Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen e. V.
Abteilung: A 01

Bericht: 42/A/17
Auftrag: LA 116
Datum: 15.12.42.

Die allgemeine Lösung der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen. II. Mitteilung.

Uebersicht: Das in einer früheren Arbeit [1] hergeleitete Verfahren zur allgemeinen Lösung der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen wird noch einmal ausführlich dargestellt, wobei vor allem auf einige Einzelheiten der numerischen Rechnung näher eingegangen wird. Ausserdem werden einige allgemeine Aussagen über das Verhalten der Grenzschichten bei verschiedenen Druckverteilungen gewonnen.

Gliederung:

Der Bericht umfasst:
22 Seiten Text
1 Tabelle

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GOETTINGEN E.V.
Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Leiter:
I.V. Fr. Riegels

Der Bearbeiter:
W. Mangler

Zur Lösung von Differentialgleichungen durch Iteration.

von W. M a n g l e r , Göttingen.

(Bericht der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen e.V.)

I. Einleitung.

Bei der Behandlung von Differentialgleichungen, die nicht zu einem der bekannten Typen gehören, so dass man keine allgemeinen Sätze zu ihrer Lösung anwenden kann, ist es naheliegend, die Lösung mit Hilfe eines Iterationsverfahrens zu suchen. Dabei vereinfacht man die gegebene Differentialgleichung zu einer anderen, deren Lösungen man beherrscht, und versucht, eine geeignete Lösung der Näherungsgleichung, die möglichst schon die Randbedingungen erfüllt, mit Hilfe des bekannten Picardschen Iterationsverfahrens zu einer Lösung der ursprünglichen Gleichung zu verbessern. Dabei hat man vor allem darauf zu achten, dass die Lösungen der ursprünglichen und der Näherungsdifferentialgleichung in der Umgebung etwa vorhandener singulärer Stellen übereinstimmen, so dass die Gleichung in der Umgebung der betreffenden Stelle schon in erster Näherung vollständig gelöst wird. Denn bei allen Iterationen kann man höchstens dort, wo die Lösung regulär ist, mit einer schnellen Konvergenz rechnen.

Das Verfahren ist schon wiederholt angewendet worden. Z.B. ist auf diese Weise von Janzen (Physikal. Zeitschrf. 14 (1913) S.639) und Rayleigh (Phil. Mag. Ser. VI, 32 (1916) S.1) die Berechnung der Druckverteilung an einem Tragflügelprofil in einer kompressiblen Potentialströmung durchgeführt worden, und Gevrey (Journ. des math. pures et appl. VI. Ser, 9 (1913) S.305 und 10 (1914), S.10x) hat auf diese Weise die Lösung verhältnismässig allgemeiner quasilinearer Differentialgleichungen vom parabolischen Typus auf die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zurückgeführt. Im Folgenden soll dieses Verfahren einmal an einem speziellen Beispiel praktisch durchgeführt werden.

I. Einleitung.

Die Berechnung der laminaren Grenzschicht an einer Wand mit beliebig vorgegebener Druckverteilung mit Hilfe der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen wurde in einer früheren Arbeit [1] auf die Lösung einer parabolischen Differentialgleichung zurückgeführt; diese liess sich wiederum mit Hilfe eines Iterationsverfahrens, wie es schon von Gevrey [2] zur Lösung ähnlicher Differentialgleichungen angewendet worden ist, auf die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zurückführen. Dieses Iterationsverfahren soll hier noch einmal ausführlich dargestellt werden. Gleichzeitig wird auf verschiedene Dinge hingewiesen, die bei der Durchführung der numerischen Rechnung besonders zu beachten sind. Vor allem wird für die erste Näherung eine Funktion vorgeschlagen, die von der Lösungsfunktion nicht allzu verschieden ist, so dass man das Iterationsverfahren nach wenigen Schritten abbrechen kann, was bei der immerhin recht umfangreichen Rechnung, die bei jedem Iterationsschritt erforderlich ist, ein wesentlicher Vorteil ist.

Anschliessend werden einige allgemeine Aussagen über das Verhalten der Geschwindigkeitsverteilungen in der Grenzschicht in der Gegend des Ueberganges zur äusseren reibungslosen Strömung gemacht. Damit wird ein Beitrag zu der Frage gegeben, ob und unter welchen Umständen die bereits früher von Blasius [3], Hiemenz [4] Howarth [5], Falkner und Skan [6] und Hartree [7] für spezielle Druckverteilungen berechneten Lösungen der Grenzschichtgleichungen auch bei allgemeinen Druckverteilungen auftreten. Diese Frage ist ja zur Beurteilung aller in der Praxis zur Berechnung der Grenzschicht gebräuchlichen Näherungsverfahren (z.B. Pohlhausen [8], Holstein und Bohlen [9], Walz [10]) sehr wichtig. Allerdings kann man die Güte dieser Näherungsverfahren erst dann richtig beurteilen, wenn noch mehr durchgerechnete Beispiele vorliegen; die Anleitung hierzu soll dieser Bericht geben.

II. Problemstellung.

Bezeichnen u und v die Komponenten der Geschwindigkeit in der Reibungsschicht in x- bzw. y-Richtung, d.h. parallel bzw. senkrecht zur Wand $y = 0$, ν die kinematische Zähigkeit der Luft und $U(x)$ die mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung aus der Druckverteilung zu berechnende Geschwindigkeitsverteilung ausserhalb der Reibungsschicht, so hat man zur Berechnung von u und v die Gleichungen (vgl. [1])

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U\frac{dU}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Als Randbedingungen hat man die Haftbedingung $u = 0$, $v = 0$ an der Wand und die Anschlussbedingung $u = U$ am Uebergang der Reibungsschicht zur äusseren Potentialströmung zu erfüllen. Der Kontinuitätsgleichung genügt man mit Hilfe der Stromfunktion $\psi(x,y)$, indem man $u=\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ setzt und $\psi(x,0) = 0$ wählt. Durch Einführung neuer Veränderlicher

$$\xi=\int_0^x\frac{U(x)\,dx}{U_\infty L}$$

$$\eta=\frac{y\,U(x)}{L\,U_\infty}\cdot\sqrt{Re}$$

$$\zeta=\left(1-\frac{\psi}{yU}\right)\frac{yU}{L\,U_\infty}\cdot\frac{U^2}{U_\infty^2}\cdot\sqrt{Re}$$

kann man die Grenzschichtgleichung in eine für die Rechnung bequemere dimensionslose Form überführen (vgl. [1]). Dabei bedeutet $Re=U_\infty L/\nu$ die mit der Bezugsgeschwindigkeit U_∞ und der Bezugslänge L gebildete Reynoldssche Zahl.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{U^2(x)}{U_\infty^2}=a(\xi)$$

so wird

$$1-\frac{u(x,y)}{U(x)}=\frac{1}{a(\xi)}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}$$

und

$$1-\frac{u(0,y)}{U(0)}=\frac{1}{a(0)}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)_{\xi=0}=\frac{b(\eta)}{a(0)}$$

