

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.

Interner Bericht 515-09-31

Modellierung eines Eisenbahngleises als
flexible Struktur

Ingo Kaiser
Systemdynamik und Regelungstechnik
(RM-SR)

Institut für Robotik und Mechatronik
Oberpfaffenhofen



**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.**
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Modellierung eines Eisenbahngleises als flexible Struktur

Ingo Kaiser
Systemdynamik und Regelungstechnik
(RM-SR)

Institut für Robotik und Mechatronik
Oberpfaffenhofen

39 Seiten
17 Bilder
0 Tabellen
4 Literaturstellen

Modellierung eines Eisenbahngleises als flexible Struktur

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Motivation	1
2	Eigenschaften zyklischer Strukturen	5
2.1	Modalanalyse	5
2.2	Transformation	8
2.3	Spezielle Eigenschaften gedämpfter zyklischer Systeme	14
2.3.1	Kontinuierliche Verteilung	16
3	Modellierung der Schiene	19
4	Dynamisches Verhalten des Fahrwegs	25
4.1	Erforderliche Länge des Fahrwegmodells	25
4.2	Erforderliche Anzahl der Schienenmoden	31
5	Zusammenfassung	34
6	Rechenregeln für trigonometrische Funktionen	35
A	Summation trigonometrischer Reihen	36
A.1	Summation von Produkten trigonometrischer Funktionen	37

Abbildungsverzeichnis

1.1	4
3.1	22
3.2	23
3.3	24
4.1	26
4.2	26
4.3	26
4.4	26
4.5	27
4.6	27
4.7	29
4.8	29
4.9	30
4.10	30
4.11	31
4.12	33
4.13	33

1 Einführung

1.1 Motivation

Die Modellierung des Gleises als flexible Struktur stellt einen wesentlichen Beitrag zur realitätsnäheren Modellierung des Laufverhaltens eines Schienenfahrzeugs dar. Für die Beschreibung der Fahrzeug-Fahrweg-Wechselwirkung, welche wiederum im Hinblick auf Probleme des Verschleißes und des Lärms relevant ist, ist diese Modellierung praktisch unverzichtbar. Diese Tatsache gab den Anstoß für die im Folgenden beschriebene Arbeit.

Während die Modellierung eines Schienenfahrzeugs als Mehrkörpersystem, welches aus diskreten, zumeist starren Körpern und Krafterelementen wie Federn, Dämpfern und Elementen für den Rollkontakt besteht, naheliegend ist, gibt es für die Modellierung des Fahrwegs eine recht große Anzahl unterschiedlicher Modellierungsansätze. Einen Überblick über die Gleismodellierung gibt Knothe in [1]. Die Modellierung des Gleises richtet sich nach der Problemstellung, die zu behandeln werden ist. Soll die Laufdynamik des Fahrzeugs beschrieben werden, so sind im Grunde nur die Bewegungen der Schienenköpfe an den Stellen, an denen sich die Räder des Fahrzeugs gerade befinden, von Interesse. Dies kann zu einer erheblichen Reduktion des Modells ausgenutzt werden.

Wie schon erwähnt gibt es recht unterschiedliche Ansätze für die Modellierung des Gleises. Während die Modellierung eines Schienenfahrzeugs als Mehrkörpersystem, welches aus diskreten, zumeist starren Körpern und Krafterelementen wie Federn, Dämpfern und Elementen für den Rollkontakt besteht, naheliegend ist, gibt es für die Modellierung des Fahrwegs eine recht große Anzahl unterschiedlicher Modellierungsansätze. Eine mögliche Einteilung der unterschiedlichen Ansätze besteht in folgendem Aspekt:

- Das mechanische Verhalten des Gleises, also beispielsweise das Bewegungsverhalten des Schienenkopfs bei Einwirkung einer Kraft, wird durch ein mechanisches Ersatzsystem wiedergegeben. Dieses Vorgehen hat mehrere Vorteile: Erstens kann das mechanische Ersatzsystem ein Mehrkörpersystem sein, wodurch sich das Gleismodell problemlos in existierende und in der industriellen Praxis verwendete Programme zur Simulation von Mehrkörpersystemen integrieren lässt. Zweitens können gemessene Eigenschaften des Gleises wie etwa gemessene Rezeptanzfunktionen durch entsprechendes Einstellen der Parameter nachgebildet werden. Dem steht der Nachteil gegenüber, dass der Aufwand recht groß wird, wenn man für unterschiedliche Anregungen (z.B. Vertikal- und Lateralkräfte) und unterschiedliche Bewegungen des Systems (z.B. vertikale und laterale Verschiebungen und seitliche Kippbewegungen des Schienenkopfs) entsprechend viele Rezeptanzfunktionen ermitteln muss; noch aufwendiger wird es, wenn man die gegenseitige Beeinflussung zweier Radsätze über das Gleis berücksichtigen möchte: Hierfür muss man neben den Eingangsrezeptanzen, die die Bewegungen des Schienenkopfs an der Angriffsstelle der Kraft beschreiben, auch noch die Transferrezeptanzen – also die Auswirkungen der Kraft an einem Radaufstandspunkt auf die Bewegung des Schienenkopfs am anderen Radaufstandspunkt – entsprechend approximieren. Für eine realistische Modellierung ist also ein erheblicher Aufwand für den Abgleich der Systemparameter erforderlich.

- Das Modell bildet die tatsächliche Struktur des Gleises nach, also den Aufbau aus Schienen, Schwellen, Zwischenlagen etc. Bei einer geeigneten Wahl der Parameter führt dies zu einem realistischeren Verhalten, überdies sind die Parameter wie etwa die Masse der Schwellen, die Biegesteifigkeit der Schienen oder die Steifigkeit der Zwischenlagen "anschauliche" und zugängliche Parameter, so dass man sie variieren kann, um ihren Einfluss auf das Systemverhalten zu analysieren. Ebenfalls ist die Modellierung der Wechselwirkung zweier Radsätze über das Gleis problemlos möglich. Allerdings ist diese Modellierung erheblich aufwendiger als die Modellierung als Ersatzsystem. Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass die Schienen für eine realistische Modellierung als elastische Körper beschrieben werden müssen, was die Integration in ein konventionelles Mehrkörpersystem erheblich erschweren kann.

Für die vorgesehenen Aufgaben, nämlich die realistische Modellierung des Fahrwegs, die Analyse der wesentlichen Parameter und ihres Einflusses und darauf aufbauend die Optimierung des Systems, sind die Modelle der zweiten Kategorie geeigneter, weswegen die Modellierung als Ersatzsystem hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Zur Simulation des Geradeauslaufs ist die Idealisierung des Gleises als unendlich lange Struktur naheliegend. Die Schwierigkeit bei unendlich langen Strukturen besteht jedoch darin, dass man keine Eigenfrequenzen ausrechnen kann, so dass eine Modalzerlegung nicht möglich ist. Als Beispiel soll hier ein viskoelastisch gebetteter Euler-Bernoulli-Balken betrachtet werden, der durch die folgende Gleichung beschrieben wird:

$$E I_{yy} w''''(x, t) + \rho A \ddot{w}(x, t) + b \dot{w}(x, t) + c w(x, t) = 0 \quad (1.1)$$

Durch einen Separationsansatz erhält man:

$$w(x, t) = W(x)e^{\lambda t} \Rightarrow E I_{yy} W''''(x) + (\lambda^2 \rho A + \lambda b + c) W(x) = 0 \quad (1.2)$$

Die Lösung der Differentialgleichung für die Ortsfunktion $W(x)$ lautet:

$$W(x) = \hat{W} e^{\kappa x} \Rightarrow E I_{yy} \kappa^4 + (\lambda^2 \rho A + \lambda b + c) = 0 \quad (1.3)$$

Durch Umsortieren der Gleichung ergibt sich:

$$\lambda^2 \rho A + \lambda b + (c + E I_{yy} \kappa^4) = 0 \quad (1.4)$$

Zur Bestimmung des Eigenwerts λ ist die Kenntnis des Eigenwerts κ erforderlich; bei endlichen Strukturen lässt sich κ aus den Randbedingungen bestimmen. Bei einer unendlich langen Struktur kann man lediglich für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ Randbedingungen vorgeben. Betrachtet man jedoch das Verhalten der Funktion $e^{\kappa x}$ für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$, so lassen sich aus den Randbedingungen lediglich Bedingungen für den Realteil $\Re(\kappa)$, jedoch nicht für den Imaginärteil $\Im(\kappa)$ formulieren. Folglich lässt sich κ und damit auch der Eigenwert λ nicht eindeutig bestimmen.

Deutlich einfacher wird die Behandlung des Schwingungsverhaltens einer unendlich langen Struktur bei harmonischer Fremderregung mit vorgegebener Kreisfrequenz Ω , da hier eine zusätzliche Information über den zeitlichen Verlauf der Bewegung zur Verfügung steht, wodurch der für den zeitlichen Verlauf relevante Eigenwert λ nicht mehr bestimmt werden muss. Für eine harmonische Anregung lässt sich eine Rezeptanzfunktion des Gleises berechnen; die Lösung erfolgt also im Frequenzbereich. Allerdings ist dies zunächst nur für periodische Bewegungen gültig.

Sollen nicht-periodische Bewegungen beschrieben werden, so ist die Beschreibung durch gewöhnliche Differentialgleichungen vorteilhaft. Hierfür muss die unendliche Struktur durch eine endliche zu approximiert werden, da hierdurch eine Modalzerlegung (unter der Voraussetzung, dass das System linear ist) möglich wird. Hierbei stellt sich jedoch die Frage, welche

Randbedingungen diese Struktur haben muss; diese Randbedingungen können zu Reflektionen der sich im Gleis ausbreitenden Wellen führen, die bei einer unendlichen Struktur eben nicht reflektiert würden. Folglich muss gewährleistet sein, dass sich die Enden des Gleises möglichst weit von den Kraftangriffsstellen entfernt befinden. In diesem Zusammenhang ist zu bedenken, dass bei höheren Geschwindigkeiten bereits für kurze Zeiten recht große Wege auftreten: So legt das Fahrzeug beispielsweise bei $v_0 = 180 \text{ km/h}$ in einer Sekunde bereits einen Weg von 50 m zurück; insofern stellt die Modellierung des gesamten, von dem Fahrzeug befahrenen Fahrwegs einen erheblichen Aufwand dar. Andererseits spielt, wie schon erwähnt, für die Laufdynamik des Fahrzeugs nur das Verhalten derjenigen Stellen des Gleises eine Rolle, an denen sich die Radsätze gerade befinden.

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, um diesen Umstand auszunutzen:

- Die erste Möglichkeit besteht darin, dass Gleis hinter dem Fahrzeug abzubauen und die abgebauten Elemente an das Gleisende vor dem Fahrzeug anzubauen. Diese Modellierung wurde von Morys [3] verwendet; allerdings wurden für die Schienen sehr einfache Euler-Bernoulli-Balkenelemente verwendet.
- Die zweite Möglichkeit besteht darin, die Randbedingungen an den Enden des Gleises gleichzusetzen, wodurch das Gleis zu einer ringförmigen Struktur wird, d.h. das Fahrzeug fährt im Kreis, wobei jedoch die Krümmung des Kreises vernachlässigt wird, und erreicht folglich nie das Ende des Fahrwegs. Mathematisch gesehen lässt sich diese vereinfacht etwa so formulieren: Eine Gerade kann man als einen Kreis mit unendlich großem Durchmesser ansehen. Bei der Approximation ersetzt man "unendlich" durch "sehr groß", wobei die nun entstandene Krümmung des Kreises vernachlässigt wird. Ein solches Modell wurde von Ripke [4] vorgestellt. Ein gewisser Nachteil besteht darin, dass Wellen, die von einer am Gleis wirkenden Kraft erregt werden, nun nicht mehr ins Unendliche laufen, ohne reflektiert zu werden, sondern wieder zur Erregerstelle zurückkommen. Ist die endliche Struktur jedoch groß genug und besitzt sie eine ausreichende Dämpfung, so haben sich die Wellen nach einem Durchlauf durch die gesamte Struktur ausreichend abgeschwächt. Damit kann man das Verhalten des unendlich langen Gleises durch eine endliche zyklische Struktur approximieren, wobei zu überprüfen ist, wie lang das Fahrwegmodell sein muss, um eine brauchbare Approximation zu erhalten.

Insgesamt erfüllt die von Ripke vorgestellte Modellierung die folgenden Anforderungen an das Gleismodell am besten:

1. Das Modell muss für Zeitbereichsrechnungen verwendbar sein.
2. Das Modell soll die für das Kontaktgeschehen wichtigen Bewegungen des Schienenkopfs detailliert genug abbilden.
3. Das Modell soll die Wechselwirkung der zwei Radsätze eines Drehgestells über das Gleis abbilden.

Aus diesem Grund lehnt sich das im Folgenden beschriebene Modell an das von Ripke [4] vorgestellte Modell an, wobei es jedoch im Hinblick auf die Modellierung der Schiene weiterentwickelt wird.

Das Modell besteht aus zwei elastischen Schienen. Die Zwischenlagen, über die sich die Schienen auf den starren Schwellen abstützen, werden durch verteilte lineare Feder/Dämpfer-Elemente beschrieben. Die Schwellen wiederum sind über lineare Feder/Dämpfer-Elemente, die den Untergrund repräsentieren, mit der festen Umgebung verbunden. Einen Überblick über den Aufbau des Gleismodells gibt Abb.1.1

Alle Schwellen sowie die sämtlichen jeweiligen Feder/Dämpfer-Elemente zur Modellierung der Zwischenlage und des Untergrunds werden als identisch vorausgesetzt; weiterhin sind die

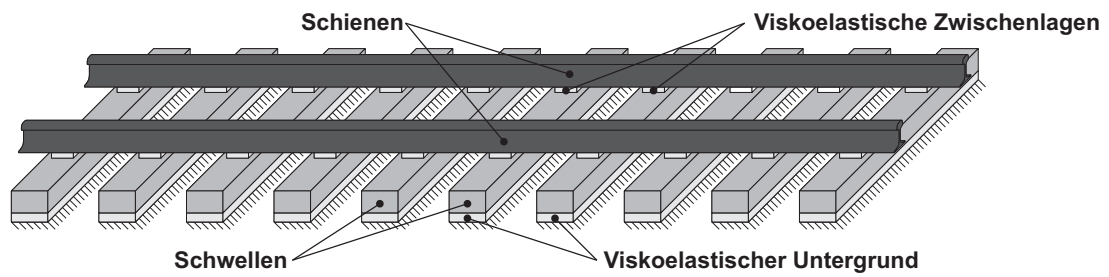


Abbildung 1.1: Aufbau des Gleismodells

Schwellen äquidistant angeordnet. Dies ermöglicht die Behandlung des Gleises als zyklisches System. Die Eigenschaften zyklischer Systeme werden im Kapitel 2 hergeleitet und beschrieben. Die Beschreibung als zyklisches System reduziert den Rechenaufwand erheblich.

2 Eigenschaften zyklischer Strukturen

Wie bereits erwähnt, lässt sich der Berechnungsaufwand für die Analyse der Struktur­dynamik des Gleises erheblich reduzieren, wenn man das Gleis als zyklische Struktur betrachtet. Die zu diesem Zweck erforderlichen theoretischen Grundlagen werden in diesem Kapitel erläutert.

2.1 Modalanalyse

Manche mechanischen Systeme besitzen eine sehr große Anzahl an Freiheitsgraden, während jedoch nur bestimmte Bewegungen von Interesse sind. Ist ein solches System linear, so kann die mathematische Behandlung durch eine Modalzerlegung erheblich vereinfacht werden.

Ein allgemeines lineares mechanisches System lässt sich durch das folgende Differentialgleichungssystem beschreiben:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{P} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t) \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{h}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(t)} \quad (2.1)$$

Hierbei ist \mathbf{M} die Massenmatrix, wobei \mathbf{M} symmetrisch und positiv definit ist. Die Matrizen \mathbf{P} bzw. \mathbf{Q} beschreiben die geschwindigkeitsabhängigen bzw. lageabhängigen Kräfte; an diese Matrizen werden keinerlei Symmetrieanforderungen gestellt. Überführt man das ursprüngliche Differentialgleichungssystem in die Zustandsraumdarstellung, so sind $\mathbf{z}(t)$ der Zustandsvektor, \mathbf{A} die Systemmatrix und $\mathbf{b}(t)$ der Störvektor. Sind die Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{P} und \mathbf{Q} von der Ordnung $n \times n$, so ist die Systemmatrix \mathbf{A} von der Ordnung $2n \times 2n$.

