

R  
7

Der Kompressibilitätseinfluss nach der Prandtl'schen  
Regel.

Übersicht: Der Kompressibilitätseinfluss bei ebener, adiabatischer kompressibler Potentialströmung lässt sich nach einer linearisierten Theorie verschieden berechnen, je nachdem ob man die Geschwindigkeit, die Stromdichte oder den Druck betrachtet. Bei der Anwendung auf flache, zugespitzte Profile, bei denen man nur geringe Abweichungen von einer Parallelströmung hat, ergeben sich voneinander wenig abweichende Resultate. Nun wird aber oft der Kompressibilitätseinfluss bei Tragflügeln auch nach der linearisierten Theorie gerechnet, wobei die Dicke und der Anstellwinkel manchmal beträchtlich sind. Im vorliegenden Artikel wird untersucht, welche Fassung der Linearisierung in dem Falle die brauchbarsten Resultate liefert.

- Gliederung:
1. Die Grundgleichungen.
  2. Die Mach'sche Zahl.
  3. Stromdichte und Geschwindigkeit.
  4. Druckgleichungen.
  5. Linearisierung der Gleichungen der Potentialfunktion und der Stromfunktion.
  6. Druckberechnungen nach der Prandtl'schen Regel.
  7. Anwendung der aus der linearisierten Theorie gewonnenen Regel auf dicke Körper.
  8. Zusammenfassung.

Der Bericht umfasst:  
22 Seiten Text und  
6 Zeichnungen.

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GÖTTINGEN E.V.  
Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Leiter

*H. F. Riegels*

Der Bearbeiter

*E. Krahn*

3325

### 1. Grundgleichungen.

Es sollen zuerst Gleichungen zwischen den verschiedenen Bezugsgrößen angegeben werden, die im Folgenden Verwendung finden. Um diese Beziehungen herzuleiten, seien die Grundgleichungen der kompressiblen ebenen adiabatischen Potentialströmung angegeben.

Es gelten hier die Bernoullische Gleichung

$$\frac{1}{2}(w^2 - \bar{w}^2) + \int_p^p \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (1)$$

Die Zustands- oder Adiabatengleichung

$$\frac{p}{\rho} = \left(\frac{p}{\rho}\right)^\kappa \quad (2)$$

und der Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (3)$$

wo  $w$  die Geschwindigkeit,  $p$  den Druck,  $\rho$  die Dichte,  $\kappa$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen,  $c$  die Schallgeschwindigkeit ist und die überstrichenen Buchstaben zusammengehörige Werte der betreffenden Größen bezeichnen.

Aus (3) erhält man mit Hilfe von (2)

$$c^2 = \kappa \frac{p}{\rho} \quad (4)$$

und aus (1) unter Berücksichtigung von (2) und (4)

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 - \frac{\kappa-1}{2c^2}(w^2 - \bar{w}^2) \quad (5)$$

oder

$$\frac{p}{\rho} = \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \cdot \frac{1}{c^2}(w^2 - \bar{w}^2)\right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (6)$$

Aus (4) und (2) findet man

$$\frac{c^2}{\bar{c}^2} = \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^{\kappa-1} \quad (7)$$

und daraus unter Berücksichtigung von (6)

$$c^2 = \bar{c}^2 - \frac{\kappa-1}{2} (w^2 - \bar{w}^2) \quad (8)$$

Indem man hier für  $\bar{c}$  einmal  $c_0$  - die Schallgeschwindigkeit im ruhenden Gas - und für  $\bar{w}$  null setzt und ein anderes Mal für die überstrichenen Grössen  $c_\infty$  - die der Anströmgeschwindigkeit entsprechende Schallgeschwindigkeit - und die Anströmgeschwindigkeit  $U$  in Richtung der x-Achse setzt und einen Ausdruck vom anderen abzieht, erhält man

$$c_\infty^2 = c_0^2 - \frac{\kappa-1}{2} U^2 \quad (9)$$

Ebenso erhält man aus (8)

$$c_0^2 = \frac{\kappa+1}{2} c^{*2} \quad (10)$$

wo  $c^*$  die kritische Schallgeschwindigkeit  $c^* = w^*$  bedeutet, und folglich

$$c_\infty^2 = \frac{\kappa+1}{2} c^{*2} - \frac{\kappa-1}{2} U^2 \quad (11)$$

## 2. Die Machsche Zahl.

Es ist üblich, das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit und Schallgeschwindigkeit als Machsche Zahl zu bezeichnen. Nun kommen hier verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten - die örtliche  $w$  und die Anströmgeschwindigkeit  $U$  - in Betracht, ebenso verschiedene Schallgeschwindigkeiten:  $c$ ,  $c_0$ ,  $c_\infty$ ,  $c^*$ . Da keine Einheitlichkeit im Gebrauch dieser Quotienten herrscht und alle unter dem Namen Machsche Zahl Verwendung finden, so sei

hier der Zusammenhang zwischen den gebräuchlichsten dieser Zahlen dargestellt.

Wir bezeichnen

$$\frac{w}{c} = Ma \quad \frac{w}{c^*} = Ma^* \quad \frac{U}{c_0} = Ma_0 \quad \frac{U}{c_\infty} = Ma_\infty \quad \frac{U}{c^*} = \overline{Ma}^* \quad (12)$$

Es ist dann, wie man mit Hilfe der Gleichungen (8), (9), (10), (11) leicht findet

$$Ma_0^2 = \frac{Ma_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2} = \frac{2}{\kappa+1} \overline{Ma}^{*2} \quad (13)$$

$$Ma_\infty^2 = \frac{Ma_0^2}{1 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_0^2} = \frac{\overline{Ma}^{*2}}{\frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa-1}{2} \overline{Ma}^{*2}} \quad (14)$$

$$\overline{Ma}^{*2} = \frac{\kappa+1}{2} Ma_0^2 = \frac{\frac{\kappa+1}{2} Ma_\infty^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2} \quad (15)$$

$$Ma^2 = \frac{Ma^{*2}}{\frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa-1}{2} Ma^{*2}} = \frac{Ma_0^2 \left(\frac{w}{U}\right)^2}{1 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_0^2 \left(\frac{w}{U}\right)^2} = \frac{Ma_\infty^2 \left(\frac{w}{U}\right)^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 \left(1 - \frac{w^2}{U^2}\right)} = \frac{\overline{Ma}^{*2} \left(\frac{w}{U}\right)^2}{\frac{\kappa+1}{2} - \frac{\kappa-1}{2} \overline{Ma}^{*2} \left(\frac{w}{U}\right)^2} \quad (16)$$

$$Ma^{*2} = \frac{\frac{\kappa+1}{2} Ma^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma^2} = \frac{\frac{\kappa+1}{2} Ma_0^2 \left(\frac{w}{U}\right)^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_0^2 \left(\frac{w}{U}\right)^2} = \frac{\frac{\kappa+1}{2} Ma_\infty^2 \left(\frac{w}{U}\right)^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2} = \overline{Ma}^{*2} \left(\frac{w}{U}\right)^2 \quad (17)$$

Auf die Angabe weiterer Quotienten, wie z.B.  $\frac{w}{c_0}$ ,  $\frac{w}{c_\infty}$  und ihrer Beziehungen soll hier verzichtet werden.

Im Folgenden wird die Geschwindigkeit durch die Division mit der Anströmgeschwindigkeit dimensionslos gemacht und von den verschiedenen Machschen Zahlen wird hauptsächlich  $Ma_\infty$  benutzt.

### 3. Stromdichte und Geschwindigkeit.

Ist  $\psi$  die Stromfunktion und sind  $\psi_x$  und  $\psi_y$  ihre Ableitungen nach den rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $y$ , so ist die Geschwindigkeit

$$w = \frac{c_\infty}{S} \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} \quad (18)$$

Man bezeichnet

$$D = w \frac{c}{c_\infty} = \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2} \quad (19)$$

als Stromdichte. Hier soll der Zusammenhang zwischen Stromdichte und Geschwindigkeit angegeben werden. Die Stromdichte kann man durch Division mit der Anströmgeschwindigkeit dimensionslos machen. Aus (6) finden wir, wenn wir die überstrichenen Grössen auf den ungestörten Zustand der Anströmung beziehen,

$$\frac{S}{S_\infty} = \left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 \left[ \left( \frac{w}{u} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (20)$$

und indem wir diesen Ausdruck in (19) einsetzen

$$\frac{D}{u} = \frac{w}{u} \left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 \left[ \left( \frac{w}{u} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (21)$$

In Bild 1 ist dieser Zusammenhang zwischen Stromdichte und Geschwindigkeit für eine Reihe Machscher Zahlen aufgetragen. Die Konstante  $\kappa$  ist gleich 1,4 gesetzt. Auf jeder einzelnen Kurve zeigt der Punkt maximaler Stromdichte das Erreichen der Schallgeschwindigkeit an. Die Kurve, die die Punkte verbindet, in denen die Schallgeschwindigkeit  $c^* = w^*$  erreicht wird, ist eingezeichnet. Sie berechnet sich aus (21), indem man  $Ma_\infty$  nach (14) durch  $\overline{Ma}^* = \frac{u}{w^*}$  ersetzt, zu

$$\frac{D^*}{u} = \frac{\left( \frac{w^*}{u} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}{\left[ \frac{\kappa+1}{2} \left( \frac{w^*}{u} \right)^2 - \frac{\kappa-1}{2} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}} \quad (22)$$

Denselben Ausdruck erhält man, wenn man bei festem  $Ma_\infty$  das Maximum von  $D$  in Abhängigkeit von  $w$  bestimmt.

