Forschungsbericht 2011-04

Die Verwendung von *Hansen*-Systemen in Himmelsmechanik und Astrodynamik

Ernst Friedrich Maria Jochim

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme
Oberpfaffenhofen

221 Seiten
61 Bilder
6 Tabellen
124 Literaturstellen

DLR **Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt** e.V.
in der Helmholtz-Gemeinschaft

der Bundeswehr
Universität München

Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik

Thema der Dissertation: Die Verwendung von *Hansen*-Systemen in Himmelsmechanik und Astrodynamik

Verfasser: Dipl. Math. Ernst Friedrich Maria Jochim

Promotionsaussschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. rer.nat. Michael Pfitzner

1. Berichterstatter: Univ. Prof. Dr. rer. nat. Bernd Häusler
2. Berichterstatter: Univ. Prof. Dr. Ing. Otto Wagner (TUM)
3. Berichterstatter: Univ. Prof. Dr. Ing. Helmut Süß

Tag der Prüfung: 28. März 2011

Mit der Promotion erlangter akademischer Grad: Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr. Ing.)

Neubiberg, den 28. März 2011

Kurzfassung der Arbeit die Verwendung von *Hansen*-Systemen in Himmelsmechanik und Astrodynamik

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit drei geradlinigen Koordinatensystemen, in denen die astrodynamischen Bewegungsgleichungen bearbeitet werden können. Diese Systeme können mit den Namen *I. Newton, G. W. Leibniz* und *P. A. Hansen* verknüpft werden. Dem Namen *Newton*s wird das inertiale Basissystem zugeordnet, in dem die sogenannten *Newton-Euler*schen Bewegungsgleichungen integriert werden. Alle Beobachtungen mit vorausberechneten bzw. gemessenen Örtern von Erdsatelliten, natürlichen und künstlichen Körpern im Sonnensystem und interstellare Objekte werden in einem solchen System (das etwa auf den Erdäquator oder die Ekliptik bezogen sein kann) berechnet. Da kein bekanntes Koordinatensystem raum- und zeitfest ist, da Bewegungen und Örter nur relativ festgestellt werden können, muss per definitionem ein solches System, dessen inertiale Orientierung auf intergalaktische Objekte bezogen ist, für einen Zeitpunkt (zur Zeit die Fundamentalepoche J2000.0) eingefroren werden. Alle Beobachtungen werden auf dieses System reduziert, bzw. aus diesem System auf einen aktuellen Beobachtungszeitpunkt umgerechnet. Der Ursprung dieses Systems (zum Beispiel ein Baryzentrum) hat mit der Bewegung eines zu untersuchenden Objektes nichts zu tun.

Das von *G. W. Leibniz* eingeführte System ist ein mit dem betrachteten Objekt mitbewegtes System, dessen Ursprung daher in diesem Objekt liegt. Zwei Achsen liegen in der Bahnebene, die dritte normal zur Bahnebene. Dieses System gestattet die Zerlegung von Bewegungseinflüssen in einen radialen, transversalen und normalen Anteil, was von *C. F. Gauß* in seinen Planetengleichungen genutzt worden ist.

P. A. Hansen entdeckte ein System, das er als „ideales System“ bezeichnete, weil in ihm die ersten Ableitungen von Bewegungsparametern im gestörten wie ungestörten Fall dieselbe Darstellung haben. Der zu diesem System relative Geschwindigkeitsvektor ist zum Beispiel identisch dem absoluten Geschwindigkeitsvektor eines Bewegungsvorganges. Die Basisebene dieses Systems liegt wie die des *Leibniz*-Systems in der momentanen Bahnebene, ist jedoch fest in der Bahnebene verankert. Sein Ursprung hat wie bei einem *Newton* – System nichts mit der Bahn zu tun, kann etwa in einem Baryzentrum liegen oder aber im Hinblick auf beliebige Bewegungen in einem beliebigen Ort außerhalb der Bahnkurve. Dadurch können Singularitäten vermieden werden, die bei einem Durchgang des bewegten Objektes durch den Ursprung auftreten könnten. *Hansen* wählte dieses System im Rahmen seiner Untersuchungen der Bewegung der Kleinen Planeten und des Mondes, weil die Störeinflüsse in der Bahnebene und senkrecht dazu in diesem System nahezu vollständig entkoppelt werden können.

Es wird in dieser Arbeit als eine Kernaussage gezeigt, dass ein solches Koordinatensystem nicht willkürlich gewählt werden kann, sondern einer jeden Bahnbewegung originär zugeordnet ist (Die Bewegungen eines Raumflugkörpers, um seine Lage zu ändern, werden in dieser Arbeit nicht untersucht). Eine Anfangsrichtung dieses Systems in der Bahnebene kann willkürlich festgelegt werden. Ist dies erfolgt, muss sie zur Untersuchung eines Bewegungsvorganges für den gesamten Rechenprozess festgehalten werden. Eine weitere zentrale Aussage ist, dass ein solches als *Hansen* – System bezeichnetes System das einzige Koordinatensystem ist, das fest an eine Bahnebene gekettet ist und auch nicht in der Bahnebene variieren kann. Damit ist ein auf dieses System bezogener Bahnwinkel die einzige wirklich unabhängige Variable, die eine Bahnbewegung beschreiben kann. Alle anderen Bahnparameter, auch die Zeit, müssen auf diesen Bahnwinkel bezogen werden. Dieses System ist das einzige System, in dem wie bei einem iner-

tialen System der absolute Geschwindigkeitsvektor dem auf dieses System bezogenen relativen Geschwindigkeitsvektor identisch gleich ist. Eine räumliche Eigenbewegung dieses Systems ist ausschließlich durch eine normale Beschleunigungskomponente auf den relevanten Bewegungsvorgang bestimmt. Die Verwendung eines solchen Systems erlaubt eine vollständige Verallgemeinerung der Rechnungen in der Astrodynamik und darüber hinaus bei Untersuchungen eines jeden Bahnbewegungsvorganges. Deshalb ist es in Bezug auf dieses System möglich, eine beliebige Kurve (mit Ausnahme eines Kreises) als Anpassungskurve für eine beliebige Bahnbewegung zu wählen, etwa eine gleichförmige geradlinige Bewegung, wie sie einer inertialen Bewegung zugeordnet ist. Durch Variation der Parameter einer solchen Kurve wird der Anpassungsprozess durchgeführt. Deshalb ist es auch nicht verwunderlich, dass gezeigt werden kann, dass die *Euler*sche Methode der Variation der Parameter im Prinzip auf *Hansen*-Systeme zurückzuführen ist.

Eine geradlinige Bewegung, die keinen äußeren Bewegungseinflüssen unterliegt, wird notwendigerweise auf ein *Hansen–System* bezogen, da dieses System als fester Bezug der Bewegung gewählt werden muss. Wird eine beliebige Bewegung beobachtet und auf die Darstellung einer geradlinigen Bewegung bezogen, können in elementarer Weise die Beschleunigungen herauskristallisiert werden, die diese Bewegung verursachen. Basierend auf diesen Überlegungen wird in der vorliegenden Arbeit ein Integrationsverfahren herausgearbeitet, das in relativ willkürlicher Weise ein beliebig kompliziertes Bewegungsproblem zu bearbeiten gestattet. Dazu wird eine Ausgangskurve zugrunde gelegt, deren Parameter nach der Methode der Variation der Parameter einem bestimmten System von Variationsgleichungen genügen. Aus der Gesamtheit der bekannten Beschleunigungen, die einen Bewegungsvorgang prägen, wird diejenige ausgewählt, die eine relativ einfache Integration (möglichst mit einem algebraischen Formelmanipulator) erlaubt. Als Ergebnis wird eine neue Kurve erhalten, deren neue Parameter ein neues System von Variationsgleichungen konstruieren lassen, das anschließend mit einer weiteren der einwirkenden Beschleunigungen bearbeitet wird. Auf diese iterative Weise (Kurve, vollständiger Satz neuer Variationsgleichungen, neue Kurve, usw.) wird das gesamte Bewegungsproblem nach und nach bearbeitet, bis alle bekannten Bewegungseinflüsse mit einer vorgegebenen Genauigkeitsgrenze berücksichtigt sind. Dieser Prozess, der durch die Verwendung von *Hansen*-System*e*n ermöglicht wird, steht im Gegensatz zur klassischen Methode der Himmelsmechanik, in der ein und dasselbe System von sechs Planetengleichungen, die eventuell zuvor durch kanonische Transformationen bearbeitet wurden, approximativ gelöst wird, wobei die Zeit explizit oder implizit als unabhängige Variable dient. In der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methode müssen minimal zwei maximal vier Differentialgleichungen als ein System in einem Arbeitsschritt gelöst werden. Die räumliche Orientierung und der Bezug zur Zeit werden nach Lösung des Bewegungsproblems separat berechnet. Beispiele aus der Astrodynamik erläutern das hier vorgeschlagene Verfahren (Geradlinige Bewegung, *Kepler*bewegung, Spiralbewegung, Bahnen mit kleinem Schub, Sonnensegelbahnen im interplanetaren Raum). Das hier entwickelte Integrationsverfahren kann auf beliebige Bahnbewegungen angewendet werden.

Inhaltsverzeichnis

1 EINLEITUNG 1

1.1 DIE LEISTUNGEN UND NACHWIRKUNGEN VON *P. A. HANSEN* 1
1.2 DIE „IDEALEN" KOORDINATEN 4
1.3 DIE ZIELSETZUNGEN DER VORLIEGENDEN ARBEIT 7

2 ALTES UND NEUES ZU DEN *HANSEN*-SYSTEMEN 12

2.1 MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN UND VORAUSSETZUNGEN 12
2.1.1 Das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem 12
2.1.2 Der absolute Eigenbewegungsvektor eines Koordinatensystems 14
2.1.3 Der relative Eigenbewegungsvektor eines Koordinatensystems 17
2.1.4 Das Leibnizsystem 22
2.2 HIMMELSMECHANISCHE GRUNDLAGEN 24
2.2.1 Keplerbewegung und Leibnizgleichung 24
2.2.2 Klassische Störungsrechnung zur Lösung der Planetengleichungen 27
2.3 DEFINITION UND GRUNDLEGENDE EIGENSCHAFTEN DER *HANSEN*-SYSTEME 30
2.3.1 Die allgemeine Definition eines Hansen-Systems 30
2.3.2 Die Existenz von Hansen-Systemen 33
2.3.3 Einige Charakteristiken von Hansen-idealen Systemen 33
2.3.4 Bezug des Hansen-Systems auf das Basis- Äquatorsystem 35
2.4 WEITERFÜHRENDE EIGENSCHAFTEN DER *HANSEN*-SYSTEME 37
2.4.1 Die Kernaussage über Hansen-Systeme 38
2.4.2 Himmelsmechanische Folgerungen 39
2.4.3 Die Bewegungsgleichung bei Bezug auf ein Hansen-System 43
2.4.4 Die Eigenbewegungsvektoren der Leibniz- und Hansen – Systeme 46
2.4.5 Die Bewegungsgleichungen in Hansen Koordinaten 50
2.4.6 Zur geometrischen Deutung des räumlichen Bahnwinkels 52
2.4.7 Ergänzende Betrachtungen zur Qualifizierung der Hansen-Systeme 53
2.4.8 Transformationen der Zeit 56
2.4.9 Der relative Eigenbewegungsvektor des Hansen-Systems 57
2.4.10 Heuristische Herleitung der Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung 61
2.4.11 Das Additionstheorem für die räumliche Drehung eines Hansen-Systems 62

3 DIE MATHEMATISCHE ANPASSUNG BELIEBIGER BEWEGUNGEN 64

3.1 DIE VARIATIONSGLEICHUNGEN EINER ALLGEMEINEN BEWEGUNG 64
3.2 ALLGEMEINE MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG VON BEWEGUNGEN 68
3.2.1 Die geradlinige Bewegung 68
3.2.2 Die Integrationskonstanten der geradlinigen Bewegung 74
3.2.3 Der Flächensatz in der geradlinigen Bewegung 75
3.2.4 Die Basisvektoren der geradlinigen Bewegung 76
3.2.5 Verfahren der Anpassung einer beliebigen Bewegung durch Kurven erster Ordnung 79
3.2.5.1 Die Zeit als unabhängige Variable, Bezug auf Leibniz-System 80
3.2.5.2 Der Bahnwinkel als unabhängige Variable, Bezug auf Hansen-System 82
3.2.5.3 Zusammenfassung der Methode einer Anpassung mit geradliniger Bewegung 85
3.2.5.4 Die Variationsgleichungen in tangentialen Koordinaten 85
3.2.5.5 Die Perizentrumsdistanz 86
3.2.6 Eine Modifikation der Formeln zur Anpassung einer beliebigen Bewegung mit einer Geraden bei Bezug auf ein Hansen-System 87
3.3 ANPASSUNG EINER BEWEGUNG DURCH KEGELSCHNITTBAHNEN 89
3.3.1 Bewegung auf einem Kegelschnitt 90
3.3.2 Anpassung einer Bewegung mit einer Kegelschnittkurve bei Bezug auf ein Hansen-System 93
3.3.3 Anpassung einer Kegelschnittbewegung durch eine geradlinige Bewegung 94
3.3.4 Anpassung einer geradlinigen Bewegung mit einem Kegelschnitt 98
3.4 ANPASSUNG EINER BEWEGUNG DURCH SPIRALARTIGE KURVEN 103
3.4.1 Bewegung auf hyperbolischer Spirale 103

3.4.2 Verallgemeinerung der Anpassung mit spiralartigen Kurven ... 104
3.4.3 Der Anpassungsvorgang mit spiralartigen Kurven ... 107
3.4.4 Konstruktion weiterer Spiralen ... 108
3.4.5 Systematischer Überblick über einige wichtige Spiralen ... 110
3.5 Die für einen bestimmten Bewegungsvorgang benötigten Beschleunigungen ... 111
3.6 Das Abstandsgesetz ... 113
3.7 Problematik einer Anpassung mit einer Kreisbewegung ... 114
3.7.1 Der Spezialfall Kreisbewegung ... 115
3.7.2 Elemente einer Kreisbewegung ... 120
3.8 Abgrenzung des Begriffes der Anpassung ... 121
3.9 Die Anpassungsgleichungen ... 122
3.10 Schrittweise Integration mit Hilfe beliebiger Anpassungen ... 127
3.11 Weiterführende Aussagen über die Methode der Variation der Parameter ... 137
3.11.1 Der Zusammenhang von Hansen-Systemen und der Methode der Variation der Parameter ... 137
3.11.2 Überblick über die klassische Methode der Variation der Parameter ... 139
3.11.3 Überblick über die Methode der schrittweisen Anpassung ... 142

4 BEISPIELE ZUR DEMONSTRATION DES INTEGRATIONSVERFAHRENS ... 148

4.1 Beispiel einer Tangentialbeschleunigung ... 148
4.2 Beispiel einer konstanten radialen Schubbeschleunigung ... 155
4.3 Beispiel einer interplanetaren Sonnensegelbahn ... 171

5 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK ... 191

6 SCHRIFTTUM ... 196

7 LISTE DER SYMBOLE ... 202

7.1 Lateinische Symbole ... 202
7.2 Griechische Symbole ... 205
7.3 Indizes ... 206
7.4 Mathematische Symbole ... 207
7.5 Astronomische Symbole ... 207

Bildverzeichnis

Bild 1-1: Peter Andreas Hansen (1795-1874)....1

Bild 1-2: Die *Hansen*sche Definition der „idealen Koordinaten“ 5

Bild 1-3: Der erste Satz von *Hansen* über fundamentale Eigenschaften der „idealen Koordinaten“ 5

Bild 2-1: Das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem, bei Bezug auf die Erde: geozentrisches Frühlingspunkt-bezogenes Äquatorsystem mit den Winkelkoordinaten Rektaszension α und Deklination δ 12

Bild 2-2: Drehung des $\mathbf{p}_i$ − Systems (blaue Basisebene E_1, „Äquator“) in das $\mathbf{q}_j$ − System (grüne Basisebene E_2, „Bahnebene“) um die Eulerwinkel A („Knotenlänge“), B („Inklination“), C („Länge des Ursprungs in der Bahnebene“). $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ – Knotensystem in der E_2-Ebene, $\mathbf{h}_2$-Vektor ein Hilfsvektor zur Drehung der E_1-Ebene um den aufsteigenden Knoten $\mathbf{k}_1$ in die Ebene E_2 nach $\mathbf{k}_2 = \mathbf{q}_3 \times \mathbf{k}_1$. Eine Sichtrichtung $\mathbf{P}$ (Stern, Satellit) hat im $\mathbf{p}_i$ − System die Richtungswinkel *a*, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und *b* (Breite), im $\mathbf{q}_j$ − System die Richtungswinkel *c*, bezogen auf $\mathbf{q}_1$ (zunächst willkürlicher Anfangspunkt mit Abstand *C* vom aufsteigenden Knoten, und *d* (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ ($\mathbf{P}$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{q}_3$).17

Bild 2-3: Zur Herleitung der Beziehungen zwischen dem $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$- *Leibniz*- System (rot) und dem Frühlingspunkbezogenen Äquatorsystem $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ − („Newton“-) System (blau), das als inertiales Bezugssystem angesehen werden soll 22

Bild 2-4: Relative *Kepler*bewegung einer Masse m_2 um die Masse m_1 im zentrischen Abstand r, bezogen auf das Perizentrum P im Abstand r_P, mit wahrer Anomalie υ und Parameter p des Kegelschnittes 25

Bild 2-5: Der Flächensatz in den Apsiden als Beispiel für den Flächensatz einer Bewegung auf einem Kegelschnitt ($\odot$ – Sonne, Π - Perihel, M – Mittelpunkt der Ellipse, F – Antifocus, r_P- Periheldistanz, r_A – Apheldistanz, ΠP und AB – Bahnbogen des Planeten im jeweils gleichen Zeitintervall) 25

Bild 2-6 (linkes Bild): Das Apsidensystem: $\mathbf{q}_1^{(P)}$ weist zum Perizentrum, $\mathbf{q}_3^{(P)}$ ist der Bahnnormalenvektor, $\mathbf{q}_2^{(P)} = \mathbf{q}_3^{(P)} \times \mathbf{q}_1^{(P)}$ ergänzt das System zu einem Rechtssystem, (rechtes Bild): Das Knotensystem: $\mathbf{q}_1^{(D)}$ weist zum aufsteigenden Knoten der Bahn in Bezug auf die $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$- Basisebene, $\mathbf{q}_3^{(P)}$ ist der Bahnnormalenvektor, $\mathbf{q}_2^{(D)} = \mathbf{q}_3^{(D)} \times \mathbf{q}_1^{(D)}$ ergänzt das System zu einem Rechtssystem. Die Basisvektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{h}_2$ des Knotensystems sind in den Formeln (2.35) erklärt....30

Bild 2-7: Zur Definition des „idealen Koordinatensystems“: $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ - bewegungs-unabhängiges Inertialsystem (*Newton*-System, blau), $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ − mitbewegtes System (*Leibniz*-System, rot), $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)}$ − bewegungs-bezogenes Koordinatensystem („ideales“ *Hansen*-System, grün), $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{c}_0$ − Knoten-bezogenes Koordinatensystem, $\mathbf{d}_0, \mathbf{f}_0, \mathbf{c}_0$ − Apsiden-bezogenes Koordinatensystem, Υ - Frühlingspunkt, *O* Bezugspunkt des bewegungsbezogenen Systems („departure point“ des *Hansen*-Systems), S Ort des bewegten Objektes, Ω- aufsteigender Knoten, P- Perizentrum (Perihel, Perigäum), Ω Rektaszension (Länge) des aufsteigenden Knotens, *i* - Inklination, σ -Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens, ζ - Bahnwinkel (erster *Hansen* Winkel), ω - Argument des Perizentrums, υ - wahre Anomalie 31

Bild 2-8: Das bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j^{(I)}$ − Bahnsystem (*Hansen*-System, grün), in Bezug auf das Knotensystem $\left(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3^{(I)}\right)$ und das $\mathbf{p}_i$ − Äquatorsystem („Newton-System“, blau) 36

Bild 2-9: Das mitgeführte $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{c}_0$ – *Leibniz*-Bahnsystem (rotes System) und der Bahnwinkel ζ sowie das bewegungsbezogene *Hansen*-ideale $\mathbf{q}_1^{(I)}$, $\mathbf{q}_2^{(I)}$, $\mathbf{q}_3^{(I)}$ - System (grünes System)....37

Bild 2-10: Die Eigenbewegung eines *Leibniz*-Systems $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ in Bezug auf ein *Hansen*-System mit Ursprung O. Zur geometrischen Deutung der zweiten Winkelkoordinate η, deren Wirkung deutlich wird, die aber selber nicht erscheint („versteckter Winkel“) 47

Bild 2-11: Der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(L)}}$ eines *Leibniz*-Systems in Bezug auf den Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(I)}}$ eines *Hansen*-System mit Ursprung O. 49

Bild 2-12: Zur heuristischen Herleitung der Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung. A - Basisebene, B_1 - Bahnebene ohne Variation, B_2 - Bahnebene mit Variation, $\Delta\eta=\eta-0°$, der räumliche Drehwinkel 61

Bild 3-1:Das Frühlingspunkt orientierte $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ − Äquatorsystem („*Newton*-System“, in Zeichnung blau) bezogen auf den Ursprung M zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen für das bewegte Objekt S auf einer Bahn B mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ und Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$, sowie das mitgeführte $\mathbf{r}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{c}_0$ − *Leibniz*-System (rotes System) als ein begleitendes Dreibein zur analytischen Untersuchung eines Bewegungsvorganges. $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ spannen zu jedem Zeitpunkt die oskulierende Bahnebene mit Normalenvektor $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$ auf. 64

Bild 3-2: Beschreibung einer beliebigen Bewegung durch Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung im bewegten Objekt S. Die geradlinige Bewegung wird längs der Tangente an die Bahnkurve angenommen, welche durch den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ vorgegeben ist. Der Ursprung O des Systems ist willkürlich angenommen 69

Bild 3-3: Zur Beschreibung der geradlinigen Bewegung, Die „Bahnebene“ wird durch die Gerade und den (willkürlichen!) Bezugspunkt M aufgespannt 71

Bild 3-4: Zur Verknüpfung der Parameter ζ_P und C_2 der geradlinigen Bewegung. O – Anfangspunkt eines *Hansen-System*s mit Anfangsvektor $\mathbf{q}_1^{(I)}$ 72

Bild 3-5: Zur geometrischen Veranschaulichung der mathematischen Beschreibung einer geradlinigen Bewegung: S – Ort des längs der Geraden OS bewegten Objektes mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ und Radius r in Bezug auf einen (willkürlichen) Ursprung M, mit Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$, P – Perizentrum, O – Anfangspunkt eines *Hansen*-Systems mit Anfangsrichtung $\mathbf{q}_1^{(I)}$, ζ *Hansen*scher Bahnwinkel, ζ_P - *Hansen*scher Perizentrumswinkel, $s=g/C_1$ Bogenlänge als Abstand des Ortes S vom Perizentrum P 73

Bild 3-6: Der Flächensatz im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung 75

Bild 3-7: Die Basisvektoren des $\mathbf{q}_j^{(I)}$ − *Hansen*-Systems (grün) bei geradliniger Bewegung, die durch den Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ definiert ist, und durch das mitgeführte $\mathbf{r}_0,\mathbf{q}_0$ − *Leibniz*system (rot) charakterisiert wird. Der Normalenvektor $\mathbf{c}_0=\mathbf{q}_3^{(I)}$ führt aus der Papierebene heraus 77

Bild 3-8: Geometrische Deutung der Integrationskonstanten der geradlinigen Bewegung. $\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2$ sind konstante Hilfsvektoren 78

Bild 3-9: Zur Anpassung einer beliebigen Kurve durch eine Gerade: die Gerade kann als Tangente im Ort S des bewegten Objektes an die gegebene Kurve B gedeutet werden 79

Bild 3-10: Zur geometrischen Deutung der Beschleunigungen bei Anpassung der Bewegung mit einer Kurve erster Ordnung: auf das bewegte Objekt wirken in der oskulierenden durch den Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ aufgespannten Bahnebene Beschleunigungen in radialer (b_R) und transversaler (b_T) Richtung 83

Bild 3-11: Zur Verwendung der Perizentrumsdistanz als ein Parameter der geradlinigen Bewegung 87

Bild 3-12: Anpassung einer Bewegung auf einer Ellipse durch eine Gerade g. Fest vorgegeben ist der Bezugspunkt E (Ursprung des *Hansen*-Systems) in einem Brennpunkt der Ellipse, die Perizentrumsdistanz r_{pK} der Ellipse, P_E das Perizentrum der Ellipse, A das Apozentrum der elliptischen Bahn, M der Mittelpunkt der Ellipse, a die große, b die kleine Halbachse, e die numerische Exzentrizität. P_g ist das Perizentrum der (Anpassungs)-Geraden, r_P die Perigäumsdistanz der Anpassungsgeraden, r der Radius des bewegten Objektes S. 95

Bild 3-13: Verlauf von Geschwindigkeit $V(\zeta)$ (linke Kurve) und von Radius $r(\zeta)$ (rechts, obere Kurve, grün) und Perigäumsdistanz $r_P(\zeta)$ (rechts untere Kurve, rot) über einen Umlauf längs der Ellipse, gerechnet mit den Formeln der geradlinigen Bewegung 97

Bild 3-14: Verlauf des Differenzwinkels $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_P$ detailliert über einen halben Umlauf (linke Kurve) und den ganzen Umlauf (rechte Kurve) 97

Bild 3-15: Anpassung einer Geraden g durch Kegelschnitte: fest vorgegeben ist der Bezugspunkt E in einem Brennpunkt der Ellipse, die Perizentrumsdistanz r_P und der Perigäumswinkel ζ_P. Anpassung im Perigäum der Geraden durch Ellipse (blau), für Bahnwinkel ζ=20° durch Hyperbel H (grau), bezogen auf das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System (grün).....99

Bild 3-16: Linke Säule: Schema zur Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine geradlinige Bewegung, rechte Säule: Spiegelung des Verfahrens auf die Anpassung einer geradlinigen Bewegung durch eine Bewegung auf einem Kegelschnitt: Der prinzipielle Unterschied besteht in der Wahl der Kurvenparameter (g_1, g_2 bzw. k_1, k_2) und der entsprechenden Variationsgleichungen 101

Bild 3-17: Verlauf der Exzentrizität $e(\zeta)$ (linke Kurve) und Perigäumsdistanz $\zeta_K(\zeta)$ (rechts) der Bewegung längs der Geraden (mit V=8 km/s, r_p =9000km, ζ_P=40°) 102

Bild 3-18: Verlauf des Radius $r(\zeta)$ (linke Kurve) und Perigäumsdistanz $r_{pK}(\zeta)$ (rechts) der Bewegung längs der Geraden (mit V=8 km/s, r_p =9000km, ζ_P=40°) 102

Bild 3-19: Hyperbolische Spirale (n = 2) mit G = 1.0, C = -1.0, $\zeta_H = 20°$ 103

Bild 3-20: Archimedische Spirale (n = 0) mit G = 1.0, C = 1.0, $\zeta_A = 20°$ 105

Bild 3-21: Logarithmische Spirale (n = 1) mit $G = 5.0, C = 1.0, \zeta_L = 20°$ 106

Bild 3-22: Dreier-Spirale (n = 3) mit $G = 5.0, C = -1.0, \zeta_3 = 50°$ ■.....109

Bild 3-23: Anpassung von Gerade an Kreis 115

Bild 3-24: Anpassung einer beliebigen Bewegung B durch schrittweise Einbeziehung von physikalischen Beschleunigungen und daraus folgender Verformung der Anpassungskurve, hier angedeutet durch eine Geraden g, die hier als „Grundbewegung“ angenommen ist, eine Ellipse E, eine weitere Kurve C. In der Skizze ist angenommen, dass die Anpassung in einer Ebene erfolgen kann, wodurch das *Hansen*-System keiner Eigenbewegung unterliegt. In der Realität muss durch den Einfluss normaler Beschleunigungen auch eine Bewegung des *Hansen*-Systems berücksichtigt werden 128

Bild 3-25 : Schematischer Überblick über die Methode der sukzessiven Approximation zur mathematischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen in der Astrodynamik.....141

Bild 3-26: Formaler Überblick über die Methode der schrittweisen Anpassung zur Beschreibung eines beliebigen Bewegungsproblems.....145

Bild 4-1: Zusammenhang von radialer und transversaler Beschleunigung b_R ,b_T mit tangentialer und hauptnormaler Beschleunigung b_V ,b_H. Anpassung einer beliebigen Bewegung mit einer Geraden g 148

Bild 4-2: Die Übergangsbahn aus der Erdbahn zum kleinen Planeten 4/Vesta mit unterschiedlich langen Bahnbögen, in denen die Ionentriebwerke eingeschaltet sind. Beispielbahn aus der Studie ECKSTEIN, M. C. et al. (1983) als Muster einer interplanetaren Übergangsbahn. Die Bahn im Bild hat eine Dauer von 687 Tagen, der letzte geschobene Bahnast beträgt 60 Tage bei einem Schub von 20mN mit den Anstellwinkeln β=20°, γ=10°. Das Rendezvous mit dem kleinen Planeten war geplant für den 14. Juli 1989. 155

Bild 4-3: Prinzip der Aufspiralung einer heliozentrischen Bahn infolge des Drucks durch Sonnenstrahlung bei ständigem Massenverlust etwa durch ein Ionentriebwerk (der Solardruck ist zur Veranschaulichung in diesem Plot um den Faktor 200 überhöht) 163

Bild 4-4: Aufspiralung einer heliozentrischen Bahn allein infolge eines kleinen radialen Schubes durch ein Ionentriebwerk. Da b_{SR}>0 angenommen wurde, wirkt der Schub nach außen von der Sonne weg. Der Massenverlust ist berücksichtigt.....167

Bild 4-5: Konstanter radialer Schub auf interplanetaren Raumflugkörper aus kreisnaher heliozentrischer Umlaufbahn mit Start aus Erdbahn, radialer Schub der Ionentriebwerke $b_{SR} = 7.35 \times 10^{-7}\, km/s^2$. Numerische Integration mit Formalismus der geradlinigen Bahn im *Hansen* System.....170

Bild 4-6: Konstanter radialer Schub auf interplanetaren Raumflugkörper aus kreisnaher heliozentrischer Umlaufbahn mit Start aus Erdbahn, radialer Schub der Ionentriebwerke $b_{SR} = 7.36 \times 10^{-7}\, km/s^2$. Fluchtbahn nach 13 Umläufen. Numerische Integration mit Formalismus der geradlinigen Bahn im *Hansen* System 170

Bild 4-7: Entwurf eines Sonnenseglers der NASA 171

Bild 4-8: Transversale (b_T) und radiale (b_R) Beschleunigung durch Zerlegung der Beschleunigung ($b_\odot$) durch den Strahlungsdruck der Sonne am Sonnensegel S in einen verlorenen Anteil (b_L) und einen senkrecht zum Segel wirkenden Anteil (b_S). β ist der Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung zur Sonne bei Bezug auf die oskulierende Bahnebene des Raumflugkörpers 172

Bild 4-9: Entwurf eines Sonnenseglers des DLR 173

Bild 4-10: Der japanische Sonnensegler Ikarus, aufgenommen mit einer Kamera auf einem begleitenden Satelliten, am 16. Juni 2010 in etwa 10 Millionen km Entfernung von der Erde 178

Bild 4-11: Zunahme des Flächenparameters einer heliozentrischen Bahn infolge des transversalen Anteils des Strahlungsdruckes auf ein Sonnensegel mit Anstellwinkel 30°. 179

Bild 4-12: Aufspiralen einer heliozentrischen Bahn durch den transversalen Anteil des Strahlungsdruckes auf ein Sonnensegel mit Anstellwinkel 30° (der Plot ist wegen der Reihenentwicklung auf ζ=0° normiert, während die Zeichnung bei ζ=-180° beginnt) (Längeneinheit AE) 180

Bild 4-13: Zusammenschau der vier Anpassungskurven in einer und derselben Bahnebene, links die Gerade als ungestörte Bewegung, dann die innere Ellipse der Erdbahn, die zweite größere Ellipse als Folge der radialen Beschleunigung durch den Strahlungsdruck und schließlich die Aufspiralung infolge der transversalen Beschleunigung durch den Strahlungsdruck (Längeneinheit AE) . ■ 180

Bild 4-14: Anstellwinkel eines Sonnensegels zur Erzeugung einer räumlichen Bahn: Winkel β Drehung in der Bahnebene, Winkel γ Drehung aus der momentanen Bahnebene, Darstellung der Beschleunigungen im *Leibniz*-System 181

Bild 4-15 linkes Bild: Verlauf des Raumwinkels η[Grad] bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung über einen halben Umlauf um die Sonne. rechtes Bild: Berechnung des Raumwinkels η[Grad] mit verschiedenen Ordnungen (12., 11., 10., 6., 4., 3.) einer Reihenentwicklung über einen halben Umlauf um die Sonne. Die Streuung der durch die Reihenentwicklung bedingten Zahlenwerte macht die Lösung nach einem halben Umlauf wertlos 187

Bild 4-16: Verlauf der Bahninklination *i*[Grad] bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Der stark eingeschränkte Gültigkeitsbereich der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung ist erkennbar. 188

Bild 4-17: Verlauf der Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens σ[Grad] bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Der stark eingeschränkte Gültigkeitsbereich bis maximal ζ=100° der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung deutlich erkennbar. 188

Bild 4-18: Verlauf der ekliptikalen Länge des aufsteigenden Knotens Ω[Grad] mit Anfangswert 0° bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Auch hier ist der eingeschränkte Gültigkeitsbereich der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung ab etwa dem Wert 1.6 π erkennbar. 189

Bild 4-19: Verlauf der Höhe des Raumflugsonde über der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung über einen halben Umlauf um die Sonne 189

Bild 4-20: Die fünf Anpassungskurven bei konstantem ebenem (β=30°) und räumlichem (γ=45°) Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Kurve 1: Gerade, keine Beschleunigung, Kurve 2: Erdbahn: Gravitationsbeschleunigung durch Sonne (Zweikörperbewegung), Kurve 3: radiale Beschleunigung durch Strahlungsdruck, Kurve 4: transversale Beschleunigung durch den Strahlungsdruck, Kurve 5: normale Beschleunigung durch den Strahlungsdruck (man beachte die starke Überhöhung der z-Achse) 190

1 Einleitung

Es werden die Arbeiten *Hansen*s und ihre Nachwirkung kurz zusammengefasst. Die Entdeckung der „idealen Koordinaten“ durch *Hansen* und ihre bislang offenbar nicht hinreichend erkannte fundamentale Bedeutung für die Grundlagen der Astrodynamik wird als zentrale Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit vorgestellt.

1.1 Die Leistungen und Nachwirkungen von *P. A. Hansen*

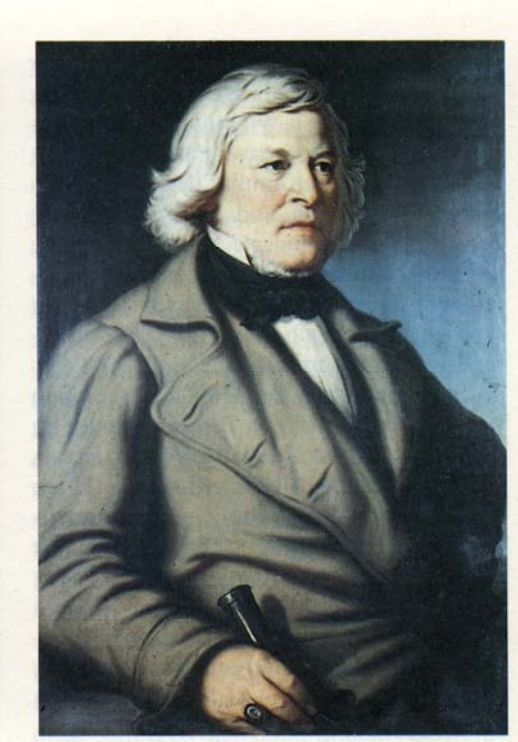

Bild 1-1: Peter Andreas Hansen (1795-1874)[1]

Peter Andreas Hansen (Tondern in Schleswig 1795 – Gotha 1874) war Direktor der Seeberg Sternwarte in Gotha. Er wird als einer der bedeutendsten Astronomen und Himmelsmechaniker des 19. Jahrhunderts anerkannt.

Hansen baute die *Gauß*’sche Erstbahnbestimmung der Kleinen Planeten aus[2]. Er beschäftigte sich intensiv mit den Störungen bei der Berechnung der Bahnen der Kleinen Planeten[3]. Bereits in seiner ersten Veröffentlichung im Jahre 1829 hatte er den Grundstein für seine Me-

[1] Kopie aus: M. STRUMPF (1992): p.610

[2] P. A. HANSEN: 'Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen', Ostwalds Klassiker, Nr. 141 (cit. nach:

[3] P. A. HANSEN: 'Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der Kleinen Planeten', Mémoires de la Société Royale de Saxe, tome V, VI, VII (cit. nach: K. Stumpff (1974), p. 163 und Tisserand (1896), tome IV, p. 325); auch in: Abh. Vol. V, pp.1-148 (cit. nach E. W. BROWN (1896/1960), p. 161)

P. A. HANSEN (1843): 'Ermittlung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung', erster Theil, Gotha (cit. nach: Tisserand (1896) , tome IV, p. 375),

thoden gelegt, die er Zeit seines Lebens auf die Beschreibung der Bewegung des Mondes, der Kleinen Planeten und Kometen anwandte[1]. Die von ihm geschaffene Methode der Lösung der Bewegungsgleichungen der gestörten Bewegung gilt als eine der effektivsten Methoden[2]. Dazu gehören die sehr aufwendigen Reihenentwicklungen der elliptischen Bewegung im Anschluss an die *Bessel*schen Reihenentwicklungen, in denen sich Begriffe wie „*Hansen* Parameter“, „Formeln vom *Hansen* Typus“ erhalten haben[3]. Seine Methode war bis in das 20. Jahrhundert die am weitesten verbreitete zur Berechnung der Bewegung der Kleinen Planeten. Sie wurde durch weiteren Ausbau fortentwickelt, etwa durch *G. W. Hill*, nicht durch andere Methoden ersetzt[4]. Auch wandte *Hill* die *Hansen*sche Methodik zur Berechnung der Bewegung der Kleinen Planeten erfolgreich auf die Theorie der Bewegung der großen Planeten Jupiter und Saturn an[5]. Wichtige Weiterentwicklungen und Verbesserungen bzw. Vereinfachungen der *Hansen*schen Störungstheorie erfolgten durch *H. Gyldén* und dessen Schüler *M. Brendel*, der die Konvergenz der zur Darstellung der Störungen benötigten Reihen durch eine geschickte Transformation der Variablen verbessern konnte[6].

Zu *Hansen*s wichtigsten Beiträgen zur angewandten Himmelsmechanik gehört seine Mondtheorie[7], zu der er seine Mondtafeln veröffentlichte[8], die von 1862 bis 1922 in Gebrauch waren[9], ab 1883 mit Korrekturen durch *S. Newcomb*[10]. Durch sie erreichte *Hansen* die größte Nachwirkung.

*Hansen*s Nachwirkung erfolgte vor allem in Amerika, wo sein Einfluss bis in die Zeit der Satellitenbahnmechanik und damit bis heute in Kreisen der mathematischen Astronomie und Astrodynamik zu spüren ist. *G. W. Hill*, der wohl erste bedeutende amerikanische Himmelsmechaniker[11], bezog sich in seiner Mondtheorie (verbesserte Lösung des Dreikörperproblems

---

[1] P. A. HANSEN (1829): 'Disquisitiones circa Theoriam Perturbationum quae Motum Corporum Coelestium afficiunt', Astronomische Nachrichten, No. 166-168 (cit. nach: Tisserand (1896), tome IV, p. 375)

[2] so etwa in BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. (1961), p. 416

[3] etwa nach V. BRUMBERG (1995), pp. 33–47

[4] siehe etwa in: G. A. CHEBOTAREV (1967), p. 81

[5] G. W. HILL in: Astronomical papers de Washington (cit. nach Tisserand (1896), tome IV, p. 375)

[6] siehe etwa in K. STUMPFF (1974), p. 201

[7] P. A. Hansen (1838): 'Fundamenta Nova Investigationes Orbitae verae quam Luna perlustrat', Gotha 1838; (cit. nach: TE. W. Brown (1896/1960), p. 36),

P. A. HANSEN (1862-64): 'Darlegung der in den Mondtafeln angewandten Störungen', Abhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Vol. VI, pp. 91-498, Vol. VII, pp. 1-399 (cit. nach: TE. W. Brown (1896/1960), p. 160), (cit. nach: E. W. Brown (1896/1960), p. 160),

P. A. Hansen (1838): 'Note sur la théorie des perturbations planétaires', Astron. Nachr., Vol.XV, Cols. 201-216, (cit. nach: E. W. Brown (1896/1960), p. 161),

P. A. Hansen (1838): 'Bemerkungen über die Behandlung der Theorie des Störungen des Mondes', Astron. Nachr., Vol.XIX, Cols. 33-92, (cit. nach: E. W. Brown (1896/1960), p. 161),

[8] siehe P. A. HANSEN (1864)

[9] D. A. VALLADO (2000), p.565

[10] siehe etwa in G. A. CHEBOTAREV (1967), p. 220

[11] Etwa zur selben Zeit wie *G. W. Hill* wirkte in Yale der Physiker und Chemiker *Josiah Willard Gibbs* (1839-1903). Er war auch mathematisch interessiert und führte an Stelle der Quaternionen die Verwendung der dreidimensionalen Vektoranalysis ein. Diese wurde auch für die Himmelsmechanik interessant. (siehe in BATTIN, R. H. (1987), p.132). Als direkten Beitrag zu einem bahnmechanischem Problem kann die Arbeit angesehen werden: W. G. GIBBS (1888): 'On the Determination of Elliptic Orbits', Memoirs of the National Academy of Sciences, die später von *S. Herrick* im Rahmen der Erstbahnbestimmung ausgebaut wurde (nach: ESCOBAL, P. R. (1965), p.304)

Sonne-Erde-Mond unter Einbeziehung des bis dato bekannten anomalen Gravitationsfeldes der Erde und Störungen durch die großen Planeten) vor allem auf die Arbeiten von *Delaunay* und *Hansen*. In einer Würdigung über den „Fortschritt der Himmelsmechanik seit der Mitte des (19.) Jahrhunderts“ untersuchte *G. W. Hill* die Mond- und Planetentheorien von *Delaunay*, *Gyldén* und *Poincaré*, wobei er besonders auf den allgemeinen Einfluss von *P. A. Hansen* hinwies[1]. *E. W. Brown* baute die *Hill*sche Mondtheorie erfolgreich aus und schuf bis zum Einsatz von Computern die genaueste Mondtheorie. Seine Mondtafeln lösten ab 1923 die von *Hansen* ab. In seinem grundlegenden Werk über die Mondtheorie[2] „*An Introductory Treatise On The Lunar Theory“* berief sich *Brown* wiederholt auf die bedeutenden Vorarbeiten *Hansen*s.

In einer Art Zusammenschau würdigte *Brown* 1920 in seiner zusammenfassenden Arbeit „*The Problem of the Moon’s Motion*“[3] *Hansen* als den einzigen Himmelsmechaniker, der in seinen Arbeiten über die Mondtheorie „*to have accomplished the whole of it with any degree of completeness*“. *Brown*’s Mitarbeiter und Nachfolger *D. Brouwer* führte als erster die Verwendung von Computern in die Berechnung der Bewegung der Himmelskörper ein. Dadurch konnten dann auch die *Brown*schen Mondtafeln abgelöst werden. Damit verlagerte sich aber auch die Berechnung der Bewegung der Körper des Sonnensystems von den „absoluten“ Störungen (auch als „allgemeine Störungen“ bezeichnet, das sind analytisch berechnete Störungen, die im Wesentlichen durch unendliche Reihen dargestellt werden) zu den „speziellen“ Störungen (d.h. numerisch berechnete Örter)[4]. Auf beiden Gebieten hatte *Hansen* wesentliche Beiträge geliefert. Während die Integration der Bewegungsgleichungen in (helio-) zentrischen rechtwinkligen Koordinaten nach der Methode von *Cowell* erfolgt, hat *Encke* eine Integration in rechtwinkligen relativen Koordinaten entwickelt, die auf die ungestörte Bewegung des Planeten bezogen sind. Ähnlich ist das Verfahren nach *Hansen*, der allerdings mit Polarkoordinaten arbeitet, die auf die *Hansen*sche Hilfsellipse bezogen sind[5]. Diese *Hansen*sche Methode bezeichnet *Brouwer* als die einzige Methode, die der von ihm allerdings in rechtwinkligen Koordinaten entwickelten Methode zumindest in den Störungen erster Ordnung ebenbürtig ist[6].

Der Beginn der Weltraumfahrt stellte eine neue Herausforderung an die Himmelsmechanik mit ihrer Erweiterung zur Astrodynamik dar und damit vielen neuen Problemen wie einer jetzt unübersehbaren Schar möglicher Bahnen der künstlichen Himmelskörper. Für die numerische Lösung des Satellitenproblems wurden die *Hansen*schen Arbeiten zu den speziellen Störungen von *Herget* und *Musen* herangezogen, da diese Lösungen keine Singularitäten enthalten und zu großer Genauigkeit getrieben werden können. Die wichtigste dieser Singularitäten betrifft die kritische Neigung bei der Inklination 63°.435 (bzw. 116°.565) in der analytischen Lösung von *D. Brouwer*. *Musen* hat in zahlreichen Arbeiten die *Hansen*schen Theorien zur Mondbewegung und den speziellen Störungen an das Satellitenproblem angepasst und

---

[1] in: HILL, G. W. (1896): 'Remarks on the Progress of Celestial Mechanics Since the Middle of the Century', Bulletin of the American Mathematical Society, Series **2**, 125-136 (cit. nach: DE VORKIN, D. H. (1982). no.777)

[2] E. W. BROWN (1896/Reprint 1960)

[3] E. W. BROWN (1920): 'The Problem of the Moon’s Motion', Publications of the Astronomical Society of the Pacific, **32**, 93-104 (cit. nach: DE VORKIN, D. H. (1982). no.750)

[4] Begriffsbildung durch C. F. Gauss, siehe: O. VOLK (1957), p.211

[5] siehe etwa in G. A. CHEBOTAREV (1967), p. 246

[6] D. BROUWER (1946), D. BROUWER (1958), D. BROUWER (1959), BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. (1961), p. 416.ff

dadurch viele weitere Arbeiten zur Verwendung der *Hansen*schen Theorien in der Folge angeregt[1].

In Russland hat *V. A. Brumberg*[2] versucht, die neuen Methoden der Computeralgebra für die Himmelsmechanik anzuwenden (CAS [Computer Algebra System]). Er räumte den Arbeiten von *Hansen* breiten Raum ein und unterstrich so die Bedeutung *Hansen*s auch zur Lösung aktueller Probleme der Astrodynamik.

1.2 Die „idealen" Koordinaten

K. Stumpff[3] nannte *Hansen* einen der bedeutendsten Theoretiker, der mit seinen zum Teil ungewöhnlichen Methoden die Himmelsmechanik auf vielen Gebieten bereicherte[4]. Allerdings ist die *Hansen*sche Darstellungsweise, vor allem in den in deutscher Sprache abgefassten Arbeiten (die ersten Arbeiten waren noch auf lateinisch geschrieben), für viele kompliziert und schwer verständlich, so dass seine Originalität und die Qualität seiner Arbeiten nicht die Würdigung erfahren hat, die sie eigentlich verdient hätte[56]. Mit diesen Bemerkungen ist vielleicht umrissen, weshalb die Nachwirkung *Hansen*s vor allem im Zusammenhang mit der Anwendung und numerischen Raffinesse seiner Methoden auf die Planeten- und Mondbahnberechnung und Anwendung auch in der Astrodynamik zu sehen ist, wie sie im ersten Abschnitt des vorliegenden Berichtes kurz umrissen wurde. Dagegen hat offenbar die allgemeine theoretische Grundlegung, die aus *Hansen*s Arbeiten herauskristallisiert werden kann, nicht die verdiente und nötige Würdigung und Weiterentwicklung erfahren. Dies betrifft in erster Linie den Begriff der „*idealen Koordinaten*". Dem Nachweis, dass diese ein fester Bestandteil jeder Bewegungslehre, somit der Grundlagen von Himmelsmechanik und Astrodynamik sind und welche Konsequenzen sich aus diesem Sachverhalt ergeben, soll die vorliegende Arbeit gewidmet sein[7].

Hansen führte die von ihm so genannten „idealen Koordinaten" ein als ein geschicktes Hilfsmittel um die Störungsgleichungen für die Kleinen Planeten, Kometen und vor allem den Mond in den Griff zu bekommen.

Der Begriff „ideale Koordinaten" ist sicherlich nicht ideal, stellt er doch eine für viele lästig erscheinende Herausforderung dar: Warum sollen diese Koordinaten „ideal" sein, was doch irgendwelche anderen Systeme auch sein könnten? Was zeichnet diese „idealen Koordinaten" denn besonders aus? Es gilt also zu untersuchen, ob die von *Hansen* so genannten „idealen Koordinaten" wirklich etwas Besonderes sind, als das sie durch den Begriff „ideal" ausgezeichnet werden, oder ob dieser Begriff eben nur ein kennzeichnender Begriff für eine bestimmte Art von Koordinaten ist. In letzterem Sinne jedenfalls wurde dieser Begriff in der Folgezeit bis ins 21. Jahrhundert in zahlreichen Arbeiten verwendet.

---

[1] P.MUSEN (1958), P. HERGET AND P.MUSEN (1958), P.MUSEN (1959), P.MUSEN (1961), H. T. PHELAN (1962), D.FISHER (1963), W. M. KAULA (1962), W. M. KAULA (1966), N. X. VINH (1969), M. PALACIOS and C. CALVO (1996), M. PALACIOS (2000)

[2] V. A. BRUMBERG (1995)

[3] K. STUMPFF (1974), p. 163 und p. 185

[4] O. DZIOBEK (1888): p. 294

[5] E. W. BROWN (1896/Reprint 1960), p.161

[6] D. BROUWER and G. M. CLEMENCE (1961), p. 416

[7] Allgemeiner Zusammenhang der *Hansen*-Systeme mit Bahnbewegungen in Kapitel 2, im Bezug auf beliebige Ausgangskurven in Kapitel 3 und zu einem speziellen Integrationsverfahren in Kapitel 4

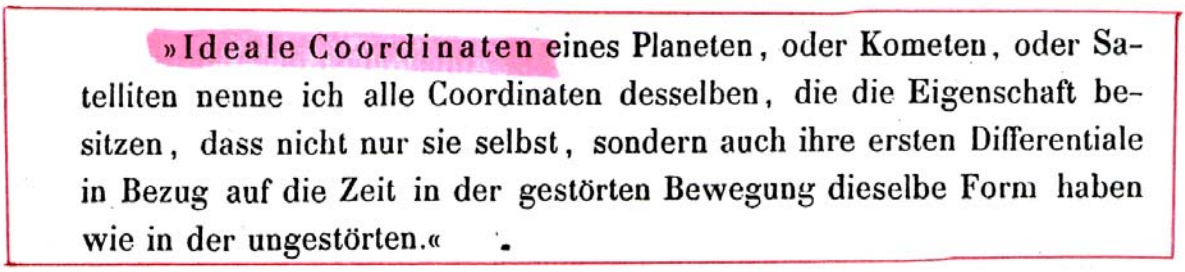
»Ideale Coordinaten eines Planeten, oder Kometen, oder Satelliten nenne ich alle Coordinaten desselben, die die Eigenschaft besitzen, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten Differentiale in Bezug auf die Zeit in der gestörten Bewegung dieselbe Form haben wie in der ungestörten.«

Bild 1-2: Die *Hansen*sche Definition der „idealen Koordinaten“ [1]

Der Begriff „Koordinaten“ erscheint in diesem Zusammenhang unpräzise und hat wohl seither einen Bedeutungswandel erfahren. Gemeint sind allgemeiner bestimmte Parameter, die eine Bewegung beschreiben. *Hansen* erweiterte selbst einen solchen Begriff der „idealen Parameter“ auf alle himmelsmechanischen Größen, *die im „gestörten“ wie im „ungestörten“ Fall dieselbe Darstellung haben*. Durch diese Verallgemeinerung scheint allerdings die präzise mathematische Begriffsbildung, nämlich, dass das mit dem allgemeinen Bahnwinkel verknüpfte System **notwendig** „ideal“ ist, verwässert worden zu sein. Jedenfalls ist in der Originalarbeit von *Hansen* dieser Bezug auf die **Notwendigkeit** des „idealen“ Systems nicht zu finden. Man muss aber festhalten, dass ein Koordinatensystem nur deshalb „ideal“ sein kann, wenn es auf die Bewegung eines Himmelskörpers bezogen ist. Nach Lösung eines Bewegungsproblems in diesem „idealen“ System kann der Bezug auf ein von der Bewegung unabhängiges System durch eine zusätzliche Integration (üblicherweise für den aufsteigenden Knoten in Bezug auf das fundamentale Basissystem oder einem entsprechenden Winkel in dieser Ebene) hergestellt werden.

Eine erste fundamentale Eigenschaft der „idealen Systeme“, welche bereits deren grundlegende Bedeutung erkennen lässt, ist von *Hansen* selbst entdeckt worden. In seiner allgemein als „Darlegung“ zitierten Arbeit von 1857 beschreibt er die folgende Eigenschaft der idealen Systeme:

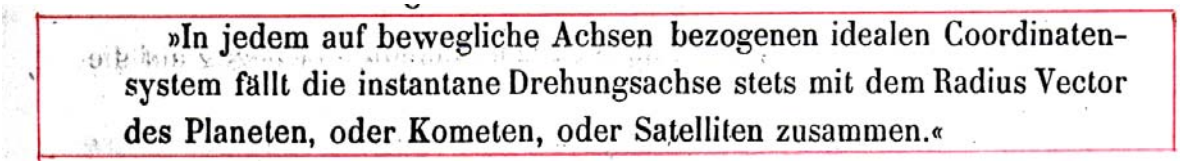
»In jedem auf bewegliche Achsen bezogenen idealen Coordinatensystem fällt die instantane Drehungsachse stets mit dem Radius Vector des Planeten, oder Kometen, oder Satelliten zusammen.«

Bild 1-3: Der erste Satz von *Hansen* über fundamentale Eigenschaften der „idealen Koordinaten“ [2]

Ausgehend von diesem Satz ist es möglich, durch Verwendung der „idealen Koordinaten“ eine weitgehende Entkopplung der Bewegungsgleichungen nach Einflüssen in der Bahnebene und senkrecht zur Bahnebene zu erreichen. Dies ist einer der wesentlichen Grundzüge der *Hansen*schen Störungsrechnung.

Durch die Entdeckung der „idealen Koordinaten“ hat *Hansen* (wohl unbewusst) eine Alternative bzw. Ergänzung zum Rechnen mit kanonischen Variablen in die theoretische Mechanik eingeführt. Allerdings sind die Arbeiten von *Hansen* in der Folgezeit wegen der numerischen Erfolge seiner Störungsrechnung weitergeführt worden, während die theoretische Entwick-

[1] Kopie aus HANSEN, P. A. (1857), p.66

[2] Kopie aus HANSEN, P. A. (1857), p.67. Der Begriff „Coordinaten“ scheint einen Bedeutungswandel erfahren zu haben. und erscheint aus heutiger Sicht unpräzise. Gemeint ist die Darstellung in einem speziellen System, das Hansen als ideal bezeichnete.

lung der Himmelsmechanik und insbesondere der analytischen Störungsrechnung zunächst vom Ausbau der Theorie der kanonischen Variablen geprägt worden war.

Die von *Hansen* gegebene Definition der „idealen Koordinaten" gilt es mathematisch präzise zu fassen, was ab dem nächsten Abschnitt durchgeführt werden soll. Hier kann festgehalten werden, dass sowohl rechtwinklige wie Polarkoordinaten diese „ideale" Eigenschaft zeigen können. Im Fall von Polarkoordinaten wird dadurch ein in der oskulierenden Bahnebene liegender Bahnwinkel definiert, der im allgemeinen Fall nicht mit den sonst in der *Kepler*bewegung verwendeten Bahnwinkeln, wie wahre und exzentrische Anomalie, identisch ist. Schon diese Tatsache weist darauf hin, dass die „idealen Koordinaten" über die gestörte *Kepler*bewegung verallgemeinernd hinaus von Bedeutung sind. Sie lassen sich zur Beschreibung eines jeden Bewegungsvorganges (also nicht nur im Rahmen der Astrodynamik) verwenden, was für die in der klassischen Himmelsmechanik verwendeten Parameter nicht der Fall ist. Dies ist bedeutsam. In den Mondtheorien seit *Clairaut* und *d'Alembert*, später auch von *Laplace* und *Damoiseau*, wurde als Bahnwinkel die wahre Länge in der Bahn[1] als unabhängige Variable an Stelle der Zeit verwendet[2]. Übrigens verwendete auch *C. F. Gauß* implizit die wahre Länge als unabhängigen Bahnwinkel, dessen Variation er in seinen Arbeiten über die Bahn des kleinen Planeten 2/Pallas im Flächensatz verwendet[3]. *Gyldén* benutzte die wahre Anomalie, *Hansen* selbst die exzentrische Anomalie als unabhängige Variable, jedoch nicht den seinen „idealen Koordinaten" entsprechenden allgemeinen Bahnwinkel. Der Bezug eines solchen Bahnwinkels zur Zeit wird durch Integration der Zeitbeziehung hergestellt. Als Zeitbeziehung dient der Flächenssatz, der ursprünglich von *J. Kepler* in seinem zweiten Gesetz im Rahmen der Zweikörperbewegung gefunden worden war. Im vorliegenden Fall stellt dieser Satz im Rahmen der *Hansen*-Systeme eine zentrale und allgemeingültige Beziehung dar.

„Ideale Systeme" als solche wurden in der Folge bis zum heutigen Tag wiederholt herangezogen um Probleme der Astrodynamik zu untersuchen. Zum Beispiel beschäftigte sich *A. Deprit*[4] im Rahmen von „idealen Systemen" in einigen Arbeiten mit der Transformation mit Hilfe von *Euler*schen Parametern, die den drei *Euler*schen Winkeln bei einer räumlichen Drehung entsprechen, wodurch er die idealen Koordinaten in eine *Hamilton*sche Form überführen konnte. Dadurch erreichte er eine Verknüpfung der *Hansen*-idealen Koordinaten mit kanonischen Systemen. Weiter schlug er im Rahmen der gestörten *Kepler*bewegung die Verwendung „idealer Bahnelemente" vor.

Joseph Van der Ha[5] schlug Variationsgleichungen vor, welche zum Teil als eine gewisse Vorstufe der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Untersuchungen angesehen werden können. Ohne die Arbeiten *Hansen*s explizit zu erwähnen, verwendet *Van der Ha* den *Hansen*schen Bahnwinkel implizit als unabhängige Variable sowie die auf den Koordinatenursprung des idealen Systems bezogene Länge des aufsteigenden Knotens, die er beide als „Quasi Winkel" bezeichnet. Ein Bezug zu den *Hansen*-„idealen Koordinaten" mit entsprechenden weiterführenden Konsequenzen wird in dieser Arbeit nicht hergestellt. Folgearbeiten nach *Van der Ha* sind bisher nicht bekannt geworden.

---

[1] dabei handelt es sich um den Knickwinkel, der zusammengesetzt ist aus dem Argument der Breite längs der oskulierenden Bahn des Himmelskörpers und der Rektaszension des aufsteigenden Knotens in der Äquatorebene bzw. der ekliptikalen Länge längs der Ekliptik

[2] siehe etwa bei F. TISSERAND (1896), tome IV, p.376

[3] GAUSS, C. F. (1810)

[4] A. DEPRIT (1975), (1976)

[5] J. VAN DER HA (1985)

V. Brumberg[1] wandte die *Euler*schen Parameter zur Herleitung der räumlichen Bewegungsgleichungen der gestörten Bewegung in Kombination mit den *Hansen*-idealen Koordinaten an. Die *Euler*schen Parameter werden als „Einer Quaternionen" aufgefasst. Ihre Verwendung erlaubt die Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung singularitätenfrei zu formulieren[2]. Die erhaltenen Formeln entsprechen denen, die *Deprit* mit den *Hansen*-Koordinaten erhalten hat[3]. *V. Brumberg* verwendet in diesem Zusammenhang auch den Begriff „*Hansen*-Koordinaten" anstelle des Begriffes „ideale Koordinaten". Dieser Begriff soll auch in der vorliegenden Arbeit vorzugsweise neben den Begriffen „*Hansen*-System" oder „*Hansen*-ideales System" verwendet werden.

1.3 Die Zielsetzungen der vorliegenden Arbeit

Die Bedeutung der von *P. A. Hansen* eingeführten „idealen Koordinaten" sollen in ihrer theoretischen Grundlegung sowie in ihren verschiedenartigen Anwendungen in einer allgemeinen Bewegungslehre herausgearbeitet werden. Es soll insbesondere gezeigt werden, dass die *Hansen*-Systeme (nicht wie bisher angenommen) per definitionem eingeführt werden müssen, sondern als ein notwendiger Bestandteil in der mathematischen Beschreibung für einen jeden Bewegungsvorgang längs einer Bahn existieren.

Eine notwendige Konsequenz ist die enge Kopplung zwischen einem mit der Bewegung mitgeführten Koordinatensystem (hier insbesondere das *Leibniz*-System) mit einem bewegungsbezogenen *Hansen*-System, das fest mit der oskulierenden (d.h. der durch den momentanen Zustandsvektor aufgespannten) Bahnebene verknüpft ist.

Ein zweiter grundlegender Aspekt der Arbeit ist die Frage, welche Bahnform als Basis für allgemeingültige Aussagen über das Bewegungsverhalten auf komplizierten Bahnformen gewählt werden sollte. Hier bietet sich die gleichförmig geradlinige Bewegung an, die in der theoretischen Physik als Bahnform der inertialen Räume bekannt ist. Ziel wird es daher sein, einen Formalismus der geradlinigen Bewegung zu erarbeiten, der die Eigenschaft hat, jeden beliebigen Bewegungsvorgang durch Anpassung der Parameter der geradlinigen beschreiben zu können. Dazu ist es dann aber notwendig, sich von der gedanklichen Einengung auf eine Kegelschnittbewegung, wie sie in der Astrodynamik als Ausgangsbewegung üblicherweise angesehen wird, zu lösen.

Eine interessante Anwendung dieser beiden Aspekte ist die Berechnung der Beschleunigungen, die erforderlich sind, um einen bestimmten Bewegungsvorgang (auf einer bestimmten Kurve) zu erzwingen, bzw. um die Beschleunigungen zu erfahren, die auf eine beobachtete Bahn einwirken. Diese Berechnung kann mit dem Formalismus der geradlinigen Bewegung und in Bezug auf ein *Hansen*-System in geschickter Weise durchgeführt werden.

Ein dritter Schwerpunkt der Arbeit ist die Entwicklung einer neuartigen Integrationsverfahrens zur Lösung der Bewegungsgleichungen. Es war *C. F. Gauß*, der in der Störungsrechnung die Begriffe „allgemeine Störungsrechnung" und „spezielle Störungsrechnung" einführte. Dabei steht der Begriff allgemeine Störungsrechnung für Untersuchungen mit analytischen Hilfsmitteln, insbesondere Reihenentwicklungen, um einen allgemeinen Einblick in die Bewegungsmechanismen zu erhalten. Dazu kann die Störungsfunktion durch explizite Formeln für alle Zeiten dargestellt wird. Die analytische Integration wird mit bekannten Integralen

---

[1] V. BRUMBERG (1995), pp. 69–74

[2] Dies wird zum Beispiel auch in den Arbeiten von M. PALACIOS and C. CALVO (1996) und M. PALACIOS (2000) im Zusammenhang mit einer Regularisierung für hochgenaue numerische Integrationen angewendet

[3] A. DEPRIT (1976)

durchgeführt und liefert Ergebnisse, die für einen großen Zeitbereich gültig sind. Allerdings gibt es für komplizierte Funktionen häufig keine analytischen Integrale, so dass Näherungsausdrücke etwa in Form von Reihenentwicklungen gefunden werden müssen, welche analytische Lösungen erlauben. Die Lösung ist dann zwar allgemeingültig, bietet aber normalerweise eine eingeschränkte Genauigkeit. Der Begriff spezielle Störungsrechnung steht für die numerische sukzessive Berechnung der Störungen mit Lösung der Bewegungsgleichungen durch „mechanische" Quadratur[1].

Eine numerische Integration wird heute üblicherweise mit einem Runge-Kutta Verfahren oder einem Mehrschrittverfahren durchgeführt. Um das Bewegungsverhalten eines Objektes zu einem bestimmten Zeitpunkt zu erfahren, ist es notwendig sich schrittweise durch numerische Integrationen bis zu diesem Zeitpunkt vorzuarbeiten. Hier kann das gesamte bekannte Störmodell berücksichtig werden, liefert also die genauesten Ergebnisse. Wegen zunehmender Rundungsfehler ist aber der zulässige und zuverlässige Ergebnisse liefernde Zeitbereich relativ stark limitiert (in der Satellitenbahnmechanik üblicherweise maximal einige Wochen, je nach Genauigkeitsanforderung).

Grundlegend für die Berechnung komplizierter Bewegungen, wie etwa die der künstlichen Satelliten, wurde die Erweiterung der *Lagrange*schen Variationsgleichungen auf beliebige „Störeinflüsse" durch Verwendung von Beschleunigungseinflüssen in dem von *Leibniz* eingeführten mitbewegten Koordinatensystem. In der Astrodynamik ist es (außer bei den rein numerischen Integrationen nach *Cowell*) üblich von periodischen Bewegungen auszugehen (dies ist übrigens auch im Rahmen der Chaostheorie üblich!). Diese Bewegungen werden in der üblichen Sprechweise durch „Störbeschleunigungen gestört". Die dadurch verursachten Abweichungen werden in „Störgleichungen" beschrieben, die in der Astrodynamik auch als „Planetengleichungen" bezeichnet werden. Für eine Integration dieser Gleichungen werden in der klassischen Astrodynamik wenn möglich säkulare und langperiodische Bewegungseinflüsse einerseits und andererseits (durch einen Mittelungsprozess) kurzperiodische Einflüsse separiert. Dieser Prozess wird soweit möglich mit Hilfe kanonischer Transformationen durchgeführt. Nach Integration der „Störgleichungen" unter Berücksichtigung der säkularen Effekte werden die hier erhaltenen Ergebnisse verwendet um in einer anschließenden Integration auch die langperiodischen Effekte und schließlich in einem dritten Schritt die kurzperiodischen Effekte zu berücksichtigen. Dazu werden die einmal aufgestellten Planetengleichungen wieder verwendet.

Die Trennung in säkulare und langperiodische Bewegungseinflüsse ist in manchen Fällen der Astrodynamik nicht möglich (oder sinnvoll). Beispiele sind die Ausartung langperiodischer Variationen der Bahnexzentrizität von Erdsatelliten unter dem Einfluss der ungeradzahligen zonalen Parameter des Erdschwerefeldes in bestimmten Fällen zu säkularen Effekten („frozen orbits") oder bei Resonanzen von bestimmten Parametern des Erdschwerefeldes.

In der vorliegenden Arbeit wird die Einschränkung auf „Störgleichungen" und damit etwa die Verwendung der Planetengleichungen fallen gelassen. Diese Störgleichungen gehen von der Existenz einer hinreichend genauen Näherungslösung aus, die eine intermediäre Bahnbewegung beschreiben, im einfachsten Fall im Rahmen der Astrodynamik eine Keplerbahn. Diese Bewegung wird durch relativ kleine „Störungen" verändert. Im Fall von Erdsatelliten ist diese „Störung" maximal eine Beschleunigung in der Größenordnung 10^{-3} km/sec^2. Die Störgleichungen sind Differentialgleichungen, welche diese kleinen(!) Einflüsse zu beschreiben gestatten[2]. Stattdessen werden in der vorliegenden Arbeit allgemeingültige Bewegungsgleichun-

---

[1] siehe in O. VOLK (1957), pp.211-212

[2] siehe etwa in: KIRCHGRABER, U. UND STIEFEL, E. (1978)

gen bei Bezug auf das *Leibniz*-System verwendet, die mit Bezug auf ein *Hansen*-System bearbeitet werden können. Diese Gleichungen erfassen den **gesamten** Bewegungsvorgang.

Die Grundidee zur Integration der Bewegungsgleichungen ist dann folgende: ausgehend von einer Kurve, die einem bestimmten Bewegungsmodell entspricht (idealerweise als erste Wahl eine Gerade ohne jeden Bewegungseinfluss) werden die Bewegungsgleichungen (für die gesamte Bewegung!) aufgestellt. Aus der Sammlung aller bekannten Beschleunigungen, welche den untersuchten Bewegungsvorgang prägen, werden (in zunächst willkürlicher Weise) eine oder einige wenige Teilbeschleunigungen ausgewählt. Mit diesen werden die Bewegungsgleichungen durch Integration bearbeitet. Das Ergebnis ist eine neue Kurve, welche dem erweiterten Bewegungsproblem entspricht. Basierend auf dieser neuen Kurve kann unter Wahl von einer oder einigen weiteren Teilbeschleunigungen ein neuer Satz von Bewegungsgleichungen aufgestellt werden. Dieser neue Satz stimmt formal mit dem ursprünglichen überein, inhaltlich geht er von einer neuen Kurve aus und schließt eine neue Teilbeschleunigung ein.

Dieser Vorgang: Kurve – Berücksichtigung einer Beschleunigung – neue Kurve - Berücksichtigung einer weiteren Beschleunigung – usw. soll in willkürlicher Folge erarbeitet werden können[1]. Sie sollte daher dem Geschick des Bearbeiters und den möglichen zur Verfügung stehenden rechnerischen Hilfsmitteln überlassen bleiben. Es wird das Ziel sein, so lange wie möglich analytische Lösungen zu suchen. Dies wurde in der klassischen Himmelsmechanik durch die Suche nach intermediären Bahnen erreicht. Im Unterschied dazu werden jedoch im vorliegenden allgemeineren Verfahren nicht notwendig schrittweise Bewegungsannäherungen erarbeitet. Vielmehr wird das gesamte Bewegungsproblem schrittweise durch die Berücksichtigung der Teilbeschleunigungen bearbeitet. Die Reihenfolge, in der die einzelnen Teilintegrationen durchgeführt werden, ist im Prinzip willkürlich. Der gesamte Bewegungsvorgang kann daher erst zum Schluss des gesamten Rechenprozesses zufriedenstellend beschrieben werden. Es muss klar sein, dass üblicherweise die endgültig erhaltene Lösung nur eine Näherungslösung sein kann. Beliebig komplizierte Bewegungsvorgänge lassen sich auch mit den heute erhältlichen mathematischen Mitteln nicht vollständig analytisch darstellen. Dies wäre insbesondere für langfristige Untersuchungen erforderlich.

Das mit dem Namen *I. Newton*s verknüpfte Verfahren zur Lösung eines Bewegungsproblems ist ausschließlich auf ein inertiales (oder als inertial definiertes) Basissystem bezogen, das also unabhängig von jeder (nicht gleichförmige geradlinigen) Bewegung angenommen wird. Ist der (dreidimensionale) Beschleunigungsvektor in diesem System gegeben, wird die Lösung des Problems üblicherweise durch numerische Integration erhalten. Wird in diesem System eine analytische Lösung gewünscht, werden die Störgleichungen für die eine räumliche Bewegung definierenden Winkel (Inklination, Länge des aufsteigenden Knotens) in Bezug auf das inertiale Basissystem verwendet.

In dem Gegensatz *Newton* – *Hansen*-System spiegelt sich einer der Streitpunkte zwischen *Newton* und *Leibniz* wieder[2]: *Newton* hatte sich als Grundlage zur Beschreibung der Planetenbewegung auf sein Gravitationsgesetz gestützt, das notwendig auf ein inertiales Basissystem bezogen ist. Dagegen verwendete *Leibniz*, mehr kinematisch orientiert, das von ihm eingeführte mitbewegte System mit der von ihm entdeckten radialen Beschleunigung (die *Newton* für Unsinn gehalten hatte, da sie in seinem inertialen System so nicht vorkommen kann). Das mit dem *Leibniz*-System verknüpfte *Hansen*-System kann seinen Ursprung wie das *Newton*sche System in einem Bezugspunkt haben, etwa einem Gravitationszentrum, ist formal dem inertialen System gleich, jedoch auf eine spezielle Bewegung bezogen. Es erleichtert die ana-

[1] zugehöriges Diagramm in Bild 3-25 auf Seite 141

[2] siehe hierzu vor allem in: AITON, E. J. (1964) und AITON, E. J. (1965)

lytische Beschreibung einer Bewegung, muss allerdings zum Vergleich mit anderen Bewegungsvorgängen letztlich auf das *Newton*sche inertiale System reduziert werden.

In dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Verfahren, das auf der Verwendung von *Hansen*-Systemen beruht, werden folgende Vorteile gesehen:

1. *Hansen*-Systeme sind abgesehen von inertialen Systemen („*Newton*-Systeme“) die einzigen Systeme, in denen der absolute Geschwindigkeitsvektor dem auf dieses System bezogenen relativen Geschwindigkeitsvektor identisch ist.
2. *Hansen*-Systeme sind die einzigen Systeme, die formal wie inertiale Systeme behandelt werden können.
3. *Hansen*-Systeme sind die einzigen Systeme, die fest mit einer oskulierenden Bahnebene gekoppelt sind.
4. Zu jedem Bewegungsvorgang können *Hansen*-Systeme konstruiert werden.
5. Der auf ein *Hansen-System* bezogene Bahnwinkel ist die einzige störunabhängige mögliche Variable. Auch die Zeit ist eine Funktion dieses Bahnwinkels, also eine abhängige Variable. (Im klassischen Newtonschen inertialen System ist stets die Zeit die unabhängige Variable, entweder direkt bei numerischen Integrationen oder indirekt über die Mittelpunktsgleichung bei analytischen Verfahren).
6. Die Methode der Variation der Parameter ist eine notwendige Folge aus der Existenz von *Hansen*-Systemen.
7. Die Einflüsse der einzelnen Teilbeschleunigungen auf einen Bewegungsvorgang können infolge eindeutiger Separierung klar analysiert werden.
8. Durch Rückgriff auf eine geradlinige Bewegung, deren Beschreibung notwendig in einem *Hansen*-System erfolgt, können die Bewegungseinflüsse berechnet werden, die eine beobachtete Bewegung erzwingen.
9. Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen ist in jedem Fall, d.h. bei Berücksichtigung einer weiteren Teilbeschleunigung, formal identisch.
10. In einem neuen Integrationsschritt, der eine weitere Teilbeschleunigung einbezieht, werden die zuvor erhaltenen Lösungen vollständig verwendet.
11. Die Teilintegrationen erfolgen in willkürlicher Reihenfolge.
12. Es werden (im Wesentlichen) nur vier unabhängige Bewegungsgleichungen benötigt (zwei für die Bahnkurve, eine für den Flächenparameter, eine für die räumliche Drehung um den Radiusvektor). Weitere, um Bezug auf das inertiale Basissystem herzustellen, sowie um die Bewegung im Zeitverlauf zu beschreiben, können nach Lösung der vier Basisgleichungen bearbeitet werden.
13. Es wird erwartet, dass infolge des formal identischen Ablaufs in den einzelnen Bearbeitungsschritten das Verfahren weitestgehend CAS-fähig[1] entwickelt werden kann. Darüber hinaus besteht die Hoffnung, dass die künftige Rechner-Entwicklung und Entwicklung von formalen Rechenprogrammen (CAS) noch mehr als bisher das Arbeiten mit allgemeinen Bewegungsproblemen erleichtern und durchsichtiger gestalten wird.

In dem hier vorgestellten Verfahren werden Bahnkurve und Bewegung auf dieser Bahnkurve scharf getrennt. Dies wurde bereits von *Kepler* implizit in seiner Theorie so durchgeführt:

[1] CAS – Computer Algebra System, ein mathematischer Formelmanipulator wie Reduce, Mathematica, Maple

Sein erstes Gesetz definiert die Bahnkurve, das zweite die Bewegung längs dieser Kurve. Diese beiden Gesetze beschreiben also die Kinematik einer Bewegung. Erst das dritte Keplersche Gesetz bezieht die Dynamik mit ein, das bedeutet die physikalisch-quantitative Erklärung einer beobachteten (oder zu beobachtenden) Bewegung.

2 Altes und Neues zu den *Hansen*-Systemen

In diesem Abschnitt wird die mathematische Formulierung der *Hansen* („idealen“) Koordinaten in vollständiger Allgemeinheit für geradlinige Koordinatensysteme hergeleitet. Bekannte und (soweit aus der bekannten Literatur zu schließende) unbekannte neue mathematische Sätze zur Charakterisierung dieser Koordinaten werden abgeleitet und zusammengestellt. Außerdem wird ihre grundlegende Bedeutung im Rahmen der Astrodynamik, ihr Zusammenhang mit der allgemeinen *Kepler*bewegung und mit der *Euler*schen Variation der Parameter untersucht. Als Basis werden zuvor Beziehungen, Definitionen und Zusammenhänge aus der klassischen Himmelsmechanik, der sphärischen Astronomie und der allgemeinen Bewegungslehre kurz zusammengestellt, wie sie für die vorliegende Arbeit benötigt werden.

2.1 Mathematische Grundlagen und Voraussetzungen

2.1.1 Das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem

Das auf den Erdäquator bezogene und nach dem Sternhimmel orientierte Bezugssystem ist das fundamentale Koordinatensystem, das für alle Zwecke erdgebundener und interplanetarer Raumflugmissionen eingesetzt wird. Bezugsebene ist die Erdäquatorebene. Da die Polachse der Erde selbst bewegt ist, werden die Äquatorebene und damit das ganze System zu einem gewissen Anfangszeitpunkt (Epoche) festgeschrieben. Alle Rechnungen in diesem System und alle Umrechnungen gelten stets nur für diese Epoche. In der vorliegenden Arbeit geht es zunächst auch um eine allgemeine mathematische Darstellung von Bewegungsvorgängen. In diesem Sinn wird das Äquatorsystem auch als Prototyp eines allgemeinen Bezugssystems verwendet. Im Gegensatz zu dem später einzuführenden *Leibniz*- sowie dem *Hansen*-System werde dieses System als *Newton*-System bezeichnet, da in ihm das *Newton*sche Gravitationsgesetz in seiner ursprünglichen Form seine Gültigkeit hat.

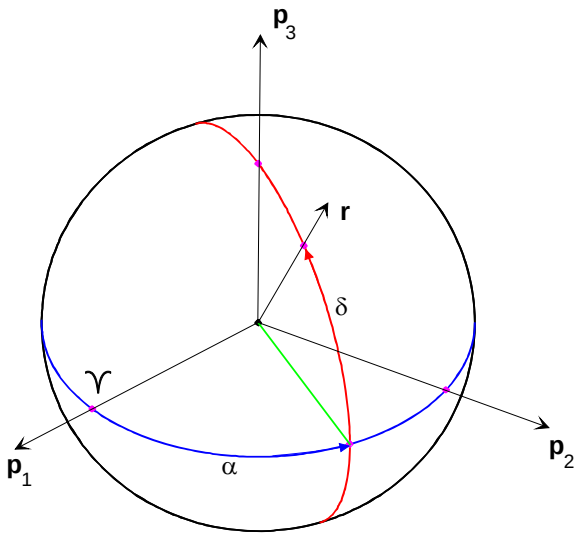

Bild 2-1: Das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem, bei Bezug auf die Erde: geozentrisches Frühlingspunkt-bezogenes Äquatorsystem mit den Winkelkoordinaten Rektaszension α und Deklination δ

Es werde angenommen, dass die Äquatorebene für eine (Koordinaten-) Epoche festliegt. Ebenso wird der auf den Sternhimmel bezogene Ursprung für eine Koordinatenzählung in der Äquatorebene für diese Epoche festgeschrieben. Hierzu wird der fiktive aufsteigende Schnitt-

punkt („Knoten“) der mittleren Sonnenbahn (Ekliptik) mit der Äquatorebene gewählt. Dieser Punkt wird als *Frühlingspunkt* Υ bezeichnet, weil auf der Nordhalbkugel der Erde dann Frühlingsanfang ist, wenn die Sonne von der Erde aus gesehen gerade diesen Punkt durchläuft. Wenn die Koordinaten von (mindestens einem) stellaren Objekt (Stern, Quasar, Galaxie, usw.) im gewählten Äquatorsystem bekannt sind, kann der Ort des Frühlingspunktes berechnet werden. Hierzu stellt die Astrometrie eine Reihe sehr sorgfältiger vermessener Fundamentalsterne zur Verfügung[1]. Aus der Kenntnis der Örter mehrerer solcher Fundamentalsterne kann die räumliche Orientierung des betreffenden Fundamentalsystems eindeutig berechnet werden. Die derzeit erreichbare Genauigkeit der Positionen der Fundamentalsterne beträgt etwa $0''.001$. Diese wird erreicht mit Hilfe von Radio-interferometrischen Beobachtungen von extragalaktischen Radioquellen bzw. neuerdings durch die Beobachtung von Quasaren, deren Eigenbewegung gegenüber dem Universum vernachlässigt werden kann[2]. Ziel ist es ein inertiales System zu finden, dessen einzige Bewegung gleichförmig geradlinig ist. Da das Äquatorsystem an die Bewegung der Erde gebunden ist, verändert sich die relative Orientierung dieses System ständig mit der Zeit. Deshalb wird das System zu einem Zeitpunkt „eingefroren“, derzeit auf die Epoche J2000.0. Wird dieses System als das Referenzsystem verwendet, müssen alle Berechnungen in dieses System transformiert werden. Exakte Integrationen müssen in diesem System erfolgen. Das Ergebnis wird dann in das gewünschte System übertragen[3].

Das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem (siehe Bild 2-1) werde durch das orthonormierte Basissystem $\mathbf{p}_i$ aufgespannt. Die $\mathbf{p}_1$-Achse sei durch den Frühlingspunkt, die $\mathbf{p}_3$-Achse durch den Nordpol gerichtet, die $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1$ -Achse ergänze in der Äquatorebene, welche die durch $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ aufgespannte Ebene ist, das System. Als Polarkoordinaten werde die Rektaszension α in der Äquatorebene vom Frühlingspunkt rechtsläufig, die Deklination δ positiv vom Äquator zum Nordpol, negativ zum Südpol ($-90° \le \delta \le 90°$) gezählt. r ist der geozentrische Radius des beobachteten Objektes. Der Ortsvektor eines Punktes in diesem System hat dann die Vektorsdarstellung

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{p}_1 \cos\alpha\cos\delta + \mathbf{p}_2 \sin\alpha\cos\delta + \mathbf{p}_3 \sin\delta\right) = r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad \left(|\mathbf{r}_0| = 1\right) . \tag{2.1}$$

Der entsprechende Geschwindigkeitsvektor lautet[4]

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\mathbf{r}}_0 \quad \left(mit\ \ \mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0 = 0\right). \tag{2.2}$$

Da $\dot{\mathbf{r}}_0$ senkrecht auf dem Ortsrichtungsvektor $\mathbf{r}_0$ steht, entspricht diese Darstellung des Geschwindigkeitsvektors einer Zerlegung in einen radialen und einen in der Bahnebene liegenden transversalen Anteil der Geschwindigkeit. Hier ist $V_R := \dot{r}$ die radiale Geschwindigkeit und $V_T := r|\dot{\mathbf{r}}_0|$ die transversale Geschwindigkeit. Sei $\mathbf{q}_0$ der Einheitsvektor in transversaler Richtung, so kann der (absolute) Geschwindigkeitsvektor auch in der Form

---

[1] Die scheinbaren Örter der Fundamentalsterne werden jährlich vom astronomischen Rechenzentrum in Heidelberg veröffentlicht. Es enthält die mittleren und scheinbaren Örter von 1535 Sternen des FK5 (siehe AA 1984, p. IX)

[2] WALTER, H. G. AND SOVERS, O.S. (2000), insbesondere auf Seite 104

[3] true of date [TOD], mean of date [MOD], true of epoch [TOE], mean of epoch [MOE], usw.

[4] der Punkt zwischen den Vektoren $\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0$ bedeutet skalares Produkt, δ_{ij} ist der Kronecker Tensor

$$\dot{\mathbf{r}} = V_R\,\mathbf{r}_0 + V_T\,\mathbf{q}_0 \tag{2.3}$$

geschrieben werden.

Die Variation des radialen Richtungsvektors lautet in äquatorialen Koordinaten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_0 = {} & \dot{\alpha}\left(-\sin\alpha\,\mathbf{p}_1 + \cos\alpha\;\mathbf{p}_2\right)\cos\delta + \dot{\delta}\left[-\left(\cos\alpha\;\mathbf{p}_1 + \sin\alpha\;\mathbf{p}_2\right)\sin\delta + \cos\delta\;\mathbf{p}_3\right] + \\ & + \dot{\mathbf{p}}_1\cos\alpha\,\cos\delta + \dot{\mathbf{p}}_2\,\sin\alpha\,\cos\delta\; + \dot{\mathbf{p}}_3\,\sin\delta \quad .\end{aligned} \tag{2.4}$$

Hier beschreiben die Vektoren $\dot{\mathbf{p}}_i$ die Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Systems gegenüber einem Inertialsystem. Ist dieses System inertial, verschwinden somit diese Vektoren identisch:

$$\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad . \tag{2.5}$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werde das Basis-Äquatorsystem als $\mathbf{p}_i$ – System bezeichnet. Jedes andere darauf zu beziehende System werde als $\mathbf{q}_j$ – System bezeichnet. Es muss darauf hingewiesen werden, dass ein System nur mathematisch als inertial definiert werden kann. Ob es auch physikalisch gesehen als inertial angesehen werden kann, muss durch immer mehr verbesserte Beobachtungen nachgewiesen werden[1].

Statt der Polarkoordinaten in Formel (2.1) kann der Ortsvektor durch kartesische Koordinaten x^i ausgedrückt werden[2]:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i\,\mathbf{p}_i =: x^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{2.6}$$

Der zugehörige Geschwindigkeitsvektor ist

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i\mathbf{p}_i + x^i\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{2.7}$$

Hier kann $\dot{\mathbf{r}}_p := \dot{x}^i\mathbf{p}_i$ als der relative Geschwindigkeitsvektor bei Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Basissystem bezeichnet werden. Dagegen schließt $\dot{\mathbf{r}}$ die Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems ein und kann deshalb als der absolute Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes bezeichnet werden. Wenn das $\mathbf{p}_i$ – System inertial ist, so dass $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$ angesetzt werden kann, ist der relative Geschwindigkeitsvektor dem absoluten gleich:

$$\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_p \quad . \tag{2.8}$$

Dies ist eine notwendige aber, wie wir im Zusammenhang mit dem *Hansen*-System sehen werden, keine hinreichende Bedingung. Denn eine charakteristische Eigenschaft von Hansen-Systemen ist, dass in ihnen absoluter und relativer Geschwindigkeitsvektor identisch sind (siehe in Formel (2.81) auf Seite 32 und Satz H1).

2.1.2 Der absolute Eigenbewegungsvektor eines Koordinatensystems

Die Variationen $\dot{\mathbf{q}}_j$ einer beliebigen orthonormierten Basis $\mathbf{q}_j$ lassen sich wie jeder andere Vektor eines linearen Vektorraumes $\mathbb{V}_n$ üblicherweise als eine Linearkombination bezogen auf das $\mathbf{q}_j$-Basissystem mit Komponenten $q_j{}^i$ schreiben

---

[1] siehe etwa in WALTER, H. G. AND SOVERS, O.S. (2000)

[2] in der vorliegenden Arbeit wird die *Einstein*sche Summenkonvention verwendet: $x^i\mathbf{p}_i := \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{p}_i$

$$\dot{\mathbf{q}}_j \;=\; q_j{}^i\,\mathbf{q}_i \;\left(=\sum_{i=1}^{3} q_{ji}\,\mathbf{q}_i\right) \;, \tag{2.9}$$

wobei wegen Orthonormie $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$ und daher $\dot{\mathbf{q}}_i \cdot \mathbf{q}_j + \mathbf{q}_i \cdot \dot{\mathbf{q}}_j = 0$, so dass die Koeffizientenmatrix ($q_j{}^i$) *antisymmetrisch* ist:

$$q_{ij} \;=\; -q_{ji} \quad . \tag{2.10}$$

Mit den Abkürzungen

$$D_{q1} := q_{23} \quad , \quad D_{q2} := q_{31} \quad , \quad D_{q3} := q_{12} \tag{2.11}$$

folgt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \qquad D_{q3}\,\mathbf{q}_2 - D_{q2}\,\mathbf{q}_3 = \qquad q_{12}\,\mathbf{q}_2 - q_{31}\,\mathbf{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= -D_{q3}\,\mathbf{q}_1 \qquad + D_{q1}\,\mathbf{q}_3 = -q_{12}\,\mathbf{q}_1 \qquad + q_{23}\,\mathbf{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 &= \quad D_{q2}\,\mathbf{q}_1 - D_{q1}\,\mathbf{q}_2 \qquad = \quad q_{31}\,\mathbf{q}_1 - q_{23}\,\mathbf{q}_2 \qquad . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Diese Darstellungen gelten für die Variation jedes beliebigen orthonormierten Basissystems und können als die ***Variationsgleichungen eines orthonormierten Basissystems*** bei dessen Variation bezeichnet werden[1]. Diese Variationsgleichungen können genauer als die „absoluten Variationsgleichungen“ bezeichnet werden, da sie die Variationen des Systems sich selbst gegenüber und nicht relativ zu einem anderen System beschreiben.

Die Parameter D_{qj} werden als die Koeffizienten eines Vektors

$$\mathbf{D}_q := D_q{}^j\mathbf{q}_j \tag{2.13}$$

aufgefasst. Mit Hilfe dieses Vektors können die Variationsgleichungen (2.12) in der bekannten Darstellung

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j \tag{2.14}$$

zusammengefasst werden. Die Differentiation der Basisvektoren $\mathbf{q}_j$ nach der unabhängigen Variablen können als Drehung um den Vektor $\mathbf{D}_q$ gedeutet werden kann, wobei die Drehung die Winkelgeschwindigkeit $\left|\mathbf{D}_q\right|$ hat. Es ist daher üblich, diesen Vektor als „Rotationsvektor“ eines Systems zu bezeichnen. Im Zusammenhang mit den hier vorliegenden Untersuchungen soll dieser Vektor als „*Eigenbewegungsvektor*“ eines Systems bezeichnet werden, da er die Eigenbewegung dieses Systems beschreibt[2] und auf die Bewegung des untersuchten Objektes

---

[1] Diese Formeln können eventuell auch als ***allgemeine Frenetsche Formeln*** dieses Systems im Anklang an die *Frenet*schen Formeln der Kurventheorie bezeichnet werden. Sie sind im Rahmen astrodynamischer Untersuchungen von großer Wichtigkeit

[2] Eine Verwechslung des Begriffes „System-Eigenbewegungs-Vektor“ mit der in der Astrometrie untersuchten „Eigenbewegung“ stellarer Objekte sollte vor dem Hintergrund der hier durchgeführten Untersuchungen nicht möglich sein: Der Begriff „Eigenbewegungs-Vektor eines stellaren Objektes“ bezieht sich auf den relativen Geschwindigkeitsvektor, den ersten Teil der Darstellung (2.4), der Begriff „Eigenbewegungs-Vektor eines Systems“ auf den zweiten Teil von (2.4) mit den Variationen der Basisvektoren. Der Vektor $\mathbf{D}_q$ beschreibt die „eigene Bewegung“ eines Bezugssystems, eine Verwechslung mit dem Begriff Eigenvektor, der eine Rolle bei linearen Abbildungen spielt, sollte hier also ausgeschlossen sein.

bezogen ist. Daher ist der Begriff „Rotation“ des Systems in diesem Zusammenhang irreführend. Im Hinblick auf die entsprechenden Bezeichnungen der Kurventheorie könnte dieser Vektor auch als *allgemeiner Darbouxscher Vektor* bezeichnet werden. Der Ausdruck (2.14) erlaubt folgende generelle Aussage[1]:

$$\mathbf{D}_p \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{System ist inertial} \tag{2.15}$$

▶ *Wenn der Eigenbewegungsvektor eines Systems verschwindet, ist dieses System ein inertiales.*

Ferner ergibt sich aus Beziehung (2.14) ganz allgemein:

▶ *Es gibt (im dreidimensionalen Raum) zu jedem variablen Einheitsvektor* **e** *einen Vektor* **E**, *so dass die Variation dieses Einheitsvektors als Rotation um* **E** *gedeutet werden kann:*

$$\dot{\mathbf{e}} \;=\; \mathbf{E} \times \mathbf{e} \tag{2.16}$$

Für die Variation des Systemeigenbewegungsvektors ergibt sich ganz allgemein eine sehr wichtige Aussage. Es ist

$$\dot{\mathbf{D}}_q \;=\; \dot{D}_q{}^j \mathbf{q}_j + D_q{}^i \dot{\mathbf{q}}_j \tag{2.17}$$

und mit Formel (2.14)

$$\dot{\mathbf{D}}_q \;=\; \dot{D}_q{}^j \mathbf{q}_j + D_q{}^j \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j$$

wobei der zweite Anteil wegen Definition (2.13) verschwindet:

$$D_q{}^i \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j = \mathbf{D}_q \times D_q{}^i \mathbf{q}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{D}_q = 0 \quad .$$

Es bleibt also (da in der Zerlegung (2.17) der Anteil mit $\dot{\mathbf{q}}_j$, der die eigene Bewegung des $\mathbf{q}_j$ – Systems enthält, für jeden Eigenbewegungsvektor notwendig verschwindet):

$$\dot{\mathbf{D}}_q \;=\; \dot{D}_q{}^i \mathbf{q}_i \quad . \tag{2.18}$$

▶ *Die Variation eines Systemeigenbewegungsvektors (Rotationsvektors, allgemeinen Darboux-Vektors) ist invariant gegenüber jeder Variation seines Basissystems.*

Im $\mathbf{q}_j$-System seien die kartesischen Koordinaten y^j gegeben. Orts- und absoluter Geschwindigkeitsvektor lauten dann

$$\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j \mathbf{q}_j + y^j \dot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{2.19}$$

Als relativer Geschwindigkeitsvektor werde der Ausdruck

$$\dot{\mathbf{r}}_q := \dot{y}^j \mathbf{q}_j \tag{2.20}$$

bezeichnet. Mit Beziehung (2.14) kann der absolute Geschwindigkeitsvektor dann auch in der (altbekannten) Form

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} \tag{2.21}$$

---

[1] Hier muss beachtet werden, dass inertiale Systeme durchaus eine eigene Bewegung durchführen können, nämlich, die gleichförmig geradlinig ist. Der Eigenbewegungsvektor charakterisiert somit eine Bewegung, die von dieser gleichförmig geradlinigen Bewegung abweicht.

geschrieben werden. Damit wurde gezeigt, dass sich der absolute Geschwindigkeitsvektor aus einem zu dem $\mathbf{q}_j$ – Basissystem relativen translatorischen Anteil und einem rotatorischen Anteil zusammensetzt, der von der Eigenbewegung dieses Basissystems abhängt. Es gibt nur zwei Koordinatensysteme, in denen dieser Eigenbewegungsanteil verschwindet: erstens in einem inertialen System, dessen Eigenbewegungsvektor identisch verschwindet, da es nur eine gleichförmig geradlinige Bewegung ausführt. Zweitens in einem *Hansen*-System, das Gegenstand dieses Berichtes ist (siehe Satz H1 in Abschnitt 2.3.3 ab Seite 33).

