37/6/1

Schwingender Flügel mit Innenausgleich-Ruder.

von H.G.Küssner
Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen.

I. Einleitung.

Die Wirbeldichte einer ebenen Platte mit Knick, die harmonisch im Windstrom schwingt, ist für ebene Strömung und kleine Anstellwinkel vom Verfasser exakt berechnet worden, s. Luftfahrtforschung, Bd.13, S.410, im folgenden als "Lufo" zitiert.

Man kann hiernach die Kräfte und Momente bestimmen, die an einem Flügel mit dünnem Profil und einem einfachen Ruder ohne aerodynamischen Ausgleich entstehen, wenn Flügel und Ruder harmonisch schwingen.

Nun werden jedoch häufig die Querruder von Flugzeugflügeln mit einem aerodynamischen Ausgleich versehen, um die Steuerkräfte zu verkleinern. Man verlängert zu diesem Zwecke die Ruderfläche nach vorn über die Ruderachse hinaus, s.Abb.1. Beim Ausschlag entsteht dann ein mehr oder weniger grosser Spalt zwischen Flügelende und Rudervorderkante. Eine rechnerische Bestimmung der Druckverteilung ist für diesen Fall bisher nur bei stationärer Strömung gelungen.

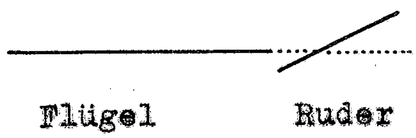

Abb.1. Ruderausgleich.

Es ist zu erwarten, dass der aerodynamische Ruderausgleich des Querruders in gewissen Fällen einen bedeutenden Einfluss auf die Entstehung von Flügelflattern hat.

Um diesen Einfluss grob zu erfassen, liegt es nahe, auch die instationären Rudermomente eines schwingenden Ruders mit einem empirischen Ausgleichfaktor < 1 zu versehen, ähnlich wie es bei den stationären Rudermomenten üblich ist. Nun setzt sich jedoch die Druckverteilung des Flügels mit schwingendem Ruder aus mehreren Komponenten zusammen, die mit verschiedenen Funktionen von ω behaftet sind. Durch geeignete Grösse der Ausgleichflächen kann man immer nur eine dieser Komponenten zum Verschwinden bringen. Ein vollkommener aerodynamischer Ausgleich der Rudermomente eines schwingenden Ruders ist daher nicht möglich. Es besteht folglich eine grosse Unsicherheit hinsichtlich der Annahme eines geeigneten Ausgleichsfaktors.

II. Neuer Ansatz für das Ruder mit Ausgleichfläche.

Unter diesen Umständen erscheint es aussichtsreicher, einen anderen Weg zur näherungsweisen Bestimmung der Kräfte und Momente von Flügeln mit Ausgleichrudern einzuschlagen. Beim Ruderflattern handelt es sich zunächst um ganz kleine Schwingungen um die Mittellage des Ruders. Bei Flügeln mit endlicher Profildicke, die in der Nullage einen sehr kleinen Ruderspalt haben, wird der Spalt durch derartig kleine Schwingungen noch nicht geöffnet. Wenn keine Luft durch den Spalt strömt, können wir das Profilskelett eines Flügels mit Ausgleichruder gemäss Abb.2 annehmen. Die Stufe bei $x = x_1$ ist unbedenklich, da man sie als Grenzfall einer endlichen Neigung der Profilkontur auffassen kann. Die weitere Durchführung dieses Ansatzes bis zur Aufstellung des am Flügel und Ruder angreifenden Systems der Kräfte und Momente geschieht am besten in genauer Analogie zu Lufo, S.416 u.417. Die Nummern der im folgenden erwähnten, nicht im Text stehenden Gleichungen beziehen sich auf diese Arbeit.

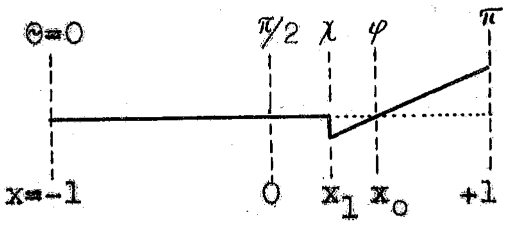

Abb.2. Ruderausgleich
Koordinatenbezeichnung

III. Platte mit mitschwingendem Ruder.

Wir ersetzen das Hinterende der Platte durch ein Ruder, das mit der Frequenz ν und der Drehamplitude C schwingt.
Die Koordinate der Ruderachse sei $x_o = -\cos\varphi$, s.Abb.2,
die der Rudervorderkante sei $x_1 = -\cos\chi$.
Im Bereich $0 < \Theta < \chi$ sei $z = 0$.
Im Bereich $\chi < \Theta < \pi$ sei $z = C(\cos\varphi - \cos\Theta)e^{i\nu t}$.
Die Schwingung eines beliebigen Plattenpunktes lässt sich im Bereich $0 < \Theta < \pi$ durch die Gleichung

$$z = C\, e^{i\nu t} \sum_0^{\infty} b_n \cos n\,\Theta$$

wiedergeben. Die Beiwerte dieser trigonometrischen Reihe sind:

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_\chi^\pi (\cos\varphi - \cos\Theta)\,d\Theta = \frac{1}{\pi}\left[(\pi-\chi)\cos\varphi + \sin\chi\right]$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_\chi^\pi (\cos\varphi - \cos\Theta)\cos\Theta\,d\Theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\pi + \chi - 2\cos\varphi\sin\chi + \frac{1}{2}\sin 2\chi\right] \tag{36}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_\chi^\pi (\cos\varphi - \cos\Theta)\cos n\,\Theta\,d\Theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\chi}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\chi}{n+1} - 2\cos\varphi\frac{\sin n\chi}{n}\right]$$

Aus (20),(35) und (36) erhalten wir die resultierende Bewegung eines beliebigen Punktes einer Platte, die Schlag-, Plattendreh- und Ruderdrehschwingungen ausführt,

$$z = e^{i\nu t}\Big[A + B\left(\tfrac{1}{2} - \cos\Theta\right) + \frac{C}{\pi}\Big\{(\pi-\chi)\cos\varphi + \sin\chi$$

$$+ \left(-\pi + \chi - 2\cos\varphi\sin\chi + \tfrac{1}{2}\sin 2\chi\right)\cos\Theta \tag{37a}$$

$$+ \sum_2^{\infty}\left(\frac{\sin(n-1)\chi}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\chi}{n+1} - \frac{2\cos\varphi\sin n\chi}{n}\right)\cos n\Theta\Big\}\Big]$$

Eine im gesamten Bereich endliche Ableitung $\partial z/\partial x$ gewinnen wir durch eine neue harmonische Analyse. Es ist nämlich nach Abb.2

im Bereich $0 < \Theta < \chi$: $\partial z/\partial x = 0$
im Bereich $\chi < \Theta < \pi$: $\partial z/\partial x = C\,e^{i\nu t}$.

Die Neigung $\partial z/\partial x$ einer beliebigen Plattentangente mit Ausnahme der "Stufe" lässt sich im Bereich $0 < \Theta < \pi$ durch die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = C\,e^{i\nu t}\sum_0^{\infty} c_n \cos n\,\Theta$$

wiedergeben.[1)] Die Beiwerte dieser trigonometrischen Reihe sind

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_\chi^\pi d\Theta = \frac{1}{\pi}(\pi - \chi)\,,$$

1) Der Einfluss der Stufe wird in Abschnitt V gesondert behandelt.