Die homogene Lösung erhält man durch den üblichen Ansatz zur Lösung linearer Differentialgleichungen, wodurch sich das Differentialgleichungssystem auf ein algebraisches Gleichungssystem reduzieren lässt:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_i e^{\lambda_i t} \Rightarrow [\mathbf{M} \lambda_i^2 + \mathbf{P} \lambda_i + \mathbf{Q}] \mathbf{y}_i = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

Durch eine geeignete Anordnung der Matrizen und Vektoren erhält man ein Eigenwertproblem der folgenden Form:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} \lambda_i^2 + \mathbf{P} \lambda_i + \mathbf{Q}] \mathbf{y}_i = \mathbf{0} &\Leftrightarrow [\lambda_i^2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \lambda_i + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}] \mathbf{y}_i = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \lambda_i \mathbf{y}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_i} = \lambda_i \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \lambda_i \mathbf{y}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_i} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Das Eigenwertproblem

$$\mathbf{A} \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \quad (2.4)$$

stellt ein Rechtseigenwertproblem dar, da die Matrix \mathbf{A} von rechts her mit dem Rechtseigenvektor \mathbf{w}_i multipliziert wird. Daneben existiert noch ein Linkseigenvektorproblem der folgenden Form:

$$\mathbf{v}_i^H \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^H \quad (2.5)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{v}_i^H den hermitesch transponierten Vektor; es gilt:

$$\mathbf{v}_i^H = \bar{\mathbf{v}}_i^T \quad (2.6)$$

Folglich gilt:

$$\bar{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \bar{\mathbf{v}}_i^T \Rightarrow \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{v}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{v}}_i \quad (2.7)$$

Setzt man den folgenden Ausdruck für den Linkseigenvektor:

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i1} \\ \mathbf{x}_{i2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_i^H = [\mathbf{x}_{i1}^H \quad \mathbf{x}_{i2}^H] \quad (2.8)$$

in die Gleichung (2.7) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_{i1}^H \quad \mathbf{x}_{i2}^H] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix} &= \lambda_i [\mathbf{x}_{i1}^H \quad \mathbf{x}_{i2}^H] \Rightarrow -\mathbf{x}_{i2}^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} = \lambda_i \mathbf{x}_{i1}^H \\ &\Rightarrow \mathbf{x}_{i1}^H - \mathbf{x}_{i2}^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} = \lambda_i \mathbf{x}_{i2}^H \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Elimination von \mathbf{x}_{i1}^H ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_i \mathbf{x}_{i2}^H + \mathbf{x}_{i2}^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{x}_{i1}^H \\ \Rightarrow \mathbf{0} &= \lambda_i^2 \mathbf{x}_{i2}^H + \lambda_i \mathbf{x}_{i2}^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} - \lambda_i \mathbf{x}_{i1}^H \\ &= \lambda_i^2 \mathbf{x}_{i2}^H + \lambda_i \mathbf{x}_{i2}^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{x}_{i2}^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Durch die Substitution $\mathbf{x}_{i2}^H = \mathbf{x}_i^H \mathbf{M}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_i^2 \mathbf{x}_i^H \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{x}_i^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} + \mathbf{x}_i^H \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \\ &= \lambda_i^2 \mathbf{x}_i^H \mathbf{M} + \lambda_i \mathbf{x}_i^H \mathbf{P} + \mathbf{x}_i^H \mathbf{Q} \\ &= \mathbf{x}_i^H [\mathbf{M} \lambda_i^2 + \mathbf{P} \lambda_i + \mathbf{Q}] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Diese Gleichung stellt das zu dem Rechtseigenvektorproblem (2.2) zugehörige Linkseigenvektorproblem dar. Sind die Matrizen $\mathbf{P} = \mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ und $\mathbf{Q} = \mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ symmetrisch, so gilt:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} = \mathbf{D}^T, \mathbf{Q} = \mathbf{K} = \mathbf{K}^T \Rightarrow [\mathbf{M}^T \lambda_i^2 + \mathbf{D}^T \lambda_i + \mathbf{K}^T] \bar{\mathbf{x}}_i = [\mathbf{M} \lambda_i^2 + \mathbf{D} \lambda_i + \mathbf{K}] \bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

In diesem Fall stimmen die Rechtseigenvektoren \mathbf{y}_i und die konjugiert komplexen Linkseigenvektoren $\bar{\mathbf{x}}_i$, die zu dem Eigenwert λ_i gehören, überein. In Anlehnung an [2] werden derartige Systeme, bei denen keine gyroskopischen Kräfte und keine nichtkonservativen Lagekräfte vorhanden sind, im Folgenden als "gedämpfte Systeme" bezeichnet. Hierbei werden an die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} außer der Symmetrie keine weiteren Anforderungen gestellt, d.h. die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} muss sich nicht notwendigerweise als Linearkombination der Massmatrix \mathbf{M} und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} darstellen lassen. Ungedämpfte Systeme ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) und proportional gedämpfte Systeme ($\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$) können als Sonderfälle des gedämpften Systems aufgefasst werden.

Zu jedem Eigenwert λ_i der insgesamt $2n$ Eigenwerte existiert ein Rechtseigenvektor \mathbf{w}_i und ein Linkseigenvektor \mathbf{v}_i . Durch entsprechende Links- und Rechtsmultiplikation der Gleichungen des Rechts- und des Linkseigenvektorproblems erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{w}_i &= \lambda_i \mathbf{w}_i \Rightarrow \mathbf{v}_l^H \mathbf{A} \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{v}_l^H \mathbf{w}_i \\ \mathbf{v}_l^H \mathbf{A} &= \lambda_l \mathbf{v}_l^H \Rightarrow \mathbf{v}_l^H \mathbf{A} \mathbf{w}_i = \lambda_l \mathbf{v}_l^H \mathbf{w}_i \\ &\Rightarrow 0 = (\lambda_i - \lambda_l) \mathbf{v}_l^H \mathbf{w}_i \end{aligned} \quad (2.13)$$

Für zwei unterschiedliche Eigenwerte $\lambda_i \neq \lambda_l$ gilt damit:

$$\lambda_i \neq \lambda_l \Rightarrow \lambda_i - \lambda_l \neq 0 \Rightarrow \mathbf{v}_l^H \mathbf{w}_i = 0 \quad (2.14)$$

Mit dieser Orthogonalität lässt sich die ursprüngliche Zustandsgleichung (2.1) transformieren. Stellt man den Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ als Linearkombination der Rechtseigenvektoren \mathbf{w}_i dar

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{w}_i q_i(t) \quad (2.15)$$

wobei die Modalkoordinaten $q_i(t)$ die Skalarfaktoren bilden, so erhält man durch Einsetzen in die Zustandsgleichung und Anwendung der Definitionsgleichung der Rechtseigenvektoren:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}(t) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{w}_i \dot{q}_i(t) &= \mathbf{A} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{w}_i q_i(t) + \mathbf{b}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{A} \mathbf{w}_i q_i(t) + \mathbf{b}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \mathbf{w}_i q_i(t) + \mathbf{b}(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Linksmultiplikation dieser Gleichung mit dem Linkseigenvektor \mathbf{v}_l ergibt:

$$\mathbf{v}_l^H \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{w}_i \dot{q}_i(t) = \mathbf{v}_l^H \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \mathbf{w}_i q_i(t) + \mathbf{v}_l^H \mathbf{b}(t) \Rightarrow \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{v}_l^H \mathbf{w}_i \dot{q}_i(t) = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \mathbf{v}_l^H \mathbf{w}_i q_i(t) + \mathbf{v}_l^H \mathbf{b}(t) \quad (2.17)$$

Setzt man die Orthogonalität der Rechts- und Linkseigenvektoren, die zu unterschiedlichen Eigenwerten gehören, voraus, und normiert die Eigenvektoren entsprechend

$$\mathbf{v}_l^H \mathbf{w}_l = 1 \quad (2.18)$$

so ergibt sich:

$$\dot{q}_l(t) = \lambda_l q_l(t) + \mathbf{v}_l^H \mathbf{b}(t) \quad (2.19)$$

Da insgesamt $2n$ Linkseigenvektoren \mathbf{v}_l existieren, erhält man $2n$ entkoppelte Differentialgleichungen der Form (2.19). Damit ist es gelungen, das System zu transformieren. Die ursprüngliche Zustandsgleichung ist in $2n$ separate Differentialgleichungen zerlegt worden.

Setzt man den Ausdruck für den Linkseigenvektor in die Gleichung ein, so erhält man:

$$\mathbf{v}_l^H \mathbf{b}(t) = [\mathbf{x}_{l,1}^H \quad \mathbf{x}_{l,2}^H] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_{l,2}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h}(t) = \mathbf{x}_l^H \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{h}(t) = \mathbf{x}_l^H \mathbf{h}(t) \quad (2.20)$$

Insgesamt gilt also:

$$\dot{q}_l(t) = \lambda_l q_l(t) + \mathbf{x}_l^H \mathbf{h}(t), \quad l = 1, \dots, 2n, \quad \mathbf{z}(t) = \sum_{l=1}^{2n} \mathbf{w}_l q_l(t) \quad (2.21)$$

Durch Bilden der konjugiert komplexen Ausdrücke für das Rechts- und das Linkseigenvektorproblem erhält man:

$$\mathbf{A} \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i \Rightarrow \mathbf{A} \bar{\mathbf{w}}_i = \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{w}}_i, \quad \mathbf{v}_i^H \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{v}_i^H \Rightarrow \bar{\mathbf{v}}_i^H \mathbf{A} = \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{v}}_i^H \quad (2.22)$$

Zu dem konjugiert komplexen Eigenwert $\bar{\lambda}_i$ gehören also der konjugiert komplexe Rechtseigenvektor $\bar{\mathbf{w}}_i$ und der konjugiert komplexe Linkseigenvektor $\bar{\mathbf{v}}_i$. Da die Systemmatrix \mathbf{A} reell ist, sind die Eigenwerte entweder reell, oder sie treten als konjugiert komplexe Paare auf. Sind nun λ_{i1} und $\lambda_{i2} = \bar{\lambda}_{i1}$ ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar, so gilt:

$$\dot{q}_{i1}(t) = \lambda_{i1} q_{i1}(t) + \mathbf{v}_{i1}^H \mathbf{b}(t) \quad (2.23)$$

$$\dot{q}_{i2}(t) = \lambda_{i2} q_{i2}(t) + \mathbf{v}_{i2}^H \mathbf{b}(t) \Rightarrow \dot{\bar{q}}_{i2}(t) = \bar{\lambda}_{i2} \bar{q}_{i2}(t) + \bar{\mathbf{v}}_{i2}^H \mathbf{b}(t) \Rightarrow \dot{\bar{q}}_{i2}(t) = \lambda_{i1} \bar{q}_{i2}(t) + \mathbf{v}_{i1}^H \mathbf{b}(t) \quad (2.24)$$

Offensichtlich ist die Modalkoordinate $q_{i2}(t)$ gleich der konjugiert komplexen Modalkoordinate $q_{i1}(t)$, d.h.:

$$q_{i2}(t) = \bar{q}_{i1}(t) \quad (2.25)$$

Aus diesem Grund muss nur die Gleichung (2.23) gelöst werden; die Lösung $q_{i2}(t)$ der Gleichung (2.24) ist damit sofort bekannt, d.h. die Gleichung (2.24) ist redundant. Mit der Regel:

$$z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 = 2\Re z_1 \Re z_2 - 2\Im z_1 \Im z_2 \quad (2.26)$$

ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= \sum_{l=1}^{2n} \mathbf{w}_l q_l(t) = \dots + \mathbf{w}_{i1} q_{i1}(t) + \mathbf{w}_{i2} q_{i2}(t) + \dots \\ &= \dots + 2\Re \mathbf{w}_{i1} \Re q_{i1}(t) - 2\Im \mathbf{w}_{i1} \Im q_{i1}(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2 Transformation

Ein lineares zyklisches System besteht aus n gleichen Segmenten, die eine ringförmige Struktur bilden; hierbei sind das nullte und das n -te Segment identisch. Anschaulich ist eine zyklische Struktur drehsymmetrisch, d.h. durch die Drehung mit einem Winkel $\Delta\phi < \pi$ wird die Struktur auf sich selbst abgebildet. Viele Rotoren wie die Läufer von Turbinen und Verdichter sowie viele Räder können als zyklische Strukturen aufgefasst werden. Im vorliegenden Fall bildet die Vorstellung der zyklischen Struktur eine wesentliche Basis für die Modellierung der Strukturmechanik sowohl des Radsatzes als auch des Gleises.

Betrachtet man die Bewegungsgleichung eines allgemeinen linearen mechanischen Systems:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{P} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t) \quad (2.28)$$

so haben bei einem zyklischen System die Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{P} und \mathbf{Q} eine Struktur, die exemplarisch anhand der Matrix \mathbf{Q} erläutert werden soll:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{-1} \\ \mathbf{Q}_{-1} & \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{-1} & \mathbf{Q}_0 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Q}_{-1} & \mathbf{Q}_0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Für die Matrix \mathbf{M} bzw. \mathbf{P} sind die Submatrizen \mathbf{Q}_{-1} , \mathbf{Q}_0 und \mathbf{Q}_1 durch die Submatrizen \mathbf{M}_{-1} , \mathbf{M}_0 und \mathbf{M}_1 bzw. \mathbf{P}_{-1} , \mathbf{P}_0 und \mathbf{P}_1 zu ersetzen. Der Lagevektor $\mathbf{y}(t)$ hat die folgende Struktur:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(0)}(t) \\ \mathbf{y}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Eine analoge Struktur hat der Erregervektor $\mathbf{h}(t)$; hier sind anstelle der Subvektoren $\mathbf{y}^{(i)}(t)$ die Subvektoren $\mathbf{h}^{(i)}(t)$ einzusetzen.

Betrachtet man die $(j+1)$ -te Hyperzeile der Bewegungsgleichung, so erhält man:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_{-1} \ddot{\mathbf{y}}^{(j-1)}(t) + \mathbf{M}_0 \ddot{\mathbf{y}}^{(j)}(t) + \mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{y}}^{(j+1)}(t) \\ &+ \mathbf{P}_{-1} \dot{\mathbf{y}}^{(j-1)}(t) + \mathbf{P}_0 \dot{\mathbf{y}}^{(j)}(t) + \mathbf{P}_1 \dot{\mathbf{y}}^{(j+1)}(t) \\ &+ \mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) = \mathbf{h}^{(j)}(t) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Aufgrund der periodischen Struktur des Systems ist es naheliegend, die Lagevektoren $\mathbf{y}^{(j)}(t)$ der einzelnen Segmente durch eine Fourier-Reihe mit n Summanden zu beschreiben. Hierfür wird der Teilungswinkel δ_n definiert:

$$\delta_n = \frac{2\pi}{n} \quad (2.32)$$

Damit erhält man für die Darstellung des Lagevektors des j -ten Segments:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(j)}(t) = & \mathbf{y}_{(0),C}(t) + \mathbf{y}_{(1),S}(t) \sin(\delta_n j) + \mathbf{y}_{(1),C}(t) \cos(\delta_n j) + \mathbf{y}_{(2),S}(t) \sin(2\delta_n j) \\ & + \mathbf{y}_{(2),C}(t) \cos(2\delta_n j) + \mathbf{y}_{(3),S}(t) \sin(3\delta_n j) + \mathbf{y}_{(3),C}(t) \cos(3\delta_n j) + \dots \\ & + \mathbf{y}_{(l_{max}),C}(t) \cos(l_{max}\delta_n j) + \mathbf{y}_{(l_{max}),S}(t) \sin(l_{max}\delta_n j) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich ob eine gerade oder eine ungerade Anzahl n an Segmenten vorliegt. Es gilt:

$$\frac{n}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow l_{max} = \frac{n-1}{2} \quad (2.34)$$

$$\frac{n}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow l_{max} = \frac{n}{2} \quad (2.35)$$

Für $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ ergibt sich:

$$\sin(l_{max}\delta_n j) = \sin\left(\frac{n}{2} \frac{2\pi}{n} j\right) = \sin(\pi j) = 0 \quad (2.36)$$

$$\cos(l_{max}\delta_n j) = \cos\left(\frac{n}{2} \frac{2\pi}{n} j\right) = \cos(\pi j) = (-1)^j \quad (2.37)$$

Der Summand $\mathbf{y}_{(l_{max}),S}(t) \sin(l_{max}\delta_n j) = \mathbf{y}_{(n/2),S}(t) \sin((n/2)\delta_n j)$ verschwindet grundsätzlich. Der Summand $\mathbf{y}_{(l_{max}),C}(t) \cos(l_{max}\delta_n j) = \mathbf{y}_{(n/2),C}(t) (-1)^j$ beschreibt eine gegenphasige Bewegung benachbarter Segmente. Eine solche Bewegung ist für eine ungerade Segmentanzahl n nicht möglich. Im Folgenden wird die Fourier-Reihe in der folgenden kompakten Form angegeben:

$$\mathbf{y}^{(j)}(t) = \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{y}_{(l),C}(t) \cos(l\delta_n j) + \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sin(l\delta_n j)] \quad (2.38)$$

Auch diese Reihe besteht nur aus n Summanden, da für $l=0$ und, falls $n/2 \in \mathbb{N}$, für $l=n/2$ der Faktor $\sin(l\delta_n j)$ verschwindet. Gleichzeitig werden stets $\mathbf{y}_{0,S}(t) = 0$ und, falls $n/2 \in \mathbb{N}$, $\mathbf{y}_{(n/2),S}(t) = 0$ gesetzt

Ordnet man die Vektoren $\mathbf{y}_{(l),C}(t)$ und $\mathbf{y}_{(l),S}(t)$ in einem Hypervektor $\mathbf{y}_F(t)$ an:

$$\mathbf{y}_F(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(0),C}(t) \\ \mathbf{y}_{(1),S}(t) \\ \mathbf{y}_{(1),C}(t) \\ \mathbf{y}_{(2),S}(t) \\ \mathbf{y}_{(2),C}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{(l_{max}),S}(t) \\ \mathbf{y}_{(l_{max}),C}(t) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

so lässt sich eine Transformation formulieren:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{T} \mathbf{y}_F(t) \quad (2.40)$$

Hierbei lautet die Transformationsmatrix \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{(0),0} & \mathbf{S}_{(1),0} & \mathbf{C}_{(1),0} & \mathbf{S}_{(2),0} & \mathbf{C}_{(2),0} & \cdots & \mathbf{S}_{(l_{max}),0} & \mathbf{C}_{(l_{max}),0} \\ \mathbf{C}_{(0),1} & \mathbf{S}_{(1),1} & \mathbf{C}_{(1),1} & \mathbf{S}_{(2),1} & \mathbf{C}_{(2),1} & \cdots & \mathbf{S}_{(l_{max}),1} & \mathbf{C}_{(l_{max}),1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_{(0),n-1} & \mathbf{S}_{(1),n-1} & \mathbf{C}_{(1),n-1} & \mathbf{S}_{(2),n-1} & \mathbf{C}_{(2),n-1} & \cdots & \mathbf{S}_{(l_{max}),n-1} & \mathbf{C}_{(l_{max}),n-1} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Für die Submatrizen $\mathbf{S}_{(l),j}$ und $\mathbf{C}_{(l),j}$ gilt:

$$\mathbf{S}_{(l),j} = \mathbf{E} \sin(l \delta_n j), \quad \mathbf{C}_{(l),j} = \mathbf{E} \cos(l \delta_n j) \quad (2.42)$$

Damit lässt sich die ursprüngliche Bewegungsgleichung transformieren:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{P} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{Q} \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t) \Rightarrow \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \ddot{\mathbf{y}}_F(t) + \mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T} \dot{\mathbf{y}}_F(t) + \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{y}_F(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{h}(t) \quad (2.43)$$

Im Folgenden soll die Transformation exemplarisch anhand des Terms $\mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{y}_F(t)$ erläutert werden; da die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{P} eine analoge Struktur haben, lassen sich die übrigen Terme leicht daraus ableiten.