Damit ist die Berechnung der laminaren Grenzschicht an einer Wand bei beliebig vorgegebener Druckverteilung auf die folgende mathematische Aufgabe zurückgeführt:

Innerhalb des Streifens $0 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \eta \leqq \infty$ ist die Lösung $\zeta(\xi,\eta)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3\zeta}{\partial\eta^3} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta} = R(\xi,\eta) = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\zeta}{a}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{a}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right)^2\right) \qquad (1)$$

gesucht, die den Randbedingungen

$$\zeta(\xi,0)=0 \qquad \zeta_\eta(\xi,0)=a(\xi) \qquad \zeta_\eta(\xi,\infty)=0$$

$$\zeta_\eta(0,\eta)=b(\eta) \qquad (2)$$

$$[b(0)=a(0);\ b(\infty)=0]$$

genügt, wobei $a(\xi)$ eine gegebene Funktion von ξ $(0 \leqq \xi \leqq 1)$ und $b(\eta)$ eine gegebene Funktion von η $(0 \leqq \eta \leqq \infty)$ ist. (Partielle Ableitungen werden durch angehängte Indizes bezeichnet.) Falls die Randwerte $a(\xi)$ und $b(\eta)$ stetig und genügend oft differenzierbar sind, was immer vorausgesetzt werden soll, sind die Lösungen von (1) überall im Endlichen regulär. Singulär ist nur die Umgebung von $\eta=\infty$. Das Verhalten der Lösungen in der Umgebung dieser Stelle kann sehr verschieden sein.

Für den Fall, dass $b = 0$ ist und a sich für kleine Werte von ξ wie $a = a_0'\xi + ..$ verhält, verschwinden die Ableitungen ζ_η der Lösungen von (1) für grosse η wie

$$\frac{\beta}{\eta^3}e^{-\alpha\eta^2}, \qquad (2a)$$

wie man durch Uebergang zu einer neuen Differentialgleichung unter Ausnutzung der Randbedingungen (2) zeigen kann, wobei man $2\zeta/(\sqrt{2\xi}^{\,3}\cdot a_0')$ als Funktion von $2\sqrt{\xi/a_0'}$ und $\eta/\sqrt{2\xi}$ betrachtet. Die Lösungen ζ selbst bleiben beschränkt, während man die zweite Ableitung $\zeta_{\eta\eta}$ gegen die dritte Ableitung $\zeta_{\eta\eta\eta}$ vernachlässigen darf. Dasselbe gilt für die Lösungen von (1) , wenn

$b(\eta)$ nicht verschwindet, aber für grosse η das eben für ζ_η geschilderte Verhalten zeigt.

In allen diesen Fällen kann man also die Gleichung (1) näherungsweise lösen, indem man $R = 0$ setzt. Man erhält dann für die Funktion

$$z(\xi,\eta) = \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} \tag{3}$$

die Wärmeleitungsgleichung, deren Lösungen bei den Randbedingungen (2) man sofort angeben kann. Die Lösung von (1) wird dadurch auf die Lösung der folgenden Integralgleichung

$$\begin{aligned} z(\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty b(y)G(\xi,\eta;0,y)\,dy + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\xi a(x)G_y(\xi,\eta;x,0)\,dx \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\xi\left(\int_0^\infty R(x,y)\,G(\xi,\eta;x,y)\,dy\right)dx \end{aligned} \tag{4}$$

zurückgeführt. Dabei ist $R(\xi,\eta)$ jetzt gegeben durch

$$R(\xi,\eta) = \frac{\partial z}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\eta \frac{z}{a}\,d\eta - \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{z^2}{a}\right) \tag{5}$$

und $G(\xi,\eta;x,y)$ bezeichnet die Greensche Funktion der Wärmeleitungsgleichung für den Quadranten $0 \leqq x \leqq \infty, 0 \leqq y \leqq \infty$, also

$$G(\xi,\eta;x,y) = \frac{1}{\sqrt{\xi - x}}\left[e^{-\frac{(\eta-y)^2}{4(\xi-x)}} - e^{-\frac{(\eta+y)^2}{4(\xi-x)}}\right] \tag{6}$$

Die Integralgleichung (4) löst man am besten durch Iteration, indem man zunächst $R = 0$ setzt, die so gewonnene Lösung $z = z_0(\xi,\eta)$ in $R(\xi,\eta)$ einführt, dann aus (4) eine neue Funktion $z = z_1(\xi,\eta)$ berechnet, diese wieder in R einführt, und so fort, bis sich die Funktionen z_j innerhalb der Rechengenauigkeit nicht mehr ändern. Ein Konvergenzbeweis und eine Fehlerabschätzung für das Iterationsverfahren ist noch nicht bekannt. Voraussichtlich lassen sich die entsprechenden Ueberlegungen von Gevrey (l.c.) auch auf die Gleichung (1) übertragen; An Zahlenbeispielen bereits durchgeführte Rechnungen zeigen auch, dass das Verfahren verhältnismässig schnell konvergiert.

Die bei der Iteration in (4) auftretenden Integrationen lassen sich leider nicht geschlossen ausführen, so dass man bei der Durchführung der Rechnung numerische Methoden verwenden muss.

III. Numerische Behandlung der Differentialgleichung.

Für die Genauigkeit der durchzuführenden numerischen Rechnung ist es sehr wesentlich, dass bei der Behandlung der Gleichung (4) nur Integrationen durchzuführen sind. Denn alle vorkommenden Differentialquotienten lassen sich ebenfalls durch bestimmte Integrale darstellen.

