

Der durch einen Freistrahldurchgestreckte Tragflügel.

Übersicht: Das Problem des durch einen Freistrahldurchgestreckten Tragflügels ist wichtig im Hinblick auf die Wirkung des Propellerstrahls auf den Tragflügel. Die entstehende zusätzliche Auftriebsverteilung erstreckt sich über das im Strahl liegende Flügelstück, also über die Breite des Strahldurchmessers. Diese Grösse kann nicht mehr als gross gegenüber der Flügeltiefe angesehen werden, so dass die Voraussetzungen der Prandtl'schen Tragflügelgleichung nicht mehr erfüllt sind. Es wird ein Näherungsverfahren vorgeschlagen, dass die eigentlich notwendige Behandlung der Aufgabe mit der Theorie der tragenden Fläche zu ersetzen geeignet ist.

Gliederung.

I. Bezeichnungen

II. Einleitung

III. Vorschläge zur Behandlung der Aufgabe und Zusammenstellung der Formeln.

1. Der Abwind des tragenden Fadens und des zur Erfüllung der Grenzbedingungen notwendigen Spiegelungsschemas.

2. Methoden zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung.

3. Der vom Strahl erzeugte Gesamtauftrieb.

IV. Ein Beispiel

V. Zusammenfassung

VI. Schrifttum

Der Bericht umfasst:

20 Seiten Text mit
2 Abbildungen

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GOETTINGEN E.V.

Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Leiter

J. V. F. Riegels

Der Bearbeiter

J. Ginzl.

I. Bezeichnungen

V	Anströmgeschwindigkeit
α^+	Anstellwinkel, $\alpha(y)$ Anstellwinkelverteilung
t	Flügeltiefe
l	Strahlbreite
h	Strahlhöhe
x	Koordinate längs der Tiefe (positiv nach hinten)
y	Koordinate längs der Spannweite (y = 0 Flügelmitte)
$\bar{\Gamma}(y)$	Zirkulationsverteilung längs der Spannweite (Integral über die Tiefe)
$\bar{\Gamma}$	Gesamtzirkulation (Integral von $\bar{\Gamma}(y)$ über die Spannweite)
A	Auftrieb
c_a	Auftriebsziffer
w	Abwind
w_∞	Abwind im Unendlichen
w_0	Abwind am Ort des Flügels

II. Einleitung.

Der durch einen Freistrahle hindurchgestreckte Tragflügel ist für verschiedene Querschnittsformen des Strahls von Stüper (s. bes. [1]) an Hand der Prandtl'schen Tragflügelgleichung behandelt worden. Schon Stüper weist daraufhin, dass bei kleinen Verhältnissen von Strahldurchmesser zur Flügeltiefe die Voraussetzungen der Prandtl'schen Gleichung nicht erfüllt sind, und sich die Abweichungen zwischen seinen Rechnungen und Messungen wahrscheinlich daraus erklären lassen ([2] S. 278). Wir werden jetzt die Stüpersche Arbeit mit Hilfe einer zur Behandlung

der Wirbelfläche des Rechtecks ausgearbeiteter Methode [3] so ergänzen, dass dieser Einfluss der Flügeltiefe erfasst werden kann. Wie Stüper behandeln wir den Flügel, dessen Breite gerade die Strahlbreite ist (man kann ihn auch als unendlich breiten Flügel auffassen, weil der äussere Teil in dem Gebiet mit der Geschwindigkeit null liegt) und z. werden wir uns auf den rechteckigen Strahl beschränken, weil dort die Rechenarbeit viel geringer als beim Kreisstrahl ist.

III. Vorschläge zur Behandlung der Aufgabe und Zusammenstellung der Formeln.

1. Der Abwind des tragenden Fadens und des zur Erfüllung der Grenzbedingungen notwendigen Spiegelungsschemas.

Auf freien Strahlgrenzen ist der Druck gleich dem der ruhenden Flüssigkeit. Im Bereich einer Theorie erster Ordnung ist diese Bedingung bekanntlich identisch mit der Bedingung, dass auf der freien Grenze die Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Strömungsrichtung verschwinden muss. Diese Bedingung wird nach dem Spiegelungsprinzip folgendermassen erfüllt: (Näheres s. [1]) Der rechteckige Freistrahls habe die Breite l und die Höhe h , und der Flügel sei durch die Mitte hindurchgestreckt und habe den Anstellwinkel α^+ . Die Grenzbedingungen auf den Flächen $y = ml$, $z = (2m + 1) \frac{h}{2}$ werden dann erfüllt sein, wenn sich in der Ebene $x = 0$ an den Stellen $z = m h$ (m alle ganzen Zahlen) unendlich lange Flügel mit periodischer unstetiger Anstellwinkelverteilung abwechselnd zwischen $+\alpha^+$ und $-\alpha^+$ mit der Periode $2l$ und den Sprüngen an den Stellen $y = 0, \pm l, \pm 2l$ befinden. (s. Bild 1)

Nach dem Biot-Savartschen Gesetz ergibt sich für den Abwind des obigen Wirbelsystems im Punkte x, y'

$$w(x, y') = \frac{x}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(y) dy}{(x^2 + (y' - y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{y' - y} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y' - y)^2}} \right\} \quad (1)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \Gamma(y) dy}{(x^2 + (y' - y)^2 + (mh)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma (y' - y) dy}{dy (y' - y)^2 + (mh)^2} \left\{ 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y' - y)^2 + (mh)^2}} \right\}$$

wobei wir den Anteil, der von dem in der x - y Ebene liegenden Wirbelsystem $m = 0$ herrührt, herausgezogen haben. Den zweiten Anteil von den ausserhalb der x, y Ebene liegenden Systemen $m \neq 0$ formen wir jetzt so um, dass er in der Form

$$w_{m \neq 0}(x, y') = w_{\infty m \neq 0} - w(-x, y')_{m \neq 0}$$

erscheint.

