \end{aligned}$$

Es werden also gegenüber dem vorhergehenden Fall die Körper m_1 und m_3 vertauscht. In diesem Fall gibt es den konstanten Faktor λ_1 mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{13} &= -\lambda_1\, \mathbf{r}_{23} \\ \mathbf{r}_{12} &= -(\lambda_1 + 1)\, \mathbf{r}_{23} \end{aligned} \tag{10.127}$$

und die Bedingungsgleichung für λ_1 lautet:

$$\begin{aligned} F_1(\lambda_1) \equiv\ & (\mu_3 + \mu_2)\, \lambda_1^5 + (2\mu_3 + 3\mu_2)\, \lambda_1^4 + (\mu_3 + 3\mu_2)\, \lambda_1^3 - \\ & -(\mu_3 + 3\mu_1)\, \lambda_1^2 - (2\mu_3 + 3\mu_1)\, \lambda_1 - (\mu_1 + \mu_3) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{10.128}$$

Auch hier gibt es genau eine Lösung λ_1. Dann hat

$$\begin{aligned} m_3 &\text{ von } m_1 \text{ den Abstand } \quad r_{13} = \lambda_1 r_{23} \\ m_2 &\text{ von } m_1 \text{ den Abstand } \quad r_{12} = (\lambda_1 + 1) r_{23} \quad . \end{aligned} \tag{10.129}$$

In der Praxis interessiert die Position von m_3 im Librationspunkt L_1 bezüglich m_1 und m_2, d. h. die Strecke r_{12} zwischen m_1 und m_2 dient als Maßstab. Danach errechnet sich: Es hat

$$\begin{aligned} m_3 &\text{ von } m_1 \text{ den Abstand } \quad r_{31} = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + 1)} r_{12} \\ m_3 &\text{ von } m_2 \text{ den Abstand } \quad r_{32} = \frac{1}{(\lambda_1 + 1)} r_{12} \quad . \end{aligned} \tag{10.130}$$

	Bedingung	Entfernung 1	Entfernung 2
m_1 in L_3	$r_{12} = r_{13} + r_{23}$	$r_{13} = \lambda_1 r_{23}$	$r_{12} = (\lambda_1 + 1) r_{23}$
m_2 in L_2	$F_1(\lambda_1)$	$r_{23} = \frac{1}{\lambda_1} r_{13}$	$r_{21} = \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1} r_{13}$
m_3 in L_1		$r_{32} = \frac{1}{\lambda_1 + 1} r_{12}$	$r_{31} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1} r_{12}$

Tabelle 10-2: m_3 in L_1 bezüglich m_1 und m_2, und Äquivalenzbedingungen

(3) In der dritten Möglichkeit befindet sich m_3 in L_2 bezüglich m_1 und m_2. Dann sind folgende Aussagen äquivalent (Bild 10-15):

$$\begin{aligned} &m_3 \text{ befindet sich in } L_2 \text{ bezüglich } m_1 \text{ und } m_2 \\ &m_1 \text{ befindet sich in } L_3 \text{ bezüglich } m_2 \text{ und } m_3 \\ &m_2 \text{ befindet sich in } L_1 \text{ bezüglich } m_3 \text{ und } m_1 \quad . \end{aligned}$$

Gegenüber dem ersten Fall werden also m_3 mit m_1, m_1 mit m_2 und m_2 mit m_3 vertauscht. Es gibt dann den konstanten Faktor λ_2 mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{12} &= -\lambda_2 \mathbf{r}_{32} \\ \mathbf{r}_{13} &= -(\lambda_2 + 1)\mathbf{r}_{32} \quad . \end{aligned} \tag{10.131}$$

Die Bedingungsgleichung für λ_2 lautet:

$$\begin{aligned} F_2(\lambda_2) \equiv\ & (\mu_2 + \mu_3)\lambda_2^5 + (2\mu_2 + 3\mu_3)\lambda_2^4 + (\mu_2 + 3\mu_3)\lambda_2^3 - \\ & -(\mu_2 + 3\mu_1)\lambda_2^2 - (2\mu_2 + 3\mu_1)\lambda_2 - (\mu_2 + \mu_1) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{10.132}$$

Mit der genau einen Lösung λ_2 hat

$$\begin{aligned} m_1 &\text{ von } m_2 \text{ den Abstand } \quad r_{12} = \lambda_2 r_{32} \\ m_1 &\text{ von } m_3 \text{ den Abstand } \quad r_{13} = (\lambda_2 + 1) r_{32} \quad . \end{aligned} \tag{10.133}$$

Bei Bezug auf die Körper m_1 und m_2 mit ihrem Abstand r_{12} hat dann

$$\begin{aligned} m_3 \text{ von } m_1 \text{ den Abstand } \quad r_{13} &= \frac{(\lambda_2+1)}{\lambda_2} r_{12} \\ m_3 \text{ von } m_2 \text{ den Abstand } \quad r_{23} &= \frac{1}{\lambda_2} r_{12} \quad . \end{aligned} \tag{10.134}$$

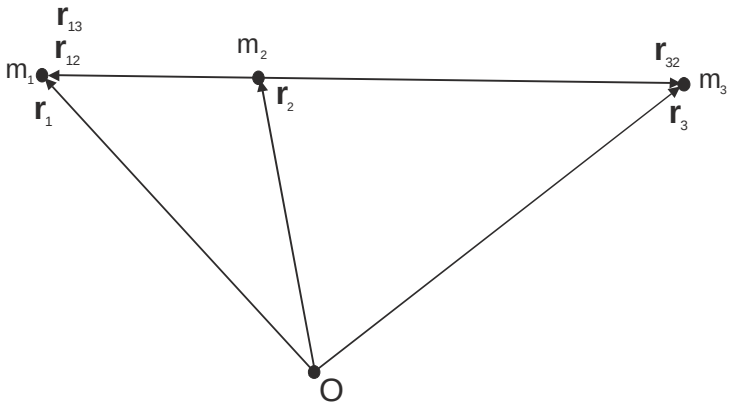


Bild 10-15: m_3 befindet sich in L_2 bezüglich m_1 und m_2

Die gesamten Zusammenhänge in diesem Fall sind in Tabelle 10-3 aufgelistet.

	Bedingung	Entfernung 1	Entfernung 2
m_1 in L_3	$r_{13} = r_{12} + r_{23}$	$r_{12} = \lambda_2 r_{23}$	$r_{13} = (\lambda_2+1) r_{23}$
m_2 in L_1	$F_2(\lambda_2)$	$r_{23} = \frac{1}{\lambda_2+1} r_{13}$	$r_{21} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+1} r_{13}$
m_3 in L_2		$r_{32} = \frac{1}{\lambda_2} r_{12}$	$r_{31} = \frac{\lambda_2+1}{\lambda_2} r_{12}$

Tabelle 10-3: m_3 in L_2 bezüglich m_1 und m_2, und Äquivalenzbedingungen

BEISPIEL: Die drei Körper seien mit dem Massenverhältnis

$$m_1 : m_2 : m_3 \;=\; 3:2:1$$

gegeben. Für die Anordnung $m_3 - m_1 - m_2$ ergibt sich aus $F_3(\lambda_3)$ das Verhältnis $\lambda_3 = 0.8918814719$. Die Abstandsverhältnisse lauten nach den in Tabelle 10-1 bis Tabelle 10-3 gelisteten Beziehungen:

$$\begin{aligned} m_3 \;in\; L_3 &: \; r_{31} = 0.8918814719\, r_{12} \quad , \quad r_{32} = 1.891881472\; r_{12} \\ m_1 \;in\; L_1 &: \; r_{12} = 0.4676960638\, r_{32} \quad , \quad r_{13} = 0.5323039362\, r_{32} \\ m_2 \;in\; L_2 &: \; r_{12} = 0.8786259729\, r_{13} \quad , \quad r_{23} = 1.878625973\; r_{13} \end{aligned}$$

Für die Anordnung $m_1 - m_3 - m_2$ ergibt sich aus $F_1(\lambda_1)$ das Verhältnis $\lambda_1 = 1.138140723$. Die Abstandsverhältnisse lauten:

$$\begin{aligned} m_1 \ in \ L_3 &: \ r_{13} = 1.138140723 \ \mathrm{r}_{23} \quad , \quad r_{32} = 2.138140723 \ \mathrm{r}_{23} \\ m_2 \ in \ L_2 &: \ r_{23} = 0.8786259729 \, \mathrm{r}_{13} \quad , \quad r_{21} = 1.878625973 \ \mathrm{r}_{13} \\ m_3 \ in \ L_1 &: \ r_{32} = 0.4676960638 \, \mathrm{r}_{12} \quad , \quad r_{31} = 0.5323039362 \, \mathrm{r}_{12} \end{aligned}$$

Für die Anordnung $m_1 - m_2 - m_3$ ergibt sich aus $F_2(\lambda_2)$ das Verhältnis $\lambda_2 = 1.280947928$. Die Abstandsverhältnisse lauten:

$$\begin{aligned} m_1 \ in \ L_3 &: \ r_{12} = 1.280947928 \ \mathrm{r}_{23} \quad , \quad r_{13} = 2.280947928 \ \mathrm{r}_{23} \\ m_2 \ in \ L_1 &: \ r_{23} = 0.4384142171 \mathrm{r}_{13} \quad , \quad r_{21} = 0.5615857829 \ \mathrm{r}_{13} \\ m_3 \ in \ L_2 &: \ r_{32} = 0.7806718588 \, \mathrm{r}_{12} \quad , \quad r_{31} = 1.780671859 \ \mathrm{r}_{12} \end{aligned}$$ ◀

In der historischen Entwicklung der Theorie des Dreikörperproblems interessierten zunächst ausschließlich spezielle Fälle im Sonnensystem. Die Betrachtung des Dreikörperproblems Sonne–Jupiter–Komet ergab die Vernachlässigbarkeit der Kometenmasse gegenüber der Sonnenmasse. Dieser Fall führt auf das *eingeschränkte Dreikörperproblem*: Wie bewegt sich ein Körper, dessen Masse vernachlässigt werden kann, bezogen auf zwei andere Körper mit beliebiger nicht verschwindender (und konstanter) Masse? Das eingeschränkte Dreikörperproblem führte zu wichtigen Lösungsfamilien im Dreikörperproblem. Dass die Vernachlässigung der Masse eines Körpers zu realistischen Lösungen führen kann, haben wir schon im Rahmen des (eingeschränkten) Zweikörperproblems gesehen und lässt sich auch am Beispiel der exakten Lösungen des Dreikörperproblems untersuchen. Die Ursache dafür, dass auf diesem Wege sinnvolle Lösungen gefunden werden können, kann in der Bewegungsgleichung gesehen werden, wenn in ihr, wie im Zweikörperproblem der Fall ist, die Masse des bewegten Körpers nicht explizit auftritt. Das bedeutet im Rahmen des Dreikörperproblems also auch nicht, dass exakte Lösungen nur im Rahmen es eingeschränkten Dreikörperproblems zu erwarten wären. Diese gelten, wie im Fall der kollinearen Lösung bereits hergeleitet, in **jedem** Dreikörperproblem.

Wird die Masse des dritten Körpers vernachlässigt, führt mit $m_3 \to 0$ die Bedingungsgleichung $F_3(\lambda_3)$ auf die Form

$$F_3(\lambda_3, \mu_3 \to 0) \equiv \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\lambda_3^5 + \left(2 + 3\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\lambda_3^4 + \left(1 + 3\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\lambda_3^3 - \lambda_3^2 - 2\lambda_3 - 1 = 0 \quad . \tag{10.135}$$

Mit dieser Gleichung können als BEISPIEL die Positionen der Librationspunkte im eingeschränkten Dreikörperproblem für einige Körper im Sonnensystem gerechnet werden.

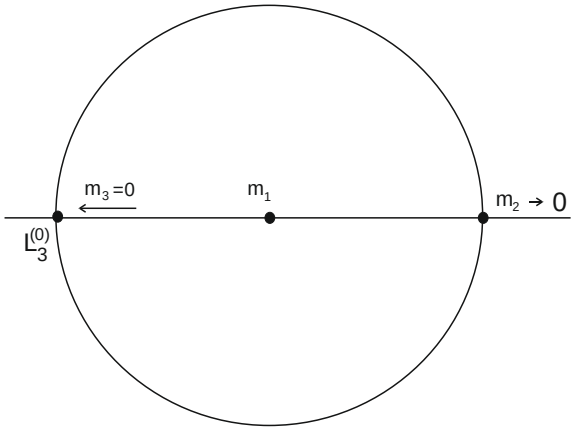


Bild 10-16: Der Grenzfall für λ_3 im eingeschränkten Dreikörperproblem, wenn $\mu_2 / \mu_1 \to 0$

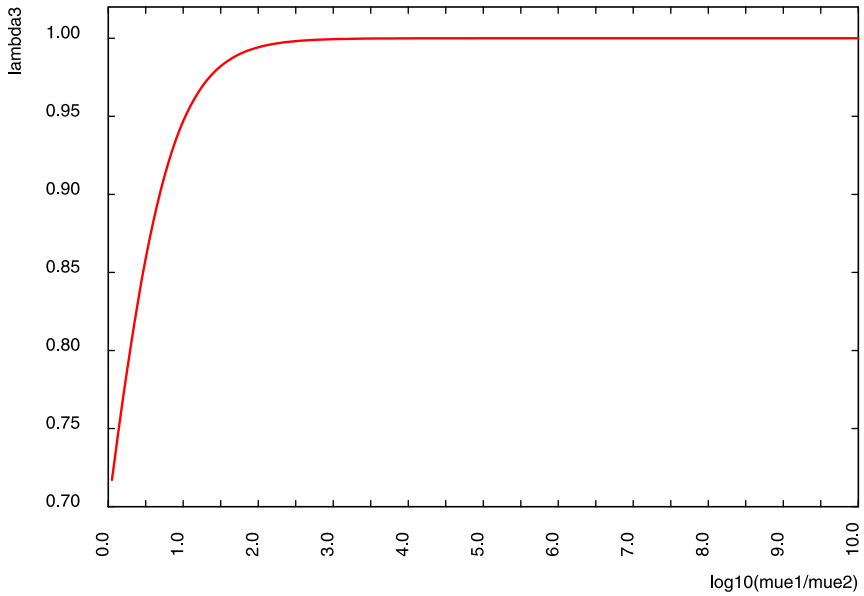


Bild 10-17: Variation von λ_3 im Bereich $m_2 = m_1$ bis $m_2 \to 0$

m_1	**Sonne**		**Sonne**		**Sonne**		**Sonne**	
m_2	**Merkur**		**Venus**		**Erde**		**Mars**	
L von	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
L_1	0.9961941	0.0038059	0.9906847	0.0093153	0.9900296	0.0099704	0.9952517	0.0047483
L_2	1.0038156	0.0038156	1.0093735	0.0093735	1.0100371	0.0100371	1.0047634	0.0047634
L_3	0.9999999	1.9999999	0.9999986	1.9999986	0.9999983	1.9999983	0.9999998	1.9999998

m_1	**Sonne**		**Sonne**		**Sonne**		**Sonne**	
m_2	**Jupiter**		**Saturn**		**Uranus**		**Neptun**	
L von	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
L_1	0.9333195	0.0666805	0.9757732	0.0242268	0.9757732	0.0242268	0.9952517	0.0047483
L_2	1.0697844	0.0697844	1.0246245	0.0246245	1.0246245	0.0246245	1.0047634	0.0047634
L_3	0.9994436	1.9994436	0.9999745	1.9999745	0.9999745	1.9999745	0.9999998	1.9999998

m_1	**Sonne**		**Erde**		**Jupiter**		**Jupiter**	
m_2	**Pluto**		**Mond**		**Io**		**Europa**	
L von	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
L_1	0.9952002	0.0047998	0.8490657	0.1509343	0.9952002	0.0047998	0.8490657	0.1509343
L_2	1.0048152	0.0048152	1.1678327	0.1678327	1.0048152	0.0048152	1.1678327	0.1678327
L_3	0.9999998	1.9999998	0.9929121	1.9929121	0.9999998	1.9999998	0.9929121	1.9929121

m_1	**Jupiter**		**Jupiter**		**Saturn**		**Saturn**	
m_2	**Ganymed**		**Callisto**		**Titan**		**Rhea**	
L von	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
L_1	0.9706707	0.0293293	0.9736170	0.0263830	0.9706707	0.0293293	0.9736170	0.0263830
L_2	1.0299143	0.0299143	1.0268554	0.0268554	1.0299143	0.0299143	1.0268554	0.0268554
L_3	0.9999545	1.9999545	0.9999670	1.9999670	0.9999545	1.9999545	0.9999670	1.9999670

m_1	**Uranus**		**Neptun**	
m_2	**Oberon**		**Triton**	
L von	m_1	m_2	m_1	m_2
L_1	0.9764764	0.0235236	0.9764764	0.0235236
L_2	1.0238984	0.0238984	1.0238984	0.0238984
L_3	0.9999767	1.9999767	0.9999767	1.9999767

Tabelle 10-4: Numerische Werte der Librationspunkte L_1, L_2, L_3 im eingeschränkten Dreikörperproblem für einige Körper des Sonnensystems, in Einheiten der mittleren Entfernung der beiden Hauptkörper m_1 und m_2

Tabelle 10-4 auf Seite 39 zeigt die Anordnungen derartiger Librationspunkte für einige Paarungen im Sonnensystem (weitere Zahlenwerte sind in Anhang I (Band V) berechnet). Es fällt auf,

dass in allen diesen Fällen $\lambda_3 \approx 1.0$. In allen Fällen ist auch $\mu_1 \gg \mu_2$, d. h. $\mu_2/\mu_1 \to 0$. Der Grenzfall wird aus dem Polynom

$$\lambda_3^5 + 2\lambda_3^4 + \lambda_3^3 - \lambda_3^2 - 2\lambda_3 - 1 = 0$$

berechnet. Eine Lösung ist $\lambda_3 = 1$, welche auch die einzige Lösung sein muss. L_3 nähert sich also für $\mu_2 \to 0$ dem Punkt $L_3(\lambda_3 = 1)$ an, der auf dem Kreis um m_1 mit dem Bezugsradius $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ liegt, wie Bild 10-16 veranschaulicht.

Bild 10-17 zeigt das Verhalten von λ_3 für verschwindende Verhältnisse $\mu_2/\mu_1 \to 0$.

10.1.1.4 Die Bewegungsgleichungen im Fall der kollinearen Punkte bei Relativbewegung

Wir betrachten (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) die Bewegung von m_3 in L_3 um m_1 und die Bewegung von m_2 um m_1. Nach der Bewegungsgleichung (10.105) auf S. 28 wird mit $\mathbf{r}_{31} = -\lambda_3 \mathbf{r}_{21}$ aus der Beziehung (10.122) auf S. 33

$$\ddot{\mathbf{r}}_{21} = -\mu_{21} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} \tag{10.136}$$

mit

$$\mu_{21} := -\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \left[\frac{1}{\lambda_3^2} + \frac{1}{(\lambda_3 + 1)^2} \right] \tag{10.137}$$

sowie

$$\ddot{\mathbf{r}}_{31} = -\mu_{31} \frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^3} \tag{10.138}$$

mit

$$\mu_{31} := -\mu_1 - \mu_3 + \lambda_3^2 \mu_2 \left[1 + \frac{1}{(\lambda_3 + 1)^2} \right] \quad . \tag{10.139}$$

Wegen $\lambda_3 = const.$ Ist auch $\ddot{\mathbf{r}}_{31} = -\lambda_3 \ddot{\mathbf{r}}_{21}$ und

$$\mathbf{r}_{31} \times \dot{\mathbf{r}}_{31} = \mathbf{c}_{31} = \lambda_3^2 \mathbf{r}_{21} \times \dot{\mathbf{r}}_{21} = \lambda_3^2 \mathbf{c}_{21} = const. \tag{10.140}$$

Die Relativbewegung der drei Körper im Fall der kollinearen Lösung erfolgt somit jeweils in einer Ebene. Da sich ein Körper, auf den eine Beschleunigung der Form $-\mu/r^2$ einwirkt, wie wir in Abschnitt 5.4 (Band II) gesehen haben, auf einem Kegelschnitt bewegt, können

$$\begin{aligned} r_{21} &= \frac{p_{21}}{1 + e_{21} \cos \upsilon_{21}} \\ r_{31} &= \frac{p_{31}}{1 + e_{31} \cos \upsilon_{31}} \end{aligned} \tag{10.141}$$

mit $r_{31} = \lambda_3 r_{21}$ angesetzt werden. Aus dem zweiten *Kepler*schen Gesetz

$$\begin{aligned} r_{21}^2\,\dot{\upsilon}_{21} &= G_{21} = |\mathbf{r}_{21}| \\ r_{31}^2\,\dot{\upsilon}_{31} &= G_{31} = |\mathbf{r}_{31}| \end{aligned} \tag{10.142}$$

folgt mit der Beziehung (10.140)

$$G_{31} = \lambda_3^2\, G_{21} \quad , \tag{10.143}$$

somit

$$\dot{\upsilon}_{31} = \dot{\upsilon}_{21}$$

und

$$\upsilon_{31} = \upsilon_{21} + const. \quad ,$$

wobei wegen der Kollinearität die Konstante nur 0° oder 180° sein kann. Wegen der Proportionalität $r_{31} = \lambda_3\, r_{21}$ befinden sich die zwei Körper gleichzeitig im Perizentrum, so dass die Konstante also nur 0° sein kann. Es ist mithin

$$\upsilon_{31} = \upsilon_{21} =: \upsilon \quad . \tag{10.144}$$

Insbesondere folgt für $\upsilon = 90°$ aus der Gleichung (10.141)

$$p_{31} = \lambda_3\, p_{21} \tag{10.145}$$

und dann mit $\upsilon = 0°$ für die Exzentrizitäten

$$e_{31} = e_{21} \quad . \tag{10.146}$$

Wir können allgemein folgern:

- *Im Fall der kollinearen Lösung des Dreikörperproblems erfolgt die Relativbewegung zweier Körper um den dritten in derselben Ebene auf ähnlichen Kegelschnitten, deren Brennpunkt im Massenschwerpunkt des dritten Körpers liegt.*

BEISPIELE: Für das Massenverhältnis

$$m_1 : m_2 : m_3 = 3:2:1$$

und die Anordnung

$$m_3 - m_1 - m_2$$

wird (siehe Beispiel im vorhergehenden Unterabschnitt) $\lambda_3 = 0.8918814719$. Im Fall einer kreisförmigen und elliptischen Bahn beträgt das Verhältnis der großen Bahnhalbachsen (nach Gleichung (10.145) und $p = a\,(1 - e^2)$)

$$a_{31} = 0.8918814719\, a_{21} \quad ,$$

im hyperbolischen Fall das Verhältnis der Perizentrumsdistanzen

$$q_{31} = 0.8918814719\, q_{21} \quad .$$

Die relativen Ortsvektoren bezogen auf m_1 werden nach Gleichung (10.122) auf S. 33 die Relationen

$$\mathbf{r}_{31} \;=\; -\lambda_3\,\mathbf{r}_{21} \;=\; -0.8918814719\,\mathbf{r}_{21} \quad ,$$

somit für den Kegelschnittparameter

$$p_{31} \;=\; 0.8918814719\,p_{21} \quad .$$

Die Bahn von m_2 um m_1 kann daher konstruiert werden aus

$$r_{21}\begin{bmatrix}\cos\upsilon\\ \sin\upsilon\end{bmatrix}$$

und die von m_3 um m_1 aus

$$r_{31}\begin{bmatrix}\cos(\upsilon+180°)\\ \sin(\upsilon+180°)\end{bmatrix} \;=\; -\,r_{31}\begin{bmatrix}\cos\upsilon\\ \sin\upsilon\end{bmatrix} \quad .$$

Wird die Bewegung von m_1 und m_3 um m_2 betrachtet, gilt nach Gleichung (10.123) auf S. 33

$$\mathbf{r}_{32} \;=\; \left(\lambda_3+1\right)\mathbf{r}_{12} \;=\; 1.8918814719\,\mathbf{r}_{12}$$

und für den Kegelschnittparameter

$$p_{32} \;=\; 1.8918814719\,p_{12} \quad .$$

Die beiden Bahnen werden konstruiert aus

$$r_{21}\begin{bmatrix}-\cos\upsilon\\ -\sin\upsilon\end{bmatrix} \quad , \quad r_{31}\begin{bmatrix}-\cos\upsilon\\ -\sin\upsilon\end{bmatrix} \quad .$$

Für die Bewegung von m_1 und m_2 um m_3 gilt schließlich mit den Gleichungen (10.122) und (10.123) auf S. 33

$$\mathbf{r}_{23} \;=\; \frac{\lambda_3+1}{\lambda_3}\,\mathbf{r}_{13} \;=\; 1.878625973\,\mathbf{r}_{13}$$

und für die Kegelschnittparameter

$$p_{23} \;=\; 1.891881472\,p_{12} \quad , \quad p_{13} \;=\; 0.891881472\,p_{12} \quad ,$$

wenn in allen Fällen p_{12} als Einheit gewählt wird. Die beiden Bahnen werden konstruiert aus

$$r_{13}\begin{bmatrix}\cos\upsilon\\ \sin\upsilon\end{bmatrix} \quad , \quad r_{23}\begin{bmatrix}\cos\upsilon\\ \sin\upsilon\end{bmatrix} \quad .$$

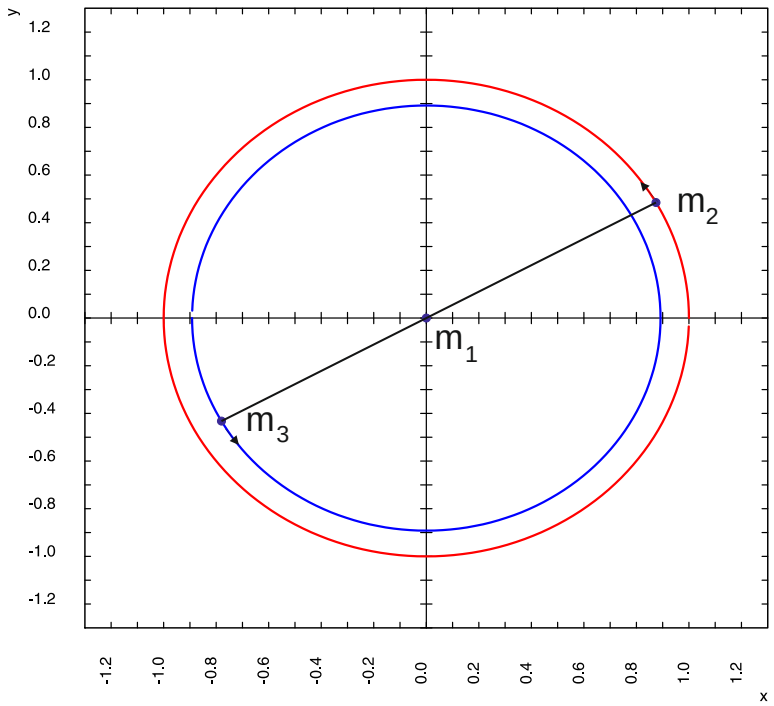


Bild 10-18: Relative kollineare Bewegung für den kreisförmigen Fall im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit $\lambda_3 = 0.891881472$, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_2 und m_3 um m_1. Es ist a_{21}=1, a_{31}=0.891881472 a_{21}.

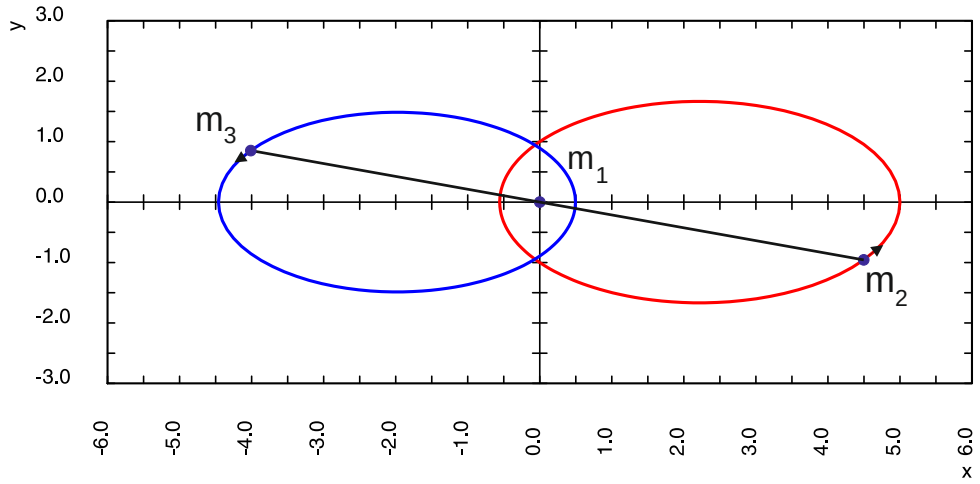


Bild 10-19: Relative kollineare Bewegung für einen elliptischen Fall (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit $\lambda_3 = 0.891881472$, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_2 und m_3 um m_1. Es ist a_{21}=1, a_{31}=0.891881472 a_{21}.

Bild 10-18 auf S. 43 zeigt die relativen Bahnen von m_2 und m_3 um m_1 im kreisförmigen Fall, Bild 10-19 auf S. 43 in einem elliptischen Fall (e = 0.8) und Bild 10-22 auf S. 43 in einem hyperbolischen Fall (e = 2.0). Für den elliptischen Fall werden außerdem die Bewegung von m_1 und m_3 um m_2 in Bild 10-20 auf S. 44 und von m_1 und m_2 um m_3 in Bild 10-21 auf S. 44 dargestellt. ■

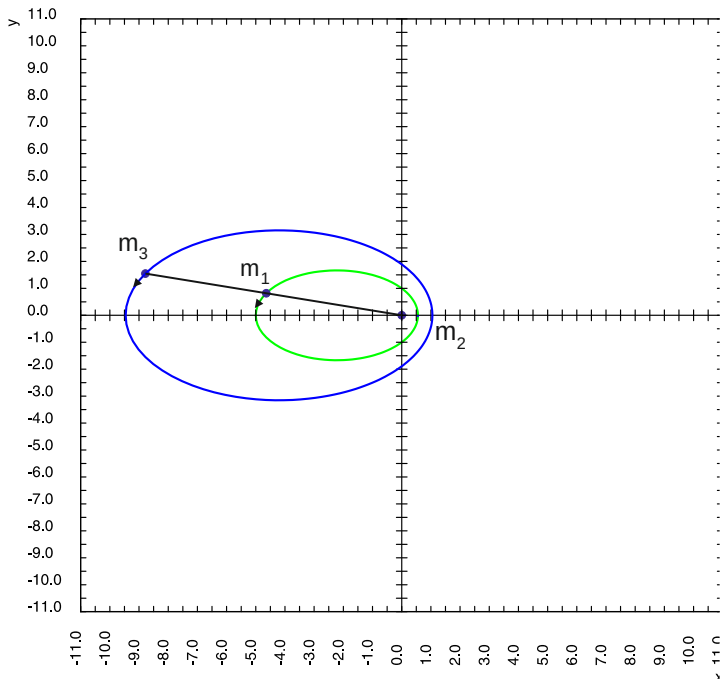


Bild 10-20: Relative kollineare Bewegung für einen elliptischen Fall (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.891881472, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_1 und m_3 um m_2. Es ist a_{32} =1.891881472 a_{21}.

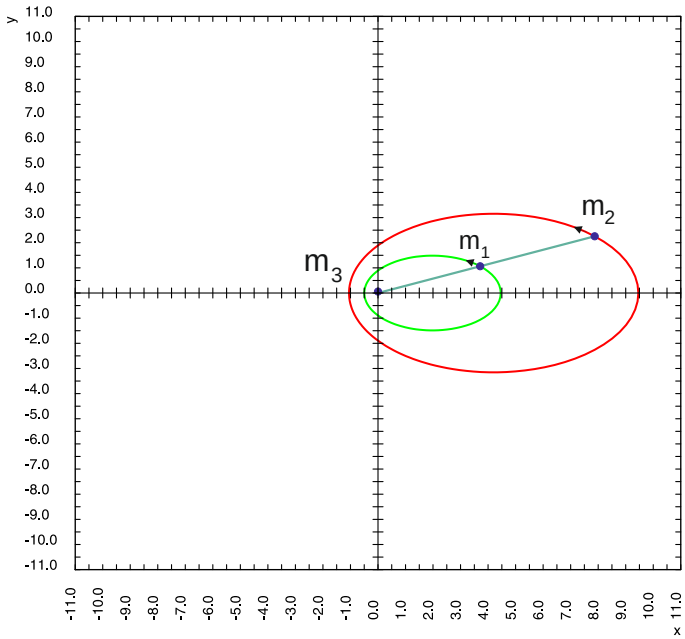


Bild 10-21:Relative kollineare Bewegung für einen elliptischen Fall (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.891881472, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_1 und m_2 um m_3. Es ist a_{31} =0.8918814719 a_{21}, a_{23} =1.8918814719 a_{12}.

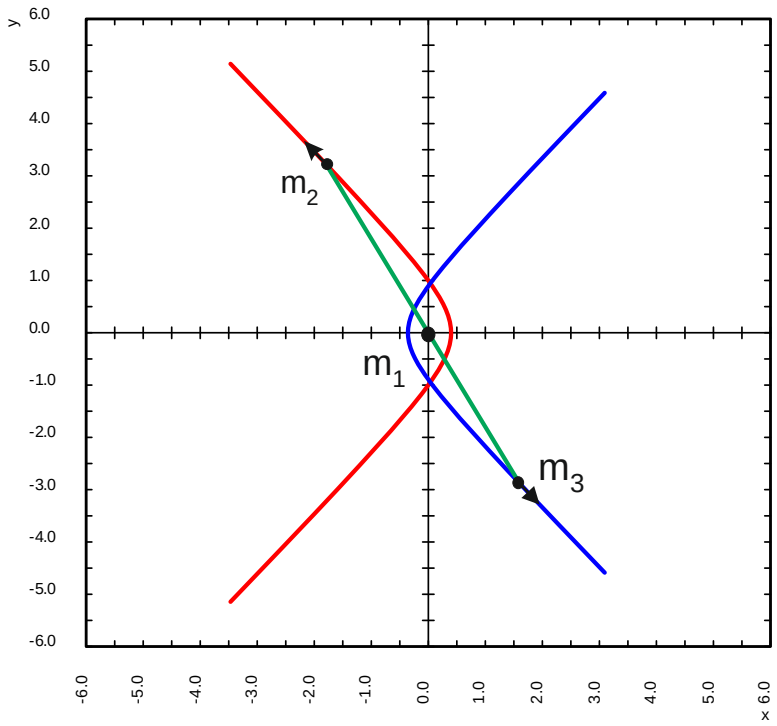


Bild 10-22:Relative kollineare Bewegung für einen hyperbolischen Fall (e = 2.0) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3$ = 3:2:1 mit λ_3 = 0.891881472, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_2 und m_3 um m_1. Es ist q_{31}=0.891881472 q_{21}.

10.1.1.5 Der Fall der kollinearen Punkte bei absoluter Bewegung

Im Fall der absoluten Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt sind die Schwerpunkt-bezogenen Ortsvektoren $\mathbf{R}_i$ der drei Körper in Gleichung (10.112) auf S. 29 gegeben. Der Schwerpunktsatz (10.113) auf S. 29 hat die Form

$$m^i \mathbf{R}_i = 0 \quad ,$$

woraus

$$\mathbf{R}_3 = \frac{m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2}{m_3} \tag{10.147}$$

wird. Gleichung (10.112) auf S. 29 gibt den Zusammenhang mit den relativen Ortsvektoren zwischen den drei Körpern

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{21} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_{31} &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 \quad . \end{aligned} \tag{10.148}$$

Wird (ohne Einschränkung) m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 angenommen, wird nach Gleichung (10.105) auf S. 28

$$\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1 = -\lambda_3 \left(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \right) \quad , \tag{10.149}$$

woraus mit Gleichung (10.147) wird

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2 &= \frac{m_1+(\lambda_3+1)\,m_3}{\lambda_3\,m_3-m_2}\,\mathbf{R}_1 \\
\mathbf{R}_3 &= -\frac{\lambda_3\,m_1+(\lambda_3+1)\,m_2}{\lambda_3\,m_3-m_2}\,\mathbf{R}_1 = \\
&= -\frac{\lambda_3\,m_1+(\lambda_3+1)\,m_2}{m_1+(\lambda_3+1)\,m_3}\,\mathbf{R}_2 \quad .
\end{aligned} \tag{10.150}$$

Hier können die Beziehungen eingeführt werden

$$\begin{aligned}
\lambda_{II} &:= \left|\frac{m_1+(\lambda_3+1)\,m_3}{\lambda_3\,m_3-m_2}\right| \\
\lambda_{III} &:= \left|-\frac{\lambda_3\,m_1+(\lambda_3+1)\,m_2}{m_1+(\lambda_3+1)\,m_3}\right| \quad .
\end{aligned} \tag{10.151}$$

Mit den vorstehenden Ausdrücken können die Beziehungen für die relativen Ortsvektoren im Fall der kollinearen Lösung des Dreikörperproblems zusammengestellt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2 &= \frac{m_3}{m_2-\lambda_3\,m_3}\,\mathbf{R}_1 \\
\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_3 &= \frac{\lambda_3\,(m_1+m_2+m_3)}{\lambda_3\,m_3-m_2}\,\mathbf{R}_1 \\
\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1 &= \frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+(\lambda_3+1)\,m_3}\,\mathbf{R}_2 \\
\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_3 &= \frac{(\lambda_3+1)\,(m_1+m_2+m_3)}{m_1+(\lambda_3+1)\,m_3}\,\mathbf{R}_2 \\
\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_1 &= \frac{\lambda_3\,(m_1+m_2+m_3)}{\lambda_3\,m_1+(\lambda_3+1)\,m_2}\,\mathbf{R}_3 \\
\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_2 &= \frac{(\lambda_3+1)\,(m_1+m_2+m_3)}{\lambda_3\,m_1+(\lambda_3+1)\,m_2}\,\mathbf{R}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{10.152}$$

Die absoluten Bewegungsgleichungen (10.120) auf S. 31 lauten im Fall der kollinearen Lösung daher

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{R}}_1 &= -\mu_I\,\frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|^3} \\
\ddot{\mathbf{R}}_2 &= -\mu_{II}\,\frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|^3} \\
\ddot{\mathbf{R}}_3 &= -\mu_{III}\,\frac{\mathbf{R}_3}{|\mathbf{R}_3|^3}
\end{aligned} \tag{10.153}$$

mit den im Fall konstanter Massen konstanten Parametern

$$\begin{aligned}
\mu_I &:= \left(m_2 - \lambda_3 m_3\right)^2 \left[\frac{\mu_2}{m_3^2} + \frac{\mu_3}{\lambda_3^2 \left(m_1 + m_2 + m_3\right)^2}\right] \\
\mu_{II} &:= \left[\frac{m_1 + \left(\lambda_3 + 1\right) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right]^2 \left[\mu_1 + \frac{\mu_3}{\left(\lambda_3 + 1\right)^2}\right] \\
\mu_{III} &:= \left[\frac{\lambda_3 m_1 + \left(\lambda_3 + 1\right) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right]^2 \left[\frac{\mu_1}{\lambda_3^2} + \frac{\mu_2}{\left(\lambda_3 + 1\right)^2}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{10.154}$$

Mit λ_{II} , λ_{III} aus den Definitionsgleichungen (10.151) wird

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2 \times \dot{\mathbf{R}}_2 &:= \mathbf{c}_{II} = \lambda_{II}^2 \, \mathbf{R}_1 \times \dot{\mathbf{R}}_1 =: \lambda_{II}^2 \, \mathbf{c}_I \\
\mathbf{R}_3 \times \dot{\mathbf{R}}_3 &:= \mathbf{c}_{III} = \lambda_{III}^2 \, \mathbf{R}_1 \times \dot{\mathbf{R}}_1 = \lambda_{III}^2 \, \mathbf{c}_I \quad ,
\end{aligned} \tag{10.155}$$

also

$$\mathbf{c}_I \times \mathbf{c}_{II} = \mathbf{c}_I \times \mathbf{c}_{III} = 0 \quad , \tag{10.156}$$

die Bewegungen der drei Körper erfolgen also in zueinander parallelen Ebenen. Da für alle drei Körper offenbar das quadratische Beschleunigungsgesetz gilt, bewegen sie sich notwendig auf Kegelschnitten

$$\begin{aligned}
R_I &:= \left|\mathbf{R}_I\right| = \frac{p_I}{1 + e_I \cos \upsilon_I} \\
R_{II} &:= \left|\mathbf{R}_{II}\right| = \frac{p_{II}}{1 + e_{II} \cos \upsilon_{II}} \\
R_{III} &:= \left|\mathbf{R}_{III}\right| = \frac{p_{III}}{1 + e_{III} \cos \upsilon_{III}}
\end{aligned} \tag{10.157}$$

und es gilt der Flächensatz

$$\begin{aligned}
R_I^2 \, \dot{\upsilon}_I &= \left|\mathbf{c}_I\right| =: G_I \\
R_{II}^2 \, \dot{\upsilon}_{II} &= \left|\mathbf{c}_{II}\right| =: G_{II} \\
R_{III}^2 \, \dot{\upsilon}_{III} &= \left|\mathbf{c}_{III}\right| =: G_{III} \quad ,
\end{aligned} \tag{10.158}$$

woraus

$$\dot{\upsilon}_I = \dot{\upsilon}_{II} = \dot{\upsilon}_{III}$$

mit

$$\upsilon_I = \upsilon_{II} + c_{II} = \upsilon_{III} + c_{III}$$

folgt. Wegen der Kollinearität der drei Körper und der Proportionalitäten (10.150) haben die Konstanten den Wert $c_{II} = c_{III} = 0°$, also

$$\upsilon_I = \upsilon_{II} = \upsilon_{III} = \upsilon \quad . \tag{10.159}$$

Insbesondere wird

$$\begin{aligned}
r_{II}\left(\upsilon_{II} = 90°\right) &= p_{II} = \lambda_{II} \, r_I\left(\upsilon_I = 90°\right) = \lambda_{II} \, p_I \\
r_{III}\left(\upsilon_{III} = 90°\right) &= p_{III} = \lambda_{III} \, r_I\left(\upsilon_I = 90°\right) = \lambda_{III} \, p_I
\end{aligned} \tag{10.160}$$

und

$$r_{II}\left(\upsilon_{II}=0°\right) = \frac{p_{II}}{1+e_{II}} = \lambda_{II}\, r_I\left(\upsilon_I=0°\right) = \lambda_{II}\,\frac{p_I}{1+e_I}$$

$$r_{III}\left(\upsilon_{III}=0°\right) = \frac{p_{III}}{1+e_{III}} = \lambda_{III}\, r_I\left(\upsilon_I=0°\right) = \lambda_{III}\,\frac{p_I}{1+e_I} \quad ,$$

also auch

$$e_{III} = e_{II} = e_I = 0 \quad . \tag{10.161}$$

- *Im Fall der kollinearen Lösung des Dreikörperproblems erfolgt die absolute Bewegung der drei Körper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt in genau einer Ebene auf ähnlichen Kegelschnitten mit dem Schwerpunkt als gemeinsamen Brennpunkt.*

BEISPIELE: Für das Massenverhältnis

$$m_1 : m_2 : m_3 = 3:2:1$$

unter der Annahme, dass sich m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 befinde, somit die Anordnung $m_3 - m_1 - m_2$ besteht. Nach den früheren Beispielen ist λ_3 = 0.8918814719 und es wird mit den Gleichungen (10.151)

$$\lambda_{II} := \frac{m_1+(\lambda_3+1)\,m_3}{\lambda_3\, m_3 - m_2} = -4.414583231$$

$$\lambda_{III} := -\frac{\lambda_3\, m_1 + (\lambda_3+1)\, m_2}{\lambda_3\, m_3 - m_2} = 5.829166463 \quad .$$

Die Schwerpunkt-bezogenen Ortsvektoren lauten mit den Gleichungen (10.150) auf S. 46

$$\mathbf{R}_2 = -4.4\,\mathbf{R}_1 \quad , \quad \mathbf{R}_3 = 5.8\,\mathbf{R}_1 \quad .$$

Für die Kegelschnittbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt *S* haben die Kegelschnittparameter die Relationen

$$m_1 \text{ um } S: \quad p_I = 1.0$$

$$m_2 \text{ um } S: \quad p_{II} = 4.4\,p_I$$

$$m_3 \text{ um } S: \quad p_{III} = 5.8\,p_I \quad .$$

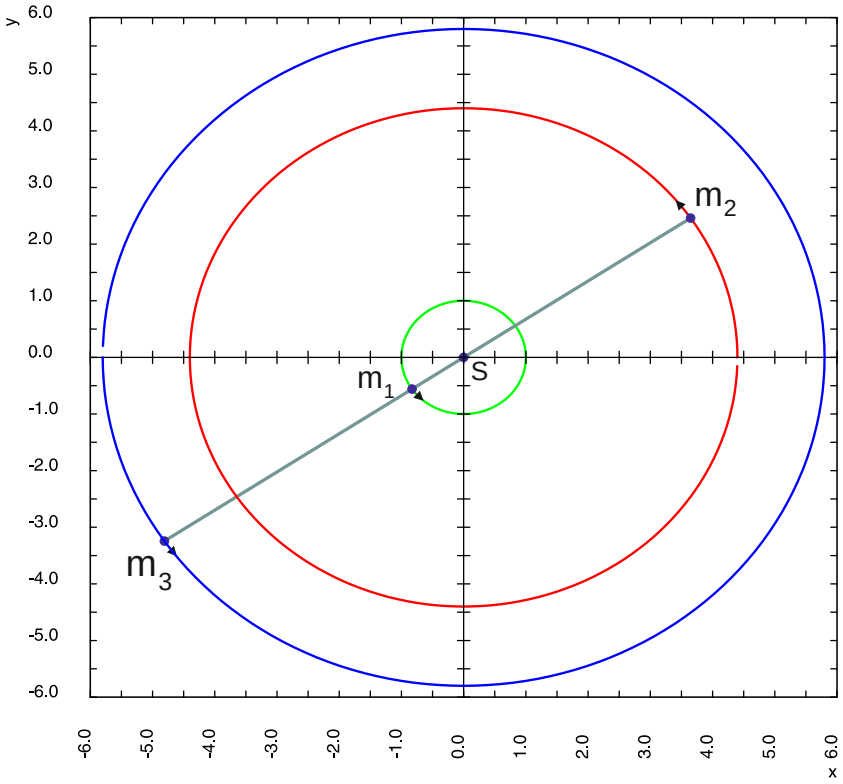


Bild 10-23: Absolute kollineare Bewegung für kreisförmige Bahnen im Dreikörperproblem um den Schwerpunkt S für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit $\lambda_3 = 0.8918814719$, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2. Es ist $a_{II} = 4.4 a_I$ und $a_{III} = 5.8 a_I$.

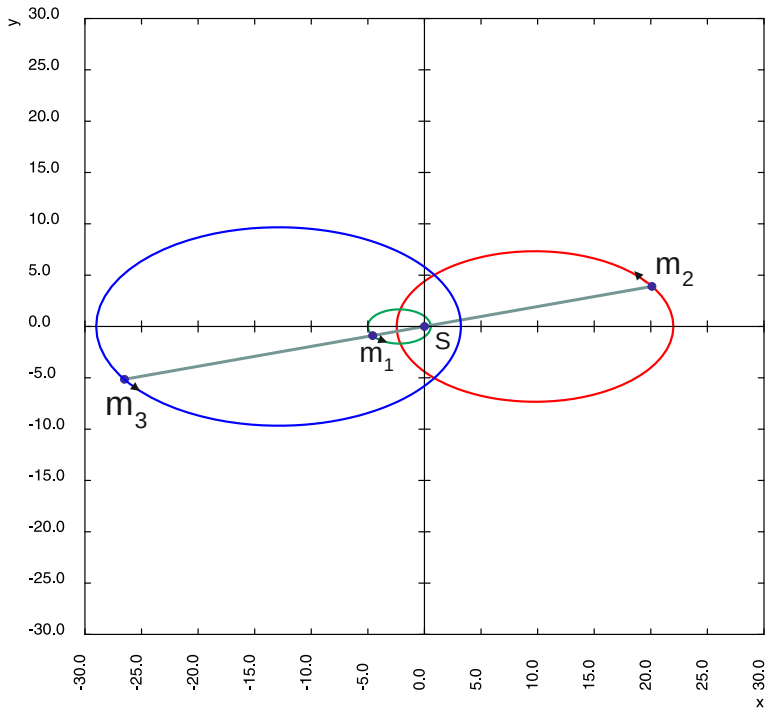


Bild 10-24 : Absolute kollineare Bewegung für elliptische Bewegung ($e = 0.8$) im Dreikörperproblem um den Schwerpunkt S für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit $\lambda_3 = 0.8918814719$, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2. Es ist $a_{II} = 4.4 a_I$ und $a_{III} = 5.8 a_I$.

Die Bahnen werden konstruiert aus

$$m_1: \left|\mathbf{R}_1\right| \begin{bmatrix} \cos\upsilon \\ \sin\upsilon \end{bmatrix} \quad , \quad m_2: \left|\mathbf{R}_2\right| \begin{bmatrix} \cos\upsilon \\ \sin\upsilon \end{bmatrix} \quad , \quad m_3: \left|\mathbf{R}_3\right| \begin{bmatrix} \cos\upsilon \\ \sin\upsilon \end{bmatrix} \quad .$$

Bild 10-23 auf S. 49 bis Bild 10-25 zeigen die entsprechenden Bahnen im kreisförmigen, einem elliptischen Fall (e = 0.8) und einem hyperbolischen Fall (e = 1.5). ■

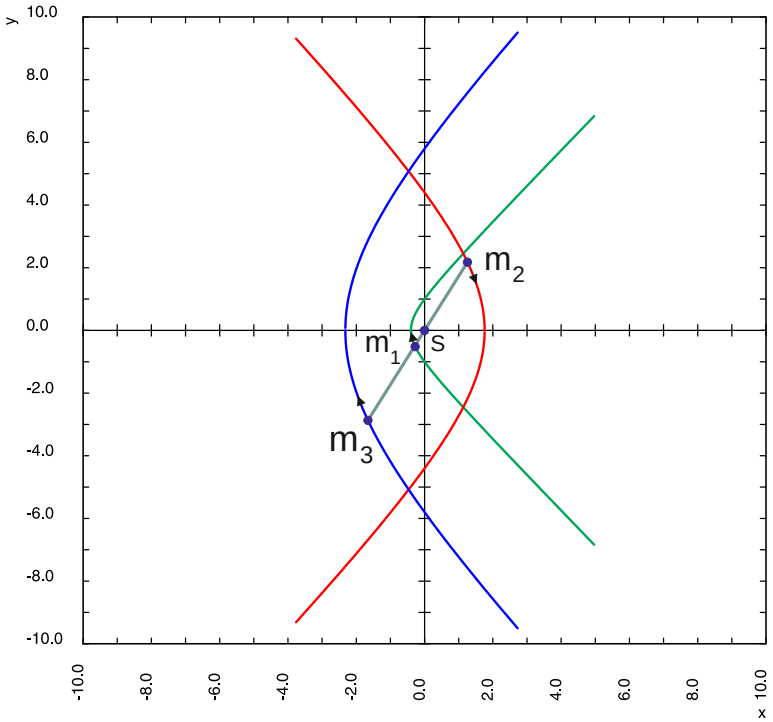


Bild 10-25: Absolute kollineare Bewegung für hyperbolische Bewegung (e = 1.5) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit $\lambda_3 = 0.8918814719$, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2. Es ist $p_{II} = 4.4\, p_I$ und $p_{III} = 5.8\, p_I$.

12.5.2 Die äquidistante exakte Lösung des Dreikörperproblems

Die von *J. L. Lagrange* selber gefundene exakte Lösung des Dreikörperproblems im Fall in einem gleichseitigen Dreieck angeordneten Massen gilt, wenn sich die drei Massen stets in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks befinden, wenn ihre Entfernungen voneinander also stets gleich sind:

$$\left|\mathbf{r}_{12}\right| = \left|\mathbf{r}_{13}\right| = \left|\mathbf{r}_{23}\right| =: r \quad . \tag{10.162}$$

10.1.1.6 Relativbewegung im Fall der äquidistanten Punkte

Aus den Gleichungen (10.105) auf S. 28 der Relativbewegung der Körper m_2 und m_3 um m_1 (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) erhält man mit der Bedingung der Äquidistanz (10.162)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{21} &= -\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{r^3}\,\mathbf{r}_{21} \\ \ddot{\mathbf{r}}_{31} &= -\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{r^3}\,\mathbf{r}_{31} \quad . \end{aligned} \tag{10.163}$$

Dieser Fall kann also wie im kollinearen Fall unmittelbar auf die Zweikörperbewegung zurückgeführt werden. Da

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{21}\times\dot{\mathbf{r}}_{21} &= \mathbf{c}_{21} \quad (= \textit{const.}) \\ \mathbf{r}_{31}\times\dot{\mathbf{r}}_{31} &= \mathbf{c}_{31} \quad (= \textit{const.}) \end{aligned} \tag{10.164}$$

bewegen sich die beiden Körper je in einer Ebene. Da der Bezugskörper (m_1) stets in beiden Ebenen liegt, müssen diese Ebenen identisch sein. Die Bewegung erfolgt also notwendig auf Kegelschnitten

$$\begin{aligned} r_{21} &= \left|\mathbf{r}_{21}\right| = \frac{p_{21}}{1+e_{21}\cos\upsilon_{21}} = r \\ r_{31} &= \left|\mathbf{r}_{31}\right| = \frac{p_{31}}{1+e_{31}\cos\upsilon_{31}} = r \end{aligned} \tag{10.165}$$

und genügen dem Flächensatz

$$\begin{aligned} r^2\dot{\upsilon}_{21} &= G_{21} = \left|\mathbf{c}_{21}\right| \\ r^2\dot{\upsilon}_{31} &= G_{31} = \left|\mathbf{c}_{31}\right| \end{aligned} \tag{10.166}$$

und dem dritten Keplerschen Gesetz

$$\begin{aligned} G_{21} &= \sqrt{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\,\sqrt{p_{21}} \\ G_{31} &= \sqrt{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\,\sqrt{p_{31}} \quad , \end{aligned} \tag{10.167}$$

somit

$$p_{31} = \frac{G_{31}^2}{G_{21}^2}\,p_{21} \quad .$$

Aus

$$p_{21}\left(1+e_{31}\cos\upsilon_{31}\right) = p_{31}\left(1+e_{21}\cos\upsilon_{21}\right)$$

wird für $\upsilon_{31}=90°$

$$p_{21} = p_{31}\left(1+e_{21}\cos\upsilon_{21}\right)$$

und für $\upsilon_{21}=90°$

$$p_{21}\left(1+e_{31}\cos\upsilon_{31}\right) = p_{31} \quad .$$

Da aber in diesem Fall nur υ_{21} und υ_{31} variabel sind, können diese beiden Gleichungen nur für

$$p_{21} = p_{31} \tag{10.168}$$

erfüllt sein. Dann ist auch

$$e_{21} = e_{31} \tag{10.169}$$

und es muss

$$\cos\upsilon_{21} \;=\; \cos\upsilon_{31}$$

sein. Da wegen $r_{21} = r_{31}$ die beiden Körper gleichzeitig im Perizentrum sind, muss auch

$$\upsilon_{21} \;=\; \upsilon_{31} \tag{10.170}$$

sein.

➢ *Im Fall der äquidistanten Lösung des Dreikörperproblems erfolgt die (relative) Bewegung zweier Körper um den dritten in einer Ebene und auf kongruenten Kegelschnitten, deren gemeinsamer Brennpunkt im Massenmittelpunkt des dritten Körpers liegt.*

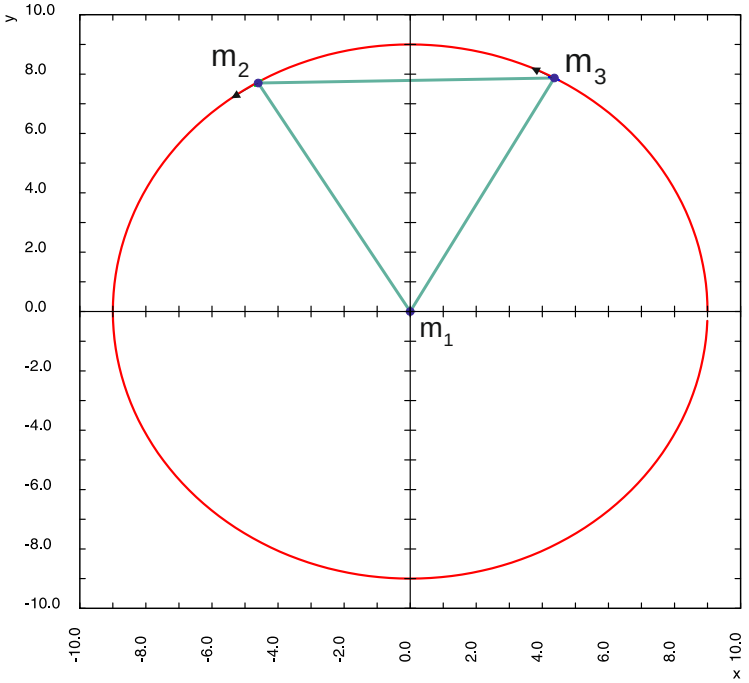


Bild 10-26: Relative äquidistante kreisförmige Bewegung im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$. Bewegung von m_2 und von m_3 um m_1 .

BEISPIELE: Die relativen Bahnen sind in der äquidistanten exakten Lösung des Dreikörperproblems vom Massenverhältnis der drei Körper unabhängig. Die einzelnen Bahnen werden mit folgenden Vektoren konstruiert:

$$m_3 \text{ um } m_1 : \; r\begin{bmatrix}\cos\upsilon\\ \sin\upsilon\end{bmatrix} \quad , \quad m_2 \text{ um } m_1 : \; r\begin{bmatrix}\cos(\upsilon{+}60°)\\ \sin(\upsilon{+}60°)\end{bmatrix} \quad .$$

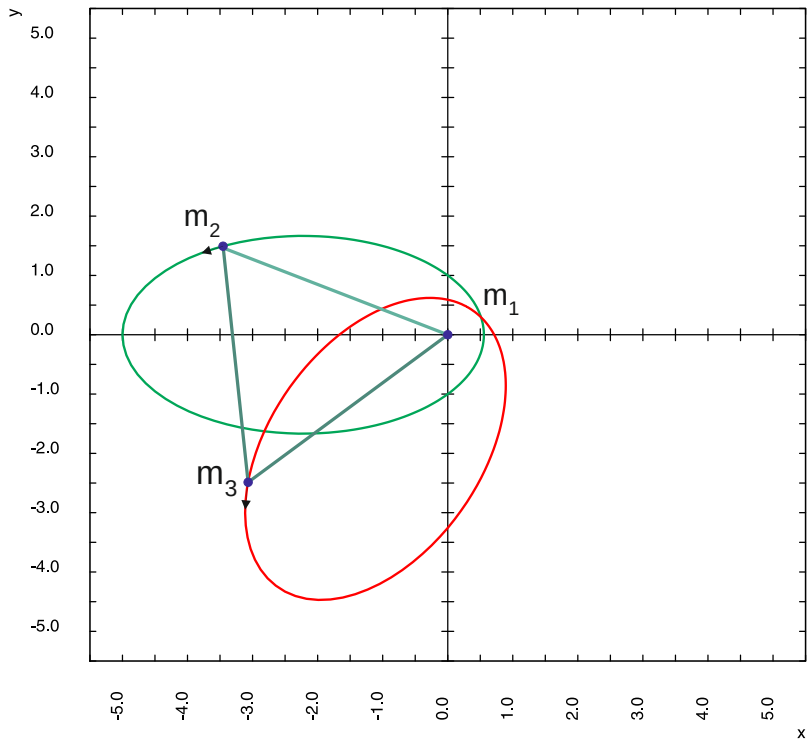


Bild 10-27: Relative äquidistante elliptische Bewegung (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$. Bewegung von m_2 und von m_3 um m_1 .

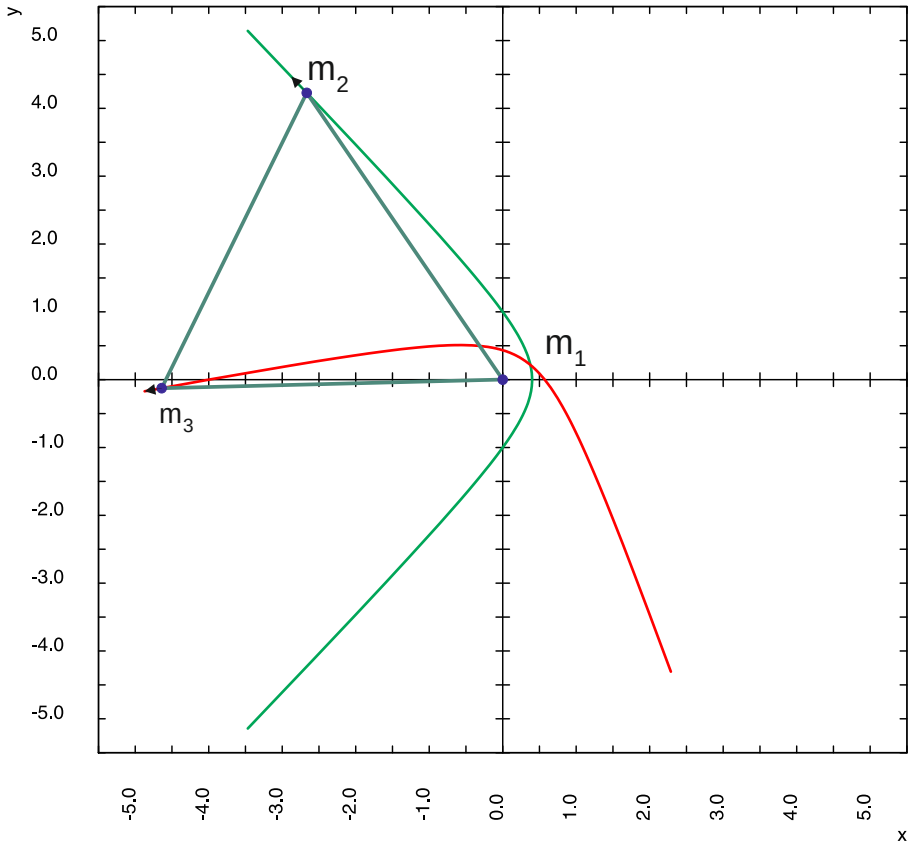


Bild 10-28: Relative äquidistante hyperbolische Bewegung (e = 1.5) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$. Bewegung von m_2 und von m_3 um m_1 .

Bild 10-26 auf S. 52 zeigt die relativen Bahnen im Fall einer Kreisbahn, Bild 10-27 auf S. 53 im Fall einer elliptischen Bahn (e = 0.8), Bild 10-28 auf S. 53 im Fall einer hyperbolischen Bahn (e = 1.5). ■

10.1.1.7 Absolute Bewegung um den Schwerpunkt im Fall der äquidistanten Punkte

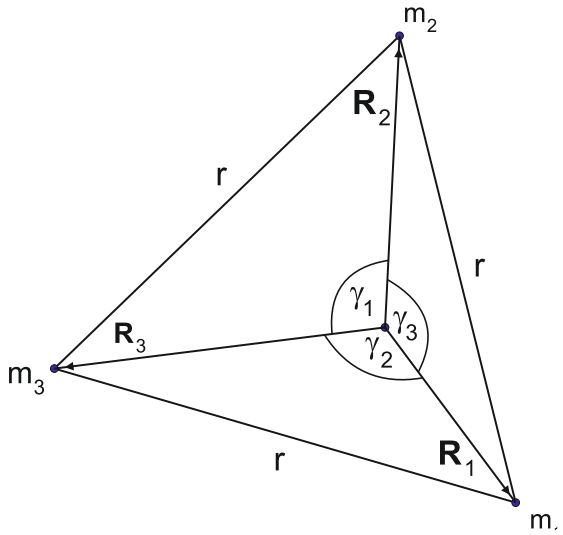


Bild 10-29: Absolute Bewegung der äquidistanten Punkte im Dreikörperproblem um den gemeinsamen Schwerpunkt

Setzt man die Bedingung (10.162) in die Schwerpunkt-bezogene Bewegungsgleichung (10.120) auf S. 31 ein, folgen die Bewegungsgleichungen der absoluten Bewegung im Fall der äquidistanten Lösung des Dreikörperproblems

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_1 &= -\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{r^3}\mathbf{R}_1 \\ \ddot{\mathbf{R}}_2 &= -\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{r^3}\mathbf{R}_2 \\ \ddot{\mathbf{R}}_3 &= -\frac{\mu_1+\mu_2+\mu_3}{r^3}\mathbf{R}_3 \quad . \end{aligned} \tag{10.171}$$

Die drei Körper bewegen sich je in einer durch

$$\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{c}_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{10.172}$$

bestimmten Ebene. Aus dem Schwerpunktsatz

$$m^i \mathbf{R}_i = 0$$

folgt

$$\left(m_1+m_2+m_3\right)\mathbf{R_1} + m_2\left(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1\right) + m_3\left(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_1\right) = 0 \quad .$$

Da die drei Körper sich in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks befinden sollen, ist

$$\left(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1\right)\left(\mathbf{R}_3-\mathbf{R}_1\right) \;=\; \frac{r^2}{2}$$

und es bleiben entsprechend

$$\begin{aligned} r &= \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{m_2^2+m_2\,m_3+m_3^2}}\left|\mathbf{R}_1\right| \;=:\; \Lambda_1\left|\mathbf{R}_1\right| \\ r &= \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{m_2^2+m_2\,m_3+m_3^2}}\left|\mathbf{R}_2\right| \;=:\; \Lambda_2\left|\mathbf{R}_2\right| \\ r &= \frac{m_1+m_2+m_3}{\sqrt{m_2^2+m_2\,m_3+m_3^2}}\left|\mathbf{R}_3\right| \;=:\; \Lambda_3\left|\mathbf{R}_3\right| \quad . \end{aligned} \tag{10.173}$$

Die Bewegungsgleichungen der absoluten Bewegung können daher im Fall der äquidistanten Punkte auf die Bewegungsgleichungen im eingeschränkten Zweikörperproblem zurückgeführt werden

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_1 &= -\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)\frac{\sqrt{m_2^2+m_2\,m_3+m_3^2}}{\left(m_1+m_2+m_3\right)^3}\,\frac{\mathbf{R}_1}{\left|\mathbf{R}_1\right|^3} \;=:\; \mu_I\,\frac{\mathbf{R}_1}{\left|\mathbf{R}_1\right|^3} \\ \ddot{\mathbf{R}}_2 &= -\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)\frac{\sqrt{m_2^2+m_2\,m_3+m_3^2}}{\left(m_1+m_2+m_3\right)^3}\,\frac{\mathbf{R}_2}{\left|\mathbf{R}_2\right|^3} \;=:\; \mu_{II}\,\frac{\mathbf{R}_2}{\left|\mathbf{R}_2\right|^3} \\ \ddot{\mathbf{R}}_3 &= -\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)\frac{\sqrt{m_2^2+m_2\,m_3+m_3^2}}{\left(m_1+m_2+m_3\right)^3}\,\frac{\mathbf{R}_3}{\left|\mathbf{R}_3\right|^3} \;=:\; \mu_{III}\,\frac{\mathbf{R}_3}{\left|\mathbf{R}_3\right|^3} \quad . \end{aligned} \tag{10.174}$$

Die drei Körper bewegen sich daher je auf einem Kegelschnitt

$$\left|\mathbf{R}_i\right| \;=\; \frac{p_i}{1+e_i\cos\upsilon_i} \qquad (i=1,2,3) \tag{10.175}$$

um den gemeinsamen Schwerpunkt, in den der gemeinsame Brennpunkt der drei Kegelschnitte fällt, daher in genau einer (gemeinsamen) Ebene.

Die Zwischenwinkel γ_i zwischen den Schwerpunkt-bezogenen Radiusvektoren $\mathbf{R}_i$ können nach Bild 10-29 mit den Relationen Λ_i aus den Gleichungen (10.173) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \cos\gamma_3 &= \frac{\Lambda_1\Lambda_2}{2}\left(\frac{1}{\Lambda_1^2}+\frac{1}{\Lambda_2^2}-1\right) \\ \cos\gamma_1 &= \frac{\Lambda_2\Lambda_3}{2}\left(\frac{1}{\Lambda_2^2}+\frac{1}{\Lambda_3^2}-1\right) \\ \cos\gamma_2 &= \frac{\Lambda_3\Lambda_1}{2}\left(\frac{1}{\Lambda_3^2}+\frac{1}{\Lambda_1^2}-1\right) \quad . \end{aligned} \tag{10.176}$$

Ferner folgt

$$\left|\mathbf{R}_2\right| \;=\; \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}\left|\mathbf{R}_1\right| \quad , \quad \left|\mathbf{R}_3\right| \;=\; \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3}\left|\mathbf{R}_1\right| \tag{10.177}$$

und deshalb, da die p_i in den Kegelschnittbeziehungen (10.175) konstant sind,

$$p_2 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} p_1 \quad , \quad p_3 = \frac{\Lambda_1}{\Lambda_3} p_1 \tag{10.178}$$

sowie für die Exzentrizitäten

$$e_1 = e_2 = e_3 =: e \tag{10.179}$$

und die wahren Anomalien

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 =: \upsilon \quad . \tag{10.180}$$

➢ *Im Fall der äquidistanten Lösung des Dreikörperproblems erfolgt die absolute Bewegung der drei Körper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt in einer Ebene und auf ähnlichen Kegelschnitten, deren Brennpunkt im Massenschwerpunkt liegt.*

BEISPIELE: Für das Massenverhältnis

$$m_1 : m_2 : m_3 = 3:2:1$$

ergeben die Gleichungen (10.173) auf S. 55 die Relationen

$$\Lambda_3 = 1.38 \; , \; \Lambda_2 = 1.66 \; , \; \Lambda_1 = 2.27 \quad ,$$

somit die Zwischenwinkel aus den Gleichungen (10.176) auf S. 55

$$\gamma_3 = 147°.00 \quad , \quad \gamma_2 = 115°.69 \quad , \quad \gamma_1 = 97°.31 \quad .$$

(Probe: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 360°$). Zur Konstruktion der absoluten Bahnen werde jeweils die Bahn von m_1 als Maßstab verwendet. Dann ergeben die Beziehungen (10.178)

$$p_2 = 0.83\, p_3 \quad , \quad p_1 = 0.61\, p_3 \quad .$$

Die Zeichnung wird mit folgenden Vektoren durchgeführt:

$$m_1 : \; R_1 \begin{bmatrix} \cos\upsilon \\ \sin\upsilon \end{bmatrix} \quad , \quad m_2 : \; |R_2| \begin{bmatrix} \cos(\upsilon+\gamma_3) \\ \sin(\upsilon+\gamma_3) \end{bmatrix} \quad , \quad m_3 : \; R_3 \begin{bmatrix} \cos(\upsilon-\gamma_2) \\ \sin(\upsilon-\gamma_2) \end{bmatrix} \quad ,$$

wobei

$$R_i = \frac{p_i}{1+e\cos\upsilon} \quad .$$

Die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks wird mit Gleichung (10.173) berechnet aus

$$r = \Lambda_1 R_1 = \Lambda_2 R_2 = \Lambda_3 R_3 \quad .$$

Die absoluten Bahnen im Fall der äquidistanten Lösungen im Dreikörperproblem für eine Kreisbewegung in Bild 10-30 auf S. 57, für eine elliptische Bewegung (e = 0.8) in Bild 10-31 auf S. 57 und für eine hyperbolische Bewegung in Bild 10-32 auf S. 58 dargestellt. ■

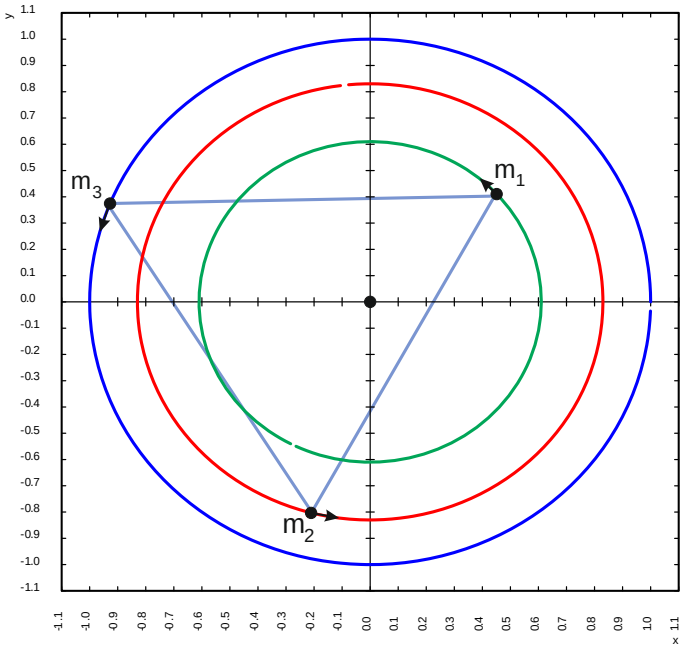


Bild 10-30: Absolute äquidistante kreisförmige Bewegung im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3:2:1$

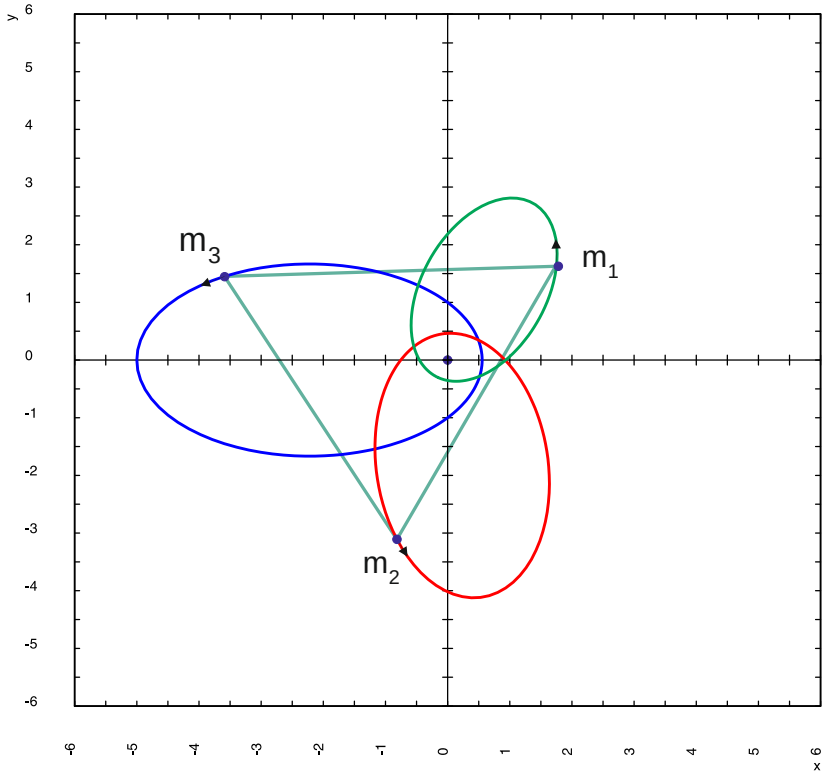


Bild 10-31: Absolute äquidistante elliptische Bewegung ($e = 0.8$) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3:2:1$, $\gamma_3 = 0°$, $\gamma_2 = -115°.69$, $\gamma_1 = 97°.31$

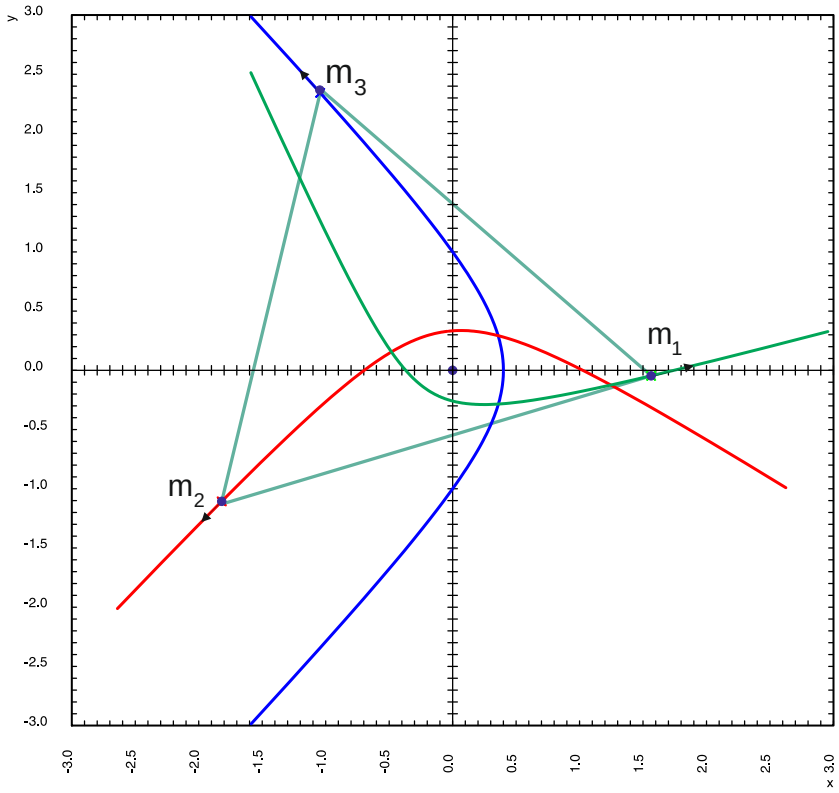


Bild 10-32: Absolute äquidistante hyperbolische Bewegung (e = 1.5) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3$ = 3:2:1

12.6 Weiterführende Literatur zu Problemen des Dreikörperproblems

Weitere vertiefende Betrachtungen zu Problemen des Dreikörperproblems sind nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Sie können in zahlreichen Lehrbüchern nachgelesen werden. Hier sind (ohne irgendeinen Anspruch auf Vollständigkeit) zu nennen die Bücher von F. TISSERAND [1889-1896], K. STUMPFF [1965], V. SZEBEHELY [1967], HAPPEL , D. BOCCALETTI AND G. PUCACCO [1996, 1998], C. D. MURRAY AND S. F. DERMOTT [1999], u.v.a..

Von besonderem Interesse im Rahmen des eingeschränkten Dreikörperproblems sind Untersuchungen zur Stabilität von Bahnen in der Umgebung der exakten Lösungen des Dreikörperproblems und den zugehörenden *Hill*schen Bereichen (siehe hierzu etwa: MURRAY, C. D. AND S. F. DERMOTT [1999]: pp.63-129; STUMPFF, K. [1965]: *Himmelsmechanik II* [1965], insbesondere Kapitel XIII und XIX; TISSERAND, F. [1889-1896]: *Traité de Mécanique Céleste*, Tome IV, chap. XII; D. BOCCALETTI AND G. PUCACCO [1996], Vol.I, ch.4; RUPPE, H. O. [1966], Abschnitt 4.2, pp. 136 ff).

Allgemeine Übersicht mit Betrachtung der Potentialkurven etwa in

https://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte

11 Bewegungsparameter

Die Beschreibung einer Bewegung kann, wie in den bisherigen Kapiteln hergeleitet wurde, nicht nur durch direkte Integration der Bewegungsgleichungen erfolgen, sondern durch Wahl einer bestimmten (geeigneten) Anpassungskurve und durch geschickte Wahl von Parametern, welche die räumliche Bewegung in Bezug auf ein Fundamentalsystem darstellen. Die so gewählten Parameter sind von der Bewegung abhängig. Die Variation dieser Parameter lässt sich als Funktion über der Zeit oder eines (geeigneten) Bahnwinkels formulieren. Die Integration dieser Variationsgleichungen nach der Methode der Variation der Parameter ergibt in einem gewissen Genauigkeitsrahmen die Beschreibung der Bewegung. Wie *L. Euler* bemerkte, kann diese Lösung nur approximativ berechnet werden[1].

In diesem Kapitel werden zunächst die Variationsgleichungen der *Kepler*bewegung zusammengestellt, in der *Gauß*schen Form, wie sie bei der Einwirkung beliebiger Kräfte aufgestellt werden müssen, und in der klassischen *Lagrange*schen Form, die speziell die Einwirkung konservativer Kräfte beschreibt. Ergänzend werden andere Parametersätze vorgestellt, die für die mathematische Behandlung des Bewegungsproblems geeigneter als die *Kepler*elemente sind. Neben der vollständigen Relation dieser Parameter zu den *Kepler*elementen und zu einem (Anfangs-) Zustandsvektor richtet sich das Hauptaugenmerk auf singularitätenfreie Beschreibungen, wie sie erstmals von *J. L. Lagrange* untersucht wurden[2]. Als Kriterium für eine singularitätenfreie Darstellung gelten zwei Bedingungen, wofür alle bahnrelevanten Größen vollständig auf die neuen Parameter umgeschrieben sein müssen:

1. Die Darstellung der Parameter als Funktion des Zustandsvektors muss singularitätenfrei sein,

2. die Variationsgleichungen der Parameter müssen singularitätenfrei sein.

Die üblicherweise in der Satellitenbahnmechanik verwendeten Parameter sind für viele Anwendungen, aber nicht für alle Fälle singularitätenfrei. Singularitäten sind nicht nur singuläre Fälle, an denen die betreffenden Parameter überhaupt nicht erklärt sind, sondern auch in einer gewissen Umgebung dieser singulären Stellen können diese Parameter numerisch instabil werden. Das Ziel einer geeigneten Auswahl eines Satzes von Bahnparametern muss also ihre vollständige Singularitätenfreiheit sein. Dies ist erfahrungsgemäß vor allem bei den Parametern nur schwer zu erreichen, welche die Orientierung der Bewegung im Raum beschreiben. Um hier weiter zu kommen, verwendet man bissweilen die *Euler-Rodrigues*-Parameter[3].

Eine lange intensiv untersuchte Singularität bei der Parameterdarstellung einer Satellitenbewegung beeinflusst durch die Anomalie des Erdfeldes ist die als „kritische Neigung“ bekannte Singularität. Sie ist eine Folge der Parameterwahl in Bezug auf das Perigäum.

Die Singularitätenfreiheit muss erreicht werden, ohne die Kräfte zu kennen, welche die Bewegung im Einzelnen kontrollieren. Es werden diese Kräfte auch im vorliegenden Kapitel nicht im Einzelnen untersucht, sondern nur die vollständig allgemeingültige Darstellung der Variationsgleichungen angestrebt. Die Einzelkenntnis dieser Kräfte kann auch Singularitäten aufweisen, die dann aber nicht der Wahl der Parameter, sondern von dem Kräftemodell abhängen, also

---

[1] nach O. VOLK [1983]

[2] O. DZIOBEK [1888], p. 218

[3] siehe etwa in Abschnitt 2.7.8 (Band I), sowie die Abschnitte 11.8.2 und 11.11.1.3

physikalische und keine mathematischen Singularitäten sind. Diese werden daher nicht in diesem Kapitel im Zusammenhang mit den Einzelkräften betrachtet.

Neben der Singularitätenfreiheit sollte bei der Auswahl eines geeigneten Parametersatzes auf die Möglichkeit zu geschickter Integration auch bei einem aufwendigen Kräftemodell geachtet werden. Im Folgenden werden nach den *Kepler*elementen einige andere Parametersätze („Elemente“) zusammengestellt, wie sie größtenteils schon lange in der Literatur zu finden sind und ihre Beziehungen zu den *Kepler*elementen und zum Zustandsvektor sowie ihre Variationsgleichungen hergeleitet.

11.1 Keplerelemente

Die *Kepler*elemente gestatten, im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung eine Satellitenbahn am anschaulichsten geometrisch zu beschreiben. Sie werden daher üblicherweise und nicht nur aus historischer Pietät zur Beschreibung einer Bahn und auch zur Definition einer Bahn verwendet. Wegen ihrer Bedeutung werden in diesem Abschnitt der Zusammenhang der *Kepler*elemente und des Zustandsvektors sowie die Variationsgleichungen der *Kepler*elemente zusammengestellt.

Anmerkung: Die in der Literatur zu findende Terminologie ist selbst bei den *Kepler*elementen sehr uneinheitlich. Sie werden – vornehmlich in der angelsächsischen Literatur – häufig als „klassische Elemente“ bezeichnet. Gelegentlich kann man dafür sogar den Begriff „klassische *Lagrange*sche Elemente“ finden[1].

11.1.1 Berechnung der *Kepler*elemente aus dem Zustandsvektor

Gegeben seien der Ortsvektor $\mathbf{r}$ mit seinen auf eine Basis $\mathbf{p}_i$ bezogenen kartesischen Koordinaten x^i

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}(t) \;=\; x^i\,\mathbf{p}_i \tag{11.1}$$

und der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{\mathbf{r}}(t) \;=\; \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad (\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0) \quad , \tag{11.2}$$

wobei also eine Eigenbewegung dieses Basissystems nicht berücksichtigt wird. Aus dem Normalenvektor

$$\mathbf{c} \;=\; \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \tag{11.3}$$

ergibt sich der Flächenparameter

$$G \;=\; |\mathbf{c}| \quad , \quad G \;>\; 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \;\neq\; 0 \tag{11.4}$$

und der Parameter p eines Kegelschnitts (siehe in Abschnitt 10.1.1, Formel (10.4)):

[1] etwa in WALKER ET AL. [1985]. Hier muss eine Verwechslung mit den *Lagrange*schen Elementen in Abschnitt 11.2 auf Seite 78 vermieden werden

$$p = \frac{G^2}{\mu} \quad . \tag{11.5}$$

Damit folgt der Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{c}_0 = \frac{1}{G}\mathbf{c} = c_0^i \mathbf{p}_i \quad , \tag{11.6}$$

der im Frühlingspunkt bezogenen Äquatorsystem, das hier die Basis bilden soll, die Koordinatendarstellung

$$\begin{aligned} c_{01} &= \sin i \sin \Omega \\ c_{02} &= -\sin i \cos \Omega \\ c_{03} &= \cos i \end{aligned} \tag{11.7}$$

hat. Daraus können Inklination i und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω eindeutig berechnet werden:

$$i = \arccos\left(c_{03}\right) \tag{11.8}$$

$$\begin{aligned} \cos\Omega &= -\frac{c_{02}}{\sqrt{1-c_{03}^2}} \\ \sin\Omega &= \frac{c_{01}}{\sqrt{1-c_{03}^2}} \quad , \quad \sin i \neq 0 \quad . \end{aligned} \tag{11.9}$$

Die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω ist also für äquatoriale Bahnen nicht erklärt.

Der Radius des Ortes des Himmelskörpers ist bekannt aus

$$r = \left|\mathbf{r}\right| \tag{11.10}$$

und damit auch der Positionseinheitsvektor

$$\mathbf{r_0} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad . \tag{11.11}$$

Die zentrische Gravitationskonstante μ des Zentralkörpers, um den die Bewegung erfolgt, sei bekannt. Dann kann der erste *Kepler*sche Vektor **d** (nach Formel (10.3)) berechnet werden

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} - \mu \mathbf{r}_0 \quad . \tag{11.12}$$

Mit diesem ist die (numerische) Exzentrizität des Kegelschnittes gegeben:

$$e\,\mu = \left|\mathbf{d}\right| \quad . \tag{11.13}$$

Aus der Kegelschnittgleichung

$$r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon}$$

kann daher

$$\cos\upsilon = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r}-1\right) \quad , \quad (0<e) \tag{11.14}$$

für nichtkreisförmige Bahnen berechnet werden. Für kreisförmige Bahnen ist der Bahnwinkel, in diesem Fall die wahre Anomalie υ, undefiniert. Die radiale Geschwindigkeit $\dot{r}$ folgt aus

$$\dot{r} = \frac{\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}}{r} \quad . \tag{11.15}$$

Damit kann aus

$$\dot{r} = e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin\upsilon \tag{11.16}$$

schließlich

$$\sin\upsilon = \frac{\dot{r}}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}} \quad , \quad 0 < e \tag{11.17}$$

und somit die wahre Anomalie eindeutig für nichtkreisförmige Bahnen berechnet werden.

Mit der Exzentrizität *e* ist auch die Art des Kegelschnitts bekannt und damit auch bei elliptischen oder hyperbolischen Bahnen die große Bahnhalbachse *a* berechenbar:

$$\begin{aligned}
&e = 0 \quad , && \text{Bahn kreisförmig} \quad , && a = r \\
&0 < e < 1 \quad , && \text{Bahn elliptisch} \quad , && a = \frac{p}{1-e^2} \\
&1 = e \quad , && \text{Bahn parabolisch} \quad , && a = \infty \\
&1 < e < \infty \quad , && \text{Bahn hyperbolisch} \quad , && a_H = \frac{p}{e^2-1} \quad .
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Um das Argument des Perigäums ω zu berechnen, werden der Knotenvektor

$$\mathbf{k} := \mathbf{p}_1\cos\Omega + \mathbf{p}_2\sin\Omega \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\cos\Omega\\ \sin\Omega\\ 0\end{bmatrix} \tag{11.19}$$

und der Parametervektor

$$\mathbf{f} := \mathbf{c}\times\mathbf{d} \tag{11.20}$$

benötigt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\cos\omega &= \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|} = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{d}}{e\mu} \\
\sin\omega &= -\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{k}}{G|\mathbf{d}|} = -\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{k}}{Ge\mu} \quad , \quad 0 < e \quad .
\end{aligned} \tag{11.21}$$

Im Fall elliptischer Bewegung ($e < 1$) kann über die *Kepler*formeln (10.23)

$$\cos E = \frac{\cos\upsilon + e}{1+e\cos\upsilon} \quad , \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1+e\cos\upsilon} \tag{11.22}$$

die exzentrische Anomalie *E* und über die *Kepler*gleichung (10.28) die mittlere Anomalie *M* berechnet werden:

$$M = E - e\sin E \quad . \tag{11.23}$$

Der Zusammenhang mit der Zeit *t* kann mit der mittleren Bewegung

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{11.24}$$

aus

$$M = M_0 + n\left(t - t_0\right) \tag{11.25}$$

in Bezug auf eine Epochezeit t_0 hergestellt werden. Die Epochezeit t_0 oder eine ihr entsprechende mittlere Anomalie $M_0 = M\left(t_0\right)$ werden üblicherweise als sechstes *Kepler*sches Element angesehen.

Als *Keplersche Elemente* werden die folgenden Parameter bezeichnet:

$$a \ \left(a_H\right) \ , \ e \ , \ i \ , \ \Omega \ , \ \omega \ , \ M_0 \quad . \tag{11.26}$$

In der Berechnung der *Kepler*elemente aus dem Zustandsvektor treten die aus der Definition der Keplerelemente zu erwartenden Singularitäten in den Elemente Ω und ω auf. In diesen Fällen sind die *Kepler*elemente nicht definiert und also auch nicht berechenbar.

Anmerkung: Im Rahmen der elliptischen Keplerbewegung wird das Energieintegral benötigt, welches die Geschwindigkeit eines längs einer Ellipse bewegten Objektes beschreibt[1]:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad . \tag{11.27}$$

11.1.2 Berechnung des Zustandsvektors aus den Keplerelementen

Gegeben seien die *Kepler*elemente *a, e, i,* Ω, ω, $M_0 = M\left(t_0\right)$. Der Zustandsvektor wird im elliptischen Fall ($e < 1$) wird mit den im letzten Abschnitt Formeln üblicherweise aus dem folgenden System berechnet:

$$\begin{aligned}
n &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \\
M &= M_0 + n\left(t - t_0\right) \\
M &= E - e\sin E \ \Rightarrow \ E \\
\cos\upsilon &= \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} \\
\sin\upsilon &= \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin E}{1 - e\cos E} \\
p &= a\left(1 - e^2\right) \\
G &= \sqrt{\mu\, p}
\end{aligned} \tag{11.28}$$

[1] siehe auch Formel (2.84) in Abschnitt 2.5.2, Band I

$$r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon}$$

$$\dot{r} = e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin\upsilon$$

$$\mathbf{c}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ c_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin i \sin\Omega \\ -\sin i \cos\Omega \\ \cos i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0$$

$$u = \upsilon + \omega$$

$$\mathbf{r}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} r_{01} \\ r_{02} \\ r_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \\ \cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega \\ \sin i \sin u \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} q_{01} \\ q_{02} \\ q_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos i \cos u \sin\Omega - \sin u \cos\Omega \\ \cos i \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \\ \sin i \cos u \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\,\mathbf{q}_0 \quad .$$

In der Berechnung des Zustandsvektors treten (wie aus der Definition des Zustandsvektors auch zu erwarten ist) keine Singularitäten auf.

Im parabolischen Fall wird in der klassischen Ephemeridenrechnung die *Lambert-Barkersche Gleichung* und im hyperbolischen Fall eine zur Keplergleichung äquivalente Gleichung mit hyperbolischen Funktionen zur Berechnung der wahren Anomalie aus einer gegebenen Zeit *t* gelöst. In der Praxis ist es sinnvoller, wegen der möglichen fließenden Übergänge zwischen den verschiedenen Kegelschnittarten die von *K. Stumpff* vorgeschlagene Uniformisierung des Zweikörperproblems zu verwenden (siehe dazu Kapitel 13), wenn die Beschreibung der Bewegung ausgehend von einer *Kepler*bewegung erfolgen soll.

11.1.3 Berechnung einer elliptischen *Kepler*bahn aus Randwerten

Im Rahmen der *Gauß*schen Erstbahnbestimmung wird die Bahn mit Hilfe zweier Ortsvektoren $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t_1)$ und $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3(t_3)$ sowie gegebener Zwischenzeit $\Delta t = t_3 - t_1$ berechnet. Sind diese Randvektoren mit ihren sechs unabhängigen Koordinaten bekannt, muss es möglich sein im Rahmen einer *Kepler*bewegung auch die *Kepler*elemente aus diesen Vektoren zu berechnen. Diese Aufgabe kann nur mit Einschränkungen und nur iterativ gelöst werden. Die zentrale Aufgabenstellung ist die Berechnung des Sektor zu Dreiecksverhältnisses[1].

[1] Die Bedeutung des Sektor zu Dreiecksverhältnisses scheint als erster *J. H. Lambert* (um 1772) erkannt zu haben (siehe in: BAUSCHINGER, J. [1928], p. 156)

11.1.3.1 Das Sektor zu Dreiecksverhältnis

Das Problem wird im Rahmen der exakten *Kepler*bewegung angegangen. Gegeben seien die beiden Randpunkte P_1 und P_3, die den gegebenen Randvektoren auf dem Bahnkegelschnitt entsprechen. Ihr zentrischer Zwischenwinkel ist die Differenz in wahrer Anomalie $\Delta\upsilon := \upsilon_3 - \upsilon_1$. Nach dem *Kepler*schen Flächensatz[1] hat der Kegelschnittsektor zwischen den beiden Randvektoren die in der Zeit Δt überstrichene Fläche (siehe Bild 11-1)

$$A_S := \frac{1}{2} G\,\Delta t = \frac{1}{2}\sqrt{\mu\, p}\,\Delta t \quad . \tag{11.29}$$

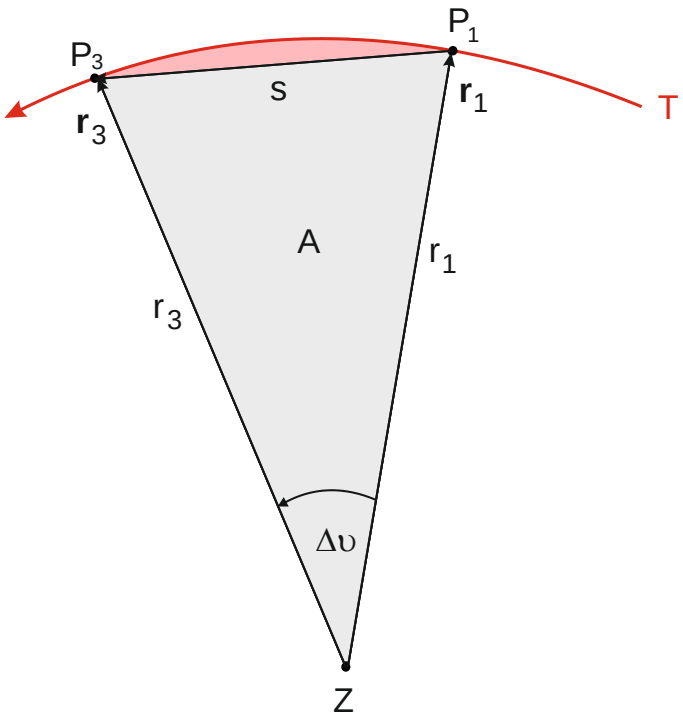


Bild 11-1: Sektor eines Kegelschnittes zwischen den Randvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3$ und Dreiecksfläche zwischen den Eckpunkten Z, P_1, P_3

Diese Fläche wird in Relation zur Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten Z, P_1, P_3 gesetzt:

$$D_S = \frac{1}{2} r_1\, r_3 \left|\sin(\Delta\upsilon)\right| \qquad \langle r_1 := |\mathbf{r}_1| \,,\; r_3 := |\mathbf{r}_3| \tag{11.30}$$

Der Sinus des Zwischenwinkels wird aus dem vektoriellen Produkt der beiden Randvektoren berechnet, wozu noch bekannt sein muss, ob die Bewegung rechtläufig oder rückläufig ist. Es muss also der Faktor $\sigma_i = \mathrm{sgn}(\cos i)$ (i= Inklination der Bahn bezüglich der Basisebene, Äquator bzw. Ekliptikebene) aus der Beobachtung als bekannt angenommen werden können:

[1] Siehe etwa Formel (2.7) in Abschnitt 2.2.2, Band I

$$\sin(\Delta\upsilon) = \sin(\upsilon_3 - \upsilon_1) = \sigma_i \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}{r_1 r_3} \quad . \tag{11.31}$$

Wenn das Sektor zu Dreieckverhältnis

$$\gamma_S := \frac{A_S}{D_S} = \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\Delta t}{r_1 r_3 \sin(\Delta\upsilon)} \tag{11.32}$$

bekannt ist, kann der Kegelschnittparameter berechnet werden aus

$$p = \frac{1}{\mu}\left[\gamma_S \frac{r_1 r_3 \sin(\Delta\upsilon)}{\Delta t}\right]^2 \quad . \tag{11.33}$$

Die Berechnung des Sektor zu Dreiecksverhältnisses erfolgt nach *Gauß* mit den Hilfsgrößen[1]

$$\begin{aligned} l_2 &:= \frac{r_1 + r_3}{4\sqrt{r_1 r_3}\cos\left(\frac{\Delta\upsilon}{2}\right)} - \frac{1}{2} \\ m_2 &:= \frac{\mu(\Delta t)^2}{\left[2\sqrt{r_1 r_3}\cos\left(\frac{\Delta\upsilon}{2}\right)\right]^3} \\ x_2 &:= \sin^2\left(\frac{E_3 - E_1}{4}\right) \quad . \end{aligned} \tag{11.34}$$

Mit diesen drei Parametern kann die erste Gleichung von *Gauß* formuliert werden:

$$\gamma_S^2 = \frac{m_2}{l_2 + x_2} \quad . \tag{11.35}$$

Von diesen Größen sind l_2 und m_2 durch die Eingangsdaten bekannt. Nicht bekannt ist die Differenz in exzentrischer Anomalie $E_3 - E_1$, da die Exzentrizität der Bahn noch unbekannt ist. Um diese einzubeziehen, wird die Hilfsgröße

$$X_2 := \frac{E_3 - E_1 - \sin(E_3 - E_1)}{\sin^3\left(\frac{E_3 - E_1}{2}\right)} \tag{11.36}$$

eingeführt, mit deren Hilfe die zweite Gleichung von *Gauß* formuliert werden kann:

$$\gamma_S^2(\gamma_S - 1) = m_2 X_2 \quad . \tag{11.37}$$

[1] In der klassischen Literatur werden diese Größen durch *l, m, x, X* ohne Indizes wiedergegeben. Um mit der allgemeinen Terminologie der vorliegenden Arbeit keine Verwirrung zu stiften, werden hier die Indizes verwendet. Der Index 2 weist darauf hin, dass aus den Randwerten 1 und 3 die Berechnungen auf einen Wert zwischen diesen Randwerten führen sollen. Das Sektor zu Dreieckverhältnis wird in der Literatur häufig mit η, gelegentlich auch mit γ bezeichnet, auch die Größen *f, g, F, G* werden unterschiedlich verwendet. Dadurch kann der Vergleich der Darstellungen erheblich erschwert werden.

Die Herleitung der beiden *Gauß*schen Gleichungen kann in der klassischen Literatur nachgelesen werden[1]. Die *Gauß*schen Gleichungen müssen iterativ gelöst werden. Wenn der Parameter x_2 bekannt ist, kann die Differenz in der exzentrischen Anomalie berechnet werden:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{E_3 - E_1}{2}\right) &= 1 - 2\,x_2 \\ \sin\left(\frac{E_3 - E_1}{2}\right) &= \sqrt{4\,x_2\left(1 - x_2\right)} \quad . \end{aligned} \tag{11.38}$$

Werden diese Größen in Gleichung (11.36) eingesetzt, ist auch X_2 bekannt. Das Sektor zu Dreieckverhältnis ergibt sich dann aus den beiden *Gauß*schen Gleichungen zu

$$\gamma_S = 1 + X_2\left(l_2 + x_2\right) \quad . \tag{11.39}$$

Mit Gleichung (11.33) ist dann auch der Kegelschnittparameter p bekannt, so dass die *Kepler*elemente berechnet werden können[2].

11.1.3.2 Berechnung der Keplerelemente bei bekanntem Kegelschnittparameter

Gegeben seien die Randortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3$, die Zwischenzeit Δt zum Durchlaufen des Bahnbogens zwischen diesen Randvektoren, sowie der Kegelschnittparameter p aus Formel (11.33) . Dabei wird vorausgesetzt, dass der Bahnbogen auf einer *Kepler*ellipse liege.

Als erstes soll die große Bahnhalbachse der elliptischen Bewegung berechnet werden. Aus den Beziehungen der halben Winkel

$$\cos\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\upsilon}{2}} \quad , \quad \sin\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\upsilon}{2}} \quad , \tag{11.40}$$

sowie den *Kepler*-Formeln (10.23) und den Beziehungen für den Bahnradius

$$\begin{aligned} r\,\cos\upsilon &= a\left(\cos E - e\right) \quad , \quad r\sin\upsilon = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \\ a\cos E &= r\cos\upsilon + a\,e \quad , \quad a\sin E = \frac{r\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}} \quad . \end{aligned} \tag{11.41}$$

$$r = a\left(1 - e\cos E\right) \quad , \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\upsilon} \tag{11.42}$$

werden folgende Beziehungen der elliptischen Zweikörperbewegung erhalten:

$$\sqrt{r}\cos\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{a\left(1-e\right)}\cos\frac{E}{2} \quad , \quad \sqrt{r}\sin\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{a\left(1+e\right)}\sin\frac{E}{2} \quad . \tag{11.43}$$

Im Fall von Randwerten folgen die speziellen Ausdrücke

---

[1] Zum Beispiel in: J. BAUSCHINGER [1928], pp. 156-170; P. R. ESCOBAL [1965], pp.188-197; K. STUMPFF [1959], pp. 255-281; H. BUCERIUS und M. SCHNEIDER [1966], pp. 107-113

[2] die Modifikationen des Verfahrens im Fall nichtelliptischer Kegelschnittbahnen können etwa bei H. BUCERIUS und M. SCHNEIDER [1966], pp. 112-113 nachgelesen werden.

$$p\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}\right)=2+2e\cos\left(\frac{\upsilon_3+\upsilon_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{2}\right) \tag{11.44}$$

sowie

$$r_1+r_3=2a\left[1-e\cos\left(\frac{E_3+E_1}{2}\right)\cos\left(\frac{E_3-E_1}{2}\right)\right] \quad . \tag{11.45}$$

Die Differenz $\left(\upsilon_3-\upsilon_1\right)$ ist aus den gegebenen Randvektoren bekannt, der Ausdruck $\cos\left[\left(E_3-E_1\right)/2\right]$ mit Hilfe des Sektor zu Dreieckverhältnisses aus der ersten der Beziehungen (11.38). Es fehlen die beiden Ausdrücke mit den Summen der Anomalien. Zunächst können mit Hilfe der Beziehungen (11.43) die folgenden Ausdrücke erhalten werden

$$\begin{aligned}\sqrt{r_1 r_3}\cos\left(\frac{\upsilon_3+\upsilon_1}{2}\right)&=a\left[\cos\left(\frac{E_3+E_1}{2}\right)-e\cos\left(\frac{E_3-E_1}{2}\right)\right]\\ \sqrt{r_1 r_3}\cos\left(\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{2}\right)&=a\left[\cos\left(\frac{E_3-E_1}{2}\right)-e\cos\left(\frac{E_3+E_1}{2}\right)\right] \quad ,\end{aligned} \tag{11.46}$$

aus denen nach Elimination von $\left(E_3+E_1\right)$ die Beziehung für die Summe der wahren Anomalien mit der noch unbekannten Exzentrizität *e* berechnet werden kann:

$$e\cos\left(\frac{\upsilon_3+\upsilon_1}{2}\right)=\frac{p}{\sqrt{r_1 r_3}}\cos\left(\frac{E_3-E_1}{2}\right)-\cos\left(\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{2}\right) \quad . \tag{11.47}$$

Diese Beziehung wird im Rahmen einer Erstbahnbestimmung aus Randwerten benötigt und wurde deshalb hier mit abgeleitet. Um die große Bahnhalbachse zu berechnen wird mit der zweiten der Beziehungen (11.46)

$$e\cos\left(\frac{E_3+E_1}{2}\right)=\cos\left(\frac{E_3-E_1}{2}\right)-\frac{\sqrt{r_1 r_3}}{a}\cos\left(\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{2}\right) \tag{11.48}$$

und eingesetzt in (11.45) schließlich erhalten:

$$a=\frac{r_1+r_3-2\sqrt{r_1 r_2}\cos\left(\frac{\upsilon_3-\upsilon_1}{2}\right)\cos\left(\frac{E_3-E_1}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{E_3-E_1}{2}\right)} \qquad \left\langle \sin\left(E_3-E_1\right)\cos\left(E_3-E_1\right)\neq 0 \quad . \right. \tag{11.49}$$

Die Exzentrizität folgt dann mit Hilfe des Kegelschnittparameters aus

$$e=\sqrt{1-\frac{p}{a}} \quad . \tag{11.50}$$

Anmerkung: Die hier gewählte Herleitung der Berechnung der großen Bahnhalbachse aus Randvektoren folgt den Darstellungen in H. BUCERIUS und M. SCHNEIDER [1966], pp. 107-113 und P. R. ESCOBAL [1965], pp.188-197. Eine alternative Herleitung findet sich bei K. STUMPFF [1959], p. 257, der zunächst die Exzentrizität berechnet um dann anschließend die Bahnhalbachse aus dem Kegelschnittparameter zu erhalten. Die hier gezeigte Berechnung der großen Bahnhalbachse wird benötigt, um das Sektor zu Dreieckverhältnis zu berechnen.

Da die beiden gegebenen Randvektoren als nicht kollinear angenommen werden, kann der Richtungsvektor der Bahnnormalen berechnet werden aus

$$\mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3}{\left|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3\right|} \quad . \tag{11.51}$$

Im Fall einer (hier angenommenen) *Kepler*bewegung lautet der Bahnnormalenvektor

$$\mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0 = \sqrt{\mu\, p}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{11.52}$$

Bezogen auf ein $\mathbf{p}_i$ – Basissystem hat die Bahnnormale die Darstellung

$$\mathbf{c}_0 = \sin i \sin\Omega\ \mathbf{p}_1 - \sin i \cos\Omega\ \mathbf{p}_2 + \cos i\ \mathbf{p}_3 \quad , \tag{11.53}$$

woraus die Bahnelemente Inklination i und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω eindeutig berechnet werden können (vgl. die Formeln (11.8) und (11.9)).

Zur Berechnung des Argumentes der Breite muss die Position des Perizentrums der Bahn, d.h. der *Hermann*sche Vektor $\mathbf{d}_0$ bekannt sein. Dazu wird die wahre Anomalie benötigt, die den beiden Randvektoren zugeordnet ist. Aus der Polargleichung eines Kegelschnitts ergeben sich zunächst die Cosinus der wahren Anomalien

$$e\cos\upsilon_1 = \frac{p}{r_1} - 1 \quad , \quad e\cos\upsilon_3 = \frac{p}{r_3} - 1 \quad . \tag{11.54}$$

Mit den eindeutig bekannten Zwischenwinkeln können auch die Sinus der wahren Anomalien berechnet werden:

$$\begin{aligned} e\sin\upsilon_1 &= \frac{e\cos\upsilon_1\cos\left(\upsilon_3-\upsilon_1\right) - e\cos\upsilon_3}{\sin\left(\upsilon_3-\upsilon_1\right)} \\ e\sin\upsilon_3 &= \frac{-e\cos\upsilon_3\cos\left(\upsilon_3-\upsilon_1\right) + e\cos\upsilon_1}{\sin\left(\upsilon_3-\upsilon_1\right)} \end{aligned} \qquad \left\langle \quad \sin\left(\upsilon_3-\upsilon_1\right) \neq 0 \quad . \right. \tag{11.55}$$

Wenn das Sektor zu Dreiecksverhältnis und damit der Bahnparameter bekannt ist, können aus den vorstehenden Gleichungen die Exzentrizität e sowie eindeutig die wahre Anomalie υ_1 bzw. υ_3 berechnet werden. Damit ist dann auch die große Bahnhalbachse $a = p/\left(1-e^2\right)$ im elliptischen Fall bekannt (im hyperbolischen Fall[1] mit e>1 wird die erste Bahnhalbachse aus $a_H = p/\left(e^2-1\right)$ berechnet).

Der transversale Richtungsvektor kann für die beiden Randvektoren berechnet werden aus

$$\mathbf{q}_{01} = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_{01} \quad , \quad \mathbf{q}_{03} = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_{03} \quad \left\langle \mathbf{r}_{01} = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1},\ \mathbf{r}_{03} = \frac{\mathbf{r}_3}{r_3} \right. \quad . \tag{11.56}$$

Damit kann der *Hermann*sche Richtungs-Vektor aus einer der beiden Gleichungen erhalten werden

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_{01}\cos\upsilon_1 - \mathbf{q}_{01}\sin\upsilon_1 \quad \text{oder} \quad \mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_{03}\cos\upsilon_3 - \mathbf{q}_{03}\sin\upsilon_3 \quad . \tag{11.57}$$

[1] Hierauf wird in Abschnitt 12.5 eingegangen

(Der Vektor $\mathbf{d}_0$ aus den beiden Gleichungen muss übereinstimmen, somit dient eine dieser Gleichungen als Rechenprobe).

Der Knoten-Richtungsvektor ist mit der schon berechneten Rektaszension des aufsteigenden Knotens wie in Formel (11.19) bekannt, ebenso der Parameter-Richtungsvektor nach Definition (11.20)

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_1 \cos\Omega + \mathbf{p}_2 \sin\Omega \quad , \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{d}_0 \qquad . \tag{11.58}$$

Damit kann das Argument des Perizentrums eindeutig berechnet werden (vgl. die Formeln (11.21)) aus

$$\cos\omega = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{d}_0 \quad , \quad \sin\omega = -\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{f}_0 \qquad . \tag{11.59}$$

Mit Hilfe der *Kepler*-Formeln (11.41) können die den beiden Randvektoren zugeordneten exzentrischen Anomalien berechnet werden und mit der Keplergleichung die entsprechende mittlere Anomalie. Damit kann etwa

$$M_1 = E_1 - e \sin E_1 \tag{11.60}$$

als sechstes Bahnelement aufgefasst werden. Alternativ kann auch der Zeitpunkt des Randvektors 1 als Bahnelement bezeichnet werden. Wird der Zeitpunkt des Perizentrumsdurchganges als sechstes Element gewünscht, kann aus der Beziehung

$$M_1 = n(t_1 - t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t_1 - t_0) \tag{11.61}$$

der Zeitpunkt t_0 des Perizentrumsdurchganges als Bahnelement aufgefasst werden.

11.1.3.3 Eine Modifikation mit Hilfe des Mertonschen Vektors

Unter den zahlreichen Modifikationen und Vereinfachungen, die aus praktischen Erwägungen vorgeschlagen wurden, sei hier nur auf den von *G. Merton* eingeführten Vektor

$$\mathbf{r}_M := \mathbf{r}_3 - \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3}{r_1^2}\mathbf{r}_1 \tag{11.62}$$

hingewiesen[1]. Dieser Vektor steht senkrecht auf $\mathbf{r}_1$ in der Bahnebene $(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_M = 0)$ und hat den Betrag

$$r_M = r_3 \left|\sin(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)\right| \quad . \tag{11.63}$$

Damit kann der Zwischenwinkel zwischen den beiden Randvektoren berechnet werden aus

$$\cos(\upsilon_3 - \upsilon_1) = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3}{r_1 r_3} \quad , \quad \sin(\upsilon_3 - \upsilon_1) = \frac{r_M}{r_3} \qquad \langle \sin(\upsilon_3 - \upsilon_1) \geq 0 \qquad . \tag{11.64}$$

Der Kegelschnittparameter p ergibt sich dann (vgl. (11.33)) aus

$$p = \frac{1}{\mu}\left[\gamma_S \frac{r_1 r_M}{\Delta t}\right]^2 \quad . \tag{11.65}$$

---

[1] Siehe etwa K. STUMPFF [1959], pp. 258; H. BUCERIUS und M. SCHNEIDER [1966], pp. 122; Anwendung im Rahmen der Auswertung der Beobachtungsdaten der Geodäsie-Satelliten GRACE in SCHNEIDER, M. [2005]

Die weiteren Bahnelemente können wie in Abschnitt 11.1.3.2 ab Formel (11.51) erhalten werden.

11.1.4 Berechnung des Zustandsvektors aus Randwerten

Gegeben seien die Randvektoren $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}(t_3)$, somit die Zwischenzeit $\Delta t = t_3 - t_1$ und der Durchlaufsinn $\sigma_i = \operatorname{sgn}(\cos i)$ der Bahn. Es sei wieder angenommen, dass die Bahn auf einem Kegelschnitt verlaufe. Mit Hilfe des Sektor zu Dreieckverhältnisses wird der Parameter *p* des Kegelschnittes berechnet (Formel (11.33)). Aus Formel (11.49) kann die große Bahnhalbachse a berechnet werden. Der Zwischenwinkel in exzentrischer Anomalie ist darüber hinaus aus den Formeln (11.38) bekannt, so dass mit den *Lagrange* Koeffizienten[1]

$$\begin{aligned} G_L &= \Delta t - \frac{1}{n}\left[\left(E_3 - E_1\right) - \sin\left(E_3 - E_1\right)\right] \\ F_L &= 1 - \frac{a}{r_1}\left[1 - \cos\left(E_3 - E_1\right)\right] \end{aligned} \tag{11.66}$$

der Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t_1 erhalten werden kann:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{r}_3 - F_L\,\mathbf{r}_1}{G_L} \quad . \tag{11.67}$$

Mit Hilfe des Zustandsvektors $\left(\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1\right)$ können die Keplerelemente in klassischer Weise (etwa wie in Abschnitt 11.1.1 beschrieben) berechnet werden[2]. Das ist im vorliegenden Fall prinzipiell nicht nötig, da mit dem Kegelschnittparameter *p* (mit Formel (11.33)), der Halbachse *a* (mit Formel (11.49)) und der Exzentrizität *e* (mit Formel (11.50)) im Rahmen einer Lösung aus Randwerten schon die arbeitsaufwändigsten Elemente berechnet sind. Jedoch kann eine Lösung aus dem Zustandsvektor in der Praxis Vorteile bringen, wenn auf diese Weise die Zuverlässigkeit der Rechenvorgänge überprüft werden soll.

11.1.5 Die *Gauß*schen Variationsgleichungen in den *Kepler*elementen

Wie alle in der klassischen Himmelsmechanik verwendeten Variationsgleichungen zur Integration eines Bewegungsvorganges beziehen sich auch die *Gauß*schen Variationsgleichungen auf eine *Kepler*bewegung. Dies bedeutet, dass die *Kepler*sche Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_K = -\mu \mathbf{r}_0 / r^2$ als berücksichtigt gesetzt werden kann, so dass nur noch die Bewegungseinflüsse durch die restliche radiale Beschleunigung b_{R2} , sowie die transversale b_T und die normale Beschleunigung b_N in den Variationsgleichungen zu berücksichtigen sind.

Nach Abschnitt 4.4.2 (Band II) lautet die *Gauß*sche Variationsgleichung für den *Flächenparameter*

$$\dot{G} = r\, b_T \quad , \tag{11.68}$$

für den *Bahnparameter* mit der für die *Kepler*bewegung gültigen Beziehung $G = \sqrt{\mu p}$

---

[1] siehe die Formeln (2.211) in Band I, bzw. im Vorgriff auf die Formeln (13.8)

[2] etwa nach dem Vorschlag von P. R. ESCOBAL [1965], p.196

$$\dot{p} \;=\; \frac{2\,r\,G}{\mu}\,b_T \quad , \tag{11.69}$$

die *Inklination* nach Abschnitt 4.4.10 (Band II)

$$\frac{di}{dt} \;=\; \frac{r}{G}\cos u\; b_N \quad , \tag{11.70}$$

ebenso die *Rektaszension des aufsteigenden Knotens*

$$\dot{\Omega} \;=\; \frac{r\sin u}{G\sin i}\,b_N \quad , \quad (G\sin i > 0) \quad , \tag{11.71}$$

die *Exzentrizität* nach Abschnitt 5.4.1 (Band II) wobei $\upsilon = \zeta - \zeta_P$ und wegen $\dot{\zeta} = \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i$ sowie $\dot{\zeta}_P = \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i$ und mit Beziehung (11.69)

$$\dot{e} \;=\; \frac{G}{\mu}\left\{ b_{R2}\sin\upsilon + b_T\left[\frac{e\,r}{p} + \left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\upsilon\right]\right\} \quad , \quad (p>0) \tag{11.72}$$

und ebenso damit das *Argument des Perigäums*

$$\dot{\omega} \;=\; -\frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)\right] - b_N\,\frac{r\sin u}{G\tan i} \quad , \quad (e\,G\sin i > 0) \quad . \tag{11.73}$$

Damit sind auch bekannt (ζ_P ist der auf ein *Hansen*-System bezogene Bahnwinkel des Perizentrums)

$$\dot{\zeta}_P \;=\; \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i = \; -\frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)\right] \quad , \quad (e\,p>0) \tag{11.74}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\omega} + \dot{\Omega} \;=\; & -\frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)\right] + \\ & + b_N\,\frac{r\sin u}{G}\tan\frac{i}{2} \quad , \quad (e\,G>0 \;\;,\;\; i<180°) \quad . \end{aligned} \tag{11.75}$$

Bisweilen wird, um die Singularität für $i \to 180°$ zu vermeiden, der Parameter $\omega + \sigma_i\,\Omega$ verwendet, wobei

$$\sigma_i \;:=\; \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) \tag{11.76}$$

der „retrograde Faktor“ ist. Mit der Beziehung

$$\sin i \;=\; 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos i\right)}\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos i\right)} \tag{11.77}$$

lautet die betreffende Variationsgleichung

$$\begin{aligned}\dot{\omega}+\sigma_i\,\dot{\Omega} \;&=\; -\frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)\right]+\\ &\quad +\sigma_i\,b_N\,\frac{r\sin u}{G}\sqrt{\frac{1-\sigma_i\cos i}{1+\sigma_i\cos i}} \quad , \quad (e\,G>0) \quad .\end{aligned} \tag{11.78}$$

Für das *Argument der Breite* folgt nach Abschnitt 4.4.6 (Band II, Beispiel 2)

$$\dot{u} \;=\; \frac{G}{r^2} - b_N\,\frac{r\sin u\,\cos i}{G\sin i} \quad , \quad (G\sin i>0) \tag{11.79}$$

und wegen $\upsilon = u-\omega = \zeta-\zeta_P$ für die *wahre Anomalie*

$$\dot{\upsilon} \;=\; \frac{G}{r^2}+\frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)\right] \quad , \quad (e\,p>0) \quad . \tag{11.80}$$

Im Fall der elliptischen Bewegung ist wegen $p=a\left(1-e^2\right)$ die Variation der großen Bahnhalbachse gegeben

$$\dot{a} \;=\; \frac{\dot{p}}{1-e^2}+\frac{2\,a\,e}{1-e^2}\,\dot{e} \quad , \tag{11.81}$$

somit wegen (siehe Formel (11.72))

$$\dot{e} \;=\; b_{R2}\,\frac{G\sin\upsilon}{\mu}+\left(\frac{e\sin^2\upsilon}{2\,p}+\frac{\cos\upsilon}{r}\right)\dot{p}$$

und schließlich mit Formel (11.69) die Variation der *großen Bahnhalbachse*

$$\dot{a} \;=\; \frac{2\,a^2}{G}\left[b_{R2}\;e\,\sin\upsilon + b_T\,(1+e\cos\upsilon)\right] \quad , \quad (G>0 \;\;,\;\; e<1) \quad . \tag{11.82}$$

Für die *mittlere Bewegung* der elliptischen Bewegung folgt aus dem 3. *Kepler*schen Gesetz in der Form $\mu = n^2\,a^3$

$$\dot{n} \;=\; -\frac{3}{2}\,\frac{n}{a}\,\dot{a} \tag{11.83}$$

bzw. mit Formel (11.82)

$$\dot{n} \;=\; -3n\left[\frac{1}{2\,p}\,\dot{p}+\frac{e}{1-e^2}\,\dot{e}\right] \tag{11.84}$$

schließlich

$$\dot{n} \;=\; -\frac{3}{a\,\sqrt{1-e^2}}\left[b_{R2}\,e\sin\upsilon + b_T\,\left(1+e\cos\upsilon\right)\right] \quad , \quad (a>0 \;\;,\;\; e<1) \quad . \tag{11.85}$$

Für die *exzentrische Anomalie* der elliptischen Bewegung folgt aus den *Kepler*schen Formeln (siehe in Abschnitt 10.1.3)

$$\begin{aligned} r\,\cos\upsilon &= a\left(\cos E-e\right) \quad , \quad r\sin\upsilon = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E\\ a\cos E &= r\cos\upsilon + a\,e \quad , \quad a\sin E = \frac{r\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}} \quad .\end{aligned}$$

die differentielle Relation

$$\dot{E} \;=\; \dot{\upsilon}\,\frac{r\sqrt{1-e^2}}{p} - \dot{e}\,\frac{r\sin\upsilon}{p\sqrt{1-e^2}} \tag{11.86}$$

und daher mit den Formeln (11.72) und Formeln (11.81)

$$\dot{E} \;=\; \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\mu}}\left[b_{R2}\left(\frac{\cos\upsilon}{e} - 1\right) - b_T\left(1+\frac{r}{a}\right)\frac{\sin\upsilon}{e}\right] \quad , \quad (a>0 \quad , 0<e<1) \quad . \tag{11.87}$$

Für die *mittlere Anomalie* der elliptischen Bewegung folgt mit der *Kepler*gleichung (11.23)

$$M \;=\; E - e\sin E$$

und dem Radius

$$r \;=\; a\,(1-e\cos E)$$

aus der differentiellen Relation

$$\dot{M} \;=\; \frac{r}{a}\,\dot{E} - \dot{e}\sin E \tag{11.88}$$

bzw. mit Formel (11.86)

$$\dot{M} \;=\; \dot{\upsilon}\,\frac{r^2\sqrt{1-e^2}}{a\,p} - \dot{e}\sin E\left(1+\frac{r}{p}\right) \tag{11.89}$$

oder nach Abschnitt 4.4.6 (Band II) mit der Formel

$$\dot{\upsilon} = \dot{\zeta} - \dot{\omega} - \dot{\Omega}\cos i = \sqrt{\mu p}\,/\,r^2 - \left(\dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i\right) \tag{11.90}$$

somit

$$\dot{M} \;=\; n - \left(\dot{\omega} + \dot{\Omega}\sin i\right)\frac{r^2\sqrt{1-e^2}}{a\,p} - \dot{e}\sin E\left(1+\frac{r}{p}\right) \tag{11.91}$$

bzw. mit den Formeln (11.72) auf S. 72 und (11.82) auf S. 73

$$\dot{M} \;=\; n - \dot{a}\,\frac{r\sqrt{1-e^2}}{a^2 e\sin\upsilon} - \dot{e}\cot\upsilon \tag{11.92}$$

sowie

$$\dot{M} = n - \frac{G\sqrt{1-e^2}}{e\,\mu}\left[b_{R2}\left(\frac{2\,r\,e}{p} - \cos\upsilon\right) + b_T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin\upsilon\right] \;,\quad (p>0 \quad , 0<e<1) \;. \tag{11.93}$$

Damit folgt für das *mittlere Argument der Breite*

$$\begin{aligned} \dot{M} + \dot{\omega} \;=\; & n - b_{R2}\,\frac{G}{\mu}\left(\frac{2\,r}{p}\sqrt{1-e^2} + \frac{e\cos\upsilon}{1+\sqrt{1-e^2}}\right) + \\ & + b_T\,\frac{G}{\mu}\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{e\sin\upsilon}{1+\sqrt{1-e^2}} - b_N\,\frac{r\sin u}{G\tan i} \quad , \quad (G\sin i>0) \quad . \end{aligned} \tag{11.94}$$

Für die *mittlere Epocheanomalie* folgt mit Formel (11.25) auf S. 63

$$
\begin{aligned}
M &= M_0 + n\left(t - t_0\right) \\
\dot{M}_0 &= \dot{M} - \dot{n}\left(t - t_0\right) - n \\
\dot{M}_0 &= \sqrt{1-e^2}\left\{ b_{R2}\left[\frac{3e\sin\upsilon}{p}(t-t_0) - \frac{G}{\mu}\left(\frac{2r}{p} - \frac{\cos\upsilon}{e} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + b_T\left[\frac{3}{r}(t-t_0) - \frac{G}{\mu}\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin\upsilon}{e} \right] \right\} \quad , (r, p > 0 \quad , \quad 0 < e < 1) \quad .
\end{aligned}
\tag{11.95}
$$

Damit sind die *Gauß*schen Variationsgleichungen für die *Kepler*elemente der elliptischen Bewegung p bzw. $a, e, i, \Omega, \omega, M_0$ bzw. M vollständig hergeleitet. Die Variationsgleichungen zeigen die (erwarteten) Singularitäten in der Berechnung der Variationen in Ω, ω, M bzw. M_0, sowie in υ und E.

Dieser Satz von Variationsgleichungen enthält auch die parabolische und die hyperbolische Bewegung, wenn Einschränkung auf die Parameter G, bzw. p, e, i, Ω, ω und υ erfolgen kann.

Anmerkung: Die *Gauß*schen Variationsgleichungen in den hier gegebenen Darstellungen sind alle Variationen nach der Zeit. Es ist jedoch üblich, die Integration nicht über der Zeit sondern über der wahren Anomalie υ durchzuführen. Der Bezug auf die wahre Anomalie als Integrationsvariable muss mit Hilfe der Variationsgleichung (11.80) hergestellt werden. Die *Gauß*schen Variationsgleichungen nehmen dann Formen an von der Art

$$da = \frac{\dot{a}}{\dot{\upsilon}} d\upsilon \quad . \tag{11.96}$$

Formal analog ist der Bezug auf einen anderen Bahnwinkel, etwa au*f den Hansen*schen Bahnwinkel ζ

$$da = \frac{\dot{a}}{\dot{\zeta}} d\zeta \quad . \tag{11.97}$$

Siehe hierzu auch die Zusammenstellung in Abschnitt 11.13 auf Seite 146.

11.1.6 Entwicklung nach tangentialen Komponenten

An Stelle eines *Leibniz*-Systems werden die Beschleunigungskomponenten, die einen Bewegungsvorgang beeinflussen, bisweilen in tangentialen Koordinaten zur Verfügung gestellt oder benötigt. Hier handelt es sich um Komponenten, die durch das begleitende Dreibein der Kurventheorie beschrieben werden können. Wenn $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ der Zustandsvektor eines bewegten Objektes ist, sind die Einheitsvektoren des begleitenden Dreibeins durch Tangentialvektor $\mathbf{v}_1$, Normalenvektor $\mathbf{v}_2$ und Binormalenvektor $\mathbf{v}_3$ definiert. Nach Abschnitt 4.4.1 (Band II) haben sie die Beziehungen

$$\mathbf{v}_1 := \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{V} \quad , \quad ds = V dt, \kappa := \left| \frac{d\mathbf{v}_1}{ds} \right|, \mathbf{v}_2 := \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{v}_1}{ds}, \mathbf{v}_3 := \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \quad . \tag{11.98}$$

In Bezug auf das *Leibniz*-System $\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0\right)$ mit dem Zwischenwinkel γ zwischen der Tangentialrichtung $\mathbf{v}_1$ und der transversalen Richtung $\mathbf{q}_0$ bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \quad \mathbf{r}_0 \sin\gamma + \mathbf{q}_0 \cos\gamma \\ \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{r}_0 \cos\gamma + \mathbf{q}_0 \sin\gamma \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{c}_0 \quad . \end{aligned} \tag{11.99}$$

Die Beschleunigungskomponenten in tangentialen Koordinaten werden in der Literatur häufig mit $b_V =: T$, $b_H =: N, b_N =: W$ bezeichnet[1]. Die Beschleunigungsgleichung lautet dann

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_V \, \mathbf{v}_1 + b_H \, \mathbf{v}_2 + b_N \, \mathbf{v}_3 \quad . \tag{11.100}$$

Vergleich mit der Beschleunigungsgleichung in Bezug auf das *Leibniz*-System

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R \, \mathbf{r}_0 + b_T \, \mathbf{q}_0 + b_N \, \mathbf{c}_0 \tag{11.101}$$

führt auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} b_R &= b_V \sin\gamma - b_H \cos\gamma \\ b_T &= b_V \cos\gamma + b_H \sin\gamma \\ b_N &= b_N \quad . \end{aligned} \tag{11.102}$$

Werden diese in die Variationsgleichungen im vorigen Abschnitt 11.1.5 ergeben sich unmittelbar die entsprechenden Variationsgleichungen in tangentialen Komponenten. Sie haben den Nachteil, dass eine zusätzliche Variable in Form des Zwischenwinkels γ erforderlich wird[2]. Außerdem wird eine „Störung“ des *Kepler*problems angenommen, so dass die Beschleunigungen b_V, b_H auf die radiale Beschleunigung b_{R2} bezogen angenommen werden müssen:

$$b_{R2} = b_V \sin\gamma - b_H \cos\gamma \quad . \tag{11.103}$$

Die *Gauß*schen Variationsgleichungen in Bezug auf tangentiale Beschleunigungen lauten dann:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{G}\left\{b_V\left[e\cos(\gamma-\upsilon)+\cos\gamma\right]+b_H\left[e\sin(\gamma-\upsilon)+\sin\gamma\right]\right\} \quad , \quad (G>0 \quad , \quad e<1) \quad . \tag{11.104}$$

$$\dot{e} = \frac{G}{\mu}\left\{b_V\left[\cos(\gamma-\upsilon)+\frac{r}{p}\cos\gamma\left(e+\cos\upsilon\right)\right]+b_H\left[\sin(\gamma-\upsilon)+\frac{r}{p}\sin\gamma\left(e+\cos\upsilon\right)\right]\right\}$$

$$\langle \text{für } (p>0)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{r}{G}\cos u \, b_N \quad ,$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r\sin u}{G\sin i}\, b_N \quad , \quad (G\sin i>0) \quad ,$$

$$\dot{\omega} = -\frac{G}{e\,\mu}\left\{b_V\left[\sin(\gamma-\upsilon)-\frac{r}{p}\cos\gamma\sin\upsilon\right]-b_H\left[\cos(\gamma-\upsilon)+\frac{r}{p}\sin\gamma\sin\upsilon\right]\right\}-b_N\,\frac{r\sin u}{G\tan i}$$

$$\langle \quad eG\sin i>0 \quad ,$$

[1] Die in der Literatur bisweilen verwendeten Bezeichnungen T, N, W werden im vorliegenden Bericht nicht verwendet

[2] Ein Beispiel zur Verwendung der Beschleunigungen in tangentialen Koordinaten wird in Abschnitt 5.9 (Band II) behandelt.

$$\dot{M}_0 = \sqrt{1-e^2}\left\{ b_V\left[3\left(\frac{e\sin\gamma\sin\upsilon}{p} + \frac{\cos\gamma}{r} \right)(t-t_0) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{G}{\mu}\left(\sin\gamma\left(\frac{2r}{p} - \frac{\cos\upsilon}{e} \right) + \cos\gamma\left(1+\frac{r}{p} \right)\frac{\sin\upsilon}{e} \right)\right] +$$
$$+ b_H\left[3\left(-\frac{e\cos\gamma\sin\upsilon}{p} + \frac{\sin\gamma}{r} \right)(t-t_0) + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{G}{\mu}\left(\cos\gamma\left(\frac{2r}{p} - \frac{\cos\upsilon}{e} \right) - \sin\gamma\left(1+\frac{r}{p} \right)\frac{\sin\upsilon}{e} \right)\right]\right\}$$
$$\left\langle \quad r, p > 0 \quad , \quad 0 < e < 1 \quad . \right.$$

11.1.7 Die *Lagrange*schen Variationsgleichungen in den Keplerelementen

Wenn eine „Störfunktion“ R gefunden werden kann, die ein Bewegungsproblem beschreibt, können die Variationsgleichungen in den Elementen nach *Lagrange* hergeleitet werden[1]. Eine solche Funktion existiert sicherlich im Fall konservativer Störbeschleunigungen. Es ist üblich (was sich im Fall der Bewegungen der Planeten des Sonnensystems wegen der kleinen Bahninklinationen bewährt hat) folgende modifizierte *Kepler*elemente zu verwenden:

Die mittlere Epochelänge in der Bahn

$$L_0 := M_0 + \omega + \Omega \tag{11.105}$$

sowie die Länge des Perizentrums

$$\tilde{\omega} := \omega + \Omega \quad . \tag{11.106}$$

Die *Lagrange*schen Variationsgleichungen lauten (nur im Fall konservativer Beschleunigungen):

[1] Siehe zum Beispiel mit Hilfe von *Lagrange* Klammern bei BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961], P.273-284

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\,a}\frac{\partial R}{\partial L_0}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{e\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}\frac{\partial R}{\partial L_0} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2 e}\frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\tan\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial L_0} + \frac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right) - \frac{1}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega}$$

$$\frac{dL_0}{dt} = -\frac{2}{n\,a}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\tan\frac{i}{2}}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{n\,a^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} \quad . \tag{11.107}$$

11.2 *Lagrange* – Elemente

Die *Kepler*elemente beschreiben die Bewegungen der Himmelskörper in geometrisch anschaulicher Weise und sind daher für eine rasche Orientierung unentbehrlich. Für das numerische Rechnen jedoch, insbesondere wenn die *Kepler*elemente als abhängige Variable aufzufassen sind, zeigen sich die bekannten Undefiniertheiten der *Kepler*elemente und die damit gekoppelten Instabilitäten, so dass in allen diesen Fällen nach geeigneten anderen Bewegungsparametern gesucht werden muss. Es ist daher nicht verwunderlich, dass bereits *J. L. Lagrange*, dem Ausbau und Vollendung der von *L. Euler* eingeführten Methode der Variation der Parameter gelungen war, sich vermutlich als erster einen solchen (fast vollständig) singularitätenfreien Elementesatz überlegte. Der *Lagrange*sche Elementesatz ist wegen seines unmittelbaren Bezugs zu den *Kepler*elementen vorzugsweise in der allgemeinen *Kepler*bewegung verwendbar.

Anmerkung: Man beachte, dass die Begriffe *Lagrange*elemente und *Lagrange*sche Variationsgleichungen völlig unterschiedlichen Inhalten zugeordnet sind.

11.2.1 Definition der *Lagrange*-Elemente

Lagrange führte folgende Bahnparameter durch Zurückführung auf die *Kepler*elemente ein[1], wobei die Bezeichnungen *h, l, p, q* teilweise sogar noch in der neueren Literatur verwendet werden, aus Gründen eindeutiger Begriffszuordnung in diesem Bericht allerdings vermieden werden. Die hier verwendeten Symbole $L_1, L_2, L_3, \cdots$ werden nur in diesem Kapitel verwendet.

Die *Lagrange*elemente werden in Bezug auf die *Kepler*elemente definiert:

[1] vgl. etwa O. DZIOBEK [1888], p. 218

$$\begin{aligned} L_1 &= a \\ L_2\ (=h) &= e\sin(\omega+\Omega) \\ L_3\ (=l) &= e\cos(\omega+\Omega) \\ L_4\ (=p) &= \sin i \sin\Omega \\ L_5\ (=q) &= \sin i \cos\Omega \\ L_6 &= M_0+\omega+\Omega \quad . \end{aligned} \tag{11.108}$$

Aus diesen Parametern folgen umgekehrt die *Kepler*elemente:

$$\begin{aligned} a &= L_1 \\ e &= \sqrt{L_2^2+L_3^2} \\ \sin i &= \sqrt{L_4^2+L_5^2} \quad \Rightarrow \quad i \\ \sin\Omega &= \frac{L_5}{\sqrt{L_4^2+L_5^2}} \\ \cos\Omega &= \frac{L_4}{\sqrt{L_4^2+L_5^2}} \quad \Rightarrow \quad \Omega \quad (\sin i \neq 0) \\ \sin(\omega+\Omega) &= \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2+L_3^2}} \\ \cos(\omega+\Omega) &= \frac{L_3}{\sqrt{L_2^2+L_3^2}} \quad \Rightarrow \quad \omega \quad (e\neq 0 \ , \ \sin i \neq 0) \\ M_0 &= L_6 - \arctan\frac{L_2}{L_3} \quad . \end{aligned} \tag{11.109}$$

Hier zeigen sich wieder die zu erwartenden Singularitäten in den *Kepler*elementen für kreisförmige und/oder äquatoriale Bahnen. Die Inklination ist bei diesen Elementen nicht eindeutig bestimmbar, da nicht zwischen rechtläufigen $(0° \le i < 90°)$ und rückläufigen $(90° \le i < 180°)$ Bahnen unterschieden werden kann. Die *Lagrange*-Elemente werden deshalb in der Satellitenbahnmechanik, in der jede Vielfalt von Bahnen vorkommen kann, nicht verwendet. Wegen ihres modellhaften Charakters für die Auswahl anderer Parametersätze werden jedoch im Folgenden der Bezug zum Zustandsvektor und die Variationsgleichungen hergeleitet.

Anmerkung: In der Literatur können zahlreiche Modifikationen der *Lagrange*-Elemente gefunden werden, mit denen das numerische Rechnen vereinfacht, bequemer, vielleicht sogar sicherer gemacht werden sollte. Eine solche Modifikation wurde beispielsweise von *W. de Sitter*[1] angegeben, der für die räumlichen Bahnelemente die Definitionen $L_4^{(\mathrm{mod})} := \sin i \sin\Omega_1$, $L_5^{(\mathrm{mod})} := \sin i \cos\Omega_1$ mit $\Omega_1 := \Omega + \sigma^{(\mathrm{mod})}$, wobei $\dot{\sigma}^{(\mathrm{mod})} := -2\dot{\Omega}\sin^2(i/2)$. Die prinzipiellen Schwierigkeiten des Rechnens mit derartigen Elementen, die sich vor allem bei der Vielfalt künstlicher Satellitenbahnen zeigen, werden durch derartige Modifikationen allerdings nicht beseitigt.

[1] SITTER, W. DE [1903]

11.2.2 Berechnung der *Lagrange*-Elemente aus dem Zustandsvektor

Gegeben sei zum Zeitpunkt *t* der Zustandsvektor $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$, der bei Bezug auf das Fundamentalsystem $\mathbf{p}_i$ mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$ mit seinen kartesischen Koordinaten $\left(x_j, \dot{x}_j\right)$ gegeben sei:

$$\mathbf{r} = x^j \mathbf{p}_j \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^j \mathbf{p}_j \quad .$$

Mit dem Radius

$$r = |\mathbf{r}| \tag{11.110}$$

kann der radiale Richtungsvektor

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{r}\mathbf{r} = r_0^j \mathbf{p}_j \tag{11.111}$$

berechnet werden, dessen Komponenten gegeben sind[1]:

$$\begin{aligned} r_{01} &= -\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \\ r_{02} &= \cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega \\ r_{03} &= \sin i \sin u \quad . \end{aligned} \tag{11.112}$$

Der Normalenvektor der Bewegung

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \tag{11.113}$$

liefert den Flächenparameter

$$G = |\mathbf{c}| \tag{11.114}$$

und damit den Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{c}_0 = \frac{1}{G}\mathbf{c} = c_0^j \mathbf{p}_j \quad . \tag{11.115}$$

Die radiale Geschwindigkeit ist aus

$$V_R = \dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r} \tag{11.116}$$

bekannt, die transversale Geschwindigkeit aus

$$V_T = r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} \quad . \tag{11.117}$$

Aus dem Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 \tag{11.118}$$

kann der transversale Richtungsvektor der Bewegung

---

[1] entsprechend den Beziehungen in Abschnitt 8.11.2 in Band II, mit den Zuordnungen $r_{01} \coloneqq a_{11}, r_{02} \coloneqq a_{12}, r_{03} \coloneqq a_{13}$

$$\mathbf{q}_0 \;=\; \frac{r}{G}\left(\dot{\mathbf{r}} - r\,\mathbf{r}_0\right) \;=\; q_0^j\,\mathbf{p}_j \tag{11.119}$$

berechnet werden, dessen Komponenten lauten[1]

$$\begin{aligned} q_{01} &= -\cos i\cos u\sin\Omega - \sin u\cos\Omega \\ q_{02} &= \cos i\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega \\ q_{03} &= \sin i\cos u \quad . \end{aligned} \tag{11.120}$$

Die Komponenten des Normaleneinheitsvektors lauten dann[2]

$$\begin{aligned} c_{01} &= r_{02}\,q_{03} - r_{03}\,q_{02} &&= \sin i\sin\Omega \\ c_{02} &= r_{03}\,q_{01} - r_{01}\,q_{03} &&= -\sin i\cos\Omega \\ c_{03} &= r_{01}\,q_{02} - r_{02}\,q_{01} &&= \cos i \quad . \end{aligned} \tag{11.121}$$

Damit können die folgenden *Lagrange*-Elemente aus den entsprechenden *Kepler*elementen berechnet werden:

$$\begin{aligned} L_4 &= c_{01} &&= r_{02}\,q_{03} - r_{03}\,q_{02} \\ L_5 &= -c_{02} &&= r_{01}\,q_{03} - r_{03}\,q_{01} \quad . \end{aligned} \tag{11.122}$$

Der Perizentrumsvektor (nach Formel (10.3))

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{c} - \mu\,\mathbf{r}_0 \tag{11.123}$$

hat den Betrag

$$|\mathbf{d}| \;=\; \mu e \quad . \tag{11.124}$$

Mit dem Kegelschnittparameter

$$p \;=\; \frac{G^2}{\mu} \tag{11.125}$$

folgt im Fall elliptischer Bewegung

$$p \;=\; a\left(1-e^2\right) \tag{11.126}$$

die große Bahnhalbachse und damit das erste *Lagrange*-Element

$$L_1 \;=\; a \;=\; \frac{p}{1-e^2} \quad , \quad e \;<\; 1 \quad . \tag{11.127}$$

Wird die wahre Länge wie üblich als Summe aus wahrer Anomalie υ, Argument des Perigäums ω und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω definiert

$$l \;=\; \upsilon+\omega+\Omega \;=\; u+\Omega \quad , \tag{11.128}$$

wird

---

[1] entsprechend Abschnitt 8.11.2 in Band II, mit den Zuordnungen $q_{01} := a_{21}, q_{02} := a_{22}, q_{03} := a_{23}$

[2] Siehe wieder in Abschnitt 8.11.2 in Band II, mit den Zuordnungen $c_{01} := a_{31}, c_{02} := a_{32}, c_{03} := a_{33}$

$$\begin{aligned} r_{01} + q_{02} &= (1+\cos i)\cos l \\ r_{02} - q_{01} &= (1+\cos i)\sin l \quad , \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \cos l &= \frac{r_{01} + q_{02}}{1+\cos i} \\ \sin l &= \frac{r_{02} - q_{01}}{1+\cos i} \quad . \end{aligned} \qquad i \neq 180° \tag{11.129}$$

Aus der Polargleichung

$$r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon}$$

folgt

$$e\cos\upsilon = \frac{p}{r} - 1 \quad , \tag{11.130}$$

und aus

$$\dot r = e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin\upsilon = e\frac{\mu}{G}\sin\upsilon$$

folgt

$$e\sin\upsilon = \frac{G}{\mu}\dot r \quad . \tag{11.131}$$

Wegen $\upsilon = l - (\omega + \Omega)$ ist

$$\begin{aligned} e\cos\upsilon &= e\cos l\cos(\omega+\Omega) + e\sin l\sin(\omega+\Omega) = \cos l\, L_3 + \sin l\, L_2 \\ e\sin\upsilon &= e\sin l\cos(\omega+\Omega) + e\cos l\sin(\omega+\Omega) = \sin l\, L_3 - \cos l\, L_2 \quad . \end{aligned} \tag{11.132}$$

Damit folgen die Beziehungen für das zweite und das dritte Lagrange-Element

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{1+c_{03}}\left[\left(r_{02}+q_{01}\right)\left(\frac{p}{r}-1\right) - \left(r_{01}+q_{02}\right)\frac{G}{\mu}\dot r\right] \\ L_3 &= \frac{1}{1+c_{03}}\left[\left(r_{01}+q_{02}\right)\left(\frac{p}{r}-1\right) + \left(r_{02}+q_{01}\right)\frac{G}{\mu}\dot r\right] \quad . \end{aligned} \tag{11.133}$$

Die wahre Anomalie υ kann mit den Beziehungen (11.130) und (11.131) berechnet werden. Damit folgt in der üblichen Weise (mit Hilfe der *Kepler*formeln (10.23)) auch die exzentrische Anomalie *E* sowie die mittlere Anomalie *M* (mit der *Kepler*gleichung) bzw. die Epocheanomalie M_0. Im Zusammenhang mit singularitätenfreien Elementen wird allerdings statt der mittleren Anomalie gerne die mittlere Länge

$$L = M + \omega + \Omega \tag{11.134}$$

verwendet. Zu deren Berechnung wird zunächst die exzentrische Länge

$$l_E := E + \omega + \Omega \tag{11.135}$$

eingeführt. Aus der Beziehung des Radius in Abhängigkeit von der exzentrischen Anomalie

$$r = a\left(1-e\cos E\right) \tag{11.136}$$

wird

$$e\cos E = 1-\frac{r}{a} \quad . \tag{11.137}$$

Aus den *Kepler*formeln

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{r}{p}(\cos\upsilon+e) \quad , & \frac{r}{a}\cos\upsilon &= \cos E-e \\ \sin E &= \frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\,\sin\upsilon \quad , & \frac{r}{a}\sin\upsilon &= \sqrt{1-e^2}\,\sin E \end{aligned} \tag{11.138}$$

folgt außerdem

$$e\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\,e\sin\upsilon}{1+\cos E} = \frac{r\dot r}{\sqrt{\mu a}} \quad . \tag{11.139}$$

Aus

$$\begin{aligned} e^2\sin l_E &= L_3\,e\sin E+L_2\,e\cos E \\ e^2\cos l_E &= L_3\,e\cos E-L_2\,e\sin E \end{aligned}$$

wird mit den Identitäten

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^2} &= \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^2} \\ \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2} &= \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}} \\ \frac{1}{1-e^2} &= 1+\frac{e^2}{1-e^2} \end{aligned} \tag{11.140}$$

sowie den Beziehungen

$$\sin l_E = L_2\,\frac{r}{p}+L_2\,\frac{r\,e\cos\upsilon}{e^2\,p}+L_3\,\frac{r\sqrt{1-e^2}}{a\left(1-e^2\right)e^2}\,e\sin\upsilon$$

$$\sin l_E = L_2-L_2\,\frac{e^2-e\cos E}{1-e^2}+L_2\,\frac{r\,e\cos\upsilon}{a\left(1-e^2\right)e^2}+L_3\,\frac{r\,e\sin\upsilon}{a\sqrt{1-e^2}\;e^2}$$

$$\sin l_E = L_2+\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}\;e^2}\left[L_2\sqrt{1-e^2}\;e\cos\upsilon+L_3\,e\sin\upsilon\right] \quad ,$$

analog

$$\begin{aligned}
\cos l_E &= L_3 \frac{r\left(e\cos\upsilon + e^2\right)}{a\left(1-e^2\right)e^2} - L_2 \frac{r\sqrt{1-e^2}\, e\sin\upsilon}{a\left(1-e^2\right)e^2} \\
\cos l_E &= L_3 \frac{1}{1-e^2} - L_3 \frac{e\cos E}{1-e^2} + L_3 \frac{r\, e\cos\upsilon}{a\left(1-e^2\right)e^2} - L_2 \frac{r\, e\sin\upsilon}{a\, e^2\sqrt{1-e^2}} \\
\cos l_E &= L_3 + \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}\, e^2}\left[L_3\sqrt{1-e^2}\, e\cos\upsilon - L_2\, e\sin\upsilon \right]
\end{aligned}$$

und mit den Beziehungen (11.132) schließlich der für elliptische Bahnen ($e < 1$) singularitätenfreie Ausdruck

$$\begin{aligned}
\sin l_E &= L_2 + \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\left[\left(1 - \frac{L_2^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \right)\sin l - \frac{L_2\, L_3}{1+\sqrt{1-e^2}}\cos l \right] \\
\cos l_E &= L_3 + \frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}\left[\left(1 - \frac{L_3^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \right)\cos l - \frac{L_2\, L_3}{1+\sqrt{1-e^2}}\sin l \right]
\end{aligned} \qquad (11.141)$$

zur eindeutigen Berechnung der exzentrischen Länge l_E erhalten. Für die mittlere Länge

$$L \coloneqq l_E - e\sin E = l_E - e\sin\left[l_E - (\omega + \Omega) \right]$$

folgt die zur *Kepler*gleichung analoge Gleichung

$$L = l_E - L_3\sin l_E + L_2\cos l_E \quad . \qquad (11.142)$$

Da

$$L = M + \omega + \Omega = M_0 + \omega + \Omega + n\,(t - t_0) = L_0 + n\,(t - t_0) \quad ,$$

wird für die mittlere Epochelänge zur Epoche t_0

$$L_6 = L_0 = L - n\left(t - t_0\right) = L - \sqrt{\frac{\mu}{L_1^3}}\left(t - t_0\right) \quad . \qquad (11.143)$$

Die *Lagrange*schen Elemente haben eine Singularität für retrograde äquatoriale Bahnen (i = 180°) (siehe die Formeln (11.129)).

11.2.3 Berechnung des Zustandsvektors aus *Lagrange*-Elementen

Gegeben seien die *Lagrange*-Elemente L_i mit $L_1 = a$, $L_6 = L_0 = L\left(t_0\right)$. Als unabhängige Variable alternativ zur Zeit wird die mittlere Länge $L=L(t)$ verwendet. Aus Formel (11.142) mit $L = L_0$ für $t = t_0$ kann als dem Äquivalent zur *Kepler*gleichung die exzentrische Länge l_E iterativ berechnet werden:

$$L = L(t) = L_0 + \sqrt{\frac{\mu}{L_1^3}}\left(t - t_0\right) = l_E - L_3\sin l_E + L_2\cos l_E \quad . \qquad (11.144)$$

Die Exzentrizität der Bahn kann ohne Einschränkung (vgl. die Beziehungen (11.109)) aus

$$e = \sqrt{L_2^2 + L_3^2} \qquad (11.145)$$

erhalten werden, womit der Kegelschnittparameter im elliptischen Fall

$$p = a\left(1-e^2\right) = L_1\left(1-L_2^2-L_3^2\right) \qquad \langle\ e<1 \tag{11.146}$$

und im hyperbolischen Fall

$$p = a\left(1+e^2\right) = L_1\left(1+L_2^2+L_3^2\right) \qquad \langle\ e>1 \tag{11.147}$$

berechnet werden kann. Im parabolischen Fall ist zudem

$$p = a = L_1 \qquad \langle\ e=1 \quad . \tag{11.148}$$

Damit ist auch der Flächenparameter

$$G = \sqrt{\mu\, p} \tag{11.149}$$

einheitlich für alle Kegelschnitte bekannt. Die exzentrische Anomalie kann im elliptischen Fall wegen

$$E = l_E - \omega - \Omega \tag{11.150}$$

aus dem System

$$\begin{aligned} e\cos E &= L_3\cos l_E + L_2 \sin l_E \\ e\sin E &= L_3\sin l_E - L_2\cos l_E \end{aligned} \tag{11.151}$$

berechnet werden und über die *Kepler*formeln (11.138) auf Seite 83 die wahre Anomalie υ aus

$$\begin{aligned} e\cos\upsilon &= \frac{L_3\cos l_E + L_2\sin l_E - L_2^2 - L_3^2}{1-L_2\sin l_E - L_3\cos l_E} \\ e\sin\upsilon &= \frac{\sqrt{1-e^2}\left(L_3\sin l_E - L_2\cos l_E\right)}{1-L_2\sin l_E - L_3\cos l_E} \quad . \end{aligned} \tag{11.152}$$

Die wahre Länge kann mit der (im Rahmen der *Lagrange*elemente gültigen) Definitionsgleichung

$$l = \upsilon + \omega + \Omega$$

aus dem System

$$\begin{aligned} e\cos l &= L_3\cos\upsilon - L_2\sin\upsilon \\ e\sin l &= L_3\sin\upsilon + L_2\cos\upsilon \end{aligned} \tag{11.153}$$

berechnet werden. Mit der Identität

$$\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e^2} = \frac{1}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

folgt die wahre Länge schließlich aus

$$\begin{aligned}
\sin l &= \left[\sin l_E - L_2 - L_3 \frac{L_3 \sin l_E - L_2 \cos l_E}{1+\sqrt{1-L_2^2-L_3^2}} \right] \frac{1}{1-L_2 \sin l_E - L_3 \cos l_E} \\
\cos l &= \left[\cos l_E - L_3 + L_2 \frac{L_3 \sin l_E - L_2 \cos l_E}{1+\sqrt{1-L_2^2-L_3^2}} \right] \frac{1}{1-L_2 \sin l_E - L_3 \cos l_E} \qquad \langle\, e<1 \quad .
\end{aligned} \tag{11.154}$$

Diese Herleitung gilt nur für die elliptische (einschließlich kreisförmige) *Kepler*bewegung. Für die sonstigen Arten der *Kepler*bewegung wird anstelle von $L_6 = L_0$ ein Anfangswert der wahren Anomalie υ vorgegeben und die wahre Länge aus den Formeln (11.153) berechnet, was dann wegen $e \geq 1$ stets möglich ist. In diesem Fall wird die wahre Anomalie als unabhängige Variable verwendet.

In allen Fällen kann der Radius (mit den Beziehungen (11.132))

$$r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon} = \frac{p}{1+L_2 \sin l + L_3 \cos l} \quad , \tag{11.155}$$

die radiale Geschwindigkeit

$$V_R = \dot{r} = \frac{\mu}{G} e \sin\upsilon = \frac{\mu}{G}\left(L_3 \sin l - L_2 \cos l\right) \tag{11.156}$$

und die transversale Geschwindigkeit

$$V_T = \frac{G}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1+L_2 \sin l + L_3 \cos l\right) \tag{11.157}$$

ohne Einschränkung berechnet werden. Hier wird die wahre Länge l als unabhängige Variable verwendet.

Zur Berechnung der Komponenten der Richtungsvektoren des mitgeführten (*Leibniz*-) Bahnsystems in Bezug auf das *Newton*sche (= inertiale) Basissystem werden die Keplerelemente i, Ω, ω benötigt. Aus den Definitionen (11.108) ergibt sich für die Inklination

$$\sin i = \sqrt{L_4^2 + L_5^2} \quad , \quad \cos i = \sqrt{1-\sin^2 i} = \sqrt{1-L_4^2-L_5^2} \quad . \tag{11.158}$$

An dieser Stelle zeigt sich die wesentliche Einschränkung der *Lagrange*lemente, da aus diesen Beziehungen die Inklination nur für rechtläufige Bahnen $\left(i \in [0°, 90°]\right)$ erklärt ist, weil $\cos i$ hier nur für nichtnegative Werte erklärt ist.

Der Bahnebenen-Normalenvektor kann durch die *Lagrange*elemente direkt ausgedrückt werden:

$$\mathbf{c}_0 = c_o^i \, \mathbf{p}_i \tag{11.159}$$

mit

$$\begin{aligned}
c_{01} &= \sin i \sin\Omega &&= L_4 \\
c_{02} &= -\sin i \cos\Omega &&= -L_5 \\
c_{03} &= \cos i &&= \sqrt{1-L_4^2-L_5^2} \quad \geq 0 \quad .
\end{aligned} \tag{11.160}$$

Mit der Identität, die wegen $\cos i \geq 0$ im Fall der *Lagrange*elemente nicht singulär werden kann,

$$\frac{1-\cos i}{\sin^2 i} = \frac{1}{1+\cos i} \tag{11.161}$$

können die Komponenten des radialen sowie des transversalen Richtungsvektors aus den Formelsystemen (11.112) (auf Seite 80) bzw. (11.120) berechnet werden. Dazu wird das Argument der Breite auf die wahre Länge l und die Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens zurückgeführt:

$$u \;=\; \upsilon + \omega \;=\; l - \Omega \quad .$$

Es ergeben sich die Komponenten des radialen sowie des transversalen Richtungsvektors aus den *Lagrange*elementen:

$$\begin{aligned}
r_{01} &= \frac{L_4\, L_5}{1+\cos i}\, \sin l + \left(\cos i + \frac{L_5^2}{1+\cos i} \right) \cos l \\
r_{02} &= \frac{L_4\, L_5}{1+\cos i}\, \cos l + \left(\cos i + \frac{L_4^2}{1+\cos i} \right) \sin l \\
r_{03} &= L_5 \sin l - L_4 \cos l
\end{aligned} \tag{11.162}$$

$$\begin{aligned}
q_{01} &= \frac{L_4\, L_5}{1+\cos i}\, \cos l - \left(\cos i + \frac{L_5^2}{1+\cos i} \right) \sin l \\
q_{02} &= -\frac{L_4\, L_5}{1+\cos i}\, \sin l + \left(\cos i + \frac{L_4^2}{1+\cos i} \right) \cos l \\
q_{03} &= L_5 \cos l + L_4 \sin l \quad .
\end{aligned} \tag{11.163}$$

Zur Probe dieser Ausdrücke können die Beziehungen (11.121) wegen der Bedingung $\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$ verwendet werden.

Der radiale und der transversale Richtungsvektor lauten (in äquatorialen Koordinaten) bei Bezug auf die *Lagrange*parameter

$$\mathbf{r}_0 = r_0^i\, \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{q}_0 = q_0^i\, \mathbf{p}_i \quad , \tag{11.164}$$

der gesuchte Zustandsvektor mit den Ausdrücken (11.145) bis (11.157)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r\, \mathbf{r}_0 = \frac{p\; r_0^i\, \mathbf{p}_i}{1 + L_2 \sin l + L_3 \cos l} \\
\dot{\mathbf{r}} &= V_R\, \mathbf{r}_0 + V_T\, \mathbf{q}_0 = \left[\frac{\mu}{G} \left(L_3 \sin l - L_2 \cos l \right) r_0^i + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(1 + L_2 \sin l + L_3 \cos l \right) q_0^i \right] \mathbf{p}_i \quad .
\end{aligned} \tag{11.165}$$

Anmerkung: Sollen auch retrograde Bahnen erfasst werden, bedarf es einer zusätzlichen Information, die nicht von den *Lagrange*elementen bereitgestellt wird. Eine solche zusätzliche Information kann das Vorzeichen $\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos i\right)$ für den Cosinus der Inklination sein. Dann kann gesetzt werden

$$\cos i = \sigma_i \sqrt{1 - L_4^2 - L_5^2} \quad . \tag{11.166}$$

In Parametersätzen, die üblicherweise in der Satellitenbahnmechanik verwendet werden, wird zur Vermeidung dieser Ausnahmeregelung gerne mit halben Winkeln in der Inklination gearbeitet. Allerdings kann auch dann grundsätzlich nicht eine Singularität für $i \to 180°$ vermieden werden. Diese ist in allen diesen Fällen nur vermeidbar durch eine Umdefinition der Parameter L_4 und L_5, wie in den Abschnitten 11.4 und 11.6 beschrieben wird.

11.2.4 Die *Gauß*schen Variationsgleichungen der *Lagrange*schen Elemente

Die Variationsgleichungen interessieren gemäß der klassischen Himmelsmechanik nur im Fall „gestörter" elliptischer Bewegung. Als unabhängige Variable wird im Fall der *Lagrange*parameter die wahre Länge $l = \upsilon + \omega + \Omega = u + \Omega$ verwendet. Da die *Gauß*schen Variationsgleichungen (wie sie in Abschnitt 11.1.5 ab Seite 71 hergeleitet werden) von der Zeit abhängen, muss die Variation der wahren Länge auf die Zeit mit Hilfe der Variationsgleichungen (11.71) und (11.79) bezogen werden:

$$dl = \left[\frac{G}{r^2} + b_N \frac{r \sin u}{G} \tan \frac{i}{2} \right] dt \quad . \tag{11.167}$$

Um diesen Ausdruck auf die *Lagrange*lemente zurückzuführen wird im elliptischen Fall nach Beziehung (11.146)

$$p = L_1 \left(1 - L_2^2 - L_3^2 \right) \tag{11.168}$$

gesetzt mit dem Flächenparameter $G = \sqrt{\mu\, p}$. Mit dem Radius in der Form (11.155), der Identität

$$\tan \frac{i}{2} = \frac{\sin i}{1 + \cos i} \tag{11.169}$$

den Definitionen (11.108) für die Elemente L_4 und L_5 und dem Ausdruck (11.158) für $\cos i$ ergibt sich die Beziehung um den Bezug der Variationen in den *Lagrange*elementen an Stelle der Zeit auf die wahre Länge l zu erhalten:

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \left(1 + L_2 \sin l + L_3 \cos l \right)^2 + b_N \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \frac{L_5 \sin l - L_4 \cos l}{\left(1 + L_2 \sin l + L_3 \cos l \right) \left(1 + \sqrt{1 - L_4^2 - L_5^2} \right)} \quad . \tag{11.170}$$

Wenn die radiale Beschleunigung b_{R2} in Bezug auf die Zweikörperbewegung bereitgestellt wird, ebenso die transversale Beschleunigung b_T sowie die normale Beschleunigung b_N können die *Gauß*schen Variationsgleichungen in den *Lagrange*parametern erhalten werden.

Mit den Ausdrücken (11.155) und (11.156) kann die Variationsgleichung (11.82) für die große Bahnhalbachse auf *Lagrange*elemente zurückgeführt werden. Zunächst ergibt sich

$$\dot{L}_1 = \dot{a} = \frac{2 L_1^2}{G} \left(b_{R2} \frac{G}{\mu} \dot{r} + b_T \frac{p}{r} \right) \quad ,$$

unter Berücksichtigung des Ausdrucks (11.170)

$$\frac{dL_1}{dl} = 2 \sqrt{\frac{L_1^3}{\mu \left(1 - L_2^2 - L_3^2 \right)}} \left[b_{R2} \left(L_3 \sin l - L_2 \cos l \right) + b_T \left(1 + L_2 \sin l + L_3 \cos l \right) \right] \frac{dt}{dl} \quad . \tag{11.171}$$

Für das zweite *Lagrange*element ergibt sich

$$\dot{L}_2 = \dot{e}\sin\left(\omega+\Omega\right)+e\left(\dot{\omega}+\dot{\Omega}\right)\cos\left(\omega+\Omega\right)=\frac{\dot{e}}{e}L_2+\left(\dot{\omega}+\dot{\Omega}\right)L_3$$

mit den Variationsgleichungen (11.72) und (11.75)

$$\begin{aligned}\frac{dL_2}{dl} = \sqrt{\frac{L_1\left(1-L_2^2-L_3^2\right)}{\mu}}\left\{-b_{R2}\cos l\ +\ b_T\left[\frac{L_2+\sin l}{1+L_2\sin l+L_3\cos l}+\sin l\right]\right\}\frac{dt}{dl}+\\ +b_N\sqrt{\frac{L_1^3\left(1-L_2^2-L_3^2\right)^3}{\mu}}\ \frac{\left(L_5\sin l-L_4\cos l\right)L_3}{\left(1+L_2\sin l+L_3\cos l\right)\left(1+\sqrt{1-L_4^2-L_5^2}\right)}\ \frac{dt}{dl}\ .\end{aligned} \tag{11.172}$$

Entsprechend folgt

$$\dot{L}_3 = \dot{e}\cos\left(\omega+\Omega\right)-e\left(\dot{\omega}+\dot{\Omega}\right)\sin\left(\omega+\Omega\right)=\frac{\dot{e}}{e}L_3-\left(\dot{\omega}+\dot{\Omega}\right)L_2$$

und somit

$$\begin{aligned}\frac{dL_3}{dl} = \sqrt{\frac{L_1\left(1-L_2^2-L_3^2\right)}{\mu}}\left\{b_{R2}\sin l\ +\ b_T\left[\frac{L_3+\cos l}{1+L_2\sin l+L_3\cos l}+\cos l\right]\right\}\frac{dt}{dl}+\\ +b_N\sqrt{\frac{L_1^3\left(1-L_2^2-L_3^2\right)^3}{\mu}}\ \frac{\left(L_5\sin l-L_4\cos l\right)L_2}{\left(1+L_2\sin l+L_3\cos l\right)\left(1+\sqrt{1-L_4^2-L_5^2}\right)}\ \frac{dt}{dl}\ .\end{aligned} \tag{11.173}$$

Für die Variation des vierten *Lagrange*elements

$$\dot{L}_4 = (i)^{\cdot}\cos i\ \sin\Omega + \dot{\Omega}\sin i\ \cos\Omega$$

folgt mit den Variationsgleichungen (11.70) und (11.71) zunächst

$$\dot{L}_4 = b_N\frac{r}{G}\left\{\cos i\sin l+\left(1-\cos i\right)\sin u\cos\Omega\right\}$$

und schließlich mit der Identität (11.161)

$$\begin{aligned}\frac{dL_4}{dl} = b_N\sqrt{\frac{L_1\left(1-L_2^2-L_3^2\right)}{\mu}}\ \frac{1}{1+L_2\sin l+L_3\cos l}\ \times\\ \times\left\{\sqrt{1-L_4^2-L_5^2}\ \sin l+\frac{L_5^2\sin l-L_4L_5\cos l}{1+\sqrt{1-L_4^2-L_5^2}}\right\}\frac{dt}{dl}\ .\end{aligned} \tag{11.174}$$

Entsprechend folgt

$$\dot{L}_5 = (i)^{\cdot}\cos i\ \cos\Omega - \dot{\Omega}\sin i\ \sin\Omega$$

somit

$$\dot{L}_5 = b_N\frac{r}{G}\left\{\cos i\cos l-\left(1-\cos i\right)\sin u\sin\Omega\right\}$$

und schließlich

$$\frac{dL_5}{dl} = b_N \sqrt{\frac{L_1\left(1-L_2^2-L_3^2\right)}{\mu}}\,\frac{1}{1+L_2\sin l+L_3\cos l}\times \\ \times\left\{\sqrt{1-L_4^2-L_5^2}\,\cos l-\frac{L_4^2\cos l+L_4\,L_5\sin l}{1+\sqrt{1-L_4^2-L_5^2}}\right\}\frac{dt}{dl}\,. \tag{11.175}$$

Für die Variation des sechsten *Lagrange*elements

$$\dot{L}_6 = \dot{M}_0+\dot{\omega}+\dot{\Omega}$$

folgt mit den Variationsgleichungen (11.95) und (11.75)

$$\dot{L}_6 = 3\sqrt{1-e^2}\left[b_{R2}\,\frac{e\sin\upsilon}{p}+b_T\,\frac{1}{r}\right]\left(t-t_0\right)\;-b_{R2}\,\frac{2\,r\,G}{\mu\,p}+b_N\,\frac{r\sin u}{G}\tan\frac{i}{2}\quad . \tag{11.176}$$

Mit den Ausdrücken (11.132) und (11.146), sowie dem Faktor bei b_N wie in den vorstehenden Ausdrücken folgt schließlich

$$\frac{dL_6}{dt} = \frac{3}{L_1\sqrt{1-L_2^2-L_3^2}}\left[b_{R2}\left(L_3\sin l-L_2\cos l\right)+b_T\left(1+L_2\sin l+L_3\cos l\right)\right]\left(t-t_0\right)\frac{dt}{dl}- \\ -2\,b_{R2}\sqrt{\frac{L_1\left(1-L_2^2-L_3^2\right)}{\mu}}\,\frac{1}{1+L_2\sin l+L_3\cos l}\,\frac{dt}{dl}+ \\ +b_N\sqrt{\frac{L_1^3\left(1-L_2^2-L_3^2\right)^3}{\mu}}\,\frac{\left(L_5\sin l-L_4\cos l\right)}{\left(1+L_2\sin l+L_3\cos l\right)\left(1+\sqrt{1-L_4^2-L_5^2}\right)}\,\frac{dt}{dl}\quad . \tag{11.177}$$

Hier werde der „retrograde Faktor“ eingeführt

$$\sigma_i := \begin{cases} +1 & \text{für rechtläufige Bahnen}\quad \left(i\in[0°,90°]\right) \\ -1 & \text{für rückläufige Bahnen}\quad \left(i\in(90°,180°]\right)\end{cases}\quad . \tag{11.178}$$

Der retrograde Faktor ist kein veränderbarer Parameter. Er darf, nachdem er einmal festgelegt wurde, während der gesamten Bahnuntersuchung nicht verändert werden.

Damit kann an Stelle der mittleren Epochelänge $L_0 = L_6$ die mittlere Länge

$$L = M+\omega+\sigma_i\;\Omega = L_0-n\left(t-t_0\right)\qquad\qquad \langle\sigma_i = +1 \tag{11.179}$$

vorzugsweise im Rahmen einer Ephemeridenrechnung verwendet werden. Ihre Variation lautet

$$\dot{L} = \dot{M}+\dot{\omega}+\sigma_i\;\dot{\Omega}\qquad\qquad \langle\sigma_i = +1\quad .$$

Mit der mittleren Bewegung $n=\sqrt{\mu/a^3}=\sqrt{\mu/L_1^3}$ liefern die Variationsgleichungen (11.94) und (11.71) wieder mit den entsprechenden Ausdrücken (11.132) und (11.146) die Variation der mittleren Länge in Bezug auf die *Lagrange*elemente

$$\frac{dL}{dl} = \sqrt{\frac{\mu}{L_1^3}}\frac{dt}{dl} - b_{R2}\sqrt{\frac{L_1}{\mu}}\left[\frac{2\left(1-L_2^2-L_3^2\right)}{1+L_2\sin l+L_3\cos l}+\frac{L_2\sin l+L_3\cos l}{1+\sqrt{1-L_2^2-L_3^2}}\right]\frac{dt}{dl} -$$
$$-b_T\sqrt{\frac{L_1\left(1-L_2^2-L_3^2\right)}{\mu}}\left[1+\frac{1}{1+L_2\sin l+L_3\cos l}\right]\frac{L_3\sin l-L_2\cos l}{1+\sqrt{1-L_2^2-L_3^2}}\frac{dt}{dl}+ \qquad (11.180)$$
$$+b_N\sqrt{\frac{L_1^3\left(1-L_2^2-L_3^2\right)^3}{\mu}}\frac{\left(L_5\sin l-L_4\cos l\right)}{\left(1+L_2\sin l+L_3\cos l\right)\left(1+\sqrt{1-L_4^2-L_5^2}\right)}\frac{dt}{dl} \quad .$$

11.3 Äquinoktiale Elemente

Da der stets erklärte Zustandsvektor eines bewegten Himmelskörpers (üblicherweise) auf den Frühlingspunkt (ein „Äquinoktium“) bezogen ist, geht das Bestreben bei der Suche nach neuen „Elementesätzen“ dahin, sie möglichst ähnlich wie den Zustandsvektor in Bezug auf ein Äquinoktium darzustellen, weshalb derartige Elemente häufig als „äquinoktiale Elemente“ bezeichnet werden[1]. Im Gegensatz zum Zustandsvektor sollen derartige „Elemente“ im Rahmen einer Zweikörperbewegung Konstante sein, die im Sinn der Methode der Variation der Parameter bei der Einwirkung weiterer die Bewegung definierender Kräfte (neben der *Newton*schen Attraktion der beiden Hauptkörper) als Variable, d. h. in diesem Zusammenhang als „langsame Variable“, aufgefasst werden. Heutzutage werden allerdings auch Parameter, die selbst in der Zweikörperbewegung keine Konstanten, also „schnelle“ Parameter sind, aus verschiedenen Gründen als Bewegungsparameter aufgefasst[2], so dass die Definition „äquinoktialer“ Elemente unscharf wird. Die Übergänge sind fließend, was vor allem im Lichte einer vertieften und verallgemeinerten Bewegungsbeschreibung zu verstehen ist. Die im vorigen Abschnitt behandelten *Lagrangeschen Elemente* sind vermutlich die ersten derartigen „äquinoktialen Elemente“[3].

Der in der Literatur am häufigsten anzutreffende Satz äquinoktialer Bahnparameter ist folgendermaßen definiert:

[1] Bezeichnung von R. A. BROUCKE (nach BATTIN [1987], p. 492); nach BROUCKE, R. A. and CEFOLA, P. J. [1972] wurde der Begriff von Arsenault et al. eingeführt (ARSENAULT, J. L., FORD K.C., AND KOSKEAL, P.E. [1970] 'Orbit Determination Using Analytical Partial Derivatives of Perturbed Motion', *AIAA J.* **8**, 4-12)

[2] siehe etwa die *Hoots*schen „Positionselemente“ in Abschnitt 11.6 auf Seite 103[2]

[3] ohne jeden entfernten Anspruch auf Vollständigkeit sei auf einige Arbeiten hingewiesen: BROUCKE, R. A. and CEFOLA, P. J. [1972], CEFOLA, P. J. [1972], CEFOLA, P. J. [19759, KAMEL A. A. [19839, KECHICHIAN, J. A. [1991], WALKER, M. J. H. ET AL. [1985], usw. usw. usw.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= a \\
E_2\,(=h) &= e\sin(\omega+\Omega) \\
E_3\,(=l) &= e\cos(\omega+\Omega) \\
E_4\,(=p) &= \tan\frac{i}{2}\sin\Omega \\
E_5\,(=q) &= \tan\frac{i}{2}\cos\Omega \\
E_6\,(=L_0) &= M_0+\omega+\Omega \quad .
\end{aligned}
\tag{11.181}
$$

Aus diesen Parametern folgen umgekehrt die *Kepler*elemente:

$$
\begin{aligned}
a &= E_1 \\
e &= \sqrt{E_2^2+E_3^2} \\
\tan\frac{i}{2} &= \sqrt{E_4^2+E_5^2} \qquad \Rightarrow\ i \\
\sin\Omega &= \frac{E_5}{\sqrt{E_4^2+E_5^2}} \\
\cos\Omega &= \frac{E_4}{\sqrt{E_4^2+E_5^2}} \ \Rightarrow\ \Omega \quad (\sin i\neq 0)
\end{aligned}
\tag{11.182}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\omega+\Omega) &= \frac{E_2}{\sqrt{E_2^2+E_3^2}} \\
\cos(\omega+\Omega) &= \frac{E_3}{\sqrt{E_2^2+E_3^2}} \ \Rightarrow\ \omega \quad (e\neq 0\ ,\ \sin i\neq 0) \\
M_0 &= L_0-\arctan\frac{E_2}{E_3} = E_6-\arctan\frac{E_2}{E_3} \quad .
\end{aligned}
$$

Hier zeigen sich wieder die zu erwartenden Singularitäten in den *Kepler*elementen für kreisförmige und/oder äquatoriale Bahnen. Die Inklination ist bei diesen Elementen im Gegensatz zu den *Lagrange* Elementen im Intervall $i\in[0°,180°)$ eindeutig erklärt, d.h. sowohl für recht- wie für rückläufige Bahnen, allerdings nicht für rückläufige Äquatorbahnen (i = 180°).

Die Berechnung des Zustandsvektors aus den äquinoktialen Elementen, bzw. umgekehrt des Zustandsvektors aus den äquinoktialen Elementen, sowie der *Gauß*schen Variationsgleichungen erfolgt ähnlich wie bei den *Lagrange* Elementen (Abschnitt 11.2) bzw. den regulären Elementen (Abschnitt 11.4). Als unabhängige Variable wird wieder die auf das Äquinoktium bezogene wahre Länge $l=\upsilon+\omega+\Omega=u+\Omega$ mit dem Zeitbezug aus der Variationsgleichung (11.167) verwendet.

Anmerkung: Die Wahl des (etwas befremdlichen) Faktors $\tan(i/2)$ in den Parametern E_4 und E_5 könnte durch den entsprechenden Faktor in der Variationsgleichung (11.167) beeinflusst sein.

11.4 Reguläre Elemente

Eine Modifikation der äquinoktialen Elemente sind die von *Eckstein*[1] eingeführten regulären Elemente. Sie sind für Kreisbahnen sowie für alle Bahninklinationen mit Ausnahme von retrograden Äquatorbahnen (i=180°) singularitätenfrei. Sie können als eine vereinfachte Version der kanonischen *Poincaré* Elemente verstanden werden, sind aber selbst nicht kanonisch[2].

11.4.1 Definition der regulären Elemente

In Bezug auf die *Kepler*schen Elemente haben die regulären Elemente folgende Definitionen[3]:

$$\begin{aligned} E_1 &:= a^* := \frac{a}{R_E} \\ E_2\,(:= h) &:= e\sin\left(\omega+\Omega\right) \\ E_3\,(:= l) &:= e\cos\left(\omega+\Omega\right) \\ E_4\ (:= p) &:= \sin\frac{i}{2}\sin\Omega \\ E_5\,(:= q) &:= \sin\frac{i}{2}\cos\Omega \\ E_6\,(:= L_0) &:= M_0+\omega+\Omega \quad . \end{aligned} \tag{11.183}$$

Als unabhängige Variable wird die mittlere Länge in der Bahn verwendet, da sie – wie die mittlere Anomalie $M = M_0 + n(t-t_0)$ – proportional zur Zeit und daher einen unmittelbaren Bezug zur Zeit liefern kann:

$$L := L_0 + n\left(t-t_0\right) = M+\omega+\Omega \quad , \tag{11.184}$$

wobei $n = \sqrt{\mu/a^3}$ die mittlere Bewegung ist.

Dir originalen regulären Bahnelemente sind nur für alle (ellipsennahen) Bahnen mit der Ausnahme von retrograden Äquatorbahnen (i=180°) definiert. Beim Rechnen mit Satellitenbahnen gibt es nicht nur an diesen singulären Stellen sondern auch in der Umgebung einer solchen Singularität numerische Probleme. Um auch solche Fälle in einen stabilen Rechenprozess einbeziehen zu können, ist es sinnvoll die regulären Elemente E_4 und E_5 für derartige Bahnen umzudefinieren:

$$E_4^{(2)} := \cos\frac{i}{2}\sin\Omega \quad , \quad E_5^{(2)} := \cos\frac{i}{2}\cos\Omega \quad . \tag{11.185}$$

Die beiden Definitionen können zusammengefasst werden, da

---

[1] ECKSTEIN, M. C. [1972], ECKSTEIN, M. C. [1973] , ECKSTEIN, M. C. [1974], ECKSTEIN, M. C. [1978a], s. a. GIACAGLIA, G. E. O. [1977]

[2] Vgl. in Abschnitt 11.9.6 ab Seite 132

[3] Die hier entsprechend dem originalen *Lagranges*chen Vorschlag auch von *Eckstein* verwendeten Größen *h, l, p, q* werden im vorliegenden Bericht nicht verwendet um unnötige Verwechslungen zu vermeiden

$$\sin\frac{i}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos i\right)} \quad , \quad \cos\frac{i}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos i\right)} \quad . \tag{11.186}$$

Mit dem retrograden Faktor (11.178) nehmen die beiden regulären Elemente die allgemeingültige Gestalt an[1]:

$$\begin{aligned} E_4 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos i\right)}\,\sin\Omega \\ E_5 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos i\right)}\,\cos\Omega \quad . \end{aligned} \tag{11.187}$$

Im Fall rückläufiger Bahnen, d.h. (nur!) in dem Fall, dass $\sigma_i = -1$ gesetzt wird, muss allerdings das Argument der Breite „rückwärts“ gerechnet werden. In Bezug auf die wahre Länge l muss somit allgemeingültig gesetzt werden:

$$u=\sigma_i\left(l-\Omega\right)=\upsilon+\omega \quad . \tag{11.188}$$

In allen Fällen bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sin i &= 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos i\right)}\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos i\right)} \\ \cos i &= \sigma_i\left[1-2\left(E_4^2+E_5^2\right)\right] \end{aligned} \tag{11.189}$$

und damit die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos i\right) &= 1-E_4^2-E_5^2 \\ \frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos i\right) &= E_4^2+E_5^2 \quad . \end{aligned} \tag{11.190}$$

Wegen der Umdefinition (11.188) und folglich

$$\upsilon=\sigma_i\,l-\left(\omega+\sigma_i\,\Omega\right) \tag{11.191}$$

müssen auch das zweite und das dritte reguläre Element umdefiniert werden:

$$\begin{aligned} E_2 &= e\sin\left(\omega+\sigma_i\,\Omega\right) \\ E_3 &= e\cos\left(\omega+\sigma_i\,\Omega\right) \quad . \end{aligned} \tag{11.192}$$

Unter Umständen muss dann folgerichtig auch das sechste reguläre Element umdefiniert werden:

$$E_6=\sigma_i\left(M_0+\omega+\sigma_i\,\Omega\right) \quad . \tag{11.193}$$

[1] Erstmals präsentiert 1. Okt. 1997, IAE-CTA und modifiziert 24. Juni 2013

11.4.2 Berechnung der *Kepler*elemente aus den regulären Elementen

Durch Umkehrung der Definitionsgleichungen (11.183) können die *Kepler* Elemente mit den bekannten Einschränkungen $\left(e \neq 0,\ \sin i \neq 0\right)$ aus den regulären Elementen berechnet werden:

$$\begin{aligned} a &= E_1\, R_E = a^* R_E \\ e &= \sqrt{E_2^2 + E_3^2} \end{aligned} \tag{11.194}$$

Aus den Beziehungen (11.189) folgt unmittelbar die Inklination der Bahn aus

$$\cos i = \sigma_i \left[1 - 2\left(E_4^2 + E_5^2\right)\right] \ , \tag{11.195}$$

wobei $\sigma_i = -1$ nur gesetzt werden muss, wenn der Fall *i*=180° und Umgebung eingeschlossen werden muss. Die Inklination *i* ist damit eindeutig bestimmt und es wird

$$\sin i = \sqrt{1 - \cos^2 i} \ . \tag{11.196}$$

Für die Rektaszension des aufsteigenden Knotens folgt im Fall nicht äquatorialer Bahnen aus den Beziehungen (11.183), (11.187) und (11.190)

$$\sin\Omega = \frac{E_4}{\sqrt{E_4^2 + E_5^2}} \ , \ \cos\Omega = \frac{E_5}{\sqrt{E_4^2 + E_5^2}} \ , \ \Omega = \arctan\frac{E_4}{E_5} \qquad \left\langle \sin i \neq 0 \ . \right. \tag{11.197}$$

Die Länge des Perizentrums folgt aus

$$\omega + \sigma_i\,\Omega = \arctan\frac{E_2}{E_3} \ , \ \omega = \left(\omega + \sigma_i\,\Omega\right) - \sigma_i\,\Omega = \arctan\frac{E_2}{E_3} - \sigma_i \arctan\frac{E_4}{E_5} \ , \tag{11.198}$$

sowie für das Argument des Perizentrums im Fall nicht kreisförmiger Bahnen

$$\cos\omega = \left(\sigma_i\, E_2 \sin\Omega + E_3\, \cos\Omega\right)\frac{1}{e} \ , \ \sin\omega = \left(E_2\, \cos\Omega - \sigma_i\, E_3\, \sin\Omega\right)\frac{1}{e} \quad . \tag{11.199}$$

Die mittlere Anomalie im Moment der Epoche lautet

$$M_0 = \sigma_i\, E_6 - \left(\omega + \sigma_i\,\Omega\right) = \sigma_i\, L_0 - \left(\omega + \sigma_i\,\Omega\right) \ . \tag{11.200}$$

Anmerkung: Die explizite Angabe der *Kepler*elemente dient lediglich der Veranschaulichung. Sie sind für kompliziertere Berechnungen nicht geeignet.

11.4.3 Berechnung der regulären Elemente aus dem Zustandsvektor

Gegeben sei ein Zustandsvektor

$$\begin{aligned} &\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i = r\ \mathbf{r}_0 = r\, r_0^i\, \mathbf{p}_i && \left\langle\ r = \left|\mathbf{r}\right| \right. \\ &\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i = \dot{r}\ \mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 = \dot{r}\, r_0^i\, \mathbf{p}_i + \frac{G}{r} q_0^i\, \mathbf{p}_i && \left\langle\ \dot{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r} \ , \ G = \left|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right| , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \right. \\ &\mathbf{c} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{c} = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = c_0^i\, \mathbf{p}_i = G\, \mathbf{c}_0 && \left\langle G = \left|\mathbf{c}\right| = \left|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right| \right. \end{aligned} \tag{11.201}$$

Es werde angenommen, dass das Basissystem inertial $\left(\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0\right)$ ist. Der Perizentrumsvektor („*Hermann*scher Vektor“) nach Formel (10.3)

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = e\,\mu\,\mathbf{d}_0 \quad , \quad \mathbf{d}_0^2 = 1 \tag{11.202}$$

ergibt unmittelbar die numerische Exzentrizität

$$e = \frac{|\mathbf{d}|}{\mu} \quad . \tag{11.203}$$

In allen Fällen folgt der Kegelschnittparameter p aus

$$p = \frac{G^2}{\mu} \quad . \tag{11.204}$$

Da die regulären (wie auch alle anderen äquinoktialen) Elemente ausschließlich bei elliptischen Bahnen eingesetzt werden, kann damit das erste reguläre Element berechnet werden:

$$E_1 = a^* = \frac{1}{R_E}\frac{p}{1-e^2} = \frac{1}{R_E}\frac{\mu\, G^2}{\mu^2 - \mathbf{d}^2} \quad . \tag{11.205}$$

Die äquatorialen Komponenten des radialen sowie des transversalen Richtungsvektors können unmittelbar mit den Beziehungen (11.201) berechnet werden

$$r_{0i} = \frac{x_i}{r} \quad , \; q_{0i} = \frac{r}{G}\left[\dot{x}_i - \dot{r}\, r_{0i}\right] \quad . \tag{11.206}$$

Da die regulären Elemente mit Keplerelementen definiert werden, können aus der dritten Zeile in den Beziehungen (11.201) bzw. direkt mit den Gleichungen (11.121) die Komponenten des normalen Richtungsvektors berechnet werden. Damit ergeben sich das vierte und das fünfte reguläre Element (mit den Beziehungen (11.189))

$$E_4 = \frac{c_{01}}{\sqrt{2\left(1+\sigma_i\, \mathrm{c}_{03}\right)}} \quad , \quad E_5 = -\frac{c_{02}}{\sqrt{2\left(1+\sigma_i\, \mathrm{c}_{03}\right)}} \quad . \tag{11.207}$$

Ein Zustandsvektor ist grundsätzlich oskulierend, somit zeitabhängig und im Verlauf einer Bewegung veränderlich. Bahnelemente wie hier die regulären Elemente sind jedoch in Bezug auf die Grundbewegung, die im vorliegenden als Zweikörperbewegung angenommen wird, konstante Größen. Um die Bewegung zu eliminieren, muss mit Hilfe eines Bahnwinkels eine solche Reduktion durchgeführt werden. Für die Elemente E_1, E_4 und E_5, die auf den als konstant angenommenen Normalenvektor zurückgeführt werden können, trifft dies nicht zu, jedoch für die anderen Elemente, zu deren Berechnung der radiale und der transversale Richtungsvektor benötigt wird. Als Bahnwinkel dient im Rahmen der regulären Elemente die wahre Länge in der Bahn

$$l = \sigma_i\left(\upsilon + \omega\right) + \Omega = \sigma_i\, u + \Omega \tag{11.208}$$

Wie in den Beziehungen (11.129) auf Seite 82, jetzt jedoch auch für alle rückläufigen Bahnen gültig, folgt die wahre Länge aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos l &= \frac{r_{01} + \sigma_i\, q_{02}}{1 + \sigma_i\, \mathrm{c}_{03}} \\ \sin l &= \frac{r_{02} + \sigma_i\, q_{01}}{1 + \sigma_i\, \mathrm{c}_{03}} \quad . \end{aligned} \tag{11.209}$$

Die wahre Anomalie kann mit den Formeln (11.130) und (11.131) berechnet werden:

$$e\,\cos\upsilon = \frac{p}{r} - 1 \quad , \; e\,\sin\upsilon = \dot{r}\,\frac{G}{\mu} \quad . \tag{11.210}$$

Da $l - \sigma_i\,\upsilon = \omega + \sigma_i\,\Omega$ ergeben sich die Elemente

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{1+\sigma_i\,\mathrm{c}_{03}}\left[\left(r_{02}+\sigma_i\,q_{01}\right)\left(\frac{p}{r}-1\right) - \sigma_i\left(r_{01}+\sigma_i\,q_{02}\right)\frac{G}{\mu}\dot{r}\right] \\ E_3 &= \frac{1}{1+\sigma_i\,\mathrm{c}_{03}}\left[\left(r_{01}+\sigma_i\,q_{02}\right)\left(\frac{p}{r}-1\right) + \sigma_i\left(r_{02}+\sigma_i\,q_{01}\right)\frac{G}{\mu}\dot{r}\right] \quad . \end{aligned} \tag{11.211}$$

Um den Bezug zur Zeit herzustellen, der zur Berechnung des sechsten Elements erforderlich ist, der Epochelänge L_0, wird die mittlere Länge $L = \sigma_i\left(M + \omega\right) + \Omega$ benötigt. Die Berechnung erfolgt ähnlich wie in Abschnitt 11.2.2 im Zusammenhang mit den *Lagrange*elementen

Dazu wird zunächst die exzentrische Länge

$$l_E = \sigma_i\left(E + \omega\right) + \Omega \tag{11.212}$$

eingeführt. Die exzentrische Anomalie *E* wird mit den schon bekannten Parametern r, p, e, υ aus den *Kepler*formeln (siehe etwa die Formeln (11.137) und (11.139)) berechnet:

$$e\,\cos E = 1 - \frac{r}{E_1}\,R_E \quad , \quad e\,\sin E = \frac{r\,\dot{r}}{\sqrt{\mu\,E_1}}\sqrt{R_E} \quad . \tag{11.213}$$

Mit der Beziehung (11.191) folgt

$$\begin{aligned} e\,\sin\upsilon &= \sigma_i\,E_3\sin l - E_2\cos l \\ e\,\cos\upsilon &= E_3\cos l + \sigma_i\,E_2\sin l \quad . \end{aligned} \tag{11.214}$$

Die exzentrische Länge kann berechnet werden aus den Formeln (vgl. die Herleitung der Formeln (11.141))

$$\begin{aligned} \sin l_E &= \sigma_i\left\{E_2 + \frac{r\,R_E}{E_1\sqrt{1-e^2}}\left[\sigma_i\left(1 - \frac{E_2^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\sin l - \frac{E_2\,E_3}{1+\sqrt{1-e^2}}\cos l\right]\right\} \\ \cos l_E &= E_3 + \frac{r\,R_E}{E_1\sqrt{1-e^2}}\left[\left(1 - \frac{E_3^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\cos l - \sigma_i\,\frac{E_2\,E_3}{1+\sqrt{1-e^2}}\sin l\right] \quad . \end{aligned} \tag{11.215}$$

Die mittlere Länge wird dann über die zur *Kepler*gleichung analoge Gleichung (11.142) erhalten:

$$L = \sigma_i\,l_E - \sigma_i\,E_3\sin l_E + E_2\cos l_E \quad . \tag{11.216}$$

Da der Zeitpunkt *t* bekannt ist, an dem der Zustandsvektor $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ gegeben ist und da auch der Zeitpunkt der Epoche bekannt sein muss, kann das sechste reguläre Element, die mittlere Epochelänge, berechnet werden:

$$E_6 = L_0 = L - \sqrt{\frac{\mu R_E^3}{E_1^3}}\left(t - t_0\right) \quad . \tag{11.217}$$

11.4.4 Berechnung des Zustandsvektors aus den regulären Elementen

Gegeben seien die regulären Elemente $E_i \left(i = 1,...,5\right)$ und die Epochelänge $E_6 = L_0 = L\left(t_0\right)$ zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0 . Zu einem Zeitpunkt *t* sei der Zustandsvektor zu berechnen.

Die Exzentrizität der Bahn ist eindeutig bekannt aus

$$e = \sqrt{E_2^2 + E_3^2} \quad . \tag{11.218}$$

Der Kegelschnittparameter und der Flächenparameter lauten

$$p = E_1 R_E \left(1 - E_2^2 - E_3^2\right) \qquad , \quad G = \sqrt{\mu E_1 R_E \left(1 - E_2^2 - E_3^2\right)} \quad . \tag{11.219}$$

Die weitere Berechnung sei auf den elliptischen Fall eingeschränkt. Dann beträgt die mittlere Länge zum Zeitpunkt *t*

$$L = E_6 + \sqrt{\frac{\mu R_E^3}{E_1^3}}\left(t - t_0\right) \quad . \tag{11.220}$$

Mit ihr kann die exzentrische Länge l_E aus der modifizierten Keplergleichung (11.216) berechnet werden

$$L = \sigma_i l_E - \sigma_i E_3 \sin l_E + E_2 \cos l_E \quad . \tag{11.221}$$

und damit die exzentrische Anomalie $E = \sigma_i l_E - \left(\omega + \sigma_i \Omega\right)$ mit den Definitionen (11.192) aus

$$\begin{aligned} e \sin E &= \sigma_i E_3 \sin l_E - E_2 \cos l_E \\ e \cos E &= E_3 \cos l_E + \sigma_i E_2 \sin l_E \end{aligned} \quad , \tag{11.222}$$

und entsprechend für die wahre Anomalie mit Beziehung (11.191) $\upsilon = \sigma_i l - \left(\omega + \sigma_i \Omega\right)$

$$\begin{aligned} e \sin \upsilon &= \sigma_i E_3 \sin l - E_2 \cos l \\ e \cos \upsilon &= E_3 \cos l + \sigma_i E_2 \sin l \end{aligned} \tag{11.223}$$

sowie umgekehrt

$$\begin{aligned} e \sin l &= \sigma_i \left[E_3 \sin \upsilon + E_2 \cos \upsilon\right] \\ e \cos l &= \quad E_3 \cos \upsilon - E_2 \sin \upsilon \end{aligned} \quad . \tag{11.224}$$

Der Bahnradius in Abhängigkeit von der exzentrischen Anomalie lautet mit Formel (11.136)

$$r = a\left(1 - e \cos E\right) \quad . \tag{11.225}$$

Zur Berechnung des Zustandsvektors wird auch die wahre Anomalie benötigt, die unter Anwendung der *Kepler*formeln (11.138) berechnet werden kann:

$$
\begin{aligned}
e\,\cos\upsilon &= \frac{E_3\,\cos l_E + \sigma_i\,E_2\sin l_E - E_2^2 - E_3^2}{1-\sigma_i\,E_2\sin l_E - E_3\cos l_E} \\
e\,\sin\upsilon &= \frac{\sqrt{1-E_2^2-E_3^2}\;\left(\sigma_i\,E_3\,\sin l_E - E_2\cos l_E\right)}{1-\sigma_i\;E_2\sin l_E - E_3\cos l_E} \quad .
\end{aligned}
\tag{11.226}
$$

Auch im Rahmen der regulären Elemente muss die wahre Länge $l = \sigma_i\left(\upsilon+\omega\right)+\Omega = \sigma_i\,u+\Omega$ als Variable zur Herstellung des Zustandsvektors verwendet werden. Analog zu den Formeln (11.154) folgt sie aus mit den Beziehungen (11.224) aus

$$
\begin{aligned}
\sin l &= \sigma_i\left[\sigma_i\sin l_E - E_2 - E_3\,\frac{\sigma_i\,E_3\sin l_E - E_2\cos l_E}{1+\sqrt{1-E_2^2-E_3^2}}\right]\frac{1}{1-\sigma_i\,E_2\sin l_E - E_3\cos l_E} \\
\cos l &= \left[\cos l_E - E_3 + E_2\,\frac{\sigma_i\,E_3\sin l_E - E_2\cos l_E}{1+\sqrt{1-E_2^2-E_3^2}}\right]\frac{1}{1-\sigma_i\,E_2\sin l_E - E_3\cos l_E} \quad \left\langle\; e<1\,.\right.
\end{aligned}
\tag{11.227}
$$

Damit können der Radius

$$
r \;=\; \frac{E_1\,R_E\left(1-E_2^2-E_3^2\right)}{1+\sigma_i\,E_2\sin l + E_3\cos l} \quad , \tag{11.228}
$$

die radiale Geschwindigkeit

$$
V_R \;=\; \dot r \;=\; \frac{\mu}{G}\,e\sin\upsilon \;=\; \frac{\mu}{G}\left(\sigma_i\,E_3\sin l - E_2\cos l\right) \tag{11.229}
$$

und die transversale Geschwindigkeit

$$
V_T \;=\; \frac{G}{r} \;=\; \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(1+\sigma_i\,E_2\sin l + E_3\cos l\right) \tag{11.230}
$$

als Funktionen der wahren Länge l dargestellt werden.

Um den Zustandsvektor berechnen zu können, müssen noch der radiale und der transversale Richtungsvektor berechnet werden, d.h. die Komponenten r_{0i}, q_{0i} in

$$
\mathbf{r}_0 = r_0^i\,\mathbf{p}_i \;,\; \mathbf{q}_0 = q_0^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{11.231}
$$

Aus den Formeln (11.189) ist wieder bekannt

$$
\begin{aligned}
\cos i &= \sigma_i\left[1-2\left(E_4^2+E_5^2\right)\right] \\
\sin i &= \sqrt{1-\cos^2 i} \quad .
\end{aligned}
\tag{11.232}
$$

Die Komponenten r_{0i}, q_{0i} können mit $u = \sigma_i\left(l-\Omega\right)$ einheitlich aus den Formeln (11.112) und (11.120) berechnet werden. Dann wird:

$$
\begin{aligned}
r_{01} &= \;\; 2\,E_4\,E_5 \sin l + \left(1-2\;E_4^2\right)\cos l \\
r_{02} &= \;\; 2\,E_4\,E_5 \cos l + \left(1-2\;E_5^2\right)\sin l \\
r_{03} &= \;\; 2\left(E_5 \sin l - E_4 \cos l\right)\sqrt{1-E_4^2-E_5^2} \\
q_{01} &= \;\; 2\,E_4\,E_5 \cos l - \left(1-2\;E_4^2\right)\sin l \\
q_{02} &= -2\,E_4\,E_5 \sin l + \left(1-2\;E_5^2\right)\cos l \\
q_{03} &= \;\; 2\left(E_5 \cos l + E_4 \sin l\right)\sqrt{1-E_4^2-E_5^2} \quad .
\end{aligned}
\tag{11.233}
$$

Zur Probe kann der normale Richtungsvektor $\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$ berechnet werden. Es muss dann sein (siehe die Formeln (11.121) auf Seite 81):

$$
\begin{aligned}
c_{01} &= r_{02}\,q_{03} - r_{03}\,q_{02} \\
c_{02} &= r_{03}\,q_{01} - r_{01}\,q_{03} \\
c_{03} &= r_{01}\,q_{02} - r_{02}\,q_{01} \quad .
\end{aligned}
\tag{11.234}
$$

11.4.5 Die *Gauß*schen Variationsgleichungen der regulären Elemente

Die Variationsgleichung (11.82) ergibt in Bezug auf die regulären Elemente die Variationsgleichung für das erste reguläre Element

$$
\dot{E}_1 = \frac{2\,E_1^2\,R_E\sqrt{R_E}}{\sqrt{\mu}\sqrt{E_1\left(1-E_2^2-E_3^2\right)}}\left[b_{R2}\left(\sigma_i\,E_3\sin l - E_2\cos l\right) + b_T\left(1+E_3\cos l + \sigma_i\,E_2\sin l\right)\right] \quad .
\tag{11.235}
$$

Die Variationsgleichungen für das zweite und dritte reguläre Element

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_2 &= \dot{e}\sin\left(\omega+\sigma_i\,\Omega\right) + e\left(\dot{\omega}+\sigma_i\,\dot{\Omega}\right)\cos\left(\omega+\sigma_i\,\Omega\right) \\
\dot{E}_3 &= \dot{e}\cos\left(\omega+\sigma_i\,\Omega\right) - e\left(\dot{\omega}+\sigma_i\,\dot{\Omega}\right)\sin\left(\omega+\sigma_i\,\Omega\right)
\end{aligned}
$$

können mit Hilfe der Variationsgleichungen (11.72) (auf Seite 72) und (11.78) hergeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_2 &= -b_{R2}\frac{G}{\mu}\cos l + b_T\frac{G}{\mu}\left[\frac{r}{p}E_2 + \sigma_i\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin l\right] + b_N\frac{r}{G}E_3\frac{E_5\sin l - E_4\cos l}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos i\right)}} \\
\dot{E}_3 &= \;\; b_{R2}\frac{G}{\mu}\sin l + b_T\frac{G}{\mu}\left[\frac{r}{p}E_3 + \left(1+\frac{r}{p}\right)\cos l\right] - b_N\frac{r}{G}E_2\frac{E_5\sin l - E_4\cos l}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos i\right)}} \quad .
\end{aligned}
\tag{11.236}
$$

Um diesen Formelsatz vollständig auf reguläre Elemente zurückzuführen, müssen die Größen $p, G, r, \cos i$ mit Hilfe der Formeln (11.219), (11.228) und (11.232) ausgedrückt werden.

Um die Allgemeingültigkeit der Formulierungen zu unterstreichen, werden die Variationsgleichungen der regulären Elemente E_4 und E_5 ausführlich untersucht. Es sei zunächst $\sigma_i = 1$ angenommen. Dann lauten die beiden Elemente

$$E_4^{(1)} = \sin\frac{i}{2}\sin\Omega \quad , \quad E_5^{(1)} = \sin\frac{i}{2}\cos\Omega \tag{11.237}$$

und die entsprechenden Variationsgleichungen unter Anwendung der Variationsgleichungen (11.70) und (11.71) in Inklination und aufsteigendem Knoten

$$\begin{aligned}
\dot{E}_4^{(1)} &= \frac{1}{2}(i)^{\cdot}\cos\frac{i}{2}\sin\Omega + \dot{\Omega}\sin\frac{i}{2}\cos\Omega \;=\\
&= \frac{1}{2}\frac{r}{G}b_N\frac{1}{\cos\frac{i}{2}}\left[\sin l - E_4^{(1)}\left(E_5^{(1)}\cos l + E_4^{(1)}\sin l\right)\right]\\
\dot{E}_5^{(1)} &= \frac{1}{2}(i)^{\cdot}\cos\frac{i}{2}\cos\Omega - \dot{\Omega}\sin\frac{i}{2}\sin\Omega \;=\\
&= \frac{1}{2}\frac{r}{G}b_N\frac{1}{\cos\frac{i}{2}}\left[\cos l - E_5^{(1)}\left(E_5^{(1)}\cos l + E_4^{(1)}\sin l\right)\right] \;.
\end{aligned}$$

Im Fall $\sigma_i = -1$ lauten die beiden Elemente

$$E_4^{(2)} = \cos\frac{i}{2}\sin\Omega \quad , \quad E_5^{(2)} = \cos\frac{i}{2}\cos\Omega \tag{11.238}$$

und die entsprechenden Variationsgleichungen lauten unter Verwendung der hier wesentlichen Beziehung $u = -(l-\Omega)$

$$\begin{aligned}
\dot{E}_4^{(2)} &= -\frac{1}{2}(i)^{\cdot}\sin\frac{i}{2}\sin\Omega + \dot{\Omega}\cos\frac{i}{2}\cos\Omega \;=\\
&= \frac{1}{2}\frac{r}{G}b_N\frac{1}{\sin\frac{i}{2}}\left[-\frac{1}{2}(1-\cos i)\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\right] =\\
&= -\frac{1}{2}\frac{r}{G}b_N\frac{1}{\sin\frac{i}{2}}\left[\sin l - E_4^{(2)}\left(E_5^{(2)}\cos l + E_4^{(2)}\sin l\right)\right]\\
\dot{E}_5^{(2)} &= -\frac{1}{2}(i)^{\cdot}\sin\frac{i}{2}\cos\Omega - \dot{\Omega}\cos\frac{i}{2}\sin\Omega \;=\\
&= -\frac{1}{2}\frac{r}{G}b_N\frac{1}{\sin\frac{i}{2}}\left[\frac{1}{2}(1-\cos i)\cos u\,\cos\Omega + \sin u\sin\Omega\right] =\\
&= -\frac{1}{2}\frac{r}{G}b_N\frac{1}{\sin\frac{i}{2}}\left[\cos l - \frac{1}{2}(1+\cos i)\cos l\,\cos^2\Omega -\right.\\
&\qquad\qquad \left. -\frac{1}{2}(1+\cos i)\sin l\sin\Omega\,\cos\Omega\right] =\\
&= -\frac{1}{2}\frac{r}{G}b_N\frac{1}{\sin\frac{i}{2}}\left[\cos l - E_5^{(2)}\left(E_5^{(2)}\cos l + E_4^{(2)}\sin l\right)\right] \;.
\end{aligned}$$

Diese Variationsgleichungen können mit der Definition (11.187) und den Beziehungen (11.186) einheitlich in der allgemeingültigen Gestalt zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}\dot{E}_4 &= \sigma_i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r}{G} b_N \frac{1}{\sqrt{1+\sigma_i \cos i}} \left[\sin l - E_4 \left(E_5 \cos l + E_4 \sin l \right) \right] \\ \dot{E}_5 &= \sigma_i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{r}{G} b_N \frac{1}{\sqrt{1+\sigma_i \cos i}} \left[\cos l - E_4 \left(E_5 \cos l + E_4 \sin l \right) \right] \quad .\end{aligned} \tag{11.239}$$

Hier können noch die Ausdrücke (11.219) und (11.228) für Flächenparameter und Radius eingesetzt werden, sowie (11.232) für cos*i*. Dann lauten die vollständig durch reguläre Elemente ausgedrückten Variationsgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{E}_4 &= \sigma_i \frac{1}{2} \frac{\sqrt{E_1 R_E \left(1-E_2^2-E_3^2\right)}}{\sqrt{\mu}\left(1+E_2 \sin l + E_3 \cos l\right)} \frac{1}{\sqrt{1-E_4^2-E_5^2}} \left[\sin l - E_4 \left(E_5 \cos l + E_4 \sin l \right) \right] b_N \\ \dot{E}_5 &= \sigma_i \frac{1}{2} \frac{\sqrt{E_1 R_E \left(1-E_2^2-E_3^2\right)}}{\sqrt{\mu}\left(1+E_2 \sin l + E_3 \cos l\right)} \frac{1}{\sqrt{1-E_4^2-E_5^2}} \left[\cos l - E_4 \left(E_5 \cos l + E_4 \sin l \right) \right] b_N \quad .\end{aligned} \tag{11.240}$$

Zur Herleitung der Variation des sechsten der regulären Elemente

$$\sigma_i \dot{E}_6 = \dot{M}_0 + \left(\dot{\omega} + \sigma_i \dot{\Omega} \right)$$

werden die Variationsgleichungen (11.95) und (11.78) benötigt. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\sigma_i \dot{E}_6 = &-b_{R2} \left\{ \frac{3\left(\sigma_i E_3 \sin l - E_2 \cos l\right)}{E_1 R_E \sqrt{1-E_2^2-E_3^2}} \left(t-t_0\right) + \frac{G}{\mu} \left[\frac{2r\sqrt{1-e^2}}{p} + \frac{E_3 \cos l + \sigma_i E_2 \sin l}{1+\sqrt{1-E_2^2-E_3^2}} \right] \right\} + \\ &+ b_T \left\{ \frac{3\sqrt{1-E_2^2-E_3^2}}{r} \left(t-t_0\right) + \frac{G}{\mu} \left(1+\frac{r}{p} \right) \frac{\sigma_i E_3 \sin l - E_2 \cos l}{1+\sqrt{1-E_2^2-E_3^2}} \right\} + \\ &+ b_N \frac{r}{G} \frac{E_5 \sin l - E_4 \cos l}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos i\right)}} \quad .\end{aligned} \tag{11.241}$$

Die Größen e, p, G, r werden wieder mit Hilfe der Formeln (11.219), (11.228) und (11.232) durch die (modifizierten) regulären Elemente ausgedrückt.