Wie die Gleichung (2.31) für die $(i+1)$ -te Hyperzeile zeigt, benötigt man die Vektoren $\mathbf{y}^{(j+1)}(t)$ und $\mathbf{y}^{(j-1)}(t)$. Durch geeignete Umformung der Fourier-Reihe mit den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(j\pm 1)}(t) &= \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{y}_{(l),C}(t) \cos(l \delta_n (j \pm 1)) + \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sin(l \delta_n (j \pm 1))] \\ &= \sum_{l=0}^{l_{max}} \mathbf{y}_{(l),C}(t) [\cos(l \delta_n j) \cos(l \delta_n) \mp \sin(l \delta_n j) \sin(l \delta_n)] \\ &\quad + \sum_{l=0}^{l_{max}} \mathbf{y}_{(l),S}(t) [\sin(l \delta_n j) \cos(l \delta_n) \pm \cos(l \delta_n j) \sin(l \delta_n)] \\ &= \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{y}_{(l),C}(t) \cos(l \delta_n) \pm \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sin(l \delta_n)] \cos(l \delta_n j) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mp \mathbf{y}_{(l),C}(t) \sin(l \delta_n) + \mathbf{y}_{(l),S}(t) \cos(l \delta_n)] \sin(l \delta_n j) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Setzt man dies in die entsprechenden Terme der $(j+1)$ -ten Hyperzeile ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) \\ &= \mathbf{Q}_{-1} \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{y}_{(l),C}(t) \cos(l \delta_n) - \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sin(l \delta_n)] \cos(l \delta_n j) \\ &\quad + \mathbf{Q}_{-1} \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{y}_{(l),C}(t) \sin(l \delta_n) + \mathbf{y}_{(l),S}(t) \cos(l \delta_n)] \sin(l \delta_n j) \\ &\quad + \mathbf{Q}_0 \sum_{l=0}^{l_{max}} \mathbf{y}_{(l),C}(t) \cos(l \delta_n j) + \mathbf{Q}_0 \sum_{l=0}^{l_{max}} \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sin(l \delta_n j) \\ &\quad + \mathbf{Q}_1 \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{y}_{(l),C}(t) \cos(l \delta_n) + \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sin(l \delta_n)] \cos(l \delta_n j) \\ &\quad + \mathbf{Q}_1 \sum_{l=0}^{l_{max}} [-\mathbf{y}_{(l),C}(t) \sin(l \delta_n) + \mathbf{y}_{(l),S}(t) \cos(l \delta_n)] \sin(l \delta_n j) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sortiert man nach den Vektoren $\mathbf{y}_{(l),C}(t)$ und $\mathbf{y}_{(l),S}(t)$ sowie nach den Faktoren $\cos(l\delta_n j)$ und $\sin(l\delta_n j)$ so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) \\
&= \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{Q}_{-1} \cos(l\delta_n) + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 \cos(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),C}(t) \cos(l\delta_n j) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{l_{max}} [-\mathbf{Q}_{-1} \sin(l\delta_n) + \mathbf{Q}_1 \sin(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),S}(t) \cos(l\delta_n j) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{Q}_{-1} \sin(l\delta_n) - \mathbf{Q}_1 \sin(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),C}(t) \sin(l\delta_n j) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{Q}_{-1} \cos(l\delta_n) + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 \cos(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sin(l\delta_n j) \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Für die Transformation müssen die Hyperzeilen jeweils mit den einzelnen transponierten Hyperspalten der Transformationsmatrix \mathbf{T} multipliziert werden. Enthält die Hyperspalte Submatrizen $\mathbf{C}_{(k),j}$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_n j) \left[\mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{Q}_{-1} \cos(l\delta_n) + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 \cos(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),C}(t) \cos(l\delta_n j) \cos(k\delta_n j) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{l_{max}} [-\mathbf{Q}_{-1} \sin(l\delta_n) + \mathbf{Q}_1 \sin(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),S}(t) \cos(l\delta_n j) \cos(k\delta_n j) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{Q}_{-1} \sin(l\delta_n) - \mathbf{Q}_1 \sin(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),C}(t) \sin(l\delta_n j) \cos(k\delta_n j) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{l_{max}} [\mathbf{Q}_{-1} \cos(l\delta_n) + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 \cos(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sin(l\delta_n j) \cos(k\delta_n j) \\
&= \sum_{l=0}^{l_{max}} \left([\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}) \cos(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),C}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_n j) \cos(l\delta_n j) \right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{l_{max}} \left((\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{-1}) \sin(l\delta_n) \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_n j) \cos(l\delta_n j) \right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{l_{max}} \left(-(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{-1}) \sin(l\delta_n) \mathbf{y}_{(l),C}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_n j) \sin(l\delta_n j) \right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{l_{max}} \left([\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}) \cos(l\delta_n)] \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_n j) \sin(l\delta_n j) \right) \tag{2.47}
\end{aligned}$$

In analoger Weise ergibt sich, wenn die betrachtete Hyperspalte der Matrix \mathbf{T} die Submatrizen

$\mathbf{S}_{(k),j}$ enthält:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j) \left[\mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) \right] \\
&= \sum_{l=0}^{l_{max}} \left(\left[\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}) \cos(l \delta_n) \right] \mathbf{y}_{(l),C}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j) \cos(l \delta_n j) \right) \\
&+ \sum_{l=0}^{l_{max}} \left((\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{-1}) \sin(l \delta_n) \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j) \cos(l \delta_n j) \right) \\
&+ \sum_{l=0}^{l_{max}} \left(-(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{-1}) \sin(l \delta_n) \mathbf{y}_{(l),C}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j) \sin(l \delta_n j) \right) \\
&+ \sum_{l=0}^{l_{max}} \left(\left[\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}) \cos(l \delta_n) \right] \mathbf{y}_{(l),S}(t) \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j) \sin(l \delta_n j) \right) \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Für die Summation des Produkts zweier trigonometrischer Funktionen über n äquidistante Punkte innerhalb einer Periode gelten die folgenden Regeln, die im Anhang A hergeleitet werden:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_n j) \cos(l \delta_n j) = \begin{cases} n & \text{für } \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} & \text{für } \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} & \text{für } \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j) \sin(l \delta_n j) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ -\frac{n}{2} & \text{für } \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} & \text{für } \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j) \cos(l \delta_n j) = 0 \quad (2.51)$$

Für die beiden Indizes k und l gilt:

$$\frac{n}{2} \notin \mathbb{N} : 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}, 0 \leq l \leq \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow -\frac{n-1}{2} \leq -l \leq 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{n}{2} \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq \frac{n}{2}, 0 \leq l \leq \frac{n}{2} \Leftrightarrow -\frac{n}{2} \leq -l \leq 0 \quad (2.53)$$

Daraus folgt:

$$\frac{n}{2} \notin \mathbb{N} : 0 \leq k+l \leq n-1, -\frac{n-1}{2} \leq k-l \leq \frac{n-1}{2} \quad (2.54)$$

$$\frac{n}{2} \in \mathbb{N} : 0 \leq k+l \leq n, -\frac{n}{2} \leq k-l \leq \frac{n}{2} \quad (2.55)$$

Das Kriterium $\frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z}$ wird grundsätzlich für $k = l = 0$ erfüllt; im Intervall $[0, n-1]$ ist dies der einzige Fall. Ist $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, so wird dieses Kriterium außerdem für $k = l = \frac{n}{2}$ erfüllt. Da 0 in den Intervallen $[-\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}]$ und $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$ das einzige ganzzahlige Vielfache von n ist, wird das

Kriterium $\frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z}$ nur für $k = l$ erfüllt. Insgesamt erhält man damit für $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_n j) \left[\mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) \right] \\ &= \frac{n}{2} [\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}) \cos(k \delta_n)] \mathbf{y}_{(k),C}(t) + \frac{n}{2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{-1}) \sin(k \delta_n) \mathbf{y}_{(k),S}(t) \quad (2.56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j) \left[\mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) \right] \\ &= -\frac{n}{2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{-1}) \sin(k \delta_n) \mathbf{y}_{(k),C}(t) + \frac{n}{2} [\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}) \cos(k \delta_n)] \mathbf{y}_{(k),S}(t) \quad (2.57) \end{aligned}$$

Für $k = 0$ ergibt sich:

$$k = 0 \Rightarrow \cos(k \delta_n) = \cos(0) = 1, \quad \sin(k \delta_n) = \sin(0) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_n j) \left[\mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) \right] = n [\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}] \mathbf{y}_{(0),C}(t) \quad (2.58)$$

Ist $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$, so erhält man für $k = \frac{n}{2}$:

$$k = \frac{n}{2} \Rightarrow \cos(k \delta_n) = \cos(\pi) = -1, \quad \sin(k \delta_n) = \sin(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_n j) \left[\mathbf{Q}_{-1} \mathbf{y}^{(j-1)}(t) + \mathbf{Q}_0 \mathbf{y}^{(j)}(t) + \mathbf{Q}_1 \mathbf{y}^{(j+1)}(t) \right] = n [\mathbf{Q}_0 - (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1})] \mathbf{y}_{(\frac{n}{2}),C}(t) \quad (2.59)$$

Die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{P} haben eine analoge Struktur; dadurch sind für die Terme $\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \ddot{\mathbf{y}}(t)$ bzw. $\mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T} \dot{\mathbf{y}}(t)$ lediglich die Submatrizen \mathbf{Q}_0 , \mathbf{Q}_1 und \mathbf{Q}_{-1} durch die Submatrizen \mathbf{M}_0 , \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_{-1} bzw. \mathbf{P}_0 , \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_{-1} sowie die Vektoren $\mathbf{y}_{(k),C}(t)$ und $\mathbf{y}_{(k),S}(t)$ durch $\ddot{\mathbf{y}}_{(k),C}(t)$ und $\ddot{\mathbf{y}}_{(k),S}(t)$ bzw. $\dot{\mathbf{y}}_{(k),C}(t)$ und $\dot{\mathbf{y}}_{(k),S}(t)$ zu ersetzen. Damit ist gezeigt, dass das transformierte System

$$\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \ddot{\mathbf{y}}_F(t) + \mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T} \dot{\mathbf{y}}_F(t) + \mathbf{T}^T \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{y}_F(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{h}(t) \quad (2.60)$$

in $\frac{n}{2} + 1$ entkoppelte Teilsysteme zerfällt. Da jedes dieser Teilsysteme separat behandelt werden kann, stellt dies eine erhebliche Reduktion des Rechenaufwands dar. – Für den transformierten Erregervektor erhält man:

$$\mathbf{h}_F(t) = \mathbf{T}^T \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{(0),C}(t) \\ \mathbf{h}_{(1),S}(t) \\ \mathbf{h}_{(1),C}(t) \\ \mathbf{h}_{(2),S}(t) \\ \mathbf{h}_{(2),C}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{(l_{max}),S}(t) \\ \mathbf{h}_{(l_{max}),C}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{(k),C}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{h}^{(i)}(t) \cos(k \delta_n j), \quad \mathbf{h}_{(k),S}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{h}^{(i)}(t) \sin(k \delta_n j) \quad (2.61)$$

Damit ergibt sich für $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{n}{2}$ als Bewegungsgleichungen für die entkoppelten Teilsysteme:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{n}{2} [\mathbf{M}_0 + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_{-1}) \cos(k \delta_n)] & \frac{n}{2} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_{-1}) \sin(k \delta_n) \\ -\frac{n}{2} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_{-1}) \sin(k \delta_n) & \frac{n}{2} [\mathbf{M}_0 + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_{-1}) \cos(k \delta_n)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_{(k),C}(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{n}{2} [\mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{-1}) \cos(k \delta_n)] & \frac{n}{2} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{-1}) \sin(k \delta_n) \\ -\frac{n}{2} (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_{-1}) \sin(k \delta_n) & \frac{n}{2} [\mathbf{P}_0 + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{-1}) \cos(k \delta_n)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_{(k),C}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{n}{2} [\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}) \cos(k \delta_n)] & \frac{n}{2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{-1}) \sin(k \delta_n) \\ -\frac{n}{2} (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_{-1}) \sin(k \delta_n) & \frac{n}{2} [\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}) \cos(k \delta_n)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(k),C}(t) \\ \mathbf{y}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{(k),C}(t) \\ \mathbf{h}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} \quad (2.62) \end{aligned}$$

Für $k = 0$ lautet die Bewegungsgleichung:

$$n [\mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_{-1}] \ddot{\mathbf{y}}_{(0),C}(t) + n [\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{-1}] \dot{\mathbf{y}}_{(0),C}(t) + n [\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1}] \mathbf{y}_{(0),C}(t) = \mathbf{h}_{(0),C}(t) \quad (2.63)$$

Im Fall $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ ergibt sich für $k = \frac{n}{2}$:

$$n [\mathbf{M}_0 - (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_{-1})] \ddot{\mathbf{y}}_{(\frac{n}{2}),C}(t) + n [\mathbf{P}_0 - (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_{-1})] \dot{\mathbf{y}}_{(\frac{n}{2}),C}(t) + n [\mathbf{Q}_0 - (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_{-1})] \mathbf{y}_{(\frac{n}{2}),C}(t) = \mathbf{h}_{(\frac{n}{2}),C}(t) \quad (2.64)$$

Führt das System Eigenschwingungen aus, so lassen sich die Eigenformen in der folgenden Weise darstellen, wobei j wieder das j -te Segment kennzeichnet:

$$\mathbf{y}_{(k),i}^{(j)} = \mathbf{y}_{(k),i,C} \cos(k \delta_n j) + \mathbf{y}_{(k),i,S} \sin(k \delta_n j) \quad (2.65)$$

Da das Gesamtsystem in entkoppelte Teilsysteme zerfällt und die Eigenlösung eines Teilsystems eine Eigenlösung des Gesamtsystems darstellt, verbleiben von der Fourier-Reihe jeweils nur die beiden Summanden mit der Periodizität k . Für $\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$ bzw. $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$ ergeben sich $\frac{n+1}{2}$ bzw. $\frac{n}{2} + 1$ entkoppelte Teilsysteme.

2.3 Spezielle Eigenschaften gedämpfter zyklischer Systeme

Bei einem gedämpften System sind die Matrizen der lageabhängigen und der geschwindigkeitsabhängigen Kräfte symmetrisch; es gilt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K} = \mathbf{K}^T, \mathbf{P} = \mathbf{D} = \mathbf{D}^T \quad (2.66)$$

Die Massenmatrix \mathbf{M} ist stets symmetrisch. – Im Falle des zyklischen Systems erhält man für die Submatrizen:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0^T, \mathbf{M}_{-1} = \mathbf{M}_1^T \quad (2.67)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{D}_0 = \mathbf{D}_0^T, \mathbf{P}_1 = \mathbf{D}_1, \mathbf{P}_{-1} = \mathbf{D}_1^T \quad (2.68)$$

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_0^T, \mathbf{Q}_1 = \mathbf{K}_1, \mathbf{Q}_{-1} = \mathbf{K}_1^T \quad (2.69)$$

Setzt man diese Matrizen in die Bewegungsgleichungen für $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{n}{2}$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{n}{2} [\mathbf{M}_0 + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1^T) \cos(k \delta_n)] & \frac{n}{2} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_1^T) \sin(k \delta_n) \\ -\frac{n}{2} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_1^T) \sin(k \delta_n) & \frac{n}{2} [\mathbf{M}_0 + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1^T) \cos(k \delta_n)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_{(k),C}(t) \\ \ddot{\mathbf{y}}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{n}{2} [\mathbf{D}_0 + (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_1^T) \cos(k \delta_n)] & \frac{n}{2} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1^T) \sin(k \delta_n) \\ -\frac{n}{2} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1^T) \sin(k \delta_n) & \frac{n}{2} [\mathbf{D}_0 + (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_1^T) \cos(k \delta_n)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_{(k),C}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \frac{n}{2} [\mathbf{K}_0 + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1^T) \cos(k \delta_n)] & \frac{n}{2} (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1^T) \sin(k \delta_n) \\ -\frac{n}{2} (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1^T) \sin(k \delta_n) & \frac{n}{2} [\mathbf{K}_0 + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1^T) \cos(k \delta_n)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(k),C}(t) \\ \mathbf{y}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{(k),C}(t) \\ \mathbf{h}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.70)$$

Der besseren Übersicht wegen werden im Weiterhin die folgenden Abkürzungen benutzt:

$$\mathbf{M}_{(k),0} = \frac{n}{2} [\mathbf{M}_0 + (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1^T) \cos(k \delta_n)] = \mathbf{M}_{(k),0}^T \quad (2.71)$$

$$\mathbf{M}_{(k),1} = \frac{n}{2} (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_1^T) \sin(k \delta_n) = -\mathbf{M}_{(k),1}^T \quad (2.72)$$

$$\mathbf{D}_{(k),0} = \frac{n}{2} [\mathbf{D}_0 + (\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_1^T) \cos(k \delta_n)] = \mathbf{D}_{(k),0}^T \quad (2.73)$$

$$\mathbf{D}_{(k),1} = \frac{n}{2} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1^T) \sin(k \delta_n) = -\mathbf{D}_{(k),1}^T \quad (2.74)$$

$$\mathbf{K}_{(k),0} = \frac{n}{2} [\mathbf{K}_0 + (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_1^T) \cos(k \delta_n)] = \mathbf{K}_{(k),0}^T \quad (2.75)$$

$$\mathbf{K}_{(k),1} = \frac{n}{2} (\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1^T) \sin(k \delta_n) = -\mathbf{K}_{(k),1}^T \quad (2.76)$$

