

Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.

Mitteilung 515-08-25

Modellierung eines rotierenden  
elastischen Radsatzes

Ingo Kaiser  
Systemdynamik und Regelungstechnik  
(RM-SR)

Institut für Robotik und Mechatronik  
Oberpfaffenhofen



**DLR**

**Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.**  
in der Helmholtz-Gemeinschaft

# Modellierung eines rotierenden elastischen Radsatzes

Ingo Kaiser  
Systemdynamik und Regelungstechnik  
(RM-SR)

Institut für Robotik und Mechatronik  
Oberpfaffenhofen

42 Seiten  
3 Bilder  
1 Tabelle  
3 Literaturstellen

# **Modellierung eines rotierenden elastischen Radsatzes**

Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e.V.

## **Abstract**

To describe a rolling wheelset which is modelled as an elastic body, a formulation is developed which provides the consideration of forces circulating around the wheelset. The wheelset is regarded as a rotational symmetric body. This allows the application of a semi-analytic description of the eigenmodes which are used as shape functions for the description of the deformations. In the multi-body simulation software SIMPACK, the necessary extensions for the SARS description (semi-analytic description for a rotational symmetric structure) were made. By using the modified SIMPACK version, the running behaviour of a railway vehicle with wheelsets which are modelled as elastic bodies is calculated.

## Zusammenfassung

Für die Beschreibung eines rollenden Radsatzes, der als elastischer Körper modelliert wird, wird eine Formulierung entwickelt, die die Belastung durch Kräfte an einem umlaufenden Angriffspunkt ermöglicht. Der Radsatz wird hierbei als rotationssymmetrischer Körper betrachtet. Dies ermöglicht die Anwendung einer semi-analytischen Beschreibung der Eigenmoden des Radsatzes, welche als Formfunktionen zur Beschreibung der Deformationsbewegungen verwendet werden. In dem Mehrkörper-Simulationsprogramm SIMPACK wurden die entsprechenden Erweiterungen für die SARS-Beschreibung (semi-analytische Beschreibung einer rotationssymmetrischen Struktur) vorgenommen. Mit der derart modifizierten SIMPACK-Version wird das Laufverhalten eines Schienenfahrzeugs mit elastisch modellierten Radsätzen berechnet.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Problemstellung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Eigenschaften rotationssymmetrischer Strukturen . . . . .	3
2.2	Kinematik der Translationsbewegung . . . . .	7
2.3	Kinematik der Rotationsbewegung . . . . .	13
2.4	Analyse der Formfunktionen . . . . .	19
2.4.1	Auswahl der Punkte . . . . .	20
2.4.2	Bestimmung der Periodizität . . . . .	20
2.4.3	Bestimmung der Orientierung . . . . .	22
2.4.4	Aufbereitung der Formfunktionen . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Realisierung im SIMPACK</b>	<b>26</b>
3.1	Liste der modifizierten Dateien . . . . .	28
3.2	Abhängigkeit der neuen und modifizierten Routinen . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Anwendungsbeispiel</b>	<b>37</b>

# Abbildungsverzeichnis

4.1	Ansicht des Modells . . . . .	37
4.2	Phasenporträts der Lateralbewegung des vorlaufenden (rechts) und des nachlaufenden (links) Radsatzes für die SARS-Beschreibung (oben) und für die Rotor-Näherung (unten) . . . . .	40
4.3	Phasenporträts der Lateralbewegung des vorlaufenden (rechts) und des nachlaufenden (links) Radsatzes für die SARS-Beschreibung (oben) und für die Modellierung als Starrkörper (unten) . . . . .	41

# Tabellenverzeichnis

4.1 ..... 38



# 1 Problemstellung

Viele technische Systeme beinhalten Rotoren, d.h. Komponenten, die gegenüber anderen Komponenten, die Statoren genannt werden, große Drehbewegungen ausführen. Hierbei ist vielfach die Wechselwirkung zwischen Rotor und Stator von Interesse. In einigen Fällen ist zusätzlich die Strukturmechanik des Rotors relevant. Eine Anwendung, die zugleich den Anstoß für die vorliegende Arbeit gab, ist die Modellierung des Radsatzes eines Schienenfahrzeugs als elastischer Körper. Bei einem Schienenfahrzeug können die Radsätze als Rotoren und der Fahrwerkrahmen als Stator angesehen werden. Die Berücksichtigung der Strukturmechanik eines Radsatzes ist eine wesentliche Voraussetzung für Modellierung höherfrequenter Phänomene wie Lärm und bestimmte Verschleißformen wie Radpolygone und Schienenriffel.

Die einfachste mechanische Beschreibung ergibt sich für einen starren Rotor mit zentrisch angreifenden Kräften. Die Beschreibung wird jedoch komplizierter, wenn

- die Kräfte exzentrisch angreifen,
- die Strukturmechanik des Rotors modelliert werden soll.

Anhand eines Fahrzeugrades soll zunächst der Unterschied zwischen zentrisch und exzentrisch angreifenden Kräften kurz erläutert werden: Die Kräfte, die an der Lagerung des Rades an seiner Nabe angreifen, sind zentrische Kräfte, während die Kräfte, die am Aufstandspunkt des Rades auf der Fahrbahn angreifen, exzentrische Kräfte sind. Betrachtet man die Kräfte vom Rad aus, so ändern die zentrisch angreifenden Kräfte während der Drehung des Rades nur ihre Orientierung, also ihre Richtung, während ihr Angriffspunkt, nämlich die Nabe, konstant bleibt. Bei exzentrisch angreifenden Kräften ändert sich jedoch neben der Orientierung auch der Angriffspunkt der Kräfte, denn aufgrund des Abrollens ist ständig ein anderer materieller Punkt des Rades im Kontakt mit der Fahrbahn, d.h. die Kräfte zwischen Rad und Fahrbahn laufen um das Rad um. Es liegt eine wandernde Kraft, also eine Kraft mit variablem Angriffspunkt vor. Im Falle eines starren Körpers ist die Berücksichtigung wandernder Kräfte aufgrund der einfachen Kinematik unproblematisch. Bei einem elastisch modellierten Körper, auf den Kräfte mit variablem Angriffspunkt einwirken, tauchen jedoch Schwierigkeiten auf.

Üblicherweise werden die Bewegungen elastisch modellierter Körper durch eine Modalsynthese beschrieben, d.h. verschiedene Formfunktionen, die eine bestimmte Verteilung der Verformungen der Struktur beschreiben, werden durch Modalkoordinaten skaliert und überlagert. Sehr häufig werden als Formfunktionen ausgewählte Eigenmoden der Struktur verwendet. Die Werte dieser Formfunktionen müssen an den Stellen, an denen Kräfte in die Struktur eingeleitet werden. Üblicherweise werden diese Formfunktionen mit der Finite-Elemente-Methode oder FE-Methode berechnet; als Ergebnis sind die Verformungen an den diskreten Knoten des FE-Modells bekannt. Die Beschreibung von Kräften, die an festen materiellen Punkten an der elastischen Struktur angreifen, ist daher unproblematisch. Sollen aber wandernde Kräfte an dem elastisch modellierten Körper angreifen, so müssen die Verformungen für jeden Punkt, an dem die Kräfte angreifen können, bekannt sein; praktisch ist also eine kontinuierliche Beschreibung der Formfunktionen entlang des Weges der Kräfte über den Körper erforderlich. Die mit dem FE-Modell bestimmten Verformungen liegen nur an diskreten Punkten vor.

Eine Lösung dieses Problems besteht darin, die Formfunktionen zwischen den Knoten, an de-

nen ihre Werte vorliegen, zu interpolieren. Durch die Interpolation können jedoch Rechengenauigkeiten entstehen, und für eine brauchbare Interpolation kann eine sehr hohe Anzahl an Knoten, für die die Werte der Formfunktionen gespeichert werden müssen, erforderlich sein.

In der vorliegenden Arbeit soll ein anderer Weg beschritten werden. Dieser Weg besteht darin, bestimmte Eigenschaften der Formfunktionen gezielt auszunutzen. In sehr vielen Fällen, so auch im Fall des Radsatzes, handelt es sich bei den Rotoren um rotationssymmetrische Strukturen. Weiterhin laufen die wandernden Kräfte auf einer geschlossenen Bahn, die im unverformten Zustand ein Kreis ist, um den Körper um; dies ist auch im Fall des Radsatzes gegeben, sieht man von den kleinen seitlichen Verlagerungen des Kontaktgebietes ab, die durch Momente berücksichtigt werden können. Bei der exakten Lösung des Eigenmodes einer rotationssymmetrischen Struktur ist die Verteilung der Verformungen über den Umfang, also auf einer solchen geschlossenen Bahn, eine trigonometrische Funktion, die für alle Punkte auf dem Umfang problemlos ausgewertet werden kann. Diese trigonometrische Funktion besitzt nur drei Parameter, nämlich ihre Periodizität, ihre Amplitude und ihre Phasenlage.

Im Kapitel 2.1 wird die eine analytische Lösung für den Eigenmode eines Rotationskörpers hergeleitet. In den Kapiteln 2.2 und 2.3 wird die Kinematik der Verformungen für einen wandernden Bezugspunkt hergeleitet. Wie schon erwähnt, liegen die Werte der Formfunktionen, die mit einem FE-Modell bestimmt werden, nur an diskreten Punkten vor. Im Kapitel 2.4 wird daher ein Vorgehen, wie aus vorliegenden diskreten Werten die analytische Verteilung der Verformungen über den Umfang bestimmt werden kann, sowie die dazu erforderlichen mathematischen Grundlagen beschrieben. Im Kapitel 3 wird die Umsetzung der in Kapitel 2 hergeleiteten Beschreibung in dem Mehrkörper-Simulationsprogramm SIMPACK angegeben. Im Kapitel ?? werden Ergebnisse, die mit der neuen Beschreibung ermittelt wurden, vorgestellt.

## 2 Theoretische Grundlagen

Für die Beschreibung einer Kraft, welche mit veränderlichem Angriffspunkt an einem elastischen Körper angreift, sind einige theoretische Grundlagen erforderlich, die im Folgenden hergeleitet und erläutert werden. Die Voraussetzungen hierfür sollen vorab kurz skizziert werden:

- Der elastische Körper ist rotationssymmetrisch.
- Die Umlaufbewegung der angreifenden Kraft entsteht durch eine Drehung des Körpers um die Achse der Rotationssymmetrie.
- Die Deformationsbewegungen des elastischen Körpers werden durch eine Modalsynthese beschrieben.
- Die für die Modalsynthese verwendeten Ansatzfunktionen müssen eine Isotropieeigenschaft besitzen, welche im Folgenden näher erläutert wird. Diese Eigenschaft ist beispielsweise für die Eigenmoden einer ruhenden rotationssymmetrischen Struktur gegeben.

In den folgenden Herleitungen wird häufig auf die Symmetrieeigenschaften und die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen zurückgegriffen. Die Symmetrieeigenschaften lauten:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad (2.1)$$

Die Additionstheoreme lauten:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (2.2)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (2.3)$$

### 2.1 Eigenschaften rotationssymmetrischer Strukturen

Für ein dreidimensionales linear-elastisches Kontinuum stellen die Navierschen Gleichungen die allgemeinste Beschreibung dar. Diese Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

Hierbei stellen  $U = U(x, y, z, t)$ ,  $V = V(x, y, z, t)$  und  $W = W(x, y, z, t)$  die Verformungen in Richtung der Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$  dar. Weiterhin bezeichnen  $G$ ,  $\nu$  und  $\rho$  den Schubmodul, die Querkontraktionszahl und die Dichte des Materials.

Bei einer rotationssymmetrischen Struktur ist eine Darstellung in Zylinderkoordinaten nahelegend. Im Fall eines Radsatzes ist die  $y$ -Achse die Achse der Rotationssymmetrie; daher bleibt

die Koordinate  $y$  hier unverändert, während die kartesischen Koordinaten  $x$  und  $z$  durch Polarkoordinaten ersetzt werden. Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten  $x$  und  $z$  und den Zylinderkoordinaten  $r$  und  $\phi$  lautet:

$$x = r \sin \phi, \quad z = r \cos \phi \quad (2.7)$$

Damit ergibt sich für die Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dr} = \frac{\partial f}{\partial x} \sin \phi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \phi \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{d\phi} = \frac{\partial f}{\partial x} r \cos \phi - \frac{\partial f}{\partial z} r \sin \phi \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \cos \phi \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \sin \phi \end{aligned} \quad (2.8)$$

Der Zusammenhang zwischen den Verformungen in kartesischen Richtungen  $U$  und  $W$  einerseits und der Radialverformung  $R$  und der Tangentialverformung  $T$  andererseits lautet:

$$U = R \sin \phi + T \cos \phi, \quad W = R \cos \phi - T \sin \phi \quad (2.9)$$

Setzt man die Zusammenhänge (2.9) in die Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6) ein und wendet die Ableitungsregeln (2.8) an, so erhält man für die Navierschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \phi^2} - R - 2 \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \\ + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} - T + 2 \frac{\partial R}{\partial \phi} \right) \\ + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{R}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad (2.12)$$

Für eine rotationssymmetrische Struktur sind die Werkstoffparameter  $G$ ,  $\nu$  und  $\rho$  unabhängig vom Azimut  $\phi$ . Es gilt also:

$$G = G(r, y), \quad \nu = \nu(r, y), \quad \rho = \rho(r, y) \quad (2.13)$$

Zur Lösung der Navier-Gleichungen in der Formulierung, die durch (2.10), (2.11) und (2.12) dargestellt wird, wird der folgende Ansatz gewählt:

$$\begin{aligned} R(r, \phi, y, t) &= R_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ T(r, \phi, y, t) &= T_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ V(r, \phi, y, t) &= V_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Damit lassen sich die Navierschen Gleichungen mit diesem Ansatz auf die folgende Form re-

duzieren:

$$\frac{\partial^2 T_{(k),i}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T_{(k),i}}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{(k),i}}{\partial r} - \frac{(k^2 + 1) T_{(k),i} + 2k R_{(k),i}}{r^2} - \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{k}{r} \left( \frac{\partial R_{(k),i}}{\partial r} + \frac{R_{(k),i}}{r} + \frac{k T_{(k),i}}{r} + \frac{\partial V_{(k),i}}{\partial y} \right) + \omega_{(k),i}^2 \frac{\rho}{G} T_{(k),i} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 V_{(k),i}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_{(k),i}}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{(k),i}}{\partial r} - \frac{k^2 V_{(k),i}}{r^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial R_{(k),i}}{\partial r} + \frac{R_{(k),i}}{r} + \frac{k T_{(k),i}}{r} + \frac{\partial V_{(k),i}}{\partial y} \right) + \omega_{(k),i}^2 \frac{\rho}{G} V_{(k),i} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 R_{(k),i}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 R_{(k),i}}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{(k),i}}{\partial r} - \frac{(k^2 + 1) R_{(k),i} + 2k T_{(k),i}}{r^2} + \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial R_{(k),i}}{\partial r} + \frac{R_{(k),i}}{r} + \frac{k T_{(k),i}}{r} + \frac{\partial V_{(k),i}}{\partial y} \right) + \omega_{(k),i}^2 \frac{\rho}{G} R_{(k),i} = 0 \quad (2.17)$$

Damit ist es gelungen, das ursprüngliche Problem zu vereinfachen: Die Funktionen  $R_{(k),i}$ ,  $T_{(k),i}$  und  $V_{(k),i}$  hängen nur noch von den Koordinaten  $r$  und  $y$  ab.

Eine weitere Lösung, die zu (2.14) orthogonal ist, stellt der folgende Ansatz dar:

$$\begin{aligned} R(r, \phi, y, t) &= R_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ T(r, \phi, y, t) &= -T_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ V(r, \phi, y, t) &= V_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Hierfür ergeben sich die selben Gleichungen (2.15), (2.16) und (2.17). Da die beiden Lösungen für  $k > 0$  (2.14) und (2.18) zwar orthogonal sind, aber die gleiche Eigenkreisfrequenz  $\omega_{(k),i}$  besitzen, ist  $\omega_{(k),i}$  also eine doppelte Eigenkreisfrequenz. Hierdurch lässt sich die räumliche Orientierung der resultierenden Schwingung abbilden. Diese räumliche Orientierung besteht in der Lage der Nullstellen sowie der Maxima und Minima der Verformungen. Deutlich wird dies, wenn man einen willkürlich gewählten Winkel  $\beta^* = \beta_{(k),i} + \Delta\beta$  vorgibt. Dann erhält man für die Radialverformung  $R$  unter Verwendung des Additionstheorems (2.3):

$$\begin{aligned} R(r, \phi, y, t) &= R_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta^*) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &= R_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i} + \Delta\beta) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &= R_{(k),i}(r, y) [\cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\Delta\beta) - \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \sin(\Delta\beta)] \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &= \cos(\Delta\beta) R_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &\quad - \sin(\Delta\beta) R_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.19)$$

In analoger Weise gilt diese Umformung für die Axialverformung  $V$ . Für die Tangentialverformung ergibt sich durch das Additionstheorem (2.2):

$$\begin{aligned} T(r, \phi, y, t) &= T_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta^*) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &= T_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i} + \Delta\beta) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &= T_{(k),i}(r, y) [\sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\Delta\beta) + \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \sin(\Delta\beta)] \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &= \cos(\Delta\beta) T_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &\quad + \sin(\Delta\beta) T_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Es gilt also insgesamt:

$$\begin{aligned} R(r, \phi, y, t) &= \cos(\Delta\beta) R_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &\quad - \sin(\Delta\beta) R_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ T(r, \phi, y, t) &= \cos(\Delta\beta) T_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &\quad - \sin(\Delta\beta) (-T_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha)) \\ V(r, \phi, y, t) &= \cos(\Delta\beta) V_{(k),i}(r, y) \cos(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \\ &\quad - \sin(\Delta\beta) V_{(k),i}(r, y) \sin(k\phi + \beta_{(k),i}) \cos(\omega_{(k),i}t + \alpha) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Durch eine Linearkombination der Lösungen (2.14) und (2.18) lässt sich also jede räumliche Orientierung darstellen. Dies stellt die eingangs erwähnte Isotropieeigenschaft der Eigenmoden dar. Diese Eigenschaft ist wiederum auf die Isotropie der rotationssymmetrischen Struktur zurückzuführen, d.h. auf die Tatsache, dass die rotationssymmetrische Struktur keine räumliche Vorzugsrichtung besitzt.