Wie in der analytischen Bahnmechanik üblich wird die Integration der Variationsgleichungen gewöhnlich nicht über der Zeit, sondern über einen Bahnwinkel erfolgen, im Fall der regulären Elemente über der wahren Länge. Im Fall der (modifizierten, d.h. auch im Fall retrograder Äquatorbahnen anwendbaren) regulären Elemente hat die wahre Länge nach Formel (11.188) die Darstellung

$$l = \sigma_i u + \Omega = \sigma_i \left[\upsilon + \left(\omega + \sigma_i \Omega \right) \right] . \tag{11.242}$$

Die Beziehung von Zeit und wahrer Länge erfolgt mit den Variationsgleichungen (11.78) und (11.80) aus dem modifizierten differentiellen Ansatz

$$dl = \sigma_i \left[\frac{G}{r^2} + \sigma_i b_N \frac{r \sin u}{G} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos i\right)}} \right] dt = \sigma_i \left[\frac{G}{r^2} + b_N \frac{r}{G} \frac{E_5 \sin l - E_4 \cos l}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos i\right)}} \right] dt \ . \tag{11.243}$$

11.5 Geostationäre Elemente

Speziell für die Untersuchung geostationärer Bahnen werden von *Eckstein* folgende Elemente verwendet[1]: An Stelle des ersten regulären Elements $E_1 = a^*$ wird die relative Drift des Satelliten in Bezug auf die tropische Erdrotation $n_{\odot}$ eingeführt:

$$E_1^* := \frac{n - n_{\odot}}{n_{\odot}} \quad , \quad n = \frac{1}{R_E \sqrt{R_E}} \sqrt{\frac{\mu}{\left(a^*\right)^3}} \quad . \tag{11.244}$$

An Stelle der mittleren Länge zur Epoche wird im Fall geostationärer Parameter die relative geographische Länge des Satelliten in Bezug auf die lokale Ortssternzeit der geographischen Soll-Länge zur Epoche t_0 verwendet:

$$E_6^* := \lambda_0 := M_0 + \omega + \Omega - \Theta_g\left(t_0\right) \quad . \tag{11.245}$$

Im Fall einer exakten geostationären Bewegung (d.h. im Rahmen einer Zweikörperbewegung) verschwinden alle diese modifizierten Elemente. Als weitere Elemente werden die regulären Elemente E_2, E_3, E_4, E_5 wie im vorhergehenden Abschnitt verwendet.

11.6 Positionselemente

Im Rahmen einer Modifikation der *Brouwer*schen Störungstheorie für erdnahe Satellitenbahnen führte *F. Hoots* den Begriff „Positionselemente“ ein. Hierbei handelt es sich im Wesentlichen um Polarkoordinaten, also um Parameter, die sich mit dem Bahnwinkel ändern, die als „schnelle Parameter“ im Rahmen der allgemeinen Keplerbewegung im eigentlichen Sinne nicht als „Elemente“ bezeichnet werden sollten. Durch Umschreibung der *Brouwer*schen Störungstheorie für die Bewegung von Satelliten im Erdschwerefeld von *Kepler*- (bzw. *Delaunay*-) Elementen auf die „Positionselemente“ war es *Hoots* gelungen, die analytischen Formeln zu verkürzen, dadurch Rundungsfehler einzusparen und eine schnellere und zuverlässigere Berechnung des Zustandsvektors zu erreichen.

11.6.1 Definition der Positionselemente

Im Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad r = \left|\mathbf{r}\right| \quad , \quad \mathbf{r}_0^2 = 1 \tag{11.246}$$

wird der Radius *r* als das erste Positionselement, im Geschwindigkeitsvektor

[1] ECKSTEIN, M. C. [1978b], ECKSTEIN, M. C. [1980]

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \quad , \quad \mathbf{q}_0^2 \;=\; 1 \quad , \quad \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q}_0 \;=\; 0 \tag{11.247}$$

werden die radiale Geschwindigkeit $\dot{r}$ als das zweite sowie die transversale Geschwindigkeit $r\dot{\zeta}$ als das dritte Positionselement bezeichnet. Die wahre Länge (unter Einschluss von rückläufigen Äquatorbahnen: $i = 180°,\ \sigma_i = \mathrm{sgn}(\cos i)$) wird als sechstes Positionselement verwendet:

$$p_6 := l = \sigma_i\, u + \Omega \;= \sigma_i \left[\upsilon + \left(\omega + \sigma_i\, \Omega \right) \right] \quad . \tag{11.248}$$

Die zwei noch fehlenden Parameter werden aus dem radialen Richtungsvektor $\mathbf{r}_0$ bzw. dem transversalen Richtungsvektor $\mathbf{q}_0$ gewonnen. Dazu seien die $\mathbf{p}_i$ Basisvektoren im Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem. Der radiale Richtungsvektor hat hier die Darstellung

$$\mathbf{r}_0 \;=\; r_0^i\, \mathbf{p}_i \quad , \tag{11.249}$$

wobei nach Formel (11.28) auf Seite 63 die Koordinaten im Einzelnen lauten:

$$\begin{aligned} r_{01} &= -\cos i\, \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \\ r_{02} &= \cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega \\ r_{03} &= \sin i \sin u \quad . \end{aligned} \tag{11.250}$$

Hier wird zunächst die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω mit der wahren Länge l aus Formel (11.248) und dem Argument der Breite $u = \upsilon + \omega$ eliminiert

$$\Omega \;=\; l - \sigma_i\, u \tag{11.251}$$

sowie die Inklination durch ihren halben Wert ersetzt:

$$\begin{aligned} r_{01} &= -\left[\cos^2\frac{i}{2} - \sin^2\frac{i}{2} \right] \left(\sin l \sin u \cos u - \sigma_i \cos l \sin^2 u \right) + \\ &\quad + \cos l \cos^2 u + \sigma_i \sin l \sin u \cos u \\ r_{02} &= \left[\cos^2\frac{i}{2} - \sin^2\frac{i}{2} \right] \left(\cos l \sin u \cos u + \sigma_i \sin l \sin^2 u \right) + \\ &\quad + \left(\sin l \cos^2 u - \sigma_i \cos l \sin u \cos u \right) \\ r_{03} &= 2 \sin\frac{i}{2} \cos\frac{i}{2} \sin u \quad . \end{aligned} \tag{11.252}$$

Hoots verwendet nun das Parameterpaar

$$\sin\frac{i}{2}\sin u \quad , \quad \sin\frac{i}{2}\cos u$$

als „Positionselemente“. Sie führen allerdings für rückläufige äquatoriale Bahnen (i =180°) nach wie vor auf eine Singularität. Diese kann vermieden werden, wenn (ähnlich wie im Fall der regulären Elemente E_4, E_5 in Abschnitt 11.4.1) für rückläufige Bahnen das Parameterpaar

$$\cos\frac{i}{2}\sin u \quad , \quad \cos\frac{i}{2}\cos u$$

verwendet wird. Die beiden Variablenpaare können mit Hilfe des retrograden Faktors (ähnlich wie im Fall der regulären Elemente (Abschnitt 11.4.1))

$$\sigma_i \;=\; \mathrm{sgn}(\cos i)$$

und der Beziehungen (siehe (11.186))

$$\begin{aligned} \sin\frac{i}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos i\right)} \\ \cos\frac{i}{2} &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos i\right)} \end{aligned} \tag{11.253}$$

zusammengefasst werden. Dies ergibt die allgemeingültigen Positionselemente

$$\begin{aligned} p_4 &:= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)}\,\sin u \\ p_5 &:= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)}\,\cos u \quad . \end{aligned} \tag{11.254}$$

Es folgen die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \sin i &= 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos i\right)} \\ \cos i &= \sigma_i\left(1-2\,p_4^2-2\,p_5^2\right) \end{aligned} \tag{11.255}$$

und die Zwischenbeziehungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos i\right) &= 1-p_4^2-p_5^2 \\ \frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right) &= p_4^2+p_5^2 \quad . \end{aligned} \tag{11.256}$$

Somit lautet schließlich der radiale Richtungsvektor in Positionselementen

$$\begin{aligned} r_{01} &= 2\,\sigma_i\,p_4\,p_5 \sin p_6 + \left(1-2\,p_4^2\right)\cos p_6 \\ r_{02} &= -2\,\sigma_i\,p_4\,p_5 \cos p_6 + \left(1-2\,p_4^2\right)\sin p_6 \\ r_{03} &= 2\,p_4\sqrt{1-p_4^2-p_5^2} \quad . \end{aligned} \tag{11.257}$$

Der transversale Richtungsvektor hat die Darstellung

$$\mathbf{q}_0 = q_0^i\,\mathbf{p}_i \quad , \tag{11.258}$$

(siehe wieder die Formel (11.28) auf Seite 63) im Äquatorsystem die Koordinaten

$$\begin{aligned} q_{01} &= -\cos i\cos u\sin\Omega - \sin u\cos\Omega \\ q_{02} &= \cos i\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega \\ q_{03} &= \sin i\cos u \quad , \end{aligned} \tag{11.259}$$

mit den Positionselementen p_4, p_5 aus Formel (11.254) somit

$$\begin{aligned} q_{01} &= -2\,p_4\,p_5\cos p_6 - \sigma_i\left(1-2\,p_5^2\right)\sin p_6 \\ q_{02} &= -2\,p_4\,p_5\sin p_6 + \sigma_i\left(1-2\,p_5^2\right)\cos p_6 \\ q_{03} &= 2\,p_5\sqrt{1-p_4^2-p_5^2} \quad . \end{aligned} \tag{11.260}$$

Zusammenfassend lauten die modifizierten „Positionselemente“:

$$\begin{aligned} p_1 &= r \\ p_2 &= \dot{r} \\ p_3 &= r\dot{\zeta} \\ p_4 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)}\sin u \\ p_5 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)}\cos u \\ p_6 &= l = \sigma_i\, u + \Omega \quad . \end{aligned} \tag{11.261}$$

11.6.2 Berechnung des Zustandsvektors aus den Positionselementen

Bei Vorgabe dieser Parameter ergibt sich der äquatoriale Zustandsvektor $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ aus den Formeln (11.257) und (11.260)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= p_1 \mathbf{r}_0 = p_1 r_0^i \mathbf{p}_i \\ \dot{\mathbf{r}} &= p_2 \mathbf{r}_0 + p_3 \mathbf{q}_0 = p_2 r_0^i \mathbf{p}_i + p_3 q_0^i \mathbf{p}_i \quad . \end{aligned} \tag{11.262}$$

11.6.3 Berechnung der Positionselemente aus dem Zustandsvektor

Umgekehrt können die Positionselemente aus einem Zustandsvektors berechnet werden. Aus

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = G c_0^i \mathbf{p}_i = c^i \mathbf{p}_i = \\ &= G\left(\sin i \sin\Omega \mathbf{p}_1 - \sin i \cos\Omega \mathbf{p}_2 + \cos i \mathbf{p}_3\right) \end{aligned} \tag{11.263}$$

ergibt sich mit $G = |\mathbf{c}|$

$$c_{03} = \frac{c_3}{G} = \cos i \quad , \tag{11.264}$$

womit auch

$$\sigma_i = \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) \tag{11.265}$$

bekannt ist. Damit sind die p_4, p_5 eindeutig aus dem Zustandsvektor berechenbar. Um diese Parameter zu berechnen, folgen aus den Komponenten des radialen und des transversalen Einheitsvektors (11.250) und (11.259)

$$\begin{aligned} r_{03} &= \sin i \sin u \\ q_{03} &= \sin i \cos u \quad , \end{aligned}$$

und es wird

$$p_4 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)}\,\frac{r_{03}}{\sin i} = \frac{r_{03}}{\sqrt{2\left(1+\sigma_i \cos i\right)}}$$

$$p_5 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)}\,\frac{q_{03}}{\sin i} = \frac{q_{03}}{\sqrt{2\left(1+\sigma_i \cos i\right)}} \quad ,$$

wobei $\sin i$ aus Beziehung (11.255) eingesetzt wurde.

Die Länge $p_6 = l$ kann aus den Formeln (11.257) oder (11.260) berechnet werden. Dazu werden $\sin l$, $\cos l$ entweder aus den r_{01}, r_{02} oder aus den q_{01}, q_{02} berechnet. Im ersten Fall tritt eine Singularität für $r_{01} = r_{02} = 0$ auf, im zweiten Fall für $q_{01} = q_{02} = 0$. Wenn die Bewegung also nicht geradlinig aufgefasst wird, ist $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 \neq 0$ und es kann nicht gleichzeitig $r_{01} = r_{02} = q_{01} = q_{02} = 0$ sein. Eine der beiden Lösungen für $\sin l$, $\cos l$ ist also sicher singularitätenfrei. Es bleibt für die Berechnung der p_i aus dem Zustandsvektor $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i$, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i$, $(\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0)$ folgendes System:

$$\begin{aligned} p_1 &= r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^i\, x_i} \\ p_2 &= \dot{r} = \frac{\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}}}{r} = \frac{\sqrt{\dot{x}^i\, x_i}}{p_1} \\ p_3 &= r\,\dot{\zeta} = \frac{|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}|}{r} = \frac{|\mathbf{c}|}{r} = \frac{G}{p_1} \end{aligned} \tag{11.266}$$

$$\begin{aligned} c_{03} &= r_{01}\, q_{02} - r_{02}\, q_{01} \\ \sigma_i &= \operatorname{sgn}\left(c_{03}\right) \\ p_4 &= \frac{r_{03}}{\sqrt{2\left(1+\sigma_i\, c_{03}\right)}} \\ p_5 &= \frac{q_{03}}{\sqrt{2\left(1+\sigma_i\, c_{03}\right)}} \end{aligned} \tag{11.267}$$

$$\begin{aligned} \sin p_6 &= \sin l = \frac{2\sigma_i\, r_{01}\, p_4\, p_5 + r_{02}\left(1-2\,p_4^2\right)}{r_{01}^2 + r_{02}^2} \\ \cos p_6 &= \cos l = \frac{r_{01}\left(1-2\,p_4^2\right) - 2\sigma_i\, r_{02}\, p_4\, p_5}{r_{01}^2 + r_{02}^2} \quad , \quad \left(r_{01}^2 + r_{02}^2 \neq 0\right) \end{aligned} \tag{11.268}$$

oder

$$\begin{aligned} \sin p_6 &= \sin l = \frac{2\sigma_i\, q_{02}\, p_4\, p_5 + q_{01}\left(1-2\,p_5^2\right)}{q_{01}^2 + q_{02}^2} \\ \cos p_6 &= \cos l = \frac{q_{02}\left(1-2\,p_5^2\right) - 2\sigma_i\, q_{01}\, p_4\, p_5}{q_{01}^2 + q_{02}^2} \quad , \quad \left(q_{01}^2 + q_{02}^2 \neq 0\right) \end{aligned} \tag{11.269}$$

11.6.4 Die *Gauß*schen Variationsgleichungen der Positionselemente

Die *Gauß*schen Variationsgleichungen dieser Elemente lauten in Bezug auf die radiale, transversale und normale Beschleunigungskomponente b_R, b_T, b_N mit den Formeln in Abschnitt 5.1 (Band II), mit $\dot{\zeta} = p_3 / p_1$ sowie $\dot{u}$ aus der Variationsgleichung (11.79), di/dt in (11.70) und $\dot{\Omega}$ in (11.71), sowie mit Hilfe der zweiten Beziehung (11.255)

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= \dot{r} = p_2 \\
\dot{p}_2 &= \ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + b_R = \frac{p_3^2}{p_1} + b_R \quad , \quad b_R = -\frac{G}{p\,r^2} + b_{R2} \\
\dot{p}_3 &= \left(r\,\dot{\zeta}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{G}}{r} - \frac{\dot{r}\,G}{r^2} = -\frac{p_2\,p_3}{p_1} + b_T \\
\dot{p}_4 &= \frac{p_3\,p_5}{p_1} + \sigma_i \frac{p_4\,p_5}{2\,p_3\sqrt{1-p_4^2-p_5^2}}\,b_N \\
\dot{p}_5 &= -\frac{p_3\,p_4}{p_1} + \sigma_i \frac{1-p_5^2-2\,p_4^2}{2\,p_3\sqrt{1-p_4^2-p_5^2}}\,b_N \\
\dot{p}_6 &= \sigma_i \frac{p_3}{p_1} + \frac{p_4}{p_3\sqrt{1-p_4^2-p_5^2}}\,b_N \quad .
\end{aligned} \tag{11.270}$$

Als unabhängige Variable kann im Fall der Positionselemente die wahre Länge in der Bahn $l = \sigma_i\,u + \Omega$ verwendet werden. Die Reduktion von der Zeit auf diese Variable kann mit Hilfe der letzten der vorstehenden Variationsgleichungen hergestellt werden:

$$dl = \left(\sigma_i \frac{p_3}{p_1} + \frac{1}{p_3} \frac{p_4}{\sqrt{1-p_4^2-p_5^2}}\,b_N \right) dt \quad . \tag{11.271}$$

11.7 Parameter im Apsidensystem

Es gibt zahlreiche Versuche, die Formeln des Zweikörperproblems so umzuwandeln, dass sie für analytische Untersuchungen und numerische Anwendungen leichter zu handhaben sind und im Hinblick auf automatisches Rechnen stabiler funktionieren. Die Methode von *F. Hoots* (Abschnitt 11.6) zählt dazu. *S. Herrick* hat bereits 1948 im Zusammenhang mit der Berechnung der Bahn des Kometen *P/Halley* eine Parameterwahl vorgeschlagen, die numerische Vorteile zeigte[1]. Allerdings ist diese Methode nur für (hoch-) exzentrische Bahnen geeignet, wie sie etwa im Fall des Kometen *P/Halley* (Exzentrizität *e*=0. 96727924) erfüllt ist.

[1] HERRICK, S. [1948]

11.7.1 Definition der Bahnparameter nach *Herrick*

Exzentrische Bahnen können im Apsidensystem dargestellt werden. Der Ortsvektor lautet in Bezug auf dieses System[1] mit den Basisvektoren $\left(\mathbf{q}_1^{(P)}, \mathbf{q}_2^{(P)}, \mathbf{q}_3^{(P)}\right)$, wenn die wahre Anomalie als Bahnparameter verwendet wird:

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = r\left(\mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon\right) \tag{11.272}$$

Der transversale Richtungsvektor hat bei Bezug auf das Apsidensystem die Darstellung

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{q}_1^{(P)}\sin\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\cos\upsilon \quad . \tag{11.273}$$

Damit lautet der Geschwindigkeitsvektor im Apsidensystem

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 = \left(\dot{r}\cos\upsilon - \frac{G}{r}\sin\upsilon\right)\mathbf{q}_1^{(P)} + \left(\dot{r}\sin\upsilon + \frac{G}{r}\cos\upsilon\right)\mathbf{q}_2^{(P)} \quad . \tag{11.274}$$

Herrick verwendet für den Bezug des Ortsvektors nicht die Richtungsvektoren des Apsidensystems, sondern den Perizentrumsvektor **d** und den Parametervektor **f**, wobei **c** der Normalenvektor ist:

$$\mathbf{d} = e\,\mu\,\mathbf{q}_1^{(P)} \;,\; \mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0 = G\left(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0\right) = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = G\left(\mathbf{q}_1^{(P)} \times \mathbf{q}_2^{(P)}\right),\; \mathbf{f} = \mathbf{c}\times\mathbf{d} = e\,\mu\,G\,\mathbf{q}_2^{(P)} \quad . \tag{11.275}$$

Diese beiden Vektoren werden als Bahnparameter benutzt, wobei in diesem Zusammenhang stets $e > 0$ angenommen werden muss. Die Exzentrizität folgt aus

$$e = \frac{|\mathbf{d}|}{\mu} \quad . \tag{11.276}$$

Mit dem Flächenparameter G, der im Fall einer Keplerbewegung mit dem Kegelschnittparameter durch $p = G^2 / \mu$ verknüpft ist, folgt

$$p = \frac{\mathbf{f}^2}{e^2\,\mu^3} \quad . \tag{11.277}$$

Im Fall einer elliptischen Bewegung wird damit die große Bahnhalbachse berechnet

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad . \tag{11.278}$$

Die räumlichen Bahnelemente i, Ω, ω können berechnet werden aus den Beziehungen[2]

[1] nach Abschnitt 8.13.1 (Band II)

[2] siehe die Formeln (8.447) in Band II

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} &= e\mu\{\mathbf{p}_1(-\cos i\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_2(\ \cos i\sin\omega\cos\Omega+\cos\omega\sin\Omega)+\\
&\quad-\mathbf{p}_3\ \ \sin i\sin\omega\}\\
\mathbf{f} &= e\mu G\{\mathbf{p}_1(-\cos i\cos\omega\sin\Omega-\sin\omega\cos\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_2(\ \cos i\cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_3\ \ \sin i\cos\omega\}\\
\mathbf{c} &= G\{\mathbf{p}_1\sin i\sin\Omega-\mathbf{p}_2\sin i\cos\Omega+\mathbf{p}_3\cos i\}\quad .
\end{aligned} \tag{11.279}$$

Damit sind (wegen $\mathbf{d}\cdot\mathbf{f}=0$) 5 unabhängige Parameter bekannt. Es bleibt als sechster Parameter der Anfangswinkel E_0 bzw. die Anfangszeit t_0. Sie folgen aus der Keplergleichung

$$M=\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t-t_0)=E-e\sin E\quad . \tag{11.280}$$

Herrick geht nun von einem Zweikörperproblem mit der *Kepler*schen Beschleunigung $b_{RK}=-\mu/r^2$ aus. Allerdings wählte er wie in der angewandten klassischen Himmelsmechanik üblich[1] die Einheiten so, dass er $\mu=1$ setzen konnte. Das vereinfacht das Rechnen mit speziellen Aufgabenstellungen, macht aber theoretische Untersuchungen unnötig unübersichtlich.

Im Rahmen des Zweikörperproblems lautet der Perizentrumsvektor[2] („*Hermann*scher Vektor“, „*Laplace*'scher Vektor**“**, „*Hermann-laplace*scher Vektor“)“

$$\mathbf{d}=\mathbf{r}\left[\dot{\mathbf{r}}^2-\frac{\mu}{r}\right]+\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})=\mathbf{r}\left[\dot r^2+\frac{G^2}{r^2}-\frac{\mu}{r}\right]+\dot{\mathbf{r}}\,r\,\dot r\quad . \tag{11.281}$$

Mit dem Hilfsparameter[3]

$$u:=\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}=r\dot r\quad . \tag{11.282}$$

wird

$$\mathbf{d}=\mathbf{r}\dot u-\dot{\mathbf{r}}u\quad . \tag{11.283}$$

Andererseits erhält man aus den Beziehungen (11.272) bis (11.275) die Ausdrücke

$$\mathbf{d}=e\mu\mathbf{q}_1^{(P)}\quad=\mathbf{r}\left[\frac{e\mu\dot r}{G}\sin\upsilon+\frac{e\mu}{r}\cos\upsilon\right]+\dot{\mathbf{r}}\left[\frac{e\mu r}{G}\sin\upsilon\right]\quad . \tag{11.284}$$

Auch in dieser Darstellung kann der Ausdruck (11.283) bestätigt werden, wenn die radiale Geschwindigkeit im Zweikörperproblem in der Form

$$\dot r=\frac{r^2 e\sin\upsilon}{p}\dot\upsilon=\frac{Ge\sin\upsilon}{p} \tag{11.285}$$

verwendet wird. Analog kann der Parametervektor berechnet werden:

---

[1] d.h. vor Einführung der automatischen Rechner und vor den über die Bedürfnisse der klassischen Himmelsmechanik hinausgehenden Anforderungen der Satellitenbahnmechanik

[2] Abschnitt 2.5.2 (Band I)

[3] der Parameter *u* wird nur in diesem Abschnitt in dieser Bedeutung verwendet. Nicht mit dem Argument der Breite zu verwechseln!

$$\mathbf{f} = e\,\mu G\,\mathbf{q}_2^{(P)} = -\mathbf{r}\,e\,\mu\left[r\cos\upsilon - \frac{G}{r}\sin\upsilon\right] - \dot{\mathbf{r}}\,e\,\mu\,r\cos\upsilon \quad . \tag{11.286}$$

Wird hier der Hilfsparameter

$$w := -e\,\mu\,r\cos\upsilon = \mu\left(r - p\right) \quad , \quad \dot{w} = \mu\,\dot{r} \quad . \tag{11.287}$$

eingeführt, ergibt sich (wieder im Rahmen des Zweikörperproblems) die zu (11.283) analoge Darstellung

$$\mathbf{f} = \mathbf{r}\,\dot{w} - \dot{\mathbf{r}}\,w \quad . \tag{11.288}$$

Der Parameter *w* kann auf den Parameter *u* zurückgeführt werden:

$$w = u^2 - r^2\,\dot{u} \quad . \tag{11.289}$$

In seiner Originalarbeit verwendete *Herrick* die exzentrische Anomalie *E* an Stelle der wahren Anomalie υ. Dann lauten die Parameter (wieder bezogen auf das Zweikörperproblem)

$$\begin{aligned} &\dot{E} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; \dot{r} = \frac{e\sqrt{a\,\mu}\,\sin E}{r} \;, \\ &u = e\sqrt{a\,\mu}\,\sin E \;,\; \dot{u} = \frac{e\,\mu\cos E}{r} \;,\; w = \mu\left(r - p\right) \;,\; \dot{w} = \dot{r} \;. \end{aligned} \tag{11.290}$$

Damit ergibt sich die Beziehung

$$\dot{w}\,u - \dot{u}\,w = e^2\,\mu^2 \quad . \tag{11.291}$$

In Bezug auf die beiden Parametervektoren **d** und **f** des Apsidensystems kann daher der Zustandsvektor in der nur für exzentrische Bahnen geeigneten Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= -\frac{w}{e^2\,\mu^2}\mathbf{d} + \frac{u}{e^2\,\mu^2}\mathbf{f} \\ \dot{\mathbf{r}} &= -\frac{\dot{w}}{e^2\,\mu^2}\mathbf{d} + \frac{\dot{u}}{e^2\,\mu^2}\mathbf{f} \quad . \end{aligned} \tag{11.292}$$

11.7.2 Die Variationsgleichungen der Parameter im Apsidensystem

In den bisher abgeleiteten Beziehungen ist enthalten, wie aus dem Zustandsvektor die Parameter des Apsidensystems und umgekehrt aus dem Zustandsvektor diese Parameter berechnet werden können. Werden diese Parameter wie in der Methode der Variation der Parameter üblich als oskulierende Parameter aufgefasst, müssen die entsprechenden Variationsgleichungen für diese Parameter hergeleitet werden. Neben den Variationsgleichungen für die Parametervektoren **d** und **f** werden in diesem Fall auch die Variationsgleichungen für die Hilfsparameter $u, \dot{u}, w, \dot{w}$ benötigt. Es werde angenommen, dass der zu betrachtende Beschleunigungsvektor im *Leibniz*system gegeben sei:

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_{R2}\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \quad , \tag{11.293}$$

Hier bedeutet b_{R2} die radiale Beschleunigung ohne die im Rahmen des betrachteten Zweikörperproblems schon berücksichtigte *Kepler*sche Beschleunigung.

Aus $u = \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ wird mit $G = \sqrt{\mu\,a\left(1 - e^2\right)}$

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}^2 + r\,b_{R2} \\
\ddot{u} &= 2\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} + \frac{d\left(r\,b_{R2}\right)}{dt} \;=\; 3\dot{r}\,b_{R2} + 2\frac{G\,b_T}{r} + \frac{d\left(b_{R2}\right)}{dt} \\
\dot{w} &= -r^2\,\ddot{u} \;.
\end{aligned} \tag{11.294}$$

Wird mit den Zuordnungen (11.287) $\dot{w} = \mu\,\dot{r}$ unter Vernachlässigung höherer Störungen angenommen, kann gesetzt werden

$$\ddot{w} \approx \mu\left[\frac{\dot{u}}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r^2}\right] \quad . \tag{11.295}$$

Damit lauten die vollständigen Variationsgleichungen für die Parameter des Apsidensystems:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{d}} &= \mathbf{r}\,\ddot{u} - \ddot{\mathbf{r}}\,u \\
\dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{r}\,\ddot{w} - \ddot{\mathbf{r}}\;w \quad .
\end{aligned} \tag{11.296}$$

Als sechstes Element wählte *Herrick* die Epochezeit t_0. Die entsprechende Variationsgleichung kann aus der mittleren Anomalie $M = n\left(t - t_0\right)$ hergeleitet werden:

$$\frac{dt_0}{dt} = \frac{M}{n^2}\,\dot{n} - \frac{1}{n}\,\dot{M} + 1 \quad . \tag{11.297}$$

Hierzu wird aus der Keplergleichung (11.280) mit $\dot{E}$ und $e\sin E$ aus (11.290) erhalten

$$\dot{M} = n - \dot{e}\sin E = n - \frac{\mathbf{d}\cdot\dot{\mathbf{d}}}{\mu^2\,e^2}\,\frac{u}{\sqrt{a\,\mu}} \quad , \tag{11.298}$$

sowie mit den Ausrücken (11.283) und (11.296)

$$\dot{M} = n - \frac{u}{\mathbf{d}^2\sqrt{a\,\mu}}\left[\mu\left(p - r\right)\ddot{u} - \mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\,\dot{u} + \dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}}\,u\right] \quad . \tag{11.299}$$

Außerdem liefert das dritte Keplersche Gesetz in der Form $n = \sqrt{\mu / a^3}$ die Variation

$$\frac{\dot{n}}{n} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a} \quad . \tag{11.300}$$

Hier muss noch ein Ausdruck für die Variation der großen Halbachse in Bezug auf die Parameter **d** und **f** gefunden werden. Dazu wird mit der Definition des Parametervektors (11.286)

$$\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{f}} = e\,\dot{e}\,\mu^2\,G^2 + e^2\,\mu^2\,G\,\dot{G}$$

erhalten, somit

$$G\,\dot{G} = \frac{1}{e^2\,\mu^2}\left[\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{f}} - G^2\,\mathbf{d}\cdot\left(\mathbf{r}\,\ddot{u} - \ddot{\mathbf{r}}\,u\right)\right] \quad . \tag{11.301}$$

Aus $G^2 = \mu\,p$ folgt

$$\dot{p} = \frac{2\,G\,\dot{G}}{\mu} \tag{11.302}$$

und aus $p = a\left(1 - e^2\right)$ schließlich

$$\dot{a} = \frac{1}{\mu^2 - \mathbf{d}^2}\left\{\frac{2}{e^2\,\mu}\left[\mathbf{f}\cdot\dot{\mathbf{f}} - G^2\,\mathbf{d}\cdot\left(\mathbf{r}\,\ddot{u} - \ddot{\mathbf{r}}\,u\right) + 2a\;\mathbf{d}\cdot\dot{\mathbf{d}}\right]\right\} \quad . \tag{11.303}$$

11.8 Ideale Elemente

In Bezug auf die von *P. A. Hansen*[1] eingeführten „idealen Koordinaten" („ideales Koordinatensystem") wurden von *A. Deprit*[2] ideale Elemente definiert. Sie sind auf eine Zweikörperbewegung als oskulierende Bezugsbewegung ausgelegt. Neben dem Bezug auf ein *Hansen* System, was sowohl analytische wie auch numerische Vorteile bringen kann, durchbricht die Arbeit von *Deprit* den Zwang, dem 6-dimensionalen Zustandsvektor genau 6 Parameter zuzuordnen. Hier konnte sich die *Deprit* in erster Linie auf eine Arbeit von *S. Herrick*[3] abstützen, der unter Berücksichtigung früherer Empfehlungen mit einer höheren Anzahl geschickt gewählter Parameter wesentliche Vorteile bei der stabilen numerischen Behandlung von Störungsproblemen erzielen konnte. *P. Musen*[4] war diesen Weg im Hinblick auf die räumliche Bewegung bereits durch Einführung der vierdimensionalen *Euler-Rodrigues* Parameter gegangen, die *Deprit* auch in der hier vorgestellten Theorie verwendete, um im Rechenprozess Singularitäten vermeiden zu können.

In diesem Abschnitt wird die Theorie der idealen Elemente basierend auf der Veröffentlichung DEPRIT [1975] referiert und überarbeitet in den Formalismus des Gesamtberichtes eingebettet.

11.8.1 Definition der idealen Elemente

Der Zustandsvektor sei in einem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System („ideales System") gegeben. Für den Ortsvektor mit kartesischen Koordinaten y_j gilt (siehe etwa die Abschnitt 4.3.16 und 8.12 in Band II)

$$\mathbf{r} = y^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} \;= y_1^{(I)}\,\mathbf{q}_1^{(I)} + y_2^{(I)}\,\mathbf{q}_2^{(I)} \tag{11.304}$$

und für den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}_1^{(I)}\,\mathbf{q}_2^{(I)} + \dot{y}_2^{(I)}\,\mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{11.305}$$

Der (absolute) Beschleunigungsvektor lautet mit Hilfe der *Frenet*schen Formeln des *Hansen*-Systems (8.433) bei Bezug auf ein *Hansen*-System

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{y}^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} + \mathbf{D}_{q^{(I)}}\times\dot{\mathbf{r}}_{q^{(I)}} = \ddot{y}^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} + \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0\times\dot{\mathbf{r}}_{q^{(I)}} = \\ &= \ddot{y}_1^{(I)}\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \ddot{y}_2^{(I)}\,\mathbf{q}_2^{(I)} + \dot{\eta}\,\frac{G}{r}\,\mathbf{q}_3^{(I)} \quad .\end{aligned} \tag{11.306}$$

Die basierende Bewegungsgleichung lautet, wenn von einer Zweikörperbewegung ausgegangen wird:

---

[1] Siehe die Abschnitte 2.7.7 (Band I), 4.3.10, 4.3.15 und vor allem 4.3.16, sowie u.a. 4.4.3 (Band II)

[2] DEPRIT, A. [1975]

[3] HERRICK, S. [1948], siehe auch in Abschnitt 11.7

[4] MUSEN, P. [1958], siehe auch in Abschnitt 2.10.8 (Band I)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} + b_{R2}\,\mathbf{r}_0 + b_T\mathbf{q}_0 + b_N\mathbf{c}_0 = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{r}_0 + \mathbf{R}_2 \quad . \tag{11.307}$$

Der Vektor $\mathbf{R}_2$ fasst die „Störungen“ auf eine Zweikörperbewegung zusammen. Als „effektive Störbeschleunigung“ bezeichnet *Deprit* den Ausdruck[1]

$$\mathbf{K} := \mathbf{R}_2 - \frac{r}{p}\mathbf{r}_0 \times \left(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{R}_2\right) = \left(1+\frac{r}{p}\right)\mathbf{R}_2 - \frac{r}{p}\left(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{R}_2\right)\mathbf{r}_0 \quad . \tag{11.308}$$

Diese Größe spielt in der Theorie von *Deprit* eine zentrale Rolle. Sie hat im *Leibniz*-System die Komponenten

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_0 &= \mathbf{R}_2\cdot\mathbf{r}_0 = b_{R2} \\
\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_0 &= \left(1+\frac{r}{p}\right)\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{q}_0 = \left(1+\frac{r}{p}\right)b_T \\
\mathbf{K}\cdot\mathbf{c}_0 &= \left(1+\frac{r}{p}\right)\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{c}_0 = \left(1+\frac{r}{p}\right)b_N \quad .
\end{aligned} \tag{11.309}$$

Deprit verwendet bei gegebenem Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ als ersten Parameter den Flächenparameter G als den Betrag des Normalenvektors

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = G\mathbf{c}_0 \quad , \quad \mathbf{c}_0{}^2 = 1 \quad . \tag{11.310}$$

Da die Bewegung als „gestörte Zweikörperbewegung“ untersucht wird, kann der Flächenparameter auf den Kegelschnittparameter p bezogen werden:

$$G = \sqrt{\mu\, p} \quad . \tag{11.311}$$

Auch *Deprit* verwendet (wie *Herrick* im vorhergehenden Abschnitt) das $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – Apsidensystem mit dem Perizentrumsvektor (*Hermann-Laplace*-Vektor)

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{c} - \mu\mathbf{r}_0 = e\,\mu\,\mathbf{q}_1^{(P)} \tag{11.312}$$

und dem Parametervektor

$$\mathbf{f} = \mathbf{c}\times\mathbf{d} = e\,\mu G\,\mathbf{q}_2^{(P)} \quad . \tag{11.313}$$

Aus dem Bezug des Apsidensystems zum *Leibniz*-System (Formeln (8.460) in Band II) folgt die bei Bezug auf eine Zweikörperbewegung im Zusammenhang mit den idealen Elementen benötigte Beziehung

$$\mathbf{q}_1^{(P)} - e\sin\upsilon\,\mathbf{q}_2^{(P)} = \frac{p}{r}\mathbf{q}_1^{(P)} - e\,\mathbf{r}_0 \quad . \tag{11.314}$$

Mit dem Perizentrumsvektor **d** berechnet *Deprit* den Vektor **b** in

$$G\,\mathbf{b} := \mathbf{c}_0\times\mathbf{d} = \mathbf{c}_0\times\left(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{c}\right) - \mu\,\mathbf{c}_0\times\mathbf{r}_0 = G\dot{\mathbf{r}} - \mu\,\mathbf{q}_0 = \frac{1}{G}\mathbf{f} = e\mu\,\mathbf{q}_2^{(P)} \quad , \tag{11.315}$$

dessen Variation lautet

[1] In der Tradition der klassischen Mechanik bezeichnete *Deprit* die Größen $\mathbf{F}_2$ und $\mathbf{K}$ als „Kräfte“ (z.B. „*effective perturbing force*“), obgleich es sich hier eindeutig um Beschleunigungen und nicht um Kräfte handelt.

$$\dot{\mathbf{b}} = \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{G}\dot{\mathbf{q}}_0 - \frac{\mu \dot{G}}{G^2}\mathbf{q}_0 \quad .$$

Setzt man hier die Bewegungsgleichung (11.307), sowie die zweite der *Frenet*schen Formeln der Astrodynamik[1] ($\dot{\mathbf{q}}_0 = -\dot{\zeta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\mathbf{c}_0$) mit $r^2\,\dot{\zeta} = G = \sqrt{\mu\, p}$, $G\,\dot{\eta} = r\,b_N$ und $\dot{G} = r\,b_T$ ein, wird

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{R}_2 + \frac{r}{p}\left[b_T\,\mathbf{q}_0 - b_N\,\mathbf{c}_0\right] \quad . \tag{11.316}$$

Dieser Ausdruck kann mit der Definition (11.308) auch geschrieben werden in der Form

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{K} - \left(\mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{K}\right)\mathbf{c}_0 + \left(1 - \frac{r}{p}\right) b_N\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{11.317}$$

Aus den Beziehungen (11.315) folgt

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e\,\mu}{G}\right)\mathbf{q}_2^{(P)} + \frac{e\,\mu}{G}\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} \quad . \tag{11.318}$$

Aus den beiden letzten Ausdrücken leitete *Deprit* den eleganten Ausdruck für die Variation der Exzentrizität her, wobei die Variation des Flächenparameters $\dot{G} = r\,b_T$ als bekannt angenommen werden kann:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{e\,\mu}{G}\right) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}_2^{(P)} \quad . \tag{11.319}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems lautet nach Formel (8.482) (Abschnitt 8.13.4.2 in Band II)

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon\right) + \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_3^{(I)} \quad . \tag{11.320}$$

In Bezug auf das Apsidensystem hat der radiale Einheitsvektor die Gestalt

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon \quad . \tag{11.321}$$

Somit ist der erste Anteil des Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{q^{(P)}}$ der absolute Eigenbewegungsvektor des *Hansen*-Systems[2] und der relative Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems in Bezug auf das *Hansen*-System lautet

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}q^{(I)}} = \mathbf{D}_{q^{(P)}} - \mathbf{D}_{q^{(I)}} = \mathbf{D}_{q^{(P)}} - \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 = \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{c}_0 = \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_3^{(P)} \quad . \tag{11.322}$$

Hier ist ζ mit der Variation $\dot{\zeta} = G / r^2$ der (erste *Hansen*sche) Bahnwinkel. Die Variation der wahren Anomalie ist aus Formel (11.80) (auf Seite 73) bekannt. Dies ergibt mit den Beziehungen (11.309)

$$\dot{\zeta}_P = \dot{\zeta} - \dot{\upsilon} \;=\; -\frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1 + \frac{r}{p}\right)\right] = -\frac{G}{e\,\mu}\,\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(P)} \quad . \tag{11.323}$$

Somit erhält man den interessanten Ausdruck für den relativen Eigenbewegungsvektor

---

[1] Siehe die Formeln (4.319) in Abschnitt 4.4.3 in Band II

[2] Siehe etwa in Abschnitt 8.12.3 (Band II) mit Formel (8.432)

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}q^{(I)}} = -\frac{G}{e\,\mu}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(P)}\right)\mathbf{q}_3^{(P)} \quad . \tag{11.324}$$

Damit können die *Frenet*schen Formeln des Apsidensystems (Formeln (8.478) in Abschnitt 8.13.4.2, Band II) auch in der Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= -\frac{G}{e\,\mu}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(P)}\right)\mathbf{q}_2^{(P)} - \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(P)}\sin\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= \frac{G}{e\,\mu}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(P)}\right)\mathbf{q}_1^{(P)} + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(P)}\cos\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\eta}\left[\,\mathbf{q}_1^{(P)}\sin\upsilon - \mathbf{q}_2^{(P)}\cos\upsilon\,\right] \quad .
\end{aligned} \tag{11.325}$$

Anmerkung: In der Originalarbeit von *Deprit* wird nur der Anteil betrachtet, der in der oskulierenden Bahnebene liegt, wofür $\dot{\eta} = 0$ angenommen wird.

Der Bezug des Apsidensystems auf das Hansen-System ist gegeben durch die Transformationen[1] (8.456):

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(P)} &= \mathbf{q}_1^{(I)}\cos(\omega+\sigma) + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin(\omega+\sigma) \\
\mathbf{q}_2^{(P)} &= -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin(\omega+\sigma) + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos(\omega+\sigma) \\
\mathbf{q}_3^{(P)} &= \mathbf{q}_3^{(I)} \quad .
\end{aligned} \tag{11.326}$$

Hier wurde der (*Hansen*sche) Bahnwinkel $\zeta = \upsilon + \omega + \sigma = \upsilon + \zeta_P$ verwendet, wobei σ die Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens ist. Hier führte *Deprit* Bahnparameter ein, die ähnlich dem sogenannten Exzentrizitätsvektor in einem der äquinoktialen Parametersätze sind, jetzt aber auf das *Hansen*-System bezogen werden[2]:

$$\begin{aligned}
C &:= \frac{e\,\mu}{G}\cos(\zeta-\upsilon) = \frac{e\,\mu}{G}\cos(\omega+\sigma) = \frac{e\,\mu}{G}\cos\zeta_P \quad , \\
S &:= \frac{e\,\mu}{G}\sin(\zeta-\upsilon) = \frac{e\,\mu}{G}\sin(\omega+\sigma) = \frac{e\,\mu}{G}\sin\zeta_P \quad .
\end{aligned} \tag{11.327}$$

Damit lautet die Transformation des ersten Basisvektors des Apsidensystems in das *Hansen*-System

$$\frac{e\,\mu}{G}\mathbf{q}_1^{(P)} = C\,\mathbf{q}_1^{(I)} + S\,\mathbf{q}_2^{(I)} \tag{11.328}$$

mit dem Differentialquotienten

$$\dot{C}\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \dot{S}\mathbf{q}_2^{(I)} + C\,\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} + S\,\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e\,\mu}{G}\right)\mathbf{q}_1^{(P)} + \frac{e\,\mu}{G}\,\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} \quad .$$

[1] in Abschnitt 8.13.2.2 in Band II

[2] In der Originalarbeit DEPRIT, A. [1975] wird der Parameter g =ζ-υ verwendet, in der vorliegenden Arbeit jedoch mit ζ_P (entsprechend den Untersuchungen in Abschnitt 5.2.1 (Band II))

Werden hier die *Frenet*schen Formeln (8.433) des *Hansen*-Systems und die des Apsidensystems (8.478) eingesetzt, folgt mit den Beziehungen (11.309) und (11.319)

$$\dot{C}\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \dot{S}\,\mathbf{q}_2^{(I)} - \dot{\eta}\,C\,\mathbf{q}_3^{(I)}\sin\zeta + \dot{\eta}\,S\;\mathbf{q}_3^{(I)}\cos\zeta = \left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_2^{(P)}\right)\mathbf{q}_1^{(P)} - \left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(P)}\right)\mathbf{q}_2^{(P)} - \frac{e\,\mu}{G}\dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(P)}\sin\upsilon \;.$$

Wegen $\mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{q}_3^{(P)}$ verschwindet in diesem Ausdruck die räumliche Komponente. Werden auf der rechten Seite außerdem die Transformationen (11.326) eingesetzt, wird

$$\dot{C}\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \dot{S}\,\mathbf{q}_2^{(I)} = \left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_2^{(I)}\right)\mathbf{q}_1^{(I)} - \left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(I)}\right)\mathbf{q}_2^{(I)}. \tag{11.329}$$

Durch Komponentenvergleich erhält *Deprit* die (formal) eleganten Variationsgleichungen der Parameter C und S:

$$\dot{C} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_2^{(I)} \quad , \quad \dot{S} = -\,\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(I)} \quad . \tag{11.330}$$

Für die räumliche Orientierung der Bahnebene verwendet *Deprit* (wie schon *P. Musen*) um Singularitäten zu vermeiden an Stelle der *Euler*winkel (i,Ω,σ) die vierdimensionalen *Euler-Rodrigues*-Parameter

$$\begin{aligned} u_1 &:= \sin\frac{i}{2}\cos\frac{\Omega+\sigma}{2} \\ u_2 &:= \sin\frac{i}{2}\sin\frac{\Omega+\sigma}{2} \\ u_3 &:= \cos\frac{i}{2}\sin\frac{\Omega-\sigma}{2} \\ u_4 &:= \cos\frac{i}{2}\cos\frac{\Omega-\sigma}{2} \quad . \end{aligned} \tag{11.331}$$

Diese erfüllen die „invarianten Relationen“[1]

$$u^i\,u_i = 1 \quad , \quad u^i\,\dot{u}_i = 0 \quad . \tag{11.332}$$

Mit den Parametern G, C, S, u_i ist die Bahnform festgelegt. Um die Bewegung längs dieser Bahn beschreiben zu können fehlt noch der Bezug zur Zeit. Dazu führte *Deprit* die mittlere Länge in der Bahn sowie die modifizierte exzentrische Anomalie bei Bezug auf das *Hansen*-System ein:

$$F := M + \omega + \sigma \quad , \quad \Phi := E + \omega + \sigma \quad . \tag{11.333}$$

Setzt man diese Größen in die *Kepler*-Gleichung $M = E - e\sin E$, erhält man die modifizierte *Kepler*-Gleichung

$$F = \Phi - \frac{G}{\mu}\left[C\,\sin\Phi - S\,\cos\Phi\right] \quad . \tag{11.334}$$

Für den Bahnradius ergibt sich

$$r = a\left(1 - e\cos E\right) = a\left[1 - \frac{G}{\mu}\left(C\,\cos\Phi + S\sin\Phi\right)\right] \quad . \tag{11.335}$$

---

[1] vgl. auch die allgemeinen Beziehungen in den Abschnitten 6.3.9 und 6.3.10 in Band II

Wird der (*Hansen*sche) Bahnwinkel als unabhängige Variable verwendet, kann aus den *Kepler*-Formeln (10.24) der Bezug zur modifizierten exzentrischen Anomalie hergestellt werden:

$$\frac{r}{a}\cos\zeta = \left(\cos E - e\right)\cos\left(\omega+\sigma\right) - \sqrt{1-e^2}\,\sin E \sin\left(\omega+\sigma\right) =$$

$$= \cos\Phi - e\cos\left(\omega+\sigma\right) + \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\left[-\cos\Phi\sin\left(\omega+\sigma\right)+\sin\Phi\cos\left(\omega+\sigma\right)\right] =$$

$$= \cos\Phi - \frac{G}{\mu}C + \frac{G^2}{\mu^2}\frac{C\sin\Phi - S\cos\Phi}{1+\sqrt{1-e^2}}S$$

Mit der modifizierten *Kepler*-Gleichung (11.334) schließlich

$$\frac{r}{a}\cos\zeta = \cos\Phi - \frac{G}{\mu}C + \frac{\Phi - F}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{G^2}{\mu^2}S \quad . \tag{11.336}$$

Entsprechend

$$\frac{r}{a}\sin\zeta = \left(\cos E - e\right)\sqrt{1-e^2}\,\sin E\cos\left(\omega+\sigma\right) + \left(\cos E - e\right)\sin\left(\omega+\sigma\right) =$$

$$= \sin\Phi - \frac{G}{\mu}S + \frac{G^2}{\mu^2}\frac{C\sin\Phi - S\cos\Phi}{1+\sqrt{1-e^2}}C$$

somit

$$\frac{r}{a}\sin\zeta = \sin\Phi - \frac{G}{\mu}S - \frac{\Phi - F}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{G^2}{\mu^2}C \quad . \tag{11.337}$$

11.8.2 Berechnung der idealen Elemente aus dem Zustandsvektor

Der Zustandsvektor sei zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ in Bezug auf ein (inertiales *Newton*-) $\mathbf{p}_i$ – Äquator-System mit den kartesischen Koordinaten x_i, $\dot{x}_i$ gegeben:

$$\mathbf{r} = x^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i + x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{11.338}$$

Unter der Annahme, dass dieses System ein inertiales sei, wird üblicherweise eine Eigenbewegung dieses Systems vernachlässigt: $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$. Der Normalenvektor der oskulierenden Bahnebene

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = G\,\mathbf{c}_0 \tag{11.339}$$

liefert als erstes Element den Flächenparameter $G = |\mathbf{c}|$. Mit Radius und radialer Geschwindigkeit

$$r = |\mathbf{r}| \quad , \quad \dot{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r} \tag{11.340}$$

können im oskulierenden *Leibniz*-System der oskulierende radiale und transversale Richtungsvektor bestimmt werden:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad , \quad \mathbf{q}_0 = \frac{r}{G}\left(\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\,\mathbf{r}_0\right) \quad . \tag{11.341}$$

Mit der Geschwindigkeit $V = |\dot{\mathbf{r}}|$ kann im Fall einer als elliptisch angenommenen Bahn die große Bahnhalbachse mit Hilfe der Energiebeziehung (11.27) (auf Seite 63) aus

$$a = \frac{r\,\mu}{2\,\mu - r V^2} \tag{11.342}$$

und die Exzentrizität wegen $G = \sqrt{\mu\, p} = \sqrt{\mu\, a\left(1-e^2\right)}$ aus

$$e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{a\,\mu}} \tag{11.343}$$

berechnet werden. Um die auf ein *Hansen*-System zu beziehenden idealen Elemente herleiten zu können, muss willkürlich (!) ein *Hansen*-System festgelegt werden. Dies geschieht etwa zum Zeitpunkt (der gegebenen Epoche) $t_0 = t$ durch

$$\mathbf{q}_1^{(I)} = \mathbf{r}_0\left(t_0\right) \quad , \quad \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{c}_0 \quad , \quad \mathbf{q}_2^{(I)} = \mathbf{q}_0\left(t_0\right) \quad . \tag{11.344}$$

Der Perizentrumsvektor lautet nach dem (*Laplace*'schen) Integral (11.312) und den Beziehungen (11.326)

$$\mathbf{d} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c} - \mu\,\mathbf{r}_0 = e\,\mu\,\mathbf{q}_1^{(P)} = e\mu\left[\,\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\left(\omega+\sigma\right) + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\left(\omega+\sigma\right)\right] \quad . \tag{11.345}$$

Damit können die idealen Parameter *S* und *C* berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\cdot\mathbf{r}_0 &= e\,\mu\,\mathbf{q}_1^{(P)}\cdot\mathbf{q}_1^{(I)} = e\,\mu\cos\left(\omega+\sigma\right) = G\,C \\ \mathbf{d}\cdot\mathbf{q}_0 &= e\,\mu\,\mathbf{q}_1^{(P)}\cdot\mathbf{q}_2^{(I)} = e\,\mu\sin\left(\omega+\sigma\right) = G\,S \quad . \end{aligned} \tag{11.346}$$

Um die mittlere Länge *F* in der Bahn zu berechnen, die als weiterer idealer Parameter benötigt wird, werden zunächst aus der Bedingung $\zeta = \upsilon + \omega + \sigma = 0$ die trigonometrischen Funktionen der wahren Anomalie berechnet

$$e\,\mu\cos\upsilon = G\,C \quad , \quad e\,\mu\sin\upsilon = -G\,S \quad . \tag{11.347}$$

Mit den *Kepler*formeln (10.24) kann die exzentrische Anomalie berechnet werden

$$e\,\mu\cos E = \frac{r}{a}G\,C + e^2\,\mu \quad , \quad e\,\mu\sin E = -\frac{r}{a\sqrt{1-e^2}}G\,S \quad . \tag{11.348}$$

Die exzentrische Länge in der Bahn Φ ergibt sich dann wegen der Definition (11.333) aus

$$\begin{aligned} \left(C^2+S^2\right)\sin\Phi &= \frac{\mu}{G}\left[\quad r\,\dot{r}\,C + \left(1-\frac{r}{a}\right)S\right] \\ \left(C^2+S^2\right)\cos\Phi &= \frac{\mu}{G}\left[-r\,\dot{r}\,S + \left(1-\frac{r}{a}\right)C\right] \end{aligned} \tag{11.349}$$

und die mittlere Länge F über die modifizierte *Kepler* Gleichung (11.334) aus

$$F = \Phi - \frac{r\,\dot{r}}{\sqrt{a\,\mu}} \quad . \tag{11.350}$$

Die Transformation vom $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem in das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System

$$\mathbf{q}_j^{(I)} = a_j{}^i \, \mathbf{p}_i \tag{11.351}$$

geschieht mit den Koeffizienten[1] (6.162) und den Zuweisungen[2] $A \to \Omega, B \to i, C \to -\sigma$ mit den zu bestimmenden *Euler-Rodrigues*-Parametern u_i

$$\begin{aligned}
a_{11} &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 &&= \cos i \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma \cos\Omega \\
a_{12} &= 2\left(u_1 u_2 + u_3 u_4\right) &&= -\cos i \sin\sigma \cos\Omega + \cos\sigma \sin\Omega \\
a_{13} &= 2\left(u_1 u_3 - u_2 u_4\right) &&= -\sin i \sin\sigma \\
a_{21} &= 2\left(u_1 u_2 - u_3 u_4\right) &&= -\cos i \cos\sigma \sin\Omega + \sin\sigma \cos\Omega \\
a_{22} &= -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 &&= \cos i \cos\sigma \cos\Omega + \sin\sigma \sin\Omega \\
a_{23} &= 2\left(u_2 u_3 + u_1 u_4\right) &&= \sin i \cos\sigma \\
a_{31} &= 2\left(u_1 u_3 + u_2 u_4\right) &&= \sin i \sin\Omega \\
a_{32} &= 2\left(u_2 u_3 - u_1 u_4\right) &&= -\sin i \cos\Omega \\
a_{33} &= -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 &&= \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{11.352}$$

Der Normalen-Richtungsvektor lautet im Äquatorsystem $\mathbf{c}_0 = a_3{}^i \, \mathbf{p}_i$ mit den Koeffizienten[3]

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \sin i \sin\Omega &&= \frac{1}{G}\left(x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2\right) \\
a_{32} &= -\sin i \cos\Omega &&= \frac{1}{G}\left(x_3 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_3\right) \\
a_{33} &= \cos i &&= \frac{1}{G}\left(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1\right) .
\end{aligned} \tag{11.353}$$

Entsprechend auf Grund der Zuordnungen (11.344) gelten die Beziehungen

$$\mathbf{r} = x^i \, \mathbf{p}_i = r \, \mathbf{q}_1^{(I)} = r \; a_1{}^i \, \mathbf{p}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \, \mathbf{p}_i = \dot{r} \, \mathbf{q}_1^{(I)} + \frac{G}{r} \mathbf{q}_2^{(I)} \quad , \tag{11.354}$$

sowie

$$\mathbf{q}_1^{(I)} = \mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad , \quad \mathbf{q}_2^{(I)} = \frac{r}{G}\left[\dot{\mathbf{r}} - \dot{r} \, \mathbf{q}_1^{(I)}\right] \quad . \tag{11.355}$$

Die noch fehlenden Koeffizienten der Transformationsmatrix lauten daher in diesem Zusammenhang

$$a_{1i} = \frac{x_i}{r} \quad , \; a_{2i} = \frac{1}{G}\left[r \, \dot{x}_i - \dot{r} \, x_i\right] \qquad \langle \quad i = 1,2,3 \quad . \tag{11.356}$$

Um die *Euler-Rodrigues*-Parameter (11.331) aus dem Zustandsvektor zu berechnen, darf man nicht über die *Euler*-Winkel gehen, da dadurch die bekannten Singularitäten eingeschleppt werden können. *A. Deprit* ging hier geometrisch vor über einen auf die Überlegungen *Rodrigues* zurückgehenden Rotationsvektor **Q**, der eine enge Beziehung zu Quaternionen darstellt[4]. Man

[1] Band II, Abschnitt 6.3.9

[2] Band II, Abschnitt 6.3.10, bzw. die Koeffizienten (8.426) in Abschnitt 8.12.2

[3] siehe die Beziehungen (11.7) auf Seite 61

[4] RODRIGUES, O. [1840], DEPRIT, A. [1975], p. 5

kann aber auch einfach algebraisch die Parameter aus den Beziehungen (11.352) errechnen, wobei allerdings durch die Auflösung von Quadraturen Mehrdeutigkeiten bei den Vorzeichen eingeschleppt werden, die durch Parallelrechnungen eliminiert werden müssen. Daher werden mehrere Lösungen angegeben. Zunächst ist auf Grund der invarianten Relation (11.332)

$$a_{11} = 1 - 2u_2^2 - 2u_3^2 \;,\; a_{22} = 1 - 2u_1^2 - 2u_3^2 \;,\; a_{33} = 1 - 2u_1^2 - 2u_2^2 \quad . \tag{11.357}$$

Es ergeben sich somit die folgenden vier alternativen Berechnungen der *Euler-Rodrigues*-Parameter aus der Transformationsmatrix vom $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System in das fundamentale (inertiale) $\mathbf{p}_i$ – Basis-System (*Newton*-System):

$$u_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + a_{11} - a_{22} - a_{33}} \;,\; u_2 = \frac{a_{12} + a_{21}}{4u_1} \;,\; u_3 = \frac{a_{13} + a_{31}}{4u_1} \;,\; u_4 = \frac{a_{23} - a_{32}}{4u_1} \tag{11.358}$$

oder

$$u_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - a_{11} + a_{22} - a_{33}} \;,\; u_1 = \frac{a_{12} + a_{21}}{4u_1} \;,\; u_3 = \frac{a_{23} + a_{32}}{4u_1} \;,\; u_4 = \frac{a_{31} - a_{13}}{4u_1} \tag{11.359}$$

oder

$$u_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}} \;,\; u_1 = \frac{a_{31} + a_{13}}{4u_1} \;,\; u_2 = \frac{a_{32} + a_{23}}{4u_1} \;,\; u_4 = \frac{a_{12} - a_{21}}{4u_1} \tag{11.360}$$

oder

$$u_4 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}} \;,\; u_1 = \frac{a_{23} - a_{32}}{4u_1} \;,\; u_2 = \frac{a_{31} + a_{13}}{4u_1} \;,\; u_3 = \frac{a_{12} - a_{21}}{4u_1} \quad . \tag{11.361}$$

Damit sind die idealen Parameter $(G, S, C, F, u_1, u_2, u_3, u_4)$ aus dem Zustandsvektor $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ zum gegeben Zeitpunkt *t* gefunden.

11.8.3 Berechnung des Zustandsvektors aus den idealen Elementen

Gegeben seien die „idealen Elemente“ *G, S, C, F, u*1*, u*2*, u*3*, u*4 zu einem bestimmten Zeitpunkt *t*. Die Definitionen dieser Parameter sind in den Formeln (11.311), (11.327), (11.333) und (11.331) gegeben. Gesucht ist der Zustandsvektor $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

Da es sich um eine Kegelschnittbewegung handeln soll, wird die Exzentrizität (bei Kenntnis der zentrischen Gravitationskonstante μ) berechnet aus

$$e = \frac{G}{\mu}\sqrt{S^2 + C^2} \tag{11.362}$$

sowie die große Bahnhalbachse aus

$$a = \frac{G^2}{\mu\left(1 - e^2\right)} \quad . \tag{11.363}$$

Die Parameter *S* und *C* sind auf das *Hansen*-System bezogen. Sie liefern den (*Hansen*schen) Bahnwinkel des Perizentrums[1]

$$\zeta_P = \omega + \sigma \quad , \tag{11.364}$$

wobei im Fall kreisförmiger Bahnen (e=0) willkürlich $\zeta_P = 0$ gesetzt werden kann. Die modifizierte *Kepler*-Gleichung (11.334)

$$F = \Phi - \frac{G}{\mu}\left[C\,\sin\Phi - S\,\cos\Phi\right] \tag{11.365}$$

liefert nach iterativer Auflösung die exzentrische auf das *Hansen*-System bezogene Anomalie Φ, mit deren Hilfe der Radius

$$r = a\left[1 - \frac{G}{\mu}\left(C\,\cos\Phi - S\sin\Phi\right)\right] \tag{11.366}$$

und der *Hansen*sche Bahnwinkel berechnet werden können:

$$\begin{aligned}\cos\zeta &= \frac{a}{r}\left[\cos\Phi - \frac{G}{\mu}C + \frac{\Phi - F}{1+\sqrt{1-e}}\frac{G^2}{\mu^2}S\right]\\ \sin\zeta &= \frac{a}{r}\left[\sin\Phi - \frac{G}{\mu}S - \frac{\Phi - F}{1+\sqrt{1-e}}\frac{G^2}{\mu^2}C\right] \quad .\end{aligned} \tag{11.367}$$

Die Basisvektoren des *Hansen*-Systems werden in Bezug auf das äquatoriale $\mathbf{p}_i$ – Basissystem (*Newton*-System) dargestellt durch

$$\mathbf{q}_1^{(I)} = a_1{}^i\,\mathbf{p}_i, \quad , \quad \mathbf{q}_2^{(I)} = a_2{}^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{q}_3^{(I)} = a_3{}^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{11.368}$$

Da die Parameter u_i auf ein *Hansen*-System bezogen sind, folgen die Koeffizienten aus den Transformationsformeln (6.162) mit den Zuweisungen $A \to \Omega$, $B \to i$, $C \to -\sigma$ (Band II)

$$\begin{aligned}
a_{11} &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2\\
a_{12} &= 2\left(u_1 u_2 + u_3 u_4\right)\\
a_{13} &= 2\left(u_1 u_3 - u_2 u_4\right)\\
a_{21} &= 2\left(u_1 u_2 - u_3 u_4\right)\\
a_{22} &= -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2\\
a_{23} &= 2\left(u_2 u_3 + u_1 u_4\right)\\
a_{31} &= 2\left(u_1 u_3 + u_2 u_4\right)\\
a_{32} &= 2\left(u_2 u_3 - u_1 u_4\right)\\
a_{33} &= -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \quad .
\end{aligned} \tag{11.369}$$

Der Ortsvektor lautet damit:

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = r\left[\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta\right] \quad . \tag{11.370}$$

[1] Der Bahnwinkel des Perizentrums wird in der Originalarbeit von DEPRIT, A. [1975] mit *g* bezeichnet.

Entsprechend lautet der transversale Richtungsvektor

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta \quad . \tag{11.371}$$

Der Perizentrumsvektor (*Hermann-Laplace*-Vektor) kann mit den Ausdrücken (11.312) und den Beziehungen (11.326) auf das *Hansen*-System bezogen werden

$$\mathbf{d} = e\,\mu\,\mathbf{q}_1^{(P)} = e\,\mu\left[\,\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\left(\omega+\sigma\right) + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\left(\omega+\sigma\right)\right] \quad ,$$

somit in Bezug auf die idealen Elemente

$$\mathbf{d} = G\left[\,C\,\mathbf{q}_1^{(I)} + S\,\mathbf{q}_2^{(I)}\right] \quad . \tag{11.372}$$

Mit Hilfe der Beziehung (11.312) kann jetzt der Geschwindigkeitsvektor berechnet werden:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{G}\left[\,\mathbf{q}_3^{(I)} \times \mathbf{d} + \mu\,\mathbf{q}_0\right] \quad . \tag{11.373}$$

Schließlich folgt die radiale Geschwindigkeit wie üblich aus

$$\dot{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r} \quad . \tag{11.374}$$

11.8.4 Die *Gauß*schen Variationsgleichungen der idealen Elemente

Die Variation des Flächenparameters *G* ist der transversalen (Stör-) Beschleunigung proportional. Nach Formel[1] (11.68) (auf Seite 71) ist

$$\dot{G} = r\,b_T \quad . \tag{11.375}$$

Die Variationsgleichungen der Parameter *C* und *S* wurden in Abschnitt 11.8.1 mit den Formeln (11.330) hergeleitet. Hierzu wurde die effektive Störbeschleunigung (11.308) verwendet

$$\mathbf{K} := \mathbf{R}_2 - \frac{r}{p}\mathbf{r}_0 \times \left(\mathbf{r}_0 \times \mathbf{R}_2\right) \quad , \tag{11.376}$$

wobei **F** die Gesamt-Stör-Beschleunigung ist, mit der eine Zweikörperbewegung „gestört" wird. Dann ist mit den Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}$ eines *Hansen*-Systems

$$\dot{C} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_2^{(I)} \quad , \quad \dot{S} = -\,\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(I)} \quad . \tag{11.377}$$

Entsprechend den Definitionen (11.327) ist

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{e\,\mu}{G}\right)\cos\zeta_P - \frac{e\,\mu}{G}\,\dot{\zeta}_P \sin\zeta_P = \mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_2^{(I)} \\ \dot{S} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{e\,\mu}{G}\right)\sin\zeta_P + \frac{e\,\mu}{G}\,\dot{\zeta}_P \cos\zeta_P = -\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(I)} \quad . \end{aligned} \tag{11.378}$$

Da der Perizentrumsvektor (entsprechend den Beziehungen (11.326)) die Richtung $\mathbf{q}_1^{(P)} = -\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta_P + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta_P$ hat, ergibt sich die Variation für die Länge des Perizentrums in der Bahn mit Hilfe der Beziehung (11.324) zu

[1] bzw. Formel (4.307) (Band II, Abschnitt 4.4.2)

$$\dot{\zeta}_P = -\frac{G}{e\,\mu}\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(P)} = \mathbf{D}_{q^{(P)}q^{(I)}}\cdot\mathbf{c}_0 \quad . \tag{11.379}$$

Die Variationsgleichungen der *Euler-Rodrigues*-Parameter (11.331) lauten bei Bezug auf ein als inertial angenommenes Basissystem (dessen Eigenbewegungsvektor identisch verschwindend angenommen wird: $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$) mit den Formeln (6.177) (Abschnitt 6.3.10, Band II)

$$\begin{aligned} 2\dot{u}_1 &= \dot{\eta}\left(-u_3\sin\zeta + u_4\cos\zeta\right) \\ 2\dot{u}_2 &= \dot{\eta}\left(\ u_3\cos\zeta + u_4\sin\zeta\right) \\ 2\dot{u}_3 &= \dot{\eta}\left(\ u_1\sin\zeta - u_2\cos\zeta\right) \\ 2\dot{u}_4 &= \dot{\eta}\left(-u_1\cos\zeta - u_2\sin\zeta\right) \quad . \end{aligned} \tag{11.380}$$

Hier ist ζ der auf das *Hansen*-System bezogene Bahnwinkel, $\dot{\eta}$ die Variation des räumlichen Drehwinkels, die (siehe etwa die Beziehungen (4.308) in Abschnitt 4.4.2, Band II) proportional zur normalen (Stör-) Beschleunigung ist:

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G}b_N \quad . \tag{11.381}$$

Es fehlt noch die Variation der auf das *Hansen*-System bezogenen mittleren Länge in der Bahn $F = M + \omega + \sigma = M + \zeta_P$.

Die differentielle Beziehung zwischen wahrer und exzentrischer Anomalie wurde in Formel (11.86) (auf Seite 74) berechnet:

$$\dot{E} \;=\; \dot{\upsilon}\frac{r\sqrt{1-e^2}}{p} - \dot{e}\,\frac{r\sin\upsilon}{p\sqrt{1-e^2}} \quad . \tag{11.382}$$

Die zweite der *Kepler*-Formeln

$$r\sin\upsilon = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \tag{11.383}$$

führt auf

$$\dot{E} = \dot{\upsilon}\frac{\sin E}{\sin\upsilon} - \dot{e}\frac{\sin E}{1-e^2} \quad . \tag{11.384}$$

Die Variation der wahren Anomalie kann mit Flächensatz $r^2\,\dot{\zeta} = G$ und der Variation der Länge des Perizentrums (11.379) bei Bezug auf eine Zweikörperbewegung erhalten werden:

$$\dot{\upsilon} = \dot{\zeta} - \dot{\zeta}_P = \frac{G}{r^2} + \frac{G}{e\,\mu}\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(P)} \quad . \tag{11.385}$$

Nach *Deprit* kann die Variation der Exzentrizität durch folgenden Ausdruck dargestellt werden, wenn die Delaunay-Elemente[1] $L = \sqrt{\mu a}$, $G = \sqrt{\mu p} = L\sqrt{1-e^2}$, sowie die Beziehung (11.319) berücksichtigt werden:

[1] in Abschnitt 11.9.5 auf Seite 131

$$\frac{\dot e}{1-e^2} = \dot e - e\frac{\dot L}{L} + \frac{\dot e\, e^2}{1-e^2} + e\frac{\dot L}{L} = \dot e - \frac{e}{L\sqrt{1-e^2}}\ \frac{\dot L\left(1-e^2\right) - \dot e\, e\, L}{\sqrt{1-e^2}} + e\frac{\dot L}{L} =$$

$$= \frac{\dot e\, G - e\left[\dot L\sqrt{1-e^2} - \dfrac{e\,\dot e\, L}{\sqrt{1-e^2}}\right]}{G} + e\frac{\dot L}{L} = \frac{e\left(\dot e\, G - e\dot G\right)}{G} + e\frac{\dot L}{L} =$$

$$= \frac{e\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{e\mu}{G}\right)}{\dfrac{e\mu}{G}} + e\frac{\dot L}{L} = \frac{G}{\mu}\,\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_2^{(P)} + e\frac{\dot L}{L} \quad . \tag{11.386}$$

Mit der radialen Geschwindigkeit (11.16) und der zweiten *Kepler*-Beziehung

$$G\dot r = e\,\mu\sin\upsilon \quad , \quad r\sin\upsilon = a\sqrt{1-e^2}\sin E \tag{11.387}$$

sowie der Transformation (11.314) ergibt sich schließlich die Variation der exzentrischen Anomalie, wenn noch die mittlere *Kepler*sche Bewegung $n = \sqrt{\mu/a^3}$ eingesetzt wird:

$$\dot E = \frac{r\,G}{a\,e\,\mu\sqrt{1-e^2}}\,\mathbf{K}\cdot\left(\frac{p}{r}\mathbf{q}_1^{(P)} - e\,\mathbf{r}_0\right) + \frac{a\,n}{r} - \frac{r\,\dot r}{L^2}\dot L\ . \tag{11.388}$$

Um einen Ausdruck für die Variation der mittleren Länge *F* in der Bahn in Bezug auf ein *Hansen*-System zu erhalten, wird zunächst noch die Variation der mittleren Anomalie *M* benötigt. Diese ergibt sich aus der *Kepler*-Gleichung zu

$$\dot M = \dot E - \frac{d}{dt}\left(e\sin E\right) \quad . \tag{11.389}$$

Um den zweiten Summanden der rechten Seite dieses Ausdrucks zu berechnen, wird aus den Beziehungen (11.387) gebildet

$$r\,\dot r = \sqrt{a\,\mu}\ e\sin E = L\,e\sin E \quad , \tag{11.390}$$

somit

$$\frac{d}{dt}\left(r\,\dot r\right) = \frac{dL}{dt}e\sin E + L\frac{d}{dt}\left(e\sin E\right) = \frac{r\,\dot r}{L}\dot L + L\frac{d}{dt}\left(e\sin E\right) \quad . \tag{11.391}$$

Aus $r\,\dot r = \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ folgt

$$\frac{d}{dt}\left(r\,\dot r\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right) = \dot{\mathbf{r}}^2 + \mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{\mu}{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}_2 \quad . \tag{11.392}$$

Unter Berücksichtigung von Beziehung (11.309) folgt

$$\frac{d}{dt}\left(e\sin E\right) = \frac{1}{L}\left[\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{a} + r\,\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{K}\right] - \frac{r\,\dot r}{L^2}\dot L = -n + \frac{r}{\sqrt{\mu\,a}}\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{K} + \frac{a\,n}{r} - \frac{r\,\dot r}{L^2}\dot L \quad . \tag{11.393}$$

Die mittlere Länge in der Bahn hat somit nach Kombination der Ausdrücke (11.388) und (11.393) sowie ergänzt durch (11.323) die Darstellung

$$\dot F = \dot E - \frac{d}{dt}\left(e\sin E\right) + \dot\zeta_P = n + \frac{e\,G}{\mu\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)}\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_1^{(P)} - \frac{2\,r}{\sqrt{\mu\,a}}\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_0 \quad . \tag{11.394}$$

Der Bezug auf ein *Hansen*-System mit Bahnwinkel ζ kann mit den Transformationen

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta \quad , \quad \mathbf{q}_1^{(P)} = \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta_P + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta_P \tag{11.395}$$

und den Definitionen (11.327) sowie den zugehörenden Variationen (11.377) erhalten werden. Dies erlaubt die elegante Darstellung[1]

$$\dot{F} = n - \frac{p\left(C\dot{S} - S\dot{C}\right)}{\mu\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)} + 2\frac{r\sqrt{1-e^2}}{G}\left(\dot{S}\cos\zeta - \dot{C}\sin\zeta\right) \quad . \tag{11.396}$$

Kritische Anmerkungen: Wird die Formel[2] $\dot{u}_2 u_1 - u_2 \dot{u}_1 + \dot{u}_4 u_3 - u_4 \dot{u}_3$ auf die allgemeingültigen Variationsgleichungen[3] der *Euler-Rodigues*-Parameter angewendet, so ergibt sich die allgemeingültige Beziehung

$$\dot{u}_2 u_1 - u_2 \dot{u}_1 + \dot{u}_4 u_3 - u_4 \dot{u}_3 = -\frac{1}{2} D_{qp3} \quad . \tag{11.397}$$

Hier ist D_{qp3} die normale Komponente des Eigenbewegungsvektors („Drehvektors“) im $\mathbf{q}_j$ – System bei Bezug des $\mathbf{q}_j$ – Systems auf das $\mathbf{p}_i$ – System (*Newton*-System). Bei *Hansen*-Systemen verschwindet die dritte Komponente des absoluten Eigenbewegungsvektors identisch: $D_{q^{(I)}3} = 0$. Somit bleibt (vgl. die Formel (6.176) in Band II) (die a_{ji} sind die entsprechenden Parameter der Transformationsmatrix, wie sie zum Beispiel in (11.459) auf Seite 140 dargestellt werden)

$$D_{q^{(I)}p3} = -a_3^{\ i} D_{pi} \quad . \tag{11.398}$$

Wenn bei *Deprit* daher die Beziehung $\dot{u}_2 u_1 - u_2 \dot{u}_1 + \dot{u}_4 u_3 - u_4 \dot{u}_3 = 0$ als „invariante Relation“ verwendet wird, bedeutet dies, dass die Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems („*Newton*-System“) vernachlässigt wird. Damit wird aber eine wesentliche Eigenschaft von *Hansen*-Systemen übersehen, nämlich eine absolute Bewegung zu beschreiben. Ferner erwähnt *Deprit* als definierende Eigenschaft von *Hansen*-Systemen (ideale Systeme) die Eigenschaft, dass beim Wegfall von „Störungen“ der Eigenbewegungsvektor (bei *Deprit* als „angular velocity vector“ bezeichnet) des *Hansen*-Systems („intermediate frame“) gleich dem Drehvektor in der Bahnebene vom *Hansen*- in das *Leibniz*-System („orbital frame“) sei. Diese Aussage trifft aber auch schon beim Wegfall von normalen „Stör“- Beschleunigungen zu und ist auch auf andere Systeme (Apsidensystem, Knotensystem) anwendbar. Die wesentliche definitorische Charakterisierung eines *Hansen*-Systems, wie sie in ***Satz H1*** (Abschnitt 4.3.10, Band II) beschrieben wird, dass nämlich der Eigenbewegungsanteil eines auf ein *Hansen*-System bezogenen Geschwindigkeitsvektors notwendig und hinreichend verschwindet, wird von der *Depri*tschen Aussage nicht erfasst. Implizit verwendet *Deprit* auch die *Frenet*schen Formeln des *Leibniz*-Systems allerdings nicht in der eleganten Form (4.319) (in Abschnitt 4.4.3, Band II). Das liegt daran, dass die Größe $r\, b_N / G$ von *Deprit* nicht mit der Drehung um den Radiusvektor mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\eta}$ gleichgesetzt wird, wie es nach den Überlegungen *Strubl*es (siehe in

[1] Vorsicht: die hier hergeleitete Formel hat vor dem zweiten Term ein anderes Vorzeichen als die Arbeit von *Deprit*

[2] In der Originalarbeit von *Deprit* ist in dieser Formel ein Vorzeichenfehler enthalten

[3] Die Variationsgleichungen (6.167) in Abschnitt 6.3.9 in Band II

Abschnitt 2.10.15, Band I) als notwendig erscheint. Gleichwohl dürfen die Arbeiten *Deprits* zu den „idealen Elementen“ als eine interessante Vorstufe zu den im vorliegenden Bericht entwickelten allgemeingültigen und grundlegenden Aussagen über *Hansen*-Systeme gewertet werden.

11.9 Kanonische Elemente

11.9.1 Kanonische Variable

Ein System von Differentialgleichungen wird als kanonisch bezeichnet, wenn es die Form

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_j} \quad , \quad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_j} \quad , \quad j = 1, \cdots, n \tag{11.399}$$

hat. *t* ist die unabhängige Variable, die x_j, y_j werden als die kanonischen Variablen, die Funktion $F = F\left(x_j, y_j; t\right)$ als *Hamilton* Funktion des kanonischen Systems bezeichnet. Das kanonische System ist von der Ordnung 2*n* („*n* Freiheitsgrade“)[1].

Wenn die *Hamilton* Funktion nicht von der unabhängigen Variablen *t* abhängig ist, ist nach Definition (11.399)

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y_j} \frac{dy_j}{dt} \right) = 0 \quad , \tag{11.400}$$

somit ist

$$F = const. \tag{11.401}$$

ein erstes Integral des kanonischen Systems. Dies ist eine charakteristische Eigenschaft kanonischer Systeme.

Falls die *Hamilton* Funktion von der unabhängigen Variablen *t* explizit abhängig ist, kann dieser Fall durch Erhöhung des Freiheitsgrades auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt werden. Dazu wird die Variable

$$x_{n+1} := t$$

eingeführt, sowie die neue *Hamilton* Funktion

$$F^* = F + y_{n+1} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial y_{n+1}}{\partial t} = 0 \quad . \tag{11.402}$$

Das kanonische Differentialgleichungssystem hat dann die Gestalt

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial y_j} \quad , \quad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial x_j} \quad , \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \cdots, n, n+1 \quad . \tag{11.403}$$

Hier hat die modifizierte *Hamilton* Funktion die Gestalt

$$F^* = \int \frac{\partial F}{\partial t} dt + const. = F + y_{n+1} \quad . \tag{11.404}$$

---

[1] Eine besonders klare Einführung in den Formalismus der kanonischen Systeme findet sich bei BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961], p.530 ff

Damit bleibt die allgemeingültige Aussage:

➔ *In einem kanonischen System von Differentialgleichungen enthält die zugehörige Hamilton Funktion die unabhängige Variable nicht explizit, kann also in Bezug auf diese Variable als konstant angenommen werden.*

11.9.2 Kanonische Darstellung einer „gestörten“ Keplerbewegung

Die kartesischen Komponenten des Ortsvektors und die Komponenten des relativen Geschwindigkeitsvektors

$$\mathbf{r} = x^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i \quad , \left(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij}\right) \tag{11.405}$$

einer gestörten *Kepler*bewegung können als kanonische Variable aufgefasst werden, wenn als zugehörige *Hamilton* Funktion der Ausdruck

$$F = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_p^2 + \frac{\mu}{r} + W \quad , \quad \left(r := |\mathbf{r}| = \sqrt{x^i x_i}\right) \tag{11.406}$$

verwendet wird. Die Störungsfunktion W darf nur von der unabhängigen Variablen t und dem Ortsvektor, aber nicht vom Geschwindigkeitsvektor abhängen:

$$W = W\left(\mathbf{r};t\right) \quad . \tag{11.407}$$

Die Komponenten des relativen Geschwindigkeitsvektors werden im Rahmen der kanonischen Systeme als die y_j – Variablen aufgefasst:

$$y_j := \dot{x}_j \quad . \tag{11.408}$$

Dann lautet das kanonische System der zugehörigen Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = \dot{x}_i \quad , \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{d\dot{x}_i}{dt} = \ddot{x}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\mu}{r^3}x_i + \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad . \tag{11.409}$$

Die Gleichungen $\ddot{x}_i$ sind also nichts anderes als die Komponenten der *Kepler*schen Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{r}_0 + \nabla W \quad . \tag{11.410}$$

11.9.3 Kanonische Transformationen

Definition: *Die Transformation von kanonischen Variablen auf einen Satz neuer Variabler wird als kanonisch bezeichnet, wenn auch die neuen Variablen kanonisch sind.*

Die durch eine kanonische Transformation erhaltenen neuen Systeme können die *Hamilton* Funktion des alten Systems verwenden, in die dann nur die neuen Variablen eingesetzt werden müssen, die aber ansonsten unverändert bleibt. Einer solchen Transformation kann eine „erzeugende Funktion“ zugeordnet sein. Durch eine solche Transformation kann es möglich werden, die Anzahl der Freiheitsgrade eines Bewegungsproblems zu reduzieren. In manchen Fällen kann es auf diese Weise gelingen, das Bewegungsproblem teilweise, bisweilen sogar vielleicht

ganz, zu lösen. Im Folgenden werden die Bedingungen hergeleitet, welche eine kanonische Transformation erfüllen muss, damit die zugehörige *Hamilton* Funktion unverändert bleibt.

Gegeben sei die Transformation von den kanonischen Variablen $\left(x_i, y_i\right)$ auf die neuen Variablen $\left(x_j^*, y_j^*\right)$:

$$x_i = x_i\left(x_k^*, y_l^*; t\right) \quad , \quad y_j = y_j\left(x_k^*, y_l^*; t\right) \quad . \tag{11.411}$$

Die $\left(x_i, y_i\right)$ genügen dem kanonischen Gleichungssystem (11.399). Bei Transformation auf die neuen Variablen ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_j^*} \frac{dx_j^*}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j^*} \frac{dy_j^*}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \\ \frac{dy_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j^*} \frac{dx_j^*}{dt} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial y_j^*} \frac{dy_j^*}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad . \end{aligned} \tag{11.412}$$

Die zugehörige *Hamilton* Funktion werde auf die neuen Elemente transformiert

$$F = F\left(x_i, y_i; t\right) = F\left(x_j^*, y_j^*; t\right) \tag{11.413}$$

mit den Variationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_k^*} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_k^*} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} \\ \frac{\partial F}{\partial y_k^*} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_k^*} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial y_k^*} \quad , \end{aligned} \tag{11.414}$$

wobei

$$\frac{\partial t}{\partial x_k^*} = \frac{\partial t}{\partial y_k^*} = 0 \quad . \tag{11.415}$$

Die Ausdrücke (11.412) werden in die Entwicklungen (11.414) eingesetzt:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k^*} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^*}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)\frac{dx_j^*}{dt} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j^*}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial y_j^*}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)\frac{dy_j^*}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_k^*} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^*}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)\frac{dx_j^*}{dt} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j^*}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial y_j^*}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)\frac{dy_j^*}{dt} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)$$

Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^*}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right) = 0 \quad \text{für alle} \quad k, j \\ &\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j^*}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial y_j^*}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für alle} \quad k \neq j \\ 1 & \text{für} \quad k = j \end{cases} \\ &\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*} - \frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right) = 0 \quad \text{für alle} \quad k \end{aligned} \tag{11.416}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^*}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*}-\frac{\partial y_i}{\partial x_j^*}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)=\begin{cases}0 & \text{für alle } j\neq k\\ 1 & \text{für } j=k\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j^*}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*}-\frac{\partial y_i}{\partial y_j^*}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)=0 \quad \text{für alle } j,k \tag{11.417}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial y_i}{\partial x_k^*}-\frac{\partial y_i}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial x_k^*}\right)=0 \quad \text{für alle } k \quad ,$$

wobei die jeweils letzte Bedingung besagt, dass die Transformation die unabhängige Variable (hier die Zeit) nicht explizit enthält. Dann sind die neuen Variablen kanonisch. Die zugehörenden Differentialgleichungen lauten

$$\frac{dx_j^*}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_j^*} \quad , \quad \frac{dy_j^*}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_j^*} \quad . \tag{11.418}$$

Die Transformation (11.411) ist umkehrbar eindeutig mit der *Jacobi* Determinante[1] $J=\pm 1$.

Im Zusammenhang mit der *Delaunay*schen Mondtheorie ist folgender Satz von Bedeutung[2]: Wenn die Transformationen $x_i=x_i\left(x_k^*,y_l^*;t\right)$, $y_j=y_j\left(x_k^*,y_l^*;t\right)$ kanonisch sind, so bleiben die neuen Variablen auch dann kanonisch ohne Änderung der zugehörigen *Hamilton* Funktion, wenn die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^*\,dy_j^*-x_j\,dy_j\right)=dW\left(x_k,y_k\right) \tag{11.419}$$

für eine Funktion *W* erfüllt ist, die in willkürlicher Weise von den Variablen x_k, y_k abhängig ist.

BEISPIEL: Es sei angenommen, dass die x_i, y_i kanonisch seien und dass die Funktion *W* konstant sei, so dass d*W*=0. Es werde für eine kanonische Transformation gefordert, dass

$$y_1^* := y_1+y_2+y_3 \quad , \quad y_2^* := y_2+y_3 \quad , \quad y_3^* := y_3 \tag{11.420}$$

bzw. umgekehrt

$$y_1=y_1^*-y_2^* \quad , \quad y_2=y_2^*-y_3^* \quad , \quad y_3=y_3^* \tag{11.421}$$

gegeben seien. Die Transformationen $x_j^*=x_j^*\left(x_i,y_i\right)$ können dann mit Hilfe der Bedingung (11.419) bestimmt werden. Danach gilt

$$x_1^*\,d\left(y_1+y_2+y_3\right)+x_2^*\,d\left(y_2+y_3\right)+x_3^*\,d\left(y_3\right)-x_1dy_1-x_2dy_2-x_3dy_3=0$$

somit

$$\left(x_1^*-x_1\right)dy_1+\left(x_1^*+x_2^*-x_2\right)dy_2+\left(x_1^*+x_2^*+x_3^*-x_3\right)dy_3=0 \ .$$

Wegen der Unabhängigkeit der Variationen dy_j ergeben sich die Relationen

[1] nach BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961] p.533-535

[2] Herleitung bei BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961], p.535-538

$$x_1^* = x_1 \quad , \quad x_1^* + x_2^* = x_2 \quad , \quad x_1^* + x_2^* + x_3^* = x_3 \tag{11.422}$$

und schließlich

$$x_1^* = x_1 \ , \ x_2^* = x_2 - x_1 \ , \ x_3^* = x_3 - x_2 \quad .\blacksquare \tag{11.423}$$

11.9.4 Die erzeugende Funktion

In der klassischen kanonischen Theorie wird als erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation eine gemischtvariable Funktion $S\left(x_j^*, y_i\right)$ bezeichnet, die also „alte“ und „neue“ Variable enthält und die Bedingungen erfüllt

$$y_j^* = \frac{\partial S}{\partial x_j^*} \quad , \quad x_i = \frac{\partial S}{\partial y_i} \quad . \tag{11.424}$$

Die dadurch definierte Transformation ist kanonisch ohne Änderung der zugehörenden *Hamilton* Funktion, da mit

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^*\, dy_j^* - x_j\, dy_j\right) = d\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^*\, y_j^*\right) - \sum_{j=1}^{n} y_j^* dx_j^* - \sum_{j=1}^{n} x_j dy_j =$$

$$= d\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^*\, y_j^*\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_j^*} dx_j^* - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial y_j} dy_j = d\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^*\, y_j^* - S\right)$$

die Bedingung (11.419) erfüllt ist. Die kanonische Transformation ist in dieser Theorie nur implizit in der Form

$$x_i = x_i\left(x_j^*, y_j\right) \quad , \quad y_j^* = y_j^*\left(x_i^*, y_i\right) \tag{11.425}$$

gegeben. Die dadurch bewirkten Nachteile wurden in neueren Theorien von *Hori*[1] und *Deprit*[2] überwunden, die im vorliegenden Bericht nicht referiert werden sollen.

11.9.5 *Delaunay*- Elemente

Als kanonisches Äquivalent zu den Keplerelementen können die *Delaunay* Elemente[3] angesehen werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{L} &:= \sqrt{\mu a} && , \quad l := \mathrm{M} \\ \mathrm{G} &:= \sqrt{\mu p} = \mathrm{L}\sqrt{1-\mathrm{e}^2} && , \quad \mathrm{g} := \omega \\ \mathrm{H} &:= \sqrt{\mu p}\cos \mathrm{i} = \mathrm{G}\cos \mathrm{i} , && \quad \mathrm{h} := \Omega \quad . \end{aligned} \tag{11.426}$$

Modifikationen, die für manche Anwendungen geeigneter sind, können zum Beispiel mit den Transformationen (11.420) und (11.423) erhalten werden. Danach sind auch die Parameter

---

[1] HORI, G. I. [1966] und [1971]

[2] DEPRIT, A. [1969]

[3] Vgl. Abschnitt 2.7.11 (Band I)

$$\begin{aligned} &\mathrm{L} &&, \quad l+\mathrm{g}+\mathrm{h} \\ &\mathrm{G}-\mathrm{L} &&, \quad \mathrm{g}+\mathrm{h} \\ &\mathrm{H}-\mathrm{G} &&, \quad \mathrm{h} \end{aligned} \tag{11.427}$$

kanonisch mit derselben *Hamilton* Funktion wie die originalen *Delaunay* Elemente. Dasselbe gilt auch für den Satz von Elementen

$$\begin{aligned} &\mathrm{L} &&, \quad l+\mathrm{g}+\mathrm{h} \\ &\mathrm{L}-\mathrm{G} &&, \quad -(\mathrm{g}+\mathrm{h}) \\ &\mathrm{G}-\mathrm{H} &&, \quad -\mathrm{h} \end{aligned} \tag{11.428}$$

da die Bedingung (11.419) für jedes *j* getrennt erfüllt ist.

Die den *Delaunay*elementen zugeordnete *Hamilton*funktion lautet mit der Störungsfunktion W

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + W(t; l, g, h, L, G, H) \tag{11.429}$$

11.9.6 *Poincaré* – Elemente

Gegeben seien die kanonischen Elemente (x_j, y_j) und die Transformation

$$x_j = \sqrt{2x_j^*}\cos y_j^* \quad , \quad y_j = \sqrt{2x_j^*}\sin y_j^* \quad . \tag{11.430}$$

Diese Transformation ist kanonisch, da wegen

$$dx_j = \frac{\cos y_j^*}{\sqrt{2x_j^*}}dx_j^* - \sqrt{2x_j^*}\sin y_j^*\, dy_j^* \quad , \quad dy_j = \frac{\sin y_j^*}{\sqrt{2x_j^*}}dx_j^* + \sqrt{2x_j^*}\cos y_j^*\, dy_j^*$$

die Bedingung (11.419) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x_j^*\, dy_j^* - x_j dy_j &= x_j^*\, dy_j^* - \cos y_j^* \sin y_j^*\, dx_j^* - 2x_j^* \cos^2 y_j^*\, dy_j^* = \\ &= -\frac{1}{2}\sin(2y_j^*)dx_j^* - x_j^*\cos(2y_j^*)dy_j^* = d\left[-\frac{1}{2}x_j^*\sin(2y_j^*)\right]. \end{aligned}$$

Werden die Elemente (11.428) als die $(x_j^*, y_j^*)-$Elemente bezeichnet und wird die Transformation (11.430) auf die Elemente *j*=2, *j*=3 angewendet, ergeben sich die *Poincaré* Elemente[1]

$$\begin{aligned} &\mathrm{L} &&, \quad l+\mathrm{g}+\mathrm{h} \\ &\sqrt{2(\mathrm{L}-\mathrm{G})}\cos(\mathrm{g}+\mathrm{h}) &&, \quad -\sqrt{2(\mathrm{L}-\mathrm{G})}\sin(\mathrm{g}+\mathrm{h}) \\ &\sqrt{2(\mathrm{G}-\mathrm{H})}\cosh &&, \quad -\sqrt{2(\mathrm{G}-\mathrm{H})}\sinh \end{aligned} \tag{11.431}$$

Diese sind nach ihrer Herleitung kanonisch mit derselben *Hamilton* Funktion wie die zugehörigen *Delaunay* Elemente, da Bedingung (11.419) für jedes einzelne *j* und damit auch für die gesamte Summe erfüllt ist.

[1] Vgl. Abschnitt 2.7.18 (Band I)

Anmerkung: Zur Herleitung der *Poincaré* Elemente mussten die modifizierten *Delaunay* Elemente in der Form (11.428) verwendet werden, da dann bei elliptischen Bahnen

$$L - G = \sqrt{\mu a\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)} > 0$$

und deshalb unter der Wurzel in (11.431) nur dann ein nicht negativer Ausdruck stehen kann.

11.9.7 *Hill*sche – Variable

Die Hillschen Variablen lauten (siehe Abschnitt 2.7.16 in Band I):

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{r}} \quad &, \quad \mathrm{r} \\ \mathrm{G} = \sqrt{\mu \mathrm{a}\left(1-\mathrm{e}^2\right)} = \sqrt{\mu \mathrm{p}} \quad &, \quad \mathrm{u} = \upsilon + \omega \\ \mathrm{H} = \mathrm{G}\cos \mathrm{i} \quad &, \quad \Omega \quad . \end{aligned} \tag{11.432}$$

Sie sind im Rahmen des gestörten Zweikörperproblems eine Mischung aus schnellen Variablen $(r, \dot{r}, u)$ und langsamen Variablen (*G, H, Ω*). In Relation zu den inertialen kartesischen Koordinaten (11.405), die auch als auf ein *Newton* – System bezogen angesprochen werden können, sind die *Hill*schen Variablen auf die Bewegung bezogen. Sie liefern also eine Darstellung in einem (mitbewegten) *Leibniz*-System. In diesem hat ein Ortsvektor die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i = r\,\mathbf{r}_0 \tag{11.433}$$

mit dem auf das inertiale $\mathbf{p}_i$ – (*Newton*) System[1] bezogenen radialen Richtungsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 = \; & \mathbf{p}_1\left(-\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right) + \\ & + \mathbf{p}_2\left(\cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega\right) + \\ & + \mathbf{p}_3 \quad \sin i \sin u \quad . \end{aligned} \tag{11.434}$$

Während Radius *r*, Argument der Breite *u* und aufsteigender Knoten Ω zu den *Hill*schen Variablen gehören, muss die Inklination durch andere *Hill*sche Variable ausgedrückt werden:

$$\cos i = \frac{H}{G} \quad , \quad \sin i = \sqrt{1-\cos^2 i} = \sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}} = \frac{\sqrt{G^2-H^2}}{G} \quad . \tag{11.435}$$

Damit lautet die Transformation auf den Ortsvektor

$$\begin{aligned} x_1 &= r\left(-\frac{H}{G}\sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right) \\ x_2 &= r\left(\frac{H}{G}\sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega\right) \\ x_3 &= r\left(\frac{\sqrt{G^2-H^2}}{G}\sin u\right) \quad . \end{aligned} \tag{11.436}$$

[1] Siehe etwa in Kapitel 8.1, Band II

Um auch den Geschwindigkeitsvektor in die Transformation einzubeziehen, wird die Inertialität des verwendeten *Newton*-Systems entsprechend der Beziehung (11.405) verwendet. Der Geschwindigkeitsvektor in Bezug auf das *Newton*- und das *Leibniz*-System lautet

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i \mathbf{p}_i = \dot{r}\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 \qquad \langle\, \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad , \tag{11.437}$$

mit dem normalen Richtungsvektor

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = G\mathbf{c}_0 = c^i \mathbf{p}_i \quad , \tag{11.438}$$

Der Normalenvektor hat in Bezug auf das *Newton* System die Darstellung

$$\mathbf{c}_0 \;=\; \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \mathbf{p}_3 \cos i \quad . \tag{11.439}$$

Damit ergibt sich

$$\mathbf{c} = G\mathbf{c}_0 = \left(x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1\right)\mathbf{p}_3 + \left(x_3 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_2\right)\mathbf{p}_2 + \left(x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2\right)\mathbf{p}_1 = c^i \mathbf{p}_i \quad , \tag{11.440}$$

Somit bleibt durch Vergleich der beiden letzten Ausdrücke als weitere Transformationsgleichung

$$x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = G\cos i = H \quad . \tag{11.441}$$

Aus (11.437) folgt unmittelbar

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{x}^i \dot{x}_i = \dot{r}^2 + \frac{G^2}{r^2} \tag{11.442}$$

und schließlich

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = x^i \dot{x}_i = r\dot{r} \quad . \tag{11.443}$$

Werden die Transformationen (11.436), (11.441) – (11.443) in die *Hamilton* Funktion (11.406) eingesetzt, nimmt diese mit den neuen (*Hill*schen) Variablen entsprechend dem Ausdruck (2.255) die Form an[1]:

$$\mathrm{F} \;=\; -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathrm{r}}^2 + \frac{\mathrm{G}^2}{\mathrm{r}^2}\right) + \frac{\mu}{\mathrm{r}} + \mathrm{W}\left(\mathrm{t};\mathrm{r},\mathrm{u},\Omega,\mathrm{G},\mathrm{H}\right) . \tag{11.444}$$

Damit kann gezeigt werden, dass die *Hill*schen Variablen kanonisch sind, denn sie genügen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\mathrm{r}} \;&=\; \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{r}} \quad , \quad \dot{\mathrm{r}} \;=\; -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \dot{\mathrm{r}}} \\ \dot{\mathrm{G}} \;&=\; \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{u}} \quad , \quad \dot{\mathrm{u}} \;=\; -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{G}} \\ \dot{\mathrm{H}} \;&=\; \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \Omega} \quad , \quad \dot{\Omega} \;=\; -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{H}} \quad . \end{aligned} \tag{11.445}$$

[1] Siehe im *Hamilton*-Abschnitt 2.7.9 (Band I)

11.10 Lyddane Elemente

D. Brouwer verwendete in seiner Herleitung[1] einer Lösung zweiter Ordnung des Problems der Bewegung eines Erdsatelliten im Schwerefeld der Erde *Delaunay*-Elemente. Diese haben als kanonisches Äquivalent der *Kepler*-Elemente die bekannten Singularitäten für kreisförmige und für Äquatorbahnen. Diese Nachteile vermied *R. H. Lyddane* durch Rückgriff auf die kanonischen *Poincaré*-Elemente[2]. Im Hinblick auf die numerische Anwendung verwendet *Lyddane* die Parameter

$$\begin{aligned} x_{L1} &:= a \\ x_{L2} &:= e\cos M \\ x_{L3} &:= e\sin M \\ x_{L4} &:= \sin\frac{i}{2}\cos\Omega \\ x_{L5} &:= \sin\frac{i}{2}\sin\Omega \\ x_{L6} &:= M+\omega+\Omega \end{aligned} \tag{11.446}$$

Diese sind als Parameter der *Kepler*-Elemente unter Verwendung der mittleren Anomalie M erklärt. Das Transformationsverhalten dieser Parameter wird in Kapitel 15, insbesondere Abschnitt15.7.1 untersucht.

11.11 Parameter der geradlinigen Bewegung

Alle bisher in diesem Kapitel vorgestellten Bahnparameter gehen in der historischen Tradition von einer *Kepler*bewegung als Ausgangsbewegung aus. Entsprechend schließen die verwendeten Formeln das Zweikörperproblem ein und die Variationsgleichungen für die Elemente enthalten bereits als Hauptbeschleunigung die *Kepler*sche Beschleunigung, die durch das *Newton*sche Gravitationsgesetz physikalisch gedeutet werden kann. Weitere Variationen der Elemente werden dann als relativ kleine Abweichungen („Störungen“) von der *Kepler*bewegung oder einer entsprechenden ähnlichen intermediären Bewegung berechnet.

Prinzipiell kann jede Beschleunigung, die auf einen Bewegungsvorgang einwirkt, als Basisbewegung angesehen werden. Dies ist zum Beispiel im Fall intermediärer Bahnen der Fall. Als solche werden häufig analytisch bearbeitbare Näherungsbahnen angesehen, die als Ausgangsbahnen für die Bearbeitung eines komplizierten Bewegungsproblems dienen. Dazu müssen dann die entsprechenden Bewegungsgleichungen hergeleitet werden, die auf dem zugrunde gelegten Bewegungsmodell als „ungestörte“ Bewegung aufbauen.

Im Gegensatz dazu ist der in der vorliegenden Arbeit gewählte Ansatz zur Beschreibung einer Bewegung völlig allgemein. Er geht von der Annahme einer unbeeinflussten Bewegung aus. Eine solche ist bei einer Darstellung in einem dreidimensionalen geradlinigen Koordinatensystem (entsprechend dem ersten *Newton*schen Bewegungsaxiom) die geradlinige gleichförmige Bewegung, bei Darstellung in einem krummlinigen Koordinatensystem die Bewegung auf einer Geodätischen in diesem System.

---

[1] BROUWER, D. [1959]

[2] LYDDANE, R. H. [1963]

In Bezug auf eine solche unbeeinflusste Bewegung kann jede einzelne Beschleunigung, die einen bestimmten Bewegungsvorgang prägt, als ein gleichberechtigter Einfluss betrachtet werden. Durch Separation der einzelnen Einflüsse kann daher die Wirkung eines speziellen Einflusses auf eine Bewegung in durchsichtiger Weise untersucht werden.

Die auf einer geradlinigen Bewegung basierenden Variationsgleichungen, die wie im klassischen Fall der Astrodynamik nach der Methode der Variation der Parameter gefunden werden, können formal auf jede beliebige Bewegung angewandt werden. Damit lassen sich beliebig komplizierte Bewegungen durch schrittweise Aktivierung separater Beschleunigungen aber in formal analoger Weise und eventuell (zumindest teilweise) mit einem algebraischen automatischen Rechnerverfahren (CAS) bearbeiten[1].

11.11.1 Parameter der geradlinigen Bewegung in Bezug auf ein *Hansen* –System

Wir gehen von einem Zustandsvektor $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ aus, von dem angenommen sei, dass $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{c}\neq 0$ sei. Dies kann durch geeignete Wahl des Bezugspunktes M der Bewegung immer erreicht werden, der als Ursprung des Radius **r** definiert ist. Denn die ungestörte geradlinige Bewegung kennt keinen ausgezeichneten Ort, wie etwa als solchen den Massenmittelpunkt bei einer Zweikörperbewegung.

11.11.1.1 Die Parameter der Bahnkurve in der oskulierenden Bahnebene

In Bezug auf das begleitende $(\mathbf{r}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{c}_0)-$*Leibniz*system, mit den Richtungsvektoren in radialer, transversaler und normaler Richtung, wird der Zustandsvektor üblicherweise dargestellt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{r}=r\,\mathbf{r}_0 && \left\langle r=|\mathbf{r}|,\ \mathbf{r}_0^2=1\right.\\
&\dot{\mathbf{r}}=\dot{r}\,\mathbf{r}_0+r\dot{\zeta}\ \mathbf{q}_0 && \begin{cases}\dot{\mathbf{r}}_0=\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0\ ,\ \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{q}_0=0\ ,\ \mathbf{q}_0^2=1,\ \dot{\zeta}=|\dot{\mathbf{r}}_0|\ ,\\ r^2\dot{\zeta}=|\mathbf{c}|=G\ ,\ \mathbf{c}=G\,\mathbf{c}_0\ ,\ \mathbf{c}_0^2=1\ .\end{cases}
\end{aligned}\qquad (11.447)$$

Die Parameterdarstellung des Bahnradius folgt[2] notwendig aus der Bedingung der ungestörten geradlinigen Bewegung $\ddot{\mathbf{r}}=0$ zu

$$r=\frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_P)}\quad . \qquad (11.448)$$

Hier ist *G* der Flächenparameter und $V=|\dot{\mathbf{r}}|$ die Geschwindigkeit. ζ_P ist ein Bezugswinkel, der die Richtung zum Perizentrum mit der Richtung zum Anfangspunkt O eines zugrundeliegenden *Hansen*-Systems markiert. Als unabhängiger Bewegungsparameter dient der (*Hansen*sche) Bahnwinkel ζ, der bezogen auf den willkürlichen Bezugspunkt M den Zwischenwinkel zwischen dem Ursprung O des *Hansen*-Systems und der Richtung des Radiusvektors einschließt. Dieser Winkel ist für jede Bewegung mit der Zeit über den Flächensatz $r^2\dot{\zeta}=G$ verknüpft.

---

[1] Die in diesem Abschnitt vorgestellten Formelsysteme sind eine systematische Zusammenstellung der Ergebnisse aus Kapitel 5 (Band II). Dort ist auch das Verfahren der schrittweisen Anpassung einer beliebigen Bewegung durch Hinzunahme einzelner Bewegungseinflüsse ausführlich beschrieben (Abschnitt 5.8)

[2] Nach der Herleitung in Abschnitt 5.2 (Band II)

Die Berechnung des Radius nach Formel (11.448) kann niemals singulär werden. Zum einen setzt ein Bewegungsvorgang eine gewisse Geschwindigkeit voraus, so dass stets $V>0$ angenommen werden muss. Zum anderen ist

$$0° \le \left|\zeta - \zeta_P\right| < 90° \quad . \tag{11.449}$$

Dieser Zwischenwinkel kann erst im Unendlichen 90° werden, was aus physikalischen Gründen schwer zu erreichen sein dürfte (vgl. Bild 11-2). Die Parameter $\left(G, V, \zeta_P\right)$ sind im Fall einer ungestörten geradlinigen Bewegung konstant und somit die Parameter, die eine Bahnkurve definieren. Im Fall einer diese Bewegung beeinflussenden Beschleunigung (einer „Störung“) können diese Parameter bewegungsabhängig variabel werden. Diese Parameter beschreiben den Verlauf der Bahnkurve in der oskulierenden Bahnebene, nicht jedoch die Bewegung längs dieser Kurve.

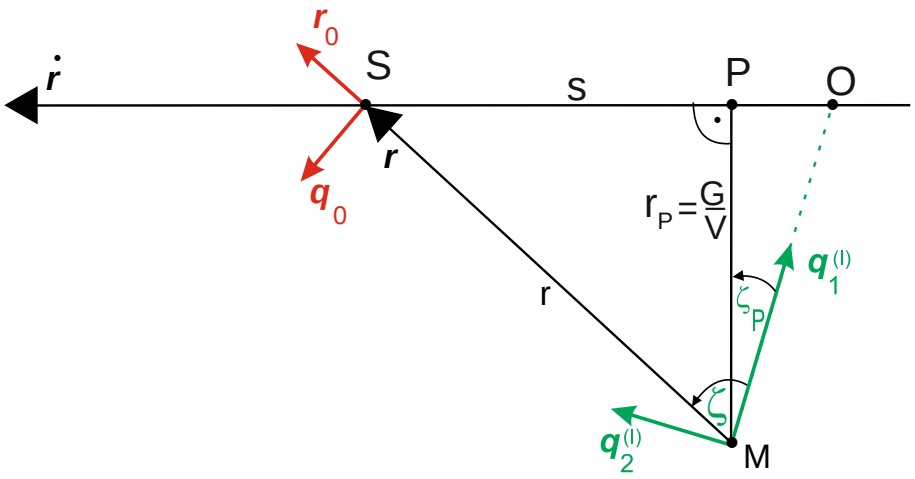


Bild 11-2: Die Bahnkurvenparameter im Formalismus der geradlinigen Bewegung: G der Flächenparameter, V die Geschwindigkeit, ζ_P der Perizentrumswinkel bei Bezug auf den Anfangspunkt O eines *Hansen*-Systems („departure point“). Der Bahnwinkel ζ gibt den Ort S des bewegten Objektes mit Radius r gerechnet von einem (willkürlichen!) Ursprung M aus. s ist die Bogenlänge vom Perizentrum P zum Ort S. $\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0\right)$ sind Basisvektoren des mitbewegten *Leibniz*-Systems, $\left(\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}\right)$ sind Basisvektoren des Bahnebenen-festen *Hansen*-Systems

Die Parameter $\left(G, V, \zeta_P\right)$ sind geometrisch anschaulich wie ähnlich die *Kepler*elemente im Fall einer Zweikörperbewegung. Für die (insbesondere automatische) Berechnung ist eine in der Himmelsmechanik häufig genutzte Modifikation der Symmetrisierung (bei Verlust der ursprünglichen Anschaulichkeit) die Wahl der Parameter

$$g_1 = V\cos\zeta_P \quad , \quad g_2 = V\sin\zeta_P \quad . \tag{11.450}$$

Damit nehmen der Radius, die radiale und die transversale Geschwindigkeit die Gestalt an:

$$\begin{aligned} r &= \frac{G}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta} \\ V_R = \dot{r} \quad &= g_1\sin\zeta - g_2\cos\zeta \\ V_T = r\dot{\zeta} &= \frac{G}{r} = g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta \quad . \end{aligned} \tag{11.451}$$

In Bezug auf das *Hansen*-System hat der Radiusvektor die Darstellung

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta\right) \quad , \tag{11.452}$$

somit auch die interessante Form

$$\mathbf{r} = G\,\frac{\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \quad . \tag{11.453}$$

Der im Fall einer (ungestörten) geradlinigen Bewegung konstante Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\dot{\mathbf{r}} = -g_2\,\mathbf{q}_1^{(I)} + g_2\,\mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{11.454}$$

Man beachte aber auch hier die formale Äquivalenz zur radialen Geschwindigkeit in den Ausdrücken (11.451). Die Parameter, die eine Bahnkurve in der Bahnebene charakterisieren, können somit alternativ auch die Parameter $\left(G, g_1, g_2\right)$ sein, was im Hinblick auf die numerische Bearbeitung vorteilhaft sein kann.

11.11.1.2 Die Parameter einer Bewegung im Rahmen des Formalismus der geradlinigen Bewegung

Um die Bewegung eines Objektes längs der gegebenen Bahnkurve zu beschreiben, kann als unabhängige Variable statt der Zeit der (*Hansen*sche) Bahnwinkel ζ verwendet werden. Er ist über den Flächensatz mit der Zeit gekoppelt, wobei t_0 ein Anfangszeitpunkt, ζ_0 der entsprechende Anfangsbahnwinkel ist:

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G}\, d\zeta \quad . \tag{11.455}$$

Wenn ein Bahnwinkel vorgegeben wird, kann der zugehörige Zeitpunkt und damit der Bewegungsverlauf längs der Bahnkurve berechnet werden. Die entsprechenden Bahnparameter sind somit t_0 oder ζ_0.

11.11.1.3 Die Parameter der räumlichen Orientierung einer Bahnebene im Rahmen des Formalismus der geradlinigen Bewegung

Eine Bewegungsgleichung als vektorielle Differentialgleichung zweiter Ordnung benötigt 6 unabhängige Integrationskonstanten. Im Fall eines Bewegungsproblems sind drei solcher Konstanten die Parameter, welche die Form einer Bewegungskurve in Bezug auf eine momentane („oskulierende“) Bahnebene bestimmen, eine weitere Konstante definiert den Anfangspunkt einer Bewegung. Die zwei fehlenden Parameter definieren die räumliche Orientierung der Bahnebene in Bezug auf ein von der untersuchten Bewegung unabhängiges Koordinatensystem. Als solches wird im Fall einer Satellitenbewegung etwa das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem, bei interplanetaren Bahnen das Ekliptik-System gewählt. Auf ein solches System werden die Basisvektoren eines bewegungsbezogenen Koordinatensystems bezogen. Hierzu empfiehlt sich etwa das *Leibniz*-System, das mit den Formeln in Abschnitt 8.11.2 (Band II) in das Äquatorsystem transformiert werden kann. Die dazu verwendeten Parameter sind die Inklination *i*, die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω und das Argument der Breite *u*. Um im Fall von zusätzlichen Bewegungseinflüssen die Methode der Variation der Parameter anzuwenden, geht man üblicherweise von Parametern aus, die ohne Bewegungseinflüsse

konstant sind. Dies ist beim Argument der Breite *u* nicht der Fall, das stets ein „schneller“ Parameter ist. Es wird daher von Vorteil sein, die Basisvektoren des *Hansen*-Systems als Parameter der räumlichen Bewegung zu wählen, bzw. die in ihnen verwendeten *Euler*-Winkel (i,Ω,σ). Hier ist σ die Länge des aufsteigenden Knotens in Bezug auf den Ursprung O des *Hansen*-Systems, die nicht unabhängig von Ω ist. Somit sind nur zwei unabhängige Parameter bekannt, welche die Orientierung im Raum beschreiben: (i,Ω) oder (i,σ). Seien die Basisvektoren des Bezugssystems mit $\mathbf{p}_i$ gegeben, so lauten die Transformationen des *Hansen*-Systems auf das Äquatorsystem (nach Abschnitt 8.12.2, Band II):

$$\mathbf{q}_j^{(I)} = a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i\,, \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i\cdot\mathbf{p}_j=\delta_{ij}\ ,\ \mathbf{q}_i^{(I)}\cdot\mathbf{q}_j^{(I)}=\delta_{ij}\,) \tag{11.456}$$

sowie ausführlich

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{p}_1\,(\ \cos i\,\sin\sigma\,\sin\Omega+\cos\sigma\,\cos\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_2\,(-\cos i\,\sin\sigma\,\cos\Omega+\cos\sigma\,\sin\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_3\ \ \sin i\,\sin\sigma\\
\mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{p}_1\,(-\cos i\,\cos\sigma\ \sin\Omega+\sin\sigma\cos\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_2\,(\ \cos i\,\cos\sigma\,\cos\Omega+\sin\sigma\sin\Omega)+\\
&\quad+\mathbf{p}_3\ \ \sin i\,\cos\sigma\\
\mathbf{q}_3^{(I)} &= \mathbf{p}_1\,\sin i\,\sin\Omega-\\
&\quad-\mathbf{p}_2\,\sin i\,\cos\Omega+\\
&\quad+\mathbf{p}_3\cos i\quad .
\end{aligned} \tag{11.457}$$

Diese Parameter haben die bekannten Singularitäten für äquatoriale Bahnen (mit verschwindender Inklination). Die Parameter Ω und σ sind in diesem Fall unbestimmt und es gibt daher numerische Probleme in der Nähe solcher Äquator-naher Bahnen. Wie im Fall der regulären Elemente bzw. der Positionselemente können modifizierte Parameter der Art

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos i\right)}\sin\Omega\ ,\ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos i\right)}\cos\,\Omega\quad \left\langle\sigma_i:=\operatorname{sgn}\left(\cos i\right)\right.$$

verwendet werden. Stattdessen können nach den Vorschlägen von *Musen*[1] und *Deprit*[2] statt der *Euler*-Winkel auch im vorliegenden Fall die singularitätenfreien *Euler–Rodrigues*-Parameter verwendet werden. Sie sind nach den Formeln in den Abschnitten 6.3.9 und 6.3.10 definiert durch[3]

[1] MUSEN, P. [1958]

[2] DEPRIT, A. [1975] (siehe auch die Zusammenstellung in Abschnitt 11.8.1 ab Seite 113)

[3] Anmerkung: in der klassischen Literatur (etwa bei DEPRIT, A. [1975]) wird bisweilen in Anklang an die Bezeichnungsweise von Quaternionen (Unterscheidung eines „vektoriellen“ und eines „skalaren“ Anteils) der vierte Parameter mit u_0 statt wie im vorliegenden Bericht mit u_4 bezeichnet. Die Bezeichnungsweise mit u_i ist von BRUMBERG, V. [1995], p. 70 übernommen. Man darf diese u_i nicht mit dem Argument der Breite *u* verwechseln.

$$
\begin{aligned}
u_1 &:= \sin\frac{i}{2}\cos\frac{\Omega+\sigma}{2} \\
u_2 &:= \sin\frac{i}{2}\sin\frac{\Omega+\sigma}{2} \\
u_3 &:= \cos\frac{i}{2}\sin\frac{\Omega-\sigma}{2} \\
u_4 &:= \cos\frac{i}{2}\cos\frac{\Omega-\sigma}{2} \quad .
\end{aligned}
\tag{11.458}
$$

Damit haben die Transformationen des *Hansen*-Systems in das Äquatorsystem die Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 &&= \cos i \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma \cos\Omega \\
a_{12} &= 2\left(u_1 u_2 + u_3 u_4\right) &&= -\cos i \sin\sigma \cos\Omega + \cos\sigma \sin\Omega \\
a_{13} &= 2\left(u_1 u_3 - u_2 u_4\right) &&= -\sin i \sin\sigma \\
a_{21} &= 2\left(u_1 u_2 - u_3 u_4\right) &&= -\cos i \cos\sigma \sin\Omega + \sin\sigma \cos\Omega \\
a_{22} &= -u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 &&= \cos i \cos\sigma \cos\Omega + \sin\sigma \sin\Omega \\
a_{23} &= 2\left(u_2 u_3 + u_1 u_4\right) &&= \sin i \cos\sigma \\
a_{31} &= 2\left(u_1 u_3 + u_2 u_4\right) &&= \sin i \sin\Omega \\
a_{32} &= 2\left(u_2 u_3 - u_1 u_4\right) &&= -\sin i \cos\Omega \\
a_{33} &= -u_1^2 - u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 &&= \cos i \quad .
\end{aligned}
\tag{11.459}
$$

11.11.2 Berechnung der Parameter der geradlinigen Bewegung aus dem Zustandsvektor

Zum Zeitpunkt *t* sei der Zustandsvektor in äquatorialen Koordinaten bezogen auf die Basis $\mathbf{p}_i$ gegeben, wobei auch eine Eigenbewegung des Basissystems zugelassen sei:

$$
\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i + x^i \, p_i^{\,j} \mathbf{p}_j \quad . \tag{11.460}
$$

Die x_i , $\dot{x}_i$ seien die kartesischen Koordinaten des Zustandsvektors, die $p_i^{\,j}$ die Eigenbewegungsparameter des Basissystems.

Als erster Bahnparameter kann der Flächenparameter aus

$$
G = \left|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\right| \tag{11.461}
$$

berechnet werden. Mit Radius $r = \left|\mathbf{r}\right|$ folgt die radiale Geschwindigkeit aus

$$
\dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r} \quad . \tag{11.462}
$$

Neben dem radialen Richtungsvektor $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} / r$ kann mit Hilfe der zweiten Beziehung (11.447) der transversale Richtungsvektor des *Leibniz*-systems erhalten werden aus

$$
\mathbf{q}_0 = \frac{r}{G}\left(\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\,\mathbf{r}_0\right) \quad , \tag{11.463}
$$

der zur Kontrolle auch mit dem normalen Richtungsvektor $\mathbf{c}_0 = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \;/\; G = \mathbf{c}/G$ berechnet werden kann:

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_0 \quad . \tag{11.464}$$

Das zugrundeliegende mit der Bahnebene fest verknüpfte Hansen-System kann willkürlich gewählt werden, ist dann aber für die gesamten Bahnuntersuchungen nicht mehr veränderbar. Daher kann der gegebene Zeitpunkt zugleich als Epoche $t_0 := t$ (vierter Bahnparameter) aufgefasst werden, der den Anfangspunkt („point of departure“) des Hansen-Systems festlegt. Auf diesen Punkt bezogen ist der *Hansen*sche Bahnwinkel $\zeta\left(t = t_0\right) = \zeta_o = 0°$ und aus den ersten beiden der Gleichungen (11.451) folgen die Bahnparameter

$$g_1 = \frac{G\left(\zeta_0\right)}{r\left(\zeta_0\right)} \quad , \quad g_2 = -\dot{r}\left(\zeta_0\right) \quad . \tag{11.465}$$

Entsprechend liefern die Beziehungen (11.452) und (11.464) die Basisvektoren des *Hansen*-Systems

$$\mathbf{q}_1^{(I)} = \mathbf{r}_0\left(t_0\right) \;,\; \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{c}_0 \;,\; \mathbf{q}_2^{(I)} = \mathbf{q}_0\left(t_0\right) \quad . \tag{11.466}$$

Die *Euler* Winkel zur räumlichen Orientierung können wegen der Transformation (11.456) aus den Beziehungen (11.459) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \cos i &= a_{33} \quad , \quad \sin i = \sqrt{1 - a_{33}^2} \\ \cos\Omega &= -\frac{a_{32}}{\sqrt{1 - a_{33}^2}} \quad , \quad \sin\Omega = \frac{a_{31}}{\sqrt{1 - a_{33}^2}} \\ \cos\sigma &= \frac{a_{23}}{\sqrt{1 - a_{33}^2}} \quad , \quad \sin\sigma = -\frac{a_{13}}{\sqrt{1 - a_{33}^2}} \quad . \end{aligned} \tag{11.467}$$

Andererseits können die *Euler-Rodrigues*-Parameter ebenfalls aus den Beziehungen (11.459) erhalten werden:

$$u_1 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + a_{11} - a_{22} - a_{33}} \;,\; u_2 = \frac{a_{12} + a_{21}}{4u_1} \;,\; u_3 = \frac{a_{13} + a_{31}}{4u_1} \;,\; u_4 = \frac{a_{23} - a_{32}}{4u_1} \tag{11.468}$$

oder

$$u_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - a_{11} + a_{22} - a_{33}} \;,\; u_1 = \frac{a_{12} + a_{21}}{4u_1} \;,\; u_3 = \frac{a_{23} + a_{32}}{4u_1} \;,\; u_4 = \frac{a_{31} - a_{13}}{4u_1} \tag{11.469}$$

oder

$$u_3 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}} \;,\; u_1 = \frac{a_{31} + a_{13}}{4u_1} \;,\; u_2 = \frac{a_{32} + a_{23}}{4u_1} \;,\; u_4 = \frac{a_{12} - a_{21}}{4u_1} \tag{11.470}$$

oder

$$u_4 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}} \;,\; u_1 = \frac{a_{23} - a_{32}}{4u_1} \;,\; u_2 = \frac{a_{31} + a_{13}}{4u_1} \;,\; u_3 = \frac{a_{12} - a_{21}}{4u_1} \quad . \tag{11.471}$$

Diese Ausdrücke entsprechen denen der räumlichen Parameter in den idealen Parametern nach *Deprit* in Abschnitt 11.8.3. Die Mehrdeutigkeiten sind physikalisch irrelevant[1]

11.11.3 Berechnung des Zustandsvektors aus Parametern der geradlinigen Bewegung

Gegeben seien zu einem Zeitpunkt t_0 (der als Epoche angenommen wird) die Parameter (G, g_1, g_2). Diesem Zeitpunkt zugeordnet sei der (*Hansen*sche) Bahnwinkel $\zeta = 0°$. Ferner seien die räumlichen Orientierungswinkel (i, Ω, σ) bzw. die *Euler –Rodrigues*-Parameter u_i bekannt. Zum Zeitpunkt t_0 sei die Basis $\mathbf{p}_i$ eines Basissystems gegeben. Dann errechnen sich die Basisvektoren des *Hansen*-Systems mit den in den Beziehungen (11.459) definierten Koeffizienten $a_j^{\ i}$ aus $\mathbf{q}_j^{(I)} = a_j^{\ i}\,\mathbf{p}_i$. Entsprechend Beziehung (11.452) sind

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \;,\; \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)} = \mathbf{c}_0 \quad , \quad \mathbf{q}_2^{(I)} = \mathbf{q}_3^{(I)} \times \mathbf{q}_1^{(I)} = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_0 \quad . \tag{11.472}$$

Wegen $\zeta(t = t_0) = 0°$ liefern die Ausdrücke (11.451) Radius, radiale und transversale Geschwindigkeit zur Epoche t_0

$$r = \frac{G}{g_1} \;,\; \dot{r} = -g_2 \;,\; r\dot{\zeta} = g_1 \qquad \langle \zeta(t = t_0) = 0° \qquad . \tag{11.473}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (11.447) lautet dann der gesuchte Zustandsvektor zur Epoche t_0

$$\mathbf{r}(t_0) = 0° = \frac{G}{g_1}\mathbf{q}_1^{(I)} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = -g_2\,\mathbf{q}_1^{(I)} + g_1\,\mathbf{q}_2^{(I)} \qquad . \tag{11.474}$$

Seien die Basisvektoren des *Hansen*-Systems für einen beliebigen (*Hansen*schen) Bahnwinkel ζ bekannt, lautet der gesuchte Zustandsvektor wie in (11.453) und (11.454)

$$\mathbf{r} = G\,\frac{\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = -g_2\,\mathbf{q}_1^{(I)} + g_2\,\mathbf{q}_2^{(I)} \qquad . \tag{11.475}$$

Die Basisvektoren des *Leibniz*-Systems[2] lauten mit den Beziehungen (11.452)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \;\; \mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta \quad . \end{aligned} \tag{11.476}$$

Bezogen auf diese lautet der Zustandsvektor (11.447) mit den hier allgemein gültigen Beziehungen (11.451)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{G}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta}\,\mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= (g_1\sin\zeta - g_2\cos\zeta)\,\mathbf{r}_0 \;+ (g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta)\,\mathbf{q}_0 \quad . \end{aligned} \tag{11.477}$$

Dieser Ausdruck gilt auch im allgemeinen Fall, wenn die Parameter nach der Methode der Variation der Parameter (VOP) als variabel aufgefasst werden müssen.

---

[1] SCHUSTER, M. D. [1993], p. 463

[2] Siehe auch in Abschnitt 4.4.3 (Band II)

Der Zusammenhang mit der Zeit wird durch den Flächensatz hergestellt:

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{G}{\left(g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta\right)^2} d\zeta \quad . \tag{11.478}$$

11.11.4 Variationsgleichungen im Formalismus der geradlinigen Bewegung

Die hier benötigten Variationsgleichungen für die Parametersätze $(V, \zeta_P, G, i, \Omega, \sigma)$ bzw. $(V, \zeta_P, G, u_1, u_2, u_3, u_4)$ bzw. $(g_1, g_2, G, i, \Omega, \sigma)$ bzw. $(g_1, g_2, G, u_1, u_2, u_3, u_4)$ sind in den Abschnitten 4.4.10 , 5.2.5.3, 5.2.7 (Band II), sowie Abschnitt 11.1.5 zusammengestellt. Als Integrationsvariable empfiehlt sich der *Hansen*sche Bahnwinkel. Der Beschleunigungsvektor sei entsprechend dem *Gauß*schen Ansatz in die radiale, transversale und normale Bewegungsrichtung des zugrundeliegenden *Leibniz*-Systems zerlegt:

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R \, \mathbf{r}_0 \; + \; b_T \, \mathbf{q}_0 + b_N \, \mathbf{c}_0 \quad . \tag{11.479}$$

Der Flächenparameter hat die Variation[1]

$$\dot{G} = r \, b_T \quad , \quad \frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T \quad . \tag{11.480}$$

Für die Bahnform lauten die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{V} \quad &= \quad b_R \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) + b_t \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) \\ V \, \dot{\zeta}_P &= -b_R \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) + b_T \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) \end{aligned} \tag{11.481}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\zeta} \quad &= \frac{r^2}{G}\left[\quad b_R \sin\left(\zeta - \zeta_P\right) + b_T \cos\left(\zeta - \zeta_P\right)\right] \\ V \frac{d\zeta_P}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[-b_R \cos\left(\zeta - \zeta_P\right) + b_T \sin\left(\zeta - \zeta_P\right)\right] \quad , \end{aligned} \tag{11.482}$$

alternativ

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 = \quad & b_R \cos\zeta + b_T \sin\zeta \\ \dot{g}_2 = & -b_R \sin\zeta + b_T \cos\zeta \quad , \end{aligned} \tag{11.483}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[\quad b_R \sin\zeta + b_T \cos\zeta\right] \\ \frac{dg_2}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[-b_R \cos\zeta + b_T \sin\zeta\right] \quad . \end{aligned} \tag{11.484}$$

Bei den Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung der Bahnebene muss unterschieden werden, ob die relative Bewegung in Bezug auf ein Basissystem (etwa ein Äquatorsystem)

[1] Siehe zum Beispiel Formel (5.5) (Band II)

dargestellt werden soll oder ob eventuell die absolute Bewegung dargestellt werden kann. Im Prinzip erfolgt die Herleitung der Variationsgleichungen in absoluter Darstellung, für die praktische Durchführung wird jedoch üblicherweise die Eigenbewegung des Basissystems außer Acht gelassen. Die (absolute) räumliche Bewegung wird durch die Rotation der Bahnebene um den oskulierenden Radiusvektor charakterisiert mit der Variation des Drehwinkels[1] („zweiter *Hansen*scher Bahnwinkel“)

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad . \tag{11.485}$$

Der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems sei gegeben in der Form

$$\mathbf{D}_p = D_P{}^i \, \mathbf{p}_i \quad . \tag{11.486}$$

Dann lauten die Variationsgleichungen der Winkel zur Charakterisierung der räumlichen Orientierung der Bahnebene[2]

$$\begin{aligned}
(i)^{\cdot} \quad &= \dot{\eta}\cos(\zeta-\sigma) \; - D_{p1}\cos\Omega - D_{p2}\sin\Omega \\
\dot{\Omega}\sin i &= \dot{\eta}\sin(\zeta-\sigma) \; + \left(D_{p1}\sin\Omega - D_{p2}\cos\Omega\right)\cos i + D_{p3}\sin i \\
\dot{\sigma} \quad &= \dot{\Omega}\cos i \qquad\quad + \left(D_{p1}\sin\Omega - D_{p2}\cos\Omega\right)\sin i - D_{p3}\cos i
\end{aligned} \tag{11.487}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\frac{di}{d\zeta} \quad &= \frac{d\eta}{d\zeta}\cos(\zeta-\sigma) \; - \frac{r^2}{G}\left(D_{p1}\cos\Omega + D_{p2}\sin\Omega\right) \\
\frac{d\Omega}{d\zeta}\sin i &= \frac{d\eta}{d\zeta}\sin(\zeta-\sigma) \; + \frac{r^2}{G}\left[\left(D_{p1}\sin\Omega - D_{p2}\cos\Omega\right)\cos i + D_{p3}\sin i\right] \\
\frac{d\sigma}{d\zeta} \quad &= \frac{d\Omega}{d\zeta}\cos i \qquad\quad + \frac{r^2}{G}\left[\left(D_{p1}\sin\Omega - D_{p2}\cos\Omega\right)\sin i - D_{p3}\cos i\right] \quad .
\end{aligned} \tag{11.488}$$

Bei Verwendung der *Euler-Rodrigues*-Parameter lauten die Variationsgleichungen[3]

$$\begin{aligned}
2\dot{u}_1 &= \dot{\eta}\left(-u_3\sin\zeta + u_4\cos\zeta\right) + \left(\; u_3\, a_2{}^i - u_4\, a_1{}^i - u_2\, a_3{}^i \;\right) D_{pi} \\
2\dot{u}_2 &= \dot{\eta}\left(\; u_3\cos\zeta + u_4\sin\zeta\right) + \left(-u_3\, a_1{}^i - u_4\, a_2{}^i + u_1\, a_3{}^i \;\right) D_{pi} \\
2\dot{u}_3 &= \dot{\eta}\left(\; u_1\sin\zeta - u_2\cos\zeta\right) + \left(-u_1\, a_2{}^i + u_2\, a_1{}^i - u_4\, a_3{}^i \;\right) D_{pi} \\
2\dot{u}_4 &= \dot{\eta}\left(-u_1\cos\zeta - u_2\sin\zeta\right) + \left(\; u_1\, a_1{}^i + u_2\, a_2{}^i + u_3\, a_3{}^i \;\right) D_{pi}
\end{aligned} \tag{11.489}$$

bzw.

[1] Siehe in Abschnitt 4.4.2 (Band II)

[2] Siehe etwa in Abschnitt 6.3.7 (Band II)

[3] Nach Abschnitt 6.3.10 (Band II)

$$
\begin{aligned}
2\frac{du_1}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\left(-u_3\sin\zeta + u_4\cos\zeta\right) + \frac{G}{r^2}\left(\; u_3\, a_2{}^i - u_4\, a_1{}^i - u_2\, a_3{}^i \;\right) D_{pi} \\
2\frac{du_2}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\left(\; u_3\cos\zeta + u_4\sin\zeta\right) + \frac{G}{r^2}\left(-u_3\, a_1{}^i - u_4\, a_2{}^i + u_1\, a_3{}^i \;\right) D_{pi} \\
2\frac{du_3}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\left(\; u_1\sin\zeta - u_2\cos\zeta\right) + \frac{G}{r^2}\left(-u_1\, a_2{}^i + u_2\, a_1{}^i - u_4\, a_3{}^i \;\right) D_{pi} \\
2\frac{du_4}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\left(-u_1\cos\zeta - u_2\sin\zeta\right) + \frac{G}{r^2}\left(\; u_1\, a_1{}^i + u_2\, a_2{}^i + u_3\, a_3{}^i \;\right) D_{pi} \quad .
\end{aligned}
\tag{11.490}
$$

Als Ergebnis wird eine Bahnkurve $r = r\left(A_i;\zeta\right)$ mit konstanten Parametern A_i als Funktion des Bahnwinkels ζ erhalten. Der Bezug zur Zeit wird schließlich wie üblich mit Hilfe des Flächensatzes hergestellt:

$$
t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\left(r(\zeta)\right)^2}{G(\zeta)}\, d\zeta \quad . \tag{11.491}
$$

11.12 Die Parameter in einem Anpassungs-Formalismus bei beliebigen Bewegungen

Die im vorhergehenden Abschnitt am Beispiel des Formalismus der geradlinigen Bewegung besprochene Methode der schrittweisen Anpassung[1] kann mit Ausnahme der Kreisbewegung[2] auf jede beliebige Kurve angewendet werden. Es sei die Kurve im Rahmen eines bestimmten Bahnmodells mit den konstanten Parametern A_i gegeben. Abhängig von jetzt betrachteten zusätzlichen Bewegungseinflüssen $b_R^{(k)}, b_T^{(k)}, b_N^{(k)}$ (in radialer, transversaler und normaler Richtung, im Fall des k-ten Bewegungsmodells) werden die Parameter A_i jetzt im Rahmen einer Variation der Parameter als Funktionen des (ersten *Hansen*schen) Bahnwinkels ζ angenommen. Zur Berechnung einer neuen Bahnkurve, die auch den neu berücksichtigten Bewegungseinflüssen genügen muss, werden die Anpassungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
&\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\zeta} = 0 \;\;,\;\; \sum_\nu \frac{\partial \dot r}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_R^{(k)} \;\;, \\
&\sum_\nu \frac{\partial G}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(k)} \;\;,\;\; \sum_\nu \frac{\partial \eta}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(k)} \;\;,\; \dot\zeta = \frac{G}{r^2}
\end{aligned}
\tag{11.492}
$$

zugrunde gelegt. Als Lösung ergibt sich eine neue Bahnkurve mit neuen Konstanten, die dann in einem nächsten Schritt mit neu berücksichtigten ("Stör"-) Beschleunigungen als neue zu variierende Parameter verstanden werden müssen[3].

[1] Siehe die ausführliche Besprechung in Abschnitt 5.8 (Band II)

[2] Siehe hierzu in Abschnitt 5.6. (Band II)

[3] Beispiele hierzu finden sich in Abschnitt 5.9 (Band II)

11.13 Transformationen der Zeit

Nach dem „natürlichen“ Verständnis vom Ablauf einer Bewegung ist die Zeit die „natürliche“ unabhängige Variable um einen Bewegungsvorgang zu beschreiben. Unter der Annahme einer Kreisbewegung als Referenzbewegung kann ein Zeitintervall direkt einem Bahnwinkel, der mittleren Anomalie $M = n\Delta t$, zugeordnet werden. Zweifel an dieser direkten Zuordnung waren bald in der Antike aufgekommen, als es notwendig wurde einen Korrekturterm einzuführen, den wir heute als Mittelpunktsgleichung bezeichnen[1]. Da an der Figur des Kreises als Referenzkurve festgehalten wurde, wurden die jetzt notwendig gewordenen Bahnwinkel exzentrische bzw. wahre Anomalie eingeführt, deren präzise unterscheidende Definition allerdings erst im Rahmen der *Kepler*bewegung möglich wurde. Damit wurde die Zeit als unabhängige Variable zur Beschreibung einer himmelsmechanischen Bahnbewegung von einem Bahnwinkel abgelöst, der in einer separaten Relation der Zeit zugeordnet werden musste. Handelt es sich um die exzentrische Anomalie, so ist diese Beziehung die transzendente *Kepler*gleichung, deren elegante Lösung Generationen von Mathematikern Kopfzerbrechen bereitet hat. Im Fall der wahren Anomalie als unabhängiger Variable kann über die Mittelpunktsgleichung (siehe in Abschnitt 10.2.3) der Bezug zur mittleren Anomalie und damit zur Zeit hergestellt werden. Diese und andere verwandte Winkel erlaubten erst im Rahmen der Störungsrechnung eine sinnvolle Bearbeitung der Bewegungsprobleme.

Die Transformation der Zeit auf einen anderen Parameter als unabhängiger Variablen erfolgt in allen bekannten Fällen mit einer Differentialbeziehung der Form

$$dq = F\,dt \quad . \tag{11.493}$$

Hier stehe q für die neue Variable, F sei eine beliebige Funktion, die jede Menge an Parametern und Abhängigkeiten enthalten kann.

Eine Übersicht über verschiedene Variable, welche die Zeit als unabhängige Variable ersetzen können, ist in Tabelle 11-1 zusammengestellt. Basierend auf den in Abschnitt 11.1.5 zusammengestellten Variationsgleichungen kann man feststellen, dass die Größen mittlere Anomalie M, wahre Anomalie υ, Argument der Breite u, wahre Länge in der Bahn l und exzentrische Anomalie E grundsätzlich nicht als unabhängige Variable in Frage kommen. Sie sind alle von einem Bewegungsproblem abhängig, wie die Abhängigkeit von einer oder mehreren Beschleunigungen b_R, b_T, b_N zeigt. Interessant ist die von *K. Sundmann* (und unabhängig von *K. Stumpff*)[2] entdeckte regularisierende Variable[3] τ mit der Beziehung $d\tau = dt / r$. Im Fall einer ungestörten Bewegung ist sie proportional zur exzentrischen Anomalie E. Daher wurde bisweilen die Verwendung der exzentrischen Anomalie auch als eine durch *Kepler* eingeführte Regularisierung verstanden.

---

[1] Siehe hierzu etwa Bild 1-13 auf Seite 77 (Band I)

[2] K. STUMPFF [1965], p. 638

[3] Nicht zu verwechseln mit dem Sonnenwinkel $\tau = \alpha - \alpha_\odot$ in Kapitel 28 (Band IV)

Neue Variable	**Differentielle Beziehung zur Zeit**
Mittlere Anomalie $M = n(t-t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t-t_0)$	$dM = \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} - \frac{G\sqrt{1-e^2}}{e\,\mu} \left[b_{R2} \left(\frac{2\,r\,e}{p} - \cos\upsilon \right) + b_T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin\upsilon \right] \right\} dt$
Wahre Anomalie υ	$d\upsilon = \left\{ \frac{G}{r^2} + \frac{G}{e\,\mu} \left[b_{R2} \cos\upsilon - b_T \sin\upsilon \left(1 + \frac{r}{p} \right) \right] \right\} dt$
Argument der Breite $u = \upsilon + \omega$	$du = \left[\frac{G}{r^2} - b_N \frac{r \sin u \cos i}{G \sin i} \right] dt$
wahre Länge in der Bahn $l = \upsilon + \omega + \Omega$	$dl = \left[\frac{G}{r^2} + b_N \frac{r \sin u}{G} \tan\frac{i}{2} \right] dt$
wahre Länge in der Bahn (unter Einschluss von rückläufigen Äquatorbahnen) $l = \sigma_i\, u + \Omega$	$dl = \left[\sigma_i \frac{G}{r^2} + b_N \frac{r \sin u}{G} \sqrt{\frac{1-\sigma_i \cos i}{1+\sigma_i \cos i}} \right] dt$
Exzentrische Anomalie E	$dE = \left\{ \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left[b_{R2} \left(\frac{\cos\upsilon}{e} - 1 \right) - b_T \left(1 + \frac{r}{a} \right) \frac{\sin\upsilon}{e} \right] \right\} dt$
*Sundmann-Stumpff*sche regularisierende Variable τ	$d\tau = \frac{1}{r}\,dt$
Regularisierende Variable Θ bei geradliniger Zweikörperbewegung	$\sqrt{\Theta}\; d\Theta = \sqrt{2}\; dt \quad , \quad t - t_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\Theta^3}$
Bogenlänge s	$ds = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}\; dt = V\, dt$
Bahnwinkel ζ im *Hansen* System	$d\zeta = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}_0^2}\; dt = \frac{G}{r^2} dt$

Tabelle 11-1: Einige Beispiele zum Ersetzen der Zeit durch eine andere Variable

Hingewiesen sei auf eine Art Regularisierung im Fall einer geradlinigen Zweikörperbewegung, in der es im Moment des Zusammenstoßes (bzw. eines Auswurfs, Ejektion) zu einer Singularität in der Berechnung des Abstandes zwischen den beiden Körpern kommen kann. Diese Singularität kann durch eine Regularisierung mit der Variablen Θ umgangen werden[1].

Von besonderem Interesse ist im Rahmen der Kurventheorie die Einführung der Bogenlänge s (mit der Dimension einer Länge). Man könnte vorschlagen, diese als unabhängige Variable zur Beschreibung einer Bewegung längs einer Kurve zu verwenden. Dazu müsste sie auf einen

[1] K. STUMPFF [1959], p. 343, Regularisierung von *C. Burrau*, veröffentlicht in *Astron. Nachr*. **136**, p. 161 [1894]

Anfangspunkt bezogen werden können, der fest in der (oskulierenden) Bahnebene liegt. Ein solcher Punkt und das mit ihm verknüpfte System ist aber nach Satz H19 notwendig und hinreichend ein *Hansen* System[1]. Ein *Hansen* System hat aber nach Satz H9 als unabhängige Bahnvariable eine Größe, die aus der Integration der Variation des radialen Richtungsvektors gebildet wird[2]. Zur Berechnung der Bogenlänge wird jedoch der Betrag des Geschwindigkeitsvektors integriert. Daher ist es auch nicht sinnvoll, die Bogenlänge als unabhängige Variable zu verwenden. Als einzige wirklich unabhängige Variable bleibt also der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ.

[1] Sehe in Abschnitt 4.4.6 (Band II)

[2] Siehe in Abschnitt 4.3.16 (Band II)

12 Natürliche und gesteuerte Bewegungsänderungen

Satellitenbahnen können wie die Bahnen natürlicher Himmelskörper mit den Gesetzen der allgemeinen Keplerbewegung beschrieben werden. Zum Erreichen bestimmter Zielbahnen, für Änderungen und Korrekturen von Bahnen müssen die Parameter der Keplerbewegung geändert werden. Dies kann nur über eine gesteuerte Änderung des Geschwindigkeitsvektors geschehen, da der Ortsvektor im Moment der Bahnänderung nicht geändert werden kann.

Impulsive oder näherungsweise impulsive Bahnänderungen können durch das Zünden von mitgeführten Triebwerken oder durch das Einwirken natürlicher Kräfte, wie etwa im zeitlichen Durchflug durch das starke – nur zeitweise wirksam werdende – Gravitationsfeld eines dritten Körpers, also durch einen Gravitationseffekt („Swing-by“), erfolgen.

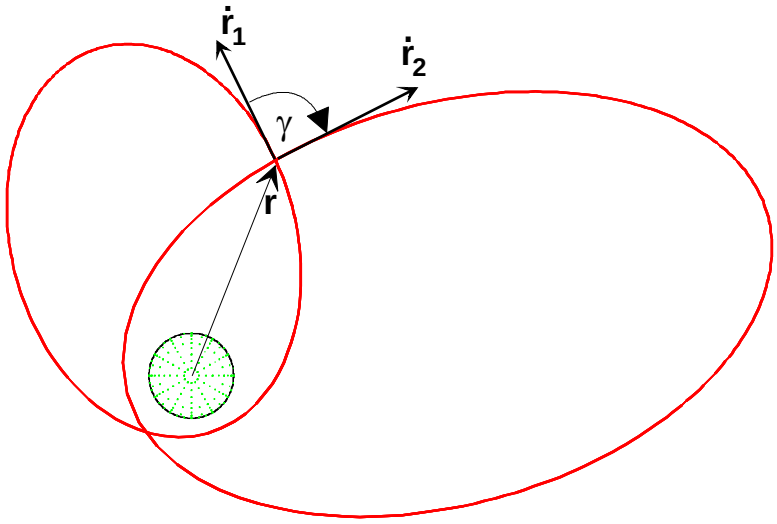


Bild 12-1: Allgemeine Bahnänderung

Derartige Änderungen erfolgen in erster Näherung impulsiv, während in Wirklichkeit Bahnänderungen über einen längeren Bahnbogen verschmiert werden. Erste – in einer Bahnanalyse ausreichende – Abschätzungen und Ausgangsnäherungen für verfeinerte und optimale Bahnkorrekturstrategien können aus einer impulsiven Änderung des Geschwindigkeitsvektors erhalten werden. Dazu werden in den folgenden Unterabschnitten einige elementare, für die Satellitenbahnmechanik aber fundamentale Beispiele behandelt. Die im Folgenden verwendeten Formeln gelten, soweit nicht anders vermerkt, in der allgemeinen *Kepler*bewegung. In Einzelbeispielen werden Lösungen der speziellen *Kepler*bewegung gegeben.

12.1 Das Geschwindigkeitsinkrement

An einem Ort mit Ortsvektor $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$ habe ein Satellit den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_1$ vor, $\dot{\mathbf{r}}_2$ nach einer Bahnänderung. Die Bahnänderung wird durch den Vektor des Geschwindigkeitsinkrements $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ dargestellt:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \Delta\dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{12.1}$$

Sei γ der Winkel der Bahnänderung

$$\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 \;=\; V_1 V_2 \cos\gamma \quad ; \quad V_1 \;=\; \left|\dot{\mathbf{r}}_1\right| \quad , \quad V_2 \;=\; \left|\dot{\mathbf{r}}_2\right| \quad , \tag{12.2}$$

beträgt das zur Bahnänderung benötigte *Geschwindigkeitsinkrement*, das zugleich ein Maß für den Energiebedarf ist, der für eine Bahnänderung aufgewendet werden muss:

$$\left|\Delta\dot{\mathbf{r}}\right| \;=\; \Delta V \;=\; \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1 V_2 \cos\gamma} \quad . \tag{12.3}$$

Sind die Geschwindigkeiten V_1 vor und V_2 nach einer Bahnänderung bekannt, so ist das Geschwindigkeitsinkrement offenbar am kleinsten, wenn die beiden Geschwindigkeiten dieselbe Richtung haben, am größten bei entgegengesetzter Richtung. Einen Eindruck von der großen möglichen Variationsbreite des Geschwindigkeitsinkrements gibt folgendes

BEISPIEL 1: Mit V_1 = 8 km/s, V_2 = 11 km/s, lautet das Geschwindigkeitsinkrement für verschiedene Zwischenwinkel γ:

γ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\Delta V\,[km/s]$	3	5.71	9.85	13.27	16.52	18.37	19.60

◀

Bei vorgegebenem Geschwindigkeitsinkrement ΔV und fest eingestelltem Zwischenwinkel γ können zwei verschiedene Endgeschwindigkeiten erreicht werden:

$$V_{2,1/2} \;=\; V_1 \cos\gamma \pm \sqrt{(\Delta V)^2 - V_1^2 \sin^2\gamma} \quad , \tag{12.4}$$

je nachdem in welcher Richtung der Inkrementvektor $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ gerichtet ist. Die extremale Endgeschwindigkeit kann für verschwindenden oder entgegengerichteten Zwischenwinkel erhalten werden: $\gamma = 0°,\ \gamma = 180°$.

BEISPIEL 2: Bei V_1 = 8 km/s, ΔV = 6 km/s, γ = 30° können die Endgeschwindigkeiten $V_{2,1}$ = 11.40 km/s und V_2 = 2.46 km/s erreicht werden. Die extremal erreichbare Geschwindigkeit für γ =0° ist $V_{\max} = V_1 + \Delta V =$ 14 km/s und für γ = 180° ist $V_{\min} = V_1 - \Delta V = 2$ km/s. ◀

Bei vorgegebenen Anfangs- und Endgeschwindigkeiten V_1 , V_2 und Geschwindigkeitsinkrement ΔV können zwei Zwischenwinkel γ aus

$$\cos\gamma \;=\; \frac{V_1^2 + V_2^2 - (\Delta V)^2}{2V_1 V_2} \tag{12.5}$$

erhalten werden.

BEISPIEL 3: Für V_1 = 8 km/s, V_2 = 11 km/s, ΔV = 6 km/s wird $\cos\gamma$ = 0.846591, es sind somit die zwei Zwischenwinkel γ_1 = 32°.157 und γ_2 = 327°.843 erreichbar. ◀

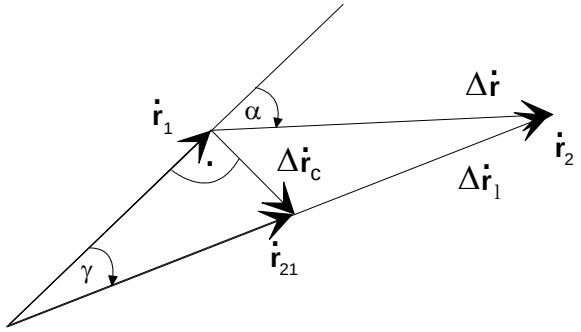


Bild 12-2: Zusammengesetzte Manöver für Bahnänderungen

Wird ein Bahnmanöver zur Durchführung einer Bahnänderung erforderlich, muss der Schub in Richtung des Geschwindigkeitsinkrementvektors $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ durchgeführt werden. Dieser weicht vom ursprünglichen Tangentialvektor $\dot{\mathbf{r}}_1$ um den Winkel α aus

$$\cos\alpha = \frac{\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \Delta\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}_1||\Delta\dot{\mathbf{r}}|} \tag{12.6}$$

ab. Dieser Winkel kann jeden beliebigen Wert annehmen. In der Praxis werden Korrekturschübe gerne senkrecht zur Tangentialrichtung oder genau in Richtung des Tangentialvektors ausgeführt. Dies lässt sich nach Bild 12-2 erreichen, indem der Gesamtschubvektor $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ zerlegt wird in einen Anteil $\Delta\dot{\mathbf{r}}_c$ senkrecht zur Tangentialrichtung, der auf den neuen Tangentialvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_{21} = \dot{\mathbf{r}}_1 + \Delta\dot{\mathbf{r}}_c \tag{12.7}$$

durch Drehung um den Winkel γ führt. Anschließend wird mit einem Schubanteil $\Delta\dot{\mathbf{r}}_l$ längs der neuen Tangentialrichtung der endgültige Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_{21} + \Delta\dot{\mathbf{r}}_l = \dot{\mathbf{r}}_1 + \Delta\dot{\mathbf{r}}_c + \Delta\dot{\mathbf{r}}_l = \dot{\mathbf{r}}_1 + \Delta\dot{\mathbf{r}} \tag{12.8}$$

erhalten.

BEISPIEL 4: Wird bei einem Manöver nur eine Bahnebenendrehung um den Winkel γ gewünscht und stehen nur Manöver senkrecht bzw. längs zum jeweiligen Tangentialvektor zur Verfügung, muss zunächst die Drehung mit Hilfe des Querschubs $\Delta\dot{\mathbf{r}}_c$ durchgeführt werden. Da der neue Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_{21}$ dem Betrag nach zu groß ist, muss eine Korrektur längs der Richtung von $\dot{\mathbf{r}}_{21}$ um den Längsschub ($-\Delta\dot{\mathbf{r}}_l$) so durchgeführt werden, dass der endgültige Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_2$ denselben Betrag wie der ursprüngliche Geschwindigkeitsvektor hat: $|\dot{\mathbf{r}}_2| = |\dot{\mathbf{r}}_1|$. ◀

12.2 Kleine Änderungen des Geschwindigkeitsvektors

Der Geschwindigkeitsvektor sei in der allgemeinen Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = V_R \mathbf{r}_0 + V_T \mathbf{q}_0 \quad , \quad V_R = V_R(A_i, t) \quad , \quad V_T = V_T(A_i, t) \qquad \langle i = 1, ..., N \tag{12.9}$$

gegeben. Um eine kleine Änderung infolge eines Korrekturmanövers abschätzen zu können, wird zunächst die Variation dieses Vektors benötigt, die mit den Variationsgleichungen des mitgeführten Bahnsystems (*Leibniz*-System) und den *Frenet*schen Formeln der Astrodynamik[1]

$$\frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \left(\sum_i \frac{\partial V_R}{\partial A_i} \dot{A}_i - V_T \dot{\zeta} \right) \mathbf{r}_0 + \left(\sum_i \frac{\partial V_T}{\partial A_i} \dot{A}_i + V_R \dot{\zeta} \right) \mathbf{q}_0 + V_T \dot{\eta}\, \mathbf{c}_0 \tag{12.10}$$

lautet, wobei die A_i die Parameter der zugrunde gelegten (angepassten) Bewegung sind. Um kleine Änderungen der Bewegung zu untersuchen, wird die vorstehende Differentialgleichung in die Differenzengleichung

$$\Delta\dot{\mathbf{r}} = \left(\sum_i \frac{\partial V_R}{\partial A_i} \Delta A_i - V_T \, \Delta\zeta \right) \mathbf{r}_0 + \left(\sum_i \frac{\partial V_T}{\partial A_i} \Delta A_i + V_R \, \Delta\zeta \right) \mathbf{q}_0 + V_T \, \Delta\eta \, \mathbf{c}_0 \tag{12.11}$$

umgewandelt. Der radiale und der transversale Geschwindigkeitsanteil haben die allgemeingültigen Beziehungen[2]

$$V_R = \dot{r} \ , \quad V_T = r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} \tag{12.12}$$

und entsprechend lautet die Differenzengleichung

$$\Delta\dot{\mathbf{r}} = \left(\sum_i \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_i} \Delta A_i - r\dot{\zeta}\, \Delta\zeta \right) \mathbf{r}_0 + \left(\sum_i \frac{\partial \left(r\dot{\zeta} \right)}{\partial A_i} \Delta A_i + \dot{r} \, \Delta\zeta \right) \mathbf{q}_0 + r\dot{\zeta}\, \Delta\eta \, \mathbf{c}_0 \quad . \tag{12.13}$$

BEISPIEL: Im Fall der allgemeinen *Kepler*bewegung lauten die Beziehungen[3]

$$\begin{aligned} \dot{r} &= e \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}} \sin\upsilon \\ \frac{d\dot{r}}{dt} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial e} \dot{e} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial \upsilon} \dot{\upsilon} \end{aligned} \tag{12.14}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}}{\partial a} &= -\sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}} \frac{e \sin\upsilon}{2a} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial e} &= \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}} \frac{\sin\upsilon}{1-e^2} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial \upsilon} &= e \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}} \cos\upsilon \quad , \end{aligned} \tag{12.15}$$

[1] Aus Abschnitt 4.4.3, Band II

[2] Nach Formel (11.16)

[3] siehe Kap 5 (Band II) und Kap 10

sowie

$$
\begin{aligned}
r\dot{\zeta} &= \frac{G}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}\left(1+e\cos\upsilon\right) \\
\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}\,\frac{1+e\cos\upsilon}{a} \\
\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial e} &= \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}\,\frac{e+\cos\upsilon}{1-e^2} \\
\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial \upsilon} &= -e\sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}\sin\upsilon \qquad .
\end{aligned}
\tag{12.16}
$$

Spezielles BEISPIEL: Wird ein Manöver von einer Kreisbahn ausgehend und damit (notwendigerweise) im Perizentrum der Bahn ausgeführt, lautet das Geschwindigkeitsinkrement

$$
\Delta\dot{\mathbf{r}}\left[\upsilon = 0°\left(=180°\right), \Delta\zeta = \Delta\eta = 0°\right] = \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}\left\{e\,\Delta\upsilon\,\mathbf{r}_0 + \left[-\frac{1+e}{2a}\Delta a + \frac{\Delta e}{1-e}\right]\mathbf{q}_0\right\} \qquad .
$$

Änderungen in Halbachse und Exzentrizität sind stets gekoppelt, so dass in der Praxis nur gemeinsame Manöver durchgeführt werden können. Näheres dazu wird in den folgenden Abschnitten untersucht. ◀

12.3 Änderungen der Bahnebene

Eine Satellitenbahn lässt sich am besten mit den *Kepler*elementen geometrisch veranschaulichen. Auch die Auswirkungen von Bahnänderungen werden daher gewöhnlich in *Kepler*elementen dargestellt.

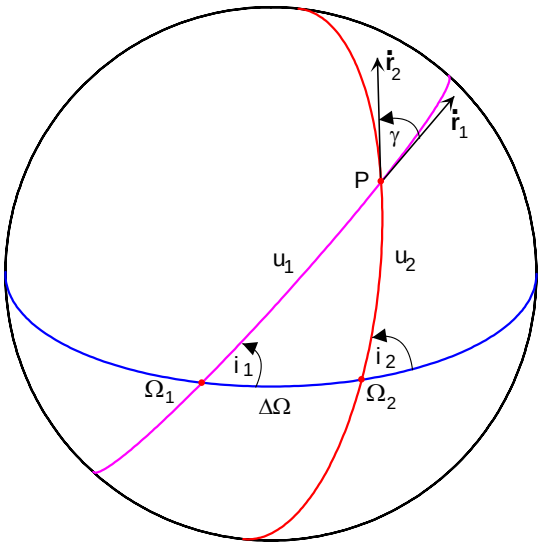


Bild 12-3: Änderung einer Bahnebene

Die Lage der Bahnebene im Raum wird durch die Inklination *i* und die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω bestimmt. Beide Elemente sind im Normalenrichtungsvektor

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$$

enthalten, so dass zu ihrer Bestimmung nur der transversale Anteil, definiert im Richtungsvektor $\mathbf{q}_0$, benötigt wird. Werden die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$ in ihren jeweiligen radialen und transversalen Anteil zerlegt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= \dot{\mathbf{r}}_{1R} + \dot{\mathbf{r}}_{1T} \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \dot{\mathbf{r}}_{2R} + \dot{\mathbf{r}}_{2T} \quad , \end{aligned} \tag{12.17}$$

kann der in einer Ebene senkrecht zum momentanen Ortsvektor gelegene Zwischenwinkel γ berechnet werden aus

$$\cos\gamma = \frac{\dot{\mathbf{r}}_{1T} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{2T}}{\left|\dot{\mathbf{r}}_{1T}\right| \left|\dot{\mathbf{r}}_{2T}\right|} \quad . \tag{12.18}$$

12.3.1 Knotenänderung

Der Ortsvektor **r** und der Anfangsgeschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_1$ bestimmen das momentane Argument der Breite u_1 des Satellitenortes in der Bahn mit Anfangsneigung i_1 und Knoten Ω_1. Nach Drehung der Bahnebene um den Winkel γ hat der Satellit in der neuen Bahnebene mit Neigung i_2 und Knoten Ω_2 das Argument der Breite u_2 . Diese neuen Parameter i_2 , $\Omega_2 = \Omega_1 + \Delta\Omega$ können nach Bild 12-3 auf Seite 153 aus den folgenden Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned} \cos\Delta\Omega \sin i_2 &= \cos u_1 \sin\gamma \cos i_1 + \cos\gamma \sin i_1 \\ \sin\Delta\Omega \sin i_2 &= \sin u_1 \sin\gamma \\ \cos i_2 &= -\cos u_1 \sin\gamma \sin i_1 + \cos\gamma \cos i_1 \quad . \end{aligned} \tag{12.19}$$

u_2 ergibt sich dann aus

$$\begin{aligned} \cos u_2 &= \cos i_1 \sin u_1 \sin\Delta\Omega + \cos u_1 \cos\Delta\Omega \\ \sin u_2 &= \left(\cos i_1 \sin u_1 \cos\Delta\Omega - \cos u_1 \sin\Delta\Omega\right) \cos i_2 + \sin i_1 \sin u_1 \sin i_2 \quad . \end{aligned} \tag{12.20}$$

Es sind prinzipiell zwei Endbahnen zu erreichen, welche durch das Vorzeichen des Bahnänderungswinkels γ in der zweiten der Formeln (12.19) unterschieden werden. Soll $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 > 0°$ sein und ist $u_1 \in [0°, 180°)$, muss $\gamma > 0°$, wenn $u_1 \in (180°, 360°)$, muss $\gamma < 0°$ gewählt werden. Soll $\Delta\Omega < 0°$ sein und ist $u_1 \in [0°, 180°)$, muss $\gamma < 0°$, im Fall $u_1 \in (180°, 360°)$ muss $\gamma > 0°$ gewählt werden.

Das Formelsystem (12.19) zeigt außerdem:

- *Eine Knotenänderung ist stets mit einer Inklinationsänderung gekoppelt.*

BEISPIEL 1: Seien $i_1 = 60°$, $u_1 = 50°$, $\gamma = 20°$, wird $i_2 = 73°.77$, $\Delta\Omega = 15°.84$, $u_2 = 43°.70$, wenn $\gamma = -20°$, wird $i_2 = 48°.68$, $\Delta\Omega = -20°.42$, $u_2 = 62°.04$ (siehe Bild 12-4).◀

Eine **maximale Knotenänderung** kann erreicht werden, wenn

$$\cos u_{1,\,\text{extremum}} = 0 \quad , \quad u_1 = 90° \quad , \quad = 270°$$

erfüllt ist. In diesem Fall reduzieren sich die Gleichungen (12.19) auf

$$\begin{aligned} \cos\Delta\Omega_{\text{extremum}} \sin i_2 &= \cos\gamma \sin i_1 \\ \sin\Delta\Omega_{\text{extremum}} \sin i_2 &= \sin\gamma \qquad , \qquad (\cos u_1 = 0) \\ \cos i_2 &= \cos\gamma \cos i_1 \end{aligned} \tag{12.21}$$

bzw.

$$\tan\gamma = \sin i_1 \tan \Delta\Omega_{extremum} \tag{12.22}$$

und es ist $i_{2,1} = i_{2,2}$ und $\Delta\Omega_2 = -\Delta\Omega_1$. ($\Delta\Omega_1 := \Omega_{2,1} - \Omega_1$, $\Delta\Omega_2 := \Omega_{2,2} - \Omega_1$).

BEISPIEL 2: Sei $i_1 = 60°$, $u_1 = 90°$, $\gamma = \pm 20°$, wird $i_2 = 62°$, $\Delta\Omega_{1,2} = \pm 22°.80$ sowie nach den Formeln (12.20) $u_{2,1} = 62°.55$, $u_{2,2} = 117°.45$. ◀

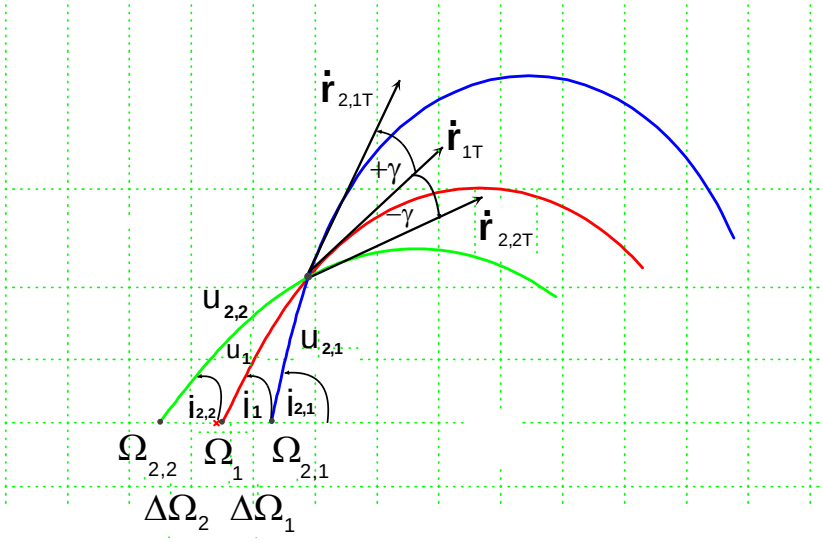


Bild 12-4: Änderung der Bahnebene um ± 20°. Ausgangsbahn: $i_1 = 60°, u_1 = 50°$

Eine **maximale Inklinationsänderung** kann erreicht werden, wenn in den Gleichungen (12.19) und (12.20) $\sin u_1 = 0$ gesetzt wird, wenn sich der Satellit also im auf- oder absteigenden Knoten seiner Bahn befindet. Dann ist $i_2 = \gamma + i_1$, die gesamte in die Bahnänderung gesteckte Energie wirkt sich auf eine Inklinationsänderung aus.

➢ *Eine maximale Inklinationsänderung kann nur in einem Knoten stattfinden. Eine Knotenänderung ist in diesem Fall nicht möglich.*

12.3.2 Inklinationsänderung im Knoten für kreisnahe Bahnen:

Wird eine Inklinationsänderung um den Betrag Δi in einem Bahnknoten vorgenommen, ergibt sich nach Formel (12.3) auf S. 150 unmittelbar das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2\,V_1 V_2 \cos\Delta i} \quad . \tag{12.23}$$

Im Fall von kreisnahen Bahnen mit der (Kreis-) Bahngeschwindigkeit $V_K = \sqrt{\mu / a}$ vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$\Delta V = V_K \sqrt{2}\sqrt{1-\cos\Delta i} = 2V_K \sin\frac{\Delta i}{2} \qquad (e \approx 0) \quad . \tag{12.24}$$

Im Fall kleiner Inklinationsänderungen wird als weitere Vereinfachung die Beziehung

$$\Delta V = V_K\ \Delta i \qquad (e \approx 0,\ \Delta i \ll 1) \tag{12.25}$$

erhalten. An dieser Herleitung zeigt sich, wie kritisch die Aussage ist, dass *j* kleine Änderungen $(\Delta i)_j$ entsprechend *j* Geschwindigkeitsinkremente ergeben, die in ihrer Summe gleich einer einzigen großen Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta V = \sum_j (\Delta V)_j \approx \sum_j V_K (\Delta i)_j = V_K\ \Delta i$$

seien. Diese Aussage ist nur bedingt richtig, vielmehr kann bei einer großen Inklinationsänderung die Näherung $\sin\Delta i/2 \approx \Delta i/2$ nicht mehr angewendet werden. Im allgemeinen Fall gilt dann für kreisnahe Bahnen

$$\Delta V = 2V_K \sin\frac{\Delta i}{2} = \sum_j (\Delta V)_j = 2V_K \sum_j \sin\frac{(\Delta i)_j}{2} \approx V_K \sum_j \frac{(\Delta i)_j}{2} \ ,$$

wobei $\Delta i \neq 2\sin(\Delta i/2)$ und daher auch nicht $\Delta i = \sum_j (\Delta i)_j$ gesetzt werden kann.

12.3.3 Kleine Knotenänderungen

Kleine maximale Änderungen $\Delta\Omega_{max}$ des Bahnknotens, die in der nördlichen bzw. südlichen Wende ($\cos u_1 = 0$) durchgeführt werden, führen mit der Inklinationsänderung $i_2 - i_1 = \Delta i$ aus der zweiten der Gleichungen (12.21) näherungsweise auf

$$\Delta\Omega_{max}\ (\sin i_1\ \cos\Delta i + \cos i_1 \sin\Delta i) \approx \sin\gamma \quad , \quad (\cos u_1 = 0\ ,\ \Delta\Omega_{max} \ll 1)$$

bzw., da Δi als sehr klein angenommen werden darf, auf

$$\Delta\Omega_{max}\ (\sin i_1 + \Delta i\ \cos i_1) \approx \gamma \quad , \quad (\cos u_1 = 0\ ,\ \Delta\Omega_{max} \ll 1\ ,\ \Delta i \ll 1)$$

und, wenn noch $\Delta\Omega_{max} \cdot \Delta i$ vernachlässigt wird, auf

$$\Delta\Omega_{max} \approx \frac{\gamma}{\sin i_1} \quad , \quad (\cos u_1 = 0\ ,\ \Delta\Omega_{max} \ll 1\ ,\ \Delta i \ll 1) \quad . \tag{12.26}$$

Auch in diesem Fall gilt, dass ein größerer Schub durch eine Anzahl kleinerer Schübe ersetzt werden kann, offenbar nur bedingt bei nicht allzu großem $\Delta\Omega_{max} \ll 1$. Der Nenner $\sin i_1$ zeigt außerdem, dass Korrekturen des Knotens auf Äquator-nahen Bahnen, für die ein Knoten so gut wie nicht definiert ist, sinnlos sind.

BEISPIEL 3: Ein Satellit bewege sich auf einer Kreisbahn in der mittleren Bahnhöhe (bezogen auf den mittleren Erdäquator) H = 700 km. Welches Geschwindigkeitsinkrement ist für eine Drehung der Bahnebene um 2° erforderlich, wobei sich der Satellit auf einer Kreisbahn mit derselben Höhe weiterbewegen soll?

Die Kreisbahngeschwindigkeit hat für den mittleren Bahnradius $r = a = R_E + 700$ km = 7078.140 km den Betrag $V_K = \sqrt{\mu/a} = 7.50$ km/s . Da in diesem Fall $V_1 = V_2 = V_K$ und bei Äquatorüberflug eine Bahnänderung sich voll auf eine Inklinationsänderung auswirkt, ist $\gamma = \Delta i = 2°$, somit nach Formel (12.3) auf S. 150

$$\Delta V \;=\; V_K \sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos\gamma} \;=\; 2\,V_K \,\sin\frac{\gamma}{2} \quad , \quad \left(e \approx 0\right) \quad .$$

Für eine Inklinationsänderung um 2° wird somit das Geschwindigkeitsinkrement ΔV = 262 m/s benötigt. ◀

BEISPIEL 4: **Korrektur einer Einschussbahn.**

Für den Einschuss eines Satelliten mit der ARIANE 42L und 44L in eine Kreisbahn mit der mittleren Bahnhöhe H = 800 km, Inklination $\bar{i}$ = 98°.6 wird eine Standardabweichung (1σ-Bereich) für die garantierte Genauigkeit in der Inklination von Δi = ± 0°.032 gegeben[1]. Um diesen Fehler korrigieren zu können, muss (nach Formel (12.3)) ein Geschwindigkeitsinkrement von

$$\Delta V \;=\; 4.162\,\text{m/s}$$

mit einem Triebwerk an Bord des Satelliten ermöglicht werden können. ◀

[1] aus: AEROSPATIALE, COL-TN-AS-0054, issue 2, page A8, 4.3.1987

12.3.4 Richtung des Schubvektors bei Bahndrehung ohne Änderung der Bahnform

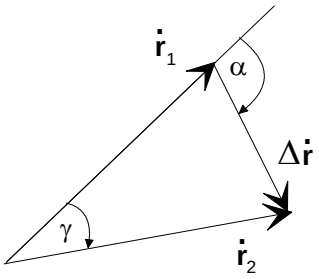


Bild 12-5: Bahnebenenänderung ohne Änderung der Bahnform

Wird ausschließlich eine Drehung der Bahnebene ohne Änderung der Bahnform gewünscht[1], müssen ursprünglicher und erzielter Geschwindigkeitsvektor dem Betrag nach gleich sein: $|\dot{\mathbf{r}}_2| = |\dot{\mathbf{r}}_1|$. Die beiden Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathbf{r}}_1$ und $\dot{\mathbf{r}}_2$ spannen dann ein ebenes gleichschenkliges Dreieck auf (vgl. Bild 12-5), der Schubvektor $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ bildet gegenüber der ursprünglichen Tangentialrichtung längs $\dot{\mathbf{r}}_1$ notwendig den Zwischenwinkel

$$\alpha = 90° + \frac{\gamma}{2} \quad . \tag{12.27}$$

- *Wird eine Bahnebenendrehung ohne Änderung der Bahnform durchgeführt, erfolgt der Schub niemals senkrecht zur ursprünglichen Tangentialrichtung.*

BEISPIEL 5: Eine Bahnebene soll um den Winkel $\gamma = 10°$ ohne Änderung der Bahnform gedreht werden. Der Schubvektor muss gegenüber der vorgegebenen Tangentialrichtung den Winkel $\alpha = 95°$ einschließen. Bei sehr kleinen Bahnmanövern, etwa nur um den Winkel $\gamma = 0°.2$ beträgt $\alpha = 90°.1$, erfolgt also nahezu senkrecht zur ursprünglichen Tangentialrichtung. Im Prinzip muss aber dann stets ein Korrekturmanöver zur Stabilisierung der Bahnform angebracht werden. ◀

12.4 Änderungen der Bahnform

Ein Zustandsvektor $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}_1$ bestimmt zum gegebenen Zeitpunkt die momentanen 6 Parameter einer Satellitenbahn. Wird durch eine Bahnänderung ein neuer Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_2$ erhalten, bestimmen $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}_2$ vollständig die neue Bahn. Sind etwa die Zielbahnelemente bekannt, kann daraus $\dot{\mathbf{r}}_2$ und über Formel (12.2) das zur Bahnänderung benötigte Geschwindigkeitsinkrement berechnet werden. Voraussetzung ist, dass Ursprungs- und Zielbahn sich im Moment der Bahnänderung berühren oder schneiden, was durch denselben Ortsvektor $\mathbf{r}$ auf beiden Bahnen gewährleistet wird.

[1] siehe hierzu auch Beispiel 4 in Abschnitt 12.1

Für bahnanalytische Untersuchungen sind einige spezielle Fälle von besonderem Interesse, die im Wesentlichen mit dem Formelapparat der Zweikörperbewegung behandelt werden können. In diesem Sinn sind auch alle in diesem Unterabschnitt verwendeten Parameter zu verstehen.

12.4.1 Ein-Impuls-Manöver auf Zielbahn

Vorgegeben sei eine Satellitenbewegung auf einer Bahn, deren analytische oder numerische Beschreibung vollständig bekannt sei. Durch ein Ein-Impuls-Manöver soll der Satellit (oder allgemeiner ein künstlicher Raumflugkörper) auf eine gewünschte Zielbahn gebracht werden. Größe und Richtung dieses Impulses sind gesucht. Zur Vereinfachung wird in diesem Zusammenhang angenommen, dass der Impuls als Momentimpuls aufgefasst werden kann, es wird also kein Manöver betrachtet, bei dem über einen langen Zeitraum ein Korrekturtriebwerk gezündet wird. Dieser Fall würde im Anschluss an die hier vorgelegten Rechnungen zu behandeln sein. Die Aufgabenstellung ist ein Beispiel, wie mit relativ einfachen Methoden im Rahmen einer Missionsanalyse grundlegende Aussagen erhalten werden können[1].

Es sei eine Ausgangsbahn (1) gegeben, die eine spezielle oder eine allgemeine *Kepler*bahn oder auch jede andere beliebige Bahn sein kann. Bekannt sei also zu jedem Zeitpunkt *t* der Ortsvektor $\mathbf{r}_1$ und Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_1$ für ein Objekt auf dieser Bahn. Bekannt ist dann der Normalenvektor

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 \quad , \tag{12.28}$$

für den somit in äquatorialen Koordinaten die Parameter Inklination i_1 und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω_1 zum betreffenden Zeitpunkt definiert sind:

$$\mathbf{c}_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sin i_1 \sin \Omega_1 \\ -\sin i_1 \cos \Omega_1 \\ \cos i_1 \end{bmatrix} \quad . \tag{12.29}$$

Eine Zielbahn (2) soll durch genau ein Bahnimpulsmanöver erreicht werden. Die Zielbahn kann durch ihre (oskulierenden) Keplerelemente (oder verwandte Parameter) gegeben sein. Wenn eine elliptische Bahn Zielbahn sein soll und dafür

Große Bahnhalbachse	a_2
Exzentrizität	e_2
bzw. Parameter	$p_2 = a_2 \left(1 - e_2^2\right)$
oder Flächenparameter	$G_2 = \sqrt{\mu\, p_2}$
Inklination	i_2

bekannt sind, können die restlichen Parameter aus der Bedingung des Ein-Impuls-Transfers bestimmt werden:

[1] TN GSOC 95-06 (27. Juni 1995)

Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Ω_2
Argument des Perigäums	ω_2
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_{20}
Epochezeit	t_{20}

Als Epochezeit t_{20} wird sinnvollerweise die Bezugszeit des Manövers gewählt.

Für Bahn (1) ist der Radius zu jedem Zeitpunkt aus

$$r_1 = |\mathbf{r}_1| \tag{12.30}$$

bekannt. Mit dem Richtungsvektor $\mathbf{r}_{10}$ können Rektaszension α_1 und Deklination δ_1 des Satelliten zum Zeitpunkt *t*1 in äquatorialen Koordinaten

$$\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{r}_{10} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\delta_1 \cos\alpha_1 \\ \cos\delta_1 \sin\alpha_1 \\ \sin\delta_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \left(\mathbf{r}_{10}^2 = 1\right) \tag{12.31}$$

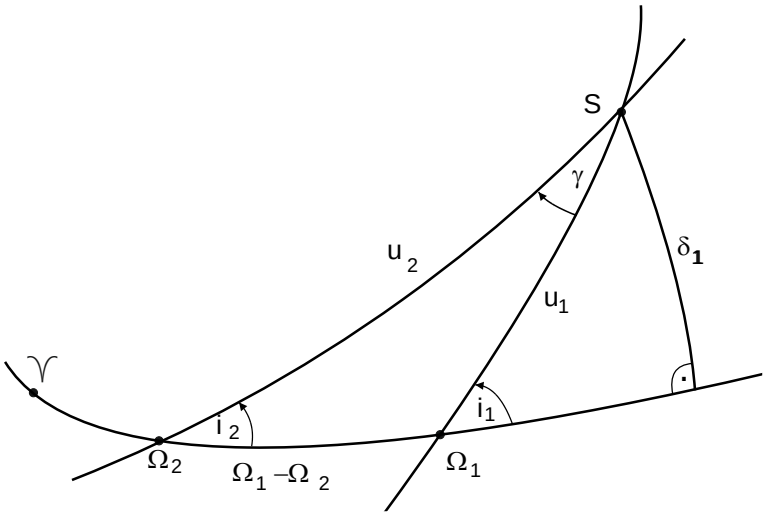


Bild 12-6: Ein-Impuls-Transfer: der Knoten Ω_2 der Zielbahn

dargestellt werden. Nach Bild 12-6 kann zunächst das Argument der Breite u_1 auf der Ausgangsbahn berechnet werden:

$$\begin{aligned} \cos i_1 \sin u_1 &= \cos\delta_1 \sin\left(\alpha_1 - \Omega_1\right) \\ \sin i_1 \sin u_1 &= \sin\delta_1 \\ \cos u_1 &= \cos\delta_1 \cos\left(\alpha_1 - \Omega_1\right) \quad . \end{aligned} \tag{12.32}$$

Im Moment des Manövers stimmt der Ortsvektor des Satelliten auf Bahn (1) mit seinem Ortsvektor auf der Zielbahn überein. Wegen der Identität der Ortsvektoren $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ sind auch die Ortsrichtungsvektoren identisch

$$\mathbf{r}_{10} = \mathbf{r}_{20} = \mathbf{r}_0 \quad , \quad \left(\mathbf{r}_0^2 = 1\right) \quad . \tag{12.33}$$

Sei $\mathbf{c}_{20}$ der Normalenvektor der Zielbahn im Äquatorsystem, gilt wie in Formel (12.29) für Bahn (1) auch für die Zielbahn

$$\mathbf{c}_{20} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \sin i_2 \sin \Omega_2 \\ -\sin i_2 \cos \Omega_2 \\ \cos i_2 \end{bmatrix} \quad . \tag{12.34}$$

Damit folgt die Bedingung

$$\mathbf{r}_{20} \cdot \mathbf{c}_{20} \;=\; 0 \quad , \tag{12.35}$$

woraus die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω_2 der Zielbahn berechnet werden kann. Dies geschieht trigonometrisch folgendermaßen einfacher: Das Argument der Breite u_2 der Zielbahn kann nach Bild 12-6 auf Seite 160 berechnet werden aus

$$\sin u_2 \;=\; \frac{\sin i_1 \sin u_1}{\sin i_2} \;=\; \frac{\sin \delta_1}{\sin i_2} \quad , \quad \sin i_2 \;\neq\; 0 \quad . \tag{12.36}$$

Dieser Ausdruck ist nicht definiert, wenn

$$\left|\sin i_2\right| \;<\; \left|\sin \delta_1\right| \quad , \tag{12.37}$$

da dann kein Schnitt der Zielbahn mit der Ausgangsbahn möglich ist. Sonst ist u_2 bekannt, allerdings nicht eindeutig, da nur

$$\cos u_2 \;=\; \pm\sqrt{1-\sin^2 u_2} \tag{12.38}$$

berechnet werden kann. Es wird also noch eine Zusatzbedingung benötigt, etwa ob das Manöver im auf- oder absteigenden Bahnast der Zielbahn, bestimmt durch

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\cos u_2) \;&>\; 0 \quad \text{aufsteigend} \\ \operatorname{sgn}(\cos u_2) \;&<\; 0 \quad \text{absteigend} \quad , \end{aligned} \tag{12.39}$$

erfolgen soll. Im Fall des Ein-Impuls-Manövers führen die beiden möglichen Werte für u_2 letztendlich auf unterschiedliche Geschwindigkeitsinkremente. Es kann dann das u_2 gewählt werden, für das ein geringeres Geschwindigkeitsinkrement benötigt wird. In der Praxis kann im Hinblick auf eine Minimierung des Geschwindigkeitsinkrements die Art des Bahnastes gewählt werden, der auch auf der Ursprungsbahn durchlaufen wird: aufsteigender bzw. absteigender Bahnast stimmen auf beiden Bahnen überein:

$$\operatorname{sgn}(\cos u_2) \;=\; \operatorname{sgn}(\cos u_1) \quad . \tag{12.40}$$

Es kann aber auch die Art des Bahnastes nach Formel (12.39) fest vorgewählt werden.

Wenn $i_2 = 0$, muss $\sin \delta_1 = 0$ sein. In diesem Fall wird $\sin u_2 = 0$ gesetzt.

Zweimalige Anwendung des Kosinussatzes der Winkel

$$\begin{aligned} -\cos i_1 \;&=\; \cos u_2 \sin i_2 \sin \gamma - \cos i_2 \cos \gamma \\ \cos i_2 \;&=\; \cos u_1 \sin i_1 \sin \gamma + \cos i_1 \cos \gamma \end{aligned}$$

führt zu einer Elimination von $\sin \gamma$ bzw. $\cos \gamma$ und damit zu einer eindeutigen Berechnung des Drehwinkels γ aus

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{\cos^2 i_2 - \cos^2 i_1}{\cos u_2 \sin i_2 \cos i_1 + \cos u_1 \sin i_1 \cos i_2} \\ \cos\gamma &= \frac{\cos u_1 \sin i_1 \cos i_1 + \cos u_2 \sin i_2 \cos i_2}{\cos u_2 \sin i_2 \cos i_1 + \cos u_1 \sin i_1 \cos i_2} \quad . \end{aligned} \tag{12.41}$$

Die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω_2 der Zielbahn kann dann schließlich aus dem *Gauß*schen Formelsatz[1]

$$\begin{aligned} \cos i_2 \sin(\Omega_1 - \Omega_2) &= -\cos\gamma \sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2 \\ \sin i_2 \sin(\Omega_1 - \Omega_2) &= \sin\gamma \sin u_1 \\ \cos(\Omega_1 - \Omega_2) &= \cos\gamma \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \end{aligned}$$

bzw. wegen des bekannten i_2 auch aus

$$\begin{aligned} \sin(\Omega_1 - \Omega_2) &= (-\cos\gamma \sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2)\cos i_2 + \\ &\quad + \sin\gamma \sin u_1 \sin i_2 \\ \cos(\Omega_1 - \Omega_2) &= \cos\gamma \sin u_1 \sin u_2 + \cos u_1 \cos u_2 \end{aligned} \tag{12.42}$$

eindeutig berechnet werden.

Bahn (2) werde durch eine (allgemeine) *Kepler*bewegung beschrieben. Der Radius ist auf ihr daher durch

$$r_2 = \frac{p_2}{1 + e_2 \cos\upsilon_2} = r_1 \tag{12.43}$$

mit der wahren Anomalie υ_2 bekannt. Um ein Manöver von Bahn (1) auf Bahn (2) durchführen zu können, müssen sich die beiden Bahnen schneiden können, r_1 muss im radialen Bereich von Bahn (2) liegen und daher die Bedingung

$$a_2(1 - e_2) \le r_1 \le a_2(1 + e_2) \tag{12.44}$$

erfüllen. Im Moment des Manövers muss der Ort auf Bahn (1) mit dem Ort auf Bahn (2) zusammenfallen $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Die Radien auf beiden Bahnen sind also im Moment des Manövers identisch. Die Geschwindigkeit auf Bahn (2) kann nach Formel (2.83) (in Abschnitt 2.5.2, Band I) aus der Beziehung

$$V_2^2 = \mu\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1 - e_2^2}{p_2}\right) \tag{12.45}$$

berechnet und somit als eine Bestimmungsgröße zur Berechnung des Manövers angesehen werden.

Die Zielbahn (2) werde zunächst nicht als kreisförmig angenommen. Aus der Identität der Radien kann die wahre Anomalie υ_2 auf Bahn (2) im Moment des Manövers notwendig berechnet werden aus

[1] Siehe etwa in Anhang A, Band V

$$\cos\upsilon_2 \;=\; \frac{1}{e_2}\left(\frac{p_2}{r_1}-1\right) \quad , \quad r_1 \;>\; 0 \quad , \quad e_2 \;>\; 0 \quad . \tag{12.46}$$

Im Fall $e_2 = 0$ wird $\upsilon_2 = 0°$ angenommen, da die Epoche für *t*2 und dort $M_{20} = 0°$ gesetzt werden kann.

Diese Beziehung ist nicht eindeutig, da der Sinus dieses Winkel nur aus

$$\sin\upsilon_2 \;=\; \pm\sqrt{1-\cos^2\upsilon_2} \tag{12.47}$$

berechnet werden kann. Man erhält also stets zwei Lösungen, aus denen erst durch eine zusätzliche Bedingung eine eindeutige Lösung erhalten werden kann.

Mit bekannter wahrer Anomalie υ_2 und Argument der Breite u_2 aus Formel (12.36) können das Argument des Perigäums der Zielbahn

$$\omega_2 \;=\; u_2 - \upsilon_2 \tag{12.48}$$

sowie mit Hilfe des *Kepler*gleichung wie üblich die mittlere Anomalie M_2 berechnet werden:

$$\begin{aligned} \sin E_2 \;&=\; \frac{\sqrt{1-e_2^2}\,\sin\upsilon_2}{1-e_2\cos E_2} \\ \cos E_2 \;&=\; \frac{\cos\upsilon_2 + e_2}{1-e_2\cos E_2} \end{aligned} \tag{12.49}$$

$$M_2 \;=\; E_2 - e_2\sin E_2 \quad . \tag{12.50}$$

Wird der Zeitpunkt $t_1 = t_2$ des Manövers als Epoche für die Zielbahn gewählt: $t_{20} = t_2$, ist der entsprechende Wert der mittleren Anomalie zugleich die mittlere Epocheanomalie

$$M_{20} \;=\; M_2\left(t = t_{20}\right) \quad . \tag{12.51}$$

Für die Berechnung des Geschwindigkeitsvektors

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\,\mathbf{q}_0 \quad , \quad \mathbf{r}_0^2 \;=\; \mathbf{q}_0^2 \;=\; 1 \quad , \quad \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q}_0 \;=\; 0 \tag{12.52}$$

kann wieder vorausgesetzt werden, dass der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_1$ der Ausgangsbahn zu jedem Zeitpunkt bekannt ist. Zur Berechnung des Geschwindigkeitsvektors auf der Zielbahn wird zunächst mit dem Normaleneinheitsvektor aus Formel (12.34) auf S. 161 der transversale Richtungsvektor aus

$$\mathbf{q}_{20} \;=\; \mathbf{c}_{20} \times \mathbf{r}_0 \tag{12.53}$$

berechnet. Die radiale Geschwindigkeit ist im Rahmen der *Kepler*bewegung zu berechnen aus

$$\dot{r}_2 \;=\; e_2\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}\,\sin\upsilon_2 \;=\; \frac{e_2\,\mu}{G_2}\,\sin\upsilon_2 \;=:\; d_2\sin\upsilon_2 \quad . \tag{12.54}$$

Damit ist der Geschwindigkeitsvektor auf Bahn (2) im Moment des Manövers bekannt aus

$$\dot{\mathbf{r}}_2 \;=\; \dot{r}_2\,\mathbf{r}_0 + \frac{G_2}{r_1}\,\mathbf{q}_{20} \quad . \tag{12.55}$$

Falls die Zielbahn (2) kreisförmig ist, verschwindet die radiale Geschwindigkeit $\dot{r}_2$. Auch in diesem Fall kann der transversale Richtungsvektor mit Formel (12.53) berechnet werden. Der Geschwindigkeitsvektor auf der Zielbahn lautet dann

$$\dot{\mathbf{r}}_2 \;=\; \frac{G_2}{r_1}\,\mathbf{q}_{20} \quad , \quad \left(e_2 = 0\right) \quad . \tag{12.56}$$

Das Geschwindigkeitsinkrement wird aus

$$\Delta V \;=\; \left|\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1\right| \tag{12.57}$$

berechnet, die Richtung, in die der „Schuss“ des Manövers zu erfolgen hat, wird durch

$$\Delta\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 \tag{12.58}$$

bestimmt. Der Drehwinkel $\gamma_{1/2}$ zwischen den beiden Bahnen im Moment des Manövers errechnet sich schließlich aus

$$\cos\gamma_{1/2} \;=\; \frac{\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{V_1 V_2} \quad . \tag{12.59}$$

Wegen des fehlenden Vorzeichens von $\sin\upsilon_2$ in der Beziehung (12.47) sind alle diese Größen nicht eindeutig bestimmbar. Die Berechnungen müssen also doppelt erfolgen.

Die Formulierung gilt im Prinzip für jedes beliebige Bahnmodell. Wird etwa die Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung zugrunde gelegt, so wird die Zielbahn durch die Bahnparameter G_2 , V_2 und ζ_{2A} neben den Orientierungsparametern i_2, Ω_2, ω_2 spezifiziert. Mit den Formeln etwa (5.78) in Abschnitt 5.2.5.3 (Band II) ergibt sich die transversale Geschwindigkeit auf der Zielbahn im Moment des Manövers aus

$$V_T \;=\; r_2\dot{\zeta}_2 \;=\; V_2\cos\left(\zeta_2 - \zeta_{2A}\right) \quad . \tag{12.60}$$

Aus diesem Ausdruck kann der absolute Bahnwinkel ζ_2 bzw. der relative Bahnwinkel $\zeta_2 - \zeta_{2A}$ berechnet werden. Die radiale Geschwindigkeit ergibt sich dann aus

$$V_R \;=\; \dot{r}_2 \;=\; V_2\sin\left(\zeta_2 - \zeta_{2A}\right) \;=\; \pm\sqrt{V_2^2 - V_2^2\cos^2\left(\zeta_2 - \zeta_{2A}\right)} \quad . \tag{12.61}$$

Auch in dieser Formulierung ergeben sich (natürlich) zwei mögliche Lösungen wegen des unbekannten Vorzeichens vor der Wurzel. Der transversale Richtungsvektor ist wie im *Kepler*fall aus $\mathbf{q}_{20} = \mathbf{c}_{20} \times \mathbf{r}_0$ bekannt. Somit ergibt sich schließlich der Geschwindigkeitsvektor auf der Zielbahn aus

$$\dot{\mathbf{r}}_2 \;=\; \dot{r}_2\,\mathbf{r}_0 + r_2\,\dot{\zeta}_2\,\mathbf{q}_{20} \quad . \tag{12.62}$$

Drehwinkel γ und Geschwindigkeitsinkrement folgen dann wie im obigen Fall. Anzumerken bleibt, dass bei dieser Formulierung keine Unterscheidung nach der Bahnform nötig ist, der numerisch unangenehme Fall für kreisnahe Bahnen $\left(e_2 \to 0\right)$ so in elementarer Weise umgangen werden kann.

BEISPIEL 1: **1-Impuls-Transfer ohne Änderung der Bahnebene**

Als Ausgangsbahn sei ein Transferbahn (GTO) in eine geostationäre Bahn gegeben: $\overline{a_1}$ = 24413.272 km , $\overline{e_1} = 0.730373$, $\overline{i_1} = 7°.0073$, $\overline{\Omega_1} = 134°.8268$, $\overline{\omega_1}$ = 0°.0 , $\overline{M_{10}}$ = 0°.0 , Epoche: t_{10} .

Die Zielbahn habe die Parameter: $\overline{a_2} = 38518.836\,\text{km}$, $\overline{e_2} = 0.82143448$, $\overline{i_2} = \overline{i_1}$.

Bei Variation der wahren Anomalie auf der Ausgangsbahn (1) werden der Drehwinkel $\gamma_{1/2}$ und das Geschwindigkeitsinkrement ΔV variiert. Unter der Annahme, dass nur dasjenige Argument der Breite u_2 gewählt wird, das in demselben Quadranten wie das entsprechende Argument der Breite u_1 der Ursprungsbahn liegt, zeigen Bild 12-7 auf S. 165 und Bild 12-8 auf S. 166 die Variationen des Geschwindigkeitsinkrements ΔV und des Drehwinkels γ_1 . Die jeweils zwei Kurven entsprechen der Doppeldeutigkeit der wahren Anomalie υ_2. Aus den beiden Lösungen wird dann in der Praxis eine auf Grund von Randbedingungen (typisches Beispiel: Ausrichtung zur Sonne) ausgewählt. Die Kurven zeigen, dass für verschwindenden Drehwinkel γ_1, der im ersten der betrachteten Fälle die wahre Anomalie bei $\upsilon_1 = 87°$ hat, nicht das kleinste Geschwindigkeitsinkrement ΔV_1 erhalten wird. Dieses hat die wahre Anomalie υ_1 = 72° . Wird der kleinste mögliche Impuls $\Delta V_1 = 0.4\,\text{km/s}$ gewünscht, beträgt der Drehwinkel $\gamma_1 = 1°.5$. ◀

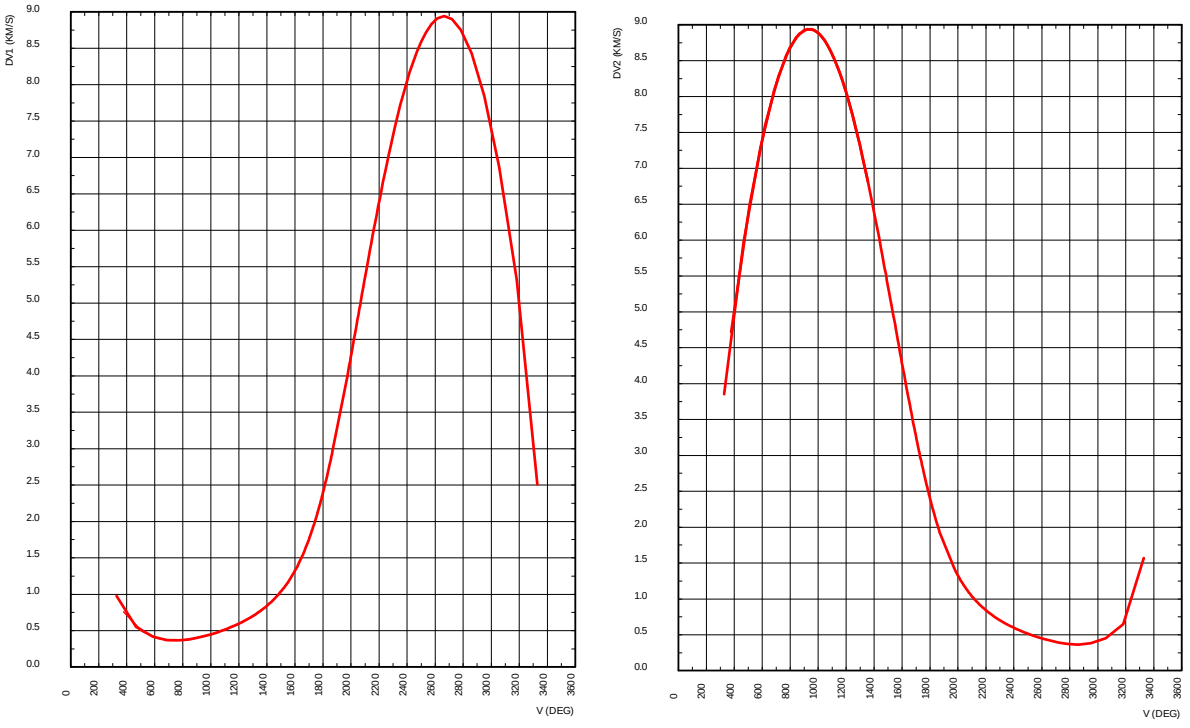


Bild 12-7: Variation des Geschwindigkeitsinkrements bei Ein-Impuls-Verfahren bei unveränderter Bahnebene, links Fall 1, rechts Fall 2

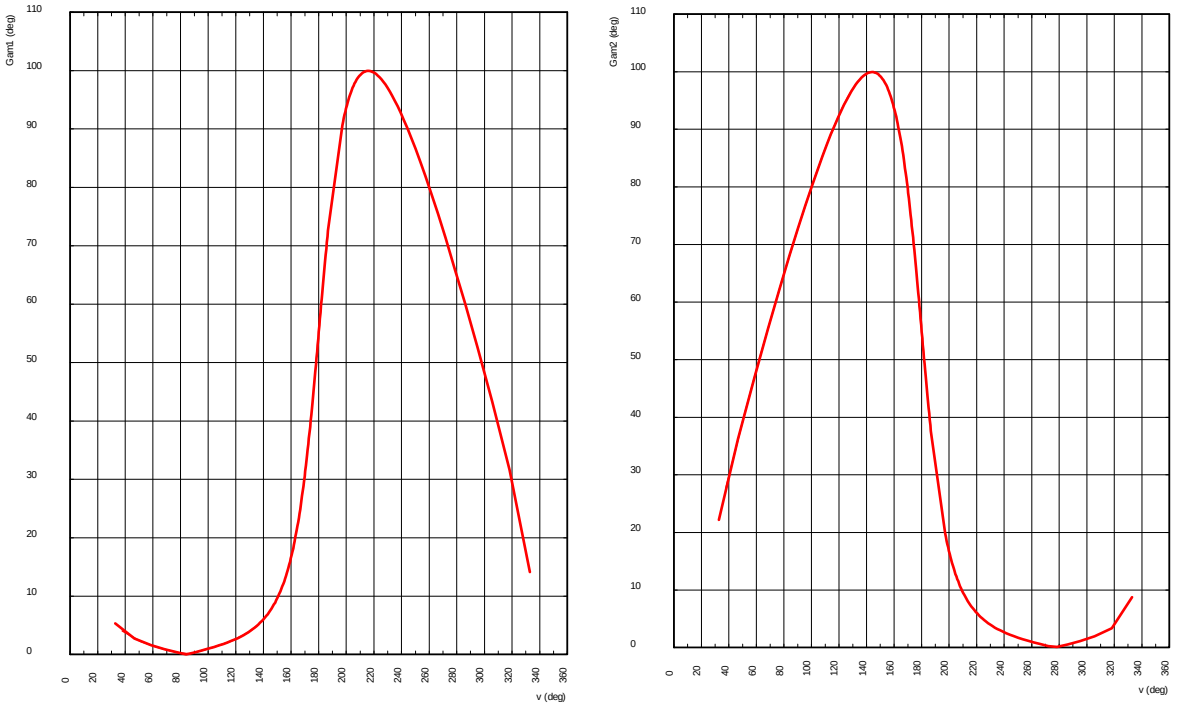


Bild 12-8: Variation des Drehwinkels bei Ein-Impuls-Verfahren bei unveränderter Bahnebene, links Fall 1, rechts Fall 2

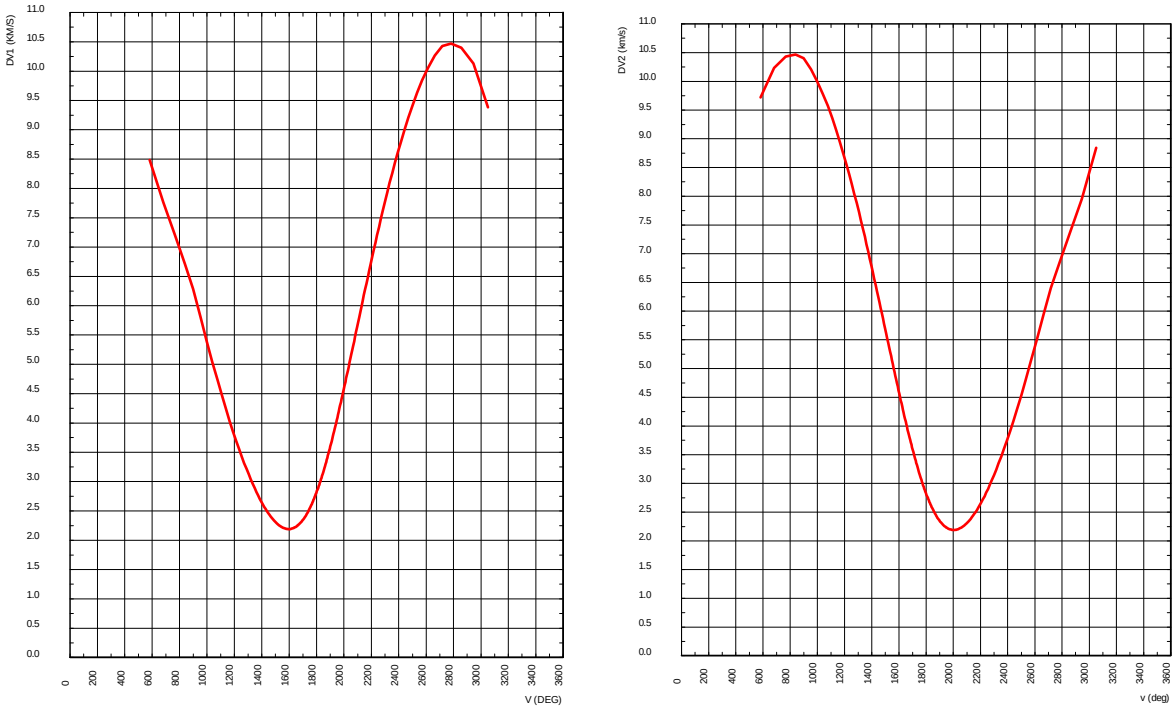


Bild 12-9: Variation des Geschwindigkeitsinkrements bei Ein-Impuls-Verfahren mit Änderung der Bahnebene

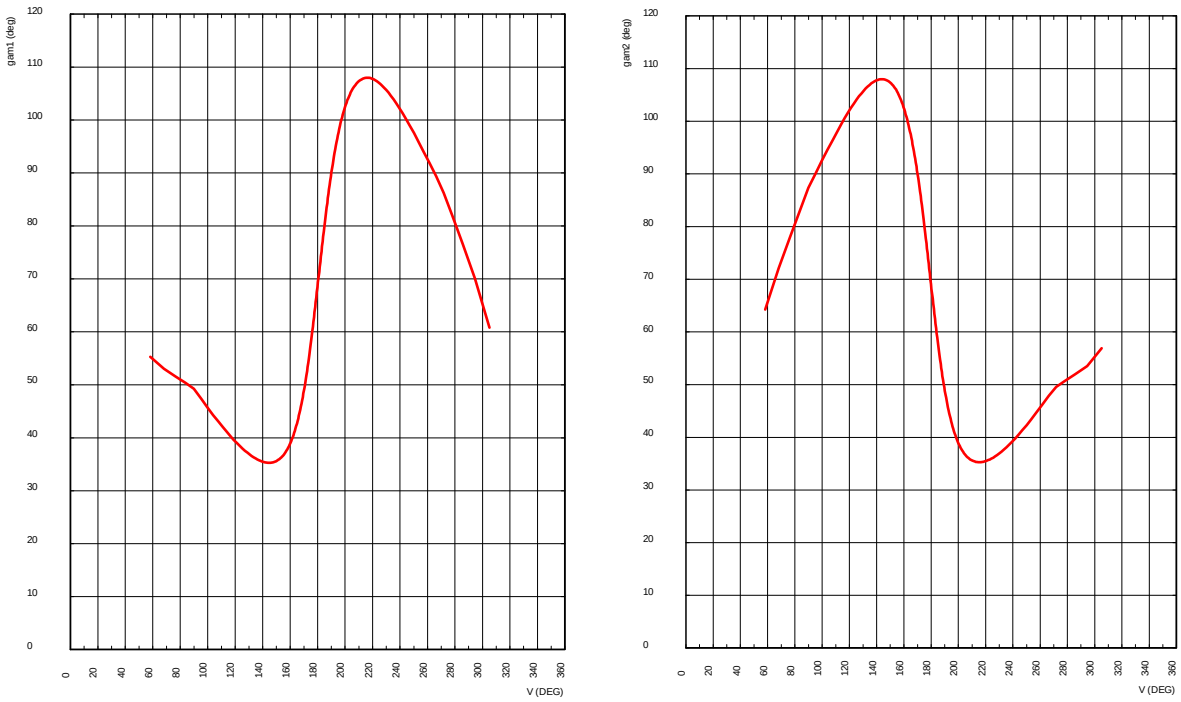


Bild 12-10: Variation des Drehwinkels bei Ein-Impuls-Verfahren mit Änderung der Bahnebene

BEISPIEL 2: **1-Impuls-Transfer mit Änderung der Bahnebene**

Die Ausgangsbahn habe die Parameter $\overline{H_{A1}} = 36007.000$ km , $\overline{H_{P1}} = 237.000$ km , $\overline{a_1} = 24500.000$ km , $\overline{e_1} = 0.73$, $\overline{i_1} = 7°.0$, $\overline{\Omega_1} = \overline{\omega_1} = \overline{M_{10}} = 0°.0$, Epoche: t_{10} .

Die Zielbahn habe die Parameter: $\overline{H_{A2}} = 65622.000$ km , $\overline{H_{P1}} = 1622.000$ km , $\overline{a_2} = 40000.000$ km , $\overline{e_2} = 0.8$, $\overline{i_2} = 60°.0$.

Die Variationen für den Impuls und den Drehwinkel sind über die wahre Anomalie auf der Ursprungsbahn in Bild 12-9 auf S. 166 und Bild 12-10 dargestellt. Der minimale Impuls beträgt im Fall 1 $\left(\sin\upsilon_2 = \sqrt{1-\cos^2\upsilon_2}\right)$ $\Delta V_1 = 2.2$ km/s und wird für die wahre Anomalie $\upsilon_1 = 160°$ erhalten. Der zugehörige Drehwinkel beträgt $\gamma_1 = 39°$. Der minimale Drehwinkel $\gamma_1 = 35°.5$ bei $\upsilon_1 = 145°$ erfordert den Impuls $\Delta V_1 = 2.4$ km/s .

