Effiziente Simulation von Schlagschädigungen in Faserverbund-Sandwichstrukturen

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von:	Dipl.-Ing. Luise Kärger
aus:	Leipzig

eingereicht am:	4. Januar 2007
mündliche Prüfung am:	8. November 2007
Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Elmar Breitbach
Korreferenten:	Prof. Dr.-Ing. Peter Horst
	Prof. Dr.-Ing. habil. Raimund Rolfes
Vorsitzender:	Prof. Dr.-Ing. habil. Georg-Peter Ostermeyer

2007

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Simulation von Impactvorgängen auf Sandwichstrukturen entwickelt. Bei den Impactvorgängen handelt es sich um Schlagstöße niedriger Geschwindigkeit (low-velocity Impacts), bei denen Schlagschäden entstehen, die für das Auge nicht oder kaum sichtbar sind. Die untersuchten Sandwichstrukturen sind leichtgewichtige Doppelschaler, die aus zwei dünnen, steifen Faserverbunddeckschichten und einem weichen Kern bestehen. Für die Simulation werden die Materialien von Kern und Deckschichten homogenisiert und makroskopisch modelliert. Die Umsetzung der Modelle erfolgt im Finite-Elemente-Programm CODAC. Für eine effiziente Verformungs- und Spannungsanalyse werden zwei neue finite Schalenelemente entwickelt, die dreischichtig sind und somit das spezifische Verformungsverhalten von Sandwichstrukturen geeignet beschreiben. Bei der Modellierung des Versagensverhaltens von Kern und Deckschicht erfolgt die Schadensdetektion mit spannungsbasierten Versagenskriterien. Der Schadensfortschritt wird durch schrittweise lineare Degradationsmodelle beschrieben. Anhand experimenteller Ergebnisse wird ein makroskopisches Kern-Degradationsmodell hergeleitet. Das Degradationsmodell für die Deckschicht erfasst Faserbrüche und ermöglicht die Vorhersage von Deckschichtrissen. Für die dynamische Analyse des transienten Impactvorgangs werden ein implizites und ein explizites Zeitintegrationsverfahren dargestellt und im Hinblick auf Konvergenz bewertet. Der Kontakt zwischen Impactor und Sandwichdeckschicht wird durch das Hertzsche Kontaktgesetz beschrieben. Ausgewählte numerische Beispiele demonstrieren die Funktionsfähigkeit der verwendeten Modelle und Methoden. Zur Validierung der gesamten Impactsimulation werden die Ergebnisse eines Impactversuchsprogramms herangezogen. Der Vergleich zwischen Experiment und Simulation zeigt eine gute Übereinstimmung sowohl beim dynamischen Verformungsverhalten als auch bei der Größe der Kernschäden und bei der Entstehung der ersten Deckschicht-Risse. Darüber hinaus demonstrieren die kurzen Rechenzeiten die Effizienz der Simulation. Damit steht für den Entwurf von doppelschaligen Leichtbaustrukturen ein neues Verfahren zur Verfügung, mit dem die Schadensresistenz schnell und zuverlässig bewertet werden kann.

Schlagwörter: Impactsimulation, Schadensmechanik, Sandwichstrukturen, Finite Elemente

Abstract

In this work a procedure is developed to simulate impact events on sandwich structures. The impact events are of low velocity and cause non or barely visible damages. The investigated sandwich structures are lightweight double shell constructions consisting of two thin, stiff composite face sheets and an intermediate soft core. For simulation, the materials of the core and of the face sheets are homogenized and macroscopically modelled. The models are implemented into the finite element program CODAC. For an efficient deformation and stress analysis two new three-layered finite shell elements are developed, which suitably describe the characteristic deformation behaviour of sandwich structures. By modelling the failure behaviour of core and face sheets, stress-based failure criteria are used to detect damage initiation. Progressive damage is described by stepwise linear degradation models. By means of experimental results, a macroscopic core degradation model is developed. The degradation model for the face sheets considers fibre breakage and allows the prediction of face sheet tearing. For the dynamic analysis of a transient impact event an implicit and an explicit time integration scheme are applied and assessed with respect to convergence. The Hertzian contact law is used to describe the contact between the impactor and the impacted face sheet. Representative examples demonstrate the effectiveness of the applied models and methods. To validate the whole impact simulation procedure, the results of an impact test program are used for reference. The comparison between experiment and simulation shows a good agreement in the dynamic deformation behaviour as well as in the size of core damage and in the onset of face sheet tearing. Moreover, short computation times demonstrate the efficiency of the simulation. Thus, a new tool is available for the design process, which can rapidly and reliably assess the damage resistance of lightweight structures.

Keywords: Impact simulation, Damage mechanics, Sandwich structures, Finite elements

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt. Mit der finanziellen Förderung durch das nationale Luftfahrtforschungsprogramm habe ich seit Herbst 2002 Teilprojekte in den Vorhaben VALID, EMIR und KRAFT bearbeitet, die die schnelle Impactsimulation sowie das quasistatische Versagensverhalten von doppelschaligen Strukturen zum Thema hatten.

Mein Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Elmar Breitbach für die Unterstützung und Förderung meiner Arbeit sowie für die Übernahme des Hauptreferats. Das durch seine Institutsleitung geschaffene angenehme und der Wissenschaft sehr zuträgliche Arbeitsumfeld war für die Entstehung dieser Arbeit eine wichtige Voraussetzung. Weiterhin möchte ich Herrn Professor Dr.-Ing. Peter Horst für die Übernahme des Korreferats danken. Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Raimund Rolfes gilt mein besonderer Dank für die initiierende und kontinuierliche Unterstützung meiner Arbeit. Seine wertvollen Anregungen und Hinweise haben wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Ich danke ihm auch für die Übernahme des Korreferats.

Ebenfalls bedanken möchte ich mich bei Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Klaus Rohwer für sein reges Interesse an meiner Arbeit, für die zahlreichen sehr fruchtbaren Diskussionen, die wertvollen Hinweise und für das kritische Lesen der Dissertation. Ein wertvoller Diskussionspartner war für mich auch Herr Dr.-Ing. Jens Baaran. Nicht nur seine fachliche Unterstützung, auch die freundschaftliche Zusammenarbeit und sein Geschick zur Motivation waren für mich ein wichtiger Rückhalt, wofür ich ihm herzlich danke. Mein besonderer Dank gilt auch Frau Dipl.-Ing. Anja Wetzel, mit der ich in der ersten Phase meiner Promotion, bei der Entwicklung der neuen Schalenelemente sehr effektiv zusammenarbeiten konnte.

Des Weiteren danke ich Herrn Dr.-Ing. Jan Teßmer für die Unterstützung meiner Arbeit und die fachlichen Hinweise. Allen Mitarbeitern des Prüffeldes der Abteilung Strukturmechanik, insbesondere Frau Cordelia Koch, Herrn Michael Herbst und Herrn Dipl.-Phys. Hans-Christian Goetting möchte ich für die freundliche Zusammenarbeit bei der Planung und der Durchführung der Versuche danken. Stellvertretend für alle studentischen Hilfskräfte, danke ich Herrn Markus Kintscher, der mit seiner ausgezeichneten Studienarbeit einen wichtigen Beitrag zur Planung, Durchführung und Auswertung der Versuche an Sandwichkernen leistete.

Herrn Dr.-Ing. Jan Matheas möchte ich dafür danken, dass er mich durch die Betreuung meiner Diplomarbeit zunächst hervorragend auf die Promotion vorbereitet hat und dann auch im Anschluss stets für meine Fragen offen war. Von Herzen dankbar bin ich meiner Familie und meinem Freund Markus, die für mich der wichtigste Rückhalt sind und mir den nötigen Ausgleich und auch den nötigen Freiraum für meine Arbeit geben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Problembeschreibung 1

1.1.1 Sandwichstrukturen 2

1.1.2 Impactszenarien 4

1.2 Stand der Forschung 5

1.2.1 Schalenmodelle für Sandwichstrukturen 5

1.2.2 Impactanalyse von Sandwichstrukturen 8

1.3 Vorstellung des Simulationstools CODAC 11

1.4 Ziele und Umfang der Arbeit 11

2 Verformungs- und Spannungsanalyse **13**

2.1 Schalenelement S89 mit 2D-Verschiebungsansatz 13

2.1.1 Kinematik 13

2.1.2 Lineare Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung 15

2.1.3 Materialgesetz 16

2.1.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen und Steifigkeitsmatrix 18

2.1.5 Diskretisierung für eine Finite-Element-Formulierung 19

2.1.6 Pre-Processing: Ermittlung einer verbesserten Querschubsteifigkeit . . 20

2.1.7 Post-Processing: Spannungsberechnung 22

2.1.8 Massenmatrix 24

2.2 Schalenelement S815 mit 3D-Verschiebungsansatz 25

2.2.1 Kinematik 25

2.2.2 Nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung 26

2.2.3 Materialgesetz 29

2.2.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen, Linearisierung und tangentiale Steifigkeitsmatrix 30

2.2.5 Diskretisierung für eine Finite-Element-Formulierung 33

2.2.6 Post-Processing: Spannungsberechnung 34

2.2.7 Massenmatrix 35
2.3 Beispiele zur Verifizierung der Elemente S89 und S815 36
2.3.1 Eignung der Elemente für eine lineare Verformungs- und Spannungsanalyse bei konzentrierter Last 36
2.3.2 Geometrisch nichtlineare Analyse des Elementes S815 39
2.3.3 Auswirkungen der nichtlinearen Verzerrungsanteile im Element S815 . 41
2.3.4 Verifizierung der Massenmatrizen 44

3 Versagensanalyse 47
3.1 Phänomenologie 47
3.1.1 Versagen des Sandwichverbundes 47
3.1.2 Kernversagen 48
3.1.3 Deckschichtversagen 52
3.1.4 Ablösung der Deckschicht vom Kern 54
3.2 Modellierung 55
3.2.1 Allgemeine Aspekte 55
3.2.2 Modellierung des Kernversagens 56
3.2.3 Modellierung des Deckschichtversagens 63
3.2.4 Modellierung der Deckschicht-Kern-Ablösung 67

4 Transiente Impactanalyse 69
4.1 Integrationsmethoden in CODAC 71
4.1.1 NEWMARK-Methode 71
4.1.2 Zentrale Differenzenmethode 72
4.2 Kontaktgesetz 73
4.3 Einbindung des Kontaktgesetzes in die Integrationsmethoden 75
4.3.1 Impactalgorithmus mit der NEWMARK-Methode 75
4.3.2 Impactalgorithmus mit der zentralen Differenzenmethode 77
4.4 Konvergenzverhalten 78
4.4.1 Stabilität 78
4.4.2 Genauigkeit 79
4.5 Beispiele zur Demonstration des Konvergenzverhaltens 81
4.5.1 Eingespannte Stahlplatte 81
4.5.2 Impactbelastete Sandwichplatte 84
4.6 Vorzüge und Einsatzbereiche der Integrationsmethoden 87
4.6.1 Allgemeine Betrachtungen 87
4.6.2 Schlussfolgerungen für den Einsatz in CODAC 88

5 Beispiele und experimentelle Validierung 89
5.1 Versuchsaufbau und Materialien . . . 89
5.2 Versuchsergebnisse . . . 91
5.3 Eingangsdaten für die Simulation und FE-Modell . . . 92
5.4 Simulationsergebnisse und Validierung . . . 94
5.4.1 Impact mit nicht sichtbarem Schaden . . . 94
5.4.2 Impact mit sichtbarem Schaden . . . 95
5.4.3 Netzunabhängigkeit der Simulation . . . 97
5.4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für alle Impactenergien . . . 98
5.5 Numerischer Aufwand . . . 100

6 Zusammenfassung 101
6.1 Ergebnisse . . . 101
6.2 Perspektiven . . . 102

A Operatormatrizen der Schalenelemente S89 und S815 105
A.1 Kinematische Operatormatrizen . . . 105
A.2 Operatormatrizen der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung . . . 106

B Konzentration von Elementmassenmatrizen 109
B.1 Methode der Zeilensummation . . . 110
B.2 HRZ-Methode . . . 110
B.3 RC-Methode . . . 111
B.4 Umsetzung in CODAC . . . 112

C Schadensbilder von Sandwichplatten mit Honigwabenkern 113

Literaturverzeichnis 117

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problembeschreibung

Multifunktionale Hochleistungs-Leichtbaustrukturen sind besonders in der Luft- und Raumfahrt sehr begehrt, da hier der ökonomische Vorteil durch Gewichtsreduzierung außerordentlich groß ist. Sandwichstrukturen, die aus zwei dünnen, steifen Faserverbunddeckschichten und einem dazwischenliegenden, besonders leichten Kern bestehen, bieten eine sehr hohe gewichtsspezifische Tragfähigkeit. Des Weiteren sorgt der Sandwichkern für thermische und akustische Dämmung, und die außenliegende Deckschicht kann als Anzeiger für Impactschäden dienen. Sandwichstrukturen haben also durch ihre Leichtgewichtigkeit und die Funktionsintegration das Potential von Hochleistungsstrukturen und werden folglich von der Luftfahrtindustrie zunehmend auch für primäre Tragstrukturen in Erwägung gezogen. Derzeit hemmt jedoch die geringe Impactresistenz, d. h. die große Empfindlichkeit gegenüber Schlagstößen, noch den Einsatz. Abb. 1.1 zeigt beispielhaft den Schaden einer Sandwichschale, der durch den Schlag einer $5kg$-Stahlkugel entstanden ist, die mit nur $2,5\frac{m}{s}$ auftraf. Impactschäden können die Resttragfähigkeit der Verbundstruktur erheblich herabsetzen und werden daher zurecht sehr kritisch betrachtet. Um eine Sandwichstruktur hinsichtlich ihrer Impactresistenz zu optimieren, sind zuverlässige Berechnungsmethoden erforderlich, die das Versagensverhalten richtig erfassen. Dabei sind zum einen genaue Impactsimulationstools gefragt, die für einen qualifizierten Tragfähigkeitsnachweis geeignet sind. Zum anderen sollen

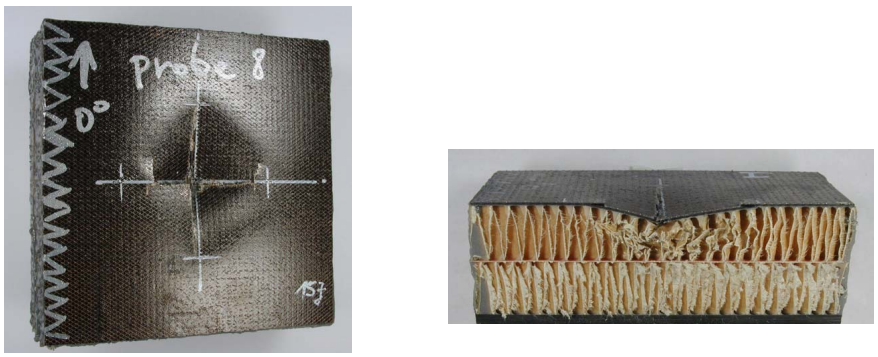


Abbildung 1.1: Impactschaden in einer Sandwichprobe mit Faserverbunddeckschichten und einem doppellagigen Faltwabenkern.

für die Entwurfsphase schnelle Simulationsverfahren zur Verfügung stehen, die das Impactverhalten innerhalb kurzer Zeit für viele Konfigurationen zuverlässig abschätzen können. Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Erfüllung dieser letztgenannten Forderung. In den beiden folgenden Abschnitte wird beschrieben, welche Materialien eingesetzt und welche Impactszenarien analysiert werden.

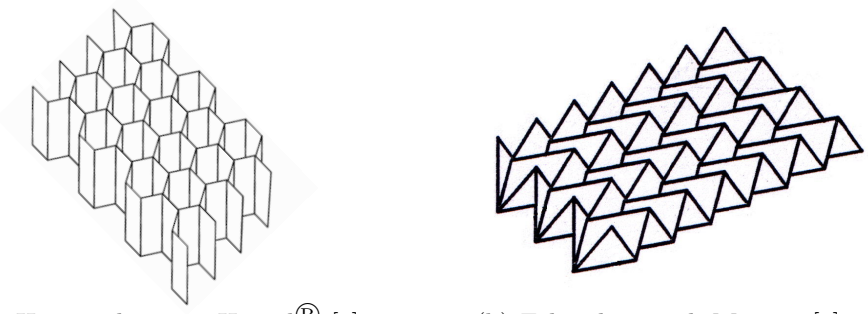
1.1.1 Sandwichstrukturen

Kernwerkstoffe

Kernwerkstoffe, die für den Einsatz in Sandwichstrukturen gut geeignet sind, zeichnen sich durch hohe Schubfestigkeit und geringe Dichte aus. Weitere wichtige Aspekte im Hinblick auf Multifunktionalität sind eine gute Wärmedämmung und eine gute Schalldämmung. Als Kernwerkstoffe sind Balsa-Hölzer, Schaumstoffe und Wabenstrukturen im Einsatz. Balsa-Hölzer werden vornehmlich im Fahrzeug- oder Schiffsbau verwendet. Wabenstrukturen und Schaumstoffe kommen zusätzlich auch in der Luft- und Raumfahrt zum Einsatz. Schaumkerne sind in der Regel Hartschäume auf der Basis von Polyurethan (PUR), Polyvinylchlorid (PVC) oder Polymethacrylimid (PMI). Sie können, auch wenn sich durch den Aufschäumprozess Zellorientierungen einstellen, als isotrop angesehen werden. Da der Kern in einem Sandwich für die Abtragung der transversalen Schublasten zuständig ist, ist Isotropie nicht gerade für eine hohe gewichtsspezifische Tragfähigkeit förderlich. Um die Tragfähigkeit zu erhöhen, werden für die Luftfahrt neue Schaumsysteme entwickelt, die in Dickenrichtung durch Kohlefaserpins verstärkt sind. Entsprechend der Form dieser Pins werden die verstärkten Schaumkerne X-Core (Abb. 1.2) oder K-Core genannt. Mit der Verbesserung der Tragfähigkeit geht jedoch der

Abbildung 1.2: Sandwichplatte mit verstärktem Schaumkern (X-Core).

große Vorteil der Schäume, ihre sehr einfache Herstellbarkeit und Instandhaltbarkeit, teilweise verloren. Eine deutlich höhere gewichtsspezifische transversale Steifigkeit als Hartschäume haben Wabenstrukturen. Sie sind jedoch herstellungstechnisch sehr viel teurer als Schäume. Honigwaben (Abb. 1.3(a)) werden als Sandwichkerne bereits verbreitet eingesetzt. Faltwaben (Abb. 1.3(b)) sind hingegen eine relativ neue Entwicklung, die für den industriellen Einsatz noch einiger Optimierung bedarf. Der für die Luftfahrtindustrie ausschlaggebende Pluspunkt der Faltwaben ist ihre Belüftbarkeit. Dadurch kann zum einen die Feuchtigkeit in der Kernstruktur reduziert werden, was den Korrosionsprozess verlangsamt. Außerdem besteht so die Möglichkeit, bei doppelschaligen Flugzeugstrukturen für einen Druckausgleich im Inneren des Sandwichs und somit für eine Entlastung der Kern-Deckschicht-Anbindung zu sorgen. Die Ideen gehen sogar soweit, luftdurchströmte Sandwichkerne als aktive Wärmedämmung zu nutzen. Ein weiterer Vorteil der Faltwaben gegenüber den Honigwaben ist die gute Formbarkeit, die auch Sandwichstrukturen mit kleinen Radien zulässt. Zunächst ist jedoch noch einige Entwicklungsarbeit erforderlich, um reproduzierbare Herstellungsprozesse zu gewährleisten und um die mechanischen Eigenschaften so zu verbessern, dass sie an die Qualität von Honigwaben herankommen.



(a) Honigwaben von Hexcel® [1]. (b) Faltwaben nach Mudra [2].

Abbildung 1.3: Sandwichkerne mit Wabenstruktur.

Welche Kernstruktur unter dem Strich die besten Möglichkeiten bietet und z. B. für zukünftige Flugzeugrumpfstrukturen vornehmlich eingesetzt werden könnte, ist zur Zeit noch nicht absehbar. Es werden folglich für jeden Kerntyp genaue Analyseverfahren benötigt, die die jeweilige Kernstruktur exakt beschreiben. Genauso sind aber, wie in dieser Arbeit angestrebt, schnelle Analyseverfahren gefragt, die idealerweise in der Lage sind, alle oder zumindest mehrere Kerntypen auf effiziente Weise zu erfassen, um mit wenig Aufwand einen Vergleich der Kerne untereinander zu ermöglichen. Dadurch ergibt sich ein Bedarf an globalen Kernmodellen sowohl für das Verformungs- und Spannungsverhalten als auch für die Schadensentstehung und das Schadenswachstum.

Deckschichten aus Faserverbund

Faserverbunde zeichnen sich durch eine hohe gewichtsspezifische Steifigkeit und Festigkeit sowie eine hohe chemische Beständigkeit aus. Sie bestehen aus hochsteifen und hochfesten Fasern, die in ein Matrixmaterial mit geringer Steifigkeit und Festigkeit eingebettet sind. Gängige Fasermaterialien sind Kohlenstoff, Glas, Aramid und Keramik. Als Matrixmaterial werden vornehmlich Epoxide verwendet. Die Fasern werden in Form von unidirektionalen Rovings oder textilen Flächen (z. B. Multiaxialgelege, Gewebe) in die Matrix eingebracht. Durch das Aneinanderfügen (Laminieren) unterschiedlich orientierter Einzelschichten wird der Schichtverbund (Laminat) hergestellt, der anisotrop ist. Aufgrund der variablen Faserausrichtung können Faserverbunde optimal an die jeweilige Belastung angepasst werden. Die Hauptnachteile der Faserverbunde sind die geringe Bruchdehnung und die hohe Empfindlichkeit gegenüber Impact sowie die hohen Material- und Herstellungskosten. Außerdem sind Faserverbunde insbesondere im Verbund mit einem Sandwichkern schlecht recyclebar.