Setzt man zur Abkürzung

$$A(\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \alpha(x) G_y(\xi,\eta;x,0)\,dx \tag{7}$$

$$B(\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} b(y) G(\xi,\eta;0,y)\,dx \tag{8}$$

und
$$z^*(\xi,\eta) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \left(\int_0^{\infty} R(x,y)\, G(\xi,\eta;x,y)\,dy \right) dx \tag{9}$$

so wird

$$z(\xi,\eta) = A(\xi,\eta) + B(\xi,\eta) + z^*(\xi,\eta) \tag{10}$$

Um nach Berechnung der k-ten Näherung z_k für die Funktion z die (k+1)-te Näherung z_{k+1} aus (4) zu bestimmen (über die Wahl der 0-ten Näherung z_0 wird später noch einiges gesagt werden), hat man Z_k in die rechte Seite von (4) einzuführen. Man erhält dabei

$$R_{k+1}(\xi,\eta) = \frac{\partial Z_k}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{Z_k}{a} d\eta - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Z_k^2}{a} \right) \tag{11}$$

hat also ausser Z_k auch die Ableitungen $Z_{k\eta}, Z_{k\eta\eta}$ und $Z_{k\xi}$ und die Integrale $\int_0^\eta Z_k \, d\eta$ und $\int_0^\eta Z_{k\xi} \, d\eta$ zu bestimmen. Abgesehen von der 0-ten Näherung, über die später (Abschnitt IV) noch zu sprechen sein wird, ist ja Z_k durch

$$Z_k(\xi,\eta) = A(\xi,\eta) + B(\xi,\eta) + Z_k^*(\xi,\eta) \tag{12}$$

gegeben, wobei

$$Z_k^*(\xi,\eta) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \left(\int_0^\infty R_k(x,y) G(\xi,\eta;x,y) \, dy \right) dx \tag{13}$$

gesetzt ist, so dass man die Ableitungen nach η durch Differenzieren von (7), (8) und (13) erhalten kann, während man die Ableitungen nach ξ am einfachsten aus der aus (1) folgenden Gleichung

$$\frac{\partial Z_k}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 Z_k}{\partial \eta^2} - R_k \tag{14}$$

berechnet. Man erhält so

$$\frac{\partial Z_k}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\eta \frac{Z_k}{a} d\eta = \frac{Z_{k\eta}}{a} \left\{ Z_{k\eta} - (Z_{k\eta})_{\eta=0} - \int_0^\eta R_k d\eta - \frac{a'}{a} \int_0^\eta Z_k d\eta \right\} \tag{15}$$

und

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Z_k^2}{a} \right) = \frac{Z_k}{a} \left\{ Z_{k\eta\eta} - R_k - \frac{a'}{a} \int_0^\eta Z_k \, d\eta \right\} \tag{16}$$

Zur bequemeren graphischen Bestimmung der Integrale $A(\xi,\eta)$, $B(\xi,\eta)$ und $Z^*(\xi,\eta)$ und ihrer Ableitungen nach η schreibt man die Gleichungen (7), (8) und (13) zweckmässig in einer anderen

Form. Bezeichnet

$$\phi(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sigma} e^{-\alpha^2} d\alpha \tag{17}$$

die Gaussche Fehlerfunktion, gilt also

$$\phi'(\sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2}, \tag{18}$$

so findet man mit den Abkürzungen

$$\begin{gathered} \sigma = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}, \quad s = \frac{y}{2\sqrt{\xi}}, \quad r = \frac{x}{\xi} \\ \sigma_1 = -\frac{\eta - y}{2\sqrt{\xi - x}} = -\frac{\sigma - s}{\sqrt{1-r}}, \quad \sigma_2 = \frac{\eta + y}{2\sqrt{\xi - x}} = \frac{\sigma + s}{\sqrt{1-r}} \end{gathered} \tag{19}$$

und den daraus folgenden Beziehungen

$$-\sigma_{1\eta} = \sigma_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{\xi - x}} = \sigma_{2y} = \sigma_{2\eta}, \frac{-\sigma_{1\xi}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{1x}}{\sigma_1} = \frac{1}{2(\xi - x)} = \frac{\sigma_{2x}}{\sigma_2} = -\frac{\sigma_{2\xi}}{\sigma_2} \tag{20}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} & G(\xi,\eta;x,y) = \sqrt{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\phi(\sigma_1) - \phi(\sigma_2)\right] \\ & G_y(\xi,\eta;x,y) = -\sqrt{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(\sigma_1) - \phi(\sigma_2)\right] = +\frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{-\sigma_1^2} - e^{-\sigma_2^2}}{\sqrt{1-r}}\right] \\ & G_{yy}(\xi,\eta;x,y) = G_{\eta\eta}(\xi,\eta;x,y) = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sigma_1 e^{-\sigma_1^2} - \sigma_2 e^{-\sigma_2^2}}{(1-r)}\right] \\ & G_\eta(\xi,\eta;x,y) = \sqrt{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2)\right] = -\frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{e^{-\sigma_1^2} + e^{-\sigma_2^2}}{\sqrt{1-r}}\right] \\ & G_{y\eta}(\xi,\eta;x\,y) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\sigma_1^2} + e^{-\sigma_2^2}}{\sqrt{1-x}}\right] = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sigma_1 e^{-\sigma_1^2} + \sigma_2 e^{-\sigma_2^2}}{1-r}\right] \\ & G_{y\eta\eta}(\xi,\eta;x,y) = G_{yyy}(\xi,\eta;x,y) = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sigma_1 e^{-\sigma_1^2} - \sigma_2 e^{-\sigma_2^2}}{1-r}\right] \end{aligned} \tag{21}$$