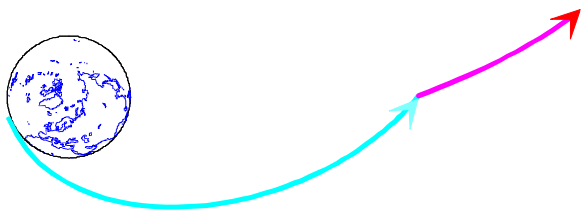


Bild 12-11: Bahnverlauf bei Ein-Impuls-Verfahren, Drehung der Bahnebene um $\Delta i = 53°$

Als spezieller Fall werde $\Delta V_1 = 2.1915\ \mathrm{km/s}$ gewählt. Dann ist $\upsilon_1 = 159°.6674$ und die Zeit seit Start, d. h. in diesem Fall seit Perigäumsdurchgang beträgt $\Delta t_1 = 2^h 56^m 0^s.0$. Die Geschwindigkeit auf der ersten Bahn ist dann $V_1 = 2.38152\ \mathrm{km/s}$ und der Drehwinkel $\gamma_1 = 38°.7152$. Auf der Zielbahn ist die Geschwindigkeit $V_2 = 3.466624\ \mathrm{km/s}$, die wahre Anomalie hat den Wert $\upsilon_2 = 138°.9082$. Damit kann die Rektaszension des aufsteigenden Knotens berechnet werden $\Omega_2 = 341°.3088$, das Argument des Perigäums $\omega_2 = 38°.2842$ und die mittlere Anomalie $M_2 = 37°.7745$. In Bild 12-11 sind die beiden Bahnen dargestellt. ◀

Eine Bahnanalyse im Fall des Ein-Impuls-Manövers muss also verschiedene Fälle berücksichtigen:

- Vorzeichen von $\sin\upsilon_2$,
- Vorzeichen von $\cos u_2$,
- minimaler Drehwinkel $\gamma_{1/2}$,
- minimales Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V_{1/2}$,
- doppelte Lösung in manchen Bereichen des Verlaufs der Variation von $\gamma_{1/2}$ bzw. $\Delta V_{1/2}$ über der Zeit bzw. der wahren Anomalie der Ursprungsbahn υ_1 .

Erst nach Auswahl einer dieser Möglichkeiten kann eine geeignete operationelle Strategie für eine Anwendung in der Praxis entwickelt werden.

Spezialfall: Gegebenes Geschwindigkeitsinkrement

Die Ausgangsbahn sei zu jedem Zeitpunkt t_1 durch Orts- und Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t_1)$, $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1(t_1)$ bekannt. Für die Zielbahn seien wie im Allgemeinen soeben behandelten Fall die große Bahnhalbachse a_2, Exzentrizität e_2 und Inklination i_2 gewünscht. Für das Bahnmanöver sei ein fester Impuls ΔV_2 (etwa durch ein Feststofftriebwerk) vorgegeben. Es ist der Zeitpunkt $t_1 = t_2$ bzw. die wahre Anomalie υ_1 auf der Ursprungsbahn zu berechnen, zu dem dieser Impuls erfolgen muss, der Ort, wo der Impuls angebracht werden muss, die Richtung, in die er durchgeführt werden muss, sowie die noch fehlenden Bahnparameter der neuen Bahn Ω_2 , ω_2 , M_{20} und der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_2$.

Nach den vorstehenden Formeln kann in Abhängigkeit von der Zeit t_1 bzw. der wahren Anomalie υ_1 auf der ursprünglichen Bahn das Manöver und damit das Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V = \Delta V(t_1) = \Delta V(\upsilon_1)$ berechnet werden. Damit kann zunächst bei Variation über einen Umlauf auf Bahn (1) festgehalten werden, wie groß der Variationsbereich von ΔV ist und ob der vorgegebene Wert ΔV_2 auch in diesem Bereich liegt. Aus der Kurve kann der Zeitpunkt t_1 bzw. die wahre Anomalie υ_1 direkt abgelesen werden, zu dem der Impuls zu erfolgen hat. Wird dieser Zeitpunkt sehr genau gewünscht, kann er wegen des komplizierten Formelsystems und wegen eines eventuell aufwendigen Bahnmodells zur Berechnung der Ausgangsbahn (1) iterativ aus der Bedingung

$$f(t_1) \equiv \Delta V(t_1) - \Delta V_2 = 0 \tag{12.63}$$

bzw.

$$f(\upsilon_1) \equiv \Delta V(\upsilon_1) - \Delta V_2 = 0 \tag{12.64}$$

berechnet werden. Aus den Kurven ΔV ist ersichtlich, dass wegen der nicht eindeutigen Berechnung von υ_2 zwei Lösungen zu erwarten sind.

BEISPIEL: Es seien die Bahnen des vorherigen Beispiels 1 vorgegeben. Das gewünschte Manöver habe den Impuls $\Delta V_2 = 400$ m/s. Die erste wahre Anomalie, zu der dieser Impuls angebracht werden muss, ist υ_1. Dann ergeben sich die wahre Anomalie υ_2 auf der Zielbahn, der Drehwinkel γ_1 sowie die Geschwindigkeiten v_1 auf der Ursprungsbahn und $v_{2/1}$ im ersten Lösungsfall auf der Zielbahn

$$\upsilon_1 = 90°.012 \quad , \quad \upsilon_{2/1} = 82°.954 \quad ,$$

$$\gamma_1 = 0°.373 \quad , \quad V_1 = 7.329 \text{ km/s} \quad , \quad V_{2/1} = 7.726 \text{ km/s}$$

◀

12.4.2 Bahnmanöver mit vorgegebener Drehung der Apsidenlinie

Der vorhergehenden Aufgabe verwandt ist die Drehung einer Bahnellipse mit nur einem Bahnmanöver, wenn der Drehwinkel vorgegeben ist. Eine erste Abschätzung des Manövers wird mit den elementaren Formeln des Zweikörperproblems durchgeführt.

Die gegebene Bahn habe die große Bahnhalbachse a_1 und Exzentrizität e_1, die Zielbahn entsprechend die große Bahnhalbachse a_2 und Exzentrizität e_2. Die gewünschte Drehung sei durch die Drehung der Apsidenlinie um den Winkel $\Delta\omega$ vorgegeben.

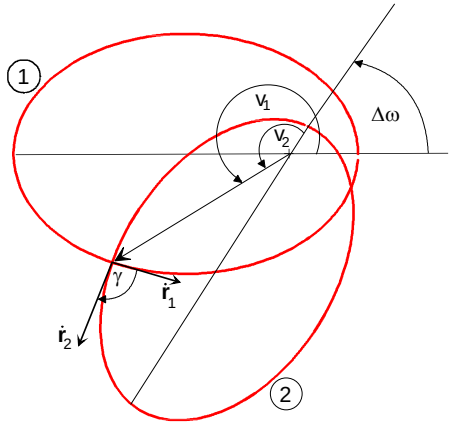


Bild 12-12: Bahnmanöver zur Drehung der Apsidenlinie (Korrektur des Perizentrums)

Alte und neue Bahnellipse schneiden sich in zwei Punkten. Ein Schnittpunkt habe in der alten Ellipse die (noch unbekannte) wahre Anomalie υ_1. In der neuen Ellipse hat er nach Bild 12-12 die wahre Anomalie

$$\upsilon_2 \;=\; \upsilon_1 - \Delta\omega \quad . \tag{12.65}$$

In einem dieser zwei Schnittpunkte muss das Manöver zur Drehung der Bahnellipse, d.h. zur Drehung der Apsidenlinie, durchgeführt werden. Ein solcher Punkt hat in beiden Ellipsen denselben Radius, es gilt also

$$r \;=\; \frac{p_1}{1+e_1\cos\upsilon_1} \;=\; \frac{p_2}{1+e_2\cos\upsilon_2} \quad . \tag{12.66}$$

Sein Ortsvektor in einer Bahnebene – bezogen jeweils im auf die Apside orientierten $\mathbf{q}_j$-Bahnsystem – lautet dann in beiden Systemen

$$\mathbf{r}_1 \;=\; r\left(\mathbf{q}_{11}\cos\upsilon_1 + \mathbf{q}_{21}\sin\upsilon_1\right) =: r\,\mathbf{r}_0 \quad , \tag{12.67}$$

wenn $\mathbf{q}_{11}$ auf das Perizentrum der ersten Ellipse bezogen ist und $\mathbf{q}_{21}$ der zugehörige zweite Richtungsvektor in einem ebenen orthonormierten Bahnsystem ist. Die radiale Geschwindigkeitskomponente lautet in den beiden Systemen

$$\dot r_1 \;=\; e_1\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}\sin\upsilon_1 \;,\quad \dot r_2 \;=\; e_2\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}\sin\upsilon_2 \tag{12.68}$$

und damit die entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren

$$\dot{\mathbf{r}}_1 \;=\; \dot r_1\,\mathbf{r}_0 + \frac{\sqrt{\mu\,p_1}}{r}\,\mathbf{q}_0\,,\quad \dot{\mathbf{r}}_2 \;=\; \dot r_2\,\mathbf{r}_0 + \frac{\sqrt{\mu\,p_2}}{r}\,\mathbf{q}_0 \quad . \tag{12.69}$$

Hier lautet der transversale Richtungsvektor

$$\mathbf{q}_0 \;=\; -\sin\upsilon_1\;\mathbf{q}_1 \;+\; \cos\upsilon_1\,\mathbf{q}_2 \quad . \tag{12.70}$$

Wenn die Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$ vorgegeben sind, kann der Zwischenwinkel γ berechnet werden, um den der Geschwindigkeitsvektor durch das Manöver gedreht werden muss:

$$\cos\gamma \;=\; \frac{\dot{\mathbf{r}}_1\cdot\dot{\mathbf{r}}_2}{V_1V_2} \quad ,\quad V_1 := \left|\dot{\mathbf{r}}_1\right| \;,\quad V_2 := \left|\dot{\mathbf{r}}_2\right| \quad . \tag{12.71}$$

Entsprechend Formel (12.3) ist dann das Geschwindigkeitsinkrement bekannt:

$$\left|\Delta\dot{\mathbf{r}}\right| \;=\; \Delta V \;=\; \sqrt{V_1^2+V_2^2-2V_1V_2\sin\gamma} \quad .$$

Um die Berechnung durchführen zu können, fehlt noch die wahre Anomalie υ_1 für den Ort des Manövers. Aus den Beziehungen (12.66) folgt

$$p_1\left(1+e_2\cos\upsilon_2\right) \;=\; p_2\left(1+e_1\cos\upsilon_1\right) \tag{12.72}$$

und mit Bedingung (12.65)

$$A\cos\upsilon_1 \;+\; B\sin\upsilon_1 + C \;=\; 0 \quad , \tag{12.73}$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned} A &:= e_2\,p_1\cos\Delta\omega - e_1\,p_2 \\ B &:= e_2\,p_1\sin\Delta\omega \\ C &:= p_1 - p_2 \end{aligned} \tag{12.74}$$

verwendet werden. Aus

$$\cos\upsilon_1 + C = -B\sin\upsilon_1 = \mp B\sqrt{1-\cos^2\upsilon_1} \tag{12.75}$$

ergeben sich die elementaren Lösungen

$$\cos\upsilon_1 = \frac{1}{A^2+B^2}\left(-AC \pm B\sqrt{A^2-C^2+B^2}\right) \quad . \tag{12.76}$$

Mit Gleichung (12.75) erhält man 4 Lösungen, von denen nur zwei richtig sein können. Als Bedingungsgleichung kann Gleichung (12.73) herangezogen werden.

Spezialfall: Ursprungs- und Zielbahn haben dieselbe Bahnform, große Bahnhalbachse und Exzentrizität sind identisch, es gilt also $a_1 = a_2$, $e_1 = e_2$, sowie $p_1 = p_2$. Damit kann die gesuchte wahre Anomalie berechnet werden aus

$$\cos\upsilon_1 = \pm\frac{\sin\Delta\omega}{\sqrt{2(1-\cos\Delta\omega)}} = \pm\frac{\sqrt{1+\cos\Delta\omega}}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\upsilon_1 = \frac{1-\cos\Delta\omega}{\sin\Delta\omega} \quad .$$

Damit ergeben sich die beiden Lösungen

$$\upsilon_1 = -\upsilon_2 = \frac{\Delta\omega}{2} \qquad \text{bzw.} \quad \upsilon_1 = -\upsilon_2 = \frac{\Delta\omega}{2} + 180° \quad .$$

Die radialen Variationen betragen

$$\dot r_1 = -\dot r_2$$

und der Rotationswinkel schließlich

$$\cos\gamma = \frac{-\dot r_1^2 + \dfrac{\mu a\left(1-e^2\right)}{r^2}}{\dot r_1^2 + \dfrac{\mu a\left(1-e^2\right)}{r^2}} \quad .$$

Dieser Fall ist zum Beispiel von Interesse, wenn eine Perigäumskorrektur zum Erhalt einer formstabilen Bahn („frozen orbit“) erforderlich wird (siehe hierzu in Kapitel 23, Band IV).

BEISPIEL: Gegeben ist die Bahn $\bar a_0 = 7007.137 km, \bar e_1 = 0.0.00194$. Das Perigäum soll um den Winkel $\Delta\omega = 29°.41$ gedreht werden. Das Manöver muss bei der wahren Anomalie $\upsilon_1 = 14°.705$ durchgeführt werden. Mit dem Radius $r_1 = r_2 = 6993.987\,\text{km}$ und den radialen Variationen $\dot r_1 = -\dot r_2 = 3.714\,\text{km/s}$, sowie der momentanen Geschwindigkeit $V_1 = V_2 = 7.55638\,\text{km/s}$ ergeben sich der Drehwinkel $\gamma = 0°.056322$ und das Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V = 7.428\,\text{m/s}$. ◀

12.4.3 *Hohmann* Übergänge

Walter Hohmann (1880-1945) schlug in seinem Buch *„Die Erreichbarkeit der Himmelskörper, Untersuchungen über das Raumfahrtproblem“* (1925) koplanare Übergangsbahnen zwischen zwei kreisnahen Planetenbahnen als „günstigste Verbindungsmöglichkeit“ vor. Diese nach ihrem Entdecker als *Hohmann-Übergangsbahnen* (bisweilen auch *Hohmann*-Transferbahn) genannte Bahnen sind die Grundlage für die Berechnung optimaler Übergangsbahnen, optimaler Bahnkorrekturen, für den Einschuss in eine stationäre Umlaufbahn, für interplanetare Trajektorien usw.[1].

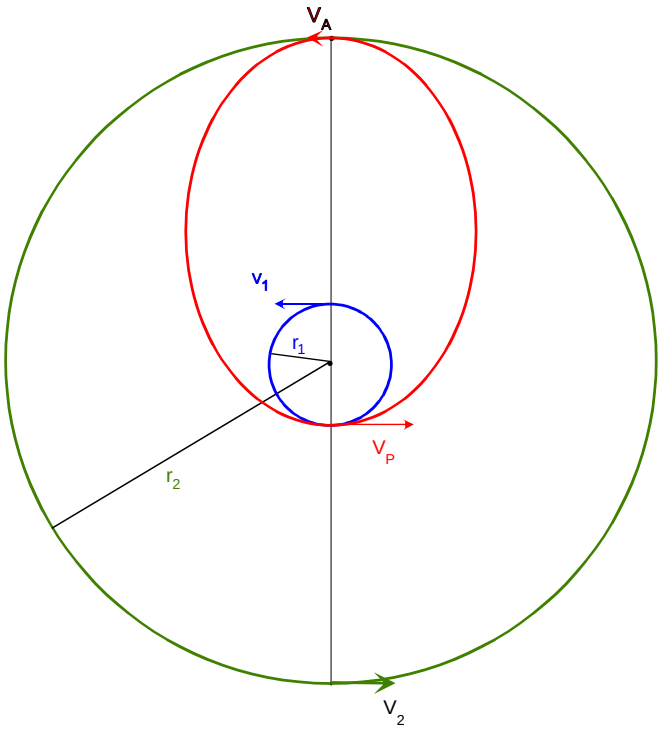


Bild 12-13: *Hohmann*-Transfer, koplanarer Übergang von Kreisbahn zu Kreisbahn

Es soll der Übergang aus einer niedrigen Kreisbahn mit Radius r_1 in eine hohe Kreisbahn mit Radius r_2 untersucht werden (siehe Bild 12-13). Als Übergangsbahn wird eine Ellipse gewählt, deren Perizentrum auf der niedrigen Bahn, deren Apozentrum auf der hohen Bahn liegt. Die Übergangsbahn hat somit den Perizentrumsradius

$$r_1 = r_P = a\,(1-e) \tag{12.77}$$

sowie den Apozentrumsradius

$$r_2 = r_A = a\,(1+e) \quad , \tag{12.78}$$

woraus die große Halbachse und die Exzentrizität der Übergangsbahn berechnet werden können:

[1] siehe etwa SCHULZ ed. [1980]

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_2 + r_1}{2} \\ e &= \frac{r_2 - r_1}{2a} \quad . \end{aligned} \tag{12.79}$$

Die Kreisbahngeschwindigkeit auf der niedrigen Bahn ist

$$V_{K1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad , \tag{12.80}$$

auf der hohen Bahn

$$V_{K2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad , \tag{12.81}$$

die Geschwindigkeit im Perizentrum der Übergangsellipse

$$V_P = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1 + r_2}\frac{r_2}{r_1}} \quad , \tag{12.82}$$

im Apozentrum

$$V_A = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{r_1}{r_2}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_1 + r_2}\frac{r_1}{r_2}} \quad . \tag{12.83}$$

Das Geschwindigkeitsinkrement zum Erreichen der Übergangsbahn von der niedrigen Bahn aus beträgt

$$\Delta V_1 = V_P - V_{K1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1\right) \quad , \tag{12.84}$$

zum Einschuss aus der Übergangsbahn in die hohe Bahn

$$\Delta V_2 = V_{K2} - V_A = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) \quad . \tag{12.85}$$

Der gesamte Geschwindigkeitsbedarf, der aufgewendet werden muss, um von einer Ursprungsbahn eine Zielbahn zu erreichen, wird gelegentlich als *charakteristische Geschwindigkeit* bezeichnet[1]:

$$\Delta V_{\text{char}} = \left|\Delta\dot{\mathbf{r}}_1\right| + \left|\Delta\dot{\mathbf{r}}_2\right| \quad . \tag{12.86}$$

Im Fall des koplanaren *Hohmann*-Transfers lautet die charakteristische Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{char}} &= \Delta V_1 + \Delta V_2 = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) + \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}}\right) \quad . \end{aligned} \tag{12.87}$$

Die Dauer des Übergangsfluges von der Ursprungs- in die Zielbahn ergibt sich aus der *Kepler*schen Umlaufzeit der Übergangsellipse

[1] siehe etwa R. H. GIESE [1966], p. 124

$$P_K = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

näherungsweise zu

$$\Delta t_{\text{Hoh}} = \pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad . \tag{12.88}$$

Der Schub zur Bahnänderung von der niedrigen in die hohe Bahn muss im Fall des *Hohmann*-Transfers stets in Bewegungsrichtung angebracht werden. Soll umgekehrt von einer hohen in eine niedrige Bahn geflogen werden, muss der Korrekturschub stets entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung angebracht werden. Die charakteristische Geschwindigkeit ist in beiden Fällen gleich.

Eine Verallgemeinerung des gefundenen *Hohmann*-Transfers kann im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung erfolgen (siehe in Kapitel 11).

BEISPIEL 1: **Transfer in geostationäre Bahn**

Es werde der Übergang von einer 200 km Kreisbahn in die 35788 km hohe geostationäre Bahn betrachtet. Es ist

$$r_1 = 6578.140\,\text{km} \quad , \quad r_2 = 42166.28914\,\text{km} \quad ,$$

somit

$$a = 24372.215\,\text{km} \quad , \quad e = 0.730 \quad ,$$

$$V_{K1} = 7.784\,\text{km/s} \quad , \quad V_{K2} = 3.074\,\text{km/s} \quad ,$$

$$V_P = 10.263\,\text{km/s} \quad , \quad V_A = 1.593\,\text{km/s} \quad ,$$

$$\Delta V_1 = V_P - V_{K1} = 2.485\,\text{km/s} \quad , \quad \Delta V_2 = V_{K2} - V_A = 1.481\,\text{km/s} \quad ,$$

$$\Delta V_{\text{char}} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 3.966\,\text{km/s} \quad , \quad \Delta t_{\text{Hoh}} = 5^h 15^m 33^s.168 \quad .$$

Der Transfer eines Satelliten in eine geostationäre Bahn aus einer 200 km hohen Parkbahn erfordert das gesamte Geschwindigkeitsinkrement 3.966 km/s. Der Transfer dauert $5^h 15^m 33^s.168$. In der Praxis wird heutzutage ein Satellit direkt in eine Transferbahn eingeschossen. Der Satellit benötigt zum Einschuss in die geostationäre Bahn daher nur einen Apogäumsmotor, der das Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V_2 = 1.481\,\text{km/s}$ aufbringen kann. ◀

BEISPIEL 2: **Positionierung des DFS**

Zur Minimierung von Triebwerksfehlern wird der Transfer eines Satelliten in eine geostationäre Bahn manchmal nicht mit einer, sondern mit vier Übergangsbahnen durchgeführt, wozu der Apogäumsmotor an Bord des Satelliten dreimal gezündet werden muss (es wird auch hier angenommen, dass der Einschuss in die erste Übergangsbahn direkt von der Aufstiegsrakete erfolgt). Bild 12-16 zeigt die Einschussbahnen des Satelliten DFS-3. Die erste Übergangsbahn (TO = Transferbahn) wird nach dem Einschuss von der Startrakete im ersten aufsteigenden Knoten der Bahn erreicht. Von dort an bewegt sich der Satellit auf einer (elliptischen) *Kepler*-bahn über 1.5 anomalistische Umläufe. Bei Erreichen des zweiten Apogäums der Bahn wird

der Apogäumsmotor zum ersten Mal gezündet. Dadurch wird die erste Zwischenbahn (IO1 = Intermediate Orbit 1) erreicht, mit der das Perigäum angehoben und die Inklination abgebaut wird. Diese Bahn wurde so gewählt, dass das zweite Apogäum bereits in der Nähe des Zielortes auf der angestrebten geostationären Bahn liegt. Im zweiten Apogäum der Bahn wird der Apogäumsmotor zum zweiten Mal gezündet und damit die zweite Zwischenbahn (IO2) erreicht. Schließlich wird mit einer dritten Zündung des Apogäumsmotors der Driftorbit (DO) erreicht. Die Beträge für das jeweilige Geschwindigkeitsinkrement und weitere Parameter sind in Tabelle 12-1 zusammengestellt. Die drei Impulse bewirken das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 1.34488897 \ .$$

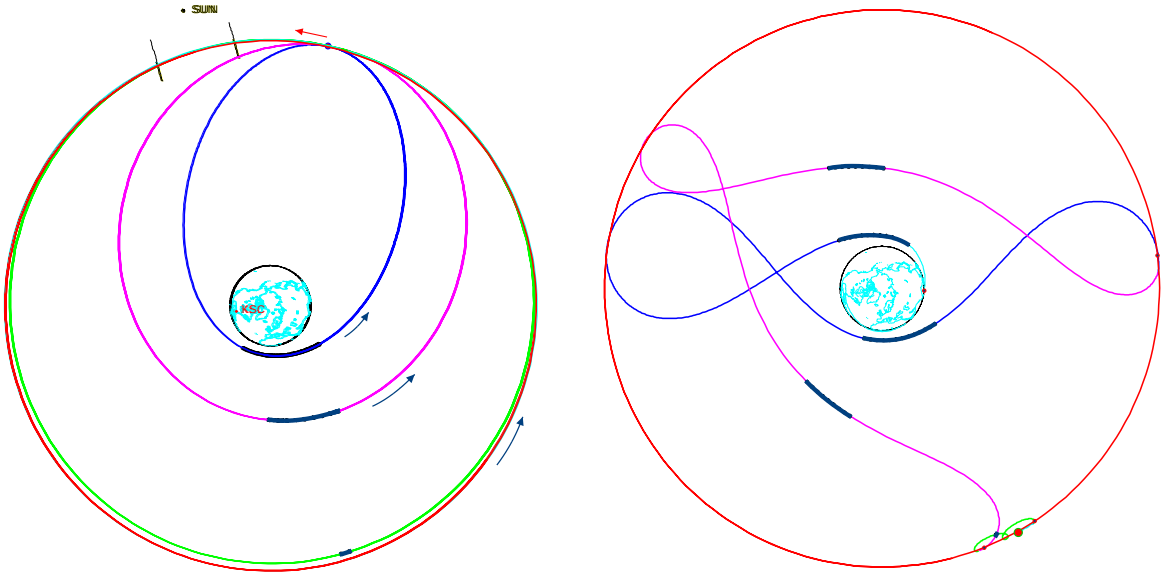


Bild 12-14 (linkes Bild): „inertiale Darstellung“ der Einschussbahnen des DFS in seine endgültige Position

Bild 12-15(rechtes Bild): „relative Darstellung“ der Einschussbahnen bei Bezug auf die feste Erdoberfläche

	TO	**IO1**	**IO2**	**DO**
$a\,[\mathrm{km}]$	25118.2651	30177.9845	41669.2817	42274.4211
e	0.68636158	0.403789313	0.016835986	0.002312399
i	19°.79957	7.0522358	0°.24548737	0°.06873922
$H_P\,[\mathrm{km}]$	1507.59	11614.297	34589.598	35798.5258
$H_A\,[\mathrm{km}]$	35980.337	35985.391	35992.685	35994.0364
$V_A\,[\mathrm{km}]$	1.71866673	2.36849617	3.041224028	3.0635557
$\Delta V\,[\mathrm{km/s}]$		0.649829442	0.672727855	0.022331672
$\sum \Delta V\,[\mathrm{km/s}]$				1.34488897

Tabelle 12-1: Oskulierende Parameter der Einschussbahnen des DFS-3

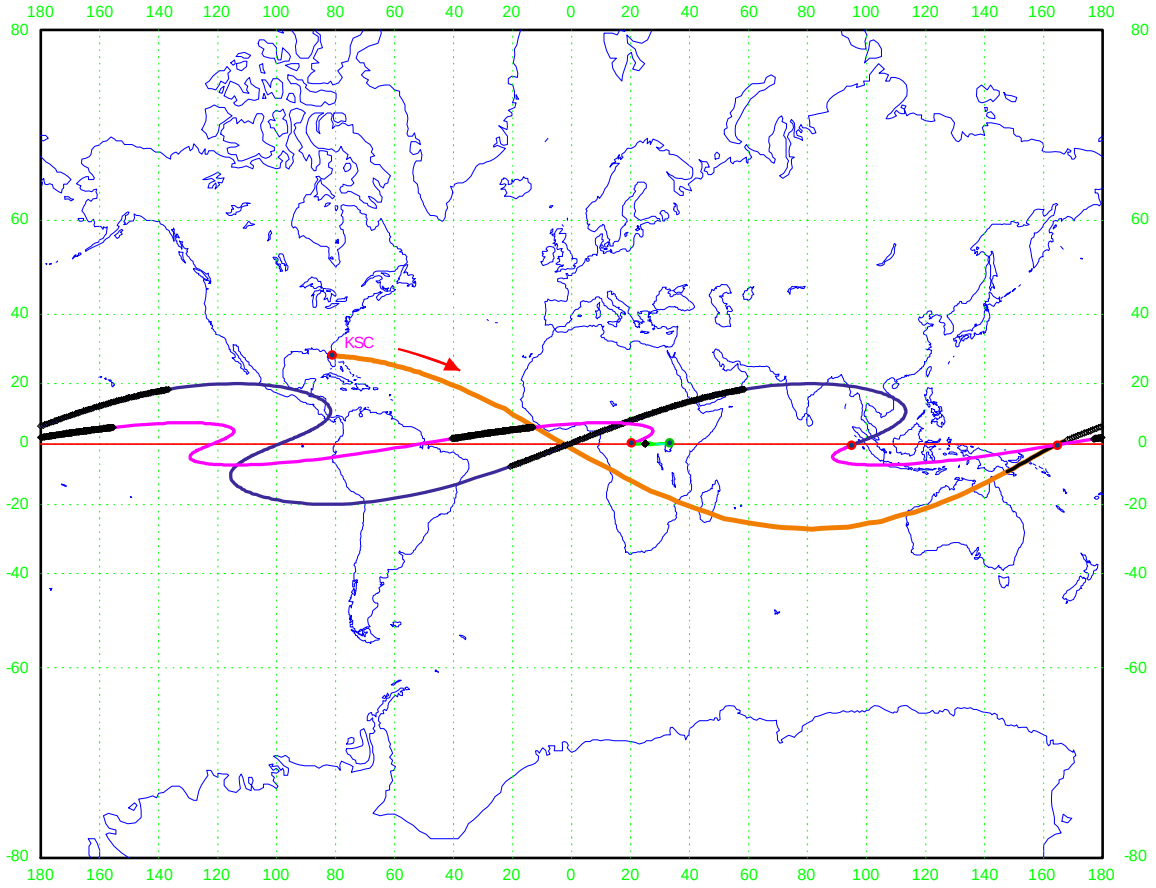


Bild 12-16: Einschuss des DFS-3 mit dreimaligem Zünden des Apogäumsmotors, in „inertialer“ Darstellung gesehen vom Nordpol des Äquators (Bild 12-14), bezogen auf die feste Erde (Bild 12-15) und in Merkatorprojektion. Die verschiedenen Transferbahnen sind jeweils in derselben Farbkodierung dargestellt, schwarze Bahnabschnitte liegen im Erdschatten, die Orte für das Zünden des Apogäumsmotors sind markiert. Im unteren Bild ist auch der Abbau der Bahninklination zu erkennen, der in den beiden oberen Bildern nicht sichtbar ist. In brauner Farbgebung ist die Aufstiegsbahn mit der Startrakete bis zum Einschuss im ersten aufsteigenden Bahnkoten eingetragen

Dieses ist geringer als das einzige Apogäumsmanöver im vorhergehenden Beispiel, da der Einschuss in diesem Fall nicht aus einer Parkbahn in 200 km Höhe erfolgte, sondern von der Startrakete bereits in der Höhe von etwa 1507 km durchgeführt wurde. Mit Erreichen der Driftbahn (DO) ist der Einschussprozeß in eine geostationäre Position noch nicht abgeschlossen. Es folgen im Prinzip nach demselben Schema noch eine Serie von Feinakquisitionsmanövern, die aber nicht Gegenstand dieses Beispiels sein sollen[1]. ◀

BEISPIEL 3: **Korrektur einer Bahnabsenkung**

Eine erdnahe Satellitenbahn wird durch Einwirkung des Luftwiderstandes allmählich abgesenkt. Sei $\bar{a}_0$ die mittlere Bahnhalbachse zum Zeitpunkt t_0, $\dot{a}_s$ die säkulare Halbachsenabnahme, so lautet die mittlere Halbachse zum Zeitpunkt

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{a}_s \left(t - t_0\right) \quad . \tag{12.89}$$

[1] siehe hierzu zur Vertiefung etwa SOOP [1983], auch ECKSTEIN [1980], Cel. Mech. **21**, 129–147, und ECKSTEIN [1983], DFVLR-FB 83-02

Gegeben seien $\bar{a}_0 = 7153.134\,\text{km}$ und

$$\dot{a}_s \;=\; -1.28892\times10^{-7}\,\text{km/s} \;\cong\; -4.067522\,\text{km/y} \;\cong\; -334\,\text{m/30d} \quad .$$

Nach 30 Tagen wurde die Bahn auf $\bar{a} = 7152.7999\,\text{km}$ abgesenkt. Gesucht ist das gesamte benötigte Geschwindigkeitsinkrement, um wieder die ursprüngliche Bahn zu erreichen. Unter der Annahme, dass ursprüngliche und fehlerhafte Bahn nahezu kreisförmig sind, kann Formel (12.87) angewendet werden. Dies ergibt mit $r_1 = \bar{a}$, $r_2 = \bar{a}_0$ das alle 30 Tage in Bewegungsrichtung aufzuwendende Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V = 0.174\,\text{m/s}$. ◀

BEISPIEL 4: **Interplanetare Trajektorien**

Es werde der *Hohmann*-Transfer Erde–Venus betrachtet[1]. Die mittlere Erdbahn um die Sonne hat die große Bahnhalbachse

$$a_{\oplus} \;=\; 1.4959787\times10^{8}\,\text{km} \;=\; 1\,\text{AE} \quad ,$$

die Venusbahn (1984, Jan, 20, 0^h UT ; bezogen auf das mittlere Äquinoktium J2000.0)

$$a_{\varphi} \;=\; 1.082087\times10^{8}\,\text{km} \;=\; 0.7233306\,\text{AE} \quad .$$

Mit der heliozentrischen Gravitationskonstanten $\mu_{\odot} = 1.32712438\times10^{11}\,\text{km}^3/\text{s}^2$ hat ein Raumflugkörper auf der Transferellipse beim Abflug von der Erde die Geschwindigkeit nach Formel (12.83)

$$V_A \;=\; 27.289\,\text{km/s} \quad ,$$

während die Erde auf ihrer kreisförmig angenommenen Bahn die Geschwindigkeit

$$V_{\oplus} \;=\; 29.785\,\text{km/s}$$

hat.

Das Geschwindigkeitsinkrement, das der Raumflugkörper nach Verlassen des Erdanziehungsbereichs aufwenden muss, um auf einen *Hohmann*-Übergang zur Venus zu gelangen, beträgt also

$$\Delta V_1 \;=\; V_{\oplus} - V_A \;=\; 2.496\,\text{km/s}$$

und ist zur Erdbewegung entgegengesetzt gerichtet. Im Perihel dieser Bahn, also auf der Venusbahn, ist

$$V_P \;=\; 37.727\,\text{km/s} \quad ,$$

während die Geschwindigkeit auf der wieder kreisförmig angenommenen Venusbahn

$$V_{\varphi} \;=\; 35.021\,\text{km/s}$$

beträgt. Das zweite Geschwindigkeitsinkrement zum Einschuss in die Venusbahn beträgt somit

$$\Delta V_2 \;=\; V_P - V_{\varphi} \;=\; 2.706\,\text{km/s}$$

und das Gesamtinkrement

[1] W. HOHMANN [1925], p. 65 ff.

$$\Delta V_{ges} \;=\; \Delta V_{char} \;=\; \Delta V_1 + \Delta V_2 \;=\; 5.202\ \text{km/s} \quad .$$

Die *Hohmann*-Übergangsbahn hat die Halbachse

$$a \;=\; 1.289033 \times 10^8\ \text{km}$$

und die Exzentrizität

$$e \;=\; 0.160547 \quad .$$

Die Flugdauer auf dieser Bahn von der Erde zur Venus beträgt

$$\Delta t_{Hoh} \;\approx\; 146^d\ 2^h \quad .$$

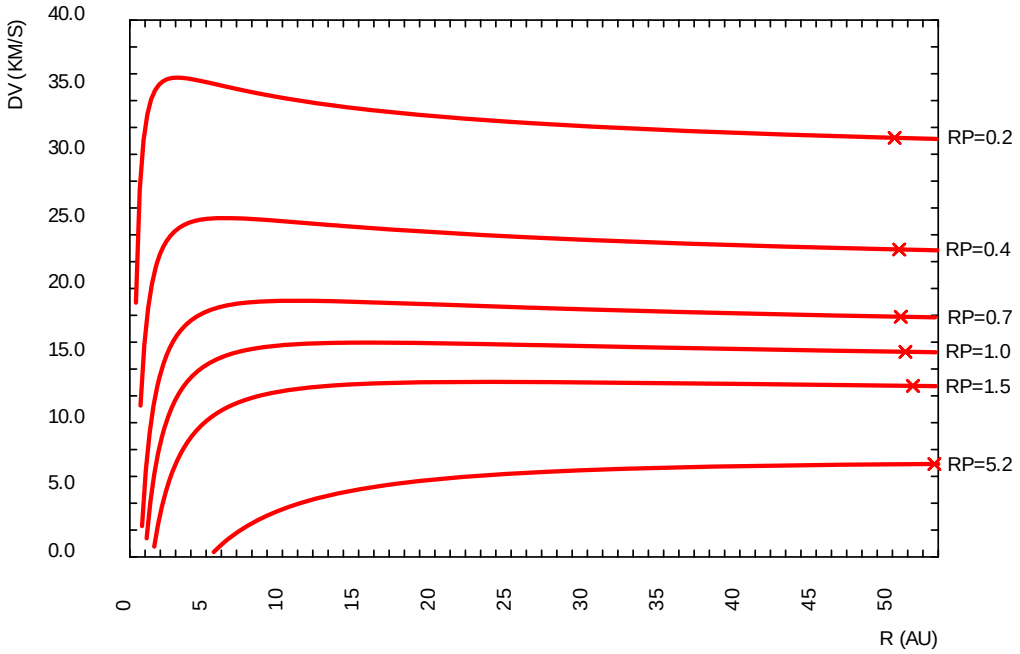


Bild 12-17: Verlauf des Gesamtgeschwindigkeitsinkrements ΔV um von verschiedenen Ausgangsbahnen auf einem *Hohmann*-Transfer im Außenbereich des Sonnensystems eine Kreisbahn mit heliozentrischem Abstand r zu erreichen

Dieses und einige weitere Beispiele für *Hohmann*-Übergangsbahnen im interplanetaren Raum sind in Anhang G zusammengestellt. Die Beispiele geben nur einen ersten Anhaltswert, da die Planetenbahnen kreisförmig und koplanar angenommen wurden. Die Werte der Tabelle dienen als Ausgangsnäherungen für verfeinerte Untersuchungen. Für den Flug von der Erde zum Mond wurde eine Parkbahn in 200 km Höhe und die Geschwindigkeit beim Abflug von dieser Bahn im Anziehungsbereich der Erde betrachtet. Die Übergangsbahnen im Jupiter-, Saturn-, Uranus- und Neptunsystem aus Planetennähe zu einem der Monde gehen von einer Parkbahn in 1000 km Höhe über der jeweiligen Planetenoberfläche aus. Dagegen wurde in den Fällen eines Fluges von einem Planeten zu einem anderen angenommen, dass der Raumflugkörper den Anziehungsbereich der Erde (bzw. des entsprechenden Startplaneten) bereits verlassen hat und sich auf der Erdbahn (bzw. der entsprechenden Planetenbahn) befindet. Es ist also für die Ausweisung des Gesamtbudgets die Fluchtgeschwindigkeit vom Startplaneten weg noch hinzuzufügen.

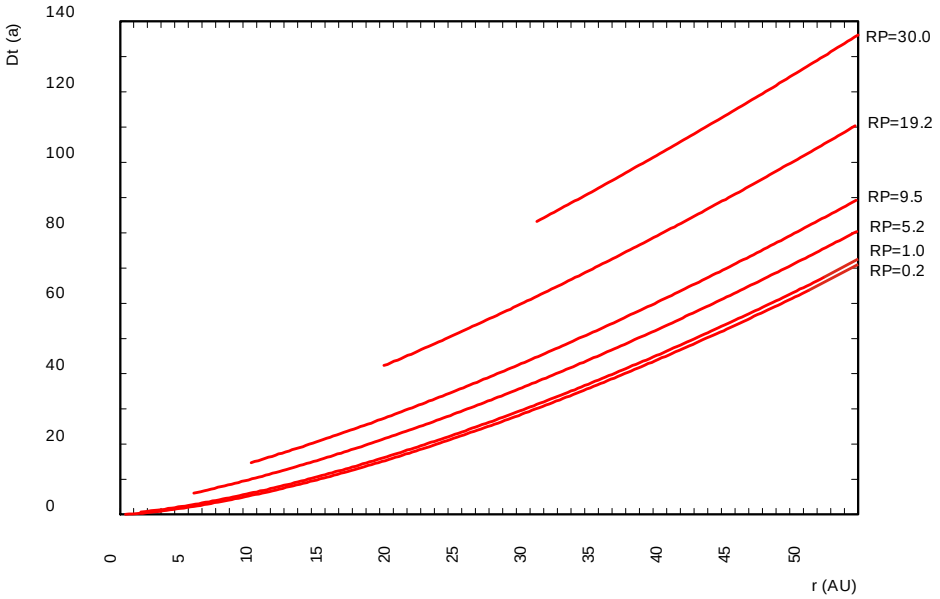


Bild 12-18: Zeitbedarf Δt [Jahre], um auf einem *Hohmann*-Transfer von verschiedenen Bahnen in Sonnennähe andere Bahnen mit heliozentrischem Abstand r im Außenbereich des Sonnensystems zu erreichen

Wird die Entwicklung des totalen Geschwindigkeitsinkrements ΔV beim Transfer von einem bestimmten Planeten zu den weiter außen befindlichen Planeten betrachtet, ergeben sich zwei merkwürdige Ergebnisse:

Zunächst fällt auf, dass das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement ΔV bis zu einer bestimmten heliozentrischen Entfernung stark zunimmt, dann aber für Flüge zu noch größeren heliozentrischen Distanzen allmählich bis zu einem Grenzwert wieder abnimmt. Es ist also billiger, d. h. das benötigte Geschwindigkeitsinkrement wird geringer, auf *Hohmann*-Transferbahnen zu weiter entfernten als zu näheren Planeten zu fliegen, auch wenn der Zeitaufwand hierfür größer wird. Dies zeigt Bild 12-17 in dem der ΔV - Verlauf für den Abflug von der Sonnendistanz $r_P = 0.2$ AE (fiktiv), von $r_P = 0.4$ AE (Merkurbahn), bis $r_P = 5.2$ AE (Jupiterbahn) für Flüge bis in die Sonnenentfernung $r_P = 53$ AE aufgetragen ist.

Als zweites zeigen die Tabellen in Anhang G, dass die für einen *Hohmann*-Transfer in den Außenraum des Sonnensystems benötigten Zeiten beträchtlich steigen, je weiter entfernt von der Sonne sie gestartet werden. So benötigt der *Hohmann*-Transfer zum Pluto von der Merkurbahn aus 44.3 Jahre, von der Erdbahn aus 45.3 Jahre, von der zu Pluto benachbarten Neptunbahn aus jedoch ganze 102 Jahre. Ein *Hohmann*-Transfer im Sonnensystem ist also umso weniger akzeptabel, in je größerem heliozentrischem Abstand der Transfer gestartet wird. Die Verhältnisse sind in Bild 12-18 veranschaulicht. Hier werden die Gesamttransferzeiten Δt_t auf *Hohmann*-Übergängen aus der heliozentrischen Distanz $r_P = 0.2$ AE (innerhalb der Merkurbahn) bis $r_P = 30$ AE (Neptunbahn) in den Außenraum dargestellt (weiteres hierzu in Abschnitt 12.7.3 auf Seite 12149).

12.4.4 Kleine Änderungen der Bahnform

Kleine Änderungen der Bahnhalbachse kreisnaher Bahnen können aus der Kreisbahngeschwindigkeit (12.80) auf S. 173 $V_K = \sqrt{\mu / a_K}$ direkt hergeleitet werden. Sei a_K die momentane mittlere Bahnhalbachse (genau genommen einer Kreisbahn bzw. in der Umgebung des Manövers durch eine Kreisbahn mit Radius a_K angenähert), so hat eine Variation um Δa das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V \;=\; \Delta V_K \;=\; -\frac{V_K}{2\,a_K}\,\Delta a \tag{12.90}$$

zur Folge.

BEISPIEL: Das dritte Beispiel des Abschnittes 12.4.3 liefert mit a = 7153.7999 km, V_K = 7.465 km/s und $\Delta a = -334\,\mathrm{m}$ das Geschwindigkeitsinkrement ΔV = 0.174 km/s in numerischer Übereinstimmung mit dem aus einer *Hohmann*-Übergangsbahn errechneten Wert. ◀

➢ *Zur Abschätzung kleiner Bahnänderungen kreisnaher Bahnen braucht die aufwendige Formel* (12.87) *nicht verwendet zu werden.*

Für kleine Änderungen in der Exzentrizität ausgehend von einer Kreisbahn mit Radius a_K wird ein Manöver ΔV im Perigäum bzw. Apogäum der neuen Bahn mit großer Bahnhalbachse a und Exzentrizität $e = \Delta e$ angenommen, es gilt daher für die Änderung der großen Bahnhalbachse die Beziehung

$$r_{P/A} \;=\; a_K \;=\; a\left(1 \mp \Delta e\right) \;=\; a \;+\; \Delta a \quad ,$$

somit

$$\Delta e \;=\; \pm\frac{\Delta a}{a} \;\approx\; \pm\frac{\Delta a}{a_K} \quad , \quad \left(e = \Delta e \ll 1\right) \quad . \tag{12.91}$$

Vergleich mit Formel (12.90) führt auf das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V \;=\; \Delta V_K \;=\; \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a_K}}\;\Delta e \;=\; \mp\frac{1}{2}\,V_K\;\Delta e \quad . \tag{12.92}$$

Das Manöver wird in transversaler Richtung, die bei kreisnahen Bahnen im Wesentlichen mit der tangentialen Richtung übereinstimmt, durchgeführt.

BEISPIEL: Wird die kreisnahe Bahn $a_K = 7148.773\,\mathrm{km}$ mit der Exzentrizität $e_K = 0.0001102$ als Ausgangsbahn gewählt und ein tangentiales Manöver mit dem Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V_T = 6\,\mathrm{m/s}$ durchgeführt, so betragen die neuen Bahnelemente a = 7160.247 km mit der neuen Exzentrizität e = 0.00171435. Zur Bestätigung der Formeln (12.90) und (12.92) werden die folgenden Relationen berechnet: $\Delta e = e - e_K = 0.001604$, V_K = 7.46712 km/s, ΔV_K = 0.006 km/s, $2\,\Delta V_K / V_K$ = 0.001607, $\Delta a / a_K$ = 0.001605. Die Übereinstimmung der Daten in der Größenordnung von besser als 10^{-5} ist sehr befriedigend. ◀

12.4.5 Kleine Positionsänderungen längs der Bahn

Um den Aufwand abschätzen zu können, der erforderlich ist um einen Satelliten in seiner Position längs seiner Bahn um den Betrag $\Delta\upsilon$ der wahren Anomalie zu verschieben, werde die Bahn in diesem Abschnitt als kreisförmig betrachtet. Dann kann das Intervall in wahrer Anomalie durch ein entsprechendes Intervall in mittlerer Anomalie ersetzt werden

$$\Delta\upsilon \approx \Delta M = M_i - M \quad , \quad (i = 1,2)$$

mit

$$M = M_0 + n(t - t_0)$$
$$M_i = M_0 + n(t_i - t_0) \quad , \ (i = 1,2) \quad .$$

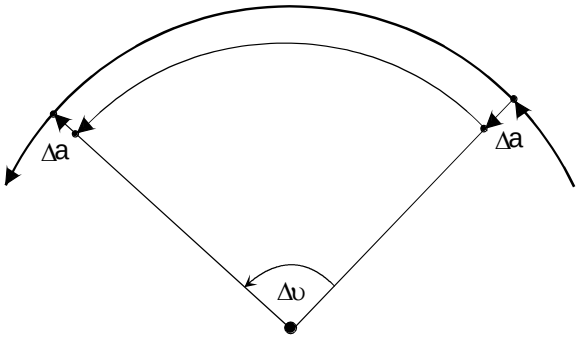


Bild 12-19: Kleine Positionsverschiebungen längs der Bahn

Mit a als großer Bahnhalbachse der Bezugsbahn ist $n = \sqrt{\mu / a^3}$ die (*Kepler*sche) mittlere Bewegung längs dieser Bahn. Eine kleine Variation Δa in der großen Bahnhalbachse mit Anwendung eines tangentialen Schubes nach Formel (12.90) bringt den Satelliten, nachdem über zwei Impulse seine Bewegung wieder kreisförmig gemacht wurde, auf eine Bahn mit etwas modifizierter großer Bahnhalbachse

$$a_{1/2} = a \pm \Delta a \ .$$

Die höhere Bahn wird gewählt um eine Position nach dem Bezugspunkt zu erreichen, die tiefere für einen Ort vor dem Bezugspunkt. Die mittlere Bewegung auf dieser Manöverbahn ist

$$n_i = \sqrt{\frac{\mu}{a_i^3}} \quad , \quad (i = 1,2) \quad .$$

Wird angenommen, dass auf beiden Bahnen mit derselben mittleren Anomalie M_0 gestartet wird, erreichen die beiden Bahnen nach dem Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$ die mittleren Anomalien M bzw. M_i. Die gewünschte Winkeldifferenz $\Delta\upsilon$ zwischen der Bezugsbahn und der zweiten manövrierten Bahn entspricht

$$\Delta\upsilon \approx \Delta M = M_i - M = (n_i - n)\,(t_i - t_0) = (n_i - n)\,\Delta t \quad .$$

Nach dem Zeitintervall

$$\Delta t = \frac{\Delta\upsilon}{|n_i - n|} \quad , \quad (i = 1,2) \qquad (12.93)$$

wird das zweite Manöverpaar durchgeführt um den Satelliten wieder auf die Ursprungsbahn zu bringen, jetzt jedoch um den Betrag $\Delta\upsilon$ gegenüber dem Bezugsort verschoben. Die Zeitdauer für das gesamte Manöver hängt vom Geschwindigkeitsinkrement ΔV_T ab, das die große Bahnhalbachse der Bezugsbahn entsprechend Formel (12.90) um den Betrag Δa verändert. Umgekehrt wird bei Variation um den Betrag Δa das entsprechende Geschwindigkeitsinkrement berechnet und damit der Zeitaufwand Δt erhalten. Erfahrungsgemäß führt ein Faktor 10 in Δa zu einem Faktor 10^{-1} in der Zeit.

BEISPIEL: Auf der kreisnahen Bahn a_K = 6883.509 km sollen zwei Satelliten, die gemeinsam eingeschossen wurden, um die Distanz Δx = 50 km getrennt werden. Während sich der erste Satellit unbeeinflusst weiter bewegt, soll der zweite durch Manöver hinter dem ersten positioniert werden. Der Distanz 50km entspricht in der gegebenen Bahn der Winkel $\Delta\upsilon=\Delta x/a_K$ = 0°.41618 und das Zeitintervall Δt = 6.6 sec. Unter der Annahme, dass das Gesamtmanöver eine Dauer von Δt_r= 96^h.3716 haben soll, ergibt sich nach Formel (12.93)

$$\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = 2.0936715\cdot 10^{-8} \text{ rad/s} = n_2 - n_1 \quad ,$$

wobei

$$n_1 = \sqrt{\mu / a_K^3} = 1.10549\cdot 10^{-3} \text{ rad/s} .$$

Somit wird $n_2 = \sqrt{\mu / a_2^3} = 1.10546722\cdot 10^{-3}$ rad/s . Daraus wird a_2=6884.59585 km berechnet und Δa=0.08685 km. Dies führt mit Formel (12.90) auf das Geschwindigkeitsinkrement 0.04800647 m/s, das bei Start und Ende des Transfers angewandt werden muss. Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement beträgt daher ΔV=0.09601294 m/s. ◀

Anmerkung: Man muss beachten, dass für das hier geschilderte Verfahren nur die spezielle *Kepler*bewegung herangezogen worden ist, was bei sehr kleinen Manövern erlaubt sein kann. Vergleiche hierzu die Verfahren in Kapitel 22 (Band IV).

12.4.6 Abschätzung eines Längenfehlers in der Bahn

Eine Abschätzung eines Längenfehlers in der Bahn wird in diesem Abschnitt an einem einfachen, in der Praxis aber häufig vorkommenden Beispiel durchgeführt. Gesucht werde der Längenfehler Δl in der Bahn (der „alongtrack error“) für eine kreisnahe Bahn nach einem oder mehreren (anomalistischen) Umläufen, wenn die Variation Δa der großen Bahnhalbachse nach einem oder mehreren Umläufen bekannt ist.

Es sei γ der einer Strecke der Länge l in der Bahn zugeordnete Zentralwinkel. Mit der Relation

$$\frac{\Delta l}{\Delta\gamma} = \frac{2r\pi}{2\pi} = r \quad , \tag{12.94}$$

gilt dann für kreisnahe Bahnen mit Bahnradius $r \approx a$

$$a\,\Delta\gamma = \Delta l \quad . \tag{12.95}$$

Aus der mittleren Anomalie, wie sie näherungsweise mit den Formeln des 2-Körperproblems berechnet werden kann,

$$M = M_0 + n(t - t_0) \quad ,$$

ergibt sich bei kleinen Änderungen Δt eine kleine Änderung in der mittleren Anomalie

$$\Delta M = n \, \Delta t \quad ,$$

bei kreisnahen Bahnen mit $\Delta\gamma \approx \Delta M$ auch

$$\Delta\gamma \approx n \, \Delta t \quad .$$

Die mittlere (*Kepler*sche) Bewegung $n = 2\pi / P$ mit der *Kepler*schen Umlaufzeit *P* liefert bei kleinen Änderungen

$$\Delta n = -\frac{2\pi}{P^2} \Delta P \quad .$$

Einer Änderung ΔP in der Umlaufzeit entspricht einer Änderung $\Delta t \approx \Delta P$ in der Zeit, somit

$$\Delta\gamma \approx n \, \Delta t = -P \, \Delta n$$

bzw.

$$\frac{\Delta n}{n} = -\frac{\Delta\gamma}{2\pi}$$

und es wird

$$\Delta l = r \, \Delta\gamma \approx a \, \Delta\gamma \approx -a \, P \, \Delta n \quad . \tag{12.96}$$

Nach dem dritten *Kepler*schen Gesetz in der elliptischen Form $\mu = n^2 a^3$ wird

$$\Delta n = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \Delta a \quad , \tag{12.97}$$

somit

$$\Delta l = -a \, P \, \Delta n = \frac{3}{2} n \, P \, \Delta a \quad ,$$

also

$$\Delta l = 3\pi \, \Delta a \quad . \tag{12.98}$$

Auf einer kreisnahen Bahn ist der Halbachsenfehler Δ*a* zu erwarten, wenn der Ort des Satelliten in der Länge mit der Genauigkeit Δ*l* gemessen werden kann. Es muss aber beachtet werden, dass mit dieser Formel nicht die Abnahme der Halbachse erfasst wird, wie sie etwa durch den Einfluss nichtgravitativer Kräfte wie etwa den Luftwiderstand im Verlauf der Zeit verursacht wird.

Nach *N* (anomalistischen) Umläufen gilt somit die Beziehung

$$\left|(\Delta l)_N\right| = 3\pi \, N \, \Delta a \quad . \tag{12.99}$$

Besteht ein Messfehler („Trackingerror“) von σ[m], lässt sich bei einer Bahnbestimmung ein Fehler in der Berechnung der großen Bahnhalbachse *a* mit der oberen Grenze

$$|\Delta a| < \frac{2\sigma}{3\pi N} \tag{12.100}$$

erwarten. Dies bedeutet:

➢ *Je größer der Bahnbogen ist, über den gemessen werden kann, um so genauer kann die Bahnhalbachse bestimmt werden.*

BEISPIEL: Der Satellit TOPEX[1] (H = 1336 km, e = 0.0, i = 66°) wird mit einer Messgenauigkeit von σ = 100 m vermessen. Bei einem Messzyklus von einem Tag ≈ 13 Umläufen ist dann nach Formel (12.100) die Halbachse mit einer Genauigkeit von

$$|\Delta a| \;<\; \frac{21.22}{13}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{P}} \;=\; 1.63\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{P}}$$

bekannt. Nach 7 Tagen Bahnvorhersage, also etwa 91 Umläufen, kann die Bahnhalbachse mit dieser Genauigkeit von 1.63 m bestimmt werden, wenn der Ort des Satelliten in seiner Bahn entsprechend Formel (12.99) nur mit der Genauigkeit

$$\left|(\Delta l)_N\right| \;=\; 1.4\,\frac{\mathrm{km}}{7^d}$$

vermessen wird. Diese Aussage ist allerdings darauf beschränkt, dass Bahnbestimmung und Bahnvorhersage mit demselben Bahnmodell durchgeführt werden. Werden unterschiedliche Bahnmodelle verwendet (analytische Modelle unterschiedlicher Genauigkeit, numerische Modelle) muss auch der Unterschied in der Modellierung berücksichtigt werden, wodurch sich die Genauigkeitsaussage verschlechtern wird. ◀

12.4.7 Beliebige Zwei-Impuls-Übergangsbahnen

Es sind prinzipiell unendlich viele Übergangsbahnen zwischen zwei gegebenen Bahnen möglich, wobei die *Hohmann*-Übergangsbahn der Spezialfall mit in der Regel minimalem Geschwindigkeitsinkrement (also Treibstoffverbrauch), jedoch mit großem Zeitbedarf ist. Auch solche allgemeineren Übergangsbahnen, die nicht notwendig im Perihel bzw. Aphel und mit einem Tangentialschub starten bzw. enden, wurden schon von *W. Hohmann* im Rahmen der speziellen *Kepler*bewegung untersucht[2].

Im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung befinde sich ein Raumflugkörper auf der Ausgangsbahn *A* (siehe Bild 12-20). Im Punkt $\mathbf{r}_1$ finde ein Manöver statt, um den Raumflugkörper auf die Übergangsbahn *T* zu bringen. Ein zweites Manöver im Punkt $\mathbf{r}_2$ bringt den Raumflugkörper auf die Zielbahn *E*. Die Geschwindigkeitsvektoren in $\mathbf{r}_1$ auf den beiden Bahnen seien $\dot{\mathbf{r}}_{1p}$ und $\dot{\mathbf{r}}_{1t}$. Sie schließen den Zwischenwinkel γ_1 ein:

$$\cos\gamma_1 \;=\; \frac{\dot{\mathbf{r}}_{1p}\bullet\dot{\mathbf{r}}_{1t}}{\left|\dot{\mathbf{r}}_{1p}\right|\left|\dot{\mathbf{r}}_{1t}\right|} \qquad . \tag{12.101}$$

Das Manöver erfordert nach Formel (12.3) auf S. 150 das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V_1 \;=\; \sqrt{\dot{\mathbf{r}}_{1p}^2 + \dot{\mathbf{r}}_{1t}^2 - 2\left|\dot{\mathbf{r}}_{1p}\right|\left|\dot{\mathbf{r}}_{1t}\right|\cos\gamma_1} \qquad . \tag{12.102}$$

[1] E. GILL in: IAA-96-B-1002 (4.–8. Nov. 1996)

[2] W. HOHMANN [1925], p. 84 ff.

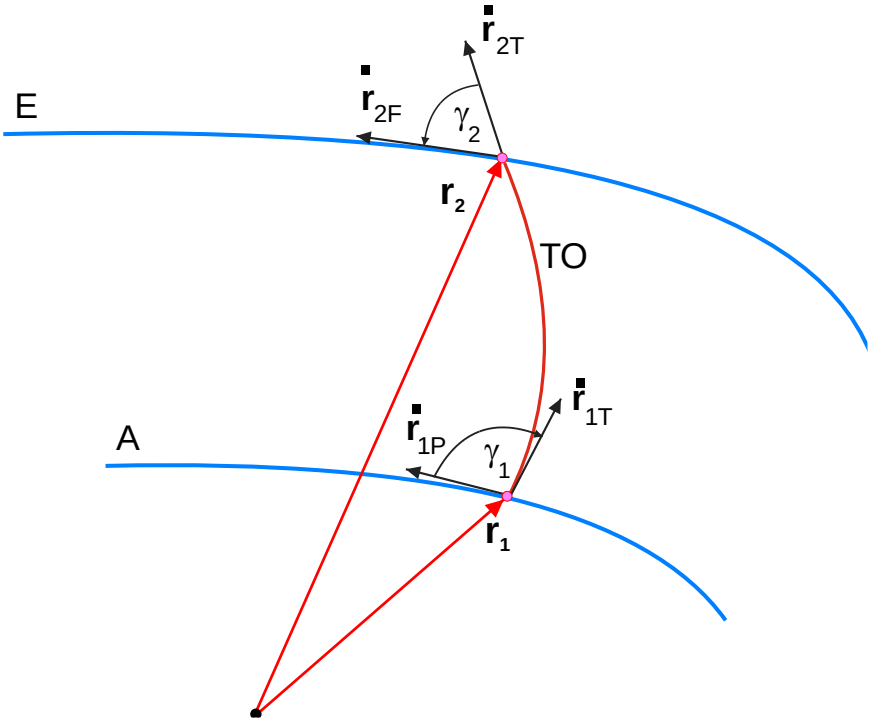


Bild 12-20: Beliebiger Bahnübergang

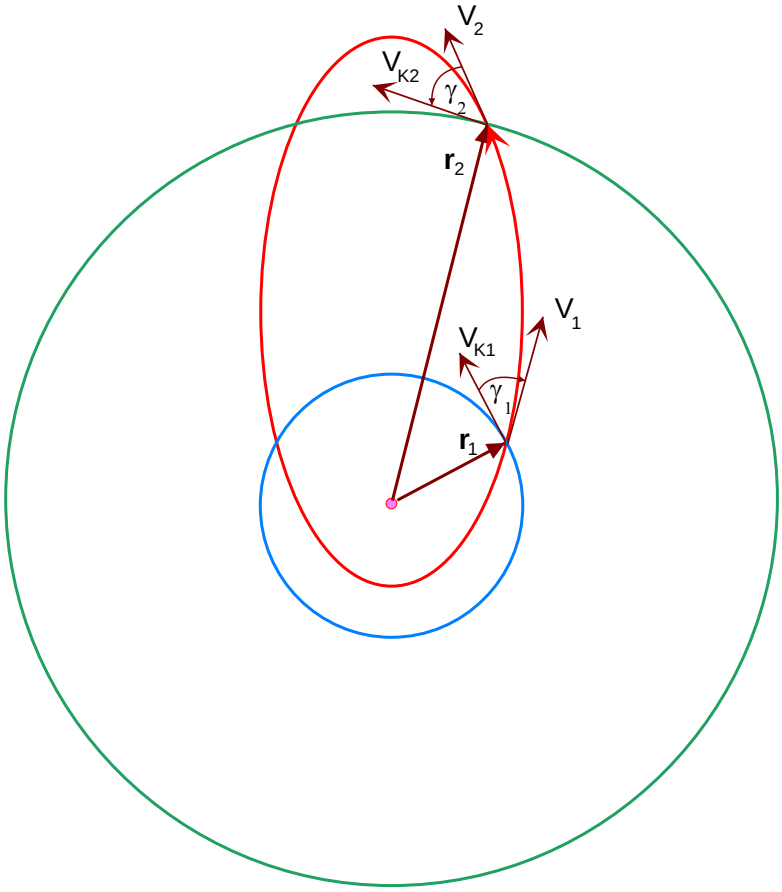


Bild 12-21: Koplanarer Übergang auf Ellipsenbogen

Entsprechend sind im zweiten Manöver die Geschwindigkeitsvektoren auf der Übergangsbahn $\dot{\mathbf{r}}_{2t}$ und auf der Zielbahn $\dot{\mathbf{r}}_{2f}$ mit dem Zwischenwinkel γ_2 :

$$\cos\gamma_2 = \frac{\dot{\mathbf{r}}_{2t} \bullet \dot{\mathbf{r}}_{2f}}{\left|\dot{\mathbf{r}}_{2t}\right| \left|\dot{\mathbf{r}}_{2f}\right|} \quad . \tag{12.103}$$

Das Manöver erfordert das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V_2 = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}_{2t}^2 + \dot{\mathbf{r}}_{2f}^2 - 2\left|\dot{\mathbf{r}}_{2t}\right| \left|\dot{\mathbf{r}}_{2f}\right| \cos\gamma_2} \quad . \tag{12.104}$$

Die Zeitdauer für den Transfer von $\mathbf{r}_1$ nach $\mathbf{r}_2$ kann mit Hilfe des Flächensatzes aus

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{r^2}{G}\, d\zeta \tag{12.105}$$

berechnet werden.

Als Übungs-BEISPIEL einer beliebigen Übergangsbahn im Rahmen der Zweikörperbewegung werde gemäß Bild 12-21 ein koplanarer Übergang zwischen zwei kreisförmig gedachten Bahnen mit Radien r_1 und r_2 betrachtet. Die Übergangsbahn habe die große Bahnhalbachse a und die Exzentrizität $0 < e < 1$. Im Moment des Einschusses in die Übergangsbahn hat der Raumflugkörper in der Übergangsellipse die wahre Anomalie υ_1 aus

$$\cos\upsilon_1 = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \quad , \tag{12.106}$$

beim Erreichen der Zielbahn die wahre Anomalie υ_2

$$\cos\upsilon_2 = \frac{1}{e}\left(\frac{p}{r_2} - 1\right) \quad .$$

Die Geschwindigkeiten im Moment der Bahnmanöver auf der ursprünglichen (wieder kreisförmig angenommenen) und der Zielbahn sind

$$V_{K1} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \quad , \quad V_{K2} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \quad , \tag{12.107}$$

auf der Übergangsbahn

$$V_1 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a}\right)} \quad , \quad V_2 = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a}\right)} \quad . \tag{12.108}$$

Da die Manöver in diesem Fall nicht im Peri- oder Apozentrum, also tangential erfolgen sollen, muss in beiden Manövern noch um den Winkel γ gedreht werden, dem Winkel am Ort $\mathbf{r}$ zwischen dem Geschwindigkeitsvektor auf der Ursprungs- bzw. Zielbahn und dem entsprechenden Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ auf der Transferbahn.

Es werden im Folgenden zwei Möglichkeiten hergeleitet, wie dieser Zwischenwinkel in elementarer Weise berechnet werden kann. Die erste ergibt sich aus der *Kepler*bewegung. Nach Bild 12-22 ist offenbar

$$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} \;=\; r\dot{r} \;=\; rV\sin\gamma \quad , \quad V \;=\; \left|\dot{\mathbf{r}}\right| \quad , \tag{12.109}$$

wobei V aus Formel (12.108) und $\dot{r}$ (etwa mit Formel (2.82) in Abschnitt 2.5.2, Band I) aus

$$\dot{r} \;=\; e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin\upsilon \tag{12.110}$$

berechnet werden können.

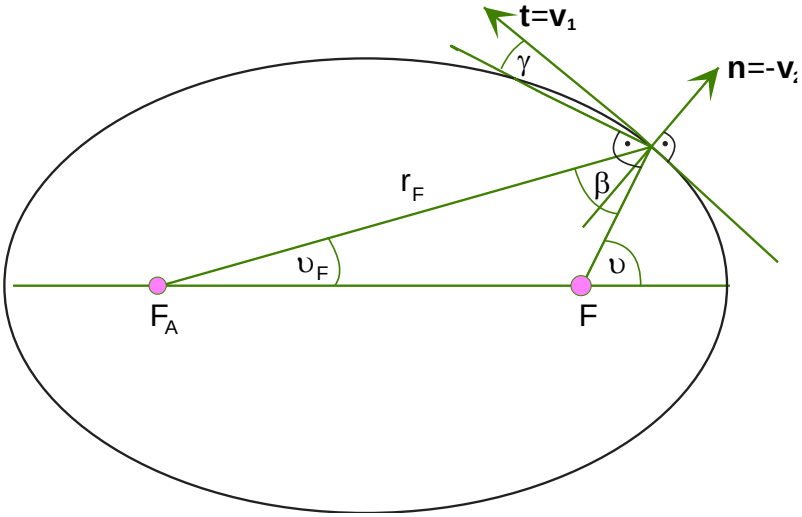


Bild 12-22: Die antifokale Anomalie υ_F und der Drehwinkel γ zwischen Kreisbahn und elliptischer Bahn

Eine andere Möglichkeit ist, ohne Kenntnis der *Kepler*bewegung den Zwischenwinkel rein geometrisch mit der *antifokalen Anomalie* υ_F nach Bild 12-22 zu erhalten. Sei F der (Haupt-) Brennpunkt (= „Sonne“) der Ellipse, so ist der zweite Brennpunkt der Ellipse F_A der *„Antifokus“* (der „leere Brennpunkt“). Der Abstand r_F vom Antifokus zum Ort **r** ist der *antifokale Radius*

$$r_F \;=\; 2a - r \quad . \tag{12.111}$$

Die antifokale Anomalie υ_F kann dann aus

$$\begin{aligned} r_F\cos\upsilon_F &= 2ae + r\cos\upsilon \\ r_F\sin\upsilon_F &= r\sin\upsilon \end{aligned} \tag{12.112}$$

berechnet werden. Da die Normale im Punkt **r** an die Ellipse den Zwischenwinkel zwischen Radius und antifokalem Radius halbiert, ist der Drehwinkel

$$\gamma \;=\; \frac{1}{2}\left|\upsilon - \upsilon_F\right| \quad . \tag{12.113}$$

Mit υ_1 kann daher der Drehwinkel γ_1 bei Einschuss in den Transfer und mit υ_2 entsprechend der Drehwinkel γ_2 bei Einschuss in die Zielbahn berechnet werden. Die entsprechenden Geschwindigkeitsinkremente sind mit Formel (12.3)

$$\Delta V_i \;=\; \sqrt{V_i^2 + V_{Ki}^2 - 2V_iV_{Ki}\sin\gamma_i} \quad (i=1,2) \quad . \tag{12.114}$$

Die Zeitdauer für den Transfer errechnet sich mit den elementaren *Kepler*formeln

$$\begin{aligned}
\cos E_{1,2} &= \frac{\cos\upsilon_{1,2}+e}{1+e\cos\upsilon_{1,2}} \\
\sin E_{1,2} &= \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\upsilon_{1,2}}{1+e\cos\upsilon_{1,2}} \\
M_{1,2} &= E_{1,2}-e\sin E_{1,2}
\end{aligned} \tag{12.115}$$

$$\text{aus} \quad \Delta t = t_2-t_1 = \frac{M_2-M_1}{n} \quad , \quad n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \quad .$$

BEISPIEL: **Transfer von der Erde zur Venus**

Für den Transfer werde die Ellipse

$$a = 2\times10^8\,\text{km} \quad , \quad e = 0.5$$

gewählt. Mit (siehe die Zahlen in Beispiel 4 des vorigen Abschnitts sowie in Anhang G, Band V)

$$r_{♁} = a_{♁} = 1.4959787\times10^8\,\text{km} = 1\text{AE} \quad , \quad r_{♀} = a_{♀} = 1.082087\times10^8\,km = 0.7233306\,\text{AE}$$

wird

$$p = a\left(1-e^2\right) = 1.5\times10^8\,\text{km} \quad , \quad \upsilon_1 = 270°.308 \quad , \quad \upsilon_2 = 320°.574$$

sowie

$$\begin{aligned}
V_{K1} &= V_{♁} = 29.785\,\text{km/s} \quad , \quad V_1 = 33.327\,\text{km/s} \quad , \\
V_{K2} &= V_{♀} = 35.021\,\text{km/s} \quad , \quad V_2 = 42.301\,\text{km/s} \quad .
\end{aligned}$$

Nach Formel (12.110) ist

$$\dot r_1 = -14.871\,\text{km/s} \quad , \quad \dot r_2 = -9.445\,\text{km/s} \quad ,$$

somit nach Formel (12.109)

$$\gamma_1 = 26°.502 \quad , \quad \gamma_2 = 12°.903 \quad .$$

Entsprechend der zweiten Methode beträgt die antifokale Distanz nach Formel (12.111)

$$r_{F1} = 2a-r_1 = 2.504\times10^8\,\text{km} \quad , \quad r_{F2} = 2a-r_2 = 2.918\times10^8\,\text{km} \quad ,$$

somit nach Formel (12.112)

$$\upsilon_{F1} = 323°.314 \quad , \quad \upsilon_{F2} = 346°.380$$

und mit Formel (12.113)

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\left|\upsilon_1-\upsilon_{F1}\right| = 26°.502 \quad , \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left|\upsilon_2-\upsilon_{F2}\right| = 12°.903 \quad .$$

Die entsprechenden Geschwindigkeitsinkremente betragen daher mit Formel (12.114)

$$\Delta V_1 = 14.872\,\text{km/s} \quad , \quad \Delta V_2 = 11.305\,\text{km/s}$$

und die charakteristische Geschwindigkeit

$$\Delta V_{\text{ges}} \;=\; \Delta V_1 + \Delta V_2 \;=\; 26.177\,\text{km/s} \quad .$$

Der Zeitbedarf errechnet sich mit den Formeln (12.115) aus

$$E_1 \;=\; 300°.266 \quad , \quad E_2 \;=\; 336°.624 \quad ,$$
$$M_1 \;=\; 325°.009 \quad , \quad M_2 \;=\; 347°.991$$

schließlich zu

$$\Delta t \;=\; t_2 - t_1 \;=\; 4296818.148\,\text{s} \;\cong\; 57^d\,0^h.561 \quad .$$

Gegenüber einem *Hohmann*-Transfer schafft das Raumfahrtzeug den Flug von der Erde zur Venus auf der hier gewählten fiktiven Bahn in etwa 1/3 der Zeit. Das aufzuwendende Geschwindigkeitsinkrement hat sich allerdings mehr als verfünffacht. Falls das zweite Manöver beim Einschuss in die Venusbahn misslingt, fliegt der Raumflugkörper näher an die Sonne heran. Sein Perihel im Abstand $r_P = 1\times10^8$ km liegt außerhalb der Merkurbahn mit $a = 0.579\times10^8$ km und sollte für den Raumflugkörper noch keine Gefahr durch allzu große Sonnenbestrahlung bedeuten. ◀

In der Praxis wird gewöhnlich der Einschussort $\mathbf{r}_1$ auf der Primärbahn und der Zielort $\mathbf{r}_2$ auf der Zielbahn sowie die aufzuwendende Zwischenzeit $\Delta t = t_2 - t_1$ vorgegeben. Die Bahnelemente der entsprechenden *Kepler*bahn werden im Rahmen des *Lambert*-Problems[1] berechnet. Für erste Abschätzungen genügt es, das langfristige Bahnverhalten zu untersuchen, also nur säkulare Effekte einzubeziehen oder einfach nur mit einer (speziellen) *Kepler*bewegung zu arbeiten. In einem nächsten Schritt müssen jedoch alle wichtigen kurzfristig wirkenden Einflüsse berücksichtigt werden, muss also mit oskulierenden Parametern gearbeitet werden (siehe in Kapitel 20).

12.4.8 Gravitationsverluste bei nichtimpulsförmigen Manövern

Impulsförmige Manöver können in vielen Fällen der Praxis nur ein erster Einstieg zur Abschätzung von Manövern und für ihren Aufwand sein. In der Realität ist ein Triebwerk häufig nicht stark genug um ein Manöver impulsförmig ablaufen zu lassen, sondern das Raketentriebwerk muss über längere Zeiten, vielleicht eine Stunde oder mehr gezündet werden, um eine gewünschte Zielbahn erreichen zu können. Ein Beispiel hierzu ist das Anheben einer Bahn aus einer niedrigen Parkbahn auf eine höhere Bahn. Dazu muss im Perigäum der Bahn das Triebwerk gezündet werden um das Apogäum auf die gewünschte Bahnhöhe anheben zu können. Die energiereichste Bahn, also das größte Apogäum, kann am wirkungsvollsten, also mit geringstem Energieaufwand erreicht werden, wenn möglichst nur im Perigäum gezündet wird. Bild 12-23 zeigt rechts das Anheben der Bahn (die Ausgangs Parkbahn und die endgültige Bahn sind der Übersichtlichkeit halber nicht eingezeichnet) durch ein lange andauerndes Manöver, das sich fast über ein Viertel der Bahn erstreckt. Ein solches Manöver ist bei chemischen Triebwerken aber nicht optimal, da der Energieaufwand mit der Entfernung zum Gravitationszentrum immer größer wird. Man spricht hier von einem Gravitationsverlust[2]. Es ist daher

[1] Abschnitt 2.7.1 (Band I)

[2] siehe in K. A. EHRICKE [1962], *Space Flight* II, pp. 512-587

optimaler, mehrmals in der Nähe des Perigäums zu zünden. Damit kann bei gleichem Triebwerk und gleicher Nutzlast eine höhere Bahn erreicht werden (siehe in Bild 12-23, linkes Bild) als bei langem Zünden.

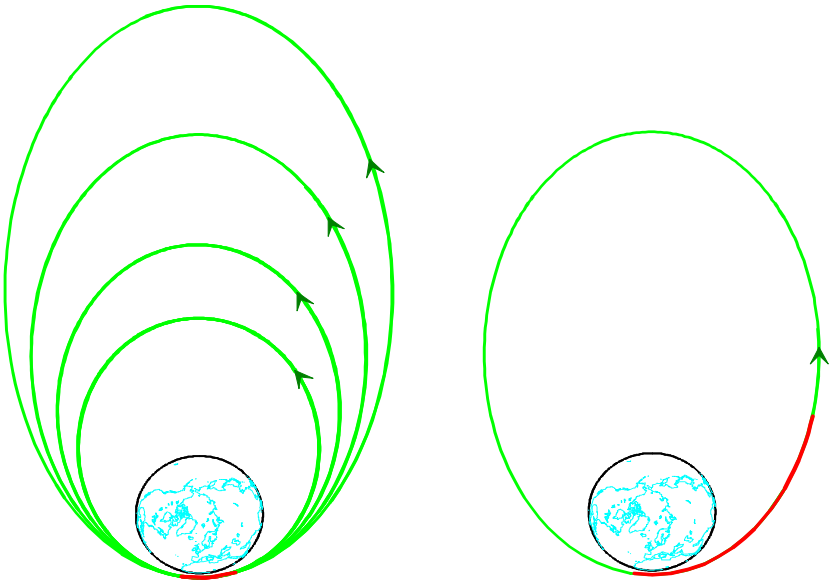


Bild 12-23: Gravitationsverlust bei langen Manövern in der Nähe des Perigäums um eine Bahn anzuheben[1]. Linkes Bild: mehrmalige kurze Schübe, rechtes Bild: ein langer Schub

Lange dauernde Manöver müssen anders als bei chemischen Triebwerken stets bei elektrischen, thermo-nuklearen Triebwerken oder Sonnenseglern in Betracht gezogen werden. Bei derartigen Triebwerken müssen daher andere Rechenverfahren eingesetzt werden, die nicht durch impulsförmige Vorgänge angenähert werden können. Bei elektrischen Raketenmotoren sind wegen des sehr hohen spezifischen Impulses Gravitationsverluste vernachlässigbar.

12.5 Die hyperbolische Bewegung

Eine *hyperbolische Bewegung* kann nur dann auftreten, wenn ein bewegter Körper dem Gravitationsfeld eines bestimmten Zentralkörpers nur zeitweise ausgesetzt ist. Dies ist etwa der Fall bei einem Vorbeiflug einer Sonde an einem Planeten, beim Verlassen des Gravitationsfeldes eines Planeten, wenn der Raumflugkörper auf hyperbolische Geschwindigkeit beschleunigt wurde oder beim Annähern an einen Zentralkörper, um dann nach Abbremsen von einer hyperbolischen Bewegung in eine elliptische Umlaufbahn um den Zentralkörper einzutreten. Eine hyperbolische Bewegung ist ein einmaliger Vorgang. Periodizität gibt es keine. Aus diesem Grunde wird die hyperbolische Bewegung im Rahmen der Bahnänderungen behandelt, obgleich sie eigentlich Bestandteil der allgemeinen *Kepler*bewegung ist und auch mit dem Formalismus der allgemeinen *Kepler*bewegung behandelt werden kann. Eine Änderung der hyperbolischen Bewegung kann nur durch Änderung der Bewegungsenergie, etwa durch das Zünden eines Raketenmotors oder durch Reibung in der Lufthülle des Zentralkörpers, bewirkt werden. Die hyperbolische Bewegung ist ein wichtiger Bestandteil der Raumflugbahnmechanik.

[1] siehe: B. STANEK [1983], p. 107

12.5.1 Bahnparameter der hyperbolischen Bewegung

Ein Massenpunkt (eine Sonde mit verschwindender Masse) muss sich, um den Anziehungsbereich eines Zentralkörpers zu verlassen, mindestens auf einer parabolischen wenn nicht gar hyperbolischen Bahn bewegen. Auf einer *parabolischen Bahn* hat er die Geschwindigkeit[1]

$$V_{PAR} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (e \equiv 1) \ , \tag{12.116}$$

die in großer Entfernung der Sonde vom Zentralkörper (also für $r \to \infty$) verschwindet:

$$V_{PAR,\infty} = 0 \quad .$$

Befindet sich der Massenpunkt auf einer hyperbolischen Bahn, nimmt seine Geschwindigkeit für eine große Entfernung vom Zentralkörper (also für $r \to \infty$) den Wert

$$V_\infty = \sqrt{\mu\left(-\frac{1-e^2}{p}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{a_H}} \tag{12.117}$$

als Grenzwert an, der nur noch von der Bahnform, nicht mehr von der Entfernung abhängt. Der Grenzwert der hyperbolischen Geschwindigkeit wird als *asymptotische Geschwindigkeit* bzw. auch als *hyperbolischer Exzess* bezeichnet.

Ein vom Zentralkörper in großer Entfernung („unendlich weit entfernter“) Raumflugkörper hat nach der Kegelschnittgleichung $r = p/(1+e\cos\upsilon)$ („Polargleichung eines Kegelschnittes“) die wahre Anomalie aus

$$\cos\upsilon_\infty = -\frac{1}{e} \quad . \tag{12.118}$$

Diese Anomalie wird als *asymptotische Anomalie* bezeichnet. Ein sich auf einer hyperbolischen Bahn bewegender Massenpunkt kann eine wahre Anomalie nur im Bereich

$$0° \le \upsilon < \upsilon_\infty \quad \text{und} \quad 360° - \upsilon_\infty < \upsilon \le 360° \tag{12.119}$$

bzw.

$$\cos\upsilon > \cos\upsilon_\infty \tag{12.120}$$

annehmen.

Gerät ein Massenpunkt in den Anziehungsbereich eines Zentralkörpers, so hat er zunächst bezogen auf diesen Zentralkörper die asymptotische Geschwindigkeit V_∞ und bewegt sich in dessen Anziehungsbereich auf einer hyperbolischen Bahn gemäß Bild 12-24 mit folgender Geometrie, wobei die Beziehungen alle aus der Normalform der Mittelpunkthyperbel

$$\frac{x^2}{a_H^2} - \frac{y^2}{b_H^2} = 1$$

verifiziert werden können:

Die erste Halbachse a_H der Hyperbel, die Distanz vom Mittelpunkt *M* der Hyperbel zum Perizentrum *P* (sie wird gelegentlich in irreführender Weise als „große Halbachse der Hyperbel“

[1] siehe etwa in Abschnitt 2.6.2, Band I, Formel (2.83) für $a \to \infty$

bezeichnet, obgleich sie Kleiner als die „kleine Halbachse“ ist), errechnet sich bei gegebenem hyperbolischen Exzess aus

$$a_H = \frac{\mu}{V_\infty^2} \quad . \tag{12.121}$$

Die Perizentrumsdistanz beträgt mit der Polargleichung eines Kegelschnittes

$$r_P := r(\upsilon = 0°) = \frac{p}{1+e} = a_H\,(e-1) \quad . \tag{12.122}$$

Mit bekanntem r_P kann die Exzentrizität der hyperbolischen Bewegung berechnet werden aus

$$e = 1+\frac{r_P}{a_H} = 1+\frac{r_P}{\mu}V_\infty^2 \quad . \tag{12.123}$$

Eine charakteristische Größe der hyperbolischen Bewegung ist die *Vorbeifluggeschwindigkeit* im Perizentrum. Sie beträgt mit Formel (2.83) (Band I)

$$V_{H,P} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r_P}+\frac{1}{a_H}\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{a_H}\frac{e+1}{e-1}} \tag{12.124}$$

bzw.

$$V_{H,P} = V_\infty\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \quad . \tag{12.125}$$

Mit der *Fluchtgeschwindigkeit* (= *parabolische Geschwindigkeit*) im Abstand r_P vom Zentralkörper

$$V_F := V_{PAR}\left[r = r_P\right] = \sqrt{\frac{2\mu}{r_P}} \tag{12.126}$$

gilt auch für die (hyperbolische) Vorbeifluggeschwindigkeit im Perizentrum

$$V_{H,P} = \sqrt{V_F^2+V_\infty^2} \quad . \tag{12.127}$$

Wird umgekehrt ein Raumflugkörper im Abstand r_P vom Zentralkörper auf die hyperbolische Geschwindigkeit $V_{H,P}$ beschleunigt, verlässt er den Anziehungsbereich dieses Zentralkörpers mit der asymptotischen Geschwindigkeit

$$V_\infty = \sqrt{V_{H,P}^2-V_F^2} = \sqrt{V_{H,P}^2-\frac{2\mu}{r_P}} \quad . \tag{12.128}$$

Befindet sich der Raumflugkörper zunächst auf einer kreisförmigen Parkbahn mit Radius r_P und der Kreisbahngeschwindigkeit

$$V_K = \sqrt{\frac{\mu}{r_P}} \quad , \tag{12.129}$$

so muss bei tangentialem Schub das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V = V_{H,P}-V_K \tag{12.130}$$

aufgewendet werden um ihn auf eine hyperbolische Bahn zu bringen. Dasselbe Geschwindigkeitsinkrement muss aufgebracht werden, wenn der Raumflugkörper mit der Geschwindigkeit V_∞ in den Anziehungsbereich des Zentralkörpers eintritt und im Perizentrum der hyperbolischen Bahn auf eine Kreisbahn mit Radius r_P eingeschossen werden soll.

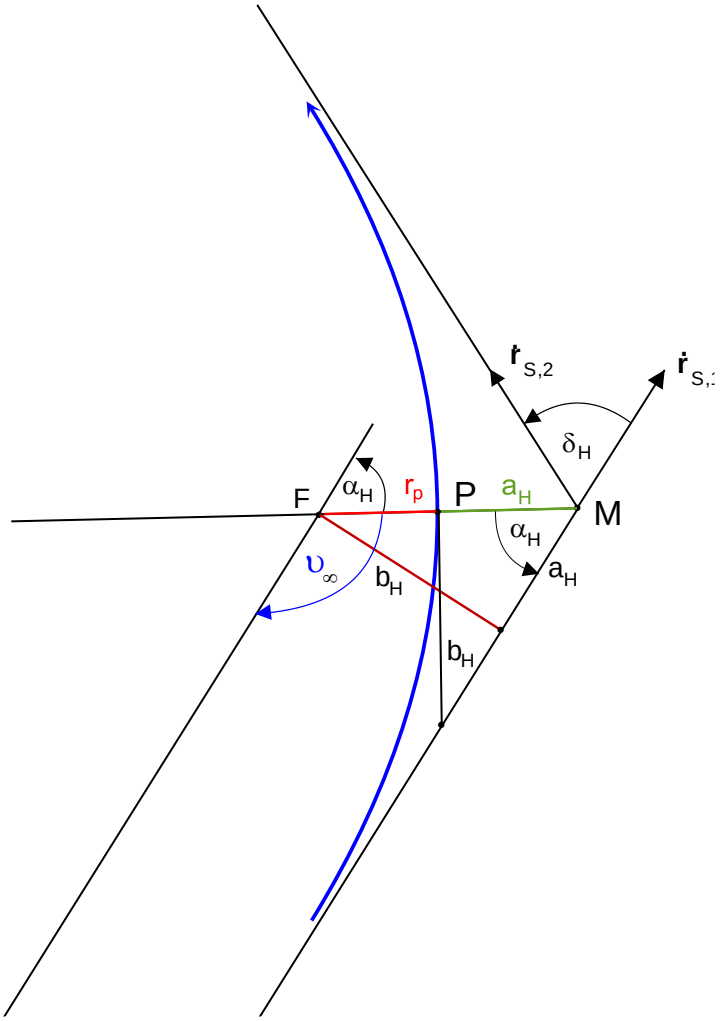


Bild 12-24: Die hyperbolische Bewegung

Würde der Massenpunkt nicht auf eine hyperbolische Bahn um den Zentralkörper gelenkt, hätte er im Moment des Vorbeifluges im Punkt *M* (dem „Mittelpunkt“ der Hyperbel) den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_1$ im Abstand

$$|\mathbf{r}| = r_P + a_H = a_H\, e \quad . \tag{12.131}$$

Er würde sich dann bezüglich des Zentralkörpers näherungsweise auf einer Geraden im Abstand b_H vom Zentrum des Zentralkörpers vorbeibewegen. b_H ist die zweite Halbachse der Hyperbel (manchmal in überflüssiger Weise als „imaginäre“ Halbachse bezeichnet, obgleich sie in Bezug auf die Asymptoten eine reale geometrische Größe ist). Sie entspricht der kleinen Halbachse der Ellipse, ist aber dem Betrag nach größer als die erste Halbachse. Nach der Normalform der Hyperbel ist

$$b_H = a_H \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{r_P \left(2 a_H + r_P\right)} = r_P \sqrt{\frac{V_F^2}{V_\infty^2} + 1} \quad , \tag{12.132}$$

somit

$$b_H = \frac{\mu}{V_\infty^2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\upsilon_\infty}-1} \quad . \tag{12.133}$$

Der *Parameter der Hyperbel* lautet dann

$$p = \frac{b_H^2}{a_H} = a_H\left(e^2-1\right) \quad . \tag{12.134}$$

In den Anwendungen zur Berechnung des Vorbeifluges eines Raumflugkörpers (Massenteilchens, …) an einem Planeten wird gewöhnlich neben der asymptotischen Geschwindigkeit V_∞, und damit der Halbachse a_H, der Abstand b_H vorgegeben, in dem der Raumflugkörper sich ohne Beeinflussung durch das Gravitationsfeld des betreffenden Zentralkörpers vorbeibewegen würde. Dann kann die Exzentrizität der Vorbeiflughyperbel berechnet werden aus

$$e = \sqrt{1+\frac{b_H^2}{a_H^2}} \quad . \tag{12.135}$$

12.5.2 Der Kollisionskorridor

Der hyperbolisch bewegte Raumflugkörper stößt mit dem Zentralkörper zusammen, wenn die Perizentrumsdistanz den Radius R_E des Zentralkörpers unterschreitet. Ein Grenzwert wird erreicht, wenn der Raumflugkörper die Oberfläche des Zentralkörpers streift. In diesem Fall (die Abplattung des Zentralkörpers kann in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden) hat die Asymptote der hyperbolischen Bahn vom Mittelpunkt des Zentralkörpers nach Formel (12.132) die Distanz

$$b_C = \sqrt{R_E\left(a_H+R_E\right)} \quad , \tag{12.136}$$

die als *Kollisionsradius* bezeichnet wird. Unterschreitet der „Radius“ b_H der hyperbolischen Bahn den Kollisionsradius, ist ein Aufprall auf die Oberfläche des Zentralkörpers unvermeidlich. Bei Körpern wie der Erde mit einer Lufthülle ist der kritische Radius entsprechend der Lufthülle der Höhe H zu vergrößern. Es muss dann statt R_E der Wert

$$R_H = R_E + H$$

verwendet werden und der Kollisionsradius beträgt

$$b_C = \sqrt{R_H\left(a_H+R_H\right)} \tag{12.137}$$

bzw.

$$b_C = \sqrt{R_H\left(\frac{\mu}{V_\infty^2}+R_H\right)} \quad . \tag{12.138}$$

Ein Zylinder mit dem Kollisionsradius als Radius wird als *Kollisionskorridor* bezeichnet. Ob ein Massenteilchen, das in den Anziehungsbereich eines Zentralkörpers gerät, auf Kollisionskurs gerät, hängt nach Formel (12.133) von der asymptotischen Anomalie und der asymptotischen Geschwindigkeit ab. Ein Raumflugkörper muss außerhalb des Kollisionsradius an einem

Planeten vorbeigelenkt werden um einen Zusammenstoß oder zumindest eine Beschädigung zu vermeiden.

12.5.3 Der Umlenkwinkel

Die Asymptote der Hyperbel hat den *Steigungswinkel* α_H aus den Beziehungen

$$\tan\alpha_H = \frac{b_H}{a_H} = \sqrt{e^2-1} \quad , \quad \sin\alpha_H = \frac{b_H}{e\,a_H} \quad , \quad \cos\alpha_H = \frac{1}{e} \quad . \tag{12.139}$$

Nach Bild 12-24 auf Seite 193 kann die asymptotische Anomalie υ_∞ bei bekannter Asymptote und daher bekanntem Steigungswinkel aus

$$\upsilon_\infty = 180° - \alpha_H \tag{12.140}$$

berechnet werden.

Der Außenwinkel δ_H der beiden Asymptoten an die Hyperbel wird als *Umlenkwinkel* (*Deflektionswinkel*) bezeichnet. Er kann nach Bild 12-24 auf Seite 193 aus

$$\delta_H = 180° - 2\alpha_H = 2\upsilon_\infty - 180° \tag{12.141}$$

bzw. direkt aus

$$\sin\frac{\delta_H}{2} = \cos\alpha_H = -\cos\upsilon_\infty = \frac{1}{e} \tag{12.142}$$

berechnet werden. Gerät ein Massenpunkt in den Anziehungsbereich eines Zentralkörpers, so wird seine Flugrichtung um den Winkel δ_H umgelenkt.

Aus den vorstehenden Formeln lassen sich folgende Schlüsse ziehen (betrachtet wird jeweils ein Parameter, die anderen werden als fest angenommen):

- *Die erste Halbachse a_H der hyperbolischen Bewegung wird um so kleiner, je größer die asymptotische Geschwindigkeit V_∞ ist* (Formel (12.121)).
- *Die Exzentrizität e der hyperbolischen Bewegung ist umso größer, je größer der minimale Vorbeiflug des Massenpunktes vom Zentralkörper, also die Perizentrumsdistanz r_P ist* (Formel (12.123)).
- *Die Exzentrizität e der hyperbolischen Bewegung ist umso größer, je größer die zweite Halbachse b_H , d. h. der Abstand der Asymptote vom Zentralkörper ist* (Formel (12.132)).

Insbesondere gelten folgende Aussagen für den Umlenkwinkel:

- *Der Umlenkwinkel δ_H ist umso größer, je größer die Masse des Zentralkörpers m bzw.* μ *ist* (Formeln (12.123) und (12.142)).
- *Der Umlenkwinkel δ_H ist umso größer, je kleiner die asymptotische Geschwindigkeit V_∞ ist* (Formeln (12.123) und (12.142)).
- *Der Umlenkwinkel δ_H ist umso größer, je kleiner die Perizentrumsdistanz r_P bzw. die Asymptotendistanz b_H ist* (Formeln (12.132) und (12.142)).

- *Der Umlenkwinkel* δ_H *ist umso größer, je größer die asymptotische Anomalie* υ_∞ *ist* (Formel (12.141)).

Der planetozentrische also relative Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_{H1}$ beim Eintritt in den Attraktionsbereich des betreffenden Zentralkörpers wird durch den hyperbolischen Vorbeiflug in den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_{H2}$ gedreht, mit dem der Attraktionsbereich wieder verlassen wird. Der Betrag der Geschwindigkeit wird dabei aber nicht geändert. Er ist gleich der auf diesen Zentralkörper bezogenen asymptotischen Geschwindigkeit:

$$\left|\dot{\mathbf{r}}_{H1}\right| = \left|\dot{\mathbf{r}}_{H2}\right| = V_\infty \quad . \tag{12.143}$$

Die beiden auf diesen Zentralkörper bezogenen Geschwindigkeitsvektoren unterscheiden sich nur in der Richtung, und zwar um den Umlenkwinkel δ_H

$$\dot{\mathbf{r}}_{H1} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{H2} = V_\infty^2 \cos\delta_H \quad . \tag{12.144}$$

12.5.4 Anmerkungen zur hyperbolischen Bewegung

1. Die Formeln der hyperbolischen Bewegung wurden aus den in der allgemeinen *Kepler*-bewegung gültigen Kegelschnittsgleichung und der Geschwindigkeitsbeziehung hergeleitet, behalten somit ihre Gültigkeit auch für variable Parameter *a* und *e*. Alle Bahnparameter können somit als Zeitvariable verstanden werden ohne Einfluss auf die vorstehenden Formeln. In der Praxis sind die Variationen in *a* und *e* auf hyperbolischen Bahnen so gering, dass sie auch um weitreichende Aussagen zu erhalten vernachlässigt werden können. Für genaue Untersuchungen werden die Bahnparameter durch numerische Integration der *Kepler*schen Bewegungsgleichung erhalten.

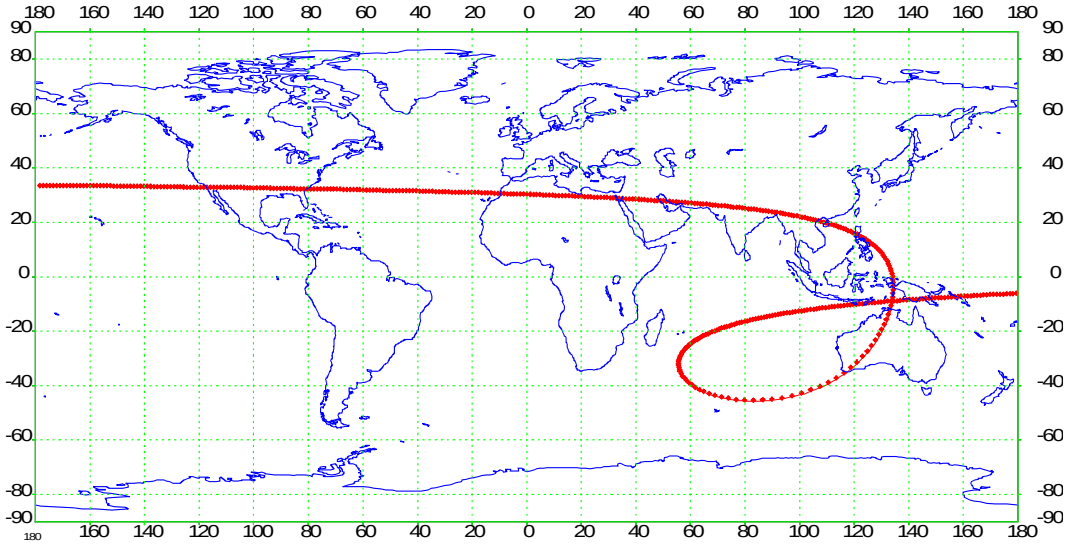


Bild 12-25: Projektion der Bahn von Giotto auf die Erdoberfläche während des hyperbolischen Vorbeiflugs. Zeittaktung in 5 Minuten Schritten.

2. In der Behandlung der hyperbolischen Bewegung wurde der wesentliche Bezug zur Zeit noch ausgespart. Dies wird in den klassischen Lehrbüchern der Himmelsmechanik durch Einführung einer „hyperbolischen Anomalie“ durchgeführt, welche ein Analogon zur exzentrischen Anomalie der elliptischen Bewegung ist und mit einer zur *Kepler*gleichung analogen Gleichung den Bezug zur Zeit herstellt. Im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung kann der Bezug zur Zeit einheitlich für alle Kegelschnittbewegungen in der uniformisierten Theorie erhalten werden, was in Kapitel 13 vorgestellt wird.

BEISPIEL 1: Die europäische Kometensonde Giotto war der erste künstliche Himmelskörper, dessen interplanetare Bahn durch einen Vorbeiflug an der Erde umgelenkt wurde[1]. Für den Moment der größten Annäherung von Giotto an die Erde wurden folgende Keplerelemente berechnet:

Erste Halbachse	a_H	33155.815 km
Exzentrizität	e	1.87579647
Inklination bzgl. Erdäquator	i	45°.19641
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Ω	245°.52259
Argument des Perigäums	ω	296°.55269
Wahre Anomalie	υ	0°.0
Epoche	t_0	1990, Juli, $02/10^h\ 47^m\ 13^s.6$

Damit errechnen sich die Parameter der hyperbolischen Bewegung im Anziehungsbereich der Erde:

die asymptotische Geschwindigkeit	V_∞	3.467 km/s
die Perigäumsgeschwindigkeit	V_P	6.283 km/s
die Perigäumsdistanz	r_P	29037.746 km
die Perigäumshöhe	H_P	22659.606 km
zum Vergleich: Kreisbahngeschwindigkeit in r_P	V_K	3.705 km/s
Fluchtgeschwindigkeit in r_P	V_F	5.240 km/s
Parameter	p	83506.647 km
zweite Halbachse	b_H	52618.732 km
Steigungswinkel der Asymptote	α_H	57°.784
asymptotische Anomalie	υ_∞	122°.216
Umlenkwinkel	δ_H	64°.432
Kollisionskorridor	b_C	15893.782 km

[1] MORLEY, T. A. [1991]: Giotto's Reactivation and Earth Swing-by, ESA bulletin 64

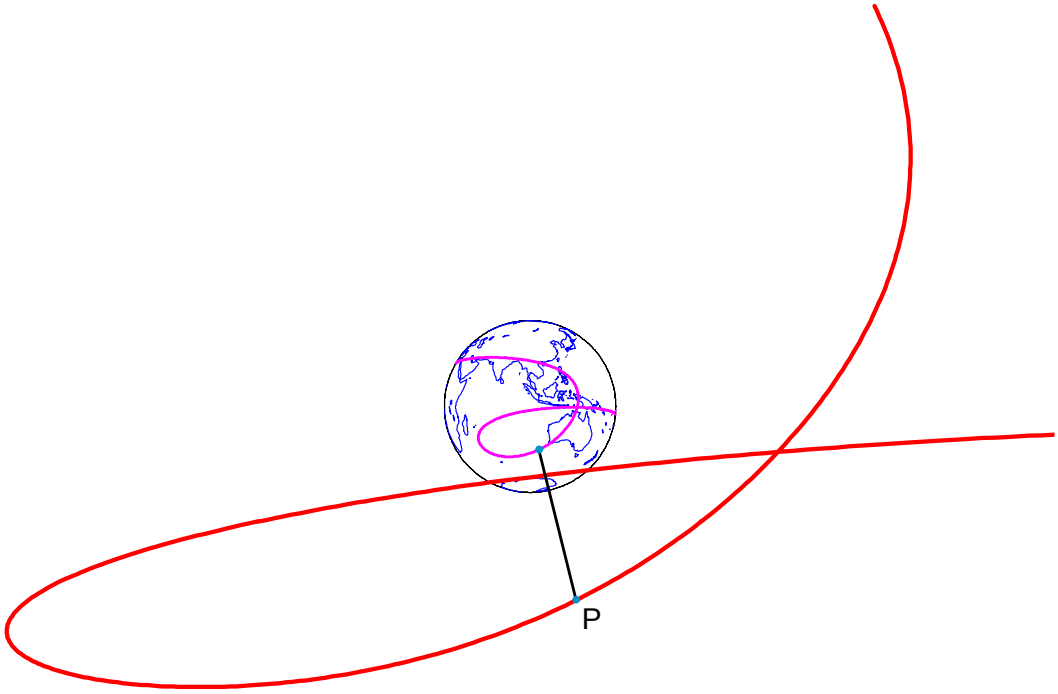


Bild 12-26: Vorbeiflug von Giotto an der Erde bezüglich der als fest angenommenen Erdoberfläche. *P* ist das Perigäum. Die Strecke zum entsprechenden Subsatellitenpunkt auf der Erdoberfläche ist eingezeichnet. Zeittaktung in 5 Minuten Schritten (realistische Größenverhältnisse)

Der relativ zur als fest angenommenen Erdoberfläche hyperbolische Vorbeiflug von Giotto an der Erde und die entsprechende Projektion der Bahn auf die Erdoberfläche („Subsatellitenspur“) sind in Bild 12-26 dargestellt. Die Projektion der Bahn auf die Erdoberfläche während des Vorbeiflugs ist in Bild 12-25 zu sehen. ◀

BEISPIEL 2:

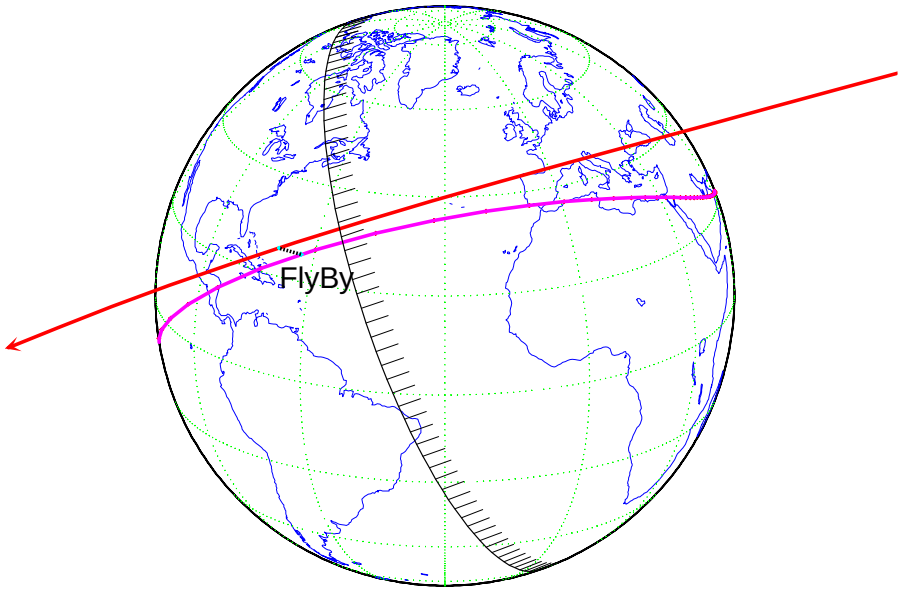


Bild 12-27: Der erste Erdvorbeiflug von Galileo bezüglich der als fest angenommenen Erdoberfläche. Zeittaktung 2 Minuten (realistische Größenverhältnisse)

Die Jupitersonde Galileo wurde für ihren ersten Erdvorbeiflug am 8. Dez. 1990 um 20^h 34^m $30^s.0$ so gesteuert, dass eine bestimmte Eintrittsgeschwindigkeit in die Attraktionssphäre der Erde und eine bestimmte Vorbeiflugentfernung vom Erdmittelpunkt erhalten wurden. Damit konnten die asymptotische Geschwindigkeit und die zweite Halbachse der hyperbolischen Bewegung im Anziehungsbereich der Erde als Ausgangswerte zur Berechnung der hyperbolischen Bewegung an der Erde genommen werden.

Der Vorbeiflug mit der zugehörigen Subsatellitenspur ist in Bild 12-27 dargestellt.

asymptotische Anomalie	υ_∞	113° 48’ 51”.6
erste Halbachse	a_H	4978.257 km
Exzentrizität	e	2.476632
Perigäumsdistanz	r_P	7351.052 km
Perigäumshöhe	H_P	972.912 km
Geschwindigkeit im Perigäum	$V_{H,P}$	13.730 km/s
Steigungswinkel der Asymptote	α_H	66°.186
Umlenkwinkel	δ_H	47°.629
Kollisionsradius für die „Sicherheitshöhe“ H = 100 km	b_C	8614.918 km

Gegebene Parameter:

asymptotische Geschwindigkeit	V_∞	8.948 km/s
zweite Halbachse	b_H	11279.575 km

Berechnete Parameter:

Die übrigen *Kepler*elemente betrugen:

Inklination bezogen auf Erdäquator	i	143°.099
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Ω	103°.841
Argument des Perigäums	ω	134°.900
wahre Anomalie	υ	0°.0
Epoche	t_0	1990 Dez 8, 20^h 34^m $30^s.0$

BEISPIEL 3: Ein Meteoroid nähere sich dem Anziehungsbereich der Erde mit der asymptotischen Geschwindigkeit V_∞ = 10 km/s. Eine Kollision mit der Erdoberfläche werde unter

Einschluss der Lufthülle bis 10 km Höhe berechnet. Es ist somit R_H = 6388.14 km. Der Kollisionskorridor hat somit den Radius (nach Formel (12.137))

$$b_C = \sqrt{R_H\left(a_H + R_H\right)} = \sqrt{R_H\left(\frac{\mu}{V_\infty^2} + R_H\right)} = 8140.730\,\text{km} \quad ,$$

liegt also um etwa 27% des Erdradius über der Erdoberfläche. Die erste Halbachse hat in diesem Fall den Wert (nach Formel (12.121))

$$a_H = \frac{\mu}{V_\infty^2} = 3986.008\,\text{km} \quad ,$$

den Steigungswinkel (nach Formel (12.139))

$$\alpha_H = 63°.912 \quad ,$$

den Umlenkwinkel (nach Formel (12.141))

$$\delta_H = 52°.176$$

und die asymptotische Anomalie (nach Formel (12.140))

$$\upsilon_\infty = 116°.088 \quad .$$

Auf die Erde fallen pro Tag mehrere Tonnen meteoritischen Materials, das sich also auf Kollisionskurs mit der Erdoberfläche befindet. ◀

Als weiteres BEISPIEL zur hyperbolischen Bewegung werden in Abschnitt 12.9 die Gravitationsmanöver behandelt.

12.6 Bewegung im Sonnensystem – Erste Abschätzungen

12.6.1 Abflug von der Erde im Sonnensystem

Der Einflussbereich eines Zentralkörpers reicht theoretisch beliebig (d. h. „unendlich“) weit. Gibt es aber weitere Körper, so haben auch diese Einflussbereiche, die ineinander greifen, so dass die verschiedenen Einflüsse auf die Bewegung eines Raumflugkörpers nur im Rahmen eines Mehrkörperproblems und dort nur numerisch gelöst werden können. Für Näherungsrechnungen, die für eine Missionsanalyse in der Regel ausreichen, genügt die Annahme von Einflusssphären um den jeweiligen Zentralkörper, in dem seine Dominanz gegenüber den Einflüssen weiterer Körper angenommen werden kann. Mathematisch exakt lassen sich drei verschiedene Arten von Einflusssphären definieren, was aber ebenfalls nur im Rahmen des Drei- bzw. Mehrkörperproblems geschehen kann. Für eine Bahnauslegung wird die Bewegung eines Raumflugkörpers zunächst um den ersten Zentralkörper berechnet, den er mit asymptotischer Geschwindigkeit verlasse. Anschließend wird eine Kegelschnittbewegung um den zweiten Zentralkörper angenommen: Die beiden Kegelschnitte werden aneinander angesetzt (das Verfahren ist unter dem Begriff „Patched Conics“ geläufig). In einem zweiten Schritt werden die beiden Kegelschnittbewegungen durch numerischen Ausgleich „weich“ ineinander übergeführt

(„matched Conics“), um dann in einem dritten Schritt durch Integration der vollständigen *Kepler*schen Bewegungsgleichung numerisch so exakt wie möglich berechnet zu werden.

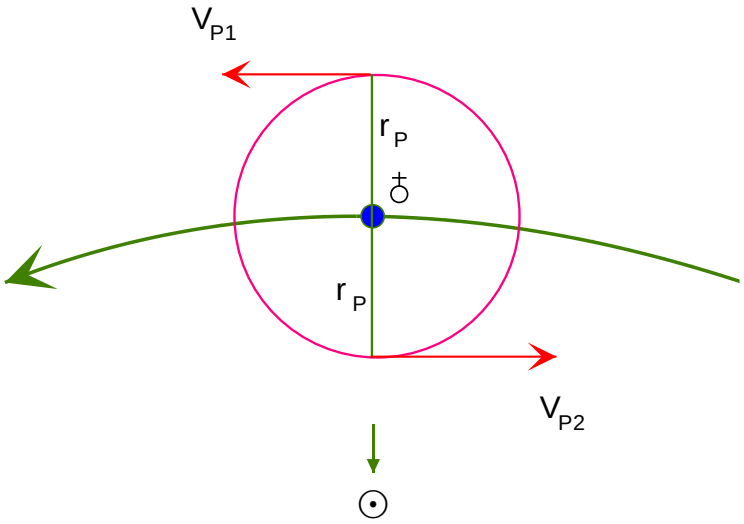


Bild 12-28: Einschuss aus einer erdgebundenen Parkbahn ins innere oder äußere Sonnensystem

Als BEISPIEL betrachten wir im Sonnensystem den Abflug eines Raumflugkörpers von der Erde. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, dass der Abflug von der Erde tangential zur Erdbewegung um die Sonne erfolgen soll (während freilich jede beliebige Abflugrichtung denkbar ist). Ferner darf angenommen werden, dass der Bahnradius der erdgebundenen Parkbahn, aus der der Raumflugkörper zum Verlassen der Erdanziehung beschleunigt werden soll, gegenüber dem Bahnradius der Erdbahn um die Sonne in erster Näherung vernachlässigt werden kann, so dass sich die Eigengeschwindigkeit des Raumflugkörpers nach Verlassen der Erdanziehung linear aus der Geschwindigkeit $V_{\oplus}$ der Erde um die Sonne und der asymptotischen Geschwindigkeit V_∞ des Raumflugkörpers bei Verlassen der Attraktionssphäre der Erde zusammensetzt:

$$V_{S1/2} = V_{\oplus} \pm V_\infty \quad . \tag{12.145}$$

Das positive Vorzeichen muss bei Abflug des Raumflugkörpers in Bewegungsrichtung der Erde und das negative Vorzeichen bei Abflug entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung der Erde gesetzt werden. Der Raumflugkörper gerät dann im interplanetaren Raum auf eine Kegelschnittbahn mit der (ersten) großen Bahnhalbachse[1]

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r_{\oplus}} - \frac{V_S^2}{\mu_\odot}} \quad . \tag{12.146}$$

Zur Berechnung des Exzentrizität wird die Kenntnis benutzt, ob sich der Einschuss im Perihel ($a > r_{\oplus}$, $V_S > V_{\oplus}$) oder Aphel ($a < r_{\oplus}$, $V_S < V_{\oplus}$) der Bahn des Raumflugkörpers befindet. Im ersten Fall ist

[1] gemäß Formel (2.84) (Band I, Abschnitt 2.5.2)

$$r_{\oplus} = r_P = a(1-e)$$

und es wird

$$e_1 = 1-\frac{r_{\oplus}}{a} \quad , \tag{12.147}$$

im zweiten Fall mit

$$r_{\oplus} = r_A = a(1+e)$$

wird

$$e_2 = \frac{r_{\oplus}}{a}-1 \quad . \tag{12.148}$$

Numerisches BEISPIEL: Es sei V_∞ = 10 km/s gewünscht. Bei Einschuss in Bewegungsrichtung der Erde erhält mit $V_{\oplus}$ = 29.78469 km/s der Raumflugkörper die Geschwindigkeit

$$V_{S1} = 39.785\,\text{km/s} \quad ,$$

er wird also im Perihel seiner interplanetaren Bahn eingeschossen. Die große Halbachse und die Exzentrizität betragen dann

$$a_1 = 6.93340\times10^8\,\text{km} = 4.634712\,\text{AE} \quad , \quad e_1 = 0.784237 \quad ,$$

der Raumflugkörper erreicht auf dieser Bahn die maximale Sonnendistanz

$$r_A = a_1(1+e_1) = 12.370882\times10^8\,\text{km} = 8.269424\,\text{AE}$$

und hat dort die Geschwindigkeit

$$V_A = \sqrt{\mu_\odot\left(\frac{2}{r_A}-\frac{1}{a_1}\right)} = 4.811\,\text{km/s} \quad .$$

Bei Einschuss entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung mit derselben asymptotischen Geschwindigkeit wird der Raumflugkörper ins Innere des Sonnensystems beschleunigt, er befindet sich also im Aphel seiner Bahn mit der Geschwindigkeit

$$V_{S2} = 19.785\,\text{km/s} \quad .$$

Große Halbachse und Exzentrizität betragen dann

$$a_2 = 0.95973045\times10^8\,\text{km} = 0.6415402\,\text{AE} \quad , \quad e_2 = 0.5587488 \quad ,$$

der Raumflugkörper erreicht auf dieser Bahn die minimale Sonnendistanz

$$r_P = a_2(1-e_2) = 0.42348221\times10^8\,\text{km} = 0.2830804\,\text{AE}$$

und hat dort die Geschwindigkeit

$$V_P = \sqrt{\mu_\odot\left(\frac{2}{r_P}-\frac{1}{a_2}\right)} = 69.892\,\text{km/s} \quad .$$

Der Einschuss aus einer erdgebundenen Parkbahn kann folgendermaßen durchgeführt werden. Der Raumflugkörper wird zunächst in eine Parkbahn eingeschossen, deren Bahnebene parallel zur Ekliptik liegt. Entsprechend Bild 12-28 wird der Einschuss ins äußere Sonnensystem im sonnenfernsten Punkt (Opposition) der Parkbahn geschossen, um auf die hyperbolische Geschwindigkeit $V_{\infty,1} = V_{P1} + V_{\odot}$ zu kommen, zum Einschuss ins Innere des Sonnensystems im sonnennächsten Punkt (Konjunktion) auf die Geschwindigkeit $V_{\infty,2} = V_{P2} - V_{\odot}$. Die Geschwindigkeiten $V_{\infty,1}$ und $V_{\infty,2}$ sind dem Betrag nach nahezu identisch. Wird für die Parkbahn die Bahnhöhe H = 200 km, also der Radius $r_P = R_E + H$ = 6578 km angenommen und soll die asymptotische Geschwindigkeit V_∞ = 10 km/s in beiden Fällen sein, hat die Fluchthyperbel die erste Halbachse

$$a_H = \frac{\mu_{\odot}}{V_\infty^2} = 3986.005\,\text{km} \quad .$$

Die Perigäumsgeschwindigkeit beträgt

$$V_{P1/2} = \sqrt{\mu_{\odot}\left(\frac{2}{r_P} + \frac{1}{a_H}\right)} = 15.013\,\text{km/s} \quad .$$

Da die Kreisbahngeschwindigkeit in 200 km Höhe

$$V_K = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_P}} = 7.784\,\text{km/s}$$

beträgt, muss in beiden Fällen das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V = V_{P1/2} - V_K = 7.229\,\text{km/s}$$

aufgewendet werden, um die Erdanziehung zu verlassen und die vorgeschriebene interplanetare Bahn zu erreichen. ◀

12.7 „Paradoxa“ in der Raumfahrt

Paradox ist ein menschlicher kein physikalischer Begriff. Paradox erscheint dem Menschen ein Gegenstand, ein Bild, ein Vorgang, ein mathematischer Sachverhalt, ein physikalisches Ereignis. Paradox erscheint etwas, weil es so ist, wie es ist, obgleich der Mensch aus seiner Erfahrung oder seiner alltäglichen Definitionswelt es genau entgegengesetzt erwartet.

12.7.1 Das *Kepler*sche Paradoxon

Das bekannteste Beispiel eines paradoxen Sachverhalts in der Raumflugbahndynamik ist die Abbremsung eines Satelliten in der höheren Atmosphäre, was zu höheren Geschwindigkeiten führt, den Satelliten also beschleunigt (***Kepler*sches Paradoxon**). Der Vorgang kann bekanntlich mit dem dritten Keplerschen Gesetz beschrieben werden: eine infolge der Bahnabsenkung geringere Bahnhalbachse a führt zu einer geringeren Umlaufzeit P mit $a^3 \approx P^2$ und damit zu einer höheren Umlaufgeschwindigkeit $V \approx \sqrt{\mu / a}$ des Satelliten als Folge des erhöhten gravitativen Einflusses bei Annäherung an den Zentralkörper.

12.7.2 Das *von Pirquet*sche Paradoxon

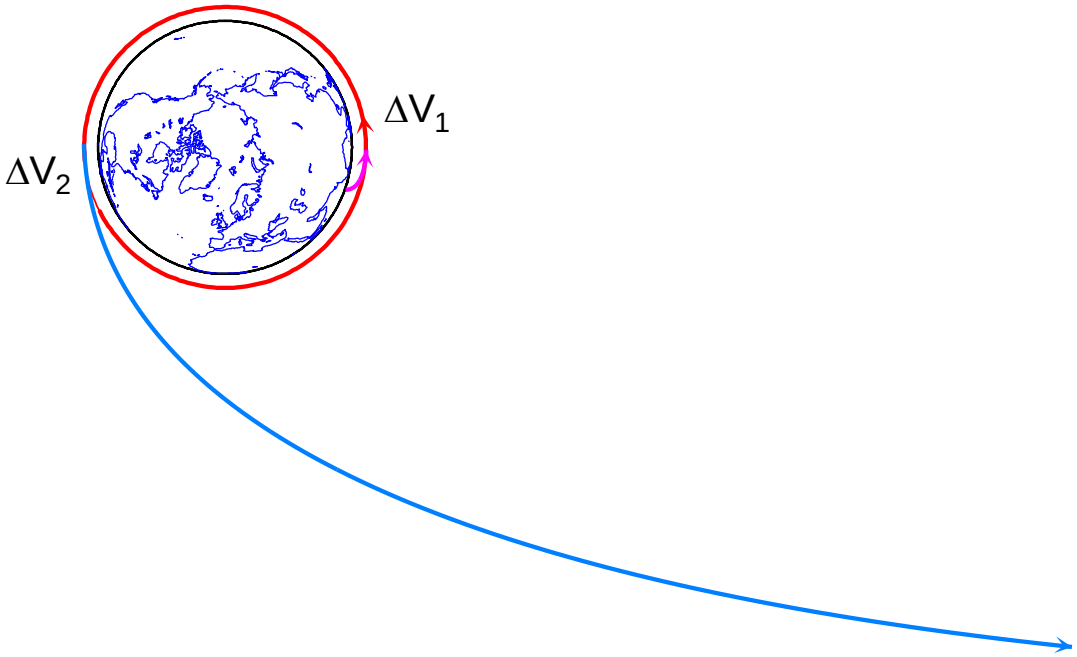


Bild 12-29: Zum *Pirquet*schen Paradoxon

Aus der Frühzeit der Astronautik ist (manchen noch) das astronautische oder kosmonautische Paradoxon bekannt, bisweilen auch als *„Paradoxon der Raumfahrt“* bezeichnet. Es wurde von *Guido von Pirquet* bei seinen Untersuchungen über die Bedeutung einer terrestrischen Raumstation für den interplanetaren Raumflug gefunden. Das nach ihm manchmal auch als **„Pirquetsches kosmonautisches Paradoxon“** bezeichnete Paradoxon besagt: „Es ist vom Treibstoffaufwand her gesehen leichter, von einer einmal existierenden terrestrischen Raumstation aus den Mond oder einen Planeten anzusteuern, als von der Erdoberfläche zu dieser Raumstation zu kommen.“ Die *von Pirquetsche* Formulierung lautet[1]: „Um (interplanetaren) Raumflug zu bewerkstelligen, bedarf es in Wirklichkeit nicht der Entweich- sondern lediglich der Kreisbahngeschwindigkeit“. *Von Pirquet* stellte sich diese Raumstation als „Zwischenbahnhof“ in 12760 km Höhe vor.

Den Nutzen einer Raumstation für interplanetare Missionen hatte übrigens schon *Konstantin Ziolkowsky* betont. Der Grundgedanke scheint hier der zu sein, dass es nicht nötig ist, direkt von der Erdoberfläche in die interplanetare Bahn einzuschießen, sondern dass dies auch aus einer (vielleicht kreisförmigen) Erdumlaufbahn möglich ist. Der Energiebedarf, d. h. das benötigte Geschwindigkeitsinkrement aus einer solchen Bahn, ist in der Tat wesentlich geringer als bei Start von der Erdoberfläche aus (wofür üblicherweise etwa $\Delta V = 10$ km/s veranschlagt werden können), da dann nur die Differenz aus der schon erreichten Kreisbahngeschwindigkeit und der Fluchtgeschwindigkeit aus dem Erdanziehungsbereich oder einer höheren hyperbolischen Geschwindigkeit aufzuwenden ist. *Von Pirquet*[2] hatte sich den Flug zur Raumstation (oder gleich zu einer „Raketenstation“ auf dem Mond) mit einer „Hilfsrakete“ vorgestellt. Dort

[1] nach K. A. EHRICKE [1960], p. 21

[2] enthalten in LEY [1928], pp. 284–323

würden die Passagiere in das interplanetare Raumfahrzeug umsteigen um dann mit nur noch relativ geringem Energieaufwand loszufliegen.

Ernsthafte Zweifel an der Tragfähigkeit dieser Überlegungen sind in den letzten Jahren bekannt geworden: Da es wohl nur wenige Raumstationen in dezidierten Umlaufbahnen geben wird, werden diese sich im allgemeinen in einer Bahnebene um die Erde bewegen, von der aus bestimmte interplanetare Zielbahnen nur mit einem zusätzlichen Bahnebenenmanöver erreicht werden können. Dieses Manöver wurde bei *von Pirquet* nicht berücksichtigt, der nur mit koplanaren Übergängen rechnete. Auch scheint hier das Gesamtsystem: 1. Flug mit „Hilfsrakete“ zur Station, 2. Interplanetarer Flug, nicht betrachtet zu sein. Gleichwohl ist der Gedanke einer „abgemagerten Zwischenstation“ in Form einer Parkbahn, die nun eine geeignete räumliche Orientierung haben kann, ganz ohne Verwendung einer eigenen Station von Interesse. Eine solche Parkbahn wurde bei den Apollomissionen auch wirklich angewendet. Aktuell könnte der Gedanke bei einer bemannten Marsmission werden. Ein bemannter Raumflugkörper zum Mars müsste so groß sein, dass ein direkter Einschuss von der Erdoberfläche aus nicht möglich wäre. Hier würde sich – wie vielfach diskutiert wird – der Start einzelner Module in eine geeignete erdnahe Umlaufbahn lohnen, wo das interplanetare Raumschiff aus den Modulen zusammengesetzt und dann mit relativ geringem Geschwindigkeitsinkrement zu seiner interplanetaren Mission gestartet würde. Eine permanente Raumstation wäre dazu nicht nötig. Hier würde der *von Pirquetsche* Gedanke, allerdings seines paradoxen Inhaltes entkleidet, zu sinnvoller Anwendung kommen.

Einige der Überlegungen *von Pirquets* wurden 1928 in dem von *Willi Ley* herausgegebenen Sammelwerk „Die Möglichkeit der Weltraumfahrt“ veröffentlicht. *Von Pirquet* berechnete übrigens zahlreiche Raumflugbahnen und arbeitete auch ein Konzept für das schrittweise Vordringen zum Raumflug aus: Rakete – Fernrakete – Mondrakete – interplanetare Weltraumrakete.

In diesem Artikel beschäftigte sich *von Pirquet* mit den „Holzwegen“ der Weltraumfahrt, das sind Vorschläge, die Weltraumfahrt nicht mit der Raketentechnik zu realisieren, sondern mit heute sonderbar anmutenden Alternativvorschlägen (Ballistik nach *Jules Verne*, das Solenoid-Geschütz als elektromagnetisches Projektil, der Rohrposttunnel von *Drouet*, die Elektronenrakete von *Ulinski*). Diese Vorschläge werden von *von Pirquet* sachlich, aber nicht emotionsfrei, als undurchführbar entlarvt. Bemerkenswert ist, dass der Gedanke eines elektrischen Triebwerks im Prinzip für wohl durchführbar erachtet wird (VON PIRQUET [1928, p. 319] schreibt: (auch) „Oberth scheint diesen Weg in Erwägung zu ziehen … “).

In dem genannten Buch von *W. Ley* ist auch der Beitrag *W. Hohmanns* über „Fahrtrouten, Fahrzeiten und Landungsmöglichkeiten“ enthalten, seinen zweiten Beitrag zur Raumflugdynamik nach seinem bekannten Buch (1925).

12.7.3 Das *Hohmann*sche Paradoxon

Mit dem Begriff *Hohmannsches Paradoxon* wird eine bestimmte Serie von Übergangsbahnen etwa im Sonnensystem verknüpft, die zum Verlassen dieses Systems geeignet sind[1]. Um einen Raumflugkörper aus einer Planetenbahn auf eine Bahn zu bringen, die das Sonnensystem verlässt, muss er mindestens auf die Fluchtgeschwindigkeit bezogen auf die Planetenbahn mit Radius r_K

[1] Begriff bei B. STANEK [1983], p. 116. Herleitung in DLR/GSOC IB 94-13, pp. 135–143 [1994]

$$V_{F,Pl} = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_K}} = \sqrt{2}\,V_K$$

beschleunigt werden, wozu das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V = V_{F,Pl} - V_K = V_K\left(\sqrt{2}-1\right)$$

benötigt wird.

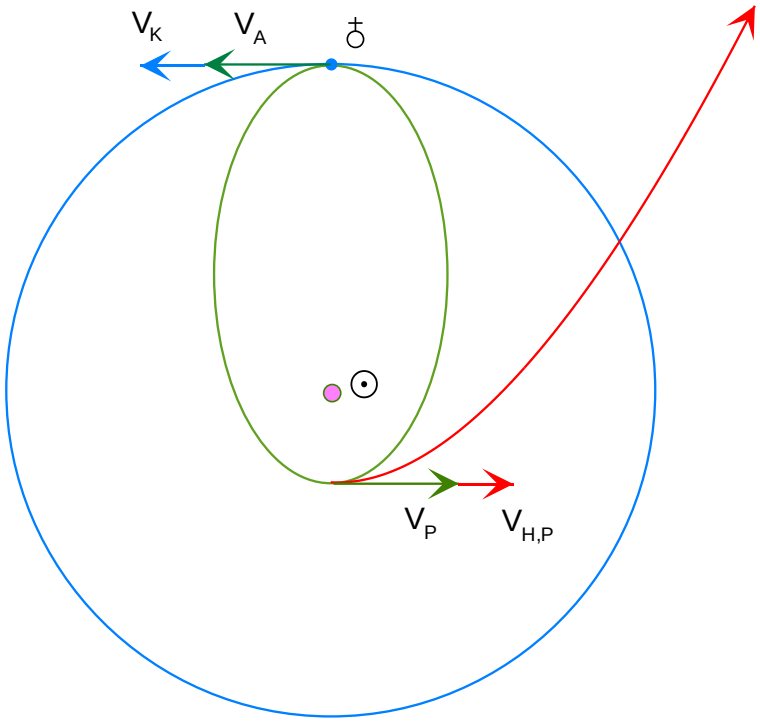


Bild 12-30: 2-Impuls-Verfahren zum Verlassen des Sonnensystems

Hier bedeuten V_K die Geschwindigkeit des auf einer Kreisbahn angenommenen Planeten mit Kreisbahnradius r_K, $V_{E,Pl}$ die parabolische Geschwindigkeit (Entweichgeschwindigkeit, Fluchtgeschwindigkeit) bezogen auf die Bahn des Planeten mit Kreisbahnradius r_K. Die asymptotische Geschwindigkeit (hyperbolischer Exzess)[1] verschwindet dann. Dies zeigt Formel (12.128) auf S. 192, da in diesem Fall $V_{H,P} = V_{E,Pl}$. Soll sie dagegen den Betrag $V_\infty > 0$ annehmen, muss die Anfangsgeschwindigkeit mit Formel (12.121) auf S. 192 und der allgemeinen Geschwindigkeitsbeziehung bei Einschuss von einer beliebigen (kreisförmig angenommenen) Planetenbahn mit Radius r_K den Wert

$$V_P = \sqrt{\mu_\odot\left(\frac{2}{r_K}+\frac{1}{a_H}\right)} = \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_K}+V_\infty^2} = \sqrt{V_{F,Pl}^2+V_\infty^2} = \sqrt{2V_K^2+V_\infty^2}$$

haben, das Geschwindigkeitsinkrement muss also

[1] Die asymptotische Geschwindigkeit wird von *von Pirquet* (enthalten in LEY [1928], p. 287) als *Restgeschwindigkeit* bezeichnet.

$$\Delta V_I \;=\; V_P - V_K \;=\; \sqrt{2V_K^2 + V_\infty^2} - V_K \tag{12.149}$$

betragen. Es wird nur ein Impuls aufgebracht, weshalb dieses Verfahren als *1-Impuls-Verfahren* bezeichnet wird.

Anstatt direkt von der Erde (bzw. einem anderen Planeten) in eine Fluchthyperbel einzuschießen, kann mit einem ersten Impuls erst ins Innere des Sonnensystems eingeschossen werden, um dann im Perihel dieser Bahn mit einem zweiten Impuls auf hyperbolische Geschwindigkeit zu beschleunigen und so das Sonnensystem zu verlassen. Dieses Verfahren wird als *2-Impuls-Verfahren* bezeichnet. Wird dieses Verfahren angewendet, hat die Übergangsbahn aus der Startplanetenbahn r_K zur Periheldistanz r_P die Halbachse

$$a \;=\; \frac{r_K + r_P}{2} \quad ,$$

der Einschuss in diese Bahn erfordert das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V_1 \;= V_K - V_A \;=\; V_K - \sqrt{\mu_\odot \left(\frac{2}{r_K} - \frac{1}{a} \right)} \;=\; V_K - \sqrt{V_F^2 - \frac{2\mu_\odot}{r_K + r_P}} \quad . \tag{12.150}$$

Mit V_A wird hier die Geschwindigkeit im Aphel der ersten Transferbahn aus der Kreisbahn r_K bezeichnet. Im Perihel dieser Bahn hat der Raumflugkörper dann die Geschwindigkeit

$$V_P = \sqrt{2\mu_\odot \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_K + r_P} \right)} \quad .$$

Um von dort aus die gewünschte asymptotische Geschwindigkeit V_∞ erreichen zu können, muss der Raumflugkörper auf die Geschwindigkeit

$$V_H \;=\; \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_P} + V_\infty^2}$$

beschleunigt werden, der zweite Impuls wird somit durch das Geschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V_2 \;=\; V_H - V_P \;=\; \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_P} + V_\infty^2} - \sqrt{2\mu_\odot \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_K + r_P} \right)} \tag{12.151}$$

erreicht. Das 2-Impuls-Verfahren benötigt daher das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement

$$\Delta V_{II} \;=\; \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad ,$$

somit

$$\Delta V_{II} \;=\; V_K + \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_P} + V_\infty^2} - \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_P} + 2V_K^2} \quad . \tag{12.152}$$

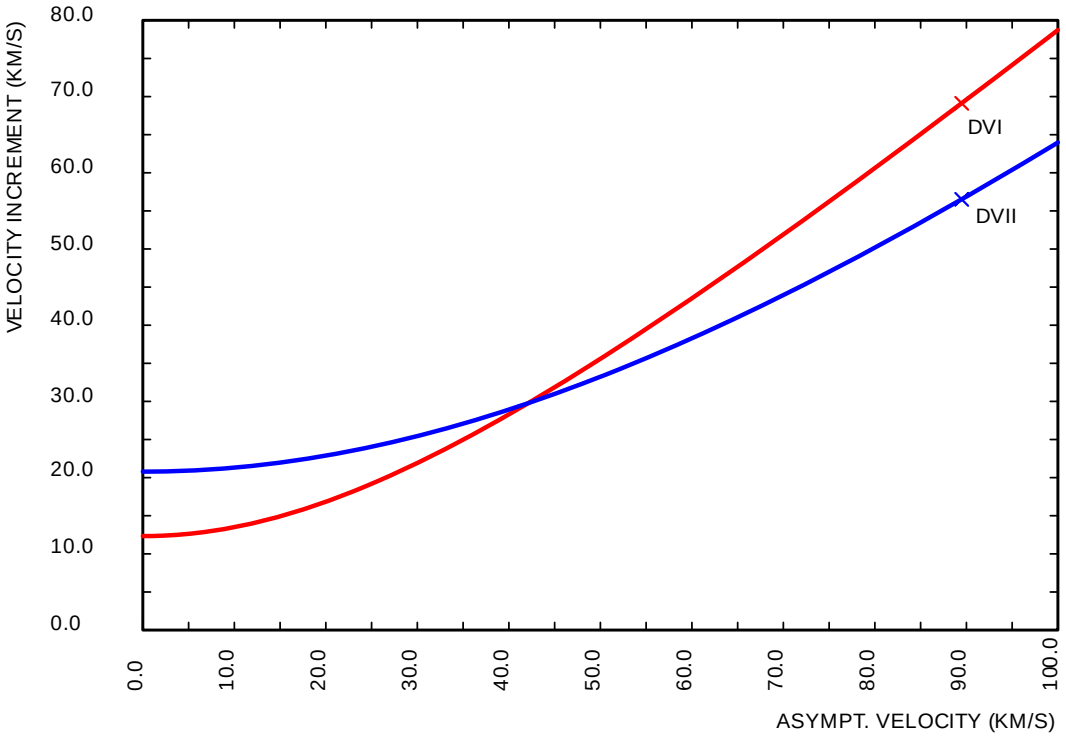


Bild 12-31: *Hohmann*sches Paradoxon: Flucht aus Sonnensystem im 1- und 2-Impuls-Verfahren. Beispiel: Flucht von Erdbahn und Periheldistanz bei 0.2 AE.

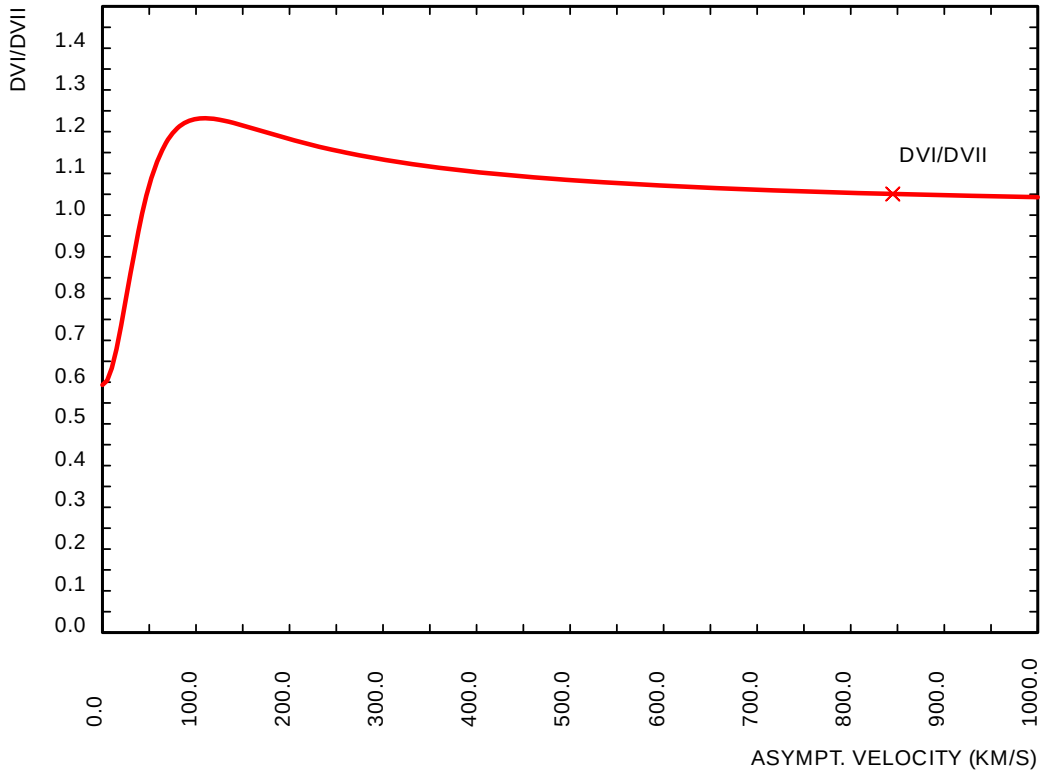


Bild 12-32: *Hohmann*sches Paradoxon: Relation der Geschwindigkeitsinkremente im 1- und 2-Impuls-Verfahren bei Flucht aus dem Sonnensystem von Erdbahn aus und mit Periheldistanz bei 0.2 AE.

Es sind nun folgende Fälle von besonderem Interesse:

1. Falls

$$V_\infty \;=\; V_{F,Pl} \;=\; \sqrt{2}\,V_K \;=\; \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_K}} \quad ,$$

wird offenbar

$$\Delta V_I\left[V_\infty = V_{F,Pl}\right] \;=\; V_K \;=\; \Delta V_{II}\left[V_\infty = V_{F,Pl}\right] \quad .$$

Wird eine asymptotische Geschwindigkeit angestrebt, die gleich der Fluchtgeschwindigkeit aus der betreffenden Planetenbahn ist, ist das Geschwindigkeitsinkrement (d. h. der benötigte Energiebedarf) gleich, wenn direkt in die (hyperbolische) Fluchtbahn eingeschossen wird (1-Impuls-Verfahren) oder wenn erst ins Innere des Sonnensystems und von dort in die Fluchtbahn geschossen wird (2-Impuls-Verfahren). In beiden Fällen ist das aufzuwendende Geschwindigkeitsinkrement identisch der Kreisbahngeschwindigkeit des Planeten. Beim 2-Impuls-Verfahren ist es zudem gleichgültig, wie nahe an der Sonne der zweite Impuls gegeben wird.

2. Falls die asymptotische Geschwindigkeit kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit aus der Planetenbahn ist

$$V_\infty \;<\; V_{F,Pl}$$

und wenn der zweite Impuls im Innern des Sonnensystems gegeben werden soll, wenn also

$$0 \;<\; r_P \;<\; r_K$$

gilt, wird

$$V_\infty^2 \;<\; 2V_K^2 \;=\; V_{F,Pl}^2 \;=\; \frac{2\mu_\odot}{r_K} \;<\; \frac{2\mu_\odot}{r_P}$$

$$\left(\frac{2\mu_\odot}{r_P} - 2V_K^2\right)V_\infty^2 \;<\; \left(\frac{2\mu_\odot}{r_P} - 2V_K^2\right)2V_K^2$$

$$4V_K^4 + V_\infty^2\,\frac{2\mu_\odot}{r_P} \;<\; 2V_K^2\,\frac{2\mu_\odot}{r_P} + 2V_K^2 V_\infty^2$$

$$\left(2V_K^2 + V_\infty^2\right)\left(\frac{2\mu_\odot}{r_P} + 2V_K^2\right) \;<\; 4V_K^2\left(\frac{2\mu_\odot}{r_P} + V_\infty^2\right)$$

$$\sqrt{2V_K^2 + V_\infty^2} + \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_P} + 2V_K^2} \;<\; 2V_K + \sqrt{\frac{2\mu_\odot}{r_P} + V_\infty^2} \quad ,$$

somit

$$\Delta V_I \;<\; \Delta V_{II} \quad .$$

Das 1-Impuls-Verfahren ist somit günstiger als das 2-Impuls-Verfahren, wenn die gewünschte asymptotische Geschwindigkeit kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit aus der betreffenden Ausgangsbahn ist.

3. Falls schließlich

$$V_\infty \; > \; V_F$$

und wieder

$$0 \; < \; r_P \; < \; r_K$$

angenommen wird, führt eine zur vorstehenden analoge Herleitung auf

$$\Delta V_I \; > \; \Delta V_{II} \quad .$$

Dieser Fall ist Inhalt des *Hohmannschen Paradoxons*: Wird ein Raumflugkörper aus einer Planetenbahn auf eine Fluchthyperbel aus dem Sonnensystem eingeschossen und wird eine asymptotische Geschwindigkeit gewünscht, die dem Betrag nach über der Fluchtgeschwindigkeit aus der betreffenden Planetenbahn liegt, so ist es im Hinblick auf den Energieverbrauch günstiger, statt direkt aus der Planetenbahn in eine Fluchthyperbel einzuschießen, zunächst auf eine Transferbahn ins Innere des Sonnensystems und dann mit einem zweiten Impuls im sonnennächsten Punkt dieser Bahn in die Fluchthyperbel. Je näher der sonnennächste Punkt an der Sonne liegt, um so kleiner ist das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement. Das Verhältnis der Geschwindigkeitsinkremente im 2-Impuls- zum 1-Impuls-Verfahren variiert und nimmt einen günstigsten Extremalwert an.

BEISPIEL: Einschuss aus der Erdbahn mit Perihel im Abstand $r_P = 0.2$ AE

Die Geschwindigkeitsinkremente ΔV_I und ΔV_{II} im 1-Impuls- und 2-Impuls-Verfahren sind in Bild 12-31 auf Seite 208 aufgetragen. Es ist zu ersehen, dass die beiden Kurven sich an der Fluchtgeschwindigkeit aus der Erdbahn

$$V_{F,\odot\!+} \; = \; 42.112\,\text{km/s}$$

schneiden und die beiden Geschwindigkeitsinkremente den Wert der Kreisbahngeschwindigkeit der Erdbahn

$$\Delta V_I \; = \; \Delta V_{II} \; = \; 29.785\,\text{km/s}$$

annehmen. Optimal wird die Relation zwischen 1-Impuls- und 2-Impuls-Verfahren, wenn die asymptotische Geschwindigkeit etwa V_∞ = 110 km/s gewünscht ist. Dies zeigt Bild 12-32 auf Seite 208 Die Relation zwischen den Geschwindigkeitsinkrementen erreicht dann den Maximalwert

$$\frac{\Delta V_I}{\Delta V_{II}} \; = \; 1.23217$$

und nähert sich für noch größere asymptotische Geschwindigkeiten dem Wert $\cong$ 1.05. ◀

12.8 Auswahl von Einflussbereichen

Bewegt sich ein Raumflugkörper oder anderer Himmelskörper, wie ein kleiner Planet, Komet, Meteorit, unter der Einwirkung verschiedener Zentralkörper, kann seine *Kepler*sche Bewegungsgleichung auf jeden dieser Zentralkörper bezogen werden. Seien zwei Zentralkörper mit den Massen m_I und m_{II} mit den jeweiligen zentrischen Gravitationskonstanten μ_I und μ_{II} betrachtet und sei der Ortsvektor $\mathbf{r}_I$ bezogen auf $m_I \left(r_I = |\mathbf{r}_I|\right)$, sowie $\mathbf{r}_{II}$ bezogen auf $m_{II} \left(r_{II} = |\mathbf{r}_{II}|\right)$, so hat der Raumflugkörper bezogen auf m_I die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}_I = -\mu_I \frac{\mathbf{r}_I}{r_I^3} + \mathbf{R}_I \tag{12.153}$$

und bei Bezug auf m_{II}

$$\ddot{\mathbf{r}}_{II} = -\mu_{II} \frac{\mathbf{r}_{II}}{r_{II}^3} + \mathbf{R}_{II} \quad . \tag{12.154}$$

Mit beiden Bewegungsgleichungen lässt sich die Bahn des Raumflugkörpers exakt integrieren. Die jeweiligen Bewegungseinflüsse

$$b_I = \frac{\mu_I}{r_I^2} \quad , \quad \mathbf{R}_I \quad , \quad b_{II} = \frac{\mu_{II}}{r_{II}^2} \quad , \quad \mathbf{R}_{II} \tag{12.155}$$

kommen in der Natur gewöhnlich sehr unterschiedlich und größenordnungsmäßig generell nicht klar trennbar zur Wirkung: Der Anteil, der bezogen auf m_I der Hauptterm ist, kann bezogen auf m_{II} als „Störterm“ behandelt werden und umgekehrt. Die Übergänge sind fließend. Für eine erste Missionsauslegung bzw. zur Untersuchung von Vorgängen im Sonnensystem werden definitorisch sinnvoll erscheinende Einflussbereiche ausgewählt. In der Himmelsmechanik werden die *Attraktionssphäre*, der *Aktivitätsbereich* und gelegentlich der *Gravitationsbereich* unterschieden. Das Arbeiten mit diesen Begriffen wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

12.8.1 Die Attraktionssphäre

Als schärfste Definition eines Einflussbereiches werden üblicherweise die Bereiche definiert, in denen die Anziehung des einen oder anderen Zentralkörpers überwiegt und in diesem Bereich die Bewegung eines Raumflugkörpers als *Zweikörperbewegung* aufgefasst wird. An den Grenzen dieser *Anziehungsbereiche* werden die jeweiligen Zweikörperbahnen zusammengesetzt (Methode der *„patched conics“*). Überwiegt die Beschleunigung des Raumflugkörpers durch den Zentralkörper der Masse m_I die Beschleunigung durch den Zentralkörper m_{II}

$$b_I > b_{II} \quad ,$$

so sagt man, der Raumflugkörper befinde sich in der *Attraktionssphäre* (= *Attraktionsbereich* = *Anziehungsbereich*) von m_I , im Fall

$$b_{II} > b_I$$

im Attraktionsbereich von m_{II} . Die jeweiligen eine Zweikörperbewegung „störenden“ Terme $\mathbf{R}_I$ und $\mathbf{R}_{II}$ werden in diesem Zusammenhang vernachlässigt. Das Grenzgebiet dieser Attraktionsbereiche ist durch die Bedingung

$$b_I = \frac{\mu_I}{r_I^2} = b_{II} = \frac{\mu_{II}}{r_{II}^2} \tag{12.156}$$

gegeben. Zur Herleitung der Trennfläche der beiden Attraktionsbereiche nehmen wir (ohne Einschränkung)

$$m_I \geq m_{II}$$

an und legen den Mittelpunkt eines kartesischen x_i – Systems in den Mittelpunkt von m_{II} , die x_1- Achse soll auf der Geraden durch m_I nach m_{II} liegen und in Richtung von m_I nach m_{II} weisen (siehe Bild 12-33).

Der Abstand von m_I zu m_{II} sei r_M . Dann ist

$$\begin{aligned} r_I^2 &= (x_1 - r_M)^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ r_{II}^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad . \end{aligned} \tag{12.157}$$

Werde das Verhältnis der Massen durch

$$A := \frac{m_I}{m_{II}} = \frac{\mu_I}{\mu_{II}} \geq 1 \tag{12.158}$$

definiert, liefert die Bedingung (12.156)

$$\left(x_1 - \frac{r_M}{A-1}\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{A}{(A-1)^2} r_M^2 \quad . \tag{12.159}$$

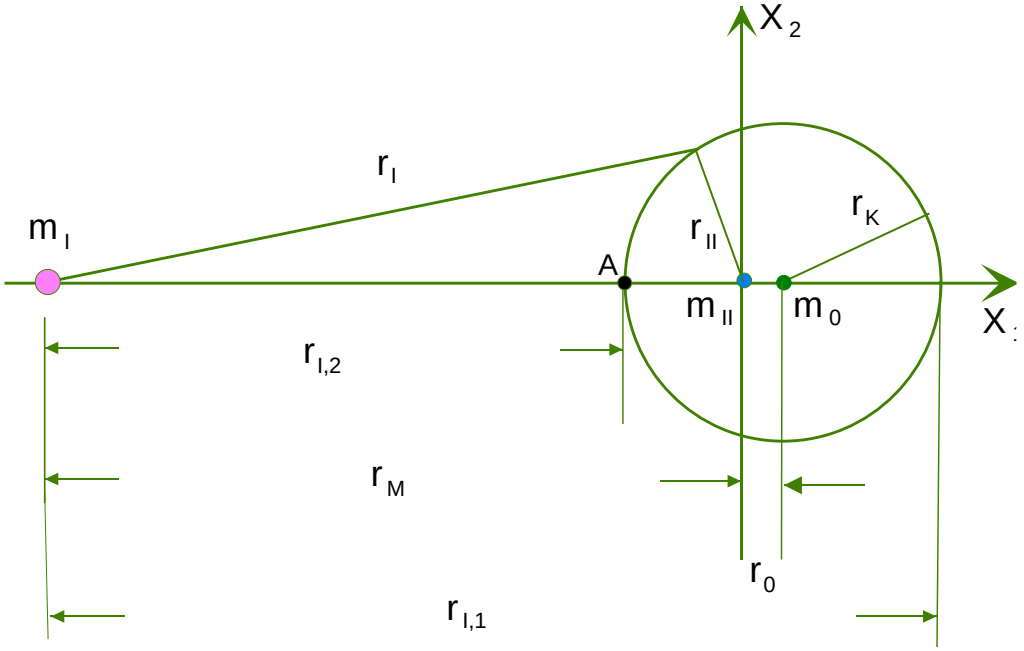


Bild 12-33: Zur Herleitung der Attraktionssphäre, m_0 Mittelpunkt der Attraktionssphäre um m_{II} bei Bezug auf m_I, A – avarischer Punkt

Dies ist die Gleichung einer Kugel. Der Begriff „Sphäre“ ist in diesem Zusammenhang also gerechtfertigt. Der Bereich überwiegenden Einflusses von m_{II} gegenüber m_I wird daher als *Attraktionssphäre* bezeichnet. Der Mittelpunkt dieser Sphäre liegt auf der Geraden durch m_I und m_{II} (also der x_1- Achse des hier gewählten Koordinatensystems) im Abstand

$$r_0 = \frac{r_M}{A-1} \tag{12.160}$$

von m_{II} auf der von m_I abgewandten Seite. Ihr Radius ist

$$r_K = \frac{\sqrt{A}}{A-1} r_M \quad . \tag{12.161}$$

Sie schneidet die Gerade durch m_I und m_{II} im Abstand

$$r_{II\,1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{A}}{A-1} r_M \tag{12.162}$$

von m_{II} entfernt bzw. im Abstand

$$r_{I\,1,2} = r_M + r_{II\,1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A}}{A-1} r_M \tag{12.163}$$

von m_I entfernt. Der Punkt im Abstand $r_{I\,2}$, der also zwischen m_I und m_{II} liegt, wird als *avarischer Punkt* bezeichnet[1]. Bei Gleichheit der beiden Massen $m_I = m_{II}$, $A \to 1$, $r_I^2 = r_{II}^2$, artet die Kugel in die Ebene $x_1 = r_M / 2$ aus, die also genau zwischen den beiden Zentralkörpern aufgespannt ist.∞

BEISPIEL: In den Tabellen in Anhang H sind die Parameter der Attraktionssphären für einige Planeten in Bezug auf die Sonne und einige Monde bei Bezug auf die zugehörigen Planeten gelistet. Die Tabelle enthält neben dem Massenverhältnis *A* von Hauptkörper der Masse m_I zu dem hier Ablenkkörper genannten zweiten kleineren Zentralkörper der Masse m_{II}, den Äquatorradius $R_{E,II}$ des Ablenkkörpers und die Parameter der Attraktionssphäre, wobei r_0 der Abstand des Mittelpunktes der Attraktionssphäre vom Mittelpunkt des Ablenkkörpers m_{II} ist.

Es zeigt sich, dass für den Erdmond der Mittelpunkt der Attraktionssphäre als Abstand vom Mittelpunkt von m_{II} das etwa 25fache des Äquatorradius des Mondes hat, während der Attraktionssphäre der Erde bezogen auf die Sonne nahe dem Mittelpunkt der Erde ist, was eine Folge des gewaltigen Massenverhältnisses der Sonne zur Erde ist. Andererseits zeigt sich, dass der Erdmond mit dem mittleren Abstand r_M = 384400 km vom Erdmittelpunkt weit außerhalb der Attraktionssphäre der Erde bezogen auf die Sonne liegt, deren Radius nur 260000 km beträgt. Der Mond bewegt sich also stets im Bereich überwiegender Anziehung durch die Sonne nicht durch die Erde. Eine Folge davon ist die beobachtete Tatsache, dass die Mondbahn stets konkav zur Sonne gerichtet ist[2]. Die Attraktionssphäre des Erdmondes bezogen auf die Sonne ist knapp 10 mal kleiner als die auf die Erde bezogene Attraktionssphäre. Dies bedeutet, dass bei einer Abschätzung des Fluges eines Raumflugkörpers von der Erde zum Mond die Attraktionssphäre der Erde bezogen auf die Sonne gewertet werden muss, anschließend allein der Einfluss der Sonne bis zur Attraktionssphäre des Mondes in Bezug auf die Sonne und erst dann die Attraktion durch den Mond. Die Attraktionssphäre des Mondes bezogen auf die Erde darf also überhaupt nicht in Betracht gezogen werden.

Anders ist es bei der Berechnung einer Tour vom Jupiter zu seinen Monden und zwischen diesen Monden. Sie liegen alle mit ihrer auf Jupiter bezogenen Attraktionssphäre innerhalb der Attraktionssphäre des Jupiters bei Bezug auf die Sonne. Die Abschätzung einer solchen Tour kann also in erster Näherung ohne Berücksichtigung der Anziehung durch die Sonne

[1] vom griechischen βαρυς, der Punkt auf den zwischen zwei Körpern „keine Schwere“ wirkt bzw. der Punkt, auf den von den beiden Körpern die gleiche Schwerkraft wirkt und sich deren Wirkung somit „aufhebt“.

[2] siehe etwa in SCHULZ, W. [1977]

durchgeführt werden. Auch beim Mars liegen die Bahnen der beiden Marsmonde vollständig innerhalb der Attraktionssphäre, die auf die Sonne bezogen ist. Die Attraktionssphären der beiden Marsmonde jedoch liegen vollständig innerhalb dieser Monde, so dass eine Tour im Marssystem unabhängig von der Anziehung dieser beiden kleinen Körper gerechnet werden kann. Die kleinen Planeten können wie das Beispiel des größten unter ihnen, Ceres, zeigt, eine relativ zu ihrem Körperradius beachtliche Attraktionssphäre besitzen, innerhalb derer die Anziehung des kleinen Planeten die der Sonne übertrifft.

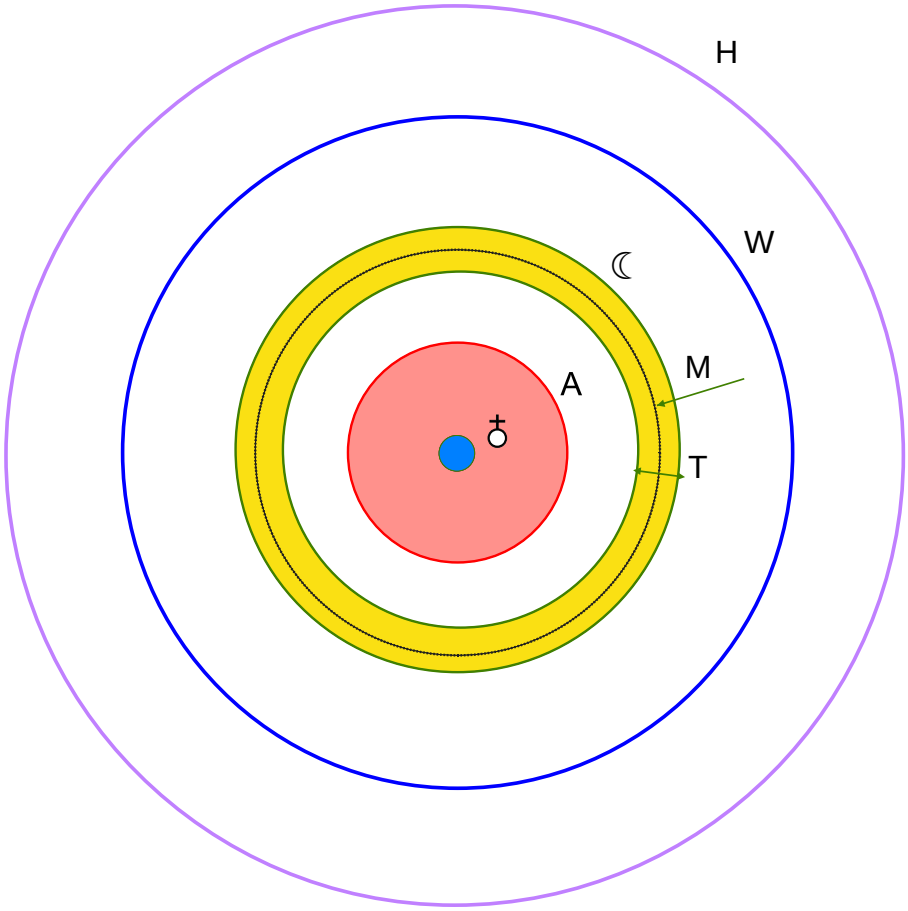


Bild 12-34: Schematische Darstellung von Attraktionssphäre *A*, Aktivitätsbereich *W*, *Hill*sche Gravitationssphäre *H* im Erde-Sonne-System. Der Bereich des Attraktionssphäre des Mondes in seiner Bewegung um die Erde ist als Torus T eingetragen. *M* markiert die Mondbahn innerhalb des Attraktionstorus

Kehren wir zum Beispiel des Erdmondes zurück, dessen Bahn, obgleich außerhalb der Attraktionssphäre der Erde, als stabil um die Erde gedeutet werden kann, d. h. die Erde übt einen beträchtlichen *Einfluss* auf den Mond aus. Dies legt die Definition eines *Einflussbereiches* (*Wirkungsbereich, Aktivitätsbereich*) eines Planeten nahe, die ebenso wie die dritte in diesem Zusammenhang verwendete Definition, die *Hillsche Gravitationssphäre*, im Zusammenhang des Mehrkörperproblems behandelt wird (siehe in Abschnitt 17.4). Eine Übersicht über die verschiedenen so definierten Bereiche im Erde-Sonne-System ist in Bild 12-34 auf Seite 214 zu erkennen. ◀

12.8.2 Der Aktivitätsbereich

Die Bewegung eines Körpers der Masse m_3 werde unter dem Einfluss der Körper m_1 und m_2 im Rahmen eines reinen Dreikörperproblems untersucht. In Bezug auf m_1 lautet die Bewegungsgleichung (vgl. die Formeln in Abschnitt 17.4)

$$\ddot{\mathbf{r}}_{31} = -\frac{\mu_1+\mu_3}{r_{31}^{\,3}}\mathbf{r}_{31} - \mu_2\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^{\,3}} + \mu_2\frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^{\,3}} \quad , \tag{12.164}$$

in Bezug auf m_2

$$\ddot{\mathbf{r}}_{32} = -\frac{\mu_2+\mu_3}{r_{32}^{\,3}}\mathbf{r}_{32} - \mu_1\frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^{\,3}} + \mu_1\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^{\,3}} \quad . \tag{12.165}$$

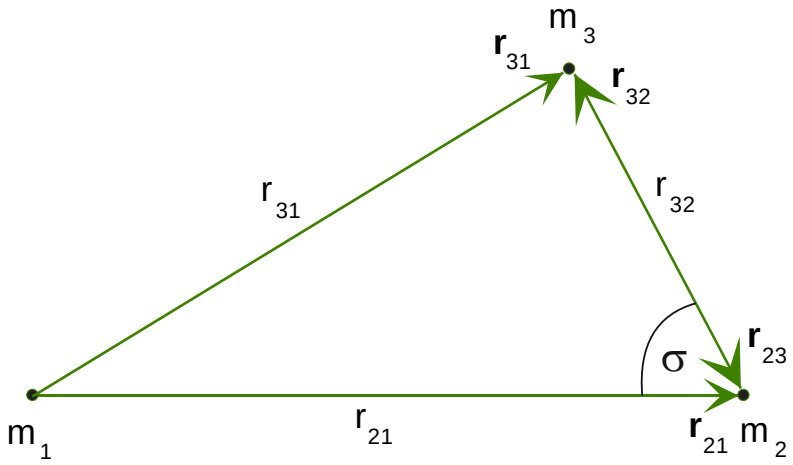


Bild 12-35: Zur Herleitung des Aktivitätsbereichs

Es werde nun jeweils das Verhältnis aus Störbeschleunigung und Hauptbeschleunigung (dargestellt durch den ersten Term in den Gleichungen (12.164) und (12.165)) auf den dritten Körper m_3 durch den jeweiligen Zentralkörper m_1 bzw. m_2 untersucht. Es seien

$$Q_{31} := \frac{\mu_2\left|\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^{\,3}} - \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^{\,3}}\right|}{\frac{\mu_1+\mu_3}{r_{31}^{\,2}}}$$

$$Q_{32} := \frac{\mu_1\left|\frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^{\,3}} - \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^{\,3}}\right|}{\frac{\mu_2+\mu_3}{r_{32}^{\,2}}} \quad . \tag{12.166}$$

Wenn $Q_{31} < Q_{32}$, ist der Einfluss von m_1 dominant auf m_3,

wenn $Q_{31} > Q_{32}$, ist der Einfluss von m_2 dominant auf m_3.

Dieser jeweilige dominante Einflussbereich wird als *Aktivitätsbereich*, gelegentlich auch als *Wirkungsbereich* bezeichnet. Die Grenze des Wirkungsbereichs kann aus der Bedingung

$$Q_{32} = Q_{31} \tag{12.167}$$

berechnet werden[1]. Der Aktivitätsbereich (Wirkungsbereich) eines Himmelskörpers liegt außerhalb seiner Attraktionssphäre (vgl. Bild 12-34).

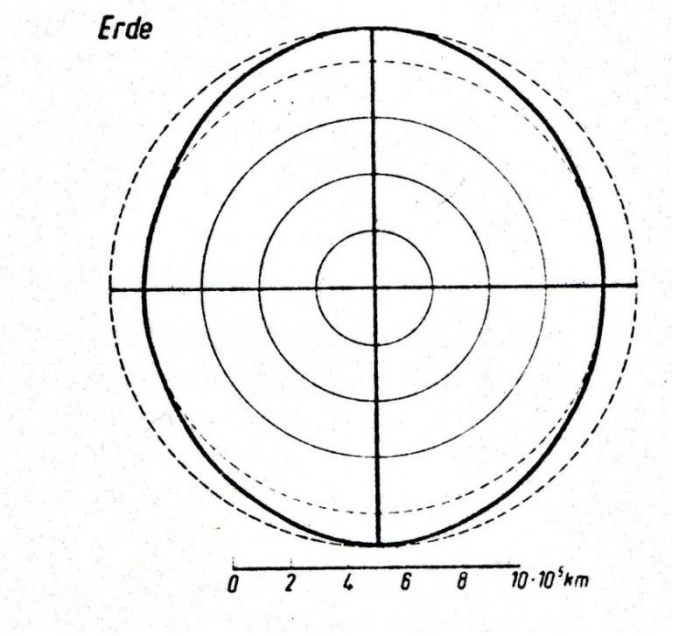


Bild 12-36: Der Aktivitätsbereich der Erde in Bezug auf die Sonne[2]

Im Anschluss an die Arbeit von *W. Schulz* werde der im Sonnensystem vorherrschende Fall $m_2 < m_1$ angenommen, wenn m_1 die Sonne, m_2 einen Planeten bezeichne. Im Rahmen eines eingeschränkten Drei-Körperproblems ($\mu_3 \ll \mu_1, \mu_3 \ll \mu_2$) werde $\mu_3 \to 0$ angenommen. Mit den Bezeichnungen

$$\tau := \frac{\mu_1}{\mu_2} \;,\; q := \frac{r_{32}}{r_{21}} \;,\; w := \frac{r_{31}}{r_{21}} \tag{12.168}$$

werden die Beziehungen hergeleitet

$$\begin{aligned} w^2 &= 1 - 2q\cos\sigma + q^2 \\ \mathbf{r}_{23}\cdot\mathbf{r}_{21} &= r_{23}\, r_{21}\cos\sigma = q\, r_{21}^2\cos\sigma \\ \mathbf{r}_{31}\cdot\mathbf{r}_{21} &= \left(\mathbf{r}_{21}-\mathbf{r}_{23}\right)\cdot\mathbf{r}_{21} = r_{21}^2\left(1-q\cos\sigma\right) \quad . \end{aligned} \tag{12.169}$$

Damit ergeben sich die Umformungen

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^{\,3}} - \frac{\mathbf{r}_{23}}{r_{23}^{\,3}}\right|^2 &= \frac{1-2q^2\cos\sigma+q^4}{r_{21}^2\; q^4} \\ \left|\frac{\mathbf{r}_{31}}{r_{31}^{\,3}} - \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^{\,3}}\right|^2 &= \frac{1-2\left(1-q\cos\sigma\right)w+w^4}{r_{31}^4} \quad , \end{aligned} \tag{12.170}$$

somit

[1] Für die ausführliche Durchführung dieser Rechnung siehe CHEBOTAREV, G. S. [1967] p. 271, SCHULZ, W. [1977], SCHNEIDER, M. [1999]: *Himmelsmechanik, Band IV: Theorie der Satellitenbewegung, Bahnbestimmung*

[2] Kopie aus: W. SCHULZ [1977], p.371

$$Q_{31}^2 = \frac{w^4\left(1-2q^2\cos\sigma+q^4\right)}{\tau^2 q^4}$$
$$Q_{32}^2 = \frac{\tau^2 q^4\left[1-2w\left(1-q\cos\sigma\right)+w^4\right]}{w^4} \quad . \tag{12.171}$$

Damit ergibt die Beziehung (12.167) die Bedingungsgleichung zur Berechnung der (ebenen) Grenzkurve des Aktivitätsbereiches:

$$fct(q) \equiv w^4\sqrt{1-2q^2\cos\sigma+q^4} - \tau^2 q^4\sqrt{1-2w\left(1-q\cos\sigma\right)+w^4} = 0 \quad . \tag{12.172}$$

Der Aktivitätsbereich um den Körper m_2 hat den Radius

$$r_{23} = q\, r_{21} \quad , \tag{12.173}$$

wenn der Zwischenwinkel σ als Parameter betrachtet wird. Aus Symmetriegründen wird gesamte der Attraktionsbereich durch Rotation der Kurve r_{23} um den Vektor $\mathbf{r}_{21}$ (im Sonnensystem von der Sonne zum Planeten gerichtet) erhalten.

Eine weitere Diskussion zur eindeutigen Lösung der Gleichung (12.172) und zu Näherungslösungen findet sich in der Originalarbeit von *W. Schulz*. Die Grenzkurve (12.173) liegt (meistens) zwischen Sphären, deren Radien $\sigma = 0°$ und $\sigma = 90°$ erhalten werden:

$$r_{23}\left(\sigma=0°\right) = q\left(\sigma=0°\right) r_{12} \;\le\; r_{23} = q\, r_{12} \;\le\; r_{23}\left(\sigma=90°\right) = q\left(\sigma=90°\right) r_{12} \quad . \tag{12.174}$$

Für erste Abschätzungen wird üblicherweise die Sphäre mit dem größeren Radius als Näherung für den Aktivitätsbereich gewählt. Diese Sphäre wird dann als *Aktivitätssphäre* eines Planeten bzw. eines Mondes in Bezug auf seinen Zentralkörper bezeichnet.

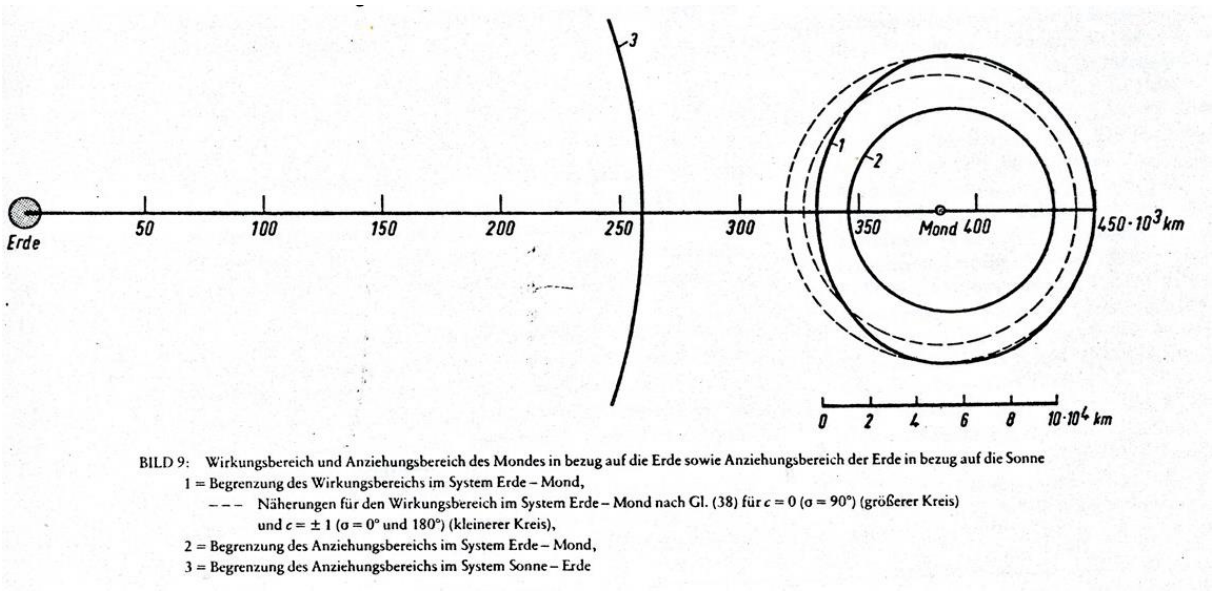


BILD 9: Wirkungsbereich und Anziehungsbereich des Mondes in bezug auf die Erde sowie Anziehungsbereich der Erde in bezug auf die Sonne
1 = Begrenzung des Wirkungsbereichs im System Erde – Mond,
– – – Näherungen für den Wirkungsbereich im System Erde – Mond nach Gl. (38) für $c = 0$ ($\sigma = 90°$) (größerer Kreis) und $c = \pm 1$ ($\sigma = 0°$ und 180°) (kleinerer Kreis),
2 = Begrenzung des Anziehungsbereichs im System Erde – Mond,
3 = Begrenzung des Anziehungsbereichs im System Sonne – Erde

Bild 12-37: Der Aktivitätsbereich des Mondes in Bezug auf die Erde[1]: Kurve 1: Grenze des Aktivitätsbereiches des Mondes in Bezug auf die Erde (gestrichelt: Näherungslösungen), Kurve 2: Grenzkurve der Attraktionssphäre um den Mond in Bezug auf die Erde, Kurve 3: Grenzkurve der Attraktionssphäre der Erde bei Bezug auf die Sonne

[1] Kopie aus: W. SCHULZ [1977], p.373

Als ein BEISPIEL zeigt Bild 12-36 den Aktivitätsbereich der Erde in Bezug auf die Sonne. Gestrichelt sind die Näherungslösungen für $\sigma = 0°$ und $\sigma = 90°$ eingezeichnet, womit die in diesem Zusammenhang erreichbaren Abschätzungen in der Regel genügend genau zu erhalten sind. Als weiteres Beispiel zeigt Bild 12-37 den Aktivitätsbereich des Erdmondes in Bezug auf die Erde. Die Mondbahn liegt außerhalb der Attraktionssphäre der Erde, somit ist der Einfluss der Sonne dominant und die Mondbahn stets konkav zur Sonne gerichtet. Die zur Sonne gerichtete Krümmung der Mondbahn wird durch den Einfluss der Erde periodisch etwas verändert, jedoch nie so, dass die Mondbahn von der Sonne weggekrümmt würde. Die Verhältnisse im Fall des Erdmondes sind wie aus der Skizze ersichtlich etwas komplizierter, da in diesem Fall die Vereinfachung im Rahmen eines eingeschränkten Drei-Körperproblems nicht erlaubt ist.

12.8.3 Der Gravitationsbereich

Stabile Bahnen eines Satelliten um einen Planeten können noch bis zum Abstand des Librationspunktes L_1 bezüglich eines übergeordneten Systems (im Fall der Erde des Sonnensystems) vorkommen. Eine Sphäre um diesen Planeten mit Radius des Abstands von L_1 wird als *Gravitationssphäre* (gelegentlich auch *Hillsche Gravitationssphäre*) bezeichnet[1].

Der Körper m_3 befindet sich bezüglich der Körper m_1 und m_2 im Librationspunkt L_1, wenn er die Bedingung[2] (10.129)

$$r_{32} = \frac{r_{12}}{1+\lambda_1} \tag{12.175}$$

erfüllt, wobei der Parameter $\lambda_1 = r_{13} / r_{23}$ die (einzige mögliche reelle) Lösung des Polynoms (10.128) ist:

$$\begin{aligned} F_1(\lambda_1) \;\equiv\; & (\mu_3+\mu_2)\lambda_1^5 + (2\mu_3+3\mu_2)\lambda_1^4 + (\mu_3+3\mu_2)\lambda_1^3 - \\ & -(\mu_3+3\mu_1)\lambda_1^2 - (2\mu_3+3\mu_1)\lambda_1 - (\mu_1+\mu_3) \;=\; 0 \quad . \end{aligned} \tag{12.176}$$

Im Sonnensystem wird von einem eingeschränkten Drei-Körperproblem $(\mu_3 \to 0)$ ausgegangen. Die Radien r_{23} der Hillschen Gravitationssphäre um die einzelnen Planeten sind in Anhang I (Band V) zusammengestellt.

12.9 Gravitationsmanöver

Ein kleiner Körper, der sich im Sonnensystem bewegt und in die Nähe eines großen Planeten gerät, kann durch diesen in seiner Bahn abgelenkt werden. Dieser Vorgang wurde,

---

[1] In der Literatur findet sich gelegentlich statt L_1 der Librationspunkt L_2 als Maß für die *Hill*sche Gravitationssphäre. Die Zahlenwerte in Anhang I zeigen, dass im Planetensystem die Abstände m_3 zu m_1 in derselben Größenordnung liegen, wenn sich m_3 in L_1 bzw. in L_2 befindet. Da diese „Sphäre“ ohnehin nur eine grobe zu Abschätzungen geeignete Größe ist, kann diese willkürliche Unterscheidung in der Definition der *Hill*schen Gravitationssphäre verkraftet werden. Siehe hierzu jedoch die Definition bezüglich L_1 bei CHEBOTAREV, G. S. [1967], p. 271.

[2] auf Seite 35

wahrscheinlich als erstem, von *P. Laplace* angenommen, um so die Ablenkung von Kometen am Jupiter aus dem äußeren in das innere Planetensystem zu beschreiben.

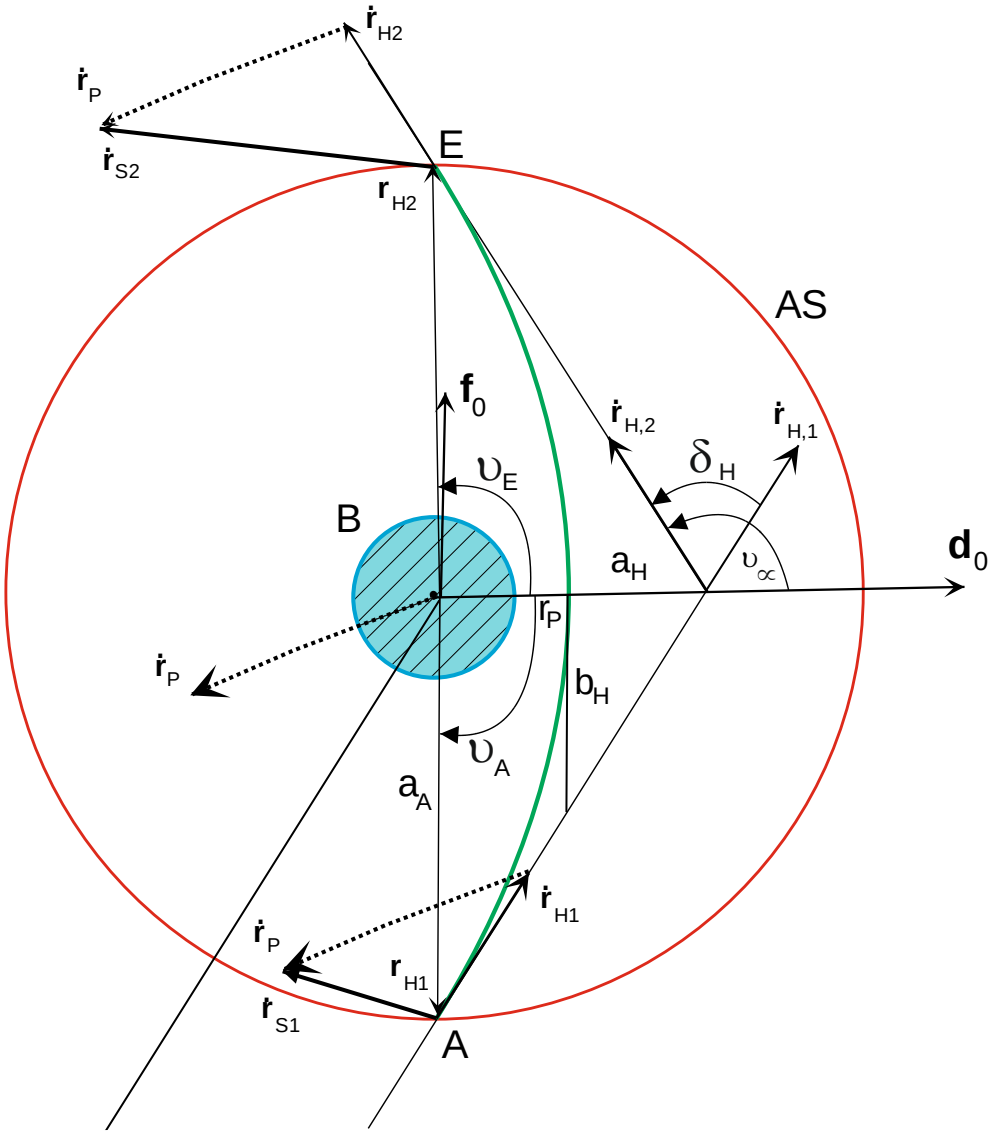


Bild 12-38: Gravitationsmanöver bei Bezug auf die Attraktionssphäre (AS) eines Planeten (B). *A* Eintrittspunkt der Raumsonde in die Attraktionssphäre, *E* Austrittspunkt

Diesen Vorgang macht sich auch die Raumfahrt zunutze, da durch einen nahen Vorbeiflug an einem massereichen Körper Energie gewonnen wird, die durch die Triebwerke eines Raumfahrtzeugs nicht erhalten werden kann. Die Raumsonde wird in das Gravitationsfeld eines Planeten gelenkt, durchläuft auf diesen bezogen eine hyperbolische Bewegung (siehe Abschnitt 12.5) und hat bei Verlassen des Gravitationsfeldes dieses Planeten eine neue Bahn bei Bezug auf die Sonne. Ein solches Manöver wird deshalb als Gravitationsmanöver bezeichnet[1].

Für eine erste Bahnabschätzung wird die Bahn der Raumsonde im Sonnensystem als eine Kegelschnittbahn angenommen, die Bahn in Bezug auf den ablenkenden Planeten ebenfalls als Kegelschnitt und nach Verlassen des Anziehungsbereiches des Planeten wieder als

[1] In der englischen Literatur wird das Gravitationsmanöver als *Fly By*, gelegentlich auch als *Gravity Assist* bezeichnet. Eine der ersten Arbeiten hierzu im Rahmen der Astronautik: FARQUHAR, R. W.; DUNHAM, D. W. [1986]: 'Orbital Acrobatics in the Sun-Earth-Moon System', Proceedings of the Second International Symposium on Spacecraft Dynamics, Darmstadt, 20–23 October 1986, ESA SP-255, 191–198

Kegelschnittbahn bezogen auf die Sonne. Diese Methode der *aneinander gesetzten Kegelschnitte*[1] wird für genauere Untersuchungen in einem zweiten Schritt durch die Methode der ineinander übergehenden Kegelschnitte[2] ergänzt. In einem dritten Schritt wird die gesamte Bewegung durch numerische Integration erhalten, welche den Wechsel des Hauptkörpers „automatisch" berücksichtigt. Im Folgenden wird nur auf die grundlegende Methode der aneinander gesetzten Kegelschnitte eingegangen.

Der Übergang von der überwiegenden Anziehung der Sonne in die überwiegende Anziehung durch den Planeten ist fließend. Um die Methode der aneinander gesetzten Kegelschnitte sinnvoll einsetzen zu können, wird (relativ willkürlich) ein Bereich um den Planeten angenommen, der als Grenze zwischen den beiden Anziehungsbereichen gehandelt wird. Hierzu kann einer der in den drei vorhergehenden Abschnitten behandelten Einflussbereiche gewählt werden. Es ist sinnvoll, die schärfste Definition also die Attraktionssphäre (aus Abschnitt 12.8.1) zu wählen. Da die Bewegung bezogen auf den ablenkenden Planeten hyperbolisch ist, dürfte ein Fehler bei Wahl der Aktivitätssphäre wesentlich kleiner sein als er durch die Anwendung der Methode der aneinander gesetzten Kegelschnitte ohnehin schon ist.

Eine Raumsonde habe den heliozentrischen Zustandsvektor $\mathbf{r}_S$, $\dot{\mathbf{r}}_S$. Die Attraktionssphäre des Planeten habe den Radius a_A . Im Moment des Vorbeifluges der Sonde am Planeten habe der Planet den Zustandsvektor $\mathbf{r}_P$, $\dot{\mathbf{r}}_P$. Wenn die Sonde in die Attraktionssphäre des Planeten eintritt, habe sie den heliozentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}_{S1}$ und damit den planetozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{SP1} = a_A \mathbf{r}_{SP10} = \mathbf{r}_{S1} - \mathbf{r}_P \quad . \tag{12.177}$$

Der entsprechende planetozentrische Geschwindigkeitsvektor lautet bei Eintritt in die Attraktionssphäre mit dem heliozentrischen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_{S1}$ zu diesem Zeitpunkt

$$\dot{\mathbf{r}}_{H1} = \dot{\mathbf{r}}_{S1} - \dot{\mathbf{r}}_P \quad . \tag{12.178}$$

Der Index *H* in $\dot{\mathbf{r}}_{H1}$ weist auf die hyperbolische Geschwindigkeit in Bezug auf den Planeten hin (vgl. Bild 12-38). Man sieht sofort, dass die Orientierung der Bahnebene der Sonde um den Planeten durch den Eintrittspunkt *A* in die Attraktionssphäre festgelegt wird. Der Normalenvektor der relativen Bahn um den ablenkenden Planeten lautet

$$\mathbf{c}_{SP} = \mathbf{c}_{SP0} G_{SP} = \mathbf{r}_{SP1} \times \dot{\mathbf{r}}_{H1} \quad , \quad G_{SP} := |\mathbf{c}_{SP}| \quad , \quad \mathbf{c}_{SP0}^2 = 1 \; , \tag{12.179}$$

wobei G_{SP} die Flächenkonstante dieser Bahnebene sei und $\mathbf{c}_{S0}$ ihr Richtungsvektor.

Die Berechnung der Bahnablenkung innerhalb der Attraktionssphäre des Planeten erfolgt unter der Annahme, dass der Betrag des relativen Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{r}}_{H1}$ der Raumsonde bei Eintritt in die Attraktionssphäre der asymptotischen Geschwindigkeit (hyperbolischer Exzess) V_∞ gleichgesetzt werden kann (vgl. Formel (12.117))

$$V_\infty \approx |\dot{\mathbf{r}}_{H1}| \quad . \tag{12.180}$$

[1] in der englischen Literatur wird die Methode der aneinander gesetzten Kegelschnitte als *method of patched conics* bezeichnet.

[2] In der englischen Literatur als Method of *matched conics* bezeichnet

Dann ist die erste Halbachse der Vorbeiflughyperbel aus Formel (12.121) auf Seite 192 bekannt:

$$a_H = \frac{\mu}{V_\infty^2} \quad . \tag{12.181}$$

Alle weiteren Parameter der Vorbeiflughyperbel können mit den Formeln der speziellen *Kepler*bewegung (nach Abschnitt 12.5 auf Seite 190, sowie Abschnitt 11.1.1) aus dem vorgegeben Zustandsvektor $\mathbf{r}_{SP1}, \dot{\mathbf{r}}_{H1}$ berechnet werden.

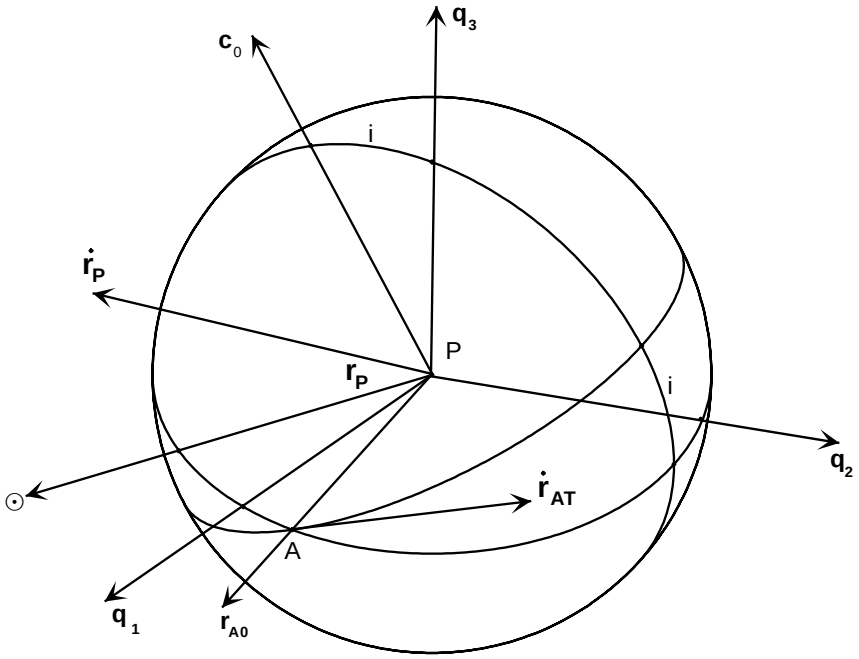


Bild 12-39: Orientierung der Bahnebene der im Attraktionsfeld des Planeten P abgelenkten Raumsonde mit relativer Bahnnormale $\boldsymbol{c}_0$. $\boldsymbol{R}_{A0}$ ist der planetozentrische Richtungsvektor des Eintrittsortes der Sonde in die Attraktionssphäre des Planeten

Der Perizentrumsvektor folgt mit Gleichung (11.12) aus

$$\mathbf{d}_{SP} = \dot{\mathbf{r}}_{H1} \times \mathbf{c}_{SP} - \mu_P \frac{\mathbf{r}_{SP1}}{a_H} \quad , \tag{12.182}$$

wobei μ_P die planetozentrische Gravitationskonstante des ablenkenden Körpers ist. Die Exzentrizität der Hyperbel folgt mit Gleichung (11.13) aus

$$e = \frac{|\mathbf{d}_{SP}|}{\mu_P} \quad , \tag{12.183}$$

die Perizentrumsdistanz entsprechend der Herleitungen in Abschnitt 12.5.1 aus

$$r_P = a_H (e-1) \quad . \tag{12.184}$$

Die zweite Halbachse der Hyperbel ist aus

$$b_H = a_H \sqrt{e^2 - 1} \tag{12.185}$$

bekannt. Mit Hilfe dieser Größe kann nun abgeschätzt werden, ob unter den gegebenen Voraussetzungen, d.h. dem gegeben Anfangszustandsvektor überhaupt ein gefahrloser Vorbeiflug an dem ablenkenden Planeten möglich ist. Der Kollisionskorridor des Planeten mit Mindestsicherheitsradius R_H hat den Kollisionsradius

$$b_C = \sqrt{R_H\left(a_H + R_H\right)} \quad . \tag{12.186}$$

Wenn die zweite Halbachse der Vorbeiflughyperbel die Bedingung

$$b_H > b_C \tag{12.187}$$

erfüllt, kann von einem sicheren Vorbeiflug ausgegangen werden. Ein Risiko ist aber umso größer, je näher die zweite Halbachse am Kollisionradius ist.

Der Umlenkwinkel δ_H wird eindeutig berechnet aus

$$\sin\frac{\delta_H}{2} = \frac{1}{e} \tag{12.188}$$

Sei

$$\mathbf{d}_0 := \frac{\mathbf{d}_{SP}}{e} = \mathbf{q}_1^{(P)} \tag{12.189}$$

der Einheitsvektor in Richtung des Perizentrums, lautet der Parametervektor des perizentrumsbezogenen Bahnsystems (Apsidensystem)

$$\mathbf{q}_2^{(P)} = \mathbf{f}_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{d}_0 = \mathbf{q}_3^{(P)} \times \mathbf{q}_1^{(P)} \quad . \tag{12.190}$$

Die asymptotische Anomalie kann berechnet werden aus

$$\sin\upsilon_\infty = \frac{b_H}{e\,a_H} \quad , \quad \cos\upsilon_\infty = -\frac{1}{e} \tag{12.191}$$

Damit hat der Eintrittsgeschwindigkeitsvektor im perizentrumsbezogenen Bahnsystem die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_{H1} = \mathbf{d}_0\cos\upsilon_\infty + \mathbf{f}_0\sin\upsilon_\infty \quad . \tag{12.192}$$

Längs der Austrittsasymptote hat der asymptotische Geschwindigkeitsvektor und damit (näherungsweise) der planetozentrische Geschwindigkeitsvektor bei Verlassen der Attraktionssphäre entsprechend Bild 12-38 die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_{H2} = -\mathbf{d}_0\cos 3\upsilon_\infty - \mathbf{f}_0\sin 3\upsilon_\infty \quad . \tag{12.193}$$

Der planetozentrische Ortsvektor $\mathbf{r}_{SP2}$ hat bei Eintritt in die Attraktionssphäre die wahre Anomalie υ_A, die nach Bild 12-38 aus

$$\cos\upsilon_A = \mathbf{r}_{SP1}\cdot\mathbf{d}_0 \tag{12.194}$$

berechnet werden kann. Die wahre Anomalie bei Verlassen der Attraktionssphäre im Punkt *E* lautet aus Symmetriegründen

$$\upsilon_E = \upsilon_A \quad . \tag{12.195}$$

Damit wird

$$\mathbf{r}_{H2} = a_H\left(\mathbf{d}_0\cos\upsilon_A + \mathbf{f}_0\sin\upsilon_A\right) \quad . \tag{12.196}$$

Der neue planetozentrische Zustandsvektor wird an das heliozentrische System mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{S2} &= \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_{H2} \\ \dot{\mathbf{r}}_{S2} &= \dot{\mathbf{r}}_P + \dot{\mathbf{r}}_{H2} \end{aligned} \tag{12.197}$$

übergeben.

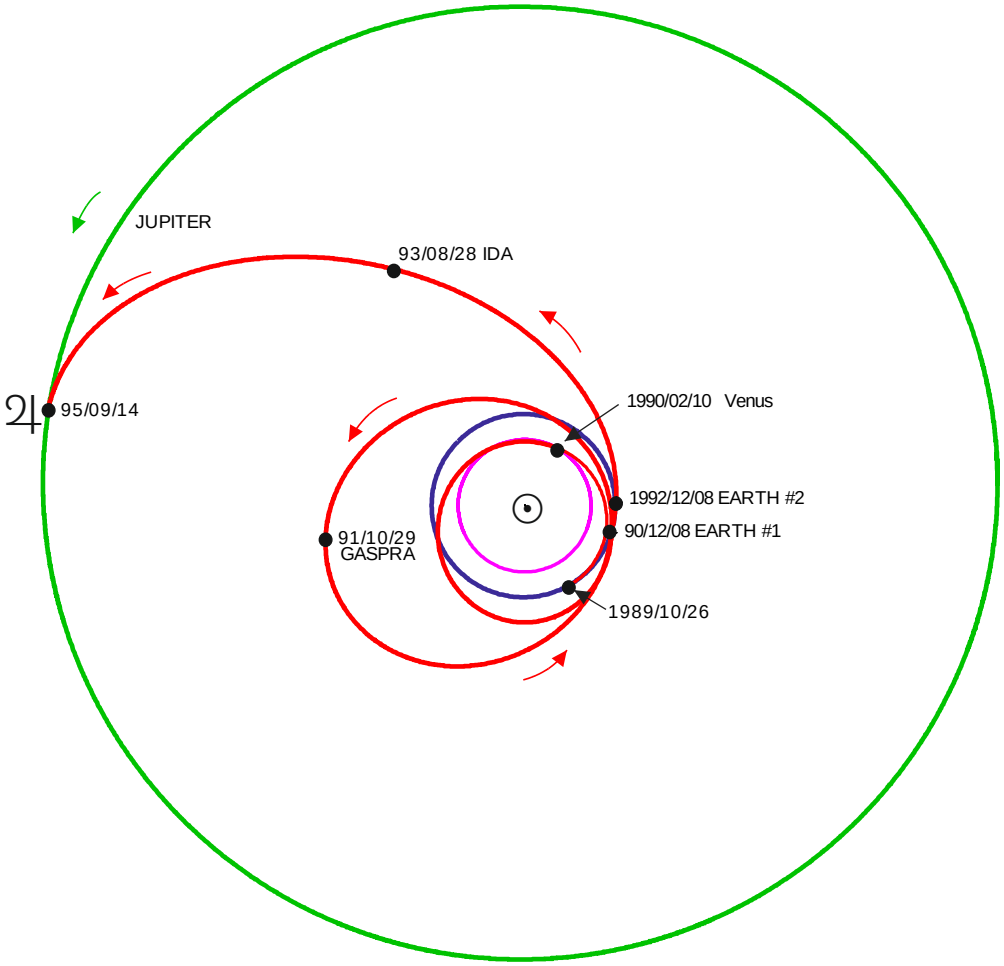


Bild 12-40: Die Tour des GALILEO zu Jupiter mit Gravitationsmanövern an der Venus, zweimal an der Erde und Vorbeiflügen an den kleinen Planeten Gaspra und Ida

Anmerkung: Im Rahmen der Methode der aneinandergesetzten Kegelschnitte wird der Zeitunterschied für den Zustand des Planeten bei Ein- und Austritt der Raumsonde in bzw. aus der Attraktionssphäre nicht berücksichtigt, da die Bewegung in der Attraktionssphäre im Vergleich zur Bewegung im Sonnensystem verschwindend klein angenommen werden kann. Damit kann zu einer weiteren Vereinfachung auch der heliozentrische Ortsvektor der Sonde stets gleich dem heliozentrischen Ortsvektor des Planeten angenommen werden. In Bezug auf die Sonne ist dann näherungsweise $\mathbf{r}_{S1} \cong \mathbf{r}_{S2} \cong \mathbf{r}_P$ und die Orientierung der Bahnebene des Raumsonde nach dem Vorbeiflug kann aus

$$\mathbf{c}_{S2} = \mathbf{r}_P \times \dot{\mathbf{r}}_{S2} \tag{12.198}$$

berechnet werden.

Anwendung: In der Astronautik wird gewöhnlich eine bestimmte Zielbahn angestrebt und zu diesem Zweck ein Gravitationsmanöver untersucht. In diesem Fall ist also die Bahn nach der Begegnung mit dem Zustandsvektor $\mathbf{r}_{H2} = \mathbf{r}_P$, $\dot{\mathbf{r}}_{H2}$ vorgegeben und im umgekehrten Rechenvorgang, wie in diesem Abschnitt beschrieben, wird der Anfangszustandsvektor $\mathbf{r}_{H1} = \mathbf{r}_P$, $\dot{\mathbf{r}}_{H1}$ bei Eintritt der Sonde in die Attraktionssphäre als Zielzustand berechnet. Vor Begegnung der Sonde mit dem Planeten muss die Sonde so gesteuert werden, dass bei Eintritt in die Attraktionssphäre genau dieser Zustand erreicht wird.

BEISPIEL: Als Beispiel für eine interplanetare Mission, welche Gravitationsmanöver ausnutzt, sei die GALILEO Mission in das Jupitersystem betrachtet, welche am 18. Oktober 1989 gestartet worden ist. Für den direkten *Hohmann* – Transfer von der Erde zum Jupiter würde nach Tabelle 73 in Anhang H (Band V) das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement ΔV = 14.437 km/s benötigt. Der *Hohmann* Transfer von der Erde zum Jupiter erfordert eine Perihelgeschwindigkeit von V_P = 38.578 km/s. Auf diese Geschwindigkeit muss also die Sonde von der Erde aus gebracht werden, um den Jupiter erreichen zu können. Die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne beträgt etwa 30 km/s. Es wird also das Geschwindigkeitsinkrement ΔV = 8.6 km/s benötigt. Die zur Verfügung stehenden Triebwerke können dieses Geschwindigkeitsinkrement nicht aufbringen. Deshalb wurde das Missionsprofil so gewählt (siehe Bild 12-40), dass durch ein Gravitationsmanöver (Swingby) an der Venus und zwei Gravitationsmanöver an der Erde genügend Energie aufgenommen werden konnte, um Jupiter am 7. Juli 1995 erreichen zu können.

Um eine Abschätzung der durch die Gravitationsmanöver erreichten Geschwindigkeitsinkremente berechnen zu können, werden zunächst die geflogenen bzw. geplanten Bahndaten[1] in Tabelle 73 in Anhang H zusammengestellt[2]. Die Bahnelemente zeigen, dass die einzelnen Bahnbögen die Ekliptik zum Teil etwas verlassen haben. Die Elemente vor und nach den Vorbeiflügen („encounter“) an den kleinen Planeten Gaspra und Ida sind sehr ähnlich. Hier fand kein Gravitationsmanöver statt. Vielmehr hat die Sonde ein eigenes Triebwerk, das kleine Manöver während des Transferfluges durchführen kann um einen optimalen Vorbeiflug an einem der Planeten ansteuern zu können und vor allem um den Abflug aus dem Erdumlauf und den Einschuss in den Jupiterumlauf bewirken zu können.

Durch die Orientierung der Bahn relativ zur Erde konnte die Sonde jedoch erheblich an Geschwindigkeit aufnehmen und wurde auf 35.255 km/s beschleunigt. Das Geschwindigkeitsinkrement betrug ΔV = 7.217 km/s, war also wesentlich größer als der effektive Geschwindigkeitsunterschied. Die Ursache dafür kommt aus der Vektordifferenz der Geschwindigkeitsvektoren vor und nach dem Manöver und der dadurch gezeigten unterschiedlichen Orientierung der beiden Geschwindigkeitsvektoren. Dies zeigte sich auch in einer kleinen Bahnebenenänderung. Da zum Erreichen von Jupiter jedoch mindestens die Geschwindigkeit V = 38.578 km/s benötigt gewesen wäre (Wert des *Hohmann*-Transfers), musste die Erde nochmals umflogen werden, was exakt nach zwei Jahren der Fall war. Jetzt wurde die Geschwindigkeit der Sonde, die wie nach dem ersten Vorbeiflug 35.2 km/s betrug, auf die benötigten 38.965 km/s beschleunigt um so Jupiter erreichen zu können. Beim zweiten Vorbeiflug an der Erde erfuhr die Sonde nahezu dasselbe Geschwindigkeitsinkrement wie beim ersten Vorbeiflug: ΔV = 7.667 km/s. Durch die Geschwindigkeitsmanöver hat die Sonde insgesamt das Geschwindigkeitsinkrement

[1] JPL IOM GLL-NAV-90-10, January 24, 1990; siehe auch: O'Neil, W: J. [1991], insbesondere p.15

[2] Siehe in Band V

ΔV = 18.352 km/s aufgenommen. Um auf der Bahn des Jupiter zu bleiben, musste schließlich das Triebwerk an Bord der Sonde das Geschwindigkeitsinkrement ΔV = 5.612 km/s aufbringen.

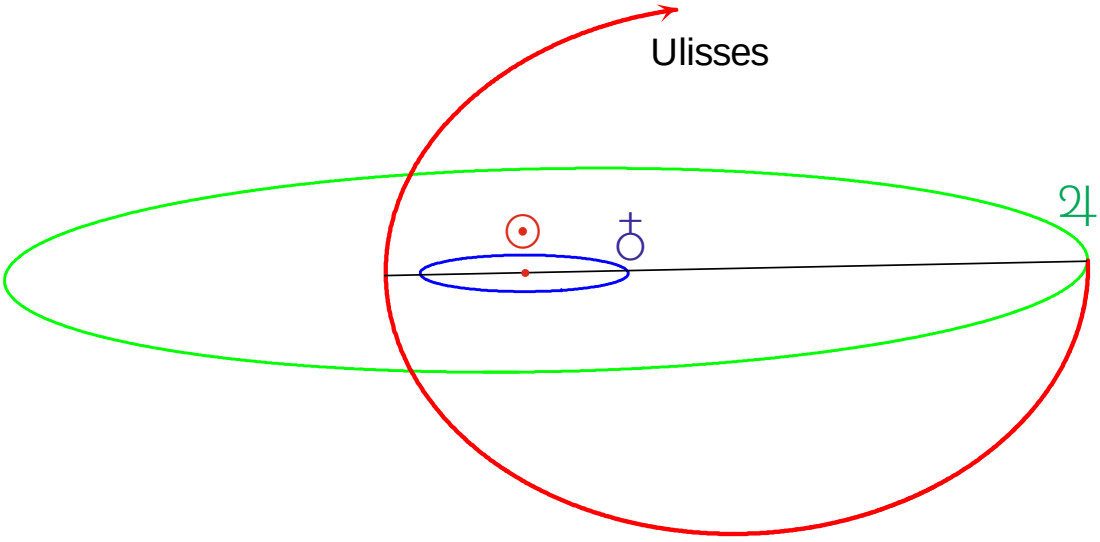


Bild 12-41: Gravitationsmanöver der ULISSES Raumsonde (Solar Polar Mission) am Jupiter ♃ um eine ekliptikale Bahnneigung von etwa 79° zu erreichen.

2. BEISPIEL: Die europäische Raumsonde ULISSES hat als primäre Aufgabe die Polregionen der Sonne zu beobachten. Dazu ist ein Überflug der Polregionen nötig, der nur auf einer Bahn mit der ekliptikalen Bahnneigung von nahezu 90° möglich ist. Mit chemischen Treibwerken ist eine Änderung der Bahnneigung von 0° (Erdbahn) auf eine Polbahn nicht zu erreichen. Aus diesem Grund wurde die Sonde zum Jupiter geschickt, an dem die größte Bahnänderung im Sonnensystem vorgenommen werden kann. Durch geeigneten Eintritt in die Attraktionssphäre über der Nordhalbkugel des Jupiter konnte die Bahnebene so gedreht werden, dass die Bahnneigung von i = 1°.3 (Neigung der Bahnebene des Jupiter in Bezug auf die Ekliptik) auf i = 79° erhöht wurde. Gleichzeitig wurde die große Bahnhalbachse von a = 3.1 AE (siehe Tabelle 73 in Anhang H, Band V) auf 3.37 AE erhöht. Während das Aphel in Jupiterentfernung blieb (r_A = 5.2 AE) wurde das Perihel von Erdentfernung (1 AE) auf r_P = 3.34 erhöht, liegt also außerhalb der Erdbahn (vgl. Bild 12-41). Die Exzentrizität der neuen ULISSES Bahn beträgt e = 0.6026477 gegenüber der Exzentrizität e_1 = 0.677582 für die Bahn von der Erde direkt zum Jupiter. ◀

12.10 Die Raketengleichung

12.10.1 Herleitung der Raketengleichung

Zur Untersuchung gesteuerter Bewegungsänderungen liefert die von *K. E. Ziolkowsky* 1896 gefundene *„Raketengleichung“* eine grundlegende Beziehung. Sie beschreibt den idealen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitsänderung ΔV und der Treibstoffmenge Δm, welche zur Erreichung dieser Geschwindigkeitsänderung mit einem bestimmten Raketentriebwerk benötigt wird.

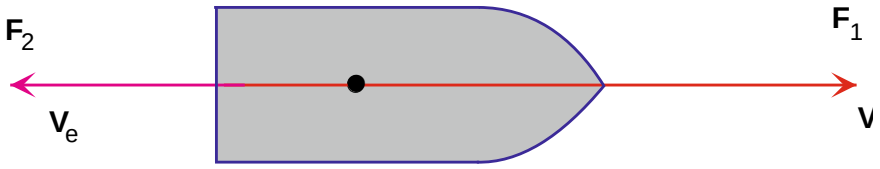


Bild 12-42: Zur Herleitung der Raketengleichung, V – Geschwindigkeit der Rakete, V_e – Ausstoßgeschwindigkeit („exhaust velocity“) des Raketenmotors, F_1 - Kraft in Flugrichtung, F_2 – Kraft entgegengesetzt zur Flugrichtung

Je mehr an Masse Δm vom Raketentriebwerk ausgestoßen wird, um so größer wird die erreichbare Endgeschwindigkeit V sein, je größer aber die Masse m des beschleunigten Körpers ist, um so geringer wird die Geschwindigkeitsänderung sein. Die Geschwindigkeitsänderung dV wird also proportional zur relativen Massenänderung dm/m sein, wobei wegen des Massenverlustes das negative Vorzeichen gewählt werden muss,

$$dV \approx -\frac{dm}{m} \quad . \tag{12.199}$$

Der Proportionalitätsfaktor mit der Dimension einer Geschwindigkeit ist ein Parameter des verwendeten Raketenmotors, die Austrittsgeschwindigkeit V_e, mit der die Treibgase ausgestoßen werden. Somit ist

$$dV = -V_e \frac{dm}{m} \quad . \tag{12.200}$$

Integration gibt die Endgeschwindigkeit V bei Bezug auf eine Anfangsgeschwindigkeit V_A, welche die Rakete bei Beginn der Zündung des Raketenmotors hat, und wenn m_A die Masse der Rakete bei Beginn des Schubes hat, m_B am Ende des Schubes (Brennschluss)

$$V = V_A - V_e \left(\ln m_B - \ln m_A\right) \quad . \tag{12.201}$$

Wird mit

$$\Delta V := V - V_A \tag{12.202}$$

die (Gesamt-) Geschwindigkeitsänderung bezeichnet, erhält man die übliche Form der Raketengleichung[1]

$$\Delta V = V_e \ln \frac{m_A}{m_B} \quad . \tag{12.203}$$

Eine einfache vektorielle Herleitung der Raketengleichung ergibt sich mit der Kraftbeziehung: eine Kraft wird (nach dem 2. Newtonschen Axiom) als Variation der Bewegungsgröße $m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$ dargestellt:

$$\mathbf{f} = \frac{d\left(m\dot{\mathbf{r}}\right)}{dt} = \dot{m}\dot{\mathbf{r}} + m\ddot{\mathbf{r}} \quad . \tag{12.204}$$

[1] ausführlich behandelt etwa bei K. A. EHRICKE [1961], pp.6-3 bis 6-24; H. O. RUPPE [1966], pp.22-25; auch R. H. GIESE [1966], pp.13-22

Wenn bei einem Raketenmotor die Austrittsgeschwindigkeit der Austrittsgase konstant und auch ihre Richtung konstant ist, wenn also $\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}_e = 0$ ist, bleibt für die Kraft, die auf die Rakete ausgeübt wird

$$\mathbf{f}_2 = \dot{m}\mathbf{v}_e \quad . \tag{12.205}$$

Andererseits bewirkt eine Beschleunigung der Rakete der Masse *m* die Kraft

$$\mathbf{f}_1 = m\ddot{\mathbf{r}} \quad . \tag{12.206}$$

Da im Gesamtsystem (vgl. Bild 12-42) nach dem 3. Newtonschen Axiom (actio est reactio) die Kräfte im Gleichgewicht stehen müssen

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 \quad , \tag{12.207}$$

gilt die differentielle Beziehung

$$d\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_e \frac{dm}{m} \quad . \tag{12.208}$$

Integration ergibt die Raketengleichung in ihrer vektoriellen Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_A - \mathbf{v}_e \ln\frac{m_A}{m_B} \quad . \tag{12.209}$$

Hier bedeuten $\dot{\mathbf{r}}_A$ die Anfangsgeschwindigkeit vor Zünden des Raketenmotors sowie m_A die Anfangsmasse. Mit $V_e := |\mathbf{v}_e|$ führt diese Gleichung sofort auf die skalare Form der Raketengleichung in Formel (12.203).