2.1.3 Der relative Eigenbewegungsvektor eines Koordinatensystems

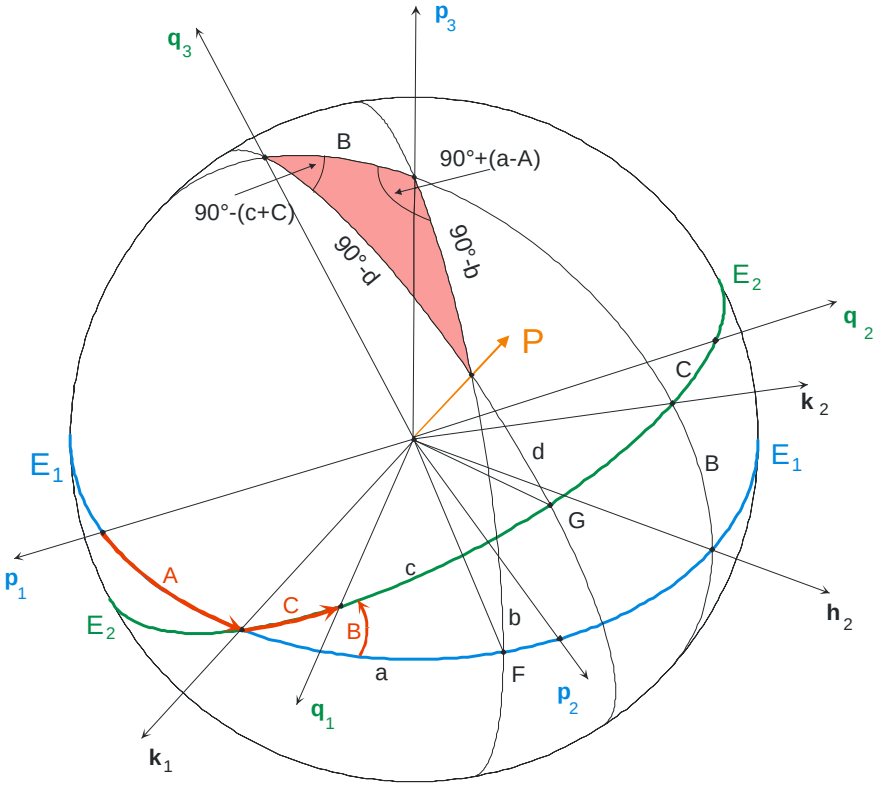

Bild 2-2: Drehung des $\mathbf{p}_i$ – Systems (blaue Basisebene E_1, „Äquator“) in das $\mathbf{q}_j$ – System (grüne Basisebene E_2, „Bahnebene“) um die Eulerwinkel A („Knotenlänge“), B („Inklination“), C („Länge des Ursprungs in der Bahnebene“). $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ – Knotensystem in der E_2-Ebene, $\mathbf{h}_2$-Vektor ein Hilfsvektor zur Drehung der E_1-Ebene um den aufsteigenden Knoten $\mathbf{k}_1$ in die Ebene E_2 nach $\mathbf{k}_2 = \mathbf{q}_3 \times \mathbf{k}_1$. Eine Sichtrichtung **P** (Stern, Satellit) hat im $\mathbf{p}_i$ – System die Richtungswinkel *a*, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und *b* (Breite), im $\mathbf{q}_j$ – System die Richtungswinkel *c*, bezogen auf $\mathbf{q}_1$ (zunächst willkürlicher Anfangspunkt mit Abstand *C* vom aufsteigenden Knoten, und *d* (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ (**P**, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{q}_3$).

Um die Bewegung eines Koordinatesystems relativ zu einem anderen darstellen zu können, muss die Koordinatentransformation zwischen diesen Systemen bekannt sein. Handelt es sich um orthonormierte Systeme, wird üblicherweise eine orthonormale Transformation durchgeführt. Eine solche wird im Folgenden kurz allgemeingültig dargestellt.

Gegeben sei ein Koordinatensystem im euklidischen Raum mit orthonormierter Basis $\mathbf{p}_i$. Eine Drehung um die $\mathbf{p}_3$- Achse mit dem Winkel *A* führt entsprechend Bild 2-2 in den Richtungsvektor $\mathbf{k}_1$ (Knotenvektor) über, Drehung um $\mathbf{k}_1$ um den Winkel *B* ergibt eine neue Basisebene

mit Normalenvektor $\mathbf{q}_3$, Drehung um $\mathbf{q}_3$ mit Winkel C führt $\mathbf{k}_1$ in den neuen Richtungsvektor $\mathbf{q}_1$ über.

$$\mathbf{q}_2 \;=\; \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1$$

ergänzt $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{q}_3$ zur neuen orthonormierten $\mathbf{q}_j$- Basis.

Die drei Drehwinkel A B, C werden in diesem Zusammenhang völlig allgemeingültig verstanden. In der Transformation

$$\mathbf{q}_j \;=\; a_j{}^i \, \mathbf{p}_i \tag{2.22}$$

lauten somit die Koeffizienten der Transformationsmatrix

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos B \sin C \sin A + \cos C \cos A \\
a_{12} &= \cos B \sin C \cos A + \cos C \sin A \\
a_{13} &= \sin B \sin C \\
a_{21} &= -\cos B \cos C \sin A - \sin C \cos A \\
a_{22} &= \cos B \cos C \cos A - \sin C \sin A \\
a_{23} &= \sin B \cos C \\
a_{31} &= \sin B \sin A \\
a_{32} &= -\sin B \cos A \\
a_{33} &= \cos B \quad .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Wegen Orthonormie der beiden Systeme lautet die Umkehrabbildung (mit der zu $\left(a_j{}^i\right)$ transponierten Matrix $\left(a^j{}_i\right)$)

$$\mathbf{p}_i \;=\; a^j{}_i \, \mathbf{q}_j \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j \;=\; \delta_{ij}) \quad . \tag{2.24}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\dot{\mathbf{q}}_j \;=\; \dot{a}_j{}^i \, \mathbf{p}_i + a_j{}^i \, \dot{\mathbf{p}}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{p}}_i \;=\; \dot{a}^j{}_i \, \mathbf{q}_j + a^j{}_i \, \dot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{2.25}$$

Sie benötigen die Variation der Transformationsmatrix

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= \dot{B}\, a_{31} \sin C + \dot{C}\, a_{21} - \dot{A}\, a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= \dot{B}\, a_{32} \sin C + \dot{C}\, a_{22} + \dot{A}\, a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= \dot{B}\, a_{33} \sin C + \dot{C}\, a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= \dot{B}\, a_{31} \cos C - \dot{C}\, a_{11} - \dot{A}\, a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= \dot{B}\, a_{32} \cos C - \dot{C}\, a_{12} + \dot{A}\, a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= \dot{B}\, a_{33} \cos C - \dot{C}\, a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= \dot{B}\, a_{33} \sin A - \dot{A}\, a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= -\dot{B}\, a_{33} \cos A + \dot{A}\, a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{B} \sin B \qquad .
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Werden hier die a_{ij} aus (2.23) eingesetzt, folgen diese Variationen ausführlich zu

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= \dot{B} \sin A \sin B \sin C - \\
&\quad - \dot{C}\left(\cos B \cos C \sin A + \sin C \cos A\right) - \\
&\quad - \dot{A}\left(\cos B \sin C \cos A + \cos C \sin A\right) \\
\dot{a}_{12} &= -\dot{B} \cos A \sin B \sin C + \\
&\quad + \dot{C}\left(\cos B \cos C \cos A - \sin C \sin A\right) + \\
&\quad + \dot{A}\left(-\cos B \sin C \sin A + \cos C \cos A\right) \\
\dot{a}_{13} &= \dot{B} \cos B \sin C + \dot{C} \sin B \cos C \\
\dot{a}_{21} &= \dot{B} \sin A \sin B \cos C - \\
&\quad - \dot{C}\left(-\cos B \sin C \sin A + \cos C \cos A\right) - \\
&\quad - \dot{A}\left(\cos B \cos C \cos A - \sin C \sin A\right) \\
\dot{a}_{22} &= -\dot{B} \cos A \sin B \cos C - \\
&\quad - \dot{C}\left(\cos B \sin C \cos A + \cos C \sin A\right) - \\
&\quad - \dot{A}\left(\cos B \cos C \sin A + \sin C \cos A\right) \\
\dot{a}_{23} &= \dot{B} \cos B \cos C - \dot{C} \sin B \sin C \\
\dot{a}_{31} &= \dot{B} \sin A \cos B + \dot{A} \cos A \sin B \\
\dot{a}_{32} &= -\dot{B} \cos A \cos B + \dot{A} \sin A \sin B \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{B} \sin B
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Analog dem Ansatz für das $\mathbf{q}_j$ – System kann auch für das (nicht notwendig als inertial angenommene) $\mathbf{p}_i$ – System für die Variationen dieser Basis die Darstellung

$$
\dot{\mathbf{p}}_i := p_i^{\ k} \mathbf{p}_k \tag{2.28}
$$

gewählt werden. Wird dies in die ersten der Gleichungen (2.25) eingesetzt und noch die Transformation (2.22) berücksichtigt, ergibt sich

$$
\dot{\mathbf{q}}_j = \dot{a}_j^{\ k}\, \mathbf{p}_k + a_j^{\ i}\, p_i^{\ k}\, \mathbf{p}_k = q_j^{\ i}\, a_i^{\ k}\, \mathbf{p}_k \quad , \tag{2.29}
$$

somit durch Koeffizientenvergleich die Beziehung

$$\dot{a}_j{}^k = q_j{}^i\, a_i{}^k - a_j{}^i\, p_i{}^k \quad . \tag{2.30}$$

Über die Variationsgleichungen (2.27) können dann auch die Variationen der Rotationswinkel *A, B, C* auf die Variationsparameter $\left(p_i{}^j\right)$ und $\left(q_i{}^j\right)$ zurückgeführt werden. Im Fall von Orthonormalsystemen $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{q}_j$ lauten die Variationsausdrücke

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -q_{31}\sin C + q_{23}\cos C - p_{31}\sin A - p_{23}\cos A \\ \dot{A}\sin B &= q_{31}\cos C + q_{23}\sin C - p_{12}\sin B - (p_{31}\cos A - p_{23}\sin A)\cos B \\ \dot{C}\sin B &= p_{31}\cos A - p_{23}\sin A + q_{12}\sin B - (q_{31}\cos C + q_{23}\sin C)\cos B \ . \end{aligned} \tag{2.31}$$

Da die Variationsparameter $\left(p_i{}^j\right)$ und $\left(q_i{}^j\right)$ analog den Formeln (2.11) zugleich die Komponenten des jeweiligen Eigenbewegungsvektors

$$\mathbf{D}_q = D_q{}^j \mathbf{q}_j \quad , \quad \mathbf{D}_p = D_p{}^i \mathbf{p}_i \quad . \tag{2.32}$$

sind, gilt

$$\begin{aligned} p_{23} &= D_{p1}\ ,\ p_{31} = D_{p2}\ ,\ p_{12} = D_{p3}\ , \\ q_{23} &= D_{q1}\ ,\ q_{31} = D_{q2}\ ,\ q_{12} = D_{q3} \quad . \end{aligned} \tag{2.33}$$

Die Variationen der Drehwinkel *A, B, C* können bei einer Rotation orthonormierter Systeme daher auch in der Form geschrieben werden

$$\begin{aligned} \dot{B} &= D_{q1}\cos C - D_{q2}\sin C - D_{p1}\cos A - D_{p2}\sin A \\ \dot{A}\sin B &= D_{q1}\sin C + D_{q2}\cos C + D_{p1}\cos B\sin A - D_{p2}\cos B\cos A - D_{p3}\sin B \\ \dot{C}\sin B &= -D_{p1}\sin A + D_{p2}\cos A - D_{q1}\cos B\sin C - D_{q2}\cos B\cos C + D_{q3}\sin B \ . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Nach Bild 2-2 ergeben sich ferner für das Knotensystem (mit $\mathbf{k}_1$ als Vektor des aufsteigenden Knotens, $\mathbf{k}_3$=**c₀,** $\mathbf{k}_2$=$\mathbf{k}_3$×$\mathbf{k}_1$) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{p}_1\cos A + \mathbf{p}_2\sin A &&= \mathbf{q}_1\cos C - \mathbf{q}_2\sin C \\ \mathbf{k}_2 &= -\mathbf{p}_1\cos B\sin A + \mathbf{p}_2\cos B\cos A + \mathbf{p}_3\sin B &&= \mathbf{q}_1\sin C + \mathbf{q}_2\cos C \\ \mathbf{h}_2 &= -\mathbf{p}_1\sin A + \mathbf{p}_2\cos A &&= \mathbf{q}_1\cos B\sin C + \mathbf{q}_2\cos B\cos C - \mathbf{q}_3\sin B \ . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Die relativen Eigenbewegungsvektoren eines Systems in Bezug auf ein anderes werden definiert durch die Beziehungen

$$\mathbf{D}_{qp} := \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p =: D_{qp}{}^i\, \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{D}_{pq} := \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_q =: D_{pq}{}^j\, \mathbf{q}_j \tag{2.36}$$

Die Variationen der Drehwinkel aus dem System (2.34) können dann auch mit dem relativen Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{qp}$ des $\mathbf{q}_j$- Systems bei Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – System geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{B} &= \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)\cdot\mathbf{k}_1 &&= \mathbf{D}_{qp}\cdot\mathbf{k}_1 \\ \dot{A}\sin B &= \left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)\cdot\mathbf{k}_2 &&= \mathbf{D}_{qp}\cdot\mathbf{k}_2 \\ \dot{C}\sin B &= -\left(\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)\cdot\mathbf{h}_2 &&= -\mathbf{D}_{qp}\cdot\mathbf{h}_2 \ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Umgekehrt können die Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors des $\mathbf{q}_j$- Systems bei Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – System berechnet werden. Um diese Beziehungen herzuleiten, werde die erste der Beziehungen (2.25) im $\mathbf{q}_j$-System dargestellt:

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \dot{a}_j{}^i a^k{}_i \mathbf{q}_k + a_j{}^i p_i{}^l a^k{}_l \mathbf{q}_k = q_j{}^k \mathbf{q}_k \quad . \tag{2.38}$$

Es besteht also die allgemeingültige Beziehung im Fall von Orthonormie

$$q_j{}^k = \dot{a}_j{}^i a^k{}_i + a_j{}^i p_i{}^l a^k{}_l \quad , \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \; , \; \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij} \tag{2.39}$$

sowie umgekehrt

$$p_i{}^j = \dot{a}_i^k a_k{}^j + a^l{}_i \, q_l{}^k \, a_k{}^j \quad , \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij} \; , \; \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \delta_{ij} \quad . \tag{2.40}$$

Der Variationsvektor $\dot{\mathbf{q}}_j$ des neuen Systems enthält zwei völlig getrennte Anteile

$$\dot{\mathbf{q}}_\mathrm{j} \; = \; \mathrm{q_j}{}^\mathrm{k} \, \mathbf{q}_\mathrm{k} =: \left(\mathrm{q_{qp\,j}}{}^\mathrm{k} + \mathrm{q_{(0)\,j}}{}^\mathrm{k} \right) \mathbf{q}_\mathrm{k} \quad . \tag{2.41}$$

Der erste Anteil kommt von der Rotation des neuen $\mathbf{q}_j$ –Systems gegenüber dem alten $\mathbf{p}_i$ – System her

$$\mathrm{q_{qpj}}{}^\mathrm{k} \; = \; \dot{\mathrm{a}}_\mathrm{j}{}^\mathrm{i} \, \mathrm{a}^\mathrm{k}{}_\mathrm{i} \quad . \tag{2.42}$$

Dies entspricht dem relativen Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{\mathrm{qp}} = \mathbf{D}_\mathrm{q} - \mathbf{D}_\mathrm{p} = \mathrm{D_{qp}}{}^\mathrm{j} \mathbf{q}_\mathrm{j}$, der die *Eigenbewegung* des $\mathbf{q}_j$ –Systems in Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – System beschreibt. Werden im System (2.42) die entsprechenden Werte für die $b_{ik} = a_{ki}$ und $\dot{a}_{ji}$ aus den Formelsystemen (2.23) und (2.27) eingesetzt, ergeben sich für die Variationsparameter des neuen Systems somit die aus der Rotation in Bezug auf das alte System stammenden Anteile aus

$$\begin{aligned}
\mathrm{D_{qp1}} &= \mathrm{q_{qp23}} = \; \dot{\mathrm{a}}_2{}^\mathrm{i} \, \mathrm{a_{3i}} = \quad \dot{\mathrm{B}} \cos \mathrm{C} + \dot{\mathrm{A}} \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \\
\mathrm{D_{qp2}} &= \mathrm{q_{qp31}} = \; \dot{\mathrm{a}}_3{}^\mathrm{i} \, \mathrm{a_{1i}} \; = -\dot{\mathrm{B}} \sin \mathrm{C} + \dot{\mathrm{A}} \sin \mathrm{B} \cos \mathrm{C} \\
\mathrm{D_{qp3}} &= \mathrm{q_{qp12}} = \; \dot{\mathrm{a}}_1{}^\mathrm{i} \, \mathrm{a_{2i}} \; = \quad \dot{\mathrm{A}} \cos \mathrm{B} + \dot{\mathrm{C}} \quad .
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Für die Umkehrung, also die Drehung vom $\mathbf{p}_i$ –System in das $\mathbf{q}_j$ –System mit der Transformation $\mathbf{p}_i = a^j{}_i \, \mathbf{q}_j$, wird in analoger Weise der relative Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{pq} = \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_q = D_{pq}{}^i \mathbf{p}_i$ verwendet. Dieser beschreibt die *Eigenbewegung* des $\mathbf{p}_i$ –Systems in Bezug auf das $\mathbf{q}_j$ –System. Es ist (siehe auch die Definitionsgleichungen (2.36))

$$\mathbf{D}_{pq} \; = \; -\mathbf{D}_{qp} \tag{2.44}$$

und die Variationsgleichungen (2.37) lauten in diesem Fall

$$\begin{aligned}
\dot{B} \; &= \; -\mathbf{D}_{pq} \cdot \mathbf{k}_1 \\
\dot{A} \sin B \; &= \; -\mathbf{D}_{pq} \cdot \mathbf{k}_2 \\
\dot{C} \sin B \; &= \quad \mathbf{D}_{pq} \cdot \mathbf{h}_2 \quad .
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Entsprechend hat der relative Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{pq}$ die Komponenten

$$
\begin{aligned}
D_{pq1} &= -\dot{B}\cos A - \dot{C}\sin B\,\sin A \\
D_{pq2} &= -\dot{B}\sin A + \dot{C}\sin B\,\cos A \qquad (2.46)\\
D_{pq3} &= -\dot{A} - \dot{C}\cos B \qquad .
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (2.43) bzw. (2.46) werden in der Literatur gelegentlich als „*Euler*sche kinematische Gleichungen“ bezeichnet[1]. Allerdings findet sich in der Literatur üblicherweise nur einer dieser beiden Gleichungssätze.

2.1.4 Das *Leibniz*system

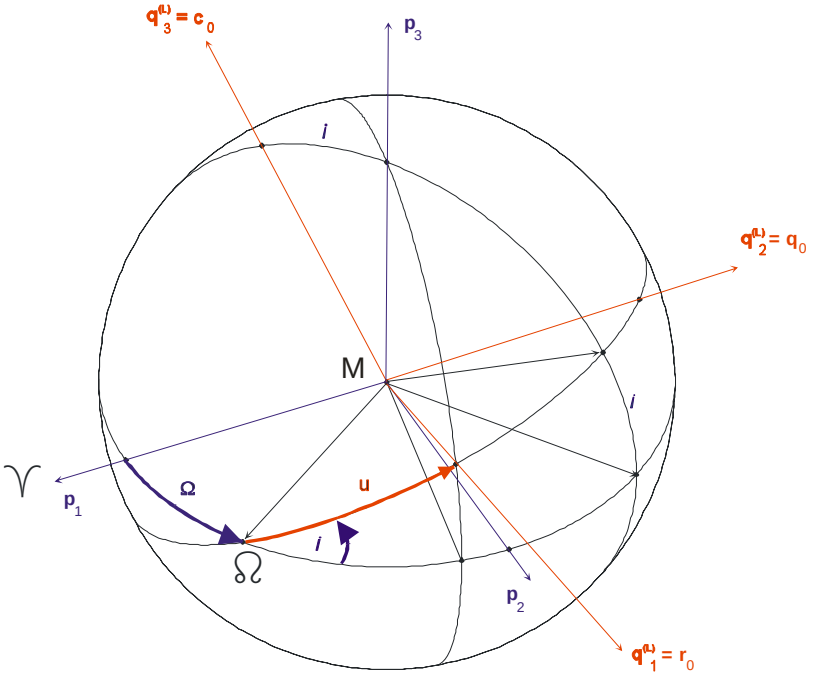

Bild 2-3: Zur Herleitung der Beziehungen zwischen dem $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ - *Leibniz*- System (rot) und dem Frühlingspunkbezogenen Äquatorsystem $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ – („Newton“-) System (blau), das als inertiales Bezugssystem angesehen werden soll

Das von *G. W. Leibniz*[2] eingeführte mitbewegte Bahnsystem[3] ist an die Bahnbewegung des betrachteten Körpers gebunden. Es schließt somit die inertiale Eigenbewegung dieses Körpers wie alle zugehörenden Scheinbeschleunigungen ein. Dieses System wird in satellitentechnischem Zusammenhang bisweilen als HCL-System bezeichnet, dessen H-Komponente (‘Height’) in Richtung des Radiusvektors weist, die L-Komponente (‘Long’-) in transversaler Richtung und die C-Komponente (‘Cross’-) in Richtung der Bahnnormalen weist. Allerdings wird in der Literatur die L-Komponente häufig entlang der Bahn also in tangentialer Richtung angesetzt. Dann steht die L-Komponente nicht senkrecht auf dem Radiusvektor und in diesem Fall muss das Tangenten-bezogene System zur Anwendung kommen. Zur Untersuchung des Bewegungsverhaltens von Raumflugkörpern wird üblicherweise eine Menge von unterschiedlichen mitgeführten Koordinatensystemen mit unterschiedlicher Aufgabenstellung benötigt.

---

[1] etwa in V. BRUMBERG (1995), p.73

[2] LEIBNIZ, G. W. (1689), auch E. J. AITON (1960) und E. J. AITON (1965)

[3] In der Satellitentechnik auch als „Orbitsystem“ bezeichnet

Um eine eindeutige Begriffsbildung zu erlauben, soll daher im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit der Begriff *Leibniz*system verwendet werden. Dieses System wird wie folgt definiert.

Hat der beobachtete Körper in Bezug auf einen Ursprung M den Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$, ist das mitbewegte System als ein orthonormiertes System durch das begleitende Dreibein $\mathbf{r}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{c}_0$ in radialer , normaler und transversaler Richtung eindeutig definiert:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad , \quad \mathbf{c}_0 = \frac{\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}|} \quad , \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0\times\mathbf{r}_0 \quad . \tag{2.47}$$

Wird die Basis des mitbewegten *Leibniz*-System einheitlich mit

$$\mathbf{q}_1^{(L)} = \mathbf{r}_0 \ , \ \mathbf{q}_2^{(L)} = \mathbf{q}_0 \ , \ \mathbf{q}_3^{(L)} = \mathbf{c}_0 \tag{2.48}$$

bezeichnet, kann für die Transformation vom *Leibniz*-System in das Frühlingspunkt - bezogene Äquatorsystem (eventuell als ein inertiales (*Newton*-) System aufgefasst)

$$\mathbf{q}_j^{(L)} = a_j{}^i\,\mathbf{p}_i \tag{2.49}$$

geschrieben werden. Die Koeffizienten der Transformationsmatrix können aus der Transformationsmatrix (2.23) mit den Zuordnungen $A\to\Omega$ (Rektaszension des aufsteigenden Knotens), $B\to i$ (Inklination der Bahnebene) und $C\to u$ (Argument der Breite) berechnet werden. Damit haben der radiale, der transversale, sowie der normale Richtungsvektor in äquatorialen Koordinaten die Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= a_1{}^i\,\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1\left(-\cos i\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\right)+\mathbf{p}_2\left(\cos i\sin u\cos\Omega+\cos u\sin\Omega\right)+\mathbf{p}_3\sin i\sin u\\
\mathbf{q}_0 &= a_2{}^i\,\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1\left(-\cos i\cos u\sin\Omega-\sin u\cos\Omega\right)+\mathbf{p}_2\left(\cos i\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\right)+\mathbf{p}_3\sin i\cos u\\
\mathbf{c}_0 &= a_3{}^i\,\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1\sin i\sin\Omega-\mathbf{p}_2\sin i\cos\Omega+\mathbf{p}_3\cos i \quad .
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Der Eigenbewegungsvektor des mitbewegten Bahnsystems kann auf das äquatoriale Basissystem bezogen werden mit dem relativen Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}p} := D^j_{q^{(L)}p}\,\mathbf{q}_j^{(L)} := \mathbf{D}_{q^{(L)}} - \mathbf{D}_p = D^j_{q^{(L)}}\,\mathbf{q}_j^{(L)} - D^i_p\,\mathbf{p}_i = \left(D^j_{q^{(L)}} - D^i_p\,a^j{}_i\right)\mathbf{q}_j^{(L)} \quad . \tag{2.51}$$

Mit den Formeln (2.43) können die Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors berechnet werden:

$$\begin{aligned}
D_{q^{(L)}p1} &= \left(i\right)^{\cdot}\cos u + \dot{\Omega}\sin i\,\sin u\\
D_{q^{(L)}p2} &= -\left(i\right)^{\cdot}\sin u + \dot{\Omega}\sin i\,\cos u\\
D_{q^{(L)}p3} &= \dot{\Omega}\cos i \quad + \dot{u} \qquad\qquad .
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Umgekehrt kann der relative Eigenbewegungsvektor des äquatorialen Basissystems in Bezug auf das mitbewegte Bahnsystem berechnet werden aus

$$\mathbf{D}_{pq^{(L)}} := \mathbf{D}_p - \mathbf{D}_{q^{(L)}} = D^i_{pq^{(L)}}\,\mathbf{p}_i \tag{2.53}$$

mit den Komponenten (siehe die Formeln (2.46))

$$
\begin{aligned}
D_{pq^{(L)}1} &= -(i)^{\cdot} \cos\Omega - \dot{u} \sin i \sin\Omega \\
D_{pq^{(L)}2} &= -(i)^{\cdot} \sin\Omega + \dot{u} \sin i \cos\Omega \\
D_{pq^{(L)}3} &= -\dot{\Omega} - \dot{u} \cos i \qquad .
\end{aligned} \tag{2.54}
$$

Werden n Transformationen mit dem jeweiligen relativen Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q(i)q(i-1)}$ (i = 1,2, ... , n) nacheinander durchgeführt, lautet nach n Transformationen der (Gesamt-) Eigenbewegungsvektor, wenn

$$
\mathbf{D}_p := \mathbf{D}_{q(0)} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{D}_q := \mathbf{D}_{q(n)} \tag{2.55}
$$

gesetzt wird,

$$
\mathbf{D}_q = \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_{q(1)p} + \mathbf{D}_{q(2)q(1)} \ldots + \mathbf{D}_{q(n)q(n-1)} = \mathbf{D}_p + \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{D}_{q(\nu)q(\nu-1)} \quad . \tag{2.56}
$$

Werden mehrere Transformationen nacheinander durchgeführt, kann der absolute Eigenbewegungsvektor $\boldsymbol{D}_{\mathrm{q}}$ somit nur bei Kenntnis aller „alten“ Eigenbewegungsvektoren berechnet werden. Wenn es nicht auf irgendeine physikalische Weise gelingt, die Variationsvektoren $\dot{\mathbf{q}}_j$ eines Koordinatensystems unabhängig von Transformationen auf andere Bezugssysteme zu bestimmen, muss die Folge von Rücktransformationen so lange durchgeführt werden, bis jenes System gefunden ist, dessen Variationsvektoren $\dot{\mathbf{p}}_i$ mit zugehörendem Eigenbewegungsvektor $\boldsymbol{D}_{\mathrm{p}}$ bekannt sind[1].

2.2 Himmelsmechanische Grundlagen

2.2.1 *Kepler*bewegung und *Leibniz*gleichung

J. Kepler hatte mit seinen drei Gesetzen der Planetenbewegung[2] die Bewegungen in einem relativen Zweikörpersystem (Sonne-Planet) beschreiben können.

Das erste Gesetz beschreibt die Bahnform dieser Bewegung auf einem Kegelschnitt, etwa durch die Polargleichung

$$
r = \frac{p}{1 + e\cos\upsilon} \quad . \tag{2.57}
$$

Hier bedeuten r den Radius, d.h. den relativen Abstand der beiden Körper, e die numerische Exzentrizität, p den Parameter des Kegelschnitts (im Fall elliptischer Bewegung $p=a(1-e^2)$ mit a als großer Bahnhalbachse), υ der wahren Anomalie als zentrischem Winkel zwischen dem der Masse m_1 nächsten Punkt und dem Ort der Masse m_2 (“Planet“), wenn m_1 (“Sonne“) in einem Brennpunkt des Kegelschnitts angenommen wird. Eine (natürliche, d.h. nicht durch künstliche Beschleunigungen beeinflusste) Bewegung erfolgt nur im Fall einer Zweikörperbewegung auf einem Kegelschnitt. Bei den hier erfolgenden himmelsmechanischen Betrachtungen wird stets angenommen, dass die beiden Körper Punktmassen seien, bzw. kugelsymmetrisch aufgebaute Körper mit gleichmäßiger Massenverteilung. Abweichungen davon, d.h.

---

[1] Diese Betrachtungen werden in Abschnitt 2.4.11 auf Seite 62 im Rahmen des Additionstheorems für räumliche Drehungen in Bezug auf die Addition von Winkelgeschwindigkeiten ergänzt

[2] z.B. in K. STUMPFF (1959)

Abweichungen von einer reinen Zweikörperbewegung, müssen dann im Rahmen einer „Störungsrechnung“ berücksichtigt werden.

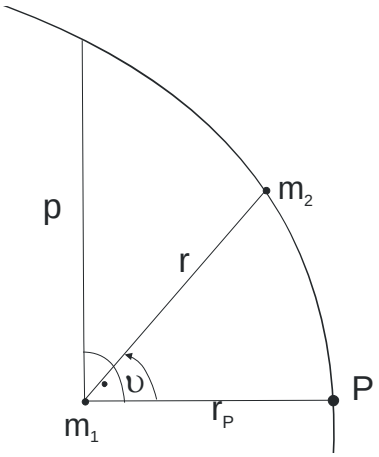

Bild 2-4: Relative *Kepler*bewegung einer Masse m_2 um die Masse m_1 im zentrischen Abstand r, bezogen auf das Perizentrum P im Abstand r_P, mit wahrer Anomalie υ und Parameter p des Kegelschnittes

Das zweite *Kepler*sche Gesetz ist der Flächensatz, der in skalarer Form

$$r^2 \dot{\upsilon} = G \tag{2.58}$$

lautet. *G* ist die Flächenkonstante. Der Flächensatz kann für jede Bewegung hergeleitet werden. Im allgemeinen Fall darf jedoch nicht die wahre Anomalie υ als Bahnwinkel verwendet werden und G ist im allgemeinen Fall keine Konstante. In der hier gegebenen Form ist der Flächensatz nur im Rahmen einer Zweikörperbewegung gültig.

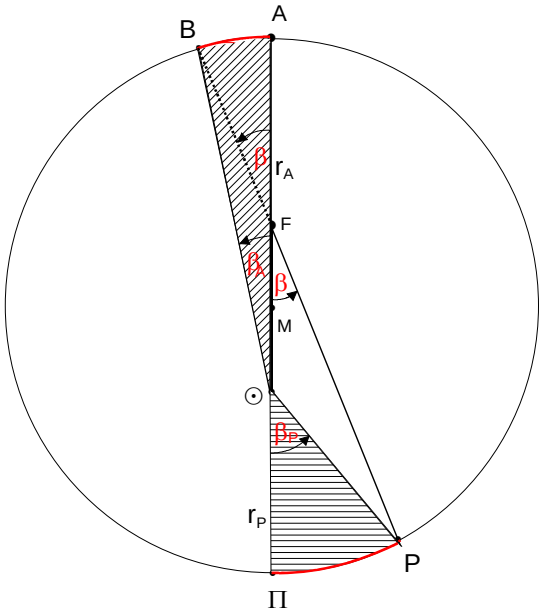

Bild 2-5: Der Flächensatz in den Apsiden als Beispiel für den Flächensatz einer Bewegung auf einem Kegelschnitt (⊙ – Sonne, Π - Perihel, M – Mittelpunkt der Ellipse, F – Antifocus, r_P- Periheldistanz, r_A – Apheldistanz, ΠP und AB – Bahnbogen des Planeten im jeweils gleichen Zeitintervall)

Das dritte *Kepler*sche Gesetz in seiner originalen Form ist nur im Rahmen elliptischer *Kepler*bewegung gültig. Es gibt den Zusammenhang zwischen der Umlaufzeit *P* (von Perizentrum zu Perizentrum) und der großen Bahnhalbachse a

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{\mu} a^3 \quad . \tag{2.59}$$

Mit der mittleren Bewegung $n := 2\pi / P$ kann dieses Gesetz auch in der üblichen Form

$$\mu = n^2 a^3 \quad . \tag{2.60}$$

geschrieben werden. Allerdings ist auch diese Schreibweise an die elliptische *Kepler*bewegung gebunden. Eine mehr allgemeingültige und erweiterbare Form stellt das Gesetz in der Form

$$\mu p = G^2 \tag{2.61}$$

dar. Diese ist eine Verknüpfung der Parameter des ersten und des zweiten Gesetzes, wobei der Proportionalitätsfaktor durch das *Newton*sche Attraktionsgesetz gedeutet wird. Er lautet im Rahmen des Zweikörperproblems

$$\mu := G_N \left(m_1 + m_2 \right) \tag{2.62}$$

mit der Newtonschen Gravitationskonstante G_N.

Bereits *Kepler* vermutete, dass die Bewegung der Planeten durch eine „bewegende Kraft" gesteuert würde, die mit dem Quadrat der Entfernung von der Sonne abnehme[1]. Eine mathematische Formulierung fehlt bei *Kepler*, dem der *Newton*'sche Kraftbegriff noch nicht bekannt sein konnte. Dagegen haben *I. Newton* und von diesem unabhängig *G.W. Leibniz* Formulierungen für die Beschleunigung eines bewegten Objektes auf Basis des $1/r^2$ – Gesetzes gefunden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist die *Leibniz*-Gleichung[2] zur Beschreibung der radialen Beschleunigung von zentraler Bedeutung. *Leibniz* hat sie für die elliptische *Kepler*bewegung hergeleitet, sie gilt jedoch in dieser Form für jede Kegelschnittbewegung:

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} - \frac{G^2}{p} \frac{1}{r^2} \quad . \tag{2.63}$$

Im Fall einer Kreisbewegung ($r=p=a$) verschwindet die radiale Beschleunigung. Die *Leibniz*sche Formulierung kommt ohne die *Newton*sche Dynamik aus. Ein Zusammenhang mit dieser kann mit Hilfe der alternativen Formulierung (2.61) des dritten *Kepler*schen Gesetzes hergestellt werden. Dann lautet im Rahmen einer Zweikörperbewegung die Beschleunigung auf ein bewegtes Objekt, die wir als *Kepler*sche Beschleunigung bezeichnen wollen,

$$b_{RK} := \frac{\mu}{r^2} = \frac{G^2}{r^3} - \ddot{r} \quad . \tag{2.64}$$

---

[1] Epitome IV,2, KGW Bd. VII, p.304, auch: Brief vom 1. Okt. 1602, KGW XIV,280, Zeile 653-657, siehe auch U. HOYER (1976), p.199, U. HOYER (1979), p.71, V. BIALAS (2004) p. 91

[2] Der Begriff „*Leibniz*-Gleichung" geht auf einen Vorschlag von E. J. AITON (1960) zurück

2.2.2 Klassische Störungsrechnung zur Lösung der Planetengleichungen

Schon *Newton* hatte aus der Existenz seines Attraktionsgesetzes, das die Kraft zwischen zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r beschreibt

$$\mathbf{F} = -G_N \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad , \tag{2.65}$$

Geschlossen, dass eine solche Kraft zwischen allen Körpern des Sonnensystems wirken muss. Dieses System lässt sich also bereits nicht als Zweikörperproblem beschreiben, die *Kepler*schen Gesetze haben dann keine Gültigkeit mehr. *L. Euler*, der die Entwicklung des Zweikörperproblems abgeschlossen hatte, hatte erkannt, dass Drei- und Mehrkörperprobleme nicht geschlossen lösbar sind. Er schlug vor, ausgehend von der Lösung eines Zweikörperproblems durch Variation dessen Parameter eine beliebige Bewegung anzunähern. Die Keplersche Bahnellipse dient damit zur Anpassung einer beliebigen Bewegung, wobei die sechs Parameter der Keplerbewegung jetzt als zeitabhängige Funktionen dargestellt werden. In der Folgezeit wurden andere Bahnkurven zur Anpassung bestimmter Bewegungen vorgeschlagen. Diese Kurven werden als intermediäre Bahnen bezeichnet. Ihre Definition ist nicht einheitlich. Üblicherweise handelt es sich dabei um Kurven, die mit einem Teil eines Störproblems (=mathematische Zusammenfassung aller physikalischen Einflüsse auf eine Bewegung) analytisch gelöst werden können. Ausgehend von dieser analytischen Lösung wird dann das restliche Störproblem numerisch bearbeitet. Basierend auf einer elliptischen Keplerbewegung wurden die Variationsgleichungen der Bahnelemente von *J. L. Lagrange* aufgestellt, eine Erweiterung und Verallgemeinerung geht auf *C. F. Gauß* zurück[1].

Als Bewegungsgleichung wird ganz allgemein eine vektorielle Differentialgleichung zweiter Ordnung bezeichnet, deren Lösung somit sechs Integrationskonstanten umfasst. In einem *Leibniz*system (als einem mitrotierenden System mit all seinen bekannten Scheinbeschleunigungen) hat die Bewegungsgleichung die Darstellung

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R \mathbf{r}_0 + b_T \mathbf{q}_0 + b_N \mathbf{c}_0 \quad , \tag{2.66}$$

wobei die Koeffizienten die Beschleunigungen in radialer (b_R), transversaler (b_T) und normaler (b_N) Richtung sind. *Gauß* bezog seine allgemein (d.h. für konservative und nichtkonservative Beschleunigungen) gültigen Variationsgleichungen[2] (2.67) auf das *Leibniz*-System. Hier sind υ die wahre Anomalie, *u* das Argument der Breite, *n* die mittlere Bewegung, $\tilde{\omega} = \omega + \Omega$ mit dem Argument des Perizentrums ω, $L_0 = M_0 + \omega + \Omega$ die mittlere Epochelänge[3]. Ein Störmodell kann durch Vorgabe der Beschleunigungen b_R, b_T, b_N gegeben sein. Ein Bewegungsproblem wird üblicherweise gelöst durch numerische Integration der Bewegungsgleichung (2.66) oder durch Integration der *Gauß*'schen Variationsgleichungen und Einsetzen der Ergebnisse *a=a(t), e=e(t)*, usw. in die entsprechenden Formeln der Zweikörperbewegung.

---

[1] C. F. GAUSS (1810)

[2] Etwa nach R.H. BATTIN (1987), pp. 488-490. Der Begriff „Variationsgleichungen" geht auf den in der Himmelsmechanik seit *L. Euler* üblichen Begriff der „Variation der Parameter" zurück. Er darf also nicht mit der „Variationsrechnung" als einer Methode zur Bestimmung von Funktionen mit extremalen Eigenschaften verwechselt werden. Diese Variationsgleichungen werden in der Himmelsmehcanik auch als „Planetengleichungen" bezeichnet

[3] in BROUWER AND CLEMENCE (1961) p.282 mit ε bezeichnet.

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left(e\sin\upsilon\; b_R + \frac{p}{r}\, b_T \right) \\
\dot{e} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a}\left[\sin\upsilon\; b_R + \left(\cos u + \cos\upsilon\right) b_T \right] \\
\left(i\right)^{\cdot} &= \frac{1}{n\,a\sqrt{1-e^2}}\,\frac{r}{a}\cos u\; b_N \\
\dot{\Omega}\sin i &= \frac{1}{n\,a\sqrt{1-e^2}}\,\frac{r}{a}\sin u\; b_N \\
\left(\tilde{\omega}\right)^{\cdot} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{n\,a\,e}\left[-\cos\upsilon\; b_R + \left(\frac{r}{p}+1\right)\sin\upsilon\; b_T \right] + 2\sin^2\frac{i}{2}\,\dot{\Omega} \\
\dot{L}_0 &= -\frac{2r}{n\,a^2} b_R + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(\tilde{\omega}\right)^{\cdot} + 2\sqrt{1-e^2}\,\sin^2\frac{i}{2}\,\dot{\Omega} \quad .
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

Die Bewegungsgleichung (2.66) erlaubt noch vertiefte Einsichten in ein Bewegungsproblem. Ausgehend von Orts- und Geschwindigkeitsvektor in den Darstellungen (2.1), (2.2) und Verwendung der Basisvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ des Leibnizsystems ergibt

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \\
&\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \quad , \quad \text{mit} \quad \dot{\zeta} := \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| \\
&\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r}\,\mathbf{r}_0 + 2\,\dot{r}\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 + r\ddot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\dot{\mathbf{q}}_0 \quad .
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Der Geschwindigkeitsvektor wird in dieser Darstellung in einen radialen $\left(\dot{r}\right)$ und transversalen $\left(r\dot{\zeta}\right)$ Anteil zerlegt:

$$
V_R = \dot{r} \quad , \quad V_T = r\dot{\zeta} \quad . \tag{2.69}
$$

Zur Untersuchung des Beschleunigungsvektors kann folgendermaßen vorangegangen werden: Da die Basisvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ Einheitsvektoren sind, kann etwa $\dot{\mathbf{q}}_0$ nur Komponenten in der von den $\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{c}_0$ aufgespannten Ebene haben. Wir wollen die entsprechenden Komponenten mit $\dot{\xi}$ und $\dot{\eta}$ bezeichnen. Es werden hier die Variationen von Parametern ξ und η angenommen, da es sich hier um Variationen handelt, so dass die Dimensionen gewahrt bleiben können. Dann sei

$$
\dot{\mathbf{q}}_0 =: \dot{\xi}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.70}
$$

Es folgen für die Beschleunigungen in Bezug auf das *Leibniz*-System die Beziehungen

$$
b_R = \ddot{r} + r\dot{\zeta}\dot{\xi} \;,\; b_T = 2\,\dot{r}\,\dot{\zeta} + r\,\ddot{\zeta} \;,\; b_N = r\,\dot{\zeta}\,\dot{\eta} \quad . \tag{2.71}
$$

Der Normalenvektor der ("oskulierenden", d.h. momentanen) Bahnebene, in der die Bewegung erfolgt, lautet mit dem Zustandsvektor $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ aus den Ausdrücken (2.68)

$$
\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r^2\,\dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 = G\,\mathbf{c}_0 \quad , \quad G := \left|\mathbf{c}\right| \quad . \tag{2.72}
$$

Die Beziehung

$$
G = r^2\,\dot{\zeta} \tag{2.73}
$$

ähnelt der skalaren Form (2.58) des zweiten *Kepler*schen Gesetzes (im zweiten *Kepler*schen Gesetz ist allerdings der Flächenparameter *G* konstant). Es liegt daher nahe, die Größe

$$\zeta = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\zeta}\, dt = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| dt \tag{2.74}$$

analog der im zweiten *Kepler*schen Gesetz vorkommenden wahren Anomalie υ als einen Winkel zu interpretieren.

Wie könnte dieser Winkel eingeordnet werden? Er liegt sicherlich in der durch den Zustandsvektor $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ aufgespannten Bahnebene. Somit kann er auf ein in dieser Bahnebene angenommenes zunächst allgemein zu definierendes Koordinatensystem bezogen werden. Dieses System[1] sei durch die orthonormierte Basis $\mathbf{q}_j^{(B)}$ definiert mit $\mathbf{q}_i^{(B)} \cdot \mathbf{q}_j^{(B)} = \delta_{ij}$. Die beiden Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(B)}, \mathbf{q}_2^{(B)}$ können in der Bahnebene liegend angenommen werden, wenn für die Bahnnormale $\mathbf{c}_0 = \mathbf{q}_3^{(B)} = \mathbf{q}_1^{(B)} \times \mathbf{q}_2^{(B)}$ gesetzt wird. In Bezug auf dieses System hat der radiale Ortsvektor die Darstellung

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(B)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(B)} \sin\zeta \qquad . \tag{2.75}$$

Die Richtung von $\mathbf{q}_1^{(B)}$ ist dann entsprechend dem Integral (2.74) durch den Anfangswert ζ_0 für eine Anfangszeit („Epoche“) festgelegt. Im Allgemeinen gibt es keine Aussage, ob dieser Anfangswert fest ist, oder in irgendeiner Weise an die Bewegung des betrachteten Objektes gekoppelt ist (nicht notwendig mitbewegt!).

Ein solches System könnte das Perizentrums-bezogene anomalistische System $\mathbf{q}_j^{(P)}$ sein mit der auf das Perizentrum in Richtung von $\mathbf{q}_1^{(P)}$ bezogenen wahren Anomalie υ als Bahnwinkel (Bild 2-6 links). Ein anderes derartiges System, dessen Basisebene ebenfalls mit der Bahnebene zusammenfällt, ist das drakonitische System $\mathbf{q}_j^{(D)}$, dessen $\mathbf{q}_1^{(D)}$ – Achse auf den aufsteigenden Knoten der Bahn orientiert ist. Als Bahnwinkel wird hier das Argument der Breite *u*, der Zwischenwinkel zwischen dem aufsteigenden Knoten und dem Ortsvektor (Bild 2-6 rechts).

Diese beiden Systeme werden in der klassischen Himmelsmechanik häufig verwendet und haben hier ihre besondere Bedeutung. Aber es wird in den folgenden Kapiteln gezeigt, dass diese Systeme nicht der allgemeinen Bedingung (2.73) genügen und dass die wahre (oder eine andere, etwa die exzentrische oder die mittlere) Anomalie oder das Argument der Breite oder irgendein anderer Winkel nicht als völlig unabhängige Variable in der Beschreibung einer Bahnbewegung angenommen werden können. Dies ist ausschließlich mit dem allgemeinen Bahnwinkel ζ möglich, für den Integralbeziehung (2.74) gültig ist.

Die in diesem Abschnitt durchgeführte Betrachtung ist im Sinne von *G. W. Leibniz, J. Hermann*[2] und Nachfolgern rein kinematisch. Wodurch diese Beschleunigungen (2.71) verursacht werden, etwa durch Kräfte im Sinne *I. Newton*s und wie es nach ihm durch *L. Euler, J. L.*

---

[1] In Abschnitt 2.1.2 wurde ein allgemeines nicht-inertiales System mit $\mathbf{q}_j$ bezeichnet. Ab diesem Abschnitt werden die einzelnen in bahnmechanischem Zusammenhang benötigten Systeme mit Hochindex $\mathbf{q}_j^{(B)}$ usw. charakterisiert

[2] HERMANN, J. (1710)

Lagrange und andere impliziert wurde, ist im Zusammenhang mit den Überlegungen in diesem Kapitel uninteressant.

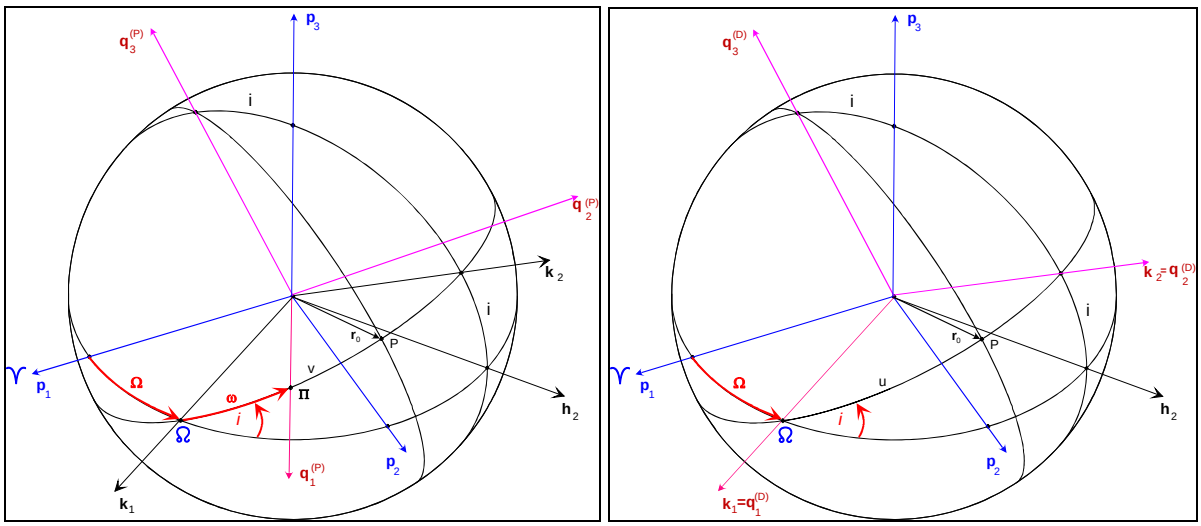

Bild 2-6 (linkes Bild): Das Apsidensystem: $\mathbf{q}_1^{(P)}$ weist zum Perizentrum, $\mathbf{q}_3^{(P)}$ ist der Bahnnormalenvektor, $\mathbf{q}_2^{(P)} = \mathbf{q}_3^{(P)} \times \mathbf{q}_1^{(P)}$ ergänzt das System zu einem Rechtssystem, (rechtes Bild): Das Knotensystem: $\mathbf{q}_1^{(D)}$ weist zum aufsteigenden Knoten der Bahn in Bezug auf die $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ - Basisebene, $\mathbf{q}_3^{(P)}$ ist der Bahnnormalenvektor, $\mathbf{q}_2^{(D)} = \mathbf{q}_3^{(D)} \times \mathbf{q}_1^{(D)}$ ergänzt das System zu einem Rechtssystem. Die Basisvektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{h}_2$ des Knotensystems sind in den Formeln (2.35) erklärt

Mit dem auch in der allgemeinen Formulierung (2.73) naheliegenderweise so genannten Flächenparameter *G* können die Beschleunigungsausdrücke (2.71) umgeschrieben werden:

$$b_R = \ddot{r} + \frac{G}{r}\dot{\xi} \quad , \quad b_T = \frac{\dot{G}}{r} \quad , \quad b_N = \frac{G}{r}\dot{\eta} \quad . \tag{2.76}$$

In der klassischen Himmelsmechanik findet sich keine Antwort, wie die Größen ξ, η, ζ bzw. ihre Differentialquotienten $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$, die hier relativ willkürlich eingeführt erscheinen, tiefer gedeutet werden können. Darüber hinaus ergibt sich die Frage, ob mit einer gewissen Deutung dieser Größen weitere interessante Aussagen für eine allgemeine Bewegungslehre (und damit insbesondere auch der Astrodynamik) ermöglicht werden können. Antworten können im Rahmen der *Hansen*-Systeme gefunden werden und sind daher ein wesentlicher Gegenstand dieser Arbeit.

2.3 Definition und grundlegende Eigenschaften der *Hansen*-Systeme

2.3.1 Die allgemeine Definition eines *Hansen*-Systems

Hansen bezieht seine „idealen“ Koordinaten auf die oskulierende Bahnebene, wie dies im vorhergehenden Abschnitt für das allgemeine $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – System durchgeführt wurde[1]. Unter einer oskulierenden Ebene wird eine Ebene verstanden, welche zu jedem Zeitpunkt durch den Zu-

[1] im Zusammenhang mit Beziehung (2.75)

standsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ aufgespannt wird. Der Ursprung dieses Systems als Bezugspunkt der Bewegung sei zunächst völlig willkürlich angenommen. Er kann bei heliozentrischen Bewegungen der Sonnenmittelpunkt oder das Baryzentrum (d.h. der Schwerpunkt) des Sonnensystems sein, bei Erdsatelliten zum Beispiel - aber nicht unbedingt notwendig - der Mittelpunkt der Erde als Gravitationszentrum. In der Bahnebene sei ein orthonormiertes Koordinatensystem mit den Richtungsvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}\,(j=1,2,3)$ gegeben, die von diesem Ursprung ausgehen. Orts- und Geschwindigkeitsvektor eines Objektes, dessen Bewegungsvorgang untersucht werden soll, haben mit den kartesischen Koordinaten y_j bei Bezug auf die Zeit als unabhängiger Variable die Darstellung[1]

$$\mathbf{r} = y^j\mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j\mathbf{q}_j^{(I)} + y^j\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \quad . \tag{2.77}$$

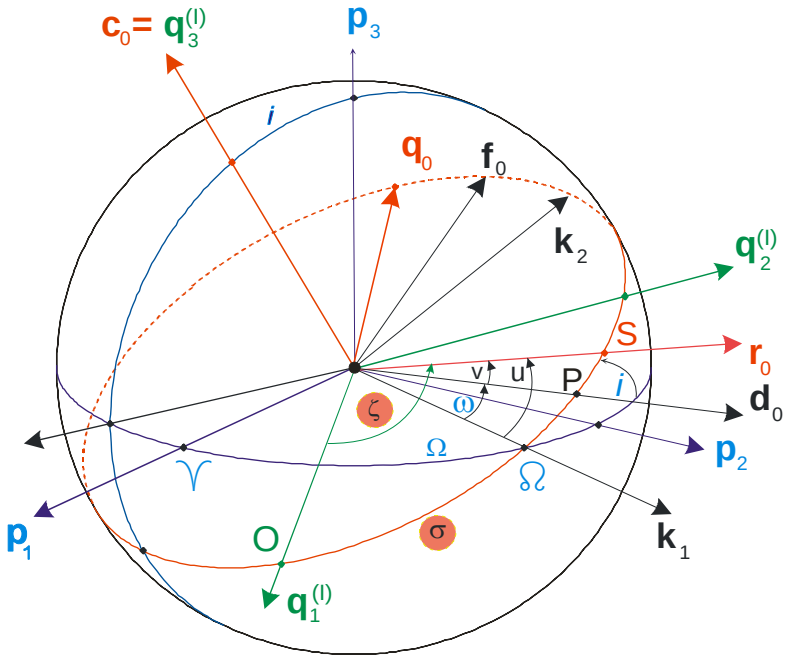

Bild 2-7: Zur Definition des „idealen Koordinatensystems“: $\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\mathbf{p}_3$ - bewegungs-unabhängiges Inertialsystem (*Newton*-System, blau), $\mathbf{r}_0,\mathbf{q}_0,\mathbf{c}_0$ – mitbewegtes System (*Leibniz*-System, rot), $\mathbf{q}_1^{(I)},\mathbf{q}_2^{(I)},\mathbf{q}_3^{(I)}$ – bewegungsbezogenes Koordinatensystem („ideales“ *Hansen*-System, grün), $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{c}_0$ – Knoten-bezogenes Koordinatensystem, $\mathbf{d}_0,\mathbf{f}_0,\mathbf{c}_0$ – Apsiden-bezogenes Koordinatensystem, ♈ - Frühlingspunkt, *O* Bezugspunkt des bewegungsbezogenen Systems („departure point“ des *Hansen*-Systems), S Ort des bewegten Objektes, ☊ - aufsteigender Knoten, P- Perizentrum (Perihel, Perigäum), Ω Rektaszension (Länge) des aufsteigenden Knotens, *i* - Inklination, σ -Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens, ζ - Bahnwinkel (erster *Hansen* Winkel), ω - Argument des Perizentrums, υ - wahre Anomalie

Das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System ist an die Bewegung des Objektes gebunden und daher ein bewegungsbezogenes System (wie jedes der oben definierten $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – Systeme). Es kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass die Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(I)}$, $\mathbf{q}_2^{(I)}$ die oskulierende Bahnebene aufspan-

[1] Im Unterschied zu dem in der Regel als inertial angenommen Fundamentalsystem mit kartesischen Koordinaten x_i werden die kartesischen Koordinaten in Bezug auf ein beliebiges Bahnsystem mit y_j bezeichnet

nen, so dass für alle folgenden Betrachtungen die Komponente senkrecht zur Bahnebene als verschwindend gesetzt werden kann[1]:

$$y_3 \equiv 0 \quad . \tag{2.78}$$

Die $\mathbf{q}_1^{(I)}$ – Achse ist durch einen Anfangswert ζ_0 festgelegt, der über das Integral (2.74) einer Epoche t_0 zugeordnet ist. Wenn nun der Winkel ζ als unabhängige Variable („Bahnwinkel“) angenommen werden soll, muss diese Anfangsrichtung fest in der Bahnebene liegen. Umgekehrt: Wenn es gelingt nachzuweisen, dass diese Anfangsrichtung für ein bestimmtes System fest in der (oskulierenden!) Bahnebene liegt und nicht an die Bewegung in der Bahnebene gekoppelt ist, dann kann ζ als unabhängige Variable verwendet werden. Es wird in den folgenden Abschnitten gezeigt, dass das *Hansen*-System diese Bedingungen erfüllt und dass es im allgemeinen Fall das einzige System mit dieser Eigenschaft ist, also ein System mit herausragender Bedeutung ist.

Nach *Hansen* (vgl. die Definitionen in Bild 1-2 auf Seite 5) ist das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System genau dann ein „ideales“, wenn die Darstellung des Geschwindigkeitsvektors im „gestörten“ wie im „ungestörten“ Fall formal dieselbe ist. Präziser ausgedrückt bedeutet das, die Eigenbewegung des Basissystems macht sich im Geschwindigkeitsvektor nicht bemerkbar. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

Die Variationen $\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)}$ der Basisvektoren, welche die Eigenbewegung dieses Systems beschreiben, verschwinden identisch. Dann gibt es keinen „störenden“ Einfluss auf dieses System, es ist fest, d.h. es ist ein inertiales System. Das kann nach *Hansen* nicht gemeint sein, denn das bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System wird als oskulierend angenommen, unterliegt also allen möglichen „Stör-„ Einflüssen, d.h. Beschleunigungen, welche auf die Bewegung des betrachteten Objektes einwirken. Es bleibt also nur die zweite Möglichkeit:

$$\begin{aligned} & y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \equiv 0 \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y^j \,,\, \mathbf{q}_j^{(I)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)} \quad \text{bilden ein } \textit{Hansen}\text{–ideales System} \quad . \end{aligned} \tag{2.79}$$

Werden die Koordinaten y^j auf ein $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System bezogen, sind sie **fest** mit diesem System verbunden. Sie machen jede Eigenbewegung dieses Systems mit, ohne dass diese Eigenbewegung in den Koordinaten zum Ausdruck kommt. In diesem Fall ist die Bedingung (2.79) für die feste Zuordnung der Koordinaten y^j zum Basissystem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ notwendig und hinreichend. Diese Koordinaten sind also stets *Hansen*-Koordinaten (bilden ein „*Hansen*-ideales System“). Werde der (zum $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System) relative Geschwindigkeitsvektor durch

$$\dot{\mathbf{r}}_q := \dot{y}^j \mathbf{q}_j^{(I)} \tag{2.80}$$

definiert, gilt für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors im $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System, das ein *Hansen*-System ist,

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j \mathbf{q}_j^{(I)} = \dot{\mathbf{r}}_q \quad , \quad (\text{wenn} \quad y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}) \quad . \tag{2.81}$$

Somit kann ein erster direkt auf *Hansen* zurückgehender Satz formuliert werden[1]:

[1] K. STUMPFF (1974), p.169

Satz H1: *In* Hansen-*Systemen ist der relative Geschwindigkeitsvektor gleich dem absoluten Geschwindigkeitsvektor.*

Es ergibt sich nun folgende Fragestellung: Ist ein derart definiertes System ein erzwungenes System, wie es *Hansen* auf die Störungsrechung anwandte um auf möglichst elegante Weise oder überhaupt die Probleme bei der Berechnung der Bewegung des Mondes und der Kleinen Planeten bearbeiten zu können? Oder ist dieses System ein generelles System, das ein natürlicher d.h. notwendiger Bestandteil bei der Darstellung von beliebigen Bewegungen ist? Das würde bedeuten, dass *Hansen* dieses System (zufällig?) entdeckte, aber durch die sofortige Anwendung auf seine aktuellen Aufgaben dessen generelle Bedeutung nicht erkannte, auch alle seine Nachfolger nicht. Diese – zugegeben elitäre – Fragestellung hat sich im Laufe der vorliegenden Arbeiten als zwingend ergeben und ist daher zum Leitfaden dieser Arbeit geworden. Ein erster Problemkreis kann aus der bekannten Literatur beantwortet werden: es gibt derartige Systeme. Dies wird im nächsten Abschnitt kurz zusammengestellt bevor eine Verallgemeinerung in Angriff genommen werden kann.

Š Die Existenz von *Hansen*-Systemen

In Formel (2.18) wurde eine wesentliche allgemeingültige Aussage über den Eigenbewegungsvektor beliebiger eine Bewegung beschreibender Systeme gefunden: die Variation des Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_q$ in Bezug auf ein nichtinertiales Basissystems enthält keinen rotatorischen Anteil, wie er in Formel (2.21) für beliebige nichtinertiale Systeme notwendig ist. Mit der im Ausdruck (2.79) gegebenen Definition für *Hansen*-Systeme ist die vorstehende Aussage zu folgender äquivalent:

Satz H2: *Ein Systemeigenbewegungsvektor (Rotationsvektor, allgemeiner Darboux-Vektor) bildet mit seinem zugehörigen Basissystem ein* Hansen-System.

Diese sehr einfache aber fundamentale Aussage ist im Zusammenhang mit der Untersuchung von *Hansen*-Systemen von eminenter Bedeutung:

► Es gibt *Hansen*-Systeme und sie sind ein wesentlicher, elementarer, notwendiger und damit natürlicher Bestandteil jeder mathematischen Beschreibung von Bewegungen.

3.1.1 Einige Charakteristiken von *Hansen*-idealen Systemen

Über *Hansen*-Systeme sind folgende mathematische Aussagen von Bedeutung im Zusammenhang mit der Untersuchung physikalischer Bewegungen[2]:

- ***Satz H3****: Die Koordinaten des skalaren Feldes f*(**r**) *sind Hansen Koordinaten, wenn der Ortsvektor* $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ *mit seiner Basis* $\mathbf{q}_j^{(I)}$ *ein* Hansen-*System bildet*.

BEWEIS: Da **r** zu einem *Hansen*–System gehört, gilt

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{y}^j \mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \quad y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \;=\; 0 \quad .$$

und es ist für die Funktion f(**r**), welche das skalare Feld beschreibt,

---

[1] P.A. HANSEN (1857)

[2] Siehe in K. STUMPFF (1974), p. 173

$$\dot{f} \;=\; \frac{df(\mathbf{r})}{dt} \;=\; \dot{\mathbf{r}}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \;=\; \dot{\mathbf{r}}\,\nabla f \;=\; \dot{y}^j\,\mathbf{q}_j^{(I)}\,\frac{\partial f}{\partial y^i}\mathbf{q}_i^{(I)} \;=\; \dot{y}^j\,\frac{\partial f}{\partial y^j} \quad .$$

Die Variation des skalaren Feldes eines *Hansen*-Systems hängt nur von den Variationen der Koeffizienten des (einem *Hansen*-System angehörigen) Ortsvektors des Feldes, nicht von einer Variation des Basissystems ab. Bildet dagegen ein beliebiger Ortsvektor $\mathbf{r} = y^j\,\mathbf{q}_j$ mit seiner Basis kein *Hansen*-ideales System, wird im dreidimensionalen Raum (entsprechendes bei höheren Dimensionen)

$$\begin{aligned}\dot{f} \;=\; \dot{y}^i\,\frac{\partial f}{\partial x^i} \;&+\; \left(y_1\frac{\partial f}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)\dot{\mathbf{q}}_1\,\mathbf{q}_2 \;+\\ &+\; \left(y_2\frac{\partial f}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)\dot{\mathbf{q}}_2\,\mathbf{q}_3 \;+\\ &+\; \left(y_3\frac{\partial f}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)\dot{\mathbf{q}}_3\,\mathbf{q}_1 \qquad \square\end{aligned}$$

(2) Die Einführung des Systemeigenbewegungsvektors erlaubt einen tieferen Einblick in das Wesen von *Hansen*-Systemen. Ist ein Zustandsvektor in der Form (2.77) für das bewegte orthonormierte $\mathbf{q}_j$ – System (mit $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \;=\; \delta_{ij}$) gegeben, dessen Systemeigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_\mathrm{q}$ sei mit $\dot{\mathbf{q}}_j \;=\; \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j$, so wird

$$y^j\,\dot{\mathbf{q}}_j \;=\; \mathbf{D}_q \times \mathbf{r} \quad . \tag{2.82}$$

Für (nichtfeste, nicht inertiale, mit $\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \neq 0$) dreidimensionale *Hansen*-Systeme $y^j\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0$ ist also notwendig und hinreichend (der Systemeigenbewegungsvektor des *Hansen*-Systems werde mit $\mathbf{D}_{q^{(I)}}$ bezeichnet)

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} \times \mathbf{r} \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{System } \textit{Hansen}\text{–ideal} \quad . \tag{2.83}$$

Dieser Sachverhalt lässt sich in folgender auf *Hansen*[1] direkt zurückgehenden Aussage formulieren:

Satz H4*: Ein Vektor im dreidimensionalen Vektorraum bildet mit seiner Basis genau dann ein* Hansen-*System, wenn seine Richtung stets in Richtung des eine Drehung beschreibenden Eigenbewegungsvektors dieses Systems zeigt.*

(3) Die Variationen der Basis eines beliebigen $\mathbf{q}_j$ – Systems haben nach Definitionsgleichung (2.9) die Darstellung $\dot{\mathbf{q}}_\mathrm{j} = \mathrm{q_j}^\mathrm{k}\mathbf{q}_\mathrm{k}$. Hierfür gilt folgender[2]

Satz H5*: Ein Ortsvektor* $\mathbf{r} = \mathrm{y}^\mathrm{j}\,\mathbf{q}_\mathrm{j}$ *bildet mit seiner Basis genau dann ein* Hansen-*ideales System, wenn die Komponenten der Variationsmatrix* $\left(\mathrm{q_j}^\mathrm{k}\right)$ *dieses Systems die Bedingung*

[1] P. A. HANSEN (1857), p. 67, siehe Kopie in Bild 1-3 auf Seite 5

[2] etwa nach K. STUMPFF (1974)

$$y^j q_j^{\ k} = 0 \qquad (k = 1,2,3) \tag{2.84}$$

erfüllen.

BEWEIS: $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j$ bildet mit den $\mathbf{q}_j$ genau dann ein *Hansen*-ideales System, wenn $y^j \dot{\mathbf{q}}_j = 0$. Für die Variationsparameter $\left(q_j^{\ k}\right)$ des $\mathbf{q}_j$ – Systems gilt somit $y^j q_j^{\ k} \mathbf{q}_k = 0$. Da die $\mathbf{q}_j$ als eine Basis linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten die Bedingung $y^j q_j^{\ k} = 0$ für k=1,2,3 erfüllen. □

(4) Eine wichtige Aussage über die Mächtigkeit von *Hansen*-idealen Systemen kann direkt aus Formel (2.84) erhalten werden. Es ist

$$q_{23} y_2 - q_{31} y_1 = 0 \ , \ q_{31} y_3 - q_{12} y_2 = 0 \ \ , \ \ q_{12} y_1 - q_{23} y_3 = 0 \quad . \tag{2.85}$$

Es sind also nur zwei Komponenten y_j aus der Bedingung von Hansen-idealen Systemen bestimmbar, während die dritte Komponente willkürlich gewählt werden kann. Somit gilt[1]

Satz H6*: Zu jeder Bewegung können unendlich viele Hansen-ideale Systeme konstruiert werden.*

(5) Die Bedingung (2.84) kann zur Konstruktion eines *Hansen*-Systems genutzt werden. Nach (willkürlicher) Vorgabe eines der drei wesentlichen Koeffizienten der *Frenet*-Matrix $\left(q_j^{\ k}\right)$ können seine anderen beiden Koeffizienten aus dem System (2.84) berechnet werden. Nach *P. A. Hansen* werden im bahnmechanischen Zusammenhang nur Systeme mit $y_3 = 0$ betrachtet[2].

(6) In Ergänzung zu den vorherigen Aussagen können die beiden Sätze formuliert werden:

Satz H7*: Ausschlaggebend für einen Vektor mit einer Basis ein* Hansen-*System zu bilden, ist ausschließlich seine Richtung, nicht sein Betrag. Nicht die physikalischen Koordinaten y_j eines Vektors $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j$, sondern nur die Koordinaten seines Richtungsvektors können in Bezug auf eine gewisse Basis als* Hansen-*Koordinaten bezeichnet werden.*

Satz H8: Die *Eigenschaft eines Vektors mit seiner Basis ein* Hansen-*System zu bilden, ist an den Ortsvektor somit an die Bewegung des zugehörigen Ortes (Körpers) gebunden. Wenn es gelingt, ein* Hansen-*System zu konstruieren, kann dies nur im Zusammenhang mit einem auf die Bewegung des betreffenden Körpers bezogenen System geschehen.*

2.3.2 Bezug des *Hansen*-Systems auf das Basis- Äquatorsystem

Eine Bewegung (insbesondere jede Satellitenbewegung) wird üblicherweise in einem als inertial angenommenen Basissystem berechnet. Somit muss jedes bewegungsbezogene System, insbesondere auch ein *Hansen*-System auf dieses Basissystem bezogen werden. Als „inertiales“ Basissystem wird üblicherweise das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem gewählt.

---

[1] etwa nach K. STUMPFF (1974)

[2] Den in der Originalarbeit von HANSEN (1857) verwendeten Parametern *A, B, C* entsprechen in diesem Bericht die Komponenten D_i des Darbouxschen Vektors: $A = D_3$, $B = D_2$, $C = D_1$

Die Umrechnungen erfolgen unter Verwendung der Transformationsmatrix $\left(a_{ij}\right)$ im System (2.23) mit den Zuordnungen $A \to \Omega, B \to i, C \to -\sigma$. Hier bedeuten Ω die Rektaszension des aufsteigenden Knotens, i die Inklination der Bahnebene bezüglich der Äquatorebene, σ die Länge des aufsteigenden Knotens bezüglich des Anfangspunktes O (der in der englischen Literatur als „departure point“ bezeichnet wird[1])in der Bahnebene. Dieser Punkt ist durch den ersten Basisvektor $\mathbf{q}_1^{(I)}$ des *Hansen*-Systems ausgezeichnet, der für $\mathbf{q}_1^{(I)} = \mathbf{r}_0\left(\zeta = \zeta_0\right)$ festgelegt ist.

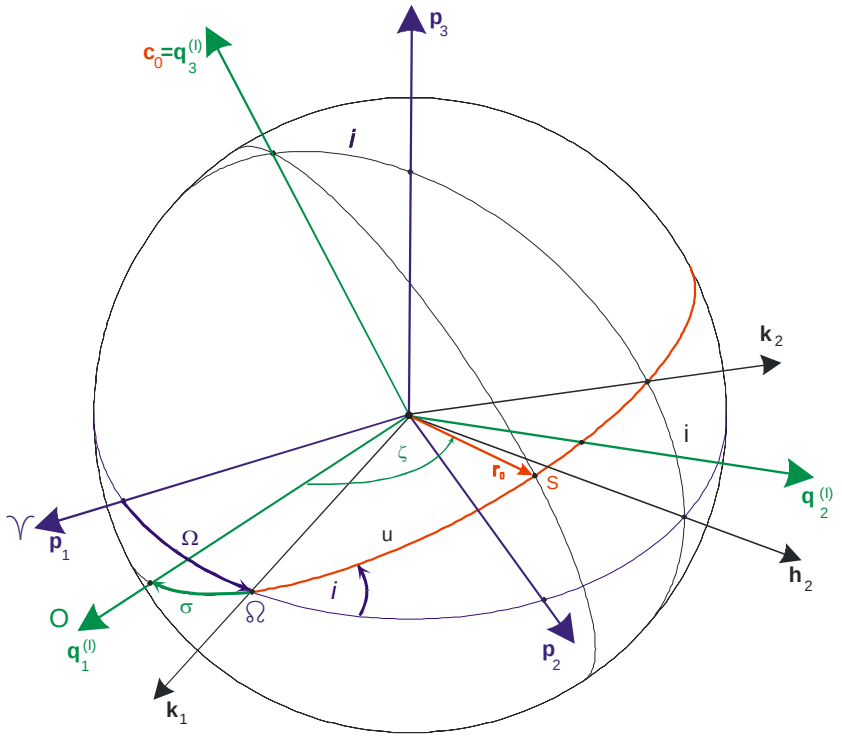

Bild 2-8: Das bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Bahnsystem (*Hansen*-System, grün), in Bezug auf das Knotensystem $\left(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3^{(I)}\right)$ und das $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem („Newton-System“, blau)

Der relative Systemeigenbewegungsvektor des *Hansen*-Systems bezüglich des Äquatorsystems, der in Analogie zur Definition (2.51) und mit Hilfe der Transformation (2.24) gegeben sei durch

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}p} := D^j_{q^{(I)}p}\mathbf{q}_j^{(I)} := \mathbf{D}_{q^{(I)}} - \mathbf{D}_p = D^j_{q^{(I)}}\mathbf{q}_j^{(I)} - D^i_p\mathbf{p}_i = D^j_{q^{(I)}}\mathbf{q}_j^{(I)} - D^i_p\, a^j{}_i\, \mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \tag{2.86}$$

hat mit den Formeln (2.52) die Koeffizienten

$$\begin{aligned} D_{q^{(I)}p1} &= q_{23} = \dot{a}^i_2\, a_{3i} = (i)^{\cdot}\cos\sigma - \dot{\Omega}\,\sin i\,\sin\sigma \\ D_{q^{(I)}p2} &= q_{31} = \dot{a}^i_3\, a_{1i} = (i)^{\cdot}\sin\sigma + \dot{\Omega}\,\sin i\,\cos\sigma \\ D_{q^{(I)}p3} &= q_{12} = \dot{a}^i_1\, a_{2i} = \dot{\Omega}\,\cos i - \dot{\sigma} \quad . \end{aligned} \tag{2.87}$$

[1] nach A. CAYLEY (1857)

Der absolute Systemeigenbewegungsvektor des äquatorialen Basissystems lautet in Bezug auf das *Hansen*-System

$$\mathbf{D}_p := D_p^i \mathbf{p}_i = D_p^i \, a^j{}_i \mathbf{q}_j^{(I)} \quad , \quad D_{p1} =: p_{23} \; , \; D_{p2} =: p_{31} \; , \; D_{p3} =: p_{12} \; . \tag{2.88}$$

Damit können die Variationsgleichungen der räumlichen Orientierungswinkel einer Bewegung aus der Beziehung (2.86) direkt hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} (i)^{\cdot} &= q_{31}\sin\sigma + q_{23}\cos\sigma - p_{31}\sin\Omega - p_{23}\cos\Omega \\ \dot{\Omega}\sin i &= q_{31}\cos\sigma - q_{23}\sin\sigma - p_{12}\sin i - (p_{31}\cos\Omega - p_{23}\sin\Omega)\cos i \\ \dot{\sigma}\sin i &= -p_{31}\cos\Omega + p_{23}\sin\Omega + (q_{31}\cos\sigma - q_{23}\sin\sigma)\cos i \; . \end{aligned} \tag{2.89}$$

Mit den obigen Parametern lauten die Variationsgleichungen:

$$\begin{aligned} (i)^{\cdot} &= \dot{\eta}\cos(\zeta - \sigma) - p_{31}\sin\Omega - p_{23}\cos\Omega \\ \dot{\Omega}\sin i &= \dot{\eta}\sin(\zeta - \sigma) - p_{12}\sin i - (p_{31}\cos\Omega - p_{23}\sin\Omega)\cos i \\ \dot{\sigma}\sin i &= \dot{\eta}\sin(\zeta - \sigma)\cos i - p_{31}\cos\Omega + p_{23}\sin\Omega \quad . \end{aligned} \tag{2.90}$$

(Anmerkung: hier wurde wieder die Möglichkeit offen gelassen, ob das Basis-$\mathbf{p}_i$ – System inertial ist (dann sind die $p_{ij} \equiv 0$) oder nicht).

2.4 Weiterführende Eigenschaften der *Hansen*-Systeme

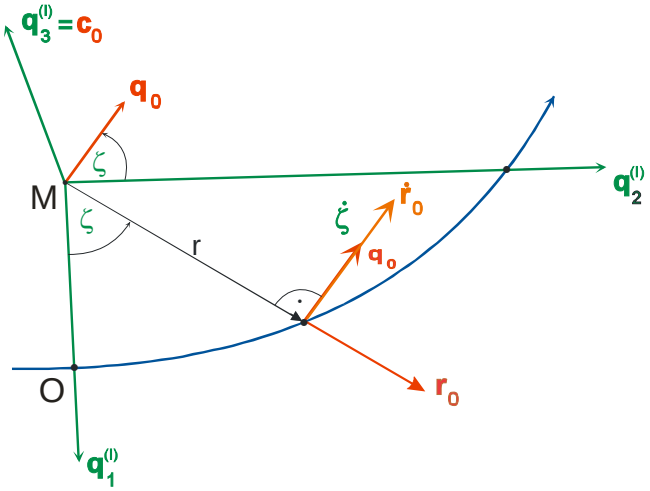

Bild 2-9: Das mitgeführte $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{q}_0$, $\mathbf{c}_0$ – *Leibniz*-Bahnsystem (rotes System) und der Bahnwinkel ζ sowie das bewegungsbezogene *Hansen*-ideale $\mathbf{q}_1^{(I)}$, $\mathbf{q}_2^{(I)}$, $\mathbf{q}_3^{(I)}$ - System (grünes System)

Im letzten Abschnitt wurden die bisher bekannten Eigenschaften der *Hansen*-Systeme und ihr Bezug zu einem *Leibniz*-System sowie zu einem als *Newton*-System deklarierbaren Äquator- (oder Ekliptik) –System, das als inertial angenommen werden kann (aber nicht notwendig inertial sein muss), zusammengestellt. Während das mitbewegte *Leibniz*-System an die Bewegung des betrachteten Objektes gekoppelt ist und damit im Schwerpunkt dieses Objektes seinen Bezugspunkt hat, sind das *Newton*- und das *Hansen*-System auf einen grundsätzlich willkürlichen festen Bezugspunkt außerhalb der Bahnkurve bezogen. *Newton* - und *Hansen*-Systeme haben formal ähnliche Eigenschaften, die auf der formalen Behandlung von inertialen Systemen beruhen. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass *Newton*-Systeme uni-

versell sind unabhängig von jedweder Bewegung, während *Hansen*-Systeme an die oskulierende Bahnebene gekoppelt sind. Die besonderen Eigenschaften von *Hansen*-System*e*n, welche diese Systeme vor allen anderen Systemen auszeichnen sollen in den folgenden Abschnitten mit einigen mathematischen Sätzen (die in der bisherigen Literatur zu diesem Thema nicht zu finden sind) herausgearbeitet werden.

Die Verknüpfung zwischen einem *Leibniz*-System mit den Basisvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ und einem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System ist in Analogie zu Formel (2.75) und nach Bild 2-9 gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(I)} \quad . \end{aligned} \tag{2.91}$$

Hier ist ζ der mit dem Integralausdruck (2.74) erhaltene Bahnwinkel. Seine besondere Auszeichnung wird im Folgenden hergeleitet.

2.4.1 Die Kernaussage über *Hansen*-Systeme

Als zentrale Eigenschaft von *Hansen*-Systemen angesehen werden kann der folgende

Satz H9[1]: *Wird der Betrag der Variation des radialen Einheitsvektors einer Bewegung als Differentialquotient eines Winkels verstanden, so ist dieser Winkel (notwendig und hinreichend) die Winkelkoordinate eines* Hansen-*Koordinatensystems.*

Beweis: In mathematischer Formulierung lautet die Aussage dieses Satzes: wenn

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \quad , \left(\mathbf{q}_0{}^2 = 1, \dot{\zeta} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right|\right) \quad , \tag{2.92}$$

ist ζ die Winkelkoordinate eines *Hansen*-Systems (vgl. Bild 2-9). Um dies zu beweisen, werden die $\mathbf{q}_j$ – Basisvektoren dieses Systems so gewählt, dass sich der radiale und der transversale Richtungsvektor mit Hilfe des Winkels ζ beschreiben lassen. Es gilt dann entsprechend für die Basis des bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j$ – Systems

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{r}_0 \cos\zeta - \mathbf{q}_0 \sin\zeta \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{r}_0 \sin\zeta + \mathbf{q}_0 \cos\zeta \quad . \end{aligned} \tag{2.93}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \dot{\mathbf{r}}_0 \cos\zeta - \dot{\mathbf{q}}_0 \sin\zeta - \mathbf{r}_0 \dot{\zeta} \sin\zeta - \mathbf{q}_0 \dot{\zeta} \cos\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= \dot{\mathbf{r}}_0 \sin\zeta + \dot{\mathbf{q}}_0 \cos\zeta + \mathbf{r}_0 \dot{\zeta} \cos\zeta - \mathbf{q}_0 \dot{\zeta} \sin\zeta \quad . \end{aligned} \tag{2.94}$$

Mit den Koordinaten

$$y_1 = r\cos\zeta \quad , \quad y_2 = r\sin\zeta \tag{2.95}$$

und wegen der Definition (2.92) wird daher

$$\frac{1}{r} y^j \dot{\mathbf{q}}_j = \dot{\mathbf{r}}_0 - \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 = 0 \quad . \tag{2.96}$$

[1] 3. Mai 2005

Das über $\dot{\zeta} = |\dot{\mathbf{r}}_0|$ definierte $\mathbf{q}_j$ – Koordinatensystem ist somit im *Hansen*schen Sinne notwendig ideal und es kann $\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_j^{(I)}$ gesetzt werden.

Diese Eigenschaft ist auch hinreichend: Wenn nämlich für das bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Koordinatensystem mit den Koordinaten (2.95) die Bedingung für *Hansen*-Systeme

$$y^j \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = r\left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \sin\zeta\right) = 0 \tag{2.97}$$

erfüllt ist, ist auch

$$\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \sin\zeta = 0 \quad . \tag{2.98}$$

Mit den Beziehungen (2.91) wird somit

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\left(-\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta\right) + \left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} \cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \sin\zeta\right) = \dot{\zeta}\, \mathbf{q}_0 \quad .$$

Die *Hansen*-Bedingung (2.92) ist somit erfüllt.■

Dieser Satz ist von großer Wichtigkeit, da er erlaubt zu **jeder** Bewegung ein *Hansen*-ideales Bezugssystem zu konstruieren. Es gibt sogar in jedem Fall unendlich viele solcher „idealen" Systeme, da die Integration von $\dot{\zeta} = |\dot{\mathbf{r}}_0|$ noch eine frei wählbare Integrationskonstante ζ_0 enthält, wie bereits in Satz H6 festgestellt worden ist.

2.4.2 Himmelsmechanische Folgerungen

In bahnmechanischem Zusammenhang kann an die Kernaussage H9 sofort ein zweiter grundlegender Satz angeschlossen werden, welcher die fundamentale Bedeutung des von *P. A. Hansen* entdeckten Koordinatensystems für die gesamte Himmelsmechanik beleuchtet.

Satz H10[1]: *Die in der skalaren Form des Flächensatzes vorkommende Variation eines Bahnwinkels führt im Fall elliptischer Bewegung auch bei variablem Flächenparameter notwendig auf ein* Hansen-*Koordinatensystem, wenn das Basissystem, auf das die Bewegung bezogen wird, ein inertiales System ist.*

Beweis: Um diesen Satz zu beweisen, werde nach Bild 2-7 auf Seite 31 die Bahnebene, welche durch die Basisvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ aufgespannt wird, auf die $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ - Basisebene, üblicherweise das Äquatorsystem, bezogen. Der $\mathbf{p}_1$ – Vektor weist zum Frühlingspunkt ♈. Dieses System werde als ein inertiales System mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$ verstanden. Der aufsteigende Knoten ☊ hat vom Frühlingspunkt die Rektaszension Ω, Drehung um den Knotenvektor $\boldsymbol{k}_1$ mit Inklination *i* führt in die Bahnebene, in welcher der betrachtete Himmelskörper den radialen Richtungsvektor $\boldsymbol{r}_0$ hat., $\boldsymbol{d}_0$ ist der Perizentrumsvektor, von dem $\boldsymbol{r}_0$ den Winkelabstand υ hat, die wahre Anomalie, und der vom aufsteigenden Knoten der Bahn um das Argument des Perizentrums ω entfernt ist. $\boldsymbol{f}_0$ in der Bahnebene mit υ=90° ist der so genannte Parametervektor (in seiner Richtung hat der Bahnradius als Länge genau den Kegelschnittparameter *p*). Es ist

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{d}_0 \cos\upsilon + \mathbf{f}_0 \sin\upsilon \tag{2.99}$$

und der transversale Richtungsvektor lautet auch hier

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{d}_0 \sin\upsilon + \mathbf{f}_0 \cos\upsilon \quad . \tag{2.100}$$

[1] 2. Mai 2005

$\mathbf{c}_0 = \mathbf{d}_0 \times \mathbf{f}_0$ mit $\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0$ ist der Normalenvektor der Bahnebene. In Bezug auf das $\mathbf{p}_i$ – Inertialsystem haben diese Vektoren nach Bild 2-7 die Darstellungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_0 &= \mathbf{p}_1 \left(-\cos i \sin\omega \sin\Omega + \cos\omega \cos\Omega\right) + \mathbf{p}_2 \left(\cos i \sin\omega \cos\Omega + \cos\omega \sin\Omega\right) + \mathbf{p}_3 \sin i \sin\omega \\
\mathbf{f}_0 &= \mathbf{p}_1 \left(-\cos i \cos\omega \sin\Omega - \sin\omega \cos\Omega\right) + \mathbf{p}_2 \left(\cos i \cos\omega \cos\Omega - \sin\omega \sin\Omega\right) + \mathbf{p}_3 \sin i \cos\omega \\
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \mathbf{p}_3 \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Die Variationen sind

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{d}}_0 &= \left[(i)^{\cdot} \sin\omega - \dot{\Omega} \cos\omega \sin i\right] \mathbf{c}_0 + \left[\dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i\right] \mathbf{f}_0 \\
\dot{\mathbf{f}}_0 &= \left[(i)^{\cdot} \cos\omega + \dot{\Omega} \sin\omega \sin i\right] \mathbf{c}_0 - \left[\dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i\right] \mathbf{d}_0 \quad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad .
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Die Variation des radialen Richtungsvektors (2.99) lautet dann

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\upsilon} \mathbf{q}_0 + \dot{\mathbf{d}}_0 \cos\upsilon + \dot{\mathbf{f}}_0 \sin\upsilon \quad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \tag{2.103}$$

mit den Variationen (2.102) schließlich

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \left(\dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i\right) \mathbf{q}_0 + \left[(i)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega} \cos u \sin i\right] \mathbf{c}_0 \quad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad . \tag{2.104}$$

$u = \upsilon + \omega$ ist das Argument der Breite, das vom aufsteigenden Knoten der Bahn aus gezählt wird. Wird für den Zustandsvektor die Polardarstellung $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\mathbf{r}}_0$ verwendet, gilt für den Flächensatz

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = G\mathbf{c}_0 = r^2 \left(\dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i\right) \mathbf{c}_0 + r^2 \left[(i)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega} \cos u \sin i\right] \mathbf{r}_0 \times \mathbf{c}_0 \quad , \tag{2.105}$$

es ist somit notwendig (der zweite Faktor steht senkrecht auf dem Normalenvektor, muss also verschwinden)

$$(i)^{\cdot} \sin u = \dot{\Omega} \cos u \sin i \quad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \tag{2.106}$$

und es bleibt

$$G = r^2 \left(\dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i\right) \quad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \quad . \tag{2.107}$$

Die Winkel-Variation mit der Definition

$$\dot{\zeta} := \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i \quad , \ \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \tag{2.108}$$

in Gleichung (2.104) erfüllt somit die Bedingung $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\mathbf{q}_0$ in der Beziehung (2.92) als Voraussetzung für die Gültigkeit von Satz H9. Die allgemeine himmelsmechanische Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper, wie sie etwa aus der Variation der Parameter heraus folgt, führt daher **notwendig** in jedem Fall auf ein *Hansen*-System („ideales Koordinatensystem“ im Sinne von *Hansen).* ■

Durch Integration der Differentialgleichung (2.108) ergibt sich bis auf eine (willkürliche) Integrationskonstante ζ_0 der Bahnwinkel

$$\zeta = \int_{t_0}^{t} \left(\dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i\right) dt + \zeta_0 \quad , \tag{2.109}$$

der auch als *Länge in der Bahn* bezeichnet wird[1]. Da die Variation genau dieses Winkels stets im Flächensatz $r^2\dot{\zeta} = G$ vorkommt, wie die wahre Anomalie im „ungestörten“ Fall, bezeichnet *Hansen* diesen Winkel zusammen mit dem Radius als „ideal“. Diese Aussage hat mathematisch keine Bedeutung, es sei denn, es soll damit die Aussage getroffen werden, dass der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable gewählt werden darf.

Für den Winkel σ zwischen dem Bahnknoten und dem Ursprung *O* des „idealen“ bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j$ – Systems (siehe in Bild 2-8 auf Seite 36) kann entsprechend die Bezeichnung

$$\dot{\sigma} := \dot{\Omega}\cos i \tag{2.110}$$

eingeführt werden. Mit σ_0 als Integrationskonstante ergibt sich der entsprechende Winkel vom Anfangspunkt *O* zum aufsteigenden Knoten ☊ aus dem Integral

$$\sigma := \int_{t_0}^{t} \dot{\Omega}\cos i \, dt + \sigma_0 \tag{2.111}$$

(siehe Bild 2-8 auf Seite 36). Dieser Winkel, der sich quasi als Projektion der Rektaszension des aufsteigenden Knotens in die Bahnebene darstellen lässt, kann auch als „Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens“ bezeichnet werden. Damit hat der (allgemeine!) Bahnwinkel (bis auf die Integrationskonstante, die aber im vorliegenden Zusammenhang keine Rolle spielt) die Darstellung

$$\zeta = \upsilon + \omega + \sigma \quad . \tag{2.112}$$

Es können an Satz H10 unmittelbar zwei Spezialisierungen angeschlossen werden:

(I) Wenn Argument des Perizentrums ω und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω keine Variationen aufweisen, reduziert sich der Bahnwinkel auf die wahre Anomalie und das hierdurch bestimmte bewegungsbezogene Bahnsystem ist das $\mathbf{d}_0, \mathbf{f}_0\,(, \mathbf{c}_0)$ – Apsidensystem (siehe Bild 2-6 auf Seite 30, links). In diesem (und nur in diesem) Zusammenhang hat das Apsidensystem die Eigenschaft „ideal“ zu sein, d.h. dann ist seine Darstellung im Rahmen des Zweikörperproblems als Untermenge der hier vorgestellten allgemeinen Herleitung vollständig richtig. Die allgemeingültige von *Hansen* entdeckte „ideale“ Eigenschaft des bewegungsbezogenen Koordinatensystems enthält (wie es auch sein muss) die „ideale“ Eigenschaft des Apsidensystems im Fall, dass Apsiden und Knoten „ungestört“ sind.

(II) In gleicher Weise trifft diese Eigenschaft für das Knotensystem (siehe Bild 2-6 auf Seite 30, rechts) zu, wenn zwar die Apside gestört, aber nicht der Knoten gestört sind. Dann ist $\dot{\zeta} = \dot{\upsilon} + \dot{\omega}$, $(\dot{\Omega} \equiv 0)$ und das Knotensystem ist in diesem (und nur in diesem) Fall ein „ideales“ System. ■

Als nächster Schritt zur Untersuchung der notwendigen Eigenschaften eines *Hansen*-idealen Systems soll jetzt auch eine eventuelle Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems einbezogen werden. Es werde jetzt also zugelassen, dass das $\mathbf{p}_i$ – Basissystems als nicht inertial angenommen werden kann. Nach Bild 2-8 auf Seite 36 haben die Vektoren des mitgeführten Bahnsystems im $\mathbf{p}_i$ – Basissystem die Darstellungen

[1] in der Originalarbeit von HANSEN (1857) ist diesem Winkel der Buchstabe υ zugewiesen

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{p}_1\left(-\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right) + \mathbf{p}_2\left(\cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega\right) + \mathbf{p}_3 \sin i \sin u \\
\mathbf{q}_0 &= \mathbf{p}_1\left(-\cos i \cos u \sin\Omega - \sin u \cos\Omega\right) + \mathbf{p}_2\left(\cos i \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega\right) + \mathbf{p}_3 \sin i \cos u \qquad (2.113) \\
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \mathbf{p}_3 \cos i \qquad .
\end{aligned}$$

Der radiale Ortsvektor hat somit in aller Allgemeinheit die Variation

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_0 = {} & \dot{\mathbf{p}}_1\left(-\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right) + \dot{\mathbf{p}}_2\left(\cos i \sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega\right) + \dot{\mathbf{p}}_3 \sin i \sin u \; + \\
& + \mathbf{p}_1\left[(i)^{\cdot} \sin i \sin u \sin\Omega + \dot{u}\left(-\cos i \cos u \sin\Omega - \sin u \cos\Omega\right) + \right. \\
& \qquad \left. + \dot{\Omega}\left(-\cos i \sin u \cos\Omega - \cos u \sin\Omega\right)\right] \; + \\
& + \mathbf{p}_2\left[-(i)^{\cdot} \sin i \sin u \cos\Omega + \dot{u}\left(\cos i \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega\right) + \right. \\
& \qquad \left. + \dot{\Omega}\left(-\cos i \sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega\right)\right] \; + \\
& + \mathbf{p}_3\left[(i)^{\cdot} \cos i \sin u + \dot{u} \sin i \cos u\right] \qquad .
\end{aligned} \qquad (2.114)$$

Werden jetzt die Variationsgleichungen (2.12) mit den Zuordnungen (2.11) eingeführt und die Basisdarstellungen (2.113) verwendet, ergibt sich, wenn

$$\dot{\zeta}_B := \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega} \cos i \qquad (2.115)$$

gesetzt wird, wobei jetzt aber der Index *B* den Bezug auf das (nicht fundamentale) $\mathbf{p}_i$ – Basissystem andeuten soll,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_0 = {} & \dot{\zeta}_B \mathbf{q}_0 + \mathbf{c}_0\left[(i)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega} \cos u \sin\Omega\right] + \mathbf{q}_0\left(p_{12} \cos i + p_{23} \sin i \sin\Omega + p_{13} \sin i \cos\Omega\right) + \\
& + \mathbf{c}_0\left[-p_{12} \sin i \cos u + p_{13}\left(\cos i \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega\right) + \right. \\
& \qquad \left. + p_{23}\left(\cos i \cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega\right)\right] \; .
\end{aligned} \qquad (2.116)$$

Der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Basissystems hat mit den Zuordnungen (2.11) in diesem Basissystem die Komponentendarstellung (es ist nach Formel (2.10) $p_{ij} = -p_{ji}$)

$$\mathbf{D}_p = D_p^i \, \mathbf{p}_i = p_{23} \mathbf{p}_1 + p_{31} \mathbf{p}_2 + p_{12} \mathbf{p}_3 \quad . \qquad (2.117)$$

Die Variation des radialen Einheitsvektors lautet daher

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{q}_0\left(\dot{\zeta}_B + \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0\right) + \mathbf{c}_0\left\{\left[(i)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega} \cos u \sin i\right] - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{q}_0\right\} \quad . \qquad (2.118)$$

Da $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta} \mathbf{q}_0$ nach den Beziehungen (2.47) in der momentanen Bahnebene liegt, ist sicher $\dot{\mathbf{r}}_0 \cdot \mathbf{c}_0 = 0$ und es bleibt die notwendige Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{q}_0\left(\dot{\zeta}_B + \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0\right) = \dot{\zeta} \, \mathbf{q}_0 \qquad (2.119)$$

mit der Nebenbedingung

$$(i)^{\cdot} \sin u - \dot{\Omega} \cos u \sin i = \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{q}_0 \quad . \qquad (2.120)$$

Auch hier erscheint die Variation des Bahnwinkels

$$\dot{\zeta} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| = \dot{\zeta}_B + \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0 =: \dot{\zeta}_B + \dot{\zeta}_P \qquad (2.121)$$

in Bezug auf ein *Hansen*-ideales Koordinatensystem, wobei allerdings jetzt die Eigenbewegung des Basissystems berücksichtigt werden muss. Die bis hier durchgeführte Überlegung führt auf

Satz H11[1]: *Wird die Bewegung eines Himmelskörpers auf ein Basissystem bezogen, das kein Inertialsystem ist, das also eine nicht zu vernachlässigende Eigenbewegung aufweist, so spiegelt sich diese Eigenbewegung des Basissystems in der Variation des auf das* Hansen-*Koordinatensystem bezogenen Bahnwinkels wieder.*

Die Folgerung aus diesem Satz ist überraschend: Wenn es gelingen sollte, die Variation des auf das *Hansen*-ideale System bezogenen Bahnwinkels (aus $\dot{\zeta} = |\dot{\mathbf{r}}_0|$), sowie die Variation des auf das Basissystem bezogenen Winkels (aus $\dot{\zeta}_B := \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i$) zu messen, könnte auf die Eigenbewegung (mit dem Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p = D_p{}^i \mathbf{p}_i$) des Basissystems geschlossen werden. Damit wäre es möglich, auf relativ einfache Weise ein Inertialsystem zu überprüfen bzw. nachzuweisen.