Verwendet man zur Darstellung des Eigenmodes, der sich aus dem Lösungsansatz (2.14) ergibt, eine Vektorschreibweise, so lässt sich der Eigenmode unter Verwendung der Additionstheoreme (2.2) und (2.3) in die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{i1} &= \begin{bmatrix} 0 & V_i(r, y) & R_i(r, y) \end{bmatrix}^T \cos(k_i \phi + \beta_i) + \begin{bmatrix} T_i(r, y) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \sin(k_i \phi + \beta_i) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & V_i(r, y) & R_i(r, y) \end{bmatrix}^T (\cos(k_i \phi) \cos \beta_i - \sin(k_i \phi) \sin \beta_i) \\
&\quad + \begin{bmatrix} T_i(r, y) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T (\sin(k_i \phi) \cos \beta_i + \cos(k_i \phi) \sin \beta_i) \\
&= \begin{bmatrix} T_i(r, y) \sin \beta_i \\ V_i(r, y) \cos \beta_i \\ R_i(r, y) \cos \beta_i \end{bmatrix} \cos(k_i \phi) + \begin{bmatrix} T_i(r, y) \cos \beta_i \\ -V_i(r, y) \sin \beta_i \\ -R_i(r, y) \sin \beta_i \end{bmatrix} \sin(k_i \phi) \\
&= \mathbf{U}_{i,A} \cos(k_i \phi) + \mathbf{U}_{i,B} \sin(k_i \phi)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Für den Eigenmode, der sich aus (2.18) ergibt, erhält man unter Verwendung der Theoreme (2.2) und (2.3) die entsprechende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{i2} &= \begin{bmatrix} 0 & V_i(r, y) & R_i(r, y) \end{bmatrix}^T \sin(k_i \phi + \beta_i) - \begin{bmatrix} T_i(r, y) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cos(k_i \phi + \beta_i) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & V_i(r, y) & R_i(r, y) \end{bmatrix}^T (\sin(k_i \phi) \cos \beta_i + \cos(k_i \phi) \sin \beta_i) \\
&\quad - \begin{bmatrix} T_i(r, y) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T (\cos(k_i \phi) \cos \beta_i - \sin(k_i \phi) \sin \beta_i) \\
&= \begin{bmatrix} T_i(r, y) \sin \beta_i \\ V_i(r, y) \cos \beta_i \\ R_i(r, y) \cos \beta_i \end{bmatrix} \sin(k_i \phi) + \begin{bmatrix} -T_i(r, y) \cos \beta_i \\ V_i(r, y) \sin \beta_i \\ R_i(r, y) \sin \beta_i \end{bmatrix} \cos(k_i \phi) \\
&= \mathbf{U}_{i,A} \sin(k_i \phi) - \mathbf{U}_{i,B} \cos(k_i \phi)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Für  $k = 0$  ergeben sich dagegen nur einfache Eigenformen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich für  $k = 0$  rotationssymmetrische Eigenformen ergeben, welche keine räumliche Orientierung besitzen. Setzt man in den Gleichungen (2.14)  $k = 0$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_{(0),i}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V_{(0),i}}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{(0),i}}{\partial r} \\
+ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial R_{(0),i}}{\partial r} + \frac{R_{(0),i}}{r} + \frac{\partial V_{(0),i}}{\partial y} \right) + \omega_{(0),i}^2 \frac{\rho}{G} V_{(0),i} = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_{(0),i}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 R_{(0),i}}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{(0),i}}{\partial r} - \frac{R_{(0),i}}{r^2} \\
+ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial R_{(0),i}}{\partial r} + \frac{R_{(0),i}}{r} + \frac{\partial V_{(0),i}}{\partial y} \right) + \omega_{(0),i}^2 \frac{\rho}{G} R_{(0),i} = 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Es zeigt sich, dass die Radialverformung und die Axialverformung einerseits von der Tangentialverformung andererseits entkoppelt sind. Setzt man umgekehrt in den Gleichungen (2.18)  $k = 0$ , so erhält man die entkoppelte Gleichung, welche die Tangentialverformungen beschreibt.

$$\frac{\partial^2 T_{(0),i}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T_{(0),i}}{\partial y^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{(0),i}}{\partial r} - \frac{T_{(0),i}}{r^2} + \omega_{(0),i}^2 \frac{\rho}{G} T_{(0),i} = 0 \tag{2.26}$$

Die Eigenformen, welche rotationssymmetrisch sind und eine reine Tangentialverformung beschreiben, sind die Torsionsschwingungen des Körpers.



Üblicherweise werden die Eigenmoden einer Struktur mit den Verformungen in kartesischen Koordinatenrichtungen beschrieben. Die vorliegende Lösung wurde jedoch für die Verformungen in Richtung von Zylinderkoordinaten ermittelt. Daher wird die folgende Transformation aufgestellt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_i(x = r \sin \phi, y, z = r \cos \phi) \\ V_i(x = r \sin \phi, y, z = r \cos \phi) \\ W_i(x = r \sin \phi, y, z = r \cos \phi) \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2(\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix} T_i(r, \phi, y) \\ V_i(r, \phi, y) \\ R_i(r, \phi, y) \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_i} \quad (2.27)$$

Wie bereits beschrieben, existieren für  $k > 0$  zu jeder Eigenkreisfrequenz zwei orthogonale Eigenformen. Aus dem Ansatz (2.14) ergibt sich die folgende Darstellung: Als Ergebnis kann festgehalten werden:

1. Bei einem Eigenmode einer ruhenden rotationssymmetrischen Struktur ist die Verteilung Verformungen in Radial-, Tangential- und Axialrichtung über den Umfang eine trigonometrische Funktion mit *genau einer* Periodizität  $k \in \mathbb{N}_0$ .
2. Für eine Periodizität  $k > 0$  treten doppelte Eigenfrequenzen auf, zu denen zwei orthogonale Moden existieren.

Der Grund für die Existenz der doppelten Eigenfrequenzen für  $k > 0$  soll noch kurz erläutert werden: Die rotationssymmetrische Struktur ist isotrop und besitzt daher keine räumliche "Vorzugsrichtung", d.h.: Während zwar die Periodizität und damit der Abstand zwischen den Maxima, Minima oder Nullstellen der Verformungsverteilungen bekannt sind, so hängt die absolute Lage der Maxima, Minima und Nullstellen auf dem Umfang, also die räumliche Orientierung, ebenso wie die Amplitude der Schwingung von den Anfangsbedingungen ab. Für die Schwingung eines Modes, die hinsichtlich der Amplitude und der räumlichen Orientierung eindeutig bestimmt ist, sind also zwei Anfangsbedingungen erforderlich. Dies lässt sich auch durch eine entsprechende Überlagerung zweier zusammengehöriger Eigenmoden mit der gleichen Eigenfrequenz beschreiben. Dagegen ist die Verteilung der Verformungen über den Umfang für Eigenmoden mit  $k = 0$  konstant. Somit gibt es bei diesen Eigenmoden keine räumliche Orientierung und daher auch keine zwei orthogonalen Moden mit der gleichen Eigenfrequenz.

## 2.2 Kinematik der Translationsbewegung

Es soll die Bewegung eines Punktes P betrachtet werden; an diesem Punkt befindet sich ein Massenelement des Körpers B. Unter Verwendung eines Referenzpunkts R und des körperfesten Koordinatensystems  $\mathcal{B}$  lautet die Lage des Punktes im Inertialsystem  $\mathcal{I}$ :

$$\mathbf{r}_P^{\mathcal{I}} = \mathbf{r}_R^{\mathcal{I}} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \mathbf{r}_{RP}^{\mathcal{B}} \quad (2.28)$$

Hierbei ist  $\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}}$  die Drehmatrix, durch die das körperfeste System  $\mathcal{B}$  auf das Inertialsystem abgebildet wird.

Bei einem elastischen Körper wird zweckmäßigerweise ein Bezugspunkt B eingeführt. An diesem Bezugspunkt befindet sich das betrachtete Partikel im undeformierten Zustand. Durch die Deformation  $\mathbf{r}_{BP}^{\mathcal{B}}$  wird das Partikel vom Bezugspunkt B an den aktuellen Punkt P verschoben. Damit lautet die Lage des Punktes  $\mathcal{P}$ :

$$\mathbf{r}_{RP}^{\mathcal{B}} = \mathbf{r}_{RB}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}_{BP}^{\mathcal{B}} \Rightarrow \mathbf{r}_P^{\mathcal{I}} = \mathbf{r}_R^{\mathcal{I}} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} (\mathbf{r}_{RB}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}_{BP}^{\mathcal{B}}) \quad (2.29)$$

Die absolute Geschwindigkeit des Punktes P ergibt sich durch die Ableitung des Lagevektors  $\mathbf{r}_P^{\mathcal{I}}$  nach der Zeit, wobei zu beachten ist, dass der Vektor  $\mathbf{r}_{RB}^{\mathcal{B}}$  zeitlich konstant ist.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P^{\mathcal{I}} &= \mathbf{v}_R^{\mathcal{I}} + \dot{\mathbf{A}}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \mathbf{r}_{RP}^{\mathcal{B}} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \dot{\mathbf{r}}_{RP}^{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{v}_R^{\mathcal{I}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \mathbf{r}_{RP}^{\mathcal{B}} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \dot{\mathbf{r}}_{RP}^{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{v}_R^{\mathcal{I}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} (\mathbf{r}_{RB}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}_{BP}^{\mathcal{B}}) + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \dot{\mathbf{r}}_{BP}^{\mathcal{B}}\end{aligned}\quad (2.30)$$

Hierbei ist  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}$  der Vektor der Drehgeschwindigkeit des körperfesten Systems  $\mathcal{B}$  gegenüber dem Inertialsystem  $\mathcal{I}$ . Hierfür gilt mit dem Tildeoperator:

$$\dot{\mathbf{A}}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} = \dot{\mathbf{A}}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \underbrace{\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}T} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}}}_{\mathbf{E}} = \underbrace{\dot{\mathbf{A}}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}T}}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \times \mathbf{x} \quad (2.31)$$

Durch die Transformation der Lage und der Geschwindigkeit in das körperfeste Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_P^{\mathcal{B}} &= \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{I}} \mathbf{r}_P^{\mathcal{I}} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{I}} [\mathbf{r}_R^{\mathcal{I}} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} (\mathbf{r}_{RB}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}_{BP}^{\mathcal{B}})] \\ &= \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{I}} \mathbf{r}_R^{\mathcal{I}} + \mathbf{r}_{RB}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}_{BP}^{\mathcal{B}}\end{aligned}\quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P^{\mathcal{B}} &= \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{I}} \mathbf{v}_P^{\mathcal{I}} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{I}} \left[ \mathbf{v}_R^{\mathcal{I}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} (\mathbf{r}_{RB}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}_{BP}^{\mathcal{B}}) + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \dot{\mathbf{r}}_{BP}^{\mathcal{B}} \right] \\ &= \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{I}} \mathbf{v}_R^{\mathcal{I}} + \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{I}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} (\mathbf{r}_{RB}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}_{BP}^{\mathcal{B}}) + \dot{\mathbf{r}}_{BP}^{\mathcal{B}}\end{aligned}\quad (2.33)$$

Wie schon im vorangegangenen Kapitel beschrieben, ist zur Beschreibung eines Rotationskörpers die Verwendung von Zylinderkoordinaten vorteilhaft. Auch hier soll als Achse der Rotations-symmetrie wieder die 2-Achse gewählt werden. Mit den bereits bekannten Zusammenhängen

$$x = r \sin \phi, \quad z = r \cos \phi, \quad U = R \sin \phi + T \cos \phi, \quad W = R \cos \phi - T \sin \phi \quad (2.34)$$

erhält man die folgende Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{RP}^{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} x + U(x, y, z, t) \\ y + V(x, y, z, t) \\ z + W(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [r + R(r, \phi, y, t)] \sin \phi + T(r, \phi, y, t) \cos \phi \\ y + V(r, \phi, y, t) \\ [r + R(r, \phi, y, t)] \cos \phi - T(r, \phi, y, t) \sin \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T(r, \phi, y, t) \\ V(r, \phi, y, t) \\ R(r, \phi, y, t) \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{A}_2(\phi) (\mathbf{x}_0(r, y) + \mathbf{u}(r, \phi, y, t))\end{aligned}\quad (2.35)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{RP}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A}_2(\phi) \dot{\mathbf{u}}(r, \phi, y, t) \quad (2.36)$$

Hierbei kennzeichnen der Vektor  $\mathbf{x}_0$  die Relativlage im unverformten Zustand und der Vektor  $\mathbf{u}$  die Deformationsbewegung.

Führt der elastische Rotationskörper eine Rotationsbewegung um seine Symmetrieachse aus, so lässt sich ein achsfestes Zwischensystem  $\mathcal{A}$  in der folgenden Weise definieren:

$$\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{A}} \mathbf{A}^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \quad (2.37)$$

Mit der 2-Achse als Symmetrieachse und dem Winkel  $\chi$  als Drehwinkel lautet die Matrix  $\mathbf{A}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ :

$$\mathbf{A}^{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & \sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi & 0 & \cos \chi \end{bmatrix} \quad (2.38)$$



Durch die Transformation der Relativlage in das achsfeste Koordinatensystem  $\mathcal{A}$  und geeignete Anwendung der Additionstheoreme (2.2) und (2.3) erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\text{RP}}^{\mathcal{A}} &= \mathbf{A}^{\mathcal{AB}} \mathbf{r}_{\text{RP}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{\mathcal{AB}} \mathbf{A}_2(\phi) (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(t)) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \chi & 0 & \sin \chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi & 0 & \cos \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(t)) \\
&= \begin{bmatrix} \cos \chi \cos \phi - \sin \chi \sin \phi & 0 & \cos \chi \sin \phi + \sin \chi \cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi \cos \phi - \cos \chi \sin \phi & 0 & -\sin \chi \sin \phi + \cos \chi \cos \phi \end{bmatrix} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(t)) \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\phi + \chi) & 0 & \sin(\phi + \chi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi + \chi) & 0 & \cos(\phi + \chi) \end{bmatrix} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(t)) = \mathbf{A}_2(\phi + \chi) (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(t)) \\
&= \mathbf{A}_2(\theta) (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(t)), \quad \theta = \phi + \chi
\end{aligned} \tag{2.39}$$

In analoger Weise erhält man für die Darstellung der Relativgeschwindigkeit im System  $\mathcal{A}$ :

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\mathcal{A}} = \mathbf{A}^{\mathcal{AB}} \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{\mathcal{AB}} \mathbf{A}_2(\phi) \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A}_2(\theta) \dot{\mathbf{u}}(t) \tag{2.40}$$

Die Kennzeichnung mit dem Stern anstelle des Punktes wird verwendet, um zu verdeutlichen, dass es sich hierbei um die in das System  $\mathcal{A}$  transformierte Geschwindigkeit und nicht um die Ableitung der Lage in der Darstellung im System  $\mathcal{A}$  handelt.

Für die Einwirkung raumfester Kräfte wird nun dasjenige Partikel betrachtet, welches im achsfesten System  $\mathcal{A}$  einen bestimmten Referenzort durchläuft. Dieser Ort wird durch den konstanten Winkel  $\theta$  bezeichnet. Umgekehrt bedeutet dies, dass immer dasjenige Partikel betrachtet wird, dessen Koordinate  $\phi$  gegeben ist durch:

$$\phi = \theta - \chi(t) \tag{2.41}$$

Üblicherweise werden die Deformationsbewegungen durch eine Modalsynthese beschrieben. Verwendet man als Formfunktionen die Eigenformen des Rotationskörpers, wie sie im vorigen Kapitel hergeleitet wurden, und berücksichtigt stets beide Eigenformen einer doppelten Eigenkreisfrequenz, so erhält man für die Modalsynthese der Tangential-, Axial- und Radialverformungen:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) q_{i1}(t) + \mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) q_{i2}(t)) \tag{2.42}$$

Wie bereits beschrieben, lautet die Struktur der Formfunktionen  $\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y)$  und  $\mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y)$ :

$$\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) = \mathbf{U}_{i,A} \cos(k_i \phi) + \mathbf{U}_{i,B} \sin(k_i \phi) \tag{2.43}$$

$$\mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) = \mathbf{U}_{i,A} \sin(k_i \phi) - \mathbf{U}_{i,B} \cos(k_i \phi) \tag{2.44}$$

In diese Form kann nun der zeitlich veränderliche Azimut  $\phi = \theta - \chi(t)$  eingesetzt werden, wobei im Folgenden die Zeitabhängigkeit von  $\chi$  nicht mehr explizit angegeben wird. Aufgrund der Additionstheoreme (2.2) und (2.3) und der Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen gilt:

$$\begin{aligned}
\phi = \theta - \chi &\Rightarrow \sin(k_i \phi) = \sin(k_i (\theta - \chi)) = \sin(k_i \theta) \cos(k_i \chi) - \cos(k_i \theta) \sin(k_i \chi) \\
&\Rightarrow \cos(k_i \phi) = \cos(k_i (\theta - \chi)) = \cos(k_i \theta) \cos(k_i \chi) + \sin(k_i \theta) \sin(k_i \chi)
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formfunktionen ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) &= \mathbf{U}_{i,A}(r, y) \cos(k_i \phi) + \mathbf{U}_{i,B}(r, y) \sin(k_i \phi) \\
&= \mathbf{U}_{i,A}(r, y) [\cos(k_i \theta) \cos(k_i \chi) + \sin(k_i \theta) \sin(k_i \chi)] \\
&\quad + \mathbf{U}_{i,B}(r, y) [\sin(k_i \theta) \cos(k_i \chi) - \cos(k_i \theta) \sin(k_i \chi)] \\
&= \underbrace{[\mathbf{U}_{i,A}(r, y) \cos(k_i \theta) + \mathbf{U}_{i,B}(r, y) \sin(k_i \theta)]}_{\mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y)} \cos(k_i \chi) \\
&\quad + \underbrace{[\mathbf{U}_{i,A}(r, y) \sin(k_i \theta) - \mathbf{U}_{i,B}(r, y) \cos(k_i \theta)]}_{\mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y)} \sin(k_i \chi) \\
&= \mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) \cos(k_i \chi) + \mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) \sin(k_i \chi) \tag{2.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) &= \mathbf{U}_{i,A}(r, y) \sin(k_i \phi) - \mathbf{U}_{i,B}(r, y) \cos(k_i \phi) \\
&= \mathbf{U}_{i,A}(r, y) [\sin(k_i \theta) \cos(k_i \chi) - \cos(k_i \theta) \sin(k_i \chi)] \\
&\quad - \mathbf{U}_{i,B}(r, y) [\cos(k_i \theta) \cos(k_i \chi) + \sin(k_i \theta) \sin(k_i \chi)] \\
&= \underbrace{[\mathbf{U}_{i,A}(r, y) \sin(k_i \theta) - \mathbf{U}_{i,B}(r, y) \cos(k_i \theta)]}_{\mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y)} \cos(k_i \chi) \\
&\quad + \underbrace{[-\mathbf{U}_{i,A}(r, y) \cos(k_i \theta) - \mathbf{U}_{i,B}(r, y) \sin(k_i \theta)]}_{-\mathbf{U}_{i1}} \sin(k_i \chi) \\
&= \mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) \cos(k_i \chi) - \mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) \sin(k_i \chi) \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den Moden  $\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y)$  und  $\mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y)$  einerseits und den Moden  $\mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y)$  und  $\mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y)$  andererseits soll hier näher betrachtet werden, um die Idee des Vorgehens deutlich zu machen. Es gilt:

$$\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) = \mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) \cos(k_i \chi) + \mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) \sin(k_i \chi) \tag{2.48}$$

$$\mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) = -\mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) \sin(k_i \chi) + \mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) \cos(k_i \chi) \tag{2.49}$$

Durch geeignete Umformungen erhält man:

$$\mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) = \mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) \cos(k_i \chi) - \mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) \sin(k_i \chi) \tag{2.50}$$

$$\mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) = \mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) \sin(k_i \chi) + \mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) \cos(k_i \chi) \tag{2.51}$$

Die Moden  $\mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y)$  und  $\mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y)$  sind die Moden des Rotationskörpers im Zwischenkoordinatensystem  $\mathcal{A}$ . Wie die Gleichungen (2.50) und (2.51) zeigen, lassen sich diese Moden als Linearkombinationen der Moden im körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  darstellen, wobei die Skalarfaktoren vom Winkel  $\chi$  abhängen und damit zeitlich veränderlich sind. Dadurch, dass beide Moden, die zu einer doppelten Eigenfrequenz gehören, bei der Modalsynthese berücksichtigt werden, bleibt die Isotropie der Struktur erhalten, so dass sich stets Bewegungen in jeder beliebigen räumlichen Orientierung, die im konkreten Fall durch das Koordinatensystem  $\mathcal{A}$  vorgegeben wird, beschreiben lassen.