Die Rakete erreicht nach der Raketengleichung ihre maximale Leistung[1], wenn

1. die Austrittsgeschwindigkeit der Treibgase genau entgegengesetzt zur Flugrichtung der Rakete gerichtet ist,
2. die Austrittsgeschwindigkeit $V_e := |\mathbf{v}_e|$ einen möglichst großen Betrag hat, und wenn
3. das Massenverhältnis Startmasse m_A zu Brennschlussmasse m_B möglichst groß ist (also möglichst viel Treibstoff verbraucht wird im Vergleich zur Gesamtmasse der Rakete).

Die mit der Raketengleichung in der Form (12.209) berechnete Endgeschwindigkeit wird als *ideale* Endgeschwindigkeit bezeichnet, da sie für den Fall gültig ist, dass keine zusätzlichen Kräfte auf die Bewegung der Rakete einwirken. Diese zusätzlichen Kräfte können durch einen gravitativen Effekt, durch einen Hauptkörper (z.B. Erdanziehung bei Start von der Erdoberfläche) und durch den Luftwiderstand erzeugt werden. Diese Vernachlässigungen genügen in der Regel für die meisten bahnanalytischen Untersuchungen. Um die wahre (*effektive*) Geschwindigkeit V_W einer Rakete bei Brennschluss des Raketenmotors zu berechnen, müssen etwa Gravitationsverlust ΔV_G und Luftwiderstandsverlust ΔV_D während der Brenndauer der Rakete bekannt sein. Dann besteht für die aus der Raketengleichung berechnete Geschwindigkeit der Rakete die Beziehung

[1] H. O. RUPPE [1966], p.25

$$V = V_W + \Delta V_G + \Delta V_D \quad . \tag{12.210}$$

12.10.2 Anwendungen der Raketengleichung

12.10.2.1 Die Raketenmotor – Strukturmasse

Die Masse m_B einer Rakete bei Brennschluss setzt sich aus der Nutzlast mit der Masse m_N und der Strukturmasse m_S zusammen. Sei m_T die Treibstoffmasse, beträgt die Startmasse der Gesamtrakete

$$m_A = m_N + m_S + m_T \tag{12.211}$$

und die Brennschlussmasse

$$m_B = m_N + m_S \quad . \tag{12.212}$$

Der Treibstoffbedarf beträgt

$$\Delta m := m_A - m_B = m_A \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{V_e}} \right) \quad . \tag{12.213}$$

Triebwerk	Treibstoff-Faktor	Ausströmgeschwindigkeit
Feststofftriebwerk	$c_T = 0.90$	$V_e = 2300\,m/s$
Flüssigtriebwerk	$c_T = 0.85$	$V_e = 2800\,m/s$
Kaltgastriebwerk	$c_T = 0.65$	$V_e = 1000\,m/s$

Tabelle 12-2: Größenordnungsmäßige Werte für Treibstoff-Faktor und Ausströmgeschwindigkeit für verschiedene in der Raketentechnik verwendete Antriebsarten

Für Abschätzungen der notwendigen Strukturmasse m_S bei gegebener Treibstoffmasse m_T gibt es folgende Faustformel

$$m_S + m_T = \frac{m_T}{c_T} \quad , \tag{12.214}$$

wobei für den Treibstofffaktor c_T bei unterschiedlichen Antriebsarten die folgenden Werte (Tabelle 12-2) verwendet werden[1].

12.10.2.2 Die Treibstoffmasse bei gewünschtem Geschwindigkeitsbedarf

Für eine Bahnkorrektur werde eine bestimmte Geschwindigkeitsänderung ΔV benötigt. Die Nutzlastmasse m_N sei fest vorgegeben. Der Treibstoffbedarf m_T und die davon abhängige Strukturmasse m_S sind zu berechnen.

Mit der Bezeichnung

$$A := e^{-\frac{\Delta V}{V_e}} \tag{12.215}$$

[1] M. KIRSCHNER in TN GSOC 96-07 (02.12.1996)

liefert die Raketengleichung (12.203)

$$m_B = A\, m_A \quad . \tag{12.216}$$

Die Masse m_B bei Brennschluss besteht aus der Anfangsmasse m_A vermindert um die Treibstoffmasse m_T

$$m_B = m_A - m_T \quad . \tag{12.217}$$

Somit kann das Verhältnis aus Treibstoff zu Anfangsmasse berechnet werden aus

$$m_T = m_A(1-A) \quad . \tag{12.218}$$

Für die praktische Anwendung wird folgende zusammenfassende Formel verwendet, um den einer Geschwindigkeitsänderung ΔV entsprechenden Treibstoffbedarf $\Delta m = m_T$ zu berechnen:

$$\Delta m = m_A\left(1-e^{-\frac{\Delta V}{V_e}}\right) \quad . \tag{12.219}$$

Mit den Bezeichnungen (12.211) und (12.212) kann die Treibstoffmasse auch auf die Nutzlast m_N bezogen werden, da diese häufig in der Praxis vorgegeben ist und der Treibstoffbedarf berechnet werden soll, um diese Nutzlast in eine geeignete Umlaufbahn zu bringen:

$$m_T = m_N \frac{c_T(1-A)}{c_T - 1 + A} \quad . \tag{12.220}$$

Mit der hier berechneten Treibstoffmasse beträgt die Gesamtstartmasse nach Formel (12.214)

$$m_A = m_N + \frac{m_T}{c_T} \quad . \tag{12.221}$$

Diese ursprünglich unbekannte Masse wird in der Praxis das benötigte Geschwindigkeitsinkrement ΔV verändern. Dieses wird selbst bei konstanter Ausströmgeschwindigkeit V_e über die Beziehung (12.215) auch die Treibstoffmasse m_T in Formel (12.221) verändern, die somit nur iterativ berechnet werden kann. Dazu muss der Prozess bekannt sein, mit dem das benötigte Geschwindigkeitsinkrement ΔV bestimmt wird.

Entsprechend folgt mit Formel (12.218) auch das Verhältnis von Nutzlast m_N zu Startmasse m_A

$$m_N = m_A \frac{c_T - 1 + A}{c_T} \quad . \tag{12.222}$$

Die Strukturmasse m_S des Raketenmotors und des (leeren) Treibstoffbehälters wird mit den Formeln (12.214) und (12.220) in Bezug auf die Nutzlast m_N erhalten zu

$$m_S = m_N \frac{(1-A)(1-c_T)}{c_T - 1 + A} \quad . \tag{12.223}$$

Der Anteil von Strukturmasse und gesamtem Treibstoff an der Gesamtmasse des Raumfahrtzeuges beträgt schließlich

$$m_S + m_T = m_A \frac{1-A}{c_T} \quad . \tag{12.224}$$

BEISPIEL: Ein Kleinsatellit mit $m_A = 130$ kg Gesamtmasse werde in eine kreisnahe Bahn mit der mittleren Höhe H = 629 km (entsprechend der mittleren großen Bahnhalbachse a = 7007.137 km) und die sonnensynchrone Bahn mit der mittleren Inklination i = 97°.93 eingeschossen. Die entsprechende Kreisbahngeschwindigkeit beträgt

$$V_K = \sqrt{\mu / a} = 7.542213 \text{ km/s}.$$

Infolge verschiedenartiger Einflüsse muss die Bahn dieses Satelliten von Zeit zu Zeit korrigiert werden. Eine Abnahme der großen Bahnhalbachse um $\Delta a = 5$ m erfordert mit einem Heißgastriebwerk ($V_e = 2800$ m/s) nach Formel (12.90) das Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V = 0.00269$ m/s und mit Formel (12.218) den Treibstoffbedarf $\Delta m = m_T = 0.000125$ kg. Eine Inklinationskorrektur um $\Delta i = 36$“ erfordert nach Formel (12.25) das Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V = 1.3216$ m/s mit dem Treibstoffaufwand $\Delta m = m_T = 0.06135$ kg. Eine Knotenänderung um $\Delta\Omega = 20$“.8789 erfordert nach dem Formelsystem (12.21) eine Drehung der Bahnebene um den Winkel $\gamma = 20$“.6784 mit der neuen Bahninklination $i_2 = 97°.91996$, mit Formel (12.3) dem Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V = 0.75618$ m/s und dem Treibstoffaufwand $\Delta m = m_T = 0.35104$ kg. ◀

12.10.2.3 Das Mehrstufenprinzip

Seien $m_{A,i}$ die Masse bei Beginn des Arbeitens der i-ten Raketenstufe, $m_{B,i}$ bei dessen Ende, $\mathbf{c}_{e,i}$ die Ausströmrichtung und Ausströmgeschwindigkeit der Treibgase, beträgt die (ideale) Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ nach Ausbrennen der letzten (n-ten) Raketenstufe in Bezug auf die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_A$ bei Start

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_A - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_{e,i} \ln \frac{m_{A,i}}{m_{B,i}} \quad . \tag{12.225}$$

12.10.2.4 Aufstieg einer Rakete

Die in den vorstehenden Abschnitten besprochene Raketengleichung stellt den idealen Fall eines Raketenantriebs im luftleeren Raum dar. Beim Aufstieg eine Rakete von der Erdoberfläche aus kommen jedoch vor allem noch die Erdanziehung und der Luftwiderstand hinzu, welche die Bewegung der Rakete beeinflussen. Beim senkrechten Start der Rakete seien *g* die als konstant angenommen Erdbeschleunigung, welche entgegengesetzt zur Aufstiegsbahn wirkt. Außerdem sei die Beschleunigung durch den Luftwiderstand durch seinen Betrag[1]

$$b_D = \frac{1}{2} \rho B_D V_D^2 \tag{12.226}$$

gegeben, wenn ρ die momentane Luftdichte am Ort des Satelliten, B_D der ballistische Koeffizient der Rakete, V_D die relative Geschwindigkeit der Rakete gegenüber der umgebenden Luft bedeuten. Dann lautet für den senkrechten Aufstieg die Raketengleichung[2]

$$V = V_e \ln \frac{m_A}{m} - g\,t - \int_0^t b_D \, dt \quad . \tag{12.227}$$

[1] siehe in Kapitel 17

[2] siehe etwa in BERMAN, A. I. [1961] pp. 246-249

13 Keplerbewegung in universaler Darstellung

Im Rahmen eines Zweikörperproblems erfordert die Umrechnung eines gegebenen Zustandsvektors die Unterscheidung in die Art des Kegelschnittes[1]. Diese Abfragen können eine Ephemeridenrechnung erschweren und numerisch belasten. *K. Stumpff* war es gelungen durch Einführung der später nach ihm benannten *Stumpff*schen *c*-Funktionen eine Ephemeridenrechnung unabhängig von der Art des Kegelschnittes darzustellen. Vorteile dieses Verfahrens sind im Rahmen der Darstellung einer Bewegung in der Raumfahrt eine Beschreibung im Wechsel eines durchflogenen Bahnabschnittes (etwa abwechselnd mit einem elliptischem und einem hyperbolischen Bahnabschnitt), im Rahmen einer Erstbahnbestimmung aus relativ ungenauen Winkelmessungen[2], im Rahmen einer Regularisierung des Zweikörperproblems, in der numerischen Behandlung einer Ephemeride insbesondere von interplanetaren Bahnen. *Samuel Herrick* ([1965] und in einer Serie früherer Arbeiten) führte die *Stumpff*sche Theorie weiter für den Gebrauch von universalen Variablen und Formeln im Hinblick auf Anwendungen in der Methode der Variation der Parameter aus. *Pedro Zadunaisky* und *Claudia Giordano* [1990] erweiterten die originale *Stumpff*sche Theorie[3] im Hinblick auf eine "universale Formulierung des gestörten Zwei-Körperproblems"[4].

13.1 Ephemeridenrechnung als Anfangswertproblem

Die Ephemeride eines Himmelskörpers kann bei Vorgabe eines als konstant angenommenen Anfangszustandsvektors $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ nach *J. L. Lagrange*[5] als Anfangswertproblem mit Funktionen[6] F_L, G_L, H_L berechnet werden[7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= F_L\,\mathbf{r}_A + G_L\,\dot{\mathbf{r}}_A + H_L\,\mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{F}_L\,\mathbf{r}_A + \dot{G}_L\,\dot{\mathbf{r}}_A + \dot{H}_L\,\mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A \quad . \end{aligned} \tag{13.1}$$

Die Bewegung kann in Bezug auf ein *Hansen*-System beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\left(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta\right) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\left(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta\right) + r\dot{\zeta}\left(-\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta\right) \end{aligned} \tag{13.2}$$

---

[1] Darstellungen etwa in: STUMPFF, K. [1931-1932]; STUMPFF, K. [1949]; STUMPFF, K. [1954]; STUMPFF, K. [1959]: *Himmelsmechanik I;* STUMPFF, K. [1964/1]

[2] Etwa nach der Methode von *P. Kustaanheimo*, referiert in STUMPFF, K. [1965]: *Himmelsmechanik II*, pp. 636-642, auch in Abschnitt 16.1 ab Seite 343

[3] weitere Anwendungen z.B. in: BLANCHARD, R. C. and P. E. ZADUNAISKY [1968]

[4] Überblick in Abschnitt 13.5

[5] Siehe in Abschnitt 2.7.2 (Band I), Formel (2.211)

[6] Um Verwechslungen mit den *Delaunay*-Elementen zu vermeiden, wird im Zusammenhang dieses Kapitels bei diesen Funktionen der Index „*L*" angefügt

[7] Die für die räumliche Komponente benötigten, nur im Fall von „Störungen" verwendeten, Funktionen $\left(H_L, \dot{H}_L\right)$ wurden in ZADUNAISKY, PEDRO, E. and CLAUDIA M. GIORDANO [1990] eingeführt

$$\mathbf{r}_A = r_A \left(\mathbf{q}_{1A}^{(I)} \cos\zeta_A + \mathbf{q}_{2A}^{(I)} \sin\zeta_A \right)$$
$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{r}_A \left(\mathbf{q}_{1A}^{(I)} \cos\zeta_A + \mathbf{q}_{2A}^{(I)} \sin\zeta_A \right) + r_A \dot{\zeta}_A \left(-\mathbf{q}_{1A}^{(I)} \sin\zeta_A + \mathbf{q}_{2A}^{(I)} \cos\zeta_A \right) \quad .$$

Wird eine räumliche Bewegung außer Acht gelassen $\left(H_L = \dot{H}_L = 0 \right)$, wird wie für *Hansen*-Systeme charakteristisch $\mathbf{q}_j^{(I)} = \mathbf{q}_{jA}^{(I)}$, $j = 1,2,3$. In diesem (und nur in diesem) Fall ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} r\cos\zeta &= F_L\, r_A \cos\zeta_A + G_L\, \dot{r}_A \cos\zeta_A - G_L\, r_A\, \dot{\zeta}_A \sin\zeta_A \\ r\sin\zeta &= F_L\, r_A \sin\zeta_A + G_L\, \dot{r}_A \sin\zeta_A + G_L\, r_A\, \dot{\zeta}_A \cos\zeta_A \quad . \end{aligned} \tag{13.3}$$

Mit dem Flächensatz $r_A^2\, \dot{\zeta}_A = G_A$ erhält man als Lösungen die geschlossenen Ausdrücke

$$\begin{aligned} G_L &= \frac{r\, r_A}{G_A} \sin\left(\zeta - \zeta_A\right) \\ F_L &= r \left[\frac{1}{r_A} \cos\left(\zeta - \zeta_A\right) - \frac{\dot{r}_A}{G_A} \sin\left(\zeta - \zeta_A\right) \right] \quad . \end{aligned} \tag{13.4}$$

Im (ungestörten) Zweikörperproblem ("exakte *Kepler*bewegung") kann der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ der wahren Anomalie υ (bis auf eine Konstante, die aber ohne Einschränkung gleich Null angenommen werden kann) gleichgesetzt werden. Dann ist[1]

$$r = \left|\mathbf{r}\right| ,\ r_A = \left|\mathbf{r}_A\right| ,\ G_A = \sqrt{\mu\, p} = \left|\mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A\right|,\ r_A = \frac{p}{1 + e\cos\upsilon_A} ,\ \dot{r}_A = \frac{\mathbf{r}_A \cdot \dot{\mathbf{r}}_A}{r_A} = \frac{e\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} \sin\upsilon_A \tag{13.5}$$

und es folgen die einfachen Beziehungen

$$\begin{aligned} G_L &= \frac{r\, r_A}{\sqrt{\mu\, p}} \sin\left(\upsilon - \upsilon_A\right) \\ F_L &= \frac{r}{p} \left[e\cos\upsilon + \cos\left(\upsilon - \upsilon_A\right) \right] \quad . \end{aligned} \tag{13.6}$$

Hier werden die $\left(F_L, G_L\right)$ – Funktionen in Abhängigkeit von der wahren Anomalie berechnet. Mit dem in der Zweikörperbewegung gültigen Flächensatz $r^2\, \dot{\upsilon} = G$ bzw. den entsprechenden Umrechnungen mit *Kepler*formeln und *Kepler*gleichung kann der Zusammenhang mit der Zeit hergestellt werden.

Diese einfachen Formeln spielen in der praktischen Anwendung eine Rolle, wenn es nicht auf die letzte Genauigkeit einer Aussage ankommt. Bei interplanetaren Bewegungen, bei denen sich die Störungen durch ein Mehrkörperproblem über längere Zeiträume nur geringfügig auswirken, können diese Formeln ausgehend von einem nicht zu weit zurückliegenden Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ weitreichende Aussagen über die wechselseitige Stellung der Planeten sowie über erste Abschätzungen der Bewegung eines Raumflugkörpers bereitstellen. Im Fall der Satellitenbewegung gibt es viele Fälle, in denen hochgenaue Berechnungen überflüssig sind. Ein Beispiel war die Abschaltung der Sensoren des Satelliten ROSAT bei Durchflug der südatlantischen Anomalie. Da deren Gestalt naturgemäß nicht exakt fassbar ist, konnte ausgehend von

[1] siehe etwa die Formeln der *Kepler*bewegung in Abschnitt 2.5.2 in Band I

einem vor diesem Ereignis bekannten Zustandsvektor der ungefähre Durchflug des Satelliten durch diese Anomalie mit genügend großer Toleranz mit den obigen Formeln bestimmt werden. Dadurch waren die Sicherheit des Satelliten und die Unbeschädigtheit seiner Messgeräte und Sensoren ungefährdet.

Im Rahmen der elliptischen speziellen *Kepler*bewegung kann die Verwendung der wahren Anomalie durch Einführung der exzentrischen Anomalie mit Hilfe der *Kepler*schen Formeln (10.24) ersetzt werden. Diese liefern

$$\begin{aligned} \sin(\upsilon-\upsilon_A) &= \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r\,r_A}\left\{\sin(E-E_A)-e\left[\sin E-\sin E_A\right]\right\} \\ \cos(\upsilon-\upsilon_A) &= 1-\frac{a^2(1-e^2)}{r\;r_A}\left[1-\cos(E-E_A)\right] \quad . \end{aligned} \tag{13.7}$$

Da die mittlere *Kepler*bewegung durch $n=\sqrt{\mu/a^3}$ gegeben ist, folgt zunächst

$$G_L = \frac{1}{n}\left[\sin(E-E_A)-e(\sin E-\sin E_A)\right]$$

und mit der *Kepler* Gleichung $n(t-t_A)=E-e\,\sin E$ auch

$$\begin{aligned} G_L &= t-t_A-\frac{1}{n}\left[(E-E_A)-\sin(E-E_A)\right] \\ F_L &= 1-\frac{a}{r_A}\left[1-\cos(E-E_A)\right] \quad . \end{aligned} \tag{13.8}$$

Um die abgeleiteten Funktionen $(\dot F_L,\dot G_L)$ zu berechnen, genügt es einen Satz der im vorstehenden Abschnitt erhaltenen Funktionen (F_L,G_L) direkt nach der Zeit zu differenzieren, ohne über eine Auflösung nach der zweiten der Gleichungen (13.1) zu gehen.

Im Fall der exakten *Kepler*bewegung lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot F_L\,\mathbf{r}_A+\ddot G_L\,\dot{\mathbf{r}}_A = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad . \tag{13.9}$$

Damit ergeben sich die Variationsgleichungen der beiden Funktionen zu

$$\ddot F_L = -\frac{\mu}{r^3}F_L \quad , \quad \ddot G_L = -\frac{\mu}{r^3}G_L \quad , \tag{13.10}$$

somit

$$F_L\ddot G_L - G_L\ddot F_L = 0 \quad , \quad F_L\dot G_L - G_L\dot F_L = const. \quad .$$

Da offenbar $F_L(t=t_A)=1$, $G_L(t=t_A)=0$, $\dot F_L(t=t_A)=0$, $\dot G_L(t=t_A)=1$, gilt

$$F_L\dot G_L - G_L\dot F_L = 1 \quad . \tag{13.11}$$

Für Untersuchungen im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung können die Basisvektoren des grundlegenden *Hansen*-Systems nicht notwendig als unveränderlich angesehen werden. Die Beziehungen (13.3) können daher nicht in dieser Form aus den Darstellungen (13.2) hergeleitet werden. Die von *K. Stumpff* entdeckte Methode durch Einführung der *Stumpff*schen *c*-Funktionen ist unabhängig von der Bahnform einer *Kepler*bewegung und kann auf

Anwendungen im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung ("gestörte Zweikörperbewegung") erweitert werden. Im Folgenden werden einige Ergebnisse dieser Entwicklungen referiert. Für die ausführlichen Herleitungen sei auf die Originalliteratur verwiesen.

13.2 Regularisierung mit der *Sundmann*schen Variablen

Die *Leibniz*sche Gleichung[1] lautet im Falle der exakten *Kepler*bewegung

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} \quad . \tag{13.12}$$

Eine weitere Differentiation nach der Zeit ergibt die von *Stumpff* gefundene Variationsgleichung der dritten Ordnung (welche keinen Bahnparameter mehr enthält)

$$\dddot{r} + 3\frac{\dot{r}\ddot{r}}{r} + \mu\frac{\dot{r}}{r^3} = 0 \quad . \tag{13.13}$$

Diese Gleichungen werden singulär für $r \to 0$. Durch Transformation der Zeit *t* als unabhängiger Variable auf eine neue unabhängige Variable kann diese Singularität beseitigt werden. Als eine solche Variable bewährt sich die *Sundmann*sche regularisierende Variable τ, welche durch die Differentialgleichung

$$d\tau = \frac{dt}{r} \tag{13.14}$$

definiert wird[2]. Damit ergeben sich die Differentialausdrücke (Differentiation nach τ werde mit Hochkomma charakterisiert)

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} =: \frac{r'}{r} \quad , \ddot{r} = \frac{r''}{r^2} - \frac{r'^2}{r^3} \quad , \quad \dddot{r} = \frac{r'''}{r^3} - 4\frac{r'r''}{r^4} + 3\frac{r'^3}{r^5} \quad . \tag{13.15}$$

Die Variationsgleichung der dritten Ordnung in Abhängigkeit von der regularisierenden Variablen τ lautet dann

$$r''' + \frac{\mu - r''}{r}r' = 0 \quad . \tag{13.16}$$

Nun führt im Rahmen einer Zweikörperbewegung die Beziehung

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mu - r''}{r}\right) = -\frac{1}{r}\left[r''' + \frac{(\mu - r'')r'}{r}\right] = 0 \tag{13.17}$$

auf die Aussage

$$\frac{\mu - r''}{r} = const. \quad . \tag{13.18}$$

---

[1] Siehe in Abschnitt 2.4 (Band I)

[2] Siehe in Abschnitt 2.7.24 (Band I). Hinweis: In den Originalarbeiten von *Stumpff* und *Zadunaisky* wird der Buchstabe τ für eine modifizierte Zeit verwendet. Diese wird im Rahmen einer Satellitenbahnmechanik nicht verwendet, so dass keine Verwechslung zwischen der regularisierenden Variablen und einer Zeiteinheit möglich sein sollte. Siehe dazu etwa in BOCCALETTI, D. and PUCACCO, G. [1996], pp.162-164

Im Fall einer Zweikörperbewegung wird die Geschwindigkeit eines bewegten Objektes gegeben durch die Beziehung[1]

$$V^2 = \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu\left(1-e^2\right)}{p} =: \frac{2\mu}{r} - \alpha^2 \quad , \tag{13.19}$$

wobei mit dem Parameter α^2 die Gesamtenergie des betrachteten Systems bezeichnet wird[2]. Diese ist, da im Fall einer ungestörten Zweikörperbewegung konstant, aus dem gegebenen Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ bekannt:

$$\alpha^2 = \frac{2\mu}{|\mathbf{r}_A|} - \dot{\mathbf{r}}_A^2 \quad . \tag{13.20}$$

Für die radiale Beschleunigung in Bezug auf die regularisierende Variable τ wird mit $r' = r\,\dot{r}$ sowie der *Leibniz*schen Gleichung (13.12)

$$r'' = r^2\left[\ddot{r} + \frac{r'^2}{r^3}\right] = r^2\left[\frac{G^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2}\right] + r\left[V^2 - \frac{G^2}{r^2}\right] = r\,V^2 - \mu \quad . \tag{13.21}$$

Mit der Geschwindigkeitsbeziehung (13.19) ergibt sich

$$\frac{\mu - r''}{r} = \alpha^2 \tag{13.22}$$

und der Bahnradius genügt in Bezug auf die *Sundmann*sche regularisierende Variable τ im Rahmen einer Zweikörperbewegung der Differentialgleichung

$$r''' + \alpha^2\, r' = 0 \quad . \tag{13.23}$$

Die zu (13.23) analoge Gleichung für den Radiusvektor folgt direkt aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \dot{\mathbf{r}}\, r \\ \mathbf{r}'' &= \ddot{\mathbf{r}}\, r^2 + \dot{\mathbf{r}}\, r' \end{aligned} \tag{13.24}$$

mit der Bewegungsgleichung der (ungestörten) Zweikörperbewegung

$$r^2\,\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r}\mathbf{r} \tag{13.25}$$

zu

$$\mathbf{r}'' - \frac{r'}{r}\mathbf{r}' + \frac{\mu}{r}\mathbf{r} = 0 \quad . \tag{13.26}$$

Eine weitere Differentiation nach der regularisierenden Variablen führt auf

$$\mathbf{r}''' = \frac{r'' - \mu}{r}\mathbf{r}' \quad , \tag{13.27}$$

mit der Definition (13.22) schließlich zu

---

[1] vgl. Formel (2.83) in Abschnitt 2.5.2, Band I

[2] Wir folgen hier der bei *K. Stumpff* und folgenden Arbeiten üblichen Bezeichnungsweise, da eine Verwechslung mit der Rektaszension α ausgeschlossen ist. Außerdem wird in Bezug auf Kegelschnitte α als charakteristische Größe benötigt. Mit der Schreibweise α^2 kann angedeutet werden, dass diese Größe stets reell ist.

$$\mathbf{r}''' + \alpha^2 \mathbf{r}' = 0 \quad . \tag{13.28}$$

Anmerkungen:

1. Die schon von *J. Kepler*[1] selbst als unabhängige Variable verwendete exzentrische Anomalie *E* kann im Fall einer ungestörten elliptischen Zweikörperbewegung mit den Formeln (10.26), (10.12) und (10.4)

$$r^2 \dot{\upsilon} = G = \sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)} \quad , \quad \dot{\upsilon} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r}\dot{E}$$

als eine regularisierende Variable gedeutet werden. Sie ist wegen der dann gültigen Konstanz der Parameter *a* und μ eng mit der *Sundmann*schen Variablen τ verknüpft:

$$dE = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\,d\tau \quad , \quad 0 < \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad , \; 0 \le e < 1 \quad . \tag{13.29}$$

Damit ergibt sich die (singularitätenfreie) Differentialgleichung

$$\frac{d^2 r}{dE^2} + r = a \quad . \tag{13.30}$$

2. Unter der impliziten Annahme, dass das dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i$ zugeordnete Basissystem inertial bzw. ausschließlich geradlinig bewegt ist, werde im vorliegenden Zusammenhang somit angenommen, dass stets gilt:

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \;,\; \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i \;,\; \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}^i \mathbf{p}_i \qquad \langle \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad . \tag{13.31}$$

In diesem (und nur in diesem) Zusammenhang können die den Variationsgleichungen (13.26) und (13.28) zugeordneten kartesischen Koordinaten formuliert werden:

$$x_i'' - \frac{r'}{r}x_i' + \frac{\mu}{r}x_i = 0 \quad , \quad x_i''' + \alpha^2 x_i' = 0 \qquad \langle i = 1,2,\cdots \quad . \tag{13.32}$$

3. Unter dem Begriff „Regularisierung“ wird hier explizit die Regularisierung der Differentialgleichungen verstanden, nicht ihrer Lösungen. Auch singuläre Differentialgleichungen können nichtsinguläre Lösungen haben[2].

4. In der physikalischen Realität trifft die Singularität *r=0* wegen der endlichen Ausdehnung der beteiligten Körper nicht zu. Allerdings können bei der Berechnung extremer Annäherungen der beteiligten Körper numerische Probleme auftreten, die durch eine Regularisierung und damit eine „Entzerrung“ bei extremen Annäherungen beseitigt werden können. Dies trifft insbesondere auch bei hochexzentrischen Bahnen in der Nähe von Perizentrumsdurchgängen auf.

5. Neben der Transformation der unabhängigen Variablen kann eine Regularisierung zusätzlich in einem zweiten Schritt durch eine Transformation der Koordinaten verbessert werden. Beispiele dazu sind die Projektion eines Bewegungsvorganges in einen *Levi-Cività*- Parameterraum im Fall zweidimensionaler Bewegung, bzw. im Fall dreidimensionaler Bewegungen in einen *KS*-Parameterraum (hierzu in den Abschnitten 14.4 und 14.5).

---

[1] Siehe etwa in Abschnitt 2.2.2 (Band I)

[2] BOCCALETTI, D. and PUCACCO, G. [1996], p.163, STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971], Abschnitt 4, pp.11-13

13.3 Die Stumpffschen Funktionen

Die Differentialgleichung (13.23) kann allgemein gelöst werden mit Hilfe der *Stumpff*schen Funktionen[1]

$$c_n\left(\alpha^2\tau^2\right) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\alpha^2\,\tau^2\right)^{\nu}}{(2\nu+n)!} \qquad \langle n = 0,1,2,\cdots \quad . \tag{13.33}$$

Diese genügen der Rekursionsformel

$$c_n + \alpha^2\tau^2\, c_{n+2} = \frac{1}{n!} \qquad \langle n = 0,1,2,\ldots \tag{13.34}$$

und der differentiellen Beziehung

$$\frac{d}{d\tau}\left(c_{n+1}\,\tau^{n+1}\right) \;=\; c_n\,\tau^n \quad . \tag{13.35}$$

In der praktischen Anwendung werden die *Stumpff*schen *c*-Funktionen gelegentlich durch *s*-Funktionen ersetzt[2]:

$$s_n = s_n\left(\alpha^2\,\tau^2\right) := \tau^n\, c_n\left(\alpha^2\,\tau^2\right) = \tau^n\, c_n = \tau^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\alpha^2\,\tau^2\right)^{\nu}}{(2\nu+n)!} \qquad \langle n = 0,1,2,\cdots \quad . \tag{13.36}$$

Entsprechend lautet die Rekursionsformel

$$s_n + \alpha^2\, s_{n+2} = \frac{\tau^n}{n!} \tag{13.37}$$

sowie die Differentialbeziehung

$$s'_{n+1} = s_n \qquad \langle \text{für} \quad n = 0,1,2,\ldots \quad . \tag{13.38}$$

Die wesentliche Bedeutung der *Stumpff*schen Funktionen liegt darin, dass sie für alle Arten von Zweikörperbewegungen also Kegelschnittbewegungen inclusive Kreisbahnen und geradlinigen Bewegungen ohne Einschränkungen anwendbar sind. Man kann mit ihnen wie mit allen trigonometrischen Funktionen arbeiten. Für die numerische Behandlung in einem programmierbaren Rechner können die *Stumpff*schen Funktionen (hier vorzugsweise die *s*-Funktionen) genauso wie die trigonometrischen Funktionen durch *Tschebscheff*-Approximationen[3] zur Verfügung gestellt werden.

Der Bezug der *Stumpff*schen Funktionen zu den trigonometrischen Funktionen bzw. den Hyperbelfunktionen in den einzelnen Fällen einer Kegelschnittbahn kann erläutert werden durch die folgenden Beziehungen:

- Kreisförmiger Fall: bei Vorgabe des Anfangszustandsvektors $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ lautet der Energieparameter (siehe das Geschwindigkeitsintegral (13.19))

[1] Herleitung in STUMPFF, K. [1959], p. 205

[2] Etwa nach GOODYEAR, W. H. [1966]

[3] Siehe in Anhang C, Band IV

$$\alpha^2\left[e=0\right]=\frac{\mu}{r_A} \quad . \tag{13.39}$$

Die *Stumpff*schen *s*-Funktionen können wie im elliptischen Fall berechnet werden.

- Elliptischer Fall: für den Energieparameter gilt die Relation

$$0 < \alpha^2\left[0<e<1\right]=\frac{2\mu}{r_A}-\dot{\mathbf{r}}_A^2=\frac{\mu}{a} \quad , \quad \frac{\mu}{r_A} < \dot{\mathbf{r}}_A^2 < \frac{2\mu}{r_A} \quad . \tag{13.40}$$

Die *Stumpff*schen *s*-Funktionen entsprechen:

$$\begin{aligned}
s_0 &= \cos\left(\alpha\tau\right) \\
\alpha s_1 &= \sin\left(\alpha\tau\right) \\
\alpha^2 s_2 &= 1-\cos\left(\alpha\tau\right)=1-s_0 \\
\alpha^3 s_3 &= \alpha\tau-\sin\left(\alpha\tau\right) \quad ; \quad \alpha^2 s_3=\tau-s_1 \\
\alpha^4 s_4 &= \frac{\alpha^2\tau^2}{2}-1+\cos\left(\alpha\tau\right)= \frac{\alpha^2\tau^2}{2}-1+s_0 \\
\alpha^5 s_5 &= \frac{\alpha^3\tau^3}{6}-\alpha\tau+\sin\left(\alpha\tau\right) \; ; \; \alpha^4 s_5 = \frac{\alpha^2\tau^3}{6}-\tau+s_1 \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{13.41}$$

Die regularisierende Variable τ wird berechnet aus

$$\sin\left(\alpha\tau\right)=\alpha s_1 \quad , \; \cos\left(\alpha\tau\right)=s_0 \quad . \tag{13.42}$$

- Parabolischer Fall: der Energieparameter ist

$$\alpha^2\left[e=1\right]=0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_A^2 = \frac{2\mu}{r_A} \quad . \tag{13.43}$$

Die Stumpffschen Funktionen entsprechen:

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1 \\
s_1 &= \tau \\
s_2 &= \frac{\tau^2}{2} \\
s_3 &= \frac{\tau^3}{3!} \\
s_4 &= \frac{\tau^4}{4!} \\
s_5 &= \frac{\tau^5}{5!} \\
&\ldots
\end{aligned} \tag{13.44}$$

- Hyperbolischer Fall: bei Vorgabe des Anfangszustandsvektors $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ lautet der Energieparameter

$$\alpha^2\left[e>1\right]=\frac{2\mu}{r_A}-\dot{\mathbf{r}}_A^2<0 \quad , \quad \frac{2\mu}{r_A}<\dot{\mathbf{r}}_A^2 \qquad . \tag{13.45}$$

Die Stumpffschen Funktionen entsprechen:

$$\begin{aligned}
\alpha s_1 &= \mathrm{sh}\left(\alpha\tau\right)=\frac{1}{2}\left[e^{\alpha\tau}-e^{-\alpha\tau}\right] \\
s_0 &= \mathrm{ch}\left(\alpha\tau\right)=\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\left(\alpha\tau\right)} \\
\alpha^2 s_2 &= 1-\mathrm{ch}\left(\alpha\tau\right)=1-s_0 \\
\alpha^3 s_3 &= \alpha\tau-\mathrm{sh}\left(\alpha\tau\right) \;\; ; \;\; \alpha^2 s_3=\tau-s_1 \\
\alpha^4 s_4 &= \frac{\alpha^2\tau^2}{2}-1+\mathrm{ch}\left(\alpha\tau\right)=\frac{\alpha^2\tau^2}{2}-1+s_0 \\
\alpha^5 s_5 &= \frac{\alpha^3\tau^3}{6}-\alpha\tau+\mathrm{sh}\left(\alpha\tau\right); \;\; \alpha^4 s_5=\frac{\alpha^2\tau^3}{6}-\tau+s_1 \\
&\cdots
\end{aligned} \tag{13.46}$$

Die regularisierende Variable τ wird berechnet aus

$$\mathrm{sh}\left(\alpha\tau\right)=\alpha s_1 \quad , \; \mathrm{ch}\left(\alpha\tau\right)=s_0 \tag{13.47}$$

mit

$$\alpha\tau=\mathrm{Arsh}\left[\mathrm{sh}\left(\alpha\tau\right)\right]=\ln\left[\mathrm{sh}\left(\alpha\tau\right)+\sqrt{\mathrm{sh}^2\left(\alpha\tau\right)+1}\right]=\ln\left(\alpha s_1+s_0\right) \quad . \tag{13.48}$$

Anmerkung: In der praktischen Anwendung genügt es, die Funktionen s_0 und s_1 zu berechnen. Alle höheren Funktionen ergeben sich dann (unabhängig vom jeweiligen Kegelschnitt) rekursiv.

13.4 Ungestörte Zweikörperbewegung in universaler Darstellung

Der Bahnradius als Funktion der regularisierenden Variablen τ kann um den Anfangszustand entwickelt werden:

$$r=r\left(\tau\right)=\frac{r_A}{0!}+\frac{r_A'}{1!}\tau+\frac{r_A''}{2!}\tau^2+\frac{r_A'''}{3!}\tau^3+\frac{r_A^{IV}}{4!}\tau^4+\frac{r_A^{V}}{5!}\tau^5+\;\cdots \quad . \tag{13.49}$$

Werden hier die *Stumpff*schen *s*-Funktionen über die Rekursionsformel (13.37) eingesetzt, wird

$$\begin{aligned}
r=r\left(\tau\right)=r_A\left(s_0+\alpha^2 s_2\right)+r_A'\left(s_1+\alpha^2 s_3\right)+r_A''\left(s_2+\alpha^2 s_4\right)+ \\
+r_A'''\left(s_3+\alpha^2 s_5\right)+r_A^{IV}\left(s_4+\alpha^2 s_6\right)+r_A^{V}\left(s_5+\alpha^2 s_7\right)+\cdots
\end{aligned}$$

und umgeordnet

$$r = r(\tau) = s_0\, r_A + s_1\, r'_A + s_2 \left(\alpha^2\, r_A + r''_A\right) + \\ + s_3 \left(\alpha^2\, r'_A + r'''_A\right) + s_4 \left(\alpha^2\, r''_A + r^{IV}_A\right) + s_5 \left(\alpha^2\, r'''_A + r^{V}_A\right) + \cdots \quad . \tag{13.50}$$

Wegen Differentialgleichung (13.23) und da der Energieparameter im Fall der "ungestörten" Zweikörperbewegung konstant ist, verschwinden hier alle Terme für n>2 und es bleibt der geschlossene Ausdruck

$$r = r_A + s_1\, r'_A + s_2\, r''_A \quad . \tag{13.51}$$

Die hier benötigten Größen $\left(r'_A, r''_A\right)$ sind aus den Beziehungen (13.15) und (13.21) aus den gegebenen Anfangswerten bekannt:

$$r'_A = r_A\, \dot{r}_A = \mathbf{r}_A \cdot \dot{\mathbf{r}}_A \quad , \quad r''_A = r_A\, \dot{\mathbf{r}}_A^2 - \mu \quad . \tag{13.52}$$

Der Bezug zur Zeit wird mit der Definitionsgleichung (13.14) hergestellt:

$$dt = \int_0^\tau r\, d\tau = \int_0^\tau \left(r_A + s_1\, r'_A + s_2\, r''_A\right) d\tau \quad . \tag{13.53}$$

Die Integration mit Hilfe der Differentialbeziehung (13.38) ergibt (wobei die Anfangszeit t_A der Anfangsvariablen $\tau_A = 0$ zugeordnet ist)

$$t - t_A = r_A\, \tau + s_2\, r'_A + s_3\, r''_A \quad . \tag{13.54}$$

Die regularisierende Variable kann aus Rekursionsformel (13.37) berechnet werden

$$\tau = s_1 + \alpha^2\, s_3 \quad . \tag{13.55}$$

Andererseits liefert die Beziehung (13.22) den Zusammenhang mit der zentrischen Gravitationskonstanten

$$\alpha^2\, r_A + r''_A = \mu \quad . \tag{13.56}$$

Dies ergibt schließlich den Bezug zur Zeit in der Form[1]

$$t = t_A + s_1\, r_A + s_2\, r'_A + s_3\, \mu \quad . \tag{13.57}$$

Diese Gleichung ist im Allgemeinen (wie die formal entsprechende *Kepler* Gleichung) transzendent und muss iterativ nach der Variablen τ gelöst werden, etwa mit einem *Newton* Verfahren

$$\tau^{(n+1)} = \tau^{(n)} - \frac{F_S\left(\tau^{(n)}\right)}{F'_S\left(\tau^{(n)}\right)} \qquad \langle n = 0, 1, 2, \cdots \quad . \tag{13.58}$$

Die Bedingungsgleichungen mit dem vorgegebenen Zeitintervall $\Delta t = t - t_A$ lauten

$$F_S(\tau) \equiv s_1(\tau)\, r_A + s_2(\tau)\, r'_A + s_3(\tau)\, \mu - \Delta t = 0 \\ F'_S(\tau) = s_0(\tau)\, r_A + s_1(\tau)\, r'_A + s_2(\tau)\, \mu \quad . \tag{13.59}$$

Eine Reihenentwicklung der *Stumpff*schen s-Funktionen liefert die Näherung

[1] Diese Gleichung wird von *Stumpff* als „Hauptgleichung" bezeichnet (siehe etwa in K. STUMPFF [1959], p. 207)

$$F_S\left(\tau^{(0)}\right) \equiv r_A\,\tau^{(0)} + \frac{1}{2} r_A\,\dot{r}_A\left(\tau^{(0)}\right)^2 - \Delta t = 0$$

und damit als Anfangswert für die Iteration

$$\begin{aligned} \tau^{(0)} &= \frac{1}{\dot{r}_A}\left[-1+\sqrt{1+\frac{2\Delta t\;\dot{r}_A}{r_A}}\right] && \left\langle \text{für } \dot{r}_A \neq 0 \right. \\ \tau^{(0)} &= \frac{\Delta t}{r_A} && \left\langle \text{für } \dot{r}_A = 0 \quad . \right. \end{aligned} \tag{13.60}$$

Anmerkung: Vor der Wurzel in dem ersten Näherungsausdruck kann nur das positive Vorzeichen stehen, da $\tau^{(0)} = 0$ für $\Delta t = 0$ sein muss.

Um eine Ephemeridenrechnung mit Hilfe des Anfangszustandsvektors $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ durchführen zu können, müssen im allgemeinen Fall einer ungestörten Zweikörperbewegung die Funktionen F_L, G_L in Abhängigkeit von der regularisierenden Variablen τ und mit Hilfe der *Stumpff*schen Funktionen bekannt sein. Aus $\dot{F}_L = F_L' / r$ folgt mit den Variationsgleichungen (13.10)

$$\ddot{F}_L = \frac{F_L''}{r^2} - \frac{F_L' r'}{r^3} = -\mu \frac{F_L}{r^3} \tag{13.61}$$

und nach weiterer Differentiation nach τ schließlich mit Hilfe der Beziehung (13.22)

$$F_L''' + \frac{\mu - r''}{r} F_L' \;=\; F_L''' + \alpha^2 F_L' \;= 0 \quad . \tag{13.62}$$

Diese Gleichung entspricht formal der Differentialgleichung (13.23) und somit ist formal auch entsprechend (13.51) zu erwarten, dass die Lösung lautet

$$F_L = F_L\left(\tau\right) = F_{LA} + s_1\left(\tau\right) F_{LA}' + s_2\left(\tau\right) F_{LA}'' \quad . \tag{13.63}$$

Entsprechend erhält man

$$G_L = G_L\left(\tau\right) = G_{LA} + s_1\left(\tau\right) G_{LA}' + s_2\left(\tau\right) G_{LA}'' \quad . \tag{13.64}$$

Die Anfangswerte dieser Funktionen sind im Hinblick auf die Gleichungen (13.11) und (13.61)

$$\begin{aligned} &F_{LA} = 1 \;\;,\;\; F_{LA}' = 0 \;\;,\;\; F_{LA}'' = -\frac{\mu}{r_A} \\ &G_{LA} = 0 \;\;,\;\; G_{LA}' = r_A \;\;,\;\; G_{LA}'' = r_A' \quad . \end{aligned} \tag{13.65}$$

Aus der Beziehung (13.57) folgt $s_1\left(\tau\right) r_A + s_2\left(\tau\right) r_A' = \Delta t - s_3\left(\tau\right)\mu$. Damit ergeben sich (wenn die Radien r, r_A nicht verschwinden) die Funktionen

$$\begin{aligned} F_L &= 1 - \frac{\mu\, s_2}{r_A} \quad , \quad G_L = \Delta t - \mu\, s_3 \\ \dot{F}_L &= -\frac{\mu\, s_1}{r\; r_A} \quad , \quad \dot{G}_L = 1 - \frac{\mu\, s_2}{r} \quad . \end{aligned} \tag{13.66}$$

13.5 Gestörte Zweikörperbewegung in universaler Darstellung

Die von *K. Stumpff* gefundene Theorie einer Ephemeridenrechnung im Rahmen eines Zweikörperproblems mit Hilfe der *Stumpff*schen Funktionen kann erst dann in der praktischen Anwendung Bedeutung erlangen, wenn mit ihr auch das Problem der gestörten Zweikörperbewegung bearbeitet werden kann[1]. Neben den Arbeiten hierzu von *S. Herrick*[2] und *S. Goodyear*[3] sind hier die von *P. Zadunaisky* hergeleiteten Formelsysteme zu nennen, die sich streng an die *Stumpff*-schen Formulierungen halten, gleichwohl eine eigenständige Weiterentwicklung und Fortführung darstellen[4]. Diese werden in diesem Abschnitt referiert, allerdings mit einigen Modifikationen: anstelle der *Stumpff*schen *c*-Funktionen werden, der Übersichtlichkeit wegen und für den Einsatz mit automatischen Rechnern, die *s*-Funktionen verwendet, entsprechend wird auf den Gebrauch der lokalen Invarianten verzichtet. Die für das Rechnen aus der Zeit vor der Einführung der automatischen Rechner gerne verwendeten Vereinfachungen werden, im Rahmen der Satellitenbahnmechanik um Verwirrungen zur vermeiden und da der automatische Rechner damit nicht belastet wird, nicht verwendet. Dazu gehören die früher gerne verwendete Wahl einer Zeiteinheit unter Berücksichtigung der *Gauß*schen Gravitationskonstante sowie die im Rahmen des Sonnensystems verwendete Masse der Sonne als Einheit.

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung der gestörten Zweikörperbewegung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{R}_K \quad , \tag{13.67}$$

wobei im Vektor $\mathbf{R}_K$ alle Beschleunigungen („Störungen“) zusammengefasst sind, welche die Zweikörperbewegung überlagern. Mit der regularisierenden Variable τ wird

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}'}{r} \ , \ \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}''}{r^2} - \frac{r'\mathbf{r}'}{r^3} \quad . \tag{13.68}$$

Die Bewegungsgleichung (13.67) der gestörten Zweikörperbewegung lautet dann

$$r\,\mathbf{r}'' - r'\mathbf{r}' = -\mu\mathbf{r} + r^3\,\mathbf{R}_K \quad . \tag{13.69}$$

Der Störvektor hat im begleitenden *Leibniz*-System die Zerlegung

$$\mathbf{R}_K = b_{R2}\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{13.70}$$

In Bezug auf das Geschwindigkeitsvektor-orientierte $\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right)-$ System[5] lautet der „Störvektor“:

$$\mathbf{R}_K = b_{R2V}\,\mathbf{r}_0 + b_V\,\mathbf{v}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \qquad \begin{cases} \mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0\,, \dot{\mathbf{r}} = V\,\mathbf{v}_0\,, V = \left|\dot{\mathbf{r}}\right|\,, \\ \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0, \\ \mathbf{r}_0^2 = \mathbf{v}_0^2 = \mathbf{c}_0^2 = 1 \quad . \end{cases} \tag{13.71}$$

---

[1] Eine Verallgemeinerung im Hinblick auf die Integration bei der Behandlung allgemeiner Störungen findet sich auf der Basis der Arbeiten P. MUSEN AND L. CARPENTER [1963]: ‘On the general perturbations in rectangular coordinates’, *J. geophys. Res.* **68**, 2727; P. MUSEN [1965]: ‘On the general perturbations of the position vectors of a planetary system’, *J. O.* **48**, 11 bei K. STUMPFF [1974], pp. 255-267 sowie in Kapitel XXX

[2] HERRICK, S. [1965]

[3] GOODYEAR, W. H. [1965 a], GOODYEAR, W. H. [1965 b]

[4] ZADUNAISKY, PEDRO E. AND CLAUDIA M. GIORDANO [1990]; eine zusammenfassende gekürzte Darstellung findet sich in dem Lehrbuch: ZADUNAISKY, PEDRO E. [1998], pp.93-103

[5] Siehe hierzu auch in Abschnitt 5.2.5.4 in Band II

Für Orts- und Geschwindigkeitsvektor hat man

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = V\mathbf{v}_0 = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 \quad , \tag{13.72}$$

somit

$$\mathbf{q}_0 = \frac{r}{G}\left[V\,\mathbf{v}_0 - \dot{r}\,\mathbf{r}_0\right] \quad . \tag{13.73}$$

Der Störvektor (13.71) lautet daher in der Zerlegung auf Radiusvektor, Geschwindigkeitsvektor und Normalenvektor

$$\mathbf{R}_K = \left[b_{R2} - \frac{r\,\dot{r}}{G}b_T\right]\mathbf{r}_0 + \frac{rV\,b_T}{G}\mathbf{v}_0 + b_N\mathbf{c}_0 =: b_{R2V}\,\mathbf{r}_0 + b_V\,\mathbf{v}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{13.74}$$

Die Beschleunigungskomponenten haben somit die für eine Ephemeridenrechnung benötigten Beziehungen

$$\begin{aligned} b_{R2V} &= b_{R2} - \frac{r\,\dot{r}}{G}b_T = b_{R2} - \frac{r'}{G}b_T \quad , \; b_V = \frac{rV}{G}b_T \\ b_{R2} &= b_{R2V} + \frac{r\,\dot{r}}{G}b_T = b_{R2V} + \frac{r'}{G}b_T \quad , \; b_T = \frac{G}{rV}b_V \quad . \end{aligned} \tag{13.75}$$

Vorgegeben sei zu einer Epoche t_A der Anfangszustandsvektor $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ mit den abgeleiteten Größen

$$\begin{aligned} &\mathbf{c}_A = \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A = G_A\,\mathbf{c}_{0A} \quad , \; \mathbf{c}_{0A}^2 = 1 \quad , \; r_A = \left|\mathbf{r}_A\right| \quad , \\ &\dot{r}_A = \frac{\mathbf{r}_A \cdot \dot{\mathbf{r}}_A}{r_A} \quad , V_A = \left|\dot{\mathbf{r}}_A\right|, \; G_A = \left|\mathbf{c}_A\right| \quad . \end{aligned} \tag{13.76}$$

Der Störvektor wird in der Theorie von *P. Zadunaisky* auf den Anfangszustandsvektor bezogen. Seine Zerlegung hat daher die Form

$$\mathbf{R}_K =: P_{AR}\,\mathbf{r}_A + P_{AV}\,\dot{\mathbf{r}}_A + P_{AN}\,\mathbf{c}_A \quad . \tag{13.77}$$

Die Komponenten $\left(P_{AR}\,,\,P_{AV}\,,P_{AN}\right)$ sind nach wie vor Funktionen der Zeit bzw. der regularisierenden Variablen. Mit der Darstellung (13.74) folgt die Bedingung zur Berechnung dieser Komponenten aus den oskulierenden auf den momentanen Zustandsvektor bezogenen Beschleunigungskomponenten

$$\frac{b_{R2V}}{r}\mathbf{r} + \frac{b_V}{V}\dot{\mathbf{r}} + \frac{b_N}{G}\mathbf{c} = P_{AR}\,\mathbf{r}_A + P_{AV}\,\dot{\mathbf{r}}_A + P_{AN}\,\mathbf{c}_A \quad . \tag{13.78}$$

Die Vektoren $\left(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}\right)$ werden durch die Beziehungen (13.1) auf den Anfangszustandsvektor $\left(\mathbf{r}_A,\dot{\mathbf{r}}_A\right)$ zurückgeführt. Für den Normalenvektor gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = &\left(F_L\,\dot{G}_L - G_L\,\dot{F}_L\right)\mathbf{c}_A + \left(H_L\,\dot{F}_L - F_L\,\dot{H}_L\right)\left(\mathbf{r}_A\,r_A\,\dot{r}_A - \dot{\mathbf{r}}_A\,r_A^2\right) + \\ &+\left(G_L\,\dot{H}_L - H_L\,\dot{G}_L\right)\left(\mathbf{r}_A\,V_A^2 - \dot{\mathbf{r}}_A\,r_A\,\dot{r}_A\right) \quad . \end{aligned} \tag{13.79}$$

Der Vergleich führt auf die Beziehungen zwischen den Beschleunigungskomponenten

$$
\begin{aligned}
P_{AR} &= \frac{b_{R2V}}{r} F_L + \frac{b_V}{V} \dot{F}_L + \frac{b_N}{G} \left[\left(H_L \dot{F}_L - F_L \dot{H}_L \right) r_A \dot{r}_A + \left(G_L \dot{H}_L - H_L \dot{G}_L \right) V_A^2 \right] \\
P_{AV} &= \frac{b_{R2V}}{r} G_L + \frac{b_V}{V} \dot{G}_L - \frac{b_N}{G} \left[\left(H_L \dot{F}_L - F_L \dot{H}_L \right) r_A^2 + \left(G_L \dot{H}_L - H_L \dot{G}_L \right) r_A \dot{r}_A \right] \\
P_{AN} &= \frac{b_{R2V}}{r} H_L + \frac{b_V}{V} \dot{H}_L + \frac{b_N}{G} \left(F_L \dot{G}_L - G_L \dot{F}_L \right) \quad .
\end{aligned}
\tag{13.80}
$$

Die *Leibniz*sche Gleichung lautet im Fall der „gestörten“ Zweikörperbewegung

$$
\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} + b_{R2} \quad . \tag{13.81}
$$

Differentiation nach der Zeit ergibt die von *Stumpff* gefundene Gleichung dritten Grades, jetzt erweitert um die nun berücksichtigten zusätzlichen Beschleunigungen, wobei $\dot{G} = r\, b_T$ und die *Frenet*schen Formeln der Astrodynamik[1] angewendet werden:

$$
\dddot{r} + 3 \frac{\dot{r}\, \ddot{r}}{r} + \frac{\mu \dot{r}}{r^3} = 3 \frac{\dot{r}}{r} b_{R2} + 2 \frac{G}{r^2} b_T + \dot{b}_{R2} \quad . \tag{13.82}
$$

Wie im Fall der ungestörten Zweikörperbewegung werde die *Sundmann*sche regularisierende Variable τ über die Beziehung (13.14) $r \dot{\tau} = 1$ eingeführt. Hier ergeben sich wieder die in den Formeln (13.15) zusammengestellten Beziehungen. Es folgt daher die Differentialgleichung dritter Ordnung für den Bahnradius in Bezug auf die regularisierende Variable

$$
r''' + \frac{\mu - r''}{r} r' = 3 r\, r'\, b_{R2} + 2 r\, G\, b_T + r^2\, b'_{R2} \quad . \tag{13.83}
$$

Hier werde formal (!) wie im ungestörten Fall der Parameter α^2 eingeführt, der jetzt aber nicht wie im ungestörten Fall eine Konstante sein kann, da er die zusätzliche radiale (Stör-) Beschleunigung b_{R2} enthält:

$$
\alpha^2 = \frac{\mu - r''}{r} = \frac{2\mu}{r} - \dot{\mathbf{r}}^2 - r\, b_{R2} = \frac{2\mu}{r} - \dot{r}^2 - \frac{G^2}{r^2} - r\, b_{R2} \quad . \tag{13.84}
$$

Seine Variationen nach der regularisierenden Variablen lauten

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha^2 \right)' &= \frac{d\left(\alpha^2 \right)}{d\tau} = -2 G\, b_T - r\, b'_{R2} - 3 r'\, b_{R2} \\
\left(\alpha^2 \right)'' &= \frac{d^2\left(\alpha^2 \right)}{d\tau^2} = -2 G'\, b_T - 2 G\, b'_T - 4 r'\, b'_{R2} - r\, b''_{R2} - 3 r''\, b_{R2} \\
\left(\alpha^2 \right)''' &= \frac{d^3\left(\alpha^2 \right)}{d\tau^3} = -2 G''\, b_T - 4 G'\, b'_T - 2 G\, b''_T - 7 r''\, b'_{R2} - 5 r'\, b''_{R2} - r\, b'''_{R2} - 3 r'''\, b_{R2} \quad .
\end{aligned}
\tag{13.85}
$$

Vergleich mit der Differentialgleichung dritter Ordnung (13.83) führt auf die im Rahmen der gestörten Zweikörperbewegung allgemeingültige Gleichung

$$
r''' + \alpha^2 r' = -r \left(\alpha^2 \right)' \quad . \tag{13.86}
$$

[1] Die Herleitungen dieser Beziehungen finden sich in den Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 (Band II)

Als Lösung dieser Differentialgleichung wird der Bahnradius *r* als Funktion der regularisierenden Variablen erhalten, wie sie in der Entwicklung (13.50) mit Hilfe der *Stumpff*schen *s*-Funktionen hergeleitet wurde. Die *Stumpff*schen Funktionen können hier formal auch für den Fall der „gestörten“ Zweikörperbewegung mit Bezug auf Anfangswerte $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ übertragen werden:

$$\alpha^2 = \alpha_A^2 = \frac{2\mu}{r_A} - \dot{r}_A^2 - \frac{G_A^2}{r_A^2} - r_A\, b_{R2A} \quad . \tag{13.87}$$

Für den Flächenparameter ergeben sich mit der Variationsgleichung $\dot{G} = r\, b_T$ die folgenden Anfangswerte:

$$\begin{aligned} G_A &= \left|\mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A\right| \\ G_A{}' &= \dot{G}_A\ r_A = r_A^2\, b_{TA} \\ G_A'' &= 2\, r_A\, r_A'\, b_{TA} + r_A^2\, b_{TA}' \quad . \end{aligned} \tag{13.88}$$

Die Beziehungen zwischen den Beschleunigungskomponenten in den beiden verwendeten Systemen sind entsprechend den Definitionen (13.75) (entsprechend auch zu den Anfangswerten)

$$\begin{aligned} b_T &= \frac{G}{rV} b_V \\ b_T' &= \frac{G'}{rV} b_V + \frac{G}{rV} b_V' - \frac{r'G}{r^2 V} b_V - \frac{V'G}{rV^2} b_V \\ b_T'' &= \frac{G''}{rV} b_V + 2\frac{G'}{rV}\, b_V' - 2\frac{r'G'}{r^2 V} b_V - 2\frac{V'G'}{rV^2} b_V + \frac{G}{rV} b_V'' - 2\frac{V'G}{rV^2} b_V' - \\ &\quad - 2\frac{r'G}{r^2 V} b_V' - \frac{r''G}{r^2 V} b_V + 2\frac{(r')^2 G}{r^3 V}\, b_V + 2\,\frac{r'V'\,G}{r^2 V^2} b_V + 2\frac{(V')^2 G}{rV^3} b_V - \frac{V''G}{rV^2} b_V \end{aligned} \tag{13.89}$$

$$\begin{aligned} b_{R2} &= b_{R2V} + \frac{r'}{G} b_T \\ b_{R2}' &= b_{R2V}' + \frac{r''}{G} b_T + \frac{r'}{G} b_T' - \frac{r'G'}{G^2} b_T \\ b_{R2}'' &= b_{R2V}'' + \frac{r'''}{G} b_T + 2\frac{r''}{G} b_T' - 2\frac{r''G'}{G^2} b_T + \frac{r'}{G} b_T'' - \frac{r'G''}{G^2} b_T - 2\frac{r'G'}{G^2} b_T' + 2\frac{r'(G')^2}{G^3} b_T \quad . \end{aligned} \tag{13.90}$$

Die weiteren Anfangswerte können berechnet werden aus:

$$\begin{aligned} r_A &= \left|\mathbf{r}_A\right| \\ r_A' &= \mathbf{r}_A \cdot \dot{\mathbf{r}}_A \\ r_A'' &+ \alpha_A^2\, r_A = \mu \end{aligned} \tag{13.91}$$

$$r_A''' + \alpha_A^2\, r_A' = -r_A \left(\alpha_A^2\right)' \tag{13.92}$$

$$r_A^{IV} + \alpha_A^2\, r'' = -2\, r_A' \left(\alpha_A^2\right)' - r_A \left(\alpha_A^2\right)'' \tag{13.93}$$

$$r_A^V + \alpha_A^2\, r''' = -3r_A''\left(\alpha_A^2\right)' - 3r_A'\left(\alpha_A^2\right)'' - r_A\left(\alpha_A^2\right)''' \quad . \tag{13.94}$$

Die Entwicklung (13.50) führt damit auf die Darstellung des „gestörten“ Bahnradius

$$\begin{aligned} r = r(\tau) = r_A + s_1\, r_A' + s_2\left(r_A\, \dot{\mathbf{r}}_A^2 - \mu\right) + \\ + s_2\, r_A^2\, b_{R2} - s_3\, r_A\left(\alpha_A^2\right)' - s_4\left[2\, r_A'\left(\alpha_A^2\right)' + r_A\left(\alpha_A^2\right)''\right] - \\ - s_5\left[3r_A''\left(\alpha_A^2\right)' + r_A'\left(\alpha_A^2\right)'' - r_A\left(\alpha_A^2\right)'''\right] \quad . \end{aligned} \tag{13.95}$$

Der Bezug zur Zeit wird über die Definitionsgleichung (13.14) mit Hilfe der Differentialbeziehung der *Stumpff*schen Funktionen (13.38) gefunden:

$$\begin{aligned} t = t(\tau) = t_A + r_A\, \tau + s_2\, r_A' + s_3\left(r_A\, \dot{\mathbf{r}}_A^2 - \mu\right) + \\ + s_3\, r_A^2\, b_{R2} - s_4\, r_A\left(\alpha_A^2\right)' - s_5\left[2\, r_A'\left(\alpha_A^2\right)' + r_A\left(\alpha_A^2\right)''\right] - \\ - s_6\left[3r_A''\left(\alpha_A^2\right)' + r_A'\left(\alpha_A^2\right)'' - r_A\left(\alpha_A^2\right)'''\right] \quad . \end{aligned} \tag{13.96}$$

Mit den (erweiterten) *Lagrange*funktionen F_L, G_L, H_L wird nach der Darstellung (13.1) für die Beschleunigungen in Bezug auf die Anfangswerte

$$\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A, \mathbf{c}_A = \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A, r_A = |\mathbf{r}_A|, V_A = |\dot{\mathbf{r}}_A|, G_A = |\mathbf{c}_A| \tag{13.97}$$

erhalten

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{F}_L\, \mathbf{r}_A + \ddot{G}_L\, \dot{\mathbf{r}}_A + \ddot{H}\, \mathbf{c}_A = -\frac{\mu}{r^3}\left[F_L\, \mathbf{r}_A + G_L\, \dot{\mathbf{r}}_A + H_L\, \mathbf{c}_A\right] + P_{AR}\, \mathbf{r}_A + P_{AV}\, \dot{\mathbf{r}}_A + P_{AN}\, \mathbf{c}_A \quad . \tag{13.98}$$

Damit können die Variationsgleichungen für die *Lagrange*schen Funktionen in Bezug auf die Anfangswerte (13.97) formuliert werden:

$$\begin{aligned} \ddot{F}_L + \frac{\mu}{r^3} F_L &= P_{AR} \\ \ddot{G}_L + \frac{\mu}{r^3} G_L &= P_{AV} \\ \ddot{H}_L + \frac{\mu}{r^3} H_L &= P_{AN} \quad . \end{aligned} \tag{13.99}$$

Im Rahmen der *Stumpff*schen Theorie wird wieder die regularisierende Variable τ eingeführt. Die Beschleunigungskomponenten haben mir ihren Variationen die Darstellungen

$$\begin{aligned} P_{AR} &= \frac{1}{r}\left\{b_{R2V}\, F_L + \frac{b_V}{V} F' + \frac{b_N}{G}\left[\left(H_L\, F' - F_L\, H_L'\right) r_A' + \left(G_L\, H_L' - H_L\, G_L'\right) V_A^2\right]\right\} \\ P_{AV} &= \frac{1}{r}\left\{b_{R2V}\, G_L + \frac{b_V}{V} G_L' - \frac{b_N}{G}\left[\left(H_L\, F_L' - F_L\, H_L'\right) r_A^2 + \left(G_L\, H_L' - H_L\, G_L'\right) r_A'\right]\right\} \\ P_{AN} &= \frac{1}{r}\left\{b_{R2V}\, H_L + \frac{b_V}{V} H_L' + \frac{b_N}{G}\left(F_L\, G_L' - G_L\, F_L'\right)\right\} \quad . \end{aligned} \tag{13.100}$$

Diese Beschleunigungskomponenten sind Funktionen der regularisierenden Variablen, sie haben entsprechend die Ableitungen $\left(P'_{AR}, P''_{AR}, P'''_{AR}\right)$ und analog für die beiden anderen Komponenten. Explizit kann etwa die erste Ableitung berechnet werden aus

$$\begin{aligned} P'_{AR} = &-\frac{r'}{r}\left\{ b_{R2V}\, F_L + \frac{b_V}{V} F'_L + \frac{b_N}{G}\left[\left(H_L\, F'_L - F_L\, H'_L\right) r'_A + \left(G_L\, H'_L - H_L\, G'_L\right) V_A^2 \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{r}\left\{ b'_{R2V}\, F_L + b_{R2vV}\, F'_L + \frac{b'_V}{V} F'_L - \frac{b_V\, V'}{V^2} F'_L + \frac{b_V}{V} F''_L + \right. \\ &\quad + \left(\frac{b'_N}{G} - \frac{b_N\, G'}{G^2} \right)\left[\left(H_L\, F'_L - F_L\, H'_L\right) r'_A + \left(G_L\, H'_L - H_L\, G'_L\right) V_A^2 \right] + \\ &\quad \left. + \frac{b_N}{G}\left[\left(H_L\, F''_L - F_L\, H''_L\right) r'_A + \left(G_L\, H''_L - H_L\, G''_L\right) V_A^2 \right] \right. \quad . \end{aligned} \tag{13.101}$$

Im Einzelnen ergeben sich dann die Variationsgleichungen der *Lagrange*schen F_{L}-Funktion:

$$\begin{aligned} \dot{F}_L &= \frac{F'_L}{r} \\ \ddot{F}_L &= \frac{F''_L}{r^2} - \frac{F'_L\, r'}{r^3} = -\frac{\mu}{r^3} F_L + P_{AR} \\ \dddot{F}_L &= \frac{F'''_L}{r^3} - 3\frac{F''_L\, r'}{r^4} - \frac{F'_L\, r''}{r^4} + 3\frac{F'_L\, r'^2}{r^5} = -\mu\frac{F'_L}{r^4} + 3\mu\frac{F_L\, r'}{r^5} + \frac{P'_{AR}}{r} \quad . \end{aligned} \tag{13.102}$$

Mit diesen Ausdrücken, mit der ersten der Variationsgleichungen (13.99) sowie der Energiekonstanten (13.84) folgen in Abhängigkeit von der regularisierenden Variablen die Variationsgleichungen, die nach Differentiation auf den Anfangswert bezogen werden,

$$\begin{aligned} F'_{LA} &= r_A\, \dot{F}_{LA} \\ F''_{LA} &= -\frac{\mu\, F_L - r'_A\, F'_{LA}}{r_A} + r_A^2\, P_{ARA} \\ F'''_{LA} + \alpha_A^2\, F'_{LA} &= 3 r_A\, r'_A\, P_{ARA} + r_A^2\, P'_{ARA} \\ F^{IV}_{LA} + \alpha_A^2\, F''_{LA} &= 3\left(r'_A\right)^2 P_{ARA} + 3 r_A\, r''_A\, P_{ARA} + 5 r_A\, r'_A\, P'_{ARA} + r_A^2\, P''_{ARA} - \left(\alpha_A^2\right)' F'_{LA} \\ F^{V}_{LA} + \alpha_A^2\, F'''_{LA} &= 9 r'_A\, r''_A P_{ARA} + 8\left(r'_A\right)^2 P'_{ARA} + 3 r_A\, r'''_A P_{ARA} + 8 r_A\, r''_A\, P'_{ARA} + \\ &\quad + 7\, r_A\, r'_A\, P''_{ARA} + r_A^2\, P'''_{ARA} - \left(\alpha_A^2\right)'' F'_{LA} - 2\left(\alpha_A^2\right)' F''_{LA} \quad . \end{aligned} \tag{13.103}$$

Die Taylorentwicklung um den Anfangswert an der Stelle $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ mit $\tau = \tau_A$

$$F_L = F_L(\tau) = F_{LA} + \frac{F'_{LA}}{1!}\tau + \frac{F''_{LA}}{2!}\tau^2 + \frac{F'''_{LA}}{3!}\tau^3 + \frac{F^{IV}_{LA}}{4!}\tau^4 + \frac{F^{V}_{LA}}{5!}\tau^5 + \cdots \tag{13.104}$$

lautet mit der Rekursionsformel (13.37) der *Stumpff*schen *s*-Funktionen

$$\begin{aligned} F_L = F_L(\tau) = F_{LA} &+ F'_{LA}\left(s_1 + \alpha_A^2\, s_3\right) + F''_{LA}\left(s_2 + \alpha_A^2\, s_4\right) + \\ &+ F'''_{LA}\left(s_3 + \alpha_A^2\, s_5\right) + F^{IV}_{LA}\left(s_4 + \alpha_A^2\, s_6\right) + F^{V}_{LA}\left(s_5 + \alpha_A^2\, s_7\right) + \cdots \quad , \end{aligned} \tag{13.105}$$

wobei die auf den Anfangswert $\tau = 0$ bezogene Energiekonstante α_A^2 entsprechend Beziehung (13.84) die radiale (Stör-) Beschleunigung b_{R2VA} im Moment des Anfangswertes enthält. Umordnung ergibt

$$\begin{aligned} F_L = F_L(\tau) = F_{LA} + s_1 F'_{LA} + s_2 F''_{LA} + \\ + s_3\left(F'''_{LA} + \alpha_A^2 F'_{LA}\right) + s_4\left(F^{IV}_{LA} + \alpha_A^2 F''_{LA}\right) + s_5\left(F^{V}_{LA} + \alpha_A^2 F'''_{LA}\right) + \cdots . \end{aligned} \tag{13.106}$$

Im Anfangswert wirken sich die Störbeschleunigungen nicht auf die *Lagrange*schen Funktionen aus. Wie in den Zuordnungen (13.65) lauten daher die Anfangswerte

$$\begin{aligned} F_{LA} &= F_L(t = t_A) = F_L(\tau = \tau_A) = 1 \\ F'_{LA} &= F'_L(t = t_A) = F'_L(\tau = \tau_A) = 0 \quad . \end{aligned} \tag{13.107}$$

Erst in der zweiten Ableitung wirken sich die "Störbeschleunigungen" aus:

$$F''_{LA} = -\frac{\mu}{r_A} + r_A{}^2 P_{ARA} \quad . \tag{13.108}$$

Mit diesen Werten lautet die Entwicklung der F_L-Funktion:

$$\begin{aligned} F_L = 1 - s_2 \frac{\mu}{r_A} + s_2 r_A{}^2 P_{ARA} + s_3\left(3 r_A r'_A P_{ARA} + r_A^2 P'_{ARA}\right) + \\ + s_4\left(3(r'_A)^2 P_{ARA} + 3 r_A r''_A P_{ARA} + 5 r_A r'_A P'_{ARA} + r_A^2 P''_{ARA}\right) + \\ + s_5\left\{\begin{array}{l} 9 r'_A r''_A P_{ARA} + 8(r'_A)^2 P'_{ARA} + 3 r_A r'''_A P_{ARA} + 8 r_A r''_A P'_{ARA} + \\ \quad + 7 r_A r'_A P''_{ARA} + r_A^2 P'''_{ARA} - 2\left(\alpha_A^2\right)'\left[-\frac{\mu}{r_A} + r_A^2 P_{ARA}\right] \end{array}\right\} + \cdots . \end{aligned} \tag{13.109}$$

Zur Berechnung des Geschwindigkeitsvektors fehlt noch die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit. Diese wird mit dem Radius r aus der Entwicklung (13.95) und mit Hilfe der Differentialformel (13.38) erhalten aus

$$\begin{aligned} r\dot{F}_L = F'_L = -s_1 \frac{\mu}{r_A} + s_1 r_A{}^2 P_{ARA} + s_2\left(3 r_A r'_A P_{ARA} + r_A^2 P'_{ARA}\right) + \\ + s_3\left(3(r'_A)^2 P_{ARA} + 3 r_A r''_A P_{ARA} + 5 r_A r'_A P'_{ARA} + r_A^2 P''_{ARA}\right) + \\ + s_4\left\{\begin{array}{l} 9 r'_A r''_A P_{ARA} + 8(r'_A)^2 P'_{ARA} + 3 r_A r'''_A P_{ARA} + 8 r_A r''_A P'_{ARA} + \\ \quad + 7 r_A r'_A P''_{ARA} + r_A^2 P'''_{ARA} - 2\left(\alpha_A^2\right)'\left[-\frac{\mu}{r_A} + r_A^2 P_{ARA}\right] \end{array}\right\} + \cdots . \end{aligned} \tag{13.110}$$

Entsprechend dieser Herleitung wird mit der zweiten der Variationsgleichungen (13.99)

$$\begin{aligned} \dot{G}_L &= \frac{G'_L}{r} \\ \ddot{G}_L &= \frac{G''_L}{r^2} - \frac{G'_L r'}{r^3} = -\frac{\mu}{r^3} G_L + P_{AV} \\ \dddot{G}_L &= \frac{G'''_L}{r^3} - 3\frac{G''_L r'}{r^4} - \frac{G'_L r''}{r^4} + 3\frac{G'_L r'^2}{r^5} = -\mu\frac{G'_L}{r^4} + 3\mu\frac{G_L r'}{r^5} + \frac{P'_{AV}}{r_A} \quad . \end{aligned} \tag{13.111}$$

und somit nach den entsprechenden Differentiationen und Anwendung auf den Anfangswert

$$
\begin{aligned}
G'_{LA} &= r_A \dot{G}_{LA} \\
G''_{LA} &= -\frac{\mu G_{LA} - r'_A G'_{LA}}{r_A} + r_A^2 P_{AVA} \\
G'''_{LA} + \alpha_A^2 G'_{LA} &= 3 r_A r'_A P_{AVA} + r_A^2 P'_{AVA} \\
G^{IV}_{LA} + \alpha_A^2 G''_{LA} &= 3\left(r'_A\right)^2 P_{AVA} + 3 r_A r''_A P_{AVA} + 5 r_A r'_A P'_{AVA} + r_A^2 P''_{AVA} - \left(\alpha_A^2\right)' G'_{LA} \\
G^{V}_{LA} + \alpha_A^2 G'''_{LA} &= 9 r'_A r''_A P_{AVA} + 8\left(r'_A\right)^2 P'_{AVA} + 3 r_A r'''_A P_{AVA} + 8 r_A r''_A P'_{AVA} + \\
&\quad + 7\, r_A r'_A P''_{AVA} + r_A^2 P'''_{AVA} - \left(\alpha_A^2\right)'' G'_{LA} - 2\left(\alpha_A^2\right)' G''_{LA} \quad .
\end{aligned}
\tag{13.112}
$$

Die Taylorentwicklung um den Anfangswert an der Stelle $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ mit $\tau = \tau_A$

$$
G_L = G_L(\tau) = G_{LA} + \frac{G'_{LA}}{1!}\tau + \frac{G''_{LA}}{2!}\tau^2 + \frac{G'''_{LA}}{3!}\tau^3 + \frac{G^{IV}_{LA}}{4!}\tau^4 + \frac{G^{V}_{LA}}{5!}\tau^5 + \cdots \tag{13.113}
$$

lautet mit der Rekursionsformel (13.37) der *Stumpff*schen *s*-Funktionen

$$
\begin{aligned}
G_L = G_L(\tau) = G_{LA} &+ G'_{LA}\left(s_1 + \alpha_A^2 s_3\right) + G''_{LA}\left(s_2 + \alpha_A^2 s_4\right) + \\
&+ G'''_{LA}\left(s_3 + \alpha_A^2 s_5\right) + G^{IV}_{LA}\left(s_4 + \alpha_A^2 s_6\right) + G^{V}_{LA}\left(s_5 + \alpha_A^2 s_7\right) + \cdots \quad ,
\end{aligned}
\tag{13.114}
$$

wobei die auf den Anfangswert $\tau = \tau_A$ bezogene Energiekonstante α_A^2 entsprechend Beziehung (13.84) wieder die radiale (Stör-) Beschleunigung b_{R2VA} im Moment des Anfangswertes enthält. Umordnung ergibt

$$
\begin{aligned}
G_L = G_L(\tau) = G_{LA} &+ s_1 G'_{LA} + s_2 G''_{LA} + \\
&+ s_3\left(G'''_{LA} + \alpha_A^2 G'_{LA}\right) + s_4\left(G^{IV}_{LA} + \alpha_A^2 G'_{LA}\right) + s_5\left(G^{V}_{LA} + \alpha_A^2 G'''_{LA}\right) + \cdots \quad .
\end{aligned}
\tag{13.115}
$$

Im Anfangswert wirken sich die Störbeschleunigungen nicht auf die *Lagrange*schen Funktionen aus. Wie in den Zuordnungen (13.65) lauten daher die Anfangswerte

$$
\begin{aligned}
G_{LA} &= G_L\left(t = t_A\right) = G_L\left(\tau = \tau_A\right) = 0 \\
G'_{LA} &= G'_L\left(t = t_A\right) = G'_L\left(\tau = \tau_A\right) = r_A \quad .
\end{aligned}
\tag{13.116}
$$

Erst in der zweiten Ableitung wirken sich die "Störbeschleunigungen" aus:

$$
G''_{LA} = r'_A + r_A{}^2 P_{AVA} \quad . \tag{13.117}
$$

Mit diesen Werten lautet die Entwicklung der G_L-Funktion:

$$
\begin{aligned}
G_L = {} & s_1 r_A + s_2 r'_A + s_2 r_A{}^2 P_{AVA} + s_3\left(3 r_A r'_A P_{AVA} + r_A^2 P'_{AVA}\right) + \\
& + s_4\left(3\left(r'_A\right)^2 P_{AVA} + 3 r_A r''_A P_{AVA} + 5 r_A r'_A P'_{AVA} + r_A^2 P''_{AVA} - \left(\alpha_A^2\right)' r'_A\right) + \\
& + s_5\left\{\begin{array}{l} 9 r'_A r''_A P_{AVA} + 8\left(r'_A\right)^2 P'_{AVA} + 3 r_A r'''_A P_{AVA} + 8 r_A r''_A P'_{AVA} + \\ \quad + 7\, r_A r'_A P''_{AVA} + r_A^2 P'''_{AVA} - \left(\alpha_A^2\right)'' r'_A - 2\left(\alpha_A^2\right)'\left[r'_A + r_A^2 P_{AVA}\right] \end{array}\right\} + \cdots \quad .
\end{aligned}
\tag{13.118}
$$

Die Ableitung dieser Funktion nach der Zeit ergibt sich aus

$$
\begin{aligned}
r\,\dot{G}_L = G'_L = s_0\, r_A + s_1\, r'_A + s_1\, {r_A}^2\, P_{AVA} + s_2\left(3 r_A\, r'_A\, P_{AVA} + r_A^2\, P'_{AVA}\right) + \\
+ s_3\left(3\left(r'_A\right)^2 P_{AVA} + 3 r_A\, r''_A\, P_{AVA} + 5 r_A\, r'_A\, P'_{AVA} + r_A^2\, P''_{AVA} - \left(\alpha_A^2\right)' r'_A\right) + \\
+ s_4\left\{\begin{array}{l} 9 r'_A\, r''_A P_{AVA} + 8\left(r'_A\right)^2 P'_{AVA} + 3 r_A\, r'''_A P_{AVA} + 8 r_A\, r''_A\, P'_{AVA} + \\ \quad + 7\, r_A\, r'_A\, P''_{AVA} + r_A^2\, P'''_{AVA} - \left(\alpha_A^2\right)'' r'_A - 2\left(\alpha_A^2\right)'\left[r'_A + r_A^2\, P_{AVA}\right] \end{array}\right\} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{13.119}
$$

In analoger Weise wird mit der dritten der Variationsgleichungen (13.99) die räumliche ausschließlich von den Störungen des Zweikörperproblems abhängenden Bewegungskomponente behandelt (um die Unterschiede in der drei Komponenten nicht zu verwischen, werden alle drei Komponenten vollständig bearbeitet):

$$
\begin{aligned}
\dot{H}_L &= \frac{H'_L}{r} \\
\ddot{H}_L &= \frac{H''_L}{r^2} - \frac{H'_L\, r'}{r^3} = -\frac{\mu}{r^3} H_L + P_{AN} \\
\dddot{H}_L &= \frac{H'''_L}{r^3} - 3\frac{H''_L\, r'}{r^4} - \frac{H'_L\, r''}{r^4} + 3\frac{H'_L\, r'^2}{r^5} = -\mu\frac{H'_L}{r^4} + 3\mu\frac{H_L\, r'}{r^5} + \frac{P'_{AN}}{r_A} \quad .
\end{aligned}
\tag{13.120}
$$

Nach den entsprechenden Differentiationen und Anwendung auf den Anfangswert ergeben sich die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
H'_{LA} &= r_A\, \dot{H}_{LA} \\
H''_{LA} &= -\frac{\mu\, H_{LA} - r'_A\, H'_{LA}}{r_A} + r_A^2\, P_{ANA} \\
H'''_{LA} + \alpha_A^2\, H'_{LA} &= 3 r_A\, r'_A\, P_{ANA} + r_A^2\, P'_{ANA} \\
H^{IV}_{LA} + \alpha_A^2\, H''_{LA} &= 3\left(r'_A\right)^2 P_{ANA} + 3 r_A\, r''_A\, P_{ANA} + 5 r_A\, r'_A\, P'_{ANA} + r_A^2\, P''_{ANA} - \left(\alpha_A^2\right)' H'_{LA} \\
H^{V}_{LA} + \alpha_A^2\, H'''_{LA} &= 9 r'_A\, r''_A P_{ANA} + 8\left(r'_A\right)^2 P'_{ANA} + 3 r_A\, r'''_A P_{ANA} + 8 r_A\, r''_A\, P'_{ANA} + \\
&\quad + 7\, r_A\, r'_A\, P''_{ANA} + r_A^2\, P'''_{ANA} - \left(\alpha_A^2\right)'' H'_{LA} - 2\left(\alpha_A^2\right)' H''_{LA} \quad .
\end{aligned}
\tag{13.121}
$$

Die Taylorentwicklung um den Anfangswert an der Stelle $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ mit $\tau = \tau_A$

$$
H_L = H_L(\tau) = H_{LA} + \frac{H'_{LA}}{1!}\tau + \frac{H''_{LA}}{2!}\tau^2 + \frac{H'''_{LA}}{3!}\tau^3 + \frac{H^{IV}_{LA}}{4!}\tau^4 + \frac{H^{V}_{LA}}{5!}\tau^5 + \cdots \tag{13.122}
$$

lautet mit der Rekursionsformel (13.37) der *Stumpff*schen *s*-Funktionen

$$
\begin{aligned}
H_L = H_L(\tau) = H_{LA} &+ H'_{LA}\left(s_1 + \alpha_A^2\, s_3\right) + H''_{LA}\left(s_2 + \alpha_A^2\, s_4\right) + \\
&+ H'''_{LA}\left(s_3 + \alpha_A^2\, s_5\right) + H^{IV}_{LA}\left(s_4 + \alpha_A^2\, s_6\right) + H^{V}_{LA}\left(s_5 + \alpha_A^2\, s_7\right) + \cdots \quad ,
\end{aligned}
\tag{13.123}
$$

wobei die auf den Anfangswert $\tau = \tau_A$ bezogene Energiekonstante α_A^2 entsprechend Beziehung (13.84) wieder die radiale (Stör-) Beschleunigung b_{R2VA} im Moment des Anfangswertes enthält. Umordnung ergibt

$$
\begin{aligned}
H_L = H_L(\tau) = H_{LA} &+ s_1 H'_{LA} + s_2 H''_{LA} + \\
&+ s_3\left(H'''_{LA} + \alpha_A^2 H'_{LA}\right) + s_4\left(H^{IV}_{LA} + \alpha_A^2 H'_{LA}\right) + s_5\left(H^{V}_{LA} + \alpha_A^2 H'''_{LA}\right) + \cdots .
\end{aligned}
\tag{13.124}
$$

Im Anfangswert wirken sich die Störbeschleunigungen nicht auf die *Lagrange*schen Funktionen aus. Die Anfangswerte lauten im Fall der räumlichen Komponente

$$
\begin{aligned}
H_{LA} &= H_L(t = t_A) = H_L(\tau = \tau_A) = 0 \\
H'_{LA} &= H'_L(t = t_A) = H'_L(\tau = \tau_A) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{13.125)I}
$$

In der zweiten Ableitung müssen sich die "Störbeschleunigungen" auswirken:

$$
H''_{LA} = r_A{}^2 P_{ANA} \quad . \tag{13.126}
$$

Mit diesen Werten lautet die Entwicklung der H_L-Funktion:

$$
\begin{aligned}
H_L = \; & s_2 r_A{}^2 P_{ANA} + s_3\left(3 r_A r'_A P_{ANA} + r_A^2 P'_{ANA}\right) + \\
& + s_4\left(3\left(r'_A\right)^2 P_{ANA} + 3 r_A r''_A P_{ANA} + 5 r_A r'_A P'_{ANA} + r_A^2 P''_{ANA}\right) + \\
& + s_5\left\{\begin{array}{l} 9 r'_A r''_A P_{ANA} + 8\left(r'_A\right)^2 P'_{ANA} + 3 r_A r'''_A P_{ANA} + 8 r_A r''_A P'_{ANA} + \\ \quad + 7\, r_A r'_A P''_{ANA} + r_A^2 P'''_{ANA} - 2\left(\alpha_A^2\right)' r_A^2 P_{ANA} \end{array}\right\} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{13.127}
$$

Die Variation in der Zeit ergibt sich aus

$$
\begin{aligned}
r\dot{H}_L = H'_L = \; & s_1 r_A{}^2 P_{ANA} + s_2\left(3 r_A r'_A P_{ANA} + r_A^2 P'_{ANA}\right) + \\
& + s_3\left(3\left(r'_A\right)^2 P_{ANA} + 3 r_A r''_A P_{ANA} + 5 r_A r'_A P'_{ANA} + r_A^2 P''_{ANA}\right) + \\
& + s_4\left\{\begin{array}{l} 9 r'_A r''_A P_{ANA} + 8\left(r'_A\right)^2 P'_{ANA} + 3 r_A r'''_A P_{ANA} + 8 r_A r''_A P'_{ANA} + \\ \quad + 7\, r_A r'_A P''_{ANA} + r_A^2 P'''_{ANA} - 2\left(\alpha_A^2\right)' r_A^2 P_{ANA} \end{array}\right\} + \cdots .
\end{aligned}
\tag{13.128}
$$

Damit ist zu jedem Zeitpunkt *t* mit Hilfe der Zeitbeziehung (13.96) der oskulierende Zustandsvektor entsprechend der Zerlegung (13.1) aus den Anfangswerten $\left(\mathbf{r}_A, \dot{\mathbf{r}}_A\right)$ berechenbar:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= F_L \mathbf{r}_A + G_L \dot{\mathbf{r}}_A + H_L \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A \\
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{F}_L \mathbf{r}_A + \dot{G}_L \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{H}_L \mathbf{r}_A \times \dot{\mathbf{r}}_A \quad .
\end{aligned}
\tag{13.129}
$$

Kritische Anmerkungen: Die in diesem Kapitel referierte Methodik ist aus der ungestörten Zweikörperbewegung entwickelt und auf diese auch ohne Einschränkung anwendbar. Im Fall der gestörten Zweikörperbewegung ist diese Methodik nur mit eingeschränkter Genauigkeit einsetzbar. Dies liegt an der eingeschränkten Verwendung der Störbeschleunigungen. Der radiale Anteil des Störvektors wird zwar in der Berechnung der *Stumpff*schen Funktionen berücksichtigt, nicht aber in der fortlaufenden Berechnung der Ephemeriden, wie auch der tangentiale und der normale Anteil. Diese kommen nur im Anfangswert $t = t_A$ zum Tragen, wie die gestörten *Lagrange*schen Funktionen $\left(H_L, G_L, H_L\right)$ und ihre Variationen in der Zeit erkennen lassen. Im Verlauf einer Ephemeride wird eine Veränderung in den Störbeschleunigungen nicht berücksichtigt. *Zadunaisky* schlägt daher vor, die Ephemeridenrechnung zu stückeln und den Anfangswert nach einem gewissen Zeitraum neu zu setzen mit Berücksichtigung der inzwischen geänderten Störbeschleunigungen. Die

Schrittweite für einen solchen Neuanfang wird einerseits bestimmt durch die Genauigkeitsanforderungen an die Ephemeride, andererseits an die Größe der Variationen in den Störbeschleunigungen. Damit können im Rahmen einer gewissen Genauigkeit die Vorteile der universalen Parameter, nämlich eine vereinfachte und rasche Ephemeridenrechnung, gewahrt bleiben. Ein voller Ersatz einer numerischen hochgenauen Integration eines Bewegungsproblems kann dadurch nicht erreicht werden. Ein solcher wird in vielen Anwendungen aber auch nicht benötigt.

14 Parameterräume

Parameterräume sind mathematische Räume, die keine physikalische Entsprechung haben, die jedoch physikalische Vorgänge beschreiben und nachhaltig erfassen können. Die Verwechslung bzw. mangelhafte Unterscheidung mathematischer und physikalischer Räume hat in der Geschichte der Naturwissenschaften nicht immer zu fruchtbaren Folgerungen, sondern vielmehr zu unglaublichen Verwirrungen geführt, bis zum heutigen Tag. In diesem Kapitel werden daher einige mathematische Parameterräume als wichtige Beispiele für Anwendungen in Physik und Raumfahrt überblickmäßig zusammengestellt.

14.1 Parameterraum der elliptischen Keplerbewegung

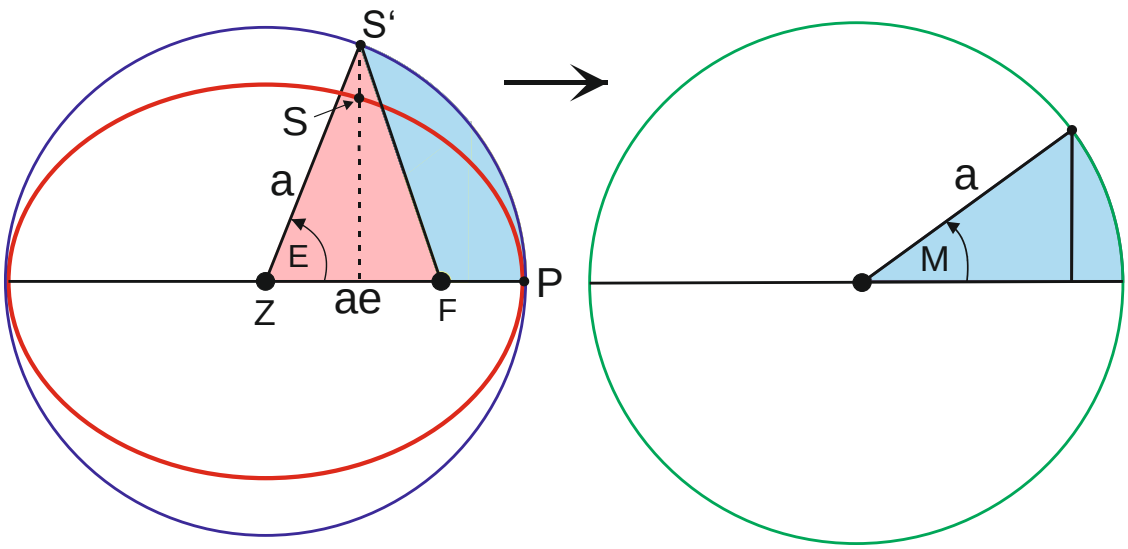


Bild 14-1: Parameterräume der elliptischen Bewegung: linkes Bild, die „wahre“ physikalische Bahn (rote Ellipse), die mathematische Zuordnung auf dem Umkreis, rechtes Bild: der über die *Kepler*-Gleichung zugeordnete mathematische Parameterraum der gleichförmigen Kreisbewegung (vgl. Bild 2-7 in Band I) (a – große Bahnhalbachse und Radius des Umkreises, e – numerische Exzentrizität, Z – Mittelpunkt der Bahnellipse, F – Brennpunkt mit Ort des Zentralkörpers, P – Perizentrum, S – Ort des Himmelskörpers auf Bahnellipse, S‘ – Projektion des Himmelskörpers auf Umkreis, M – mittlere Anomalie im Parameterkreis)

Historisch gesehen waren alle Darstellungen der Bewegungen der Himmelskörper Darstellungen in mathematischen Parameterräumen und nicht von physikalisch „richtigen“ Verhältnissen. Bemühungen in der Antike nach einer physikalischen Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper schlugen fehl[1], was im Wesentlichen auf die nicht ausreichende Beobachtungsgenauigkeit zurückgeführt werden kann. *J. Kepler* hatte die Suche nach der physikalisch richtigen Beschreibung dadurch revolutioniert, dass er die auf der Erde geltende Physik auf alle Vorgänge „am Himmel“ zu übertragen versuchte. Das war bis dahin ein Tabu, denn die

[1] Siehe hierzu etwa den Versuch des *Ptolemäus* in Buch I,2 seiner Planetenhypothesen (Abschnitt 1.7.8, Band I), sowie die Überlegungen der Marāgha Schule, Abschnitt 1.8.5 (Band I)

himmlische Physik wurde durch die Quinta Essentia des *Aristoteles* erklärt. *Kepler* hatte die „physikalisch richtige“ elliptische Bahnform der Planeten entdeckt, deren physikalische Begründung er auch vermutete, die aber erst durch *I. Newton* in der Annahme des Gravitationsgesetzes gefunden worden war. Interessanterweise blieb *Kepler* in der mathematischen Beschreibung der Planetenbewegung ausschließlich in der Darstellungsweise mathematischer Parameterräume. Er verwendete als Bahnparameter nicht die wahre Anomalie, die als „natürlicher“ Parameter der elliptischen Bewegung zugeordnet werden kann, sondern die exzentrische Anomalie, die durch Projektion der Ellipse auf den Umkreis definiert werden kann: S sei der Ort des Himmelskörpers auf der Ellipse, S‘ der Ort der Projektion auf den Umkreis (die Umrechnung von der wahren Anomalie υ auf die exzentrische Anomalie E geschieht mit den *Kepler* Formeln (10.24), siehe in Abschnitt10.1.3). Die mittlere Anomalie, die in der antiken Darstellung geometrisch aus einer Epizykel- bzw. Exzenterdarstellung abgelesen werden kann, ist jetzt auf Grund der transzendenten *Kepler*gleichung nicht mehr geometrisch (also „mit Zirkel und Lineal“) übertragbar. Vielmehr kann sie nur noch in einem mathematischen Parameterraum dargestellt werden. Dieser ist als ein Kreis eine extrem einfache Figur, aber die Zuordnung zur „wahren“ Bewegung ist rein algebraisch, nicht geometrisch.

Die Zuordnung geschieht nach Bild 14-1 über das Kreissegment ZPS‘ mit Flächeninhalt $F_1 = a^2\, E/2$ und das Dreieck ZFS‘ mit Flächeninhalt $F_2 = 0.5 a^2\, e \sin E$, während im Parameterraum das entsprechende Kreissegment die Fläche $F = a^2\, M/2$ hat: die blaue Fläche im Bild links entspricht also der blauen Fläche im Bild rechts. Aus der Bedingung $F = F_1 - F_2$ folgt bekanntlich die *Kepler* Gleichung[1]

$$M = E - e \sin E \quad . \tag{14.1}$$

BEISPIEL: Die Skizzen in Bild 14-1 wurden mit folgenden Zahlenwerten gerechnet: a = 7.5 cm, e = 0.665, E = 70°, M = 34°.

14.2 Parameterräume der Bahnparameter

Die von *L. Euler* in die Himmelsmechanik eingeführten *Kepler*elemente beziehen sich auf die geometrische Beschreibung einer Bewegung und sind somit der physikalischen Realität angepasst bzw. entnommen[2]. Die von *J. L. Lagrange* zur Vermeidung der Unbestimmtheiten, welche die *Kepler*elemente aufweisen können, eingeführten *Lagrange*elemente können als eine Projektion der *Kepler*elemente in den Parameterraum der *Lagrange*elemente bzw. entsprechender äquatorialer Elemente aufgefasst werden. Eine physikalische Entsprechung der Elemente (etwa in der Form der regulären Elemente[3])

$$\begin{aligned} E_2 &= e \sin(\omega + \Omega) \;,\; E_3 = e \cos(\omega + \Omega) \\ E_4 &= \sin\frac{i}{2} \sin\,\Omega \quad ,\; E_5 = \sin\frac{i}{2} \cos\Omega \end{aligned} \tag{14.2}$$

gibt es nicht. Wesentliche Eigenschaften der Bahnbewegung der Himmelskörper können mit derartigen Parametern häufig besser, zuverlässiger und auch übersichtlicher berechnet und auch

[1] Die in Abschnitt 2.2.2 referierte originale Herleitung *Keplers* bezieht sich auf das Apozentrum der elliptischen Bahn, während hier der übliche Bezug auf das Perizentrum P verwendet wird

[2] Siehe hierzu auch in Abschnitt 2.6.1 (Band I)

[3] Siehe etwa in Abschnitt 11.4.1

graphisch untersucht werden. Beispiele dazu finden sich in M. C. ECKSTEIN [1980] und in Kapitel 23 (Band IV). Hier können etwa Kurven in einem ebenen Parameterraum E_3 über E_2 („Exzentrizitätsvektoren“) wesentliche Aussagen über das Bahnverhalten ermöglichen.

14.3 Hodograph

Als Hodograph wird eine ebene Kurve bezeichnet, die vom Endpunkt eines Geschwindigkeitsvektors beschrieben wird, wobei der Anfangspunkt des Geschwindigkeitsvektors im Ursprung des betreffenden Koordinatensystems angenommen wird.

Im *Leibniz*-System hat der Geschwindigkeitsvektor die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 \quad . \tag{14.3}$$

In diesem System ist die Darstellung eines Hodographen nicht möglich, da das System mitbewegt ist. Dagegen ist das bahnfeste *Hansen*-System geeignet, eine solche Darstellung zu ermöglichen. Dazu wird mit dem *Hansen*schen Bahnwinkel ζ der Geschwindigkeitsvektor allgemein dargestellt[1]:

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\dot{r}\cos\zeta - \frac{G}{r}\sin\zeta\right)\mathbf{q}_1^{(I)} + \left(\dot{r}\sin\zeta + \frac{G}{r}\cos\zeta\right)\mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{14.4}$$

14.3.1 Der Hodograph eines Kegelschnitts

Als ein instruktives Beispiel werde der Hodograph einer *Kepler*bewegung vorgestellt[2]. In diesem Fall ist der *Hansen*sche Bahnwinkel der wahren Anomalie gleich: $\zeta \triangleq \upsilon$, und das *Hansen*-System stimmt mit dem Apsidensystem überein. Mit den Ausdrücken[3]

$$\dot{r} = \frac{eG\sin\upsilon}{p} \;\;,\;\; r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon} \tag{14.5}$$

wird

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{G}{p}\left[\left(-\sin\upsilon\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \cos\upsilon\,\mathbf{q}_2^{(I)}\right) + e\,\mathbf{q}_2^{(I)}\right] \quad . \tag{14.6}$$

Da der transversale Richtungsvektor im *Hansen*-System[4]

$$\mathbf{q}_0 = -\sin\upsilon\;\mathbf{q}_1^{(I)} + \cos\upsilon\,\mathbf{q}_2^{(I)} \tag{14.7}$$

lautet, bleibt für den Geschwindigkeitsvektor die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{G}{p}\mathbf{q}_0 + e\frac{G}{p}\mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{14.8}$$

---

[1] Siehe etwa in Abschnitt 4.4.3 (Band II)

[2] Nach K. STUMPFF [1959], pp. 101-104, 49 ff.; s.a. R. H. BATTIN [1987], pp. 126-128 und pp. 531-536

[3] vgl. etwa die Formeln (2.73) und (2.82) in Abschnitt 2.5.2 (Band I)

[4] Siehe etwa Formel (4.312) (Band II)

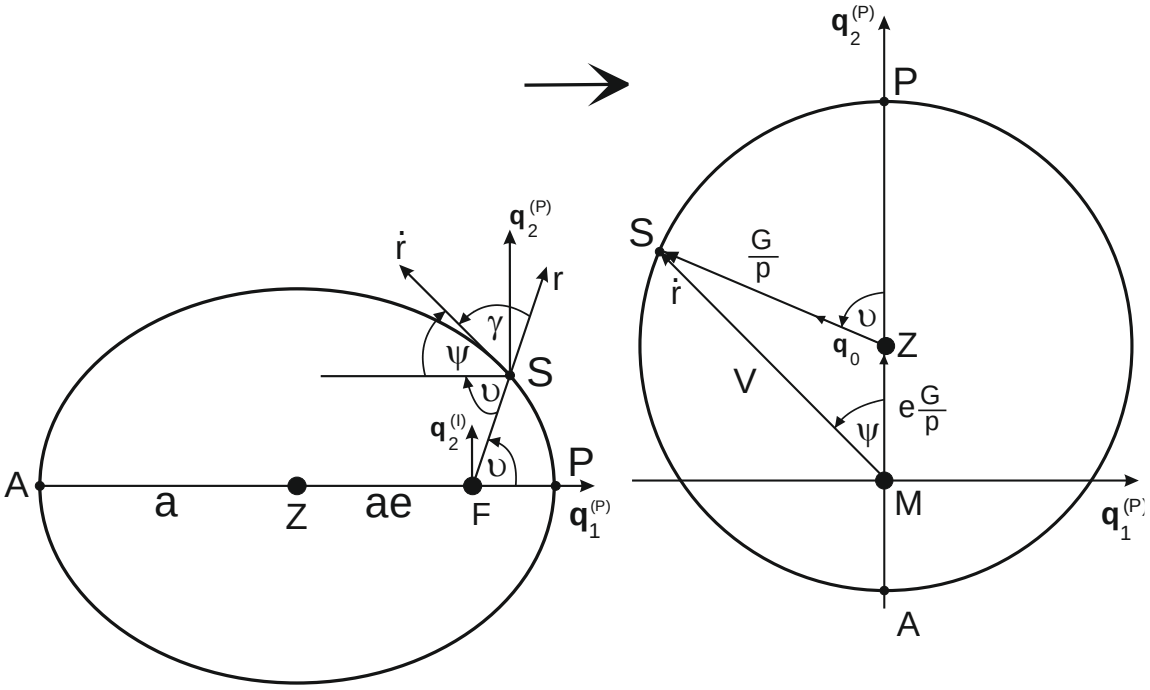


Bild 14-2: linkes Bild: „physikalische“ elliptische Bewegung: rechtes Bild: Hodograph der elliptischen Bewegung: P – Perizentrum, A - Apozentrum

Da im Fall einer *Kepler*bewegung die Parameter *G*, *p* und *e* konstante Größen sind, ist der Hodograph einer (ungestörten) *Kepler*bewegung ein Kreis mit Mittelpunkt $Z\left(0, eG/p\right)$ und Radius G/p.

Bemerkenswert ist die Anordnung der Apsidenlinie, also der Verbindungslinie durch Perizentrum P und Apozentrum A, in einem Hodographen: sie ist gegenüber der „physikalischen“ Apsidenlinie, die mit der Richtung der $\mathbf{q}_1^{(P)}$ – Achse zusammenfällt, um 90° in Bewegungsrichtung gedreht und fällt mit der $\mathbf{q}_2^{(P)}$ – Achse zusammen. Der transversale Richtungsvektor $\mathbf{q}_0$ der Bewegung schließt mit der $\mathbf{q}_2^{(P)}$ – Achse die wahre Anomalie υ ein. Der Geschwindigkeitsvektor schließt mit der $\mathbf{q}_2^{(P)}$ – Achse den Winkel ψ ein. Es besteht der Zusammenhang (siehe etwa Bild 14-2)

$$\begin{aligned} \cos\upsilon &= \frac{pV}{G}\cos\psi - e \quad , \quad \cos\psi = \frac{G}{pV}\left(e+\cos\upsilon\right) \\ \sin\upsilon &= -\frac{pV}{G}\sin\psi \quad , \quad \sin\psi = -\frac{G}{pV}\sin\upsilon \quad . \end{aligned} \tag{14.9}$$

Der Geschwindigkeitsvektor schließt mit dem Ortsvektor den Zwischenwinkel („Flugrichtungswinkel“)

$$\gamma = 180° - \left(\upsilon + \psi\right) \tag{14.10}$$

ein, es gilt somit

$$\cos\gamma = -\frac{G}{rV} = e\cos\psi - \frac{pV}{G} \quad , \quad \sin\gamma = -e\sin\psi = e\frac{G}{pV}\sin\upsilon \quad . \tag{14.11}$$

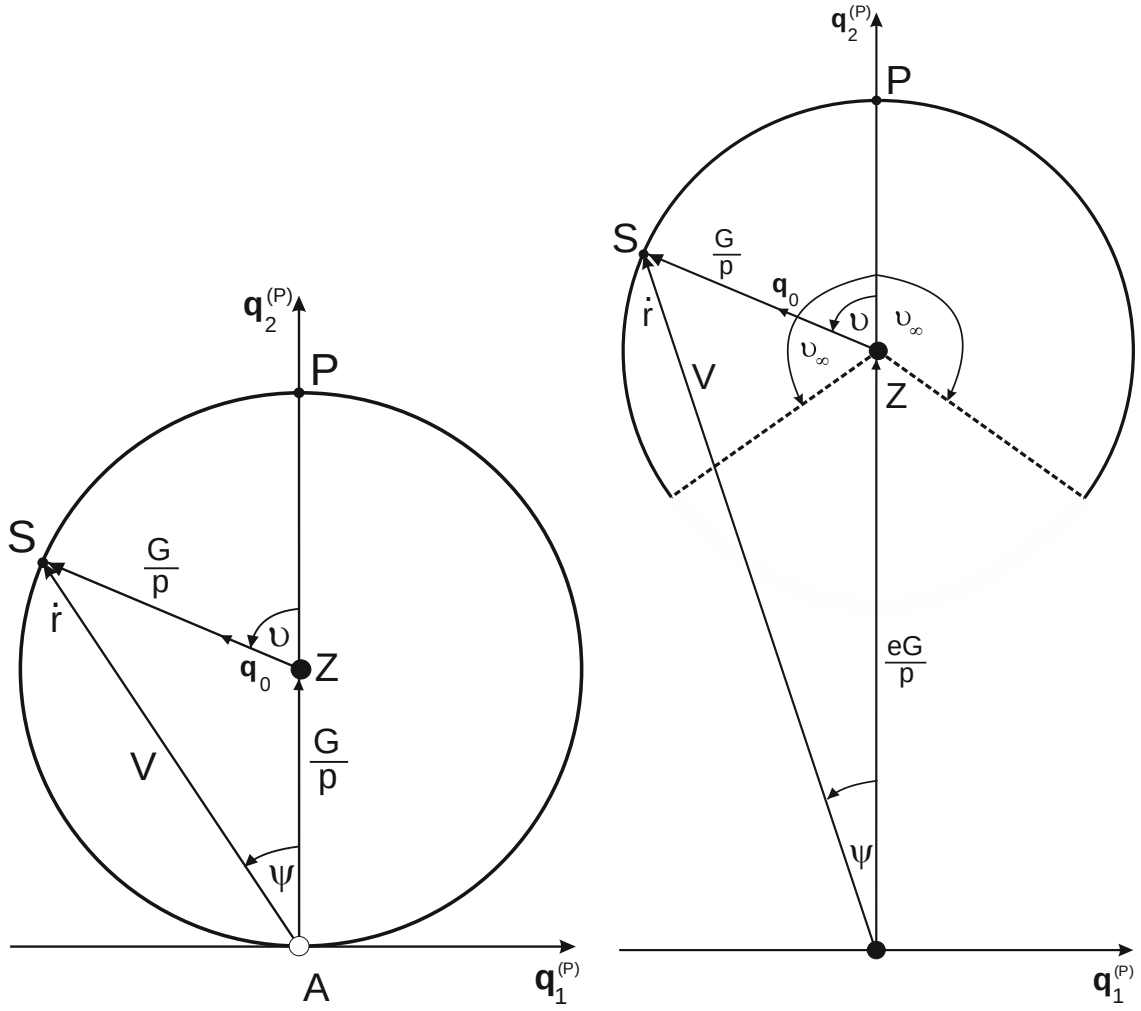


Bild 14-3: linkes Bild: Hodograph der parabolischen Bewegung: rechtes Bild: Hodograph der hyperbolischen Bewegung: in beiden Fällen: das Apozentrum wird nie erreicht

Die vorstehenden Formeln gelten in gleicher Weise für alle Kegelschnitte. Im Fall elliptischer Bewegung liegt der Ursprung des Basissystems innerhalb des Hodographen. Dies trifft insbesondere für die Kreisbewegung zu, bei der der Mittelpunkt des Hodographen mit dem Ursprung des $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – Systems zusammenfällt. Im parabolischen Fall liegt der Ursprung im Apozentrum A, das aber nie erreicht wird: die Geschwindigkeit nimmt im Unendlichen den Wert Null an.

Dagegen hat bei der hyperbolischen Bewegung das bewegte Objekt auch im Unendlichen noch eine Grenzgeschwindigkeit. Der Grenzwert wird für die Grenzanomalie υ_∞ erreicht, die nach Formel (12.118) (in Abschnitt 12.5.1) berechnet werden kann aus

$$\cos\upsilon_\infty = -\frac{1}{e} \quad . \tag{14.12}$$

Die Grenzgeschwindigkeit beträgt nach Bild 14-3 (vgl. auch Formel (12.121)) mit a_H als der ersten Halbachse einer Hyperbel)

$$V_\infty = \frac{G}{p}\sqrt{1+e^2+2e\cos\upsilon_\infty} \;=\; \frac{G}{p}\sqrt{e^2-1} \;=\sqrt{\frac{\mu}{a_H}} \qquad \langle e>1 \quad . \tag{14.13}$$

In der Satellitenbahnmechanik wird der Hodograph gerne für Abschätzungen und Veranschaulichungen verwendet[1].

14.3.2 Ebener Transfer von einer Kreisbahn in eine Kegelschnittbahn

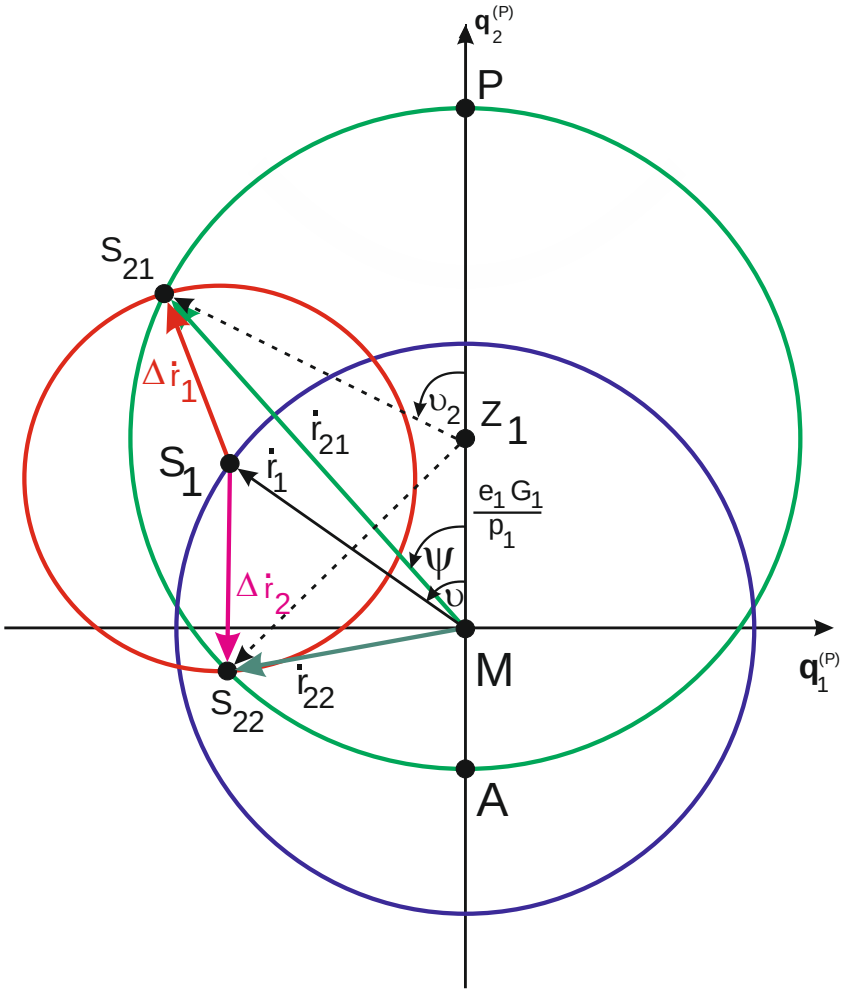


Bild 14-4: Hodographendarstellung eines ebenen Transfers von einer kreisförmigen Bahn in eine elliptische Bahn bei Vorgabe des Geschwindigkeitsinkrements $\Delta\dot{\mathbf{r}}_1$ (bzw. $\Delta\dot{\mathbf{r}}_2$) und des Ortes S_1, von dem aus das Manöver ausgeführt werden soll

Gegeben sei eine Kegelschnittbahn mit Parameter p_1 und Exzentrizität e_1. Der Zustand eines bewegten Objektes wird durch Ortsvektor $\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{r}_{01}$ und Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_1$ mit Geschwindigkeit $V_1 = |\dot{\mathbf{r}}_1|$ gegeben. Durch Vorgabe der wahren Anomalie υ_1 werde auf dem Hodographen des Kreises der Ort S_1 ausgewählt (siehe Bild 14-2). In diesem Ort soll ein Manöver mit dem in der Bahnebene gelegenen Geschwindigkeitsinkrement $\Delta\dot{\mathbf{r}}_1$ durchgeführt werden. Zu bestimmen sind der Parameter p_2 (bzw. die große Bahnhalbachse a_2 im elliptischen Fall bzw. im Fall einer Kreisbahn) und die Exzentrizität e_2 der erzielten Bahn.

[1] Siehe zum Beispiel das Geschwindigkeitsdreieck im Rahmen der parabolischen Bewegung (K. STUMPFF [1959], p. 251-254), sowie Darstellungen eines Bahntransfers (R. H. BATTIN [1987], pp. 531-536)

Die Aufgabe kann mit Hilfe einer Hodographenkonstruktion bearbeitet werden. In S_1 lautet der Geschwindigkeitsvektor mit der vorgegebenen wahren Anomalie bei Bezug auf das begleitende *Leibniz*-System bzw. das im hier im betrachteten Zweikörperproblem (in ihm ist $G = \sqrt{\mu p}$) zuständige Apsidensystem

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{r}_1 \mathbf{r}_{01} + \frac{\sqrt{\mu\, p_1}}{r_1}\mathbf{q}_{01} = \dot{r}_1\left(\cos\upsilon_1\, \mathbf{q}_1^{(P)} + \sin\upsilon_1\, \mathbf{q}_2^{(P)}\right) + \frac{\sqrt{\mu\, p_1}}{r_1}\left(-\sin\upsilon_1\, \mathbf{q}_1^{(P)} + \cos\upsilon_1\, \mathbf{q}_2^{(P)}\right) \quad . \tag{14.14}$$

Durch Addition mit dem Geschwindigkeitsinkrement $\Delta\dot{\mathbf{r}}_1$ ergibt sich der neue Geschwindigkeitsvektor (vgl. Bild 14-4)

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \Delta\dot{\mathbf{r}}_1 = \left|\dot{\mathbf{r}}_2\right|\left(-\sin\psi\, \mathbf{q}_1^{(P)} + \cos\psi\, \mathbf{q}_2^{(P)}\right) \tag{14.15}$$

mit Endpunkt S_2. Das Geschwindigkeitsinkrement habe im *Leibniz*system der ursprünglichen Bahn die Darstellung

$$\Delta\dot{\mathbf{r}}_1 =: \Delta x\ \mathbf{r}_{01} + \Delta y\, \mathbf{q}_{01} \quad . \tag{14.16}$$

Der radiale Richtungsvektor und die transversalen Richtungsvektoren in den beiden *Leibniz* Systemen lauten in Bezug auf das in diesem Fall einheitliche Apsidensystem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{01} &= \mathbf{q}_1^{(P)} \cos\upsilon_1 + \mathbf{q}_2^{(P)} \sin\upsilon_1 \quad , \quad \mathbf{q}_{01} = -\mathbf{q}_1^{(P)} \sin\upsilon_1 + \mathbf{q}_2^{(P)} \cos\upsilon_1 \quad , \\ \mathbf{r}_{02} &= \mathbf{q}_1^{(P)} \cos\upsilon_2 + \mathbf{q}_2^{(P)} \sin\upsilon_2 \quad , \quad \mathbf{q}_{02} = -\mathbf{q}_1^{(P)} \sin\upsilon_2 + \mathbf{q}_2^{(P)} \cos\upsilon_2 \quad . \end{aligned} \tag{14.17}$$

Damit kann der zentrische Winkel ψ aus den vorgegebenen Größen berechnet werden, wenn noch die absolute Geschwindigkeit $V_2 =: \left|\dot{\mathbf{r}}_2\right|$ berücksichtigt wird, die nach Durchführung des Manövers erzielt werden soll:

$$\begin{aligned} V_2 \cos\psi &= \Delta x\ \sin\upsilon + \left(\sqrt{\frac{\mu}{a_1}} + \Delta y\right)\cos\upsilon \\ V_2 \sin\psi &= -\Delta x \cos\upsilon + \left(\sqrt{\frac{\mu}{a_1}} + \Delta y\right)\sin\upsilon \quad . \end{aligned} \tag{14.18}$$

Der Geschwindigkeitsvektor nach Durchführung des Manövers hat mit der bekannten Zerlegung im neuen mitgeführten *Leibniz*-System die Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \Delta x\, \mathbf{r}_0 + \left(\sqrt{\frac{\mu}{a_1}} + \Delta y\right)\mathbf{q}_{01} = \dot{r}_2\, \mathbf{r}_0 + \frac{\sqrt{\mu\, p_2}}{r}\mathbf{q}_{02} \quad . \tag{14.19}$$

Der Ortsvektor stimmt in beiden Systemen im Moment des impulsförmig angenommenen Manövers überein, somit seine Richtung $\mathbf{r}_0$ und sein Betrag r. Daher ist im Fall einer kreisförmigen Ausgangsbahn

$$\dot{r}_2 = \Delta x \qquad \langle e_1 = 0 \quad . \tag{14.20}$$

Es bleibt

$$\left(\sqrt{\frac{\mu}{a_1}} + \Delta y\right)\mathbf{q}_{01} = \frac{\sqrt{\mu\, p_2}}{3}\mathbf{q}_{02} \quad . \tag{14.21}$$

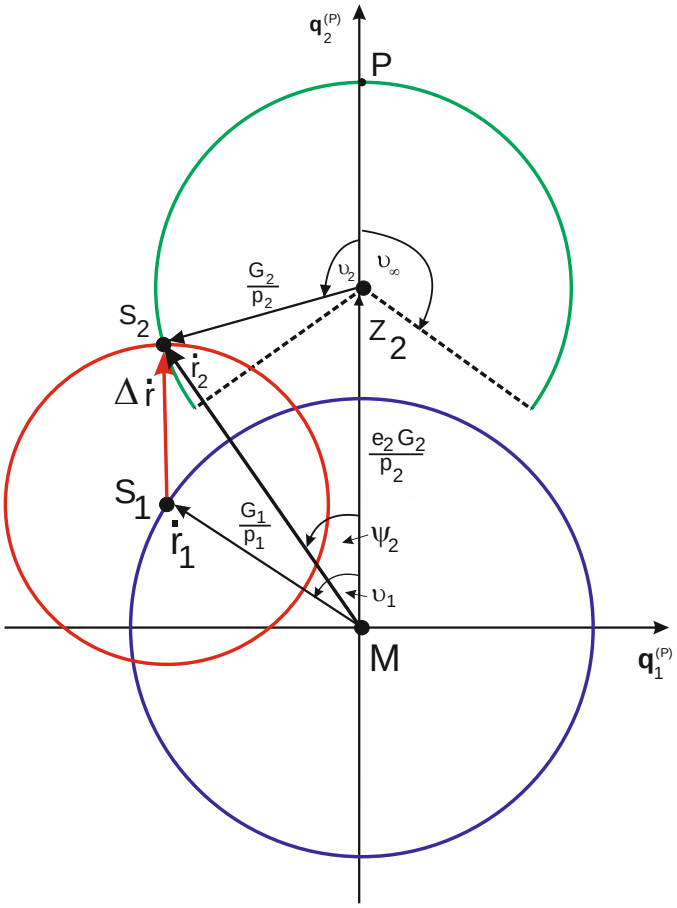


Bild 14-5: Hodographendarstellung eines ebenen Transfers von einer Kreisbahn in eine hyperbolische Bahn bei Vorgabe des Geschwindigkeitsinkrements $|\Delta\dot{\mathbf{r}}|$ und des Ortes S_1, von dem aus das Manöver ausgeführt werden soll

Mit den Darstellungen (14.17) sowie den Beziehungen (14.9) zwischen dem Zentrumswinkel ψ und der noch unbekannten wahren Anomalie υ_2 auf der Zielbahn folgen die Relationen

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\frac{\mu}{a_1}}+\Delta y\right)\sin\upsilon &= \frac{\sqrt{\mu\, p_2}}{r}\sin\upsilon_2 = -\frac{p_2}{r}\,V_2\,\sin\psi \\ \left(\sqrt{\frac{\mu}{a_1}}+\Delta y\right)\cos\upsilon &= \frac{\sqrt{\mu\, p_2}}{r}\cos\upsilon_2 = \frac{p_2}{r}\,V_2\,\cos\psi - \frac{\sqrt{\mu\, p_2}}{r}e_2 \quad .\end{aligned} \tag{14.22}$$

Der Parameter p_2 der Zielbahn kann, wenn das Manöver außerhalb der Apsiden durchgeführt wird aus der ersten dieser Beziehungen berechnet werden:

$$p_2 = -r\left(\sqrt{\frac{\mu}{a_1}}+\Delta y\right)\frac{\sin\upsilon}{V_2\sin\psi} \quad . \tag{14.23}$$

Mit bekanntem Parameter ist dann die wahre Anomalie υ_2 berechenbar. Außerdem kann aus der zweiten dieser Beziehungen die Exzentrizität der Zielbahn berechnet werden:

$$e_2 = \sqrt{\frac{p_2}{\mu}}\,V_2\cos\psi - \frac{r}{\sqrt{\mu\, p_2}}\left(\sqrt{\frac{\mu}{a_1}}+\Delta y\right)\cos\upsilon \quad . \tag{14.24}$$

Falls die neue Bahn elliptisch ist, kann deren große Bahnhalbachse aus der Beziehung $p_2 = a_2\left(1-e_2^2\right)$ erhalten werden.

Anmerkungen:

1. Es sei die Zielbahn vorgegeben, der Ort S_1, an dem das Manöver zwischen den beiden Bahnen ausgeführt werden soll, und außerdem die Größe des Geschwindigkeitsinkrements. Ein Kreis um S_1 auf dem Hodographen der Ausgangsbahn mit Radius des Betrages des Geschwindigkeitsinkrements zeigt mit seinen Schnittpunkten mit dem Hodographen der Zielbahn ob das Manöver mit diesen Vorgaben überhaupt möglich ist, und wenn in welcher Richtung das Geschwindigkeitsinkrement angebracht werden muss.

2. Der Übergang in eine hyperbolische Zielbahn (etwa beim Einschuss in eine interplanetare Bahn) wird in Bild 14-5 demonstriert.

14.3.3 Ebener Transfer zwischen Kegelschnittbahnen

Gegeben sei eine elliptische Bahn durch einen Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_1, \dot{\mathbf{r}}_1\right)$. Die Bahnparameter sind die große Halbachse a_1 bzw. der Kegelschnittparameter p_1 und die Exzentrizität e_1. Werden ebene Probleme betrachtet, interessiert nur die Ausrichtung der Apsidenlinie, wobei der Winkel ζ_{P1} deren Orientierung bezüglich eines *Hansen*-Systems definiere. Dieser Winkel werde zunächst willkürlich gesetzt, muss aber für den gesamten folgenden Rechenprozess festgehalten werden, da ein *Hansen*-System fest mit der Bahnebene verbunden ist. Das $\mathbf{q}_{j1}^{(P)}$ – Apsidensystem der gegebenen Bahn ist auf das *Hansen*-System bezogen durch die Transformation

$$\mathbf{q}_1^{(I)} = \mathbf{q}_{11}^{(P)}\cos\zeta_{P1} - \mathbf{q}_{21}^{(P)}\sin\zeta_{P1} \quad , \quad \mathbf{q}_2^{(I)} = \mathbf{q}_{11}^{(P)}\sin\zeta_{P1} + \mathbf{q}_{21}^{(P)}\cos\zeta_{P1} \quad . \tag{14.25}$$

Der Geschwindigkeitsvektor hat in Bezug auf diese beiden Basissysteme die Darstellungen (vgl. Bild 14-6)

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = V_1\left(-\mathbf{q}_{11}^{(P)}\sin\psi_1 + \mathbf{q}_{21}^{(P)}\cos\psi_1\right) = V_1\left[-\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\left(\psi_1+\zeta_{P1}\right) + \mathbf{q}_2^{(P)}\cos\left(\psi_1+\zeta_{P1}\right)\right] \tag{14.26}$$

mit $V_1 = \left|\dot{\mathbf{r}}_1\right|$. In Bezug auf das mitbewegte *Leibniz*-System lautet der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{r}_1\,\mathbf{r}_0 + \frac{\sqrt{\mu\,p_1}}{r}\mathbf{q}_{01} \;,\; r = \left|\mathbf{r}\right|,\; \dot{r}_1 = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}_1}{r},\; \sqrt{\mu\,p_1} = \left|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}_1\right| \quad . \tag{14.27}$$

Mit

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_{11}^{(P)}\cos\upsilon_1 + \mathbf{q}_{21}^{(P)}\sin\upsilon_1 \;,\; \mathbf{q}_{01} = -\mathbf{q}_{11}^{(P)}\sin\upsilon_1 + \mathbf{q}_{21}^{(P)}\cos\upsilon_1 \tag{14.28}$$

folgen die Beziehungen zwischen der wahren Anomalie υ_1 und dem zentrischen Winkel ψ_1

$$\begin{aligned} \cos\psi_1 &= \frac{1}{V_1}\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}\left(e_1+\cos\upsilon_1\right) \quad , \quad \cos\upsilon_1 = V_1\sqrt{\frac{p_1}{\mu}}\cos\psi_1 - e_1 \\ \sin\psi_1 &= -\frac{1}{V_1}\sqrt{\frac{\mu}{p_1}}\sin\upsilon_1 \quad , \quad \sin\upsilon_1 = -V_1\sqrt{\frac{p_1}{\mu}}\sin\psi_1 \quad . \end{aligned} \tag{14.29}$$

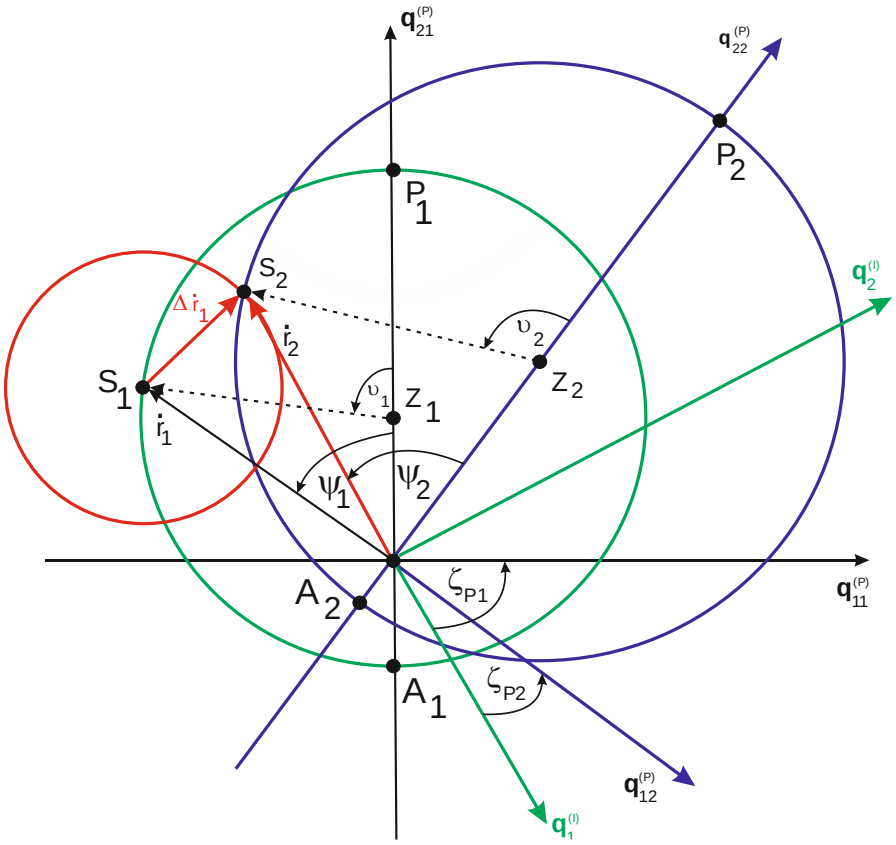


Bild 14-6: Hodographendarstellung eines ebenen Transfers zwischen zwei elliptischen Bahnen

Das Geschwindigkeitsinkrement habe in Bezug auf das *Leibniz*-System die Komponentendarstellung

$$\Delta\dot{\mathbf{r}}_1 = \Delta x\ \mathbf{r}_0 + \Delta y\,\mathbf{q}_{01} \quad . \tag{14.30}$$

Entsprechend lautet der Geschwindigkeitsvektor nach Durchführung des impulsförmigen Manövers

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 + \Delta\dot{\mathbf{r}}_1 = \left(\dot{r}_1 + \Delta x\right)\mathbf{r}_0 + \left(\frac{\sqrt{\mu\, p_1}}{r} + \Delta y\right)\mathbf{q}_{01} \quad . \tag{14.31}$$

Da der Ortsvektor durch das Manöver nicht verändert wird, kann der Parameter der neuen Bahn berechnet werden aus

$$p_2 = \frac{\left|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}_2\right|}{\mu} = \frac{G_2^2}{\mu} \quad . \tag{14.32}$$

Der Radius des Manöverortes ist derselbe wie vor dem Manöver. Die absolute Geschwindigkeit und die radiale Geschwindigkeit nach dem Manöver ergeben sich aus

$$V_2 = \left|\dot{\mathbf{r}}_2\right| \quad , \quad \dot{r}_2 = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}_2}{r} \quad . \tag{14.33}$$

Dies führt auf

$$e_2 \cos\upsilon_2 = \frac{p_2}{r} - 1 \quad , \quad e_2 \sin\upsilon_2 = \dot{r}_2 \sqrt{\frac{p_2}{\mu}} \quad . \tag{14.34}$$

Die Exzentrizität der neuen Bahn beträgt damit

$$e_2 = \sqrt{\left(e_2 \cos\upsilon_2\right)^2 + \left(e_2 \sin\upsilon_2\right)^2} \quad . \tag{14.35}$$

Da $e_2 > 0$ vorausgesetzt ist, ist somit auch die wahre Anomalie υ_2 auf der neuen Bahn bekannt (vgl. Bild 14-6). Der Zentralwinkel ψ_2 kann jetzt mit den Formeln (14.9) berechnet werden:

$$\cos\psi_2 = \frac{1}{V_2}\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}\left(e_2 + \cos\upsilon_2\right) \quad , \quad \sin\psi_2 = -\frac{1}{V_2}\sqrt{\frac{\mu}{p_2}}\,\sin\upsilon_2 \quad . \tag{14.36}$$

Die neue Bahn kann auf ein $\mathbf{q}_{j2}^{(P)}$ – Apsidensystem bezogen sein, das gegenüber dem ursprünglichen System um den Winkel $\zeta_{P1} - \zeta_{P2}$ gedreht ist, wenn ζ_{P2} der Perizentrumswinkel gegenüber dem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System ist. Der Zwischenwinkel Δ zwischen den beiden Geschwindigkeitsvektoren folgt aus

$$\cos\Delta = \frac{\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{V_1 V_2} \quad . \tag{14.37}$$

Nach Bild 14-6 ist

$$\zeta_{P2} = \zeta_{P1} + \psi_1 - \psi_2 - \Delta \quad . \tag{14.38}$$

Damit folgt die Transformation

$$\mathbf{q}_{12}^{(P)} = \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta_{P2} + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta_{P2} \quad , \quad \mathbf{q}_{21}^{(P)} = -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta_{P2} + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta_{P2} \quad . \tag{14.39}$$

Der transversale Richtungsvektor der neuen Bahn lautet

$$\mathbf{q}_{02} = -\mathbf{q}_{12}^{(P)} \sin\upsilon_2 + \mathbf{q}_{22}^{(P)} \cos\upsilon_2 \quad . \tag{14.40}$$

Damit hat der Hodograph der neuen Bahn die Darstellung

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{G_2}{p_2}\mathbf{q}_{02} + e_2 \frac{G_2}{p_2}\mathbf{q}_{22}^{(P)} \quad . \tag{14.41}$$

Anmerkung: Als klassische Alternative der hier gezeigten Herleitung kann die Richtung der Apsidenachse mit Hilfe des *Hermann*schen Vektors ("zweiter *Laplace*scher Vektor"), etwa nach Formel (2.70) in Band I, berechnet werden.

14.4 Levi-Civitá Parameterraum

Die Transformation von *T. Levi-Cività*[1] ist eine Transformation des 2-dimensionalen physikalischen Raumes in einen zweidimensionalen Parameterraum. Dies kann mathematisch-rechnerische Vorteile bei der Berechnung eines Bewegungsvorganges bringen. In diesem Parameterraum kann die Berechnung einer ebenen Bewegung regularisiert werden. Das bedeutet, dass im Fall eines Stoßes bzw. eines Wurfes keine Singularität auftreten kann. Für die numerische

[1] Siehe allgemeines hierzu in den Abschnitten 2.6.4 und 2.7.21 (Band I)

Berechnung einer hochexzentrischen Bahn wird die Berechnung in der Nähe eines Perizentrums numerisch stabiler.

Mit der *Levi-Cività* Transformation der Koordinatendarstellung einer Bewegung wird eine Regularisierung der Bewegungsgleichungen in der Bahnebene erreicht. Die Formulierung dieses Vorganges soll auf eine räumliche Bewegung im Rahmen der *KS*-Transformation formal übertragen werden. Um dies plausibel durchführen zu können, werden in diesem Abschnitt die entsprechenden Formeln und Begriffe am Beispiel der ebenen Bewegung vorbereitet.

14.4.1 Herleitung aus der Identität von Vieta

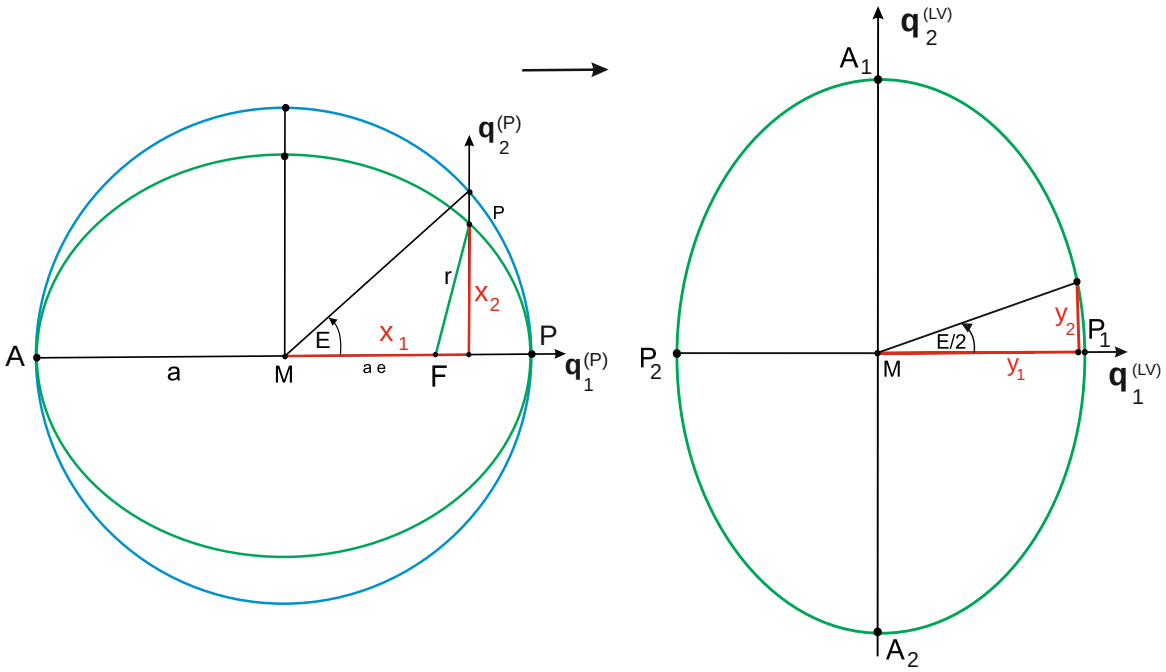


Bild 14-7: linkes Bild: klassische *Kepler*ellipse mit $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – Apsidensystem, rechtes Bild: *Kepler*bahn im *Levi-Cività* Parameterraum

Auf *F. Vieta* geht die Beziehung zurück

$$x_1 = y_1 z_1 \mp y_2 z_2 \quad , \quad x_2 = y_2 z_1 \pm y_1 z_2 \quad , \tag{14.42}$$

die er aus geometrischen Überlegungen herleiten konnte[1]. Quadratur ergibt die Identität von *Vieta*

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(y_1^2 + y_2^2\right)\left(z_1^2 + z_2^2\right) \quad . \tag{14.43}$$

Diese Identität war schon *Diophant* bekannt und wird deshalb bisweilen auch nach *Diophant* benannt.

Die Transformation von *Levi-Cività* wird mit der speziellen Zuordnung $y_1 = z_1$ und $y_2 = z_2$ erhalten:

[1] Siehe hierzu die Untersuchungen von O. VOLK [1981], wiedergegeben in H. J. VOLLRATH [1990], pp. 616-622

$$x_1 = y_1^2 - y_2^2 \quad , \quad x_2 = 2\,y_1\,y_2 \quad . \tag{14.44}$$

Damit ergibt sich für den Bahnradius die Darstellung in den beiden Systemen

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = y_1^2 + y_2^2 \quad . \tag{14.45}$$

Um die Bewegung im $(y_1, y_2)-$Parameterraum verfolgen zu können, werde die Bewegung im physikalischen Raum mit der Bahnhalbachse *a* und der numerischen Exzentrizität *e* im Fall elliptischer Bewegung mit der exzentrischen Anomalie *E* als Bahnvariable dargestellt[1]:

$$x_1 = a\left(\cos E - e\right) = y_1^2 - y_2^2 \quad , \quad x_2 = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E = 2\,y_1\,y_2 \quad . \tag{14.46}$$

Auflösung nach den Variablen des $(y_1, y_2)-$Parameterraumes ergibt unmittelbar

$$y_1 = \sqrt{a\left(1-e\right)}\cos\frac{E}{2} \quad , \quad y_2 = \sqrt{a\left(1+e\right)}\sin\frac{E}{2} \quad . \tag{14.47}$$

Die der *Kepler*ellipse im physikalischen Raum zugeordnete Bahn im *Levi-Cività*-Parameterraum ist eine Mittelpunktsellipse mit den Halbachsen $\sqrt{a\left(1-e\right)}$, die zum Perizentrum weist, und der größeren Halbachse $\sqrt{a\left(1+e\right)}$, die zum Apozentrum weist. Zwei Umläufen längs der physikalischen Bahn im $(x_1, x_2)-$Raum entspricht somit genau ein Umlauf längs der *Levi-Cività*-Bahn im $(y_1, y_2)-$Parameterraum.

14.4.2 Mathematische Eigenschaften der Levi-Cività-Transformation

- Eine Verwandtschaft zur *Levi-Cività* Transformation zeigen die (vermutlich schon von *Vieta* entdeckten) *Moivre*schen Formeln der Goniometrie:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \quad , \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad , \tag{14.48}$$

  wenn $y_1 = \cos\alpha$, $y_2 = \sin\alpha$ gesetzt werden[2].

- Die *Levi-Cività*-Transformation kann über die komplexe Zuordnung

$$x_1 + i\,x_2 = \left(y_1 + i\,y_2\right)^2 \qquad \left\langle i = \sqrt{-1} \right. \tag{14.49}$$

  gewonnen werden.

- Diese Abbildung erfüllt die Bedingung einer konformen Transformation, da sie die *Cauchy-Riemann* Bedingung erfüllt[3]:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \quad , \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial x_2}{\partial y_1} \quad . \tag{14.50}$$

[1] Siehe etwa in Abschnitt 10.1.3

[2] Nach: O. VOLK [1981]

[3] Siehe etwa in BOCCALETTI, D. and PUCACCO, G. [1996], p.165

"Zu jeder konformen Abbildung existiert ein orthogonales Kurvennetz, das in ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem abgebildet werden kann"[1].

- Als *Levi-Cività* Matrix wird der Ausdruck

$$\left(a_{ij}\right) \Leftrightarrow \mathbf{L}_y := \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \tag{14.51}$$

bezeichnet[2]. Werde ein Ortsvektor **r** in der physikalischen Bahnebene auf ein kartesisches $\mathbf{p}_i$ – System bezogen, im *Levi-Cività* Parameterraum auf ein kartesisches $\mathbf{q}_j$ – System, hat er die Darstellungen

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i = y^j \mathbf{q}_j = a^i{}_j \, y^j \mathbf{p}_i \quad . \tag{14.52}$$

Somit gilt die Transformation

$$x^i = a^i{}_j \, y^j \quad , \quad \mathbf{q}_j = a^i{}_j \, \mathbf{p}_i \quad . \tag{14.53}$$

Es ist üblich, im Zusammenhang mit der *Levi-Cività* Transformation formal die Komponenten des Ortsvektors als Spaltenvektor zu schreiben[3]. Dann lautet die Transformation mit Hilfe der *Levi-Cività* Matrix

$$\mathbf{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{L}_y \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{L}_y \, \mathbf{y} \ . \tag{14.54}$$

Mit den erwähnten Einschränkungen (keine Elemente eines affinen Vektorraumes) kann formal statt dieser Schreibweise auch geschrieben werden:

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}_y \, \mathbf{y} \quad . \tag{14.55}$$

- Wird die *Levi-Cività* Matrix $\mathbf{L}_y$ nicht auf die Koordinaten des Raumpunktes (y_j), sondern auf die eines anderen Raumpunktes (z_j) angewendet, ergibt sich die Beziehung

$$\mathbf{L}_y \, \mathbf{z} = \mathbf{L}_z \, \mathbf{y} \quad , \tag{14.56}$$

wovon man sich durch elementares Ausschreiben sofort überzeugen kann.

- Die *Levi-Cività* Matrix ist orthogonal. Sei $\mathbf{L}_y^T$ die Transponierte, $r = y_1^2 + y_2^2$ und **E** die Einheitsmatrix, wird

$$\mathbf{L}_y^T \cdot \mathbf{L}_y = r \, \mathbf{E} \quad . \tag{14.57}$$

- Die inverse einer *Levi-Cività* Matrix lautet

---

[1] Siehe etwa in BRONSTEIN, I. N. und K. A. SEMENDJAJEW [1962], *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, pp. 437-440

[2] In der Literatur (STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971], BOCCALETTI, D. and PUCACCO, G. [1996]) wird die *Levi-Cività* Matrix mit dem Symbol L(y) bezeichnet. Diese Bezeichnung wird um Verwirrungen zu vermeiden im vorliegenden Bericht nicht verwendet und durch L_y ersetzt.

[3] Etwa nach STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971]. Hier wird die Schreibweise als Spaltenvektor konsequent nur der Übersichtlichkeit wegen verwendet, nicht als Elemente eines (affinen) Vektorraumes (vgl. hierzu die Anmerkungen in Abschnitt 4.2.2 (Band II))

$$\mathbf{L}_y^{-1} = \frac{1}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}\mathbf{L}_y^T = \frac{1}{r}\mathbf{L}_y^T \quad , \quad \mathbf{L}_y^{-1}\cdot\mathbf{L}_y = \mathbf{E} \quad . \tag{14.58}$$

- Es wird noch folgende Relation benötigt, die durch Ausschreiben direkt hergeleitet werden kann:

$$\mathbf{y}^2\,\mathbf{L}_z\,\mathbf{z} + \mathbf{z}^2\,\mathbf{L}_y\,\mathbf{y} = 2\left(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}\right)\mathbf{L}_y\,\mathbf{z} \quad . \tag{14.59}$$

Da $r = \mathbf{y}^2$ gilt auch

$$\left[\mathbf{L}_y^T\cdot\mathbf{L}_z - 2\left(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}\right)\mathbf{E}\right]\mathbf{z} = -\,\mathbf{z}^2\;\mathbf{y} \tag{14.60}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -y_1 z_1 - y_2 z_2 & -y_1 z_2 + y_2 z_1 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 & -y_1 z_1 - y_2 z_2 \end{pmatrix} \tag{14.61}$$

14.4.3 Zweiter Schritt einer Regularisierung und Linearisierung

Wenn die Variationsgleichung[1] (13.28) mit der regularisierenden Variablen τ und im Fall (ungestörter) Zweikörperbewegung als ebene Bewegung aufgefasst werden kann, die zudem auf ein nicht-beschleunigtes Basissystem bezogen ist, kann ohne Einschränkung

$$\left(x_1\right)''' + \alpha^2\left(x_1\right)' = 0 \quad , \quad \left(x_2\right)''' + \alpha^2\left(x_2\right)' = 0 \quad , \tag{14.62}$$

mit den ersten Integralen

$$\left(x_1\right)'' + \alpha^2\left(x_1\right) = C_1 \quad , \quad \left(x_2\right)'' + \alpha^2\left(x_2\right) = C_2 \qquad \left\langle C_1 = const. \quad , \quad C_2 = const. \right. \tag{14.63}$$

gesetzt werden. Andererseits lauten die ersten der Gleichungen (13.32

$$x_1'' - \frac{r'}{r}x_1' + \frac{\mu}{r}x_1 = 0 \quad , \quad x_2'' - \frac{r'}{r}x_2' + \frac{\mu}{r}x_2 = 0 \quad . \tag{14.64}$$

Die *Levi-Cività* Transformationen (14.44) ergeben dann die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1^2 - y_2^2 && , \quad x_2 = 2\,y_1\,y_2 \\ x_1' &= 2\left(y_1\,y_1' - y_2\,y_2'\right) && , \quad x_2' = 2\left(y_1'\,y_2 + y_1\,y_2'\right) \\ x_1'' &= 2\left(y_1'^2 - y_2'^2 + y_1\,y_1'' - y_2\,y_2''\right) && , \quad x_2'' = 2\left(y_2\,y_1'' + y_1\,y_2'' + 2y_1'\,y_2'\right) \\ r &= y_1^2 + y_2^2 \quad , \quad r' = 2\left(y_1\,y_1' + y_2\,y_2'\right) \quad . \end{aligned} \tag{14.65}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor kann auch geschrieben werden

[1] In Abschnitt 13.2

$$\mathbf{r}' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2\, \mathbf{L}_y\, \mathbf{y}' \quad . \tag{14.66}$$

Die Umkehrabbildung der Ausdrücke (14.65) lautet

$$\begin{aligned} y_1 &= \pm\sqrt{\frac{x_1 + r}{2}} \quad , \quad y_2 = \pm\sqrt{\frac{-x_1 + r}{2}} \\ y_1' &= \frac{x_1' y_1 + x_2' y_2}{2r} \quad , \quad y_2' = \frac{-x_1' y_2 + x_2' y_1}{2r} \\ y_1'' &= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}\left(y_1 x_1'' + y_2 x_2''\right) - y_1\left(y_1'^2 - y_2'^2\right) - 2 y_2 y_1' y_2'\right] , \\ y_2'' &= \frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}\left(-y_2 x_1'' + y_1 x_2''\right) + y_2\left(y_1'^2 - y_2'^2\right) - 2 y_1 y_1' y_2'\right] \\ r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad , \quad r' = \frac{1}{r}\left(x_1 x_1' + x_2 x_2'\right) \quad . \end{aligned} \tag{14.67}$$

Wenn wie in den Ausdrücken (13.31) die Eigenbewegung des Basissystems vernachlässigt werden kann, ist

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i\, \mathbf{p}_i = \frac{1}{r}\mathbf{r}' \quad , \quad \dot{x}^i = \frac{1}{r}\left(x^i\right)' \quad . \tag{14.68}$$

Somit wird

$$\left(x_1'\right)^2 + \left(x_2'\right)^2 = 4r\left[\left(y_1'\right)^2 + \left(y_2'\right)^2\right] \quad . \tag{14.69}$$

Die Geschwindigkeitsbeziehung (13.19) führt damit auf

$$\frac{\mu}{r} = \frac{2\left[\left(y_1'\right)^2 + \left(y_2'\right)^2\right]}{r} + \frac{\alpha^2}{2} \quad . \tag{14.70}$$

Werden diese Ausdrücke in die Gleichungen (14.64) eingesetzt, ergeben sich die zu den Gleichungen (14.63) analogen Differentialgleichungen zweiter Ordnung im *Levi-Cività*-Parameterraum

$$y_1'' + \frac{\alpha^2}{4} y_1 = 0 \quad , \quad y_2'' + \frac{\alpha^2}{4} y_2 = 0 \quad . \tag{14.71}$$

Unter den obigen Annahmen $\left(\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_i' = \dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{q}_j' \equiv 0\right)$ können diese Differentialgleichungen einheitlich in vektorieller Schreibweise im Rahmen eines ungestörten Zweikörperproblems zusammengefasst werden:

$$\mathbf{y}'' + \frac{\alpha^2}{4}\mathbf{y} = 0 \quad . \tag{14.72}$$

Damit wird die ungestörte Zweikörperbewegung, welche im *Kepler*schen Ansatz durch eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben wird (siehe etwa Formel (10.1) bei Bezug auf die Zeit t bzw. (13.26) bei Bezug auf die *Sundmann*sche regularisierende Variable τ), durch eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung dargestellt. Dies

ist der zweite Schritt einer Regularisierung der ungestörten Zweikörperbewegung, der somit eine Linearisierung einschließt.

Eine analytische Lösung der Differentialgleichungen (14.71) kann mit Hilfe der *Stumpff*schen *s*-Funktionen ähnlich wie in Abschnitt 13.4 auf gefunden werden. Die hier benötigte Rekursionsformel lautet

$$s_n + \frac{\alpha^2}{4} s_{n+2} = \frac{\tau^n}{n!} \tag{14.73}$$

und die Differentialbeziehung unverändert

$$s'_{n+1} = s_n \qquad \langle \text{für} \quad n = 0,1,2, \ldots \quad . \tag{14.74}$$

In diesem Fall haben die *Stumpff*schen Funktionen die Entwicklung

$$s_n = s_n\left(\frac{\alpha^2}{4}\tau^2\right) := \tau^n c_n\left(\frac{\alpha^2}{4}\tau^2\right) = \tau^n c_n = \tau^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{4}\tau^2\right)^\nu}{(2\nu+n)!} \qquad \langle n = 0,1,2,\cdots \quad . \tag{14.75}$$

Die Lösung für die Parametervariablen y_i (i=1,2) werde um einen Anfangszustand entwickelt:

$$y_i = r(\tau) = \frac{y_{iA}}{0!} + \frac{y'_{iA}}{1!}\tau + \frac{y''_{iA}}{2!}\tau^2 + \frac{y'''_{iA}}{3!}\tau^3 + \frac{y^{IV}_{iA}}{4!}\tau^4 + \frac{y^{V}_{iA}}{5!}\tau^5 + \cdots \quad \langle i = 1,2 \quad . \tag{14.76}$$

Werden hier die *Stumpff*schen *s*-Funktionen über die Rekursionsformel (14.73) eingesetzt, wird

$$\begin{aligned} y_i = y_i(\tau) = y_{iA}\left(s_0 + \frac{\alpha^2}{4}s_2\right) + y'_{iA}\left(s_1 + \frac{\alpha^2}{4}s_3\right) + y''_{iA}\left(s_2 + \frac{\alpha^2}{4}s_4\right) + \\ + y'''_{iA}\left(s_3 + \frac{\alpha^2}{4}s_5\right) + y^{IV}_{iA}\left(s_4 + \frac{\alpha^2}{4}s_6\right) + y^{V}_{iA}\left(s_5 + \frac{\alpha^2}{4}s_7\right) + \cdots \end{aligned}$$

und umgeordnet

$$\begin{aligned} y_i = y_i(\tau) = s_0\, y_{iA} + s_1\, y'_{iA} + s_2\left(\frac{\alpha^2}{4}y_{iA} + y''_{iA}\right) + \\ + s_3\left(\frac{\alpha^2}{4}y'_{iA} + y'''_{iA}\right) + s_4\left(\frac{\alpha^2}{4}y''_{iA} + y^{IV}_{iA}\right) + s_5\left(\frac{\alpha^2}{4}y'''_{iA} + y^{V}_{iA}\right) + \cdots \quad . \end{aligned} \tag{14.77}$$

Wegen der Differentialgleichungen (14.71) und da der Energieparameter im Fall der "ungestörten" Zweikörperbewegung konstant ist, verschwinden hier alle Terme für n>1 und es bleibt der geschlossene Ausdruck

$$\begin{aligned} y_i &= s_0\, y_{iA} + s_1\, y'_{iA} \\ y'_i &= s'_0\, y_{iA} + s_0\, y'_{iA} \qquad \langle i = 1,2 \quad . \end{aligned} \tag{14.78}$$

BEISPIEL: Gegeben sei im physikalischen Raum die Parabel $x_2^2 = p - 2x_1$, wobei p der Kegelschnittparameter sei mit der Polargleichung $r = p/(1+\cos\upsilon)$. Als Anfangswerte seien im Scheitel der Parabel (wahre Anomalie $\upsilon_A = 0°$) gegeben:

$$x_{1A} = r_A \cos\upsilon_A = r_P = \frac{p}{2} \quad , \quad x_{2A} = r_A \sin\upsilon_A = 0$$

$$x'_{1A} = r'_A \cos\upsilon_A - r_A \upsilon' \sin\upsilon_A = 0 \ , \ x'_{2A} = r'_A \sin\upsilon_A + r_A \upsilon' \cos\upsilon_A = r_A^2 \dot{\upsilon} = G = \sqrt{\mu p} \quad .$$

Mit den Beziehungen (14.67) entsprechen im *Levi-Cività* Parameterraum die Anfangswerte

$$y_{1A} = \pm\sqrt{r_P} \ , \ y_{2A} = 0 \quad , \quad y'_{1A} = 0 \quad , \quad y'_{2A} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{2}} \quad .$$

Mit den Beziehungen (14.78) folgt, dass die Bewegung im *Levi-Cività* Raum gleichmäßig auf zwei Geraden parallel zur y_2-Achse verläuft:

$$y_1 = \pm\sqrt{r_P} = \pm\sqrt{\frac{p}{2}} \quad , \quad y_2 = \tau\sqrt{\frac{\mu}{2}}$$

Die Geschwindigkeit im Parameterraum ist konstant und beträgt

$$y'_2 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \quad . \quad \blacktriangleleft$$

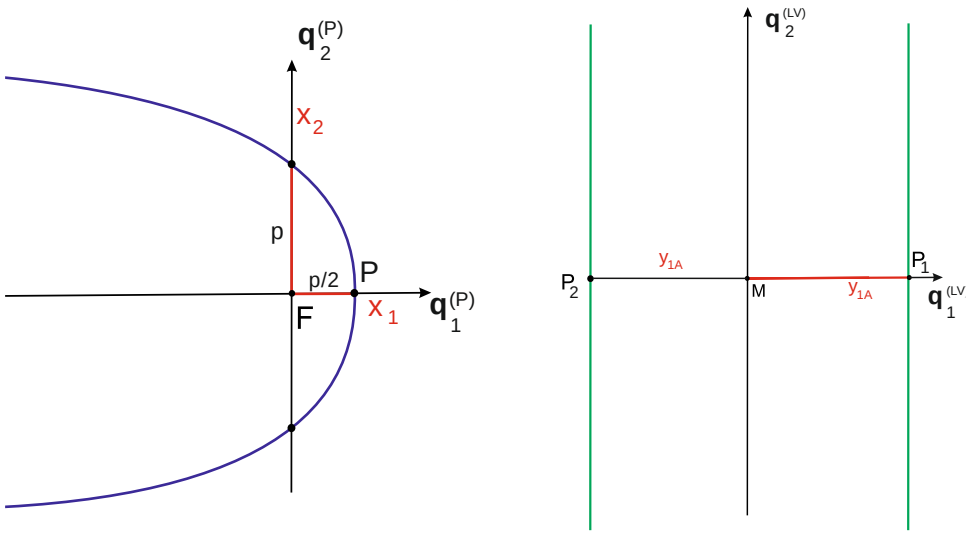


Bild 14-8: Bewegung auf einer Parabel im physikalischen Raum (linkes Bild) und im *Levi-Cività* Raum (rechtes Bild)

14.4.4 Regularisierung der gestörten Zweikörperbewegung

Aus der Definitionsgleichung (14.51) folgt bei Differentiation nach der regularisierenden Variablen τ

$$\mathbf{L}'_y = \begin{pmatrix} y'_1 & -y'_2 \\ y'_2 & y'_1 \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{y'} \quad . \tag{14.79}$$

Aus der Beziehung (14.54) folgt mit der Zuordnung $\mathbf{r} = \mathbf{x}$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' & -y_2' \\ y_2' & y_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = 2\mathbf{L}_y \mathbf{y}' \quad . \tag{14.80}$$

Die zweite Ableitung nach der regularisierenden Variablen τ lautet daher

$$\mathbf{r}'' = 2\left(\mathbf{L}_{y'} \mathbf{y}' + \mathbf{L}_y \mathbf{y}''\right) \quad . \tag{14.81}$$

Formal gilt nach der Zuordnung (14.45)

$$r' = \left(\mathbf{y}^2\right)' = \left(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}\right)' = 2\left(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}'\right) \quad . \tag{14.82}$$

Mit der Darstellung (13.69) der gestörten Zweikörperbewegung[1] bei Bezug auf die regularisierende Variable τ sowie der Beziehung (14.66) wird die Bewegungsgleichung im *Levi-Cività* Parameterraum erhalten:

$$2r\mathbf{L}_y \mathbf{y}'' + 2r\mathbf{L}_{y'} \mathbf{y}' - 4\left(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}'\right)\mathbf{L}_y \mathbf{y}' = -\mu \mathbf{L}_y \mathbf{y} + r^3 \mathbf{R}_K \quad . \tag{14.83}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (14.57) und (14.59) wird

$$\mathbf{y}'' + \frac{1}{r}\left(\frac{\mu}{2} - \left(\mathbf{y}'\right)^2\right)\mathbf{y} = \frac{r}{2}\mathbf{L}_y^T \mathbf{R}_K \quad . \tag{14.84}$$

Vergleich mit der Zuordnung (14.70) ergibt

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\mu}{2} - \left(\mathbf{y}'\right)^2\right] = \frac{\alpha^2}{4} \quad , \tag{14.85}$$

wobei der Energieparameter α^2, genau wie im in Abschnitt 13.5 behandelten Fall der gestörten Zweikörperbewegung in universalen Koordinaten, als Variable aufgefasst werden muss. Die Bewegungsgleichung der gestörten Zweikörperbewegung im *Levi-Cività* Parameterraum lautet dann

$$\mathbf{y}'' + \frac{\alpha^2}{4}\mathbf{y} = \frac{r\mathbf{L}_y^T}{2}\mathbf{R}_K \quad . \tag{14.86}$$

14.5 KS-Parameterraum

Eine Erweiterung der *Vieta*schen Identität führt auf die *Euler*sche Identität, die sich durch wiederholte Anwendung der *Vieta*schen Identität gewinnen lässt[2]:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 \sum_{i=1}^{4} z_i^2 \quad . \tag{14.87}$$

Hier gilt im Einzelnen:

[1] die im vorliegenden Abschnitt gewählte Herleitung folgt STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971], Abschnitt 8, in Vorbereitung der analogen Untersuchungen im räumlichen Fall mit Hilfe der *KS*-Transformation

[2] O. VOLK [1981], H. J. VOLLRATH [1990], p. 617

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 + y_4 z_4 = \sum_{i=1}^{4} y_i z_i \\
x_2 &= y_1 z_2 - y_2 z_1 - y_3 z_4 + y_4 z_3 \\
x_3 &= y_1 z_3 + y_2 z_4 - y_3 z_1 - y_4 z_2 \\
x_4 &= y_1 z_4 - y_2 z_3 + y_3 z_2 - y_4 z_1
\end{aligned}
\tag{14.88}
$$

Der Spezialfall

$$
y_1 = z_1 \ , \ y_2 = -z_2 \ , \ y_3 = -z_3 \ , \ y_4 = z_4 \tag{14.89}
$$

führt auf die *KS-Transformation*[1]

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + y_4^2 \\
x_2 &= 2\left(y_1 y_2 + y_3 y_4\right) \\
x_3 &= 2\left(y_1 y_3 - y_2 y_4\right) \\
x_4 &= 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{14.90}
$$

Mit dieser Transformation kann der dreidimensionale „physikalische“ $\left(x_1, x_2, x_3\right)-$Raum in den vierdimensionalen $\left(y_1, y_2, y_3, y_4\right)-$Parameterraum übergeführt werden. Diese Transformation erfüllt die Bedingung für den Bahnradius

$$
r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \quad . \tag{14.91}
$$

Diese Bedingung kann mit einer Transformation in einen dreidimensionalen Parameterraum nicht erfüllt werden, da die *Euler*sche Identität in diesem Fall nicht möglich ist.

Der Spezialfall $y_3 = y_4 = 0$ ergibt die *Levi-Cività* Transformation. Die *KS* Transformation kann somit als eine Verallgemeinerung der *Levi-Cività* Transformation aufgefasst werden.

Die *KS*-Transformation kann mit der *KS*-Matrix

$$
\mathbf{L}_y := \begin{pmatrix}
y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\
y_2 & y_1 & -y_4 & -y_3 \\
y_3 & y_4 & y_1 & y_2 \\
y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1
\end{pmatrix}
\tag{14.92}
$$

formuliert werden. Es seien

$$
\mathbf{r} := x^i \mathbf{p}_i \quad \left\langle \left(i = 1,2,3,4, \ \ x_4 \equiv 0\right) \right. \quad , \quad \mathbf{y} := y^j \mathbf{q}_j^{(KS)} \quad \left\langle \left(j = 1,2,3,4\right) \right. \quad . \tag{14.93}
$$

Die Vektoren **y** können als Vierervektoren im vierdimensionalen *KS*-Parameterraum gedeutet werden. Es kann wie im Fall der *Levi-Cività* Transformation formuliert werden:

$$
\mathbf{r} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\
y_2 & y_1 & -y_4 & -y_3 \\
y_3 & y_4 & y_1 & y_2 \\
y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{L}_y \, \mathbf{y} \quad . \tag{14.94}
$$

[1] Siehe Abschnitt 2.7.28 (Band I), auch Abschnitt 2.6.4, sowie Abschnitt 2.7.27

Diese formale Erweiterung der *Levi Cività* Transformation war für *E. Stiefel* vermutlich der Grund für die Wahl der Matrizenschreibweise bei der Herleitung der Eigenschaften der *KS* Transformation. Es gelten unverändert formal die Beziehungen

$$\mathbf{L}_y^T \cdot \mathbf{L}_y = r^2\,\mathbf{E} = (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})\mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{L}_y^{-1} = \frac{1}{r}\mathbf{L}_y^T \quad , \quad \mathbf{L}'_y = \mathbf{L}_{y'} \quad . \tag{14.95}$$

Die Beziehung (14.56)

$$\mathbf{L}_y\,\mathbf{z} = \mathbf{L}_z\,\mathbf{y} \quad , \tag{14.96}$$

kann im vierdimensionalen KS Parameterraum allerdings nur dann bestehen, wenn die Bilinearform

$$y_4\,z_1 - y_3\,z_2 + y_2\,z_3 - y_1\,z_4 = 0 \tag{14.97}$$

erfüllt ist[1]. In diesem (und nur in diesem) Fall ist auch die Beziehung (14.59)

$$\mathbf{y}^2\,\mathbf{L}_z\,\mathbf{z} + \mathbf{z}^2\,\mathbf{L}_y\,\mathbf{y} = 2(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})\mathbf{L}_y\,\mathbf{z} \tag{14.98}$$

gültig. Auch die Bewegungsgleichung (14.86) für den Fall einer gestörten Zweikörperbewegung gilt im *KS*-Parameterraum:

$$\mathbf{y}'' + \frac{1}{r}\left[\frac{\mu}{2} - (\mathbf{y}')^2\right]\mathbf{y} = \mathbf{y}'' + \frac{\alpha^2}{4}\mathbf{y} = \frac{r\,\mathbf{L}_y^T}{2}\mathbf{R}_K \quad . \tag{14.99}$$

Dabei erfüllt die rechte Seite mit

$$\mathbf{Q} := Q^j\,\mathbf{q}_j^{(KS)} = \frac{r\,\mathbf{L}_y^T}{2}\mathbf{R}_K \tag{14.100}$$

die Bilinearform (14.97)

$$y_4\,Q_1 - y_3\,Q_2 + y_2\,Q_3 - y_1\,Q_4 = 0 \ . \tag{14.101}$$

Weitere detaillierte Untersuchungen des KS-Parameterraumes können in STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971] nachgelesen werden.

Anmerkung: Wird $y^j\,y_j = 1$ gesetzt (j=1, 2, 3, 4), so nimmt die Determinante der KS Matrix den Wert -1 an.

14.6 Quaternionen Räume

Wie die Elemente des *KS*-Parameterraumes können auch Quaternionen als Vierervektoren im vierdimensionalen Quaternionenraum dargestellt werden. Seien

$$\mathbf{u} = u^j\,\mathbf{q}_j^{(QR)} \ , \ \mathbf{y} = y^j\mathbf{q}_j^{(QR)} \ , \quad \mathbf{z} = z^j\,\mathbf{q}_j^{(QR)} \quad \langle\, j = 1,2,3,4 \tag{14.102}$$

Elemente des $\mathbf{q}_j^{(QR)}$ – Quaternionenraumes, so kann das Produkt $\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}$ mit Hilfe der Quaternionen-Matrix dargestellt werden:

[1] Theorem 1 in STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971], Abschnitt 9 (p. 25)

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_4 & -y_3 & y_2 & y_1 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & y_2 \\ -y_2 & y_1 & y_4 & y_3 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \quad . \tag{14.103}$$

Wird (wie im Vergleich mit KS-Parameterräumen) $y^j\, y_j = 1$ gesetzt, so zeigt sich, dass die Quaternionen Matrix die Determinante +1 hat. Quaternionen erfüllen die *Euler*sche Identität (14.87), wodurch sich eine enge Verwandtschaft zu den Elementen eines *KS*-Parameterraumes ergibt. Allerdings wäre es ungeschickt und fehleranfällig den Formalismus einer *KS*-Transformation durch Quaternionen zu ersetzen[1]. Quaternionen werden vorzugsweise verwendet um Rotationen singularitätenfrei zu beschreiben[2]. Anwendungen finden sich vor allem im Rahmen der Lageberechnung von Satelliten.

14.7 Phasenräume

Als Phasenräume oder Zustandsräume werden Koordinatensysteme bezeichnet, in denen die Zustandsvariablen als Koordinaten verwendet werden[3]. Phasenräume können endlich oder unendlich-dimensional sein. Phasenräume können zur Untersuchung einer Systemdynamik eingesetzt werden. Im Rahmen der Astrodynamik ist ein solcher Phasenraum 6-dimensional. Seine Elemente sind die 6-dimensionalen Zustandsvektoren. Die Kurven durch die Punkte eines Phasenraumes werden als Trajektorien bezeichnet. Sie können im Fall höherdimensionaler Phasenräume nicht bildnerisch erfasst werden. Jedoch können etwa die Durchstoßpunkte durch Schnittebenen, die als *Poincaré*-Schnitte bezeichnet werden, dargestellt werden.

Einfachster Fall eines Phasenraumes ist die Darstellung einer Geschwindigkeitskomponente über einer Längenkoordinate. In Bild 14-9 wird die Geschwindigkeit längs einer Satellitenbahn über dem Bahnwinkel dieser Bahn gezeichnet.

---

[1] STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971], pp. 285-286

[2] Siehe in den Abschnitten 6.3.9 und 6.3.10 (Band II), ergänzend auch 2.6.4, 2.7.8 und 2.7.9 (Band I)

[3] Siehe hierzu etwa die allgemeinen im Rahmen einer Einführung in die Chaostheorie gegebenen Definitionen in BRONSTEIN, I. N. et al. [1993], p. 539

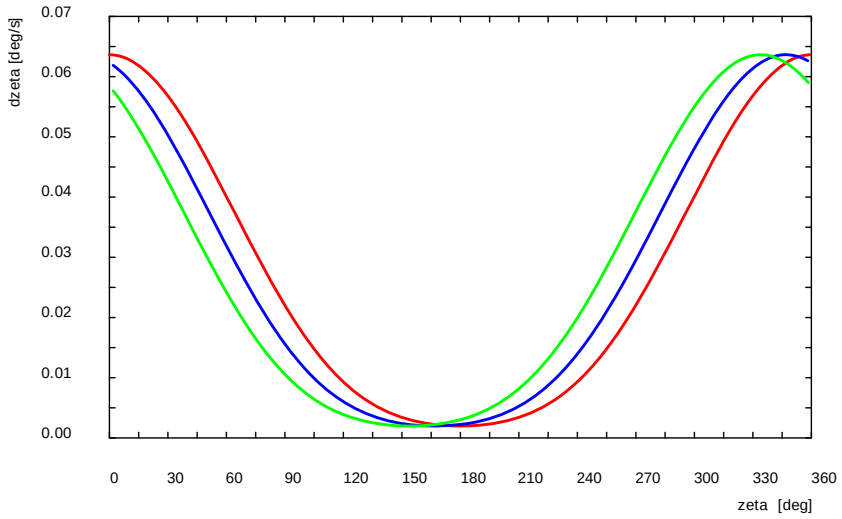


Bild 14-9: Einfaches Beispiel eines Phasenraumes: Variation des (*Hansen*schen) Bahnwinkels $\dot{\zeta}$ über dem Bahnwinkel ζ, Bahn: a = 27298 km, e = 0.7, i = 80°. Die Kurven sind an drei verschiedenen Zeitpunkten im Abstand von je drei Monaten gezeichnet, Verschiebung längs der Bahn in Bezug auf den Ursprung des *Hansen*-Systems, verursacht als Folge der „Störungen“ des Zweikörpersystems infolge der Abplattung der Erde (Apsidendrehung)

15 Partial- und Variationsausdrücke

Die Partialausdrücke stellen die Abhängigkeiten beliebiger bahnmechanischer Größen von beliebigen anderen bahnmechanischen Größen im Rahmen einer gewissen Genauigkeitsordnung dar. Sie werden durch partielle Differentiation gebildet. Die zugehörenden totalen Differentiale führen letztlich auf Variationsgleichungen, wie sie etwa in Kapitel 11 hergeleitet werden.

Die Partialausdrücke werden im vorliegenden Kapitel systematisch zusammengestellt, auch wenn es prinzipiell nicht möglich aber auch nicht sinnvoll ist, derartige Ausdrücke erschöpfend darzustellen. In den Entwicklungen der späteren Kapitel wird auf die Partialausdrücke soweit möglich direkt zurückgegriffen oder werden diese bei speziellem Bedarf weitergeführt.Formelabschnitt 15

Die Partialausdrücke werden im Rahmen der Satellitenbewegung benötigt etwa[1]

1. zur Transformation bahnmechanischer Größen auf verschiedenartige Variable,
2. zur Herleitung von Bewegungsgleichungen,
3. für Genauigkeitsabschätzungen durch Untersuchung der Fehlerfortpflanzung, die auf Grund von fehlerhaften Angaben (Messfehler, systematische Fehler, Fehlerrauschen) erforderlich werden,
4. zur Berechnung gewisser bahnmechanischer Größen durch Iteration mit sukzessiver Approximation, etwa für gewisse Aufgaben der Bahnauswahl (siehe etwa in Band III b). Hier kann durch bewusste Variation der Bahnparameter ein Überblick über geeignete Bahnen erhalten werden, die für eine gewisse Aufgabenstellung geeignet sein können,
5. zur Abschätzung nicht direkt erfassbarer „Störungen“, die ein gegebenes Bahnmodell modifizieren können.

15.1 Anmerkung zur Schreibweise der Partialausdrücke

Wenn eine Funktion $f(x_i)$ als Funktion der unabhängigen Variablen x_i gegeben ist, kann ihre vollständige Variation in Form des totalen Differentials

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{15.1}$$

dargestellt werden. Für Anwendungen wird das totale Differential durch den Differenzenausdruck

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \tag{15.2}$$

[11] Siehe hierzu auch die Ausführungen in H. G. WALTER [1972]

ersetzt. Es kann sein, dass die gegebene Funktion auch als von Variablen y_j abhängig dargestellt wird, wobei die neuen Variablen Funktionen der alten sein können. Es gibt also die Darstellung für die vollständige Variation der Funktion f in Abhängigkeit von den neuen Variablen

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} \Delta y_j \quad , \tag{15.3}$$

wobei die differentiellen Beziehungen

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \Delta y_j \qquad \langle i = 1,...,n \tag{15.4}$$

bestehen. Um mögliche Unstimmigkeiten zu vermeiden, ist es in einem solchen Fall empfehlenswert zu vermerken, auf welchen Variablensatz die Bildung von partiellen Differentialausdrücken bezogen wird. So sollte beispielweise die folgende Schreibweise gewählt werden:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(x_i)} \Delta x_i = \sum_{j=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|_{(y_j)} \Delta y_j \quad . \tag{15.5}$$

Mit

$$\frac{\partial x_i\left(y_j\right)}{\partial y_j} = \left.\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|_{(y_j)} \tag{15.6}$$

kann etwa folgende Darstellung möglich sein:

$$\Delta f = \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_i)} \left.\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right|_{(y_j)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_i)} \left.\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right|_{(y_j)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_i)} \left.\frac{\partial x_1}{\partial y_3}\right|_{(y_j)} + \cdots \right] \Delta y_1 + \quad \cdots \quad . \tag{15.7}$$

Vergleich mit der Darstellung (15.3) ergibt

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(y_j)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_i)} \left.\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right|_{(y_j)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_i)} \left.\frac{\partial x_1}{\partial y_2}\right|_{(y_j)} + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_i)} \left.\frac{\partial x_1}{\partial y_3}\right|_{(y_j)} + \cdots \tag{15.8}$$

Die Produktregel der Differentiation ist also nur dann erlaubt, wenn die Partialausdrücke auf dieselben unabhängigen Variablen bezogen sind. Auf die Kennung eines Partialausdruckes kann somit nur dann verzichtet werden, wenn aus der Problemumgebung ein eindeutiger Bezug zu erkennen ist.

Im Rahmen der Satellitenbahnmechanik sind viele Bezüge zwischen Variablen nur implizit gegeben, so dass die Regel (15.8) zum Einsatz kommen muss. Das Prinzip wird erläutert an folgendem einfachen

BEISPIEL: Der Bahnradius einer elliptischen *Kepler*bewegung kann in den beiden Darstellungen

$$r = r\left(a,e,\upsilon\right) = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\upsilon} = r\left(a,e,E\right) = a\left(1-e\cos E\right) \tag{15.9}$$

gegeben werden. Die Variation lautet bei Bezug auf die wahre Anomalie υ

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial r}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial r}{\partial \upsilon}\Delta \upsilon \tag{15.10}$$

bzw. bei Bezug auf die exzentrische Anomalie E

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial r}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial r}{\partial E}\Delta E \quad . \tag{15.11}$$

In beiden Fällen ist die partielle Differentiation nach der großen Bahnhalbachse gleich. Man kann also schreiben

$$\left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)} = \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,E)} = \frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a} \quad . \tag{15.12}$$

Dagegen sind die Variationen des Bahnradius nach der Exzentrizität in den beiden Fällen unterschiedlich. Es gilt also

$$\left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} \neq \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,E)} \quad . \tag{15.13}$$

Dies lässt sich folgendermaßen überprüfen: Die Beziehung zwischen der wahren und der exzentrischen Anomalie ist nach den Beziehungen (15.9) gegeben durch

$$1 + e\,\cos\upsilon = \frac{1-e^2}{1-e\cos E} \quad . \tag{15.14}$$

Somit besteht zwischen den beiden Anomalien die differentielle Beziehung

$$\Delta\upsilon = \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,E)} \Delta e + \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)} \Delta E \quad . \tag{15.15}$$

Vergleich mit dem Differential (15.11) ergibt in diesem Zusammenhang in ausführlichen Darstellungen

$$\left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,E)} = \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} + \left.\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,E)} \quad , \quad \left.\frac{\partial r}{\partial E}\right|_{(a,e,E)} = \left.\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)} \quad . \tag{15.16}$$

Im Einzelnen folgen aus den Beziehungen (15.9)

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} &= \frac{e\,r^2\sin\upsilon}{p} = \frac{\dot r\, r^2}{G} = \left.\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(r,\dot r,G)} \quad , \\
\left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} &= -\frac{a\left(2e + e^2\cos\upsilon + \cos\upsilon\right)}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} \quad , \\
\left.\frac{\partial r}{\partial p}\right|_{(p,e,\upsilon)} &= \frac{1}{1+e\cos\upsilon} = \frac{r}{p} \quad ,
\end{aligned} \tag{15.17}$$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,E)} = -a\cos E = -\frac{a\left(\cos\upsilon + e\right)}{1+e\cos\upsilon} \quad ,$$
$$\left.\frac{\partial r}{\partial E}\right|_{(a,e,E)} = a\,e\sin E \quad . \tag{15.18}$$

15.2 Differentielle Beziehungen der Anomalien

15.2.1 Variationen von *v* nach *e* und *E*

Aus einer der *Kepler*-Formeln **(10.24)**

$$\cos\upsilon = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E} \quad , \quad \sin\upsilon = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} \tag{15.19}$$

folgen

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,E)} = \frac{\sin E}{\sqrt{1-e^2}\left(1-e\cos E\right)} = \frac{\sin\upsilon}{1-e^2} = \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)}$$
$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} = \frac{1+e\cos\upsilon}{\sqrt{1-e^2}} = \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial E}\right|_{(e,\upsilon)} \quad . \tag{15.20}$$

Mit diesen Partialausdrücken können etwa die Formeln (15.16) bestätigt werden. Die differentielle Beziehung zwischen der wahren und der exzentrischen Anomalie wurde in der Beziehung (15.15)

$$\Delta\upsilon = \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,E)} \Delta e + \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)} \Delta E \quad . \tag{15.21}$$

dargestellt. Mit den Partialausdrücken (15.20) gilt

$$\Delta\upsilon = \frac{\sin\upsilon}{1-e^2}\Delta e + \frac{1+e\cos\upsilon}{\sqrt{1-e^2}}\Delta E = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\left(\Delta e + \frac{\sin E}{1-e^2}\Delta E\right) \quad . \tag{15.22}$$

15.2.2 Variationen von *E* nach *e* und *v*

Für die Umkehrung der Beziehung (15.22)

$$\Delta E = \left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)} \Delta e + \left.\frac{\partial E}{\partial \upsilon}\right|_{(e,\upsilon)} \Delta\upsilon \tag{15.23}$$

können aus den umgekehrten *Kepler*-Formeln

$$\cos E = \frac{\cos\upsilon + e}{1+e\,\cos\upsilon} \quad , \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1+e\cos\upsilon} \tag{15.24}$$

die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)} = -\frac{\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}\,(1+e\cos\upsilon)} = -\frac{\sin E}{1-e^2}$$
$$\left.\frac{\partial E}{\partial \upsilon}\right|_{(e,\upsilon)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\upsilon} = \frac{1-e\cos E}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)}} \tag{15.25}$$

gebildet werden. Dies ergibt (wie auch direkt aus (15.22) zu ersehen ist)

$$\Delta E = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\upsilon}\left[-\frac{\sin\upsilon}{1-e^2}\Delta e + \Delta\upsilon\right] \quad . \tag{15.26}$$

15.2.3 Variationen von *E* nach *e* und *M*

Bezug der exzentrischen auf die mittlere Anomalie mit Hilfe der *Kepler*-Gleichung

$$M = E - e\sin E \tag{15.27}$$

kann mit Hilfe des Ansatzes

$$\Delta E = \left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,M)} \Delta e + \left.\frac{\partial E}{\partial M}\right|_{(e,M)} \Delta M \tag{15.28}$$

erhalten werden. Dazu werden aus Gleichung (15.27) die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,M)} = \frac{\sin E}{1-e\cos E} = \frac{\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$\left.\frac{\partial E}{\partial M}\right|_{(e,M)} = \frac{1}{1-e\cos E} = \frac{1+e\cos\upsilon}{1-e^2} \tag{15.29}$$

hergeleitet und es wird

$$\Delta E = \frac{1}{1-e\cos E}\left[\sin E\ \Delta e + \Delta M\right] = \frac{\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}}\ \Delta e + \frac{1+e\cos\upsilon}{1-e^2}\ \Delta M \quad . \tag{15.30}$$

15.2.4 Variationen von *M* nach *e* und *E*

Für die Umkehrung von Beziehung (15.30)

$$\Delta M = \left.\frac{\partial M}{\partial e}\right|_{(e,E)} \Delta e + \left.\frac{\partial M}{\partial E}\right|_{(e,E)} \Delta E \tag{15.31}$$

wird mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial M}{\partial e}\right|_{(e,E)} = -\sin E = -\frac{\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1+e\cos\upsilon}$$
$$\left.\frac{\partial M}{\partial E}\right|_{(e,E)} = 1-e\cos E = \frac{1-e^2}{1+e\cos\upsilon} = \frac{1}{\left.\frac{\partial E}{\partial M}\right|_{(e,M)}} \qquad (15.32)$$

oder direkt aus (15.30) erhalten

$$\Delta M = -\sin E\,\Delta e + \left(1-e\cos E\right)\Delta E = -\frac{\sqrt{1-e^2}\sin\upsilon}{1+e\cos\upsilon}\Delta e + \frac{1-e^2}{1+e\cos\upsilon}\Delta E \quad . \qquad (15.33)$$

15.2.5 Variation der mittleren Anomalie nach Anfangswerten

Die mittlere Anomalie stellt den Zusammenhang einer Bewegung mit der Zeit dar

$$M = M_0 + n\left(t-t_0\right) \quad , \qquad (15.34)$$

wobei M_0 die mittlere Anomalie zu einem Anfangszeitpunkt t_0 und n die mittlere Bewegung sei. Die entsprechenden Partialausdrücke sind

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial n} = t-t_0 \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial t} = n \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial t_0} = -n \quad . \qquad (15.35)$$

Die Gesamtvariation lautet

$$\Delta M = \Delta M_0 + \left(t-t_0\right)\Delta n + n\,\Delta t - n\,\Delta t_0 \quad . \qquad (15.36)$$

15.2.6 Variationen von *v* nach *e* und *M*

Mit den vorstehenden Ausdrücken kann auch die differentielle Beziehung zwischen der wahren und der mittleren Anomalie hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\Delta\upsilon = &\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)}\Delta e + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M \quad = \\ = &\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,E)}\Delta e + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)}\Delta E \quad = \\ = &\left[\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,E)} + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)}\left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,M)}\right]\Delta e + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)}\left.\frac{\partial E}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M \quad .\end{aligned} \qquad (15.37)$$

Mit den entsprechenden Partialausdrücken (15.20) und (15.29) folgen

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} = \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,E)} + \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)} \left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,M)} = \frac{\sin\upsilon\left(2+e\,\cos\upsilon\right)}{1-e^2}$$
$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)} = \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)} \left.\frac{\partial E}{\partial M}\right|_{(e,M)} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\left(1-e\cos E\right)^2} = \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{\sqrt{1-e^2}^3} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} \tag{15.38}$$

und damit

$$\Delta\upsilon = \frac{\sin\upsilon\left(2+e\cos\upsilon\right)}{1-e^2}\Delta e + \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{\sqrt{1-e^2}^3}\,\Delta M \quad . \tag{15.39}$$

15.2.7 Variationen von *M* nach *e* und *v*

Für die Umkehrung von Beziehung (15.39) mit Hilfe der Beziehungen (15.28) bzw. (15.30)

$$\begin{aligned}\Delta M &= \left.\frac{\partial M}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)} \Delta e + \left.\frac{\partial M}{\partial \upsilon}\right|_{(e,\upsilon)} \Delta\upsilon \;= \\ &= \left.\frac{\partial M}{\partial e}\right|_{(e,E)} \Delta e + \left.\frac{\partial M}{\partial E}\right|_{(e,E)} \Delta E \;= \\ &= \left[\left.\frac{\partial M}{\partial e}\right|_{(e,E)} + \left.\frac{\partial M}{\partial E}\right|_{(e,E)} \left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)}\right]\Delta e \;+ \left.\frac{\partial M}{\partial E}\right|_{(e,E)} \left.\frac{\partial E}{\partial \upsilon}\right|_{(e,\upsilon)} \Delta\upsilon\end{aligned} \tag{15.40}$$

wird mit den Partialausdrücken (15.25) und (15.32)

$$\left.\frac{\partial M}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)} = -\frac{\sin E\left(2-e\cos E-e^2\right)}{1-e^2} = -\frac{\sin\upsilon\left(2+e\cos\upsilon\right)\sqrt{1-e^2}}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} = -\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial M}{\partial \upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}$$
$$\left.\frac{\partial M}{\partial \upsilon}\right|_{(e,\upsilon)} = \frac{\left(1-e\cos E\right)^2}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{\sqrt{1-e^2}^3}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)}} \tag{15.41}$$

und es bleibt

$$\Delta M = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}\left[-\sin\upsilon\left(2+e\cos\upsilon\right)\,\Delta e + \left(1-e^2\right)\,\Delta\upsilon\right] \quad . \tag{15.42}$$

Anmerkung: Bei der Umkehrung der vollständigen Differentiale kann häufig direkt ohne die Berechnung neuer Partialausdrücke gegangen werden. Jedoch ist es sinnvoll, die hier vorkommenden Partialausdrücke separat zu berechnen, um sie für spätere Anwendungen zur Verfügung zu haben. Andererseits können mit der unabhängigen Berechnung eines Umkehrausdrucks vor allem bei komplizierten Ausdrücken Fehlerquellen entdeckt werden.

15.2.8 Variationen der Exzentrizität *e* nach den Anomalien

Aus der *Kepler*-Gleichung (15.27) folgt die Abhängigkeit

$$\Delta e = \left.\frac{\partial e}{\partial E}\right|_{(E,M)} \Delta E + \left.\frac{\partial e}{\partial M}\right|_{(E,M)} \Delta M \tag{15.43}$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial e}{\partial E}\right|_{(E,M)} &= \frac{1-e\cos E}{\sin E} \\ \left.\frac{\partial e}{\partial M}\right|_{(E,M)} &= -\frac{1}{\sin E} \quad , \end{aligned} \tag{15.44}$$

somit

$$\Delta e = \frac{1}{\sin E}\left[\,\left(1-e\cos E\right)\Delta E - \Delta M\,\right] \quad . \tag{15.45}$$

Die Variation der Exzentrizität nach der wahren und der exzentrischen Anomalie

$$\Delta e = \left.\frac{\partial e}{\partial \upsilon}\right|_{(\upsilon,E)} \Delta \upsilon + \left.\frac{\partial e}{\partial E}\right|_{(\upsilon,E)} \Delta E \tag{15.46}$$

kann mit Hilfe einer der *Kepler*-Formeln (15.19) erhalten werden:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial e}{\partial \upsilon}\right|_{(\upsilon,E)} &= \frac{1-e^2}{\sin\upsilon} = \frac{1}{\left.\dfrac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)}} \\ \left.\frac{\partial e}{\partial E}\right|_{(\upsilon,E)} &= -\frac{1-e^2}{\sin E} = \frac{1}{\left.\dfrac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)}} \end{aligned} \tag{15.47}$$

Somit ergibt sich

$$\Delta e = \left(1-e^2\right)\left[\frac{1}{\sin\upsilon}\Delta\upsilon - \frac{1}{\sin E}\Delta E\,\right] = \frac{1}{\sin\upsilon}\left[\left(1-e^2\right)\Delta\upsilon - \sqrt{1-e^2}\,\left(1+e\cos\upsilon\right)\Delta E\right] \quad . \tag{15.48}$$

Anmerkung: Die vorstehenden Formeln sind wegen möglicher Singularitäten nur mit Vorsicht zu verwenden.

15.2.9 Variationen von (*e* cos*v*, *e* sin*v*) nach (*e* cos*E*, *e* cos*E*)

Mit den *Kepler*-Formeln (15.19) in der Gestalt

$$e\cos\upsilon = \frac{e\cos E - e^2}{1-e\cos E} \quad , \quad e\sin\upsilon = \frac{\sqrt{1-e^2}\,e\sin E}{1-e\cos E} \tag{15.49}$$

können die Variationen erhalten werden

$$\begin{aligned}
\Delta(e\cos\upsilon) &= \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} \Delta(e\cos E) + \\
&+ \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} \Delta(e\sin E) + \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} \Delta(e^2) \\
\Delta(e\sin\upsilon) &= \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} \Delta(e\cos E) + \\
&+ \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} \Delta(e\sin E) + \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} \Delta(e^2).
\end{aligned} \tag{15.50}$$

Es folgen die Partialausdrücke

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} &= \frac{1-e^2}{(1-e\cos E)^2} = \frac{a^2(1-e^2)}{r^2} \\
\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} &= 0 \\
\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} &= -\frac{1}{1-e\cos E} = -\frac{a}{r} \\
\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} &= \frac{e\sin E\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2} = \frac{a\,e\sin\upsilon}{r} \\
\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{r} \\
\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\cos E, e\sin E, e^2)} &= -\frac{e\sin E}{2\sqrt{1-e^2}(1-e\cos E)} = -\frac{e\sin\upsilon}{2(1-e^2)}
\end{aligned} \tag{15.51}$$

$$\tag{15.52}$$

somit

$$\begin{aligned}
\Delta\left(e\cos\upsilon\right) &= \frac{1-e^2}{\left(1-e\cos E\right)^2}\Delta\left(e\cos E\right) \qquad -\frac{1}{1-e\cos E}\Delta\left(e^2\right)\\
\Delta\left(e\sin\upsilon\right) &= \frac{e\sin E\ \sqrt{1-e^2}}{\left(1-e\cos E\right)^2}\Delta\left(e\cos E\right)\ + \qquad\qquad (15.53)\\
&\quad +\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\Delta\left(e\sin E\right)-\frac{e\ \sin E}{2\sqrt{1-e^2}\left(1-e\cos E\right)}\Delta\left(e^2\right).
\end{aligned}$$

Die Umkehrung lautet allgemein

$$\begin{aligned}
\Delta\left(e\cos E\right) &= \left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta\left(e\ \cos\upsilon\right)+\\
&\quad +\left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta\left(e\ \sin\upsilon\right)+\left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta\left(e^2\right)\\
\Delta\left(e\sin E\right) &= \left.\frac{\partial\left(e\sin E\right)}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta\left(e\ \cos\upsilon\right)+\\
&\quad +\left.\frac{\partial\left(e\sin E\right)}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta\left(e\ \sin\upsilon\right)+\left.\frac{\partial\left(e\sin E\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta\left(e^2\right)
\end{aligned} \qquad (15.54)$$

somit

$$\begin{aligned}
\Delta\left(e\cos E\right) &= \frac{\left(1-e\cos E\right)^2}{1-e^2}\Delta\left(e\ \cos\upsilon\right)+\frac{1-e\cos E}{1-e^2}\Delta\left(e^2\right)\\
\Delta\left(e\sin E\right) &= -\frac{e\ \sin E\left(1-e\cos E\right)}{1-e^2}\Delta\left(e\ \cos\upsilon\right)+\frac{1-e\cos E}{\sqrt{1-e^2}}\Delta\left(e\ \sin\upsilon\right)-\frac{e\ \sin E}{2\left(1-e^2\right)}\Delta\left(e^2\right)
\end{aligned} \qquad (15.55)$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)} &= \frac{\left(1-e\ \cos E\right)^2}{1-e^2}\\
\left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)} &= 0 \qquad\qquad (15.56)\\
\left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(e\cos\upsilon,e\sin\upsilon,e^2\right)} &= \frac{1-e\ \cos E}{1-e^2}
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{(e\cos\upsilon,\,e\sin\upsilon,\,e^2)} = -\frac{e\sin E\,(1-e\cos E)}{1-e^2}$$

$$\left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\sin\upsilon)}\right|_{(e\cos\upsilon,\,e\sin\upsilon,\,e^2)} = \frac{1-e\cos E}{\sqrt{1-e^2}} \qquad (15.57)$$

$$\left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\cos\upsilon,\,e\sin\upsilon,\,e^2)} = \frac{e\,\sin E}{2(1-e^2)} \quad .$$

15.2.10 Variationen von *v* und *e* nach (*e*sin*v*), (*e*cos*v*)

Mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)} = \sin\upsilon$$

$$\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)} = e\cos\upsilon \qquad (15.58)$$

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)} = \cos\upsilon$$

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)} = -e\sin\upsilon \qquad (15.59)$$

und den allgemeinen Beziehungen

$$\Delta(e\cos\upsilon) = \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)}\Delta e + \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}\Delta\upsilon = \cos\upsilon\,\Delta e - e\sin\upsilon\,\Delta\upsilon$$

$$\Delta(e\sin\upsilon) = \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)}\Delta e + \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}\Delta\upsilon = \sin\upsilon\,\Delta e + e\cos\upsilon\,\Delta\upsilon \qquad (15.60)$$

folgt die differentielle Beziehung

$$e\,\Delta\upsilon = \cos\upsilon\;\Delta(e\sin\upsilon) - \sin\upsilon\;\Delta(e\cos\upsilon) \qquad (15.61)$$

bzw. in allgemeiner Schreibweise

$$\Delta\upsilon = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial(e\sin\upsilon)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)}\Delta(e\sin\upsilon) + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)}\Delta(e\cos\upsilon) \qquad (15.62)$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon\right)} = \frac{\cos\upsilon}{e} \quad \langle e>0$$
$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon\right)} = -\frac{\sin\upsilon}{e} \quad \langle e>0 \quad . \tag{15.63}$$

In gleicher Weise kann auch eine Variation der Exzentrizität nach den Parametern $\left(e\cos\upsilon, e\sin\upsilon\right)$ erhalten werden:

$$\Delta e = \cos\upsilon\ \Delta\left(e\cos\upsilon\right) + \sin\upsilon\ \Delta\left(e\sin\upsilon\right) \tag{15.64}$$

bzw. in allgemeiner Schreibweise

$$\Delta e = \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon\right)} \Delta\left(e\sin\upsilon\right) + \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon\right)} \Delta\left(e\cos\upsilon\right) \tag{15.65}$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon\right)} = \sin\upsilon$$
$$\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon\right)} = \cos\upsilon \quad . \tag{15.66}$$

15.2.11 Variationen von (*e* cos*E*, *e* sin*E*) nach (*e* sin*M*) und (*e* cos*M*)

Aus der Beziehung

$$e^2 = \left(e\sin M\right)^2 + \left(e\ \cos M\right)^2 \tag{15.67}$$

ergeben sich die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial\left(e^2\right)}{\partial\left(e\ \sin M\right)}\right|_{\left(e\sin M,e\cos M\right)} = 2\left(e\sin M\right)$$
$$\left.\frac{\partial\left(e^2\right)}{\partial\left(e\ \cos M\right)}\right|_{\left(e\sin M,e\cos M\right)} = 2\left(e\cos M\right) \tag{15.68}$$

Die Variation des Quadrates der Exzentrizität

$$\Delta\left(e^2\right) = \left.\frac{\partial\left(e^2\right)}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{\left(e\sin M,e\cos M\right)} \Delta\left(e\sin M\right) + \left.\frac{\partial\left(e^2\right)}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{\left(e\sin M,e\cos M\right)} \Delta\left(e\cos M\right) \tag{15.69}$$

lautet somit

$$\Delta\left(e^2\right)=2\left[e\sin M\ \Delta\left(e\sin M\right)+e\cos M\ \Delta\left(e\cos M\right)\right]\quad . \tag{15.70}$$

Die Variation der Exzentrizität

$$\Delta e=\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta\left(e\sin M\right)+\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta\left(e\cos M\right) \tag{15.71}$$

ergibt sich mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\ \sin M\right)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}&=\sin M\\ \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\ \cos M\right)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}&=\cos M\end{aligned} \tag{15.72}$$

dagegen zu

$$\Delta e=\sin M\ \ \Delta\left(e\sin M\right)+\ \cos M\ \ \Delta\left(e\cos M\right)\quad . \tag{15.73}$$

Diese kann auch direkt aus den Beziehungen erhalten werden

$$\begin{aligned}\Delta\left(e\sin M\right)&=\left.\frac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}\Delta e+\left.\frac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M=\sin M\,\Delta e+e\cos M\ \ \Delta M\\ \Delta\left(e\cos M\right)&=\left.\frac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}\Delta e+\left.\frac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M=\cos M\,\Delta e-e\sin M\ \ \Delta M\quad ,\end{aligned} \tag{15.74}$$

woraus sich neben (15.73) auch die entsprechende Beziehung für die mittlere Anomalie ergibt:

$$e\,\Delta M\ \ =\ \cos M\ \ \Delta\left(e\sin M\right)-\sin M\,\Delta\left(e\cos M\right)\quad . \tag{15.75}$$

Mit der *Kepler*-Gleichung

$$M=E-e\sin E\qquad\text{bzw.}\quad e\sin E=E-M \tag{15.76}$$

ergibt sich unmittelbar

$$\Delta\left(e\sin E\right)=\left.\frac{\partial\left(e\sin E\right)}{\partial E}\right|_{(E,M)}\Delta E\ +\left.\frac{\partial\left(e\sin E\right)}{\partial M}\right|_{(E,M)}\Delta M=\Delta E-\Delta M\quad . \tag{15.77}$$

Hierfür kann ΔE aus der Beziehung (15.30) verwendet werden und $\Delta e,\Delta M$ aus (15.73) und (15.75) um die Abhängigkeit von den Variationen der $\left(e\sin M,e\cos M\right)$ zu erhalten. In elementarer Weise kann auch

$$\Delta\left(e\cos E\right)=\left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}\Delta e+\left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M \tag{15.78}$$

gebildet werden, wobei die benötigten Partialausdrücke in den Abschnitten 15.2.2 und 15.2.3 berechnet wurden. Mit den hier berechneten $\Delta e,\ e\,\Delta M$ erhält man die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial(e\cos E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} = -\frac{\sin(E-M)+e\,\sin M}{1-e\cos E}$$
$$\left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} = \frac{\cos(E-M)}{1-e\cos E}$$
$$\left.\frac{\partial(e\cos E)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} = \frac{\cos(E-M)-e\,\cos M}{1-e\cos E} \qquad (15.79)$$
$$\left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} = \frac{\sin(E-M)}{1-e\cos E} \quad .$$

Die vollständigen Variationen

$$\Delta(e\,\sin E) = \left.\frac{\partial(e\,\sin E)}{\partial(e\,\sin M)}\right|_{(e\,\sin M,e\,\cos M)} \Delta(e\,\sin M) + \left.\frac{\partial(e\,\sin E)}{\partial(e\,\cos M)}\right|_{(e\,\sin M,e\,\cos M)} \Delta(e\,\cos M)$$
$$\Delta(e\,\cos E) = \left.\frac{\partial(e\,\cos E)}{\partial(e\,\sin M)}\right|_{(e\,\sin M,e\,\cos M)} \Delta(e\,\sin M) + \left.\frac{\partial(e\,\cos E)}{\partial(e\,\cos M)}\right|_{(e\,\sin M,e\,\cos M)} \Delta(e\,\cos M) \qquad (15.80)$$

lauten somit

$$\Delta(e\,\sin E) = \frac{\cos(E-M)}{1-e\cos E}\,\Delta(e\,\sin M) + \frac{\sin(E-M)}{1-e\cos E}\,\Delta(e\,\cos M)$$
$$\Delta(e\,\cos E) = -\frac{\sin(E-M)+e\sin M}{1-e\cos E}\,\Delta(e\,\sin M) + \frac{\cos(E-M)-e\cos M}{1-e\cos E}\,\Delta(e\,\cos M)\,. \qquad (15.81)$$

Ferner können aus den *Kepler*-Formeln (15.24) die folgenden Formeln hergeleitet werden.

$$\frac{\sin(E-M)}{1-e\cos E} = \frac{\sin\upsilon\,\cos M}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{(\cos\upsilon+e)\sin M}{1-e^2}$$
$$\frac{\cos(E-M)}{1-e\cos E} = \frac{\sin\upsilon\,\sin M}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{(\cos\upsilon+e)\cos M}{1-e^2} \quad , \qquad (15.82)$$

womit die Beziehungen zur wahren Anomalie hergestellt werden können:

$$\left.\frac{\partial(e\cos E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\,\sin M,\,e\,\cos M)} = \cos\upsilon\sin M - \frac{\sin\upsilon\,\cos M}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$\left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\,\sin M,\,e\,\cos M)} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\sin\upsilon\sin M + \frac{\cos\upsilon\,\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\right] + \frac{e\,\cos M}{1-e^2} \qquad (15.83)$$

$$\left.\frac{\partial(e\cos E)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,\,e\cos M)} = \cos\upsilon\cos M + \frac{\sin\upsilon\,\sin M}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$\left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,\,e\cos M)} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left[\sin\upsilon\cos M - \frac{\cos\upsilon\,\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\right] - \frac{e\,\sin M}{1-e^2}\,. \tag{15.84}$$

15.2.12 Variationen von (*e* cos*v*, *e* sin*v*) nach (*e* sin*M)* und (*e* cos*M)*

Die differentiellen Beziehungen

$$\Delta(e\cos\upsilon) = \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\sin M) + \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\cos M)$$
$$\Delta(e\sin\upsilon) = \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\sin M) + \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\cos M) \tag{15.85}$$

werden zurückgeführt auf (15.50)

$$\begin{aligned}\Delta(e\cos\upsilon) &= \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\cos E,e\sin E,e^2)}\Delta(e\cos E) + \\ &+ \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\cos E,e\sin E,e^2)}\Delta(e\sin E) + \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\cos E,e\sin E,e^2)}\Delta(e^2)\\ \Delta(e\sin\upsilon) &= \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\cos E,e\sin E,e^2)}\Delta(e\cos E) + \\ &+ \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\cos E,e\sin E,e^2)}\Delta(e\sin E) + \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\cos E,e\sin E,e^2)}\Delta(e^2)\,.\end{aligned} \tag{15.86}$$

Mit den Variationen (15.80)

$$\Delta(e\,\sin E) = \left.\frac{\partial(e\,\sin E)}{\partial(e\,\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\,\sin M) + \left.\frac{\partial(e\,\sin E)}{\partial(e\,\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\,\cos M)$$
$$\Delta(e\,\cos E) = \left.\frac{\partial(e\,\cos E)}{\partial(e\,\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\,\sin M) + \left.\frac{\partial(e\,\cos E)}{\partial(e\,\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\,\cos M) \tag{15.87}$$

und (15.69)

$$\Delta(e^2) = \left.\frac{\partial(e^2)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\sin M) + \left.\frac{\partial(e^2)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)}\Delta(e\cos M) \tag{15.88}$$

ergeben sich die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} = \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e\cos E)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \\ + \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \\ + \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e^2)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} \tag{15.89}$$

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} = \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e\cos E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \\ + \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \\ + \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e^2)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} \tag{15.90}$$

$$\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} = \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e\cos E)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \\ + \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \\ + \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e^2)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} \tag{15.91}$$

$$\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} = \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\cos E)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e\cos E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \\ + \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\sin E)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e\sin E)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \\ + \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e^2)}\right|_{(e\sin E,e\cos E,e^2)} \left.\frac{\partial(e^2)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} \tag{15.92}$$

Werden hier die Ausdrücke (15.51), (15.52) und (15.79) eingesetzt, ergeben sich die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,\,e\cos M)} = \frac{(1-e^2)\cos(e\sin E)}{(1-e\cos E)^2} - \frac{2\,e\cos M}{1-e\cos E} =$$

$$= \frac{a^2(1-e^2)}{r^2}\left[\cos\upsilon\,\cos M + \frac{\sin\upsilon\,\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\right] - \frac{2ae\cos M}{r}$$

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,\,e\cos M)} = -\frac{(1-e^2)\sin(e\sin E)}{(1-e\cos E)^2} - \frac{2e\sin M}{1-e\cos E} = \tag{15.93}$$

$$= \frac{a^2(1-e^2)}{r^2}\left[\cos\upsilon\,\sin M - \frac{\sin\upsilon\,\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\right] - \frac{2ae\sin M}{r}$$

$$\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(e\sin M,\,e\cos M)} = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\left[e\sin E\,\cos(e\sin E)+\sin(e\sin E)\right]}{(1-e\cos E)^2} - \frac{e\sin E\,e\cos M}{\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos E)} =$$

$$= \frac{a^2(1-e^2)}{r^2}\left[\sin\upsilon\cos M - \frac{\cos\upsilon\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\right] - \frac{e\sin\upsilon\,e\cos M}{1-e^2} \tag{15.94}$$

$$\left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(e\sin M,\,e\cos M)} = \frac{-\sqrt{1-e^2}\,\left[e\sin E\,\sin(e\sin E)+\cos(e\sin E)\right]}{(1-e\cos E)^2} - \frac{e\sin E\,e\sin M}{\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos E)}$$

$$= \frac{a^2(1-e^2)}{r^2}\left[\sin\upsilon\sin M + \frac{\cos\upsilon\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\right] - \frac{e\sin\upsilon\,e\sin M}{1-e^2} \quad .$$

Diese Ausdrücke in (15.85) eingesetzt, ergeben die vollständigen Variationsausdrücke für $(e\cos\upsilon, e\sin\upsilon)$ nach den $(e\cos M, e\sin M)$.