Das Tragverhalten des heterogenen, anisotropen Verbundes lässt sich durch mikro- oder durch makromechanische Modelle beschreiben. Eine makromechanische Modellierung kann das elastische Verhalten der Faserverbunddeckschichten durch eine geeignete Homogenisierung von Fasern und Matrix bereits sehr genau abbilden und ist deutlich effizienter als eine mikromechanische Herangehensweise. Herausforderungen im elastischen Bereich sind die effiziente Modellierung des Tragverhaltens im Verbund mit dem Sandwichkern und die genaue Berechnung der transversalen Spannungen als wichtige Voraussetzung für eine gute Schadensanalyse. Wesentlich komplexer als das elastische Verformungsverhalten ist das Versagensverhalten der Faserverbunde. Es können Faserbrüche, Matrixbrüche und Delaminationen entstehen, die die Trageigenschaften jeweils auf sehr unterschiedliche Weise beeinträchtigen und daher separat modelliert werden müssen. Dies macht es außerordentlich schwierig, das Versagensverhalten sehr effizient und dennoch ausreichend genau zu modellieren.

1.1.2 Impactszenarien

Insbesondere in primären Flugzeugstrukturen aus Faserverbund können Impactschäden die Tragfähigkeit erheblich herabsetzen. Aus diesem Grund ist es sehr wichtig, Impactlasten bereits beim Entwurf mit zu berücksichtigen. Ein Flugzeug ist während seines Betriebes und bei der Wartung zahlreichen Impactszenarien ausgesetzt, die nicht vermieden werden können. Die Impactszenarien sind hinsichtlich der Belastung (Geschwindigkeit, Masse, Energie des auftreffenden Körpers) und hinsichtlich der Schädigung (nicht bis kaum sichtbar, deutlich sichtbar, Komplettdurchschlag) sehr unterschiedlich. Üblich ist eine Unterteilung in Impacts niedriger Geschwindigkeit (low-velocity Impacts) und Impacts hoher Geschwindigkeit (high-velocity Impacts), wobei sich die Geschwindigkeit auf den Impactvorgang, d. h. die Kontaktdauer, bezieht. Abb. 1.4 zeigt einige Beispiele für low- und high-velocity Impacts, die bei Flugzeugen auftreten können. Wenn die Masse des Schlagkörpers (Impactor) einen bestimmten Wert übersteigt (etwa $10kg$), so wird das Zusammentreffen der Körper i. d. R. nicht mehr als Impact sondern als Crash bezeichnet und die Schädigung ist massiv. Bei high-velocity Impacts entstehen Schäden, deren Ausmaße im Allgemeinen von außen gut erkennbar sind. So sind z. B. Komplettdurchschläge deutlich sichtbar, sie müssen jedoch die Restfestigkeit einer Sandwichstruktur nicht notwendigerweise stark reduzieren. Low-velocity Impacts hingegen verursachen durch die lange Dauer des Kontakts zwischen Impactor und Struktur eine globale Verformung der Struktur, wodurch auch große innere Schäden (z. B. Kernschäden) entstehen können, die schwer zu detektieren sind und dennoch die Tragfähigkeit der Verbundstruktur erheblich reduzieren. Dadurch sind low-velocity Impacts für den Betrieb eines Flugzeugs besonders kritisch; Schäden werden möglicherweise nicht erkannt und repariert, bevor der nächste Flug stattfindet. Die Trennung zwischen high- und low-velocity lässt sich nicht allein an der Geschwindigkeit des Impactors festmachen, denn auch die Impactormasse spielt eine gewisse Rolle. Eine größere Impactormasse hat bei gleicher Geschwindigkeit eine höhere Energie und bewirkt damit eine kürzere Impactdauer. Als grobe Richtlinie lässt sich angeben, dass bei low-velocity Impacts die Impactorgeschwindigkeit nicht mehr als $100\frac{m}{s}$ beträgt (bei geringen Massen im Gramm-Bereich) und dass die Impactenergie nicht größer als $50J$ wird (bei Massen im Kilogramm-Bereich).

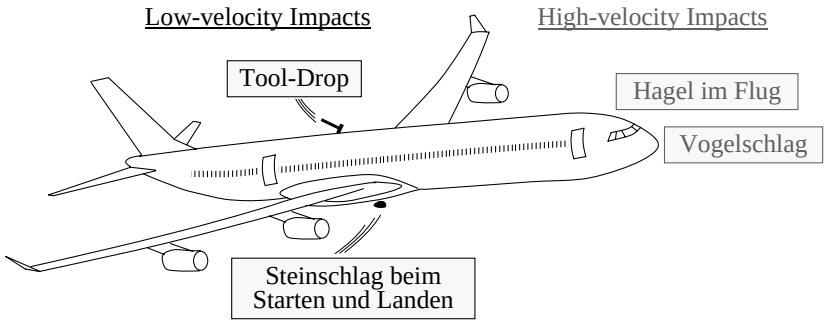


Abbildung 1.4: Beispiele für Impactszenarios, die während des Flugzeugentwurfs berücksichtigt werden müssen.

In dieser Arbeit werden ausschließlich low-velocity Impacts behandelt. Ein entscheidendes Merkmal der low-velocity Impacts ist ihre Vergleichbarkeit mit statischen Belastungen, denn durch die geringe Verformungsgeschwindigkeit ist das Versagensverhalten im Allgemeinen nicht dehnratenabhängig [3]. Für den Vergleich mit Versuchsergebnissen empfiehlt es sich

dennoch, den Impactvorgang dynamisch zu analysieren. Überdies muss das fortschreitende Schadenswachstum erfasst werden, um den endgültigen Schaden richtig zu ermitteln. Für die Impactanalyse sind also Degradationsmethoden und Zeitintegrationsmethoden erforderlich. Zudem muss der Kontakt zwischen Impactor und Sandwichschale geeignet beschrieben werden. Unter diesen Umständen stellt es eine besondere Herausforderung dar, insgesamt ein schnelles Verfahren zu schaffen, dass den Impactvorgang auf effiziente Weise simuliert.

1.2 Stand der Forschung

Die Simulation von Impactvorgängen auf Sandwichstrukturen ist ein mehrteiliger Prozess, der die Inhalte der folgenden Forschungsgebiete umfasst:

- Verformungs- und Spannungsanalyse (Kapitel 2),
- Versagensanalyse von Kern und Deckschicht (Kapitel 3),
- transiente Impactanalyse (Kapitel 4).

Zu jedem dieser Forschungsgebiete gibt es zahlreiche Arbeiten, in denen neue Modelle oder Methoden vorgestellt werden bzw. bekannte Methoden verglichen und bewertet werden.

Zum ersten Thema, zur Verformungs- und Spannungsanalyse von Sandwichstrukturen, werden in der vorliegenden Arbeit neue Modelle entwickelt. Um diese in der Vielzahl von anderen Theorien besser einordnen zu können, folgt in Abschnitt 1.2.1 eine Übersicht und eine Bewertung von Schalenmodellen, die für die Analyse des Verformungs- und Spannungsverhaltens von Sandwichschalen zur Verfügung stehen.

Zu den Themen Versagensanalyse und transiente Impactanalyse werden in dieser Arbeit mehrere vorhandene Methoden bewertet, geeignete Methoden ausgewählt und für die hier verfolgten Zwecke angepasst. Die Diskussionen hierzu erfolgen direkt in den Kapiteln 3 und 4 und werden dort auch mit den entsprechenden Referenzen belegt. Welche Versagensmodelle speziell in Arbeiten zur Impactanalyse von Sandwichstrukturen verwendet werden, wird in Abschnitt 1.2.2 erläutert. Dort wird auch herausgestellt, dass in der Literatur für die Modellierung des Kernversagens bisher keine Schubverzerrungen berücksichtigt werden, und dass darum in dieser Arbeit ein geeignetes Degradationsmodell hergeleitet wird, das auf kombinierten Druck-Schub-Versuchen basiert.

Eine weitere wichtige Errungenschaft dieser Arbeit ist ein leistungsfähiges Gesamttool, welches ausgewählte Methoden der Verformungs-, Versagens- und dynamischen Analyse für eine effiziente Impactsimulation kombiniert. In diesem Zusammenhang werden in Abschnitt 1.2.2 Arbeiten zur Impactanalyse von Sandwichstrukturen vorgestellt, wobei sowohl auf experimentelle Beobachtungen als auch auf Simulationsmethoden eingegangen wird.

1.2.1 Schalenmodelle für Sandwichstrukturen

Eine Vielzahl kontinuumsmechanischer Modelle und zugehöriger Finite-Elemente-Formulierungen zur Beschreibung des Verformungs- und Spannungsverhaltens von mehrschichtigen Verbundstrukturen wurde im zurückliegenden Jahrhundert bereits entwickelt. Im Jahr 1990

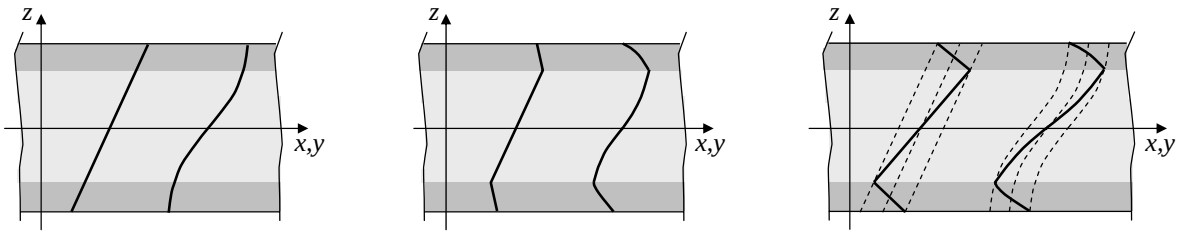
führten NOOR und BURTON [4] eine umfangreiche Evaluierung durch, in der sie zahlreiche Modelle für Faserverbundlaminate anhand numerischer Studien miteinander verglichen und dabei vierhundert Publikationen einbezogen. CARRERA [5]-[6] veröffentlichte etwa zehn Jahre später eine ähnlich umfangreiche Arbeit, in der er die Leistungsfähigkeit verschiedener Schalentheorien numerisch untersuchte. Auch ROHWER [7] beschäftigte sich intensiv mit der Bewertung der zur Verfügung stehenden Modelle. Er verglich Anfang der 1990er Jahre sieben Schalentheorien verschieden hoher Ordnung und sprach Empfehlungen für ihre Einsetzbarkeit aus. Dabei untersuchte er sowohl die Genauigkeit der Theorien als auch den numerischen Aufwand sowie ihre Eignung für eine FE-Anwendung. Sein Review wurde im Jahr 2005 von ROHWER et al. [8] aktualisiert und erweitert. Finite Elemente zur Modellierung von Faserverbundschalen wurden auch in den Arbeiten von GAUDENZI et al. [9] und PARK et al. [10] untersucht und bewertet.

Bei der Modellierung mehrschichtiger Schalenstrukturen lassen sich grundsätzlich zwei Herangehensweisen unterschieden: Die Kinematen können in Schalendickenrichtung durch einen äquivalenten einschichtigen Ansatz (siehe z. B. Abb. 1.5(a)) oder durch einen mehrschichten Ansatz (Abb. 1.5(b)) beschrieben werden. Die Klassische Laminattheorie (CLT) und die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (FSDT) nach MINDLIN [11] und REISSNER [12] sind die zwei bekanntesten Vertreter der einschichtigen Ansätze. Während bei der CLT in Schalenrichtung C^1-kontinuierliche Ansatzfunktionen notwendig sind und somit nicht nur die Kinematen sondern auch deren erste Ableitungen an den Elementgrenzen stetig sein müssen, genügt bei der FSDT C^0-Stetigkeit. Aus diesem Grund wird die FSDT in FE-Programmen deutlich häufiger verwendet als die CLT. Finite Elemente mit FSDT erfordern jedoch Vorkehrungen zur Vermeidung von Locking (Versteifungseffekte durch parasitäre Verzerrungsenergien bei großer Element-Schlankheit). Zusätzlich ist eine Korrektur der Querschubsteifigkeiten notwendig, da diese sonst durch die in Dickenrichtung konstanten Schubverzerrungen überschätzt werden. Vorschläge für Schubkorrekturfaktoren machen z. B. MADABHUSI-RAMAN und DAVALOS [13], PAI und SCHULZ [14], ALTENBACH [15] sowie HUTCHINSON [16]. Bei der Berechnung der Querschubspannungen mit dem HOOKEschen Materialgesetzes wird außerdem das Gleichgewicht an den Schichtübergängen verletzt. PRYOR und BARKER [17] nutzten erstmals die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung verbesserter Querschubspannungen. ROLFES und ROHWER [18] entwickelten die sogenannte Erweiterte 2D-Methode und verwendeten den Gleichgewichtsansatz nicht nur zur Verbesserung der transversalen Spannungen sondern auch zur Verbesserung der Querschubsteifigkeiten.

Es ist schnell ersichtlich, dass weder die Klassische Laminattheorie noch die Schubdeformationstheorie 1. Ordnung in der Lage sind, das mechanische Verhalten einer Sandwichschale mit realistischen Schichtdicken adäquat zu modellieren. Die stark unterschiedlichen Querschubsteifigkeiten von Kern und Deckschichten führen an den Schichtgrenzen zu deutlichen Knicken in den Verschiebungsverläufen und bewirken somit den sogenannten Zickzack-Effekt. CARRERA und DEMASI [19] haben verschiedene Schalentheorien hinsichtlich ihrer Fähigkeit untersucht, den Zickzack-Effekt bei Sandwichschalen zu modellieren. Um das Verformungsverhalten mit Hilfe eines einschichtigen Ansatzes beschreiben zu können, sind Funktionen höherer Ordnung erforderlich. Solche werden z. B. von PAI und PALAZOTTO [20], BARUT et al. [21] oder MATSUNAGA [22] vorgeschlagen. Auch wenn diese einschichtigen Theorien höherer Ordnung eine deutliche Verbesserung gegenüber der FSDT darstellen, so kann der scharfe Verschiebungsknick an den Schichtgrenzen doch nicht exakt erfasst werden.

Viel leichter ist der Zickzack-Effekt durch mehrschichtige Ansätze zu erfassen, bei denen

die Verschiebungen durch schichtweise kontinuierliche Funktionen beschrieben und an den Schichtgrenzen Kontinuitätsbedingungen erfüllt werden, vgl. Abb. 1.5(b). Carrera [23] gibt einen historischen Überblick über die Entwicklung von mehrschichtigen Schalentheorien und unterstreicht dabei die drei maßgeblichen wissenschaftlichen Beiträge von Lekhnitskii [24], Ambartsumian [25] und Reissner [26], auf denen alle späteren Mehrschichtentheorien aufbauen. Ohne zusätzliche Annahmen hängt die Anzahl der funktionalen Freiheitsgrade von der Anzahl der Schichten ab, wodurch der numerische Aufwand extrem groß werden kann. Ansätze, die auf Ambartsumians Mehrschichtentheorie basieren, nutzen die transversalen Gleichgewichtsbedingungen an den Schichtgrenzen, um die Anzahl der Freiheitsgrade zu reduzieren, siehe z. B. die Arbeiten von Sun und Whitney [27], Di Sciuva [28], Lee et al. [29] und Icardi [30]. Durch dieses Vorgehen können zwar die Freiheitsgrade bis hin zu einer schichtunabhängigen Anzahl reduziert werden, es werden jedoch durch die eingebrachten Verschiebungsableitungen C^1-stetige Ansatzfunktionen an den Elementgrenzen nötig. Aus diesem Grund verwendet Di Sciuva [28] für die transversalen Verschiebungsfreiheitsgrade seiner finiten Elemente kubische Hermite-Polynome, während er alle anderen Freiheitsgrade durch lineare Formfunktionen beschreibt. Dadurch ist der numerische Aufwand seiner Elemente größer als der herkömmlicher linearer 4-Knoten-Elemente. Einen ganz anderen Weg zur Erfassung des Zickzack-Effekts ermöglicht Murakamis Zickzack-Funktion (MZZF [31], Abb. 1.5(c)), welche auf Reissners Mehrschichtentheorie aufbaut und eine schichtweise lineare Funktion darstellt, die ihre betraglich gleichbleibenden Maxima mit wechselndem Vorzeichen jeweils an den Schichtgrenzen hat. Eine oder mehrere MZZF werden zu einem einschichtigen Verschiebungsansatz addiert, so dass ein Zickzack-Verschiebungsverlauf möglich wird. Sie erhöhen die Anzahl der Freiheitsgrade nur in geringem Maße und erfordern keine C^1-Stetigkeit. Durch die MZZF wird jedoch das Verhältnis der Verschiebungsamplituden an den Schichtgrenzen vorgeschrieben, weswegen ein linearer einschichtiger Ansatz in Kombination mit einer linearen MZZF nicht in der Lage ist, die Verformungen einer unsymmetrischen Sandwichschale mit verschieden dicken Deckschichten zufriedenstellend zu modellieren. Hierfür wäre ein einschichtiger Ansatz höherer Ordnung erforderlich, der wiederum die Anzahl der Freiheitsgrade vergrößert. Carrera [32] stellte fest, dass der Einsatz von einschichtigen Theorien höherer Ordnung in Kombination mit linearen MZZF jedenfalls effektiver ist als lineare Einschichtentheorien in Kombination mit MZZF höherer Ordnung.



(a) einschichtiger linearer bzw. kubischer Ansatz.

(b) mehrschichtiger linearer bzw. kubischer Ansatz.

(c) einschichtiger linearer bzw. kubischer Ansatz mit MZZF.

Abbildung 1.5: Beispiele für einschichtige und mehrschichte Verschiebungsansätze.

In der vorliegenden Arbeit (Kapitel 2) werden zwei neue dreischichtige Schalenelemente vorgestellt, bei denen die Verschiebungsansätze für jede Schicht separat formuliert werden und die zur Vermeidung von C^1-Stetigkeit nur die Verschiebungs-Kontinuitätsbedingungen

an den Schichtgrenzen erfüllen. Zur Verbesserung der transversalen Spannungen und Schubsteifigkeiten wird der Gleichgewichtsansatz von Rolfes und Rohwer [18] für dreischichtige Schalen erweitert.

Volumenelemente können bei der Modellierung von Sandwichschalen eine Alternative zu mehrschichtigen Schalenelementen sein. Da für die dünnen Deckschichten sehr kleine Volumenelemente erforderlich wären, ist es in dem Fall günstiger, die Deckschichten mit einschichtigen Schalenelementen zu modellieren und diese mit den Volumenelementen des Kerns zu kombinieren. Bei den Deckschicht-Schalenelementen ist jedoch der Gleichgewichtsansatz von Rolfes und Rohwer [18] zur Verbesserung der transversalen Spannungen und Querschubsteifigkeiten nicht anwendbar, da er in Schalenrichtung eine konstante Membrankraft voraussetzt. Außerdem ist der Generierungsaufwand durch die Kombination von Volumen- und Schalenelementen deutlich höher als bei mehrschichtigen Schalenelementen. Auch für die Lösung des Gleichungssystems ist es bei dünnen Strukturen im Allgemeinen effizienter, den Ansatz in Dickenrichtung vorab zu integrieren und dementsprechend Schalenelemente anstatt Volumenelementen zu verwenden.

1.2.2 Impactanalyse von Sandwichstrukturen

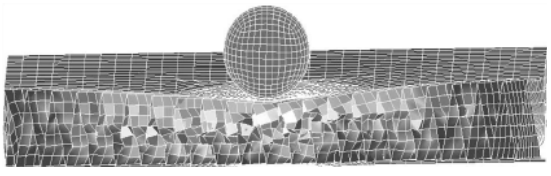
Während das Impactverhalten von monolithischen Faserverbundstrukturen bereits seit den 1980er Jahren intensiv untersucht wird, hat die Zahl der Publikationen zur Impactanalyse von Sandwichstrukturen erst in den letzten zehn Jahren stark zugenommen. Dieses wachsende Interesse ist nicht zuletzt Zukunftsplänen der Luftfahrtindustrie zuzuschreiben, wo verstärkt über den Einsatz der Sandwichbauweise auch für primäre Tragstrukturen nachgedacht wird. Auch wenn monolithische und doppelschalige Faserverbundstrukturen hinsichtlich der geringen Impactresistenz vergleichbar sind, so ist das Impactverhalten doch unterschiedlich. Nicht nur der Kern kommt beim Sandwich als schädigungsanfällige Struktur und als zusätzlicher Energieabsorber neu hinzu, auch die Deckschicht zeigt ein anderes Versagensverhalten. Da Sandwichdeckschichten viel dünner sind als Monolithe, spielen die transversalen Spannungen im Vergleich zu den Membranspannungen eine deutlich geringere Rolle. Folglich sind z. B. Delaminationen bei Sandwichdeckschichten weit weniger kritisch als bei monolithischen Strukturen, bei denen sie wiederum ein sehr wichtiges Forschungsthema darstellen. Um den Umfang der Ausführungen zum Stand der Forschung zu begrenzen, konzentrieren sich die folgenden Betrachtungen auf Sandwichstrukturen.