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_{\chi}^{\pi} \cos n\,\Theta\, d\Theta = -\frac{2}{\pi}\frac{\sin n\chi}{n}\,.$$

Damit wird

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{i\nu t}\left[B + \frac{C}{\pi}\left(\pi - \chi - 2\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin n\chi}{n}\cos n\,\Theta\right)\right]. \qquad (37b)$$

Nach Gl.(27) ist

$$P_o + 2\sum_{1}^{\infty} P_n \cos n\,\Theta = \omega z + \frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

Setzen wir (37a) und (37b) in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} P_o &= \omega A + \left(1 + \frac{\omega}{2}\right)B \\ &\quad + \frac{C}{\pi}\left[\pi - \chi + \omega\left\{(\pi - \chi)\cos\varphi + \sin\chi\right\}\right] \\ P_1 &= -\frac{\omega}{2}B \\ &\quad + \frac{C}{\pi}\left[-\sin\chi + \frac{\omega}{2}\left\{-\pi + \chi - 2\cos\varphi\sin\chi + \frac{1}{2}\sin 2\chi\right\}\right] \\ P_n &= \frac{C}{\pi}\left[-\frac{\sin n\chi}{n} + \frac{\omega}{2}\left\{\frac{\sin(n-1)\chi}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\chi}{n+1}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{2\cos\varphi\sin n\chi}{n}\right\}\right] \end{aligned} \qquad (38)$$

Aus (28) und (38) können wir die Wirbelbeizahlen a_n berechnen.

Wir erhalten für die Amplitude A:

$$\begin{aligned} a_{oA} &= \frac{\omega}{2}(1 + T) \\ a_{1A} &= \frac{\omega^2}{2} \quad ; \quad a_{nA} = 0 \quad \text{für } n > 1 \end{aligned} \qquad (38a)$$

für die Amplitude B:

$$\begin{aligned} a_{oB} &= \frac{1}{2}(1 + \omega)(1 + T) - \frac{\omega}{2} \\ a_{1B} &= \omega + \frac{\omega^2}{4} \\ a_{2B} &= -\frac{\omega^2}{4} \quad ; \quad a_{nB} = 0 \quad \text{für } n > 2 \end{aligned} \qquad (38b)$$

für die Amplitude C/π:

$$\begin{aligned} a^*_{oC} &= \frac{1+T}{2}\left[\pi - \chi + \omega\left\{(\pi - \chi)\cos\varphi + \sin\chi\right\}\right] \\ &\quad + \frac{1-T}{2}\left[-\sin\chi + \frac{\omega}{2}\left\{-\pi + \chi - 2\cos\varphi\sin\chi + \frac{1}{2}\sin 2\chi\right\}\right] \end{aligned}$$

$$a^*_{1C} = \sin\chi + \omega\left[\pi - \chi + \cos\varphi \sin\chi\right] \tag{38c}$$
$$+ \frac{\omega^2}{4}\left[(\pi-\chi)2\cos\varphi + \cos\varphi\sin 2\chi + \sin\chi - \frac{1}{3}\sin 3\chi\right]$$

$$a^*_{2C} = \sin 2\chi + \omega\left[\cos\varphi \sin 2\chi - \frac{3}{2}\sin\chi - \frac{1}{6}\sin 3\chi\right]$$
$$+ \frac{\omega^2}{4}\left[-\pi + \chi + \cos\varphi(-2\sin\chi + \frac{2}{3}\sin 3\chi) - \frac{1}{4}\sin 4\chi\right]$$

$$a^*_{nC} = \sin n\chi + \frac{\omega}{2}\left[-\frac{n+1}{n-1}\sin(n-1)\chi - \frac{n-1}{n+1}\sin(n+1)\chi\right.$$
$$\left. + 2\cos\varphi \sin n\chi\right]$$
$$+ \frac{\omega^2}{4}\left[\frac{\sin(n-2)\chi}{n-2} - \frac{\sin(n+2)\chi}{n+2} + 2\cos\varphi\left(-\frac{\sin(n-1)\chi}{n-1}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\sin(n+1)\chi}{n+1}\right)\right]$$

Wenn die Rudervorderkante mit der Ruderachse zusammenfällt, wenn also $\chi = \varphi$ ist, erhalten wir hieraus wieder die Beiwerte a_{nC} für das gewöhnliche Ruder ohne Ausgleich, s.Gl. (38d).

$$a_{oC} = \frac{1+T}{2}\left[\pi - \varphi + \omega\left\{(\pi-\varphi)\cos\varphi + \sin\varphi\right\}\right]$$
$$+ \frac{1-T}{2}\left[-\sin\varphi + \frac{\omega}{2}\left(-\pi + \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right]$$

$$a_{1C} = \sin\varphi + \omega\left[\pi - \varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]$$
$$+ \frac{\omega^2}{4}\left[(\pi-\varphi)\, 2\cos\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi + \frac{1}{6}\sin 3\varphi\right] \tag{38d}$$

$$a_{2C} = \sin 2\varphi + \omega\left[-\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi\right]$$
$$+ \frac{\omega^2}{4}\left[-\pi + \varphi - \frac{2}{3}\sin 2\varphi + \frac{1}{12}\sin 4\varphi\right]$$

$$a_{nC} = \sin n\varphi + \omega\left[-\frac{\sin(n-1)\varphi}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1}\right]$$

$$+ \frac{\omega^2}{4}\left[\frac{\sin(n-2)\varphi}{(n-2)(n-1)} - \frac{2\sin n\varphi}{(n-1)(n+1)} + \frac{\sin(n+2)\varphi}{(n+1)(n+2)}\right]$$

IV. Bestimmung der Φ-Funktionen.

Der Gesamtauftrieb der Platte, das Gesamtmoment um den Neutralpunkt und das Rudermoment um die Ruderachse sind:

$$K = \rho\, v\, \ell\, b \int_0^{\pi} \gamma(\Theta, t) \sin\Theta \, d\Theta \tag{39a}$$

$$= \pi \rho\, v^2\, \ell\, b\, e^{i\nu t} (2a_0 + 2a_1)$$

$$M_0 = \rho\, v\, \ell^2\, b \int_0^{\pi} \gamma(\Theta, t)\left(\frac{1}{2} - \cos\Theta\right) \sin\Theta \, d\Theta \tag{39b}$$

$$= \pi \rho\, v^2\, \ell^2\, b\, e^{i\nu t} \left(a_1 - \frac{1}{2} a_2\right)$$

$$N = \rho\, v\, \ell^2\, b \int_{\chi}^{\pi} \gamma(\Theta, t)(\cos\varphi - \cos\Theta) \sin\Theta \, d\Theta \tag{39c}$$

$$= \frac{1}{\pi} \rho\, v^2\, \ell^2\, b \sum_0^{\infty} a_n Q_n$$

Wenn die Beiwerte a_0, a_1, a_2 bekannt sind, ist nach (39a) und (39b) der Auftrieb und das Moment also sofort angebbar. Die Beiwerte k_a, k_b, m_a, m_b bleiben unverändert gemäss (41) und (42). Die Beiwerte k_c^* und m_c^* ändern sich dagegen beim Ruder mit Ausgleich. Wir erhalten hierfür gemäss (38a, b), (39a, b), (41) und (42) die neuen φ^*-Funktionen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^* &= \pi - \chi + \sin\chi \\
\varphi_2^* &= (\pi - \chi)(1 + 2\cos\varphi) + 2\cos\varphi \sin\chi + 2\sin\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi \\
\varphi_3^* &= \pi - \chi + \frac{1}{2}\sin 2\chi \\
\varphi_4^* &= 2(\pi - \chi)\cos\varphi + \cos\varphi \sin 2\chi + \sin\chi - \frac{1}{3}\sin 3\chi \\
\varphi_5^* &= \sin\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi \\
\varphi_6^* &= 2(\pi - \chi) + \cos\varphi(2\sin\chi - \sin 2\chi) + \frac{3}{2}\sin\chi + \frac{1}{6}\sin 3\chi \\
\varphi_7^* &= (\pi - \chi)\left(\frac{1}{2} + 2\cos\varphi\right) + \cos\varphi\left(\sin\chi + \sin 2\chi - \frac{1}{3}\sin 3\chi\right) \\
&\quad + \sin\chi - \frac{1}{3}\sin 3\chi + \frac{1}{8}\sin 4\chi
\end{aligned} \tag{43}$$