Ergänzend werden die später benötigten Variationen $(e\cos\upsilon, e\sin\upsilon)$ im Rahmen eines Zweikörperproblems untersucht. Mit den Ausdrücken (11.14) und (11.16)

$$e\cos\upsilon = \frac{p}{r} - 1 = \frac{G^2 - \mu r}{\mu r} \quad , \quad e\sin\upsilon = \frac{\dot r G}{\mu} \tag{15.95}$$

folgen die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} = -\frac{G^2}{\mu r^2}$$

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial \dot r}\right|_{(r,\dot r,G)} = 0 \tag{15.96}$$

$$\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} = \frac{2G}{\mu r}$$

somit

$$\Delta\left(e\cos\upsilon\right)=\left.\frac{\partial\left(\cos\upsilon\right)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta r+\left.\frac{\partial\left(\cos\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta G=\frac{G}{\mu r}\left[-\frac{G}{r}\Delta r+2\Delta G\right] \quad . \quad (15.97)$$

Ferner wird

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial e\sin\upsilon}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)}&=0\\ \left.\frac{\partial e\sin\upsilon}{\partial \dot r}\right|_{(r,\dot r,G)}&=\frac{G}{\mu}\\ \left.\frac{\partial e\sin\upsilon}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)}&=\frac{\dot r}{\mu}\quad ,\end{aligned} \quad (15.98)$$

somit

$$\Delta\left(e\sin\upsilon\right)=\left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial \dot r}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta\dot r+\left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta G=\frac{1}{\mu}\left[G\,\Delta\dot r+\dot r\,\Delta G\right] \quad . \quad (15.99)$$

15.2.13 Variationen von (*e* sin*M)* und (*e* cos*M)* nach *e, v* und *M*

Zur Berechnung der differentiellen Beziehung der *Lyddane*-Parameter $\left(e\sin M, e\cos M\right)$ nach der wahren und der mittleren Anomalie, sowie der Exzentrizität nach den $\left(e\sin M, e\cos M\right)$ werden zunächst die Partialausdrücke

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}&=\sin M\\ \left.\frac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}&=e\cos M\end{aligned} \quad (15.100)$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}&=\cos M\\ \left.\frac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}&=-e\sin M\end{aligned} \quad (15.101)$$

benötigt. Mit den allgemeinen Beziehungen

$$\begin{aligned}\Delta\left(e\cos M\right)&=\left.\frac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}\Delta e+\left.\frac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M=\cos M\ \Delta e-e\sin M\ \Delta M\\ \Delta\left(e\sin M\right)&=\left.\frac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}\Delta e+\left.\frac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M=\sin M\ \Delta e+e\cos M\ \Delta M\end{aligned} \quad (15.102)$$

folgen die differentiellen Beziehungen

$$\begin{aligned} e\ \Delta M &= -\sin M\ \ \Delta\left(e\cos M\right) + \cos M\ \ \Delta\left(e\sin M\right) \\ \Delta e\quad &= \ \cos M\ \ \Delta\left(e\cos M\right)\ + \sin M\ \Delta\left(e\sin M\right)\qquad . \end{aligned} \tag{15.103}$$

Eine allgemeingültige formale Darstellung dieser Beziehungen wird gegeben in der Form

$$\begin{aligned} \Delta M &= \left.\frac{\partial M}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{\left(e\sin M, e\cos M\right)} \Delta\left(e\sin M\right) + \left.\frac{\partial M}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{\left(e\sin M, e\cos M\right)} \Delta\left(e\cos M\right) \\ \Delta e &= \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{\left(e\sin M, e\cos M\right)} \Delta\left(e\sin M\right) + \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{\left(e\sin M, e\cos M\right)} \Delta\left(e\cos M\right) \end{aligned} \tag{15.104}$$

und den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial M}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e,M)} = \frac{\left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}}{\left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)} - \left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}}$$

$$\left.\frac{\partial M}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e,M)} = -\frac{\left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)}}{\left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)} - \left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}} \tag{15.105}$$

$$\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e,M)} = -\frac{\left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}}{\left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)} - \left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}}$$

$$\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e,M)} = \frac{\left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}}{\left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)} - \left.\dfrac{\partial\left(e\sin M\right)}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\dfrac{\partial\left(e\cos M\right)}{\partial M}\right|_{(e,M)}} \tag{15.106}$$

Die Determinante hat mit den Partialausdrücken (15.100) und (15.101) den Wert det=–*e*, somit werden die Partialausdrücke erhalten

$$\left.\frac{\partial M}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e,M)} = \frac{\cos M}{e}$$
$$\left.\frac{\partial M}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e,M)} = -\frac{\sin M}{e}$$
$$\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e,M)} = \sin M$$
$$\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e,M)} = \cos M \qquad (15.107)$$

und somit die Ausdrücke (15.103) bestätigt.

Werden schließlich diese Beziehungen (15.103) in Beziehung (15.39) eingesetzt, erhält man die Variation der wahren Anomalie in Abhängigkeit der Variationen der Parameter $\left(e\sin M,\ e\cos M\right)$

$$\Delta\upsilon = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e\sin M, e\cos M)} \Delta\left(e\sin M\right) + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e\sin M, e\cos M)} \Delta\left(e\cos M\right) =$$
$$= \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} \Delta e + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)} \Delta M \qquad (15.108)$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e\sin M, e\cos M)} = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e\sin M, e\cos M)} + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial M}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e\sin M, e\cos M)} =$$
$$= \frac{\sin\upsilon\left(2+e\cos\upsilon\right)}{1-e^2}\sin M + \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{e\sqrt{1-e^2}}\cos M$$
$$\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e\sin M, e\cos M)} = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e\sin M, e\cos M)} + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial M}{\partial\cos}\right|_{(e\sin M, e\cos M)} =$$
$$= \frac{\sin\upsilon\left(2+e\cos\upsilon\right)}{1-e^2}\cos M - \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{e\sqrt{1-e^2}}\sin M \qquad (15.109)$$

somit

$$e\ \Delta\upsilon = \left[\frac{e\sin\upsilon\left(2+e\cos\upsilon\right)}{1-e^2}\sin M + \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{\sqrt{1-e^2}}\cos M\right]\Delta\left(e\sin M\right) +$$
$$+ \left[\frac{e\sin\upsilon\left(2+e\cos\upsilon\right)}{1-e^2}\cos M - \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{\sqrt{1-e^2}}\sin M\right]\Delta\left(e\cos M\right) \quad . \qquad (15.110)$$

Anmerkung: Diese Beziehungen sind für kreisförmige Bahnen (e=0) nicht definiert.

15.2.14 Variationen des Argumentes der Breite

Das Argument der Breite ist mit der wahren Anomalie υ und dem Argument des Perizentrums ω definiert aus

$$u = \upsilon + \omega \tag{15.111}$$

mit der Variation

$$\Delta u = \Delta\upsilon + \Delta\omega \quad . \tag{15.112}$$

Mit den Ausdrücken (15.22) bzw. (15.39) ergeben sich die Variationen

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}\left[\Delta E + \frac{\sin E}{1-e^2}\Delta e\right] + \Delta\omega \\ \Delta u &= \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{\sqrt{1-e^2}^3}\Delta M + \frac{\sin\upsilon\left(2+e\cos\upsilon\right)}{1-e^2}\Delta e + \Delta\omega \quad . \end{aligned} \tag{15.113}$$

15.3 Variationen des Bahnradius der elliptischen Bewegung

Im Fall einer elliptischen Bewegung kann der Bahnradius in Abhängigkeit von der wahren Anomalie dargestellt werden durch

$$r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\upsilon} = \frac{G^2}{\mu\left(1+e\cos\upsilon\right)} \, . \tag{15.114}$$

Somit lauten seine Variationen bei Variationen in allen Parametern ($\mu = const.$)

$$\Delta r = \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)} \Delta a + \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} \Delta e + \left.\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} \Delta\upsilon \tag{15.115}$$

im Einzelnen[1]

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)} &= \frac{r}{a} \, , \\ \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} &= -\frac{a\left(2e+e^2\cos\upsilon+\cos\upsilon\right)}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} \, , \\ \left.\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} &= \frac{a\,e\left(1-e^2\right)\sin\upsilon}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} \, , \end{aligned} \tag{15.116}$$

[1] Vgl. die Untersuchungen in Abschnitt 15.1

somit

$$\Delta r = \frac{r}{a}\,\Delta a - \frac{a\left(2e + e^2\cos\upsilon + \cos\upsilon\right)}{\left(1 + e\cos\upsilon\right)^2}\,\Delta e + \frac{a\,e\left(1 - e^2\right)\sin\upsilon}{\left(1 + e\cos\upsilon\right)^2}\,\Delta\upsilon \quad . \tag{15.117}$$

Bei Bezug auf die exzentrische Anomalie ist

$$r = a\left(1 - e\cos E\right) \quad . \tag{15.118}$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,E)} &= \frac{r}{a} \quad , \\ \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,E)} &= -a\cos E \quad , \\ \left.\frac{\partial r}{\partial E}\right|_{(a,e,E)} &= a\,e\sin E \end{aligned} \tag{15.119}$$

wird

$$\Delta r = \frac{r}{a}\,\Delta a - a\cos E\;\Delta e + a\,e\sin E\;\Delta E \quad . \tag{15.120}$$

Bei Bezug auf die mittlere Anomalie M wird mit dem Ausdruck (15.28) und den zugehörenden Partialausdrücken (15.29)

$$\begin{aligned} \Delta r &= \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,M)}\Delta a + \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,M)}\Delta e + \left.\frac{\partial r}{\partial M}\right|_{(a,e,M)}\Delta M \;= \\ &= \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,E)}\Delta a + \left(\left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,E)} + \left.\frac{\partial r}{\partial E}\right|_{(a,e,E)}\left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,M)}\right)\Delta e + \left.\frac{\partial r}{\partial E}\right|_{(a,e,E)}\left.\frac{\partial E}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M \end{aligned} \tag{15.121}$$

somit für die entsprechenden Partialausdrücke

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,M)} &= \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,E)} = \frac{r}{a} \\ \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,M)} &= -a\cos\upsilon \\ \left.\frac{\partial r}{\partial M}\right|_{(a,e,M)} &= \frac{a\,e\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}} \quad . \end{aligned} \tag{15.122}$$

Die vollständige Variation des Bahnradius abhängig von *a, e, M* beträgt

$$\Delta r = \frac{r}{a}\Delta a - a\cos\upsilon\,\Delta e + \frac{a\,e\sin\upsilon}{\sqrt{1-e^2}}\Delta M \quad . \tag{15.123}$$

In Bezug auf die Darstellung (15.118) lautet die Variation des Bahnradius wegen einer der Darstellungen (15.114)

$$\Delta r = \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e\cos E)} \Delta a + \left.\frac{\partial r}{\partial (e\cos E)}\right|_{(a,\,e\cos E)} \Delta\left(e\,\cos E\right) \;= \frac{r}{a}\Delta a + a\;\Delta\left(e\,\cos E\right)\;. \quad (15.124)$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e\cos E)} = \frac{r}{a}$$
$$\left.\frac{\partial r}{\partial\left(e\,\cos E\right)}\right|_{(a,e\cos E)} = a \quad . \qquad (15.125)$$

In Bezug auf die *Lyddane*-Elemente **(11.446)** lautet die Variation des Bahnradius

$$\Delta r = \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e\cos E)} \Delta a + \left.\frac{\partial r}{\partial (e\sin M)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} \Delta\left(e\,\sin M\right) \;+$$
$$+ \left.\frac{\partial r}{\partial (e\cos M)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} \Delta\left(e\,\cos M\right) \quad . \qquad (15.126)$$

Mit der Entwicklung (15.80)

$$\Delta\left(e\,\cos E\right) = \left.\frac{\partial\left(e\,\cos E\right)}{\partial\left(e\,\sin M\right)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} \Delta\left(e\,\sin M\right) \;+\; \left.\frac{\partial\left(e\,\cos E\right)}{\partial\left(e\,\cos M\right)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} \Delta\left(e\,\cos M\right) \qquad (15.127)$$

und mit der Darstellung (15.124) werden die Partialausdrücke erhalten

$$\left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} = \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e\,\cos E)} = \frac{r}{a}$$
$$\left.\frac{\partial r}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} = \left.\frac{\partial r}{\partial\left(e\cos E\right)}\right|_{(a,e\,\cos E)} \left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(e\sin M,e\,\cos M)} = -a\sin\left(E-M\right) \quad (15.128)$$
$$\left.\frac{\partial r}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} = \left.\frac{\partial r}{\partial\left(e\cos E\right)}\right|_{(a,e\,\cos E)} \left.\frac{\partial\left(e\cos E\right)}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(e\sin M,e\,\cos M)} = a\cos\left(E-M\right)\;.$$

Dies ergibt die vollständige Beziehung

$$\Delta r = \frac{r}{a}\;\Delta a - a\sin\left(E-M\right)\;\Delta\left(e\,\sin M\right) + a\cos\left(E-M\right)\;\Delta\left(e\,\cos M\right) \quad . \quad (15.129)$$

In Abhängigkeit von den Größen G und $e\cos\upsilon$ lautet die Variation

$$\Delta r = \left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \Delta G + \left.\frac{\partial r}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \Delta\left(e\cos\upsilon\right) \qquad (15.130)$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} = \frac{2}{r\,G}$$
$$\left.\frac{\partial r}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} = -\frac{\mu\,r^2}{G^2} \quad , \tag{15.131}$$

somit

$$\Delta r = \frac{1}{G}\left[\frac{2}{r}\,\Delta G - \frac{\mu\,r^2}{G}\Delta\left(e\cos\upsilon\right)\right] \quad . \tag{15.132}$$

Umgekehrt folgt aus (15.114)

$$e\cos\upsilon = \frac{G^2-\mu\,r}{\mu\,r} \tag{15.133}$$

und damit die Variation

$$\Delta\left(e\cos\upsilon\right) = \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta r + \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta G \tag{15.134}$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} = -\frac{G^2}{\mu\,r^2} = \frac{1}{\left.\dfrac{\partial r}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)}}$$
$$\left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial\dot r}\right|_{(r,\dot r,G)} = 0 \tag{15.135}$$
$$\left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} = \frac{2\,G}{\mu\,r} \quad ,$$

schließlich

$$\Delta\left(e\cos\upsilon\right) = \frac{G}{\mu\,r}\left[-\frac{G}{r}\Delta r + 2\,\Delta G\right] \quad . \tag{15.136}$$

Bezug auf den Ortsvektor

$$r = \sqrt{x^i\,x_i} \tag{15.137}$$

führt auf die Variation

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2}\,\Delta x_2 + \frac{\partial r}{\partial x_3}\,\Delta x_3 \tag{15.138}$$

mit den Partialausdrücken

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\bigg|_{(x_i)} = \frac{x_i}{r} \qquad \langle i = 1,2,3 \quad . \tag{15.139}$$

Als Beispiel für eine Umkehrung wird die Variation der wahren Anomalie in Abhängigkeit von Bahnradius, großer Halbachse und Exzentrizität hergeleitet. Aus Beziehung (15.115) folgt

$$\begin{aligned} \Delta\upsilon &= \frac{1}{\left.\dfrac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}} \Delta r - \frac{\left.\dfrac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}}{\left.\dfrac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}} \Delta a - \frac{\left.\dfrac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)}}{\left.\dfrac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}} \Delta e = \\ &= \frac{\partial \upsilon}{\partial r}\bigg|_{(a,e,r)} \Delta r + \frac{\partial \upsilon}{\partial a}\bigg|_{(a,e,r)} \Delta a + \frac{\partial \upsilon}{\partial e}\bigg|_{(a,e,r)} \Delta e \quad , \end{aligned} \tag{15.140}$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned} \frac{\partial \upsilon}{\partial r}\bigg|_{(a,e,r)} &= \frac{1}{\left.\dfrac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}} = \frac{G}{\dot r\, r^2} \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial a}\bigg|_{(a,e,r)} &= -\frac{\left.\dfrac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}}{\left.\dfrac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}} = -\frac{G}{\dot r\, r\, a} \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial e}\bigg|_{(a,e,r)} &= -\frac{\left.\dfrac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)}}{\left.\dfrac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}} = \frac{G\, a\left(2e + e^2\cos\upsilon + \cos\upsilon\right)}{\dot r\, p^2} \quad . \end{aligned} \tag{15.141}$$

Der erste dieser Partialausdrücke kann alternativ mit den Beziehungen **(11.14)** und **(11.17)** hergeleitet werden. mit $G^2 = \mu\, p = \mu\, a\left(1-e^2\right)$ folgt aus

$$e\cos\upsilon = \frac{p}{r} - 1 = \frac{a\left(1-e^2\right)}{r} - 1 = \frac{G^2 - \mu r}{\mu r} \quad , \qquad e\sin\upsilon = \frac{\dot r\, G}{\mu} \tag{15.142}$$

durch Differenzieren der ersten Beziehung

$$e\sin\upsilon\ \frac{\partial \upsilon}{\partial r}\bigg|_{(a,e,r)} = \frac{p}{r^2} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{r^2} \quad . \tag{15.143}$$

Einsetzen der zweiten Beziehung (15.142) ergibt den obigen Partialausdruck. Wird dagegen

$$\frac{e\sin\upsilon}{e\cos\upsilon} = \tan\upsilon = \frac{r\,\dot r\, G}{G^2 - \mu r} \tag{15.144}$$

gebildet, ergibt die partielle Differentiation der wahren Anomalie nach dem Bahnradius

$$\frac{1}{\cos^2 \upsilon} \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} = \frac{\dot r\, G^3}{\left(G^2 - \mu r\right)^2} \quad , \tag{15.145}$$

somit

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} = \frac{\dot r\, G^3}{e^2\, \mu^2\, r^2} \quad . \tag{15.146}$$

Hier kommt der Bezug auf eine Darstellung im Rahmen eines vollständigen Differentials entscheidend zum Ausdruck[1].

15.4 Variationen der radialen Geschwindigkeit

Die radiale Geschwindigkeit beträgt im Fall einer Kegelschnittbewegung[2]

$$V_R = \dot r = e\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \upsilon \;=\; e \sin \upsilon \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}} = \frac{\mu\; e\; \sin \upsilon}{G} \quad . \tag{15.147}$$

In Abhängigkeit der Parameter p, e, υ als unabhängigen Variablen lauten die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \dot r}{\partial p}\right|_{(p,e,\upsilon)} &= -\frac{e}{2p}\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \upsilon \quad , \\ \left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(p,e,\upsilon)} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \upsilon \quad , \\ \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(p,e,\upsilon)} &= e\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos \upsilon \quad , \end{aligned} \tag{15.148}$$

somit

$$\begin{aligned} \Delta \dot r = \left.\frac{\partial \dot r}{\partial p}\right|_{(p,e,\upsilon)} \Delta p \;+\; \left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(p,e,\upsilon)} \Delta e \;+\; \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(p,e,\upsilon)} \Delta \upsilon \quad = \\ = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(-\frac{e \sin \upsilon}{2p} \Delta p + \sin \upsilon\, \Delta e + e \cos \upsilon\, \Delta \upsilon \right) \quad . \end{aligned} \tag{15.149}$$

Im Fall einer elliptischen Bewegung lauten in Abhängigkeit der Parameter (a, e, υ) als unabhängigen Variablen die partiellen Ableitungen

[1] Siehe hierzu die Herleitungen in Abschnitt 15.1

[2] Siehe auch Formel (2.82) in Abschnitt 2.5.2 (Band I) sowie in Abschnitt 11.1

$$\left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)} = -\frac{e}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin\upsilon \quad ,$$
$$\left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{\sin\upsilon}{1-e^2} \quad , \tag{15.150}$$
$$\left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} = e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\cos\upsilon \quad ,$$

somit

$$\begin{aligned}\Delta\dot r &= \left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta a + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta e + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta\upsilon = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(-\frac{e\sin\upsilon}{2a}\Delta a + \frac{\sin\upsilon}{1-e^2}\Delta e + e\cos\upsilon\,\Delta\upsilon\right) \quad .\end{aligned} \tag{15.151}$$

Mit (a,e,M) als unabhängigen Variablen und ΔM aus $\Delta\upsilon$ in Beziehung (15.39) mit den Partialausdrücken (15.38) wird

$$\begin{aligned}\Delta\dot r &= \left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,M)}\Delta a + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,M)}\Delta e + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial M}\right|_{(a,e,M)}\Delta M = \\ &= \left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta a + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta e + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta\upsilon = \\ &= \left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta a + \left[\left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)}\right]\Delta e + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)}\Delta M\end{aligned} \tag{15.152}$$

Die hier benötigten Partialausdrücke lauten

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,M)} &= \left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)} &&= -\frac{e}{2a}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin\upsilon \\ \left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,M)} &= \left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} &&= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{\sin\upsilon\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{1-e^2} \\ \left.\frac{\partial \dot r}{\partial M}\right|_{(a,e,M)} &= \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)} &&= e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{\cos\upsilon\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{\sqrt{1-e^2}^{\,3}}\end{aligned} \tag{15.153}$$

und somit für die Gesamtvariation

$$\Delta\dot r = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\frac{e\sin\upsilon}{2a}\Delta a + \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2}{1-e^2}\left(\sin\upsilon\,\Delta e + \frac{e\cos\upsilon}{\sqrt{1-e^2}}\,\Delta M\right)\right] \quad . \tag{15.154}$$

Werden die Elemente $(a, e\sin M, e\cos M)$ als unabhängige Variable aufgefasst, lautet die Gesamtvariation der radialen Geschwindigkeit

$$\Delta\dot r = \left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} \Delta a \; + \\ + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial (e\sin M)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} \Delta(e\sin M) + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial (e\cos M)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} \Delta(e\cos M)\;. \tag{15.155}$$

Werden die Variationen (15.104) in (15.152) eingesetzt ergeben sich die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial \dot r}{\partial (e\sin M)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} = \left\{ \left[\left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} \right] \left.\frac{\partial e}{\partial (e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \right. \\ \left. + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial M}{\partial (e\sin M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} \right\}$$

$$\left.\frac{\partial \dot r}{\partial (e\cos M)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} = \left\{ \left[\left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)} + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} \right] \left.\frac{\partial e}{\partial (e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} + \right. \\ \left. + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)} \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial M}{\partial (e\cos M)}\right|_{(e\sin M,e\cos M)} \right\}\;. \tag{15.156}$$

Mit den Ausdrücken (15.153) und (15.107)

$$\left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)} = \left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e,M)} = \left.\frac{\partial \dot r}{\partial a}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{e\sin\upsilon}{a} \tag{15.157}$$

sowie (15.107) werden

$$\left.\frac{\partial \dot r}{\partial (e\sin M)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{(1+e\cos\upsilon)^2}{1-e^2}\left[\sin\upsilon\,\sin M + \frac{\cos\upsilon\,\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\right] \\ \left.\frac{\partial \dot r}{\partial (e\cos M)}\right|_{(a,e\sin M,e\cos M)} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{(1+e\cos\upsilon)^2}{1-e^2}\left[\sin\upsilon\,\cos M - \frac{\cos\upsilon\,\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\right] \tag{15.158}$$

und endgültig

$$\Delta\dot r = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left\{ -\frac{e\sin\upsilon}{2a}\Delta a + \frac{(1+e\cos\upsilon)^2}{1-e^2}\left[\left(\sin\upsilon\,\sin M + \frac{\cos\upsilon\,\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\right)\Delta(e\sin M) + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(\sin\upsilon\,\cos M - \frac{\cos\upsilon\,\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\right)\Delta(e\cos M)\right]\right\}\;. \tag{15.159}$$

Werden die Elemente $\left(a, e\sin\upsilon, e^2\right)$ als unabhängige Variable aufgefasst, lautet die Gesamtvariation der radialen Geschwindigkeit

$$\Delta\dot{r} = \left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial a}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)} \Delta a \; + \\ + \left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)} \Delta\left(e\sin\upsilon\right) + \left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)} \Delta\left(e^2\right) \; . \tag{15.160}$$

Mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial a}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)} = \left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial a}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{e\sin\upsilon}{a}$$

$$\left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \tag{15.161}$$

$$\left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{e\sin\upsilon}{1-e^2} \quad .$$

folgt

$$\Delta\dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left\{-\frac{e\sin\upsilon}{2a}\Delta a + \Delta\left(e\sin\upsilon\right) + \frac{e\sin\upsilon}{2\left(1-e^2\right)}\Delta\left(e^2\right)\right\} . \tag{15.162}$$

In Abhängigkeit der Parameter G und $\left(e\sin\upsilon\right)$ lautet die vollständige Variation

$$\Delta\dot{r} = \left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial G}\right|_{\left(G,e\sin\upsilon\right)} \Delta G + \left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(G,e\sin\upsilon\right)} \Delta\left(e\sin\upsilon\right) \tag{15.163}$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial G}\right|_{\left(G,e\sin\upsilon\right)} = -\frac{\mu e\sin\upsilon}{G^2} = -\frac{\dot{r}}{G}$$

$$\left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(G,e\sin\upsilon\right)} = \frac{\mu}{G} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} = \left.\frac{\partial\dot{r}}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)} \tag{15.164}$$

somit

$$\Delta\dot{r} = \frac{\mu}{G}\left\{-\frac{e\sin\upsilon}{G}\Delta G + \Delta\left(e\sin\upsilon\right)\right\} . \tag{15.165}$$

Umgekehrt wird

$$\Delta\left(e\sin\upsilon\right)=\frac{1}{\left.\frac{\partial\dot r}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(G,e\sin\upsilon)}}\Delta\dot r-\frac{\left.\frac{\partial\dot r}{\partial G}\right|_{(G,e\sin\upsilon)}}{\left.\frac{\partial\dot r}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(G,e\sin\upsilon)}}\Delta G=$$
$$=\left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial\dot r}\right|_{(\dot r,G)}\Delta\dot r+\left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(\dot r,G)}\Delta G \tag{15.166}$$

somit

$$\left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial\dot r}\right|_{(r,\dot r,G)}=\frac{1}{\left.\frac{\partial\dot r}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(G,e\sin\upsilon)}}=\frac{G}{\mu}$$

$$\left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)}=0 \tag{15.167}$$

$$\left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)}=-\frac{\left.\frac{\partial\dot r}{\partial G}\right|_{(G,e\sin\upsilon)}}{\left.\frac{\partial\dot r}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(G,e\sin\upsilon)}}=\frac{e\sin\upsilon}{G}=\frac{\dot r}{\mu}$$

und schließlich

$$\Delta\left(e\sin\upsilon\right)=\frac{G}{\mu}\Delta\dot r+\frac{\dot r}{\mu}\Delta G \quad . \tag{15.168}$$

15.5 Variationen des Flächenparameters

Im Fall einer Kegelschnittbewegung gilt die Relation **(10.30)** zwischen Flächen- und Kegelschnittparameter

$$G=\sqrt{\mu\,p} \quad . \tag{15.169}$$

Entsprechend lautet die differentielle Beziehung zwischen diesen Parametern

$$\Delta G=\frac{\mu}{2G}\Delta p \qquad \langle G\neq 0 \quad . \tag{15.170}$$

Der zugehörige Partialausdruck lautet

$$\left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{(p)}=\frac{\mu}{2G} \quad . \tag{15.171}$$

Bei nichtgeradliniger Bewegung (wenn also $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\neq 0$) ist der Flächenparameter *G* stets von Null verschieden.

Im Fall elliptischer Bewegung ist

$$p = a\left(1-e^2\right) \tag{15.172}$$

und es wird mit *a, e* als unabhängigen Variablen

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial p}{\partial a}\right|_{(a,e)} &= 1-e^2 \\ \left.\frac{\partial p}{\partial e}\right|_{(a,e)} &= -2\,a\,e \quad . \end{aligned} \tag{15.173}$$

Die Gesamtvariation lautet mit den allgemeinen Variationen Δa, Δe in Halbachse und Exzentrizität in Bezug auf oskulierende Parameter *a*, *e*

$$\Delta p = \left(1-e^2\right)\Delta a - 2\,a\,e\,\Delta e \quad , \tag{15.174}$$

mit (15.170) auch

$$\Delta G = \frac{\mu}{2}\left[\sqrt{\frac{1-e^2}{a}}\,\Delta a - 2\,e\sqrt{\frac{a}{1-e^2}}\,\Delta e\right] \tag{15.175}$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial G}{\partial a}\right|_{(a,e)} &= \frac{G}{2\,a} \\ \left.\frac{\partial G}{\partial e}\right|_{(a,e)} &= -\frac{\mu\,a\,e}{G} \quad . \end{aligned} \tag{15.176}$$

Für Untersuchungen der Bahnanalyse ist es dagegen häufig nötig, langfristige Aussagen mit Hilfe von mittleren Elementen zu machen. Sei dazu eine Entwicklung der Bahnparameter um Mittelwerte und die Abspaltung periodischer Anteile bekannt

$$a = \bar{a} + \delta a \quad , \; e = \bar{e} + \delta e \quad , \tag{15.177}$$

so wird für die Zerlegung des Kegelschnittparameters in einen mittleren und periodischen Anteil

$$p = \bar{p} + \delta p = \left(\bar{a} + \delta a\right)\left[1-\left(\bar{e} + \delta e\right)^2\right] \quad , \tag{15.178}$$

somit

$$\bar{p} = \bar{a}\left(1-\bar{e}^2\right) \tag{15.179}$$

und für die periodischen Variationen

$$\delta p = \left(1-\bar{e}^2\right)\delta a - 2\,\bar{a}\,\bar{e}\,\delta e + \delta a\left(\delta e\right)^2 \quad . \tag{15.180}$$

Man muss beachten, dass die Variationen Δa, δa, bzw. Δe, δe in den Gleichungen (15.174) und (15.180) nicht notwendig identisch sind. Im ersteren Fall handelt es sich um allgemeine Variationen, im letzteren Fall um periodische Anteile, sofern diese ermittelbar sind. Diese Unterscheidung muss in den folgenden Abschnitten prinzipiell bei allen Untersuchungen mit partiellen Variationen beachtet werden.

Wenn der Normalenvektor **c** einer Bewegung in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben ist, kann eine Variation des Flächenparameters auf die Variationen der Komponenten des Normalenvektors bezogen werden. Es seien

$$\mathbf{r} = x^i\,\mathbf{p}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i\,\mathbf{p}_i + x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \quad , \quad \mathbf{c} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} =: c^i\,\mathbf{p}_i = G\,\mathbf{c}_0 \quad \langle \mathbf{c}_0^2 = 1 \quad . \tag{15.181}$$

Es werden

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial c_1}\Delta c_1 + \frac{\partial G}{\partial c_2}\Delta c_2 + \frac{\partial G}{\partial c_3}\Delta c_3 = \frac{1}{G}\left(c_1\,\Delta c_1 + c_2\,\Delta c_2 + c_3\,\Delta c_3\right) \tag{15.182}$$

mit

$$\frac{\partial G}{\partial c_i} = \frac{c_i}{G} \qquad \langle i = 1,2,3 \quad . \tag{15.183}$$

Die Variationen der Basisvektoren können mit Hilfe der allgemeinen *Frenet*schen Formeln (4.202)[1] auf die Basis bezogen werden:

$$\dot{\mathbf{p}}_i = p_i{}^j\,\mathbf{p}_j \quad , \quad \mathbf{p}_{ii} = 0 \quad , \quad p_{ij} = -p_{ji} \quad . \tag{15.184}$$

Damit wird

$$\dot{\mathbf{r}} = \left(\dot{x}^i + x^j\;p_j{}^i\right)\mathbf{p}_i \tag{15.185}$$

und es folgen die Zuordnungen.

$$\begin{aligned} c_1 &= x_2\,\dot{x}_3 - x_3\,\dot{x}_2 + x^j\left(x_2\,p_{j3} - x_3\,p_{j2}\right) \\ c_2 &= x_3\,\dot{x}_1 - x_1\,\dot{x}_3 + x^j\left(x_3\,p_{j1} - x_1\,p_{j3}\right) \\ c_3 &= x_1\,\dot{x}_2 - x_2\,\dot{x}_1 + x^j\left(x_1\,p_{j2} - x_2\,p_{j1}\right) \end{aligned} \tag{15.186}$$

und damit die Gesamtvariationen

$$\begin{aligned} \Delta c_i = {} & \frac{\partial c_i}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial c_i}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial c_i}{\partial x_3}\Delta x_3 + \frac{\partial c_i}{\partial \dot{x}_1}\Delta \dot{x}_1 + \frac{\partial c_i}{\partial \dot{x}_2}\Delta \dot{x}_2 + \frac{\partial c_i}{\partial \dot{x}_3}\Delta \dot{x}_3 + \\ & + \frac{\partial c_i}{\partial p_{12}}\Delta p_{12} + \frac{\partial c_i}{\partial p_{13}}\Delta p_{13} + \frac{\partial c_i}{\partial p_{21}}\Delta p_{21} + \frac{\partial c_i}{\partial p_{23}}\Delta p_{23} + \frac{\partial c_i}{\partial p_{31}}\Delta p_{31} + \frac{\partial c_i}{\partial p_{32}}\Delta p_{32} \qquad \langle i = 1,2,3 \quad . \end{aligned} \tag{15.187}$$

Daraus ergeben sich die Partialausdrücke

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial x_1} = x_2\,p_{13} - x_3\,p_{12} \;,\; \frac{\partial c_1}{\partial x_2} = \dot{x}_3 + x_1\,p_{13} + 2\,x_2\,p_{23} \;,\; \frac{\partial c_1}{\partial x_3} = -\dot{x}_2 - x_1\,p_{12} - 2\,x_3\,p_{32} \;, \\ &\frac{\partial c_1}{\partial \dot{x}_1} = 0 \;,\; \frac{\partial c_1}{\partial \dot{x}_2} = -x_3 \;,\; \frac{\partial c_1}{\partial \dot{x}_3} = x_2 \;, \\ &\frac{\partial c_1}{\partial p_{11}} = \frac{\partial c_1}{\partial p_{22}} = \frac{\partial c_1}{\partial p_{33}} = 0 \;,\; \frac{\partial c_1}{\partial p_{12}} = -x_1\,x_3 \;,\; \frac{\partial c_1}{\partial p_{13}} = x_1\,x_2 \;,\; \frac{\partial c_1}{\partial p_{32}} = -x_3^2 \;,\; \frac{\partial c_1}{\partial p_{23}} = x_2^2 \;, \end{aligned} \tag{15.188}$$

[1] In Abschnitt 4.3.11 (Band II)

$$\frac{\partial c_2}{\partial x_1} = -\dot{x}_3 - 2\,x_1\,p_{13} - x_2\,p_{23}\ ,\ \frac{\partial c_2}{\partial x_2} = x_3\,p_{21} - x_1\,p_{23}\ ,\ \frac{\partial c_2}{\partial x_3} = \dot{x}_1 + x_2\,p_{21} + 2\,x_3\,p_{31}\ ,$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial \dot{x}_1} = x_3\ ,\ \frac{\partial c_2}{\partial \dot{x}_2} = 0\ ,\ \frac{\partial c_2}{\partial \dot{x}_3} = -x_1\ , \tag{15.189}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial p_{21}} = x_2\,x_3\ ,\ \frac{\partial c_2}{\partial p_{11}} = \frac{\partial c_2}{\partial p_{22}} = \frac{\partial c_2}{\partial p_{33}} = 0\ ,\ \frac{\partial c_2}{\partial p_{23}} = -x_2\,x_1\ ,\ \frac{\partial c_2}{\partial p_{13}} = -x_1^2\ ,\ \frac{\partial c_2}{\partial p_{31}} = x_3^2\ ,$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial x_1} = \dot{x}_2 + 2\,x_1\,p_{12} + x_3\,p_{32}\ ,\ \frac{\partial c_3}{\partial x_2} = -\dot{x}_1 - 2\,x_2\,p_{21} - x_3\,p_{31}\ ,\ \frac{\partial c_3}{\partial x_3} = x_1\,p_{32} - x_2\,p_{31}\ ,$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial \dot{x}_1} = -x_2\ ,\ \frac{\partial c_3}{\partial \dot{x}_2} = x_1\ ,\ \frac{\partial c_3}{\partial \dot{x}_3} = 0\ , \tag{15.190}$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial p_{12}} = x_1^2\ ,\ \frac{\partial c_3}{\partial p_{11}} = \frac{\partial c_3}{\partial p_{22}} = \frac{\partial c_3}{\partial p_{33}} = 0\ ,\ \frac{\partial c_3}{\partial p_{32}} = x_3\,x_1\ ,\ \frac{\partial c_3}{\partial p_{21}} = -x_2^2\ ,\ \frac{\partial c_3}{\partial p_{31}} = x_3\,x_2\ .$$

In der Literatur werden die Eigenvariationen des Basissystems gewöhnlich vernachlässigt, so dass implizit $p_{ij} = 0$ angenommen wird. Dies ist aber nur dann erlaubt, wenn das Basissystem als inertial vermutet wird ($\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$) oder wenn das Basissystem als *Hansen*-System gesetzt wird: $\left(x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i = 0\right)$.

15.6 Weitere Variationen der wahren Anomalie

Mit den in den letzten drei Abschnitten hergeleiteten Beziehungen können die Variationen der wahren Anomalie in Bezug auf Radius, radiale Geschwindigkeit und Flächenparameter erhalten werden. Dazu werden die Variationen (15.97) und (15.99) in die Variation der wahren Anomalie (15.62) eingesetzt:

$$\begin{aligned}\Delta\upsilon = {} & \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial\dot{r}}\right|_{(r,\dot{r},G)} \Delta\dot{r} + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot{r},G)} \Delta G + \\ & + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial r}\right|_{(r,\dot{r},G)} \Delta r + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot{r},G)} \Delta G = \\ = {} & \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right|_{(r,\dot{r},G)} \Delta r + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\dot{r}}\right|_{(r,\dot{r},G)} \Delta\dot{r} + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial G}\right|_{(r,\dot{r},G)} \Delta G\end{aligned} \tag{15.191}$$

mit den zugehörenden Partialausdrücken

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} &= \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial (e\cos\upsilon)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial (e\cos\upsilon)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} = \frac{\dot r\, G^3}{e^2\,\mu^2\, r^2} \\
\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial \dot r}\right|_{(r,\dot r,G)} &= \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial (e\sin\upsilon)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial (e\sin\upsilon)}{\partial \dot r}\right|_{(r,\dot r,G)} = \frac{\left(G^2-\mu r\right)G}{e^2\,\mu^2\, r} \\
\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} &= \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial (e\cos\upsilon)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial (e\cos\upsilon)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} + \\
&\quad + \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial (e\sin\upsilon)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial (e\sin\upsilon)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} = -\frac{\dot r\left(G^2+\mu r\right)}{e^2\,\mu^2\, r}
\end{aligned} \tag{15.192}$$

ergibt sich

$$\Delta\upsilon = \frac{1}{e^2\,\mu^2\, r}\left[\frac{\dot r\, G^3}{r}\Delta r + G\left(G^2-\mu r\right)\Delta\dot r - \dot r\left(G^2+\mu r\right)\Delta G\right]. \tag{15.193}$$

Andererseits folgt aus der Polargleichung

$$r = \frac{G^2}{\mu(1+e\cos\upsilon)} \tag{15.194}$$

das vollständige Differential

$$\Delta r = \left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \Delta G + \left.\frac{\partial r}{\partial (e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \Delta(e\cos\upsilon) \tag{15.195}$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} &= \frac{2r}{G} \\
\left.\frac{\partial r}{\partial (e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} &= -\frac{\mu r^2}{G^2} \quad .
\end{aligned} \tag{15.196}$$

$\Delta(e\cos\upsilon)$ ist aus Beziehung (15.60) bekannt. Damit wird

$$\begin{aligned}
\Delta r = \left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \Delta G &+ \left.\frac{\partial r}{\partial (e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial (e\cos\upsilon)}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)} \Delta e + \\
&+ \left.\frac{\partial r}{\partial (e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial (e\cos\upsilon)}{\partial \upsilon}\right|_{(e,\upsilon)} \Delta\upsilon
\end{aligned} \tag{15.197}$$

und umgekehrt

$$\Delta\upsilon = \frac{1}{\left.\frac{\partial r}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}} \Delta r - \frac{\left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,e\cos\upsilon)}}{\left.\frac{\partial r}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}} \Delta G$$

$$- \frac{\left.\frac{\partial r}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)}}{\left.\frac{\partial r}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}} \Delta e \quad = \tag{15.198}$$

$$= \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right|_{(r,G,e)} \Delta r + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial G}\right|_{(r,G,e)} \Delta G + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(r,G,e)} \Delta e$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right|_{(r,G,e)} = \frac{1}{\left.\frac{\partial r}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}} = \frac{G^2}{\mu r^2 e\sin\upsilon} = \frac{G}{\dot r r^2}$$

$$\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial G}\right|_{(r,G,e)} = -\frac{\left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,e\cos\upsilon)}}{\left.\frac{\partial r}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{(G,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}} = -\frac{2}{\dot r r} \tag{15.199}$$

$$\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(r,G,e)} = -\frac{\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial e}\right|_{(e,\upsilon)}}{\left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial\upsilon}\right|_{(e,\upsilon)}} = \frac{\cos\upsilon}{e\sin\upsilon} = \frac{\mu\cos\upsilon}{\dot r G}$$

somit

$$\Delta\upsilon = \frac{G}{\dot r r}\Delta r - \frac{2}{\dot r r}\Delta G + \frac{\mu\cos\upsilon}{\dot r G}\Delta e \quad . \tag{15.200}$$

Um Δe zu eliminieren werden in Beziehung (15.64) die Variation $\Delta(e\cos\upsilon)$ aus (15.134) bis (15.136) sowie $\Delta(e\sin\upsilon)$ aus (15.166) bis (15.168) eingesetzt. Dies führt auf

$$\Delta e = \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} \Delta r + \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial \dot r}\right|_{(r,\dot r,G)} \Delta\dot r + \\ + \left[\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} + \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)}\right]\Delta G \tag{15.201}$$

somit nach Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke (15.96) und (15.98)

$$\Delta e = -\frac{G^2\cos\upsilon}{\mu r^2}\Delta r + \frac{G\sin\upsilon}{\mu}\Delta\dot r + \left[\frac{2G\cos\upsilon}{\mu\, r} + \frac{\dot r\sin\upsilon}{\mu}\right]\Delta G \ . \tag{15.202}$$

Diese Herleitung führt auf die Variation der wahren Anomalie in der Form

$$\Delta\upsilon = \left[\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right|_{(r,G,e)} + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(r,G,e)} \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)}\right]\Delta r + \\ + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(r,G,e)} \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial\dot r}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta\dot r + \\ + \left\{\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial G}\right|_{(r,G,e)} + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(r,G,e)}\left[\left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} + \right.\right. \\ \left.\left. + \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)}\right]\right\}\Delta G = \\ = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta r + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\dot r}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta\dot r + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)}\Delta G \quad . \tag{15.203}$$

In diesem Fall werden die Partialausdrücke berechnet aus

$$\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right|_{(r,G,e)} + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(r,G,e)} \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} = \\ = \frac{G}{\dot r r^2} - \frac{\mu\cos\upsilon}{\dot r G}\cos\upsilon\frac{G^2}{\mu r^2} = \frac{G\sin^2\upsilon}{\dot r r^2} = \frac{\dot r G^3}{e^2\mu^2 r^2} \tag{15.204}$$

$$\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial\dot r}\right|_{(r,\dot r,G)} = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(r,G,e)} \left.\frac{\partial e}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{(e\sin\upsilon,e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}{\partial\dot r}\right|_{(r,\dot r,G)} = \\ = \frac{\mu\cos\upsilon}{\dot r G}\sin\upsilon\frac{G}{\mu} = \frac{G\left(G^2-\mu r\right)}{e^2\mu^2 r} \tag{15.205}$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} = \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial G}\right|_{(r,G,e)} + \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial e}\right|_{(r,G,e)} \left[\left.\frac{\partial e}{\partial (e\cos\upsilon)}\right|_{(e\sin\upsilon, e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial (e\cos\upsilon)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} + \right.$$

$$\left. + \left.\frac{\partial e}{\partial (e\sin\upsilon)}\right|_{(e\sin\upsilon, e\cos\upsilon)} \left.\frac{\partial (e\sin\upsilon)}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} \right] = \qquad (15.206)$$

$$= -\frac{2}{\dot r\, r} + \frac{\mu\cos\upsilon}{\dot r\, G}\left[\cos\upsilon\,\frac{2G}{\mu r} + \sin\upsilon\,\frac{\dot r}{\mu}\right] = -\frac{\dot r\left(G^2+\mu r\right)}{e^2\,\mu^2\, r}$$

Damit ist die Darstellung (15.193) bestätigt, wodurch einerseits eine Kontrolle der Berechnungen ermöglicht wurde. Andererseits zeigt sich der nichttriviale Zusammenhang der Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right|_{(r,G,e)} \text{ und } \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial r}\right|_{(r,\dot r,G)} \quad , \quad \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial G}\right|_{(r,G,e)} \text{ und } \left.\frac{\partial \upsilon}{\partial G}\right|_{(r,\dot r,G)} \quad ,$$

die etwa aus den Herleitungen zur Darstellung (15.146) nicht eindeutig erkennbar ist. Die Berechnung der Partialausdrücke erfordert also große Sorgfalt.

Anmerkungen:

1. Wegen

$$\frac{\partial r}{\partial \dot r} = \frac{\partial \dot r}{\partial r} = 0 \qquad (15.207)$$

können formal

$$\left.\frac{\partial (e\sin\upsilon)}{\partial \dot r}\right|_{(\dot r,G)} = \left.\frac{\partial (e\sin\upsilon)}{\partial \dot r}\right|_{(r,\dot r,G)} \qquad (15.208)$$

usw. gesetzt werden.

2. In allen hergeleiteten Beziehungen kommt zum Tragen, dass die wahre Anomalie nicht für kreisnahe Bahnen definiert ist.

15.7 Variationen der transversalen Geschwindigkeit

Die transversale Geschwindigkeit[1] lautet mit der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ und dem allgemeinen Flächenparameter G

$$V_T = r\,\dot\zeta = \frac{G}{r} \quad . \qquad (15.209)$$

Die zugehörenden Partialausdrücke lauten

[1] Vgl. etwa die elementaren Untersuchungen in Abschnitt 4.4.2 (Band II)

$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial G}\right|_{(r,G)} = \frac{1}{r}$$
$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,G)} = -\frac{G}{r^2} \quad . \tag{15.210}$$

Im Fall einer Kegelschnittbewegung mit dem Kegelschnittparameter *p* ist

$$V_T = r\dot{\zeta} = \frac{\sqrt{\mu\, p}}{r} \tag{15.211}$$

und die zugehörenden Partialausdrücke lauten

$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial p}\right|_{(r,p)} = \frac{1}{2r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}$$
$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)} = -\frac{\sqrt{\mu\, p}}{r^2} \quad . \tag{15.212}$$

Im Fall einer elliptischen Kegelschnittbewegung mit dem Kegelschnittparameter $p = a\left(1-e^2\right)$

$$V_T = r\dot{\zeta} = \frac{\sqrt{\mu\, a\left(1-e^2\right)}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{a\left(1-e^2\right)}}\left(1+e\cos\upsilon\right) \tag{15.213}$$

und die zugehörenden Partialausdrücke lauten

$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{\left(r,a,e^2\right)} = \frac{\sqrt{\mu\left(1-e^2\right)}}{2r\sqrt{a}}$$
$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(r,a,e^2\right)} = -\frac{\sqrt{\mu\, a}}{2r\sqrt{1-e^2}} \tag{15.214}$$
$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{\left(r,a,e^2\right)} = -\frac{\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}}{r^2} \quad .$$

Damit ergeben sich die Variationen

$$\Delta\left(r\dot{\zeta}\right) = \frac{1}{r}\Delta G - \frac{G}{r^2}\Delta r \tag{15.215}$$

$$\Delta\left(r\,\dot{\zeta}\right)=\frac{1}{2\,r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\Delta p-\frac{\sqrt{\mu\,p}}{r^2}\,\Delta r \tag{15.216}$$

$$\Delta\left(r\,\dot{\zeta}\right)=\frac{\sqrt{\mu}}{r}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\left(1-e^2\right)}{a}}\,\Delta a-\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{1-e^2}}\,\Delta\left(e^2\right)-\frac{\sqrt{a\left(1-e^2\right)}}{r}\,\Delta r\right]\quad . \tag{15.217}$$

In Bezug auf die *Kepler*elemente (a,e,υ) kann etwa die Variation in der Form (15.216) mit den Variationen für Δp in (15.174) und Δr in (15.115) hergeleitet werden. Aus

$$\begin{aligned}\Delta\left(r\,\dot{\zeta}\right)&=\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta a+\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta e+\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}\Delta\upsilon\;=\\&=\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial p}\right|_{(r,p)}\Delta p+\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)}\Delta r\end{aligned} \tag{15.218}$$

folgen die Zuordnungen

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}&=\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial p}\right|_{(r,p)}\left.\frac{\partial p}{\partial a}\right|_{(a,e)}+\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)}\left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}\\\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)}&=\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial p}\right|_{(r,p)}\left.\frac{\partial p}{\partial e}\right|_{(a,e)}+\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)}\left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,\upsilon)}\\\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}&=\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)}\left.\frac{\partial r}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}\quad .\end{aligned} \tag{15.219}$$

Sie lauten explizit

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{(a,e,\upsilon)}&=-\frac{\sqrt{\mu p}}{2a\,r}\\\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\right)}\right|_{(a,e,\upsilon)}&=\frac{a}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(e+\cos\upsilon\right)\\\left.\frac{\partial\left(r\,\dot{\zeta}\right)}{\partial \upsilon}\right|_{(a,e,\upsilon)}&=-\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin\upsilon\quad .\end{aligned} \tag{15.220}$$

Die entsprechende Gesamtvariation ist

$$\Delta\left(r\,\dot{\zeta}\right)=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\frac{1-e^2}{2r}\Delta a+\frac{a\left(e+\cos\upsilon\right)}{p}\Delta e-e\,\sin\upsilon\,\Delta\upsilon\right]\quad . \tag{15.221}$$

In Bezug auf die *Kepler*elemente (a,e,M) kann etwa die Variation der transversalen Geschwindigkeit in der Form (15.216) mit den Variationen für Δp in (15.174) und Δr in (15.123) hergeleitet werden. Aus

$$\begin{aligned}\Delta\left(r\dot{\zeta}\right) &= \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{(a,e,M)} \Delta a + \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial e}\right|_{(a,e,M)} \Delta e + \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial M}\right|_{(a,e,M)} \Delta M = \\ &= \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial p}\right|_{(r,p)} \Delta p + \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)} \Delta r\end{aligned} \tag{15.222}$$

folgen die Zuordnungen

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{(a,e,M)} &= \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial p}\right|_{(r,p)} \left.\frac{\partial p}{\partial a}\right|_{(a,e)} + \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)} \left.\frac{\partial r}{\partial a}\right|_{(a,e,M)} \\ \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial e}\right|_{(a,e,M)} &= \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial p}\right|_{(r,p)} \left.\frac{\partial p}{\partial e}\right|_{(a,e)} + \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)} \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(a,e,M)} \\ \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial M}\right|_{(a,e,M)} &= \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial r}\right|_{(r,p)} \left.\frac{\partial r}{\partial M}\right|_{(a,e,M)} \quad .\end{aligned} \tag{15.223}$$

Sie lauten explizit

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{(a,e,M)} &= -\frac{\sqrt{\mu\, p}}{2a\, r} = -\frac{a}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{1-e^2}{2a} \\ \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial(e)}\right|_{(a,e,M)} &= \frac{a}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\left(\cos\upsilon - e\sin^2\upsilon\right) \\ \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial M}\right|_{(a,e,M)} &= -\frac{a}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{e\sin\upsilon\left(1+e\cos\upsilon\right)}{\sqrt{1-e^2}}\,.\end{aligned} \tag{15.224}$$

Die entsprechende Gesamtvariation ist

$$\Delta\left(r\dot{\zeta}\right) = \frac{a}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\frac{1-e^2}{2a}\Delta a + \left(\cos\upsilon - e\sin^2\upsilon\right)\Delta e - \frac{e\,\sin\upsilon\left(1+e\cos\upsilon\right)}{\sqrt{1-e^2}}\,\Delta M\right] \quad . \tag{15.225}$$

Werden die Elemente $\left(a, e\sin\upsilon, e^2\right)$ als unabhängige Variable aufgefasst, lautet die Gesamtvariation der radialen Geschwindigkeit

$$\Delta\left(r\dot{\zeta}\right)=\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta a\;+\;\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta\left(e\cos\upsilon\right)\;+\;\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)}\Delta\left(e^2\right)\;. \tag{15.226}$$

Mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{\left(a,e,\upsilon\right)}&=\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{\left(a,e\cos\upsilon,e^2\right)}=-\frac{1-e^2}{2r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\\ \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(a,e\cos\upsilon,e^2\right)}&=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\\ \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(a,e\cos\upsilon,e^2\right)}&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{1+e\cos\upsilon}{1-e^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{1}{1-e\cos E}\;.\end{aligned} \tag{15.227}$$

folgt

$$\Delta\left(r\dot{\zeta}\right)=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left\{-\frac{1-e^2}{2r}\Delta a+\Delta\left(e\cos\upsilon\right)+\frac{1+e\cos\upsilon}{2\left(1-e^2\right)}\Delta\left(e^2\right)\right\}\;. \tag{15.228}$$

Werden die Elemente $\left(a,e\sin M,e\cos M\right)$ als unabhängige Variable aufgefasst, lautet die Gesamtvariation der transversalen Geschwindigkeit

$$\Delta\left(r\dot{\zeta}\right)=\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)}\Delta a\;+\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)}\Delta\left(e\sin M\right)\;+\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)}\Delta\left(e\cos M\right)\;. \tag{15.229}$$

Vergleich mit dem Ausdruck (15.226) und den Ausdrücken (15.85) und (15.88) führt auf die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{\left(a,e,\upsilon\right)}=\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial a}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)}=-\frac{1-e^2}{2r}\sqrt{\frac{\mu}{p}} \tag{15.230}$$

sowie

$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)}=\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)}\left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{\left(e\sin M,e\cos M\right)}+$$
$$+\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)}\left.\frac{\partial\left(e^2\right)}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{\left(e\sin M,e\cos M\right)}$$
$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)}=\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)}\left.\frac{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{\left(e\sin M,e\cos M\right)}+ \tag{15.231}$$
$$+\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(a,e\sin\upsilon,e^2\right)}\left.\frac{\partial\left(e^2\right)}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{\left(e\sin M,e\cos M\right)}.$$

Werden die entsprechenden Ausdrücke in (15.227), sowie (15.93) und (15.68) eingesetzt, ergeben sich

$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)}=\frac{1}{1-e\cos E}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[-\frac{\left(1-e^2\right)\sin\left(E-M\right)}{1-e\cos E}+e\sin M\right]$$
$$\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{\left(a,e\sin M,e\cos M\right)}=\frac{1}{1-e\cos E}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[\frac{\left(1-e^2\right)\cos\left(E-M\right)}{1-e\cos E}+e\cos M\right] \tag{15.232}$$

und somit endgültig für die gesamte Variation

$$\Delta\left(r\dot{\zeta}\right)=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left\{-\frac{1-e^2}{2r}\Delta a+\frac{1}{1-e\cos E}\left[\left(-\frac{\left(1-e^2\right)\sin\left(E-M\right)}{1-e\cos E}+e\sin M\right)\Delta\left(e\sin M\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\left(1-e^2\right)\cos\left(E-M\right)}{1-e\cos E}+e\cos M\right)\Delta\left(e\cos M\right)\right]\right\}. \tag{15.233}$$

15.8 Variationen nach *Lyddane* Elementen

15.8.1 Variationen der Positionselemente nach *Lyddane* Elementen

Die *Lyddane*-Elemente[1] spielen eine wichtige Rolle bei der Verallgemeinerung der *Brouwer*schen Lösung des Hauptproblems der Satellitenbahnmechanik (Berücksichtigung der Einflüsse durch die zonalen Parameter $\left(J_2,J_3,J_4,J_5\right)$), bei der Transformation auf andere Parametersätze, insbesondere bei solchen, die im Rahmen einer Zweikörperbewegung keine konstanten bzw. nicht nur konstante Elemente enthalten.

[1] Siehe in Abschnitt 2.10.12 (Band I), Abschnitt 11.10

Im Zusammenhang mit *Lyddane*-Elementen **(11.446)**

$$\begin{aligned} x_{L1} &:= a \\ x_{L2} &:= e\cos M \\ x_{L3} &:= e\sin M \\ x_{L4} &:= \sin\frac{i}{2}\cos\Omega \\ x_{L5} &:= \sin\frac{i}{2}\sin\Omega \\ x_{L6} &:= M+\omega+\Omega \end{aligned} \tag{15.234}$$

werden u.a. die Variationen der Parameter $e\sin(i/2)\sin\omega$ und $e\sin(i/2)\cos\omega$ benötigt. Diese Parameter haben folgenden Bezug auf die *Lyddane*-Elemente:

$$\begin{aligned} e\sin\frac{i}{2}\sin\omega &= \sin\frac{i}{2}\sin\left(x_{L6}-\Omega\right)\,e\cos M-\sin\frac{i}{2}\cos\left(x_{L6}-\Omega\right)\,e\sin M\;= \\ &= \left(x_{L3}\,x_{L5}-x_{L2}\,x_{L4}\right)\sin x_{L6}-\left(x_{L3}\,x_{L4}+x_{L2}\,x_{L5}\right)\cos x_{L6} \\ e\sin\frac{i}{2}\cos\omega &= \sin\frac{i}{2}\cos\left(x_{L6}-\Omega\right)\,e\cos M+\sin\frac{i}{2}\sin\left(x_{L6}-\Omega\right)\,e\sin M\;= \\ &= \left(x_{L3}\,x_{L5}-x_{L2}\,x_{L4}\right)\cos x_{L6}+\left(x_{L3}\,x_{L4}+x_{L2}\,x_{L5}\right)\sin x_{L6}\quad . \end{aligned} \tag{15.235}$$

Damit ergeben sich die Partialausdrücke

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial a}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial x_{L1}}\right|_{(x_{Li})} = 0 \\ \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial\left(e\sin M\right)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial x_{L2}}\right|_{(x_{Li})} = -\sin\frac{i}{2}\cos\left(\omega+M\right) \\ \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial\left(e\cos M\right)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial x_{L3}}\right|_{(x_{Li})} = \sin\frac{i}{2}\sin\left(\omega+M\right) \\ \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial\left(\sin(i/2)\sin\Omega\right)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial x_{L4}}\right|_{(x_{Li})} = -e\cos\left(\omega+\Omega\right) \\ \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial\left(\sin(i/2)\cos\Omega\right)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial x_{L5}}\right|_{(x_{Li})} = e\sin\left(\omega+\Omega\right) \\ \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial\left(M+\omega+\Omega\right)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\sin\omega\right)}{\partial x_{L6}}\right|_{(x_{Li})} = e\sin\frac{i}{2}\cos\omega \end{aligned} \tag{15.236}$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial a}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial x_{L1}}\right|_{(x_{Li})} = 0 \\
\left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial x_{L2}}\right|_{(x_{Li})} = \sin\frac{i}{2}\sin(\omega+M) \\
\left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial x_{L3}}\right|_{(x_{Li})} = \sin\frac{i}{2}\cos(\omega+M) \\
\left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial\left(\sin(i/2)\sin\Omega\right)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial x_{L4}}\right|_{(x_{Li})} = e\sin(\omega+\Omega) \\
\left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial\left(\sin(i/2)\cos\Omega\right)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial x_{L5}}\right|_{(x_{Li})} = e\cos(\omega+\Omega) \\
\left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial(M+\omega+\Omega)}\right|_{(x_{Li})} &= \left.\frac{\partial\left(e\sin(i/2)\cos\omega\right)}{\partial x_{L6}}\right|_{(x_{Li})} = -e\sin\frac{i}{2}\sin\omega \quad .
\end{aligned}
\tag{15.237}
$$

und die Gesamtvariationen

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(e\sin\frac{i}{2}\sin\omega\right) &= \sum_{k=1}^{6}\left.\frac{\partial\left(e\sin\frac{i}{2}\sin\omega\right)}{\partial x_{Lk}}\right|_{(x_{Lk})}\Delta(x_{Lk}) \\
\Delta\left(e\sin\frac{i}{2}\cos\omega\right) &= \sum_{k=1}^{6}\left.\frac{\partial\left(e\sin\frac{i}{2}\cos\omega\right)}{\partial x_{Lk}}\right|_{(x_{Lk})}\Delta(x_{Lk}) \quad .
\end{aligned}
\tag{15.238}
$$

Im Rahmen der Positionselemente (siehe in Abschnitt 11.6) werden die „schnellen Elemente“

$$
p_4 = \sin\frac{i}{2}\sin u \quad , \quad p_5 = \sin\frac{i}{2}\cos u \tag{15.239}
$$

mit dem Argument der Breite

$$
u = \upsilon + \omega = \upsilon + x_{L6} - M - \Omega \tag{15.240}
$$

verwendet (die Verallgemeinerung auf rückläufige Bahnen wird analog wie in diesem Abschnitt behandelt). Damit gibt es die Darstellungen

$$
\begin{aligned}
p_4 &= \sin\frac{i}{2}\left[\sin\upsilon\,\cos\left(x_{L6}-M-\Omega\right)+\cos\upsilon\,\sin\left(x_{L6}-M-\Omega\right)\right] \;=\\
&= \frac{1}{e^2}\sin\frac{i}{2}\left\{e\sin\upsilon\;e\cos\omega + e\cos\upsilon\;e\sin\omega\right\} \;=\\
&= \frac{1}{e^2}\left\{e\sin\upsilon\left[\cos x_{L6}\left(x_{L3}\,x_{L5}-x_{L2}\,x_{L4}\right)+\sin x_{L6}\left(x_{L2}\,x_{L5}+x_{L3}\,x_{L4}\right)\right]+\right.\\
&\qquad \left.+e\cos\upsilon\left[\sin x_{L6}\left(x_{L3}\,x_{L5}-x_{L2}\,x_{L4}\right)-\cos x_{L6}\left(x_{L2}\,x_{L5}+x_{L3}\,x_{L4}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{15.241}
$$

$$
\begin{aligned}
p_5 &= \sin\frac{i}{2}\left[\cos\upsilon\,\cos\left(x_{L6}-M-\Omega\right)-\sin\upsilon\,\sin\left(x_{L6}-M-\Omega\right)\right] \;=\\
&= \frac{1}{e^2}\sin\frac{i}{2}\left\{e\cos\upsilon\;e\cos\omega - e\sin\upsilon\;e\sin\omega\right\} \;=\\
&= \frac{1}{e^2}\left\{e\cos\upsilon\left[\cos x_{L6}\left(x_{L3}\,x_{L5}-x_{L2}\,x_{L4}\right)+\sin x_{L6}\left(x_{L2}\,x_{L5}+x_{L3}\,x_{L4}\right)\right]+\right.\\
&\qquad \left.-e\sin\upsilon\left[\sin x_{L6}\left(x_{L3}\,x_{L5}-x_{L2}\,x_{L4}\right)-\cos x_{L6}\left(x_{L2}\,x_{L5}+x_{L3}\,x_{L4}\right)\right]\right\} \quad .
\end{aligned}
\tag{15.242}
$$

Die Variationen lauten

$$
\Delta\left(p_4\right)=\sum_{k=1}^{6}\left.\frac{\partial p_4}{\partial x_{Lk}}\right|_{\left(x_{Lk}\right)}\Delta\left(x_{Lk}\right) \quad , \quad \Delta\left(p_5\right)=\sum_{k=1}^{6}\left.\frac{\partial p_5}{\partial x_{Lk}}\right|_{\left(x_{Lk}\right)}\Delta\left(x_{Lk}\right) \quad . \tag{15.243}
$$

Um die hier benötigten Partialausdrücke durch bisher bereits abgeleitete Ausdrücke zurückführen zu können, werden zunächst die folgenden Darstellungen betrachtet:

$$
\begin{aligned}
\Delta\left(p_4\right) = {} & \left.\frac{\partial\left(p_4\right)}{\partial\left(e^2\right)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)}\Delta\left(e^2\right)+\left.\frac{\partial\left(p_4\right)}{\partial\left(e\sin\upsilon\right)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)}\Delta\left(e\sin\upsilon\right)+\\
& +\left.\frac{\partial\left(p_4\right)}{\partial\left(e\cos\upsilon\right)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)}\Delta\left(e\cos\upsilon\right)+\\
& +\left.\frac{\partial\left(p_4\right)}{\partial\left(e\sin\omega\,\sin\left(i/2\right)\right)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)}\Delta\left(e\sin\omega\,\sin\left(i/2\right)\right)+\\
& +\left.\frac{\partial\left(p_4\right)}{\partial\left(e\cos\omega\,\sin\left(i/2\right)\right)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)}\Delta\left(e\cos\omega\,\sin\left(i/2\right)\right)
\end{aligned}
\tag{15.244}
$$

Werden hier die Variationen (15.69), (15.85) und (15.243) mit den Definitionen (15.234) eingesetzt, folgen die Beziehungen

$$
\left.\frac{\partial\left(p_4\right)}{\partial\left(x_{L1}\right)}\right|_{\left(x_{Lk}\right)} \;=\; \left.\frac{\partial\left(p_4\right)}{\partial a}\right|_{\left(x_{Lk}\right)} \;=\; 0 \tag{15.245}
$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e^2)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e^2)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} +$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin\upsilon)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} +$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} + \qquad (15.246)$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin\omega\sin(i/2))}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e\sin\omega\sin(i/2))}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} +$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos\omega\sin(i/2))}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e\cos\omega\sin(i/2))}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})}$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e^2)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e^2)}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} +$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin\upsilon)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e\sin\upsilon)}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} +$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e\cos\upsilon)}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} + \qquad (15.247)$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin\omega\sin(i/2))}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e\sin\omega\sin(i/2))}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} +$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos\omega\sin(i/2))}\right|_{\left(\begin{array}{l}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{array}\right)} \left.\frac{\partial(e\cos\omega\sin(i/2))}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})}$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L4})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(\sin(i/2)\sin\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} =$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin\omega\,\sin(i/2))}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} \left.\frac{\partial(e\,\sin\omega\,\sin(i/2))}{\partial(x_{L4})}\right|_{(x_{Lk})} + \quad (15.248)$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos\omega\,\sin(i/2))}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} \left.\frac{\partial(e\,\cos\omega\,\sin(i/2))}{\partial(x_{L4})}\right|_{(x_{Lk})}$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L5})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(\sin(i/2)\cos\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} =$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin\omega\,\sin(i/2))}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} \left.\frac{\partial(e\,\sin\omega\,\sin(i/2))}{\partial(x_{L5})}\right|_{(x_{Lk})} + \quad (15.249)$$
$$+ \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos\omega\,\sin(i/2))}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} \left.\frac{\partial(e\,\cos\omega\,\sin(i/2))}{\partial(x_{L5})}\right|_{(x_{Lk})}$$

Explizit ergeben sich zunächst die Partialausdrücke

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e^2)}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} = -\frac{p_4}{e^2} = -\frac{\sin\frac{i}{2}\sin u}{e^2} \quad (15.250)$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin\upsilon)}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} = \frac{e\cos\omega\,\sin\frac{i}{2}}{e^2} \quad (15.251)$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} = \frac{e\sin\omega\,\sin\frac{i}{2}}{e^2} \quad (15.252)$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\sin\omega\,\sin(i/2))}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} = \frac{e\cos\upsilon}{e^2} \quad (15.253)$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(e\cos\omega\,\sin(i/2))}\right|_{\left(e^2, e\sin\upsilon, e\cos\upsilon, e\sin\omega\sin(i/2), e\cos\omega\sin(i/2)\right)} = \frac{e\sin\upsilon}{e^2} \quad (15.254)$$

und damit schließlich

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\sin u)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(x_{Lk})} = \frac{\sin\frac{i}{2}\cos u}{1-e^2}\times$$
$$\times\left\{(2+e\cos\upsilon)\left[\sin\upsilon\sin M+\frac{\cos\upsilon\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\right]+\frac{e\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\right\} \tag{15.255}$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\sin u)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(x_{Lk})} = \frac{\sin\frac{i}{2}\cos u}{1-e^2}\times$$
$$\times\left\{(2+e\cos\upsilon)\left[\sin\upsilon\cos M-\frac{\cos\upsilon\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\right]-\frac{e\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\right\} \tag{15.256}$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L4})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\sin u)}{\partial(\sin(i/2)\sin\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} = -\cos(u+\Omega) \tag{15.257}$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L5})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\sin u)}{\partial(\sin(i/2)\cos\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} = \sin(u+\Omega) \tag{15.258}$$

$$\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L6})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\sin u)}{\partial(M+\omega+\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} = \sin\frac{i}{2}\cos u = p_5 \quad . \tag{15.259}$$

Entsprechend lautet die Variation für p_5

$$\begin{aligned}\Delta(p_5) = {} & \left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e^2)}\right|_{\left(\substack{e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)}\right)}\Delta(e^2)+\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e\sin\upsilon)}\right|_{\left(\substack{e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)}\right)}\Delta(e\sin\upsilon)+\\ & +\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{\left(\substack{e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)}\right)}\Delta(e\cos\upsilon)+\\ & +\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e\sin\omega\sin(i/2))}\right|_{\left(\substack{e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)}\right)}\Delta(e\sin\omega\sin(i/2))+\\ & +\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e\sin\omega\sin(i/2))}\right|_{\left(\substack{e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)}\right)}\Delta(e\sin\omega\sin(i/2))\end{aligned} \tag{15.260}$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e^2)}\right|_{\left(\substack{e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)}\right)} = -\frac{p_5}{e^2} = -\frac{\sin\frac{i}{2}\cos u}{e^2} \tag{15.261}$$

$$\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e\sin\upsilon)}\right|_{\left(\begin{matrix}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{matrix}\right)} = -\frac{e\sin\omega\sin\frac{i}{2}}{e^2} \tag{15.262}$$

$$\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e\cos\upsilon)}\right|_{\left(\begin{matrix}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{matrix}\right)} = \frac{e\cos\omega\sin\frac{i}{2}}{e^2} \tag{15.263}$$

$$\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e\sin\omega\sin(i/2))}\right|_{\left(\begin{matrix}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{matrix}\right)} = -\frac{e\sin\upsilon}{e^2} \tag{15.264}$$

$$\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(e\cos\omega\sin(i/2))}\right|_{\left(\begin{matrix}e^2,e\sin\upsilon,e\cos\upsilon,\\ e\sin\omega\sin(i/2),e\cos\omega\sin(i/2)\end{matrix}\right)} = \frac{e\cos\upsilon}{e^2} \tag{15.265}$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} &= \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\cos u)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(x_{Lk})} = -\frac{\sin\frac{i}{2}\sin u}{1-e^2}\times\\ &\times\left\{(2+e\cos\upsilon)\left[\sin\upsilon\sin M+\frac{\cos\upsilon\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\right]+\frac{e\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\right\}=\\ &=-\frac{\sin u}{\cos u}\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L2})}\end{aligned} \tag{15.266}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} &= \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\sin u)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(x_{Lk})} = -\frac{\sin\frac{i}{2}\cos u}{1-e^2}\times\\ &\times\left\{(2+e\cos\upsilon)\left[\sin\upsilon\cos M-\frac{\cos\upsilon\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\right]-\frac{e\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\right\}=\\ &=-\frac{\sin u}{\cos u}\frac{\partial(p_5)}{\partial(x_{L3})}\end{aligned} \tag{15.267}$$

$$\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(x_{L4})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\cos u)}{\partial(\sin(i/2)\sin\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} = \sin(u+\Omega) \tag{15.268}$$

$$\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(x_{L5})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\sin(i/2)\cos u)}{\partial(\sin(i/2)\cos\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} = \cos(u+\Omega) \tag{15.269}$$

$$\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(x_{L6})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial\left(\sin(i/2)\cos u\right)}{\partial(M+\omega+\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} = -\sin\frac{i}{2}\sin u = -p_4 \quad . \tag{15.270}$$

15.8.2 Variationen des Argumentes der Breite nach *Lyddane* Elementen

Aus

$$\begin{aligned}\Delta(p_4) &= \Delta\left(\sin\frac{i}{2}\sin u\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{i}{2}\sin u\ \Delta(i) + \sin\frac{i}{2}\cos u\ \Delta(u)\\ \Delta(p_5) &= \Delta\left(\sin\frac{i}{2}\cos u\right) = \frac{1}{2}\cos\frac{i}{2}\cos u\ \Delta(i) - \sin\frac{i}{2}\sin u\ \Delta(u)\end{aligned} \tag{15.271}$$

folgt

$$\begin{aligned}\sin\frac{i}{2}\Delta(u) &= \cos u\ \Delta\left(\sin\frac{i}{2}\sin u\right) - \sin u\ \Delta\left(\sin\frac{i}{2}\cos u\right)\\ &= \cos u\ \Delta(p_4) - \sin u\ \Delta(p_5) \quad ,\end{aligned} \tag{15.272}$$

mit den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnittes somit

$$\begin{aligned}\Delta(u) = \frac{1}{1-e^2}\Bigg\{&\left(2+e\cos\upsilon\right)\left[\sin\upsilon\ \sin M + \frac{\cos\upsilon\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\right] +\\ &+\frac{e\cos M}{\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\Bigg\}\Delta(e\sin M) +\\ +\frac{1}{1-e^2}\Bigg\{&\left(2+e\cos\upsilon\right)\left[\sin\upsilon\ \cos M - \frac{\cos\upsilon\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\right] -\\ &-\frac{e\sin M}{\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)\Bigg\}\Delta(e\cos M) -\\ -\ \frac{\cos\Omega}{\sin\frac{i}{2}}&\Delta\left(\sin\frac{i}{2}\sin\Omega\right) +\\ +\ \frac{\sin\Omega}{\sin\frac{i}{2}}&\Delta\left(\sin\frac{i}{2}\cos\Omega\right) +\\ +\Delta(M+\omega+\Omega) \quad .&\end{aligned} \tag{15.273}$$

15.8.3 Variationen der wahren Länge nach *Lyddane* Elementen

Die wahre Länge sei etwa nach Definition (11.248) (hier ohne Berücksichtigung von retrograden Äquatorbahnen) gegeben durch

$$p_6 := \upsilon + \omega + \Omega \quad . \tag{15.274}$$

Damit wird

$$\sin p_6 = \frac{p_4\, x_{L5} + p_5\, x_{L4}}{x_{L4}^2 + x_{L5}^2} \quad , \quad \cos p_6 = \frac{p_5\, x_{L5} - p_4\, x_{L4}}{x_{L4}^2 + x_{L5}^2} \quad , \tag{15.275}$$

somit

$$\left.\frac{\partial(p_6)}{\partial(x_{L1})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(v+\omega+\Omega)}{\partial(a)}\right|_{(x_{Lk})} = 0 \quad . \tag{15.276}$$

Aus

$$\begin{aligned} \cos p_6 \left.\frac{\partial(p_6)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} &= \frac{1}{x_{L4}^2 + x_{L5}^2}\left(\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} x_{L5} + \left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} x_{L4} \right) \\ -\sin p_6 \left.\frac{\partial(p_6)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} &= \frac{1}{x_{L4}^2 + x_{L5}^2}\left(\left.\frac{\partial(p_5)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} x_{L5} - \left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} x_{L4} \right) \end{aligned} \tag{15.277}$$

und mit den Partialausdrücken (15.255) wird

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial(p_6)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} &= \left.\frac{\partial(\upsilon+\omega+\Omega)}{\partial(e\sin M)}\right|_{(x_{Lk})} = \frac{1}{p_5}\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L2})}\right|_{(x_{Lk})} = \frac{1}{\cos u\, \sin\dfrac{i}{2}}\left.\frac{\partial(\sin u\, \sin(i/2))}{\partial(e\sin M)}\right|_{(x_{Lk})} = \\ &= \frac{1}{1-e^2}\left\{ (2+e\cos\upsilon)\left[\sin\upsilon\sin M + \frac{\cos\upsilon\, \cos M}{\sqrt{1-e^2}} \right] + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{e\, \cos M}{\sqrt{1-e^2}}\left(1 + \frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \right) \right\} \end{aligned} \tag{15.278}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial(p_6)}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} &= \left.\frac{\partial(\upsilon+\omega+\Omega)}{\partial(e\cos M)}\right|_{(x_{Lk})} = \frac{1}{p_5}\left.\frac{\partial(p_4)}{\partial(x_{L3})}\right|_{(x_{Lk})} = \frac{1}{\cos u\, \sin\dfrac{i}{2}}\left.\frac{\partial(\sin u\, \sin(i/2))}{\partial(e\cos M)}\right|_{(x_{Lk})} = \\ &= \frac{1}{1-e^2}\left\{ (2+e\cos\upsilon)\left[\sin\upsilon\cos M - \frac{\cos\upsilon\, \sin M}{\sqrt{1-e^2}} \right] - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{e\, \sin M}{\sqrt{1-e^2}}\left(1 + \frac{1-e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \right) \right\} \end{aligned} \tag{15.279}$$

$$\left.\frac{\partial(p_6)}{\partial(x_{L4})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\upsilon+\omega+\Omega)}{\partial(\sin\Omega\,\sin(i/2))}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(p_6)}{\partial(x_{L5})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\upsilon+\omega+\Omega)}{\partial(\cos\Omega\,\sin(i/2))}\right|_{(x_{Lk})} = 0$$
$$\left.\frac{\partial(p_6)}{\partial(x_{L6})}\right|_{(x_{Lk})} = \left.\frac{\partial(\upsilon+\omega+\Omega)}{\partial(M+\omega+\Omega)}\right|_{(x_{Lk})} = 1 \quad . \tag{15.280}$$

15.9 Die Transitions-Matrix

1. Gegeben seien die *n* Komponenten (x_k) eines Vektors, die in den *m*-dimensionalen Vektor $(y_j = y_j(x_k))$ transformiert werden sollen. Mit Formel (15.4) gibt es den Zusammenhang

$$\Delta x_k = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \Delta y_j \qquad \langle k = 1,...,n \qquad . \tag{15.281}$$

Wenn die Differenzen $\Delta x_k = x_k - x_{k0}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j0}$ auf den Anfangsort $x_{k0} = 0, y_{j0} = 0$ bezogen werden, bleibt

$$x_k = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} y_j \qquad \langle k = 1,...,n \qquad , \tag{15.282}$$

wobei die Partialausdrücke als Elemente der Transitionsmatrix[1] dienen:

$$T = T(x,y) = \left(\frac{\partial x_k}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_m} \\ & & \cdots & \cdots & \vdots \\ & & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_m} \end{pmatrix} \quad . \tag{15.283}$$

2. Der Zustandsvektor eines Bewegungsvorganges sei in Bezug auf ein $\mathbf{p}_i$ – System bzw. ein $\mathbf{q}_j$ – System mit Hilfe der Transformationsmatrix (a_{kj}) gegeben[2]:

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i = y^j \mathbf{q}_j \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i + \dot{x}^i \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{y}^j \mathbf{q}_j + y^j \dot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{15.284}$$

Die Komponenten werden transformiert mit den Beziehungen

[1] Gelegentlich auch als „Basiswechselmatrix“ benannt. Bei derartigen Matrizen handelt es sich um *Jacobi*matrizen.

[2] Siehe etwa in den Abschnitten 6.1.4 und 6.1.5 in Band II

$$\begin{aligned} x^i &= a_j{}^i\, y^j \quad , \quad y^j = b_i{}^j\, x^i \\ \dot{x}^i &= \dot{a}_j{}^i\, y^j + a_j{}^i\, \dot{y}^j \quad , \quad \dot{y}^j = \dot{b}_i{}^j\, x^i + b_i{}^j\, \dot{x}^i \quad . \end{aligned} \tag{15.285}$$

Die partiellen Variationen der Komponenten des einen Systems in Bezug auf das andere System lauten

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = a_j{}^i \quad , \quad \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial y^j} = \dot{a}_j{}^i \quad , \quad \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^j} = a_j{}^i \quad , \\ &\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = b_i{}^j \quad , \quad \frac{\partial \dot{y}^j}{\partial x^i} = \dot{b}_i{}^j \quad , \quad \frac{\partial \dot{y}^j}{\partial \dot{x}^i} = b_i{}^j \quad . \end{aligned} \tag{15.286}$$

Im Fall orthonormalisierter Systeme[1] ist $b_k{}^j = a^j{}_k$, somit

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = a_j{}^i \quad , \quad \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial y^j} = \dot{a}_j{}^i \quad , \quad \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{y}^j} = a_j{}^i \quad , \\ &\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = a^j{}_i \quad , \quad \frac{\partial \dot{y}^j}{\partial x^i} = \dot{a}^j{}_i \quad , \quad \frac{\partial \dot{y}^j}{\partial \dot{x}^i} = a^j{}_i \qquad \left\langle b_i{}^j = a^j{}_i \right. \quad . \end{aligned} \tag{15.287}$$

3. Als Spezialfall sei die Zuordnung $\left(x_k \to x_{k0}, y_j \to x_k \ , \ j,k = 1,...,6\right)$ für die Komponenten eines Zustandsvektors (15.285) betrachtet. Sei dem Ort $\left(x_k\right)$ der Zeitpunkt *t* (oder ein Bahnwinkel ζ) zugeordnet, dem Ort $\left(x_{k0}\right)$ der Zeitpunkt t_0 (bzw. der Anfangswinkel ζ_0), dann ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{20}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{30}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{20}} & \frac{\partial x_2}{\partial x_{30}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_{10}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{20}} & \frac{\partial x_3}{\partial x_{30}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{20}} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_{30}} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{x}_{10}} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{x}_{20}} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{x}_{30}} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{20}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_{30}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{x}_{10}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{x}_{20}} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{x}_{30}} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{10}} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{20}} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_{30}} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \dot{x}_{10}} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \dot{x}_{20}} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \dot{x}_{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \\ \dot{x}_{30} \end{pmatrix} = T\left(t,t_0\right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \\ \dot{x}_{30} \end{pmatrix} . \tag{15.288}$$

Mit Hilfe der *Zustandstransitionsmatrix*[2] $T\left(t,t_0\right)$ kann der Zustand eines Systems, der zum Zeitpunkt t_0 bekannt ist, auf einen beliebigen Zeitpunkt *t* umgerechnet werden, sofern nur die

[1] Sieh in Abschnitt 6.3.2 (Band II)

[2] „state transition matrix“, siehe hierzu etwa in BATTIN, R. H. [1987] , p. 452 ff; DER, GIM, J. [1996]

entsprechenden Partialausdrücke als Elemente der Transitionsmatrix berechnet werden können. Die Matrix $T(t,t_0)$ gibt einen Einblick in die Empfindlichkeit wie sich der Zustand zum Zeitpunkt *t* bei Änderung der Anfangswerte zum Zeitpunkt t_o ändert[1].

4. Eine wichtige Anwendung der Transitionsmatrix ist im Zusammenhang mit einer Kovarianzanalyse gegeben[2]. Eine Kovarianzmatrix in Bezug auf den Zustandsvektor in einem *x*-System sei gegeben durch

$$C_x = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \sigma_{x_1x_3} & \sigma_{x_1\dot{x}_1} & \sigma_{x_1\dot{x}_2} & \sigma_{x_1\dot{x}_3} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \sigma_{x_2x_3} & \sigma_{x_2\dot{x}_1} & \sigma_{x_2\dot{x}_2} & \sigma_{x_2\dot{x}_3} \\ & & \sigma_{x_3}^2 & & & \\ \vdots & & & \sigma_{\dot{x}_1}^2 & & \vdots \\ & & & & \sigma_{\dot{x}_2}^2 & \\ \sigma_{\dot{x}_3x_1} & & \cdots & & & \sigma_{\dot{x}_3}^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{15.289}$$

Hier sind die Diagonalelemente $\left(\sigma_{x_1}^2, ...\right)$ die Varianzen (Streuungen) der zu erwartenden Beobachtungsfehler, die übrigen Elemente die Kovarianzen zwischen den restlichen Komponenten. Hier werden als Streuungen die Erwartungswerte

$$\sigma_{x_k}^2 := E\left[\left(x_k - \mu_{X_k}\right)^2\right] \tag{15.290}$$

bezeichnet, wobei μ_{X_k} der (zu bestimmende) Mittelwert der Zufallsgrößen $\left(x_k\right)$ ist. Die Kovarianzen sind die Erwartungswerte

$$\sigma_{X_1X_2} := E\left[\left(x_1 - \mu_{X_1}\right)\left(x_2 - \mu_{X_2}\right)\right] \quad . \tag{15.291}$$

Mit Hilfe einer Transitionsmatrix (15.283) kann eine Kovarianzmatrix, die in einem *x*-System gegeben ist, in ein *y*-System transformiert werden. Die Transformation lautet

$$C_y = T \cdot C_x \cdot T^T \quad , \tag{15.292}$$

wenn T^T die Transponierte der Transitionsmatrix *T* ist. Damit kann auch das Gesetz der Fehlerfortpflanzung abgeleitet werden[3].

---

[1] Vorsicht ist geboten, da sich in der Schreibweise der Transitionsmatrix in der Literatur eine unterschiedliche Konvention findet: gelegentlich wird mit $T(t_0,t)$ der Wechsel vom System zum Zeitpunkt t_0 zum Zustand des Systems zum Zeitpunkt t bezeichnet. In anderen wird mit $T(t,t_0)$ die partielle Variation des Systems zum Zeitpunkt *t* in Bezug auf das System zum Zeitpunkt t_0 bezeichnet (dieser Konvention folgt der vorliegende Bericht).

[2] Anwendung im Zusammenhang mit der Untersuchung von Weltraummüll in KLINKRAD, H. [2006], p. 217 ff.; DER, GIM, J., ROY DANCHICK [1996], hier der Vergleich zwischen den Ansätzen von *Kepler* und *Vinti* sowie unter Berücksichtigung einer universalen Darstellung. Grundbegriffe in: BRONSTEIN, I. N. et al. [1993], pp.504-524. Weitere Einzelheiten zu diesem Themenkreis werden in der vorliegenden Arbeit nicht wiederholt.

[3] grundlegende Einführung der Kovarianzanalyse in BRANDT, SIEGMUND [1968], insbesondere pp. 31-37; in bahnmechanischem Zusammenhang siehe auch in: VALLADO, DAVID. A. [2001], ch. 10, pp. 673-701

15.10 Partialausdrücke in Hansen-Systemen

15.10.1 Transformation in ein Basissystem

Es werden die Variationen einer orthonormierten Transformation zwischen einem bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System und einem als inertial angenommenen $\mathbf{p}_i$ – Basissystem (das etwa ein Äquator- oder Ekliptik- oder galaktisches System sein kann) untersucht. Die Transformation ist (nach Abschnitt 8.12.2, Band II) gegeben durch

$$\mathbf{p}_k = a^j{}_k \, \mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \quad \mathbf{q}_j^{(I)} = a_j{}^k \, \mathbf{p}_k \quad . \tag{15.293}$$

Die Transformation erfolgt mit den *Euler*schen Drehwinkeln (Ω, i, σ) und hat nach den Formeln (8.426) (Band II) die Richtungscosinus

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \quad \cos i \, \sin\sigma \, \sin\Omega + \cos\sigma \, \cos\Omega \\
a_{12} &= -\cos i \, \sin\sigma \, \cos\Omega + \cos\sigma \, \sin\Omega \\
a_{13} &= -\sin i \, \sin\sigma \\
a_{21} &= -\cos i \, \cos\sigma \, \sin\Omega + \sin\sigma \, \cos\Omega \\
a_{22} &= \quad \cos i \, \cos\sigma \, \cos\Omega + \sin\sigma \, \sin\Omega \\
a_{23} &= \quad \sin i \, \cos\sigma \\
a_{31} &= \quad \sin i \, \sin\Omega \\
a_{32} &= -\sin i \, \cos\Omega \\
a_{33} &= \quad \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{15.294}$$

Werden die Wirkungen der *Euler*schen Drehwinkel auf das Transformationsverhalten untersucht, interessieren die Variationen

$$\Delta a_{kj} = \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} \Delta\Omega + \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} \Delta i + \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} \Delta\sigma \tag{15.295}$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial a_{11}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \cos i \, \sin\sigma\cos\Omega - \cos\sigma\sin\Omega = -a_{12}$$

$$\left.\frac{\partial a_{11}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \sin i \, \sin\sigma\cos\Omega$$

$$\left.\frac{\partial a_{11}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \cos i \, \cos\sigma\sin\Omega - \sin\sigma\cos\Omega = -a_{21}$$

$$\left.\frac{\partial a_{12}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \cos i\ \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma\cos\Omega = a_{11}$$

$$\left.\frac{\partial a_{12}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \sin i\ \sin\sigma\cos\Omega$$

$$\left.\frac{\partial a_{12}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\cos i\ \cos\sigma\cos\Omega - \sin\sigma\sin\Omega = -a_{22}$$

$$\left.\frac{\partial a_{13}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{13}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\cos i\ \sin\sigma \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{13}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\sin i\ \cos\sigma = -a_{23}$$

$$\left.\frac{\partial a_{21}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\cos i\ \cos\sigma\cos\Omega - \sin\sigma\sin\Omega = -a_{22}$$

$$\left.\frac{\partial a_{21}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \sin i\ \cos\sigma\sin\Omega$$

$$\left.\frac{\partial a_{21}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \cos i\ \sin\sigma\sin\Omega + \cos\sigma\cos\Omega = a_{11}$$

$$\left.\frac{\partial a_{22}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\cos i\ \cos\sigma\sin\Omega + \sin\sigma\cos\Omega = a_{21}$$

$$\left.\frac{\partial a_{22}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\sin i\ \cos\sigma\cos\Omega \qquad (15.296)$$

$$\left.\frac{\partial a_{22}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\cos i\ \sin\sigma\cos\Omega + \cos\sigma\sin\Omega = a_{12}$$

$$\left.\frac{\partial a_{23}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = 0 \ , \ \left.\frac{\partial a_{23}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \cos i\ \cos\sigma \ , \ \left.\frac{\partial a_{23}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\sin i\ \sin\sigma = a_{13}$$

$$\left.\frac{\partial a_{31}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \sin i\cos\Omega = -a_{32} \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{31}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \cos i\ \sin\Omega \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{31}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial a_{32}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = \sin i\sin\Omega = a_{31} \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{32}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\cos i\ \cos\Omega \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{32}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial a_{33}}{\partial \Omega}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{33}}{\partial i}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = -\sin i \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{33}}{\partial \sigma}\right|_{(\Omega,i,\sigma)} = 0 \quad .$$

Für bahnanalytische Untersuchungen ist das Rechnen mit Winkeln häufig lästig. Geschickter ist dann das Arbeiten mit geeigneten trigonometrischen Größen. Im Fall, dass trigonometrische Funktionen der Winkel zum Tragen kommen, kann etwa im Fall von Transformationen folgende Variation von Interesse sein:

$$\Delta a_{kj} = \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} \Delta(\sin\Omega) + \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} \Delta(\cos\Omega) +$$
$$+ \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial(\sin i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} \Delta(\sin i) + \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial(\cos i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} \Delta(\cos i) + \qquad (15.297)$$
$$+ \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} \Delta(\sin\sigma) + \left.\frac{\partial a_{kj}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} \Delta(\cos\sigma)$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial a_{11}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \cos i\sin\sigma \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{11}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \cos\sigma \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{11}}{\partial(\sin i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{11}}{\partial(\cos i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \sin\sigma\sin\Omega \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{11}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \cos i\sin\Omega \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{11}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \cos\Omega \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{12}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \cos\sigma \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{12}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = -\cos i\,\sin\sigma \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{12}}{\partial(\sin i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{12}}{\partial(\cos i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = -\sin\sigma\cos\Omega \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{12}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = -\cos i\cos\Omega, \quad \left.\frac{\partial a_{12}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \sin\Omega \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{13}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{13}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{13}}{\partial(\sin i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = -\sin\sigma \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{13}}{\partial(\cos i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{13}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = -\sin i \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{13}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \,,$$

$$\left.\frac{\partial a_{21}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = -\cos i\cos\sigma, \quad \left.\frac{\partial a_{21}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \sin\sigma \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{21}}{\partial(\sin i)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{21}}{\partial(\cos i)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = -\cos\sigma\sin\Omega \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{21}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \cos\Omega \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{21}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = -\cos i\sin\Omega \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{22}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \sin\sigma \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{22}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \cos i\,\cos\sigma \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{22}}{\partial(\sin i)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{22}}{\partial(\cos i)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \cos\sigma\cos\Omega \quad , \qquad (15.298)$$

$$\left.\frac{\partial a_{22}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \sin\Omega \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{22}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \cos i\,\cos\Omega \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{23}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{23}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{23}}{\partial(\sin i)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \cos\sigma \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{23}}{\partial(\cos i)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{23}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{23}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \sin i \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{31}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \sin i \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{31}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{31}}{\partial(\sin i)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = \sin\Omega \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{31}}{\partial(\cos i)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{31}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{31}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\substack{\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma}} = 0 \, ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{32}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{32}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = -\sin i \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{32}}{\partial(\sin i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = -\cos\Omega \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{32}}{\partial(\cos i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{32}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{32}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \,,$$

$$\left.\frac{\partial a_{33}}{\partial(\sin\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \left.\frac{\partial a_{33}}{\partial(\cos\Omega)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \left.\frac{\partial a_{33}}{\partial(\sin i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \quad ,$$

$$\left.\frac{\partial a_{33}}{\partial(\cos i)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 1 \quad , \quad \left.\frac{\partial a_{33}}{\partial(\sin\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = \left.\frac{\partial a_{33}}{\partial(\cos\sigma)}\right|_{\left(\begin{smallmatrix}\sin\Omega,\cos\Omega,\\ \sin i,\cos i,\\ \sin\sigma,\cos\sigma\end{smallmatrix}\right)} = 0 \,.$$

15.10.2 Variationen in der Darstellung einer geradlinigen Bewegung

Als Beispiel betrachten wir die Anpassung einer Bewegung mit einer Geraden, die auf ein *Hansen*-System bezogen ist. Nach den Abschnitten 5.2.5.3 und 5.2.7 (Band II) haben Bahnradius, radiale und transversal Geschwindigkeit die Darstellungen

$$\begin{aligned} r &= \frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_P)} = \frac{G}{g_1\cos\zeta+g_2\sin\zeta} \\ \dot r &= V\sin(\zeta-\zeta_P) = g_1\sin\zeta-g_2\cos\zeta \\ r\dot\zeta &= V\cos(\zeta-\zeta_P) = g_1\cos\zeta+g_2\sin\zeta \quad . \end{aligned} \tag{15.299}$$

Die zugehörenden Variationen sind für den Bahnradius

$$\begin{aligned} \Delta r &= \left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)}\Delta G + \left.\frac{\partial r}{\partial V}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)}\Delta V + \left.\frac{\partial r}{\partial \zeta_P}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)}\Delta\zeta_P + \left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)}\Delta\zeta = \\ &= \left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)}\Delta G + \left.\frac{\partial r}{\partial g_1}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)}\Delta g_1 + \left.\frac{\partial r}{\partial g_2}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)}\Delta g_2 + \left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)}\Delta\zeta \end{aligned} \tag{15.300}$$

mit den entsprechenden Partialausdrücken für den Bahnradius

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} &= \frac{1}{V\cos(\zeta-\zeta_P)} = \frac{r}{G} = \frac{1}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta} = \left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} \\
\left.\frac{\partial r}{\partial V}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} &= -\frac{G}{V^2\cos(\zeta-\zeta_P)} = -\frac{r}{V} \\
\left.\frac{\partial r}{\partial \zeta_P}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} &= -\frac{G\,\sin(\zeta-\zeta_P)}{V\cos^2(\zeta-\zeta_P)} = -r\,\frac{\sin(\zeta-\zeta_P)}{\cos(\zeta-\zeta_P)} \\
\left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} &= \frac{G\,\sin(\zeta-\zeta_P)}{V\cos^2(\zeta-\zeta_P)} = r\,\frac{\sin(\zeta-\zeta_P)}{\cos(\zeta-\zeta_P)} = \frac{r^2\,\dot r}{G}
\end{aligned}
\tag{15.301}
$$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} &= \frac{1}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta} = \frac{r}{G} = \left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} \\
\left.\frac{\partial r}{\partial g_1}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} &= -\frac{G\cos\zeta}{(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta)^2} = -\frac{r^2\cos\zeta}{G} \\
\left.\frac{\partial r}{\partial g_2}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} &= -\frac{G\cos\zeta}{(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta)^2} = -\frac{r^2\sin\zeta}{G} \\
\left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} &= -\frac{G(-g_1\sin\zeta + g_2\cos\zeta)}{(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta)^2} = \frac{r^2\,\dot r}{G} = \left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)}
\end{aligned}
\tag{15.302}
$$

für die radiale Geschwindigkeit

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial G}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} &= 0 \\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial V}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} &= \sin(\zeta-\zeta_P) = \frac{\dot r}{V} \\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta_P}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} &= -V\cos(\zeta-\zeta_P) = -r\dot\zeta \\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} &= V\cos(\zeta-\zeta_P) = r\dot\zeta
\end{aligned}
\tag{15.303}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial \dot{r}}{\partial G}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} = 0 \\
&\left.\frac{\partial \dot{r}}{\partial g_1}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} = \sin\zeta \\
&\left.\frac{\partial \dot{r}}{\partial g_2}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} = -\cos\zeta \\
&\left.\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} = g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta = r\dot{\zeta} = \left.\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)}
\end{aligned}
\tag{15.304}
$$

und für die transversale Geschwindigkeit

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial G}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} = 0 \\
&\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial V}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} = \cos\left(\zeta-\zeta_P\right) = \frac{r\dot{\zeta}}{V} \\
&\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial \zeta_P}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} = V\sin\left(\zeta-\zeta_P\right) = \dot{r} \\
&\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial \zeta}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} = -V\sin\left(\zeta-\zeta_P\right) = -\dot{r}
\end{aligned}
\tag{15.305}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial G}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} = 0 \\
&\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial g_1}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} = \cos\zeta \\
&\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial g_2}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} = \sin\zeta \\
&\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial \zeta}\right|_{(G,g_1,g_2,\zeta)} = -g_1\sin\zeta + g_2\cos\zeta = -\dot{r} = \left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial \zeta}\right|_{(G,V,\zeta_P,\zeta)} .
\end{aligned}
\tag{15.306}
$$

Die Parameter der geradlinigen Bewegung $g_1 = V\cos\zeta_P$, $g_2 = V\sin\zeta_P$ sind mit folgenden Variationen verknüpft:

$$\Delta g_k = \left.\frac{\partial g_k}{\partial V}\right|_{(V,\zeta_P)} \Delta V + \left.\frac{\partial g_k}{\partial \zeta_P}\right|_{(V,\zeta_P)} \Delta\zeta_P \qquad \langle k = 1,2 \tag{15.307}$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial g_1}{\partial V}\right|_{(V,\zeta_P)} &= \cos\zeta_P = \frac{g_1}{V} \quad , \quad \left.\frac{\partial g_2}{\partial V}\right|_{(V,\zeta_P)} = \sin\zeta_P = \frac{g_2}{V} \\ \left.\frac{\partial g_1}{\partial \zeta_P}\right|_{(V,\zeta_P)} &= -V\sin\zeta_P = -g_2 \quad , \quad \left.\frac{\partial g_2}{\partial \zeta_P}\right|_{(V,\zeta_P)} = V\cos\zeta_P = g_1 \quad , \end{aligned} \tag{15.308}$$

somit

$$\begin{aligned} \Delta g_1 &= \cos\zeta_P\, \Delta V - V\sin\zeta_P\ \Delta\zeta_P \\ \Delta g_2 &= \sin\zeta_P\, \Delta V + V\cos\zeta_P\ \Delta\zeta_P \end{aligned} \tag{15.309}$$

mit der Umkehrung

$$\begin{aligned} \Delta V &= \cos\zeta_P\, \Delta g_1 + \sin\zeta_P\ \Delta g_2 \\ V\ \Delta\zeta_P &= -\sin\zeta_P\, \Delta g_1 + \cos\zeta_P\ \Delta g_2 \quad . \end{aligned} \tag{15.310}$$

15.10.3 Variationen einer auf ein Hansen-System bezogenen Kepler-Bewegung

Eine *Kepler*bewegung hat bei Bezug auf ein *Hansen*-System die Darstellungen für Bahnradius, radiale und transversale Geschwindigkeit[1]

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+e\cos(\zeta-\zeta_B)} = \frac{G^2}{\mu\left[1+k_1\cos\zeta+k_2\sin\zeta\right]} \\ \dot r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\ e\sin(\zeta-\zeta_B) = \frac{\mu\left[k_1\sin\zeta-k_2\cos\zeta\right]}{G} \\ r\dot\zeta &= \frac{G}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left[1+e\cos(\zeta-\zeta_B)\right] = \frac{\mu\left[1+k_1\cos\zeta+k_2\sin\zeta\right]}{G} \end{aligned} \tag{15.311}$$

mit den Parametern

$$G^2 = \mu p \quad , \quad k_1 = e\cos\zeta_B \quad , \quad k_2 = e\sin\zeta_B \quad . \tag{15.312}$$

Hier gelten die Variationen

$$\Delta k_1 = \left.\frac{\partial k_1}{\partial e}\right|_{(e,\zeta_B)} \Delta e + \left.\frac{\partial k_1}{\partial \zeta_B}\right|_{(e,\zeta_B)} \Delta\zeta_B \quad , \quad \Delta k_2 = \left.\frac{\partial k_2}{\partial e}\right|_{(e,\zeta_B)} \Delta e + \left.\frac{\partial k_2}{\partial \zeta_B}\right|_{(e,\zeta_B)} \Delta\zeta_B \tag{15.313}$$

[1] Nach den Herleitungen in Abschnitt 5.4 (Band II). Eine Unterscheidung in eine spezielle und eine allgemeine *Kepler*bewegung ist in dem vorliegenden Zusammenhang nicht nötig, d.h. alle Parameter können auch als Zeit- oder Bahnwinkel-abhängige Variable verstanden werden.

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial k_1}{\partial e}\right|_{(e,\zeta_B)} = \cos\zeta_B \quad , \quad \left.\frac{\partial k_2}{\partial e}\right|_{(e,\zeta_B)} = \sin\zeta_B$$
$$\left.\frac{\partial k_1}{\partial \zeta_B}\right|_{(e,\zeta_B)} = -e\sin\zeta_B = -k_2 \quad , \quad \left.\frac{\partial k_2}{\partial \zeta_B}\right|_{(e,\zeta_B)} = e\cos\zeta_B = k_1 \quad , \tag{15.314}$$

somit

$$\Delta k_1 = \cos\zeta_B\,\Delta e - e\,\sin\zeta_B\,\Delta\zeta_B = \cos\zeta_B\,\Delta e - k_2\,\Delta\zeta_B$$
$$\Delta k_2 = \sin\zeta_B\,\Delta e + e\,\cos\zeta_B\,\Delta\zeta_B = \sin\zeta_B\,\Delta e + k_1\,\Delta\zeta_B \quad . \tag{15.315}$$

Die Umkehrung lautet

$$\Delta e = \cos\zeta_B\,\Delta k_1 + \sin\zeta_B\,\Delta k_2 \quad , \quad e\,\Delta\zeta_B = -\sin\zeta_B\,\Delta k_1 + \cos\zeta_B\,\Delta k_2 \quad , \tag{15.316}$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial e}{\partial k_1}\right|_{(k_1,k_2)} = \cos\zeta_B \quad , \quad \left.\frac{\partial e}{\partial k_2}\right|_{(k_1,k_2)} = \sin\zeta_B$$
$$\left.\frac{\partial \zeta_B}{\partial k_1}\right|_{(k_1,k_2)} = -\frac{\sin\zeta_B}{e} \quad , \quad \left.\frac{\partial \zeta_B}{\partial k_2}\right|_{(k_1,k_2)} = \frac{\cos\zeta_B}{e} \quad . \tag{15.317}$$

Die Variationen des Bahnradius sind

$$\Delta r = \left.\frac{\partial r}{\partial p}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} \Delta p + \left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} \Delta e + \left.\frac{\partial r}{\partial \zeta_B}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} \Delta\zeta_B + \left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} \Delta\zeta =$$
$$= \left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} \Delta G + \left.\frac{\partial r}{\partial k_1}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} \Delta k_1 + \left.\frac{\partial r}{\partial k_2}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} \Delta k_2 + \left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} \Delta\zeta \tag{15.318}$$

mit den Partialausdrücken

$$\left.\frac{\partial r}{\partial p}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} = \frac{1}{1+e\cos(\zeta-\zeta_B)} = \frac{r}{p}$$
$$\left.\frac{\partial r}{\partial e}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} = -\frac{p\,\cos(\zeta-\zeta_B)}{\left[1+e\cos(\zeta-\zeta_B)\right]^2} = -\frac{r^2}{p}\cos(\zeta-\zeta_B)$$
$$\left.\frac{\partial r}{\partial \zeta_B}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} = -\frac{p\,e\sin(\zeta-\zeta_B)}{\left[1+e\cos(\zeta-\zeta_B)\right]^2} = -\frac{r^2}{p}\,e\,\sin(\zeta-\zeta_B) \tag{15.319}$$
$$\left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} = \frac{p\,e\sin(\zeta-\zeta_B)}{\left[1+e\cos(\zeta-\zeta_B)\right]^2} = \frac{r^2}{p}\,e\,\sin(\zeta-\zeta_B) = \frac{r^2\,\dot r}{G}$$

somit

$$\Delta r = \frac{r}{p}\left[\Delta p - r\cos\left(\zeta-\zeta_B\right)\Delta e - r\,e\,\sin\left(\zeta-\zeta_B\right)\Delta\zeta_B + \frac{r\,\dot r\,G}{\mu}\,\Delta\zeta\right] \tag{15.320}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial r}{\partial G}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= \frac{2G}{\mu\left[1+k_1\cos\zeta+k_2\sin\zeta\right]} = 2\frac{r}{G}\\
\left.\frac{\partial r}{\partial k_1}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= -\frac{G^2\,\cos\zeta}{\mu\left[1+k_1\cos\zeta+k_2\sin\zeta\right]^2} = -\frac{\mu r^2}{G^2}\cos\zeta\\
\left.\frac{\partial r}{\partial k_2}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= -\frac{G^2\,\sin\zeta}{\mu\left[1+k_1\cos\zeta+k_2\sin\zeta\right]^2} = -\frac{\mu r^2}{G^2}\sin\zeta\\
\left.\frac{\partial r}{\partial \zeta}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= -\frac{G^2\left(-k_1\sin\zeta+k_2\cos\zeta\right)}{\mu\left[1+k_1\cos\zeta+k_2\sin\zeta\right]^2} = \frac{r^2\,\dot r}{G} = \left.\frac{\partial r}{\partial\zeta}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}
\end{aligned} \tag{15.321}$$

somit

$$\Delta r = \frac{r}{G}\left[2\,\Delta G - \frac{\mu r}{G}\cos\zeta\,\Delta k_1 - \frac{\mu r}{G}\sin\zeta\,\Delta k_2 + r\,\dot r\,\Delta\zeta\right] \quad . \tag{15.322}$$

Variationen der radialen Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\Delta r = &\left.\frac{\partial \dot r}{\partial p}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}\Delta p + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}\Delta e + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta_B}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}\Delta\zeta_B + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}\Delta\zeta\ =\\
&= \left.\frac{\partial \dot r}{\partial G}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)}\Delta G + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial k_1}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)}\Delta k_1 + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial k_2}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)}\Delta k_2 + \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)}\Delta\zeta
\end{aligned} \tag{15.323}$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial p}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\,e\sin\left(\zeta-\zeta_B\right) = -\frac{\dot r}{2\,p}\\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial e}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\sin\left(\zeta-\zeta_B\right) = \frac{\dot r}{e}\\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta_B}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\cos\left(\zeta-\zeta_B\right) = -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(\frac{p}{r}-1\right)\\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\cos\left(\zeta-\zeta_B\right) = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(\frac{p}{r}-1\right)
\end{aligned} \tag{15.324}$$

somit

$$\Delta\dot r = \dot r\left[-\frac{1}{2\,p}\Delta p + \frac{1}{e}\Delta e\right] - \sqrt{\frac{\mu}{p}}\left(\frac{p}{r}-1\right)\left[\Delta\zeta_B - \Delta\zeta\right] \tag{15.325}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial G}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= -\frac{\mu}{G^2}\left(k_1\sin\zeta - k_2\cos\zeta\right) = -\frac{\dot r}{G}\\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial k_1}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= \frac{\mu\sin\zeta}{G}\\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial k_2}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= -\frac{\mu\cos\zeta}{G}\\
\left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= \frac{\mu}{G}\left[k_1\cos\zeta + k_2\sin\zeta\right] = \frac{G}{r} - \frac{\mu}{G} = \left.\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}
\end{aligned} \tag{15.326}$$

somit

$$\Delta\dot r = \frac{1}{G}\left[-\dot r\,\Delta G + \mu\sin\zeta\,\Delta k_1 - \mu\cos\zeta\,\Delta k_2 + \left(\frac{G^2}{r} - \mu\right)\Delta\zeta\right] \quad . \tag{15.327}$$

Variationen der transversalen Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
\Delta\left(r\dot\zeta\right) = \left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial p}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}\Delta p + \left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial e}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}\Delta e + \left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial \zeta_B}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}\Delta\zeta_B + \left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial \zeta}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)}\Delta\zeta \;=\\
= \left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial G}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)}\Delta G + \left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial k_1}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)}\Delta k_1 + \left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial k_2}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)}\Delta k_2 + \left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial \zeta}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)}\Delta\zeta
\end{aligned} \tag{15.328}$$

mit den Partialausdrücken

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial p}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}\left(1+e\cos\left(\zeta-\zeta_B\right)\right) = -\frac{r\dot\zeta}{2\,p}\\
\left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial e}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\cos\left(\zeta-\zeta_B\right) = \frac{1}{e}\left[r\dot\zeta - \sqrt{\frac{\mu}{p}}\right]\\
\left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial \zeta_B}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} &= e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\sin\left(\zeta-\zeta_B\right) = \dot r\\
\left.\frac{\partial\left(r\dot\zeta\right)}{\partial \zeta}\right|_{(p,e,\zeta_B,\zeta)} &= -e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\sin\left(\zeta-\zeta_B\right) = -\dot r
\end{aligned} \tag{15.329}$$

somit

$$\Delta\left(r\dot\zeta\right) = -\frac{r\dot\zeta}{2\,p}\,\Delta p + \frac{1}{e}\left[r\dot\zeta - \sqrt{\frac{\mu}{p}}\right]\Delta e + \dot r\,\Delta\zeta_B - \dot r\,\Delta\zeta \tag{15.330}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial G}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= -\frac{\mu\left[1+k_1\cos\zeta+k_2\sin\zeta\right]}{G^2} = -\frac{r\,\dot{\zeta}}{G} \\
\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial k_1}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= \frac{\mu\cos\zeta}{G} \\
\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial k_2}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= \frac{\mu\sin\zeta}{G} \\
\left.\frac{\partial\left(r\dot{\zeta}\right)}{\partial \zeta}\right|_{(G,k_1,k_2,\zeta)} &= \frac{\mu\left[-k_1\sin\zeta+k_2\cos\zeta\right]}{G} = -\dot{r}
\end{aligned} \tag{15.331}$$

somit

$$\Delta\left(r\dot{\zeta}\right) = -\frac{r\,\dot{\zeta}}{G}\,\Delta G \;+\; \frac{\mu}{G}\left[\cos\zeta\,\Delta k_1+\sin\zeta\;\Delta k_2\right]-\dot{r}\;\Delta\zeta \quad . \tag{15.332}$$

15.11 Anmerkungen zu den Anwendungen der Partialausdrücke

Die in diesem Kapitel zusammengestellten Parametervariationen mit den zugehörenden Partialausdrücken erlauben insbesondere auch Sensitivitätsuntersuchungen um unter rein geometrischen Aspekten unabhängig von bahndynamischen Aussagen Transformationen und ihre Empfindlichkeiten in Abhängigkeit von Rotationsparametern zu beurteilen. Beispielhafte typische Fragestellungen in bahnanalytischem Zusammenhang sind:

- Welche Winkel haben die größte, welche die geringste Sensitivität?
- Welche Transformationen sind am stabilsten?
- Lassen sich Kovarianzen durch geeignete Wahl von geometrischen Parametern beeinflussen?
- Wie hängen die Empfindlichkeiten von Bahnparametern von geometrischen Randbedingungen ab?
- Wie stark beeinflussen physikalische Bewegungseinflüsse bestimmte bahngeometrische Parameter?

16 Überblick Bahnbestimmung

In Ergänzung zu missionsanalytischen Untersuchungen müssen auch Überlegungen zur Bestimmung der Bahn eines Raumflugkörpers angestellt werden. Hierbei geht es um die Schnelligkeit, mit der eine Bahn bestimmt werden kann um das Objekt sicher wieder beobachten zu können, um die Genauigkeit, mit der die Bahnparameter bekannt sein müssen, um die Missionsziele erfüllen zu können, um die Beobachtungsverfahren, die mit einem gewissen Aufwand erstellt werden müssen und die technisch realisierbar bzw. anwendbar sind.

Das außerordentlich umfangreiche und für die Durchführung einer Raumflugmission zentrale Thema der Bahnbestimmung ist nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes. Es sei daher auf die hierzu extrem zahlreiche Literatur verwiesen[1]. Im Folgenden werden daher nur einige Anmerkungen gegeben:

Die Aufgabenstellung einer Bahnbestimmung zerfällt in zwei getrennte Bereiche:

1. Eine unbekannte Bahn muss schnell und mit hinreichend großer Genauigkeit bestimmt werden. Hier handelt es sich um den klassischen Fall einer Bahnbestimmung wie sie aus der Beobachtung der Planeten, vor allem der Kleinen Planeten und Kometen, entwickelt wurde. Diese Verfahren werden in sehr spezialisierter Weise im Fall der Satellitenbewegung benötigt beim Einschuss eines Satelliten in seine Bahn, wenn von der Aufstiegsrakete keine oder nicht genügend genaue Einschussdaten zur Verfügung gestellt werden können, aber auch bei unbekannten Objekten. Dieser klassische Fall einer Bahnbestimmung wird im Fall der Satellitenbewegung als „Erstbahnbestimmung", gelegentlich auch „vorläufige Bahnbestimmung" bezeichnet[2]. Die Erstbahnbestimmung, die in der Regel über einen kurzen Bahnbogen erstellt werden muss, wird üblicherweise mit einem vereinfachten Bahnmodell ausgehend von einem Zweikörperproblem durchgeführt. Wesentlich für die zu erwartende Genauigkeit sind die Beobachtungsmethoden: Winkelmessungen, Entfernungsmessungen („range"), Messung der Änderung der Entfernung („range rate", „Dopplermessungen"), Beobachtung über ein globales Navigationssystem („GNSS").
2. Wenn die Bahnparameter hinreichend genau näherungsweise bekannt sind, werden sie durch Hinzunahme möglichst vieler Beobachtungen mit einem mehr oder weniger hochgenauen Bahnmodell verbessert. Dieser zweite Schritt wird als „Bahnverbesserung" bezeichnet. In der Regel muss zur Durchführung eines solchen Verbesserungsverfahrens bereits

[1] Hinweis auf einige Literatur (ohne jeden Anspruch auf Vollständigkeit) zu Methoden und Problemen der Bahnbestimmung von natürlichen Himmelskörpern und Raumflugkörpern: GAUSS, C. F. [1809/1906]; TISSERAND, F. [1889-1896]; MOULTON, F. R. [1914], ch. VI. ; BAUSCHINGER, J. [1928] ; STRACKE, G. [1929]: *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, Berlin; HERGET, P. [1948]; STUMPFF, K. [1959]; ESCOBAL, P. R. [1965]; BUCERIUS, H. [1966]; GEYLING, F. T. and WESTERMAN, H. R [1971]; ECKSTEIN, M. C. [1973b]; SOOP [1983]; EL'YASBERG, P. E. & A. A. SUKHANOV, T. MORLEY & F. HECHLER [1984]; TAPLEY, BYRON D.; BOB E. SCHUTZ and GEORGE H. BORN [1990]; DOW, J. M. et al.[1991]; SCHNEIDER, M. [1999]; VALLADO, DAVID A. [2001], ch. 10; spezielle Arbeiten in PITKIN, E. T. et al. [1969]; SNOW, D. E. et al. [1992]; THURMAN, S. W. et al. [1992]

[2] In der englischsprachigen Literatur als „preliminary orbit determination" bisweilen auch als „early orbit methods" bezeichnet.

eine sehr präzise Ausgangsnäherung vorliegen, so dass das Verfahren, das ausschließlich iterativ arbeitet, zu einer hochgenauen Lösung konvergieren kann.

16.1 Methoden der Erstbahnbestimmung

Der Zustandsvektor eines Himmelskörpers besteht aus 6 unabhängigen Parametern. Zu ihrer Bestimmung sind somit 6 unabhängige Beobachtungswerte erforderlich. Im Fall einer Satellitenbewegung, von der man weiß, dass sie über einen gewissen Zeitraum etwa als *Kepler*-Bewegung angenähert werden kann, können diese 6 Parameter den sechs Bahnparametern, etwa den sechs *Kepler*elementen, entsprechen. Diese Parameter gelten für einen gewissen Zeitpunkt. Die sechs Parameter definieren somit eine oskulierende Bahn zu diesem Zeitpunkt an die wahre Bahn. Aufgabe der Erstbahnbestimmung ist es, diese sechs Parameter der oskulierenden Bahn so zu schätzen, dass die oskulierende Bahn sich möglichst gut an die wahre Bahn anschmiegt um damit eine gute Voraussetzung für die später notwendige Bahnverbesserung zu liefern. Der Anschmiegeprozess gilt nur für einen gewissen kleinen Zeitraum. Die Bahnverbesserung wird daher nötig, um die Bahnparameter als Funktionen der Zeit darstellen zu können.

16.1.1 Prinzipien der Verfahren von Laplace und Gauß

Der (geo-) zentrische Ortsvektor **r** eines Satelliten setzt sich aus dem topozentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}_T$ und dem geozentrischen Ortsvektor **R** des Beobachtungsstation zusammen. Als bekannt kann nur der Ortsvektor $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ angenommen werden. Von dem topozentrischen Ortsvektor wird die Richtung $\mathbf{r}_{T0}\left(\mathbf{r}_{T0}^2 = 1\right)$ und in manchen Verfahren sein Betrag, die Schrägentfernung ρ, gemessen. Dann ist der zu bestimmende Ortsvektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_T + \mathbf{R} = \rho\,\mathbf{r}_{T0} + \mathbf{R} \qquad \left\langle \left(\mathbf{r}_{T0}\right)^2 = 1 \right. \tag{16.1}$$

mit dem Radius *r* aus

$$r^2 = \mathbf{r}^2 = \rho^2 + 2\,\rho\left(\mathbf{r}_{T0} \cdot \mathbf{R}\right) + \mathbf{R}^2 \quad . \tag{16.2}$$

Der Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\,\mathbf{r}_{T0} + \rho\,\dot{\mathbf{r}}_{T0} + \dot{\mathbf{R}} \tag{16.3}$$

mit der Entfernungsänderung ("range-rate") $\dot{\rho}$ und der Variation $\dot{\mathbf{r}}_{T0}$ des topozentrischen Richtungsvektors, die beide zunächst als unbekannt angenommen werden müssen. Nur der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{R}}$ der Bodenstation kann als bekannt angenommen werden. Das Bahnbestimmungsverfahren von *Lagrange-Laplace* fasst im Wesentlichen den zentrischen Orts- und Geschwindigkeitsvektor $\left(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\right)$ als Unbekannte auf. Ihre Bestimmung kann nur näherungsweise auf iterativem Weg erfolgen. Dazu wird in einer weiteren Differentiation der Beschleunigungsvektor im Fall einer näherungsweisen *Kepler*bewegung der *Kepler*schen Beschleunigung gleichgesetzt:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\rho}\,\mathbf{r}_{T0} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\mathbf{r}}_{T0} + \rho\,\ddot{\mathbf{r}}_{T0} + \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3}\left(\rho\,\mathbf{r}_{T0} + \mathbf{R}\right) \quad . \tag{16.4}$$

Durch Interpolation über mindestens drei Beobachtungen $\mathbf{r}_{T01}, \mathbf{r}_{T02}, \mathbf{r}_{T03}$ kann der topozentrische Richtungsvektor $\mathbf{r}_{T0} = \mathbf{r}_{T0}(t)$ als Funktion der Zeit dargestellt werden[1], so dass auch die Variationen $\dot{\mathbf{r}}_{T0} = \dot{\mathbf{r}}_{T0}(t)$ und $\ddot{\mathbf{r}}_{T0} = \ddot{\mathbf{r}}_{T0}(t)$ gebildet werden können. Im Fall von erdgebundenen Satellitenbeobachtungen können die geozentrischen Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren $\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \ddot{\mathbf{R}}$ der Beobachtungsstation als bekannt angenommen werden. Damit kann die Schrägentfernung berechnet werden aus

$$\rho = -\left[\frac{\mu}{r^3}\mathbf{R} + \ddot{\mathbf{R}}\right]\frac{\cdot\left(\mathbf{r}_{T0} \times \dot{\mathbf{r}}_{T0}\right)}{\ddot{\mathbf{r}}_{T0} \cdot \left(\mathbf{r}_{T0} \times \dot{\mathbf{r}}_{T0}\right)} \quad , \tag{16.5}$$

wenn der Radius r bekannt ist. Dieser ist aus Gleichung (16.2) gegeben, so dass die Kombination dieser beiden Gleichungen als Bedingungsgleichung zur Berechnung des Radius die *Lagrange*sche Gleichung 8ten Grades der Form

$$r^8 - a_2 r^6 + a_5 r^3 - a_8 = 0 \tag{16.6}$$

ergibt. Die Koeffizienten a_2, a_5, a_8 sind mit den Größen $\mathbf{r}_{T0}, \dot{\mathbf{r}}_{T0}, \ddot{\mathbf{r}}_{T0}$ und $\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, \ddot{\mathbf{R}}$ bekannt[2].

In der Literatur finden sich aufwendige Verfahren, um eindeutige Lösungen dieser Gleichung zu erhalten. Im Fall der Planetenbewegung hat diese Gleichung drei positive reelle Lösungen, von denen die Lösung mit $r = \rho$ die „Erdbahnlösung" darstellt. In diesem Fall ist auch die Beschleunigung $\ddot{\mathbf{R}}$ als der Bewegung der Erde zugeordnet als *Kepler*beschleunigung gegeben:

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{f_N\left(m_\odot + m_\oplus\right)}{R^3}\mathbf{R} \quad , \tag{16.7}$$

wenn f_N die Newtonsche Gravitationskonstante, $m_\odot$ die Masse der Sonne und $m_\oplus$ die Masse der Erde bedeutet, sowie $\mathbf{R}$ den heliozentrischen Ortsvektor der Erde.

Damit wird auch klar, dass die klassischen Verfahren der Bahnbestimmung der Planeten nicht uneingeschränkt auf die Bahnbestimmung von Erdsatelliten übertragen werden können:

1. Im Fall von Erdsatelliten kann es keine „Erdbahnlösung" geben.

2. Wenn außerdem von einem festen Ort auf der Erde aus beobachtet wird, kann nach Formel[3] (8.218) mit der tropischen Rotationsgeschwindigkeit der Erde $\dot{\Theta}$ der Beschleunigungsvektor

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\dot{\Theta}^2\left(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2\right) \tag{16.8}$$

verwendet werden, wenn mit dem $\mathbf{p}_i$ – System das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem und mit den x_i die zugehörigen (zeitabhängigen!) Koeffizienten des Beobachtungsortes bezeichnet werden. Wird von einem bewegten Objekt aus beobachtet (Flugzeug, Satellit, Auto, usw.) muss $\ddot{\mathbf{R}}$

---

[1] Etwa parabolische Interpolation nach *Lagrange*, oder eine *Taylor*entwicklung nach den Potenzen der Zwischenzeiten, o.ä.

[2] Die von *Gauß* hergeleitete trigonometrische Form dieser Gleichung kann etwa bei BUCERIUS, H. [1966], pp. 88-89 nachgelesen werden

[3] Band II, Abschnitt 8.6.3

entsprechend angepasst werden. Im Fall der Bahnbestimmung von Erdsatelliten hat die Gleichung 8. Grades genau eine reelle Lösung[1].

Mit bekanntem Radius *r* kann auch die Variation $\dot{\rho}$ der Schrägentfernung („range rate“) berechnet werden, wozu aus Beziehung (16.4)

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\mu}{r^3}\mathbf{R} + \ddot{\mathbf{R}}\right]\frac{\cdot\left(\mathbf{r}_{T0}\times\ddot{\mathbf{r}}_{T0}\right)}{\dot{\mathbf{r}}_{T0}\cdot\left(\mathbf{r}_{T0}\times\ddot{\mathbf{r}}_{T0}\right)} \tag{16.9}$$

verwendet werden kann. Damit sind alle Größen bekannt, um aus den Formeln (16.1) und (16.3) den Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}(t_2),\dot{\mathbf{r}}(t_2)\right)$ zum betreffenden Zeitpunkt (üblicherweise der Zeitpunkt der mittleren der drei Beobachtungen) als Anfangswert zur Berechnung der Bahn erhalten zu können.

Die praktischen Probleme bei der Durchführung der Erstbahnbestimmung sind erheblich infolge der Ungenauigkeit der Beobachtungen $\mathbf{r}_{T0}$ und der Interpolation um die Funktionen $\mathbf{r}_{T0}(t),\dot{\mathbf{r}}_{T0}(t),\ddot{\mathbf{r}}_{T0}(t)$ zu bilden. Die eindeutige Auflösung der *Lagrange*schen Gleichung (16.6) erfordert besondere Sorgfalt. Zudem üben die zeitlichen Distanzen bzw. die Winkeldifferenzen zwischen den einzelnen Beobachtungen einen erheblichen Einfluss auf die Genauigkeit der Bahnbestimmung aus. Es sei auf die sehr umfangreiche Literatur hingewiesen, in der Methoden vorgeschlagen werden, um diese Probleme in der Praxis in den Griff zu bekommen[2]. Zur Bearbeitung unterschiedlicher Anforderungen werden unterschiedliche Methoden eingesetzt. Allen Methoden in der Erstbahnbestimmung nach *Lagrange-Laplace* gemeinsam ist die Iteration mit allen sechs Koordinaten des Zustandsvektors.

Dagegen vermeidet die Methode von *Gauß* die Verwendung des Geschwindigkeitsvektors. In dieser Methode wird der Ortsvektor als Linearkombination aus den (noch unbekannten) Randvektoren $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3$ mit Koeffizienten n_1, n_3 dargestellt, welche Funktionen der Zeiten und der Randvektoren sind:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = n_1\mathbf{r}_1 + n_3\mathbf{r}_3 = n_1(t;t_1,t_3,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)\,\mathbf{r}_1 + n_3(t;t_1,t_3,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_3)\,\mathbf{r}_3 \quad , \tag{16.10}$$

Die Koeffizienten n_i werden als Dreiecksverhältnisse bezeichnet, da sind in der Form

$$n_1 = \frac{|\mathbf{r}\times\mathbf{r}_3|}{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3|} \quad , \quad n_3 = -\frac{|\mathbf{r}\times\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3|} \quad . \tag{16.11}$$

dargestellt werden können. Im Rahmen der *Gauß*schen Erstbahnbestimmung werden sie mit Hilfe von Integralgleichungen berechnet. Mit ihrer Hilfe können die Schrägentfernungen (ρ_1,ρ_3) für die beiden Randwerte als Funktionen der n_i und der Beobachtungsdaten dargestellt werden, so dass hier nur diese zwei Parameter (im Gegensatz zu den sechs Parametern des Zustandsvektors im Fall der Bahnbestimmung aus Anfangswerten) zu iterieren sind.

Die Bahnbestimmung der Himmelskörper blieb über Jahrhunderte eine der zentralen Aufgaben der Himmelsmechanik. So ist es nicht verwunderlich, dass viele der bedeutendsten Himmelsmechaniker Beiträge, Ergänzungen, Verbesserungen, Modifikationen zu den grundlegenden Ideen von *Laplace* bzw. *Gauß* beigetragen haben. Dies bezieht sich vor allem auf geeignete Startwerte am

[1] Siehe etwa in STUMPFF, K. [1965], p. 642

[2] Siehe etwa in TAPLEY, BYRON D.; BOB E. SCHUTZ and GEORGE H. BORN [1990]

Beginn der Hypothesenrechnungen sowie Verbesserungen unter Einbeziehung von „Störungen“ der ursprünglich zugrunde gelegten *Kepler*bewegung. Hier sind u.a. zu nennen: *W. Olbers*[1] *J. F. Encke*[2], *P. A. Hansen*[3], *Th. V. Oppolzer*[4], *J. W. Gibbs*[5], *P. Harzer*[6], *Y. Väisälä*[7], *S. Herrick*[8], *P. Herget*[9] .

Im Rahmen der Weltraumfahrt kam der Bahnbestimmung der künstlichen Raumflugkörper eine zentrale Bedeutung zu. Täglich werden zigtausende Bahnbestimmungen operationell durchgeführt. Wird ein Satellit in seine Umlaufbahn eingeschossen, werden beim Einschuss in die endgültige Bahn von der Trägerrakete normalerweise sehr gute erste Bahnparameter bereitgestellt, so dass eine Erstbahnbestimmung überflüssig wird und die Methoden der Bahnverbesserung können sofort eingesetzt werden. Letztere versagen allerdings, wenn die zur Verfügung gestellten Bahnparameter ungenau oder gänzlich unbekannt sind. In einem solchen Fall und vor allem bei unbekannten Objekten muss jedoch nach wie vor eine Erstbahnbestimmung zuverlässig durchgeführt werden. Die dazu entwickelten Programme sind auf die Probleme der Raumfahrt speziell zugeschnitten.

Als typisches Beispiel einer Erstbahnbestimmung für Erdsatelliten wird in Abschnitt 16.1.3 die Methode von *Kustaanheimo* etwas ausführlicher dargestellt. Weitere detaillierte Rechenschemata zu etlichen Methoden der Erstbahnbestimmung sowohl aus Anfangswerten nach Lagrange-*Laplace* wie aus Randwerten nach *Gauß* und jeweiligen etlichen Modifikationen können in der Literatur nachgelesen werden[10].

---

[1] W. OLBERS [1797]: 'Über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen aus einige Beobachtungen zu berechnen' erschienen in Weimar. Diese vor den Arbeiten von Gauß erschienene Arbeit brachte die auf *L. Euler* zurückgehende und von *J. H. Lambert* weiterentwickelte analytische Lösung des Bahnbestimmungsproblems in eine erste praktisch anwendbare Form (zitiert nach K. STUMPFF [1959], p. 346)

[2] Berliner Jahrbuch für 1833, p. 292, der Hinweis findet sich bei J. BAUSCHINGER [1928], p. 183

[3] nach K. STUMPFF [1959], p. 347

[4] TH. VON OPPOLZER [1870], *Lehrbuch der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, mehrere Bände; siehe auch http://de.wikipedia.org/wiki/Theodor_von_Oppolzer sowie in J. BAUSCHINGER [1928], p. 183; K. STUMPFF [1959], p. 411

[5] J. W. GIBBS [1888]: 'On the determination of elliptical orbits' *Nat. Ac. Of Science*, Vol. IV (8. Mem), (zitiert in J. BAUSCHINGER [1928], p. 182)

[6] HARZER, P. [1896], *Astron. Nachr.* **141**, 177 (zitiert nach K. STUMPFF [1959], p. 352)

[7] VÄISÄLÄ, Y. [1924]: 'Über die Laplace’sche Methode der Bahnbestimmung', *Annales Univ. Fennicae Aboensis* **2**; VÄISÄLÄ, Y. [1939]: 'Eine einfache Methode der Bahnbestimmung', *Annales Acad. Sci. Fennicae* (A) **52**; (zitiert nach K. STUMPFF [1959], p. 504)

[8] HERRICK, S. [1937]: 'On the Laplacian and Gaussian orbit methods', *Publ. of the Astron. Soc. Of the Pacific* **49**, 17; sowie HERRICK, S. [1945]: 'Nearly parabolic and nearly rectilinear orbits', *A.J.* **51**, 123 (zitiert in K. STUMPFF [1959], p. 502)

[9] HERGET, P. [1948]

[10] Vor allem in BUCERIUS, H. [1966], ab Seite 120; ESCOBAL, P. R. [1965]; CAPELLARI, J. O., VELEZ, C. E. and FUCHS, A. J. [1976] ch. 9; LONG, ANNE C. ET AL. [1989]; VALLADO, DAVID A [2001], ch. 7; u.a.

16.1.2 Bahnbestimmung aus Winkelmessungen

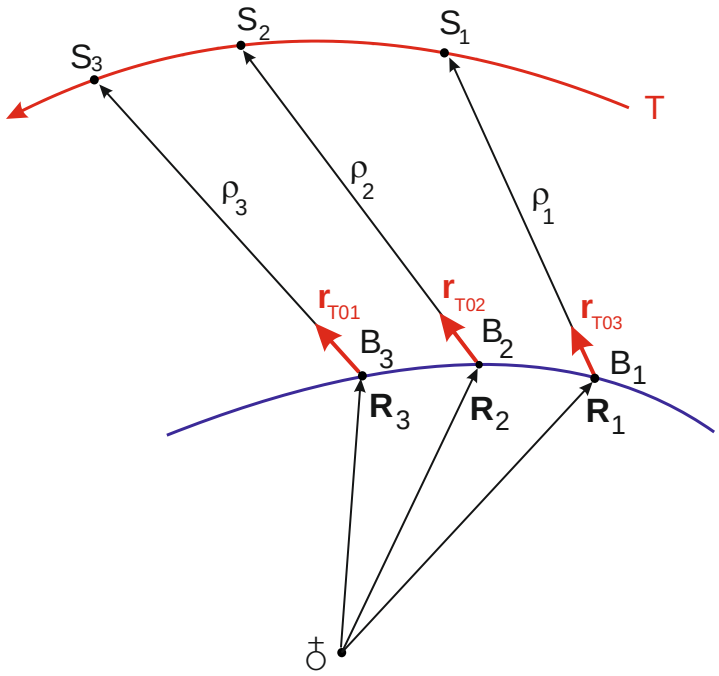


Bild 16-1: Beobachtung einer Satellitenbahn an drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten mit den topozentrischen Ortsvektoren $\mathbf{r}_{T1} = \rho_1 \mathbf{r}_{T01}, \mathbf{r}_{T2} = \rho_2 \mathbf{r}_{T02}, \mathbf{r}_{T3} = \rho_3 \mathbf{r}_{T03}$

Die klassische Beobachtung der Planetenbewegung, die als Grundlage einer Erstbahnbestimmung sowohl nach dem *Laplace*schen wie dem *Gauß*schen Prinzip dienen musste, bestand ausschließlich aus Winkelmessungen. Diese mussten zunächst nach Möglichkeit von Beobachtungsfehlern und sphärischen Einflüssen[1] (Aberration, Präzession, Nutation usw.) korrigiert werden. In der Praxis werden bei Satellitenbeobachtungen die *Gauß*sche Methode bei kleinen Winkelzwischenwerten und die von *P. R. Escobal*[2] entwickelte Methode („Double r-Iteration“) bei großen Winkeldifferenzen eingesetzt[3].

16.1.3 Über die Bahnbestimmung nach Kustaanheimo

Die von *P. Kustaanheimo* entwickelte Methode der Erstbahnbestimmung[4] ist eine interessante Variante der *Laplace*schen Erstbahnbestimmung, wobei viele Elemente der *Gauß*schen Methode, insbesondere die Dreiecksverhältnisse, mit verwendet werden. Daher kann diese Methode als eine

[1] Siehe in Kapitel 9, Band II

[2] ESCOBAL, P. R. [1965], pp. 272-290

[3] CAPELLARI, J. O., VELEZ, C. E. and FUCHS, A. J. [1976] pp. 9-1- 9-24; VALLADO, DAVID A [2001], ch. 7.3

[4] KUSTAANHEIMO, P. E. [1961]; STUMPFF, K. [1965] pp. 636-643

geschickte Kombination aus den beiden prinzipiellen Verfahren der Erstbahnbestimmung bezeichnet werden.

Die Methode von *Kustaanheimo* wird vorteilhaft eingesetzt, wenn die ersten Beobachtungen eines Satelliten nur durch Winkelmessungen (in der Regel Azimut und Elevation) gegeben sind. Diese Messungen können große Streuungen haben, so dass durch je drei Winkelpaare sehr unterschiedliche Bahnen gelegt werden können. Da im Fall einer Satellitenbewegung stets von einer („ungestörten") *Kepler*bewegung ausgegangen wird, können alle möglichen *Kepler*bahnen (elliptisch bis hyperbolisch) das Ergebnis sein. Der fließende Übergang zwischen den *Kepler*bahnen kann mit den von *K. Stumpff* entdeckten *c*- bzw. *s*-Funktionen abgedeckt werden[1]. Dazu verwendet *Kustaanheimo* die *Lagrange*-Koeffizienten in der geschlossenen Darstellung mit den *Stumpff*schen Funktionen.

Im Fall von drei (unabhängigen) Winkelbeobachtungen einer Satellitenbahn seien nach Reduktion der Beobachtungen die Richtungsvektoren im Frühlingspunkt bezogenen bewegten $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem gegeben:

$$\mathbf{r}_{T01} = \mathbf{r}_{T0}(t_1) \;,\; \mathbf{r}_{T02} = \mathbf{r}_{T0}(t_2) \;,\; \mathbf{r}_{T03} = \mathbf{r}_{T0}(t_3) \;. \tag{16.12}$$

Ferner seien die in diesem Koordinatensystem dargestellten geozentrischen Ortsvektoren der Beobachtungsstation mit ihren Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren bekannt. Wenn die Frühlingspunkt-bezogenen kartesischen Koordinaten der Station mit x_i bezeichnet werden, ist mit der tropischen Erdrotation $\dot{\Theta}$ und mit den Formeln aus den Abschnitten 8.6.2 und 8.6.3 ihr Zustands- und Beschleunigungsvektor gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_i &:= \mathbf{R}(t_i) = x_i^k \mathbf{p}_k \\
\dot{\mathbf{R}}_i &= \dot{\mathbf{R}}(t_i) = \dot{\Theta}(-x_2\,\mathbf{p}_1 + x_1\,\mathbf{p}_2) \qquad \langle i = 1,2,3 \\
\ddot{\mathbf{R}}_i &= \ddot{\mathbf{R}}(t_i) = -\dot{\Theta}(x_1\,\mathbf{p}_1 + x_2\,\mathbf{p}_2) \quad .
\end{aligned} \tag{16.13}$$

Gesucht sind die geozentrischen Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) = \rho_i\,\mathbf{r}_{T0i} + \mathbf{R}_i \quad \langle i = 1,2,3 \tag{16.14}$$

bzw. der Zustandsvektor eventuell zum mittleren Beobachtungszeitpunkt t_2

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2) \;,\; \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}(t_2) \;. \tag{16.15}$$

Um die Ortsvektoren $\mathbf{r}_i$ berechnen zu können, müssen die Schrägentfernungen ρ_i bekannt sein, deren Berechnung hier die zentrale Aufgabe ist. Da eine *Kepler*bewegung als eben angenommen wird, lässt sich der mittlere Ortsvektor (wie in Relation (16.10)) durch Linearkombination aus den beiden äußeren Ortsvektoren darstellen:

$$\mathbf{r}_2 = n_1\,\mathbf{r}_1 + n_3\,\mathbf{r}_3 \tag{16.16}$$

mit den Dreiecksverhältnissen

[1] Kapitel 13

$$n_1 = \frac{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|} \quad , \quad n_3 = -\frac{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|} \quad . \tag{16.17}$$

Wird der Zustandsvektor $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ als Anfangswert akzeptiert, können im Fall der als eben betrachteten speziellen (d.h. ungestörten) *Kepler*bewegung die Randvektoren mit Hilfe der *Lagrange* Koeffizienten (vgl. die Beziehungen (13.1) auf Seite 231) dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= F_{L1}\,\mathbf{r}_2 + G_{L1}\,\dot{\mathbf{r}}_2 \\ \mathbf{r}_3 &= F_{L3}\,\mathbf{r}_2 + G_{L3}\,\dot{\mathbf{r}}_2 \quad . \end{aligned} \tag{16.18}$$

Damit ist es möglich, den Anfangszustandsvektor mit Hilfe der *Lagrange* Koeffizienten durch Linearkombination aus den Randwerten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_3$ darzustellen:

$$\mathbf{r}_2 = \frac{G_{L3}\,\mathbf{r}_1 - G_{L1}\,\mathbf{r}_3}{F_{L1}\,G_{L3} - F_{L3}\,G_{L1}} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{F_{L3}\,\mathbf{r}_1 - F_{L1}\,\mathbf{r}_3}{F_{L1}\,G_{L3} - F_{L3}\,G_{L1}} \quad . \tag{16.19}$$

Auf diese Weise können dann auch die Dreiecksverhältnisse durch die *Lagrange*-Koeffizienten ausgedrückt werden:

$$n_1 = \frac{G_{L3}}{F_{L1}\,G_{L3} - F_{L3}\,G_{L1}} \quad , \quad n_3 = -\frac{G_{L1}}{F_{L1}\,G_{L3} - F_{L3}\,G_{L1}} \quad . \tag{16.20}$$

Wenn die Determinante $(G_0 := F_{L1}\,G_{L3} - F_{L3}\,G_{L1})$ verschwindet, bedeutet dies Kollinearität der beiden Randvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_3$. Dieser Fall kann normalerweise ausgeschlossen werden, da der Satellit bei nicht zu großen Zeitintervallen nur über dem Horizont von der Station aus beobachtet werden kann, so dass üblicherweise $\sphericalangle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) < 180°$ und außerdem $\sphericalangle(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) \neq 0$ infolge der unterschiedlichen Beobachtungszeitpunkte angenommen werden kann. Dicht aufeinanderfolgende Satellitenbeobachtungen in Horizontnähe sollten daher nicht für eine Erstbahnbestimmung herangezogen werden. Andererseits darf bei zu großen Zeitintervallen zwischen den einzelnen Beobachtungen eine Bahn nicht mehr als spezielle *Kepler*bahn angenommen werden. Es kann also davon ausgegangen werden, dass stets

$$F_{L1}\,G_{L3} - F_{L3}\,G_{L1} \neq 0 \quad . \tag{16.21}$$

Somit sind die Beziehungen (16.19) stets erklärt und es gilt mit (16.14)

$$(\rho_2\,\mathbf{r}_{T02} + \mathbf{R}_2)(F_{L1}\,G_{L3} - F_{L3}\,G_{L1}) - (\rho_1\,\mathbf{r}_{T01} + \mathbf{R}_1)\,G_{L3} + (\rho_3\,\mathbf{r}_{T03} + \mathbf{R}_3)\,G_{L1} = 0 \quad . \tag{16.22}$$

In dieser Beziehung wird der Hilfsvektor

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_2\,(F_{L1}\,G_{L3} - F_{L3}\,G_{L1}) - \mathbf{R}_1\,G_{L3} + \mathbf{R}_3\,G_{L1} \tag{16.23}$$

abgespalten und die Determinante

$$D := \det(\mathbf{r}_{T01}, \mathbf{r}_{T02}, \mathbf{r}_{T03}) \neq 0 \tag{16.24}$$

eingeführt, die wegen derselben Überlegungen nicht verschwinden kann wie die Determinante in (16.21). Dies trifft auch auf die G_{Li} zu, die nicht verschwinden können, wenn die $\mathbf{r}_i$ als nicht kollinear vorausgesetzt werden können: $G_{Li} \neq 0$, $i = 1,3$. Es bleibt somit

$$\mathbf{Q} = \rho_1 G_{L3}\,\mathbf{r}_{T01} - \rho_2 \left(F_{L1}G_{L3} - F_{L3}G_{L1}\right)\mathbf{r}_{T02} - \rho_3 G_{L1}\,\mathbf{r}_{T03} \quad , \tag{16.25}$$

woraus die Schrägentfernungen eindeutig berechnet werden können:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\det\left(\mathbf{Q}, \mathbf{r}_{T02}, \mathbf{r}_{T03}\right)}{G_{L3}\; D} \\ \rho_2 &= \frac{\det\left(\mathbf{Q}, \mathbf{r}_{T01}, \mathbf{r}_{T03}\right)}{\left(F_{L1}G_{L3} - F_{L3}G_{L1}\right)G_{L3}\; D} \\ \rho_3 &= -\frac{\det\left(\mathbf{Q}, \mathbf{r}_{T01}, \mathbf{r}_{T02}\right)}{G_{L1}\; D} \quad . \end{aligned} \tag{16.26}$$

Diese Berechnungen können nur iterativ durchgeführt werden, da die *Lagrange* Koeffizienten noch unbekannt sind. Ihre Darstellung mit *Stumpff*-Funktionen ist in den Formeln (13.66) (auf Seite 241) gegeben:

$$\begin{aligned} F_{L1} &= 1 - \frac{\mu\, s_{21}}{r_2} \;\; , \;\; G_{L1} = \left(t_1 - t_2\right) - \mu\, s_{31} \\ F_{L3} &= 1 - \frac{\mu\, s_{23}}{r_2} \;\; , \;\; G_{L3} = \left(t_3 - t_2\right) - \mu\, s_{33} \quad . \end{aligned} \tag{16.27}$$

Die Hypothesenrechnung wird mit den Anfangswerten

$$F_{L1}^{(0)} = F_{L3}^{(0)} = 1 \;,\; G_{L1}^{(0)} = t_1 - t_2 \;,\; G_{L3}^{(0)} = t_3 - t_2 \tag{16.28}$$

gestartet. Damit können nullte Näherungen $\rho_i^{(0)}$ für die Schrägentfernungen und mit den Beziehungen (16.14) auch für die Ortsvektoren $\mathbf{r}_i^{(0)}\left(i = 1,2,3\right)$ gefunden werden und damit auch der zentrische Radius $r_2^{(0)} = \left|\mathbf{r}_2^{(0)}\right|$. Darüber hinaus kann die nullte Näherung für den Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t_2 aus der zweiten der Beziehungen (16.19) erhalten werden:

$$\dot{\mathbf{r}}_2^{(0)} = -\frac{F_{L3}^{(0)}\,\mathbf{r}_1^{(0)} - F_{L1}^{(0)}\,\mathbf{r}_3^{(0)}}{F_{L1}^{(0)}G_{L3}^{(0)} - F_{L3}^{(0)}G_{L1}^{(0)}} = \frac{\mathbf{r}_3^{(0)} - \mathbf{r}_1^{(0)}}{t_3 - t_1} \quad . \tag{16.29}$$

Interessant ist, dass in dieser Ausgangshypothese die Dynamik der *Kepler*bewegung noch nicht berücksichtigt ist, welche durch die zentrische Gravitationskonstante μ charakterisiert wird. Um die in den *Lagrange*-Koeffizienten (16.27) benötigten *Stumpff*schen Funktionen

$$s_{2i} = s_{2i}\left(\alpha^2\tau_i^2\right) \;\; , \;\; s_{3i} = s_{3i}\left(\alpha^2\tau_i^2\right) \tag{16.30}$$

berechnen zu können, müssen deren Koeffizienten $\left(\alpha^2\tau_i^2\right)$ bekannt sein. Dazu wird mit Hilfe der Relation (13.54) zunächst

$$G_{Li} = s_{1i}\, r_2 + s_{2i}\, r_2' \qquad \langle i = 1,3 \tag{16.31}$$

gebildet, wenn mit r_2' die Differentiation nach der regularisierenden Variablen τ bezeichnet wird. Es ist [1]

$$r_2' = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_2'}{r_2} = \mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 \quad . \tag{16.32}$$

Mit den F_{Li} aus (16.27) und G_{Li} aus (16.31) kann die zweite *Stumpff*sche Funktion eliminiert werden und es ergibt sich die erste *Stumpff*sche *s*-Funktion aus

$$s_{1i} = \frac{G_{Li}}{r_2} + \frac{F_{Li} - 1}{\mu} r_2' = \tau_i \, c_{1i} \quad . \tag{16.33}$$

Für die erste *Stumpff*sche *c*-Funktion gibt es nach der Rekursionsformel (13.34) (auf Seite 237) den Zusammenhang

$$c_{1i} = 1 - (\alpha \tau_i)^2 \, c_{3i} \qquad \langle 1 = 1,3 \quad . \tag{16.34}$$

Im Fall der hier untersuchten nullten Näherung ist noch keine *Kepler*bewegung bekannt. Daher verschwindet in diesem Fall die für die Energiekonstante stehende Größe α^2 und die nullte Näherung für die erste *Stumpff*sche *c*-Funktion ist nach dem letzten Ausdruck $c_{1i}^{(0)} = 1$. Mit bekanntem c_{1i} ist es dann möglich, die regularisierende Variable für die beiden Randwerte aus der Beziehung (16.33) zu berechnen:

$$\tau_i = \left(\frac{G_{Li}}{r_2} + \frac{F_{Li}}{\mu} \mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 \right) \frac{1}{c_{1i}} \qquad \langle i = 1,3 \quad . \tag{16.35}$$

Die Energiekonstante der *Kepler*bewegung ist in der Form (13.20) aus dem Geschwindigkeitsintegral gegeben:

$$\alpha^2 = \frac{2\mu}{r_2} - \dot{\mathbf{r}}_2^2 \tag{16.36}$$

Damit sind die Koeffizienten $\left(\alpha^2 \tau_i^2\right)$ der *c*-Funktionen bekannt. Auf manchen Rechnern werden die *c*-Funktionen ähnlich wie die trigonometrischen Funktionen durch *Tschebyscheff*-Approximationen bereitgestellt. Wenn dies nicht der Fall ist, können sie durch die bekannten Reihen (13.36) berechnet werden:

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(-\alpha^2 \tau^2\right)^\nu}{(2\nu + n)!} \qquad \langle n = 2,3 \quad . \tag{16.37}$$

[1] vgl. die Untersuchungen in Abschnitt 13.2 auf Seite 234

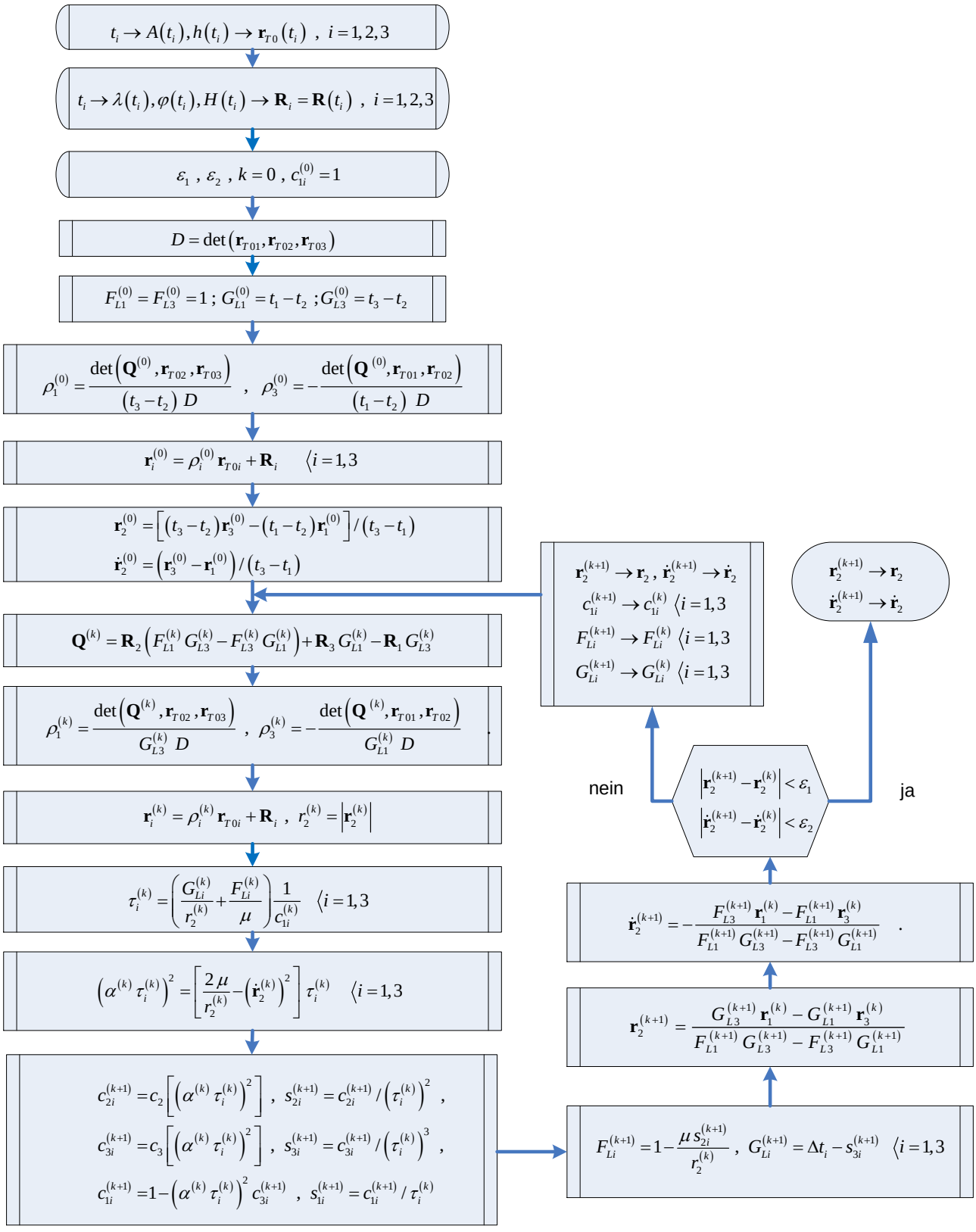


Bild 16-2: Schema der Erstbahnbestimmung nach *P. Kustaanheimo*

Da diese Reihen rasch konvergieren, können im Fall einer Erstbahnbestimmung die folgenden ersten Glieder verwendet werden:

$$
\begin{aligned}
c_{2i} &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}(\alpha\tau_i)^2 + \frac{1}{6!}(\alpha\tau_i)^4 - \frac{1}{8!}(\alpha\tau_i)^6 + \frac{1}{10!}(\alpha\tau_i)^8 - + \ldots\ldots = \\
&= 0.5 - 0.041\overline{6}(\alpha\tau_i)^2 + 0.00138\overline{8}(\alpha\tau_i)^4 - 0.00002480(\alpha\tau_i)^6 + 0.00000028(\alpha\tau_i)^8 - \ldots\ldots \\
c_{3i} &= \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!}(\alpha\tau_i)^2 + \frac{1}{7!}(\alpha\tau_i)^4 - \frac{1}{9!}(\alpha\tau_i)^6 + \frac{1}{11!}(\alpha\tau_i)^8 - + \ldots\ldots = \\
&= 0.1\overline{6} - 0.008\overline{3}(\alpha\tau_i)^2 + 0.00019841(\alpha\tau_i)^4 - 0.00000276(\alpha\tau_i)^6 + 0.00000003(\alpha\tau_i)^8 - \ldots\ldots \\
c_{1i} &= 1 - (\alpha\tau_i)^2 c_{3i} \qquad \langle i = 1,3 \qquad .
\end{aligned}
\tag{16.38}
$$

Im Fall einer Iteration der Erstbahnbestimmung kann nun nach der nullten Näherung mit der Einführung der Dynamik durch die geozentrische Gravitationskonstante in der Energiebeziehung (16.36) eine erste Näherung in den *Lagrange*-Koeffizienten erhalten werden, womit der Iterationsprozess mit Berechnung des Anfangszustandsvektors $(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2)$ mit Hilfe der Beziehungen (16.19) in eine neue Runde gehen kann. Der gesamte Prozess wird abgebrochen, wenn die Verbesserungen im Zustandsvektor unter eine vorgegebene Genauigkeitsgrenze gefallen sind (siehe das Schema dieses Verfahrens im Diagramm Bild 16-2). Aus dem Zustandsvektor können dann in der bekannten Weise etwa die Keplerelemente berechnet werden[1].

Anmerkungen:

1. Die Konvergenz dieses Verfahrens wird auf die Untersuchungen von H. BUCERIUS zurückgeführt[2]. Auch wenn diese Untersuchungen die Konvergenz des *Gauß*schen Verfahrens einer Erstbahnbestimmung aus Randwerten untersucht, kann diese Untersuchung auf das vorliegende Verfahren von *Kustaanheimo* mit den Anfangswerten $F_{Li}^{(0)} = 1,\ G_{Li}^{(0)} = t_2 - t_1$ übertragen werden.
2. In diesem Verfahren (wie auch schon in dem Verfahren von *Y. Väisälä*)[3] wird die Lösung der Gleichung 8. Grades vermieden. Nach *Stumpff*[4] kann deshalb die Iteration relativ langsam ablaufen, so dass es empfehlenswert wäre, die Gleichung 8. Grades in den iterativen Prozess einzubauen. Damit kann dann eventuell auch eine bessere Anfangshypothese gefunden werden.
3. Eine Alternative besteht darin, als Ziel der Hypothesenrechnung die Berechnung der Schrägentfernungen zu betrachten:

[1] Abschnitt 11.1.1 auf Seite 60

[2] BUCERIUS, H. [1949-1954]: 'Bahnbestimmung als Randwertproblem', I-V, Veröffentlichungen Sternwarte München, Band **3**, No 15; Band **4**, 11, 14 (zitiert nach P. KUSTAANHEIMO [1961], p. 24)

[3] *Y. Väisälä* war vermutlich ein Lehrer von *P. Kustaanheimo* in Finnland. Die Methode der Erstbahnbestimmung nach *Väisälä* wird beschrieben in STUMPFF, K. [1965], p. 387

[4] STUMPFF, K. [1965], p. 641

$$\left|\rho_1^{(k+1)} - \rho_1^{(k)}\right| < \varepsilon_1 \quad , \quad \left|\rho_3^{(k+1)} - \rho_3^{(k)}\right| < \varepsilon_1 \tag{16.39}$$

Der Aufwand an Rechenschritten wird dadurch jedoch nicht verringert, wie ein Blick auf das Schema in Bild 16-2 zeigt.

16.1.4 Bahnbestimmung aus Winkel- und Entfernungsmessungen

Gegeben seien an (mindestens) drei Zeitpunkten t_i Winkelmessungen mit den zugehörigen topozentrischen Richtungsvektoren $\mathbf{r}_{T0i} = \mathbf{r}_{T0}(t_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ und Schrägentfernungen $\rho_i = \rho(t_i)$. Unter der Annahme, dass die zentrischen Ortsvektoren $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(t_i)$ der Beobachtungsstation (bzw. Beobachtungsstationen, da die Beobachtung von verschiedenen Stationen aus erfolgen kann) bekannt sind, können die zentrischen Ortsvektoren des Satelliten berechnet werden:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i) = \rho_i \, \mathbf{r}_{T0i} + \mathbf{R}_i \quad . \tag{16.40}$$

Mit diesen Ortsvektoren können die Keplerelemente der Bahn wie in Abschnitt 11.1.3 (ab Seite 64) hergeleitet mit Hilfe des Sektor zu Dreiecksverhältnisses γ_S berechnet werden.

16.1.4.1 Alternative Berechnung des Kegelschnittparameters

In dem Verfahren in Abschnitt 11.1.3 wurde der Kegelschnittparameter *p* mit Hilfe des Sektor zu Dreiecksverhältnisses γ_S berechnet. Eine Alternative dazu bietet sich an unter der Annahme einer ebenen Bewegung mit der Beziehung

$$\mathbf{r}_2 = n_1 \, \mathbf{r}_1 + n_3 \, \mathbf{r}_3 \quad . \tag{16.41}$$

Hier sind die Dreiecksverhältnisse bekannt aus (vgl. die Beziehungen (16.11))

$$n_1 = \frac{\left|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3\right|}{\left|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3\right|} \quad , \quad n_3 = -\frac{\left|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1\right|}{\left|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3\right|} \quad . \tag{16.42}$$

Hier dürfen die Randvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_3$ nicht kollinear sein, so dass der Normalenvektor der Bahnebene aus

$$\mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3}{\left|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3\right|} \tag{16.43}$$

berechnet werden kann. Aus der Polargleichung eines Kegelschnittes folgt

$$r_i \cos \upsilon_i = \frac{p - r_i}{e} \quad . \tag{16.44}$$

Nimmt man die Vektoren $\mathbf{r}_i$ im auf das Perigäum bezogenen Apsidensystem[1] an, so hat die erste Koordinate (Bezug auf die $\mathbf{q}_1^{(P)}$-Achse) den Wert $r\cos\upsilon$, wenn mit υ die wahre Anomalie bezeichnet wird. Mit dieser Beziehung kann aus (16.41)

$$p - r_2 = n_1\left(p - r_1\right) + n_3\left(p - r_3\right) \tag{16.45}$$

gebildet werden, woraus der Kegelschnittparameter direkt berechnet werden kann[2]:

$$p = \frac{n_1 r_1 - r_2 + n_3 r_3}{n_1 - 1 + n_3} \quad . \tag{16.46}$$

Der weitere Rechenprozess erfolgt wie in Abschnitt 11.1.3, wozu nach wie vor das Sektor zu Dreieckverhältnis iterativ gelöst werden muss.

16.1.4.2 Berechnung des Geschwindigkeitsvektors nach Herrick-Gibbs

Etwa zur selben Zeit wie *G. W. Hill* wirkte in Yale der Physiker und Chemiker *Josiah Willard Gibbs* (1839-1903). Er war auch mathematisch interessiert und führte an Stelle der Quaternionen die Verwendung der dreidimensionalen Vektoranalysis ein. Diese wurde auch für die Himmelsmechanik interessant[3]. Als direkten Beitrag zu einem bahnmechanischem Problem kann die Arbeit W. G. GIBBS [1888] angesehen werden, die später von *S. Herrick* im Rahmen der Erstbahnbestimmung ausgebaut wurde.

Alternativ zur Berechnung der *Kepler*elemente aus Randvektoren können die *Kepler*elemente wie üblich aus dem Zustandsvektor, etwa $\left(\mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_2\right)$, berechnet werden. Dazu muss es möglich sein, den Geschwindigkeitsvektor auf die gegebenen Ortsvektoren zurückzuführen. Dies geschieht mit Hilfe der *Herrick-Gibbs* Gleichung

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = d_1\,\mathbf{r}_1 + d_2\,\mathbf{r}_2 + d_3\,\mathbf{r}_3 \quad . \tag{16.47}$$

Die hier benötigten Koeffizienten d_i können nur näherungsweise zur Verfügung gestellt werden. Dazu werden die Ortsvektoren in der Umgebung von $\mathbf{r}_2$ in eine *Taylor*reihe entwickelt:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_2 + \left(t_i - t_2\right)\dot{\mathbf{r}}_2 + \left(t_i - t_2\right)^2 \frac{\ddot{\mathbf{r}}_2}{2!} + \left(t_i - t_2\right)^3 \frac{\mathbf{r}_2^{III}}{3!} + \left(t_i - t_2\right)^4 \frac{\mathbf{r}_2^{IV}}{4!} + O\left(\mathbf{r}_2^{V}\right) \quad . \tag{16.48}$$

Aus den beiden Differenzen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 &= -\left(t_2 - t_1\right)\dot{\mathbf{r}}_2 + \left(t_2 - t_1\right)^2 \frac{\ddot{\mathbf{r}}_2}{2!} - \left(t_2 - t_1\right)^3 \frac{\mathbf{r}_2^{III}}{3!} + \left(t_2 - t_1\right)^4 \frac{\mathbf{r}_2^{IV}}{4!} + O\left(\mathbf{r}_2^{V}\right) \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 &= \left(t_3 - t_2\right)\dot{\mathbf{r}}_2 + \left(t_3 - t_2\right)^2 \frac{\ddot{\mathbf{r}}_2}{2!} + \left(t_3 - t_2\right)^3 \frac{\mathbf{r}_2^{III}}{3!} + \left(t_3 - t_2\right)^4 \frac{\mathbf{r}_2^{IV}}{4!} + O\left(\mathbf{r}_2^{V}\right) \end{aligned} \tag{16.49}$$

können $\dot{\mathbf{r}}_2$ sowie $\ddot{\mathbf{r}}_2$ eliminiert werden:

---

[1] siehe in Kapitel 8.13, Band II, Formel (8.446)

[2] Vgl. ESCOBAL, P. R. [1965], Abschnitt 8.5.1

[3] siehe in BATTIN, R. H. [1987], p.132

$$
\begin{aligned}
&(t_3-t_2)\mathbf{r}_1-(t_3-t_1)\mathbf{r}_2+(t_2-t_1)\mathbf{r}_3 = \\
&\quad=(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)\left\{\frac{\ddot{\mathbf{r}}_2}{2}+(t_3-t_1)\frac{\mathbf{r}_2^{III}}{3!}+\left[(t_2-t_1)(t_1-t_3)+(t_3-t_2)^2\right]\frac{\mathbf{r}_2^{IV}}{4!}+O\left(\mathbf{r}_2^{V}\right)\right\} \qquad (16.50)\\
&-(t_3-t_2)^2\,\mathbf{r}_1+\left[(t_3-t_2)^2-(t_2-t_1)^2\right]\mathbf{r}_2+(t_2-t_1)^2\,\mathbf{r}_3 = \\
&\quad=(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)\left\{\dot{\mathbf{r}}_2+(t_2-t_1)(t_3-t_2)\frac{\mathbf{r}_2^{III}}{3!}+(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_1-t_3)\frac{\mathbf{r}_2^{IV}}{4!}+O\left(\mathbf{r}_2^{V}\right)\right\} \qquad (16.51)
\end{aligned}
$$

Durch zweimalige Differentiation liefern die beiden letzten Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&(t_3-t_2)\ddot{\mathbf{r}}_1+(t_2-t_1)\ddot{\mathbf{r}}_3-(t_3-t_1)\ddot{\mathbf{r}}_2=(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)\frac{\mathbf{r}_2^{IV}}{2}+O\left(\mathbf{r}_2^{V}\right)\\
&-(t_3-t_2)^2\,\ddot{\mathbf{r}}_1+\left[(t_3-t_2)^2-(t_2-t_1)^2\right]\ddot{\mathbf{r}}_2+(t_2-t_1)^2\,\ddot{\mathbf{r}}_3=(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)\mathbf{r}^{III}+O\left(\mathbf{r}_2^{V}\right).
\end{aligned} \qquad (16.52)
$$

Mit diesen beiden Gleichungen können die beiden Glieder mit $\mathbf{r}_2^{III}$ und $\mathbf{r}_2^{IV}$ in (16.51) nach dem Vorschlag von *Gibbs* eliminiert werden. Wird dann die zweite Ableitung noch durch die *Kepler*-sche Bewegungsgleichung

$$
\ddot{\mathbf{r}}_i=-\mu\frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \qquad \langle i=1,2,3 \qquad (16.53)
$$

ersetzt, ergeben sich schließlich die gesuchten Koeffizienten der *Herrick-Gibbs* Gleichung (16.47) in

$$
\begin{aligned}
d_1&=-(t_3-t_2)\left[\frac{1}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)}-\frac{\mu}{12\,r_1^3}\right]\\
d_2&=\left[(t_3-t_2)-(t_2-t_1)\right]\left[\frac{1}{(t_2-t_1)(t_3-t_2)}+\frac{\mu}{12\,r_2^3}\right] \qquad (16.54)\\
d_3&=(t_2-t_1)\left[\frac{1}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}+\frac{\mu}{12\,r_3^3}\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Dies sind Näherungswerte, da die Ableitungen ab der fünften Ordnung vernachlässigt werden. Gleichwohl erfüllen sie erfahrungsgemäß die Anforderungen an eine zuverlässige Erstbahnbestimmung.

16.1.5 Bahnbestimmung aus Winkel- und Entfernungsänderungsmessungen

Gegeben seien an (mindestens) drei Zeitpunkten t_i Winkelmessungen mit den zugehörigen (in der üblichen Weise korrigierten) topozentrischen Richtungsvektoren $\mathbf{r}_{T0i}=\mathbf{r}_{T0}(t_i)$ $(i=1,2,3)$ und die topozentrischen Entfernungsänderungen $\dot{\rho}_i=\dot{\rho}(t_i)$. Außerdem seien wieder die zentrischen Ortsvektoren $\mathbf{R}_i=\mathbf{R}(t_i)$ der Beobachtungsstation (bzw. Beobachtungsstationen) und die zugehörigen

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren $\left(\dot{\mathbf{R}}_i, \ddot{\mathbf{R}}_i\right)$ bekannt. Der Rechenprozess wird an zwei Methoden in diesem Abschnitt angedeutet[1].

16.1.5.1 Modifikation der Erstbahnbestimmung nach Laplace

Entsprechend der *Laplace*schen Methode der Erstbahnbestimmung werden die Beobachtungen um die mittlere Beobachtung entwickelt. Dies erfolgt zunächst für die Entfernungsänderungen in den beiden äußeren Beobachtungen durch

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= \dot{\rho}_2 + (t_1 - t_2)\,\ddot{\rho}_2 + \frac{1}{2}(t_1 - t_2)^2\,\dddot{\rho}_2 + O\left[(t_1 - t_2)^3\right] \\ \dot{\rho}_3 &= \dot{\rho}_2 + (t_3 - t_2)\,\ddot{\rho}_2 + \frac{1}{2}(t_3 - t_2)^2\,\dddot{\rho}_2 + O\left[(t_3 - t_2)^3\right] \quad ,\end{aligned} \tag{16.55}$$

woraus nach Elimination der dritten Ableitung der topozentrischen Distanz für die Beschleunigung folgt

$$\ddot{\rho}_2 = \dot{\rho}_1 \frac{(t_3 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_1)} - \dot{\rho}_2 \frac{(t_3 - t_2) + (t_1 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_2)} - \dot{\rho}_3 \frac{(t_1 - t_2)}{(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)} \quad . \tag{16.56}$$

In gleicher Weise kann die die Interpolation der topozentrischen Richtungsvektoren durchgeführt und für deren Geschwindigkeit zum mittleren Beobachtungszeitpunkt erhalten werden

$$\dot{\mathbf{r}}_{T02} = \mathbf{r}_{T01} \frac{(t_3 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_1)} - \mathbf{r}_{T02} \frac{(t_3 - t_2) + (t_1 - t_2)}{(t_1 - t_2)(t_3 - t_2)} - \mathbf{r}_{T03} \frac{(t_1 - t_2)}{(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)} \quad . \tag{16.57}$$

Die Lösung des Problems erfolgt wie bei den Methoden der Erstbahnbestimmung üblich durch eine Kombination einer dynamischen und einer geometrischen Bedingungsgleichung. Zunächst folgt aus der geometrischen Bedingung (siehe Formel (16.1))

$$\mathbf{r}_2 = \rho_2\,\mathbf{r}_{T02} + \mathbf{R}_2 \tag{16.58}$$

durch zweimalige Differentiation

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_2 &= \dot{\rho}_2\,\mathbf{r}_{T02} + \rho_2\,\dot{\mathbf{r}}_{T02} + \dot{\mathbf{R}}_2 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \ddot{\rho}_2\,\mathbf{r}_{T02} + 2\dot{\rho}_2\,\dot{\mathbf{r}}_{T02} + \rho_2\,\ddot{\mathbf{r}}_{T02} + \ddot{\mathbf{R}}_2 \quad .\end{aligned} \tag{16.59}$$

Nach Einführung der *Kepler*schen Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\mu}{r_2^3}\mathbf{r}_2 = -\frac{\mu}{r_2^3}\left(\rho_2\,\mathbf{r}_{T02} + \mathbf{R}_2\right) \tag{16.60}$$

und, weil die topozentrischen Richtungsvektoren Einheitsvektoren sind, ist $\ddot{\mathbf{r}}_{T02} \cdot \mathbf{r}_{T02} = -\dot{\mathbf{r}}_{T02} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{T02}$ und es folgt die dynamische Bedingungsgleichung

[1] ESCOBAL, P. R. [1965], Abschnitte 8.2 und 8.3

$$\rho_2\left[\dot{\mathbf{r}}_{T02}\cdot\dot{\mathbf{r}}_{T02}-\frac{\mu}{r_2^3}\right]=\ddot{\rho}_2+\frac{\mu}{r_2^3}\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{r}_{T02}+\ddot{\mathbf{R}}_2\cdot\mathbf{r}_{T02}\quad . \tag{16.61}$$

Die geometrische Bedingungsgleichung folgt aus (16.58)

$$r_2^2=\rho_2^2+2\rho_2\,\mathbf{R}_2\cdot\mathbf{r}_{T02}+\mathbf{R}_2^2\quad . \tag{16.62}$$

In diesen Gleichungen sind Radius r_2 und Schrägentfernung ρ_2 die einzigen Unbekannten, alle anderen Größen sind mit Hilfe der Beobachtungswerte bekannt. Die Lösung erfolgt durch Iteration: Ausgehend von einer Anfangshypothese für r_2, bei Erdsatelliten etwa $r_2^{(0)}=R_E+500\,\mathrm{km}$ (wenn von einer erdnahen Bahn ausgegangen werden kann), wird $\rho_2^{(0)}$ aus (16.61) berechnet und damit ein verbesserter Wert für den Bahnradius aus (16.62) erhalten. Die Iteration kann eventuell mit Hilfe eines *Newton* Verfahrens beschleunigt werden.

16.1.5.2 Modifikation des Verfahrens mit Stumpffschen Funktionen

Bei *Escobal* findet sich eine Methode, die auf *R. M. L. Baker*[1] zurückgeführt wird und dort etwas modifiziert wurde. Da diese Methode die *Lagrange* Koeffizienten $\left(F_L,G_L,\dot{F}_L,\dot{G}_L\right)$ verwendet, ist es naheliegend, wie in der Erstbahnbestimmung von *Kustaanheimo*[2] diese Koeffizienten in einer weiteren Modifikation dieses Verfahrens in der geschlossenen Form der *Stumpff*schen *s*-Funktionen (13.66) (auf Seite 241) zu verwenden.

Die äußeren zwei Zustandsvektoren der drei gegebenen Beobachtungen lauten mit den *Lagrange* Koeffizienten (Formeln (2.211) in Band I)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i&=\mathbf{r}\left(t_i\right)=\rho_i\,\mathbf{r}_{T0i}+\mathbf{R}_i=F_{Li}\,\mathbf{r}_2+G_{Li}\,\dot{\mathbf{r}}_2\\ \dot{\mathbf{r}}_i&=\dot{\mathbf{r}}\left(t_i\right)=\dot{\rho}_i\,\mathbf{r}_{T0i}+\rho_i\,\dot{\mathbf{r}}_{T0i}+\dot{\mathbf{R}}_i=\dot{F}_{Li}\,\mathbf{r}_2+\dot{G}_{Li}\,\dot{\mathbf{r}}_2\quad\langle i=1,3\quad .\end{aligned} \tag{16.63}$$

Durch Beobachtungen sind die topozentrischen Richtungsvektoren $\mathbf{r}_{T0i}\,(i=1,2,3)$ und die Entfernungsänderungen $\dot{\rho}_i\left(i=1,2,3\right)$ bekannt, außerdem der Zustandsvektor $\mathbf{R}_i,\dot{\mathbf{R}}_i\left(i=1,2,3\right)$ des Beobachtungsortes. Unbekannt ist die Schrägentfernung $\rho_i=\rho\left(t_i\right)\ \langle i=1,2,3$. Der Geschwindigkeitsvektor der mittleren topozentrischen Beobachtungsrichtung ist wie in der Interpolation (16.57) bekannt:

$$\dot{\mathbf{r}}_{T02}=\mathbf{r}_{T01}\frac{\left(t_3-t_2\right)}{\left(t_1-t_2\right)\left(t_3-t_1\right)}-\mathbf{r}_{T02}\frac{\left(t_3-t_2\right)+\left(t_1-t_2\right)}{\left(t_1-t_2\right)\left(t_3-t_2\right)}-\mathbf{r}_{T03}\frac{\left(t_1-t_2\right)}{\left(t_3-t_2\right)\left(t_3-t_1\right)}\quad . \tag{16.64}$$

Die topozentrischen Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\mathbf{r}}_{T01},\dot{\mathbf{r}}_{T03}$ werden durch skalare Multiplikation der zweiten der Gleichungen (16.63) eliminiert. Dies ergibt die beiden Ausdrücke

[1] ESCOBAL, R. P. [1965] p. 299; BAKER, R. M. L. and M. W. MAKEMSON [1960], ch. 6

[2] Abschnitt 16.1.3

$$\begin{aligned}
&\dot{F}_{L1}\left(\rho_2\,\mathbf{r}_{T02}+\mathbf{R}_2\right)\cdot\mathbf{r}_{T01}+\dot{G}_{L1}\left(\dot{\rho}_2\,\mathbf{r}_{T02}+\rho_2\,\dot{\mathbf{r}}_{T02}+\dot{\mathbf{R}}_2\right)\cdot\mathbf{r}_{T01}=\dot{\rho}_1+\dot{\mathbf{R}}_1\\
&\dot{F}_{L3}\left(\rho_2\,\mathbf{r}_{T02}+\mathbf{R}_2\right)\cdot\mathbf{r}_{T03}+\dot{G}_{L1}\left(\dot{\rho}_2\,\mathbf{r}_{T02}+\rho_2\,\dot{\mathbf{r}}_{T02}+\dot{\mathbf{R}}_2\right)\cdot\mathbf{r}_{T03}=\dot{\rho}_3+\dot{\mathbf{R}}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{16.65}$$

Kombination dieser beiden Gleichungen ergibt einen Ausdruck für die Schrägentfernung zum mittleren Beobachtungszeitpunkt der Form

$$\rho_2 = g_0 + g_1\,\dot{\rho}_1 + g_2\,\dot{\rho}_2 + g_2\,\dot{\rho}_3 \tag{16.66}$$

mit den Parametern

$$\begin{aligned}
g_N &= \dot{F}_{L1}\,\dot{G}_{L3}\,\mathbf{r}_{T01}\cdot\mathbf{r}_{T02}-\dot{F}_{L3}\,\dot{G}_{L1}\,\mathbf{r}_{T03}\cdot\mathbf{r}_{T02}+\dot{G}_{L1}\,\dot{G}_{L3}\,\dot{\mathbf{r}}_{T02}\cdot\left(\mathbf{r}_{T01}-\mathbf{r}_{T03}\right)\\
g_0 &= \Big[\dot{F}_{L1}\,\dot{G}_{L3}\,\mathbf{r}_{T01}\cdot\mathbf{R}_2-\dot{F}_{L3}\,\dot{G}_{L1}\,\mathbf{r}_{T03}\cdot\mathbf{R}_2+\dot{G}_{L1}\,\dot{G}_{L3}\left(\mathbf{r}_{T01}-\mathbf{r}_{T03}\right)\cdot\dot{\mathbf{R}}_2-\\
&\qquad -\dot{G}_{L3}\,\mathbf{r}_{T01}\cdot\dot{\mathbf{R}}_1+\dot{G}_{L1}\,\mathbf{r}_{T03}\cdot\dot{\mathbf{R}}_3\Big]/\,g_N\\
g_1 &= \dot{G}_{L3}/\,g_N\\
g_2 &= -\dot{G}_{L1}\,\dot{G}_{L3}\,\mathbf{r}_{T02}\cdot\left(\mathbf{r}_{T01}-\mathbf{r}_{T03}\right)/\,g_N\\
g_3 &= -\dot{G}_{L1}/\,g_N \quad .
\end{aligned} \tag{16.67}$$

Die Gleichung (16.66) stellt den Kern der vorliegenden Methode dar. Während die Entfernungsvariationen $\dot{\rho}_i$ als Beobachtungswerte vorliegen, sind die Ableitungen der *Lagrange* Parameter unbekannt. Sie können wie die originalen *Lagrange* Parameter nach den Formeln (13.66) mit den *Stumpff*schen *s*-Funktionen dargestellt werden

$$\begin{aligned}
&F_{Li}=1-\frac{\mu\,s_2\left[\left(\alpha\,\tau_i\right)^2\right]}{r_2} \quad , \quad G_{Li}=\left(t_i-t_2\right)-\mu\,s_3\left[\left(\alpha\,\tau_i\right)^2\right]\\
&\dot{F}_{Li}=-\frac{\mu\,s_1\left[\left(\alpha\,\tau_i\right)^2\right]}{r_i\,r_2} \quad , \quad \dot{G}_{Li}=1-\frac{\mu\,s_2\left[\left(\alpha\,\tau_i\right)^2\right]}{r_i} \quad \langle i=1,3 \quad .
\end{aligned} \tag{16.68}$$

Die Berechnung dieser Parameter erfolgt iterativ. Als Anfangshypothese werde wie im Fall der Erstbahnbestimmung nach *Kustaanheimo* die Dynamik vernachlässigt:

$$\begin{aligned}
&F_{Li}^{(o)}=1 \quad , \quad G_{Li}^{(0)}=\left(t_i-t_2\right)\\
&\dot{F}_{Li}^{(o)}=0 \quad , \quad \dot{G}_{Li}^{(0)}=1 \qquad\qquad \langle i=1,3 \quad .
\end{aligned} \tag{16.69}$$

Die Hypothesenrechnung erfolgt nun folgendermaßen:

In der k-ten Iteration können mit Näherungswerten für die *Stumpff*schen *c*-Funktionen $\left(s_j^{(k)}=\left(\tau_i^{(k)}\right)^j c_j^{(k)}\left[\left(\alpha^{(k)}\tau_i^{(k)}\right)^2\right] \;\langle i=1,3;\; j=1,2,3\right)$ die Parameter $F_{L1}^{(k)}, G_{L1}^{(k)}, \dot{F}_{L1}^{(k)}, \dot{G}_{L1}^{(k)}$, $F_{L3}^{(k)}, G_{L3}^{(k)}, \dot{F}_{L3}^{(k)}, \dot{G}_{L3}^{(k)}$ und damit die Parameter $g_N^{(k)}, g_0^{(k)}, g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, g_3^{(k)}$ berechnet werden. Mit ihnen wird die k-te Hypothese der Schrägentfernung $\rho_2^{(k)}$ erhalten. Der Zustandsvektor lautet dann

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2^{(k)} &= \rho_2^{(k)}\,\mathbf{r}_{T02}+\mathbf{R}_2\\
\dot{\mathbf{r}}_2^{(k)} &= \dot{\rho}_2^{(k)}\,\mathbf{r}_{T02}+\rho_2^{(k)}\,\dot{\mathbf{r}}_{T02}+\dot{\mathbf{R}}_2 \quad .
\end{aligned} \tag{16.70}$$

Die Zustandsvektoren für die Randwerte können nun mit den rechten Seiten in den Gleichungen (16.63) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i^{(k)} &= F_{Li}^{(k)}\,\mathbf{r}_2^{(k)} + G_{Li}^{(k)}\,\dot{\mathbf{r}}_2^{(k)} \\ \dot{\mathbf{r}}_i^{(k)} &= \dot{F}_{Li}^{(k)}\,\mathbf{r}_2^{(k)} + \dot{G}_{Li}^{(k)}\,\dot{\mathbf{r}}_2^{(k)} \qquad \langle i = 1,3 \quad . \end{aligned} \tag{16.71}$$

Die regularisierende Variable folgt entsprechend Beziehung (16.33) aus

$$\tau_i^{(k)} = \left[\frac{G_{Li}^{(k)}}{\left|\mathbf{r}_2^{(k)}\right|} + \frac{F_{Li}^{(k)}}{\mu}\,\mathbf{r}_2^{(k)} \cdot \dot{\mathbf{r}}_2^{(k)} \right] \frac{1}{c_1^{(k)}} \quad . \tag{16.72}$$

Der Energiesatz (13.19) liefert die Energiekonstante

$$\left(\alpha^{(k)}\right)^2 = \frac{2\,\mu}{\left|\mathbf{r}_2^{(k)}\right|} - \left(\dot{\mathbf{r}}_2^{(k)}\right)^2 \tag{16.73}$$

Damit können für den nächsten Iterationsschritt die *Stumpff*schen *c*-Funktionen erhalten werden aus[1]

$$c_j^{(k+1)}\left[\left(\alpha^{(k)}\,\tau_i^{(k)}\right)^2\right] = \tau_i^{(k)}\,s_j^{(k+1)}\left[\left(\alpha^{(k)}\,\tau_i^{(k)}\right)^2\right] \quad . \tag{16.74}$$

Die verbesserten *Lagrange* Parameter sind

$$\begin{aligned} F_{Li}^{(k+1)} &= 1 - \frac{\mu\,s_2\left[\left(\alpha^{(k)}\,\tau_i^{(k)}\right)^2\right]}{\left|\mathbf{r}_2^{(k)}\right|} \quad , \quad G_{Li}^{(k+1)} = \left(t_i - t_2\right) - \mu\,s_3\left[\left(\alpha^{(k)}\,\tau_i^{(k)}\right)^2\right] \\ \dot{F}_{Li}^{(k+1)} &= -\frac{\mu\,s_1\left[\left(\alpha^{(k)}\,\tau_i^{(k)}\right)^2\right]}{\left|\mathbf{r}_i^{(k)}\right|\left|\mathbf{r}_2^{(k)}\right|} \quad , \quad \dot{G}_{Li}^{(k+1)} = 1 - \frac{\mu\,s_2\left[\left(\alpha^{(k)}\,\tau_i^{(k)}\right)^2\right]}{\left|\mathbf{r}_i^{(k)}\right|} \qquad \langle i = 1,3 \quad . \end{aligned} \tag{16.75}$$

Jetzt können verbesserte Parameter $g_N^{(k+1)}, g_0^{(k+1)}, g_1^{(k+1)}, g_2^{(k+1)}, g_3^{(k+1)}$ berechnet werden und mit (16.66) ein neuer Wert für die Schrägentfernung $\rho_2^{(k+1)}$ der mittleren Beobachtung.

Anmerkung: Die hier gewählte Anfangshypothese entspricht einer (ungestörten) geradlinigen Bewegung (mit $\dot{\mathbf{r}}_1^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_2^{(0)} = \dot{\mathbf{r}}_3^{(0)}$). Erst im nächsten Iterationsschritt wird die Dynamik in Form einer ungestörten Zweikörperbewegung einbezogen. Eine Konvergenz des Verfahrens wird wie im Fall der Erstbahnbestimmung nach *Kustaanheimo* entsprechend den Untersuchungen von *H. Bucerius* angenommen. Falls jedoch ein besserer Startwert benötigt wird, kann wie im Fall der Methode nach *Laplace* (Abschnitt 16.1.5.1) ein plausibler Näherungswert für die topozentrische Distanz ρ_2

[1] Siehe hierzu die Bemerkungen zur Berechnung der *Stumpff*schen Funktionen zu Formel (16.37)

geschätzt werden. Die Originalmethode[1] geht von einer Schätzung für die geozentrische Distanz r_2 aus.

16.1.6 Bahnbestimmung aus Entfernungs- und Entfernungsänderungsmessungen

Ein Sonderfall ist die Erstbahnbestimmung aus Messungen der Schrägentfernung ρ und der topozentrischen Entfernungsänderung („range-rate“) $\dot{\rho}$. Dazu müssen simultane Beobachtungen von drei unterschiedlichen Bodenstationen aus gemacht werden, wobei die Simultanität durch Interpolation oder Reihenentwicklungen erzeugt werden kann. Wesentlich ist, dass der zu bestimmende Zustandsvektor für alle drei Stationen zum selben Zeitpunkt t_A gerechnet werden muss. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \mathbf{r}\left(t_A\right) = \rho_i\, \mathbf{r}_{T0i} + \mathbf{R}_i = \rho_i\left(t_A\right)\mathbf{r}_{T0i}\left(t_A\right) + \mathbf{R}_i\left(t_A\right) \qquad \langle i = 1,2,3 \\ \dot{\mathbf{r}}_A &= \dot{\mathbf{r}}\left(t_A\right) = \dot{\rho}_i\, \mathbf{r}_{T0i} + \rho_i\, \dot{\mathbf{r}}_{T0i} + \dot{\mathbf{R}}_i = \dot{\rho}_i\left(t_A\right)\mathbf{r}_{T0i}\left(t_A\right) + \rho_i\left(t_A\right)\dot{\mathbf{r}}_{T0i}\left(t_A\right) + \dot{\mathbf{R}}_i\left(t_A\right) \ . \end{aligned} \tag{16.76}$$

Für die drei Stationen können die Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zum Zeitpunkt t_A als bekannt angenommen werden. Da keine Winkelmessungen vorliegen, sind die Richtungsvektoren $\mathbf{r}_{T0i}\left(t_A\right)$ und ihre Variationen $\dot{\mathbf{r}}_{T0i}\left(t_A\right)$ nicht bekannt. Durch geeignete Kombinationen der Ausdrücke (16.76) kann der Zustandsvektor algebraisch direkt (d.h. ohne Iteration) berechnet werden. Damit ergeben sich dann auch die Richtungsvektoren der Beobachtungsrichtungen und ihre Variationen[2].

16.1.7 Satellite Laser Ranging

Hochpräzise Beobachtungen von geeigneten (geodätischen) Erdsatelliten können mit Laserstrahlen von einer speziell dafür eingerichteten Bodenstation aus durchgeführt werden. Dazu wird der Laserimpuls von den speziell für diesen Zweck gestalteten Reflektoren an Bord des Satelliten zur Bodenstation zurückgesandt. Aus der halben Umlaufzeit des Signals von der Bodenstation zum Satelliten und zurück wird die Schrägentfernung ρ bestimmt. Mit diesen Messungen ist es möglich, die Position eines Satelliten Zentimeter-genau zu bestimmen. Für eine Erstbahnbestimmung wird in diesem Fall neben der Schrägentfernung die Beobachtungsrichtung am Teleskop abgelesen, sodass prinzipiell eine der Methoden in Abschnitt 16.1.4 angewendet werden kann. Nachteile des Verfahrens des Satellit Laser Ranging ist der große Aufwand für die Bodenstation, so dass es nur wenige solcher Stationen gibt, die spezielle Ausrüstung des Satelliten (in der Regel nur für geodätische Satelliten) und vor allem die Wetterbedingungen, da der Laser nur bei klarem Wetter eingesetzt werden kann[3].

---

[1] ESCOBAL, P. R. [1965], Abschnitte 8.3

[2] Das Verfahren kann in ESCOBAL, P. R. [1965], Abschnitt 8.7 nachgelesen werden

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Satellite_Laser_Ranging ; http://de.wikipedia.org/wiki/Satellite_Laser_Ranging; KRAMER, H. J. [2002], pp.131-132

16.1.8 Ortsbestimmung mit Hilfe eines GNSS Systems

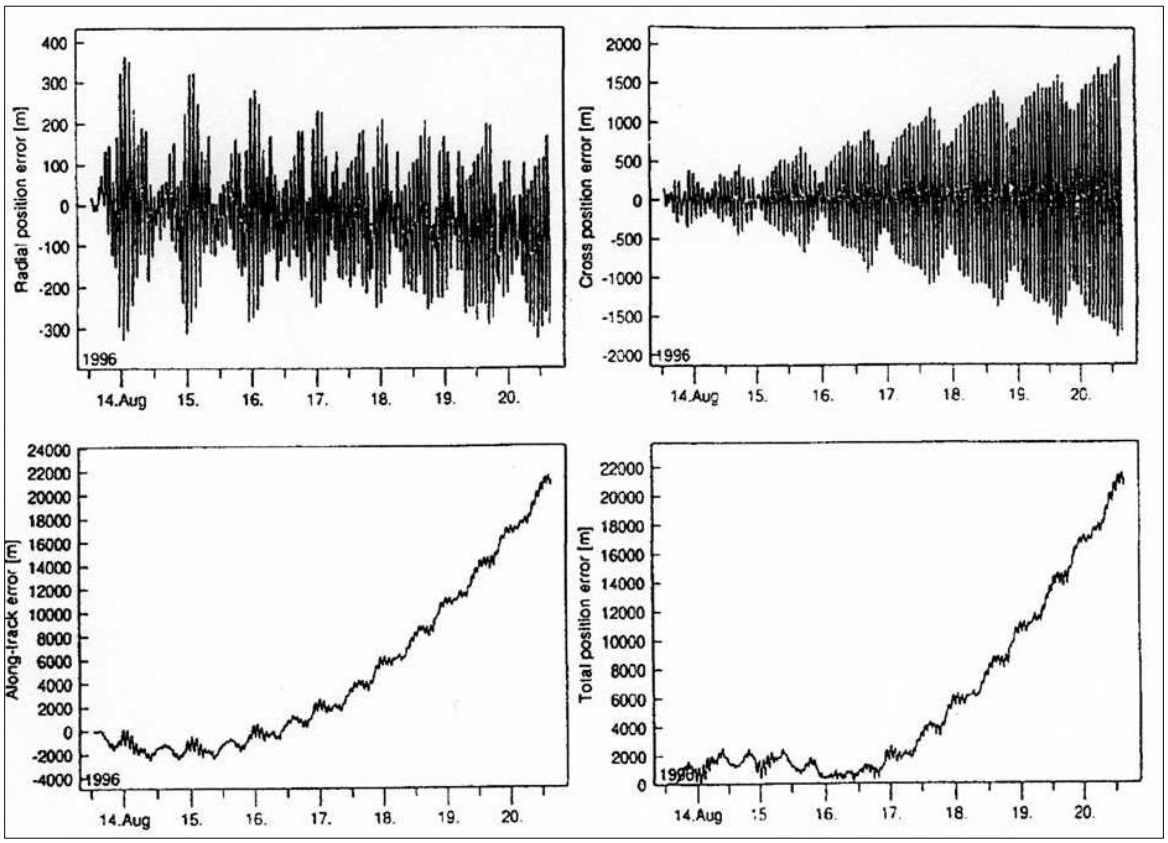


Bild 16-3 : Differenz der MIR Ephemeride unter Verwendung des SGP4 Modells gegen eine numerisch berechnete Ephemeride[1]

Wenn sich an Bord eines Satelliten ein GNSS-Empfänger befindet, wird in kurzer Zeittaktung, üblicherweise im Sekundentakt, der Ort das Satelliten mit großer Genauigkeit (bei GPS im Bereich von 10m) zur Verfügung gestellt. Diesen Positionsbestimmungen entsprechen Ortsvektoren. Um damit die Bahnparameter des Satelliten zu berechnen, kann mit einer der Methoden aus Abschnitt 16.1.4 für einen bestimmten Zeitpunkt im Rahmen einer Erstbahnbestimmung der zugehörige Geschwindigkeitsvektor hergeleitet werden. Die mit dem so erhaltenen Zustandsvektor berechneten Bahnparameter sollten mit einer solchen Genauigkeit bekannt sein, dass mit Hilfe eines analytischen Bahnpropagators[2] an Bord des Satelliten die Bahn über einen gewissen Zeitraum relativ

[1] Diese Bilder basieren auf den entsprechenden Rechnungen und Überlegungen die *Eberhard Gill* mit Hilfe seines Programms ODEM angefertigt hat (veröffentlicht in 'GPS Based Onboard and Onground Orbit Operations for Small Satellites', *Acta Astronautica*, Vol. **39**, No. 9-12, pp.917-922, Pergamon, Elsevier Science Ltd., PII:S0094-5765(97)00077-5)

[2] In der aktuellen Situation wird häufig das Programm SGP4 verwendet, das wie viele analytische Bahnprogramme auf der Theorie von *Brouwer-Lyddane* beruht. Die dazu benötigten Formeln für erdnahe Satelliten sind in Kapitel 20 zusammengestellt. Das SGP4 Programm wurde erstellt und wird gewartet und weiterentwickelt von der NORAD, siehe etwa in: HOOTS, FELIX R. and RONALD L. ROEHRICH [1980[2]; siehe hierzu auch in http://en.wikipedia.org/wiki/Simplified_perturbations_models mit Hinweis auf die Arbeit VALLADO, DAVID A.; PAUL CRAWFORD;

genau vorausgesagt werden kann. Eine solche Vorhersage wird zum Beispiel benötigt um ein Beobachtungsprogramm mit den Sensoren an Bord des Satelliten kurzfristig konfigurieren bzw. anpassen zu können.

Um einen Eindruck von der in diesem Zusammenhang zu erwartenden Genauigkeit zu erhalten, sind in Bild 16-3 die Abweichungen einer analytisch mit dem Programm SGP4 erzeugten Ephemeride gegen eine hochgenaue numerisch erzeugte Ephemeride dargestellt. Aufgetragen sind die Abweichungen in radialer und normaler Richtung sowie in der Komponente in Flugrichtung („alongtrack“, was aber bei kreisnahen Bahnen im Wesentlichen auf die transversale Richtung hinausläuft) sowie im Gesamtortsfehler. Die Gesamtabweichung ist in diesem Fall über etwa 4 Tage stabil unter 2 km (entsprechend einem Zeitfehler von unter 15 Sekunden) und nimmt danach den typischen exponentiellen Fehlerverlauf an.

16.2 Bahn-Verbesserung

Die Methoden der Erstbahnbestimmung liefern Bahnparameter, die über den beobachteten relativ kurzen Bahnbogen eingeschränkte Genauigkeit haben. Es wird daher erforderlich für langfristige Ephemeridenrechnungen und um höhere Genauigkeiten zu erreichen, diese Bahnparameter durch Hinzunahme neuer Beobachtungen ständig zu verbessern. Bahnbestimmung ist also kein einmaliger Vorgang, sondern ein ständiger Prozess, der eine Satellitenmission bis zu ihrem Ende begleiten muss. Das Ende wird allerdings nicht erreicht, wenn die aktive Mission beendet wird und die Sensoren abgeschaltet werden. Dieses Ende wird erst erreicht, wenn der Satellit aus einer Umlaufbahn genommen werden kann, durch natürlichen oder kontrollierten Absturz.

16.2.1 Methode der kleinsten Quadrate

Wird ein Satellit gestartet, muss erwartet werden, dass die nominal geplante Sollbahn (N) (siehe in Bild 16-4) nicht exakt erreicht wird. Vielmehr kann die wahre Bahn (T) von der Sollbahn abweichen. Man muss zusätzlich erwarten, dass die aus Beobachtungen errechnete Bahn ihrerseits nicht exakt die wahre Bahn beschreibt, und dass die errechnete geschätzte Bahn (E) von der wahren Bahn abweicht. Es muss daher das Ziel einer Bahnbestimmung sein diese Abweichung so klein wie möglich zu halten.

Die Methode der Wahl eine Bahnverbesserung durchzuführen, ist die Methode der kleinsten Quadrate[1], die von *C. F. Gauß* bei der Bahnbestimmung des kleinen Planeten Ceres erfolgreich eingesetzt worden war. Die Methode hat folgendes Prinzip: gesucht ist der Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_E, \dot{\mathbf{r}}_E\right)$ der geschätzten Bahn zu einem Referenzzeitpunkt t_0. Gegeben sind k Beobachtungsparameter q_k. Diese Parameter können etwa Winkelgrößen sein, wie Azimut A und Elevation h, oder topozentrische

RICHARD HUJSAK; T. S. KELSO (August 2006). "Revisiting Spacetrack Report #3". *Astrodynamics Specialist Conference*. Retrieved 16 June 2010

[1] GAUSS, C. F. [1809/1906]. Zum Prioritätsstreit zwischen *C. F. Gauß* und *A. M. Legendre*, der unabhängig von *Gauß* die Methode der kleinsten Quadrate entdeckt hatte, siehe etwa in VALLADO, DAVID A [2001], pp. 673 ff.

Rektaszension α_T und Deklination δ_T, oder topozentrische Entfernung ρ („range“) oder topozentrische Entfernungsänderung $\dot{\rho}$ („range-rate“).

Mit dem geschätzten Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_E, \dot{\mathbf{r}}_E\right)$ wird der entsprechende Beobachtungsparameter berechnet in der Funktion $fct_k\left(\mathbf{r}_E, \dot{\mathbf{r}}_E\right)$. Der berechnete und der beobachte Parameter werden üblicherweise nicht übereinstimmen. Um die Abweichung so gering wie möglich zu halten, wird der Zustandsvektor so variiert, dass die Summe über alle Beobachtungen dieses Parameters so klein wie möglich wird. Die Differenz dieser Werte wird durch Linearisierung erhalten. Um ein ausgeprägtes Minimum dieser Funktion erhalten zu können, wird nicht die lineare Differenz sondern ihre Quadratsumme minimiert, da eine Parabel aber nicht eine Gerade einen Minimalwert annehmen kann[1]. Die Bedingungsgleichung lautet daher:

$$\sum_k \left[q_k - fct_k\left(\mathbf{r}_E, \dot{\mathbf{r}}_E\right)\right]^2 = \min. \tag{16.77}$$

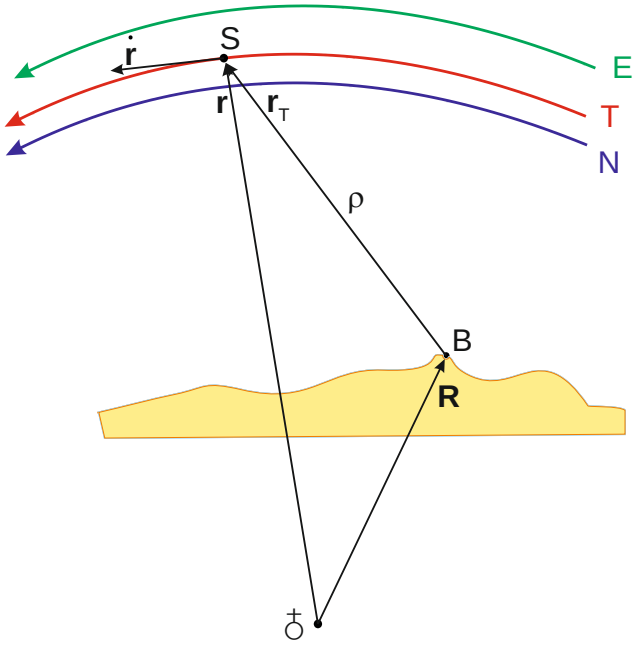


Bild 16-4: Von einer Bodenstation B wird eine Satellitenbahn beobachtet: es müssen drei Bahnen unterschieden werden: die Sollbahn (Nominalbahn N, die geflogen werden soll), die wahre Bahn (T), die in Wirklichkeit durchflogen wird, die geschätzte Bahn (E), die aus einer Bahnbestimmung berechnet wird[2].

[1] Anmerkung bei VALLADO, DAVID A [2001], pp. 677

[2] Skizze nach TAPLEY, BYRON D. et al. [1990]

16.2.2 Filtermethoden

Unter den vielen Erweiterungen und Variationen der Methode der Kleinsten Quadrate ist die von *Rudolf E. Kalman* 1960 veröffentlichte Methode des *Kalman*-Filters für Anwendungen bei Lageberechnungen, mit Spezialfällen auch bei Bahnbestimmungen, von besonderer Bedeutung[1].

Bevor ein *Kalman* Filter starten kann, müssen nicht nur Schätzwerte des Zustandsvektors, bzw. zugehöriger Bewegungsparameter vorliegen, sondern darüber hinaus auch Aussagen über die Unsicherheiten dieser Parameter. Alle diese Parameter inclusive der Unsicherheiten werden von dem Filter mitgeschätzt[2]. Die Schätzung des Zustandsvektors erfolgt für jeden Zeitpunkt eines Beobachtungsintervalls (nicht wie in der Methode der kleinsten Quadrate für einen Referenzzeitpunkt) und er schätzt auch die Unsicherheiten zu jedem Zeitpunkt, das bedeutet die Kovarianzen. Somit liefert der *Kalman* Filter auch eine Grundlage für eine Kovarianzanalyse.

Da eine Bahnbestimmung ein nichtlineares Problem ist, kann nicht der allgemeine *Kalman* Filter im Rahmen einer Bahnbestimmung zum Einsatz kommen, sondern als spezielle Form der „lineare Kalman Filter“ bzw. der erweiterte Kalman Filter („extended Kalman filter“)[3].

Für einen Überblick wie eine Bahnverbesserung auf Basis einer GPS Navigationslösung an Bord eines Satelliten mit Hilfe eines analytischen Bahnprogramms erhalten werden kann, sind zahlreiche Beispiele in der Literatur zu finden[4].