Experimentelle Untersuchungen zum Impactverhalten von Sandwichplatten werden z. B. in den Arbeiten [33]-[39] vorgestellt. Herup und Palazotto [33] sowie Dear et al. [38] untersuchten für verschiedene Kern- und Deckschichtmaterialien die Schadensentstehung und die Energieabsorption während eines low-velocity Impacts. Sie verglichen dabei den Schädigungsverlauf mit dem Kontaktkraft-Zeit-Verlauf und stellten einen zeitlichen Zusammenhang her. Der erste Schaden, der bei den getesteten Sandwichstrukturen, die typischerweise aus dünnen Deckschichten bestanden und ein hohes Steifigkeitsverhältnis zwischen Kern und Deckschicht aufwiesen, auftrat, war stets ein Kernschaden. Mit dem Beginn des Kernversagens verringerte sich der Anstieg des Kontaktkraft-Zeit-Verlaufs. Bei höheren Impactenergien erreichte die Kontaktkraft einen bestimmten Grenzwert und fiel dann schlagartig ab. Im Moment dieses Kraftabfalls kam es zum ersten sichtbaren Schaden in Form von Deckschichtrissen. Die Größe der Kontaktkraft, bei der die Deckschicht zu reißen begann, war bei gleichen Materialien unabhängig von der Größe der Impactenergie.

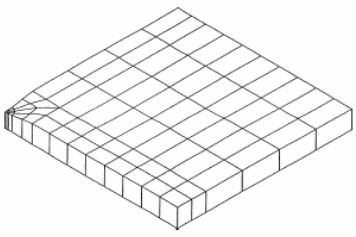
Schubel et al. [39] führten vergleichende, experimentelle Untersuchungen zum quasi-statischen Verhalten und zum Impactverhalten von Sandwichstrukturen durch. Hierbei wurde sowohl beim Kraft-Weg-Verlauf als auch bei der Schadensentwicklung ein übereinstimmendes Verhalten festgestellt. Diese Beobachtungen werden durch eine Studie von Olsson [3] bestätigt, bei der Impactvorgänge für große und für kleine Impactormassen untersucht wurden: Bei Impactereignissen mit Impactormassen, die größer waren als der vom Impact betroffene Bereich der Sandwichschale und die somit verhältnismäßig geringe Geschwindigkeiten aufwiesen (low-velocity Impacts), wurde keine Dehnratenabhängigkeit festgestellt. Folglich können Dehnraten bei der Simulation von low-velocity Impacts, wie sie im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden, vernachlässigt werden, siehe hierzu auch Erläuterungen von Suvorov und Dvorak [40].

Für die Vorhersage von Impactschäden in Sandwichstrukturen vermeiden einige Autoren [41]-[47] eine aufwendige numerische Simulation und schlagen vereinfachte, geschlossene Lösungen vor. Mit diesen Ansätzen lassen sich kritische Kontaktkräfte für die Entstehung bestimmter Schäden berechnen. Sie können jedoch keine Aussage über den Kontaktkraft-Zeit-Verlauf und über den Schadensfortschritt während eines Impacts liefern. Weitergehend schlägt Olsson [48] eine geschlossene Lösung vor, die den Beginn des Kernschadens und den Beginn des Deckschichtschadens sukzessiv erfasst und den Impactverlauf entsprechend mit schrittweise linearen Materialmodellen beschreibt.

Numerische Impactsimulationen mit Finite-Elemente-Modellen, die die fortschreitende Schädigung und das nichtlineare Materialverhalten der impactbelasteten Sandwichstruktur berücksichtigen, können eine deutlich größere Genauigkeit erzielen als geschlossene Lösungen. Sie sind außerdem unabhängig hinsichtlich Lagerungsbedingungen und Abmessungen der Sandwichplatte. Impactsimulationen mit sehr feinen Vernetzungen (z. B. von Lee und Shyu [49], Hähnel und Wolf [50], Meo et al. [51]-[52], Nguyen et al. [53], siehe Abb. 1.6(a)), bei denen auch in Dickenrichtung mehrere Elemente eingesetzt werden, sind rechentechnisch sehr aufwendig. Der Einsatz von gröberen Netzen ([54]-[56]), die in Dickenrichtung mit wenigen Elementen auskommen, ermöglicht eine weit effizientere Simulation, bringt aber Genauigkeitsverluste mit sich. Palazotto et al. [54] verknüpften ein lokales Schalenmodell, welches nur die elastisch gebettete obere Deckschicht modelliert, mit einem globalen Schalenmodell, welches das gesamte Sandwich repräsentiert. Sie verwendeten dabei für beide Modelle einschichtige Schalenelemente höherer Ordnung. Besant et al. [55] sowie Davies et al. [56] modellierten die Deckschichten mit 8-Knoten-Mindlin-Schalenelementen und den Kern mit 20-Knoten-Volumenelementen, siehe Abb. 1.6(b). Eine Modellierung von impactbelasteten Sandwichstrukturen mit mehrschichtigen Schalenelementen, wie sie in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagen wird, wurde nach Wissen des Autors bisher nicht verwendet.



(a) Feine Modellierung bei Nguyen et al. [53].



(b) Grobe Modellierung bei Davies et al. [56].

Abbildung 1.6: Beispiele für Finite-Elemente-Modelle einer Sandwichplatte.

Für die Detektion des Kernschadens während einer Impactbelastung verwenden die meisten Autoren spannungsbasierte Kriterien, welche die transversalen Druck- und Schubspannungen entweder separat (z. B. in [49], [51]) oder kombiniert (z. B. in [45], [55]) berücksichtigen. Auch für das Versagen der Deckschichten werden häufig spannungsbasierte Kriterien eingesetzt, wobei im Allgemeinen zwischen Faserbrüchen, Matrixbrüchen und Delaminationen unterschieden wird. Nur selten kommen globale, spannungsbasierte Versagenskriterien zum Einsatz, bei denen die einzelnen Versagensmoden nicht unterschieden werden ([42]). Während für die Detektion von Faserbrüchen und Matrixbrüchen weitverbreitet spannungsbasierte Kriterien verwendet werden, ist die Behandlung von Delaminationen sehr unterschiedlich. Nur wenige Autoren verwenden hierfür ebenfalls spannungsbasierte Kriterien ([54]). In vielen Arbeiten werden Delaminationen aufgrund des geringen Einflusses auf den Impactverlauf vernachlässigt ([49]-[53], [55]-[56]). Einige Autoren ([40]-[41]) modellieren die Delaminationen etwas aufwendiger mit Hilfe von Energiefreisetzungsraten. Der Einsatz von energiebasierten Methoden zur Beschreibung des Deckschichtversagens insgesamt ist noch nicht sehr verbreitet und hauptsächlich auf die Simulation von high-velocity Impacts beschränkt, siehe z. B. Aktay et al. [57]. In den meisten Arbeiten zu low-velocity Impacts wird der fortschreitende Versagensverlauf in der Deckschicht dadurch erfasst, dass bestimmte Steifigkeitskomponenten durch spezifische Degradationsfaktoren reduziert werden. Ein solches Vorgehen wird auch in dieser Arbeit zur Modellierung des Deckschichtversagens vorgeschlagen (Abschnitt 3.2.3). Das Kernversagen wird in der Literatur ebenfalls durch Steifigkeitsreduktion modelliert, wobei die Energieabsorption durch eine verbleibende Stauchfestigkeit zumeist auch mit berücksichtigt wird (z. B. [49]-[52], [55]-[56]). In den dem Autor bekannten Arbeiten wird das postkritische Verhalten jedoch nur eindimensional für transversalen Druck beschrieben, und Schub wird nicht berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit werden kombinierte Druck-Schub-Versuche präsentiert, anhand derer ein experimentell abgesichertes, makromechanisches Degradationsmodell entwickelt wird (Abschnitt 3.2.2).

Impacts ohne sichtbare Schädigung der Deckschicht können von einigen Autoren bereits zuverlässig simuliert werden. Solange es zu keinem deutlichen Krafteinbruch kommt, stimmen z. B. in den Arbeiten [53]-[56] die berechneten Kontaktkraft-Zeit- bzw. Kontaktkraft-Weg-Verläufe recht gut mit den Versuchsergebnissen überein. Für Ergebnisse mit signifikanter Deckschichtschädigung gibt es von diesen Autoren keine Vergleiche zwischen Versuch und Berechnung. Beispiele hierzu wurden nur in wenigen Arbeiten ([49]-[50]) gefunden, in denen die Sandwichschale in Dickenrichtung aber auch sehr fein, mit mehreren finiten Elementen diskretisiert wurde. Doch auch mit diesen genauen Modellen scheint bisher eine zuverlässige Vorhersage für beliebige Impactvorgänge noch nicht möglich zu sein. Wolf et al. [58], [50] löschen in ihrem sehr feinen FE-Modell einzelne Deckschichtelemente, sobald eine bestimmte Verzerrung überschritten wird. Für zufriedenstellende Simulationsergebnisse sind im Vorfeld Netzanpassungen und Anpassungen materialspezifischer Parameter erforderlich. Mit den in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Modellen ist die Beschreibung des Risswachstums in der Deckschicht nicht möglich. Der Innovationswert dieser Arbeit liegt darin, auf effiziente Weise und mit wenigen materialspezifischen Parametern den Impactverlauf bis zu dem Punkt zu beschreiben, an dem die Deckschicht zu reißen beginnt. Damit lässt sich schnell und zuverlässig eine Aussage über die Größe eines nicht sichtbaren Schadens bzw. über das Vorhandensein eines sichtbaren Schadens treffen.

1.3 Vorstellung des Simulationstools CODAC

Die Modelle und Methoden, die in dieser Arbeit zur Impactsimulation von Sandwichstrukturen vorgestellt werden, wurden im Finite-Elemente-Programm CODAC implementiert. CODAC (**Co**mposite **D**amage Tolerance **A**nalysis **C**ode) ist ein schnelles Simulationstool, das am DLR, am Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik entwickelt wird. Es dient der Simulation von low-velocity Impacts sowie der Restfestigkeitsberechnung von Faserverbundstrukturen. Als schnelles Tool ist es für den Einsatz im Entwurfsprozess geeignet und verfolgt das Ziel, einen Belastungsvorgang so schnell wie möglich und so genau wie nötig zu simulieren. Um dies zu erreichen, wird das Verformungs- und Versagensverhalten der Verbundstruktur mit Hilfe von makromechanischen Modellen beschrieben, die das Material homogenisieren und möglichst global erfassen. Im Sinne der Effizienz ist es ein weiteres wichtiges Ziel, das Verhalten der Verbundstruktur bereits mit relativ groben Finite-Elemente-Modellen ausreichend genau beschreiben zu können. Durch den hohen Anspruch von CODAC hinsichtlich geringer Rechenzeiten sind der Genauigkeit der Simulationsergebnisse natürlich Grenzen gesetzt. Die tatsächlichen Schäden können in den berechneten Schadensflächen nur verwischt dargestellt werden. Dies ist für die Anforderungen im Entwurf durchaus ausreichend, solange die Ergebnisse konservativ sind und die berechneten Schadensflächen die tatsächlich geschädigten Bereiche ungefähr umfassen. Problematisch wird die makromechanische Herangehensweise dann, wenn die unscharfe Modellierung von mikroskopischen Schäden (z. B. Rissen) das tatsächliche Verhalten der Struktur nicht mehr geeignet erfassen kann und somit die weitere Schadensentwicklung nicht richtig berechnet wird. Unter Beachtung dieser Gesichtspunkte wurde im Rahmen dieser Arbeit die Impactsimulation in CODAC für Sandwichstrukturen weiterentwickelt.

1.4 Ziele und Umfang der Arbeit

In der Arbeit soll ein Verfahren entwickelt werden, das geeignet ist, Impactvorgänge niedriger Geschwindigkeit in Sandwichstrukturen effizient zu simulieren. Ziel ist es, die Impactschäden so zu berechnen, dass damit die Tragfähigkeit für den Entwurf *ausreichend genau* beurteilt werden kann. Gleichzeitig soll das Verfahren *so effizient wie möglich* sein, um in kurzer Zeit vielerlei Konfigurationen von Sandwichstrukturen prüfen zu können. Ein weiteres wichtiges Ziel ist, die Anzahl der Materialparameter, die vom Anwender gewählt werden und somit im Entwurf bekannt sein müssen, möglichst gering zu halten. Die entwickelten Modelle und Methoden sollen schließlich im Simulationstool CODAC programmtechnisch umgesetzt und für die einfache Anwendung im Entwurf zur Verfügung gestellt werden.

Eine Definition von *ausreichend genau* für den Entwurf lässt sich nicht eindeutig festmachen. Wichtig sind auf jeden Fall bestimmte Eckpunkte des Versagensvorgangs, bei denen der Impactschaden ein neues Stadium erreicht und somit die Resttragfähigkeit schlagartig um ein gewisses Maß reduziert wird. Solche Eckpunkte sind der Beginn des Kernschadens und das erste Einreißen der Deckschicht. Die Impactsimulation soll also vordringlich dazu in der Lage sein, für eine beliebige Impactbelastung vorherzusagen, ob eine Sandwichstruktur einen Kernschaden erfährt und ob die Deckschicht versagt. Da nicht bzw. kaum sichtbare Schäden für den Betrieb eines Flugzeugs besonders kritisch sind, soll außerdem die Größe des Kernschadens ermittelt werden. Bei den Ausführungen zur Problematik der Berechnung von

Faserverbunden wurde erläutert, dass das Versagensverhalten der Deckschicht sehr komplex und aufwendig zu modellieren ist. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn Risswachstum beschrieben werden soll. Aus Restfestigkeitsversuchen ist bekannt, dass die Resttragfähigkeit mit wachsendem Kernschaden bis zum ersten Deckschichtriss stark abnimmt und dann mit zunehmender Risslänge nur noch unwesentlich kleiner wird (siehe z. B. experimentelle Untersuchungen von Wetzel und Kärger [59]). Deshalb ist es zugunsten der Berechnungseffizienz nicht Ziel dieser Arbeit, die Risslänge zu bestimmen. Der Deckschichtschaden soll nur bis zu dem Punkt modelliert werden, an dem die Deckschicht zu reißen beginnt. Für die Impactsimulation bedeutet dies, dass ein Impactvorgang vollständig bis zum ersten Deckschichtriss nachvollzogen wird.

Um für Sandwichstrukturen eine leistungsfähige Verformungs- und Spannungsanalyse zu ermöglichen, werden in Kapitel 2 zwei neue Schalenmodelle und die zugehörigen finiten Elemente formuliert. Anhand numerischer Beispiele wird die Effektivität der Elemente demonstriert und eine Auswahl des für die Impactsimulation besser geeigneten Elementes getroffen.

In Kapitel 3 wird zunächst die Phänomenologie des Sandwichversagens unter Impactlasten beschrieben. Darauf aufbauend werden vorhandene makromechanische Versagensmodelle für Kerne und Faserverbunddeckschichten diskutiert. Im Hinblick auf eine effiziente Versagensanalyse werden die bestgeeigneten Modelle ausgewählt. Zur Beschreibung des Versagensverhaltens des Kerns wird anhand von experimentellen Ergebnissen ein Degradationsmodell neu entwickelt.

Für die dynamische Analyse der Impactvorgänge werden in Kapitel 4 zwei Zeitintegrationsmethoden vorgestellt, das Kontaktgesetz zur Beschreibung des Kontakts zwischen Impactor und Sandwichschale wird erläutert und in die Zeitintegration eingebunden. Anhand von Konvergenzbetrachtungen und numerischen Beispielen wird die Eignung der Zeitschrittmethoden für die Impactsimulation diskutiert und die bessere Variante wird ausgewählt.

Kapitel 5 dient schließlich der experimentellen Validierung der Impactsimulation. Ein Impactversuchsprogramm, welches als Referenz dient, wird vorgestellt. Für verschiedene Impactenergien, Degradationsstufen und Finite-Elemente-Modelle werden die Simulationsergebnisse dargestellt und mit den Versuchsergebnissen verglichen. Durch die Angabe von Rechenzeiten erfolgt eine Einschätzung des numerischen Aufwands und somit der Effizienz der Simulation.

Kapitel 2

Verformungs- und Spannungsanalyse

Voraussetzung für eine Impactsimulation, die sich für den Einsatz im Entwurfsprozess eignet, ist eine effiziente und ausreichend genaue Berechnung der Verformungen und Spannungen. Um z. B. in Bezug auf Lagerungsbedingungen und lokale Strukturveränderungen die Anwendbarkeit der Impactsimulation auf den allgemeinen Fall zu wahren, basiert das Simulationstool CODAC auf der Methode der Finiten Elemente (FE). Aus diesem Grund spielt bei der Wahl der bestgeeigneten Schalenmodelle neben Genauigkeit und Effizienz auch die Umsetzbarkeit in ein finites Element eine entscheidende Rolle. Von KÄRGER und WETZEL [60] wurden verschiedene Modellierungsvarianten für eine zweckmäßige Verformungs- und Spannungsanalyse von Sandwichstrukturen diskutiert, vgl. auch Abschnitt 1.2.1. Als am besten geeignet erwiesen sich zwei Schalenmodelle, die auf schichtweise separaten Verschiebungsansätzen beruhen und drei Schichten (impactbelastete Deckschicht, Kern, impactabgewandte Deckschicht) beinhalten. Die daraus entwickelten finiten Elemente S89 und S815 wurden von KÄRGER et al. [61] und WETZEL et al. [62] veröffentlicht. Die Kernpunkte der beiden Theorien werden im Folgenden vorgestellt.

2.1 Schalenelement S89 mit 2D-Verschiebungsansatz

Element S89 ist ein dreischichtiges **S**andwich-Schalenelement mit **8** Knoten und **9** Verschiebungsfreiheitsgraden pro Knoten. Es beruht auf der Annahme eines ebenen Spannungszustandes und erfordert daher eine Verbesserung der transversalen Materialeigenschaften und Spannungen. Diese Verbesserung geschieht mit Hilfe einer Adaption der sogenannten Erweiterten 2D-Methode nach ROLFES und ROHWER [18], die auf einem Gleichgewichtsansatz beruht und der eigentlichen Finite-Elemente-Analyse vor- bzw. nachgeschaltet ist. Das Element S89 wurde von KÄRGER et al. [61] erstmals vorgestellt und verifiziert.

2.1.1 Kinematik

Um das Biegeverhalten von Sandwichschalen geeignet beschreiben zu können, müssen die stark divergierenden Materialeigenschaften von Sandwichkern und Deckschichten in der Kinematik Berücksichtigung finden: Während die Querschnitte der schubsteifen Deckschichten

nahezu senkrecht zur Plattenrichtung bleiben, muss die Kernschicht eine große Schubverformung ertragen. Um dieses Verformungsverhalten zu ermöglichen und gleichzeitig den numerischen Aufwand gering zu halten, wird separat für jede Schicht L der Verschiebungsansatz

$$\mathbf{u}_L(x,y,z) = \begin{bmatrix} u_L(x,y,z) \\ v_L(x,y,z) \\ w_L(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_L^0(x,y) \\ v_L^0(x,y) \\ w_L^0(x,y) \end{bmatrix} + z_L \begin{bmatrix} \psi_{xL}(x,y) \\ \psi_{yL}(x,y) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

der Schubtheorie 1. Ordnung nach MINDLIN [11] und REISSNER [12] verwendet, vgl. Abb. 2.1. Die schichtbezogenen Größen der unteren, impactabgewandten Deckschicht seien im Folgenden mit $L = 1$, die des Kerns mit $L = 2$ und die der oberen, impactbelasteten Deckschicht mit $L = 3$ indiziert. Auch in den sehr schubsteifen Deckschichten wurde auf die linearen Verschiebungsansätze nicht verzichtet, um für das finite Element $C^{(0)}$-Stetigkeit zu bewahren.

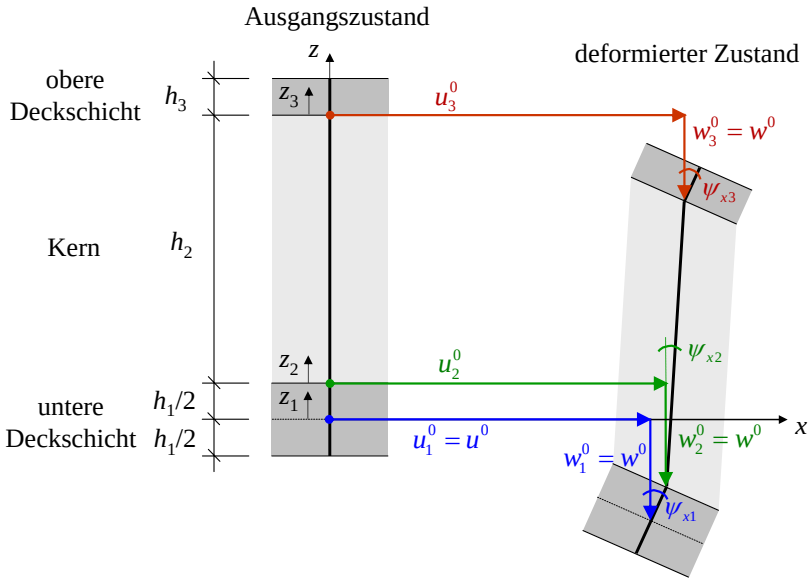


Abbildung 2.1: Kinematischer Ansatz des Elementes S89.

