

Näherungsweise Bestimmung der Druckverteilung  
beliebiger Profile in inkompressibler Potentialströmung.

Übersicht: Es wird eine neue Regel gegeben, nach der sich für beliebige Profile die Geschwindigkeit der kompressiblen Potentialströmung aus der Geschwindigkeit der inkompressiblen Strömung sehr einfach näherungsweise berechnen lässt.

Auf Grund dieser Regel lässt sich auch die Druckverteilung im Kompressiblen durch diejenige im Inkompressiblen ausdrücken. Entsprechende Diagramme sind beige-fügt. Es werden Vergleiche der Rechnung mit Messungen im Hochgeschwindigkeitskanal angegeben.

- Gliederung:
1. Zeichenbestimmung
  2. Einleitung.
  3. Ansätze zur Lösung der Differentialgleichungen der kompressiblen Potentialströmung.
  4. Die kritische Schallgeschwindigkeit.
  5. Die Grenzgeschwindigkeit.
  6. Die Druckverteilung.
  7. Ergebnisse.
  8. Zusammenfassung.

Der Bericht umfasst:

13 Seiten Text und  
6 Abbildungen

AERODYNAMISCHE VERSUCHSANSTALT GOETTINGEN E.V.

Institut für theoretische Aerodynamik.

Der Leiter

*Alb. Betz*

Alb. Betz

Der Bearbeiter

*E. Krahn*

E. Krahn

1. Zeichenbestimmung

$x, y$  Rechtwinklige Koordinaten

$M$  Geschwindigkeitsvektor

$$N = |M|$$

$u, v$  Komponenten der Geschwindigkeit im kompressiblen Gas in x- und y-Richtung

$U$  Anströmgeschwindigkeit

$u_i, v_i$  Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit um dasselbe Profil bei derselben Anströmgeschwindigkeit im inkompressiblen Gas.

$w_i$  Geschwindigkeit im Inkompressiblen

$\varphi$  Strömungspotential im Kompressiblen

$\psi$  Stromfunktion im Kompressiblen

$\rho$  Dichte

$\rho_\infty$  Dichte, die der Anströmgeschwindigkeit entspricht

$c$  örtliche Schallgeschwindigkeit

$c_\infty$  die  $U$  entsprechende Schallgeschwindigkeit

$c^*$  kritische Schallgeschwindigkeit

$$\beta = \frac{U}{c_\infty} = M \quad \text{Machische Zahl}$$

$\kappa$  Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen.

$( )_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$  partielle Ableitung

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$p$  Druck

$p_\infty$  der der Anströmgeschwindigkeit entsprechende Druck

$$\frac{\bar{p}}{q} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2} \quad \text{Ueberdruck bezogen auf den Staudruck}$$

$\alpha$  Anstellwinkel

## 2. Einleitung.

Zur Berechnung der kompressiblen Potentialströmung um ein angeströmtes Profil gibt es bisher nur die Methode von J a n z e n - R a y l e i g h und die P r a n d t l 'sche Regel. Ausserdem gibt es eine Methode von B u s e m a n n , die auf die P r a n d t l 'sche Regel aufbaut und eine Entwicklung nach der Profildicke darstellt. (Siehe Jahrb. d. dtsh. Akademie d. Luftfahrtforsch. 1940/41, S. 169.)

Die Methode von J a n z e n - R a y l e i g h beruht auf einer Entwicklung der Lösung der Differentialgleichung nach der Mach'schen Zahl, konvergiert nicht gut und ist so umständlich, dass nach ihr bisher nur die Umströmung des Kreiszylinders, des elliptischen Zylinders und des Joukowsky-Profiles behandelt sind, wobei bei letzteren nur der erste Schritt gerechnet ist. Zur Berechnung beliebiger Profile hat sie sich noch nicht anwenden lassen.

Die Prandtl'sche Regel ist bislang die einzige Methode, nach der der Kompressibilitätseinfluss in praktischen Fällen gerechnet wird.

Wie ich in einem früheren Bericht<sup>1)</sup> gezeigt habe, muss man bei dickeren Profilen und höheren Mach'schen Zahlen die Geschwindigkeitsverteilung im Inkompressiblen sowohl nach der Stromlinienanalogie als auch nach der Potentiallinienanalogie berechnen und das arithmetische Mittel von beiden nehmen. Dazu muss die Geschwindigkeitsverteilung an einem flachen und an einem überhöhten Profil gerechnet werden, was einigen Rechenaufwand erfordert. Eine Abschätzung des Fehlers, den man macht, wenn man die Geschwindigkeit im Kompressiblen nach der Prandtl'schen Regel rechnet, ist nicht bekannt.

