Reisezeiten im Nagel-Schreckenberg-Modell mit *velocity dependent randomization* und weiteren eindimensionalen Verkehrsfluss-modellen auf einer offenen Kante

Diplomarbeit

Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät I
Institut für Physik

eingereicht von

Michael Spahn
geb. am 3. 6. 1977 in Berlin

Berlin, Mai 2002

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Eigenschaften physikalischer Verkehrsflussmodelle. Dabei werden auf interdisziplinäre Weise Methoden und Modelle der Physik auf ein soziales System angewandt.

1.1 Physiker & Verkehr

Warum beschäftigen sich Physiker mit der Untersuchung des Verkehrs? Es ist eine Alltagserfahrung, dass der Fahrzeugverkehr[1] mit großen Problemen behaftet ist. Häufig ist es nicht möglich, zum gewünschten Zielort in der kürzestmöglichen Zeit zu gelangen, da Staus den Verkehr behindern. Der durch solche Zeitverluste entstehende ökonomische Schaden ist quantifizierbar und erreicht einige Milliarden Euro pro Jahr [1]. Die Abgase der Fahrzeuge belasten sowohl die Umwelt als auch die Gesundheit der an belebten Strassen wohnenden Menschen signifikant. Der Verbrauch an fossilen Treibstoffen führt durch das dabei freigesetzte Kohlendioxid möglicherweise zu einer Erwärmung der Erdatmosphäre.

Diese mit Verkehr verbundenen Probleme könnten durch intelligente Optimierung und Verbesserung wenigstens gemindert werden. Dazu ist jedoch ein wissenschaftliches Verständnis der komplexen Prozesse im Verkehr nötig. Die entsprechenden mathematischen Modelle wurden und werden von Physikern entwickelt und untersucht [2, 1].

In mikroskopischen Verkehrsflussmodellen wird jedes Fahrzeug, einem Teilchen entsprechend, einzeln betrachtet. Die Wechselwirkungen zwischen diesen Teilchen werden dadurch bestimmt, wie die Fahrzeuge ihre Bewegung wechselseitig beeinflussen. Aus diesem Grund gestattet die Analyse von Ver-

[1] Wenn im Folgenden von „Verkehr" die Rede ist, so ist stets Fahrzeugverkehr auf Strassen gemeint.

kehrsflüssen, modelliert als komplexes System [3, 4] vieler wechselwirkender Teilchen weit entfernt vom Gleichgewicht, die Untersuchung fundamentaler Aspekte von Nichtgleichgewichtssystemen, die eine grosse Rolle in der statistischen Physik und nichtlinearen Dynamik spielen.

Zu den im Verkehr beobachteten Phänomenen gehören Übergänge zwischen verschiedenen dynamischen Phasen [5], selbstorganisierte Kritikalität, Metastabilität und Hysterese, Phasentrennung, usw. Die Beobachtung der entsprechenden Phänomene in physikalischen Verkehrsmodellen kann genutzt werden, um allgemeine Fragen der statistischen Physik, z.B. die Emergenz makroskopischen Verhaltens aus mikroskopischen Wechselwirkungen [6], zu untersuchen.

Physiker beschäftigen sich heute in zunehmendem Maße mit Forschungsobjekten, die nicht ihrem traditionellem Feld entstammen. Zeugnis davon ist die Gründung des „Arbeitskreises Physik sozio-ökonomischer Systeme" in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Jahr 2001. Der interdisziplinäre Austausch mit anderen Wissenschaftlern, wie bei der Verkehrsflussmodellierung mit Verkehrsingenieuren, befruchtet und erweitert auch die Physik an sich, indem neue Modelle entwickelt und übertragen werden und andere Sichtweisen angenommen werden.

Im Kontext der Verkehrsflussmodellierung mit physikalischen Modellen versucht die vorliegende Arbeit, in zwei Bereichen zur Erweiterung des Wissens beizutragen. Es wird der Frage nachgegangen, ob sich mikroskopische Modelle durch Reisezeitfunktionen approximieren lassen und diese begründen können. Ausserdem wird das bisher nur mit periodischen Randbedingungen untersuchte Nagel-Schreckenberg-Modell [7] mit *velocity dependent randomization* (VDR) auf einer offenen Kante untersucht.

1.2 Physikalische Ansätze der Verkehrsflussmodellierung

Im Vergleich zu z.B. Verkehrsingenieuren sind Physiker tendenziell eher bemüht, bei der Modellierung von Verkehrsflüssen [8] nur unbedingt notwendige Bestandteile zu berücksichtigen, um die grundsätzlichen Eigenschaften des betrachteten Systems zu untersuchen. Die dabei benutzten Ansätze entstammen den verschiedensten Gebieten der Physik und der Statistischen Physik im Speziellen und haben zur Weiterentwicklung dieser Gebiete beigetragen.

Die physikalischen Ansätze lassen sich in einer ersten Unterteilung unterscheiden in makroskopische und mikroskopische Modelle. Auf der makroskopischen Ebene wird der Verkehr als Fluid aufgefasst und Ideen und Modelle der Hydrodynamik und verwandter Gebiete benutzt. Einzelne Fahrzeuge werden dabei nicht betrachtet. Diese sind gerade der Untersuchungsgegenstand der mikroskopischen Modelle, die die Fahrzeuge als Teilchen auffassen, die miteinander wechselwirken.

In makroskopischen Modellen wird Verkehr als kompressibles Fluid behandelt. Der Untersuchungsgegenstand sind dann die Dichte $\rho(x,t)$ entlang einer Strasse und das Geschwindigkeitsprofil $v(x,t)$. Entsprechende Modelle wurden bereits früh vorgeschlagen [9] und sind weiterhin Gegenstand aktueller Forschung [1, 2].

Auf der mikroskopischen Ebene lassen sich wiederum mehrere Ansätze unterscheiden. In gaskinetischen Modellen [10, 2] werden die Fahrzeuge als Gas wechselwirkender Teilchen aufgefasst, deren Dynamik über Boltzmann-Gleichungen und andere Werkzeuge der Gaskinetik untersucht wird.

Fahrzeugfolgemodelle [11, 2] bedienen sich einer Analogie zur Newtonschen Mechanik. Die Fahrzeuge reagieren dabei auf „Kräfte", die von anderen Fahrzeugen ausgehen. Die wichtigste Rolle spielt dabei der direkt Vorausfahrende („follow-the-leader"-Modelle).

In Teilchenhüpfmodellen[2] wird Verkehr durch die stochastische Dynamik einzelner Teilchen auf einem diskreten Gitter modelliert. Die Sprache, in der diese Modelle beschrieben werden, sind die zellulären Automaten (Cellular Automata—CA). Zelluläre Automaten wurden von von Neumann in den 1950ern eingeführt und seitdem in verschiedensten Bereichen auch in der Physik benutzt. Das minimale CA-Modell zur Modellierung von Verkehr auf Autobahnen ist das Nagel-Schreckenberg-Modell [7] (NaSch), das 1992 eingeführt und seitdem vielfach untersucht und erweitert wurde. Das BML-Modell [12] ist ein CA-Modell für Strassenverkehr in Städten, welches in [13] auf Strassen mit Verkehr in beiden Richtungen erweitert wird.

Das NaSch-Modell kann in einem Spezialfall auf ein paradigmatisches Modell für ein getriebenes diffusives Gittergas zurückgeführt werden, welches auch in anderen Bereichen der Physik [14] und Mathematik [15] verwendet wird. Durch die exakte Lösbarkeit dieses Modells sind analytische Einblicke in grundlegende Eigenschaften der CA-Modelle möglich.

Mikroskopische Verkehrsflussmodelle werden in zunehmendem Maße auch über die Physik hinaus benutzt, um durch Simulationen realer Strassennetze Möglichkeiten zu deren Optimierung (z.B. [16]) zu finden und Hilfestellung

[2] Üblicherweise wird in der Literatur der englische Ausdruck *particle-hopping models* benutzt.

zur Verkehrsplanung [17] zu bieten.

Neben diesen direkten Ansätzen zur physikalischen Modellierung von Verkehrsflüssen gibt es insbesondere Verbindungen zur Theorie granularer Materie [8]. Ausserdem lassen sich einige Verkehrsmodelle in eine verallgemeinerte Theorie selbstgetriebener [18, 19] Vielteilchensysteme [1] einbetten.

1.3 Grundlegende Begriffe

Die von Fahrzeugen benutzten Strassen bilden ein Netzwerk. In diesem Zusammenhang entsprechen Kreuzungen, Auf- und Abfahrten Knoten und die Strassenstücke zwischen ihnen Kanten. Alle in dieser Arbeit vorgestellten Modelle beschäftigen sich mit dem Verkehr auf einer einzelnen Kante. Diese Situation wird auch als offene Randbedingung bezeichnet, da an den Rändern ständig Fahrzeuge in das System strömen und es verlassen. Es wird stets zur Vereinfachung angenommen, dass die Fahrzeuge sich nur auf einer Spur in eine Richtung bewegen, nämlich per Konvention vom linken zum rechten Rand.

Im Gegensatz dazu bezeichnen periodische Randbedingungen eine Kante, die zu einem Ring geschlossen wird. Auf diese Weise wird von den Rändern abstrahiert und das Verhalten des Modells kann unabhängig davon untersucht werden.

Die behandelten Grössen sind Dichten, Flüsse, Geschwindigkeiten und Reisezeiten. Die Dichte auf einer Kante bezeichnet den räumlichen Anteil, der von Fahrzeugen besetzt ist. Dies ist entweder die Anzahl der Fahrzeuge bzw. Teilchen auf dem Gitter oder der Anteil durch Teilchen besetzter Gitterzellen. Der Fluss durch die Kante entspricht im stationären Zustand der Anzahl an Fahrzeugen, die die Kante pro Zeiteinheit verlassen. Der zur Charakterisierung von Verkehrsflüssen wichtige Zusammenhang $j\left(\rho\right)$ zwischen Fluss und Dichte wird Fundamentaldiagramm genannt.

Die Reisezeit ist die Anzahl an Zeitschritten, die ein Fahrzeug vom linken bis zum rechten Rand braucht, um die Kante zu durchfahren. Als Reisezeitfunktion wird hier der funktionale Zusammenhang zwischen Reisezeit und Dichte bezeichnet.

Gegenstand dieser Arbeit sind die Eigenschaften der stationären Zustände der behandelten Modelle. Da es sich um offenene Systeme mit endlichem Fluss handelt, befinden sich diese nicht in einem Gleichgewichtszustand. Ein stationärer Zustand ist dann erreicht, wenn sich die zeitlich gemittelten Eigenschaften bei Verschiebung um eine bestimmte Zeit nicht verändern.

Die Begriffe der „Phase" und des „Phasenübergangs" werden in dieser Arbeit in Übereinstimmung mit der Literatur nicht in einem der statistischen Physik des Gleichgewichts entsprechenden strengen Sinn gebraucht. Die behandelten Systeme sind stets weit entfernt vom Gleichgewicht. Mit einer Phase ist mindestens ein Regime bzw. ein Parameterbereich gemeint, in dem sich das System gleich verhält. Ein Phasenübergang ist dann der Übergang in ein anderes solches Regime in Abhängigkeit von äusseren Parametern. Teilweise können diese Begriffe strenger gehandhabt werden, z.B. in Kap. 3 beim TASEP.

1.4 Gliederung

In dieser Arbeit werden Reisezeiten in Modellen offener Kanten untersucht. Die Gliederung erfolgt deshalb nach dem jeweiligen Modell. In Kap. 2 wird ein Modell vorgestellt, in dem eine Reisezeitfunktion a priori angesetzt wird. Im Gegensatz dazu behandelt Kap. 3 ein exakt lösbares mikroskopisches Modell, für das die Reisezeiten näherungsweise analytisch und numerisch bestimmt werden. Reisezeiten in einem einfachen Modell, das Metastabilität aufweist, werden in Kap. 4 untersucht. Es bildet eine Brücke zum Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR (Kap. 5), einem komplexen CA-Modell, das ebenfalls Metastabilität zeigt, für das mit numerischen Simulationen Reisezeiten untersucht wurden. Da dieses Modell bisher nicht auf einer offenen Kante betrachtet wurde, werden in Kap. 5 auch die allgemeinen Eigenschaften und das Phasendiagramm des Modells detailliert untersucht. Im Anhang wird das verwendete Simulationssystem kurz vorgestellt.

Kapitel 2

Postulierte Reisezeitfunktion

Wenn man sich mit dem Verhalten des Verkehrs in einem Netzwerk beschäftigt, kann es je nach Fragestellung sinnvoll sein, die einzelnen Kanten als kleinste Einheiten zu betrachten. Die Abhängigkeiten zwischen der Dichte auf einer Kante und dem Fluss sowie der Reisezeit entlang der Kante werden dann einem Modell der gesamten Kante entnommen. Von den mikroskopischen Ursachen wird abstrahiert. Im Unterschied zu makroskopischen physikalischen Verkehrsflussmodellen wird die Kante auch nicht räumlich aufgelöst.

Zu den Vorteilen dieser Herangehensweise gehört, dass sich auch das Verhalten ganzer Netzwerke analytisch behandeln lässt. Dies wird durch den Nachteil [20] erkauft, dass sehr viele wichtige Informationen und Mechanismen nicht in das Modell eingehen. Andererseits wurde festgestellt [21], dass die Näherung akzeptabel ist, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt werden, wie z.B. eine ausreichend feine zeitliche Diskretisierung [22].

Entsprechend ist eine Möglichkeit, sich mit Reisezeitfunktionen zu beschäftigen, das Postulieren einer bestimmten Form. Man beschränkt sich dann auf die Analyse der Auswirkungen einer solchen Annahme auf das Verhalten des Netzwerks von Kanten.

Im Folgenden wird ein solches Modell vorgestellt, dass zur Untersuchung des Verhaltens von Netzen vorgeschlagen wurde. Da unten die Reisezeitfunktionen mikroskopischer Verkehrsflussmodelle untersucht werden, soll hier vor allem die Verträglichkeit des Modells mit einer mikroskopischen Darstellung geprüft werden.

2.1 Lineare Reisezeitfunktion

In [22] wird ein Kantenmodell unabhängig von einem Netzwerk isoliert untersucht, um lediglich die durch das Kantenmodell hervorgerufenen Effekte zu analysieren. Hier soll das Modell vorgestellt werden und die wichtigsten Resultate für eine lineare Reisezeitfunktion.

Die betrachtete Kante hat keine mikroskopische Struktur. Die Zeit t ist eine kontinuierliche Variable. Der Zufluss wird mit $u(t)$, der Abfluss mit $w(t)$ bezeichnet, wobei Raten, also Fahrzeuge pro Zeiteinheit, gemeint sind. Mit $\rho(t)$ wird die Dichte, also die Anzahl der Fahrzeuge auf der Kante, bezeichnet. Die Reisezeit $\tau(t)$ hängt linear von der Dichte ab,

$$\tau(t) = \alpha + \beta\rho(t), \tag{2.1}$$

und gilt jeweils für den Verkehr, der zur Zeit t der Kante zufliesst. Selbstverständlich sind auch andere Ansätze [22] möglich.

Der Parameter α bezeichnet die Reisezeit, die bei einer leeren Kante, also ohne Interaktion mit anderen Fahrzeugen etwa durch Staus, gilt. Mit steigender Dichte wächst die Reisezeit durch nicht näher betrachtete Wechselwirkungen der Fahrzeuge an, parametrisiert durch β. Für eine Interpretation von β ist es hilfreich, einen stationären Zustand konstanten Flusses durch die Kante zu betrachten.

Es gilt dann $u = U_0$ und $w = U_0$ unabhängig von t. Die Reisezeit sei T und folglich die Dichte $\rho = U_0 T$. Setzt man dies in (2.1) ein, so erhält man eine Gleichung für die Reisezeit T,

$$T = \alpha + \beta U_0 T, \tag{2.2}$$

mit der Lösung

$$T = \frac{\alpha}{1 - \beta U_0}. \tag{2.3}$$

Die Reisezeiten T und α sollten natürlich positiv und endlich sein und realistisch sollte gelten $\beta > 0$, $U_0 > 0$. Somit bleibt als Bedingung für die Lösbarkeit von (2.3), also die Existenz einer stabilen Lösung mit dem Fluss U_0, die Bedingung

$$U_0 < \frac{1}{\beta}. \tag{2.4}$$

Dies wiederum gestattet die Interpretation von β als das Inverse des maximal möglichen Flusses durch die Kante. Die Reisezeit steigt mit dem Fluss monoton an und im Limes $U_0 \to 1/\beta$ gilt $T \to \infty$ [22].

Um das dynamische Verhalten des Modells zu analysieren und festzustellen, wie der stationäre Zustand erreicht wird, wird in [22] das Zuflussprofil

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

mit $\rho(t=0) = w(t=0) = 0$, also einer leeren Kante bei $t = 0$, betrachtet. Dabei wird gefunden [22, (15)], dass der Abfluss über

$$w(t + \tau(t)) = \frac{u(t)}{1 + \frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t}} \tag{2.6}$$

mit dem Zufluss und der Ableitung der Reisezeitfunktion zusammenhängt.

Anschliessend findet man, dass sich der Abfluss mit unendlich vielen diskontinuierlichen Sprüngen dem Zufluss U_0 nähert und im Limes $t \to \infty$ U_0 erreicht [22]. Die Reisezeit steigt ebenfalls monoton an, ist aber an unendlich vielen Stellen stetig, aber nicht differenzierbar und erreicht im Limes $t \to \infty$ den Wert T nach (2.3). Dieses Szenario gilt allerdings nur solange $U_0\beta < 1$, also solange (2.4) erfüllt ist. Im Fall $U_0\beta > 1$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{1}{\beta},$$

der Abfluss übersteigt also nie den Wert, der als maximal möglicher stationärer Fluss gefunden wurde. Da aber $U_0 > 1/\beta$ gilt, ist klar, dass die Dichte $\rho(t)$ ohne Grenze ansteigt und also auch die Reisezeit gegen Unendlich strebt,

$$\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty.$$

Im Rahmen dieses Modells findet also nie eine Begrenzung des Zuflusses statt, wie sie in der Realität auftreten würde. Stattdessen ist die Kapazität der Kante, also die Anzahl an Fahrzeugen, die maximal gleichzeitig auf ihr Platz finden, unbegrenzt. In einer solchen Situation ist das Modell also nicht anwendbar.

2.2 Mikroskopische Darstellung

In den folgenden Kapiteln 3–5 werden mikroskopische Modelle auf einer Kante betrachtet werden. Dies bedeutet insbesondere, dass sich ein kontinuierlicher Fluss $u(t)$, $w(t)$ nicht für beliebige Zeiten t per se definieren lässt. Zum einen wird die Zeit selbst als diskontinuierliche Variable betrachtet werden, zum anderen werden einzelne Fahrzeuge betrachtet, die den Link zu einer bestimmten Zeit befahren und wieder verlassen. Ich werde im Folgenden analysieren, welche Effekte allein durch diese Änderungen bei Beibehaltung der postulierten Reisezeitfunktion auftreten. Nur, wenn sich vernachlässigbare Veränderungen ergeben, wären die in den weiteren Kapiteln gefundenen Ergebnisse für Reisezeitfunktionen übertragbar und nutzbar als Kantenmodelle.

Ziel ist also eine veränderte Darstellung, in der Flüsse aufgebrochen werden in einzelne Fahrzeuge. Dabei wird der Zufluss $u\left(t\right)$ als Rate die Kante befahrender, der Abfluss $w\left(t\right)$ als Rate die Kante verlassender Fahrzeuge aufgefasst. Die Dichte $\rho\left(t\right)$ auf der Kante entspricht der Anzahl der Fahrzeuge, die sich zur Zeit t auf der Kante befinden. Die Zeit t ist kontinuierlich. Der Ansatz für die Reisezeit

$$\tau\left(t\right) = \alpha + \beta x\left(t\right) \tag{2.7}$$

wird übernommen [22, (13)].

Anstatt die Reisezeitfunktion eines Kantenmodells zu übernehmen und dann mikroskopisch zu untersuchen, ist es auch möglich, von Anfang an ein entsprechendes mikroskopisches Modell zu definieren. In [23] wird dies getan und dabei nur angenommen, dass jedes Fahrzeug den Abstand zum Vordermann konstant hält. Das Nagel-Schreckenberg-Modell geht im Unterschied dazu davon aus, dass ein Fahrer im Rahmen der Höchstgeschwindigkeit und Unfallvermeidung so dicht wie möglich auf den Vorausfahrenden auffährt.

Ich möchte zuerst einige allgemeine Beziehungen betrachten und dann wie oben den Fall eines Sprunges im Zufluss bei $t = 0$ untersuchen. Ein einzelnes Fahrzeug werde durch einen tiefgestellten Index gekennzeichnet. Mit t^{in}, t^{out} sind die Zeiten gemeint, zu denen ein Fahrzeug die Kante befährt bzw. verlässt. Es gilt offenbar für ein beliebiges Fahrzeug

$$t_i^{\text{out}} = t_i^{\text{in}} + \tau\left(t_i^{\text{in}}\right). \tag{2.8}$$

Subtrahiert man (2.8) für zwei aufeinander folgende Fahrzeuge, erhält man

$$t_{i+1}^{\text{out}} - t_i^{\text{out}} = t_{i+1}^{\text{in}} - t_i^{\text{in}} + \tau_{i+1} - \tau_i, \tag{2.9}$$

wobei mit τ_i die Reisezeit des i-ten Fahrzugs, also $\tau\left(t_i^{\text{in}}\right)$, gemeint ist. Nun sei $\left(\Delta t^{\text{in}}\right)_{i,i+1} = t_{i+1}^{\text{in}} - t_i^{\text{in}}$ der Abstand, in dem die beiden Fahrzeuge aufeiander im Zufluss folgen, $\left(\Delta t^{\text{out}}\right)_{i,i+1} = t_{i+1}^{\text{out}} - t_i^{\text{out}}$ der Abstand im Abfluss und $(\Delta\tau)_{i,i+1}$ die Änderung der Reisezeit. Durch Umstellen folgt

$$\frac{1}{\left(\Delta t^{\text{out}}\right)_{i,i+1}} = \frac{1}{\left(\Delta t^{\text{in}}\right)_{i,i+1} + (\Delta\tau)_{i,i+1}} \tag{2.10}$$

$$\frac{1}{\left(\Delta t^{\text{out}}\right)_{i,i+1}} = \frac{\frac{1}{\left(\Delta t^{\text{in}}\right)_{i,i+1}}}{1 + \frac{(\Delta\tau)_{i,i+1}}{\left(\Delta t^{\text{in}}\right)_{i,i+1}}}. \tag{2.11}$$

Diese Beziehung erfüllt in der mikroskopischen Darstellung dieselbe Funktion wie (2.6) oben. Die linke Seite stellt eine sinnvolle Definition des Abflusses dar,

$$w\left(t_i^{out}\right) = w\left(t_i^{\text{in}} + \tau_i\right) = \frac{1}{\left(\Delta t^{\text{out}}\right)_{i,i+1}}.$$

Analog ist für den Zufluss

$$u\left(t_i^{\text{in}}\right) = \frac{1}{\left(\Delta t^{\text{in}}\right)_{i,i+1}}$$

zweckmässig. Ebenso ist

$$\frac{(\Delta\tau)_{i,i+1}}{\left(\Delta t^{\text{in}}\right)_{i,i+1}} \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\tau\,(t)}{\mathrm{d}t}$$

eine für die mikroskopische Darstellung vernünftige Korrespondenz. Da also mit (2.11) eine analoge Beziehung zu (2.6) gilt, ist damit zu rechnen, dass auch die Ergebnisse vergleichbar sein werden.

