

# Mehrgitter-Verfahren für DG Finite-Elemente-Diskretisierungen von turbulenten Strömungen

Marcel Wallraff, Tobias Leicht  
DLR Braunschweig (AS - C<sup>2</sup>A<sup>2</sup>S<sup>2</sup>E)



Wissen für Morgen

# Motivation

- Heutige CFD Löser basieren zum grössten Teil auf Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung.
- Verfahren höherer Ordnung versprechen höhere Genauigkeit und Effizienz.



# Motivation

- Heutige CFD Löser basieren zum grössten Teil auf Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung.
- Verfahren höherer Ordnung versprechen höhere Genauigkeit und Effizienz.
  - Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren



# Motivation

- Heutige CFD Löser basieren zum grössten Teil auf Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung.
- Verfahren höherer Ordnung versprechen höhere Genauigkeit und Effizienz.
  - Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren
- Um Verfahren höherer Ordnung in der Praxis anwenden zu können, müssen alle Vorteile, die diese bieten, auch genutzt werden:

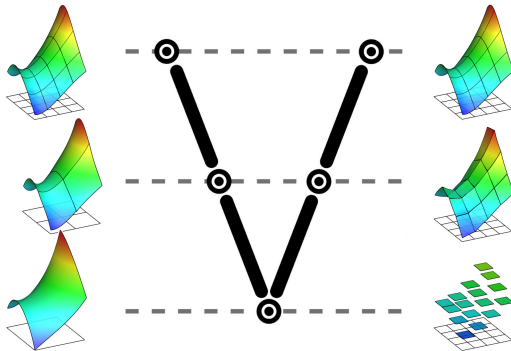


# Motivation

- Heutige CFD Löser basieren zum grössten Teil auf Finite Volumen Verfahren zweiter Ordnung.
- Verfahren höherer Ordnung versprechen höhere Genauigkeit und Effizienz.
  - Discontinuous Galerkin (DG) Verfahren
- Um Verfahren höherer Ordnung in der Praxis anwenden zu können, müssen alle Vorteile, die diese bieten, auch genutzt werden:
  - Jacobiblöcke sind lokal auf jeder Gitterzelle.
  - Keine besondere Behandlung für unstrukturierte Netze nötig.
  - Einfache  $h$ - und  $p$ -Adaption des Netzes ist möglich.
  - Hängende Knoten im Netz sind zulässig.



# Mehrgitter



# DG Diskretisierung

## *Basisfunktionen*

- nicht parametrische ortho-normale Basisfunktionen
- formuliert direkt im physikalischen Raum
- d.h. keine Nutzung von Referenzelementen



# DG Diskretisierung

## *Basisfunktionen*

- nicht parametrische ortho-normale Basisfunktionen
- formuliert direkt im physikalischen Raum
- d.h. keine Nutzung von Referenzelementen

## *RANS Gleichungen*

- zweites Schema von Bassi und Rebay (BR2) für die viskosen Terme
- Roe-Fluss für die konvektiven Terme





# DG Diskretisierung

## *Basisfunktionen*

- nicht parametrische ortho-normale Basisfunktionen
- formuliert direkt im physikalischen Raum
- d.h. keine Nutzung von Referenzelementen

## *RANS Gleichungen*

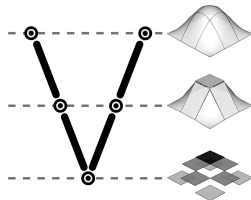
- zweites Schema von Bassi und Rebay (BR2) für die viskosen Terme
- Roe-Fluss für die konvektiven Terme

## *Turbulenzmodell*

- $k\omega$ -Zweigliedungsmodell
- Spalart-Allmaras-Eingleichungsmodell (2012)



# Nichtlineares Mehrgitter



Hierarchie von linearen Funktionenräumen

$$\mathbf{V}_{l_{\min}} \subset \mathbf{V}_{l_{\min}+1} \subset \dots \subset \mathbf{V}_{l_{\max}-1} \subset \mathbf{V}_{l_{\max}}$$

$$\mathbb{R}^{n_{l_{\min}}} \quad \mathbb{R}^{n_{l_{\min}+1}} \quad \dots \quad \mathbb{R}^{n_{l_{\max}-1}} \quad \mathbb{R}^{n_{l_{\max}}}$$

Transfer-Operatoren:

➤ Der Prolongations-Operator ist die natürliche Injektion:

$$I'_{l-1} : \mathbb{R}^{n_{l-1}} \rightarrow \mathbb{R}^{n_l}$$

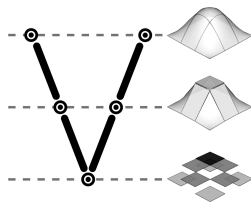
➤ Restriktions-Operator:  $I_l'^{-1} := \left( I'_{l-1} \right)^T$