Wir kommen nun zu den Beiwerten n_c^*. Gemäss (39c) müssen wir zunächst die Integrale berechnen:

$$Q_0^* = \int_{\chi}^{\pi} 2(1 + \cos\Theta)(\cos\varphi - \cos\Theta)\, d\Theta = \varphi_8^*$$

$$Q_o^* = (\pi - \chi)(-1 + 2\cos\varphi) - 2\cos\varphi \sin\chi + 2\sin\chi + \tfrac{1}{2}\sin 2\chi$$

$$Q_1^* = \int_\chi^\pi 4\sin^2\Theta\,(\cos\varphi - \cos\Theta)\,d\Theta \quad = \quad \varphi_4^*$$

$$= 2(\pi - \chi)\cos\varphi + \cos\varphi \sin 2\chi + \sin\chi \quad - \tfrac{1}{3}\sin 3\chi$$

$$Q_2^* = \int_\chi^\pi 2\sin 2\Theta \sin\Theta\,(\cos\varphi - \cos\Theta)\,d\Theta \qquad (44)$$

$$= -\tfrac{1}{2}(\pi - \chi) + \cos\varphi\,(-\sin\chi + \tfrac{1}{3}\sin 3\chi) - \tfrac{1}{8}\sin 4\chi$$

$$Q_n^* = \int_\chi^\pi \frac{4}{n}\sin n\Theta \sin\Theta\,(\cos\varphi - \cos\Theta)\,d\Theta$$

$$= 2\cos\varphi\left[-\frac{\sin(n-1)\chi}{n(n-1)} + \frac{\sin(n+1)\chi}{n(n+1)}\right] + \frac{\sin(n-2)\chi}{n(n-2)}$$

$$- \frac{\sin(n+2)\chi}{n(n+2)}$$

Zunächst ist es leicht möglich, aus (39c) und (44) die Beiwerte n_a^* und n_b^* zu berechnen, da $a_{nA} = 0$ für $n > 1$ und $a_{nB} = 0$ für $n > 2$ ist.

Wir erhalten in der Bezeichnungsweise der Gl. (41), (42) hierfür aus (38a,b), (39c) und (44) die neuen φ^*-Funktionen:

$$\varphi_8^* = (\pi - \chi)(-1 + 2\cos\varphi) - 2\cos\varphi \sin\chi + 2\sin\chi + \tfrac{1}{2}\sin 2\chi$$

$$(45)$$

$$\varphi_9^* = (\pi - \chi)(1 + 2\cos\varphi) + 2\cos\varphi(\sin\chi + \sin 2\chi)$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin 2\chi - \tfrac{2}{3}\sin 3\chi$$

φ_4^* und φ_7^* in n_a^* und n_b^* haben dieselben Werte wie die oben für k_c^*, m_c^* angegebenen. Es bleibt nun nur noch n_c^* zu berechnen. Dies erfordert die Berechnung der unendlichen Reihe

$$\sum_0^\infty a_{nc}^* Q_n^* .$$

Das allgemeine Glied dieser Summe lässt sich erst für $n > 2$ angeben, weil gelegentlich $n-2$ im Nenner der Summanden vorkommt. Wir multiplizieren daher zunächst die ersten drei Produkte $n = 0, 1, 2$ aus.

$$(\pi^2\, n_c^*)_{012} = \frac{1}{2}\,\varphi_8^*\,(\varphi_1^* + \frac{\omega}{2}\,\varphi_2^*)(1 + T)$$

$$+ \left[(\pi-\chi)(-1+2\cos\varphi) - 2\cos\varphi\sin\chi + 2\sin\chi + \frac{1}{2}\sin 2\chi\right]$$

$$\cdot \left[-\sin\chi + \omega\left\{-\frac{1}{2}(\pi-\chi) - \cos\varphi\sin\chi + \frac{1}{4}\sin 2\chi\right\}\right]$$

$$+ \left[2(\pi-\chi)\cos\varphi + \cos\varphi\sin 2\chi + \sin\chi - \frac{1}{3}\sin 3\chi\right]$$

$$\cdot \left[\sin\chi + \omega\left\{\pi - \chi + \cos\varphi\sin\chi\right\} \right. \tag{46}$$

$$\left. + \frac{\omega^2}{4}\left\{2(\pi-\chi)\cos\varphi + \cos\varphi\sin 2\chi + \sin\chi - \frac{1}{3}\sin 3\chi\right\}\right]$$

$$+ \left[-\frac{1}{2}(\pi-\chi) + \cos\varphi(-\sin\chi + \frac{1}{3}\sin 3\chi) - \frac{1}{8}\sin 4\chi\right] \cdot$$

$$\cdot \left[\sin 2\chi + \omega\left\{\cos\varphi\sin 2\chi - \frac{3}{2}\sin\chi - \frac{1}{6}\sin 3\chi\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{\omega^2}{4}\left\{-\pi + \chi + \cos\varphi(-2\sin\chi + \frac{2}{3}\sin 3\chi) - \frac{1}{4}\sin 4\chi\right\}\right]$$

Wir ziehen aus Gl. (46) zunächst die Bestandteile heraus, welche die Faktoren $(1+T)$ oder $(\pi-\chi)$ enthalten. In den höheren Gliedern $n > 2$ kommen derartige Bestandteile nicht mehr vor, sodass unser Auszug hinsichtlich dieser irrationalen Bestandteile mit den Faktoren $(1+T)$ und $(\pi-\chi)$ bereits vollständig ist. Wir erhalten:

$$(\pi^2\, n_c^*)_{irr.} = \frac{1}{2}\,\varphi_8^*\,(\varphi_1^* + \frac{\omega}{2}\,\varphi_2^*)(1 + T)$$

$$+ (\pi-\chi)(\sin\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi) \tag{47}$$

$$+ \omega\left[(\pi-\chi)^2(\frac{1}{2} + \cos\varphi) + (\pi-\chi)\left\{\cos\varphi(2\sin\chi + \sin 2\chi)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{3}{4}\sin\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi - \frac{1}{4}\sin 3\chi\right\}\right]$$

$$+ \frac{\omega^2}{4}\left[(\pi-\chi)^2(4\cos^2\varphi + \frac{1}{2}) + (\pi-\chi)\left\{4\cos^2\varphi\sin 2\chi\right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos\varphi(6\sin\chi - 2\sin 3\chi) + \frac{1}{4}\sin 4\chi\right\}\right]$$

Alle anderen Bestandteile von $\pi^2\, n_c^*$ sind rein trigonometrisch. In der folgenden, recht langen Formel sind diese Bestandteile von $n=0$ angefangen soweit entwickelt, dass man in jedem Falle leicht sehen kann, wie die Reihe weiter geht. Es wird sich zeigen, dass diese Formel bedeutend gekürzt werden kann. D och es liess sich kein einfacherer Weg zur Gewinnung der nachfolgenden Ergebnisse finden, obwohl zwei von dieser abweichende Integrationsmethoden geprüft worden sind.