Die Verschiebungen u_L^0 und v_L^0 der Schichtreferenzflächen können mit Hilfe der Kontinuitätsbedingungen an den Interfaces in Abhängigkeit der Verschiebungen u^0 und v^0 der Schalenreferenzfläche beschrieben werden. Die Lage der Schalenreferenzfläche ist für die Genauigkeit eines Schalenelementes im Prinzip nicht relevant. Interessant wird sie jedoch bei der Formulierung einer gelenkigen Lagerung: Während die Verschiebungen der Schalenreferenzfläche direkt festgehalten werden können, funktioniert eine solche Restriktion für Verschiebungen ober- oder unterhalb der Referenzfläche nur mit Hilfe von Nebenbedingungen, die durch LAGRANGE-Multiplikatoren formuliert werden können und somit die Anzahl der Freiwerte erhöhen. Da bei Impactversuchen Sandwichpaneele häufig auf die untere Deckschicht aufgelegt und dort fixiert werden (insbesondere sind auch vollflächige Lagerungen üblich, die jedoch nur von Element S815 modelliert werden können, Abschnitt 2.2.1), bietet sich folglich die Lage der Referenzfläche in der unteren Deckschicht an. Es ergeben sich

daraus die Beziehungen

$$\begin{array}{l} u_1^0 = u^0\,, \\ u_2^0 = u^0 + \frac{h_1}{2}\psi_{x1}\,, \\ u_3^0 = u^0 + \frac{h_1}{2}\psi_{x1} + h_2\psi_{x2} \end{array} \tag{2.2}$$

für die Verschiebungen in x-Richtung und analoge Beziehungen für die Verschiebungen v_L^0 in y-Richtung. Die transversalen Verschiebungen $w_L^0 = w^0$ werden als konstant über die Dicke angenommen. In der Summe ergeben sich somit 9 Freiheitsgrade für einen Punkt in der Schalenreferenzfläche, die im Vektor

$$\mathbf{u}(x,y) = \left[\begin{array}{ccccccccc} u^0 & v^0 & w^0 & \psi_{x1} & \psi_{y1} & \psi_{x2} & \psi_{y2} & \psi_{x3} & \psi_{y3} \end{array}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.3}$$

zusammengefasst werden. Um die Verschiebungen eines Punktes in der Schicht L in Abhängigkeit des Vektors der Verschiebungsfreiheitsgrade auszudrücken, werden die kinematischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}$ eingeführt, so dass

$$\mathbf{u}_L(x,y,z) = \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}(z)\,\mathbf{u}(x,y) \tag{2.4}$$

gilt. Die jeweils 3×9 Komponenten der drei schichtspezifischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}$ sind durch (2.1)-(2.3) eindeutig bestimmt; sie sind in Anhang A.1 angegeben.

2.1.2 Lineare Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

Da sich die Anwendung von Element S89 auf die Beschreibung kleiner Verschiebungen beschränkt, genügt eine lineare Formulierung der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung. Für die Membranverzerrungen in der Schicht L einer Sandwichschale gilt demnach

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L(x,y,z) = \left[\begin{array}{c} \varepsilon_{xxL} \\ \varepsilon_{yyL} \\ \gamma_{xyL} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} u_{L,x} \\ v_{L,y} \\ u_{L,y} + v_{L,x} \end{array}\right]. \tag{2.5}$$

Zugunsten der Übersichtlichkeit wird in dieser Arbeit auf die Formulierung von Krümmungsanteilen verzichtet. Für kleine Krümmungen lassen sich die Verzerrungskomponenten recht einfach erweitern. Um einfach gekrümmte Flugzeugrumpfstrukturen modellieren zu können, sind im Programm CODAC die Verzerrungen für Krümmungen um die x-Achse formuliert, vgl. [61]. Die Begriffe Schale und Schalenelement werden im Weiteren auch für ungekrümmte Paneele verwendet, da im Gegensatz zu Platten- oder Scheibenelementen sowohl Membran- als auch transversale Verschiebungen erfasst werden können. Mit dem Verschiebungsansatz (2.1) und mit Einführung der über z_L konstanten und linearen Verzerrungsanteile

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^0(x,y) = \left[\begin{array}{c} u_{L,x}^0 \\ v_{L,y}^0 \\ u_{L,y}^0 + v_{L,x}^0 \end{array}\right] \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\kappa}_L(x,y) = \left[\begin{array}{c} \psi_{xL,x} \\ \psi_{yL,y} \\ \psi_{xL,y} + \psi_{yL,x} \end{array}\right] \tag{2.6}$$

ergibt sich aus (2.5)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L(x,y,z) = \boldsymbol{\varepsilon}_L^0(x,y) + z_L\boldsymbol{\kappa}_L(x,y)\,. \tag{2.7}$$

Aufgrund der in z-Richtung konstanten transversalen Verschiebung w sind die transversalen Schubverzerrungen

$$\boldsymbol{\gamma}_{zL}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \gamma_{yzL} \\ \gamma_{zxL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{L,z} + w_{L,y} \\ u_{L,z} + w_{L,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{yL}(x,y) + w^0_{,y}(x,y) \\ \psi_{xL}(x,y) + w^0_{,x}(x,y) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

schichtweise konstant, und die transversalen Normalverzerrungen

$$\varepsilon_{zzL}(x,y,z) = w_{L,z} = 0 \tag{2.9}$$

verschwinden.

Operatormatrix der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung. Für eine matrizielle Formulierung der Verzerrungen, die für FE-Anwendungen geeignet ist, wird die Operatormatrix $\mathbf{B}_{\mathrm{S89}}$ der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung eingeführt, so dass

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y) = \mathbf{B}_{\mathrm{S89}} \cdot \mathbf{u}(x,y) \tag{2.10}$$

gilt, mit den Verschiebungsfreiheitsgraden $\mathbf{u}$ aus Gl. (2.3) und den Verzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^0 & \boldsymbol{\kappa}_1 & \boldsymbol{\gamma}_{z1} & \boldsymbol{\varepsilon}_2^0 & \boldsymbol{\kappa}_2 & \boldsymbol{\gamma}_{z2} & \boldsymbol{\varepsilon}_3^0 & \boldsymbol{\kappa}_3 & \boldsymbol{\gamma}_{z3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\,. \tag{2.11}$$

Die 24×9 Komponenten der Operatormatrix $\mathbf{B}_{\mathrm{S89}}$ ergeben sich aus den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_L^0$, $\boldsymbol{\kappa}_L$, $\boldsymbol{\gamma}_{zL}$ in (2.6), (2.8) und den Kontinuitätsbedingungen (2.2); sie sind in Anhang A.2 angegeben.

2.1.3 Materialgesetz

Das Materialverhalten von Faserverbund-Deckschichten und Kernstrukturen wird im Zusammenhang mit der Versagensanalyse in Kapitel 3 noch ausführlich behandelt. An dieser Stelle soll die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für lineare, anisotrope Elastizität formuliert werden, um das Gleichungssystem zur Berechnung des Verformungszustandes aufbauen zu können. Verwendet wird sowohl für die Deckschichten als auch für den Kern das verallgemeinerte HOOKEsche Gesetz, welches aufgrund der gewählten Kinematik des Elementes S89 auf ein zweidimensionales Materialgesetz reduziert wird. Für die Membranspannungen $\boldsymbol{\sigma}_L^{(k)}$ in einer Einzelschicht k der Schicht L gilt somit

$$\boldsymbol{\sigma}_L^{(k)}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xxL}^{(k)} \\ \sigma_{yyL}^{(k)} \\ \tau_{xyL}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_L^{(k)} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_L^0 + z_L\boldsymbol{\kappa}_L \right)\,, \tag{2.12}$$

wobei $\mathbf{Q}_L^{(k)}$ die reduzierten Materialsteifigkeiten der k-ten Einzelschicht sind; für weitere Ausführungen sei auf ALTENBACH et al. [63] oder REDDY [64] verwiesen. Die transversalen

Schubspannungen $\boldsymbol{\tau}_{zL}^{(k)}$ könnten mit den transversalen Materialschubsteifigkeiten $\mathbf{G}_L^{(k)}$ analog durch $\boldsymbol{\tau}_{zL}^{(k)} = \mathbf{G}_L^{(k)}\boldsymbol{\gamma}_{zL}$ berechnet werden. Durch die schichtweise konstanten Schubverzerrungen (2.8) würden damit jedoch die transversalen Schubspannungen ebenfalls schichtweise konstant, wodurch das Gleichgewicht an den Schichtübergängen verletzt wäre. In einem solchen Fall würden außerdem die transversalen Schichtschubsteifigkeiten $\mathbf{H}_L$ überschätzt, wenn sie als $\mathbf{H}_L = \int \mathbf{G}_L^{(k)}\,\mathrm{d}z_L$ definiert sind. Um diesen Fehler zu vermeiden, werden die transversalen Schubsteifigkeiten und die transversalen Schubspannungen mit Hilfe eines Gleichgewichtsansatzes verbessert, siehe hierzu die Abschnitte 2.1.6 und 2.1.7.

Für die programmtechnische Umsetzung der FE-Berechnung ist es zweckmäßig, die Spannungen vorab über die Schichthöhen h_L zusammenzufassen. Folglich werden

- Membran-Schnittkräfte $\mathbf{N}_L = [N_{xxL}\ N_{yyL}\ N_{xyL}]^{\mathrm{T}} = \int\limits_{h_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{(k)}\,\mathrm{d}z_L$,
- Schnittmomente $\mathbf{M}_L = [M_{xxL}\ M_{yyL}\ M_{xyL}]^{\mathrm{T}} = \int\limits_{h_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{(k)} z_L\,\mathrm{d}z_L$,
- Schub-Schnittkräfte $\mathbf{R}_L = [R_{yzL}\ R_{zxL}]^{\mathrm{T}} = \int\limits_{h_L} \boldsymbol{\tau}_{zL}^{(k)}\,\mathrm{d}z_L$

eingeführt, vgl. Abb. 2.2, und durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{N}_3 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{11} & 0 & 0 & \mathbf{H}_{12} & 0 & 0 & \mathbf{H}_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{21} & 0 & 0 & \mathbf{H}_{22} & 0 & 0 & \mathbf{H}_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_3^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{H}_{31} & 0 & 0 & \mathbf{H}_{32} & 0 & 0 & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\gamma}_{z1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \\ \boldsymbol{\gamma}_{z2} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_3 \\ \boldsymbol{\gamma}_{z3} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

oder kurz

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) \tag{2.14}$$

in Abhängigkeit der Verzerrungen ausgedrückt, wobei für jede Schicht L die

- Membransteifigkeit $\mathbf{A}_L = \int\limits_{h_L} \mathbf{Q}_L^{(k)}\,\mathrm{d}z_L$,
- Kopplungssteifigkeit $\mathbf{B}_L = \int\limits_{h_L} \mathbf{Q}_L^{(k)} z_L\,\mathrm{d}z_L$,
- Biegesteifigkeit $\mathbf{D}_L = \int\limits_{h_L} \mathbf{Q}_L^{(k)} z_L^2\,\mathrm{d}z_L$
  (*Die Schichtsteifigkeiten beziehen sich auf die jeweiligen Schichtreferenzflächen $z_L = 0$, nicht auf die Schalenreferenzfläche $z = 0$.*)

und für das gesamte Sandwich die

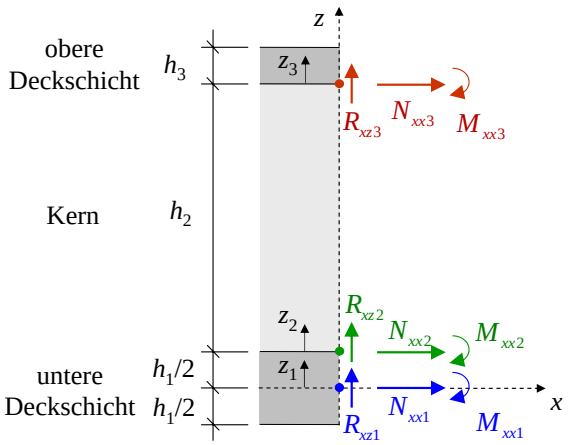


Abbildung 2.2: Auszug aus den Membrankräften, Momenten und Schubkräften im Element S89.

- transversale Schubsteifigkeit $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix}$

verwendet werden. Wie oben bereits angesprochen, wird die Schubsteifigkeitsmatrix $\mathbf{H}$ mit einem Verfahren verbessert, das sich eines Gleichgewichtsansatzes bedient und der eigentlichen FE-Rechnung vorgeschaltet ist. Dieses Preprocess-Verfahren wird in Abschnitt 2.1.6 beschrieben und liefert die Schubsteifigkeitsmatrix (2.30). Diese beinhaltet interessanterweise eine Kopplung zwischen oberer Deckschicht, Kern und unterer Deckschicht, was anhand der Schubkraft-Schubverzerrungs-Beziehung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{z1} \\ \gamma_{z2} \\ \gamma_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{z1} \\ \gamma_{z2} \\ \gamma_{z3} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

deutlich wird. Der Übersichtlichkeit halber sind die Komponenten in der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{E}$ in (2.13) analog zum Verzerrungsvektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ in (2.11) angeordnet. Für eine geringere Bandbreite der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{E}$ wäre eine Zusammenführung der Schubkomponenten geeigneter.

Aus der Schnittkraft-Verzerrungs-Beziehung (2.14) und der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung (2.10) folgt die Schnittkraft-Verschiebungs-Beziehung

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_{\mathrm{S89}} \cdot \mathbf{u}(x, y)\,. \tag{2.16}$$

2.1.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen und Steifigkeitsmatrix

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta W_{\mathrm{i}} + \delta W_{\mathrm{a}} = 0 \tag{2.17}$$

verlangt, dass die virtuellen inneren und die virtuellen äußeren Arbeiten im Gleichgewicht stehen. Im Allgemeinen liefert (2.17) eine nichtlineare Funktion. Bei Element S89 werden jedoch geometrische und materielle Linearität angenommen, so dass sowohl die Verzerrungen

als auch die Spannungen linear vom Verschiebungszustand abhängen und sich das Kräftegleichgewicht damit deutlich vereinfacht. Die allgemeine Formulierung des Kräftegleichgewichts wird erst für Element S815 benötigt, da dort große Verschiebungen beschrieben werden müssen und nichtlineare Verzerrungen zum Einsatz kommen. Für die allgemeine Formulierung sei deshalb an dieser Stelle auf (2.62) in Abschnitt 2.2.4 verwiesen. Bei Element S89 ist keine Unterteilung in Last- und Iterationsschritte erforderlich, so dass die Verschiebungen $\mathbf{u}$ mit

$$\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}} \tag{2.18}$$

direkt berechnet werden können. Die tangentiale Steifigkeitsmatrix lautet

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{E}\,\mathbf{B}_{\mathrm{u}}\;\mathrm{d}A \tag{2.19}$$

und ist für jeden Verformungszustand konstant. Die äußeren Kräfte

$$\mathbf{F}_{\mathrm{a}} = \sum_{\mathrm{p}} \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{S89}_{L(\mathrm{p})}}\mathbf{f}_{\mathrm{ap}} + \sum_{\mathrm{o}} \int \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{S89}_{L(\mathrm{o})}}\mathbf{f}_{\mathrm{ao}}\;\mathrm{d}A + \int \sum_{L=1}^{3} \int_{h_L} \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{S89}_L}\,\mathbf{f}_{\mathrm{av}}\;\mathrm{d}z_L\;\mathrm{d}A\,, \tag{2.20}$$

können sowohl aus einzelnen Punktlasten $\mathbf{f}_{\mathrm{ap}}$ als auch aus Oberflächenkräften $\mathbf{f}_{\mathrm{ao}}$ und Volumenkräften $\mathbf{f}_{\mathrm{av}}$ bestehen. Durch die kinematischen Operatormatrizen $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}$ werden die Kräfte eines Punktes in der Schicht L in äußere Knotenkräfte umgewandelt, die zu den neun Freiheitsgraden (2.3) kinematisch äquivalent sind, vgl. (2.4). Auf die Trägheitskräfte und somit die dynamische Analyse der Struktur soll an dieser Stelle noch nicht eingegangen werden, dafür sei im Zusammenhang mit der transienten Impactanalyse auf Kapitel 4 verwiesen. Die hierfür benötigte Massenmatrix des Elements S89 wird in Abschnitt 2.1.8 hergeleitet.

2.1.5 Diskretisierung für eine Finite-Element-Formulierung

Das in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellte Schalenmodell soll nun in einer Finite-Element-Formulierung umgesetzt werden, um es einer allgemeinen Anwendbarkeit und dem FE-Tool CODAC zugänglich zu machen. Für die Diskretisierung der Schalenreferenzfläche wird das vierseitige, isoparametrische Sandwichelement S89 mit acht Knoten und je neun Freiheitsgraden pro Knoten, vgl. (2.3), eingeführt. Das Element S89 basiert auf einem reinen Verschiebungsansatz und muss daher nur geometrische Randbedingungen erfüllen. Für die Interpolation in der Schalenebene werden quadratische Formfunktionen $\mathbf{N}_{\mathrm{e}}$ der Serendipity-Familie verwendet, welche im Gegensatz zu Lagrange-Polynomen einen unvollständigen Ansatz verwenden und somit nur Randknoten benötigen, siehe z. B. [65]. Die Verschiebungen eines beliebigen Punktes im Element lassen sich durch

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{N}_{\mathrm{e}}(x, y)\,\mathbf{u}_{\mathrm{e}} \tag{2.21}$$

in Abhängigkeit der Elementknotenverschiebungen $\mathbf{u}_{\mathrm{e}}$ formulieren. Infolge dieses Approximierens der unbekannten Verschiebungsfunktionen durch bekannten Formfunktionen und unbekannte Elementknotenverschiebungen wird aus dem integralen Kräftegleichgewicht (2.18) das diskrete Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{K}_{\mathrm{e}}\,\mathbf{u}_{\mathrm{e}} = \mathbf{F}_{\mathrm{ae}} \tag{2.22}$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_\mathrm{e} = \int \mathbf{N}_\mathrm{e}^\mathrm{T}\, \mathbf{B}_{\mathrm{S89}}^\mathrm{T}\, \mathbf{E}\, \mathbf{B}_{\mathrm{S89}}\, \mathbf{N}_\mathrm{e}\, \mathrm{d}A_\mathrm{e}\,. \tag{2.23}$$

Für die äußeren Elementknotenkräfte $\mathbf{F}_\mathrm{ae}$ sind in (2.20) die transponierten kinematischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}^\mathrm{T}$ jeweils durch $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89e}_L}^\mathrm{T} = \mathbf{N}_\mathrm{e}^\mathrm{T}\, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}^\mathrm{T}$ zu ersetzen. Die Integration über die Elementfläche A_e erfolgt zur Vermeidung von Lockingeffekten als reduzierte Integration mit 2x2 Gauß-Punkten, siehe z. B. [66].

2.1.6 Pre-Processing: Ermittlung einer verbesserten Querschubsteifigkeit

Aus dem zweidimensionalen Verschiebungsansatz folgen bei Anwendung des Hookeschen Materialgesetzes schichtweise konstante Querschubspannungen, durch die das Gleichgewicht an den Schichtübergängen verletzt wird. Rolfes und Rohwer [18] haben mit der sogenannten Erweiterten 2D-Methode für monolithische Laminate ein Verfahren entwickelt, bei dem mit Hilfe eines lokalen Gleichgewichtsansatzes verbesserte Querspannungen berechnet werden. Dieses Verfahren wurde von Kärger et al. [61] für ein dreischichtiges Schalenmodell erweitert. Der lokale Gleichgewichtsansatz lässt sich außerdem dazu nutzen, die transversalen Schichtschubsteifigkeiten $\mathbf{H}_L$ zu verbessern, die andernfalls überschätzt werden, wenn sie einfach als Integral der Materialschubsteifigkeiten über die Schichtdicke definiert sind. Das Verfahren zur Verbesserung der Schubsteifigkeiten ist der eigentlichen FE-Rechnung vorgeschaltet und wird im Folgenden kurz vorgestellt. Die Verbesserung der transversalen Spannungen erfolgt dann im Anschluss an die FE-Rechnung, siehe Abschnitt 2.1.7.

Kräftegleichgewicht in Membranrichtung. Die Grundlage der Erweiterten 2D-Methode und des Verfahrens zur Bestimmung verbesserter Querschubsteifigkeiten ist das Kräftegleichgewicht in Membranrichtung, wodurch die transversalen Schubspannungen $\boldsymbol{\tau}_{zL}$ in der Schicht L in Abhängigkeit der Membranspannungsableitungen ausgedrückt werden können,

$$\boldsymbol{\tau}_{zL} = \begin{bmatrix} \tau_{yzL} \\ \tau_{zxL} \end{bmatrix} = -\int_{\zeta=-\frac{h_1}{2}}^{z} \begin{bmatrix} \sigma_{yy,y}^{(k)} + \tau_{xy,x}^{(k)} \\ \sigma_{xx,x}^{(k)} + \tau_{xy,y}^{(k)} \end{bmatrix} \mathrm{d}\zeta\,. \tag{2.24}$$

Es wird hierbei angenommen, dass an der Schalenoberfläche keine Schubspannungen angreifen.