$$w_{m \neq 0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \Gamma(y) dy}{(x^2 + (y' - y)^2 + (mh)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma (y' - y) dy}{dy (y' - y)^2 + (mh)^2} \quad (1a)$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma (y' - y) dy}{dy (x + \sqrt{x^2 + (y' - y)^2 + (mh)^2}) \sqrt{x^2 + (y' - y)^2 + (mh)^2}}$$

Das erste Glied rührt von den tragenden Fäden her, das mittlere stellt den Abwind im Unendlichen dar, und der Rest ist der negative Aufwind, den die abgehenden Wirbel vor dem Flügel im Punkte $-x, y'$ erzeugen. Den Abwind im Unendlichen, der das Doppelte des Abwindes am Ort des Flügels ausmacht, fassen wir mit dem entsprechenden Glied des Wirbelsystems in der x - y Ebene zusammen. Den Abwind dieses Systems kann man ähnlich schreiben

$$w_{m=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \Gamma(y) dy}{(x^2 + (y' - y)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{y' - y} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma (y' - y) dy}{dy (x + \sqrt{x^2 + (y' - y)^2}) \sqrt{x^2 + (y' - y)^2}} \quad (1b)$$

Die Summen der mittleren Glieder von (1a) und (1b) ergibt
(s. [1] S. 341)

$$w_{\infty} = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma}{dy} \operatorname{Ltg} \frac{\pi}{h} (y'-y) dy \quad (2)$$

Für die weitere Behandlung setzen wir für $\Gamma(y)$ eine trigonometrische Reihe an. Da sich der Anstellwinkel durch die Fourierreihe

$$\alpha(y) = \alpha^* \frac{y}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi \frac{y}{c}}{2n+1} \quad (3)$$

darstellen lässt, können wir für $\Gamma(y)$ den Ansatz machen

$$\Gamma(y) = \Gamma_{\infty} \sum_0^{\infty} a_{2n+1} \sin(2n+1)\pi \frac{y}{c}, \quad (4)$$

wo Γ_{∞} die zu unendlich ausgedehnter Strömung gehörige Zirkulation ist

$$\Gamma_{\infty} = \frac{c V t \alpha^*}{2} \quad (5)$$

$$c = \left(\frac{dca}{d\alpha} \right)_{\infty}$$

Aus (2) wird mit (4) zunächst (s. [1] S. 342)

$$w_{\infty} = \Gamma_{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_{2n+1} (2n+1)\pi}{2hl} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2n+1)\pi \frac{y}{c} \operatorname{Ltg} (y'-y) dy$$

oder mit $\frac{\pi}{h} (y'-y) = v$ wird $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2n+1)\frac{h}{c} v \operatorname{Ltg} v dv = \pi \frac{e^{(2n+1)\frac{h}{c}\pi} + 1}{e^{(2n+1)\frac{h}{c}\pi} - 1}$

$$w_{\infty} = \Gamma_{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_{2n+1} (2n+1)\pi}{2l} \frac{e^{(2n+1)\frac{h}{c}\pi} + 1}{e^{(2n+1)\frac{h}{c}\pi} - 1} \sin(2n+1)\pi \frac{y'}{c} \quad (6)$$

Jetzt wird der Ansatz (4) in das erste und dritte Glied von (1a)

eingeführt. Da wir, wie sich noch zeigen wird, von den Reihen (3) und (4) doch nur das erste Glied mit der Methode der tragenden Fläche behandeln müssen, wollen wir uns die Formeln nicht unnötig komplizieren und von vornherein nur das erste Glied einsetzen, d. h.

$$T(y) = T_{\infty} a_1 \sin \frac{\pi y}{\ell} \quad (4a)$$

setzen. Dann ergibt sich mit $\frac{\pi}{h} (y' - y) = u$

$$\begin{aligned} w_{m \neq 0} - w_{\infty m \neq 0} &= \frac{1}{2\pi} T_{\infty} a_1 \frac{h}{\pi} \frac{1}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty} x \sin \frac{\pi}{\ell} (y' + \frac{h}{\pi} u) \int_1^{\infty} \frac{du}{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}^{\frac{3}{2}} \\ &+ \frac{1}{2\pi} T_{\infty} a_1 \frac{\pi}{\ell} \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} u \cos \frac{\pi}{\ell} (y' + \frac{h}{\pi} u) \int_1^{\infty} \frac{du}{\left(\frac{x}{h} + \sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}\right) \sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

Die antisymmetrischen Teile des Integrals verschwinden, und es bleibt

$$\begin{aligned} w_{m \neq 0} - w_{\infty m \neq 0} &= \frac{T_{\infty} a_1}{\pi^2 h} \frac{x}{h} \sin \frac{\pi}{\ell} y' \int_0^{\infty} \cos \frac{h}{\ell} u \int_1^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}^3} \\ &- \frac{T_{\infty} a_1}{\pi^2 \ell} \sin \frac{\pi}{\ell} y' \int_0^{\infty} u \sin \frac{h}{\ell} u \int_1^{\infty} \frac{du}{\left(\frac{x}{h} + \sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}\right) \sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

Nun müssen wir den Ansatz (4a) noch in das 1. und 3. Glied von (1b) einführen.