---

[1] Zum Prioritätsstreit mit *Peter Swerling*, der bereits 1928 Grundzüge der Filter Technik veröffentlichte, siehe in VALLADO, DAVID A [2001], p. 674: bei *P. Swerling* handelt es sich um einen rekursiven Algorithmus zur statistischen Bahnbestimmung, was ein Grundzug des *Kalman* Filters ist

[2] Eine überblickmäßige Beschreibung findet sich bei *E. Kundt* in KROTSCHECK, E., KUNDT, W. [1983], pp. 75-83; siehe auch SCHMIDT, STANLEY F. [1981]; vor allem VALLADO, DAVID A [2001], pp. 701-764

[3] Beispiele einer Bahnverbesserung mit Hilfe eines erweiterten *Kalman* Filters finden sich in NGUYEN, V. N. [1982?]; GILL, EBERHARD and HELIO KOITI KUGA [1993]; ein Überblick zur Verwendung von Kalman Filtern in der Satellitenbahnmechanik findet sich in VALLADO, DAVID A. [2001], pp. 718-739; in KROTSCHECK, E., KUNDT, W. [1983] findet sich der Hinweis auf JAZWINSKI, A. H. [1970]: *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press; siehe ferner zur Bahnbestimmung mit einem Kalman Filter aus Radar Beobachtungen in: LUGINBUHL, ROBERT [1972]; hier auch der Hinweis auf: SORENSEN. H. W. [1966]: ‘Kalman Filtering Techniques‘, *Advances in Control systems*, New York, Academic Press, vol. 3, pp. 219-292; spezielle Probleme in SHIONI, T. et al. [1986]; LONG, R. S. [1965]; HUNT, W. E. et al. [1967]; Beispiele für hochgenaue Bahnbestimmung in HOLDAYWAY, R. [1985]; HOLDAYWAY, R. [1990]; PUTNEY, B. et al. [1990]; Gill, E. [1995]; Gill, E. [1998]; Untersuchungen zu Fehlern in Bahnbestimmungen in BRESSANIN, G. [1970]; BRYANT, W. C. JR. et al. [1975]

[4] Einige wenige Hinweise auf weitere relevante Arbeiten: CARTER, SCOTT S., PAUL J. CEFOLA, and RONALD J. PROULX [1996]: ‘Precision Orbit Determination from GPS Receiver Navigation Solutions‘, AIAA-96-3605-CP; RIM, HYUNG-JIN, CHARLES E. WEBB, SUNG-PIL YONN, and BOB E. SCHUTZ [2001]; COIL, JOHNSTON A., MAJOR DEWEY PARKER, RONALD W. HUMBLE [1997]: ‘Falcon Gold – Orbit Determination Above the GPS Constellation‘, SSC97-VI-1; UNWIN, MARTIN and MARTIN SWEETING [1995]: ‘A Practical Demonstration of Low Cost Autonomous Orbit Determination Using GPS‘, Proc. ION GPS-95; POTTI, JORGE and PELAYO BERNEDO, ALESSANDRO PASETTI [1995]: ‘Applicability of GPS-based Orbit determination Systems to a Wide Range of HEO Missions‘, *Proc. ION GPS-95*; FENNESSEY, RICHARD, PAT ROBERTS, ROBIN KNIGHT, and BART VAN VOLKINBURG [1995]: ‘GPS as an Orbit Determination Subsystem‘, *Flight Mech./Est. Theory Symposium*, GSFC, Maryland, May 16-18, 1995; CHIARADIA, ANA PAULA MARINS, HELIO KOITI KUGA, and ANTONIO FERNANDO BERTACHINI DE ALMEIDA PRADO [1999]: ‘Investigation of Simplified Dynamical Models for Orbit Determination using Single Frequency GPS Measurements‘, *14th International Symposium on Space Flight Dynamics*, Foz do Iguacu – PR- Brazil, Feb. 1999; CHIARADIA, ANA PAULA MARINS, HELIO KOITI KUGA, and ANTONIO FERNANDO BERTACHINI DE ALMEIDA PRADO

[20000 ?]: ‘The Use of the Single Frequency GPS Measurements to Determine in Real Time Artificial Satellite Orbits‘, *INPE,* Sao José dos Campos, SP, Brazil; CASOTTO, STEFANO, ALBERTO ZIN [2001]: ‘Satellite Selection Strategy for LEO Orbit Determination for the GPS & GLONASS Constellations using Double Differences‘, AAS 01-186; LOPES, ROBERTO V. F., and HÉLIO K. KUGA [1986]: ‘Optimal Estimation of Local Orbit for GPS Measurements‘, *J. Guidance*, Vol. **11**, No. 2, pp. 186-188; SHOAN, W. C., S. H. TRUONG, and D. A. WEIDOW, W. L. STEGER, A. C. LONG, and D. H. OZA [1996]: ‘Modular Software Architecture for Space- and Ground-Based Spacecraft Navigation using GPS‘, AIAA-96-3654-CP; NETA, BENY, C. P. SAGOVAC, D. A. DANIELSON, J. R. CLYNCH [1996]: ‘Fast Interpolation for Global Positioning System (GPS) Satellite Orbits‘, AIAA-96-3658-CP; POTTERFELD, CURTIS W., and JORDI PUIG-SUARI [1996]: ‘Optimization of GPS Usage for Low-Poer Satellites‘, AIAA-96-3653-CP; EISSFELLER, B., S. FÖCKERSBERGER, A. JANSCHE, N. LEMKE [1992 ?]: ‘MOMSNAV, Location of the Russian Space Station MIR with Differential GPS‘, DARA contract No. 50 EE 9224; LANDAU, H., G. W. HEIN [1986]: ‘on Precise Orbit Determination of NAVSTAR/GPS Satellites and a Related European Tracking *Network‘, 4th International Geodetic Symposium on Satellite Positioning*, Austin, Texas, April 28- May 2, 1986; MORAES, RODOLPHO VILHENA DE, KEVIN THEODORE FITZGIBBON, and MARCELO KONEMBA [1992 ?]: ‘Influence of the 2:1 Resonance in the Orbits of GPS Satellites‘, CTA-ITA, Sao José dos Campos, SP, Brazil; CEFOLA, P. J., and D. J. FONTE [1996]: ‘Extension of the Naval Space Command Satellite Theory PPT2 to Include a General Tesseral M-Daily Model‘, AIAA-96-3606-CP; CARTER, SCOTT S., PAUL J. CEFOLA, and RONALD J. PROULX [1995]: ‘The Determination of Precision Mean Element Sets from GPS Receiver On-Board Navigation Solutions‘, AAS-95-371; HART, ROGER C., and KATHY R. HARTMAN [1995]: ‘Operational Considerations of Using GPS for Spacecraft Navigation‘, Flight Mechanics, May 16-18, 1995, GSFC; HAINES, B., S. LICHTEN, J. SRINIVASAN, and L. YOUNG [1995]: ‘A Demonstration of Unified TDRS/GPS Tracking and Orbit Determination‘, Flight Mechanics GSFC, May 16-18, 1995; MARSHALL, J. A. et al. [1991]

17 Bewegungseinflüsse

Aus historischen Gründen ist es üblich, alle diejenigen Beschleunigungen auf die Bewegung der Himmelskörper als *Störbeschleunigungen* und die sie verursachenden Kräfte als *Störkräfte* zu bezeichnen, die nicht im Rahmen einer Zweikörperbewegung gedeutet werden können. Physikalisch gesehen kann es keine qualitative Bevorzugung einer dieser Beschleunigungen geben, auch wenn sie in der Natur quantitativ stark unterschiedlich vorkommen können. Schließlich kann, wie wir in Kapitel 4 (Band II) gesehen haben, die gesamte Satellitenbewegung einheitlich durch die *Kepler*-gesetze beschrieben werden, ohne sie gewaltsam in Zweikörperbewegung und gestörte Bewegung auseinanderdividieren zu müssen. Der Begriff *Störbeschleunigung* ist also physikalisch unsinnig und sollte daher trotz historischer Pietät und weltweiter kritikfreier Verwendung nicht gebraucht werden.

Im Gegensatz dazu kennzeichnet der Begriff *Störungsrechnung* eine wichtige mathematische Methode zur analytischen Integration von Systemen von Differentialgleichungen, in denen Terme unterschiedlicher Größenordnung klar separiert werden können. Solche Systeme müssen u. a. in der Himmelsmechanik gelöst werden, so dass in diesem und nur in diesem Zusammenhang von *Störungen, Störbeschleunigungen, Störkräften,* usw. gesprochen werden sollte. Eine Aussage, welcher Bewegungseinfluss mathematisch als „Störung“ aufgefasst und somit klar von einem Haupteinfluss separiert werden kann, ist generell nicht möglich, sondern muss von Fall zu Fall hergeleitet werden. In diesem Kapitel sollen einzelne Bewegungseinflüsse nach ihrer physikalischen Ursache getrennt werden. Dazu wird die allgemeine Bewegungsgleichung in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; b_R\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \;=\; \mathbf{R} \tag{17.1}$$

geschrieben. Der Term $\mathbf{R}$ wird nach seinen physikalischen Ursachen zerlegt in

$$\mathbf{R} \;=\; \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_G + \mathbf{R}_D + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_{SE} + \mathbf{R}_{SM} + \mathbf{R}_{TO} + \mathbf{R}_{TE} + \mathbf{R}_C + \mathbf{R}_{AG} + \ldots \quad , \tag{17.2}$$

wobei die Einzelbeschleunigungen zum Beispiel verursacht werden durch

- $\mathbf{R}_2$ – Anziehung durch Zentralkörper (2- Körperproblem)
- $\mathbf{R}_B$ – Anziehung durch dritte Körper
- $\mathbf{R}_G$ – das anisotrope Gravitationspotential des Zentralkörpers
- $\mathbf{R}_D$ – den Luftwiderstand
- $\mathbf{R}_S$ – den Strahlungsdruck der Sonne
- $\mathbf{R}_{SE}$ – den Strahlungsdruck reflektiert von der Erde (Erdalbedo)
- $\mathbf{R}_{SM}$ – den Strahlungsdruck reflektiert vom Mond (Mondalbedo)
- $\mathbf{R}_{TO}$ – Gezeitenkräfte aus der Bewegung der Ozeane
- $\mathbf{R}_{TE}$ – Gezeitenkräfte der festen Kruste des Zentralkörpers
- $\mathbf{R}_C$ – Schübe bei Bahnkorrekturen
- $\mathbf{R}_{AG}$ – Ausgasung des Satelliten

und weitere Bewegungseinflüsse.

Art des Einflusses		a	e	i	Ω	ω	M_0
Unregelmäßige Gestalt der Erde	s				⊗	⊗	⊗
	l		×	×	×	×	×
	k	×	×	×	×	×	×
Luftwiderstand	s	×	×	•	•	•	•
	l	•	•	•	•	•	•
	k	•	•	•	•	•	•
Attraktion durch Sonne und Mond	s				×	×	×
	l	×	×	×	×	×	×
	k	×	×	×	×	×	×
Strahlungsdruck der Sonne	s	•	•	•	•	•	•
	l	•	•	•	•	•	•
	k	×	×	×	×	×	×

Tabelle 17-1: Übersicht[1] über die wichtigsten Bewegungseinflüsse auf erdnahe Satellitenbahnen (schematisch) aufgeteilt nach säkularen (s), langperiodischen (l) und kurzperiodischen (k) Einflüssen. Sehr starke Einflüsse (⊗), starke Einflüsse (×), geringe Einflüsse (•)

Die wichtigsten dieser Bewegungseinflüsse in der Darstellung einer Satellitenbewegung werden im folgenden Kapitel zusammengestellt und zur Anwendung in einer numerischen Integration vorbereitet. In Einzelfällen ist sogar eine analytische Integration möglich. Auf weitere Effekte, die bei hochgenauen Untersuchungen berücksichtigt werden müssen, wird hingewiesen. Sie werden am Ende dieses Kapitels systematisch zusammengestellt.

In Tabelle 17-1 sind schematisch die bedeutendsten Einflüsse auf erdnahe Satellitenbahnen zusammengestellt. In Tabelle 17-2 (auf Seite 370) ist ergänzend dazu eine qualitative Übersicht der wichtigsten („Stör-„) Einflüsse auf Erdsatellitenbahnen aufgelistet.

17.1 Die Keplerbeschleunigung

Die zur Beschreibung der Bewegung von Planeten wie Erdsatelliten wichtigste und dominante Beschleunigung ist die von *J. Kepler* entdeckte Beschleunigung (wonach die Wirkung dieser Beschleunigung mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt)

$$|b_K| \approx \frac{1}{r^2} \quad , \tag{17.3}$$

[1] Übersicht nach M. C. ECKSTEIN

die auf den bewegten Himmelskörper in Richtung auf einen Zentralkörper wirkt, somit vektoriell in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}}_K = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \tag{17.4}$$

angesetzt werden kann. Alle anderen Beschleunigungen auf einen Erdsatelliten sind um den Faktor 10^{-3} oder mehr kleiner als der Einfluss durch die Keplerbeschleunigung. Aus diesem Grund ist es üblich, alle anderen Bewegungseinflüsse als „Störbeschleunigungen" zu bezeichnen. Dieser Begriff sollte nur verwendet werden, wenn der Bezug etwa in dem Sinne „Störung der Zweikörperbewegung" impliziert werden soll.

17.2 Das Gravitationspotential

17.2.1 Das Gravitationsfeld, Begriffe und grundlegende Formeln

Die Massenverteilung ist in allen bekannten Zentralkörpern ungleichmäßig. Demzufolge ist sein Gravitationsfeld anisotrop und seine beschleunigende Wirkung auf einen umlaufenden Satelliten ungleichmäßig. Um die Wirkung auf eine Satellitenbewegung zu beschreiben, ist die Kenntnis des Gravitationsfeldes des Zentralkörpers nötig. Dieses ist allerdings nur aus der Beobachtung der Bewegung eines Satelliten berechenbar. Dazu werden hochgenaue Beobachtungen spezieller geodätischer Satelliten verwendet. Aus diesen Beobachtungen können die Zahlenwerte, die das Gravitationsfeld möglichst genau beschreiben, iterativ herausgefiltert werden[1].

Das Gravitationsfeld eines Himmelskörpers hat das Gravitationspotential *U*, das sich als Lösung der *Laplace*schen Differentialgleichung erhalten lässt. Seine Entwicklung nach *Kugelfunktionen* lautet[2]

$$\begin{aligned} U \;=\; & \frac{\mu}{r} + \\ & + \frac{\mu}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n C_{n0}\,P_n(\sin\delta) + \\ & + \frac{\mu}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n \sum_{m=1}^{n}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right) P_{nm}(\sin\delta) \quad . \end{aligned} \tag{17.5}$$

In diesem Ausdruck ist δ die geozentrische Breite (= „Deklination"), λ die geographische Länge. Die *Potentialkoeffizienten* C_{nm}, S_{nm}, sie werden häufig auch *harmonische Koeffizienten* oder einfach *Harmonische* genannt, sind Maßzahlen für die innere Massenverteilung des Zentralkörpers. In der Satellitengeodäsie werden üblicherweise *vollständig normierte harmonische Koeffizienten* $\bar{C}_{nm}$, $\bar{S}_{nm}$ verwendet mit den Beziehungen

---

[1] siehe hierzu etwa REIGBER [1989], SEEBER [1989] u. ä.

[2] Herleitung siehe etwa in KAULA [1966], Ch. 1

$$
\begin{aligned}
C_{n0} &= \bar{C}_{n0}\sqrt{2n+1} \\
S_{n0} &= \bar{S}_{n0}\sqrt{2n+1} \\
C_{nm} &= \bar{C}_{nm}\sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{2\,(n-m)!}{(n+m)!}} \\
S_{nm} &= \bar{S}_{nm}\sqrt{2n+1}\sqrt{\frac{2\,(n-m)!}{(n+m)!}} \quad .
\end{aligned}
\tag{17.6}
$$

Einflussgröße		Größenordnung (qualitativ) kurzperiodische Effekte	Langperiodische und säkulare Effekte nach 1000 Umläufen	Benötigtes analytisches Modell der Ordnung:	
				kurzperiodisch	langperiodisch und säkular
J_2 (~ f)	erdnah	10^{-3}	1	1	2
	geosyn.	10^{-5}	10^{-2} (!)	1	2
J_n (n>2)	erdnah	10^{-6}	10^{-3}	nein	1
	geosyn.	$< 10^{-8}$	10^{-5}	nein	1
J_{22}	erdnah	10^{-6}	-	1	1
	geosyn. Resonanz	10^{-8}	10^{-5}	1	1
Nicht zonal ($\neq J_{22}$)	Erdnah	10^{-6}	10^{-4}	1	1
	geosyn. Resonanz1	$\leq 10^{-8}$	10^{-6}	nein (1)	1
Sonne Mond Attraktion	erdnah Resonanz	10^{-7}	10^{-4}	nein (1)	1
	geosyn.	10^{-5}	10^{-2} (!)	1	2
Gezeiten		10^{-8}	10^{-5}	nein	1
Solardruck	M_0	10^{-8}	10^{-5} (10^{-2})	nein	2
	a,e,i,Ω,ω	10^{-8}	10^{-5}	nein	1
Luftwiderstand	M_0	$\leq 10^{-7}$	10^{-2} (!)	nein	2
	a,e,i,Ω,ω	$\leq 10^{-7}$	10^{-5}	nein	1

Tabelle 17-2: Qualitative Übersicht der wichtigsten Störeffekte auf Erdsatellitenbahnen für erdnahe und geosynchrone Bahnen. Die Übergänge zwischen diesen Bereichen sind fließend. Resonanzeffekte für spezielle Bahnfamilien verfälschen das Bild (nach HORI und KOZAI [1974])

	$B_n = -J_n R_E^n \quad , \quad n = 2, 3, 4, 5, \ldots$
BROUWER [1959]	$k_2 = \frac{1}{2} J_2 R_E^2$ $A_{3,0} = -J_3 R_E^3$ $k_4 = \frac{3}{8} J_4 R_E^4$ $A_{5,0} = -J_5 R_E^5$
	$y_2' = \frac{1}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}$ $y_3' = -J_3 \frac{R_E^3}{\bar{a}_0^3 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}$ $y_4' = -\frac{3}{8} J_4 \frac{R_E^4}{\bar{a}_0^4 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^4}$ $y_5' = -J_5 \frac{R_E^5}{\bar{a}_0^5 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^5}$
KOZAI [1959]	$A_2 = \frac{3}{2} J_2 R_E^2$ $A_3 = -J_3 R_E^3$ $A_4 = -\frac{35}{8} J_4 R_E^4$
GARFINKEL [1959]	$k = \frac{1}{2} \mu J_2 R_E^2 \quad (\mu = 1, R_E = 1)$ $k' = \mu J_4 R_E^4$
JEFFREY [1952]	$J = \frac{3}{2} J_2$ $H = -J_3$ $D = -\frac{35}{8} J_4$
– Geodäsie –	$C_{n0} = -J_n$ $C_{nm} = J_{nm} \cos\left(m\lambda_{nm}\right)$ $S_{nm} = J_{nm} \sin\left(m\lambda_{nm}\right)$

Tabelle 17-3**:** Die ersten zonalen Harmonischen in verschiedenen Schreibweisen (*Jeffrey* zitiert nach MERSON und KING-HELE [1958])

In der Satellitenbahnmechanik werden häufig auch die Amplitudenkoeffizienten J_{nm} und die Phasenlagen λ_{nm} verwendet, die über die Beziehungen

$$\begin{aligned} C_{nm} &= J_{nm} \cos m\lambda_{nm} \\ S_{nm} &= J_{nm} \sin m\lambda_{nm} \end{aligned} \qquad (17.7)$$

definiert werden. Die Potentialkoeffizienten werden unterschieden in

- zonale Harmonische, wenn m = 0
- tesserale Harmonische, wenn $0 \neq m < n$
- sektorielle Harmonische, wenn m = n.

Für die zonalen Harmonischen ist seit MERSON und KING-HELE [1958] die Bezeichnung J_n üblich mit

$$J_n = -J_{n0} = -C_{n0} \quad . \qquad (17.8)$$

In der klassischen Literatur zur Satellitenbahnmechanik wurde für die Potentialkoeffizienten eine Vielzahl weiterer Bezeichnungen verwendet. Eine (willkürliche und unvollständige) Übersicht ist in Tabelle 17-3 zusammengestellt.

Damit hat das Gravitationspotential die Darstellung

$$\begin{aligned} U = \; & \frac{\mu}{r} - \\ & - \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^n J_n \, P_n(\sin\delta) + \\ & + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^n \sum_{m=1}^{n} J_{nm} \cos m\left(\lambda - \lambda_{nm}\right) P_{nm}(\sin\delta) \quad . \end{aligned} \qquad (17.9)$$

Die *zonalen Kugelfunktionen* (= „*Legendre-Polynome*“) (x = beliebige Variable) haben die Rekursionsformel[1]

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) = (2n+1)\, x\, P_n(x) - n\, P_{n-1}(x) \quad , \quad (n \geq 0) \qquad (17.10)$$

und lauten mit

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

schließlich

[1] siehe etwa in MADELUNG [1964], p. 102 ff.

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}x\left(5x^2-3\right) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}x\left(63x^4-70x^2+15\right) \\
P_6(x) &= \frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right) \\
P_7(x) &= \frac{1}{16}x\left(429x^6-693x^4+315x^2-35\right) \\
&\ldots
\end{aligned}
\qquad (17.11)
$$

Die *allgemeinen Kugelfunktionen* (= *„zugeordnete Legendre-Polynome“*) haben die Rekursionsformel

$$
\left(2n+1\right)x\,P_{nm}\left(x\right) = \left(n-m+1\right)P_{n+1,m}\left(x\right)+\left(n+m\right)P_{n-1,m}\left(x\right) \quad , \quad \left(n,m\geq 0\right) \qquad (17.12)
$$

und lauten mit $x=\sin\delta$ im einzelnen

$$
\begin{aligned}
P_{11}\left(x\right) &= P_{11}\left(\sin\delta\right) = \cos\delta = \sqrt{1-x^2} \\
P_{21}\left(x\right) &= \frac{3}{2}\sin 2\delta = 3x\sqrt{1-x^2} \\
P_{22}\left(x\right) &= \frac{3}{2}\left(1+\cos 2\delta\right) = 3\left(1-x^2\right) \\
P_{31}\left(x\right) &= \frac{3}{2}\cos\delta\left(4-5\cos^2\delta\right) = \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}\left(5x^2-1\right) \\
P_{32}\left(x\right) &= 15x\left(1-x^2\right) \\
P_{33}\left(x\right) &= 15\cos^3\delta = 15\sqrt{1-x^2}\left(1-x^2\right) \\
&\ldots
\end{aligned}
\qquad (17.13)
$$

Anmerkungen:

Bezieht sich das Gravitationspotential auf den Massenmittelpunkt des Zentralkörpers, was auch üblicherweise so gewählt wird, ist

$$
J_1 = C_{11} = S_{11} = 0 \quad . \qquad (17.14)
$$

Die *Abplattung f* für ein mittleres bestanschließendes Referenzellipsoid des Zentralkörpers ist in erster Näherung mit der zonalen Harmonischen J_2 über die Beziehung[1]

[1] aus SEEBER [1989], p. 419; KAULA [1966], Formel (1.39), (1.47), (1.48)

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{3}{2} J_2 + \frac{m_e}{2} + \frac{9}{8} J_2^2 + \frac{15}{28} J_2 m_e + \frac{3}{56} m_e^2 + \ldots \quad , \quad m_e = \frac{R_E \dot{\Theta}^2}{g_e} \\
J_2 &= \frac{2}{3} f \left(1 - \frac{1}{2} f\right) - \frac{1}{3} m_e \left(1 - \frac{3}{2} m_e - \frac{2}{7} f\right) + \ldots \\
J_4 &= -\frac{4}{35} f \left(7 f - 5 m_e\right) + \ldots
\end{aligned}
\tag{17.15}
$$

verknüpft, wobei R_E der mittlere Äquatorradius des Zentralkörpers, $\dot{\Theta}$ seine mittlere tropische Rotation, g_e die Gravitationsbeschleunigung des Zentralkörpers am Äquator und m_e das Verhältnis aus Zentripetalbeschleunigung und Gravitationsbeschleunigung am Äquator bedeuten[1].

17.2.2 Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld

Bei bekanntem Potential

$$U_G := U - \frac{\mu}{r} \tag{17.16}$$

des anisotropen Gravitationsfeldes wird seine beschleunigende Wirkung aus

$$\mathbf{R}_G = \nabla U_G \tag{17.17}$$

berechnet. Im Frühlingspunkt-bezogenen $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem mit den kartesischen Koordinaten x_i ist

$$\nabla U_G = \frac{\partial U_G}{\partial x_i} \mathbf{p}_i \quad . \tag{17.18}$$

Zur Berechnung der Beschleunigungen im bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Bahnsystem (*Hansen*- System) werden die Koordinaten (ζ ist der *Hansen*sche Bahnwinkel[2])

$$
\begin{aligned}
y_1 &= r \cos w \cos \zeta \\
y_2 &= r \cos w \sin \zeta \\
y_3 &= r \sin w
\end{aligned}
\tag{17.19}
$$

verwendet, so dass auch

$$\nabla U_G = \frac{\partial U_G}{\partial y_j} \mathbf{q}_j^{(I)} \tag{17.20}$$

gesetzt werden kann. Die Beschleunigungskomponenten lauten

---

[1] Weitere Aussagen zur zonalen Harmonischen J_2 können nachgelesen werden in: in MURRAY-DERMOTT [1999], p. 149 ff

[2] Im Sinne von Kapitel 4 (Band II) gelegentlich auch als „erster *Hansen*-Winkel“ bezeichnet

$$b_{GR} = \frac{\partial U_G}{\partial y_1} \quad , \quad b_{GT} = \frac{\partial U_G}{\partial y_2} \quad , \quad b_{GN} = \frac{\partial U_G}{\partial y_3} \quad . \tag{17.21}$$

Sie können demnach berechnet werden aus

$$\frac{\partial U_G}{\partial y_j} = \frac{\partial U_G}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y_j} + \frac{\partial U_G}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y_j} + \frac{\partial U_G}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y_j} \quad (j = 1, 2, 3) \quad . \tag{17.22}$$

Im Einzelnen folgt aus den Formeln (17.19)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial y_1} &= \cos\zeta\cos w \quad , & r\cos w\frac{\partial \zeta}{\partial y_1} &= -\sin\zeta \quad , & r\frac{\partial w}{\partial y_1} &= -\cos\zeta\sin w \\
\frac{\partial r}{\partial y_2} &= \sin\zeta\cos w \quad , & r\cos w\frac{\partial \zeta}{\partial y_2} &= \cos\zeta \quad , & r\frac{\partial w}{\partial y_2} &= -\sin\zeta\sin w \\
\frac{\partial r}{\partial y_3} &= \sin w \, , & \frac{\partial \zeta}{\partial y_3} &= 0 \quad , & r\frac{\partial w}{\partial y_3} &= \cos w \quad .
\end{aligned} \tag{17.23}$$

Da es sich um ein mitbewegtes System handeln soll, in dem stets $\zeta = w = 0°$ gilt, wird

$$\frac{\partial r}{\partial y_1} = 1 \, , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y_2} = \frac{\partial w}{\partial y_3} = \frac{1}{r} \, , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y_1} = \frac{\partial w}{\partial y_1} = \frac{\partial r}{\partial y_2} = \frac{\partial w}{\partial y_2} = \frac{\partial r}{\partial y_3} = \frac{\partial \zeta}{\partial y_3} = 0 \quad .$$

Somit bleiben

$$b_{GR} = \frac{\partial U_G}{\partial r} \quad , \quad b_{GT} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_G}{\partial \zeta} \quad , \quad b_{GN} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_G}{\partial w} \quad . \tag{17.24}$$

Wenn das mitgeführte Bahnsystem entsprechend den Formeln in Abschnitt 8.12 (Band II) mit dem Äquatorsystem über die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha_1 - \Omega)\cos\delta_1 &= \cos(\zeta - \sigma)\cos w \\
\sin(\alpha_1 - \Omega)\cos\delta_1 &= \sin(\zeta - \sigma)\cos w\cos i - \sin w\sin i \\
\sin\delta_1 &= \sin(\zeta - \sigma)\cos w\sin i + \sin w\cos i
\end{aligned} \tag{17.25}$$

verknüpft ist, wird

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_G}{\partial \zeta} &= \frac{\partial U_G}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_G}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_G}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_G}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_G}{\partial \delta_1}\frac{\partial \delta_1}{\partial \zeta} \\
\frac{\partial U_G}{\partial w} &= \frac{\partial U_G}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial w} + \frac{\partial U_G}{\partial \Omega}\frac{\partial \Omega}{\partial w} + \frac{\partial U_G}{\partial i}\frac{\partial i}{\partial w} + \frac{\partial U_G}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial w} + \frac{\partial U_G}{\partial \delta_1}\frac{\partial \delta_1}{\partial w} \quad .
\end{aligned} \tag{17.26}$$

Hier gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \zeta} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} = \frac{\partial i}{\partial \zeta} = \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} = 0 \\
\frac{\partial \zeta}{\partial w} &= \frac{\partial \Omega}{\partial w} = \frac{\partial i}{\partial w} = \frac{\partial \sigma}{\partial w} = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{17.27}$$

Mit $u = \zeta - \sigma$ bleiben daher die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1}{\partial \zeta} &= \cos w \left[\sin u \sin\left(\alpha_1 - \Delta\Omega\right) + \cos u \cos i \cos\left(\alpha_1 - \Delta\Omega\right) \right] \\
\frac{\partial \delta_1}{\partial \zeta} &= \cos w \left[\cos u \sin i \cos \delta_1 + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\sin u \cos\left(\alpha_1 - \Delta\Omega\right) - \cos u \cos i \sin\left(\alpha_1 - \Delta\Omega\right) \right) \sin \delta_1 \right] \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial w} &= \cos u \sin w \sin\left(\alpha_1 - \Omega\right) - \\
&\quad - \left[\sin u \sin w \cos i + \cos w \sin i \right] \cos\left(\alpha_1 - \Omega\right) \\
\frac{\partial \delta_1}{\partial w} &= \left(-\sin u \sin w \sin i + \cos w \cos i \right) \cos \delta_1 + \\
&\quad + \left[\cos u \sin w \cos\left(\alpha_1 - \Omega\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\sin u \sin w \cos i + \cos w \sin i \right) \sin\left(\alpha_1 - \Omega\right) \right] \sin \delta_1 \quad .
\end{aligned}
\tag{17.28}
$$

Insbesondere gilt im mitgeführten System

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} &= \frac{\cos i}{\cos \delta} \\
\frac{\partial \delta}{\partial \zeta} &= \frac{\sin i \cos u}{\cos \delta} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial w} &= -\frac{\sin i \cos u}{\cos \delta} \\
\frac{\partial \delta}{\partial w} &= \frac{\cos i}{\cos \delta} \quad .
\end{aligned}
\qquad \left(\zeta = w = 0^\circ \;\; , \;\; \alpha_1 = \alpha \;\; , \;\; \delta_1 = \delta \right)
\tag{17.29}
$$

Als BEISPIEL werden die Beschleunigungsanteile berechnet, welche durch die größten zonalen Anteile des Gravitationspotentials verursacht werden. Aus Formel (17.9) mit den *Legendre*-Polynomen aus den Formeln (17.11) ergibt sich unter der Annahme (17.14)

$$
U_{G0} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 J_n \, P_n\left(\sin \delta\right) \quad , \tag{17.30}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{G0} \;=\; & -\frac{1}{2}\,\mu\, J_2\,\frac{R_E^2}{r^3}\left(3\sin^2\delta - 1\right) - \\
& -\frac{1}{2}\,\mu\, J_3\,\frac{R_E^3}{r^4}\sin\delta\left(5\sin^2\delta - 3\right) - \\
& -\frac{1}{8}\,\mu\, J_4\,\frac{R_E^4}{r^5}\left(35\sin^4\delta - 30\sin^2\delta + 3\right) - \\
& -\frac{1}{8}\,\mu\, J_5\,\frac{R_E^5}{r^6}\sin\delta\left(63\sin^4\delta - 70\sin^2\delta + 15\right) - \\
& -\frac{1}{16}\,\mu\, J_6\,\frac{R_E^6}{r^7}\left(231\sin^6\delta - 315\sin^4\delta + 105\sin^2\delta - 5\right) - \\
& -\frac{1}{16}\,\mu\, J_7\,\frac{R_E^7}{r^8}\sin\delta\left(429\sin^6\delta - 693\sin^4\delta + 315\sin^2\delta - 35\right) - \\
& -\ldots
\end{aligned}
\tag{17.31}
$$

Hier ist offenbar

$$
\frac{\partial U_{G0}}{\partial\alpha} \;=\; \frac{\partial U_{G0}}{\partial\Omega} \;=\; \frac{\partial U_{G0}}{\partial i} \;=\; \frac{\partial U_{G0}}{\partial\sigma} \;=\; 0 \tag{17.32}
$$

und es bleibt für die Beschleunigungskomponenten im mitgeführten Bahnsystem

$$
\begin{aligned}
b_{RG0} \;&=\; \frac{\partial U_{G0}}{\partial y_1} \;=\; \frac{\partial U_{G0}}{\partial r} \\
b_{TG0} \;&=\; \frac{\partial U_{G0}}{\partial y_2} \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial U_{G0}}{\partial\zeta} \;=\; \sin i\cos u\left(\frac{1}{r\cos\delta}\,\frac{\partial U_{G0}}{\partial\delta}\right) \\
b_{NG0} \;&=\; \frac{\partial U_{G0}}{\partial y_3} \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial U_{G0}}{\partial w} \;=\; \cos i\left(\frac{1}{r\cos\delta}\,\frac{\partial U_{G0}}{\partial\delta}\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{17.33}
$$

Im Einzelnen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
b_{RG0} &= \frac{\partial U_{G0}}{\partial r} = \\
&= \frac{3}{2}\mu J_2 \frac{R_E^2}{r^4}\left(3\sin^2 i \sin^2 u - 1\right) + \\
&\quad + 2\mu J_3 \frac{R_E^3}{r^5}\sin i \sin u \left(5\sin^2 i \sin^2 u - 3\right) + \\
&\quad + \frac{5}{8}\mu J_4 \frac{R_E^4}{r^6}\left(35\sin^4 i \sin^4 u - 30\sin^2 i \sin^2 u + 3\right) + \\
&\quad + \frac{3}{4}\mu J_5 \frac{R_E^5}{r^7}\sin i \sin u \left(63\sin^4 i \sin^4 u - 70\sin^2 i \sin^2 u + 15\right) + \\
&\quad + \frac{7}{16}\mu J_6 \frac{R_E^6}{r^8}\left(231\sin^6 i \sin^6 u - 315\sin^4 i \sin^4 u + 105\sin^2 i \sin^2 u - 5\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\mu J_7 \frac{R_E^7}{r^9}\sin i \sin u \left(429\sin^6 i \sin^6 u - 693\sin^4 i \sin^4 u + 315\sin^2 i \sin^2 u - 35\right) + \\
&\quad + \ldots \quad ,
\end{aligned}
\tag{17.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r\cos\delta}\frac{\partial U_{G0}}{\partial \delta} &= -\frac{\mu}{r^2}\left\{3 J_2 \left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \sin i \sin u + \right. \\
&\quad + \frac{3}{2} J_3 \left(\frac{R_E}{r}\right)^3 \left(5\sin^2 i \sin^2 u - 1\right) + \\
&\quad + \frac{5}{2} J_4 \left(\frac{R_E}{r}\right)^4 \sin i \sin u \left(7\sin^2 i \sin^2 u - 3\right) + \\
&\quad + \frac{15}{8} J_5 \left(\frac{R_E}{r}\right)^5 \left(21\sin^4 i \sin^4 u - 14\sin^2 i \sin^2 u + 1\right) + \\
&\quad + \frac{21}{8} J_6 \left(\frac{R_E}{r}\right)^6 \sin i \sin u \left(33\sin^4 i \sin^4 u - 30\sin^2 i \sin^2 u + 5\right) + \\
&\quad + \frac{7}{16} J_7 \left(\frac{R_E}{r}\right)^7 \left(429\sin^6 i \sin^6 u - 495\sin^4 i \sin^4 u + 135\sin^2 i \sin^2 u - 5\right) + \\
&\quad + \ldots \left. \right\} \quad .
\end{aligned}
\tag{17.35}
$$

17.2.3 Aufbereitung des Gravitationspotentials für eine numerische Integration

Zur rekursiven Aufbereitung des Gravitationspotentials sowie der partiellen Ableitungen

$$
\frac{\partial U_G}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad , \tag{17.36}
$$

die zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen benötigt werden, ist das Verfahren von *de Witt* und *Cunningham* [1970] geeignet.

17.2.4 Das Gravitationspotential der Erde

Als erster scheint *I. Newton* die *Abplattung der Erde* erkannt und berechnet zu haben[1], wofür er den Wert f = 1/230 fand. Bis 1957 wurde dieser Wert auf f = 1/297.1 verbessert. Bereits Ende des 19. Jahrhunderts war auf Grund von Schwerefeldmessungen das Gravitationsfeld bis zur 3. Ordnung, bis 1949 bis zur 8. Ordnung der sphärischen Harmonischen bestimmt worden[2]. Inzwischen haben genaue Beobachtungen der Bewegung von Satelliten nicht nur einen verbesserten Wert für die Abplattung ergeben (das IAU (1976)-System (siehe Anhang E in Band V) verwendet den Wert f = 1/298.257), sondern auch zu der Erkenntnis geführt, dass die Erdabplattung keine konstante Größe ist. Für die zweite zonale Harmonische wurde die Variation gefunden[3]

$$\frac{dJ_2}{dt} = -\left(2.6 \pm 0.6\right)\times 10^{-9}\ cy^{-1} \tag{17.37}$$

und über die Formeln (17.15) für die Abplattung die Variation

$$\frac{df}{dt} = -4.0\times 10^{-9}\ cy^{-1} \quad . \tag{17.38}$$

Die Abplattung nimmt also leicht ab. Zu verschiedenen Fundamentalepochen hat sie die Werte

$$f_{J\,2000.0} = 0.00335281$$
$$f_{J\,2100.0} = 0.003352806 \quad .$$

Körper	R_{min} [km]	R_{max} [km]	ΔJ_2 [10^{-5}]
Innerer Kern	0	1215	0 – 1
Äußerer Kern	1215	3485	10
Unterer Mantel	3485	5700	58
Oberer Mantel a)	5700	5951	14
b)	5951	6350	25
Kruste	6350	6371	1
Erde (gesamt)			108

Tabelle 17-4: Beiträge des Erdkerns, des Erdmantels und der Erdkruste zu J_2 (nach BURSA [1987])

Dies bewirkt, dass die Äquatorzone im Jahrhundert um 8 cm abnimmt, entsprechend die Polzone um 8 cm zunimmt. Ursache für diese Vorgänge ist die Dynamik des Erdmantels, dessen Beiträge zu J_2 in Tabelle 17-4 gelistet sind.

---

[1] siehe KAULA [1976]

[2] Siehe im *Zhongolovich* Abschnitt 2.10.8 (Band I)

[3] YODER et al. [1983]

$J_2 = -C_{2,0} = 0.001082627$
$J_3 = -C_{3,0} = -2.532656 \times 10^{-6}$
$J_4 = -C_{4,0} = -1.619622 \times 10^{-6}$
$J_5 = -C_{5,0} = -2.272961 \times 10^{-7}$
$C_{2,2} = 1.574460 \times 10^{-6}$
$C_{3,1} = 2.192639 \times 10^{-6}$
$C_{3,3} = 1.005488 \times 10^{-7}$
$S_{2,2} = -9.038038 \times 10^{-7}$
$S_{3,1} = 2.684249 \times 10^{-7}$
$S_{3,3} = 1.972226 \times 10^{-7}$

Tabelle 17-5: Die wichtigsten Potentialterme des Schwerefeldes der Erde[1]

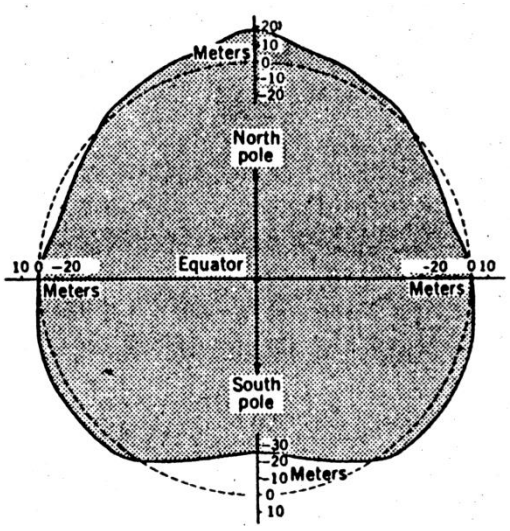


Bild 17-1: Die Figur der Erde (Kopie aus KING-HELE [1976])

[1] Daten aus: KLINKRAD, H. [2006], p. 351, nach: LEMOINE, F., KENYON, S., FACTOR, J., TRIMMER, R., PAVLIS, N., CHINN, D., COX, C., KLOSKO, S., LUTHCKE, S., TORRENCE, M., WANG, Y., WILLIAMSON, R., PAVLIS, E., RAPP, R., and OLSON, T. [1998]: 'The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96', Technical Report NASA TP-1998-206891, NASA/GSFC

Aus Satellitenbeobachtungen wurden bzw. werden die weiteren Potentialkoeffizienten des Erdgravitationsfeldes berechnet, was eine der vornehmsten Aufgaben der Satellitengeodäsie ist. Neben J_2 , das die Abplattung und somit das Referenzellipsoid bestimmt, interessiert hier als nächstes der J_3 -Term, der die Birnenform des Erdkörpers definiert, wie das bekannte Bild 17-1 zeigt. Auch wenn die Überhöhung des Nordpols gegenüber dem Referenzellipsoid um etwa 18 m und des Südpols um etwa –25 m gering ist, ist die Auswirkung auf die Satellitenbewegung erheblich (siehe hierzu etwa die Beispiele in Abschnitt 38.8.4, Band V, was auch zu einer Abspaltung dieser Effekte in der Berechnung der Satellitenbewegung führte).

Für die Erde ist die größte zonale Harmonische (J_2) von der Größenordnung 10^{-3}, alle weiteren Potentialkoeffizienten sind höchstens von der Größenordnung 10^{-6}. Im Fall der Erde ist es daher gerechtfertigt, eine Bahnberechnung mit den Einflüssen des Erdpotentials im Rahmen einer Störungsrechnung durchzuführen. Dabei kann eine Integration mit J_2 als Hauptstörungsterm und dann mit den restlichen Potentialkoeffizienten als Störtermen höherer Ordnung erfolgen. Besonderes Augenmerk erfordern allerdings Resonanzen.

17.2.5 Das Gravitationspotential des Erdmondes

$J_2 = -C_{2,0} = 0.0002027$
$J_3 = -C_{3,0} = 6. \times 10^{-6}$
$J_4 = -C_{4,0} = 0. \times 10^{-6}$
$J_5 = -C_{5,0} = 0. \times 10^{-7}$
$C_{2,2} = 0.0000223$
$C_{3,1} = 0.000029$
$C_{3,2} = 0.0000048$
$C_{3,3} = 0.0000018$
$S_{2,2} = 0.$
$S_{3,1} = 0.000004$
$S_{3,2} = 0.0000017$
$S_{3,3} = - -0.000001$

Tabelle 17-6: Die wichtigsten Potentialterme des Schwerefeldes der Erdmondes[1]

Auf Grund der gebundenen Rotation weist das Gravitationsfeld des Monds eine Triaxialität auf, welche die Bewegung eines Mondorbiters gegenüber einer *Kepler*bewegung wesentlich verzerren kann.

[1] Daten aus: SEIDELMANN, K. ET AL. [1992], p.697

17.2.6 Das Gravitationspotential des Mars

$J_2 = -C_{2,0} = 0.001964$
$J_3 = -C_{3,0} = 0.36 \times 10^{-4}$
$C_{2,2} = -0.000055$
$S_{2,2} = 0.000031$
$S_{3,1} = 0.000026$

Tabelle 17-7: Die wichtigsten Potentialterme des Schwerefeldes des Mars[1]

17.2.7 Das Gravitationspotential des Jupiter

$J_2 = -C_{2,0} = 0.01475$
$J_3 = -C_{3,0} = -0.58 \times 10^{-3}$

Tabelle 17-8: Die wichtigsten Potentialterme des Schwerefeldes des Jupiter[2]

17.2.8 Das Gravitationspotential des Saturn

$J_2 = -C_{2,0} = 0.01645$
$J_3 = -C_{3,0} = -0.10 \times 10^{-2}$

Tabelle 17-9: Die wichtigsten Potentialterme des Schwerefeldes des Saturn[3]

17.2.9 Das Gravitationspotential des Uranus

$J_2 = -C_{2,0} = 0.012$

Tabelle 17-10: Der wichtigste Potentialterm des Schwerefeldes des Uranus[4]

17.2.10 Das Gravitationspotential des Neptun

$J_2 = -C_{2,0} = 0.004$

Tabelle 17-11: Der wichtigste Potentialterm des Schwerefeldes des Uranus[1]

[1] Daten aus: SEIDELMANN, K. ET AL. [1992], p.697. Es ist zu erwarten, dass aus den laufenden Marsmissionen verfeinerte Daten des Gravitationsfeldes des Mars erhalten werden können.

[2] Daten aus: SEIDELMANN, K. ET AL. [1992], p.697

[3] Daten aus: SEIDELMANN, K. ET AL. [1992], p.697

[4] Daten aus: SEIDELMANN, K. ET AL. [1992], p.697 [5] Daten aus: SEIDELMANN, K. ET AL. [1992], p.697

17.3 Luftwiderstand

Höhe $[km]$	Min. Dichte $\left[g / km^3\right]$	Max. Dichte $\left[g / km^3\right]$	Höhe $[km]$	Min. Dichte $\left[g / km^3\right]$	Max. Dichte $\left[g / km^3\right]$
100	497400.000	497400.000	420	1.5580	5.684
120	24900.000	24900.000	440	1.0910	4.355
130	8377.000	8710.000	460	0.7701	3.362
140	3899.000	4059.000	480	0.5474	2.612
150	2122.000	2215.000	500	0.3916	2.042
160	1263.000	1344.000	520	0.2819	1.605
170	800.800	975.800	540	0.2042	1.267
180	528.300	601.000	560	0.1488	1.005
190	361.700	429.700	580	0.1092	0.7997
200	255.700	316.200	600	0.0807	0.6390
210	183.900	239.600	620	0.06012	0.5123
220	134.100	185.300	640	0.03419	0.4121
230	99.490	145.500	660	0.03430	0.3325
240	74.880	115.700	680	0.02632	0.2691
250	57.090	93.080	700	0.02043	0.2185
260	44.030	75.550	720	0.01607	0.1779
270	34.300	61.820	740	0.01281	0.1452
280	26.970	50.050	760	0.01036	0.1190
290	21.390	42.260	780	0.008496	0.09776
300	17.080	35.260	800	0.007069	0.08059
320	10.990	25.110	840	0.004680	0.05741
340	7.214	18.190	880	0.003200	0.0421
360	4.824	13.370	920	0.002210	0.03130
380	3.274	9.955	960	0.001560	0.02360
400	2.249	7.492	1000	0.001150	0.01810

Tabelle 17-12: Luftdichte über der Höhe über der Erdoberfläche für Sonnenmaximum und Sonnenminimum[2]

Neben den Haupttermen des Gravitationsfeldes der Erde übt für erdnahe Bahnen der Widerstand der Restatmosphäre den größten Einfluss auf eine Satellitenbewegung aus. Eine Kenntnis des Einflusses des Luftwiderstandes ist vor allem nötig um die Lebensdauer auf erdnahen Satellitenbahnen

[2] aus CAPPELLARI, J. O. et al. [GTDS] [1976], p. 4-55; Neuauflage in LONG, ANNE C. ET AL. [1989]

abzuschätzen sowie um Bahnmanöver zu berechnen, die das Absinken einer Bahn als Folge des Luftwiderstandes ausgleichen sollen.

17.3.1 Der Luftwiderstand

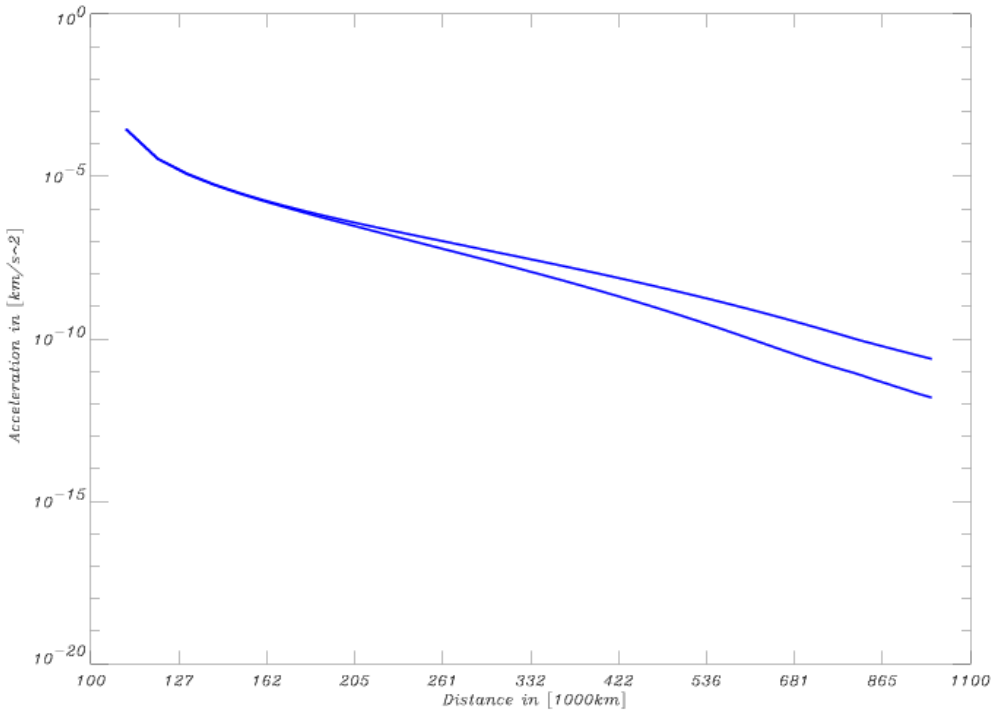


Bild 17-2: Das Luftwiderstandsmodell nach HARRIS-PRIESTER[1]. Die beiden Kurven zeigen den Verlauf der durch den Luftwiderstand verursachten Beschleunigung für minimale und maximale Sonnenaktivität (siehe die Zahlenwerte in Tabelle 17-12)

Der Einfluss des Luftwiderstandes auf die Bewegung eines Satelliten wird durch den Ausdruck

$$\mathbf{R}_D = -\frac{1}{2}\rho B_D V_D^2 \, \mathbf{v}_1 \tag{17.39}$$

beschrieben. Der Luftwiderstand wird danach beeinflusst durch die Dichte ρ der Atmosphäre am Ort des Satelliten, eine Größe B_D, die das aerodynamische Verhalten des Satelliten beschreibt, die als *ballistischer Koeffizient* bezeichnet wird, und die relative Geschwindigkeit V_D des Satelliten in Bezug auf die umgebende Lufthülle. Der Luftwiderstand wirkt im (Wesentlichen) in tangentialer Richtung. $\mathbf{v}_1$ ist der tangentiale Richtungsvektor. Wenn $\dot{\mathbf{r}}$ der Geschwindigkeitsvektor ist, $V = |\dot{\mathbf{r}}|$ die (geozentrische) Geschwindigkeit des Satelliten, lautet der tangentiale Richtungsvektor

[1] nach: CAPPELLARI, J. O. et al. [1976), p. 4-54, pp.; Bild aus: FIEDLER, H., M. WERNER, G. KRIEGER, M. WENDLER, C. PARRAGA, S. BUCKREUß, J. MITTERMAYER, V. ALBERGA (2002) *Bi-static SAR Experiments with Satellites*, Satellite Orbits and Its Basics, Lecture held at DLR Microwave and Radar Systems, Oberpfaffenhofen

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{V} \quad . \tag{17.40}$$

Zur Bestimmung der **Dichte** ρ sind verschiedene Modelle in Gebrauch. Für bahnanalytische Zwecke hat sich die Tabelle von *Harris* und *Priester* bewährt (siehe Tabelle 17-12)[1]. Der Verlauf dieser Werte, die für Sonnenmaximum und –minimum angegeben sind, ist in Bild 17-2 dargestellt.

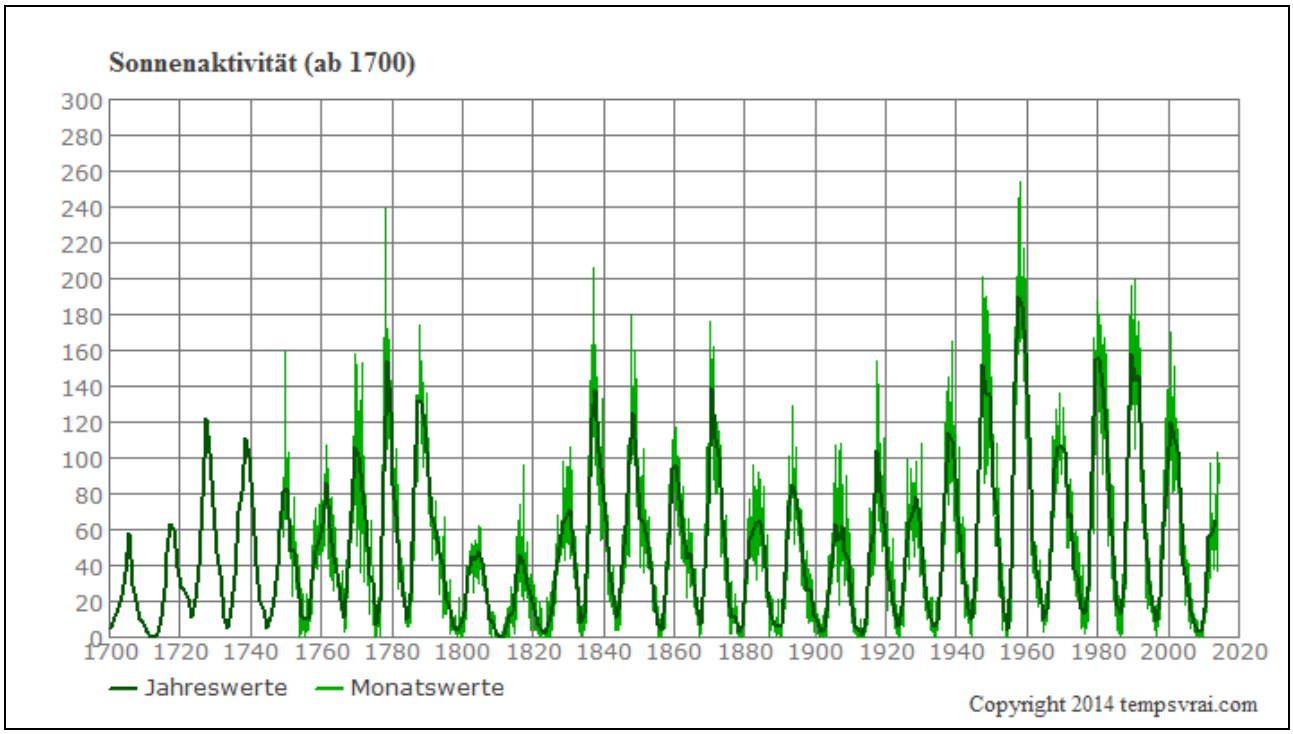


Bild 17-3: Verlauf des Solarflux[2] (repräsentiert durch die jährliche Sonnenfleckenzahl) seit 1700 bis 2014

Die Luftdichte ρ hängt allerdings in verwickelter und nur empirisch fassbarer Weise von der exosphärischen Temperatur und damit vom Solarfluss und dem geomagnetischen Index ab. Wie der Solarfluss unterliegt auch die Luftdichte kurzfristigen täglichen und saisonalen Schwankungen sowie langfristigen, verursacht durch den 11.1-jährigen Sonnenzyklus, der zudem selbst eine stark schwankende Amplitude aufweist. Neben der verwickelten Zeitabhängigkeit ist die Luftdichte eine Funktion der Höhe. Bild 17-3 zeigt den langfristigen Verlauf der in Tabellenform vorliegenden aus Messungen erhaltenen Werte für den Solarfluss, wie sie für Ephemeridenrechnungen in diesem

[1] Hinweis auf: HARRIS, I. and PRIESTER, W. [1952]: 'Time Dependent Structure of the Upper Atmosphere', Jour. Atmos. Sciences, **19(4)**, July 1952, also NASA TN D-14

HARRIS, I. and PRIESTER, W. [1962]: 'Theoretical Models for the Solar Cycle Variation of the Upper Atmosphere', NASA-TN-D-144, August 1962

HARRIS, I. and PRIESTER, W. [1965]: 'Atmospheric Structure and Its Variation in the Region from 120 to 80 km', COSPAR International Reference Atmosphere (CIRA) 1965', Space Research IV, North Holland Publishing Co., Amsterdam

[2] Kopie aus: http://tempsvrai.de/sonne-1700.php

Zeitbereich verwendet werden können. Das Bild zeigt, dass Extrapolationen des Solarflusses in die Zukunft trotz des bekannten 11.1-jährigen Sonnenzyklus nur mit großer Unsicherheit gemacht werden können, da die Maxima voneinander bis zu 50 % variieren. Bild 17-4 zeigt die Maxima der Zyklen 23 und 24. Im Zyklus 24 zeigt sich, dass das erwartete Maximum im Sommer 2000 durch eine höhere Aktivität zu Beginn des Jahres 2002 weit übertroffen wurde. Die Unsicherheiten in der Vorhersage sind also beträchtlich. Deshalb werden Tabellen in die Zukunft nur durch Angabe der Unsicherheiten angeben[1]. Bild 17-5 zeigt den Verlauf des Solarflux gemittelt über eine gewissen Zeitraum und die unmittelbar sich anschließende Vorhersage unter Berücksichtigung der Unsicherheiten im $\pm$ 2.7 σ Bereich. Es sei noch angemerkt, dass über gewisse Zeitspannen ein alternierender Wechsel von hohen und niedrigen Maxima beobachtet werden kann.

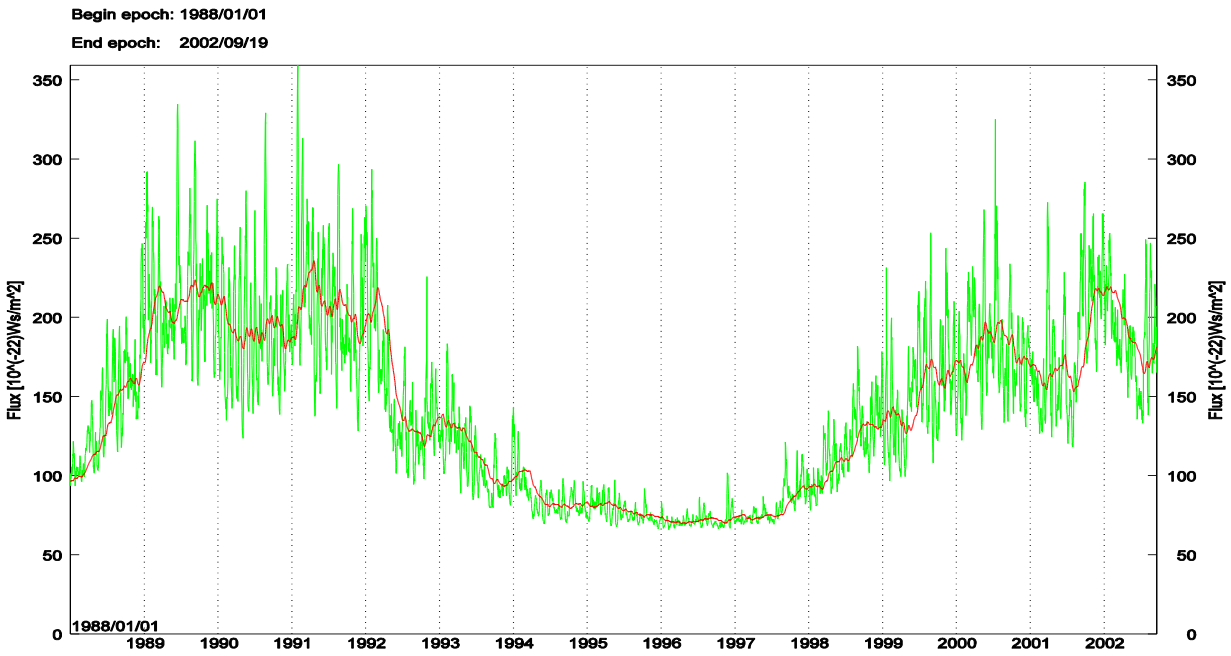


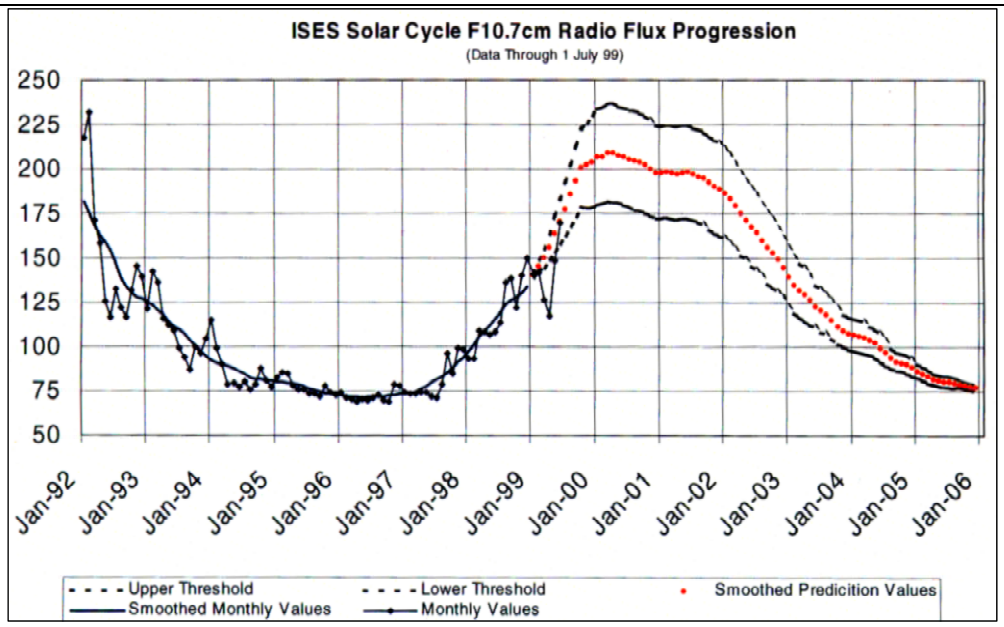
Bild 17-4: Verlauf des täglichen Solarflux (repräsentiert durch die F10.7 cm Linie) zwischen 1988 und 2002, Maxima der Zyklen Nr. 23 und 24[2]. Die rote Kurve zeigt die Mittelung über 30 Jahre

Das in der operationellen Anwendung der Bahnbestimmung und Bahnvorhersage häufig verwendete Jacchia 71 Modell berücksichtigt in recht zuverlässiger Weise die zeitabhängigen Dichtevariationen, die exosphärische Temperatur, den unterschiedlichen Einfluss der N_2, O_2, O, Ar, He, H_2 Radikale, die unterschiedliche Aktivität der Sonne im 11.1 Jahres Zyklus und den geomagnetischen Index K_P. Bild 17-6 zeigt in verschiedenen Farben die unterschiedlichen Kurven für das Jacchia 71 Modell für verschiedene Werte des Solarflux und des geomagnetische Indices K_P, darüber überlagert die beiden Extremalkurven des *Harris-Priester* Modells. Man sieht, dass die *Harris-Priester* Kurven im Wesentlichen den Jacchia Bereich einschließen. Daraus kann geschlossen werden, dass

[1] Siehe etwa in: SCHATTEN, K. H. and SOFIA, S. [1987]: ‚Forecast of an Exceptionally Large Even-Numbered Solar Cycle', Geophysical Research Letters, Vol. **10**, No. 6, 632-635

[2] Darstellung von *M. Kirschner* (DLR-RB)

zumindest für bahnanalytische Untersuchungen, in denen es häufig auf Aussagen für die Bahnauslegung unter Einschluss von Extremsituationen ankommt („worst case„ Betrachtungen), die aus der *Harris-Priester* Tabelle (Tabelle 17-12) zu entnehmenden Werte für die Dichte der Atmosphäre eine brauchbare Näherung liefern. Wir werden davon vor allem bei Untersuchungen zur Vorausberechnung von Bahnmanövern Gebrauch machen.



The estimated profile for cycle 23 (starting in 1996) of sunspot numbers corresponding to solar flux F10.7 cm line: nominal and +2σ and -2σ estimates

Bild 17-5: Mittelung des Solarflux über unterschiedliche Mittelungszeiträume und Vorhersage unter Berücksichtigung der Unsicherheiten[1]

Der **ballistische Koeffizient** hat die Darstellung

$$B_D = c_D \frac{A_D}{m} \left[\frac{km^2}{kg} \right] \quad . \tag{17.41}$$

Bei Satelliten können Luftwiderstandsbeiwert c_D und effektive Querschnittsfläche A_D bei konstant gehaltener Masse m getrennt betrachtet werden:

Der im Luftwiderstand wirksame *effektive Querschnitt* des Satellitenkörpers hängt von der momentanen Lage des Satelliten ab, ist somit auch eine zeitabhängige Größe. Für langfristige Bahnvorhersagen muss eine mittlere effektive Querschnittfläche $\overline{A_D}$ bestmöglich abgeschätzt werden. Auch wenn eine detaillierte Lageregelungsplanung vorliegt, wird $\overline{A_D}$ nur mit einer gewissen Unsicherheit langfristig abgeschätzt werden können. Langfristige Bahnvorhersagen werden somit

[1] aus: JOSELYN, J. A. et al. [1996]

auch durch die Unsicherheit in der effektiven Querschnittfläche beeinflusst. Erfahrungsgemäß kann A_D bis zum Faktor 2 variieren.

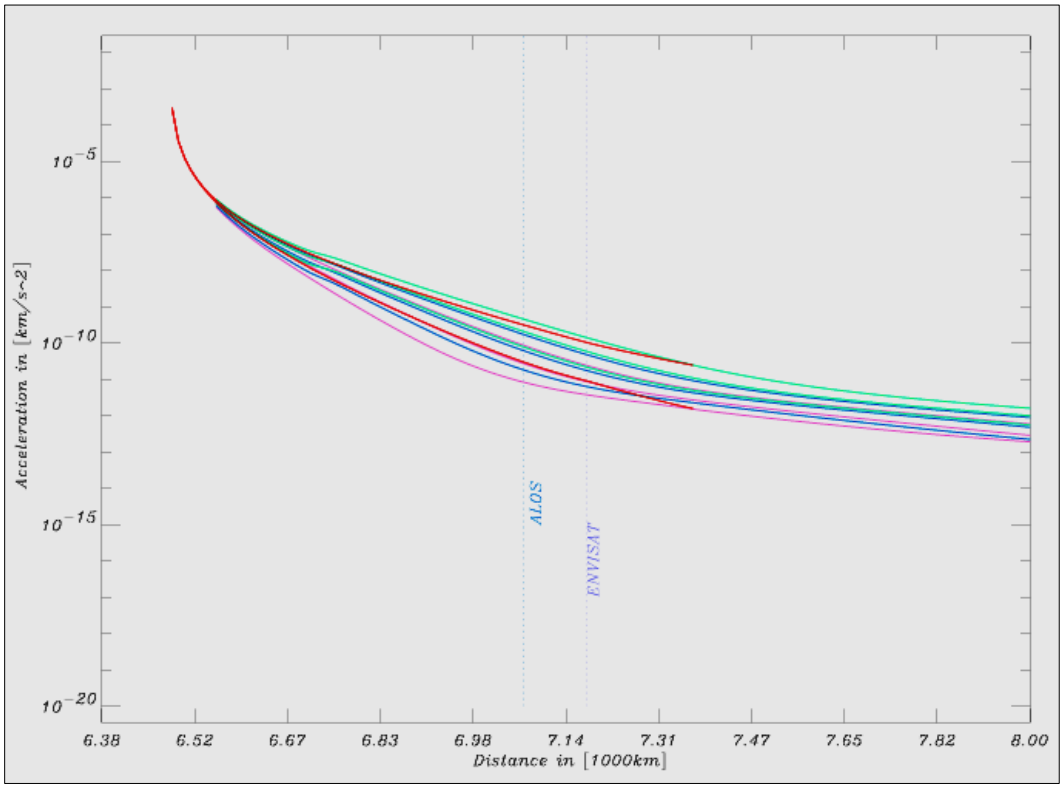


Bild 17-6: Vergleich *Jacchia* 71 Modell. mit *Harris-Priester* Modell[1]. Die roten Kurven zeigen den Verlauf der im Modell von Harris-Priester gegebenen Werte. Überlagert sind Kurven nach dem Jacchia Modell in der Überarbeitung durch E. GILL [1996]: Lila Kurven (von ganz unten nach oben hin gehend) 10.7cm Fluss von [70, 130, 200, 250], Kp = 0, Blaue Kurven (von ganz unten nach oben hin gehend) 10.7cm Fluss von [70, 130, 200, 250], Kp = 4, Grün Kurven (von ganz unten nach oben hin gehend) 10.7cm Fluss von [70, 130, 200, 250], Kp = 8. Die (Kreisbahn-) Höhen der Satelliten ALOS und ENVISAT sind markiert.

Der *Luftwiderstandsbeiwert* c_D wird bei einer Bahnbestimmung als ein satellitenspezifischer Parameter gewöhnlich mitgeschätzt. Erfahrungsgemäß weicht für erdnahe kreisnahe Satelliten der so geschätzte Wert von der ursprünglichen Annahme c_D = 2.3 um nicht mehr als 10% ab. Für elliptische Satellitenbahnen können auch größere Variationen gegenüber einem Anfangswert c_{D0} auftreten. Obgleich der Luftwiderstandsbeiwert in freier Molekularströmung definitionsgemäß eine Konstante ist, zeigt sich in der Realität eine Zeitabhängigkeit, weil sich nichtmodellierte Fehler im Solarflux und in der A_D -Historie infolge von relativen Lageänderungen des Satelliten in Bezug auf die anströmende Restatmosphäre durch seine Variation in die Berechnung eingebracht werden

[1] Bild aus: FIEDLER, H., M. WERNER, G. KRIEGER, M. WENDLER, C. PARRAGA, S. BUCKREUß, J. MITTERMAYER, V. ALBERGA [2002] *Bi-static SAR Experiments with Satellites*, Satellite Orbits and Its Basics, Lecture held at Institute for High Frequency Technics and Radar Systems, siehe auch: JACCHIA, L.G. [1971]: ‚Revised Static Models of the Thermosphere and Exosphere with Empirical Temperature Profiles', Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report No. 332, Cambridge, Massachusetts, May 1971. Interpretation durch H. FIEDLER [2014] mündl. Mitteilung

müssen, Daher ist eine ständige Schätzung bei der Bestimmung von Satellitenbahnen mit erdnahen Bahnanteilen, insbesondere bei kreisnahen Erdbeobachtungssatellitenbahnen, unentbehrlich.

17.3.2 Die säkulare Variation der großen Bahnhalbachse kreisnaher Bahnen

Die Einwirkung des Luftwiderstandes auf die Bewegung eines Satelliten erfolgt im Wesentlichen in tangentialer Richtung. Wird in Gleichung (17.39) der skalare Anteil mit

$$b_D := -\frac{1}{2}\rho\, B_D V_D^2 \left[\frac{m}{s^2}\right] \tag{17.42}$$

bezeichnet, kann b_D der tangentialen Beschleunigung b_V gleichgesetzt werden. Die Geschwindigkeit V_D des Satelliten bezüglich der umgebenden Luft d.h. die Geschwindigkeit, mit der die Lufteilchen auf den Satelliten prasseln, ist in der Regel nicht bekannt. Es kann aber angenommen werden, dass sich diese Geschwindigkeit nicht wesentlich von der geozentrischen Geschwindigkeit des Satelliten unterscheidet, so dass in guter Näherung

$$V_D \approx V$$

gesetzt werden kann. Wenn außerdem angenommen wird, dass die betrachtete Bahn kreisförmig ist ($e \approx 0$), kann auch

$$V \approx V_K = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left[\frac{km}{s}\right]$$

gesetzt werden. Wird die Beschleunigung $b_D = b_V$ aus Gleichung (17.42) in die Variation der großen Bahnhalbachse (11.104) (auf Seite 76) eingesetzt, so wird der normale Anteil b_H für Abschätzungen als vernachlässigbar angenommen. Somit ergibt sich die für kreisnahe Bahnen (Annahme $e \approx 0$ und Ablenkungswinkel $\gamma \approx 0°$) im Wesentlichen als konstant geschätzte Beziehung für die säkulare Variation der großen Bahnhalbachse:

$$\dot{a}_s \approx \dot{a} = -a\,\rho\, B_D\, V = -\rho\, c_D \frac{A_D}{m}\sqrt{a\,\mu} \left[\frac{m}{s}\right] \quad . \tag{17.43}$$

Diese Beziehung ist für viele Abschätzungen von Wichtigkeit, die mit dem Luftwiderstand zusammenhängen. Hier bedeuten

- a – *große Bahnhalbachse* [km],
- μ – *geozentrische Gravitationskonstante* [km^3/s^2],
- ρ – *Luftdichte am Ort des Satelliten* [g/km^3],
- V – *Geschwindigkeit* des Satelliten [km/s],
- B_D – *ballistischer Koeffizient* [km^2/kg],
- c_D – *Luftwiderstandsbeiwert*,
- A_D – (*mittlere) Anströmfläche* [m^2],
- m – *Satellitengesamtmasse* [kg].

17.3.3 Lebensdauer

Wir betrachten als Maß für die Lebensdauer eines Erdsatelliten die Abnahme der großen Bahnhalbachse *a*, was zumindest für die zunächst betrachteten kreisnahen Satellitenbahnen gerechtfertigt ist.

Wird ein Satellit in der Erdatmosphäre abgebremst, verliert er zunächst langsam, dann jedoch zunehmend rasch an Bahnhöhe und stürzt bei Erreichen einer bestimmten Höhe $H_{\min}$ innerhalb eines Erdumlaufs ab. Erfahrungsgemäß liegt $H_{\min}$ im Durchschnitt bei einer Höhe von etwa 100 km. Wird ein Satellit zum Zeitpunkt t_1 gestartet und stürzt er zum Zeitpunkt t_2 ab, so beträgt seine *Lebensdauer*

$$L = t_2 - t_1 = \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\dot{a}}\, da \quad . \tag{17.44}$$

Bei Bezug auf einen bestimmten Bezugsradius, in unserem Fall den *mittleren Äquatorradius* der Erde R_E, sind a_1 durch die Einschusshöhe H_0 und a_2 durch die minimale (=Absturz-) Höhe $H_{\min}$ gegeben:

$$\begin{aligned} a_1 &= H_0 + R_E \\ a_2 &= H_{\min} + R_E \quad . \end{aligned} \tag{17.45}$$

Äquivalent zu Formel (17.44) kann die Lebensdauer auch implizit aus der Integralgleichung

$$a_2 = a(t_2) = a(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{a}\, dt \tag{17.46}$$

erhalten werden. Mit den Ausdrücken (17.45) kann auch

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{a}\, dt = H_{\min} - H_0 \tag{17.47}$$

geschrieben werden. Eine Diskussion der verwickelten mathematischen Behandlung der Integrale (17.44) und (17.47) und ihres Zusammenhangs mit der Integration anderer Bahnelemente ist nicht Gegenstand des vorliegenden Berichts[1].

Die Abschätzungen für die Lebensdauer eines Satelliten hängen neben dem Verhältnis der Satellitenmasse *m* zu der Angriffsfläche A_D sowie dem Luftwiderstandsbeiwert c_D, also dem ballistischen Koeffizienten (17.41), von der den Satelliten umgebenden Luftdichte ρ ab. Diese unterliegt saisonalen und lokalen Schwankungen, hängt vor allem aber von der Sonnenaktivität ab, die durch den 11-jährigen Solarzyklus geprägt ist. Da die Aktivität der Sonne nur sehr ungenau vorhergesagt werden kann (vgl. etwa Bild 17-3 auf Seite 385) wird die Entwicklung des Solarfluxes in drei Tabellen mit einem Nominalwert und mit statistischen $\pm 2.7\sigma$-Abweichungen bereitgestellt[2]. Entsprechend ist es üblich Lebensdauerabschätzungen in dreifacher Ausführung durchzuführen:

---

[1] Siehe hierzu etwa ECKSTEIN, M. C. [1972]; ECKSTEIN, M. C. [1978 a]; KWOK, J. H. [1986]

[2] KWOK, J. H. [1986]; SCHATTEN, K. H. [1996]; KLINKRAD, H. [1999], persönliche Mitteilung; KLINKRAD, H. [2006]; KING-HELE, D. G. and DOREEN M. C. WALKER [1987]

erwartete minimale, erwartete nominale und erwartete maximale Lebensdauer. Je nach Ausgangsbahnhöhe können sich die erhaltenen Zahlenwerte um Jahre unterscheiden.

BEISPIEL 1: Eine Lebensdauerabschätzung eines Satelliten auf exzentrischer Bahn kann über eine getrennte Abschätzung des Verlaufs der Apogäums- sowie der Perigäumshöhe durchgeführt werden. Dies zeigt sehr deutlich die Zirkularisation der Bahn. Als Beispiel wurde in Bild 17-7 die Bahn des Satelliten Sputnik III untersucht. Im Perigäum mit erhöhter Luftdichte wird der Satellit kurzzeitig abgebremst, was zu einer Abnahme der Apogäumshöhe führt. Die Perigäumshöhe wird dadurch zunächst nicht verringert. Erst nach Zirkularisation der Bahn und dadurch ständigem Aufenthalt in der dichteren Atmosphäre wird die Bewegung des Satelliten so beeinflusst, dass der Satellit zum Absturz gebracht wird.

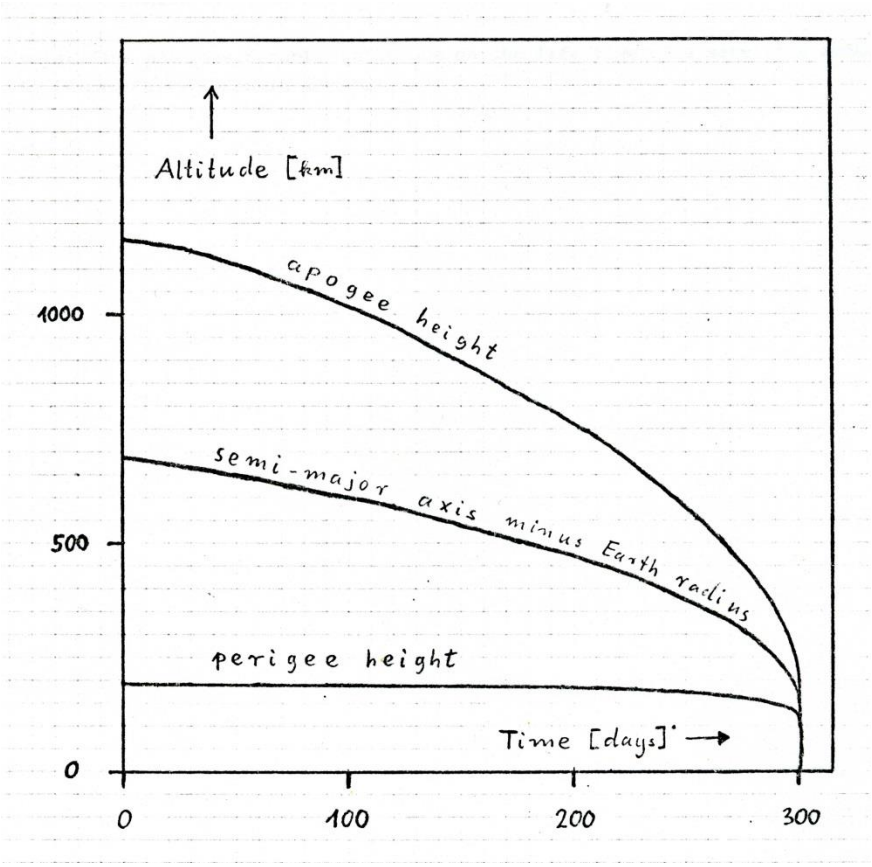


Bild 17-7: Lebensdaueruntersuchung[1] für den Satelliten Sputnik III: Verlauf der Apogäums- und der Perigäumshöhe sowie der großen Bahnhalbachse (jeweils bezogen auf den mittleren Äquatorradius R_E) ◀

Bahndaten von Sputnik III in der Endphase:

a = 7059.985 km, e = 0.06919, i = 65°.151, Ω = 287°.287, ω = 253°.9618

die physikalischen Daten sind:

[1] Kopie aus: ECKSTEIN, M. C. [1978a], p.20

Masse m = 1328 kg, Anströmfläche A_D = 2.6 m^2 , Luftwiderstandsbeiwert c_D = 2.5

Abschätzung für mittleren Solarflux und mittleren geomagnetischen Index:

$\bar{F}=183,\ \overline{K_P}=3.0.$

Mit Hilfe des Lebensdauerprogramms LIFTIM[1] wurde eine Lebensdauer von 300 Tagen abgeschätzt (Die wahre Lebensdauer betrug 264 Tage).

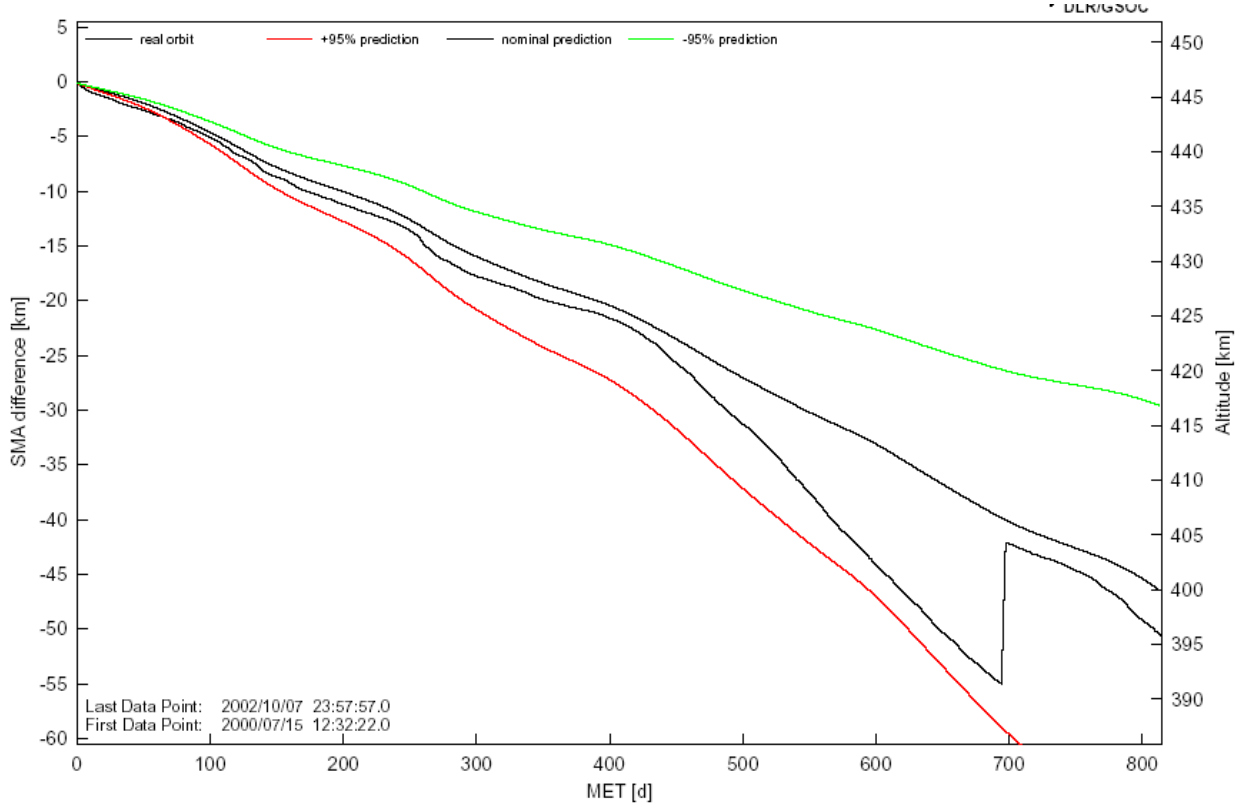


Bild 17-8: Abnahme der Bahnhöhe des Satelliten CHAMP mit Korrekturmanöver zur Verlängerung der Lebensdauer[2] ◄

BEISPIEL 2: Die Abschätzung der Lebensdauer eines Satelliten wird mit den vorher geschätzten Solarfluxdaten dreifach ausgeführt: eine Kurve für den geschätzt schnellsten Absturz („worst case“), ein Kurve mit dem geschätzt geringsten Abstieg („best case“), sowie eine Kurve für den wahrscheinlichsten Verlauf des Abstieg (nomineller Verlauf). Die Erfahrung aller bisherigen Satellitenmissionen zeigt, dass der wahre Verlauf des Abstiegs den gesamten Bereich zwischen den Extremalkurven ausnutzen kann. Je nach Sonnenaktivität können die vorher geschätzten Randkurven erreicht oder in Extremfällen sogar überschritten werden. Bild 17-8 zeigt als Beispiel den Abstieg des Geodäsie Satelliten CHAMP, der um sorgfältige Messungen des Erdschwerefeldes

[1] ECKSTEIN, M. C. [1972]

[2] Berechnung und Darstellung von *M. Kirschner* (2002)

durchführen zu können in eine relativ niedrige kreisnahe Umlaufbahn eingeschossen wurde, so dass seine Lebensdauer auch sehr knapp bemessen werden musste. Das Bild zeigt die beiden geschätzten Extremalkurven: rot für worst case, grün für best case, sowie schwarz für den nominalen Verlauf. Überlagert wird dieses Bild mit dem wahren Verlauf der Abnahme der großen Bahnhalbachse (blaue Kurve). Man sieht, dass sich die Sonnenaktivität größer als vorhergeschätzt entwickelte, so dass der Satellit schneller als erwartet abstieg. Um die Lebensdauer jedoch zu verlängern, wurde die Bahn etwa nach 700 Tagen Lebensdauer[1] angehoben (in diesem Fall um $\Delta a = 12\,\mathrm{km}$ und mit dem Geschwindigkeitsinkrement $\Delta V = 6.7\,\mathrm{m/s}$).

17.4 Anziehung durch dritte Körper

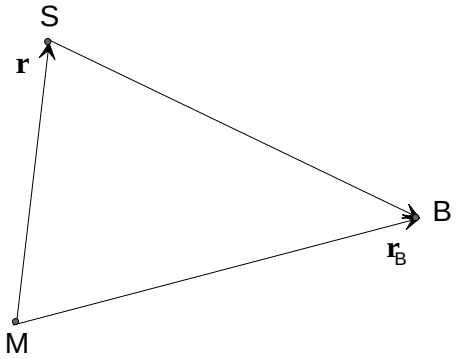


Bild 17-9: Attraktion eines Satelliten S um den Zentralkörper M durch einen dritten Körper B

Um die „Störbeschleunigung“ eines dritten Körpers auf einen den Zentralkörper umlaufenden Satelliten aufzustellen, werden die Bewegungsgleichungen (10.105) auf Seite 28 der relativen Bewegung bezogen auf einen Zentralkörper der Masse $m_1 = M$ mit der zentrischen Gravitationskonstante $\mu_1 =: \mu$, der umlaufende Satellit der verschwindenden Masse $m_2 = 0$ mit der zentrischen Gravitationskonstante $\mu_2 := 0$, dem dritten Körper der Masse m_3 mit der zentrischen Gravitationskonstante $\mu_3 =: \mu_B$. Der umlaufende Satellit habe den Radiusvektor $\boldsymbol{r}$, der dritte Körper in Bezug auf den Zentralkörper den Radiusvektor $\boldsymbol{r}_B$. Dann liefert die erste der Gleichungen (10.105) die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - \mu_B\left(\frac{\mathbf{r}_B}{r_B^3} - \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}\right|^3}\right) \quad . \tag{17.48}$$

Diese Gleichung kann in Bezug auf ein N-Körperproblem erweitert werden, wenn mit $\mathbf{r}_k$ der zentrische Ortsvektor des k-ten “Störkörpers” bezeichnet wird:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} - \sum_{k=1}^{N-2}\mu_k\left(\frac{\mathbf{r}_k}{r_k^3} - \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}}{\left|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}\right|^3}\right) \quad . \tag{17.49}$$

[1] MET steht für die Missionsdauer „Mission Elapsed Time“

In der Praxis der Satellitenbewegung und bei interplanetaren Missionen darf davon ausgegangen werden, dass die Bewegung von Sonne und Planeten in hochgenauen Ephemeriden zur Verfügung steht, d.h. dass zu jedem Zeitpunkt der Zustandsvektor $(\mathbf{r}_k, \dot{\mathbf{r}}_k)$ gegeben ist. Dies vereinfacht die Lösung der Bewegungsgleichung (17.49) wesentlich. Speziell für Untersuchungen von Satellitenbewegungen wurden Entwicklungen des Bewegungspotentials durch die Bahnparameter des Satelliten ausgedrückt[1].

17.5 Strahlungsdruck der Sonne

Für Erdsatelliten kann der Strahlungsdruck der Sonne eine wesentliche Rolle spielen, wenn das Querschnitt zu Masse Verhältnis relativ groß ist und insbesondere für höhere Bahnen[2].

Sei $E_\odot$ die gesamte über das komplette elektromagnetische Spektrum integrierte Emissionsenergie, die von der Sonne pro Minute ausgestrahlt wird. Die Strahlung wird im Wesentlichen im Wellenlängenbereich $0.2\,\mu m - 3.0\,\mu m$ abgestrahlt. Der Solarflux in der heliozentrischen Entfernung $r_\odot$ wird berechnet aus

$$S_F = \frac{E_\odot}{4\pi r_\odot^2} \quad . \tag{17.50}$$

Als Solarkonstante wird die bei senkrechtem Auftreffen pro Flächeneinheit und pro Minute auftreffende Sonnenenergie bezeichnet. Der ungefähre Wert beträgt außerhalb der Erdatmosphäre $S_C \approx 2.0\,cal/(cm^2\,\mathrm{min})$, d.h. die pro Minute auf die Fläche 2 cm^2 auftreffende Energie kann 1g Wasser um 2° C erwärmen. In der Raumfahrt wird gewöhnlich der Wert

$$S_C = 1353\frac{W}{m^2} \tag{17.51}$$

---

[1] Siehe dazu vor allem KAULA, W. M. [1966], ferner die überblickmäßige Darstellung in VALLADO, D. A. [2001], p.598-602 mit weiteren Literaturhinweisen. Für vertiefte Untersuchungen zur Mehrkörperdynamik im Zusammenhang mit der Bewegung von Erdsatelliten sei auf die klassische Standardliteratur verwiesen (ohne auch nur im Entferntesten eine vollständige Übersicht erzielen zu können): etwa TISSERAND, F. [1889-1896]; BAUSCHINGER, J. [1928]; BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961]; STUMPFF, K. [1965]; SZEBEHELY, V. [1967]; BRUMBERG, V. A. [1995]; sowie Spezialuntersuchungen, etwa ECKSTEIN, M. C. , SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1966b]; ECKSTEIN, M. C. , SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1966b]; ROY, A. E. [1969]; CHERNIACK, J. B. and GAPOSCHKIN, E. M. [1969 ?]; MUELLER, ROBERT [1971]; FISHER, DAVID [1972]; KOZAI, Y. [1973]; ZEE, CHONG-HUNG *[1973];* GIACAGLIA, GIORGIO E. O. [1973/1974]; Estes, R. H. [1974]; HORI, G. I. [1977]; ECKSTEIN, M. C. [1977]; KAMEL, A. A. [1978/1982]; HUGHES, S. and A. J. MEADOWS [1977]; COK, D. R. [1978]; KAUFMANN, B. , K. T. ALFRIEND and R. R. DASENBROCK [1978]; BROUCKE, R. [1980]; KAUFMANN, BERNARD [1981]; AMENABAR, J. P., M. C. PHENNEGER, M. BOBROWSKY, S. L. HOGE, and O. O. CUEVAS [1987]; KECHICHIAN, J. A [1988]; LANE, MARK T. [1989]; KWOK, JOHNNY H. [1991]; BRUMBERG, V. A. [1994]; BROUCKE, R. [1995]; ELY, TODD A. and KATHLEEN C. HOWELL [1996]; ECKSTEIN, M. C. [1996]; der Spezialfall lunisolarer Effekte auf den Erdmantel in GACKSTATTER, F. H. [2007] und GACKSTATTER, F. H. AND GACKSTATTER, C. F. [2011]

[2] Auswirkungen des Strahlungsdrucks auf eine präzise Bahnbestimmung siehe etwa in MARSHALL, J., A.; P. G. ANTREASIAN; G. W. ROSBOROUGH; B. H. PUTNEY [1991]

gewählt[1]. Für genauere Untersuchungen kann eine Zeitabhängigkeit infolge der Exzentrizität der Erdbahn berücksichtigt werden, somit eine Abhängigkeit von der Jahreszeit, die durch die Anzahl D der Tage seit dem Aphel der Erde geprägt ist[2],

$$S_{Ct} = \frac{1358}{1.004 + 0.0334 \cos D} \frac{W}{m^2} \quad . \tag{17.52}$$

Der Strahlungsdruck der Sonne übt in Erdentfernung die Kraft

$$\mathbf{F}_{SR} = -p_{SR}\, c_R\, A_R\, \mathbf{r}_{\oplus\odot} \tag{17.53}$$

aus, wenn $\mathbf{r}_{\oplus\odot}$ der geozentrische Ortsvektor des Sonnenmittelpunktes ist. Der Solardruck hat somit in Erdentfernung von der Sonne den Wert (c ist die Vakuum –Lichtgeschwindigkeit)

$$p_S = \frac{S_C}{c} \approx \frac{1353}{3 \bullet 10^8} \frac{W/m^2}{m/s} = 4.51 \bullet 10^{-6} \frac{N}{m^2} = 4.51 \bullet 10^{-6} \frac{kg}{m\,s^2} = \text{Solardruck in 1 AE} \quad . \tag{17.54}$$

Die Beschleunigung durch den Strahlungsdruck der Sonne ist gegeben durch

$$\ddot{\mathbf{r}}_R = \frac{\mathbf{F}_{SR}}{m} = -p_S\, AE^2\, c_R\, \frac{A_R}{m} \frac{\mathbf{r}_{\text{Sat}\odot}}{\left|\mathbf{r}_{\text{Sat}\odot}\right|^3} \qquad \left\langle p_{SR} := p_s\, AE^2 \quad . \right. \tag{17.55}$$

c_R ist der Reflektivitätskoeffizient. Er ist für Werte zwischen 0.0 und 2.0 definiert. Der Wert $c_R = 0.0$ bedeutet, dass keine Kraft durch den Strahlungsdruck auf den betrachteten Körper (Satellit) ausgeübt wird, er ist durchscheinend. $c_R = 1.0$ bedeutet, dass alle einfallende Strahlung absorbiert wird, der Körper kann als schwarzer Körper aufgefasst werden. Für $c_R = 2.0$ wird vollständige Reflektion der einfallenden Strahlung angenommen, der betrachtete Körper erfährt wie ein flacher Spiegel zweimal die Kraft durch den Strahlungsdruck. Dieser Wert muss für Satelliten im Verlauf der Bestimmung der Bahnparameter mitgeschätzt werden. Als Ausgangswert wird üblicherweise

$$c_R = 1.3$$

gesetzt. A_R ist die mittlere Oberfläche, die dem Strahlungsdruck direkt ausgesetzt ist. m ist die Masse des Körpers. Bei Satelliten ist immer davon auszugehen, dass der Reflektivitätskoeffizient c_R vom Luftwiderstandsbeiwert c_D verschieden ist, wie auch die Referenzflächen A_R und A_D grundsätzlich unterschiedlich sind.

$$\mathbf{r}_{\odot\text{Sat}} = \mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}$$

ist der relative Ortsvektor der Sonne gesehen vom Satelliten aus, dessen geozentrischer Ortsvektor $\mathbf{r}$ ist, während $\mathbf{r}_{\odot}$ der geozentrische Ortsvektor der Sonne ist.

---

[1] In ROSBOROUGH, GEORGE W. and PETER G. ANTREASIAN [1990], p.169 wird der Wert $S_C = 1367.7$ E/m^2 verwendet. Auf Grund der beträchtlichen Exzentrizität ist die „Solarkonstante“ nicht konstant, sondern schwankt im Verlauf eines Jahres etwa um den Betrag $\pm 40.6\ W/m^2$

[2] siehe etwa in VALLADO, D. A. [2001], p.544

Werde zur Abkürzung der im Fall einer Bahnanalyse zunächst als konstant anzunehmende Faktor

$$B_S := p_{SR}\, c_R\, A_R \tag{17.56}$$

gesetzt, beträgt die durch den Strahlungsdruck auf den Himmelskörper der Masse *m* ausgeübte Beschleunigung

$$b_{PR} := \frac{B_S}{m\, r^2} = \frac{p_{SR}\, c_R\, A_R}{m\, r^2} \quad . \tag{17.57}$$

Hier ist $r := \left|\mathbf{r}_{\mathrm{Sat}\odot}\right|$ die heliozentrische Distanz des untersuchten Himmelskörpers. Wird die Wirkung des Strahlungsdrucks als rein radiale Beschleunigung betrachtet, ersieht man, dass in diesem Fall wie im Fall der Gravitationsbeschleunigung das $1/r^2$ Gesetz gilt. Wir wollen dies am Fall einer interplanetaren Raumsonde darstellen, auf die nur Gravitation und Strahlungsdruck wirken. Sei $\mu_\odot$ die heliozentrische Gravitationskonstante, welche die *Kepler*sche Beschleunigung b_{RK} bewirkt, hat die radiale Gesamtbeschleunigung auf die Sonde den Betrag

$$b_{RGS} = b_{RK} + b_{PR} = \left(-\mu_\odot + \frac{B_S}{m} \right) \frac{1}{r^2} \quad . \tag{17.58}$$

Da der Strahlungsdruck entgegen der Gravitation wirkt, wird die rein gravitative *Kepler*bewegung mit den Bahnelementen große Halbachse a_G, Exzentrizität e_G, Kegelschnittparamater p_G modifiziert. Die endgültige Bahn hat dann die Parameter[1]

$$e = \frac{e_G}{1 - \dfrac{B_S}{m\,\mu_\odot}} \quad , \quad p = \frac{p_G}{1 - \dfrac{B_S}{m\,\mu_\odot}} \quad , \quad a = \frac{p}{1 - e^2} \quad . \tag{17.59}$$

Der Strahlungsdruck bewirkt somit eine Vergrößerung der Elliptizität und ein Aufblähen der Bahn. Der Effekt ist unabhängig von der Entfernung zur Sonne, d.h. am Ort der Sonde kann kein Einfluss erzielt werden. Um diesen Effekt zu beeinflussen müsste die Masse veränderbar sein, was in der Praxis auszuschließen sein dürfte. Eine technisch interessante Möglichkeit ist eine Variation des Parameters B_S. Dies ist nach Formel (17.56) vor allem durch eine geeignete Veränderung der Anströmfläche A_R zu erreichen. Diesen Effekt macht man sich in der Realisierung von Sonnenseglern zunutze[2].

Anmerkung: Eine sorgfältige Modellierung des Einflusses des Strahlungsdrucks muss neben dem Erdschatten auch das "flackernde" Eintauchen (bzw. Auftauchen) eines Satelliten in den Erdschatten einschließen. Durch diesen Effekt erhält die Variabilität des Strahlungsdrucks eine zusätzliche Komponente. Weiterhin ist der 11-jährige Sonnenzyklus ein entscheidender Variationseffekt für die Größe des Solarflux ebenso wie saisonale Variationen. Die Historie einer Satellitenbewegung ist somit notwendig für eine sorgfältige hochgenaue Bewegungsanalyse.

[1] Herleitung dieser Formeln in ISSN 1434-8454, ISRN DLR-FB-2011-04, pp. 151-161

[2] Siehe in Abschnitt 20.3 ab Seite 480

BEISPIEL: Die Tatsache, dass der Strahlungsdruck der Sonne eine Wirkung auf die Bewegung eines Himmelskörpers hat, die im Prinzip derselben Gesetzmäßigkeit wie durch eine Gravitation unterliegt, erlaubt einen Rückschluss auf die Bewegung der Erde um die Sonne. Es ist zu erwarten, dass die Bewegung der Erde zu einem bestimmten Anteil durch den Strahlungsdruck und nicht allein durch die Gravitation geprägt ist. Wenn mit $a_{\oplus\odot}, e_{\oplus\odot}$ die aus der Beobachtung erhaltene große Bahnhalbachse und Exzentrizität der Erdbahn bedeuten, kann mit den bekannten physikalischen Parametern der Erde und des Strahlungsdrucks aus Formel (17.59) die „ungestörte", d.h. allein durch das Zweikörperproblem Sonne-Erde bewirkte, Exzentrizität der Erdbahn berechnet werden:

$$e_{\oplus\odot G} = e_{\oplus\odot}\left(1 - \frac{B_S}{m_{\oplus\odot}\,\mu_\odot}\right) \quad . \tag{17.60}$$

Die Masse der Erde ist bekannt[1]

$$m_{\oplus\odot} = 5.9742\times10^{24}\,kg \quad .$$

Um die Anströmfläche abzuschätzen, werde die Oberfläche der Erde durch eine Scheibe mit Radius

$$A_{R\oplus\odot} = R_E^2\,\pi = 1.2780209\times10^{8}\,km$$

ersetzt. Als Reflektivitätsfaktor werde der Wert $c_R = 1.3$ angenommen. Die heliozentrische Gravitationskonstante beträgt

$$\mu_\odot = 1.32712438\times10^{11}\,km^3/s^2 \quad .$$

Mit diesen Zahlenwerten ergibt sich für die Exzentrizität der Erdbahn ohne Strahlungsdruck

$$e_{\oplus\odot G} = e_{\oplus\odot}\left(1 - 2.115\times10^{-14}\right) \quad .$$

Dieser kleine Zahlenwert kann in der Praxis nicht mehr nachgewiesen werden. Mit dem Kegelschnitt-Parameter der Erdbahn

$$p_{\oplus\odot} = a_{\oplus\odot}\left(1 - e_{\oplus\odot}^2\right) = 1.495562578\times10^{11}\,m$$

wird für den entsprechenden Wert ohne Strahlungsdruck nach Formel (17.59)

$$p_{\oplus\odot G} = p_{\oplus\odot}\left(1 - \frac{B_S}{m_{\oplus\odot}\,\mu_\odot}\right) \quad . \tag{17.61}$$

Wie bei der Berechnung der Exzentrizität ist auch hier der Korrekturterm vernachlässigbar, was entsprechend dann auch für die Halbachse zutrifft. Die Erde ist also zu „schwer" um vom Strahlungsdruck der Sonne aus ihrer gravitativ bedingten Bahn wirksam herausgedrängt zu werden[2]. ◀

[1] aus P. K. SEIDELMANN et al. [1992], p.700

[2] Einige weiterführende Literatur (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) zur Berücksichtigung des Strahlungsdrucks der Sonne auf Satellitenbahnen: ISAYEV, Y. N. and A. L. KUNITSYN [1972]; SHRIVASTAVA, S. K. and C. K. RAJASINGH

17.6 Strahlungsdruck reflektiert von der Erde

Da die Erde im Vergleich zum Erdmond ein hohes Albedo hat, übt der von der Erde zurückreflektierte Strahlungsdruck eine gewisse Beschleunigung auf erdnahe Raumflugkörper aus. Dieser Einfluss wird um drei Größenordnungen kleiner als der des direkten Strahlungsdrucks abgeschätzt[1].

Die auf die Erde auftreffende Strahlung wird zum Teil im Wellenlängenbereich[2] $0.2\,\mu m - 4.0\,\mu m$ zurückreflektiert. Diese reflektierte Strahlung kann auf einen Erdsatelliten einen Druck ausüben, der seine Bahn merkbar beeinflusst. Der Anteil des zurückreflektierten Strahlungsflusses S_{FR} relativ zum einfallenden Strahlungsfluss wird als Albedo

$$p_A := \frac{S_{FR}}{S_F} \tag{17.62}$$

bezeichnet. Die Erde hat ein (geometrisches) Albedo[3] von 0.367, das ist viel gegenüber dem Erdmond mit 0.12, wenig gegenüber der Venus mit 0.65, auch dem Jupiter mit 0.52. Allerdings hängt das Albedo der Erde ganz wesentlich von der Oberflächenstruktur ab, Ozeane, Wolken, Waldflächen, Wüsten mit erheblichen Albedounterschieden. Diese müssen bei sorgfältigen Analysen mit modelliert werden[4]. Wenn S_{CR} bekannt ist, kann die auf einen Satelliten ausgeübte Beschleunigung aus zu (17.54) - (17.57) analogen Formeln berechnet werden.

Anmerkung: Als ein oberer Wert der von der Erde zurückgestrahlten Strahlung findet sich in der Literatur[5] der Betrag $475\ W/m^2$.

17.7 Strahlungsdruck reflektiert vom Mond

Wegen des geringen Albedos des Mondes ($p_A = 0.12$) ist der vom Mond reflektierte Strahlungsdruck (vergleich Formel (17.62)) auf einen Erdsatelliten normalerweise vernachlässigbar. Für Mondorbiter und für hochgenaue Bahnanalysen von Erdsatelliten muss er jedoch abgeschätzt

---

[1975]; VAN DER HA, J. C. and V. J. MODI [1978]; VILHENA, RODOLPHO, DE MORAES. [1981]; BROOKES, C. J. and RYLANE, F. C. E. [1982]; ROSBOROUGH, GEORGE W. and PETER G. ANTREASIAN [1990]

[1] MCINNES, COLIN R. [1999], p. 54

[2] Die in diesem Abschnitt zusammengestellte Übersicht orientiert sich im Wesentlichen an den Artikel ROSBOROUGH, GEORGE W. and PETER G. ANTREASIAN [1990]

[3] SEIDELMANN, P. K. ED. [1992], P. 706. In der Literatur finden sich davon erhebliche abweichende Zahlenwerte, siehe etwa die Tabelle 11-2 in WERTZ, JAMES R. [2001], p. 568 mit dem über ein Jahr gemittelten Wert für das Albedo zu 0.29

[4] Dies wird in ROSBOROUGH, GEORGE W. and PETER G. ANTREASIAN [1990] in den Formeln (5) – (7) angedeutet. Weiterführende detaillierte Analysen finden sich u.a. in: LAUTMAN, D. A. [1977 a]; LAUTMAN, D. A. [1977 b]; SEHNAL, L. [1981] ; KNOCKE, P. C. , J. C. RIES, and B. D. TAPLEY [1988]; SEHNAL, L. , D. VOKROUHLICKÝ, J. STRAKA[1991]; RIM, HYUNG-JIN, CHARLES E. WEBB, SUNG-PIL YONN, and BOB E. SCHUTZ [2001]: 'Earth Radiation Pressure Effects on GPS Orbit Determination', AAS 01-185

[5] WERTZ, JAMES R. [2001], p. 558

werden. Auch hier muss die Historie der Bewegung des Raumflugkörpers (Schatten-ein und –austritt, Variationen des Strahlungsdruckes, Zeitabhängigkeit vom Sonnenzyklus usw.) berücksichtigt werden.

17.8 Wärmeabstrahlung der Erde

Ein Teil der auf die Erde treffenden Sonnenstrahlung erwärmt nicht nur die Erdoberfläche, sondern wird nach einer gewissen Zeit als langwellige Strahlung (im Wellenlängenbereich $4.0\,\mu m - 40.0\,\mu m$) abgestrahlt. Hierzu wird das Strahlungsvermögen[1] ε_R verwendet, welches das Verhältnis der ausgesandten Energie E_{IR} der Infrarotstrahlung im Vergleich zur Abstrahlung durch einen idealen schwarzen Körper E_B angibt:

$$\varepsilon_R := \frac{E_{IR}}{E_B} \quad . \tag{17.63}$$

Um die durch diesen Effekt erzeugte Beschleunigung auf einen Satelliten berechnen zu können, wird der von einem Oberflächenstück $dA_{\oplus}$ der Erdoberfläche abgestrahlte Strahlungsfluss $S_{FR\oplus}$ benötigt[2]:

$$S_{FR\oplus} = \varepsilon_R \frac{S_F}{4\pi r^2} \cos\gamma \; dA_{\oplus} \quad , \tag{17.64}$$

wobei *r* die Entfernung des Satelliten von dem Oberflächenelement $dA_{\oplus}$ ist und γ der Winkel zwischen der Normalen zu diesem Element und der Richtung zum Satelliten.

Anmerkung: Als ein oberer Wert der von der Erde emittierten Wärmestrahlung findet sich in der Literatur[3] der Betrag $230\ W/m^2$.

17.9 Einfluss des Sonnenwindes

Die Existenz des Sonnenwindes als ein Strom von Sonnenpartikeln, im wesentlichen Protonen, welche von der Sonne in den interplanetaren Raum geschleudert werden, ist von *Ludwig Biermann*[4] bereits 1951 postuliert worden. Der Sonnenwind wurde erstmals 1959 nachgewiesen. Der Sonnenwind ist verantwortlich für die Bildung des Jonenschweifes von Kometen, während der Staubschweif durch den Strahlungsdruck geformt wird. Der Einfluss des Sonnenwindes auf die Bewegung von Raumflugkörpern ist geringer als der durch den Strahlungsdruck.

---

[1] „emissivity“

[2] Formel (8) in ROSBOROUGH, GEORGE W. and PETER G. ANTREASIAN [1990], p. 170

[3] WERTZ, JAMES R. [2001], p. 558

[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Biermann

Der Druck durch den Sonnenwind, der durch die Protonen mit der Masse m_P und der Teilchendichte $\rho\left[\text{Anzahl der Teilchen/m}^3\right]$ und der Fluggeschwindigkeit der Teilchen V_P erzeugt wird, beträgt[1]

$$P_w \approx m_P \rho V_P^2 \quad . \tag{17.65}$$

In Erdentfernung wird die Teilchendichte abgeschätzt zu $\rho \approx 4\times10^6\, m^{-3}$ und die Geschwindigkeit des Solarwindes zu $V_P \approx 700\, km\, s^{-1}$. Damit lässt sich der Druck durch den Solarwind in Erdnähe abschätzen[2] zu $P_w \approx 3\times10^{-9}\, N\, m^{-2}$.

Wird ein Massenverlust des Raumflugkörpers vernachlässigt, beträgt die Kraft, die vom Sonnenwind auf einen Raumflugkörper der Angriffsfläche $A_R\left[m^2\right]$ ausgeübt wird

$$F_{SW} = P_W\, A_{SW} \approx m_P \rho V_P^2\, A_{SW} \quad . \tag{17.66}$$

Hat der Raumflugkörper die Masse M, beträgt die durch den Sonnenwind ausgeübte Beschleunigung

$$b_{SW} = \frac{P_W\, A_W}{M} \quad . \tag{17.67}$$

17.10 Relativistischer Effekt erster Ordnung

Ein relativistischer relativer Einfluss erster Ordnung kann abgeschätzt werden durch[3]

$$\approx \frac{2\mu_\odot}{c^2 r} \quad ,$$

wenn mit $\mu_\odot$ die heliozentrische Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit und r die heliozentrische Distanz des bewegten Objektes bezeichnet wird.

17.11 Gezeiten

Da die Erde kein starrer Körper ist üben die wechselseitigen Stellungen von Sonne und Mond (und in geringerem Ausmaß aber quantitativ zu berücksichtigen der Planeten des Sonnensystems) Gezeitenkräfte auf den Erdkörper, die Ozeane, aber auch die Atmosphäre aus. Diese Effekte beeinflussen die Wirkung des Erdfeldes auf die Bewegung eines Erdsatelliten in variabler Weise.

Die Rückkopplung der Gezeiten auf die Bewegung des Mondes selbst zeigt die Wirkung dieses Effektes. Da der Mond sich relativ zur Erde langsamer bewegt als die Erde sich dreht, geht der vom Mond verursachte „Gezeitenberg“ auf der Erde dem Mond voraus. Dadurch wird auf den

---

[1] MCINNES, COLIN R. [1999], p. 54

[2] Derartige Abschätzungen sind nur äußerst grob zu erhalten. In LEIPOLD, M. [2000], p.8 etwa wird der Wert $P_w \approx 1\times10^{-8}\, N\, m^{-2}$ erhalten

[3] KROTSCHECK, E. UND W. KUNDT [1983], p.13

Mond eine positive transversale Beschleunigung b_T ausgeübt[1]. Nach der *Gauß*schen Variationsgleichung (11.82) für die große Bahnhalbachse vergrößert sich diese. Auch die Exzentrizität wird vergrößert, da der Effekt im Perigäum größer als im Apogäum ist (vgl. Formel (11.72)). Der Effekt ist umgekehrt, wenn der Satellit sich schneller um den Zentralkörper bewegt als dieser rotiert. Dann nimmt die Halbachse ab, ebenso die Exzentrizität, die Bahn wird kreisförmiger.

Ein anderer durch Gezeiten hervorgerufener Effekt auf Planetenmonde mit kleiner Masse kann seine Deformation durch seinen Zentralkörper sein. Dadurch kann die Rotation dieses Mondes mit der Umlaufperiode synchronisiert werden als Folge von Energie absorbierenden Kräften, die auf diesen Mond wirken. Diese Wirkung kann auch zu einer Zirkularisation der Umlaufbahn dieses Mondes führen.

Bei Erdsatelliten kann es keine quantitative Gezeitenwirkung auf die Erde geben, jedoch kann umgekehrt die Erde auf den Satelliten Gezeitenkräfte ausüben, welche die Bahn des Satelliten beeinträchtigen.

Für einen Planeten wie die Erde kann die Elastizität der Erdoberfläche („Steife“, „rigidity“) und die Störempfindlichkeit („susceptibility“) ihrer Form als Folge des Gezeitenpotentials durch dimensionslose Zahlen $[h,k,l]$ beschrieben werden. Die Zahlen $[h,k]$ wurden um 1911 von *August Edward Hough Love* eingeführt und sind deshalb heute als „*Love*-Zahlen“ bekannt[2]. Die dritte Zahl $[l]$ wurde 1912 von *T. Shida* in Japan ergänzt. Diese Zahlen sind im Prinzip keine Konstanten, sondern sind vom Ort auf der Erde abhängig (lokale Aussagen). Eine Mittelung über die elastischen Eigenschaften der Erde führt zu globalen Zahlen wie sie aus Satellitenbeobachtungen errechnet werden können[3].

Anmerkung: Im Rahmen von Untersuchungen der Lage eines Satelliten werden die hier wirkenden „Gravity-Gradient-Kräfte“ gelegentlich auch als „Gezeitenkräfte“ bezeichnet, auch wenn sie keine Verformung des Satellitenkörpers verursachen[4].

---

[1] BERTOTTI, BRUNO and PAOLO FARINELLA [1990], p.225

[2] Nach: http://en.wikipedia.org/wiki/Love_number : *A. E. H. Love* führte die Zahlen h, k ein,

[3] siehe als Beispiel NEWTON, R. R. [1968]: in dieser Arbeit wurde die Zahl $k = 0.336 \pm 0.028$ gefunden. Interessant an dieser Arbeit ist die große Anzahl von kleinen Störeffekten, die sorgfältig berücksichtigt werden müssen, um ein zuverlässiges Ergebnis erzielen zu können.

Neuere Ergebnisse im Hinblick auf das Potential, das durch die zonale Harmonische J_2 erzeugt wird, ergibt die Grenzen: $0.616 \le h_2 \le 0.624, 0.304 \le k_2 \le 0.312, 0.084 \le l_2 \le 0.088$, zitiert nach S. K. POULSEN [2007]: `Tidal Deformation of the Solid Earth: A Finite Difference Discretization`, Niels Bohr Institute, University of Copenhagen, p. 24

Weitere Aussagen über die Entwicklung von Bahnen unter Gezeiteneffekten finden sich z.B. in BERTOTTI, BRUNO and PAOLO FARINELLA [1990], pp.224-226 and pp.325-331; eine detaillierte Darstellung der hier benötigten Rechnungen mit einer Aufschlüsselung der längenabhängigen *Love*-Zahlen entlang eines Breitenkreises findet sich in MUSEN, PETER and THEODORE FELSENTREGER [1973]

[4] WERTZ, JAMES R. [2001], P. 125

17.12 Wechselwirkung des Mondes mit Abplattung der Erde

Die Abplattung des Erdkörpers beeinflusst wesentlich die Bewegung des Erdmondes[1]. Müssen die gravitativen Einflüsse des Mondes auf die Bewegung eines Erdsatelliten berücksichtigt werden, so können die wechselseitigen Einflüsse des Gravitationsfeldes der Erde und des Mondes eine wichtige Rolle spielen. Für feinere Untersuchungen muss auch geprüft werden, ob der relativistische *Lense-Thirring* Effekt der Erde-Mond-Kopplung eine merkbare Auswirkung auf die Bewegung eines Satelliten haben kann[2].

17.13 Yarkowski-Effekt

Ein kleiner Planet wie auch eine Raumsonde wird auf der sonnenzugewandten Seite aufgeheizt. Rotiert dieser Körper so wird die Abstrahlung der Wärme nicht in Richtung zur Sonne sondern je nach Rotationsrichtung (Spinrichtung) in einer von der Sonne abgewandten Richtung erfolgen. Dadurch wird in Flugrichtung eine nichtgravitative Beschleunigung oder Abbremsung b_V auf die Bewegung dieses Körpers einwirken. Erfolgt die Rotation des Körpers in derselben Richtung wie er sich um die Sonne bewegt, wird er beschleunigt und somit von der Sonne wegbewegt. Erfolgt die Rotation jedoch gegen die Umlaufrichtung, erfolgt die Abstrahlung in Flugrichtung, der Körper wird abgebremst und somit zur Sonne hinbewegt.

Dieser Effekt kann bei kleineren Körpern die Bewegung erheblich beeinflussen und ist normalerweise nicht konstant. Bei großen Körpern (Planeten) ist der Effekt vernachlässigbar[3]. Der beschleunigende Effekt ist in etwa umgekehrt proportional zur Masse des beeinflussten Körpers[4].

17.14 Poynting-Robertson-Effekt

Der Strahlungsdruck der Sonne wirkt auf Grund der relativistischen Aberration abbremsend auf ein sich interplanetar bewegendes Objekt infolge eines dadurch verursachten schrägen also nicht radial auf die Sonne ausgerichteten Schubvektors. Dadurch wird dieses Objekt in Richtung zur Sonne hin bewegt. Dies ist der *Poynting-Robertson*-Effekt, der sich allerdings nur auf interplanetare Staubteilchen quantitativ auswirken kann. Bei der Untersuchung der Bewegung von Satelliten, Raumflugkörpern wie kleinen und großen Planeten kann er daher vernachlässigt werden[5]. Dieser Prozess kehrt sich allerdings in Sonnennähe um, wenn nämlich durch die Erwärmung durch die Sonnenstrahlung diese Staubteilchen verdampfen und wieder von der Sonne weggetrieben werden.

---

[1] Siehe dazu in Kapitel 29 (Band III b)

[2] Siehe hierzu auch SOFFEL M. H. [1989], p. 15, pp.95-96

[3] Eine sorgfältige Untersuchung des Einflusses des Yarkowski-Effektes auf eine spinende Raumsonde (Helios-Sonden) findet sich in KROTSCHECK, E UND W. KUNDT [1983], pp.28-35. Weitere Informationen in: http://de.wikipedia.org/wiki/Jarkowski-Effekt ; http://ksiezyce.astrowww.pl/encyclopaedia/y_en.html; http://saeaero.saejournals.org/content/4/1/549.abstract; http://www.planeten.ch/Yarkovsky-Effekt

[4] Siehe hierzu etwa BERTOTTI, BRUNO and PAOLO FARINELLA [1990], pp.224-226 and pp.331-336

[5] Siehe etwa in MCINNES, COLIN R. [1999], p. 32 ff.; auch in http://www.planeten.ch/Poynting-Robertson-Effekt

Anmerkung: Im Jahre 1903 hat *J. H. Poynting* (1852-1914) diesen Effekt beschrieben und 1937 *H. P. Robertson* (1903-1961) in einer Arbeit über Relativität und Kosmologie[1]. In Erdentfernung führt der Effekt der Aberration zu einer Abweichung der Richtung der Sonnenstrahlung gegenüber deren geometrischer Richtung[2] zu etwa $20''.5$.

17.15 Künstliche Schubkräfte

Bahnkorrekturen werden mit Schubdüsen durchgeführt. Werden diese Manöver als impulsförmig modelliert, kann die neue Bahn mit den Formeln der Bewegungsänderung (Kapitel 12 ab Seite 149) berechnet werden. In der Praxis ist diese Bewegungsänderung auf Grund längerer Schubphasen und damit verknüpften Ungenauigkeiten erheblich aufwendiger. Eine Bahnbestimmung wird daher über eine Schubphase hinweg erfolgen müssen unter Berücksichtigung von Beobachtungsdaten vor und nach dem Schub. Wird die Bahnbestimmung nach der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt, müssen die hierfür benötigten partiellen Ableitungen getrennt vor und nach dem Schub modelliert werden. Praktische Untersuchungen zeigen, dass es (je nach Satellitenmission) eine beträchtliche Zeitspanne nach Durchführung eines Schubes gibt, innerhalb derer die Einbeziehung der Schubphase in das Bahnmodell von Vorteil ist[3].

17.16 Lageregelungseinflüsse

Lageregelungsmanöver können erhebliche Auswirkungen auf die Bahnparameter eines Raumflugkörpers haben, auch wenn sie kleinere Einflüsse als Schubmanöver haben. Allerdings kann die Integration auch hier wie im Fall von Schubmanövern vorteilhaft über das Manöver mit geeigneter Modellierung erfolgen. Diese Modellierung kann mit semianalytischen Lösungen durchgeführt werden[4].

17.17 Antennenabstrahlung

Kommunikationsantennen werden für den Kontakt zu einer Bodenstation benötigt, aktive SAR-Antennen dienen der Beobachtung im Radiobereich. Mit beiden Arten von Antennen wird Energie abgestrahlt, deren Rückstoß einen Einfluss auf die Bewegung eines Satelliten haben kann. Verkompliziert werden kann dieser Effekt dann, wenn die Antenne zu einer Bodenstation ausgerichtet werden muss. Dies ist bei geringen Sendeleistungen vor allem bei interplanetaren Missionen nötig. Dadurch kann der Effekt der Antennenabstrahlung beträchtlich variieren. Ein Beispiel ist der

---

[1] Das Zitat findet sich in M. LEIPOLD [2000], p.130: ROBERTSON, H. P. and T. W. NOONAN [1969]: *Relativity and Cosmology*, W. B. Saunders Co., Philadelphia-London-Toronto

[2] Zahlenwert in M. LEIPOLD [2000], p.9

[3] M. C. ECKSTEIN [1974 b]

[4] Detaillierte Aussagen und Beispiele hierzu in M. C. ECKSTEIN [1975]; dort auch Hinweis auf M. C. ECKSTEIN [1974]: 'Approximate Analytical and Semi-Analytical Solutions for Attitude-Manoeuvres of Spin Stabilized Satellites', Final Report, ESOC-Contract 603/74/T, Chapter II (ESRO)

Einfluss der nichtmitrotierenden Antenne auf einem spinnenden Satelliten (z.B. die HELIOS-Missionen).

17.18 Wärmeabstrahlung eines Raumflugkörpers

Der Wärmehaushalt eines Satelliten erfordert eine Kühlung verschiedener Geräte, wie etwa Computern. Die Wärme wird über Radiatoren in die Satellitenumgebung abgeführt, was je nach Größe und Richtung der Wärmeabstrahlung die Bahn eines Satelliten beeinflussen kann.

Neben dem Strahlungsdruck auf einen Satelliten und der Reflexion (Albedo) wird durch die Strahlung die Außenhaut eines Satelliten aufgeheizt. Diese Wärme kann an die Umgebung nach und nach wieder abgegeben werden, was einen zusätzlichen Effekt auf die Bahn des Satelliten verursachen kann. Je nach Struktur und Material der Außenhaut wird diese Wärmeabstrahlung in unterschiedlichen Richtungen und in wechselnden Frequenzen erfolgen. Hochgenaue Untersuchungen müssen dies berücksichtigen. Hier spielt auch das Eintauchen des Satelliten in den Erdschatten eine wichtige Rolle, so dass solche Untersuchungen ohne Kenntnis der Bewegungshistorie des Satelliten keine zuverlässigen Aussagen liefern können.

17.19 Resonanzen und Kommensurabilitäten

Im Fall von Beschleunigungen, die im Zeitverlauf periodisch auf einen Bewegungsvorgang einwirken, können diese in eine Fourierreihe der allgemeinen Form

$$\sum_{k,j}\left\{A_{k,j}\cos\left[\left(k\,n+j\,n'\right)t\right]+B_{k,j}\sin\left[\left(k\,n+j\,n'\right)t\right]\right\} \qquad (17.68)$$

entwickelt werden[1]. Hier ist *n* die mittlere Bewegung des betrachteten Himmelskörpers (Planet oder Raumsonde in einer heliozentrischen Bahn um die Sonne, bzw. ein Erdsatellit), n' ist die Frequenz der periodisch einwirkenden Beschleunigung. Die störende Beschleunigung ist in Resonanz mit der Umlaufzeit des untersuchten bewegten Körpers (gegeben durch seine mittlere Bewegung), wenn das Verhältnis von *n* und n' nahezu eine rationale Zahl also ein ganzzahliges Verhältnis ist. Eine Resonanz wird als vollständig bezeichnet, wenn $k\,n+j\,n'=0$. In diesem Fall wächst der „Störeffekt“ linear mit der Zeit. Ist $\left|k\,n+j\,n'\right|\ll n$ und $\left|k\,n+j\,n'\right|\ll n'$, wirkt sich die Resonanz in langperiodischen Variationen der Bahnparameter aus. Die Koeffizienten $A_{k,j}, B_{k,j}$ werden in diesem Fall durch die Größen $\left(k\,n+j\,n'\right)$ dividiert. Wegen der raschen Konvergenz dieser Reihen nehmen die Koeffizienten $A_{k,j}, B_{k,j}$ nur für kleine *k,j* große Werte an. In diesem Fall allerdings kann eine Resonanz erhebliche Auswirkungen auf eine Bahn haben. Bei Erdsatelliten kann eine Resonanz in Bezug auf bestimmte Größen im Gravitationsfeld der Erde auftreten. Dieser Effekt kann benutzt werden um diese Koeffizienten aus Satellitenbeobachtungen zu bestimmen[2].

---

[1] allgemeiner Überblick in: BERTOTTI, BRUNO and PAOLO FARINELLA [1990], pp.225-226

[2] Siehe hierzu als Beispiel: KING-HELE, D. G. and DOREEN M. C. WALKER [1989]; allgemeinere und grundlegende Arbeiten zu Resonanzen in der Himmelsmechanik und Astrodynamik: FERRAZ-MELLO, SYLVIO and WAGNER SESSIN, ed. [1985]; FERRAZ-MELLO, SYLVIO [2007]; GARFINKEL, B. [1982]: ‘On Resonance in Celestial Mechanics,

Eine vertiefte Darstellung einer Störungsrechnung im Rahmen des Gravitationsfeldes der Erde unter Berücksichtigung von Resonanzen insbesondere bei Bodenspurwiederholungsbahnen kann etwa in VALLADO, DAVID A. [2001], pp. 596-626 nachgelesen werden.

17.20 Weitere physikalische Bewegungseinflüsse

Die vorgenannten notwendig unvollständigen und zum Teil nur angedeuteten qualitativen Bewegungseinflüsse sind nur ein Ausschnitt aus der großen Anzahl möglicher Effekte auf Satellitenbahnen. Die Berücksichtigung der verschiedenen physikalischen Einflüsse auf einen Bewegungsvorgang hängt wesentlich von der Aufgabenstellung und im Fall künstlicher Raumfahrtobjekte zusätzlich von den technischen Randbedingungen eines durchzuführenden Projektes ab. Bei erdnahen Satelliten genügt in der Regel die Berücksichtigung der Erdabplattung und höherer Parameter des Erdschwerefeldes sowie des Luftwiderstandes. Nichterfasste Abweichungen von einer Sollbewegung werden bei laufenden Projekten durch Bahnkorrekturen ausgeglichen.

Für spezielle Aufgabenstellungen müssen die verschiedensten Einflüsse quantitativ erfasst und ihre Einflüsse auf die Bewegung eines Himmelskörpers abgeschätzt werden. Eine sehr detaillierte und sorgfältige Untersuchung verschiedenartigster Einflüsse auf die Bewegung eines Raumfahrtkörpers ist erforderlich, wenn sehr kleine Effekte, etwa relativistische Einflüsse, nachgewiesen werden sollen. Eine solche Studie wurde beispielhaft im Fall der HELIOS-Missionen von *W. Kundt* und Mitarbeitern durchgeführt[1].

Eine noch feinere Detailuntersuchung dürfte erforderlich sein zur quantitativen Erfassung des in Satz H14 (Band I, Abschnitt 4.3.16) hergeleiteten Effektes auf Grund eines nichtinertialen Basissystems auf die transversale Bewegung eines Himmelskörpers. Mit den derzeitigen technischen Möglichkeiten dürfte ein solcher Nachweis unmöglich sein. Eine sorgfältige quantitative Abschätzung ist extrem aufwendig.

(A survey)', GEDEON, G. S. [1969]; ELY, TODD A. and KATHLEEN C. HOWELL [1996]; ein spezielles Beispiel im Erde-Mond-Sonnensystem findet sich in BATRAKOV, YU. V. and V. G. SOKOLOV [1972]

[1] KROTSCHECK, E und W. KUNDT [1983]

Hic haeret aqua[1]

18 Zur Integration der Bewegungsgleichungen

18.1 Zur Unterscheidung analytischer und numerischer Verfahren

Neben der Bestimmung der Bahnen der Himmelskörper war seit alters her eine der fundamentalen Aufgaben der mathematischen Astronomie die Vorherberechnung ihrer Bewegungen. Diese Ephemeridenrechnung erfolgte bis in die erste Hälfte des 19. Jahrhunderts auf rein analytischem Weg. Dann allerdings machten verbesserte Beobachtungsmethoden und damit verbunden eine tiefere Kenntnis der Bewegungseinflüsse die Grenzen der analytischen Methodik offensichtlich. Dies liegt zum einen schon in der Tatsache begründet, dass die für eine Ephemeridenrechnung unumgängliche *Kepler*gleichung bzw. jede ihr äquivalente Beziehung zwischen einem Bahnwinkel und der Zeit transzendent ist und daher nur näherungsweise gelöst werden kann. Schon allein das Dreikörperproblem ist mit exakten mathematischen Methoden nicht vollständig lösbar und kann nur durch Spezialfälle, wie den periodischen Bahnen, näherungsweise erfasst werden. So schreibt etwa *H. Poincaré*[2]: „*Was uns diese periodischen Lösungen so kostbar macht, ist die Tatsache, dass sie sozusagen die einzige Bresche darstellen, durch die wir versuchen können, in ein bis dahin als unzugänglich angesehenes Gebiet einzudringen*".

Somit verlagerte sich im Anschluss an die Arbeiten von *Gauß* die Berechnung der Bewegung der Körper des Sonnensystems von den „absoluten Störungen" (auch als „allgemeine Störungen" bezeichnet, das sind analytisch berechnete Störungen, die im Wesentlichen durch unendliche Reihen dargestellt werden) zu den „speziellen Störungen" (d.h. numerisch berechnete Örter)[3]. Auf beiden Gebieten hatte u.a. *P. A. Hansen* wesentliche Beiträge geliefert. Während die Integration der Bewegungsgleichungen in (helio-) zentrischen rechtwinkligen Koordinaten etwa nach der Methode von *Cowell* erfolgt[4], hat *Encke* eine Integration in rechtwinkligen relativen Koordinaten entwickelt, die auf die ungestörte Bewegung des Planeten bezogen sind. Ähnlich ist das Verfahren nach *Hansen*, der allerdings mit Polarkoordinaten arbeitet, die auf die *Hansen*sche Hilfsellipse bezogen sind[5]. Diese *Hansen*sche Methode bezeichnet *D. Brouwer* als die einzige Methode, die der von ihm

---

[1] Prof. *Dr. Dr. Otto Volk* in einer Vorlesung über das Mehrkörperproblem: es ist bis jetzt keine mathematische Methode gefunden worden, um bereits das Problem der Dreikörperbewegung vollständig lösen zu können.

[2] H. POINCARE [1892]: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Bd. I, pp. 81-82 (zitiert nach K. STUMPFF [1965], *Himmelsmechanik* II, p. 429)

[3] Begriffsbildung durch *C. F. Gauss*, siehe: O. VOLK [1957], p.211

[4] Beschrieben etwa in: K. STUMPFF [1965], pp.372-376; BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961], pp. 169-185

[5] HANSEN, P. A. [1852, 1854]: 'Über die Berechnung der Störungen durch mechanische Quadratur', A.N. **34**, 101; **37**, 301; zur „mechanischen Integration" siehe etwa in BAUSCHINGER, J. [1928], Abschnitt XXIX; zum Gebrauch der Methode siehe etwa auch in G. A. CHEBOTAREV [1967], p. 246

allerdings wieder in rechtwinkligen Koordinaten entwickelten Integrationsmethode zumindest in den Störungen erster Ordnung ebenbürtig ist[1].

Einen modifizierten Zugang zu den Berechnungsmethoden, die eine Ephemeridenrechnung begründen, kann die aktuelle Rechnerentwicklung bieten. Halbnumerische Verfahren, die soweit wie möglich auf analytischen Formeln beruhen, und numerisch berechnete Tabellen (etwa die hochgenauen Ephemeriden der Himmelskörper des Sonnensystems[2]) sind seit längerem in erfolgreichem Gebrauch. Sie können wesentlich ausgebaut werden mit algebraischen Formelmanipulatoren (Computer Algebra Systems [CAS], das sind Programme, wie MAPLE, MATHEMATICA, früher REDUCE, FORMAC). Derartige Programme eröffnen die Möglichkeit mechanistische und ständig gleich- oder ähnlich ablaufende formale Rechenprozesse automatisch zu bearbeiten[3]. Dies ist insbesondere in der Astrodynamik von Interesse, in der langfristige und überblickmäßige Aussagen nur mit Hilfe analytischer Rechnungen gemacht werden können. Allerdings zeigt sich im gegenwärtigen Stand der Programmentwicklung, dass analytische Lösungen für die meisten Anwendungen immer noch nicht im direkten Zugriff erhalten werden können. In der vorliegenden Studie wird an elementaren Beispielen aus der Astrodynamik gezeigt, dass analytische Lösungen im Allgemeinen mit den vorhandenen Programmen nur schwer oder gar nicht erhalten werden können. Insbesondere Lösungen, die durch Reihenentwicklungen erhalten werden, können wegen des üblicherweise engen Konvergenzradius nur sehr eingeschränkte Aussagen liefern. Numerische Rechnungen können prinzipiell keine allgemeingültigen Aussagen liefern.

[1] BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961], p. 416.ff

[2] Seit vielen Jahren vom JPL verantwortet

[3] Eine systematische Zusammenstellung von mathematischen Verfahren, die erfolgreich mit einem algebraischen Formelmanipulator bearbeitet findet sich in dem Buch von VICTOR A. BRUMBERG [1995]G, V. A.

Analytische Lösungen	Numerische Lösungen
„Absolute Störungen“	„Spezielle Störungen“
Integration mit: ➢ Analytische Funktionen ➢ Reihenentwicklungen	Lösung mit numerischem Integrator, z.B.: ➢ Runge-Kutta-Fehlberg ➢ Runge-Kutta-Nyström ➢ Prädiktor-Korrektor Verfahren ➢ Mehrfachschießverfahren
Ergebnis mit allgemeinen Parametern, allgemeine Gültigkeit langfristige Aussagen	Ergebnis mit speziellen numerischen Werten, nicht verallgemeinerbar zeitlich limitierte Aussagen (Rundungsfehler im Schritt – für Schritt Verfahren)
Nur eine Integration erforderlich ein spezielles Ergebnis wird durch Einsetzen von zugeordneten Parametern erhalten	Für jedes Ergebnis ist eine neue Integration erforderlich, das die speziellen vorgegebenen Parameter verwendet

Tabelle 18-1: Vergleich analytischer und numerischer Integration von Bewegungsproblemen

Analytische Lösungen sind solche, die durch Integration mit analytischen Integralen gewonnen werden können. Die Lösung enthält allgemeine Parameter, denen im speziellen Anwendungsfall bestimmte numerische Werte zugewiesen werden können. Die Integration erfolgt nur einmal. Numerische Lösungen erfordern in jedem Anwendungsfall eine neue Integration, die mit den speziellen zugewiesenen Parametern durchgeführt werden muss[1]. Formelmanipulatoren bieten die Möglichkeit, sowohl analytische allgemeingültige Lösungen zu erhalten wie auch numerische Integrationen durchzuführen. Das Hauptaugenmerk bei einem Formelmanipulator wie etwa MAPLE liegt auf der Gewinnung analytischer Lösungen. Diese können allerdings in vielen Anwendungen erst nach geschickten Umformungen des gegebenen Problems erreicht werden.

[1] Siehe etwa in BATTIN, R. H. [1987]: p. 567 ff

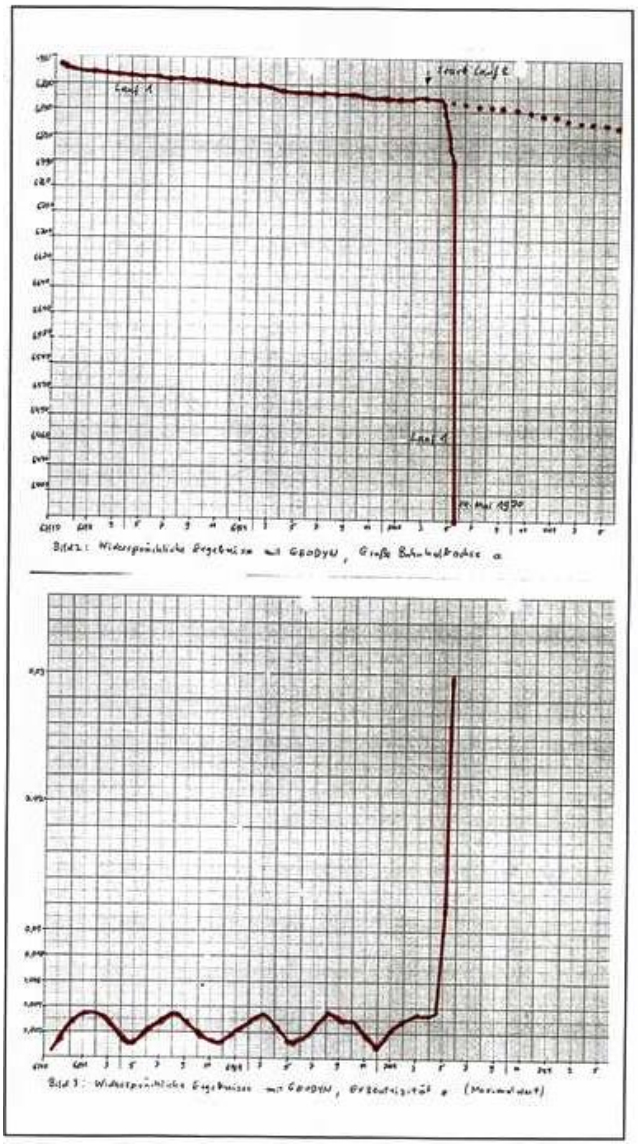


Bild 18-1: Beispiel für den Verlauf einer numerischen Integration über etwa 2.5 Jahre

Der vorliegende Bericht[1] zeigt, dass die Verwendung des auf ein *Hansen* System bezogenen Bahnwinkels an Stelle der Zeit oder irgendeines anderen Bahnwinkels von großem Vorteil sein kann. Darüber hinaus ist der Formalismus einer Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung[2] im Rahmen geradliniger Koordinatensysteme eine wesentliche Erleichterung in der Berechnung von Bahnen und Bahnbewegungen. Die vollständige Trennung der dadurch ermöglichten Berechnung der Bahn einerseits und der Bewegung in dieser Bahn andererseits erleichtert den gesamten Integrationsprozess eines Bewegungsvorganges und kann ihn durchsichtiger machen. Auch kann es möglich sein, auf diesem Wege analytische Teillösungen zu finden, die einen Einblick in gewisse Teilaspekte der Gesamtproblematik ermöglichen, die auf anderem Wege nicht zu erhalten wären.

[1] Enthalten in Kapitel 4 ab Abschnitt 4.3.10 (Band II), basierend auf ISRN DLR-FB-2011-04

[2] Kapitel 5 (Band II)

BEISPIEL: In einer Studie zum Vergleich von analytischen und numerischen Untersuchungen von Satellitenbahnen[1] wurde zur Demonstration das Ergebnis einer Lebensdaueruntersuchung des Satelliten ROSAT verwendet. Die numerische Integration wurde mit Hilfe des hochpräzisen Bahnbestimmungs- und Ephemeridenprogramms GEODYN[2] durchgeführt. Typisch für das numerische Rechnen ist das Aufschaukeln von Rundungsfehlern, das nach einem gewissen Zeitraum die Rechenergebnisse obsolet macht. Dies wird in Bild 18-1 demonstriert. Aufgetragen ist im oberen Bild die große Bahnhalbachse, die näherungsweise linear entsprechend der vorausgeschätzten Sonnenaktivität abnimmt. Jedoch nach etwa 2.5 Jahren wird ein plötzlicher Absturz beobachtet, der physikalisch nicht sinnvoll sein kann. Dies wird im unteren Bild durch den Verlauf der oskulierenden Bahnellipse verdeutlicht: Während die Exzentrizität eine im Wesentlichen periodische Schwingung zeigt, wächst ihr Wert plötzlich unsinnigerweise über alle Schranken an, was auch zu dem Absturz führen muss. Abbremsung durch den Luftwiderstand führt jedoch in der physikalischen Realität zu einer Zirkularisation der Bahn, so dass dieses Ergebnis falsch sein muss. Um diesen Fehler zu umgehen, wurde die Integration mit dem Zustandsvektor einige Tage vor dem großen Sprung neu gestartet und über den Sprung problemlos hinwegintegriert. Auch wenn eine numerische Integration über kurze Zeiträume wesentlich genauer als eine analytische Integration sein kann, muss über längere Zeiträume die Zuverlässigkeit der numerisch erzeugten Aussagen kritisch überprüft oder durch spezielle numerische Verfahren stabilisiert werden. ◀

18.2 Methode von Encke

Eine der ältesten Methoden (wenn nicht sogar die älteste) zur Bearbeitung der speziellen Störungen ist die Methode von *J. F. Encke* [3]. *Encke* bezieht die Bewegung der zu bestimmenden, also „gestörten“ Bewegung auf die als bekannt angenommene „ungestörte“, also spezielle *Kepler*bewegung. Diese ist gegeben durch die *Kepler*sche Beschleunigung

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = -\frac{\mu}{r_k^3}\mathbf{r}_k \qquad . \tag{18.1}$$

Mit der *Newton*schen Gravitationskonstanten f_N, der Masse M des Zentralkörpers und der Masse m des bewegten Körpers (Satellit) ist $\mu = f_N\left(M+m\right)$, wobei im Fall von Erdsatelliten

[1] JOCHIM, E. F. [1997]: 'On the Dispute between Analytical and Numerical Methods in Satellite Orbit Mechanics', *German-Brazilian Workshop on Aerospace Technology '97, Flight Mechanics and Control&Telerobotics*, CTA/IAE Sâo José dos Campos, SP, Brazil, September 29 - October 03, 1997

[2] Erstellt von der Firma EG&G für das GSFC im Hinblick auf die Bestimmung des Schwerepotentials der Erde (siehe etwa MARSH and VINCENT [1974], sowie: PAVLIS D, POULOUSE S, MCCARTHY J [2006]: GEODYN Operations Manual. Contractor report, SGT Inc., Greenbelt, MD., PAVLIS, D.E., MOORE, D., LUO, S., MCCARTHY, J.J. and LUTHCKE, S.B. [1999]: GEODYN Operations Manual: 5 Volumes. Raytheon ITSS, Greenbelt, December, 1999; zitiert nach Information durch Tim Springer – ESOC 2014)

[3] Die Methode von *Encke* wird beschrieben etwa in K. STUMPFF [1965], pp.378-417; VALLADO, DAVID A. [2001]: pp. 495-497; Skizze Bild 18-1 nach VALLADO, DAVID A. [2001]: Figure 8-1 auf p. 496

normalerweise $m \approx 0\,\mathrm{kg}$ gesetzt wird. Wenn M die Masse der Erde ist, wird die Größe $\mu = f_N M$ üblicherweise als geozentrische Gravitationskonstante bezeichnet.

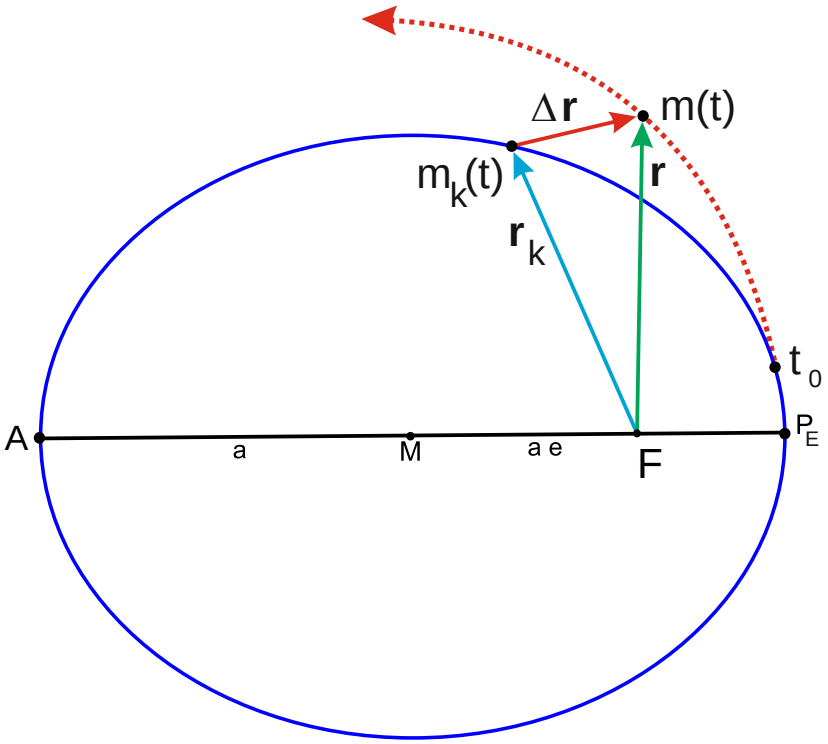


Bild 18-2: Zur Methode der speziellen Störungen nach *Encke*: Der Satellit m(t) bewegt sich auf der wahren zu bestimmenden Bahn, der Referenzkörper $m_k(t)$ zum selben Zeitpunkt t auf der („ungestörten“) Keplerellipse. Beide Bahnkurven schneiden zur Epoche t_0

Der gestörte Körper mit zentrischem Radiusvektor **r** hat die Bewegungsgleichung (siehe die Formel (17.1))

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{R}_k \quad , \tag{18.2}$$

wenn in $\mathbf{R}_k$ die Gesamtheit aller Bewegungseinflüsse abgesehen von der *Kepler*schen Beschleunigung zusammengefasst wird. Statt des Ortsvektors **r** wird nach *Encke* die Bewegungsgleichung des relativen Ortsvektors

$$\Delta\mathbf{r} := \mathbf{r} - \mathbf{r}_k \tag{18.3}$$

für die Beschreibung der Bewegung des gestörten Körpers betrachtet. Es ist

$$\Delta\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}}_k = \frac{\mu}{r_k^3}\left[\left(1 - \frac{r_k^3}{r^3}\right)\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}\right] + \mathbf{R}_k \quad . \tag{18.4}$$

Aus $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k + \Delta\mathbf{r}$ wird mit der kleinen Größe q

$$\frac{r^2}{r_k^2} = 1 + 2\left[(\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{r})^2\right] =: 1 + 2q \tag{18.5}$$

und somit

$$\left(\frac{r_k}{r}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{(1+2q)^3}} = 1-3q+\frac{3\cdot 5}{2!}q^2-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{3!}q^3+\cdots = 1-3q\,f(q) \quad . \tag{18.6}$$

Hier wird als *Encke*sche Reihe der Ausdruck

$$f(q) = 1-\frac{5}{2}q+\frac{5\cdot 7}{6}q^2-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{8}q^3+\cdots \quad . \tag{18.7}$$

bezeichnet[1]. Die Bewegungsgleichung für den relativen Ortsvektor lautet damit

$$\Delta\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r_k^3}\left[3q\,f(q)\mathbf{r}-\Delta\mathbf{r}\right]+\mathbf{R}_k \quad . \tag{18.8}$$

Da in nullter Näherung $r_k \approx r$ gilt, kann diese Gleichung mit dem Anfangswert $q \approx 0$ iterativ bearbeitet und damit die numerische Integration durchgeführt werden. Da die (ungestörte) *Kepler*bewegung als bekannt angenommen werden kann, wird als Ergebnis der Zustandsvektor

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_k + \Delta\mathbf{r} \;\;,\;\; \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_k + \Delta\dot{\mathbf{r}} \tag{18.9}$$

erhalten.

18.3 Numerische Methoden (Cowell und andere)

Die allgemeine Bewegungsgleichung (17.1)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{R} \quad , \tag{18.10}$$

die eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, kann numerisch mit einer der zahlreichen mittlerweile an das automatische Rechnen angepassten Integrationsmethoden bearbeitet werden. Je nach Struktur der rechten Seite muss jedoch ein geeignetes Verfahren ausgesucht werden. Ein Verfahren für alle möglichen Fälle gibt es nicht[2]. Mit dem Namen *Cowell*[3] wird üblicherweise die Darstellung in Bezug auf eine gestörte *Kepler*bewegung und bezogen auf den Zentralkörper (bzw. das Baryzentrum des betreffenden Systems) verbunden

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}+\mathbf{R}_k \quad . \tag{18.11}$$

Die originäre *Cowell*sche Methode benutzt Integralentwicklungen mit zentralen Differenzen. Spezielle Untersuchungen und Weiterentwicklungen der numerischen Verfahren, die auch durch die Weiterentwicklung der Rechner geprägt werden, beherrschen die wissenschaftliche Diskussion zu diesem Thema[4].

---

[1] Berliner Jahrbuch für 1833 (zitiert nach J. BAUSCHINGER [1928], p.196); Herleitung in K. STUMPFF [1965], p. 380

[2] Allgemeine Anmerkungen hierzu und Vergleich etlicher unterschiedlicher Methoden in VALLADO, DAVID A. [2001], CH. 8

[3] COWELL, R. H. and A. C. D. CROMMELIN [1910]: 'Essay on the Return of Halley's comet', Publikationen der Astronomischen Gesellschaft Nr.23 (zitiert nach K. STUMPFF [1965], p. 666); BROUWER, D. and G. M. CLEMENCE [1961], ch. V

[4] Siehe hierzu zum Beispiel: STIEFEL, E. and BETTIS, D. G. [1969]: 'Stabilization of Cowell's Method', *Num. Math.* **14,** 154-175; BETTIS, D. G. [1970]: 'Stabilization of finite difference methods of numerical integration', *Celestial*

Mechanics **2** (zitiert nach STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971], p. 295); GRAF, O. F., and D. G. BETTIS [1975]: 'Modified Multirevolution Integration Methods for Satellite Orbit Computation', *Celestial Mechanics* **11**, pp. 433-448

19 Analytische Störungstheorie periodicher Bewegungen

Die analytische Störungstheorie hat seit der Mitte dieses Jahrhunderts tiefgehende Aufarbeitungen erfahren und entscheidend an Klarheit gewonnen, auch wenn die Konvergenz der Mittelwertmethode nach *Krylow-Bogoljubow* [1] und der *Lie*-Reihen-Methode nach *Hori* [2] und *Deprit* [1] noch längst nicht lückenlos geklärt ist. In diesem Abschnitt werden einige Begriffe[3] definiert, in die allgemeine Theorie eingeführt und schließlich einige einfache aber interessante Beispiele behandelt[4].

19.1 Die Mittelwertmethode

19.1.1 Das (mathematische) Störproblem

Betrachtet wird eine Differentialgleichung, die ohne Einschränkung als autonom gewählt werden kann (d. h. die Variable *t* wird in der üblichen Weise als Koordinate aufgefasst und taucht daher nicht explizit als Variable auf),

$$\dot{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad . \tag{19.1}$$

Definition: Eine Differentialgleichung, die sich, wie in der Astrodynamik häufig möglich, in größenordnungsmäßig klar getrennte Terme zerlegen lässt

$$\dot{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon\,\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2\,\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \ldots \quad , \tag{19.2}$$

wird (in rein mathematischem Sinne) als *Störungsproblem* bezeichnet, wenn

1. die Zahl ε eine (relativ) kleine Größe darstellt, so dass

$$\dot{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) + O(\varepsilon) \tag{19.3}$$

bzw.

$$\left|\varepsilon\,\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \varepsilon^2\,\mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \ldots\right| \;<<\; \left|\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}_0(\mathbf{x})\right| \tag{19.4}$$

geschrieben werden kann, und wenn

2. das zugehörige „ungestörte“ Problem

$$\dot{\mathbf{x}}^{(0)} \;:=\; \mathbf{F}_0(\mathbf{x}) \tag{19.5}$$

nur periodische bzw. quasiperiodische Lösungen hat.

---

[1] siehe BOGOLJUBOW UND MITROPOLSKY [1962], siehe auch SANDERS, J. A. und F. VERHULST [1985]

[2] HORI [1966], HORI [1969], DÉPRIT, A. [1969]

[3] vor allem nach KIRCHGRABER, U. und STIEFEL, E. [1971]

[4] siehe hierzu auch die Bemerkungen in SCHNEIDER, M. [1978?]

19.1.2 Quasiperiodische Funktionen

Definition: Eine *Funktion* $\mathbf{x}(t)$ wird als *quasiperiodisch* bezeichnet, wenn es eine Funktion $\mathbf{G}(\mathbf{t})$ gibt, die in jedem ihrer Argumente 2π periodisch ist, so dass

$$\mathbf{x}(t) \;=\; \mathbf{G}(\mathbf{t}) \;=\; \mathbf{G}\left(\omega_1 t_1, \omega_2 t_2, \ldots, \omega_n t_n\right) \tag{19.6}$$

gesetzt werden kann.

19.1.3 Die Elementtransformation

Definition: Wenn ein Störproblem in der Form (19.2) vorgegeben ist, wird die Transformation auf eine neue Variable

$$\mathbf{x} \;=\; \mathbf{t}(\mathbf{a}) \;=\; \mathbf{t}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A}) \tag{19.7}$$

als *Elementtransformation* bezeichnet, wenn

1. **t** eine Funktion ist, die 2π periodisch in den Komponenten **s** und **W** ist,
2. das transformierte Störsystem

   $$\dot{\mathbf{a}} \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{a}) \;=\; \mathbf{f}_0(\mathbf{a}) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{a}) + \varepsilon^2 \mathbf{f}_2(\mathbf{a}) + \ldots$$

   die spezielle Gestalt

   $$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \varepsilon \mathbf{T}_{11}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A}) + \varepsilon^2 \mathbf{T}_{21}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A}) + \ldots \\ \dot{\mathbf{W}} &= \varepsilon \mathbf{T}_{12}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A}) + \varepsilon^2 \mathbf{T}_{22}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A}) + \ldots \\ \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{w}(\mathbf{A}) + \varepsilon \mathbf{T}_{13}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A}) + \varepsilon^2 \mathbf{T}_{23}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A}) + \ldots \end{aligned} \tag{19.8}$$

   hat, wobei die $\mathbf{T}_{ij}$ wie **t** 2π periodisch in **s** und **W** sind,
3. die *Nicht-Resonanzbedingung*

   $$N^i \mathbf{w}_i \;>\; 0 \tag{19.9}$$

   für beliebige ganze Zahlen N_i und $\mathbf{w} = \left(w_1, w_2, \ldots, w_n\right)$ erfüllt ist.

A wird gelegentlich als *Amplitudenvariable* bezeichnet, **W** und **s** als *Winkelvariable*. **W** ist eine *langsame Winkelvariable*, da sie dem kleinen Parameter ε proportional ist, **s** eine *schnelle Winkelvariable*, da sie schon im ungestörten Fall variiert.

Infolge ihrer Periodizität lassen sich die $\mathbf{T}_{ij}$ in Fourierreihen entwickeln

$$\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{A}, \mathbf{W}) \;=\; \overline{\mathbf{T}_{ij}}(\mathbf{A}) + \sum \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A})\, e^{i(n, \mathbf{s}, \mathbf{w})} \tag{19.10}$$

mit

$$\overline{\mathbf{T}_{ij}}(\mathbf{A}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^r} \int \cdots \int \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{W}, \mathbf{A})\, ds_1 \cdots dW_r \quad . \tag{19.11}$$

Nach der Mittelwertmethode wird

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \varepsilon \overline{\mathbf{T}_{11}}(\mathbf{A}) \\ \dot{\mathbf{W}} &= \varepsilon \overline{\mathbf{T}_{12}}(\mathbf{A}) \\ \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{w}(\mathbf{A}) + \varepsilon \overline{\mathbf{T}_{13}}(\mathbf{A}) \quad . \end{aligned} \tag{19.12}$$

19.1.4 Fastidentische Transformationen

Definition: Eine *Transformation*

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \tag{19.13}$$

heißt *fastidentisch*, wenn sie sich in der Form

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{g}_2(\mathbf{y}) + \ldots \tag{19.14}$$

schreiben lässt. ε ist eine kleine reelle Zahl. Für $\varepsilon = 0$ erhält man die Identität $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

In einer Störungstheorie wird die fastidentische Transformation

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{a}}(t)\right) = \bar{\mathbf{a}}(t) + \varepsilon \mathbf{g}_1\left(\bar{\mathbf{a}}(t)\right) + \varepsilon^2 \mathbf{g}_2\left(\bar{\mathbf{a}}(t)\right) + \ldots \tag{19.15}$$

verwendet.

19.2 Anwendungen der Mittelwertmethode

In einigen Beispielen wird gezeigt, wie mit Hilfe der Mittelwertmethode elementare aber doch schon weitreichende Aussagen über wichtige Bahnparameter und damit im Rahmen einer Bahnanalyse gemacht werden können.

19.2.1 Der Bewegungswinkel

Der Bahnwinkel ζ definiert die Position eines Satelliten in seiner Bahn. Die Bewegung in der Bahn wird durch die Variationsgleichung gegeben[1]:

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad . \tag{19.16}$$

Im Fall elliptischer Bewegung (es muss also immer angenommen werden können, dass die Exzentrizität *e* stets kleiner 1 ist), wird $\dot{\zeta}$ als eine im Bewegungswinkel ζ periodische Funktion mit der Periode 2π gedeutet. Die zugehörige Fourierentwicklung

$$\dot{\zeta} = A_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \cos \nu\zeta + \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu \sin \nu\zeta \tag{19.17}$$

[1] Siehe z.B. in Abschnitt 4.3.16 (Band II)

hat die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} \dot{\zeta}\, d\zeta \\ A_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} \dot{\zeta}\cos\nu\zeta\, d\zeta \\ B_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} \dot{\zeta}\sin\nu\zeta\, d\zeta \quad . \end{aligned} \tag{19.18}$$

Zur Berechnung des gemittelten Anteils A_0 werden die Parameter jeweils auf einen zunächst als oskulierend angenommenen Anfangswert $G_0,\ p_0, a_0, e_0, i_0, \omega_0, \sigma_0$ bezogen, somit berechnet aus

$$\begin{aligned} G-G_0 &= \delta G = \int_{t_0}^{t} \dot{G}\, dt \\ p-p_0 &= \delta p = \int_{t_0}^{t} \dot{p}\, dt \\ a-a_0 &= \delta a = \int_{t_0}^{t} \dot{a}\, dt \\ e-e_0 &= \delta e = \int_{t_0}^{t} \dot{e}\, dt \\ i-i_0 &= \delta i = \int_{t_0}^{t} \dot{i}\, dt \\ \omega-\omega_0 &= \delta\omega = \int_{t_0}^{t} \dot{\omega}\, dt \\ \sigma-\sigma_0 &= \delta\sigma = \int_{t_0}^{t} \dot{\sigma}\, dt \quad . \end{aligned} \tag{19.19}$$

Im Fall erdnaher Satellitenbahnen dominiert der J_2- Term. Werden die Beschleunigungsanteile durch die zonalen Anteile des Erdgravitationsfeldes aus den Formeln (17.31) – (17.33) in die Gaußschen Variationsgleichungen in Abschnitt 11.1.3 eingesetzt, zeigen sich die Variationen in allen Bahnparametern als Störungen erster Ordnung in J_2:

$$\begin{aligned} G-G_0 &= O(J_2) \\ p-p_0 &= O(J_2) \\ a-a_0 &= O(J_2) \\ e-e_0 &= O(J_2) \\ i-i_0 &= O(J_2) \\ \omega-\omega_0 &= O(J_2) \\ \sigma-\sigma_0 &= O(J_2) \quad . \end{aligned} \tag{19.20}$$

Werden diese Ausdrücke sowie die Kegelschnittgleichung für *r* in das Integral A_0 eingesetzt, wird

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi}\frac{G_0+\delta G}{p_0^2}\left\{\left(1-2\frac{\delta p}{p_0}+\ldots\right)\times \right.$$
$$\left.\times\left[1+\left(e_0+\delta e\right)\left(\cos\left(\zeta-\left(\omega_0+\sigma_0\right)\right)+\left(\delta\omega+\delta\sigma\right)\sin\left(\zeta-\left(\omega_0+\sigma_0\right)\right)\right)\right]\right\} \quad ,$$

somit in erster Näherung

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi}\frac{G_0\left[1+e_0\cos\left(\zeta-\left(\omega_0+\sigma_0\right)\right)\right]}{p_0^2}\,d\zeta+O\left(J_2\right) \quad .$$

Da $G_0, p_0, e_0, \omega_0, \sigma_0$ als konstant für die Integration angenommen werden können, ergibt sich unmittelbar

$$A_0 = \frac{G_0}{2\,p_0^2}+O\left(J_2\right) \quad . \tag{19.21}$$

Im Fall der hier angenommenen elliptischen Bewegung ist der Parameter gegeben durch $p_0=a_0\left(1-e^2\right)$. Da $G_0=\sqrt{\mu\,p_0}$ und die (oskulierende) mittlere Bewegung durch $n_{K0}=\sqrt{\mu/a_0^3}$ gegeben sind, bleibt für den mittleren Anteil der Bewegung des Bahnwinkels

$$\dot{\bar{\zeta}} := A_0 = \frac{1}{2}n_{K0}\left(2+e_0^2\right)\left(1+\frac{3}{2}e_0^2+\ldots\right)+O\left(J_2\right) \quad . \tag{19.22}$$

Für kreisnahe Bahnen können auch die quadratischen Anteile in der Exzentrizität vernachlässigt werden. Es bleibt also

$$\dot{\bar{\zeta}} = A_0 = n_{K0}+O\left(e_0^2, J_2\right) \quad . \tag{19.23}$$

Da sich die mittleren Parameter von den oskulierenden auch nur um Abweichungen in der Größenordnung J_2 unterscheiden, gilt

$$\overline{n_{K0}} = n_{K0}+O\left(J_2\right) \quad , \tag{19.24}$$

und es wird die Näherung für die Variation des Bewegungswinkels auch nicht noch falscher, wenn

$$\dot{\zeta} = \overline{n_{K0}}+O\left(e_0^2, J_2\right)+\Delta\left(\dot{\zeta}\right) \tag{19.25}$$

gesetzt wird. Hier bedeutet $\Delta\left(\dot{\zeta}\right)$ den Anteil der herausgemittelten periodischen Terme.

19.3 Mittelung über die mittlere Anomalie

In der Bahnmechanik periodischer Bewegungen werden Mittelwerte über der mittleren Anomalie benötigt[1]. Ein solcher Mittelwert hat zum Beispiel die häufig benötigte Form

[1] siehe etwa in TISSERAND, F. [1889]: Tome I

$$\overline{A_n} := \frac{1}{2\pi} \int_{M_0}^{M_0+2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^n \, dM \quad . \tag{19.26}$$

Wenn der Radius einer elliptischen *Kepler*bewegung als Funktion der wahren oder der exzentrischen Anomalie gegeben ist

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\upsilon} = a\left(1+e\cos E\right) \quad , \tag{19.27}$$

kann statt der üblichen Entwicklung von *a/r* nach der mittleren Anomalie die Integration mit Hilfe einer der Beziehungen[1]

$$dM = \frac{\sqrt{\left(1-e^2\right)^3}}{\left(1+e\cos\upsilon\right)^2} d\upsilon \quad \text{oder} \quad dM = \left(1-\cos E\right) dE \tag{19.28}$$

über die wahre bzw. die exzentrische Anomalie erfolgen. Dazu wird

$$\overline{A_n} =: \overline{\left(\frac{a}{r}\right)^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{M_0}^{M_0+2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^n dM = \frac{1}{2\pi} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^{n-2}}{\left(\sqrt{1-e^2}\right)^{2n-3}} d\upsilon \tag{19.29}$$

gebildet. Diese Methodik ist insbesondere bei Integralen der folgenden Formen vorteilhaft:

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^n \sin\left(m\upsilon\right)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{M_0}^{M_0+2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sin\left(m\upsilon\right) dM = \frac{1}{2\pi} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^{n-2}}{\left(\sqrt{1-e^2}\right)^{2n-3}} \sin\left(m\upsilon\right) d\upsilon \\
\overline{\left(\frac{a}{r}\right)^n \cos\left(m\upsilon\right)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{M_0}^{M_0+2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos\left(m\upsilon\right) dM = \frac{1}{2\pi} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^{n-2}}{\left(\sqrt{1-e^2}\right)^{2n-3}} \cos\left(m\upsilon\right) d\upsilon \quad .
\end{aligned} \tag{19.30}$$

Als BEISPIEL ergeben sich folgende bestimmte Integrale[2]:

$$\overline{A_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{M_0}^{M_0+2\pi} \left(\frac{a}{r}\right) dM = \frac{1}{2\pi} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\upsilon} d\upsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} dE = \frac{E}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = 1$$

$$\overline{A_5} = \frac{1}{2\pi} \int_{M_0}^{M_0+2\pi} \left(\frac{a}{r}\right)^5 dM = \frac{1}{2\pi} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\left(1+e\cos\upsilon\right)^3}{\left(\sqrt{1-e^2}\right)^7} d\upsilon =$$

$$= \frac{1}{2\pi\left(\sqrt{1-e^2}\right)^7} \left[\upsilon + 3e\sin\upsilon + \frac{3}{2}e^2\left(\cos\upsilon\sin\upsilon+\upsilon\right) + \frac{e^3}{3}\sin\upsilon\left(\cos^2\upsilon+2\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{1+\frac{3}{2}e^2}{\left(\sqrt{1-e^2}\right)^7} \quad . \quad \blacktriangleleft$$

[1] aus Abschnitt D1 in Band IV

[2] Eine Sammlung derartiger unbestimmter und bestimmter Integrale ist in Abschnitt D3 in Band V enthalten

19.4 Mittlere und Gemittelte Elemente

Gelingt eine *Fourier*zerlegung des Elementevektors in der Form

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \Delta\mathbf{E} \quad , \tag{19.31}$$

wobei $\Delta\mathbf{E}$ alle periodischen Anteile des Elementevektors zusammenfasst, wird $\bar{\mathbf{E}}$ der mittlere Anteil der Elemente genannt. Dieser mittlere Anteil ist für viele Aussagen einer Bahnanalyse entscheidend, wobei die periodischen Anteile vernachlässigt werden können. Es gilt daher als erstes, diesen mittleren Anteil $\bar{\mathbf{E}}$ zu ermitteln. Dies kann direkt geschehen, wenn ein analytisches Bahnmodell bekannt ist, das die mittleren und periodischen Anteile der Elemente direkt zu berechnen gestattet. Ein solches Modell setzt die Kenntnis der mittleren Elemente $\bar{\mathbf{E}}$ voraus zur Berechnung der periodischen Anteile und damit der wahren (="oskulierenden") Elemente, die dann folgende Form haben:

$$\mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \Delta\mathbf{E}\left(\bar{\mathbf{E}}\right) \quad . \tag{19.32}$$

Der periodische Anteil in den Darstellungen (19.31) und (19.32) ist nicht notwendig identisch.

Wesentlich komplizierter wird es, wenn die wahren Elemente $\mathbf{E}$ gegeben sind. Dann muss der mittlere Anteil $\bar{\mathbf{E}}$ der Elemente aus einer Beziehung der Form (19.31) oder (19.32) berechnet werden, was in der Regel nur iterativ und näherungsweise geschehen kann. Wenn ein analytisches Bahnmodell und daher die Darstellung (19.31) gegeben ist, ist die Berechnung des mittleren Elementevektors $\bar{\mathbf{E}}$ von diesem Bahnmodell entscheidend abhängig. Wenn „mittlere" Bahnelemente gegeben sind, muss also stets mit angegeben werden, wie sie erhalten wurden, bzw. auf welches Bahnmodell sie sich beziehen. Falls dies nicht möglich ist, ist der Begriff „mittleres Element" wertlos.

Mittlere Elemente werden in einer Satellitenbahnmechanik vor allem benötigt,

- ► *um ein analytisches Bahnmodell mit der numerischen Integration einer Bahn vergleichen zu können, und*
- ► *wenn ein analytisches Modell für operationellen Einsatz verwendet werden soll, die Bahn aber lediglich durch einen oskulierenden Zustand bekannt ist*.

19.4.1 Mittelung ohne gegebenes Bahnmodell

Wenn kein Bahnmodell vorgegeben ist, muss aus einer Darstellung der Form (19.31) der mittlere Anteil $\bar{\mathbf{E}}$ numerisch berechnet werden. Dies kann geschehen

- ► *mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate durch Ausgleichung über die numerisch berechneten Bahnelemente*
- ► *durch numerische Mittelung der Elemente über das gesamte gegebene Zeitintervall*.

Gemittelte Elemente sind danach vom Mittelungsprozess, vom Zeitintervall und von der angestrebten oder möglichen Genauigkeit des Mittelungsprozesses abhängig.

19.4.2 Mittlere Elemente bei gegebenem analytischem Bahnmodell

19.4.2.1 Verfahren von Eckstein

Das Verfahren[1] beruht auf der fast identischen Transformation

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}(t)\right) = \bar{\mathbf{E}}(t) + \Delta\mathbf{E}\left(\bar{\mathbf{E}}(t)\right) \quad . \tag{19.33}$$

Die Vektorfunktion $\mathbf{g}$ beinhaltet das analytische Bahnmodell. Die Zerlegung in einen mittleren und einen periodischen Anteil ist durch das analytische Modell gegeben. Der periodische Anteil kann nach Störordnung zerlegt werden. Sei $\mathbf{g}_1$ ein Bahnmodell der ersten Ordnung mit der Genauigkeit ε, $\mathbf{g}_2$ ein Bahnmodell der zweiten Ordnung in der Genauigkeit ε^2, gilt

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}(t)\right) = \bar{\mathbf{E}}(t) + \varepsilon\mathbf{g}_1\left(\bar{\mathbf{E}}(t)\right) + \varepsilon^2\,\mathbf{g}_2\left(\bar{\mathbf{E}}(t)\right) + \ldots \quad . \tag{19.34}$$

Der mittlere Anteil $\bar{\mathbf{E}}$ ist zunächst unbekannt. Gegeben ist stattdessen der oskulierende Zustandsvektor **E**. Unter Verwendung der vorgegebenen oskulierenden Elemente **E** wird mit der Hilfsgröße

$$\mathbf{E}^* := \mathbf{g}(\mathbf{E}) = \mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}(\mathbf{E}) \tag{19.35}$$

und der Näherungsbedingung erster Ordnung

$$\Delta\left(\mathbf{E}\left(\bar{\mathbf{E}}\right)\right) = \Delta\left(\mathbf{E}(\mathbf{E})\right) + O\left(\varepsilon^2\right) \quad , \tag{19.36}$$

die Bedingung

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}(\mathbf{E}) = \mathbf{E} - \left[\mathbf{E}^* - \mathbf{E}\right] + O\left(\varepsilon^2\right)$$

erhalten. Aus dieser folgt die Verfahrensgleichung:

$$\bar{\mathbf{E}} = 2\mathbf{E} - \mathbf{E}^* + O\left(\varepsilon^2\right) \quad . \tag{19.37}$$

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass die mittleren Elemente in einem Schritt erhalten werden können. Trotz eingeschränkter Genauigkeit ist dieses Verfahren für die meisten Anwendungen einer Bahnanalyse ausreichend. Problematisch wird das Verfahren, wenn Bahnelemente verwendet werden, die Singularitäten aufweisen, was etwa für die *Kepler*elemente, die kanonischen Elemente nach *Delaunay* und ähnliche Elemente zutrifft. Dann kann die Mittelung in der Umgebung der singulären Stellen nicht ausreichen. *Eckstein* verwendet daher in seiner Originalarbeit die fast überall singularitätenfreien regulären Elemente (siehe in Kapitel 11.4).

BEISPIEL: In der folgenden Tabelle 19-1 sind die gegebenen mittleren *Kepler*schen Elemente in der ersten Spalte, die nach *Brouwer-Lyddane* berechneten oskulierenden Elemente in der zweiten Spalte[2], die nach dem Verfahren von *Eckstein* gemittelten Elemente in der dritten Spalte aufgelistet. Die erhaltenen Fehler, wie sie im Vergleich der ersten und der dritten Spalte beobachtet werden,

[1] ECKSTEIN, M. C. [1973]

[2] Die entsprechenden Entwicklungen sind in Abschnitt 20.2 zusammengestellt

können in der Praxis nicht immer toleriert werden. Die berechneten Zahlenwerte wurden mit weit mehr als den geltenden Ziffern angegeben, da es sich um Zwischenwerte und nicht um Ergebnisse handelt, auf die sich Rundungsfehler verheerend auswirken können.

Bahnparameter	Gegebene mittlere Elemente	Berechnete oskulierende Elemente	Nach *Eckstein* gemittelte Elemente
Große Bahnhalbachse	7000.136 km	7009.2888803059 km	7000.1387073283 km
Exzentrizität	0.0	0.0011569192682249	0.000003610215
Inklination	80°.0	80°.006604980442	80°.0000288106
Rektaszension des auf-aufs genden Knotens	117°.223255574	117°.22327435184	117°.22325555372
Argument des Perigäums	0°.0	65°.670597422705	83°.391954944364
Mittlere Anomalie	0°.0	294°.32946121334	276°.60820757757

Tabelle 19-1: Zahlenbeispiel zur Demonstration des Verfahrens von *Eckstein*

Die Zahlenwerte für das Argument des Perigäums und die mittlere Anomalie weichen nur scheinbar von den gegebenen Werten ab. Da die Bahn als kreisförmig angenommen wurde, ist das Perigäum so gut wie nicht ausgebildet, also kann auch das Argument des Perigäums nicht klar definiert sein. Wie bei Kreisbahnen üblich ist jedoch die Summe von Argument des Perigäums und mittlerer Anomalie nahezu konstant. Sie beträgt im Fall der oskulierenden Elemente 360°.000086, im Fall der nach *Eckstein* gemittelten Elemente 360°.0001624. ◄

19.4.2.2 Verfahren von Walter

Auch dieses Verfahren[1] basiert auf einer Darstellung der Form (19.33). Die oskulierenden Elemente $\mathbf{E}(t)$ seien im abgeschlossenen Intervall $t \in [t_1, t_2]$ bekannt. Das mittlere Element $\bar{\mathbf{E}}(t)$ wird iterativ mit der Anfangsbedingung $\bar{\mathbf{E}}^{(0)} := \mathbf{E}$ berechnet. Dazu wird im n-ten Iterationsschritt (n = 0,1,2, …) die Entwicklung in eine Taylorreihe nach der ersten Größenordnung abgebrochen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(n)} + \frac{\partial \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(n)}\right)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^{(n)}} \left(\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{E}}^{(n)}\right) + O\left(\varepsilon^2\right) . \tag{19.38}$$

Die mittleren Bahnelemente ergeben sich daraus durch Auflösung nach $\bar{\mathbf{E}}$ aus

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}^{(n)} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(n)}\right)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^{(n)}} \right)^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{(n)}\right) + O\left(\varepsilon^2\right) . \tag{19.39}$$

[1] WALTER, H. G. [1967]

In manchen analytischen Bahnmodellen, zum Beispiel in dem analytischen Modell für die Abplattung der Erde nach *D. Brouwer*[1] ist die Variationsmatrix nach den Elementen ungefähr der Einheitsmatrix gleich:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(n)}\right)}{\partial \bar{\mathbf{E}}^{(n)}} \right)^{-1} \approx E \quad . \tag{19.40}$$

Dann vereinfacht sich die iterative Berechnung der mittleren Elemente wesentlich. Das Verfahren lautet dann:

$$\bar{\mathbf{E}}^{(n+1)} = \bar{\mathbf{E}}^{(n)} + \left(\mathbf{E} - \mathbf{g}\left(\mathbf{E}^{(n)}\right)\right) ; \quad \bar{\mathbf{E}}^{(0)} = \mathbf{E} ; \quad n = 0,1,2, \ldots . \tag{19.41}$$

Der Iterationsprozess wird abgebrochen, wenn die Genauigkeit unter eine vorgegebene Größe ε_0 fällt:

$$\left| \mathbf{E} - \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(n)}\right) \right| < \varepsilon_0 \quad .$$

19.4.2.3 Verfahren von Gordon

Dieses Verfahren[2] führt den Iterationsprozess mit Hilfe des Zustandsvektors aus, da dieser stets definiert ist und daher Unsicherheiten in der Umgebung möglicher Singularitäten und damit numerische Probleme vermieden werden können. Mit der Elementtransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{t}\left(\mathbf{E}\right) \tag{19.42}$$

kann der oskulierende Zustandsvektor **x** aus den oskulierenden Elementen **E** berechnet werden. Für die Berechnung der mittleren Elemente wird die fastidentische Transformation

$$\mathbf{E} = \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}\right) \tag{19.43}$$

verwendet. Es sei $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ gegeben. $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}(t)$ wird iterativ mit der Anfangsbedingung $\bar{\mathbf{E}}^{(0)} := \mathbf{E}$ und dem mittleren Anfangszustandsvektor

$$\bar{\mathbf{x}}^{(0)} := \mathbf{t}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(0)}\right) \tag{19.44}$$

durch Anwendung der Fixpunktgleichung

$$\bar{\mathbf{x}}^{(n)} \approx \mathbf{x} = \mathbf{t}\left(\mathbf{E}\right) \tag{19.45}$$

berechnet. Der Iterationsprozess lautet:

---

[1] BROUWER, D. [1959] und BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961]

[2] GORDON, R. A. [1988]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(n)} &= \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{n}\right) \qquad n = 0,1,2, \ldots\ldots \\
\mathbf{x}^{(n)} &= \mathbf{t}\left(\mathbf{E}^{(n)}\right) \\
\bar{\mathbf{x}}^{(n+1)} &= \bar{\mathbf{x}}^{(n)} + \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(n)}\right) \\
\bar{\mathbf{E}}^{(n+1)} &= \mathbf{t}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}^{(n+1)}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{19.46}$$

Der Iterationsprozess wird abgebrochen, wenn für eine gegebene kleine Zahl ε_1 die Bedingung

$$\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(n+1)}\right)\right| < \varepsilon_1 \tag{19.47}$$

erfüllt ist. Dann ist

$$\bar{\mathbf{E}} := \bar{\mathbf{E}}^{(n+1)} \tag{19.48}$$

der gewünschte mittlere Elementevektor mit der durch ε_1 dargestellten Genauigkeit.

BEISPIEL: In diesem Beispiel wird der Iterationsprozess nach *Gordon* am selben Beispiel erläutert wie im Verfahren nach *Eckstein*. Die Genauigkeit in den Komponenten des Ortsvektors wird zu $|\Delta\mathbf{r}| = 10^{-4}\ km$, in denen des Geschwindigkeitsvektors zu $|\Delta\dot{\mathbf{r}}| = 10^{-6}\ km/s$ gewünscht. Die einzelnen Iterationsschritte sind in der folgenden Tabelle 19-2 demonstriert. Gegeben ist als Referenz ein mittlerer Elementevektor $\bar{\mathbf{E}}$, aus dem nach *Brouwer-Lyddane* der oskulierende Elementevektor $\mathbf{E} = \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}\right)$ berechnet wird. Diesem ist nach dem Zweikörperproblem (also ohne Anwendung eines Störmodells) der oskulierende Zustandsvektor $\mathbf{x} = \mathbf{t}\left(\mathbf{E}\right)$ zugeordnet, der im Iterationsprozess als Referenzwert eingesetzt wird. Der oskulierende Elementevektor **E** wird in der Ausgangsiteration als mittlerer Elementevektor $\bar{\mathbf{E}}^{(0)} = \mathbf{E}$ aufgefasst, aus dem nach *Brouwer-Lyddane* der oskulierende Elementevektor $\mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(0)}\right)$ erhalten wird. Diesem ist wieder nach dem Zweikörperproblem der oskulierende Zustandsvektor $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{t}\left(\mathbf{E}^{(0)}\right)$ zugeordnet. Im ersten Iterationsschritt wird als Ausgangsnäherung für den mittleren Zustandsvektor der oskulierende Zustandsvektor $\mathbf{x} = \mathbf{t}\left(\mathbf{E}\right)$ angenommen: $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{x}$. Der verbesserte mittlere Zustandsvektor wird dann durch die Bedingungsgleichung $\bar{\mathbf{x}}^{(1)} = 2\,\bar{\mathbf{x}}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}$ erhalten. Dieser wird mit den elementaren Formeln des Zweikörperproblems in den entsprechenden mittleren Elementevektor $\bar{\mathbf{E}}^{(1)} = \mathbf{t}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}^{(1)}\right)$ umgerechnet. Der weitere Iterationsprozess verläuft wie im Formelsystem (19.46) beschrieben.

Die nach drei Iterationsschritten erhaltene Lösung hat die Genauigkeitsabschätzung $|\Delta\mathbf{r}| = 0.471 \cdot 10^{-4}\ km$, $|\Delta\dot{\mathbf{r}}| = 0.254 \cdot 10^{-7}\ km/s$. Für manche Anwendungen kritisch kann die Ungenauigkeit in der großen Halbachse werden.

Elemente bzw. Zustandsvektor	**Gegebene mittlere Elemente** $\bar{\mathbf{E}}$	**Berechnete oskul. Elemente** $\mathbf{E}=\mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}\right)$	$\mathbf{x}=\mathbf{t}\left(\mathbf{E}\right)=\bar{\mathbf{x}}^{(0)}$
Große Bahnhalbachse	7000.136 km	7009.2888803059 km	x_1 = -3202.65211 km
Exzentrizität	0.0	0.0011569192682249	x_2 = 6231.06932 km
Inklination	80°.0	80°.006604980442	x_3 = -14.548488 km
Rekt. aufst. Knoten	117°.223255574	117°.22327435184	$\dot{x}_1$ = -1.1678674 km/s
Argument des Perig.	0°.0	65°.670597422705	$\dot{x}_2$ = -0.5918604 km/s
Mittlere Anomalie	0°.0	294°.32946121334	$\dot{x}_3$ = 7.4301651 km/s

$\mathbf{E}^{(0)}=\mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(0)}\right)$	$\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{t}\left(\mathbf{E}^{(0)}\right)$	$\bar{\mathbf{x}}^{(1)}=2\,\bar{\mathbf{x}}^{(0)}-\mathbf{x}^{(0)}$	$\bar{\mathbf{E}}^{(1)}=\mathbf{t}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}^{(1)}\right)$
7018.439212741 km	x_1 = -3203.02255 km	x_1 = -3202.28166 km	7000.221494135 km
0.0023112828319983	x_2 = 6237.37972 km	x_2 = 6224.75893 km	0.000009163784
80°.013181570866	x_3 = -29.11079 km	x_3 = 0.013811 km	80°.00003086063
117°.2233169483	$\dot{x}_1$ = -1.1705339 km/s	$\dot{x}_1$ = -1.1652009 km/s	117°.2232034737
65°.655330127704	$\dot{x}_2$ = -0.5842946 km/s	$\dot{x}_2$ = -0.5994261 km/s	345°.48736401903
-65°.655275063348	$\dot{x}_3$ = 7.4289694 km/s	$\dot{x}_3$ = 7.4313608 km/s	14°.512487620255
$\mathbf{E}^{(1)}=\mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(1)}\right)$	$\mathbf{x}^{(1)}=\mathbf{t}\left(\mathbf{E}^{(1)}\right)$	$\bar{\mathbf{x}}^{(2)}=\bar{\mathbf{x}}^{(1)}+\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(1)}$	$\bar{\mathbf{E}}^{(2)}=\mathbf{t}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}^{(2)}\right)$
7009.3744314866 km	x_1 = -3202.65931 km	x_1 = -3202.27446 km	7000.1360343454 km
0.0011585046578	x_2 = 6231.09187 km	x_2 = 6224.73638 km	0.0000000105367
80°.006635762529	x_3 = -14.53460 km	x_3 = -.0000763776 km	80°000000011715
117°.22322228744	$\dot{x}_1$ = -1.1678686 km/s	$\dot{x}_1$ = -1.1651997 km/s	117°.22325552875
65°.223736012991	$\dot{x}_2$ = -0.5918572 km/s	$\dot{x}_2$ = -0.5994292 km/s	154°.68989627940
-65°.223825012616	$\dot{x}_3$ = 7.4301864 km/s	$\dot{x}_3$ = 7.4313395 km/s	205°.31010176803
$\mathbf{E}^{(2)}=\mathbf{g}\left(\bar{\mathbf{E}}^{(2)}\right)$	$\mathbf{x}^{(2)}=\mathbf{t}\left(\mathbf{E}^{(2)}\right)$	$\bar{\mathbf{x}}^{(3)}=\bar{\mathbf{x}}^{(2)}+\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(2)}$	$\bar{\mathbf{E}}^{(3)}=\mathbf{t}^{-1}\left(\bar{\mathbf{x}}^{(3)}\right)$
7009.2889144270 km	x_1 = -3202.65210 km	x_1 = -3202.274465 km	7000.1359528647 km
0.001156919390	x_2 = 6231.06944 km	x_2 = 6224.736268 km	0.00000000000000
80°.006604991	x_3 = -14.54879 km	x_3 = 0.000221 km	80°.000000000256
117°.22327432	$\dot{x}_1$ = -1.1678675 km/s	$\dot{x}_1$ = -1.1651996 km/s	117°.22325555759
65°.671118798132	$\dot{x}_2$ = -0.591860 km/s	$\dot{x}_2$ = -0.59942947 km/s	0°.00000000000000
-65°.671062119694	$\dot{x}_3$ = 7.4301650 km/s	$\dot{x}_3$ = 7.4313396 km/s	0°.00000000000000

Tabelle 19-2: Zahlenbeispiel zur Demonstration des Verfahrens von *Gordon*

20 Einige Ergebnisse Analytischer Satellitenbahntheorien

20.1 Zerlegung von Bahnelementen nach Einflussanteilen

Die Variationsgleichungen einiger Einflussanteile (sogenannter „Störungen“) auf Satellitenbahnen können analytisch integriert werden. Wegen der rasch zunehmenden Kompliziertheit der mathematischen Ausdrücke ist dies allerdings nur bis zu einer gewissen Einflussordnung möglich. Kristallisiert sich die entsprechende Störung mit einer gewissen Dominanz gegenüber anderen Störeffekten heraus, so können die erhaltenen Integrale eine entscheidende Hilfe für die langfristige Untersuchung von Satellitenbewegungen und unentbehrlich für eine Satellitenbahnanalyse sein. Nach *Kirchgraber* und *Stiefel* lässt sich auch so formulieren: Man interessiert sich für die „*Beschreibung des qualitativen Verhaltens der Gesamtheit der Lösungen*“ und nicht für die numerisch erreichbare approximative Berechnung einzelner quantitativer Lösungen[1].

Sei **E** irgendein Bahnelementevektor, so besteht das Ziel einer analytischen Störungstheorie zunächst darin, eine Aufspaltung nach Einflussordnungen zu finden. Eine Integration der Störgleichungen liefert dann als Ergebnis die oskulierenden Bahnelemente zum Zeitpunkt *t* in der Form

$$\mathbf{E} \;=\; \mathbf{E}(t) \;=\; \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(3)} + \ldots \qquad (20.1)$$

Hier ist $\mathbf{E}^{(0)}$ der „*ungestörte*“ Anteil, $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^{(1)}(t)$ der Anteil *erster Einflussordnung*, $\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)}(t)$ der Anteil *zweiter Einflussordnung* usw. Der ungestörte Anteil $\mathbf{E}^{(0)}$, der bisweilen auch als Anteil *nullter Einflussordnung* bezeichnet wird, wird durch Anwendung der Formeln des Zweikörperproblems als reine *Kepler*bewegung erhalten, wobei die Parameter in $\mathbf{E}^{(0)}$ als *ungestörte* d. h. konstante Bahnparameter angenommen werden.

Das Wesen einer analytischen Störungsrechnung periodischer Bahnen, also von Bewegungen, die in nullter Näherung auf einer kreisförmigen oder elliptischen (*Kepler*-) Bahn erfolgen, besteht zunächst darin, durch geeignete Transformationen alle periodischen Variationen abzuspalten. Falls das gelingt, bleiben Parameter, die nur säkulare Einflüsse enthalten. Man bezeichnet sie als *mittlere Elemente*. Für den oskulierenden Elementevektor **E** gibt es dann zu einem beliebigen Zeitpunkt *t* die Darstellung

$$\mathbf{E} \;=\; \mathbf{E}(t) \;=\; \bar{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E} \quad . \qquad (20.2)$$

$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}(t)$ ist der mittlere Anteil der Störung. $\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}(t)$ fasst den periodischen Einflussanteil zusammen. Wesentlich dabei ist, dass alle in $\Delta\mathbf{E}$ enthaltenen Elemente die mittleren Elemente $\bar{\mathbf{E}}$ sind (siehe hierzu die Abschnitte 20.2.2 auf Seite 434 und 20.2.3 auf Seite 440).

Eine weitere Zerlegung ist im allgemeinen Fall nicht möglich, wie ein Blick auf die Vielfalt möglicher Elementesätze zeigt (siehe Kapitel 11). Insbesondere lassen Elemente, die trigonometrische Funktionen enthalten, keine Zerlegung ihres mittleren Anteils in einen Epocheanteil und einen

[1] KIRCHGRABER und STIEFEL [1978], p.1

Anteil zu, der die säkularen Einflüsse explizit enthält. Es können lediglich die Elemente zur Epoche t_0 berechnet werden, wenn in Formel (20.2) $t = t_0$ gesetzt wird:

$$\bar{\mathbf{E}}_0 \;=\; \bar{\mathbf{E}}(t_0) \quad . \tag{20.3}$$

Vergleich mit den „*ungestörten*" Elementen der Zerlegung in Formel (20.1) zeigt, dass die mittleren Epocheelemente gleich den ungestörten angenommen werden können:

$$\mathbf{E}^{(0)} \;=\; \bar{\mathbf{E}}_0 \quad . \tag{20.4}$$

Diese Beziehung ist ganz wesentlich für das Verständnis der Störformeln. Insbesondere ergibt sich daraus:

- *Ebenso wie manche Bahnparameter nicht in einen mittleren Epocheanteil und einen säkular wirkenden Anteil zerlegt werden können, erlauben sie auch keine explizite Zerlegung in einen „ungestörten" und einen „gestörten" Anteil.*
- *Der Vergleich der Ergebnisse einer analytischen mit einer numerischen Integration wird dadurch erschwert, dass die analytische Integration mit den „ungestörten" d. h. mittleren Epocheelementen startet, die numerische hingegen mit oskulierenden, die somit mit allen Bewegungseinflüssen bereits behaftet sind.*

Vergleich der Zerlegung der oskulierenden Elemente nach den Formeln (20.1) und (20.2) lässt für die einzelnen Störordnungen die Zerlegungen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} &= \bar{\mathbf{E}}^{(1)} + \delta\mathbf{E}^{(1)} \\ \mathbf{E}^{(2)} &= \bar{\mathbf{E}}^{(2)} + \delta\mathbf{E}^{(3)} \\ \mathbf{E}^{(3)} &= \bar{\mathbf{E}}^{(3)} + \delta\mathbf{E}^{(3)} \\ \ldots &= \ldots \end{aligned} \tag{20.5}$$

erwarten. In einer Entwicklung der mittleren Elemente um den mittleren Epochewert, als Beispiel werden die *Kepler*schen Elemente

$$\mathbf{a} \;\Leftrightarrow\; \left[a, e, i, \Omega, \omega, M_0\right]^T$$

gewählt

$$\bar{\mathbf{a}} \;=\; \bar{\mathbf{a}}(t) \;=\; \bar{\mathbf{a}}_0 + \dot{\mathbf{a}}_s \left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{a}}_s \left(t - t_0\right)^2 + \ldots \quad , \tag{20.6}$$

können auch die säkularen Einfluss*koeffizienten* gewöhnlich nach Einflussordnungen zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_s &= \dot{\mathbf{a}}_s^{(1)} + \dot{\mathbf{a}}_s^{(2)} + \dot{\mathbf{a}}_s^{(3)} + \ldots \quad , \\ \ddot{\mathbf{a}}_s &= \ddot{\mathbf{a}}_s^{(1)} + \ddot{\mathbf{a}}_s^{(2)} + \ddot{\mathbf{a}}_s^{(3)} + \ldots \quad . \end{aligned} \tag{20.7}$$

Für den säkularen Einfluss*term* $\Delta\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}}_0$ folgt daraus bei Multiplikation mit einem möglicherweise sehr großem Zeitintervall, dass zum Erhalt eines Einflussterms 1. Ordnung säkulare Einflusskoeffizienten höherer Ordnung notwendig werden können:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}}^{(1)} &= \bar{\mathbf{a}}_0 + \left[\dot{\mathbf{a}}_s^{(1)} + \dot{\mathbf{a}}_s^{(2)} + \ldots + \dot{\mathbf{a}}_s^{(N_1)}\right](t-t_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\ddot{\mathbf{a}}_s^{(1)} + \ddot{\mathbf{a}}_s^{(2)} + \ldots + \ddot{\mathbf{a}}_s^{(N_2)}\right](t-t_0)^2 + \ldots\end{aligned} \tag{20.8}$$

Die Größe der natürlichen Zahlen (N_1, N_2) hängt im Wesentlichen vom Zeitintervall $t-t_0$ ab. Damit ergibt sich folgende Aussage:

- *Eine Satellitenbahnanalyse kann für zuverlässige langfristige Aussagen der ersten Einflussordnung eine große Anzahl von Einflusskoeffizienten höherer Ordnung erfordern.*
- *Die Anzahl von Einflusskoeffizienten, die für einen Störterm einer bestimmten Störordnung erforderlich sind, hängt von der Zeitdauer ab, über welche die Einflusskoeffizienten zuverlässig gelten sollen.*

Gelingt andererseits die Zerlegung der periodischen Störanteile gemäß

$$\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{E}_l + \delta\mathbf{E}_k \tag{20.9}$$

in lang- und kurzperiodische Anteile, so werden hier stets Terme derselben Einflussordnung erhalten. Für beliebige Bahnelemente **E** gilt dann

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{E}^{(1)} &= \delta\mathbf{E}_l^{(1)} + \delta\mathbf{E}_k^{(1)} \\ \delta\mathbf{E}^{(2)} &= \delta\mathbf{E}_l^{(2)} + \delta\mathbf{E}_k^{(2)} \\ \delta\mathbf{E}^{(3)} &= \delta\mathbf{E}_l^{(3)} + \delta\mathbf{E}_k^{(3)} \\ \ldots &= \ldots\end{aligned} \tag{20.10}$$

Ferner zeigt sich bei der Transformation von einem Elementesatz auf einen anderen, dass im Allgemeinen langperiodische nicht notwendig in langperiodische Störanteile und kurzperiodische nicht notwendig in kurzperiodische Anteile übergehen. Dies ergibt sich unmittelbar aus den jeweiligen Transformationsformeln. Es gibt auch Spezialfälle, bei denen langperiodische Einflussanteile in säkulare ausarten[1]. Das Verhalten eines jeden Parametersatzes muss also von Fall zu Fall neu untersucht werden.

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse einiger analytischer Integrationen der Variationsgleichungen zusammengestellt. Dazu werden die einzelnen Störungen separiert und ihre Auswirkungen soweit möglich auf die Bahnelemente getrennt dargestellt. Das Gravitationsfeld des Zentralkörpers sei durch den Index *G* charakterisiert, der Luftwiderstand durch den Index *D*, der Strahlungsdruck durch den Index *R*, Wirkungseinflüsse durch andere Körper (Planeten) durch den Index *B*. Entsprechend können die Anteile weiterer Wirkungseinflüsse angefügt werden. Das Ziel ist dann, ein Bahnelement zu einem Zeitpunkt *t* nach Einfluss*art* (*G*, *D*, *R*, *B*, …), Einfluss*ordnung* ($^{(1)}$, $^{(2)}$, …) und *Einflusswirkung* (säkular, lang-, kurzperiodisch) zu separieren. Nach dem vorstehenden gelingt dies in aller Allgemeinheit zumindest für die *Kepler*elemente. Ihre Zerlegung lautet für einen beliebigen Zeitpunkt *t* formal:

[1] Zum Beispiel die Fälle der „eingefrorenen Bahn“ („frozen orbit“, Abschnitt 22.6, Band III b)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a} \;=\; \mathbf{a}_0 + \Big[& \dot{\mathbf{a}}_{sG}^{(1)} + \dot{\mathbf{a}}_{sG}^{(2)} + \ldots + \dot{\mathbf{a}}_{sG}^{(N_G)} + \\
& + \dot{\mathbf{a}}_{sD}^{(1)} + \dot{\mathbf{a}}_{sD}^{(2)} + \ldots + \dot{\mathbf{a}}_{sD}^{(N_D)} + \\
& + \dot{\mathbf{a}}_{sB}^{(1)} + \dot{\mathbf{a}}_{sB}^{(2)} + \ldots + \dot{\mathbf{a}}_{sB}^{(N_B)} + \\
& + \dot{\mathbf{a}}_{sR}^{(1)} + \dot{\mathbf{a}}_{sR}^{(2)} + \ldots + \dot{\mathbf{a}}_{sR}^{(N_R)} + \ldots \Big] (t - t_0) + \\
& + \frac{1}{2} \Big[\ddot{\mathbf{a}}_{sG}^{(1)} + \ddot{\mathbf{a}}_{sG}^{(2)} + \ldots + \ddot{\mathbf{a}}_{sG}^{(N_G)} + \\
& + \ddot{\mathbf{a}}_{sD}^{(1)} + \ddot{\mathbf{a}}_{sD}^{(2)} + \ldots + \ddot{\mathbf{a}}_{sD}^{(N_D)} + \\
& + \ddot{\mathbf{a}}_{sB}^{(1)} + \ddot{\mathbf{a}}_{sB}^{(2)} + \ldots + \ddot{\mathbf{a}}_{sB}^{(N_B)} + \\
& + \ddot{\mathbf{a}}_{sR}^{(1)} + \ddot{\mathbf{a}}_{sR}^{(2)} + \ldots + \ddot{\mathbf{a}}_{sR}^{(N_R)} + \ldots \Big] (t - t_0)^2 + \ldots + \\
& + \delta\mathbf{a}_{lG}^{(1)} + \delta\mathbf{a}_{kG}^{(1)} + \\
& + \delta\mathbf{a}_{lD}^{(1)} + \delta\mathbf{a}_{kD}^{(1)} + \\
& + \delta\mathbf{a}_{lB}^{(1)} + \delta\mathbf{a}_{kB}^{(1)} + \\
& + \delta\mathbf{a}_{lR}^{(1)} + \delta\mathbf{a}_{kR}^{(1)} + \ldots \\
& + \Big[\dot{\mathbf{a}}_{sG}^{(N_G+1)} + \ldots + \\
& + \dot{\mathbf{a}}_{sD}^{(N_D+1)} + \ldots + \\
& + \dot{\mathbf{a}}_{sB}^{(N_B+1)} + \ldots + \\
& + \dot{\mathbf{a}}_{sR}^{(N_R+1)} + \ldots + \ldots \Big] (t - t_0) + \\
& + \frac{1}{2} \Big[\ddot{\mathbf{a}}_{sG}^{(N_G+1)} + \ldots + \\
& + \ddot{\mathbf{a}}_{sD}^{(N_D+1)} + \ldots + \\
& + \ddot{\mathbf{a}}_{sB}^{(N_B+1)} + \ldots + \\
& + \ddot{\mathbf{a}}_{sR}^{(N_R+1)} + \ldots + \ldots \Big] (t - t_0)^2 + \ldots + \\
& + \delta\mathbf{a}_{lG}^{(2)} + \delta\mathbf{a}_{kG}^{(2)} + \delta\mathbf{a}_{lG}^{(3)} + \delta\mathbf{a}_{kG}^{(3)} + \ldots \\
& + \delta\mathbf{a}_{lD}^{(2)} + \delta\mathbf{a}_{kD}^{(2)} + \delta\mathbf{a}_{lD}^{(3)} + \delta\mathbf{a}_{kD}^{(3)} + \ldots \\
& + \delta\mathbf{a}_{lB}^{(2)} + \delta\mathbf{a}_{kB}^{(2)} + \delta\mathbf{a}_{lB}^{(3)} + \delta\mathbf{a}_{kB}^{(3)} + \ldots \\
& + \delta\mathbf{a}_{lR}^{(2)} + \delta\mathbf{a}_{kR}^{(2)} + \delta\mathbf{a}_{lR}^{(3)} + \delta\mathbf{a}_{kR}^{(3)} + \ldots + \ldots \quad .
\end{aligned}
\tag{20.11}
$$

Die hier aufgeführten Koeffizienten werden soweit bekannt bzw. soweit von Bedeutung in den folgenden Abschnitten wiedergegeben. In der Berechnung der säkularen Einflussterme erster Ordnung geben die Zahlen N_G, N_D, usw. die Anzahl von Koeffizienten an, die zum Beschreiben der Störungen erster Ordnung durch die jeweilige Einflussart über einen gewissen Zeitraum unverzichtbar sind.

20.2 Bewegungseinflüsse durch das Gravitationsfeld eines Zentralkörpers

Bei Erdsatellitenbahnen ist eine Stördominanz, die eine Aufspaltung nach Störordnungen erlaubt, durch die Eigenschaft des Erdkörpers präjudiziert, mit sehr guter Annäherung ein Rotationsellipsoid zu sein. Unmittelbar nach dem Start des ersten Erdsatelliten 1957 waren deshalb die Bemühungen der Bahnmechaniker darauf konzentriert, analytische Lösungen zumindest erster Ordnung des *Hauptproblems der Satellitenbewegung* zu finden, also die Auswirkungen der Abplattung auf die Satellitenbewegung analytisch darzustellen. Erfolgreich waren *Brouwer* [1959] und parallel dazu *Garfinkel* [1959] durch Anwendung der *von Zeipel*-Methode, weiter durch eine etwas andere, nicht so tiefreichende Methode *Kozai* [1959], der später jedoch die *Brouwersche* Methode zur Herleitung der Störausdrücke höherer Ordnung anwandte (*Kozai* [1962]). *Chebotarev* [1967] löste das Problem durch Reihenentwicklungen, die jedoch nur für nicht hochexzentrische Bahnen im Rahmen der Reihenentwicklungen des Zweikörperproblems Gültigkeit haben, dann jedoch ebenfalls interessante Einblicke in den Bewegungsmechanismus von Satelliten geben können. Allerdings schon einige Jahre vor Start des ersten Satelliten hatte *H. G. L. Krause* eine vollständige Lösung erster Ordnung des Hauptproblems der Satellitenbewegung hergleitet[1].

Parallel oder in Folge zu diesen Arbeiten beschäftigten sich viele andere Autoren mit diesem Problem, so etwa *King-Hele* [1959], *Merson* [1961], *Claus und Lubowe* [1963], in Russland *Zhongolovitch* [1961], verallgemeinert in grundsätzlicher und fruchtbarer Weise durch *Hori* [1966] und [1967] und *Deprit* [1971] und danach viele andere[2].

Bei der Erde ist der größte zonale Koeffizient des Erdschwerefeldes (siehe Kapitel 17.2) von der Ordnung

$$O\left(J_2\right) \;=\; 10^{-3} \quad ,$$

die nächsten von der Ordnung

$$O\left(J_3\right) \;=\; O\left(J_4\right) \;=\; 10^{-6} \quad .$$

Deshalb ist in diesem Fall eine Zerlegung beliebiger Bahnelemente **E** nach Einflussordnungen gemäß Formel (20.1) zumindest bis zur zweiten Einflussordnung unmittelbar möglich:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_G^{(1)} &= O\left(J_2\right) \\ \mathbf{E}_G^{(2)} &= O\left(J_2^2\right) \quad . \end{aligned}$$

Das *Hauptproblem der Satellitenbahnmechanik von Erdsatelliten* besteht somit darin, eine Lösung der Störungen bis zur ersten Ordnung in J_2 zu finden. Alle analytischen Theorien zur Berechnung der Bewegungseinflüsse durch die Abplattung haben jedoch das Ziel, nach Möglichkeit in der Berechnung der säkularen Einflussanteile, wie Formel (20.11) nahe legt, zumindest die zweite

[1] Siehe in Abschnitt 2.9.4 (Band I)

[2] Eine systematische Zusammenstellung dieser Arbeiten wird in Abschnitt 2.10 (Band I) gegeben

Einflussordnung einzuschließen. Nur so können langfristige Aussagen einigermaßen sicher gemacht werden.

Im Folgenden werden im Wesentlichen die Ergebnisse der *Brouwer*schen Integration wiedergegeben, wobei jedoch im Gegensatz zur Originalarbeit die Terminologie des vorliegenden Berichtes beibehalten wird. *Brouwer* führte die Integration mit *Delaunay*-Elementen durch. Da diese das kanonische Äquivalent der *Kepler*elemente sind, haben sie auch deren Vorteil einer klaren Zerlegung in einen mittleren Epocheanteil bzw. ungestörten Anteil, einen säkular gestörten, einen lang- und einen kurzperiodisch gestörten Anteil, jedoch auch den Nachteil der virtuellen Singularitäten für kreisförmige und/oder äquatoriale Bahnen sowie den lange heftig diskutierten Fall der kritischen Inklination. *Brouwer* hat die Ergebnisse seiner Integration in *Kepler*elementen angegeben. Einschränkungen ergeben sich für Bewegungen durch den Ursprung ($a \to 0$) und nichtperiodische Bewegungen ($e \to 1$). Ferner müssen sich in den Störausdrücken auch die Fälle als singuläre zeigen, in denen die *Kepler*elemente nicht definiert sind, nämlich der Kreisbewegung $(e \to 0)$ und äquatorialen Bewegung $(\sin i \to 0)$.

Anmerkung zur Terminologie: In der Originalarbeit von *Brouwer* werden die mittleren Elemente zweimal gestrichen hier mit Querstrich bezeichnet, die langperiodisch gestörten Anteile einmal gestrichen, hier mit Index *l*, die kurzperiodisch gestörten Anteile hier mit Index *k*. Die oskulierenden Elemente werden ohne Indizierung oder nähere Kennzeichnung in beiden Terminologien verwendet.

20.2.1 Mittlere *Kepler*elemente

Die mittleren *Kepler*schen Elemente weisen in einer Theorie zweiter Ordnung in J_2 keine Singularitäten oder sonstigen Einschränkungen auf und dienen somit direkt als Grundlage zur Berechnung des mittleren Anteils auch in jedem anderen Bahnparametersatz.