Um dies genauer zu prüfen, wird wiederum der Fall

$$u\,(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_0, & t \geq 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

untersucht. Damit ist hier nun gemeint, dass bis zur Zeit $t = 0$ keine Fahrzeuge die Kante befahren, bei $t = 0$ das erste Fahrzeug eintrifft und alle folgenden Fahrzeuge dann im konstanten Abstand von $\left(\Delta t^{\text{in}}\right)_{i,i+1} = 1/U_0 \,\forall\, i$. Damit lässt sich (2.11) darstellen als

$$w\left(t_i^{\text{in}} + \tau_i\right) = \frac{U_0}{1 + U_0 \cdot (\Delta\tau)_{i,i+1}}. \tag{2.13}$$

Eine der in [22] gewonnenen Erkenntnisse ist, dass durch die lineare Reisezeitfunktion (2.1) scharfe Muster im Zufluss, in diesem Fall eine Diskontinuität, in scharfe Muster im Abfluss übertragen werden, versetzt um die jeweils aktuelle Reisezeit τ. Es wird gezeigt, dass dieser Mechanismus, dessen Essenz jeweils die Gleichungen (2.6) und (2.13) sind, auch im mi-

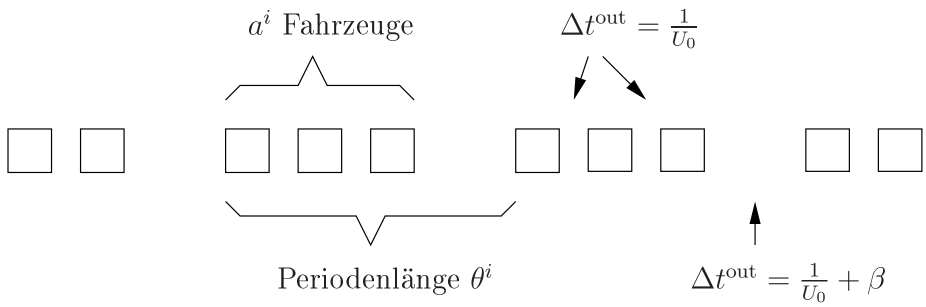

Abbildung 2.1: Typisches, selbstreproduzierendes zeitlich periodisches Muster im Abfluss von der Kante. Die Quadrate symbolisieren einzelne Fahrzeuge. Der konkrete Wert $a^i = 3$ wurde lediglich zur Illustration gewählt.

kroskopischen Bild gilt. Dazu wird im Stil eines Induktionsbeweises gezeigt, dass ein bestimmtes Muster im Abfluss, nämlich einige aufeinander folgende Fahrzeuge mit anschliessender, größerer, Pause, immer wieder reproduziert wird. Danach wird als Induktionsanfang gezeigt, dass dieses Muster durch den Sprung im Zufluss (2.12) erstmals etabliert wird.

Zunächst wird ein bestimmtes Muster im Abfluss in Abb. 2.1 gezeigt. In der Zeit periodisch mit der Periodenlänge θ^i verlassen jeweils a^i Fahrzeuge die Kante, wobei der zeitliche Abstand zwischen ihnen $\Delta t^{\text{out}} = 1/U_0$ beträgt. Der zeitliche Abstand zwischen dem letzten Fahrzeug und dem ersten der folgenden Periode beträgt $\Delta t^{\text{out}} = \frac{1}{U_0} + \beta$.

Zum Beweis des Induktionschrittes wird dieses Muster vorausgesetzt mit der Periodenlänge θ^i und der Anzahl a^i der Fahrzeuge in einer Periode. Aus der Abb. 2.1 geht hervor, dass gilt

$$\theta^i = \frac{a_i}{U_0} + \beta. \tag{2.14}$$

In dieser Zeit verlassen a^i Fahrzeuge die Kante. Folglich werden in der Zeit $\Theta^i = \frac{1}{U_0\beta}\theta^i$ die Kante $A^i = \frac{1}{U_0\beta}a^i$ Fahrzeuge verlassen. Während der Zeit Θ^i fahren aber gemäss $u(t) = u = U_0$ auch

$$\Theta^i \cdot U_0 = \frac{1}{U_0\beta}\left(\frac{a_i}{U_0} + \beta\right) \cdot U_0 = \frac{a_i}{\beta} + U_0 = A^i + 1 \tag{2.15}$$

Fahrzeuge in die Kante ein. Also fährt genau ein Fahrzeug mehr in die Kante ein, als die Kante verlässt. Es folgt, dass die Menge der Fahrzeuge auf der Kante $\rho(t)$ in der Zeit Θ^i um genau 1 gewachsen ist.

Zu beachten sind nun die Folgen dieser Feststellung für die Reisezeiten, die den die Kante befahrenden Fahrzeugen zugeordnet werden. Während der Zeit Θ^i ist die Reisezeit τ_{j+1}, die einem die Kante befahrenden Fahrzeug zugeordnet wird, bei A^i Fahrzeugen identisch mit der Reisezeit τ_j des vorausfahrenden Autos. Genau einmal gilt aber wegen des Reisezeitansatzes (2.1) $\tau_{j+1} = \tau_j + \beta$, da sich genau einmal die Dichte $\rho(t)$ um 1 erhöht hat. Es wird also fast allen Autos dieselbe Reisezeit zugeordnet und einmal eine etwas höhere Reisezeit.

Haben diese Autos die Kante durchfahren, so bietet sich im Abfluss folgendes Bild:

$$a^{i+1} = \Theta^i \cdot U_0 = A^i + 1 = \frac{1}{U_0\beta} a^i + 1$$

Fahrzeuge verlassen die Kante, wobei der zeitliche Abstand zwischen ihnen $\Delta t^{\text{out}} = 1/U_0$ beträgt. Dies ist der Abstand, in dem die Fahrzeuge die Kante befahren haben. Danach beträgt der zeitliche Abstand zum nächsten Fahrzeug einmalig $\Delta t^{\text{out}} = \frac{1}{U_0} + \beta$ und das Muster wiederholt sich. Die Periodenlänge ist nun

$$\theta^{i+1} = \frac{a^{i+1}}{U_0} + \beta = \frac{1}{U_0}\left(\frac{1}{U_0\beta}a^i + 1\right) + \beta = \frac{1}{U_0\beta}\left(\frac{a^i}{U_0} + \beta\right) + \beta = \frac{1}{U_0\beta}\theta^i + \beta.$$

Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen.

Den Induktionsanfang findet man durch detaillierte Betrachtung der ersten die Kante befahrenden Fahrzeuge. Es ist klar, dass $\tau_0 = \alpha$ gilt und $\tau_1 = \alpha + \beta$, also $\Delta\tau_1 = \beta$. Solange kein Fahrzeug die Kante verlässt, wächst die Dichte ρ um 1 pro die Kante befahrendes Fahrzeug. Also ist die Reisezeit jedes Fahrzeugs um β grösser als die des Vorausfahrenden, folglich beträgt der Abstand zwischen den Fahrzeugen am Ende der Kante $\frac{1}{U_0} + \beta$. Das erste Fahrzeug verlässt die Kante nach der Zeit $t_0^{\text{out}} = \tau_0 = \alpha$. Man findet also am Induktionsanfang $a^0 = 1$ und $\theta^0 = \frac{1}{U_0} + \beta$.

Zusammengefasst gilt

$$\begin{array}{ll} a^{i+1} = \frac{1}{\beta U_0} a^i + 1, & a^0 = 1 \\ \theta^{i+1} = \frac{1}{U_0\beta}\theta^i + \beta, & \theta^0 = \frac{1}{U_0} + \beta \end{array}.$$

Die ersten Glieder der Reihe (a^i) sind

$$a^0 = 1,\ a^1 = \frac{1}{\beta U_0} + 1,\ a^2 = \frac{1}{(\beta U_0)^2} + \frac{1}{\beta U_0} + 1,\ \ldots,$$

die Reihe (θ^i) beginnt mit

$$\theta^0 = \frac{1}{U_0} + \beta,\ \theta^1 = \frac{1}{U_0^2\beta} + \frac{1}{U_0} + \beta,\ \theta^2 = \frac{1}{U_0^3\beta^2} + \frac{1}{U_0^2\beta} + \frac{1}{U_0} + \beta,\ \ldots.$$

Der Abfluss ist nun jeweils $w_i = \frac{a^i}{\theta^i}$, also

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \beta} = \frac{U_0}{1 + \beta U_0} \\
w_1 &= \frac{\frac{1}{\beta U_0} + 1}{\frac{1}{U_0^2 \beta} + \frac{1}{U_0} + \beta} = U_0 \cdot \frac{1 + \beta U_0}{1 + \beta U_0 + (\beta U_0)^2} \\
w_2 &= \frac{\frac{1}{(\beta U_0)^2} + \frac{1}{\beta U_0} + 1}{\frac{1}{U_0^3 \beta^2} + \frac{1}{U_0^2 \beta} + \frac{1}{U_0} + \beta} = U_0 \cdot \frac{1 + \beta U_0 + (\beta U_0)^2}{1 + \beta U_0 + (\beta U_0)^2 + (\beta U_0)^3},
\end{aligned}
$$

wobei jeweils Zähler und Nenner mit $U_0^{i+1}\beta^i$ multipliziert wurden. Man erkennt und kann durch Induktion zeigen, dass gilt

$$w_i = U_0 \cdot \frac{\sum_{k=0}^{i} (U_0\beta)^i}{\sum_{k=0}^{i+1} (U_0\beta)^i}.$$

Dieses Ergebnis für den Fluss entspricht aber gerade dem Ergebnis für kontinuierliche Flüsse [22, (21)]. Zusammengefasst ergeben sich durchweg dieselben Ergebnisse, wenn man die Auswirkungen der postulierten Reisezeitfunktion (2.1) betrachtet. Dies ist unabhängig davon, ob man kontinuierliche Flüsse betrachtet oder einzelne Fahrzeuge. Die Ergebnisse, die für den ersten Fall gewonnen wurden, sollten also übertragbar sein.

Kapitel 3

Analytisch lösbares Modell

Getriebene diffusive Gittergase [15, 24, 14] werden z.B. als Modelle für Ionenleiter [25] eingesetzt, aber auch um die Wanderung von Ribosomen entlang einer RNA während der Proteinsynthese zu untersuchen. Hier ist die Verwendung als einfaches Verkehrsflussmodell relevant.

Der einfache total asymmetrische Exklusionsprozess (TASEP–<u>T</u>otally <u>A</u>symmetric <u>S</u>imple <u>E</u>xclusion <u>P</u>rocess) ist aus zwei Gründen besonders interessant. Zum einen weist er einige Merkmale auf, die einen Vergleich mit Modellen, die spezifisch Verkehrsflüsse beschreiben, möglich machen. Die das dynamische Verhalten bestimmende Strom-Dichte-Relation bzw. das Fundamentaldiagramm weist in beiden Fällen ein Maximum auf. Desweiteren werden sowohl der TASEP als auch komplexere Modelle durch dieselben Mechanismen, nämlich Dichtefluktuationen und die Bewegung von Staus im System, bestimmt.

Der zweite Grund für das Interesse am ASEP ist seine analytische Lösbarkeit [14]. Damit fungiert dieser Prozess als exakt bekanntes Spielmodell, an dem die Mechanismen, die auch komplexere Modelle steuern, im Detail beobachtet werden können.

Desweiteren wird der TASEP mit offenen Rändern als einfaches Modell, dass randinduzierte Phasenübergänge [26, 27] aufweist, untersucht.

3.1 Definition des Modells

Der TASEP ist definiert auf einem eindimensionalen Gitter der Länge L. Jeder Gitterplatz $x \in [1, L]$ kann frei sein (0) oder besetzt mit höchstens einem Teilchen (1). Findet man bei zwei aufeinanderfolgenden Gitterplätzen die Konfiguration 1 0, so findet ein Übergang

$$1\,0 \rightarrow 0\,1 \tag{3.1}$$

statt, das Teilchen bewegt sich also nach rechts.

3.1.1 Update-Regeln

Die Angabe der Art und Weise, in der Übergänge zwischen verschiedenen Konfigurationen der Gitterzellen stattfinden, reicht zur vollständigen Bestimmung des dynamischen Verhaltens eines Gittergases nicht aus. Vielmehr ist auch zu bestimmen, in welcher Reihenfolge die Zellen eines Gitters behandelt werden[1]. Dabei gibt es mehrere Möglichkeiten, die z.B. in [2] dargestellt werden:

- stochastisch-sequentielles Update: nach einer exponentiell verteilten Wartezeit wird stochastisch ein beliebiges Teilchen gewählt, bei dem ein Sprungversuch durchgeführt wird. Die Zeit ist eine kontinuierliche Variable und der Prozess kann durch eine Master-Gleichung in kontinuierlicher Zeit beschrieben werden. Das Update erfolgt asynchron, also bei verschiedenen Teilchen zu verschiedenen Zeiten. Illustrativ verfügt jedes Teilchen einem Atom ähnlich über eine innere Uhr, die es abwartet, bevor es einen Sprungversuch unternimmt.

  Der TASEP mit stochastisch-sequentiellem Update ist vielfach untersucht worden [14] und lässt sich auch bei offenen Randbedingungen exakt lösen. Dies wurde in [28] mittels eines Matrixproduktansatzes und Rekursionsrelationen durchgeführt. In [29] wurden dieselben Ergebnisse mit Hilfe von Analogien und Lösungstechniken zu Quantenspinketten gewonnen.

  Für die spezifische Untersuchung von Strassenverkehr weist dieses Update eine Reihe von Nachteilen auf. Wegen der stochastischen Auswahl des betrachteten Teilchens ist es sowohl möglich, dass ein Teilchen lange Zeit keinen Sprungversuch unternimmt als auch dass es mehrmals direkt nacheinander Übergänge durchführt. Beide Fälle sind unrealistisch, sowohl ein plötzlich zum Halt kommendes Fahrzeug in ansonsten flüssigem Verkehr als auch der umgekehrte Fall. Damit zusammenhängend bleiben bei stochastisch-sequentiellem Update die Korrelationen zwischen den Teilchen nicht erhalten. Gerade für ungehin-

[1] engl. *update rules*

derten Verkehr sind aber langlebige Korrelationen, also ein konstanter Fahrzeugabstand, charakteristisch.

- geordnet-sequentielles Update: hier wird in einer definierten Reihenfolge jedes Teilchen nacheinander betrachtet (für den TASEP in [30]). Ein Zeitschritt ist abgeschlossen, wenn das Gitter vollständig durchlaufen wurde. Die Zeit ist also diskret. Ein Vergleich mit anderen Update-Regeln findet sich in [31, 2].

  Das Gitter kann vorwärts, in Richtung des Teilchenstroms, oder rückwärts, entgegen dem Strom, durchlaufen werden. Ausserdem unterscheidet man je nachdem, ob alle Teilchen nacheinander oder alle Zellen nacheinander betrachtet werden.

  Insbesondere beim Update aller Zellen nacheinander in Stromrichtung können unrealistische Fälle auftreten. Bei einem leeren Gitter ist es zum Beispiel möglich, dass ein Teilchen das gesamte Gitter in einem Zeitschritt durchläuft. Werden dagegen alle Teilchen nacheinander durchlaufen, so ist garantiert, dass jedes Fahrzeug in einem Zeitschritt nur einmal bewegt wird.

- paralleles Update: hier werden alle Teilchen gleichzeitig, also synchron, betrachtet. Die Zeit ist ebenfalls diskret und ein Zeitschritt entspricht einem vollständigen Gitterdurchlauf.

  Zur Implementation werden hier zwei Gitter angelegt, von denen eines dem Zustand zur Zeit t und das andere dem Zustand zur Zeit $t+1$ entspricht. Erst wenn das Update komplett durchgeführt ist, werden beide Gitter ausgetauscht und der Zeitschritt ist abgeschlossen.

  Bei parallelem Update treten die stärksten Korrelationen auf. Dies ist bei der Analyse von Verkehr gewünscht, weshalb hier meist paralleles Update zum Einsatz kommt, z.B. beim Nagel-Schreckenberg-Modell [32] (Kap. 5).

  Der TASEP mit parallelem Update und offenen Rändern lässt sich ebenfalls exakt lösen [33, 34]. Dazu benutzt man Generalisierungen des Matrixproduktansatzes, der zur Lösung des Falles mit periodischen Randbedingungen eingesetzt wurde.

3.2 Fundamentaldiagramm

In [35] wird gezeigt, dass die Kenntnis der Strom-Dichte-Relation $j(\rho)$ bei periodischen Randbedingungen ausreicht, um bei dem System mit offenen

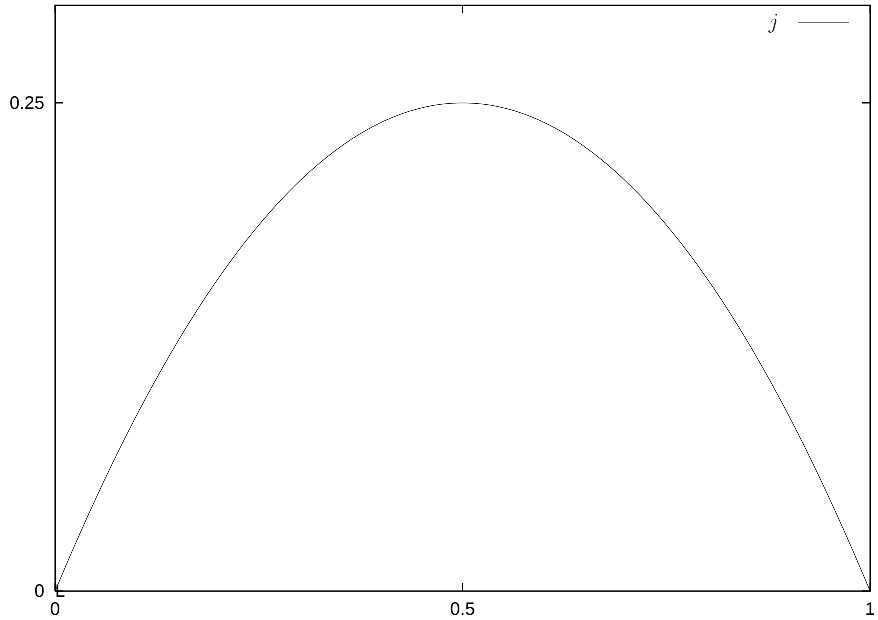

Abbildung 3.1: Strom-Dichte-Relation $j(\rho)$ für den TASEP mit periodischen Randbedingungen

Rändern das Phasendiagramm zu bestimmen. Aus diesem Grund soll $j(\rho)$ im Folgenden bestimmt werden.

Die lokale Teilchenzahl $n_x(t)$ kann die Werte 0 oder 1 annehmen. Mittelt man über viele Realisierungen des Prozesses, so erhält man den Erwartungswert

$$\rho_x(t) = \langle n_x(t) \rangle$$

und damit das Dichteprofil.

Nimmt man periodische Randbedingungen an, definiert das System also auf einem Ring, so gilt wegen der Teilchenzahlerhaltung die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt}\rho_x(t) = j_{x-1}(t) - j_x(t)$$

mit dem Teilchenstrom $j_x(t)$ vom Gitterplatz x weg. Dieser Strom wird bestimmt durch die Wahrscheinlichkeit, die Konfiguration 1 0 zu finden, also

$$j_x(t) = \langle n_x(t) \cdot [1 - n_{x+1}(t)] \rangle .$$

Im stationären Zustand ist das Dichteprofil wegen der periodischen Randbedingungen translationsinvariant, also gilt $\langle n_x \rangle = \rho \, \forall \, x$. Damit folgt die Strom-Dichte-Relation

$$j(\rho) = \rho(1-\rho),$$

die in Abb. 3.1 dargestellt ist. Der Strom verschwindet, wenn keine Teilchen vorhanden sind oder aber das gesamte System mit Teilchen besetzt ist. Bei einer bestimmten Dichte, hier $\rho = 0.5$, ist der Strom maximal. Dieses Verhalten ist mindestens erforderlich, wenn Verkehr beschrieben werden soll, weshalb sich der TASEP auch als paradigmatisches Modell für diese Anwendung eignet.

3.3 Ränder & Phasendiagramm

Betrachtet man das System auf einer Kante, also einem eindimensionalen Gitter, so reicht (3.1) zur Definition nicht aus, sondern auch das Verhalten an den beiden Rändern muss spezifiziert werden.

Am linken Rand, also dem Gitterplatz $x = 1$, findet der Übergang

$$0 \rightarrow 1$$

mit der Rate α statt. Auf diese Weise werden Teilchen in das System eingebracht. Analog wird am rechten Rand, also bei $x = L$, der Übergang

$$1 \rightarrow 0$$

mit der Rate β ausgeführt. Dadurch werden Teilchen wiederum aus dem System entfernt.

Es ist zu beachten, dass der Ausgangszustand für diese Übergänge nicht immer vorliegen muss. Befindet sich bereits ein Teilchen bei $x = 1$, so kann kein weiteres Teilchen in das System injiziert werden. Analog wird nur dann ein Teilchen mit der Wahrscheinlichkeit β vom rechten Rand entfernt, wenn der Gitterplatz $x = L$ besetzt ist.

In Abhängigkeit von den die Ränder kontrollierenden Parametern α, β findet man ein Phasendiagramm mit drei verschiedenen Phasen [36]. Für $\alpha < \beta$, also höheren Abfluss als Zufluss, findet man eine Phase niedriger Dichte, die vom linken Rand kontrolliert wird. Das Dichteprofil ist im grössten Teil des Systems konstant bei

$$\langle \tau \rangle = \frac{\alpha}{1 + \alpha}. \tag{3.2}$$

Lediglich nahe dem rechten Rand steigt es exponentiell an. Der Fluss beträgt in dieser Phase $j(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$.

Gilt $\alpha > \beta$, übersteigt also der Zufluss den Abfluss, so befindet sich das System in einer Phase hoher Dichte, die vom rechten Rand kontrolliert wird.

Hier gilt
$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{1+\beta}, \tag{3.3}$$
bis auf den linken Rand, wo das Dichteprofil exponentiell bis zu diesem Wert wächst. Der Fluss in dieser Phase ist $j(\beta) = \frac{\beta}{1+\beta}$.