Man kann also schreiben

$$B(\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty b(y) G(\xi,\eta;0,y)dy = \frac{1}{2}\int_{y=0}^\infty b(y) d\left[\phi(s-\sigma) - \phi(s+\sigma)\right]$$

$$B_\eta(\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty b(y) G_\eta(\xi,\eta;0,y)dy = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\xi}}\int_{y=0}^\infty b(y) d\left[e^{-(s-\sigma)^2} + e^{-(s+\sigma)^2}\right]$$

$$B_{\eta\eta}(\xi,\eta) = B_\xi(\xi,\eta) = \int_0^\infty b(y) G_{\eta\eta}(\xi,\eta;0,y)dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\xi}\int_{y=0}^\infty b(y) d\left[(s-\sigma)e^{-(s-\sigma)^2} - (s+\sigma)e^{-(s+\sigma)^2}\right]$$

und

$$A(\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi}\alpha(x)\,G_y(\xi,\eta;x,0)\,dx=\int_{r=0}^{1}\bar{\alpha}(r)\,d\left[\phi(\sigma_0)\right]$$

$$A_\eta(\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\xi}}\int_{r=0}^{1}\bar{\alpha}(r)\,d\left[\frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sqrt{1-r}}\right] \tag{23}$$

$$A_{\eta\eta}(\xi,\eta)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\xi}\int_{r=0}^{1}\bar{\alpha}(r)\,d\left[\frac{\sigma_0\,e^{-\sigma_0^2}}{1-r}\right]=\frac{\bar{\alpha}(0)\cdot\sigma e^{-\sigma^2}}{\sqrt{\pi}\cdot\xi}+\frac{1}{\xi}\int_{r=0}^{1}\bar{\alpha}'(r)\,d\left[\phi(\sigma_0)\right]$$

wobei

$$\sigma_0=\frac{\eta}{2\sqrt{\xi-x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{1-r}}=(-\sigma_1)_{y=0}=(+\sigma_2)_{y=0}$$

und

$$\alpha(x)=\bar{\alpha}(r)\qquad\qquad \alpha'(x)=\frac{1}{\xi}\bar{\alpha}'(r)$$

gesetzt ist. Für kleine Werte von η ist die angegebene Formel für $A_{\eta\eta}$ oft schlecht brauchbar. Man rechnet dann besser so:

$$A_{\eta\eta}(\xi,\eta)=\frac{\alpha(0)\cdot\sigma e^{-\sigma^2}}{\xi\sqrt{\pi}}+\frac{1}{\xi}e^{-\sigma^2}\int_{r=0}^{1}\left[\sqrt{r}\cdot\bar{\alpha}'(r)\right]d\left[\phi\left(\sigma\cdot\sqrt{\frac{r}{1-r}}\right)\right] \tag{23a}$$

Für η = 0 ergibt sich

$$A_{\eta\eta}(\xi,0)=\alpha'(\xi). \tag{23b}$$

Die Berechnung der Funktionen A und B nach (22) und (23) hat einerseits den Vorteil, dass die vorkommenden Integrationsintervalle stets endlich sind, was bei graphischen oder numerischen Integrationen sehr wesentlich ist. Andererseits erspart man eine Produktbildung; man braucht vielmehr nur die jeweiligen Werte von a und b über den in den eckigen Klammern angegebenen Funktionen aufzutragen, die man ein für alle Mal tabulieren kann.

Entsprechendes gilt für die Berechnung der Doppelintegrale Z^* wobei man zweckmässig zunächst die Integration über y ausführt. Setzt man

$$\begin{aligned}
S_k(\xi,\eta;x) &= -\tfrac{1}{2}\int_{y=0}^{\infty} R_k(x,y)\, d\left[\Phi(\sigma_1)-\Phi(\sigma_2)\right] \\
&\qquad \left[\text{es ist } S_k(\xi,\eta;\xi)=R_k(\xi,\eta)\right] \\
S'_k(\xi,\eta;x) &= \sqrt{\xi}\,\sqrt{1-r}\cdot S_{k\eta}(\xi,\eta;x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{y=0}^{\infty} R_k(x,y)\, d\left[e^{-\sigma_1^2}+e^{-\sigma_2^2}\right] \\
&\qquad \left[\text{es ist } S'(\xi,\eta;\xi)=0\right] \\
S''_k(\xi,\eta;x) &= \xi\cdot(1-r)\cdot S_{k\eta\eta}(\xi,\eta;x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{y=0}^{\infty} R_k(x\cdot y)\, d\left[\sigma_1 e^{-\sigma_1^2}-\sigma_2 e^{-\sigma_2^2}\right] \\
&\qquad \left[\text{es ist } S''(\xi,\eta;\xi)=0\right],
\end{aligned} \tag{24}$$

so folgt aus (13):

$$\begin{aligned}
Z^*_k(\xi,\eta) &= \xi\int_{r=0}^{1} S_k(\xi,\eta;\xi\cdot r)\,dr \\
Z^*_{k\eta}(\xi,\eta) &= \xi\int_{r=0}^{1} S_{k\eta}(\xi,\eta;\xi\cdot r)\,dr=\sqrt{\xi}\int_{r=0}^{1} S'_k(\xi,\eta;r\xi)\,\frac{dr}{\sqrt{1-r}} \\
Z^*_{k\eta\eta}(\xi,\eta) &= R_k(\xi,\eta)+\frac{\partial Z^*_k}{\partial\xi}=\xi\int_{r=0}^{1} S_{k\eta\eta}(\xi,\eta;\xi\cdot r)\,dr=\int_{r=0}^{1} S''_k(\xi,\eta;r\xi)\,\frac{dr}{1-r}
\end{aligned} \tag{25}$$

Bei $Z^*_{k\eta\eta}$ empfiehlt es sich, die zweite Integration über r (wenigstens für kleine η-Werte) durch eine Integration über $r^*=1-\sqrt[n]{1-r}$ zu ersetzen: ($n = 2$ oder $n = 3$)

$$Z^*_{k\eta\eta} = \int_{r=0}^{1} S''\frac{dr}{1-r} = n\int_{r^*=0}^{1} S''\frac{dr^*}{1-r^*} \tag{25a}$$

wodurch die zu integrierende Fläche so verzerrt wird, dass der Integrand $S''/(1-r^*)$ im ganzen Integrationsbereich $0\leq r^*\leq 1$ etwa in derselben Grössenordnung bleibt.