Vorgegeben sind die mittleren *Kepler*elemente zur Epoche $\boldsymbol{t_0}$ (= „ungestörte“ *Kepler*elemente)

Große Bahnhalbachse	$a^{(0)}$	=	$\bar{a}_0$	= $\bar{a}(t_0)$
Exzentrizität	$e^{(0)}$	=	$\bar{e}_0$	= $\bar{e}(t_0)$
Inklination	$i^{(0)}$	=	$\bar{i}_0$	= $\bar{i}(t_0)$
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	$\Omega^{(0)}$	=	$\bar{\Omega}_0$	= $\bar{\Omega}(t_{0)})$
Argument des Perigäums	$\omega^{(0)}$	=	$\bar{\omega}_0$	= $\omega(t_{0)})$
Mittlere Epocheanomalie	$M_0^{(0)}$	=	$\overline{M_{0\,0}}$	= $\overline{M_0}(t_{0)})$
Abgeleitete Parameter:				
*Kepler*sche Mittlere Bewegung	$n_K^{(0)}$	=	$\overline{n_{K\,0}}$	= $\sqrt{\mu / \bar{a}_0^3}$
Parameter der elliptischen Bewegung	$p_0^{(0)}$	=	$\bar{p}_0$	= $\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)$

Säkulare Einflusskoeffizienten bis zur zweiten Ordnung in J_2:

$$\dot{a}_{sG} = 0 \tag{20.12}$$

$$\dot{e}_{sG} = 0 \tag{20.13}$$

$$\left(i_{sG}\right)^{\cdot} = 0 \tag{20.14}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_{sG} = & -\frac{3}{2}\overline{n_{K\,0}}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2}\cos\bar{i}_0 + \\ & + \frac{3}{2^5}\overline{n_{K\,0}}\,\frac{R_E^4}{\bar{p}_0^4}\cos\bar{i}_0\left\{J_2^2\left[-5+12\sqrt{1-\bar{e}_0^2}+9\left(1-\bar{e}_0^2\right)-\right.\right. \\ & \qquad \left.\left.-\left(35+36\sqrt{1-\bar{e}_0^2}+5\left(1-\bar{e}_0^2\right)\cos^2\bar{i}_0\right)\right]- \\ & \qquad -5\,J_4\left[5-3\left(1-\bar{e}_0^2\right)\right]\left(3-7\cos^2\bar{i}_0\right)\Big\}+\ldots\end{aligned} \tag{20.15}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{sG} = & -\frac{3}{4}\overline{n_{K\,0}}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2}\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right)+ \\ & + \frac{3}{2^7}\overline{n_{K\,0}}\,\frac{R_E^4}{\bar{p}_0^4}\left\{J_2^2\left[-35+24\sqrt{1-\bar{e}_0^2}+25\left(1-\bar{e}_0^2\right)+\right.\right. \\ & \qquad +\left(90-192\sqrt{1-\bar{e}_0^2}-126\left(1-\bar{e}_0^2\right)\right)\cos^2\bar{i}_0+ \\ & \qquad \left.\left.+\left(385+360\sqrt{1-\bar{e}_0^2}+45\left(1-\bar{e}_0^2\right)\right)\cos^4\bar{i}_0\right]- \\ & -5\,J_4\left[21-9\left(1-\bar{e}_0^2\right)+\left(-270+126\left(1-\bar{e}_0^2\right)\right)\cos^2\bar{i}_0+\right. \\ & \qquad \left.+\left(385-189\left(1-\bar{e}_0^2\right)\right)\cos^4\bar{i}_0\right]\Big\}+\ldots\end{aligned} \tag{20.16}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{M}_{0sG} \;=\; & -\frac{3}{4}\,\overline{n}_{K0}\,J_2\,\frac{R_E^2\,\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}}{\bar{p}_0^{\,2}}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right)+ \\
& +\frac{3}{2^7}\,\overline{n}_{K0}\,\frac{R_E^4\,\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}}{\bar{p}_0^{\,4}}\left\{J_2^2\left[-15+16\,\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}+25\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)+\right.\right. \\
& \qquad +\left(30-96\,\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}-90\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)\right)\cos^2\bar{i}_0+ \\
& \qquad \left.\left.+\left(105+144\,\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}+25\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)\right)\cos^4\bar{i}_0\right]- \right. \\
& \left. -15\,\bar{e}_0^{\,2}\,J_4\left[3-30\cos^2\bar{i}_0+35\cos^4\bar{i}_0\right]\right\}+\ldots
\end{aligned}
\tag{20.17}
$$

Mit Kenntnis der säkularen Einflusskoeffizienten ergeben sich allgemein

Mittlere Keplerelemente zur Zeit t

$$
\begin{aligned}
\bar{a} &= \bar{a}_0+\dot{a}_s\,(t-t_0)+\ldots \\
\bar{e} &= \bar{e}_0+\dot{e}_s\,(t-t_0)+\ldots \\
\bar{i} &= \bar{i}_0+(i_s)^{\cdot}\,(t-t_0)+\ldots \\
\bar{\Omega} &= \bar{\Omega}_0+\dot{\Omega}_s\,(t-t_0)+\ldots \\
\bar{\omega} &= \bar{\omega}_0+\dot{\omega}_s\,(t-t_0)+\ldots \\
\overline{M_0} &= \overline{M_{00}}+\dot{M}_{0s}\,(t-t_0)+\ldots
\end{aligned}
\tag{20.18}
$$

sowie die mittlere mittlere Anomalie

$$
\bar{M} \;=\; \overline{M_{00}}+\left(\overline{n_{K0}}+\dot{M}_{0s}\right)(t-t_0)+\ldots \quad , \tag{20.19}
$$

der mittlere Parameter der elliptischen Bewegung

$$
\bar{p} \;=\; \bar{a}\left(1-\bar{e}^{\,2}\right) \quad , \tag{20.20}
$$

der mittlere Flächenparameter

$$
\bar{G} \;=\; \sqrt{\mu\,\bar{p}} \quad . \tag{20.21}
$$

20.2.2 Langperiodische Einflussterme erster Ordnung der *Kepler*elemente

Die langperiodischen Einflussterme werden mit den mittleren Elementen als Parameter berechnet. Für die einzelnen Elemente werden verschiedene gleichwertige Ausdrücke angegeben, um so eine weitere Verwendung zu erleichtern. Alle im Folgenden dargestellten langperiodischen Störungen sind einheitlich durch ihre Singularität für $\cos\bar{i}=\pm 1/\sqrt{5}$ charakterisiert. Diese Neigung wird als *kritische Neigung* bezeichnet. Sie hat für alle abgeplatteten Himmelskörper die Werte

$$
\bar{i}_{krit,1} \;=\; 63°26'5''.816 \quad \text{sowie} \quad i_{krit,2} \;=\; 116°33'54''.184 \quad .
$$

Sie wird im Zusammenhang mit Aussagen über die anomalistische Bewegung in Kapitel 22 untersucht[1]. Da für das Erdpotential $O(J_3/J_2)=O(J_4/J_2)=O(J_2)$, sind in den folgenden Ausdrücken für die langperiodischen Einflussterme infolge der Anisotropie des Gravitationsfeldes des Zentralkörpers alle Beiträge von der 1. Ordnung.

Die **große Bahnhalbachse** weist keine langperiodischen Bewegungseinflüsse erster Ordnung durch das Erdschwerefeld auf:

$$\delta a_{lG} \quad = \quad 0 \quad . \tag{20.22}$$

Die **Exzentrizität** hat abgesehen von der kritischen Neigung für alle periodischen Bahnen keine Singularität in den langperiodischen Bewegungseinflüssen erster Ordnung durch das Erdschwerefeld:

$$\begin{aligned}
\delta e_{lG} \quad = \quad & \frac{1}{16}\frac{\bar{e}\,R_E^2}{\bar{a}^2\left(1-\bar{e}^2\right)}\left\{J_2\left[1-11\cos^2\bar{i}-\frac{40\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]+\right. \\
& \left.+5\frac{J_4}{J_2}\left[1-3\cos^2\bar{i}-\frac{8\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\right\}\cos 2\bar{\omega}- \\
& -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i}\sin\bar{\omega}- \\
& -\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\sin\bar{i}\left\{\frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\sin\bar{\omega}-\right. \\
& \left.-\frac{7}{6}\bar{e}^2\left(1-\bar{e}^2\right)\left[1-5\cos^2\bar{i}-\frac{16\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\sin 3\bar{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned} \tag{20.23}$$

$$\begin{aligned}
\delta e_{lG} \quad = \quad & \frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\frac{\bar{e}\left(1-\bar{e}^2\right)\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right]+5\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\}\cos 2\bar{\omega}- \\
& -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i}\sin\bar{\omega}- \\
& -\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\frac{\sin\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{\frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}\left[1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}\right]\sin\bar{\omega}-\right. \\
& \left.-\frac{7}{6}\bar{e}^2\left(1-\bar{e}^2\right)\left[1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}\right]\sin 3\bar{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned} \tag{20.24}$$

$$\delta e_{lG} \quad = \quad \sin\bar{i}\left[e_I\,\bar{e}\sin\bar{i}\cos 2\bar{\omega}+\left(e_{II}+\frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}e_{IV}\right)\sin\bar{\omega}+e_{III}\,\bar{e}\sin 3\bar{\omega}\right]+\ldots \tag{20.25}$$

[1] Band IIIb

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
e_I &= \frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{a}^2\left(1-\bar{e}^2\right)}\frac{1}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right]+5\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\} \\
e_{II} &= -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}} \\
e_{III} &= \frac{35}{192}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\frac{\bar{e}\left(1-\bar{e}^2\right)}{1-5\cos^2\bar{i}}\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}} \\
e_{IV} &= -\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}} \quad .
\end{aligned} \tag{20.26}$$

Die **Inklination** hat abgesehen von der kritischen Neigung für alle periodischen Bahnen in den langperiodischen Bewegungseinflüssen erster Ordnung durch das Erdschwerefeld keine Singularität:

$$\begin{aligned}
\delta i_{lG} &= -\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\frac{\bar{e}^2\sin\bar{i}\cos\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right]+5\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\}\cos 2\bar{\omega}+ \\
&\quad +\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{\bar{e}\,R_E}{\bar{p}}\cos\bar{i}\sin\bar{\omega}+ \\
&\quad +\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{\bar{e}\,R_E^3}{\bar{p}^3}\cos\bar{i}\left\{\frac{4+3\bar{e}^2}{\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\sin\bar{\omega}-\right. \\
&\qquad \left.-\frac{7}{6}\bar{e}^2\left[1-5\cos^2\bar{i}-\frac{16\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\sin 3\bar{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned} \tag{20.27}$$

$$\delta i_{lG} = -\frac{\bar{e}}{1-\bar{e}^2}\cos\bar{i}\left[e_I\,\bar{e}\sin\bar{i}\cos 2\bar{\omega}+\left(e_{II}+\frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}e_{IV}\right)\sin\bar{\omega}+e_{III}\,\bar{e}\sin 3\omega\right]+\ldots \tag{20.28}$$

$$\delta i_{lG} = -\frac{\bar{e}}{1-\bar{e}^2}\frac{\cos\bar{i}}{\sin\bar{i}}\,\delta e_{lG} \qquad (\text{nur für } \sin\bar{i}\neq 0)\ . \tag{20.29}$$

Die **Rektaszension des aufsteigenden Knotens** hat an der kritischen Neigung sogar Störungen zweiter Ordnung in den langperiodischen Bewegungseinflüssen erster Ordnung durch das Erdschwerefeld. Weiter zeigt sich die erwartete Singularität für äquatoriale Bahnen.

$$
\begin{aligned}
\delta\Omega_{lG} \;=\; & -\frac{1}{16}\,\frac{\bar{e}^2\,R_E^2}{\bar{p}^2}\cos\bar{i}\,\left\{J_2\left[11+\frac{80\cos^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}+\frac{200\cos^4\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\right]+\right.\\
& \left.+5\,\frac{J_4}{J_2}\left[3+\frac{16\cos^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}+\frac{40\cos^4\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\right]\right\}\sin 2\bar{\omega}-\\
& -\frac{1}{2}\,\frac{J_3}{J_2}\,\frac{\bar{e}\,R_E}{\bar{p}}\;\frac{\cos\bar{i}}{\sin\bar{i}}\cos\bar{\omega}- \qquad (20.30)\\
& -\frac{5}{16}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{\bar{e}\,R_E^3}{\bar{p}^3}\;\cos\bar{i}\,\left\{\frac{4+3\bar{e}^2}{2\sin\bar{i}}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\cos\bar{\omega}+\right.\\
& \left.+3\sin\bar{i}\,\left(4+3\bar{e}^2\right)\left[3+\frac{16\cos^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}+\frac{40\cos^4\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\right]\cos\bar{\omega}-\right.\\
& \left.-\frac{7}{36}\,\frac{\bar{e}^2}{\sin\bar{i}}\left[1-5\cos^2\bar{i}-\frac{16\cos^4\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\right]\cos 3\bar{\omega}-\right.\\
& \left.-\frac{7}{18}\,\bar{e}^2\sin\bar{i}\left[5+\frac{32\cos^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}+\frac{80\cos^4\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\right]\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\Omega_{lG} \;=\; & -\frac{1}{16}\,\frac{\bar{e}^2\,R_E^2}{\bar{a}^2\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\,\frac{\cos\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left\{J_2\left[11-30\cos^2\bar{i}+75\cos^4\bar{i}\right]+\right.\\
& \left.+5\,\frac{J_4}{J_2}\left[3-14\cos^2\bar{i}+35\cos^4\bar{i}\right]\right\}\sin 2\bar{\omega}-\\
& -\frac{1}{2}\,\frac{J_3}{J_2}\,\frac{\bar{e}\,R_E}{\bar{p}}\;\frac{\cos\bar{i}}{\sin\bar{i}}\cos\bar{\omega}- \qquad (20.31)\\
& -\frac{5}{16}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{\bar{e}\,R_E^3}{\bar{p}^3}\;\cos\bar{i}\,\left\{\frac{4+3\bar{e}^2}{2\sin\bar{i}\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)}\left[1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}\right]\cos\bar{\omega}+\right.\\
& \left.+3\left(4+3\bar{e}^2\right)\frac{\sin\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left[3-14\cos^2\bar{i}+35\cos^4\bar{i}\right]\cos\bar{\omega}-\right.\\
& \left.-\frac{7}{36}\,\frac{\bar{e}^2}{\sin\bar{i}\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)}\left[1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}\right]\cos 3\bar{\omega}-\right.\\
& \left.-\frac{7}{18}\,\bar{e}^2\,\frac{\sin\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left[5-18\cos^2\bar{i}+45\cos^4\bar{i}\right]\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned}
$$

Im **Argument des Perigäums** zeigen sich neben der Singularität an der kritischen Neigung die erwarteten Singularitäten für kreisförmige und/oder äquatoriale Bahnen in den langperiodischen Bewegungseinflüssen erster Ordnung durch das Erdschwerefeld. Die Singularität an der kritischen Neigung ist überdies von zweiter Ordnung.

$$
\begin{aligned}
\delta\omega_{lG} = &-\frac{1}{32} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\left[2+\overline{e}^2-11\left(2+3\overline{e}^2\right)\cos^2\overline{i}-\frac{40\left(2+5\overline{e}^2\right)\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}-\frac{400\,\overline{e}^2\cos^6\overline{i}}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)^2}\right]\sin 2\overline{\omega}- \\
&-\frac{5}{32}\frac{J_4}{J_2}\frac{R_E}{\overline{p}^2}\left[2+\overline{e}^2-3\left(2+3\overline{e}^2\right)\cos^2\overline{i}-\frac{8\left(2+5\overline{e}^2\right)\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}-\frac{80\,\overline{e}^2\cos^6\overline{i}}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)^2}\right]\sin 2\overline{\omega}- \\
&-\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\overline{p}}\left[\frac{\sin\overline{i}}{\overline{e}}-\frac{\overline{e}\cos^2\overline{i}}{\sin\overline{i}}\right]\cos\overline{\omega}- \\
&-\frac{5}{16}\frac{J_5}{J_2}\frac{{R_E}^3}{\overline{p}^3}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(4+3\overline{e}^2\right)\left(\frac{1-\overline{e}^2}{\overline{e}}\sin\overline{i}-\overline{e}\,\frac{\cos^2\overline{i}}{\sin\overline{i}}\right)+\right.\right. \\
&\qquad\left.+\overline{e}\left(26+9\overline{e}^2\right)\sin\overline{i}\right]\left(1-9\cos^2\overline{i}-\frac{24\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\right)- \\
&\qquad\left.-3\overline{e}\left(4+3\overline{e}^2\right)\sin\overline{i}\,\cos^2\overline{i}\left(3+\frac{16\cos^2\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}+\frac{40\cos^4\overline{i}}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)^2}\right)\right\}\cos\overline{\omega}- \\
&-\frac{35}{288}\frac{J_5}{J_2}\frac{\overline{e}\,{R_E}^3}{\overline{p}^3}\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(3+2\overline{e}^2\right)\sin\overline{i}-\overline{e}^2\,\frac{\cos^2\overline{i}}{\sin\overline{i}}\right]\left[1-5\cos^2\overline{i}-\frac{16\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\right]+\right. \\
&\qquad\left.+\overline{e}^2\sin\overline{i}\,\cos^2\overline{i}\left[5+\frac{32\cos^2\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}+\frac{80\cos^4\overline{i}}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)^2}\right]\right\}\cos 3\overline{\omega}+\ldots
\end{aligned}
\tag{20.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\omega_{lG} \;=\; &-\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\frac{1}{1-5\cos^2\overline{i}}\left\{\sin^2\overline{i}\left[J_2\left(1-15\cos^2\overline{i}\right)+5\,\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\overline{i}\right)\right]+\right. \\
&\qquad+\frac{\overline{e}^2}{2\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)}\left[J_2\left(1-43\cos^2\overline{i}+155\cos^4\overline{i}-255\cos^6\overline{i}\right)+\right. \\
&\qquad\left.\left.+5\,\frac{J_4}{J_2}\left(1-19\cos^2\overline{i}+75\cos^4\overline{i}-105\cos^6\overline{i}\right)\right]\right\}\sin 2\overline{\omega}- \\
&-\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\overline{p}}\,\frac{\sin^2\overline{i}-\overline{e}^2\cos^2\overline{i}}{\overline{e}\sin\overline{i}}\cos\overline{\omega}-
\end{aligned}
\tag{20.33}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\overline{p}^3}\left\{\left[\left(4+3\overline{e}^2\right)\left(\frac{1-\overline{e}^2}{\overline{e}}\sin\overline{i}-\overline{e}\,\frac{\cos^2\overline{i}}{\sin\overline{i}}\right)+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\,\overline{e}\left(26+9\overline{e}^2\right)\sin\overline{i}\right]\frac{1-14\cos^2\overline{i}+21\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\cos\overline{\omega}-\right.\\
&\qquad-6\overline{e}\left(4+3\overline{e}^2\right)\frac{\sin\overline{i}\,\cos^2\overline{i}}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)^2}\left(3-14\cos^2\overline{i}+35\cos^4\overline{i}\right)\cos\overline{\omega}-\\
&\qquad-\frac{7}{18}\left[\overline{e}\left(3+2\overline{e}^2\right)\sin\overline{i}-\overline{e}^3\,\frac{\cos^2\overline{i}}{\sin\overline{i}}\right]\frac{1-10\cos^2\overline{i}+9\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\cos 3\overline{\omega}-\\
&\qquad\left.-\frac{7}{9}\overline{e}^3\,\frac{\sin\overline{i}\,\cos^2\overline{i}}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)^2}\left[5-18\cos^2\overline{i}+45\cos^4\overline{i}\right]\cos 3\overline{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned}
$$

In der *Brouwerschen* Theorie werden die langperiodischen Bewegungseinflüsse in der **mittleren Anomalie** zum Zeitpunkt t und nicht zur Epoche t_0 berechnet. Hier zeigt sich neben der Singularität an der kritischen Neigung die erwartete Singularität für kreisförmige Bahnen in den langperiodischen Bewegungseinflüssen erster Ordnung durch das Erdschwerefeld.

$$
\begin{aligned}
\delta M_{lG} \;=\;& \frac{1}{16}\frac{R_E^2\sqrt{1-\overline{e}^2}}{\overline{p}^2}\left\{J_2\left[1-11\cos^2\overline{i}-\frac{40\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\right]+\right.\\
&\qquad\left.+\,5\,\frac{J_4}{J_2}\left[1-3\cos^2\overline{i}-\frac{8\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\right]\right\}\sin 2\overline{\omega}+\\
&+\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\overline{a}}\frac{\sqrt{1-\overline{e}^2}}{\overline{e}}\sin\overline{i}\cos\overline{\omega}+ \qquad (20.34)\\
&+\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3\sqrt{1-\overline{e}^2}^3}{\overline{p}^3}\sin\overline{i}\left\{\frac{4+9\overline{e}^2}{\overline{e}}\left[1-9\cos^2\overline{i}-\frac{24\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\right]\cos\overline{\omega}-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{7}{6}\overline{e}\left[1-5\cos^2\overline{i}-\frac{16\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\right]\cos 3\overline{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta M_{lG} \;=\;& \frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\overline{a}^2\left(1-\overline{e}^2\right)}\frac{\sin^2\overline{i}\,\sqrt{1-\overline{e}^2}}{1-5\cos^2\overline{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\overline{i}\right]+5\,\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\overline{i}\right]\right\}\sin 2\omega+\\
&+\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\overline{a}}\frac{\sqrt{1-\overline{e}^2}}{\overline{e}}\sin\overline{i}\cos\overline{\omega}+ \qquad (20.35)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3\sqrt{1-\bar{e}^2}^3}{\bar{p}^3}\sin\bar{i}\left\{\frac{4+9\bar{e}^2}{\bar{e}}\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega}-\right.$$
$$\left.-\frac{7}{6}\bar{e}\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots$$

$$\delta M_{lG} = \sqrt{1-\bar{e}^2}\sin\bar{i}\left\{e_I\sin\bar{i}\sin 2\bar{\omega}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\bar{e}}\left[e_{II}+e_{IV}\left(4+9\bar{e}^2\right)\left(1-\bar{e}^2\right)\right]\cos\bar{\omega}-e_{III}\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots \qquad (20.36)$$

Anmerkung: Die hier referierte analytische Theorie nach *Brouwer* enthält die lange heiß diskutierte Singularität der kritischen Neigung $1-5\cos^2\bar{i}=0$. Bekanntlich tritt diese Singularität in einer Ephemeridenrechnung nicht auf, wenn in rechtwinkligen Koordinaten vorwärts integriert wird. Dies ist ein Hinweis darauf, dass es sich nicht um eine physikalische Singularität handeln kann, sondern dass sie mit der Wahl der Parameter, in diesem Fall dem Argument der Perizentrums ω als einem Bahnparameter, zu tun hat. So ist auch zu erwarten, dass diese Singularität sich in den langperiodischen Störungen auswirken muss, da diese als Variable das mittlere Argument des Perizentrums $\bar{\omega}$ verwenden. Wenn es also gelingt, in einer anderen analytischen Theorie einen anderen Parameter als Variable zur Beschreibung der langperiodischen Störungen zu verwenden, würde die kritische Neigung nicht auftreten, möglicherweise jedoch eine andere Parameter-spezifische Singularität.

20.2.3 Kurzperiodische Einflussterme erster Ordnung der *Kepler*elemente

(I) Die Variationsgleichungen einiger Bewegungseinflüsse auf Satellitenbahnen

Die kurzperiodischen Einflussterme könnten in einer Theorie erster Ordnung als Parameter die langperiodisch veränderlichen *Kepler*elemente enthalten:

$$\mathbf{a}_l := \bar{\mathbf{a}}_0+\dot{\mathbf{a}}_s(t-t_0)+\delta\mathbf{a}_l \quad . \qquad (20.37)$$

Der Fehler in den Einflusstermen in einer Darstellung erster Ordnung wäre dann immer noch zweiter Ordnung. Aus diesem Grund verwendete *Brouwer* die $\mathbf{a}_l$ in seiner Berechnung der kurzperiodischen Einflussterme. *Lyddane* bemerkte jedoch[1], dass die Transformationen der Variationsgleichungen in den *Kepler*elementen auf beliebige andere Elemente bei Verwendung der $\mathbf{a}_l$ auf Fehler führen können, was mit der Definition solcher Parameter erklärt werden kann. Aus diesem Grund werden im Folgenden ausschließlich mittlere Elemente als Parameter zur Berechnung der kurzperiodischen Einflussterme verwendet.

[1] LYDDANE [1963]

(II) Mittlere schnelle Parameter

Parameter, die sich mit einem Satellitenumlauf periodisch verändern, werden als *schnelle Parameter* bzw. *schnelle Elemente* bezeichnet. Ihre Kenntnis ist daher zur Berechnung der kurzperiodischen Bewegungseinflüsse erforderlich. Mit $\bar{a}$, $\bar{e}$, $\overline{M_0}$ aus Formel (20.18) folgen

die mittlere Anomalie

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + \bar{n}_0 (t - t_0) \quad , \tag{20.38}$$

die mittlere exzentrische Anomalie $\bar{E}$ aus der *Kepler*gleichung

$$\bar{M} = \bar{E} - \bar{e} \sin \bar{E} \quad , \tag{20.39}$$

die mittlere wahre Anomalie $\bar{\upsilon}$ aus den Keplerformeln

$$\begin{aligned} \cos \bar{\upsilon} &= \frac{\cos \bar{E} - \bar{e}}{1 - \bar{e} \cos \bar{E}} \\ \sin \bar{\upsilon} &= \frac{\sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin \bar{E}}{1 - \bar{e} \cos \bar{E}} \quad , \end{aligned} \tag{20.40}$$

der mittlere Radius $\bar{r}$ aus

$$\frac{\bar{r}}{\bar{a}} = 1 - \bar{e} \cos \bar{E} \tag{20.41}$$

$$\frac{\bar{r}}{\bar{a}} = \frac{1 - \bar{e}^2}{1 + \bar{e} \cos \bar{\upsilon}} \quad , \tag{20.42}$$

somit auch

$$\frac{\bar{a}}{\bar{r}} = \frac{1}{1 - \bar{e} \cos \bar{E}} \tag{20.43}$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{r}} = \frac{1 + \bar{e} \cos \bar{\upsilon}}{1 - \bar{e}^2} \tag{20.44}$$

$$\begin{aligned} \cos \bar{\upsilon} &= \frac{\bar{a}}{\bar{r}} \left(\cos \bar{E} - \bar{e} \right) \\ \sin \bar{\upsilon} &= \frac{\bar{a}}{\bar{r}} \sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin \bar{E} \quad , \end{aligned} \tag{20.45}$$

das mittlere Argument der Breite

$$\bar{u} = \bar{\upsilon} + \bar{\omega} \quad . \tag{20.46}$$

Zur Vermeidung virtueller Singularitäten und zur größeren Übersichtlichkeit sind folgende Identitäten nützlich:

$$\frac{1}{\bar{e}}\left[\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^3-\frac{\sqrt{1-\bar{e}^2}}{\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\right] = \frac{1}{\left(1-\bar{e}^2\right)^3}\left[\bar{e}\sqrt{1-\bar{e}^2}+\frac{\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}+3\cos\bar{\upsilon}+3\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}+\bar{e}^2\cos^3\bar{\upsilon}\right] , \tag{20.47}$$

$$\frac{1}{\bar{e}}\left[\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^3-\frac{1}{\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\right] = \frac{1}{\left(1-\bar{e}^2\right)^3}\left[\bar{e}+3\cos\bar{\upsilon}+3\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}+\bar{e}^2\cos^3\bar{\upsilon}\right] , \tag{20.48}$$

$$\frac{1-\sqrt{1-\bar{e}^2}}{\bar{e}} = \frac{\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}} , \tag{20.49}$$

$$\frac{1-\sigma_i\cos\bar{i}}{\sin\bar{i}} = \frac{\sin\bar{i}}{1+\sigma_i\cos\bar{i}} , \quad (\sigma_i=-1,1) , \tag{20.50}$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{r}}+\frac{1}{1-\bar{e}^2} = \frac{2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1-\bar{e}^2} , \tag{20.51}$$

$$\sqrt{1-\bar{e}^2}+\frac{1}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}} = 1+\frac{1-\bar{e}^2}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}} . \tag{20.52}$$

(III) Kurzperiodische Bewegungseinflüsse in den Keplerelementen

Große Bahnhalbachse

$$\delta a_{kG} = \frac{1}{2}J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}}\left\{-\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^3-\frac{\sqrt{1-\bar{e}^2}}{\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\right]+3\sin^2\bar{i}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^3\cos 2\bar{u}\right\}+\ldots \tag{20.53}$$

$$\begin{aligned}\delta a_{kG} = \frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}\left(1-\bar{e}^2\right)^3}\Bigg\{&\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}\right)\Big[1-\sqrt{1-\bar{e}^2}\left(1-\bar{e}^2\right)+\\ &+\bar{e}\left(3\cos\bar{\upsilon}+3\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}+\bar{e}^2\cos^3\bar{\upsilon}\right)\Big]+\\ &+\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}\left[1+3\bar{e}\cos\bar{\upsilon}+3\bar{e}^2\cos^2\bar{\upsilon}+\bar{e}^3\cos^3\bar{\upsilon}\right]\cos 2\bar{u}\Bigg\}+\ldots\end{aligned} \tag{20.54}$$

Der letztere Ausdruck zeigt, dass die kurzperiodische Variation der großen Bahnhalbachse, wenn nur die Bewegungseinflüsse durch J_2 berücksichtigt werden, um einen konstanten Betrag gegenüber dem mittleren Wert $\bar{a}$ verschoben ist. Um diesen konstanten Wert oszilliert die Halbachse und nicht um $\bar{a}$ als Null-lage. Dies wirkt sich dann auch auf die kurzperiodische Variation des Radius aus (vgl. dazu Formel (20.187)). Die konstante Verschiebung beträgt nach *Krause*[1] (vgl.

[1] KRAUSE, H. G. L. [1956 a], p. 568

den *Krause*schen Ausdruck für die kurzperiodische Störung in der großen Bahnhalbachse in Abschnitt 2.9.4 (Band I), $\overline{a}_0, \overline{e}_0$ sind die mittleren Anfangselemente)

$$\delta a_{Krause} = J_2 R_E^2 \frac{\overline{a_0}^2}{\overline{p_0}^3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(1+\frac{3}{2}\overline{e_0}^2\right) \quad . \tag{20.55}$$

Dagegen reduziert *Kozai*[1] die große Bahnhalbachse in seiner Theorie auf den modifizierten konstanten mittleren Wert

$$\overline{a} = \overline{a_0} + \delta a_{Kozai} = \overline{a_0} - J_2 R_E^2 \frac{\overline{a_0}}{\overline{p_0}^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-\overline{e_0}^2} \quad . \tag{20.56}$$

Exzentrizität

$$\begin{aligned}\delta e_{kG} \;=\; & \frac{1}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{a}^2\left(1-\overline{e}^2\right)}\left\{\frac{\left(1-\overline{e}^2\right)^2}{\overline{e}}\left[-\left(1-3\cos^2\overline{i}\right)\left(\left(\frac{\overline{a}}{\overline{r}}\right)^3-\frac{\sqrt{1-\overline{e}^2}}{\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\right)+\right.\right. \\ & \left. + 3\sin^2\overline{i}\left(\left(\frac{\overline{a}}{\overline{r}}\right)^3-\frac{1}{\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\right)\cos 2\overline{u}\right]- \\ & \left. - \sin^2\overline{i}\left[3\cos(2\overline{\omega}+\overline{\upsilon})+\cos(2\overline{\omega}+3\overline{\upsilon})\right]\right\}+\ldots\end{aligned} \tag{20.57}$$

$$\begin{aligned}\delta e_{kG} \;=\; & \frac{1}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\left\{-\left(1-3\cos^2\overline{i}\right)\left[\overline{e}\sqrt{1-\overline{e}^2}+\frac{\overline{e}}{1+\sqrt{1-\overline{e}^2}}+\right.\right. \\ & \left. + 3\cos\overline{\upsilon}+3\overline{e}\cos^2\overline{\upsilon}+\overline{e}^2\cos^3\overline{\upsilon}\right]+ \\ & + 3\sin^2\overline{i}\left[\overline{e}+3\cos\overline{\upsilon}+3\overline{e}\cos^2\overline{\upsilon}+\overline{e}^2\cos^3\overline{\upsilon}\right]\cos 2\overline{u}- \\ & \left. - \sin^2\overline{i}\left(1-\overline{e}^2\right)\left[3\cos(2\overline{\omega}+\overline{\upsilon})+\cos(2\overline{\omega}+3\overline{\upsilon})\right]\right\}+\ldots\end{aligned} \tag{20.58}$$

Inklination

$$\delta i_{kG} \;=\; \frac{1}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\sin\overline{i}\cos\overline{i}\left\{3\cos 2\overline{u}+3\overline{e}\cos(2\overline{\omega}+\overline{\upsilon})+\overline{e}\cos(2\overline{\omega}+3\overline{\upsilon})\right\}+\ldots \tag{20.59}$$

Rektaszension des aufsteigenden Knotens

$$\begin{aligned}\delta\Omega_{kG} \;=\; & -\frac{1}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\cos\overline{i}\left\{6\left[\overline{\upsilon}-\overline{M}+\overline{e}\sin\overline{\upsilon}\right]-\right. \\ & \left. -\left[3\sin 2\overline{u}+3\overline{e}\sin(2\overline{\omega}+\overline{\upsilon})+\overline{e}\sin(2\overline{\omega}+3\overline{\upsilon})\right]\right\}+\ldots\end{aligned} \tag{20.60}$$

[1] KOZAI, Y. [1959], p. 372

Argument des Perigäums

$$\begin{aligned}\delta\omega_{kG} \;=\; & \frac{1}{8}J_2\,\frac{1}{\bar e}\,\frac{R_E^2}{\bar a^2\left(1-\bar e^2\right)}\left\{-2\left(1-3\cos^2\bar i\right)\left[\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\left(1-\bar e^2\right)+\frac{\bar a}{\bar r}+1\right]\sin\bar\upsilon+\right.\\ & +3\sin^2\bar i\left[\left(-\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\left(1-\bar e^2\right)-\frac{\bar a}{\bar r}+1\right)\sin(2\bar\omega+\bar\upsilon)+\right.\\ & \left.\left.+\left(\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\left(1-\bar e^2\right)+\frac{\bar a}{\bar r}+\frac{1}{3}\right)\sin(2\bar\omega+3\bar\upsilon)\right]\right\}+\\ & +\frac{1}{8}J_2\;\frac{R_E^2}{\bar p^2}\left\{-6\left(1-5\cos^2\bar i\right)\left[\bar\upsilon-\bar M+\bar e\sin\bar\upsilon\right]+\right.\\ & \left.+\left(3-5\cos^2\bar i\right)\left[3\sin 2\bar u+3\bar e\sin(2\bar\omega+\bar\upsilon)+\bar e\sin(2\bar\omega+3\bar\upsilon)\right]\right\}+\ldots\end{aligned}\tag{20.61}$$

$$\begin{aligned}\delta\omega_{kG} \;=\; & -\frac{\delta M_{kG}}{\sqrt{1-\bar e^2}}-\\ & -\frac{1}{8}J_2\;\frac{R_E^2}{\bar p^2}\left\{6\left(1-5\cos^2\bar i\right)\left[\bar\upsilon-\bar M+\bar e\sin\bar\upsilon\right]-\right.\\ & \left.-\left(3-5\cos^2\bar i\right)\left[3\sin 2\bar u+3\bar e\sin(2\bar\omega+\bar\upsilon)+\bar e\sin(2\bar\omega+3\bar\upsilon)\right]\right\}+\ldots\end{aligned}\tag{20.62}$$

Mittlere Anomalie

$$\begin{aligned}\delta M_{kG} \;=\; & \frac{1}{8}J_2\;\frac{R_E^2}{\bar a^2}\,\frac{1}{\bar e}\,\frac{\sqrt{1-\bar e^2}}{1-\bar e^2}\left\{2\left(1-3\cos^2\bar i\right)\left[\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\left(1-\bar e^2\right)+\frac{\bar a}{\bar r}+1\right]\sin\bar\upsilon-\right.\\ & -3\sin^2\bar i\left[\left(-\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\left(1-\bar e^2\right)-\frac{\bar a}{\bar r}+1\right)\sin(2\bar\omega+\bar\upsilon)+\right.\\ & \left.\left.+\left(\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\left(1-\bar e^2\right)+\frac{\bar a}{\bar r}+\frac{1}{3}\right)\sin(2\bar\omega+3\bar\upsilon)\right]\right\}+\ldots\end{aligned}\tag{20.63}$$

$$\delta M_{kG} = \frac{1}{8} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}^2} \frac{\sqrt{1-\overline{e}^2}}{\overline{e}} \left\{ 2\left(1-3\cos^2\overline{i}\right)\left[3+3\overline{e}\cos\overline{\upsilon}-\overline{e}^2\sin^2\overline{\upsilon}\right]\sin\overline{\upsilon} + \right.$$
$$+ 3\sin^2\overline{i}\left[\left(1+3\overline{e}\cos\overline{\upsilon}+\overline{e}^2+\overline{e}^2\cos^2\overline{\upsilon}\right)\sin(2\overline{\omega}+\overline{\upsilon})- \right. \quad (20.64)$$
$$\left.\left. -\left(\frac{7}{3}+3\overline{e}\cos\overline{\upsilon}+\overline{e}^2\cos^2\overline{\upsilon}-\frac{\overline{e}^2}{3}\right)\sin(2\overline{\omega}+3\overline{\upsilon})\right]\right\}+\ldots$$

(20.65)

$$\delta M_{kG} = \frac{1}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}^2} \sqrt{1-\overline{e}^2} \left\{ \left(1-3\cos^2\overline{i}\right)\left[\frac{3}{\overline{e}}+3\cos\overline{\upsilon}-\overline{e}\sin^2\overline{\upsilon}\right]\sin\overline{\upsilon}- \right.$$
$$- 3\sin^2\overline{i}\left[3\left(\frac{1}{\overline{e}}+3\cos\overline{\upsilon}+\overline{e}+\overline{e}\cos^2\overline{\upsilon}\right)\sin\overline{\upsilon}\cos 2\overline{u}+ \right. \quad (20.66)$$
$$\left.\left. + 2\frac{\left(1-\overline{e}^2\right)}{\overline{e}}\sin(2\overline{\omega}+3\overline{\upsilon})\right]\right\}+\ldots$$

Zusammenfassend ergeben sich

Oskulierende Keplerelemente

erster Ordnung beeinflusst durch das Schwerefeld der Erde zur Zeit *t*:

$$\wedge \qquad\qquad \wedge$$
(20.67)

Ergebnisse

Zusammenfassung einiger Ergebnisse über die Bewegungseinflüsse erster Ordnung auf die *Kepler*elemente durch das Schwerefeld des Zentralkörpers:

1. *Die Keplerelemente erlauben eine Zerlegung in einen ungestörten, säkular, lang- und kurzperiodisch beeinflussten Anteil.*
2. *Die langperiodischen Bewegungseinflüsse 1. Ordnung durch das Erdschwerefeld haben als variablen Parameter ausschließlich das mittlere Argument des Perigäums. Dieses tritt nur mit ein- bzw. zweifacher Amplitude auf.*
3. *Die kurzperiodischen Bewegungseinflüsse 1. Ordnung durch das Erdschwerefeld haben als variable Parameter die mittlere wahre Anomalie und das mittlere Argument des Perigäums. Diese treten mit unterschiedlicher Amplitude auf.*
4. *Die Singularitäten für äquatoriale Bahnen sowie für Bahnen mit kritischer Neigung zeigen sich in einer Theorie erster Ordnung durch das Schwerefeld des Zentralkörpers nur in den langperiodischen Bewegungseinflüssen, während der säkulare und der kurzperiodische Einflussanteil diese Singularität nicht aufweisen.*

5. *Die Singularitäten für kreisförmige Bahnen zeigen sich in einer Theorie erster Ordnung durch das Schwerefeld des Zentralkörpers nur in den lang- und kurzperiodischen Bewegungseinflüssen der Elemente ω und M.*

6. *Säkulare Bewegungseinflüsse gibt es in einer Theorie erster Ordnung durch das Schwerefeld des Zentralkörpers nur in den Elementen Ω, ω und der mittleren Anomalie M bzw. M_0.*

7. *Die große Bahnhalbachse weist nur kurzperiodische Bewegungseinflüsse infolge des Schwerefeldes des Zentralkörpers auf. Dies ist eine Folge davon, dass dieser Bewegungseinfluss konservativ ist.*

8. *In den säkularen Einflusstermen der Keplerelemente kommt die mittlere Bewegung und damit die zentrische Gravitationskonstante explizit vor, nicht aber in den lang- und kurzperiodischen Einflusstermen.*

20.2.4 Weitere Bahnparameter

Im Folgenden werden die Störungen infolge der Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers auf einige weitere Bahnparameter berechnet. Dies basiert auf der Arbeit von *Lyddane*[1], der nachgewiesen hatte, dass die von *Brouwer* berechneten Störformeln der *Kepler*elemente auf beliebige andere Elemente transformiert werden können. Für verschiedene Anwendungen kommen unterschiedliche Elemente in Frage. Insbesondere konzentriert sich das Interesse auf Elemente, welche die scheinbaren Singularitäten für kreis- und/oder äquatoriale Bahnen vermeiden, etwa die „äquinoktialen" Elemente sowie schnelle Elemente, die in irgendeiner Form mit dem Zustandsvektor zusammenhängen, ferner solche, mit denen sich die Störeinflüsse weiterer Störungen etwa durch den Luftwiderstand leichter berechnen lassen.

In den zuvor aufgelisteten kurzperiodischen Störanteilen fällt auf, dass als schnelles Argument nur die mittlere wahre Anomalie $\bar{\upsilon}$ enthalten ist. Sie wird aus der mittleren mittleren Anomalie $\bar{M}$ durch Auflösung der *Kepler*gleichung (20.39) und der *Kepler*formeln (20.40) berechnet. Zur Berechnung der oskulierenden wahren Anomalie $\bar{\upsilon}$ aus der mit den Formeln (20.67) berechneten oskulierenden mittleren Anomalie *M* ist anschließend nochmals eine Auflösung der *Kepler*gleichung erforderlich. Diese zweite Auflösung der *Kepler*gleichung lässt sich umgehen, wenn die Störungen in der wahren Anomalie υ bzw. dem Argument der Breite *u* bzw. der wahren Länge in der Bahn *l* oder einer damit verwandten Größe, d. h. einer trigonometrischen Funktion einer dieser Variablen oder Kombination mit anderen Elementen, explizit hergeleitet wird. Auf diese Weise kann, wie *Hoots* gezeigt hat, nicht nur Rechenzeit gespart, sondern auch die Fehlerwahrscheinlichkeit der numerischen Rechnung beträchtlich reduziert werden.

Für die Umrechnungen von den Störungen in den *Kepler*elementen auf andere Elemente, die im Folgenden durchgeführt werden, sind neben den Identitäten (20.47) noch folgende trigonometrische Identitäten nützlich:

$$\begin{aligned} \cos(2\omega+\upsilon) &= \cos 2u\cos\upsilon + \sin 2u\sin\upsilon \\ \sin(2\omega+\upsilon) &= \sin 2u\cos\upsilon - \cos 2u\sin\upsilon \end{aligned} \qquad (20.68)$$

[1] LYDDANE [1963]

$$\begin{aligned} \cos(2\omega+3\upsilon) &= \cos 2u\cos\upsilon - \sin 2u\sin\upsilon \\ \sin(2\omega+3\upsilon) &= \sin 2u\cos\upsilon + \cos 2u\sin\upsilon \end{aligned} \tag{20.69}$$

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos(2\omega+3\upsilon)\cos\upsilon + \sin(2\omega+3\upsilon)\sin\upsilon \\ \sin 2u &= \sin(2\omega+3\upsilon)\cos\upsilon - \cos(2\omega+3\upsilon)\sin\upsilon \end{aligned} \tag{20.70}$$

$$\begin{aligned} \cos 2u &= \cos(2\omega+\upsilon)\cos\upsilon - \sin(2\omega+\upsilon)\sin\upsilon \\ \sin 2u &= \sin(2\omega+\upsilon)\cos\upsilon + \cos(2\omega+\upsilon)\sin\upsilon \end{aligned} \tag{20.71}$$

$$\begin{aligned} \sin\upsilon\cos 2u &= \frac{1}{2}\left[\sin(2\omega+3\upsilon) - \sin(2\omega+\upsilon)\right] \\ \cos\upsilon\sin 2u &= \frac{1}{2}\left[\sin(2\omega+3\upsilon) + \sin(2\omega+\upsilon)\right] \end{aligned} \tag{20.72}$$

$$\begin{aligned} \cos\upsilon\cos 2u &= \frac{1}{2}\left[\cos(2\omega+3\upsilon) + \cos(2\omega+\upsilon)\right] \\ \sin\upsilon\sin 2u &= \frac{1}{2}\left[-\cos(2\omega+3\upsilon) + \cos(2\omega+\upsilon)\right] \end{aligned} \tag{20.73}$$

20.2.4.1 Exzentrische Anomalie E

Die Störungen in der exzentrischen Anomalie werden auf die in den *Kepler*schen Elementen mit Hilfe der *Kepler*gleichung zurückgeführt. Mit Zerlegung in einen mittleren und periodischen Anteil wird mit $M = \bar{M} + \delta M$, $e = \bar{e} + \delta e$

$$\bar{M} + \delta M = E + (\bar{e} + \delta e)\sin E \tag{20.74}$$

und daraus die entsprechende Zerlegung für *E* erhalten. Man kann jedoch auch direkt um den mittleren Wert von *E* zum Zeitpunkt *t* entwickeln (siehe Formel (15.28))

$$E = \bar{E} + \delta E = \bar{E} + \left.\frac{\partial E}{\partial M}\right|_{(e,M)} \delta M + \left.\frac{\partial E}{\partial e}\right|_{(e,M)} \delta e \tag{20.75}$$

und erhält mit dem mittleren Anteil $\bar{E}$ aus der *Kepler*gleichung (20.39)

$$\bar{M} = \bar{E} - \bar{e}\sin\bar{E} \tag{20.76}$$

schließlich für den periodischen Anteil unter Verwendung der Ausdrücke (15.29) die Näherung

$$\sin E = \sin(\bar{E} + \delta E) \approx \sin\bar{E} + \delta E\cos\bar{E} \quad . \tag{20.77}$$

Dies in die *Kepler*gleichung (20.39)

$$M = \bar{M} + \delta M = E + \delta E - (\bar{e} + \delta e)\sin(\bar{E} + \delta E) \tag{20.78}$$

eingesetzt führt auf

$$\delta E = \frac{\delta M + \sin\bar{E}\,\delta e}{1 - \bar{e}\cos\bar{E}} \tag{20.79}$$

bzw. mit den Formeln (20.40) auch

$$\delta E \;=\; \frac{1+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1-\bar{e}^{\,2}}\left(\delta M+\sin\bar{E}\;\delta e\right) \quad .$$

Da δM und δe die lang- und kurzperiodischen Störanteile enthalten, zeigt die Zerlegung

$$\delta E=\delta E_l+\delta E_k \;=\; \frac{\delta M_l}{1-\bar{e}^{\,2}}+\left\{\frac{\delta M_k}{1-\bar{e}^{\,2}}+\frac{\sin\bar{E}}{1-\bar{e}^{\,2}}\,\delta e+\frac{\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1-\bar{e}^{\,2}}\left(\delta M+\sin\bar{E}\,\delta e\right)\right\} \qquad (20.80)$$

eine andere Strukturierung der lang- und kurzperiodischen Störungen als im Fall der mittleren Anomalie. Die langperiodischen Störungen in *M* werden zum Teil den lang- und zum Teil den kurzperiodischen Störungen in *E*, die langperiodischen Störungen in *e* ausschließlich den kurzperiodischen Störungen in *E* zugeschlagen.

Sodann folgt mit den Formeln (20.23), (20.26), (20.35) und (20.63):

Langperiodischer Störanteil:

$$\delta E_{lG}=\frac{\delta M_{lG}}{1-\bar{e}^{\,2}} \qquad (20.81)$$

$$\delta E_{lG}=\frac{\sin\bar{i}}{\sqrt{1-\bar{e}^{\,2}}}\left\{e_I\sin\bar{i}\sin 2\bar{\omega}-\frac{1}{\bar{e}}\left[e_{II}+e_{IV}\left(4+9\bar{e}^{\,2}\right)\left(1-\bar{e}^{\,2}\right)\right]\cos\bar{\omega}-e_{III}\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots \qquad (20.82)$$

$$\begin{aligned}\delta E_{lG}=\;&\frac{1}{16}\,\frac{R_E^2}{\bar{p}^{\,2}}\,\sqrt{1-\bar{e}^{\,2}}\,\frac{\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right]+5\,\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\}\sin 2\bar{\omega}+\\&+\frac{1}{2}\,\frac{J_3}{J_2}\,\frac{R_E}{\bar{p}}\,\frac{\sqrt{1-\bar{e}^{\,2}}}{\bar{e}}\sin\bar{i}\cos\bar{\omega}+\\&+\frac{5}{32}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{R_E^3}{\bar{p}^{\,3}}\,\sqrt{1-\bar{e}^{\,2}}\sin\bar{i}\left\{\frac{4+9\bar{e}^{\,2}}{\bar{e}}\,\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega}-\right.\\&\left.-\frac{7}{6}\,\bar{e}\,\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots\end{aligned} \qquad (20.83)$$

Aus Formel (20.58) ergibt sich der Hilfsausdruck

$$\begin{aligned}\sin\bar{\upsilon}\,\delta e_{kG} \;=\;&-\frac{1}{4}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{p}^{\,2}}\left\{\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[\bar{e}+\frac{\bar{e}\left(1-\bar{e}^{\,2}\right)}{1+\sqrt{1-\bar{e}^{\,2}}}+3\cos\bar{\upsilon}+3\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}+\bar{e}^{\,2}\cos^3\bar{\upsilon}\right]\sin\bar{\upsilon}+\right.\\&\left.+2\sin^2\bar{i}\left(1-\bar{e}^{\,2}\right)\sin 2\bar{u}+\right.\\&+\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}\left[\bar{e}+3\cos\bar{\upsilon}+3\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}+\bar{e}^{\,2}\cos^3\bar{\upsilon}+2\bar{e}^{\,2}\cos\bar{\upsilon}\right]\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)-\\&\left.-\frac{1}{2}\sin^2\bar{i}\left[3\bar{e}+7\cos\bar{\upsilon}+9\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}+3\bar{e}^{\,2}\cos^3\bar{\upsilon}+2\bar{e}^{\,2}\cos\bar{\upsilon}\right]\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right\}+\ldots\end{aligned} \qquad (20.84)$$

Damit folgt für den kurzperiodischen Störanteil:

$$\delta E_{kG} = \frac{\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1-\bar{e}^2}\,\delta M_{lG} + \frac{\bar{a}}{\bar{r}}\,\delta M_{kG} + \frac{\sin\bar{\upsilon}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left(\delta e_{lG} + \delta e_{kG}\right) \tag{20.85}$$

$$\begin{aligned}\delta E_{kG} = {} & \frac{\sin\bar{i}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left\{e_I\,\bar{e}\sin\bar{i}\,\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right) - e_{II}\cos\bar{u} - e_{III}\,\bar{e}\cos\left(\bar{\upsilon}+3\bar{\omega}\right) - \right. \\ & \left. - e_{IV}\left[\left(4+9\bar{e}^2\right)\left(1-\bar{e}^2\right)\cos\bar{\upsilon}\cos\bar{\omega} - \frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}\sin\bar{\upsilon}\,\sin\bar{\omega}\right]\right\} + \\ & + \frac{\bar{a}}{\bar{r}}\,\delta M_{kG} + \frac{\sin\bar{\upsilon}\,\delta e_{kG}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}} + \ldots\end{aligned} \tag{20.86}$$

$$\begin{aligned}\delta E_{kG} = {} & \frac{1}{16}\,\frac{R_E^2\,\bar{e}\,\sqrt{1-\bar{e}^2}}{\bar{p}^2}\,\frac{\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right] + 5\,\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\}\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right) + \\ & + \frac{1}{2}\,\frac{J_3}{J_2}\,\frac{R_E\,\sqrt{1-\bar{e}^2}}{\bar{p}}\sin\bar{i}\,\cos\bar{u} + \\ & - \frac{\sin\bar{i}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left\{\frac{35}{192}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{R_E^3\;\bar{e}\left(1-\bar{e}^2\right)}{\bar{p}^3}\,\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\,\bar{e}\cos\left(\bar{\upsilon}+3\bar{\omega}\right) - \right. \\ & \quad - \frac{5}{32}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\;\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\;\cdot \\ & \quad \left.\cdot\left[\left(4+9\bar{e}^2\right)\left(1-\bar{e}^2\right)\cos\bar{\upsilon}\cos\bar{\omega} - \frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}\sin\bar{\upsilon}\,\sin\bar{\omega}\right]\right\} + \\ & + \frac{1}{4}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left\{\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[\frac{3}{\bar{e}} - 2\,\bar{e} + 3\cos\bar{\upsilon} - \bar{e}^2\cos\bar{\upsilon} + \bar{e}\cos^2\bar{\upsilon} - \right.\right. \\ & \qquad \left.\left. - \frac{\bar{e}\left(1-\bar{e}^2\right)}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]\sin\bar{\upsilon} - \right. \\ & \quad - 2\sin^2\bar{i}\,\left(1-\bar{e}^2\right)\sin 2\bar{u} + \\ & \quad + \frac{3}{2}\sin^2\bar{i}\left[\frac{1}{\bar{e}} + 3\cos\bar{\upsilon} + \bar{e}\cos^2\bar{\upsilon} - \bar{e}^2\cos\bar{\upsilon}\right]\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right) - \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}\sin^2\bar{i}\left[\frac{7}{\bar{e}} - 4\,\bar{e} + 9\cos\bar{\upsilon} - 3\bar{e}^2\cos\bar{\upsilon} + 3\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}\right]\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right\} + \ldots\end{aligned} \tag{20.87}$$

Die oskulierende exzentrische Anomalie wird insgesamt bei Berücksichtigung der Störungen durch das Erdschwerefeld aus

$$E = \bar{E} + \delta E_{lG} + \delta E_{kG} + \ldots \tag{20.88}$$

berechnet. Der mittlere Anteil $\bar{E}$ ist keine lineare Funktion der Zeit, sondern muss durch Lösung der *Kepler*gleichung (20.39) aus der mittleren mittleren Anomalie $\bar{M}$ berechnet werden.

- *Die* **exzentrische Anomalie** *lässt sich wie die mittlere Anomalie für alle elliptischen Bahnen als schnelles Element verwenden, wenn die zugehörige mittlere Bahn nicht kreisförmig ist. In einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes zeigen sich die Singularitäten für Bahnen mit kritischer Neigung in den lang- und kurzperiodischen Störanteilen. Im kurzperiodischen Störanteil sind auch Terme mit J_3, J_4 und J_5 enthalten. Die Keplergleichung muss nur einmal gelöst werden.*

20.2.4.2 Wahre Anomalie

Die Störungen in der wahren Anomalie können auf die in den *Kepler*schen Elementen mit Hilfe der *Kepler*gleichung und der *Kepler*formeln zurückgeführt werden. Die mittlere wahre Anomalie $\bar{\upsilon}$ ist aus Formel (20.40) bekannt. Mit Entwicklung um diesen mittleren Wert

$$\upsilon = \bar{\upsilon} + \delta\upsilon \tag{20.89}$$

kann der periodische Störanteil entweder direkt auf die *Kepler*elemente *e* und *M*

$$\delta\upsilon = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)} \delta M + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)} \delta e$$

und mit den Formeln in Abschnitt 15.2.6 auch

$$\delta\upsilon = \left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2 \sqrt{1-\bar{e}^2}\,\delta M + \left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}} + \frac{1}{1-\bar{e}^2}\right)\sin\upsilon\,\delta e \tag{20.90}$$

oder auf *e* und die exzentrische Anomalie *E* mit

$$\delta\upsilon = \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial E}\right|_{(e,E)} \delta E + \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,E)} \delta e$$

und mit den Formeln in Abschnitt 15.2.8 auch

$$\delta\upsilon = \frac{1+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\,\delta E + \frac{\sin\bar{\upsilon}}{1-\bar{e}^2}\,\delta e \tag{20.91}$$

zurückgeführt werden.

Die Formeln (20.80) und (20.91) zeigen, dass die langperiodischen Störungen in *M* zum Teil den langperiodischen Störungen und zum Teil den kurzperiodischen in υ und alle periodischen Störungen in *e* ausschließlich den kurzperiodischen Störungen in υ zugeordnet werden:

$$\delta\upsilon = \delta\upsilon_l + \delta\upsilon_k = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\,\delta E_l + \left\{\frac{\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left(\delta E_l + \delta E_k\right) + \frac{\sin\bar{\upsilon}}{1-\bar{e}^2}\left(\delta e_l + \delta e_k\right)\right\} \quad . \tag{20.92}$$

Im Einzelnen ergibt sich mit den Formeln (20.23), (20.34), (20.83) und (20.87) im Fall der Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld der Erde:

Langperiodischer Störanteil:

$$\delta\upsilon_{lG} = \frac{\delta E_{lG}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}} = \frac{\delta M_{lG}}{\left(\sqrt{1-\bar{e}^2}\right)^3} \tag{20.93}$$

$$\delta\upsilon_{Gl} = \frac{\sin\bar{i}}{1-\bar{e}^2}\left\{e_I \sin\bar{i}\sin 2\bar{\omega} - \frac{1}{\bar{e}}\left[e_{II} + e_{IV}\left(4+9\bar{e}^2\right)\left(1-\bar{e}^2\right)\right]\cos\bar{\omega} - e_{III}\cos 3\bar{\omega}\right\} + \ldots \quad (20.94)$$

$$\begin{aligned}\delta\upsilon_{lG} = {} & \frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\frac{\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right]+5\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\}\sin 2\bar{\omega} + \\ & + \frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{p}}\frac{\sin\bar{i}}{\bar{e}}\cos\bar{\omega} + \\ & + \frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\sin\bar{i}\left\{\frac{4+9\bar{e}^2}{\bar{e}}\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega} - \right. \\ & \left. - \frac{7}{6}\bar{e}\,\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}\right\} + \ldots\end{aligned} \quad (20.95)$$

Kurzperiodischer Störanteil:

$$\begin{aligned}\delta\upsilon_{kG} = {} & \frac{\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{\left(\sqrt{1-\bar{e}^2}\right)^3}\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\delta M_{lG} + \left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2\sqrt{1-\bar{e}^2}\;\delta M_{kG} + \\ & + \left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}} + \frac{1}{1-\bar{e}^2}\right)\sin\bar{\upsilon}\left(\delta e_{lG} + \delta e_{kG}\right)\end{aligned} \quad (20.96)$$

$$\begin{aligned}\delta\upsilon_{kG} = {} & \frac{2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1-\bar{e}^2}\left[\frac{\bar{e}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\cos\bar{\upsilon}\,\delta M_{lG} + \sin\bar{\upsilon}\left(\delta e_{lG} + \delta e_{kG}\right)\right] + \\ & + \left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2\sqrt{1-\bar{e}^2}\;\delta M_{kG} + \ldots\end{aligned} \quad (20.97)$$

$$\begin{aligned}\delta\upsilon_{kG} = {} & \frac{1}{4}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\left\{\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[\frac{3}{\bar{e}}+3\cos\bar{\upsilon}+\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}-\bar{e}\,\frac{2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]\sin\bar{\upsilon} - \right. \\ & - 4\sin^2\bar{i}\sin 2\bar{u} + \\ & + \frac{3}{2}\sin^2\bar{i}\left[\frac{1}{\bar{e}}+3\cos\bar{\upsilon}+\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}-\frac{2}{3}\bar{e}\right]\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right) - \\ & \left. - \frac{1}{2}\sin^2\bar{i}\left[\frac{7}{\bar{e}}+9\cos\bar{\upsilon}+3\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}+2\bar{e}\right]\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right\} +\end{aligned} \quad (20.98)$$

$$+\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\frac{\bar{e}\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right]+\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\}\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{p}}\sin\bar{i}\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\cos\bar{u}+$$

$$+\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\sin\bar{i}\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\left\{\left[\left(4+9\bar{e}^2\right)\cos\bar{\upsilon}\cos\bar{\omega}-\frac{4+3\bar{e}^2}{\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\sin\bar{\upsilon}\sin\bar{\omega}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}-\frac{7}{6}\bar{e}^2\cos\left(\bar{\upsilon}+3\bar{\omega}\right)\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right\}$$

Die oskulierende wahre Anomalie wird insgesamt bei Berücksichtigung der Störungen durch das Erdschwerefeld aus

$$\upsilon = \bar{\upsilon}+\delta\upsilon_{lG}+\delta\upsilon_{kG}+\ldots \tag{20.99}$$

berechnet. Der mittlere Anteil $\bar{\upsilon}$ ist keine lineare Funktion der Zeit, sondern muss nach Lösung der *Kepler*gleichung (20.39) und mit den *Kepler*formeln (20.40) über die mittlere mittlere Anomalie $\bar{M}$ und die mittlere exzentrische Anomalie $\bar{E}$ berechnet werden.

- *Die* **wahre Anomalie** *lässt sich wie die mittlere und die exzentrische Anomalie für alle elliptischen Bahnen als schnelles Element verwenden, wenn die zugehörige mittlere Bahn nicht kreisförmig ist. In einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes zeigen sich die Singularitäten für Bahnen mit kritischer Neigung in den lang- und kurzperiodischen Störanteilen. Im kurzperiodischen Störanteil sind auch Terme mit J_3, J_4 und J_5 enthalten. Die Keplergleichung muss nur einmal gelöst werden.*

20.2.4.3 Argument der Breite

Das Argument der Breite *u* wird unmittelbar auf die wahre Anomalie durch die Definitionsgleichung

$$u = \upsilon+\omega$$

zurückgeführt. Somit führen die Formeln (20.67) und (20.89) auf

$$u = \bar{\upsilon}+\bar{\omega}+\delta\upsilon+\delta\omega \quad . \tag{20.100}$$

Der mittlere Anteil und der periodische Anteil des Argumentes der Breite werden daher aus

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \overline{\upsilon+\omega} = \bar{\upsilon}+\bar{\omega}\\ \delta u &= \delta\left(\upsilon+\omega\right) = \delta\upsilon+\delta\omega\end{aligned} \tag{20.101}$$

berechnet. Für die periodischen Anteile ergibt sich im Einzelnen:

Langperiodischer Störanteil:

$$\delta u_{lG} = \delta\upsilon_{lG}+\delta\omega_{lG} = \frac{\delta M_{lG}}{\left(\sqrt{1-\bar{e}^2}\right)^3}+\delta\omega_{lG} = \frac{\delta E_{lG}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}+\delta\omega_{lG} \tag{20.102}$$

$$\delta u_{lG} = -\frac{1}{32}\frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\frac{\overline{e}^2}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)}\Bigg[J_2\left(1-43\cos^2\overline{i}+155\cos^4\overline{i}-255\cos^6\overline{i}\right)+$$

$$+5\frac{J_4}{J_2}\left(1-19\cos^2\overline{i}+75\cos^4\overline{i}-105\cos^6\overline{i}\right)\Bigg]\sin 2\overline{\omega}\,-$$

$$+\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\overline{p}}\frac{\cos^2\overline{i}}{\sin\overline{i}}\cos\overline{\omega}+ \qquad (20.103)$$

$$+\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\overline{p}^3}\overline{e}\Bigg\{\Bigg[\frac{\left(10+3\overline{e}^2\right)\sin^2\overline{i}+\left(4+3\overline{e}^2\right)\cos^2\overline{i}}{\sin\overline{i}}-$$

$$-\left(26+9\overline{e}^2\right)\sin\overline{i}\Bigg]\frac{1-14\cos^2\overline{i}+21\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\cos\overline{\omega}-$$

$$-6\left(4+3\overline{e}^2\right)\frac{\sin\overline{i}\cos^2\overline{i}}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)^2}\left(3-14\cos^2\overline{i}+35\cos^4\overline{i}\right)\cos\overline{\omega}-$$

$$-\frac{7}{18}\Bigg[\left(3+2\overline{e}^2\right)\sin\overline{i}-\overline{e}^2\frac{\cos^2\overline{i}}{\sin\overline{i}}+3\Bigg]\frac{1-10\cos^2\overline{i}+9\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\cos 3\overline{\omega}-$$

$$-\frac{7}{9}\overline{e}^2\frac{\sin\overline{i}\cos^2\overline{i}}{\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)^2}\left[5-18\cos^2\overline{i}+45\cos^4\overline{i}\right]\cos 3\overline{\omega}\Bigg\}+\ldots$$

Kurzperiodischer Störanteil:

$$\delta u_{kG} = \delta\upsilon_{kG}+\delta\omega_{kG} \qquad (20.104)$$

$$\delta u_{kG} = \frac{1}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\Bigg\{\overline{e}\left(1-3\cos^2\overline{i}\right)\left[1-\frac{2+\overline{e}\cos\overline{\upsilon}}{1+\sqrt{1-\overline{e}^2}}\right]\sin\overline{\upsilon}-$$

$$-3\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)\left(\overline{\upsilon}-\overline{M}+\overline{e}\sin\overline{\upsilon}\right)+\frac{1}{2}\left(1-7\cos^2\overline{i}\right)\sin 2\overline{u}+$$

$$+\overline{e}\left(2-5\cos^2\overline{i}\right)\sin\left(\overline{\upsilon}+2\overline{\omega}\right)-\overline{e}\cos^2\overline{i}\sin\left(3\overline{\upsilon}+2\overline{\omega}\right)\Bigg\}+ \qquad (20.105)$$

$$+\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\frac{\overline{e}\left(2+\overline{e}\cos\overline{\upsilon}\right)\sin^2\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\overline{i}\right]+5\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\overline{i}\right]\right\}\sin\left(\overline{\upsilon}+2\overline{\omega}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\overline{p}}\sin\overline{i}\left(2+\overline{e}\cos\overline{\upsilon}\right)\cos\overline{u}+$$

$$+\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\overline{p}^3}\sin\overline{i}\left(2+\overline{e}\cos\overline{\upsilon}\right)\Bigg\{\Bigg[\left(4+9\overline{e}^2\right)\cos\overline{\upsilon}\cos\overline{\omega}-\frac{4+3\overline{e}^2}{\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\sin\overline{\upsilon}\sin\overline{\omega}\Bigg]\cdot$$

$$\cdot\frac{1-14\cos^2\overline{i}+21\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}-\frac{7}{6}\overline{e}^2\cos\left(\overline{\upsilon}+3\overline{\omega}\right)\frac{1-10\cos^2\overline{i}+9\cos^4\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\Bigg\}+$$

Das oskulierende Argument der Breite wird insgesamt bei Berücksichtigung der Störungen durch das Erdschwerefeld aus

$$u = \bar{u} + \delta u_{lG} + \delta u_{kG} + \ldots \tag{20.106}$$

berechnet. Der mittlere Anteil $\bar{u}$ ist keine lineare Funktion der Zeit, sondern muss nach Lösung der *Kepler*gleichung (20.39) und mit den *Kepler*formeln (20.40) aus der mittleren mittleren Anomalie $\bar{M}$, der mittleren exzentrischen Anomalie $\bar{E}$ und dem mittleren Argument des Perigäums $\bar{\omega}$ aus (20.18) berechnet werden.

- *Das **Argument der Breite** lässt sich wie die wahre, exzentrische und mittlere Anomalie für alle elliptischen Bahnen als schnelles Element verwenden, wenn die zugehörige mittlere Bahn nicht äquatorial ist. In einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes zeigen sich die Singularitäten für Bahnen mit kritischer Neigung in den lang- und kurzperiodischen Störanteilen. Im kurzperiodischen Störanteil sind auch Terme mit J_3, J_4 und J_5 enthalten. Die Keplergleichung muss nur einmal gelöst werden.*

20.2.4.4 Mittleres Argument der Breite M+ ω

Das mittlere Argument der Breite $M + \omega$ ergänzt das Argument der Breite $u = \upsilon + \omega$, das in diesem Zusammenhang eigentlich als *wahres Argument der Breite* bezeichnet werden müsste, was jedoch nicht allgemein üblich ist. Zerlegung in einen mittleren und periodischen Anteil führt auf

$$M + \omega = \bar{M} + \bar{\omega} + \delta M + \delta\omega$$

somit

$$\begin{aligned} \overline{M+\omega} &= \bar{M} + \bar{\omega} \\ \delta(M+\omega) &= \delta M + \delta\omega \\ M+\omega &= \overline{M+\omega} + \delta(M+\omega) \quad . \end{aligned} \tag{20.107}$$

Der mittlere Anteil wird mit den Formeln (20.18) berechnet

$$\overline{M+\omega} = \overline{M_{00}} + \bar{\omega}_0 + \left[\bar{n}_0 + \dot{M}_{0s} + \dot{\omega}_s - \frac{3}{4}\frac{\bar{n}_0}{\bar{a}_0}\dot{a}_s \right](t - t_0) \tag{20.108}$$

Langperiodischer Störanteil:

$$\delta(M+\omega)_{lG} = \delta M_{lG} + \delta\omega_{lG} \tag{20.109}$$

$$\begin{aligned} \delta(M+\omega)_{lG} &= \frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{a}^2\left(1-\bar{e}^2\right)}\frac{\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left[\sqrt{1-\bar{e}^2} - \frac{1}{1-\bar{e}^2}\right]\cdot \\ &\cdot\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right] + 5\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\}\sin 2\bar{\omega} - \end{aligned} \tag{20.110}$$

$$-\frac{1}{32}\frac{\bar{e}^2 R_E^2}{\bar{p}^2}\frac{1}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left\{J_2\left[1-43\cos^2\bar{i}+155\cos^4\bar{i}-225\cos^6\bar{i}\right]+\right.$$

$$\left.+5\frac{J_4}{J_2}\left[1-19\cos^2\bar{i}+75\cos^4\bar{i}-105\cos^6\bar{i}\right]\right\}\sin 2\bar{\omega}-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\bar{e}\left[\frac{\sin\bar{i}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}-\frac{\cos 2\bar{i}}{\sin\bar{i}\left(1-\bar{e}^2\right)}\right]\cos\bar{\omega}-$$

$$-\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\left\{\left[\left(1-\bar{e}^2\right)^2\sin\bar{i}\left(-\frac{4}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}+3\bar{e}\left(3\sqrt{1-\bar{e}^2}-1\right)\right)+\frac{\bar{e}\left(4+3\bar{e}^2\right)\cos^2\bar{i}}{\sin\bar{i}}-\right.\right.$$

$$\left.-\bar{e}\left(26+9\bar{e}^2\right)\sin\bar{i}\right]\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega}+$$

$$+6\bar{e}\left(4+3\bar{e}^2\right)\frac{\sin\bar{i}\cos^2\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left(3-14\cos^2\bar{i}+35\cos^4\bar{i}\right)\cos\bar{\omega}+$$

$$+7\bar{e}^3\left[\left(\frac{3}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}+1+3\sqrt{1-\bar{e}^2}\right)\sin\bar{i}+\frac{1}{\sin\bar{i}}\right]\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}+$$

$$\left.+\frac{7}{9}\bar{e}^3\frac{\sin\bar{i}\cos^2\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left[5-18\cos^2\bar{i}+45\cos^4\bar{i}\right]\cos 3\bar{\omega}\right\}+\cdots$$

Kurzperiodischer Störanteil:

$$\delta\left(M+\omega\right)_{kG} = \delta M_{kG}+\delta\omega_{kG} \tag{20.111}$$

$$\delta\left(M+\omega\right)_{Gk} = \left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]\delta M_{Gk}-$$

$$-\frac{1}{8}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\left\{6\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)\left[\bar{\upsilon}-\bar{M}+\bar{e}\sin\bar{\upsilon}\right]-\right. \tag{20.112}$$

$$\left.-\left(3-5\cos^2\bar{i}\right)\left[3\sin 2\bar{u}+3\bar{e}\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+\bar{e}\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right]\right\}+\ldots$$

$$\delta\left(M+\omega\right)_{kG} = -\frac{1}{8}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\frac{\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left\{2\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[3+3\bar{e}\cos\bar{\upsilon}-\bar{e}^2\sin^2\bar{\upsilon}\right]\sin\bar{\upsilon}+\right.$$

$$+3\sin^2\bar{i}\left[\left(1+3\bar{e}\cos\bar{\upsilon}+\bar{e}^2+\bar{e}^2\cos^2\bar{\upsilon}\right)\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left(\frac{7}{3}+3\bar{e}\cos\bar{\upsilon}+\bar{e}^2\cos^2\bar{\upsilon}-\frac{\bar{e}^2}{3}\right)\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{8}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\left\{6\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)\left[\bar{\upsilon}-\bar{M}+\bar{e}\sin\bar{\upsilon}\right]-\right. \tag{20.113}$$

$$\left.-\left(3-5\cos^2\bar{i}\right)\left[3\sin 2\bar{u}+3\bar{e}\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+\bar{e}\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right]\right\}+\ldots$$

$$\begin{aligned}\delta\left(M+\omega\right)_{kG} \;=\; & -\frac{1}{8}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\left\{6\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)\left(\bar{\upsilon}-\bar{M}\right)+\right.\\ & +\frac{6\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left[2\left(1-4\cos^2\bar{i}\right)+\sqrt{1-\bar{e}^2}\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)\right]\sin\bar{\upsilon}+\\ & +\frac{2\bar{e}^2}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[3\cos\bar{\upsilon}-\bar{e}\sin^2\bar{\upsilon}\right]\sin\bar{\upsilon}-\\ & -3\left(3-5\cos^2\bar{i}\right)\sin 2\bar{u}- \qquad (20.114)\\ & -\frac{3\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left[2\left(1-2\cos^2\bar{i}\right)+\sqrt{1-\bar{e}^2}\left(3-5\cos^2\bar{i}\right)-\right.\\ & \left.-\bar{e}\sin^2\bar{i}\left(3\cos\bar{\upsilon}+\bar{e}+\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}\right)\right]\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)-\\ & -\frac{\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left[2\left(5-6\cos^2\bar{i}\right)+\sqrt{1-\bar{e}^2}\left(3-5\cos^2\bar{i}\right)+\right.\\ & \left.\left.+\bar{e}\sin^2\bar{i}\left(9\cos\bar{\upsilon}+3\bar{e}\cos^2\bar{\upsilon}-\bar{e}^2\right)\right]\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right\}+\ldots\end{aligned}$$

Das oskulierende mittlere Argument der Breite wird insgesamt bei Berücksichtigung der Störungen durch das Erdschwerefeld aus

$$M+\omega \;=\; \overline{M+\omega}+\delta\left(M+\omega\right)_{lG}+\delta\left(M+\omega\right)_{kG}+\ldots \tag{20.115}$$

berechnet. Der mittlere Anteil $\overline{M+\omega}$ ist im Fall der Störungen durch das Erdschwerefeld eine lineare Funktion der Zeit.

- *Das* **mittlere Argument der Breite** *vermeidet die Singularität für kreisförmige Bahnen, enthält jedoch weiter im langperiodischen Störanteil die Singularitäten für äquatoriale Bahnen und die kritische Neigung. Es ist somit für die Untersuchung aller nicht kritisch geneigten und nichtäquatorialer elliptischer kreisnahen Bahnen als schnelle Variable geeignet.*

20.2.4.5 Länge des Perizentrums ϖ

Die Länge des Perizentrums vermeidet die Singularität für rechtläufige äquatoriale Bahnen (i = 0°) mit der Definition $\tilde{\omega}:=\omega+\Omega$, für rückläufige äquatoriale Bahnen (i = 180°) mit der Definition $\tilde{\omega}=\omega-\Omega$. Um beide Fälle zu erfassen wird der retrograde Faktor σ_i eingeführt. Da zu erwarten ist, dass die Neigung einer Bahn infolge der Störeinwirkungen nicht zwischen i = 0° und i = 180° variieren kann (keine säkularen Störungen in der Inklination infolge der Anisotropie des Erdschwerefeldes), wird der Anfangswert $\bar{i}_0$ festgehalten und σ_i mit

$$\sigma_i \;=\; \mathrm{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right) \quad . \tag{20.116}$$

Die Länge des Perizentrums wird ganz allgemein definiert durch

$$\tilde{\omega} \;=\; \omega + \sigma_i \, \Omega \quad . \tag{20.117}$$

Mit den Formeln (20.67) folgt dann die Zerlegung

$$\omega + \sigma_i \, \Omega \;=\; \bar{\omega} + \sigma_i \, \bar{\Omega} + \delta\omega + \sigma_i \, \delta\Omega \quad ,$$

somit

$$\begin{aligned} \overline{\omega + \sigma_i \, \Omega} \quad &= \quad \bar{\omega} + \sigma_i \, \bar{\Omega} \\ \delta\left(\omega + \sigma_i \, \Omega\right) \;&=\; \delta\omega + \sigma_i \, \delta\Omega \\ \tilde{\omega} \;&= \omega + \sigma_i \, \Omega = \bar{\tilde{\omega}} + \delta\tilde{\omega} = \overline{\omega + \sigma_i \, \Omega} + \delta\left(\omega + \sigma_i \, \Omega\right) \quad . \end{aligned} \tag{20.118}$$

Der mittlere Anteil wird mit den Formeln (20.18) berechnet

$$\overline{\omega + \sigma_i \, \Omega} \;=\; \bar{\omega}_0 + \sigma_i \, \bar{\Omega}_0 + \left[\dot{\omega}_s + \sigma_i \, \dot{\Omega}_s\right](t - t_0) \quad . \tag{20.119}$$

Langperiodischer Störanteil: Mit der Zerlegung

$$\delta\left(\omega + \sigma_i \, \Omega\right)_{lG} \;=\; \delta\omega_{lG} + \sigma_i \; \delta\Omega_{lG} \tag{20.120}$$

folgt

$$\begin{aligned} \delta\left(\omega + \sigma_i \, \Omega\right)_{lG} \;=\; -\frac{1}{16} \, \frac{R_E^2}{\bar{p}^2} \, \frac{1}{1 - 5\cos^2 \bar{i}} \Bigg\{ \sin^2 \bar{i} \left[J_2 \left(1 - 15\cos^2 \bar{i}\right) + 5 \, \frac{J_4}{J_2} \left(1 - 7\cos^2 \bar{i}\right) \right] + \\ + \frac{\bar{e}^2}{2\left(1 - 5\cos^2 \bar{i}\right)} \Big[J_2 \left(1 + 22\,\sigma_i \cos \bar{i} - 43\cos^2 \bar{i} - \\ - 60\,\sigma_i \cos^3 \bar{i} + 155\cos^4 \bar{i} + 150\,\sigma_i \cos^5 \bar{i} - 225\cos^6 \bar{i}\right) + \\ + 5 \, \frac{J_4}{J_2} \left(1 + 6\,\sigma_i \cos \bar{i} - 19\cos^2 \bar{i} - 28\,\sigma_i \cos^3 \bar{i} + \\ + 75\cos^4 \bar{i} + 70\,\sigma_i \cos^5 \bar{i} - 105\cos^6 \bar{i}\right) \Big] \Bigg\} \sin 2\bar{\omega} - \\ - \frac{1}{2} \, \frac{J_3}{J_2} \, \frac{R_E \sin \bar{i}}{\bar{p}} \left[\frac{1}{\bar{e}} + \sigma_i \, \frac{\bar{e} \cos \bar{i}}{1 + \sigma_i \cos \bar{i}} \right] \cos \bar{\omega} + \end{aligned} \tag{20.121}$$

$$
-\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\left\{\left[\frac{\left(4+3\bar{e}^2\right)\left(1-\bar{e}^2\right)}{\bar{e}}+\bar{e}\left(26+9\bar{e}^2\right)-\frac{\bar{e}\left(4+3\bar{e}^2\right)\sigma_i\cos\bar{i}}{1+\sigma_i\cos\bar{i}}\right]\cdot\right.
$$

$$
\cdot\frac{\sin\bar{i}\left[1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}\right]}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega}+
$$

$$
+3\left(4+3\bar{e}^2\right)\left(-2\bar{e}\cos^2\bar{i}+\sigma_i\sin\bar{i}\right)\frac{\sin\bar{i}\left[3-14\cos^2\bar{i}+35\cos^4\bar{i}\right]}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega}-
$$

$$
-\frac{7\bar{e}}{18}\left[\left(3+2\bar{e}^2\right)+\frac{\bar{e}^2\sigma_i\cos\bar{i}}{1+\sigma_i\cos\bar{i}}\right]\frac{\sin\bar{i}\left[1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}\right]}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}\ -
$$

$$
\left.-\frac{7\bar{e}^3}{9}\sigma_i\cos\bar{i}\ \left(1+\sigma_i\cos\bar{i}\right)\frac{\sin\bar{i}\left[5-18\cos^2\bar{i}+45\cos^4\bar{i}\right]}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}\right\}
$$

Kurzperiodischer Störanteil:

$$
\delta\left(\omega+\sigma_i\Omega\right)_{kG} = \delta\omega_{kG}+\sigma_i\,\delta\Omega_{kG} \tag{20.122}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\omega+\sigma_i\Omega\right)_{kG} &= -\frac{\delta M_{kG}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}- \\
&\quad -\frac{1}{8}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\left\{6\left(1+2\sigma_i\cos\bar{i}-5\cos^2\bar{i}\right)\left[\bar{\upsilon}-\bar{M}+\bar{e}\sin\bar{\upsilon}\right]-\right. \\
&\quad \left.-\left(3+2\sigma_i\cos\bar{i}-5\cos^2\bar{i}\right)\left[3\sin 2\bar{u}+3\bar{e}\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+\bar{e}\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right]\right\}+\ldots
\end{aligned} \tag{20.123}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\omega+\sigma_i\Omega\right)_{kG} &= -\frac{1}{8}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\left\{\frac{1}{\bar{e}}\left[2\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left(3+3\bar{e}\cos\bar{\upsilon}-\bar{e}^2\sin^2\bar{\upsilon}\right)\sin\bar{\upsilon}+\right.\right. \\
&\quad +3\sin^2\bar{i}\left(\left(1+3\bar{e}\cos\bar{\upsilon}+\bar{e}^2+\bar{e}^2\cos^2\bar{\upsilon}\right)\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+\right. \\
&\quad \left.\left.-\left(\frac{7}{3}+3\bar{e}\cos\bar{\upsilon}+\bar{e}^2\cos^2\bar{\upsilon}-\frac{\bar{e}^2}{3}\right)\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right)\right]+ \\
&\quad +\left[6\left(1+2\sigma_i\cos\bar{i}-5\cos^2\bar{i}\right)\left(\bar{\upsilon}-\bar{M}+\bar{e}\sin\bar{\upsilon}\right)-\right. \\
&\quad \left.\left.-\left(3+2\sigma_i\cos\bar{i}-5\cos^2\bar{i}\right)\left(3\sin 2\bar{u}+3\bar{e}\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+\bar{e}\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right)\right]\right\}+\ldots
\end{aligned} \tag{20.124}
$$

Die oskulierende Länge des Perigäums wird insgesamt bei Berücksichtigung der Störungen durch das Erdschwerefeld aus

$$
\tilde{\omega} = \overline{\omega+\sigma_i\Omega}+\delta\omega_{lG}+\sigma_i\,\delta\Omega_{lG}+\delta\omega_{kG}+\sigma_i\,\delta\Omega_{kG}+\ldots \tag{20.125}
$$

berechnet. Der mittlere Anteil ist in einer Theorie von Störungen erster Ordnung durch das Erdschwerefeld eine lineare Funktion der Zeit.

- *Die* **Länge des Perizentrums** *enthält in den langperiodischen Störungen die Singularitäten für kreisförmige sowie für kritisch geneigte Bahnen. Sie ist somit für die Untersuchung aller nicht kritisch geneigten und nicht kreisförmigen Bahnen geeignet.*

20.2.4.6 Die mittlere Länge L

Die mittlere Länge *L* wird unmittelbar auf die mittlere Anomalie *M* und die *Kepler*elemente ω und Ω durch die Definitionsgleichung

$$L \;=\; M+\omega+\sigma_i\,\Omega \;=\; M \;+\tilde{\omega} \tag{20.126}$$

und mit (20.117) zurückgeführt. Somit gilt die Zerlegung

$$L=\bar{M}+\delta M+\bar{\tilde{\omega}}+\delta\tilde{\omega}=\bar{L}+\delta L \tag{20.127}$$

mit

$$\bar{L}=\bar{M}+\bar{\tilde{\omega}}=\overline{M+\tilde{\omega}}\quad,\quad \delta L=\delta M+\delta\tilde{\omega}=\delta\left(M+\tilde{\omega}\right)\quad. \tag{20.128}$$

Die mittleren Werte sind aus den Beziehungen (20.19) und (20.118) bekannt.

Langperiodischer Anteil:

$$\begin{aligned}
\delta L_{lG}=\frac{1}{16}\frac{R_E^2\sin^2\bar{i}}{\bar{p}^2}\,\frac{\left(1-\bar{e}^2\right)\sqrt{1-\bar{e}^2}-1}{1-5\cos^2\bar{i}}\left[J_2\left(1-15\cos^2\bar{i}\right)+5\,\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\bar{i}\right)\right]\sin 2\bar{\omega}- \\
-\frac{1}{16}\,\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\,\frac{1}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{\frac{\bar{e}^2}{2\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)}\left[J_2\left(1+22\,\sigma_i\cos\bar{i}-43\cos^2\bar{i}-\right.\right.\right. \\
\left.-60\,\sigma_i\cos^3\bar{i}+155\cos^4\bar{i}+150\,\sigma_i\cos^5\bar{i}-225\cos^6\bar{i}\right)+ \\
+5\,\frac{J_4}{J_2}\left(1+6\,\sigma_i\cos\bar{i}-19\cos^2\bar{i}-28\,\sigma_i\cos^3\bar{i}+\right. \\
\left.\left.\left.\left.+75\cos^4\bar{i}+70\,\sigma_i\cos^5\bar{i}-105\cos^6\bar{i}\right)\right)\right]\right\}\sin 2\bar{\omega}- \\
-\frac{1}{2}\,\frac{J_3}{J_2}\,\frac{R_E\,\bar{e}\sin\bar{i}}{\bar{p}}\left[\frac{1}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}+\sqrt{1-\bar{e}^2}+\frac{\bar{e}\;\sigma_i\cos\bar{i}}{1+\sigma_i\cos\bar{i}}\right]\cos\bar{\omega}+ \\
+\frac{5}{32}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\cdot\left\{\left[-\frac{4\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}+5\bar{e}\sqrt{1-\bar{e}^2}-\bar{e}-9\bar{e}^3\sqrt{1-\bar{e}^2}+3\bar{e}^3+\right.\right. \\
\left.\left.+\bar{e}\left(26+9\bar{e}^2\right)-\frac{\bar{e}\left(4+3\bar{e}^2\right)\sigma_i\cos\bar{i}}{1+\sigma_i\cos\bar{i}}\right]\cdot\frac{\sin\bar{i}\left[1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}\right]}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega}+\right. \\
\left.+3\left(4+3\bar{e}^2\right)\left(-2\,\bar{e}\cos^2\bar{i}+\sigma_i\sin\bar{i}\right)\frac{\sin\bar{i}\left[3-14\cos^2\bar{i}+35\cos^4\bar{i}\right]}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega}-\right.
\end{aligned} \tag{20.129}$$

$$-\frac{7\bar{e}}{18}\left[3\bar{e}\sqrt{1-\bar{e}^2}^3+\left(3+2\bar{e}^2\right)+\frac{\bar{e}^2\,\sigma_i\cos\bar{i}}{1+\sigma_i\cos\bar{i}}\right]\frac{\sin\bar{i}\left[1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}\right]}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}\;-$$

$$-\frac{7\bar{e}^3}{9}\,\sigma_i\cos\bar{i}\,\left(1+\sigma_i\cos\bar{i}\right)\frac{\sin\bar{i}\left[5-18\cos^2\bar{i}+45\cos^4\bar{i}\right]}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}\Bigg\}$$

Kurzperiodischer Anteil:

$$\begin{aligned}\delta L_{kG} \;=-\frac{1}{8}J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\Bigg\{&2\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\Bigg[-\frac{3\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}+3\bar{e}+\\&+\left(\sqrt{1-\bar{e}^2}-1+\bar{e}^2\right)\left(3\bar{e}\cos\bar{\upsilon}-\bar{e}^2\sin^2\bar{\upsilon}\right)\Bigg]\sin\bar{\upsilon}+\\&+3\sin^2\bar{i}\Bigg[-\frac{\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}+\bar{e}+\left(\sqrt{1-\bar{e}^2}-1+\bar{e}^2\right)\left(3+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\cos\bar{\upsilon}+\\&+\bar{e}\sqrt{1-\bar{e}^2}+\bar{e}^3\Bigg]\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+\\&+\left[\frac{7}{3}\frac{\bar{e}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}-\frac{7\bar{e}}{3}+\left(1-\bar{e}^2-\sqrt{1-\bar{e}^2}\right)\left(3\cos\bar{\upsilon}+\bar{e}^2-\frac{\bar{e}}{3}\right)\right]\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+\\&+\frac{1}{1-\bar{e}^2}\Big[6\left(1+2\sigma_i\cos\bar{i}-5\cos^2\bar{i}\right)\left(\bar{\upsilon}-\bar{M}+\bar{e}\sin\bar{\upsilon}\right)-\\&-\left(3+2\sigma_i\cos\bar{i}-5\cos^2\bar{i}\right)\left(\sin 2\bar{u}+3\bar{e}\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+\bar{e}\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\right)\Big]\Bigg\}+\ldots\end{aligned}\qquad(20.130)$$

- *Die* **mittlere Länge** *enthält in den langperiodischen Störungen die Singularitäten für kritisch geneigte Bahnen. Sie ist somit für die Untersuchung aller nicht kritisch geneigten Bahnen geeignet.*

20.2.4.7 Exzentrische Länge L_E

Die mittlere exzentrische Länge L_E wird unmittelbar auf die exzentrische Anomalie E und die *Kepler*elemente ω und Ω durch die Definitionsgleichung

$$L_E \;=\; E+\omega+\sigma_i\,\Omega \;=\; E+\tilde{\omega} \qquad (20.131)$$

zurückgeführt. Mit den entsprechenden Ausdrücken in den Abschnitten 20.2.4.1 und 20.2.4.5 erhält man die Zerlegung

$$L_E=\bar{E}+\delta E+\bar{\tilde{\omega}}+\delta\tilde{\omega}=\overline{L_E}+\delta L_E \qquad (20.132)$$

mit

$$\overline{L_E}=\bar{E}+\bar{\tilde{\omega}}=\overline{E+\tilde{\omega}}\;,\quad \delta L_E=\delta E+\delta\tilde{\omega}=\delta\left(E+\tilde{\omega}\right)\;. \qquad (20.133)$$

Die mittleren Werte sind aus den Beziehungen (20.76) und (20.118) bekannt.

Langperiodischer Anteil:

$$
\begin{aligned}
\delta L_{ElG} \;=& -\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\frac{1}{1-5\cos^2\overline{i}}\left\{\sin^2\overline{i}\left(\sqrt{1-\overline{e}^2}-1\right)\left[J_2\left(1-15\cos^2\overline{i}\right)+5\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\overline{i}\right)\right]+\right.\\
&+\frac{\overline{e}^2}{2\left(1-5\cos^2\overline{i}\right)}\left[J_2\left(1+22\sigma_i\cos\overline{i}-43\cos^2\overline{i}-\right.\right.\\
&\qquad\left.-60\sigma_i\cos^3\overline{i}+155\cos^4\overline{i}+150\sigma_i\cos^5\overline{i}-225\cos^6\overline{i}\right)+\\
&\qquad+5\frac{J_4}{J_2}\left(1+6\sigma_i\cos\overline{i}-19\cos^2\overline{i}-28\sigma_i\cos^3\overline{i}+\right.\\
&\qquad\left.\left.\left.+75\cos^4\overline{i}+70\sigma_i\cos^5\overline{i}-105\cos^6\overline{i}\right)\right]\right\}\sin 2\overline{\omega}+\\
&+\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E\sin\overline{i}}{\overline{p}}\left[-\frac{\overline{e}}{\overline{e}+\sqrt{1-\overline{e}^2}}+\sigma_i\frac{\overline{e}\cos\overline{i}}{1+\sigma_i\cos\overline{i}}\right]\cos\overline{\omega}+ \qquad (20.134)\\
&+\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\overline{p}^3}\left\{\left[-\frac{4\overline{e}}{1+\sqrt{1-\overline{e}^2}}+\overline{e}\left(27+9\sqrt{1-\overline{e}^2}+12\overline{e}^2\right)-\frac{\overline{e}\left(4+3\overline{e}^2\right)\sigma_i\cos\overline{i}}{1+\sigma_i\cos\overline{i}}\right]\cdot\right.\\
&\qquad\cdot\frac{\sin\overline{i}\left[1-14\cos^2\overline{i}+21\cos^4\overline{i}\right]}{1-5\cos^2\overline{i}}\cos\overline{\omega}+\\
&+3\left(4+3\overline{e}^2\right)\left(-2\overline{e}\cos^2\overline{i}+\sigma_i\sin\overline{i}\right)\frac{\sin\overline{i}\left[3-14\cos^2\overline{i}+35\cos^4\overline{i}\right]}{1-5\cos^2\overline{i}}\cos\overline{\omega}-\\
&-\frac{7\overline{e}}{18}\left[\left(3+3\overline{e}\sqrt{1-\overline{e}^2}+2\overline{e}^2\right)+\frac{\overline{e}^2\sigma_i\cos\overline{i}}{1+\sigma_i\cos\overline{i}}\right]\frac{\sin\overline{i}\left[1-10\cos^2\overline{i}+9\cos^4\overline{i}\right]}{1-5\cos^2\overline{i}}\cos 3\overline{\omega}\;-\\
&\left.-\frac{7\overline{e}^3}{9}\sigma_i\cos\overline{i}\left(1+\sigma_i\cos\overline{i}\right)\frac{\sin\overline{i}\left[5-18\cos^2\overline{i}+45\cos^4\overline{i}\right]}{1-5\cos^2\overline{i}}\cos 3\overline{\omega}\right\}
\end{aligned}
$$

Kurzperiodischer Anteil:

$$
\begin{aligned}
\delta L_{EkG} \;=\; & \frac{1}{16}\frac{R_E^2\,\bar e\,\sqrt{1-\bar e^2}}{\bar p^2}\,\frac{\sin^2\bar i}{1-5\cos^2\bar i}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar i\,\right]+5\,\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar i\,\right]\right\}\sin\left(\bar\upsilon+2\bar\omega\right)+\\
& +\frac{1}{2}\,\frac{J_3}{J_2}\,\frac{R_E\,\sqrt{1-\bar e^2}}{\bar p}\sin\bar i\,\cos\bar u+\\
& -\frac{\sin\bar i}{\sqrt{1-\bar e^2}}\left\{\frac{35}{192}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{R_E^3\;\bar e\left(1-\bar e^2\right)}{\bar p^3}\,\frac{1-10\cos^2\bar i+9\cos^4\bar i}{1-5\cos^2\bar i}\,\bar e\cos\left(\bar\upsilon+3\bar\omega\right)-\right.\\
& \qquad -\frac{5}{32}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{R_E^3}{\bar p^3}\;\frac{1-14\cos^2\bar i+21\cos^4\bar i}{1-5\cos^2\bar i}\;\cdot\\
& \qquad\qquad \left.\cdot\left[\left(4+9\bar e^2\right)\left(1-\bar e^2\right)\cos\bar\upsilon\cos\bar\omega-\frac{4+3\bar e^2}{1-\bar e^2}\sin\bar\upsilon\,\sin\bar\omega\right]\right\}+\\
& +\frac{1}{4}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar p^2}\;\left\{\left(1-3\cos^2\bar i\right)\left[\frac{3\bar e}{\left(1+\sqrt{1-\bar e^2}\right)\sqrt{1-\bar e^2}}+3\bar e+\frac{1}{\sqrt{1-\bar e^2}}\left(-2\,\bar e+3\cos\bar\upsilon-\right.\right.\right.\\
& \qquad \left.\left.\left.-\bar e^2\cos\bar\upsilon+\bar e\cos^2\bar\upsilon-\frac{\bar e\left(1-\bar e^2\right)}{1+\sqrt{1-\bar e^2}}\right)+\left(1-\bar e^2\right)\left(3\cos\bar\upsilon-\bar e\sin^2\bar\upsilon\right)\right]\sin\bar\upsilon-\right.\\
& \qquad -2\sin^2\bar i\;\sqrt{1-\bar e^2}\,\sin 2\bar u+\\
& \qquad +\frac{3}{2}\sin^2\bar i\left[\frac{\bar e}{\left(1+\sqrt{1-\bar e^2}\right)\sqrt{1-\bar e^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\bar e^2}}\left(3\cos\bar\upsilon+\bar e\cos^2\bar\upsilon-\bar e^2\cos\bar\upsilon\right)-\right.\\
& \qquad\qquad \left.-\left(1-\bar e^2\right)\left(3\cos\bar\upsilon+\bar e+\bar e\cos^2\bar\upsilon\right)\right]\sin\left(\bar\upsilon+2\bar\omega\right)-\\
& \qquad -\frac{1}{2}\sin^2\bar i\left[\frac{1}{\sqrt{1-\bar e^2}}\left(\frac{7\;\bar e}{1+\sqrt{1-\bar e^2}}-4\bar e+9\cos\bar\upsilon-3\bar e^2\cos\bar\upsilon+3\bar e\cos^2\bar\upsilon\right)+\right.\\
& \qquad\qquad \left.+6\bar e+9\cos\bar\upsilon+3\bar e\cos^2\bar\upsilon-9\bar e^2\cos\bar\upsilon-3\bar e^3\cos^2\bar\upsilon-\bar e^3\;\right]\sin\left(3\bar\upsilon+2\bar\omega\right)+ \qquad (20.135)\\
& +\left[3\left(1+2\,\sigma_i\cos\bar i-5\cos^2\bar i\right)\left(\bar\upsilon-\bar M+\bar e\sin\bar\upsilon\right)-\right.\\
& \qquad \left.\left.-\frac{1}{2}\left(3+2\,\sigma_i\cos\bar i-5\cos^2\bar i\right)\left(\sin 2\bar u+3\bar e\sin\left(\bar\upsilon+2\bar\omega\right)+\bar e\sin\left(3\bar\upsilon+2\bar\omega\right)\right)\right]\right\}+\ldots
\end{aligned}
$$

- *Die* **exzentrische Länge** *enthält in den langperiodischen Störungen die Singularitäten fr kritisch geneigte Bahnen. Sie ist somit für die Untersuchung aller nicht kritisch geneigten Bahnen geeignet.*

20.2.4.8 Wahre Länge l

Die wahre Länge *l* wird unmittelbar auf die wahre Anomalie υ und die *Kepler*elemente ω und Ω durch die Definitionsgleichung

$$l \;:=\; \upsilon + \omega + \sigma_i\,\Omega \tag{20.136}$$

zurückgeführt. Die Zerlegung in einen mittleren und periodischen Anteil

$$l \;=\; \bar{l} + \delta l \tag{20.137}$$

hat den mittleren Anteil

$$\bar{l} \;=\; \bar{\upsilon} + \bar{\omega} + \sigma_i\,\bar{\Omega} \quad , \tag{20.138}$$

wobei die mittleren Werte für $\bar{\upsilon}$, $\bar{\omega}$ und $\bar{\Omega}$ aus den Formeln (20.18) sowie (20.40) berechnet werden. Der periodische Anteil lässt sich etwa nach *Lyddane*-Elementen zerlegen (siehe etwa in Abschnitt 15.2.13) und so nach mittleren Elementen entwickeln:

$$\begin{aligned}
\delta l \;=\; & \frac{1}{1-\bar{e}^2}\left\{\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\left[\sin\bar{\upsilon}\sin\bar{M}+\frac{\cos\bar{\upsilon}\cos\bar{M}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]+\right. \\
& \left.+\frac{\bar{e}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left[1+\frac{1-\bar{e}^2}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]\cos\bar{M}\right\}\delta\left(e\sin M\right)+ \\
& +\frac{1}{1-\bar{e}^2}\left\{\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\left[\sin\bar{\upsilon}\cos\bar{M}-\frac{\cos\bar{\upsilon}\sin\bar{M}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]-\right. \\
& \left.-\frac{\bar{e}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\left[1+\frac{1-\bar{e}^2}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]\sin\bar{M}\right\}\delta\left(e\cos M\right)+ \\
& +\delta\left(M+\omega+\sigma_i\,\Omega\right) \quad .
\end{aligned} \tag{20.139}$$

Dieser Ausdruck kann nach Abschnitt 15.2.6 auch direkt auf mittlere *Kepler*elemente zurückgeführt werden

$$\begin{aligned}
\delta l \;&=\; \left.\frac{\partial\upsilon}{\partial e}\right|_{(e,M)}\delta e+\left.\frac{\partial\upsilon}{\partial M}\right|_{(e,M)}\delta M+\delta\omega+\sigma_i\,\delta\Omega \;= \\
&=\; \frac{\sin\bar{\upsilon}}{1-\bar{e}^2}\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\delta e+\frac{\bar{a}^2\sqrt{1-\bar{e}^2}}{\bar{r}^2}\,\delta M+\delta\omega+\sigma_i\,\delta\Omega
\end{aligned} \tag{20.140}$$

daher mit dem Argument der Breite $u=\upsilon+\omega$ auch auf

$$\delta l \;=\; \delta u + \sigma_i\,\delta\Omega \quad . \tag{20.141}$$

Im Fall der Bahnvariationen infolge der Anisotropie des Gravitationsfeldes des Zentralkörpers gelingt es, die Variationen in der wahren Länge *l* in einen lang- und kurzperiodischen Anteil zu zerlegen

$$\delta l_G = \delta l_{lG} + \delta l_{kG} \quad . \tag{20.142}$$

Der langperiodische Anteil kann über die Zerlegung

$$\delta l_{lG} = \delta u_{lG} + \sigma_i \, \delta\Omega_{lG} \tag{20.143}$$

mit den Formeln (20.103) und (20.31) berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\delta l_{lG} = & -\frac{1}{16} J_2 \frac{\bar{e}^2 R_E^2}{\bar{p}^2} \left\{ \frac{1}{2} + 11\sigma_i \cos\bar{i} + \frac{33}{2}\cos^2\bar{i} + \frac{80\sigma_i \cos^3\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}} - \right. \\
& \left. - \frac{100\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}} + \frac{200\sigma_i \cos^5\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2} - \frac{200\cos^6\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2} \right\} \sin 2\bar{\omega} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{J_3}{J_2} \frac{\bar{e} R_E}{\bar{p}} \frac{\sigma_i \sin\bar{i} \cos\bar{i}}{1+\sigma_i \cos\bar{i}} \cos\bar{\omega} - \\
& - \frac{5}{16} \frac{J_4}{J_2} \frac{R_E^2}{\bar{p}^2} \left\{ \frac{1}{2} + 3\sigma_i \cos\bar{i} - \frac{9}{2}\cos^2\bar{i} + \frac{16\sigma_i \cos^3\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}} - \right. \\
& \left. - \frac{20\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}} + \frac{40\sigma_i \cos^5\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2} - \frac{40\cos^6\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2} \right\} \sin 2\bar{\omega} - \\
& - \frac{5}{32} \frac{J_5}{J_2} \frac{R_E^3}{\bar{p}^3} \left\{ \bar{e}\sin\bar{i} \left[32 + 9\bar{e}^2 + \frac{4+3\bar{e}^2}{1+\sigma_i\cos\bar{i}} \right] \frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}} \cos\bar{\omega} + \right. \\
& + 6\bar{e}\left(4+3\bar{e}^2\right)\sin\bar{i}\,\sigma_i\cos\bar{i}\left(1-\sigma_i\cos\bar{i}\right)\frac{3-14\cos^2\bar{i}+35\cos^4\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\cos\bar{\omega} - \\
& - \frac{7\bar{e}}{18}\left[3 + \left(3+2\bar{e}^2\right)\sin\bar{i} + \frac{\bar{e}^2\sigma_i\cos\bar{i}\sin\bar{i}}{1+\sigma_i\cos\bar{i}} \right] \frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}} \cos 3\bar{\omega} - \\
& \left. - \frac{7}{9}\bar{e}^3 \sin\bar{i}\,\sigma_i\cos\bar{i}\left(1+\sigma_i\cos\bar{i}\right)\frac{5-18\cos^2\bar{i}+45\cos^4\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\cos 3\bar{\omega} \right\}
\end{aligned} \tag{20.144}$$

Der kurzperiodische Anteil infolge der Störungen durch das Erdschwerefeld lautet:

$$
\begin{aligned}
\delta l_{kG} \;=\; & \frac{1}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{p}^2} \Bigg\{ -\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[\frac{2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}-1\right]\bar{e}\sin\bar{\upsilon} - \\
& -3\left(1+2\sigma_i\cos\bar{i}-5\cos^2\bar{i}\right)\left(\bar{\upsilon}-\bar{M}+\bar{e}\sin\bar{\upsilon}\right)+ \\
& +\frac{1}{2}\left(1+6\sigma_i\cos\bar{i}-7\cos^2\bar{i}\right)\sin 2\bar{u}+ \\
& +\bar{e}\Bigg[2+3\sigma_i\cos\bar{i}-5\cos^2\bar{i}+ \\
& \quad +\frac{1}{4}\left(1-11\cos^2\bar{i}-\frac{40\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\Bigg]\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+ \\
& \quad +\bar{e}\left(\sigma_i\cos\bar{i}-\cos^2\bar{i}\right)\sin\left(3\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)\Bigg\}+ \qquad (20.145) \\
& +\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{p}}\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\sin\bar{i}\cos\bar{u}+ \\
& +\frac{5}{16}\frac{J_4}{J_2}\frac{\bar{e}\,R_E^2}{\bar{p}^2}\left[1-3\cos^2\bar{i}-\frac{8\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\sin\left(\bar{\upsilon}+2\bar{\omega}\right)+ \\
& +\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\sin\bar{i}\left(2+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\Bigg\{\Bigg[\left(4+9\bar{e}^2\right)\cos\bar{\upsilon}\cos\bar{\omega}-\frac{4+3\bar{e}^2}{\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\sin\bar{\upsilon}\sin\bar{\omega}\Bigg]\cdot \\
& \quad \cdot\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}-\frac{7}{6}\bar{e}^2\cos\left(\bar{\upsilon}+3\bar{\omega}\right)\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\Bigg\}+\ldots
\end{aligned}
$$

Üblicherweise wird die Länge nicht als Winkel, sondern in Form trigonometrischer Funktionen $\sin l, \cos l$ verwendet. Diese errechnen sich bei bekannten mittleren und periodischen Variationsanteilen aus

$$
\begin{aligned}
\cos l &= \cos\bar{l}-\sin\bar{l}\;\delta l \\
\sin l &= \sin\bar{l}+\cos\bar{l}\;\delta l \quad .
\end{aligned} \qquad (20.146)
$$

- *Die* **wahre Länge** *enthält in den langperiodischen Störungen die Singularitäten für kritisch geneigte Bahnen. Sie ist somit für die Untersuchung aller nicht kritisch geneigten Bahnen geeignet.*

20.2.4.9 Die Größen e sin M, e cos M

Die in der Theorie von *Lyddane*[1] als Bahnparameter verwendeten Größen $e\sin M$, $e\cos M$ können mit der Zerlegung

[1] LYDDANE [1963]

$$\begin{aligned} e &= \bar{e} + \delta e \\ M &= \bar{M} + \delta M \end{aligned} \tag{20.147}$$

auf die analytischen Ausdrücke für die *Kepler*elemente zurückgeführt werden. Die Zerlegungen

$$\begin{aligned} e\sin M &= \left(\bar{e}+\delta e\right)\sin\left(\bar{M}+\delta M\right) \approx \\ &\approx \bar{e}\sin\bar{M} + \bar{e}\,\delta M\cos\bar{M} + \delta e\sin\bar{M} + O\left(\delta e\cdot\delta M\right) = \\ &= \overline{e\sin M} + \delta\left(e\sin M\right) \\ e\cos M &= \left(\bar{e}+\delta e\right)\cos\left(\bar{M}+\delta M\right) \approx \\ &\approx \bar{e}\cos\bar{M} - \bar{e}\,\delta M\sin\bar{M} + \delta e\cos\bar{M} + O\left(\delta e\cdot\delta M\right) = \\ &= \overline{e\cos M} + \delta\left(e\cos M\right) \end{aligned} \tag{20.148}$$

erlaubt die Trennung in die mittleren

$$\begin{aligned} \overline{e\sin M} &= \bar{e}\sin\bar{M} \\ \overline{e\cos M} &= \bar{e}\cos\bar{M} \end{aligned} \tag{20.149}$$

und in die periodischen Anteile

$$\begin{aligned} \delta\left(e\sin M\right) &= \delta M\ \bar{e}\cos\bar{M} + \delta e\sin\bar{M} + \ldots \\ \delta\left(e\cos M\right) &= -\delta M\ \bar{e}\sin\bar{M} + \delta e\cos\bar{M} + \ldots\ , \end{aligned} \tag{20.150}$$

die ausnahmslos kurzperiodisch sind. Mit den Ausdrücken (20.35) und (20.65) können die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \bar{e}\,\delta M_{lG} = {} & \frac{1}{16}\frac{R_E^2\,\bar{e}}{\bar{a}^2\left(1-\bar{e}^2\right)}\frac{\sin^2\bar{i}\,\sqrt{1-\bar{e}^2}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{J_2\left[1-15\cos^2\bar{i}\right]+5\frac{J_4}{J_2}\left[1-7\cos^2\bar{i}\right]\right\}\sin 2\omega + \\ & + \frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sqrt{1-\bar{e}^2}\,\sin\bar{i}\cos\bar{\omega} + \\ & + \frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3\,\sqrt{1-\bar{e}^2}^3}{\bar{p}^3}\sin\bar{i}\left\{\left(4+9\bar{e}^2\right)\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega} - \right. \\ & \left. - \frac{7}{6}\bar{e}^2\,\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots \end{aligned} \tag{20.151}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}\,\delta M_{kG} = {} & \frac{1}{8}J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{a}^2}\,\frac{\sqrt{1-\bar{e}^2}}{1-\bar{e}^2}\left\{2\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2\left(1-\bar{e}^2\right)+\frac{\bar{a}}{\bar{r}}+1\right]\sin\bar{\upsilon} - \right. \\ & \left. - 3\sin^2\bar{i}\left[\left(-\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2\left(1-\bar{e}^2\right)-\frac{\bar{a}}{\bar{r}}+1\right)\sin(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon}) + \right. \end{aligned} \tag{20.152}$$

$$+\left(\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2\left(1-\bar{e}^2\right)+\frac{\bar{a}}{\bar{r}}+\frac{1}{3}\right)\sin(2\bar{\omega}+3\bar{\upsilon})\Bigg]\Bigg\}+\ldots$$

erhalten werden. Mit ihnen und den entsprechenden Ausdrücken (20.24) und (20.58) für die Exzentrizität können die periodischen Variationen

$$\begin{aligned}
\delta\left(e\sin M\right) &= \bar{e}\,\delta M_{lG}\cos\bar{M} + \delta e_{lG}\,\sin\bar{M} + \bar{e}\,\delta M_{kG}\cos\bar{M} + \delta e_{kG}\,\sin\bar{M} + \ldots = \\
&= \delta_G\left(e\sin M\right) + \ldots = \delta_{kG}\left(e\sin M\right) + \ldots \\
\delta\left(e\cos M\right) &= -\bar{e}\,\delta M_{lG}\sin\bar{M} + \delta e_{lG}\,\cos\bar{M} - \bar{e}\,\delta M_{kG}\sin\bar{M} + \delta e_{kG}\,\cos\bar{M} + \ldots = \\
&= \delta_G\left(e\cos M\right) + \ldots = \delta_{kG}\left(e\cos M\right) + \ldots
\end{aligned} \tag{20.153}$$

gebildet werden.

- *Die Parameter $e\sin M, e\cos M$ enthalten nur kurzperiodische Bewegungsanteile. Sie sind abgesehen von der Singularität für kritisch geneigte Bahnen singularitätenfrei. Sie sind somit für die Untersuchung aller nicht kritisch geneigten Bahnen geeignet.*

20.2.4.10 Die Größen e sin ω, e cos ω

Die Größen $e\sin\omega, e\cos\omega$ werden gelegentlich gerne als die Komponenten des sogenannten Exzentrizitätsvektors bezeichnet. Sie können mit der Zerlegung

$$\begin{aligned}
e &= \bar{e}+\delta e \\
\omega &= \bar{\omega}+\delta\omega
\end{aligned} \tag{20.154}$$

auf die analytischen Ausdrücke für die *Kepler*elemente zurückgeführt werden. Die Zerlegungen

$$\begin{aligned}
e\sin\omega &= \left(\bar{e}+\delta e\right)\sin\left(\bar{\omega}+\delta\omega\right) \approx \\
&\approx \bar{e}\sin\bar{\omega} + \bar{e}\,\delta\omega\cos\bar{\omega} + \delta e\sin\bar{\omega} + O\left(\delta e\cdot\delta\omega\right) = \\
&= \overline{e\sin\omega} + \delta\left(e\sin\omega\right) \\
e\cos\omega &= \left(\bar{e}+\delta e\right)\cos\left(\bar{\omega}+\delta\omega\right) \approx \\
&\approx \bar{e}\cos\bar{\omega} - \bar{e}\,\delta\omega\sin\bar{\omega} + \delta e\,\cos\bar{\omega} + O\left(\delta e\cdot\delta\omega\right) = \\
&= \overline{e\cos\omega} + \delta\left(e\cos\omega\right)
\end{aligned} \tag{20.155}$$

erlauben die Trennung in die mittleren

$$\begin{aligned}
\overline{e\sin\omega} &= \bar{e}\sin\bar{\omega} \\
\overline{e\cos\omega} &= \bar{e}\cos\bar{\omega}
\end{aligned} \tag{20.156}$$

und in die periodischen Anteile

$$\begin{aligned}
\delta\left(e\sin\omega\right) &= \quad \delta\omega\,\bar{e}\cos\bar{\omega} + \delta e\sin\bar{\omega} + \ldots \\
\delta\left(e\cos\omega\right) &= -\delta\omega\,\bar{e}\sin\bar{\omega} + \delta e\cos\bar{\omega} + \ldots\,,
\end{aligned} \tag{20.157}$$

die auf bekannte Ausdrücke zurückgeführt werden können:

$$
\begin{aligned}
\delta\left(e\sin\omega\right) &= \bar{e}\,\delta\omega_l\cos\bar{\omega} + \delta e_l\,\sin\bar{\omega} + \bar{e}\,\delta\omega_k\cos\bar{\omega} + \delta e_k\,\sin\bar{\omega} = \\
&= \delta\left(e\sin\omega\right)_G + \ldots \\
\delta\left(e\cos\omega\right) &= -\bar{e}\,\delta\omega_l\sin\bar{\omega} + \delta e_l\,\cos\bar{\omega} - \bar{e}\,\delta\omega_k\sin\bar{\omega} + \delta e_k\,\cos\bar{\omega} = \\
&= \delta\left(e\cos\omega\right)_G + \ldots\ .
\end{aligned}
\tag{20.158}
$$

Mit den langperiodischen Variationen im Argument des Perigäums (20.33) wird

$$
\begin{aligned}
\bar{e}\,\delta\omega_{lG} = \; & -\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\frac{\bar{e}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{\sin^2\bar{i}\left[J_2\left(1-15\cos^2\bar{i}\right)+5\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\bar{i}\right)\right]+\right. \\
& +\frac{\bar{e}^2}{2\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)}\left[J_2\left(1-43\cos^2\bar{i}+155\cos^4\bar{i}-255\cos^6\bar{i}\right)+\right. \\
& \left.\left.+5\frac{J_4}{J_2}\left(1-19\cos^2\bar{i}+75\cos^4\bar{i}-105\cos^6\bar{i}\right)\right]\right\}\sin 2\bar{\omega} - \\
& -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{p}}\frac{\sin^2\bar{i}-\bar{e}^2\cos^2\bar{i}}{\sin\bar{i}}\cos\bar{\omega} - \\
& -\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\left\{\left[\left(4+3\bar{e}^2\right)\left(\left(1-\bar{e}^2\right)\sin\bar{i}-\bar{e}^2\frac{\cos^2\bar{i}}{\sin\bar{i}}\right)+\right.\right. \\
& \left.+\bar{e}^2\left(26+9\bar{e}^2\right)\sin\bar{i}\right]\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega} - \\
& -6\bar{e}^2\left(4+3\bar{e}^2\right)\frac{\sin\bar{i}\cos^2\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left(3-14\cos^2\bar{i}+35\cos^4\bar{i}\right)\cos\bar{\omega} - \\
& -\frac{7\bar{e}^2}{18}\left[\left(3+2\bar{e}^2\right)\sin\bar{i}-\bar{e}\frac{\cos^2\bar{i}}{\sin\bar{i}}\right]\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega} - \\
& \left.-\frac{7}{9}\bar{e}^4\frac{\sin\bar{i}\cos^2\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left[5-18\cos^2\bar{i}+45\cos^4\bar{i}\right]\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned}
\tag{20.159}
$$

Die langperiodischen Variationen in der Exzentrizität Δe_{Gl} sind aus (20.24) bekannt. Somit lauten die langperiodischen Anteile im Fall der Bewegungseinflüsse durch die Anomalien im Schwerefeld des Zentralkörpers

$$
\begin{aligned}
\delta\left(e\sin\omega\right)_{lG} &= \bar{e}\,\delta\omega_{lG}\cos\bar{\omega} + \delta e_{lG}\,\sin\bar{\omega} \\
\delta\left(e\cos\omega\right)_{lG} &= -\bar{e}\,\delta\omega_{lG}\sin\bar{\omega} + \delta e_{lG}\,\cos\bar{\omega}\quad .
\end{aligned}
\tag{20.160}
$$

Die kurzperiodischen Anteile lauten mit (20.61)

$$\begin{aligned}\bar{e}\,\delta\omega_{kG} \;=\;& \frac{1}{8}J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}^2\left(1-\bar{e}^2\right)}\left\{-2\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2\left(1-\bar{e}^2\right)+\frac{\bar{a}}{\bar{r}}+1\right]\sin\bar{\upsilon}+\right.\\ &+3\sin^2\bar{i}\left[\left(-\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2\left(1-\bar{e}^2\right)-\frac{\bar{a}}{\bar{r}}+1\right)\sin(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon})+\right.\\ &\left.\left.+\left(\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^2\left(1-\bar{e}^2\right)+\frac{\bar{a}}{\bar{r}}+\frac{1}{3}\right)\sin(2\bar{\omega}+3\bar{\upsilon})\right]\right\}+ \qquad (20.161)\\ &+\frac{1}{8}J_2\,\frac{\bar{e}\,R_E^2}{\bar{p}^2}\left\{-6\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)\left[\bar{\upsilon}-\bar{M}+\bar{e}\sin\bar{\upsilon}\right]+\right.\\ &\left.+\left(3-5\cos^2\bar{i}\right)\left[3\sin 2\bar{u}+3\bar{e}\sin(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon})+\bar{e}\sin(2\bar{\omega}+3\bar{\upsilon})\right]\right\}+\ldots\end{aligned}$$

und mit (20.58) können die kurzperiodischen Variationen

$$\begin{aligned}\delta\left(e\sin\omega\right)_{kG} &= \bar{e}\,\delta\omega_{kG}\cos\bar{\omega}+\delta e_{kG}\,\sin\bar{\omega}\\ \delta\left(e\cos\omega\right)_{kG} &= -\bar{e}\,\delta\omega_{kG}\sin\bar{\omega}+\delta e_{kG}\,\cos\bar{\omega}\end{aligned} \qquad (20.162)$$

gebildet werden.

- *Die Parameter $e\sin\omega$, $e\cos\omega$ enthalten lang- und kurzperiodische Bewegungsanteile. Sie sind abgesehen von der Singularität für kritisch geneigte Bahnen singularitätenfrei. Sie sind somit für die Untersuchung aller nicht kritisch geneigten Bahnen geeignet.*

20.2.4.11 Parameter der elliptischen Bewegung p

Für den Parameter der Kegelschnittbewegung *p* folgt aus der Definitionsgleichung

$$p \;=\; a\left(1-e^2\right)$$

und mit $a=\bar{a}+\delta a$ und $e=\bar{e}+\delta e$ die Zerlegung

$$p \;=\; \bar{a}\left(1-\bar{e}^2\right)+\left(1-\bar{e}^2\right)\delta a-2\bar{a}\,\bar{e}\,\delta e+\ldots \quad , \qquad (20.163)$$

somit

$$p \;=\; \bar{p}+\delta p \quad . \qquad (20.164)$$

Für den mittleren Störanteil

$$\bar{p} \;=\; \bar{a}\left(1-\bar{e}^2\right) \qquad (20.165)$$

lässt sich im Allgemeinen keine weitere Zerlegung mit $\bar{a}=\bar{a}_0+\dot{a}_s\,(t-t_0)$ und $\bar{e}=\bar{e}_0+\dot{e}_s\,(t-t_0)$ derart durchführen, dass $\bar{p}=\bar{p}_0+\dot{p}_s\,(t-t_0)$ erhalten werden könnte. Im Fall der Störungen durch

das Erdschwerefeld verschwinden jedoch die säkularen Störkoeffizienten $\dot{a}_{sG} = \dot{e}_{sG} = 0$ und es bleibt

$$\bar{p}_G = \bar{p}_{G0} \quad . \tag{20.166}$$

Für den periodischen Störanteil wird

$$\delta p = \left(1-\bar{e}^2\right)\delta a - 2\,\bar{a}\,\bar{e}\,\delta e + \ldots \tag{20.167}$$

Der langperiodische Störanteil lautet mit den Formeln (20.22) und (20.23) auf S. 435

$$\delta p_{lG} = -2\,\bar{a}\,\bar{e}\,\delta e_{lG} \tag{20.168}$$

$$\delta p_{lG} = -2\,\bar{a}\,\bar{e}\sin\bar{i}\left[e_I\,\bar{e}\sin\bar{i}\cos 2\bar{\omega} + \left(e_{II} + \frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}e_{IV}\right)\sin\bar{\omega} + e_{III}\,\bar{e}\sin 3\bar{\omega}\right] + \ldots \tag{20.169}$$

$$\begin{aligned}\delta p_{lG} = {} & -\frac{1}{8}\frac{R_E^2}{\bar{p}}\frac{\bar{e}^2\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left[J_2\left(1-15\cos^2\bar{i}\right)+5\,\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\bar{i}\right)\right]\cos 2\bar{\omega} + \\ & + \frac{J_3}{J_2}R_E\,\bar{e}\sin\bar{i}\sin\bar{\omega} + \\ & + \frac{5}{16}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\frac{\bar{a}\;\bar{e}\;\sin\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{\frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}\left[1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}\right]\sin\bar{\omega} - \right. \\ & \left. - \frac{7}{6}\,\bar{e}^2\left(1-\bar{e}^2\right)\left[1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}\right]\sin 3\bar{\omega}\right\} + \ldots\ldots\end{aligned} \tag{20.170}$$

Er enthält außer der kritischen Neigung keine weiteren Singularitäten. Der kurzperiodische Störanteil

$$\delta p_{kG} = \left(1-\bar{e}^2\right)\delta a_{kG} - 2\,\bar{a}\,\bar{e}\,\delta e_{kG} \tag{20.171}$$

$$\delta p_{kG} = \frac{1}{2}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}}\sin^2\bar{i}\left\{3\cos 2\bar{u} + \bar{e}\left[3\cos\left(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon}\right)+\cos\left(2\bar{\omega}+3\bar{\upsilon}\right)\right]\right\} + \ldots \tag{20.172}$$

ist singularitätenfrei.

- *Der* **Parameter der elliptischen Bewegung** *ist außer an der kritischen Neigung singularitätenfrei. Die Singularität zeigt sich in einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes nur im langperiodischen Störanteil. Der kurzperiodische Anteil ist eine doppeltperiodische Funktion mit der Periode von einem bzw. drei anomalistischen bzw. zwei drakonitischen Umläufen.*

20.2.4.12 Flächenparameter G

Der Flächenparameter lässt sich über das modifizierte 3. *Kepler*sche Gesetz

$$G = \sqrt{\mu p}$$

auf den Parameter *p* der Kegelschnittbewegung im vorhergehenden Abschnitt zurückführen. Aus

$$G = \sqrt{\mu\bar{p}}\sqrt{1+\frac{\delta p}{\bar{p}}} = \sqrt{\mu\bar{p}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta p}{\bar{p}}+\ldots\right) \tag{20.173}$$

ergibt sich die Zerlegung

$$G = \bar{G}+\delta G \quad . \tag{20.174}$$

Für den mittleren Störanteil

$$\bar{G} = \sqrt{\mu\bar{p}} \tag{20.175}$$

ergibt sich mit Formel (20.166) auf S. 470

$$\bar{G}_G = \bar{G}_{G0} \quad . \tag{20.176}$$

Im Fall der Störungen durch das Erdschwerefeld verschwinden also auch hier die säkularen Störkoeffizienten.

Mit den Formeln (20.168) auf S. 470 bzw. (20.23) auf S. 435 folgt:

Langperiodischer Störanteil:

$$\delta G_{lG} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\,\delta p_{lG}+\ldots \tag{20.177}$$

$$\delta G_{lG} = -\bar{a}\,\bar{e}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\,\delta e_{lG} \tag{20.178}$$

$$\delta G_{lG} = -\bar{a}\,\bar{e}\sin\bar{i}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\left[e_I\,\bar{e}\sin\bar{i}\cos 2\bar{\omega}+e_{II}\sin\bar{\omega}\right]+\ldots<e_{III},e_{IV}> \tag{20.179}$$

$$\begin{aligned}\delta G_{lG} = {} & -\frac{1}{16}\bar{e}^2\,R_E^2\,\frac{\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}^3}}\left[J_2\left(1-15\cos^2\bar{i}\right)+5\,\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\bar{i}\right)\right]\cos 2\bar{\omega}+\\ & +\frac{1}{2}\,\frac{J_3}{J_2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\,R_E\,\bar{e}\sin\bar{i}\sin\bar{\omega}+\\ & +\frac{5}{32}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\,\frac{\bar{a}\;\bar{e}\;\sin\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\left\{\frac{4+3\bar{e}^2}{1-\bar{e}^2}\left[1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}\right]\sin\bar{\omega}-\right.\\ & \left.-\frac{7}{6}\,\bar{e}^2\left(1-\bar{e}^2\right)\left[1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}\right]\sin 3\bar{\omega}\right\}+\ldots\ldots\end{aligned} \tag{20.180}$$

Kurzperiodischer Störanteil

$$\delta G_{kG} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\,\delta p_{kG} \tag{20.181}$$

$$\delta G_{kG} = \frac{1}{4}\,J_2\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}^3}}\,R_E^2\sin^2\bar{i}\left\{3\cos 2\bar{u}+\bar{e}\left[3\cos\left(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon}\right)+\cos\left(2\bar{\omega}+3\bar{\upsilon}\right)\right]\right\}+\ldots \tag{20.182}$$

- *Der* **Flächenparameter** *ist außer an der kritischen Neigung singularitätenfrei. Sie zeigt sich in einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes nur im langperiodischen Störanteil. Dieser ist eine doppeltperiodische Funktion mit der Periode von einem anomalistischen bzw. zwei drakonitischen Umläufen.*

20.2.4.13 Bahnradius r

Der Bahnradius

$$r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon}$$

kann mit $p=\bar{p}+\delta p, e=\bar{e}+\delta e$ und $\upsilon=\bar{\upsilon}+\delta\upsilon$ oder auch mit den Formeln in Abschnitt 15.3 um einen mittleren Anteil entwickelt werden:

$$r = \bar{r}+\delta r \quad . \tag{20.183}$$

Der mittlere Anteil errechnet sich aus

$$\bar{r} = \frac{\bar{p}}{1+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}} \quad . \tag{20.184}$$

Der periodische Anteil (siehe etwa Formel 15.123)

$$\delta r = \frac{\bar{r}}{\bar{a}}\,\delta a - \bar{a}\cos\bar{\upsilon}\,\delta e + \frac{\bar{a}\,\bar{e}\sin\bar{\upsilon}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\,\delta M \tag{20.185}$$

enthält in jedem Glied $\bar{r}$ bzw. $\cos\bar{\upsilon}$ oder $\sin\bar{\upsilon}$. Somit sind alle periodischen Variationen im Bahnradius kurzperiodisch. Diese Aussage ist unabhängig von der Störart. Mit den Werten für δp aus den Formeln (20.169) auf S 470, für δe aus den Formeln (20.23) auf S. 435 und (20.57) auf S. 443 sowie für $\delta\upsilon$ aus den Formeln (20.93) auf S. 450 und (20.96) auf S. 451 erhalten wir

$$\delta r_G = \delta r_{kG} = \frac{\bar{r}}{\bar{a}}\,\delta a_{kG} - \bar{a}\cos\bar{\upsilon}\,\delta e_G + \frac{\bar{a}\,\bar{e}\sin\bar{\upsilon}}{\sqrt{1-\bar{e}^2}}\,\delta M_G \tag{20.186}$$

$$\begin{aligned}\delta r_G = & -\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{p}}\frac{\bar{e}\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left[J_2\left(1-15\cos^2\bar{i}\right)+5\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\bar{i}\right)\right]\cos\left(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon}\right)+\\ & +\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}R_E\sin\bar{i}\sin\bar{u}+\\ & +\frac{1}{4}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}}\left\{\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[1+\frac{2\bar{r}}{\bar{a}\sqrt{1-\bar{e}^2}}+\frac{\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]+\sin^2\bar{i}\cos 2\bar{u}\right\}+\\ & +\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^2}\sin\bar{i}\left\{\left(1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\left[\left(4+3\bar{e}^2\right)\sin\bar{u}+6\bar{e}^2\sin\bar{\upsilon}\cos\bar{\omega}\right]-\right.\\ & \left.-\frac{7}{6}\left[1-5\cos^2\bar{i}-\frac{16\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\bar{e}^2\sin\left(\bar{\upsilon}+3\bar{\omega}\right)\right\}+\ldots\end{aligned} \tag{20.187}$$

- *Der* **Bahnradius** *ist außer an der kritischen Neigung in einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes singularitätenfrei. Er enthält ausschließlich kurzperiodische Variationen. In diesen sind auch die Terme mit* J_3, J_4 *und* J_5 *enthalten.*

20.2.4.14 Radiale Geschwindigkeitskomponente V_R

Die radiale Geschwindigkeitskomponente, die im Rahmen einer *Kepler*bewegung durch

$$V_R \;=\; \dot r \;=\; e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin\upsilon \;=\; \frac{e\,\mu}{G}\sin\upsilon$$

dargestellt werden kann, lässt sich mit $p=\bar p+\delta p$ bzw. $G=\bar G+\delta G$, $e=\bar e+\delta e$ und $\upsilon=\bar\upsilon+\delta\upsilon$ oder auch direkt mit den Partialausdrücken in Abschnitt 15.4 um den mittleren Wert $\overline{V_R}$ entwickeln:

$$V_R \;=\; \dot r \;=\; \overline{V_R}+\delta V_R \;=\; \dot{\bar r}+\delta\dot r \quad . \tag{20.188}$$

Der mittlere Anteil errechnet sich aus

$$\overline{V_R} \;=\; \dot{\bar r} \;=\; \bar e\sqrt{\frac{\mu}{\bar p}}\sin\bar\upsilon \;=\; \frac{\bar e\,\mu}{\bar G}\sin\bar\upsilon \quad . \tag{20.189}$$

Der periodische Anteil

$$\delta V_R=\delta\dot r=\sqrt{\frac{\mu}{\bar p}}\left[-\frac{\bar e\sin\bar\upsilon}{2\,\bar a}\,\delta a+\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\left(1-\bar e^{\,2}\right)\sin\bar\upsilon\,\delta e+\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\sqrt{1-\bar e^{\,2}}\;\bar e\cos\bar\upsilon\,\delta M\right] \tag{20.190}$$

enthält in jedem Glied $\cos\bar\upsilon$ oder $\sin\bar\upsilon$. Somit sind alle periodischen Variationen auch in der Änderung des Bahnradius kurzperiodisch. Diese Aussage ist unabhängig von der Störart. Mit den Werten für δa aus den Formeln (20.53) bzw. (20.54) (auf Seite 442), für δe aus den Formeln (20.24) (auf Seite 435) und (20.57) auf (Seite 443), sowie für δM aus den Formeln (20.34) (auf Seite 439) und (20.64) (auf Seite 445) erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta V_{RG} \;&=\delta V_{RkG}=\;\delta\dot r_G\;=\delta\dot r_{kG}\;=\\ &=\sqrt{\frac{\mu}{\bar p}}\left[-\frac{\bar e\sin\bar\upsilon}{2\,\bar a}\,\Delta a_{Gk}+\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\left(1-\bar e^{\,2}\right)\sin\bar\upsilon\left(\delta e_{Gl}+\delta e_{Gk}\right)+\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^2\sqrt{1-\bar e^{\,2}}\;\bar e\cos\bar\upsilon\left(\delta M_{Gl}+\delta M_{Gk}\right)\right]= \qquad (20.191)\\ =\frac{1}{16}\,\frac{R_E^2}{\bar r^{\,2}}\,&\frac{\bar e\sin^2\bar i}{1-5\cos^2\bar i}\sqrt{\frac{\mu}{\bar p}}\left[J_2\left(1-15\cos^2\bar i\right)+5\,\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\bar i\right)\right]\sin\left(2\bar\omega+\bar\upsilon\right)+\\ &+\frac{1}{2}\,\frac{J_3}{J_2}\,\frac{R_E}{\bar r^{\,2}}\,\bar G\sin\bar i\cos\bar u+\end{aligned}$$

$$+\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\overline{p}^3}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{p}}}\left(\frac{\overline{a}}{\overline{r}}\right)^2\frac{\sin\overline{i}}{1-5\cos^2\overline{i}}\left\{\left[-\left(4+3\overline{e}^2\right)\sin\overline{\upsilon}\sin\overline{\omega}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(4+9\overline{e}^2\right)\left(1-\overline{e}^2\right)^2\cos\overline{\upsilon}\cos\overline{\omega}\right]\left(1-14\cos^2\overline{i}+21\cos^4\overline{i}\right)-$$

$$\left.-\frac{7\overline{e}^2\left(1-\overline{e}^2\right)^2}{6}\left(1-10\cos^2\overline{i}+9\cos^4\overline{i}\right)\cos\left(\overline{\upsilon}+3\overline{\omega}\right)\right\}+$$

$$-\frac{1}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{a}^2}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{p}}}\left\{\overline{e}\left(1-3\cos^2\overline{i}\right)\left[\frac{1}{1+\sqrt{1-\overline{e}^2}}\left(\frac{\overline{a}}{\overline{r}}\right)^2+\frac{\sqrt{1-\overline{e}^2}}{\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\right]\sin\overline{\upsilon}+\right.$$

$$\left.+2\sin^2\overline{i}\left(\frac{\overline{a}}{\overline{r}}\right)^2\sin 2\overline{u}\right\}+\ldots$$

- *Die* **radiale Geschwindigkeitskomponente** *ist außer an der kritischen Neigung in einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes singularitätenfrei. Sie enthält ausschließlich kurzperiodische Variationen. In diesen sind auch die Terme mit* J_3, J_4 *und* J_5 *enthalten.*

20.2.4.15 Transversale Geschwindigkeitskomponente V_T

Die transversale Geschwindigkeitskomponente, die in der *Kepler*bewegung durch

$$V_T = r\dot{\zeta} = r\left(\dot{u}+\dot{\Omega}\cos i\right) = \frac{G}{r} = \frac{\sqrt{\mu\, p}}{r}$$

dargestellt werden kann, lässt sich (im Rahmen einer Zweikörperbewegung) nach *G* bzw. *p* und *r* entwickeln und führt auf die Zerlegung

$$V_T = \overline{V_T}+\delta V_T = \overline{r\dot{\zeta}}+\delta\left(r\dot{\zeta}\right) \quad . \tag{20.192}$$

Der mittlere Anteil errechnet sich aus

$$\overline{V_T} = \overline{r\dot{\zeta}} = \frac{\overline{G}}{\overline{r}} = \frac{\sqrt{\mu\,\overline{p}}}{\overline{r}} \quad . \tag{20.193}$$

Der periodische Anteil kann mit einer der folgenden Darstellungen berechnet werden:

$$\delta V_T = \delta\left(r\dot{\zeta}\right) = \frac{1}{\overline{r}}\delta G-\frac{\overline{G}}{\overline{r}^2}\delta r \quad , \tag{20.194}$$

$$\delta V_T = \overline{V_T}\left[\frac{1}{2\,\overline{p}}\delta p-\frac{1}{\overline{r}}\delta r\right] \quad , \tag{20.195}$$

$$\delta V_T = \frac{\sqrt{\mu}}{\overline{r}}\left[-\frac{\sqrt{\overline{p}}}{2\,\overline{a}}\delta a+\frac{\overline{a}}{\overline{r}\sqrt{\overline{p}}}\left(\overline{p}\cos\overline{\upsilon}-\overline{e}\,\overline{r}\right)\delta e-\frac{\overline{e}\,\overline{a}\sqrt{\overline{a}}}{\overline{r}}\sin\overline{\upsilon}\,\delta M\right] \quad . \tag{20.196}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichungen wird durch den mittleren Radius dividiert und ist somit kurzperiodisch. Eine Zerlegung in einen lang- und kurzperiodischen Störanteil ist daher auch für die transversale Geschwindigkeit V_T prinzipiell nicht möglich.

Mit den Werten für δG_G aus den Formeln (20.180) und (20.182) sowie $\delta r_G = \delta r_{Gk}$ aus Formel (20.187) (auf Seite 472) ergibt sich:

$$\delta V_{TG} \;=\; \delta\left(r\dot{\zeta}\right)_G \;=\; \delta V_{TkG} \;=\; \delta\left(r\dot{\zeta}\right)_{kG} \tag{20.197}$$

$$\delta V_{TG} \;=\; \frac{1}{\bar{r}}\left(\delta G_{lG} + \delta G_{kG}\right) - \frac{\bar{G}}{\bar{r}^2}\,\delta r_G \tag{20.198}$$

$$\begin{aligned}
\delta V_{TG} \;=\;& \frac{\sin\bar{i}}{\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\left\{\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{p}}\frac{\bar{e}\sin\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left[J_2\left(1-15\cos^2\bar{i}\right)+5\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\bar{i}\right)\right]\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left[\cos\left(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon}\right)-\bar{e}\sin\left(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon}\right)\sin\bar{\upsilon}\right]\right\} -\\
&-\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}R_E\frac{\sin\bar{i}}{\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\left[\sin\bar{u}+\bar{e}\cos\bar{u}\sin\bar{\upsilon}\right]-\\
&-\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\frac{\bar{G}}{\bar{r}}\frac{\sin\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left\{\left(1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}\right)\cdot\right.\\
&\left.\cdot\left[\frac{\bar{a}^2\bar{e}\left(4+3\bar{e}^2\right)}{\bar{p}^2}\sin\bar{\omega}-\left(1+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\left(\left(4+3\bar{e}^2\right)\sin\bar{u}+6\bar{e}^2\sin\bar{\upsilon}\cos\bar{\omega}\right)\right]-\right.\\
&\left.-\frac{7\bar{e}^2}{6}\left(1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}\right)\left[\bar{e}\sin3\bar{\omega}-\left(1+\bar{e}\cos\bar{\upsilon}\right)\sin\left(\bar{\upsilon}+3\bar{\omega}\right)\right]\right\}\\
&-\frac{1}{4}J_2\frac{R_E^2}{\bar{r}}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}}}\left\{\frac{1-3\cos^2\bar{i}}{\bar{r}}\left[1+\frac{2\bar{r}}{\bar{a}\sqrt{1-\bar{e}^2}}+\frac{\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]+\right.\\
&\left.+\sin^2\bar{i}\left[\left(\frac{1}{\bar{r}}-\frac{3}{\bar{p}}\right)\cos2\bar{u}-\frac{\bar{e}}{\bar{p}}\left(3\cos\left(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon}\right)+\cos\left(2\bar{\omega}+3\bar{\upsilon}\right)\right)\right]\right\}+\ldots
\end{aligned} \tag{20.199}$$

- *Die* **transversale Geschwindigkeitskomponente** *ist außer an der kritischen Neigung in einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes singularitätenfrei. Sie enthält ausschließlich kurzperiodische Variationen, in denen somit auch die Terme mit J_3, J_4 und J_5 enthalten sind.*

20.2.4.16 Geschwindigkeit in der Bahn V

Die Geschwindigkeit in der Bahn

$$V^2 \;=\; \dot{\mathbf{r}}^2 \;=\; V_R^2 + V_T^2 \;=\; \dot{r}^2 + \left(r\dot{\zeta}\right)^2$$

kann mit $V_R = \overline{V_R} + \delta V_R$ aus Formel (20.188) auf S. 473 und $V_T = \overline{V_T} + \delta V_T$ nach Formel (20.192) wieder in einen mittleren und periodischen Anteil zerlegt werden:

$$V^2 = \left(\overline{V_R} + \delta V_R\right)^2 + \left(\overline{V_T} + \delta V_T\right)^2 \tag{20.200}$$

bzw.

$$V^2 = \left(\dot{\bar{r}} + \delta\dot{r}\right)^2 + \left(\overline{r\dot{\xi}} + \delta\left(r\dot{\zeta}\right)\right)^2 \quad . \tag{20.201}$$

Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung bleibt als erste Näherung

$$V^2 = \overline{V_R}^2 + \overline{V_T}^2 + 2\left(\overline{V_R}\ \delta V_R + \overline{V_T}\ \delta V_T\right) + \ldots \tag{20.202}$$

Der mittlere Anteil errechnet sich (im Fall, dass eine Keplerbewegung zugrunde gelegt wird) mit Formel (20.189) auf Seite 473 oder (20.193) auf Seite 474 aus

$$\bar{V}^2 = \overline{V_R}^2 + \overline{V_T}^2 = \mu\left(\frac{2}{\bar{r}} - \frac{1}{\bar{a}}\right) \quad . \tag{20.203}$$

Nach Wurzelziehen kann die zweite Näherung

$$V = \bar{V} + \frac{\overline{V_R}\,\delta V_R + \overline{V_T}\,\delta V_T}{\bar{V}} + \ldots \tag{20.204}$$

erhalten werden. Somit gilt die Zerlegung

$$\begin{aligned} V &= \bar{V} + \delta V \\ \delta V &= \frac{\overline{V_R}\,\delta V_R + \overline{V_T}\,\delta V_T}{\bar{V}} + \ldots \end{aligned} \tag{20.205}$$

Da $\overline{V_R}$ und $\overline{V_T}$ kurzperiodisch variieren, weist auch die gestörte Geschwindigkeit *V* nur kurzperiodische Störungen unabhängig von den berücksichtigten Störungen auf. Mit $\delta V_{RG} = \delta V_{RkG}$ aus Formel (20.191) und $\delta V_{TG} = \delta V_{TkG}$ aus Formel (20.199) folgen die periodischen Störungen in der Bahngeschwindigkeit *V*:

$$\delta V_G = \delta V_{kG} = \frac{\overline{V_R}\,\delta V_{RG} + \overline{V_T}\,\delta V_{TG}}{\bar{V}} + \ldots \tag{20.206}$$

- *Die* **Bahngeschwindigkeit** *ist außer an der kritischen Neigung in einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes singularitätenfrei. Sie enthält ausschließlich kurzperiodische Variationen. In diesen sind auch die Terme mit* J_3, J_4 *und* J_5 *enthalten.*

20.2.4.17 Positionselemente p_s *und* p_c

Im Zusammenhang mit den sogenannten Positionselementen werden in Abschnitt 11.6 die (in der elliptischen Bewegung schnellen) Parameter

$$\begin{bmatrix} p_s \\ p_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos i\right)} \begin{bmatrix} \sin u \\ \cos u \end{bmatrix} \quad , \quad \left(\sigma_i = \operatorname{sgn} \cos i\right) \tag{20.207}$$

eingeführt. Im Rahmen einer Störungsrechnung können sie in einen mittleren und periodischen Anteil zerlegt werden. Dazu wird die Inklination $i = \bar{i} + \Delta i$ und das Argument der Breite $u = \bar{u} + \Delta u$ verwendet. Es wird

$$p_s = \sqrt{\frac{1}{2}\left[1-\sigma_i \cos\left(\bar{i} + \delta i\right)\right]} \sin\left(\bar{u} + \delta u\right)$$

und nach Entwicklung

$$p_s = \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos \bar{i}\right)} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}\sigma_i \, \delta i \sin \bar{i}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos \bar{i}\right)}} \right] \left(\sin \bar{u} + \delta u \cos \bar{u}\right) + O\left(\left(\delta i\right)^2, \left(\delta u\right)^2, \delta i \cdot \delta u\right) \quad .$$

Hier kann die Identität

$$\frac{\frac{1}{2}\sin \bar{i}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos \bar{i}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos \bar{i}\right)} \quad . \tag{20.208}$$

verwendet werden. Somit wird, mit der entsprechenden Herleitung für p_c,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_s \\ p_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_s \\ \bar{p}_c \end{bmatrix} &+ \frac{1}{2}\sigma_i \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos \bar{i}\right)} \, \delta i \cdot \begin{bmatrix} \sin \bar{u} \\ \cos \bar{u} \end{bmatrix} + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos \bar{i}\right)} \, \delta u \cdot \begin{bmatrix} \sin \bar{u} \\ -\cos \bar{u} \end{bmatrix} + O\left(\left(\delta i\right)^2, \left(\delta u\right)^2, \delta i \cdot \delta u\right) \quad , \end{aligned} \tag{20.209}$$

wobei der mittlere Wert durch

$$\begin{bmatrix} \bar{p}_s \\ \bar{p}_c \end{bmatrix} := \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos \bar{i}\right)} \, \delta i \cdot \begin{bmatrix} \sin \bar{u} \\ \cos \bar{u} \end{bmatrix} \tag{20.210}$$

definiert wird. Der periodische Anteil ist

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta p_s \\ \delta p_c \end{bmatrix} = &\frac{1}{2}\sigma_i \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i \cos \bar{i}\right)} \, \delta i \cdot \begin{bmatrix} \sin \bar{u} \\ \cos \bar{u} \end{bmatrix} + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i \cos \bar{i}\right)} \, \delta u \cdot \begin{bmatrix} \sin \bar{u} \\ -\cos \bar{u} \end{bmatrix} + O\left(\left(\delta i\right)^2, \left(\delta u\right)^2, \delta i \cdot \delta u\right) \quad . \end{aligned} \tag{20.211}$$

Berücksichtigt man die Störeinflüsse durch die Anisotropie des Gravitationsfeldes des Zentralkörpers, so können die lang- und kurzperiodischen Variationen in der Inklination hier direkt eingesetzt werden, mit den Formeln (20.27) auf S. 436 und (20.59) auf S. 443 wird also

$$\delta i_G \;=\; \delta i_{lG} + \delta i_{kG}$$

erhalten. Dagegen taucht im langperiodischen Anteil des Argumentes der Breite der Faktor $1/\sin\bar{i}$ auf, der mit Formel (20.208) auf den singularitätenfreien Faktor

$$2\,\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos\bar{i}\right)}}{\sin\bar{i}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos\bar{i}\right)}}$$

gebracht werden kann. Man kann wie in Formel (20.102) den lang- und kurzperiodischen Anteil im Argument der Breite trennen. Für den langperiodischen Störanteil ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos\bar{i}\right)}\,\delta u_{lG} \;= \\
&= \;-\frac{1}{32}\,\frac{R_E^2}{\bar{p}^2}\,\frac{\bar{e}^2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos\bar{i}\right)}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\left\{J_2\left[1-43\cos^2\bar{i}+155\cos^4\bar{i}-225\cos^6\bar{i}\right]+\right. \\
&\qquad\left.+\,5\,\frac{J_4}{J_2}\left[1-19\cos^2\bar{i}+75\cos^4\bar{i}-105\cos^6\bar{i}\right]\right\}\sin 2\bar{\omega}+ \\
&+\frac{1}{4}\,\frac{J_3}{J_2}\,\frac{R_E}{\bar{p}}\,\frac{\bar{e}\cos^2\bar{i}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos\bar{i}\right)}}\cos\bar{\omega}+ \qquad (20.212) \\
&+\frac{5}{32}\,\frac{J_5}{J_2}\,\frac{R_E^3}{\bar{p}^3}\;\bar{e}\left\{\left[\frac{\left(10+3\bar{e}^2\right)\sin^2\bar{i}+\left(4+3\bar{e}^2\right)\cos^2\bar{i}}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos\bar{i}\right)}}+\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.-\left(26+9\bar{e}^2\right)\sin\bar{i}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos\bar{i}\right)}\right]\frac{1-14\cos^2\bar{i}+21\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos\bar{\omega}- \right. \\
&\qquad-6\left(4+3\bar{e}^2\right)\frac{\sin\bar{i}\cos^2\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos\bar{i}\right)}\left(3-14\cos^2\bar{i}+35\cos^4\bar{i}\right)\cos\bar{\omega}- \\
&\qquad-\frac{7}{18}\left[\left(3+2\bar{e}^2\right)\sin\bar{i}-\bar{e}^2\,\frac{\cos^2\bar{i}}{2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sigma_i\cos\bar{i}\right)}}+3\right]\frac{1-10\cos^2\bar{i}+9\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\cos 3\bar{\omega}- \\
&\qquad\left.-\frac{7}{9}\,\bar{e}^2\,\frac{\sin\bar{i}\cos^2\bar{i}}{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sigma_i\cos\bar{i}\right)}\left[5-18\cos^2\bar{i}+45\cos^4\bar{i}\right]\cos 3\bar{\omega}\right\}+\ldots
\end{aligned}$$

Der kurzperiodische Anteil kann direkt von Formel (20.105) (auf Seite 453) übernommen werden.

- *Die **Positionselemente** p_s und p_c sind außer an den kritischen Neigungen in einer Theorie erster Störordnung des Erdschwerefeldes singularitätenfrei. Sie enthalten lang- und kurzperiodische Variationen. In diesen sind in einer Theorie erster Ordnung auch die Terme mit J_3, J_4 und J_5 enthalten.*

20.3 Bewegungseinflüsse durch den Strahlungsdruck

In Kapitel 5 (Band II) wurde eine Methode der analytischen Bearbeitung von Bewegungsproblemen mit Hilfe von automatischen Formelmanipulatoren angedacht. Ergänzend zu den in Abschnitt 5.9 referierten Beispielen werden in den folgenden beiden Abschnitten weitere Beispiele ausführlich dargestellt[1].

20.3.1 Beispiel einer konstanten radialen Schubbeschleunigung

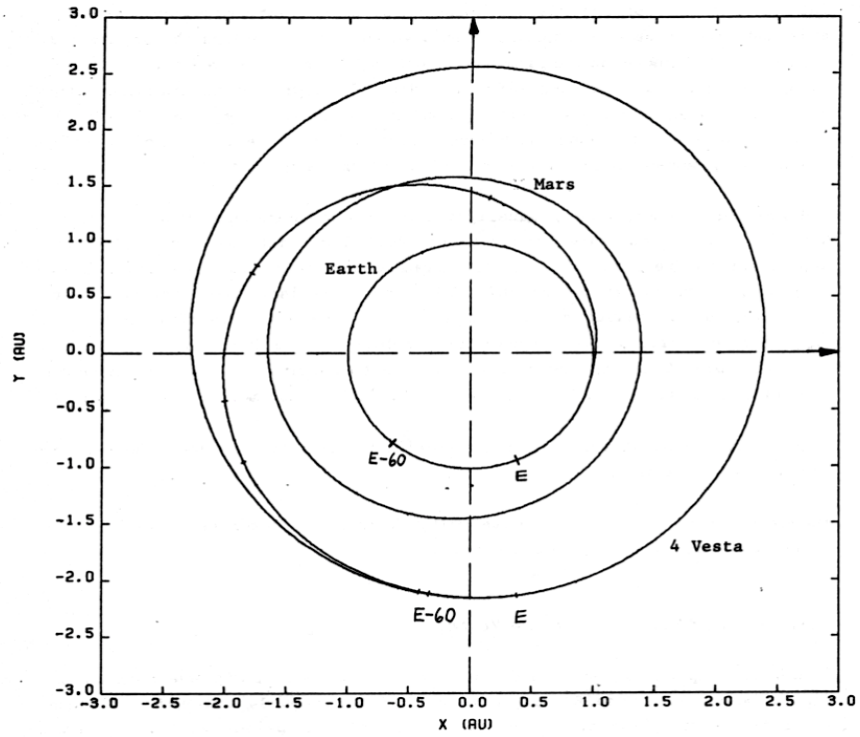


Bild 20-1: Die Übergangsbahn aus der Erdbahn zum kleinen Planeten 4/Vesta mit unterschiedlich langen Bahnbögen, in denen die Ionentriebwerke eingeschaltet sind. Beispielbahn aus der Studie ECKSTEIN, M. C. et al. [1983] als Muster einer interplanetaren Übergangsbahn. Die Bahn im Bild hat eine Dauer von 687 Tagen, der letzte geschobene Bahnast beträgt 60 Tage bei einem Schub von 20mN mit den Anstellwinkeln β=20°, γ=10°. Das Rendezvous mit dem kleinen Planeten war geplant für den 14. Juli 1989.

Im Rahmen einer Studie zu einer interplanetaren Transferbahn von der Erde zu einem kleinen

[1] Erstmals veröffentlicht in DLR FB 2011-04, pp. 155-190

Planeten[1] wurde angenommen, dass an Stelle von chemischen Triebwerken der benötigte Schub auf der Transferbahn mit Ionentriebwerken erzeugt wird.

Nach Verlassen der Erdbahn hat der Raumflugkörper die heliozentrische Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_\odot}{r^2}\mathbf{r}_0 + P_S\ AE^2\ \frac{c_R A_R}{m}\ \frac{1}{r^2}\mathbf{r}_0 + \ddot{\mathbf{r}}_S \qquad (20.213)$$

wobei der erste Term das Zweikörperproblem Sonne-Raumflugkörper beschreibt mit der heliozentrischen Gravitationskonstante[2]

$$\mu_\odot = 1.32712438\times 10^{20}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2,$$

r ist der heliozentrische Ortsvektor des Raumflugkörpers.

Der zweite Term beschreibt die Beschleunigung des Raumflugkörpers durch den Strahlungsdruck[3] der Sonne mit den Größen[4]

$$P_S = 4.51\times 10^{-6}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2} = \text{Solardruck in 1 AE}\quad ,$$

c_R - Reflektivitätsfaktor, bei Erdsatelliten üblicherweise zu c_R=1.3 angenommen, (der Wert im Allgemeinen schwankt zwischen 0 ⇔ durchscheinend, d.h. kein Effekt der Strahlung auf den Raumflugkörper, 1.0 ⇔ alle Strahlung wird absorbiert, 2.0 ⇔ alle Strahlung wird reflektiert, somit doppelter Effekt auf den Raumflugkörper),

A_R - Querschnittsfläche [m²] des Raumflugkörpers in Sonnenrichtung, somit die Angriffsfläche für Solardruck; im Fall der Studie hat der untersuchte Raumflugkörper einen Solarkonzentrator mit Durchmesser 12m entsprechend $A_R \approx 113\mathrm{m}^2$,

m - Masse [kg] des Raumflugkörpers, in der Studie angenommen zu $m = 225\ \mathrm{kg}$,

AE - Astronomische Einheit, 1 AE = 1.49597870×10^8 km.

Der zweite Term in Gleichung (20.213) kann mit dem konstanten Wert B_S zusammengefasst werden:

$$B_S := P_S\ AE^2\, c_R\, A_R\ ,\ b_{PR} := \frac{B_S}{m r^2}\quad . \qquad (20.214)$$

Der dritte Term beschreibt die Schubbeschleunigung durch die Ionentriebwerke mit den Komponenten in radialer, transversaler und normaler Bewegungsrichtung

$$\ddot{\mathbf{r}}_S = b_{SR}\,\mathbf{r}_0 + b_{ST}\,\mathbf{q}_0 + b_{SN}\,\mathbf{c}_0\quad . \qquad (20.215)$$

---

[1] ECKSTEIN, M. C. et al. [1983], insbesondere pp.60-63

[2] SEIDELMANN, P. K. ED. [1992], p. 696

[3] zum Strahlungsdruck siehe etwa in: CAPELLARI, J. O. ET AL. [1976], pp. 4-60 – 4-63

[4] Siehe etwa in VALLADO, D. A. [2001], p. 544

Die Schubbeschleunigung muss im Prinzip sowohl nach Betrag wie nach Richtung variabel angenommen werden. Der Schub $\mathbf{F}_S$ wird wie in der Raketentechnik üblich durch Massenausstoß erzeugt, was zu einem Massenverlust

$$\dot{m} = \left|\mathbf{F}_S\right| / c_{eff} \tag{20.216}$$

führt, wenn c_{eff} die effektive Ausströmgeschwindigkeit bedeutet. In der Studie wurde für die Ionentriebwerke mit einem Schub im Bereich

$$\left|\mathbf{F}_S\right| = 5.....10 \text{ mN} \quad \text{pro Triebwerk}$$

gerechnet mit dem effektiven spezifischen Impuls

$$c_{eff} = 27.78 \text{km/s} \qquad \text{pro } 10 \text{ mN Triebwerk.}$$

Es wurde vereinfachend angenommen, dass Schub und Schubrichtung streckenweise konstant seien. Da vier Triebwerke zu je 10 mN gebündelt werden, beträgt der Massenverlust

$$\dot{m} = \frac{\left|\mathbf{F}_S\right|}{c_{eff}} = \frac{40}{27.78}\ \frac{\text{mN}}{\text{km/s}} = 1.4398848 \times 10^{-6}\ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad .$$

Beispiel eines Lösungsweges:

Eine wesentliche Aussage der vorliegenden Arbeit ist die Gleichwertigkeit unterschiedlicher Lösungswege um ein Bewegungsproblem zu lösen. Um das Lösungsverfahren zu demonstrieren werde im Folgenden (unter Vereinfachung der in der genannten Studie behandelten allgemeingültigen Lösung) angenommen, dass der Schub konstant in radialer Richtung über den gewünschten Zeitraum wirke:

$$b_{SR} = \text{const.} \neq 0 \ , \ b_{ST} = b_{SN} = 0 \qquad .$$

Ausgehend von der *Leibniz*gleichung

$$\ddot{r} = G^2 / r^3 + b_R$$

und der allgemeinen Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R\, \mathbf{r}_0 + b_T\, \mathbf{q}_0 + b_N\, \mathbf{c}_0$$

lauten die Beschleunigungskomponenten in diesem Fall

$$\begin{aligned} b_R &= b_{KR} + b_{PR} + b_{SR} = -\frac{\mu_\odot}{r^2} + \frac{B_S}{r^2\, m} + b_{SR} \quad , \\ b_T &= b_{ST} = 0 \quad , \ b_N = b_{SN} = 0 \ , \ B_S = \text{const.} \neq 0 \ , \ b_{SR} = \text{const.} \neq 0 \quad . \end{aligned} \tag{20.217}$$

Erster Lösungsschritt

In der radialen Beschleunigung b_{R} (20.217) entspricht das erste Glied der Zweikörperbewegung des Raumflugkörpers um die Sonne (ein Dreikörperproblem Sonne-Erde-Raumsonde werde in diesem Zusammenhang vernachlässigt), dessen Lösung eine Kegelschnittbewegung nach Abschnitt 5.4 (Band II) ist. Es fällt auf, dass sowohl die Keplerbewegung als auch der Einfluss durch den

Strahlungsdruck (mathematisch gesehen zufällig!) dem $1/r^2$ Abstandsgesetz genügen. Allerdings wird durch das Brennen der Ionentriebwerke ein Massenverlust $\dot{m}$ bewirkt (vgl. Formel (20.216)), der die radiale Beschleunigung modifiziert. Um diesen Einfluss zu analysieren soll angenommen werden, dass der Massenverlust so klein ist, dass eine Linearisierung erlaubt ist

$$m = m(\zeta) = m_0 + \frac{\Delta m}{\Delta \zeta}\,\Delta\zeta \qquad , \quad \frac{\Delta m}{\Delta \zeta} \triangleq \dot{m}\frac{r^2}{G} \quad , \tag{20.218}$$

wobei m_0 die konstante Anfangsmasse des Raumflugkörpers bei Start aus der Erdbahn sei, $\Delta m / \Delta\zeta$ sei die als konstant angenommene Massenänderung umgerechnet für Bezug auf die Winkeldifferenz $\Delta\zeta$ (richtiger wäre proportional zur Zeit, was aber wegen der kleinen Größen vernachlässigt werden soll). Diese kann (ohne Einschränkung) auf den Anfangswinkel $\zeta_0 = 0°$ bezogen werden. Dann ist es möglich, die durch den Strahlungsdruck bewirkte radiale Beschleunigung in einen Anteil mit konstanter Masse und einen zweiten Anteil, der den Massenverlust enthält, aufzuspalten:

$$b_{PR} =: b_{PR0} + b_{PR1} \approx \frac{B_S}{m_0}\frac{1}{r^2} - \frac{B_S}{m_0{}^2}\frac{1}{r^2}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}\Delta\zeta \quad . \tag{20.219}$$

Der erste Teil kann (wenn alle Größen in B_S als konstant angenommen werden können) auf Grund seiner formalen Übereinstimmung mit dem Anteil der „ungestörten“ Keplerbewegung kombiniert werden:

$$b_{KR} + b_{PR0} = \left(-\mu_\odot + \frac{B_S}{m_0}\right)\frac{1}{r^2} \quad . \tag{20.220}$$

Am durchsichtigsten werden die Verhältnisse, wenn von einer geradlinigen Bewegung als Grundbewegung ausgegangen wird. Dann kann der Integrationsweg von Abschnitt 5.8 mit der modifizierten Radialbeschleunigung $b_{KR}+b_{PR0}$ nachvollzogen werden. In der Polargleichung der geradlinigen Bewegung[1]

$$r \;=\; \frac{G}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta} \tag{20.221}$$

werden die Parameter die Variationsgleichungen (5.105) (aus Abschnitt 5.2.7, Band II) im vorliegenden Beispiel in der Gestalt

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = \frac{1}{G}\left(-\mu_\odot + \frac{B_S}{m_0}\right)\sin\zeta \quad , \quad \frac{dg_1}{d\zeta} = -\frac{1}{G}\left(-\mu_\odot + \frac{B_S}{m_0}\right)\cos\zeta \tag{20.222}$$

annehmen. Sie haben wegen b_T=0 und deswegen G=const. die Integrale

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1(\zeta) = g_{11} + \frac{1}{G}\left(\mu_\odot - \frac{B_S}{m_0}\right)\cos\zeta \\ g_2 &= g_2(\zeta) = g_{21} + \frac{1}{G}\left(\mu_\odot - \frac{B_S}{m_0}\right)\sin\zeta \end{aligned} \tag{20.223}$$

[1] Siehe etwa die Formeln in Abschnitt 5.9.1.1 (Band II)

mit den neuen Integrationskonstanten g_{11}, g_{21}, die durch die neuen Konstanten g_{100}, ζ_B mit

$$g_{11} = g_{100}\cos\zeta_B \quad , \quad g_{21} = g_{100}\sin\zeta_B \quad , \quad g_{100} = \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2} \tag{20.224}$$

ersetzt werden können. Werden die Funktionen g_1, g_2 in die Polargleichung (20.221) eingesetzt, ergibt sich die Polargleichung eines Kegelschnitts

$$r = \frac{p}{1 + k_1\cos\zeta + k_2\sin\zeta} \quad , \tag{20.225}$$

wenn die Exzentrizität durch

$$e := \frac{m_0\, G\, g_{100}}{m_0\,\mu_\odot - B_S} = \frac{\dfrac{G}{\mu_\odot}\, g_{100}}{1 - \dfrac{B_S}{m_0\,\mu_\odot}} \quad , \tag{20.226}$$

mit den neuen Parametern

$$k_1 := e\cos\zeta_B \quad , \quad k_2 := e\sin\zeta_B \tag{20.227}$$

und der Kegelschnittparameter durch

$$p := \frac{m_0\, G^2}{m_0\,\mu_\odot - B_S} = \frac{\dfrac{G^2}{\mu_\odot}}{1 - \dfrac{B_S}{m_0\,\mu_\odot}} = \frac{eG}{g_{100}} \tag{20.228}$$

erklärt werden. Der Strahlungsdruck bewirkt also eine Aufblähung der Kegelschnittbahn gegenüber einer reinen Keplerbewegung (=Zweikörperbewegung), wobei der Flächenparameter G unverändert bleibt, während Exzentrizität und Kegelschnittparameter modifiziert werden.

Wird die Bahn der Erde um die Sonne als elliptische Keplerbahn aufgefasst, lautet der Kegelschnittparameter der Erdbahn

$$p_{\oplus} = \frac{G^2}{\mu_\odot} = a_{\oplus}\left(1 - e_{\oplus}^2\right) \quad , \tag{20.229}$$

für die durch den radialen Anteil des Strahlungsdrucks modifizierte Bahn mit Formel (20.228)

$$p = \frac{p_{\oplus}}{1 - \dfrac{B_S}{m_0\,\mu_\odot}} = a\left(1 - e^2\right) \tag{20.230}$$

mit den Unbekannten große Halbachse *a* und Exzentrizität *e*. Um diese zu bestimmen, kann von folgender Überlegung ausgegangen werden: Ausgehend von einer Anpassungskurve wird eine bis dahin nicht berücksichtigte Beschleunigung („Störung“) auf die Bewegung zusätzlich zur bisher berücksichtigten ausgeübt. Von diesem Moment an wird die neue Bahn eingeschlagen, ihr Beginn muss also auf der ursprünglichen Bahn liegen. Dies kann irgendein beliebiger günstiger Punkt sein, bei interplanetaren Bahnen etwa das Aphel der Bahn um Treibstoff und Zeit zu sparen. Im vorliegenden Bericht, der sich beliebigen Bahnen widmet, ist stets das Perizentrum definiert, nicht aber

das Apozentrum. Aus diesem Grund und um das Verfahren anschaulich zu halten, werde der Übergang im Perihel der Bahn gestartet. In diesem Punkt unter der Annahme einer elliptischen Bewegung hat der bewegte Körper den Radius

$$r_P = r\left(\zeta = \zeta_B\right) = \frac{p_{\sphericalangle}}{1+e_{\sphericalangle}} \quad . \tag{20.231}$$

Auf der neuen Bahn sei ebenfalls das Perihel angenommen. Mit dem neuen in Formel (20.230) berechneten Kegelschnittparameter lautet der Radius

$$r_P = r\left(\zeta = \zeta_B\right) = \frac{p}{1+e} \quad ,$$

woraus die neue Exzentrizität berechnet werden kann:

$$e = \frac{p}{r_P} - 1 \quad . \tag{20.232}$$

Die modifizierte Halbachse folgt dann, da es sich um eine elliptische Bewegung handelt, aus der bekannten Beziehung

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad . \tag{20.233}$$

Die Beschleunigungsbeziehung (20.220) kann so interpretiert werden, dass die Bewegung der Raumsonde abläuft als ob die heliozentrische Gravitationskonstante um den Betrag B_S/m_0 variiert worden wäre und dann lautet

$$\mu = \mu_{\odot} - \frac{B_S}{m_0} \quad . \tag{20.234}$$

Diese neue Kegelschnittbahn soll nun als Anpassungskurve zur Berücksichtigung der weiteren Beschleunigungskomponenten dienen.

Der Zeitbezug wird (wie üblich) über das Zeitintegral (hier: zweites *Kepler*sches Gesetz) $r^2\,\dot{\zeta} = G$ in der bekannten Weise (eventuell durch Einbeziehung der *Kepler*-Gleichung) hergestellt. Da in diesem Beispiel eine normale Beschleunigung vernachlässigt wird, sind die Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ des *Hansen*-Systems (eventuell nach den *Frenet*-Formeln des *Hansen*-Systems (4.326) in Abschnitt 4.4.3) als unveränderlich anzunehmen. Die Lösung hat somit den Zustandsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= p\,\frac{\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta}{1 + k_1\cos\zeta + k_2\sin\zeta} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{p}}\left[-\left(k_2 + \sin\zeta\right)\mathbf{q}_1^{(I)} + \left(k_1 + \cos\zeta\right)\mathbf{q}_2^{(I)}\right] \quad . \end{aligned} \tag{20.235}$$

Die radiale Geschwindigkeit lautet nach Beziehung (5.132) (Abschnitt 5.4.2)

$$\dot{r} = \frac{G}{p}\left(k_1\sin\zeta - k_2\cos\zeta\right) \quad . \tag{20.236}$$

NUMERISCHES BEISPIEL: Zur Durchführung einer quantitativen Untersuchung werden die obigen Zahlen verwendet. Mit der mittleren großen Bahnhalbachse und der mittleren Exzentrizität der Erdbahn[1]

$$a_{\oplus\odot} = 1.0000010178\,AE \mathrel{\hat{=}} 1.49598022261\times 10^{8}\,km$$
$$e_{\oplus\odot} = 0.016708617$$

ergibt sich für den Flächenparameter der Erdbahn um die Sonne

$$G = \sqrt{\mu_\odot\, a_{\oplus\odot}\left(1-e_{\oplus\odot}^2\right)} = 4.45510668693\times 10^{9}\,\frac{km^2}{s} \quad .$$

Damit wird

$$\frac{\mu_\odot}{G} = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{p}} = 29.7888350\,\frac{km}{s} \quad .$$

Das ist die (mittlere Kreisbahn-) Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne, somit die Anfangsgeschwindigkeit für den Raumflugkörper beim Abflug aus der Erdbahn. Der Solardruck bewirkt ein Geschwindigkeitsinkrement mit dem Hilfswert bei der Strahlungsdruck-Anströmfläche A_R= 113 m^2:

$$B_S = \ 0.1482685900\times 10^{11}\,\frac{kg\,km^3}{s^2} \quad , \quad \frac{B_S}{G} = 3.3278260\,\frac{kg\,km}{s} \quad .$$

Im Fall des Abflugs aus der Erdbahn mit der Anfangsmasse m_0 = 225 kg wird somit als Folge des relativ großen Solarkonzentrators das Geschwindigkeitsinkrement erhalten:

$$\Delta V_R = \frac{B_S}{G\,m_0} = 0.014790\ \frac{km}{s} \quad .$$

Ferner werden die Zahlenwerte benötigt:

$$\frac{B_S}{\mu_\odot} = 0.1117216\ kg \quad , \quad \frac{B_S}{m_0\,\mu_\odot} = 0.000496541 \ , \quad \frac{B_S}{m_0} = 6.5897151111\times 10^{8}\,\frac{km^3}{s^2} \ .$$

Damit lautet die modifizierte heliozentrische Gravitationskonstante der untersuchten Bewegung (vgl. Formel (20.234))

$$\mu = \mu_\odot - \frac{B_S}{m_0} = 1.326465408\times 10^{11}\,\frac{km^3}{s^2} \quad .$$

Die numerischen Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

[1] aus P. K. SEIDELMANN ET AL. [1992], p.700

	Ungestörte Bewegung	Bewegung mit Berücksichtigung durch Strahlungsdruck
Mittlerer Kegelschnittparameter	$p_{♁} = G^2 / \mu_{\odot} = 0.999721840\, AE =$ $= 1.495562578 \times 10^8\, km$	$p = 1.000218489\, AE =$ $= 1.49674905981 \times 10^8\ km$
Periheldistanz	$r_P = 0.983292384 AE =$ $= 1.47098446203 \times 10^8 km$	r_P
Mittlere Exzentrizität	$e_{♁} = 0.016708617$	$e = 0.017213705$
Mittlere große Bahnhalbachse	$a_{♁} = 1.0000010178\, AE =$ $= 1.49598022261 \times 10^8\, km$	$a = 1.000514954\, AE =$ $= 1.49674905981 \times 10^8\, km$
Differenz in Halbachse		$\Delta a = +76883.72\, km$

Tabelle 20-1: Keplersche Bahnelemente der durch den konstanten Anteil des Strahlungsdrucks verursachten gestörten Bewegung der Asteroidensonde (ohne Antrieb durch die Ionentriebwerke) ◀

Anmerkung: Die Tatsache, dass der Strahlungsdruck der Sonne eine Wirkung auf die Bewegung eines Himmelskörpers hat, die im Prinzip derselben Gesetzmäßigkeit wie durch eine Gravitation unterliegt, erlaubt einen Rückschluss auf die Bewegung der Erde um die Sonne. Es ist zu erwarten, dass die Bewegung der Erde zu einem bestimmten Anteil durch den Strahlungsdruck und nicht allein durch die Gravitation geprägt ist. Wenn mit $a_{♁}, e_{♁}$ die aus der Beobachtung erhaltene große Bahnhalbachse und Exzentrizität der Erdbahn bedeuten, kann mit den bekannten physikalischen Parametern der Erde und des Strahlungsdrucks aus Formel (20.226) die „ungestörte“, d.h. allein durch das Zweikörperproblem Sonne-Erde bewirkte, Exzentrizität der Erdbahn berechnet werden:

$$e_{♁G} = e_{♁}\left(1 - \frac{B_S}{m_{♁}\,\mu_{\odot}}\right) \quad . \tag{20.237}$$

Die Masse der Erde ist bekannt[1]

$$m_{♁} = 5.9742 \times 10^{24}\, kg$$

Dann ist mit den obigen Zahlenwerten für die Exzentrizität der Erdbahn ohne Strahlungsdruck mit Formel (20.226)

$$e_{♁G} = e_{♁}\left(1 - 2.115 \times 10^{-14}\right) \quad .$$

Dieser kleine Zahlenwert kann in der Praxis nicht mehr nachgewiesen werden. Mit dem Kegelschnitt-Parameter der Erdbahn

$$p_{♁} = a_{♁}\left(1 - e_{♁}^2\right) = 1.495562578 \times 10^{11}\, m$$

[1] aus P. K. SEIDELMANN ET AL. [1992], p.700

wird für den entsprechenden Wert ohne Strahlungsdruck nach Formel (20.228)

$$p_{\odot G} = p_{\odot}\left(1-\frac{B_S}{m_{\odot}\,\mu_{\odot}}\right) \quad . \tag{20.238}$$

Wie bei der Berechnung der Exzentrizität ist auch hier der Korrekturterm vernachlässigbar, was entsprechend dann auch für die Halbachse zutrifft. Die Erde ist also zu „schwer“ um vom Strahlungsdruck der Sonne aus ihrer gravitativ bedingten Bahn wirksam herausgedrängt zu werden. ◀

2. Lösungsschritt

Als nächstes werde der variable Anteil für die Wirkung des Solardrucks im zweiten Glied der radialen Beschleunigung (20.217) als ein „Störterm“ hinzugefügt:

$$b_{PR1} \approx -\frac{B_S}{m_0^{\,2}}\frac{1}{r^2}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}\Delta\zeta \quad . \tag{20.239}$$

Die Parameter k_1, k_2 müssen jetzt als Funktionen des Bahnwinkels ζ aufgefasst werden. Zu ihrer Charakterisierung sollen sie daher in der Form

$$k_1 =: k_1^{(1)} = k_1^{(1)}(\zeta) \quad , \qquad k_2 =: k_2^{(1)} = k_2^{(1)}(\zeta) \tag{20.240}$$

geschrieben werden. Ihre Variationsgleichung (5.131) lautet wegen des Verschwindens der transversalen Beschleunigung b_T=0 und daher $dG/d\zeta = dp/d\zeta = 0$ und mit der Näherung (20.219), mit $G^2 = \mu\, p$ und der bisher vernachlässigten Beschleunigung b_{PR1} in der Definitionsgleichung (20.219)

$$\begin{aligned}
\frac{dk_1^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G^2}\,p\,b_{PR1}\sin\zeta \approx -\frac{B_S}{m_0^2\,\mu_{\odot}}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}\Delta\zeta\sin\zeta \\
\frac{dk_2^{(1)}}{d\zeta} &= -\frac{r^2}{G^2}\,p\,b_{PR1}\cos\zeta \approx \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_{\odot}}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}\Delta\zeta\cos\zeta \quad .
\end{aligned} \tag{20.241}$$

Wenn der Bahnwinkel ζ auf den Anfangswinkel ζ_0=0° bezogen wird mit $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0 = \zeta$ lauten die Integrale

$$\begin{aligned}
k_1 = k_1^{(1)} = k_1^{(1)}(\zeta) &\approx k_1^{(2)} - \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_{\odot}}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta) \\
k_2 = k_2^{(1)} = k_2^{(1)}(\zeta) &\approx k_2^{(2)} + \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_{\odot}}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta) \quad .
\end{aligned} \tag{20.242}$$

Die Integrationskonstanten sind hier $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$. Für eine größenordnungsmäßige Abschätzung wird bei Bezug auf r=1AE als Anfangsbahngröße und dem oben berechneten Wert für $\dot{m}$ und der Umrechnung (20.218) relativ zur Winkeleinheit der folgende Wert für den Massenverlust erhalten

$$\frac{\Delta m}{\Delta\zeta} \approx -7.2325\frac{kg}{rad} \quad . \tag{20.243}$$

Würde pausenlos über einen Umlauf von 2π geschoben, müssten an Treibstoff etwa 45kg eingeplant werden.

Da in dieser Aufgabenstellung nur ein radialer Schub zugelassen wurde, wird weder der Flächenparameter G (wegen $\dot{G} = r b_T = 0$) noch die Bahnebene (wegen $\dot{\eta} = G\, b_N / r = 0$) geändert. Eine Bahnänderung infolge radialer Beschleunigung mit konstanter Masse m wird also nur (wie im Rahmen des ersten Lösungsschrittes untersucht wurde) große Bahnhalbachse und Exzentrizität verändern, jedoch nicht aus der Bahn herausführen können. Dies kann nur durch den Massenverlust (hier durch den konstanten Schub der Ionentriebwerke) in minimalem Umfang erreicht werden, wodurch der Effekt des radialen Schubes durch die Triebwerke noch etwas überlagert wird. Bild 20-2 zeigt mit stark überhöhtem Wert für den Solardruck (es wurde für die Zeichnung der Wert $B_S / \left(m_0\, \mu_\odot \right) = 0.2$ verwendet) das Aufspiralen durch radial wirkenden Solardruck und als Folge des Massenverlustes mit dem Wert -7.2 kg/rad. Dieser Effekt könnte im vorliegenden Fall wegen des relativ großen Solarkonzentrators durch dessen schräge Anstellung gegenüber der Sonnenrichtung und dadurch Erzeugung eines transversalen Schubes wirkungsvoll erhöht werden. Dieser (zusätzliche hier aber nicht einbezogene) Effekt wird im nächsten Abschnitt bei der Betrachtung einer Sonnensegelbahn untersucht.

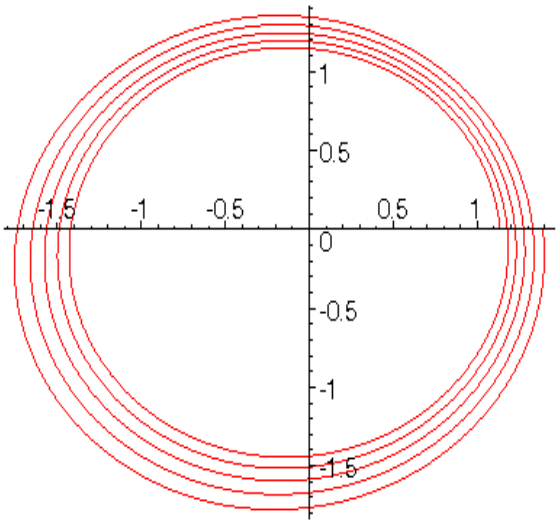


Bild 20-2: Prinzip der Aufspiralung einer heliozentrischen Bahn infolge des Drucks durch Sonnenstrahlung bei ständigem Massenverlust etwa durch ein Ionentriebwerk (der Solardruck ist zur Veranschaulichung in diesem Plot um den Faktor 200 überhöht)

3. Lösungsschritt:

Als Ausgangskurve für diesen Lösungsschritt werde der Kegelschnitt (20.225) sowie die radiale Geschwindigkeit (20.236) mit den Funktionen $k_1(\zeta), k_2(\zeta)$ aus den Integralen (20.242) gewählt. Die dortigen Konstanten $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ werden im neuen Schritt als Funktionen des Bahnwinkels ζ aufgefasst, welche mit der radialen Beschleunigung b_{SR} bestimmt werden müssen, dem dritten Anteil in der Zerlegung (20.217) für die radiale Beschleunigung b_R. Zur Abkürzung werde der konstante Term

$$B_3 := \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_\odot}\,\frac{\Delta m}{\Delta\zeta} \tag{20.244}$$

eingeführt. Die neue Polargleichung sowie die entsprechende radiale Geschwindigkeit haben somit die Gestalt (nach Einsetzen der Integrale (20.242) in die Polargleichung (20.225))

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1+k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta\ B_3} \\ \dot r &= \frac{G}{p}\left(k_1^{(2)}\sin\zeta - k_2^{(2)}\cos\zeta\ - B_3\right) \qquad . \end{aligned} \tag{20.245}$$

Die Anpassungsgleichungen (5.196) lauten in diesem Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial k_1^{(2)}}\frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} + \frac{\partial r}{\partial k_1^{(2)}}\frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} &= 0 \\ \frac{\partial \dot r}{\partial k_1^{(2)}}\frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} + \frac{\partial \dot r}{\partial k_2^{(2)}}\frac{dk_2^{(2)}}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\,b_{SR} \qquad . \end{aligned} \tag{20.246}$$

Um diese zur Berechnung der neuen Variablen $k_1^{(2)}(\zeta)$, $k_2^{(2)}(\zeta)$ aufstellen zu können, werden die folgenden partiellen Ableitungen benötigt:

$$\frac{\partial r}{\partial k_1} = \frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}} = -\frac{p\cos\zeta}{\left(1+k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta\right)^2} = -\frac{p\cos\zeta}{\left(1+k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial k_2} = \frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}} = \frac{p\sin\zeta}{\left(1+k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta\right)^2} = -\frac{p\sin\zeta}{\left(1+k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2}$$

$$\frac{\partial \dot r}{\partial k_1^{(1)}} = \frac{G}{p}\sin\zeta \quad , \quad \frac{\partial \dot r}{\partial k_2^{(1)}} = -\frac{G}{p}\cos\zeta$$

$$\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} = 1\ ,\ \frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} = 0\ ,\ \frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} = 1$$

somit

$$\frac{\partial r}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} + \frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial k_2^{(2)}} = \frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} + \frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} = \frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}}$$

$$\frac{\partial \dot r}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial \dot r}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} + \frac{\partial \dot r}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial \dot r}{\partial k_1^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial \dot r}{\partial k_2^{(2)}} = \frac{\partial \dot r}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} + \frac{\partial \dot r}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} = \frac{\partial \dot r}{\partial k_2^{(1)}}$$

und die zweite der Anpassungsgleichungen (20.246) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial \dot r}{\partial k_1^{(2)}}\frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} + \frac{\partial \dot r}{\partial k_2^{(2)}}\frac{dk_2^{(2)}}{d\zeta} = \frac{p^2\,b_{SR}}{G\left(1+k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2} \tag{20.247}$$

Zur Auflösung des linearen Gleichungssystems (20.246), (20.247) für die Variationen der beiden gesuchten Parameter wird die Determinante benötigt

$$Det := \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(2)}}\frac{\partial r}{\partial k_2^{(2)}} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(2)}}\frac{\partial r}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}} = -\frac{G}{\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2}$$

Die gesuchten beiden Variationsgleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} \frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} &= \frac{p^3}{G^2} b_{SR}\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2 \sin\zeta \\ \frac{dk_2^{(2)}}{d\zeta} &= -\frac{p^3}{G^2} b_{SR}\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2 \cos\zeta \quad . \end{aligned} \tag{20.248}$$

Eine Näherungslösung kann auf Grund der Tatsache gefunden werden, dass die Parameter $k_1^{(2)}(\zeta)$, $k_2^{(2)}(\zeta)$ nur kleinen Änderungen unterworfen werden. Falls deshalb auf der rechten Seite der beiden Differentialgleichungen eine Linearisierung

$$k_1^{(2)} \approx: k_{1A}^{(2)} + k_{1D}^{(2)}\,\Delta\zeta \quad , \quad k_{2A}^{(2)} \approx: k_{2A}^{(2)} + k_{2D}^{(2)}\,\Delta\zeta \tag{20.249}$$

erlaubt ist, wobei $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0 = \zeta$ angenommen werden soll, ergeben sich die Näherungs-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} &\approx \left[\frac{p^3}{G^2} b_{SR}\left(1 + \left(k_{1A}^{(2)} + k_{1D}^{(2)}\,\zeta\right)\cos\zeta + \left(k_{2A}^{(2)} + k_{2D}^{(2)}\,\zeta\right)\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2\right]\sin\zeta \\ \frac{dk_2^{(2)}}{d\zeta} &\approx -\left[\frac{p^3}{G^2} b_{SR}\left(1 + \left(k_{1A}^{(2)} + k_{1D}^{(2)}\,\zeta\right)\cos\zeta + \left(k_{2A}^{(2)} + k_{2D}^{(2)}\,\zeta\right)\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2\right]\cos\zeta \end{aligned} \tag{20.250}$$

mit den Lösungen[1], welche die neuen Integrationskonstanten $k_1^{(3)}$, $k_2^{(3)}$ enthalten:

[1] die Integration wurde mit dem algebraischen Formelmanipulator-Programm MAPLE7 durchgeführt

$$
\begin{aligned}
k_1^{(2)} = k_1^{(3)} + \sin\zeta \Bigg\{ & \frac{p^3 b_{SR}}{G^2} \Bigg[\zeta + B_3\ \zeta^2 + \frac{1}{3} B_3\ \zeta^3 + 2\ k_{1A}^{(2)} \sin\zeta - 2k_{2A}^{(2)} \cos\zeta + \\
& + \frac{1}{2} k_{1A}^{(2)2} \left(\zeta + \sin\zeta\cos\zeta\right) + \frac{1}{2} k_{2A}^{(2)2} \left(\zeta - \sin\zeta\cos\zeta\right) + 2\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} \left(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta\right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{2D}^{(2)} \left(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta\right) + \left(\mathrm{k}_{1A}^{(2)} k_{2D}^{(2)} + \mathrm{k}_{1D}^{(2)} k_{2A}^{(2)}\right) \left(-\zeta\cos^2\zeta + \frac{1}{2}\cos\zeta\sin\zeta + \frac{1}{2}\zeta\right) + \\
& + \mathrm{k}_{1D}^{(2)} k_{2D}^{(2)} \left(-\zeta^2\cos^2\zeta + \zeta\left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \\
& + k_{1D}^{(2)2} \left(\frac{1}{2}\zeta^2\left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) + \frac{1}{2}\zeta\cos^2\zeta - \frac{1}{4}\cos\zeta\sin\zeta - \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right) + \\
& + k_{2D}^{(2)2} \left(\frac{1}{2}\zeta^2\left(\zeta - \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\zeta\cos^2\zeta + \frac{1}{4}\cos\zeta\sin\zeta + \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right) + \\
& + \mathrm{k}_{2A}^{(2)} \left(2B_3\left(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta\right) + \mathrm{k}_{2D}^{(2)} \left(\zeta\left(\zeta - \cos\zeta\sin\zeta\right) + \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} B_3 \left(\zeta^2\sin\zeta - 2\sin\zeta + 2\zeta\cos\zeta\right) + 2\,\mathrm{k}_{1A}^{(2)} B_3 \left(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta\right) - \\
& - \mathrm{k}_{1A}^{(2)}\,\mathrm{k}_{2A}^{(2)} \cos^2\zeta + \mathrm{k}_{1A}^{(2)}\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} \left(\zeta\left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{2D}^{(2)} B_3 \left(-\zeta^2\cos\zeta + 2\cos\zeta + 2\zeta\sin\zeta\right) \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{20.251}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2^{(2)} = k_2^{(3)} - \cos\zeta \Bigg\{ & \frac{p^3 b_{SR}}{G^2} \Bigg[\zeta + B_3\ \zeta^2 + \frac{1}{3} B_3\ \zeta^3 + 2\ k_{1A}^{(2)} \sin\zeta - 2k_{2A}^{(2)} \cos\zeta + \\
& + \frac{1}{2} k_{1A}^{(2)2} \left(\zeta + \sin\zeta\cos\zeta\right) + \frac{1}{2} k_{2A}^{(2)2} \left(\zeta - \sin\zeta\cos\zeta\right) + 2\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} \left(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta\right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{2D}^{(2)} \left(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta\right) + \left(\mathrm{k}_{1A}^{(2)} k_{2D}^{(2)} + \mathrm{k}_{1D}^{(2)} k_{2A}^{(2)}\right) \left(-\zeta\cos^2\zeta + \frac{1}{2}\cos\zeta\sin\zeta + \frac{1}{2}\zeta\right) + \\
& + \mathrm{k}_{1D}^{(2)} k_{2D}^{(2)} \left(-\zeta^2\cos^2\zeta + \zeta\left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \\
& + k_{1D}^{(2)2} \left(\frac{1}{2}\zeta^2\left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) + \frac{1}{2}\zeta\cos^2\zeta - \frac{1}{4}\cos\zeta\sin\zeta - \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right) + \\
& + k_{2D}^{(2)2} \left(\frac{1}{2}\zeta^2\left(\zeta - \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\zeta\cos^2\zeta + \frac{1}{4}\cos\zeta\sin\zeta + \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right) + \\
& + \mathrm{k}_{2A}^{(2)} \left(2B_3\left(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta\right) + \mathrm{k}_{2D}^{(2)} \left(\zeta\left(\zeta - \cos\zeta\sin\zeta\right) + \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} B_3 \left(\zeta^2\sin\zeta - 2\sin\zeta + 2\zeta\cos\zeta\right) + 2\,\mathrm{k}_{1A}^{(2)} B_3 \left(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta\right) - \\
& - \mathrm{k}_{1A}^{(2)}\,\mathrm{k}_{2A}^{(2)} \cos^2\zeta + \mathrm{k}_{1A}^{(2)}\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} \left(\zeta\left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{2D}^{(2)} B_3 \left(-\zeta^2\cos\zeta + 2\cos\zeta + 2\zeta\sin\zeta\right) \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{20.252}
$$

Für ein numerisches BEISPIEL werden die Zahlenwerte der genannten Studie verwendet. Der Schub mit 4 Triebwerken von jeweils 10mN erzeugt in diesem Beispiel auf den Raumflugkörper der Masse m=225 kg die konstante Beschleunigung

$$b_{SR} = \frac{4\times 10}{225}\frac{mN}{kg} = 1.777778\times 10^{-7}\,\frac{km}{s^2} \quad ,$$

mithin wird

$$b_{SR}\; G = 792.09766\,\frac{km^3}{s^3} \quad .$$

Nach Definition (11.166) hat der Parameter B_3 im vorliegenden Fall unter Berücksichtigung des Zahlenwertes (20.243) den Betrag

$$B_3 = \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_\odot}\,\frac{\Delta m}{\Delta\zeta} = -0.3178079435\times 10^{-4} \quad [1/rad] \quad .$$

Die Anfangswerte für eine numerische Simulation werden aus der Polargleichung und der radialen Geschwindigkeit (20.245) mit den Näherungen (20.249) erhalten:

Aus $r(\zeta = 0°) = 1AE$ wird mit dem Kegelschnittparameter p aus Tabelle 20-1

$$k_{1A}^{(2)} = \frac{p}{r(\zeta = 0)} - 1 = \frac{p}{1AE} - 1 = 0.000711518$$

Da $k_{1A}^{(2)} =: e^{(2)}\cos\zeta_B^{(2)}$, $k_{2A}^{(2)} =: e^{(2)}\sin\zeta_B^{(2)}$ entsprechend den Definitionsgleichungen (20.227) gesetzt werden können und als Ausgangswert die Exzentrizität e aus Tabelle 20-1 gewählt werden kann, ergibt sich $\zeta_B^{(2)} = 87°.560540122$ und damit

$$k_{2A}^{(2)} = e\sin\zeta_B^{(2)} = 0.016701378 \quad .$$

Die radiale Geschwindigkeit liefert unter der Annahme, dass die Triebwerke konstant in radialer Richtung arbeiten den Wert (aus der Raketengleichung) und mit der Zeiteinheit $\Delta t = 1\text{sec}$ sowie den Zahlenwerten dieses Beispiels

$$\dot r \approx \Delta V = c_{eff}\,\ln\frac{m_0}{m_0 - \dot m\,\Delta t} = 1.666799995\;\times 10^{-7}\,\frac{km}{s}$$

somit

$$k_{2D}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{p}{G}\,\dot r\,(2\pi) + k_{2A}^{(2)}\right] = -0.2658107756\;\times 10^{-2}$$

sowie

$$k_{1D}^{(2)} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{p}{G}\,\dot r\left(\frac{\pi}{2}\right) - k_{1A}^{(2)}\right] = -0.4529628649\times 10^{-3} \quad .$$

Außerdem werden in den Ausdrücken (20.251), (20.252) die neuen Konstanten benötigt, welche sich aus

$$k_1^{(3)} = k_1^{(2)}\left(\zeta = 0.0\right) = 0.000711518$$

$$k_2^{(3)} = k_2^{(2)}\left(\zeta = \frac{\pi}{2}\right) = k_{2A}^{(2)} + k_{2D}^{(2)}\frac{\pi}{2} = 0.01252603210$$

ergeben. Mit diesen Zahlenwerten wird eine Übergangsbahn mit konstantem radialem Schub in Bild 20-3 berechnet. ◀

Anmerkungen zu diesem Beispiel: Der zugehörige Zeitaufwand kann durch Integration des Zeitintegrals

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G} d\zeta$$

erhalten werden, wenn in die Polargleichung (20.245) die Funktionswerte (20.251), (20.252) eingesetzt werden. Es ist wegen des allgemeinen Charakters dieser Entwicklungen zu erwarten, dass dieses Integral wie im speziellen Fall der Keplerbewegung auf eine transzendente Funktion führt. Das Integral und seine Lösung werden also im speziellen Fall nur numerisch zu lösen sein. Im Fall der Zahlenwerte von Bild 20-3 ergibt sich über einen Umlauf die Zeitdauer 363 Tage. Das ist im Vergleich zur Erdrevolution etwas zu wenig und deutet darauf hin, dass eine Linearisierung (20.249) nur stückweise angewendet werden darf (oder dass numerisch integriert werden sollte). ◀

Das Beispiel eines kleinen radialen Schubes unter Dominanz einer (Zweikörper-) Keplerbewegung mit einem $1/r^2$ Abstandsgesetz bringt nur eine unbedeutende Aufspiralung der Bahn.

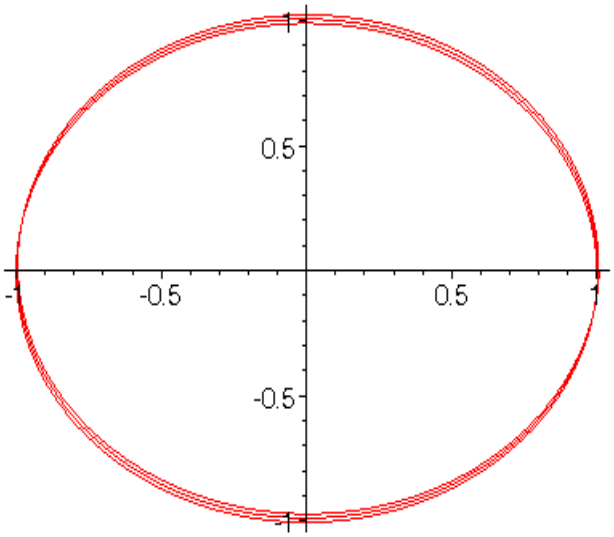


Bild 20-3: Aufspiralung einer heliozentrischen Bahn allein infolge eines kleinen radialen Schubes durch ein Ionentriebwerk. Da $b_{SR}>0$ angenommen wurde, wirkt der Schub nach außen von der Sonne weg. Der Massenverlust ist berücksichtigt.

Die Polargleichung mit Ausgangswert r(ζ=0.0)=1AE ergibt nach einem Umlauf nur den heliozentrischen Abstand r(ζ=2π)=1.00265AE. (Es ist zu erwarten, dass mit einer numerischen Auswertung des Differentialgleichungssystems (20.248) dieses Ergebnis vertieft werden kann. Dies ist aber wie im soeben angedeuteten Zusammenhang mit dem Zeitintegral nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes). Durch die Wirkung des Schubes wird (physikalisch gesehen) die Gesamtenergie des Systems erhöht. Wenn es erlaubt ist, die Bahn näherungsweise nach wie vor als eine („gestörte“) Keplerbahn zu betrachten, kann dadurch angenommen werden, dass sich die Bahnhalbachse *a* erhöht. Da der Parameter *p* des Kegelschnitts auf den Flächenparameter *G* („Betrag des Drehimpulses“) bezogen werden kann: $G^2 = \mu\, p$, muss *p* bei konstanter zentrischer Gravitationskonstante μ wie G konstant sein. Dann gilt im Fall eines Kegelschnitts $p = a\left(1-e^2\right)$, bei Anwachsen der Halbachse *a* muss auch die Exzentrizität anwachsen, die Bahnform wird zunehmend von der kreisnahen Ausgangsbahn abweichen. Dieser Effekt kann in Bild 20-3 schwach erkannt werden. Allerdings zeigt Beziehung (20.245) für den Radius der Bahn unter den hier gegebenen Randbedingungen, dass diese qualitative Überlegung nur sehr vorsichtig angewendet werden darf: die Parameter $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ sind variabel, außerdem kommt additiv der Faktor B_3 hinzu, der wesentlich vom Massenverlust der Raumsonde abhängt. Je nach Größe dieser Parameter kann die Abweichung von einer Zweikörperbewegung erheblich werden. Damit zeigt sich ein Vorteil des im vorliegenden Bericht vorgestellten Verfahrens der allgemeinen Anpassung, die Einzeleinflüsse auf eine Bewegung scharf separieren und so ihre Wirkung im Einzelnen beurteilen zu können.

Wird der Massenverlust vernachlässigt (in den obigen Formeln wird B_3=0 gesetzt), kann die Bahn eine Apsidendrehung ohne Verformung erfahren. Bekannte Beispiele sind die Apsidendrehung einer Erdsatellitenbahn durch den Einfluss der geradzahligen Harmonischen des Erdschwerefeldes (mit einer $1/r^4$ Gesetzmäßigkeit). Ein anderes Beispiel ist die Apsidendrehung der Planeten im Sonnensystem als Folge der relativistischen Abweichung der Bewegung vom Newtonschen Gravitationsgesetz (Periheldrehung des Merkur). Wird der Massenverlust einbezogen und konstante radiale Beschleunigung zugelassen (somit $k_{1D}^{(2)} = k_{2D}^{(2)} = 0$ angenommen), wird die Bahn aufspiralt ohne Drehung der Apsidenlinie (Bild 20-2).

In diesem Zusammenhang darf auf eine Abhandlung von *Battin*[1] hingewiesen werden, in der das Problem des radialen Schubes unter Vernachlässigung des Massenverlustes bearbeitet wird. Das Verfahren ist mathematisch anspruchsvoll und kann für den allgemeinen Fall beliebig großer Schübe nur numerisch bearbeitet werden.

Bei Vergleich mit den in Abschnitt 5.5 untersuchten spiralförmigen Kurven zeigt sich, dass derartige Bahnen mit einem völlig anderen Beschleunigungsgesetz erzeugt werden müssen als es die Keplerbewegung verlangt. Man kann daraus schließen, dass etwa im Sonnensystem mit Dominanz der Keplerbewegung eine spiralartige Kurve, wie in Abschnitt 5.5 untersucht, als primäre Anpassungskurve nicht die erste Wahl sein kann.

Alternativ zu einem radialen Schub ist im Fall des vorliegenden Beispiels eine wesentlich größere Wirkung durch einen transversalen Schub zu erwarten (Dieser wurde auch in der genannten Studie primär berücksichtigt, die aber in der vorliegenden Arbeit wegen des beispielhaften Charakters dieser Untersuchungen nicht nachvollzogen werden sollte). Ein solcher transversaler Schub wird

[1] BATTIN, R. H. (1987), pp. 409-415; dieses Verfahren wird in Abschnitt 5.9.1 referiert

im nächsten Beispiel behandelt. In der Natur ist der *Yarkowski*-Effekt[1] ein solcher Fall: Bewegt sich ein Himmelskörper um die Sonne, so wird die der Sonne zugewandte Seite aufgeheizt, die abgewandte Seite abgekühlt. Rotiert dieser Körper in Bewegungsrichtung, so rotiert die aufgeheizte Seite in die der Bewegung entgegengesetzten Richtung, die jetzt erfolgende Wärmeabstrahlung übt einen Stoß auf den Himmelskörper in Bewegungsrichtung aus. Dies verursacht einen tangentialen (bei nahezu kreisförmigen Bahnen einen transversalen) Schub, der zu einer allmählichen Aufspiralung der Bahn von der Sonne weg führt. Bei umgekehrter Rotation erfolgt der durch die abgestrahlte Wärme erzeugte Schub entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung, die Bewegung wird abgebremst und der Himmelskörper spiralt auf Grund dieses transversalen Schubes in den Innenraum des Sonnensystems. Ein transversaler Schub ist die Hauptursache für natürliche oder künstliche kleine Bewegungsänderungen, zumindest bei den dominanten Beschleunigungsverhältnissen des Sonnensystems.

Es darf noch auf einige frühere Arbeiten hingewiesen werden, die sich schon frühzeitig mit kleinem durch elektrische Triebwerke erzeugtem Schub beschäftigten[2]. Hier geht es um kleine Schübe in tangentialer bzw. horizontaler (andere Bezeichnung für transversale) Richtung, wobei aus technischen Gründen radiale und horizontale Schübe für vorteilhaft gegenüber tangentialen und (haupt-) normalen Schüben erkannt wurden. In allen diesen Arbeiten kommt kein Bezug auf *Hansen*-Systeme vor. An Stelle des (*Hansen*schen) Bahnwinkels wurde seinerzeit auch mit regularisierenden Variablen gerechnet[3].

20.3.2 Beispiel einer interplanetaren Sonnensegelbahn mit transversalem und normalem Schub

Die schon von den Vätern der Raumfahrt entdeckte Möglichkeit von Bahnen ohne künstlich erzeugten Schub allein mit dem Strahlungsdruck durch Sonnensegel steht in der technischen Realisierung[4]. Im Rahmen der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Formelsysteme kann die prinzipielle Bewegung mit Sonnensegeln in einfacher und durchsichtiger Weise beschrieben werden.

Im vorhergehenden Beispiel (Abschnitt 20.3.1) wurde hergeleitet, dass durch radial wirkenden Strahlungsdruck allein ohne Änderung der Masse des Raumflugkörpers abgesehen von einer (geringfügigen Aufblähung der Bahn) keine Bahnänderung erhalten werden kann. Dies ist bei Raumflugkörpern, die sich mit Sonnensegeln bewegen, der Fall. Um die Bahn (energetisch) in seiner Bahnebene zu ändern muss der Flächenparameter G geändert werden, was wegen seiner (allgemeingültigen!) Variationsgleichung $\dot{G} = rb_T$ ausschließlich durch eine transversale Beschleunigung b_T erreicht werden kann.

---

[1] KIPPENHAHN, RUDOLF [2005]: p.47; siehe auch in Abschnitt 17.13

[2] ECKSTEIN, M. C. and SHI, YUN-YUAN [1967], SHI, YUN-YUAN and ECKSTEIN, M. C. [1966] und [1967]

[3] BOCKEMÜLLER, E. A.. und W. KLEINSCHMIDT [970], HENSCHEL, F. [1974]

[4] Siehe etwa in: MCINNES, C. R. [1999], LEIPOLD, M. [2000]

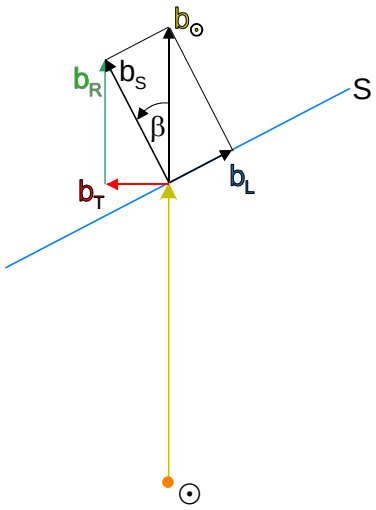


Bild 20-4: Transversale (b_T) und radiale (b_R) Beschleunigung durch Zerlegung der Beschleunigung ($b_\odot$) durch den Strahlungsdruck der Sonne am Sonnensegel S in einen verlorenen Anteil (b_L) und einen senkrecht zum Segel wirkenden Anteil (b_S). β ist der Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung zur Sonne bei Bezug auf die oskulierende Bahnebene des Raumflugkörpers

Um eine solche zu erzeugen, muss nach Bild 20-4 (auf Seite 496) das Sonnensegel gegenüber der Sonnenrichtung angestellt werden. Dazu wird die Segelnormale um den Anstellwinkel β gegenüber der radialen von der Sonne wegweisenden Richtung gedreht, was zur Zerlegung $\mathbf{b}_\odot = \mathbf{b}_S + \mathbf{b}_L$ führt. Hier ist $\mathbf{b}_\odot$ die vom Strahlungsdruck erzeugte Beschleunigung, wirksam auf das Segel ist der Anteil $\mathbf{b}_S$, während der Anteil $\mathbf{b}_L$ längs des Segels verloren ist. Dies deutet bereits darauf hin, dass eine geeignete Relation zwischen Anstellwinkel und wirksamer Beschleunigung gefunden werden muss, was bekanntlich auf ein Optimierungsproblem hinausläuft. Die wirksame Beschleunigung kann aber nur zum Teil für eine Bahnänderung verwendet werden, nämlich der transversale Anteil $\mathbf{b}_T$ in der Zerlegung $\mathbf{b}_S = \mathbf{b}_R + \mathbf{b}_T$. Für diese gilt

$$\left|\mathbf{b}_T\right| =: b_T = 0.5\, b_\odot \sin\left(2\beta\right) \quad . \tag{20.253}$$

Diese Beziehung ist Grundlage für einen Optimierungsprozess (der aber nicht Gegenstand des vorliegenden Beispiels sein soll). Der Strahlungsdruck ist aus Formel (20.213) bekannt:

$$\left|\mathbf{b}_\odot\right| =: b_\odot = P_S \; AE^2 \; \frac{c_R A_R}{m} \; \frac{1}{r^2} = \frac{B_S}{m r^2} \quad . \tag{20.254}$$

1., 2. und 3. Lösungsschritt:

Die erste Ausgangsnäherung werde als ungestörte Bahn durch eine Gerade dargestellt. Wenn von der Erdbahn aus in eine interplanetare Bahn gestartet wird[1], kann von einer elliptischen Bahn als bekannter zweiter Anpassungskurve ausgegangen werden. Dann können die Formeln, die im vorhergehenden Beispiel zu Anfang und dem ersten Lösungsschritt zusammengestellt wurden mit den

[1] ähnlich wie auch aus einer Erdumlaufbahn bei Erdsatelliten

zugehörenden Zahlenwerten übernommen werden. Die Anpassungskurve hat sodann die Polargleichung

$$r = \frac{\frac{G^2}{\mu}}{1 + k_1 \cos\zeta + k_2 \sin\zeta} \tag{20.255}$$

mit den Konstanten k_1, k_2.

Die dritte Bahnkurve hat gegenüber der Erdbahn auf Grund der Wirkung des Strahlungsdrucks auf das große Sonnensegel zunächst einen konstanten radialen Einfluss nach dem $1/r^2$ - Gesetz, der die Bewegung auf einer höheren, d.h. von der Sonne entfernteren Bahn, stabilisiert.

Es ergeben sich die folgenden Zahlenwerte (vgl. die Formeln (20.214), (20.226) - (20.234)):

$$B_S = 0.1312111416 \times 10^{13} \frac{kg\,km^3}{s^2} \quad , \quad \frac{B_S}{m_0} = 0.1312111416 \times 10^{11} \frac{km^3}{s^2} \, , \, \frac{B_S}{m_0\,\mu_\odot} = 0.09886875984 \, ,$$

$$\frac{B_S}{G} = 294.5184750 \frac{kg\,km}{s} \quad , \quad \Delta V_R = 2.945184750 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad , \quad \mu = 1.195913238 \times 10^{11} \frac{km^3}{s^2}$$

	Ungestörte Bewegung	Bewegung mit Berücksichtigung durch Strahlungsdruck
Heliozentrische und modifizierte Gravitationskonstante	$\mu_\odot = 1.32712438 \times 10^{11}\, km^3/s^2$	$\mu = 1.195913238 \times 10^{11}\ km^3/s^2$
Mittlerer Kegelschnittparameter	$p_{\oplus_\odot} = G^2/\mu_\odot = 0.999721840\, AE =$ $= 1.495562578 \times 10^8\, km$	$p = 1.109407593\, AE =$ $= 1.65965012854 \times 10^8\ km$
Periheldistanz	$r_P = 0.983292384 AE =$ $= 1.47098446203 \times 10^8 km$	r_P
Mittlere Exzentrizität	$e_{\oplus_\odot} = 0.016708617$	$e = 0.128258096$
Mittlere große Bahnhalbachse	$a_{\oplus_\odot} = 1.0000010178\, AE =$ $= 1.49598022261 \times 10^8\, km$	$a = 1.127962737 AE =$ $= 1.68740822878 \times 10^8\, km$
Differenz in Halbachse		$\Delta a = +1.9142800617 \times 10^7\, km$

Tabelle 20-2: Keplersche Bahnelemente der durch den konstanten Anteil des Strahlungsdrucks verursachten gestörten Bewegung des Sonnensegels, wenn die gesamte Sonnenstrahlung zu einer radialen Beschleunigung auf das Sonnensegel ausgenutzt wird, das voll auf die Sonne ausgerichtet wird. Die Anströmfläche des Sonnensegels ist zu 10000m2, die Masse der gesamten Raumsonde zu m0=100kg angenommen. ◀

Mit diesen Werten kann der Kegelschnittparameter *p* der neuen Bahn aus Formel (20.230) berechnet werden. Wie im vorhergehenden Beispiel soll auch hier der Beginn der neuen Bahn im Perihel der alten Bahn, die identisch mit der Erdbahn ist, angesetzt werden. Damit ist dann die Exzentrizität

der neuen Bahn sowie dann die große Bahnhalbachse aus den Formeln (20.232) und (20.233) bekannt.

Damit folgen die in Tabelle 20-2 aufgelisteten Parameter des konstanten Anteils einer Sonnensegel-Bahn, zusammengesetzt aus dem Anteil einer heliozentrischen Zweikörperbewegung (bei Vernachlässigung des Dreikörperproblems Sonne-Erde-Sonnensegel) und dem konstanten Anteil des Strahlungsdrucks durch die Sonnenstrahlung.