Damit lautet die Modalsynthese für die Verformungen in Richtung der Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) q_{i1} + \mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) q_{i2}) \\
&= \sum_{i=1}^n ([\mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) \cos(k_i \chi) + \mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) \sin(k_i \chi)] q_{i1} \\
&\quad + [\mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) \cos(k_i \chi) - \mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) \sin(k_i \chi)] q_{i2}) \\
&= \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) [\cos(k_i \chi) q_{i1} - \sin(k_i \chi) q_{i2}] + \mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) [\sin(k_i \chi) q_{i1} + \cos(k_i \chi) q_{i2}]) \tag{2.52}
\end{aligned}$$

Für die Verformungsgeschwindigkeit erhält man analog:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(t) &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) \dot{q}_{i1} + \mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) \dot{q}_{i2}) \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) [\cos(k_i \chi) \dot{q}_{i1} - \sin(k_i \chi) \dot{q}_{i2}] + \mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) [\sin(k_i \chi) \dot{q}_{i1} + \cos(k_i \chi) \dot{q}_{i2}])\end{aligned}\quad (2.53)$$

Im vorigen Kapitel wurde der folgende Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Formfunktionen in kartesischen Koordinatenrichtungen  $\mathbf{V}_i(r, \phi, y)$  und in Richtungen der Zylinderkoordinaten  $\mathbf{U}_i(r, \phi, y)$  aufgestellt:

$$\mathbf{V}_i(r, \phi, y) = \mathbf{A}_2(\phi) \mathbf{U}_i(r, \phi, y) \quad (2.54)$$

Setzt man nun den Ausdruck der Modalsynthese (2.53) in die Gleichung (2.39) ein, so erhält man mit diesem Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{\text{RP}}^A &= \mathbf{A}_2(\theta) (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(t)) \\ &= \mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{U}_{i1}(r, \theta, y) [\cos(k_i \chi) q_{i1} - \sin(k_i \chi) q_{i2}] \\ &\quad + \mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{U}_{i2}(r, \theta, y) [\sin(k_i \chi) q_{i1} + \cos(k_i \chi) q_{i2}]) \\ &= \mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^n (\mathbf{V}_{i1}(r, \theta, y) [\cos(k_i \chi) q_{i1} - \sin(k_i \chi) q_{i2}] \\ &\quad + \mathbf{V}_{i2}(r, \theta, y) [\sin(k_i \chi) q_{i1} + \cos(k_i \chi) q_{i2}])\end{aligned}\quad (2.55)$$

In analoger Weise ergibt sich für die Relativgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^A &= \mathbf{A}_2(\theta) \dot{\mathbf{u}}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{V}_{i1}(r, \theta, y) [\cos(k_i \chi) \dot{q}_{i1} - \sin(k_i \chi) \dot{q}_{i2}] \\ &\quad + \mathbf{V}_{i2}(r, \theta, y) [\sin(k_i \chi) \dot{q}_{i1} + \cos(k_i \chi) \dot{q}_{i2}])\end{aligned}\quad (2.56)$$

Die Ausdrücke  $\mathbf{r}_{\text{RP}}^A$  und  $\dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^A$  lassen sich auch in Matrixschreibweise angeben. In dieser Schreibweise lautet die Modalsynthese der Deformationsbewegung für einen körperfesten Punkt:

$$\mathbf{r}_{\text{BP}}^B(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i(x, y, z) q_i(t) = \mathbf{S}(x, y, z) \mathbf{q}(t) \quad (2.57)$$

Hierbei werden die Modalkoordinaten  $q_i(t)$  in dem Vektor  $\mathbf{q}(t)$  und die Formfunktionen  $\mathbf{V}_i(x, y, z)$  spaltenweise in der Matrix  $\mathbf{S}(x, y, z)$  angeordnet:

$$\mathbf{S}(x, y, z) = [ \cdots \quad \mathbf{V}_{i-1}(x, y, z) \quad \mathbf{V}_i(x, y, z) \quad \mathbf{V}_{i+1}(x, y, z) \quad \cdots ] \quad (2.58)$$

Definiert man nun neue Modalkoordinaten der Form:

$$Q_{i1} = q_{i1} \cos(k_i \chi) - q_{i2} \sin(k_i \chi) \quad (2.59)$$

$$Q_{i2} = q_{i1} \sin(k_i \chi) + q_{i2} \cos(k_i \chi) \quad (2.60)$$

und ordnet diese Koordinaten in einem Vektor  $\mathbf{Q}$  an, so lässt sich eine Transformationsmatrix

**T** der folgenden Form angeben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ \vdots \\ Q_{l2} \\ Q_{l1} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cos(k_i \chi) & -\sin(k_i \chi) & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \sin(k_i \chi) & \cos(k_i \chi) & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cos(k_l \chi) & \sin(k_l \chi) & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \cdots & -\sin(k_l \chi) & \cos(k_l \chi) & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(\chi)} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \\ q_{l2} \\ q_{l1} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} \quad (2.61)$$

Auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $\mathbf{T}(\chi)$  stehen Elemente der Form  $\cos(k_i \chi)$ . Außerhalb der Diagonalen enthält jede Zeile und jede Spalte nur maximal ein Element der Form  $\pm \sin(k_i \chi)$ , welches von Null verschieden sein kann. Alle übrigen Elemente der Matrix sind gleich Null.

Damit lassen sich die beiden Vektoren  $\mathbf{r}_{\text{RP}}^A$  und  $\mathbf{r}_{\text{RP}}^{*A}$  nun in Matrixschreibweise angeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{RP}}^A &= \mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^n (\mathbf{V}_{i1}(r, \theta, y) [\cos(k_i \chi) q_{i1} - \sin(k_i \chi) q_{i2}] \\ &\quad + \mathbf{V}_{i2}(r, \theta, y) [\sin(k_i \chi) q_{i1} + \cos(k_i \chi) q_{i2}]) \\ &= \mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{x}_0 + \mathbf{S}(r, \theta, y) \mathbf{T}(\chi) \mathbf{q}(t) \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{RP}}^{*A} &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{V}_{i1}(r, \theta, y) [\cos(k_i \chi) \dot{q}_{i1} - \sin(k_i \chi) \dot{q}_{i2}] \\ &\quad + \mathbf{V}_{i2}(r, \theta, y) [\sin(k_i \chi) \dot{q}_{i1} + \cos(k_i \chi) \dot{q}_{i2}]) \\ &= \mathbf{S}(r, \theta, y) \mathbf{T}(\chi) \dot{\mathbf{q}}(t) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Transformiert man die beiden Vektoren  $\mathbf{r}_{\text{RP}}^A$  und  $\mathbf{r}_{\text{RP}}^{*A}$  nun wieder in das körperfeste Koordinatensystem  $\mathcal{B}$ , so erhält man:

$$\mathbf{r}_{\text{RP}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi) \mathbf{r}_{\text{RP}}^A = \mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi) \mathbf{r}_{\text{RB}}^A + \mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi) \mathbf{S}(r, \theta, y) \mathbf{T}(\chi) \mathbf{q}(t), \quad \mathbf{r}_{\text{RB}}^A = \mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{x}_0 = \text{const} \quad (2.64)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi) \dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^A = \mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi) \mathbf{S}(r, \theta, y) \mathbf{T}(\chi) \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (2.65)$$

In dieser Formulierung sind die Referenzlage  $\mathbf{r}_{\text{RB}}^A$  sowie die Formfunktionen  $\mathbf{S}(r, \theta, y)$  konstant. Die Drehmatrix  $\mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi)$  und die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}(\chi)$  hängen dagegen von  $\chi$  und damit von der Zeit  $t$  ab.

Für die Anwendung des Jourdain'schen Prinzips wird die virtuelle Geschwindigkeit des Punktes benötigt. Mit den Umformungsregeln des Tildeoperators sowie durch Einsetzen des Ausdrucks (2.65) erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{P}}^{\mathcal{B}} &= \mathbf{A}^{\mathcal{B}I} \mathbf{v}_{\text{R}}^I + \mathbf{A}^{\mathcal{B}I} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{IB}}^I \mathbf{A}^{\text{IB}} (\mathbf{r}_{\text{RB}}^{\mathcal{B}} + \mathbf{r}_{\text{BP}}^{\mathcal{B}}) + \dot{\mathbf{r}}_{\text{BP}}^{\mathcal{B}} \\ &= \mathbf{A}^{\mathcal{B}I} \mathbf{v}_{\text{R}}^I - (\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RB}}^{\mathcal{B}} + \tilde{\mathbf{r}}_{\text{BP}}^{\mathcal{B}}) \mathbf{A}^{\mathcal{B}I} \boldsymbol{\omega}_{\text{IB}}^I + \mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi) \mathbf{S}(r, \theta, y) \mathbf{T}(\chi) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Die virtuelle Geschwindigkeit ergibt sich zu:

$$\delta' \mathbf{v}_{\text{P}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}I} \delta' \mathbf{v}_{\text{R}}^I - (\tilde{\mathbf{r}}_{\text{RB}}^{\mathcal{B}} + \tilde{\mathbf{r}}_{\text{BP}}^{\mathcal{B}}) \mathbf{A}^{\mathcal{B}I} \delta' \boldsymbol{\omega}_{\text{IB}}^I + \mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi) \mathbf{S}(r, \theta, y) \mathbf{T}(\chi) \delta \dot{\mathbf{q}} \quad (2.67)$$

Der Winkel  $\chi$  ist in der Drehmatrix  $\mathbf{A}^{\mathcal{B}A}(\chi)$ , in der Modalmatrix  $\mathbf{S}(r, \theta, y) = \mathbf{S}(r, \phi + \chi, y)$  und der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}(\chi)$  enthalten; folglich kann die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\chi}$  nur in Ableitungen dieser Terme nach der Zeit auftreten. Derartige Ableitungen sind in dem dritten

Summanden des Ausdrucks (2.67) nicht enthalten, so dass die einzigen Geschwindigkeitsterme, die zu variieren sind, in dem Vektor  $\delta\dot{\mathbf{q}}$  enthalten sind. Es gilt also:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{RP}^{\mathcal{B}}}{\partial \dot{\chi}} = \mathbf{0} \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_{RP}^{\mathcal{B}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}} \mathbf{S}^{\mathcal{A}}(r, \theta, y) \mathbf{T}(\chi) \quad (2.69)$$

## 2.3 Kinematik der Rotationsbewegung

Definiert man ein an dem betrachteten Punkt P befestigtes Koordinatensystem  $\mathcal{P}$ , so können neben den im Kapitel 2.2 behandelten Translationsbewegungen auch Rotationsbewegungen beschrieben werden. Unter Verwendung des körperfesten Koordinatensystems  $\mathcal{B}$  gilt für die Drehmatrix  $\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{P}}$ , durch die das System  $\mathcal{P}$  in das Inertialsystem  $\mathcal{I}$  übergeht:

$$\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{P}} = \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}} \quad (2.70)$$

Die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{I}\mathcal{P}}^{\mathcal{I}} &= \frac{d\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{P}}}{dt} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{P}T} = \left[ \frac{d\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}}}{dt} \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \frac{d\mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}}}{dt} \right] \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}T} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}T} \\ &= \frac{d\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}}}{dt} \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}} \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}T} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}T} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \frac{d\mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}}}{dt} \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}T} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}T} \\ &= \frac{d\mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}}}{dt} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}T} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \frac{d\mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}}}{dt} \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}T} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}T} \\ &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{B}\mathcal{P}}^{\mathcal{B}} \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}T} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Stellt man die Winkelgeschwindigkeit als Vektor dar, so gilt also:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}\mathcal{P}}^{\mathcal{I}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}} + \mathbf{A}^{\mathcal{I}\mathcal{B}} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}\mathcal{P}}^{\mathcal{B}} \quad (2.72)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Koordinatensystems  $\mathcal{P}$  lässt sich also durch Überlagerung der absoluten Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{I}\mathcal{B}}^{\mathcal{I}}$  des Körpers und der aus den Deformationsbewegungen herrührenden Relativwinkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}\mathcal{P}}^{\mathcal{B}}$  darstellen.

Die folgenden Betrachtungen lehnen sich sehr eng an [2] an. Die Drehbewegungen, die infolge von Deformationsbewegungen entstehen, lassen sich mittels des Deformationsgradienten  $\mathcal{F}$  beschreiben. Für die Lage  $\mathbf{r}$  eines Partikels gelte:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{u} \quad (2.73)$$

Hierbei bezeichnen  $\mathbf{x}$  die Referenzlage des Partikels, also beispielsweise die Lage im undefor-mierten Zustand, und  $\mathbf{u}$  die Deformationsbewegung. Dann lautet der Deformationsgradient:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^T} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} \quad (2.74)$$

Voll ausgeschrieben bedeutet dies:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{F}_w = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Für kleine Deformationen gilt für die Drehmatrix  $\mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}}$  näherungsweise:

$$\mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{P}} \approx \mathbf{E} + \frac{1}{2} (\mathbf{F}_w - \mathbf{F}_w^T) \quad (2.76)$$

Im Einzelnen bedeutet dies:

$$\mathbf{A}^{BP} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) & 1 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) & 1 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Der Gradient der Verformungsgeschwindigkeit ergibt sich zu:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.78)$$

Dieser Gradient lässt sich in einen symmetrischen und einen schiefssymmetrischen Anteil aufspalten, wobei der symmetrische Anteil  $\mathbf{D}$  die Verzerrungsgeschwindigkeit und der schiefssymmetrische Anteil  $\mathbf{V}$  die Drehgeschwindigkeit beschreibt:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{V} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.79)$$

Dieser schiefssymmetrische Anteil entspricht der Darstellung der gesuchten Relativwinkelgeschwindigkeit als Tilde-Matrix:

$$\tilde{\omega}_{BP}^B = \mathbf{V} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.80)$$

Die Ableitung des Deformationsgradienten nach der Zeit ergibt sich zu:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^T} \right] = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}^T} \quad (2.81)$$

Sind die Deformationsbewegungen, wie bereits angenommen, sehr klein, so gilt unter Vernachlässigung kleiner Terme:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \approx \dot{\mathbf{F}} \mathbf{E} = \dot{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{U}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{U}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{V}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{W}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{W}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{W}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Damit erhält man für die Winkelgeschwindigkeit den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{BP}^B &\approx \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{D,3} & \omega_{D,2} \\ \omega_{D,3} & 0 & -\omega_{D,1} \\ -\omega_{D,2} & \omega_{D,1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{V}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{W}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{W}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \omega_{BP}^B &\approx \begin{bmatrix} \omega_{D,1} \\ \omega_{D,2} \\ \omega_{D,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{W}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{U}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{W}}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{V}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{U}}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Für eine allgemeine Modalsynthese gilt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} &= \sum_i \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} q_i \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} \dot{q}_i \\ \Rightarrow \omega_{D,1} &= \sum_i \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial W_i}{\partial y} - \frac{\partial V_i}{\partial x} \right] \dot{q}_i = \sum_i \Psi_i^{(1)} \dot{q}_i \\ \omega_{D,2} &= \sum_i \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial z} - \frac{\partial W_i}{\partial x} \right] \dot{q}_i = \sum_i \Psi_i^{(2)} \dot{q}_i \\ \omega_{D,3} &= \sum_i \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V_i}{\partial x} - \frac{\partial U_i}{\partial y} \right] \dot{q}_i = \sum_i \Psi_i^{(3)} \dot{q}_i \end{aligned} \quad (2.84)$$

Im Kapitel 2.1 wurden die Verteilungen der Verformungen für die Eigenformen einer rotationssymmetrischen Struktur hergeleitet. Für die einfachste Darstellung wurden Zylinderkoordinaten sowie Verformungen in Richtung der Zylinderkoordinaten verwendet. Die Zusammenhänge zwischen den Verformungen  $U$  und  $W$  in kartesischen Koordinatenrichtungen einerseits und den Verformungen  $R$  und  $T$  in Richtung der Zylinderkoordinaten lauten:

$$U = R \sin \phi + T \cos \phi, \quad W = R \cos \phi - T \sin \phi \quad (2.85)$$

Die Zusammenhänge zwischen den Ableitungen nach den kartesischen Koordinaten  $x$  und  $z$  einerseits und den Polarkoordinaten  $r$  und  $\phi$  andererseits waren gegeben durch:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \cos \phi, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \sin \phi \quad (2.86)$$

Damit erhält man für die Ableitung der Axialverformung  $V$  nach den Koordinaten  $x$  und  $z$  sofort:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \cos \phi \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \sin \phi \end{aligned} \quad (2.87)$$

Für die Ableitungen der Verformungen  $U$  und  $W$  nach der Axialkoordinate  $y$  ergibt sich:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} \sin \phi + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \phi \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} \cos \phi - \frac{\partial T}{\partial y} \sin \phi \quad (2.89)$$