Zweckmässig wird man die Berechnung der Funktionen A, B und Z^*_k so durchführen, dass man zuerst ihre zweite Ableitung nach η mit Hilfe der eben angegebenen Integrale bestimmt daraus durch graphische Integration (Auszählen oder Planimetrieren) die erste Ableitung nach η und die Funktionen selbst, und endlich durch nochmalige Integration die Funktionen $\int_0^\eta A\,d\eta$,

$\int\limits_0^\eta B\,d\eta$ und $\int\limits_0^\eta z_k^*\,d\eta$, die man ja ebenfalls bei der Berechnung von $R(\xi,\eta)$ braucht. Die dabei auftretenden Integrationskonstanten bestimmt man aus den Randbedingungen (2) und dem durch (2) beschriebenen asymptotischen Verhalten der Lösungen. Mit Hilfe von (3) und (10) erhält man die Bedingungen:

Für $\eta = 0$ *ist* (26a)

$$A = a\,,\; B = 0\,,\; z_k^* = 0$$

und für $\eta = \infty$ ist

$$A = 0\,,\; A_\eta = 0\,,\; B = 0\,,\; B_\eta = 0\,,\; z_k^* = 0\,,\; z_{k\eta}^* = 0\,, \tag{26b}$$

Aus der Funktion $A_{\eta\eta}$ ergibt sich damit

$$A_\eta(\xi,\eta) - A_\eta(\xi,0) = \int\limits_0^\eta A_{\eta\eta}\,d\eta$$

$$A(\xi,\eta) - A(\xi,0) - A_\eta(\xi,0)\cdot\eta = \int\limits_0^\eta\Big(\int\limits_0^\eta A_{\eta\eta}\,d\eta\Big)\,d\eta$$

also

$$A_\eta(\xi,0) = -\int\limits_0^\infty A_{\eta\eta}(\xi,\eta)\,d\eta = -\lim_{\eta\to\infty}\Big[\frac{1}{\eta}\int\limits_0^\eta\Big(\int\limits_0^\eta A_{\eta\eta}(\xi,\eta)\,d\eta\Big)\,d\eta\Big] \tag{27}$$

Eine dritte Möglichkeit zur Bestimmung von $A_\eta(\xi,0)$ hat man dadurch, dass man die Funktion $A(\xi,\eta)$ an einigen Punkten direkt nach (23) berechnet, was gleichzeitig eine wichtige Rechnungskontrolle darstellt. Entsprechend führt man die Rechnung bei den Funktionen $B(\xi,\eta)$ und $z_k^*(\xi,\eta)$ durch.

Erwähnt werden soll noch, dass man bei den Zahlenrechnungen besser $\sigma = \eta/2\sqrt{\xi}$ anstelle von η benutzt, weil alle vorkommenden Funktionen etwa bei $\sigma = 3{,}5$ so weit abgeklungen sind, dass man die Rechnungen im allgemeinen auf den Bereich $0 \leqq \sigma \leqq 3{,}5$ beschränken kann.

Die in (22), (23) und (24) vorkommenden Verzerrungsfunktionen gelten unabhängig von den jeweiligen Randwerten, so dass man sie ein für alle Mal tabulieren kann. Als Schrittgrösse wählt man dabei zweckmässig 0,1 für $0 \leqq \sigma \leqq 0{,}6$, dann 0,2 für $0{,}6 \leqq \sigma \leqq 2{,}0$ und endlich 0,4 für $2{,}0 \leqq \sigma \leqq 3{,}6$. Bei den Funktionen $\phi(\sigma_0)$ und $(\sigma_0 e^{-\sigma_0^2})/(1-r)$ nimmt man die Schrittgrösse 0,1 für $0 \leqq r \leqq 1$, wobei man allerdings, vor allem bei der zweiten Funktion, noch Zwischenwerte in der Nähe von $r = 1$ braucht. Die Funktion $\sigma_1 e^{-\sigma_1^2} - \sigma_2 e^{-\sigma_2^2}$ tabuliert man für die Werte r = 0, 0,05, 0,1, 0,2, 0,5, 0,8, 0,9, 0,95, 0,98, 0,99 und 0,996, während man bei der Funktion $\phi(\sigma_1) - \phi(\sigma_2)$ die Werte in der Nähe von $r = 1$ nicht braucht. Als Intervall für die s-Werte nimmt man bei diesen Funktionen 0,1, mit Ausnahme der r-Werte nahe bei 1, wo man viel kleinere Intervalle braucht (etwa proportional $\sqrt{1-r}$). Allerdings braucht man in dieser Gegend die Funktionen nur in der Umgebung von $s = \sigma$, da sie im Uebrigen nahezu konstant sind.

IV. Bestimmung der ersten Näherung.

Wie das eben geschilderte Verfahren zeigt, macht jeder Schritt der Iteration einen grossen Rechenaufwand erforderlich. Man muss daher versuchen, mit möglichst wenig Iterationsschritten auszukommen. Das kann man erreichen, wenn man als Ausgangsfunktion eine Funktion nimmt, die der Lösung schon möglichst nahe kommt. Da sich die Gestalt der Lösungsfunktionen $z(\xi,\eta)$ mit ξ nur langsam ändern wird, wird man die Rechnung unterteilen und zu der Ausgangslösung $b(\eta)$ an der Stelle $\xi = 0$ zunächst die Lösung z an einer Stelle ξ_0 suchen, wobei ξ_0 so gewählt wird, dass $z(\xi_0,\eta)$ von $b(\eta)$ noch nicht allzu verschieden ist, so dass man $b(\eta)$ in dem Intervall $0 \leqq \xi \leqq \xi_0$ als nullte Näherung für das Iterationsverfahren nehmen kann. Nachdem man $z(\xi_0,\eta)$ berechnet hat, nimmt man diese Funktion als Anfangswert für eine neue Rechnung im Intervall $\xi_0 \leqq \xi \leqq \xi_1$ und dort gleichzeitig als erste Näherung, und wiederholt dann das ganze Verfahren. Die Grösse von ξ_0 hängt von der Gestalt von $a(\xi)$ ab. Bei starken Aenderungen von a, insbesondere wenn $a''(\xi)$ grosse Werte annimmt, ist ξ_0 klein zu wählen, bei kleinen Werten von $a''(\xi)$ kann man es grösser wählen.