Zur Bestimmung der Eigenformen wird das homogene Differentialgleichungssystem durch den üblichen Ansatz in ein algebraisches Eigenwertproblem überführt. In diesem Fall lautet der Ansatz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(k),C}(t) \\ \mathbf{y}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{(k),i,A} \\ \mathbf{w}_{(k),i,B} \end{bmatrix} e^{\lambda_{(k),i} t} = \mathbf{y}_{(k),i,1} e^{\lambda_{(k),i} t} \quad (2.77)$$

Damit lautet das Eigenwertproblem:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(k),0} & \mathbf{M}_{(k),1} \\ -\mathbf{M}_{(k),1} & \mathbf{M}_{(k),0} \end{bmatrix} \lambda_{(k),i}^2 + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(k),0} & \mathbf{D}_{(k),1} \\ -\mathbf{D}_{(k),1} & \mathbf{D}_{(k),0} \end{bmatrix} \lambda_{(k),i} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(k),0} & \mathbf{K}_{(k),1} \\ -\mathbf{K}_{(k),1} & \mathbf{K}_{(k),0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{(k),i,A} \\ \mathbf{w}_{(k),i,B} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.78)$$

Betrachtet man die beiden Hyperzeilen des Eigenwertproblems, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}_{(k),0} \lambda_{(k),i}^2 + \mathbf{D}_{(k),0} \lambda_{(k),i} + \mathbf{K}_{(k),0}) \mathbf{w}_{(k),i,A} \\ & + (\mathbf{M}_{(k),1} \lambda_{(k),i}^2 + \mathbf{D}_{(k),1} \lambda_{(k),i} + \mathbf{K}_{(k),1}) \mathbf{w}_{(k),i,B} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} & -(\mathbf{M}_{(k),1} \lambda_{(k),i}^2 + \mathbf{D}_{(k),1} \lambda_{(k),i} + \mathbf{K}_{(k),1}) \mathbf{w}_{(k),i,A} \\ & + (\mathbf{M}_{(k),0} \lambda_{(k),i}^2 + \mathbf{D}_{(k),0} \lambda_{(k),i} + \mathbf{K}_{(k),0}) \mathbf{w}_{(k),i,B} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Verwendet man den folgenden Ansatz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{(k),C}(t) \\ \mathbf{y}_{(k),S}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_{(k),i,B} \\ \mathbf{w}_{(k),i,A} \end{bmatrix} e^{\lambda_{(k),i} t} = \mathbf{y}_{(k),i,2} e^{\lambda_{(k),i} t} \quad (2.81)$$

so erhält man für das Eigenwertproblem:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(k),0} & \mathbf{M}_{(k),1} \\ -\mathbf{M}_{(k),1} & \mathbf{M}_{(k),0} \end{bmatrix} \lambda_{(k),i}^2 + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(k),0} & \mathbf{D}_{(k),1} \\ -\mathbf{D}_{(k),1} & \mathbf{D}_{(k),0} \end{bmatrix} \lambda_{(k),i} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(k),0} & \mathbf{K}_{(k),1} \\ -\mathbf{K}_{(k),1} & \mathbf{K}_{(k),0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_{(k),i,B} \\ \mathbf{w}_{(k),i,A} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.82)$$

Hierbei ergeben sich aus der Betrachtung der beiden Hyperzeilen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} & -(\mathbf{M}_{(k),0} \lambda_{(k),i}^2 + \mathbf{D}_{(k),0} \lambda_{(k),i} + \mathbf{K}_{(k),0}) \mathbf{w}_{(k),i,B} \\ & + (\mathbf{M}_{(k),1} \lambda_{(k),i}^2 + \mathbf{D}_{(k),1} \lambda_{(k),i} + \mathbf{K}_{(k),1}) \mathbf{w}_{(k),i,A} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{M}_{(k),1} \lambda_{(k),i}^2 + \mathbf{D}_{(k),1} \lambda_{(k),i} + \mathbf{K}_{(k),1}) \mathbf{w}_{(k),i,B} \\ & + (\mathbf{M}_{(k),0} \lambda_{(k),i}^2 + \mathbf{D}_{(k),0} \lambda_{(k),i} + \mathbf{K}_{(k),0}) \mathbf{w}_{(k),i,A} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Die Gleichungen (2.79) und (2.84) stimmen überein; die Gleichung (2.80) lässt sich durch die Multiplikation mit -1 in die Gleichung (2.83) überführen. Beide Vektoren $\mathbf{y}_{(k),i,1}$ und $\mathbf{y}_{(k),i,2}$ sind also Eigenvektoren, die zu dem Eigenwert $\lambda_{(k),i}$ gehören.

Wie in (2.12) gezeigt, sind bei einem gedämpften System die Rechtseigenvektoren \mathbf{y}_i gleich den konjugiert komplexen Linkseigenvektoren $\bar{\mathbf{x}}_i$. Folglich gilt:

$$\mathbf{x}_{(k),i,1} = \bar{\mathbf{y}}_{(k),i,1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_{(k),i,1} \\ \bar{\mathbf{w}}_{(k),i,2} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_{(k),i,1}^H = [\bar{\mathbf{w}}_{(k),i,1}^H \quad \bar{\mathbf{w}}_{(k),i,2}^H] = [\mathbf{w}_{(k),i,A}^T \quad \mathbf{w}_{(k),i,B}^T] \quad (2.85)$$

Die Linksmultiplikation des Eigenwertproblems für den Rechtseigenvektor $\mathbf{y}_{(k),i,2}$ mit dem hermitesch transponierten Linkseigenvektor $\mathbf{x}_{(k),i,1}$ ergibt:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{w}_{(k),i,A}^T \quad \mathbf{w}_{(k),i,B}^T] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(k),0} & \mathbf{M}_{(k),1} \\ -\mathbf{M}_{(k),1} & \mathbf{M}_{(k),0} \end{bmatrix} \lambda_{(k),i}^2 + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{(k),0} & \mathbf{D}_{(k),1} \\ -\mathbf{D}_{(k),1} & \mathbf{D}_{(k),0} \end{bmatrix} \lambda_{(k),i} \right. \\ & \quad \left. + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(k),0} & \mathbf{K}_{(k),1} \\ -\mathbf{K}_{(k),1} & \mathbf{K}_{(k),0} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -\mathbf{w}_{(k),i,B} \\ \mathbf{w}_{(k),i,A} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Betrachtet man den ersten Summanden, so erhält man:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(k),i,A} & \mathbf{w}^{(k),i,B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(k),0} & \mathbf{M}_{(k),1} \\ -\mathbf{M}_{(k),1} & \mathbf{M}_{(k),0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{w}^{(k),i,B} \\ \mathbf{w}^{(k),i,A} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(k),i,A} & \mathbf{w}^{(k),i,B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,B} + \mathbf{M}_{(k),1} \mathbf{w}^{(k),i,A} \\ \mathbf{M}_{(k),1} \mathbf{w}^{(k),i,B} + \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,A} \end{bmatrix} \\
&= -\mathbf{w}^{(k),i,A}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,B} + \underbrace{\mathbf{w}^{(k),i,A}{}^T \mathbf{M}_{(k),1} \mathbf{w}^{(k),i,A}}_0 + \underbrace{\mathbf{w}^{(k),i,B}{}^T \mathbf{M}_{(k),1} \mathbf{w}^{(k),i,B}}_0 \\
&\quad + \mathbf{w}^{(k),i,B}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,A} \tag{2.87}
\end{aligned}$$

Wie aus (2.72) hervorgeht, ist die Matrix $\mathbf{M}_{(k),1}$ schiefsymmetrisch. Aus diesem Grund verschwinden der zweite und der dritte Summand der Gleichung (2.87). Dagegen ist die Matrix $\mathbf{M}_{(k),0}$ gemäß (2.71) symmetrisch. Da die Gleichung (2.87) skalar ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^{(k),i,B}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,A} &= (\mathbf{w}^{(k),i,B}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,A})^T = \mathbf{w}^{(k),i,A}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,B} \\
&= \mathbf{w}^{(k),i,A}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,B} \tag{2.88}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(k),i,A} & \mathbf{w}^{(k),i,B} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{(k),0} & \mathbf{M}_{(k),1} \\ -\mathbf{M}_{(k),1} & \mathbf{M}_{(k),0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(k),i,B} \\ -\mathbf{w}^{(k),i,A} \end{bmatrix} \\
&= -\mathbf{w}^{(k),i,A}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,B} + \mathbf{w}^{(k),i,B}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,A} \\
&= -\mathbf{w}^{(k),i,A}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,B} + \mathbf{w}^{(k),i,A}{}^T \mathbf{M}_{(k),0} \mathbf{w}^{(k),i,B} = 0 \tag{2.89}
\end{aligned}$$

In analoger Weise gilt dies auch für den zweiten und dritten Summanden der Gleichung (2.86), da die Matrizen $\mathbf{D}_{(k),0}$ und $\mathbf{K}_{(k),0}$ bzw. $\mathbf{D}_{(k),1}$ und $\mathbf{K}_{(k),1}$ die gleichen Symmetrieeigenschaften aufweisen wie $\mathbf{M}_{(k),0}$ bzw. $\mathbf{M}_{(k),1}$. Damit ist gezeigt, dass die beiden Eigenvektoren $\mathbf{y}^{(k),i,1}$ und $\mathbf{y}^{(k),i,2}$ orthogonal sind. Da diese beiden Vektoren zu dem gleichen Eigenwert $\lambda_{(k),i}$ gehören, muss $\lambda_{(k),i}$ ein doppelter Eigenwert sein. – Der ursprüngliche Ansatz zur Behandlung des zyklischen Systems bestand nach (2.38) in der Beschreibung des Vektors $\mathbf{y}^{(j)}(t)$ des j -ten Segments durch eine Fourierreihe. Da die Transformation zu einer Entkopplung der Teilsysteme für unterschiedliche Periodizitäten k führt, lauten die beiden Eigenvektoren für das j -te Segment:

$$\mathbf{y}_{(k),i,1}^{(j)} = \mathbf{w}^{(k),i,A} \cos(k \delta_n j) + \mathbf{w}^{(k),i,B} \sin(k \delta_n j) \tag{2.90}$$

$$\mathbf{y}_{(k),i,2}^{(j)} = \mathbf{w}^{(k),i,A} \sin(k \delta_n j) - \mathbf{w}^{(k),i,B} \cos(k \delta_n j) \tag{2.91}$$

2.3.1 Kontinuierliche Verteilung

Eine zyklische Struktur kann durchlaufende Elemente enthalten; ein Beispiel dafür sind die Schienen eines Gleises. In diesem Fall liegt es nahe, die Verteilung der Bewegungen nach (2.65), die für einzelne Punkte definiert ist, auf einen kontinuierlichen Definitionsbereich zu erweitern. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn die zyklische Struktur durch wandernde Lasten beaufschlagt wird.

Für die kontinuierliche Verteilung wird die Koordinate ϕ definiert, wobei $\phi = \phi_j$ und $\phi = \phi_j + 2\pi$ die gleiche Stelle bezeichnen. Aufgrund von (2.65) muss nun gelten:

$$\mathbf{y}_{(k),i}(\phi + \delta_n j) = \mathbf{y}_{(k),i,C}(\phi) \cos(k \delta_n j) + \mathbf{y}_{(k),i,S}(\phi) \sin(k \delta_n j) \tag{2.92}$$

Diese Forderung wird von der folgenden Funktion erfüllt:

$$\mathbf{y}_{(k),i}(\phi) = \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,C,m} \cos((k+m)n\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,S,m} \sin((k+m)n\phi)] \tag{2.93}$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{(k),i}(\phi) &= \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,C,m} \cos((k+m)n\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,S,m} \sin((k+m)n\phi)] \\
&= \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \mathbf{y}_{(k),i,C,m} [\cos(k\phi) \cos(mn\phi) - \sin(k\phi) \sin(mn\phi)] \\
&\quad + \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \mathbf{y}_{(k),i,S,m} [\sin(k\phi) \cos(mn\phi) + \cos(k\phi) \sin(mn\phi)] \\
&= \underbrace{\sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,C,m} \cos(mn\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,S,m} \sin(mn\phi)]}_{\mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi)} \cos(k\phi) \\
&\quad + \underbrace{\sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,S,m} \cos(mn\phi) - \mathbf{y}_{(k),i,C,m} \sin(mn\phi)]}_{\mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi)} \sin(k\phi) \\
&= \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \cos(k\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \sin(k\phi) \tag{2.94}
\end{aligned}$$

Die Funktionen $\mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi)$ und $\mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi)$ besitzen die Periodizität $\frac{2\pi}{n} = \delta_n$; folglich gilt:

$$\mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi + \delta_n j) = \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi), \quad \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi + \delta_n j) = \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \tag{2.95}$$

Um die Bedingung (2.92) zu überprüfen, ist der folgende Ausdruck zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{(k),i}(\phi + \delta_n j) &= \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi + \delta_n j) \cos(k(\phi + \delta_n j)) + \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi + \delta_n j) \sin(k(\phi + \delta_n j)) \\
&= \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \cos(k(\phi + \delta_n j)) + \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \sin(k(\phi + \delta_n j)) \\
&= \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) [\cos(k\phi) \cos(k\delta_n j) - \sin(k\phi) \sin(k\delta_n j)] \\
&\quad + \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) [\sin(k\phi) \cos(k\delta_n j) + \cos(k\phi) \sin(k\delta_n j)] \\
&= \underbrace{[\mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \cos(k\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \sin(k\phi)]}_{\mathbf{y}_{(k),i,C}(\phi)} \cos(k\delta_n j) \\
&\quad + \underbrace{[-\mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \sin(k\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \cos(k\phi)]}_{\mathbf{y}_{(k),i,S}(\phi)} \sin(k\delta_n j) \\
&= \mathbf{y}_{(k),i,C}(\phi) \cos(k\delta_n j) + \mathbf{y}_{(k),i,S}(\phi) \sin(k\delta_n j) \tag{2.96}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck $\mathbf{y}_{(k),i}(\phi + \delta_n j)$ lässt sich in eine der Gleichung (2.65) entsprechende Struktur überführen; damit ist gezeigt, dass die kontinuierliche Verteilung nach (2.93) tatsächlich die Zyklenbedingung erfüllt.

Im Kapitel 2.3 wurde gezeigt, dass bei einer gedämpften zyklischen Struktur für $k \neq 0 \wedge k \neq \frac{n}{2}$ jeder Eigenwert $\lambda_{(k),i}$ ein doppelter Eigenwert ist und zu dem Eigenwert zwei orthogonale Eigenvektoren der folgenden Form existieren:

$$\mathbf{y}_{(k),i1}^{(j)} = \mathbf{w}_{(k),i,A} \cos(k\delta_n j) + \mathbf{w}_{(k),i,B} \sin(k\delta_n j) \tag{2.97}$$

$$\mathbf{y}_{(k),i2}^{(j)} = \mathbf{w}_{(k),i,A} \sin(k\delta_n j) - \mathbf{w}_{(k),i,B} \cos(k\delta_n j) \tag{2.98}$$

Setzt man für die Verteilung des ersten Eigenvektors $\mathbf{y}_{(k),i1}(\phi) = \mathbf{y}_{(k),i}(\phi)$, so lässt sich die Verteilung $\mathbf{y}_{(k),i2}(\phi)$ des zweiten Eigenvektors in analoger Weise zu den Gleichungen (2.97) und (2.98) angeben:

$$\mathbf{y}_{(k),i1}(\phi) = \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \cos(k\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \sin(k\phi) \tag{2.99}$$

$$\mathbf{y}_{(k),i2}(\phi) = \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \sin(k\phi) - \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \cos(k\phi) \tag{2.100}$$

Durch geeignete Umformungen erhält man für $\mathbf{y}_{(k),i2}(\phi)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{(k),i2}(\phi) &= \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \sin(k\phi) - \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \cos(k\phi) \\
&= \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,C,m} \cos(mn\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,S,m} \sin(mn\phi)] \sin(k\phi) \\
&\quad - \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,S,m} \cos(mn\phi) - \mathbf{y}_{(k),i,C,m} \sin(mn\phi)] \cos(k\phi) \\
&= \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \mathbf{y}_{(k),i,C,m} [\sin(k\phi) \cos(mn\phi) + \cos(k\phi) \sin(mn\phi)] \\
&\quad + \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \mathbf{y}_{(k),i,S,m} [\sin(k\phi) \sin(mn\phi) - \cos(k\phi) \cos(mn\phi)] \\
&= \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,C,m} \sin((k+mn)\phi) - \mathbf{y}_{(k),i,S,m} \cos((k+mn)\phi)] \quad (2.101)
\end{aligned}$$

Die kontinuierliche Verteilung für die beiden Eigenformen, die zu einem doppelten Eigenwert gehören lauten also:

$$\mathbf{y}_{(k),i,1}(\phi) = \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,C,m} \cos((k+mn)\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,S,m} \sin((k+mn)\phi)] \quad (2.102)$$

$$\mathbf{y}_{(k),i,2}(\phi) = \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}_{(k),i,C,m} \sin((k+mn)\phi) - \mathbf{y}_{(k),i,S,m} \cos((k+mn)\phi)] \quad (2.103)$$

Durch (2.96) ist bereits gezeigt worden, dass gilt:

$$\mathbf{y}_{(k),i1}(\phi + \delta_n j) = \mathbf{y}_{(k),i1,C}(\phi) \cos(k\delta_n j) + \mathbf{y}_{(k),i1,S}(\phi) \sin(k\delta_n j) \quad (2.104)$$

In analoger Weise erhält man für $\mathbf{y}_{(k),i2}(\phi + \delta_n j)$ mit den in (2.96) eingeführten Ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{(k),i2}(\phi + \delta_n j) &= \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi + \delta_n j) \sin(k(\phi + \delta_n j)) - \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi + \delta_n j) \cos(k(\phi + \delta_n j)) \\
&= \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \sin(k(\phi + \delta_n j)) - \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \cos(k(\phi + \delta_n j)) \\
&= \mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) [\sin(k\phi) \cos(k\delta_n j) + \cos(k\phi) \sin(k\delta_n j)] \\
&\quad - \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) [\cos(k\phi) \cos(k\delta_n j) - \sin(k\phi) \sin(k\delta_n j)] \\
&= \underbrace{[\mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \sin(k\phi) - \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \cos(k\phi)]}_{-\mathbf{y}_{(k),i,S}(\phi)} \cos(k\delta_n j) \\
&\quad + \underbrace{[\mathbf{y}_{(k),i,A}(\phi) \cos(k\phi) + \mathbf{y}_{(k),i,B}(\phi) \sin(k\phi)]}_{\mathbf{y}_{(k),i,C}(\phi)} \sin(k\delta_n j) \\
&= -\mathbf{y}_{(k),i,S}(\phi) \cos(k\delta_n j) + \mathbf{y}_{(k),i,C}(\phi) \sin(k\delta_n j) \quad (2.105)
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion $\mathbf{y}_{(k),i2}(\phi)$ nach (2.98) ebenfalls die Zyklenbedingung erfüllt.