Das nichtlineare Mehrgitter benötigt ausserdem:

➤ Restriktion des nichtlinearen Lösungsvektors:  
Orthogonale  $L^2$ -Projektion  $\hat{I}_l'^{-1}$  in den Raum  $\mathbf{V}_{l-1}$



# Nichtlineares Mehrgitter



Sei das nichtlineare Problem auf dem höchsten Level  $l_{\max}$  definiert als:

$$\mathbf{L}_{l_{\max}}(\mathbf{u}_{l_{\max}}) = \mathbf{f}_{l_{\max}}.$$

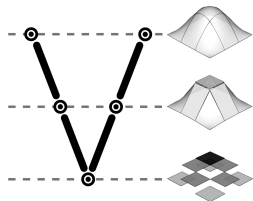
- Restriktion der Lösung  $\mathbf{u}_{l-1} := \hat{l}'_{l-1} \mathbf{u}_l$
- Berechnung der neuen rechten Seite für das gröbere Level:

$$\mathbf{f}_{l-1} \leftarrow \mathbf{f}_{l-1} + l'^{-1}_l (\mathbf{f}_l - \mathbf{L}_l(\mathbf{u}_l)) - (\mathbf{f}_{l-1} - \mathbf{L}_{l-1}(\mathbf{u}_{l-1}^0))$$

- Galerkin-Transfer für die Jacobimatrix:  $\underline{\mathbf{R}}_{l-1} = l'^{-1}_l \underline{\mathbf{R}}_l l'_l$



# Nichtlineare Glätter / Löser



## Glätter / Löser

### ➤ Backward-Euler-Verfahren

➤ Löse  $[(\alpha_j \Delta t)^{-1} \underline{M} + \underline{R}_j] (\mathbf{u}_{l,j} - \mathbf{u}_{l,j-1}) = [\mathbf{f}_j - \mathbf{L}_j(\mathbf{u}_{l,j-1})]$ ,

➤ wobei  $\underline{R}_j$  die volle implizite Jacobimatrix,  $\underline{M}$  die Massematrix und  $\mathbf{u}_{l,j}$  der Lösungsvektor, mit  $\mathbf{u}_{l,j} \in \mathbf{V}_l \forall j \in \mathbb{N}$ , sind.

### ➤ Verwendung eines lokalen Pseudo-Zeitschritts und einer adaptiven CFL-Zahl-Steuerung

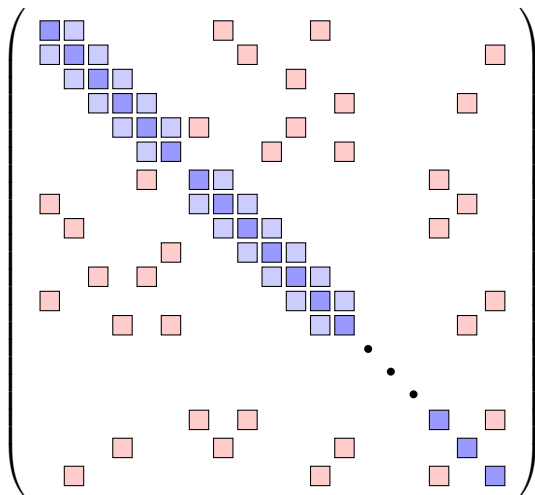


# Linearer Glätter / Löser

- Krylov-Verfahren als linearer Löser (GMRES Methode)
- Linien-Jacobi-Verfahren als Vorkonditionierer / Glätter im linearen Mehrgitter
  - Sei  $\mathcal{L}_{l,k}(\mathbf{u}_{l,k}) = \mathbf{f}_{l,k}$  das lineare Problem auf Linie  $k$ ,
  - Löse  $\delta \mathbf{u}_{l,k,j} := \mathbf{u}_{l,k,j} - \mathbf{u}_{l,k,j-1} = \mathbf{R}_{l,k}^{-1}(\mathbf{f}_{l,k} - \mathcal{L}_{l,k} \mathbf{u}_{l,k,j-1})$
  - $\mathbf{u}_{l,k,j} := \mathbf{u}_{l,k,j-1} + \delta \mathbf{u}_{l,k,j}$ ,
  - wobei  $\mathbf{R}_{l,k}^{-1}$  die Inverse der Jacobimatrix auf Linie  $k$  ist.