---

1) E. Krahn, Anwendung der Prandtl'schen Regel auf dicke Profile

Im vorliegenden Bericht wird ein neuer Ansatz gegeben, nach dem für beliebige Profile die Geschwindigkeit im Inkompressiblen mit der Wurzel aus der Dichte dividiert wird um eine Näherung für die Geschwindigkeit im Kompressiblen zu erhalten. Wie der Vergleich  $\xi$  mit Messungen zeigt, gibt die neue Regel brauchbare Resultate.

Der Unterdruck im kompressiblen Gas lässt sich einfach nach dem Unterdruck im Inkompressiblen in einem Diagramm ablesen, so dass der Arbeitsaufwand der Bestimmung des Kompressibilitäts-einflusses ganz gering ist.

In gewissen Fällen lässt sich eine Fehlerabschätzung durchführen und auf Grund dieser eine weitere Näherung angeben. Doch soll die Behandlung dieser Frage einem weiteren Bericht vorbehalten bleiben. Hier handelt es sich nur um eine vorläufige Mitteilung.

### 3. Ansätze zur Lösung der Differentialgleichungen der kompressiblen Potentialströmung.

Im Folgenden soll nur die zweidimensionale Potentialströmung eines kompressiblen Gases behandelt werden. Für sie gelten die Gleichungen der Kontinuität:

$$\operatorname{div}(\rho M) = 0 \quad (1)$$

und der Wirbelfreiheit:

$$\operatorname{rot} M = 0. \quad (2)$$

Aus dem Ausdruck für die adiabatische Dichteänderung:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} \cdot \beta^2 \left[ \left( \frac{w}{u} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{\kappa-1}} \quad (3)$$

findet man

$$\left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho}\right)_x = \frac{\rho_{\infty}}{\rho} \cdot \frac{(w^2)_x}{2c^2} \quad (4)$$

$$\left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho}\right)_y = \frac{\rho_{\infty}}{\rho} \cdot \frac{(w^2)_y}{2c^2}$$

Indem man dieses berücksichtigt kann man (1) folgende Form geben

$$\left(\frac{u}{\frac{\rho_{\infty}}{\rho}}\right)_x + \left(\frac{v}{\frac{\rho_{\infty}}{\rho}}\right)_y = \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \left\{ u_x + v_y - \frac{1}{2c^2} [u(w^2)_x + v(w^2)_y] \right\} = 0 \quad (1a)$$

oder auch

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} (\psi_x^2 \psi_{xx} + 2\psi_x \psi_y \psi_{xy} + \psi_y^2 \psi_{yy}) = 0 \quad (1b)$$

die Gleichung (2) in Komponenten geschrieben lautet

$$v_x - u_y = 0 \quad (2a)$$

Führt man hier die Stromfunktion  $\psi$  durch

$$u = \frac{\rho_{\infty}}{\rho} \cdot \psi_y \quad v = - \frac{\rho_{\infty}}{\rho} \cdot \psi_x \quad (5)$$

ein, so hat man

$$\left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho} \cdot \psi_x\right)_x + \left(\frac{\rho_{\infty}}{\rho} \cdot \psi_y\right)_y = 0 \quad (2b)$$

Mit Hilfe von (4) kann man dieser Gleichung die Form

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} (u^2 \psi_{xx} + 2uv \psi_{xy} + v^2 \psi_{yy}) = 0 \quad (2c)$$

geben.

Bei adiabatischer Zustandsänderung sind die Gleichungen (1) und (2) somit identisch mit den Gleichungen der Potentialfunktion und der Stromfunktion.

Es sollen nun einige Ansätze zur Lösung der Gleichungen (1) und (2) untersucht werden.

I. Der Ansatz

$$u_1 = u_i \quad v_1 = v_i \quad (6)$$

genügt der Gleichung (2a), gehen wir mit ihm aber in die Gl. (1a), so erhalten wir

$$\left( \frac{u_1}{\rho_\infty} \right)_x + \left( \frac{v_1}{\rho_\infty} \right)_y = - \frac{\rho}{\rho_\infty} \cdot \frac{1}{2c^2} [u_i (w^2)_x + v_i (w^2)_y] \quad (7)$$

II. Mit dem Ansatz

$$u_2 = u_i \frac{\rho_\infty}{\rho} \quad v_2 = v_i \frac{\rho_\infty}{\rho} \quad (8)$$

genügt man wohl der Gl. (1a), die linke Seite der Gl. (2a) wird aber nicht gleich Null, sondern gibt

$$(v_2)_x - (u_2)_y = - \frac{\rho_\infty}{\rho} \cdot \frac{1}{2c^2} [u_i (w^2)_y - v_i (w^2)_x] \quad (9)$$

III. Der Ansatz

$$u_3 = u_i \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho}} \quad v_3 = v_i \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho}} \quad (10)$$

oder

$$w_3 = \sqrt{u_3^2 + v_3^2} = w_i \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho}} \quad (11)$$

befriedigt beide Gl. (1) und (2) nicht, dafür wird aber im Vergleich zu den Ansätzen I und II der Fehler in jeder der Gleichungen (1) und (2) auf etwa die Hälfte von (7) und (9) herabgesetzt.