Es sei hier noch die kritische Schallgeschwindigkeit und die kritische Stromdichte in Abhängigkeit von  $Ma_\infty$  angegeben.

$$\left. \begin{aligned} \frac{w^*}{u} &= \frac{1}{Ma_\infty} \cdot \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2}{\frac{\kappa+1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\rho^*}{u} &= \frac{1}{Ma_\infty} \cdot \left( \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2}{\frac{\kappa+1}{2}} \right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

#### 4. Druckgleichungen.

Aus der Gleichung (5) erhält man, wenn man die überstrichenen Grössen auf den Zustand in der ungestörten Parallelströmung bezieht und den diesem Zustande entsprechenden Druck mit  $p_\infty$  bezeichnet,

$$\frac{p}{p_\infty} = \left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 \left[ \left( \frac{w}{u} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (24)$$

Daraus soll nun der Ausdruck

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u^2}$$

abgeleitet werden, der gewöhnlich bei Messungen angegeben wird.

$\rho_\infty$  bedeutet dabei die Dichte in der ungestörten Strömung. Mit Hilfe von (4) ergibt sich

$$\frac{1}{2} \rho_\infty u^2 = \frac{1}{2} \kappa \frac{p_\infty}{c_\infty^2} u^2 = \frac{\kappa}{2} p_\infty Ma_\infty^2 \quad (25)$$

und damit aus (24)

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u^2} = \frac{2}{\kappa Ma_\infty^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_\infty^2 \left( \frac{w^2}{u^2} - 1 \right) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} \quad (26)$$

Anstatt den Ueber- oder Unterdruck auf den Staudruck ~~beziehen~~ (eine durch  $\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2$  definierte Rechengrösse) zu beziehen kann man ihn auch auf den Ueberdruck im Staupunkt  $p_0 - p_{\infty}$  beziehen. Mit  $w = 0$  erhalten wir aus (25)

$$\frac{p_0 - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2} = \frac{2}{\kappa Ma_{\infty}^2} \left\{ \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_{\infty}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\} \quad (27)$$

und daher

$$\frac{p - p_{\infty}}{p_0 - p_{\infty}} = \frac{\left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} Ma_{\infty}^2 \left[ \left( \frac{w}{U} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1}{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_{\infty}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1} \quad (28)$$

Wie man aus (27) sieht, geht das Verhältnis von  $p_0 - p_{\infty}$  zu  $\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2$  gegen 1, wenn  $Ma_{\infty}$  gegen null geht. Die beiden Grössen werden sich aber umso mehr voneinander unterscheiden, je grösser die Machsche Zahl der Anströmung  $Ma_{\infty}$  ist. Formel (27) liefert z.B. mit  $\kappa = 1,4$  für  $Ma_{\infty} = 0,5$   $\approx 1,064$  und für  $Ma_{\infty} = 1$   $1,276$ .

In Bild 2 ist der Ausdruck (26) aufgetragen, in Bild 3 der Ausdruck (28).

### 5. Linearisierung der Gleichungen der Potentialfunktion und der Stromfunktion (Prandtl'sche Regel).

Die Potentialfunktion der zweidimensionalen kompressiblen Strömung genügt der Gleichung

$$\left( 1 - \frac{U^2}{c^2} \right) \varphi_{xx} - 2 \frac{U_x U_y}{c^2} \varphi_{xy} + \left( 1 - \frac{U_y^2}{c^2} \right) \varphi_{yy} = 0, \quad (29)$$

wo die mit den Indices versehenen Buchstaben partielle Ableitungen nach den entsprechenden Variablen bedeuten. Wenn die Strömung sich wenig von einer Parallelströmung in Richtung der x-Achse mit der Geschwindigkeit U unterscheidet (spitzes, flaches, wenig angestelltes Profil), so kann man näherungsweise

$$\varphi_x = U \quad \varphi_y = 0 \quad c = c_{\infty}$$

setzen und erhält

$$(1 - Ma_\infty^2) \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0. \quad (30)$$

Durch die Transformation

$$x_1 = x \quad y_1 = y \sqrt{1 - Ma_\infty^2} \quad (31)$$

geht sie in

$$\psi_{x_1 x_1} + \psi_{y_1 y_1} = 0 \quad (32)$$

über.

Setzt man die Lösung der Gl. (32) als bekannt voraus, so erhält man die Lösung von (30), indem man das Potentiallinienfeld in Richtung der  $y$ -Achse  $\frac{1}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}$  mal ausdehnt. Waren die Potentiallinien in der nichtzusammendrückbaren Flüssigkeit ( $x, y$ -Ebene) senkrecht zu einem dort gegebenen Profil, so werden sie nach der Transformation in der zusammendrückbaren Flüssigkeit zu einem anderen Profil senkrecht stehen, das aus dem Profil in der nichtzusammendrückbaren Flüssigkeit durch näherungsweise  $\sqrt{1 - Ma_\infty^2}$ -malige Verkürzung in Richtung der  $y$ -Achse entsteht.

Die Stromfunktion  $\psi$  genügt der Gleichung

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \frac{c_\infty^2}{c^2} \cdot \frac{1}{c^2} (\psi_y^2 \psi_{xx} - 2 \psi_x \psi_y \psi_{xy} + \psi_x^2 \psi_{yy}) \quad (33)$$

Man kann die Gleichungen (29) und (33) in einer Form schreiben, dass sie sich äußerlich weniger voneinander unterscheiden, wenn man die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  der Strömung in  $x$ - und  $y$ -Richtung benutzt

$$u = \psi_x = \frac{c_\infty}{c} \psi_y \quad v = \psi_y = - \frac{c_\infty}{c} \psi_x \quad (34)$$

Man hat dann

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = \frac{1}{c^2} (u^2 \psi_{xx} + 2uv \psi_{xy} + v^2 \psi_{yy}) \quad (35)$$

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = \frac{1}{c^2} (u^2 \Psi_{xx} + 2uv \Psi_{xy} + v^2 \Psi_{yy}) \quad (36)$$

Unter denselben Voraussetzungen, unter denen (30) aus (29) abgeleitet wurde, kann man hier näherungsweise

$$\rho = \rho_\infty \quad \psi_y = U \quad \psi_x = 0 \quad c = c_\infty$$

setzen und erhält anstatt (33) die linearisierte Gleichung

$$(1 - Ma_\infty^2) \psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (37)$$

Durch die Transformation (31) geht diese Gleichung in

$$\Psi_{x_1 x_1} + \Psi_{y_1 y_1} = 0 \quad (38)$$

über.

Es ist dann

$$\Psi_y = \Psi_{y_1} \sqrt{1 - Ma_\infty^2} \quad (39)$$

und dabei ist die Anströmgeschwindigkeit  $U_1$  in der  $x_1, y_1$ -Ebene

$$U_1 = \frac{U}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}} \quad (40)$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit der inkompressiblen Strömung in Anströmungsrichtung um das flachere Profil bei der Anströmgeschwindigkeit  $U$  mit  $u_i$ , so ist

$$\frac{\Psi_{y_1}}{U_1} = \frac{u_i}{U} \quad (41)$$

Aus (39), (40) und (41) hat man

$$\frac{\psi_2}{u_2} = \frac{\psi_1}{u_1} = \frac{u_1}{u_2} \quad (42)$$

Da die Betrachtung für flache Profile durchgeführt wurde und  $\psi_2 = 0$  gesetzt wurde, so kann man  $\psi_1$  als Stromdichte bezeichnen und  $u_1$  als Geschwindigkeit am flacheren Profil. (42) kann man dann so deuten, dass die Stromdichte der kompressiblen Strömung gleich der Geschwindigkeit (Stromdichte) der inkompressiblen Strömung um ein  $\sqrt{1-Ma_\infty^2}$  mal flacheres Profil mit  $\sqrt{1-Ma_\infty^2}$  mal kleineren Anstellwinkel ist, wobei die Anströmgeschwindigkeit in beiden Fällen dieselbe ist.