Anmerkungen:

1. Mit Satz H9 ist eine tiefere Bedeutung der Größe ζ gefunden, weil sie notwendig und hinreichend mit einem *Hansen*-System verknüpft ist.
2. Koordinatensysteme, welche mit der Zuordnung (2.92) die Bedingung (2.97) erfüllen, werden in der klassischen Literatur als ideale Systeme bezeichnet. Im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit sollen sie als *Hansen*-Systeme bezeichnet werden.
3. Die Basisvektoren von *Hansen*-Systemen sollen mit dem Index (I) gekennzeichnet werden. Der erste Basisvektor $\mathbf{q}_1^{(I)}$ eines Hansen-System wird willkürlich in der Bahnebene angenommen. Ist er dort definiert, ist er unveränderlich für alle Zeiten mit dieser Bahnebene verknüpft:

$$\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})/G = \mathbf{c}_0, \mathbf{q}_2^{(I)} = \mathbf{q}_3^{(I)} \times \mathbf{q}_1^{(I)}, \quad G = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| \quad . \tag{2.122}$$

2.4.3 Die Bewegungsgleichung bei Bezug auf ein *Hansen*-System

Aussagen wie Satz H9 deuten auf eine enge Verknüpfung zwischen *Leibniz*- und *Hansen*-Systemen hin. Im absoluten Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\mathbf{r}}_0$ verschwindet im allgemeinen Fall (kein inertiales System) sicherlich die Komponente mit der Variation der Systembasisvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ nicht identisch. Dies wäre der Fall, wenn es sich um ein *Hansen*-System handeln würde. Somit gilt folgender

▶ **Satz H12***: Das mitbewegte* $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ - Leibniz-*System bildet kein* Hansen-*System.*

Diese Aussage steht in scheinbarem Widerspruch zu der auf *Hansen* zurückgeführten Darstellung bei *K. Stumpff*[2], wonach die Polarkoordinaten *r* und ζ „*Hansen* Koordinaten" seien. Hierzu kann folgendes angemerkt werden: Nach *Hansen* sind – ganz im Denken der klassischen Himmelsmechanik – alle die Größen „ideal", die „die Eigenschaft haben, dass nicht nur sie selbst, sondern auch ihre ersten Differentiale in Bezug auf die Zeit in der gestörten Bewegung

[1] 16. Mai 2005

[2] STUMPFF (1974) p. 178

dieselbe Form haben wie in der ungestörten“[1]. Hier wollen wir ganz grundsätzlich als „Störungen“ die Beschleunigungen auffassen, welche eine Bewegung so beeinflussen, dass die Bewegung nicht mehr auf der vorgegebenen Bahnkurve verläuft. Was den Bahnwinkel ζ betrifft, so ist seine Variationsgleichung in Bezug auf die (absolute) Zeit $\mathrm{r}^2\dot{\zeta}=\mathrm{G}$ tatsächlich von allen solchen Beschleunigungen unabhängig, was damit zusammenhängt, dass ζ auf das ein *Hansen*-ideales System bildende $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System bezogen ist. ζ als die unabhängige Laufvariable kann auch als eine absolute Größe aufgefasst werden und steht damit außerhalb der Diskussion ob *Hansen*-ideal oder nicht. Was nun aber den Radius *r* angeht, so musste bis jetzt noch gar keine Aussage über *r* gemacht werden, da in der Bedingungsgleichung (2.83) $\mathbf{D}\times\mathbf{r}=0$ der Radius *r* ohne Änderung der „idealen“ Eigenschaften eines *Hansen*-Systems weggekürzt werden kann. Hierfür bedarf es also einer **zusätzlichen** Bedingung für die Variation des Radius $\dot{\mathrm{r}}$, die sich als vorteilhaft aber keineswegs als zwingend erweisen wird. Diese Bedingung wird im Fall einer vorgegebenen Kurve $\mathrm{r}=\mathrm{r}(\zeta)$ unter dem Begriff *Anpassungsgleichung*, diese gilt hier als die Oskulationsbedingung, in Kapitel 3 ab Seite 64 ausführlich behandelt.

Der transversale Richtungsvektor in einem Leibnizsystem hat im zugehörigen *Hansen*-System die Darstellung (siehe etwa Formel (2.93) oder Bild 2-9 auf Seite 37)

$$\mathbf{q}_0 \;=\; -\mathbf{q}_1^{(\mathrm{I})}\sin\zeta+\mathbf{q}_2^{(\mathrm{I})}\cos\zeta\;. \tag{2.123}$$

Seine Variation ist

$$\dot{\mathbf{q}}_0 \;=\; -\dot{\zeta}\left(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta+\mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta\right)-\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\sin\zeta+\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\cos\zeta\quad. \tag{2.124}$$

Wegen der *Hansen* Bedingung (2.98) sind die beiden Variationsvektoren $\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)},\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}$ kollinear und stehen daher senkrecht auf der $\left(\mathbf{q}_1^{(I)},\mathbf{q}_2^{(I)}\right)$ – Ebene, sind also kollinear mit dem Normalenvektor $\mathbf{c}_0$. Daher ist auch

$$\dot{\mathbf{q}}_0 \;=\; -\dot{\zeta}\,\mathbf{r}_0-\left(\left|\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\right|\sin\zeta-\left|\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\right|\cos\zeta\right)\mathbf{c}_0 \tag{2.125}$$

Vergleich mit dem (zunächst willkürlich eingeführten) entsprechenden Ausdruck (2.70) auf Seite 28 gibt als eine weitere notwendige Folge der Eigenschaft des $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Systems mit dem Ortsvektor **r** ein *Hansen*-System zu bilden die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= -\dot{\zeta}\\ \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\sin\zeta+\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\cos\zeta\quad.\end{aligned} \tag{2.126}$$

Deshalb erhält die allgemeine auf ein *Leibniz*-System bezogene Bewegungsgleichung (2.66) mit den Beziehungen (2.70) ($\dot{\mathbf{q}}_0=\dot{\xi}\,\mathbf{r}_0+\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0$) und den Beschleunigungskomponenten in (2.71) die Gestalt

$$\ddot{\mathbf{r}}=\left(\ddot{r}-r\dot{\zeta}^2\right)\mathbf{r}_0+\left(2\dot{r}\dot{\zeta}+r\ddot{\zeta}\right)\mathbf{q}_0+r\dot{\zeta}\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0\quad. \tag{2.127}$$

[1] HANSEN (1857) p. 66

Der Bezug auf ein *Hansen*-ideales System zeigt sich in dieser Bewegungsgleichung in der Verwendung des Bahnwinkels ζ, der auf den Ursprung $\mathbf{q}_1^{(I)}$ eines *Hansen*-Systems als Anfangsrichtung bezogen ist, wobei die Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ in Bezug auf den Radiusvektor des bewegten Objektes ein *Hansen*-ideales System bilden. Ferner zeigt sich dieser Zusammenhang in der notwendigen Beziehung der Variablen ξ auf den Bahnwinkel ζ nach der ersten der Gleichungen (2.126). Hier kann nun wieder die grundlegende Beziehung (2.73) auf Seite 28, in der der Bahnwinkel ζ wie wir inzwischen gelernt haben, notwendig auf ein *Hansen*-System bezogen ist, verwendet werden. Somit hat die radiale Beschleunigung aus den Formeln (2.76) die Gestalt

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + b_R \quad . \tag{2.128}$$

Diese Beziehung war im Fall der (speziellen) Keplerbewegung[1] von *G. W. Leibniz* entdeckt worden (vgl. Abschnitt 2.2.1), welche daher nach einem Vorschlag von *E. J. Aiton*[2] als *Leibniz*sche Gleichung benannt wurde. Diese Bezeichnung soll in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen werden, wobei als allgemeine oder kurz als *Leibniz*sche Gleichung der Ausdruck

$$b_R = \ddot{r} - \frac{G^2}{r^3} \tag{2.129}$$

verwendet werden soll. Damit erhält die Bewegungsgleichung im mitgeführten (*Leibniz*schen) Bahnsystem die Gestalt

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\ddot{r} - \frac{G^2}{r^3} \right) \mathbf{r}_0 + \frac{\dot{G}}{r} \mathbf{q}_0 + \frac{G}{r} \dot{\eta}\, \mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.130}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (2.91), welche das *Leibniz* - System auf das *Hansen*-System beziehen, kann die Bewegungsgleichung (2.66) auch in Bezug auf ein *Hansen*-System geschrieben werden:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{q}_1^{(I)} \left(b_R \cos\zeta - b_T \sin\zeta \right) + \mathbf{q}_2^{(I)} \left(b_R \sin\zeta + b_T \cos\zeta \right) + \mathbf{q}_3^{(I)} b_N \tag{2.131}$$

oder ausführlich

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{q}_1^{(I)} \left[\left(\ddot{r} - \frac{G^2}{r^3} \right) \cos\zeta - \frac{\dot{G}}{r} \sin\zeta \right] + \mathbf{q}_2^{(I)} \left[\left(\ddot{r} - \frac{G^2}{r^3} \right) \sin\zeta + \frac{\dot{G}}{r} \cos\zeta \right] + \mathbf{q}_3^{(I)} \frac{G}{r} \dot{\eta} \quad . \tag{2.132}$$

Zu den Herleitungen dieses Abschnitts können folgende Anmerkungen gemacht werden:

1. Die letzten Gleichungen, welche die Beschleunigungen im mitrotierenden *Leibniz*- sowie im bewegungsbezogenen *Hansen*- System beschreiben und die einen bestimmten Bewegungsvorgang charakterisieren, enthalten einen wesentlichen Anteil in normaler Richtung. Ohne diesen könnte eine räumliche Bewegung nicht beschrieben werden: $r\, b_N = \dot{\eta} G$.

2. Der Bezug dieser Gleichungen zu einem *Hansen* – System wird mit den Entwicklungen in Kapitel 3 deutlicher, wenn alle notwendigen Integrationen in Bezug auf das

---

[1] Unter *spezieller* Kepler*bewegung* soll eine Bewegung verstanden werden, welche durch die drei *Kepler*schen Gesetze mit konstanten Parametern beschrieben werden kann

[2] AITON, E. J. (1960)

Hansen – System (unter Verwendung des Bahnwinkels ζ als unabhängiger Variable) durchgeführt werden.

3. In diesem Abschnitt konnte eine (sehr einfache, aber keineswegs triviale) Deutung des Parameters ξ in den Formeln (2.71) als eine notwendige Eigenschaft der *Hansen*-Systeme gefunden werden.

4. Es ist selbstverständlich, dass der Parameter ξ auch direkt aus der Eigenschaft der Basisvektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ des *Leibniz*-Systems hätte gefunden werden können. Deren Variationen müssen, wie im allgemeinen Fall im Gleichungssystem (2.12) auf Seite 15 dargestellt ist, mit einer schiefsymmetrischen Koeffizientenmatrix q_{ij} auf das Basissystem bezogen werden. Demnach musste auf jeden Fall $\dot{\xi} = -\dot{\zeta}$ erwartet werden. Die hier gegebene Herleitung für diese Beziehung ist somit redundant und bestätigt die Richtigkeit der Überlegungen.

5. Die Bewegungsgleichungen, die hier in vektorieller Form dargestellt sind, können auch in *Hansen*-Koordinaten $y^{(I)j}\ (j = 1,2,3)$ geschrieben werden, was in Abschnitt 2.4.5 ausgeführt wird. Dadurch können die Vorteile einer Verwendung von *Hansen*-Systemen noch verdeutlicht werden. Um diese Gleichungen darstellen zu können, werden zunächst die Eigenbewegungsvektoren von *Hansen*-Systemen benötigt, die im folgenden Abschnitt hergeleitet werden.

6. Bei bahnanalytischen Untersuchungen interessiert üblicherweise die Bahnkurve als Ganzes, nicht die Bewegung in der Bahn. Das bedeutet, dass der Flächensatz als zeitintegral nicht benötigt wird. Zu diesem Zweck können alle benötigten Variationsgleichungen auf den *Hansen*schen Bahnwinkel als unabhängiger Variable bezogen werden. Auf diese Weise kann eine Integration eingespart werden. Im Fall der allgemeinen *Leibniz*gleichung kann mit den Formeln

$$
\begin{aligned}
&\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + b_R \quad , \quad \dot{G} = r\, b_T \quad , \quad \dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \\
&\frac{dr}{d\zeta} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\zeta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\zeta}} = \dot{r}\frac{r^2}{G} \quad , \quad \frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T \quad , \\
&\frac{d^2r}{d\zeta^2} = \frac{d\dot{r}}{d\zeta}\frac{r^2}{G} + \dot{r}\frac{2r}{G}\frac{dr}{d\zeta} - \frac{\dot{r}\, r^2}{G^2}\frac{dG}{d\zeta} = \frac{d\dot{r}}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\frac{r^2}{G} + \frac{2r}{G}\frac{G}{r^2}\frac{dr}{d\zeta}\frac{dr}{d\zeta} - \frac{dr}{d\zeta}\frac{1}{G}\frac{dG}{d\zeta} \\
&\frac{d^2r}{d\zeta^2} = \ddot{r}\frac{r^4}{G^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\zeta}\right)^2 - \frac{r^3}{G^2} b_T \frac{dr}{d\zeta}
\end{aligned}
\tag{2.133}
$$

die *Leibniz*gleichung in Bezug auf den *Hansen*schen Bahnwinkel hergeleitet werden:

$$
\frac{d^2r}{d\zeta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\zeta}\right)^2 + \frac{r^3}{G^2} b_T \frac{dr}{d\zeta} - r - \frac{r^4}{G^2} b_R = 0 \quad . \tag{2.134}
$$

Die *Leibniz*gleichung in dieser Form hat einige Nachteile: die Form ist erheblich komplizierter als in der ursprünglichen Form und es muss auch die tranversale Beschleunigung berücksichtigt werden, welche über die Variation des Flächenparameters eingeschleift wurde. Für eine numerische Integration spielen diese Nachteile keine Rolle. Mit den im nächsten Kapitel entwickelten Überlegungen wird eine Verfahren gefunden, um diese Nachteile auch für analytische Überlegungen ausschalten zu können.

7. Es bleibt jetzt noch, auch den dritten Parameter, η, der mit der Definitionsgleichung (2.70) eingeführt worden ist, zu deuten. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

2.4.4 Die Eigenbewegungsvektoren der *Leibniz*- und *Hansen* – Systeme

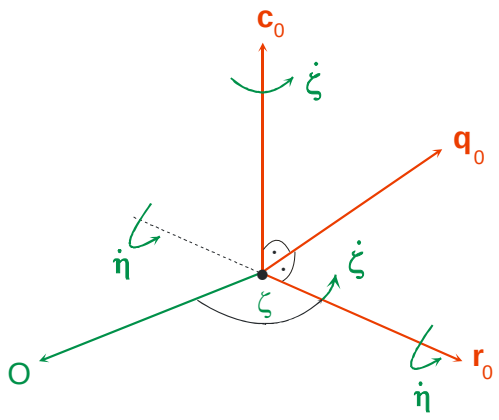

Bild 2-10: Die Eigenbewegung eines *Leibniz*-Systems $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ in Bezug auf ein *Hansen*-System mit Ursprung O. Zur geometrischen Deutung der zweiten Winkelkoordinate η, deren Wirkung deutlich wird, die aber selber nicht erscheint („versteckter Winkel“)

In der Bewegungsgleichung (2.127) konnte der Parameter $\dot{\zeta}$ als eine geometrische Größe gedeutet werden. Damit ist auch ζ eine geometrische Größe, nämlich der auf das *Hansen*-System bezogene unabhängige Bahnwinkel. Es ist zu erwarten, dass auch $\dot{\eta}$ und damit η geometrisch gedeutet werden können. Aus der Bedingung (2.98) für *Hansen*-ideale Systeme kann mit der zweiten der Gleichungen (2.126)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\mathbf{c}_0 \dot{\eta} \sin\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \mathbf{c}_0 \dot{\eta} \cos\zeta \end{aligned} \tag{2.135}$$

gesetzt werden. Werden hier die für jedes orthogonale System gültigen Formeln (2.12) auf Seite 15 berücksichtigt, werden die Vektoren $\dot{\mathbf{r}}_0$ in Formel (2.92) und in Formel (2.125) mit (2.126) ergänzt durch den entsprechenden Ausdruck für $\dot{\mathbf{c}}_0$. Dies führt notwendig auf die *Variationsformeln des Leibniz*-Systems. Diese Formeln könnten in Analogie zu der aus der Differentialgeometrie bekannten Sprechweise als die „*Frenetschen Formeln des* Leibniz-*Systems*“ bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\zeta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \quad . \end{aligned} \tag{2.136}$$

Dieses Gleichungssystem kann für jedes Bewegungsproblem (im Rahmen der klassischen Mechanik) aufgestellt werden. Bei astrodynamischen Untersuchungen könnte das *Leibniz*-System selbst auch als „das begleitende Dreibein der Astrodynamik“ bezeichnet werden.

Wie das begleitende Dreibein einer Raumkurve in Rahmen der Kurventheorie sind auch die Vektoren $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ des mitgeführten Bahnsystems von einer speziellen Koordinatendarstellung der Bewegung unabhängig. Der zugehörige System-Eigenbewegungsvektor ist

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.137}$$

Somit bestehen die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{D}_{q^{(L)}} \times \mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{D}_{q^{(L)}} \times \mathbf{q}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{c}}_0 = \mathbf{D}_{q^{(L)}} \times \mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.138}$$

Wird ζ als unabhängige Variable an Stelle der Zeit eingeführt, wird

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} &= \mathbf{q}_0 \\ \frac{d\mathbf{q}_0}{d\zeta} &= -\mathbf{r}_0 + \frac{d\eta}{d\zeta}\mathbf{c}_0 \\ \frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} &= -\frac{d\eta}{d\zeta}\mathbf{q}_0 \end{aligned} \tag{2.139}$$

mit dem System-Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_\zeta := \frac{d\eta}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + \mathbf{c}_0 \quad , \quad \mathbf{D}_{q^{(L)}} = \dot{\zeta}\,\mathbf{D}_\zeta \quad . \tag{2.140}$$

Dann gilt:

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} = \mathbf{D}_\zeta \times \mathbf{r}_0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{q}_0}{d\zeta} = \mathbf{D}_\zeta \times \mathbf{q}_0 \quad , \quad \frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} = \mathbf{D}_\zeta \times \mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.141}$$

Für das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System lauten die Variationsformeln des bewegungsbezogenen Bahnsystems mit den Formeln (2.135) und, da $\mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{c}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)}$ gilt,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(I)} \sin\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(I)} \cos\zeta \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\eta}\,(\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta - \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{2.142}$$

Die zugehörige Variationsmatrix hat mit $\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = q_j{}^k \mathbf{q}_k^{(I)}$ die Komponenten

$$\begin{aligned} &q_{11} = q_{12} = q_{21} = q_{22} = q_{33} = 0 \\ &q_{13} = -q_{31} = -\dot{\eta}\sin\zeta \\ &q_{23} = -q_{32} = \dot{\eta}\cos\zeta \end{aligned} \tag{2.143}$$

und es gilt für den Radiusvektor $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ die *Hansen*-ideale Eigenschaft (mit $y_3 = 0$)

$$y^k\, q_k{}^{(j)} = 0 \qquad (j = 1,2,3) \quad . \tag{2.144}$$

Der zugehörige Eigenbewegungsvektor des *Hansen*-Systems lautet mit dem radialen Richtungsvektor nach Beziehung (2.91) auf Seite 38

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} = D^{j}_{q^{(I)}}\,\mathbf{q}^{(I)}_{j} = \dot{\eta}\left(\mathbf{q}^{(I)}_{1}\cos\zeta + \mathbf{q}^{(I)}_{2}\sin\zeta\right) = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_{0} \tag{2.145}$$

und es wird

$$\dot{\mathbf{q}}^{(I)}_{j} = \mathbf{D}_{q^{(I)}} \times \mathbf{q}^{(I)}_{j} \quad . \tag{2.146}$$

Damit ist auch Formel (2.83) für den Fall eines *Hansen*-Systems bestätigt:

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} \times \mathbf{r}_{0} = 0 \quad . \tag{2.147}$$

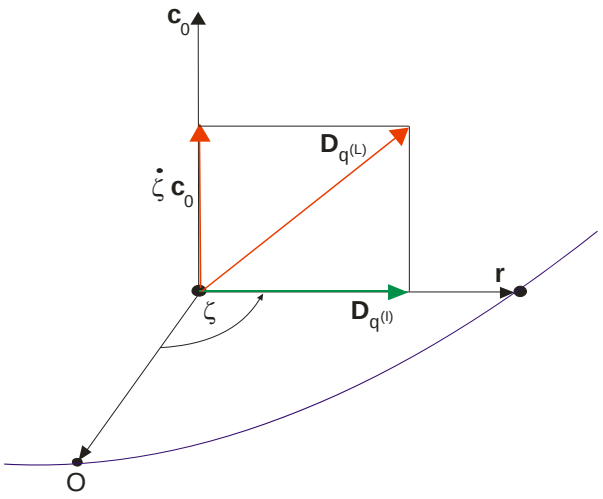

Bild 2-11: Der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(L)}}$ eines *Leibniz*-Systems in Bezug auf den Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(I)}}$ eines *Hansen*-System mit Ursprung O.

Die vorstehenden Untersuchungen können zusammengefasst werden in:

Satz H13: *Der (allgemeine) Eigenbewegungsvektor des bewegungsbezogenen (Hansen-idealen) Bahnsystems zeigt stets in Richtung des Radiusvektors des bewegten Körpers. Er ist somit an die Bewegung gekoppelt.*[1]

Damit kann jetzt auch die Größe $\dot{\eta}$ geometrisch gedeutet werden:

Satz H14: $\dot{\eta}$ *ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das bewegungsbezogene (Hansen-ideale) Bahnsystem um seinen Eigenbewegungsvektor also den Ortsvektor des bewegten Objektes dreht.* η *ist ein Winkel, der diese Drehung beschreibt.*

Nun kann auch eine Eigenschaft von Hansen-Systemen, die bei einer Anwendung in einer Störungsrechnung wesentlich ist, quantitativ gefasst werden. Mit der dritten der Beziehungen (2.76) $b_N = \dot{\eta}\,G/r$ ergibt sich

Satz H15: *Die Variationsgleichungen des bewegungsbezogenen* Hansen *Bahnsystems enthalten als einzige wesentliche Variation die Variation des Drehwinkels* η*. Seine Variation ist*

[1] vgl. Satz H4

gleich dem Betrag des absoluten Eigenbewegungsvektors des Hansen-*Systems. Eine Eigenvariation eines Hansen-Systems tritt ausschließlich bei normalen Beschleunigungen auf einen Bewegungsvorgang auf.*

Mit den Ausdrücken (2.137) und (2.145) gilt ferner:

Satz H16*: Zwischen den Eigenbewegungsvektoren* $\mathbf{D}_{q^{(I)}}$ *des* Hansen- *bewegungsbezogenen und* $\mathbf{D}_{q^{(L)}}$ *des mitbewegten* Leibniz-*Systems besteht die Beziehung*:

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}} = \mathbf{D}_{q^{(I)}} + \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.148}$$

Der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(I)}}$ und somit das ein *Hansen*-ideales System bildende $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System verändert seine Orientierung im Raum nur dann, wenn es eine („Stör“-) Beschleunigung gibt, die eine Komponente senkrecht zur $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}$ – Basisebene des $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Systems hat. Dann gibt es nämlich eine normale Beschleunigung b_{N}, die über die Beziehung $b_N = \dot{\eta}\, G / r$ die Rotation $\dot{\eta}$ um den Radiusvektor beeinflusst und daher nach dem System (2.142) die räumliche Orientierung des *Hansen*-Systems.

Beschleunigungen, die in der $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}$ – Ebene wirken, üben somit keinen Einfluss auf das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System aus. Diese nur in der oskulierenden Bahnebene wirkenden Beschleunigungen auf eine Bewegung werden im Kapitel 3 näher untersucht.

2.4.5 Die Bewegungsgleichungen in *Hansen* Koordinaten

Als *Hansen* Koordinaten werden die kartesischen Koordinaten $y^{(I)j}\,(j = 1,2,3)$ bezeichnet, welche einen Ortsvektor in Bezug auf ein *Hansen*-System $\mathbf{q}_j^{(I)}$ darstellen lassen. Für sie gilt

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = y^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} \quad . \tag{2.149}$$

Im Einzelnen (vgl. etwa die Beziehungen (2.91) auf Seite 38) ist

$$y_1^{(I)} = r\cos\zeta \quad , \quad y_2^{(I)} = r\sin\zeta \quad , \quad y_3^{(I)} = 0 \quad , \tag{2.150}$$

wenn ζ der *Hansen*sche Bahnwinkel ist. Die wesentliche *Hansen* Eigenschaft zeigt sich im Geschwindigkeitsvektor nach Beziehung (2.81) auf Seite 32

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} \quad . \tag{2.151}$$

Der (absolute) Beschleunigungsvektor lautet dann

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{y}^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} + \dot{y}^{(I)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)}$$

und die Bewegungsgleichungen in den *Hansen* Koordinaten (also **relativ** zu dem *Hansen*-System) können aus

$$\ddot{y}^{(I)j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} = \ddot{\mathbf{r}} - \dot{y}^{(I)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \tag{2.152}$$

berechnet werden. Hier kommen die Variationsgleichungen (2.142) zum Tragen: bei skalarer Multiplikation der letzten Gleichung mit $\mathbf{q}_k^{(I)}, (k = 1,2,3)$, verschwinden alle Anteile des

zweiten Terms auf der rechten Seite dieses Ausdrucks. Wird für $\ddot{\mathbf{r}}$ die Zerlegung (2.66) auf Seite 27 in Anteile des *Leibniz*-Systems verwendet, bleibt

$$\ddot{y}_1^{(I)} = b_R\, \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{q}_1^{(I)} + b_t\, \mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{q}_1^{(I)} + b_N\, \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{q}_1^{(I)} \quad ,$$

mit den Beziehungen (2.91) schließlich

$$\ddot{y}_1^{(I)} = b_R \cos\zeta - b_T \sin\zeta = \frac{1}{r}\left(b_R\, y_1^{(I)} - b_T\, y_2^{(I)}\right) \tag{2.153}$$

und analog

$$\ddot{y}_2^{(I)} = b_R \sin\zeta + b_T \cos\zeta = \frac{1}{r}\left(b_R\, y_2^{(I)} + b_T\, y_1^{(I)}\right) \quad , \tag{2.154}$$

sowie

$$\ddot{y}_3^{(I)} = 0 \quad . \tag{2.155}$$

Diese Ausdrücke sind (zumindest) von theoretischem Interesse: bei Bezug auf ein *Hansen*-System sind die Bewegungsgleichungen von (maximal) der vierten Ordnung. Der normale Beschleunigungsanteil bleibt außen vor, was eine der wesentlichen Eigenschaften der *Hansen-Systeme* seit ihrer Entdeckung ist. Dagegen sind die Bewegungsgleichungen bei Bezug auf das (inertiale) *Newton*-System stets von der sechsten Ordnung. Allerdings muss der Bezug einer Bewegung auf das *Newton*-System, der in jedem Fall prinzipiell erforderlich ist um eine Bewegung im Raum endgültig beschreiben zu können, durch die zusätzliche Integration um den räumlichen Rotationswinkel mit $\dot{\eta} = r\, b_N / G$ hergestellt werden.

BEISPIEL: Wird die gestörte 2-Körperbewegung einem Bewegungsvorgang zugrunde gelegt, lauten die Beschleunigungskomponenten[1] mit der *Kepler*schen Beschleunigung $b_K=-\mu/r^2$

$$b_R = -\frac{\mu}{r^2} + b_{R2} \;\; , \;\; b_T \;\; , \;\; b_N$$

und die Beschleunigungsgleichungen in den *Hansen* Koordinaten

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1^{(I)} + \frac{\mu}{r^3} y_1^{(I)} &= b_{R2} \cos\zeta - b_T \sin\zeta \\ \ddot{y}_2^{(I)} + \frac{\mu}{r^3} y_2^{(I)} &= b_{R2} \sin\zeta + b_T \cos\zeta \end{aligned} \tag{2.156}$$

sind den Bewegungsgleichungen im *Newton*schen Fall (zumindest im ungestörten Fall: $b_{R2} = b_T = b_N = 0$) äquivalent[2]:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = b_{R2}\mathbf{r}_0 + b_T\, \mathbf{q}_0 + b_N\, \mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.157}$$

➔ *Eine Zweikörperbewegung verläuft völlig unabhängig von einem inertialen Bezugssystem.*

Anmerkung: Die Bewegungsgleichungen (2.153), (2.154), welche die Bewegung in *Hansen* Koordinaten beschreiben, müssen über der Zeit integriert werden. Dies hat sich in der Praxis als nachteilig erwiesen[3]. Bei einer Verwendung von *Hansen*-Systemen ist es empfehlenswert, den *Hansen*schen

[1] Siehe hierzu die ausführlichen Betrachtungen in Abschnitt 3.3 ab Seite 89

[2] Vgl. V. A. BRUMBERG (1995), p.72

[3] Näheres hierzu in Abschnitt 2.4.8, insbesondere in Tabelle 2-1 auf Seite 57

Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable zu verwenden. Dadurch wird zunächst nur die Bahn erhalten, nicht die Bewegung in der Bahn. Dies wird in einem neuartigen Ansatz ausgehend von der allgemeingültigen Darstellung einer geradlinigen Bewegung in Kapitel 3 ab Seite 64 detailliert ausgeführt. Damit kann das in einem Schritt als System zu lösende Bewegungsproblem auf ein System der maximalen Ordnung 3 zurückgeführt werden. Der Bezug zur Zeit wird dann in einer unabhängigen Integration nach Lösung aller sonstigen Bewegungsprobleme hergestellt, wenn also die Bahn als solche bekannt ist. Der Bezug zum inertialen (Newtonschen) Basissystem wird (weitgehend) unabhängig durch ein System der dritten Ordnung mit den drei *Euler*winkeln oder der vierten Ordnung mit *Euler-Rodriguez* Parametern erfolgen. Die Variationsgleichungen dieser Systeme sind jedoch untereinander redundant[1].

2.4.6 Zur geometrischen Deutung des räumlichen Bahnwinkels[2]

Die Variationsformeln (2.136) des mitbewegten Bahnsystems haben Anlass gegeben neben dem Bahnwinkel ζ auch η geometrisch als einen Winkel zu deuten. ζ erwies sich als ein Winkel in der $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – Bahnebene, er kann daher als der ebene Bahnwinkel gedeutet werden, $\dot{\zeta}$ als die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich diese Ebene, somit also auch die mit der Bewegung mitbewegten Richtungsvektoren in der Bahnebene $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$, um die Bahnnormale $\mathbf{c}_0$ dreht. Da $\mathbf{r}_0$ der radiale Einheitsvektor des bewegten Körpers ist, ist $\dot{\zeta}$ die Bahngeschwindigkeit, mit der sich dieser Körper (im Gegenuhrzeigersinn) in der $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – Ebene bewegt. η lässt sich, wie schon angedeutet, als ein Winkel in der $\mathbf{c}_0, \mathbf{q}_0$ – Ebene deuten, der also von $\mathbf{c}_0$ zu $\mathbf{q}_0$ gerichtet ist. $\dot{\eta}$ ist somit die Winkelgeschwindigkeit, mit der $\mathbf{c}_0$ und damit auch $\mathbf{q}_0$ um $\mathbf{r}_0$ rotiert. Das Minuszeichen in den Frenetschen Formeln (2.136) vor $\dot{\eta}$ besagt, dass die Rotation in entgegengesetzter Richtung, also von $\mathbf{q}_0$ zu $\mathbf{c}_0$ hin verläuft.

Aus den Variationsformeln (2.136) des mitgeführten Bahnsystems kann formal nicht beurteilt werden, welche der beiden Winkelkoordinaten ζ und η die primäre ist. Dazu muss auf die Definition des mitgeführten Bahnsystems zurückgegriffen werden. Da die Bewegung definitionsgemäß in der $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – Ebene erfolgt, muss auch der in dieser Ebene liegende Bahnwinkel ζ die primäre Größe sein, η als der räumliche Bahnwinkel ist somit die sekundäre. Dies bestätigen die zugehörigen Variationsgleichungen (nach Formel (2.73)) $\dot{\zeta} = G / r^2$ in der die zusätzlichen Bewegungseinflüsse b_R, b_T, b_N nicht in Erscheinung treten. Dies ist dagegen in der Variationsgleichung für den Winkel η der Fall. Nach der dritten der Formeln (2.76) ist $\dot{\eta} = r\, b_N / G$.

Die Variationsformeln für ζ und η beschreiben in einem gewissen Sinn die absolute Bewegung eines Körpers, indem in Bezug auf die momentane Bewegungsorientierung eine Bewegung formal **vollständig** beschrieben wird. Dieser Gedanke wird uns in den folgenden Kapiteln wiederholt beschäftigen. Allerdings tauchen in der Berechnung des Radius *r* die radiale, in der Berechnung des Flächenparameters *G* die transversale Beschleunigungskomponente auf. In einem konkreten Bewegungsfall werden diese Beschleunigungskomponenten nur auf gewisse von einem Bahnsystem unabhängige Basissysteme modellmäßig dargestellt werden können, so dass dann auch die Bewegung nur relativ zu diesen Systemen erfasst werden kann.

---

[1] Siehe hierzu die ausführlichen Untersuchungen von A. DEPRIT (1975) und V.A. BRUMBERG (1995), pp. 69-74 im Zusammenhang mit *Hansen* Koordinaten

[2] Auf den geometrischen Zusammenhang wies R. A. STRUBLE (1960/1), (1960/2) hin, allerdings ohne den Zusammenhang mit einem *Hansen*-System herzustellen. Implizit sind diese Formeln in der klassischen Himmelsmechanik im Zusammenhang mit der Eigenbewegung der („gestörten“) Bahnebene bekannt, siehe dazu Abschnitt 2.3.4, wieder allerdings ohne den Zusammenhang mit einem *Hansen*-System zu erkennen

Die absolute Beschreibung einer Bewegung, wie sie durch die Frenetschen Formeln des *Leibniz*-Systems („begleitendes Dreibein der Astrodynamik“) erfolgen kann, wird im Rahmen der allgemeinen mathematischen Anpassung einer Bewegung im nächsten Kapitel näher untersucht.

Anmerkung: Wegen ihrer fundamentalen Bedeutung könnte der Bahnwinkel ζ als *erster Hansen-Winkel*, sowie η als *zweiter Hansen-Winkel* bezeichnet werden.

2.4.7 Ergänzende Betrachtungen zur Qualifizierung der *Hansen*-Systeme

Die bisherige Arbeit hatte als ein wesentliches Ergebnis die notwendige Zuordnung von *Hansen*-Systemen zu jedem Bewegungsvorgang herausarbeiten können. Dies ist eine Folge des fundamentalen Satzes H9 (in Abschnitt 2.4.1 auf Seite 38): der Betrag der Variation eines radialen Richtungsvektors ist der Differentialquotient eines Winkels, der notwendig und hinreichend auf ein *Hansen*-System orientiert ist.

Dieser Zusammenhang ist so selbstverständlich, weil in willkürlicher Weise stets eine solche Definition gegeben werden kann, so dass sich die Frage aufdrängt, ob dies wirklich eine besonders auszeichnende Eigenschaft ist. Um diese Frage zu untersuchen, werde wieder von einem mitbewegten *Leibniz*-System $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ ausgegangen. Dieses werde auf ein beliebiges bewegungsorientiertes System $\mathbf{q}_j^{(B)}$ bezogen, dessen zwei Basisvektoren in der (oskulierenden, d.h. durch den momentanen Zustandsvektor aufgespannten) Bahnebene liegen. Der Ursprung dieses Systems habe vom Radiusvektor den Winkelabstand ψ, so dass gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(B)} \cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)} \sin\psi \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(B)} \sin\psi + \mathbf{q}_2^{(B)} \cos\psi \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(B)} = \mathbf{q}_1^{(B)} \times \mathbf{q}_2^{(B)} \quad . \end{aligned} \tag{2.158}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(B)} &= \mathbf{r}_0 \cos\psi - \mathbf{q}_0 \sin\psi \\ \mathbf{q}_2^{(B)} &= \mathbf{r}_0 \sin\psi + \mathbf{q}_0 \cos\psi \\ \mathbf{q}_3^{(B)} &= \mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 \quad . \end{aligned} \tag{2.159}$$

Wichtige Beispiele für derartige Systeme in der Bahnmechanik sind das Apsidensystem (siehe Bild 2-6 links auf Seite 30) und das Knotensystem (siehe Bild 2-6 rechts). Mit den *Frenet*schen Formeln (2.136) des *Leibniz*-Systems lauten die Variationen dieses bewegungsbezogenen Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(B)} &= \left(\dot\zeta - \dot\psi\right)\mathbf{q}_2^{(B)} + \dot\eta\, \mathbf{q}_3^{(B)} \sin\psi \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(B)} &= -\left(\dot\zeta - \dot\psi\right)\mathbf{q}_1^{(B)} + \dot\eta\, \mathbf{q}_3^{(B)} \cos\psi \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(B)} &= \dot\eta\left(\mathbf{q}_1^{(B)} \sin\psi - \mathbf{q}_2^{(B)} \cos\psi\right) \quad . \end{aligned} \tag{2.160}$$

Im Fall, dass das bewegungsbezogene System ein *Hansen*-System ist (dann gelten die Formeln (2.142)), wird $\psi = \zeta$. Somit gilt

Satz H17: *Ein bewegungsbezogenes Bahnsystem ist dann und nur dann ein* Hansen-*System, wenn die Variationen der beiden in der Bewegungsebene liegenden Basisvektoren senkrecht zu dieser Ebene orientiert sind.*

Der Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j^{(B)}$-Systems hat mit dem Ansatz

$$\mathbf{D}_{q^{(B)}} =: D^j_{q^{(B)}}\, \mathbf{q}_j^{(B)} \tag{2.161}$$

die Komponenten

$$D_{q^{(B)}1} = \dot\eta\cos\psi \;,\; D_{q^{(B)}2} = \dot\eta\sin\psi \quad,\; D_{q^{(B)}3} = \dot\zeta - \dot\psi \quad . \tag{2.162}$$

Der Eigenbewegungsvektor dieses allgemeinen bewegungsorientierten Bahnsystems lautet daher

$$\mathbf{D}_{q^{(B)}} = \dot\eta\,\left(\mathbf{q}_1^{(B)}\cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)}\sin\psi\right) + \left(\dot\zeta - \dot\psi\right)\mathbf{q}_3^{(B)} \quad . \tag{2.163}$$

Mit den Basisvektoren des *Leibniz*-Systems gilt auch (vgl. die Beziehungen (2.158))

$$\mathbf{D}_{q^{(B)}} = \dot\eta\;\mathbf{r}_0 + \left(\dot\zeta - \dot\psi\right)\mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.164}$$

Damit äquivalent ist wegen ζ=ψ im Fall von *Hansen*-Systemen

Satz H18: *Ein bewegungsbezogenes Bahnsystem ist dann und nur dann ein* Hansen-*System, wenn sein Eigenbewegungsvektor stets in Richtung des Ortsvektors der Bewegung weist.*

Dieser Satz bestätigt auch die im vorhergehenden Abschnitt gegebene Bemerkung, dass der versteckte Winkel η als zweiter *Hansen*-Winkel bezeichnet werden könnte. Er ist eng an das *Hansen*-System gekoppelt und nur im Zusammenhang mit einem solchen erklärbar. Ferner zeigt sich in diesem Zusammenhang deutlich die besondere Bedeutung des ersten *Hansen*-Winkels ζ als (in natürlicher Weise) eigentlich unabhängigem Bahnparameter.

Die vorstehenden Überlegungen erlauben eine weitere fundamentale Aussage über *Hansen*-Systeme zu formulieren:

Satz H19: *Ein* Hansen-*System ist das einzige in einer oskulierenden Bahnebene liegende System, das fest mit der Bahnebene verknüpft ist und sich nicht in der Bahnebene bewegt.*

Der Beweis kann mit den Variationsgleichungen (2.160) geführt werden: Wenn das System ein *Hansen*-System ist, ist $\dot\zeta = \dot\psi$ und die in der Bahnebene liegenden Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}$ werden nur durch räumliche Einflüsse (b_N), nicht aber durch Einflüsse in der Bahnebene verändert. Die Umkehrung kann indirekt erfolgen: Wenn ein System kein *Hansen-System* ist, muss der Bahnwinkel ψ dieses Systems die Bedingung $\dot\zeta \neq \dot\psi$ erfüllen. Dann haben aber nach den Variationsgleichungen (2.160) die beiden Basisvektoren $\mathbf{q}_1^{(B)}, \mathbf{q}_2^{(B)}$ einen Bewegungsanteil in der Basisebene, dieses System hat also eine Eigenbewegung bezüglich der Bahnebene. ■

Die Überlegungen in diesem Abschnitt werden an zwei bekannten Beispielen aus der Bahnmechanik erläutert:

BEISPIEL 1: Das **Apsidensystem** hat als Bahnwinkel die wahre Anomalie υ. Seine *Frenet*schen Formeln sind

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \left(\dot\zeta - \dot\upsilon\right)\mathbf{q}_2^{(P)} + \dot\eta\;\mathbf{q}_3^{(P)}\sin\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= -\left(\dot\zeta - \dot\upsilon\right)\mathbf{q}_1^{(P)} + \dot\eta\;\mathbf{q}_3^{(P)}\cos\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot\eta\left(\mathbf{q}_1^{(P)}\sin\upsilon - \mathbf{q}_2^{(P)}\cos\upsilon\right)
\end{aligned} \tag{2.165}$$

und der zugehörige Eigenbewegungsvektor lautet

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon\right) + \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_3^{(P)} \quad , \tag{2.166}$$

bei Bezug auf das *Leibniz*-System

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.167}$$

In bahnmechanischem Zusammenhang ist (vgl. die Formeln (2.115) und (2.110)) bei Bezug auf ein inertiales Basissystem

$$\dot{\zeta} - \dot{\upsilon} = \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i = \dot{\omega} + \dot{\sigma} \quad . \tag{2.168}$$

Die Größen ω, i, Ω bzw. σ sind „langsame" Parameter, d.h. sie sind konstant im Rahmen der speziellen *Kepler*bewegung (also ohne Berücksichtigung von „Störungen"). Das Apsidensystem ist daher stets von einem „Störmodell" abhängig, das eine bestimmte Bewegung charakterisiert. Die wahre Anomalie wird also im Gegensatz zum *Hansen*schen Bahnwinkel ζ von den „Störungen" beeinflusst. Dies lässt sich aus der Variationsgleichung der wahren Anomalie erkennen, die über die Relation

$$\dot{\upsilon} \;=\; \frac{\partial\upsilon}{\partial M}\,\dot{M} + \frac{\partial\upsilon}{\partial e}\,\dot{e} \tag{2.169}$$

mit den Formeln des Zweikörperproblems die Beziehung

$$\dot{\upsilon} \;=\; \dot{M}\left(\frac{a}{r}\right)^2\sqrt{1-e^2} + \dot{e}\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right)\sin\upsilon \tag{2.170}$$

annimmt. Mit der mittleren Anomalie $M = M_0 + n\left(t - t_0\right)$, wobei n die mittlere Bewegung bedeutet, kann die Variationsgleichung für M_0 aus der Variationsgleichung für die mittlere Länge L_0 aus den *Gauß*schen Variationsgleichungen (2.67) verwendet werden, ebenso wie die Variationsgleichung für die numerische Exzentrizität *e*. Dies zeigt die unmittelbare Abhängigkeit der wahren Anomalie von den Beschleunigungen in radialer, transversaler und normaler Richtung.■

BEISPIEL 2: Das **Knotensystem** hat als Bahnwinkel das Argument der Breite *u*. Seine *Frenet*schen Formeln sind

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \left(\dot{\zeta} - \dot{u}\right)\mathbf{q}_2^{(D)} + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)}\sin u \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\left(\dot{\zeta} - \dot{u}\right)\mathbf{q}_1^{(D)} + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)}\cos u \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(D)}\sin u - \mathbf{q}_2^{(D)}\cos u\right)
\end{aligned} \tag{2.171}$$

und der zugehörige absolute Eigenbewegungsvektor lautet

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(D)}\cos u + \mathbf{q}_2^{(D)}\sin u\right) + \left(\dot{\zeta} - \dot{u}\right)\mathbf{q}_3^{(D)} \tag{2.172}$$

und bei Bezug auf das *Leibniz*-System

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \left(\dot{\zeta} - \dot{u}\right)\mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.173}$$

Ähnlich wie im Fall des vorstehenden Apsidensystems ist in bahnmechanischem Zusammenhang (vgl. die Formeln (2.115) und (2.110)) bei Bezug auf ein inertiales Basissystem

$$\dot{\zeta} - \dot{u} = \dot{\Omega}\cos i = \dot{\sigma} \quad . \tag{2.174}$$

Die Größen i, Ω bzw. σ sind „langsame“ Parameter, d.h. sie sind konstant im Rahmen der speziellen *Kepler*bewegung (also ohne Berücksichtigung von „Störungen“). Auch das Knotensystem ist daher stets von einem „Störmodell“ abhängig. Dies zeigt sich im Argument der Breite $u = \zeta - \sigma = \omega + \upsilon$, welches wie die wahre Anomalie υ von einem Bewegungsmodell („Störmodell“) abhängt.■

2.4.8 Transformationen der Zeit

Nach dem „natürlichen“ Verständnis vom Ablauf einer Bewegung ist die Zeit die „natürliche“ unabhängige Variable um einen Bewegungsvorgang zu beschreiben. Unter der Annahme einer Kreisbewegung als Referenzbewegung kann ein Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$ direkt einem Bahnwinkel, der mittleren Anomalie $M = n\,\Delta t$, zugeordnet werden. Zweifel an dieser direkten Zuordnung waren bald in der Antike aufgekommen, als es notwendig wurde einen Korrekturterm einzuführen, den wir heute als Mittelpunktsgleichung bezeichnen. Da an der Figur des Kreises als Referenzkurve festgehalten wurde, wurden die jetzt notwendig gewordenen Bahnwinkel exzentrische *E* bzw. wahre Anomalie υ eingeführt, deren präzise unterscheidende Definition allerdings erst im Rahmen der *Kepler*bewegung möglich wurde. Damit wurde die Zeit als unabhängige Variable zur Beschreibung einer himmelsmechanischen Bahnbewegung von einem Bahnwinkel abgelöst, der in einer separaten Relation der Zeit zugeordnet werden musste. Handelt es sich um die exzentrische Anomalie, so ist diese Beziehung die transzendente *Kepler*gleichung, deren elegante Lösung Generationen von Mathematikern Kopfzerbrechen bereitet hat. Im Fall der wahren Anomalie als unabhängiger Variable kann über die Mittelpunktsgleichung υ-*M* der Bezug zur mittleren Anomalie M und damit zur Zeit t hergestellt werden. Diese und andere verwandte Winkel erlaubten erst im Rahmen der Störungsrechnung eine sinnvolle Bearbeitung der Bewegungsprobleme.

Die Transformation der Zeit auf einen anderen Parameter als unabhängige Variable erfolgt in allen bekannten Fällen mit einer Differentialbeziehung der Form

$$d\tau = F\,dt \quad . \tag{2.175}$$

Hier stehe τ für die neue Variable, F sei eine beliebige Funktion, die jede Menge an Parametern und Abhängigkeiten enthalten kann.

Eine Übersicht über verschiedene Variable, welche die Zeit als unabhängige Variable ersetzen können, ist in Tabelle 2-1 zusammengestellt. Basierend auf den in Abschnitt 2.2.2 zusammengestellten Variationsgleichungen kann man feststellen, dass die Größen mittlere Anomalie *M*, wahre Anomalie υ, Argument der Breite *u*, wahre Länge in der Bahn *l* und exzentrische Anomalie *E* grundsätzlich nicht als unabhängige Variable in Frage kommen. Sie sind alle von einem Bewegungsproblem abhängig, wie die Abhängigkeit von einer oder mehreren der Beschleunigungen b_R, b_T, b_N zeigt. Interessant ist die von *K. Sundmann* (und von *K. Stumpff*[1] unabhängig gefundene) regularisierende Variable τ mit der Beziehung $d\tau = dt / r$. Im Fall einer ungestörten (*Kepler*-) Bewegung ist sie proportional zur exzentrischen Anomalie *E*. Daher wurde bisweilen die Verwendung der exzentrischen Anomalie auch als eine durch *Kepler* eingeführte Regularisierung verstanden.

Hingewiesen sei auf eine Art Regularisierung im Fall einer geradlinigen Zweikörperbewegung, in der es im Moment des Zusammenstoßes (bzw. eines Auswurfs, Ejektion) zu einer Singularität in der Berechnung des Abstandes zwischen den beiden Körpern kommen kann. Diese Singularität kann durch eine Regularisierung mit der Variablen Θ umgangen werden.

---

[1] K. Stumpff (1959), p. 638

Von besonderem Interesse ist im Rahmen der Kurventheorie die Einführung der Bogenlänge *s* (mit der Dimension einer Länge). Man könnte vorschlagen, diese als unabhängige Variable zur Beschreibung einer Bewegung längs einer Kurve zu verwenden. Dazu müsste sie auf einen Anfangspunkt bezogen werden können, der fest in der (oskulierenden) Bahnebene liegt. Ein solcher Punkt und das mit ihm verknüpfte System ist aber nach Satz H19 notwendig und hinreichend ein *Hansen-System*. Ein *Hansen-System* hat aber nach Satz H9 als unabhängige Bahnvariable eine Größe, die aus der Integration der Variation des radialen Richtungsvektors gebildet wird. Zur Berechnung der Bogenlänge wird jedoch der Betrag des Geschwindigkeitsvektors integriert. Daher ist es auch nicht sinnvoll, die Bogenlänge als unabhängige Variable zu verwenden. Als einzige wirklich unabhängige Variable bleibt also der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ.

Bezeichnung	**Differentielle Beziehung**
Mittlere Anomalie $M = n(t-t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,(t-t_0)$	$dM = \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} - \frac{G\sqrt{1-e^2}}{e\,\mu}\left[b_{R2}\left(\frac{2re}{p} - \cos\upsilon \right) + b_T \left(1+\frac{r}{p} \right)\sin\upsilon \right] \right\} dt$
Wahre Anomalie υ	$d\upsilon = \left\{ \frac{G}{r^2} + \frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T \sin\upsilon \left(1+\frac{r}{p} \right) \right] \right\} dt$
Argument der Breite $u = \upsilon + \omega$	$du = \left[\frac{G}{r^2} - b_N \frac{r \sin u \cos i}{G \sin i} \right] dt$
wahre Länge in der Bahn $l = \upsilon + \omega + \Omega$	$dl = \left[\frac{G}{r^2} + b_N \frac{r \sin u}{G} \tan\frac{i}{2} \right] dt$
Exzentrische Anomalie *E*	$dE = \left\{ \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{a}} + \sqrt{\frac{a}{\mu}}\left[b_{R2}\left(\frac{\cos\upsilon}{e} - 1 \right) - b_T \left(1+\frac{r}{a} \right)\frac{\sin\upsilon}{e} \right] \right\} dt$
*Sundmann-Stumpff*sche regularisierende Variable τ	$d\tau = \frac{1}{r} dt$
Regularisierende Variable Θ bei geradliniger Zweikörperbewegung	$\sqrt{\Theta}\; d\Theta = \sqrt{2}\, k\, dt$
Bogenlänge *s*	$ds = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2}\; dt = V\, dt$
Bahnwinkel im *Hansen-System* ζ	$d\zeta = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}_0^2}\; dt = \frac{G}{r^2} dt$

Tabelle 2-1: Einige Beispiele zum Ersetzen der Zeit durch eine andere Variable

2.4.9 Der relative Eigenbewegungsvektor des *Hansen*-Systems

Die Transformation von einem als inertial angenommenen Frühlingspunkt-orientierten Äquatorsystem auf das bewegungsbezogene *Hansen*-ideale Bahnsystem ist durch die Beziehung

$$\mathbf{q}_j^{(I)} = a_j{}^i \mathbf{p}_i \tag{2.176}$$

mit der Transformationsmatrix (2.23) unter Anwendung der Zuordnungen $A \to \Omega, B \to i, C \to -\sigma$ bekannt. Neben den allgemeingültigen Variationsgleichungen (2.37) für die Bahnparameter *i* und Ω zur Bahnorientierung im Raum muss noch die Variationsgleichung für die Länge σ des aufsteigenden Knotens in der Bahn untersucht werden.

Zur Berechnung der Variationen der Basisvektoren des *Hansen*-Systems in Bezug auf das Äquatorsystem wird der relative Eigenbewegungsvektors dieses Systems in Bezug auf das Frühlingspunkt-orientierte Äquatorsystem verwendet:

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}p} = D_{q^{(I)}p}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(I)} \tag{2.177}$$

Die Variationsgleichungen (2.12) lauten in diesem Fall unter Berücksichtigung des absoluten Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_p{}^{i} = D_p{}^{i}\,\mathbf{p}_i$ des Äquatorsystems

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} = &\quad D_{q^{(I)}p3}\,\mathbf{q}_2^{(I)} - D_{q^{(I)}p2}\,\mathbf{q}_3^{(I)} + \left(D_{p1}a_{31} + D_{p2}a_{32} + D_{p3}a_{33}\right)\mathbf{q}_2^{(I)} - \left(D_{p1}a_{21} + D_{p2}a_{22} + D_{p3}a_{23}\right)\mathbf{q}_3^{(I)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} = &-D_{q^{(I)}p3}\,\mathbf{q}_2^{(I)} + D_{q^{(I)}p1}\,\mathbf{q}_3^{(I)} - \left(D_{p1}a_{31} + D_{p2}a_{32} + D_{p3}a_{33}\right)\mathbf{q}_1^{(I)} + \left(D_{p1}a_{11} + D_{p2}a_{12} + D_{p3}a_{13}\right)\mathbf{q}_3^{(I)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} = &\quad D_{q^{(I)}p2}\,\mathbf{q}_1^{(I)} - D_{q^{(I)}p1}\,\mathbf{q}_2^{(I)} + \left(D_{p1}a_{21} + D_{p2}a_{22} + D_{p3}a_{23}\right)\mathbf{q}_1^{(I)} - \left(D_{p1}a_{11} + D_{p2}a_{12} + D_{p3}a_{13}\right)\mathbf{q}_2^{(I)} .
\end{aligned} \tag{2.178}$$

Für die Koeffizienten des relativen Eigenbewegungsvektors des Hansen-Systems liefert eine Anwendung der Formeln (2.43)

$$\begin{aligned}
D_{q^{(I)}p1} &= (i)^{\cdot}\cos\sigma - \dot{\Omega}\sin i\sin\sigma \\
D_{q^{(I)}p2} &= (i)^{\cdot}\sin\sigma + \dot{\Omega}\sin i\cos\sigma \\
D_{q^{(I)}p3} &= \dot{\Omega}\cos i - \dot{\sigma} \quad .
\end{aligned} \tag{2.179}$$

Damit folgen die beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \left(-\dot{\sigma} + \dot{\Omega}\cos i\right)\mathbf{q}_2^{(I)} - \left[(i)^{\cdot}\sin\sigma + \dot{\Omega}\sin i\cos\sigma\right]\mathbf{q}_3^{(I)} + \\
&\quad + \mathbf{q}_2^{(I)}\left[D_{p3}\cos i + D_{p1}\sin i\sin\Omega - D_{p2}\sin i\cos\Omega\right] - \\
&\quad - \mathbf{q}_3^{(I)}\left[D_{p3}\sin i\,\cos\sigma + D_{p1}\left(-\cos i\cos\sigma\sin\Omega + \sin\sigma\cos\Omega\right) + \right. \\
&\qquad \left. + D_{p2}\left(\cos i\cos\sigma\cos\Omega + \sin\sigma\sin\Omega\right)\right] \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \left(\dot{\sigma} - \dot{\Omega}\cos i\right)\mathbf{q}_2^{(I)} + \left[(i)^{\cdot}\cos\sigma - \dot{\Omega}\sin i\sin\sigma\right]\mathbf{q}_3^{(I)} - \\
&\quad - \mathbf{q}_2^{(I)}\left[D_{p3}\cos i + D_{p1}\sin i\sin\Omega - D_{p2}\sin i\cos\Omega\right] + \\
&\quad + \mathbf{q}_3^{(I)}\left[-D_{p3}\sin i\,\sin\sigma + D_{p1}\left(\cos i\sin\sigma\sin\Omega + \cos\sigma\cos\Omega\right) + \right. \\
&\qquad \left. + D_{p2}\left(-\cos i\sin\sigma\cos\Omega + \cos\sigma\sin\Omega\right)\right] \quad .
\end{aligned} \tag{2.180}$$

Zunächst gilt für den absoluten Eigenbewegungsvektor des Äquatorsystems

$$\mathbf{D}_p \cdot \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0 = D_p^j\, a_{3j} \quad . \tag{2.181}$$

Aus der ersten der Beziehungen (2.180) folgt durch skalare Multiplikation mit $\mathbf{q}_2^{(I)}$

$$\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} \cdot \mathbf{q}_2^{(I)} = \left(-\dot{\sigma} + \dot{\Omega}\cos i\right) + \left(D_{p3}\cos i + D_{p1}\sin i\sin\Omega - D_{p2}\sin i\cos\Omega\right) \quad . \tag{2.182}$$

Nach der *Hansen* Bedingung (2.98) $\left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\sin\zeta = 0\right)$ sind die beiden Variationsvektoren $\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}, \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}$ antiparallel. Es folgt daher unmittelbar die allgemeingültige Variationsgleichung

$$\dot{\sigma} - \dot{\Omega}\cos i = \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0 \quad . \tag{2.183}$$

Mit den Basisvektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ in der Hauptebene des Knotensystems und dem Rotationswinkel η um den Radiusvektor des bewegten Objektes können die Variationsgleichungen des mitgeführten Bahnsystems in übersichtlicher Weise aus den in System (2.37) hergeleiteten allgemeinen Formeln erhalten werden. Nach Formel (2.145) auf Seite 48 hat das *Hansen*-ideale bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j$ − Bahnsystem den Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_q = \dot{\eta}\mathbf{r}_0 \ . \tag{2.184}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} (i)^{\cdot} &= \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{k}_1 - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_1 \\ \dot{\Omega}\sin i &= \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{k}_2 - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_2 \\ \dot{\sigma}\sin i &= \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{h}_2 - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{h}_2 \quad . \end{aligned} \tag{2.185}$$

Die $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ und $\mathbf{h}_2$ haben im bewegungsbezogenen *Hansen*-System mit der Länge des Knotens σ die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{p}_1\cos\Omega + \mathbf{p}_2\sin\Omega &&= \mathbf{q}_1^{(I)}\cos\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\sigma \\ \mathbf{k}_2 &= -\mathbf{p}_1\cos i\,\sin\Omega + \mathbf{p}_2\cos i\,\cos\Omega + \mathbf{p}_3\sin i &&= -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\sigma \\ \mathbf{h}_2 &= -\mathbf{p}_1\sin\Omega + \mathbf{p}_2\cos\Omega &&= -\mathbf{q}_1^{(I)}\cos i\,\sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos i\,\cos\sigma - \mathbf{q}_3^{(I)}\sin i \quad . \end{aligned}$$

Da das Argument der Breite aus $u = \zeta - \sigma$ bekannt ist, und da offenbar $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{h}_2 = \cos i \sin u$, folgt schließlich

$$\begin{aligned} (i)^{\cdot} &= \dot{\eta}\cos u \quad - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_1 \\ \dot{\Omega}\sin i &= \dot{\eta}\sin u \quad - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{k}_2 \\ \dot{\sigma}\sin i &= \dot{\eta}\sin u\cos i \ - \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{h}_2 \quad . \end{aligned} \tag{2.186}$$

Anmerkungen:

1. Es könnte zunächst nicht als direkt folgerichtig angesehen werden, dass die Variationsgleichung (2.183) für die Länge des Knotens in der Bahn, die im Rahmen der Bewegungsgleichungen des bewegten Objektes auftritt, völlig übereinstimmt mit der dritten Komponente der Gleichungen (2.43) für die Komponenten des Eigenbewegungsvektors des *Hansen*-Systems. Nach Gleichung (2.184) verschwindet im *Hansen-System* stets die dritte Komponente des absoluten Systemeigenbewegungsvektors: $D_{q3} = 0$. Damit lassen sich die beiden Ausdrücke (2.43) (mit $A \to \Omega, B \to i, C \to -\sigma$) und (2.183) sofort aufeinander zurückführen (siehe auch Bild 2-8 auf Seite 36). Es zeigt sich, dass im Fall von *Hansen*-Systemen die dritte der Variationsgleichungen nur die Bewegung der Bahnebene aber nicht die Bewegung des bewegten Objektes in der Bahnebene betrifft. In den beiden anderen Gleichungen kommt die Bewegung des Objektes durch den explizit enthaltenen Bahnwinkel ζ bzw. das Argument der Breite u direkt vor. Das bedeutet, dass in den Gleichungen (2.186) nur zwei unabhängig sind, während als dritte unabhängige die Variationsgleichung (2.43) separat nach Abschluss

der anderen Integrationen gelöst werden kann. Im Fall der dritten der Gleichungen (2.45) auf Seite 21 muss berücksichtigt werden, dass hier im $\mathbf{p}_i$ – Basissystem gerechnet werden muss. Damit ist dann auch diese Beziehung nachzuvollziehen.

2. In der vorliegenden Arbeit wird in konsequenter Weise eine mögliche Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i$-Basis-Bezugssystems berücksichtigt. Hierzu ist eine grundsätzliche Überlegung nötig: Eine Transformation mit *Euler*winkeln (bzw. *Rodrigues* Parametern) wurde für die Drehung eines festen Körpers entwickelt. Die selben Formeln werden auch verwendet für die Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen. Jedoch handelt es sich in den beiden Fällen um grundsätzlich unterschiedliche Vorgänge. Die Drehung eines festen Körpers ist nicht notwendig mit der Eigenbewegung der verwendeten Bezugssysteme gekoppelt. Bei einer Transformation von Bezugskoordinaten muss jedoch grundsätzlich die Eigenbewegung der verwendeten Systeme auf Grund ihres physikalischen Bezugs berücksichtigt werden. Hier klingt auch die Aussage von Satz H11 an, dass bei einer unabhängigen Beobachtung einer Bewegung in einem *Hansen* System ein Rückschluss auf eine inertiale Bewegung möglich sein sollte.

3. Der Knoten einer Bahn ist für äquatoriale Bahnen nicht definiert. Dies führt auf die bekannte Singularität, wie sie etwa in den Variationsgleichungen (2.186) für die Parameter Ω und σ auftritt. Nach einem Vorschlag von J. L. Lagrange[1] kann diese Singularität durch Einführung von nichtsingulären Elementen umgangen werden. Im Fall von *Hansen*-Systemen können in Abänderung eines Vorschlags von *J. Van der Ha*[2] und in Erweiterung der von *F.R. Hoots*[3] eingeführten „Positionselemente“ zum Beispiel folgende Parameter verwendet werden:

$$j_1 := \sin i \cos\sigma \quad , \quad j_2 := \sin i \sin\sigma \tag{2.187}$$

Durch Einführung des „retrograden“ Faktors (das positive Vorzeichen gilt für rechtläufige Bahnen $(0° \le i \le 90°)$, das negative Vorzeichen für rückläufige Bahnen $(90° \le i \le 180°)$)

$$\sigma_i := \mathrm{sgn}(\cos i) \tag{2.188}$$

folgt zur eindeutigen Berechnung der Inklination i

$$\cos i \;=\; sign(\cos i)\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2} \quad . \tag{2.189}$$

Die zugehörigen Variationsgleichungen sind singularitätenfrei

$$\left(j_1\right)^{\cdot} = \dot{\eta} \cos i \cos\zeta \quad , \quad \left(j_2\right)^{\cdot} = \dot{\eta} \cos i \sin\zeta \quad . \tag{2.190}$$

Bei Bezug der Variation auf den Bahnwinkel ζ ergibt sich das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{dj_1}{d\zeta} &= \pm\frac{d\eta}{d\zeta}\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2}\,\cos\zeta \\ \frac{dj_2}{d\zeta} &= \pm\frac{d\eta}{d\zeta}\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2}\,\sin\zeta \quad . \end{aligned} \tag{2.191}$$

---

[1] Siehe zum Beispiel in: M.C. ECKSTEIN (1973)

[2] Aus: J. VAN DER HA (1985)

[3] HOOTS, F. R. (1979)

Nach Lösung dieses Systems können die Winkel i und σ berechnet werden. Damit ist es dann auch möglich, die Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens mit Hilfe der Variationsgleichung (2.183) zu erhalten. Das bedeutet, dass mit den Größen (2.187) singularitätenfrei gerechnet werden kann. Im Fall von geostationären Bahnen werden die Größen (2.187) oder vergleichbar ähnliche gelegentlich als die Komponenten eines „Inklinationsvektors“ bezeichnet.

4. Eine Alternative zur Verwendung der *Euler*winkel Ω, i , σ ist die Einführung von *Rodrigues*parametern (gelegentlich auch als *Gauß-Rodrigues* Parameter oder als *Euler* Parameter oder als Einer-Quaternionen bezeichnet)[1]. Davon wird in der vorliegenden Arbeit kein Gebrauch gemacht.

2.4.10 Heuristische Herleitung der Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung

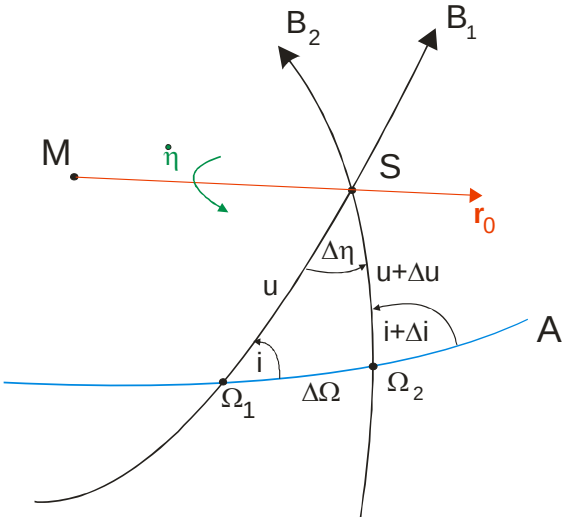

Bild 2-12: Zur heuristischen Herleitung der Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung. A - Basisebene, B_1 - Bahnebene ohne Variation, B_2 - Bahnebene mit Variation, $\Delta\eta=\eta-0°$, der räumliche Drehwinkel

Als eine einfache Anwendung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie sollen die Variationsgleichungen, die im vorhergehenden Abschnitt vollständig allgemein analytisch hergeleitet wurden, in heuristisch anschaulicher Weise aufgestellt werden. Auf diese Weise wird dann auch die geometrische Deutung des „versteckten“ zweiten Bahnwinkels η elementar bestätigt. In Bild 2-12 seien S der Ort des bewegten Himmelskörpers (Satellit) mit Richtungsvektor $\mathbf{r}_0$, Ω_1 der Knoten der Bahnebene ohne Variation der Bahnebene, Ω_2 mit Berücksichtigung einer Variation der Knotenlänge Ω um den Winkel $\Delta\Omega$, i die Neigung ohne, $i+\Delta i$ mit Variation, u das Argument der Breite ohne und $u+\Delta u$ mit Variation und $\Delta\eta$ der Winkel, um den die Bahnebene um den Radiusvektor auf Grund der Variation gedreht wird. Dann gelten im Dreieck Ω_1, Ω_2, S die folgenden Beziehungen:

1. Der Sinussatz gibt

$$\frac{\sin u}{\sin(i+\Delta i)} = \frac{\sin\Delta\Omega}{\sin\Delta\eta} \quad ,$$

also wegen der (angenommenen!) Kleinheit der Winkel Δi, $\Delta\eta$, $\Delta\Omega$ in erster Näherung

[1] Erstmals eingeführt in P. MUSEN (1958), dann auch bei A. DEPRIT (1975) und V. BRUMBERG (1995)

$$\Delta\Omega \approx \Delta\eta \frac{\sin u}{\sin i}$$

und im Grenzübergang

$$\dot{\Omega} = \dot{\eta} \frac{\sin u}{\sin i} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\Omega}{d\zeta} = \frac{d\eta}{d\zeta} \frac{\sin(\zeta - \sigma)}{\sin i} \quad ,$$

d.h. die zweite der Variationsgleichungen (2.186), allerdings ohne Berücksichtigung einer eventuellen Eigenbewegung des äquatorialen Basissystems.

2. Der Kosinussatz der Winkel gibt

$$\cos\left[180° - (i + \Delta i)\right] = \cos u \, \sin\Delta\eta \, \sin i - \cos\Delta\eta \, \cos i \quad ,$$

somit in erster Näherung $\Delta i \approx \Delta\eta \cos u$ und im Grenzübergang

$$(i)^{\cdot} = \dot{\eta} \cos u \quad \text{bzw.} \quad \frac{di}{d\zeta} = \frac{d\eta}{d\zeta} \cos(\zeta - \sigma) \quad ,$$

also die erste der Variationsgleichungen (2.186) der räumlichen Bewegung.

Die in Abschnitt 2.4.5 besprochene geometrische Deutung von η als einem Winkel, der die Drehung der Bahnebene um den Radiusvektor beschreibt, wird durch die heuristische Herleitung dieser Formeln bestätigt. Die hier durchgeführte Herleitung der Variationsgleichungen gilt nur bei (undefinierter!) Kleinheit der beteiligten Änderungsgrößen Δi, $\Delta\Omega$, $\Delta\eta$, $\Delta u = \Delta(\zeta - \sigma)$ und lässt auch nicht die notwendige Einbeziehung einer Eigenbewegung des Basissystems erkennen, die in den allgemeingültigen Formeln (2.186) enthalten ist. Ein Bezug zu einem *Hansen*-System wird dadurch hergestellt, dass als unabhängige Variable nicht die Zeit, sondern der Hansen'sche Bahnwinkel ζ verwendet wird.■

2.4.11 Das Additionstheorem für die räumliche Drehung eines *Hansen*-Systems

Der Eigenbewegungsvektor (2.145) auf Seite 48 des bewegungsbezogenen Bahnsystems

$$\mathbf{D}_q = \dot{\eta}\, \mathbf{r}_0$$

ist eine absolute Größe, die mit der Variation $\dot{\eta}$ des Drehwinkels η auf das inertiale System des Weltalls bezogen ist. In $\dot{\eta}$ spiegeln sich also alle Einflüsse, die nur möglich sind, auf die beobachtete Bewegung wieder. $\dot{\eta}$ wird in der Praxis aus mehreren Teilvariationen $\dot{\eta}_{(\nu)}$ zusammengesetzt

$$\dot{\eta} = \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\eta}_{(\nu)} \quad . \tag{2.192}$$

Hier bewirkt $\dot{\eta}_{(\nu)}$ eine Transformation von einem (ν-1)-ten System in ein (ν)-tes System, ist somit als eine relative Größe aufzufassen. Dies kann durch willkürliche Zuweisung eines Eigenbewegungsvektors

$$\mathbf{D}_{q(0)} =: \mathbf{D}_0 = 0 \tag{2.193}$$

zum inertialen (Basis-) System geschehen. Dann ist für das erste System, das aus dem inertialen System durch Transformation hervorgeht

$$\mathbf{D}_{q(1)} := \mathbf{D}_{q(1)q(0)} + \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_{q(1)q(0)} =: \dot{\eta}_{(1)}\, \mathbf{r}_0 \quad . \tag{2.194}$$

und mit $\mathbf{D}_{q(1)} =: \mathbf{D}_p$ die Beziehung

$$\mathbf{D}_{q(2)} = \mathbf{D}_{q(2)q(1)} + \mathbf{D}_{q(1)} = \left[\dot{\eta}_{(2)} + \dot{\eta}_{(1)} \right] \mathbf{r}_0 \quad , \tag{2.195}$$

wenn mit

$$\mathbf{D}_{q(\nu)q(\nu-1)} =: \dot{\eta}_{(\nu)} \mathbf{r}_0 \tag{2.196}$$

die Drehung des (ν)-ten System bezüglich des (ν-1)-ten Systems bezeichnet wird. Bei *n* Transformationen gilt somit das Additionstheorem

$$\mathbf{D}_q := \mathbf{D}_{q(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} \mathbf{D}_{q(\nu)q(\nu-1)} = \mathbf{r}_0 \sum_{\nu=1}^{n} \dot{\eta}_{(\nu)} = \dot{\eta} \mathbf{r}_0 \quad . \tag{2.197}$$

Wenn mit der dritten der Beziehungen (2.76) die normale Beschleunigungskomponente eingeführt wird, ist bei einer Zerlegung in Teilkomponenten

$$\dot{\eta}_{(\nu)} = \frac{r}{G} b_{N(\nu)} \quad , \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, n \ , \tag{2.198}$$

so wird die (ν)-te Teilintegration einen Wert für den Drehwinkel η liefern, der als Anfangswert für die (ν+1)-te Integration dienen wird. Dieser Integrationsprozess ist daher wesentlich einfacher als der im folgenden Kapitel hergeleitete Prozess zur Bestimmung der anderen vier Bahnparameter.

3 Die mathematische Anpassung beliebiger Bewegungen in der oskulierenden Bahnebene auf der Basis von *Hansen*-Systemen

In diesem Abschnitt wird die Bewegung eines bewegten Objektes in der oskulierenden (also durch den momentanen Zustandsvektor aufgespannten) Bahnebene untersucht. Als Basisbewegung wird die geradlinig gleichförmige Bewegung vorgeschlagen. Sie unterliegt keinen äußeren Beschleunigungseinflüssen und entspricht daher dem Bewegungsmuster inertialer Räume. Auf Grund der formalen Übereinstimmung von inertialen Räumen und *Hansen*-Systemen kann die Darstellung einer geradlinigen Bewegung auf ein *Hansen*-System bezogen werden. Auch alle in der oskulierenden Bahnebene erfolgenden Bewegungsvorgänge (als Beispiele werden Kegelschnitt- und Spiralbewegungen vorgestellt) können einheitlich in *Hansen*-Systemen behandelt werden. Basierend auf den hier vorgestellten Überlegungen wird ein Anpassungsprozess zur Beschreibung beliebiger Bewegungsvorgänge vorgeschlagen. Dazu werden die Parameter einer beliebigen Ausgangskurve durch schrittweise Hinzunahme von Einzelbeschleunigungen so lange variiert, bis alle bekannten Beschleunigungseinflüsse auf einen bestimmten Bewegungsvorgang berücksichtigt sind. Umgekehrt können aus einer beobachteten Bewegung die Beschleunigungseinflüsse in Bezug auf eine geradlinige Bewegung eindeutig herausgearbeitet werden.

3.1 Die Variationsgleichungen einer allgemeinen Bewegung im *Newton*- bzw. im *Leibniz*-System

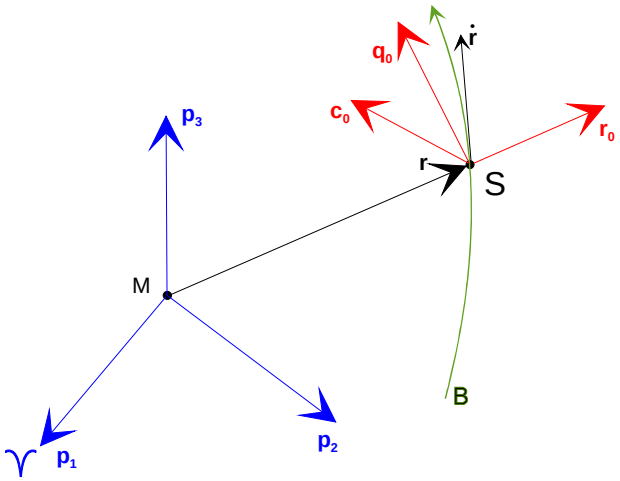

Bild 3-1:Das Frühlingspunkt orientierte $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ – Äquatorsystem („*Newton*-System“, in Zeichnung blau) bezogen auf den Ursprung M zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen für das bewegte Objekt S auf einer Bahn B mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ und Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$, sowie das mitgeführte $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ – *Leibniz*-System (rotes System) als ein begleitendes Dreibein zur analytischen Untersuchung eines Bewegungsvorganges. $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ spannen zu jedem Zeitpunkt die oskulierende Bahnebene mit Normalenvektor $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ auf.

Zur Beschreibung einer Bewegung gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten:

1. Zum einen kann die Bewegungsgleichung numerisch integriert werden. Üblicherweise erfolgt diese Integration in Bezug auf ein als inertial angenommenes Basissystem. In

der Bahnmechanik von Raumflugkörpern ist dies üblicherweise das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem, dessen $\mathbf{p}_1$ – Achse zum Frühlingspunkt Υ gerichtet ist (siehe Bild 3-1), $\mathbf{p}_3$ – Achse zum Nordpol des Äquatorsystems, sowie $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1$. Die Basisvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ spannen die Basisebene dieses Systems auf, die als Äquatorebene bezeichnet wird.

Der Gebrauch dieses Systems zur Beschreibung von Bewegungen kann z.B. auf *I. Newton* zurückgeführt werden. Der Ursprung M eines solchen Systems liegt nicht notwendig fest. Bei interplanetaren Bahnen kann dies das Baryzentrum des Sonnensystems sein, häufig auch der Sonnenmittelpunkt, womit dann aber dieses System nicht mehr als inertial angenommen werden kann. Bei Erdsatelliten ist der Bezugspunkt üblicherweise der Erdmittelpunkt. Der allgemeine Ansatz einer solchen Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_x^i \, \mathbf{p}_i \tag{3.1}$$

Hier bezeichnen die Parameter b_x^i die Beschleunigungen längs der drei durch die $\mathbf{p}_i$ gegebenen Achsen des Basissystems. Ein Beispiel für eine Bewegungsgleichung in einem inertialen System („*Newton*-System“) ist die aus dem *Newton*schen Gravitationsgesetz (2.65) im Fall konstanter Massen (m_Z des Zentralkörpers, m des bewegten Objektes) hergeleitete Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_x^i \, \mathbf{p}_i = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{\mu}{r^3} x^i \mathbf{p}_i \quad . \tag{3.2}$$

Hier wird die zentrische Gravitationskonstante $\mu := G_N \left(m_Z + m \right)$ mit der Newtonschen Gravitationskonstante G_N, der Masse m_Z des Zentralkörpers und der Masse m des bewegten Körpers verwendet. Die allgemeine Bewegungsgleichung (3.1) kann numerisch in voller Allgemeinheit integriert werden und somit das Bewegungsproblem vollständig gelöst werden, sofern nur die Teilbeschleunigungen b_{x1}, b_{x2}, b_{x3} bekannt sind. Die numerische Integration hat die bekannten Nachteile, etwa

- keine überblickmäßige, langfristig gültige Bahninformation möglich,
- Gültigkeitsdauer des Ergebnisses nur für recht beschränkten Zeitraum.

Auf *C.F. Gauß* geht in diesem Zusammenhang der Begriff „spezielle Störungen“ zurück. Hierunter versteht er die numerische sukzessive Berechnung der Störungen mit Lösung der Bewegungsgleichungen durch « mechanische » Quadratur[1]. Die in der Bahnmechanik üblicherweise verwendeten numerischen Verfahren sind ein Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren oder einem Differenzenverfahren (Mehrfachschrittverfahren)[2].

2. *Gauß* unterschied von den „speziellen Störungen“ die „allgemeinen Störungen“. Dieser Begriff steht für Untersuchungen mit analytischen Hilfsmitteln insbesondere Reihenentwicklungen um einen allgemeinen Einblick in die Bewegungsmechanismen zu erhalten, wobei die Störungsfunktion durch explizite Formeln für alle Zeiten dargestellt wird. Analytische Integrationen sind wie die numerischen zur Untersuchung von Bewegungsvorgängen unentbehrlich. So ist es für bahnanalytische Zwecke, für Unter-

[1] siehe in O. VOLK (1957), pp.211-212

[2] Siehe etwa in K Stumpff (1965), pp. 296-368, J. STOER UND R. BULIRSCH (1973), pp.95-150

suchungen des langfristigen Bahnverhaltens, aber auch für manchen operationellen Einsatz sinnvoll, analytische Lösungen anzustreben. Um diese zu erhalten ist die von *L. Euler* geschaffene Methode der Variation der Parameter nach wie vor das wirkungsvollste Instrumentarium, wenn von einer beliebigen analytischen Darstellung ausgegangen werden und wenn die Rechnung in einem geeigneten bewegungsbezogenen Koordinatensystem erfolgen kann. Als ein für die analytische Integration geeignetes Koordinatensystem kann das mitgeführte *Leibniz*-System angesehen werden, was auf die Bewegungsgleichung in der Form (2.66) hinausläuft:

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; b_R\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \tag{3.3}$$

Dies zeigte sich schon in der Aufstellung der Variationsgleichungen in der Gauß'schen Form (2.67) durch Aufsplittung der eine Bewegung prägenden Beschleunigungen in einen radialen (b_R), transversalen (b_T) und normalen (b_N) Anteil[1]. Die enge Verwandtschaft der *Leibniz*-Systeme mit den *Hansen*-Systemen, worauf in Abschnitt 2.4.3 hingewiesen wurde, legt nahe, diese analytische Integration in einem *Hansen*-System durchzuführen. Der Vorteil einer Verwendung der *Hansen*-Systeme liegt

- zum ersten in der spezifischen Eigenschaft der *Hansen*-Koordinaten als einem bewegungsbezogenen System mit der Einführung des allgemeinen Bahnwinkels ζ als unabhängiger Variable, der sich in notwendiger Weise als Integral des Betrages der Variation des radialen Richtungsvektors ergibt (siehe Satz H9 in Abschnitt 2.4.1 ab Seite 38),
- zum zweiten in der Eigenschaft des *Hansen*-Systems das einzige fest mit einer oskulierenden Bahnebene gekoppelte (orthonormierte) Koordinatensystem zu sein (Satz H19 in Abschnitt 2.4.7 ab Seite 53),
- zum dritten mit ihrer Trennung von Bewegungseinflüssen auf die Bahnebene und Bewegungseinflüssen auf die Bewegung des Himmelskörpers in der oskulierenden Bahnebene (siehe etwa die folgenden Variationsgleichungen (3.6) - (3.8)).

Die Untersuchung der Bewegungseinflüsse in der oskulierenden Bahnebene soll Gegenstand dieses Kapitels sein. Die Aufstellung der dazu benötigten Variationsgleichungen wird im folgenden Abschnitt in vollständiger Allgemeinheit und insbesondere gegenüber der bekannten *Kepler*lösung der Himmelsmechanik verallgemeinert näher untersucht. Auf diese Weise zeigt dieses Kapitel bereits eine wichtige Anwendung der *Hansen*-Systeme, zunächst für beliebige Bewegungen, dann in der Astrodynamik.

Der Beschleunigungsvektor (3.3) lässt sich in einem $\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0\right)$ *Leibniz*-System bei Bezug der Bewegung auf ein *Hansen*-System (da die Größen $\dot{\zeta}, \dot{\eta}$ nur in einem solchen erklärt werden können) entsprechend Formel (2.127) von Seite 44 in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; (\ddot{r} - r\,\dot{\zeta}^2)\,\mathbf{r}_0 + (2\,\dot{r}\,\dot{\zeta} + r\,\ddot{\zeta})\,\mathbf{q}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \tag{3.4}$$

darstellen. Mit der Variation des Bahnwinkels $\dot{\zeta}$ nach Formel (2.73) kann in vollständiger Allgemeinheit entsprechend Formel (2.130) auch geschrieben werden:

[1] Anstelle des Begriffs „transversal" findet sich in der Literatur gelegentlich auch der Begriff „zirkular" (so etwa bei K. STUMPFF (1959)). G.W. LEIBNIZ (1689) verwendete den Begriff „transradial"

$$\ddot{\mathbf{r}} \;=\; \left(\ddot{r} - \frac{G^2}{r^3}\right)\mathbf{r}_0 + \frac{\dot{G}}{r}\,\mathbf{q}_0 + \frac{G}{r}\,\dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \qquad . \tag{3.5}$$

Vergleich mit den Beschleunigungskomponenten in der allgemeinen Bewegungsgleichung (3.3) führt als erste Variationsgleichung auf die (allgemeine) *Leibniz*gleichung[1], welche die radiale Beschleunigung beschreibt, somit nur vom radialen Anteil der Beschleunigung abhängt,

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} + b_R \tag{3.6}$$

sowie die weiteren Variationsgleichungen für die Variation des Flächenparameters (gleichwertig einer Variation des Betrags des Drehimpulses), die nur vom transversalen Anteil der Beschleunigung abhängt,

$$\dot{G} \;=\; r\,b_T \tag{3.7}$$

und der räumlichen Drehung des Systems um den Radiusvektor , die nur vom normalen Anteil der Beschleunigung abhängt,

$$\dot{\eta} \;=\; \frac{r}{G}\,b_N \qquad . \tag{3.8}$$

Wird die letzte dieser Variationsgleichungen in die dritte der Variations- Formeln des mitgeführten Bahnsystems („*Frenet*sche Formeln des mitgeführten Bahnsystems“) (2.136) auf Seite 47 eingesetzt, folgt die Variationsgleichung für die Orientierung der $\mathbf{q}_1^{(I)}$, $\mathbf{q}_2^{(I)}$ – Basisebene im Raum als Folge einer Rotation des Normalenvektors

$$\dot{\mathbf{c}}_0 \;=\; -\frac{r}{G}\,b_N\,\mathbf{q}_0 = -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \qquad . \tag{3.9}$$

Da $\mathbf{c}_0$ ein Einheitsvektor ist, können aus der letzten Gleichung nur zwei Parameter bestimmt werden. Dazu können die beiden Winkel *Inklination i* und *Länge des Knotens* Ω gewählt werden, wie mit den Formeln (2.186) gezeigt wurde.

Die allgemeinen Variationsgleichungen werden ergänzt durch die Variationsgleichung für den Bahnwinkel ζ aus Formel (2.73)

$$\dot{\zeta} \;=\; \frac{G}{r^2} \qquad . \tag{3.10}$$

Die Variationsgleichungen für $\ddot{r}$, $\dot{G}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ werden durch fünf Integrationen und nach Lösung der zwei zusätzlichen Variationsgleichungen der räumlichen Bewegung in Inklination *i* und Länge des Knotens Ω das allgemeine Bewegungsproblem vollständig gelöst. Wird der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable gewählt, brauchen zunächst interessanterweise nur vier Variationsgleichungen gelöst zu werden, anschließend die Variationsgleichungen für *i* und Ω und zum Abschluss das Zeitintegral $\dot{\zeta}$. Bemerkenswert an diesen allgemeinen Variationsgleichungen ist, dass die transversale Beschleunigungskomponente ausschließlich auf den Flächenparameter *G*, dass die normale Beschleunigungskomponente ausschließlich auf die

[1] Wir wollen hier die von A. J. AITON(1960), p.67 vorgeschlagene Bezeichnung („*Leibniz's equation*“) auch für den allgemeinen in der vorliegenden Arbeit benötigten Fall der radialen Beschleunigung verwenden und zwar auch ohne den Zusatz „allgemeine“

Orientierungswinkel der Bahn im Raum wirken und dass die sechste der Variationsgleichungen für den Bahnwinkel als (schneller bzw. eigentlich unabhängiger) Variable die „Stör" - Beschleunigungen b_R, b_T, b_N nicht explizit enthält.

P. A. Hansen nutzte diese Eigenschaft in seiner Störungstheorie[1] zu einer weitgehend unabhängigen Behandlung des in der momentanen Bahnebene liegenden Beschleunigungsanteils (= „Störanteils") und des die Bahnebene beeinflussenden außerhalb der Bahnebene befindlichen Beschleunigungsanteils (= „Störanteils"). Wir wollen in der vorliegenden Untersuchung auch untersuchen, inwieweit diese Eigenschaft vorteilhaft zur Lösung verschiedener weitergehender Aufgabenstellungen der Himmelsmechanik und Bahnanalyse verwendet werden kann.

3.2 Allgemeine mathematische Beschreibung von Bewegungen

Einer der drei Schwerpunkte der vorliegenden Arbeit ist der Bezug jeder Bewegung auf die geradlinig gleichförmige Bewegung als „Urmutter" aller Bewegungen. Dies hat folgende Vorteile:

1. mathematisch: einfacher und übersichtlicher Formalismus
2. physikalisch: durch Rückgriff auf die inertiale Bewegung kann der Einfluss einzelner eine Bewegung prägender Beschleunigungen in übersichtlicher Weise analysiert werden
3. ein *Hansen*-System ist das einzige bewegungsorientierte Koordinatensystem, das dieselben formalen Eigenschaften wie ein inertiales System hat, nämlich die Identität von absolutem und relativem Geschwindigkeitsvektor. *Hansen* formulierte so, dass die ersten Ableitungen auf dieses System bezogener bahnmechanischer Größen im gestörten wie im ungestörten Fall identisch sind. Deshalb ist es naheliegend, ausgehend von einer geradlinigen Bewegung alle weiteren Bewegungsvorgänge in einem *Hansen*-System zu untersuchen.

In diesem Abschnitt wird zunächst der Formalismus der geradlinig gleichförmigen Bewegung (also einer inertialen Bewegung) hergeleitet. Dies geschieht zunächst durch Integration über die Zeit. Anschließend werden die erhaltenen Formeln durch Einführung des Bahnwinkel ζ entsprechend Beziehung (3.10) notwendig auf ein *Hansen*-System bezogen. Dieser Bezug ermöglicht einen eleganten und für weitere Anwendungen vorteilhaften Formalismus zur Beschreibung beliebiger Bewegungen. Die hier vorgestellte Herleitung zeigt nicht, dass ein *Hansen*-System zu einer solchen Darstellung benötigt wird, sondern dass sie im Fall einer geradlinigen Bewegung notwendig auf ein *Hansen*-System führt. Dies wird der Gegenstand der folgenden Abschnitte dieser Arbeit sein.

3.2.1 Die geradlinige Bewegung

(1) Ansatz im (inertialen) *Newton*-System

Die Beschreibung einer beliebigen Bewegung wird im Grunde genommen seit den Überlegungen *Keplers*, nämlich durch die Verwendung des zweiten *Kepler*schen Gesetzes in seiner Deutung als Vektorprodukt aus Orts- und Geschwindigkeitsvektor, so durchgeführt, dass der Ausgangspunkt aller Berechnungen stets eine geradlinige Bewegung ist (vergleiche Bild 3-2). Der Geschwindigkeitsvektor definiert ja eine Gerade durch einen Punkt, der durch den Ortsvektor festgelegt wird. Diese Betrachtungsweise wird in der vertrauten Praxis deshalb nicht

[1] vgl. HANSEN (1857), STUMPFF (1974) pp.163–229, TISSERAND, F. (1889-1896): *Traité de Mécanique Céleste*, Tome I, pp.461-474 and Tome III, pp.299-369

wahrgenommen, da erfahrungsgemäß der Zustandsvektor den momentanen Zustand eines Bewegungsvorganges vollständig beschreibt, indem er sich in die Parameter der oskulierenden Bahnkurve, welche auch immer diese seien, transformieren lässt. Diesen Zusammenhang wollen wir in diesem Abschnitt vertieft hinterfragen.

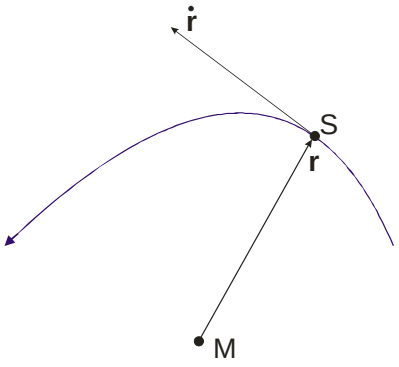

Bild 3-2: Beschreibung einer beliebigen Bewegung durch Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung im bewegten Objekt S. Die geradlinige Bewegung wird längs der Tangente an die Bahnkurve angenommen, welche durch den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$ vorgegeben ist. Der Ursprung O des Systems ist willkürlich angenommen

Die physikalische Grundlage für die folgenden Überlegungen sei das *erste Newtonsche Axiom* (lex prima):

- *Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch einwirkende Beschleunigungen gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.*

Basierend auf diesem Axiom „gibt es Bezugssysteme, die als Inertialsysteme bezeichnet werden, in denen sich ein frei bewegender Körper, der also keinen äußeren Kräften unterliegt, konstante Geschwindigkeit besitzt. … Es gibt beliebig viele Inertialsysteme, die sich alle relativ zueinander geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegen“[1]. Dieser Satz wird auch als Trägheitssatz bezeichnet. Wir wollen im Folgenden als Grundbewegung von der durch den Trägheitssatz beschriebenen geradlinigen und gleichförmigen Bewegung ausgehen. Diese wird verändert, sofern eine von außen einwirkende Kraft eine Veränderung erzwingt. Dies ist die Aussage des *zweiten Newtonschen Axioms*:

- *Die Kraft, die auf einen Körper von außen einwirkt, verändert seine Bewegungsgröße.*

Wir können auch formulieren: die einwirkende Kraft „stört“ die vorgegebene, d.h. „natürliche“ Bewegung, welche im Rahmen der klassischen Bewegungslehre durch die Bewegungsgröße (in der Physik auch als „Impuls“ bezeichnet) beschrieben werden kann. Es handelt sich hier um das Produkt aus der Masse *m* des bewegten Körpers und seiner Geschwindigkeit V, in vektorieller Schreibweise

$$\mathbf{I} := m\,\dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{3.11}$$

Um eine derart „gestörte“ Bewegung beschreiben zu können, müssen wir zunächst die „ungestörte“, also die gleichförmig geradlinige Bewegung darstellen. Wir wollen dies in dem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-idealen System, also einem bewegungsbezogenen System durchführen. Dies kann zugleich als ein Beispiel, allerdings auch höchst bedeutsames Beispiel, der in den vorstehenden Abschnitten dargestellten allgemeinen Bewegungslehre verstanden werden.