Gehen wir nämlich mit  $u_3$  und  $v_3$  in (1a) und (2a), so erhalten

wir

$$\left(\frac{u_3}{\frac{\rho_\infty}{\rho}}\right)_x + \left(\frac{v_3}{\frac{\rho_\infty}{\rho}}\right)_y = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_\infty}} \cdot \frac{1}{2c^2} [u_i(w^2)_x + v_i(w^2)_y] \quad (12)$$

bzw.

$$(v_3)_x - (u_3)_y = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho}} \cdot \frac{1}{2c^2} [u_i(w^2)_y - v_i(w^2)_x]. \quad (13)$$

Da  $\frac{\rho_\infty}{\rho}$  sich im allgemeinen wenig von 1 unterscheidet, sind (12) und (13) näherungsweise gleich der Hälfte von (7) bzw. (9).

Man kann vermuten, dass der Ansatz (11) sich zur Berechnung einer ersten Näherung der Geschwindigkeit im Kompressiblen eignet. Es wurden Rechnungen an einigen Profilen durchgeführt und mit Messungen im Hochgeschwindigkeitskanal der DVL verglichen. Die Güte der Näherung entspricht etwa der des arithmetischen Mittels aus der Potentiallinienanalogie und Stromlinienanalogie nach der Prandtl'schen Regel. Die Rechnung ist aber viel einfacher, da man nur ein Diagramm für verschiedene Mach'sche Zahlen herzustellen braucht, aus dem man dann die Geschwindigkeit oder Ubergeschwindigkeit am Profil im Kompressiblen sofort ablesen kann, wenn man die Geschwindigkeit an demselben Profil im Inkompressiblen kennt. Es lässt sich auch für gewisse Profile eine Fehlerabschätzung durchführen die aber einem anderen Bericht vorbehalten bleiben soll.

#### 4. Die kritische Schallgeschwindigkeit.

Für den Ansatz (11) kann man die inkompressible Geschwindigkeit  $w_c$ , bei der die entsprechende Geschwindigkeit  $w$  im Kompressiblen die kritische Schallgeschwindigkeit erreicht,

als Funktion der Mach'schen Zahl berechnen.

Setzt man in

$$w_i = w \sqrt{\frac{\rho}{\rho_\infty}} = w \left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} \beta^2 \left[ \left( \frac{w}{u} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2(\kappa-1)}} \quad (14)$$

für  $w$  die kritische Schallgeschwindigkeit  $c^*$  und drückt letztere aus der Gleichung

$$c_\infty^2 = \frac{\kappa+1}{2} c^{*2} - \frac{\kappa-1}{2} u^2 \quad (15)$$

durch  $u$  und  $\beta = \frac{u}{c_\infty}$  aus, so hat man

$$\frac{w_i^2}{u^2} = \frac{\frac{1}{\beta^2} + \frac{\kappa-1}{2}}{\frac{\kappa+1}{2}} \cdot \left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} \beta^2 \left[ \frac{\frac{1}{\beta^2} + \frac{\kappa-1}{2}}{\frac{\kappa+1}{2}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

oder

$$\frac{\kappa+1}{2} \cdot \frac{w_i^2}{u^2} = \left( \frac{1}{\beta^2} + \frac{\kappa-1}{2} \right) \left( \frac{2}{\kappa+1} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \beta^2 \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (16)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich jeder Mach'schen Zahl entsprechend der  $w_i$ -Wert bestimmen, der der kritischen Schallgeschwindigkeit entspricht.

### 5. Die Grenzggeschwindigkeit.

Aus dem Ansatz (11) ergibt sich für die inkompressible Geschwindigkeit  $w_i$  eine Grenze, die nicht überschritten werden kann, wenn eine eindeutige Zuordnung zwischen kompressibler und inkompressibler Strömung gewahrt bleiben soll.

Wir finden diese Grenze, indem wir

$$\frac{\partial w}{\partial w_i} = \infty \quad \text{oder} \quad \frac{\partial w_i}{\partial w} = 0 \quad (17)$$

setzen.

Aus (14) folgt dann

$$\frac{\partial w_i}{\partial w} = \left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} \beta^2 \left( \frac{w^2}{u^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{2(\kappa-1)} - 1} \cdot \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{2} \beta^2 \left( \frac{w^2}{u^2} - 1 \right) - \frac{\beta^2}{2} \cdot \frac{w^2}{u^2} \right] = 0 \quad (18)$$

und daraus

$$\beta^2 = \frac{1}{\frac{\kappa}{2} \cdot \frac{w_g^2}{u^2} - \frac{\kappa-1}{2}} \quad (19)$$

Der Index  $g$  soll darauf hinweisen, dass es sich um die Grenzgeschwindigkeit handelt.