3 Modellierung der Schiene

Wie bereits im Kapitel 1 erwähnt, soll das zu entwickelnde Gleismodell möglichst realitätsnah sein. Aus diesem Grund kann die Schiene hier nicht als Balken modelliert werden, da hierdurch einige wesentliche Eigenschaften verloren gehen würden. Bei den gebräuchlichen Balkentheorien nach Bernoulli-Euler und nach Timoshenko wird davon ausgegangen, dass die Balkenquerschnitte stets unverändert bleiben. Betrachtet man jedoch die Schiene, so fällt auf, dass zum einen der Fuß auf der Schwelle relativ steif eingespannt ist und zum anderen der Steg der Schiene relativ dünn ist. Dadurch ist eine Kippbewegung des Schienenkopfes aufgrund von Lateralkräften zu erwarten, was wiederum Auswirkungen auf die Berührgeometrie des Rad-Schiene-Kontakts und damit auch auf das Laufverhalten des Fahrzeugs hat. Aus diesem Grund ist eine Beschreibung der Deformationen des Schienenquerschnitts unerlässlich. Hierfür wird die Finite-Elemente-Methode (FEM) verwendet.

Im dem Modell von Ripke wird eine FE-Modellierung der Schiene verwendet, wobei die Schiene sowohl im Querschnitt als auch in Längsrichtung diskretisiert wird. Durch Aufbringen entsprechender Randbedingungen an den Grenzen der Substruktur, wie sie im vorangegangenen Unterkapitel beschrieben wurden, erhält man das Eigenverhalten der Substruktur und damit das Eigenverhalten der Gesamtstruktur. Eine alternative Vorgehensweise besteht darin, von vornherein Ansatzfunktionen zu wählen, die die Zyklenbedingung der Struktur erfüllen.

Im Kapitel 2.3.1 wurde gezeigt, dass sich mit der folgenden Funktion eine kontinuierliche Verteilung der Eigenbewegungen eines zyklischen Systems beschreiben lässt:

$$\mathbf{y}^{(k),i}(\phi) = \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} [\mathbf{y}^{(k),i,C,m} \cos((k+m)n\phi) + \mathbf{y}^{(k),i,S,m} \sin((k+m)n\phi)] \quad (3.1)$$

Im vorliegenden Fall soll anstelle der Koordinate ϕ die Längskoordinate x verwendet werden. Das Gleismodell besteht aus n_{Sw} Schwellen, die Schwellenfachlänge beträgt Δx_{Sw} , so dass die Gesamtlänge des Gleismodells l_G ist. Damit besteht zwischen den Koordinaten ϕ und x der folgende Zusammenhang:

$$\phi = \frac{2\pi}{n_{Sw} \Delta x_{Sw}} x = \frac{2\pi}{l_G} x \quad (3.2)$$

Damit lautet die Verteilung der Verformungen der Schiene für einen Eigenmodus des Gleises mit der Periodizität k :

$$\mathbf{y}^{(k),i}(x) = \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \left[\mathbf{y}^{(k),i,C,m} \cos\left(\frac{2\pi(k+m)n}{l_G} x\right) + \mathbf{y}^{(k),i,S,m} \sin\left(\frac{2\pi(k+m)n}{l_G} x\right) \right] \quad (3.3)$$

Grundlage für die Modellierung der Schiene sind die Navierschen Gleichungen; diese lauten in kartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

Hierbei bezeichnen G den Schubmodul, ν die Querkontraktionszahl und ρ die Dichte des Schienenwerkstoffs. Im vorliegenden Fall sind die Werkstoffparameter über den gesamten Körper konstant.

Die Schiene wird als prismatischer Körper angenommen, d.h. die Querschnittsfläche ist von der Längskoordinate x unabhängig. Aus diesem Grund ist eine Separation in der Form $f(x, y, z, t) = F(y, z) g(x, t)$ naheliegend. Anschaulich lässt sich diese Separation etwa so deuten: Der prismatische Körper kann als ein Stapel identischer "Blätter" mit der infinitesimalen Dicke dx aufgefasst werden. Die Ortsfunktionen $F(y, z)$ sind für jedes Blatt gleich, lediglich die Zeit, der Skalarfaktor $g(x, t)$ hängt von der Längskoordinate x und der Zeit t ab.

Die Summanden der Funktion (3.3), die der entsprechenden Zyklenbedingung genügt, verwenden für die Verteilung der Bewegungen über der Längskoordinate x trigonometrische Funktionen. Damit lässt sich eine semianalytische Lösung für die Navierschen Gleichungen angeben:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= U_{i,n}(y, z) \sin(\kappa_i x + \beta_i) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \\ v(x, y, z, t) &= V_{i,n}(y, z) \cos(\kappa_i x + \beta_i) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \\ w(x, y, z, t) &= W_{i,n}(y, z) \cos(\kappa_i x + \beta_i) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \\ \kappa_i &= \frac{2\pi i}{l_G}, \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mit diesem Ansatz lassen sich die Navierschen Gleichungen reduzieren:

$$\begin{aligned} -\kappa_i^2 \left(1 + \frac{1}{1-2\nu}\right) U_{i,n} + \frac{\partial^2 U_{i,n}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_{i,n}}{\partial z^2} - \frac{\kappa_i}{1-2\nu} \left(\frac{\partial V_{i,n}}{\partial y} + \frac{\partial W_{i,n}}{\partial z}\right) + \omega_{i,n}^2 \frac{\rho}{G} U_{i,n} &= 0 \\ -\kappa_i^2 V_{i,n} + \frac{\partial^2 V_{i,n}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_{i,n}}{\partial z^2} + \frac{\kappa_i}{1-2\nu} \frac{\partial U_{i,n}}{\partial y} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 V_{i,n}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{i,n}}{\partial y \partial z}\right) + \omega_{i,n}^2 \frac{\rho}{G} V_{i,n} &= 0 \\ -\kappa_i^2 W_{i,n} + \frac{\partial^2 W_{i,n}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{i,n}}{\partial z^2} + \frac{\kappa_i}{1-2\nu} \frac{\partial U_{i,n}}{\partial z} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 V_{i,n}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 W_{i,n}}{\partial z^2}\right) + \omega_{i,n}^2 \frac{\rho}{G} W_{i,n} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Hierbei wird die Abhängigkeit der Funktionen $U_{i,n}$, $V_{i,n}$ und $W_{i,n}$ von den Koordinaten y und z der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Durch geeignete Wahl von β_i lassen sich auch hier Eigenformen mit unterschiedlichen Symmetrieeigenschaften bezüglich bestimmter Werte von x angeben. Soll die Lösung bezüglich $x = 0$, $x = l_{Fw}/2$ und $x = l_{Fw}$ symmetrisch sein, so lautet der Ansatz:

$$\begin{aligned} u_S(x, y, z, t) &= U_{i,n}(y, z) \sin(\kappa_i x) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \\ v_S(x, y, z, t) &= V_{i,n}(y, z) \cos(\kappa_i x) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \\ w_S(x, y, z, t) &= W_{i,n}(y, z) \cos(\kappa_i x) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die entsprechenden antimetrischen Lösungen erhält man mit dem folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} u_A(x, y, z, t) &= -U_{i,n}(y, z) \cos(\kappa_i x) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \\ v_A(x, y, z, t) &= V_{i,n}(y, z) \sin(\kappa_i x) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \\ w_A(x, y, z, t) &= W_{i,n}(y, z) \sin(\kappa_i x) \cos(\omega_{i,n} t + \phi) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Wie schon beim Radsatz, so ist es damit auch bei der Schiene gelungen, das ursprünglich räumliche Problem auf ein ebenes zu reduzieren, welches mit der Finite-Elemente-Methode gelöst werden kann. Auch hier werden Viereckelemente mit bilinearen Ansätzen verwendet. Das Modell besitzt insgesamt 216 Knoten und 168 viereckige Elemente; in den Elementen werden bilineare Ansätze für die Verschiebungsfunktionen verwendet. Da an jedem Knoten je drei Verschiebungen möglich sind, besitzt das Modell 648 Freiheitsgrade. Gegenüber dem Modell von Ripke [4], in dem das Problem der Querschnittsverformung ebenfalls modelliert wurde,

bedeutet dies zweifellos einen deutlichen Mehraufwand. Andererseits ist zu bedenken, dass das vorliegende Modell ohne die üblichen Verformungshypothesen für ein- oder zweidimensionale Kontinua auskommt; wie sich noch zeigen wird, sind diese Hypothesen insbesondere bei kurzwelligen Eigenformen nicht mehr abgesichert. Weiterhin entfällt auch der bei Ripke erforderliche Abgleich des Modells, welches einen stark idealisierten Querschnitt besitzt.

Grundlage für das Finite-Elemente-Modell ist die Schiene des Typs UIC60, die auf Hauptstrecken in Europa vielfach zum Einsatz kommt. – Zur Lösung werden die gleichen Algorithmen wie beim FE-Modell des Radsatzes verwendet, d.h. die auf dem Cholesky-Verfahren beruhende Routine `DPOSVX` zur Inversion der Massenmatrix und die auf dem Arnoldi-Verfahren beruhenden Routinen `DNEUPD` und `DNAUPD` zur Bestimmung der Eigenwerte, die den Softwarepaketen `LAPACK` und `ARPACK` entnommen sind.

Im folgenden sollen nun einige Ergebnisse der Finite-Elemente-Rechnung dargestellt werden. In Abb.3.1 sind die ersten sieben Eigenformen der Schiene für eine Wellenlänge von $\lambda = 6,0$ m dargestellt. Die beiden ersten Eigenformen stellen Biegeschwingungen in lateraler und vertikaler Richtung dar. Die dritte Eigenform ist die Torsionsschwingung, die vierte die Dehnschwingung. Während die ersten vier Eigenformen den Schwingungen der bekannten eindimensionalen Kontinua entsprechen, weisen die fünfte und die sechste Eigenform deutliche Verformungen des Querschnitts auf. In beiden Fällen kommt es zu einer Verdrehung des Schienenkopfes, ein Effekt, dessen Einfluss auf die Berührgeometrie und damit auf das Laufverhalten zu untersuchen ist. Die siebte Eigenform stellt eine Scherung des Steges dar.

Als nächstes sollen die Eigenformen für eine Wellenlänge von $\lambda = 1,2$ m betrachtet werden. Diese Wellenlänge ist insofern interessant, als sie das Doppelte der Schwellenfachlänge von $\Delta x_{sw} = 0,6$ m darstellt. Die ersten sieben Eigenformen für diesen Fall sind in 3.2 dargestellt. Besonders interessant ist hierbei die Tatsache, dass die Eigenfrequenzen der einzelnen Moden mit kleiner werdender Wellenlänge unterschiedlich stark ansteigen. So steigt die Eigenfrequenz der Dehnschwingung von $f = 865,72$ Hz bei $\lambda = 6,0$ m auf $f = 4288,15$ Hz bei $\lambda = 1,2$ m, d.h. fast auf das Fünffache, während die Wellenlänge auf ein Fünftel absinkt. Demgegenüber ändern sich die Frequenzen der Eigenformen, bei denen der Schienenkopf eigene Torsionsbewegungen ausführt, nur wenig: Sie steigen von 1401,85 Hz bzw. 4167,16 Hz auf 1911,29 Hz bzw. 4514,37 Hz. Damit liegt die niedrigste Eigenfrequenz, bei der eine starke Querschnittsverformung auftritt, deutlich unterhalb der höchsten Eigenfrequenz, für die sich der Querschnitt kaum verformt.

Als letztes sollen die Eigenformen für eine Wellenlänge von $\lambda = 0,6$ m, die der Schwellenfachlänge entspricht, betrachtet werden. Sie sind in Abb.3.3 dargestellt. Es fällt insbesondere auf, dass die vorher saubere Trennung von lateralen Biegeschwingungen und Torsionsschwingungen verloren geht: Bei der ersten Eigenform treten zugleich eine Querverschiebung und eine Drehung des Querschnitts auf, während bei der zweiten Eigenform eine Verdrehung des Fußes gegenüber Kopf und Steg zu beobachten ist. Weiterhin ist bei der fünften Eigenform eine starke Querschnittsverwölbung festzustellen, die sich deutlich von der anfangs fast reinen Verschiebung in Längsrichtung der Schiene unterscheidet. Dies zeigt, dass für derart kurzwellige Eigenformen, bei denen die Wellenlänge λ von ähnlicher Größenordnung wie die Abmessungen des Querschnitts ist, die Annahmen der eindimensionalen Kontinua nur noch eingeschränkt gültig sind. Dagegen behalten die vierte und die sechste Eigenform, bei denen eine Torsion des Schienenkopfes vorliegt, ihre Form kaum verändert bei.