$$
\begin{aligned}
(\pi^2 n_c^*)_{trig.} = \cos\varphi\Big[& 2\sin^2\chi + \sin\chi\sin 2\chi - \sin\chi\sin 2\chi \\
& + \tfrac{1}{3}\sin 2\chi\sin 3\chi - \tfrac{2}{2\cdot 3}\sin 2\chi\sin 3\chi + \tfrac{2}{3\cdot 4}\sin 3\chi\sin 4\chi \\
& - \tfrac{2}{3\cdot 4}\sin 3\chi\sin 4\chi + \tfrac{2}{4\cdot 5}\sin 4\chi\sin 5\chi - + \ldots\Big] \\
& - 2\sin^2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\sin 2\chi + \sin^2\chi - \tfrac{1}{3}\sin\chi\sin 3\chi \\
& - \tfrac{1}{8}\sin 2\chi\sin 4\chi \\
& + \tfrac{1}{1\cdot 3}\sin\chi\sin 3\chi - \tfrac{1}{3\cdot 5}\sin 3\chi\sin 5\chi \\
& + \tfrac{1}{2\cdot 4}\sin 2\chi\sin 4\chi - \tfrac{1}{4\cdot 6}\sin 4\chi\sin 6\chi + - \ldots. \\
+\omega\cos^2\varphi\Big[& 2\sin^2\chi + \sin\chi\sin 2\chi - \sin\chi\sin 2\chi + \tfrac{1}{3}\sin 2\chi\sin 3\chi \\
& - \tfrac{2}{2\cdot 3}\sin 2\chi\sin 3\chi + \tfrac{2}{3\cdot 4}\sin 3\chi\sin 4\chi - \tfrac{2}{3\cdot 4}\sin 3\chi\sin 4\chi \\
& + \tfrac{2}{4\cdot 5}\sin 4\chi\sin 5\chi - + \ldots\Big] \\
+\omega\cos\varphi\Big[& -2\sin^2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\sin 2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\sin 2\chi + \sin^2\chi - \tfrac{1}{3}\sin\chi\sin 3\chi \\
& - \tfrac{1}{8}\sin 2\chi\sin 4\chi + \tfrac{3}{2}\sin^2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\sin 3\chi + \tfrac{1}{6}\sin\chi\sin 3\chi \\
& - \tfrac{1}{18}\sin^2 3\chi \\
& + \tfrac{4}{2\cdot 2\cdot 3}\sin^2 2\chi + \tfrac{2}{2\cdot 3\cdot 4}\sin 2\chi\sin 4\chi - \tfrac{4}{2\cdot 3\cdot 4}\sin 2\chi\sin 4\chi \\
& - \tfrac{2}{3\cdot 4\cdot 4}\sin^2 4\chi + \tfrac{1}{1\cdot 3}\sin\chi\sin 3\chi - \tfrac{1}{3\cdot 5}\sin 3\chi\sin 5\chi \\
& + \tfrac{5}{3\cdot 3\cdot 4}\sin^2 3\chi + \tfrac{3}{3\cdot 4\cdot 5}\sin 3\chi\sin 5\chi - \tfrac{5}{3\cdot 4\cdot 5}\sin 3\chi\sin 5\chi \\
& - \tfrac{3}{4\cdot 5\cdot 5}\sin^2 5\chi + \tfrac{1}{2\cdot 4}\sin 2\chi\sin 4\chi - \tfrac{1}{4\cdot 6}\sin 4\chi\sin 6\chi
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Fortsetzung s. nächste Seite!

$$+ \frac{6}{4\cdot 4\cdot 5}\sin^2 4\chi + \frac{4}{4\cdot 5\cdot 6}\sin 4\chi \sin 6\chi - \frac{6}{4\cdot 5\cdot 6}\sin 4\chi \sin 6\chi$$

$$- \frac{4}{5\cdot 6\cdot 6}\sin^2 6\chi + \frac{1}{3\cdot 5}\sin 3\chi \sin 5\chi - \frac{1}{5\cdot 7}\sin 5\chi \sin 7\chi$$

$$+ \frac{7}{5\cdot 5\cdot 6}\sin^2 5\chi + \dots\dots \qquad \dots\dots \Big]$$

$$+ \omega \Big[\frac{1}{2}\sin\chi \sin 2\chi + \frac{1}{8}\sin^2 2\chi + \frac{3}{16}\sin\chi \sin 4\chi + \frac{1}{48}\sin 3\chi \sin 4\chi$$

$$- \frac{4\sin\chi \sin 2\chi}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3} - \frac{2\sin\chi \sin 4\chi}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4\sin 2\chi \sin 5\chi}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 5} + \frac{2\sin 4\chi \sin 5\chi}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$- \frac{5\sin 2\chi \sin 3\chi}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{3\sin 2\chi \sin 5\chi}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 5} + \frac{5\sin 3\chi \sin 6\chi}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 6} + \frac{3\sin 5\chi \sin 6\chi}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

$$- \frac{6\sin 3\chi \sin 4\chi}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{4\sin 3\chi \sin 6\chi}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{6\sin 4\chi \sin 7\chi}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} + \frac{4\sin 6\chi \sin 7\chi}{2\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

$$- \frac{7\sin 4\chi \sin 5\chi}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{5\sin 4\chi \sin 7\chi}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \frac{7\sin 5\chi \sin 8\chi}{2\cdot 5\cdot 6\cdot 8} + \frac{5\sin 7\chi \sin 8\chi}{2\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$$

$$- \frac{8\sin 5\chi \sin 6\chi}{2\cdot 5\cdot 6\cdot 7} - \frac{6\sin 5\chi \sin 8\chi}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 8} + \quad \dots\dots\dots\dots \Big]$$

$$+ \omega^2 \cos^2\varphi \Big[\frac{1}{4}\sin^2 2\chi + \frac{1}{2}\sin^2\chi - \frac{1}{3}\sin\chi \sin 3\chi + \frac{1}{18}\sin^2 3\chi$$

$$+ \frac{\sin^2 2\chi}{2\cdot 2\cdot 3} - \frac{2\sin 2\chi \sin 4\chi}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\sin^2 4\chi}{3\cdot 4\cdot 4}$$

$$+ \frac{\sin^2 3\chi}{3\cdot 3\cdot 4} - \frac{2\sin 3\chi \sin 5\chi}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{\sin^2 5\chi}{4\cdot 5\cdot 5}$$

$$+ \frac{\sin^2 4\chi}{4\cdot 4\cdot 5} - \frac{2\sin 4\chi \sin 6\chi}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{\sin^2 6\chi}{5\cdot 6\cdot 6} + - \dots \Big]$$

$$+ \omega^2 \cos\varphi \Big[\frac{1}{2}\sin\chi \sin 2\chi - \frac{1}{6}\sin 2\chi \sin 3\chi$$

$$+ \frac{1}{8}\sin\chi \sin 4\chi - \frac{1}{24}\sin 3\chi \sin 4\chi$$

$$- \frac{\sin\chi \sin 2\chi}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\sin 2\chi \sin 5\chi}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{\sin\chi \sin 4\chi}{1\cdot 3\cdot 4} - \frac{\sin 4\chi \sin 5\chi}{3\cdot 4\cdot 5}$$

$$- \frac{\sin 2\chi \sin 3\chi}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\sin 3\chi \sin 6\chi}{3\cdot 4\cdot 6} + \frac{\sin 2\chi \sin 5\chi}{2\cdot 4\cdot 5} - \frac{\sin 5\chi \sin 6\chi}{4\cdot 5\cdot 6}$$

$$- \frac{\sin 3\chi \sin 4\chi}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{\sin 4\chi \sin 7\chi}{4\cdot 5\cdot 7} + \frac{\sin 3\chi \sin 6\chi}{3\cdot 5\cdot 6} - \frac{\sin 6\chi \sin 7\chi}{5\cdot 6\cdot 7}$$

$$- \frac{\sin 4\chi \sin 5\chi}{4\cdot 5\cdot 6} + + - \quad \dots\dots\dots\dots \Big]$$

$$+ \frac{\omega^2}{4} \Big[\sin^2\chi - \frac{2}{3}\sin\chi \sin 3\chi + \frac{1}{9}\sin^2 3\chi + \frac{1}{32}\sin^2 4\chi$$

$$+ \dots$$

(Fortsetzung nächste Seite!)