Schubspannungen als Funktion der Schubkräfte. Im zweiten entscheidenden Schritt wird mit Hilfe zusätzlicher Annahmen ein Zusammenhang zwischen den Membranspannungsableitungen und den transversalen Schubkräften $\mathbf{R}$ geschaffen, so dass sich die transversalen Schubspannungen in den Schichten $L = 1; 2; 3$ in der Form

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{z1} &= \mathbf{f}_1(z) \cdot \mathbf{R}(x,y)\,, \\ \boldsymbol{\tau}_{z2} &= \mathbf{f}_2(z) \cdot \mathbf{R}(x,y) + \tau_{z1}(z = \tfrac{h_1}{2})\,, \\ \boldsymbol{\tau}_{z3} &= \mathbf{f}_3(z) \cdot \mathbf{R}(x,y) + \tau_{z2}(z = \tfrac{h_1}{2} + h_2) \end{aligned} \tag{2.25}$$

in Abhängigkeit der transversalen Schubkräfte

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} R_{xz1} & R_{yz1} & R_{xz2} & R_{yz2} & R_{xz3} & R_{yz3} \end{bmatrix}^T, \tag{2.26}$$

vgl. Abb. 2.2, ausdrücken lassen. Die recht aufwendige Prozedur zur Ermittlung der Operatormatrizen

$$\mathbf{f}_L = \begin{bmatrix} f_{11L} & f_{12L} & f_{13L} & f_{14L} & f_{15L} & f_{16L} \\ f_{21L} & f_{22L} & f_{23L} & f_{24L} & f_{25L} & f_{26L} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

bringt den entscheidenden Vorteil mit sich, dass zur Berechnung von $\boldsymbol{\tau}_{zL}$ mit $\mathbf{R}(x, y)$ anstatt $\boldsymbol{\sigma}_{,\alpha}$ nur noch erste Ableitungen der Verschiebungen in Membranrichtung benötigt werden. Damit ergeben sich bei quadratischen Formfunktionen innerhalb eines Elementes keine konstanten, sondern linear veränderliche Schubspannungen, die die Berechnung verbesserter transversaler Normalspannungen ermöglichen. Zudem ermöglicht die Formulierung (2.25) die Berechnung einer verbesserten transversalen Schubsteifigkeitsmatrix $\mathbf{H}$. Die Herleitung der Operatormatrizen $\mathbf{f}_L$ wurde von KÄRGER et al. [61] ausführlich beschrieben. An dieser Stelle seien nur die maßgebenden Zwischenschritte aufgeführt:

1. Die Membranspannungsableitungen $\boldsymbol{\sigma}_{,\alpha}$ in (2.24) werden mit Hilfe des Materialgesetzes (2.12) durch die Membranverzerrungsableitungen $\boldsymbol{\varepsilon}^0_{L,\alpha}$, $\boldsymbol{\kappa}_{L,\alpha}$ ersetzt ($\alpha = x, y$).

2. Die Membranverzerrungsableitungen $\boldsymbol{\varepsilon}^0_{L,\alpha}$, $\boldsymbol{\kappa}_{L,\alpha}$ werden mit Hilfe des dickenintegrierten Materialgesetzes (2.13) durch die Momentenableitungen $\mathbf{M}_{L,\alpha}$ ersetzt, wobei die Normalkraftableitungen dadurch eliminiert werden können, dass für die Gesamtschalendicke eine in Schalenrichtung konstante Normalkraft angenommen wird:

   $$\mathbf{N}_{,\alpha} = \mathbf{N}_{1,\alpha} + \mathbf{N}_{2,\alpha} + \mathbf{N}_{3,\alpha} = \mathbf{0} \qquad (\alpha = x,\ y)\ . \tag{2.28}$$

   Anmerkung: Durch diese Annahme entsteht eine Kopplung zwischen den drei Schichten, die sich zunächst dadurch bemerkbar macht, dass die Schubspannungen $\boldsymbol{\tau}_{zL}$ in der Schicht L von den Momentenableitungen aller drei Schichten abhängen. Diese Kopplung zieht sich weiter durch die Herleitung der Operatormatrizen $\mathbf{f}_L$, so dass am Ende die Schubspannungen in der Schicht L von den Schubkräften $\mathbf{R}_L$ aller Schichten abhängen (deswegen wird $\mathbf{f}_L$ zur 2x6-Matrix), und dass die Schubsteifigkeitsmatrix $\mathbf{H}$ in (2.30) zur vollbesetzten 6x6-Matrix wird, siehe auch (2.15).

3. Die Momentenableitungen $\mathbf{M}_{L,\alpha}$ werden mit Hilfe von Momentengleichgewichten am infinitesimalen Schalenelement *dxdy* durch die Schubkräfte $\mathbf{R}_L$ ersetzt.
   Anmerkung: Die eindeutige Überführung aller Momentenanteile in die sechs Schubkraftanteile ist nicht vollständig möglich. Es müssen dafür die Richtungen x und y entkoppelt und gemischte Anteile $M_{\alpha\beta L}$, $N_{\alpha\beta L}$ vernachlässigt werden. Dies ist auch insofern sinnvoll, als dass die Schubkraftkomponenten $R_{zxL} = \int_{h_L} \tau_{zxL}\,\mathrm{d}z$ unabhängig von den Schubspannungskomponenten τ_{yzL} sein sollten, und umgekehrt R_{yzL} sollte unabhängig von τ_{zxL} sein. Durch die Entkopplung entsteht jedoch prinzipiell eine Abhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl des Koordinatensystens. Obwohl diese Abhängigkeit als sehr gering bewertet werden kann, wird in [61] der Vollständigkeit halber ein lokales Koordinatensystem (ξ, η, z) für die Bildung des reduzierten Momentengleichgewichts vorgeschlagen. Dieses lokale Koordinatensystem wird anhand des Strukturaufbaus (Steifigkeiten, Grad der Anisotropie und Faserwinkel der einzelnen Schichten) bestimmt und garantiert somit eine Lösung, die von der Wahl des globalen Koordinatensystem (x, y, z) unabhängig ist.

Anhand dieser Zwischenschritte können die Komponenten der Operatormatrizen $\mathbf{f}_L$ berechnet werden. Für eine Zusammenstellung aller erforderlichen Gleichungen sei auf [61] verwiesen.

Verbesserte Schubsteifigkeitsmatrix. Der dritte wesentliche Baustein zur Berechnung der verbesserten Schubsteifigkeitsmatrix ist das Gleichsetzen zweier Formulierungen für die komplementäre transversale Schubenergie

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}+h_2+h_3} \boldsymbol{\tau}_z^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{G}_L^{(k)}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau}_z \, dz = \frac{1}{2}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{R}\,, \tag{2.29}$$

wodurch die verbesserte transversale Schubsteifigkeitsmatrix $\mathbf{H}$ berechnet werden kann. Die 2x2-Matrizen $\mathbf{G}_L^{(k)}$ enthalten jeweils die transversalen Schubmoduli der entsprechenden Einzelschichten k in der Sandwich-Schicht L. Bei Einführung der transversalen Schubspannungen (2.25) in die Energieformulierung (2.29) erhält man die verbesserte transversale Schubsteifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} \;=\; & \left[\int\limits_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \mathbf{f}_1^{\mathrm{T}}(z) \cdot \left(\mathbf{G}_1^{(k)}\right)^{-1} \cdot \mathbf{f}_1(z)\, dz + \right. \\
& + \int\limits_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}+h_2} \left(\mathbf{f}_1(\tfrac{h_1}{2}) + \mathbf{f}_2(z)\right)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{G}_2^{(k)}\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{f}_1(\tfrac{h_1}{2}) + \mathbf{f}_2(z)\right) dz \; + \\
& + \int\limits_{\frac{h_1}{2}+h_2}^{\frac{h_1}{2}+h_2+h_3} \left(\mathbf{f}_1(\tfrac{h_1}{2}) + \mathbf{f}_2(\tfrac{h_1}{2}+h_2) + \mathbf{f}_3(z)\right)^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{G}_3^{(k)}\right)^{-1} \cdot \\
& \left. \left(\mathbf{f}_1(\tfrac{h_1}{2}) + \mathbf{f}_2(\tfrac{h_1}{2}+h_2) + \mathbf{f}_3(z)\right) dz \right]^{-1},
\end{aligned} \tag{2.30}$$

die aus den o. a. Gründen eine vollständig gefüllte 6x6-Matrix darstellt und somit die Schubsteifigkeiten der drei Schichten miteinander koppelt.

2.1.7 Post-Processing: Spannungsberechnung

Aufgrund des reinen Verschiebungsansatz beim Element S89 liefert die FE-Analyse einer Sandwichstruktur als Ergebnis zunächst den Verschiebungszustand. Spannungen müssen in einer Nachlaufrechnung ermittelt werden.

Membranspannungen. Zur Berechnung der Membranspannungen $\sigma_{xxL}^{(k)}$, $\sigma_{yyL}^{(k)}$, $\tau_{xyL}^{(k)}$ in den Einzelschichten k der Schicht L wird das reduzierte Materialgesetz (2.12) herangezogen, wobei die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_L^0$, $\boldsymbol{\kappa}_L$ über die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen (2.6) ermittelt werden. Wegen des quadratischen Ansatzes in Form der Serendipity-Formfunktionen für

Verdrehungs- und Verschiebungsfreiheitsgrade (vgl. Abschnitt 2.1.5) und wegen der erforderlichen ersten Ableitung der Formfunkionen liefert die Berechnung der Membranverzerrungen und Membranspannungen nur in den Gauß-Punkten korrekte Werte.

Transversale Schubspannungen. Zur Berechnung der transversalen Schubspannungen wird die Erweiterte 2D-Methode verwendet, deren wichtigste Schritte bereits in Abschnitt 2.1.6 vorgestellt wurden. Zunächst müssen hierfür mit

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}\boldsymbol{\gamma}_z \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{\gamma}_z = \begin{bmatrix} \gamma_{yz1} & \gamma_{zx1} & \gamma_{yz2} & \gamma_{zx2} & \gamma_{yz3} & \gamma_{zx3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} , \tag{2.31}$$

die transversalen Schubkräfte bestimmt werden, wobei die verbesserte Schubsteifigkeitsmatrix $\mathbf{H}$ in (2.30) gegeben ist und die Komponenten der Schubverzerrungen $\boldsymbol{\gamma}_z$ durch die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung (2.8) berechnet werden können. Die Schubspannungen $\boldsymbol{\tau}_{zL} = \begin{bmatrix} \tau_{yxL} & \tau_{zxL} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ werden schließlich mit Hilfe der Schubspannungs-Schubkraft-Beziehung (2.25) ermittelt. Wie bei den Membranspannungen werden für die Berechnung der transversalen Schubverzerrungen und -spannungen die ersten Ableitungen der quadratischen Serendipity-Formfunktionen benötigt. Dadurch ist auch hier die Spannungsberechnung nur in den Gauß-Punkten korrekt.

Transversale Normalspannung. Nach Rolfes et al. [67] kann das Kräftegleichgewicht in Dickenrichtung genutzt werden, um die transversale Normalspannung zu berechnen:

$$\sigma_{zzL} = - \int_{\zeta=-\frac{h_1}{2}}^{z} (\tau_{xz,x} + \tau_{yz,y}) \, \mathrm{d}\zeta - q_{z0} \tag{2.32}$$

mit Berücksichtigung der äußeren transversalen Normalbelastung q_{z0} an der Schalenlaibung $z = -h_1/2$. Bei Einführung der transversalen Schubspannungen (2.25) ergibt sich für die transversalen Normalspannungen in den Schichten $L = 1; 2; 3$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz1} &= - \int_{-\frac{h_1}{2}}^{z} \left[\mathbf{f}_{1y}(\zeta) \cdot \mathbf{R}_{,y} + \mathbf{f}_{1x}(\zeta) \cdot \mathbf{R}_{,x}\right] \mathrm{d}\zeta + q_{z0} \\
\sigma_{zz2} &= - \int_{\frac{h_1}{2}}^{z} \left[\left(\mathbf{f}_{1y}(\tfrac{h_1}{2}) + \mathbf{f}_{2y}(\zeta)\right) \cdot \mathbf{R}_{,y} + \left(\mathbf{f}_{1x}(\tfrac{h_1}{2}) + \mathbf{f}_{2x}(\zeta)\right) \cdot \mathbf{R}_{,x}\right] \mathrm{d}\zeta + \sigma_{zz1}(z = \tfrac{h_1}{2}) \\
\sigma_{zz3} &= - \int_{\frac{h_1}{2}+h_2}^{z} \left[\left(\mathbf{f}_{1y}(\tfrac{h_1}{2}) + \mathbf{f}_{2y}(\tfrac{h_1}{2} + h_2) + \mathbf{f}_{3y}(\zeta)\right) \cdot \mathbf{R}_{,y} + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\mathbf{f}_{1x}(\tfrac{h_1}{2}) + \mathbf{f}_{2x}(\tfrac{h_1}{2} + h_2) + \mathbf{f}_{3x}(\zeta)\right) \cdot \mathbf{R}_{,x}\right] \mathrm{d}\zeta + \sigma_{zz2}(z = \tfrac{h_1}{2} + h_2) \,,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

wobei $\mathbf{f}_{Ly}$ und $\mathbf{f}_{Lx}$ die obere bzw. die untere Zeile der Operatormatrix $\mathbf{f}_L$ in (2.27) sind. In (2.32) wird deutlich, dass eine weitere Verschiebungsableitung in Membranrichtung benötigt wird, um aus den transversalen Schubspannungen die transversalen Normalspannungen zu bestimmen. Folglich müssen die quadratischen Serendipity-Formfunktionen des Elementes S89 zweimal abgeleitet werden, was nur im Elementmittelpunkt zu einer korrekten Berechnung der Normalspannung führt.

2.1.8 Massenmatrix

In diesem Abschnitt soll die Massenmatrix des Elementes S89 hergeleitet werden, die später im Zusammenhang mit der Impactanalyse in Kapitel 4 für die Formulierung der Bewegungsgleichung benötigt wird. Da ein Impactvorgang ein dynamischer Prozess ist, entstehen Trägheitskräfte, die bei der Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen berücksichtigt werden müssen. Die virtuelle Arbeit δW_ρ der Trägheitskräfte $\mathbf{f}_\rho$ ist ein Teil der inneren virtuellen Arbeit δW_i in (2.17) und kann mit

$$\delta W_\rho = \int_V \delta \mathbf{u}_L^\mathrm{T}\, \mathbf{f}_\rho \, \mathrm{d}V = \int_A \int_{(h_1+h_2+h_3)} \delta \mathbf{u}_L^\mathrm{T}\, \rho\, \ddot{\mathbf{u}}_L \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}A \tag{2.34}$$

angegeben werden, wobei ρ die Materialdichte ist. Die Verschiebungen $\mathbf{u}_L$ und die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}_L$ eines Massepunktes in der Schicht L können entsprechend der Kinematik (2.4) durch den Vektor der Verschiebungsfreiheitsgrade $\mathbf{u}$ und die kinematischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}$ ausgedrückt werden. Damit wird (2.34) zu

$$\delta W_\rho = \int_A \delta \mathbf{u}^\mathrm{T} \left(\sum_{L=1}^{3} \int_{h_L} \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}^\mathrm{T}\, \rho\, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L} \, \mathrm{d}z \right) \ddot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}A = \int_A \delta \mathbf{u}^\mathrm{T}\, \mathbf{M}\, \ddot{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}A\,, \tag{2.35}$$

worin

$$\mathbf{M} = \sum_{L=1}^{3} \int_{h_L} \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}^\mathrm{T}\, \rho\, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L} \, \mathrm{d}z \tag{2.36}$$

die flächenbezogene Massenmatrix eines Schalenpunktes darstellt. Zur Bestimmung der Elementmassenmatrix $\mathbf{M}_\mathrm{e}$ muss zusätzlich eine Integration über die Elementfläche erfolgen, wofür die Verschiebungen $\mathbf{u}$ eines beliebigen Schalenpunktes mit Hilfe der Formfunktionen $\mathbf{N}_\mathrm{e}$ in Abhängigkeit der Elementknotenverschiebungen $\mathbf{u}_\mathrm{e}$ formuliert werden, vgl. (2.21). Für die virtuelle Arbeit eines Elementes der Fläche A_e ergibt sich somit

$$\delta W_\rho = \delta \mathbf{u}_\mathrm{e}^\mathrm{T} \int_{A_\mathrm{e}} \mathbf{N}_\mathrm{e}^\mathrm{T} \left(\sum_{L=1}^{3} \int_{h_L} \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}^\mathrm{T}\, \rho\, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L} \, \mathrm{d}z \right) \mathbf{N}_\mathrm{e} \, \mathrm{d}A_\mathrm{e}\, \ddot{\mathbf{u}}_\mathrm{e} = \delta \mathbf{u}_\mathrm{e}^\mathrm{T}\, \mathbf{M}_\mathrm{e}\, \ddot{\mathbf{u}}_\mathrm{e} \tag{2.37}$$

mit der Elementmassenmatrix

$$\mathbf{M}_\mathrm{e} = \int_{A_\mathrm{e}} \mathbf{N}_\mathrm{e}^\mathrm{T} \left(\sum_{L=1}^{3} \int_{h_L} \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}^\mathrm{T}\, \rho\, \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L} \, \mathrm{d}z \right) \mathbf{N}_\mathrm{e} \, \mathrm{d}A_\mathrm{e}\,. \tag{2.38}$$

2.2 Schalenelement S815 mit 3D-Verschiebungsansatz

Element S815 ist ein dreischichtiges **S**andwich-Schalenelement mit **8** Knoten und **15** Verschiebungsfreiheitsgraden pro Knoten. Im Gegensatz zu Element S89 enthält es auch für die transversalen Verschiebungen einen variablen Ansatz und ist somit transversal kompressibel. Durch die Erfassung des vollständigen 3D-Spannungszustandes ist eine Verbesserung der transversalen Steifigkeiten, so wie sie bei Element S89 mit Hilfe des Gleichgewichtsansatzes erfolgte, nicht erforderlich. Die transversalen Spannungen können jedoch noch verbessert werden, indem die von KÄRGER et al. [61] vorgestellte Erweiterte 2D-Methode für dreischichtige Schalentheorien auch hier Anwendung findet. Das Element S815 wurde von WETZEL et al. [62] erstmals vorgestellt und unter der Annahme geometrischer Linearität verifiziert. Zur Simulation von Impactvorgängen mit großen Durchbiegungen der impactbelasteten Deckschicht erwies es sich als notwendig, bei Element S815 eine nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung zu verwenden. Im Gegensatz zur Annahme großer Verformungen werden die Verzerrungen weiterhin als klein angenommen, und das Gleichgewicht wird entsprechend am unverformten System aufgestellt.

2.2.1 Kinematik

Bei sehr weichem Kern und steifer unterer Deckschicht, wird die impactbelastete, obere Deckschicht in den Kern hinein gedrückt, und das transversale Verformungsverhalten trägt entscheidend zum Gesamtverhalten der Sandwichstruktur bei, vgl. Abb. 2.3. Zur Berücksichtigung dieser Komprimierbarkeit wird für Element S815 der Ansatz des Elementes S89 mit je zwei transversalen Freiheitsgraden pro Schicht, ψ_{zL} und φ_{zL}, erweitert. Es ergibt sich daraus für jede Schicht L der Verschiebungsansatz

$$\mathbf{u}_L = \begin{bmatrix} u_L(x,y,z) \\ v_L(x,y,z) \\ w_L(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_L^0(x,y) \\ v_L^0(x,y) \\ w_L^0(x,y) \end{bmatrix} + z_L \begin{bmatrix} \psi_{xL}(x,y) \\ \psi_{yL}(x,y) \\ \psi_{zL}(x,y) \end{bmatrix} + (z_L)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{zL}(x,y) \end{bmatrix} . \quad (2.39)$$

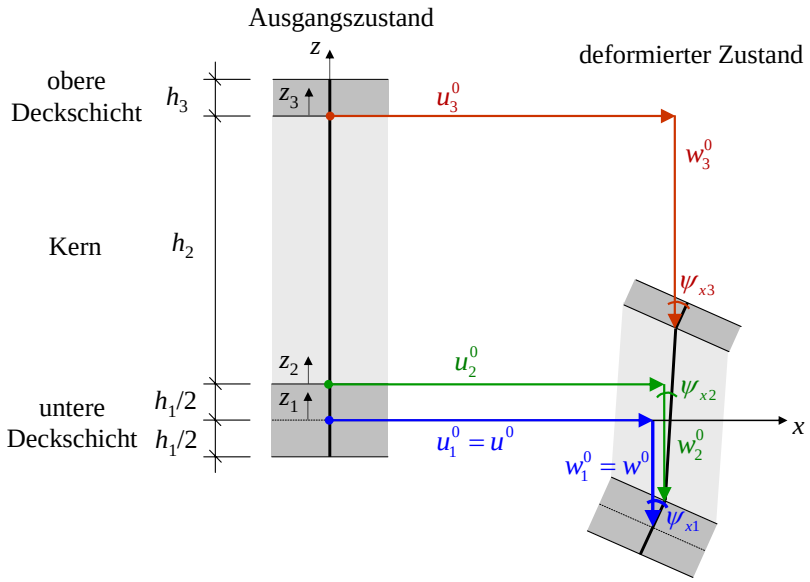


Abbildung 2.3: Kinematischer Ansatz des Elementes S815.

Der quadratische Ansatz für $w_L(z)$ wurde gewählt, um POISSON-Dickenlocking zu vermeiden, [68]. Außerdem ist im Kern die Veränderlichkeit der Verzerrung in Dickenrichtung ($d^2w/dz^2 \neq 0$) wichtig, um bei einer Eindellung das lokale Verformungsverhalten richtig zu beschreiben, denn eine verzerrungskonstante Winklerbettung würde den Kern zu steif modellieren. In den sehr schubsteifen Deckschichten wurde auf die linearen Ansätze für die Membranverschiebungen nicht verzichtet, um $C^{(0)}$-Stetigkeit zu bewahren. Von einem konstanten transversalen Ansatz in den Deckschichten wurde abgesehen, um die dann notwendige Kopplung zwischen 3D- und 2D-Spannungstheorie zu vermeiden.