Mit $y - y' = u$ kommt

$$\begin{aligned} w_{m=0} - w_{\infty m=0} &= \frac{T_{\infty} a_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \frac{\pi}{\ell} (y' + u) du}{\sqrt{x^2 + u^2}^3} + \frac{T_{\infty} a_1}{4\pi} \frac{\pi}{\ell} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u \cos \frac{\pi}{\ell} (u + y') du}{(x + \sqrt{x^2 + u^2}) \sqrt{x^2 + u^2}} \\ &= \frac{T_{\infty} a_1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{\ell} y' \left[\left[\cos \frac{\pi}{\ell} u \frac{u}{x + \sqrt{x^2 + u^2}} \right]_0^{\infty} + \frac{\pi}{\ell} \int_0^{\infty} \sin \frac{\pi}{\ell} u \frac{u du}{x \sqrt{x^2 + u^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{\ell} \int_0^{\infty} \frac{u \sin \frac{\pi}{\ell} u du}{(x + \sqrt{x^2 + u^2}) \sqrt{x^2 + u^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Gamma_{\infty} a_1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{c} y' \left[\left[\cos \frac{\pi}{c} u \frac{u}{x\sqrt{x^2+u^2}} \right]_0^{\infty} + \frac{\pi}{c} \int_0^{\infty} u \sin \frac{\pi}{c} u \frac{du}{x(x+\sqrt{x^2+u^2})} \right] \\
 &= \frac{\Gamma_{\infty} a_1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{c} y' \left[\left[\cos \frac{\pi}{c} u \frac{u}{x\sqrt{x^2+u^2}} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{u \cos \frac{\pi}{c} u}{x(x+\sqrt{x^2+u^2})} \right]_0^{\infty} \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{c} u \frac{du}{(x+\sqrt{x^2+u^2})\sqrt{x^2+u^2}} \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

Die beiden ersten Ausdrücke sind an der unteren Grenze null, an der oberen gehen sie gegeneinander weg. Dann sei N eine grosse Zahl

$$\begin{aligned}
 &\frac{d \cos N}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+N^2}} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+N^2}} \right) \\
 &= \frac{d \cos N}{\sqrt{x^2+N^2} (x+\sqrt{x^2+N^2})} = \frac{\cos N}{N \sqrt{1+(\frac{x}{N})^2} (\frac{x}{N} + \sqrt{1+(\frac{x}{N})^2})^2}
 \end{aligned}$$

Für $N \rightarrow \infty$ geht dieser Ausdruck in

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\cos N}{N} = 0$$

über. So bleibt also

$$w_{m=0} - w_{\infty m=0} = \frac{\Gamma_{\infty} a_1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{c} y' \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{c} u \frac{du}{(x+\sqrt{x^2+u^2})\sqrt{x^2+u^2}} \quad (10)$$

Lassen wir jetzt (6) und (8) und (10) zusammen, so ist für den Ansatz (4a) der Abwind w_1 (Fundus 1 voll auf der 1. Glied der Reifen (3) und (4) für $m=0$)

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{\Gamma_{\infty} a_1 \pi}{2l} \frac{e^{\frac{h}{2}\pi} + 1}{e^{\frac{h}{2}\pi} - 1} \sin \frac{\pi}{c} y' + \frac{\Gamma_{\infty} a_1}{\pi^2 h} \frac{x}{h} \sin \frac{\pi}{c} y' \int_1^{\infty} \cos \frac{h}{c} u \frac{du}{\sqrt{(\frac{x}{h})^2 + (\frac{u}{h})^2 + m^2}} \\
 &\quad - \frac{\Gamma_{\infty} a_1}{\pi^2 c} \sin \frac{\pi}{c} y' \int_0^{\infty} u \sin \frac{h}{c} u \frac{du}{(\frac{x}{h} + \sqrt{(\frac{x}{h})^2 + (\frac{u}{h})^2 + m^2}) \sqrt{(\frac{x}{h})^2 + (\frac{u}{h})^2 + m^2}} \\
 &\quad + \frac{\Gamma_{\infty} a_1}{2\pi} \sin \frac{\pi}{c} y' \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{c} u \frac{du}{(x+\sqrt{x^2+u^2})\sqrt{x^2+u^2}} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Man sieht, dass die Schar von unendlich breiten Flügeln mit einer sinusförmigen Zirkulationsverteilung in jeder Entfernung einen sinusförmigen Abwind erzeugen, wie es für einen unendlich breiten Flügel bereits bekannt ist ([4] S. 30).

2. Methoden zur Bestimmung der Zirkulationsverteilung.

Die Bedingung, dass die Strömung dem Flügel (der Wirbelfläche) überall anliegen soll, heisst

$$\frac{w(x, y)}{v} = \alpha(y) \quad (12)$$

Beschränkt man sich also auf das 1. Glied der Reihe (3), so genügt zur Befriedigung der Bedingung (12) sicher der Ansatz (4a), und so könnte jedes Glied für sich behandelt werden.

Wir wollen uns jetzt über die Sonderstellung des ersten Gliedes der Reihen (3) und (4) klar werden und Hiniges über die Gültigkeit der verschiedenen Theorie, zur Berechnung der Zirkulationsverteilung bemerken.