Komplizierter ist die Bildung der Ableitungen  $\frac{\partial U}{\partial z}$  und  $\frac{\partial W}{\partial x}$ . Zunächst sollen die Ableitungen von  $U$  und  $W$  nach den Polarkoordinaten  $r$  und  $\phi$  betrachtet werden; hierfür erhält man:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r} \sin \phi + \frac{\partial T}{\partial r} \cos \phi \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial r} \cos \phi - \frac{\partial T}{\partial r} \sin \phi \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{\partial R}{\partial \phi} \sin \phi + R \cos \phi + \frac{\partial T}{\partial \phi} \cos \phi - T \sin \phi \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = \frac{\partial R}{\partial \phi} \cos \phi - R \sin \phi - \frac{\partial T}{\partial \phi} \sin \phi - T \cos \phi \quad (2.93)$$

Setzt man dies in die Ableitungsregeln 2.86 ein, so ergibt sich für  $\frac{\partial U}{\partial z}$  durch geeignete Umformungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \sin \phi \\ &= \left[ \frac{\partial R}{\partial r} \sin \phi + \frac{\partial T}{\partial r} \cos \phi \right] \cos \phi - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial R}{\partial \phi} \sin \phi + R \cos \phi + \frac{\partial T}{\partial \phi} \cos \phi - T \sin \phi \right] \sin \phi \\ &= \frac{\partial T}{\partial r} \cos^2 \phi + \left[ \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] \sin \phi \cos \phi + \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \phi} + \frac{T}{r} \right] \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (2.94)$$

Für den Ausdruck  $\frac{\partial W}{\partial x}$  erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \phi} \cos \phi \\ &= \left[ \frac{\partial R}{\partial r} \cos \phi - \frac{\partial T}{\partial r} \sin \phi \right] \sin \phi + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial R}{\partial \phi} \cos \phi - R \sin \phi - \frac{\partial T}{\partial \phi} \sin \phi - T \cos \phi \right] \cos \phi \\ &= -\frac{\partial T}{\partial r} \sin^2 \phi + \left[ \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] \sin \phi \cos \phi + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \phi} - \frac{T}{r} \right] \cos^2 \phi \end{aligned} \quad (2.95)$$

Hieraus erhält man durch geeignete Umformungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos \phi - \frac{\partial T}{\partial y} \sin \phi \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \cos \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \sin \phi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial r} \right] \cos \phi + \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] \sin \phi \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial r} \cos^2 \phi + \left[ \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] \sin \phi \cos \phi + \left[ -\frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \phi} + \frac{T}{r} \right] \sin^2 \phi \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T}{\partial r} \sin^2 \phi + \left[ \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] \sin \phi \cos \phi + \left[ \frac{1}{r} \frac{R}{\partial \phi} - \frac{T}{r} \right] \cos^2 \phi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{T}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial \phi} \right] \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial r} \sin \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \cos \phi \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial y} \sin \phi + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \phi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \frac{\partial T}{\partial y} \right] \cos \phi + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial y} \right] \sin \phi \end{aligned} \quad (2.98)$$

Damit lauten die Modalkoeffizienten für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \Psi_i &= \begin{bmatrix} \Psi_i^1 \\ \Psi_i^2 \\ \Psi_i^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial R_i}{\partial y} - \frac{\partial V_i}{\partial r} \right] \cos \phi + \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial T_i}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_i}{\partial \phi} \right] \sin \phi \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{T_i}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial \phi} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial V_i}{\partial \phi} - \frac{\partial T_i}{\partial y} \right] \cos \phi + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial V_i}{\partial r} - \frac{\partial R_i}{\partial y} \right] \sin \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial R_i}{\partial y} - \frac{\partial V_i}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_i}{\partial r} + \frac{T_i}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R_i}{\partial \phi} \right] \\ \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial T_i}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_i}{\partial \phi} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_i^{(1)} \\ \Gamma_i^{(2)} \\ \Gamma_i^{(3)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Diese Modalkoeffizienten  $\Psi_i$  lassen sich also in analoger Weise zu den Modalkoeffizienten  $V_i$  darstellen:

$$\Psi_i = \mathbf{A}_2(\phi) \Gamma_i \quad (2.100)$$

Im Kapitel 2.1 wurde weiterhin gezeigt, dass die Eigenfrequenzen einer rotationssymmetrischen Struktur für Periodizitäten  $k > 1$  doppelt auftreten und dass zu jedem dieser doppelten Eigenfrequenzen zwei orthogonale Eigenformen der folgenden Form gehören:

$$\mathbf{U}_{i1} = \mathbf{U}_{i,A} \cos(k_i \phi) + \mathbf{U}_{i,B} \sin(k_i \phi) \quad (2.101)$$

$$\mathbf{U}_{i2} = \mathbf{U}_{i,A} \sin(k_i \phi) - \mathbf{U}_{i,B} \cos(k_i \phi) \quad (2.102)$$

Setzt man die Verteilungen der Radial-, Tangential- und Axialverformung der Formfunktion  $\mathbf{U}_{i1}$ :

$$\mathbf{U}_{i1} = \begin{bmatrix} T_{i1} \\ V_{i1} \\ R_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{i,A} \\ V_{i,A} \\ R_{i,A} \end{bmatrix} \cos(k_i \phi) + \begin{bmatrix} T_{i,B} \\ V_{i,B} \\ R_{i,B} \end{bmatrix} \sin(k_i \phi) \quad (2.103)$$



in die Koeffizienten  $\Gamma_i^{(1)}$ ,  $\Gamma_i^{(2)}$  und  $\Gamma_i^{(3)}$ , die in (2.99) definiert wurden, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i1}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i1}}{\partial y} - \frac{\partial V_{i1}}{\partial r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i,A}}{\partial y} \cos(k_i \phi) + \frac{\partial R_{i,B}}{\partial y} \sin(k_i \phi) - \frac{\partial V_{i,A}}{\partial r} \cos(k_i \phi) - \frac{\partial V_{i,B}}{\partial r} \sin(k_i \phi) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i,A}}{\partial y} - \frac{\partial V_{i,A}}{\partial r} \right) \cos(k_i \phi) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i,B}}{\partial y} - \frac{\partial V_{i,B}}{\partial r} \right) \sin(k_i \phi) \\
&= \Gamma_{i,A}^{(1)} \cos(k_i \phi) + \Gamma_{i,B}^{(1)} \sin(k_i \phi) \tag{2.104}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i1}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i1}}{\partial r} + \frac{T_{i1}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R_{i1}}{\partial \phi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i,A}}{\partial r} \cos(k_i \phi) + \frac{\partial T_{i,B}}{\partial r} \sin(k_i \phi) + \frac{T_{i,A} \cos(k_i \phi) + T_{i,B} \sin(k_i \phi)}{r} \right. \\
&\quad \left. - \frac{-R_{i,A} k_i \sin(k_i \phi) + R_{i,B} k_i \cos(k_i \phi)}{r} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i,A}}{\partial r} + \frac{T_{i,A}}{r} - \frac{R_{i,B}}{r} k_i \right] \cos(k_i \phi) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i,B}}{\partial r} + \frac{T_{i,B}}{r} + \frac{R_{i,A}}{r} k_i \right] \sin(k_i \phi) \\
&= \Gamma_{i,A}^{(2)} \cos(k_i \phi) + \Gamma_{i,B}^{(2)} \sin(k_i \phi) \tag{2.105}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i1}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i1}}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{i1}}{\partial \phi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i,A}}{\partial y} \cos(k_i \phi) - \frac{\partial T_{i,B}}{\partial y} \sin(k_i \phi) + \frac{-V_{i,A} k_i \sin(k_i \phi) + V_{i,B} k_i \cos(k_i \phi)}{r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i,A}}{\partial y} + \frac{V_{i,B}}{r} k_i \right) \cos(k_i \phi) + \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i,B}}{\partial y} - \frac{V_{i,A}}{r} k_i \right) \sin(k_i \phi) \\
&= \Gamma_{i,A}^{(3)} \cos(k_i \phi) + \Gamma_{i,B}^{(3)} \sin(k_i \phi) \tag{2.106}
\end{aligned}$$

Hierdurch werden die folgenden Koeffizienten definiert:

$$\Gamma_{i,A}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i,A}}{\partial y} - \frac{\partial V_{i,A}}{\partial r} \right) \tag{2.107}$$

$$\Gamma_{i,B}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i,B}}{\partial y} - \frac{\partial V_{i,B}}{\partial r} \right) \tag{2.108}$$

$$\Gamma_{i,A}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i,A}}{\partial r} + \frac{T_{i,A}}{r} - \frac{R_{i,B}}{r} k_i \right] \tag{2.109}$$

$$\Gamma_{i,B}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i,B}}{\partial r} + \frac{T_{i,B}}{r} + \frac{R_{i,A}}{r} k_i \right] \tag{2.110}$$

$$\Gamma_{i,A}^{(3)} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i,A}}{\partial y} + \frac{V_{i,B}}{r} k_i \right) \tag{2.111}$$

$$\Gamma_{i,B}^{(3)} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i,B}}{\partial y} - \frac{V_{i,A}}{r} k_i \right) \tag{2.112}$$

Die Verteilungen der Verformungen für die Formfunktion  $U_{i2}$  lauten:

$$\mathbf{U}_{i2} = \begin{bmatrix} T_{i2} \\ V_{i2} \\ R_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{i,A} \\ V_{i,A} \\ R_{i,A} \end{bmatrix} \sin(k_i \phi) - \begin{bmatrix} T_{i,B} \\ V_{i,B} \\ R_{i,B} \end{bmatrix} \cos(k_i \phi) \tag{2.113}$$

Damit ergeben sich die folgenden Modalkoeffizienten für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i2}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i2}}{\partial y} - \frac{\partial V_{i2}}{\partial r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i,A}}{\partial y} \sin(k_i \phi) - \frac{\partial R_{i,B}}{\partial y} \cos(k_i \phi) - \frac{\partial V_{i,A}}{\partial r} \sin(k_i \phi) + \frac{\partial V_{i,B}}{\partial r} \cos(k_i \phi) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_{i,A}}{\partial y} - \frac{\partial V_{i,A}}{\partial r} \right) \sin(k_i \phi) + \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial R_{i,B}}{\partial y} + \frac{\partial V_{i,B}}{\partial r} \right) \cos(k_i \phi) \\
&= \Gamma_{i,A}^{(1)} \sin(k_i \phi) - \Gamma_{i,B}^{(1)} \cos(k_i \phi) \tag{2.114}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i2}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i2}}{\partial r} + \frac{T_{i2}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R_{i2}}{\partial \phi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i,A}}{\partial r} \sin(k_i \phi) - \frac{\partial T_{i,B}}{\partial r} \cos(k_i \phi) + \frac{\partial T_{i,A} \sin(k_i \phi) - \partial T_{i,B} \cos(k_i \phi)}{r} \right. \\
&\quad \left. - \frac{R_{i,A} k_i \cos(k_i \phi) + R_{i,B} k_i \sin(k_i \phi)}{r} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial T_{i,A}}{\partial r} + \frac{T_{i,A}}{r} - \frac{R_{i,B}}{r} k_i \right] \sin(k_i \phi) + \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial T_{i,B}}{\partial r} - \frac{\partial T_{i,B}}{r} - \frac{R_{i,A}}{r} k_i \right] \cos(k_i \phi) \\
&= \Gamma_{i,A}^{(2)} \sin(k_i \phi) - \Gamma_{i,B}^{(2)} \cos(k_i \phi) \tag{2.115}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{i2}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i2}}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_{i2}}{\partial \phi} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i,A}}{\partial y} \sin(k_i \phi) + \frac{\partial T_{i,B}}{\partial y} \cos(k_i \phi) + \frac{V_{i,A} k_i \cos(k_i \phi) + V_{i,B} k_i \sin(k_i \phi)}{r} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial T_{i,A}}{\partial y} + \frac{V_{i,B}}{r} k_i \right) \sin(k_i \phi) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial T_{i,B}}{\partial y} + \frac{V_{i,A}}{r} k_i \right) \cos(k_i \phi) \\
&= \Gamma_{i,A}^{(3)} \sin(k_i \phi) - \Gamma_{i,B}^{(3)} \cos(k_i \phi) \tag{2.116}
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}_{i1}(r, \phi, y) &= \begin{bmatrix} \Gamma_{i,A}^{(1)}(r, y) \\ \Gamma_{i,A}^{(2)}(r, y) \\ \Gamma_{i,A}^{(3)}(r, y) \end{bmatrix} \cos(k_i \phi) + \begin{bmatrix} \Gamma_{i,B}^{(1)}(r, y) \\ \Gamma_{i,B}^{(2)}(r, y) \\ \Gamma_{i,B}^{(3)}(r, y) \end{bmatrix} \sin(k_i \phi) \\
&= \mathbf{\Gamma}_{i,A}(r, y) \cos(k_i \phi) + \mathbf{\Gamma}_{i,B}(r, y) \sin(k_i \phi) \tag{2.117}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}_{i2}(r, \phi, y) &= \begin{bmatrix} \Gamma_{i,A}^{(1)}(r, y) \\ \Gamma_{i,A}^{(2)}(r, y) \\ \Gamma_{i,A}^{(3)}(r, y) \end{bmatrix} \sin(k_i \phi) - \begin{bmatrix} \Gamma_{i,B}^{(1)}(r, y) \\ \Gamma_{i,B}^{(2)}(r, y) \\ \Gamma_{i,B}^{(3)}(r, y) \end{bmatrix} \cos(k_i \phi) \\
&= \mathbf{\Gamma}_{i,A}(r, y) \sin(k_i \phi) - \mathbf{\Gamma}_{i,B}(r, y) \cos(k_i \phi) \tag{2.118}
\end{aligned}$$

Im Kapitel 2.2 wurde die translatorische Geschwindigkeit für einen veränderlichen Bezugspunkt hergeleitet. Ausgangspunkt war die Modalsynthese:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\mathcal{B}} = \sum_i [\mathbf{V}_{i1}(r, \phi, y) \dot{q}_{i1}(t) + \mathbf{V}_{i2}(r, \phi, y) \dot{q}_{i2}(t)] \tag{2.119}$$

Unter den Voraussetzungen, dass

- stets zwei Formfunktionen  $\mathbf{V}_{i1}(r, \phi, y) = \mathbf{A}_2(\phi) \mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y)$  und  $\mathbf{V}_{i2}(r, \phi, y) = \mathbf{A}_2(\phi) \mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y)$  in der Modalsynthese berücksichtigt werden und dass
- die Formfunktionen die Struktur  $\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) = \mathbf{U}_{i,A} \cos(k_i \phi) + \mathbf{U}_{i,B} \sin(k_i \phi)$  und  $\mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) = \mathbf{U}_{i,A} \sin(k_i \phi) - \mathbf{U}_{i,B} \cos(k_i \phi)$  haben,

lautete die Geschwindigkeit eines Punktes, der im Koordinatensystem  $\mathcal{A}$  eine konstante Referenzlage hat, welche durch den Azimut  $\theta = \text{const}$  beschrieben wird:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{RP}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\chi)\mathbf{S}(r, \theta, y)\mathbf{T}(\chi)\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (2.120)$$

Hierbei entsteht die Modalmatrix  $\mathbf{S}(r, \theta, y)$  durch spaltenweise Anordnung der Formfunktionen  $\mathbf{V}_{i1}(r, \theta, y)$  und  $\mathbf{V}_{i2}(r, \theta, y)$ .

Diese Voraussetzungen sind auch für die Modalkoeffizienten der Winkelgeschwindigkeit gegeben, denn es gilt:

$$\Psi_{i1}(r, \phi, y) = \mathbf{A}_2(\phi)\Gamma_{i1}(r, \phi, y) \quad (2.121)$$

$$\Psi_{i2}(r, \phi, y) = \mathbf{A}_2(\phi)\Gamma_{i2}(r, \phi, y) \quad (2.122)$$

$$\Gamma_{i1}(r, \phi, y) = \Gamma_{i,A}(r, y) \cos(k_i\phi) + \Gamma_{i,B}(r, y) \sin(k_i\phi) \quad (2.123)$$

$$\Gamma_{i2}(r, \phi, y) = \Gamma_{i,A}(r, y) \sin(k_i\phi) - \Gamma_{i,B}(r, y) \cos(k_i\phi) \quad (2.124)$$

Formuliert man also eine Modalsynthese für die Winkelgeschwindigkeit infolge der Deformationsbewegungen der folgenden Form:

$$\omega_{\mathcal{B}\mathcal{P}}^{\mathcal{B}} = \sum_i [\Psi_{i1}(r, \phi, y)\dot{q}_{i1} + \Psi_{i2}(r, \phi, y)\dot{q}_{i2}] \quad (2.125)$$

und ordnet die Modalkoeffizienten  $\Psi_{i1}(r, \theta, y)$  und  $\Psi_{i2}(r, \theta, y)$  spaltenweise in einer Matrix  $\Theta(r, \theta, y)$  an:

$$\Theta(r, \theta, y) = \begin{bmatrix} \cdots & \Psi_{i1}(r, \theta, y) & \Psi_{i2}(r, \theta, y) & \Psi_{j1}(r, \theta, y) & \Psi_{j2}(r, \theta, y) & \cdots \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

so lautet die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_{\mathcal{B}\mathcal{P}}^{\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\chi)\Theta(r, \theta, y)\mathbf{T}(\chi)\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (2.127)$$

Stellt man die in (2.77) definierten kleinen Drehwinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  in einer Modalsynthese der folgenden Form dar:

$$\begin{bmatrix} \alpha(r, \phi, y) \\ \beta(r, \phi, y) \\ \gamma(r, \phi, y) \end{bmatrix} = \sum_i [\Psi_{i1}(r, \phi, y)q_{i1}(t) + \Psi_{i2}(r, \phi, y)q_{i2}(t)] \quad (2.128)$$

so lauten die Drehwinkel für einen konstanten Azimut  $\theta$  im Koordinatensystem  $\mathcal{A}$  in analoger Weise zu (2.127):

$$\begin{bmatrix} \alpha(r, \theta, y) \\ \beta(r, \theta, y) \\ \gamma(r, \theta, y) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\chi)\Theta(r, \theta, y)\mathbf{T}(\chi)\mathbf{q}(t) \quad (2.129)$$

## 2.4 Analyse der Formfunktionen

Bei praktischen Anwendungen werden die Formfunktionen  $\mathbf{V}_i$  üblicherweise mit der Finite-Elemente-Methode berechnet. Dies bedeutet wiederum, dass nur Verschiebungen an diskreten Punkten zur Verfügung stehen. Die Periodizität  $k_i$  einer Formfunktion, die für die in Kapitel 2.2 hergeleitete Beschreibung der Kinematik unerlässlich ist, ist daher zunächst nicht bekannt. Weiterhin besteht eine wesentliche Voraussetzung für diese Beschreibung der Kinematik darin, dass für  $k_i > 0$  stets Paare von Formfunktionen verwendet werden, wobei zwischen diesen beiden Formfunktionen der durch die Gleichungen 2.43 und 2.44 beschriebene Zusammenhang besteht. Für Formfunktionen, die mittels der Finite-Elemente-Methode berechnet werden, ist nicht sofort ersichtlich, welche Formfunktionen ein Paar bilden und welche Funktion jeweils den Funktionen  $\mathbf{V}_{i1}$  und  $\mathbf{V}_{i2}$  entspricht. Für die Anwendung der Kinematik eines bewegten Punktes ist also eine Vorabanalyse der Formfunktionen, ein Preprocessing, erforderlich, welches im Folgenden erläutert werden soll.