[1] Formulierung aus: LANDAU, L. D. UND LIFSCHITZ, E. M. (1992)

Im „störfreien“ Fall, wenn also keine Beschleunigungen auf das bewegte Objekt einwirken, verschwinden in der allgemeinen Bewegungsgleichung (3.3) alle Teilbeschleunigungen

$$b_R \;=\; b_T \;=\; b_N \;=\; 0 \quad . \tag{3.12}$$

Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (3.3) auf den Ausdruck $\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Zweimalige Integration ergibt in diesem Fall den Trägheitssatz

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \tag{3.13}$$

mit den Integrationskonstanten $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$. Damit ist zu jedem Zeitpunkt *t* der Ort **r** bekannt. Der Geschwindigkeitsvektor ist

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{c}_1 \;=\; const. \quad .$$

Die durch diese Gleichungen beschriebene Bewegung ist also *gleichförmig.*

(2) Ansatz im Leibniz-System

Die Bewegung kann im Sinne des mitbewegten *Leibniz*-Systems beschrieben werden, d.h. in Polarkoordinaten. Dazu werden die Variationsgleichungen (3.6)–(3.10) herangezogen. Mit $b_N = 0$ liefert Gleichung (3.9) für den Normalenvektor $\mathbf{c}_0 = const.$. Die „Bahnebene“, das ist hier die Ebene, welche durch die (geradlinige) Bahn und den Ursprung O aufgespannt wird, ist somit raumfest. Wegen $b_T=0$ folgt aus Gleichung (3.9) auch $\dot{G} = 0$ und daher G = *const.*, d.h. der „Flächenparameter“ ist in diesem Fall konstant. Die Variationsgleichung (3.6) für den Radius *r* lautet im Fall der unbeeinflussten (= „ungestörten“) Bewegung

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} \quad , \quad (b_R = 0) \quad . \tag{3.14}$$

Ein erstes Integral (nach Multiplikation mit $\dot{r}$ auf beiden Seiten) ist

$$\dot{r} \;=\; \pm\sqrt{C_1^2 - \frac{G^2}{r^2}} \quad . \tag{3.15}$$

Hier ist C_1^2 die Integrationskonstante, welche offenbar die Bedingung

$$r \;\geq\; \frac{G}{C_1} \;\geq\; 0 \tag{3.16}$$

erfüllen muss. Da *G* nicht negativ ist, muss also C_1 eine positive Größe sein:

$$C_1 \;>\; 0 \quad . \tag{3.17}$$

Die Größe G/C_1 definiert den kleinsten möglichen Wert für den Radius r. Nach Bild 3-3 auf Seite 71 kann dies nur der Perizentrumsabstand in Bezug auf den Ursprung O sein:

$$r_P = \frac{G}{C_1} \; . \tag{3.18}$$

Zur nächsten Integration führen wir die Hilfsgröße

$$g \;:=\; \sqrt{r^2 C_1^2 - G^2} \tag{3.19}$$

ein, die nach Bild 3-3 geometrisch gedeutet werden kann: $s = g / C_1$ ist die Bogenlänge auf der (geraden) Bahn zwischen dem zum Ursprung nächsten Bahnpunkt (dem Perizentrum P) und dem Bahnpunkt *r*.

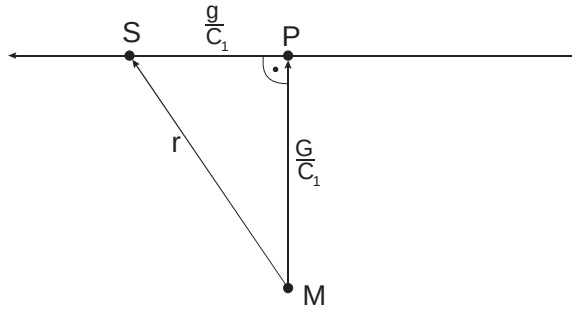

Bild 3-3: Zur Beschreibung der geradlinigen Bewegung, Die „Bahnebene“ wird durch die Gerade und den (willkürlichen!) Bezugspunkt M aufgespannt

Die Hilfsgröße *g* erfüllt die Bedingung

$$g\,\dot{g} \;=\; C_1^2\, r\,\dot{r} \quad , \tag{3.20}$$

und mit der Differentialgleichung (3.15) auch

$$r\,\dot{r} \;=\; \sqrt{r^2\, C_1^2 - G^2} \;=\; g \quad , \tag{3.21}$$

somit

$$\dot{g} \;=\; C_1^2 \quad . \tag{3.22}$$

Das gesuchte Integral ist

$$g \;=\; C_1^2\, t + C_2 \tag{3.23}$$

mit der neuen Integrationskonstanten C_2. Der Radius kann mit Gleichung (3.19) berechnet werden:

$$r \;=\; \sqrt{C_1^2\, t^2 + 2\, C_2\, t + \frac{C_2^2 + G^2}{C_1^2}} \quad . \tag{3.24}$$

(3) Darstellung im *Hansen*-System

Wir wollen jetzt den Bezug zu einem *Hansen*-System herstellen. Dazu wird an Stelle der Zeit *t* mit der allgemeingültigen Variationsgleichung (3.10) auf Seite 67 der Bahnwinkel ζ eingeführt. Dieser ist nach Satz H9 (in Abschnitt 2.4.1 ab Seite 38) notwendig und hinreichend auf ein *Hansen*-System bezogen. Es wird dann

$$d\zeta \;=\; \frac{G}{r^2}\,dt \;=\; \frac{G\,dt}{C_1^2\,t^2 + 2\,C_2\,t + \dfrac{C_2^2 + G^2}{C_1^2}} \tag{3.25}$$

mit dem Integral

$$\zeta - \zeta_P = \int_{t_P}^{t} \frac{G}{r^2}\,dt = \arctan\left[\frac{1}{G}\left(C_1^2\,t + C_2\right)\right]$$

bzw., wenn $\zeta_P := \zeta\left(t_P\right)$ im Perizentrum P angenommen wird,

$$\tan(\zeta - \zeta_P) \;=\; \frac{1}{G}\left(C_1^2\,t + C_2\right) \;=\; \frac{g}{G} \;=\; \frac{\dfrac{g}{C_1}}{\dfrac{G}{C_1}} \quad . \tag{3.26}$$

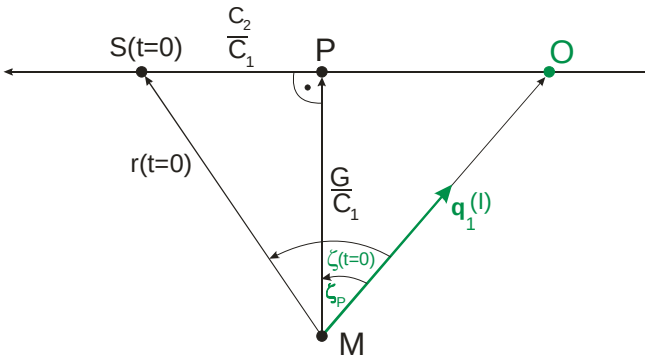

Bild 3-4: Zur Verknüpfung der Parameter ζ_P und C_2 der geradlinigen Bewegung. O – Anfangspunkt eines *Hansen-Systems* mit Anfangsvektor $\mathbf{q}_1^{(I)}$

Mit der Definition der Variablen *g* aus Gleichung (3.19) gilt auch

$$\tan(\zeta - \zeta_P) \;=\; \frac{1}{G}\sqrt{C_1^2\,r^2 - G^2} \quad . \tag{3.27}$$

Die neue Integrationskonstante ζ_A hat mit der Integrationskonstanten C_2 den Zusammenhang

$$\tan\left[\zeta(t=0) - \zeta_P\right] \;=\; \frac{C_2}{G} \quad , \quad \zeta_P \;:=\; \zeta(t = t_P) \quad . \tag{3.28}$$

Bild 3-4 zeigt diesen Zusammenhang geometrisch. Gleichung (3.26) gibt den Zusammenhang zwischen Zeit *t* und Bahnwinkel ζ. Wird ζ vorgegeben, kann die Zeit *t* aus

$$t \;=\; \frac{1}{C_1^2}\left[G\tan(\zeta - \zeta_P) - C_2\right] \tag{3.29}$$

berechnet werden. Diese Beziehung ist immer erklärt, da nach der Beziehung (3.17) auf Seite 70 stets $C_1 > 0$ angenommen werden muss. Die Konstante C_2 tritt bei Darstellung der Bewegung bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit auf, hat also etwas mit einer Anfangszeit t_P zu tun. Nehmen wir

$$r_P \;:=\; r(t_P) \;=\; \frac{G}{C_1} \tag{3.30}$$

an, liefert Gleichung (3.24) unmittelbar diesen Zusammenhang:

$$C_2 \;=\; -C_1^2\, t_P \quad . \tag{3.31}$$

Auflösung von Gleichung (3.27) ergibt die Darstellung des Radius in Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ

$$r \;=\; \frac{G}{C_1 \cos(\zeta - \zeta_P)} \quad . \tag{3.32}$$

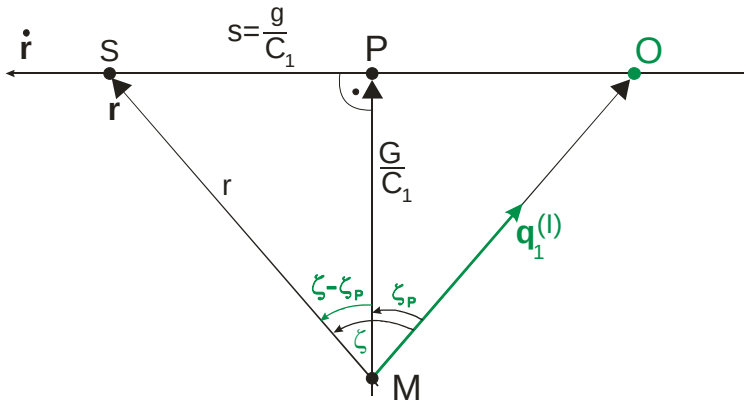

Bild 3-5: Zur geometrischen Veranschaulichung der mathematischen Beschreibung einer geradlinigen Bewegung: S – Ort des längs der Geraden OS bewegten Objektes mit Ortsvektor **r** und Radius r in Bezug auf einen (willkürlichen) Ursprung M, mit Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}$, P – Perizentrum, O – Anfangspunkt eines *Hansen*-Systems mit Anfangsrichtung $\mathbf{q}_1^{(I)}$, ζ *Hansen*scher Bahnwinkel, ζ_P - *Hansen*scher Perizentrumswinkel, $s=g/C_1$ Bogenlänge als Abstand des Ortes S vom Perizentrum P

Da $G \geq 0$ und $C_1 > 0$ muss auch $\cos(\zeta - \zeta_P) > 0$ sein, der Zwischenwinkel $\zeta - \zeta_A$ kommt also nur im Bereich

$$-90° \;<\; \zeta - \zeta_P \;<\; 90° \tag{3.33}$$

vor, die Singularität $|\zeta - \zeta_P| = 90°$ kann, wie auch geometrisch einsichtig ist, nie erreicht werden, sofern nur G/C_1 gesetzt werden kann. Die Variation des Radius (also die radiale Geschwindigkeit) folgt aus Gleichung (3.15)

$$\dot{r} \;=\; C_1 \sin(\zeta - \zeta_P) \quad . \tag{3.34}$$

Die geometrischen Verhältnisse dieser Darstellung der geradlinigen Bewegung zeigt Bild 3-5. Der kürzeste Abstand des bewegten Körpers zum Ursprung *O* wird in der hier gewählten Darstellung durch den Ausdruck (3.30) (vgl. Beziehung (3.18))

$$r_P \;=\; r(\zeta = \zeta_P) \;=\; \frac{G}{C_1}$$

gegeben.

Von gelegentlichem Interesse ist die aus den Gleichungen (3.21) und (3.23) folgende Beziehung

$$r\dot{r} \;=\; G\tan(\zeta-\zeta_P) \quad . \tag{3.35}$$

Bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit lautet sie wegen Gleichung (3.24) auch

$$r\dot{r} \;=\; C_1^2\,t+C_2 \tag{3.36}$$

und daher wegen der Beziehung (3.31) auch

$$r\dot{r} \;=\; C_1^2\,(t-t_P) \quad . \tag{3.37}$$

Für manche Überprüfungen ist es nützlich, die Dimensionen der beiden Konstanten C_1 und C_2 zu notieren:

$$C_1\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}\right] \quad , \quad C_2\left[\frac{\mathrm{km}^2}{\mathrm{s}}\right] \quad . \tag{3.38}$$

3.2.2 Die Integrationskonstanten der geradlinigen Bewegung

Der momentane Bewegungszustand wird auch in der geradlinigen Bewegung wie üblich durch den Ortsvektor $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$ und den Geschwindigkeitsvektor (vgl. die Formeln (2.68)) $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0$ beschrieben. Aus der Variationsgleichung (2.73) $\left(r^2\dot{\zeta}=G\right)$ folgt mit Beziehung (3.32) für die transversale Geschwindigkeit in der geradlinigen Bewegung

$$r\dot{\zeta} \;=\; \frac{G}{r} \;=\; C_1\cos(\zeta-\zeta_P) \quad . \tag{3.39}$$

Für den Geschwindigkeitsvektor ergibt sich also, wenn noch die Gleichung (3.34) für die radiale Geschwindigkeit $\dot{r}$ herangezogen wird,

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; C_1\left[\mathbf{r}_0\sin(\zeta-\zeta_P)+\mathbf{q}_0\cos(\zeta-\zeta_P)\right] \quad .$$

Da $\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{q}_0 = 0$ folgt daraus insbesondere, wenn $V=\left|\dot{\mathbf{r}}\right|$ die absolute Geschwindigkeit der Bewegung ist,

$$\dot{\mathbf{r}}^2 \;=\; V^2 \;=\; C_1^2 \quad , \tag{3.40}$$

Oder, da nach der Beziehung (3.17) auf Seite 70 stets C_1>0 angenommen werden kann,

$$C_1 \;=\; V \quad . \tag{3.41}$$

▶ *Die erste Integrationskonstante* C_1 *der geradlinigen Bewegung ist die Geschwindigkeit* V *des bewegten Objektes.*

Wir erhalten für den Zustandsvektor (im Rahmen der geradlinigen Bewegung) somit die allgemeingültige Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_P)}\,\mathbf{r}_0\\ \dot{\mathbf{r}} &= V\left[\mathbf{r}_0\sin(\zeta-\zeta_P)+\mathbf{q}_0\cos(\zeta-\zeta_P)\right]\end{aligned} \tag{3.42}$$

sowie für Radius, radiale und transversale Geschwindigkeitskomponente

$$\begin{aligned} r &= \frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_P)} \\ \dot{r} &= V\sin(\zeta-\zeta_P) \\ r\dot{\zeta} &= V\cos(\zeta-\zeta_P) \end{aligned} \qquad (3.43)$$

und außerdem

$$r\dot{r} = V^2(t-t_P) = G\tan(\zeta-\zeta_P) \quad . \qquad (3.44)$$

Die zweite Integrationskonstante C_2 kann dem Perizentrumswinkel ζ_P zugeordnet werden. Aus den Beziehungen (3.28) und (3.31) folgt

$$\zeta_P = \zeta(t_P) = \zeta(t_0) + \arctan\left(\frac{C_2}{G}\right) \quad , \quad \text{mit } t_P = -\frac{C_2}{V^2} \quad . \qquad (3.45)$$

Die Geschwindigkeit zeigt sich im Zusammenhang mit der geradlinigen Bewegung als ein Parameter, der so lange als konstant angesehen werden kann, wie keine weitere Beschleunigung („Störbeschleunigung“) diese Bewegung verändert. Das ist im Zusammenhang mit bahnmechanischen Untersuchungen deshalb bemerkenswert, da man dort gewohnt ist, die Geschwindigkeit als eine schnelle Variable aufzufassen. Es gilt also, den Begriff Parameter im Zusammenhang mit diesem Bericht, der sich von der Zweikörperbewegung als Basisbewegung der Astrodynamik lösen möchte, neu zu bedenken.

3.2.3 Der Flächensatz in der geradlinigen Bewegung

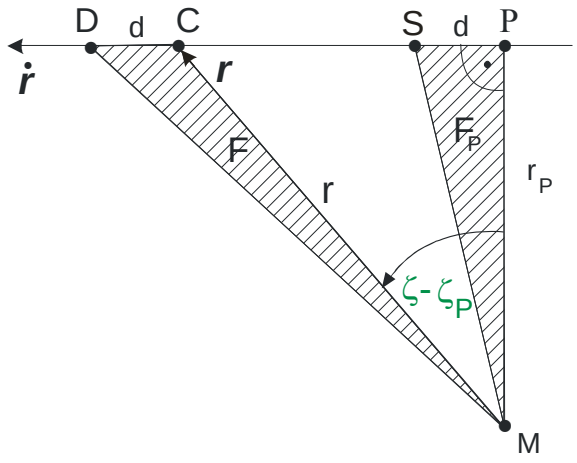

Bild 3-6: Der Flächensatz im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung

Der von *J. Kepler* im Rahmen der Zweikörperbewegung gefundene Flächensatz (siehe in Abschnitt 2.2.1), den er in seinem zweiten Gesetz der Planetenbewegung formulierte, ist eine Folge der Tatsache, dass jede ebene Bewegung einen Normalenvektor mit fester Richtung (aber nicht notwendig mit festem Betrag) hat. Dieser Sachverhalt kann durch die Beziehung

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0 \quad , \quad \mathbf{c}_0 = \text{const.}$$

ausgedrückt werden. Der Flächensatz ist also keine spezielle charakterisierende Eigenschaft der so genannten *Kepler*bewegung, sondern ihm genügt die *Kepler*bewegung wie jede andere ebene Bewegung auch, wenn nur $\mathbf{c}_0 = const.$ ist. Im Fall der Keplerbewegung ist darüber hinaus wie bei jeder Zentralbewegung mit $\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}} = 0$ auch der Betrag des Flächenparameters kon-

stant: $G = const.$, $\mathbf{c} = const.$. Der Flächensatz ist somit eine allgemeine geometrische Eigenschaft einer Bewegung, die von einem Bezugssystem unabhängig sein muss.

Wir wollen den Flächensatz als Beispiel zu dieser Aussage im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung untersuchen. Da in diesem Fall die Geschwindigkeit konstant ist, $V = const.$, wird in gleichen Zeitintervallen Δt auch stets dieselbe Distanz

$$d = V \Delta t \tag{3.46}$$

durchlaufen. In Bild 3-6 soll die Fläche F_P, die aus dem Dreieck *MSP* gebildet wird, wobei P das Perizentrum und *M* ein (willkürlicher) Ursprung ist, mit der Fläche *F* eines Dreiecks *OCD* zu einem beliebigen Zeitpunkt *t* verglichen werden. Wenn $r_P = \overline{MP}$ die Perizentrumsdistanz ist, hat das Dreieck *MSP* in Bezug auf die in der Zeiteinheit durchlaufene Distanz *d* die Fläche

$$F_P = \frac{1}{2} r_P \, d \quad .$$

Hier kann r_P als Höhe des Dreiecks aufgefasst werden, die konstante Distanz *d* als dessen Basis. Somit hat das zu irgendeinem beliebigen Zeitpunkt gebildete Dreieck *MCD* wegen der Beziehung (3.46) dieselbe Basis und wegen der geradlinigen Bewegung dieselbe Höhe r_P, also auch dieselbe Fläche $F = F_P$. Dies bestätigt für den Fall der geradlinigen Bewegung den allgemeinen

Satz: *Der Radiusvektor einer ebenen Bewegung mit konstantem Flächenparameter überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Dem Flächensatz in dieser allgemeinen Form entspricht das ebenfalls von *J. Kepler* gefundene allerdings wesentlich allgemeiner gültige Abstandsgesetz. Da die transversale Geschwindigkeit (vgl. die Darstellung (2.3)) durch $V_T = r\dot{\zeta}$ bekannt ist (etwa aus den Beziehungen (2.69)) und der „Flächensatz“ in der Form $r^2\dot{\zeta} = G$ allgemeingültig (d.h. für **jede** Bewegung gültig) formuliert werden kann, ist $r\dot{\zeta} = G/r$, also

$$V_T = \frac{G}{r} \quad . \tag{3.47}$$

Während der Flächensatz in der oben formulierten Form für alle Bewegungen mit konstantem Normalenvektor (und damit konstantem Flächenparameter *G*) gilt, ist das Abstandsgesetz für jede beliebige Bewegung gültig, also eine rein kinematische Aussage:

Satz: *Der Abstand eines bewegten Körpers von einem Ursprung ist umgekehrt proportional zur transversalen auf diesen Ursprung bezogenen Geschwindigkeit.*

Diese Aussage ist zumindest aus historischen Gründen interessant, da *J. Kepler* zunächst das Abstandsgesetz gefunden hatte, bevor er erkannte, dass dieses nur in den Apsiden gültig ist, wenn er die gesamte Geschwindigkeit betrachtet. Weiteres Suchen führte *Kepler* dann auf den Flächensatz.

3.2.4 Die Basisvektoren der geradlinigen Bewegung

Das bewegungsbezogene $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System wird aus dem mitgeführten $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ - System durch Drehung um den *Hansen*schen Bahnwinkel ζ erhalten. Für den radialen, transversalen und den normalen Richtungsvektor gilt nach den Formeln (2.93)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)} \quad .\end{aligned} \tag{3.48}$$

Die Richtungen $\mathbf{r_0}$ und $\mathbf{q_0}$ sind im Verlauf auch der (ungestörten) geradlinigen Bewegung sicherlich nicht konstant. $\mathbf{q}_1^{(I)}$ hat als Richtung die Anfangsrichtung für $\zeta = 0°$, vgl. Bild 3-7. Für Orts- und Geschwindigkeitsvektor vergleichen wir die allgemeingültigen Darstellungen

$$\mathbf{r} \;=\; r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0$$

mit der Lösung (3.13) im Falle der geradlinigen Bewegung

$$\mathbf{r} \;=\; \mathbf{c}_1 t + \mathbf{c}_2 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{c}_1 \quad .$$

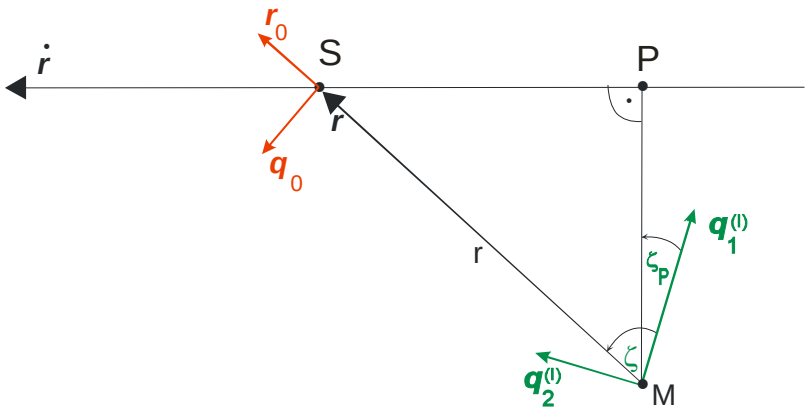

Bild 3-7: Die Basisvektoren des $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-Systems (grün) bei geradliniger Bewegung, die durch den Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ definiert ist, und durch das mitgeführte $\mathbf{r}_0,\mathbf{q}_0$ – *Leibniz*system (rot) charakterisiert wird. Der Normalenvektor $\mathbf{c}_0 = \mathbf{q}_3^{(I)}$ führt aus der Papierebene heraus

Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich die Beziehungen zwischen den Integrationskonstanten $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ und den Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ des bewegungsbezogenen *Hansen*-Systems. Zunächst ist

$$\mathbf{c}_1 \;=\; V\,(-\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta_P + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta_P) \quad . \tag{3.49}$$

Für $\mathbf{c_2}$ folgt

$$\mathbf{c}_2 \;=\; \mathbf{q}_1^{(I)}\,(r\cos\zeta + tV\sin\zeta_P) + \mathbf{q}_2^{(I)}\,(r\sin\zeta - tV\cos\zeta_P) \quad .$$

Da $\mathbf{c_2}$ = *const.* kann etwa $t = t_P$ = *const.* gesetzt werden. Dann ist nach der ersten der Gleichungen (3.43) auf Seite 75 mit $\zeta_P = \zeta(t_P)$

$$r_P \;=\; r(t = t_P) \;=\; \frac{G}{V} \tag{3.50}$$

und es wird mit

$$C_2 \;=\; -t_P V^2$$

aus der Beziehung (3.31) auf Seite 73

$$\mathbf{c}_2 \;=\; \mathbf{q}_1^{(I)}\left(\frac{G}{V}\cos\zeta_P - \frac{C_2}{V}\sin\zeta_P\right) + \mathbf{q}_2^{(I)}\left(\frac{G}{V}\sin\zeta_P + \frac{C_2}{V}\cos\zeta_P\right) \quad . \tag{3.51}$$

Die Konstanten können daher entsprechend Bild 3-8 geometrisch gedeutet werden.

Die Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ des *Hansen*-Systems lassen sich auf die Integrationskonstanten $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ der geradlinigen Bewegung zurückführen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(I)} &= -\mathbf{c}_1\left(\frac{1}{V}\sin\zeta_P + \frac{C_2}{V\,G}\cos\zeta_P\right) + \mathbf{c}_2\,\frac{V}{G}\cos\zeta_P \\
\mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{c}_1\left(\frac{1}{V}\cos\zeta_P - \frac{C_2}{V\,G}\sin\zeta_P\right) + \mathbf{c}_2\,\frac{V}{G}\sin\zeta_P \\
\mathbf{q}_3^{(I)} &= \frac{1}{G}\,\mathbf{c}_2\times\mathbf{c}_1 \quad .
\end{aligned} \tag{3.52}$$

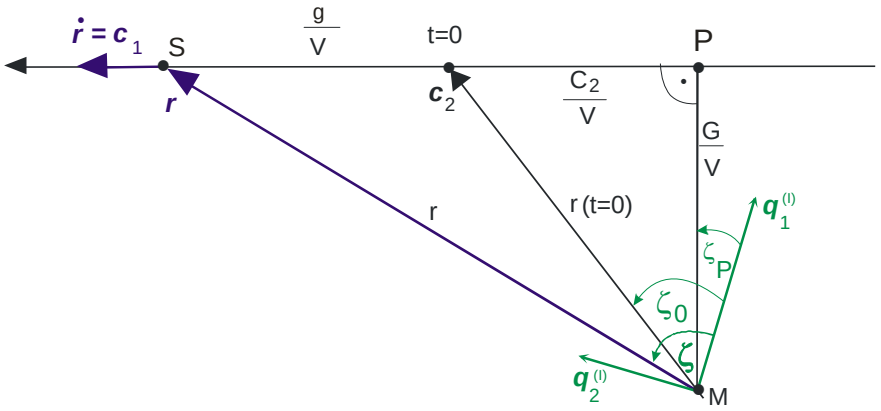

Bild 3-8: Geometrische Deutung der Integrationskonstanten der geradlinigen Bewegung. $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ sind konstante Hilfsvektoren

Im Fall der („ungestörten“) gleichförmig geradlinigen Bewegung mit den Parametern G = *const.*, $\mathbf{c_1}$ = *const.*, $\mathbf{c_2}$ = *const.* bzw. V = *const.*, ζ_P = *const.*, sind die $\mathbf{q}_j$ konstant und daher

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \;=\; 0 \quad (\dot{\mathbf{r}} = const.) \quad . \tag{3.53}$$

Der zugehörige (absolute) Systemeigenbewegungsvektor (*Darboux*sche Vektor) lautet daher mit Formel (2.145) auf Seite 48 (auch da sicherlich $\dot{\eta} = 0$)

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} \;=\; 0 \quad .$$

Dies bedeutet:

▶ *In der gleichförmig geradlinigen Bewegung ist der Systemeigenbewegungsvektor der Nullvektor, es findet keine Bewegung des Basis*-Hansen-*Systems statt.*

Die *Frenet*schen Formeln des mitgeführten Bahnsystems lauten in diesem Fall mit den Gleichungen (2.136) auf Seite 47

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \frac{G}{r^2}\mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= -\frac{G}{r^2}\mathbf{r}_0 \qquad (\dot{\mathbf{r}} = const.) \\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.54}$$

Diese Gleichungen lassen sich noch beträchtlich vereinfachen, wenn der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable verwendet wird:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} &= \mathbf{q}_0 \\ \frac{d\mathbf{q}_0}{d\zeta} &= -\mathbf{r}_0 \qquad (\dot{\mathbf{r}} = const.) \\ \frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} &= 0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Die Variationsmatrix $f_i^{\,j}$ der Variation des mitgeführten Bahnsystems lautet in diesem Fall, wenn der Übersichtlichkeit halber $\mathbf{g}_1 := \mathbf{r}_0$, $\mathbf{g}_2 := \mathbf{q}_0$, $\mathbf{g}_3 := \mathbf{c}_0$ gesetzt wird,

$$\mathbf{g}_i' := \frac{d\mathbf{g}_i}{d\zeta} = f_i^{\,j}\,\mathbf{g}_j \quad , \quad \text{mit} \quad \left(f_i^{\,j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.56}$$

Diese Beziehung wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verwendet.

3.2.5 Verfahren der Anpassung einer beliebigen Bewegung durch Kurven erster Ordnung

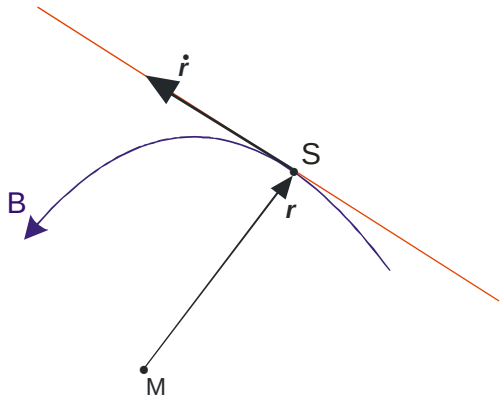

Bild 3-9: Zur Anpassung einer beliebigen Kurve durch eine Gerade: die Gerade kann als Tangente im Ort S des bewegten Objektes an die gegebene Kurve B gedeutet werden

Die Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine Kurve erster Ordnung ist ein besonders interessantes Beispiel über die Arbeitsweise des Verfahrens der Variation der Parameter bei Bezug auf ein *Hansen*-System. Die Bewegung werde durch Beschleunigungen beeinflusst. Wir können also annehmen, dass nicht alle der Beschleunigungskomponenten b_R, b_T, b_N in Richtung der drei Achsen des $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ *Leibniz*-Systems verschwinden. Kurven erster Ordnung sind Gerade, die ohne Einschränkung in der Form (3.24) auf Seite 71 bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit oder (3.43) auf Seite 75 bei expliziter Abhängigkeit vom Bahnwinkel

ζ dargestellt werden können. Die hier vorkommenden Parameter V und C_2 bzw. t_A bzw. ζ_A müssen jetzt als variabel zugelassen werden. Gesucht sind dann die Variationsgleichungen für diese Parameter.

Das in diesem Bericht behandelte Verfahren ist in gewissem Sinn eine Erweiterung der in der klassischen Mechanik verwendeten Verfahren zur Anpassung kegelschnittnaher Bewegungen. Aus diesem Grund muss sich das klassische Verfahren als eine Untermenge des hier behandelten allgemeineren Verfahrens darstellen lassen. Allerdings müssen sich manche Begriffsbildungen in diesem Zusammenhang neu hinterfragen lassen bzw. in einem neuen Licht betrachten. Wer etwa mit der in der Himmelsmechanik seit *J. Kepler* üblichen Anpassung der Planetenbahnen mit einer Kurve 2. Ordnung vertraut ist, wird über die im Zusammenhang mit der Anpassung durch eine Kurve 1. Ordnung nötige Verwendung der Geschwindigkeit als einem Bahnparameter, der den Anpassungsvorgang wesentlich beschreibt, verwundert sein. Doch gerade darin zeigt sich das Wesen des Anpassungsvorganges einer Bewegung mit einer bestimmten mathematischen Kurve (und der bekannten Bewegung auf dieser Kurve) und der daraus sich ergebenden Herleitung der Variationsgleichungen für diese Parameter: Wir gehen aus von einer bekannten Kurve und der bekannten Bewegung auf dieser Kurve, auch wenn diese Kurve und die Bewegung auf dieser Kurve mit der zu beschreibenden Bewegung wenig oder vielleicht gar nichts zu tun hat. Diese Überlegung betrifft einen Kernpunkt der vorliegenden Arbeit: im klassischen Fall wird von einer recht guten Näherung („intermediäre Bahn“) ausgegangen, deren Parameter durch kleine Änderungen so angepasst werden, dass die wahre Bewegung so gut wie möglich angepasst wird.

Im vorliegenden wesentlich allgemeineren Fall wird von einer beliebigen Kurve ausgegangen, die mit der endgültig zu beschreibenden Bewegung nicht unbedingt etwas zu tun haben muss. Ein einfaches Beispiel ist die Gerade, die von einer Ellipse wesentlich abweicht. Die Parameter, welche diese bekannte Bewegung wesentlich charakterisieren, werden zur Beschreibung der interessierenden Bewegung so variiert, bis diese Bewegung möglichst gut, d. h. im Rahmen einer gefundenen Genauigkeit, angepasst wird. Ob dies, was bis jetzt nur als Idee formuliert wurde, allerdings überhaupt möglich ist, muss im Beispiel gezeigt werden. Im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung jedenfalls ist der erste Bahnparameter C_1 der Geschwindigkeit V identisch gleich. Also ist die Geschwindigkeit notwendig einer der Parameter, die im Fall einer Anpassung variiert werden müssen.

3.2.5.1 Die Zeit als unabhängige Variable, Bezug auf **Leibniz-*System***

Betrachten wir zunächst die Herleitung der Variationsgleichungen bei expliziter Abhängigkeit von der Zeit t. Differentiation von Gleichung (3.24) auf S. 71 gibt

$$r\dot{r} \;=\; \dot{V}\left(Vt^2 - \frac{C_2^2+G^2}{V^3}\right) + \dot{C}_2\left(t + \frac{C_2}{V^2}\right) + \dot{G}\frac{G}{V^2} + V^2 t + C_2 \quad . \tag{3.57}$$

Anpassung mit einer Kurve erster Ordnung soll nun bedeuten, dass zu jedem Zeitpunkt die Bewegung durch eine geradlinige Bewegung angepasst wird, dass also die Geradendarstellung (3.24) und die zugehörige Variation des Radius also die Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$ in Gleichung (3.43) auf S. 75 zu jedem Zeitpunkt gelten sollen:

$$r\dot{r} \;=\; V^2 t + C_2 \quad .$$

Vergleich mit dem obigen Ausdruck (3.57) führt **notwendig** auf die Bedingungsgleichung für die Variation der Parameter Geschwindigkeit, Flächenparameter und zweite Konstante der geradlinigen Bewegung ($\dot{V}, \dot{C}_2, \dot{G}$):

$$\dot{V}\left(V t^2 - \frac{C_2^2 + G^2}{V^3}\right) + \dot{C}_2\left(t + \frac{C_2}{V^2}\right) + \dot{G}\,\frac{G}{V^2} \;=\; 0 \quad . \tag{3.58}$$

Die Aufstellung genau dieser Bedingungsgleichung ist der Kernpunkt des ganzen Verfahrens, denn an dieser und nur an dieser Stelle kommt die Bedingung der Anpassung der Bewegung durch eine bestimmte Kurve zum Tragen. Wir können daher diese Bedingungsgleichung auch als *Anpassungsbedingung* oder als *Anpassungsgleichung* bezeichnen. Mit dieser Anpassungsgleichung wird die Willkürlichkeit des Anpassungsvorganges sichtbar. Wir wissen nicht, wie die wahre Bewegung aussieht. Wir haben keine Möglichkeit, sie mathematisch greifbar zu machen. Also gehen wir von irgendeiner bekannten Bewegung aus, im vorliegenden Fall von der gleichförmig geradlinigen Bewegung, und variieren die Parameter der bekannten Bewegung so, dass die wahre Bewegung bestmöglich angepasst wird. Es wird dadurch verständlich, dass der eigentliche Aufwand zu einer Beschreibung eines Bewegungsvorganges in der richtigen d. h. physikalisch adäquaten Modellierung der Störbeschleunigungen b_R, b_T, b_N liegen wird, die übrigens vollständig unabhängig von der angepassten Bahnkurve erfolgen muss. Der Vorteil einer geeigneten Anpassung mag in einer geschickten Integration der Variationsgleichungen liegen.

In der hier abgeleiteten Anpassungsgleichung (3.58) ist von den Parametern V, C_2, G die Variation des „Flächenparameters“ G durch die Variationsgleichung (3.7) auf S. 67 ($\dot{G} = r\,b_T$) bekannt. Es gilt also, wie übrigens bei der Anpassung mit jeder beliebigen Kurve, die Variationsgleichungen für nur zwei weitere Parameter zu finden. Im Fall der Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung sind dies die Parameter V und C_2 (bzw. t_A). Dazu setzen wir zunächst $\dot{G}$ aus Gleichung (3.7) in der Anpassungsgleichung (3.58) ein

$$\dot{C}_2\,(V^2 t + C_2) \;=\; -\dot{V}\left(V^3 t^2 - \frac{C_2^2 + G^2}{V}\right) - r\,G\,b_T \quad . \tag{3.59}$$

Wegen der obigen Anpassungsgleichung bleibt für die Variation des Radius die „ungestörte“ Darstellung erhalten

$$\dot{r} \;=\; \frac{1}{r}\,(V^2 t + C_2) \quad ,$$

woraus durch Differentiation

$$\ddot{r} \;=\; \frac{1}{r}\,(2V\dot{V}\,t + \dot{C}_2) + \frac{V^2}{r} - \frac{\dot{r}^2}{r} \tag{3.60}$$

erhalten wird. Aus Gleichung (3.15) auf S. 70 ist wegen $V = C_1$

$$\frac{\dot{r}^2}{r} \;=\; \frac{V^2}{r} - \frac{G^2}{r^3} \tag{3.61}$$

bekannt, es bleibt also

$$\ddot{r} \;=\; \frac{1}{r}\,(2V\dot{V}\,t + C_2) + \frac{G^2}{r^3} \quad . \tag{3.62}$$

Vergleich mit der allgemeingültigen Variationsgleichung (3.6) auf S. 67 für die radiale Beschleunigung (hier zeigt sich die fundamentale Bedeutung der *Leibniz*schen Gleichung im Rahmen eines *Leibniz*-Systems))

$$\ddot{r} \;=\; b_R + \frac{G^2}{r^3}$$

ergibt somit im Fall einer Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung die zweite Beziehung zwischen $\dot{V}$ und $\dot{C}_2$

$$2V\dot{V}t + \dot{C}_2 \;=\; r\,b_R \quad . \tag{3.63}$$

Vergleich mit der Anpassungsgleichung (3.59) führt auf die gesuchten Variationsgleichungen für die Parameter V und C_2

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{(V^2t + C_2)\,b_R + G\,b_T}{\sqrt{(V^2t + C_2)^2 + G^2}} \\ V\dot{C}_2 &= \frac{(C_2^2 + G^2 - V^4t^2)\,b_R - 2V^2G\,b_T}{\sqrt{(V^2t + C_2)^2 + G^2}} \quad . \end{aligned} \tag{3.64}$$

Der Zusammenhang mit einer Anfangszeit t_A kann aus Gleichung (3.31) auf S. 73

$$\frac{dt_P}{dt} \;=\; \frac{1}{V^3}\left(2C_2\dot{V} - V\dot{C}_2\right)$$

berechnet werden:

$$V^3\frac{dt_P}{dt} \;=\; \frac{\left[(V^2t + C_2)^2 - G^2\right]b_R + 2G(V^2t + C_2)\,b_T}{\sqrt{(V^2t + C_2)^2 + G^2}} \quad . \tag{3.65}$$

Als Lösungen der Differentialgleichungen (3.64) zusammen mit der dritten Variationsgleichung für den Flächenparameter $\dot{G} = r\,b_T$ erhält man die Parameter als explizite Funktionen der Zeit: $V(t), C_2(t), G(t)$. Werden diese Größen in die Differentialgleichung (3.65) eingesetzt, kann schließlich auch $t_A(t)$ berechnet werden. Der Bahnwinkel ζ ist schließlich aus der Variationsgleichung (3.10) auf S. 67

$$\zeta \;=\; \zeta_P + \int_{t_P}^{t} \frac{V^2G}{(V^2t + C_2)^2 + G^2}\,dt \tag{3.66}$$

als Funktion der Zeit berechenbar.

3.2.5.2 Der Bahnwinkel als unabhängige Variable, Bezug auf **Hansen-***System*

In himmelsmechanischen Aufgabenstellungen ist eine Lösung häufig eleganter zu erhalten, wenn an Stelle der Zeit t der Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable verwendet wird. Wir können diesen auch im vorliegenden Fall einführen und erhalten eine alternative Herleitung der Variationsgleichungen bei Anpassung der Bewegung durch eine Kurve erster Ordnung.

Die erste der Gleichungen (3.43) auf Seite 75 erlaubt, den Radius in expliziter Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ zu berechnen. Differentiation nach ζ ergibt

$$\dot{r} \;=\; \frac{r}{G}\left[\dot{G} - \frac{G}{V}\dot{V} - rV\sin(\zeta - \zeta_P)\,\dot{\zeta}_P\right] + \frac{G\sin(\zeta - \zeta_P)}{V\cos^2(\zeta - \zeta_P)}\,\dot{\zeta} \quad .$$

Eine Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung verlangt für die Variation des Radius den Ausdruck (3.43) auf Seite 75

$$\dot{r} \;=\; V\sin(\zeta-\zeta_P) \quad . \tag{3.67}$$

Dies führt notwendig auf die *Anpassungsgleichung*

$$\dot{G}-\frac{G}{V}\dot{V}-rV\sin(\zeta-\zeta_P)\,\dot{\zeta}_P \;=\; 0 \quad . \tag{3.68}$$

$\dot{G}$ ist wieder aus der Variationsgleichung (3.7) auf Seite 67 bekannt. Wird Gleichung (3.67) nach der Zeit differenziert, folgt unter Verwendung von $\dot{V}$ aus der letzten Gleichung

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3}+\frac{V\sin(\zeta-\zeta_P)}{G}\dot{G}-\frac{rV^2}{G}\dot{\zeta}_P \tag{3.69}$$

und Vergleich mit der Variationsgleichung (3.6) auf Seite 67 liefert als zweite Bedingungsgleichung

$$V\dot{G}\sin(\zeta-\zeta_P)-rV^2\dot{\zeta}_P-G\,b_R \;=\; 0 \quad . \tag{3.70}$$

Damit ergibt sich unmittelbar die gesuchte Variationsgleichung für den Parameter ζ_P

$$V\dot{\zeta}_P \;=\; -b_R\cos(\zeta-\zeta_P)+b_T\sin(\zeta-\zeta_P) \quad . \tag{3.71}$$

Wird dieser Ausdruck in die Anpassungsgleichung (3.68) eingesetzt, erhalten wir die gesuchte Variationsgleichung für den „Parameter“ V

$$\dot{V} \;=\; b_R\sin(\zeta-\zeta_P)+b_T\cos(\zeta-\zeta_P) \quad . \tag{3.72}$$

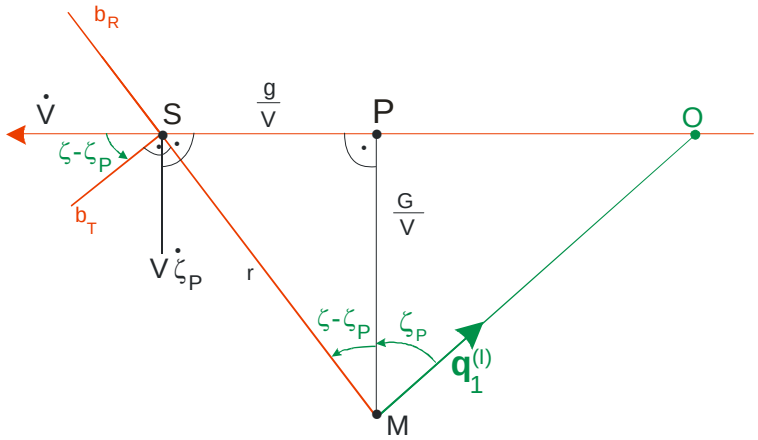

Bild 3-10: Zur geometrischen Deutung der Beschleunigungen bei Anpassung der Bewegung mit einer Kurve erster Ordnung: auf das bewegte Objekt wirken in der oskulierenden durch den Zustandsvektor $\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}$ aufgespannten Bahnebene Beschleunigungen in radialer (b_R) und transversaler (b_T) Richtung

Diese beiden Variationsgleichungen ersetzen zusammen mit den Gleichungen (3.43) auf Seite 75 für r und $\dot{r}$ in spezieller, da nur durch Anpassung mit einer vorgegebenen Kurve zustande gekommenen, für die Rechnung aber häufig vorteilhaften Weise die allgemeingültige Variationsgleichung $\ddot{r}$ in Formel (3.6) auf Seite 67 vollständig. Sie können nach Bild 3-10 geometrisch gedeutet werden: $\dot{V}$ wirkt in Richtung der momentanen Bewegung, $V\,\dot{\zeta}_P$ quer zur Bewegungsrichtung. $\dot{V}$ ist also verantwortlich für eine Variation der Bewegung in Bewegungs-

richtung, während $V\,\dot{\zeta}_P$ eine Rotation der Bewegung um den (willkürlichen!) Ursprung O charakterisiert.

Mit ζ als unabhängiger Variable lauten die Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} V\,\frac{d\zeta_P}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[-b_R\cos(\zeta-\zeta_P)+b_T\sin(\zeta-\zeta_P)\right] \\ \frac{dV}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[\;\; b_R\sin(\zeta-\zeta_P)+b_T\cos(\zeta-\zeta_P)\right] \end{aligned} \tag{3.73}$$

Nach Berechnung von $V = V(\zeta)$ und $\zeta_P = \zeta_P(\zeta)$ wird der Bezug zur Zeit mit der Variationsgleichung (3.10) auf S. 67 aus

$$dt = \frac{r^2}{G}\,d\zeta$$

bzw.

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{G}{V^2\cos^2(\zeta-\zeta_P)}\,d\zeta \tag{3.74}$$

mit den konstanten Anfangswerten ζ_0 und t_0 hergestellt. Insbesondere ist

$$t_A = t(\zeta=\zeta_P) \quad , \tag{3.75}$$

und der Parameter C_2 ergibt sich wegen der auch im Fall der Anpassung gültigen Formel (3.31) auf Seite 73 aus

$$C_2 = -V^2 t_P \quad . \tag{3.76}$$

Das Integral (3.74) ist das Analogon zur *Kepler*gleichung in der klassischen Himmelsmechanik.

Für eine vollständige Lösung des Bewegungsproblems wird der Zustandsvektor $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ benötigt. In Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ und bei Bezug auf das *Hansen* (- ideale) $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Bahnsystem ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta \quad , \end{aligned} \tag{3.77}$$

außerdem

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{r}^2} \quad . \tag{3.78}$$

Mit dem System

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathrm{r}\,\mathbf{r}_0 \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\zeta} &= \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\zeta}\mathbf{r}_0 + \mathrm{r}\,\mathrm{G}\,\mathbf{q}_0 \end{aligned} \tag{3.79}$$

wird der Bewegungsvorgang somit vollständig beschrieben.

3.2.5.3 Zusammenfassung der Methode einer Anpassung mit geradliniger Bewegung

Wird eine beliebige Bewegung durch eine Kurve erster Ordnung also eine Gerade angepasst, so gelten für die Polarkoordinaten Radius r und Bahnwinkel ζ die Beziehungen (3.32) und (3.34) auf S. 73 sowie für die Parameter dieser Beziehungen die Variationsgleichungen (3.73) auf Seite 84. Wir können ganz allgemein folgern: Wird eine Bewegung mit einer bestimmten vorgegebenen Kurve angepasst, so ist dieses Anpassungssystem nur dann vollständig beschrieben, wenn neben den beiden hierfür zuständigen Variationsgleichungen auch die Ausdrücke für den Radius und die Variation des Radius (d. h. die Radialgeschwindigkeit) mit angegeben werden. Im Fall der Anpassung durch eine Kurve erster Ordnung lautet dieses System also:

$$\begin{aligned} r &= \frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_P)} \quad , \quad \frac{dr}{d\zeta} = r\tan(\zeta-\zeta_P) \\ V_R &= \dot r = V\sin(\zeta-\zeta_P) \ , \quad V_T = r\dot\zeta = V\cos(\zeta-\zeta_P) \ . \end{aligned} \tag{3.80}$$

Die Parameter V und ζ_P werden berechnet aus dem System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} V\frac{d\zeta_P}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[-b_R\cos(\zeta-\zeta_P)+b_T\sin(\zeta-\zeta_P)\right] \\ \frac{dV}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left[\ b_R\sin(\zeta-\zeta_P)+b_T\cos(\zeta-\zeta_P)\right] \ . \end{aligned} \tag{3.81}$$

Die unabhängige Variable ist hier der auf das *Hansen*-System bezogene Bahnwinkel ζ. Dieses System der Variationsgleichungen zur Lösung eines Bewegungsproblems ist allerdings nur dann vollständig, wenn auch die von einer Anpassung unabhängigen Variationsgleichungen $\dot G,\ \dot{\mathbf{c}}_0, \dot\xi$ aus den Gleichungen (3.7)–(3.10) auf Seite 67 mit einbezogen werden.

Einen Überblick über das grundsätzliche Verfahren zur Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine geradlinige Bewegung ist in Bild 3-16 auf Seite 101 dargestellt.

Ein einfaches aber vollständiges und in himmelsmechanischem Zusammenhang aber sehr wichtiges Beispiel zur Anpassung einer bestimmten Bewegung mit einer Kurve erster Ordnung wird in Abschnitt 3.3.3 auf Seite 94 durchgerechnet.

3.2.5.4 Die Variationsgleichungen in tangentialen Koordinaten

Die Beschleunigungskomponenten $\dot V$ in Gleichung (3.72) bzw. $V\dot\zeta_P$ in (3.71) geben die Beschleunigungsanteile in tangentialer Richtung bzw. in Richtung der Hauptnormalen an. Der Beschleunigungsanteil in tangentialer Richtung sei mit b_V, in Hauptnormalenrichtung mit b_H bezeichnet (siehe hierzu in Bild 3-10 auf Seite 83):

$$\begin{aligned} b_V &= \dot V \\ b_H &= V\dot\zeta_P \quad . \end{aligned} \tag{3.82}$$

Damit ergeben sich die Umrechnungen für die Beschleunigungskomponenten:

$$\begin{aligned} b_V &= \ \ b_R\sin(\zeta-\zeta_P)+b_T\cos(\zeta-\zeta_P) \\ b_H &= -b_R\cos(\zeta-\zeta_P)+b_T\sin(\zeta-\zeta_P) \end{aligned} \tag{3.83}$$

bzw. umgekehrt

$$\begin{aligned} b_R &= b_V \sin(\zeta - \zeta_P) - b_H \cos(\zeta - \zeta_P) \\ b_T &= b_V \cos(\zeta - \zeta_P) + b_H \sin(\zeta - \zeta_P) \quad . \end{aligned} \tag{3.84}$$

Das Gleichungssystem (3.81) wird in diesem Fall ersetzt durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G} b_V \\ V \frac{d\zeta_P}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G} b_H \\ \frac{dG}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G} \left[b_V \cos(\zeta - \zeta_P) + b_H \sin(\zeta - \zeta_P) \right] \\ \frac{d\mathbf{c}_0}{d\zeta} &= -\frac{r^3}{G^2} b_N \, \mathbf{q}_0 = -\frac{d\eta}{d\zeta} \mathbf{q}_0 \quad , \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N \\ \dot{\zeta} &= \frac{d\zeta}{dt} = \frac{G}{r^3} \quad . \end{aligned} \tag{3.85}$$

Sei

$$\mathbf{v}_0 := \frac{\dot{\mathbf{r}}}{V} \tag{3.86}$$

der Einheitsvektor in tangentialer Richtung,

$$\mathbf{h}_0 := \mathbf{c}_0 \times \mathbf{v}_0 \tag{3.87}$$

in Richtung der Hauptnormalen, kann die allgemeine Bewegungsgleichung (3.3) auch in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_V \, \mathbf{v}_0 + b_H \, \mathbf{h}_0 + b_N \, \mathbf{c}_0 \tag{3.88}$$

geschrieben werden. Zwischen den Einheitsvektoren bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \mathbf{r}_0 \sin(\zeta - \zeta_P) + \mathbf{q}_0 \cos(\zeta - \zeta_P) \\ \mathbf{h}_0 &= -\mathbf{r}_0 \cos(\zeta - \zeta_P) + \mathbf{q}_0 \sin(\zeta - \zeta_P) \end{aligned} \tag{3.89}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{v}_0 \sin(\zeta - \zeta_P) - \mathbf{h}_0 \cos(\zeta - \zeta_P) \\ \mathbf{q}_0 &= \mathbf{v}_0 \cos(\zeta - \zeta_P) + \mathbf{h}_0 \sin(\zeta - \zeta_P) \quad . \end{aligned} \tag{3.90}$$

3.2.5.5 Die Perizentrumsdistanz

Die Perizentrumsdistanz r_P ist eine unmittelbar und stets erklärte geometrische Größe, die sich vorzugsweise in den Anwendungen als ein Bewegungsparameter anbietet. Etwa nach Bild 3-11 ist sie durch die Beziehung (3.50)

$$r_P := \frac{G}{V} \tag{3.91}$$

auf die bisher eingeführten Bahnparameter zurückzuführen. Ein Zusammenhang mit dem Radius in Formelsystem (3.43) ist durch

$$r_P \;=\; r\,\cos\left(\zeta-\zeta_P\right) \tag{3.92}$$

hergestellt. Die Variation dieses Parameters ist ausschließlich durch eine Beschleunigung in Richtung der Hauptnormalen gegeben, bei Zeitabhängigkeit durch

$$\dot r_P \;=\; \frac{r_P}{V}\tan\left(\zeta-\zeta_P\right)b_H \quad , \tag{3.93}$$

in Abhängigkeit vom (*Hansen*schen) Bahnwinkel ζ

$$\frac{dr_P}{d\zeta} \;=\; \frac{r_P^{\,2}}{V^2}\,\frac{\sin\left(\zeta-\zeta_P\right)}{\cos^3\left(\zeta-\zeta_P\right)}b_H \quad . \tag{3.94}$$

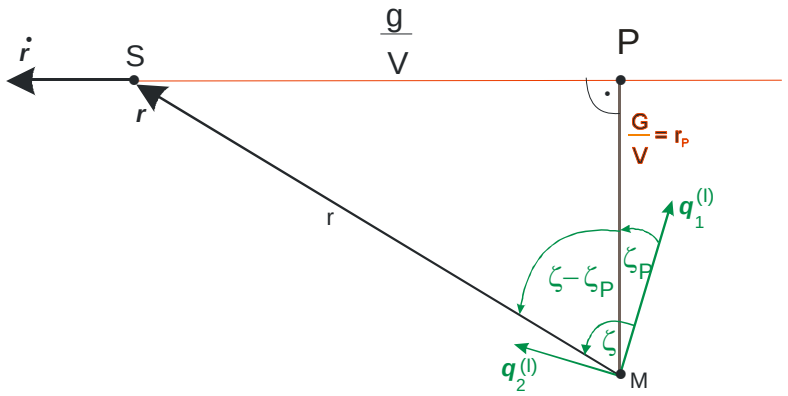

Bild 3-11: Zur Verwendung der Perizentrumsdistanz als ein Parameter der geradlinigen Bewegung

3.2.6 Eine Modifikation der Formeln zur Anpassung einer beliebigen Bewegung mit einer Geraden bei Bezug auf ein *Hansen*-System

In der Darstellung des Orts- und Geschwindigkeitsvektors im *Leibniz*-System

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \;&=\; r\,\mathbf{r}_0\\ \dot{\mathbf{r}} \;&=\; \dot r\,\mathbf{r}_0 + r\dot\zeta\,\mathbf{q}_0\end{aligned} \tag{3.95}$$

sind r und ζ die auf eine momentane Bahnebene bezogenen Polarkoordinaten des bewegten Objektes. Hier sind $r\cos\zeta$ und $r\sin\zeta$ die zugehörigen kartesischen Koordinaten im bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-idealen System:

$$\mathbf{r} \;=\; r\,(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta) \quad . \tag{3.96}$$

In den Variationsgleichungen (3.71) und (3.72) auf S. 83 für $\dot V$ und $V\dot\zeta_P$ können V und ζ_P in analoger Weise als Polarkoordinaten gedeutet werden. Um den zugehörigen Vektor und seine kartesischen Koordinaten zu finden, sollen zunächst ausgehend etwa von der Darstellung (3.43) des Radius die Parameter

$$g_1 \;:=\; V\cos\zeta_P \quad , \quad g_2 \;:=\; V\sin\zeta_P \tag{3.97}$$

(wie häufig in der Himmelsmechanik seit *J. L. Lagrange* praktiziert) gesetzt werden. Damit können aus r, $\dot r$ und $r^2\dot\zeta = G$ im System (3.80) die auch im allgemeinen Fall gültigen Darstellungen erhalten werden

$$\begin{aligned} r\dot{\zeta} &= \frac{G}{r} = V\cos(\zeta-\zeta_P) = g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta \\ \dot{r} &= V\sin(\zeta-\zeta_P) = g_1\sin\zeta - g_2\cos\zeta \quad . \end{aligned} \tag{3.98}$$

Der Geschwindigkeitsvektor lautet dann wegen der zweiten der Gleichungen (3.95) und, da $\mathbf{q_0}$ in Gleichung (3.77) in vollständiger Allgemeinheit dargestellt wird,

$$\dot{\mathbf{r}} = -g_2\,\mathbf{q}_1^{(I)} + g_1\,\mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{3.99}$$

Der gesuchte Vektor ist hier also nichts anderes als der Geschwindigkeitsvektor im bahnbezogenen System und seine Komponenten im Wesentlichen die in Formel (3.97) vermuteten Größen. Differentiation dieses Vektors gibt

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\dot{g}_2\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \dot{g}_1\,\mathbf{q}_2^{(I)} - g_2\,\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} + g_1\,\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} \quad . \tag{3.100}$$

Hier kommen die Eigenschaften des $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – Systems als einem *Hansen*–idealen System zum Tragen, wenn die Variationsgleichungen (allgemeinen *Frenet*schen Formeln) (2.142) auf Seite 48 des $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-Systems eingesetzt werden:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\dot{g}_2\,\mathbf{q}_1^{(I)} + \dot{g}_1\,\mathbf{q}_2^{(I)} + V\,\dot{\eta}\cos(\zeta-\zeta_P)\,\mathbf{q}_3^{(I)} \quad . \tag{3.101}$$

Somit folgt der Zusammenhang mit der normalen Beschleunigungskomponente b_N

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G}\,b_N$$

bzw.

$$b_N = \dot{\eta}\,(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta) \quad . \tag{3.102}$$

Die Variationsgleichungen für g_1, g_2 folgen direkt aus dem System (3.97) mit $\dot{V}$ und $V\,\dot{\zeta}_P$ aus den Gleichungen (3.71) und (3.72)

$$\begin{aligned} \dot{g}_1 &= b_R\sin\zeta + b_T\cos\zeta \\ \dot{g}_2 &= -b_R\cos\zeta + b_T\sin\zeta \quad , \end{aligned} \tag{3.103}$$

bzw. bei Variation nach dem Bahnwinkel ζ

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}(\,b_R\sin\zeta + b_T\cos\zeta) \\ \frac{dg_2}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}(-b_R\cos\zeta + b_T\sin\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{3.104}$$

Diese bemerkenswert einfachen Variationsgleichungen gelten in vollständiger Allgemeinheit, sofern eine Anpassung mit einer Kurve erster Ordnung erfolgt, was prinzipiell jederzeit möglich ist.

Dieses System verbindet den Vorteil der Parameterdarstellung einer Bewegung, welche einen allgemeineren Überblick über den Bewegungsvorgang erlaubt als die direkte (numerische) Integration der allgemeinen Bewegungsgleichung, mit der einschränkungsfreien kartesischen Darstellung einer Bewegung. Auf diese Weise lässt sich die – häufig naiv oder durch Suchen – vorgenommene Einführung von Parametern der Art g_1, g_2, wie sie in der Himmelsmechanik bevorzugt verwendet werden, als notwendig begründen. Vergleichbare Parameter hat wohl als erster *J. L. Lagrange* eingeführt mit dem Zweck, die bekannten Singularitäten im Fall der

Darstellung einer kreisnahen oder äquatornahen (bzw. bei Bezug auf die Ekliptik ekliptiknahen) Bewegung bei Anpassung der Bewegung durch eine Kurve zweiter Ordnung zu vermeiden (siehe hierzu den nächsten Abschnitt). Im vorliegenden Fall einer Anpassung mit einer Kurve erster Ordnung aber zeigt sich, dass die Einführung derartiger Parameter nicht notwendig mit der Vermeidung von Singularitäten begründet werden muss (wir können annehmen, dass die Geschwindigkeit nie verschwindet: $V > 0$), sondern zu einer besonders eleganten und symmetrischen Darstellung der Variationsgleichungen für die Bahnform führen kann.

Wir wollen schließlich noch den Ortsvektor $\mathbf{r}$ in Abhängigkeit der Parameter g_1, g_2 also in Bezug auf das *Hansen*-ideale $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System explizit anschreiben. Dazu ergibt der Radius aus Formel (3.43) auf Seite 75

$$r = \frac{G}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \tag{3.105}$$

und mit $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$ erhält der Ortsvektor nach Formel (3.96) die merkwürdige aber allgemeingültige Darstellung

$$\mathbf{r} = G\,\frac{\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \quad . \tag{3.106}$$

Es fällt auf, dass im Rahmen einer Anpassung der Bewegung durch eine Kurve erster Ordnung im Geschwindigkeitsvektor (3.99) der Bahnwinkel ζ nicht explizit auftaucht, sondern durch den Anfangswinkel $\zeta_P = \zeta_P(\zeta)$ ersetzt wird. Dies ist aber nichts als eine Folge der Anpassung mit einer Kurve, die im „ungestörten“ Fall einen konstanten Geschwindigkeitsvektor hat. Der Bahnwinkel ζ **darf** daher gar nicht explizit in dieser Darstellung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{r}}$ auftauchen, denn sonst würde die Geschwindigkeit im Fall gleichförmig geradliniger Bewegung nicht konstant sein.

3.3 Anpassung einer Bewegung durch Kegelschnittbahnen

In den beiden bisherigen Abschnitten des dritten Kapitels wurde die Anpassung beliebiger Bewegungen durch geradlinige Bahnen unter Bezug auf ein *Hansen*-System untersucht. Unter Verwendung der mit *Hansen*-Systemen eng verknüpften mitbewegten *Leibniz*-Systeme wurde die Grundlage für eine analytische Bearbeitung eines Bewegungsproblems betrachtet. In der klassischen Himmelsmechanik und damit der allgemeinen Bahnmechanik vor allem auch künstlicher Raumflugkörper ist es üblich, für die Anpassung einer solchen Bewegung von einer elliptischen Bewegung auszugehen. In seltenen Fällen wie bei hochexzentrischer Kometenbahnen wird auch eine parabolische Bewegung zugrunde gelegt. Im Fall von Swing-By Manövern oder dem Absturz von Meteoren auf einen Planeten muss eine hyperbolische Bewegung betrachtet werden. In allen diesen Fällen handelt es sich somit um Kegelschnittbahnen. Im Zusammenhang mit den Überlegungen des vorliegenden Berichtes müssen daher folgende Fragen zur Konsistenz der Theorie untersucht werden:

1. Kann mit Hilfe einer Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung eine Kegelschnittbewegung beschrieben werden?
2. Kann umgekehrt durch Anpassung mit einem Kegelschnitt eine geradlinige Bewegung erhalten werden?
3. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit beliebige Bewegungen durch beliebige Kurven angepasst werden können?

4. Gibt es Kurven, welche nicht als Anpassungskurven verwendet werden können?
5. Bringt es Vorteile für die Darstellung beliebiger Bewegungen von einer geradlinigen Bewegung auszugehen?
6. Unterscheidet sich das hier vorgestellte Verfahren einer beliebigen Anpassung von den bisweilen verwendeten intermediären Bahnen (die auf analytischem Wege eine bestimmte Bewegung brauchbar annähern)?

3.3.1 Bewegung auf einem Kegelschnitt

Eine Kurve zweiter Ordnung, die mathematisch allgemein in der Form

$$a_{20}\,x_1^2 + a_{11}\,x_1\,x_2 + a_{12}\,x_2^2 + a_{10}\,x_1 + a_{01}\,x_1 + a_{00} \;=\; \sum_{i,j=0,0}^{2,2} a_{i,j}\,x_1^i\,x_2^j \;=\; 0 \qquad (3.107)$$

gegeben werden kann, stellt bekanntlich einen Kegelschnitt oder ein Geradenpaar dar. Da die Anpassung mit einer Geraden, also einer Kurve erster Ordnung, bereits in den vorstehenden Abschnitten untersucht wurde, können wir uns hier auf Kegelschnitte einschränken. Da zur Beschreibung einer Bewegung vorzugsweise Polarkoordinaten verwendet werden, wird wie üblich in der Himmelsmechanik von der Kegelschnittgleichung

$$r \;=\; \frac{p}{1+e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)} \qquad (3.108)$$

ausgegangen. Die Parameter sind in der vertrauten Sprechweise der Himmelsmechanik

$$\begin{aligned} p &= \text{Parameter des Kegelschnitts } [km] \\ e &= \text{(numerische) Exzentrizität} \\ \left(\zeta-\zeta_K\right) &= \text{wahre Anomalie } [Grad] \quad , \end{aligned}$$

während ζ der (allgemeine) Bahnwinkel und ζ_K ein (beliebiger) Anfangswinkel sind. Die Anpassung der (beliebigen) Bewegung mit einem Kegelschnitt wird erreicht, wenn die Variation des Radius (die Radialgeschwindigkeit) in der Form beibehalten wird, die von der Variation der Parameter unabhängig ist. Diese ist

$$\dot r \;=\; \frac{p\,e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)\dot\zeta}{\left[1+e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)\right]^2} \quad ,$$

mit der Zeitgleichung $r^2\dot\zeta = G$ aus (3.10) auf Seite 67 auch

$$\dot r \;=\; \frac{G}{p}\,e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right) \quad . \qquad (3.109)$$

Im Fall einer allgemeinen Bewegung sind alle Parameter variabel, aus der Kegelschnittgleichung (3.108) folgt also durch Differentiation nach allen Parametern

$$\dot r \;=\; \frac{r}{p}\,\dot p - \frac{p\left[\dot e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right) - e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)\left(\dot\zeta-\dot\zeta_K\right)\right]}{\left[1+e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)\right]^2} \quad .$$

Die Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve 2. Ordnung hat somit notwendig die *Anpassungsgleichung*

$$\dot{e}\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)+e\dot{\zeta}_K\sin\left(\zeta-\zeta_K\right) \;=\; \frac{\dot{p}}{r} \quad . \tag{3.110}$$

Differentiation der Variation des Radius (3.109) ergibt

$$\begin{aligned}\ddot{r} \;=\;& \dot{G}\frac{1}{p}e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)-\dot{p}\frac{G}{p^2}e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)+\dot{e}\frac{G}{p}\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)-\\ &-\dot{\zeta}_B\frac{G}{p}e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)+\dot{\zeta}\frac{G}{p}e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right) \quad .\end{aligned} \tag{3.111}$$

Für einen Vergleich mit der Variationsgleichung für $\ddot{r}$ in (3.6) auf S. 67 werde das letzte Glied in der vorstehenden Gleichung betrachtet, welches die Variation der Polarkoordinate ζ, aber nicht die eines der Parameter der Kurven zweiter Ordnung enthält, deren Variation ohnehin auf einer exakten Kegelschnittkurve verschwindet. Es ist mit r aus Gleichung (3.108) und $\dot{\zeta}$ aus Gleichung (3.10)

$$\dot{\zeta}\frac{G}{p}e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right) \;=\; \frac{G^2}{r^2p}\left[1+e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)-1\right] \;=\; \frac{G^2}{r^3}-\frac{G^2}{pr^2} \quad . \tag{3.112}$$

Es ist daher sinnvoll in Gleichung (3.6) von der radialen Beschleunigung b_R den Term $-G^2/(pr^2)$ abzuspalten

$$\begin{aligned}\ddot{r} \;&=\; \frac{G^2}{r^3}+b_R\\ b_R \;&=:\; b_{RK}+b_{R2}\\ b_{RK} \;&=\; -\frac{G^2}{pr^2}\end{aligned} \tag{3.113}$$

und es bleibt

$$\begin{aligned}b_{R2} \;=\;& \dot{G}\frac{1}{p}e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)-\dot{p}\frac{G}{p^2}e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)+\dot{e}\frac{G}{p}\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)-\\ &-\dot{\zeta}_K\frac{G}{p}e\cos\left(\zeta-\zeta_K\right) \quad .\end{aligned} \tag{3.114}$$

Damit erhalten wir folgendes Ergebnis[1]:

▶ *Die Beschleunigung, welche einen Körper zwingt, sich auf einem Kegelschnitt zu bewegen, ist $-G^2/(pr^2)$. Sie wirkt ausschließlich in radialer Richtung.*

Dieses Ergebnis ist deshalb bemerkenswert, weil es auf rein mathematischem Weg erhalten wurde. Damit ist nicht ausgesagt, ob es in der physikalischen Realität eine Kegelschnittbewegung gibt. Wir wissen nur: wenn eine Kegelschnittbewegung beobachtet wird, dann wird sie notwendig durch diese Beschleunigung verursacht, wenn keine weiteren Beschleunigungen wirken. Wodurch dann eine solche Beschleunigung verursacht wird, wenn sie denn beobachtet wird, ist schließlich eine Fragestellung von dritter Ordnung.

Diese Bedingung ist aber nicht zugleich hinreichend. Denn wenn sich ein Körper auf einem Kegelschnitt bewegt, bedeutet dies noch lange nicht, dass auf ihn die Beschleunigung

[1] G. W. LEIBNIZ (1689)

$-G^2/(p\,r^2)$ wirkt, was nämlich $b_{R2}=0$ folgern müsste. Vielmehr können die „Störkomponenten“ $b_{R2}\neq 0$ und $b_T\neq 0$ sein, sofern nur die Anpassungsgleichung (3.110) erfüllt ist, was auch für sehr komplizierte „Störbeschleunigungen“ möglich ist.

Wir erhalten schließlich aus Gleichung (3.111) die zweite Bedingungsgleichung zur Berechnung der Variation der Kegelschnittparameter:

$$\frac{p}{G}\,b_{R2}-e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)\left(\frac{\dot G}{G}-\frac{\dot p}{p}\right) \;=\; \dot e\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)-e\,\dot\zeta_K\cos\left(\zeta-\zeta_K\right) \quad . \qquad (3.115)$$

Aus dieser und der Anpassungsgleichung (3.110) können zwei Variationsgleichungen berechnet werden, wenn noch mit Gleichung (3.7) $\dot G = r\,b_T$ eingesetzt wird:

$$\begin{aligned}
\dot e &= \frac{p}{G}\left\{b_{R2}\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)-b_T\,\frac{r}{p}\sin^2\left(\zeta-\zeta_K\right)-\dot p\,\frac{G}{p^2}\left[e+\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)\right]\right\}\\
e\,\dot\zeta_B &= \frac{p}{G}\left\{-b_{R2}\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)+\frac{1}{p}\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)\left[\dot p\,\frac{G}{p}+e\,r\,b_T\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)\right]\right\} \quad .
\end{aligned} \qquad (3.116)$$

Wird der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable aufgefasst, lauten die beiden Variationsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{de}{d\zeta} &= \frac{p\,r^2}{G^2}\left\{b_{R2}\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)-b_T\,\frac{r\,e}{p}\sin^2\left(\zeta-\zeta_K\right)-\dot p\,\frac{G}{p^2}\left[e+\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)\right]\right\}\\
e\,\frac{d\zeta_K}{d\zeta} &= \frac{p}{G}\left\{-b_{R2}\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)+\frac{1}{p}\sin\left(\zeta-\zeta_K\right)\left[\dot p\,\frac{G}{p}+e\,r\,b_T\cos\left(\zeta-\zeta_K\right)\right]\right\} \quad .
\end{aligned} \qquad (3.117)$$

Diese Darstellung vermittelt zwei wesentliche Einsichten:

1. Sie enthält explizit die Variation des Kegelschnittparameters $\dot p$, was noch völlig unbefriedigend ist. Denn dies zeigt, dass im Fall einer Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve zweiter Ordnung Anpassungsgleichung (3.110) und zweite Bedingungsgleichung (3.115) **nicht** ausreichen, um die Variation der Bahnform vollständig zu beschreiben. Die Beziehung (3.112) zeigt, dass im Term mit der Variation des Bahnwinkels ζ neben dem „ungestörten“ Term G^2/r^3 noch der aus der Radialbeschleunigung $b_{\mathrm R}$ abgespaltene also „dynamische“ Term $-G^2/(p\,r^2)$ benötigt wird. Dieser dynamische Term taucht nicht mehr in den Variationsgleichungen für e und ζ_K auf, ist also bereits durch die Anpassung mit der Kurve zweiter Ordnung erledigt. Dies gibt einen bemerkenswerten Einblick in den Mechanismus des Anpassungsvorganges: Eine Anpassung mit einer Kurve zweiter Ordnung - zu erwarten ist bei einem Anpassungsvorgang mit einer jeden von einer Geraden abweichenden Kurve - ist kein mathematischer Vorgang zur kinematisch-deskriptiven Darstellung einer Bewegung. Vielmehr wird jetzt eine physikalische Gesetzmäßigkeit zusätzlich zu der in der Anpassungsgleichung gegebenen Bedingung benötigt. Eine solche physikalische Bedingung für die Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve zweiter Ordnung ist im Fall der exakten *Kepler*bewegung[1] das 3. *Kepler*sche Ge-

[1] Wir wollen als „exakte Keplerbewegung“ die Bewegung nach den drei Keplergesetzen verstehen, wenn alle Parameter („Elemente“) als konstant angenommen werden können. Wenn die Parameter als zeitabhängig bzw. als bewegungs-abhängig aufgefasst werden müssen, wollen wir von der „allgemeinen Keplerbewegung“ sprechen

setz in der Form $G^2 = \mu p$. μ ist eine dynamische (also eine physikalische) Größe, welche die beiden kinematisch-geometrischen Größen *G* und *p* verknüpft. Weiter können wir folgern: Eine Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve höherer Ordnung ist nur dann sinnvoll, wenn eine physikalische Bedingung existiert, welche genau eine Bewegung auf dieser vorgegebenen Kurve erlaubt, so dass zur Betrachtung einer allgemeinen Bewegung auch wirklich von dieser Kurve ausgegangen werden kann.

2. Die Variationsgleichung zur Berechnung des Anfangswinkels ζ_K ist für verschwindende Exzentrizitäten *e* nicht erklärt. Es erscheint bemerkenswert, dass die vergleichbare Variationsgleichung für den Anfangsbahnwinkel ζ_P im Fall der Anpassung durch eine Kurve erster Ordnung (vgl. Gleichung (3.80) auf S. 85) keine solche Singularität aufweist. In dieser Gleichung steht der Parameter *V* zwar im Nenner, ist aber nach Gleichung (3.15) auf S. 70 als positiv angenommen: $V > 0$. In beiden Fällen einer Anpassung mit einer Kurve erster oder zweiter Ordnung muss allerdings $G = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| > 0$ angenommen werden, d.h. eine Bewegung durch den Ursprung, der hier allerdings willkürlich angenommen wurde, muss ausgeschlossen bleiben.

Anmerkung: Der Fall einer Bewegung durch den Ursprung wird in den verschiedenen Methoden der Regularisierung untersucht[1]. Im vorliegenden Fall wird der Ursprung aber nicht physikalisch, etwa als ein bzw. das Gravitationszentrum, sondern mathematisch definiert, so dass eine Singularität in einem Ursprung stets vermieden werden kann. Es ist sinnvoll, den Ursprung stets außerhalb der Bahn zu suchen.

3.3.2 Anpassung einer Bewegung mit einer Kegelschnittkurve bei Bezug auf ein *Hansen*-System

Ähnlich wie im Abschnitt über die Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung bietet es sich an, *e* und ζ_K als Polarkoordinaten mit zugehörigen kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} k_1 &:= e\cos\zeta_K \\ k_2 &:= e\sin\zeta_K \end{aligned} \tag{3.118}$$

aufzufassen. Dies führt auf die – im Rahmen einer Anpassung einer Bewegung mit einer Kurve zweiter Ordnung – allgemein gültigen und keineswegs eingeschränkt gültigen Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \dot{e}\cos\zeta_K - e\dot{\zeta}_K\sin\zeta_K \\ \dot{k}_2 &= \dot{e}\sin\zeta_K + e\dot{\zeta}_K\cos\zeta_K \end{aligned} \tag{3.119}$$

und der zugehörigen Anpassungsgleichung

$$\dot{k}_1\cos\zeta + \dot{k}_2\sin\zeta = \frac{\dot{p}}{r} \quad . \tag{3.120}$$

Unter direkter Herleitung aus den beiden Bedingungsgleichungen (3.110) und (3.115) wird

[1] z.B. in STIEFEL, E. AND SCHEIFELE, G. (1971)

$$\begin{aligned} \dot{k}_1 &= \frac{p}{G} b_{R2} \sin\zeta - \frac{r\, b_T \sin\zeta}{G} (k_1 \sin\zeta - k_2 \cos\zeta) + \frac{\dot{p}}{p} (k_1 + \cos\zeta) \\ \dot{k}_2 &= \frac{p}{G} b_{R2} \cos\zeta + \frac{r\, b_T \cos\zeta}{G} (k_1 \sin\zeta - k_2 \cos\zeta) + \frac{\dot{p}}{p} (k_2 + \sin\zeta) \quad , \end{aligned} \tag{3.121}$$

bzw. bei Bezug auf den *Hansen*schen Bahnwinkel ζ

$$\begin{aligned} \frac{dk_1}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G^2} \left[\; p\, b_{R2} \sin\zeta - r\, b_T \sin\zeta \; (k_1 \sin\zeta - k_2 \cos\zeta) \right] + \frac{1}{p} \frac{dp}{d\zeta} (k_1 + \cos\zeta) \\ \frac{dk_2}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G^2} \left[-p\, b_{R2} \cos\zeta + r\, b_T \cos\zeta \; (k_1 \sin\zeta - k_2 \cos\zeta) \right] + \frac{1}{p} \frac{dp}{d\zeta} (k_2 + \sin\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{3.122}$$

Auch diese Variationsgleichungen weisen bemerkenswerte Symmetrien auf.

Um den Zustandsvektor $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ im bewegungsbezogenen $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System darzustellen, werden zunächst Radius, radiale und transversale Geschwindigkeit mit den Parametern k_i dargestellt:

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + k_1 \cos\zeta + k_2 \sin\zeta} \\ V_R &= \dot{r} = \frac{G}{p} (k_1 \sin\zeta - k_2 \cos\zeta) \\ V_T &= r\dot{\zeta} = \frac{G}{p} (1 + k_1 \cos\zeta + k_2 \sin\zeta) \quad . \end{aligned} \tag{3.123}$$

Orts- und Geschwindigkeitsvektor folgen mit den bekannten Beziehungen

$$\mathbf{r} = r\, \mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\, \mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\, \mathbf{q}_0$$

und

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta \quad , \quad \mathbf{q}_0 = -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= p \frac{\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta}{1 + k_1 \cos\zeta + k_2 \sin\zeta} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{G}{p} \left[-(k_2 + \sin\zeta)\, \mathbf{q}_1^{(I)} + (k_1 + \cos\zeta)\, \mathbf{q}_2^{(I)} \right] \quad . \end{aligned} \tag{3.124}$$

Im Gegensatz zur Anpassung mit einer Kurve 1. Ordnung taucht hier der Bahnwinkel ζ explizit im Geschwindigkeitsvektor auf, da hier auch im „ungestörten“ Fall der Geschwindigkeitsvektor nicht konstant sein kann.

3.3.3 Anpassung einer Kegelschnittbewegung durch eine geradlinige Bewegung

Der Anpassungsprozeß einer beliebigen Bewegung mit Hilfe einer bekannten Bewegung wird mit den bisherigen Ergebnissen an zwei einfachen aber sehr instruktiven Beispielen in diesem und dem nächsten Unterabschnitt demonstriert.

Wir haben in den Gleichungen (3.113) auf S. 91 gesehen, dass die radiale Beschleunigung

$$b_{RK} = -\frac{G^2}{p\, r^2}$$

notwendig für eine Kegelschnittbewegung ist. Den mathematischen Zusammenhang der Kegelschnittbewegung mit der geradlinigen Bewegung, d. h. wie die Kegelschnittbewegung auf die geradlinige Bewegung zurückgeführt werden kann, wollen wir in diesem Abschnitt diskutieren.

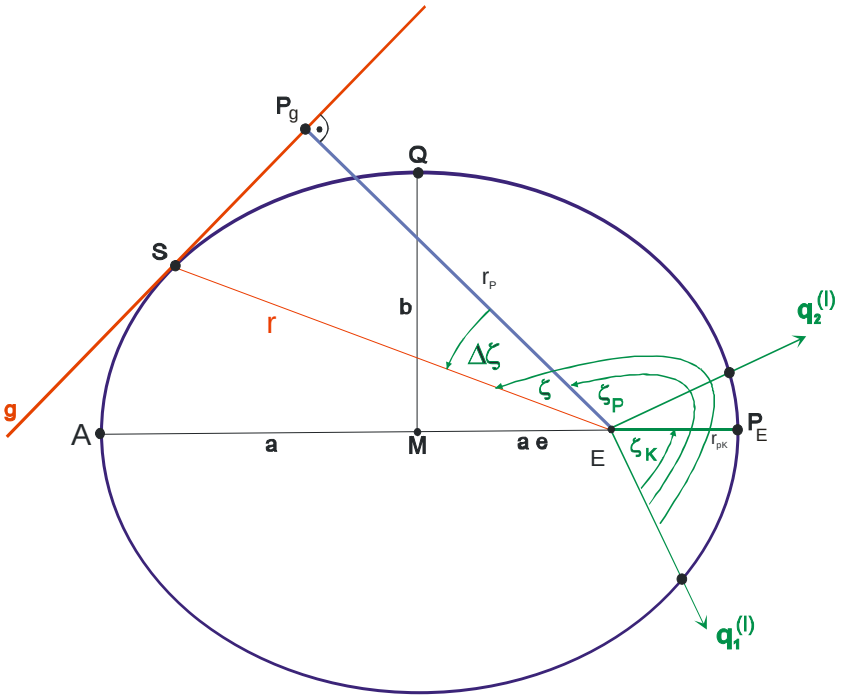

Bild 3-12: Anpassung einer Bewegung auf einer Ellipse durch eine Gerade g. Fest vorgegeben ist der Bezugspunkt E (Ursprung des *Hansen*-Systems) in einem Brennpunkt der Ellipse, die Perizentrumsdistanz r_{pK} der Ellipse, P_E das Perizentrum der Ellipse, A das Apozentrum der elliptischen Bahn, M der Mittelpunkt der Ellipse, a die große, b die kleine Halbachse, e die numerische Exzentrizität. P_g ist das Perizentrum der (Anpassungs)-Geraden, r_P die Perigäumsdistanz der Anpassungsgeraden, r der Radius des bewegten Objektes S.

Ausgehend von der geradlinigen Bewegung fassen wir b_{RK} als „Störbeschleunigung“ auf und nehmen

$$b_{R2} \;=\; b_T \;=\; b_N \;=\; 0$$

an. Nach $\dot{G} = r\,b_T$ ist $G = const.$ Auch der Parameter p, über den wir an dieser Stelle nichts Näheres aussagen können, sei als konstant angenommen. Die Parameter V und ζ_A können mit den Definitionen (3.97) auf S. 87 durch die Parameter

$$g_1 \;=\; V\cos\zeta_P \quad , \quad g_2 \;=\; V\sin\zeta_P$$

ersetzt werden, welche den Variationsgleichungen (3.104) auf S. 88

$$\frac{dg_1}{d\zeta} \;=\; \frac{r^2}{G}\,(\;b_R\sin\zeta + b_T\cos\zeta\,) \quad , \quad \frac{dg_2}{d\zeta} \;=\; \frac{r^2}{G}\,(-b_R\cos\zeta + b_T\sin\zeta\,)$$

genügen. Mit den „Störbeschleunigungen“

$$b_R \;=\; b_{RK} + b_{R2} \;=\; -\frac{G^2}{p\,r^2} \quad , \quad b_{R2} \;=\; b_T \;=\; b_N \;=\; 0 \quad , \quad G \;=\; const. \quad , \quad p \;=\; const.$$

lauten sie im vorliegenden Fall

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = -\frac{G}{p}\sin\zeta \quad , \quad \frac{dg_2}{d\zeta} = \frac{G}{p}\cos\zeta \tag{3.125}$$

mit den Integralen

$$g_1 = g_1(\zeta) = g_{10}(\zeta) = \frac{G}{p}\cos\zeta + g_{11} \quad , \quad g_2 = g_2(\zeta) = g_{20}(\zeta) = \frac{G}{p}\sin\zeta + g_{21} \quad . \tag{3.126}$$

g_{10}, g_{20} sind die Integrationskonstanten. Für diese werde

$$g_{11} =: g_{100}\cos\zeta_K \quad , \quad g_{21} =: g_{100}\sin\zeta_K \tag{3.127}$$

mit neuen Konstanten $g_{100} = \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2}$ und ζ_B gesetzt. Der Ausdruck (3.105) auf S. 89 für den Radius in der geradlinigen Bewegung liefert damit

$$r = \frac{G}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta} = \frac{p}{1 + e\cos(\zeta - \zeta_K)} \tag{3.128}$$

in der Form der Kegelschnittgleichung, wofür

$$e := \frac{p}{G}\, g_{100} \tag{3.129}$$

gesetzt wurde. Der Fall von Kreisbahnen ($e = 0$) ist, da stets $p \neq 0, G \neq 0$, nur für $g_{100} = 0$ möglich, so dass in diesem Fall ζ_K nicht erklärt sein kann.

Aus der Definition der g_i, die jetzt Funktionen des Bahnwinkels ζ sind, erhalten wir den Zusammenhang der Parameter V, ζ_A der geradlinigen Bewegung mit den Parametern p, e, ζ_K der Kegelschnittbewegung

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1(\zeta) = V\cos\zeta_P := \frac{G}{p}(\cos\zeta + e\cos\zeta_K) \\ g_2 &= g_2(\zeta) = V\sin\zeta_P := \frac{G}{p}(\sin\zeta + e\sin\zeta_K) \quad , \end{aligned} \tag{3.130}$$

somit

$$V = \frac{G}{p}\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos(\zeta - \zeta_K)} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \tag{3.131}$$

und $\zeta_P = \zeta_P(\zeta)$ aus

$$\begin{aligned} \cos\zeta_P &= \frac{\cos\zeta + e\cos\zeta_K}{\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos(\zeta - \zeta_K)}} = \frac{g_1(\zeta)}{V} \\ \sin\zeta_P &= \frac{\sin\zeta + e\sin\zeta_K}{\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos(\zeta - \zeta_K)}} = \frac{g_2(\zeta)}{V} \quad . \end{aligned} \tag{3.132}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen Kegelschnitt - und geradliniger Bewegung vollständig beschrieben. Im Fall von Kreisbewegung ($e = 0$) liefern diese Gleichungen

$$V = \frac{G}{p} = const. \quad , \quad \zeta_P = \zeta \quad , \quad (e = 0.0) \quad .$$

Der im Fall der gleichförmig geradlinigen Bewegung konstante Parameter ζ_P ist im Fall einer Anpassung einer Kreisbewegung nicht mehr konstant, sondern dem Bahnwinkel ζ identisch gleich, also in der Sprechweise der modernen Störungstheorie ein „schneller“ Parameter, d.h. er verändert sich über einen Umlauf (während „langsame“ Parameter Periodizitäten über viele Umläufe, Wochen oder gar Monate haben).

Numerisches BEISPIEL: Eine elliptische Bewegung werde durch eine geradlinige Bewegung angepasst (siehe die Veranschaulichung in Bild 3-12 auf Seite 95). Gegeben sei eine Ellipse mit der großen Halbachse a=10000km, der Exzentrizität e=0.2. Bezogen auf die (willkürlich gesetzte) $\mathbf{q}_1^{(I)}$ – Achse des *Hansen*-Systems habe das Perizentrum P der Ellipse die Winkeldistanz ζ_K=30°. Es werde angenommen, dass sich ein Erdsatellit auf einer solchen Ellipse um die Erde bewege. Die geozentrische Gravitationskonstante beträgt $\mu_{\oplus} = 398600.440\,\mathrm{km}^3\,\mathrm{s}^{-2}$.

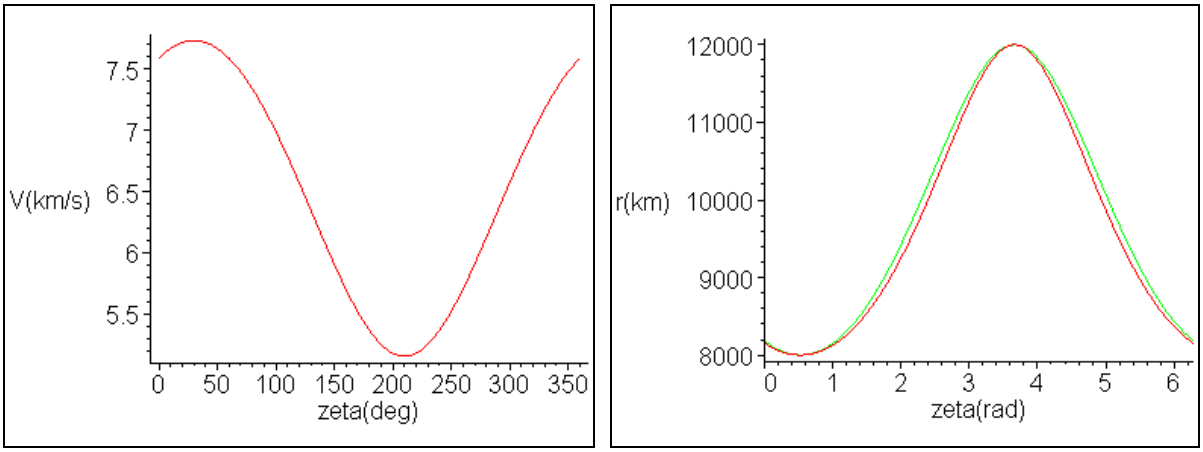

Bild 3-13: Verlauf von Geschwindigkeit V(ζ) (linke Kurve) und von Radius r(ζ) (rechts, obere Kurve, grün) und Perigäumsdistanz $r_P(\zeta)$ (rechts untere Kurve, rot) über einen Umlauf längs der Ellipse, gerechnet mit den Formeln der geradlinigen Bewegung

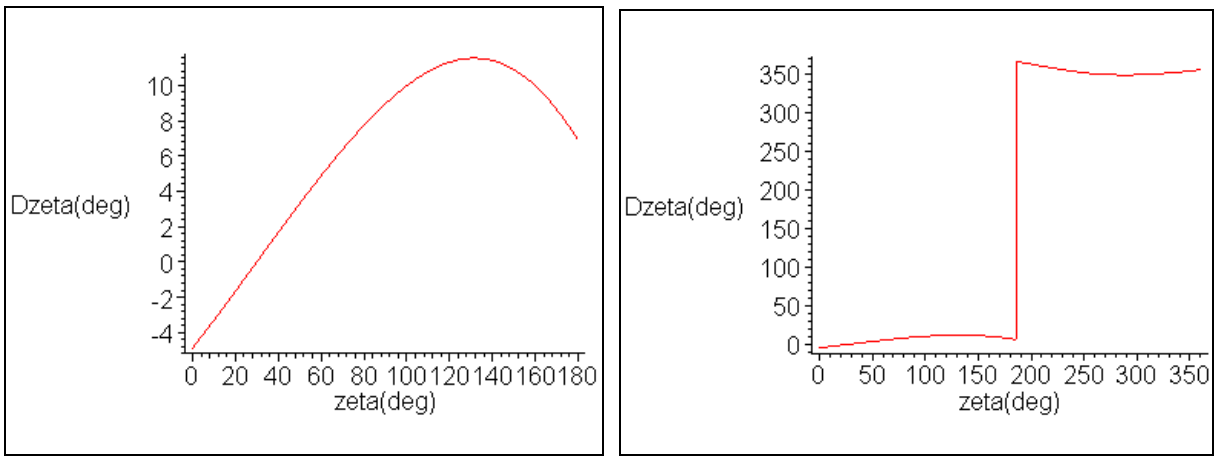

Bild 3-14: Verlauf des Differenzwinkels $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_P$ detailliert über einen halben Umlauf (linke Kurve) und den ganzen Umlauf (rechte Kurve)

Die Perigäumsdistanz zum Mittelpunkt der Erde beträgt $r_{PK} = a(1-e) = 8000\,\mathrm{km}$, der Parameter der Ellipse $p = a\left(1-e^2\right) = 9600\,\mathrm{km}$. Schließlich wird noch der Flächenparameter benötigt. Er beträgt $G = \sqrt{\mu_{\oplus}\, p} = 61859.223\,\mathrm{km}^2\,\mathrm{s}^{-1}$. Alle diese Parameter müssen als Konstante verwendet werden, um

die Parameter für eine Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung mit den Formeln dieses Abschnittes herleiten zu können. Dazu liefern die Formeln (3.129) und (3.127)

$$g_{100} = e\frac{G}{p} = 1.2887\frac{\text{km}}{\text{s}} \;,\; g_{11} = \frac{g_{100}}{\cos\zeta_K} = 1.1161\frac{\text{km}}{\text{s}} \;,\; g_{21} = \frac{g_{100}}{\sin\zeta_K} = 0.6444\frac{\text{km}}{\text{s}} \quad .$$

Die Parameter g_1, g_2 der geradlinigen Bewegung als Funktionen des Bahnwinkels ζ sind

$$g_1 = g_1(\zeta) = 1.1161 + 6.4437\cos\zeta \quad , \quad g_2 = g_2(\zeta) = 0.6444 + 6.4437\sin\zeta \quad .$$

Damit können dann die Geschwindigkeit längs der Geraden, der Radius r sowie der Perigäumswinkel ζ_A bei Bezug auf das *Hansen*-System mit den Formeln (3.131), (3.132) sowie (3.128) berechnet werden. Die Ergebnisse für die Geschwindigkeit V(ζ) sowie Radius r(ζ) und Perigäumsdistanz $r_P(\zeta) = G/V(\zeta)$ sind in Bild 3-13 graphisch dargestellt.