Die dritte Phase wird bei $\alpha, \beta > 1/2$ erreicht. Hier wird der Fluss durch das Innere des Systems begrenzt. Da für den Fluss $j = 1/2$ unabhängig von α und β gilt, spricht man von einer Phase maximalen Flusses.

In [35, 36] wird gezeigt, dass die Auswahl der Phase abhängig von den Injektions- und Absorptionsraten verstanden werden kann durch die Diffusion eines Schocks im System. Damit wird eine Region bezeichnet, in der die Dichte über wenige Gitterzellen stark ansteigt. Links davon befindet eine durch den Zufluss gespeiste Region niedriger Dichte, in der alle Teilchen in Bewegung sind. Rechts davon findet man durch den durch $\beta < 1$ begrenzten Abfluss eine Region von Teilchen mit $v = 0$. Durch die stochastische Natur der Ränder unterliegt die Bewegung der Schockposition einem *random walk*. Dieser ist bei $\alpha < \beta$ gerichtet zum rechten Rand, der Schock bewegt sich dorthin und die Phase niedriger Dichte erfüllt das System. Bei $\alpha > \beta$ bewegt sich der Schock im Mittel zum linken Rand und die Phase hoher Dichte nimmt fast das gesamte System ein. Auf der Linie $\alpha = \beta$ ist der *random walk* ungerichtet. Der Schock besucht mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden Platz im System. Es tritt ein Phasenübergang erster Ordnung auf, wenn man die Dichte im System als Ordnungsparameter auffasst [14]. Das Dichteprofil auf der $\alpha = \beta$-Linie steigt linear an.

3.4 Reisezeiten

Das größte Interesse gilt dem Zusammenhang zwischen der Dichte $\rho\left(t_i^{\text{in}}\right)$ zu der Zeit, zu der ein bestimmtes Fahrzeug die Kante befahren hat und der Reisezeit[2] $\tau_i = t_i^{\text{out}} - t_i^{\text{in}}$ dieses Fahrzeugs. Dabei sind die auftretenden Zeiten $t_i^{\text{in/out}}$ diskret und damit auch die Reisezeiten τ_i.

3.4.1 Analytische Rechnung

Da für den TASEP mit parallelem Update und offenen Rändern exakte Lösungen [33, 34] vorliegen, sollte es möglich sein, auch die Reisezeiten analytisch zu bestimmen. Die minimale Reisezeit ist sicherlich durch die

[2] Der Literatur folgend wird sowohl für die Reisezeiten wie auch für die Besetzungszahlen einzelner Zellen und damit Dichteprofile τ verwendet.

Länge des Gitters gegeben, da ein Teilchen pro Zeitschritt höchstens um eine Zelle vorwärts gelangen kann.

Reisezeiten oberhalb $\tau_{\min} = L$ sind zu erwarten, wenn zwei Teilchen benachbarte Gitterzellen besetzen. Das hintere Teilchen muss dann warten, bis die Zielzelle für einen Übergang (3.1) frei ist. Mit der Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion $\langle \tau_i \tau_{i+1} \rangle$ ist

$$p_i^{\text{block}} = \frac{\langle \tau_i \tau_{i+1} \rangle}{\langle \tau_i \rangle}$$

die Wahrscheinlichkeit, die $i+1$-te Zelle besetzt zu finden, wenn die i-te Zelle besetzt ist. Folglich ist $p_i^{\text{free}} = 1 - p_i^{\text{block}}$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das die i-te Zelle besetzende Teilchen tatsächlich vorwärts bewegen kann. Das Teilchen wird also

$$T_i^{\text{wait}} = \frac{1}{p_i^{\text{free}}} = \frac{1}{1 - \frac{\langle \tau_i \tau_{i+1} \rangle}{\langle \tau_i \rangle}}$$

Zeitschritte brauchen, um die i-ten Zelle zu verlassen. Es erreicht dann die $i+1$-te Zelle, wo es wiederum T_i^{wait} Schritte braucht usw. Für das komplette Gitter braucht das Teilchen also

$$\tau = \sum_{i=1}^{L} T_i^{\text{wait}} = \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{1 - \frac{\langle \tau_i \tau_{i+1} \rangle}{\langle \tau_i \rangle}} \tag{3.4}$$

Zeitschritte. Die Kenntnis des Zwei-Punkt-Korrelators und des Dichteprofils (3.3) genügt also, um die Reisezeiten zu bestimmen, die im Allgemeinen von α, β und L abhängen werden.

Für die Korrelationsfunktion $\langle \tau_i \tau_{i+1} \rangle$ findet man in [33] einen länglichen Ausdruck, in [34] einen noch komplexeren. Charakteristisch ist wie beim Dichteprofil, dass sich im Innern des Systems wesentlich einfachere Ausdrücke finden lassen. Speziell findet man für die Phase hoher Dichte mit $\alpha > \beta$

$$\langle \tau_i \tau_{i+1} \rangle_{\text{bulk}} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)^2}.$$

Mit

$$\langle \tau_i \rangle_{\text{bulk}} = \frac{1}{1 + \beta} \tag{3.5}$$

und (3.4) ergibt sich

$$\tau_L \approx L \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-\beta^2}{(1+\beta)^2}(1 + \beta)} = L \frac{1}{\beta}. \tag{3.6}$$

Für die Dichte findet man mit (3.5) $\rho_L(\beta) = \frac{L}{1+\beta}$. Kombiniert mit (3.6) erhält man für die Phase hoher Dichte die Reisezeitfunktion

$$\tau_L(\rho) = L\frac{\rho}{L-\rho}.$$

In der Phase niedriger Dichte mit $\rho < L/2$ sind wenige Korrelationen zu erwarten, weshalb hier in akzeptabler Näherung von $\tau \approx \tau_{\min}$ ausgegangen werden kann. Insgesamt ergibt sich

$$\tau_L(\rho) = \begin{cases} L, & \rho < \frac{1}{2}L \\ L\frac{\rho}{L-\rho}, & \rho > \frac{1}{2}L \end{cases} \tag{3.7}$$

3.4.2 Numerische Bestimmung

Im Gegensatz zu numerischen Experimenten auf einem Ring, also bei periodischen Randbedingungen, lässt sich bei einer Kante, also offenen Rändern, die Dichte, die Anzahl der Fahrzeuge auf der Kante, nicht direkt vorgeben. Auf einem Ring ist es möglich, in eine entsprechende Lücke von einem Gitterplatz ein weiteres Fahrzeug einzufügen, dass dann wegen der Teilchenzahlerhaltung auf dem Ring verbleibt und dessen dynamisches Verhalten beeinflusst. Auf einer Kante würde dies nicht zu einer Änderung des dynamisch stationären Zustands führen, da das Fahrzeug die Kante am rechten Rand wieder verlässt.

Die Beeinflussung der Dichte erfolgt deshalb indirekt über die Vorgabe passender Parameter α, β, die das Verhalten der Ränder so steuern, dass sich möglichst viele verschiedene Dichten einstellen lassen. Dazu wurden systematisch Parameterpaare eines Rasters über der α-β-Ebene eingestellt und die Dichte gemittelt über viele Zeitschritte bestimmt. Für dieselben Parameterpaare wurde dann auf die gleiche Weise die Reisezeit τ bestimmt. Durch die Kombination beider Messwerte desselben Parameterpaares wurde der Zusammenhang $\tau(\rho)$ ermittelt. Die Ergebnisse für alle Parameterpaare sind in Abb. 3.2 zusammen mit der Näherung (3.7) dargestellt.

Die beobachteten Abweichungen (Punkte oberhalb der Kurve) entsprechen offenbar kleinen Werten von α in einer vom rechten Rand kontrollierten Phase. Durch die Absorptionsrate β wird die Reisezeit bestimmt, durch kleinen Zufluss wird das Wertepaar aus Dichte und Reisezeit dann aber zu kleineren Dichten nach links verschoben.

Ansonsten lassen sich die meisten Ergebnisse aber gut durch (3.7) nähern. Auch die numerischen Ergebnisse sprechen also dafür, dass sich eine das mikroskopische Modell nachbildende Reisezeitfunktion definieren lässt.

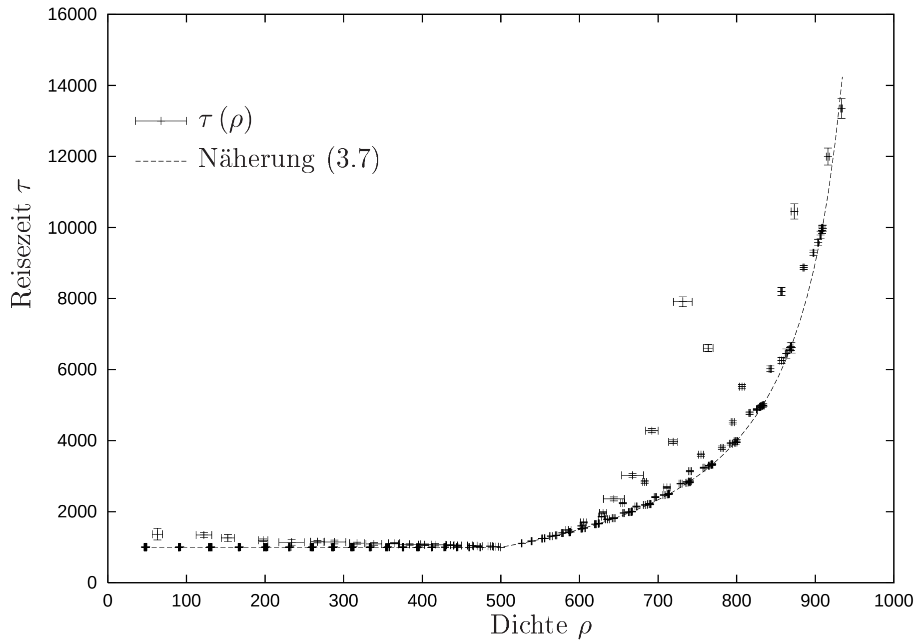

Abbildung 3.2: Gezeigt sind alle beobachteten Paare $\tau(\rho)$ von Dichte und zugehöriger Reisezeit zusammen mit (3.7). Die Methode, um diese Plots zu erstellen, ist im Text beschrieben. ($L = 1000$, $p = 0$, $T_{\mathrm{eq}} = 2000$, $T_{\mathrm{m}} = 15000$, $N_{\mathrm{r}} = 20$. Diese Simulationsparameter werden im Anhang erläutert.)

Kapitel 4

Gittergas mit Metastabilität

Im Gegensatz zum in Kap. 3 untersuchten TASEP und dem in Kap. 5 vorgestellten einfachen Nagel-Schreckenberg-Modell zeigt das NaSch-Modell mit VDR Metastabilität. In diesem Abschnitt soll ein möglichst einfaches Modell untersucht werden, dass ebenfalls diese Eigenschaft aufweist, um spezifisch dadurch hervorgerufene Effekte zu untersuchen.

In [37] wird ein Modell untersucht, dass als einfache Erweiterung des TASEP verstanden werden kann bzw. als Spezialfall des NaSch-Modells mit VDR, wie unten deutlich werden wird.

4.1 Definition des Modells

Bei dem Modell handelt es sich wie beim TASEP um ein getriebens diffusives Gittergas, in dem Raum und Zeit diskret sind. Eine Kante wird repräsentiert durch ein eindimensionales Gitter der Länge L. Jede Zelle $x \in [1, L]$ des Gitters kann unbesetzt sein oder besetzt mit genau einem Fahrzeug mit Geschwindigkeit $v = 0, 1$. Die Höchstgeschwindigkeit $v_{\max} = 1$ des TASEP wird also beibehalten.

Die folgenden Regeln werden gemäss parallelem Update auf alle Fahrzeuge gleichzeitig angewandt. In jedem Zeitschritt werden zuerst die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge aktualisiert und dann die Fahrzeuge gemäss ihrer Geschwindigkeit bewegt.

Dabei wird einem Fahrzeug an der Position x die Geschwindigkeit $v = 1$ zugewiesen, falls es diese Geschwindigkeit im letzten Zeitschritt hatte und die Zelle $x + 1$ vor dem Fahrzeug frei ist. Weiterhin wird $v = 1$ mit Wahrscheinlichkeit q_0 einem stehenden Fahrzeug ($v = 0$ im letzten Zeitschritt) zugewiesen; Bedingung hierfür ist wieder, dass die Zelle $x + 1$ frei ist.

In allen anderen Fällen wird die Geschwindigkeit $v = 0$ zugewiesen.

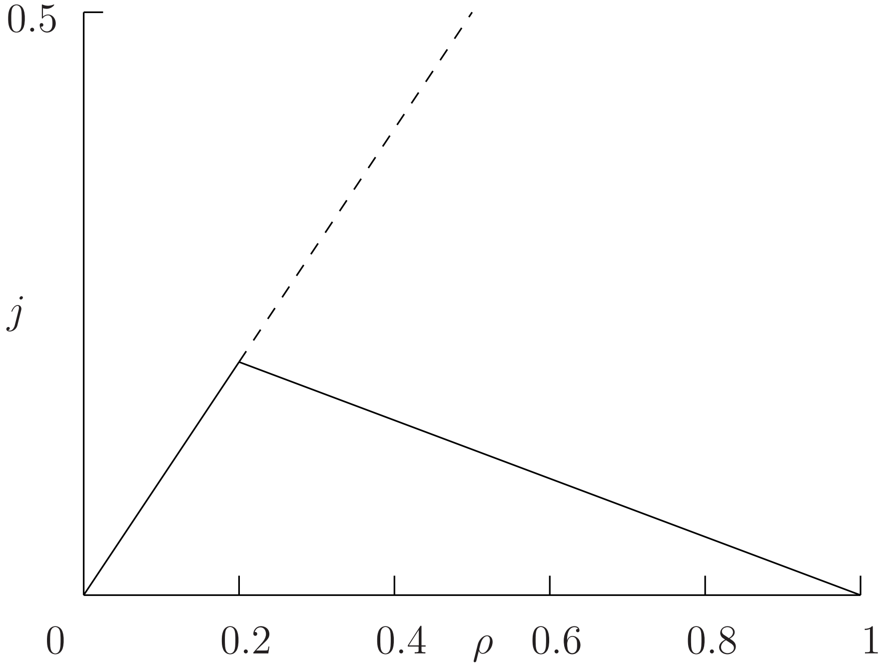

Abbildung 4.1: Fundamentaldiagramm $j(\rho)$ des Appert-Santen-Modells mit periodischen Randbedingungen. Der gestrichelte Zweig wird nur erreicht, wenn von einem homogenen Anfangszustand ausgegangen wird.

Insbesondere also stets, wenn die Zelle $x+1$ vor dem Fahrzeug besetzt ist. Ausserdem beschleunigt ein stehendes Fahrzeug nicht immer, wenn die nächste Zelle frei ist, sondern lediglich mit der Wahrscheinlichkeit q_0. Dies ist eine einfache Regel, die *slow-to-start*-Verhalten implementiert, auf das in Kap. 5 näher eingegangen wird. Es wird sich zeigen, dass dadurch auch Metastabilität des Modells erreicht wird.

Das Modell stellt einen Spezialfall des Nagel-Schreckenberg-Modells mit VDR (Kap. 5) dar. Der wesentliche Unterschied zu diesem besteht in der Beschränkung der Höchstgeschwindigkeit auf $v_{max} = 1$. Ausserdem gilt $p = 0$, $p_0 = 1 - q_0$. Im Fall $q_0 = 1$ wird durch das Modell der deterministische TASEP mit parallelem Update wie in Kap. 3 reproduziert.

4.2 Fundamentaldiagramm

Zur groben Analyse des Modells ist das Fundamentaldiagramm $j(\rho)$ [37] geeignet (Abbildung 4.1). Dabei gelten periodische Randbedingungen, dass Gitter wird also zu einem Ring geschlossen. Dargestellt sind die beide Zweige

$$\begin{aligned} j(\rho) &= \rho, & 0 \leq \rho \leq 0.5 \\ j(\rho) &= q_0 (1-\rho), & \tfrac{q_0}{1+q_0} \leq \rho \leq 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Der obere Zweig entspricht einem Zustand, in dem alle Teilchen in Bewegung sind [37]. Dann steigt der Fluss aber mit der Anzahl der Teilchen an und entsprechend ist $j(\rho)$ hier linear ansteigend. Damit sich alle Teilchen bewegen können ist es erforderlich, dass jeweils die Gitterzelle vor der aktuellen Position frei ist, also ebenso viele Löcher existieren wie Teilchen. Folglich kann dieses Regime nicht mehr oberhalb einer Dichte $\rho = 0.5$ gelten.

Der untere Zweig entspricht einem Zustand, in dem Phasenseparation beobachtet wird [37]. Das System ist aufgeteilt in einen kompakten Cluster von Teilchen mit $v = 0$ und einen Bereich niedriger Dichte, in dem sich die Teilchen mit $v = 1$ bewegen. Mit wachsender Dichte wird die Ausdehnung des kompakten Clusters grösser und folglich der Bereich freien Flusses kleiner. Dann enthält dieser Bereich aber auch weniger Teilchen, die in Bewegung sind, weshalb der Fluss linear mit der Dichte sinkt.

Im Dichtebereich $\frac{q_0}{1+q_0} \leq \rho \leq 0.5$ [37] koexistieren beide Lösungen. Der obere Zweig, also der Zustand, in dem sich alle Teilchen bewegen und folglich vor jedem Teilchen ein freier Gitterplatz ist, wird vom System aber nur erreicht, wenn dies bereits für die Ausgangskonfiguration gilt, also bei speziellen Anfangsbedingungen. Dieser Zweig ist metastabil in dem Sinne, dass beim Einbringen weiterer Teilchen in das System Cluster entstehen werden und der untere Zweig erreicht wird. Dieser ist stabil in dem Sinne, dass beim Entfernen von Teilchen aus einem solchen Zustand der obere Zweig nicht erreicht wird, da sich der kompakte Cluster erst auflöst, wenn die Dichte $\rho = \frac{q_0}{1+q_0}$ unterschritten wird.

Es ist möglich, eine Hystereseschleife zu durchlaufen, in dem man durch Erhöhung der Dichte erst den oberen Zweig durchläuft, und nach dessen Zusammenbruch durch Verringerung der Dichte den unteren Zweig bis zur Ausgangsdichte. Im thermodynamischen Limes $L \to \infty$ wird für jede zufällig gewählte Ausgangskonfiguration ein stationärer Zustand mit Cluster erreicht [37].

4.3 Offene Randbedingungen

Die Ränder werden genauso parametrisiert wie beim TASEP (Kap. 3.3). Am linken Rand ($x = 1$) werden mit Wahrscheinlichkeit α Fahrzeuge der Geschwindigkeit $v = 1$ injiziert. Am rechten Rand verlassen Fahrzeuge von der Zelle $x = L$ mit Wahrscheinlichkeit β das System unabhängig von ihrer Geschwindigkeit.

Bei offenem rechtem Rand ($\beta = 1$) können keine Staus im System entstehen und eine Phase niedriger Dichte liegt vor. In diesem Fall entspricht das

Modell dem oben beschriebenen deterministischem TASEP und der Fluss steigt gemäss

$$j\,(\alpha;\beta=1)=\frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{4.2}$$

mit der Injektionsrate an.

Für hohe Dichten wird der Fluss durch den Abfluss am rechten Rand kontrolliert. Das Teilchen am Ort $x = L$ wird im Mittel nach $1/\beta$ Zeitschritten absorbiert und der Gitterplatz $x = L$ nach durchschnittlich $1/q_0$ Schritten wieder neu besetzt. Daraus ergibt sich für den maximalen Zufluss $(\alpha = 1)$ der Fluss

$$j\,(\beta;\alpha=1)=\frac{q_0\beta}{q_0+\beta}. \tag{4.3}$$

Dieses Resultat bleibt gültig, solange das System durch den rechten Rand kontrolliert wird [37], also in der Phase hoher Dichte.

Die beiden Phasen werden getrennt durch die Linie

$$\beta_{\text{transition}}=\frac{q_0\alpha}{(1+\alpha)\,q_0-\alpha}, \tag{4.4}$$

an der beide Flüsse übereinstimmen. Für grössere Absorptionsraten befindet sich das System in der vom linken Rand kontrollierten Phase niedriger Dichte, für kleinere Absorptionsraten in der vom rechten Rand kontrollierten Phase hoher Dichte. Für $\alpha > q_0$ ist der Zufluss stets grösser als der Abfluss aus einem Stau und es tritt nur noch die Phase hoher Dichte unabhängig von β auf, da am rechten Rand entstehende Staus das gesamte System durchwandern [37]. Für endliche Gitterlängen tritt bei Absorptionsranten sehr nahe bei $\beta = 1$ eine Phase maximalen Flusses auf, die allerdings bereits bei $L = 500$ [37] sehr klein ist.

Die Phase hoher Dichte lässt sich weiter unterteilen, je nachdem ob $\alpha < q_0$ gilt. Die am rechten Rand entstehenden Staus bewegen sich entgegen der Teilchenbewegung nach links und durchlaufen das System. Der Abfluss aus einem Stau ist durch $j^{\text{out}}_{\text{jam}} = q_0$ gegeben. Da meist mehrere Staus im System existieren [37], ist der Zufluss eines Staus durch den Abfluss des nächsten stromaufwärts gelegenen Staus charakterisiert. Da dieser aber eben q_0 beträgt, sind bei einem Stau im Innern des Systems Zu- und Abfluss gleich. Seine Länge ändert sich deshalb gemäss einer ungerichteten Brownschen Bewegung und bleib im Mittel konstant. Dies gilt nicht für den Stau, der dem linken Rand am nächsten ist. Hier ist der Zufluss des Staus der Zufluss in das System, $j^{\text{in}}_{\text{jam}} = \alpha$. Die Länge des Staus folgt nun einer gerichteten Brownschen Bewegung. Für $\alpha < q_0$ nimmt die Staulänge ab und der Stau kann sich auflösen, bevor er den linken Rand erreicht. Für $\alpha > q_0$

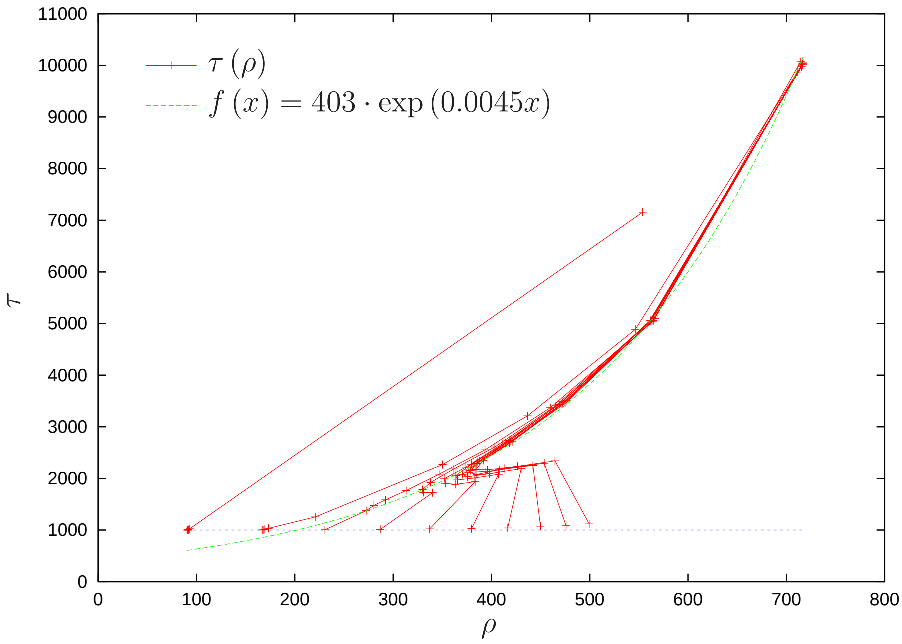

Abbildung 4.2: Reisezeiten $\tau(\rho)$ in Abhängigkeit von der Dichte. Dabei gilt $q_0 = 0.25$, $L = 1000$. ($T_{\mathrm{eq}} = 5000$, $T_{\mathrm{m}} = 50000$, $N_{\mathrm{r}} = 20$). Die gleichen Injektionsraten α entsprechenden Wertepaare sind durch Linien verbunden. Eingezeichnet sind ausserdem eine exponentielle Näherungsfunktion und die Linie $\tau_{\mathrm{min}} = 1000$.

wächst die Länge des Staus und er erreicht den linken Rand, wo dadurch keine weiteren Teilchen injiziert werden, bis der Stau das System verlassen hat.