Setzt man den Ausdruck (19) in (14), so findet man für die Grenzgeschwindigkeit

$$w_{ig} = w_g \left\{ \kappa - (\kappa-1) \left( \frac{w_g}{u} \right)^{-2} \right\}^{-\frac{1}{2(\kappa-1)}} \quad (20)$$

Aus (19) folgt

$$\frac{w_g^2}{u^2} = \frac{2}{\kappa \beta^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa} \quad (21)$$

Setzt man den Wert  $w_g$  aus (21) in (20), so hat man für  $w_{ig}$

$$\frac{w_{ig}}{u} = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \left( \frac{1}{\kappa} \right)^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}} \cdot \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \beta^2 \right)^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}} \quad (22)$$

Es lässt sich leicht ersehen, dass die durch (21) bestimmte Grenzgeschwindigkeit  $w_g$  eine Konstante ist. Setzt man hier für  $\beta^2$

$$\beta^2 = \frac{u^2}{c_\infty^2} = \frac{u^2}{\frac{\kappa+1}{2} c^{*2} - \frac{\kappa-1}{2} u^2} \quad (23)$$

so findet man

$$w_g^2 = \frac{\kappa+1}{\kappa} c^{*2} \quad (24)$$

Die Betrachtung der Grenzgeschwindigkeit erfolgte hier nur, um die Grenzen der Anwendungsmöglichkeit des Ansatzes (11) zu klären, ohne dass ihr irgendeine physikalische Bedeutung beigelegt wird. Da bei Ueberschreitung der kritischen Schallgeschwindigkeit der Charakter der Differentialgleichungen (1b)

und (20) sich ändert, wird man von Ansatz (11), den man mit Erfolg bei Unterschall anwenden kann, nicht erwarten können, dass es auch noch bei Uberschall verwendbar ist. Der Ausdruck (24) zeigt lediglich, dass die rechnermässige Grenze für die Anwendbarkeit des Ansatzes (11) im Uberschallgebiet liegt.

### 6. Die Druckverteilung.

Es soll nun gezeigt werden, wie man dem Ansatz (11)

$$w = w_i \sqrt{\frac{p_{\infty}}{p}}$$

entsprechend den durch die Kompressibilität bedingten Ueber- und Unterdruck bestimmen kann.

Geht man von der Formel

$$\frac{p}{p_{\infty}} = \left\{ 1 - \frac{\kappa-1}{2} \beta^2 \left[ \left( \frac{w}{U} \right)^2 - 1 \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (25)$$

aus und beachtet, dass

$$\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2 = \frac{1}{2} \kappa \frac{p_{\infty}}{c_{\infty}^2} U^2 = \frac{\kappa}{2} p_{\infty} \beta^2 \quad (26)$$

ist, kann man folgenden Ausdruck bilden:

$$\frac{p-p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2} = \frac{p-p_{\infty}}{\frac{\kappa}{2} \beta^2 p_{\infty}} = \frac{2}{\kappa \beta^2} \left( \frac{p}{p_{\infty}} - 1 \right) = \frac{2}{\kappa \beta^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{\kappa-1}{2} \beta^2 \left( \frac{w}{U} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1 \right\}. \quad (27)$$

Bezeichnen wir die rechte Seite dieser Gleichung mit  $\frac{p}{q}$  und setzen  $\kappa = 1,4$ , so haben wir

$$\frac{p}{q} = \frac{10}{7 \beta^2} \left\{ \left[ 1 - \frac{\beta^2}{5} \left( \frac{w}{U} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{7}{2}} - 1 \right\}. \quad (28)$$

## 7. Ergebnisse.

Dem Ansatz (11) entsprechend sind die durch die Kompressibilität bedingten Uebergeschwindigkeiten und Drücke berechnet und in den Abbildungen dargestellt. In Abb. 1 ist die Differenz der Geschwindigkeit im Kompressiblen und Inkompressiblen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit  $w_c$  im Inkompressiblen und der Mach'schen Zahl  $M$  dargestellt. Hier wie auch in den folgenden Abbildungen ist als Einheit die Anströmgeschwindigkeit gewählt. In Abb. 1 sind die Kurven eingezeichnet, wo die kritische Schallgeschwindigkeit und die Grenzgeschwindigkeit erreicht werden. Abb. 2 ist ein Ausschnitt aus Abb. 1, in dem die Werte der Mach'schen Zahlen dichter gewählt sind. Abb. 3 stellt die Ueber- und Unterdrücke

$$\frac{\bar{p}}{q} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty}^2 U^2}$$

in Abhängigkeit von  $w_c$  und  $M$  dar. Es ist die Kurve eingezeichnet, wo die kritische Schallgeschwindigkeit erreicht wird. Abb. 4 ist ein Ausschnitt von Abb. 3 in einem grösseren Masstab. In Abb. 5 ist der durch die Kompressibilität bedingte Anteil des Unterdruckes als Funktion des Unterdruckes im Inkompressiblen für verschiedene Mach'sche Zahlen aufgetragen.