# Jacobi-/ System-Matrix Struktur



*Matrix-Blöcke*

- Element-Diagonale
- Linien-Nachbar
- Nicht-Linien-Nachbar



# Lösungsverfahren

## *Mögliche Löservarianten*

- Ein-Level Backward-Euler-Verfahren
- Netz- oder Ordnungs-Sequenzierung zur Verbesserung der Startlösung auf dem höchsten Level
- Lineares MG als Vorkonditionierer
- Nichtlineares MG zur Beschleunigung des Löser in der Pseudo-Zeit
- Nichtlineares MG mit einem linearen MG auf jedem Level



# Wahl der Parameter für das nichtlineare Problem

## *Nichtlineares Mehrgitter*

- V-Zyklus
- je ein Vor- und Nach-Glättersschritt auf jedem Level
- ein Glättersschritt auf dem niedrigsten Level
- Backward-Euler-Verfahren als Glätter
- SER-Zeitschritt-Steuerung für das Backward-Euler-Verfahren
- Galerkin-Transfer, um die Jacobimatrix auf den unteren Leveln zu erhalten





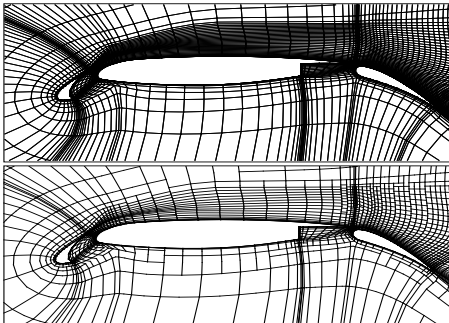
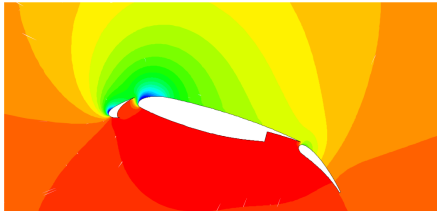
# Wahl der Parameter für das lineare Problem

Parameter für das Lösen der linearen Probleme, welche aus dem Backward-Euler-Verfahren auf jedem Level resultieren:

- GMRES-Verfahren mit fester Anzahl an (maximalen) Schritten
- Lineares Mehrgitter als Vorkonditionierer für das GMRES-Verfahren
- Vier Glätterschritte auf jedem Level
- Linien-Jacobi-Verfahren als Glätter
- Galerkin-Transfer, um die Matrizen auf den unteren Leveln zu erhalten



## MDA 30P-30N - 2D Hochauftriebsprofil

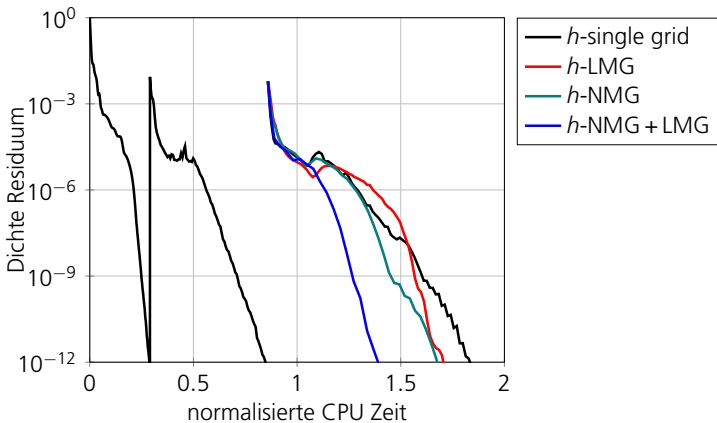


- Mach: 0.2
- Reynolds-Zahl:  
9,000,000
- $\alpha = 16^\circ$
- Testfall des "2nd International Workshop on High-Order CFD Methods" (2013)



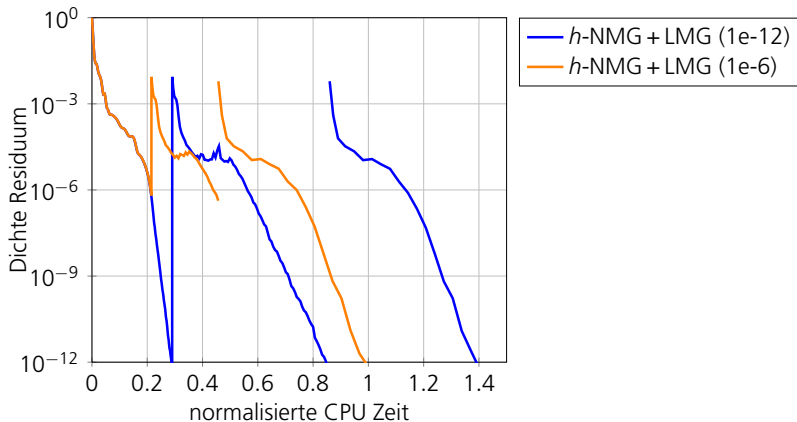
# MDA 30P-30N

Lösung der RANS- $k\omega$  Gleichungen.