4. Lösungsschritt:

Es werde jetzt die transversale Beschleunigung (20.253) wirksam. Die Parameter

$$k_1 =: k_1^{(1)}(\zeta) \quad , \; k_2 =: k_2^{(1)}(\zeta)$$

müssen dann als neue Funktionen des Bahnwinkels ζ betrachtet werden, welche aus den Variationsgleichungen (5.131) inklusive der Variation des Flächenparameters $\dot{G} = r\, b_T$ berechnet werden können. Da sich die radiale Beschleunigung nicht auswirkt, kann $b_{R2} = 0$ gesetzt werden und es ergibt sich mit der Keplerschen Beziehung $G^2 = \mu_\odot\, p$ das System von Differentialgleichungen zur Berechnung der Bewegung mit einem Sonnensegel. Zur Abkürzung werde die in diesem Bewegungstyp konstante Größe

$$B_0 := P_S \; AE^2 \; \frac{c_R\, A_R}{m_0} \sin\beta \cos\beta = \frac{B_S \sin\beta \cos\beta}{m_0} \tag{20.256}$$

verwendet. Damit lautet die transversale Beschleunigung

$$b_T = \frac{B_0}{r^2} \; . \tag{20.257}$$

Die Variationsgleichungen (5.131) für die Parameter $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ im Fall einer Anpassung mit einem Kegelschnitt sowie für den Flächenparameter lauten

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G} b_T \\
\frac{dk_1^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G^2} b_T \left[-k_1^{(1)} \sin^2\zeta + k_2^{(1)} \sin\zeta\cos\zeta + 2k_1^{(1)} + 2\cos\zeta \right] \\
\frac{dk_2^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G^2} b_T \left[-k_2^{(1)} \cos^2\zeta + k_1^{(1)} \sin\zeta\cos\zeta + 2k_2^{(1)} + 2\sin\zeta \right] \; .
\end{aligned}$$

Mit der transversalen Beschleunigung b_T aus Formel (20.253) und der Polargleichung (20.255) haben die Variationsgleichungen die endgültige Gestalt

$$\begin{aligned}
\frac{dG}{d\zeta} &= \frac{B_0}{\mu}\,\frac{G}{1+k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta} \\
\frac{dk_1^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{B_0}{\mu}\left[\cos\zeta + \frac{k_1^{(1)}+\cos\zeta}{1+k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta}\right] \\
\frac{dk_2^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{B_0}{\mu}\left[\sin\zeta + \frac{k_2^{(1)}+\sin\zeta}{1+k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{20.258}$$

Da der Flächenparameter G nicht in der zweiten und dritten dieser Differentialgleichungen enthalten ist, können aus diesen zunächst die Variablen $k_1^{(1)} = k_1^{(1)}(\zeta)$, $k_2^{(1)} = k_2^{(1)}(\zeta)$ berechnet werden und anschließend der Flächenparameter aus der Differentialgleichung

$$\frac{dG}{G} = \frac{B_0}{\mu}\,\frac{d\zeta}{1+k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta} \quad . \tag{20.259}$$

Der Parameter B_0 enthält u.a. den Anstellwinkel β des Sonnensegels gegenüber der Sonneneinstrahlung bezogen auf die oskulierende Bahnebene. In der Praxis wird dieser Winkel zur Steuerung des Raumflugkörpers von Zeit zu Zeit variiert werden müssen. Zur Durchführung des vorliegenden Beispiels sei dieser Winkel jedoch als konstant angenommen, was für ein gewisses Zeitintervall zulässig erscheint. Dies vereinfacht die Integration im Folgenden wesentlich, erfordert aber bei Neueinstellung dieses Winkels eine neue Integration (dies im Sinne von „patched conic“). Es sei daher für die Dauer der Integration zur vereinfachten Schreibweise der Parameter

$$B_m := \frac{B_0}{\mu} \tag{20.260}$$

als konstant angenommen.

Für diese Integrationen soll wieder die Verwendung eines mathematischen Formelmanipulators versucht werden. Dies kann etwa mit Hilfe einer Reihenentwicklung durchgeführt werden. Das Ergebnis lautet mit den Integrationskonstanten $k_1^{(2)}$, $k_2^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
k_1^{(1)} = k_1^{(1)}(\zeta) = {} & k_1^{(2)} + 2B_m\,\zeta - \frac{1}{2}B_m\frac{k_2^{(2)}}{1+k_1^{(2)}}\zeta^2 - \frac{1}{3}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\left[1 - B_m k_2^{(2)} - \left(k_2^{(2)}\right)^2 + k_1^{(2)}\right]\zeta^3 - \\
& - \frac{1}{24}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\Big[9B_m^2 k_2^{(2)} - 6B_m - 3B_m k_1^{(2)} + 12B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 3B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \\
& \qquad -4k_2^{(2)} + k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 5\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + 6\left(k_2^{(2)}\right)^3\Big]\zeta^4 + \\
& + \frac{1}{60}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\Big[1 + 4\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 3\left(k_1^{(2)}\right)^4 + 30B_m^3 k_2^{(2)} + 36B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 - \\
& \qquad + 20B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - 6B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} - 10B_m^2 k_1^{(2)} + \\
& \qquad + 10B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 50B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 20B_m^2 - 26B_m k_2^{(2)} - \\
& \qquad - 10\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 12\left(k_2^{(2)}\right)^4 + 4\,k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 14\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2\Big]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right)
\end{aligned} \tag{20.261}$$

$$
\begin{aligned}
k_2^{(1)} = k_2^{(1)}(\zeta) = k_2^{(2)} &+ \frac{B_m k_2^{(2)}}{1+k_1^{(2)}}\zeta + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\left[2 - B_m k_2^{(2)} + 3k_1^{(2)} - \left(k_2^{(2)}\right)^2 + \left(k_1^{(2)}\right)^2\right]\zeta^2 + \\
&+ \frac{1}{6}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\left[3B_m^2 k_2^{(2)} - 2B_m - B_m k_1^{(2)} + 4B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 + B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \right. \\
&\qquad \left. - k_1^{(2)}k_2^{(2)} + \left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - 2k_2^{(2)} + 2\left(k_2^{(2)}\right)^3\right]\zeta^3 - \\
&- \frac{1}{24}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[2 + 15B_m^3 k_2^{(2)} + 18B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 8B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - 7B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} - 5B_m^2 k_1^{(2)} + \right. \\
&\qquad + 5B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 25B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 10k_1^{(2)}B_m^2 - 15B_m k_2^{(2)} - 7\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 3\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
&\qquad \left. + 2\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 6\left(k_2^{(2)}\right)^4 - 2k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 5\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 4k_1^{(2)} + \left(k_1^{(2)}\right)^4\right]\zeta^4 + \\
&+ \frac{1}{120}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^5}\left[-60B_m^2 k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 68B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 75B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - \right. \\
&\qquad - 6B_m\left(k_1^{(2)}\right)^3 - 135B_2^2 k_2^{(2)} - 35B_0 k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 - k_1^{(2)}k_2^{(2)} - 21\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - \\
&\qquad - 13B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 103B_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 12B_m k_1^{(2)} + 5\left(k_1^{(2)}\right)^4 k_2^{(2)} - 7\left(k_1^{(2)}\right)^3 k_2^{(2)} + \\
&\qquad + 5B_m\left(k_1^{(2)}\right)^4 + 14B_m + 8k_2^{(2)} - 32\left(k_2^{(2)}\right)^3 - 70B_m^3 + 24\left(k_2^{(2)}\right)^5 - 35B_m^3 k_1^{(2)} + \\
&\qquad + 35B_m^3\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 4k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 28\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 210B_m^3\left(k_2^{(2)}\right)^2 + \\
&\qquad \left. + 190B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 105B_m^4 k_2^{(2)} + 96B_m\left(k_2^{(2)}\right)^4\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right)
\end{aligned}
\tag{20.262}
$$

Werden diese beiden Funktionen in die Differentialgleichung (20.259) eingesetzt, ergibt sich wieder mit einer Reihenentwicklung und mit dem Anfangswert $G(0) =: G_0$ die Lösung für den Flächenparameter

$$G = G(\zeta) = G_0 + \frac{B_m G_0}{1+k_1^{(2)}}\zeta - \frac{1}{2}\frac{B_m G_0}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\left[B_m + k_2^{(2)}\right]\zeta^2 +$$
$$+\frac{1}{6}\frac{B_m G_0}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\left[4B_m k_2^{(2)} + 3B_m^2 + k_1^{(2)} + \left(k_1^{(2)}\right)^2 + 2\left(k_2^{(2)}\right)^2\right]\zeta^3 -$$
$$-\frac{1}{24}\frac{B_m G_0}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[25B_m^2 k_2^{(2)} + 3B_0 k_1^{(2)} + 5B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 18B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + 5\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + 4k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 6\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 15B_m^3 - 2B_m - k_2^{(2)}\right]\zeta^4 +$$
$$+\frac{1}{120}\frac{B_m G_0}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^5}\left[56B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + 31B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 190B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 +\right.$$
$$+ 20B_m^2 k_1^{(2)} + 96B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 210B_m^3 k_2^{(2)} + 40B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 +$$
$$+ 28\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 20k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 25B_m k_2^{(2)} - 20B_m^2 +$$
$$\left. + 9\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 5\left(k_1^{(2)}\right)^4 - 8\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 24\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 105B_m^4\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right) . \qquad (20.263)$$

Werden diese Funktionen in die Polargleichung (20.255) für den Radius eingesetzt, kann die vierte Anpassungskurve dargestellt werden:

$$r = r(\zeta) = \frac{\left[G(\zeta)\right]^2}{\mu\left[1 + k_1^{(1)}(\zeta)\cos\zeta + k_2^{(1)}(\zeta)\sin\zeta\right]} \quad . \qquad (20.264)$$

Den Bezug zur Zeit stellt schließlich die Integration der Gleichung $r^2\, d\zeta = G\, dt$ her, die wie in den vorhergehenden Integrationen mit Hilfe einer Reihenentwicklung durchgeführt werden soll:

$$t = t_0 + \frac{G_0^3}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\zeta - \frac{1}{2}\frac{G_0^3\left(B_m + 2k_2^{(2)}\right)}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\zeta^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{G_0^3}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[7B_m k_2^{(2)} + 2k_1^{(2)} + 2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 3B_m^2 + 6\left(k_2^{(2)}\right)^2\right]\zeta^3 -$$

$$- \frac{1}{24}\frac{G_0^3}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^5}\left[40B_m^2 k_2^{(2)} + 5B_m k_1^{(2)} + 9B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 46B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 14k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 16\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - 4B_m - 2k_2^{(2)} + 15B_m^3 + 24\left(k_2^{(2)}\right)^3\right]\zeta^4 +$$

$$+ \frac{1}{120}\frac{G_0^3}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^6}\left[-2k_1^{(2)} - 24\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 12\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 30\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 96k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 + \right.$$

$$+ 120\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 38B_m^2 - 65B_m k_2^{(2)} + 16\left(k_1^{(2)}\right)^4 + 120\left(k_2^{(2)}\right)^4 + 105B_m^4 +$$

$$+ 430B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 315B_m^3 k_2^{(2)} + 326B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 151B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} +$$

$$\left. + 86B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 29B_m^2 k_2^{(2)} + 67B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right) \quad . \qquad (20.265)$$

NUMERISCHES BEISPIEL: Für eine Darstellung der Ergebnisse in einem Zahlenbeispiel werden die folgenden Anfangswerte verwendet (siehe hierzu die Zahlenkonstanten im vorhergehenden Beispiel und in Tabelle 20-2):

$$G_0 = G\left(\zeta = 0°\right) = \sqrt{\mu\, p} = 4.45510668683\times10^9\ km^2/s = 1.990706748\times10^{-7}\ AE^2/s$$

$$r_P = r\left(\zeta = 0.0\right) = 0.983292384 AE \quad \rightarrow\ k_1^{(1)}\left(\zeta = 0\right) = k_1^{(2)} = 0.128258096 \mathrel{\hat{=}} e$$

$$\zeta_B\left(\zeta = 0\right) = 0 \quad \rightarrow\ k_2^{(1)}\left(\zeta = 0\right) = k_2^{(2)} = 0.0\ ,\ B_0 = 1.6970520\times10^{-15}\ AE^3/s,$$

$$\mu_\odot = 3.9620477\times10^{-14}\ AE^3/s^2$$

$$\mu = 1.195913238\times10^{12}\ km^3/s^2 = 3.572098767\times10^{-14}\ AE^3/s^2$$

$$B_m = \frac{B_0}{\mu} = 0.04228322$$

◀

Die hier verwendeten Zahlenwerte zeigen, dass die Anfangswerte für jeden Lösungsschritt sehr sorgfältig gewählt werden müssen. Insbesondere muss darauf hingewiesen werden, dass auf Grund der radialen Wirkung der Sonnenstrahlung nicht die heliozentrische Gravitationskonstante $\mu_\odot$, sondern die modifizierte Konstante μ verwendet werden muss, was der Kegelschnittparameter $p = G^2/\mu$ der zugrundeliegenden Anpassungskurve erfordert. Ferner muss die entsprechende Exzentrizität verwendet werden.

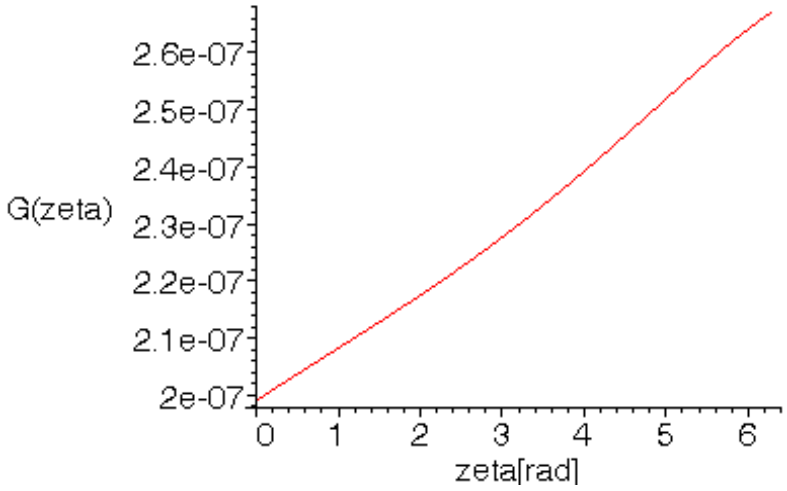


Bild 20-5: Zunahme des Flächenparameters einer heliozentrischen Bahn infolge des transversalen Anteils des Strahlungsdruckes auf ein Sonnensegel mit Anstellwinkel 30°.

Mit diesen Zahlenwerten haben die Bahnparameter G(ζ), $k_1^{(1)}(\zeta), k_2^{(1)}(\zeta)$ die folgende numerische Darstellung:

$$\mathrm{k}_1^{(1)}(\zeta) = 0.128258 + 0.856654\cdot 10^{-1}\cdot\zeta - 0.01265452287\cdot\zeta^3 + 0.0003372019348\cdot\zeta^4 + \\ + 0.0004275523190\cdot\zeta^5 + \cdots$$

$$\mathrm{k}_2^{(1)}(\zeta) = 0.04039813431\cdot\zeta^2 - 0.0004496025802\cdot\zeta^2 - 0.002805723200\cdot\zeta^4 + \\ + 0.0001269263109\cdot\zeta^5 + \cdots$$

$$\mathrm{G}(\zeta) = 0.1991\cdot 10^{-6} + 0.9286491123\cdot 10^{-8}\cdot\zeta - 0.2165718669\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2 + \\ 0.3827435139\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^3 + 0.3320677838\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4 - 0.4399612149\cdot 10^{-11}\cdot\zeta^5 + \cdots \\ (20.266)$$

Den Verlauf des Flächenparameters G über einen Umlauf mit stetiger Zunahme infolge der transversalen Beschleunigung b_T zeigt Bild 20-5.

Der Bahnradius hat in dem untersuchten Fall die numerische Darstellung

$$r = r_4(\zeta) = 0.2799473699\cdot 10^{14}\cdot\Big(0.1991\cdot 10^{-6} + 0.7558546512\cdot 10^{-8}\cdot\zeta - \\ - 0.1434746996\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2 + 0.1486534273\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^3 + \\ + 0.1413986461\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4 - 0.3459186635\cdot 10^{-11}\cdot\zeta^5\Big)^2 \ / \\ / \Big[1 + \Big(0.128258 + 0.0856654\cdot\zeta - 0.01265452287\cdot\zeta^3 + 0.0003372019348\cdot\zeta^4 + \\ + 0.0004275523190\cdot\zeta^5\Big)\cos(\zeta) + \\ + \Big(0.04039813431\cdot\zeta^2 - 0.0004496025802\cdot\zeta^3 - 0.002805723201\cdot\zeta^4 + \\ + 0.0001269263109\cdot\zeta^5\Big)\sin(\zeta)\Big] \qquad (20.267)$$

Als einige spezielle Werte werden zur Veranschaulichung und heuristischen Kontrolle der Perihelradius und der Radius für ζ=90° berechnet:

$$r(\zeta = 0°) = 0.9835818138\,AE \quad , \quad r(\zeta = 90°) = 1.154535504\,AE \quad .$$

Der Ergebnisplot in Bild 20-6 zeigt das Aufspiralen der Bahn über einen Umlauf. Die Näherungslösung durch eine Reihenentwicklung bis zur 6ten Ordnung im Bahnwinkel ζ erlaubt aber keine Untersuchung des Bahnverlaufs über mehrere Umläufe. Das Bild legt ferner nahe, dass der ebene Anstellwinkel β in der Praxis nur über kleinere Bahnbögen konstant gehalten werden sollte, so dass durch geschickte Variation dieses Winkels über den gesamten Übergangsbogen eine optimale Strategie entwickelt werden muss.[1]

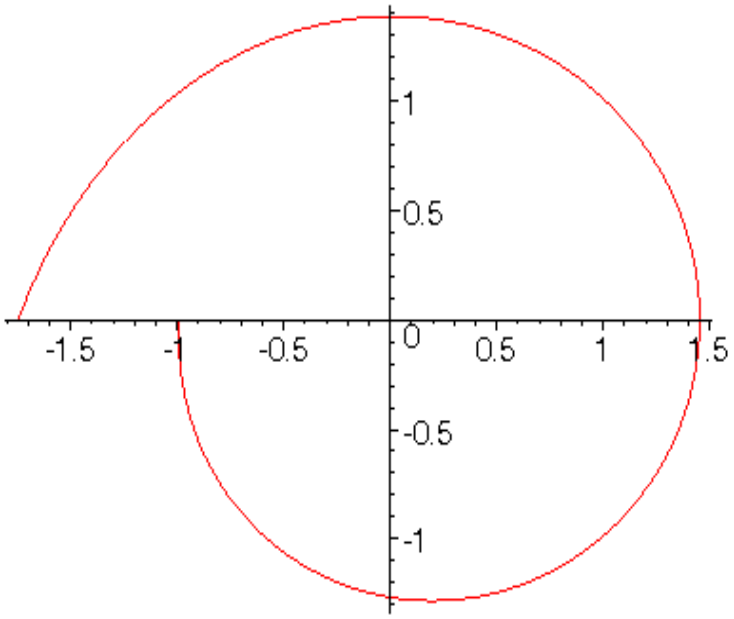


Bild 20-6: Aufspiralen einer heliozentrischen Bahn durch den transversalen Anteil des Strahlungsdruckes auf ein Sonnensegel mit Anstellwinkel 30° (der Plot ist wegen der Reihenentwicklung auf ζ=0° normiert, während die Zeichnung bei ζ=-180° beginnt) (Längeneinheit AE)

[1] Dieser Optimierungsprozess geht über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus. Eine vergleichbare Optimierung wurde etwa in der Studie ECKSTEIN, M. C. et al. [1983] durchgeführt

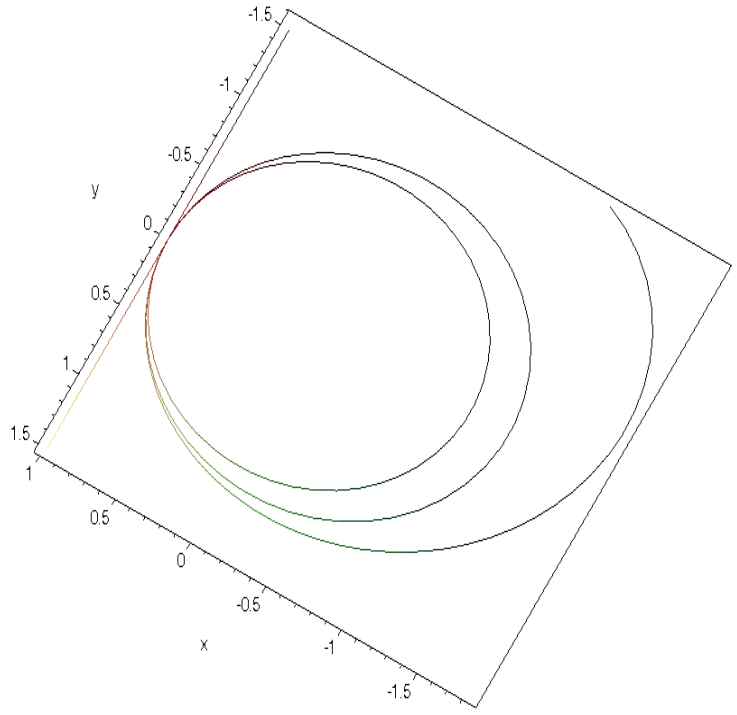


Bild 20-7: Zusammenschau der vier Anpassungskurven in einer und derselben Bahnebene, links die Gerade als ungestörte Bewegung, dann die innere Ellipse der Erdbahn, die zweite größere Ellipse als Folge der radialen Beschleunigung durch den Strahlungsdruck und schließlich die Aufspiralung infolge der transversalen Beschleunigung durch den Strahlungsdruck (Längeneinheit AE) .

Bild 20-7 zeigt schließlich die vier bisher benutzten Anpassungskurven in der oskulierenden Bahnebene: Gerade, 1. Ellipse als Erdbahn, 2. Ellipse durch Einwirkung der radialen Beschleunigung durch den Solardruck, Aufspiralung durch den transversalen Beschleunigungsanteil des Solardrucks.

5. Lösungsschritt:

Zu weiteren Demonstration des Verfahrens wird in diesem Integrationsschritt angenommen, dass das Sonnensegel so gegen die Sonnenstrahlung angestellt wird, dass die Bewegung aus der ursprünglichen Bahnebene herausführt. Dies wird dadurch erreicht, dass durch die Segelanstellung ein Teil der durch den Solardruck erzeugten Beschleunigung in eine Komponente senkrecht zur Bahnebene umgelenkt wird, also eine normale Komponente b_N erhalten wird. Dann wird die Variationsgleichung $\dot{\eta} = r\, b_N / G$ wirksam, so dass mit der dritten der *Frenet*schen Formeln der Astrodynamik $\dot{\mathbf{c}}_0 = -\dot{\eta}\, \mathbf{q}_0$ der Normalenvektor variiert und die Bewegung räumlich wird.

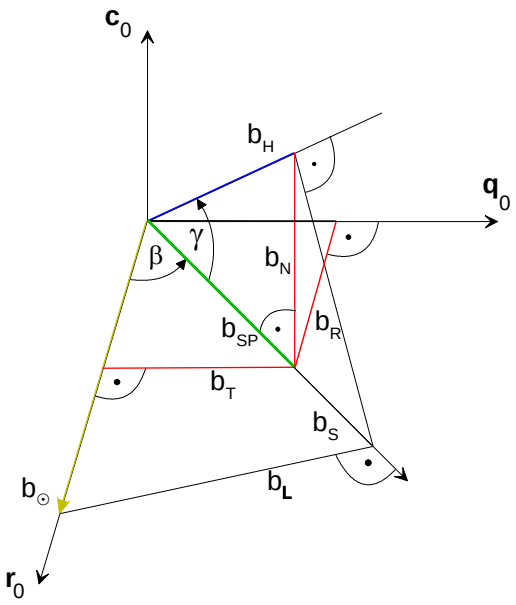


Bild 20-8: Anstellwinkel eines Sonnensegels zur Erzeugung einer räumlichen Bahn: Winkel β Drehung in der Bahnebene, Winkel γ Drehung aus der momentanen Bahnebene, Darstellung der Beschleunigungen im *Leibniz*-System

Die Beschleunigung $b_\odot$ wird entsprechend Bild 20-8 in die Richtungen des begleitenden *Leibniz*systems zerlegt:

$$\begin{aligned}
b_S &= b_\odot \cos\beta \\
b_L &= b_\odot \sin\beta \\
b_H &= b_S \cos\gamma = b_\odot \cos\gamma\, \cos\beta \\
b_N &= b_H \sin\gamma = b_\odot \sin\gamma\, \cos\gamma\, \cos\beta \\
b_{SP} &= b_H \cos\gamma = b_\odot \cos^2\gamma\, \cos\beta \\
b_R &= b_{SP} \cos\beta = b_\odot \cos^2\gamma\, \cos^2\beta \\
b_T &= b_{SP} \sin\beta = b_\odot \cos^2\gamma\, \sin\beta\, \cos\beta
\end{aligned} \qquad (20.268)$$

Bei Berücksichtigung des räumlichen Anstellwinkels γ müssen entsprechend diesen Formeln die radiale und die transversale Beschleunigung im vorherigen 4. Integrationsschritt modifiziert werden, was sich auf die numerische Darstellung der Bahnkurve in der Polargleichung (20.264) auswirkt.

Damit kann die Variationsgleichung für die Variation des Raumwinkels η mit dem Solardruck (20.254) und der in den vorigen Schritten berechneten Polargleichung verwendet werden:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N = \frac{r}{G^2}\frac{B_S}{m_0}\sin\gamma\, \cos\gamma\, \cos\beta = \frac{B_S \sin\gamma\, \cos\gamma\, \cos\beta}{\mu_\odot m_0}\frac{1}{1+k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta}$$

mit der Bezeichnung

$$B_N := \frac{B_S\, \sin\gamma \cos\gamma \cos\beta}{\mu_\odot m_0} \qquad (20.269)$$

lautet die Variationsgleichung des zweiten *Hansen*-Winkels

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{B_N}{1 + k_1^{(1)}(\zeta)\cos\zeta + k_2^{(1)}(\zeta)\sin\zeta} \quad . \tag{20.270}$$

Da die beiden Parameter $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ in diesem Schritt nicht neu berechnet werden müssen, weil die normale Beschleunigung auf diese Parameter keinen Einfluss hat, kann mit den Parametern aus den Integralen (20.261) und (20.262) die Differentialgleichung für η unmittelbar integriert werden, wofür hier wieder eine Formelmanipulator mit einer Reihenentwicklung eingesetzt werden soll. Mit der Konstanten η_0 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\eta = \eta(\zeta) = \eta_0 &+ \frac{B_N}{1+k_1^{(2)}}\zeta - \frac{1}{2}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\left[2B_m + k_2^{(2)}\right]\zeta^2 + \\
&+ \frac{1}{6}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\left[7B_m k_2^{(2)} + k_1^{(2)} + \left(k_1^{(2)}\right)^2 + 8B_m^2 + 2\left(k_2^{(2)}\right)^2\right]\zeta^3 - \\
&- \frac{1}{24}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[-2B_m + 7B_m k_1^{(2)} + 9B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 59B_m^2\, k_2^{(2)} + 29B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 - \right. \\
&\qquad \left. - k_2^{(2)} + 4k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 5\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + 48B_m^3 + 6\left(k_2^{(2)}\right)^3\right]\zeta^4 + \\
&+ \frac{1}{120}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^5}\left[61B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 605B_m^3 k_2^{(2)} + 91B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + \right. \\
&\qquad + 410B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 30B_m\, k_2^{(2)} + 65B_m^2 k_1^{(2)} + 95B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
&\qquad + 146B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 20k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 28\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - k_1^{(2)} - 30B_m^2 + \\
&\qquad \left. + 9\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 5\left(k_1^{(2)}\right)^4 - 8\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 24\left(k_2^{(2)}\right)^4 + 3\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 384B_m^4\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right) \quad .
\end{aligned} \tag{20.271}$$

Um die räumliche Bewegung zu untersuchen können die Variationsgleichungen (4.390) (in Abschnitt 4.4.10 in Band II)) (bei Vernachlässigung einer Eigenbewegung dieses Basissystems mit p_{ij}=0) für den Knotenwinkel σ bzw. die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω nicht verwendet werden, da die Ausgangsbahn in der Grundebene des Sonnensystems liegt, somit die Inklination i=0° hat. Stattdessen können die Parameter j_1, j_2 mit den entsprechenden Variationsgleichungen gewählt werden[1]:

[1] Siehe etwa in Abschnitt 2.10.23 (Band I)

$$
\begin{aligned}
& j_1 := \sin i \, \cos\sigma \quad , \quad j_2 := \sin i \, \sin\sigma \\
& \cos i = \operatorname{sgn}(\cos i)\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2} \quad , \quad \sin i = \sqrt{j_1^2 + j_2^2} \quad , \quad \sigma = \arctan\frac{j_2}{j_1} \\
& \frac{dj_1}{d\zeta} = \pm\frac{d\eta}{d\zeta}\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2}\,\cos\zeta \quad , \quad \frac{dj_2}{d\zeta} = \pm\frac{d\eta}{d\zeta}\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2}\,\sin\zeta \quad .
\end{aligned}
\tag{20.272}
$$

Unter Verwendung der Variation des räumlichen Winkels η in der Form (20.270) können die Funktionen $j_1(\zeta), j_2(\zeta)$ und damit die Winkel *i* und σ berechnet werden.

Die Lösung in Form einer Reihenentwicklung lautet mit den Anfangswerten

$$j_{10} := j_1(\zeta_0)\ ,\ j_{20} := j_2(\zeta_0)\ ,\ \cos i_0 = \sqrt{1 - j_{10}^2 - j_{20}^2}$$

entwickelt nach den ersten drei bzw. vier Potenzen

$$
\begin{aligned}
j_1 = j_1(\zeta) = {} & j_{10} + \frac{B_N \cos i_0}{1 + k_1^{(2)} + k_2^{(2)}}\zeta - \\
& - \frac{1}{2}\frac{B_N}{\left(1 + k_1^{(2)} + k_2^{(2)}\right)^2\left(1 + k_1^{(2)}\right)}\left[B_N\, j_{10}\left(1 + k_1^{(2)}\right) + B_m \cos i_0\left(2 + 2k_1^{(2)} + k_2^{(2)}\right)\right]\zeta^2 + \\
& + \frac{1}{6}\frac{B_N}{\left(1 + k_1^{(2)} + k_2^{(2)}\right)^3\left(1 + k_1^{(2)}\right)^2}\Big[-3B_N\, j_{20}\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 6B_N\, B_m\, j_{10} - B_N\, j_{20}\, k_2^{(2)}\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \\
& \quad - B_N\, j_{20}\, k_2^{(2)} - B_N\, j_{20}\left(k_1^{(2)}\right)^3 - 5B_m \cos i_0\, k_1^{(2)} - 2B_m \cos i_0 - B_N\, j_{20} - \cos i_0 + \\
& \quad + 3B_N\, j_{10}\, B_m\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} + 3B_N\, j_{10}\, B_m\, k_2^{(2)} + 12B_N\, j_{10}\, B_m\, k_1^{(2)} + 6B_N\, j_{10}\, B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \\
& \quad - 2B_N\, j_{20}\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} - B_m \cos i_0\, k_2^{(2)} + 9B_m^2 \cos i_0\, B_m^2\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} + 2B_m \cos i_0\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} + \\
& \quad + 2B_m \cos i_0\, k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 6\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 4\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 8B_m^2 \cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
& \quad + 16B_m^2 \cos i_0\, k_1^{(2)} - 4B_m \cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 2\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 k_1^{(2)} - 2\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3 k_2^{(2)} + \\
& \quad + 9B_m^2 \cos i_0\, k_2^{(2)} - 6\cos i_0\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} - 2B_N^2 \cos i_0\, k_1^{(2)} + 2B_m \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 + \\
& \quad + 3B_m^2 \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 6\cos i_0\, k_2^{(2)}\left(k_1^{(2)}\right)^2 + B_m \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^3 - \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \\
& \quad - B_m \cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 8B_m^2 \cos i_0 - 4\cos i_0\, k_1^{(2)} - 2\cos i_0\, k_2^{(2)} - \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 - \\
& \quad - \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^4 - B_N^2 \cos i_0 - 3B_N\, j_{20}\, k_1^{(2)}\Big]\zeta^3 + O\left(\zeta^4\right)
\end{aligned}
\tag{20.273}
$$

$$
\begin{aligned}
j_2 = j_2(\zeta) = j_{20} + \frac{1}{2}\frac{B_N \cos i_0}{1+k_1^{(2)}+k_2^{(2)}}\zeta^2 - \\
-\frac{1}{3}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}+k_2^{(2)}\right)^2\left(1+k_1^{(2)}\right)}\left[B_N\, j_{10}\left(1+k_1^{(2)}\right)+B_m\cos i_0\left(2+2k_1^{(2)}+k_2^{(2)}\right)\right]\zeta^3 + \\
+\frac{1}{24}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}+k_2^{(2)}\right)^3\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\Big[18B_N\,B_m\,j_{10}+9B_N\,B_m\,j_{10}\,k_1^{(2)}k_2^{(2)}-9B_N\;j_{20}\left(k_1^{(2)}\right)^2+ \\
+36\,B_N\,B_m\,j_{10}\,k_1^{(2)}-3B_N\,j_{20}\,k_2^{(2)}\left(k_1^{(2)}\right)^3-6B_N\,j_{20}\,k_1^{(2)}k_2^{(2)}-3B_N\,j_{20}\,k_2^{(2)}+18B_N\,B_m\,j_{10}\left(k_1^{(2)}\right)^2+ \\
+9B_N\,j_{10}\,B_m\,k_2^{(2)}-3B_N\,j_{20}-3B_N\,j_{20}\left(k_1^{(2)}\right)^3-9B_N\,j_{20}\,k_1^{(2)}+27B_m^2\cos i_0\,k_1^{(2)}k_2^{(2)}-\cos i_0- \\
-15B_m\cos i_0 k_1^{(2)}-3B_m\cos i_0\,k_2^{(2)}-2\cos i_0\,k_2^{(2)}-4\cos i_0\,k_1^{(2)}-6B_N^2\cos i_0\,k_1^{(2)}- \\
-3B_N^2\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2-6\cos i_0\,k_1^{(2)}k_2^{(2)}+6\cos i_0\,k_1^{(2)}k_2^{(2)}+6B_m\cos i_0\,k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2- \\
-6B_m\cos i_0-\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^4-3B_N^2\cos i_0+24B_m^2\cos i_0-4\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3-\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2- \\
-3B_m\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3+9B_m^2\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2-6\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2k_1^{(2)}+48B_m^2\cos i_0\,k_1^{(2)}+ \\
+24B_m^2\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2-2\cos i_0\,k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2-12B_m\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2-\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2\left(k_1^{(2)}\right)^2+ \\
+27B_m^2\,B_m^2\,\cos i_0\,k_2^{(2)}+6B_m\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2+3B_m\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^3-6\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2- \\
-3B_m\cos i_0\,k_1^{(2)}k_2^{(2)}-\Big]\zeta^4+O\left(\zeta^5\right)
\end{aligned}
\tag{20.274}
$$

Falls die Rektaszension des aufsteigenden Knotens benötigt wird, kann sie durch Integration der (nicht singularitätenfreien) Variationsgleichung (4.390) mit $p_{ij}=0$

$$
\frac{d\Omega}{d\zeta} = \frac{d\eta}{d\zeta}\frac{\sin\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)}{\sin\left(i(\zeta)\right)} \tag{20.275}
$$

berechnet werden[1].

Für eine Darstellung im dreidimensionalen Raum bei Bezug auf die Ekliptik als Basisebene mit der Basis $\mathbf{p}_i$ ergibt sich (etwa mit Formel (8.377) in Band II) der Radiusvektor

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = r\Big\{&\mathbf{p}_1\Big[-\cos\left(i(\zeta)\right)\sin\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\sin\left(\Omega(\zeta)\right)+\cos\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\cos\left(\Omega(\zeta)\right)\Big]+ \\
&+\mathbf{p}_2\Big[\;\cos\left(i(\zeta)\right)\sin\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\cos\left(\Omega(\zeta)\right)+\cos\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\sin\left(\Omega(\zeta)\right)\Big]+ \\
&+\mathbf{p}_3\quad\sin\left(i(\zeta)\right)\sin\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\Big\}\;.
\end{aligned}
\tag{20.276}
$$

Der Geschwindigkeitsvektor kann mit der Zeitbeziehung $\left(r^2\dot{\zeta}=G\right)$ aus der Darstellung

[1] Die (mit MAPLE) berechneten Ergebnisse sind so aufwendig und unübersichtlich, dass sie nicht in den vorliegenden Bericht aufgenommen werden

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{r}\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 = \frac{G}{r}\left(\frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}_0\right) \tag{20.277}$$

und mit den Beziehungen (8.377) und (8.378) erhalten werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} = \frac{G}{r}\Bigg\{ & \mathbf{p}_1\Bigg[-\cos\big(i(\zeta)\big)\sin\big(\Omega(\zeta)\big)\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)+\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\right)+ \\
& \qquad +\cos\big(\Omega(\zeta)\big)\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)-\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\right)\Bigg]+ \\
& +\mathbf{p}_2\Bigg[\cos\big(i(\zeta)\big)\cos\big(\Omega(\zeta)\big)\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)+\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\right)+ \\
& \qquad +\sin\big(\Omega(\zeta)\big)\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)-\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\right)\Bigg]+ \\
& +\mathbf{p}_3\,\sin\big(i(\zeta)\big)\left[\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)+\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\right]\Bigg\} \quad .
\end{aligned} \tag{20.278}$$

Im vorliegenden Fall ist der Radius r aus Beziehung (20.264) bekannt, seine Variation nach dem Bahnwinkel $dr/d\zeta$ kann ebenfalls aus diesem Ausdruck (eventuell mit Hilfe eines Formelmanipulators) gewonnen werden.

NUMERISCHES BEISPIEL: Gegenüber den Zahlenwerten im 4. Lösungsschritt werde jetzt (lediglich zur Demonstration und nicht realistisch) eine Ablenkung in der oskulierenden Bahnebene von β=30° und aus der Ebene um γ=45° gewählt. Dies führt auf den Parameter $B_N = 0.042811429$. Ferner werden die Parameter des numerischen Beispiels im vierten Lösungsschritt sowie den Anfangswerten

$$\begin{aligned}
& B_m = B_0/\mu_\odot = 0.0428327 \\
& \eta_0 = 0.0,\ i^{(0)} = 0°,\ \Omega^{(0)} = 0°,\ u^{(0)} = 0°,\ k_2^{(2)} = 0.0\ ,\quad j_{10} = 0.0,\ \ j_{20} = 0.0 \\
& r_P = r\big(\zeta = 0.0\big) = 0.983292384\,AE \quad \rightarrow\ k_1^{(1)}\big(\zeta = 0\big) = k_1^{(2)} = 0.128258096 \mathrel{\hat{=}} e \\
& G_0 = G\big(\zeta = 0°\big) = \sqrt{\mu\, p} = 4.45510668683\times 10^{9}\ km^2/s = 1.990706748\times 10^{-7}\ AE^2/s \\
& \mu = 1.195913238\times 10^{12}\ km^3/s^2 = 3.572098767\times 10^{-14}\ AE^3/s^2
\end{aligned} \tag{20.279}$$

verwendet.

Für die Variation des Bahnradius nach dem Bahnwinkel ergibt sich mit diesen Werten der numerische Ausdruck:

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\zeta} = 0.5598947398\cdot 10^{14}\cdot\left(0.1991\cdot 10^{-6}+0.7558546512\cdot 10^{-8}\cdot\zeta-0.1434746996\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2+\right.$$
$$\left.+0.1486534273\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^3+0.1413986461\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4-0.3459186635\cdot 10^{-11}\cdot\zeta^5\right)\cdot$$
$$\left(0.7558546512\cdot 10^{-8}-0.2869493991\cdot 10^{-9}\cdot\zeta+0.4459602819\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2+\right.$$
$$\left.+0.5655945844\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^3-.1729593317\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4\right)/$$
$$/\left[1+\left(0.128258+0.856654\cdot 10^{-1}\cdot\zeta-0.1265452287\cdot 10^{-1}\cdot\zeta^3+\right.\right.$$
$$\left.+0.3372019348\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^4+0.4275523190\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\cos(\zeta)\ +$$
$$+\left(0.4039813431\cdot 10^{-1}\cdot\zeta^2-0.4496025802\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^3-\right.$$
$$\left.\left.-0.2805723200\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^4+0.1269263109\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\sin(\zeta)\right]\ -$$
$$-0.2799473699\cdot 10^{14}\cdot\left(0.1991\cdot 10^{-6}+0.7558546512\cdot 10^{-8}\cdot\zeta-0.1434746996\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2+\right.$$
$$\left.+0.1486534273\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^3+0.1413986461\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4-0.3459186635\cdot 10^{-11}\cdot\zeta^5\right)^2\cdot$$
$$\cdot\left[\left(0.0856654-0.03796356861\cdot\zeta^2+0.1348807740\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^3+\right.\right.$$
$$\left.+0.2137761596\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^4\right)\cos(\zeta)\ -$$
$$-\left(0.128258+0.0856654\cdot\zeta-0.01265452287\cdot\zeta^3+0.3372019348\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^4+\right.$$
$$\left.+0.4275523190\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\sin(\zeta)\ +$$
$$+\ 0.08079626862\cdot\zeta-0.1348807740\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^2-0.01122289280\cdot\zeta^3+$$
$$\left.+0.6346315545\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^4\right)\sin(\zeta)\ +$$
$$+\left(0.04039813431\cdot\zeta^2-0.4496025802\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^3-0.2805723200\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^4+\right.$$
$$\left.\left.+0.1269263109\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\cos(\zeta)\right]\ /$$
$$/\left[1+\left(0.128258+0.0856654\cdot\zeta-0.01265452287\cdot\zeta^3+0.3372019348\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^4+\right.\right.$$
$$\left.+\ 0.4275523190\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\cos(\zeta)\ +$$
$$+\left(0.04039813431\cdot\zeta^2-0.4496025802\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^3-0.2805723200\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^4+\right.$$
$$\left.\left.+0.1269263109\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\sin(\zeta)\right]^2 \qquad (20.280)$$

Im Beispiel hat der zweite Bahnwinkel η („zweiter *Hansen*winkel“) die numerische Darstellung bei Bezug auf den Anfangswert $\eta_0=\eta(\zeta=0°)=0.0$ (für die numerische Auswertung wurde die Reihenentwicklung bis zur 12. Ordnung getrieben)

$$\eta=\eta(\zeta)=0.03794471243\cdot\zeta-0.001440516571\cdot\zeta^2+0.0007918292074\cdot\zeta^3\ +$$
$$+0.4083643127\cdot 10^{-4}\cdot\zeta^4-0.1837209610\cdot 10^{-4}\cdot\zeta^5+0.5828605624\cdot 10^{-5}\cdot\zeta^6-$$
$$-0.1255975336\cdot 10^{-5}\cdot\zeta^7-0.1007964758\cdot 10^{-6}\cdot\zeta^8-0.6133109711\cdot 10^{-7}\cdot\zeta^9- \qquad (20.281)$$
$$-0.2377384982\cdot 10^{-7}\cdot\zeta^{10}+0.3464411393\cdot 10^{-8}\cdot\zeta^{11}+\cdots$$

sowie die Variation nach dem Bahnwinkel

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{d\zeta} &= 0.03794471243 - 0.002881033142\cdot\zeta + 0.002375487622\cdot\zeta^2 + \\ &+ 0.0001633457251\cdot\zeta^3 - 0.00009186048050\cdot\zeta^4 + 0.3497163374\cdot 10^{-4}\cdot\zeta^5 - \\ &- 0.8791827352\cdot 10^{-5}\cdot\zeta^6 - 0.8063718064\cdot 10^{-6}\cdot\zeta^7 + 0.5519798740\cdot 10^{-6}\cdot\zeta^8 + \\ &+ 0.2377384982\cdot 10^{-6}\cdot\zeta^9 + 0.3810852532\cdot 10^{-7}\cdot\zeta^{10} + \cdots \quad .\end{aligned} \tag{20.282}$$

Entsprechend kann durch näherungsweises Lösen der Differentialgleichung (20.275) mit den hier gewählten Zahlenwerten die Näherungsdarstellung für die ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens berechnet werden:

$$\begin{aligned}\Omega(\zeta) &= \Omega_0 + 0.03794471243\cdot\zeta - 0.001440516571\cdot\zeta^2 + 0.7918292074\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^3 + \\ &+ 0.4083643127\cdot 10^{-4}\cdot\zeta^4 - 0.1837209610\cdot 10^{-4}\cdot\zeta^5 + 0.5828605624\cdot 10^{-5}\cdot\zeta^6 - \\ &- 0.1255975336\cdot 10^{-5}\cdot\zeta^7 - 0.1007964758\cdot 10^{-6}\cdot\zeta^8 - 0.6133109711\cdot 10^{-7}\cdot\zeta^9 - \\ &- 0.2377384982\cdot 10^{-7}\cdot\zeta^{10} + 0.3464411393\cdot 10^{-8}\cdot\zeta^{11} + O\left(10^{12}\right).\end{aligned} \tag{20.283}$$

Hier werde (ohne die Allgemeinheit der Aussagen zu beeinflussen) der Anfangswert $\Omega_0 = 0°.0$ gewählt.

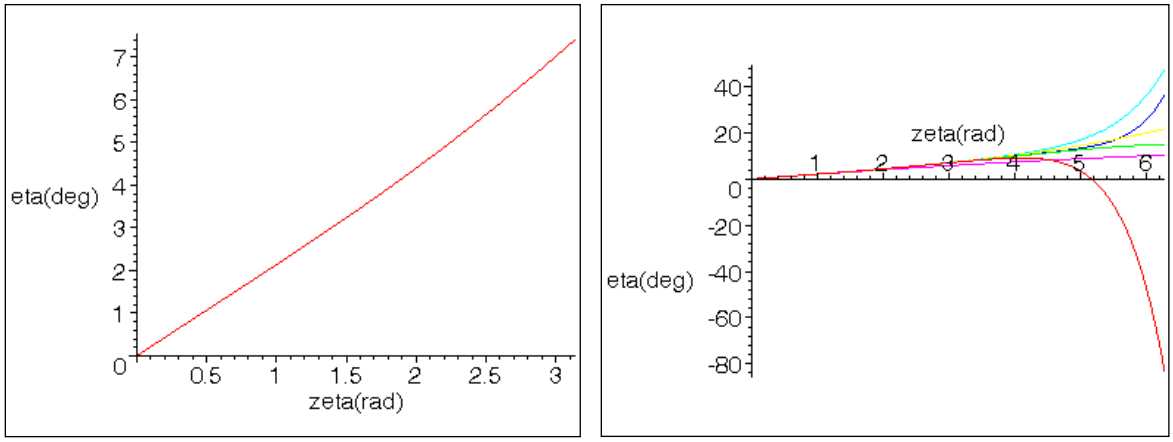


Bild 20-9 linkes Bild: Verlauf des Raumwinkels η[Grad] bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung über einen halben Umlauf um die Sonne. rechtes Bild: Berechnung des Raumwinkels η[Grad] mit verschiedenen Ordnungen (12., 11., 10., 6., 4., 3.) einer Reihenentwicklung über einen halben Umlauf um die Sonne. Die Streuung der durch die Reihenentwicklung bedingten Zahlenwerte macht die Lösung nach einem halben Umlauf wertlos

Bild 20-9 zeigt den Verlauf des Raumwinkels η gegenüber dem Bahnwinkel ζ über einen Umlauf um die Sonne bei konstanten Anstellwinkeln β und γ in Bezug auf die Strahlungsrichtung der Sonnenstrahlung. Anmerkung. Wegen der eingeschränkten Gültigkeit der Integrationslösungen infolge der Näherung durch Reihen ist zum Ende des untersuchten Intervalls der Verlauf der Kurve als unsicher zu betrachten. Dies macht sich bereits nach einem halben Umlauf (bis etwa ζ=π) bemerkbar, was aus dem rechten Bild in Bild 20-9 erkennbar wird. Hierfür wurde die Reihenentwicklung bis zur 12. Ordnung, 11. Ordnung, 10. Ordnung, 6. Ordnung, 4. Ordnung, und 3. Ordnung

aufgetragen. Im letzteren Fall ist eine Abweichung bereits vor 1π erkennbar (Kurve in magenta), in allen anderen Fällen erst danach. Ab hier ist die Lösung wertlos. Es muss angemerkt werden, dass der Formelmanipulator keine analytische Lösung der zu berechnenden Differentialgleichungen gefunden hat.

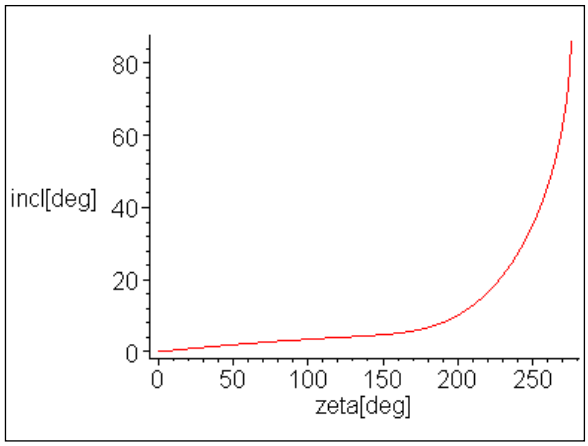


Bild 20-10: Verlauf der Bahninklination *i*[Grad] bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Der stark eingeschränkte Gültigkeitsbereich der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung ist erkennbar[1].

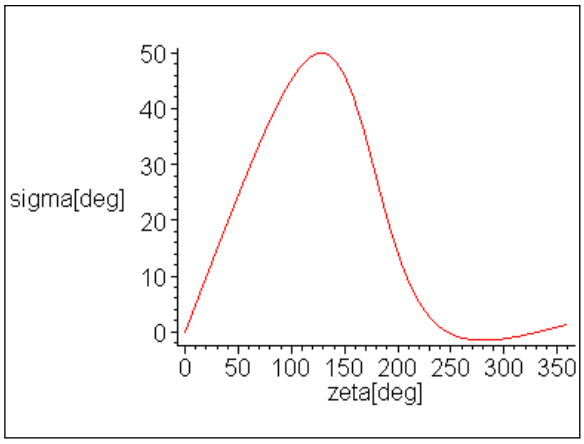


Bild 20-11: Verlauf der Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens σ[Grad] bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Der stark eingeschränkte Gültigkeitsbereich bis maximal ζ=100° der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung deutlich erkennbar.

Dies gilt in verschärfter Form auch für die Inklination, sowie die Länge des Knotens in der Bahn σ wie auch für die ekliptikale Länge Ω des aufsteigenden Knotens, wie in Bild 20-10, Bild 20-11 und Bild 20-12 erkennbar wird. Ergänzend ist in Bild 20-13 die Bahnhöhe über der Ekliptik dargestellt.

[1] Weitere numerische Untersuchungen mit längeren Reihenentwicklungen oder eventuell besseren analytischen, also mit bekannten Funktionen integrierbaren, Lösungen sollten die hier vorgestellten Lösungsvorschläge verbessern können. Falls diese zu keinem überzeugenden Ergebnis führen muss wie bisher numerisch integriert werden. Das macht jedoch den Lösungsansatz mit den bisher gefundenen analytischen Lösungen nicht überflüssig. Dies bestätigt lediglich auch bei diesem Lösungsansatz die Erfahrung, dass analytische Lösungen nur bis zu einem gewissen Grad gefunden werden können, höhere Genauigkeiten nur auf numerischem Weg zu erreichen sind (Numerische Untersuchungen sind jedoch nicht Gegenstand dieses Berichtes)

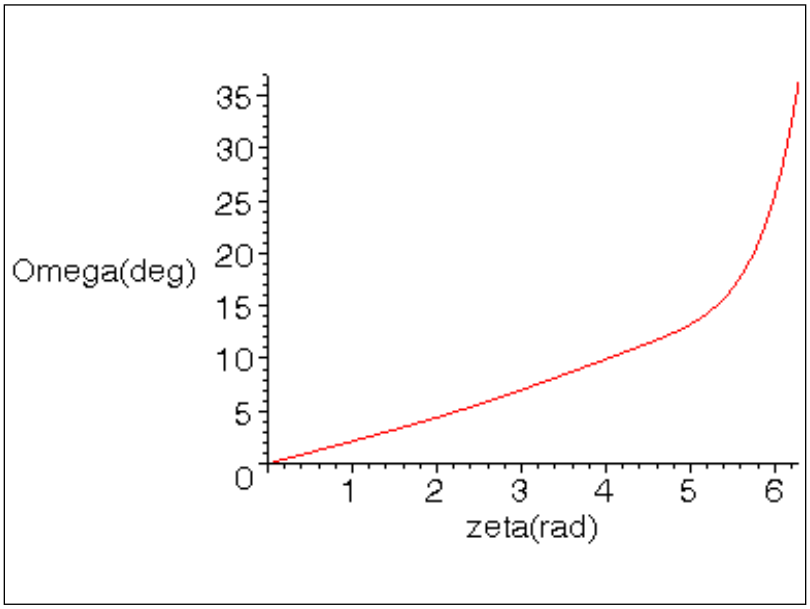


Bild 20-12: Verlauf der ekliptikalen Länge des aufsteigenden Knotens Ω[Grad] mit Anfangswert 0° bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Auch hier ist der eingeschränkte Gültigkeitsbereich der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung ab etwa dem Wert 1.6 π erkennbar.

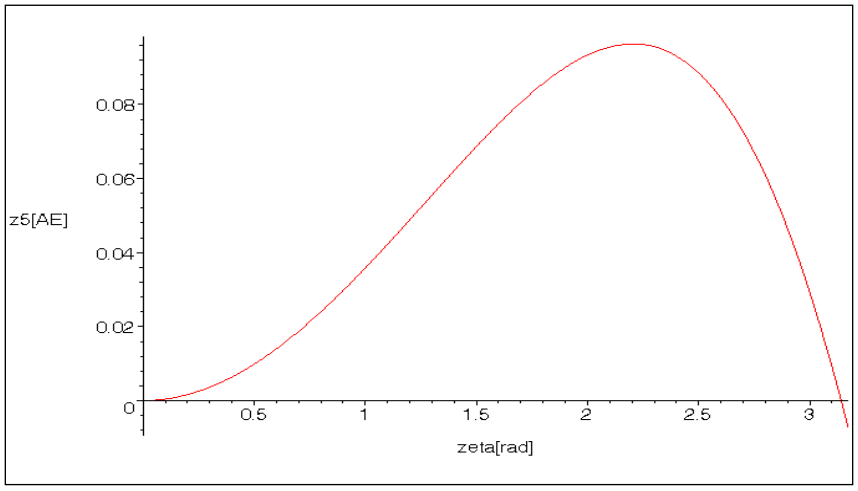


Bild 20-13: Verlauf der Höhe des Raumflugsonde über der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung über einen halben Umlauf um die Sonne

Das Gesamt-Ergebnis ist in Bild 20-14 dargestellt. Hier sind alle 5 Anpassungskurven in ihrer Reihenfolge zu erkennen. Der Berührpunkt aller Kurven liegt im Perihel der Bahnen. Die z-Achse ist zur Veranschaulichung erheblich überhöht. Damit wird demonstriert, wie die Bahninklination durch den konstanten normalen Schub infolge des gegen die Sonnenrichtung konstant angestellten Sonnensegels zunächst kontinuierlich erhöht wird. Es muss allerdings beachtet werden, dass infolge der jeweils um das Perihel durchgeführten Reihenentwicklung nur eine in der Dauer eingeschränkte Genauigkeit der Lösungen erwartet werden darf.

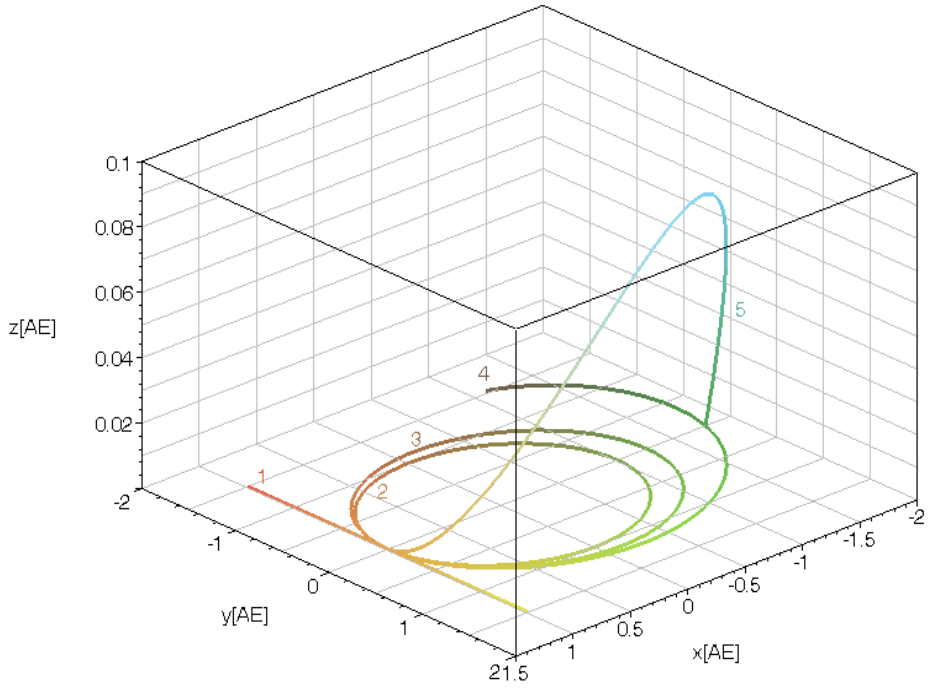


Bild 20-14: Die fünf Anpassungskurven bei konstantem ebenem (β=30°) und räumlichem (γ=45°) Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Kurve 1: Gerade, keine Beschleunigung, Kurve 2: Erdbahn: Gravitationsbeschleunigung durch Sonne (Zweikörperbewegung), Kurve 3: radiale Beschleunigung durch Strahlungsdruck, Kurve 4: transversale Beschleunigung durch den Strahlungsdruck, Kurve 5: normale Beschleunigung durch den Strahlungsdruck (man beachte die starke Überhöhung der z-Achse)[1]

[1] Die hier mit dem Programmsystem MAPLE erzeugte 3D-Darstellung wurde mit freundlicher Unterstützung von Scientific Computers GmbH, Aachen, Herrn *Thomas Richards* erarbeitet

Schrifttum zu Band III

In diesem Literaturverzeichnis sind nur Basiswerke, weiterführende und vertiefende Literatur aufgenommen. Einige weitere Einzelreferenzen sind in direktem Bezug im fortlaufenden Text enthalten. Weiterhin sei auf das umfassende Literaturverzeichnis in Band I hingewiesen.

ADIMURTHY, V. and K. V. JOY [1978]: 'Extension of Region of Convergence in Orbit Determination Using Function-Minimization Techniques', Engineering Notes, *J. Guidance and Control*, Vol. **1**, No. 6, Nov.-Dec. 1978, pp. 445-446

AMENABAR, J. P., M. C. PHENNEGER, M. BOBROWSKY, S. L. HOGE, and O. O. CUEVAS [1987]: 'ISEE Orbital Decay due to Lunar Third-Body Perturbations', AAS 87-535, pp. 1427-1448

BAKER, R. M. L. and M. W. MAKEMSON [1960]: *An Introduction to Astrodynamics*, Academic Press, New York

BATRAKOV, YU. V. and V. G. SOKOLOV [1972]: 'Earth Satellites in Resonance with the Moon and the Sun as Objects of Laser Ranging. Analytical Solution for their Motion', *Celest. Mech.* **6**, pp. 247-251

BATTIN, R. H. *[1987]: An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, J. S. Przemieniecki / Series Editor-in-Chief, New York

BAUSCHINGER, J. [1928]: *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, Zweite Auflage, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig

BERTOTTI, BRUNO and PAOLO FARINELLA [1990]: *Physics of the Earth and the Solar System, Dynamics and Evolution, Space Navigation, Space-Time*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, ISBN 0-7923-0535-3

BLANCHARD, R. C. AND P. E. ZADUNAISKY [1968]: 'A numerical solution of Kepler's problem in unified variables', Paper AAS 68-100, presented at AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Jackson, Wyoming, September 3-5, 1968

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1996]: *Theory of Orbits, Volume 1: Integrable Systems and Non-perturbative Methods*, ISBN 3-540-58963-5 Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York,

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1998]: *Theory of Orbits, Volume 2: Perturbative and Geometrical Methods*, ISSN 0941-7834, ISBN 3-540-60355-7 Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

BOCKEMÜLLER, E. A. UND W. KLEINSCHMIDT [1970]: 'Analytische Lösungen für Übergangsbahnen bei Horizontalschub', XXI. Internationaler Astronautischer Kongress, Konstanz, 4. bis 10. Oktober 1970

BÖHNARDT, H., H. RUEDER, M. SCHNEIDER [1981]: ‚Modelle des Strahlungsdrucks für die Theorie der Satellitenbahnen', *Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerichen*

Akademie der Wissenschaften stronomy, Reihe **A**, Theoretische Geodäsie, Heft Nr. 93; ISBN 3-7696-81754

BOHRMANN, A. [1963]: *Bahnen künstlicher Satelliten,* BI Hochschultaschenbücher Nr. 40, Mannheim; zweite Auflage 1966

BRANDT, SIEGMUND [1968]: *Statistische Methoden der Datenanalyse,* BI Hochschultaschenbücher Nr. 816/816a, Mannheim/Zürich

BRESSANIN, G. [1970]: 'Errors in Orbit Determination', *Celest. Mech.* **2**, 77-87

BRONSTEIN, I. N., K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL, H. MÜHLIG [1993]: *Taschenbuch der Mathematik,* Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, ISBN 3-8171-2011-X

BROOKES, C. J. AND RYLANE, F. C. E. [1982]: 'Perturbations of the Orbit of Explorer 19 due to Solar Radiation', *Celest. Mech.* **27**, 339–352

BROUCKE, R. [1980]: 'Expansion of the Third Body Disturbing Function', *AIAA 18th Aerospace Sciences Meeting,* AIAA-80-0056

BROUCKE, R. [1995]: 'Long-Term Lunar Effects on Orbits of Earth Satellites', AAS 95-406, p. 1745

BROUCKE, R. A. AND CEFOLA, P. J. [1972]: 'On the Equinoctial Orbit Elements', *Celest. Mech.* **5**, 303–310

BROUWER, D. [1959]: 'Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag', *Astronomical Journal* **64**, 378–397

BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961]: *Methods of Celestial Mechanics,* Academic Press

BROUWER, D. AND HORI, G. [1961a]: 'Theoretical Evaluation of Atmospheric Drag Effects in the Motion of an Artificial Satellite, *Astronomical Journal* **66**, No.6, pp. 264-265

BROUWER, D. AND HORI, G. [1961b]: 'Appendix to Theoretical Evaluation of Atmospheric Drag Effects in the Motion of an Artificial Satellite', *Astronomical Journal* **66**, No.5, pp. 193-225

BRUMBERG, V. A. [1994]: 'General Planetary Theory in Elliptic Functions', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **59**, 1–36

BRUMBERG, V. A. [1995]: *Analytical Techniques of Celestial Mechanics,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

BRYANT, W. C. JR., C. C. GOAD [1975]: 'A Study of Orbit Determination Accuracies for Future Earth Observatory Missions', Paper No. AAS-049, AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Bahamas/July 28-30, 1975

BURNS, RICH. ET AL. [2000]: 'Solar Radiation Pressure Effects on Formation Flying of Satellites with Different Area to Mass Ratios', Paper AIAA-2000-4132, presented at AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference, Denver, Co.

BUCERIUS, H. [1966]: *Himmelsmechanik I,* BI Hochschultaschenbücher, 143/143a, Bibliographisches Institut Mannheim

BUCERIUS, H., SCHNEIDER, M. [1968]: *Himmelsmechanik II,* BI Hochschultaschenbücher, 144/144a, Bibliographisches Institut Mannheim

BURSA, M. [1987]: 'Secular Deceleration of the Moon and of the Earth's Rotation and Variation in the Zonal Geopotential Harmonic', Bull. Astron. Inst. Czechosl., Vol. **38**, Nr. 5, 309–313

BURSA, M. [1989 ?]: 'The Variation in J_2 and the Moments of Inertia: Satellite Results and Consequences for the Angular Momentum Budget of the Earth-Moon-Sun System', Astronomical Institute, Czechoslovask Academy of Sciences, Prague ČSFR

CAMPBELL, J. A. [1972]: 'An Exercise in Symbolic Programming: Computation of General Normalized Inclination Functions', *Celestial Mechanics*, **6,** 187-197

CAPDEROU, MICHEL [2003]: *Satellites, Orbites et Missions* , Springer-Verlag France, ISBN 2-287-59772-7

CAPELLARI, J. O., VELEZ, C. E. AND FUCHS, A. J. [1976]: *Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md., X-582-76-77

CHEBOTAREV, G. S. [1967]: *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, (Translation from Russian), American Elsevier Publishing Company, Inc., New York

CHERNIACK, J. B. and GAPOSCHKIN, E. M. [1969 ?]: 'Computer Derivation of Short-Period Lunar Perturbations', *NASA*, NGR 09-015-002

CLAUS, A. J. and LUBOWE, A. G. [1963]: 'A High Accuracy Perturbation Method with Direct Application to Communication Satellite Orbit Prediction', *Astronautica Acta*, Vol. **IX** Fasc. 5-6, 275–301

COCHRAN, JOHN E., JR. [1987]: 'Application of Radau Coordinates in the Formulation and Reduction of Problems of Three Bodies', Presentation at the 38th International Astronautical Congress, Octotber 10-17, 1987, Brighton, United Kingdom

COK, DAVID R. [1978]: 'On the Perturbations of a Close-Earth Satellite due to Lunar Inequalities ', *Celestial Mechanics*, **16,** 459-479

COOK, A. H. [1988]: *The Motion of the Moon*, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia

COOK, G. E. [1962]: 'Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite', Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol **6**, 271

CUNNINGHAM, L. E. [1970]: 'On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite', *Celest. Mech.* ***2***, 207–216

DANJON, A. [1980]: *Astronomie Générale, Astronomie Sphérique et éléments de Mécanique Céleste*, Seconde Edition, revue et corrigée, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 9, Rue de Médicis, 75006 Paris

DEPRIT, A. [1975]: 'Ideal Elements for Perturbed Keplerian Motions', *Journal of Research of the National Bureau of Standards – B. Mathematical Sciences.* **79B** , Nos. 1 and 2, January – June 1975, pp. 1-15

DEPRIT, A. [1976]: 'Ideal Frames for Perturbed Keplerian Motion', *Celest. Mech.* **13,** 253–263

DER, GIM, J. [1996]: 'An Elegant State Transition Matrix', AIAA-96-3660-CP

DER, GIM, J. and ROY DANCHICK [1996]: 'Analytic and Numerical Error Covariance Matrix Propagation', AIAA-96-3661

DOUGLAS BRUCE C., CHRESTON F. MARTIN, RONALD G. WILLIAMSON, and CARL A. WAGNER [1969]: 'Error Analysis of Resonat Orbits for Geodesy', *Celestial Mechanics* **1**, 252-270

DOW, J. M., S. D. MARTIN and R. C. A. ZANDBERGEN [1991]: 'ERS-1 Operational Orbit Determination and Prediction', Lecture, ESA-ESOC, Darmstadt

DVORAK, R. [1982]: ‘A Direct Method of Computing Small Divisors in Planetary Theory’, *Astronomy and Astrophysics*, **108**, 14-18

DZIOBEK, O. [1888]: *Die mathematischen Theorien der Planetenbewegung*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig (Reprint: *Mathematical Theories of Planetary Motion*, Dover Publications, New York, 1962)

ECKSTEIN, M. C. [1972]: ‘Säkulare Bahnstörungen durch den Luftwiderstand’, DFVLR IB 013-72/4

ECKSTEIN, M. C. [1973a]: ‘Ein Satellitenbahnmodell ohne Singularitäten’, DLR-FB 73-67

ECKSTEIN, M. C. [1973b]: 'Konvergenzverbesserung bei der Bahnbestimmung künstlicher Satelliten', DLR-FB 73-95

ECKSTEIN, M. C. [1974 a]: ‘A Satellite Orbit Model without Singularities’, Technical Translation, ESRO TT-102, Oct. 1974

ECKSTEIN, M. C. [1974 b]: ‘Ein Satellitenbahnmodell mit Schubphase’, DFVLR IB 552-74/9

ECKSTEIN, M. C. [1975]: ‘An Approximate Semi-Analytical Solution for Orbit- and Attitude-Maneuvres of Spin Stabilized Satellites’, DFVLR IB 552-75/9

ECKSTEIN, M. C. [1977]: ‘Ein halbnumerisches Verfahren zur Berechnung der Störungen einer geostationären Bahn durch Sonne und Mond’, DFVLR IB 77-73

ECKSTEIN, M. C. [1978a]: ‘Lecture Notes on Orbit Computation and Life Time Prediction of Close Earth Satellites’, DFVLR Institute for Flight Systems Dynamics, Oberpfaffenhofen

ECKSTEIN, M. C. [1978b]: ‘Geostationary Orbit Model, Lecture Notes’, DFVLR Institute for Flight Systems Dynamics, Oberpfaffenhofen, presented ISAC, Bangalore, India

ECKSTEIN, M. C. [1980]: ‘Optimal Station Keeping by Electric Propulsion with Thrust Operation Constraints’, Cel. Mech. **21**, pp. 129–147

ECKSTEIN, M. C. [1983]: ‘Approximate TV-SAT Orbit Injection Optimization by Means of Impulsive Hohmann Transfers’, DFVLR-FB 83-02

ECKSTEIN, M. C. [1996]: ‘On the Long Term Evolution of Graveyard Orbits’, DLR-GSOC IB 96-03

ECKSTEIN, M. C. , SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1966b]: ‘Satellite Motion for Arbitrary Eccentricity and Inclination Around the Smaller Primary in the Restricted Three-Body Problem’, *The Astronomical Journal*, Vol. **71**, No. 4, pp. 248-263

ECKSTEIN, M. C., SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1966c]: ‘A Uniformly Valid Asymptotic Representation of Satellite Motion Around the Smaller Primary in the Restricted Three-Body Problem’, *Progress in Astronautics*, Vol. **17**, pp. 183-198

ECKSTEIN, M.C., JOCHIM, E.F., LEIBOLD, A.F., LORENZ, J.K., PIETRASS, A.E. [1983]: „Design and Navigation Accuracy Assessment of an Ion Drive Asteroids Flyby and Rendezvous Mission, Launched by Ariane 4 APEX Demonstration Flight“, Internal Report GSOC 83-1, DFVLR Oberpfaffenhofen

EDENHOFER, P., GLESNER, D., STEIN, V. [1973]: ‘Ausbreitungsfehler elektromagnetischer Wellen bei der Bahnvermessung von Erdsatelliten. Korrektur der systematischen und Abschätzung der statistischen Ausbreitungsfehler‘, DLR-FB 73-56

EFROIMSKY, MICHAEL, and ALBERTO ESCAPA [2007]: 'The theory of canonical perturbations applied to attitude dynamics and to the Earth rotation. Osculating and nonosculating Andoyer variables', *Celestial Mech. Dyn. Astr.,* **98**, 251-283

ELY, TODD A. and KATHLEEN C. HOWELL [1996]: 'Tesseral Resonance Overlap Including the Effects of Luni-Solar Pertrubations', AIAA-96-3582-CP, pp. 119-129

EL'YASBERG, P. E. [1967]: *Introduction to the Theory of Flight of Artificial Earth Satellites* , translated from Russian, Moskva 1965, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem

EL'YASBERG, P. E. & A. A. SUKHANOV, T. MORLEY & F. HECHLER [1984]: 'Orbit Determination for Comet Halley by means of Optimally Selected Observations', ESA Journal 1984, Vol. **8**, pp. 8-25

ENDERLE, WERNER; HAUKE FIEDLER; SERGIO DE FLORIO; GERHARD KRIEGER; FRIEDRICH JOCHIM; SIMONE D'AMICO; SHANNON DAWSON; WILLIAM KELLAR [2006]: 'Next Generation GNSS for Navigation of Future SAR Constellations', IAC-06-C1.8.06

ESCOBAL, P. R. [1965]: *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., New York

ESCOBAL, P. R. [1968]: *Methods of Astrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New York – London – Sydney

ESRO [1972]: *Spacecraft Operations, Vol. V. Orbit Dynamics*, Proceedings of the Eighth ESRO Summer School, Neu-Isenburg, Federal Republic of Germany, ESRO SP-68, February 1972

ESTES, R. H. [1974]: 'On the Analytic Lunar and Solar Perturbations of a Near Earth Satellite',*Celestial Mechanics* **10**, 253–276

Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, prepared jointly by the Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, London, Her Majesty's Stationary Office, Reprinted with corrections 1962

FARQUHAR, R. W.; DUNHAM, D. W. [1986]: 'Orbital Acrobatics in the Sun-Earth-Moon System', Proceedings of the Second International Symposium on Spacecraft Dynamics, Darmstadt, 20–23 October 1986, ESA SP-255, 191–198

FERRAZ-MELLO, SYLVIO AND WAGNER SESSIN, ed. [1985]: *Resonances in the Motion of Planets, Satellites and Asteroids,* Universidade de São Paulo, Instituto Astronômico e Geofísico, Mathematical and Dynamical Astronomy Series, volume 3, ISBN 85-85047-03-8

FERRAZ-MELLO, SYLVIO [2007]: *Canonical Perturbation Theories, Degenerate Systems and Resonance*, Springer Science+Business Media, LLC, ISBN-10: 0-387-38900-8; ISBN-13: 978-0-387-38900-4ISBN-10: 0-387-38900-8; ISBN-13: 978-0-387-38900-4

FISHER, DAVID [1972]: 'Analytic Short Period Lunar and Solar Perturbations of Artificial Satellites', *Celestial Mechanics* **6**, 447–467; NASA-TM-X-65809, N 72-23888

GACKSTATTER, F. H. [2007]: 'Lunisolar Effect on Spring Tides, Earthquakes, and Tsunamis', Journal of Coastal Research, **23**, 528

GACKSTATTER, F. H. AND GACKSTATTER, C. F. [2011]: 'Lunisolar effect on the trigger of earthquakes', Astron. Nachr. / AN **332**:8, 795-804/ **DOI** 10.1002/asna.201111583

GARFINKEL, B. [1982]: 'On Resonance in Celestial Mechanics, (A survey)', *Celestial Mechanics* **28**, 275–290

GAUSS, C. F. [1809/1906]: *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium,* Hamburgi sumtibus Frid. Perthes et I. H. Besser; reprint in: C. F. Gauss, Werke

GEDEON, G. S. [1969]: 'Tesseral Resonance Effects on Satellite Orbits', *Cel. Mech.* ***1***, 167–189

GEYLING, F. T. AND WESTERMAN, H. R [1971]: *Introduction to Orbital Mechanics,* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Ma., Menlo Park, Ca., London, Don Mills, Ontario

GIACAGLIA, GIORGIO E. O. [1973/1974]: 'Lunar Perturbations of Artificial Satellites of the Earth', *Smithonian Astrophysical Observatory,* Special Report 352, October 1, 1973; *Celestial Mechanics* **9**, 239–267

GIACAGLIA, GIORGIO EUGÊNIO OSCARE AND ANTONIO FERNANDO BERTACHINI DE ALMEIDA PRADO [2003]: 'Third Body Perturbations on Satellites', *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais,* ISBN 85-17-00010-2

GIACAGLIA, GIORGIO E. O. BOB E. SCHUTZ [2011]: 'Luni-solar and geopotential perturbations on a close satellite', *Proceedings of the XIV International Symposium on Dynamic Promblems of Mechanics (DINAME 2011),* FLEURY, A. T., KURKA, P. R. G. (Editors), ABCM, São Sebastiãn, SP, Brazil, March 13th – March 18th, 2011

GIESE, R. H. [1966]: *Weltraumforschung I,* Bibliographisches Institut, Mannheim, Hochschultaschenbücher 107/107a

GILL, EBERHARD [1995]: 'Precise Orbit Determination and Station Location Estimation from RADCAL Radar Data', *DLR-GSOC,* January 26, 1995

GILL, EBERHARD [1996]: 'Smooth Bi-Polynomial Interpolation of Jacchia 1971 Atmospheric Densities fo Efficient Satellite Drag Computation', *DLR-GSOC,* IB 96-1

GILL, EBERHARD [1998]: 'Precise Orbit Determination of the GNSS-2 Space Segment from Ground-Based and Satelliteto-Satellite Tracking', *2nd European Symposium on Global Satellite Navigation Systems GNSS 98,* Toulouse 20-23 October 1998

GILL, EBERHARD and HELIO KOITI KUGA [1993]: 'ODEM – An Improved Approach Towards Rapid Satellite Maneuver Calibration', *AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting,* Pasadena, Ca., Feb. 22-24, 1993, Paper AAS 93-111

GOODING, R. H. [1972 a]: 'Orbit Determination at the Royal Aircraft Establishment', in ESRO [1972], pp. 17-34

GOODING, R. H. [1972 b]: 'Application and Results of Orbit Determination', in ESRO [1972], pp. 1-15

GOODYEAR, W. H. [1965 a]: 'Completely General Closed-Form Solution for Coordinates and Partial Derivatives of the Two-Body Problem', *Astronomical Journal,* Vol. **70**, pp. 189-192

GOODYEAR, W. H. [1965 b]: 'A General Method for the Computation of Cartesian Coordinates and Partial Derivatives of the Two-Body Problem', NASA CR-522, prepared under Contract No. NAS 5-9762 by International Business Machines Corp., Greenbelt, Md. for Goddard Space Flight Center, NASA

GORDON, R. A. [1988]: 'An Economical Semi-Analytic Orbit Theory for Micro-Computer Applications', NASA Technical Paper 2811, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland

GREEN, R. M. [1985]: *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

GUTZWILLER, M. C. AND SCHMIDT D. S. [1986]: 'The Motion of the Moon as Computed by the Method of Hill, Brown, and Eckert', Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Vol. XXIII, Part I, U. S. Government Printing Office, Washington

HAYMES, R. C. [1971]: *Introduction to Space Science*, John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto

HAGIHARA, YUSUKE [1970]: *Celestial Mechanics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England

HENSCHEL, F. [1974]: 'Beiträge zur Berechnung von Satellitenübergängen aus erdnahen Parkbahnen in die geostationäre Lage bei schwacher Schubbeschleunigung in regularisierten Variablen', Dissertation, DFVLR Institut für Flugmechanik, Braunschweig, DLR-FB 74-57

HERGET, P. [1948]: *The Computation of Orbits*, (Selbstverlag), Ann Arbor

HERGET, P. [1959]: 'General Theory of Oblateness Perturbations', *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Orbit Theory*, American Mathematical Society, Vol IX, pp.29-35

HERRICK, S. [1948]: ‚A modification of the variation-of-constants method for special perturbations', *Publ. Astron. Soc. Pacific*, **60**, 321-323

HERRICK, S. [1965]: ‚Universal Variables', *Astronomical Journal*, Vol. **70**, No. 1329, pp. 309-315

HERRICK, S. [1971]: *Astrodynamics Volume 1 Orbit determination, Space Navigation, Celestial Mechanics*, London , Van Nostrand Reinhold, ISBN 0-442-03370-2

HERRICK, S. [1972]: *Astrodynamics Volume 2 Orbit correction, perturbation theory, integration*, London , Van Nostrand, ISBN 0-442-03371-0

HERRICK, S. [1985]: 'The Foundations of Astrodynamics', in: *First Steps Toward Space Durant III, F.C. and James, G.S.* ed. (1985)

HOLDAWAY, R. [1985]: 'Precise Orbit Determination for ERS-1: the U.K. Approach', IAF 85-267

HOLDAWAY, R. [1990]: 'Strategies for the Precise Orbit Determination of Earth Observing Satellites', AIAA 90-2952

HOOTS, F. R. [1979]: 'A Nonsingular Reformulation of the Brouwer Geopotential Theory', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Provincetown, Mass., June 25–27, 1979, AAS Paper 79-137; see also: 1981, 'Reformulation of the Brouwer Geopotential Theory for Improved Computational Efficiency', *Celest. Mech.* ***24***, 367–375

HOOTS, F. R. [1981]: 'Theory of the Motion of an Artificial Satellite', *Celest. Mech.* **23**, 307–363

HOOTS, FELIX R. AND RONALD L. ROEHRICH [1980]: 'Models for Propagation of NORAD Element Sets', *Office of Astrodynamics, Peterson AFB, Co.*, Spacetrack Report No.3, ADA 093 554, pp.1–100

HORI, G. I. [1966]: 'Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables', *Publ. Astr. Soc. Japan* **18**, 287–296

HORI, G. I [1971]: 'Theory of General Perturbations for Non-Canonical Systems', *Publ. Astr. Soc. Japan* **23,** *No. 4*, 567–587

HORI, G. I. [1973]: 'Theory of General Perturbations', in: Tapley, B. D. and Szebehely, V., ed. (1973): *Recent Advances in Dynamical Astronomy*

HORI, G. I. [1977]: 'The Satellite Case oft he Three-Body Problem', in: Duncombe, R. L. (ed.): *Dynamics of the Solar System*, pp. 77-83

HORI, G. I. AND KOZAI, Y. [1974]: 'Analytical Theories of the Motion of Artificial Satellites', in: Giacaglia, G. O. ed. (1975): *Satellite Dynamics,* COSPAR-IAU-IUTAM, Symposium São Paulo, Brazil, June 19-21, 1974, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

HUGHES, S. and A. J. MEADOWS [1977]: 'A Study of near-circular satellite orbits with an application to luni-soar perturbations', *Proc. R. Soc. Lond.* A. **355**, 131–140

HUNT, WILLIAM E. and ALI HASAN NAYFEH [1965]: 'A Nonlinear Correction Method for Orbit Determination', *AIAA Journal, Technical Notes,* Vol. **5**, No. 6, pp. 1183-1185

ISAYEV, Y. N. and A. L. KUNITSYN [1972]: 'To the Problem of Satellite`s Perturbed Motion Under the Influence of Solar Radiation Pressure', *Celest. Mech.* **6**, 44–51

IZSAK, I. G [1960]: 'A Theory of Satellite Motion About an Oblate Planet. I. A Second-Order Solution of Vinti's Dynamical Problem', *SAO Special Report No. 52,* Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory, Cambridge 38, Massachusetts, November 21, 1960

JENSEN, J., TOWNSEND, G., KORK, J., KRAFT, D. [1962]: *Design Guide to Orbital Flight,* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

JOCHIM, E. F., E. GILL, O. MONTENBRUCK, M. KIRSCHNER **[**1997**]:** 'GPS Based Onboard and Onground Orbit Operations for Small Satellites', *Acta Astronautica*, Vol. **39**, No. 9-12, pp.917-922, Pergamon, Elsevier Science Ltd., PII:S0094-5765(97)00077-5

JUPP, ALAN H. [1972]: 'A second –Order Solution of the Ideal Resonance Problem by Lie Series', *Celestial Mechanics,* **5**, 8-26

KAMEL, A. A. [1978/1982]: 'Geosynchronous Satellite Perturbations Due to Earth's Triaxiality and Luni-Solar Effects', *J. Guidance* **5**, *No. 2*, March-April 1982, pp. 189-193 (and: AIAA 78-1441R)

KAMEL, A. A. [1983]: 'New Nonsingular Form of Perturbed Satellite Equations of Motion', *J. Guidance* **6**, *No. 5*, Sept.–Oct. 1983, 387–392; (and: AIAA 82-0074)

KAUFMANN, BERNARD [1981]: 'First order semianalytic satellite theory with recovery of the short period terms due to third body and zoal perturbations', *Acta Astronautica,* Vol. **8**, No. 5-6, pp. 611-623

KAUFMANN, B. , K. T. ALFRIEND and R. R. DASENBROCK [1978]: 'Luni-Solar perturbation in the extended phase space representation oft he Vinti problem', *Acta Astronautica,* Vol. **5**, pp. 727-744

KAULA, W. M. [1962]: 'A Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a close Satellite', *NASA Technical Note* , D-1126, NASA, Washington, January 1962

KAULA, W. M. [1966]: *Theory of Satellite Geodesy, Applications of Satellites to Geodesy,* Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass. – Toronto – London

KECHICHIAN, J. A [1988]: 'Closed Form Solution of Perturbed Motion in Near-Circular Orbit due to Luni-Solar Gravity in Rotating and Inertial Cartesian Frames', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Paper AIAA 88-4295-CP

KECHICHIAN, J. A [1991]: 'Trajectory Optimization with a Modified Set of Equinoctial Orbit Elements', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Durango, Colorado, August, 19–22, 1991, Paper AAS 91-524

KHOLSHEVNIKOV, K. V. and KUZNETSOV, E. D. [2006]: 'Planetary Three-Body Problem with Poisson Series Processor', (Sobolev Astronomical Institute, St. Petersburg State University, Russia; Astronomical Observatory, Ural State University, Russia. Keine Jahrgangsangabe, ≈ 2008 oder später)

KING-HELE, D. G. [1976]: 'The Shape of the Earth', *Science **192.**, No. 4246*, 1293–1300, 25 June 1976

KING-HELE, D. G. [1987]: *Satellite Orbits in an Atmosphere: Theory and Application*, Blackie and Son Ltd., Glasgow and London

KING-HELE, D. G. and MERSON, R. H. [1959]: 'A New Value for the Earth's Flattening, Derived from Measurements of Satellite Orbits', *Nature* **183.**, *No. 4665*, 881–882, March 28, 1959

KING-HELE, D. G. and DOREEN M. C. WALKER [1987]: 'The Prediction of Satellite Lifetimes', *Royal Aircraft Establishment,* Technical Report 87030, May 1987

KING-HELE, D. G. and DOREEN M. C. WALKER [1989]: 'Evaluation of 15th and 30th-Orde Geopotential Harmonic Coefficients from 26 Resonant Satellite Orbits', *Planet. Space Sci.*, Vol. **37**, pp. 805–823

KINOSHITA, H. [1977]: 'Theory of the Rotation of the Rigid Earth', *Celest. Mech.* **15**, 227–326

KIPPENHAHN, RUDOLF (2005): 'Der sanfte Druck des Lichtes' , SuW, September 2005, pp.46-47

KIRCHGRABER, U. und STIEFEL, E. [1978]: *Methoden der analytischen Störungsrechnung und ihre Anwendungen*, B. G. Teubner, Stuttgart

KLINKRAD, H. [1982]: 'ERS-1 Orbit Maintenance Manoeuvre Strategy and Fuel Consumption Estimation', ESOC Working Paper No. 212, Darmstadt, Nov 1982

KLINKRAD, H. [1983]: *Analytische Berechnung erdnaher Satellitenbahnen unter Verwendung eines realistischen Luftwiderstandsmodells,* von der Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation

KLINKRAD, H. [1985]: 'Orbit Design of the First ESA Remote Sensing Satellite ERS-1', IAF-85-254

KLINKRAD, H. [2006]: *Space Debris, Models and Risk Analysis,* ISBN 3-540-25448-X Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, © Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK, 2006

KNOCKE, P. C. , J. C. RIES, and B. D. TAPLEY [1988]: 'Earth Radiation Pressure Effects on Satellites', *AIAA*, 88-4292-CP, pp. 577–587

KOELLE, H. H. ED. [1961]: *Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

KOWALEWSKY, J. [1967]: *Introduction to Celestial Mechanics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland

KOZAI, Y. [1959]: 'The Motion of a Close Earth Satellite', *Astronomical Journal* **64**, 367–377

KOZAI, Y. [1962]: 'Second-Order Solution of Artificial Satellite Theory without Drag', *Astronomical Journal* **67**, 446–461

KOZAI, Y. [1969]: 'Revised Values for Coefficients of Zonal Harmonics in the Geopotential', *Dynamics of Satellites* , Morando, B. ed. (1970), COSPAR-IAU-IAG-IUTAM, Proceedings of the Symposium held in Prague, May 10-24, 1969, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

KOZAI, Y. [1973]: 'A new Method to Compute Lunisolar Perturbations in Satellite Motions', *Smithonian Astronophysical Observatory*, Special Report 349 (NASA-CR-130743, N73-17709)

KRAMER, H. J. [2002]: *Observation of the Earth and Ist Environment, Survey of Missions and Sensors*, Springer, ISBN 3-540-42388-5

KROTSCHECK, E., KUNDT, W. [1983]: 'Das Himmelsmechanikexperiment (E 11) von HELIOS', Luft- und Raumfahrt, Weltraumforschung/Weltraumtechnologie, BMFT-FB-W 83-016, August 1983

KUSTAANHEIMO, P. E. [1961]: 'Über die Bestimmung der oskulierenden Bahn eines künstlichen Erdsatelliten', *Soc. Sci. Fennicae, Comm. Phys.-Math*. **26**, 1.

KUSTAANHEIMO, P. E. and E. STIEFEL [1965]: 'Perturbation Theory of Kepler Motion basd on Spinor Regularization', *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **218**, pp. 204-219

KWOK, JOHNNY H. [1986]: 'The Long-Term Orbit Predictor (LOP)', EM 312/86-151, Jet Propulsion Laboratory, 4800 Oak Grove Dr, Pasadena, CA 91109, 30 June 1986

KWOK, J. [1991]: 'A Doubly Averaging Method for Third Body Perturbations in Planet Equator Coordinates', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, 91-464, Durango, Colorado, August 19-22, 1991

LANDAU, L. D. und LIFSCHITZ, E. M. [1963]: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band I, Mechanik*, Akademie Verlag, Berlin; Übersetzung der russischen Originalausgabe, erschienen im Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur, Moskau 1958

LANDAU, L. D. und LIFSCHITZ, E. M. [1992]: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie*, Akademie Verlag, Berlin; ISBN 3-05-500063-3, ISBN 3-05-0501550-9

LANE, MARK T. [1989]: 'On Analytic Modeling of Lunar Perturbations of Artificial Satellites of the Earth', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **46**, 287–305

LAUTMAN, D. A. [1977 a]: 'Perturbations of a Close-Earth Satellite due to Sunlight Diffusely Reflected from the Earth, I: Uniform Albedo', *Celestial Mechanics* **15**, 387–420

LAUTMAN, D. A. [1977 b]: 'Perturbations of a Close-Earth Satellite due to Sunlight Diffusely Reflected from the Earth, II: Variable Albedo', *Celestial Mechanics* **16**, 3–25

LEIPOLD, M. [2000]: 'Solar Sail Mission Design', Dissertation, Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München, 19. Januar 2000

LIU, J. J. L. [1974]: 'Satellite Motion about an Oblate Earth', *AIAA Journal **12***, No.11, November 1974, pp.1511-1516; presented as paper 74-166 at the 12th Aerospace Sciences Meeting, Washington DC., January 30-February 1, 1974

LONG, ANNE C. et al. [1989]: 'Goddard Trajectory Determination System (GTDS), Mathematical Theory (Revision 1)', FDD/552-89/001 and CSC/TR-89/6001, Goddard Space Flight Center, NASA

LONG, ROBERT S. [1965]: 'Quasilinearization and Orbit Determination', *AIAA Journal*, Vol. **3**, No. 10, October 1965, pp. 1937-1940

LUGINBUHL, ROBERT [1972]: 'Méthode de Kalman Détermination des Éléments d'une Orbite par Filtrage d'Information Radar', in ESRO [1972], pp. 43-61

LYDDANE, R. H. [1963]: 'Small Eccentricities or Inclinations in the Brouwer Theory of the Artificial Satellite', *Astronomical Journal **68***, 555–558

LYDDANE, R. H. [1984]: 'General Perturbation Satellite Theory', prepared for Space and Surface Systems Division, Strategic Systems Department, Naval Surface Weapons Center, Dahlgren, Virginia 22448, Silver Spring Maryland, AD-A158469, NSWC TR 84-26

MADELUNG, E. [1964]: *Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers*, 7. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg

MARTIN, C. F., M. H. TORRENCE, C. W. MISNER [1984]: 'Relativistic Effects on an Earth Orbiting Satellite in the Barycenter Coordinate System', *Planetary Sciences Department*, WASC TR-W41-0001 (84), EG&G, Washington Analytical Services Center, Inc. Space and Ocean Physics Directorate

MCINNES, COLIN R. [1999]: *Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer–Praxis Series in Space Science and Technology, Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK, ISBN 1-85233-102-X

MERSON, R. H. and KING-HELE, D. G. [1958]: 'Use of Artificial Satellites to Explore The Earth's Gravitational Field: Results from Sputnik 2 (1957 β)', *Nature* **182**, *No. 4636*, 640–641, September 6, 1958

MERSON, R. H. [1961]: 'The Motion of a Satellite in an Axi-symmetric Gravitational Field', *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **4**, 17–52

MILANI, ANDREA; NOBILI, ANNA MARIA; FARINELLA, PAOLO [1987]: *Nongravitational Perturbations and Satellite Geodesy*, Adam Hilger, Bristol, ISBN 0-85274-538-9

MORANDO, B. [1974]: *Mouvement d'un satellite artificiel de la terre*, Gordon & Beach, Paris, London, New York

MORBIDELLI, A. [2002]: *Modern Celestial Mechanics, Aspects of Solar System Dynamics*, ISBN 0-415-27939-9, Taylor & Francis, London

MOULTON, F. R. [1914]: *An Introduction to Celestial Mechanics*, The MacMillan Company, New York, Sixteenth Printing 1964

MUELLER, ROBERT [1971]: 'Luni-Solar Effects on the 60,000 Nautical Mile Solrad-HI', Warfare Analysis Department, NWL Technical Reprt TR-2571, May 1971

MURRAY, CARL. D. and DERMOTT, STANLEY, F. [1999]: *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press

MUSEN, P. [1971]: 'The Influence of the Great Inequality on the Secular Disturbing Function of the Planetary System', *Celestial Mechanics*, **4**, pp. 378-396

MUSEN, P., A. BAILIE and E. UPTON [1961]: 'Development of the Lunar and Solar Perturbations in the Motion of an Artificial Satellite', Technical Note NASA TN D-494, Washington D.C., January 1961

MUSEN, P. and ANNE E. BAILIE [1962]: 'On the Motion of a 24 hour Satellite', *Journal of Geophysical Research,* **67**, 1123

MUSEN, PETER and RONALD ESTES [1972]: 'On the Tidal Effects in the Motion of Artificial Satellites', *Celestial Mechanics,* **6**, pp. 4-21

MUSEN, PETER and THEODORE FELSENTREGER [1973]: 'On the Determination of the Long Period Tidal Perturbations in the Elements of Artificial Earth Satellites', *Celestial Mechanics,* **7**, pp. 256-279

NACOZY, P. E. [1972]: 'A Satellite Numerical Integration Method', AIAA Paper No. 72-909

NEWTON, R. R. [1968]: 'A Satellite Determination of Tidal Parameters and Earth Deceleration', *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **14**, 505–539

NGUYEN, V. N. [1982 ?]: 'Onboard Orbit Determnation Using Data Relay Satellite', *Office National d'Études et de Recherche Aérospatiales BP 72. F-92322 Châtillon Cedex , France*

PITKIN, EDWARD T. and GILBERT C. CARPENTER [1969]: 'Modified Newton-Raphson Methhods for Preliminary Orbit Determination', *Celestial Mechanics* **1**, 72–90

POINCARE, H. [1892-1899]: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* Tome I à Tome III, Paris; Neudruck [1960]: Dover Publications, New York

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. [1986]: *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

PRUSSING, JOHN E., CONWAY, BRUCE A. [1993]: *Orbital Mechanics,* Oxford University Press, New York, Oxforf, ISBN 0-19-507834-9

PUTNEY, B., R. KOLENKIEWICZ, D. SMITH, P. DUNN, and M. H. TORRENCE [1990]: 'Precision Orbit Determination at the NASA Goddard Space Flight Center', *Adv. Space Res.* Vol. **10**, No. 3-4, pp. (3) 197 – (3) 203, 1990; 0273-1177/90, 1989 COSPAR

RIMROTT, F. P. J. [1989]: *Introductory Orbit Dynamics*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden, ISBN 3-528-06344-0

RODRIGUES, O. [1840]: 'Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et la variation des coordonnées provenant de ses déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire', *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* **5**, 380–440 [verbreitet ist auch der Kurztitel der Arbeit: 'Théorie des rotations d'un solide']

ROM, A.. [1970]: 'Mechanized Algebraic Operations (MAO)', *Celest. Mech.* **1**, 301–319

ROSBOROUGH, GEORGE W. and PETER G. ANTREASIAN [1990]: 'Radiation Force Modeling fort he Topex/Poseidon Spacecraft', AIAA-90-2895-CP

ROY, A. E. [1969]: 'Luni-Solar Perturbations of an Earth Satellite', *Astrophysics and Space Science,* **4**, 375-386

ROY, A. E. [1982]: *Orbital Motion,* Adam Hilger Ltd, Bristol, ISBN 0-85274-462-5

RUPPE, H. O. [1966/1967]: *Introduction to Astronautics,* Vol. 1, 1966, Vol. 2, 1967, Academic Press, New York and London, Library of Congress Catalog Card Number: 66-14469

SANDERS, J. A. and VERHULST, F. [1985]: A*veraging Methods in Nonlinear Dynamics*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, Applied Mathematical Series 59, ISBN 0-387-96229-8, oder ISBN 3-540-96229-8

SCHATTEN, K. H. [1996]: 'Predicted Solar Data as of October 1996', NASA / GSFC-Greenbelt, Reference to the predicition technique in: SCHATTEN and PRESNELL [1993]; *Research Letters*, **20**, 22275

SCHEIFELE, G.; STIEFEL, E. [1972]: 'Canonical Satellite Theory, Based on Independent Variables Different from Time', Report to ESRO, ESOC - Contract No. 219/70/AR

SCHMIDT, STANLEY F. [1981]: 'The Kalman Filter: Ist Recognition and Development for Aerospace Applications', History of Key Technologies, *J. Guidance and Control*, Vol. **4**, No. 1, pp. 4-7, AIAA 81-4000

SCHNEIDER, M. [1971]: 'Theorie der Satellitenbahnen III', BMBW-FB W 71-36

SCHNEIDER, M. [ohne Jahrgang, vermutlich 1978]: 'Moderne Verfahren der Himmelsmechanik',

SCHNEIDER, M. [1981]: *Himmelsmechanik*, Grundlagen I, Lehrstuhl für Astronomische und Physikalische Geodäsie, Technische Universität München, Mitteilung Nr. 126

SCHNEIDER, M. [1975]: 'Messverfahren der Satellitengeodäsie', Grundlagen I, Lehrstuhl für Astronomische und Physikalische Geodäsie, Technische Universität München, Mitteilung Nr. 126

SCHNEIDER, M. [1981]: *Himmelsmechanik*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, ISBN 3-411-01619-1

SCHNEIDER, M. [1992]: *Himmelsmechanik, Band I: Grundlagen, Determinierung*, BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut & D. A. Brockhaus AG, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, ISBN 3-411-15223-0

SCHNEIDER, M. [1993]: *Himmelsmechanik, Band II: Systemmodelle*, BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut & D. A. Brockhaus AG, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, ISBN 3-411-15981-2

SCHNEIDER, M. [1996]: *Himmelsmechanik, Band III: Gravitationstheorie,* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin, ISBN-10: 3860257188 , ISBN-13: 978-3860257180

SCHNEIDER, M. [1999]: *Himmelsmechanik, Band IV: Theorie der Satellitenbewegung, Bahnbestimmung*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin, ISBN 3-8274-0484-3, ISBN-13: 978-3827404848

SCHNEIDER, M. [2005]: 'Beiträge zur Gravitationsfeldbestimmung mit Erdsatelliten', IAPG / FESG No. 21, ISSN 1437-8280, ISBN 3-934205-20-8 , [iapg_fesg_rpt_21_v2.pdf]

SCHULZ, W. [1977]: 'Über Einflußbereiche von Himmelskörpern', *Z. Flugwiss. Weltraumforsch.* **1,** 365–375

SCHULZ, W. ed. [1980]: 'Vorträge auf dem Walter-Hohmann-Symposium der DGLR über Raumflugmechanik', Köln, 12. Und 13. März 1980, DLR-Mitt. 80-01

SCHUSTER, MALCOLM D. [1993]: 'A Survey of Attitude Representations', *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. **41**, No. 4, October-December 1993, pp. 439-517

SEEBER, GÜNTER [1989]: *Satellitengeodäsie, Grundlagen, Methoden und Anwendungen,* Walter de Gruyter, Berlin - New York, ISBN 3-11-010082-7

SEHNAL, L. , D. VOKROUHLICKÝ, J. STRAKA[1991]: 'Orbital Perturbations due to the Albedo Effect', *Proc. of the 3rd Int. Symp. on Spacecraft Flight Dynamics,*30. Sep. - 4. Oct. 1991, Darmstadt, ESA SP-326, pp. 61-6469-179

SEHNAL, L. [1981]: 'Effects of the Terrerstrial Infrared Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite', *Celestial Mechanics*, **25**, pp. 169-179

SEIDELMANN, P. K. ed. [1992]: *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, A Revision to the Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, Prepared by the Nautical Almanac Office, U. S. Naval Observatory with Contributions from H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, Jet Propulsion Laboratory, Bureau des Longitudes, and the Time Service and Astrometry Departments, U. S. Naval Observatory, University Science Books, Mill Valley, California (ISBN 0-935702-68-7)

SHEFER, V. A. [2002]: 'Osculating and Superosculating Intermediate Orbits and Their Applications', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.* **82**, pp. 19-59

SHIOMI, T., S. NAGAI. S. KOZONO, Y. ARIMOTO and M. ISOGAI [1986]: 'Differential Interferometry for Precise Tracking of a Geosynchronous Satellite', *J. Guidance*, Vol. **9**, No. 2, March-April 1986, pp. 143-148

SHRIVASTAVA, S. K. and C. K. RAJASINGH [1975]: 'Optimum Orbital Control Using Solar Radiation Pressure', *Journal of Spacecraft and Rockets* , vol. **12**, No. 8, pp.502-504

SITTER, W. DE [1903]: 'Über eine kleine Modifikation der Formeln zur Berechnung der speziellen Störungen der Elemente für kleine Excentricitäten und Neigungen', *A.N.* 163, 106-107

SNOW, DANIEL E. AND DENISE A. KAYA [1992]: 'Short-Arc Orbit Determination Using Angles-Only Space Based Observations', AAS 92-112

SOFFEL M. H. [1989]: *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*, ISBN 3-540-18906-8 Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Tokyo

STIEFEL, E. [1970]: 'Remarks on Numerical Integration of Keplerian Orbits', *Celestial Mechanics*, **2**, 274-281

STIEFEL, E. [1972]: 'Theoretical and Practical Aspects of Orbit Computation', in ESRO [1972], pp. 121-128

STIEFEL, E. and SCHEIFELE, G. [1971]: *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

STRÖMGREN, E. und STRÖMGREN, B. [1933]: *Lehrbuch der Astronomie*, Springer-Verlag, Berlin

STRUIK, DIRK J. [1967]: *Abriss der Geschichte der Mathematik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, Lizenz Nr.: 206 435/92/67, Übersetzung der englischen Ausgabe mit Titel: „A concise History of Mathematics",Copyright 1948 Dover Publications, Inc.

STRUVE, O. [1963]: *Astronomie, Einführung in ihre Grundlagen*, Walter de Gruyter Verlag, Berlin

STUMPFF, K. [1931-1932]: 'Über ein kurze Methode der Bahnbestimmung aus drei oder mehr Beobachtungen', *Astron. Nachrichten*, **243**, p. 317 ff; **244**, p. 4334 ff.

STUMPFF, K. [1949]: 'Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung', *Abh. Deutsche Akad. D. Wiss.*, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Jahrgang 1947, Nr. 1, Akademie Verlag, Berlin

STUMPFF, K. [1954]: 'Neue Wege zur Bahnberechnung der Himmelskörper', *Fortschr. d. Physik,* **1,** 557

STUMPFF, K. [1959, 1965, 1974]: *Himmelsmechanik I* (1959); *Himmelsmechanik II* (1965); *Himmelsmechanik III* (1974), DVW Berlin

STUMPFF, K. [1964/1]: 'Einheitliche Lösung des Wurfproblems', in: Stiefel, E. her. [1966], pp.9-19

STUMPFF, K. [1964/2]: 'Neue Untersuchungen über das Hillsche Mondproblem', in: Stiefel, E. her. [1966], pp.51-74

STUMPFF, K. [1964/3]: 'Resonanzbewegungen eines stationären Satelliten', in: Stiefel, E. her. [1966], pp.113-124

SUNDMANN, K. [1935]: 'Über die Bestimmung geradliniger Bahnen', *Vierteljahresschrift der Astron. Ges.*, **70**, 318

SZEBEHELY, V. [1967]: *Theory of Orbits, The Restricted Problem of Three Bodies,* New York and London, Academic Press

TAPLEY, BYRON D.; BOB E. SCHUTZ and GEORGE H. BORN [1990]: *Fundamentals of Orbit Determination: Theory and Applications,* A short course, June 18-21, 1990, The University of Texas at Austin, College of Engineering

THURMAN, S. W., T. P. MCELRATH and V. M. POLLMEIER [1992]: 'Short-Arc Orbit Determination Using Coherent X-Band Ranging Data', AAS 92-109

TISSERAND, F. [1889-1896]: *Traité de Mécanique Céleste,* Tome I – Tome IV, Gauthiers-Villars, Paris

VALLADO, DAVID A. [2001]: *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, with contributions by Wayne D. McClain, Second Edition, Space Technology Library, Microcosm Press El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London, ISBN 1-881883-12-4 (pb); ISBN 0-7923-6903-3 (hb)

VAN DER HA, J. C. and V. J. MODI [1978]: 'Orbital Perturbations and Control by Solar Radiation Forces', *J. Spacecraft*, Vol. **15**, No. 2,March-April 1978, 105-110

VILHENA, RODOLPHO, DE MORAES. [1981]: 'Combined Solar Radiation Pressure and Drag Effects on the Orbits of Artificial Satellites', *Celest. Mech.* **25**, 281–292

VOLK, O. [1957]: 'Astronomie und Geodäsie bei C. F. Gauß', in: Reichardt, her. [1957], 205–231

VOLK, O. [1973b]: 'Concerning the Derivation of the KS-Transformation', *Celest. Mech.* ***8***, 297–305

VOLK, O. [1975]: 'Zur Geschichte der Himmelsmechanik: Johannes Kepler, Leonhard Euler und die Regularisierung', Mathematisches Institut der Universität Würzburg, Preprint No. 4

VOLK, O. [1981]: 'Franciscus Vieta und die Eulersche Identität [Quaternionen] ', *Elemente der Mathematik,* **36**, pp.115-121

VOLK, O. [1995]: *Mathematik und Erkenntnis*, Litauische Aufsätze, Hrsg. v. Hans-Joachim Vollrath, Verlag Königshausen & Neumann, Würzburg 1995 [ISBN 3-8260-1100-7]

VOLLRATH, H.-J. (Hrsg.) [1990]: *Otto Volk, Gesammelte Abhandlungen*, Fakultät für Mathematik der Julius-Maximilians-Universität Würzburg

WALKER, DOREEN M. C. [1980]: 'SAMOS 2 (1961 α 1): Orbit Determination and Analysis at 31:2 Resonance', *Planet. Space Sci.*, Vol. **28**, pp. 1059-1072

WALTER, H. G. [1967 ?]: 'Die Genauigkeit der Bahnelemente eines Satelliten in Abhängigkeit von den Beobachtungsdaten', ESRO-ESDAC, Darmstadt

WALTER, H. G. [1967]: 'Conversion of Osculating Elements into Mean Elements', *Astronomical Journal **72**, No. 8,* 994–997

WALTER, H. G. [1970]: 'Association of Spherical and Ellipsoidal Gravity Coefficients of The Earth's Potential', *Celest. Mech.* **2**, 389–397

WALTER, H. G. [1972]: 'The Importance of Partial Derivatives in Space Dynamics', in ESRO [1972], pp. 129-142

WALTER, H. G. and I. M. WALES [1967]: 'The Differential Correction of Close-Earth Satellite Orbits, Part I: Theory and Principles', *Scientific Report, ESRO SR-7 (ESDAC),* European Space Data Center, October 1967

WERTZ, JAMES R. and WILEY J. LARSON (ed.) [1999]: *Space Mission Analysis and Design*, Space Technology Library, Microcosm Press, Hawthorne, Ca., Springer, New York, ISBN 978-1881883-10-4

WERTZ, JAMES R. [2001]: *Mission Geometry; Orbit and Constellation Design and Management,* Space Technology Library, Microcosm Press, El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 0-7923-6903-3

WHITTAKER, E. T. and WATSON, G. N. [1965]: *A course of Modern Analysis*, Cambridge at the University Press, Bentley House, London (first edition 1902, reprint 1965 of the fourth edition 1927)

WNUK, E. ANS I. WYTRZYSZCAK [1987]: 'The Estimation of the Influence of Tesseral Harmonics Perturbations on the Orbits of Some Geodetic Satellites', *Artificial Satellites, Planetary Geodesy*, Vol. ***22***, No. 2, 47–64

YODER, C. F., WILLIAMS, J. G., DICKEY, J. O., SCHUTZ, B. E., EANES, R. J., TAPLEY, B. D. [1983]: 'Secular variation of Earth's gravitational harmonic J2 coefficient from Lageos and nontidal acceleration of Earth rotation', *Nature **303***, 757–762

ZADUNAISKY, PEDRO E. [1979]: 'On the Accuracy in the Numerical Solution of the N-Body Problem', *Celest. Mech.* **20**, 209–230

ZADUNAISKY, PEDRO E. [1981/82]: 'On the Estimation of Small Perturbations in Ordinary Differential Equations', CNIE– Centro Espacial San Miguel, av. Mitre 3100, (1663) San Miguel, Argentina

ZADUNAISKY, PEDRO E. and CLAUDIA M. GIORDANO [1990]: 'Universal Formulation for the Perturbed Two-Body Problem', *J. Guidance **13***, No.6 , Nov. –Dec. 1990, 1109–1116

ZADUNAISKY, PEDRO E. [1998], *Introdución a la Astrodinámica, Teoría y métodos numéricos,* Comision Nacional de Actividades Espaciales, Buenos Aires, República Argentina, 1998, ISBN 987-96864-0-3

ZEE, CHONG-HUNG *[1973]:* 'Effect of the Sun, the Moon and Solar Radiati9on Pressure on a Near-Equatorial Synchronous Satellite', *Astronautica Acta* **18**, 281–287

ZHONGOLOVITCH, I. D. *[1960]:* 'Nekotorye formuly otonosyashchiesya k dvizheniyu material'noi tochki i pole tyagoteniya urovennogo ellipsoida vrashcheniya', (Quelques formules qui ont lieu dans le ateriel d'un point ateriel dans le champ d'attraction d'une ellipsoide de niveau à deux axes), *Bjull. ITA **7***, 521–536

ZANARDI, M. CECÍLIA and R. VILHENA DE MORAES [2000]: 'Analytical and Semi-analytical Analysis of an Artificial Satellite's rotational Motion', *Celest. Mech.and Dynamical Astronomy* **75**, 227–250, 1999

Liste der verwendeten Symbole

Lateinische Symbole

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
A	Grad	Azimut (positiv von Nord über Ost nach Süd)
A	m^2	Fläche
$\mathbb{A}_n$	---	Affiner Punktraum
A_D	m^2	Anströmfläche bei Luftwiderstand
A_0	<Länge>	Auslenkung einer Welle (nur in Kapitel 9)
A_1	Grad	Azimut der Sichtrichtung bezogen auf Bewegungsrichtung des Satelliten (Beobachtungsort)
A_S	m^2	Sektorfläche (eines Kegelschnitts)
A_T	Grad	Azimut der transversalen Bewegungskomponente des Satelliten
a	km	große Bahnhalbachse
a	< Länge >	große Halbachse einer Ellipse, Rotationsellipsoid (siehe Kapitel 32, Band V)
a_a	km	Näherungswert für a, wenn P_a gegeben ist
a_B	km	Mittlere Bahnhalbachse in der Satellitentheorie von *D. Brouwer*
a_d	km	Näherungswert für a, wenn P_d gegeben ist
a_g	km	große Bahnhalbachse der geostationären Bahn
a_{g0}	km	Näherungswert für a_g
a_H	km	erste Bahnhalbachse einer hyperbolischen Bahn
a_K	km	Mittlere Bahnhalbachse in der Satellitentheorie von *Y. Kozai*
a_m	km	Näherungswert für a, wenn Pm gegeben ist
a_t	km	Näherungswert für a, wenn Pt gegeben ist
a_S	km	Näherungswert für a, wenn PS gegeben ist
a_{ss}	km	Näherungswert für a für eine sonnensynchrone Bahn

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
a_λ	km	Näherungswert für *a*, wenn $\Delta\lambda_\Omega$ gegeben ist
$a_{\overset{+}{\odot}}$	km [*AU*]	große Bahnhalbachse der Erdbahn um die Sonne
$a_\odot$	km [*AU*]	große Bahnhalbachse der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
$\dot{a}_G$	km/s	Variation in der großen Halbachse infolge der Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers
$\dot{a}_{Gs}$	km/s	Säkulare Variation in der großen Halbachse infolge der Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers
a	km, Grad	*Kepler*element $\mathbf{a} = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0)^T$
$\mathbf{a}_L$	km, Grad	*Kepler*element mit langperiodischen Störungen (kurzperiodische Störungen weggelassen)
B		*Bessel*sche Epoche (z. B. B1950.0)
B_2		$1.5\ \mu J_2 R_E^2$
B_D	km^2/kg	ballistischer Koeffizient $B_D = c_D A_D / m$
b	Grad	ekliptikale Breite
b	< Länge >	kleine Halbachse einer Ellipse, eines Rotationsellipsoids (nur in Kapitel 31)
b_C	km	Kollisionsradius
b_H	km	zweite Bahnhalbachse einer hyperbolischen Bahn
b_{HN}	km/s^2	Beschleunigung in Richtung der Hauptnormalen
b_N	km/s^2	Normalbeschleunigung
b_R	km/s^2	Radialbeschleunigung
b_T	km/s^2	Transversalbeschleunigung
b_V	km/s^2	Tangentialbeschleunigung
C	–	Konstante bei Wellenvorgang (nur in Kapitel 9)
C	km/s	Bahnparameter in den idealen Elementen nach *A. Deprit*: $C := e\,\mu\cos(\zeta - \upsilon)/G$ (nur in Abschnitt 11.8)
C_J		*Jacobi*sche Konstante (nur in Kapitel 2)
C_{JH}		*Jacobi*sche Konstante im *Hill*schen Spezialfall des eingeschränkten Dreikörperproblems

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
c	km/s	Lichtgeschwindigkeit
c_D	-	Luftwiderstandsbeiwert
C_R	-	Strahlungsdruckbeiwert
$\mathbf{c}$	km^2/s	2. *Kepler*scher Vektor (Normalenvektor der Bahnebene, Drallvektor, Drehmomentenvektor, Inklinationsvektor), $\mathbf{c} = c^i \mathbf{p}_i,\ G = \lvert\mathbf{c}\rvert$
$\mathbf{c}_0$		Richtungsvektor in Richtung des Normalenvektors der Bahnebene, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c} / G$
D_S	m^2	Dreiecksfläche (bei Sektor zu Dreiecksverhältnis)
$\mathbf{D}$		*Darboux*scher Vektor (allgemeiner Drehvektor, allgemeiner Systemeigenbewegungsvektor)
$\mathbf{D}_p$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Systems $\left(\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i\right)$
$\mathbf{D}_q$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems $\left(\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j\right)$)
$\mathbf{D}_{q^{(L)}}$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des Leibniz-Systems
$\mathbf{D}_{qp}$		relativer Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – System $\left(\mathbf{D}_{qp} = \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)$
D		Tag [Bürgerliches Datum)
$D_p{}^i$		Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektors $\left(\mathbf{D}_p = D_p{}^i \mathbf{p}_i\right)$
$D_{qp}{}^j$		Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors $\left(\mathbf{D}_{qp} = D_{qp}{}^j \mathbf{q}_j\right)$
$D_{\leftmoon}$	Grad	mittlere Elongation des Mondes von der Sonne $D_{\leftmoon} = L_{\leftmoon} - L_{\odot}$
$\mathbf{d}$	$\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$	1. *Kepler*'scher Vektor (*Herrmann-Laplace*-Vektor, *Laplace*-scher Vektor, Exzentrizitätsvektor, Perizentrumsvektor), $\mathbf{d} = d^i \mathbf{p}_i,\ e\mu = \lvert\mathbf{d}\rvert$
dm	kg	Massenänderung (Massenausstoß bei Raketenmotor)
dV	km/s	Geschwindigkeitsänderung (durch Zünden eines Raketenmotors)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
E	Grad	exzentrische Anomalie [bei Bezug auf Perizentrum)
$E_\odot$	Watt (W)	Gesamtenergieerzeugung der Sonne
$\mathbb{E}_n$		n-dimensionaler eigentlich euklidischer Vektorraum
E_A	Grad	exzentrische Anomalie (bei Bezug auf Apozentrum) $E_A = E + 180°$
$E^{i_1, i_2, \ldots, i_n}$		*Levi-Civita* Tensor, kontravariant
$E_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$		*Levi-Civita* Tensor, kovariant
$\mathbf{E}$		beliebiger Bahnelementevektor
$\mathbb{E}$		Einheitstensor der zweiten Stufe: $\mathbf{E} = \mathbf{g}^{ij}\, \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$
E_B	W	ausgesandte Energie eines schwarzen Körpers
E_{IR}	W	ausgesandte Energie im Infraroten
e		Exzentrizität (numerische)
e_H		Exzentrizität einer *Hohmann*-Übergangsbahn
e_F		numerische Exzentrizität einer formstabilen Bahn („eingefrorene Bahn“)
e_f		numerische Exzentrizität einer Ellipse, eines Ellipsoids
e_l	Grad	säkularer und langperiodischer Anteil der Exzentrizität einer Bahnellipse ($e_l := \bar{e} + \delta e_l$)
$e_{\overset{+}{\circlearrowleft}}$		numerische Exzentrizität der Erdbahn
$e_\odot$		numerische Exzentrizität der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
$\mathbf{F}$	km kg/s^2	Kraftvektor
F	-	Phasing Parameter einer *Walker* Konstellation (T/P/F)
$F_\leftmoon$	Grad	mittleres Argument des Mondes von der Sonne $F_\leftmoon = L_\leftmoon - \Omega_\leftmoon$
f_N	km^3 kg^{-1} s^{-2}	*Newton*sche Gravitationskonstante
f		Abplattung des Zentralkörpers
$\mathbf{f}$		3. *Kepler*scher Vektor = Hilfsvektor in Richtung $\upsilon = 90°,\ \mathbf{f} = \mathbf{c} \times \mathbf{d},\ \lvert\mathbf{f}\rvert = e\mu G$ („Parametervektor“)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
G	$\mathrm{km}^2 / \mathrm{s}$	Flächenparameter (= Betrag des Bahnnormalenvektors), in *kepler*scher Bewegung: $G := \lvert\mathbf{c}\rvert = \sqrt{\mu\, p}$, (5. Delaunay Element bei Bezug auf eine elliptische Bewegung)
G_N	$\mathrm{km}^3\,\mathrm{s}^{-1}\,\mathrm{kg}^{-1}$	*Newton*sche Gravitationskonstante
g	Grad	mittlere Anomalie der scheinbaren Sonne (Bezeichnung verwendet in AA und der klassischen Literatur. In diesem Bericht ist $g = M_\odot$ gesetzt.)
g_{ik}		kovarianter Metriktensor (= kovarianter Fundamentaltensor)
g^{ik}		kontravarianter Metriktensor (= kontravarianter Fundamentaltensor)
H	km	Höhe über R_E = „mittlere Äquatorbahnhöhe“
H'	km	Höhe über abgeplatteter Oberfläche des Zentralkörpers
H_A	km	Apogäumshöhe über R_E
H_P	km	Perigäumshöhe über R_E
h	Grad	Elevation (astronomisch: „Höhe“)
h	$\mathrm{kg\ km}^2/\mathrm{s}^2$	Gesamtenergie
I	Grad	Überflugwinkel über Breitenkreis
I'	Grad	scheinbarer Überflugwinkel über Breitenkreis bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
I_1, I_2, I_3		skalare Invariante des symmetrischen Tensors der zweiten Stufe
i	-	Imaginäre Einheit $\left(i^2 = -1\right)$
i	Grad	Inklination
i'	Grad	scheinbarer Überflugwinkel über Äquator bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
i_{ss}	Grad	Inklination einer sonnensynchronen Bahn
$i_{\overset{+}{\odot}}$	Grad	Inklination der Erdbahn bezüglich Ekliptik
$i_\odot$	Grad	Inklination der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde bezüglich Ekliptik
J		*Lagrange*sche Funktion (in Kapitel 2)
J		julianische Epoche (z. B. J2000.0)
J_D		julianisches Datum

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
J_d		julianische Tagesnummer
$J_2, J_3, J_4, J_5, \ldots$		geodynamische Formfaktoren (Zonale des Schwerefeldes eines Zentralkörpers)
J_n		*Bessel* Funktionen
K		Reproduktionszyklus, Wiederholungszyklus (Anzahl der Perioden der Knotenlänge)
K_1		natürliche Zahl ($K = 2K_1$ oder $K = 2K_1 - 1$)
k	–	Wellenzahl (nur in Kapitel 9)
$\mathbf{k}$	–	Wellenzahlvektor (nur in Kapitel 9)
k^2	$\mathrm{AU}^3\,\mathrm{d}^{-2}\,\mathrm{M}_\odot^{-1}$	*Gauß*sche Gravitationskonstante
l	Grad	ekliptikale Länge
l	Grad	wahre Länge ($l = \upsilon + \omega + \sigma_i \Omega$)
L	Grad	mittlere Länge ($l = M + \omega + \sigma_i \Omega$)
L_E	Grad	exzentrische Länge ($L_E = E + \omega + \sigma_i \Omega$)
$L_\leftmoon$	Grad	mittlere Länge des Mondes (in seiner Bahn)
$L_{\earth}$	Grad	mittlere Länge der Erde (in ihrer Bahn)
$L_\odot$	Grad	mittlere Länge der (scheinbaren) Sonne
L_0	Grad	mittlere Epochelänge in der Bahn ($L_0 = M_0 + \omega + \sigma_i \Omega$)
$\boldsymbol{L_y}$	---	Levi-Cività Matrix: $\mathbf{L}_y := \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}$
M	Grad	mittlere Anomalie
M	---	Monat (bürgerliches Datum)
$\mathbb{M}$	---	Metrischer Raum
M_{JD}		modifiziertes julianisches Datum
M_0	Grad	mittlere Epocheanomalie
$\dot{M}_{0s}$	Grad/s	säkulare Variation in M_0
$M_\leftmoon$	Grad	mittlere Anomalie des Mondes

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$M_\odot$	Grad	mittlere Anomalie der scheinbaren Sonne
m	kg	Masse
N [N_d)	–	Anzahl der drakonitischen Umläufe
$\mathbb{N}$		natürliche Zahlen
N_s	–	Brechungsindex (siehe Abschnitt 9.9)
N_0		Anzahl der drakonitischen Umläufe pro Knotenumlauf [≈ pro Tag)
N_1		Restzahl an Umläufen pro Tag: ($N = N_0 K + N_1$)
N_2		natürliche Zahl ($N_0 = 2N_2$ oder $N_0 = 2N_2 - 1$)
N_3		natürliche Zahl ($N_1 = 2N_3$ oder $N_1 = 2N_3 - 1$)
n	Grad/s	oskulierende (= *Kepler*sche) mittlere Bewegung $n = \sqrt{\mu / a^3}$
n_1, n_3	---	Dreiecksverhältnisse
$\bar{n}$	Grad/s	mittlere mittlere Bewegung $\bar{n} = \sqrt{\mu / \bar{a}^3}$
$\overline{n_0}$	Grad/s	mittlere mittlere Bewegung zur Epoche $t0$: $\overline{n_0} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3}$
n_a	Grad/s	anomalistische mittlere Bewegung
n_d	Grad/s	drakonitische mittlere Bewegung
n_t	Grad/s	tropische mittlere Bewegung
n_m	Grad/s	Meridian-bezogene mittlere Bewegung
n_S	Grad/s	synodische mittlere Bewegung
$n_\odot$	Grad/s	tropische mittlere Bewegung der scheinbaren Sonne
P	h oder s	*Kepler*sche Umlaufzeit
P	-	Anzahl der Bahnebenen einer Walker Konstellation (T/P/F)
P_a	h oder s	anomalistische Umlaufzeit
P_d	h oder s	drakonitische Umlaufzeit
P_j	d	julianisches Jahr (zu 365.25 mittleren Sonnentagen)
P_m	h oder s	Meridian-bezogene Umlaufzeit
P_S	h oder s	synodische Umlaufzeit
P_s	h oder s	siderische Umlaufzeit

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
P_t	h oder s	tropische Umlaufzeit
$P_{\odot,s}$	a oder d	siderisches Jahr (siehe auch $P_{\odot}, s$)
$P_{\odot,t}$	a oder d	tropisches Jahr (siehe auch $P_{\odot}, t$)
$P_{\mathbb{C},a}$	d oder h	anomalistischer Monat
$P_{\mathbb{C},d}$	d oder h	drakonitischer Monat
$P_{\mathbb{C},s}$	d oder h	siderischer Monat
$P_{\mathbb{C},S}$	d oder h	synodischer Monat
$P_{\mathbb{C},t}$	d oder h	tropischer Monat
p	km	Bahnparameter, Parameter des Kegelschnitts [semilatus rectum)
p	mbar	Druck (siehe Abschnitt 9.9)
p_A	---	Albedo
$\mathbf{p}_i$		Richtungsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \ \ (1=1, 2, 3)$, $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$
Q	----	Überlappungsfaktor
q	km	Perigäumsdistanz
q	----	Hilfsgröße zur Berechnung des Aktivitätsbereiches (Wirkungsbereich) [siehe Abschnitt 12.8.2]
$\mathbf{q}_0$		transversaler Richtungsvektor $\mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_0$
$\mathbf{q}_j$		Richtungsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j \ \ (i=1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{q}_j^{(A)}$		Kartesische Basis des Antennensystems
$\mathbf{q}_j^{(E)}$		Kartesische Basis des Ekliptik Systems
$\mathbf{q}_j^{(G)}$		Kartesische Basis des geographischen und des Greenwich bezogenen Koordinatensystems
$\mathbf{q}_j^{(H)}$		Kartesische Basis des topozentrischen Horizontsystems
$\mathbf{q}_j^{(I)}$		Kartesische Basis des mitgeführten (= mitbewegten) Koordinatesystems („Hansen“ System)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{q}_j^{(K)}$		Kartesische Basis des Knotensystems (drakonitisches System)
$\mathbf{q}_j^{(M)}$		Kartesische Basis des (geozentrischen oder topozentrischen) Koordinatensystems
$\mathbf{q}_j^{(P)}$		Kartesische Basis des Apsidensystems (anomalistisches System, Perigäum bezogenes System)
$\mathbf{q}_j^{(S)}$		Kartesische Basis eines satellitenzentrierten Systems
$\mathbf{q}_j^{(T)}$		Kartesische Basis des Tangenten bezogenen Systems
Q		Überlappungsfaktor
$\mathbf{R}$	km/s^2	„Störvektor“, Gesamtstörbeschleunigung
$\mathbf{R}_2$	km/s^2	„Störvektor“ des Zweikörperproblems
R	km	geozentrische Distanz eines Punktes auf der kugelförmig angenommenen Erdoberfläche
$\mathbb{R}$	---	Relle Zahlen
R'	km	geozentrische Distanz eines Punktes auf der abgeplatteten Erdoberfläche
R_E	km	mittlerer Äquatorradius der Erde
R_G		Gravitationspotential
R_Q	km	Querkrümmungsradius des Ellipsoids
R_φ	km	Radius des Parallelkreises unter der Breite φ
r	km	zentrische Distanz („Radius“) eines Satelliten oder Raumflugkörpers
r_{32H}	[km], [AE]	Radius der Hillschen Gravitationssphäre (um einen Körper m_2 im eingeschränkten Dreikörperproblem)
r_A	km	Apozentrumsdistanz
r_F	km	antifokaler Radius ($r_F = 2a - r$)
r_P	km	Perizentrumsdistanz
r_g	km	Radius der geostationären Bahn
r_{g0}	km	Näherungswert für rg
r_K	km	Radius der Attraktionssphäre

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
r_0	km	Abstand des Mittelpunktes der Attraktionssphäre vom Mittelpunkt des Ablenkkörpers
$\mathbf{r}$	km	Ortsvektor
$\dot{\mathbf{r}}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (absoluter)
$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{p}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (relativ zum p*i* -System) $\left(\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i \, \mathbf{p}_i\right)$
$\ddot{\mathbf{r}}$	km/s^2	Beschleunigungsvektor (absoluter)
$\mathbf{r}_0$		radialer Richtungsvektor $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$
$\mathbf{r}_M$	km	*Merton*scher Vektor $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_3 - \left[\left(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_3\right)\mathbf{r}_1 / r_1^2\right]$, Abschnitt 11.1.3.3
S	km/s	Bahnparameter in den idealen Elementen nach *A. Deprit*: $S := e\,\mu \sin\left(\zeta - \upsilon\right)/G$ (nur in Abschnitt 11.8)
S_F	W/m^2	Solarflux in heliozentrischer Entfernung pro Flächeneinheit pro Minute
S_C	W/m^2	Solarkonstante = Solarflux in Erdentfermung von Sonne
s	km	Bogenlänge
T	Jhrh.	Zeit in julianischen Jahrhunderten $\left(t_2 - t_1\right)/\left(36525 \times 86400\right)$
T	C (oder Kelvin)	Temperatur (siehe Abschnitt 9.9)
T	-	Anzahl der Satelliten in einer Walker Konstellation (T/P/F)
T	kg km^2/s^2	kinetische Energie
T		Tensor
T_0	Jhrh.	Zeit einer Koordinatenepoche in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche J2000.0 $\Leftrightarrow JD = 2451545.0$
T_d	s	Wiederholungsdauer $T_d = N_d \, P_d$
T_m	h	mittlere Sonnenzeit
T_w	h	wahre Sonnenzeit
T_λ	h	mittlere Ortssonnenzeit für Meridian der (östlichen) geographischen Länge λ
T_Ω	h	mittlere Sonnenzeit im aufsteigenden Knoten
t	s	Zeit

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
t_0	s	Epochezeit (U.T.)
t_Ω	s	Zeit (U.T.) im aufsteigenden Knoten
t	km	Tangente
U	kg km^2/s^2	potentielle Energie (Potential)
u	km/s	Geschwindigkeit einer Rakete in Bezug auf ein Ruhesystem (im Rahmen der spez. Relativitätstheorie)
u	Grad	Argument der Breite ($u = \upsilon + \omega$)
u	km/s	Betrag des Geschwindigkeitsvektors **u**
u	km^2/s	Bahnparameter von *S. Herrick*: $u = r\,\dot{r} = e\sqrt{\mu a}\sin E$ [siehe Abschnitt 11.7.1 auf Seite 109]
$\dot{u}$	km^2/s^2	Bahnparameter von *S. Herrick*: $\dot{u} = \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{e\,\mu}{r}\cos E$ [siehe Abschnitt 11.7.1 auf Seite 109]
u_1, u_2, u_3, u_4,	---	*Gauß-Rodrigues* Parameter („*Euler* Parameter“)
V	km/s	Geschwindigkeit
$\mathbb{V}$	---	Vektorraum
$\mathbb{V}_n$	---	n-dimensionaler Vektorraum
V_A	km/s	Geschwindigkeit im Apozentrum der Bahn
V_A	km/s	Drehgeschwindigkeit des Äquators mit der Rotation des Zentralkörpers
V_B	km/s	Drehgeschwindigkeit eines Breitenkreises mit der Rotation des Zentralkörpers
V_E	km/s	elliptische Geschwindigkeit
V_e	km/s	Austritts – Geschwindigkeit der Treibgase eines Raketenmotors
V_F	km/s	Fluchtgeschwindigkeit (= Entweichgeschwindigkeit, = parabolische Geschwindigkeit im Perizentrum)
V_g	km/s	Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers
V'_{g0}	km/s	scheinbare Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes bei Äquatorüberflug auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
V'_{gB}	km/s	Scheinbare Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes bei Überflug eines Breitenkreises auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
V_H	km/s	hyperbolische Geschwindigkeit
V_K	km/s	Kreisbahngeschwindigkeit
V_P	km/s	Geschwindigkeit im Perizentrum der Bahn
V_R	km/s	radiale Geschwindigkeit
V_T	km/s	transversale Geschwindigkeit
V_{TC}	km/s	Konstanter (ungestörter) Anteil der transversalen Geschwindigkeit einer *Kepler*bewegung $V_C := \frac{G}{p}$, $V_T = V_{TC} + eV_C \cos\upsilon$
$V_{\overset{+}{\circlearrowleft}}$	km/s	Geschwindigkeit der Erde um die Sonne
V_∞	km/s	asymptotische Geschwindigkeit
v	Grad	wahre Anomalie
v_F	Grad	antifokale Anomalie
v_∞	Grad	asymptotische Anomalie (= hyperbolischer Exzess)
$\mathbf{v}_i$		begleitendes Dreibein
$\dot{\mathbf{v}}_q$	Km/s^2	Beschleunigungsvektor relativ zum $\mathbf{q}_j$ – System $\left(\dot{\mathbf{v}}_q = \ddot{y}^j\,\mathbf{q}_j\right)$
$\dot{\mathbf{v}}_p$	Km/s^2	Beschleunigungsvektor relativ zum $\mathbf{p}_i$ – -System $\left(\dot{\mathbf{v}}_p = \ddot{x}^i\,\mathbf{p}_i\right)$
$\mathbf{v}_1$		Tangentialvektor $\dot{\mathbf{r}} = V\,\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$		Hauptnormalenvektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$		Binormalenvektor $\mathbf{v}_3 = \mathbf{c}_0$
$\mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_{e0}$	km/s	Austrittsgeschwindigkeit von Raketentreibstoff [in Bezug auf ein bewegtes bzw. ruhendes System)
W	km	Überdeckungsstrecke
W_d		Wochentag (0 – Montag, 1 – Dienstag, 2 – Mittwoch, 3 – Donnerstag, 4 – Freitag, 5 – Samstag, 6 – Sonntag)
W_0	km	Überdeckung des Äquators

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
W_φ	km	Überdeckung eines Breitenkreises
$W_{\lambda\Omega}$	km	Distanz auf Äquator, die $\Delta\lambda_\Omega$ entspricht
w	----	Hilfsgröße zur Berechnung des Aktivitätsbereiches (Wirkungsbereich) [siehe Abschnitt 12.8.2]
w	km	Bahnparameter von *S. Herrick*: $w = r - p = u^2 - r^2\,\dot{u}$ [siehe Abschnitt 11.7.1 auf Seite 109]
$\dot{w}$	km/s	Bahnparameter von *S. Herrick*: $\dot{w} = \dot{r} = \frac{u}{r}$ [siehe Abschnitt 11.7.1 auf Seite 109]
$\mathbf{x}$	km, km/s	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_m\left[t; t_0\right]$	km, km/s	Zustandsvektor zum Zeitpunkt *t* in Koordinaten, die auf den mittleren Äquator und den mittleren Frühlingspunkt zur Epoche *t*0 bezogen sind
$\mathbf{x}_w\left[t\right]$	km, km/s	Zustandsvektor zum Zeitpunkt *t* in Koordinaten, die auf den wahren momentanen Äquator und den wahren momentanen Frühlingspunkt bezogen sind
$\mathbf{x}_T$	km, km/s	topozentrischer Zustandsvektor
$x_{,j}$		kovariante Ableitung: $x_{,j} := \frac{\partial x}{\partial y^j}$, wenn $x = x\left(y^j\right)$
$x^i_{\ ,j}$		kovariante Ableitung: $x^i_{\ ,j} := \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$, wenn $x^i = x^i\left(y^j\right)$
$\mathbf{x}_{,j}$		kovariante Ableitung: $\mathbf{x}_{,j} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y^j}$, wenn $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(y^j\right)$
$t^{ij}_{\ \ ,l}$		kovariante Ableitung: $t^{ij}_{\ \ ,l} := \frac{\partial t^{ij}}{\partial y^l}$, wenn $t^{ij} = t^{ij}\left(y^l\right)$
Y		*Euler*winkel
Y	d	Jahr (bürgerliches Datum)
Y_B	d	*Bessel*sches Jahr (annus fictus)
Y_{sid}	d	siderisches Jahr (siehe auch $P_{\odot,s}$)
Y_{trop}	d	tropisches Jahr (siehe auch $P_{\odot,t}$)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
Z	Grad, Min	Zeitgleichung
z	Grad	Zenitdistanz ($z = 90° - h$)
z_A	”	$90° + z_A \triangleq$ Rektaszension des aufsteigenden Knotens des mittleren Äquators zur Zeit $T0$ auf dem mittleren Äquator zur Zeit T [siehe auch ζ_A; benötigt zur Berechnung der Präzession)

Griechische Symbole

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
α	Grad	Rektaszension
α	–	$\alpha = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ (nur in Kapitel 8.17)
α_h	Grad	Steigungswinkel der Asymptote einer hyperbolischen Bahn
α_Ω	Grad	knotenbezogene Rektaszension $\alpha_\Omega(t) = \sigma_i \left[\alpha(t) - \Omega(t)\right]$
$\alpha_\odot$	Grad	Rektaszension der wahren Sonne
$\overline{\alpha_\odot}$	Grad	Rektaszension der mittleren Sonne
$\alpha_{\overline{\odot}}$	Grad	Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne
β	Grad	Nadirwinkel
β	---	β=V/c im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie (V = Geschwindigkeit des bewegten Inertialsystems, c = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit)
β	---	$\beta := \left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right) / e = e / \left(1 - \sqrt{1 - e^2}\right)$, e = numerische Exzentrizität [im Rahmen von *Bessel* Funktionen)
β_g	Grad	Grenznadirwinkel an kugelförmige Oberfläche

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
β'_g	Grad	Grenznadirwinkel an Rotationsellipsoid
β_N	Grad	Sonneneinfallswinkel in Satellitenbahnebene (Komplement zum Sonnenaspektwinkel $\triangleq$ NASA Beta-Winkel $= \beta_N = 90° - \sigma$
$\Gamma_\odot$	Grad	mittlere Länge der (scheinbaren) Sonne $\Gamma_\odot = \omega_\odot + \Omega_\odot$
$\Gamma^l_{\ ik}$		*Christoffel*symbol, gemischtvariantes (einfach kontravariant, zweifach kovariant) (= *Christoffel*symbol der zweiten Art) $\Gamma^l_{\ jk} := \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^i \partial y^k}$
γ	Grad	Zentralwinkel
γ_S	---	Sektor zu Dreiecksverhältnis $\gamma_S := A_S / D_S$
Γ_{nik}		*Christoffel*symbol, rein kovariant (= *Christoffel*symbol der ersten Art) $\Gamma_{nik} := g_{nj} \Gamma^j_{\ ik}$
γ_g	Grad	Grenzzentralwinkel an kugelförmige Oberfläche
γ'_g	Grad	Grenzzentralwinkel an Rotationsellipsoid
γ_0	Grad	kürzester Zentralwinkel zwischen Sichtpunkt und Subsatellitenbahn
Δ	Grad	Überdeckung auf Äquator
Δ	Grad	Zwischenwinkel zwischen Radius und Tangente
Δ_φ	Grad	Überdeckung auf Parallelkreis φ
Δa_a	km	Korrektur zu a_a
Δa_d	km	Korrektur zu a_d
Δa_{Gl}	km/s	langperiodische Variationen in der großen Bahnhalbachse infolge der Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers
Δa_{Gk}	km/s	kurzperiodische Variationen in der großen Bahnhalbachse infolge der Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers
Δa_L	km	Korrektur zu a_L

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
Δa_R	km	Korrektur zu a_R
Δa_S	km	Korrektur zu a_S
Δa_t	km	Korrektur zu a_t
Δa_{ss}	km	Korrektur zu a_{ss}
Δa_g	km	Korrektur zu a_g
Δr_{g0}	km	Korrektur zu r_{g0}
Δt	s, h	Zeitintervall
Δu	Grad	Intervall im Argument der Breite während des Zeitintervalls Δt
ΔV	km/s	Geschwindigkeitsinkrement
ΔV_{char}	km/s	charakteristische Geschwindigkeit (für Manöver bei Bahnänderungen)
$\Delta\alpha$	”	Gleichung der Äquinoktien (Nutation in Rektaszension) $\Delta\alpha = \Delta\psi \cos\varepsilon$
$\Delta\delta$	”	Nutation in Deklination
$\Delta\varepsilon$	”	Nutation in Schiefe
$\Delta\lambda_k$	Grad	Toleranz-Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf für Spurstabilität
$\Delta\lambda_\Omega$	Grad	Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf
$\Delta\lambda_{K\Omega}$	Grad	Knotenlängenrestverschiebung nach K Umläufen der Knotenlänge
$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	Grad	Spurfehler = Fehler der mittleren geographischen Länge des aufsteigenden Knotens infolge von Variationen in den Anfangsbahnelementen
$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}$	Grad	Spurfehler beim N-ten Überflug des aufsteigenden Knotens
$\Delta\tau_k$	s	Toleranz-Zeitintervall für Zeitstabilität

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\Delta\tau_\Omega$	Grad	Verschiebung des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf
$\Delta\psi$	”	Nutation in Länge
δ	Grad	Deklination
δ_h	Grad	Umlenkwinkel einer hyperbolischen Bewegung
$\delta_i^{\ j}$		*Kronecker*symbol $\delta_i^{\ j}=0$ für $i=j$, $\delta_i^{\ j}\neq 0$ für $i\neq j$ [*Kronecker*-tensor der zweiten Stufe)
$\delta_{i_1,\ldots,i_n}^{j_1,\ldots,j_n}$		*Kronecker*tensor der (2*n*)-ten Stufe
δ_m	Grad	Deklination des Grenzparallelkreises für Überdeckung
$\delta_\odot$	Grad	Deklination der wahren Sonne
$\overline{\delta_\odot}$	Grad	Deklination der mittleren Sonne
$\delta_{\overline{\odot}}$	Grad	Deklination der fiktiven mittleren Sonne
$\delta\mathbf{a}\left[t,t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in a zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0
δa_l	Grad	langperiodische Störungen in *a* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche *t*0, $\delta a_l=\delta a\left[t,t_0\right]_l$
δa_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *a* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0 , $\delta a_k=\delta a\left[t,t_0\right]_k$
$\delta\mathbf{a}\left[t,t_0\right]$	km, Grad	periodische Störungen auf ein *Kepler*element $\mathbf{a}=\{a,e,i,\Omega,\omega,M_0\}$
δ_B	Grad	Deklination eines Breitenkreises (parallel zum Äquator)
$\delta\mathbf{E}\left[t,t_0\right]$	km, Grad	periodische Störungen auf ein beliebiges Bahnelement zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0
$\delta e\left[t,t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0
δe_l	Grad	langperiodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0 , $\delta e_l=\delta e\left[t,t_0\right]_l$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
δe_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *e* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta e_k = \delta e\left[t, t_0\right]_k$
$\delta i\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0
δi_l	Grad	langperiodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0 $\delta i_l = \delta i\left[t, t_0\right]_l$
δi_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *i* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta i_k = \delta i\left[t, t_0\right]_k$
$\delta M_0\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *M*0 bezogen auf die Epoche *t*0
δM_l	Grad	langperiodische Störungen in *M* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta M_l = \delta M\left[t, t_0\right]_l$
δM_k	Grad	kurzperiodische Störungen in *M* zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta M_k = \delta M\left[t, t_0\right]_k$
$\delta P\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in *P*
$\delta\Omega\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0
$\delta\Omega_l$	Grad	langperiodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_l = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_l$
$\delta\Omega_{lG}$	Grad	Langperiodische Störungen in Ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_{lG} = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_{lG}$
$\delta\Omega_k$	Grad	kurzperiodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_k = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_k$
$\delta\Omega_{kG}$	Grad	kurzperiodische Störungen in Ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_{kG} = \delta\Omega\left[t, t_0\right]_{kG}$
$\delta\omega\left[t, t_0\right]$	Grad	periodische Störungen in ω bezogen auf die Epoche *t*0

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\delta\omega_l$	Grad	langperiodische Störungen in ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_l = \delta\omega\left[t, t_0\right]_l$
$\delta\omega_{lG}$	Grad	langperiodische Störungen in ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_{lG} = \delta\omega\left[t, t_0\right]_{lG}$
$\delta\omega_k$	Grad	kurzperiodische Störungen in ω zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_k = \delta\omega\left[t, t_0\right]_k$
$\delta\omega_{kG}$	Grad	kurzperiodische Störungen in ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt *t* bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_{kG} = \delta\omega\left[t, t_0\right]_{kG}$
$\delta\lambda_\Omega\left[t_1, t_2\right]$	Grad	Änderung der Knotenlänge im Zeitintervall t_1 bis t_2
ε	Grad	wahre Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$
$\bar{\varepsilon}$	Grad	mittlere Schiefe der Ekliptik
$\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n}$		ε - Tensor kovariant
$\varepsilon^{i_1,\ldots,i_n}$		ε - Tensor kontravariant
ε_R	---	Strahlungsvermögen („emissivity“)
ζ	Grad	Bahnwinkel (wahre Länge in der Bahn, erster *Hansen* Winkel) $\zeta = \upsilon + \omega + \sigma$
ζ_A	”	$90° + \zeta_A$ = Rektaszension des aufsteigenden Knotens des mittleren Äquators zur Zeit *T* auf dem mittleren Äquator zur Zeit *T*0 (siehe auch z_A; benötigt zur Berechnung der Präzession) (siehe Abschnitt 9.3)
Θ	Grad	Sternzeit (lokale, mittlere)
Θ^*	Grad	scheinbare Sternzeit $\left(\Theta^* = \Theta + \Delta\psi\cos\varepsilon\right)$
Θ_A	”	Inklination des mittleren Äquators zur Zeit *T*0 bezüglich des mittleren Äquators zur Zeit *T* (siehe auch z*A*, ζ_A; benötigt zur Berechnung der Präzession)
Θ_G	Grad	Sternzeit in Greenwich [mittlere), bezogen auf Nullmeridian, zu beliebiger (mittlerer) Tageszeit
Θ_0	Grad	lokale Sternzeit (mittlere) zur Epoche *t*0

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\dot{\Theta}$	Grad/s	tropische Rotationsgeschwindigkeit eines Zentralkörpers
ϑ	Grad	Stundenwinkel
ϑ	Grad	Winkel zwischen Wellenfront und Bewegungsrichtung des Bezugssystems (nur in Kapitel 9)
$\vartheta_{\odot}$	Grad	Stundenwinkel der wahren Sonne
$\overline{\vartheta_{\odot}}$	Grad	Stundenwinkel der mittleren Sonne
$\vartheta_{\bar{\odot}}$	Grad	Stundenwinkel der fiktiven mittleren Sonne (auf Äquator)
η	Grad	Auslenkung einer Welle (nur in Abschnitt 9.7)
η	Grad	Drehwinkel der Bahnebene bei beliebiger Bewegung (zweiter Bahnwinkel im *Hansen*-System)
η	cm	Bildkoordinate bei Parallelprojektion positiv nach Norden (Abschnitt 32.13.8, Band V)
κ	1/km	Krümmung
κ	Grad	Kimmwinkel (siehe Abschnitt 9.9, Band II)
κ_g	Grad	Grenz-Kimmwinkel (siehe Abschnitt 9.9, Band II)
λ	Grad	östliche geographische Länge
λ_{Ω}	Grad	geographische Länge des aufsteigenden Knotens [positiv nach Ost)
$\lambda_{K\Omega}$	Grad	Länge bezogen auf den wahren Knoten $\lambda_{K\Omega}(t) = \sigma_i \left[\lambda_{\Omega}(t_{\Omega}) - \lambda(t)\right]$
$\dot{\lambda}_{\Omega}$	Grad/s	Variation der Knotenlänge
$\dot{\lambda}_{\Omega s}$	Grad/s	säkulare Drift der Knotenlänge
λ_O	Grad	östliche Grenzlänge (positiv nach Ost)
λ_W	Grad	westliche Grenzlänge (positiv nach Ost)
μ	km^3/s^2	zentrische Gravitationskonstante (= Newtonsche Gravitationskonstante × Masse des Zentralkörpers)
μ_{α}	”	Präzession in Rektaszension
μ_{δ}	”	Präzession in Deklination

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
ξ		Erste Koordinate bei Zerlegung des Beschleunigungsvektors im *Leibniz*-System $\left(\dot{\xi} = -\dot{\zeta}\right)$ (siehe in den Abschnitten 4.4.2 – 4.4.5, Band II)
ξ	cm	Bildkoordinate bei Parallelprojektion positiv nach Osten (Abschnitt 32.13.8, Band V)
π		Kreiszahl (π = 3.14159265358979323846264338327950288419 71…)
π_1	”	Parallaxe
π_2	”	Parallaxe
$\pi_{B,1}$	”	Parallaxe
$\pi_{E,1}$	”	Parallaxe
ρ	km	Schrägentfernung Satellit–Sichtpunkt auf kugelförmiger Oberfläche des Zentralkörpers
ρ'	km	Schrägentfernung Satellit–Sichtpunkt auf abgeplatteter Oberfläche des Zentralkörpers
σ	Grad	Solaraspektwinkel Bahnnormale–Sonne
σ	Grad	Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf Anfangspunkt eines Hansen Systems $\left(\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i\right)$
σ	----	Hilfsgröße zur Berechnung des Aktivitätsbereiches (Wirkungsbereich) [siehe Abschnitt 12.8.2]
$\bar{\sigma}$	Grad	Solaraspektwinkel Bahnnormale–mittlere Sonne
σ_i		relative Bewegungsrichtung der Bahn: $\left(\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right)\right)$ $\sigma_i = 1 \triangleq$ rechtläufig, $\sigma_i = -1 \triangleq$ rückläufig
τ	Grad	Sonnenwinkel $\left(\tau = \alpha - \alpha_\odot\right) \triangleq$ Argument des sonnenbezogenen synodischen Umlaufs (auf dem Äquator)
τ	1/km	Torsion
τ_G	Grad	Sonnenwinkel $\left(\tau = \Theta_G - \alpha_\odot\right)$ des Nullmeridians (Greenwich)
$\bar{\tau}$	Grad	mittlerer Sonnenwinkel $\left(\bar{\tau} = \alpha - \alpha_{\bar{\odot}}\right)$, bezogen auf die fiktive mittlere Sonne
τ_Ω	Grad	Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens $\left(\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot\right)$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\overline{\tau_\Omega}$	Grad	mittlerer Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens ($\overline{\tau_\Omega} = \bar{\Omega} - \alpha_{\bar{\odot}}$), bezogen auf die fiktive mittlere Sonne
$\dot{\tau}_\Omega$	Grad/s	Drift des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens
$\dot{\tau}_{\Omega s}$	Grad/s	säkulare Drift des Sonnenwinkels des aufsteigenden Knotens
Φ	Grad	Phase (nur in Kapitel 9)
Φ		Pseudo Potential (nur in Kapitel 2)
Φ_H		Pseudo Potential im *Hill*schen Spezialfall (nur in Kapitel 2)
φ	Grad	geodätische Breite
φ'	Grad	geozentrische Breite
χ	Grad	geozentrische Elongation Satellit–Sonne
χ	---	Relation der Störung einer kreisnahen Bahn durch die Abplattung des Zentralkörpers (in Abschnitt 2.9)
$\bar{\chi}$	Grad	geozentrische Elongation Satellit–mittlere Sonne
ψ	Grad	Bahnwinkel in einem Bahnsystem, das kein *Hansen* System ist
ψ	Grad	Depressionswinkel ($\psi = 90° - \beta$)
$\psi_\odot, \psi_\leftmoon$	---	Relation der Störung einer kreisnahen Bahn durch Sonnen- bzw. Mondattraktion (in Abschnitt 2.9)
Ω	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens
$\Omega_{\overset{+}{\odot}}$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der Erdbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\Omega_\leftmoon$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der mittleren Mondbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\Omega_\odot$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der (scheinbaren) Sonnenbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\dot{\Omega}_s$	Grad/s	säkulare Störung in Ω
ω	Grad	Argument des Perizentrums
ω	–	Kreisfrequenz (nur in Kapitel 9)
ω_A	Grad/s	Rotationswinkelgeschwindigkeit des Äquators bei Eigenrotation des Zentralkörpers

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
ω_E	Grad/s	Erdrotation (siderisch)
ω_l	Grad	säkularer und langperiodischer Störungsanteil im Argument des Perizentrums ω $(\omega_l := \bar{\omega} + \delta\omega_l)$
$\omega_{\overset{+}{\circlearrowleft}}$	Grad	Argument des Perihels der Erdbahn um die Sonne
$\omega_{\odot}$	Grad	Argument des Perigäums der [scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
$\dot{\omega}_s$	Grad/s	Säkulare Störung in ω
$\tilde{\omega}$	Grad/s	Länge des Perizentrums $\tilde{\omega} = \omega + \sigma_i \Omega$

Indizes

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**
A	Apozentrum (Apogäum, Aphel)
a	anomalistisch (bezogen auf das Perizentrum)
B	Attraktion durch dritte Körper
D	Luftwiderstand
d	drakonitisch (bezogen auf den aufsteigenden Knoten)
E	Entweich (nur bei Fluchtgeschwindigkeit *VE*)
G	Greenwich (Nullmeridian)
G	Schwerefeld des Zentralkörpers
g	geostationär
H	Hyperbel (hyperbolisch)
K	Kreis, kreisförmig
k	kurzperiodisch
l	langperiodisch
m	bezogen auf einen Meridian
m	mittlerer Wert von …
N	Nutation

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**
PAR	Parabel, parabolisch
P	Präzession
P	Perizentrum [Perigäum, Perihel)
R	Strahlungsdruck
R	radial
S	synodisch [bezogen auf einen anderen Körper)
s	säkular
ss	sonnensynchron
T	transversal
t	tropisch [bezogen auf den [mittleren) Frühlingspunkt)
w	wahrer Wert von …
0	Epoche
0	bei Vektoren: Einheitsvektor
λ	Längenkreis der Länge λ
Ω	… des aufsteigenden Knotens
φ	Breitenkreis der Breite φ
♁	… der Erde
☾	… des Mondes
☉	… der Sonne
$\bar{\odot}$	… der fiktiven mittleren Sonne
♀	… der Venus
♂	… des Mars
♃	… des Jupiter
♄	… des Saturn
♆	… des Neptun
♈	… des Frühlingspunktes

Mathematische Symbole

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$\mathbb{A}_n$	endlich dimensionaler affiner Punktraum
$\mathbb{E}_n$	endlich dimensionaler euklidischer Punktraum
$\mathbb{M}$	Metrischer Raum
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{T}_n$	Tangentialraum an einen n-dimensionalen Punktraum [$\mathbb{A}_n$ oder $\mathbb{E}_n$)
$\mathbb{V}$	Vektorraum
$\mathbb{V}_n$	endlicher Vektorraum (n-dimensionaler Vektorraum)
$\mathbb{V}_{En}$	endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum
:=	Definition eines Ausdrucks BEISPIEL: $g_1 := V \cos\zeta_A$, die Größe g_1 wird durch den rechts stehenden Ausdruck definiert
$\in$	Element von …
$\mathbf{a}$	Vektor
T	Tensor
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	tensorielles Produkt
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	skalares Produkt
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	äußeres Produkt $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	vektorielles Produkt
$\left(a_i{}^j\right)$	Matrix mit Reihenindex *i*, Spaltenindex *j*
$\det\left(a_i{}^j\right)$	Determinante der Matrix $\left(a_i{}^j\right)$
$[\lambda, \varphi]$	Schreibweise eines Richtungsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bekanntes Koordinatensystem BEISPIEL: $[\lambda, \varphi] := \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$r[\lambda, \varphi]$	Schreibweise eines Ortsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bekanntes Koordinatensystem BEISPIEL: $\mathbf{x} \Leftrightarrow r[\lambda, \varphi] := r \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$
$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^i)$	Vektorfeld mit den Koordinaten x^i [i te Koordinate [kein Exponent, *Einstein*sche Schreibweise])
$\mathbf{r}_{,i}$	[partielle) Ableitung eines Vektorfeldes nach der i-ten Koordinate: $\mathbf{r}_{,i} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$
$x^i{}_{,j}$	[partielle) Ableitung eines Skalarfeldes $x^i = x^i\left(y^j\right)$ nach der j-ten Koordinate: $x^i{}_{,j} := \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$
$[A, h]$	Horizontsystem
$[\alpha, \delta]$	bewegliches Äquatorsystem [Bezug Frühlingspunkt)
$[\vartheta, \delta]$	festes Äquatorsystem [Bezug Ortsmeridian)
$[\lambda, \delta]$	geozentrisches System [Bezug Nullmeridian)
$[\lambda, \varphi]$	geographisches System [Bezug Nullmeridian)
$[A_x, h_x]$	satellitenzentriertes Horizontsystem [„x-System“)
$[A_y, h_y]$	satellitenzentriertes Horizontsystem [„y-System“)
$[l, b]$	ekliptikales System
$[l_{II}, b_{II}]$	galaktisches System [neu)
$[\lambda, \varphi] \xrightarrow{A, B, C} [\alpha, \delta]$	Darstellung einer Rotation: Ein Einheitsvektor $[\lambda, \varphi]$ im λ, φ - System wird durch Drehung um die Winkel *A, B, C* [in dieser Reihenfolge) in den Einheitsvektor $[\alpha, \delta]$ des α, δ - Systems transformiert.
$A \in [0°, 180°)$	Beispiel für ein links geschlossenes, rechts offenes Intervall
O	Ordnung einer Funktion: In $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + O(\varepsilon)$ ist $O(\varepsilon)$ ein Restterm der Form $\varepsilon \mathbf{R}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, wobei R von $\mathbf{f}, \mathbf{f}_0$ und ε abhängig ist.

Astronomische Symbole

Astronomische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
♁	Erde
☉	Sonne
☉̄	fiktive mittlere Sonne
☾	Erdmond
☿	Merkur
♀	Venus
♂	Mars
♃	Jupiter
♄	Saturn
♆	Neptun
⛋	Satellit / Orbiter
♈	Frühlingspunkt

Abbildungsverzeichnis

Bild 10-1: Zweikörperbewegung 9

Bild 10-2: Der Schwerpunkt im Zweikörperproblem 11

Bild 10-3: Absolute Zweikörperbewegung für das Massenverhältnis 1:2 mit der Exzentrizität *e* = 0.8..... 16

Bild 10-4: Die *Kepler*sche Umlaufzeit erdnaher kreisförmiger Satellitenbahnen in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe, grüne Kurve: Bahnhöhe des TerraSar-X (TS-X), schraffierter Bereich für Satelliten zu niedrig, keine Überlebenschance 24

Bild 10-5: Die Umlaufzeit erdferner kreisförmiger Satellitenbahnen in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe, G-geostationäre Bahnhöhe, M-mittlere Mondbahnhöhe in Bezug auf den mittleren Erdäquator 25

Bild 10-6: Die Umlaufzeit kreisförmiger Mars-Orbiter in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe 25

Bild 10-7: Der Geschwindigkeitsbereich erdnaher kreisförmiger Satellitenbahnen in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe: V_C- Kreisbahngeschwindigkeit, V_P-parabolische Geschwindigkeit (Entweichgeschwindigkeit = Fluchtgeschwindigkeit) 26

Bild 10-8: Die Geschwindigkeiten erdferner kreisförmiger Satellitenbahnen in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe, eingezeichnet ist die geostationäre Bahnhöhe (G), die Mondbahnhöhe (M), die Kurve für die Kreisbahngeschwindigkeit (V_C), die Kurve für die parabolische Geschwindigkeit (V_P)..... 26

Bild 10-9: Der Geschwindigkeitsbereich kreisförmiger Mars-Orbiter in Abhängigkeit von der mittleren Bahnhöhe, V_C-Kreisbahngeschwindigkeit, V_P-parabolische Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit) 27

Bild 10-10: Dreikörperbewegung bei Bezug auf einen beliebigen Ursprung O 27

Bild 10-11: Die absolute Dreikörperbewegung bei Bezug auf den Schwerpunkt *S*..... 31

Bild 10-12: Zur Definition der Librationspunkte 32

Bild 10-13: Zur Herleitung der kollinearen Lösung des Dreikörperproblems: m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 33

Bild 10-14: m_3 befindet sich in L_1 bezüglich m_1 und m_2 34

Bild 10-15: m_3 befindet sich in L_2 bezüglich m_1 und m_2 36

Bild 10-16: Der Grenzfall für λ_3 im eingeschränkten Dreikörperproblem, wenn $\mu_2 / \mu_1 \to 0$ 38

Bild 10-17: Variation von λ_3 im Bereich $m_2 = m_1$ bis $m_2 \to 0$ 38

Bild 10-18: Relative kollineare Bewegung für den kreisförmigen Fall im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit $\lambda_3 = 0.891881472$, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_2 und m_3 um m_1. Es ist $a_{21}=1$, $a_{31}=0.891881472\,a_{21}$ 43

Bild 10-19: Relative kollineare Bewegung für einen elliptischen Fall (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.891881472, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_2 und m_3 um m_1. Es ist a$_{21}$=1, a_{31}=0.891881472a_{21} 43

Bild 10-20: Relative kollineare Bewegung für einen elliptischen Fall (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.891881472, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_1 und m_3 um m_2. Es ist a_{32}=1.891881472a_{21}. 44

Bild 10-21:Relative kollineare Bewegung für einen elliptischen Fall (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.891881472, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_1 und m_2 um m_3. Es ist a_{31}=0.8918814719a_{21}, a_{23}=1.8918814719a_{12} 44

Bild 10-22:Relative kollineare Bewegung für einen hyperbolischen Fall (e = 2.0) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.891881472, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2 bei relativer Bewegung von m_2 und m_3 um m_1. Es ist q_{31}=0.891881472q_{21}. 45

Bild 10-23: Absolute kollineare Bewegung für kreisförmige Bahnen im Dreikörperproblem um den Schwerpunkt S für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.8918814719, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2. Es ist $a_{II} = 4.4\,a_I$ und $a_{III} = 5.8\,a_I$ 49

Bild 10-24 : Absolute kollineare Bewegung für elliptische Bewegung (e = 0.8) im Dreikörperproblem um den Schwerpunkt S für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.8918814719, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2. Es ist $a_{II} = 4.4\,a_I$ und $a_{III} = 5.8\,a_I$ 49

Bild 10-25: Absolute kollineare Bewegung für hyperbolische Bewegung (e = 1.5) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ mit λ_3 = 0.8918814719, wenn m_3 in L_3 bezüglich m_1 und m_2. Es ist $p_{II} = 4.4\,p_I$ und $p_{III} = 5.8\,p_I$. 50

Bild 10-26: Relative äquidistante kreisförmige Bewegung im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$. Bewegung von m_2 und von m_3 um m_1. 52

Bild 10-27: Relative äquidistante elliptische Bewegung (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$. Bewegung von m_2 und von m_3 um m_1. 53

Bild 10-28: Relative äquidistante hyperbolische Bewegung (e = 1.5) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$. Bewegung von m_2 und von m_3 um m_1. 53

Bild 10-29: Absolute Bewegung der äquidistanten Punkte im Dreikörperproblem um den gemeinsamen Schwerpunkt 54

Bild 10-30: Absolute äquidistante kreisförmige Bewegung im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$ 57

Bild 10-31: Absolute äquidistante elliptische Bewegung (e = 0.8) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3{:}2{:}1$, $\gamma_3 = 0°$, $\gamma_2 = -115°.69$, $\gamma_1 = 97°.31$ 57

Bild 10-32: Absolute äquidistante hyperbolische Bewegung (e = 1.5) im Dreikörperproblem für das Massenverhältnis $m_1 : m_2 : m_3 = 3:2:1$ 58

Bild 11-1: Sektor eines Kegelschnittes zwischen den Randvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3$ und Dreiecksfläche zwischen den Eckpunkten Z, P_1, P_3 65

Bild 11-2: Die Bahnkurvenparameter im Formalismus der geradlinigen Bewegung: G der Flächenparameter, V die Geschwindigkeit, ζ_P der Perizentrumswinkel bei Bezug auf den Anfangspunkt O eines *Hansen*-Systems („departure point"). Der Bahnwinkel ζ gibt den Ort S des bewegten Objektes mit Radius r gerechnet von einem (willkürlichen!) Ursprung M aus. s ist die Bogenlänge vom Perizentrum P zum Ort S. $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0)$ sind Basisvektoren des mitbewegten *Leibniz*-Systems, $(\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)})$ sind Basisvektoren des Bahnebenen-festen *Hansen*-Systems 137

Bild 12-1: Allgemeine Bahnänderung 149

Bild 12-2: Zusammengesetzte Manöver für Bahnänderungen 151

Bild 12-3: Änderung einer Bahnebene 153

Bild 12-4: Änderung der Bahnebene um ± 20°. Ausgangsbahn: $i_1 = 60°, u_1 = 50°$ 155

Bild 12-5: Bahnebenenänderung ohne Änderung der Bahnform 158

Bild 12-6: Ein-Impuls-Transfer: der Knoten Ω_2 der Zielbahn 160

Bild 12-7: Variation des Geschwindigkeitsinkrements bei Ein-Impuls-Verfahren bei unveränderter Bahnebene, links Fall 1, rechts Fall 2 165

Bild 12-8: Variation des Drehwinkels bei Ein-Impuls-Verfahren bei unveränderter Bahnebene, links Fall 1, rechts Fall 2 166

Bild 12-9: Variation des Geschwindigkeitsinkrements bei Ein-Impuls-Verfahren mit Änderung der Bahnebene ... 166

Bild 12-10: Variation des Drehwinkels bei Ein-Impuls-Verfahren mit Änderung der Bahnebene 167

Bild 12-11: Bahnverlauf bei Ein-Impuls-Verfahren, Drehung der Bahnebene um $\Delta i = 53°$ 167

Bild 12-12: Bahnmanöver zur Drehung der Apsidenlinie (Korrektur des Perizentrums) 169

Bild 12-13: *Hohmann*-Transfer, koplanarer Übergang von Kreisbahn zu Kreisbahn 172

Bild 12-14 (linkes Bild): „inertiale Darstellung" der Einschussbahnen des DFS in seine endgültige Position 175

Bild 12-15(rechtes Bild): „relative Darstellung" der Einschussbahnen bei Bezug auf die feste Erdoberfläche 175

Bild 12-16: Einschuss des DFS-3 mit dreimaligem Zünden des Apogäumsmotors, in „inertialer" Darstellung gesehen vom Nordpol des Äquators (Bild 12-14), bezogen auf die feste Erde (Bild 12-15) und in Merkatorprojektion. Die verschiedenen Transferbahnen sind jeweils in derselben Farbkodierung dargestellt, schwarze Bahnabschnitte liegen im Erdschatten, die Orte für das Zünden des Apogäumsmotors sind markiert. Im unteren Bild ist auch der Abbau der Bahninklination zu erkennen, der in den beiden oberen Bildern nicht sichtbar ist. In brauner Farbgebung ist die Aufstiegsbahn mit der Startrakete bis zum Einschuss im ersten aufsteigenden Bahnkoten eingetragen 176

Bild 12-17: Verlauf des Gesamtgeschwindigkeitsinkrements ΔV um von verschiedenen Ausgangsbahnen auf einem *Hohmann*-Transfer im Außenbereich des Sonnensystems eine Kreisbahn mit heliozentrischem Abstand *r* zu erreichen 178

Bild 12-18: Zeitbedarf Δt [Jahre], um auf einem *Hohmann*-Transfer von verschiedenen Bahnen in Sonnennähe andere Bahnen mit heliozentrischem Abstand *r* im Außenbereich des Sonnensystems zu erreichen 179

Bild 12-19: Kleine Positionsverschiebungen längs der Bahn 181

Bild 12-20: Beliebiger Bahnübergang 185

Bild 12-21: Koplanarer Übergang auf Ellipsenbogen 185

Bild 12-22: Die antifokale Anomalie υ_F und der Drehwinkel γ zwischen Kreisbahn und elliptischer Bahn 187

Bild 12-23: Gravitationsverlust bei langen Manövern in der Nähe des Perigäums um eine Bahn anzuheben. Linkes Bild: mehrmalige kurze Schübe, rechtes Bild: ein langer Schub 190

Bild 12-24: Die hyperbolische Bewegung 193

Bild 12-25: Projektion der Bahn von Giotto auf die Erdoberfläche während des hyperbolischen Vorbeiflugs. Zeittaktung in 5 Minuten Schritten. 196

Bild 12-26: Vorbeiflug von Giotto an der Erde bezüglich der als fest angenommenen Erdoberfläche. *P* ist das Perigäum. Die Strecke zum entsprechenden Subsatellitenpunkt auf der Erdoberfläche ist eingezeichnet. Zeittaktung in 5 Minuten Schritten (realistische Größenverhältnisse) 198

Bild 12-27: Der erste Erdvorbeiflug von Galileo bezüglich der als fest angenommenen Erdoberfläche. Zeittaktung 2 Minuten (realistische Größenverhältnisse) 198

Bild 12-28: Einschuss aus einer erdgebundenen Parkbahn ins innere oder äußere Sonnensystem 201

Bild 12-29: Zum *Pirquet*schen Paradoxon 204

Bild 12-30: 2-Impuls-Verfahren zum Verlassen des Sonnensystems 206

Bild 12-31: *Hohmann*sches Paradoxon: Flucht aus Sonnensystem im 1- und 2-Impuls-Verfahren. Beispiel: Flucht von Erdbahn und Periheldistanz bei 0.2 AE. 208

Bild 12-32: *Hohmann*sches Paradoxon: Relation der Geschwindigkeitsinkremente im 1- und 2-Impuls-Verfahren bei Flucht aus dem Sonnensystem von Erdbahn aus und mit Periheldistanz bei 0.2 AE. 208

Bild 12-33: Zur Herleitung der Attraktionssphäre, m_0 Mittelpunkt der Attraktionssphäre um m_{II} bei Bezug auf m_I, A – avarischer Punkt 212

Bild 12-34: Schematische Darstellung von Attraktionssphäre *A*, Aktivitätsbereich *W*, *Hill*sche Gravitationssphäre *H* im Erde-Sonne-System. Der Bereich des Attraktionssphäre des Mondes in seiner Bewegung um die Erde ist als Torus T eingetragen. *M* markiert die Mondbahn innerhalb des Attraktionstorus 214

Bild 12-35: Zur Herleitung des Aktivitätsbereichs 215

Bild 12-36: Der Aktivitätsbereich der Erde in Bezug auf die Sonne 216

Bild 12-37: Der Aktivitätsbereich des Mondes in Bezug auf die Erde: Kurve 1: Grenze des Aktivitätsbereiches des Mondes in Bezug auf die Erde (gestrichelt: Näherungslösungen), Kurve 2: Grenzkurve der Attraktionssphäre um den Mond in Bezug auf die Erde, Kurve 3: Grenzkurve der Attraktionssphäre der Erde bei Bezug auf die Sonne 217

Bild 12-38: Gravitationsmanöver bei Bezug auf die Attraktionssphäre (AS) eines Planeten (B). *A* Eintrittspunkt der Raumsonde in die Attraktionssphäre, *E* Austrittspunkt 219

Bild 12-39: Orientierung der Bahnebene der im Attraktionsfeld des Planeten P abgelenkten Raumsonde mit relativer Bahnnormale $\boldsymbol{c}_0$. $\boldsymbol{R}_{A0}$ ist der planetozentrische Richtungsvektor des Eintrittsortes der Sonde in die Attraktionssphäre des Planeten 221

Bild 12-40: Die Tour des GALILEO zu Jupiter mit Gravitationsmanövern an der Venus, zweimal an der Erde und Vorbeiflügen an den kleinen Planeten Gaspra und Ida 223

Bild 12-41: Gravitationsmanöver der ULISSES Raumsonde (Solar Polar Mission) am Jupiter ♃ um eine ekliptikale Bahnneigung von etwa 79° zu erreichen. 225

Bild 12-42: Zur Herleitung der Raketengleichung, V – Geschwindigkeit der Rakete, V_e – Ausstoßgeschwindigkeit („exhaust velocity“) des Raketenmotors, F_1 - Kraft in Flugrichtung, F_2 – Kraft entgegengesetzt zur Flugrichtung . 226

Bild 14-1: Parameterräume der elliptischen Bewegung: linkes Bild, die „wahre“ physikalische Bahn (rote Ellipse), die mathematische Zuordnung auf dem Umkreis, rechtes Bild: der über die *Kepler*-Gleichung zugeordnete mathematische Parameterraum der gleichförmigen Kreisbewegung (vgl. Bild 2-7 in Band I) (a – große Bahnhalbachse und Radius des Umkreises, e – numerische Exzentrizität, Z – Mittelpunkt der Bahnellipse, F – Brennpunkt mit Ort des Zentralkörpers, P – Perizentrum, S – Ort des Himmelskörpers auf Bahnellipse, S‘ – Projektion des Himmelskörpers auf Umkreis, M – mittlere Anomalie im Parameterkreis)..... 253

Bild 14-2: linkes Bild: „physikalische“ elliptische Bewegung: rechtes Bild: Hodograph der elliptischen Bewegung: P – Perizentrum, A - Apozentrum 256

Bild 14-3: linkes Bild: Hodograph der parabolischen Bewegung: rechtes Bild: Hodograph der hyperbolischen Bewegung: in beiden Fällen: das Apozentrum wird nie erreicht 257

Bild 14-4: Hodographendarstellung eines ebenen Transfers von einer kreisförmigen Bahn in eine elliptische Bahn bei Vorgabe des Geschwindigkeitsinkrements $\Delta\dot{\mathbf{r}}_1$ (bzw. $\Delta\dot{\mathbf{r}}_2$) und des Ortes S_1, von dem aus das Manöver ausgeführt werden soll 258

Bild 14-5: Hodographendarstellung eines ebenen Transfers von einer Kreisbahn in eine hyperbolische Bahn bei Vorgabe des Geschwindigkeitsinkrements $\left|\Delta\dot{\mathbf{r}}\right|$ und des Ortes S_1, von dem aus das Manöver ausgeführt werden soll 260

Bild 14-6: Hodographendarstellung eines ebenen Transfers zwischen zwei elliptischen Bahnen 262

Bild 14-7: linkes Bild: klassische *Kepler*ellipse mit $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – Apsidensystem, rechtes Bild: *Kepler*bahn im *Levi-Cività* Parameterraum 264

Bild 14-8: Bewegung auf einer Parabel im physikalischen Raum (linkes Bild) und im *Levi-Cività* Raum (rechtes Bild) 270

Bild 14-9: Einfaches Beispiel eines Phasenraumes: Variation des (*Hansen*schen) Bahnwinkels $\dot{\zeta}$ über dem Bahnwinkel ζ, Bahn: a = 27298 km, e = 0.7, i = 80°. Die Kurven sind an drei verschiedenen Zeitpunkten im Abstand von je drei Monaten gezeichnet, Verschiebung längs der Bahn in Bezug auf den Ursprung des *Hansen*-Systems, verursacht als Folge der „Störungen“ des Zweikörpersystems infolge der Abplattung der Erde (Apsidendrehung). 275

Bild 16-1: Beobachtung einer Satellitenbahn an drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten mit den topozentrischen Ortsvektoren $\mathbf{r}_{T1} = \rho_1 \mathbf{r}_{T01}, \mathbf{r}_{T2} = \rho_2 \mathbf{r}_{T02}, \mathbf{r}_{T3} = \rho_3 \mathbf{r}_{T03}$ 347

Bild 16-2: Schema der Erstbahnbestimmung nach *P. Kustaanheimo* 352

Bild 16-3 : Differenz der MIR Ephemeride unter Verwendung des SGP4 Modells gegen eine numerisch berechnete Ephemeride 362

Bild 16-4: Von einer Bodenstation B wird eine Satellitenbahn beobachtet: es müssen drei Bahnen unterschieden werden: die Sollbahn (Nominalbahn N, die geflogen werden soll), die wahre Bahn (T), die in Wirklichkeit durchflogen wird, die geschätzte Bahn (E), die aus einer Bahnbestimmung berechnet wird. 364

Bild 17-1: Die Figur der Erde (Kopie aus KING-HELE [1976]) 380

Bild 17-2: Das Luftwiderstandsmodell nach HARRIS-PRIESTER. Die beiden Kurven zeigen den Verlauf der durch den Luftwiderstand verursachten Beschleunigung für minimale und maximale Sonnenaktivität (siehe die Zahlenwerte in Tabelle 17-12) 384

Bild 17-3: Verlauf des Solarflux (repräsentiert durch die jährliche Sonnenfleckenzahl) seit 1700 bis 2014 385

Bild 17-4: Verlauf des täglichen Solarflux (repräsentiert durch die F10.7 cm Linie) zwischen 1988 und 2002, Maxima der Zyklen Nr. 23 und 24. Die rote Kurve zeigt die Mittelung über 30 Jahre 386

Bild 17-5: Mittelung des Solarflux über unterschiedliche Mittelungszeiträume und Vorhersage unter Berücksichtigung der Unsicherheiten 387

Bild 17-6: Vergleich *Jacchia* 71 Modell. mit *Harris-Priester* Modell. Die roten Kurven zeigen den Verlauf der im Modell von Harris-Priester gegebenen Werte. Überlagert sind Kurven nach dem Jacchia Modell in der Überarbeitung durch E. GILL [1996]: Lila Kurven (von ganz unten nach oben hin gehend) 10.7cm Fluss von [70, 130, 200, 250], Kp = 0, Blaue Kurven (von ganz unten nach oben hin gehend) 10.7cm Fluss von [70, 130, 200, 250], Kp = 4, Grün Kurven (von ganz unten nach oben hin gehend) 10.7cm Fluss von [70, 130, 200, 250], Kp = 8. Die (Kreisbahn-) Höhen der Satelliten ALOS und ENVISAT sind markiert. 388

Bild 17-7: Lebensdaueruntersuchung für den Satelliten Sputnik III: Verlauf der Apogäums- und der Perigäumshöhe sowie der großen Bahnhalbachse (jeweils bezogen auf den mittleren Äquatorradius R_E) ◀ 391

Bild 17-8: Abnahme der Bahnhöhe des Satelliten CHAMP mit Korrekturmanöver zur Verlängerung der Lebensdauer ◀ 392

Bild 17-9: Attraktion eines Satelliten S um den Zentralkörper M durch einen dritten Körper B 393

Bild 18-1: Beispiel für den Verlauf einer numerischen Integration über etwa 2.5 Jahre 409

Bild 18-2: Zur Methode der speziellen Störungen nach *Encke*: Der Satellit m(t) bewegt sich auf der wahren zu bestimmenden Bahn, der Referenzkörper $m_k(t)$ zum selben Zeitpunkt t auf der („ungestörten") Keplerellipse. Beide Bahnkurven schneiden zur Epoche t_0 411

Bild 20-1: Die Übergangsbahn aus der Erdbahn zum kleinen Planeten 4/Vesta mit unterschiedlich langen Bahnbögen, in denen die Ionentriebwerke eingeschaltet sind. Beispielbahn aus der Studie ECKSTEIN, M. C. et al. [1983] als Muster einer interplanetaren Übergangsbahn. Die Bahn im Bild hat eine Dauer von 687 Tagen, der letzte geschobene Bahnast beträgt 60 Tage bei einem Schub von 20mN mit den Anstellwinkeln β=20°, γ=10°. Das Rendezvous mit dem kleinen Planeten war geplant für den 14. Juli 1989. 479

Bild 20-2: Prinzip der Aufspiralung einer heliozentrischen Bahn infolge des Drucks durch Sonnenstrahlung bei ständigem Massenverlust etwa durch ein Ionentriebwerk (der Solardruck ist zur Veranschaulichung in diesem Plot um den Faktor 200 überhöht) 488

Bild 20-3: Aufspiralung einer heliozentrischen Bahn allein infolge eines kleinen radialen Schubes durch ein Ionentriebwerk. Da $b_{SR}>0$ angenommen wurde, wirkt der Schub nach außen von der Sonne weg. Der Massenverlust ist berücksichtigt. 493

Bild 20-4: Transversale (b_T) und radiale (b_R) Beschleunigung durch Zerlegung der Beschleunigung ($b_\odot$) durch den Strahlungsdruck der Sonne am Sonnensegel S in einen verlorenen Anteil (b_L) und einen senkrecht zum Segel wirkenden Anteil (b_S). β ist der Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung zur Sonne bei Bezug auf die oskulierende Bahnebene des Raumflugkörpers 496

Bild 20-5: Zunahme des Flächenparameters einer heliozentrischen Bahn infolge des transversalen Anteils des Strahlungsdruckes auf ein Sonnensegel mit Anstellwinkel 30°. 503

Bild 20-6: Aufspiralen einer heliozentrischen Bahn durch den transversalen Anteil des Strahlungsdruckes auf ein Sonnensegel mit Anstellwinkel 30° (der Plot ist wegen der Reihenentwicklung auf $\zeta=0°$ normiert, während die Zeichnung bei $\zeta=-180°$ beginnt) (Längeneinheit AE) 504

Bild 20-7: Zusammenschau der vier Anpassungskurven in einer und derselben Bahnebene, links die Gerade als ungestörte Bewegung, dann die innere Ellipse der Erdbahn, die zweite größere Ellipse als Folge der radialen Beschleunigung durch den Strahlungsdruck und schließlich die Aufspiralung infolge der transversalen Beschleunigung durch den Strahlungsdruck (Längeneinheit AE) 505

Bild 20-8: Anstellwinkel eines Sonnensegels zur Erzeugung einer räumlichen Bahn: Winkel β Drehung in der Bahnebene, Winkel γ Drehung aus der momentanen Bahnebene, Darstellung der Beschleunigungen im *Leibniz*-System 506

Bild 20-9 linkes Bild: Verlauf des Raumwinkels η[Grad] bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung über einen halben Umlauf um die Sonne. rechtes Bild: Berechnung des Raumwinkels η[Grad] mit verschiedenen Ordnungen (12., 11., 10., 6., 4., 3.) einer Reihenentwicklung über einen halben Umlauf um die Sonne. Die Streuung der durch die Reihenentwicklung bedingten Zahlenwerte macht die Lösung nach einem halben Umlauf wertlos 512

Bild 20-10: Verlauf der Bahninklination i[Grad] bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Der stark eingeschränkte Gültigkeitsbereich der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung ist erkennbar. 513

Bild 20-11: Verlauf der Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens σ[Grad] bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Der stark eingeschränkte Gültigkeitsbereich bis maximal $\zeta=100°$ der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung deutlich erkennbar. 513

Bild 20-12: Verlauf der ekliptikalen Länge des aufsteigenden Knotens Ω[Grad] mit Anfangswert 0° bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Auch hier ist der eingeschränkte Gültigkeitsbereich der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung ab etwa dem Wert 1.6 π erkennbar. 514

Bild 20-13: Verlauf der Höhe des Raumflugsonde über der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung über einen halben Umlauf um die Sonne 514

Bild 20-14: Die fünf Anpassungskurven bei konstantem ebenem (β=30°) und räumlichem (γ=45°) Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Kurve 1: Gerade, keine Beschleunigung, Kurve 2: Erdbahn: Gravitationsbeschleunigung durch Sonne (Zweikörperbewegung), Kurve 3: radiale Beschleunigung durch Strahlungsdruck, Kurve 4: transversale Beschleunigung durch den Strahlungsdruck, Kurve 5: normale Beschleunigung durch den Strahlungsdruck (man beachte die starke Überhöhung der z-Achse) 515

Tabellenverzeichnis

TABELLE 10-1: m_3 IN L_1 BEZÜGLICH m_1 UND m_2, UND ÄQUIVALENZBEZIEHUNGEN 34

TABELLE 10-2: m_3 IN L_1 BEZÜGLICH m_1 UND m_2, UND ÄQUIVALENZBEDINGUNGEN 35

TABELLE 10-3: m_3 IN L_2 BEZÜGLICH m_1 UND m_2, UND ÄQUIVALENZBEDINGUNGEN 36

TABELLE 10-4: NUMERISCHE WERTE DER LIBRATIONSPUNKTE L_1, L_2, L_3 IM EINGESCHRÄNKTEN DREIKÖRPERPROBLEM FÜR EINIGE KÖRPER DES SONNENSYSTEMS, IN EINHEITEN DER MITTLEREN ENTFERNUNG DER BEIDEN HAUPTKÖRPER m_1 UND M_2 39

TABELLE 12-1: OSKULIERENDE PARAMETER DER EINSCHUSSBAHNEN DES DFS-3 175

TABELLE 12-2: GRÖßENORDNUNGSMÄßIGE WERTE FÜR TREIBSTOFF-FAKTOR UND AUSSTRÖMGESCHWINDIGKEIT FÜR VERSCHIEDENE IN DER RAKETENTECHNIK VERWENDETE ANTRIEBSARTEN 228

TABELLE 17-1: ÜBERSICHT ÜBER DIE WICHTIGSTEN BEWEGUNGSEINFLÜSSE AUF ERDNAHE SATELLITENBAHNEN (SCHEMATISCH) AUFGETEILT NACH SÄKULAREN (S), LANGPERIODISCHEN (L) UND KURZPERIODISCHEN (K) EINFLÜSSEN. SEHR STARKE EINFLÜSSE (⊗), STARKE EINFLÜSSE (×), GERINGE EINFLÜSSE (•) 368

TABELLE 17-2: QUALITATIVE ÜBERSICHT DER WICHTIGSTEN STÖREFFEKTE AUF ERDSATELLITENBAHNEN FÜR ERDNAHE UND GEOSYNCHRONE BAHNEN. DIE ÜBERGÄNGE ZWISCHEN DIESEN BEREICHEN SIND FLIEßEND. RESONANZEFFEKTE FÜR SPEZIELLE BAHNFAMILIEN VERFÄLSCHEN DAS BILD (NACH HORI UND KOZAI [1974]) 370

TABELLE 17-3**:** DIE ERSTEN ZONALEN HARMONISCHEN IN VERSCHIEDENEN SCHREIBWEISEN (*JEFFREY* ZITIERT NACH MERSON UND KING-HELE [1958]) 371

TABELLE 17-4: BEITRÄGE DES ERDKERNS, DES ERDMANTELS UND DER ERDKRUSTE ZU J_2 (NACH BURSA [1987]) 379

TABELLE 17-5: DIE WICHTIGSTEN POTENTIALTERME DES SCHWEREFELDES DER ERDE 380

TABELLE 17-6: DIE WICHTIGSTEN POTENTIALTERME DES SCHWEREFELDES DER ERDMONDES 381

TABELLE 17-7: DIE WICHTIGSTEN POTENTIALTERME DES SCHWEREFELDES DES MARS 382

TABELLE 17-8: DIE WICHTIGSTEN POTENTIALTERME DES SCHWEREFELDES DES JUPITER 382

TABELLE 17-9: DIE WICHTIGSTEN POTENTIALTERME DES SCHWEREFELDES DES SATURN 382

TABELLE 17-10: DER WICHTIGSTE POTENTIALTERM DES SCHWEREFELDES DES URANUS 382

TABELLE 17-11: DER WICHTIGSTE POTENTIALTERM DES SCHWEREFELDES DES URANUS 382

TABELLE 17-12: LUFTDICHTE ÜBER DER HÖHE ÜBER DER ERDOBERFLÄCHE FÜR SONNENMAXIMUM UND SONNENMINIMUM 383

TABELLE 18-1: VERGLEICH ANALYTISCHER UND NUMERISCHER INTEGRATION VON BEWEGUNGSPROBLEMEN 408

TABELLE 19-1: ZAHLENBEISPIEL ZUR DEMONSTRATION DES VERFAHRENS VON *ECKSTEIN* 422

TABELLE 19-2: ZAHLENBEISPIEL ZUR DEMONSTRATION DES VERFAHRENS VON *GORDON* 425

TABELLE 20-1: KEPLERSCHE BAHNELEMENTE DER DURCH DEN KONSTANTEN ANTEIL DES STRAHLUNGSDRUCKS VERURSACHTEN GESTÖRTEN BEWEGUNG DER ASTEROIDENSONDE (OHNE ANTRIEB DURCH DIE IONENTRIEBWERKE) ◀ 486

TABELLE 20-2: KEPLERSCHE BAHNELEMENTE DER DURCH DEN KONSTANTEN ANTEIL DES STRAHLUNGSDRUCKS VERURSACHTEN GESTÖRTEN BEWEGUNG DES SONNENSEGELS, WENN DIE GESAMTE SONNENSTRAHLUNG ZU EINER RADIALEN BESCHLEUNIGUNG AUF DAS SONNENSEGEL AUSGENUTZT WIRD, DAS VOLL AUF DIE SONNE AUSGERICHTET WIRD. DIE ANSTRÖMFLÄCHE DES SONNENSEGELS IST ZU 10000M2, DIE MASSE DER GESAMTEN RAUMSONDE ZU M0=100KG ANGENOMMEN. ◀ 497

Index

Abflug eines Raumflugkörpers 201
Ablenkkörper 213
Abplattung 373, 431
Abplattung der Erde 379
Aktivitätsbereich 214, 215
Aktivitätssphäre 217
Albedo 398
  der Erde 398
  des Mondes 398
alongtrack error 182
ALOS 388
Amplitudenvariable 415
Anomalie
  antifokale 187
  asymptotische 191
  exzentrische 6, 73
  mittlere 6, 74
  südatlantische 232
  wahre 6, 73
Anpassungskurve 2
Antennenabstrahlung 403
Antifokus
  antifokale Anomalie 187
  antifokaler Radius 187
ANTREASIAN, PETER G. 395
Anziehungsbereich 211
Aphel 201
Apsidensystem 3
  Eigenbewegungsvektor 115
  Frenetsche Formeln 116
äquidistante Lösung des Dreikörperproblems 50
Archimedischer Punkt 4
Argument der Breite 73
ARISTOTELES 254
Astronomische Dimensionen 7
astronomische Einheit 8
asymptotische Anomalie 191
asymptotische Geschwindigkeit 191
Attraktionsbereich 211
Attraktionssphäre 211, 212
autonom 414
avarischer Punkt 213
Bahn
  formstabile 171
  geostationäre 19
Bahnabsenkung 176, 203
Bahnänderung 149
  Änderung des Geschwindigkeitsvektors 149
  Geschwindigkeitsinkrement 149
  große Bahnhalbachse 180
  Inklination 154
  Inklinationsänderung, maximale 155
  kleine 180
  Knoten 154
  Knotenänderung, maximale 155
Bahnbestimmung
  Erstbahn- 342
  vorläufige 342
Bahnelemente 427
  äquinoktiale 446
  Argument der Breite 452
  Bahnradius 472
  Delaunay- 432
  exzentrische Anomalie 447
  exzentrische Länge 82
  Exzentrizität 172
  Flächenparameter 470
  große Bahnhalbachse 172, 180
  Inklination 154
  Keplerelemente 60, 432
  klassische Elemente = Keplerelemente 60
  Länge des Perizentrums 456
  mittlere 420, 427, 432
  mittleres Argument der Breite 454
  oskulierende 427, 445
  Rektaszension des aufsteigenden Knotens 154
  schnelle 441
  ungestörte 427, 432
  von Lagrange 78
  wahre 420
  wahre Anomalie 450
Bahnparameter 71
Bahnradius 472
Bahnverbesserung 342
Bahnwinkel 5
  erster Hansenscher 416
  Hansenscher 115
BAKER, R. M. L. 358
ballistischer
  Keoffizient 384
Basiswechselmatrix 327
BATRAKOV, YU., V. 404
BAUSCHINGER, J. 342, 410
BERTOTTI, BRUNO. 404
BESSEL, F. W.
  Bessel Funktionen 16
BETTIS, D. G. 413
Bewegung
  allgemeine Keplerbewegung 190
  Bewegungsänderungen 225
  einer Rakete 227
  Einkörperbewegung 10
  geradlinige 136
  hyperbolische 190
  intermediäre 135
  Keplerbewegung 1
  Keplersche 6
  mittlere 6
  Parameter 59
  relative 9

Zweikörper- 9, 211
Bewegungseinflüsse
Einflussart 430
Einflussordnung 431
kurzperiodische 440
langperiodische 434
periodische 434
Störordnung 429
Störwirkung 429
Bewegungseinflüsse
Einflussart 429
säkularer Einflussterm 428
säkularer Störkoeffizient 428
Bewegungsparameter
ungestörte Bewegung 136
Bewegungswinkel 416
BIERMANN, LUDWIG
Sonnenwind 399
BOGOLJUBOW, N. N. 414
BORN, GEORGE H. 342
BROUCKE, R. A. 91
BROUWER, D. 103, 135, 406, 423, 431, 432, 446
BRUMBERG, V. A. 407
BUCERIUS, H. 342, 344, 346, 360
CAS 136, 407
Ceres 214
c-Funktionen 231
CHAMP 392
CHEBOTAREV, G. S. 431
CLAUS, A. J. 431
COWELL, P. H. 406
CUNNINGHAM, L. E. 378
Deflektionswinkel 195
DELAUNAY, CH. E. 432
DELAUNAY, CH., E.
Elemente 135
DEPRIT, A. 113, 139, 431
DIOPHANT
Identität *264*
Drehimpulssatz 30
Dreibein
mitbewegtes 3
Dreiecksverhältnisse 345, 348
Dreikörperbewegung
absolute 30
relative 28
Dreikörperproblem 27
absolutes 30
äquidistante Lösung 50
Drehimpulssatz 30
eingeschränktes 37
Energiesatz 30
exakte Lösungen 32
Flächensatz 30
kinetische Energie 30
kollineare Lösung 32
Potential 30
potentielle Energie 30
Schwerpunkt 29
ECKSTEIN, M. C. 176, 390, 391, 403
Mittelung der regulären Elemente 421
reguläre Elemente 93
Einflussbereich 214
Einflusssphären 200
Einkörperbewegung 10
Elemente
äquinoktiale 91
-Lyddane 317
Poincaré Elemente 93
reguläre 93
von Lagrange 78
Elementevektor 420
Elementtransformation 415
EL'YASBERG, P. E. 342
Emissionsenergie 394
ENCKE, J. F. 346, 406
Methode 410
Endgeschwindigkeit
ideale 227
Energie
kinetische 30
potentielle 30
Energiesatz 30
ENVISAT 388
Ephemeridenrechnung 406
Erde
Attraktionssphäre 199, 201, 213
Mond 214
Erstbahnbestimmung 342
erzeugende Funktion
einer kanonischen Transformation 128
ESCOBAL, P. R. 342, 346, 347
double r-Iteration 347
Erstbahnbestimmung aus Winkel- und Entfernungsänderungsmessungen 357
EULER, L. 32, 59, 78, 346
Euler-Rodrigues-Parameter 59, 113, 117, 139
Eulerwinkel 139
Gleichung 5. Grades 32
Identität 271
Keplerelemente 254
Variation der Parameter 78
Eulerwinkel 117
exzentrische Anomalie 73
Exzentrizität 72
Exzentrizitätsvektor 467
Exzentrizitätsvektoren 255
Exzess, hyperbolischer 191
Faktor
retrograder 90
FARINELLA, PAOLO 404
fastidentisch 416
Fehler
alongtrack error 182
in Bahnhalbachse 183
FERRAZ-MELLO, SYLVIO 404
Feststofftriebwerk 168
FIEDLER, H. 388
Flächenparameter 470
Flächensatz 5, 30
Fluchtgeschwindigkeit 192
Flugrichtungswinkel 256

Fourierentwicklung 416
*Fourier*zerlegung 420
FRENET, F. J.
  Frenetsche Formeln der Astrodynamik 127
frozen orbit 171
GACKSTATTER, F. H. 394
Galileo, Jupitersonde 199
GARFINKEL, BORIS 404, 431
GAUSS, C. F. 8, 71, 342
  erste Gleichung 66
  Gaußsche Gleichung 344
  Methode der kleinsten Quadrate 363
  Sektor zu Dreiecksverhältnis 66
  zweite Gleichung 66
GEDEON, G. S. 404
Geschwindigkeit
  asymptotische 191, 201
  charakteristische 173
  Flucht- 192
  parabolische 192
  radiale 104, 301
  radiale Geschwindigkeitskomponente 473
  Rest- 206
  transversale 104, 312
  transversale Geschwindigkeitskomponente 474
Geschwindigkeit in der Bahn 475
Geschwindigkeitsinkrement 149
Gezeitenkräfte 400
GIBBS, J. W.
  Bahnbestimmung 346
  Herrick-Gibbs Gleichung 355
GILL, E. 184, 362, 365
GIORDANO, C. 231
Giotto, Kometensonde 197
GNSS 342, 362
  Global Navigation Satellite System 362
GORDON, R. A.
  Mittelung der regulären Elemente 423
Gravitationsbereich 218
Gravitationseffekt 149
Gravitationskonstante
  Gaußsche 7, 8
  Zahlenwert 7
Gravitationsmanöver 219
Gravitationsverlust 189
GYLDÉN, H. 32
Hamilton Funktion 127
Hamiltonfunktion
  der Delaunayelemente 132
  Hillschen Elemente 134
HANSEN, P. A. 113, 346, 406
  - System 261
  Bahnwinkel 7, 312
  Bahnwinkel, zweiter 144
  Hansen-System 5, 124, 139, 231, 322
  Hansen-Systeme 127
Harmonische 369
HARRIS, I. 385
Harris-Priester Modell 388
HARZER, P. 346
Hauptproblem 431
  der Satelliten- 431
HELIOS
  Sonnensonde 405
HELIOS A und B 404
HERGET, P. 342, 346
HERMANN, J.
  Hermannsche Lösung 2
  Hermannscher Vektor 3, 4, 263
HERRICK, SAMUEL 108, 113, 242, 346
  Herrick-Gibbs Gleichung 355
  universale Variable 231
Hillsche Gravitationssphäre 214, 218
HIPPARCOS 16
Hodograph 255
HOHMANN, W. 172
  Paradoxon 205, 210
  Transfer 172
  Übergangsbahnen 172
HOOTS, F. R. 91, 103, 104, 108, 362, 446, 523, 524
HORI, G. 431
hyperbolischer Exzess 191
Hypothesenrechnung 350
Identitäten 441, 446
Impuls
  1-Impuls-Verfahren 207, 210
  2-Impuls-Verfahren 207, 210
  Gravitationsverluste 189
  Zwei-Impuls-Übergangsbahnen 184
Impulssatz 11
Inklination 72
interplanetare Missionen 204
JACCHIA, L.G. 388
JACCHIA, L.G.
  71 Modell 386, 388
JACOBI, C. G. J.
  -Matrix 327
Jupiter 213
Jupitersonde 199
KALMAN, RUDOLF E.
  Kalman Filter 365
kanonisch
  Transformation 128
kanonische Elemente
  Delaunay Elemente 131, 132
  Poincaré Elemente 132
kanonische Variable 127
kanonisches System 127
Kegelschnitte
  aneinander gesetzte (patched conics) 220
KEPLER, J. 7, 253
  allgemeine Keplerbewegung 190
  Bahnelemente 63
  drittes Gesetz in der allgemeinen Keplerbewegung 7
  Elemente 135
  exzentrische Anomalie 236
  inverses Keplersches Problem 2
  Keplerbewegung 1, 427
  Keplerbewegung, allgemeine 4, 196
  Keplerelemente 428, 432, 440

Keplerformeln 83, 85, 97, 187, 441, 446
Keplergleichung 84, 406, 441, 446, 447
Keplersches Gesetz
erstes 3
zweites 3
mittlere Bewegung 6
Paradoxon 203
zweites Gesetz 3
Keplerbewegung 1
in universaler Darstellung 231
Keplersche Gesetze 2
KING-HELE, D. G. 372, 431
KIRSCHNER, MICHAEL 386, 392
KLINKRAD, H. 390
Koeffizient
ballistischer 384
Koeffizienten
Amplituden- 371
harmonische 369
Potential- 369
sektorale Harmonische 372
tesserale Harmonische 372
vollständig normierte harmonische 369
zonale Harmonische 372
Kollisionskorridor 194, 200
Kollisionsradius 194
Komet 210
Kometensonde 197
Kommensurabilität 404
Koordinatensystem
Leibniz- 133
mitbewegtes Bahn- 133
Kovarianzanalyse 365
Kovarianzmatrix 329
KOZAI, Y. 431
KROTSCHEK, E. 405
KRYLOW, N. M. 414
KS-Matrix 272
KS-Transformation 272
KUGA, HELIO KOITI 365
Kugelfunktion 369
Kugelfunktionen
allgemeine 373
zonale 372
KUNDT, W. 405
KUSTAANHEIMO, P. E. 346, 360
Erstbahnbestimmung 347
KWOK, J. H. 390
Lageregelungseinflüsse 403
LAGRANGE, J. L. 4, 32, 50, 59, 78, 254, 343
Anfangswertproblem 231
Gleichung 8ten Grades 344
Koeffizienten 348
Librationspunkte 32
LAMBERT, J. H. 64, 346
Länge
mittlere 90
wahre 325
Längenfehler 182
langsame Winkelvariable 415
LAPLACE, P. S. 19, 219, 369
Erstbahnbestimmung 343
zweiter Laplacescher Vektor 263
Lebensdauer
von Erdsatelliten, Abschätzungen 390
LEGENDRE, A. M.
Methode der kleinsten Quadrate 363
Legendre-Polynome 372
zugeordnete 373
LEIBNIZ, G. W.
Gleichung 234
Gleichung in gestörter Zweikörperbewegung 244
Leibniz Raum 3
Leibniz-System 133, 138
Leibniz-Systeme 127
Lense-Thirring Effekt 402
LEVI-CIVITÀ, T.
-Matrix 266
Parameterraum 263
Librationspunkte 32
im eingeschränkten Dreikörperproblem 37
im Sonnensystem 37
Linearisierung
der Zweikörperbewegung 269
LOVE, AUGUSTUS EDWARD HOUGH
Love Zahlen 401
LUBOWE, A. G. 431
LUGINBUHL, ROBERT 365
LYDDANE, R. H. 421, 424, 440, 446, 463, 465
Elemente 135
MAPLE 408
Mars 214
Monde 214
matched conics 201, 220
Matrix
Basiswechsel- 327
Jacobi 327
Kovarianz- 329
MERSON, R. H. 431
MERTON, G.
Mertonscher Vektor 70
Meteoroid 199, 210
MITROPOLSKY, J. A. 414
Mittelpunktsgleichung 16
Mittelung
ohne Bahnmodell 420
über mittlere Anomalie 418
Mittelung der Elemente
Verfahren von Eckstein, M. C. 421
Verfahren von Gordon, R. A. 423
Verfahren von Walter, H. G. 422
Mittelwertmethode 416
mittlere Anomalie 74
mittlere Bewegung 73
mittlere Epocheanomalie 74
mittleres Argument der Breite 74
MODI, V. J. 398
MOIVRE, ABRAHAM DE
Formeln der Goniometrie 265
Mond
Attraktionssphäre 213

MUSEN, PETER 113, 139
Neigung 434
  kritische 59, 434, 440
NEWTON, I. 254
  Inverses Newtonsches Problem 2
  Newton-System 127
nichtgravitative Beschleunigungen
  Poynting-Robertson-Effekt 402
  Yarkowski-Effekt 402
OLBERS, W.
  Bahnbestimmung der Kometen 346
OPPOLZER, TH. von 346
Oskulation 2
Paradoxon
  Hohmannsches 205, 210
  Keplersches 203
  kosmonautisches 204
  Pirquetsches 204
Parameter
  der Hyperbel 194
  der Kegelschnittbewegung 469
Parameterraum 253
  der elliptischen Bewegung 253
  Hodograph 255
  LEVI-CIVITÀ, T. 263
Parametervektor 3
Parkbahn 201, 203
patched conics 200, 211, 220
Perihel 201
Perizentrumsvektor 3
Phasenlagen 371
Phasenraum 274
PIRQUET, G. VON
  Paradoxon 204
Planet
  Kleiner 210, 214
Planetenhypothesen 253
POINCARÉ, J. H. 406
  Schnittebenen 274
Polynome
  Legendre- 372
  zugeordnete Legendre- (= adjungierte) 373
Positionselemente 103, 476
Potential 30
Potentialkoeffizienten 369
POYNTING, J. H. 403
Poynting-Robertson-Effekt 402
PRIESTER, W. 385
PTOLEMÄUS 253
quasiperiodisch 415
Quaternionen 273
Quinta Essentia 254
Raketengleichung 225
Referenzellipsoid 381
Reflektivitätsfaktor 480
Reflektivitätskoeffizient 395
Regularisierung 4, 234, 236
  zweiter Schritt 269
relativistischer Effekt erster Ordnung 400
Resonanz 404
retrograder Faktor 72, 90
ROBERTSON, H. P. 403
RODRIGUES, B. O.
  Euler-Rodrigues-Parameter 139
ROEHRICH, R. L. 362
Rosat 232
ROSBOROUGH, GEORGE W. 395
Rotationsellipsoid 431
Satellite Laser Ranging 361
Satellitenbahnanalyse 427, 429
Satellitenbewegung
  Hauptproblem der 431
Satellitengeodäsie 369
SCHATTEN, K. H. 386, 390
SCHNEIDER, M. 342
schnelle Winkelvariable 415
Schubkräfte 403
SCHUTZ, BOB E. 342
Schwerpunkt 29
Schwerpunktsatz 11
Sektor zu Dreiecksverhältnis 64
SGP4 363
SHIDA, T.
  Love Zahl l 401
Singularitätenfreiheit 59
SLR
  Satellite Laser Ranging 361
SOFIA, S. 386
SOKOLOV, V. G. 404
Solardruck 395
Solarflux 394
Solarkonstante 394
Sonnensegel 495
Sonnenwind 399
SOOP, E. M. 176, 342
SORENSEN, H. W. 365
Spurfehler 552
Sputnik III 391
Srörungsfunktion 132
Steigungswinkel 195
STIEFEL, E. 273
STIEFEL, EDUARD 413
Störbeschleunigung
  direkter Anteil 28
  effektive 114
  indirekter Anteil 29
Störbeschleunigungen 367
Störkräfte 367
Störterm 211
Störungen 427
  absolute 406
  allgemeine 406
  Einflussordnung 427
  periodische 427
  säkulare 427
  spezielle 406
  Störordnung 427
  Störungsrechnung 427
Störungsproblem 414
Störungsrechnung 367
Strahlungsdruck 394
  Wirkung auf Erde 397

STRUBLE, R. A. 127
STUMPFF, K. 342, 345, 347, 353
  c-Funktionen 231
  Hauptgleichung 240
  s-Funktionen 237
  Stumpffsche Funktionen 237, 348
  Uniformisierung 64
SUNDMANN, K.
  regularisierende Variable 234
SWERLING, PETER 365
Swing-by 149
Systemdynamik 274
TAPLEY, BYRON D. 342
Tisserand, F. 418
TISSERAND, F. 342
Transformation
  Element- 415
  fastidentisch 416
  kanonische 128
  konforme, der Levi-Cività Transformation 265
Transitionsmatrix 327
TSCHEBYSCHEFF, P. L.
  Approximation 237
Umlenkwinkel 195
ungestörtes Problem 414
Uniformisierung
  des Zweikörperproblems 64
VÄISÄLÄ, Y. 346, 353
VALLADO, DAVID A. 365, 395
VAN DER HA, J. C. 398
Variation der Parameter 59, 78
Vektor
  Exzentrizitäts- 467
  Geschwindigkeits- 149
  Hermannscher 110
  Laplacescher 110
  Perizentrums- 110
Venus 177
Verfahren
  1-Impuls- 207, 210
  2-Impuls- 207, 210
  matched conics 201
  patched conics 200, 211
VIETA, F. 265
  Identität 264
VILHENA, RODOLPHO, DE MORAES 398
VOLK, O. 32
VOLK, OTTO 406
VOP
  Variation der Konstanten (“variation of parameters“) 142
Vorzeichenregel 33
WAGNER, SESSIN 404
wahre Anomalie 73
WALKER, DOREEN, M. C. 404
WALTER, H. G. 276
  Mittelung der Kepler Elemente 422
Wärmeabstrahlung der Erde 399
Wärmeabstrahlung von Antennen 404
WERTZ, JAMES R. 398
Winkelvariable 415
Wirkungsbereich 214, 215
Yarkowski-Effekt 402
ZADUNAISKY, P. E. 231
  gestörte Zweikörperbewegung 242
ZEIPEL, H. VON 431
ZHONGOLOVITCH, I. D. 431
ZIOLKOWSKY, K. E. 204
  Raketengleichung 225
Zustandsraum 274
Zustandstransitionsmatrix 328
Zweikörperbewegung 9, 24, 114, 159, 186
  absolute 12
Zweikörperproblem 342, 427
  eingeschränktes 10
  Keplerbewegung 427
  Schwerpunktsatz 11