4.4 Reisezeiten

Auch beim Appert-Santen-Modell lässt sich die Dichte auf dem Gitter wie bei allen Modellen mit offenen Randbedingungen nicht direkt einstellen. Deshalb wurde wie in Kap. 3.4.2 ein Raster über die α-β-Parameterebene gelegt und für diese Parameterkombinationen die Dichte und die Reisezeit numerisch bestimmt. Das Ergebnis ist in Abb. 4.2 zusammen mit einer exponentiellen Approximation dargestellt.

Im Dichtebereich $300 < \rho < 500$ gibt es keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen Dichte und Reisezeit. Um die Ursache dafür zu illustrieren, sind die durch die Rasterung der α-β-Ebene entstandenen Dichte-Reisezeit-Paare zu Linien zusammengefasst. Dabei entspricht eine Linie einer festen Injektionsrate α von links nach rechts ansteigend von $\alpha = 0.1$ bis $\alpha = 1$. Der Punkt für $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ entspricht wie in Kap. 3.4.2 erläutert offenbar einer Situation, in der durch β die Reisezeit bestimmt wird, die Dichte

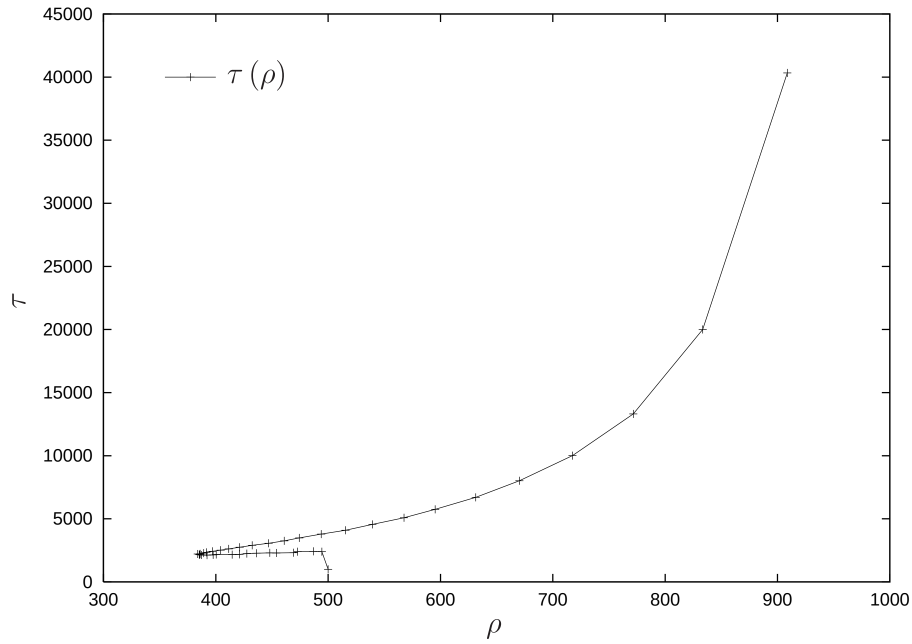

Abbildung 4.3: Reisezeiten und Dichten, die entlang der $\alpha = 1$-Linie für verschiedene β gewonnen wurden. ($q_0 = 0.25$, $L = 1000.$, $T_{\mathrm{eq}} = 5000$, $T_{\mathrm{m}} = 50000$, $N_{\mathrm{r}} = 20$).

wegen einer kleinen Injektionsrate α am linken Rand aber abgesenkt ist und dadurch das Wertepaar zu kleineren Dichten hin verschoben ist.

Alle anderen Linien bis auf die zu $\alpha = 0.2$ gehörende weisen eine typische Form auf, die in Abb. 4.3 noch einmal gesondert dargestellt ist. Dabei entsprechen hohe Dichten und hohe Reisezeiten sehr kleinen Absorptionsraten. Mit wachsendem β gehen dann erst sowhl Dichte als auch Reisezeit zurück. Bei $\beta = 0.6$ kehrt sich dies aber um, ein Minimum in der Dichte wird erreicht. Diese steigt dann wieder bis β nahe 1 an. Bei $\alpha = 1$, $\beta = 1$ wird der deterministische Grenzfall erreicht mit $\rho = L/2$ und $\tau = L$.

Dem Minimum in der Dichte soll im Folgenden nachgegangen werden. Naiv zu erwarten wäre stattdessen, dass die Dichte mit wachsenden Absorptionsraten, also wachsendem Abfluss, bei konstantem Zufluss stetig fällt.

In der Phase hoher Dichte ist das System wie oben gesagt durch Cluster von Teilchen mit $v = 0$ charakterisiert, die sich entgegen dem Teilchenstrom bewegen. Die Länge der Cluster wird dadurch bestimmt, wieviele Zeitschritte ein Teilchen am Platz $x = L$ benötigt, um aus dem System entfernt zu werden. Geschieht dies, wird ein Teilchen absorbiert bzw. ein Loch in das System injiziert, das fortan zwei Cluster trennt. Ausgehend von $\beta \approx 0$ nimmt die Länge solcher Bereiche zwischen zwei kompakten Clustern mit steigendem β zu.

Die Verringerung der Dichte mit steigender Absorptionsrate lässt sich al-

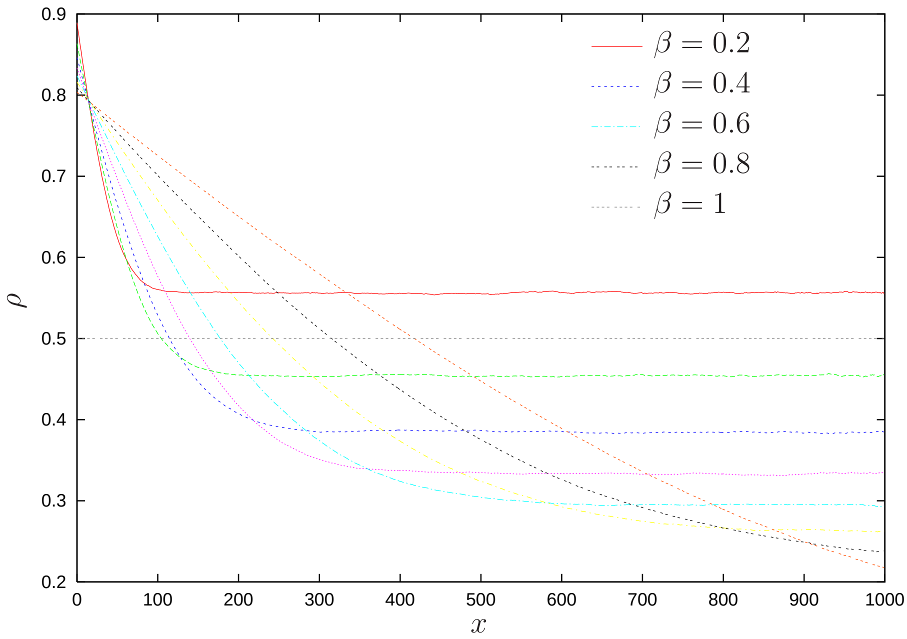

Abbildung 4.4: Dichteprofile $\rho(x)$ entlang des Gitters für verschiedene Absorptionsraten β. Dabei gilt $\alpha = 1$, $q_0 = 0.25$. ($L = 1000$, $T_{\mathrm{eq}} = 5000$, $T_{\mathrm{m}} = 2000000$)

so dadurch verstehen, dass die Bereiche zwischen den Clustern grösser werden, die Dichte also sinkt. Wie oben ausgeführt wurde, gehorcht die Länge des dem linken Rand nächsten Clusters einer gerichteten Brownschen Bewegung. Bei $\alpha > q_0$ steigt die Länge dieses Clusters an. Dies lässt sich auch so verstehen, dass durch den Zufluss vom linken Rand der Bereich niedriger Dichte zwischen zwei Clustern aufgefüllt wird [37]. Bei hohen α, also hohen Zuflüssen, können durch steigendes β und damit wachsenden Bereichen zwischen den Clustern mehr Teilchen in das System injiziert werden. Der dem linken Rand nächste Cluster wird dadurch verlängert und die Dichte im System steigt auf diese Weise wieder mit fallendem β. Dies gilt nicht bei $\alpha < q_0$, weshalb die Linie zu $\alpha = 0.2$ dieses Verhalten nicht zeigt.

Das beschriebene Verhalten wird bestätigt durch die Dichteprofile [37], die in Abb. 4.4 bei $\alpha = 1$ für wachsende Absorptionsraten β dargestellt sind.

Die durch $\alpha = 1$ vorgegebene hohe Dichte am linken Rand kann für kleine β nicht weit in das System eindringen, da die Zwischenräume zwischen den Clustern klein sind. Mit wachsendem β wachsen diese Zwischenräume und die hohe Dichte am linken Rand beeinflusst weitere Bereiche des Gitters. Obwohl die Dichte im Innern des Systems durch mit wachsendem β höheren Abfluss erst fällt, steigt sie dadurch dann erneut. Im deterministischen Fall $\alpha = \beta = 1$ ergibt sich ein triviales Dichteprofil $\rho(x) = 0.5$.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sich nur in Teilbereichen des Phasendiagramms bzw. der α-β-Ebene eine geeignete Reisezeitfunktion approximieren lässt. Dies ist dann der Fall, wenn das System durch mehrere Cluster dominiert wird, welche durch das *slow-to-start*-Verhalten zustande kommen. Die dargestellte Abweichung bei grossen Absorptionsraten begrenzt diesen Bereich.

Kapitel 5

Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR

Die bisher behandelten Modelle waren in Bezug auf den Verkehrsfluss unrealistisch, da stets $v_{max} = 1$ galt. Dadurch bedingt konnte jedes Teilchen in einem Zeitschritt höchstens eine Gitterzelle nach rechts wandern, wodurch die Analyse wesentlich erleichtert wird. Allerdings lassen sich damit auch Vorgänge wie das Beschleunigen und das Bremsen nicht abbilden.

Zur Erweiterung auf $v_{max} > 1$ wurde 1992 das Nagel-Schreckenberg-Modell [7, 32] vorgeschlagen. Ein weiteres Ziel war die möglichst effiziente Implementierbarkeit, um grosse Netze in Echtzeit simulieren zu können bzw. Monte-Carlo-Simulationen mit sehr vielen identischen Läufen ausführen zu können. Beide Ziele wurden erreicht, bereits 1995 konnte das gesamte Autobahnnetzwerk Deutschlands in Echtzeit simuliert werden [32].

Es handelt sich um einen zellulären Automaten, der mit den speziellen Parameterwerten $v_{max} = 1$, $p = 0$ dem CA 184 in der Klassifikation von Wolfram [38] entspricht. Das NaSch-Modell wird im Rahmen des Programms TRANSIMS z.B. zur Simulation der Strassenverkehrs der Schweiz eingesetzt [17].

5.1 Definition des Modells

Im ursprünglichen Nagel-Schreckenberg-Modell [7, 32] hat die modellierte Strasse eine einzelne Spur, die in L Zellen gleicher Länge unterteilt wird. Der Raum ist also diskretisiert und wird auf ein eindimensionales Gitter abgebildet. Die Zellen werden mit $x = 1, 2, \ldots, L$ numeriert.

Jede Zelle kann entweder leer sein oder besetzt mit einem Fahrzeug. Für Anwendungen des Modells ist die Frage interessant, welcher Länge der realen

Strasse jede Zelle entspricht. Da jede Zelle ein ganzes Fahrzeug aufnimmt, würde es keinen Sinn machen, die betrachtete Strasse in Zellen zu unterteilen, die kleiner sind als eine Fahrzeuglänge. Empirische Beobachtungen haben ergeben, dass in einem dichten Stau der Abstand zwischen zwei Fahrzeugen inklusive der Fahrzeuglänge typisch 7.5m beträgt. Dieser Wert wird in fast allen Arbeiten als Länge einer Zelle im Nagel-Schreckenberg-Modell verwendet.

Die Zeit t ist wie der Raum ebenfalls diskretisiert. Dabei entspricht ein Zeitschritt einem kompletten Update des gesamten Gitters. Vergleiche mit empirischen Daten haben für das NaSch-Modell mit $v_{max} = 5$ für einen Zeitschritt die Diskretisierung $\Delta t \approx 1\text{s}$ als beste Wahl für realistische Resultate ergeben. Der typische zeitliche Abstand in empirisch beobachtetem dichtem Verkehr beträgt z.B. 1.2s. Auch die meisten kommerziell erhältlichen Verkehrssimulationsprogramme arbeiten mit einem Zeitschritt von 1s.

Da die Zeit in diskreten Schritten verläuft, sind auch Geschwindigkeiten und Beschleunigungen diskret. Die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs kann die diskreten Werte $v = 0, 1, \ldots, v_{max}$ annehmen, wobei $v_{max} = 0$ einem stehenden Fahrzeug entspricht. Mit den oben angegebenen Entsprechungen der Raum- und Zeiteinheiten im Modell gilt die Entsprechung

$$v_{max} = 5 \Leftrightarrow v_{max} = \frac{5 \cdot 7.5\text{m}}{1\text{s}} = 37.5\frac{\text{m}}{\text{s}} = 135\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Aus diesem Grund wird meistens $v_{max} = 5$ gewählt, wobei dann die Höchstgeschwindigkeit ungefähr dem typischen Tempolimit auf Autobahnen in Deutschland entspricht.

Alle Zellen werden in jedem Zeitschritt $t \to t+1$ parallel aktualisiert (s. Kap. 3.1.1) gemäss den folgenden Regeln. Dabei sei x_i die Position und v_i die Geschwindigkeit des i-ten Fahrzeugs. Weiterhin sei $d_i = x_{i+1} - x_i - 1$ die Anzahl der freien Gitterplätze vor dem i-ten Fahrzeug.

1. **Beschleunigung**: erhöhe v_i um 1, solange $v_i < v_{max}$ gilt, also

   $$v_i \to \min\left(v_i + 1, v_{\max}\right).$$

   Die maximale Beschleunigung entspricht also einer Geschwindigkeitseinheit pro Zeiteinheit, $a_{\max} = 1$. Die Höchstgeschwindigkeit $v_{\max}$ entspricht gleichzeitig der Wunschgeschwindigkeit, die jedes Fahrzeug zu erreichen versucht. Es ist eine realistische Annahme, dass alle Fahrer so schnell fahren möchten wie sie dürfen und wie es die Verkehrssituation erlaubt. Im einfachen NaSch-Modell ist $v_{\max}$ unabhängig vom einzelnen Fahrzeug. Eine Erweiterung des ursprünglichen NaSch-Modells besteht deshalb darin, mehrere Sorten Fahrzeuge mit unterschiedliche Höchstgeschwindigkeiten $v_{\max}$ einzuführen, um z.B. PKW und LKW realistischer zu behandeln.

2. **Abbremsen**: wenn nötig, verringere die Geschwindigkeit auf $v_i = d_i$, also

$$v_i \rightarrow \min(v_i, d_i).$$

   Entspricht die Geschwindigkeit des i-ten Fahrzeugs höchstens der Anzahl der freien Gitterzellen bis zum Vorausfahrenden, so ist garantiert, dass sich das i-te Fahrzeug nicht weiter als bis direkt hinter den Vorausfahrenden bewegen kann, $x_i(t+1) \leq x_{i+1}(t) - 1$. Ein Auffahren, also ein Unfall, ist damit von vornherein ausgeschlossen.

   Ein im Detail unrealistischer Aspekt hierbei ist, dass es keine maximale negative Beschleunigung gibt. Es ist ohne weiteres möglich, dass in einem Zeitschritt die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs von $v_i(t) = v_{\max}$ zu $v_i(t+1) = 0$ aktualisiert wird. Allerdings führt das Nagel-Schreckenberg-Modell dennoch zu einer über der mikrokopischen Ebene hinreichend realistischen Dynamik.

   Zu beachten ist, dass beim Abbremsen wegen eines zu geringen Abstands nicht berücksichtigt wird, dass sich dass vorausfahrende Fahrzeug meistens ebenfalls vorwärts bewegen wird. Dann könnte eine höhere Geschwindigkeit beibehalten werden, ohne dass es zu einem Unfall kommt. In [39] wird deshalb eine Erweiterung diskutiert, in der auch die Position x_{i+2} eines weiteren Fahrzeugs in Fahrtrichtung und damit die wahrscheinliche Geschwindigkeit des Vorausfahrenden v_{i+1} einbezogen wird.

3. **Fluktuation** (*Randomization*): Falls das Fahrzeug in Bewegung ist, wird seine Geschwindigkeit mit der Wahrscheinlichkeit $p(v_i)$ um Eins verringert, also

$$v_i \rightarrow \max(v_i - 1, 0) \text{ mit } p(v_i).$$

   Zu beachten ist, dass diese Regel tatsächlich erst nach den beiden ersten Regeln ausgeführt wird. Es ist also möglich, dass ein Fahrzeug, dass vor dem Update in Ruhe war, $v_i = 0$, im ersten Schritt auf $v_i = 1$ beschleunigt und dann in diesem Schritt wiederum auf $v_i = 0$

verlangsamt wird. Das Fahrzeug ist also auch im nächsten Zeitschritt in Ruhe, obwohl genügend freier Platz zum Anfahren vorhanden ist.

Mit dieser Regel soll dem verschiedenen Verhalten individueller Fahrer Rechnung getragen werden. Es ist nicht determiniert, dass ein Fahrer tatsächlich so stark beschleunigt, wie er könnte. Desweiteren berücksichtigt diese Regel Überreaktionen beim Abbremsen, wie sie in der Realität oft auftreten. Auf diese Weise entstehen im NaSch-Modell Staus.

Im ursprünglichen Nagel-Schreckenberg-Modell gilt

$$p\,(v) = p\,\forall\,v,$$

die Wahrscheinlichkeit für Fluktuationen hängt also nicht von der Geschwindigkeit ab und das Modell wird nur durch den Parameter p gesteuert.

Im Rahmen der NaSch-Erweiterung VDR (Velocity Dependent Randomization) [40] gilt

$$p(v) = \begin{cases} p_0, & v = 0 \\ p, & v > 0 \end{cases},$$

wobei v die Geschwindigkeit am Anfang des Zeitschritts, also vor den Regeln 1 und 2, ist. Die Fluktuationen werden also verschieden parametrisiert, je nachdem, ob das Fahrzeug fährt oder steht. Üblicherweise gilt $p_0 > p$. Das Modell wird nun durch die beiden Parameter p_0 und p gesteuert. Auf die Auswirkungen dieser Erweiterung werde ich unten näher eingehen.

4. **Bewegung**: das Fahrzeug bewegt sich vorwärts, also

$$x_i \rightarrow x_i + v_i.$$

Dies bedeutet wie in den anderen Modellen per Konvention eine Bewegung nach rechts.

Das reine Nagel-Schreckenberg-Modell [7] ist ein minimales Modell, da alle vier Regeln notwendig sind, um die wichtigsten Eigenschaften realer Verkehrsflüsse zu reproduzieren. Die Reihenfolge ist ebenfalls nicht beliebig. Würde Regel 3 vor Regel 2 angewendet, so gäbe es keine Überreaktionen beim Abbremsen. Damit fehlt der Mechanismus der Staubildung. Dieser funktioniert übrigens nur bei parallelem Update, bei zufällig-sequentiellem Update gäbe es keine, realistische, Kette von Überreaktionen, die erst zu einem Stau führt.

Die entscheidende Änderung des Verhaltens durch VDR ist die Absenkung des Abflusses aus einem Stau. Dieser beträgt hier $j_{\text{jam}}^{\text{out}} = 1 - p_0$, es dauert also im Mittel $1/(1 - p_0)$ Zeitschritte, bis sich ein Fahrzeug vom Stau löst. Damit ist auch die Geschwindigkeit $v_{\text{jam}} = 1 - p_0$ gegeben, mit der sich der Stau stromaufwärts bewegt. Die wesentliche qualitate Änderung ist die Stabilisierung von Staus. Da deren Abfluss reduziert ist, lösen sich diese durch Fluktuationen in der Phase hoher Dichte nicht auf, sondern durchwandern das gesamte System. Dies entspricht jedoch eher der Realität, da stromaufwärts wandernde Stop-and-Go-Wellen empirisch beobachtet werden [1] und auch der Alltagserfahrung entsprechen.

5.2 Verhalten bei periodischen Randbedingungen

Bei periodischen Randbedingungen, also einem zu einem Ring zusammengefügten Gitter, gibt das Fundamentaldiagramm $j(\rho)$ Aufschluss über die wesentlichen Eigenschaften des Modells. Für das NaSch-VDR und zum Vergleich das einfache NaSch-Modell ist dieses in Abb. 5.1 dargestellt.

Ich werde zunächst das Fundamentaldiagramm des einfachen NaSch-Modells kommentieren. Bei geringen Dichten ρ treten kaum Wechselwirkungen zwischen den Fahrzeugen auf, diese sind alle in Bewegung mit $\langle v \rangle = v_{\max} - p$. Der Fluss entspricht dem Produkt aus der Anzahl der in Bewegung befindlichen Fahrzeuge und deren Durchschnittsgeschwindigkeit. Es folgt $j(\rho) \approx \rho(v_{\max} - p)$, also ein linearer Anstieg mit der Dichte. Bei sehr hohen Dichten wiederum stehen fast alle Fahrzeuge, während sich einige mit $v = 1$ bewegen. Dazu ist jeweils ein Freiraum nötig, deren Dichte $1 - \rho$ beträgt. Ausserdem muss das Fahrzeug tatsächlich anfahren, was mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ geschieht. Für den Fluss folgt $j(\rho) \approx (1 - p)(1 - \rho)$, also ein linearer Abfall mit steigender Dichte. Die beiden Mechanismen sind auch bei mittleren Dichten aktiv und es bleibt die dargestellte asymmetrische Dreiecksform, wobei bei kleinem p (obere Kurve, gestrichelt) der Anstieg bis zu grösseren Dichten fortgesetzt wird, da die Fluktuationen geringer sind.