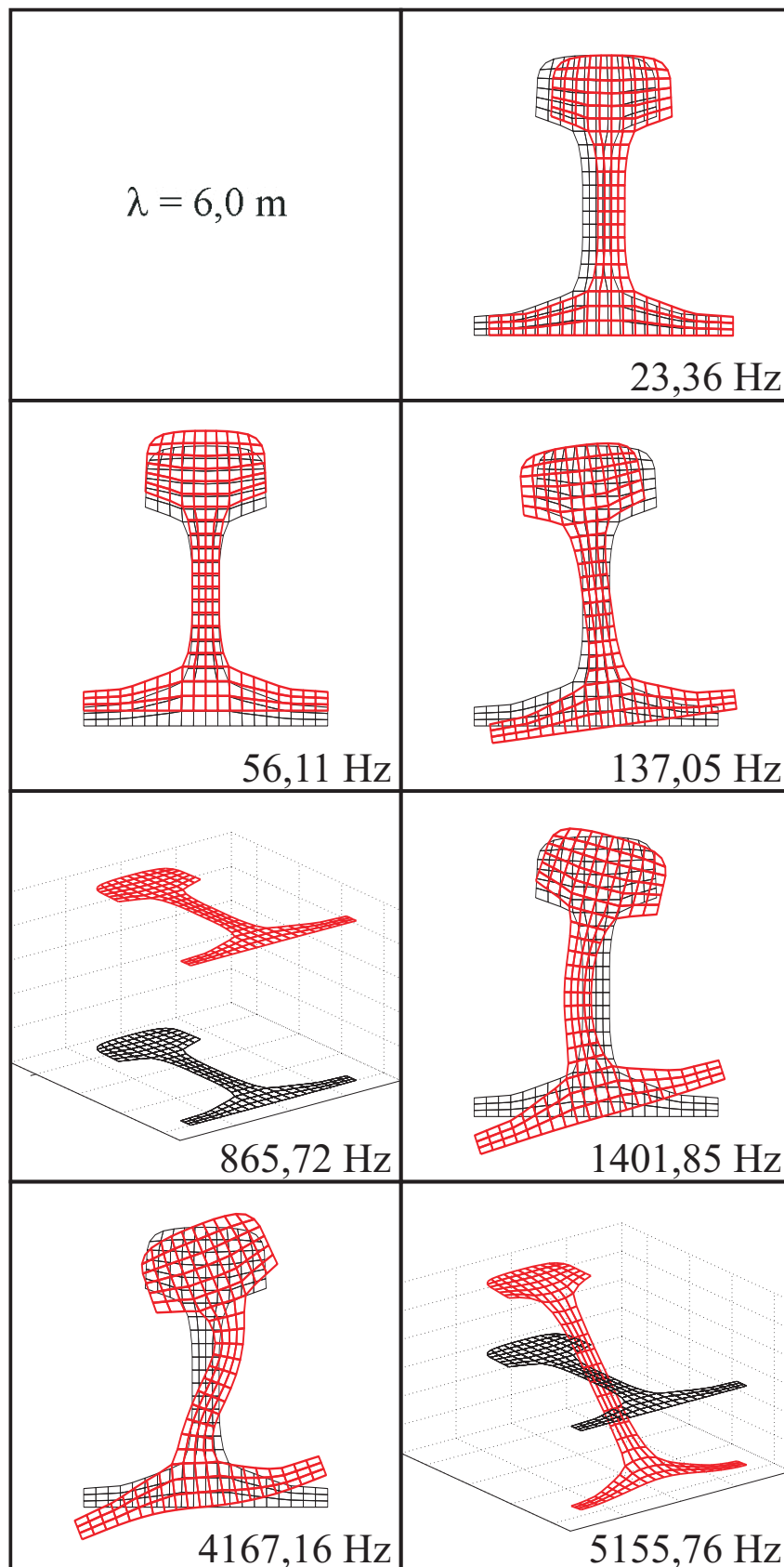


Abbildung 3.1: Eigenformen der Schiene UIC60

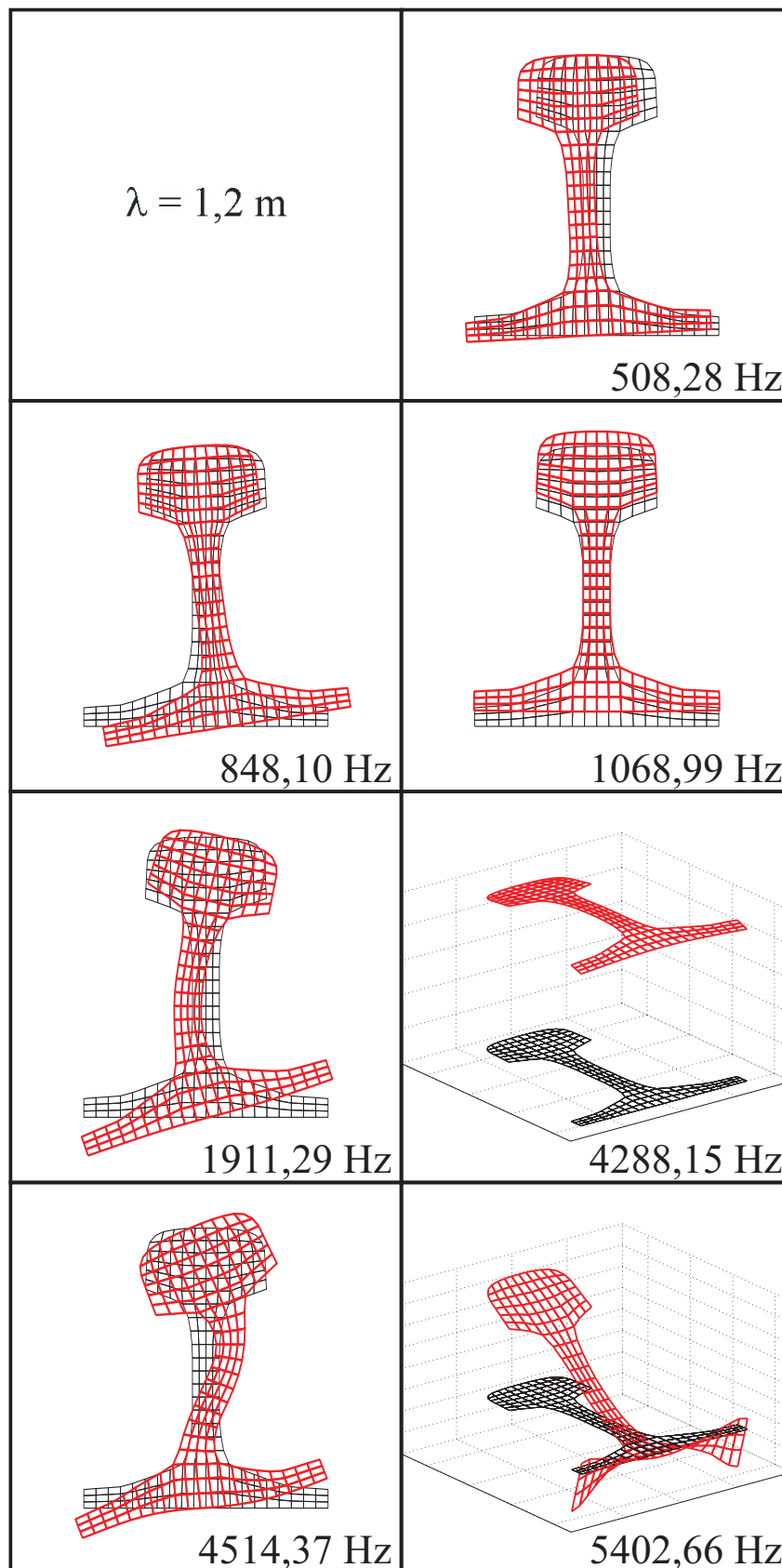


Abbildung 3.2: Eigenformen der Schiene UIC60

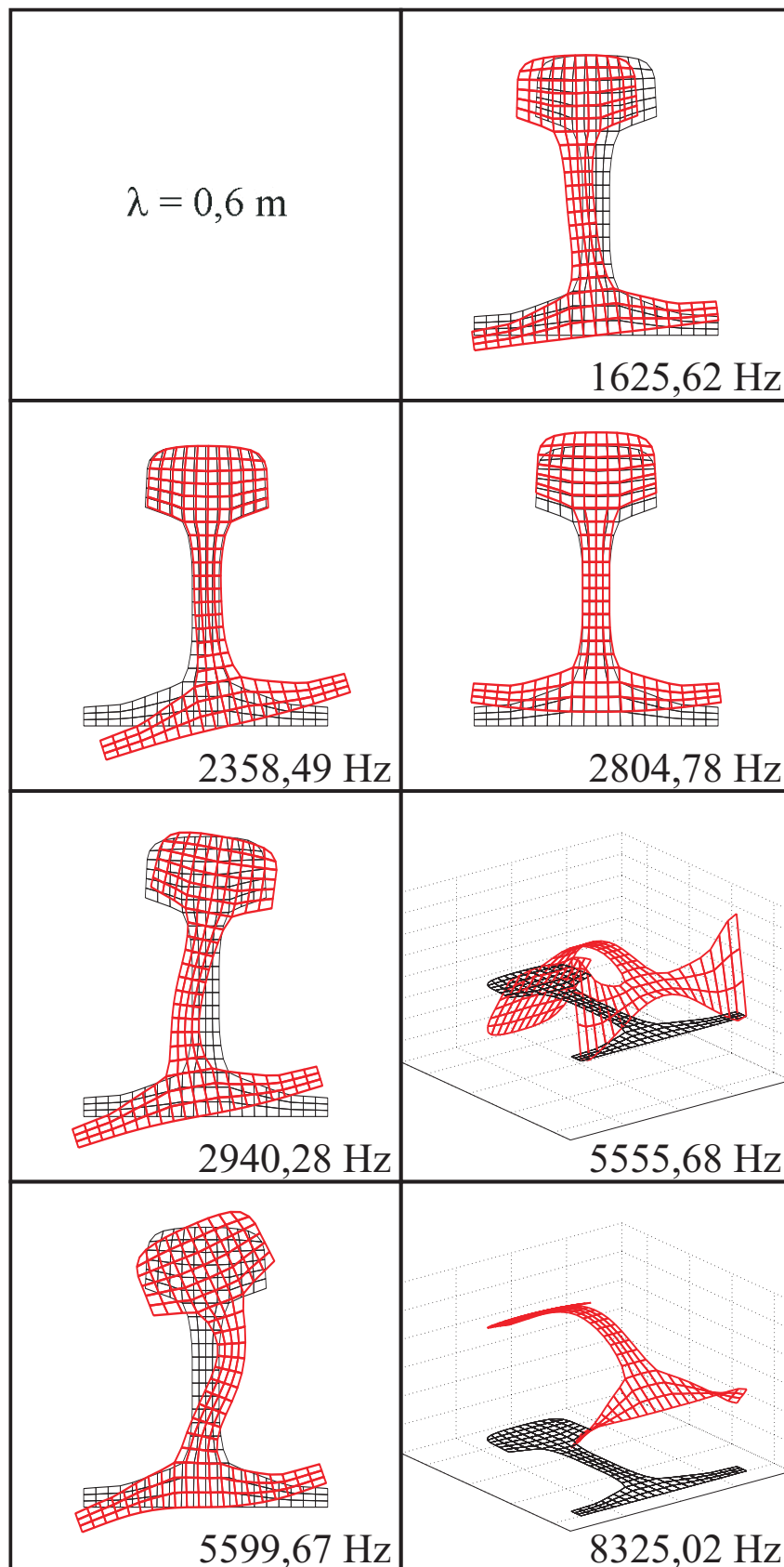


Abbildung 3.3: Eigenformen der Schiene UIC60

4 Dynamisches Verhalten des Fahrwegs

Wie bereits eingangs erwähnt, wird das unendlich lange Gleis durch eine endlich lange Struktur approximiert. Hierbei stellt sich die Frage, wie lang die endliche Struktur sein muss, um eine brauchbare Approximation zu erhalten. Weiterhin werden die Bewegungen der elastischen Schiene durch eine Modalsynthese approximiert, wobei auch hier die Frage ist, wie viele Moden der Schiene berücksichtigt werden müssen.

Für die Wechselwirkung von Fahrzeug und Fahrweg sind nur die Bewegungen der Schienenköpfe unter den Rädern des Fahrzeugs von Interesse. Weiterhin lässt sich das dynamische Verhalten des Gleises anhand des Frequenzgangs betrachten. Um die Fragen nach der erforderlichen Länge und der notwendigen Anzahl der Moden zu behandeln, wird daher der Frequenzgang für eine Erregung an den Schienenköpfen bestimmt, wobei die Länge des Modells und die Anzahl der berücksichtigten Moden variiert werden. Exemplarisch sollen hier vier Fälle betrachtet werden, die in den folgenden Abbildungen schematisch dargestellt sind, nämlich die symmetrische vertikale Erregung (Abb. 4.1 und Abb. 4.2) und die antimetrische laterale Erregung (Abb. 4.3 und Abb. 4.4), wobei die Kräfte jeweils einmal über der Schwelle (Abb. 4.1 und Abb. 4.3) und jeweils einmal in der Schwellenfachmitte (Abb. 4.2 und Abb. 4.4) angreifen.

4.1 Erforderliche Länge des Fahrwegmodells

Die Länge l_{Fw} des Fahrwegs hängt mit der Anzahl der Schwellen n_{Sw} zusammen, wobei ein Schwellenfach eine Länge von $\Delta x_{Sw} = 0,6$ m hat. Besonders einfach lässt sich die Länge variieren, wenn man für die Schwellenanzahl Zweierpotenzen benutzt. Im vorliegenden Fall wurden die folgenden Schwellenanzahlen verwendet:

- $n_{Sw} = 8 \Rightarrow l_{Fw} = n_{Sw} \Delta x_{Sw} = 4,8$ m
- $n_{Sw} = 16 \Rightarrow l_{Fw} = n_{Sw} \Delta x_{Sw} = 9,6$ m
- $n_{Sw} = 32 \Rightarrow l_{Fw} = n_{Sw} \Delta x_{Sw} = 19,2$ m
- $n_{Sw} = 64 \Rightarrow l_{Fw} = n_{Sw} \Delta x_{Sw} = 38,4$ m
- $n_{Sw} = 128 \Rightarrow l_{Fw} = n_{Sw} \Delta x_{Sw} = 76,8$ m

In Abb. 4.5 und Abb. 4.6 sind die Frequenzgänge für eine symmetrische Erregung durch vertikale Kräfte über einer Schwelle oder in der Mitte des Schwellenfaches entsprechend Abb. 4.1 und Abb. 4.2 dargestellt.

Während die Kurven für $n_{Sw} = 8$ deutlich und für $n_{Sw} = 16$ immer noch erkennbar von den übrigen Kurven abweichen, liegen die Kurven für $n_{Sw} = 32$, $n_{Sw} = 64$ und $n_{Sw} = 128$ praktisch übereinander. Eine Verdopplung der Schwellenanzahl von $n_{Sw} = 32$ auf $n_{Sw} = 64$ und abermals auf $n_{Sw} = 128$ führt also in diesen beiden Fällen zu keiner nennenswerten Veränderung des Frequenzgangs, so dass hier $n_{Sw} = 32$ Schwellen ausreichend wären.

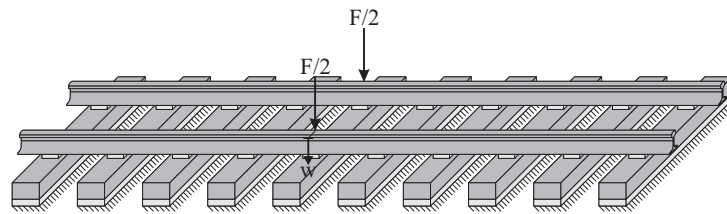


Abbildung 4.1: Symmetrische Erregung durch vertikale Kräfte über einer Schwelle

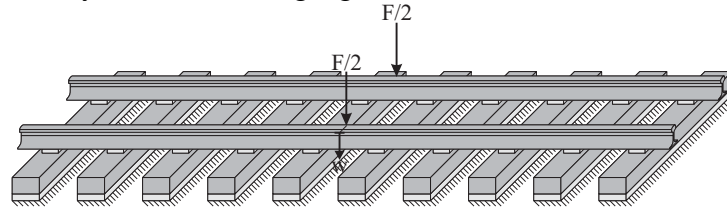


Abbildung 4.2: Symmetrische Erregung durch vertikale Kräfte in der Schwellenfachmitte

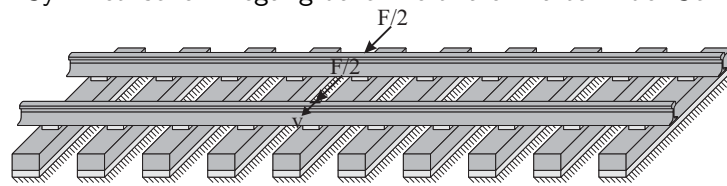


Abbildung 4.3: Antimetrische Erregung durch laterale Kräfte über einer Schwelle

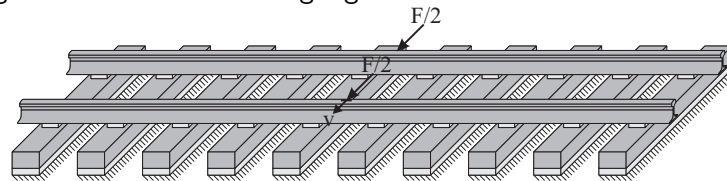


Abbildung 4.4: Antimetrische Erregung durch laterale Kräfte in der Schwellenfachmitte

Während sich die Position der Erregerkräfte im Bereich unterhalb von 200 Hz kaum auf den Frequenzgang auswirkt, kommt es insbesondere im Bereich um 1100 Hz zu deutlichen Abweichungen: Bei Erregung über der Schwelle tritt bei 1100 Hz ein Minimum auf, bei der Erregung in der Schwellenfachmitte entsteht ein deutlich ausgeprägtes Maximum. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei Erregung in der Schwellenfachmitte der sogenannte "Pinned-Pinned-Mode" angeregt wird, bei dem die Schwingungsknoten der Schiene direkt an der Befestigung auf den Schwellen liegen; aus diesem Grund treten nur sehr kleine Bewegungen der Zwischenlagen, die wesentlich zur Dämpfung beitragen, auf. Die Frequenz, bei der das Maximum auftritt, entspricht in etwa der vertikalen Biegeeigenform der Schiene mit einer Wellenlänge von $\lambda = 1,2$ m; diese liegt bei $f = 1068,99$ Hz (vgl. hierzu Abb. 3.2).

Die Frequenzgänge für eine antimetrische Erregung durch ein laterale Kräfte sind in Abb. 4.7 und 4.8 dargestellt, wobei die Erregung wieder über der Schwelle oder in der Schwellenfachmitte erfolgt.

Während die einzelnen Kurven bis etwa 100 Hz weitgehend übereinander liegen, kommt es oberhalb dieser Frequenz zu deutlichen Abweichungen zwischen den einzelnen Kurven. Für $n_{Sw} = 8$ Schwellen weisen die Frequenzgänge deutlich ausgeprägte Maxima auf. Verdoppelt man jeweils die Schwellenanzahl n_{Sw} , so entstehen anstelle der vorher vorhandenen Minima neue Maxima, wobei die Maxima jedoch immer schwächer ausgeprägt sind und die Kurven mit zunehmender Schwellenanzahl n_{Sw} zunehmend glatter werden.