Es sei hier darauf hingewiesen, dass die so erhaltene Lösung natürlich keine exakte Lösung der Gleichung (37) ist. Auch die vorhin bei Betrachtung der Potentialfunktion angegebene Regel, dass die Strömungsgeschwindigkeit im Kompressiblen gleich der Strömungsgeschwindigkeit im Inkompressiblen um ein dickeres Profil ist, stellt keine exakte Lösung von (30) dar.

Auch kann man natürlich nicht erwarten, dass die aus der Gleichung der Potentialfunktion gefundene Näherungslösung mit der aus der Gleichung der Stromfunktion gefundenen Näherungslösung übereinstimmt, denn erstens sind bei der Linearisierung der beiden Gleichungen Glieder von verschiedener Bedeutung vernachlässigt, und zweitens sind von dem linearisierten Gl. (30) und (37) Näherungslösungen genommen, wobei die in beiden Fällen vernachlässigten Grössen nicht identisch sind.

Bei den nach der "Stromlinienanalogie" gefundenen Werten der Stromdichte ist zu beachten, dass man aus ihnen nicht die Geschwindigkeitswerte durch Multiplikation mit  $\frac{p_\infty}{\rho}$  erhält, sondern ~~führt~~ letzteren Ausdruck eine durch passende Linearisierung gefundene Grösse setzen muss, um zu vernünftigen Geschwindigkeitswerten zu kommen. Die Verhältnisse werden im Folgenden an Beispielen erläutert.

## 6. Druckberechnung nach der Prandtl'schen Regel.

Aus der linearisierten Potentialgleichung (30) kann man nach Prandtl <sup>1)</sup> auch einen Näherungsausdruck für die Druckunterschiede in der kompressiblen Strömung gewinnen, indem man die Druckgradienten in x-Richtung der kompressiblen Strömung und der inkompressiblen Vergleichsströmung vergleicht. Das Verhältnis beider ist, wenn man wieder die Zusatzgeschwindigkeiten im Verhältnis zur Anströmgeschwindigkeit vernachlässigt,

$\frac{1}{\sqrt{1-Ma^2}}$  . Daraus ergibt sich , dass

B " die Druckunterschiede der kompressiblen Strömung in erster Näherung um das  $\frac{1}{\sqrt{1-Ma^2}}$  -fache stärker sind als bei der Vergleichsströmung mit demselben (zugeschäfteten) Körper. Der Auftrieb steigt dann durch den Einfluss der Zusammendrückbarkeit ebenfalls in dem angegebenen Verhältnis (" Prandtl'sche Regel" ) " .

Die ursprüngliche Fassung <sup>2)</sup> besagt:

A " im Falle der kompressiblen Strömung ergeben sich dieselben Drucke wie in einer inkompressiblen von demselben Staudruck, bei der das umströmte Profil im Verhältnis  $a^2: \sqrt{a^2-u^2}$  überhöht ist (auch bezüglich Anstellwinkel). "

Im Folgenden sollen diese Regeln der Druckberechnung kurz mit A und B zitiert werden (die Buchstaben werden der chronologischen Reihenfolge gerecht).  $Ma$  steht hier für  $Ma_\infty$  und  $a^2: \sqrt{a^2-u^2}$

für  $\frac{1}{\sqrt{1-Ma^2}}$  .

## 7. Anwendung der aus der linearisierten Theorie gewonnenen Regeln auf dicke Körper.

Die angeführten Regeln zur Bestimmung von Geschwindigkeit, Stromdichte und Druck sind alle unter der Voraussetzung abge-

<sup>1)</sup> L. Prandtl: Führer durch die Strömungslehre. 1942. S. 263 .

<sup>2)</sup> Diskussionsbemerkung von Prof. Prandtl zu einem Vortrag von A. Busemann über Profilmessungen. Jahrb. d. Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt (WGL) 1928 , S. 99 .

leitet, dass die Strömungsgeschwindigkeit am Körper sich nach Grösse und Richtung nur wenig von der Anströmgeschwindigkeit unterscheidet, der in der Strömung befindliche Körper somit flach, spitz und nur wenig angestellt ist.

Nun ist es aber allgemein bekannt, dass der Kompressibilitätseinfluss bei Tragflügelprofilen, für die die gemachten Voraussetzungen nicht zutreffen, ebenfalls nach diesen Regeln berechnet wird und oft mit den Messungen ziemlich gut übereinstimmt.

Die Regeln für die Geschwindigkeit, Stromdichte und Druck ergeben bei Anwendung auf ein Profil, das den bei der Ableitung gemachten Voraussetzungen nicht entspricht, verschiedene Resultate. Es fragt sich nun, ob eine der angeführten Regeln zufällig so beschaffen ist, dass sie mit Erfolg auch noch auf solche Körper angewandt werden kann, für die die Ableitung der Rechenregel nicht gilt. Zu dem Zwecke sollen hier die verschiedenen Fassungen auf einen elliptischen Zylinder von dem Achsenverhältnis 0,1 und auf den Kreiszylinder angewandt werden und die Resultate mit genaueren Rechnungen verglichen werden.

a) Elliptischer Zylinder vom Achsenverhältnis 0,1 mit der langen Achse in Stromrichtung.

Die Geschwindigkeit der inkompressiblen Strömung bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit ist, wenn wir das Achsenverhältnis mit  $d$  bezeichnen,

$$\frac{(1+d) \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + d^2 \cos^2 \theta}} \quad (43)$$

wobei die Ellipse in der  $xy$ -Ebene durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= ad \sin \theta \end{aligned} \quad (44)$$

gegeben ist.

Die Maximalgeschwindigkeit (bezogen auf die Anströmgeschwindigkeit) in der inkompressiblen Strömung ist 1,1. Nach der

Regel, die aus der Verzerrung des Potentiallinienfeldes folgt, erhält man im Kompressiblen als Maximalgeschwindigkeit

$$\frac{w_{max}}{u} = 1 + \frac{0,1}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \quad (45)$$

Das ist die Maximalgeschwindigkeit im Inkompressiblen an einer Ellipse vom Achsenverhältnis  $\frac{0,1}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}}$ .

Aus der Verzerrung des Stromlinienfeldes erhält man die Stromdichte

$$\frac{D_{max}}{u} = 1 + 0,1 \sqrt{1 - Ma_{\infty}^2} \quad (46)$$

und dazu kann man aus Bild 1 die zugehörige Geschwindigkeit ablesen oder, um brauchbarere Werte zu erhalten, für  $\frac{D_{\infty}}{S}$  durch Linearisierung erhaltene Näherungswerte, wie z.B. <sup>1)</sup>

$$\frac{D_{\infty}}{S} = 1 + \frac{Ma_{\infty}^2}{2(1 - Ma_{\infty}^2)} \left[ \left( \frac{D}{D_{\infty}} \right)^2 - 1 \right] \quad (47)$$

setzen, wo D die Stromdichte (Geschwindigkeit) am flacheren Profil im Inkompressiblen ist.

Aus der Prandtlschen Regel für die Druckbestimmung erhält man nach Fassung A, wenn man unter Staudruck die Rechengröße  $\frac{1}{2} \rho_{\infty} u^2$  versteht,

$$A_1 \quad \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} u^2} = 1 - \left( 1 + \frac{0,1}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \right)^2 \quad (48)$$

oder, wenn man unter Staudruck den Ueberdruck im Staupunkte versteht,

$$A_2 \quad \frac{p - p_{\infty}}{p_0 - p_{\infty}} = 1 - \left( 1 + \frac{0,1}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \right)^2 \quad (49)$$

Wendet man die Fassung B an, so erhält man entsprechend

<sup>1)</sup> Es sind die ersten Glieder einer bei Hantzsche und Wendt ZAMM Bd.22 (1942) S.73 angegebenen Reihenentwicklung.

$$B_1 \quad \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2} = \frac{1 - 1,1^2}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \quad (50)$$

und

$$B_2 \quad \frac{p - p_{\infty}}{p_0 - p_{\infty}} = \frac{1 - 1,1^2}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \quad (51)$$

Aus Bild 2 und Bild 3 kann man dazu die zugehörigen Geschwindigkeiten ablesen.