Das Fundamentaldiagramm des NaSch-Modells mit VDR (Parameter p_0^{VDR}, p^{VDR}) nähert sich den jeweiligen Fällen des einfachen NaSch-Modells

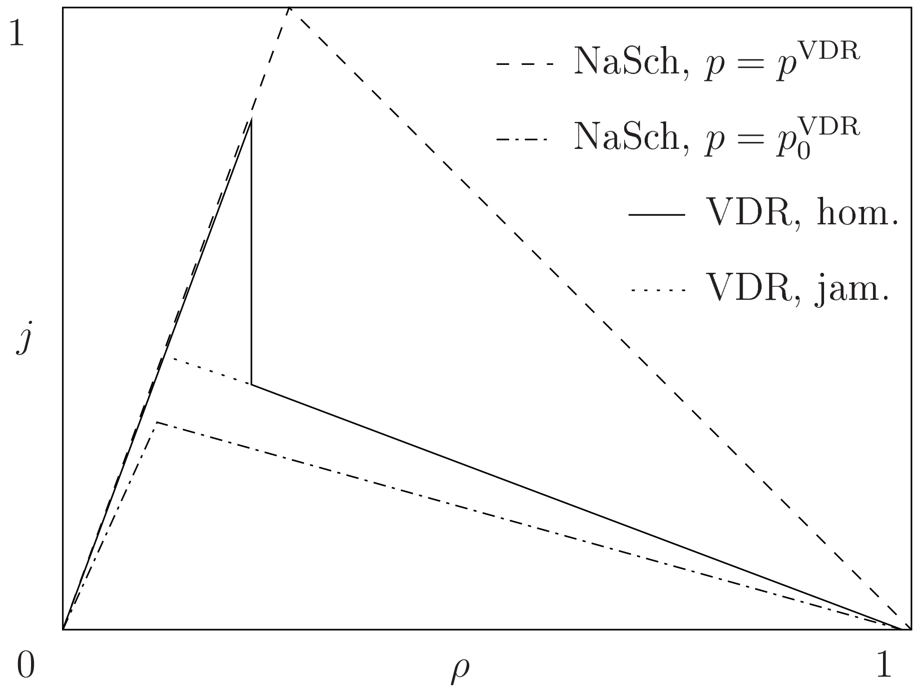

Abbildung 5.1: Fundamentaldiagramm $j\,(\rho)$ des Nagel-Schreckenberg-Modells mit VDR bei periodischen Randbedingungen. Zum Vergleich ist das Fundamentaldiagramm des einfachen NaSch-Modells eingetragen. Die verschiedenen Äste bei $\rho_1 < \rho < \rho_2$ werden abhängig vom homogenen oder gestauten Anfangszustand erreicht. (nach [40], dort $p_0 = 0.75$, $p = 1/64$, $v_{\max} = 5$, $L = 10000$)

an. Bei geringen Dichten spielt die veränderte Fluktuationswahrscheinlichkeit bei stehenden Fahrzeugen keine Rolle, also wird hier der Fluss des NaSch-Modells mit $p = p^{\mathrm{VDR}}$ erreicht. Bei sehr hohen Dichten wiederum stehen die meisten Fahrzeuge, deshalb wird hier der Fall des NaSch mit $p = p_0^{\mathrm{VDR}}$ erreicht. Bei mittleren Dichten $\rho > \rho_2$ liegt der Fluss zwischen den beiden einfachen NaSch-Modellen.

Im Dichtebereich $\rho_1 < \rho < \rho_2$ weist das Fundamentaldiagramm des NaSch-VDR zwei Äste auf. Es hängt vom Anfangszustand ab, welchen das System wählt. Bei einem homogenen Anfangszustand, bei dem die Fahrzeuge mit gleichem Abstand voneinander über das System verteilt sind, stellt sich der höhere Fluss ein. Die Fluktuationen bei bewegten Fahrzeugen reichen nicht dazu aus, Staus in ausreichender Häufigkeit zu generieren. Dies trifft natürlich nur für endliche System in endlichen Zeiten zu. Im thermodynamischen Limes wird der höhere Fluss stets zusammenbrechen. Bei den hier betrachteten endlichen Systemen ist die Lebensdauer des metastabilen Astes jedoch sehr gross [40].

Besteht der Anfangszustand jedoch aus einem kompakten Stau und ansonsten leerem System, so sorgt der durch VDR verringerte Abfluss aus dem Stau dafür, dass dieser sich nie auflöst. Bevor das letzte Fahrzeug im Stau angefahren ist, wird dieser bereits wieder verlängert, da die ersten Fahrzeuge den freien Bereich des Systems durchquert haben. Der Stau bewegt sich also entgegen der Fahrtrichtung und wird nie aufgelöst. Da ein bestimmter Anteil der Fahrzeuge zu einer gegebenen Zeit in Ruhe ist, ist der Fluss geringer.

Bei Dichten $\rho < \rho_1$ ist der Stau bei kompaktem Anfangszustand klein genug, um sich auflösen zu können. Oberhalb ρ_2 ist die Dichte gross genug, dass sich auch bei homogenem Anfangszustand ein kompakter Stau herausbildet. Die Dichte ρ_2 ist abhängig von der Systemgrösse [40] und nähert sich bei grösseren Systemen ρ_1 an.

Im NaSch-VDR mit periodischen Randbedingungen ist es möglich, eine Hystereseschleife zu durchlaufen [40]. Beginnt man bei einer Dichte von $\rho < \rho_1$ und fügt Fahrzeuge in das System ein, so erhält man den oberen Zweig des Fundamentaldiagramms.Hat man eine Dicht $\rho > \rho_2$ erreicht und entfernt Fahrzeuge aus dem System, so erhält man den unteren Zweig, bis man wieder zur Ausgangsdichte zurückkehrt.

Durch die oben beschriebene Stabilisierung der Staus durch VDR wird bei periodischen System Phasenseparation beobachtet. Das System ist aufgeteilt in einen kompakten Cluster und einen Bereich, in dem sich alle Fahrzeuge bewegen.

5.3 Offene Randbedingungen

Im Folgenden beschreibe ich das Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR auf einer offenen Kante. Fahrzeuge werden am linken Rand des eindimensionalen Gitters in das System injiziert und am rechten Rand entfernt. Im Unterschied zu periodischen Randbedingungen ist also keine Translationsinvarianz gegeben und die Teilchendichte bzw die Anzahl der Fahrzeuge auf der Kante (Dichte) ist zeitlich variabel. Innerhalb des Systems gelten die gleichen CA-Regeln wie bisher.

Das Verhalten an den Rändern wird wie bei den bisher untersuchten Modellen durch die Injektionsrate α und die Absorptionsrate β gesteuert mit den Grenzfällen $\alpha = 0$—kein Zufluss, $\alpha = 1$—maximaler Zufluss, $\beta = 0$—kein Fahrzeug verlässt das System, $\beta = 1$—Fahrzeuge verlassen ungehindert das System.

Die Injektion von Fahrzeugen wird, [41] folgend, wie folgt implementiert. Am Ort $x = 0$, also ausserhalb des Systems, wird in jedem Zeitschritt mit der Wahrscheinlichkeit α ein Fahrzeug mit der Geschwindigkeit $v = v_{max}$ erzeugt. Auf dieses Fahrzeug werden sofort und gleichzeitig mit den anderen Gitterzellen die Regeln des Modells angewandt, das Fahrzeug kann also in das System „einfahren". Es ist auch möglich, dass sich nach dem Update das Fahrzeugs erneut am Ort $x = 0$ befindet mit der Geschwindigkeit $v = 0$. Dieser Fall tritt dann auf, wenn die Zelle am Ort $x = 1$ besetzt ist oder wenn diese Zelle frei ist, aber die nächste ($x = 2$) Zelle besetzt ist, in Schritt 2 also die Geschwindigkeit auf $v = 1$ reduziert wird und die Geschwindigkeit des erzeugten Fahrzeugs dann in Regel 3 in Abhängigkeit von p weiter reduziert wird. In beiden Fällen ist der Injektionsversuch fehlgeschlagen und das neu erzeugte Fahrzeug wird wieder entfernt. Bis zum nächsten Injektions*versuch* vergehen also im Mittel erneut α^{-1} Zeitschritte.

Es soll hier erneut darauf hingewiesen werden, dass α also nicht notwendig die Rate ist, mit der Fahrzeuge in das System injiziert werden, sondern lediglich die Rate der Injektionsversuche.

Am rechten Rand können Fahrzeuge das System gesteuert durch den Parameter β verlassen. Dazu wird in jedem Zeitschritt mit der Wahrscheinlichkeit $1-\beta$ am Ort $x = L+1$, also ausserhalb des Systems, ein Hinderniss errichtet, vergleichbar einem stehenden Fahrzeug. Dadurch wird ein Fahrzeug am rechten Rand gemäss Regel 2 verlangsamt, falls es auf einer Position $L-v \leq x \leq L$ steht, wobei v die Geschwindigkeit des vordersten Fahrzeugs nach Anwendung von Regel 1, also einer eventuellen Beschleunigung, ist. Die Geschwindigkeit wird dann in Schritt 2 soweit verringert, dass es im

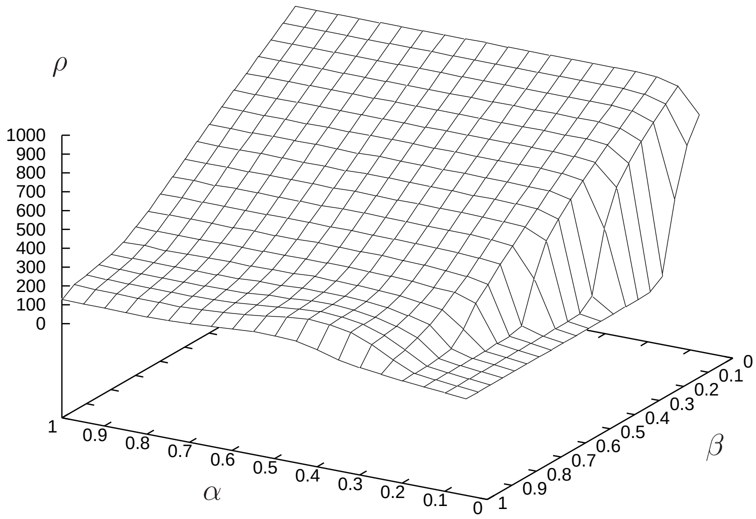

Abbildung 5.2: Dichte $\rho\,(\alpha, \beta)$ abhängig von der Parametrisierung der Ränder. Es gilt $v_{\mathrm{max}} = 5$, $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$ ($L = 1024$, $T_{\mathrm{eq}} = 5000$, $T_{\mathrm{m}} = 50000$, $N_{\mathrm{r}} = 20$).

nächsten Zeitschritt auf Position $x = L$ steht. Existiert das Hinderniss über mehrere Zeitschritte, ist also β klein genug, so kann das Fahrzeug natürlich auch zum Stehen kommen. Falls kein Hinderniss vorhanden ist, also mit der Wahrscheinlichkeit β, verlassen die Fahrzeuge in Regel 4 ungehindert das System. Ihre Position würde auf einen Wert $x > L$ aktualisiert und das Fahrzeug wird entfernt.

Wieder wird darauf hingewiesen, dass β nicht die Rate ist, mit der Fahrzeuge tatsächlich aus dem System entfernt werden, sondern lediglich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies problemlos möglich ist.

Diese Regeln zur Injektion und Absorption von Fahrzeugen sind so gestaltet, dass im Spezialfall $v_{\mathrm{max}} = 1$, $p_0 = p = 1$ der TASEP wie in Kap. 3 beschrieben reproduziert wird.

5.4 Phasendiagramm

Als konstruktive Illustration und Hinweis auf das Phasendiagramm des Nagel-Schreckenberg-Modells mit VDR in der α-β-Ebene wurde die Dichte, hier also die Anzahl der Fahrzeuge im System, bestimmt und in Abb. 5.2 dargestellt.

Abhängig von den die Ränder kontrollierende Parametern α, β lassen sich drei Regimes unterscheiden, die aus den unten näher dargelegten Grün-

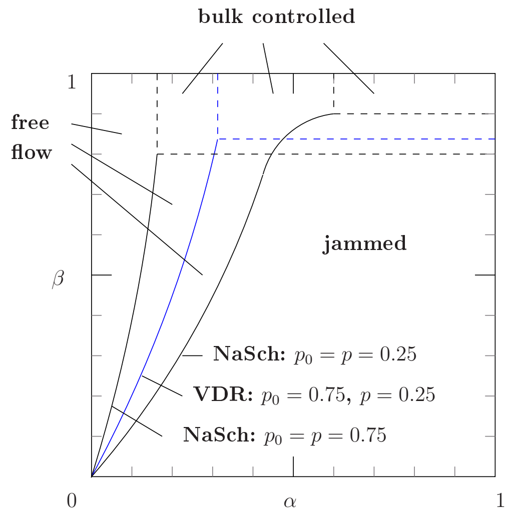

Abbildung 5.3: Phasendiagramm des Nagel-Schreckenberg-Modells für verschiedene Kombinationen der Parameter p, p_0 mit $v_{\text{max}} = 5$

den als Phasen bezeichnet werden. In der vorderen Ecke, also bei kleinen Injektionsraten α und nicht zu kleinen Absorptionsraten β, liegt eine Phase niedriger Dichte. Es treten wenig Wechselwirkungen auf und die Fahrzeuge bewegen sich ungestört durch das System (engl. *free flow*). Da das System vom Zufluss kontrolliert und nicht vom Abfluss begrenzt wird, gibt es keine Abhängigkeit von β.

In der linken Ecke, bei großer Absorptionsrate β und nicht zu kleiner Injektionsrate α gibt es eine Phase annähernd konstanter Dichte. Hier entstehen bei ausreichend hohem Zufluss Staus durch Fluktuationen, die dann wiederum den Zufluss begrenzen. In dieser Phase wird das System nicht durch die Ränder kontrolliert, folglich zeigt sich keine Abhängigkeit von α, β.

Im oberen Teil des Diagramms, bei nicht zu grossen Absorptionsraten β und nicht zu kleinen Injektionsrate α gibt es eine Phase hoher Dichte. Hier werden durch die Abflussbegrenzung Staus am rechten Rand erzeugt, die durch das System wandern und schliesslich auch den Zufluss begrenzen. Aus diesem Grund gibt es hier keine Abhängigkeit von α.

Deutlich sichtbar wird die Phasengrenze zwischen den Zuständen hoher und niedriger Dichte als Sprung. Die Grenzen zur Phase konstanter Dichte sind als kontinuierliche Übergänge sichtbar. Diese Grenzen sollen unten näher betrachtet werden.

Die genaue Diskussion vorwegnehmend ist das Phasendiagramm des NaSch-VDR mit $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$ in Abb. 5.3 dargestellt, in das auch die entsprechenden NaSch-Modelle ohne VDR, also mit $p_0 = p = 0.25$ [41] und $p_0 = p = 0.75$ eingetragen wurden.

Bei hohen Injektions- und Absorptionsraten (rechts oben) liegt die Phase, in der das System unabhängig von den Rändern den Fluss begrenzt, bei kleinen Injektionsraten (links) die vom linken Rand kontrollierte Phase niedriger Dichte und der Rest der α-β-Ebene (rechts unten und mitte) wird von der vom rechten Rand kontrollierten Phase hoher Dichte eingenommen.

Die Phasengrenzen des NaSch-VDR mit $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$ liegen jeweils zwischen denen des NaSch-Modells mit $p = 0.25$ bzw $p = 0.75$. Die durchgezogenen Linien kennzeichnen den Phasenübergang erster Ordnung zwischen den Phasen niedriger und hoher Dichte (Sprung in ρ), die gebrochenen Linien die kontinuierlichen Phasenübergänge zwischen der vom linken Rand und vom Innern des Systems kontrollierten Phase und der vom rechten Rand und vom Innern des Systems kontrollierten Phase (Sprung in der Ableitung von ρ bzw. Änderung der Dichteprofile).

5.5 Phasengrenzen

In diesem Abschnitt werden die Phasengrenzen, also die Übergänge zwischen den drei Regimes des Nagell-Schreckenberg-Modells mit VDR—System bestimmt vom linken Rand, rechten Rand oder Systeminneren—näher untersucht. Dabei spielen die Dichteprofile entlang der Kante eine wichtige Rolle, anhand derer die einzelnen Phasen auch genauer charakterisiert werden.

5.5.1 Bestimmt durch: Linker Rand—Innere des Systems

In diesem Abschnitt geht es um den Übergang zwischem dem Regime niedriger Dichte zu dem vom Systeminnern kontrollierten Regime. Da in beiden Fällen am rechten Rand generierte Staus keine entscheidende Rolle spielen, wird bei den Untersuchungen der Einfluss des rechten Randes mittels $\beta = 1$ ausgeblendet. Alle Fahrzeuge, die den rechten Rand erreichen, werden also ungehindert aus dem System entfernt.

5.5.1.1 Dichteprofil

Wie in Kap. 3 dargestellt, ist die Auswertung von Dichteprofilen dazu eignet, den Übergang zwischen Phasen zu untersuchen, da sie sich dabei oft qualitativ ändern.

Um die Veränderung der Dichteprofile bei verschiedenen Injektionsraten α entlang der $\beta = 1$-Linie für das Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR

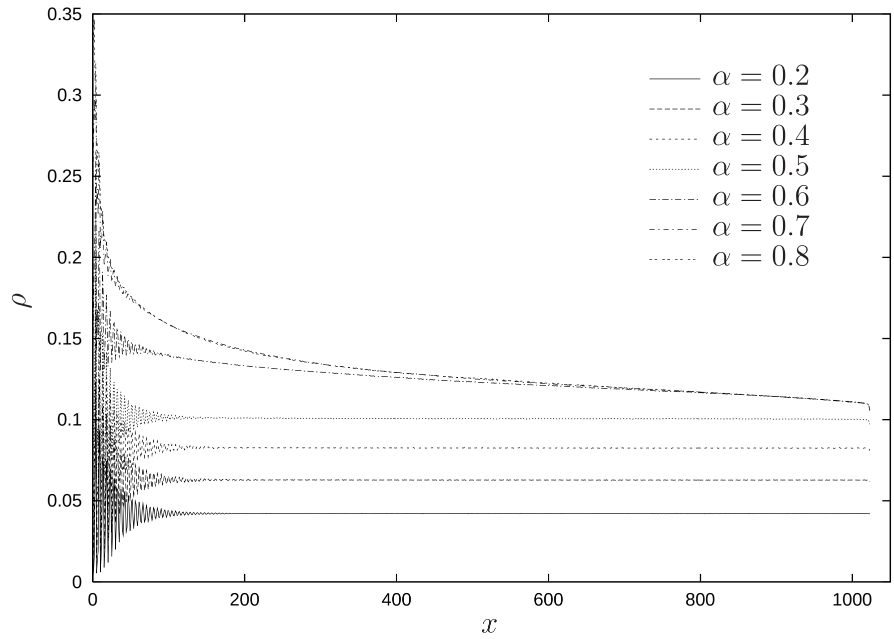

Abbildung 5.4: Dichteprofile $\rho(x;\alpha)$ für das einfache Nagel-Schreckenberg-Modell mit $p_0 = p = 0.25$ für verschiedene Injektionsraten α. Dabei gilt $\beta = 1$ und $v_{\max} = 5$ ($L = 1024$, $T_{\mathrm{eq}} = 2000$, $T_{\mathrm{m}} = 10000000$)

($p_0 = 0.75$, $p = 0.25$) zu studieren, wird als Vergleich die entsprechende Situation in den korrespondierenden einfachen NaSch-Modellen ($p = 0.25$ und $p = 0.75$) dargestellt.

In Abb. 5.4 ist der Fall niedriger Fluktuationsrate $p = 0.25$ [41] gezeigt. Dargestellt ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass die Gitterzelle x von einem Fahrzeug besetzt ist. Dabei wurde über viele Zeitschritte der Simulation gemittelt. Die verschiedenen Kurven entsprechenen von unten nach oben ansteigenden Injektionsraten α.

Im Regime niedriger Dichte mit $\alpha < 0.6$ zeigt das Dichteprofil Oszillationen in den ersten Gitterplätzen am linken Rand. Diese sind durch die bei der Injektion auftretende Behinderung der Fahrzeuge untereinander bedingt [41]. Mit wachsendem Abstand vom linken Rand werden diese Oszillationen durch Fluktuationen ausgedämpft [41] und das Dichteprofil ist konstant. Mit steigender Injektionsrate α steigt auch das Niveau des Dichteprofils, also die Wahrscheinlichkeit, eine Gitterzelle besetzt zu finden. Dies ist durch den höhren Zufluss an Fahrzeugen bedingt.

In der durch das Systeminnere kontrollierten Phase mit $\alpha > 0.6$ fällt das Dichteprofil algebraisch vom linken Rand ab [41]. In dieser Phase ist der Zufluss gross genug, eine Dichte zu erzeugen, die durch Fluktuation zu Staus führt. Anlass ist eine in Regel 3 (Fluktuation) ausgelöste Geschwindigkeitsverminderung eines Fahrzeugs. Das folgende Fahrzeug muss dann im nächsten Zeitschritt in Regel 2 (Bremsen wegen zu geringem Abstand) seine Geschwindigkeit ebenfalls verringern, um weiterhin ein Auffahren auszuschliessen. Ein Stau entsteht dann, wenn bei demselben Fahrzeug und den Folgenden in Regel 3 die Geschwindigkeit weiter verringert wird, der Bremsvorgang des Vorausfahrenden also überkompensiert wird. Schliesslich erreicht ein Fahrzeug die Geschwindigkeit $v = 0$, steht also. Weitere Fahrzeuge folgen und verlängern den Stau. Das jeweils vorderste Fahrzeug fährt erneut an und der Staubeginn bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entgegen der Fahrtrichtung.

Die Wahrscheinlichkeit, eine Gitterzelle besetzt zu finden, wird nun dadurch erhöht, je häufiger diese Zelle Teil eines Staugebietes ist. Zellen am linken Rand des Systems werden von allen Staus durchwandert, Zellen tiefer im Innern nur von denen, die weiter rechts entstanden sind. Folglich fällt das Dichteprofil in dieser Phase nach rechts ab. Da diese Vorgänge lediglich einen Zufluss erfordern, der gross genug ist, ist das Dichteprofil oberhalb des Phasenübergangs praktisch unabhängig von der Injektionsrate α. Für die kritische Injektionsrate am Phasenübergang wurde in [41] $\alpha_{\mathrm{c}}^{p=0.25} = 0.6$ angegeben.