Die Ursache für dieses Verhalten ist in der Endlichkeit der Struktur zu sehen. Während bei einer unendlichen Struktur Wellen ins Unendliche laufen, ohne reflektiert zu werden ("geometrische Dämpfung"), bilden sich bei einer endlichen Struktur stehende Wellen aus; diese

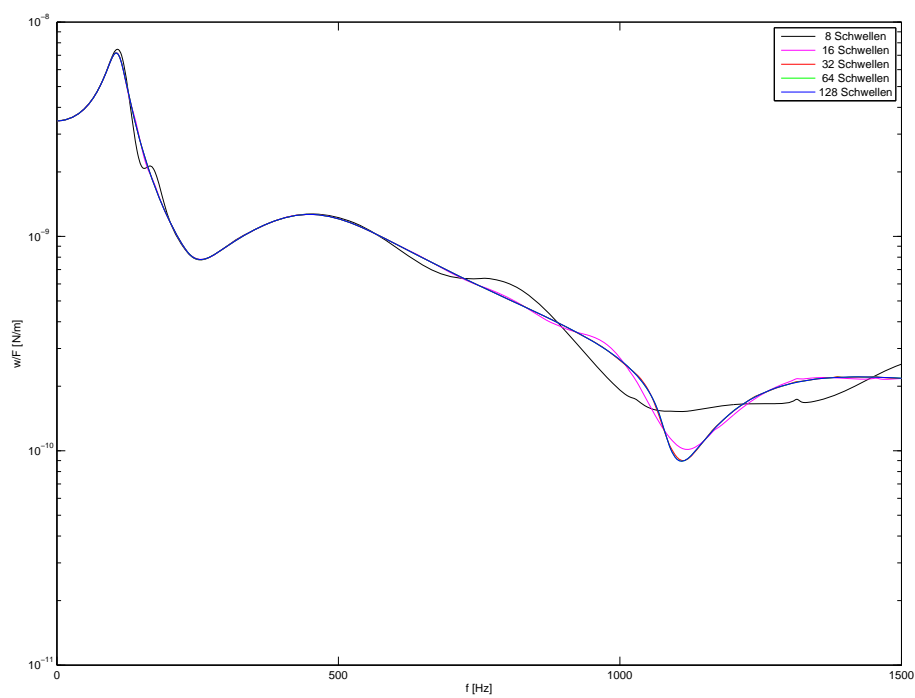


Abbildung 4.5: Frequenzgang des Gleises für symmetrische vertikale Erregung über einer Schwelle (vgl. Abb. 4.1)

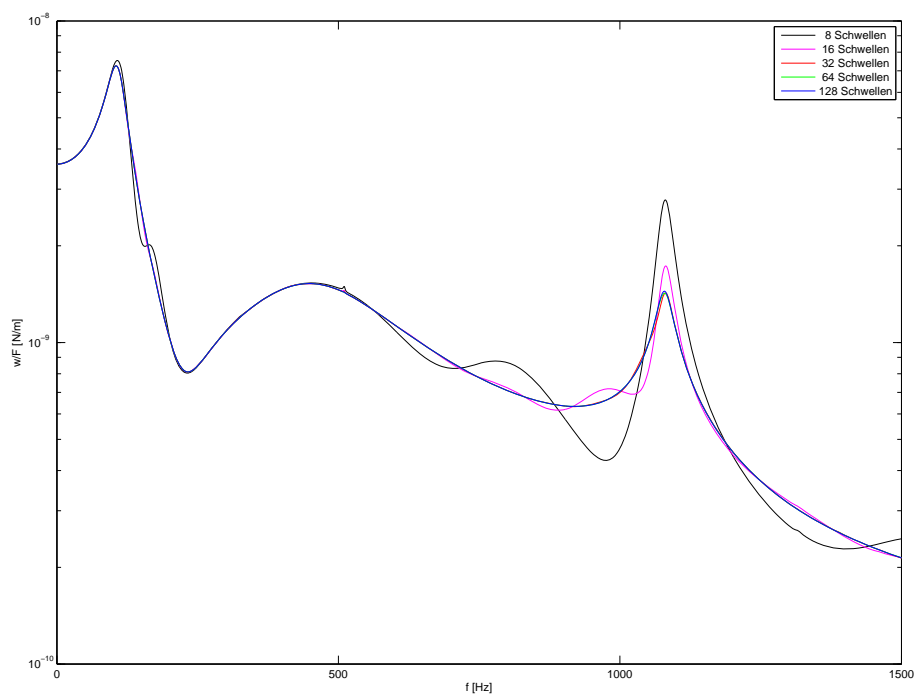


Abbildung 4.6: Frequenzgang des Gleises für symmetrische vertikale Erregung in der Mitte des Schwellenfachs (vgl. Abb. 4.2)

stehenden Wellen sind die Ursache für die Maxima. Um das Verhalten einer unendlich langen Struktur mit dem einer endlichen Struktur zu approximieren, muss sich die Welle, die bei der endlichen Struktur wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt, beim Durchlaufen der Struktur durch die Dämpfung ausreichend abgeschwächt haben.

Auch in diesem Fall hat die Position der Erregerkräfte im unteren Frequenzbereich, hier unterhalb von $f = 200$ Hz, kaum einen Einfluss auf den Frequenzgang. Weiterhin wird hier ebenfalls bei Erregung in der Mitte des Schwellenfachs ein "Pinned-Pinned-Mode" angeregt, was zu einem Maximum bei etwa 500 Hz führt; diese Frequenz entspricht der tiefsten Eigenfrequenz für eine Wellenlänge von $\lambda = 1,2$ m von $f = 508,28$ Hz (vgl. hierzu Abb. 3.2). Wie in Abb. 4.10 zu erkennen ist, wird das Maximum infolge des "Pinned-Pinned-Modes" durch die innere Dämpfung der Schiene deutlich abgeschwächt.

Insgesamt ist das Konvergenzverhalten des Frequenzgangs für die Erregung durch laterale Kräfte deutlich schlechter als für die Erregung durch vertikale Kräfte. Selbst für $n_{Sw} = 64$ Schwellen ist ab einer Frequenz von 400 Hz immer noch eine Welligkeit des Frequenzgangs zu erkennen. Erst mit $n_{Sw} = 128$ Schwellen erhält man bis zu einer Frequenz von etwa 800 Hz einen nahezu glatten Frequenzgang; oberhalb dieser Frequenz sind wieder Wellen zu erkennen.

Offensichtlich sind die Lateralbewegungen des Schienenkopfes deutlich schwächer gedämpft als die Vertikalbewegungen. Dies dürfte unter anderem auch auf die Verformungen des Querschnitts der Schiene zurückzuführen sein. Da das Schienenprofil in vertikaler Richtung recht steif ist, kommt es bei vertikalen Bewegungen des Schienenkopfes auch zu entsprechenden Bewegungen des Schienenfußes. Dadurch werden wiederum die Zwischenlagen und bei niedrigen Frequenzen infolge der Bewegung der Schwellen auch die Untergrundelemente gedehnt und gestaucht, was eine deutliche Dämpfung bewirkt. In lateraler Richtung ist die Schiene vor allem wegen des dünnen Steges deutlich nachgiebiger; durch Verformungen des Steges kann es zu lateralen Verschiebungen des Schienenkopfes gegenüber dem Schienenfuß kommen. Hierbei treten geringere Bewegungen der mit dem Fuß verbundenen Zwischenlagen auf, so dass die dämpfende Wirkung der Zwischenlagen geringer ist. Eine innere Dämpfung der Schienen wurde bei diesen Rechnungen nicht berücksichtigt. Dass die Welligkeit des Frequenzgangs bei hohen Frequenzen tatsächlich auf die geringe Materialdämpfung der Schiene zurückzuführen ist, wird durch Abb. 4.9 und Abb. 4.10 belegt: Hierbei wurden für die Eigenmoden der Schiene innere Dämpfungen mit einem Lehrschen Dämpfungsmaß von $D = 0$, $D = 0,001$ und $D = 0,01$ verwendet. Um den Einfluss der inneren Dämpfung auf die Welligkeit des Frequenzgangs deutlicher zu erkennen, wurde eine Schwellenanzahl $n_{Sw} = 64$ verwendet.

Für die Vertikalbewegung ist nur im Bereich des "Pinned-Pinned-Modes", bei dem fast nur die Schiene schwingt, ein Einfluss der inneren Dämpfung zu beobachten: Der Peak wird mit zunehmender Dämpfung abgeschwächt. Dagegen bewirkt die innere Dämpfung bei der Lateralbewegung über einen weiten Frequenzbereich eine Glättung des Frequenzgangs, d.h. die Dämpfung wirkt sich unmittelbar auf die "Wellen" des Frequenzgangs aus. Damit ist belegt, dass die "Wellen" tatsächlich auf schwach gedämpfte Strukturschwingungen der Schiene zurückzuführen sind.

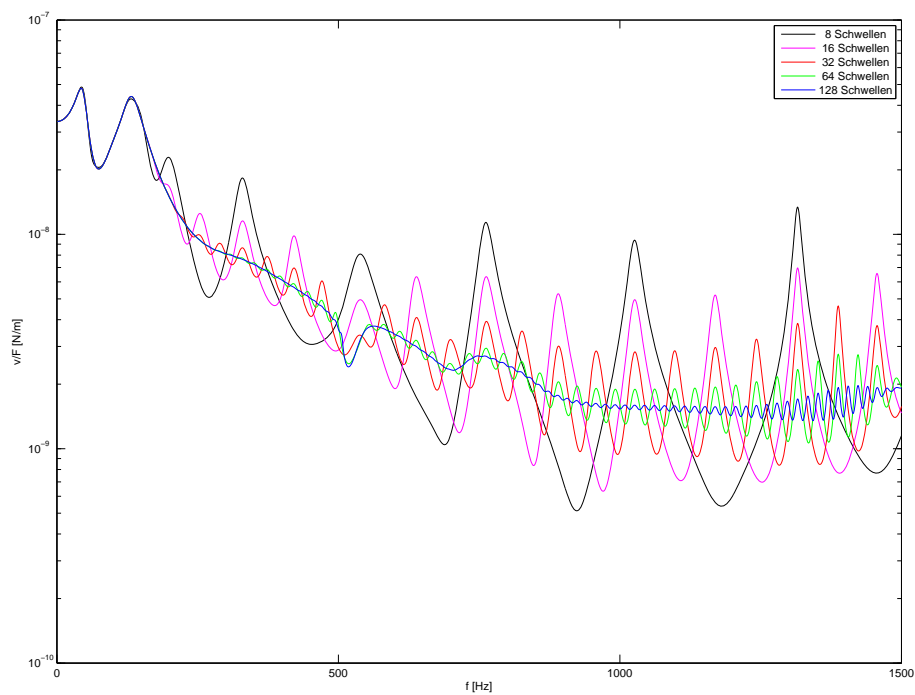


Abbildung 4.7: Frequenzgang des Gleises für antimetrische laterale Erregung über einer Schwelle (vgl. Abb. 4.3)

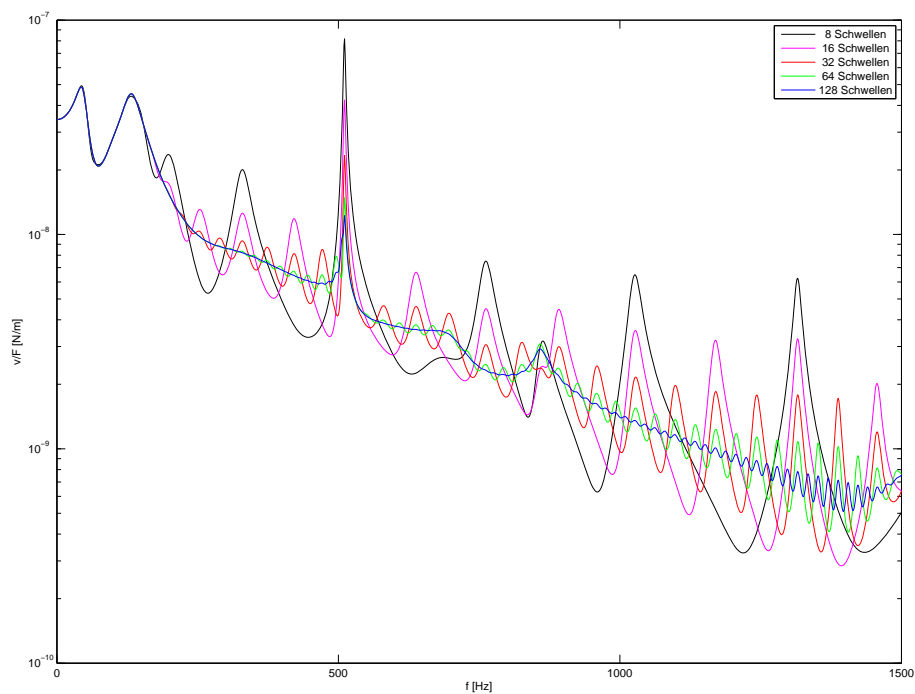


Abbildung 4.8: Frequenzgang des Gleises für antimetrische laterale Erregung in der Mitte des Schwellenfachs (vgl. Abb. 4.4)

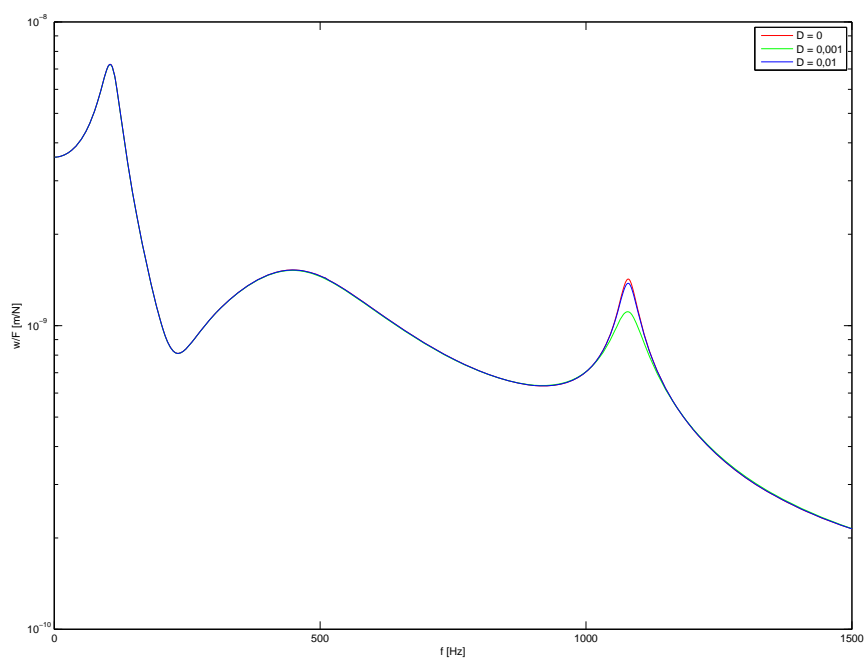


Abbildung 4.9: Frequenzgang des Gleises für symmetrische vertikale Erregung in der Schwellenfachmitte (vgl. Abb. 4.2) bei Variation der inneren Dämpfung der Schiene

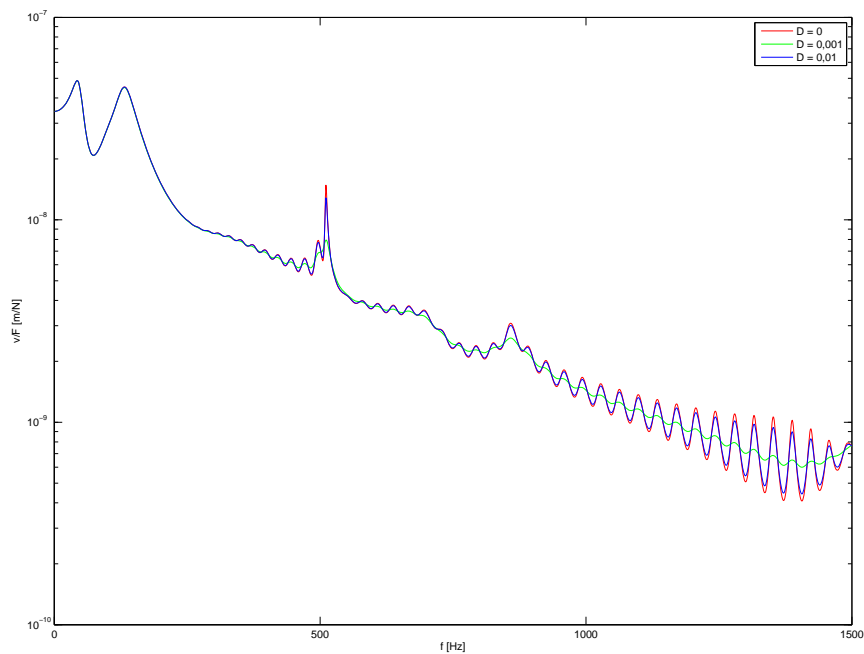


Abbildung 4.10: Frequenzgang des Gleises für antisymmetrische laterale Erregung in der Schwellenfachmitte (vgl. Abb. 4.4) bei Variation der inneren Dämpfung der Schiene

4.2 Erforderliche Anzahl der Schienenmoden

Bei der Beschreibung einer flexiblen Struktur stellt sich die Frage, wie viele Moden berücksichtigt werden müssen, um das dynamische Verhalten hinreichend genau abzubilden. Dieser Frage wird im Folgenden nachgegangen.

Für jede Wellenlänge λ werden jeweils die n_{mod} Moden mit den niedrigsten Eigenfrequenzen berücksichtigt. Die Betrachtung wurde für die folgenden Anzahlen n_{mod} durchgeführt:

- $n_{mod} = 10$
- $n_{mod} = 18$
- $n_{mod} = 24$
- $n_{mod} = 36$

Die Wahl dieser Zahlen erscheint etwas willkürlich; sie erklärt sich aus der Verteilung der Eigenfrequenzen. In Abb. 4.11 sind die Eigenfrequenzen über der Periodizität k dargestellt, wobei gilt:

$$\lambda = \frac{l_{Fw}}{k} \quad (4.1)$$

Hierbei wurde eine Fahrweglänge von $l_{Fw} = 76,8$ m verwendet, was einer Schwellenanzahl von $n_{Sw} = 128$ entspricht.

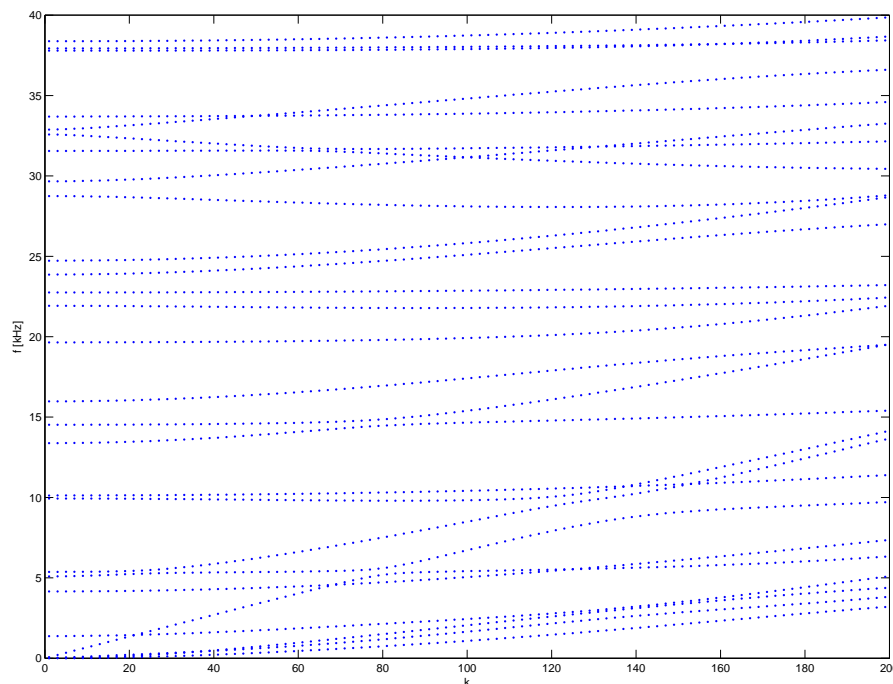


Abbildung 4.11: Eigenfrequenzen der Schiene in Abhängigkeit von der Periodizität k

Die Eigenfrequenzen sind nicht gleichmäßig verteilt, sondern in der Verteilung für $k = 0$ treten größere Lücken auf, beispielsweise bei $f = 11$ kHz, $f = 25$ kHz und $f = 35$ kHz. Diese Lücken wurden als Grenzen verwendet: Für $k = 0$ liegen unterhalb von $f = 11$ kHz 10 Eigenfrequenzen, unterhalb von $f = 25$ kHz 18 Eigenfrequenzen und unterhalb von $f = 35$ kHz 24 Eigenfrequenzen. Die Anzahl $n_{mod} = 36$ wurde willkürlich als besonders hohe Anzahl gewählt.