In Abb. 6 sind nach dem dargestellten Verfahren die Druckverteilungen für das Profil NACA 0015 - 64 für verschiedene Anstellwinkel und Mach'sche Zahlen gerechnet und als ausgezogene Kurven eingezeichnet. Als Punkte sind die Messungen von G ö t h e r t und R i c h t e r <sup>4)</sup> eingetragen. Die schwarzen Punkte beziehen

---

1) F.B. 1247 Messungen am Profil NACA 0015-64.

sich auf die Oberseite, die hellen auf die Unterseite des Profiles. Die Anstellwinkel  $\alpha$  und Mach'schen Zahlen  $M$  sind auf jeder Zeichnung angegeben. Bei den für den Anstellwinkel  $0^\circ$  gerechneten Druckverteilungen sind die Messwerte von G ö t h e r t und R i c h t e r für den Anstellwinkel  $-0,25^\circ$  eingetragen, da keine Werte für das exakt nicht angestellte Profil vorliegen. Gestrichelt sind die Druckverteilungen der Inkompressiblen Strömung eingetragen, die nach dem AVA-Verfahren<sup>1)</sup> berechnet sind. Bei der Mach'schen Zahl  $0,76$  für das nichtangestellte Profil wird die kritische Schallgeschwindigkeit gerade überschritten und die Messwerte weichen daher z.T. beträchtlich von der Rechnung ab, da hierbei ein Verdichtungsstoss auftritt.

### 8. Zusammenfassung.

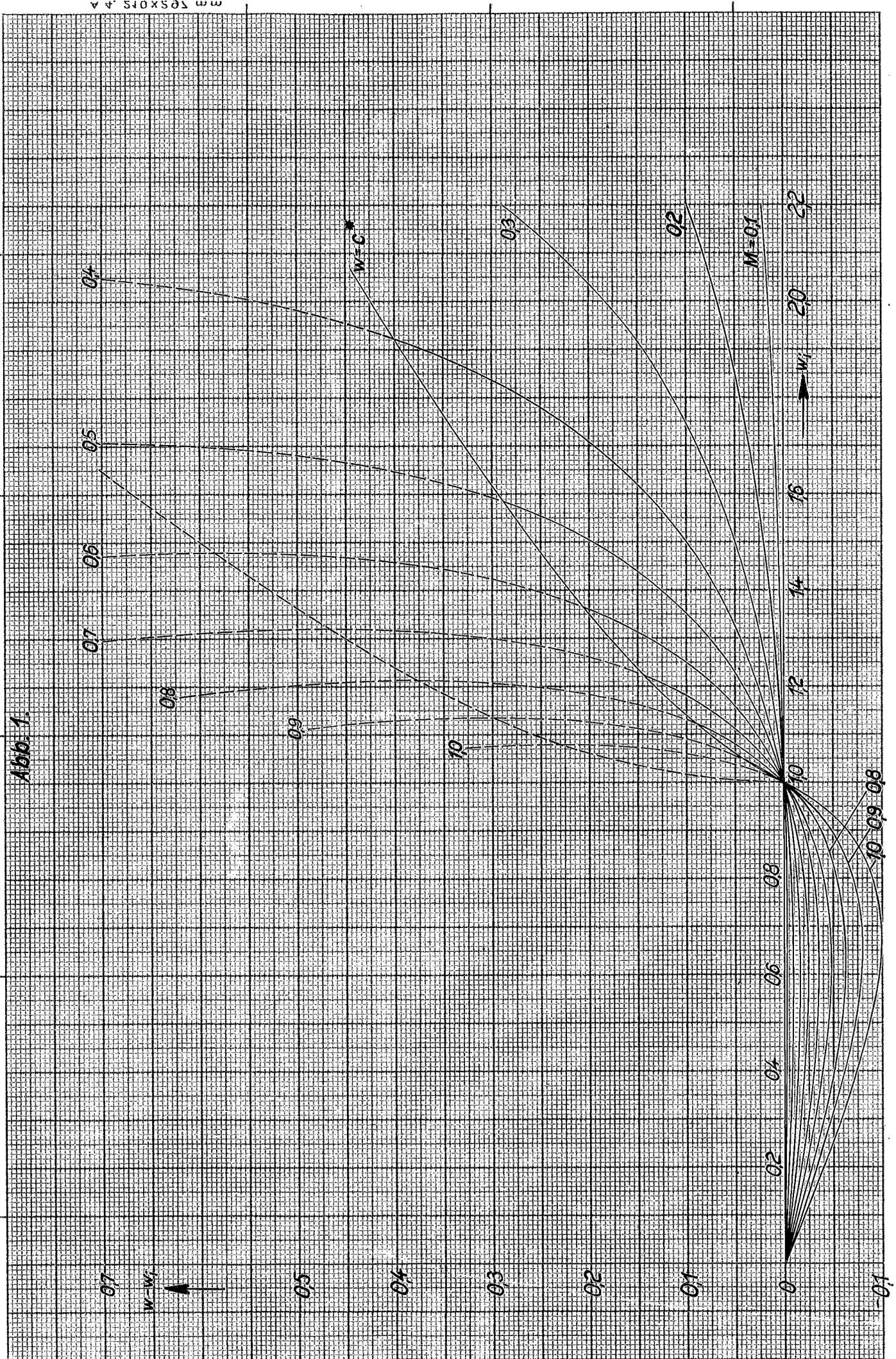
Für die kompressible Potentialströmung gelten die Gleichungen der Quellfreiheit und Wirbelfreiheit. Durch einen Ansatz, mit dem man der einen Gleichung genügt, erhält man im allgemeinen zu grosse Geschwindigkeitswerte und durch einen anderen Ansatz, mit dem man der anderen Gleichung genügt, zu kleine Geschwindigkeitswerte. Ein dritter Ansatz, der ein Mittel zwischen beiden bildet, erweist sich, wie Vergleiche mit Messungen zeigen, als brauchbar bei der näherungsweise Bestimmung des Kompressibilitätseinflusses. Zur Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit um ein beliebiges Profil berechnet man dieselbe in Inkompressiblen um dasselbe Profil und multipliziert die gefundenen Werte mit der Wurzel aus dem Verhältnis der Dichte, die der Anström-