Um den kompletten Vergleich zu ermöglichen, wurde zusätzlich der Fall $p = 0.75$, also höhere Fluktuationen, für das einfache NaSch-Modell untersucht. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.5 dargestellt, wobei erneut die Injektionsrate von der unteren zu den oberen Kurven hin ansteigt. Man erkennt dieselbe Unterteilung wie bei niedrigerer Fluktuationswahrscheinlichkeit. Allerdings reicht bereits ein weit geringerer Zufluss aus, um Dichten bereit zu stellen, bei denen durch Fluktuationen Staus entstehen. Dies ist dadurch begründet, das Fluktuationen nun häufigerer entstehen und für eine Überkompensationskaskade einige Fluktuationen direkt nacheinander nötig sind. Als Lage des Phasenüberganges ergibt sich $\alpha_{\mathrm{c}}^{p=0.75} = 0.16$.

Um den Phasenübergang mit VDR zu untersuchen, wurde nun für die Kombination $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$ dieselbe Untersuchung durchgeführt. Die Ergebnisse mit erneut von unten nach oben ansteigender Injektionsrate α sind in Abb. 5.6 dargestellt.

Visuell sichtbar sind folgende Punkte, die im Folgenden erklärt werden sollen:

- Der Phasenübergang liegt bei $\alpha \approx 0.3$. Die Dichteprofile für $\alpha \leq 0.3$ sind wie beim einfachen NaSch-Modell im Inneren des Systems konstant. Die Dichteprofile für $\alpha > 0.3$ fallen ebenfalls wie beim NaSch nach rechts ab.

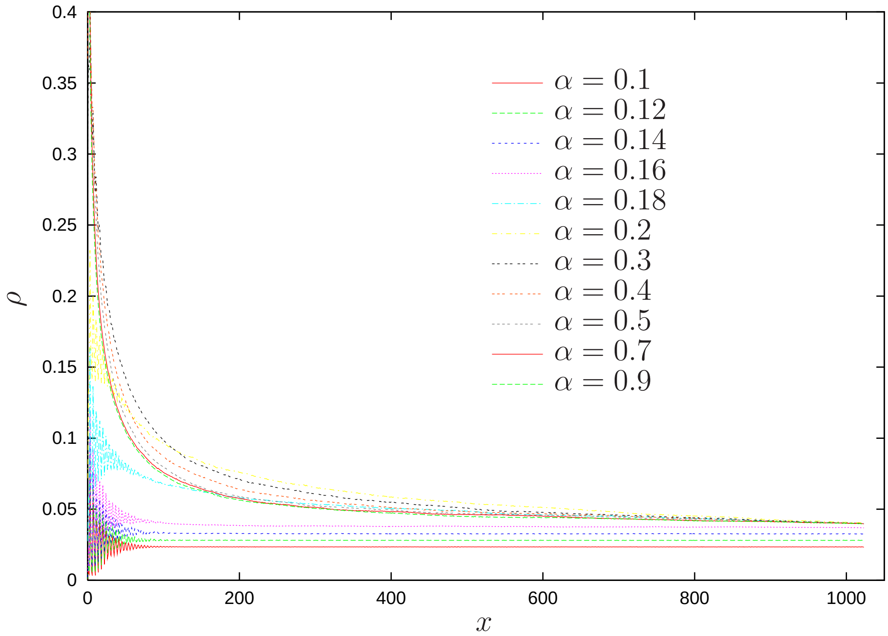

Abbildung 5.5: Dichteprofile $\rho(x;\alpha)$ für das einfache Nagel-Schreckenberg-Modell mit $p_0 = p = 0.75$ für verschiedene Injektionsraten α. Dabei gilt $\beta = 1$ und $v_{\max} = 5$. ($L = 1024$, 2000 Schritte Equilibration, 5000000 Messschritte)

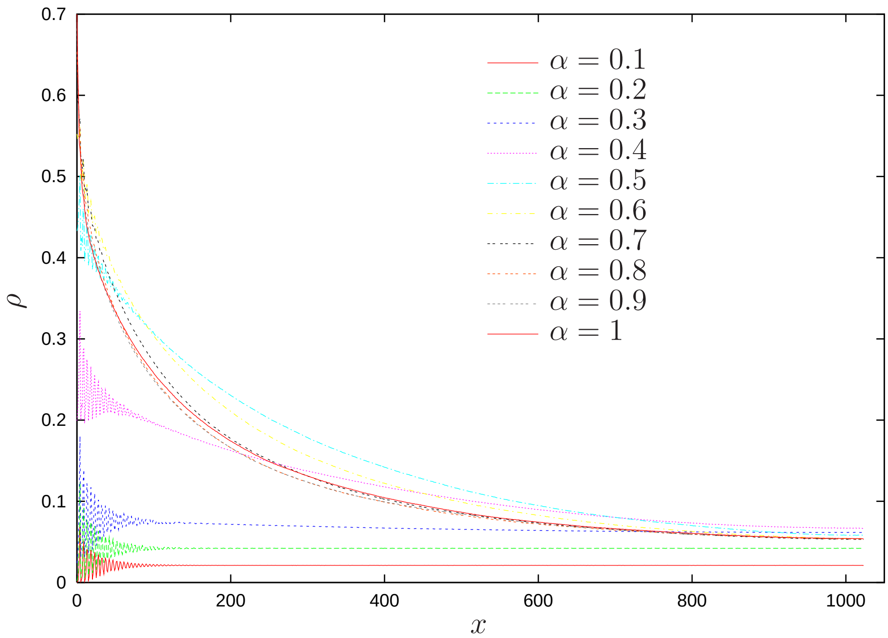

Abbildung 5.6: Dichteprofile $\rho(x;\alpha)$ für das Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR ($p_0 = 0.75$, $p = 0.25$) für verschiedene Injektionsraten α. Dabei gilt $\beta = 1$ und $v_{\max} = 5$ ($L = 1024$, 2000 Schritte Equilibration, 5000000 Messschritte)

- Die Dichte weit entfernt vom linken Rand ist signifikant höher mit VDR. Im einfachen NaSch-Modell (Abb. 5.4, 5.5) fällt die Dichte relativ schnell fast auf das Niveau der obersten Kurve für eine Injektionsrate aus der Phase niedriger Dichte. Mit VDR hingegen fällt die Dichte wesentlich langsamer ab.

- Die Dichte im Innern des System sinkt allerdings mit wachsender Injektionsrate α. Dieser Effekt wird beim einfachen NaSch-Modell nicht beobachtet.

Die Position des Phasenübergangs mit VDR liegt mit $\alpha_{\mathrm{c}}^{p=0.75} = 0.16 < \alpha_{\mathrm{c}} = 0.3 < \alpha_{\mathrm{c}}^{p=0.25} = 0.6$ zwischen den entsprechenden Fällen des einfachen NaSch-Modells.

Die Ursache für die beobachteten Unterschiede zum einfachen NaSch-Modell liegt in dem durch VDR herabgesetzten Abfluss aus einem Stau und der daraus resultierenden verringerten Geschwindigkeit, mit der sich ein Stau entgegen der Fahrtrichtung bewegt.

Der Mechanismus, durch den Staus bei genügend hohem Zufluss wegen Fluktuationen entstehen, ist auch hier unverändert aktiv. Des Verhalten ändert sich allerdings dann, wenn dadurch ein Stau zustande gekommen ist. Bedingt durch die verringerte Geschwindigkeit der Staufront wandert der Stau signifikant langsamer zum linken Rand. Gegenüber $p_0 = p = 0.25$ mit $v_{\mathrm{jam}} = 0.75$ im einfachen NaSch-Modell ist die Geschwindigkeit bei $p_0 = 0.75$ auf $v_{\mathrm{jam}} = 0.25$ verringert. Da der Stau also länger im System verbleibt, wird die Dichte auf seiner Strecke erhöht, weshalb das Dichteprofil mit VDR im Inneren des Systems grössere Werte als im einfachen NaSch-Modell aufweist.

Bei einer niedrigen Fluktuationsrate $p = 0.25$ und einer Injektionsrate $\alpha > 0.3$ kurz oberhalb des Phasenübergangs ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Stau entwickelt, noch relativ klein. Geht man von einer Situation aus, in der ein Stau das System gerade am linken Rand verlassen hat, so ist die Dichte im gesamten System durch den niedrigen Abfluss aus dem Stau bestimmt. Da die Wahrscheinlichkeit zur Staubildung gering ist, kann sich im gesamten System die durch die Injektionsrate vorgegebene Dichte einstellen. Ausgehend von dieser Situation kann ein Stau dann an jedem Ort im System mit gleicher Wahrscheinlichkeit entstehen. Dieser bewegt sich dann wieder nach links, so dass erneut die Gitterplätze mit wachsender Nähe zum linken Rand von einer grösseren Anzahl von Staus überstrichen werden.

Mit steigender Injektionsrate steigt der Zufluss und dadurch auch die Dichte in der Nähe des linken Randes. Bei grösseren Dichten ist es aber wahrscheinlicher, dass ein Stau gebildet wird. Diese werden also gewöhnlich bereits dann gebildet, wenn sich das Gebiet mit höherer Dichte noch nicht über das gesamte System ausgebreitet hat. Im Rest des Systems ist die Dichte, bedingt durch den niedrigen Abfluss aus dem Stau, noch nicht gross genug, um Staus zu bilden. Nun ist es also wahrscheinlicher, dass sich ein Stau näher am linken Rand bildet, die Wahrscheinlichkeit zur Staubildung hängt vom Ort ab und sinkt mit steigender Entfernung vom linken Rand.

Da aber die Erhöhung der Dichte an einem Ort mit der Anzahl der Staus, die diesen Ort überstreichen, zusammenhängt, ist auch die Dichte eher nahe am linken Rand erhöht. Damit ist also der Grund für die Abhängigkeit des Dichteprofils von der Injektionsrate identifiziert.

Im NaSch-Modell ohne VDR mit $p = 0.75$ ist die Geschwindigkeit der Staufront ebenfalls gering. Allerdings entstehen Staus wegen der höheren Fluktuationswahrscheinlichkeit ebenfalls gewöhnlich nahe am linken Rand. Folglich wird die Dichte im Inneren des System also nicht in demselben Maße erhöht wie bei VDR.

Im NaSch-Modell mit $p = 0.25$ entstehen Staus wie bei VDR auch weit entfernt vom linken Rand. Allerdings erreichen sie durch die höhere Geschwindigkeit $v_{\mathrm{jam}} = 0.75$ der Staufront wesentlich schneller den linken Rand als bei VDR. Aus diesem Grund tritt die beobachtete Erhöhung der Dichte auch hier nicht auf.

5.5.1.2 Fluss

Im Fall des TASEP lässt sich an der Änderung des Flusses $j(\alpha)$ in Abhängigkeit von der Injektionsrate entlang der $\beta = 1$-Linie deutlich der Phasenübergang von der Phase niedriger Dichte in eine Phase maximalen Flusses erkennen. Bis zur Phasengrenze bei $\alpha_{\mathrm{c}}^{\mathrm{TASEP}} = 0.5$ steigt der Fluss linear mit der Injektionsrate an und ist dann konstant. Bereits für das einfache NaSch-Modell treten wegen der am linken Rand generierten Puffer bei hohen $v_{\max}$ Modifikationen [42, 41] auf, die bewirken, dass der Fluss in der Phase maximalen Flusses nicht mehr völlig konstant ist. Der Phasenübergang bleibt allerdings in der Kurve $j(\alpha)$ deutlich sichtbar. Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich dieses Bild durch VDR ändert.

Dazu ist in Abb. 5.7 als Ausgangslage für das einfache NaSch-Modell die Abhängigkeit $j(\alpha)$ des Flusses von der Injektionsrate für verschiedene Werte des Fluktuationsparameters p dargestellt mit der Bedingung $\beta = 1$.

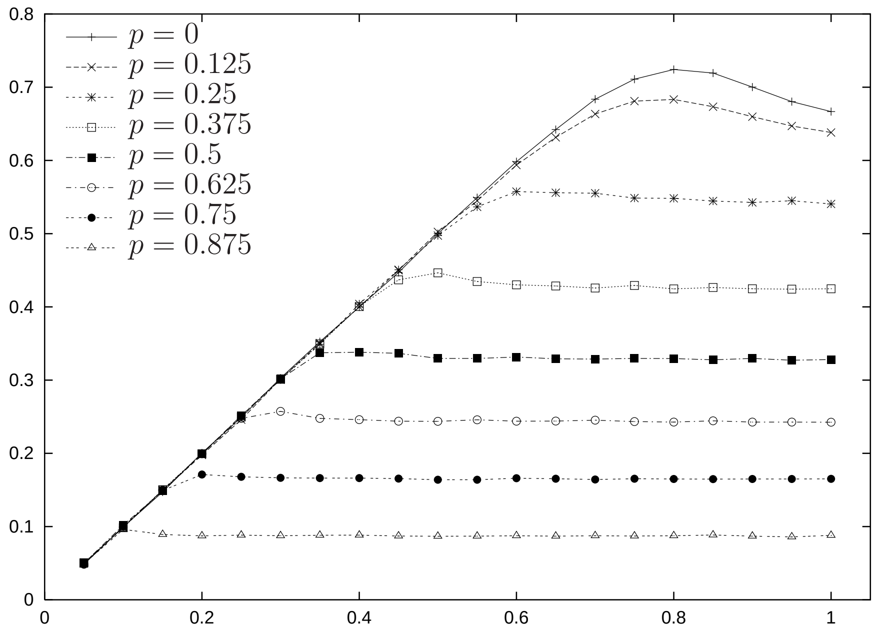

Abbildung 5.7: Fluss $j(\alpha; p)$ im einfachen Nagel-Schreckenberg-Modell für verschiedene Fluktuationsparameter p bei $\beta = 1$, $v_{max} = 10$ ($L = 1024$, 4000 Schritte Equilibration, 10000 Schritte Messung, 10 Läufe)

Im Unterschied zum bisher stets gewählten Wert $v_{\max} = 5$ fü die Höchstgeschwindigkeit gilt hier wie in [41] $v_{\max} = 10$. Dies dient zum einen der Vergleichbarkeit der Resultate, zum Anderen ist der in [41] beschriebene und unten erläuterte Effekt bei höheren Werten für die maximale Geschwindigkeit stärker ausgeprägt.

Für alle Werte von p steigt der Fluss erst linear mit der Injektionsrate an. Es folgt ein Maximum in $j(\alpha)$ und, bis auf die Fälle $p = 0$ und $p = 0.125$ [42, 41], ein Plateau des Flusses. Die Lage des Maximum verschiebt sich zu grösseren Injektionsraten mit sinkendem p und die Höhe des Plateaus steigt mit sinkender Fluktuationsrate p.

Während des linearen Anstiegs in $j(\alpha)$ wird der Fluss durch den Zufluss bestimmt und steigt mit diesem an. In der Phase maximalen Flusses entspricht der Fluss durch das System dem Abfluss aus einem Stau, da, immer wieder erzeugt durch Fluktuationen, stets ein solcher im System existiert.

Das Auftreten des Maximums lässt sich durch die bei kleinen Werten von p am linken Rand entstehenden Puffer verstehen [41]. Sie wirken durch erhöhten Abstand zwischen den Fahrzeugen den zu Staus führenden Überbremskaskaden entgegen und vergrössern dadurch die Phase freien Flusses. Der Fluss steigt bis zu einem $\alpha_{\max}$ an, bedingt durch den steigenden Zufluss. Bei weiter steigendem Zufluss entstehen aber immer häufiger Staus, deren Abfluss vermindert ist. Schliesslich wird bei hohen Injektionsraten α

die Phase erreicht, in der zu allen Zeiten ein Stau im System existiert und der Fluss wird unabhängig von α. Wie in [41] berichtet, existiert erst für $p > 0.125$ eine Phase maximalen Flusses, weshalb in den beiden obersten Kurven kein Plateau zu beobachten ist.

Die Höhe des Plateaus entspricht dem Abfluss aus einem Stau, welcher wiederum durch p gesteuert wird, da durch $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit gegenen ist, dass sich ein Fahrzeug aus dem Stau lösen kann. Bei hoher Fluktuation ist der Abfluss also geringer, weshalb der Fluss mit wachsender Fluktuationsrate p abnimmt. Da dadurch auch die Wahrscheinlich zur Staubildung steigt, verschiebt sich die Phasengrenze zur Phase freien Flusses zu kleineren Zuflüssen und damit Injektionsraten α.

Ausgehend von den in Abb. 5.7 enthaltenen Fällen $p = 0$, $p = 0.25$ und $p = 0.5$ wurde nun das Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR betrachtet. Dabei galt stets $p_0 > p$ und die Abhängigkeit von p_0 wurde untersucht.

Ausgehend von $p = 0$ ergaben sich für keinen Wert von p_0 Veränderungen. Dies ist das erwartete Ergebnis und kann als Test der Methode verstanden werden. Da mangels Fluktuationen bei in Fahrt befindlichen Fahrzeugen keinerlei Staus entstehen können, spielt der durch $p_0 > p$ verringerte Abfluss aus einem Stau keine Rolle.

Geht man von $p = 0.25$ aus, so ergibt sich das in Abb. 5.8 dargestellte Bild.

Bis zu einer Injektionsrate $\alpha \approx 0.45$ verlaufen alle Kurven gleich. Es schliesst sich bei allen Werten von p_0 ein Maximum an, dass jedoch nur bei $p_0 = 0.25$ (ohne VDR) und $p_0 = 0.45$ in ein Plateau übergeht. Bei grösserem Abstand zwischen $p_0 - p$, also $p_0 \geq 0.65$, ist ein Minimum in der Abhängigkeit $j(\alpha)$ des Flusses von der Injektionsrate erkennbar. Ein solches Minimum tritt beim einfachen Nagel-Schreckenberg-Modell nicht auf und hängt direkt mit dem durch VDR verringerten Abfluss aus einem Stau zusammen.

Der Anstieg des Flusses mit der Injektionsrate α bis zu $\alpha \approx 0.45$ hängt wie beim einfachen NaSch-Modell direkt mit dem steigenden Zufluss zusammen. Da in dieser Phase freien Flusses (die hier wegen des höheren $v_{\max} = 10$ grösser ist als bei dem sonst diskutierten Fall $v_{\max} = 5$) keine Staus entstehen, spielen die verschiedenen Werte von p_0 keine Rolle.

Das Maximum liegt wie beim oben beschriebenen Fall ohne VDR an den am linken Rand entstehenden Puffern. Es bleibt zu klären, aus welchem Grund der Fluss in der Phase, in der das System durch das Systeminnere kontrolliert wird, ein Minimum aufweist. Ausserdem soll angemerkt werden, dass es problematisch ist, mit VDR von einer Phase maximalen Flusses zu

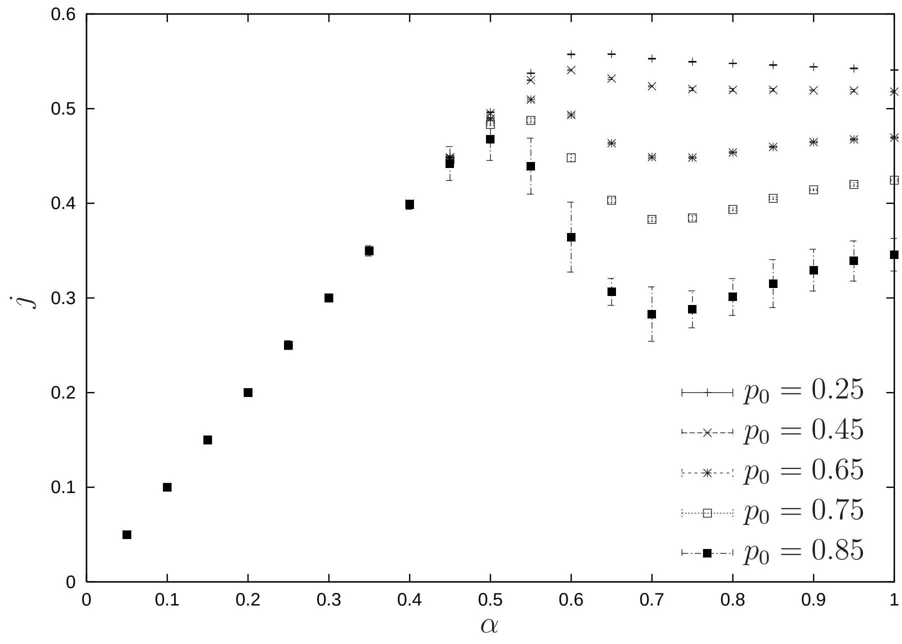

Abbildung 5.8: Fluss $j(\alpha; p_0)$ für verschiedene von oben nach unten ansteigende Standfluktuationsstärken p_0. Für alle Kurven gilt $p = 0.25$, $\beta = 1$, $v_{max} = 10$ ($L = 1024$, 2000 Schritte Equilibration, 10000 Schritte Messung, 1000 Läufe) Bei der untersten Kurve wurden die Fehlerbalken zur Illustration 10-fach vergrössert dargestellt.

sprechen, da dieser auch in dieser Phase noch signifikant variabel ist.

Wie in Kap. 5.5.1.1 anhand der Dichteprofile diskutiert, entstehen in der durch das Innere kontrollierten Phase ständig Staus durch Fluktuationen. Bei Injektionsraten kurz oberhalb α_c entstehen Staus überall im System, mit wachsendem α aber näher am linken Rand.

Das Mimimum lässt sich verstehen, wenn man beachtet, dass der am rechten Rand beobachtete Fluss durch das System noch unter den Abfluss aus einem Stau gesenkt wird, wenn sich die Staufront nach links bewegt. Dadurch bewegt sich nämlich auch die Quelle der den Stau verlassenden Fahrzeuge gegen die Fahrtrichtung und verringert die Rate, mit der Fahrzeuge den rechten Rand erreichen und damit den Fluss.

Bei Injektionsraten nahe $\alpha = 1$ ist dagegen ein Stau permanent am linken Rand lokalisiert und bewegt sich damit nicht mehr gegen die Fahrtrichtung, wodurch sich der Fluss wieder erhöht und für ein Minimum in $j(\alpha)$ sorgt.

Diese Effekte sind nicht so stark ausgeprägt, wenn auch vorhanden, wenn man von $p = 0.5$ ausgeht und $p_0 > p$ betrachtet, wie in Abb. 5.9 gezeigt. Das Minimum im Fluss bleibt erhalten, ist aber weniger deutlich.