$$+\frac{\sin^2\chi}{1\cdot1\cdot3} - \frac{2\sin\chi\sin5\chi}{1\cdot3\cdot5} + \frac{\sin^2 5\chi}{3\cdot5\cdot5}$$
$$+\frac{\sin^2 2\chi}{2\cdot2\cdot4} - \frac{2\sin2\chi\sin6\chi}{2\cdot4\cdot6} + \frac{\sin^2 6\chi}{4\cdot6\cdot6}$$
$$+\frac{\sin^2 3\chi}{3\cdot3\cdot5} - \frac{2\sin3\chi\sin7\chi}{3\cdot5\cdot7} + \frac{\sin^2 7\chi}{5\cdot7\cdot7} + - \ldots\ldots\Big]$$

Wir ordnen nun diese Reihen der Gl.(48) nach steigenden Vielfachen von χ, wobei zahlreiche Glieder wegfallen, und erhalten:

$$(\pi^2 n_c^*)_{trig.} = \cos\varphi\cdot 2\sin^2\chi - \sin^2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\sin2\chi \qquad (49)$$
$$+\,\omega\cos^2\varphi\cdot 2\sin^2\chi$$

$$+\omega\cos\varphi\Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\chi - \sin\chi\sin2\chi - \frac{2\sin\chi\sin3\chi}{1\cdot2\cdot3} + \frac{2\sin^2 2\chi}{1\cdot2\cdot3}$$
$$- \frac{2\sin2\chi\sin4\chi}{2\cdot3\cdot4} + \frac{2\sin^2 3\chi}{2\cdot3\cdot4}$$
$$- \frac{2\sin3\chi\sin5\chi}{3\cdot4\cdot5} + \frac{2\sin^2 4\chi}{3\cdot4\cdot5} + - \ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$+\,\omega\Big[\tfrac{1}{6}\sin\chi\sin2\chi + \tfrac{1}{8}\sin^2 2\chi$$
$$- \frac{5\sin2\chi\sin3\chi}{2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{5\sin\chi\sin4\chi}{2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$- \frac{7\sin3\chi\sin4\chi}{2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{7\sin2\chi\sin5\chi}{2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$
$$- \frac{9\sin4\chi\sin5\chi}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{9\sin3\chi\sin6\chi}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}$$
$$- \frac{11\sin5\chi\sin6\chi}{2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \frac{11\sin4\chi\sin7\chi}{2\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + - \ldots\Big]$$

$$+\,\omega^2\cos^2\varphi\Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\chi - \tfrac{1}{3}\sin\chi\sin3\chi + \tfrac{1}{3}\sin^2 2\chi$$
$$- \frac{2\sin2\chi\sin4\chi}{2\cdot3\cdot4} + \frac{2\sin^2 3\chi}{2\cdot3\cdot4}$$
$$- \frac{2\sin3\chi\sin5\chi}{3\cdot4\cdot5} + \frac{2\sin^2 4\chi}{3\cdot4\cdot5} - + \ldots\Big]$$

$$+\,\omega^2\cos\varphi\Big[\tfrac{1}{3}\sin\chi\sin^2\chi$$
$$- \frac{5\sin2\chi\sin3\chi}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{5\sin\chi\sin4\chi}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$- \frac{7\sin3\chi\sin4\chi}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{7\sin2\chi\sin5\chi}{2\cdot3\cdot4\cdot5}$$
$$- \frac{9\sin4\chi\sin5\chi}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{9\sin3\chi\sin6\chi}{3\cdot4\cdot5\cdot6} - + \ldots\Big]$$

$$+ \frac{\omega^2}{4} \Big[\frac{4}{3} \sin^2\chi - \frac{2}{3} \sin\chi \sin 3\chi + \frac{1}{16} \sin^2 2\chi$$

$$- \frac{2 \sin\chi \sin 5\chi}{1\cdot 3\cdot 5} \quad + \frac{2 \sin^2 3\chi}{1\cdot 3\cdot 5}$$

$$- \frac{2 \sin 2\chi \sin 6\chi}{2\cdot 4\cdot 6} \quad + \frac{2 \sin^2 4\chi}{2\cdot 4\cdot 6}$$

$$- \frac{2 \sin 3\chi \sin 7\chi}{3\cdot 5\cdot 7} \quad + \frac{2 \sin^2 5\chi}{3\cdot 5\cdot 7} \quad - + \ldots \Big]$$

Die Glieder dieser unendlichen Reihe lassen sich paarweise so zusammenfassen, dass nur noch unendliche Reihen rationaler Zahlen übrig bleiben. Es ist beispielsweise

$$- \sin\chi \sin 3\chi + \sin^2 2\chi = \sin 2\chi \quad ,$$

$$- \sin 2\chi \sin 4\chi + \sin^2 3\chi = \sin 2\chi \quad .$$

Wir erhalten dann aus Gl.(49):

$$(\pi^2 n_c^*)_{trig.} = \cos\varphi \cdot 2 \sin^2\chi - \sin^2\chi - \frac{1}{2} \sin\chi \sin 2\chi \tag{50}$$

$$+ \omega \cos^2\varphi \cdot 2 \sin^2\chi$$

$$+ \omega \cos\varphi \Big[\frac{1}{2} \sin^2\chi - \sin\chi \sin 2\chi + 2\sin^2\chi \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\Big]$$

$$+ \omega \Big[\frac{1}{6} \sin\chi \sin 2\chi + \frac{1}{8} \sin^2 2\chi - \frac{1}{2} \sin\chi \sin 2\chi \sum_1^\infty \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\Big]$$

$$+ \omega^2 \cos^2\varphi \Big[\frac{1}{2} \sin^2\chi + 2 \sin^2\chi \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\Big]$$

$$+ \omega^2 \cos\varphi \Big[\frac{1}{3} \sin\chi \sin 2\chi - \sin\chi \sin 2\chi \sum_1^\infty \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\Big]$$

$$+ \frac{\omega^2}{4} \Big[\frac{4}{3} \sin^2\chi - \frac{2}{3} \sin\chi \sin 3\chi + \frac{1}{16} \sin^2 2\chi + 2 \sin^2 2\chi \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)(n+4)} \Big]$$

Durch direkte zahlenmässige Berechnung erhalten wir die Summen:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{2n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \tag{51}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+4)} = \frac{11}{96}$$

Setzen wir (51) in (50) ein, so erhalten wir schliesslich:

$$\begin{aligned}(\pi^2 n_o^*)_{\text{trig.}} &= \cos\varphi \cdot 2\sin^2\chi - \sin^2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\sin 2\chi \\ &+ \omega\left[\cos^2\varphi \cdot 2\sin^2\chi + \cos\varphi(\sin^2\chi - \sin\chi\sin 2\chi) + \tfrac{1}{8}\sin^2 2\chi\right] \\ &+ \frac{\omega^2}{4}\left[4\cos^2\varphi\sin^2\chi + \tfrac{4}{3}\sin^2\chi - \tfrac{2}{3}\sin\chi\sin 3\chi \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \tfrac{7}{24}\sin^2 2\chi\right]\end{aligned} \tag{52}$$