---

<sup>1)</sup>FB 1527 Riegels-Wittich: Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen.

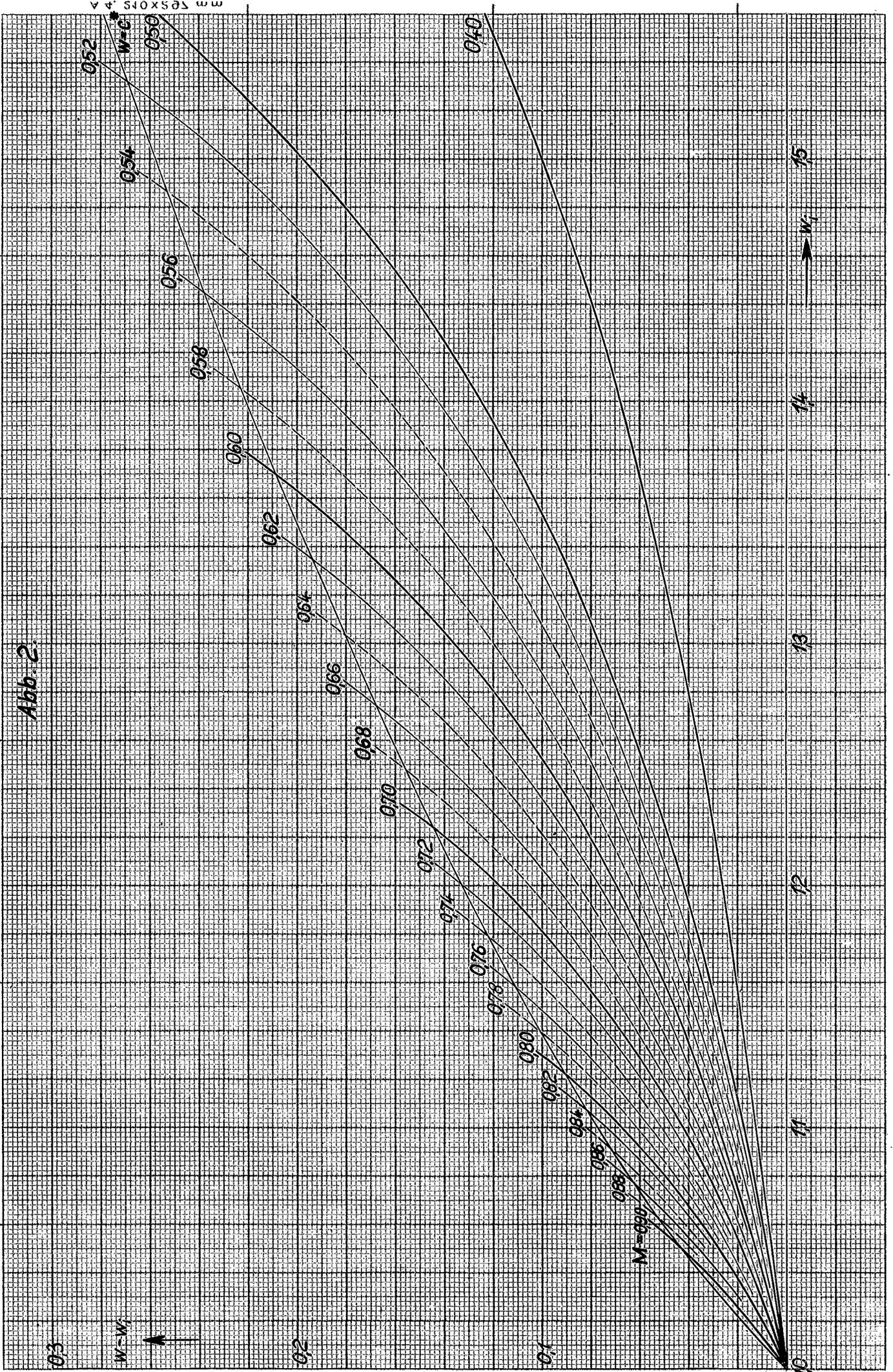
geschwindigkeit entspricht, zu der örtlichen Dichte. Dabei braucht die letztere Rechnung im einzelnen Falle nicht durchgeführt zu werden, da man, wenn man die Geschwindigkeit oder den Druck im Inkompressiblen kennt, die entsprechende Werte für das kompressible Gas aus entsprechenden Diagrammen ablesen kann.