Der Kurvenverlauf für Radius r und Perigäumsdistanz r_P ist nahezu identisch, ein Sachverhalt, der aus der klassischen Bahnmechanik nicht vertraut ist. Allerdings handelt es sich hier um die Perigäumsdistanz r_P der Anpassungsgeraden und nicht der Ellipse (die in diesem Beispiel mit r_{pK} bezeichnet wird). Diese Näherungsgerade ist also nichts anderes als die Tangente an die Ellipse. Bild 3-12 auf Seite 95 zeigt die Verhältnisse sehr deutlich: In einem Punkt S nähert die Gerade *g* die Bahnkurve (die Ellipse) an. S hat vom Brennpunkt E der Ellipse den Abstand *r*. r_P ist der Abstand des Ortes auf der Geraden, der zum Bezugspunkt E am nächsten gelegen ist, also dem Perigäum der Geraden. Diese Größe ist in diesem Fall auch eine Funktion des Bahnwinkels ζ. Die Verhältnisse werden durch den Verlauf des Winkels ζ_P , des Winkelabstandes des Perigäums der Näherungsgeraden von der $\mathbf{q}_1^{(I)}$ – Achse des *Hansen*-Bezugs-Systems, noch näher beleuchtet. In Bild 3-14 kann im linken Bild größenordnungsmäßig die Differenz des Bahnwinkels ζ zum Winkelabstand ζ_P des Perigäums $\Delta\zeta=\zeta-\zeta_P$ abgelesen werden: Das Perigäum kann sich nicht weit vom Punkt S (dem „Oskulationspunkt“) entfernen. Das rechte Bild zeigt den Verlauf des Differenzwinkels über einen ganzen Umlauf und zeigt ein Pendeln des Oskulationspunktes um das Perigäum der Anpassungsgeraden während eines Umlaufs.

3.3.4 Anpassung einer geradlinigen Bewegung mit einem Kegelschnitt

Als umgekehrte Aufgabe zum vorherigen Abschnitt soll eine gleichförmig geradlinige Bewegung durch die Bewegung auf einem Kegelschnitt angepasst werden (eine Veranschaulichung zeigt Bild 3-15). Dies ist ein rein akademisches Beispiel, das nur den Zweck hat, das in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene Verfahren zur Anpassung beliebiger Bewegungsvorgänge zu veranschaulichen. Es muss, wenn es sinnvoll ist, gewiss zum richtigen Ergebnis führen und bestätigt somit auch, dass das Verfahren sinnvoll ist.

Vorgegeben sei die Kegelschnittbewegung mit der Polardarstellung (3.108), (3.109) auf S. 90,

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + e\cos(\zeta - \zeta_K)} \\ \dot{r} &= \frac{G}{p}\, e\sin(\zeta - \zeta_K) \\ \ddot{r} &= \frac{G^2}{r^3} - \frac{G^2}{p\,r^2} + b_{R2} \quad , \quad b_T = b_N = 0 \quad . \end{aligned}$$

Um hieraus eine gleichförmig geradlinige Bewegung anzupassen, muss die „Störbeschleunigung“

$$b_{R2} = b_{R20} + b_{R3} \quad , \quad b_{R20} := \frac{G^2}{p\,r^2} \quad , \quad b_{R3} = 0$$

verwendet werden, denn dann kann aus der Variationsgleichung $\ddot{r}$ die Bedingungsgleichung der geradlinig gleichförmigen Bewegung (3.14) auf S. 70 erhalten werden. Wegen $G = \sqrt{\mu p} = \text{const.}$ ist $\dot{p} = 0$. Die Variationsgleichungen (3.122) auf Seite 94 bei Anpassung einer geradlinigen Bewegung mit einem Kegelschnitt lauten dann

$$\frac{dk_1}{d\zeta} = \sin\zeta \quad , \quad \frac{dk_2}{d\zeta} = -\cos\zeta$$

mit den Integralen

$$k_1 = k_1(\zeta) = e\cos\zeta_K = -\cos\zeta + k_{10} \quad , \quad k_2 = k_2(\zeta) = e\sin\zeta_K = -\sin\zeta + k_{20} \quad , \quad (3.133)$$

wobei k_{10}, k_{20} die Integrationskonstanten sind.

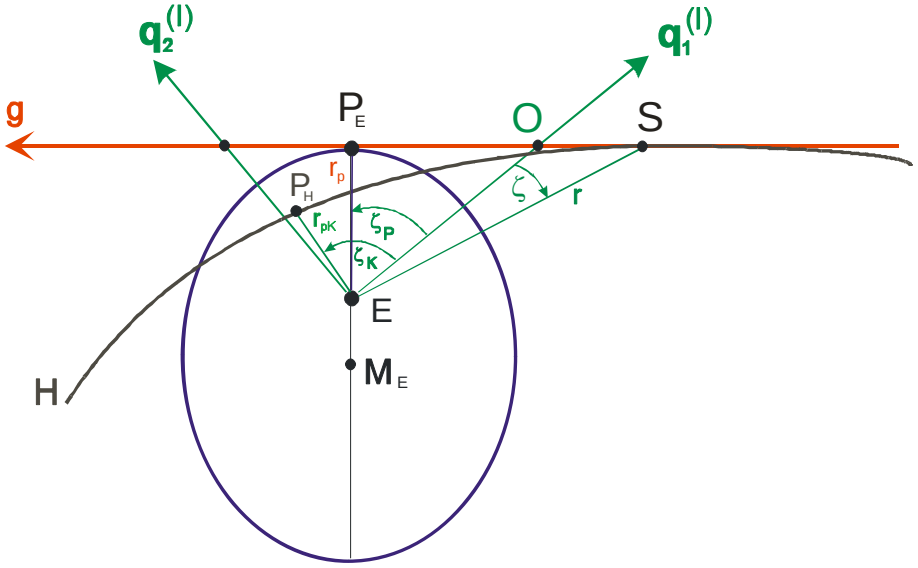

Bild 3-15: Anpassung einer Geraden g durch Kegelschnitte: fest vorgegeben ist der Bezugspunkt E in einem Brennpunkt der Ellipse, die Perizentrumsdistanz r_P und der Perigäumswinkel ζ_P. Anpassung im Perigäum der Geraden durch Ellipse (blau), für Bahnwinkel ζ=20° durch Hyperbel H (grau), bezogen auf das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System (grün)

Der Radius für die Bewegung auf der Geraden lautet in diesem Fall

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\zeta - \zeta_K)} = \frac{p}{k_{10}\cos\zeta + k_{20}\sin\zeta} \quad .$$

Da G und p als bekannt angenommen werden, können durch Definition Konstante g_1, g_2 eingeführt werden

$$g_1 := \frac{G}{p}k_{10} \quad , \quad g_2 := \frac{G}{p}k_{20} \quad , \qquad (3.134)$$

wodurch formal die aus der geradlinigen Bewegung bekannte Beziehung (vgl. Gleichung (3.105) auf S. 89)

$$r = \frac{G}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta}$$

folgt. Die radiale Geschwindigkeit führt auf

$$V_R = \frac{G}{p}(k_{10}\sin\zeta - k_{20}\cos\zeta)$$

und die transversale Geschwindigkeit

$$V_T = r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} = \frac{G}{p}(k_{10}\cos\zeta + k_{20}\sin\zeta) \quad ,$$

somit lautet die Geschwindigkeit

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_T^2} = \frac{G}{p}\sqrt{k_{10}^2 + k_{20}^2} = const. \quad .$$

Da der Kegelschnitt, mit dem die geradlinige Bewegung angepasst werden soll, nicht notwendig eine Ellipse ist, wird an Stelle der großen Bahnhalbachse die Perizentrumsdistanz

$$r_{pK} = \frac{p}{1+e}$$

verwendet, die für alle Kegelschnitte einheitlich bekannt ist.

Die beiden letzten Unterabschnitte zeigen die vollständige Äquivalenz der Anpassung einer beliebigen Bewegung mit einer Geraden oder einem Kegelschnitt. Der Ablauf des Verfahrens in der vorliegenden Anwendung ist im Vergleich zu dem allgemeinen Verfahren einer Anpassung mit einer geradlinigen Bewegung in Bild 3-16 auf Seite 101 dargestellt.

Numerisches BEISPIEL: Es werde die geradlinige Bewegung V = 8 km/s, r_p = 9000 km, ζ_P = 40° vorgegeben. Mit den Beziehungen (3.134) folgen die Integrationskonstanten für die Kegelschnittbewegung

$$k_{10} = 1.106977201 \quad , \quad k_{20} = .9288641611 \quad .$$

Die Parameter (3.133) der Kegelschnittbewegung lauten

$$k_1 = k_1(\zeta) = e\cos\zeta_K = 1.106977201 - \cos\zeta \ , \ k_2 = k_2(\zeta) = e\sin\zeta_K = 0.9288641611 - \sin\zeta \ ,$$

woraus sich unmittelbar die Exzentrizität des Anpassungs-Kegelschnitts ergibt:

$$e = e(\zeta) = \sqrt{(k_1(\zeta))^2 + (k_2(\zeta))^2} \quad .$$

Interessanterweise bleibt der Parameter p der Kegelschnitte über den gesamten Anpassungsvorgang konstant. Dagegen ändert sich die Perigäumsdistanz r_{pK} des Kegelschnitts erheblich. Die Apsidenlinie (Richtung zum Perigäum) hat bezogen auf die $\mathbf{q}_1^{(I)}$ – Achse des *Hansen*-Systems den Winkel

$$\zeta_K = \zeta_K(\zeta) = \arctan\left(\frac{k_2(\zeta)}{k_1(\zeta)}\right) \quad .$$

In Bild 3-17 ist links der Verlauf der Exzentrizität aufgetragen, wie er im Verlauf des Anpassungsvorganges längs der Geraden auftritt: Im Bereich relativ zum Perigäum der Geraden von etwa ±40° ist die Anpassungskurve eine Ellipse, außerhalb eine Hyperbel. Würde an Stelle der konstanten Geschwindigkeit 8 km/s eine höhere gewählt (zum Beispiel 10 km/s), wäre die Anpassungskurve stets eine Hyperbel. Bemerkenswert ist der Verlauf des Perigäumswinkels $\zeta_K(\zeta)$, der etwa im Bereich der elliptischen Anpassung sich maximal verändert, im Bereich der hyperbolischen Anpassung jedoch umschlägt.

Der Verlauf des Radius r wird wie zu erwarten in Bild 3-18 links wiedergegeben. Die Perigäumsdistanz r_{PK} (rechtes Bild) des Anpassungskegelschnitts hat ihr Maximum im Moment des Durchganges durch das Perigäum der Geraden, entsprechend zunehmender Bahnexzentrizität nimmt sie stetig ab. Die entsprechenden detaillierten Zahlenwerte sind in Tabelle 3-1 zusammengestellt.

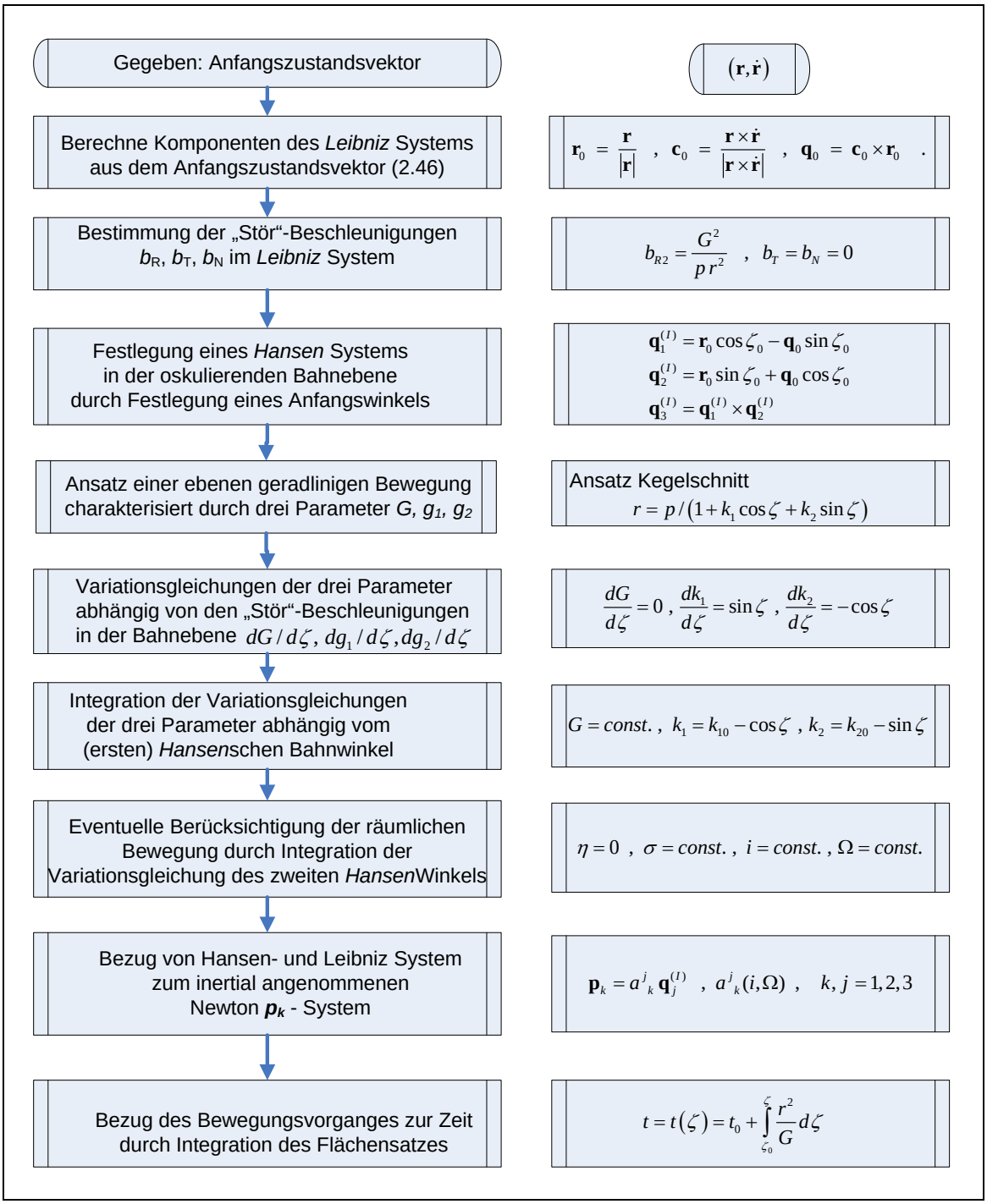

Bild 3-16: Linke Säule: Schema zur Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine geradlinige Bewegung, rechte Säule: Spiegelung des Verfahrens auf die Anpassung einer geradlinigen Bewegung durch eine Bewegung auf einem Kegelschnitt: Der prinzipielle Unterschied besteht in der Wahl der Kurvenparameter (g_1, g_2 bzw. k_1, k_2) und der entsprechenden Variationsgleichungen

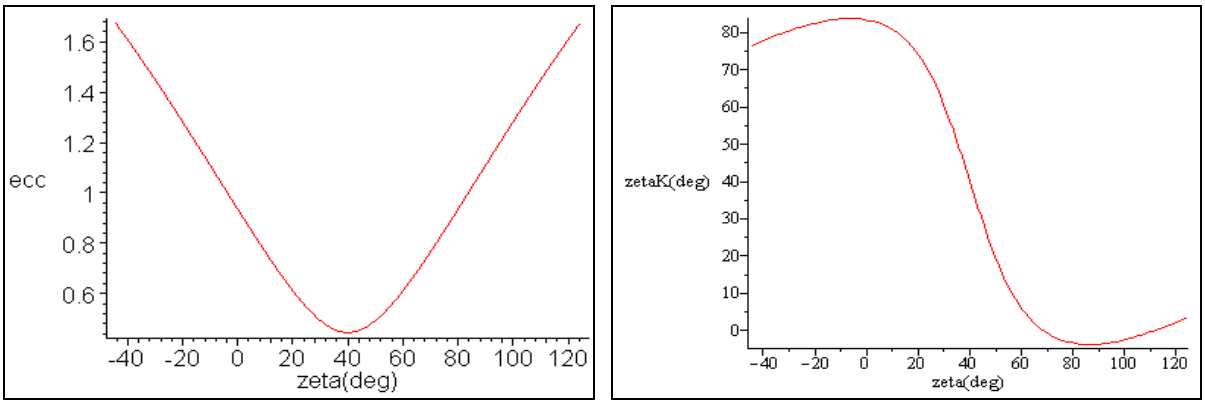

Bild 3-17: Verlauf der Exzentrizität $e(\zeta)$ (linke Kurve) und Perigäumsdistanz $\zeta_K(\zeta)$ (rechts) der Bewegung längs der Geraden (mit V=8 km/s, r_p =9000km, ζ_P=40°)

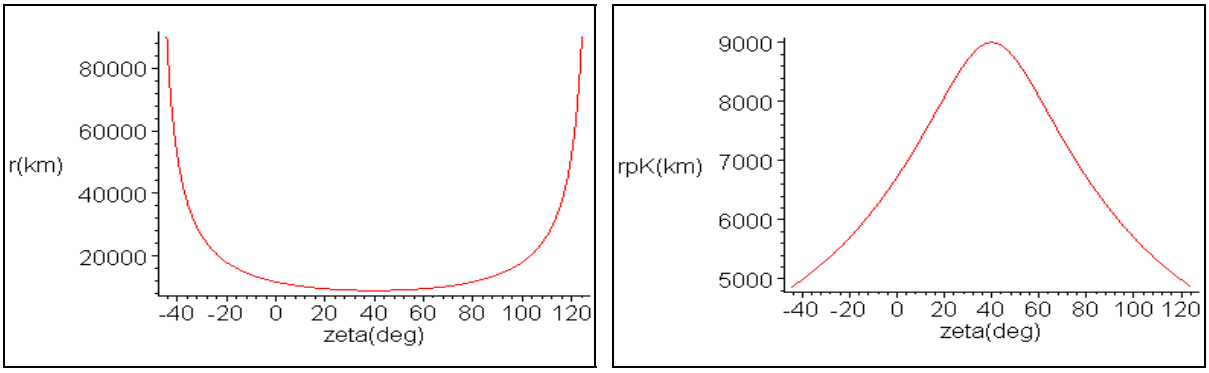

Bild 3-18: Verlauf des Radius $r(\zeta)$ (linke Kurve) und Perigäumsdistanz $r_{pK}(\zeta)$ (rechts) der Bewegung längs der Geraden (mit V=8 km/s, r_p =9000km, ζ_P=40°)

ζ	e	r[km]	r_{pK}[km]	ζ_K
-50°	1.757	$\rightarrow \infty$	4717.267	74°.68380
-40°	1.608	51828.934	4986.773	77°.76066
-30°	1.449	26314.330	5310.537	80°.42817
-20°	1.282	18000.000	5699.170	82°.50135
-10°	1.109	14001.514	6166.669	83°.67685
0°	0.935	11748.666	6721.191	83°.43019
10°	0.765	10392.305	7368.558	80°.81100
20°	0.610	9577.600	8076.950	74°.08937
30°	0.492	9138.840	8717.411	60°.67111
40°	0.445	9000.000	9000.000	40°.00000
50°	0.492	9138.840	8717.411	19°.32889
60°	0.610	9577.600	8076.950	5°.91062
70°	0.765	10392.305	7368.558	-0°.81100
80°	0.935	11748.666	6721.191	-3°.43019
130°	1.757	$\rightarrow \infty$	4717.267	5°.31620

Tabelle 3-1: Anpassung der geradlinigen Bewegung mit V=8 km/s, r_p =9000km, ζ_P=40° durch Kegelschnitte

Der Anpassungsprozess ist in Bild 3-15 skizziert: dargestellt sind zwei Anpassungskurven: Im Perigäum der geradlinigen Bahn wird die Anpassung durch eine Ellipse (blaue Bahn), weit außerhalb durch eine Hyperbel erreicht. Zu erkennen ist das Perigäum des jeweiligen Kegelschnitts, seine Ablage gegenüber dem *Hansen*-System, sowie die Berührung an die Gerade.

3.4 Anpassung einer Bewegung durch spiralartige Kurven

Das Arbeiten mit *Hansen*-Systemen ist in der Astrodynamik wegen ihrer grundlegenden Eigenschaften von großer Bedeutung. Als ein weiteres Beispiel für eine geschickte Anwendung der *Hansen*-Systeme wird in diesem Abschnitt die Anpassung einer Bewegung durch spiralartige Kurven hergeleitet.

Wir schließen in den weiteren Überlegungen unmittelbar an die Anpassung mit einer Kurve zweiter Ordnung an. Die zugehörige radiale Beschleunigung (3.113) auf Seite 91 ist

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} - \frac{G^2}{p\,r^2} + b_{R2} \quad .$$

Im „ungestörten“ Fall, $b_{R2} \equiv 0$, erhalten wir als einfachste Kurve den Kreis mit $p \equiv r$, also verschwindender radialer Beschleunigung

$$\ddot{r} \;=\; 0 \quad (b_{R2} = 0 \;\;,\;\; p \equiv r) \quad . \tag{3.135}$$

Die zugehörige radiale Geschwindigkeit ergibt nach Integration

$$\dot{r} \;=\; C \quad (= const.) \quad . \tag{3.136}$$

Für einen Kreis muss sie verschwinden: $\dot{r} = C = 0$. Wenn aber $C \neq 0$, kommen wir zu einer völlig anderen Kurvenfamilie, die in diesem Abschnitt etwas näher untersucht werden soll[1].

3.4.1 Bewegung auf hyperbolischer Spirale

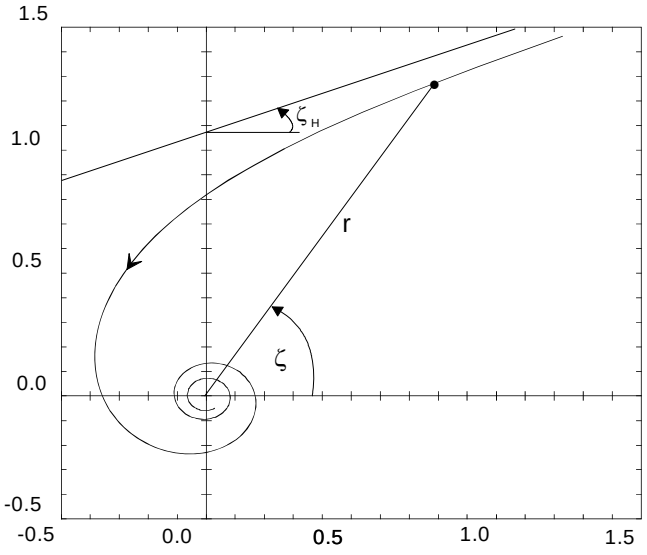

Bild 3-19: Hyperbolische Spirale (n = 2) mit G = 1.0, C = -1.0, ζ_H = 20°

Zunächst ergibt Integration der letzten Gleichung

[1] vgl. W. SCHAUB (1952), pp. 34–37

$$r \;=\; C\,t + C_{H2} \qquad (C_{H2} = const.) \quad . \tag{3.137}$$

Der Radius ändert sich linear in der Zeit. Dies bzw. die Konstanz der Radialgeschwindigkeit $\dot{r} = const.$ ist die definierende Eigenschaft der *hyperbolischen Spirale*. Wie sie geformt ist, sehen wir nach Einführung des Bahnwinkels ζ. Da in allen diesen Fällen formal der Flächensatz $r^2\dot{\zeta} = G$ $(= const.)$ gilt, ergibt die radiale Geschwindigkeit in (3.136)

$$\frac{dr}{d\zeta} \;=\; \frac{C}{G}\,r^2 \tag{3.138}$$

bzw. die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r^2} \;=\; \frac{C}{G}\,d\zeta \tag{3.139}$$

mit dem Integral

$$-\frac{1}{r} \;=\; \frac{C}{G}\,\zeta + C_{S2} \quad , \quad C_{S2} \;=\; const.$$

oder

$$r \;=\; -\frac{G}{C\,\zeta + G\,C_{S2}} \quad . \tag{3.140}$$

Dies ist die Polardarstellung einer hyperbolischen Spirale. Wenn $C \neq 0$, wenn also Kreisbewegung ausgeschlossen werden kann, kann ein Anfangswinkel ζ_H definiert werden durch

$$\zeta_H \;\coloneqq\; -\frac{G}{C}\,C_{S2} \quad , \tag{3.141}$$

bzw.

$$r \;=\; -\frac{\dfrac{G}{C}}{\zeta - \zeta_H} \quad . \tag{3.142}$$

Siehe als Beispiel Bild 3-19 auf Seite 103.

Um den Kreisfall, von dem ja ausgegangen wurde, nicht auszuschließen, soll *C* beliebig gesetzt werden können. Im Kreisfall muss $C_{S2} \neq 0$ gesetzt werden, da der Radius dann den Wert $r = -1/C_{S2} = const.$ annimmt. Der Ursprung des Systems, auf den bezogen die Polardarstellung der hyperbolischen Spirale erfolgt ist, ist ein asymptotischer Punkt. Die Gerade, welche die x-Achse des Systems unter dem Winkel ζ_H schneidet und vom Ursprung den kürzesten Abstand $|G/C|$ hat, ist die Asymptote an die Spirale für $\zeta \to \zeta_H$.

3.4.2 Verallgemeinerung der Anpassung mit spiralartigen Kurven

Aus der Polardarstellung (3.138) erhalten wir als eine Verallgemeinerung für beliebige ganzzahlige *n* die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\zeta} \;=\; \frac{C}{G}\,r^n \quad . \tag{3.143}$$

(1) Diese Differentialgleichung enthält für *n* = 2 die hyperbolische Spirale. Für *n* = 0 folgt

$$dr \;=\; \frac{C}{G}\,d\zeta \quad , \quad n \;=\; 0 \tag{3.144}$$

mit dem Integral

$$r \;=\; \frac{C}{G}\,\zeta + C_{S0} \quad . \tag{3.145}$$

Dies ist die Polardarstellung einer *archimedischen Spirale*. Als definierende Eigenschaft kann nach Gleichung (3.144) der Ausdruck

$$\frac{\dot{r}}{C} \;=\; \frac{\dot{\zeta}}{G} \tag{3.146}$$

angesehen werden: Radialgeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit des bewegten Objektes sind zueinander direkt proportional. Aus der allgemeingültigen Beziehung $r^2\,\dot{\zeta} = G$ folgt, dass die Winkelgeschwindigkeit nicht konstant sein kann, sondern vom Quadrat der Entfernung vom Ursprung abhängt.

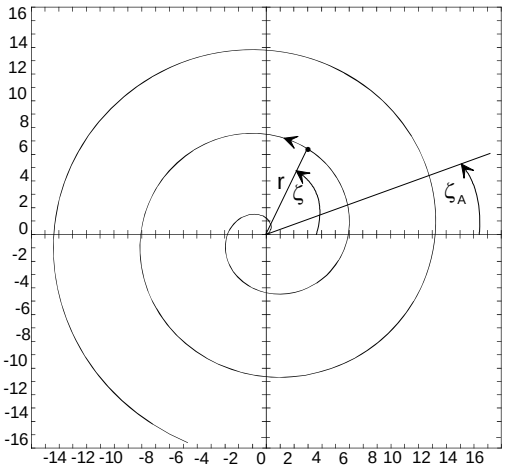

Bild 3-20: Archimedische Spirale (n = 0) mit G = 1.0, C = 1.0, ζ_A = 20°

Für C=0 enthält die archimedische Spirale als Spezialfall einen Kreis $r \equiv C_{S0} = const.$ Für $C \neq 0$ beginnt bzw. endet die archimedische Spirale im Ursprung (siehe Bild 3-20). Hier ist

$$\zeta_A \;:=\; -\frac{G}{C}C_{S0} \quad , \quad C \;\neq\; 0 \tag{3.147}$$

als Anfangswinkel gesetzt worden. Mit $r^2\,\dot{\zeta} = G$ liefert die Differentialgleichung (3.143) für $n = 0$

$$r^2\,\dot{r} \;=\; C \quad , \tag{3.148}$$

somit den Zusammenhang mit der Zeit

$$r^3 \;=\; 3Ct + 3C_A \quad , \quad C_A \;=\; const. \quad . \tag{3.149}$$

(2) Für n = 1 erhalten wir aus Gleichung (3.143)

$$\frac{dr}{r} \;=\; \frac{C}{G}\,d\zeta \quad , \quad (n = 1) \tag{3.150}$$

mit dem Integral

$$\ln r \;=\; \frac{C}{G}\zeta + C_{S1} \quad , \quad C_{S1} \;=\; const. \quad \text{bzw.} \quad r \;=\; e^{C_{S1}}\, e^{\frac{C}{G}\zeta} \quad , \quad (n=1) \quad , \qquad (3.151)$$

die Polardarstellung einer *logarithmischen Spirale*. Für $C = 0$ erhalten wir wieder die Kreisbahn, für $C \neq 0$ mit dem Anfangswinkel

$$\zeta_L \;:=\; -\frac{G}{C}\, C_{S1}$$

eine logarithmische Spirale, die im Ursprung einen asymptotischen Punkt hat, siehe als Beispiel Bild 3-21. Die radiale Geschwindigkeit ist

$$\dot{r} \;=\; \frac{C}{r} \qquad (n=1) \quad , \qquad (3.152)$$

der Zusammenhang mit der Zeit lautet also

$$r^2 \;=\; 2\,C\,t + C_L \quad , \quad C_L \;=\; const. \quad (n=1) \quad . \qquad (3.153)$$

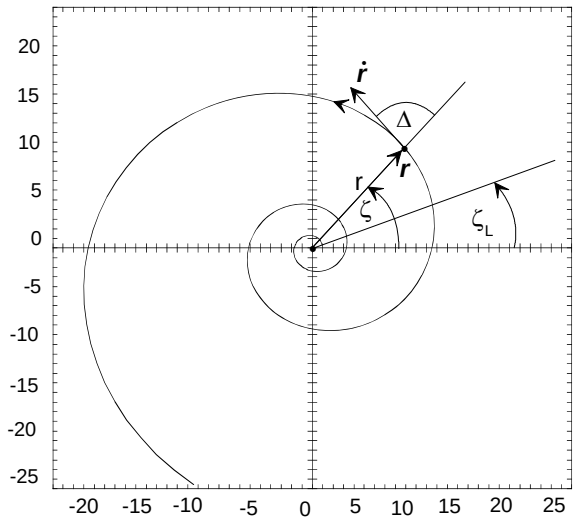

Bild 3-21: Logarithmische Spirale (n = 1) mit $G = 5.0, C = 1.0, \zeta_L = 20°$

(3) Für beliebiges *n* lautet der Radius nach Gleichung (3.143)

$$\begin{aligned} r^{1-n} \;&=\; (1-n)\left(\frac{C}{G}\zeta + C_{Sn}\right) \quad , \quad n \neq 1 \\ r \;&=\; e^{C_{S1}}\, e^{\frac{C}{G}\zeta} \qquad\qquad\qquad , \quad n = 1 \quad . \end{aligned} \qquad (3.154)$$

Für die radiale Geschwindigkeit gilt in allen Fällen einheitlich wegen $r^2\,\dot{\zeta} = G$

$$V_R = \dot{r} = \frac{C}{r^{2-n}} \quad . \qquad (3.155)$$

Daraus folgt die Bewegung in der Zeit

$$\begin{aligned} r^{3-n} \;&=\; (3-n)\,(C\,t + C_{Sn}) \quad , \quad n \neq 3 \\ r \;&=\; e^{C_3}\, e^{C\,t} \qquad\qquad , \quad n = 3 \quad . \end{aligned} \qquad (3.156)$$

Der Zustandsvektor hat für Kurven der Familie (3.143) mit Radius *r* aus den Gleichungen (3.154) und abhängig vom Bahnwinkel ζ die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\,(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \left(C\,r^{n-2}\cos\zeta - \frac{G}{r}\sin\zeta\right)\mathbf{q}_1^{(I)} + \left(C\,r^{n-2}\sin\zeta + \frac{G}{r}\cos\zeta\right)\mathbf{q}_2^{(I)} \quad , \end{aligned} \tag{3.157}$$

alternativ für den Geschwindigkeitsvektor

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \left(\frac{C}{G}\,r^n\cos\zeta - r\sin\zeta\right)\mathbf{q}_1^{(I)} + \left(\frac{C}{G}\,r^n\sin\zeta + r\cos\zeta\right)\mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \tag{3.158}$$

Als Beispiel berechnen wir im Fall der *logarithmischen Spirale* mit der zweiten der Gleichungen (3.157) die (absolute) Geschwindigkeit

$$V = |\dot{\mathbf{r}}| = \frac{\sqrt{C^2+G^2}}{r} \quad , \quad n=1 \quad . \tag{3.159}$$

Aus

$$\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}} = r\,\dot{r} = C \coloneqq r\,|\dot{\mathbf{r}}|\cos\Delta$$

folgt daraus die Konstanz des Zwischenwinkels Δ zwischen Radius und Tangente

$$\operatorname{ctg}\Delta = \frac{C}{G} \quad (= const. \;,\; n=1) \quad . \tag{3.160}$$

Dies ist die charakterisierende Eigenschaft der logarithmischen Spirale.

3.4.3 Der Anpassungsvorgang mit spiralartigen Kurven

Wir wollen verlangen, dass eine Bewegung durch eine allgemeine Kurve der Form (3.154) angepasst werde. Dazu müssen die Parameter C, G und C_{Sn} so variiert werden, dass die radiale Geschwindigkeit stets diese Darstellung hat. Die erste dieser Gleichungen liefert durch Differentiation

$$(1-n)\,r^{-n}\,\dot{r} = (1-n)\left[\frac{\dot{C}}{G}\zeta + \frac{C}{G}\dot{\zeta} - \frac{C\dot{G}}{G^2}\zeta + \dot{C}_{Sn}\right] \quad , \quad n\neq 1 \quad ,$$

die zweite

$$\dot{r} = r\left[\frac{\dot{C}}{G}\zeta + \frac{C}{G}\dot{\zeta} - \frac{C\dot{G}}{G^2}\zeta + \dot{C}_{S1}\right] \quad , \quad n=1 \quad .$$

Vergleich mit der radialen Geschwindigkeit in Gleichung (3.155) auf S. 106 ergibt die **für alle** *n* gültige *Anpassungsgleichung*

$$G^2\,\dot{C}_{Sn} + \zeta\,G\,\dot{C} - \zeta\,C\,\dot{G} = 0 \quad . \tag{3.161}$$

Für die radiale Beschleunigung kann $\dot{r}$ in Gleichung (3.155) differenziert und mit der allgemeingültigen Gleichung (3.6) auf Seite 67 verglichen werden. Dazu wird noch der Faktor b_{R} in einen „ungestörten“, d. h. auf eine der anzupassenden Kurven der Familie (3.154) bezogenen Anteil b_{RS} und einen „gestörten“ Anteil b_{Rn} zerlegt. Wir erhalten

$$\ddot{r} \;=:\; \frac{G^2}{r^3} + b_{RS} + b_{Rn} = \dot{C}\,r^{n-2} + (n-2)\,C^2\,r^{2n-5} \quad . \tag{3.162}$$

Da hier eine „Störung“ der vorgegebenen Kurve nur durch $\dot{C}$ gegeben wird, erhalten wir unmittelbar

$$\dot{C} \;=\; r^{2-n}\, b_{Rn} \tag{3.163}$$

als erste der gesuchten Variationsgleichungen im vorliegenden Anpassungsvorgang. Es bleibt die („ungestörte“ charakterisierende) Beschleunigung

$$b_{Rs} \;=\; -\frac{G^2}{r^3}\left[1-(n-2)\left(\frac{C}{G}\right)^2 r^{2n-2}\right] \quad , \tag{3.164}$$

welche dafür notwendig ist, dass sich ein Körper auf einer spiralartigen Kurve der Form (3.154) bewegt. Mit der Variationsgleichung (3.7) auf Seite 67 für $\dot{G}$ und (3.163) für $\dot{C}$ erhalten wir schließlich aus der Anpassungsgleichung (3.161) die noch fehlende Variationsgleichung

$$\dot{C}_{Sn} \;=\; \frac{\zeta}{G}\left[-r^{2-n}\, b_{Rn} + r\,\frac{C}{G}\, b_T\right] \quad . \tag{3.165}$$

Bei Bezug auf den Bahnwinkel ζ lauten die Variationsgleichungen unter Einbeziehung der Variationsgleichung für den Flächenparameter G wegen der Zeitgleichung $r^2\dot{\zeta} = G$

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{d\zeta} &= r^{4-n}\, b_{Rn} \\
\frac{dG}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G} b_T \\
\frac{dC_{Sn}}{d\zeta} &= -\frac{r^{4-n}}{G^3} b_{Rn} + \frac{r^3 C}{G^4} b_T \quad .
\end{aligned} \tag{3.166}$$

Für den Radius r müssen die Ausdrücke aus den Gleichungen (3.154) eingesetzt werden, die Beschleunigungen b_{Rn} und b_T bewirken, dass mit der gewählten Spirale die anzupassende Kurve beschrieben werden kann. Falls es sich um eine Raumkurve mit der normalen Beschleunigung $b_N \neq 0$ handelt, wird mit den Beschleunigungen b_{Rn} und b_T die Projektion der wahren Kurve in die oskulierende Bahnebene beschrieben.

3.4.4 Konstruktion weiterer Spiralen

Mit den Formeln dieses Abschnittes ist es nun ein leichtes, weitere Spiralen zu konstruieren . Wir wollen als Beispiel den Fall n=3 wählen (die entsprechende Spirale soll hier als Dreier-Spirale [3-Spirale] bezeichnet werden). Die erste der Formeln (3.154) liefert für den Radius in Abhängigkeit vom Bahnwinkel ζ

$$r = r_{(3)} = \sqrt{-\frac{G}{2\left(C\zeta + G C_{S3}\right)}} = \sqrt{-\frac{G}{2C\left(\zeta - \zeta_3\right)}} \quad , \tag{3.167}$$

wobei C, G und der Anfangswinkel ζ_3 charakterisierende konstante Ausgangsgrößen sind und mit

$$\zeta_3 := -\frac{G}{C} C_{S3} \qquad . \tag{3.168}$$

Die Radialbeschleunigung der 3-Spirale beträgt nach Formel (3.162) wegen C = const.

$$\ddot{r} = r C^2 \tag{3.169}$$

Transversal- und Normalbeschleunigung wirken auf diese Bewegung nicht: $b_T = b_N = 0$. Die radiale Beschleunigung, die einen Körper zwingt sich auf einer derartigen Kurve zu bewegen, beträgt nach Formel (3.164)

$$b_{Rs} = b_{Rs(3)} = -\frac{G^2}{r^3} + r C^2 \quad . \tag{3.170}$$

Bild 3-22 zeigt eine solche Kurve mit den Parametern G=5, C=-1, ζ_3=50°. Es fällt auf, dass die Kurve bis zu einem Wendepunkt bei etwa (x,y)=(1.2,2.4) konvex, ab da konkav verläuft.

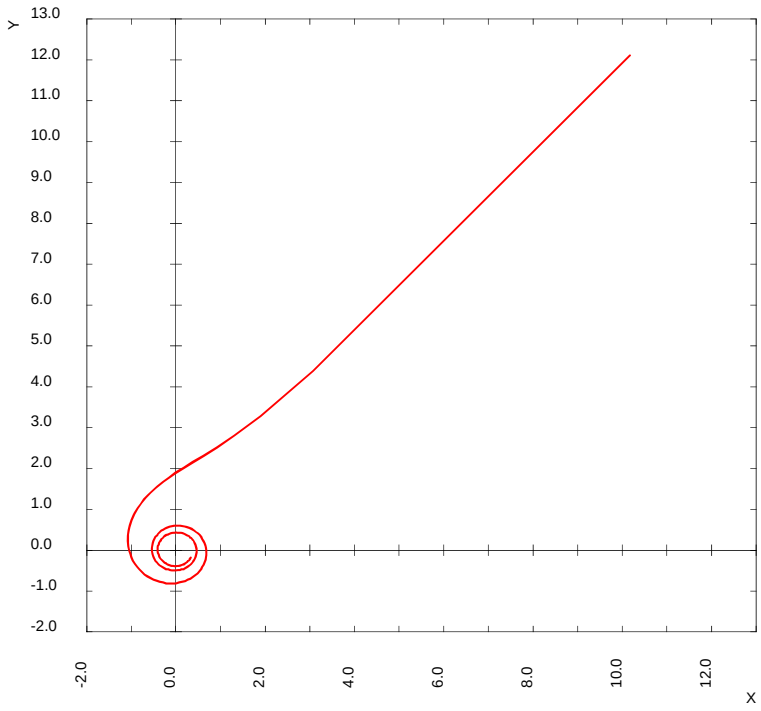

Bild 3-22: Dreier-Spirale (n = 3) mit $G = 5.0, C = -1.0, \zeta_3 = 50°$ ■

Wird die 3-Spirale zur Anpassung einer beliebigen Bewegung ausgewählt, lauten die Variationsgleichungen mit den Formeln (3.163) und (3.165) sowie (3.7)

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \frac{b_{R3}}{r} \\ \dot{C}_{S3} &= \frac{\zeta}{G}\left[-\frac{b_{R3}}{r} + r\frac{C}{G} b_T\right] \\ \dot{G} &= r\, b_T \\ \dot{\eta} &= \frac{r}{G}\, b_N \end{aligned} \tag{3.171}$$

bzw. bei Bezug auf den Bahnwinkel ζ als unabhängiger Variable

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{d\zeta} &= \frac{r}{G} b_{R3} \\
\frac{dC_{S3}}{d\zeta} &= -\frac{r\zeta}{G^2} b_{R3} + \frac{r^3 \zeta C}{G^3} b_T = -\frac{r\zeta}{G^2}\left[b_{R3} - \frac{r^2 C}{G} b_T \right] \\
\frac{dG}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G} b_T \\
\frac{d\eta}{d\zeta} &= \frac{r^3}{G^2} b_N \quad .
\end{aligned} \tag{3.172}$$

BEISPIEL: Anpassung einer Geraden durch eine 3-Spirale:

Da eine gleichförmig geradlinige Bewegung durch die Radialbeschleunigung $\ddot{r} = G^2 / r^3$ erzeugt wird, muss auf einen Körper, der sich auf einer 3-Spirale bewegt, die „Störbeschleunigung“ nach Beziehung (3.162) und wegen (3.170)

$$b_{R3} = -b_{RS(3)} = \frac{G^2}{r^3} - r C^2$$

einwirken, um diesen Körper auf eine gleichförmig geradlinige Bewegung zu zwingen. Wird hier die eine 3-Spirale beschreibende Polargleichung (3.167) eingesetzt, ergeben sich die beiden Variationsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dC}{d\zeta} &= -2\left(\zeta C + G C_{S3}\right) + \frac{C^2}{2\left(\zeta C + G C_{S3}\right)} \\
\frac{dC_{S3}}{d\zeta} &= \frac{\zeta}{G}\left[2\left(\zeta C + G C_{S3}\right) - \frac{C^2}{2\left(\zeta C + G C_{S3}\right)} \right] = -\frac{\zeta}{G}\frac{dC}{d\zeta} \quad .
\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen sind Funktionen $C = C(\zeta)$, $C_{S3} = C_{S3}(\zeta)$, sowie $G = const., \eta = 0$.

3.4.5 Systematischer Überblick über einige wichtige Spiralen

Die in den vorhergehenden Abschnitten zusammengestellten Formeln können auch verwendet werden, um die ungestörte Radialbeschleunigung nach Gleichung (3.162) und die charakterisierende ungestörte Beschleunigung nach Gleichung (3.164) für die einzelnen Spiralen berechnen zu können:

Fall n=-1:

$$\begin{aligned}
b_{RS} = b_{RS(-1)} &= -\frac{G^2}{r^3} - 3\frac{C^2}{r^7} \qquad , \quad (n = -1) \\
\ddot{r} &= -3\frac{C^2}{r^7} \\
r &= \sqrt{2\frac{C}{G}\left(\zeta - \zeta_{S(-1)}\right)}
\end{aligned} \tag{3.173}$$

Fall n=0 (Archimedische Spirale):

$$
\begin{aligned}
b_{RS} = b_{RS(0)} &= -\frac{G^2}{r^3} - 2\frac{C^2}{r^5} \qquad , \quad (n=0) \\
\ddot{r} &= -2\frac{C^2}{r^5} \\
r &= \frac{C}{G}\left(\zeta - \zeta_{S0}\right)
\end{aligned}
\tag{3.174}
$$

Fall n=1 (Logarithmische Spirale):

$$
\begin{aligned}
b_{RS} = b_{RS(1)} &= -\frac{G^2}{r^3} - \frac{C^2}{r^3} \qquad , \quad (n=1) \\
\ddot{r} &= -\frac{C^2}{r^3} \\
r &= e^{C_{S1}} e^{\frac{G}{C}\zeta} \quad , \quad \left(C_{S1} = -\frac{C}{G}\zeta_L\right)
\end{aligned}
\tag{3.175}
$$

Fall n=2 (Hyperbolische Spirale):

$$
\begin{aligned}
b_{RS} = b_{RS(1)} &= -\frac{G^2}{r^3} \qquad , \quad (n=2) \\
\ddot{r} &= 0 \\
r &= -\frac{G}{C\left(\zeta - \zeta_H\right)}
\end{aligned}
\tag{3.176}
$$

Fall n=3 (3-Spirale):

$$
\begin{aligned}
b_{RS} = b_{RS(3)} &= -\frac{G^2}{r^3} + r\,C^2 \qquad , \quad (n=3) \\
\ddot{r} &= r\,C^2 \\
r &= \sqrt{-\frac{G}{C\left(\zeta - \zeta_3\right)}}
\end{aligned}
\tag{3.177}
$$

3.5 Die für einen bestimmten Bewegungsvorgang benötigten Beschleunigungen

Der Rückgriff auf die formale Darstellung einer geradlinigen Bewegung erlaubt in sehr einfacher Weise die Beschleunigungen zu berechnen, die ursächlich für einen Bewegungsvorgang auf einer bestimmten Kurve sind. Es sei also möglich, die Bewegung auf der gewünschten Kurve durch Beobachtung (oder eine vorgegebene Forderung) in der Form der Polardarstellung einer geradlinigen Bewegung darzustellen

$$
r = \frac{G(\zeta)}{g_1(\zeta)\cos\zeta + g_2(\zeta)\sin\zeta} \quad . \tag{3.178}
$$

Aus den Variationsgleichungen der geradlinigen Bewegung in der Form (3.104) auf Seite 88 können dann unmittelbar die Beschleunigungen in radialer und transversaler Richtung berechnet werden:

$$b_R = \frac{G}{r^2}\left(\frac{dg_1}{d\zeta}\sin\zeta - \frac{dg_2}{d\zeta}\cos\zeta\right)$$
$$b_T = \frac{G}{r^2}\left(\frac{dg_1}{d\zeta}\cos\zeta + \frac{dg_2}{d\zeta}\sin\zeta\right) \quad . \tag{3.179}$$

Um die normale Beschleunigung b_N zu berechnen, die noch fehlt um die gesamte Beschleunigung auf den betrachteten Bewegungsvorgang zu erfassen, muss die Rotation $\dot{\eta}$ um den Ortsvektor beobachtet werden. Gelingt dies, so ist mit dem Formalismus der geradlinigen Bewegung die normale Beschleunigung unmittelbar aus Gleichung (3.102) auf Seite 88 erhältlich:

$$b_N = \dot{\eta}\,(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta) \quad . \tag{3.180}$$

BEISPIEL: Das Verfahren soll an einem bekannten und sehr einfachen aber instruktiven Beispiel erläutert werden. Zu berechnen seien die Beschleunigungen, die erforderlich sind, um eine Bewegung auf einem Kegelschnitt zu erzwingen. Die Kegelschnittbewegung erfolgt mit der üblichen Polardarstellung

$$r = \frac{p}{1+e\cos\upsilon} \quad . \tag{3.181}$$

Um diese formal auf die Darstellung einer geradlinigen Bewegung in der Form (3.178) zurückführen zu können, muss erfüllt sein

$$\frac{1}{p}\left(1+e\cos\upsilon\right) = \frac{1}{G}\left(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta\right) \quad . \tag{3.182}$$

Die linke Seite dieses Ausdrucks wird auf den *Hansen*'schen Bahnwinkel ζ durch Einführung des konstanten Perizentrumswinkels $\zeta_B = \zeta - \upsilon$ bezogen. Damit erlaubt die linke Seite die Umformung

$$\frac{1}{p}\left[1+e\cos\left(\zeta-\zeta_B\right)\right] = \frac{1}{p}\left[\cos\zeta\left(\cos\zeta+e\cos\zeta_B\right)+\sin\zeta\left(\sin\zeta+e\sin\zeta_B\right)\right] .$$

Vergleich mit der rechten Seite in Gleichung (3.182) ergibt die gesuchten Beziehungen

$$g_1 = g_1(\zeta) = \frac{G}{p}\left[\cos\zeta + e\cos\zeta_B\right] \quad , \quad g_2 = g_2(\zeta) = \frac{G}{p}\left[\sin\zeta + e\sin\zeta_B\right] \quad . \tag{3.183}$$

Mit den entsprechenden Variationen

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = -\frac{G}{p}\sin\zeta \quad , \quad \frac{dg_2}{d\zeta} = \frac{G}{p}\cos\zeta \tag{3.184}$$

können die gesuchten Beschleunigungen aus den beiden Gleichungen (3.179) berechnet werden:

$$b_R = -\frac{G^2}{p}\frac{1}{r^2} \quad , \quad b_T = 0 \quad . \tag{3.185}$$

Dieser Lösungsweg könnte mit der Aussage gekoppelt werden: wie muss eine geradlinige Bewegung „gestört" werden, damit die Bewegung auf einem Kegelschnitt verläuft. Ähnlich wie die Lösung des Zweikörperproblems durch *J. Hermann* ist diese Lösung auf rein kinematischem Weg gefunden worden ohne jeden physikalischen Bezug. Die *Hermann*sche Lösung[1] impliziert das Fehlen einer transversalen Beschleunigung bei einer Bewegung auf einem Kegelschnitt dadurch, dass in der Beschleuni-

[1] HERMANN, J. (1710)

gungsgleichung $\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \mathbf{r}_0 / r^2$ nur die radiale Beschleunigung vorkommt. Dagegen begründet der hier hergeleitete Lösungsweg explizit das Fehlen der transversalen Beschleunigung. Vor diesem Hintergrund kann der hier vorgestellte Lösungsweg als allgemeingültiger angesehen werden. Erst mit der bekannten dynamischen Beziehung $G^2 = \mu p$ (drittes *Kepler*sches Gesetz) folgt aus (3.185) die *Kepler*sche Beschleunigung in der Form $b_R = -\mu / r^2$. ■

Anmerkungen:

1. Der Zusammenhang zwischen einer Bahnform und der Beschleunigung, die eine Bewegung auf dieser Bahn erlaubt, ist von rein kinematischer Natur. Sie erlaubt keinerlei Aussage über eine physikalische (oder technische, d.h. gesteuerte) Ursache der Beschleunigung.
2. Die *Hermann*sche Lösung des Zweikörperproblems ging vom ersten *Kepler*schen Gesetz (der Bahnform) und dem zweiten *Kepler*schen Gesetz (dem Flächensatz) aus. Die Frage ist, wird in der hier gefundenen Lösung, die von der Bahnform ausgeht, überhaupt das zweite *Kepler*sche Gesetz benötigt und wenn ja, wo ist es versteckt. Die radiale Bescheunigung $b_R = -G^2 / \left(pr^2 \right)$ ist notwendig für die Bewegung auf einem Kegelschnitt, also die Aussage des ersten *Kepler*schen Gesetzes. Das Verschwinden der transversalen Beschleunigung b_T führt wegen der (allgemeingültigen) Variationsgleichung $\dot{G} = r\, b_T$ notwendig und hinreichend auf die Konstanz des Flächenparameters, also auf das zweite *Kepler*sche Gesetz.
3. Der hier gegebene Lösungsweg zur Berechnung der Beschleunigungskomponenten b_R, b_T, b_N in Bezug auf das *Leibniz*-System, die erforderlich sind um eine Bewegung auf bestimmten Bahnkurven zu erzwingen, ist ohne den Bezug auf den Formalismus der geradlinigen Bewegung und ohne den Bezug auf ein *Hansen*-System nicht möglich. Der Bezug auf die geradlinige Bewegung impliziert die Aussage, dass die berechneten Beschleunigungen die **vollständige** „Störung“ darstellen, welche den Bewegungsvorgang formen. Der Bezug auf das *Hansen*-System erlaubt in einfacher Weise die Berechnung der benötigten Differentiationen und führt somit direkt zur Berechnung der Beschleunigungen in Bezug auf das *Leibniz*-System.
4. Eine mögliche Bewegungsabhängigkeit des Flächenparameters *G* ist in der formalen Darstellung (3.178) der geradlinigen Bewegung enthalten. Sie muss daher vor der Berechnung der Beschleunigungskomponenten bekannt sein genau so wie die Abhängigkeit der Parameter g_i in Bezug auf die Zeit bzw. auf den *Hansen*winkel ζ über den Flächensatz $r^2 \dot{\zeta} = G$. Wenn aber die transversale Beschleunigung b_T nicht verschwindet, zeigt sich eine Variabilität von *G* implizit in der Variationsgleichung (3.7) $\dot{G} = r\, b_T$. Nach Berechnung der transversalen Beschleunigung b_T aus der zweiten der Gleichungen (3.179) kann also $G = G\left(\zeta\right)$ durch Integration dieser Variationsgleichung erhalten werden. Dies kann als Verifikation des Rechenprozesses dienen.

3.6 Das Abstandsgesetz

Eine überraschende Querverbindung erlaubt die Polargleichung für den Radius (die erste der Formeln (3.80) auf Seite 85)

$$r = \frac{G}{V \cos\left(\zeta - \zeta_P\right)} \tag{3.186}$$

durch Auflösung nach der (absoluten) Geschwindigkeit

$$V = \frac{G}{r}\frac{1}{\cos(\zeta - \zeta_P)} \quad . \tag{3.187}$$

Diese Beziehung erinnert an das *Kepler*sche Abstandsgesetz[1] $V \sim 1/r$. Vor dem Hintergrund der Anpassung einer beliebigen Bewegung durch eine geradlinige Bewegung und des Bezugs auf ein *Hansen* System mit der Abhängigkeit des Perizentrumswinkels $\zeta_P = \zeta_P(\zeta)$ von dem *Hansen*schen Bahnwinkel ζ lässt sich erkennen, dass die Darstellung (3.187) vollständig allgemeingültig ist. Der ursprüngliche *Kepler*sche Ansatz eines Abstandsgesetzes kann also mit der Abrundung durch den exakten Ausdruck (3.187) als geniale Idee in der richtigen Richtung bezeichnet werden.

BEISPIEL: Im Fall einer Kreisbewegung ist $\zeta_P = \zeta$, mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes in der Form $G = \sqrt{\mu p}$, ergibt Formel (3.187) die Beziehung

$$V_K := \frac{G}{r} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \tag{3.188}$$

da für Kreisbewegungen p=r=const..

3.7 Problematik einer Anpassung mit einer Kreisbewegung

Die im bisherigen Kapitel bearbeiteten Untersuchungen sind zwar im Hinblick auf *Hansen*-Systeme durchgeführt worden, es bleibt aber die Frage, ob dieser Bezug recht willkürlich also quasi durch Definition, wie in seiner Originalarbeit von *P. A. Hansen* selber durchgeführt, erzwungen werden musste. Um diese Fragestellung zu beantworten müssen wir auf Satz H9 in Abschnitt 2.4.1 auf Seite 38 zurückgehen. Danach ist jeder Bewegungsvorgang (zumindest jeder, der in geradlinigen Koordinaten beschrieben werden kann) **notwendig** auf ein *Hansen*-System bezogen und muss nicht per definitionem erzwungen werden. Für jede Bewegung, für die in Bezug auf einen Ursprung eine transversale Geschwindigkeit existiert und somit auch der radiale Richtungsvektor einen nicht verschwindenden Betrag hat, kann diese nach Satz H9 als Variation des Bahnwinkels („erster *Hansen*-Winkel“) gedeutet werden. Dieser Bahnwinkel ist **notwendig** auf ein *Hansen*-System bezogen. Dessen wichtigste Eigenschaft besteht darin, dass im relativen Geschwindigkeitsvektor eines bewegten Objektes die Eigenbewegung des *Hansen*-Systems verschwindet: Relativer und absoluter Geschwindigkeitsvektor sind identisch, eine Eigenschaft, die sonst nur für ein inertiales System zutrifft. Eine Bewegung, die in diesem System beschrieben wird, hat als unabhängigen Parameter den Bahnwinkel ζ. Den Bezug zur Zeit stellt das allgemeingültige Zeitintegral aus der Variationsgleichung $r^2\dot{\zeta} = G$ her, welche den Bahnwinkel ζ und die Zeit *t* verknüpft. Die Untersuchungen in diesem Kapitel haben auch gezeigt, dass als eine Folge dieses allgemeinen Bezuges der Bewegung auf ein *Hansen*-System eine Bewegung (zumindest eine solche, die in geradlinigen Koordinaten beschrieben werden kann) durch eine geradlinige Bewegung angepasst werden kann. Damit ist es auch möglich, die Beschleunigungen herauszuarbeiten, die nötig sind, um einen bestimmten Bewegungsvorgang zu erzwingen. Weiter lässt sich aus diesen Untersuchungen bereits erkennen, dass eine (vielleicht jede) beliebige Bewegung durch eine geeignete Variation der Kurvenparameter beschrieben werden kann. Diese Folgerungen sollen im folgenden Abschnitt und in Kapitel 4 näher untersucht werden.

[1] Siehe in Abschnitt 3.2.3 auf Seite 75

Es ist ersichtlich, dass nach der bisher entwickelten Vorgehensweise relativ willkürlich Bahnkurven postuliert werden können, die durch Variation ihrer Parameter die Anpassung an eine beliebige Bewegung erlauben. Wie weit dies aber sinnvoll ist und welche solcher primärer Kurven besonders zur Lösung himmelsmechanischer Problemstellungen geeignet sind, bedarf weiterer vertiefter Untersuchungen. Es ist anzunehmen, dass spezielle Probleme durch die Vorgabe spezieller primärer Kurven vorteilhaft gelöst werden können. Wir wollen im Rahmen von Beispielen zum Anpassungsvorgang in Abschnitt 4 ab Seite 148 weiter darauf eingehen.

3.7.1 Der Spezialfall Kreisbewegung

Auf die Frage, ob jede beliebige Kurve für eine Anpassung geeignet ist, können wir jetzt schon eingehen. In der antiken Himmelsmechanik, die in den Vorstellungen *Platons* ihren geistigen Höhepunkt gefunden hat, spielt die gleichförmige Kreisbewegung die zentrale Rolle. Die gleichförmige Kreisbewegung ist danach die Bewegung im Sinne eines *Hansen*-Systems, eines Systems also, dessen Eigenbewegung die Darstellung der Bewegung nicht beeinflusst, auch wenn „entgegengesetzte Kräfte“ diese Bewegung (scheinbar) stören können[1]. Man könnte nach der im vorliegenden Kapitel untersuchten Methode der Anpassung beliebiger Bewegungen versucht sein, den Schluss abzuleiten, dass es im Sinne *Platons* wäre, die gleichförmige Kreisbewegung als Ausgangsbewegung zur Anpassung beliebiger Bewegungen zu wählen.

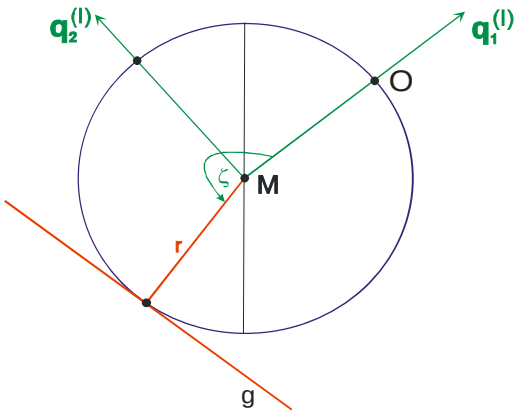

Bild 3-23: Anpassung von Gerade an Kreis

Ein Körper befindet sich auf einer Kreisbahn um einen gegebenen Punkt, wenn er von diesem Punkt stets dieselbe Entfernung hat, der Radius von diesem Punkt aus identisch konstant ist. Eine Variation des Radius findet nicht statt, d. h. es gibt keine Radialgeschwindigkeit und eine radiale Beschleunigung ist nicht erkennbar:

$$r \equiv const. \quad , \quad \dot{r} \equiv 0 \quad , \quad \ddot{r} = 0 \quad .$$

Aus der zweiten dieser Beziehungen folgt unmittelbar:

▶ *Wird eine Kreisbewegung für eine Anpassung zugrunde gelegt, gibt es keine erste Anpassungsgleichung.*

Aus der allgemeingültigen Variationsgleichung der Radialbeschleunigung („*Leibniz* Gleichung“) (3.6) auf Seite 67

[1] Siehe etwa in J. B. SKEMP (1942), p. 81 und im Originaltext bei PLATON (1991), Tim. 38d, sowie Nom. 896e

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} + b_R \;=:\; \frac{G^2}{r^3} + b_{RC} + b_{R0} \tag{3.189}$$

folgt, dass für eine Kreisbewegung notwendig die radiale „Störbeschleunigung“

$$b_{RC} \;=\; -\frac{G^2}{r^3} \quad , \quad b_{R0} \;=\; 0 \tag{3.190}$$

wirken muss. Wie diese physikalisch zustande kommt, ist in diesem Zusammenhang nicht von Interesse.

Eine Aussage, wie diese Bewegung auf einem Kreis erfolgt, benötigt die Kenntnis der transversalen Geschwindigkeit

$$V_T \;=\; r\dot{\zeta} \;=\; \frac{G}{r}$$

Wenn $\dot{G} = r\,b_T$ und $b_T = 0$, ist $G = const.$ und wegen $r = const.$ ist die Bewegung gleichmäßig, erfolgt also mit konstanter Geschwindigkeit

$$V = V_T = \frac{G}{r} = const. \quad .$$

Ist aber $b_T \neq 0$, d. h. gibt es eine transversale Beschleunigung, ist auch die transversale Geschwindigkeit nicht konstant, die Bewegung ist dann also nicht gleichmäßig. Dies ist wohl der von *Platon* angenommene Fall der Planetenbewegung, die auf Kreisbahnen erfolgend durch „entgegengerichtete Kräfte“ nicht die Kreisförmigkeit wohl aber (scheinbar nur wie *Platon* meint) die Gleichförmigkeit dieser Bewegung beeinflusst. (Hier wäre es interessant zu untersuchen, inwieweit die „entgegengerichteten Kräfte“ (ἐναντίαι δυνάμεις) bei *Platon* als eine Vorwegnahme des dritten Axioms *I. Newton*’s (actio = reactio) betrachtet werden könnten).

Ein Kreis kann als Spezialfall einer Kurve zweiter Ordnung, also eines Kegelschnitts mit der numerischen Exzentrizität e=0 aufgefasst werden. Die spiralartigen Kurven, welche durch die Differentialgleichung (3.143) auf S. 104

$$\frac{dr}{r^n} \;=\; \frac{C}{G}\,d\zeta \qquad (n \text{ ganzzahlig})$$

beschrieben werden, haben ebenfalls als Grenzkurve (für $C \to 0$) einen Kreis. Und diese Eigenschaft trifft noch für viele andere bekannte Kurven zu. Das bedeutet, die Bewegung auf einem Kreis kann mit einer solchen Kurve in elementarster Weise angepasst werden. Umgekehrt ist zu erwarten, dass es ebenso in einfacher Weise gelingen sollte, beliebige Bewegungen mit einem Kreis als Ausgangskurve anzupassen. So hat es im Grunde genommen bereits die antike Astronomie versucht, die damit allerdings bekanntlich gescheitert ist. Im Prinzip ist aber nicht einzusehen, warum nicht auch eine spezielle Kurve wie ein Kreis an Stelle eines Kurventyps wie Kurve erster oder zweiter Ordnung oder spiralartige Kurve usw. für einen Anpassungsvorgang für irgendeinen Bewegungsvorgang herangezogen werden sollte.

Im allgemeinen Anpassungsvorgang werden drei Parameter[1], die bei exakter Bewegung auf dieser Kurve konstant sind, im „Störfall“ also in einem Anpassungsvorgang als variabel betrachtet. Im Fall des Kreises kann es sich bei einem solchen Parameter um den Radius *r* handeln, der ja im Fall exakter Kreisbewegung konstant ist. Seine Variation ist

$$\dot{r} \;=\; V_R \;=\; V_R(t)$$

als Funktion der Zeit. Das Problem liegt bei der Suche nach den weiteren Parametern. Diese könnten ein Anfangswinkel sein, der sich auf einem Kreis aber nicht auszeichnen lässt. Die radiale Geschwindigkeit scheidet als Parameter aus, da sie auf einem Kreis stets verschwindet, $\dot{r} \equiv 0$, also nicht als charakterisierender Parameter in Frage kommt. Bei „gestörter“ Kreisbahn ist in der Leibniz-Gleichung (3.189) $b_{R0} \neq 0$, also

$$\ddot{r} = b_{R0}$$

mit dem Integral

$$r \;=\; \int\int b_{R0}\, dt\, dt$$

mit zwei Integrationskonstanten. Wir wollen die Situation zunächst an zwei Beispielen betrachten:

1. Anpassung einer (beliebigen) Kegelschnittbewegung durch einen Kreis

Die vorgegebene Kreisbewegung hat nach Bedingung (3.190) die radiale Beschleunigung $b_{RC} = -G^2 / r^3$. Nach Gleichung (3.113) auf Seite 91 zwingt die „Stör“-Beschleunigung

$$b_R = b_{RK} = -\frac{G^2}{p\, r^2}$$

einen bewegten Körper notwendig auf eine Kegelschnittbewegung (über die Verknüpfung der Parameter *G* und *p* kann in diesem Stadium keine Aussage gemacht werden, was hier aber auch gar nicht benötigt wird). Die radiale „Störbeschleunigung“ b_R wird im Fall einer Anpassung mit einem Kreis nach Gleichung (3.189) auf S. 116 in die Anteile b_RC, der die Kreisbewegung notwendig erzwingt, und b_R0 als „Störung“ der Kreisbewegung zerlegt. Im vorliegenden Fall muss daher sein

$$b_{R0} \;=\; b_R - b_{RC} \;=\; -\frac{G^2}{p\, r^2} + \frac{G^2}{r^3} \quad .$$

Die radiale Beschleunigung, die eine von einem Kreis abweichende Kegelschnittbewegung erzwingt, ist

$$\ddot{r} \;=\; b_{R0} \;=\; \frac{G^2}{r^3} - \frac{G^2}{p\, r^2} \quad .$$

[1] Wie zum Beispiel in Abschnitt 3.2.5 für den Fall der geradlinigen Bewegung als Anpassung zur Beschreibung beliebiger Bewegungen durchgeführt wurde

Das erste Integral lautet

$$\dot{r}^2 \;=\; -\frac{G^2}{r^2}+\frac{2G^2}{p\,r}+2C_{C1} \quad , \quad C_{C1} \;=\; const.$$

Für eine zweite Integration wird der Bahnwinkel ζ mit der allgemeingültigen Beziehung $r^2\,\dot{\zeta}=G$ eingeführt und die entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r\sqrt{\dfrac{2C_{C1}}{G^2}\,r^2+\dfrac{2}{p}\,r-1}} \;=\; d\zeta$$

integriert zu

$$\zeta-\zeta_0 \;=\; \arcsin\frac{\dfrac{r}{p}-1}{r\sqrt{\dfrac{2C_{C1}}{G^2}+\dfrac{1}{p^2}}} \quad .$$

Hier ist ζ_0 die neue Integrationskonstante. Wird sie umdefiniert

$$\zeta-\zeta_0 \;=:\; \zeta-\zeta_B+270° \quad ,$$

hat das Integral die erwartete Polardarstellung eines Kegelschnitts

$$r \;=\; \frac{p}{1+\sqrt{\dfrac{2C_{C1}\,p^2}{G^2}-1}\;\cos(\zeta-\zeta_B)} \quad ,$$

worin die (numerische) Exzentrizität aus der ersten Konstante über

$$\frac{G^2\,(e^2+1)}{2\,p^2} \;=\; C_{C1}$$

berechnet werden kann. ■

2. Anpassung einer gleichförmig geradlinigen Bewegung durch einen Kreis

Eine gleichförmig geradlinige Bewegung entsteht, wenn auf das bewegte Objekt keine „Störbeschleunigung“ wirkt, wenn in Gleichung (3.189) auf S. 116 $b_R = 0$ ist. Die Beschleunigung, die einen Körper von einer vorgegebenen Kreisbahn mit radialer Beschleunigung b_{RC} auf eine Gerade mit radialer Beschleunigung $b_R = 0$ zwingt, beträgt daher notwendig

$$b_{R0} \;=\; b_R-b_{RC} \;=\; \frac{G^2}{r^3} \quad .$$

Für eine Kreisbewegung kann der Radius r als ein charakteristischer Parameter aufgefasst werden, der im Fall einer Kreisbewegung konstant ist, im Fall einer „Störung“ der Kreisbewegung veränderlich wird. Im vorliegenden Fall der Anpassung einer geradlinigen Bewegung mit einer Kreisbewegung hat der „Parameter“ r somit die Variation

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} \quad .$$

Das ist aber die radiale Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung, die wir schon aus Gleichung (3.14) auf Seite 70 kennen und welche die in Abschnitt 3.2.1 ab Seite 68 hergeleiteten Ergebnisse der geradlinigen Bewegung hat. Die ursprüngliche Kreisbewegung, von der ausgegangen wurde, ist hier nicht mehr zu erkennen. ■

Wir stellen mit Verwunderung fest, dass in den Beispielen der Anpassung mit einem Kreis die Gleichung für die radiale Beschleunigung identisch ist mit der Darstellung ohne Anpassung mit irgendeiner Kurve. Diese Aussage ist allgemein richtig, denn wenn in Gleichung (3.189) der Faktor b_{R0} berechnet wird mit der für eine Kreisbewegung[1] notwendigen Beschleunigung $b_{RC} = -G^2 / r^3$, ist allgemein

$$b_{R0} \;=\; b_R - b_{RC} \;=\; b_R + \frac{G^2}{r^3} \quad .$$

Wird dies in die allgemeine *Leibniz* Gleichung (3.189) eingesetzt, bleibt in vollständiger Allgemeinheit für die Anpassung mit einer Kreisbewegung

$$\ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} + b_R \;=\; \frac{G^2}{r^3} + b_{RC} + b_{R0} = \frac{G^2}{r^3} - \frac{G^2}{r^3} + b_{R0} = \; b_{R0} \quad . \tag{3.191}$$

Dieser Sachverhalt ist ganz elementar eine Folge der Äquivalenz des Betrages der Kreisbahnbeschleunigung $b_{RC} = -G^2 / r^3$ und der Bedingung für gleichförmig geradlinige Bewegung G^2 / r^3 (in Formel (3.14) auf Seite 70).

Wir schließen aus dem merkwürdigen Ergebnis der vorstehenden Überlegungen:

Wird eine beliebige Bewegung mit einem Kreis (bzw. allgemeiner einer hyperbolischen Spirale) angepasst, so wirkt sich dies **nicht** auf den Anpassungsvorgang aus: die radiale Beschleunigung bei Anpassung mit einem Kreis ist identisch der radialen Beschleunigung ohne Anpassung mit irgendeiner Kurve. Im Fall einer allgemeinen hyperbolischen Spirale $C \neq 0$ lässt sich als Anpassungsgleichung die Gleichung (3.163) auf Seite 108 deuten. Im Fall einer Kreisbahn gibt es – wie wir schon bemerkt haben – keine erste Anpassungsgleichung.

▶ *Die gleichförmige Kreisbewegung und allgemeiner die Bewegung auf einer hyperbolischen Spirale sind die einzigen Bewegungen, bei denen „Störbeschleunigung" und Beschleunigung der „ungestörten" Bewegung im Gleichgewicht stehen.*

Im Fall eines Kreises $\dot{r} \equiv 0$ $(e = 0)$ lässt sich nicht einmal eine Anpassungsgleichung aufstellen, denn in $\dot{r}$ gibt es ja keinen Parameter, der für einen Anpassungsvorgang variiert werden könnte. Dies bedeutet, dass der Kreis die einzige Kurve ist, die sich dem Anpassungsvorgang vollständig entzieht. Wir werden auf die allgemeinen Variationsgleichungen (3.5) auf S. 67 zurückgeworfen. Wird umgekehrt mit bekannter radialer Beschleunigung b_R, eventuell auch bekannten transversaler und normaler Beschleunigung b_T , b_N, eine Funktion für den Radius aus Gleichung (3.5) berechnet, ist das so als ob mit einer Kurve *r = const.*, $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ also einem Kreis die wahre Bewegung, für die b_R, b_T und b_N gegeben sind, angepasst würde.

▶ *Anpassung mit einem Kreis hilft nicht und schadet nicht. Anpassung mit einem Kreis ist so als gäbe es keine Anpassung. Erfolgt keine Anpassung ist es so als ob mit einem*

[1] bzw. aus den Gleichungen (3.176) auf Seite 111 für *n* = 2 ersichtlichen allgemeinen Bewegung auf einer hyperbolischen Spirale

Kreis angepasst würde. Der Kreis ist für die Anpassung an eine beliebige Bewegung weder von Nutzen noch von Schaden, er erscheint in diesem Zusammenhang indifferent, „unantastbar“.

3.7.2 Elemente einer Kreisbewegung

Als „Elemente“ einer Bewegung werden Parameter bezeichnet, die in einer als Grundbewegung bezeichenbaren Ausgangsdarstellung einer Bewegung konstant sind, bei Einwirkung von irgendwelchen „Stör-“ Beschleunigungen variabel werden und dann mit Zeit- oder Bahnwinkel-abhängigen Variationsgleichungen beschrieben werden können. Im Fall der „Anpassung“ einer beliebigen Bewegung ohne Grundbewegung, was nach dem vorstehenden einer Anpassung mit einer Kreisbewegung gleichwertig ist, liegt es nahe, im Zustandsvektor

$$\mathbf{r} \;=\; r\,\mathbf{r}_0 \quad ; \quad \dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0$$

die Parameter

$$C_1 \;:=\; r \quad ; \quad C_2 \;:=\; \dot{r} \quad , \quad C_3 \;:=\; \frac{G}{r} \tag{3.192}$$

als derartige „Elemente“ aufzufassen: es ist ja im Fall einer gleichförmigen Kreisbewegung $r \equiv const.$, $\dot{r} = const.$, $G = const.$, wobei die Gleichförmigkeit der Bewegung durch die konstante transversale Geschwindigkeit $V_T = G/r = const.$ beschrieben wird[1]. Im Allgemeinen werden 6 solcher „Elemente“ wegen der Sechsdimensionalität des Zustandsvektors benötigt. Das vierte und das fünfte Element stammen aus der räumlichen Bahnorientierung, sind also in einem der Einheitsvektoren des mitgeführten (*Leibniz*-) Bahnsystems $\mathbf{r_0}$, $\mathbf{q_0}$ oder $\mathbf{c_0}$ enthalten, wie sie etwa mit der Variationsgleichung (3.9) auf Seite 67 beschrieben werden. Als sechstes Element wird eine Größe gewählt, welche die Position des bewegten Objektes in seiner Bahn zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* charakterisiert. Hierfür könnte der Bahnwinkel

$$C_6 \;:=\; \zeta \tag{3.193}$$

gewählt werden, der allerdings stets eine „schnelle“ Variable ist. Die Variationsgleichungen in diesem allgemeinsten Fall einer Anpassung lauten in den vier Bahnebene-bezogenen Parametern

$$\begin{aligned}
\dot{C}_1 \;&:=\; \dot{r} \;=\; C_2 \\
\dot{C}_2 \;&:=\; \ddot{r} \;=\; \frac{G^2}{r^3} + b_R \;=\; \frac{C_3^2}{C_1} + b_R \\
\dot{C}_3 \;&:=\; \left(\frac{G}{r}\right)^{\cdot} \;=\; \frac{\dot{G}}{r} - \frac{\dot{r}\,G}{r^2} \;=\; -\frac{C_2\,C_3}{C_1} + b_T \\
\dot{C}_6 \;&:=\; \dot{\zeta} \;=\; \frac{G}{r^2} \;=\; \frac{C_3}{C_1} \quad .
\end{aligned} \tag{3.194}$$

Diese Variationsgleichungen sind bemerkenswert, weil nur zwei von ihnen „Stör-“ Beschleunigungen enthalten und das auch noch völlig getrennt nach radialem und transversalem Beschleunigungsanteil. Die Variation der Bahnebene und damit der die räumliche Orientierung der Bahnebene beschreibenden Parameter werden ausschließlich durch die normale Be-

[1] Bemerkenswert scheint in diesem Zusammenhang ein Hinweis auf einen Zusammenhang mit den kanonischen Elemente von *Hill*, der u.a. $r, \dot{r}$ als „Elemente“ eingeführt hatte, allerdings ohne eine Verknüpfung mit der Kreisbewegung als Ausgangskurve für eine Anpassung herzustellen (vgl. etwa BRUMBERG, V. A. (1995), p.149)

schleunigungskomponente b_N geprägt, wie Gleichung (3.9) auf Seite 67 zeigt. Die hier behandelten Variationsgleichungen sind somit der völlig allgemeine Urtyp aller Arten von Variationsgleichungen. Unter diesem Gesichtspunkt kann die Kreisbewegung mathematisch nüchtern als die „Mutterbewegung“ aller Bewegungsarten charakterisiert werden, weil sie eine Anpassung beliebiger Bewegungen **ohne** eine spezielle Grundkurve erlaubt. Allerdings muss die radiale Beschleunigungskomponente $b_{RC} = -G^2 / r^3$ vorausgesetzt werden können.

Speziell eine geradlinige Bewegung wird mit $b_R = 0$, eine Kegelschnittbewegung mit $b_R = -G^2 / p\, r^2 = -C_3^2 / p$ (mit p = *const.*) erhalten, wie in Abschnitt 3.3 gezeigt wurde.

3.8 Abgrenzung des Begriffes der Anpassung

Der Begriff Anpassung wird in der vorliegenden Arbeit enger gefasst als er üblicherweise verwendet wird: es handelt sich um ein spezielles Verfahren, bei dem nicht iterativ eine berechnete Kurve immer besser an die vorgegebene Bewegungskurve angepasst wird. Vielmehr wird hier in formal identischen Einzelschritten eine Teilbeschleunigung auf eine gegebene Kurve angewandt um eine neue Kurve zu erhalten, welche den berücksichtigten Beschleunigungen genügt. Dieser Prozess wird fortgesetzt, bis alle relevanten Beschleunigungen abgearbeitet sind. Eine gute Näherung an die Sollkurve kann daher erst am Schluss des gesamten Anpassungsprozesses erwartet werden. Um en Begriff der Anpassung präziser zu fassen, werden die folgenden Anmerkungen gemacht:

1. Die Anpassungsgleichung (3.110) auf S. 91 zeigt, dass auch im Fall $r \equiv const.$, $\dot r \equiv const.$ die Variationen in den Parametern e, ζ_B und p keineswegs verschwinden müssen. Das bedeutet, dass auch vermutlich sehr komplizierte Beschleunigungen eine Kreisbewegung verursachen können. Diese kann sogar gleichförmig sein, wenn die Geschwindigkeit $V \equiv const.$ ist. Aus

$$\dot{\mathbf{r}} \;=\; \dot r\, \mathbf{r}_0 + r\dot\zeta\, \mathbf{q}_0$$

folgt im Falle einer Kreisbewegung $V = G/r$. Wenn $b_T = 0$ ist, wird G = *const.* sein, was notwendig und hinreichend für V = *const.*, also wieder gleichförmige Bewegung ist. Wird $b_{R2} \neq 0$ sein, liefern die Variationsgleichungen (3.116) auf S. 92 Variationen in e und ζ_B, wobei die Variationen in p noch offen sind.

2. Abgrenzung des Begriffs der intermediären Bahn zur Anpassungskurve:

Unter *intermediärer Bahn* wird in der Himmelsmechanik eine Bahnkurve verstanden, die einer wahren Bahn mit einer gewissen Genauigkeit angepasst ist. Sie kann daher im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit die wahre Bahn darstellen. Der wahre Grund für die Auswahl einer intermediären Bahn ist in der Regel ihre leichtere eventuell sogar rein analytische Integrierbarkeit als die gegebene wahre Bahn erlaubt und dass sie damit als Ausgang für eine numerische Bahnverbesserung verwendet werden kann. Zum Erreichen einer noch höheren Anpassungsgenauigkeit an die wahre Bahn werden die Gleichungen der intermediären Bahn mit den Methoden der Störungsrechnung „verbessert“. Der dazu benötigte Integrationsvorgang geht von der intermediären Bahn aus. Die in diesem Abschnitt vorgestellte Anpassungskurve kann dagegen eine willkürlich erscheinende Kurve sein, die mit der wahren Bahn überhaupt keine Ähnlichkeit aufweisen muss. Durch Variation ihrer Parameter wird sie so „verbogen“, dass eine im Rahmen einer gegebenen Genauigkeit gültige Anpassung der wahren Bahn erfolgen kann. Das Ergebnis einer solchen Anpassung *kann* eine intermediäre Bahn sein. Allerdings findet bei diesem Anpassungsvorgang, der mit der Methode der Variation der Para-

meter erfolgt, stets eine Anpassung an die wahre Bahn in der Sprechweise der klassischen Himmelsmechanik eine „Oskulation“ statt. Die intermediäre Bahn muss dagegen zu keinem Zeitpunkt mit der wahren anschmiegend übereinstimmen. Die intermediäre Bahn ist eine gute Annäherung an die wahre Bahn, im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit und in einem vorgegebenen Zeitrahmen. Sie ist eine „physikalische Anpassung“ der wahren Bahn. Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Anpassungskurve ist eine günstige Ausgangskurve zur Durchführung der Bahnintegration: sie ist eine „mathematische Anpassung“. Im Einzelfall ist also zu untersuchen, ob ein spezielles Bewegungsproblem mit einer speziellen Anpassungskurve leichter bearbeitet werden kann.

3. Die Anpassungskurve in ihrer einfachsten Form ist dreiparametrig, somit eine ebene Kurve. Die wahre Bahnkurve ist jedoch im allgemeinen Fall räumlich. Auch eine Variation der Parameter einer dreiparametrigen Anpassungskurve führt nicht aus der Ebene dieser Kurve heraus. Der Grund dafür besteht darin, dass die dreiparametrige Anpassungskurve stets in der Basisebene des ein *Hansen*-ideales System bildenden Koordinatensystems liegt, die mit dem wahren Bewegungsvorgang mitbewegt wird, was durch die Variation des Normalenvektors $\mathbf{c}_0$ beschrieben wird. Die wahre (räumliche) Bewegung wird also beschrieben durch die Anpassungskurve in der Basisebene des *Hansen*-idealen Systems und durch die Eigenbewegung dieses Systems.

3.9 Die Anpassungsgleichungen

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen der in dem vorliegenden Bericht herausgearbeiteten allgemeinen Anpassungslehre und der Methode der Variation der Parameter untersucht.

Gegeben sei ein Bewegungsproblem durch die allgemeinen Variationsgleichungen (3.6)–(3.10) auf Seite 67

$$\begin{aligned} \ddot{\mathrm{r}} &= \frac{\mathrm{G}^2}{\mathrm{r}^3} + \mathrm{b}_\mathrm{R} \\ \dot{\mathrm{G}} &= \mathrm{r}\,\mathrm{b}_\mathrm{T} \\ \dot{\eta} &= \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{G}}\,\mathrm{b}_\mathrm{N} \qquad (\text{bzw. } \dot{\mathbf{c}}_0 = -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0) \\ \dot{\zeta} &= \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{r}^2} \quad , \end{aligned} \tag{3.195}$$

wobei $r = r(t)$ die unbekannte Raumkurve ist, auf welcher der Bewegungsvorgang erfolgt. Diese Raumkurve gilt es zu bestimmen. Wir gehen dazu von (irgend -) einer bekannten Kurve mit der Polardarstellung

$$r = r(A_k^{(\nu)}; \zeta) \tag{3.196}$$

aus, welche durch die Parameter $A_k^{(\nu)}$ charakterisiert sei. Hier bedeutet der obere Index ν den ν-ten Anpassungsschritt, der untere Index k steht für den k-ten Parameter in der Darstellung einer Anpassungskurve („Bahn“). Diese Bahnkurve hat die Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\zeta}\dot{\zeta} = \left(\frac{\partial r}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial r}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} \right) \dot{\zeta} \quad . \tag{3.197}$$

Als *Anpassungskurve* bezeichnen wir die Kurve $r = r\left(A_k^{(\nu)};\zeta\right)$ dann, wenn sie zu jedem Bewegungsmoment an die Kurve der wahren Bewegung angepasst werden kann. Dies muss durch Variation der Parameter $A_k^{(\nu)}$ geschehen. Hierfür ist notwendig die Bedingungsgleichung der Anpassung[1]

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial r}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = 0 \quad , \tag{3.198}$$

die wir als *erste Anpassungsgleichung* bezeichnen wollen. Die Anpassungskurve ist somit eine Kurve, welche ein gegebenes Bewegungsproblem, das durch ein bestimmtes Beschleunigungsmodell dargestellt wird, erfüllt.

Diese Beziehung kann im Rahmen der *Hansen*-idealen Systeme gedeutet werden, wenn wie *P. A. Hansen* gefordert hat, als „ideal“ ein System bezeichnet werden soll, das im „ungestörten“ wie im „gestörten“ Fall eine formal identische mathematische Beschreibung erfährt: Die Parameter der Bewegungskurve (=Anpassungskurve) sollen so bestimmt werden, dass die „ideale“ Beziehung

$$\frac{dr}{d\zeta} = \frac{\partial r}{\partial \zeta} \tag{3.199}$$

notwendig erfüllt ist. Somit gilt

Satz H20: *Die Forderung nach* Hansen-*Systemen führt notwendig auf die Methode der Variation der Parameter*.

Die radiale Geschwindigkeit $\dot r$ ist wegen der ersten Anpassungsgleichung eine Funktion der Parameter $A_k^{(\nu)}$ und des Bahnwinkels ζ, also nicht der Variationen der $A_k^{(\nu)}$:

$$\dot r = \dot r\left(A_k^{(\nu)};\zeta\right) \quad bzw. \frac{dr}{d\zeta} = \frac{d\, r\left(A_k^{(\nu)};\zeta\right)}{d\zeta} \quad . \tag{3.200}$$

Die Variation der radialen Geschwindigkeit, also die radiale Beschleunigung $\ddot r$, lautet daher

$$\ddot r = \frac{d\dot r}{dt} = \frac{d\dot r}{d\zeta}\dot\zeta = \frac{\partial \dot r}{\partial \zeta}\dot\zeta + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot r}{\partial A_k^{(\nu)}} \dot A_k^{(\nu)} = \dot\zeta \left[\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot r}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta}\right] = \frac{G}{r^2}\left[\frac{\partial \dot r}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot r}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta}\right] \quad . \tag{3.201}$$

Die radiale Beschleunigung ist dann aus der ersten der Variationsgleichungen (3.195) bekannt. Dies führt mit der allgemeinen *Leibniz* Gleichung auf die zweite *Anpassungsgleichung*

$$\frac{d\dot r}{d\zeta} = \frac{\partial \dot r}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot r}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{G}{r} + \frac{r^2}{G} b_R \quad , \tag{3.202}$$

in der jetzt die radiale („Stör“ -) Beschleunigungskomponente b_R explizit in Erscheinung tritt.

[1] vgl. etwa R. H. BATTIN (1987), p. 477

Eine zentrale Folgerung aus dem Anpassungsprozess mit der Oskulationsbedingung (3.199) zeigt sich in dieser Gleichung. Durch die Radius - Funktion $r = r(\zeta)$ werde eine Bahnkurve beschrieben, die der *Leibniz* Gleichung (die erste der Gleichungen (3.195)) mit einer bestimmten radialen Beschleunigung b_{RA} genügt

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + b_{RA} \quad . \tag{3.203}$$

Die Kurve $r = r(\zeta)$ ist ausschließlich vom Bahnwinkel ζ abhängig. Nach Übertragung auf den Bahnwinkel mit Hilfe des Flächensatzes (der vierten Gleichung in (3.195)) ist der *Leibniz* Gleichung somit notwendig gleichbedeutend der Ausdruck

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} + \frac{r^2}{G} b_{RA} \quad . \tag{3.204}$$

Die zweite Anpassungsgleichung wird damit wesentlich vereinfacht: als radiale Beschleunigung tritt nur die im zuvor durchgeführten Anpassungsprozess bisher nicht verwendete radiale Beschleunigung $b_{RZ} = b_R - b_{RA}$ auf. Alle anderen bereits verarbeiteten Anteile der radialen Beschleunigung b_{R} sind in der vorhergehenden Lösung $r = r(\zeta)$ enthalten. Sie dürfen also in einem neuen Anpassungsprozess nicht mehr verwendet werden. Im ν_{R}-ten Anpassungsschritt kann daher

$$b_R = \sum_{\nu=1}^{n_R} b_R^{(\nu)} \quad , \quad b_{RA} := \sum_{\nu=1}^{\nu_R - 1} b_R^{(\nu)} \quad , \quad b_{RZ} := \sum_{\nu=\nu_R}^{n_R} b_R^{(\nu)} \tag{3.205}$$

gesetzt werden. Die zweite Anpassungsgleichung (3.202) wird daher reduziert auf

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_{RZ} \quad . \tag{3.206}$$

Die Restbeschleunigung b_{RZ} kann aus etlichen Teilbeschleunigungen bestehen. Aus ihnen wird für eine weitere (j+1 -te) Anpassung des gegebenen Bewegungsproblems eine geeignet Teilbeschleunigung ausgewählt und mit den Anpassungsgleichungen bearbeitet.

Die beiden hier als „Anpassungsgleichungen“ bezeichneten Variationsgleichungen sind aus der allgemeinen Methodik der „Variation der Konstanten“ bekannt. Im Gegensatz zu dieser allgemeinen Methode mit 6 Variationsgleichungen, je eine für eine der sechs Parameter oder des Zustandsvektors einer räumlichen Bewegung, werden hier nur Radius und radiale Geschwindigkeit variiert, also nur 2 Variationsgleichungen erhalten. Die restlichen benötigten Variationsgleichungen sind entsprechend dem System (3.195) in den Variationen des Flächenparameters G und des Winkels η der Bahndrehung im Raum enthalten, wenn der Bahnwinkel ζ (bei *Hansen* als „Länge in der Bahn“ bezeichnet) als unabhängige Variable verwendet wird.

Wie wirkt sich in der wiederholten Anwendung des Anpassungssverfahrens ein Lösungsansatz für den Flächenparameter aus? Die in der Formel $\dot{G} = r\, b_T$ enthaltene Beziehung mit der transversalen Beschleunigung ist allgemeingültig. Das Verfahren der schrittweisen Anpassung zerlegt die **transversale Beschleunigung** in Einzeleffekte, von denen n_{T} bekannt sein mögen:

$$b_T = \sum_{\nu=1}^{n_T} b_T^{(\nu)} \quad . \tag{3.207}$$

Für eine erste Lösung werde die Teilbeschleunigung $b_T^{(1)} = b_T - \sum_{\nu=2}^{n_T} b_T^{(\nu)}$ ausgewählt. Daraus wird eine Lösung für den Flächenparameter aus der Differentialgleichung

$$G(\zeta)\frac{dG}{d\zeta} = r^3 b_T^{(1)} \tag{3.208}$$

berechnet. Dazu muss eine erste Lösung für den Radius r als Funktion des Bahnwinkels ζ bekannt sein. Eine solche Lösung kann immer als bekannt angenommen werden, etwa in Form einer geradlinigen Bewegung, die stets als Ausgangsbahn einer beliebigen Bewegung am Beginn eines Anpassungsprozesses gewählt werden kann.

Die gefundene Lösung G(ζ) ist eine Funktion, die ausschließlich vom Bahnwinkel ζ abhängt. Sie genügt daher dem Ausdruck

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(1)} \quad . \tag{3.209}$$

Diese Gleichung kann wie die vergleichbare Gleichung (3.204) als Kontrolle des zuvor erfolgten Anpassungsprozesses verwendet werden. Für den Radius r werden die in diesem Rechenschritt erhaltenen Parameter $A_k^{(\nu)}(\zeta), G(\zeta)$ in der Gleichung der gegebenen Bahnkurve verwendet. Wenn nun eine zweite transversale Beschleunigung $b_T^{(2)}$ berücksichtigt werden soll, muss die Variationsgleichung $\dot{G} = r\, b_T$ für den Flächenparameter entsprechend nach den neuen Parametern entwickelt werden:

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial G}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}\left(b_T^{(1)} + b_T^{(2)}\right) \quad , \tag{3.210}$$

Die weiteren Beschleunigungen aus b_T sollen in diesem Rechenschritt nicht berücksichtigt werden. Wegen Beziehung (3.209) reduziert sich dieser Ausdruck auf

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial G}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(2)} \quad . \tag{3.211}$$

Dies ist somit eine lineare Beziehung für die differentiellen Ausdrücke der neuen Parameter $A_k^{(2)}$. Üblicherweise gibt es K=3 solcher Parameter in Bezug auf eine in der oskulierenden Bahnebene verlaufende Bahnkurve. Die weiteren zu ihrer Lösung benötigten Beziehungen folgen aus den beiden Anpassungsgleichungen im ν-ten Anpassungsschritt ($\nu > 1$)

$$\begin{aligned} &\frac{dr}{d\zeta} = \frac{\partial r}{\partial \zeta} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial r}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = 0 \\ &\frac{d\dot{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{G}{r} + b_R \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}} \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = b_R^{(j)} \quad . \end{aligned} \tag{3.212}$$

In der letzteren Gleichung wurde wieder die Bedingung (3.204) verwendet, wonach ν_R radiale Teilbeschleunigungen bereits in einem früheren Anpassungsschritt berücksichtigt wurden:

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} + \sum_{\nu=1}^{\nu_R} b_R^{(\nu)} \tag{3.213}$$

Damit ist ein lineares Gleichungssystem erhalten, aus dem die Variationsausdrücke für die neuen Parameter berechnet werden können. Entsprechend kann das System bis zur Abarbeitung aller bekannten Teilbeschleunigungen $b_T^{(\nu)}\ (\nu = 1,\cdots,n_T)$ fortgeführt werden.