Fassen wir Gl.(47) und (52) zusammen, so erhalten wir:

$$\pi^2 n_o^* = \frac{1}{2}\varphi_8^*\left(\varphi_1^* + \frac{\omega}{2}\varphi_2^*\right)(1+T) + \varphi_{10}^* + \frac{\omega}{2}\varphi_{11}^* + \frac{\omega^2}{4}\varphi_{12}^* \tag{53}$$

worin

$$\begin{aligned}\varphi_{10}^* &= (\pi-\chi)(\sin\chi + \tfrac{1}{2}\sin 2\chi) + 2\cos\varphi\sin^2\chi \\ &\qquad - \sin^2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\sin 2\chi\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{11}^* &= (\pi-\chi)^2(1 + 2\cos\varphi) + (\pi-\chi)\Big\{\cos\varphi(4\sin\chi + 2\sin 2\chi) \\ &\qquad + \tfrac{3}{2}\sin\chi - \sin 2\chi - \tfrac{1}{2}\sin 3\chi\Big\} + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\chi \\ &\qquad + 4\cos^2\varphi\sin^2\chi + 2\cos\varphi(\sin^2\chi - \sin\chi\sin 2\chi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{12}^* &= (\pi-\chi)(\tfrac{1}{2} + 4\cos^2\varphi) + (\pi-\chi)\Big\{4\cos^2\varphi\sin 2\chi \\ &\qquad + \cos\varphi(6\sin\chi - 2\sin 3\chi) + \tfrac{1}{4}\sin 4\chi\Big\} \\ &\qquad + 4\cos^2\varphi\sin^2\chi + \tfrac{4}{3}\sin^2\chi - \tfrac{2}{3}\sin\chi\sin 3\chi \\ &\qquad + \tfrac{7}{24}\sin^2 2\chi\end{aligned}$$

Hiermit haben wir sämtliche ϕ^*- Funktionen berechnet, die für einen Flügel mit Ausgleichruder gebraucht werden, s.(43),(45) und (54). Eine Kontrolle dieser Ergebnisse ist dadurch leicht möglich, dass wir $\chi = \varphi$ setzen, also die Rudervorderkante mit der Ruderachse zusammenfallen lassen. Dann muss $\phi_n^* = \phi_n$ werden. Das ist auch stets der Fall, wenn wir die Additionstheoreme der Winkelfunktionen sin und cos anwenden.

V. Einfluss der Stufe.

Da bei der liniearisierten Flügeltheorie alle Wirkungen auf den Flügel linear superponierbar sind, untersuchen wir den Einfluss der Stufe gesondert. Wir gehen von der Betrachtung der Abb.3 aus. Wir ersetzen die Stufe zunächst durch eine Gerade endlicher Neigung, die den Flügel bei der Abszisse ψ und das Ruder bei der Abszisse χ schneidet. Die Neigung dieser Stufe ist dann im Bereich

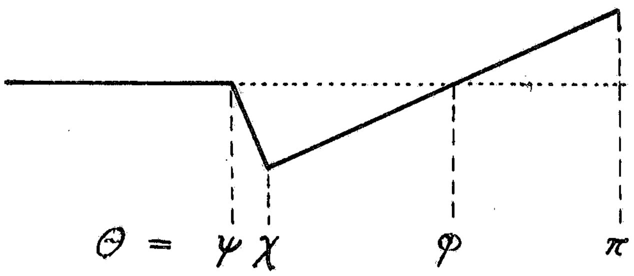

Abb.3 Stufeneinfluss

$$\psi < \Theta < \chi$$

$$\frac{dz}{dx} = C\,\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\cos\psi - \cos\chi} .$$

Diesen Ausdruck haben wir entsprechend (37b) zu entwickeln. Wir erhalten für $C = 1$

$$\begin{aligned} c_o &= \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\cos\psi - \cos\chi}\int_\psi^\chi d\Theta \\ &= \frac{1}{\pi}(\chi - \psi)\,\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\cos\psi - \cos\chi} \\ c_n &= \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\cos\psi - \cos\chi}\int_\psi^\chi \cos n\,\Theta\, d\Theta \\ &= \frac{2}{\pi\, n}\,\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\cos\psi - \cos\chi}(\sin n\chi - \sin n\psi) \end{aligned} \tag{55}$$

Wir wollen zur Vereinfachung annehmen, dass $\chi - \psi = \delta$ ein kleiner Winkel sei, dass die Stufe also sehr steil sei. Dann ist näherungsweise

$$\begin{aligned} \sin n\psi &= \sin n\chi - n\delta \cos n\chi \\ \cos\psi &= \cos\chi + \delta \sin\chi \quad . \end{aligned} \tag{55a}$$

Man muss jedoch beachten, dass diese Näherung nur für endliche Werte von n zulässig ist, da für $n \to \infty$ das Produkt $n\delta$ jeden beliebigen Wert annehmen könnte, wenn auch $\delta \to 0$ geht. Diesen Ausnahmefall werden wir weiter unten noch besonders in Betracht ziehen. Für endliche Werte von n können wir indessen (55a) in (55) einsetzen, wobei sich δ weghebt, und erhalten dann die Grenzwerte für eine sehr steile (senkrechte) Stufe:

$$\begin{aligned} c_{og} &= \frac{1}{\pi} \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi} \\ c_{ng} &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi} \cos n\chi \end{aligned} \tag{56}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{C}{\pi}\left[\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi} + 2\,\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}\sum_{1}^{\infty} \cos n\chi \cos n\,\Theta\right]$$

Wir erhalten folglich nach Gl.(27) die Zusatzbeiwerte

$$\Delta F_n = \frac{C}{\pi}\,\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi} \cos n\chi \ , \tag{57}$$

wobei n alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft.

Nach Gl.(28) und (57) haben wir für die Amplitude C/π die Wirbelbeiwerte

$$\begin{aligned} \Delta a_{oc} &= \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}\left[\frac{1+T}{2} + \frac{1-T}{2}\cos\chi\right] \\ \Delta a_{nc} &= \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}\left[-n\cos n\chi + \frac{\omega}{2}\left\{\cos(n-1)\chi - \cos(n+1)\chi\right\}\right] \end{aligned} \tag{58}$$

Gl.(58) haben wir nun in (39) einzusetzen. Zusatzterme erhalten wir natürlich nur für die Beiwerte mit dem Index c. Es ist

$$\begin{aligned} \pi\Delta k_c &= \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}\left[(1+T)(1-\cos\chi) + \omega(1 - \cos 2\chi)\right] \\ \pi\Delta m_c &= \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}\left[-\cos\chi + \cos 2\chi + \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\cos\chi - \cos 2\chi + \frac{1}{2}\cos 3\chi\right)\right] \end{aligned} \tag{59}$$

Die Berechnung von Δn_c erfordert wieder die Summierung einer unendlichen Reihe

$$\sum_{0}^{\infty} \Delta a_{nc} \cdot Q_n^{*} \ . \tag{60}$$

Wir beachten, dass $Q_o^* = \varphi_8^*$ ist und erhalten durch Einsetzen von (44) und (58) in (60):