Die Prandtl'sche Tragflügelgleichung

$$\Gamma(y) = \frac{c v t}{2} (\alpha(y) - \frac{w_0(y)}{v}), \quad (13)$$

wo w_0 der Abwind am Ort der tragenden Linie ist, setzt voraus, dass die Tiefe klein gegen die Spannweite ist, dann sie wurde aus dem K u t t a - J o u k o w s k y s c h e n Satz für das ebene Problem gewonnen, speziell in unserem Fall setzt sie voraus, dass die Tiefe klein ist gegen die Halbperiode l der Zirkulationsverteilung. Man sieht, dass diese Bedingung für Schraubenstrahlprobleme meist nicht einmal für das erste Glied der

Reihe (4) erfüllt sein wird, keinesfalls aber für die höheren Glieder mit den halben Perioden $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ usw. Im Gegenteil kann man für diese Glieder meist die Tiefe geradezu als gross gegen die halbe Periode betrachten. Der Abwind hinter einem tragenden Faden hat in Tiefenrichtung die folgende prinzipielle Gestalt: ^(s. Abb. 2) Er kommt aus dem positiven Unendlichen und hat den Wert im Unendlichen zur Asymptote. Konzentrieren wir die Zirkulation in einen tragenden Faden, so wird ein umso grösseres Stück des Flügels in dem Gebiet liegen, in dem der Abwind des tragenden Fadens bereits den asymptotischen Wert w_{∞} erreicht hat, je tiefer der Flügel ist. Man wird dann der Strömungsbedingung (12) einigermaßen mit der Forderung

$$\frac{w_{\infty}(y)}{V} = \alpha(y) \quad (14)$$

genügen. Für eine genauere Begründung dieser Näherungsregel muss auf [3] verwiesen werden. Mit der Prandtl'schen Gleichung (13) wird man etwa für

$$\frac{t}{c} \approx \frac{1}{4}$$

mit der Näherung (14) für

$$\frac{t}{c} \geq 2$$

rechnen können. Im Falle des Propellerstrahles liegen nun die Spiegelungs-Glieder $m = 1, 2 \dots$ im Bereich der Näherung (14), das 1. Glied aber im Zwischengebiet.

Nun hat P i s t o l e s i [5] darauf aufmerksam gemacht, dass man eine gute Näherung für die Wirbelfläche erhält, wenn man verlangt, dass der Anstellwinkel gleich dem Abwindwinkel im $\frac{3D}{4}$ - Punkt (hinterer Neutralpunkt) wird. Wenigstens kann

man die betreffenden Ausführungen P i s t o l e s i s , die sich ursprünglich auf eine von einem 2. System her induzierte Zusatzströmung beziehen, so deuten, wie M u l t h o p p ([6] S. 58), R i e g e l s ([7] S. 768) und neuerdings W e i s s i n - g e r [8] gezeigt haben. Man hat dann nicht nur die Richtung (F r a n d t l), sondern auch die Krümmung der Strömung erfasst. Das Verfahren läuft also darauf hinaus, dass man verlangt

$$\frac{w_{3/4}}{v}(\eta) = \alpha(\eta) \quad (15)$$

und diese Näherung wollen wir zur Berechnung des 1. Gliedes der Reihe (4) benutzen. Wir umgehen damit die Berechnung der Wirbelfläche. Diese würde nämlich verlangen, dass zunächst einmal die Abwindfunktion (11) für eine genügende Anzahl von x-Werten berechnet und graphisch in der Form

$$\frac{w}{v}(x, y) = f\left(\frac{x}{l}\right) \sin \frac{\pi y}{l} \quad (16)$$

festgelegt wird.

Dann muss die Integralgleichung

$$\int_0^l f\left(\frac{x'-x}{l}\right) g(x) dx = \alpha \frac{y}{l} \quad (17)$$

mit dem bekannten Kern $f\left(\frac{x'-x}{l}\right)$ nach der unbekanntem Funktion $g(x)$ mit einem geeigneten Ansatz für diese Funktion aufgelöst werden. Die Auflösung von (17) ist nicht schlimm, aber die Vorarbeit der Bestimmung von f war mir für dieses spezielle Problem zu zeitraubend. (Für einen gewöhnlichen Rechteckflügel ohne das Spiegelungsschema ist diese Arbeit in [3] geleistet.) Wenden

wir aber (15) an, so haben wir die Funktion β nur im Punkt $x_1 = \frac{t}{2} +$ auszurechnen. Wir berechnen also das 1. Glied von (4) nach (15), den Rest nach (14).

3. Der vom Strahl erzeugte Gesamtauftrieb.

Da man sich ~~sich~~ in der Praxis hauptsächlich für den vom Strahl herrührenden Gesamtauftrieb interessiert, werden wir unsere Formeln so schreiben, dass sie unmittelbar $\frac{dca}{da}$ liefern.

Gemäss unseren Näherungen (14), (15) berechnen wir nicht die Wirbelfläche sondern die in einem Faden konzentrierte Wirbelverteilung $\bar{\Gamma}(y)$, also die über die Tiefe bereits integrierte, nur noch über die Spannweite verteilte Zirkulation. Durch nochmalige Integration erhält man die Gesamtzirkulation $\bar{\Gamma}$ und aus dieser mit dem K u t t a - J o u k o w s k y schen Satz den Gesamtauftrieb A. Man erhält dann $\frac{dca}{da}$ aus

$$c \bar{\Gamma} b = \frac{dca}{da} \alpha + \frac{c}{2} \bar{\Gamma}^2 b t$$

zu

$$\frac{dca}{da} = \frac{2\bar{\Gamma}}{\alpha + \bar{\Gamma} t} = c \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{\Gamma}_\infty} \quad (18)$$

Aus (11) sieht man unmittelbar, dass (14) und (15) $\bar{\Gamma}(y)$ unabhängig von $\bar{\Gamma}_\infty$ insbesondere also unabhängig von $c = \left(\frac{dca}{da}\right)_\infty$ liefern. Es ist der grosse Vorzug der Prandtl'schen Gleichung (13), dass sie gestattet, mit Hilfe der Grösse c , die theoretisch oder durch Messung bekannt sein kann, Profileigenschaften zu berücksichtigen. In dieser Beziehung sind die Näherungen (14) und (15) und auch die in (17) angedeutete Wirbelflächentheorie im Nachteil, sie gelten zunächst nur für die Platte. Spezialisieren wir jetzt (11) auf $x_1 = \frac{t}{2}$, $\frac{x_2}{h} = \frac{t}{2} \frac{t}{h}$ und setzen in (15) ein, so kommt