Von den angegebenen Ausdrücken abweichend wird die Prandtl'sche Regel von B. Göthert <sup>1)</sup> in folgender Form angegeben:

"Das Stromlinienfeld einer zu berechnenden kompressiblen Strömung kann mit dem Stromlinienfeld einer inkompressiblen Strömung verglichen werden, die durch Zusammenziehen der y- und z-Achsen einschliesslich der Profilkonturen um den Faktor  $\sqrt{1 - M^2}$  entstanden ist (x-Achse in Richtung der Anströmung). Bei der kompressiblen Ausgangsströmung sind nun die Drucke  $\frac{\Delta p}{\rho v_0^2}$  und die Störgeschwindigkeiten  $\frac{\Delta v_x}{v_0}$  im Verhältnis  $\frac{1}{1 - M^2}$  grösser als diejenigen in entsprechenden Punkten der inkompressiblen Vergleichsströmung."

M bedeutet hier die Grösse, die im vorliegenden Artikel mit  $Ma_{\infty}$  bezeichnet wird,  $\rho$  steht für  $\rho_{\infty}$  und  $v_0$  ist die Anströmgeschwindigkeit U.

Wendet man die auf den Druck bezügliche Fassung auf den elliptischen Zylinder vom Achsenverhältnis 0,1 an, so gibt das

$$\frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2} = \frac{1 - (1 + 0,1 \sqrt{1 - Ma_{\infty}^2})^2}{1 - Ma_{\infty}^2} \quad (52)$$

während die auf die Störgeschwindigkeit bezügliche Fassung in diesem Falle gibt

$$\frac{w - U}{U} = \frac{0,1 \sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}}{1 - Ma_{\infty}^2} \quad (53)$$

1) FB 1275

Letzterer Ausdruck stimmt mit (45) überein, braucht hier also nicht gesondert aufgeführt zu werden.

In der folgenden Tabelle sind Zahlenwerte der verschiedenen gerechneten Geschwindigkeiten angegeben

1	2	3	4	5	6	7	8	10	9
$\frac{v}{c}$ $Ma_{\infty}$	P	S	S	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	HuW	G
	(45)	(46) und Bild 1.	(46), (47)	(48)	(49)	(50)	(51)		(52)
0,5	1,115	1,13	1,120	1,12	1,125	1,12	1,12	1,118	1,12
0,6	1,125	1,14	1,131	1,13	1,139	1,13	1,14	1,131	1,13
0,7	1,140	1,18	1,148	1,15	1,163	1,14	1,16	1,151	1,14
0,75	1,151	1,28	1,160	1,16	1,181	1,15	1,17	1,166	1,15
0,8	1,167	—	1,177	1,18	1,201	1,17	1,20	1,189	1,17

Spalte 1 enthält die Machsche Zahl der Anströmung. Sie beginnt mit 0,5, da sich für kleinere Zahlen die verschiedenen Geschwindigkeitswerte nur wenig voneinander unterscheiden. Werte über 0,8 sind nicht angegeben, danach Hantzsche und Wendt die Schallgeschwindigkeit bei etwa 0,81 erreicht wird. In Spalte 2 ist die Geschwindigkeit nach der Potentiallinienanalogie laut Formel (45) angegeben. In Spalte 3 und Spalte 4 ist die Geschwindigkeit nach der Stromlinienanalogie angegeben, wobei zuerst die Stromdichte nach Formel (46) gerechnet ist und in Spalte 3 die zugehörige Geschwindigkeit aus Bild 1 abgelesen ist, in Spalte 4 die Stromdichte mit dem Näherungsausdruck (47) multipliziert ist. Die Spalten 5 bis 8 enthalten die Geschwindigkeiten, die aus den Bildern 2 und 3 abgelesen sind, wobei die Drucke entsprechend Formel (48) bis (51) bestimmt sind. Spalte 9 enthält die Geschwindigkeit, die aus dem Bild 2 auf Grund der Formel (52) entnommen ist. In Spalte 10 sind die Geschwindigkeiten nach der von Hantzsche und Wendt <sup>1)</sup> gerechneten zweiten Näherung eingetragen, wobei die Zahlenwerte dem Bild 3 der zitierten Arbeit entnommen sind. Diese sind wohl die besten bislang bekannten Geschwindigkeitswerte für den elliptischen Zylinder der Dicke 0,1 und sind hier wiedergegeben um an

<sup>1)</sup> ZAMM Bd. 22 (1942) S. 72.

ihnen die Güte der in den anderen Spalten gebrachten Näherungswerte zu messen.

Als ganz unbrauchbar für die Geschwindigkeitsbestimmung erweist sich Spalte 3, während die anderen Werte sich von Spalte 10 bis zu höchstens 2 o/o unterscheiden. Die Frage, welche Näherungsformel vorzuziehen ist, soll vorläufig noch offen bleiben, es sei nur darauf verwiesen, dass die Werte nach Spalte 6 und 8 etwas grösser sind, als nach Spalte 10.

Rechnet man sich die Drücke nach den verschiedenen möglichen Fassungen aus, so erhält man für den elliptischen Zylinder vom Achsenverhältnis 0,1

1	2	3	4	5	6
$Ma_{\infty}$	nach Formel (45), (48), (49)	nach (50), (51)	nach (52)	$\frac{p-p_{\infty}}{p_0-p_{\infty}}$ nach H. u. W.	$\frac{p-p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_0 U^2}$ nach H. u. W.
0,5	-0,2443	-0,2425	-0,2409	-0,2313	-0,2461
0,6	-0,2656	-0,2625	-0,2600	-0,2490	-0,2722
0,7	-0,2997	-0,2941	-0,2901	-0,2766	-0,3121
0,75	-0,3252	-0,3175	-0,3134	-0,2976	-0,3418
0,8	-0,3611	-0,3500	-0,3433	-0,3307	-0,3870

In Spalte 2 ist  $1 - \left(1 + \frac{0,1}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}}\right)^2$  eingetragen, in Spalte 3

$\frac{1 - 1,1^2}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}}$ , in Spalte 4  $\frac{1 - (1 + 0,1\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2})^2}{1 - Ma_{\infty}^2}$ , in Spalte 5

der nach der zweiten Näherung von Hantzsche und Wendt für die Geschwindigkeit mit Hilfe der Formel (28) gerechnete Unterdruck, in Spalte 6 dasselbe nach Formel (26).

#### b. Kreiszyylinder.

Es soll jetzt untersucht werden, was die verschiedenen Berechnungsarten bei der Anwendung auf den Kreiszyylinder angeben. Dabei wird die Geschwindigkeitsverteilung an der Oberfläche des Kreiszyinders bei der Machschen Zahl der Anströmung  $Ma_{\infty} = 0,4$

angegeben. Bei inkompressibler Strömung beträgt die Geschwindigkeit

$$\frac{w_i}{U} = 2 \sin \theta$$

wo  $\theta$  der Kreiswinkel ist.

Nach der Potentiallinienanalogie ist die Strömungsgeschwindigkeit am Kreiszylinder der um einen elliptischen Zylinder vom Achsenverhältnis

$$d = \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}$$

gleichzusetzen. Diese Geschwindigkeit ist

$$\frac{w}{U} = \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}\right) \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \frac{1}{1 - Ma_\infty^2} \cos^2 \theta}} \quad (54)$$

Aus der Stromlinienanalogie erhält man die Stromdichte gleich derjenigen an dem elliptischen Zylinder von dem Achsenverhältnis  $\sqrt{1 - Ma_\infty^2}$

$$\frac{D}{U} = \frac{\left(1 + \sqrt{1 - Ma_\infty^2}\right) \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + (1 - Ma_\infty^2) \cos^2 \theta}} \quad (55)$$

und bestimmt die zugehörige Geschwindigkeit entweder aus Bild 1 oder nach irgendeiner Näherungsformel, z.B. (47). Weiter erhält man für die Druckbestimmung ebenso wie vorher beim elliptischen Zylinder verschiedene Fassungen. Hier beim Kreiszylinder hat man dabei die Formeln

$$A_1 \quad \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2} = 1 - \left[ \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}\right) \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \frac{1}{1 - Ma_\infty^2} \cos^2 \theta}} \right]^2 \quad (56)$$

$$A_2 \quad \frac{p - p_\infty}{p_0 - p_\infty} = 1 - \left[ \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}\right) \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \frac{1}{1 - Ma_\infty^2} \cos^2 \theta}} \right]^2 \quad (57)$$

$$B_1 \quad \frac{p-p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} u^2} = \frac{1 - 4 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \quad (58)$$

$$B_2 \quad \frac{p-p_{\infty}}{p_0-p_{\infty}} = \frac{1 - 4 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - Ma_{\infty}^2}} \quad (59)$$

Aus den Bildern 2 und 3 oder aus den entsprechenden Formeln, die sich durch Auflösung von (26) und (28) nach  $w$  ergeben, bestimmt man dann die Strömungsgeschwindigkeit.