## 2.4.1 Auswahl der Punkte

Im Kapitel 2.1 wurde gezeigt, dass die Verteilung der Radialverformung  $R$ , der Tangentialverformung  $T$  und der Axialverformung  $V$  über den Umfang für eine Eigenform eines Rotationskörpers die folgende Form haben:

$$\begin{bmatrix} T_i(r, \phi, y) \\ V_i(r, \phi, y) \\ R_i(r, \phi, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{i,C}(r, y) \\ V_{i,C}(r, y) \\ R_{i,C}(r, y) \end{bmatrix} \cos(k_i \phi) + \begin{bmatrix} T_{i,S}(r, y) \\ V_{i,S}(r, y) \\ R_{i,S}(r, y) \end{bmatrix} \sin(k_i \phi) \quad (2.130)$$

Wie bereits erwähnt, bewegt sich der betrachtete Punkt auf einer Bahn über den Körper, für die  $r = \text{const} \wedge y = \text{const}$  gilt. Daher werden aus dem Ergebnis der Finite-Elemente-Rechnung werden für eine Eigenform nun die Verschiebungen  $\mathbf{V}_i(x_j, y_j, z_j)$  an  $n_P$  Punkten ausgewählt, für die gilt:

$$r_j = \sqrt{x_j^2 + z_j^2} = r_0 = \text{const}, \quad y_j = y_0 = \text{const}, \quad j = 1 \dots n_P \quad (2.131)$$

Der Winkel  $\phi_j$  ergibt sich zu:

$$\phi_j = \begin{cases} \arctan(x_j/z_j) & \text{für } z_j > 0 \\ \pi/2 & \text{für } z_j = 0 \wedge x_j > 0 \\ \arctan(x_j/z_j) + \pi & \text{für } z_j < 0 \\ -\pi/2 & \text{für } z_j = 0 \wedge x_j < 0 \end{cases} \quad (2.132)$$

Zwischen den Verformungen  $U$  und  $W$  einerseits und den Verformungen  $R$  und  $T$  andererseits bestehen die Zusammenhänge:

$$U = R \sin \phi + T \cos \phi, \quad W = R \cos \phi - T \sin \phi \Leftrightarrow R = U \sin \phi + W \cos \phi, \quad T = U \cos \phi - W \sin \phi \quad (2.133)$$

Damit erhält man aus den in  $\mathbf{V}_i(x_j, y_j, z_j)$  enthaltenen Verschiebungen  $U_i(r_0, \phi_j, y_0)$  und  $W_i(r_0, \phi_j, y_0)$ :

$$R_i(r_0, \phi_j, y_0) = U_i(r_0, \phi_j, y_0) \sin \phi_j + W_i(r_0, \phi_j, y_0) \cos \phi_j \quad (2.134)$$

$$T_i(r_0, \phi_j, y_0) = U_i(r_0, \phi_j, y_0) \cos \phi_j - W_i(r_0, \phi_j, y_0) \sin \phi_j \quad (2.135)$$

Damit liegen für jede Verformung  $n_P$  Funktionswerte an den diskreten Stellen  $\phi_j$  vor. Aus diesen Werten ist nun die Periodizität  $k_i$  zu ermitteln.

## 2.4.2 Bestimmung der Periodizität

Es sei  $f(\phi_j)$  eine allgemeine Funktion, deren Werte an  $n_P$  Stellen gegeben sind. Zur Bestimmung der Periodizität  $k$  müssen diese Funktionswerte  $f(\phi_j)$  durch die Funktion

$$g(\phi) = C_c \cos(k \phi) + C_s \sin(k \phi), \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.136)$$

approximiert werden. Hierfür wählt man eine Periodizität  $k$  und bestimmt für diese Periodizität die Koeffizienten  $C_c = C_c(k)$  und  $C_s = C_s(k)$  mit der Methode der kleinsten Quadrate. Zu diesem Zweck wird die quadratische Abweichung  $\Delta$  definiert:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_j [f(\phi_j) - g(\phi_j)]^2 = \sum_j [f(\phi_j) - C_c \cos(k \phi_j) - C_s \sin(k \phi_j)]^2 \\ &= \sum_j [f(\phi_j)^2 - 2 f(\phi_j) [C_c \cos(k \phi_j) + C_s \sin(k \phi_j)] + [C_c \cos(k \phi_j) + C_s \sin(k \phi_j)]^2] \\ &= \sum_j [f(\phi_j)^2 - 2 f(\phi_j) [C_c \cos(k \phi_j) + C_s \sin(k \phi_j)] \\ &\quad + C_c^2 \cos^2(k \phi_j) + 2 C_c C_s \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) + C_s^2 \sin^2(k \phi_j)] \end{aligned} \quad (2.137)$$

Die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten  $C_c$  und  $C_s$  erhält man aus der Bedingung, dass die Abweichung  $\Delta$  minimal werden muss. Die entsprechende Gleichung lautet für den Koeffizienten  $C_c$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \Delta}{\partial C_c} \\
 &= \sum_j [-2 f(\phi_j) \cos(k \phi_j) + 2 C_c \cos^2(k \phi_j) + 2 C_s \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j)] \\
 \Rightarrow 0 &= \sum_j [-f(\phi_j) \cos(k \phi_j) + C_c \cos^2(k \phi_j) + C_s \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j)] \\
 &= -\sum_j f(\phi_j) \cos(k \phi_j) + C_c \sum_j \cos^2(k \phi_j) + C_s \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) \\
 \Rightarrow \sum_j f(\phi_j) \cos(k \phi_j) &= C_c \sum_j \cos^2(k \phi_j) + C_s \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) \quad (2.138)
 \end{aligned}$$

Für den Koeffizienten  $C_s$  lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \Delta}{\partial C_s} \\
 &= \sum_j [-2 f(\phi_j) \sin(k \phi_j) + 2 C_c \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) + 2 C_s \sin^2(k \phi_j)] \\
 \Rightarrow 0 &= \sum_j [-f(\phi_j) \sin(k \phi_j) + C_c \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) + C_s \sin^2(k \phi_j)] \\
 &= -\sum_j f(\phi_j) \sin(k \phi_j) + C_c \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) + C_s \sum_j \sin^2(k \phi_j) \\
 \Rightarrow \sum_j f(\phi_j) \sin(k \phi_j) &= C_c \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) + C_s \sum_j \sin^2(k \phi_j) \quad (2.139)
 \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten  $C_c$  und  $C_s$ :

$$\begin{bmatrix} \sum_j \cos^2(k \phi_j) & \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) \\ \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) & \sum_j \sin^2(k \phi_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_c \\ C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j f(\phi_j) \cos(k \phi_j) \\ \sum_j f(\phi_j) \sin(k \phi_j) \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

Die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems 2. Ordnung lautet:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \frac{a_{22} B_1 - a_{12} B_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, X_2 = \frac{-a_{21} B_1 + a_{11} B_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \quad (2.141)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich:

$$a_{11} = \sum_j \cos^2(k \phi_j), \quad a_{12} = a_{21} = \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j), \quad a_{22} = \sum_j \sin^2(k \phi_j) \quad (2.142)$$

$$X_1 = C_c, \quad X_2 = C_s, \quad B_1 = \sum_j f(\phi_j) \cos(k \phi_j), \quad B_2 = \sum_j f(\phi_j) \sin(k \phi_j) \quad (2.143)$$

erhält man schließlich für die Koeffizienten  $C_c$  und  $C_s$ :

$$C_c = \frac{\left[ \sum_j \sin^2(k \phi_j) \right] \left[ \sum_j f(\phi_j) \cos(k \phi_j) \right] - \left[ \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) \right] \left[ \sum_j f(\phi_j) \sin(k \phi_j) \right]}{\left[ \sum_j \cos^2(k \phi_j) \right] \left[ \sum_j \sin^2(k \phi_j) \right] - \left[ \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) \right]^2} \quad (2.144)$$

$$C_s = \frac{- \left[ \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) \right] \left[ \sum_j f(\phi_j) \cos(k \phi_j) \right] + \left[ \sum_j \cos^2(k \phi_j) \right] \left[ \sum_j f(\phi_j) \sin(k \phi_j) \right]}{\left[ \sum_j \cos^2(k \phi_j) \right] \left[ \sum_j \sin^2(k \phi_j) \right] - \left[ \sum_j \cos(k \phi_j) \sin(k \phi_j) \right]^2} \quad (2.145)$$

Damit sind die Koeffizienten  $C_c = C_c(k)$  und  $C_s = C_s(k)$  für die gewählte Periodizität  $k$  bekannt.

### 2.4.3 Bestimmung der Orientierung

Bei der Herleitung der Kinematik des bewegten Punktes wurde die Tatsache ausgenutzt, dass bei der Modalsynthese für eine Periodizität  $k_i > 0$  zwei orthogonale Formfunktionen  $\mathbf{U}_{i1}$  und  $\mathbf{U}_{i2}$  verwendet wurden.

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) q_{i1}(t) + \mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) q_{i2}(t)) \quad (2.146)$$

Hierbei gilt für die Struktur der Modalfunktionen  $\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y)$  und  $\mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y)$ :

$$\mathbf{U}_{i1}(r, \phi, y) = \mathbf{U}_{i,A} \cos(k_i \phi) + \mathbf{U}_{i,B} \sin(k_i \phi) \quad (2.147)$$

$$\mathbf{U}_{i2}(r, \phi, y) = \mathbf{U}_{i,A} \sin(k_i \phi) - \mathbf{U}_{i,B} \cos(k_i \phi) \quad (2.148)$$

Für die in der Beschreibung des bewegten Punktes:

$$\mathbf{r}_{\text{RP}}^B = \mathbf{A}^{B,A}(\chi) \mathbf{r}_{\text{RB}}^A + \mathbf{A}^{B,A}(\chi) \mathbf{S}(r, \theta, y) \mathbf{T}(\chi) \mathbf{q}(t) \quad (2.149)$$

enthaltene Transformationsmatrix  $\mathbf{T}(\chi)$  gilt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \cos(k_i \chi) & -\sin(k_i \chi) & \dots \\ \dots & \sin(k_i \chi) & \cos(k_i \chi) & \dots \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(\chi)} \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ q_{i1} \\ q_{i2} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} \quad (2.150)$$

Verwendet man als Formfunktionen Ergebnisse einer Finite-Elemente-Rechnung, so ist zunächst nicht bekannt, welche Funktionen der Funktion  $\mathbf{U}_{i1}$  und welche der Funktion  $\mathbf{U}_{i2}$  entsprechen. Demzufolge ist auch die Besetzung der Matrix  $\mathbf{T}(\chi)$  zunächst nicht bekannt.

Es seien  $\mathbf{U}_j$  und  $\mathbf{U}_l$  zwei Formfunktionen, die beide auf einem "Ring" mit  $r_0$  und  $y_0$  betrachtet werden. Für die Indizes  $j$  und  $l$  gilt  $j < l$ , d.h. die Modalkoordinate  $q_j$  steht "weiter oben" in dem Vektor  $\mathbf{q}$  als die Modalkoordinate  $q_l$ . Für die Formfunktionen gilt:

$$\mathbf{U}_j(r_0, y_0, \phi) = \mathbf{U}_{j,C}(r_0, y_0) \cos(k_j \phi) + \mathbf{U}_{j,S}(r_0, y_0) \sin(k_j \phi) \quad (2.151)$$

$$\mathbf{U}_l(r_0, y_0, \phi) = \mathbf{U}_{l,C}(r_0, y_0) \cos(k_l \phi) + \mathbf{U}_{l,S}(r_0, y_0) \sin(k_l \phi) \quad (2.152)$$

Die Periodizitäten  $k_j$  und  $k_l$  sowie die Vektoren  $\mathbf{U}_{j,C}(r_0, y_0)$ ,  $\mathbf{U}_{j,S}(r_0, y_0)$ ,  $\mathbf{U}_{l,C}(r_0, y_0)$  und  $\mathbf{U}_{l,S}(r_0, y_0)$  seien bekannt:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{j,C}(r_0, y_0) &= \begin{bmatrix} T_{j,C}(r_0, y_0) \\ V_{j,C}(r_0, y_0) \\ R_{j,C}(r_0, y_0) \end{bmatrix}, & \mathbf{U}_{j,S}(r_0, y_0) &= \begin{bmatrix} T_{j,S}(r_0, y_0) \\ V_{j,S}(r_0, y_0) \\ R_{j,S}(r_0, y_0) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}_{l,C}(r_0, y_0) &= \begin{bmatrix} T_{l,C}(r_0, y_0) \\ V_{l,C}(r_0, y_0) \\ R_{l,C}(r_0, y_0) \end{bmatrix}, & \mathbf{U}_{l,S}(r_0, y_0) &= \begin{bmatrix} T_{l,S}(r_0, y_0) \\ V_{l,S}(r_0, y_0) \\ R_{l,S}(r_0, y_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.153)$$

Im Folgenden wird die Abhängigkeit der Koeffizienten von den Koordinaten  $r_0$  und  $y_0$  des "Ringes" nicht mehr explizit angegeben.

Sollen nun  $\mathbf{U}_j$  und  $\mathbf{U}_l$  zwei zusammengehörige Formfunktionen sein, so müssen ihre Periodizitäten übereinstimmen:

$$k_j = k_l \quad (2.154)$$

Entspricht nun die Funktion  $\mathbf{U}_j$  der Funktion  $\mathbf{U}_{i1}$  und die Funktion  $\mathbf{U}_l$  der Funktion  $\mathbf{U}_{i2}$ , was im Folgenden als Fall I bezeichnet werden soll, so muss gelten:

$$\mathbf{U}_{i,A} = \mathbf{U}_{j,C} = \mathbf{U}_{l,S} \wedge \mathbf{U}_{i,B} = \mathbf{U}_{j,S} = -\mathbf{U}_{l,C} \quad (2.155)$$

Voll ausgeschrieben bedeutet dies:

$$\begin{bmatrix} T_{j,C} \\ V_{j,C} \\ R_{j,C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{l,S} \\ V_{l,S} \\ R_{l,S} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} T_{j,S} \\ V_{j,S} \\ R_{j,S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{l,C} \\ -V_{l,C} \\ -R_{l,C} \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

Für die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}(\chi)$  gilt damit:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ Q_j \\ \vdots \\ Q_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \\ \dots & \cos(k_j\chi) & \dots & -\sin(k_j\chi) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \sin(k_j\chi) & \dots & \cos(k_j\chi) & \dots \\ \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(\chi)} \begin{bmatrix} \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_l \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

Entspricht dagegen die Funktion  $\mathbf{U}_j$  der Funktion  $\mathbf{U}_{i2}$  und die Funktion  $\mathbf{U}_l$  der Funktion  $\mathbf{U}_{i1}$ , was im Folgenden als Fall II bezeichnet werden soll, so gilt:

$$\mathbf{U}_{i,A} = \mathbf{U}_{l,C} = \mathbf{U}_{j,S} \wedge \mathbf{U}_{i,B} = \mathbf{U}_{l,S} = -\mathbf{U}_{j,C} \quad (2.158)$$

Dies bedeutet:

$$\begin{bmatrix} T_{j,C} \\ V_{j,C} \\ R_{j,C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_{l,S} \\ -V_{l,S} \\ -R_{l,S} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} T_{j,S} \\ V_{j,S} \\ R_{j,S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{l,C} \\ V_{l,C} \\ R_{l,C} \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

In diesem Fall gilt für die Transformationsmatrix:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ Q_j \\ \vdots \\ Q_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \\ \dots & \cos(k_j\chi) & \dots & \sin(k_j\chi) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & -\sin(k_j\chi) & \dots & \cos(k_j\chi) & \dots \\ \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(\chi)} \begin{bmatrix} \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_l \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.160)$$

Durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen lässt sich dieser Zusammenhang umformulieren, so dass die Matrix  $\mathbf{T}(\chi)$  eine analoge Form zu der in (2.157) angegebenen Gestalt erhält:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ Q_j \\ \vdots \\ Q_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \\ \dots & \cos(-k_j\chi) & \dots & -\sin(-k_j\chi) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \sin(-k_j\chi) & \dots & \cos(-k_j\chi) & \dots \\ \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(\chi)} \begin{bmatrix} \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_l \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.161)$$

## 2.4.4 Aufbereitung der Formfunktionen

Mit den in den Kapiteln 2.4.1 und 2.4.2 können nun die einzelnen Schritte zur Bestimmung der Periodizität  $k_i$  der  $i$ -ten Formfunktion angegeben werden:

1. Die Koordinaten  $x_0$ ,  $y_0$  und  $z_0$  des bewegten Punktes werden festgelegt. Es gilt  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ .
2. Es werden existierende Punkte mit den Koordinaten  $x_j$ ,  $y_j$  und  $z_j$  ausgewählt, wobei für die Koordinaten gelten muss:  $\sqrt{x_j^2 + z_j^2} = r_0 \wedge y_j = y_0$ , d.h. die Punkte müssen auf dem selben "Ring" liegen wie der anfangs gewählte Punkt. Die Anzahl  $n_P$  der auszuwählenden Punkte muss mindestens doppelt so groß wie die höchste in Frage kommende Periodizität sein, d.h.  $n_P \geq 2 k_{max}$ . Der Azimut  $\phi_j$  wird nach Gleichung (2.132) bestimmt.
3. Mit den Zusammenhängen  $R_i(\phi_j) = U_i(x_j, y_j, z_j) \sin \phi_j + W_i(x_j, y_j, z_j) \cos \phi_j$  und  $T_i(\phi_j) = U_i(x_j, y_j, z_j) \cos \phi_j - W_i(x_j, y_j, z_j) \sin \phi_j$  werden die Radial- und die Tangentialverformung aus den Verformungen in kartesischen Koordinatenrichtungen bestimmt. Für die Axialverformung gilt  $V_i(\phi_j) = V_i(x_j, y_j, z_j)$ . Somit liegen also jeweils  $n_P$  Werte für  $R_i(\phi_j)$ ,  $T_i(\phi_j)$  und  $V_i(\phi_j)$  vor.
4. Aus den  $n_P$  Werten für  $R_i(\phi_j)$  werden für  $0 \leq k \leq k_{max}$  die Koeffizienten  $R_{C,i}^*(k)$  nach Gleichung (2.144) und  $R_{S,i}^*(k)$  nach Gleichung (2.145) bestimmt. In analoger Weise erhält man aus den Werten  $T_i(\phi_j)$  und  $V_i(\phi_j)$  die Koeffizienten  $T_{C,i}^*(k)$ ,  $T_{S,i}^*(k)$ ,  $V_{C,i}^*(k)$  und  $V_{S,i}^*(k)$ .
5. Da die Verteilung der Radial-, Tangential- und Axialverformungen für die Eigenformen einer rotationssymmetrischen Struktur eine trigonometrische Funktion mit genau einer Periodizität ist, ergibt sich die gesuchte Periodizität  $k_i$  diejenige, für die die Funktion  $p(k) = R_{C,i}^*(k)^2 + R_{S,i}^*(k)^2 + T_{C,i}^*(k)^2 + T_{S,i}^*(k)^2 + V_{C,i}^*(k)^2 + V_{S,i}^*(k)^2$  maximal wird. Die für das weitere Vorgehen benötigten Koeffizienten sind:  $R_{i,C} = R_{C,i}^*(k_i)$ ,  $R_{i,S} = R_{S,i}^*(k_i)$ ,  $T_{i,C} = T_{C,i}^*(k_i)$ ,  $T_{i,S} = T_{S,i}^*(k_i)$ ,  $V_{i,C} = V_{C,i}^*(k_i)$ ,  $V_{i,S} = V_{S,i}^*(k_i)$ .