Weiter ist es praktisch, nicht $b(\eta)$ selbst als Ausgangsfunktion für die Iteration zu nehmen, sondern die in η-Richtung verzerrte und mit den richtigen Randwerten versehene Funktion

$$z_0(\xi,\eta) = b(\bar{\eta}) \cdot \frac{a(\xi)}{a(0)} = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta}, \tag{28}$$

wobei

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\omega(\xi)} \tag{29}$$

gesetzt ist, und die Verzerrungsfunktion $\omega(\xi)$ so bestimmt wird, dass die Gleichung (1) von der ersten Näherung schon im Mittel erfüllt ist. Durch Integration über η von 0 bis ∞ erhält man aus (1) mit Hilfe der Randbedingungen (2) die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} + \frac{\partial}{\partial \xi}\zeta(\xi,\infty) = a(\xi)\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\zeta}{a}\right)^2 d\eta + \frac{1}{2}a'(\xi)\cdot\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\zeta}{a}\right)^2 d\eta. \tag{30}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{b'(0)}{b(0)} \\ B_1 &= \int_0^\infty \frac{b(\bar{\eta})}{b(0)}\, d\bar{\eta} \\ B_2 &= \int_0^\infty \left[\frac{b(\bar{\eta})}{b(0)}\right]^2 d\bar{\eta} \end{aligned} \tag{31}$$

(' bedeutet die Ableitung nach dem Argument der betreffenden Funktion, also $a' = \frac{da}{d\xi}$, $b' = \frac{db}{d\bar{\eta}}$), so folgt aus dem Ansatz (28), (29):

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} = B_0 \cdot \frac{a(\xi)}{w(\xi)}$$

$$\zeta_0(\xi,\infty) = B_1 \cdot a(\xi) \cdot w(\xi) \qquad (32)$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\zeta_0}{a}\right)^2 d\eta = B_2 \cdot w(\xi),$$

wenn man beachtet, dass jetzt die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial \eta}$$

durch

$$\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{w'}{w} \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}}$$

zu ersetzen sind.

Durch Einsetzen dieser Grössen in (30) erhält man die folgende Differentialgleichung zur Bestimmung von $w(\xi)$:

$$\frac{d w^2(\xi)}{d\xi} + w^2(\xi) \cdot \frac{a'(\xi)}{a(\xi)} \cdot (1+H) + \frac{2B_0}{B_1 - B_2} = 0 \qquad (33)$$

wobei

$$\frac{2B_1 - B_2}{B_1 - B_2} = 1 + H$$

gesetzt ist. Ihre Lösung lautet wegen $w(0) = 1$:

$$w^2(\xi) = \left[\frac{a(\xi)}{a(0)}\right]^{-(1+H)} \cdot \left\{1 + \frac{-2B_0}{B_1 - B_2} \int_0^\xi \left[\frac{a(\xi)}{a(0)}\right]^{1+H} d\xi\right\} \qquad (34)$$

Für die als erste Näherung R_1 in die rechte Seite der Gleichung (4) einzuführende Funktion erhält man damit:

$$R_1(\xi,\eta) = a(\xi) \cdot \frac{w'(\xi)}{w(\xi)} \cdot \frac{b'(\bar{\eta})}{b(0)} \cdot \int_0^{\bar{\eta}} \frac{b(\bar{\eta})}{b(0)} d\bar{\eta} - \frac{1}{2} a'(\xi) \cdot \left(\frac{b(\bar{\eta})}{b(0)}\right)^2 \qquad (35)$$

wie man leicht mit Hilfe von (28) nachrechnet.

Falls die als Anfangswert gegebene Funktion $b(\eta) = 0$ ist, also $a(0) = 0$ und $a(\xi) = \xi \cdot a'(0) + \ldots$ für kleine Werte von ξ gilt, so ist die Lösung von (1) für kleine Werte von ξ als Funktion von $\eta^* = \eta / \sqrt{2\xi}$ allein darstellbar, wie man durch den schon auf Seite 2 erwähnten Uebergang zu einer neuen Differentialgleichung zeigen kann, wobei man $\zeta^* = 2\zeta / a_0' \sqrt{2\xi}^3$ als Funktion von $\xi^* = 2\sqrt{\frac{\xi}{a_0}}$ und $\eta^* = \eta / \sqrt{2\xi}$ betrachtet. Für kleine ξ erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^3 \zeta^*}{\partial \eta^{*3}} + \eta^* \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial \eta^{*2}} - 2 \frac{\partial \zeta^*}{\partial \eta^*} = \zeta^* \frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial \eta^{*2}} - \left(\frac{\partial \zeta^*}{\partial \eta^*} \right)^2 \tag{36}$$

mit den Randbedingungen

$$\zeta^*(0) = 0 \,, \; \zeta^*_{\eta^*}(0) = 1 \,, \; \zeta^*_{\eta^*}(\infty) = 0 \,. \tag{37}$$

Die Funktion $b^*(\eta^*) = \frac{\partial \zeta^*}{\partial \eta^*}$, die dieser Gleichung genügt, ist samt ihren Ableitungen in Tabelle 1 dargestellt.

Entsprechend (28) macht man jetzt für die 0-te Näherung den Ansatz:

$$z_0(\xi, \eta) = \frac{\partial \zeta_0}{\partial \eta} = a(\xi) \cdot b^*(\bar{\eta}) \,, \tag{38}$$

wobei

$$\bar{\eta} = \frac{\eta^*}{w(\xi)} = \frac{\eta}{w(\xi) \cdot \sqrt{2\xi}} \tag{39}$$

gesetzt ist, und die Verzerrungsfunktion $w(\xi)$ wieder aus (30) bestimmt wird. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} B_0^* &= b^{*\prime}(0) \\ B_1^* &= \int_0^\infty b^*(\bar{\eta}) \, d\bar{\eta} \\ B_2^* &= \int_0^\infty \left[b^*(\bar{\eta}) \right]^2 d\bar{\eta} \end{aligned} \tag{40}$$

(41)

erhält man aus (38) und (39):

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial \eta^2}\right)_{\eta=0} = B_0^* \cdot \frac{a(\xi)}{\sqrt{2\xi}\cdot w(\xi)}$$

$$\zeta_0(\xi,\infty) = B_1^* \cdot a(\xi)\cdot\sqrt{2\xi}\cdot w(\xi) \tag{41}$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\,\frac{\zeta_0}{a}\right)^2 d\eta = B_2^* \cdot \sqrt{2\xi}\cdot w(\xi)\ ,$$

und durch Einsetzen dieser Grössen in (30) ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d}{d\xi}\left(2\xi w^2(\xi)\right) + 2\xi w^2(\xi)\cdot\frac{a'(\xi)}{a(\xi)}\cdot\left(1+H^*\right) - 2\left(2+H^*\right) = 0\ , \tag{42}$$

wobei jetzt

$$\frac{2B_1^* - B_2^*}{B_1^* - B_2^*} = 1 + H^*$$

gesetzt ist und die Beziehung $-\dfrac{B_0^*}{B_1^* - B_2^*} = 2 + H^*$ benutzt ist, die man leicht mit Hilfe von (36) nachrechnet. Wegen $w(0)$ (·) = 1 lautet ihre Lösung:

$$w^2(\xi) = \frac{2+H^*}{\xi\left[a(\xi)\right]^{1+H^*}}\int_0^\xi \left[a(\xi)\right]^{1+H^*} d\xi \tag{43}$$