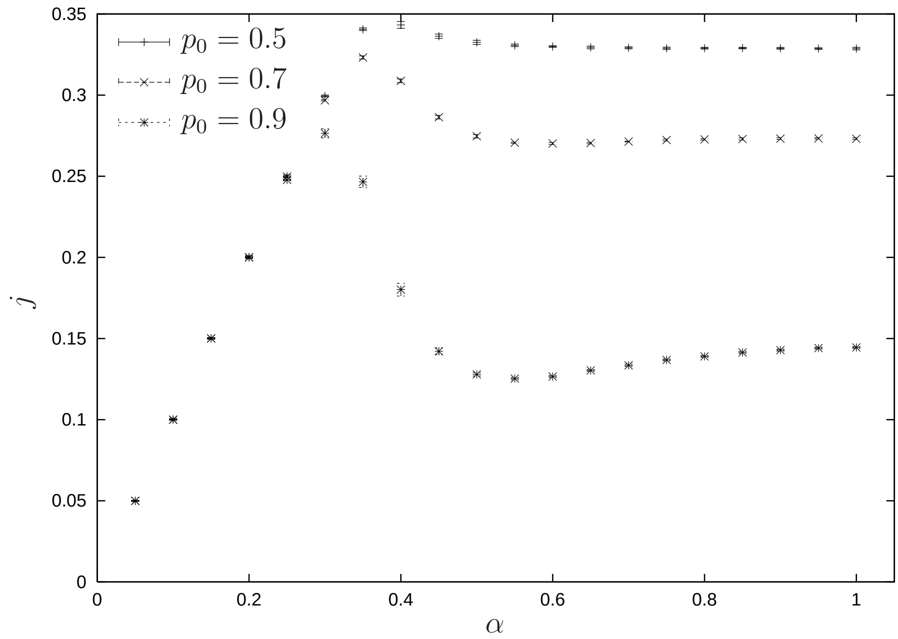

Abbildung 5.9: Fluss $j\,(\alpha; p_0)$ für verschiedene von oben nach unten ansteigende Standfluktuationsstärken p_0. Für alle Kurven gilt $p = 0.5$, $\beta = 1$, $v_{max} = 10$ ($L = 1024$, 2000 Schritte Equilibration, 10000 Schritte Messung, 1000 Läufe)

5.5.1.3 Kalibration der Simulationsparameter

In Abschnitt A.2 wird beschrieben, wie ein numerisches Experiment in mehrere Teile, die dann parallel bearbeitet werden können, aufgeteilt wird. Eng damit verknüpft ist die Kalibration der Parameter der Simulation an sich. Die Parameter des Experiments im weiteren Sinne sind z.B. die Länge L des Gitters oder der Parameter α des Zuflusses. Es ist klar, dass diese Parameter das Ergebnis beeinflussen und gerade diese Einflüsse sollen analysiert werden.

Im Gegensatz dazu wird eine Simulation auch durch mehrere Parameter gesteuert, von denen das Ergebnis des numerischen Experimentes unabhängig sein sollte. Dies sind die Anzahl der unabhängigen Läufe einer Simulation, die Anzahl der Zeitschritte während eines Laufes, in denen die relevanten Grössen numerisch gemessen werden, und die Anzahl der Zeitschritte, bevor mit dieser Messung begonnen wird. Durch die gewählte Realisierung der Simulationen und stochastische Effekte ist diese Unabhängigkeit erst ab einer bestimmten Grenze tatsächlich gegeben, weshalb möglichst grosse Werte gewählt werden sollten. Andererseits steigt damit die benötigte Rechenzeit, so dass ein Kompromiss gefunden werden muss.

Die Mittelung über mehrere voneinander unabhängigen Läufe der Simulation entspricht einem Scharmittelwert. Eine Erhöhung sollte die Streuung der stochastischen Ergebnisse eines einzelnen Laufes um den Mittelwert verringern.

Die Mittelung über viele Zeitschritte während eines Laufes entspricht einem zeitlichen Mittelwert. Auch hier sollte die Streuung sinken bei einer Verlängerung der Rechnung. Insbesondere ist es wichtig, dass die Simulationszeit gross ist gegen einige typische Zeitskalen. Am wichtigsten ist dabei die Zeit, die ein Stau braucht, um den linken Rand des Systems zu erreichen und es zu verlassen. Ist das System bei den gegebenen Parametern durch ständig neu entstehende Staus charakterisiert und die Messzeit zu kurz, so hängen die Messergebnisse lediglich davon ab, ob sich das System gerade in einem Zustand ohne Stau befindet oder ob sich ein solcher durch das System bewegt. Erst die Mittelung über mehrere solche Perioden führt zum gewünschten Ergebnis.

Bevor während eines Laufes mit der Messung bestimmer Grössen begonnen wird, wird das System einige Zeit ohne Messung simuliert. Dies ist nötig, um einen dynamisch stationären Zustand zu erreichen. Eine Messung der Dichte sollte z.B. erst dann beginnen, wenn die ersten Fahrzeuge die zu Beginn leere Kante durchfahren haben.

Am Beispiel der Messung des Flusses in diesem Abschnitt soll die Bestimmung dieser drei Parameter illustriert werden.

Die Zeit zur Equilibration kann relativ kurz belassen werden, da am rechten Rand wegen $\beta = 1$ ohnehin keine Staus erzeugt werden, deren ersten Durchlauf durch das System man abwarten müsste. Die ersten Fahrzeuge verlassen das System, dass mit einem leeren Gitter initialisiert wird, wegen $v_{max} = 10$ nach etwa $\Delta t = 100$ Zeitschritten. Danach ist das System bereits in dem gewünschten dynamisch stationären Zustand. Zur Sicherheit wurde $T_{\mathrm{eq}} = 1000$ gewählt. Ausserdem wurde der Fluss für $T_{\mathrm{eq}} = 1000, \ldots, 100000$ bestimmt und keine Abhängigkeit von der für die Equilibration verwendeten Zeit festgestellt.

Die Messzeit sollte lang genug sein, um einige Staudurchläufe zu umfassen. Wegen $p_0 = 0.75$ dauert benötigt ein Stau 400 Zeitschritte, um das komplette Gitter zu durchlaufen. Für ein kleineres System wurde die Abhängigkeit $j\,(T_{\mathrm{m}})$ des Messergebnisses und des Fehlers von der Messzeit untersucht und in Abb. 5.10 dargestellt. Der Fehler verringert sich wie erwartet mit steigender Messzeit.

Eine weitere Möglichkeit, den Fehler zu reduzieren, besteht in der Erhöhung der Anzahl identischer Läufe, über die gemittelt wird. Eine entsprechende Untersuchung ist in Abb. 5.11 dargestellt. Auch hier wird der Fehler wie erwartet verkleinert mit steigender Laufanzahl. Desweiteren ist

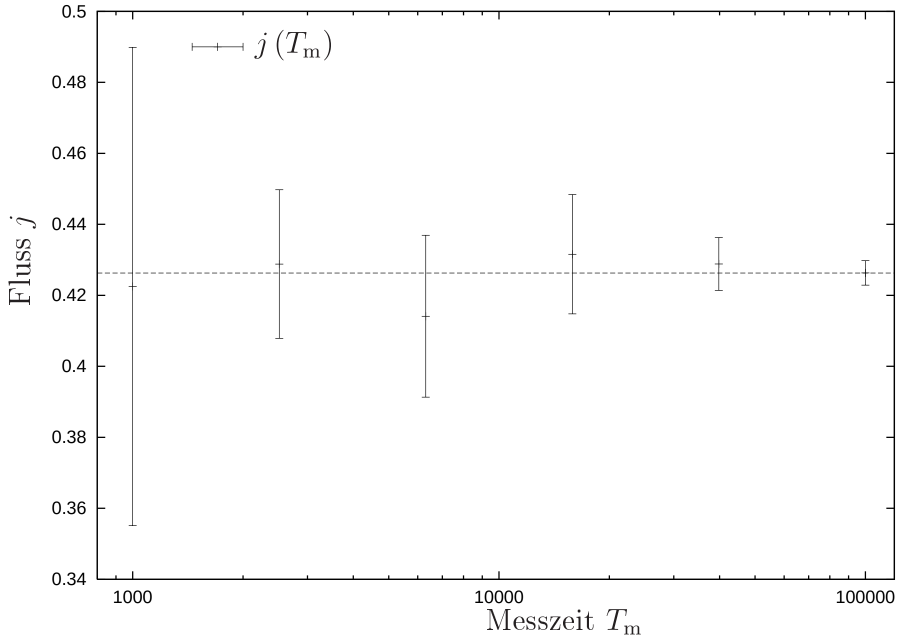

Abbildung 5.10: Fluss $j\,(T_\mathrm{m})$ über der Messzeit. Dabei gilt $\alpha = 0.6$, $\beta = 1.0$, $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$ ($L = 100$, $v_\mathrm{max} = 5$, $T_\mathrm{eq} = 200$, $N_\mathrm{r} = 10$).

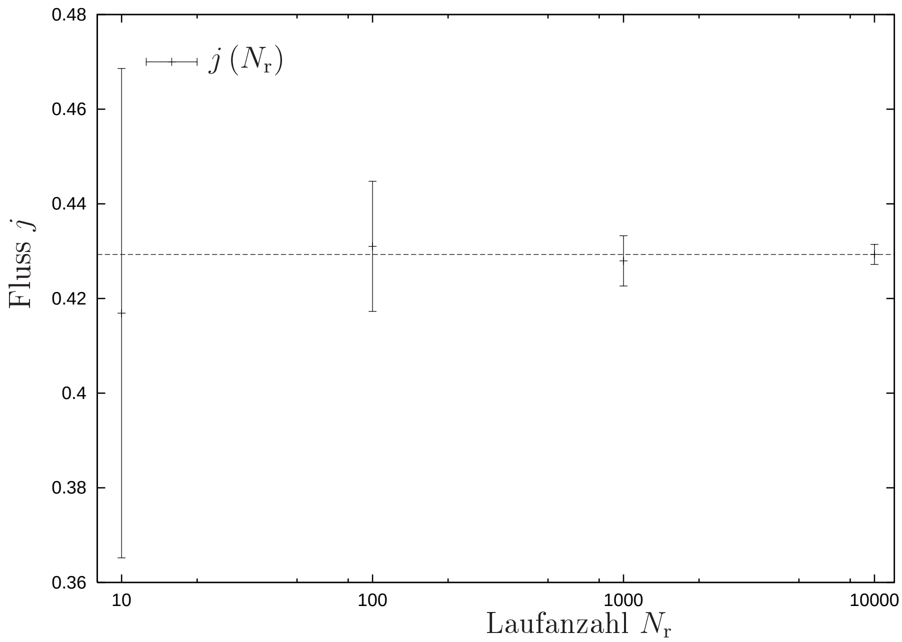

Abbildung 5.11: Fluss $j\,(N_\mathrm{r})$ über der Anzahl identischer Läufe. Dabei gilt $\alpha = 0.6$, $\beta = 1.0$, $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$ ($L = 100$, $v_\mathrm{max} = 5$, $T_\mathrm{eq} = 200$, $T_\mathrm{m} = 1000$).

es offenbar nicht ausreichend, nur über 10 Läufe zu mitteln.

5.5.2 Bestimmt durch: rechter Rand—Innere des Systems

In diesem Abschnitt geht es um den Übergang zwischen der vom rechten Rand kontrollierten Phase und der durch das Innere des Systems kontrollierten Phase. Wie im Phasendiagramm in Kap. 5.4 ersichtlich, lässt sich dieser bei konstanter Injektionsrate α durch Variation der Absorptionsrate β durchlaufen. Die geeignete Wahl ist $\alpha = 1$ [41], um auch die hier nicht entscheidenden Einflüsse des linken Randes auszublenden.

5.5.2.1 Fluss

Im einfachen Nagel-Schreckenberg-Modell mit $p_0 = p$ steigt der Fluss $j(\beta)$ [41] mit der Absorptionsrate linear an bis zu einem Phasenübergang bei β_c. Jenseits der kritischen Absorptionsrate ist der Fluss nahezu konstant. Das System befindet sich dann in einer Phase maximalen Flusses, die mit wachsender Fluktuationsrate p grösser wird. ($\beta_c \approx 0.92$ bei $p = 0.25$, $\beta_c \approx 0.89$ bei $p = 0.5$ nach [41]) Mit wachsender Fluktuationsstärke geht der Anstieg des Flusses zurück [41] und auch das Plateau in der Phase maximalen Flusses liegt niedriger. Der Fluss wird hier durch die bei höheren Fluktuationsstärken häufiger auftretenden Staus verringert.

Im deterministischen Fall $p = 0$ und für kleine Fluktuationsstärken existiert keine Phase maximalen Flusses und es findet entlang der $\alpha = 1$-Linie bei einer kritischen Absorptionsrate ein Übergang erster Ordnung von der Phase hoher Dichte in die Phase niedriger Dichte statt [42, 41].

Ausgehend von der mittleren Fluktuationsrate $p = 0.25$ wurde der Einfluss von VDR für verschiedene Werte von p_0 untersucht und in Abb. 5.12 dargestellt.

Wie im einfachen NaSch-Modell steigt in der Phase hoher Dichte der Fluss linear mit der Absorptionsrate β an. Die Stärke des Anstiegs nimmt allerdings mit steigendem p_0 ebenso ab wie im einfachen NaSch-Modell mit steigendem p. Beim NaSch-VDR-Modell werden am rechten Rand permanent Staus erzeugt, die dann durch das System nach links wandern. Der Zufluss zu den letzten Zellen des Systems entspricht also dem Abfluss aus dem zuletzt generierten Stau. Da dieser Abfluss mit steigendem p_0 sinkt, verringert sich auch der Anstieg von $j(\beta)$.

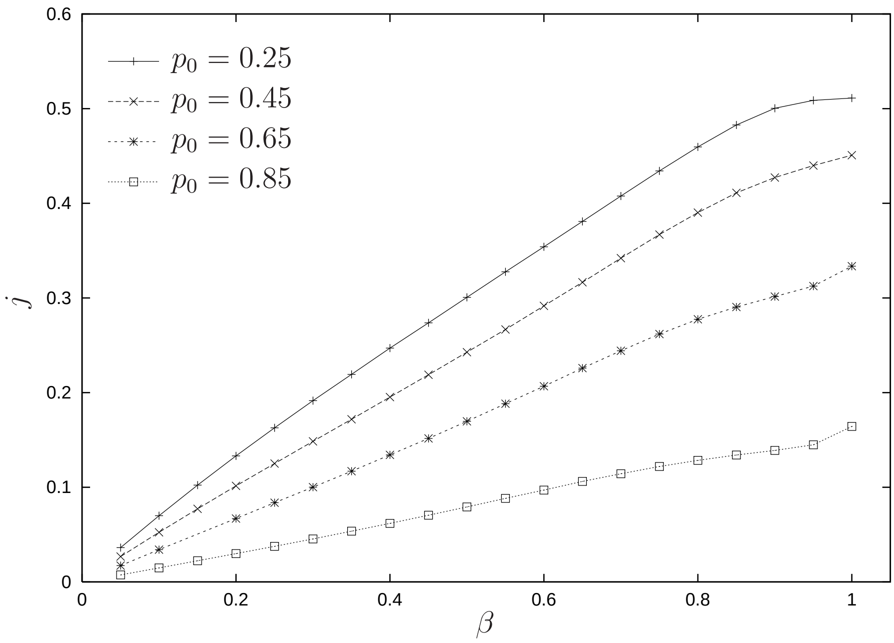

Abbildung 5.12: Der Fluss $j(\beta; p_0)$ über der Absorptionsrate β für verschiedene Standfluktuationsraten p_0. Dabei gilt $\alpha = 1$, $p = 0.25$ ($L = 1024$, $v_{\max} = 5$, $T_{\mathrm{eq}} = 2000 \ldots 6000$, $T_{\mathrm{m}} = 10000 \ldots 20000$, $N_{\mathrm{r}} = 400 \ldots 1000$) Die Fehlerbalken aller Punkte wären kleiner als die Symbole.

5.5.2.2 Dichteprofil

Im einfachen NaSch-Modell zeigt sich der Phasenübergang dadurch, dass die Dichteprofile in der vom rechten Rand kontrollierten Phase exponentiell auf eine konstante Dichte abfallen, während sie in der vom Innern des Systems kontrollierten Phase algebraisch abfallen [41].

Die Änderung der Dichteprofile mit der Absorptionsrate ist für das NaSch-Modell mit VDR in Abb. 5.13 dargestellt. Die vom rechten Rand kontrollierte Phase ist auch hier dadurch gekennzeichnet, dass das Dichteprofil auf einen konstanten Wert abfällt. Ab $\beta_{\mathrm{c}} = 0.85$ wird kein solches Plateau mehr beobachtet und das Dichteprofil folgt dem in Kap. 5.5.1.1 für die durch das Innere des Systems kontrollierte Phase beschriebenen Verlauf.

5.5.3 Bestimmt durch: linken Rand—rechten Rand

Dieser Phasenübergang ist im einfachen NaSch-Modell [22] durch einen Sprung in der Dichte gekennzeichnet. Wie in Kap. 3 erläutert, ist das Dichteprofil am Phasenübergang linear ansteigend. Der Übergang lässt sich am besten entlang einer horizontalen Linie durch das Phasendiagramm untersuchen. Hier wurde $\beta = 0.6$ gewählt.

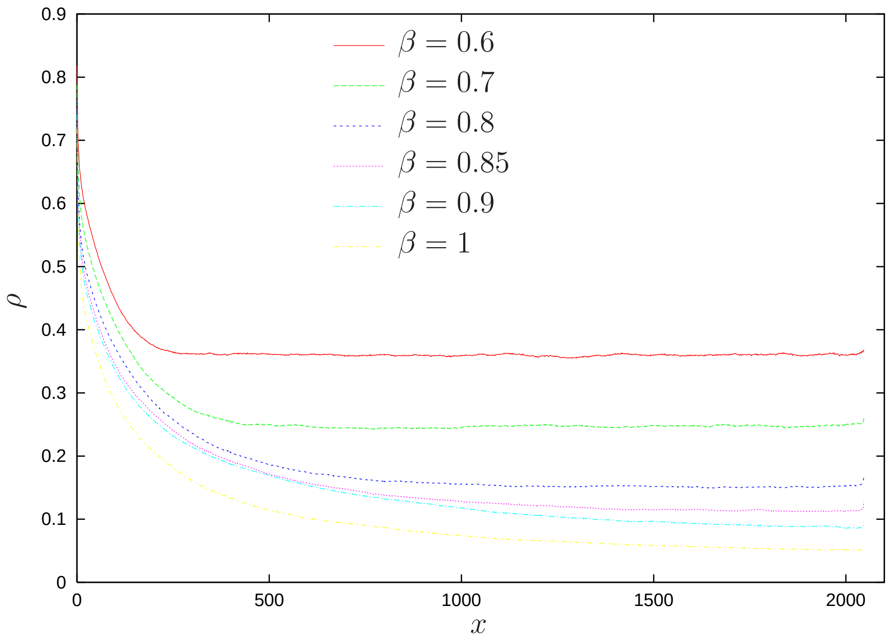

Abbildung 5.13: Dichteprofile $\rho(x)$ für verschiedene Absorptionsraten β. Dabei gilt $\alpha = 1$, $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$ ($L = 2048$, $v_{\mathrm{max}} = 5$, $T_{\mathrm{eq}} = 10000$, $T_{\mathrm{m}} = 1000000$)

5.5.3.1 Dichteprofil

Die Art des Phasenüberganges kann durch die Änderung des Dichteprofils mit α bestimmt werden. Bei einem Phasenübergang erster Ordnung ist das Dichteprofil im einfachen NaSch-Modell bei $\alpha = \alpha_c$ linear [41]. Untersucht man den Fall $p_0 = p = 0.25$, so erhält man $\alpha_c \approx 0.4$, bei $p_0 = p = 0.75$ folgt $\alpha_c \approx 0.15$. Mit VDR ist der Phasenübergang in Abb. 5.14 dargestellt. Die Lage des Phasenüberganges wurde zu $\alpha_c \approx 0.155$ bestimmt.

5.5.3.2 Dichte

Die Anzahl der Fahrzeuge im System ist für das Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR in Abb. 5.15 im relevanten Bereich dargestellt. Deutlich zu erkennen ist der schnelle Anstieg der Dichte in einem engen Variationsbereich der Injektionsrate α.