Analog kann auch der **Bewegungseinfluss in normaler Richtung** in den Anpassungsprozess mit einbezogen werden. Dieser ist allein für eine Variation des räumlichen Bahnwinkels η verantwortlich. Diese genügt den Variationsgleichungen aus dem System (3.195)

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad , \quad \frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N \qquad . \tag{3.214}$$

Auch hier möge der normale Einfluss in etwa n_N Teileinflüsse zerlegt werden

$$b_N = \sum_{\nu=1}^{n_N} b_N^{(\nu)} \quad . \tag{3.215}$$

Wird ein erster Teileinfluss ausgewählt, kann mit einer bekannten Ausgangsnäherung für die Bahnkurve, die es stets gibt, etwa in Form einer Gerade, eine erste Lösung erhalten werden:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(1)} \qquad . \tag{3.216}$$

Die erhaltene Lösung η=η(ζ) ist nur von dem Bahnwinkel ζ abhängig und genügt daher der Bedingung

$$\frac{\partial\eta}{\partial\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(1)} \quad . \tag{3.217}$$

Diese Gleichung kann wieder als Kontrolle des zuvor erfolgten Anpassungsprozesses verwendet werden. Soll für eine weitere Anpassung eine weitere normale Beschleunigung $b_N^{(2)} = b_N - b_N^{(1)}$ berücksichtigt werden, folgt aus der Variationsgleichung (3.214)

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\partial\eta}{\partial\zeta} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial\eta}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2}\left(b_N^{(1)} + b_N^{(2)}\right) \quad . \tag{3.218}$$

Hier werden die aktuellen Werte für die bislang berechnete Bahnkurve r(ζ) und Flächenparameter G(ζ) berücksichtigt. Weitere normale Beschleunigungen werden für die neue Lösung außer acht gelassen. Wegen (3.217) bleibt

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{\partial\eta}{\partial A_k^{(2)}} \frac{dA_k^{(2)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(2)} \qquad . \tag{3.219}$$

Die weiteren für das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Variationsgleichungen benötigten Gleichungen werden wie zuvor durch ein System der Art (3.212) gebildet. Das so gebildete Variationsgleichungssystem kann maximal die Ordnung K=5 haben. Eine 6-te Ordnung wird erst bei Einschluss der Zeit mit Hilfe des Flächenssatzes $r^2\dot{\zeta} = G$ erforderlich. Die Bedingungsgleichung (3.219) kann wieder auf alle n_N bekannten Teilbeschleunigungen erweitert werden.

Die Variationsgleichung für η führt auf zwei unabhängige Variationsgleichungen für die beiden Raumwinkel (etwa Inklination und Länge des aufsteigenden Knotens oder Länge des Knotens in der Bahn). Die Parameter $A_k^{(\nu)}$ werden als Funktionen des *Bahnwinkels* dargestellt,

der über die Variationsgleichung $\dot{\zeta} = G / r^2$ mit der Zeit verknüpft werden kann. Die Variationsgleichungen der Parameter

$$\frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} \quad \text{oder} \quad \dot{A}_k^{(j)} = \frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta}\,\dot{\zeta}$$

ersetzen in den Variationsgleichungen (3.195) der allgemeinen Bewegung nur die Gleichung für die radiale Beschleunigung, die zwei Integrationen erfordert. Es sind daher mindestens zwei Parameter $A_k^{(\nu)}$ erforderlich. Es wird also im Allgemeinen genügen, als Anpassungskurve zur Anpassung beliebiger räumlicher Bewegungen eine ebene Kurve zu wählen. Mit den beiden Anpassungsgleichungen können die beiden Parameter dieser Kurve vollständig bestimmt werden. Hat die Anpassungskurve mehr als zwei Parameter, müssen die Variationsgleichungen dieser weiteren Parameter außerhalb des Anpassungsvorganges gesucht werden. Hat die Anpassungskurve nur einen Parameter, ist sie für den Anpassungsvorgang nicht geeignet. Die einzige ebene Kurve mit nur einem Parameter ist der Kreis (*r = const.*). Der Kreis ist also die einzige Kurve, die für eine Anpassung räumlicher Bewegungen nicht geeignet ist. Abgesehen von der Gleichung der radialen Beschleunigung werden die weiteren vier Variationsgleichungen (3.191) auf Seite 119 der allgemeinen Bewegung durch die Wahl einer speziellen Kurve als Anpassungskurve formal nicht beeinflusst. Sie macht sich erst in der Lösung des Differentialgleichungssystems (3.195) bemerkbar.

Anmerkung: Die in diesem Kapitel untersuchte Eigenschaft der Kreisbewegung nicht für eine Anpassung einer beliebigen Bewegung geeignet zu sein, hat nichts damit zu tun, dass im Fall einer (vorläufigen Erst-) Bahnbestimmung es häufig angebracht ist, aus zwei Beobachtungspaaren zunächst eine Kreisbahn mit vier Bahnelementen (große Bahnhalbachse, Inklination, aufsteigender Knoten und Ort in der Bahn zu einer Epoche) zu bestimmen. Von dieser ausgehend können üblicherweise durch eine dann mögliche kurzfristige Bahnverfolgung weitere Beobachtungsdaten erhalten werden. Mit diesen können die (endgültigen) Bahnparameter einer elliptischen Bahn durch ein numerisches Verfahren berechnet werden[1]. Zur Bestimmung der großen Bahnhalbachse lässt sich eine Bedingungsgleichung herleiten, die *J. Bauschinger*[2] im Rahmen seiner Untersuchungen zur Bahnbestimmung von Kleinen Planeten im Anschluss an *Tisserand* hergeleitet hat. Allerdings verweist er auf einen Beitrag von *F. Tisserand*[3], in dem dieser in einer Näherungsdarstellung für kleine Größen nachgewiesen hat, dass diese Gleichung im Fall von kreisnahen Bahnen nur imaginäre Lösungen aufweist, dass also (in diesem Zusammenhang) keine Kreisbahnlösungen existieren können.

3.10 Schrittweise Integration mit Hilfe beliebiger Anpassungen

Als Ergebnis eines Anpassungsvorganges wird eine Bahnkurve

$$C \equiv r = r(A_k^{(\nu)}; \zeta)$$

erhalten, deren Parameter von einem Bewegungsmodell beeinflusst werden und in Abhängigkeit von der Position des bewegten Körpers in der Bahn variiert werden, für die daher die Variationsgleichungen

---

[1] Siehe etwa in K. Stumpff (1959), pp. 420-423

[2] J. BAUSCHINGER, (1928), pp.393-394

[3] F. TISSERAND (1895), Bulletin astron., Tome XII, p. 53

$$\dot{A}_\kappa = \dot{A}_\kappa\left(A_\iota^{(\nu)}, b_j; t\right) \quad bzw. \quad \frac{dA_\kappa^{(\nu)}}{d\zeta} = fct\left(A_\iota^{(\nu)}, b_j; \zeta\right) \;;\; \left(\iota, \kappa = 1,2,...,6;\, j = 1,2,3; \nu = 1,2,...,N\right)$$

gelten. Diese Variationsgleichungen können in der klassischen Weise simultan integriert werden und geben Lösungen für die Parameter $A_\kappa^{(\nu)}$, so dass die Kurve *C* in Abhängigkeit von den variierten $A_\kappa^{(\nu)}$ die Bewegung im Rahmen des berücksichtigten Bewegungsmodells perfekt angepasst beschreibt.

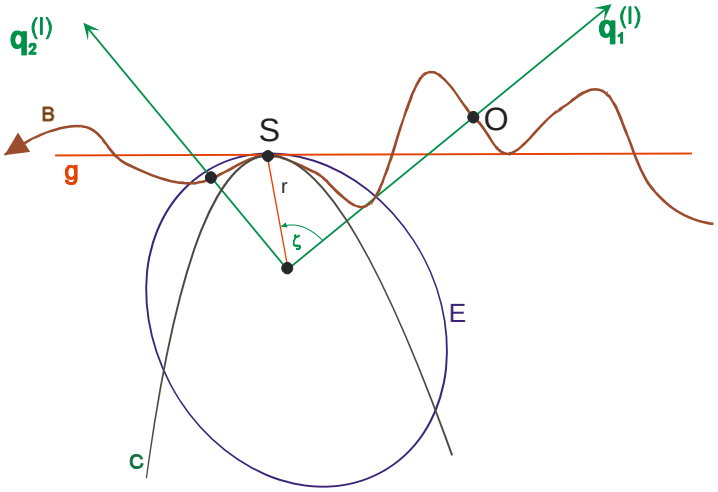

Bild 3-24: Anpassung einer beliebigen Bewegung B durch schrittweise Einbeziehung von physikalischen Beschleunigungen und daraus folgender Verformung der Anpassungskurve, hier angedeutet durch eine Geraden g, die hier als „Grundbewegung“ angenommen ist, eine Ellipse E, eine weitere Kurve C. In der Skizze ist angenommen, dass die Anpassung in einer Ebene erfolgen kann, wodurch das *Hansen*-System keiner Eigenbewegung unterliegt. In der Realität muss durch den Einfluss normaler Beschleunigungen auch eine Bewegung des *Hansen*-Systems berücksichtigt werden

Die bisher in diesem Abschnitt vorgestellte Theorie der (allgemeinen) Anpassung beliebiger Bewegungen durch beliebige Bahnkurven legt aber auch eine modifizierte Methodik der Integration der Bewegungsgleichungen nahe, die im folgenden allgemein andiskutiert und im anschließenden Abschnitt 4 durch Beispiele veranschaulicht werden soll.

Grundbewegung

Der gesamte Bestimmungsprozess der betrachteten Bewegung basiert auf einer Grundbewegung, auf die jeder der einzelnen folgenden Integrationsschritte im Rahmen der Bewegungsannäherungen bezogen werden muss.

Die Grundbewegung verlaufe längs der vorgegebenen Raumkurve

$$C^{(0)} \equiv r = r(A_{\nu_0}^{(0)}; \zeta) \tag{3.220}$$

mit den charakterisierenden in der Grundbewegung als konstant angenommenen Parametern, die jetzt zur Verdeutlichung der Abhängigkeiten nicht durch A_ν sondern mit $A_{\nu_0}^{(0)}$, $(\nu_0 = 1, 2, \ldots, 6)$ bezeichnet werden sollen[1], und als unabhängiger Variablen dem Bahn-

[1] Um die Unabhängigkeit der Indizes von ihrer Reihenfolge und der in den späteren Schritten erfolgenden Abhängigkeit zu charakterisieren, muss für die Indizes ν_0, später auch ν_1, ν_2,… an Stelle von ν geschrieben werden.

winkel ζ. Die Bewegung längs der Kurve $C^{(0)}$ werde in einem mitgeführten Bahnsystem beschrieben. Sie hat nach Formel (3.200) die radiale Geschwindigkeit

$$\dot{r} = \dot{r}\left(A_{\nu_0}^{(0)};\zeta\right) \quad mit \quad \frac{dr}{d\zeta} = fct\left(A_{\nu_0}^{(0)};\zeta\right) \quad . \tag{3.221}$$

Der Bahnwinkel ζ sei in einem Hansen-idealen Raum gegeben. Der Bezug zur Zeit wird über den Flächenparameter *G* und das Zeitintegral

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad , \quad \zeta = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{G}{r^2} dt \tag{3.222}$$

hergestellt. Hier ist der „Flächenparameter“ *G* einer der Parameter der Bewegung, der auch in der Grundbewegung nicht notwendig als konstant angesetzt werden muss. Allerdings ist es in der Praxis vorteilhaft eine Grundbewegung zu wählen, in welcher der Flächenparameter *G* konstant ist. Damit ist in Ergänzung dazu auch die transversale Geschwindigkeit

$$V_T = r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} \tag{3.223}$$

bekannt. Die Bewegung hat im mitgeführten Bahnsystem den Zustandsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 \ , \end{aligned} \tag{3.224}$$

wobei das mitgeführte $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ – Bahnsystem wie üblich auf das bewegungsbezogene Hansen-ideale $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – System

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)} \end{aligned} \tag{3.225}$$

zurückgeführt werden kann. Dieses kann wiederum auf ein inertiales Basissystem, etwa ein Äquator- oder Ekliptiksystem bezogen werden, wozu die Umrechnungsformeln (2.113) verwendet werden. Der Flächenparameter *G* zählt ebenso zu den charakteristischen Parametern („Elementen“) einer Bewegung wie der Anfangswert ζ_0 und die Rotationswinkel *i*, Ω, welche die Drehung in das inertiale Basissystem beschreiben. Wie in jedem Bewegungsvorgang, der in einem euklidischen Raum dargestellt werden kann, sind genau 6 unabhängige Parameter $A_{\nu_0}^{(0)}$ zur Beschreibung der Bewegung erforderlich[1].

Anmerkungen: 1. Anstatt eine geradlinige Bewegung als Grundbewegung zu wählen kann jede beliebige andere Bewegung mit Ausnahme der Kreisbewegung gewählt werden. Für den allgemeinsten Fall ist jedoch von jeder Beschleunigung abzusehen, es wird also mit der geradlinigen Bewegung begonnen. Damit sollte es dann auch möglich sein, den Einfluss irgendeiner Beschleunigung auf eine Bewegung speziell zu untersuchen.

[1] Weitere Parameter, die zur Beschreibung einer bestimmten Raumkurve benötigt werden, haben dann mit dem Bewegungsvorgang nichts bzw. nicht unmittelbar etwas zu tun.

2. Der (Flächen-) Parameter *G*, der in der allgemeingültigen Variationsgleichung $\dot{G} = r\, b_T$ und im Zeitintegral $\mathrm{r}^2\,\dot{\zeta} = \mathrm{G}$ erscheint, charakterisiert einen bestimmten Bewegungsvorgang wie auch der Radius *r*, die radiale Variation $\dot{r}$, die transversale Variation $\mathrm{r}\,\dot{\zeta}$, usw.. Er muss somit für jeden Bewegungsvorgang wie die Parameter $\mathrm{r}, \dot{\mathrm{r}}, \mathrm{r}\,\dot{\zeta}, \ldots$ und im Fall einer räumlichen Bewegung mit $\dot{\eta}$ neu bestimmt werden.

Erste Bewegungsannäherung

Es werde angenommen, dass die Komponenten b_j der Bewegungseinflüsse als Kombination aus einzelnen Teileinflüssen dargestellt werden können (was in der Praxis gewöhnlich auch der Fall ist):

$$b_j \;=\; \sum_{\nu=1}^{N_B} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1,2,3) \quad . \tag{3.226}$$

Aus dem allgemeinen Bewegungsmodell b_j werde eine geeignete oder besonders einflussreiche oder besonders wichtige oder vielleicht auch mathematisch besonders einfach zu handhabende Beschleunigung

$$b_j^{(1)} \;:=\; b_j - \sum_{\nu=2}^{N_B} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1,\, 2,\, 3) \tag{3.227}$$

ausgewählt. N_B ist die Maximalanzahl aller den betrachteten Bewegungsvorgang beeinflussenden Beschleunigungen.

Werden auf die Grundbewegung die Beschleunigungen $b_j^{(1)}$, die etwa die bekannte Zerlegung im mitgeführten Bahnsystem haben können

$$b_1^{(1)} \;:=\; b_R^{(1)} \;,\; b_2^{(1)} \;:=\; b_T^{(1)} \;,\; b_3^{(1)} \;:=\; b_N^{(1)} \;, \tag{3.228}$$

ausgeübt, können die Parameter $A_{\nu_0}^{(0)}$ nach der Methode der Variation der Parameter jetzt als variabel aufgefasst werden. Es gibt dann die Variationsgleichungen zur Bestimmung der Parameter $A_{\nu_0}^{(0)}$

$$\dot{A}_{\kappa_0}^{(0)} \;=\; fct\left(A_{\nu_0}^{(0)}; b_j^{(1)}; t\right) \;,\; \nu_0, \kappa_0 \le 6 \;,\; j = 1,2,3 \tag{3.229}$$

bzw.

$$\frac{dA_{\kappa_0}^{(0)}}{d\zeta} \;=\; fct\left(A_{\nu_0}^{(0)}; b_j^{(1)}; \zeta\right) \quad , \quad \nu_0, \kappa_0 \le 6 \;,\; j = 1,2,3 \quad . \tag{3.230}$$

Diese Variationsgleichungen werden aus den beiden Anpassungsgleichungen (3.198) und (3.206) mit $r^2\,\dot{\zeta} = G$, sowie wegen (3.213),

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_0=1}^{6} \frac{\partial r}{\partial A_{\nu_0}^{(0)}} \frac{dA_{\nu_0}^{(0)}}{d\zeta} &= 0 \\ \sum_{\nu_0=1}^{6} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_0}^{(0)}} \frac{dA_{\nu_0}^{(0)}}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G} b_R^{(1)} \quad . \end{aligned} \tag{3.231}$$

hergeleitet, sowie den generellen Variationsgleichungen (vgl. die Gleichungen (3.209) und (3.217))

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}\, b_T^{(1)} \tag{3.232}$$

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2}\, b_N^{(1)} \tag{3.233}$$

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad , \tag{3.234}$$

wobei G jetzt als Funktion von ζ angenommen werden muss. Die Orientierung im Raum ist durch die Raumwinkel bezogen auf das inertiale Basissystem[1] aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} (i)^{\cdot} &= \dot{\eta}\cos u \\ \dot{\Omega}\sin i &= \dot{\eta}\sin u \\ \dot{\sigma}\sin u &= \dot{\eta}\cos u \sin i \end{aligned} \tag{3.235}$$

($u = \zeta$-σ, Argument der Breite) bekannt. In Abhängigkeit des Bahnwinkels ζ lauten diese Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{di}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\cos(\zeta-\sigma) \\ \frac{d\Omega}{d\zeta}\sin i &= \frac{d\eta}{d\zeta}\sin(\zeta-\sigma) \\ \frac{d\sigma}{d\zeta}\sin(\zeta-\sigma) &= \frac{d\eta}{d\zeta}\cos(\zeta-\sigma)\sin i \end{aligned} \tag{3.236}$$

Die Integration des Systems (3.230) ergibt die maximal sechs jetzt als variabel angenommenen Parameter $A_{\nu_0}^{(0)}$ der Grundbewegung als Funktionen der verwendeten Beschleunigungen $b_j^{(1)}$, des Bahnwinkels ζ sowie von neuen (Integrations-) Konstanten, die mit $A_{\nu_1}^{(1)}$ bezeichnet werden sollen

$$A_{\nu_0}^{(0)} = fct\left(A_{\nu_1}^{(1)}; b_j^{(1)}; \zeta\right) \quad , \quad \nu_0,\, \nu_1 = 1,2,3,..,6,\; j = 1,2,3 \quad . \tag{3.237}$$

Hier soll der Index ν_1 andeuten, dass die „alten“ Parameter $A_{\nu_0}^{(0)}$ jetzt Funktionen **aller** „neuen“ Parameter $A_{\nu_1}^{(1)}$ sind. Damit ist es dann auch möglich, die Parameter G und η direkt aus den Variationsgleichungen (3.232) bzw. (3.233) durch Integration zu berechnen, um eine erste Näherung für dieses Parameter zu finden. Die weitere Berücksichtigung von transversaler und normaler Beschleunigung erfolgt dann mit den Bedingungsgleichungen vom Typ (3.211) bzw. (3.219). Werden diese Parameter in die Grundbewegung eingesetzt, ergibt sich die Bewegung längs der **neuen** Kurve

$$C^{(1)} \equiv r = r\left(A_{\nu_1}^{(1)}; \zeta\right) \tag{3.238}$$

mit der radialen Geschwindigkeitskomponente

[1] vgl. etwa das Formelsystem (2.186) auf Seite 59

$$\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial \zeta}\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\right);\zeta\right)\frac{G}{r^2} \quad , \quad G = G\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\right);\zeta\right) \tag{3.239}$$

und der transversalen Geschwindigkeitskomponente

$$r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} = fct\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\right);\zeta\right) \quad , \quad G = G\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\right);\zeta\right) \quad . \tag{3.240}$$

Die Zustandsvektoren dieser Bewegung sind mit diesen $r, \dot{r}, r\dot{\zeta}$ wie im System (3.224) bekannt, wenn das mitgeführte System über die Gleichungen (3.225) und die $\mathbf{q}_j$ mit den Raumwinkeln i, Ω bekannt sind. Diese Größen werden je nach Bahnmodell (d.h. den für die Anpassung herangezogenen Beschleunigungen $b_j^{(\nu)}$) in jedem Bewegungsannäherungsschritt neu berechnet. Den Bezug zur Zeit liefert wenn neben de Bahnkurve benötigt das Zeitintegral

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G} d\zeta \quad . \tag{3.241}$$

Diese Bewegung erfüllt exakt das hier verwendete Bewegungsmodell

$$b_j^{(1)} = b_j - \sum_{\nu=2}^{N_B} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3) \quad .$$

Der Zustandsvektor der neuen Bewegung lautet wieder

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0$$

mit dem Normalenvektor

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = G\,\mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = G\,\mathbf{c}_0$$

unter Berücksichtigung jetzt aller neu berechneten Abhängigkeiten für $r, \dot{r}, G/r = r\dot{\zeta}$ sowie $A_{\nu_0}^{(0)}, G, \eta.$ Entsprechend können die $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ mit den neu berechneten räumlichen Winkelkoordinaten i, Ω, σ in Bezug auf das fundamentale Basissystem berechnet werden.

Es muss wieder darauf hingewiesen werden, dass mit der hier gefundenen Bewegung nur ein – recht willkürlich ausgewählter – Teil des gegebenen Bewegungsproblems erfasst ist. Der ganze Prozess muss also in vielen Schritten bearbeitet werden.

Zweite Bewegungsannäherung

Bisher wurden die Beschleunigungen

$$b_j - b_j^{(1)} = \sum_{\nu=2}^{N_B} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3)$$

im Anpassungsprozeß nicht berücksichtigt. Bei einem nächsten Schritt mögen (willkürlich) die Beschleunigungen

$$b_j^{(2)} = b_j - b_j^{(1)} - \sum_{\nu=3}^{N_B} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3) \tag{3.242}$$

ausgewählt werden. Sie haben etwa im mitgeführten Bahnsystem die Darstellungen

$$b_R^{(2)} \ , \ b_T^{(2)} \ , \ b_N^{(2)} \quad . \tag{3.243}$$

Jetzt wird auf die im ersten Schritt konstant gehaltenen Parameter $A_{i_1}^{(1)}$ die Variation der Parameter angewendet. Dies führt auf die beiden Anpassungsgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1=1}^{6} \frac{\partial r}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \frac{dA_{\nu_1}^{(1)}}{d\zeta} &= 0 \\ \sum_{\nu_1=1}^{6} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \frac{dA_{\nu_1}^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G} b_R^{(2)} \quad . \end{aligned} \tag{3.244}$$

Der Flächenparameter *G* ist bei Kenntnis der Kurve $C^{(1)}$ aus Beziehung (3.238) mit Beziehung (3.240) aus dem Ausdruck

$$G = G\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\right);\zeta\right) \tag{3.245}$$

gegeben. In dem Gleichungssystem (3.244) zeigt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft bei der Durchführung dieses Verfahrens: es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} &= \sum_{\nu_0=1}^{6} \frac{\partial r}{\partial A_{\nu_0}^{(0)}} \frac{\partial A_{\nu_0}^{(0)}}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} &= \sum_{\nu_0=1}^{6} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_0}^{(0)}} \frac{\partial A_{\nu_0}^{(0)}}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \quad . \end{aligned} \tag{3.246}$$

Da der Grundbezug stets auf die in der Grundbewegung gewählte Bewegung längs der Kurve $C^{(0)}$ aufrechterhalten wird und eine neue Kurve durch Variation von ineinander geschachtelten Parametern sukzessive erhalten wird, sind die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial A_{\nu_0}^{(0)}} \ , \ \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_0}^{(0)}}$$

auch im zweiten Schritt identisch mit den im ersten Schritt errechneten. Es müssen also im zweiten Schritt nur noch die Variationen

$$\frac{\partial A_{\nu_0}^{(0)}}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \qquad , \quad (\nu_0, \nu_1 = 1,2,...,6)$$

neu gerechnet werden, wobei je nach Wahl des Bahnmodells (also der Beschleunigungskomponenten) üblicherweise die meisten dieser Ausdrücke verschwinden. Dadurch wird der formale Rechenprozess wesentlich vereinfacht. Falls aber die neuen Parameter als Integrationskonstanten im Integrationsprozess zustande kommen (z.B. $g_1(\zeta) = g_{11} + fct\left(A_k^{(\nu)}, \zeta\right)$), entfallen die partiellen Differentiationen vollständig und in den $\partial r / \partial A_k^{(0)}$ müssen nur die Ausdrücke für die $A_k^{(\nu)}$ eingesetzt werden.

Aus den beiden Anpassungsgleichungen (3.244) werden die Variationsgleichungen

$$\frac{dA_{\nu_1}^{(1)}}{d\zeta} = fct\left(A_{\nu_1}^{(1)};\zeta\right) \tag{3.247}$$

erhalten. Die weiteren Variationsgleichungen sind mit den Bedingungsgleichuungen (3.211) und (3.219)

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \sum_{\nu_1=1}^{6} \frac{\partial G}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \frac{dA_{\nu_1}^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}\left(b_T^{(1)} + b_T^{(2)}\right) \quad , \quad \sum_{\nu_1=1}^{6} \frac{\partial G}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \frac{dA_{\nu_1}^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(2)}$$

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \sum_{\nu_1=1}^{6} \frac{\partial \eta}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \frac{dA_{\nu_1}^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2}\left(b_N^{(1)} + b_N^{(2)}\right) \quad , \quad \sum_{\nu_1=1}^{6} \frac{\partial \eta}{\partial A_{\nu_1}^{(1)}} \frac{dA_{\nu_1}^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N^{(2)} \qquad (3.248)$$

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad ,$$

die ebenfalls zur Liste der jetzt als variabel angenommenen Parameter $A_{\nu_1}^{(1)}$ beitragen. Damit erhält man die Lösung in Abhängigkeit von neuen konstanten Parametern $A_{\nu_2}^{(2)}$ und dem Bahnwinkel ζ

$$A_{\nu_1}^{(1)} = fct\left(A_{\nu_2}^{(2)}; b_j^{(2)}; \zeta\right) \quad , \quad \nu_1, \nu_2 = 1,2,...,6,\ j = 1,2,3 \ . \qquad (3.249)$$

Der Flächenparameter G und der Rotationswinkel η werden (analog dem Vorgang in der 1. Bewegungsannäherung) durch direkte Integration erhalten. Dies eingesetzt in die Kurve $C^{(1)}$ führt auf die neue Kurve

$$C^{(2)} := r = r\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\left(A_{\nu_2}^{(2)}\right)\right); \zeta\right) \cong r(A_{\nu_2}^{(2)}; \zeta) \quad , \qquad (3.250)$$

welche das Bewegungsmodell

$$b_j^{(1)} + b_j^{(2)} = b_j - \sum_{\nu=3}^{N_B} b_j^{(\nu)} \quad , \quad (j = 1, 2, 3) \qquad (3.251)$$

exakt erfüllt. Die radiale Geschwindigkeitskomponente lautet

$$\dot{r} = \dot{r}\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\left(A_{\nu_2}^{(2)}\right)\right); \zeta\right) \cong fct\left(A_{\nu_2}^{(2)}; \zeta\right) \quad . \qquad (3.252)$$

Die transversale Geschwindigkeitskomponente folgt mit bekannten *r* und variablen *G* aus

$$r\dot{\zeta} = \frac{G}{r} = fct\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\left(A_{\nu_2}^{(2)}\right)\right); \zeta\right) \quad , \quad G = G\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\left(A_{\nu_2}^{(2)}\right)\right); \zeta\right) \qquad (3.253)$$

die Kenntnis des mitgeführten Bahnsystems $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$ bzw. des Hansen-idealen bewegungsbezogenen Bahnsystems mit den mit Hilfe von η berechneten Raumwinkeln i, Ω . Den Bezug zur Zeit liefert, wenn nicht nur die Bahnkurve sonden auch die Bewegung längs dieser Kurve benötigt wird, wieder das Zeitintegral

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G} d\zeta \quad . \qquad (3.254)$$

n-te Bewegungsannäherung

Das bisher speziell besprochene Schema kann nun verallgemeinert angewandt werden, bis alle Komponenten der Bewegungseinflüsse b_j abgearbeitet sind. Zunächst werden die Beschleunigungsanteile

$$b_j^{(n)} \;=\; b_j - \sum_{\nu=1}^{n-1} b_j^{(\nu)} - \sum_{\nu=n+1}^{N_B} b_j^{(\nu)} \qquad , \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{3.255}$$

gewählt. Sie haben im mitgeführten *Leibniz*-Bahnsystem die Beschleunigungen

$$b_R^{(n)} \;,\; b_T^{(n)} \;,\; b_N^{(n)} \qquad . \tag{3.256}$$

Wenn in der (n-1) ten Bewegungsannäherung die Parameter $A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}$ als Konstante erhalten wurden, können die beiden Anpassungsgleichungen für den *n*-ten Schritt durch Anwendung der Methode der Variation der Parameter auf diese Parameter erhalten werden:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_{n-1}=1}^{6} \frac{\partial r}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \frac{dA_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}}{d\zeta} \;&=\; 0 \\ \sum_{\nu_{n-1}=1}^{6} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \frac{dA_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}}{d\zeta} \;&=\; \frac{r^2}{G} b_R^{(n)} \qquad . \end{aligned} \tag{3.257}$$

Sind die Parameter $A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}$ die im (n-1) ten Schritt neu berechneten variablen Parameter, sind in

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \;&=\; \sum_{\nu_{n-2}=1}^{6} \frac{\partial r}{\partial A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}} \frac{\partial A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \\ \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \;&=\; \sum_{\nu_{n-2}=1}^{6} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}} \frac{\partial A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \end{aligned} \tag{3.258}$$

die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial r}{\partial A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}} \;,\; \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}}$$

aus dem (n-2) ten Schritt bekannt. Es muss also im (k-1) ten Schritt nur noch die Variation

$$\frac{\partial A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}}$$

neu gerechnet werden. Aus den beiden Anpassungsgleichungen können die beiden Variationsgleichungen

$$\frac{dA_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}}{d\zeta} \;=\; fct\left(A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}; \zeta\right) \tag{3.259}$$

aufgestellt werden neben den weiteren Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_{n-1}=1}^{6} \frac{\partial G}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \frac{dA_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}}{d\zeta} \;&=\; \frac{r^3}{G} b_T^{(n)} \\ \sum_{\nu_{n-1}=1}^{6} \frac{\partial \eta}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \frac{dA_{\nu_{n-1}}^{(1)}}{d\zeta} \;&=\; \frac{r^3}{G^2} b_N^{(n)} \\ \dot{\zeta} \;&=\; \frac{G}{r^2} \qquad . \end{aligned} \tag{3.260}$$

Die Lösungen sind die

$$A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)} \;=\; fct\left(A_{\nu_n}^{(n)}; b_j^{(n)}; \zeta\right) \quad , \quad \nu_n, \nu_{n-1} = 1,2,...,6,\; j = 1,2,3 \tag{3.261}$$

mit den neuen Konstanten $A_{\nu_n}^{(n)}$ und der neuen Kurve

$$C^{(n)} \;:=\; r = r\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\left(A_{\nu_2}^{(2)}.....\left(A_{\nu_n}^{(n)}\right)..\right)\right); \zeta\right) \;\cong\; fct\left(A_{\nu_n}^{(n)}; \zeta\right) \quad , \tag{3.262}$$

welche das Bewegungsmodell

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_j^{(\nu)} \;=\; b_j \;-\; \sum_{\nu=n+1}^{N_B} b_j^{(\nu)} \quad , \quad \left(j = 1,2,3\right) \tag{3.263}$$

exakt erfüllt. Die radiale Geschwindigkeitskomponente lautet

$$\dot{r} = \dot{r}\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\left(A_{\nu_2}^{(2)}.....\left(A_{\nu_n}^{(n)}\right)..\right)\right); \zeta\right) \;\cong\; fct\left(A_{\nu_n}^{(n)}; \zeta\right) \quad . \tag{3.264}$$

Die transversale Geschwindigkeitskomponente folgt mit bekannten *r* und *G* aus

$$r\dot{\zeta} \;=\; \frac{G}{r} \;=\; fct\left(A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\left(A_{\nu_2}^{(2)}.....\left(A_{\nu_n}^{(n)}\right)..\right)\right); \zeta\right) \;\cong\; fct\left(A_{\nu_n}^{(n)}; \zeta\right) \quad . \tag{3.265}$$

Die Raumwinkel i, Ω lassen sich wieder mit Kenntnis der Rotation $\dot{\eta}$ berechnen, so dass die Zustandsvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\,\mathbf{r}_0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \end{aligned} \tag{3.266}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \;\; \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)} \end{aligned} \tag{3.267}$$

bekannt sind. Die Berechnung der $\mathbf{q}_j$ etwa aus dem als inertial angenommenem Äquatorsystem wird in Abschnitt 2.3.4 gezeigt. Den Bezug zur Zeit liefert das Zeitintegral

$$t = \; t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G} d\zeta \quad . \tag{3.268}$$

Nach *k* Schritten können die Parameter $A_{\nu_0}^{(0)}$ der Ausgangslösung durch eine Funktionenfolge aus den Parametern der einzelnen Rechenschritte dargestellt werden:

$$A_{\nu_0}^{(0)} \;=\; A_{\nu_0}^{(0)}\left(A_{\nu_1}^{(1)}\left(A_{\nu_2}^{(2)}\left(..... A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}\left(A_{\nu_n}^{(n)}\right)\right)\right)\right) \quad . \tag{3.269}$$

Jeder Parameter

$$A_{\nu_n}^{(n)} \;\left(\nu_n = 1,2,..,6;\; n = 1,2,\cdots,N_B\right)$$

darf im gesamten Integrationsprozess nur genau einmal für die Anwendung der Methode der Variation der Parameter einbezogen werden. Allerdings werden in einem Einzelschritt gewöhnlich nicht alle 6 Parameter als zu variierende Parameter verwendet. Ein solcher Parameter kann in den folgenden Schritten unverändert übernommen werden, bis er in einem Anpassungsvorgang zum Einsatz kommt. Dann allerdings wird er als eine Variable verwendet, die

sich als eine Funktion von Parametern darstellen lassen muss, die in späteren Schritten wiederum selbst zu Variablen werden können.

In ähnlicher Weise darf selbstverständlich auch jeder Beschleunigungsanteil $b_j^{(\nu)}$ nur einmal zum Einsatz gebracht werden.

Die innersten Parameter $A_{\nu_n}^{(n)}$, welche am Ende des Anpassungsprozesses als Konstante stehen bleiben, können als die „Anfangselemente“ der Bewegung bezeichnet werden.

BEISPIEL: In der von *Brouwer*[1] entwickelten analytischen Theorie der Satellitenbewegung unter Berücksichtigung der zonalen Koeffizienten (J_2, - J_5) eines Zentralkörpers (z.B. das Erdfeld) sind die mittleren *Kepler*elemente $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}$ zu einer Epoche t_0 derartige innerste Parameter im Sinne der in diesem Bericht vorgestellten Theorie der wiederholten Anpassung einer beliebigen Bewegung in der Astrodynamik. ■

3.11 Weiterführende Aussagen über die Methode der Variation der Parameter

3.11.1 Der Zusammenhang von *Hansen*-Systemen und der Methode der Variation der Parameter

Es wurde in Satz H20 angesprochen, dass die Methode der Variation der Parameter in engem Zusammenhang mit *Hansen*-Systemen gesehen werden kann. Dieser Zusammenhang soll in diesem Abschnitt näher untersucht werden.

Es werde wie in Abschnitt 2.4.7 auf Seite 53 ein beliebiges bewegungsbezogenes $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – Bahnsystem mit Bahnwinkel ψ eingeführt. Das *Leibniz*-System hat in Bezug auf dieses System die Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(B)} \cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)} \sin\psi \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(B)} \sin\psi + \mathbf{q}_2^{(B)} \cos\psi \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(B)} = \mathbf{q}_1^{(B)} \times \mathbf{q}_2^{(B)} \quad . \end{aligned} \tag{3.270}$$

Der Ortsvektor eines bewegten Objektes lautet

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = y^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} = r\left(\mathbf{q}_1^{(B)} \cos\psi + \mathbf{q}_2^{(B)} \sin\psi\right) \quad . \tag{3.271}$$

Seine absolute Variation nach dem Bahnwinkel wird

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi} = \frac{dr}{d\psi}\mathbf{r}_0 + r\left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi}\cos\psi + \frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi}\sin\psi\right) + r\,\mathbf{q}_0 \quad , \tag{3.272}$$

seine relative Variation nach dem Bahnwinkel mit partieller Differentiation

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi} = \frac{\partial r}{\partial\psi}\mathbf{r}_0 + r\left(\frac{\partial\mathbf{q}_1^{(B)}}{\partial\psi}\cos\psi + \frac{\partial\mathbf{q}_2^{(B)}}{\partial\psi}\sin\psi\right) + r\,\mathbf{q}_0 \quad . \tag{3.273}$$

Da der Bahnwinkel ψ auf das $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – System bezogen ist, muss sein

[1] BROUWER, D. (1959) und BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. (1961)

$$\frac{\partial \mathbf{q}_1^{(B)}}{\partial \psi} = \frac{\partial \mathbf{q}_2^{(B)}}{\partial \psi} = 0 \quad . \tag{3.274}$$

Somit bleibt für die Differenz zwischen absoluter und partieller Variation des Ortsvektors

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = \left(\frac{dr}{d\psi} - \frac{\partial r}{\partial \psi} \right) \mathbf{r}_0 + r \left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi} \cos\psi + \frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi} \sin\psi \right) \quad . \tag{3.275}$$

Die Bahnkurve, auf der das Objekt sich bewegen soll, sei mit Bahnwinkel ψ auf das $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – System bezogen. Der Bahnradius hat dann die Darstellung

$$r = r\left(A_\nu; \psi\right) \tag{3.276}$$

und für die Variation des Radius nach diesem Bahnwinkel wird

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{\partial r}{\partial \psi} + \sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{d\psi} \quad . \tag{3.277}$$

Somit bleibt im Ausdruck (3.275)

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\psi} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = \left(\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{d\psi} . \right) \mathbf{r}_0 + r \left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(B)}}{d\psi} \cos\psi + \frac{d\mathbf{q}_2^{(B)}}{d\psi} \sin\psi \right) \quad . \tag{3.278}$$

Es sei nun das Bahnsystem ein *Hansen*-System mit dem Bahnwinkel

$$\psi \triangleq \zeta = \int \left(G / r^2 \right) dt = \int \left| \dot{\mathbf{r}}_0 \right| dt \quad . \tag{3.279}$$

In diesem und nur in diesem Fall verschwindet wegen der *Hansen* Bedingung (2.98) der Ausdruck

$$\frac{d\mathbf{q}_1^{(I)}}{d\zeta} \cos\zeta + \frac{d\mathbf{q}_2^{(I)}}{d\zeta} \sin\zeta = \left(\frac{d\mathbf{q}_1^{(I)}}{dt} \cos\zeta + \frac{d\mathbf{q}_2^{(I)}}{dt} \sin\zeta \right) \frac{d\zeta}{dt} = 0 \quad . \tag{3.280}$$

Es bleibt dann

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} = \left(\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{d\zeta} \right) \mathbf{r}_0 \quad . \tag{3.281}$$

Dies vertieft die Aussage von Satz H20:

Satz H21: *Die Oskulationsbedingung*

$$\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{d\zeta} = 0 \tag{3.282}$$

welche als Ausgangspunkt für die Variation der Parameter dient, ist notwendig auf ein Hansen-*System mit Bahnwinkel ζ bezogen.*

Die Variation der Parameter kann also ohne den Bezug auf ein *Hansen*-System nicht sinnvoll begründet werden. In diesem und nur in diesem Fall wird daher

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \quad . \tag{3.283}$$

3.11.2 Überblick über die klassische Methode der Variation der Parameter

Die klassische Methode der Variation der Parameter in ihrer originalen Form lässt sich am übersichtlichsten in vektorieller Schreibweise formulieren[1]. Dazu wird (wie bei *I. Newton*) von einem (inertialen) Zustandsvektor ausgegangen. Sei **x** der Ortsvektor, der von Parametern A_ν und der Zeit t (oder einem Bahnwinkel) abhängig sei, so hat der Geschwindigkeitsvektor die Darstellung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \sum_\nu \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{dt} \quad . \tag{3.284}$$

Die Oskulationsbedingung (analog zu Satz H20 nach *Hansen*, vgl. Formel auch (3.199))

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \tag{3.285}$$

ergibt die erste Anpassungsgleichung

$$\sum_\nu \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{dt} \quad = \quad 0 \quad . \tag{3.286}$$

In der klassischen Lehre wird die Anpassung stets auf eine Keplerbewegung bezogen. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\mu\frac{\mathbf{x}}{r^3} + \mathbf{b}_K = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} + \sum_\nu \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{dt} \quad , \tag{3.287}$$

wobei $\mathbf{b}_K$ als „Störbeschleunigung“ bezeichnet wird. Als „ungestörte“ Bezugsbewegung wird (in der klassischen Störungstheorie wie übrigens auch in der *Hansen*’schen Störungstheorie) die *Kepler*bewegung aufgefasst, so dass als zweite Anpassungsgleichung der Ausdruck

$$\sum_\nu \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{dt} = \mathbf{b}_K \tag{3.288}$$

gewählt werden muss. Wenn von irgendeiner anderen Bewegung als Anpassungsbewegung ausgegangen werden soll, welche durch die Beschleunigung $\mathbf{b}_0$ geprägt sein soll, kann allgemein für die Bewegungsgleichung die Form

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} + \sum_\nu \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{dt} = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_S \tag{3.289}$$

angesetzt werden, wobei die „Störbeschleunigung“ die Bezeichnung $\mathbf{b}_S$ habe. Die zweite Anpassungsgleichung hat dann die Form

$$\sum_\nu \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial A_\nu}\frac{dA_\nu}{dt} = \mathbf{b}_S \tag{3.290}$$

und es muss für die „ungestörte“ Bewegung sein

---

[1] Wie es zum Beispiel bei R. H. BATTIN (1987) pp.471-514 zu finden ist, in sehr übersichtlicher Form allerdings ohne Verwendung des Formalismus der Vektorrechnung etwa bei BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. (1961), p. 273 ff. Die originale Herleitung mit kanonischen Elementen bzw. dann original nach *J. L. Lagrange* etwa bei F. TISSERAND (1889), TOME I, pp. 159-188

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} = \mathbf{b}_0 \quad . \tag{3.291}$$

In der klassischen Methode der Variation der Parameter werden die Anpassungsgleichungen auf „Bahnelemente“ transformiert. Diese sind konstant für eine ausgewählte Bahnkurve, die als Ausgangskurve verwendet wird. In der klassischen Himmelsmechanik ist diese Kurve üblicherweise eine Ellipse, welche durch die *Kepler*bewegung bestimmt ist. Mit Hilfe der *Lagrange* Klammern, die zeitunabhängig sind, können die beiden Anpassungsgleichungen in die *Lagrange*schen und allgemeiner die *Gauß*'schen Variationsgleichungen für die *Kepler*-schen Bahnparameter (oder einem vergleichbaren Satz von Bahnparametern, die mit diesen verwandt sind, etwa die kanonischen *Delaunay* Elemente, oder einen Satz von singularitätenfreien Elementen, o.ä.) übertragen werden. Deren Integration dient zur Berechnung der Bewegung der Himmelskörper (Planeten, Satelliten). Wesentlich für die Anwendung dieser Methode ist die Existenz einer „Störungsfunktion“, die vom Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes unabhängig ist und die sich als Gradient eines Potentials schreiben lässt. Diese Störungsfunktion, die in der klassischen Himmelsmechanik erstmals für das Mehrkörperproblem Sonnensystem erstellt wurde, ist somit auf konservative Kräfte beschränkt.

Die Integration der Planetengleichungen erfolgt (eventuell unter Verwendung von geeigneten kanonischen Transformationen) durch **sukzessive Approximationen**[1]: Ausgehend von einer als konstant angenommenen Anfangslösung („Anfangselemente“, im Fall einer *Kepler*bewegung sind die *Kepler*elemente oder ein verwandter Parametersatz) werden säkulare und periodische Bewegungsanteile 1. Ordnung durch Integration der Planetengleichungen erhalten. Diese Ergebnisse werden verwendet um mit den Planetengleichungen Lösungen zweiter Ordnung durch Integration zu erhalten. Dieses Verfahren könnte für Lösungen höherer Ordnung weitergeführt werden, indem der „Störanteil“ in den Planetengleichungen entsprechend durch die bisherigen Lösungen erweitert wird. Eine wesentliche Eigenschaft eines solchen Verfahrens ist die Tatsache, dass die Planetengleichungen nur einmal aufgestellt werden müssen und für jede Approximationslösung der „Störanteil“ entsprechend erweitert wird.

Ein prinzipieller schematischer Überblick über die klassischen Verfahren zur Bearbeitung von Bewegungsproblemen ist in Bild 3-25 auf Seite 141 zusammengestellt. Stellvertretend für alle möglichen Parametersätze sind hier die *Kepler*elemente große Halbachse a und numerische Exzentrizität e angeführt. Nach Berechnung derartiger Parameter, die ein bestimmtes Bewegungsmodell (“Störmodell“) bis zu einer gewissen Genauigkeitsordnung berücksichtigen, kann der Zustandsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t)$ auf dem üblichen Weg berechnet werden. Die Lösung ist im Prinzip in Form einer Reihenentwicklung gegeben, die etwa auf eine Taylorentwicklung der Störungsfunktion zurückgeführt werden kann. Als unabhängige Variable wird üblicherweise ein Bahnwinkel verwendet, die wahre oder exzentrische Anomalie, das Argument der Breite, gelegentlich auch der *Hansen*sche Bahnwinkel. Zu den Planetengleichungen gehört üblicherweise auch ein Ausdruck für die mittlere Anomalie $M=M_0+n(t-t_0)$ bzw. die mittlere Länge $L=M+\omega+\Omega$, so dass über eine Lösung der *Kepler* Gleichung dann auch der Bezug zur Zeit hergestellt werden kann.

[1] anschaulich beschrieben etwa bei BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. (1961), pp. 291-296; siehe auch BUCERIUS, H. (1966) PP.187, ff.

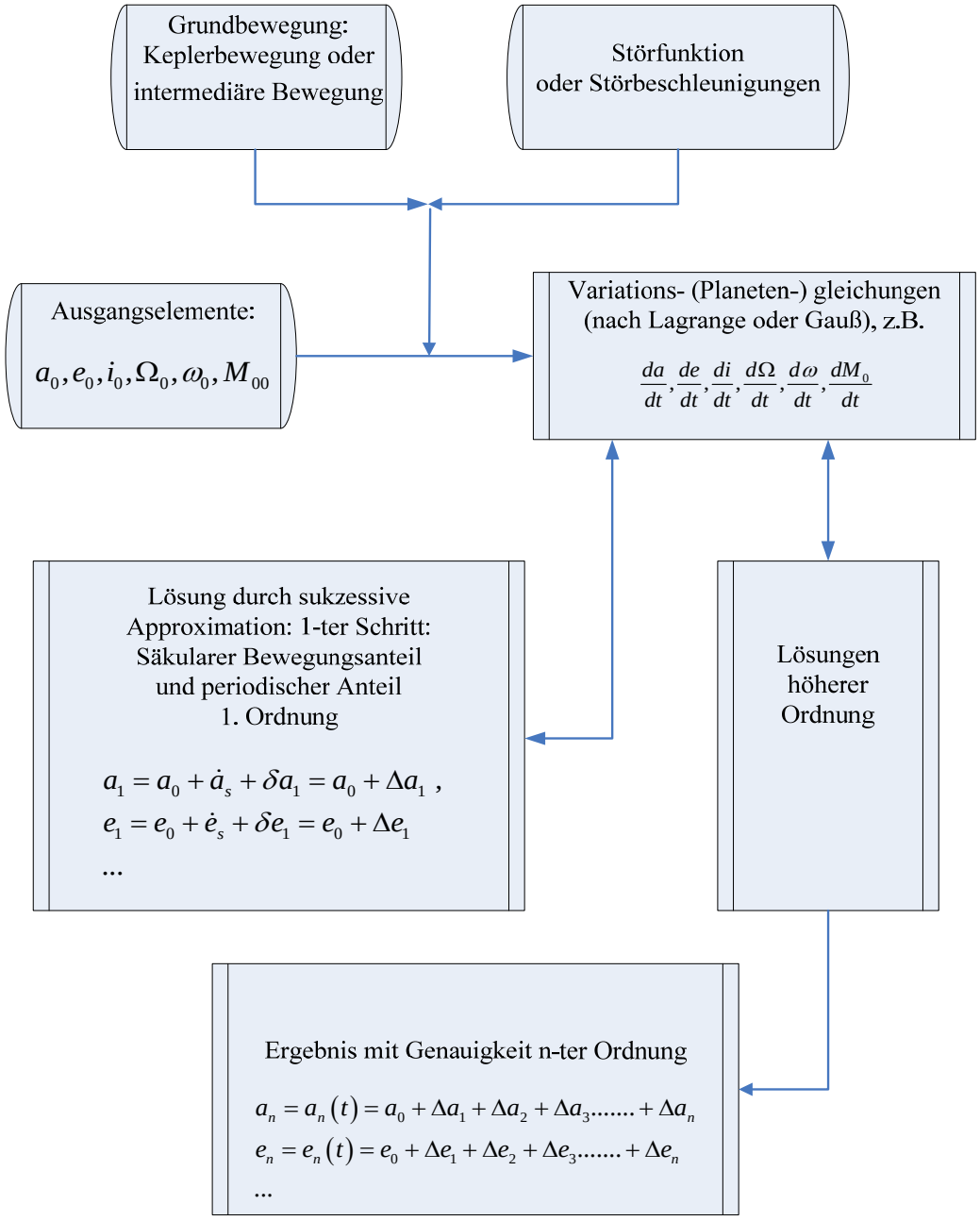

Bild 3-25 : Schematischer Überblick über die Methode der sukzessiven Approximation zur mathematischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen in der Astrodynamik

Beispiele für Anwendungen dieses Verfahrens sind neben den klassischen Arbeiten für die Bewegung der Planeten (*Euler, Lagrange, Hansen, Delaunay, Hill, Brouwer* u.a.) und die Bewegung des Mondes (*Hansen, Hill, Brown*) die Lösungen des Hauptproblems der Satellitentheorie durch *Brouwer(1959), Kozai(1959), Garfinkel(1959), Vinti(1959)* u.a.. Die letzteren Lösungen sind von erster Störordnung. Erweiterungen auf Lösungen der zweiten Ordnung etwa durch *Kozai* (1962), *Struble* (1961) zeigen bereits den enormen Aufwand für eine analytische Lösung, die sich kaum noch von Hand mit erträglichem und sicherem Aufwand bearbeiten lässt.

C. F. Gauß verwendete erstmals bei seinen Untersuchungen der Störungen der Bahn des Kleinen Planeten 2/Pallas durch Jupiter[1] Planetengleichungen, bei denen die „Störbeschleuni-

[1] GAUSS, C. F. (1810) ; BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. (1961), p. 302

gung“ in die Richtungen der drei Achsen des *Leibniz*-Systems zerlegt sind. Auch wenn ursprünglich von *Gauß* die aus der Planetentheorie bekannte Störungsfunktion auf das *Leibniz*-System abgebildet worden war, stellt dieser Ansatz einen wesentlichen Fortschritt gegenüber dem *Lagrange*schen Ansatz dar. Mit dem *Gauß*schen Ansatz können nämlich auch beliebige nicht konservative „Störbeschleunigungen“ berücksichtigt werden.

Ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes wird in der vorliegenden Arbeit herausgearbeitet, da es damit möglich ist, sich vollständig von der allgemeinen *Kepler*bewegung[1] freizumachen. In der klassischen Anwendung der Methode der Variation der Parameter ist wesentlich, dass es sich bei den Abweichungen von der vorgegebenen Bewegung um kleine Größen handelt. Dies spiegelt sich schon im Begriff „Störungen“ wieder, der impliziert, dass diese „Störungen“ die vorgegebene Bewegung „etwas“ ändern. Diese Einschränkung ist in der Vergangenheit aus rechentechnischen Gründen sinnvoll. Arbeiten wie etwa die von *D. Brouwer* (1959) zeigen, dass auch unter diesen Einschränkungen die Bearbeitung eines Störproblems sehr aufwendig ist und an die Grenze des mit der Hand ohne weitreichende Hilfen durch automatisches Rechnen zu erreichenden Ergebnisses geht. Diese Einschränkung bei der Anwendung der Methode der Variation der Parameter ist allerdings wie die vorliegenden Arbeit zeigt prinzipiell nicht notwendig. Vielmehr ist sie in umfassendem Maße geeignet, beliebige Bewegungsprobleme basierend auf einer beliebigen Ausgangsbewegung zu bearbeiten. Die Methode der Variation der Parameter kann daher für beliebige Bewegungen und in übersichtlicher Weise verwendet werden.

3.11.3 Überblick über die Methode der schrittweisen Anpassung

Das in dem vorliegenden Bericht vorgestellte Verfahren, das auf der Verwendung von *Hansen* Koordinaten beruht, schränkt sich auf die Variation nicht einer allgemeinen Bewegung sondern nur einer ebenen Kurve in der oskulierenden Bahnebene ein. Damit wird an Stelle der beiden allgemeinen vektoriellen Anpassungsgleichungen (3.286) und (3.288) bzw. (3.290) nur die eindimensionale Variation des Radius und der radialen Geschwindigkeit benötigt. Die Oskulationsbedingung (3.285) wird durch die eindimensionale Oskulationsbedingung (3.199) ersetzt, wobei die sich daraus notwendig ergebenden ersten Anpassungsgleichungen in beiden Fällen nach *Lagrange* bzw. nach *Hansen* formal gleich aussehen. Ein Unterschied zeigt sich jedoch in der zweiten Anpassungsgleichung, die im hier untersuchten *Hansen*-Fall auf der *Leibniz*gleichung beruht und daher auf ein mitgeführtes Koordinatensystem bezogen ist. Um diese Bedingungsgleichung herzuleiten muss keine weitere Oskulationsbedingung eingeführt werden, sondern die zweite Anpassungsgleichung ergibt sich notwendig in der Form (3.202). Allerdings verschwindet in diesem Fall die Bedingung der „ungestörten“ Bewegung

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} - \frac{G}{r} \tag{3.292}$$

im Fall beliebiger Kurven nicht notwendig. Dies ist im Fall einer geradlinigen Anpassungskurve der Fall. Bei Kegelschnitten und noch komplizierteren Bahnkurven bleibt ein konstanter Faktor stehen, der bei der Aufstellung der Variationsgleichungen berücksichtigt werden muss. Da eine ebene Kurve in der Regel nur durch zwei Parameter charakterisiert wird, können in der hier vorgestellten Methode die Variationsgleichungen für die zu bestimmenden Parameter durch Lösen eines Systems von zwei linearen Gleichungen aufgestellt werden, so-

[1] Als „allgemeine Keplerbewegung“ werde eine Bewegung bezeichnet, die den drei Keplergesetzen folgt, bei der aber alle Parameter („Keplerelemente“, manchmal auch als „klassische Elemente“ bezeichnet) als variabel angenommen werden. In diesem Fall muss allerdings das 3. Keplersche Gesetz in einer allgemeineren (nicht auf die elliptische Bewegung zu reduzierende) Formulierung verwendet werden.

fern nur die zugehörige Koeffizientendeterminante von null verschieden ist. Diese Bedingung muss aber bei linearer Unabhängigkeit der Parameter erfüllt sein. Auch wenn in diesem Verfahren nur zwei Gleichungen als notwendige Folge der Oskulationsbedingung auftreten, ist das Verfahren trotzdem allgemeingültig, da die weiteren Variationsgleichungen durch Variation des Flächenparameters *G*, des räumlichen Rotationswinkels η und damit des räumlichen Bezugs, sowie der Zeitbezug durch $r^2\dot{\zeta} = G$ in jedem Fall gegeben sind. Die hier aufgestellten Variationsgleichungen sind formal von der gewählten Bahnkurve völlig unabhängig, so dass sie zur Lösung (wenn möglich analytisch oder semianalytisch oder sonst numerisch) wiederholt in ein und demselben Bewegungsproblem verwendet werden können. Die für die Berechnung der ebenen Kurve $r = r(\zeta)$ verwendete Bahnebene ist die oskulierende Bahnebene, die bei räumlicher Bewegung mit der Bewegung mit „gebogen“ wird.

Die in diesem Bericht vorgestellte Methode zur Lösung eines Bewegungsproblems besteht aus einer Folge von Variationsgleichungssystemen, deren jeweils neue Parameter Ergebnisse der Lösung der vorhergehenden sind, und die jeweils eine (oder mehrere) weitere Bewegungseinflüsse einschließen. Die Aufgabe besteht darin, die Variationsgleichungen der neuen Parameter aufzustellen und zu integrieren, bis das gesamte vorgegebene Bahnmodell d. h. mit allen bekannten bzw. für eine spezielle Aufgabe benötigten oder gewünschten Bewegungseinflüssen abgearbeitet ist. In jedem Schritt wird ein neues Differentialgleichungssystem aufgestellt. Da die Struktur dieser Differentialgleichungssysteme identisch ist, bereitet die Aufstellung eines solchen neuen Systems keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Daher sollte die Anwendung eines automatisierten Rechnerverfahrens möglich sein. Ein formaler Überblick ist in Bild 3-26 zusammengestellt.

Bemerkenswert erscheint auch, dass die Parameter *G* (Flächenparameter) und η (räumliche Rotation) wie der Bahnradius *r* in jedem Schritt neu errechnet werden, jedoch keine neuen Parameter darstellen. Dies trifft nur auf die Parameter in der Polargleichung des Bahnradius zu.

Der Vorteil dieser Methodik dürfte in einer vereinfachten, eventuell automatisch durchführbaren Integration liegen. Die Methode bietet einen sehr klaren und durchsichtigen Einblick in das Bahnmodell und die Separation der einzelnen Einflüsse, so dass nicht wie üblich das gesamte meist hochkomplizierte Bewegungsmodell in einem einzigen Differentialgleichungssystem gelöst werden muss, was erfahrungsgemäß beliebig kompliziert und undurchschaubar werden kann. Die Folge der Rechenschritte gibt nicht notwendig eine sukzessive Verbesserung der Lösung, da die einzelnen Schritte von der möglicherweise willkürlichen Wahl des jeweils verwendeten Bahnmodells abhängen. Die bestmögliche Lösung in einem gewissen Genauigkeitsrahmen kann erst dann erreicht werden, wenn alle gleichgewichtigen Bewegungseinflüsse abgearbeitet sind.

Mit dieser Methodik sollte auch die Möglichkeit gegeben sein, die Wirkung einzelner Teilkomponenten der Bewegungseinflüsse **unabhängig** von anderen Komponenten zu untersuchen. Dies könnte etwa bei der Beurteilung einzelner Bewegungseinflüsse, der unterschiedlichen Auswirkung auf Bahnform und Bahnebenenorientierung, oder der Untersuchung von Resonanzen von Bedeutung sein.

Um die wechselseitige Auswirkung verschiedener Bewegungseinflüsse zu untersuchen, müssen diese aber insgesamt in die Untersuchung mit einbezogen werden. Sind einmal eine gewisse Anzahl von Bewegungseinflüssen in eine Anpassungskurve eingeflossen, können weitere durch Aufstellen der Anpassungsgleichung und damit ein neues System von Variationsgleichungen zur Berechnung der Parameter einer neuen Anpassungskurve berücksichtigt werden.

Das hier vorgestellte Verfahren kann jeweils in den einzelnen Anpassungs-Schritten ein iteratives Approximationsverfahren erfordern, wie es auch in den klassischen Verfahren üblich ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die einzelnen Variationsgleichungen gekoppelt sind, was über die Beschleunigungskomponenten auch in den meisten Anwendungen der Fall ist. Mit zunehmender Anpassungsdichte, wenn also schon eine größere Anzahl von Teilbeschleunigungen in den Anpassungsvorgang bereits eingebunden sind, wird der Integrationsprozess immer aufwendiger und kann Approximationsmethoden erfordern. Es wird also dem Geschick des Anwenders überlassen bleiben, in welcher Folge der Anpassungsprozess durchgeführt wird. Es wird aber andererseits bei unterschiedlicher Anpassungsfolge auch ein unterschiedlicher Erkenntnisgewinn über die Wirkungen der einzelnen Bewegungseinflüsse direkt zu erkennen sein Dies kann als ein besonderes Charakteristikum dieser Methode angesehen werden.

Um das im vorliegenden Bericht vorgestellte Verfahren mit den klassischen vergleichen zu können, muss bedacht werden, dass es das klassische Verfahren nicht gibt. In der Himmelsmechanik wurden im Verlauf ihrer Geschichte sehr verfeinerte Methoden entwickelt, um einzelne Probleme, historische gesehen allen voran das Drei- und das Mehrkörperproblem in den Griff zu bekommen. Das waren insbesondere die Arbeiten im Anschluss an *L. Euler* von *Lagrange*, *Hamilton* und *Jacobi*, *Delaunay*, *Poisson*, *Poincaré*, in teilweiser Konkurrenz dazu durch *Hansen* und seine Nachfolger. Diese Verfahren bestanden in einer geschickten Auswahl einer Näherungsdarstellung des aktuellen Problems sowie in einer Folge von Koordinatentransformationen. Weiterentwicklungen dieser Verfahren wurden in jüngerer Zeit zur analytischen Lösung des Satellitenproblems eingesetzt (*Brouwer*, *Kozai*, *Vinti*, *Musen* und viele andere). Dabei ist bemerkenswert, dass es „in der praktischen Astronomie selten vorteilhaft ist, absolute Koordinaten zu verwenden“[1]. Im Mehrkörperproblem, für welches das Sonnensystem modellhaft steht, werden relative Koordinaten in Bezug auf den Sonnenmittelpunkt an Stelle des Baryzentrums des Sonnensystems vorgezogen. Eine Besonderheit sind die *Jacobi*schen Koordinaten im Rahmen des Dreikörperproblems. Sie liefern unterschiedliche intermediäre Bahnen bei Bezug des zweiten Körpers auf den Zentralkörper einerseits und bei Bezug des dritten Körpers auf den Schwerpunkt des ersten und des zweiten Körpers[2]. Allen diesen Verfahren gemeinsam ist die Grundlage einer schon recht guten Ausgangsnäherung in Form einer *Kepler*bahn (Kegelschnitt) oder einer geeigneten intermediären Bahn. Dies ist auch im originalen von *Hansen* geschaffenen Verfahren der Fall, zu dem er seine idealen Koordinaten eingeführt hatte. Das hier vorgeschlagene Verfahren ist wesentlich elementarer und allgemeiner, ersetzt aber nicht notwendig die mathematisch anspruchsvollen Verfahren in den himmelsmechanischen Spezialfällen. Die Verfahren überlappen sich also, sie lassen sich nicht gegeneinander ausspielen. Gleichwohl soll versucht werden in der folgenden Tabelle 3-2 einige charakteristische Eigenschaften zusammenzustellen, welche die beiden Verfahren grundsätzlich unterscheiden.

[1] K. STUMPFF (1965), p.217

[2] Siehe etwa in K. STUMPFF (1965), pp.170-295, auch BUCERIUS, H., SCHNEIDER, M. (1968), p. 62ff, sowie etwa DZIOBEK, O. (1888); p. 213 ff , BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. (1961), p. 273 ff; CHEBOTAREV, G. S. (1967): insbesondere pp. 143-231;

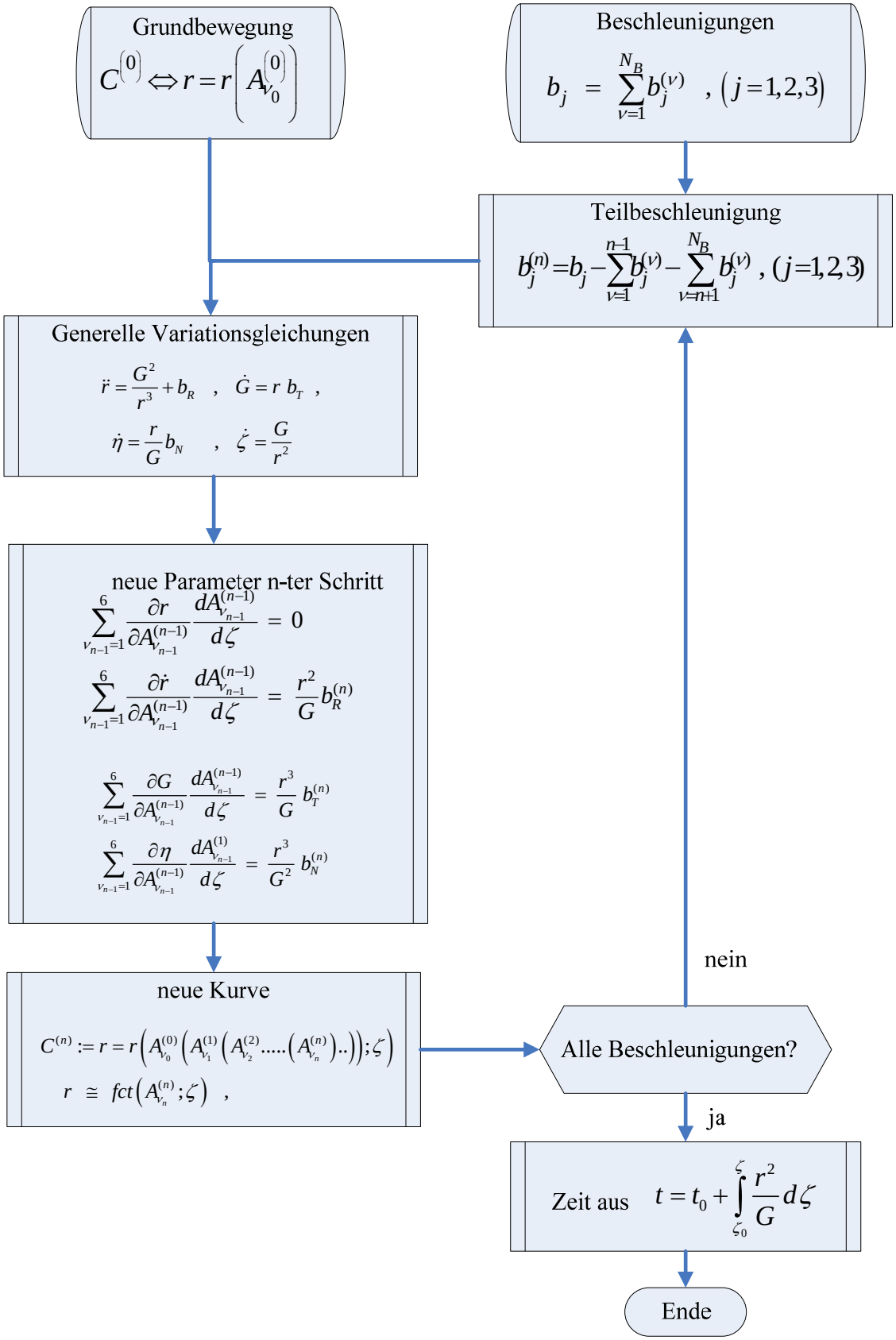

Bild 3-26: Formaler Überblick über die Methode der schrittweisen Anpassung zur Beschreibung eines beliebigen Bewegungsproblems

	Klassische Methoden der Himmelsmechanik	Das Verfahren der schrittweisen Anpassung
Basissystem	Inertiales System	*Hansen*-System
Basisgleichungen	Bewegungsgleichung im inertialen Basissystem	Bewegungsgleichung in Bezug auf das *Leibniz*-System
Bezugsbewegung	Keplerbewegung oder andere bekannte Bewegung (z.B. eine intermediäre Bahn)	Geradlinige Bewegung oder Bewegung auf beliebiger Bahnkurve
Anpassungsgleichungen	1. für inertialen Geschwindigkeitsvektor (3.286) 2. für inertialen Beschleunigungsvektor (3.288) bzw. (3.290)	1. für radiale Geschwindigkeit (3.198) 2. für die radiale Beschleunigung (3.202) 3. ergänzende Formeln (3.195): Variation des Flächenparameters und des (versteckten) räumlichen Rotationswinkels, Flächensatz zum Bezug zur Zeit
Näherungsprinzip	Für das Aufstellen der Variationsgleichungen werden analytische Näherungsausdrücke zugrunde gelegt	Vor Beginn der Integration keine Näherung, stattdessen Separation einer geeigneten Beschleunigung, die möglichst ohne Nährungsverfahren bearbeitet werden kann. Näherungsverfahren erst während der Integration, wenn nicht anders bearbeitbar
Variationsgleichungen und ihre Bearbeitung	Einmaliger Ansatz der Variationsgleichungen in den Elementen, rechte Seiten vergleichsweise kleine Größen: „Störungen“; *Lagrange*sche Planetengleichungen (Störfunktion, konservative Kräfte); *Gauss*’sche Planetengleichungen (Beschleunigungskomponenten im *Leibniz*-System) Lösung durch sukzessive Approximation der einmal aufgestellten Planetengleichungen	In allen Schritten neue Aufstellung der Variationsgleichungen ausgehend von der *Leibniz*gleichung sowie den Variationen des Flächenparameters und des zweiten *Hansen* Winkels, alle Bewegungseinflüsse werden in der Folge der Einzelintegrationen nach und nach gleichberechtigt berücksichtigt

Separation der Bewegungseinflüsse	Nach Möglichkeit werden säkulare Bewegungseinflüsse als erstes berücksichtigt und die säkular „gestörten Elemente“ als Variable bei der Berücksichtigung periodischer „Störungen“ verwendet	Die einzelnen Bewegungseinflüsse (Teilbeschleunigungen) werden in grundsätzlich willkürlicher Weise separiert und in Einzelschritten integriert. Die jeweils neu aufzustellenden Variationsgleichungen sind formal identisch.
Integrationsvariable	Zeit, gewöhnlich ersetzt durch eine Anomalie (wahre oder exzentrische oder mittlere Anomalie), bisweilen auch *Hansen*’scher Bahnwinkel	In allen Fällen *Hansen*’scher Bahnwinkel
Bewegung im Raum	Inklination und Knoten (Rektaszension bzw. eklipt. Länge) sind untrennbare Bestandteile der Bahnelemente und definieren die Zuordnung der Bewegung zu einem inertialen Raum.	Die Bewegung im Raum wird ausschließlich über die Bewegung des zweiten *Hansen*-Winkels (der Rotation um den momentanen Ortsvektor) bestimmt. Durch zusätzliche Integration können Knoten und Inklination erhalten werden.
Darstellung der Ergebnisse	Reihendarstellung in den Bahnelementen (Keplerelemente, nichtsinguläre Elemente, kanonische Elemente, Positionselemente), die Bestandteile eines Zustandsvektors in einem inertialen Raum sind	In jedem Einzelschritt rein geometrisch eine Bahnkurve, die das bisher berücksichtigte Bahnmodell (=Summe der erfassten Beschleunigungen) einschließt: Darstellung im *Leibniz*-System, erst nach Abschluss des gesamten Integrationsprozesses Bezug auf ein inertiales System
Zeitzuordnung	Je nach Verfahren wird der Zeitbezug durch einmalige oder wiederholte Anwendung der Kepler Gleichung aus der mittleren Anomalie berechnet	Nach Abschluss des gesamten Integrationsprozesses wird der Zeitbezug durch einmalige Integration des Flächensatzes hergestellt

Tabelle 3-2: Einige wesentliche Unterschiede zwischen den klassischen Verfahren und dem in dem vorliegenden Bericht erarbeiteten neuen Integrationsverfahren

4 Beispiele zur Demonstration des Integrationsverfahrens

Das im vorherigen Abschnitt andiskutierte allgemeine Verfahren zur Integration von Bewegungsproblemen mit schrittweiser Anpassung soll in diesem Abschnitt mit einigen charakteristischen Beispielen etwas eingeübt werden. Weitere Beispiele wurden in der Herleitung des Verfahrens[1] vorgestellt.

4.1 Beispiel einer Tangentialbeschleunigung

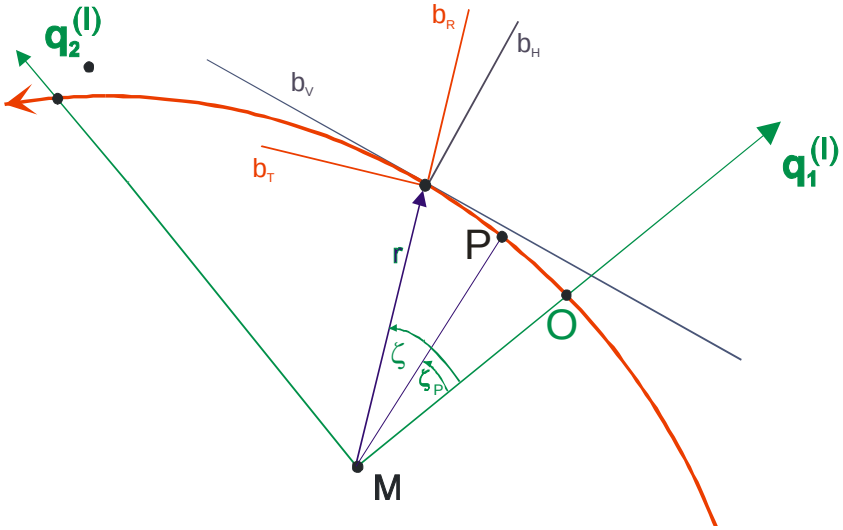

Bild 4-1: Zusammenhang von radialer und transversaler Beschleunigung b_R ,b_T mit tangentialer und hauptnormaler Beschleunigung b_V ,b_H. Anpassung einer beliebigen Bewegung mit einer Geraden g

Grundbewegung: Die Ausgangsbahn werde als „ungestörte“ geradlinige gleichförmige Bewegung angesetzt. Diese Bahn wird somit durch das System

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta}\dot{\zeta} \quad , \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + r\,G\,\mathbf{q}_0$$

$$r = \frac{G}{V\cos(\zeta-\zeta_P)} = \frac{r_P}{\cos(\zeta-\zeta_P)} \quad , \quad \dot{r} = V\sin(\zeta-\zeta_P) \quad , \quad \frac{dr}{d\zeta} = r\tan(\zeta-\zeta_P)$$

$$r\dot{\zeta} = V\cos(\zeta-\zeta_P) \quad , \quad \dot{\eta} = 0 \quad , \quad \dot{\zeta} = \frac{G}{r^2}$$

beschrieben. Die Parameter („Elemente“) dieser Bewegung sind V, G bzw. r_p und ζ_P sowie die Anfangszeit t_0, bei räumlicher Bewegung außerdem erweitert durch die „Anfangsraumwinkel“ $i^{(0)}, \Omega^{(0)}$.

[1] Abschnitt 3.2.5, 3.2.6, 3.3, 3.4

1. Bewegungsannäherung: Wir wollen nun folgende „Störung“ in tangentialen Koordinaten[1] annehmen:

$$b_V^{(1)} := -\rho B\left(V\right)^2 \quad , \quad b_H^{(1)} := 0 \quad , \quad b_N^{(1)} := 0 \quad .$$

Hier werden die Parameter ρ und *B* als konstant angenommen[2].

1. Lösungsvorschlag:

Nach den Gleichungen (3.85) auf Seite 86 und (3.8) sowie (3.9) auf Seite 67 ist dann

$$\frac{dV}{d\zeta} = -\frac{r^2}{G}\rho BV^2 \quad , \quad \frac{d\zeta_P}{d\zeta} = \frac{r^2}{V\,G} b_H^{(1)} = 0 \quad , \quad \zeta_P = const. \quad ,$$

$$\dot{\mathbf{c}}_0 = -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 = -\frac{r}{G}\, b_N^{(1)}\mathbf{q}_0 = 0 \quad , \quad \mathbf{c}_0 = const. \quad \left(i^{(1)} \cong const., \Omega^{(1)} \cong const.\right) .$$

Da nach Definition (3.91) mit der Perizentrumsdistanz r_P im Fall der „ungestörten“ geradlinigen Bewegung

$$G = r_P V$$

und nach Variationsgleichung (3.93) auf Seite 87

$$\dot{r}_P = \frac{r_P}{V}\tan\left(\zeta-\zeta_P\right) b_H = 0 \quad , \; r_P = const. \quad ,$$

sind „Flächenparameter“ *G* und Geschwindigkeit *V* in diesem Fall direkt zueinander proportional. Die zweite der Variationsgleichungen (3.73) auf Seite 84 lautet mit $\mathrm{r}\,\mathrm{r}_\mathrm{P} = \cos\left(\zeta-\zeta_\mathrm{A}\right)$ und $G = r_P V$

$$\frac{dV}{d\zeta} = -r_P\,\rho B\frac{V}{\cos^2\left(\zeta-\zeta_P\right)}$$

bzw.

$$\frac{dV}{V} = -r_P\,\rho B\frac{d\zeta}{\cos^2\left(\zeta-\zeta_P\right)}$$

mit der Lösung

$$\ln V = \ln V^{(1)} - r_P\,\rho B\tan\left(\zeta-\zeta_P\right) \quad , \left(V^{(1)} = const.\right)$$

oder

$$V = \frac{V^{(1)}}{e^{r_P\rho B\tan\left(\zeta-\zeta_P\right)}} = fct\left(V^{(1)}, r_P, \zeta_P, (\rho, B); \zeta\right) \quad .$$

Somit folgt für den Flächenparameter

---

[1] vgl. Abschnitt 3.2.5.4

[2] Im Zusammenhang mit Untersuchungen des Luftwiderstandes können die Parameter ρ und *B* nicht als konstant angenommen werden, auch die Geschwindigkeit *V* muss dann modifiziert angesetzt werden. Im vorliegenden Kapitel geht es jedoch nicht um die physikalische Interpretation eines Bewegungsvorganges, sondern lediglich um die Demonstration eines mathematischen Verfahrens.

$$G = \frac{G^{(1)}}{e^{r_p \rho B \tan(\zeta-\zeta_P)}} = fct\left(V^{(1)}, r_p, \zeta_P, (\rho, B); \zeta\right) \ , \ G^{(1)} := r_P V^{(1)} = const. \ .$$

Die „Störung“ $b_V^{(1)}$, $b_H^{(1)} = b_N^{(1)} = 0$ beeinflusst nicht die Kurve $r = r(\zeta)$, also die Anpassungs-Gerade, somit auch nicht die Variation in Bezug auf den Bahnwinkel

$$\frac{dr}{d\zeta} = r \tan(\zeta - \zeta_P) \ ,$$

wohl aber die Bewegung längs dieser Kurve mit

$$\dot{r} = V \sin(\zeta - \zeta_P) = fct\left(V^{(1)}, r_p, \zeta_P; \zeta\right) \ ,$$

$$r\dot{\zeta} = V \cos(\zeta - \zeta_P) = \frac{G}{r} = fct\left(V^{(1)}, r_p, \zeta_P; \zeta\right) \ .$$

Um die Bewegung in der Zeit beschreiben zu können, muss das Zeitintegral

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2}$$

gelöst werden. Die Differentialgleichung lautet

$$dt = \frac{r^2}{G} d\zeta = r_P \frac{d\zeta}{\cos^2(\zeta - \zeta_P)}$$

mit dem Integral

$$t = t^{(1)} + r_P \tan(\zeta - \zeta_P) \ .$$

Vorgabe der Zeit ($t^{(1)}$ ist eine Anfangszeit) erlaubt die Berechnung des Bahnwinkels aus

$$\zeta = \zeta_P + \arctan \frac{t - t^{(1)}}{r_P} \ .$$

Die neue Bewegung hat die (jetzt konstanten) Parameter $t^{(1)}, \zeta_P, r_P, V^{(1)}, (i^{(1)}, \Omega^{(1)})$. Die Kurvengleichung lautet (wieder wie im ungestörten Fall)

$$r = \frac{r_P}{\cos(\zeta - \zeta_P)} = r\left(r_P, \zeta_P; \zeta\right) \ .$$

Die Variation des Radius

$$\dot{r} = \frac{V^{(1)} \sin(\zeta - \zeta_P)}{e^{r_P \rho B \tan(\zeta-\zeta_P)}} = \dot{r}\left(V^{(1)}, r_P, \zeta_P; \zeta\right)$$

charakterisiert die Abnahme der Variation des Radius als Folge der Abbremsung b_V in tangentialer Richtung. Ferner ist

$$r\dot{\zeta} = \frac{V^{(1)} \cos(\zeta - \zeta_P)}{e^{r_P \rho B \tan(\zeta-\zeta_P)}} = r\dot{\zeta}\left(V^{(1)}, r_P, \zeta_P; \zeta\right) \ ,$$

somit der Zustandsvektor

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\mathbf{q}_0 \ ,$$

wobei $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0$ auf das $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen*-System bezogen sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(I)} \sin\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \cos\zeta \\ \mathbf{c}_0 &= \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)} \quad . \end{aligned}$$

Damit ist das aktuelle Bewegungsproblem vollständig gelöst.

2. Lösungsvorschlag:

Die bisherige Lösung des „Störproblems“ $b_V = -\rho B V^2$ orientierte sich an den in den Abschnitten 3.2.5.4 (ab Seite 85) und 3.2.5.5 hergeleiteten Beziehungen und den Variationsgleichungen in tangentialer Richtung und Hauptnormalenrichtung. Im Folgenden soll der Anpassungsvorgang in elementarer Weise ausschließlich mit den Formeln hergeleitet werden, wie sie in Abschnitt 3.10 ab Seite 127 allgemeingültig aufgestellt wurden und wie sie (eventuell) zum automatischen Rechnen verwendet werden könnten.

Die Grundbewegung sei die geradlinige Bewegung auf der Kurve

$$C^{(0)} \equiv r = \frac{G}{V\cos(\zeta - \zeta_P)} = \frac{r_P}{\cos(\zeta - \zeta_P)} \tag{4.1}$$

mit der radialen und der transversalen Geschwindigkeit wegen $G = r_P V$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V\sin(\zeta - \zeta_P) = \frac{G\sin(\zeta - \zeta_P)}{r_P} \\ r\dot{\zeta} &= V\cos(\zeta - \zeta_P) \quad . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die „Störbeschleunigung“ in tangentialer Richtung

$$b_V^{(1)} = -\rho B V^2 \;,\; b_H^{(1)} = b_N^{(1)} = 0 \tag{4.3}$$

hat mit den Beziehungen (3.84) auf Seite 86 die Zerlegung in den radialen und den transversalen Anteil

$$\begin{aligned} b_R^{(1)} &= -\rho B V^2 \sin(\zeta - \zeta_P) \\ b_T^{(1)} &= -\rho B V^2 \cos(\zeta - \zeta_P) \quad . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die erste der Anpassungsgleichungen (3.231) auf Seite 130 lautet dann

$$\frac{\partial r}{\partial r_P}\frac{dr_P}{d\zeta} + \frac{\partial r}{\partial \zeta_P}\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = 0 \quad .$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial r_P} &= \frac{1}{\cos(\zeta - \zeta_P)} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta_P} &= -\frac{r_P \sin(\zeta - \zeta_P)}{\cos^2(\zeta - \zeta_P)} \end{aligned} \tag{4.5}$$

folgt aus der ersten Anpassungsgleichung

$$\frac{\partial r_P}{\partial \zeta} = \frac{\partial \zeta_P}{\partial \zeta} r_P \tan(\zeta - \zeta_P) \quad . \tag{4.6}$$

Die zweite der Anpassungsgleichungen (3.231) auf Seite 130 liefert

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial r_P}\frac{dr_P}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta_P}\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_R \quad . \tag{4.7}$$

Die erste der Variationsgleichungen (3.233) ergibt die Differentialgleichung

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T^{(1)} = -\rho B r^2 \frac{G}{r_P} \quad , \tag{4.8}$$

ferner ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} &= \frac{G}{r_P}\cos(\zeta - \zeta_P) = \frac{G}{r} \\
\frac{\partial \dot{r}}{\partial r_P} &= -\frac{G}{r_P^2}\sin(\zeta - \zeta_P) \\
\frac{\partial \dot{r}}{\partial G} &= \frac{\sin(\zeta - \zeta_P)}{r_P} \\
\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta_A} &= -\frac{G}{r_P}\cos(\zeta - \zeta_P) \quad .
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Mit den Beziehungen (4.8) und (4.9) sowie mit der Störbeschleunigung $b_R^{(0)}$ aus (4.4) wird

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial G}\frac{dG}{d\zeta} = -\rho B r^2 \frac{G}{r_P^2}\sin(\zeta - \zeta_P) = \frac{r^2}{G} b_R^{(1)} \quad .$$

Von der zweiten Anpassungsgleichung bleibt somit wegen Beziehung (4.6) nur

$$\left[\frac{\partial \dot{r}}{\partial r_P} r_P \tan(\zeta - \zeta_P) + \frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta_A}\right]\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = 0$$

bzw. mit den Ausdrücken (4.9)

$$\frac{G}{r_P \cos(\zeta - \zeta_P)}\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = 0 \quad .$$

Diese Bedingungsgleichung kann nur für

$$\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = 0$$

erfüllt werden, somit wegen Gleichung (4.6) auch

$$\frac{\partial r_P}{\partial \zeta} = 0$$

und es bleiben die Lösungen

$$\zeta_P = const. \quad , \quad r_P = const. \quad .$$

Die Differentialgleichung (4.8) führt auf

$$\frac{dG}{d\zeta} = -\rho B \frac{r_P G}{\cos^2(\zeta - \zeta_P)}$$

bzw.

$$\frac{dG}{G} = -\rho B r_P \frac{d\zeta}{\cos^2(\zeta - \zeta_P)}$$

mit dem Integral

$$\ln G = const. - \rho B r_P \tan(\zeta - \zeta_P) \quad .$$

Wird für die Integrationskonstante $\ln A_1^{(1)} := const.$ gewählt, folgt

$$G = \frac{A_1^{(1)}}{e^{\rho B r_P \tan(\zeta - \zeta_P)}} \quad ,$$

wegen $G = r_P V$ auch

$$V = \frac{A_1^{(1)}}{r_P e^{\rho B r_P \tan(\zeta - \zeta_P)}} = \frac{A_2^{(1)}}{e^{\rho B r_P \tan(\zeta - \zeta_P)}} \quad ,$$

wobei als neue Konstante

$$A_2^{(1)} := \frac{A_1^{(1)}}{r_P}$$

angenommen wurde. Die Lösung des Zeitintegrals $\dot{\zeta} = G / r^2$ und die weitere Lösung des Problems werden wie im zuvor geschilderten ersten Lösungsvorschlag behandelt.

Anmerkung: Die erste der Gleichungen (4.9) zeigt eine interessante Vereinfachung der zweiten Anpassungsgleichung im Fall einer Grundanpassung mit einer Geraden: es ist stets

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} \quad , \tag{4.10}$$

wodurch sich die Anpassungsgleichung (4.7) vereinfacht zu (bezogen auf den n-ten Integrationsschritt)

$$\sum_{\nu_{n-1}=1}^{6} \frac{\partial \dot{r}}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}} \frac{dA_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}}{d\zeta} = \frac{r^2}{G} b_R^{(n)} \quad . \tag{4.11}$$

3. Lösungsvorschlag:

Um das in diesem Kapitel entwickelte Lösungsverfahren noch besser kennen zu lernen, werde noch ein weiterer Lösungsweg des „Störproblems“ $b_V^{(1)} = -\rho B V^2$, $b_H^{(1)} = b_N^{(1)} = 0$ versucht. Wie in der vorhergehenden Herleitung können die Formeln (4.1) bis (4.7) übernommen werden. Nach der Zerlegung in einen radialen und einen transversalen („Stör“) Beschleunigungsanteil (nach den Gleichungen (4.4))

$$b_R^{(1)} = -\rho B V^2 \sin(\zeta - \zeta_P)$$
$$b_T^{(1)} = -\rho B V^2 \cos(\zeta - \zeta_P)$$

werde das „Störproblem“ aufgesplittet: Zunächst werde $b_R^{(1)}$ ausgewählt aber nicht $b_T^{(1)}$. Es werde also das „Störproblem“

$$b_R^{(1)},\ b_T^{(1)} = b_N^{(1)} = 0$$

zu lösen versucht. Die erste Anpassungsgleichung liefert wieder die Beziehung (4.6)

$$\frac{\partial r_P}{\partial \zeta} = \frac{\partial \zeta_A}{\partial \zeta}\, r_P \,\tan\left(\zeta - \zeta_P\right) \quad .$$

Die Variationsgleichung des Flächenparameters (4.8) gibt jetzt aber

$$\frac{dG}{d\zeta} = 0 \quad ,$$

mit der Lösung $G = const.$. Auch hier ist wie in der ersten der Gleichungen (4.9)

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \zeta} = \frac{G}{r} \quad .$$

Es bleibt somit von der zweiten Anpassungsgleichung (4.7) in diesem Fall das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\zeta_P}{d\zeta} = \rho\, B\, r_P^2 \,\tan\left(\zeta - \zeta_P\right)$$

$$\frac{dr_P}{d\zeta} = \rho\, B\, r_P^3 \,\tan^2\left(\zeta - \zeta_P\right) \quad ,$$

das analytisch nur sehr unangenehm zu behandeln ist. Aus diesem Beispiel ist zu ersehen, dass das besprochene Verfahren zur Anpassung beliebiger Bewegungen durchaus flexibel gehandhabt werden muss um einen Anpassungsvorgang durchsichtig bearbeiten zu können. Wir wollen den dritten Lösungsvorschlag daher an dieser Stelle nicht weiter behandeln[1].

Anmerkung: Die drei Lösungsvorschläge unterscheiden sich durch Wahl der Variationsgleichungen sowie durch unterschiedliche Folge in der Hinzunahme der einzelnen Störbeschleunigungen (siehe nach Bild 4-1 auf Seite 148 und Tabelle 4-1).

	1. Lösungsvorschlag	2. Lösungsvorschlag	3. Lösungsvorschlag
Bewegungseinflüsse	Tangentiale und hauptnormale Beschleunigung b_V, b_H	Radiale und transversale Beschleunigung b_R, b_T	b_R in einem ersten Schritt
Lösung	Geschwindigkeit V	Flächenparameter G	Analytisch unbefriedigend
Weitere Lösung	$G = r_P\, V$	$V = G / r_P$	

Tabelle 4-1: Zum Vergleich der drei Lösungsvorschläge des Beispiels 4.1

[1] Diese und alle anderen Differentialgleichungen können auf die übliche Weise numerisch bearbeitet werden. Das ist aber nicht das Thema dieses Berichtes.

4.2 Beispiel einer konstanten radialen Schubbeschleunigung

Im Rahmen einer Studie zu einer interplanetaren Transferbahn von der Erde zu einem kleinen Planeten[1] wurde angenommen, dass an Stelle von chemischen Triebwerken der benötigte Schub auf der Transferbahn mit Ionentriebwerken erzeugt wird.

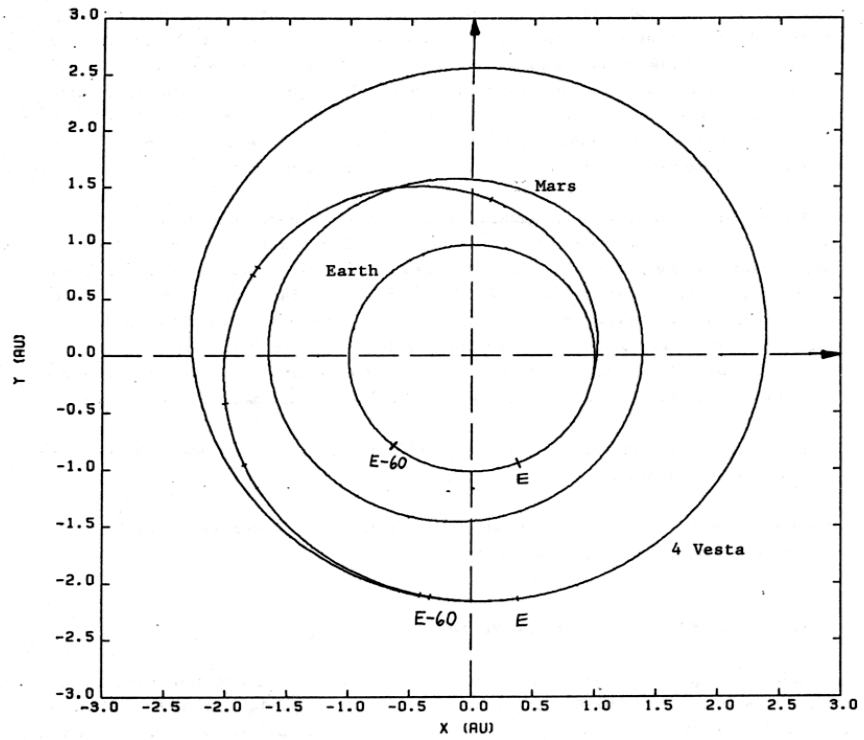

Bild 4-2: Die Übergangsbahn aus der Erdbahn zum kleinen Planeten 4/Vesta mit unterschiedlich langen Bahnbögen, in denen die Ionentriebwerke eingeschaltet sind. Beispielbahn aus der Studie ECKSTEIN, M. C. et al. (1983) als Muster einer interplanetaren Übergangsbahn. Die Bahn im Bild hat eine Dauer von 687 Tagen, der letzte geschobene Bahnast beträgt 60 Tage bei einem Schub von 20mN mit den Anstellwinkeln β=20°, γ=10°. Das Rendezvous mit dem kleinen Planeten war geplant für den 14. Juli 1989.

Nach Verlassen der Erdbahn hat der Raumflugkörper die heliozentrische Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_\odot}{r^2}\mathbf{r}_0 + P_S \; AE^2 \; \frac{c_R A_R}{m} \; \frac{1}{r^2}\mathbf{r}_0 + \ddot{\mathbf{r}}_S \tag{4.12}$$

wobei der erste Term das Zweikörperproblem Sonne-Raumflugkörper beschreibt mit der heliozentrischen Gravitationskonstante[2]

$$\mu_\odot = 1.32712438 \times 10^{20}\, m^3/s^2 ,$$

r ist der heliozentrische Ortsvektor des Raumflugkörpers.

Der zweite Term beschreibt die Beschleunigung des Raumflugkörpers durch den Strahlungsdruck[1] der Sonne mit den Größen

---

[1] ECKSTEIN, M. C. et al. (1983), insbesondere pp.60-63

[2] SEIDELMANN, P. K. ed. (1992), p. 696

$$P_S = 4.51 \times 10^{-6} \ \frac{kg}{m\,s^2} = \text{Solardruck in 1 AE}^{\ 2},$$

c_R - Reflektivitätsfaktor, bei Erdsatelliten üblicherweise zu c_R=1.3 angenommen, (der Wert im Allgemeinen schwankt zwischen 0 ⇔ durchscheinend, d.h. kein Effekt der Strahlung auf den Raumflugkörper, 1.0 ⇔ alle Strahlung wird absorbiert, 2.0 ⇔ alle Strahlung wird reflektiert, somit doppelter Effekt auf den Raumflugkörper),

A_R - Querschnittsfläche [m^2] des Raumflugkörpers in Sonnenrichtung, somit die Angriffsfläche für Solardruck; im Fall der Studie hat der untersuchte Raumflugkörper einen Solarkonzentrator mit Durchmesser 12m entsprechend $A_R \approx 113 m^2$,

m - Masse [kg] des Raumflugkörpers, in der Studie angenommen zu $m = 225 kg$,

AE – Astronomische Einheit, 1 AE = 1.49597870×10^8 km.