Abb. 1.



42/17/01

Abb. 2.



mm 0.050 0.100 0.150 0.200 0.250 0.300 0.350 0.400 0.450 0.500 0.550 0.600 0.650 0.700 0.750 0.800 0.850 0.900 0.950 1.000



Fig. 4.

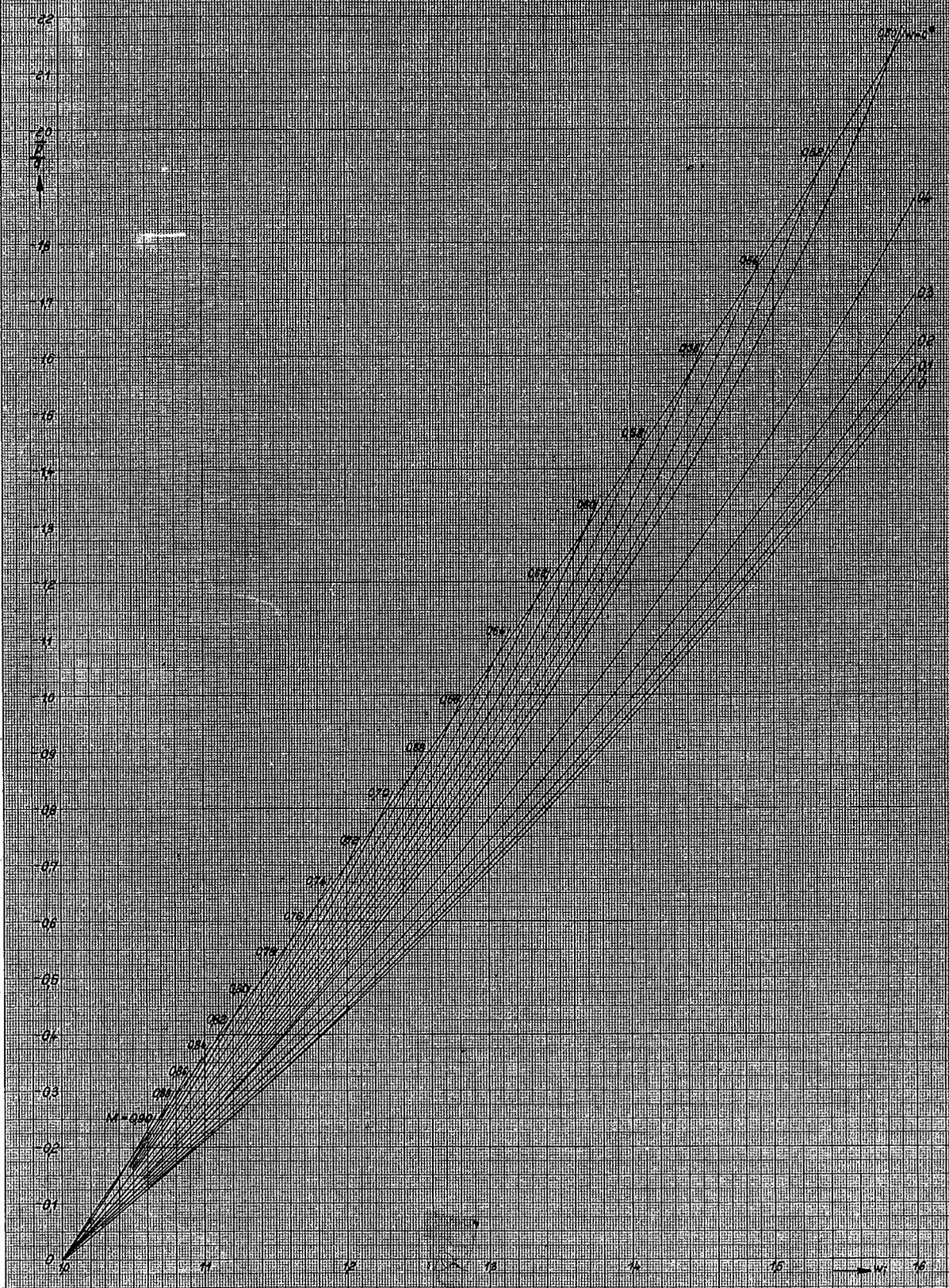


Abb. 5.

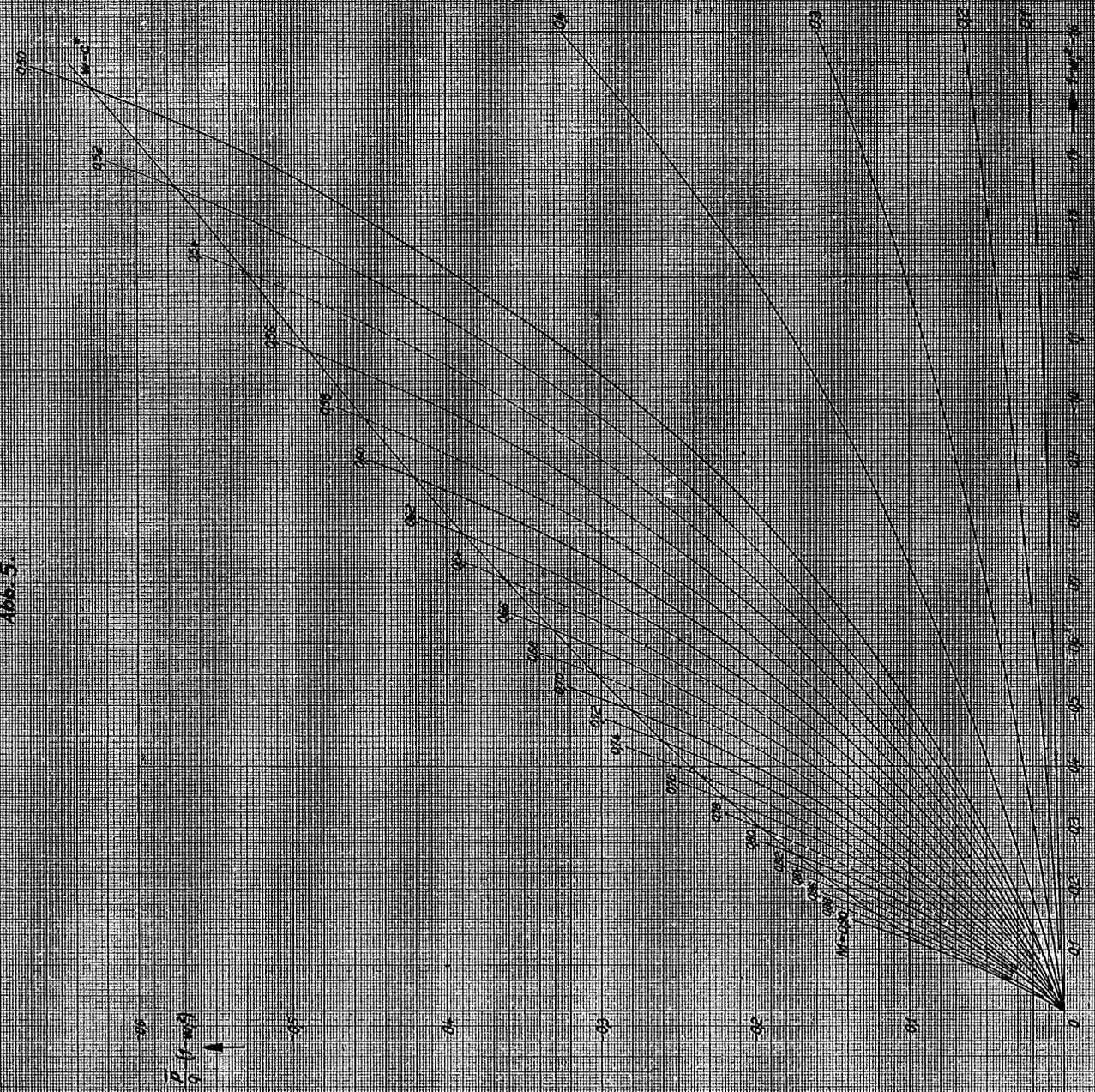


Abb. 6.