Damit wird endlich die erste Näherung R_1 für die rechte Seite von (4) :

$$R_1(\xi,\eta) = a(\xi)\cdot\left[\frac{w'(\xi)}{w(\xi)} + \frac{1}{2\xi}\right] b^{*\prime}(\bar\eta)\cdot\int_0^{\bar\eta} b^*(\bar\eta)\,d\bar\eta - \frac{1}{2}a'(\xi)\cdot\left[b(\bar\eta)\right]^2 \tag{44}$$

Die darin auftretenden Funktionen von $\bar\eta$ sind auch in Tabelle 1 enthalten.

V. Das asymptotische Verhalten der Grenzschichtprofile.

Da die Differentialgleichung (1) für grosse Werte von η schon durch die erste Näherung $A(\xi,\eta)+B(\xi,\eta)$ von (10) vollständig gelöst wird (Z^* geht ja für $\eta \to \infty$ stärker gegen Null als $A+B$), kann man auf Grund dieser ersten Näherung einige allgemeine Aussagen machen über das Verhalten der Geschwindigkeitsverteilungen in der Gegend des Uebergangs der Grenzschicht in die reibungsfreie äussere Strömung.

Für den Fall, dass die Grenzschicht in einem Staupunkt beginnt, also dass $b = 0$ ist und $a(\xi)$ für kleine ξ die Gestalt

$$a(\xi) = \xi \cdot a'(0) \quad + \ldots$$

hat, verhält sich die Lösung von (1) für grosse η wie die Funktion (7)

$$z(\xi,\eta) \sim A(\xi,\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} a(x)\, G_y(\xi,\eta;x,0)\, dx \tag{45}$$

Setzt man darin

$$x = \xi\left(1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right) \qquad \text{mit} \quad \sigma = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}$$

so erhält man wegen (21) und (23)

$$z \sim A(\xi,\eta) = \int_{\sigma_0=\sigma}^{\infty} a\left(\xi\left(1-\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)\right) d\,\Phi(\sigma_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma_0=\sigma}^{\infty} a\left(\xi\cdot\left(1-\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)\right) e^{-\sigma_0^2}\, d\sigma_0 \tag{46}$$

Da sich jede stetige Funktion beliebig genau durch ein Polynom approximieren lässt, kann man für das Folgende annehmen, dass $a(x)$ durch

$$a(x) = \sum_{\nu=1}^{N} A_\nu x^\nu \tag{47}$$

gegeben ist. Aus (46) und (47) erhält man, wenn man die Potenzen von x mit Hilfe des Binomischen Satzes ausdrückt:

$$z \sim A(\xi,\eta) = \sum_\nu A_\nu \xi^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{\nu}{\mu} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma_0=\sigma}^{\infty} \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)^\mu e^{-\sigma_0^2}\, d\sigma_0 \tag{48}$$

Die darin vorkommenden Integrale formt man durch partielle Integration um zu

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha=\sigma}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{2\mu} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sigma^{-1}\cdot e^{-\sigma^2} - \frac{2\mu+1}{\sqrt{\pi}}\int_{\sigma}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{2\mu}\cdot\alpha^{-2} e^{-\alpha^2} d\alpha \tag{49}$$

oder, wenn man die partielle Integration noch mehrfach durchführt zu

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha=\sigma}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{2\mu} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{\ell-1}\frac{(2\mu+2j)!\,\mu!}{(\mu+j)!\,(2\mu)!}\cdot(-4\sigma^2)^{-j} + \frac{(2\mu+2\ell)!\,\mu!}{(\mu+\ell)!\,(2\mu)!\,(-4)^{\ell}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sigma}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right)^{2\mu}\frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha^{2\ell}} d\alpha \tag{50}$$

wobei die Beziehung

$$(2\mu+1)\cdot(2\mu+3)\cdot(2\mu+5)\ldots\ldots(2\mu+2j-1) = \frac{(2\mu+2j)!\,\mu!}{2^{j}\cdot(\mu+j)!\,(2\mu)!} \tag{51}$$

benutzt ist.

Durch Einsetzen von (50) in (48) erhält man für z die asymptotische Entwicklung

$$z \sim A(\xi,\eta) = \frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=1}^{N} A_\nu \xi^\nu \sum_{j=0}^{\ell-1} K_{\nu,j}(-4\sigma^2)^{-j} + \text{Rest} \tag{52}$$

Dabei bedeutet $K_{\nu,j}$ die Summe

$$K_{\nu,j} = \sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^{\mu}\frac{\nu!\,(2\mu+2j)!}{(\nu-\mu)!\,(\mu+j)!\,(2\mu)!} \tag{53}$$

die sich zu dem Ausdruck

$$K_{\nu,j} = \frac{(2j)!\,\nu!\,(-4)^{\nu}}{(j-\nu)!\cdot(2\nu)!} \tag{54}$$

zusammenfassen läßt. Es ist also

$$K_{\nu,j} = 0 \text{ für } \nu > j$$
$$K_{\nu,j} \neq 0 \text{ für } \nu \leq j$$

Damit nimmt die Entwicklung von z die Gestalt an:

$$z \sim A(\xi,\eta) = \frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=1}^{N} A_\nu \xi^\nu \sigma^{-2\nu}\sum_{j=\nu}^{\ell-1}(-4\sigma^2)^{-(j-\nu)}\frac{(2j)!\,\nu!}{(j-\nu)!\,(2\nu)!} + \text{Rest} \tag{55}$$

oder ausführlich geschrieben:

$$z \sim A(\xi,\eta) = \frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma^3\sqrt{\pi}}\cdot A_1\xi + \ldots = \frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma^3\sqrt{\pi}}\, a'(0)\cdot\xi + \ldots \tag{56}$$

Das Verhalten der Grenzschicht im Uebergangsgebiet zur äusseren reibungsfreien Strömung hängt also in erster Näherung nur von dem Verhalten der Druckverteilung im Staupunkt ab. Das gilt für alle ξ. Der weitere Verlauf der Druckverteilung beeinflusst also nur die wandnahen Teile der Grenzschicht. Die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand $\eta = 0$ ist ja direkt durch den Gradienten der Druckverteilung an der betreffenden Stelle gegeben: $z_{\eta\eta}(\xi,0) = \frac{1}{2} a'(\xi)$.