Der zweite Term in Gleichung (4.12) kann mit dem konstanten Wert B_S zusammengefasst werden:

$$B_S := P_S \ AE^2 \, c_R \, A_R \ , \ b_{PR} := \frac{B_S}{m\,r^2} \quad . \tag{4.13}$$

Der dritte Term beschreibt die Schubbeschleunigung durch die Ionentriebwerke mit den Komponenten in radialer, transversaler und normaler Bewegungsrichtung

$$\ddot{\mathbf{r}}_S = b_{SR}\,\mathbf{r}_0 + b_{ST}\,\mathbf{q}_0 + b_{SN}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{4.14}$$

Die Schubbeschleunigung muss im Prinzip sowohl nach Betrag wie nach Richtung variabel angenommen werden. Der Schub $\mathbf{F}_S$ wird wie in der Raketentechnik üblich durch Massenausstoss erzeugt, was zu einem Massenverlust

$$\dot{m} = \left|\mathbf{F}_S\right| / c_{eff} \tag{4.15}$$

führt, wenn c_{eff} die effektive Ausströmgeschwindigkeit bedeutet. In der Studie wurde für die Ionentriebwerke mit einem Schub im Bereich

$$\left|\mathbf{F}_S\right| = 5.....10\,mN \quad \text{pro Triebwerk}$$

gerechnet mit dem effektiven spezifischen Impuls

$$c_{eff} = 27.78\,km/s \quad \text{pro } 10\text{m}N \text{ Triebwerk.}$$

Es wurde vereinfachend angenommen, dass Schub und Schubrichtung streckenweise konstant seien. Da vier Triebwerke zu je 10 mN gebündelt werden, beträgt der Massenverlust

$$\dot{m} = \frac{\left|\mathbf{F}_S\right|}{c_{eff}} = \frac{40}{27.78}\frac{mN}{km/s} = 1.4398848 \times 10^{-6}\,\frac{kg}{s} \quad .$$

Beispiel eines Lösungsweges:

Eine wesentliche Aussage der vorliegenden Arbeit ist die Gleichwertigkeit unterschiedlicher Lösungswege um ein Bewegungsproblem zu lösen. Um das Lösungsverfahren zu demonstrieren werde im Folgenden (unter Vereinfachung der in der genannten Studie behandelten all-

[1] zum Strahlungsdruck siehe etwa in: CAPELLARI, J. O. ET AL. (1976), PP. 4-60 – 4-63

[2] Siehe etwa in VALLADO, D. A. (2001), p. 544

gemeingültigen Lösung) angenommen, dass der Schub konstant in radialer Richtung über den gewünschten Zeitraum wirke:

$$b_{SR} = const. \neq 0 \ , \ b_{ST} = b_{SN} = 0 \qquad .$$

Ausgehend von der *Leibniz*gleichung

$$\ddot{r} = G^2 / r^3 + b_R$$

und der allgemeinen Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R \, \mathbf{r}_0 + b_T \, \mathbf{q}_0 + b_N \, \mathbf{c}_0$$

lauten die Beschleunigungskomponenten in diesem Fall

$$\begin{aligned} b_R &= b_{KR} + b_{PR} + b_{SR} = -\frac{\mu_\odot}{r^2} + \frac{B_S}{r^2 m} + b_{SR} \quad , \\ b_T &= b_{ST} = 0 \ , \ b_N = b_{SN} = 0 \ , \ B_S = const. \neq 0 \ , \ b_{SR} = const. \neq 0 \ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Erster Lösungsschritt

In der radialen Beschleunigung b_R (4.16) entspricht das erste Glied der Zweikörperbewegung des Raumflugkörpers um die Sonne (ein Dreikörperproblem Sonne-Erde-Raumsonde werde in diesem Zusammenhang vernachlässigt), dessen Lösung eine Kegelschnittbewegung nach Abschnitt 3.3 ab Seite 89 ist. Es fällt auf, dass sowohl die Keplerbewegung wie der Einfluss durch den Strahlungsdruck (mathematisch gesehen zufällig!) dem $1/r^2$ Abstandsgesetz genügen. Allerdings wird durch das Brennen der Ionentriebwerke ein Massenverlust $\dot{m}$ bewirkt (vgl. Formel (4.15)), der die radiale Beschleunigung modifiziert. Um diesen Einfluss zu analysieren soll angenommen werden, dass der Massenverlust so klein ist, dass eine Linearisierung erlaubt ist

$$m = m(\zeta) = m_0 + \frac{\Delta m}{\Delta \zeta} \, \Delta\zeta \qquad , \quad \frac{\Delta m}{\Delta \zeta} \hat{=} \dot{m} \frac{r^2}{G} \quad , \tag{4.17}$$

wobei m_0 die konstante Anfangsmasse des Raumflugkörpers bei Start aus der Erdbahn sei, $\Delta m / \Delta \zeta$ sei die als konstant angenommene Massenänderung umgerechnet für Bezug auf die Winkeldifferenz $\Delta\zeta$ (richtiger wäre proportional zur Zeit, was aber wegen der kleinen Größen vernachlässigt werden soll). Diese kann (ohne Einschränkung) auf den Anfangswinkel $\zeta_0 = 0°$ bezogen werden. Dann ist es möglich, die durch den Strahlungsdruck bewirkte radiale Beschleunigung in einen Anteil mit konstanter Masse und einen zweiten Anteil, der den Massenverlust enthält, aufzuspalten:

$$b_{PR} =: b_{PR0} + b_{PR1} \approx \frac{B_S}{m_0} \frac{1}{r^2} - \frac{B_S}{m_0^{\,2}} \frac{1}{r^2} \frac{\Delta m}{\Delta \zeta} \Delta\zeta \quad . \tag{4.18}$$

Der erste Teil kann (wenn alle Größen in B_S als konstant angenommen werden können) auf Grund seiner formalen Übereinstimmung mit dem Anteil der „ungestörten“ Keplerbewegung kombiniert werden:

$$b_{KR} + b_{PR0} = \left(-\mu_\odot + \frac{B_S}{m_0} \right) \frac{1}{r^2} \quad . \tag{4.19}$$

Am durchsichtigsten werden die Verhältnisse, wenn von einer geradlinigen Bewegung als Grundbewegung ausgegangen wird. Dann kann der Integrationsweg von Abschnitt 3.3.3 ab

Seite 94 mit der modifizierten Radialbeschleunigung $b_{KR}+b_{PR0}$ nachvollzogen werden. In der Polargleichung der geradlinigen Bewegung (3.105)

$$r = \frac{G}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \tag{4.20}$$

haben die Parameter die Variationsgleichungen (3.104), die im vorliegenden Beispiel die Gestalt

$$\frac{dg_1}{d\zeta} = \frac{1}{G}\left(-\mu_\odot + \frac{B_S}{m_0}\right)\sin\zeta \quad , \quad \frac{dg_1}{d\zeta} = -\frac{1}{G}\left(-\mu_\odot + \frac{B_S}{m_0}\right)\cos\zeta \tag{4.21}$$

annehmen. Sie haben wegen b_T=0 und deswegen G=const. die Integrale (vgl. die Integrale (3.126))

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1(\zeta) = g_{11} + \frac{1}{G}\left(\mu_\odot - \frac{B_S}{m_0}\right)\cos\zeta \\ g_2 &= g_2(\zeta) = g_{21} + \frac{1}{G}\left(\mu_\odot - \frac{B_S}{m_0}\right)\sin\zeta \end{aligned} \tag{4.22}$$

mit den neuen Integrationskonstanten g_{11}, g_{21}, die durch die neuen Konstanten g_{100}, ζ_B mit

$$g_{11} = g_{100}\cos\zeta_B \quad , \quad g_{21} = g_{100}\sin\zeta_B \quad , \quad g_{100} = \sqrt{g_{11}^2 + g_{21}^2} \tag{4.23}$$

ersetzt werden können. Werden die Funktionen g_1, g_2 in die Polargleichung (4.20) eingesetzt, ergibt sich die Polargleichung eines Kegelschnitts

$$r = \frac{p}{1 + k_1\cos\zeta + k_2\sin\zeta} \quad , \tag{4.24}$$

wenn die Exzentrizität durch

$$e := \frac{m_0 G\, g_{100}}{m_0\,\mu_\odot - B_S} = \frac{\dfrac{G}{\mu_\odot} g_{100}}{1 - \dfrac{B_S}{m_0\,\mu_\odot}} \quad , \tag{4.25}$$

mit den neuen Parametern

$$k_1 := e\cos\zeta_B \quad , \quad k_2 := e\sin\zeta_B \tag{4.26}$$

und der Kegelschnittparameter durch

$$p := \frac{m_0 G^2}{m_0\,\mu_\odot - B_S} = \frac{\dfrac{G^2}{\mu_\odot}}{1 - \dfrac{B_S}{m_0\,\mu_\odot}} = \frac{eG}{g_{100}} \tag{4.27}$$

erklärt werden. Der Strahlungsdruck bewirkt also eine Aufblähung der Kegelschnittbahn gegenüber einer reinen Keplerbewegung (=Zweikörperbewegung), wobei der Flächenparameter G unverändert bleibt, während Exzentrizität und Kegelschnittparameter modifiziert werden.

Wird die Bahn der Erde um die Sonne als elliptische Keplerbahn aufgefasst, lautet der Kegelschnittparameter der Erdbahn

$$p_{\sphericalangle} = \frac{G^2}{\mu_\odot} = a_{\sphericalangle}\left(1 - e_{\sphericalangle}^2\right) \quad , \tag{4.28}$$

für die durch den radialen Anteil des Strahlungsdrucks modifizierte Bahn mit Formel (4.27)

$$p = \frac{p_{\sphericalangle}}{1 - \frac{B_S}{m_0\,\mu_\odot}} = a\left(1 - e^2\right) \tag{4.29}$$

mit den Unbekannten große Halbachse *a* und Exzentrizität *e*. Um diese zu bestimmen, kann von folgender Überlegung ausgegangen werden: Ausgehend von einer Anpassungskurve wird eine bis dahin nicht berücksichtigte Beschleunigung („Störung“) auf die Bewegung zusätzlich zur bisher berücksichtigten ausgeübt. Von diesem Moment an wird die neue Bahn eingeschlagen, ihr Beginn muss also auf der ursprünglichen Bahn liegen. Dies kann irgendein beliebiger günstiger Punkt sein, bei interplanetaren Bahnen etwa das Aphel der Bahn um Treibstoff und Zeit zu sparen. Im vorliegenden Bericht, der sich beliebigen Bahnen widmet, ist stets das Perizentrum definiert, nicht aber das Apozentrum. Aus diesem Grund und um das Verfahren anschaulich zu halten, werde der Übergang im Perihel der Bahn gestartet. In diesem Punkt unter der Annahme einer elliptischen Bewegung hat der bewegte Körper den Radius

$$r_P = r\left(\zeta = \zeta_B\right) = \frac{p_{\sphericalangle}}{1 + e_{\sphericalangle}} \quad . \tag{4.30}$$

Auf der neuen Bahn sei ebenfalls das Perihel angenommen. Mit dem neuen in Formel (4.29) berechneten Kegelschnittparameter lautet der Radius

$$r_P = r\left(\zeta = \zeta_B\right) = \frac{p}{1 + e} \quad ,$$

woraus die neue Exzentrizität berechnet werden kann:

$$e = \frac{p}{r_P} - 1 \quad . \tag{4.31}$$

Die modifizierte Halbachse folgt dann, da es sich um eine elliptische Bewegung handelt, aus der bekannten Beziehung

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \quad . \tag{4.32}$$

Die Beschleunigungsbeziehung (4.19) kann so interpretiert werden, dass die Bewegung der Raumsonde abläuft als ob die heliozentrische Gravitationskonstante um den Betrag B_S/m_0 variiert worden wäre und dann lautet

$$\mu = \mu_\odot - \frac{B_S}{m_0} \quad . \tag{4.33}$$

Diese neue Kegelschnittbahn soll nun als Anpassungskurve zur Berücksichtigung der weiteren Beschleunigungskomponenten dienen.

Der Zeitbezug wird (wie üblich) über das Zeitintegral (hier: zweites *Kepler*sches Gesetz) $r^2\,\dot{\zeta} = G$ in der bekannten Weise (eventuell durch Einbeziehung der *Kepler*-Gleichung) hergestellt. Da in diesem Beispiel eine normale Beschleunigung vernachlässigt wird, sind die

Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ des *Hansen*-Systems (eventuell nach den *Frenet*-Formeln des *Hansen*-Systems (2.142)) als unveränderlich anzunehmen. Die Lösung hat somit den Zustandsvektor

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= p\,\frac{\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta}{1 + k_1\cos\zeta + k_2\sin\zeta} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \sqrt{\frac{\mu_\odot}{p}}\left[-\left(k_2 + \sin\zeta\right)\mathbf{q}_1^{(I)} + \left(k_1 + \cos\zeta\right)\mathbf{q}_2^{(I)}\right] \quad .\end{aligned} \tag{4.34}$$

Die radiale Geschwindigkeit lautet nach Beziehung (3.123)

$$\dot{r} = \frac{G}{p}\left(k_1\sin\zeta - k_2\cos\zeta\right) \quad . \tag{4.35}$$

NUMERISCHES BEISPIEL: Zur Durchführung einer quantitativen Untersuchung werden die obigen Zahlen verwendet. Mit der mittleren großen Bahnhalbachse und der mittleren Exzentrizität der Erdbahn[1]

$$\begin{aligned}a_{\oplus\odot} &= 1.0000010178\,AE \mathrel{\hat{=}} 1.49598022261\times10^{8}\,km \\ e_{\oplus\odot} &= 0.016708617\end{aligned}$$

ergibt sich für den Flächenparameter der Erdbahn um die Sonne

$$G = \sqrt{\mu_\odot\, a_{\oplus\odot}\left(1 - e_{\oplus\odot}^2\right)} = 4.45510668693\times10^{9}\,\frac{km^2}{s} \quad .$$

Damit wird

$$\frac{\mu_\odot}{G} = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{p}} = 29.7888350\,\frac{km}{s} \quad .$$

Das ist die (mittlere Kreisbahn-) Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne, somit die Anfangsgeschwindigkeit für den Raumflugkörper beim Abflug aus der Erdbahn. Der Solardruck bewirkt ein Geschwindigkeitsinkrement mit dem Hilfswert bei der Strahlungsdruck-Anströmfläche A_R= 113 m^2:

$$B_S = \; 0.1482685900\times10^{11}\,\frac{kg\,km^3}{s^2} \quad , \quad \frac{B_S}{G} = 3.3278260\,\frac{kg\,km}{s} \quad .$$

Im Fall des Abflugs aus der Erdbahn mit der Anfangsmasse m_0 = 225 kg wird somit als Folge des relativ großen Solarkonzentrators das Geschwindigkeitsinkrement erhalten:

$$\Delta V_R = \frac{B_S}{G\,m_0} = 0.014790\,\frac{km}{s} \quad .$$

Ferner werden die Zahlenwerte benötigt:

$$\frac{B_S}{\mu_\odot} = 0.1117216\;\; kg \quad , \quad \frac{B_S}{m_0\,\mu_\odot} = 0.000496541 \quad , \quad \frac{B_S}{m_0} = 6.5897151111\times10^{8}\,\frac{km^3}{s^2} \quad .$$

Damit lautet die modifizierte heliozentrische Gravitationskonstante der untersuchten Bewegung (vgl. Formel (4.33))

[1] aus P. K. SEIDELMANN ET AL. (1992), p.700

$$\mu = \mu_{\odot} - \frac{B_S}{m_0} = 1.326465408 \times 10^{11} \frac{km^3}{s^2} \quad .$$

Die numerischen Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Ungestörte Bewegung	Bewegung mit Berücksichtigung durch Strahlungsdruck
Mittlerer Kegelschnittparameter	$p_{\earth} = G^2 / \mu_{\odot} = 0.999721840\,AE =$ $= 1.495562578 \times 10^8\,km$	$p = 1.000218489\,AE =$ $= 1.49674905981 \times 10^8\ \ km$
Periheldistanz	$r_{\mathrm{P}} = 0.983292384 AE =$ $= 1.47098446203 \times 10^8 km$	r_{P}
Mittlere Exzentrizität	$e_{\earth} = 0.016708617$	$e = 0.017213705$
Mittlere große Bahnhalbachse	$a_{\earth} = 1.0000010178\,AE =$ $= 1.49598022261 \times 10^8\,km$	$a = 1.000514954\,AE =$ $= 1.49674905981 \times 10^8\,km$
Differenz in Halbachse		$\Delta a = +76883.72\,km$

Tabelle 4-2: Keplersche Bahnelemente der durch den konstanten Anteil des Strahlungsdrucks verursachten gestörten Bewegung der Asteroidensonde (ohne Antrieb durch die Ionentriebwerke) ■

Anmerkung: Die Tatsache, dass der Strahlungsdruck der Sonne eine Wirkung auf die Bewegung eines Himmelskörpers hat, die im Prinzip derselben Gesetzmäßigkeit wie durch eine Gravitation unterliegt, erlaubt einen Rückschluss auf die Bewegung der Erde um die Sonne. Es ist zu erwarten, dass die Bewegung der Erde zu einem bestimmten Anteil durch den Strahlungsdruck und nicht allein durch die Gravitation geprägt ist. Wenn mit $a_{\earth}, e_{\earth}$ die aus der Beobachtung erhaltene große Bahnhalbachse und Exzentrizität der Erdbahn bedeuten, kann mit den bekannten physikalischen Parametern der Erde und des Strahlungsdrucks aus Formel (4.25) die „ungestörte“, d.h. allein durch das Zweikörperproblem Sonne-Erde bewirkte, Exzentrizität der Erdbahn berechnet werden:

$$e_{\earth G} = e_{\earth} \left(1 - \frac{B_S}{m_{\earth}\,\mu_{\odot}} \right) \quad . \tag{4.36}$$

Die Masse der Erde ist bekannt[1]

$$m_{\earth} = 5.9742 \times 10^{24}\,kg$$

Dann ist mit den obigen Zahlenwerten für die Exzentrizität der Erdbahn ohne Strahlungsdruck mit Formel (4.25)

$$e_{\earth G} = e_{\earth} \left(1 - 2.115 \times 10^{-14} \right) \quad .$$

Dieser kleine Zahlenwert kann in der Praxis nicht mehr nachgewiesen werden. Mit dem Kegelschnitt-Parameter der Erdbahn

$$p_{\earth} = a_{\earth} \left(1 - e_{\earth}^2 \right) = 1.495562578 \times 10^{11}\,m$$

[1] aus P. K. SEIDELMANN ET AL. (1992), p.700

wird für den entsprechenden Wert ohne Strahlungsdruck nach Formel (4.27)

$$p_{\sphericalangle G} = p_{\sphericalangle}\left(1-\frac{B_S}{m_{\sphericalangle}\,\mu_\odot}\right) \quad . \tag{4.37}$$

Wie bei der Berechnung der Exzentrizität ist auch hier der Korrekturterm vernachlässigbar, was entsprechend dann auch für die Halbachse zutrifft. Die Erde ist also zu „schwer“ um vom Strahlungsdruck der Sonne aus ihrer gravitativ bedingten Bahn wirksam herausgedrängt zu werden.

2. Lösungsschritt

Als nächstes werde der variable Anteil für die Wirkung des Solardrucks im zweiten Glied der radialen Beschleunigung (4.16) als ein „Störterm“ hinzugefügt:

$$b_{PR1} \approx -\frac{B_S}{m_0^{\,2}}\frac{1}{r^2}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}\Delta\zeta \quad . \tag{4.38}$$

Die Parameter k_1, k_2 müssen jetzt als Funktionen des Bahnwinkels ζ aufgefasst werden. Zu ihrer Charakterisierung sollen sie daher in der Form

$$k_1 =: k_1^{(1)} = k_1^{(1)}(\zeta) \quad , \qquad k_2 =: k_2^{(1)} = k_2^{(1)}(\zeta) \tag{4.39}$$

geschrieben werden. Ihre Variationsgleichung (3.122) lautet wegen des Verschwindens der transversalen Beschleunigung b_T=0 und daher $dG/d\zeta = dp/d\zeta = 0$ und mit der Näherung (4.18), mit $G^2 = \mu\, p$ und der bisher vernachlässigten Beschleunigung b_{PR1} in der Definitionsgleichung (4.18)

$$\begin{aligned}
\frac{dk_1^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G^2}\,p\,b_{PR1}\sin\zeta \approx -\frac{B_S}{m_0^2\,\mu_\odot}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}\Delta\zeta\sin\zeta \\
\frac{dk_2^{(1)}}{d\zeta} &= -\frac{r^2}{G^2}\,p\,b_{PR1}\cos\zeta \approx \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_\odot}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}\Delta\zeta\cos\zeta \quad .
\end{aligned} \tag{4.40}$$

mit den Integralen (wenn der Bahnwinkel ζ auf den Anfangswinkel ζ_0=0° bezogen wird: $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0 = \zeta$)

$$\begin{aligned}
k_1 = k_1^{(1)} = k_1^{(1)}(\zeta) &\approx k_1^{(2)} - \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_\odot}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta) \\
k_2 = k_2^{(1)} = k_2^{(1)}(\zeta) &\approx k_2^{(2)} + \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_\odot}\frac{\Delta m}{\Delta\zeta}(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta) \quad .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Die Integrationskonstanten sind hier $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$. Für eine größenordnungsmäßige Abschätzung wird bei Bezug auf r=1AE als Anfangsbahngröße und dem oben berechneten Wert für $\dot{m}$ und der Umrechnung (4.17) relativ zur Winkeleinheit der folgende Wert für den Massenverlust erhalten

$$\frac{\Delta m}{\Delta\zeta} \approx -7.2325\frac{kg}{rad} \quad . \tag{4.42}$$

Würde pausenlos über einen Umlauf von 2π geschoben, müssten an Treibstoff etwa 45kg eingeplant werden.

Da in dieser Aufgabenstellung nur ein radialer Schub zugelassen wurde, wird weder der Flächenparameter G (wegen $\dot{G} = r b_T = 0$) noch die Bahnebene (wegen $\dot{\eta} = G\, b_N / r = 0$) geändert. Eine Bahnänderung infolge radialer Beschleunigung mit konstanter Masse m wird also nur (wie im Rahmen des ersten Lösungsschrittes untersucht wurde) große Bahnhalbachse und Exzentrizität verändern, jedoch nicht aus der Bahn herausführen können. Dies kann nur durch den Massenverlust (hier durch den konstanten Schub der Ionentriebwerke) in minimalem Unfang erreicht werden, wodurch der Effekt des radialen Schubes durch die Triebwerke noch etwas überlagert wird. Bild 4-3 zeigt mit stark überhöhtem Wert für den Solardruck (es wurde für die Zeichnung der Wert $B_S / \left(m_0\, \mu_\odot \right) = 0.2$ verwendet) das Aufspiralen durch radial wirkenden Solardruck und als Folge des Massenverlustes mit dem Wert -7.2 kg/rad. Dieser Effekt könnte im vorliegenden Fall wegen des relativ großen Solarkonzentrators durch dessen schräge Anstellung gegenüber der Sonnenrichtung und dadurch Erzeugung eines transversalen Schubes wirkungsvoll erhöht werden. Dieser (zusätzliche hier aber nicht einbezogene) Effekt wird im nächsten Beispiel bei der Betrachtung einer Sonnensegelbahn untersucht (Abschnitt 4.3).

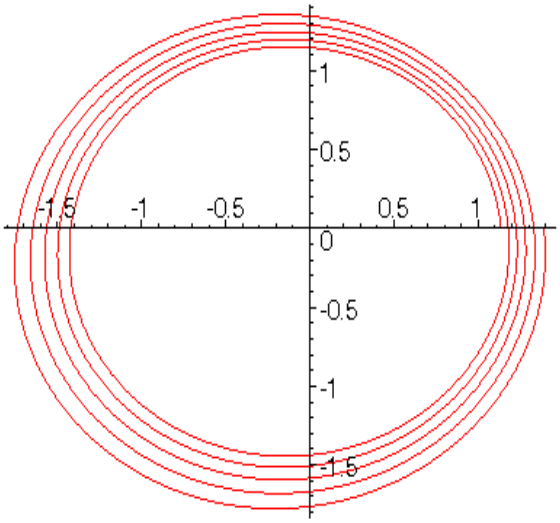

Bild 4-3: Prinzip der Aufspiralung einer heliozentrischen Bahn infolge des Drucks durch Sonnenstrahlung bei ständigem Massenverlust etwa durch ein Ionentriebwerk (der Solardruck ist zur Veranschaulichung in diesem Plot um den Faktor 200 überhöht)

3. Lösungsschritt:

Als Ausgangskurve für diesen Lösungsschritt werde der Kegelschnitt (4.24) sowie die radiale Geschwindigkeit (4.35) mit den Funktionen $k_1(\zeta), k_2(\zeta)$ aus den Integralen (4.41) gewählt. Die dortigen Konstanten $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ werden im neuen Schritt als Funktionen des Bahnwinkels ζ aufgefasst, welche mit der radialen Beschleunigung b_{SR} bestimmt werden müssen, dem dritten Anteil in der Zerlegung (4.16) für die radiale Beschleunigung b_R. Zur Abkürzung werde der konstante Term

$$B_3 := \frac{B_S}{m_0^2\, \mu_\odot} \frac{\Delta m}{\Delta \zeta} \tag{4.43}$$

eingeführt. Die neue Polargleichung sowie die entsprechende radiale Geschwindigkeit haben somit die Gestalt (nach Einsetzen der Integrale (4.41) in die Polargleichung (4.24))

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{p}{1 + k_1^{(2)} \cos\zeta + k_2^{(2)} \sin\zeta + \zeta\ B_3} \\
\dot{r} &= \frac{G}{p}\left(k_1^{(2)} \sin\zeta - k_2^{(2)} \cos\zeta\ - B_3\right) \qquad .
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

Die Anpassungsgleichungen (3.198) und (3.202) lauten in diesem Beispiel

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial k_1^{(2)}} \frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} + \frac{\partial r}{\partial k_1^{(2)}} \frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} &= 0 \\
\frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(2)}} \frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(2)}} \frac{dk_2^{(2)}}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\, b_{SR} \qquad .
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Um diese zur Berechnung der neuen Variablen $k_1^{(2)}(\zeta)$, $k_2^{(2)}(\zeta)$ aufstellen zu können, werden die folgenden partiellen Ableitungen benötigt:

$$
\frac{\partial r}{\partial k_1} = \frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}} = -\frac{p\cos\zeta}{\left(1 + k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta\right)^2} = -\frac{p\cos\zeta}{\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2}
$$

$$
\frac{\partial r}{\partial k_2} = \frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}} = \frac{p\sin\zeta}{\left(1 + k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta\right)^2} = -\frac{p\sin\zeta}{\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2}
$$

$$
\frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(1)}} = \frac{G}{p}\sin\zeta \quad , \quad \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(1)}} = -\frac{G}{p}\cos\zeta
$$

$$
\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} = 1 \ , \ \frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} = 0 \ , \ \frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} = 1
$$

somit

$$
\frac{\partial r}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} + \frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial k_2^{(2)}} = \frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} + \frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} = \frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}}
$$

$$
\frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(1)}} \quad , \quad \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(2)}} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial k_1^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial k_2^{(1)}}{\partial k_2^{(2)}} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(1)}}
$$

und die zweite der Anpassungsgleichungen (4.45) vereinfacht sich zu

$$
\frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(2)}} \frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(2)}} \frac{dk_2^{(2)}}{d\zeta} = \frac{p^2\, b_{SR}}{G\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2}
\tag{4.46}
$$

Zur Auflösung des linearen Gleichungssystems (4.45), (4.46) für die Variationen der beiden gesuchten Parameter wird die Determinante benötigt

$$
Det := \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(2)}}\frac{\partial r}{\partial k_2^{(2)}} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(2)}}\frac{\partial r}{\partial k_1^{(2)}} = \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_1^{(1)}}\frac{\partial r}{\partial k_2^{(1)}} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial k_2^{(1)}}\frac{\partial r}{\partial k_1^{(1)}} = -\frac{G}{\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2}
$$

Die gesuchten beiden Variationsgleichungen lauten somit

$$
\begin{aligned}
\frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} &= \frac{p^3}{G^2} b_{SR}\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2 \sin\zeta \\
\frac{dk_2^{(2)}}{d\zeta} &= -\frac{p^3}{G^2} b_{SR}\left(1 + k_1^{(2)}\cos\zeta + k_2^{(2)}\sin\zeta + \zeta B_3\right)^2 \cos\zeta \quad .
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Eine Näherungslösung kann auf Grund der Tatsache gefunden werden, dass die Parameter $k_1^{(2)}(\zeta)$, $k_2^{(2)}(\zeta)$ nur kleinen Änderungen unterworfen werden. Falls deshalb auf der rechten Seite der beiden Differentialgleichungen eine Linearisierung

$$k_1^{(2)} \approx: k_{1A}^{(2)} + k_{1D}^{(2)}\,\Delta\zeta \quad , \quad k_{2A}^{(2)} \approx: k_{2A}^{(2)} + k_{2D}^{(2)}\,\Delta\zeta \tag{4.48}$$

erlaubt ist, wobei $\Delta\zeta = \zeta - \zeta_0 = \zeta$ angenommen werden soll, ergeben sich die Näherungs-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{dk_1^{(2)}}{d\zeta} &\approx \left[\frac{p^3}{G^2} b_{SR}\left(1+\left(k_{1A}^{(2)}+k_{1D}^{(2)}\,\zeta\right)\cos\zeta+\left(k_{2A}^{(2)}+k_{2D}^{(2)}\,\zeta\right)\sin\zeta+\zeta\,B_3\right)^2\right]\sin\zeta \\
\frac{dk_2^{(2)}}{d\zeta} &\approx -\left[\frac{p^3}{G^2} b_{SR}\left(1+\left(k_{1A}^{(2)}+k_{1D}^{(2)}\,\zeta\right)\cos\zeta+\left(k_{2A}^{(2)}+k_{2D}^{(2)}\,\zeta\right)\sin\zeta+\zeta\,B_3\right)^2\right]\cos\zeta
\end{aligned} \tag{4.49}$$

mit den Lösungen[1], welche die neuen Integrationskonstanten $k_1^{(3)}$, $k_2^{(3)}$ enthalten:

$$\begin{aligned}
k_1^{(2)} = k_1^{(3)} + \sin\zeta \Bigg\{ & \frac{p^3 b_{SR}}{G^2}\Bigg[\zeta + B_3\,\zeta^2 + \frac{1}{3}B_3\,\zeta^3 + 2\,k_{1A}^{(2)}\sin\zeta - 2k_{2A}^{(2)}\cos\zeta + \\
& + \frac{1}{2}k_{1A}^{(2)2}\left(\zeta+\sin\zeta\cos\zeta\right) + \frac{1}{2}k_{2A}^{(2)2}\left(\zeta-\sin\zeta\cos\zeta\right) + 2\,k_{1D}^{(2)}\left(\cos\zeta+\zeta\sin\zeta\right) + \\
& + 2\,k_{2D}^{(2)}\left(\sin\zeta-\zeta\cos\zeta\right) + \left(k_{1A}^{(2)}k_{2D}^{(2)} + k_{1D}^{(2)}k_{2A}^{(2)}\right)\left(-\zeta\cos^2\zeta + \frac{1}{2}\cos\zeta\sin\zeta + \frac{1}{2}\zeta\right) + \\
& + k_{1D}^{(2)}k_{2D}^{(2)}\left(-\zeta^2\cos^2\zeta + \zeta\left(\zeta+\cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \\
& + k_{1D}^{(2)2}\left(\frac{1}{2}\zeta^2\left(\zeta+\cos\zeta\sin\zeta\right) + \frac{1}{2}\zeta\cos^2\zeta - \frac{1}{4}\cos\zeta\sin\zeta - \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right) + \\
& + k_{2D}^{(2)2}\left(\frac{1}{2}\zeta^2\left(\zeta-\cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\zeta\cos^2\zeta + \frac{1}{4}\cos\zeta\sin\zeta + \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3\right) + \\
& + k_{2A}^{(2)}\left(2B_3\left(\sin\zeta-\zeta\cos\zeta\right) + k_{2D}^{(2)}\left(\zeta\left(\zeta-\cos\zeta\sin\zeta\right) + \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right)\right) + \\
& + 2\,k_{1D}^{(2)}B_3\left(\zeta^2\sin\zeta - 2\sin\zeta + 2\zeta\cos\zeta\right) + 2\,k_{1A}^{(2)}B_3\left(\cos\zeta+\zeta\sin\zeta\right) - \\
& - k_{1A}^{(2)}k_{2A}^{(2)}\cos^2\zeta + k_{1A}^{(2)}k_{1D}^{(2)}\left(\zeta\left(\zeta+\cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \\
& + 2\,k_{2D}^{(2)}B_3\left(-\zeta^2\cos\zeta + 2\cos\zeta + 2\zeta\sin\zeta\right)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

[1] die Integration wurde mit algebraischen Formelmanipulator-Programm Maple7 durchgeführt

$$
\begin{aligned}
k_2^{(2)} = k_2^{(3)} - \cos\zeta \Bigg\{ & \frac{p^3 b_{SR}}{G^2} \Bigg[\zeta + B_3\ \zeta^2 + \frac{1}{3} B_3\ \zeta^3 + 2\ k_{1A}^{(2)} \sin\zeta - 2k_{2A}^{(2)} \cos\zeta + \\
& + \frac{1}{2} k_{1A}^{(2)2} \left(\zeta + \sin\zeta\cos\zeta\right) + \frac{1}{2} k_{2A}^{(2)2} \left(\zeta - \sin\zeta\cos\zeta\right) + 2\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} \left(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta\right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{2D}^{(2)} \left(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta\right) + \left(\mathrm{k}_{1A}^{(2)} k_{2D}^{(2)} + \mathrm{k}_{1D}^{(2)} k_{2A}^{(2)}\right) \left(-\zeta\cos^2\zeta + \frac{1}{2}\cos\zeta\sin\zeta + \frac{1}{2}\zeta \right) + \\
& + \mathrm{k}_{1D}^{(2)} k_{2D}^{(2)} \left(-\zeta^2\cos^2\zeta + \zeta\left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 \right) + \\
& + k_{1D}^{(2)2} \left(\frac{1}{2}\zeta^2 \left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) + \frac{1}{2}\zeta\cos^2\zeta - \frac{1}{4}\cos\zeta\sin\zeta - \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3 \right) + \\
& + k_{2D}^{(2)2} \left(\frac{1}{2}\zeta^2 \left(\zeta - \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\zeta\cos^2\zeta + \frac{1}{4}\cos\zeta\sin\zeta + \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{3}\zeta^3 \right) + \\
& + \mathrm{k}_{2A}^{(2)} \left(2B_3 \left(\sin\zeta - \zeta\cos\zeta\right) + \mathrm{k}_{2D}^{(2)} \left(\zeta\left(\zeta - \cos\zeta\sin\zeta\right) + \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 \right) \right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} B_3 \left(\zeta^2\sin\zeta - 2\sin\zeta + 2\zeta\cos\zeta\right) + 2\,\mathrm{k}_{1A}^{(2)} B_3 \left(\cos\zeta + \zeta\sin\zeta\right) - \\
& - \mathrm{k}_{1A}^{(2)}\,\mathrm{k}_{2A}^{(2)} \cos^2\zeta + \mathrm{k}_{1A}^{(2)}\,\mathrm{k}_{1D}^{(2)} \left(\zeta\left(\zeta + \cos\zeta\sin\zeta\right) - \frac{1}{2}\sin^2\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 \right) + \\
& + 2\,\mathrm{k}_{2D}^{(2)} B_3 \left(-\zeta^2\cos\zeta + 2\cos\zeta + 2\zeta\sin\zeta \right) \Bigg] \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

Für ein numerisches BEISPIEL werden die Zahlenwerte der genannten Studie verwendet. Der Schub mit 4 Triebwerken von jeweils 10mN erzeugt in diesem Beispiel auf den Raumflugkörper der Masse m=225 kg die konstante Beschleunigung

$$b_{SR} = \frac{4\times 10}{225} \frac{mN}{kg} = 1.777778\times 10^{-7} \frac{km}{s^2} \quad ,$$

mithin wird

$$b_{SR}\ G = 792.09766 \frac{km^3}{s^3} \quad .$$

Nach Definition (4.43) hat der Parameter B_3 im vorliegenden Fall unter Berücksichtigung des Zahlenwertes (4.42) den Betrag

$$B_3 = \frac{B_S}{m_0^2\,\mu_\odot} \frac{\Delta m}{\Delta\zeta} = -0.3178079435\times 10^{-4} \quad [1/rad] \quad .$$

Die Anfangswerte für eine numerische Simulation werden aus der Polargleichung und der radialen Geschwindigkeit (4.44) mit den Näherungen (4.48) erhalten:

Aus $r\left(\zeta = 0°\right) = 1AE$ wird mit dem Kegelschnittparameter p aus Tabelle 4-2

$$k_{1A}^{(2)} = \frac{p}{r(\zeta = 0)} - 1 = \frac{p}{1AE} - 1 = 0.000711518$$

Da $k_{1A}^{(2)} =: e^{(2)} \cos\zeta_B^{(2)}$, $k_{2A}^{(2)} =: e^{(2)} \sin\zeta_B^{(2)}$ entsprechend den Definitionsgleichungen (4.26) gesetzt werden können und als Ausgangswert die Exzentrizität e aus Tabelle 4-2 gewählt werden kann, ergibt sich $\zeta_B^{(2)} = 87°.560540122$ und damit

$$k_{2A}^{(2)} = e\sin\zeta_B^{(2)} = 0.016701378 \quad .$$

Die radiale Geschwindigkeit liefert unter der Annahme, dass die Triebwerke konstant in radialer Richtung arbeiten den Wert (aus der Raketengleichung) und mit der Zeiteinheit $\Delta t = 1\text{sec}$ sowie den Zahlenwerten dieses Beispiels

$$\dot{r} \approx \Delta V = c_{eff} \ln\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}\,\Delta t} = 1.666799995 \times 10^{-7}\,\frac{km}{s}$$

somit

$$k_{2D}^{(2)} = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{p}{G}\dot{r}(2\pi) + k_{2A}^{(2)}\right] = -0.2658107756 \times 10^{-2}$$

sowie

$$k_{1D}^{(2)} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{p}{G}\dot{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) - k_{1A}^{(2)}\right] = -0.4529628649 \times 10^{-3} \quad .$$

Außerdem werden in den Ausdrücken (4.50), (4.51) die neuen Konstanten benötigt, welche sich aus

$$k_1^{(3)} = k_1^{(2)}(\zeta = 0.0) = 0.000711518$$

$$k_2^{(3)} = k_2^{(2)}\left(\zeta = \frac{\pi}{2}\right) = k_{2A}^{(2)} + k_{2D}^{(2)}\frac{\pi}{2} = 0.01252603210$$

ergeben. Mit diesen Zahlenwerten wird eine Übergangsbahn mit konstantem radialem Schub in Bild 4-4 berechnet.

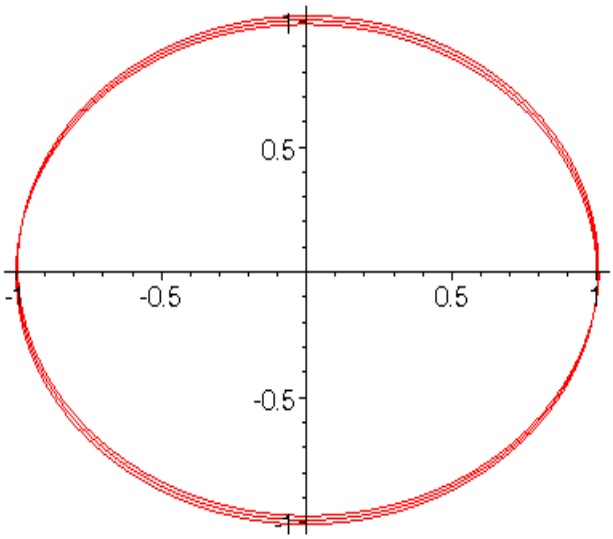

Bild 4-4: Aufspiralung einer heliozentrischen Bahn allein infolge eines kleinen radialen Schubes durch ein Ionentriebwerk. Da $b_{SR}>0$ angenommen wurde, wirkt der Schub nach außen von der Sonne weg. Der Massenverlust ist berücksichtigt.

Anmerkungen zu diesem Beispiel: Der zugehörige Zeitaufwand kann durch Integration des Zeitintegrals

$$t = t_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G}\,d\zeta$$

erhalten werden, wenn in die Polargleichung (4.44) die Funktionswerte (4.50), (4.51) eingesetzt werden. Es ist wegen des allgemeinen Charakters dieser Entwicklungen zu erwarten, dass dieses Integral wie im speziellen Fall der Keplerbewegung auf eine transzendente Funktion führt. Das Integral und seine Lösung werden also im speziellen Fall nur numerisch zu lösen sein. Im Fall der Zahlenwerte von Bild 4-4 ergibt sich über einen Umlauf die Zeitdauer 363 Tage. Das ist im Vergleich zur Erdrevolution etwas zu wenig und deutet darauf hin, dass eine Linearisierung (4.48) nur stückweise angewendet werden darf (oder dass numerisch integriert werden sollte).

Das Beispiel eines kleinen radialen Schubes unter Dominanz einer (Zweikörper-) Keplerbewegung mit einem $1/r^2$ Abstandsgesetz bringt nur eine unbedeutende Aufspiralung der Bahn. Die Polargleichung mit Ausgangswert $r(\zeta=0.0)=1AE$ ergibt nach einem Umlauf nur den heliozentrischen Abstand $r(\zeta=2\pi)=1.00265AE$. (Es ist zu erwarten, dass mit einer numerischen Auswertung des Differentialgleichungssystems (4.47) dieses Ergebnis vertieft werden kann. Dies ist aber wie im soeben angedeuteten Zusammenhang mit dem Zeitintegral nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes). Durch die Wirkung des Schubes wird (physikalisch gesehen) die Gesamtenergie des Systems erhöht. Wenn es erlaubt ist, die Bahn näherungsweise nach wie vor als eine („gestörte“) Keplerbahn zu betrachten, kann dadurch angenommen werden, dass sich die Bahnhalbachse *a* erhöht. Da der Parameter *p* des Kegelschnitts nach Beziehung (2.61) (Seite 26) auf den Flächenparameter *G* („Betrag des Drehimpulses“) bezogen werden kann: $G^2 = \mu\, p$, muss *p* bei konstanter zentrischer Gravitationskonstante μ wie G konstant sein. Dann gilt im Fall eines Kegelschnitts $p = a\left(1-e^2\right)$, bei Anwachsen der Halbachse *a* muss auch die Exzentrizität anwachsen, die Bahnform wird zunehmend von der kreisnahen Ausgangsbahn abweichen. Dieser Effekt kann in Bild 4-4 schwach erkannt werden. Allerdings zeigt Beziehung (4.44) für den Radius der Bahn unter den hier gegebenen Randbedingungen, dass diese qualitative Überlegung nur sehr vorsichtig angewendet werden darf: die Parameter $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ sind variabel, außerdem kommt additiv der Faktor B_3 hinzu, der wesentlich vom Massenverlust der Raumsonde abhängt. Je nach Größe dieser Parameter kann die Abweichung von einer Zweikörperbewegung erheblich werden. Damit zeigt sich ein Vorteil des im vorliegenden Bericht vorgestellten Verfahrens der allgemeinen Anpassung, die Einzeleinflüsse auf eine Bewegung scharf separieren und so ihre Wirkung im Einzelnen beurteilen zu können.

Wird der Massenverlust vernachlässigt (in den obigen Formeln wird $B_3=0$ gesetzt), kann die Bahn eine Apsidendrehung ohne Verformung erfahren. Bekannte Beispiele sind die Apsidendrehung einer Erdsatellitenbahn durch den Einfluss der geradzahligen Harmonischen des Erdschwerefeldes (mit einer $1/r^4$ Gesetzmäßigkeit). Ein anderes Beispiel ist die Apsidendrehung der Planeten im Sonnensystem als Folge der relativistischen Abweichung der Bewegung vom Newtonschen Gravitationsgesetz (Periheldrehung des Merkur). Wird der Massenverlust einbezogen und konstante radiale Beschleunigung zugelassen (somit $k_{1D}^{(2)} = k_{2D}^{(2)} = 0$ angenommen), wird die Bahn aufspiralt ohne Drehung der Apsidenlinie (Bild 4-3).

In diesem Zusammenhang darf auf eine Abhandlung von *Battin*[1] hingewiesen werden, in der das Problem des radialen Schubes unter Vernachlässigung des Massenverlustes bearbeitet wird. Das Verfahren ist mathematisch anspruchsvoll und kann für den allgemeinen Fall beliebig großer Schübe nur numerisch bearbeitet werden.

[1] BATTIN, R. H. (1987), pp. 409-415

Bei Vergleich mit den in Abschnitt 3.4 untersuchten spiralförmigen Kurven zeigt sich, dass derartige Bahnen mit einem völlig anderen Beschleunigungsgesetz erzeugt werden müssen als es die Keplerbewegung verlangt. Man kann daraus schließen, dass etwa im Sonnensystem mit Dominanz der Keplerbewegung eine spiralartige Kurve, wie in Abschnitt 3.4 untersucht, als primäre Anpassungskurve nicht die erste Wahl sein kann.

Alternativ zu einem radialen Schub ist im Fall des vorliegenden Beispiels eine wesentlich größere Wirkung durch einen transversalen Schub zu erwarten (Dieser wurde auch in der genannten Studie primär berücksichtigt, die aber in der vorliegenden Arbeit wegen des beispielhaften Charakters dieser Untersuchungen nicht nachvollzogen werden sollte). Ein solcher transversaler Schub wird im nächsten Beispiel behandelt. In der Natur ist der *Yarkowski*-Effekt[1] ein solcher Fall: Bewegt sich ein Himmelskörper um die Sonne, so wird die der Sonne zugewandte Seite aufgeheizt, die abgewandte Seite abgekühlt. Rotiert dieser Körper in Bewegungsrichtung, so rotiert die aufgeheizte Seite in die der Bewegung entgegengesetzte Richtung, die jetzt erfolgende Wärmeabstrahlung übt einen Stoß auf den Himmelskörper in Bewegungsrichtung aus. Dies verursacht einen tangentialen (bei nahezu kreisförmigen Bahnen einen transversalen) Schub aus, der zu einer allmählichen Aufspiralung der Bahn von der Sonne weg führt. Bei umgekehrter Rotation erfolgt der durch die abgestrahlte Wärme erzeugt Schub entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung, die Bewegung wird abgebremst und der Himmelskörper spiralt auf Grund dieses transversalen Schubes in den Innenraum des Sonnensystems. Ein transversaler Schub ist die Hauptursache für natürliche oder künstliche kleine Bewegungsänderungen, zumindest bei den dominanten Beschleunigungsverhältnissen des Sonnensystems.

Es darf noch auf einige frühere Arbeiten hingewiesen werden, die sich schon frühzeitig mit kleinem durch elektrische Triebwerke erzeugtem Schub beschäftigten[2]. Hier geht es um kleine Schübe in tangentialer bzw. horizontaler (andere Bezeichnung für transversale) Richtung, wobei aus technischen Gründen radiale und horizontale Schübe für vorteilhaft gegenüber tangentialen und (haupt-) normalen Schüben erkannt wurden. In allen diesen Arbeiten kommt kein Bezug auf *Hansen*-Systeme vor. An Stelle des (*Hansen*schen) Bahnwinkels wurde seinerzeit auch mit regularisierenden Variablen gerechnet[3].

Ergänzende Überlegungen:

Zur Bestätigung der analytisch erhaltenen Ergebnisse in diesem Abschnitt wurden auf dreierlei verschiedene Weise die Ergebnisse auf numerischen Wege durch Integration mit einem RKF45 Integrator erhalten: 1. Integration über der Zeit mit der originalen *Leibniz*gleichung und dem Zeitintegral in Form des Flächensatzes, 2. Integration der *Leibniz*gleichung in der Form (2.134) auf Seite 46, und 3. mit dem Formalismus der geradlinigen Bewegung mit den Variationsgleichungen (4.21). Überschreitet die radiale Berschleunigung einen bestimmten Wert b_{RC} verlässt der Raumflugkörper den Anziehungsbereich des gegebenen Zentralkörpers und kommt auf eine Fluchtbahn. Eine Abschätzung für den Abflug aus einer kreisförmigen Bahn unter Vernachlässigung des Massenverlustes findet sich in BATTIN (1987, pp.408-415):

$$\frac{\mu}{8 r_K^2} < b_{RC} \quad . \tag{4.52}$$

[1] KIPPENHAHN, RUDOLF (2005): p.47

[2] ECKSTEIN, M. C. AND SHI, YUN-YUAN (1967), SHI, YUN-YUAN AND ECKSTEIN, M. C. (1966) UND (1967)

[3] BOCKEMÜLLER, E. A.. UND W. KLEINSCHMIDT (1970), HENSCHEL, F. (1974)

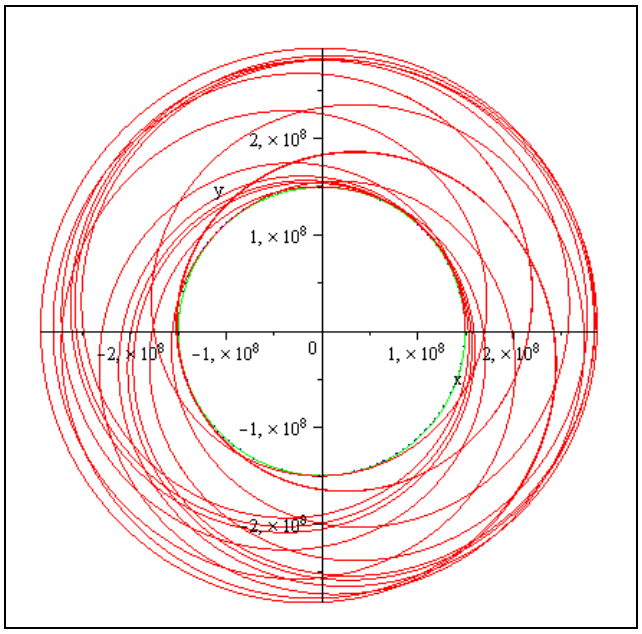

Bild 4-5: Konstanter radialer Schub auf interplanetaren Raumflugkörper aus kreisnaher heliozentrischer Umlaufbahn mit Start aus Erdbahn, radialer Schub der Ionentriebwerke $b_{SR} = 7.35 \times 10^{-7}\ km/s^2$. Numerische Integration mit Formalismus der geradlinigen Bahn im *Hansen* System

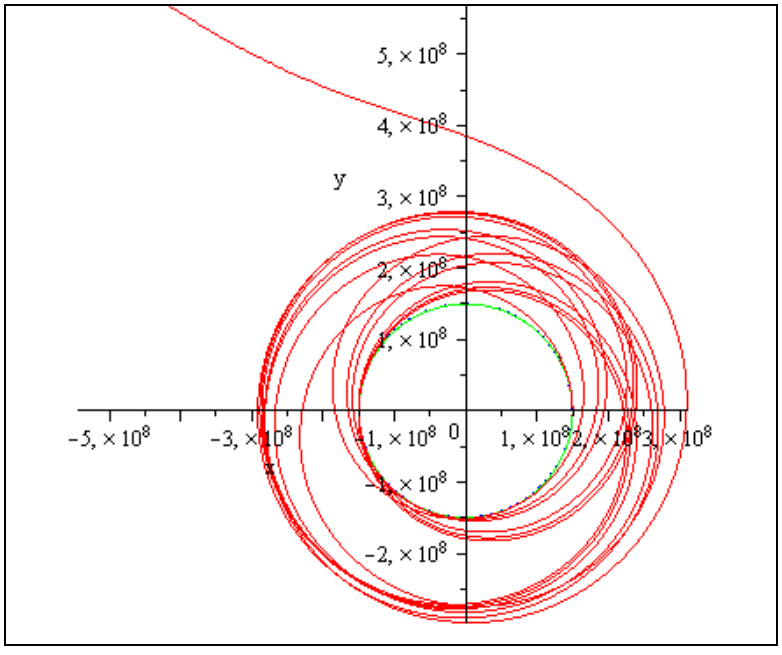

Bild 4-6: Konstanter radialer Schub auf interplanetaren Raumflugkörper aus kreisnaher heliozentrischer Umlaufbahn mit Start aus Erdbahn, radialer Schub der Ionentriebwerke $b_{SR} = 7.36 \times 10^{-7}\ km/s^2$. Fluchtbahn nach 13 Umläufen. Numerische Integration mit Formalismus der geradlinigen Bahn im *Hansen* System

Die in diesem Beispiel gegebenen Berschleunigungswerte um das Vierfache überhöht führen auf die in den Bildern Bild 4-5 und Bild 4-6 wiedergegebenen Bahnkurven. Sie wurden ebenfalls mit den drei genannten numerischen Verfahren gerechnet. Ausgangsbahn ist die Erdbahn, der Massenverlust ist berücksichtigt. Dadurch ist der Wert für Flucht etwas kleiner, als die durch Formel (4.52) berechnete Abschätzung $b_{RC} = 7.4089 \times 10^{-7}\ \ km/s^2$.

4.3 Beispiel einer interplanetaren Sonnensegelbahn mit transversalem und normalem Schub

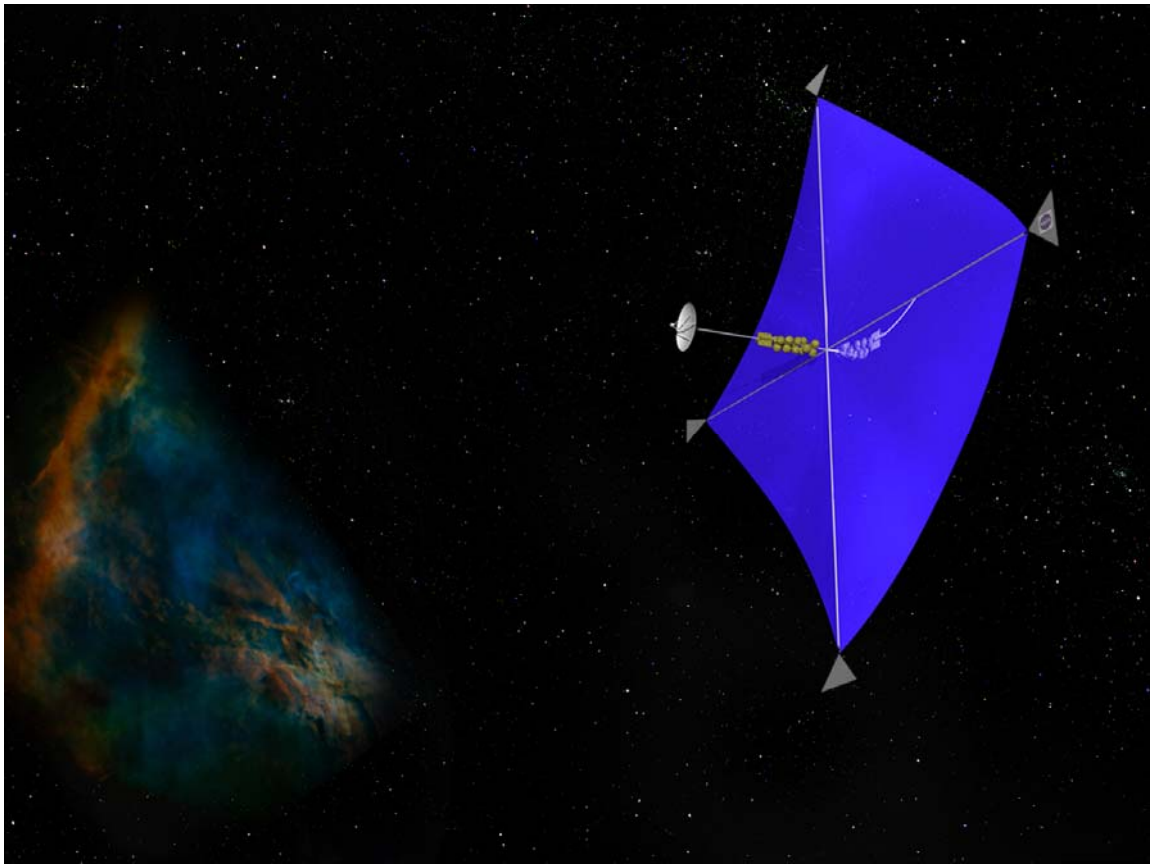

Bild 4-7: Entwurf eines Sonnenseglers der NASA[1]

Die schon von den Vätern der Raumfahrt entdeckte Möglichkeit von Bahnen ohne künstlich erzeugten Schub allein mit dem Strahlungsdruck durch Sonnensegel steht vor der technischen Realisierung[2]. In Bild 4-7 und Bild 4-9 (auf Seite 173) sind Beispiele aus aktuellen Studien wiedergegeben, welche detaillierte experimentelle Untersuchungen einschließen. Eine aktuelle technische Realisierung ist der japanische Sonnensegler Ikarus[3] (**I**nterplanetary **K**ite-Craft **A**ccelerated by **R**adiation **o**f the **S**un), der am 21. Mai 2010 gestartet wurde (siehe Bild 4-10 auf Seite 178).

Im Rahmen der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Formelsysteme kann die prinzipielle Bewegung mit Sonnensegeln in einfacher und durchsichtiger Weise beschrieben werden.

Im vorhergehenden Beispiel (Abschnitt 4.2 ab Seite 155) wurde hergeleitet, dass durch radial wirkenden Strahlungsdruck allein ohne Änderung der Masse des Raumflugkörpers abgesehen von einer (geringfügigen Aufblähung der Bahn) keine Bahnänderung erhalten werden kann. Dies ist bei Raumflugkörpern, die sich mit Sonnensegeln bewegen, der Fall. Um die Bahn (energetisch) in seiner Bahnebene zu ändern muss der Flächenparameter G geändert werden,

---

[1] http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Solar_sail_artist_conception.jpg&filetimestamp=20050623115228

[2] siehe etwa: MCINNES, C. R. (1999); LEIPOLD, M. (2000)

[3] http://www.n24.de/news/newsitem_6074809.html

was wegen seiner (allgemeingültigen!) Variationsgleichung $\dot{G} = rb_T$ (siehe Formel (2.76)) ausschließlich durch eine transversale Beschleunigung b_T erreicht werden kann.

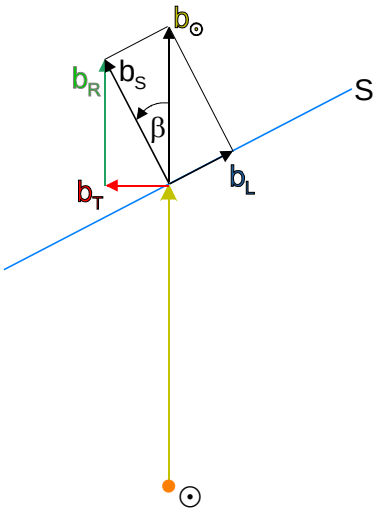

Bild 4-8: Transversale (b_T) und radiale (b_R) Beschleunigung durch Zerlegung der Beschleunigung ($b_\odot$) durch den Strahlungsdruck der Sonne am Sonnensegel S in einen verlorenen Anteil (b_L) und einen senkrecht zum Segel wirkenden Anteil (b_S). β ist der Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung zur Sonne bei Bezug auf die oskulierende Bahnebene des Raumflugkörpers

Um eine solche zu erzeugen, muss nach Bild 4-8 (auf Seite 172) das Sonnensegel gegenüber der Sonnenrichtung angestellt werden. Dazu wird die Segelnormale um den Anstellwinkel β gegenüber der radialen von der Sonne wegweisenden Richtung gedreht, was zur Zerlegung $\mathbf{b}_\odot = \mathbf{b}_S + \mathbf{b}_L$ führt. Hier ist $\mathbf{b}_\odot$ die vom Strahlungsdruck erzeugte Beschleunigung, wirksam auf das Segel ist der Anteil $\mathbf{b}_S$, während der Anteil $\mathbf{b}_L$ längs des Segels verloren ist. Dies deutet bereits darauf hin, dass eine geeignete Relation zwischen Anstellwinkel und wirksamer Beschleunigung gefunden werden muss, was bekanntlich auf ein Optimierungsproblem hinausläuft. Die wirksame Beschleunigung kann aber nur zum Teil für eine Bahnänderung verwendet werden, nämlich der transversale Anteil $\mathbf{b}_T$ in der Zerlegung $\mathbf{b}_S = \mathbf{b}_R + \mathbf{b}_T$. Für diese gilt

$$\left|\mathbf{b}_T\right| =: b_T = 0.5\, b_\odot \sin\left(2\beta\right) \quad . \tag{4.53}$$

Diese Beziehung ist Grundlage für einen Optimierungsprozess (der aber nicht Gegenstand des vorliegenden Beispiels sein soll). Der Strahlungsdruck ist aus Formel (4.12) bekannt:

$$\left|\mathbf{b}_\odot\right| =: b_\odot = P_S \; AE^2 \; \frac{c_R\, A_R}{m} \; \frac{1}{r^2} = \frac{B_S}{m\, r^2} \quad . \tag{4.54}$$

1., 2. und 3. Lösungsschritt:

Die erste Ausgangsnäherung werde als ungestörte Bahn durch eine Gerade dargestellt. Wenn von der Erdbahn aus in eine interplanetare Bahn gestartet wird[1], kann von einer elliptischen Bahn als bekannter zweiter Anpassungskurve ausgegangen werden. Dann können die Formeln, die im vorhergehenden Beispiel zu Anfang und dem ersten Lösungsschritt zusammengestellt wurden mit den zugehörenden Zahlenwerten übernommen werden. Die Anpassungskurve hat sodann die Polargleichung

[1] ähnlich wie auch aus einer Erdumlaufbahn bei Erdsatelliten

$$r = \frac{\frac{G^2}{\mu}}{1 + k_1 \cos\zeta + k_2 \sin\zeta} \tag{4.55}$$

mit den Konstanten k_1, k_2.

Die dritte Bahnkurve hat gegenüber der Erdbahn auf Grund der Wirkung des Strahlungsdrucks auf das große Sonnensegel zunächst einen konstanten radialen Einfluss nach dem $1/r^2$ - Gesetz, der die Bewegung auf einer höheren, d.h. von der Sonne entfernteren Bahn, stabilisiert.

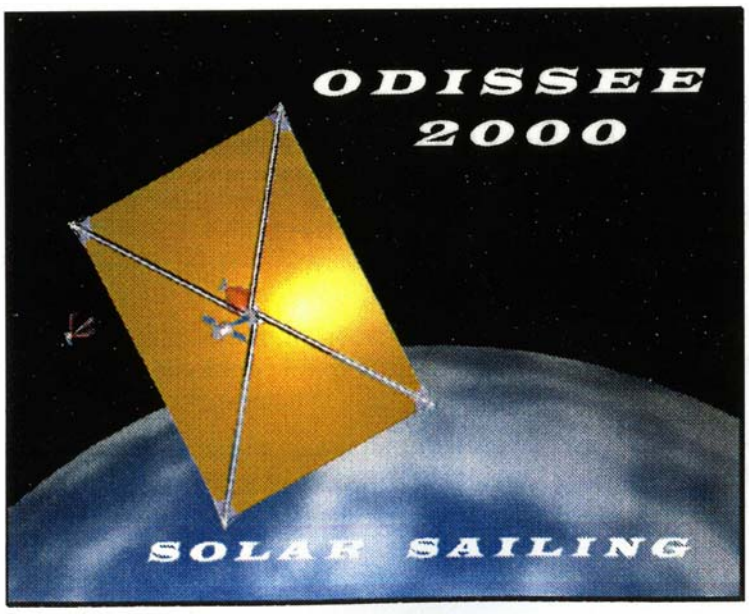

Bild 4-9: Entwurf eines Sonnenseglers des DLR[1]

Es ergeben sich die folgenden Zahlenwerte (vgl. die Formeln (4.13), (4.25) - (4.33)):

$$B_S = 0.1312111416 \times 10^{13} \frac{kg\,km^3}{s^2} \quad , \quad \frac{B_S}{m_0} = 0.1312111416 \times 10^{11} \frac{km^3}{s^2} \, , \, \frac{B_S}{m_0\,\mu_\odot} = 0.09886875984 \, ,$$

$$\frac{B_S}{G} = 294.5184750 \frac{kg\,km}{s} \quad , \quad \Delta V_R = 2.945184750 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad , \quad \mu = 1.195913238 \times 10^{11} \frac{km^3}{s^2}$$

Mit diesen Werten kann der Kegelschnittparameter *p* der neuen Bahn aus Formel (4.29) berechnet werden. Wie im vorhergehenden Beispiel soll auch hier der Beginn der neuen Bahn im Perihel der alten Bahn, die identisch mit der Erdbahn ist, angesetzt werden. Damit ist dann die Exzentrizität der neuen Bahn sowie dann die große Bahnhalbachse aus den Formeln (4.31) und (4.32) bekannt.

---

[1] Kopie aus LEIPOLD, M. (2000), p.3, Referenz: LEIPOLD, M., GARNER, C.E., FREELAND, R., HERRMANN, A., NOCA, M., PAGEL, G., SEBOLDT, W., SPRAGUE, G., UNCKENBOLD, W. (1998) „ODISSEE – A Proposal for Demonstration of a Solar Sail in Earth Orbit“, 3rd IAA International Conference on Low-Cost Planetary Missions, Pasadena, Ca, April 27-May 01, 1998

Damit folgen die in Tabelle 4-3 aufgelisteten Parameter des konstanten Anteils einer Sonnensegel-Bahn, zusammengesetzt aus dem Anteil einer heliozentrischen Zweikörperbewegung (bei Vernachlässigung des Dreikörperproblems Sonne-Erde-Sonnensegel) und dem konstanten Anteil des Strahlungsdrucks durch die Sonnenstrahlung:

	Ungestörte Bewegung	Bewegung mit Berücksichtigung durch Strahlungsdruck
Heliozentrische und modifizierte Gravitationskonstante	$\mu_\odot = 1.32712438 \times 10^{11}\, km^3/s^2$	$\mu = 1.195913238 \times 10^{11}\ km^3/s^2$
Mittlerer Kegelschnittparameter	$p_{♁☉} = G^2/\mu_\odot = 0.999721840\, AE = $ $= 1.495562578 \times 10^8\, km$	$p = 1.109407593\, AE = $ $= 1.65965012854 \times 10^8\ km$
Periheldistanz	$r_P = 0.983292384 AE = $ $= 1.47098446203 \times 10^8 km$	r_P
Mittlere Exzentrizität	$e_{♁☉} = 0.016708617$	$e = 0.128258096$
Mittlere große Bahnhalbachse	$a_{♁☉} = 1.0000010178\, AE = $ $= 1.49598022261 \times 10^8\, km$	$a = 1.127962737 AE = $ $= 1.68740822878 \times 10^8\, km$
Differenz in Halbachse		$\Delta a = +1.9142800617 \times 10^7\, km$

Tabelle 4-3: Keplersche Bahnelemente der durch den konstanten Anteil des Strahlungsdrucks verursachten gestörten Bewegung des Sonnensegels, wenn die gesamte Sonnenstrahlung zu einer radialen Beschleunigung auf das Sonnensegel ausgenutzt wird, das voll auf die Sonne ausgerichtet wird. Die Anströmfläche des Sonnensegels ist zu 10000m^2, die Masse der gesamten Raumsonde zu m_0=100kg angenommen. ■

4. Lösungsschritt:

Es werde jetzt die transversale Beschleunigung (4.53) wirksam. Die Parameter

$$k_1 =: k_1^{(1)}(\zeta) \quad , \; k_2 =: k_2^{(1)}(\zeta)$$

müssen dann als neue Funktionen des Bahnwinkels ζ betrachtet werden, welche aus den Variationsgleichungen (3.122) (auf Seite 94) inklusive mit der Variation des Flächenparameters (aus Gleichung (3.7) auf Seite 67) berechnet werden können. Da sich die radiale Beschleunigung nicht auswirkt, kann $b_{R2} = 0$ gesetzt werden und es ergibt sich mit der Keplerschen Beziehung $G^2 = \mu_\odot\, p$ das System von Differentialgleichungen zur Berechnung der Bewegung mit einem Sonnensegel. Zur Abkürzung werde die in diesem Bewegungstyp konstante Größe

$$B_0 := P_S\ AE^2\ \frac{c_R\, A_R}{m_0} \sin\beta\, \cos\beta = \frac{B_S \sin\beta\, \cos\beta}{m_0} \tag{4.56}$$

verwendet. Damit lautet die transversale Beschleunigung

$$b_T = \frac{B_0}{r^2}\ . \tag{4.57}$$

Die Variationsgleichungen (3.122) für die Parameter $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ im Fall einer Anpassung mit einem Kegelschnitt sowie (3.7) für den Flächenparameter lauten

$$\frac{dG}{d\zeta} = \frac{r^3}{G} b_T$$
$$\frac{dk_1^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_T \left[-k_1^{(1)} \sin^2\zeta + k_2^{(1)} \sin\zeta \cos\zeta + 2k_1^{(1)} + 2\cos\zeta \right]$$
$$\frac{dk_2^{(1)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_T \left[-k_2^{(1)} \cos^2\zeta + k_1^{(1)} \sin\zeta \cos\zeta + 2k_2^{(1)} + 2\sin\zeta \right] \quad .$$

Mit der transversalen Beschleunigung b_T aus Formel (4.53) und der Polargleichung (4.55) haben die Variationsgleichungen die endgültige Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\zeta} &= \frac{B_0}{\mu} \frac{G}{1 + k_1^{(1)} \cos\zeta + k_2^{(1)} \sin\zeta} \\ \frac{dk_1^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{B_0}{\mu} \left[\cos\zeta + \frac{k_1^{(1)} + \cos\zeta}{1 + k_1^{(1)} \cos\zeta + k_2^{(1)} \sin\zeta} \right] \\ \frac{dk_2^{(1)}}{d\zeta} &= \frac{B_0}{\mu} \left[\sin\zeta + \frac{k_2^{(1)} + \sin\zeta}{1 + k_1^{(1)} \cos\zeta + k_2^{(1)} \sin\zeta} \right] \quad . \end{aligned} \tag{4.58}$$

Da der Flächenparameter G nicht in der zweiten und dritten dieser Differentialgleichungen enthalten ist, können aus diesen zunächst die Variablen $k_1^{(1)} = k_1^{(1)}(\zeta)$, $k_2^{(1)} = k_2^{(1)}(\zeta)$ berechnet werden und anschließend der Flächenparameter aus der Differentialgleichung

$$\frac{dG}{G} = \frac{B_0}{\mu} \frac{d\zeta}{1 + k_1^{(1)} \cos\zeta + k_2^{(1)} \sin\zeta} \quad . \tag{4.59}$$

Der Parameter B_0 enthält u.a. den Anstellwinkel β des Sonnensegels gegenüber der Sonnenseinstrahlung bezogen auf die oskulierende Bahnebene. In der Praxis wird dieser Winkel zur Steuerung des Raumflugkörpers von Zeit zu Zeit variiert werden müssen. Zur Durchführung des vorliegenden Beispiels sei dieser Winkel jedoch als konstant angenommen, was für ein gewisses Zeitintervall zulässig erscheint. Dies vereinfacht die Integration im Folgenden wesentlich, erfordert aber bei Neueinstellung dieses Winkels eine neue Integration (dies im Sinne von „patched conic“). Es sei daher für die Dauer der Integration zur vereinfachten Schreibweise der Parameter

$$B_m := \frac{B_0}{\mu} \tag{4.60}$$

als konstant angenommen.

Für diese Integrationen soll wieder die Verwendung eines mathematischen Formelmanipulators versucht werden. Dies kann etwa mit Hilfe einer Reihenentwicklung durchgeführt werden. Das Ergebnis lautet mit den Integrationskonstanten $k_1^{(2)}$, $k_2^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
k_1^{(1)} = k_1^{(1)}(\zeta) = k_1^{(2)} &+ 2B_m\,\zeta - \frac{1}{2}B_m\frac{k_2^{(2)}}{1+k_1^{(2)}}\zeta^2 - \frac{1}{3}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\left[1 - B_m k_2^{(2)} - \left(k_2^{(2)}\right)^2 + k_1^{(2)}\right]\zeta^3 - \\
&- \frac{1}{24}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\left[9B_m^2 k_2^{(2)} - 6B_m - 3B_m k_1^{(2)} + 12B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 3B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \right. \\
&\qquad \left. - 4k_2^{(2)} + k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 5\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + 6\left(k_2^{(2)}\right)^3\right]\zeta^4 + \\
&+ \frac{1}{60}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[1 + 4\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 3\left(k_1^{(2)}\right)^4 + 30B_m^3 k_2^{(2)} + 36B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 - \right. \\
&\qquad + 20B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - 6B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} - 10B_m^2 k_1^{(2)} + \\
&\qquad + 10B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 50B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 20B_m^2 - 26B_m k_2^{(2)} - \\
&\qquad \left. - 10\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 12\left(k_2^{(2)}\right)^4 + 4\,k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 14\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right)
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2^{(1)} = k_2^{(1)}(\zeta) = k_2^{(2)} &+ \frac{B_m k_2^{(2)}}{1+k_1^{(2)}}\zeta + \\
&+ \frac{1}{2}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\left[2 - B_m k_2^{(2)} + 3k_1^{(2)} - \left(k_2^{(2)}\right)^2 + \left(k_1^{(2)}\right)^2\right]\zeta^2 + \\
&+ \frac{1}{6}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\left[3B_m^2 k_2^{(2)} - 2B_m - B_m k_1^{(2)} + 4B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 + B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \right. \\
&\qquad \left. - k_1^{(2)}k_2^{(2)} + \left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - 2k_2^{(2)} + 2\left(k_2^{(2)}\right)^3\right]\zeta^3 - \\
&- \frac{1}{24}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[2 + 15B_m^3 k_2^{(2)} + 18B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 8B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - 7B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} - 5B_m^2 k_1^{(2)} + \right. \\
&\qquad + 5B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 25B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 10k_1^{(2)}B_m^2 - 15B_m k_2^{(2)} - 7\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 3\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
&\qquad \left. + \,2\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 6\left(k_2^{(2)}\right)^4 - 2k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 5\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 + \,4k_1^{(2)} + \left(k_1^{(2)}\right)^4\right]\zeta^4 + \\
&+ \frac{1}{120}\frac{B_m}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^5}\left[-60B_m^2 k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 68B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 75B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - \right. \\
&\qquad - 6B_m\left(k_1^{(2)}\right)^3 - 135B_2^2 k_2^{(2)} - 35B_0\,k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 - k_1^{(2)}k_2^{(2)} - 21\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - \\
&\qquad - 13B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 103B_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 12B_m k_1^{(2)} + 5\left(k_1^{(2)}\right)^4 k_2^{(2)} - 7\left(k_1^{(2)}\right)^3 k_2^{(2)} + \\
&\qquad + 5B_m\left(k_1^{(2)}\right)^4 + 14B_m + 8k_2^{(2)} - 32\left(k_2^{(2)}\right)^3 - 70B_m^3 + 24\left(k_2^{(2)}\right)^5 - 35B_m^3 k_1^{(2)} + \\
&\qquad + 35B_m^3\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 4k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 28\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 210B_m^3\left(k_2^{(2)}\right)^2 + \\
&\qquad \left. + 190B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 105B_m^4 k_2^{(2)} + 96B_m\left(k_2^{(2)}\right)^4\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right)
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Werden diese beiden Funktionen in die Differentialgleichung (4.59) eingesetzt, ergibt sich wieder mit einer Reihenentwicklung und mit dem Anfangswert $G(0) =: G_0$ die Lösung für den Flächenparameter

$$G = G(\zeta) = G_0 + \frac{B_m G_0}{1+k_1^{(2)}}\zeta - \frac{1}{2}\frac{B_m G_0}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\left[B_m + k_2^{(2)}\right]\zeta^2 +$$
$$+\frac{1}{6}\frac{B_m G_0}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\left[4B_m k_2^{(2)} + 3B_m^2 + k_1^{(2)} + \left(k_1^{(2)}\right)^2 + 2\left(k_2^{(2)}\right)^2\right]\zeta^3 -$$
$$-\frac{1}{24}\frac{B_m G_0}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[25B_m^2 k_2^{(2)} + 3B_0 k_1^{(2)} + 5B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 18B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + 5\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + 4k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 6\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 15B_m^3 - 2B_m - k_2^{(2)}\right]\zeta^4 +$$
$$+\frac{1}{120}\frac{B_m G_0}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^5}\left[56B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + 31B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 190B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 +\right.$$
$$+ 20B_m^2 k_1^{(2)} + 96B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 210B_m^3 k_2^{(2)} + 40B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 +$$
$$+ 28\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 20k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 25B_m k_2^{(2)} - 20B_m^2 +$$
$$\left. + 9\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 5\left(k_1^{(2)}\right)^4 - 8\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 24\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 105B_m^4\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right) . \qquad (4.63)$$

Werden diese Funktionen in die Polargleichung (4.55) für den Radius eingesetzt, kann die vierte Anpassungskurve dargestellt werden:

$$r = r(\zeta) = \frac{\left[G(\zeta)\right]^2}{\mu\left[1 + k_1^{(1)}(\zeta)\cos\zeta + k_2^{(1)}(\zeta)\sin\zeta\right]} \quad . \qquad (4.64)$$

Den Bezug zur Zeit stellt schließlich die Integration der Gleichung $r^2\, d\zeta = G\, dt$ her, die wie in den vorhergehenden Integrationen mit Hilfe einer Reihenentwicklung durchgeführt werden soll:

$$t = t_0 + \frac{G_0^3}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\zeta - \frac{1}{2}\frac{G_0^3\left(B_m + 2k_2^{(2)}\right)}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\zeta^2 +$$
$$+\frac{1}{6}\frac{G_0^3}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[7B_m k_2^{(2)} + 2k_1^{(2)} + 2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 3B_m^2 + 6\left(k_2^{(2)}\right)^2\right]\zeta^3 -$$
$$-\frac{1}{24}\frac{G_0^3}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^5}\left[40B_m^2 k_2^{(2)} + 5B_m k_1^{(2)} + 9B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 46B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 +\right.$$
$$\left. + 14k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 16\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} - 4B_m - 2k_2^{(2)} + 15B_m^3 + 24\left(k_2^{(2)}\right)^3\right]\zeta^4 +$$
$$+\frac{1}{120}\frac{G_0^3}{\mu^2\left(1+k_1^{(2)}\right)^6}\left[-2k_1^{(2)} - 24\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 12\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 30\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 96k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 +\right.$$
$$+ 120\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 38B_m^2 - 65B_m k_2^{(2)} + 16\left(k_1^{(2)}\right)^4 + 120\left(k_2^{(2)}\right)^4 + 105B_m^4 +$$
$$+ 430B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 315B_m^3 k_2^{(2)} + 326B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 151B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} +$$
$$\left. + 86B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 29B_m^2 k_2^{(2)} + 67B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right) \quad . \qquad (4.65)$$

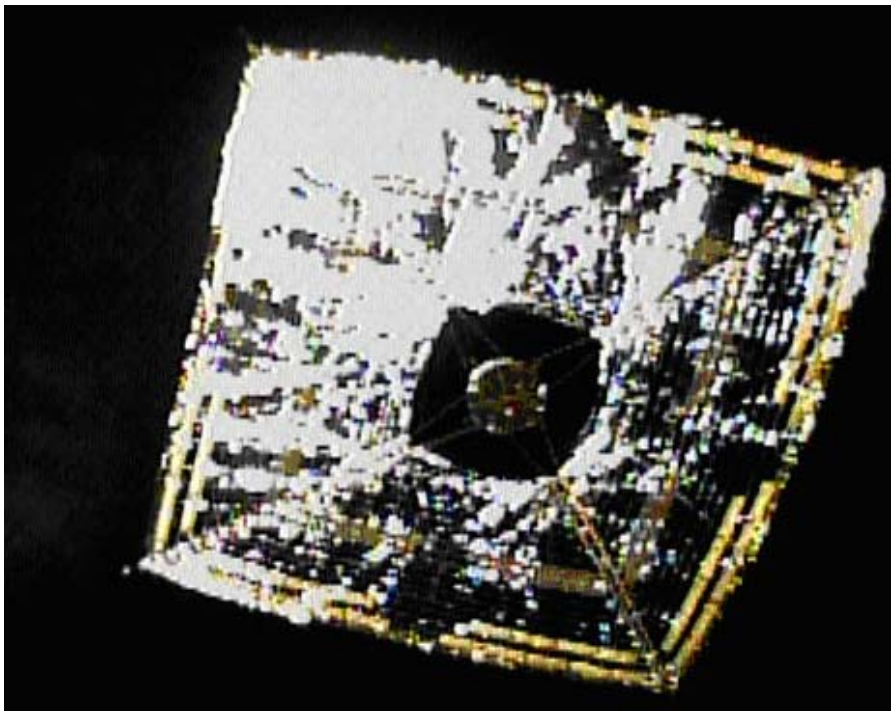

Bild 4-10: Der japanische Sonnensegler Ikarus, aufgenommen mit einer Kamera auf einem begleitenden Satelliten, am 16. Juni 2010 in etwa 10 Millionen km Entfernung von der Erde[1]

NUMERISCHES BEISPIEL: Für eine Darstellung der Ergebnisse in einem Zahlenbeispiel werden die folgenden Anfangswerte verwendet (siehe hierzu die Zahlenkonstanten im vorhergehenden Beispiel und in Tabelle 4-3):

$$G_0 = G(\zeta = 0°) = \sqrt{\mu\, p} = 4.45510668683 \times 10^9\, km^2/s = 1.990706748 \times 10^{-7}\, AE^2/s$$

$$r_P = r(\zeta = 0.0) = 0.983292384\, AE \quad \rightarrow\ k_1^{(1)}(\zeta = 0) = k_1^{(2)} = 0.128258096 \mathrel{\hat{=}} e$$

$$\zeta_B(\zeta = 0) = 0 \quad \rightarrow\ k_2^{(1)}(\zeta = 0) = k_2^{(2)} = 0.0\,,\ B_0 = 1.6970520 \times 10^{-15}\, AE^3/s\,,$$

$$\mu_\odot = 3.9620477 \times 10^{-14}\, AE^3/s^2$$

$$\mu = 1.195913238 \times 10^{12}\ km^3/s^2 = 3.572098767 \times 10^{-14}\ AE^3/s^2$$

$$B_m = \frac{B_0}{\mu} = 0.04228322$$

Die hier verwendeten Zahlenwerte zeigen, dass die Anfangswerte für jeden Lösungsschritt sehr sorgfältig gewählt werden müssen. Insbesondere muss darauf hingewiesen werden, dass auf Grund der radialen Wirkung der Sonnenstrahlung nicht die heliozentrische Gravitationskonstante $\mu_\odot$, sondern die modifizierte Konstante μ verwendet werden muss, was der Kegelschnittparameter $p = G^2/\mu$ der zugrundeliegenden Anpassungskurve erfordert. Ferner muss die entsprechende Exzentrizität verwendet werden.

Mit diesen Zahlenwerten haben die Bahnparameter G(ζ), $k_1^{(1)}(\zeta), k_2^{(1)}(\zeta)$ die folgende numerische Darstellung:

---

[1] http://skyweek.wordpress.com/2010/06/16/das-erste-sonnensegel-im-weltraum-aufgenommen-direkt-von-oben/

$$
\begin{aligned}
k_1^{(1)}(\zeta) &= 0.128258 + 0.856654\cdot 10^{-1}\cdot\zeta - 0.01265452287\cdot\zeta^3 + 0.0003372019348\cdot\zeta^4 + \\
&\quad + 0.0004275523190\cdot\zeta^5 + \cdots \\
k_2^{(1)}(\zeta) &= 0.04039813431\cdot\zeta^2 - 0.0004496025802\cdot\zeta^2 - 0.002805723200\cdot\zeta^4 + \\
&\quad + 0.0001269263109\cdot\zeta^5 + \cdots \\
G(\zeta) &= 0.1991\cdot 10^{-6} + 0.9286491123\cdot 10^{-8}\cdot\zeta - 0.2165718669\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2 + \\
&\quad 0.3827435139\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^3 + 0.3320677838\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4 - 0.4399612149\cdot 10^{-11}\cdot\zeta^5 + \cdots
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

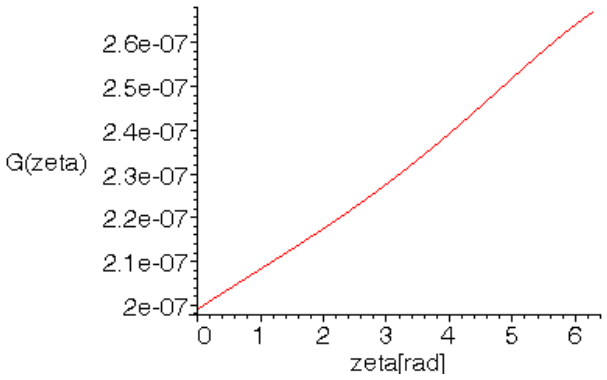

Bild 4-11: Zunahme des Flächenparameters einer heliozentrischen Bahn infolge des transversalen Anteils des Strahlungsdruckes auf ein Sonnensegel mit Anstellwinkel 30°.

Den Verlauf des Flächenparameters G über einen Umlauf mit stetiger Zunahme infolge der transversalen Beschleunigung b_T zeigt Bild 4-11.

Der Bahnradius hat in dem untersuchten Fall die numerische Darstellung

$$
\begin{aligned}
r = r_4(\zeta) &= 0.2799473699\cdot 10^{14}\cdot\left(0.1991\cdot 10^{-6} + 0.7558546512\cdot 10^{-8}\cdot\zeta - 0.1434746996\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2 + \right. \\
&\quad \left. + 0.1486534273\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^3 + 0.1413986461\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4 - 0.3459186635\cdot 10^{-11}\cdot\zeta^5\right)^2 \ / \\
&/\left[1 + \left(0.128258 + 0.0856654\cdot\zeta - 0.01265452287\cdot\zeta^3 + 0.0003372019348\cdot\zeta^4 + \right.\right. \\
&\quad \left. + 0.0004275523190\cdot\zeta^5\right)\cos(\zeta) \ + \\
&\quad + \left(0.04039813431\cdot\zeta^2 - 0.0004496025802\cdot\zeta^3 - 0.002805723201\cdot\zeta^4 + \right. \\
&\quad \left.\left. + 0.0001269263109\cdot\zeta^5\right)\sin(\zeta)\right]
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

Als einige spezielle Werte werden zur Veranschaulichung und heuristischen Kontrolle der Perihelradius und der Radius für ζ=90° berechnet:

$$r(\zeta = 0°) = 0.9835818138\,AE \quad , \quad r(\zeta = 90°) = 1.154535504\,AE \quad .$$

Der Ergebnisplot in Bild 4-12 zeigt das Aufspiralen der Bahn über einen Umlauf. Die Näherungslösung durch eine Reihenentwicklung bis zur 6ten Ordnung im Bahnwinkel ζ erlaubt aber keine Untersuchung des Bahnverlaufs über mehrere Umläufe. Das Bild legt ferner nahe, dass der ebene Anstellwinkel β in der Praxis nur über kleinere Bahnbögen konstant gehalten werden sollte, so dass durch

geschickte Variation dieses Winkels über den gesamten Übergangsbogen eine optimale Strategie entwickelt werden muss.[1]

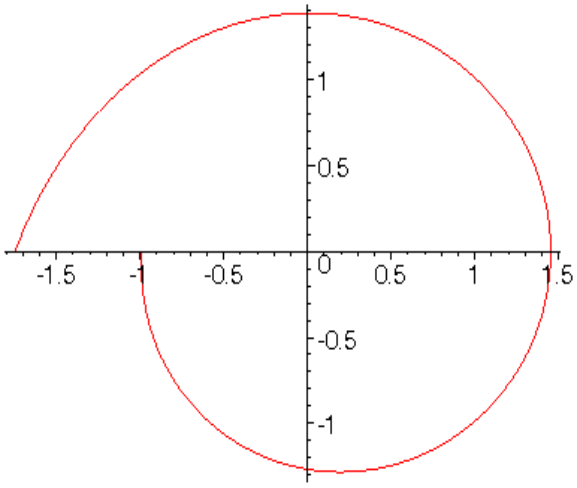

Bild 4-12: Aufspiralen einer heliozentrischen Bahn durch den transversalen Anteil des Strahlungsdruckes auf ein Sonnensegel mit Anstellwinkel 30° (der Plot ist wegen der Reihenentwicklung auf ζ=0° normiert, während die Zeichnung bei ζ=-180° beginnt) (Längeneinheit AE)

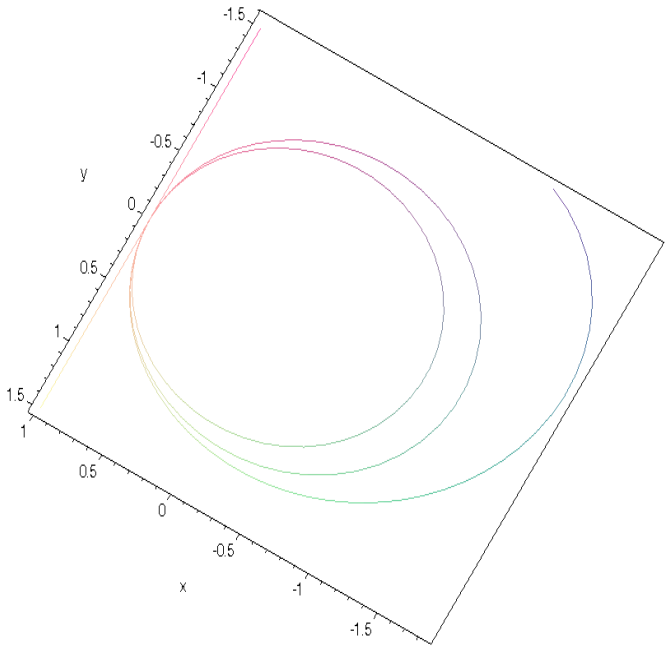

Bild 4-13: Zusammenschau der vier Anpassungskurven in einer und derselben Bahnebene, links die Gerade als ungestörte Bewegung, dann die innere Ellipse der Erdbahn, die zweite größere Ellipse als Folge der radialen Beschleunigung durch den Strahlungsdruck und schließlich die Aufspiralung infolge der transversalen Beschleunigung durch den Strahlungsdruck (Längeneinheit AE) . ■

Bild 4-13 zeigt schließlich die vier bisher benutzten Anpassungskurven in der oskulierenden Bahnebene: Gerade, 1. Ellipse als Erdbahn, 2. Ellipse durch Einwirkung der radialen Be-

[1] Dieser Optimierungsprozess geht über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus. Eine vergleichbare Optimierung wurde etwa in der Studie ECKSTEIN, M. C. et al. (1983) durchgeführt

schleunigung durch den Solardruck, Aufspiralung durch den transversalen Beschleunigungsanteil des Solardrucks.

5. Lösungsschritt:

Zu weiteren Demonstration des Verfahrens wird in diesem Integrationsschritt angenommen, dass das Sonnensegel so gegen die Sonnenstrahlung angestellt wird, dass die Bewegung aus der ursprünglichen Bahnebene herausführt. Dies wird dadurch erreicht, dass durch die Segelanstellung ein Teil der durch den Solardruck erzeugten Beschleunigung in eine Komponente senkrecht zur Bahnebene umgelenkt wird, also eine normale Komponente b_N erhalten wird. Dann wird die Variationsgleichung (3.8) (auf Seite 67) wirksam, so dass mit der dritten der *Frenet*schen Formeln der Astrodynamik (3.9) der Normalenvektor variiert und die Bewegung räumlich wird.

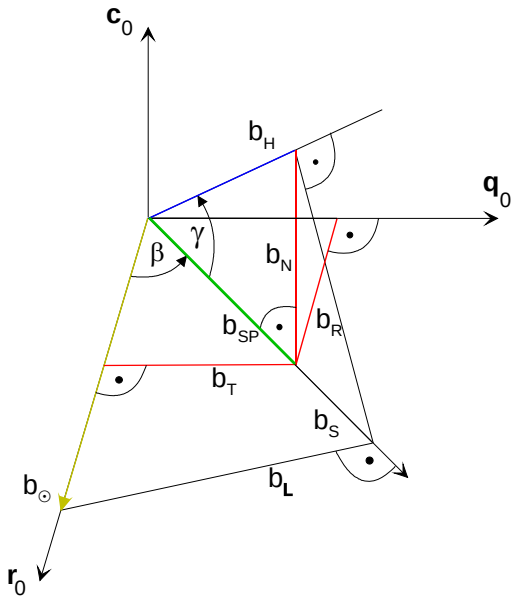

Bild 4-14: Anstellwinkel eines Sonnensegels zur Erzeugung einer räumlichen Bahn: Winkel β Drehung in der Bahnebene, Winkel γ Drehung aus der momentanen Bahnebene, Darstellung der Beschleunigungen im *Leibniz*-System

Die Beschleunigung $b_\odot$ wird entsprechend Bild 4-14 in die Richtungen des begleitenden *Leibniz*systems zerlegt:

$$\begin{aligned}
b_S &= b_\odot \cos\beta \\
b_L &= b_\odot \sin\beta \\
b_H &= b_S \cos\gamma = b_\odot \cos\gamma\ \cos\beta \\
b_N &= b_H \sin\gamma = b_\odot \sin\gamma\ \cos\gamma\ \cos\beta \\
b_{SP} &= b_H \cos\gamma = b_\odot\ \cos^2\gamma\ \cos\beta \\
b_R &= b_{SP} \cos\beta = b_\odot\ \cos^2\gamma\ \cos^2\beta \\
b_T &= b_{SP} \sin\beta = b_\odot\ \cos^2\gamma\ \sin\beta\ \cos\beta
\end{aligned} \qquad (4.68)$$

Bei Berücksichtigung des räumlichen Anstellwinkels γ müssen entsprechend diesen Formeln die radiale und die transversale Beschleunigung im vorherigen 4. Integrationsschritt modifiziert werden, was sich auf die numerische Darstellung der Bahnkurve in der Polargleichung (4.64) auswirkt.

Damit kann die Variationsgleichung (3.233) für die Variation des Raumwinkels mit dem Solardruck (4.54) und der in den vorigen Schritten berechneten Polargleichung verwendet werden:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{r^3}{G^2} b_N = \frac{r}{G^2}\frac{B_S}{m_0}\sin\gamma\,\cos\gamma\,\cos\beta = \frac{B_S \sin\gamma\,\cos\gamma\,\cos\beta}{\mu_\odot m_0}\frac{1}{1+k_1^{(1)}\cos\zeta + k_2^{(1)}\sin\zeta}$$

mit der Bezeichnung

$$B_N := \frac{B_S\,\sin\gamma\cos\gamma\cos\beta}{\mu_\odot m_0} \tag{4.69}$$

lautet die Variationsgleichung des zweiten *Hansen*-Winkels

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \frac{B_N}{1+k_1^{(1)}(\zeta)\cos\zeta + k_2^{(1)}(\zeta)\sin\zeta} \quad . \tag{4.70}$$

Da die beiden Parameter $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ in diesem Schritt nicht neu berechnet werden müssen, weil die normale Beschleunigung auf diese Parameter keinen Einfluss hat, kann mit den Parametern aus den Integralen (4.61) und (4.62) die Differentialgleichung für η unmittelbar integriert werden, wofür hier wieder eine Formelmanipulator mit einer Reihenentwicklung eingesetzt werden soll. Mit der Konstanten η_0 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\eta = \eta(\zeta) = \eta_0 &+ \frac{B_N}{1+k_1^{(2)}}\zeta - \frac{1}{2}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\left[2B_m + k_2^{(2)}\right]\zeta^2 + \\
&+ \frac{1}{6}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^3}\left[7B_m k_2^{(2)} + k_1^{(2)} + \left(k_1^{(2)}\right)^2 + 8B_m^2 + 2\left(k_2^{(2)}\right)^2\right]\zeta^3 - \\
&- \frac{1}{24}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^4}\left[-2B_m + 7B_m k_1^{(2)} + 9B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 59B_m^2 k_2^{(2)} + 29B_m\left(k_2^{(2)}\right)^2 - \right. \\
&\qquad \left. - k_2^{(2)} + 4k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 5\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + 48B_m^3 + 6\left(k_2^{(2)}\right)^3\right]\zeta^4 + \\
&+ \frac{1}{120}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}\right)^5}\left[61B_m k_1^{(2)}k_2^{(2)} + 605B_m^3 k_2^{(2)} + 91B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_2^{(2)} + \right. \\
&\qquad + 410B_m^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 30B_m k_2^{(2)} + 65B_m^2 k_1^{(2)} + 95B_m^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
&\qquad + 146B_m\left(k_2^{(2)}\right)^3 + 20k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 28\left(k_1^{(2)}\right)^2\left(k_2^{(2)}\right)^2 - k_1^{(2)} - 30B_m^2 + \\
&\qquad \left. + 9\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 5\left(k_1^{(2)}\right)^4 - 8\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 24\left(k_2^{(2)}\right)^4 + 3\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 384B_m^4\right]\zeta^5 + O\left(\zeta^6\right) \quad .
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Um die räumliche Bewegung zu untersuchen können die Variationsgleichungen (2.90) (auf Seite 37) (bei Vernachlässigung einer Eigenbewegung dieses Basissystems mit p_{ij}=0) für den Knotenwinkel σ bzw. die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω nicht verwendet werden, da die Ausgangsbahn in der Grundebene des Sonnensystems liegt, somit die Inklination

i=0° hat. Stattdessen können die Parameter j_1, j_2 aus Definition (2.187) (auf Seite 60) mit den Variationsgleichungen (2.191) gewählt werden:

$$
\begin{aligned}
& j_1 := \sin i \, \cos\sigma \quad , \quad j_2 := \sin i \, \sin\sigma \\
& \cos i = \operatorname{sgn}(\cos i)\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2} \quad , \quad \sin i = \sqrt{j_1^2 + j_2^2} \quad , \quad \sigma = \arctan\frac{j_2}{j_1} \\
& \frac{dj_1}{d\zeta} = \pm\frac{d\eta}{d\zeta}\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2}\,\cos\zeta \quad , \quad \frac{dj_2}{d\zeta} = \pm\frac{d\eta}{d\zeta}\sqrt{1 - j_1^2 - j_2^2}\,\sin\zeta \quad .
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

Unter Verwendung der Variation des räumlichen Winkels η in der Form (4.70) können die Funktionen $j_1(\zeta), j_2(\zeta)$ und damit die Winkel *i* und σ berechnet werden.