Die Schalenreferenzfläche befindet sich aus den in Abschnitt 2.1.1 angegebenen Gründen in der Mitte der unteren Deckschicht. Die Verschiebungen u_L^0 und v_L^0 der Schichtreferenzflächen werden wie beim Element S89 mit Hilfe der Kontinuitätsbedingungen (2.2) an den Interfaces in Abhängigkeit der Verschiebungen u^0 und v^0 der Schalenreferenzfläche beschrieben. Für die transversalen Verschiebungen gilt

$$\begin{aligned} w_1^0 &= w^0\,, \\ w_2^0 &= w^0 + \tfrac{h_1}{2}\psi_{z1} + \left(\tfrac{h_1}{2}\right)^2 \varphi_{z1}\,, \\ w_3^0 &= w^0 + \tfrac{h_1}{2}\psi_{x1} + \left(\tfrac{h_1}{2}\right)^2 \varphi_{z1} + h_2\psi_{z2} + (h_2)^2\varphi_{z2}\,. \end{aligned} \tag{2.40}$$

In der Summe ergeben sich somit 15 Freiheitsgrade für einen Punkt in der Schalenreferenzfläche, die im Vektor

$$\mathbf{u} = \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} u^0 & v^0 & w^0 & \psi_{x1} & \psi_{y1} & \psi_{z1} & \varphi_{z1} & \psi_{x2} & \psi_{y2} & \psi_{z2} & \varphi_{z2} & \psi_{x3} & \psi_{y3} & \psi_{z3} & \varphi_{z3} \end{array}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2.41}$$

zusammengefasst werden. Analog zu Element S89 werden die Verschiebungen eines Punktes in der Schicht L in Abhängigkeit des Vektors der Verschiebungsfreiheitsgrade ausgedrückt, indem die kinematischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_L}$ eingeführt werden, so dass

$$\mathbf{u}_L(x, y, z) = \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_L}(z)\,\mathbf{u}(x, y) \tag{2.42}$$

gilt. Die jeweils 3×15 Komponenten der drei schichtspezifischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_L}$ sind durch (2.39)-(2.41) eindeutig bestimmt; sie sind in Anhang A.1 angegeben.

2.2.2 Nichtlineare Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

Aufgrund der Annahme kleiner Verzerrungen, werden wie bei Element S89 GREEN-LAGRANGEsche Verzerrungsmaße verwendet. Dabei erfassen die linearen Verzerrungsanteile

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^{\mathrm{lin}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xxL}^{\mathrm{lin}} \\ \varepsilon_{yyL}^{\mathrm{lin}} \\ \varepsilon_{zzL}^{\mathrm{lin}} \\ \gamma_{yzL}^{\mathrm{lin}} \\ \gamma_{zxL}^{\mathrm{lin}} \\ \gamma_{xyL}^{\mathrm{lin}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{L,x} \\ v_{L,y} \\ w_{L,z} \\ v_{L,z} + w_{L,y} \\ w_{L,x} + u_{L,z} \\ u_{L,y} + v_{L,x} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

den reinen Querschub-Biege-Zustand der Schichten L (zugunsten der Übersichtlichkeit wird auch hier auf die Formulierung von Krümmungsanteilen verzichtet). Mit dem Verschiebungsansatz (2.39) und mit Einführung der über z_L konstanten, linearen und quadratischen Ver-

zerrungsanteile

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^{0\,\mathrm{lin}} = \begin{bmatrix} u^0_{L,x} \\ v^0_{L,y} \\ \psi_{zL} \\ w^0_L, y + \psi_{yL} \\ w^0_L, x + \psi_{xL} \\ u^0_{L,y} + v^0_{L,x} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa}_L^{\mathrm{lin}} = \begin{bmatrix} \psi_{xL,x} \\ \psi_{yL,y} \\ 2\varphi_{zL} \\ \psi_{zL,y} \\ \psi_{zL,x} \\ \psi_{xL,y} + \psi_{yL,x} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega}_L^{\mathrm{lin}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{zL,y} \\ \varphi_{zL,x} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

wird aus (2.43)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^{\mathrm{lin}}(x,y,z) = \boldsymbol{\varepsilon}_L^{0\,\mathrm{lin}}(x,y) + z_L\,\boldsymbol{\kappa}_L^{\mathrm{lin}}(x,y) + z_L^2\,\boldsymbol{\omega}_L^{\mathrm{lin}}(x,y)\,. \tag{2.45}$$

Nichtlineare Verzerrungen in der oberen Deckschicht. Durch den höherwertigen Ansatz für die transversalen Verschiebungen soll Element S815 im Gegensatz zu Element S89 auch für die Analyse von Impactvorgänge mit großen Durchbiegungen der impactbelasteten Deckschicht einsetzbar sein. Um das Verhalten bei großen Verformungen richtig zu beschreiben, müssen die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen auch nichtlineare Anteile enthalten. Von Bedeutung sind hierbei die nichtlinearen Membranverzerrungen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{\mathrm{nl}}_{xx3} \\ \varepsilon^{\mathrm{nl}}_{yy3} \\ \gamma^{\mathrm{nl}}_{xy3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(w_{3,x})^2 \\ \frac{1}{2}(w_{3,y})^2 \\ w_{3,x}\,w_{3,y} \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

der impactbelasteten Deckschicht $L = 3$. Die nichtlinearen Anteile der Membranverschiebungen u_3 und v_3 werden dabei nicht berücksichtigt, weil ihre Ableitungen in Membranrichtung sehr klein sind. Mit dem Ansatz (2.39) für die transversalen Verschiebungen w_3 und den Kontinuitätsbedingungen (2.40) können die nichtlinearen Verzerrungen in Abhängigkeit der Freiheitsgrade (2.41) formuliert werden. Da der Kern im Vergleich zu den Deckschichten besonders weich ist, sind für die nichtlinearen Verzerrungsanteile nur die Verschiebungskomponenten der Kernschicht $L = 2$ von Relevanz, und es ergibt sich für die obere Deckschicht der über z konstante nichtlineare Verzerrungsvektor

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3^{\mathrm{nl}} = \boldsymbol{\varepsilon}_3^{0\mathrm{nl}} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{\mathrm{nl}}_{xx3} \\ \varepsilon^{\mathrm{nl}}_{yy3} \\ \varepsilon^{\mathrm{nl}}_{zz3} \\ \gamma^{\mathrm{nl}}_{yz3} \\ \gamma^{\mathrm{nl}}_{zx3} \\ \gamma^{\mathrm{nl}}_{xy3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(h_2)^2(\psi_{z2,x})^2 + (h_2)^3\psi_{z2,x}\varphi_{z2,x} + \frac{1}{2}(h_2)^4(\varphi_{z2,x})^2 \\ \frac{1}{2}(h_2)^2(\psi_{z2,y})^2 + (h_2)^3\psi_{z2,y}\varphi_{z2,y} + \frac{1}{2}(h_2)^4(\varphi_{z2,y})^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (h_2)^2\psi_{z2,x}\psi_{z2,y} + (h_2)^3(\psi_{z2,x}\varphi_{z2,y} + \psi_{z2,y}\varphi_{z2,x}) + \\ + (h_2)^4\varphi_{z2,x}\varphi_{z2,y} \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

Während durch lineare Verzerrungen reine Querschub-Biege-Zustände beschrieben werden, können nun durch die nichtlinearen Verzerrungen auch Membran-Zugspannungen erfasst werden, die während eines Impactvorganges für eine Versteifung in der oberen Deckschicht sorgen.

Nichtlineare Verzerrungen im Kern. Im Gegensatz zur Versteifung der impactbelasteten Deckschicht infolge der dort formulierten nichtlinearen Verzerrungen, können die nichtlinearen Anteile in der Kernschicht $L = 2$ für eine Verringerung der Kernsteifigkeit sorgen, wenn der Kern stark zusammengedrückt wird. Maßgebend sind hier die nichtlinearen transversalen Druck- und Schubverzerrungen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{\mathrm{nl}}_{zz2} \\ \gamma^{\mathrm{nl}}_{yz2} \\ \gamma^{\mathrm{nl}}_{zx2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(w_{2,z})^2 \\ w_{2,z}\, w_{2,x} \\ w_{2,z}\, w_{2,y} \end{bmatrix} . \tag{2.48}$$

Bei Formulierung dieser nichtlinearen Verzerrungen in Abhängigkeit der Freiheitsgrade (2.41) sind wiederum nur die transversalen Anteile der weichen Kernschicht relevant, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon^{\mathrm{nl}}_{zz2} \\ \gamma^{\mathrm{nl}}_{yz2} \\ \gamma^{\mathrm{nl}}_{zx2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\psi_{z2})^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z_L \begin{bmatrix} 2\psi_{z2}\varphi_{z2} \\ \psi_{z2}\psi_{z2,y} \\ \psi_{z2}\psi_{z2,x} \end{bmatrix} + \\ +(z_L)^2 \begin{bmatrix} 2(\varphi_{z2})^2 \\ \psi_{z2}\varphi_{z2,y} + 2\psi_{z2,y}\varphi_{z2} \\ \psi_{z2}\varphi_{z2,x} + 2\psi_{z2,x}\varphi_{z2} \end{bmatrix} + (z_L)^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 2\varphi_{z2}\varphi_{z2,y} \\ 2\varphi_{z2}\varphi_{z2,x} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{2.49}$$

Gl. (2.49) zeigt, dass zu den über z konstanten, linearen und quadratischen Anteilen, welche auch in den linearen Verzerrungen (2.45) enthalten sind, hier noch kubische Terme hinzukommen. Dies hat eine Vergrößerung der Operatormatrix $\mathbf{B}_{\mathrm{S815}}$ der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung zur Folge, erhöht somit den numerischen Aufwand und verlangsamt die Impactsimulation. Durch diese Tatsache animiert, wurde der Einfluss der nichtlinearen Verzerrungsanteile des Kerns untersucht, und es wurde aufgrund der folgenden Feststellungen

- Die Vergrößerung der Durchbiegung der oberen Deckschicht infolge der nichtlinearen Verzerrungsanteile des Kerns ist vernachlässigbar klein; insbesondere wenn man berücksichtigt, dass der Kern bei großen Verformungen bereits geschädigt ist (siehe hierzu das Beispiel in Kapitel 2.3.3).
- Geschädigte Kernbereiche verfügen über eine bleibende Stauchfestigkeit, die in der Knotenkraft-Knotenverschiebungs-Beziehung der FEM durch innere Kräfte Berücksichtigung findet (Abschnitt 3.2.2). Durch nichtlineare Verzerrungsanteile im Kern würde die Berechnung dieser inneren Kräfte deutlich aufwendiger und eine Impactsimulation somit verlangsamt.
- Die nichtlinearen Verzerrungsanteile des Kerns erhöhen den numerischen Aufwand bei der Aufstellung der Element-Steifigkeitsmatrix und verlangsamen somit die Simulation.

beschlossen, auf die Berücksichtigung der nichtlinearen Kern-Anteile zu verzichten.

Operatormatrix der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung. Analog zur Vorgehensweise bei Element S89 wird auch hier für eine geeignete matrizielle Formulierung der Verzerrungen die Operatormatrix $\mathbf{B}_{\mathrm{S815}}$ der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung durch

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{B}_{\mathrm{S815}} \cdot \mathbf{u}(x, y) \tag{2.50}$$

eingeführt, wobei der Vektor $\mathbf{u}$ der Verschiebungsfreiheitsgrade mit Gl. (2.41) gegeben ist und der Verzerrungsvektor sich wie folgt zusammensetzt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^0 & \boldsymbol{\kappa}_1 & \boldsymbol{\omega}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2^0 & \boldsymbol{\kappa}_2 & \boldsymbol{\omega}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3^0 & \boldsymbol{\kappa}_3 & \boldsymbol{\omega}_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} . \tag{2.51}$$

Für die über z konstanten Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_3^0$ der oberen Deckschicht gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_3^{0\,\mathrm{lin}} + \boldsymbol{\varepsilon}_3^{0\,\mathrm{nl}} , \tag{2.52}$$

für alle weiteren Verzerrungen gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L^0 = \boldsymbol{\varepsilon}_L^{0\,\mathrm{lin}} , \qquad \boldsymbol{\kappa}_L = \boldsymbol{\kappa}_L^{\mathrm{lin}} , \qquad \boldsymbol{\omega}_L = \boldsymbol{\omega}_L^{\mathrm{lin}} . \tag{2.53}$$

Die 54×15 Komponenten der Operatormatrix $\mathbf{B}_{\mathrm{S815}}$ ergeben sich aus den Verzerrungen (2.44), (2.47) und den Kontinuitätsbedingungen (2.2), (2.40); sie sind in Anhang A.2 angegeben.

2.2.3 Materialgesetz

Während beim Element S89 infolge des ebenen Spannungszustandes ein reduziertes Materialgesetz verwendet wurde, vgl. Abschnitt 2.1.3, gilt beim Element S815 zur Beschreibung des linear-elastischen Verhaltens das vollständige dreidimensionale HOOKEsche Materialgesetz

$$\boldsymbol{\sigma}_L^{(k)}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xxL}^{(k)} \\ \sigma_{yyL}^{(k)} \\ \sigma_{zzL}^{(k)} \\ \tau_{yzL}^{(k)} \\ \tau_{zxL}^{(k)} \\ \tau_{xyL}^{(k)} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_L^{(k)} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_L^0 + z_L \boldsymbol{\kappa}_L + z_L^2 \boldsymbol{\omega}_L \right) \tag{2.54}$$

mit den Materialsteifigkeiten $\mathbf{C}_L^{(k)}$ der k-ten Einzelschicht in der Schicht L. Die Kernschicht $L = 2$ ist im allgemeinen orthotrop. Unidirektionale Einzelschichten in den Deckschichtlaminate $L = 1; 3$ sind im lokalen Koordinatensystem transversal isotrop. Einzelschichten aus Gewebe oder Multiaxialgeweben sind im Allgemeinen orthotrop. Das Materialverhalten im Laminatverbund entspricht durch variable Faserwinkel einer Monotropie, siehe hierzu auch ALTENBACH et al. [63] oder REDDY [64]. Für das Materialverhalten der geschädigten Struktur sei auf die Versagensanalyse in Kapitel 3 verwiesen.

Für eine geeignete programmtechnische Umsetzung des FE-Problems werden die Spannungen über die Schichthöhen h_L bereits vorab integriert, so dass sich

- Schnittkräfte $\mathbf{N}_L = [N_{xxL}\, N_{yyL}\, N_{zzL}\, N_{yzL}\, N_{zxL}\, N_{xyL}]^{\mathrm{T}} = \int\limits_{h_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{(k)} \, \mathrm{d}z_L$,
- Schnittmomente $\mathbf{M}_L = [M_{xxL}\, M_{yyL}\, M_{zzL}\, M_{yzL}\, M_{zxL}\, M_{xyL}]^{\mathrm{T}} = \int\limits_{h_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{(k)} z_L \, \mathrm{d}z_L$,
- Schnittgrößen $\mathbf{P}_L = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \;\; P_{yzL}\, P_{zxL} \;\; 0]^{\mathrm{T}} = \int\limits_{h_L} \boldsymbol{\sigma}_L^{(k)} z_L^2 \, \mathrm{d}z_L$

ergeben. Die Schnittgrößen $\mathbf{P}_L$ haben die Einheit $[Nm^2]$ und enthalten analog zur Größe $\boldsymbol{\omega}_L = \boldsymbol{\omega}_L^{\text{lin}}$ in (2.44) nur zwei Komponenten ungleich Null. Mit Einführung der schichtbezogenen Steifigkeiten

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_L &= \int_{h_L} \mathbf{C}_L^{(k)} \,\mathrm{d}z_L, \\
\mathbf{B}_L &= \int_{h_L} \mathbf{C}_L^{(k)} z_L \,\mathrm{d}z_L, \\
\mathbf{D}_L &= \int_{h_L} \mathbf{C}_L^{(k)} z_L^2 \,\mathrm{d}z_L, \\
\mathbf{I}_L &= \int_{h_L} \mathbf{C}_L^{(k)} z_L^3 \,\mathrm{d}z_L, \\
\mathbf{J}_L &= \int_{h_L} \mathbf{C}_L^{(k)} z_L^4 \,\mathrm{d}z_L
\end{aligned} \tag{2.55}$$

ergibt sich die Schnittkraft-Verzerrungs-Beziehung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{N}_3 \\ \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{D}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_1 & \mathbf{I}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{I}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{J}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{D}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_2 & \mathbf{I}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{I}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{J}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{D}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{B}_3^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_3 & \mathbf{I}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_3^{\mathrm{T}} & \mathbf{I}_3^{\mathrm{T}} & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \\ \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^0 \\ \boldsymbol{\kappa}_3 \\ \boldsymbol{\omega}_3 \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

oder kurz

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \,. \tag{2.57}$$

Die Anzahl der $6 \cdot 9 = 54$ Gleichungen im Gleichungssystem (2.56) kürzt sich umgehend auf $(6 \cdot 6 + 2 \cdot 3) = 42$, wenn die Gleichungen und Matrixspalten herausgestrichen werden, die zu den mit Null besetzten Komponenten von $\mathbf{P}_L$ bzw. $\boldsymbol{\omega}_L$ gehören.

Analog zu Element S89 folgt aus der Schnittkraft-Verzerrungs-Beziehung (2.57) und der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung (2.50) die Schnittkraft-Verschiebungs-Beziehung

$$\mathbf{N} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_{\text{S815}} \cdot \mathbf{u} \,. \tag{2.58}$$

2.2.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen, Linearisierung und tangentiale Steifigkeitsmatrix

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (2.17) verlangt, dass die Summe der virtuellen inneren und der virtuellen äußeren Arbeiten verschwindet. Da die virtuelle innere Arbeit δW_{i} infolge der geometrischen Nichtlinearität im Element S815 eine nichtlineare Funktion der Verschiebungen darstellt, ist für die Berechnung der Verformungen ein iteratives Lösungsverfahren erforderlich. Beim Newton-Raphson-Verfahren wird dafür eine nach dem ersten Glied abgebrochene Taylor-Reihenentwicklung verwendet, d. h. es erfolgt schrittweise eine

Linearisierung des nichtlinearen Problems. Bei Laststeuerung wird die äußere Last in Inkremente unterteilt, und für jedes Lastinkrement wird der neue Verformungszustand $\mathbf{u}^*$ iterativ berechnet, vgl. Abb. 2.4(a). In jedem Iterationsschritt (n) erfolgt die Berechnung des Verformungszuwachses $\Delta\mathbf{u}^{(n)}$ unter Kenntnis des Verformungszustandes $\mathbf{u}^{(n-1)}$ aus dem vorherigen Iterationsschritt. Aus der Linearisierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (2.17) entsteht folglich

$$\delta W_{\mathrm{i}}^{(n-1)} + \left[\frac{\partial(\delta W_{\mathrm{i}})}{\partial \mathbf{u}}\right]^{(n-1)} \Delta\mathbf{u}^{(n)} + \delta W_{\mathrm{a}} = 0, \tag{2.59}$$

wobei die sogenannte Gateaux- oder Richtungsableitung Anwendung findet, siehe z. B. [69] für eine ausführlichere Erläuterung. Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte wird mit Hilfe der Variation der potentiellen Verzerrungsenergie berechnet,

$$\delta W_{\mathrm{i}} = \int \boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{\varepsilon}\ \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{\sigma}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{u}}\delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}V\,. \tag{2.60}$$

Entsprechend den Formulierungen in den vorangegangenen Abschnitten bezeichnen $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor bzw. den Green-Lagrange-Verzerrungstensor und beziehen sich somit auf den unverformten Schalenkörper. Für die explizite Berücksichtigung der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte, d. h. für die dynamische Analyse der Struktur, sei im Zusammenhang mit der transienten Impactanalyse auf Kapitel 4 verwiesen. Die hierfür benötigte Massenmatrix des Elements S815 wird in Abschnitt 2.2.7 eingeführt. Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte sei mit

$$\delta W_{\mathrm{a}} = -\sum_{\mathrm{p}} \mathbf{f}_{\mathrm{ap}}\delta\mathbf{u} - \sum_{\mathrm{o}} \int \mathbf{f}_{\mathrm{ao}}\delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}A - \int \mathbf{f}_{\mathrm{av}}\delta\mathbf{u}\ \mathrm{d}V \tag{2.61}$$

angegeben; sie kann Anteile aus einzelnen Punktlasten $\mathbf{f}_{\mathrm{ap}}$, aus Oberflächenkräften $\mathbf{f}_{\mathrm{ao}}$ und Volumenkräften $\mathbf{f}_{\mathrm{av}}$ enthalten.