Als Ergebnis dieser Periodizitätsanalyse sind also nun die Periodizität  $k_i$  sowie die Koeffizienten  $R_{i,C}$ ,  $R_{i,S}$ ,  $T_{i,C}$ ,  $T_{i,S}$ ,  $V_{i,C}$  und  $V_{i,S}$  bekannt.

Besitzt die betrachtete Formfunktion  $\mathbf{V}_i$  die Periodizität  $k_i = 0$ , so liegt eine einzelne Formfunktion vor. Gilt jedoch für die Periodizität  $k_i > 0$ , so muss eine zugehörige orthogonale Formfunktion existieren. Es sind nun für alle Formfunktionen  $\mathbf{V}_l$  mit  $k_l = k_i$  die folgenden Ausdrücke zu bilden:

$$p_1(i, l) = (R_{i,C} - R_{l,S})^2 + (T_{i,C} - T_{l,S})^2 + (V_{i,C} - V_{l,S})^2 + (R_{i,S} + R_{l,C})^2 + (T_{i,S} + T_{l,C})^2 + (V_{i,S} + V_{l,C})^2 \quad (2.162)$$

$$p_2(i, l) = (R_{i,C} + R_{l,S})^2 + (T_{i,C} + T_{l,S})^2 + (V_{i,C} + V_{l,S})^2 + (R_{i,S} - R_{l,C})^2 + (T_{i,S} - T_{l,C})^2 + (V_{i,S} - V_{l,C})^2 \quad (2.163)$$



Vertauscht der Indizes und berücksichtigt die Vorzeichenunabhängigkeit der Quadrate, so erhält man die Regeln:

$$p_1(i, l) = p_2(l, i) \quad (2.164)$$

$$p_2(i, l) = p_1(l, i) \quad (2.165)$$

Für die zu der Formfunktion  $V_i$  zugehörige orthogonale Formfunktion  $V_m$  nimmt die Funktion  $p_N(i, m)$ ,  $N = 1, 2$  ein Minimum an.

1. Setzt man nun  $i < m$  voraus, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- (a) Das Minimum tritt für  $N = 1$  auf, es gilt  $p_1(i, m) = \min$ . Dann liegt der in Kapitel 2.4.3 definierte Fall I vor, und für die "effektiven" Periodizitäten gilt  $k_i^+ = k_i$  und  $k_m^+ = k_m$
- (b) Das Minimum tritt für  $N = 2$  auf, es gilt  $p_1(i, m) = \min$ . Dann liegt der in Kapitel 2.4.3 definierte Fall II vor, und für die "effektiven" Periodizitäten gilt  $k_i^+ = -k_i$  und  $k_m^+ = -k_m$

2. Ist dagegen  $i > m$ , so sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

- (a) Das Minimum tritt für  $N = 1$  auf, es gilt  $p_1(i, m) = \min$ . Aufgrund von (2.164) gilt  $p_1(i, m) = p_2(m, i) = \min$ . Somit liegt wieder der Fall II vor, und für die "effektiven" Periodizitäten gilt  $k_i^+ = -k_i$  und  $k_m^+ = -k_m$
- (b) Das Minimum tritt für  $N = 2$  auf, es gilt  $p_2(i, m) = \min$ . Aufgrund von (2.165) gilt  $p_2(i, m) = p_1(m, i) = \min$ . Somit liegt wieder der Fall I vor, und für die "effektiven" Periodizitäten gilt  $k_i^+ = k_i$  und  $k_m^+ = k_m$

Theoretisch bräuchte der Fall, dass  $i > m$  ist, nicht betrachtet zu werden.

Als Ergebnis dieser Analyse erhält man für jede Eigenform, deren Periodizität  $k_i \neq 0$  ist, zwei Informationen, nämlich:

- 1. den Index  $m$  der zugehörigen orthogonalen Eigenform
- 2. die effektive Periodizität  $k_i^+ \in \mathbb{Z}$

Mit diesen Informationen kann nun die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}(\chi)$  generiert werden. Es gilt:

- 1.  $T_{i,i} = \cos(k_i^+ \chi)$ ,  $T_{m,m} = \cos(k_i^+ \chi)$
- 2.  $i < m \Rightarrow T_{i,m} = -\sin(k_i^+ \chi)$ ,  $T_{m,i} = \sin(k_i^+ \chi)$

Alle übrigen Elemente der Matrix sind gleich Null zu setzen.

### 3 Realisierung im SIMPACK

Nach Rulka [1] lauten die Bewegungsgleichungen für einen elastischen Körper innerhalb des Mehrkörperformalismus:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{IR} \\ \boldsymbol{\alpha}_{IR} \\ \ddot{\mathbf{z}}_E \end{bmatrix} = \mathbf{h}^e + \mathbf{h}^z \quad (3.1)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix des betrachteten Körpers; es gilt:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m \mathbf{E} & m \tilde{\mathbf{r}}_{RS}^T & \mathbf{H}^T \\ m \tilde{\mathbf{r}}_{RS} & \mathbf{I} & \mathbf{N}^T \\ \mathbf{H}^T & \mathbf{N} & \mathbf{M}_E \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Der Vektor  $\mathbf{h}^e$  beschreibt die Kreiselkräfte sowie die eingepprägten Volumen- und Oberflächenkräfte:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^e = & - \begin{bmatrix} m \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{r}_{RS} + 2 m \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \dot{\mathbf{r}}_{RS} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IR} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{IR} + \mathbf{G}_R \boldsymbol{\omega}_{IR} \\ \boldsymbol{\omega}_{IR}^T \otimes \mathbf{K} \boldsymbol{\omega}_{IR} + \mathbf{G}_E \boldsymbol{\omega}_{IR} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{z}_E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \mathbf{g} \\ m \tilde{\mathbf{r}}_{RS} \mathbf{g} \\ \mathbf{H} \mathbf{g} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \sum_k \mathbf{f}_k^e \\ \sum_k \mathbf{l}_k^e + \sum_k \tilde{\mathbf{r}}_{RF_k} \mathbf{f}_k^e \\ \sum_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{l}_k^e + \sum_k \mathbf{R}_k^T \mathbf{f}_k^e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Zwangskräfte werden durch den Vektor  $\mathbf{h}^z$  repräsentiert:

$$\mathbf{h}^z = \begin{bmatrix} \sum_k \mathbf{f}_k^z \\ \sum_k \mathbf{l}_k^z + \sum_k \tilde{\mathbf{r}}_{RF_k} \mathbf{f}_k^z \\ \sum_k \mathbf{W}_k^T \mathbf{l}_k^z + \sum_k \mathbf{R}_k^T \mathbf{f}_k^z \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Für die Nomenklatur der einzelnen Punkte gilt:

- R: Referenzpunkt des Körpers
- S: Schwerpunkt des Körpers
- $F_k$ : Angriffspunkt der äußeren Kraft  $\mathbf{f}_k$  und des äußeren Moments  $\mathbf{l}_k$

Die verwendeten Formelzeichen bedeuten:

- $m$ : Masse des Körpers
- $\mathbf{I}$ : Trägheitstensor des Körpers
- $\mathbf{g}$ : Gravitationsvektor

- $\mathbf{f}$ : Vektor einer äußeren Kraft
- $\mathbf{l}$ : Vektor eines äußeren Moments
- $\Pi$ : Potential der inneren elastischen Verformungskräfte

Sämtliche Vektoren sind im körperfesten Koordinatensystem  $\mathcal{B}$  dargestellt. Weiterhin gilt:

$$\mathbf{R}_k = \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{RF}_k}}{\partial \mathbf{z}_E} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{W}_k = \frac{\partial \omega_{\text{RF}_k}}{\partial \mathbf{z}_E} \quad (3.6)$$

Hierbei enthalten die Vektoren  $\mathbf{z}_E$  und  $\dot{\mathbf{z}}_E$  die Modalkoordinaten der Deformationsbewegungen und deren zeitliche Ableitungen.

In den Kapiteln 2.2 und 2.3 wurde die Bewegung eines Punktes mit veränderlichem Bezugspunkt betrachtet. Passt man die dort hergeleiteten Ausdrücke an die oben verwendete Nomenklatur an, so erhält man:

$$\mathbf{r}_{\text{RF}_k} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\chi) \mathbf{r}_{\text{RB}}^{\mathcal{A}} + \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\chi) \mathbf{S}(r_k, \theta_k, y_k) \mathbf{T}(\chi) \mathbf{z}_E, \quad \mathbf{r}_{\text{RB}}^{\mathcal{A}} = \text{const}, \quad \mathbf{S}(r_k, \theta_k, y_k) = \text{const} \quad (3.7)$$

$$\omega_{\text{RF}_k} = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\chi) \Theta(r_k, \theta_k, y_k) \mathbf{T}(\chi) \dot{\mathbf{z}}_E \quad (3.8)$$

Damit ergibt sich:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\chi) \mathbf{S}(r_k, \theta_k, y_k) \mathbf{T}(\chi) \quad (3.9)$$

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{A}^{\mathcal{B}\mathcal{A}}(\chi) \Theta(r_k, \theta_k, y_k) \mathbf{T}(\chi) \quad (3.10)$$

Damit wird deutlich, dass für die Beschreibung einer Kraft oder eines Moments mit veränderlichem Angriffspunkt eine Modifikation der Modalmatrizen  $\mathbf{R}_k$  und  $\mathbf{W}_k$  sowie des Vektors  $\mathbf{r}_{\text{RF}_k}$  erforderlich ist. Der Aufwand einer entsprechenden Erweiterung des verwendeten Programms SIMPACK bleibt daher überschaubar.

Soll ein Angriffspunkt veränderlich sein, so wird dies durch Setzen einer Flag-Variable in dem betreffenden Marker des Körpers angezeigt. Für jeden derartigen Marker sind folgenden Angaben erforderlich:

- die Lage des Markers im "nichtdrehenden" Koordinatensystem  $\mathcal{A}$ , ausgedrückt durch die Koordinaten  $x^{\mathcal{A}}$ ,  $y^{\mathcal{A}}$  und  $z^{\mathcal{A}}$ ,
- die Modalfunktionen

$$\mathbf{V}_k(x^{\mathcal{A}}, y^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} U_k(x^{\mathcal{A}}, y^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{A}}) \\ V_k(x^{\mathcal{A}}, y^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{A}}) \\ W_k(x^{\mathcal{A}}, y^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{A}}) \end{bmatrix}, \quad \Psi_k(x^{\mathcal{A}}, y^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{A}}) = \begin{bmatrix} \Psi_k^{(1)}(x^{\mathcal{A}}, y^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{A}}) \\ \Psi_k^{(2)}(x^{\mathcal{A}}, y^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{A}}) \\ \Psi_k^{(3)}(x^{\mathcal{A}}, y^{\mathcal{A}}, z^{\mathcal{A}}) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

- die Periodizität  $k_k$  der Ansatzfunktion,
- der Index der zugehörigen orthogonalen Ansatzfunktion,

Diese Angaben werden in separaten Dateien, die die Ergebnisse des in Kapitel 2.4.4 beschriebenen Vorgehens enthalten, abgelegt. Die Namen der Dateien werden für jeden Marker angegeben, wobei selbstverständlich unterschiedliche Marker auf die gleiche Datei zugreifen können.

Die in Kapitel 2 hergeleitete Beschreibung wird im Folgenden mit SARS (semi-analytische Beschreibung einer rotationssymmetrischen Struktur) bezeichnet.

### 3.1 Liste der modifizierten Dateien

Die folgenden Dateien (Verzeichnis `s_8804/simpack/develop/src/modules/define`) stellen Module dar. Diese Dateien sind als erste zu übersetzen.

- `m_marker_ALE.f` (neu): Datenblock für globale Variablen zur Bestimmung elastischer Deformationen gemäß dem SARS-Ansatz
- `m_paramet.f` (modifiziert): Datenblock für globale Variablen; hier werden die zentralen Dimensionen (`mbs-max-dimensions`) definiert, die Benutzer-definiert sein können. Alle diese `max-Dimensionen` werden dann in anderen `f90-Modulen` als `array-dimensionen` verwendet.
- `m_velinrb_ALE.f` (neu): Datenblock für globale Variablen für bewegte Marker auf einem elastischen Körper zur Berechnung im SARS-system.

Für die definierten Module werden die folgenden Allokieringsroutinen (`s_8804/simpack/develop/src/modules/allocate`) verwendet:

- `alloc_m_marker_ALE.f` (neu): Allokierung des Moduls `m_marker_ALE`
- `alloc_m_velinrb_ALE.f` (neu): Allokierung des Moduls `m_velinrb_ALE`

Ebenfalls für die Module sind die folgenden Initialisierungsroutinen (`s_8804/simpack/develop/src/modules/init`) vorgesehen:

- `init_m_marker_ALE.f` (neu): Initialisierung des Moduls `m_marker_ALE`
- `init_m_paramet.f` (modifiziert): Initialisierung des Moduls `m_paramet`

Zur Berechnung der variablen Formfunktionen dient die neue Routine `cr_RMatrix.f`:

- `cr_RMatrix.f` (neu): Generierung der Formfunktionen für einen bewegten Marker auf einem rotationssymmetrischen elastischen Körper. Die im "nichtdrehenden" System gegebene Formfunktion wird für den tatsächlichen Drehwinkel  $\chi$  bestimmt und anschließend in das körperfeste System  $\mathcal{B}$  transformiert:  $\mathbf{R}(\chi) = \mathbf{A}^{BA}(\chi)\mathbf{S}(r, \theta, y)\mathbf{T}(\chi)$ ,  $\mathbf{W}(\chi) = \mathbf{A}^{BA}(\chi)\mathbf{\Theta}(r, \theta, y)\mathbf{T}(\chi)$ . Die Formfunktionen und Funktionalmatrizen werden in den Feldern `R_chi` und `W_chi` des Moduls `m_marker_ALE` gespeichert.

Zum Einlesen der Daten, die für den bewegten Marker erforderlich sind, dient die folgende Routine

- `read_alefile.f` (neu): Einlesen und Speichern der Daten eines bewegten Punktes auf einem flexiblen Rotationskörper. Die Daten, die beim Preprocessing generiert wurden, sind in einem File abgelegt, welches gegenwärtig im `working directory` des `Simpack-Modells` steht, später in `$SIMPACK_MODEL/run/dat/elm_ale`

Die folgenden Dateien sind nach den Verzeichnissen, in denen die entsprechenden Originaldateien stehen, geordnet.