[†] Der tragende Faden liegt im $\frac{t}{4}$ -Punkt.

$$\frac{4}{\pi} = \frac{ct}{2} \frac{a_1 \pi}{2l} \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1} + \frac{ct}{2} \frac{a_2}{\pi^2} \frac{x}{h^2} \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{l} u \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}}^3$$

$$- \frac{ct}{2} \frac{a_2}{\pi^2} \int_0^{\infty} u \sin \frac{\pi}{l} u \frac{du}{\left(\frac{x_1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}\right) \sqrt{\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}}$$

$$+ \frac{ct}{2} \frac{a_2}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{l} u \frac{du}{(x_1 + \sqrt{x_1^2 + u^2}) \sqrt{x_1^2 + u^2}}$$

Wegen

$$\int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} \frac{dy}{l} = \frac{2}{\pi}$$

ergibt sich aus (18)

$$\left(\frac{dca}{d\alpha^*}\right)_1 = ca_1 \frac{2}{\pi}$$

oder für uns bequemer

$$\left(\frac{d\alpha^*}{dca}\right)_1 = \frac{\pi}{2ca_1} = \frac{\pi^3}{32} \frac{t}{l} \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{e^{\frac{\pi}{2}} - 1} + \frac{1}{16} \frac{l}{h} \frac{t}{h} \frac{x}{h} \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{l} u \frac{d \frac{\pi}{l} u}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}}^3$$

$$- \frac{1}{16} \frac{t}{h} \int_0^{\infty} u \sin \frac{\pi}{l} u \frac{d \frac{\pi}{l} u}{\left(\frac{x_1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}\right) \sqrt{\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2 + m^2}} \quad (19)$$

$$+ \frac{\pi}{32} \frac{t}{l} \int_0^{\infty} \cos \frac{\pi}{l} u \frac{d \frac{\pi}{l} u}{\left(\frac{x_1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2}\right) \sqrt{\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \left(\frac{u}{h}\right)^2}}$$

way(49)

Während wir das erste Glied der Reihe (4) berechnen, behandeln wir den ganzen Rest der Näherung (14) und erhalten nach

(6)

$$\frac{4}{\pi} \frac{1}{2n+1} = \frac{ct}{2} \frac{a_{2n+1} (2n+1) \pi}{2l} \frac{e^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} + 1}{e^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - 1}$$

Wegen

$$\int_0^1 \sin(2n+1) \frac{\pi}{l} \frac{dy}{l} = \frac{2}{\pi(2n+1)}$$

ergibt sich aus (18) (Index R soll sich auf den Rest der Reihe (4) beziehen),

$$\left(\frac{dca}{d\alpha^*}\right)_R = \sum_{n=1}^{\infty} ca_{2n+1} \frac{2}{\pi(2n+1)}$$

oder

$$\left(\frac{dca}{d\alpha^*}\right)_R = \frac{32}{\pi^3} \frac{l}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \frac{c}{e^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - 1} \frac{e^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} + 1}{e^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} + 1} \quad (20)$$

Von (19) ist der reziproke Wert zu bilden und zu (20) dazuzuzählen, um $\frac{d\alpha_n}{d\alpha^*}$ zu erhalten. Soll die ganze Aufgabe nach (14) behandelt werden, so läuft die Summe in (20) von $n = 0$ bis ∞ .

Es gibt natürlich auch Fälle, wo man sich nicht nur für $\frac{d\alpha_n}{d\alpha^*}$, sondern auch für die Auftriebsverteilung interessiert. Aus den Formeln (19) und (20) kann man sofort die betreffenden Ausdrücke für a_{2n+1} ablesen und in den Ansatz (4) einsetzen.

IV. Ein Beispiel.

Stüper hat in [2] Abb. 3 theoretische und experimentelle Werte von $\frac{d\alpha_n}{d\alpha^*}$ eines durch einen Kreisstrahl gesteckten Flügels über $\lambda = \frac{4L}{2\pi t}$ aufgetragen. Da die theoretischen Werte nach der Tragflügelgleichung (13) gewonnen sind, ist es nach allem bisher Gesagten einleuchtend, daß Theorie und Messung nur für große λ (kleine $\frac{t}{L}$) übereinstimmen. Wir haben unsere Theorie für den rechteckigen Strahl entwickelt und ersetzen den Kreis durch ein flächengleiches Rechteck, das den Kreisdurchmesser zur großen Kantenlänge hat, d. h. ein Rechteck vom Seitenverhältnis $\frac{h}{l} = \frac{\pi}{4}$.

Bei $\lambda = 0,67$ gibt Stüper als theoretischen Wert nach der Tragflügelgleichung für den Kreisstrahl an

$$\frac{d\alpha_n}{d\alpha^*} = 1,4 .$$

Die Tragflügelgleichung für den rechteckigen Strahl $\frac{h}{l} = \frac{\pi}{4}$

$$\lambda = \frac{4L}{2\pi t} = 0,67 , \text{ also } \frac{t}{L} = 0,955 \text{ ergibt}$$

$$\frac{d\alpha_n}{d\alpha^*} = 1,44 .$$

Die Behandlung nach unserer gemischten Methode (1. Glied der Reihe (4) nach (15), Rest nach (14)) ergibt

$$\frac{d\alpha_n}{d\alpha^*} = 0,957$$

Die Behandlung der ganzen Reihe (4) nach der groben Näherung (14) ergibt

$$\frac{d\alpha_n}{d\alpha^*} = 0,968$$

Bei $\lambda = 1$ gibt Stüper als theoretischen Wert nach der Tragflügelgleichung für den Kreisstrahl an

$$\frac{dca}{d\alpha^*} = 1,9,$$

als gemessenen Wert

$$\frac{dca}{d\alpha^*} = 1,6$$

Die Tragflügelgleichung für den rechteckigen Strahl $\frac{c}{c} = \frac{r}{r}$,
 $\lambda = \frac{4l}{2\pi t} = 1$ also $\frac{t}{l} = 0,636$ ergibt

$$\frac{dca}{d\alpha^*} = 1,92.$$

Die Behandlung der ganzen Aufgabe nach der groben Näherung (14) ergibt

$$\frac{dca}{d\alpha^*} = 1,45.$$

Zu diesen Zahlen ist nun Folgendes zu bemerken:

1.) Die Übereinstimmung der gemischten Methode [1. Glied der Reihe (4) nach (15), Rest nach (14)] mit der groben Näherung [die ganze Reihe (4) nach (14)] ist ausgezeichnet. Man wird sich bei den beim Propellerstrahl vorliegenden Verhältnissen $\frac{t}{l} > 1$ meist darauf beschränken, einfach die Formel (20) auszuwerten, wo die Summe von $n = 0$ bis ∞ läuft.

2.) Der Ersatz des Kreisstrahles durch den rechteckigen Strahl ist nicht so gut, wenn es auch nach den Zahlen so aussieht; denn es ist zu bedenken, dass Stüper beim Vergleich mit der Messung nicht mit $c = 2\pi$ gerechnet hat sondern mit einem kleineren Wert (s. [1] S. 352). Die Kreisstrahlwerte für $c = 2\pi$ würden grösser ausfallen als die hier angegebenen. Wir mussten zum

Vergleich mit den aus der Wirbelfläche (Platte) hergeleiteten Näherungen (14) und (15) auch in der Tragflügelgleichung $c = 2\pi$ setzen. Die Uebereinstimmung der Kreiswerte und der Rechteckwerte ist also nicht so gut, wie sie hier erscheinen, der Ersatz des Kreises durch das flächengleiche Rechteck mit $l = 2R$ liefert zu niedrige $\frac{d\sigma}{d\alpha}$. (Da die grobe Näherung ⁽¹⁴⁾ auszureichen scheint, könnte man die Stüpersche Methode der Berechnung des durch den Kreisstrahl gesteckten Flügels natürlich auch auf (14) anwenden. Das ist sicher nicht unbequemer wie die Anwendung auf die Tragflügelgleichung (13) aber wahrscheinlich auch nicht bequemer).

3.) Da der Ersatz des Kreises durch das flächengleiche Rechteck zu niedrigerem $\frac{d\sigma}{d\alpha}$ liefert, ist es nicht verwunderlich, dass der nach der groben Näherung (14) berechnete Wert unter dem gemessenen Wert bleibt, ~~zumal wenn man bedenkt, dass ein Profil endlicher Dicke vermessen wurde, während der Rechnung die Platte zugrunde liegt.~~ Keinesfalls kann man durch eine genauere Rechnung nach (15) oder (17) grössere Werte errechnen, denn die grobe Näherung (14) liefert eine obere Grenze.

4.) Für die gemischte Methode ist in unserem Beispiel die Formel (19) für $\frac{\kappa}{\lambda} = 0,608$ auszuwerten. Das 1. Glied von (19) enthält den Abwind im Unendlichen und ergibt den Zahlenwert 1,096. Die weiteren Glieder in (19) enthalten den Unterschied der Näherung (15) gegenüber der Näherung (14). Sie sind gegen das 1. Glied klein, denn sie ergeben in der Reihenfolge, in der sie in (19) auftreten, die Zahlenwerte

$$\begin{aligned} &+ 0,0112 \\ &- 0,0552 \\ &+ 0,0528 \end{aligned}$$

Zum reziproken von (19) ist dann noch der Anteil, den der Reihenrest von (4) nach (20) ergibt, dazuzuzählen, auch er ist klein und liefert den Wert 0,056.

5.) Das 3. Glied der Formel (19) konvergiert in dieser Form schlecht. Ich habe es mit partieller Integration umgeformt in die beiden Integrale

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{16} \frac{c}{h} \int_0^{\infty} u \sin \frac{h}{c} u \frac{d \frac{h}{c} u}{\left(\frac{x_1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{u}{h} \right)^2 + m^2} \right) \sqrt{\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{u}{h} \right)^2 + m^2}} \\
 & = -\frac{1}{16} \frac{c}{h} \frac{c}{h} \int_0^{\infty} \cos \frac{h}{c} u \frac{\left(\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 + m^2 \right) d \frac{h}{c} u}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{u}{h} \right)^2 + m^2}^3 \left(\frac{x_1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{u}{h} \right)^2 + m^2} \right)} \\
 & + \frac{1}{16} \frac{c}{h} \frac{c}{h} \int_0^{\infty} \cos \frac{h}{c} u \frac{\left(\frac{u}{h} \right)^2 d \frac{h}{c} u}{\left(\frac{x_1}{h} + \sqrt{\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{u}{h} \right)^2 + m^2} \right) \left(\left(\frac{x_1}{h} \right)^2 + \left(\frac{u}{h} \right)^2 + m^2 \right)}
 \end{aligned} \tag{21}$$

6.) Die Berechnung der Werte für den Rechteckstrahl nach \bar{d} tragender Linie erfolgten nach Stüper [1] S. 342

$$\frac{T(y)}{T_{\infty}} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1) \left[1 + \frac{e^{(2n+1)\frac{\pi}{2}\bar{d}} + 1}{8l} \frac{e^{(2n+1)\frac{\pi}{2}\bar{d}} + 1}{e^{(2n+1)\frac{\pi}{2}\bar{d}} - 1} \right]} \tag{22}$$