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\chi}{\cos\varphi - \cos\chi}\,\pi^2\,\Delta n_o \;=\; & \tfrac{1}{2}\,\varphi_8^*(1-\cos\chi)(1+T) \\
& +(\pi-\chi)\Big[-\cos\chi + \cos 2\chi + \tfrac{\omega}{2}\Big\{2\cos\varphi(1-\cos 2\chi) \\
& \qquad\qquad - \tfrac{1}{2}\cos\chi + \tfrac{1}{2}\cos 3\chi\Big\}\Big] \\
& + \cos\varphi\Big[\underline{-2\sin\chi\cos\chi} - \sin 2\chi\cos\chi + 2\sin\chi\cos 2\chi \\
& \qquad - \tfrac{2}{3}\sin 3\chi\cos 2\chi + \sin 2\chi\cos 3\chi \\
& \qquad - \tfrac{2}{4}\sin 4\chi\cos 3\chi + \tfrac{2}{3}\sin 3\chi\cos 4\chi \qquad\qquad (61)\\
& \qquad - \tfrac{2}{5}\sin 5\chi\cos 4\chi + \tfrac{2}{4}\sin 4\chi\cos 5\chi \\
& \qquad - \tfrac{2}{6}\sin 6\chi\cos 5\chi + \tfrac{2}{5}\sin 5\chi\cos 6\chi + + - \ldots\Big] \\
& \underline{+2\sin\chi\cos\chi} + \underline{\tfrac{1}{2}\sin 2\chi\cos\chi} - \sin\chi\cos\chi + \tfrac{1}{3}\sin 3\chi\cos\chi \\
& + \tfrac{1}{4}\sin 4\chi\cos 2\chi - \sin\chi\cos 3\chi + \tfrac{1}{5}\sin 5\chi\cos 3\chi - \tfrac{1}{2}\sin 2\chi\cos 4\chi \\
& + \tfrac{1}{6}\sin 6\chi\cos 4\chi - \tfrac{1}{3}\sin 3\chi\cos 5\chi + \tfrac{1}{7}\sin 7\chi\cos 5\chi - \tfrac{1}{4}\sin 4\chi\cos 6\chi \\
& + \tfrac{1}{8}\sin 8\chi\cos 6\chi - + \ldots\ldots \\
& +\omega\cos\varphi\Big[\tfrac{1}{2}\sin 2\chi - \tfrac{1}{2}\sin 2\chi\cos 2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\cos\chi + \tfrac{1}{2}\sin\chi\cos 3\chi \\
& \qquad + \tfrac{1}{6}\sin 3\chi\cos\chi - \tfrac{1}{6}\sin 3\chi\cos 3\chi - \tfrac{1}{6}\sin 2\chi\cos 2\chi + \tfrac{1}{6}\sin 2\chi\cos 4\chi \\
& \qquad + \tfrac{1}{12}\sin 4\chi\cos 2\chi - \tfrac{1}{12}\sin 4\chi\cos 4\chi - \tfrac{1}{12}\sin 3\chi\cos 3\chi + \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{12}\sin 3\chi\cos 5\chi \\
& \qquad + \tfrac{1}{20}\sin 5\chi\cos 3\chi - \tfrac{1}{20}\sin 5\chi\cos 5\chi - \tfrac{1}{20}\sin 4\chi\cos 4\chi \\
& \qquad\qquad + \tfrac{1}{20}\sin 4\chi\cos 6\chi + \ldots\Big] \\
& + \frac{\omega}{2}\Big[-\tfrac{1}{3}\sin 3\chi + \tfrac{1}{3}\sin 3\chi\cos 2\chi + \sin\chi\,.\,(1-\cos 2\chi) \\
& \qquad - \tfrac{1}{8}\sin 4\chi\cos\chi + \tfrac{1}{8}\sin 4\chi\cos 3\chi \\
& \qquad + \tfrac{1}{3}\sin\chi\cos 2\chi - \tfrac{1}{3}\sin\chi\cos 4\chi
\end{aligned}
$$

$$- \frac{1}{15} \sin 5\chi \cos 2\chi + \frac{1}{15} \sin 5\chi \cos 4\chi$$
$$+ \frac{1}{8} \sin 2\chi \cos 3\chi - \frac{1}{8} \sin 2\chi \cos 5\chi$$
$$- \frac{1}{24} \sin 6\chi \cos 3\chi + \frac{1}{24} \sin 6\chi \cos 5\chi$$
$$+ \frac{1}{15} \sin 3\chi \cos 4\chi - \frac{1}{15} \sin 3\chi \cos 6\chi - + \dots \Big]$$

Wir fassen zunächst wieder die irrationalen Glieder zusammen und erhalten:

$$(\pi^2 \Delta n_c)_{irr.} = \frac{1}{2} \Phi_8^* (1 - \cos\chi) \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi} (1+T)$$
$$+ (\pi - \chi) \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi} \Big[- \cos\chi + \cos 2\chi \tag{62}$$
$$+ \frac{\omega}{2} \Big\{ 2\cos\varphi (1 - \cos 2\chi) - \frac{1}{2} \cos\chi + \frac{1}{2} \cos 3\chi \Big\} \Big]$$

Man erkennt, dass in (61) alle trigonometrischen Glieder mit dem Faktor ω identisch verschwinden. Die übrig bleibenden stationären Glieder haben nun die unangenehme Eigenschaft, divergente Reihen der Form

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 n\chi}{n}$$

zu bilden, die logarithmisch unendlich werden. Zur exakten Berechnung dieser Glieder dürfen wir daher von der Näherungsannahme (55a) zunächst keinen Gebrauch machen. Nach (55) ist der stationäre Anteil der Wirbelbeiwerte für $n > 0$

$$\Delta a_n^{(s)} = \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\cos\psi - \cos\chi} (- \sin n\chi + \sin n\psi) . \tag{63}$$

Wir bilden nun die trigonometrischen Anteile der Summe

$$\sum_1^{\infty} Q_n \Delta a_n^{(s)}$$

und erhalten, wenn wir die sich aufhebenden Glieder weglassen:

$$S'_{trig.} \frac{\cos\psi - \cos\chi}{\cos\varphi - \cos\chi} = \sin\chi (- \sin\chi + \sin\psi)$$
$$+ 2 \cos\varphi \Big[\frac{1}{2} \sin 2\chi \sin\psi - \frac{1}{2} \sin\chi \sin 2\psi$$
$$+ \frac{1}{2 \cdot 3} \sin 3\chi \sin 2\psi - \frac{1}{2 \cdot 3} \sin 2\chi \sin 3\psi +$$

$$+ \frac{1}{3\cdot 4} \sin 4\chi \sin 3\psi - \frac{1}{3\cdot 4} \sin 3\chi \sin 4\psi + - \ldots \Big]$$

$$- \frac{1}{3} \sin 3\chi \sin\psi - \frac{1}{2\cdot 4} \sin 4\chi \sin 2\psi + \frac{1}{3} \sin\chi \sin 3\psi$$

$$- \frac{1}{3\cdot 5} \sin 5\chi \sin 3\psi + \frac{1}{2\cdot 4} \sin 2\chi \sin 4\psi - \frac{1}{4\cdot 6} \sin 6\chi \sin 4\psi$$

$$+ \frac{1}{3\cdot 5} \sin 3\chi \sin 5\psi - + \ldots \Big]$$

$$= \sin\chi\,(-\sin\chi + \sin\psi) \tag{64}$$

$$+2\cos\varphi \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} \left[\sin(n+1)\chi \sin n\psi - \sin n\chi \sin(n+1)\psi\right]$$

$$- \sum_1^\infty \frac{1}{n(n+2)} \left[\sin(n+2)\chi \sin n\psi - \sin n\chi \sin(n+2)\psi\right]$$

Diese Summe kann man auf die Normalform bringen

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n} \cos n\alpha = -\ln \sin \frac{\alpha}{2} \quad ,$$

indem man die Nenner in Partialbrüche zerlegt. Es ist

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad ,$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} \quad .$$

Nach Anwendung der Additionstheoreme erhalten wir aus (64):

$$S'_{trig.} = \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\cos\psi - \cos\chi} \Big[\sin\chi\,(-\sin\chi + \sin\psi) \tag{65}$$

$$+\left\{2\cos\varphi(\cos\chi - \cos\psi) - \frac{1}{2}(\cos 2\chi - \cos 2\psi)\right\} \ln \frac{\sin \frac{1}{2}(\chi+\psi)}{\sin \frac{1}{2}(\chi-\psi)} \Big] .$$

Wir nehmen nun an, dass $\delta = \chi - \psi$ klein sei, und erhalten aus (65) in bekannter Weise

$$S'_{trig.} = -\cos\chi(\cos\varphi - \cos\chi) - 2(\cos\varphi - \cos\chi)^2 \ln \frac{2\sin\chi}{\delta} . \tag{66}$$

$S'_{trig.}$ wird logarithmisch unendlich, wenn $\delta = 0$ wird. Wir müssen also einen geeigneten Wert von δ für die weitere Untersuchung annehmen, z.B. $\delta = 0{,}010$ im Bogenmass, entsprechend $0{,}57^\circ$.