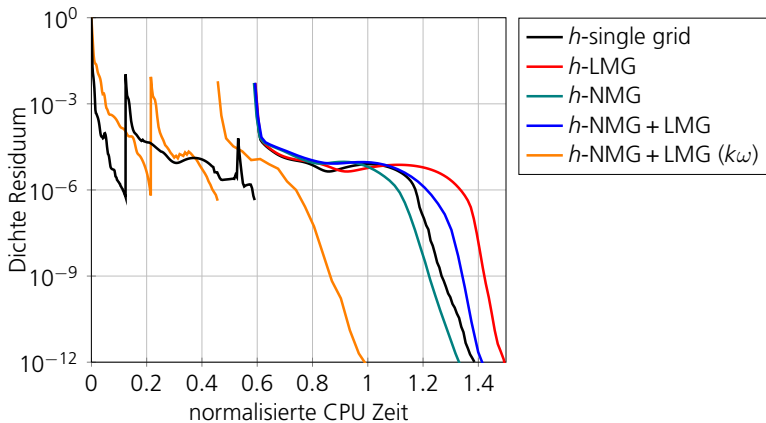
# MDA 30P-30N

Lösung der RANS- $k\omega$  Gleichungen.



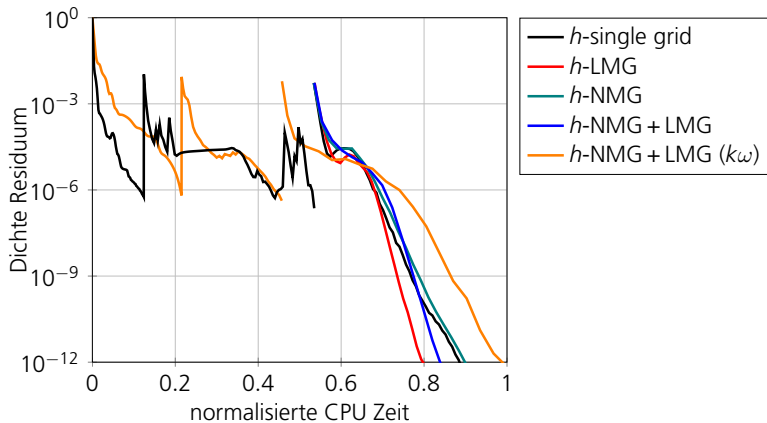
# MDA 30P-30N

Lösung der RANS-SA Gleichungen.



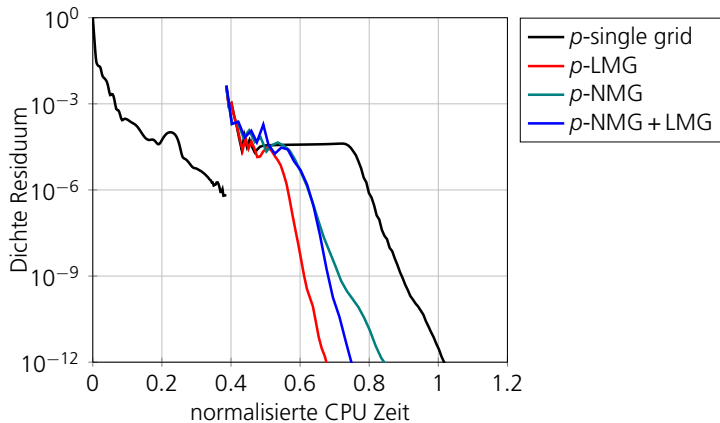
# MDA 30P-30N

Lösung der RANS-SA Gleichungen.



# MDA 30P-30N

Lösung der RANS-SA Gleichungen.



# Zusammenfassung

- Gezeigte Algorithmen wurden entwickelt zur Lösung der RANS- $k\omega$  Gleichungen.
- Diese Algorithmen liefern auch gut Ergebnisse für die RANS-SA Gleichungen.
- Anpassung der Optimalen Start-CFL-Zahl für gleiche Performanz.
- Das Lineare Mehrgitter scheint die besten Ergebnisse zu liefern für diesen Testfall in Kombination mit den RANS-SA Gleichungen.
  - Untersuchungen zur Robustheit des Lösers im RANS-SA Fall werden folgen.