Verzeichnis `s_8804/simpack/develop/src/input`

- `izz02.f` (modifiziert): Input-Routine zur Zuweisung des Startsatzes an Integer-, Real- oder Double-Variablen)

Verzeichnis `s_8804/simpack/develop/src/form`

- `farb.f` (modifiziert): Bestimmung des absoluten Ortsvektors des beobachteten Punkts auf dem Körper:  $\mathbf{r}_P^B = \mathbf{r}_R^B + \mathbf{r}_{RB}^B + \mathbf{r}_{BP}^B(\mathbf{z}_E)$
- `favb.f` (modifiziert): Bestimmung der absoluten Translationsgeschwindigkeit des beobachteten Punkts auf dem Körper:  $\mathbf{v}_P^B = \mathbf{v}_R^B + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{IB}^B [\mathbf{r}_{RB}^B + \mathbf{r}_{BP}^B(\mathbf{z}_E)] + \dot{\mathbf{r}}_{BP}^B(\dot{\mathbf{z}}_E)$
- `fawb.f` (modifiziert): Bestimmung der absoluten Winkelgeschwindigkeit des beobachteten Punkts auf dem Körper  $\boldsymbol{\omega}_{IP}^B = \boldsymbol{\omega}_{IB}^B + \boldsymbol{\omega}_{BP}^B(\dot{\mathbf{z}}_E)$
- `fbuiltin.f` (modifiziert): Ermittlung der Einbaulage des Markers auf dem elastischen Körper
- `felr_A.f` (neu): Ähnlich der Subroutine `felr`, jedoch an den *SARS*-Ansatz angepasst. Formalismusroutine zur Berechnung des relativen Ortsvektors vom Referenzpunkt zum beobachteten Punkt des elastischen Körpers:  $\mathbf{r}_{RP}^B = \mathbf{r}_{RB}^B + \mathbf{R}(\chi)\mathbf{z}_E$ .
- `felrm_A.f` (neu): Formalismusroutine zur Berechnung der Funktionalmatrix  $\mathbf{R}_{MAT}$  der Translation für die elastische Verformung am beobachteten Punkt. Die Funktionalmatrix entspricht  $\mathbf{R}(\chi)$ .
- `felrp_A.f` (neu): Ähnlich der Subroutine `felrp`, jedoch an den *SARS*-Ansatz angepasst. Formalismusroutine zur Berechnung der relativen Geschwindigkeit vom Referenzpunkt zum beobachteten Punkt des elastischen Körpers:  $\dot{\mathbf{r}}_{RP}^B = \mathbf{R}(\chi)\dot{\mathbf{z}}_E$ .
- `felrpp_A.f` (neu): Ähnlich der Subroutine `felrpp`, jedoch an den *SARS*-Ansatz angepasst. Formalismusroutine zur Berechnung der relativen Beschleunigung vom Referenzpunkt zum beobachteten Punkt des elastischen Körpers:  $\ddot{\mathbf{r}}_{RP}^B = \mathbf{R}(\chi)\ddot{\mathbf{z}}_E$ .
- `feltr2_A.f` (neu): Formalismusroutine zur Berechnung der Transformationsmatrix für die relative Drehung des beobachteten Punkts relativ zum Referenzsystem.
- `feltr_A.f` (neu): Formalismusroutine zur Berechnung der Transformationsmatrix für die relative Drehung des beobachteten Punkts relativ zum Referenzsystem. Erzeugung des symbolischen Codes.
- `felw_A.f` (neu): Ähnlich der Subroutine `felw`, jedoch an den *SARS*-Ansatz angepasst. Formalismusroutine zur Berechnung der relativen Winkelgeschwindigkeit des beobachteten Punkts des elastischen Körpers relativ zum Referenzsystem.  $\boldsymbol{\omega}_{BP}^B = \mathbf{W}(\chi)\dot{\mathbf{z}}_E$
- `felwm_A.f` (neu): Formalismusroutine zur Berechnung der Funktionalmatrix  $\mathbf{W}_{MAT}$  der Rotation für die elastische Verformung am beobachteten Punkt. Die Funktionalmatrix entspricht  $\mathbf{W}(\chi)$ .
- `felwp_A.f` (neu): Ähnlich der Subroutine `felwp`, jedoch an den *SARS*-Ansatz angepasst. Formalismusroutine zur Berechnung der relativen Winkelbeschleunigung des beobachteten Punkts des elastischen Körpers relativ zum Referenzsystem.  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{BP}^B = \mathbf{W}(\chi)\ddot{\mathbf{z}}_E$
- `ffere.f` (modifiziert): Formalismusroutine. Für das Kraftelement 'IFEL' wird für die jeweiligen Koppelpunkte auf den Körpern  $I$  und  $J$ , zwischen denen das Kraftelement wirkt, der Relativvektor  $\mathbf{RR}_{IFI}$  und die Funktionalmatrizen  $\mathbf{R}_{MATI}$  und  $\mathbf{W}_{MATI}$  bzw.  $\mathbf{RR}_{JFJ}$ ,  $\mathbf{R}_{MATJ}$  und  $\mathbf{W}_{MATJ}$  berechnet.
- `ffere_m.f` (modifiziert): Bereitstellung aller kinematischen Größen, die notwendig sind, um Kräfte und Momente des Kraftelements `ufelxx.f` zu den Vektoren der generalisierten Kräfte für den gewählten Kontaktkörper hinzuzufügen.
- `fkaus_coord_trans.f` (modifiziert): Transformation der Koordinaten der Sensormessung vom körperfesten Referenzsystem  $\mathbf{R}_i$  in das Koordinatensystem  $\mathbf{M}_c$  des gewählten Markers, wobei der Sensor zwischen  $\mathbf{M}_i$  und  $\mathbf{M}_j$  auf dem Körper  $\mathbf{R}_j$  definiert ist.

- `fkaus_ml.f` (modifiziert): Formalismus:  $A_{ik} = A_{ij} * A_{jk}$
- `fkinlg.f` (modifiziert): Formalismusroutine zur Berechnung der kinematischen Größen auf der Lage- und Geschwindigkeitsebene von den Referenzpunkten
- `fkinrm.f` (modifiziert): Berechnung der relativen Messungen zwischen zwei Markern als Input für Marker, die auf Körpern bewegt werden. Die Sequenz des Kontakt-Marker auf der Schiene enthält alle Informationen für die Kontakt-Marker auf dem Rad und dem Spurkranz und für die Profil-Referenzmarker auf Schiene und Rad
- `fmess.f` (modifiziert): Bestimmung der Relativgrößen für die Lage und die Geschwindigkeit zwischen zwei verschiedenen Beobachtungssystemen  $B_I$  und  $B_J$ . Die Relativgröße wird in der Messmatrix bzw. der Messvektor abgelegt.
- `frbeij.f` (modifiziert): Bestimmung der Translations- und der Winkelbeschleunigung zwischen zwei verschiedenen Beobachtungssystemen  $B_I$  und  $B_J$
- `freset.f` (modifiziert): Zurücksetzen aller Formalismus-Flags, die in der Auswertung der rechten Seite (rhs: "right hand side") gesetzt wurden, zu "new rhs-call"
- `frlgij.f` (modifiziert): Bestimmung aller Relativgrößen für die Lage und die Geschwindigkeit zwischen zwei verschiedenen Beobachtungssystemen  $B_I$  und  $B_J$
- `frlij.f` (modifiziert): Bestimmung aller Relativgrößen für die Lage zwischen zwei verschiedenen Beobachtungssystemen  $B_I$  und  $B_J$
- `frtrb.f` (modifiziert): Bestimmung der Relativ-Transformation zwischen den Beobachtungssystemen  $B_I$  und  $B_J$  auf den Körpern  $I$  und  $J$  mit Hilfe der vorab berechneten Relativtransformation  $TRRIRJ$
- `fschzb.f` (modifiziert): Formalismusroutine zur Berechnung der impliziten Zwangsbedingungen der schleifenschließenden Gelenke auf der Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene; hierzu werden die kinematischen Relativgrößen über die Gelenke sowie die Einbaugrößen auf dem Koppelkörper ( $h$ ) bestimmt.
- `fschzk.f` (modifiziert): Formalismusroutine zur Berechnung der Zwangskräfte der schleifenschließenden Gelenke, der Addition der Zwangskräfte der schleifenschließenden Gelenke zu den eingprägten Kräften der entsprechenden Koppelkörper und zur Berechnung der Relativgrößen (Lage, Geschwindigkeit) über die schleifenschließenden Gelenke.
- `fsteu1.f` (modifiziert): Schnittstellen-Steuerroutine für das Unterprogrammpaket zur Berechnung der zweiten Ableitung der Gelenkkoordinaten  $Z_G$  (im Baum), der zweiten Ableitung der elastischen Koordinaten  $Z_E$ , der ersten Ableitung der Zustandsgrößen zur Beschreibung der Eigendynamik von Kraftelementen und der impliziten Zwangsbedingungen für die geschlossenen Schleifen auf der Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene.
- `fsteu2.f` (modifiziert): Schnittstellen-Steuerroutine für das Unterprogrammpaket zur Berechnung der zweiten Ableitung der Gelenkkoordinaten  $Z_G$  (im Baum), der zweiten Ableitung der elastischen Koordinaten  $Z_E$ , der ersten Ableitung der Zustandsgrößen zur Beschreibung der Eigendynamik von Kraftelementen, der kinematischen Auswertung und der kinetischen Auswertung von Zwangskräften von den Gelenken im Baum und von eingprägten Kräften.
- `fsteu2_constr.f` (modifiziert): Auswertungsmodul und Formalismus-Interface für das Linearisierungsmodul `pabc_alg.f`. Dieses Modul unterscheidet sich vom Originalmodul `fsteu2.f` durch den zusätzlichen Aufruf des Moduls `fschzb.f` zur Auswertung der Zwangsbedingungen. Durchgeführt werden die Berechnungen der zweiten



Ableitung der Gelenkkordinaten  $Z_G$  (im Baum), der zweiten Ableitung der elastischen Koordinaten  $Z_E$ , der ersten Ableitung der Zustandsgrößen zur Beschreibung der Eigendynamik von Krafterelementen, der kinematischen Auswertungen, der kinetischen Auswertungen der Zwangskräfte von den Gelenken im Baum und der eingepprägten Kräfte und der Auswertung der Zwangsgleichungen.

- `fsteu4.f` (modifiziert): Schnittstellen-Steuerroutine für das Unterprogrammpaket zur Berechnung der inversen Kinematik zum Zeitpunkt  $t$ .
- `fsteu8.f` (modifiziert): Schnittstellen-Steuerroutine für das Unterprogrammpaket zur Berechnung der zweiten Ableitung der Gelenkkordinaten  $Z_G$  (im Baum), der zweiten Ableitung der elastischen Koordinaten  $Z_E$ , der ersten Ableitung der Zustandsgrößen zur Beschreibung der Eigendynamik von Krafterelementen, der kinematischen Auswertungen und der kinetischen Auswertungen der Zwangskräfte von den Gelenken im Baum und der eingepprägten Kräfte.
- `fsteu9.f` (modifiziert): Formalismus-Entry-Routine zur Berechnung der symbolischen Gleichungen für `xdot`.
- `fsteui.f` (modifiziert): Schnittstellen-Steuerroutine für das Unterprogrammpaket zur Berechnung des starren und elastischen Residuums, der ersten Ableitung der Zustandsgrößen zur Beschreibung der Eigendynamik von Krafterelementen, der impliziten Zwangsbedingungen für die geschlossenen Schleifen auf der Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene.

#### Verzeichnis `s_8804/simpack/develop/src/pre`

- `pebeob.f` (modifiziert): Preprocessor-Routine zur Aufbereitung der Benutzereingaben für die Beobachtungssysteme:
  - Formale Überprüfung der Körperzuordnungen
  - Besetzen der noch ausstehenden Größen
    - \*  $L=6$  im Kennfeld `KEREK(L, IK, IC, IST)`
    - \*  $L=6$  im Kennfeld `KEFTYP(L, IFEL)`
    - \*  $L=9$  im Kennfeld `KEFTYP(L, IFEL)`
    - \*  $L=7$  im Kennfeld `KEFMES(L, IMESS, IFEL)`
    - \*  $L=8$  im Kennfeld `KEFMES(L, IMESS, IFEL)`
    - \*  $L=7$  im Kennfeld `KELOOP(L, NRL)`
    - \*  $L=8$  im Kennfeld `KELOOP(L, NRL)`
  - Vervollständigung der Einbautransformation `TRKB(3, 3, NRB)`
- `pevorb_dyn_alloc_getdim.f` (modifiziert): Ermittlung der Dimensionen für die pseudo-dynamische Feld-Allokierung, die durch die config-files gegeben ist.
- `pevorb_dyn_alloc_kernel.f` (modifiziert):
  - `ALLOCATE`: Speicher-Allokierung der `SIMPACK`-kernel arrays des MBS-Formalismus
    - \* für Ausdrücke
    - \* für elastische Körper: `nzemax`, `nkemax`, `nbemax`
    - \* für Kräfte: `nzfmax`, `nfdmax`, `nafmax`
    - \* für Sensoren `nkamax`
  - `STOP` des Programms im Fall eines Fehlers

- Nicht explizit allokierte Felder sind für Zustände:  $n_{xmax}$ ,  $n_{epmax}=10+n_{xmax}$ ,  $n_{add\_eq\_max}=n_{xmax}$ ,  $n_{iamax}=1+n_{xmax}+4$ ,  $i_{amax\_fd}=1+4*n_{xmax}$ . Diese Allokierungen werden in den Modulen intern ausgeführt.

Verzeichnis `s_8804/simpack/develop/src/access/internal/av`:

- `spck_av_markerkin.f` (modifiziert): Access function des Typs "absolute kinematic measurement" eines Markers für SIMPACK-Ausdrücke

Verzeichnis `s_8804/simpack/develop/src/bibl/beo`:

- `ubeo82.f` (modifiziert): User-Routine für die Berechnung der kinematischen Relativgrößen eines Beobachtungssystems relativ zum jeweiligen körperfesten Referenzsystem.
- `ubeo82_ini.f` (modifiziert): Preprocessor-Routine
  - zur Vervollständigung der User-Definitionen des bewegten Marker-Elements
  - zur Berechnung von Größen, die nur einmal berechnet werden müssen, z.B. zusätzliche Parameter
  - zur Erzeugung von Text-Strings und zum Setzen von Unit-Flags für:
    - \* Text-Strings für den Typ des bewegten Markers
    - \* Text-Strings für die Parameter des bewegten Markers (`mparam`)
    - \* Typ des Parameter des bewegten Markers (`real/moved marker-id/etc.`)
    - \* Einheit des Parameter des bewegten Markers (`[m]`, `[m/s]`, etc.)

Diese Routine wird einmal aufgerufen nach dem Laden des Modells vor den Berechnungen und mehrfach während des Erstellen des Modells (model setup). Sie kann auch benutzt werden zum:

- Überprüfen und Vorabberechnen von Parametern des MBS-Elements
- Öffnen von Files
- `ubeo97.f` (modifiziert): User-Routine für die Berechnung der kinematischen Relativgrößen eines Beobachtungssystems relativ zum jeweiligen körperfesten Referenzsystem. Für den Beobachtungspunkt für den Rad/Schiene-Kontaktpunkt gilt:
  - Der Ortsvektor und die Drehung sind abhängig von der Relativmessung
  - Die Relativgeschwindigkeiten und Beschleunigungen auf den Einbaukörper sind gleich Null.

In dieser Routine werden `A=trkb` und `r=r0rb` gesetzt, wobei `trkb(3,3nrb)` und `r0rb(3,nrb)` bereits durch `ubeor97.f` berechnet wurden. Der Aufruf von `ubeor_xx.f` erfolgt bei der Vorwärtskinematik: `.../src/form/fkinlg.f` Die kinematischen Relativvektoren werden in dem jeweiligen körperfesten Referenzsystem angegeben.

- `ubeo97_ini.f` (modifiziert): Preprocessor-Routine
  - zur Vervollständigung der User-Definitionen des bewegten Marker-Elements
  - zur Berechnung von Größen, die nur einmal berechnet werden müssen, z.B. zusätzliche Parameter
  - zur Erzeugung von Text-Strings und zum Setzen von Unit-Flags für:
    - \* Text-Strings für den Typ des bewegten Markers
    - \* Text-Strings für die Parameter des bewegten Markers (`mparam`)



- \* Typ des Parameter des bewegten Markers (real/moved marker-id/etc.)
- \* Einheit des Parameter des bewegten Markers ([m], [m/s], etc.)

Diese Routine wird einmal aufgerufen nach dem Laden des Modells vor den Berechnungen und mehrfach während des Erstellen des Modells (model setup). Sie kann auch benutzt werden zum:

- Überprüfen und Vorabberechnen von Parametern des MBS-Elements
- Öffnen von Files
- `ubeor82.f` (modifiziert): User-Routine für die Berechnung der kinematischen Relativgrößen eines Beobachtungssystems relativ zum jeweiligen körperfesten Referenzsystem.

Verzeichnis `s_8804/simpack/develop/src/bibl/fel`

- `ufel167.f` (modifiziert): User-Routine für die Berechnung der eingreprägten Kräfte und/oder-Momente eines Kraftelements vom Typ X (fest installierte Bibliotheks-Routine)

## 3.2 Abhängigkeit der neuen und modifizierten Routinen

Im Folgenden sind nun die einzelnen Aufrufe der neuen und modifizierten Routinen in einer Baumstruktur ("Calltree") aufgeführt. Viele Routinen greifen auf die in `m_marker_ALE.f`, `m_paramet.f` und `m_velinrb_ALE.f` definierten Module zu. Da diese Module grundsätzlich als erste übersetzt werden müssen, sind die Zugriffe auf diese Module nicht explizit angegeben.

Die Routinen `fkinlg`, `freset`, `fschzb` und `fschzk` werden nur von den Steuerroutinen `fsteu1`, `fsteu2`, `fsteu2_constr`, `fsteu4`, `fsteu8`, `fsteu9` und `fsteui` aufgerufen; daher wird für diese sieben Steuerroutinen ein gemeinsamer Calltree angegeben. Dieser lautet:

```
fsteu1 / fsteu2 / fsteu2_constr / fsteu4 / fsteu8 / fsteu9 / fsteui
+-fkinlg
+-freset (nur fsteu1 / fsteui )
+-fschzb (nur fsteu1 / fsteu2_constr / fsteu4 / fsteu8 / fsteu9 / fsteui )
| +-cr_RMatrix
| +-feltr_A
| | +-feltr2_A
| +-frbeij
| | +-cr_RMatrix
| | +-farb
| | | +-cr_RMatrix
| | | +-felr_A
| | +-favb
| | | +-cr_RMatrix
| | | +-felr_A
| | | +-felrp_A
| | +-fawb
| | | +-cr_RMatrix
| | | +-felw_A
| | +-felrpp_A
| | +-felwp_A
| +-frlgij
| | +-cr_RMatrix
| | +-felr_A
| | +-felrp_A
| | +-felw_A
| | +-frtrb
| | | +-cr_RMatrix
| | | +-feltr_A
| | | +-feltr2_A
+-fschzk
+-cr_RMatrix
+-fbuiltin
| +-cr_RMatrix
| +-felr_A
| +-felrm_A
| +-feltr_A
| | +-feltr2_A
| +-felwm_A
+-felrm_A
+-feltr_A
| +-feltr2_A
+-felwm_A
+-frlgij
+-cr_RMatrix
+-felr_A
+-felrp_A
+-felw_A
+-frtrb
| +-cr_RMatrix
| +-feltr_A
| +-feltr2_A
```

## Die Calltrees für die übrigen Subroutinen lauten:

```
ffere
+-cr_RMatrix
+-felr_A
+-felrm_A
+-felwm_A

ffere_m
+-cr_RMatrix
+-felr_A
+-felrm_A
+-felwm_A

fkaus_coord_trans
+-cr_RMatrix
+-feltr_A
  +-feltr2_A

fkaus_ml
+-cr_RMatrix
+-feltr_A
| +-feltr2_A
+-frlij
  +-cr_RMatrix
  +-felr_A
  +-frtrb
    +-cr_RMatrix
    +-feltr_A
    +-feltr2_A

fkinrm
+-fmess
  +-cr_RMatrix
  +-farb
  | +-cr_RMatrix
  | +-felr_A
  +-favb
  | +-cr_RMatrix
  | +-felr_A
  | +-felrp_A
  +-fawb
  | +-cr_RMatrix
  | +-felw_A
  +-feltr_A
  | +-feltr2_A
  +-frtrb
    +-cr_RMatrix
    +-feltr_A
    +-feltr2_A

pebeob
+-read_alefile

spck_av_markerkin
+-cr_RMatrix
+-felrp_A
+-felrpp_A
+-feltr_A
| +-feltr2_A
+-felw_A
+-felwp_A
```

```
ufel167
+-cr_RMatrix
+-feltr_A
| +-feltr2_A
+-frbeij
| +-cr_RMatrix
| +-farb
| | +-cr_RMatrix
| | +-felr_A
| +-favb
| | +-cr_RMatrix
| | +-felr_A
| | +-felrp_A
| +-fawb
| | +-cr_RMatrix
| | +-felw_A
| +-felrpp_A
| +-felwp_A
+-frlgij
+-cr_RMatrix
+-felr_A
+-felrp_A
+-felw_A
+-frtrb
+-cr_RMatrix
+-feltr_A
+-feltr2_A
```

## 4 Anwendungsbeispiel

Als Anwendung für die neue Beschreibung (SARS) wird ein Reisezugwaggon mit vier Radsätzen, die auf zwei Drehgestelle verteilt sind, gewählt. Genauere Angaben über den Waggon können der Arbeit von Schupp [3] entnommen werden. Zusätzlich wird jeder Radsatz von einem Fahrweg-Element, welches Vertikal-, Lateral- und Wankbewegungen ausführen kann, unterstützt. Das Modell besteht aus 21 Körpern und besitzt 61 Starrkörperfreiheitsgrade.