Nach B. Götherts Formulierung für den Druck erhält man am Kreiszyylinder

$$\frac{p-p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} u^2} = \frac{1 - \frac{(1 + \sqrt{1 - Ma_{\infty}^2})^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + (1 - Ma_{\infty}^2) \cos^2 \theta}}{1 - Ma_{\infty}^2} \quad (60)$$

In der folgenden Tabelle sind den verschiedenen Formeln entsprechend die Geschwindigkeiten am Kreiszyylinder bei der Anströmgeschwindigkeit  $Ma_{\infty} = 0,4$  gegeben:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\theta$	$\frac{w}{u}$	P (54)	S (55) u. (47) Bild 1	S (55) u. (47)	$A_1$ (56)	$A_2$ (57)	$B_1$ (58)	$B_2$ (59)	G (60)	L
0°	0	0	0	0	0,22	0	-	-	-	0
10°	0,347	0,334	0,34	0,332	0,37	0,326	0,28	0,20	0,06	0,323
20°	0,684	0,662	0,67	0,674	0,67	0,654	0,66	0,64	0,65	0,644
30°	1	0,978	1,02	1,026	0,98	0,977	1	1	1,03	0,959
40°	1,286	1,275	1,39	1,377	1,28	1,292	1,32	1,33	1,35	1,266
50°	1,532	1,542	1,87	1,708	1,57	1,589	1,60	1,62	1,63	1,562
60°	1,732	1,769	-	1,996	1,83	1,857	1,85	1,88	1,86	1,836
70°	1,879	1,943	-	2,217	2,04	2,081	2,04	2,07	2,03	2,067
80°	1,970	2,053	-	2,357	2,18	2,219	2,16	2,20	2,13	2,224
90°	2	2,091	-	2,404	2,23	2,270	2,20	2,24	2,17	2,280

In Spalte 2 ist die Strömungsgeschwindigkeit in der inkompressiblen Flüssigkeit angegeben, Spalte 3 enthält die Werte nach der Potentiallinienanalogie, Spalte 4 nach der Stromlinienanalogie, wobei zu der ~~aus~~ aus (55) errechneten Stromdichte die Geschwindigkeit aus Bild 1 entnommen ist. In Spalte 5 ist die aus (55) berechnete Stromdichte mit dem Näherungsausdruck (47) für die Dichte multipliziert. Spalte 6 bis 9 geben die Geschwindigkeiten, die entsprechend den nach Formel (56) bis (59) gerechneten Drücken aus Bild 2 bzw. 3 abgelesen sind. (Die genaueren Werte in Spalte 7 sind durch Auflösung der Formel (28) nach  $w$  gerechnet). In Spalte 10 sind die Drücke nach der Formulierung von B. Göthert aus Formel (60) berechnet und die entsprechenden Geschwindigkeiten aus Bild 2 abgelesen. Nach desselben Autors Formulierung für die Uebergeschwindigkeit ergibt die Rechnung im Staupunkt die negative Geschwindigkeit  $-0,19$  und im Punkte der maximalen Geschwindigkeit denselben Wert  $2,09$  wie die Potentiallinienanalogie. Die Werte nach dieser Rechnung sind in der Tabelle nicht angegeben, weil es nicht klar ist, wie man nach dieser Fassung der Prandtl'schen Regel rechnen soll, wenn die Störgeschwindigkeiten stark von der Richtung der Anströmgeschwindigkeit abweichen.

In Spalte 11 sind die genauesten bisher gerechneten Werte nach E. Lamla <sup>1)</sup> zum Vergleich angegeben.

In Spalte 4 lassen sich von  $60^\circ$  an keine Werte angeben, weil die errechneten Stromdichten so gross sind, dass zu ihnen keine entsprechenden Geschwindigkeiten existieren. Aus (55) erhält man z.B. bei  $60^\circ$   $\frac{D}{u} = 1,694$ , überzeugt sich aber aus Bild 1, dass die grösstmögliche Stromdichte bei  $Ma_\infty = 0,4$  gleich  $1,59$  ist. In Spalte 8, 9 und 10 lässt sich bei  $\theta = 0^\circ$  (im Staupunkt) kein Geschwindigkeitswert angeben, weil der aus Formel (58), (59) und (60) ~~der~~ errechnete Druck  $1,091$  bzw.  $1,19$  bei  $Ma_\infty = 0,4$  weder nach Bild 2 noch nach Bild 3 möglich ist. Spalte 6 gibt im Staupunkt einen falschen Wert, wie das immer im Staupunkt für  $Ma_\infty \rightarrow 0$  bei Bezug des Druckes auf  $\frac{1}{2} \rho_\infty u^2$  sein

1) E. Lamla. Die symmetrische Potentialströmung eines kompressiblen Gases um Kreiszyylinder und Kugel im unterkritischen Gebiet. Jahrbuch 1939 d.d. Luftf.-Forschg. S. 165.

wird, wovon man sich nach Bild 2 sofort überzeugt. In Betracht kommen bei der Geschwindigkeitsberechnung somit nur die Spalten 3, 5 und 7. Bei weitem am besten von ihnen nähert sich den wahren Werten die Spalte 7, also die Gleichsetzung des auf den Ueberdruck im Staupunkt bezogenen Ueber- oder Unterdruckes mit der entsprechenden inkompressiblen Grösse am  $\frac{1}{\sqrt{1-Ma_\infty^2}}$  mal dickeren und stärker angestellten Profil. Unter wahren Werten ist dabei die Lamla'sche 4. Näherung (Spalte 11) verstanden. Der Fehler beträgt maximal etwa 2 o/o.

In der folgenden Tabelle sind noch die nach den verschiedenen Formeln gerechneten Drücke für die Umströmung des Kreiszylinders bei  $Ma_\infty = 0,4$  angegeben.

1	2	3	4	5	6
$\theta$	A	B	G	$\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2}$ nach Lamla	$\frac{p-p_\infty}{p_0-p_\infty}$ nach Lamla
	nach (54), (56), (57)	nach (58), (59)	nach (60)		
0°	1	1,0911	1,1905	1,0405	1
10°	0,8887	0,9595	1,0344	0,9279	0,8917
20°	0,5622	0,5806	0,5948	0,5991	0,5758
30°	0,0433	0	-0,0517	0,0799	0,0768
40°	-0,6251	-0,7122	-0,8031	-0,5894	-0,5664
50°	-1,3787	-1,4700	-1,5570	-1,3586	-1,3057
60°	-2,1304	-2,1822	-2,2256	-2,1540	-2,0701
70°	-2,7768	-2,7628	-2,7444	-2,8645	-2,7530
80°	-3,2160	-3,1417	-3,0707	-3,3616	-3,2307
90°	-3,3727	-3,2733	-3,1821	-3,5408	-3,4029

Es sind hier folgende Ausdrücke gerechnet:  
Spalte 2: Nach Formel (54), (56), (57).

$$1 - \frac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-Ma_\infty^2}}\right)^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \frac{1}{1-Ma_\infty^2} \cos^2 \theta}$$

Spalte 3: Nach (58) und (59)

$$\frac{1 - 4 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}$$

Spalte 4: Nach (60)

$$\frac{(1 + \sqrt{1 - Ma_\infty^2})^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + (1 - Ma_\infty^2) \cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{1 - Ma_\infty^2}$$

Spalte 5 und 6: Auf Grund der Lamla'schen 4. Näherung der Geschwindigkeit sind  $\frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u^2}$  und  $\frac{p - p_\infty}{p_0 - p_\infty}$  nach Formel (26)

und (28) gerechnet.

In den Bildern 4 bis 6 sind die Strömungsgeschwindigkeiten nach den Fassungen  $A_1$  und  $A_2$  am elliptischen Zylinder der Dicke 0,1 und am Kreiszyylinder dargestellt und mit den von Hantzsche und Wendt und Lamla berechneten Werten verglichen.

### 8. Zusammenfassung.

Die Prandtl'sche Regel, die für dünne, vorn spitze, wenig angestellte Profile hergeleitet ist, wird, ohne dass die Herleitung dazu berechtigen würde, auf einen elliptischen Zylinder der Dicke 0,1 und dem Kreiszyylinder angewandt. Es zeigt sich dass die Zahlenwerte, die man erhält, verschieden ausfallen je nachdem ob man von der Geschwindigkeitsbestimmung oder Druckbestimmung ausgeht.