Mit den genannten Modenanzahlen wurden die Frequenzgänge für eine vertikale symmetrische Erregung errechnet; die Ergebnisse sind in den Abb. 4.12 und 4.13 dargestellt.

Die Frequenzgänge für die Modenanzahlen $n_{mod} = 10$ und $n_{mod} = 18$ liegen jeweils praktisch übereinander; gegenüber den Frequenzgängen für $n_{mod} = 24$ und $n_{mod} = 36$, die sich ihrerseits ebenfalls kaum unterscheiden, sind jeweils leichte Abweichungen zu erkennen. Am deutlichsten zeigen sich diese Abweichungen bei Erregung über der Schwelle im Bereich oberhalb von 1000 Hz. Zurückzuführen ist dies vermutlich auf die Lagerung der Schiene durch die Zwischenlage, wodurch es zu einer Kopplung der nieder- und höherfrequenten Moden kommt. Die Erweiterung von $n_{mod} = 24$ auf $n_{mod} = 36$ Schienenmoden führt kaum zu Veränderungen des Frequenzgangs, so dass $n_{mod} = 24$ Moden als ausreichend angesehen werden können.

Für eine laterale antimetrische Erregung sowohl über der Schwelle als auch in Schwellenfachmitte ergeben sich für die verwendeten Modenanzahlen nahezu gleiche Ergebnisse; daher sind diese Ergebnisse hier nicht dargestellt.

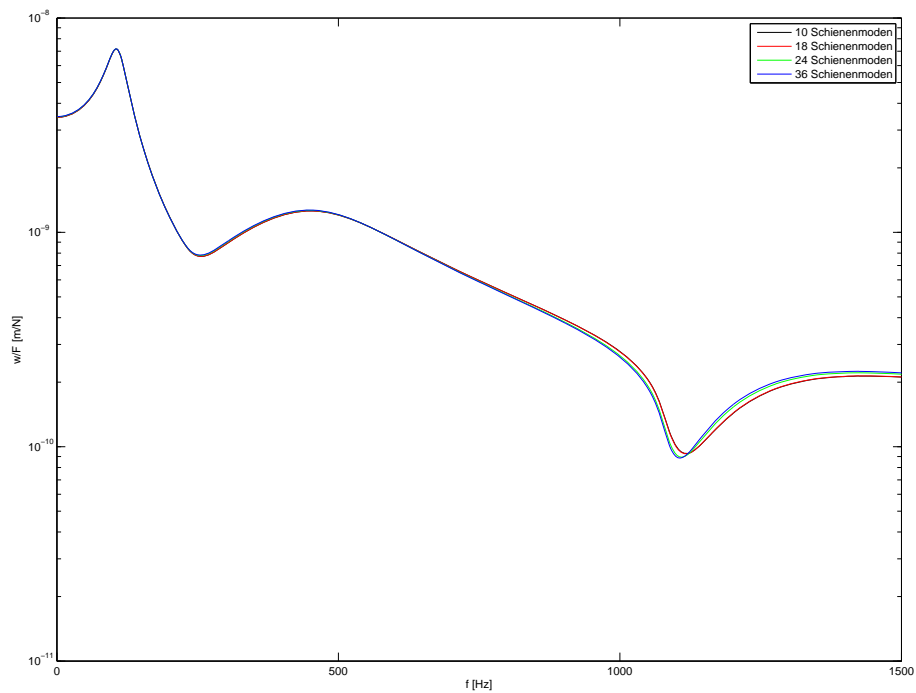


Abbildung 4.12: Frequenzgang des Gleises für symmetrische vertikale Erregung über einer Schwelle (vgl. Abb. 4.1)

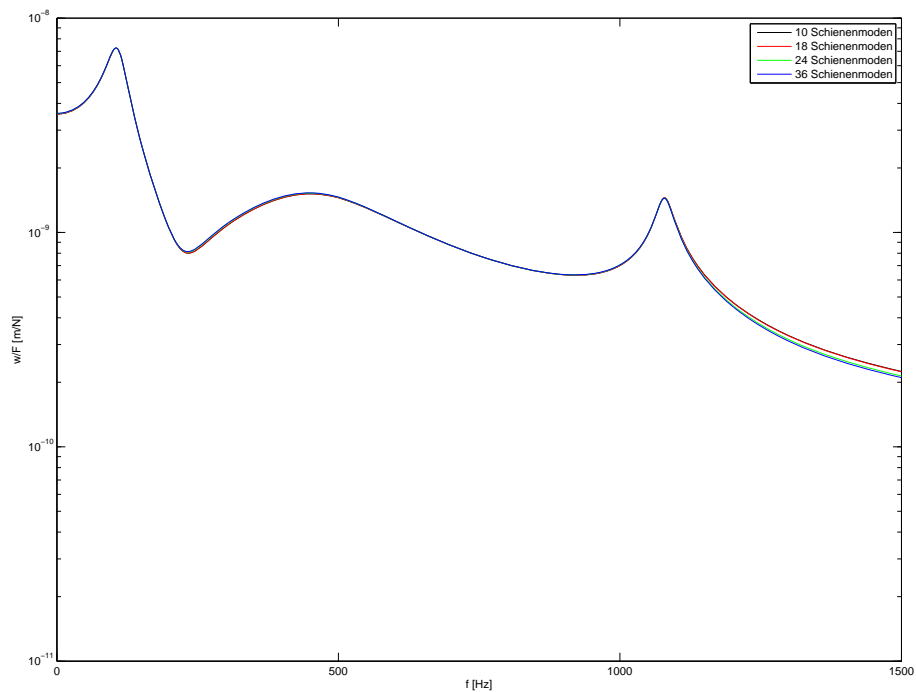


Abbildung 4.13: Frequenzgang des Gleises für symmetrische vertikale Erregung in der Mitte des Schwellenfachs (vgl. Abb. 4.2)

5 Zusammenfassung

Es wurde das Modell eines Eisenbahngleises als flexible Struktur entwickelt. Dieses Modell erfüllt die folgenden Anforderungen:

1. Das Modell ist für Zeitbereichsrechnungen verwendbar.
2. Das Modell ist für die Beschreibung von Vorgängen bis etwa $f = 1000$ Hz verwendbar.
3. Das Modell bildet die für das Kontaktgeschehen wichtigen Bewegungen des Schienenkopfs detailliert genug ab.
4. Das Modell kann die Wechselwirkung der zwei Radsätze eines Drehgestells über das Gleis abbilden.

In diesem Modell wurde die Schiene als dreidimensionales Kontinuum modelliert, so dass auch Verformungen des Querschnitts, welche von Balkentheorien nicht erfasst werden, abgebildet werden können. Die Schiene wird über lineare viskoelastische Krafterelemente, welche die Zwischenlagen repräsentieren, auf diskreten Schwellen abgestützt. Hierdurch kann der Effekt der Schwellenüberrollung, also einer ortsabhängig veränderlichen Rezeptanz wiedergegeben werden.

Das Gleis bildet einen Ring, dessen Krümmung vernachlässigt wird. Hierdurch entsteht eine endliche Struktur, welche eine Modalzerlegung und damit eine effiziente numerische Behandlung auch für transiente Vorgänge ermöglicht. Gleichwohl erreicht das auf dem Gleis fahrende Fahrzeug niemals das Ende des Gleises. Die Länge des Gleismodells, die zur Unterdrückung unerwünschter Effekte wie Wellenreflektion erforderlich ist, wurde anhand von Vergleichsrechnungen mit unterschiedlichen Anzahlen von Schwellen ermittelt. Insgesamt ist eine Länge von 128 Schwellenfächern, was 76,8 m entspricht, erforderlich.

Durch die Behandlung als zyklische Struktur kann das Gesamtsystem des Gleises ohne Genauigkeitsverlust in mehrere entkoppelte Teilsysteme niedrigerer Ordnung zerlegt werden, wodurch eine effiziente numerische Behandlung möglich ist.

Insgesamt stellt das hier vorgestellte Modell einen wichtigen Beitrag auf dem Weg zu einer realitätsnäheren Beschreibung der Fahrzeug-Fahrweg-Wechselwirkung dar. Dies ist wiederum ein wesentlicher Aspekt bei der Behandlung der Laufdynamik, aber auch höherfrequenter Phänomene wie Lärm und Verschleiß.

6 Rechenregeln für trigonometrische Funktionen

Nach der Eulerschen Relation gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (6.1)$$

Ist der Exponent die Summe zweier imaginärer Zahlen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{i(x+y)} &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= e^{ix} e^{iy} = (\cos x + i \sin x) (\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y + i (\sin x \cos y + \cos x \sin y) + i^2 \sin x \sin y \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Aus dem Vergleich der Real- und Imaginärteile ergeben sich die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (6.3)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (6.4)$$

Berücksichtigt man, dass die Cosinusfunktion gerade und die Sinusfunktion ungerade ist, so erhält man für die Differenz $x - y$ als Argument:

$$\cos(x-y) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad (6.5)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \quad (6.6)$$

Durch Bilden der Summen und Differenzen der Gleichungen (6.3) und (6.5) bzw. (6.4) und (6.6) ergibt sich:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y \Leftrightarrow \cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \quad (6.7)$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y \Leftrightarrow \sin x \sin y = \frac{-\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \quad (6.8)$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y \Leftrightarrow \sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} \quad (6.9)$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y \Leftrightarrow \cos x \sin y = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} \quad (6.10)$$

A Summation trigonometrischer Reihen

Es sind die Summen trigonometrischer Funktionen über n äquidistante Punkte zu bilden:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(k \frac{2\pi}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_n j), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \delta_n = \frac{2\pi}{n} \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin\left(k \frac{2\pi}{n} j\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_n j), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \delta_n = \frac{2\pi}{n} \quad (\text{A.2})$$

Mit der Eulerschen Relation lässt sich die Auswertung der Summen (A.1) und (A.2) auf die Betrachtung einer geometrischen Reihe zurückführen, wobei die Summe (A.1) den Realteil und die Summe (A.2) den Imaginärteil der betrachteten geometrischen Reihe darstellen:

$$e^{ik\delta_n j} = \cos(k\delta_n j) + i \sin(k\delta_n j) \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_n j) + i \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_n j) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{ik\delta_n j} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{ik\delta_n}\right)^j \quad (\text{A.3})$$

Für eine geometrische Reihe gilt:

$$s_n = \sum_{j=0}^{n-1} q^j = \begin{cases} n & \text{für } q = 1 \\ \frac{1-q^n}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \wedge q \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Der Fall $q = 1$ kann hier nur auftreten, wenn k ein ganzzahliges Vielfaches von n ist. Dann gilt:

$$\frac{k}{n} = m, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow q = e^{ik\delta_n} = e^{ik \frac{2\pi}{n}} = e^{2\pi m i} = (e^{2\pi i})^m = 1^m = 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{ik\delta_n}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} 1 = n \quad (\text{A.5})$$

Andererseits gilt für die vorliegende geometrische Reihe generell:

$$q^n = \left(e^{ik\delta_n}\right)^n = \left(e^{ik \frac{2\pi}{n}}\right)^n = e^{2\pi k i} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1 \quad (\text{A.6})$$

Daraus folgt für $q \neq 1$:

$$\frac{k}{n} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow q = e^{ik\delta_n} = e^{ik \frac{2\pi}{n}} \neq 1 \Rightarrow s_n = \frac{1-q^n}{1-q} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Es gilt also:

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{ik\delta_n j} = \begin{cases} n & \text{für } \frac{k}{n} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } \frac{k}{n} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Betrachtet man den Real- und den Imaginärteil der Summe (A.8), so erhält man:

$$\Re \left[\sum_{j=0}^{n-1} e^{ik\delta_{nj}} \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \Re \left[e^{ik\delta_{nj}} \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_{nj}) \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_{nj}) = \begin{cases} n & \text{für } \frac{k}{n} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } \frac{k}{n} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

$$\Im \left[\sum_{j=0}^{n-1} e^{ik\delta_{nj}} \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \Im \left[e^{ik\delta_{nj}} \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_{nj}) \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_{nj}) = 0 \quad (\text{A.10})$$

A.1 Summation von Produkten trigonometrischer Funktionen

Um die Summen $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_{nj}) \cos(l\delta_{nj})$, $\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_{nj}) \sin(l\delta_{nj})$ und $\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_{nj}) \cos(l\delta_{nj})$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ zu bestimmen, werden die im Kapitel 6 hergeleiteten Umformungsregeln verwendet:

$$\cos(k\delta_{nj}) \cos(l\delta_{nj}) = \frac{\cos((k+l)\delta_{nj}) + \cos((k-l)\delta_{nj})}{2} \quad (\text{A.11})$$

$$\sin(k\delta_{nj}) \sin(l\delta_{nj}) = \frac{-\cos((k+l)\delta_{nj}) + \cos((k-l)\delta_{nj})}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$\sin(k\delta_{nj}) \cos(l\delta_{nj}) = \frac{\sin((k+l)\delta_{nj}) + \sin((k-l)\delta_{nj})}{2} \quad (\text{A.13})$$

Damit erhält man für die Summen:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_{nj}) \cos(l\delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l)\frac{2\pi}{n}j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l)\frac{2\pi}{n}j\right) \right] \quad (\text{A.14})$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_{nj}) \sin(l\delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l)\frac{2\pi}{n}j\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l)\frac{2\pi}{n}j\right) \right] \quad (\text{A.15})$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_{nj}) \cos(l\delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sin\left((k-l)\frac{2\pi}{n}j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left((k+l)\frac{2\pi}{n}j\right) \right] \quad (\text{A.16})$$

Dadurch lassen sich die Summen $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(l\delta_{nj}) \cos(k\delta_{nj})$, $\sum_{j=0}^{n-1} \sin(l\delta_{nj}) \sin(k\delta_{nj})$ und $\sum_{j=0}^{n-1} \sin(l\delta_{nj}) \cos(k\delta_{nj})$ mit den Summationsregeln (A.9) und (A.10) auswerten. Aus (A.10) folgt sofort:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_{nj}) \cos(l\delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sin\left((k-l)\frac{2\pi}{n}j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \sin\left((k+l)\frac{2\pi}{n}j\right) \right] = \frac{1}{2} [0 + 0] = 0 \quad (\text{A.17})$$

Für $\sum_{j=0}^{n-1} \cos(l\delta_{nj}) \cos(k\delta_{nj})$ und $\sum_{j=0}^{n-1} \sin(l\delta_{nj}) \sin(k\delta_{nj})$ ist zu prüfen, ob die Summe $k+l$ und die Differenz $k-l$ ganzzahlige Vielfache von n sind. Insgesamt sind vier Fälle zu unterscheiden:

$$\frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k\delta_{nj}) \cos(l\delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l)\frac{2\pi}{n}j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l)\frac{2\pi}{n}j\right) \right] = \frac{n+n}{2} = n$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k\delta_{nj}) \sin(l\delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l)\frac{2\pi}{n}j\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l)\frac{2\pi}{n}j\right) \right] = \frac{n-n}{2} = 0$$

(A.18)

$$\begin{aligned}
& \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\
& \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_{nj}) \cos(l \delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l) \frac{2\pi}{n} j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l) \frac{2\pi}{n} j\right) \right] = \frac{0+n}{2} = \frac{n}{2} \\
& \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_{nj}) \sin(l \delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l) \frac{2\pi}{n} j\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l) \frac{2\pi}{n} j\right) \right] = \frac{0-n}{2} = -\frac{n}{2}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\
& \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_{nj}) \cos(l \delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l) \frac{2\pi}{n} j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l) \frac{2\pi}{n} j\right) \right] = \frac{n+0}{2} = \frac{n}{2} \\
& \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_{nj}) \sin(l \delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l) \frac{2\pi}{n} j\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l) \frac{2\pi}{n} j\right) \right] = \frac{n-0}{2} = \frac{n}{2}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\
& \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_{nj}) \cos(l \delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l) \frac{2\pi}{n} j\right) + \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l) \frac{2\pi}{n} j\right) \right] = \frac{0+0}{2} = 0 \\
& \sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_{nj}) \sin(l \delta_{nj}) = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k-l) \frac{2\pi}{n} j\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left((k+l) \frac{2\pi}{n} j\right) \right] = \frac{0-0}{2} = 0
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Somit gilt insgesamt:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(k \delta_{nj}) \cos(l \delta_{nj}) = \begin{cases} n & \text{für } \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} & \text{für } \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} & \text{für } \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \tag{A.22}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_{nj}) \sin(l \delta_{nj}) = \begin{cases} 0 & \text{für } \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ -\frac{n}{2} & \text{für } \frac{k+l}{n} \in \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} & \text{für } \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{für } \frac{k+l}{n} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{k-l}{n} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \tag{A.23}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin(k \delta_{nj}) \cos(l \delta_{nj}) = 0 \tag{A.24}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Knothe, K.: Gleisdynamik, Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, 2001.
- [2] Gasch, R., Knothe, K.: Strukturdynamik, Bd. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [3] Morys, G.B.: Zur Entstehung und Verstärkung von Unrundheiten an Eisenbahnrädern bei hohen Geschwindigkeiten. Dissertation Technische Universität Karlsruhe, 1998.
- [4] Ripke, B.: Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleisdynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik, VDI-Verlag, Düsseldorf, VDI-Fortschrittsberichte Reihe 12, Nr. 249, 1995.