Die Lösung in Form einer Reihenentwicklung lautet mit den Anfangswerten

$$j_{10} := j_1(\zeta_0)\,,\; j_{20} := j_2(\zeta_0)\,,\; \cos i_0 = \sqrt{1 - j_{10}^2 - j_{20}^2}$$

entwickelt nach den ersten drei bzw. vier Potenzen

$$
\begin{aligned}
j_1 = j_1(\zeta) = {} & j_{10} + \frac{B_N \cos i_0}{1 + k_1^{(2)} + k_2^{(2)}}\zeta - \\
& - \frac{1}{2}\frac{B_N}{\left(1 + k_1^{(2)} + k_2^{(2)}\right)^2\left(1 + k_1^{(2)}\right)}\left[B_N\, j_{10}\left(1 + k_1^{(2)}\right) + B_m \cos i_0\left(2 + 2k_1^{(2)} + k_2^{(2)}\right)\right]\zeta^2 + \\
& + \frac{1}{6}\frac{B_N}{\left(1 + k_1^{(2)} + k_2^{(2)}\right)^3\left(1 + k_1^{(2)}\right)^2}\Big[-3B_N\, j_{20}\left(k_1^{(2)}\right)^2 + 6B_N\, B_m\, j_{10} - B_N\, j_{20}\, k_2^{(2)}\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \\
& - B_N\, j_{20}\, k_2^{(2)} - B_N\, j_{20}\left(k_1^{(2)}\right)^3 - 5B_m \cos i_0\, k_1^{(2)} - 2B_m \cos i_0 - B_N\, j_{20} - \cos i_0 + \\
& + 3B_N\, j_{10}\, B_m\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} + 3B_N\, j_{10}\, B_m\, k_2^{(2)} + 12B_N\, j_{10}\, B_m\, k_1^{(2)} + 6B_N\, j_{10}\, B_m\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \\
& - 2B_N\, j_{20}\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} - B_m \cos i_0\, k_2^{(2)} + 9B_m^2 \cos i_0\, B_m^2\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} + 2B_m \cos i_0\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} + \\
& + 2B_m \cos i_0\, k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 6\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 4\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 8B_m^2 \cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
& + 16B_m^2 \cos i_0\, k_1^{(2)} - 4B_m \cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 2\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 k_1^{(2)} - 2\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3 k_2^{(2)} + \\
& + 9B_m^2 \cos i_0\, k_2^{(2)} - 6\cos i_0\, k_1^{(2)} k_2^{(2)} - 2B_N^2 \cos i_0\, k_1^{(2)} + 2B_m \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 + \\
& + 3B_m^2 \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 6\cos i_0\, k_2^{(2)}\left(k_1^{(2)}\right)^2 + B_m \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^3 - \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \\
& - B_m \cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 8B_m^2 \cos i_0 - 4\cos i_0\, k_1^{(2)} - 2\cos i_0\, k_2^{(2)} - \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 - \\
& - \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^4 - B_N^2 \cos i_0 - 3B_N\, j_{20}\, k_1^{(2)}\Big]\zeta^3 + O\left(\zeta^4\right)
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

$$
\begin{aligned}
j_2 = j_2(\zeta) = j_{20} &+ \frac{1}{2}\frac{B_N \cos i_0}{1+k_1^{(2)}+k_2^{(2)}}\zeta^2 - \\
&- \frac{1}{3}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}+k_2^{(2)}\right)^2\left(1+k_1^{(2)}\right)}\left[B_N\, j_{10}\left(1+k_1^{(2)}\right)+B_m\cos i_0\left(2+2k_1^{(2)}+k_2^{(2)}\right)\right]\zeta^3 + \\
&+ \frac{1}{24}\frac{B_N}{\left(1+k_1^{(2)}+k_2^{(2)}\right)^3\left(1+k_1^{(2)}\right)^2}\Big[18\,B_N\,B_m\,j_{10}+9\,B_N\,B_m\,j_{10}\,k_1^{(2)}k_2^{(2)}-9B_N\;j_{20}\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
&\quad + 36\,B_N\,B_m\,j_{10}\,k_1^{(2)} - 3B_N\,j_{20}\,k_2^{(2)}\left(k_1^{(2)}\right)^3 - 6B_N\,j_{20}\,k_1^{(2)}\,k_2^{(2)} - 3B_N\,j_{20}\,k_2^{(2)} + 18B_N\,B_m\,j_{10}\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
&\quad + 9B_N\,j_{10}\,B_m\,k_2^{(2)} - 3B_N\,j_{20} - 3B_N\,j_{20}\left(k_1^{(2)}\right)^3 - 9B_N\,j_{20}\,k_1^{(2)} + 27B_m^2\cos i_0\,k_1^{(2)}\,k_2^{(2)} - \cos i_0 - \\
&\quad - 15B_m\cos i_0 k_1^{(2)} - 3B_m\cos i_0\,k_2^{(2)} - 2\cos i_0\,k_2^{(2)} - 4\cos i_0\,k_1^{(2)} - 6B_N^2\cos i_0\,k_1^{(2)} - \\
&\quad - 3B_N^2\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 6\cos i_0\,k_1^{(2)}\,k_2^{(2)} + 6\cos i_0\,k_1^{(2)}\,k_2^{(2)} + 6B_m\cos i_0\,k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 - \\
&\quad - 6B_m\cos i_0 - \cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^4 - 3B_N^2\cos i_0 + 24B_m^2\cos i_0 - 4\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3 - \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 - \\
&\quad - 3B_m\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^3 + 9B_m^2\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 6\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 k_1^{(2)} + 48B_m^2\cos i_0\,k_1^{(2)} + \\
&\quad + 24B_m^2\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 - 2\cos i_0\,k_1^{(2)}\left(k_2^{(2)}\right)^2 - 12B_m\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2\left(k_1^{(2)}\right)^2 + \\
&\quad + 27B_m^2\,B_m^2\,\cos i_0\,k_2^{(2)} + 6B_m\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^2 + 3B_m\cos i_0\left(k_2^{(2)}\right)^3 - 6\cos i_0\left(k_1^{(2)}\right)^2 - \\
&\quad - 3B_m\cos i_0\,k_1^{(2)}\,k_2^{(2)} - \Big]\zeta^4 + O\left(\zeta^5\right)
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

Falls die Rektaszension des aufsteigenden Knotens benötigt wird, kann sie durch Integration der mittleren (nicht singularitätenfreien) Variationsgleichung (2.90) mit $p_{ij} = 0$

$$
\frac{d\Omega}{d\zeta} = \frac{d\eta}{d\zeta}\frac{\sin\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)}{\sin\left(i(\zeta)\right)} \tag{4.75}
$$

berechnet werden[1].

Für eine Darstellung im dreidimensionalen Raum bei Bezug auf die Ekliptik als Basisebene mit der Basis $\mathbf{p}_i$ ergibt sich aus Formel (2.113) auf Seite 41 der Radiusvektor

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 = r\Big\{&\mathbf{p}_1\Big[-\cos\left(i(\zeta)\right)\sin\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\sin\left(\Omega(\zeta)\right)+\cos\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\cos\left(\Omega(\zeta)\right)\Big]+ \\
&+\mathbf{p}_2\Big[\;\cos\left(i(\zeta)\right)\sin\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\cos\left(\Omega(\zeta)\right)+\cos\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\sin\left(\Omega(\zeta)\right)\Big]+ \\
&+\mathbf{p}_3\quad\sin\left(i(\zeta)\right)\sin\left(\zeta-\sigma(\zeta)\right)\Big\}\;.
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

Der Geschwindigkeitsvektor kann mit der Zeitbeziehung $\left(r^2\dot{\zeta} = G\right)$ aus der Darstellung

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{r}\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\dot{\mathbf{q}}_0 = \dot{r}\mathbf{r}_0 + \frac{G}{r}\mathbf{q}_0 = \frac{G}{r}\left(\frac{dr}{d\zeta}\mathbf{r}_0 + \mathbf{q}_0\right) \tag{4.77}
$$

und mit den Beziehungen (2.113) erhalten werden:

[1] Die (mit Maple) berechneten Ergebnisse sind so aufwendig und unübersichtlich, dass sie nicht in den vorliegenden Bericht aufgenommen werden

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{G}{r}\Bigg\{\mathbf{p}_1\Bigg[-\cos\big(i(\zeta)\big)\sin\big(\Omega(\zeta)\big)\Bigg(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)+\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\Bigg)+$$
$$+\cos\big(\Omega(\zeta)\big)\Bigg(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)-\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\Bigg)\Bigg]+$$
$$+\mathbf{p}_2\Bigg[\cos\big(i(\zeta)\big)\cos\big(\Omega(\zeta)\big)\Bigg(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)+\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\Bigg)+ \qquad (4.78)$$
$$+\sin\big(\Omega(\zeta)\big)\Bigg(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)-\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\Bigg)\Bigg]+$$
$$+\mathbf{p}_3\,\sin\big(i(\zeta)\big)\Bigg[\frac{1}{r}\frac{dr}{d\zeta}\sin\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)+\cos\big(\zeta-\sigma(\zeta)\big)\Bigg]\Bigg\} \quad .$$

Im vorliegenden Fall ist der Radius r aus Beziehung (4.64) bekannt, seine Variation nach dem Bahnwinkel $dr/d\zeta$ kann ebenfalls aus diesem Ausdruck (eventuell mit Hilfe eines Formelmanipulators) gewonnen werden. Es ergibt sich:

NUMERISCHES BEISPIEL: Gegenüber den Zahlenwerten im 4. Lösungsschritt werde jetzt (lediglich zur Demonstration und nicht realistisch) eine Ablenkung in der oskulierenden Bahnebene von β=30° und aus der Ebene um γ=45° gewählt. Dies führt auf den Parameter $B_N = 0.042811429$. Ferner werden die Parameter des numerischen Beispiels im vierten Lösungsschritt sowie den Anfangswerten

$$B_m = B_0/\mu_\odot = 0.0428327$$
$$\eta_0 = 0.0,\ i^{(0)} = 0°,\ \Omega^{(0)} = 0°,\ u^{(0)} = 0°,\ k_2^{(2)} = 0.0\ ,\quad j_{10} = 0.0,\ \ j_{20} = 0.0$$
$$r_P = r\big(\zeta = 0.0\big) = 0.983292384\,AE \quad \rightarrow\ k_1^{(1)}\big(\zeta = 0\big) = k_1^{(2)} = 0.128258096 \triangleq e \qquad (4.79)$$
$$G_0 = G\big(\zeta = 0°\big) = \sqrt{\mu\, p} = 4.45510668683\times 10^{9}\ km^2/s = 1.990706748\times 10^{-7}\ AE^2/s$$
$$\mu = 1.195913238\times 10^{12}\ km^3/s^2 = 3.572098767\times 10^{-14}\ AE^3/s^2$$

verwendet.

Für die Variation des Bahnradius nach dem Bahnwinkel ergibt sich mit diesen Werten der numerische Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\zeta} &= 0.5598947398\cdot 10^{14}\cdot\left(0.1991\cdot 10^{-6}+0.7558546512\cdot 10^{-8}\cdot\zeta-0.1434746996\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2+\right.\\
&\quad\left.+0.1486534273\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^3+0.1413986461\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4-0.3459186635\cdot 10^{-11}\cdot\zeta^5\right)\cdot\\
&\quad\left(0.7558546512\cdot 10^{-8}-0.2869493991\cdot 10^{-9}\cdot\zeta+0.4459602819\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2+\right.\\
&\quad\left.+0.5655945844\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^3-.1729593317\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4\right)/\\
&/\left[1+\left(0.128258+0.856654\cdot 10^{-1}\cdot\zeta-0.1265452287\cdot 10^{-1}\cdot\zeta^3+\right.\right.\\
&\quad\left.+0.3372019348\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^4+0.4275523190\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\cos(\zeta)\ +\\
&\quad+\left(0.4039813431\cdot 10^{-1}\cdot\zeta^2-0.4496025802\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^3-\right.\\
&\quad\left.\left.-0.2805723200\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^4+0.1269263109\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\sin(\zeta)\right]-\\
&-0.2799473699\cdot 10^{14}\cdot\left(0.1991\cdot 10^{-6}+0.7558546512\cdot 10^{-8}\cdot\zeta-0.1434746996\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^2+\right.\\
&\quad\left.+0.1486534273\cdot 10^{-9}\cdot\zeta^3+0.1413986461\cdot 10^{-10}\cdot\zeta^4-0.3459186635\cdot 10^{-11}\cdot\zeta^5\right)^2\cdot\\
&\cdot\left[\left(0.0856654-0.03796356861\cdot\zeta^2+0.1348807740\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^3+\right.\right.\\
&\quad\left.+0.2137761596\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^4\right)\cos(\zeta)-\\
&\quad-\left(0.128258+0.0856654\cdot\zeta-0.01265452287\cdot\zeta^3+0.3372019348\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^4+\right.\\
&\quad\left.+0.4275523190\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\sin(\zeta)+\\
&\quad+0.08079626862\cdot\zeta-0.1348807740\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^2-0.01122289280\cdot\zeta^3+\\
&\quad\left.+0.6346315545\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^4\right)\sin(\zeta)+\\
&\quad+\left(0.04039813431\cdot\zeta^2-0.4496025802\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^3-0.2805723200\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^4+\right.\\
&\quad\left.\left.+0.1269263109\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\cos(\zeta)\right]\ /\\
&/\left[1+\left(0.128258+0.0856654\cdot\zeta-0.01265452287\cdot\zeta^3+0.3372019348\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^4+\right.\right.\\
&\quad\left.+0.4275523190\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\cos(\zeta)+\\
&\quad+\left(0.04039813431\cdot\zeta^2-0.4496025802\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^3-0.2805723200\cdot 10^{-2}\cdot\zeta^4+\right.\\
&\quad\left.\left.+0.1269263109\cdot 10^{-3}\cdot\zeta^5\right)\sin(\zeta)\right]^2
\end{aligned}\tag{4.80}$$

Im Beispiel hat der zweite Bahnwinkel η („zweiter *Hansen*winkel“) die numerische Darstellung bei Bezug auf den Anfangswert $\eta_0=\eta(\zeta=0°)=0.0$ (für die numerische Auswertung wurde die Reihenentwicklung bis zur 12. Ordnung getrieben)

$$\begin{aligned}
\eta=\eta(\zeta) &= 0.03794471243\cdot\zeta-0.001440516571\cdot\zeta^2+0.0007918292074\cdot\zeta^3+\\
&\quad+0.4083643127\cdot 10^{-4}\cdot\zeta^4-0.1837209610\cdot 10^{-4}\cdot\zeta^5+0.5828605624\cdot 10^{-5}\cdot\zeta^6-\\
&\quad-0.1255975336\cdot 10^{-5}\cdot\zeta^7-0.1007964758\cdot 10^{-6}\cdot\zeta^8-0.6133109711\cdot 10^{-7}\cdot\zeta^9-\\
&\quad-0.2377384982\cdot 10^{-7}\cdot\zeta^{10}+0.3464411393\cdot 10^{-8}\cdot\zeta^{11}+\cdots
\end{aligned}\tag{4.81}$$

sowie die Variation nach dem Bahnwinkel

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = 0.03794471243 - 0.002881033142\cdot\zeta + 0.002375487622\cdot\zeta^2 + \\ + 0.0001633457251\cdot\zeta^3 - 0.00009186048050\cdot\zeta^4 + 0.3497163374\cdot10^{-4}\cdot\zeta^5 - \\ - 0.8791827352\cdot10^{-5}\cdot\zeta^6 - 0.8063718064\cdot10^{-6}\cdot\zeta^7 + 0.5519798740\cdot10^{-6}\cdot\zeta^8 + \\ + 0.2377384982\cdot10^{-6}\cdot\zeta^9 + 0.3810852532\cdot10^{-7}\cdot\zeta^{10} + \cdots \quad . \tag{4.82}$$

Entsprechend kann durch näherungsweises Lösen der Differentialgleichung (4.75) mit den hier gewählten Zahlenwerten die Näherungsdarstellung für die ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens berechnet werden:

$$\Omega(\zeta) = \Omega_0 + 0.03794471243\cdot\zeta - 0.001440516571\cdot\zeta^2 + 0.7918292074\cdot10^{-3}\cdot\zeta^3 + \\ + 0.4083643127\cdot10^{-4}\cdot\zeta^4 - 0.1837209610\cdot10^{-4}\cdot\zeta^5 + 0.5828605624\cdot10^{-5}\cdot\zeta^6 - \\ - 0.1255975336\cdot10^{-5}\cdot\zeta^7 - 0.1007964758\cdot10^{-6}\cdot\zeta^8 - 0.6133109711\cdot10^{-7}\cdot\zeta^9 - \\ - 0.2377384982\cdot10^{-7}\cdot\zeta^{10} + 0.3464411393\cdot10^{-8}\cdot\zeta^{11} + O\left(10^{12}\right). \tag{4.83}$$

Hier werde (ohne die Allgemeinheit der Aussagen zu beeinflussen) der Anfangswert $\Omega_0 = 0°.0$ gewählt.

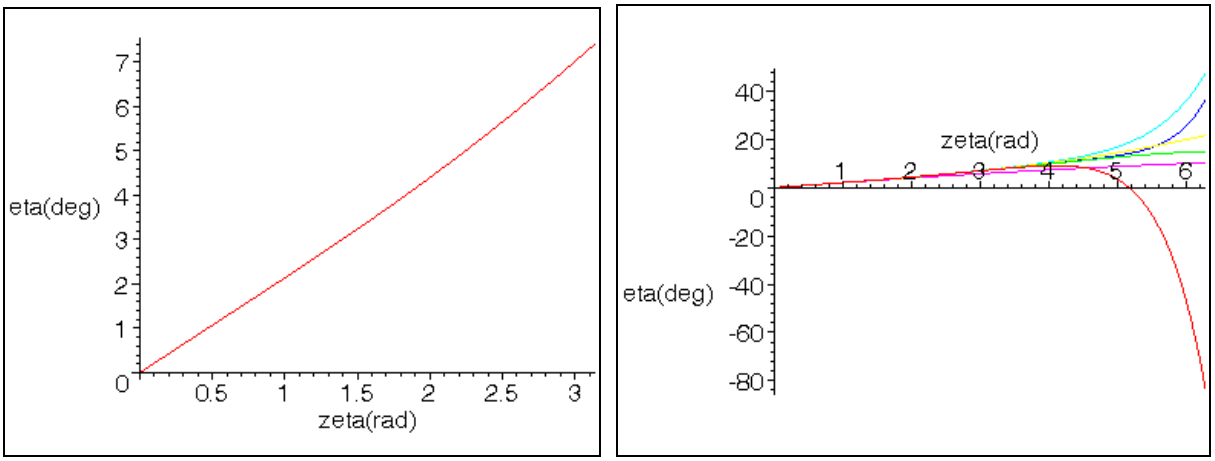

Bild 4-15 linkes Bild: Verlauf des Raumwinkels η[Grad] bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung über einen halben Umlauf um die Sonne. rechtes Bild: Berechnung des Raumwinkels η[Grad] mit verschiedenen Ordnungen (12., 11., 10., 6., 4., 3.) einer Reihenentwicklung über einen halben Umlauf um die Sonne. Die Streuung der durch die Reihenentwicklung bedingten Zahlenwerte macht die Lösung nach einem halben Umlauf wertlos

Bild 4-15 zeigt den Verlauf des Raumwinkels η gegenüber dem Bahnwinkel ζ über einen Umlauf um die Sonne bei konstanten Anstellwinkeln β und γ in Bezug auf die Strahlungsrichtung der Sonnenstrahlung. Anmerkung. Wegen der eingeschränkten Gültigkeit der Integrationslösungen infolge der Näherung durch Reihen ist zum Ende des untersuchten Intervalls der Verlauf der Kurve als unsicher zu betrachten. Dies macht sich bereits nach einem halben Umlauf (bis etwa ζ=π) bemerkbar, was aus dem rechten Bild in Bild 4-15 erkennbar wird. Hierfür wurde die Reihenentwicklung bis zur 12. Ordnung, 11. Ordnung, 10. Ordnung, 6. Ordnung, 4. Ordnung, und 3. Ordnung aufgetragen. Im letzteren Fall ist eine Abweichung bereits vor 1π erkennbar (Kurve in magenta), in allen anderen Fällen erst danach. Ab hier ist die Lösung wertlos. Es muss angemerkt werden, dass der Formelmanipulator keine analytische Lösung der zu berechnenden Differentialgleichungen gefunden hat.

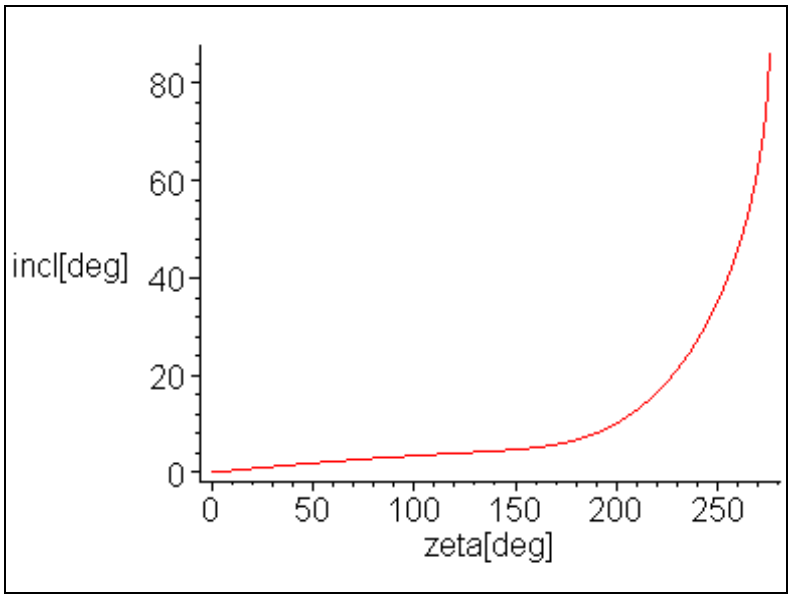

Bild 4-16: Verlauf der Bahninklination *i*[Grad] bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Der stark eingeschränkte Gültigkeitsbereich der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung ist erkennbar[1].

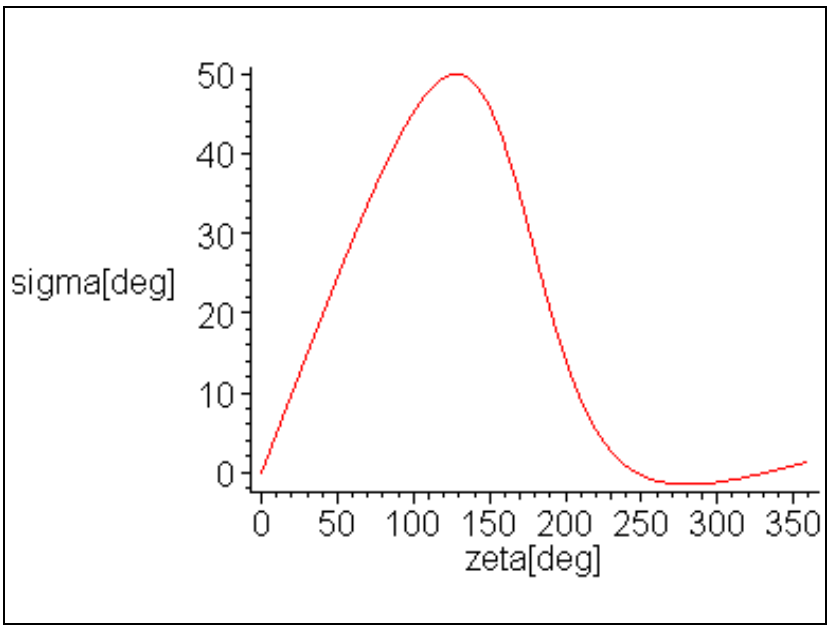

Bild 4-17: Verlauf der Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens σ[Grad] bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Der stark eingeschränkte Gültigkeitsbereich bis maximal ζ=100° der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung deutlich erkennbar.

[1] Weitere numerische Untersuchungen mit längeren Reihenentwicklungen oder eventuell besseren analytischen, also mit bekannten Funktionen integrierbaren, Lösungen sollten die hier vorgestellten Lösungsvorschläge verbessern können. Falls diese zu keinem überzeugenden Ergebnis führen muss wie bisher numerisch integriert werden. Das macht jedoch den Lösungsansatz mit den bisher gefundenen analytischen Lösungen nicht überflüssig. Dies bestätigt lediglich auch bei diesem Lösungsansatz die Erfahrung, dass analytische Lösungen nur bis zu einem gewissen Grad gefunden werden können, höhere Genauigkeiten nur auf numerischem Weg zu erreichen sind (Numerische Untersuchungen sind jedoch nicht Gegenstand dieses Berichtes)

Dies gilt in verschärfter Form auch für die Inklination, sowie die Länge des Knotens in der Bahn σ wie auch für die ekliptikale Länge Ω des aufsteigenden Knotens, wie in Bild 4-16, Bild 4-17 und Bild 4-17 erkennbar wird. Ergänzend ist in Bild 4-19 die Bahnhöhe über der Ekliptik dargestellt.

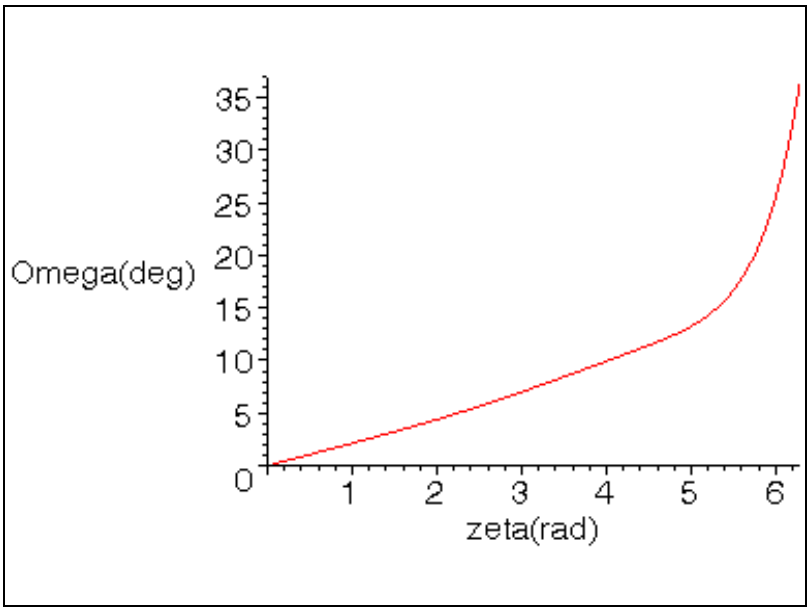

Bild 4-18: Verlauf der ekliptikalen Länge des aufsteigenden Knotens Ω[Grad] mit Anfangswert 0° bei Start aus der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Auch hier ist der eingeschränkte Gültigkeitsbereich der durch die Reihenentwicklung erhaltenen Lösung ab etwa dem Wert 1.6 π erkennbar.

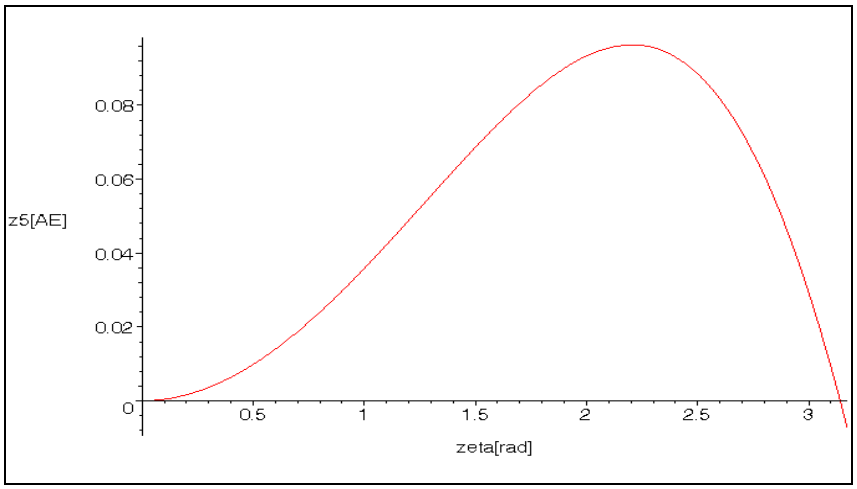

Bild 4-19: Verlauf der Höhe des Raumflugsonde über der Ekliptik bei konstantem räumlichem Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung über einen halben Umlauf um die Sonne

Das Gesamt-Ergebnis ist in Bild 4-20 dargestellt. Hier sind alle 5 Anpassungskurven in ihrer Reihenfolge zu erkennen. Der Berührpunkt aller Kurven liegt im Perihel der Bahnen. Die z-Achse ist zur Veranschaulichung erheblich überhöht. Damit wird demonstriert, wie die Bahninklination durch den konstanten normalen Schub infolge des gegen die Sonnenrichtung konstant angestellten Sonnensegels zunächst kontinuierlich erhöht wird. Es muss allerdings beachtet werden, dass infolge der jeweils um das Perihel durchgeführten Reihenentwicklung nur eine in der Dauer eingeschränkte Genauigkeit der Lösungen erwartet werden darf.

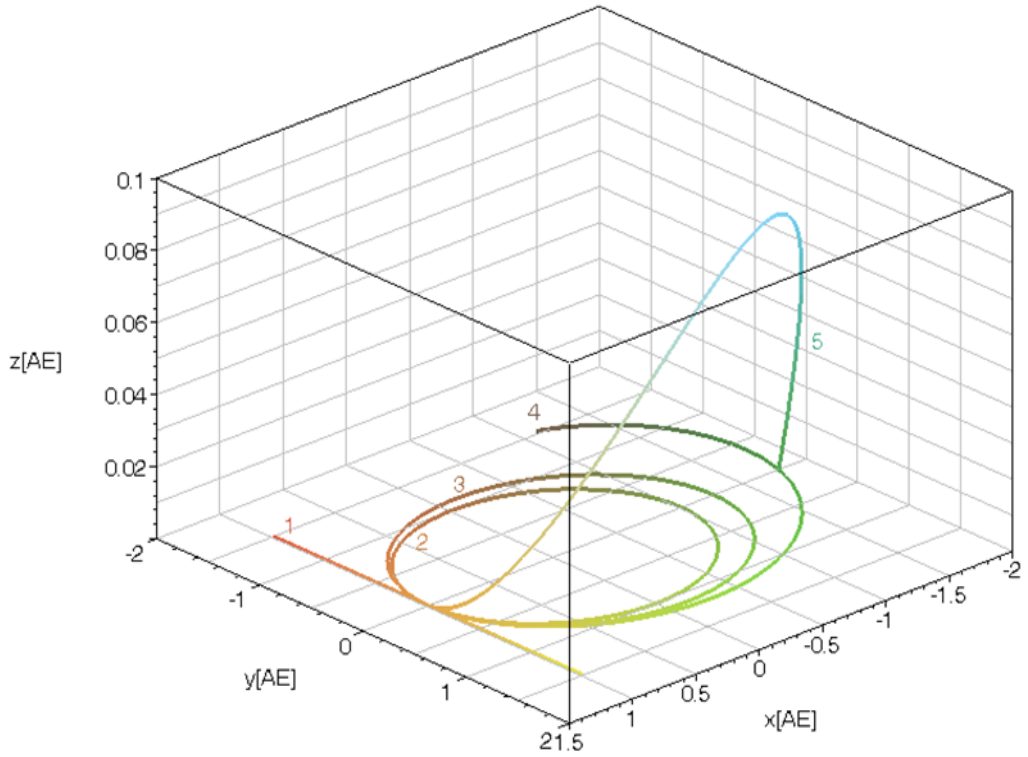

Bild 4-20: Die fünf Anpassungskurven bei konstantem ebenem (β=30°) und räumlichem (γ=45°) Anstellwinkel des Sonnensegels gegenüber der Richtung der Sonnenstrahlung. Kurve 1: Gerade, keine Beschleunigung, Kurve 2: Erdbahn: Gravitationsbeschleunigung durch Sonne (Zweikörperbewegung), Kurve 3: radiale Beschleunigung durch Strahlungsdruck, Kurve 4: transversale Beschleunigung durch den Strahlungsdruck, Kurve 5: normale Beschleunigung durch den Strahlungsdruck (man beachte die starke Überhöhung der z-Achse)[1]

[1] Die hier mit dem Programmsystem MAPLE erzeugte 3D-Darstellung wurde mit freundlicher Unterstützung von Scientific Computers GmbH, Aachen, Herrn Thomas Richards erarbeitet

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die Beiträge *P. A. Hansen*s zur Himmelsmechanik umfassen zahlreiche theoretische und anwendungsorientierte Arbeiten. Alle seine Arbeiten ordnete er dem Bemühen unter, geschickte Lösungswege zur Bearbeitung himmelsmechanischer Aufgabenstellungen vor allem zur Bahnbestimmung und Störungsrechnung der Kleinen Planeten und des Mondes zu finden. Dies ist ihm auch in beeindruckender Weise gelungen, so dass seine Methoden für viele Jahrzehnte die genauesten Berechnungen der Bahnen von Planeten und des Mondes lieferten. Die positive Nachwirkung dieser Arbeiten ist bis in die heutige Zeit zu spüren. Im Rahmen dieser Arbeiten gelangen *P. A. Hansen* jedoch auch theoretische Entdeckungen, deren allgemeine und grundlegende Einordnung in Himmelsmechanik und Astrodynamik mit konsequentem Ausbau für eine allgemeine Bewegungslehre noch weitgehend unbearbeitet ist, was in erster Linie die Entdeckung der von ihm so genannten „idealen“ Koordinaten betrifft.
Mit dieser Entdeckung hat *P. A. Hansen* ein wichtiges Hilfsmittel zur allgemeinen Behandlung von Bewegungsproblemen zur Verfügung gestellt. Dies wurde in der vorliegenden Arbeit zusammenfassend behandelt und konnte um einige wesentliche allgemeingültige und grundlegende Eigenschaften erweitert werden. *Hansen* hatte im Rahmen seiner Störungsrechnung die räumliche Bewegung der Bahnebene und die Bewegung des untersuchten Himmelskörpers in der oskulierenden Bahnebene weitgehend entkoppeln können. Im Rahmen der räumlichen Bewegung konnten für das auf *G. W. Leibniz* zurückgehende mitgeführte Bahnsystem als begleitendes Dreibein der Astrodynamik Systemvariationsgleichungen hergeleitet werden, die denen der *Frenet*-Formeln der Kurventheorie entsprechen und welche die Variationen der beiden (in der vorliegenden Arbeit so genannten) *Hansen*-Winkel als Parameter enthalten. Damit konnte die enge Verwandtschaft des mitbewegten *Leibniz*-Systems mit einem starr mit der Bahnebene verknüpften *Hansen*-System aufgezeigt werden. Diese Darstellungen und die damit verbundenen Bewegungsgleichungen sind allgemeingültig und von einer speziellen Bahnkurve, wie sie in der Astrodynamik benötigt wird, völlig unabhängig.
Mit Hilfe der *Hansen*-Systeme können zur mathematischen Beschreibung einer beliebigen räumlichen Bewegung mit Ausnahme eines Kreises beliebige Raumkurven angepasst werden. Dies wird in der vorliegenden Arbeit für geradlinige Bahnen, für die aus der klassischen Himmelsmechanik bekannten Kegelschnittbahnen und für einen gewissen Typus von Spiralbahnen detailliert untersucht. Mit dem hier entwickelten Verfahren ist es dann auch möglich, die Beschleunigungen herauszukristallisieren, die nötig sind, um einen bestimmten Bewegungsvorgang zu erzwingen.
Das hier entwickelte Verfahren zur Lösung allgemeiner Bewegungsprobleme führt auf einen Satz von Variationsgleichungen, welche die in der Himmelsmechanik üblichen *Lagrange*schen bzw. *Gauß*’schen Variationsgleichungen ersetzen. Zwei spezielle dieser Bedingungsgleichungen werden hier als Anpassungsgleichungen bezeichnet, da mit ihrer Hilfe jede beliebig vorgegebene Kurve an eine wahre Bewegung durch Variation ihrer Parameter angepasst werden kann. Nur der Kreis bildet eine Ausnahme, da er nicht genügend Parameter hat, die variiert werden könnten um eine beliebige Bewegung anpassen zu können. Die erste dieser Anpassungsgleichungen wird aus der *Hansen*-Bedingung idealer Systeme abgeleitet, was die enge Verknüpfung von *Hansen*-Systemen mit der *Euler*schen Variation der Konstanten beleuchtet. Die zweite Anpassungsgleichung kommt aus der *Leibniz*gleichung der Radialbeschleunigung. Die weiteren Variationsgleichungen sind von der gewählten Kurve formal unabhängig. Der hier entwickelte Anpassungsvorgang unterscheidet sich wesentlich von der aus der Himmelsmechanik bekannten intermediären Bahn.

Die Parameter solcher Bahnen (früher als „Bahnelemente“ bezeichnet) können als Funktionen des *Hansen*schen Bahnwinkels bzw. der Zeit entwickelt werden (in der klassischen Astrodynamik als Funktionen der Zeit oder der mittleren Anomalie oder auch von wahrer oder exzentrischer Anomalie). Damit sollte es möglich sein, ein CAS-fähiges[1] Integrationsverfahren zur weitgehend analytischen Behandlung eines Bewegungsproblems (früher als „Stör“-problem bezeichnet) in geschickter Weise zu entwickeln. Im Vergleich zu den bekannten mathematisch hoch entwickelten Verfahren der klassischen Himmelsmechanik muss folgendes angemerkt werden: Dort bestand das Hauptproblem darin das Dreikörperproblem, das zum n-Körperproblem ausgeweitet wurde, mit dem Aufstellen einer geeigneten Störfunktion im Rahmen konservativer Kräfte so zu bearbeiten, dass das Störproblem durch eine analytische oder numerische Integration lösbar wurde. Im Rahmen der Bahnmechanik für künstliche Satelliten und interplanetare Raumsonden muss darüber hinaus auch die Wirkung von nichtkonservativen Kräften berücksichtigt werden. Die Existenz nichtkonservativer Kräfte war erstmals von *F. W. Bessel* bei der Beobachtung von Kometenbahnen nachgewiesen worden. In allen diesen Fällen ist eine Kegelschnittbahn, üblicherweise eine elliptische Bahn, der Ausgang für eine Bahnauswahl. Dies wird in dem in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Integrationsverfahren durch Zugrundelegung einer völlig beliebigen Kurve erweitert. Die klassische Himmelsmechanik kann in diesem Fall als eine Untermenge des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens betrachtet werden. Dort wird üblicherweise von einer *Kepler*bewegung oder einer nah verwandten intermediären Bahn als Anpassung ausgegangen und diese durch ein Störmodell bis zur beobachteten Bewegung etwa durch die Methode der Variation der Parameter angepasst. Nun kann die *Kepler*bewegung (wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt) durch Einwirkung einer bestimmten Beschleunigung (in diesem Fall das $1/r^2$ Gesetz) aus einer geradlinigen Bewegung als einer völlig „ungestörten“ Bewegung hergeleitet werden. Entsprechend kann jede beliebige Kurve durch Variation ihrer Parameter bei Einwirkung irgendeiner Beschleunigung an eine Bewegung angepasst werden, die das gesamte Bewegungsmodell (früher gerne als „Störmodell“ bezeichnet), d.h. alle in die Berechnung einbezogenen Beschleunigungen, berücksichtigt. In jedem solcher Schritte werden die Variationsgleichungen neu aufgestellt, die aber formal bei Fundierung auf einem *Hansen*-System gleichartig sind. Dieser Vorgang kann somit mit einer gewissen Willkürlichkeit, das heißt nach rechnerischem Vorteil durchgeführt werden. Formal sind die unterschiedlichen Abfolgen des Integrationsprozesses austauschbar, da Doppel- und damit Mehrfachintegrale austauschbare Integrationsfolgen haben (wobei die dazu nötigen Bedingungen bei den vorliegenden physikalischen Aufgabenstellungen sicher erfüllt sind (Satz von *Fubini*[2])).

Die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit

Die folgenden Einzelergebnisse konnten in der bekannten Literatur nicht gefunden werden. Sie erheben deshalb den Anspruch neu hergeleitet zu sein:

(1) Wird der Betrag der Variation des radialen Einheitsvektors einer Bewegung als Differentialquotient eines Winkels verstanden, so ist dieser Winkel (notwendig und hinreichend) die Winkelkoordinate eines *Hansen*-idealen Koordinatensystems [H9]

$$\zeta = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| dt \quad .$$

[1] CAS = Computer Algebra System, ein automatisches Programmsystem zur Formelmanipulation auf einem Rechenautomaten (Bekannte derartige Programme sind: FORMAC, REDUCE, MATHEMATICA; MAPLE)

[2] Z.B. in http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Fubini (Hinweis durch Herrn Dipl. Math. Richards, Computer Sciences, Aachen)

(2) Ein *Hansen*-System ist das einzige in einer oskulierenden Bahnebene liegende System, das fest mit der Bahnebene verknüpft ist und sich nicht in der Bahnebene bewegt [H19].

(3) Ein bewegungsbezogenes Bahnsystem ist dann und nur dann ein *Hansen*-System, wenn sein Eigenbewegungsvektor stets in Richtung des Ortsvektors der Bewegung weist [H18].

(4) Die im Flächensatz vorkommende Variation eines Bahnwinkels führt notwendig auf ein *Hansen*-ideales Koordinatensystem, wenn das Basissystem, auf das die Bewegung bezogen wird, ein Inertialsystem ist [H10]. Die Variation des Bahnwinkels lautet:

$$\dot{\zeta}_B = \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i = \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\sigma}$$

(5) Wird die Bewegung eines Himmelskörpers auf ein Basissystem bezogen, das kein Inertialsystem ist, das also eine nicht zu vernachlässigende Eigenbewegung aufweist, so spiegelt sich diese Eigenbewegung des Basissystems in der Variation des auf das *Hansen*-ideale Koordinatensystem bezogenen Bahnwinkels wieder [H11]

$$\dot{\zeta} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| = \dot{\zeta}_B + \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{c}_0 =: \dot{\zeta}_B + \dot{\zeta}_P$$

(6) Die („*Frenet*schen“) Variationsformeln des mitgeführten *Leibniz*-Bahnsystems sind

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\zeta}\mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\zeta}\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\mathbf{c}_0 \\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= -\dot{\eta}\mathbf{q}_0 \quad . \end{aligned}$$

Hier wird ζ als allgemeiner Bahnwinkel als der erste *Hansen*sche Winkel bezeichnet, η als der zweite (verborgene) Winkel des *Hansen*(-idealen) Bahnsystems. Das *Leibniz*-System ist untrennbar an ein *Hansen*-System gekoppelt. Während die originalen *Frenet*schen Formeln der Kurventheorie eine Bewegung längs einer Kurve geometrisch beschreiben, liefern die *Frenet*schen Formeln des *Leibniz*-Systems („*Frenet*sche Formeln der Astrodynamik“) eine kinematische Beschreibung.

(7) Der Eigenbewegungsvektor des mitgeführten *Leibniz*-Bahnsystems lautet

$$\mathbf{d}_{q^{(L)}} = \dot{\eta}\mathbf{r}_0 + \dot{\zeta}\mathbf{c}_0 \quad .$$

(8) Die („*Frenet*schen“) Variationsformeln des (bewegungsbezogenen) *Hansen*-Systems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\dot{\eta}\sin\zeta\,\mathbf{q}_3^{(I)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\eta}\cos\zeta\,\mathbf{q}_3^{(I)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta - \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta\right) \quad . \end{aligned}$$

(9) Ein bewegungsbezogenes Bahnsystem ist genau dann ein *Hansen*-System, wenn die Variationen der in der Bahnebene liegenden Basisvektoren senkrecht zur Bahnebene orientiert sind.

(10) Der Eigenbewegungsvektor eines *Hansen*-Systems hat notwendig und hinreichend die Darstellung

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\eta}\mathbf{r}_0 \quad .$$

(11) Das Additionstheorem der Eigenbewegungsvektoren bei der Kopplung von Transformationen eines Geschwindigkeitsvektors

$$\dot{\mathbf{r}}_{q(n)} = \dot{\mathbf{r}}_{q(1)} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}_{q(i)q(i-1)} \times \mathbf{r} \quad .$$

(12) Das Additionstheorem der Rotationswinkel der räumlichen Drehung der Bahnebene $\dot{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\eta}_{(i)}$

(13) Die Lösung der geradlinigen Bewegung mit den Parametern Geschwindigkeit und Flächenparameter (bzw. Perizentrumsdistanz), bzw. Anfangswinkel des Perizentrums

$$r = \frac{G}{V\cos(\zeta - \zeta_P)} = \frac{r_P}{\cos(\zeta - \zeta_P)} = \frac{G}{g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta}$$

(14) Die Anpassung einer beliebigen Bewegung mit Hilfe der geradlinigen Bewegung

$$\dot{g}_1 = b_R\sin\zeta + b_T\cos\zeta \ , \ \dot{g}_2 = -b_R\cos\zeta + b_T\sin\zeta \ , \ \dot{\eta} = rb_N / G$$

(15) Die Berechnung der Beschleunigungen, die erforderlich sind, einen bestimmten Bewegungsvorgang zu erzwingen. Diese können mit Hilfe des Formalismus der geradlinigen Bewegung und in Bezug auf ein *Hansen*-System in einfacher Weise berechnet werden aus:

$$b_R = \dot{\zeta}\left(\frac{dg_1}{d\zeta}\sin\zeta - \frac{dg_2}{d\zeta}\cos\zeta\right) = \frac{G}{r^2}\left(\frac{dg_1}{d\zeta}\sin\zeta - \frac{dg_2}{d\zeta}\cos\zeta\right) ,$$

$$b_T = \dot{\zeta}\left(\frac{dg_1}{d\zeta}\cos\zeta + \frac{dg_2}{d\zeta}\sin\zeta\right) = \frac{G}{r^2}\left(\frac{dg_1}{d\zeta}\cos\zeta + \frac{dg_2}{d\zeta}\sin\zeta\right) ,$$

$$b_N = \dot{\eta}\left(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta\right) \quad = \frac{G}{r^2}\frac{d\eta}{d\zeta}\left(g_1\cos\zeta + g_2\sin\zeta\right).$$

(16) Die Oskulationsbedingung, welche als Ausgangspunkt für die Variation der Parameter dient, ist notwendig auf ein *Hansen*-System bezogen [H21].

(17) Die Methode der analytischen Integration beliebiger Bewegungen mit Hilfe der fortgesetzten Anpassung und der Aufstellung der dazu benötigten allgemeinen Anpassungsgleichungen

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial r}{\partial A_k^{(\nu)}}\frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = 0 \quad , \quad \sum_{k=1}^{K}\frac{\partial \dot{r}}{\partial A_k^{(\nu)}}\frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{r^2}{G}b_R^{(\nu)} \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial G}{\partial A_k^{(\nu)}}\frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}b_T^{(\nu)} \quad , \quad \sum_{k=1}^{K}\frac{\partial \eta}{\partial A_k^{(\nu)}}\frac{dA_k^{(\nu)}}{d\zeta} = \frac{r^3}{G}b_T^{(\nu)} \quad , \quad (\nu = 1,\cdots,n) \ .$$

(18) Die Vereinfachung bei der Aufstellung der Anpassungsgleichungen in Folge der ineinandergeschachtelten Parameterfolge, die nur jeweils eine einzige neue Differentiation für jeden neuen variablen Parameter erfordert

$$\frac{\partial A_{\nu_{n-2}}^{(n-2)}}{\partial A_{\nu_{n-1}}^{(n-1)}}$$

(19) Der Kreis ist die einzige Kurve, die nicht als Ausgangskurve für die Anpassung einer beliebigen Bewegung geeignet ist

$$\dot{r} \equiv 0 \quad .$$

Ausblick

Wie könnten die Arbeiten auf dem hier angeschnittenen Themenkreis weitergeführt werden? Wichtig wäre jedenfalls der konsequente und weitgehend automatisierte Ausbau des Integrationsverfahrens mit Hilfe eines modernen Formelmanipulationsprogramms (Mathematica, Maple, …) ein zuverlässiges Werkzeug zur analytischen Behandlung von Bewegungsproblemen zu entwickeln. Das könnte zu tieferen Einsichten über die Auswirkung einzelner Bewegungseinflüsse aber auch und vor allem von Querkopplungen der Bewegungseinflüsse führen.
Angedacht ist ferner ob mit der Darstellung einer Bewegung in einem *Hansen*-System auf das inertiale System des Weltalls geschlossen werden kann, da sich im Prinzip auf jede Bewegung (zumindest in qualitativer Hinsicht) alle möglichen Bewegungseinflüsse des Weltalls auswirken müssen. Dies ist aber letztlich eine Frage der technischen Realisierung der Messung des Betrages der Variation des radialen Richtungsvektors der beobachteten Bewegung. Dazu könnte mit Hilfe der *Hansen*-Systeme die theoretische Voraussetzung geschaffen werden.
In der vorliegenden Arbeit wurden die *Hansen*-Systeme, wie bei *Hansen* selbst und wie es auch in der praktischen Satellitenbahnanalyse in der Regel verlangt wird, ausschließlich in geradlinigen Koordinatensystemen entwickelt. Es ist bekannt, wie *A. Einstein* durch Einführung von krummlinigen Koordinatensystemen mit Hilfe der dazu nötigen Tensorrechnung zu völlig neuen Einsichten gelangte, die in geradlinigen Systemen nicht erkannt werden können. Es bleibt also zu überlegen, ob durch Verwendung krummliniger oder vielleicht noch bis heute unbekannter allgemeinerer Systeme, welche die enge Verwandtschaft der gerad- und krummlinigen Systeme (infolge der linearen Transformationen zwischen solchen Systemen) aufheben, weitergehende Einsichten gewonnen werden könnten.
Spannend wäre es deshalb zum Beispiel zu klären, ob es auch bei krummlinigen Koordinatensystemen so etwas wie *Hansen*-Systeme gäbe. Dann könnte die Frage nach einer Anwendung dieser Systeme im Rahmen einer Relativitätstheorie gestellt werden um so zu klären, ob ihre Verwendung auch dann Vorteile bringen könnte. Ein Hinweis darauf findet sich zum Beispiel bei V. A. BRUMBERG (1991, pp.81ff): hier geht es implizit um eine Verwendung der *Leibniz*-Gleichung im Rahmen der Behandlung des *Schwarzschild*-Problems, allerdings bei Bezug auf das Knotensystem und nicht auf ein *Hansen*-System. Es wäre also interessant, das *Schwarzschild*-Problem auf *Hansen*-Systeme zu erweitern….

Eine Weiterführung der Arbeiten könnte somit folgende Themen umfassen:

(1) Gibt es *Hansen*-ideale Koordinaten auch in krummlinigen Koordinaten?
(2) Kann das Verfahren der fortgesetzten Anpassung weitgehend mit einem Formelmanipulatorprogramm (Maple, Mathematica, Reduce, Formac, ...) automatisiert werden?
(3) Kann das Verfahren der fortgesetzten Anpassung auf krummlinige Koordinaten erweitert werden?
(4) Kann die allgemeine Relativitätstheorie in das Verfahren eingebunden werden und welche Auswirkungen zur Gewinnung neuer Einsichten sind damit möglich?
(5) Welche neuen Einsichten können erhalten werden, wenn höhere analytische bekannte „Störungen“ in die Methodik einbezogen werden?
(6) Welche Erkenntnisse können in Bezug auf Resonanzen mit der Methodik der fortgesetzten Anpassung erhalten werden?
(7) Gibt es Wechselwirkungen zwischen den Einzeleinflüssen auf einen Bewegungsvorgang, welche durch die Methodik der fortgesetzten Anpassung nicht erfasst werden können?

6 Schrifttum

AA 1984 (1983): *The Astronomical Almanac for the Year 1984*, Washington: U. S. Government Printing Office, London: Her Majesty's Stationary Office

AITON, E. J. (1960): 'The Celestial Mechanics of Leibniz', *Annals of Science*, **16**, No. 2, 65–82, (published August 1962)

AITON, E. J. (1964): 'The Celestial Mechanics of Leibniz in The Light of Newtonian Criticism', *Annals of Science*, **18**, 31–41

AITON, E. J. (1965): 'The Celestial Mechanics of Leibniz: A New Interpretation', *Annals of Science*, **18**, 111–123

AITON, E. J. (1966): 'An Imagery Error in the Celestial Mechanics of Leibniz', *Annals of Science*, **21**, 169–173

AITON, E. J. (1969): 'Kepler's Second Law of Planetary Motion', *Isis* **60**, 75–90

AKSNES, K. (1970): 'A second-order Artificial Satellite Theory based on an Intermediate Orbit', *The Astronomical Journal* **75**, No. 9, 1066-1076

AKSNES, K. (1972): 'On the Use of Hill Variables in Artificial Satellite Theory', *Astronomy and Astrophysics* **17**, 70-75

BATTIN, R. H. (1987): *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, J. S. Przemieniecki / Series Editor-in-Chief, New York

BAILIE, A. AND BRYNT, R: (1946): 'The Motion of a Particle with Negligible Mass under the Gravitational Influence of a Spheroid', *Astronomical Journal* **51**, 1156, pp.223-231

BAUSCHINGER, J. (1928): *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig

BERMAN, ARTHUR I. (1961): *Astronautics, Fundamentals of Dynamical Astronomy and Space Flight*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Library of Congress Catalogue Number: 61-11514

BIALAS, V. (2004): *Johannes Kepler*, Becksche Reihe Denker, Verlag C. H. Beck oHG, München, ISBN 3 406 51085

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. (1996): *Theory of Orbits, Volume 1: Integrable Systems and Non-perturbative Methods*, ISBN 3-540-58963-5 Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York,

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. (1998): *Theory of Orbits, Volume 2: Perturbative and Geometrical Methods*, ISSN 0941-7834, ISBN 3-540-60355-7 Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

BOCKEMÜLLER, E. A. UND W. KLEINSCHMIDT (1970): 'Analytische Lösungen für Übergangsbahnen bei Horizontalschub', XXI. Internationaler Astronautischer Kongress, Konstanz, 4. bis 10. Oktober 1970

BROUWER, D. (1946): 'The Motion of a Particle with Negligible Mass under the Gravitational Influence of a Spheroid', *Astronomical Journal* **51**, 1156, pp.223-231

BROUWER, D. (1958): 'Outlines of General Theories of the Hill-Brown and Delaunay Types for Orbits of Artificial Satellites', *Astronomical Journal* **63**, No. 1264, 433–438

BROUWER, D. (1959): 'Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag', *Astronomical Journal* **64**, 378–397

BROUWER, D. (1959/2): 'Comments on General Theories of Planetary Orbits', *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Orbit Theory*, American Mathematical Society, Vol. IX, pp.152-166

BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. (1961): *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press

BROWN, E. W. (1896): *An Introductory Treatise On The Lunar Theory*, Reprint: 1960, Dover Publications, Inc., New York

Brown, E. W. (1936), 'On the Calculation of the Principal Parts of the Motions of the Lunar Perigee and Node', *Astronomical Journal*, **45**, No. 1044, pp. 84-88

BRUMBERG, V. A. (1991): *Essential Relativistic Celestial Mechanics*, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York

BRUMBERG, V. A. (1995): *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

BUCERIUS, H. (1966): *Himmelsmechanik I*, BI Hochschultaschenbücher, 143/143a, Bibliographisches Institut Mannheim

BUCERIUS, H., SCHNEIDER, M. (1968): *Himmelsmechanik II*, BI Hochschultaschenbücher, 144/144a, Bibliographisches Institut Mannheim

CAPELLARI, J. O., VELEZ, C. E. AND FUCHS, A. J. (1976): *Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md., X-582-76-77

Cayley, A. (1857), 'On Hansen's Lunar Theory', *Quarterly Mathematical Journal*, Vol. **1**, pp. 112-125 (oder in: *Coll. Works*, Vol. III, 1890)

CEFOLA, P. J. (1972): 'Equinoctial Orbit Elements – Application to Artificial Satellite Orbits', AIAA/ AAS Astrodynamics Conference, Palo Alto, Calif., September 11–12, 1972, Preprint AIAA 72-937

CEFOLA, P. J. (1975): 'On the Formulation of the Gravitational Potential in Terms of Equinoctial Variables', AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 1975, N76-10169

CHEBOTAREV, G. S. (1967): *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, (Translation from Russian), American Elsevier Publishing Company, Inc., New York

CLAUS, A. J. AND LUBOWE, A. G. (1963): 'A High Accuracy Perturbation Method with Direct Application to Communication Satellite Orbit Prediction', *Astronautica Acta*, Vol. **IX** Fasc. 5-6, 275–301

DEPRIT, A. (1975): 'Ideal Elements for Perturbed Keplerian Motions', *Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematical Sciences.* **79B**, Nos. 1 and 2, January - June 1975, pp. 1-15

DEPRIT, A. (1976): 'Ideal Frames for Perturbed Keplerian Motion', *Celest. Mech.* **13,** 253–263

DE VORKIN, D. H. (1982): *The History of Modern Astronomy and Astrophysics*, A Selected, Annotated Bibliography, Garland Publishing, Inc., New York & London

DZIOBEK, O. (1888): *Die mathematischen Theorien der Planetenbewegung*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig (Reprint: *Mathematical Theories of Planetary Motion*, Dover Publications, New York, 1962)

ECKSTEIN, M. C. AND SHI, YUN-YUAN (1967) 'Low-Thrust Elliptic Spiral Trajectories of a Satellite of Variable Mass', AIAA Journal, Vol. **5**, No. 8, pp. 1491-1494, Douglas Paper No. 3856

ECKSTEIN, M. C. (1973): 'Ein Satellitenbahnmodell ohne Singularitäten', DLR-FB 73-67, 'A Satellite Model without Singularities', ESRO TT-102, Oct. 1974

ECKSTEIN, M. C., JOCHIM, E. F., LEIBOLD, A. F., LORENZ, J. K., PIETRASS, A. E. (1983): 'Design and Navigation Accuracy Assessment of an Ion Drive Asteroids Flyby and Rendezvous Mission Launched by Ariane 4 APEX Demonstration Flight', DFVLR, German Space Operations Center, Oberpfaffenhofen, Internal Report GSOC 83-1, October 11th, 1983

ESCOBAL, P. R. (1965): *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., New York

EXPLANATORY SUPPLEMENT *to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*, prepared jointly by the Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, London, Her Majesty's Stationary Office, Reprinted with corrections 1962

FISHER, D. (1963): 'Comparison of the von Zeipel and Modified Hansen Methods Applied to Artificial Satellites', *The Astronomical Journal.* **68,** Number 9, 718-723

FITZPATRICK, PHILIP, M. (1970): *Principles of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London

GARFINKEL, B. (1957): 'On the Motion of a Satellite of an Oblate Planet', *Astronomical Journal* **63**, No. 1257, pp.88–96

GARFINKEL, B. (1959): 'The Orbit of a Satellite of an Oblate Planet', *Astronomical Journal* **64**, 353–367

GARFINKEL, B. (1982): 'On Resonance in Celestial Mechanics, (A survey)', *Celestial Mechanics* **28**, 275–290

GAUSS, C. F. (1810/1906): 'Exposition d'une nouvelle méthode de calculer les perturbations planétaires avec l'application au calcul numérique des perturbations du mouvement de Pallas', *Werke*, **Band VII,** pp. 439-472

GIACAGLIA, G. E. O. (1976): 'A note on Hansen's Coefficients in Satellite Theory', *Celest. Mech.* **14,** 515-523

GREEN, R. M. (1985): *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

GUTZWILLER, M. C. AND SCHMIDT D. S. (1986): 'The Motion of the Moon as Computed by the Method of Hill, Brown, and Eckert', Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Vol. XXIII, Part I, U. S. Government Printing Office, Washington

HANSEN, P. A. (1838): *Fundamenta Nova Investigationis Orbitae verae quam Luna perlustrat*, Gotha

HANSEN, P. A. (1857): 'Auseinandersetzung einer zweckmäßigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der Kleinen Planeten, erste Abhandlung', Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, dritter Band, bei S. Hirzel, Leipzig;

dritte Abhandlung im fünften Band (1861)

HANSEN, P. A. (1864): 'Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, erste, zweite Abhandlung', Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, sechster Band und siebenter Band (1865), bei S. Hirzel, Leipzig

HENSCHEL, F. (1974): 'Beiträge zur Berechnung von Satellitenübergängen aus erdnahen Parkbahnen in die geostationäre Lage bei schwacher Schubbeschleunigung in regularisierten Variablen', Dissertation, DFVLR Institut für Flugmechanik, Braunschweig, DLR-FB 74-57

HERGET, PAUL AND MUSEN, PETER (1958): 'A modified Lunar Theory for Artificial Satellites', *The Astronomical Journal **63***, No. 1264, 430-433

HERMANN, J. (1710): 'Metodo d'investigare l'Orbite de' Pianeti, nell' ipotesi che le forze centrali o pure le gravitá degli stessi Pianeti sono in ragione reciproca de 'quadrati delle distanze, che i medesimi tengono dal Centro, a cui si dirigono le forze stesse', *Giornale de Letterati d' Italia*, **2**, Venecia 1710

HILL, G. W. (1878): 'Researches in the Lunar Theory', *American Journal of Mathematics, Pure and Applied. **1***, 5–26

Hill, G. W. (1881), 'Note on Hansen's Theory of Perturbations', *Am. J. Math.*, **4**, 256-259 (oder in: *Coll. Math. Works* **1**, 348)

Hill, G. W. (1886), 'On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon ', *Acta Math*., **8**, 1 (oder in: *Coll. Math. Works* **1**, 243) (first separately published in 1877, Cambridge, Mass.)

HILL, G. W. (1913): 'Motion of a System of Material Points under the Action of Gravitation', *The Astronomical Journal* **XXVII**, nos. 646-647, pp.171-182

HOOTS, F. R. (1979): 'A Nonsingular Reformulation of the Brouwer Geopotential Theory', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Provincetown, Mass., June 25–27, 1979, AAS Paper 79-137; see also: 1981, 'Reformulation of the Brouwer Geopotential Theory for Improved Computational Efficiency', *Celest. Mech. **24***, 367–375

HOOTS, F. R. (1981): 'Theory of the Motion of an Artificial Satellite', *Celest. Mech.* **23**, 307–363

HOYER, U. (1976): 'Über die Unvereinbarkeit der drei Keplerschen Gesetze mit der aristotelischen Mechanik', *Centaurus*, Vol. **20**, 196-209

HOYER, U. (1979): 'Kepler's Celestial Mechanics', *Vistas in Astronomy*, Vol. **23**, pp. 69-74, Pergamon Press Ltd., Great Britain

JEZEWSKI, D. J. (1988): 'An Ideal Reference Frame for Perturbed Orbital Motion', AIAA 88-4218-CP

KAULA, W. M. (1962): 'A Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a close Satellite', *NASA Technical Note*, D-1126, NASA, Washington, January 1962

KAULA, W. M. (1966): *Theory of Satellite Geodesy, Applications of Satellites to Geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass. – Toronto – London

KEPLER, J. (1953): *Epitome Astronomiae Copernicanae*, Johannes Kepler, Gesammelte Werke, herausgegeben von Max Caspar, Band VII, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, MCMLIII

KIPPENHAHN, RUDOLF (2005): 'Der sanfte Druck des Lichtes' , SuW, September 2005, pp.46-47

KOZAI, Y. (1959): 'The Motion of a Close Earth Satellite', *Astronomical Journal* **64**, 367–377

KOZAI, Y. (1962): 'Second-Order Solution of Artificial Satellite Theory without Drag', *Astronomical Journal* **67**, 446–461

LANDAU, L. D. AND LIFSCHITZ, E. M. (1963): *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band I, Mechanik*, Akademie Verlag, Berlin; Übersetzung der russischen Originalausgabe, erschienen im Staatsverlag für physikalisch-mathematische Literatur, Moskau 1958

LANDAU, L. D. AND LIFSCHITZ, E. M. (1992): *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie*, Akademie Verlag, Berlin; ISBN 3-05-500063-3, ISBN 3-05-0501550-9

LEIBNIZ, G. W. (1689): 'Tentamen de Motuum Coelestium Causis', *Acta Eruditorum*, Feb 1689, pp. 82-96

LEIPOLD, M. (2000): 'Solar Sail Mission Design', Dissertation, Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München, 19. Januar 2000

LONG, ANNE C. ET AL. (1989): 'Goddard Trajectory Determination System (GTDS), Mathematical Theory (Revision 1)', FDD/552-89/001 and CSC/TR-89/6001, Goddard Space Flight Center, NASA

LUBOWE, A. G. (1969): 'Calculation of Oblateness Perturbations Using Hansen's Method', *Celest. Mech.* **2,** 88–102

LYDDANE, R. H. (1963): 'Small Eccentricities or Inclinations in the Brouwer Theory of the Artificial Satellite', *Astronomical Journal **68***, 555–558

MCINNES, C. R. (1999): *Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer, Praxis Publishing, ISBN 1-85233-102-X

MUSEN, P. (1958): 'A modified Hansen Lunar Theory for Artificial Satellites', *The Astronomical Journal* **63,** No. 1264, 2271–2279

MUSEN, P. (1959): 'Application of Hansen's Theory to the Motion of an Artificial Satellite in the Gravitational Field of the Earth', *Journal of Geophysical Research*, **64,** No. 1264, 2271–2279

MUSEN, P. (1961): 'The Theory of Artificial Satellite in Terms of the Orbital True Longitude', *Journal of Geophysical Research*, **66,** No. 2, pp.403-409

MUSEN, P. (1963): 'On a Modification of Hansen's Lunar Theory', *Journal of Geophysical Research*, **68,** No. 5, 1439-1456

MUSEN, P. (1968/1): 'Investigations in Hansen's Planetary Theory', (NASA TN D-4169, 19 pages), *Bulletin Astronomique*, Serie 3, **3,** Fascicule 3, 253–263

MUSEN, P. (1968/2): 'One some possible Simplifications and Changes in Hansen's Lunar Theory', NASA TN D-4562, 27 pages, Washington D.C., June 1968

MUSEN, P. AND LLOYD CARPENTER (1963): 'On the General Planetary Perturbations in Rectangular Coordinates', *Journal of Geophysical Research*, **68,** No. 9, 2727-2734

NEWCOMB, S. (1898): 'Tables of the motion of the Earth on its Axis and around the Sun', Astronomical Papers of the American Ephemeris **VI/1**,1-170, Washington

ORLOV, A. (1954), *Mem. Astr. Inst. Sternberg*, **24**, 139

PALACIOS, M. (2000): 'Symplectic versus other Propagators in the Ideal Formulation of the Earth Satellite Problem', *Internat. Symp. Space Dynamics, CNES*, June 26-30, 2000, Biarritz

PALACIOS, M, and C. CALVO (1996): 'Ideal Frames and Regularization in Numerical Orbit Computation', *The Journal of the Astronautical Sciences*, **44,** No. 1, January-March, pp. 63-77

PHELAN, HOWARD T. (1962): 'Computation of Satellite Orbits by the Hansen Method as modified by Musen', *NASA*, NASA TR R-147, Goddard Space Flight Center

PLATON (1991): *Sämtliche Werke*, Griechisch und Deutsch, Bände I–X, it 1401–1410, Insel Verlag, Frankfurt am Main und Leipzig

REICHARDT, H., HER. (1957): *C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich seines 100. Todestages am 23. Februar 1955*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig

SCHAUB, W. (1952): 'Die himmelsmechanischen Grundlagen der Raumfahrt, das Zweikörperproblem und die lösbaren Fälle des Dreikörperproblems', in: GARTMANN, H., her.: *Raumfahrtforschung*, Verlag von R. Oldenbourg, München 1952, pp. 27–115.

SCHNEIDER, M. (1981): *Himmelsmechanik*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, ISBN 3-411-01619-1

SHI, YUN-YUAN AND MARTIN C. ECKSTEIN (1966) 'Ascent or Descent from Satellite Orbit by Low Thrust', AIAA Journal, Vol. **4**, No. 12, pp. 2203-2209, Douglas Paper No. 3856

SHI, YUN-YUAN AND MARTIN C. ECKSTEIN (1967) 'An Approximate Solution for Ascending Low-Thrust Trajectories without Singularity', AIAA Journal, Vol. **5**, No. 1, pp. 170-172, Douglas Paper No. 4078

SEIDELMANN, P. K. ed. (1992): *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, A Revision to the Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, Prepared by the Nautical Almanac Office, U. S. Naval Observatory with Contributions from H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, Jet Propulsion Laboratory, Bureau des Longitudes, and the Time Service and Astrometry Departments, U. S. Naval Observatory, University Science Books, Mill Valley, California (ISBN 0-935702-68-7)

SKEMP, J. B. (1942): *The Theory of Motion in Plato's Later Dialogues*, Cambridge at the University Press

STIEFEL, E. AND SCHEIFELE, G. (1971): *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

STOER, J. UND BULIRSCH, R. (1973): *Einführung in die numerische Mathematik II*, Heidelberger TaschenbücherBand 114, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York; ISBN 3-05924-5

STRUBLE, R. A. (1960/1): 'A Geometrical Derivation of the Satellite Equations', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **1**, 300–307

STRUBLE, R. A. (1960/2): 'The Geometry of the Orbits of Artificial Satellites', North Carolina State College, Raleigh, NC, June 1, 1960; and: *Arch. Rational Mech. Anal.*, (1961) ***7***, 87–104

STRUBLE, R. A. (1961): 'An Application of the Method of Averaging in the Theory of Satellite Motion', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **10**, No.5, 691–704

STUMPFF, K. (1959, 1965, 1974): *Himmelsmechanik I* (1959); *Himmelsmechanik II* (1965); *Himmelsmechanik III* (1974), DVW Berlin

STRUMPF, M. (1992): 'Die Gothaer Sternwarten', *SuW*, **31,** Heft 10, pp.608-613

TISSERAND, F. (1889-1896): *Traité de Mécanique Céleste*, Tome I – Tome IV, Gauthiers-Villars, Paris

VALLADO, DAVID A. (2001): *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, with contributions by Wayne D. McClain, Second Edition, Space Technology Library, Microcosm Press El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London

VAN DER HA, J. (1985): 'Non-Singular and Non-Conventional Orbit Perturbation Equations', *Z. Flugwiss. Weltraumforschung* **9**, Heft 9, 217–224

VINH, N. X. (1970): 'Recurrence Formulae for the Hansen's Developments', *Celestial Mechanic.* **2**, 64–76

VINTI, J. P. (1959): 'New Method of Solution for Unretarded Satellite Orbits', *Journal of Research of the National Bureau of Standards* – B. Mathematics and Mathematical Physics, Vol. **62B**, No. 2, October–December 1959, 105–116

VINTI, J. P. (1960): 'Mean Motions in Conditionally Periodic Separable Systems', *Journal of Research of the National Bureau of Standards* – B. Mathematics and Mathematical Physics, Vol. **65B**, No. 2, April-June 1961, 131–135

VINTI, J. P. (1961): 'Formulae for an Accurate Intermediary Orbit of an Artificial Satellite', *The Astronomical Journal*, **66**, No.9, 514-516

VINTI, J. P. (1963): 'The Spheroidal Method for Satellite Orbits', *Proceedings of the First International Symposium on the Use of Artificial Satellites for Geodesy*, 12–16

VINTI, J. P. (1966): 'Inclusion of the Third Zonal Harmonic in an Accurate Reference Orbit of an Artificial Satellite', *Journal of Research of the National Bureau of Standards* – B. Mathematics and Mathematical Physics, Vol. **70B**, No. 1, January-March 1966, 17-46, Paper 70B1-166

VOLK, O. (1957): 'Astronomie und Geodäsie bei C. F. Gauß', in: Reichardt, her. (1957), 205–231

VOLK, O. (1976): 'Miscellania from the History of Celestial Mechanics', *Celest. Mech.* **14**, 365–382

VOLK, O. (1983): 'Eulers Beiträge zur Theorie der Bewegungen der Himmelskörper', in: *Leonhard Euler 1707–1783, Beiträge zu Leben und Werk, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt*, 1983 Birkhäuser Verlag Basel, 345–362

VOLLRATH, H.-J. ED. (1990): *Otto Volk, Gesammelte Abhandlungen*, Fakultät für Mathematik der Julius-Maximilians-Universität Würzburg

WALTER, H. G. AND SOVERS, O.S. (2000): *Astrometry of Fundamental Catalogues*, The Evolution from Optical to Radio Reference Frames, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-67436-5

WOLF, R. (1890, 1892 / 1973): *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur*, erster Band, Zürich 1890, zweiter Band, Zürich 1892, reprint: Meridian Publishing Co. Amsterdam, 1973

ZEIPEL, H. VON (1905-1923): 'Entwicklung der Störungsfunktion', *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, **VI,2**, pp.562-665

ZEIPEL, H. VON (1916): 'Recherches sur le Mouvement des Petites Planètes', *EArkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Band **11**, No.1, pp.1-58, Band **11**, No.7, pp.1-62, Band **12**, No.9, pp.1-89, Band **13**, No.3, pp.1-93, ,

7 Liste der Symbole

7.1 Lateinische Symbole

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
A	Grad	Azimut (positiv von Nord über Ost nach Süd)
A	m^2	Fläche
A	-	Apozentrum (Aphel, Apogäum) [Bezeichnung in Bildern]
AE	km	Astronomische Einheit
A_D	m^2	Anströmfläche bei Luftwiderstand
A_R	m^2	Anströmfläche bei Strahlungsdruck
$A_k^{(\nu)}$		k-ter Parameter einer Anpassungskurve im ν-ten Anpassungsprozess
a	km	große Bahnhalbachse
a	< Länge >	große Halbachse einer Ellipse
B	-	Bezeichnung für Bahnkurve [in Bildern]
B_S	kg km^3 / s^2	$:=P_S\ AE^2\ c_R\ A_R$
B_0	km^3 / s^2	$:=B_S \sin\beta \cos\beta$ /m
B_m	---	$B_m := B_0 / \mu_\odot$
B_N	---	$B_N := B_S \sin\gamma \cos\gamma \cos\beta / \left(m_0\, \mu_\odot\right)$
b	Grad	ekliptikale Breite
b	< Länge >	kleine Halbachse einer Ellipse
b_{HN}	km/s^2	Beschleunigung in Richtung der Hauptnormalen
b_L	km/s^2	Beschleunigung längs Sonnensegel („verlorener“ Anteil)
b_N	km/s^2	Normalbeschleunigung
$\mathbf{b}_R$	km/s^2	Radialbeschleunigungsvektor
b_R	km/s^2	Radialbeschleunigung
b_S	km/s^2	Beschleunigung auf Sonnensegel
$\mathbf{b}_S$	km/s^2	Beschleunigungsvektor auf Sonnensegel
b_S	km/s^2	Beschleunigung auf Sonnensegel
b_{SR}	km/s^2	Beschleunigung auf Sonnensegel, Anteil in radialer Richtung
b_{ST}	km/s^2	Beschleunigung auf Sonnensegel, Anteil in transversaler Richtung
$\mathbf{b}_T$	km/s^2	Transversalbeschleunigungsvektor
b_T	km/s^2	Transversalbeschleunigung
b_{xi}	km/s^2	Beschleunigungskomponenten im kartesischen Äquatorsystem
b_V	km/s^2	Tangentialbeschleunigung
$\mathbf{b}_\odot$	km/s^2	Beschleunigungsvektor durch Strahlungsdruck der Sonne

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$b_{\odot}$	km/s^2	Beschleunigung durch Strahlungsdruck der Sonne
C_1	km/s	erste Integrationskonstante der geradlinigen Bewegung (C_1=V)
C_2	km^2/s	zweite Integrationskonstante der geradlinigen Bewegung
c	km/s	Lichtgeschwindigkeit
$\mathbf{c}$	km^2 / s	2. *Kepler*scher Vektor (1. *Laplace*scher Vektor, Normalenvektor der Bahnebene, Drallvektor, Drehmomentenvektor, Inklinationsvektor), $\mathbf{c} = c^i \mathbf{p}_i$, $G = \lvert\mathbf{c}\rvert$
$\mathbf{c}_0$		Richtungsvektor in Richtung des Normalenvektors der Bahnebene, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c} / G$, (dritte Komponente eines *Leibniz*-Systems)
c_{D}	-	Luftwiderstandsbeiwert
c_{eff}	km/s	Spezifischer Impuls
c_{R}	-	Widerstandsbeiwert bei Strahlungsdruck
$\mathbf{D}$		Eigenbewegungsvektor (*Darboux*scher Vektor, allgemeiner Drehvektor)
$\mathbf{D}_p$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Systems ($\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i$)
$\mathbf{D}_q$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems ($\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j$)
$\mathbf{D}_{qp}$		relativer Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – System $\left(\mathbf{D}_{qp} = \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)$
$\mathbf{D}_{q^{(A)}q^{(B)}}$		relativer Eigenbewegungsvektor eines $\mathbf{q}_j^{(A)}$ – Systems bezogen auf ein $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – System $\left(\mathbf{D}_{q^{(A)}q^{(B)}} = \mathbf{D}_{q^{(A)}} - \mathbf{D}_{q^{(B)}}\right)$
$D_p{}^i$		Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektor $\left(\mathbf{D}_p = D_p{}^i \mathbf{p}_i\right)$
$D_{qp}{}^j$		Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektor $\left(\mathbf{D}_{qp} = D_{qp}{}^j \mathbf{q}_j\right)$
d	km	Distanz
$\mathbf{d}$	km^3 / s^2	1. *Kepler*scher Vektor (*Herrmann-Laplace*-Vektor, 2. Laplacescher Vektor, Exzentrizitätsvektor, Perizentrumsvektor), $\mathbf{d} = d^i \mathbf{p}_i$, $e\mu = \lvert\mathbf{d}\rvert$
E	Grad	exzentrische Anomalie (bei Bezug auf Perizentrum)
E_A	Grad	exzentrische Anomalie (bei Bezug auf Apozentrum) E_A=E+180°
$\mathbf{E}$		beliebiger Bahnelementevektor
e		Exzentrizität (numerische)
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$	mN	Schubvektor
$\mathbf{f}$		3. *Kepler*scher Vektor, Hilfsvektor in Richtung $\upsilon = 90°$, $\mathbf{f} = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{d}$ („Parametervektor“)
g	km^2/s	Hilfsgröße: $g = s\,V$
G	km^2 / s	Flächenparameter (Betrag des Bahnnormalenvektors). Speziell in *Kepler*scher Bewegung ist: $G := \lvert\mathbf{c}\rvert = \sqrt{\mu\, p}$, (5. *Delaunay* Element)
G_N	km^3 s^{-1} kg^{-1}	Newtonsche Gravitationskonstante
H	km	Höhe über R_E, mittlere Äquatorbahnhöhe“
h	Grad	Elevation (astronomisch: „Höhe“)
$\mathbf{I}$	m kg / s	Impuls ($\mathbf{I} := m\dot{\mathbf{r}}$)
i	Grad	Inklination

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$J_2, J_3, J_4, J_5, \ldots$		geodynamische Formfaktoren (Zonale des Schwerefeldes eines Zentralkörpers)
$k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$, $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \ldots$		Parameter einer Kegelschnittsanpassungskurve, 1. Lösungsschritt, 2. Lösungsschritt, …
l	Grad	ekliptikale Länge
l	Grad	wahre Länge ($l = \upsilon + \omega + \sigma_i \Omega$)
L	Grad	mittlere Länge ($l = M + \omega + \sigma_i \Omega$)
L_E	Grad	exzentrische Länge ($L_E = E + \omega + \sigma_i \Omega$)
L_0	Grad	mittlere Epochelänge in der Bahn ($L_0 = M_0 + \omega + \sigma_i \Omega$)
M	Grad	mittlere Anomalie
M	-	Bezugspunkt („Mittelpunkt“, „Zentralpunkt“, „Archimedischer Punkt“) eines kartesischen Koordinatensystems [in Bildern]
M_0	Grad	mittlere Epocheanomalie
$\dot{M}_{0s}$	Grad/s	säkulare Variation in M_0
m	kg	Masse
m_0	kg	Startmasse
n	Grad/s	oskulierende (= Keplersche) mittlere Bewegung $n = \sqrt{\mu / a^3}$
n	-	n-te Bewegungsannäherung im Integrationsverfahren
$\bar{n}$	Grad/s	mittlere mittlere Bewegung $\bar{n} = \sqrt{\mu / \bar{a}^3}$
$n_\odot$	Grad/s	tropische mittlere Bewegung der scheinbaren Sonne
O	-	Ursprung („departure point“) eines *Hansen*-Systems in der oskulierenden Bahnebene [Bezeichnung in Bildern]
P	h oder s	*Kepler*sche Umlaufzeit
P	-	Ort des Perizentrums (Perihels, Perigäums) [in Bildern]
P_S	kg/(m s^2)	Solardruck in 1AE
p	km	Bahnparameter, Parameter des Kegelschnitts (semilatus rectum)
$\mathbf{p}_i$		Richtungsvektoren eines kartesischen inertialen Koordinatensystems $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \ (1 = 1, 2, 3)$, $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$
q	km	Perigäumsdistanz
$\mathbf{q}_0$		transversaler Richtungsvektor $\mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_0$
$\mathbf{q}_j$		Richtungsvektoren eines kartesischen nichtinertialen Koordinatensystems $\mathbf{r} = y^i \mathbf{q}_i \ (i = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{q}_j^{(B)}$		Orthonormierte Richtungsvektoren eines beliebigen Bahn-Systems $\mathbf{r} = y^i \mathbf{q}_j^{(B)} \ (j = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i^{(B)} \cdot \mathbf{q}_j^{(B)} = \delta_{ij}$
$\mathbf{q}_j^{(D)}$		Richtungsvektoren des Knoten-Systems („drakonitisches System) $\mathbf{r} = y^i \mathbf{q}_j^{(D)} \ (j = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i^{(D)} \cdot \mathbf{q}_j^{(D)} = \delta_{ij}$
$\mathbf{q}_j^{(I)}$		Richtungsvektoren eines *Hansen*-Systems („ideales System“) $\mathbf{r} = y^i \mathbf{q}_j^{(I)} \ (j = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i^{(I)} \cdot \mathbf{q}_j^{(I)} = \delta_{ij}$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{q}_j^{(L)}$		Allgemeine Formulierung eines *Leibniz*-Systems $\mathbf{r} = y^i \mathbf{q}_j^{(L)}$ $(j = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i^{(L)} \cdot \mathbf{q}_j^{(L)} = \delta_{ij}$, $\mathbf{q}_1^{(L)} = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{q}_2^{(L)} = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{q}_3^{(L)} = \mathbf{c}_0$
$\mathbf{q}_j^{(P)}$		Richtungsvektoren des Apsiden-Systems („Perizentrum bezogenes System“) $\mathbf{r} = y^i \mathbf{q}_j^{(P)}$ $(j = 1, 2, 3)$, $\mathbf{q}_i^{(P)} \cdot \mathbf{q}_j^{(P)} = \delta_{ij}$
R_E	km	mittlerer Äquatorradius der Erde
R_G		Gravitationspotential
r	km	zentrische Distanz („Radius“) eines Satelliten oder Raumflugkörpers
r_A	km	Apozentrumsdistanz
r_P	km	Perizentrumsdistanz
$\mathbf{r}$	km	Ortsvektor
$\dot{\mathbf{r}}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (absoluter)
$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{p}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (relativ zum p_i -System) $\left(\dot{\mathbf{r}}_p = \dot{x}^i \mathbf{p}_i\right)$
$\ddot{\mathbf{r}}$	km/s^2	Beschleunigungsvektor (absoluter)
$\mathbf{r}_0$		radialer Richtungsvektor $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$
$\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0$	--	Basis Vektoren des *Leibniz*-Systems (ein mitgeführtes Bahnsystem)
s	km	Bogenlänge
S	-	Ort eines bewegten Objektes („Satellit“) [in Bildern]
S	-	Markierung eines Sonnensegels [in Bildern]
t	s	Zeit
t_0	s	Epochezeit (U.T.)
$\mathbf{t}$	km	Tangentenvektor
u	Grad	Argument der Breite $(u = \upsilon + \omega)$
V	km/s	Geschwindigkeit
V_A	km/s	Geschwindigkeit im Apozentrum der Bahn
V_E	km/s	elliptische Geschwindigkeit
V_K	km/s	Kreisbahngeschwindigkeit
V_P	km/s	Geschwindigkeit im Perizentrum der Bahn
$V_{\sphericalangle}$	km/s	Geschwindigkeit der Erde um die Sonne
υ	Grad	wahre Anomalie
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$	km, km/s	Zustandsvektor

7.2 Griechische Symbole

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
α	Grad	Rektaszension
$\alpha_\odot$	Grad	Rektaszension der wahren Sonne
β	Grad	Auslenkwinkel in der oskulierenden Bahnebene gegenüber der Sonnenstrahl-richtung: ebener Anstellwinkel eines Sonnensegels
γ	Grad	Zentralwinkel

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
γ	Grad	Auslenkwinkel aus der oskulierenden Bahnebene gegenüber der Sonnenstrahlrichtung: räumlicher Anstellwinkel eines Sonnensegels
Δt	s, h	Zeitintervall
Δu	Grad	Intervall im Argument der Breite während des Zeitintervalls Δt
ΔV	km/s	Geschwindigkeitsinkrement
δ	Grad	Deklination
ε	Grad	wahre Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = \overline{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$
$\overline{\varepsilon}$	Grad	mittlere Schiefe der Ekliptik
ζ	Grad	Bahnwinkel (wahre Länge in der Bahn) $\zeta = \upsilon + \omega + \sigma$ (erster *Hansen*-Winkel)
ζ_P	Grad	Perizentrumswinkel bezogen auf ein *Hansen* System im Formalismus der geradlinigen Bewegung
ζ_K	Grad	Perizentrumswinkel eines Kegelschnitts bezogen auf ein *Hansen* System
η	Grad	Drehwinkel der Bahnebene bei beliebiger Bewegung (zweiter Bahnwinkel im mitgeführten Bahnsystem, „zweiter *Hansen*-Winkel“)
λ	Grad	östliche geographische Länge
μ	km^3/s^2	zentrische Gravitationskonstante (= Newtonsche Gravitationskonstante × Masse des Zentralkörpers)
$\mu_\odot$	km^3/s^2	heliozentrische Gravitationskonstante (= Newtonsche Gravitationskonstante × Masse der Sonne)
μ_δ	km^3/s^2	geozentrische Gravitationskonstante (= Newtonsche Gravitationskonstante × Masse der Erde)
π		Kreiszahl (π = 3.14159265358979323846264338327950288419 71…)
σ	Grad	Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens, $\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i$
τ	1/km	Torsion
φ	Grad	geodätische Breite
ψ	Grad	Bahnwinkel eines bewegungsbezogenen Bahnsystems
Ω	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens
$\dot{\Omega}_s$	Grad/s	säkulare Störung in Ω
ω	Grad	Argument des Perizentrums
$\tilde{\omega}$	Grad/s	Länge des Perizentrums $\tilde{\omega} = \omega + \sigma_i\,\Omega$

7.3 Indizes

Symbol	Beschreibung
A	Apozentrum (Apogäum, Aphel)
B	Attraktion durch dritte Körper
D	Luftwiderstand
G	Schwerefeld des Zentralkörpers
i,j,k,ν	Summationsindizes
ν_0, j_0	Laufvariable der Parameter einer Anpassungskurve
K	Kreis, kreisförmig, Keplersche
P	Präzession
P	Perizentrum (Perigäum, Perihel)
R	Strahlungsdruck

Symbol	Beschreibung
R	radial
S	synodisch (bezogen auf einen anderen Körper)
s	säkular
T	transversal
0	Epoche
0	bei Vektoren: Einheitsvektor
λ	Längenkreis der Länge λ
Ω	… des aufsteigenden Knotens
φ	Breitenkreis der Breite φ
♁	… der Erde
☾	… des Mondes
☉	… der Sonne
♈	… des Frühlingspunktes

7.4 Mathematische Symbole

Symbol	Beschreibung
$\mathbb{V}$	Vektorraum
:=	Definition eines Ausdrucks, BEISPIEL: $g_1 := V\cos\zeta_A$, die Größe g_1 wird durch den rechts stehenden Ausdruck definiert
$\in$	Element von …
$\mathbf{a}$	Vektor
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	skalares Produkt
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	vektorielles Produkt
$\left(a_i{}^j\right)$	Matrix mit Reihenindex *i*, Spaltenindex *j*
$r\left[\lambda,\varphi\right]$	Schreibweise eines Ortsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bestimmtes Koordinatensystem BEISPIEL: $\mathbf{x} \Leftrightarrow r\left[\lambda,\varphi\right] := r\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\lambda\\ \cos\varphi\sin\lambda\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$
$\mathbf{r}=\mathbf{r}(x^i)$	Vektorfeld mit den Koordinaten x^i (i te Koordinate [kein Exponent, Einsteinsche Schreibweise])
$\left[\alpha,\delta\right]$	bewegliches Äquatorsystem (Bezug Frühlingspunkt)
$\left[\lambda,\delta\right]$	geozentrisches System (Bezug Nullmeridian)
$\left[\lambda,\varphi\right]$	geographisches System (Bezug Nullmeridian)
$\left[l,b\right]$	ekliptikales System
$A\in[0°,180°)$	Beispiel für ein links geschlossenes, rechts offenes Intervall
O	Ordnung einer Funktion: In $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{f}_0(\mathbf{x})+O(\varepsilon)$ ist $O(\varepsilon)$ ein Restterm der Form $\varepsilon\mathbf{R}(\mathbf{x},\varepsilon)$, wobei R von $\mathbf{f},\mathbf{f}_0$ und ε abhängig ist.

7.5 Astronomische Symbole

Symbol	Beschreibung
♁	Erde

Symbol	Beschreibung
☉	Sonne
☾	Erdmond
♈	Frühlingspunkt

Danksagung

Mit besonderem Dank möchte ich meines verehrten akademischen Lehrers, Herrn Prof. Dr. Ing., Dr. Phil. Otto Volk (1892-1989) gedenken. Ihm verdanke ich die Liebe zur mathematischen Astronomie, die meine gesamte Berufszeit im Rahmen der Raumfahrtforschung prägte. Prof. Volk war im Jahre 1918 an der Technischen Hochschule in München zum Dr. Ing. promoviert worden. Meine Mutter, Frau Dipl. Math., Studiendirektorin Elisabeth Jochim, hatte Prof. Volk 1943 als (vermutlich) erste Frau in Bayern zum mathematischen Diplom geführt. Ihr verdanke ich in schwerer Zeit die Möglichkeit für Ausbildung, Studium und die Begründung eines phaszinierenden Berufs.

Ein besonders herzlicher Dank gilt meinen drei Doktorvätern, Herrn Prof. Dr. rer. nat. Bernd Häusler (Uni BW München, Institut für Raumfahrttechnik), Herrn Prof. Dr. Ing. habil. Otto Wagner (TU München, Lehrstuhl für Flugsystemtechnik), Herrn Prof. Dr. Ing. Helmut Süß (Uni BW München. Universität Karlsruhe, DLR Oberpfaffenhofen). Sie haben in langen und intensiven Diskussionen die in der vorliegenden Arbeit zusammengefasste Quintessenz meines Berufslebens für promotionswürdig befunden und ihre Fertigstellung kritisch-konstruktiv und wohlwollend unterstützt.

Darüber hinaus darf ich mich bei den Herrn Prof. Dr. Helmut Süß und Prof. Dr. Alberto Moreira für die Möglichkeit bedanken in der Abteilung für Aufklärung und Sicherheit im DLR-Institut Hochfrequenztechnik und Radarsysteme mitzuarbeiten. In der Gruppe Systemtechnik wurde ich durch die Herren Tino Zehetbauer und Dr. Thomas Neff sehr kollegial und freundschaftlich aufgenommen und in allen meinen Bestrebungen hervorragend unterstützt. Dies alles erfüllt mich mit großer Dankbarkeit. Wertvolle und bereichernde Diskussionen konnte ich lange Jahre mit meinem engsten Kollegen Herrn Dr. rer. nat. Martin C. Eckstein führen. Wichtige Hinweise zur Arbeit mit dem Formelmanipulatorprogramm MAPLE verdanke ich Prof. Dr. rer. nat. habil. Wilhelm Werner (Fachhochschule Heilbronn, Universität Heidelberg). Kollegiale Förderung der hier abgeschlossenen Arbeiten, deren Beginn weit in meine frühere Arbeitsstelle in der DLR Hauptabteilung Raumflugmissionen (seit einigen Jahren Raumflugbetrieb genannt) zurückreicht, verdanke ich den Herren Dipl. Ing. Alfred Pietrass, Dr. Ing. Franz Schlude, Dr. Ing. Michael Kirschner, Prof. Dr. Ing. Werner Enderle, Dr. rer. nat. Hauke Fiedler.

Sehr herzlich möchte ich mich auch bei den Damen der Zentrumsbibliothek des DLR Oberpfaffenhofen bedanken, Frau Lore Krumbholz und Frau Sylvia Wohofsky, denen kein Weg zu kompliziert war, alle meine Literaturwünsche zu befriedigen.

Meiner Familie, vor allem meiner lieben Frau Dr. med. Gertrud Jochim, die mir in selbstloser Weise den Rücken für diese Arbeiten freigehalten hat, und meinen Kindern, Dr. med. Burkard Jochim, Heilerziehungspfleger Clemens Jochim, Dr. med. Angela Jochim danke ich für warme familiäre Atmosphäre, die eine wichtige Basis zur Durchführung einer solchen Arbeit ist.

Fritz Jochim

Im März 2011