Mit (2.60) und (2.61) sowie Ausklammerung der virtuellen Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ aus allen Termen entsteht aus (2.59) das Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned}\int \left[\boldsymbol{\sigma}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{u}}\right]^{(n-1)} \mathrm{d}V + \int \left[\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\mathbf{u}}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma}\frac{\partial^2\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{u}\partial\mathbf{u}}\right]^{(n-1)} \mathrm{d}V\Delta\mathbf{u}^{(n)} + \\ - \sum_{\mathrm{p}} \mathbf{f}_{\mathrm{ap}} - \sum_{\mathrm{o}} \int \mathbf{f}_{\mathrm{ao}}\ \mathrm{d}A - \int \mathbf{f}_{\mathrm{av}}\ \mathrm{d}V = 0.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Mit Einführung

$$\text{der inneren Kräfte} \quad \mathbf{F}_{\mathrm{i}} = \int \left[\boldsymbol{\sigma}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{u}}\right] \mathrm{d}V\,, \tag{2.63}$$

$$\text{der tangentialen Steifigkeitsmatrix} \quad \mathbf{K} = \int \left[\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\mathbf{u}}\frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma}\frac{\partial^2\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{u}\partial\mathbf{u}}\right] \mathrm{d}V\,, \tag{2.64}$$

$$\text{der äußeren Kräfte} \quad \mathbf{F}_\mathrm{a} = \sum_\mathrm{p} \mathbf{f}_\mathrm{ap} + \sum_\mathrm{o} \int \mathbf{f}_\mathrm{ao}\, \mathrm{d}A + \int \mathbf{f}_\mathrm{av}\, \mathrm{d}V \tag{2.65}$$

kann das Kräftegleichgewicht (2.62) kurz durch

$$\mathbf{K}^{(n-1)}\, \Delta\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{F}_\mathrm{a} - \mathbf{F}_\mathrm{i}^{(n-1)} \tag{2.66}$$

angegeben werden. Geht man von der tensoriellen zur matriziellen Schreibweise über, führt die Integration über die Schalendicke aus (wie im vorangegangenen Abschnitt 2.2.3 bereits vorbereitet) und verwendet die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung (2.50) sowie die Schnittkraft-Verschiebungs-Beziehung (2.58), so ergibt sich für die inneren Kräfte

$$\mathbf{F}_\mathrm{i} = \int \left(\mathbf{B}_\mathrm{S815}^\mathrm{T} + \mathbf{u}^\mathrm{T} \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{S815}^\mathrm{T}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{E} \mathbf{B}_\mathrm{S815} \mathbf{u}\, \mathrm{d}A \tag{2.67}$$

und für die tangentiale Steifigkeitsmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \int \left(\mathbf{B}_\mathrm{S815}^\mathrm{T} + \mathbf{u}^\mathrm{T} \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{S815}^\mathrm{T}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{E} \left(\mathbf{B}_\mathrm{S815} + \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{S815}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \right) \mathrm{d}A + \\ + 2 \int \frac{\partial \mathbf{B}_\mathrm{S815}^\mathrm{T}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{E} \mathbf{B}_\mathrm{S815} \mathbf{u}\, \mathrm{d}A\,. \end{aligned} \tag{2.68}$$

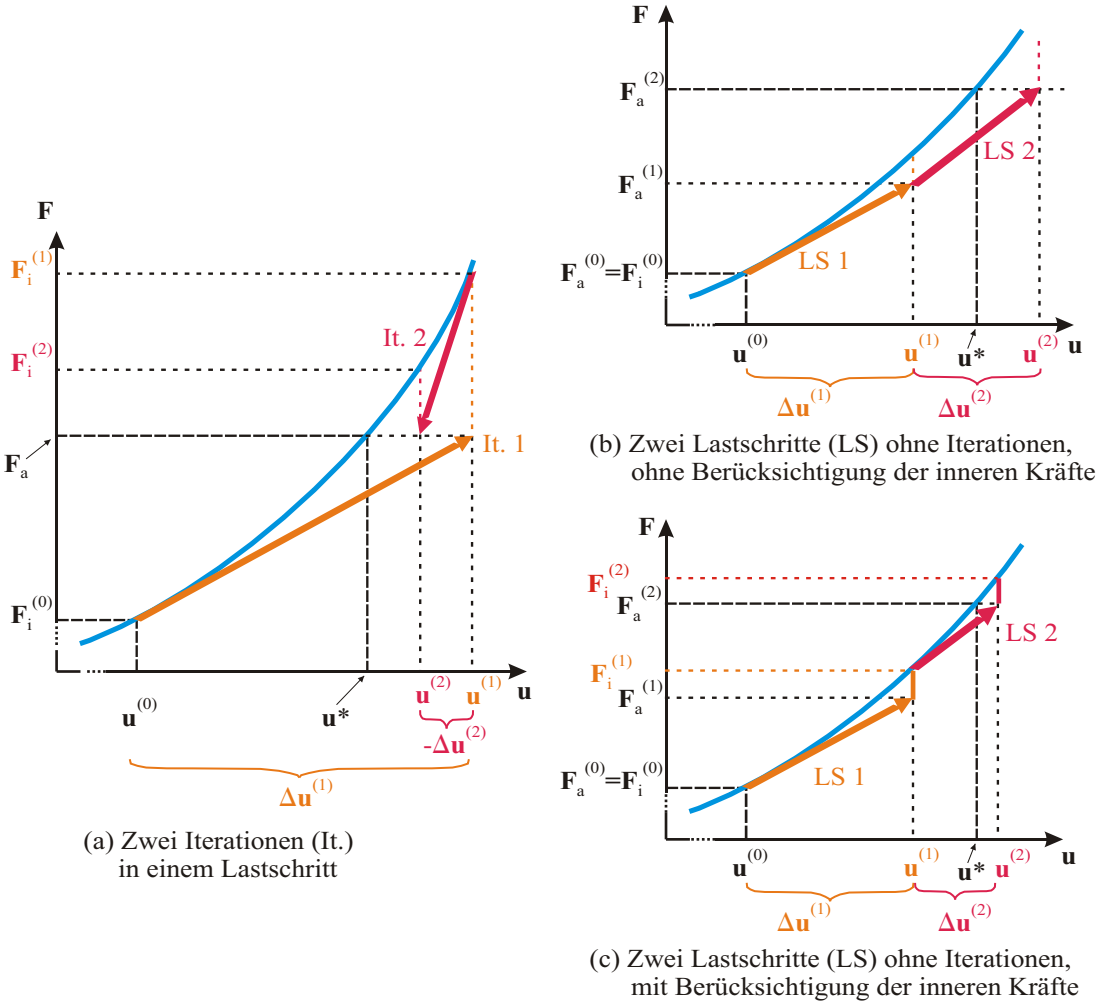
Bei den äußeren Kräften wird aus (2.65)

$$\mathbf{F}_\mathrm{a} = \sum_\mathrm{p} \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_{L(\mathrm{p})}}^\mathrm{T} \mathbf{f}_\mathrm{ap} + \sum_\mathrm{o} \int \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_{L(\mathrm{o})}}^\mathrm{T} \mathbf{f}_\mathrm{ao}\, \mathrm{d}A + \int \sum_{L=1}^{3} \int_{h_L} \mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_L}^\mathrm{T} \mathbf{f}_\mathrm{av}\, \mathrm{d}z_L\, \mathrm{d}A\,, \tag{2.69}$$

wobei die Kräfte eines Punktes in der Schicht L durch die kinematischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_L}$ in äußere Knotenkräfte umgewandelt werden, die zu den 15 Freiheitsgraden (2.41) kinematisch äquivalent sind, vgl. (2.42).

Im Allgemeinen wird das linearisierte Kräftegleichgewicht (2.66) beim Newton-Raphson-Verfahren in jedem Lastschritt wiederholt gelöst, bis der Fehler ein akzeptierbar kleines Maß unterschreitet, d. h. bis $\mathbf{F}_\mathrm{a} - \mathbf{F}_\mathrm{i} \approx 0$, vgl. Abb. 2.4(a). Für die Impactanalyse des Simulationstools CODAC würde ein solch doppelt-iterativer Prozess jedoch einen gewaltigen numerischen Aufwand bedeuten, den es unbedingt zu vermeiden gilt. Aus diesem Grund wird der Fehler, der innerhalb eines Zeitschritts auftritt, hingenommen, und die tangentiale Steifigkeitsmatrix wird erst im folgenden Zeitschritt korrigiert. (*Anmerkung: In der Impactanalyse entspricht ein Zeitschritt einem Lastschritt, da beim Zeitintegrationsverfahren der Verschiebungszustand im Zeitschritt $n+1$ jeweils in Abhängigkeit des Verschiebungszustands im Zeitschritt n ermittelt wird, was mit einer Änderung der äußeren Last, d. h. einem Lastinkrement einhergeht, vgl. Kapitel 4.*) Diese Vereinfachung wird aus den folgenden Gründen akzeptiert:

- Durch die kleinen Zeitschritte wird während einer Impactsimulation mit kleinen Lastschritten vorangeschritten, wodurch der Fehler gering gehalten wird (siehe hierzu das



(a) Zwei Iterationen (It.) in einem Lastschritt

(b) Zwei Lastschritte (LS) ohne Iterationen, ohne Berücksichtigung der inneren Kräfte

(c) Zwei Lastschritte (LS) ohne Iterationen, mit Berücksichtigung der inneren Kräfte

Abbildung 2.4: Newton-Raphson-Verfahren.

Beispiel in Abschnitt 2.3.3, speziell Abb. 2.13).

- Bei der Berechnung der Verschiebungen im Zeitschritt $n+1$ wird, wie in Abb. 2.4(c) dargestellt, der zum Verschiebungszustand im Zeitschritt n gehörende innere Spannungszustand durch Berücksichtigung der inneren Kräfte (2.67) korrigiert. Würde man zusätzlich zu den Iterationen innerhalb eines Lastschritts auch auf die Berechnung der inneren Kräfte $\mathbf{F}_\mathrm{i}$ verzichten, so wüchse der Fehler entsprechend Abb. 2.4(b) von Zeitschritt zu Zeitschritt.

2.2.5 Diskretisierung für eine Finite-Element-Formulierung

Analog zur Vorgehensweise bei Element S89 in Abschnitt 2.1.5 wird nun auch das Schalenmodell für Element S815 in einer Finite-Element-Formulierung umgesetzt. Die Diskretisierung der Schalenreferenzfläche erfolgt durch die vierseitigen, isoparametrischen Sandwichelemente S815 mit acht Knoten und je 15 Freiheitsgraden pro Knoten, vgl. (2.41). Wie Element S89 basiert auch Element S815 auf einem reinen Verschiebungsansatz und verwendet quadratische Formfunktionen $\mathbf{N}_\mathrm{e}$ der Serendipity-Familie für die Interpolation in der Schalenebene, siehe [65]. Für den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen $\mathbf{u}$ eines beliebigen Punktes

im Element und den Elementknotenverschiebungen $\mathbf{u}_\mathrm{e}$ gilt somit analog (2.21). Durch die Diskretisierung wird aus dem integralen Kräftegleichgewicht (2.66) beim Element S815 das diskrete Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{K}_\mathrm{e}^{(n-1)}\,\Delta\mathbf{u}_\mathrm{e}^{(n)} = \mathbf{F}_\mathrm{ae} - \mathbf{F}_\mathrm{ie}^{(n-1)}\,, \tag{2.70}$$

wobei für die tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_\mathrm{e}$ in (2.68) sowie für die inneren Elementknotenkräfte $\mathbf{F}_\mathrm{ie}$ in (2.67) jeweils $\mathbf{B}_\mathrm{S815}$ durch $\mathbf{B}_\mathrm{S815e} = \mathbf{B}_\mathrm{S815}\,\mathbf{N}_\mathrm{e}$ zu ersetzen ist. Für die äußeren Elementknotenkräfte $\mathbf{F}_\mathrm{ae}$ sind in (2.69) die transponierten kinematischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}^\mathrm{T}_{\mathrm{S815}_L}$ jeweils durch $\mathbf{\Omega}^\mathrm{T}_{\mathrm{S815e}_L} = \mathbf{N}_\mathrm{e}^\mathrm{T}\,\mathbf{\Omega}^\mathrm{T}_{\mathrm{S815}_L}$ zu ersetzen. Die Integration über die Elementfläche erfolgt zur Vermeidung von Lockingeffekten wieder als reduzierte Integration mit 2x2 Gauß-Punkten.

2.2.6 Post-Processing: Spannungsberechnung

Wie beim Element S89 werden auch beim Element S815 die Spannungen aufgrund des reinen Verschiebungsansatzes in einer Nachlaufrechnung ermittelt.

Membranspannungen. Zur Berechnung der Membranspannungen $\sigma_{xxL}^{(k)}$, $\sigma_{yyL}^{(k)}$, $\tau_{xyL}^{(k)}$ in den Einzelschichten k der Schicht L wird das vollständige 3D-Materialgesetz (2.54) herangezogen, wobei die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_L^0$, $\boldsymbol{\kappa}_L$, $\boldsymbol{\omega}_L$ über die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung (2.50) ermittelt werden. Aufgrund der quadratischen Formfunktionen für Verdrehungs- und Verschiebungsfreiheitsgrade, die einmal abgeleitet werden müssen, werden wie bei Element S89 die Membranverzerrungen und die Membranspannungen nur in den Gauß-Punkten korrekt berechnet.

Transversale Schubspannungen. Theoretisch bietet sich für die Berechnung der transversalen Schubspannungen τ_{yzL}, τ_{zxL} ebenfalls das vollständige 3D-Materialgesetz (2.54) an. Infolge des niedrigen Verschiebungsansatzes in Dickenrichtung kann jedoch die Forderung nach Gleichgewicht an den Schalenoberflächen und Interfaces noch immer nicht ausreichend erfüllt werden, so dass sich bei Testrechnungen unbefriedigende Ergebnisse ergaben. Für eine Verbesserung der transversalen Schubspannungen wird daher mit (2.25) die Erweiterte 2D-Methode verwendet, vgl. Abschnitt 2.1.6. Die hierfür benötigten transversalen Schubkräfte $\mathbf{R}$ werden über das Materialgesetz

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} N_{yzL} \\ N_{zxL} \end{bmatrix} = \int\limits_{h_L} \begin{bmatrix} G_{yzL}^{(k)} & 0 \\ 0 & G_{zxL}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yzL} \\ \gamma_{zxL} \end{bmatrix} \mathrm{d}z_L \tag{2.71}$$

(Ausschnitt aus (2.56)) berechnet. Auch hier erfolgt die Spannungsberechnung durch einmalige Ableitung der quadratischen Formfunktionen nur in den Gauß-Punkten korrekt.

Transversale Normalspannung. Zur Berechnung der transversalen Normalspannung σ_{zzL} lässt sich einerseits das Materialgesetzes (2.54) anwenden. Andererseits besteht auch hier die Möglichkeit, die transversale Normalspannung nach (2.33) über die Gleichgewichtsbedingungen der Erweiterten 2D-Methode zu berechnen, wobei sich die Schubkräfte $\mathbf{R}$ aus

dem Materialgesetz (2.71) ergeben. Während beim Materialgesetz die transversale Normalspannung nur an den Gauß-Punkten richtig berechnet wird (d. h. lineare Spannungsverteilung über das Element), erfolgt ihre Ermittlung bei der Erweiterten 2D-Methode nur im Elementmittelpunkt korrekt (d. h. konstante Spannung im Element). Bei konzentrierten Lasten wie Impacts neigen die transversalen Normalspannungen in der Nähe der Last zu starken Oszillationen. Um diesen Fehler zu minimieren und ein möglichst konservatives Ergebnis zu erzielen, werden bei der Impactanalyse die transversalen Normalspannungen immer mit beiden Methoden, Materialgesetz und Erweiterte 2D-Methode, berechnet, und für das Versagenskriterium wird jeweils der kritischere der beiden Spannungswerte verwendet.

2.2.7 Massenmatrix

Die Berechnung der Massenmatrix des Elementes S815 erfolgt ganz analog zur Vorgehensweise bei Element S89; deshalb sei an dieser Stelle auf Abschnitt 2.1.8 verwiesen. Die dort hergeleiteten Gleichungen (2.36) und (2.38) für die flächenbezogene Massenmatrix $\mathbf{M}$ eines Schalenpunktes bzw. für die Elementmassenmatrix $\mathbf{M}_{\mathrm{e}}$ gelten prinzipiell in gleicher Weise, es müssen jedoch entsprechend der Kinematik (2.42) andere kinematische Operatormatrizen ($\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_L}$) eingesetzt werden.

2.3 Beispiele zur Verifizierung der Elemente S89 und S815

In den folgenden Beispielen wird die Funktionsfähigkeit der Elemente S89 und S815 im Hinblick auf ihren Einsatz bei Impactsimulationen untersucht. Dafür werden zunächst statische Problemstellungen betrachtet, bei denen die Ergebnisse aus der Verformungs- und Spannungsanalyse mit analytischen Lösungen verglichen und diskutiert werden. Die Verifizierung erfolgt entsprechend der Größe der Verzerrungen mit geometrisch linearer Analyse (Abschnitt 2.3.1) und geometrisch nichtlinearer Analyse (Abschnitt 2.3.2). In Abschnitt 2.3.3 werden die Auswirkungen verschiedener nichtlinearer Verzerrungsanteile im Element S815 bewertet. Abschließend erfolgt in Abschnitt 2.3.4 eine Überprüfung der Massenmatrizen der Elemente S89 und S815, um für die dynamische Analyse eine korrekte Modellierung des Trägheitsverhaltens zu garantieren.

2.3.1 Eignung der Elemente für eine lineare Verformungs- und Spannungsanalyse bei konzentrierter Last

Um die prinzipielle Eignung und die Leistungsfähigkeit der Elemente S89 und S815 für eine Impactsimulation von Sandwichstrukturen aufzuzeigen, wird in diesem Beispiel die lineare Verformungs- und Spannungsanalyse bei konzentrierter Last evaluiert. Dafür wird ein beidseitig gelenkig gelagerter Plattenstreifen auf seiner Oberfläche mittig mit einer konzentrierten Sinuslast von $1.2kN$ pro m Plattenstreifenbreite belastet, siehe Abb. 2.5. Da die obere Deckschicht im Impactschadensfall als Impact-Detektor fungieren soll, trägt sie zum Lastabtrag einen geringeren Anteil bei und ist dünner als die impactabgewandte Haut. Die beiden Deckschichten bestehen aus HTA/6376C-Prepregmaterial mit den Aufbauten $[0/90]_s$ bzw. $[0/90_2/0_2/90]_s$. Der Kern ist ein NOMEX®-Honigwabenkern ähnlich dem Material HRH10-1/8-3.0. Die Materialkennwerte können Tabelle 2.1 entnommen werden.

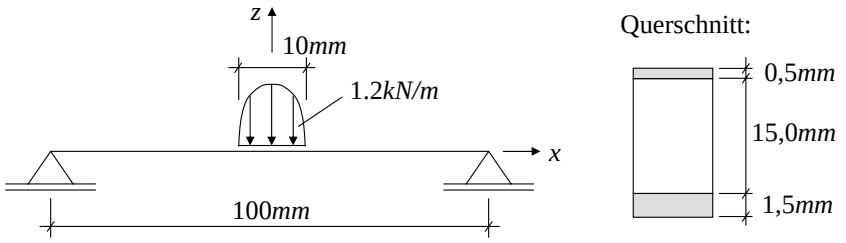


Abbildung 2.5: Gelenkig gelagerter Plattenstreifen mit konzentrierter Sinuslast.

Als analytische Vergleichslösung wird die 3D-Lösung nach Pagano [70] verwendet. Paganos Referenzlösung ist nur auf trigonometrische Lastfunktionen anwendbar, die über den gesamten Plattenstreifen verteilt sind. Für die analytische Lösung wird daher die konzentrierte Sinuslast als Fourierreihe mit 200 Termen entwickelt, was eine ausreichend genaue Annäherung darstellt. Die Randbedingungen werden bei den numerischen Rechnungen analog zu den Bedingungen gewählt, die Pagano in seiner analytischen Lösung vorgibt: ebener Verzerrungszustand in der x-z-Ebene, Symmetrie zur Plattenstreifenmitte, verschiebliche, gelenkige Lagerung und verhinderte transversale Kompression an den beiden Rändern sowie

	E_x/MPa	E_y/MPa	E_z/MPa	ν_{yz}	ν_{xz}	ν_{xy}
Deckschicht	140 000	9 500	9 500	0,638	0,270	0,270
Honigwabenkern	0,28	0,28	138	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	0,490

	G_{yz}/MPa	G_{xz}/MPa	G_{xy}/MPa
Deckschicht	2 900	5 800	5 800
Honigwabenkern	30	44	0,07

Tabelle 2.1: Materialkennwerte des Plattenstreifens.

Festhaltung der Längsverschiebung in der Mitte des Plattenstreifens. Für die nachfolgend vorgestellten numerischen Ergebnisse wurde eine sehr feine Vernetzung mit 100 Elementen in Längsrichtung gewählt. Testrechnungen haben jedoch gezeigt, dass bereits deutlich gröbere Netze ähnlich gute Ergebnisse erzielen und dass sich die Werte bei Netzverfeinerung schnell den im Folgenden vorgestellten Ergebnissen annähern.

Abb. 2.6 zeigt die transversalen Verschiebungen $w(x)$ an der oberen und an der unteren Sandwichoberfläche, verteilt über die halbe Länge des Plattenstreifens. Die Ergebnisse des Elementes S815 stimmen nahezu perfekt mit der analytischen Lösung überein. Bei Element S89 können des zweidimensionalen Ansatzes wegen nur die Verschiebungen der Referenzfläche berechnet werden, so dass keine Unterscheidung zwischen oberem und unterem Schalenrand möglich ist. Unmittelbar unter der konzentrierten Last, wo sich die obere Deckschicht deutlich stärker durchbiegt als die untere, stellen die mit Element S89 berechneten Ergebnisse jedoch immerhin gute Durchschnittswerte dar.

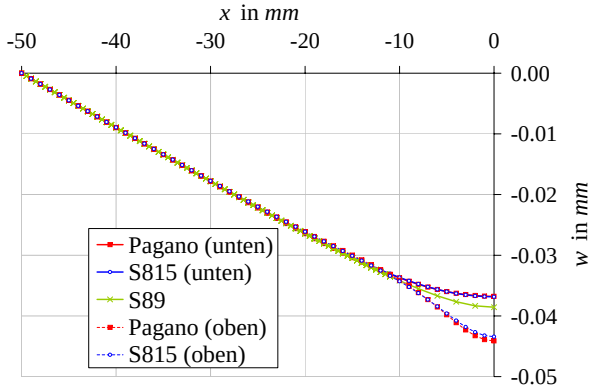


Abbildung 2.6: Transversale Verschiebungen über die Länge des Plattenstreifens.