V. Zusammenfassung.

Das von S t ü p e r [1] entwickelte Verfahren zur Berechnung der Auftriebsverteilung des durch einen Freistrahл hindurchgesteckten Flügels versagt bei in der Praxis auftretenden Strahlproblemen oft deshalb, weil die Voraussetzungen der von ihm verwendeten Theorie der tragenden Linie nicht mehr zutreffen. Die Arbeit gibt für den rechteckigen Strahl die Mittel an die Hand, die Aufgabe nach [3] mit der Theorie der tragenden Wirbelfläche zu behandeln, ihr Hauptziel ist aber die Vermeidung der Berechnung der Wirbelfläche durch geeignete Näherungsansätze, die einen ausreichenden Wert für die Zirkulationsverteilung über die Spannweite (Integral über die Tiefe) liefern. Als solche Näherungen bieten sich die sogenannte $\frac{3t}{4}$ -Punkt-Methode (nach Pistoiesi), die die Erfüllung der Tragflügelbedingung nur an der $\frac{3t}{4}$ -Linie verlangt und eine von Verf. in [3] vorgeschlagene Näherung, die die Erfüllung der Tragflügelbedingung im Unendlichen (Flügel kleiner Streckung) verlangt. Besonders für die höheren Fourier-Glieder der vorliegenden Anstellwinkelverteilung des Gesamtsystems (Flügel mit Spiegelbildern) zur Erfüllung der Strahlrandbedingungen) ist die sogenannte "grobe Näherung" sicher zulässig. Es wird deshalb vorgeschlagen, das erste Glied der genannten Reihe nach der $\frac{3t}{4}$ -Methode, den Rest nach der "groben Näherung" zu behandeln, es zeigt sich aber an Beispielen, daß derselbe Zahlenwert für die maßgebliche Größe $\frac{d\alpha_s}{d\alpha^*}$ (Abweichung 1%) zu erreichen ist, wenn man auf alle Glieder die "grobe Näherung" anwendet. Der so errechnete Wert ist erheblich kleiner (um etwa 25 %) als der sich nach der Methode der tragenden Linie ergebende Wert. Der entsprechende gemessene Wert ist um etwa 17% kleiner als der nach der

Traglinientheorie berechnet, sodaß die Abweichung wohl durch den Tiefeneinfluß erklärt ist. Zu der Tatsache, daß der errechnete Effekt größer ist als nach der Messung zu erwarten war, ist folgendes zu bemerken.

Wir haben den der Messung zugrundeliegenden Kreisstrahl durch einen flächengleichen Rechteckstrahl ersetzt. Der Vergleich der Zahlen zeigt, daß dieser Ersatz zu kleine Absolutwerte für $\frac{d\sigma_g}{d\alpha^*}$ liefert. (Da nunmehr feststeht, daß die "grobe Näherung" ausreicht, könnte man sie auch auf den Kreisstrahl anwenden. Sie erfordert keinen höheren Rechenaufwand als die von Stüper durchgeführte Lösung nach der Tragliniengleichung. Da dieser Rechenaufwand aber doch ziemlich hoch ist, wurde die Rechnung bisher nicht durchgeführt.) Ein zweiter Unterschied zwischen Rechnung und Messung läßt sich nicht beseitigen. Sowohl die $\frac{3\pi}{4}$ - Punkt-Methode als auch die "grobe Näherung" gelten zunächst nur für die Platte, beide arbeiten mit $\left(\frac{d\sigma_g}{d\alpha}\right)_\infty = 2\pi$ und mußten deshalb mit dem sich nach der Traglinientheorie für die Platte ergebenden Wert verglichen werden. Der gemessene Wert wurde aber von Stüper mit dem sich nach der Traglinientheorie für das der Messung zugrundeliegende $\left(\frac{d\sigma_g}{d\alpha}\right)_\infty$ ergebenden Wert verglichen. Es ist durchaus möglich, daß dieser zweite Unterschied zwischen Rechnung und Messung die Diskrepanz in den oben genannten relativen Abweichungen bedingt, während der erste Unterschied erklärt, daß die Absolutwerte unserer Rechnung unter den Meßwerten liegen.

VI. Schrifttum.

- [1] J. S t ü p e r Der durch einen Freistrahle hindurchgesteckte Tragflügel. Ing.Arch.III, (1932) S.338 .
- [2] J. S t ü p e r Beitrag zum Problem des durch einen Freistrahle hindurchgesteckten Tragflügels. Lufo XII (1935) S.267 .
- [3] J. G i n z e l Die Auftriebsverteilung eines tiefen verwundenen Rechteckflügels. Jahrbuch d. Luftfahrtforschg. (1940) S.I 238
- [4] L. P r a n d t l u. A. B e t z Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Göttingen 1927.
- [5] E. P i s t o l e s i Betrachtungen über die gegenseitige Beeinflussung von Tragflügelssystemen. Gesammelte Vorträge der Hauptversammlung 1937 der Lilienthal-Gesellschaft f. Luftfahrtforschung S.214
- [6] H. M u l t h o p p Die Anwendung der Tragflügeltheorie auf Fragen der Flugmechanik . Bericht 2 der Lilienthalgesellschaft.
- [7] F. R i e g e l s Leitapparate mit verschieden grossen Aussendurchmessern. Jahrbuch d. deutsch. Luftfahrtforschung 1940 S.I 765
- [8] J. W e i s s i n g e r Ueber die Auftriebsverteilung an Pfeilflügeln. FB 1553