Die Gleichsetzung der Geschwindigkeit der kompressiblen Strömung mit der Geschwindigkeit der inkompressiblen Strömung an einem  $\frac{1}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}$  mal dickeren Profil gibt (besonders beim Kreiszyylinder) keine guten Näherungswerte. Wendet man die Regel auf den Ueber- bzw. Unterdruck an, der auf den Staupdruck bezogen ist, so bekommt man in der Umgebung des Staupunktes entweder offenkundig falsche Resultate oder solche, denen sich überhaupt keine Strömungsgeschwindigkeit zuordnen lässt. Es wird gezeigt, dass man für die Umgebung des Staupunktes vernünftige Resultate erhält, wenn man den Ueber- bzw. Unterdruck anstatt auf den Staupdruck auf den Ueberdruck im Staupunkte  $p_0 - p_\infty$

bezieht und die Fassung ( $A_2$ ) benutzt, die den Ueber- bzw. Unterdruck im Kompressiblen dem Ueber- bzw. Unterdruck im Inkompressiblen an dem  $\frac{1}{\sqrt{1-Ma_0^2}}$  mal dickeren Profil gleichsetzt. Die zugehörige Geschwindigkeit lässt sich dann aus Bild 3 oder Formel (28) bestimmen. Die Geschwindigkeitswerte, die auf diese Weise am elliptischen Zylinder vom Achsenverhältnis 0,1 und am Kreiszylinder gefunden wurden, unterscheiden sich von den genauesten bisher bekannten Werten um höchstens 2 o/o. Man kann danach vermuten, dass diese Fassung der Prandtlschen Regel sich mit Erfolg auf praktisch vorkommende Profilströmungen anwenden lässt.

Ueber die anderen Fassungen der Prandtlschen Regel kann folgendes gesagt werden: Fassung B ist in der Umgebung des Staupunktes unbrauchbar und zwar auch dann, wenn man den Ueber- bzw. Unterdruck nicht auf den Staudruck  $\frac{1}{2} \rho_\infty u^2$  sondern auf den Ueberdruck  $p_0 - p_\infty$  im Staupunkte bezieht. Dasselbe gilt von der von B. Göthert angegebenen Fassung. Nach der Stromlinienanalogie setzt man die Stromdichte der kompressiblen Strömung gleich der Geschwindigkeit der inkompressiblen Strömung um ein  $\sqrt{1-Ma_0^2}$  mal flacheres Profil. Bestimmt man die Geschwindigkeiten, die zu diesen Stromdichten gehören, so findet man schlechte oder gar keine Geschwindigkeitswerte. In den beiden durchgerechneten Beispielen waren die Stromdichtewerte viel zu gross. Man kann aber so vorgehen, dass man die zu grossen Stromdichten mit zu kleinen Dichteverhältnissen  $\frac{\rho_\infty}{\rho}$  multipliziert, um so einigermaßen richtige Geschwindigkeiten zu erhalten. In beiden Beispielen ist dieses gezeigt, indem für  $\frac{\rho_\infty}{\rho}$  anstelle des genauen Ausdruckes (20) der Näherungsausdruck (47) gesetzt wurde. Nur steckt eine grosse Willkür in der Wahl des Näherungsausdruckes, es sei denn dass man, wie es Busemann, Hantzsch und Wendt tun, sowohl die Stromdichte wie auch die Dichte nach einem Profilparameter entwickelt und in beiden Ausdrücken Glieder bis zu gleichen Parameterpotenzen mitnimmt. Die Methode lässt sich aber nicht ohne weiteres auf numerisch gegebene Profile anwenden und ist natürlich auch nicht als Prandtlsche Regel anzusprechen.

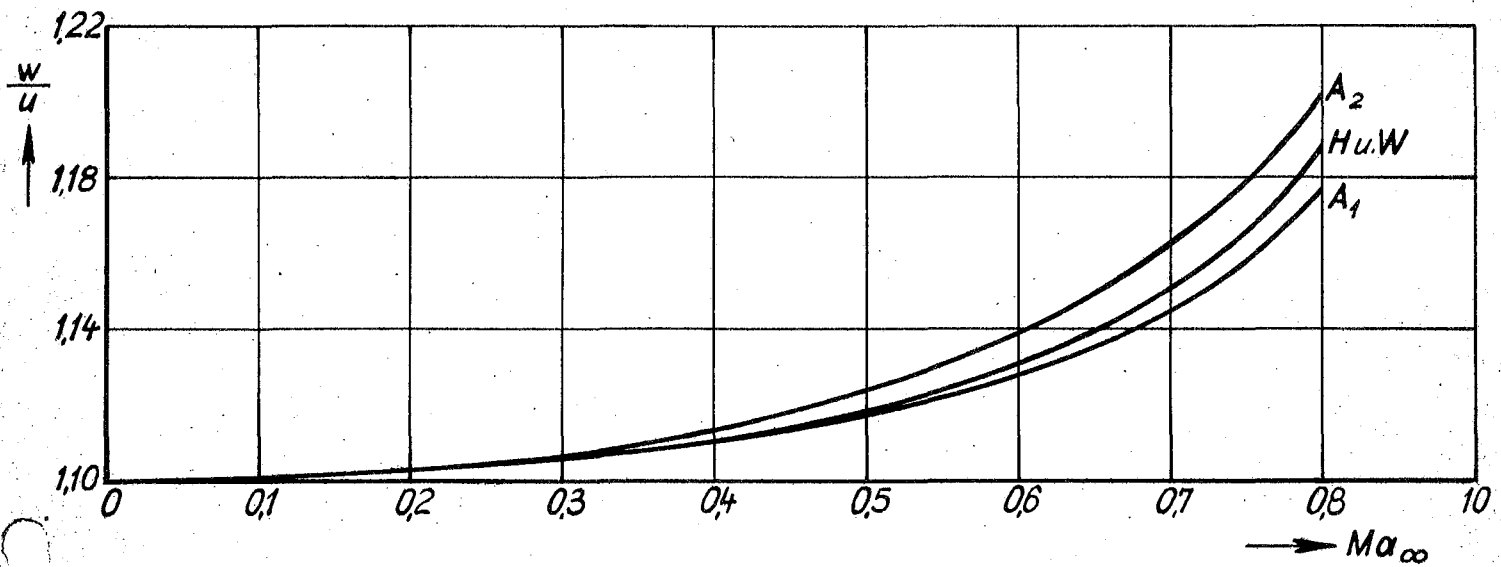


Bild 4: Strömungsgeschwindigkeit am elliptischen Zylinder mit dem Achsenverhältnis 0,1.  $A_1$  - nach Formel (48) und Bild 2 ;  $A_2$  - nach (49) und Bild 3 H.u.W. - nach W.Hentzsche und H.Wendt .