5.6 Reisezeiten

Wie bei den beiden vorhergehenden Modellen mit offenen Randbedingungen lässt sich die Dichte nicht direkt einstellen. Deshalb wurde wie in Kap. 3.4.2 ein Raster über die α-β-Parameterebene gelegt und für diese Parameterkombinationen die Dichte und die Reisezeit numerisch bestimmt. Die

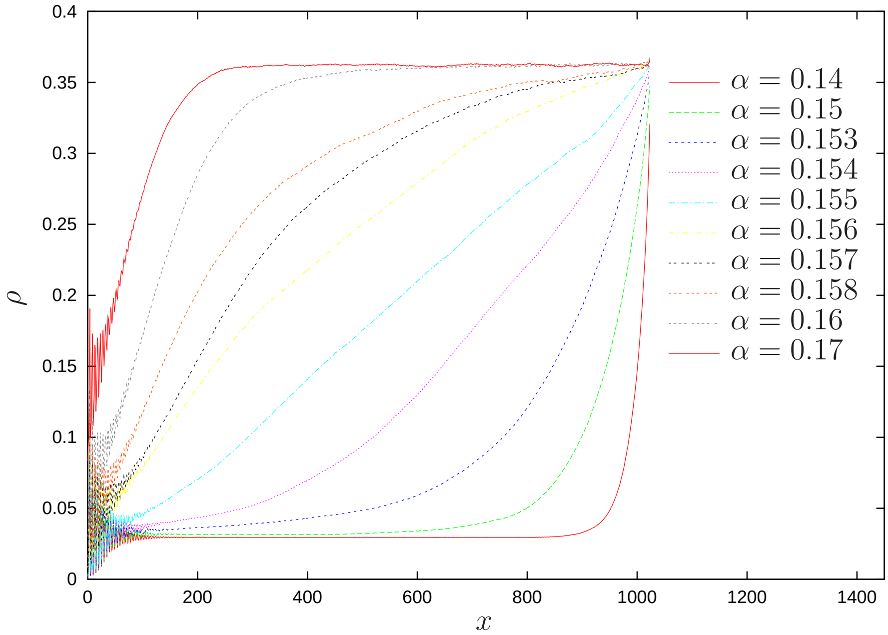

Abbildung 5.14: $\rho(x;\alpha)$ bei $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$, $\beta = 0.6$ und $v_{\mathrm{max}} = 5$ ($L = 1024$, 2000 Schritte Equilibration, 5000000 Messschritte)

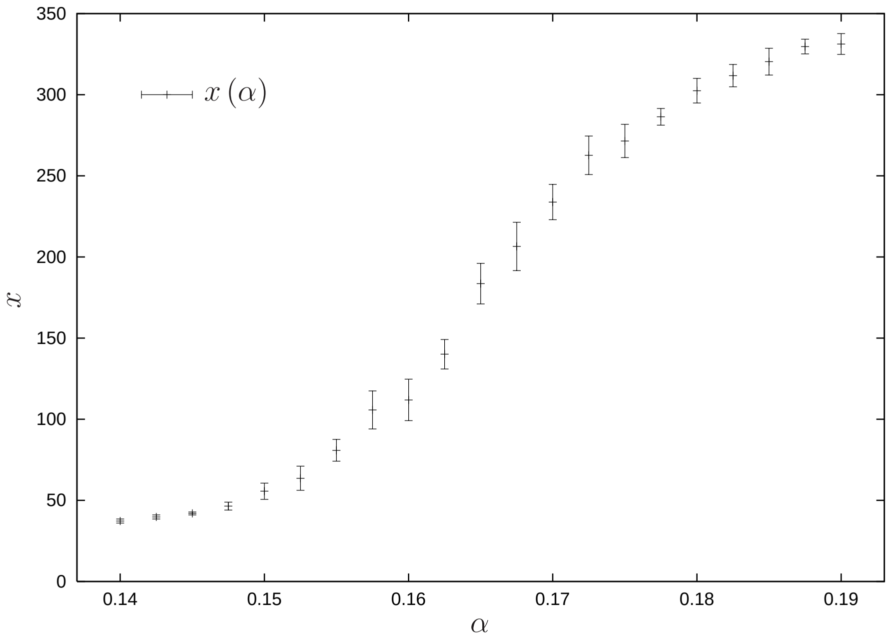

Abbildung 5.15: Die Anzahl der Fahrzeuge im System über der Injektionsrate α. Dabei gilt $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$, $\beta = 0.6$ ($L = 1024$, $v_{\mathrm{max}} = 5$, $T_{\mathrm{eq}} = 4000$, $T_{\mathrm{m}} = 20000$, $N_{\mathrm{r}} = 100$)

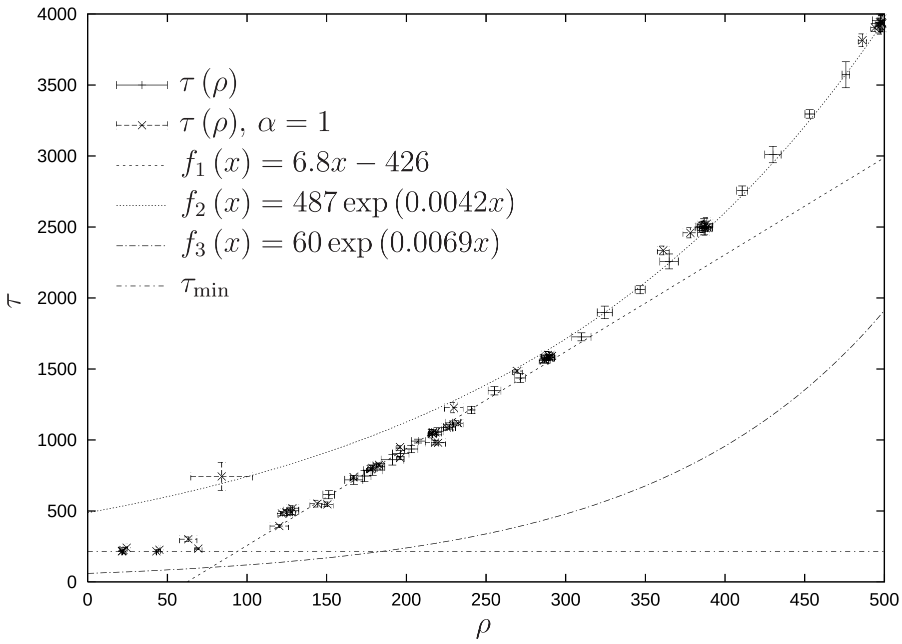

Abbildung 5.16: Numerisch ermittelte Reisezeiten, aufgetragen über dem Volumen. Ebenfalls eingezeichnet sind einige Näherungen. Es gilt $v_{\max} = 5$, $p_0 = 0.75$, $p = 0.25$. ($L = 1024$, $T_{\text{eq}} = 5000$, $T_{\text{m}} = 50000$, $N_{\text{r}} = 20 \dots 40$)

Ergebnisse sind in den Abb. 5.16 und 5.17 jeweils für verschiedene Dichtebereiche dargestellt.

In Abb. 5.16 ist der Bereich kleiner Dichten gemeinsam mit mehreren Näherungen dargestellt. Bei Dichten $\rho < 100$ wird kein Fahrzeug behindert, die Reisezeit entspricht dem Minimalwert $\tau_{\min} = \frac{L}{v_{\max} - p}$. Es schliesst sich ein Bereich bis zu Dichten $\rho \approx 300$ an, in dem die Reisezeiten linear mit der Dichte steigen. Der Grund hierfür ist offenbar, dass bei kleinen Dichten ein Anteil der Fahrzeuge das System ungehindert mit der Reisezeit $\tau_{\min}$ durchquert.Mit steigender Dichte geht dieser Anteil jedoch stetig zurück und die gemittelte Reisezeit enthält nun auch die Fahrzeuge, die durch einen Stau behindert wurden. Ab Dichten $\rho \approx 300$ werden schliesslich alle Fahrzeuge durch mindestens einen Stau verlangsamt. Die Staulänge und Häufigkeit steigt mit wachsender Dichte an und die Reisezeit lässt sich durch Exponentialfunktionen nähern.

In Abb. 5.17 ist der volle Dichtebereich abgebildet, wobei hier vor allem die gute Näherung durch Exponentialfunktionen sichtbar wird. Zur Illustration sind in Abb. 5.18 dieselben Daten semilogarithmisch dargestellt.

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass sich für das Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR je nach Dichtebereich gut nähernde Reisezeitfunktionen definieren lassen. In einem Fall wird ein linearer Zusammenhang wie in Kap. 2 erreicht.

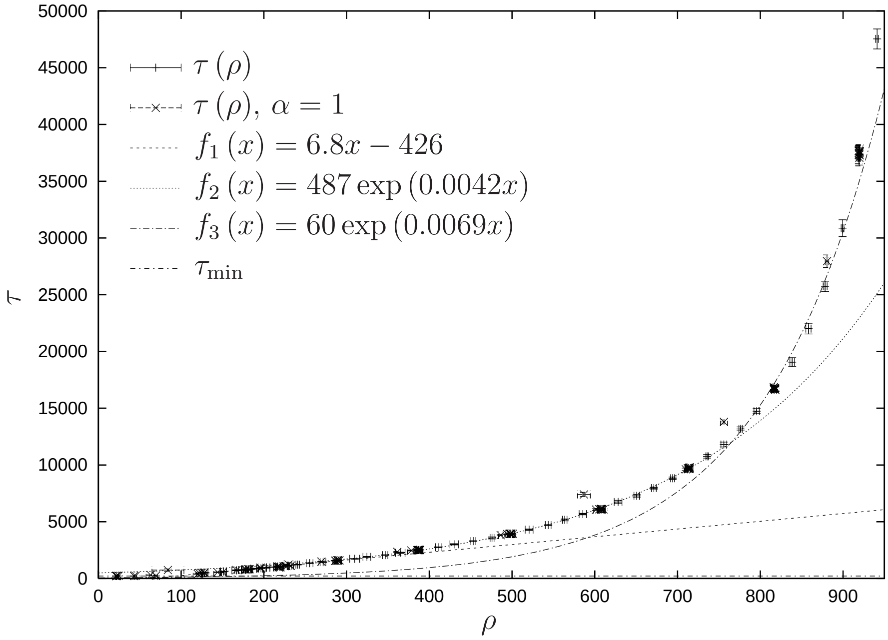

Abbildung 5.17: Reisezeiten wie in Abb. 5.16.

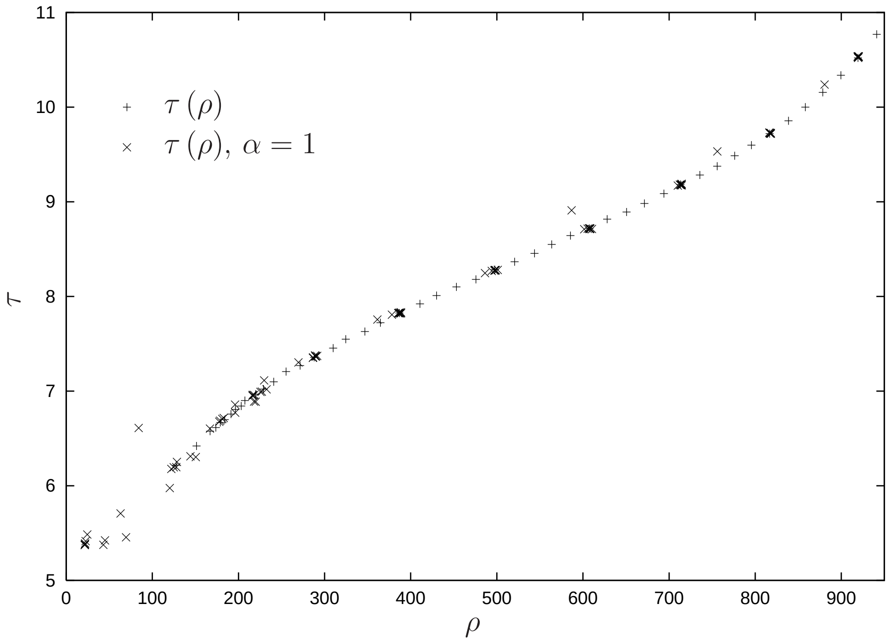

Abbildung 5.18: Reisezeiten wie in Abb. 5.16, semilogarithmisch dargestellt.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Es wurden Reisezeitfunktionen in verschiedenen physikalischen Verkehrsflussmodellen auf einer offenen Kante untersucht. Die Ergebnisse von Modellen mit postulierter Reisezeitfunktion bleiben in einer mikroskopischen Beschreibung gültig, weshalb die Übertragung der Ergebnisse der mikroskopischen Modelle möglich sein sollte.

Die Untersuchung mehrerer mikroskopischer Modelle ergab, dass sich kein einfacher Zusammenhang zwischen Dichte und Reisezeit finden lässt, der über den gesamten Dichtebereich gültig ist. Die in Abhängigkeit von den Rändern auftretenden verschiedenen Phasen der Modelle sind dafür zu gegensätzlich. In begrenzten Dichtebereichen lassen sich allerdings einfache Reisezeitfunktionen definieren, die die erhaltenen Ergebnisse gut approximieren. Insbesondere beim Nagel-Schreckenberg-Modell mit VDR, dem der Realität am nächsten kommenden Modell, kann so vorgegangen werden.

Das letztgenannte Modell wurde detailliert charakterisiert und das Phasendiagramm bestimmt Dabei zeigte sich, dass die auftretenden Unterschiede zum einfachen NaSch-Modell durch die direkten Effekte der VDR, also herabgesetzter Abfluss aus Staus und dadurch stabile, das System durchwandernde Staus (Phasenseparation), gut erklärbar sind. Es treten neue Effekte auf, wie z.B. ein Minimum im Fluss $j(\alpha)$ bei $\beta = 1$.

Eine Möglichkeit zu weiterer Arbeit ist die Anwendung der hier vorgeschlagenen Reisezeitfunktionen in Netzwerken aus mehreren Kanten und der Vergleich mit der mikroskopischen Simulation desselben Netzwerks.

Anhang A

Umgebung für verteilte Simulationen

Sämtliche Simulationen wurden in einem verteilten System durchgeführt. Es führte also nicht ein auf einem Rechner laufendes Programm zu einem bestimmten Ergebnis, sondern mehrere Rechner arbeiteten kontrolliert zusammen, um ein Ergebnis zu ermitteln.

A.1 Motivation

Insbesondere die komplexen Modelle wurden vor allem mit Simulationen analysiert. Dabei ist zu beachten, dass die Analyse prinzipiell beliebig von steigender Rechenleistung profitiert. Zum einen steigt dadurch die Genauigkeit der Ergebnisse durch häufigere Wiederholung derselben Rechnung bei festen Parametern. Desweiteren wird es möglich, den Parameterraum feiner zu überdecken und unter anderem Phasenübergänge, also die Empfindlichkeit des Systems auf sehr kleine Änderungen der Parameter, besser zu untersuchen. Schliesslich lassen sich nur durch den Vergleich von Rechnungen bei verschiedenen Systemgrössen davon abhängige Effekte (*finite size effects*) und ihr Einfluss auf die Resultate abschätzen. Systeme bestimmter Grösse werden dabei erst ab einer charakteristischen Rechenleistung zugänglich.

Prinzipiell kann die verfügbare Rechenleistung dadurch erhöht werden, dass die Simulationen auf einem schnelleren Prozessor ausgeführt werden, oder indem man die Anzahl der beteiligten Prozessoren erhöht.

Im Institut für Verkehrsforschung (IVF) des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), in dem diese Arbeit angefertigt wurde, standen für die Durchführung der Simulationen mehrere PCs und Workstations zur Verfügung. Da dazu mehrere PCs mit mehreren Prozessoren zählten, erschien die zweite Variante, also das Beteiligen mehrerer Prozessoren an den Simulationen, als besserer Weg.

A.2 Organisation des verteilten Rechnens

Um mehrere Prozessoren an einer Simulation zu beteiligen, muss diese zum einen in kleinere Teile aufgeteilt werden und zum anderen die verschieden Rechner koordiniert werden.

Die Aufteilung einer Simulation geschieht auf zwei Ebenen. Da während einer Simulation oft ein oder mehrere Parameter variiert werden, wird die Simulation so aufgeteilt, dass jede eindeutige Kombination von Parametern getrennt voneinander bearbeitet werden kann. Es ist klar, dass diese Teile vollständig unabhängig voneinander sind, also die diese bearbeitenden Rechner nicht miteinander kommunizieren müssen.

Es findet meistens eine Mittelung über mehrere identische Läufe statt, da es sich bei den verwendeten Modellen um stochastische Modelle handelt. Auch diese Läufe können unabhängig voneinander bearbeitet werden, ohne dass die beteiligen Rechner kommunizieren müssten. Es ist also zu erwarten, dass die verfügbare Rechenleistung tatsächlich linear ansteigt mit der Anzahl und der Geschwindigkeit der an einer Simulation beteiligten Prozessoren. Dies funktioniert natürlich nur so lange, wie genügend einzelne Teile verfügbar sind, um jeden Prozessor auch tatsächlich zu beschäftigen.

Zur Koordination der Rechner wird ein Tupel-Raum (das Konzept wird in [43] anhand einer Implementation beschrieben) eingesetzt. Dabei werden in einem zentralen Speicher, auf den alle an der Simulation beteiligten Rechner Zugriff haben, Objekte hinterlegt. Auf sie wird assoziativ, also über Paare aus Schlüssel und Werten zugegriffen.

A.3 Implementation

Alle beteiligten Rechner fragen ständig den zentralen Speicher ab nach Objekten, die anstehende Aufgaben repräsentieren. Zum Beginn einer Simulation wird ein Objekt eingefügt, dass alle Parameter der Simulation enthält. Einer der Rechner ruft dieses ab und führt die enthaltene Aufgabe aus, in diesem Falle lediglich das Anlegen weiterer Teilaufgaben. Typischerweise unterscheiden sich diese groben Teile in den Parametern der Simulation und gehören zur ersten oben beschriebenen Ebene. Diese Teilaufgaben werden dann wiederum abgerufen und legen weitere Teilaufgaben an, die nur noch identischen Läufen mit denselben Parametern entsprechen. Schliesslich werden alle diese Teile abgerufen und die einzelnen Simulationsläufe von den Rechnern ausgeführt. Die Ergebnisse werden jeweils im Speicher hinterlegt.

Liegen alle Teilergebnisse vor, so werden diese zu einem Gesamtergebnis zusammengefasst, wobei eine Mittelung durchgeführt wird. Dieses Gesamtergebnis kann dann wiederum einem Teilergebnis der übergeordneten Aufgabe entsprechen. Schliesslich liegen auf für diese alle Teilergebnisse vor, werden gespeichert und können ausgewertet werden.

Alle Teile des Programms wurden in der Programmiersprache JAVA implementiert. Der zentrale Speicher implementiert den Standard JAVASPACE. Dafür kam das Produkt GIGASPACES PLATFORM der Firma GIGASPACES zum Einsatz, dass von dieser für die akademische Nutzung kostenfrei zur Verfügung gestellt wurde. Am Ablauf der Simulationen waren jeweils mehrere WorkStations des IVF beteiligt. Die eingesetzte Hardware reichte dabei von einer Sun Ultra 10 (UltraSPARC IIi Prozessor mit 440 MHz, 256 MByte Arbeitspeicher) bis zu einer Vier-Pentium-Maschine (4 Pentium Xeon III-Prozessoren mit 900 MHz, 4GByte Arbeitsspeicher). Die an den Simulationen beteiligten Rechner verwendeten die Betriebssysteme Linux, Sun Solaris und Microsoft Windows jeweils mit der Java Virtual Machine von SUN MICROSYSTEMS.

Literaturverzeichnis

[1] D. Helbing. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of Modern Physics*, 73:1067, 2001.

[2] D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems. *Physics Reports*, 329:199–329, 2000.

[3] F. Schweitzer, editor. *Self-organization of Complex Systems: from Individual to Collective Dynamics*. Gordon and Breach, London, 1997.

[4] G. Weisbuch. *Complex Systems Dynamics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1990.

[5] B. Schmittmann and R.K.P. Zia. Statistical mechanics of driven diffusive systems. In C. Domb and J.L. Lebowitz, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 17*. Academic Press, New York, 1995.

[6] H. Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particles*. Springer, Berlin, 1991.

[7] K. Nagel and M. Schreckenberg. A cellular automaton model for freeway traffic. *J. Phys. I*, 2:2221, 1992.

[8] D.E. Wolf, M. Schreckenberg, and A. Bachem, editors. *Traffic and Granular Flow*. World Scientific, Singapore, 1996.

[9] M.J. Lighthill and G.B. Whitham. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 229:281, 1955.

[10] I. Prigogine and R. Hermann. *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. Elsevier, Amsterdam, 1971.

[11] R.W. Rothery. In N. Gartner, C.J. Messner, and A.J. Rathi, editors, *Special Report 165, Traffic Flow Theory, 2nd Edition*. Transportation Research Board (TRB), 1998.

[12] O. Biham, A.A. Middleton, and D. Levine. Self-organization and a dynamical transition in traffic-flow models. *Phys. Rev. A*, 46(10):R6124, 1992.

[13] J. Freund and T. Pöschel. A statistical approach to vehicular traffic. *Physica A*, 219:95–113, 1995.

[14] G. M. Schütz. Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium. In C. Domb and J.L. Lebowitz, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena, Vol. 19*. Academic Press, New York, 2000.

[15] T.M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer, Berlin, 1985.

[16] Ampel an der Auffahrt? SPIEGEL Online, http://www. spiegel. de/ auto/ aktuell/ 0,1518,191141,00.html, 11. April 2002.

[17] K. Nagel, J. Esser, and M. Rickert. Large-scale traffic simulations for transportation planning. In D. Stauffer, editor, *Annual Review of Computational Physics VII*. World Scientific Publishing Company, 2000.

[18] F. Schweitzer. *Brownian Agents and Active Particles*. Springer, Berlin, 2001.

[19] F. Schweitzer, W. Ebeling, and B. Tilch. Complex Motion of Brownian Particles with Energy Depots. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5044, 1998.

[20] C.F. Daganzo. Properties of link travel times under dynamic load. *Transportation Research B*, 29(2):95–98, 1995.

[21] M. Carey and M. McCartney. *A class of traffic flow models used in dynamic assignment. Research Report*. Faculty of Business and Management, University of Ulster, 1999.

[22] M. Carey and M. McCartney. Behaviour of a whole-link travel time model used in dynamic traffic assignment. *Transportation Research B*, 36:83–95, 2002.

[23] G.F. Newell. A simplified car-following theory: a lower order model. *Transportation Research B*, 36:195–205, 2002.

[24] T.M. Liggett. *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes*. Springer, Berlin, 1999.

[25] S. Katz, J.L. Lebowitz, and H. Spohn. *J. Stat. Phys.*, 34:497, 1984.

[26] J. Krug. Boundary-induced phase transitions in driven diffusive systems. *Phys. Rev. Lett.*, 67(14):1882–1885, 1991.

[27] M. Henkel and G. Schütz. Boundary-induced phase-transitions in equilibrium and nonequilibrium systems. *Physica A*, 206(1-2):187–195, 1994.

[28] B. Derrida, M.R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier. Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation. *J. Phys. A*, 26(7):1493, 1993.

[29] G. Schütz and E. Domany. Phase transitions in an exactly solvable one-dimensional exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 72:277, 1993.

[30] N. Rajewsky, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. The asymmetric exclusion model with sequential update. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 29:L305, 1996.

[31] N. Rajewski, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. The asymmetric exclusion process: Comparison of update procedures. *J. Stat. Phys.*, 92:151, 1998.

[32] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, and N. Ito. Discrete stochastic models for traffic flow. *Physical Review E*, 51(4):2939–2949, 1995.

[33] M.R. Evans, N. Rajewsky, and E.R. Speer. Exact Solution of a Cellular Automaton for Traffic.

[34] J. de Gier and B. Nienhuis. Exact stationary state for an asymmetric exclusion process with fully parallel dynamics. *Phys. Rev. E*, 59:4899, 1999.

[35] A.B. Kolomeisky, G.M. Schütz, E.B. Kolomeisky, and J.P. Straley. Phase diagram of one-dimensional driven lattice gases with open boundaries. *J. Phys. A*, 31(33):6911–6919, 1998.

[36] G.M. Schütz. Phasenübergänge in offenen Vielteilchensystemen fern vom Gleichgewicht. *Physikalische Blätter*, 56(7/8):69–73, 2000.

[37] C. Appert and L. Santen. Boundary Induced Phase Transitions in Driven Lattice Gases with Metastable States. *Physical Review Letters*, 86(12):2498–2501, 2001.

[38] S. Wolfram. *Theory and Applications of Cellular Automata.* World Scientific, Singapore, 1986.

[39] A. Ebersbach, I. Morgenstern, and J. Schneider. Provident Drivers in the Nagel-Schreckenberg-model. In *Verhandlungen der DPG, Tagung des AK Festkörperphysik, Regensburg*, 2002. AKSOE 12.12.

[40] R. Barlovic, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. Metastable states in cellular automata for traffic flow. *Eur. Phys. J. B*, 5:793–800, 1998.

[41] S. Cheybani, J. Kertész, and M. Schreckenberg. Nondeterministic Nagel-Schreckenberg traffic model with open boundary conditions. *Physical Review E*, 63:016108, 2000.

[42] S. Cheybani, J. Kertész, and M. Schreckenberg. Stochastic boundary conditions in the deterministic Nagel-Schreckenberg traffic model. *Physical Review E*, 63:016107, 2000.

[43] D. Gelernter. Generative Communication in Linda. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 7(1):80–112, 1985.