Für die im Folgenden beschriebene Rechnung wurden die beiden Radsätze des vorderen Drehgestells als elastische Körper modelliert. Die Analyse der Strukturodynamik erfolgte mit dem Finite-Elemente-Programm ANSYS. Insgesamt wurden 100 Eigenmoden in das Modell integriert, so dass das erweiterte Modell 261 Freiheitsgrade besitzt. Hierbei liegen die niedrigsten Eigenfrequenzen bei  $f_0 = 74,01$  Hz (antimetrische Torsion) und  $f_0 = 82,753$  Hz (symmetrische Biegung). Die höchsten Eigenfrequenzen der verwendeten Moden liegen bei  $f_0 = 4224,387$  Hz. Die niedrigste Periodizität der verwendeten Moden ist  $k = 0$  (Torsionsmoden, Schirmmoden), die höchste Periodizität beträgt  $k = 5$ . Dieses Modell verwendet für die umlaufenden Marker der Rad-Schiene-Kontakte die neuentwickelte SARS-Beschreibung. Eine Ansicht des Modells zeigt Abbildung 4.1.

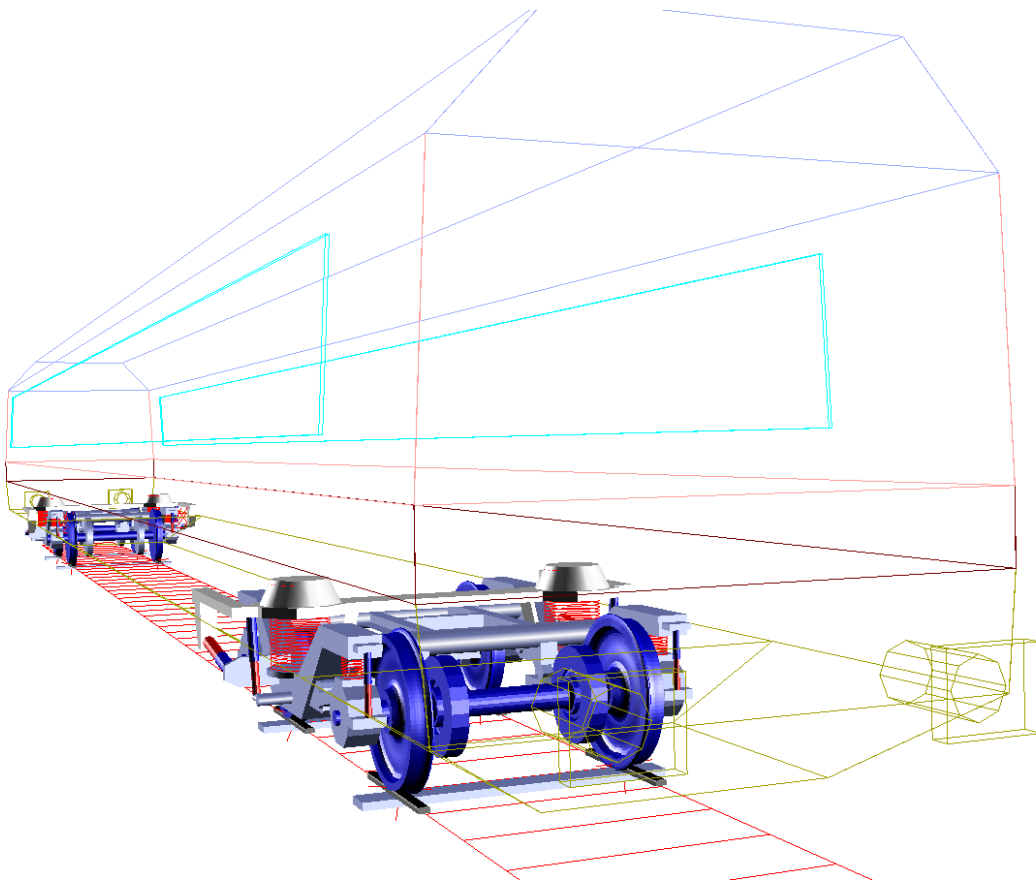


Abbildung 4.1: Ansicht des Modells

Zu Vergleichszwecken wurde ein Modell verwendet, welches die aus der Rotation der Radsätze herrührenden Effekte näherungsweise berücksichtigt; dieses Modell wird im Folgenden als "Rotor-Näherung" bezeichnet. Hierbei führen die Radsätze keine eigentliche Drehung um ihre Symmetrieachse aus, so dass keine bewegten Marker für die Rad-Schiene-Kontakte erforderlich sind. Aus diesem Grund besitzt jeder Radsatz nur 5 Starrkörper-Freiheitsgrade, so dass das Gesamtmodell nur 257 Freiheitsgrade besitzt. Gleichwohl werden die aus der Drehung herrührenden Rotorterme näherungsweise in der Rechnung berücksichtigt. Diese Berücksichtigung wird durch Setzen eines entsprechenden Flags (`Apply RotorTerms to body =`) aktiviert. Während bei der SARS-Beschreibung die Marker der Rad-Schiene-Kontaktelemente direkt an die elastischen Körper angeschlossen werden, müssen für die Rotor-Näherung Zwischenkörper mit extrem kleiner Masse an den Radsätzen befestigt werden; die Rad-Schiene-Kontaktelemente greifen an diesen Zwischenkörpern an.

Als weiterer Vergleich wurde ein Modell verwendet, in dem die Radsätze als starre Körper modelliert werden.

Mit diesen Modellen wurden zwei Szenarien untersucht, nämlich

- Geradeauslauf mit  $v_0 = 144$  km/h, zentrische Stellung der Radsätze
- Grenzzzykluslauf ("Schlingerlauf") mit  $v_0 = 504$  km/h

Als Integrationsmethode wurde der Solver SODASRT gewählt, die absoluten und relativen Toleranzen betragen jeweils  $10^{-7}$ . Als Simulationszeit wurde  $\Delta t = 5$  s gewählt. Für die einzelnen Modelle und Szenarien ergaben sich die folgenden Rechenzeiten:

	starrer Radsatz	Rotor-Näherung	SARS-Beschreibung
Geradeauslauf $v_0 = 144$ km/h	4 s	2370 s	3224 s
Grenzzzykluslauf $v_0 = 504$ km/h	92 s	2395 s	10264 s

Tabelle 4.1: Rechenzeiten

Der extreme Rechenzeitunterschied für den Grenzzzykluslauf ist vermutlich auf die hohen auftretenden Frequenzen zurückzuführen, die bei der SARS-Beschreibung auftreten: Bei einem Durchmesser der Rades von  $d_0 = 0,92$  m erreicht der Radsatz eine Drehzahl von etwa  $n \approx 48,438$  s<sup>-1</sup>. Aufgrund der höchsten auftretenden Periodizität  $k = 5$  entsteht dadurch allein durch das Abrollen eine Frequenz von  $f = 242,192$  Hz. Da sich der Radsatz kinematisch gesehen bei der Rotor-Näherung nicht überschlägt, treten derart hohe Frequenzen dort nicht auf, was die Integration offensichtlich erleichtert. Beim starren Radsatz existiert das Problem der hohen Frequenzen ebenfalls nicht.

In Abbildung 4.2 sind die Ergebnisse der Rechnungen für den Grenzzzykluslauf der elastisch modellierten Radsätze in Form von Phasenporträts der Quer- oder Lateralbewegungen dargestellt. Es fällt sofort auf, dass die Ergebnisse für die beiden unterschiedlichen Beschreibungsmethoden deutlich voneinander abweichen, insbesondere hinsichtlich der Geschwindigkeiten, die bei der SARS-Methode deutlich höher sind.

In Abbildung 4.3 sind die Ergebnisse für den Grenzzzykluslaufs bei  $v_0 = 504$  km/h, die mit der SARS-Beschreibung berechnet wurden, denen, die mit starren Radsätzen ermittelt wurden, gegenübergestellt. Die Form der Kurven stimmen recht gut überein, für die nach der SARS-Beschreibung modellierten elastischen Radsätze ergeben sich jedoch höhere Amplituden. Dies ist darauf zurückzuführen, dass es durch die lateralen Kräfte zu Deformationen der Radsatzwelle und der Radscheiben kommt, wodurch sich der Massenmittelpunkt, dessen Lateralbewegung in Abbildung 4.3 dargestellt ist, stärker auswärts verlagert.

Der Vergleich der Ergebnisse zeigt, dass die mit der SARS-Beschreibung ermittelten Ergebnisse physikalisch plausibel sind, was wiederum für die Plausibilität der Theorie und für eine korrekte programmtechnische Umsetzung spricht. Die Unterschiede zwischen den Ergebnissen

für die *SARS*-Beschreibung und denen für die Rotor-Näherung sind vermutlich darauf zurückzuführen, dass bei der Rotor-Näherung die aus der Rotation herrührenden Effekte eben nur näherungsweise berücksichtigt werden. Dieser Unterschied macht sich insbesondere bei sehr hohen Fahrgeschwindigkeiten und entsprechend hohen Drehzahlen der Radsätze bemerkbar.

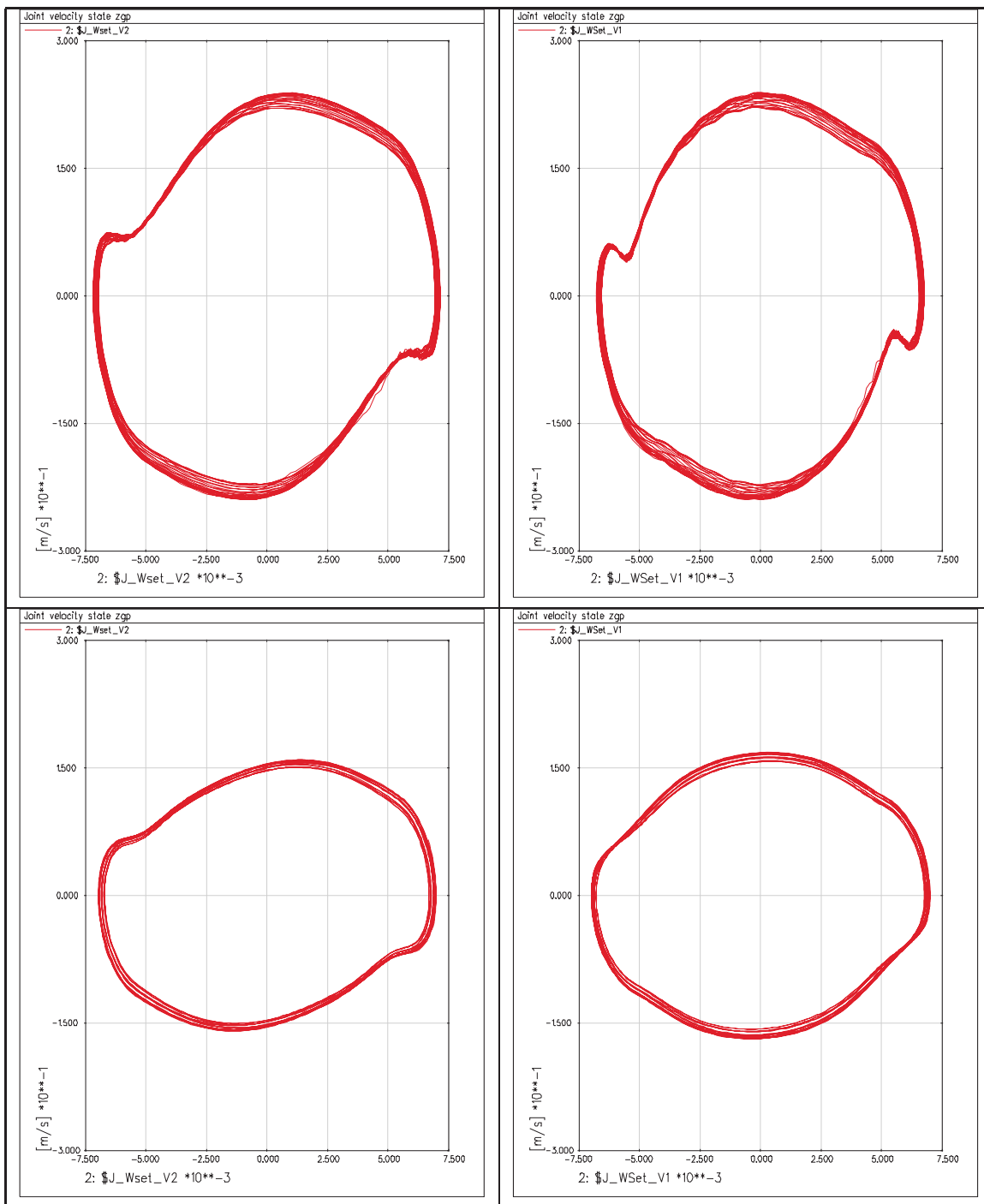


Abbildung 4.2: Phasenporträts der Lateralbewegung des vorlaufenden (rechts) und des nachlaufenden (links) Radsatzes für die SARS-Beschreibung (oben) und für die Rotor-Näherung (unten)



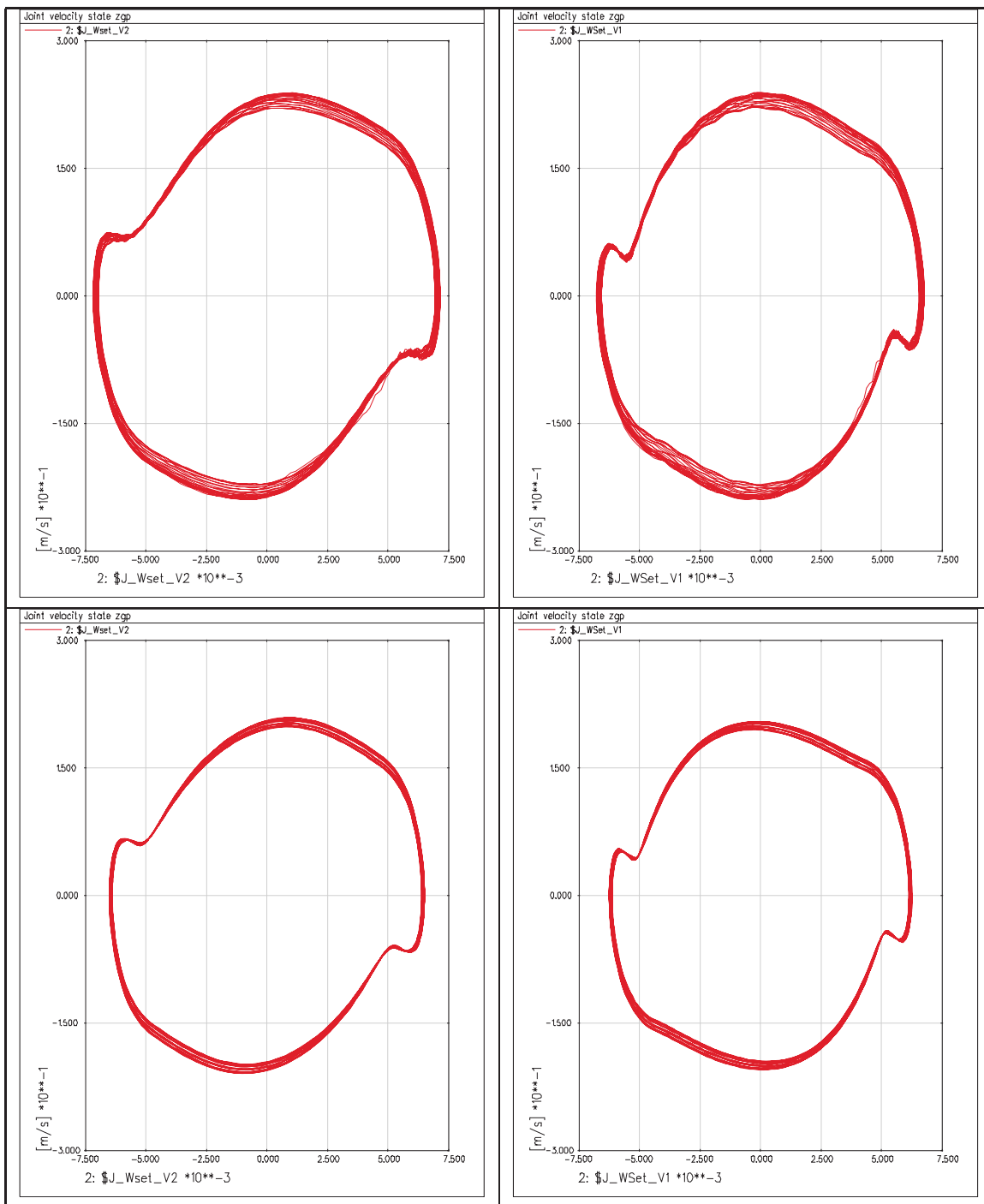


Abbildung 4.3: Phasenporträts der Lateralbewegung des vorlaufenden (rechts) und des nachlaufenden (links) Radsatzes für die SARS-Beschreibung (oben) und für die Modellierung als Starrkörper (unten)

# Literaturverzeichnis

- [1] Rulka, W.: Effiziente Simulation der Dynamik mechatronischer Systeme für industrielle Anwendungen Interner DLR-Bericht: IB-532-01-06 , 04/2001.
- [2] Schiehlen, W.: Technische Dynamik Teubner-Verlag, Stuttgart, 1986.
- [3] Schupp, G.: Numerische Verzweigungsanalyse mit Anwendungen auf Rad-Schiene-Systeme Shaker-Verlag, Aachen, 2004.