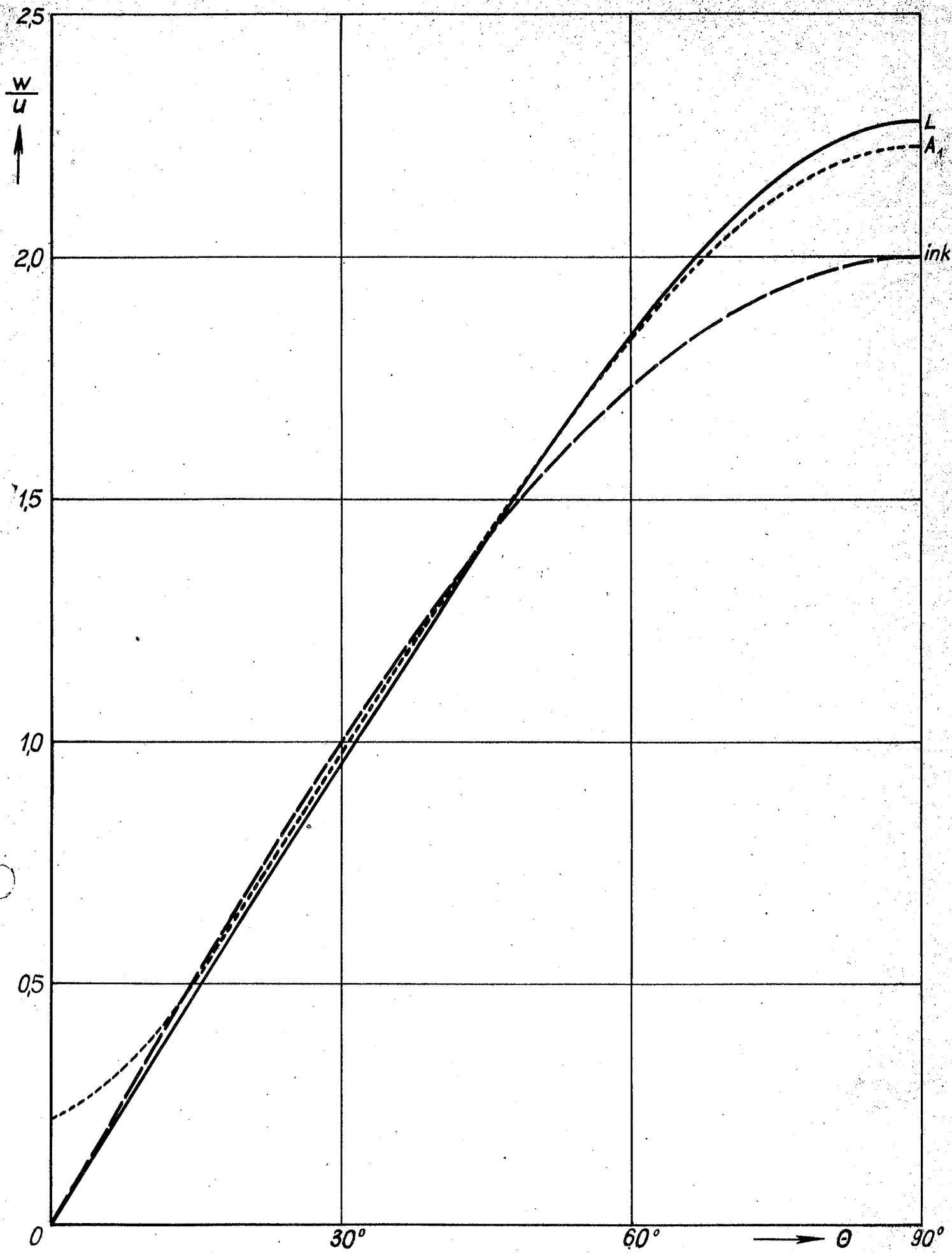


Bild 5: Strömungsgeschwindigkeit am Kreiszyylinder.

ink - inkompressibel;  $A_1$  nach Formel (56) und Bild 2 ; L - nach Lamla .

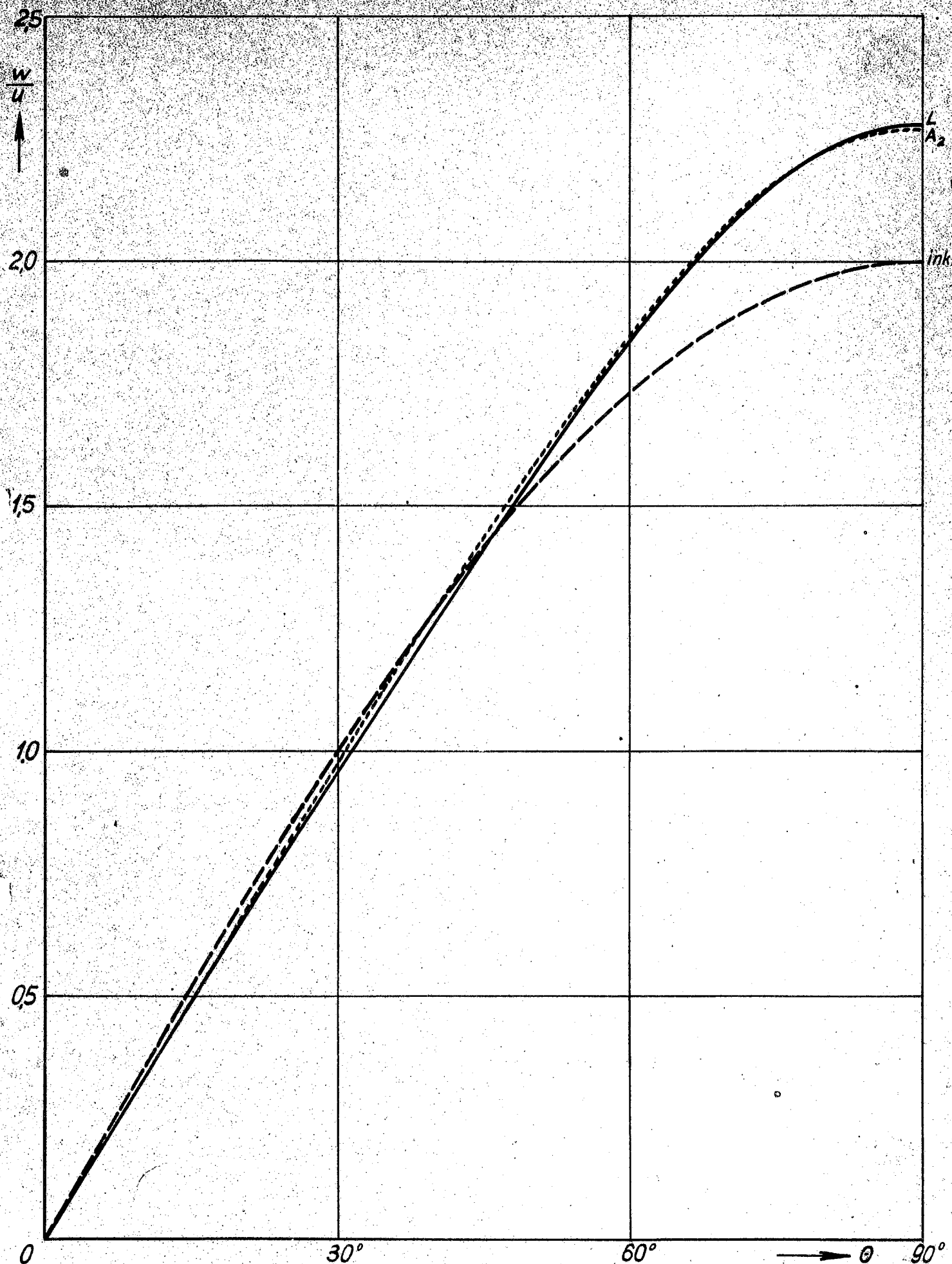


Bild 6: Strömungsgeschwindigkeit am Kreiszyylinder.

ink - inkompressibel; A<sub>2</sub> - nach Formel (57) und Bild 3 ; l. - nach Lambe

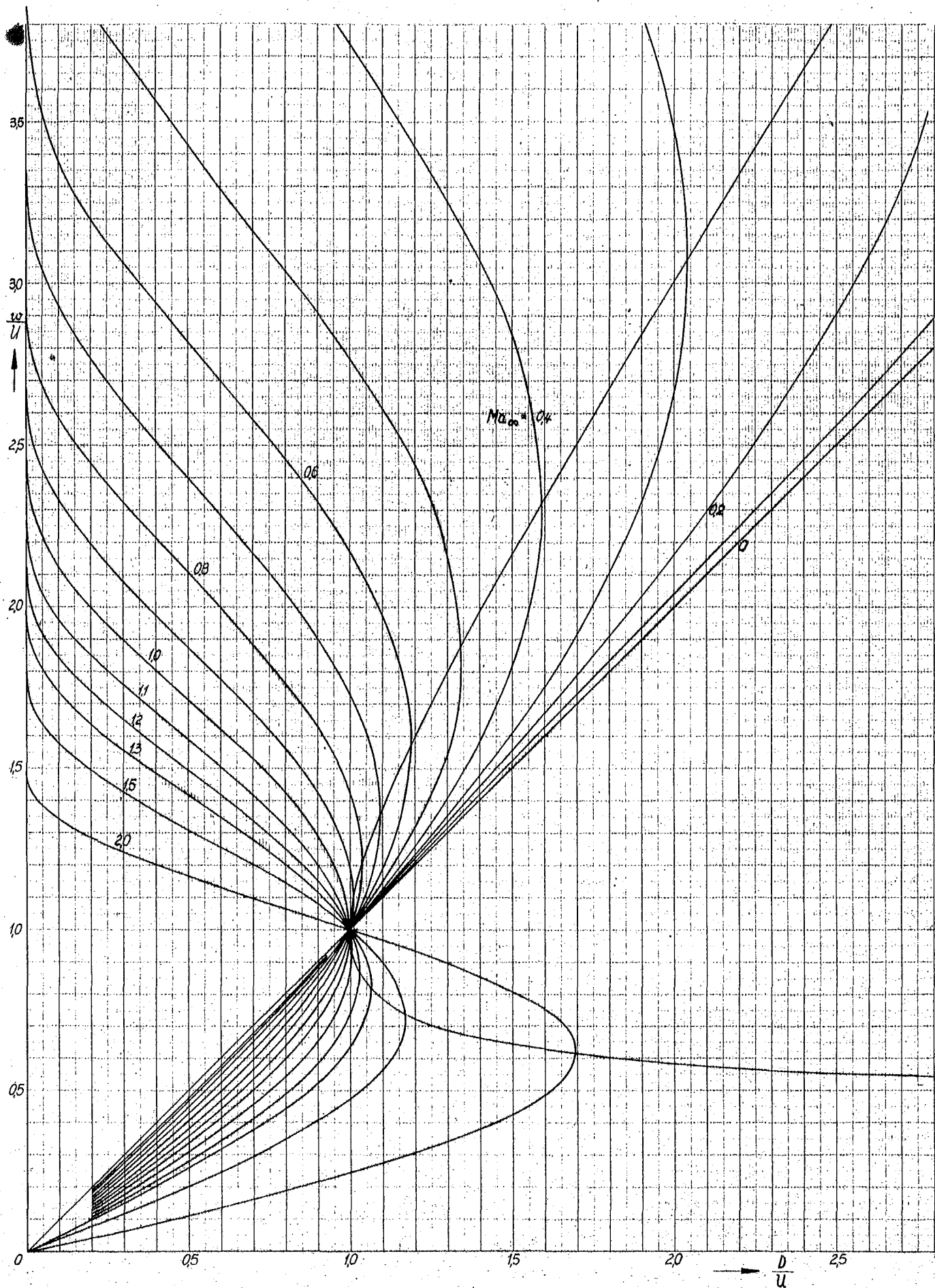


Bild 1. Zusammenhang zwischen Stromdichte und Geschwindigkeit.