Ganz entsprechend wie oben kann man einsehen, dass sich die Geschwindigkeitsprofile in einer Grenzschicht, die mit dem Blasiusprofil [3], also mit einer Strecke konstanten Druckes beginnt, asymptotisch wie

$$\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma^1\sqrt{\pi}} \cdot A_0 + \ldots$$

verhalten. Allgemein lässt sich für jede Grenzschicht zeigen, dass das asymptotische Verhalten der Geschwindigkeitsprofile durch das asymptotische Verhalten des Geschwindigkeitsprofils am Anfang der Grenzschicht gegeben ist.

Daraus folgt, dass das Geschwindigkeitsprofil im Druckminimum $\xi = \xi_1$ eines Tragflügels, wo $a'(\xi_1) = 0$ ist, stets vom Blasiusprofil verschieden ist. Unter Umständen braucht diese Abweichung allerdings nicht sehr gross zu sein.

VI. Zusammenfassung.

Das in einer früheren Arbeit [1] beschriebene Verfahren zur allgemeinen Lösung der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen wird näher erläutert, und der Gang der numerischen Rechnung wird in allen Einzelheiten beschrieben. Ausserdem wird gezeigt, dass das Verhalten der Grenzschicht in der Gegend der Ueberganges zu der äusseren reibungsfreien Strömung durch den Anfang der betreffenden Grenzschicht also im allgemeinen durch den Staupunkt festgelegt ist. Der weitere Verlauf der Druckverteilung beeinflusst nur die wandnahen Gebiete der Grenzschicht, während er das Verhalten der Geschwindigkeitsverteilung am Uebergang zur reibungslosen Strömung ungeändert lässt. Damit ist z.B. gezeigt, dass das im Druckminimum auftretende Geschwindigkeitsprofil in einer mit einem Staupunkt beginnenden Grenzschicht stets von dem von Blasius [3] für den Fall einer konstanten Druckverteilung berechneten Profil verschieden ist. Wie weit das letztere das erstere annähert, kann erst nach Berechnung von weiteren Grenzschichten mit charakteristisch ausgesuchten Druckverteilungen entschieden werden.

VII. Schrifttum.

[1] **W. Mangler**: Die allgemeine Lösung der Prandtlschen Grenzschichtgleichungen. Bericht 141 der Lilienthal-Gesellschaft f.Luftfahrtfg. S.3 (1941)

[2] **M. Gevrey**: Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Journ.des math.pures et appl. VI.Ser. 9 , S.305 und 10, S.10 (1913/1914).

[3] **H. Blasius**: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zeitschrft.f.Math.u.Phys.56, 1, (1908)

[4] **K. Hiemenz**: Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten Kreiszylinder. Dinglers Polytechn. Journal 326 , 321 (1911)

[5] **L. Howarth**: On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc.Royal Soc. London A 164 S.547 (1938).

[6] **V.M. Falkner S.W. Skan**: Some approximate solutions of the boundary layer equations. Philos.Mag.12 S.865 (1931) ARC Rep.a.Mem.No.1314 (1930).

[7] **D.R. Hartree**: On an equation occuring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer. Proc.Cambridge Philos.Soc.33. II S.223 (1937).

[8] **K. Pohlhausen**: Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. Zeitschrft.angew.Math.Mech. 1 S. 252 (1921).

[9] **H.Holstein u. T.Bohlen :** Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsansatz von K.Pohlhausen genügen. Bericht S.10 der Lilienthal-Ges.f.L. , S.5 (1940).

[10] **A.Walz:** Ein neuer Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Reibungsschicht. Bericht 141 der LGL S.8 (1941).

Tabelle 1

η^*	b^*	$-b^{*\prime}$	$\int_0^{\eta^*} b^* d\eta^*$	b^{*2}	$-b^{*\prime}\int_0^{\eta^*} b^* d\eta^*$
0	1,0	1,2326	0	1,0	0
0,05	0,940	1,187	0,0485	0,883	0,0576
0,1	0,8817	1,135	0,0944	0,778	0,1073
0,2	0,7734	1,036	0,176	0,597	0,1825
0,3	0,6748	0,940	0,249	0,455	0,3240
0,4	0,5856	0,847	0,312	0,343	0,2642
0,5	0,5054	0,758	0,366	0,255	0,2772
0,6	0,4338	0,674	0,413	0,188	0,2782
0,7	0,3702	0,598	0,453	0,1370	0,2708
0,8	0,3141	0,526	0,488	0,0987	0,2567
0,9	0,2650	0,460	0,516	0,0702	0,2371
1,0	0,2222	0,398	0,540	0,0493	0,2150
1,2	0,1533	0,293	0,577	0,0235	0,1690
1,4	0,1032	0,210	0,605	0,0107	0,1270
1,6	0,0676	0,148	0,620	0,00457	0,0918
1,8	0,0431	0,103	0,630	0,00186	0,0649
2,0	0,0268	0,0670	0,638	0,000718	0,0427
2,2	0,0159	0,0422	0,642	0,000252	0,0271
2,4	0,0095	0,0258	0,643	0,000090	0,0166
2,6	0,0054	0,0168	0,644	0,0000292	0,0108
2,8	0,0029	0,0098	0,645	0,0000084	0,00632
3,0	0,0015	0,0050	0,645	0,0000022	0,00323
3,2	0,0008	0,0025	0,646	0	0,00162
3,4	0,0004	0,0015	0,647	0	0,00097
3,6	0,0002		0,647	0	
3,8	0,0001		0,647	0	
4,0	0		0,647	0	

$-B_0^* = 1{,}2326$ $B_1^* = 0{,}6468$ $B_2^* = 0{,}3539$ $H^* = 2{,}2083$