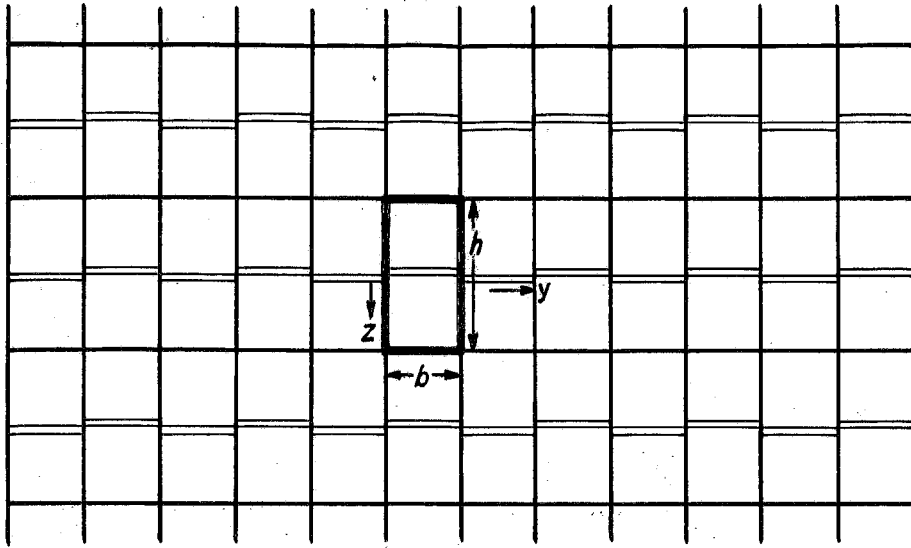


Abb.1: Spiegelungsschema für rechteckigen Strahlquerschnitt.

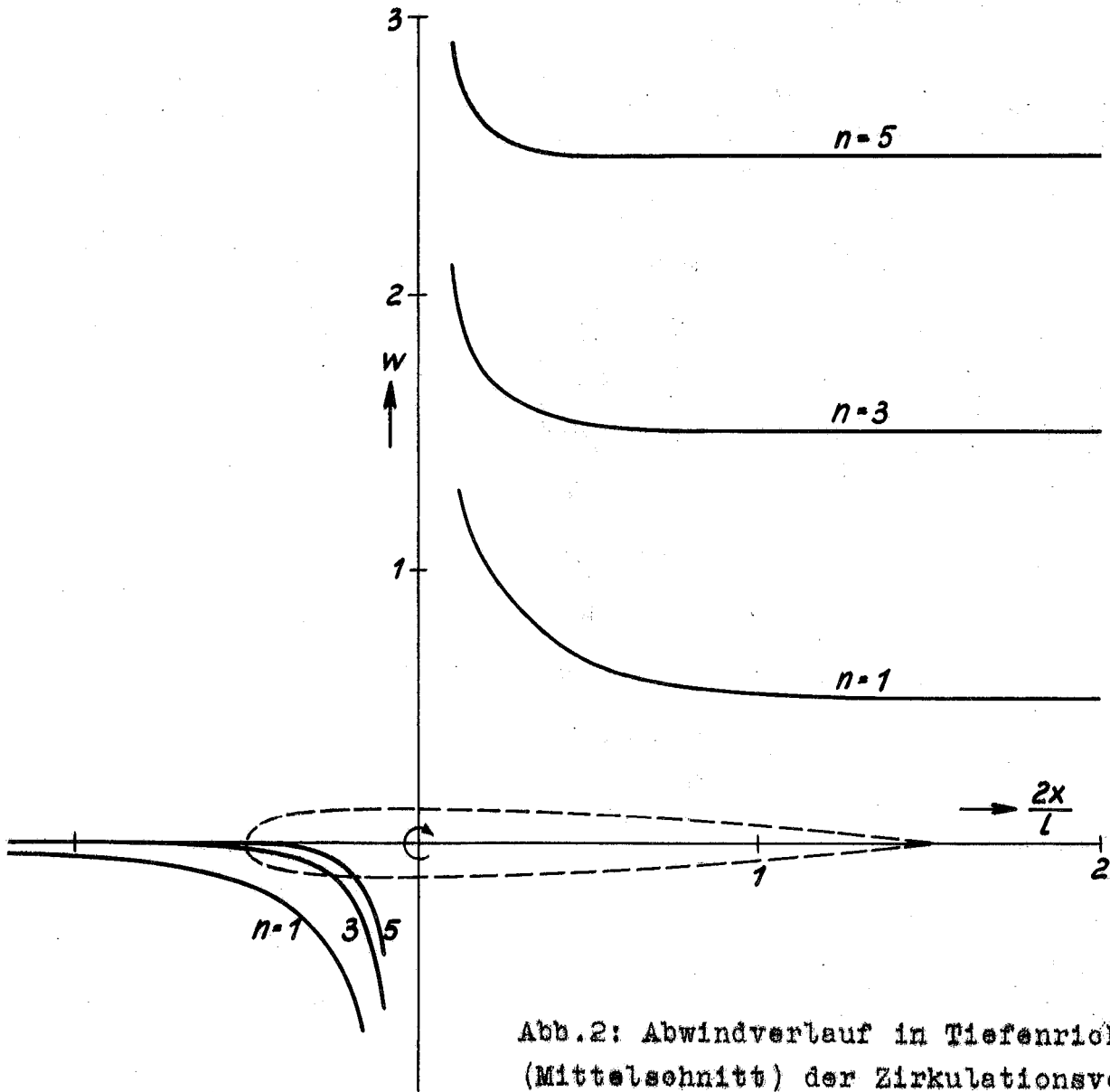


Abb.2: Abwindverlauf in Tiefenrichtung (Mittelsehnitt) der Zirkulationsverteilungen Γ_{ny} (tragender und abgehende Wirbel). Angenähert ein Flügel der Streckung $\frac{l}{b} = 1$.