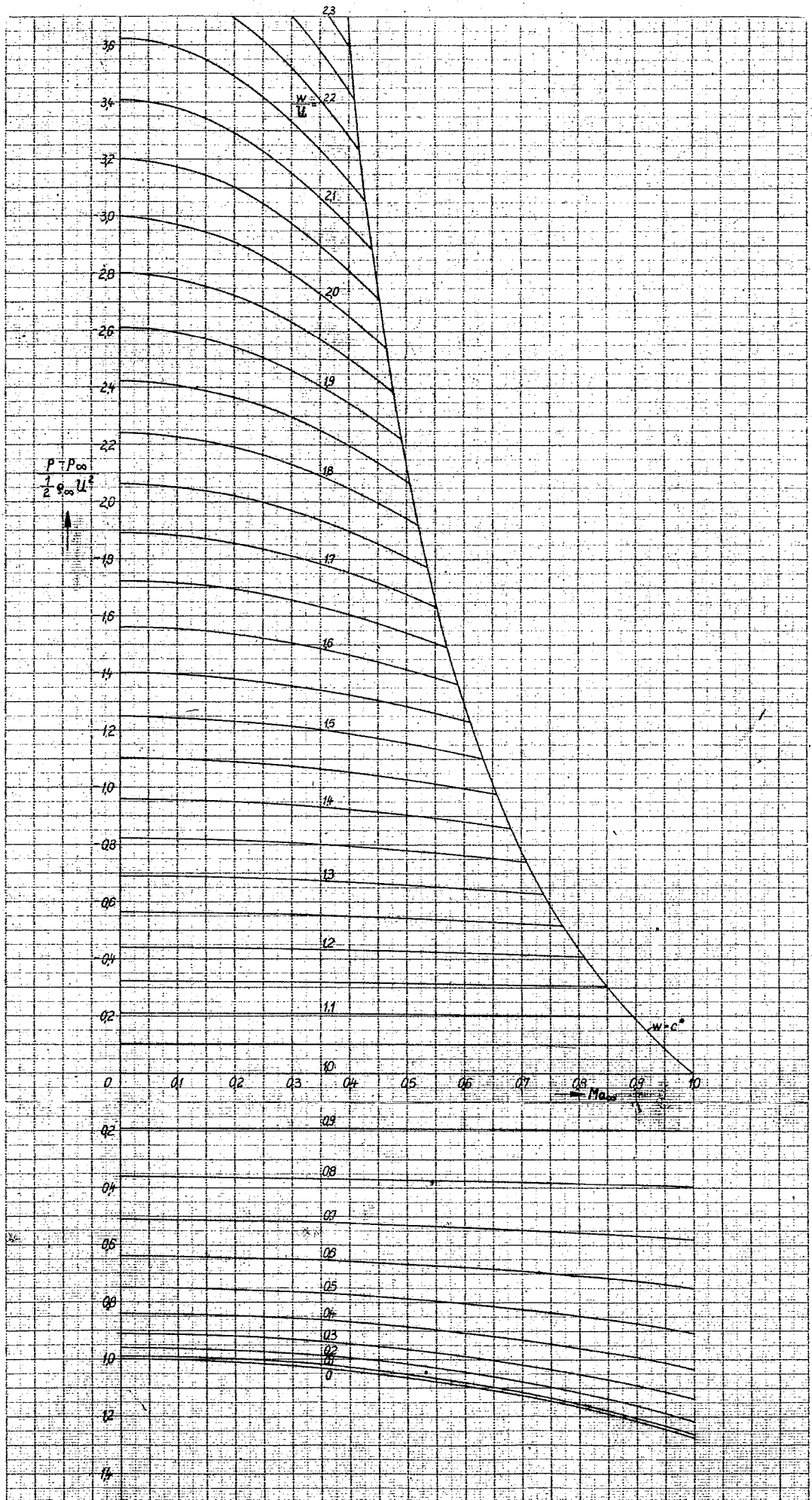


Bild 2.

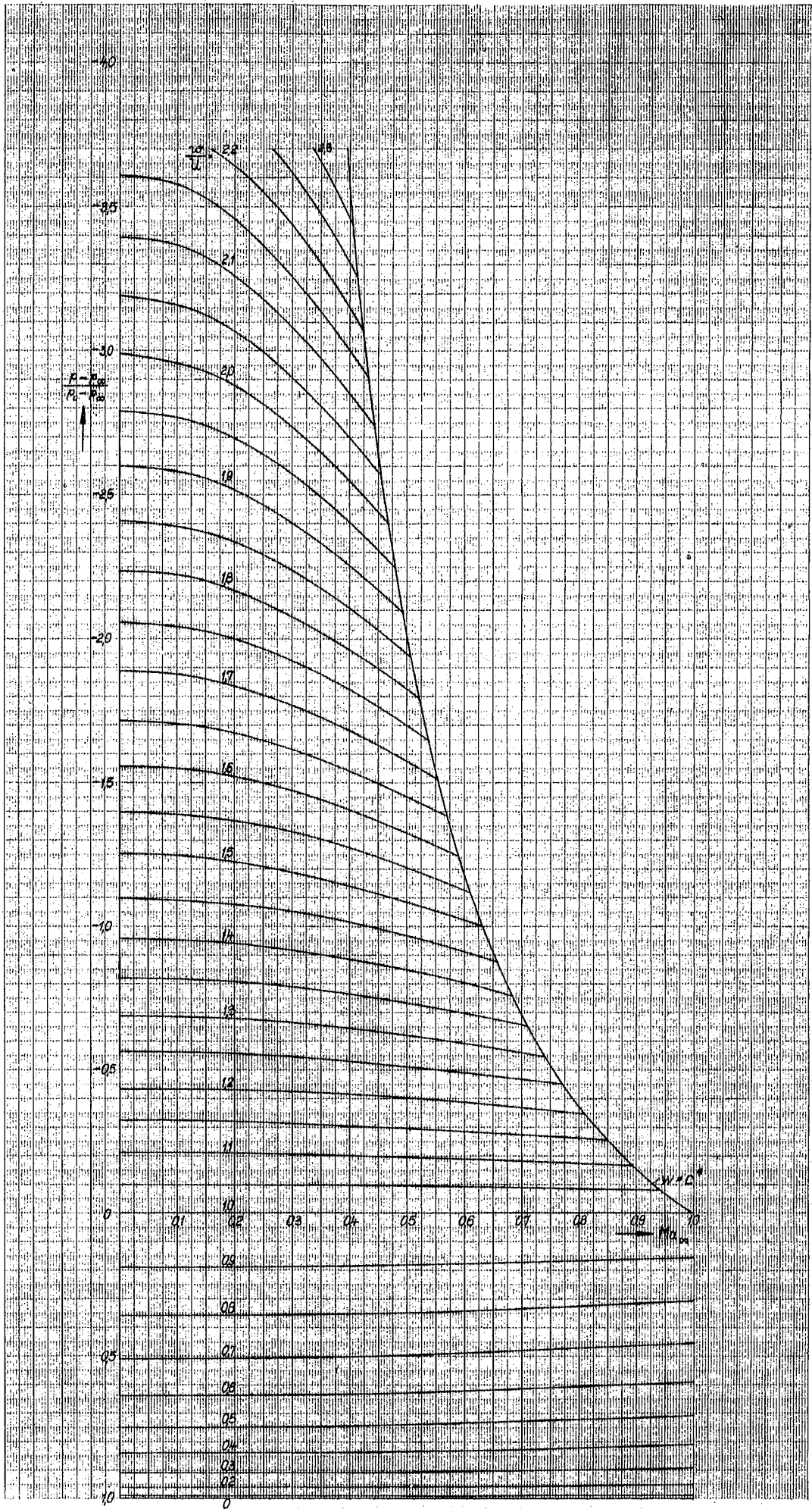


Bild 3.