Der Term n = 0 liefert ebenfalls noch trigonometrische Anteile, die wir Gl.(61) entnehmen können, und zwar sind es die dort unterstrichenen Glieder.

Wir erhalten hieraus:

$$S''_{trig.} = (\cos\varphi - \cos\chi)\left[-2\cos\varphi\cos\chi + 2\cos\chi + \cos^2\chi\right] \qquad (67)$$

Durch Addition erhalten wir den trigonometrischen Anteil

$$(\pi^2 \Delta n_c)_{trig.} = S'_{trig.} + S''_{trig.} \qquad (68)$$

$$= \cos\chi(\cos\varphi - \cos\chi)(1 + \cos\chi - 2\cos\varphi)$$

$$+ \omega.\sin^2\chi\,.(\cos\varphi - \cos\chi) - 2(\cos\varphi - \cos\chi)^2 \ln\frac{2\sin\chi}{\delta}\,.$$

Durch Addition von (62) und (68) erhalten wir den gesuchten Einfluss der Stufe auf das Rudermoment

$$\pi^2\Delta n_c = \frac{1}{2}\varphi_8^*(1 - \cos\chi)\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}(1+T) \qquad (69)$$

$$+ (\pi - \chi)\frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}\Big[-\cos\chi + \cos 2\chi$$

$$+ \frac{\omega}{2}\Big\{2\cos\varphi(1 - \cos 2\chi) - \frac{1}{2}\cos\chi + \frac{1}{2}\cos 3\chi\Big\}\Big]$$

$$+ \cos\chi(\cos\varphi - \cos\chi)(1 + \cos\chi - 2\cos\varphi)$$

$$- 2(\cos\varphi - \cos\chi)^2 \ln\frac{2\sin\chi}{\delta} + \omega\sin^2\chi(\cos\varphi - \cos\chi)$$

Wir denken uns nun sämtliche neu gewonnenen Beiträge Δ zu den Beiwerten mit $*$ addiert. Dann erhalten wir die endgültigen Beiwerte mit Ausgleich, die wir durch den Index o kenntlich machen. Es ist also

$$k_{co} = k_c^* + \Delta k_c \,,$$

$$m_{co} = m_c^* + \Delta m_c \,,$$

$$n_{co} = n_c^* + \Delta n_c \,.$$

Alle Beiwerte des schwingenden Flügels mit Ausgleichruder sind bestimmt durch das System der Φ-Funktionen. Wir wollen nun am Schluss dieses System nochmals in übersichtlicher Form zusammenstellen unter Berücksichtigung der Beiträge Δ.

$$\Phi_1{}^o = \pi - \chi + \sin\chi + \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}(1 - \cos\chi)$$

$$\Phi_2{}^o = \Phi_2^* = (\pi - \chi)(1 + 2\cos\varphi) + 2\cos\varphi\sin\chi + 2\sin\chi - \frac{1}{2}\sin 2\chi$$

$$\varphi_3^{\,o} = \pi - \chi + \tfrac{1}{2}\sin 2\chi + \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}(1 - \cos 2\chi)$$

$$\varphi_4^{\,o} = \varphi_4^* = 2(\pi-\chi)\cos\varphi + \cos\varphi\sin 2\chi + \sin\chi - \tfrac{1}{3}\sin 3\chi$$

$$\varphi_5^{\,o} = \sin\chi - \tfrac{1}{2}\sin 2\chi + \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}(-\cos\chi + \cos 2\chi)$$

$$\varphi_6^{\,o} = 2(\pi-\chi) + \cos\varphi(2\sin\chi - \sin 2\chi) + \tfrac{3}{2}\sin\chi + \tfrac{1}{6}\sin 3\chi$$
$$+ \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}(1 - \tfrac{1}{2}\cos\chi - \cos 2\chi + \tfrac{1}{2}\cos 3\chi)$$

$$\varphi_7^{\,o} = \varphi_7^* = (\pi-\chi)(\tfrac{1}{2} + 2\cos\varphi) + \cos\varphi(\sin\chi + \sin 2\chi - \tfrac{1}{3}\sin 3\chi)$$
$$+ \sin\chi - \tfrac{1}{3}\sin 3\chi + \tfrac{1}{8}\sin 4\chi$$

$$\varphi_8^{\,o} = \varphi_8^* = (\pi-\chi)(-1+2\cos\varphi) - 2\cos\varphi\sin\chi + 2\sin\chi + \tfrac{1}{2}\sin 2\chi$$

$$\varphi_9^{\,o} = \varphi_9^* = (\pi-\chi)(1+2\cos\varphi) + 2\cos\varphi(\sin\chi + \sin 2\chi) - \tfrac{1}{2}\sin 2\chi$$
$$- \tfrac{2}{3}\sin 3\chi$$

$$\varphi_{10}^{\,o} = (\pi-\chi)\left[\sin\chi - \tfrac{1}{2}\sin 2\chi + \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}(-\cos\chi + \cos 2\chi)\right]$$
$$+ 2\cos\varphi\sin^2\chi - \sin^2\chi - \tfrac{1}{2}\sin\chi\sin 2\chi$$
$$+ \cos\chi(\cos\varphi - \cos\chi)(1 + \cos\chi - 2\cos\varphi)$$
$$- 2(\cos\varphi - \cos\chi)^2 \ln\frac{2\sin\chi}{\delta}$$

$$\varphi_{11}^{\,o} = (\pi-\chi)^2(1 + 2\cos\varphi) + (\pi-\chi)\Big[\cos\varphi(4\sin\chi + 2\sin 2\chi)$$
$$+ \tfrac{3}{2}\sin\chi - \sin 2\chi - \tfrac{1}{2}\sin 3\chi$$
$$+ \frac{\cos\varphi - \cos\chi}{\sin\chi}\left\{2\cos\varphi(1 - \cos 2\chi) - \tfrac{1}{2}\cos\chi + \tfrac{1}{2}\cos 3\chi\right\}\Big]$$
$$+ 4\cos^2\varphi\sin^2\chi + 2\cos\varphi(\sin^2\chi - \sin\chi\sin 2\chi) + \tfrac{1}{4}\sin^2 2\chi + 2\sin^2\chi(\cos\varphi - \cos\chi)$$

$$\varphi_{12}^{\,o} = \varphi_{12}^* = (\pi-\chi)(\tfrac{1}{2} + 4\cos^2\varphi)$$
$$+ (\pi-\chi)\left[4\cos^2\varphi\sin 2\chi + \cos\varphi(6\sin\chi - 2\sin 3\chi) + \tfrac{1}{4}\sin 4\chi\right]$$
$$+ 4\cos^2\varphi\sin^2\chi + \tfrac{4}{3}\sin^2\chi - \tfrac{2}{3}\sin\chi\sin 3\chi + \tfrac{7}{24}\sin^2 2\chi$$

Hiermit ist die Untersuchung beendet.

Göttingen, den 23.11.1937.

Küssner