Bei der Berechnung der Membrannormalspannungen σ_{xxL} liefert Element S815 für die Deckschichten ($L = 1; 3$) sehr gute Ergebnisse, vgl. Abb. 2.7. Element S89 berechnet für die Deckschichten brauchbare Membranspannungen; aufgrund der nicht beachteten Differenz der Durchbiegungen von oberer und unterer Deckschicht sind sie jedoch in der unteren Deckschicht etwas größer und in der oberen Deckschicht etwas kleiner als in der Realität. Im Kern sind die Membranspannungen σ_{xx2} um Größenordnungen kleiner als in den Deckschichten. Zusätzlich sind sie im Bereich der konzentrierten transversalen Last auch deutlich kleiner als die transversalen Spannungen σ_{zz2} im Kern, vgl. Abb. 2.8(b). Aufgrund dieses Relationsunterschieds und des linearen Ansatzes der Membranverschiebungen über die Schalendicke kommt es für σ_{xx2} bei beiden Elementen zu recht großen relativen Abweichungen gegenüber

der analytischen Lösung. Absolut betrachtet, hat dieser Fehler jedoch keine Auswirkungen auf die Vorhersage des Kernversagens.

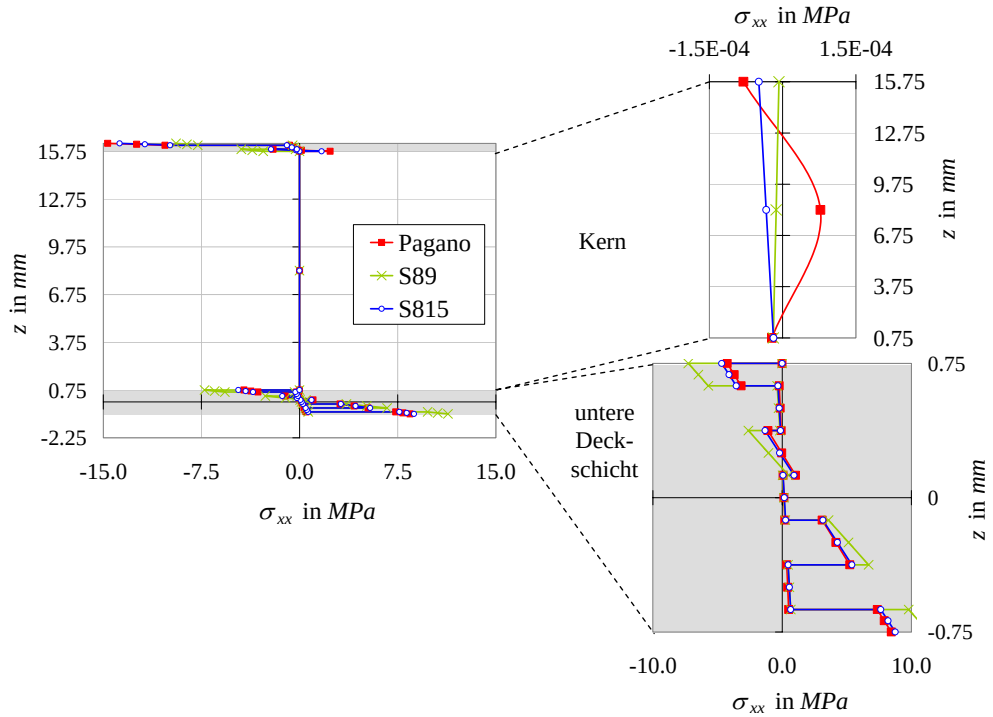
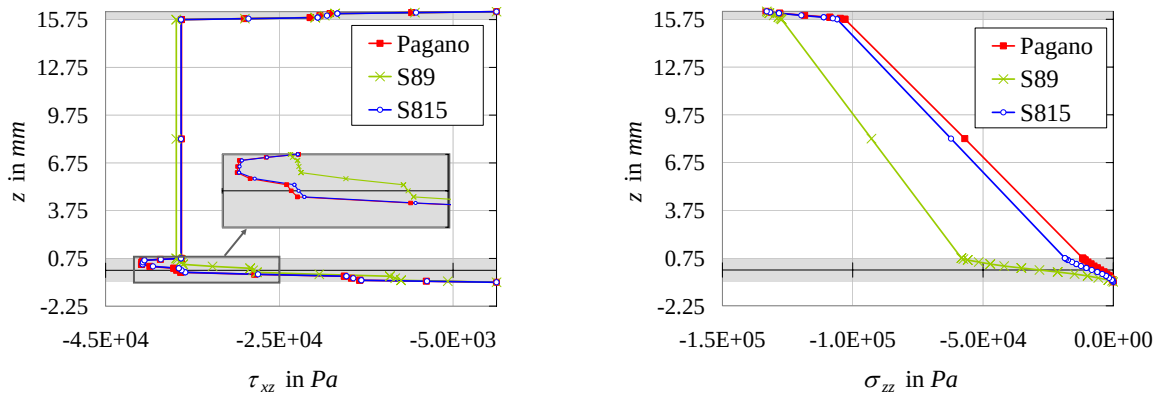


Abbildung 2.7: Membrannormalspannungen in der Mitte des Plattenstreifens.

Bei der Berechnung der transversalen Spannungen werden die Defizite des Elementes S89 gegenüber Element S815 noch etwas deutlicher. Abb. 2.8(a) zeigt die transversalen Schubspannungen τ_{xz} beispielhaft am Viertelspunkt des Plattenstreifens, wobei sich die Werte zum Auflager hin so gut wie nicht mehr ändern und somit ein Ausschnitt mit maximaler Schubbelastung des Kerns abgebildet ist. Die größten transversalen Normalspannungen σ_{zz} entstehen in der Mitte des Plattenstreifens und sind in Abb. 2.8(b) dargestellt. Während mit Element S815 für die transversalen Schub- und die transversalen Normalspannungen sehr gute Ergebnisse erzielt werden, vermag Element S89 den maximalen Schubspannungswert in der unteren Deckschicht nicht richtig zu ermitteln, da hier für eine Unterscheidung zwischen oberer und



(a) Transversale Schubspannung im Viertelspunkt. (b) Transversale Normalspannung in der Mitte.

Abbildung 2.8: Transversale Spannungen im Plattenstreifen.

unterer Deckschicht die Aussage über den transversalen Verformungszustand fehlt. Folglich kommt es beim Element S89 auch zu Fehlern in den transversalen Normalspannungen.

Fazit zur Eignung der Elemente S89 und S815

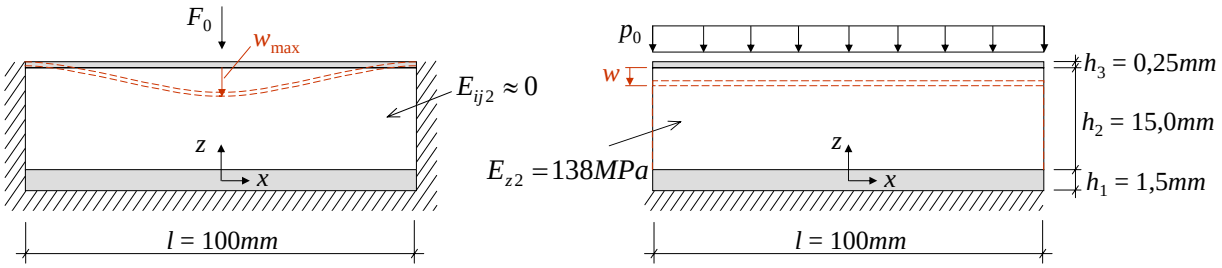
Das vorgestellte Beispiel demonstriert die Vorzüge des Elementes S815 gegenüber Element S89 bei der Analyse von Sandwichstrukturen mit konzentrierten Lasten wie Impacts. Element S89 gewinnt jedoch an Bedeutung, wenn Sandwichstrukturen mit gleichmäßig verteilten Lasten belastet werden: Bereits mit geringem numerischen Aufwand (nur neun Freiheitsgrade pro Knoten) werden sehr gute Verformungen und Spannungen berechnet und somit eine höhere Effizienz erzielt als bei Element S815 oder bei Elementen anderer Schalentheorien. Beispielrechnungen hierzu sowie Vergleiche mit mehrschichtigen Modellen aus der Literatur wurden von Kärger et al. [61] veröffentlicht. Element S89 ist auch für eine Impactanalyse von Sandwichstrukturen geeignet, wenn der Kern einigermaßen steif und die impactbelastete Deckschicht nicht zu dünn ist, d. h. wenn sich die doppelschalige Struktur insgesamt durchbiegt und beide Häute relativ gleichmäßig belastet sind. Dellt sich jedoch die obere Deckschicht deutlich ein und wird dadurch der Kern stark zusammengedrückt, so kann mit Element S89 im Gegensatz zu Element S815 keine ausreichende Genauigkeit erreicht werden. Für die Zwecke dieser Arbeit ist daher Element S815 besser geeignet und wird für die Impactanalyse weiter verfolgt.

2.3.2 Geometrisch nichtlineare Analyse des Elementes S815

Während im vorigen Beispiel relativ kleine Verschiebungen untersucht wurden und daher eine geometrisch lineare Analyse ausreichend genau war, soll in diesem Beispiel eine große Durchbiegung der impactbelasteten Deckschicht zugelassen werden. Eine solch große Verformung kann zum einen nur durch Element S815 beschrieben werden und erfordert zudem eine geometrisch nichtlineare Analyse. Für die Verifizierung der nichtlinearen Analyse des Elementes S815 werden im Folgenden CODAC-Ergebnisse mit Ergebnissen einer analytischen Lösung verglichen. Es sollen somit die nichtlinearen Verzerrungsanteile (2.47), (2.49) sowie die in Abschnitt 2.2.4 hergeleitete tangentiale Steifigkeitsmatrix (2.68) validiert werden.

Der Plattenstreifen aus dem vorigen Beispiel (Abb. 2.5, Tab. 2.1) wird weiterhin verwendet, jedoch für die hier verfolgten Zwecke leicht verändert: Für die Verifizierung der nichtlinearen Anteile der impactbelasteten Deckschicht wird der Plattenstreifen an den Auflagern eingespannt, die Steifigkeit des Kerns wird auf Null herabgesetzt und die Dicke der oberen Deckschicht wird auf zwei 0°-Lagen verringert, vgl. Abb. 2.9(a). Dadurch wird die Durchbiegung der oberen Deckschicht begünstigt, und außerdem lässt sich die analytische Vergleichslösung einfacher berechnen. Zur Verifizierung der nichtlinearen Anteile des Kerns erhält der Kern seine ursprüngliche Steifigkeit zurück, die seitliche Lagerung entfällt und der Kern wird durch eine Flächenlast gleichmäßig zusammengedrückt, vgl. Abb. 2.9(b).

Für die Ermittlung der analytischen Lösung des Biegebeispiels in Abb. 2.9(a) wird die obere Deckschicht näherungsweise als eingespannter Bernoulli-Balken betrachtet. Die transversalen Verschiebungen w können mit einem Potenzansatz 6. Grades und die Membranverschiebungen u mit einem Potenzansatz 3. Grades für den halben Plattenstreifen ausreichend genau approximiert werden. Aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen ergibt sich das



(a) Durchbiegung der oberen Deckschicht.

(b) Stauchung des Kerns.

Abbildung 2.9: Plattenstreifen zur Verifizierung der geometrisch nichtlinearen Analyse.

Differentialgleichungssystem

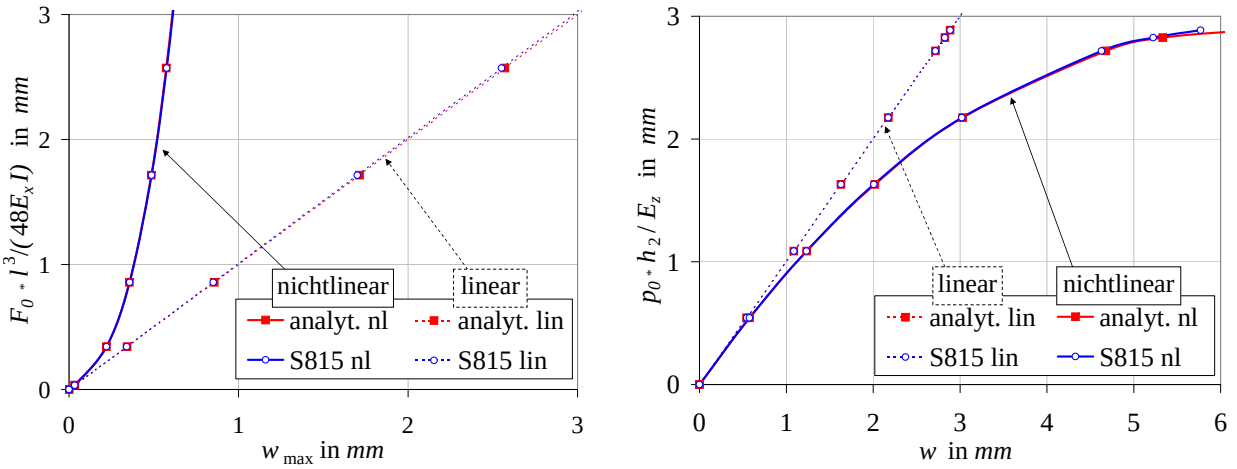
$$F_0 = 2\int_0^{h_3}\int_0^{\frac{l}{2}} \varepsilon_{xx}\, C_{xxxx}\, \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial w_{\max}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z\,; \quad 0 = \int_0^{h_3}\int_0^{\frac{l}{2}} \varepsilon_{xx}\, C_{xxxx}\, \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial a_i}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z\,, \tag{2.72}$$

wobei a_i die freien Parameter in den Polynomansätzen für w und u sind. Die Membranverzerrungen ε_{xx} können entweder mit (2.43) linear oder mit (2.43) und (2.46) nichtlinear in Abhängigkeit der Verschiebungen w und u ausgedrückt werden. Durch Lösen des Gleichungssystems (2.72) lässt sich die maximale Durchbiegung $w_{\max}$ der oberen Deckschicht berechnen. Die Ermittlung der analytischen Lösung zum Kernstauchungs-Beispiel in Abb. 2.9(b) erfolgt im Prinzip analog; sie vereinfacht sich aber dadurch erheblich, dass für die Verschiebungen keine Polynomansätze erforderlich sind. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen liefert somit die einfache Differentialgleichung

$$p_0 = h_2\, \varepsilon_{zz}\, C_{zzzz}\, \frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial w} \tag{2.73}$$

für die Berechnung der Deckschichtverschiebung w. Die linearen Anteile der transversalen Verzerrungen ε_{zz} sind in (2.43), die nichtlineare Verzerrungsanteile sind in (2.48) angegeben.

Um bei der nichtlinearen FE-Analyse den numerischen Aufwand in Grenzen zu halten, wird die Anzahl der Elemente in Längsrichtung gegenüber dem vorigen Beispiel auf 10 reduziert. Die durch die gröbere Diskretisierung hervorgerufene künstliche Versteifung der Platte ist auch bei 10 Elementen noch verschwindend gering, wie der minimale Unterschied zwischen linearer numerischer und linearer analytischer Lösung in Abb. 2.10(a) zeigt. Für die nichtlineare numerische Berechnung der Verschiebungen wird die Last jeweils in ausreichend kleine Lastschritte unterteilt, so dass sich Konvergenz einstellt. (*Anmerkung: In der statischen Analyse von CODAC ist bisher weder eine lastschrittinterne Iteration implementiert noch die Berechnung der aktuellen inneren Kraft, so dass sich entsprechend den Erläuterungen am Ende von Abschnitt 2.2.4 (Abb. 2.4(b)) der Fehler mit jedem Lastschritt summiert*). Nur wenn beim Kernstauchungs-Beispiel die Kraft der oberen Belastungsgrenze nahe kommt (rechter Rand in Diagramm 2.10(b)), lässt sich Konvergenz nicht so einfach erzielen. In diesen Fällen wurde die Inkrementverfeinerung bei 200 Lastschritten abgebrochen; die richtige Tendenz ist dennoch erkennbar. Die berechneten Verschiebungen sind in Abb. 2.10 in Abhängigkeit der Größe der Last dargestellt, wobei die Last jeweils durch die lineare Biegesteifigkeit der Deckschicht bzw. durch die lineare Drucksteifigkeit des Kerns normiert ist. Bei allen Ergebnissen kann eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der analytischen



(a) Durchbiegung der oberen Deckschicht.

(b) Stauchung des Kerns.

Abbildung 2.10: Verschiebungen in Abhängigkeit der Größe der Last bei geometrisch linearer und nichtlinearer Analyse.

Lösung und der mit Element S815 ermittelten numerischen Lösung festgestellt werden. Wie erwartet, bewirken die nichtlinearen Verzerrungsanteile in der Deckschicht eine Versteifung der Platte, während die nichtlinearen Anteile des Kerns das System weicher machen. Wie stark die Auswirkungen dieser beiden gegensätzlichen Effekte bei kombinierter Belastung sind, wird im nächsten Beispiel gezeigt.

2.3.3 Auswirkungen der nichtlinearen Verzerrungsanteile im Element S815

Anhand dieses Beispiels soll der Einfluss der nichtlinearen Verzerrungsanteile des Elements S815 auf den Verformungs- und Spannungszustand einer realen Sandwichschale verdeutlicht werden. Dafür wird eine Sandwichplatte verwendet, die im November 2003 am ILR Dresden auf Impact getestet wurde und die in Kapitel 5 zur Validierung der Impactsimulation dient. Für genaue Angaben zu den Materialeigenschaften der Sandwichplatte sei daher auf Abschnitt 5.1 verwiesen. Das mechanische System ist in Abb. 2.11 dargestellt: Die Platte wird

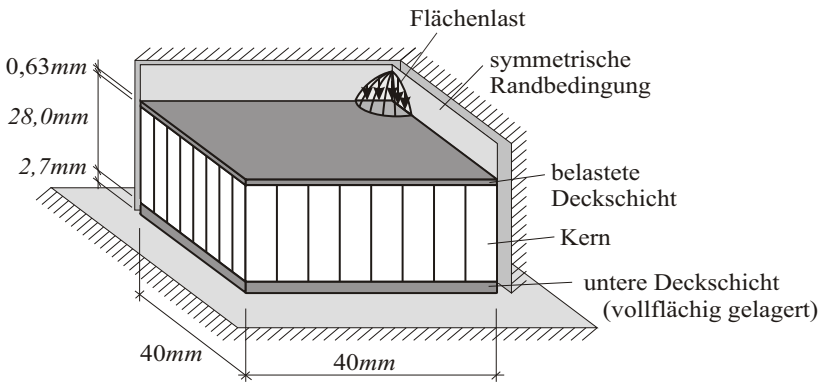


Abbildung 2.11: Mechanisches System der Viertel-Sandwichplatte.

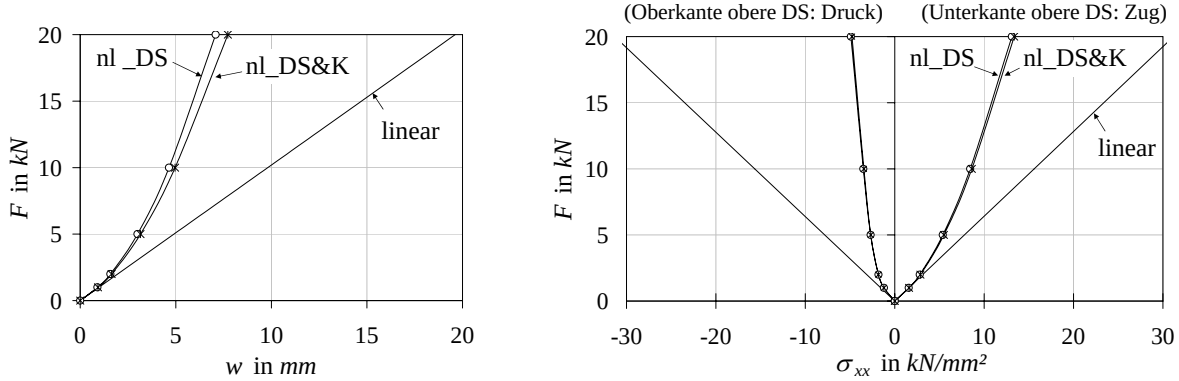
mittig mit einer statischen, parabolisch verteilten Flächenlast belastet und unter Ausnutzung der Symmetrie in CODAC modelliert.

Die Ermittlung der Verformungen und Spannungen erfolgt auf drei Wegen, die im Folgenden miteinander verglichen werden sollen:

- *linear*: geometrisch lineare Analyse mit den linearen Verzerrungsanteilen (2.43),
- *nl_DS*: geometrisch nichtlineare Analyse mit den nichtlinearen Verzerrungsanteilen der oberen Deckschicht (2.46) sowie den linearen Verzerrungen (2.43),
- *nl_DS&K*: geometrisch nichtlineare Analyse mit den nichtlinearen Verzerrungsanteilen der oberen Deckschicht (2.46) und des Kern (2.48) sowie den linearen Verzerrungen (2.43).

Im Kraft-Weg-Diagramm in Abb. 2.12(a) ist die Durchbiegung der oberen Deckschicht in der Plattenmitte in Abhängigkeit der Größe der transversalen Last dargestellt. Es zeigt sich, dass der Einfluss der nichtlinearen Verzerrungsanteile bereits beachtlich ist, wenn Durchbiegungen von weniger als $5mm$ erreicht werden (zum Vergleich: ein 4J-Impact verursachte eine maximale Durchbiegung von etwa $5mm$). An dieser Stelle wurde zwar noch nicht berücksichtigt, dass der Kern bei derartigen Verformungen bereits geschwächt ist, und dass damit im realen Fall die Kraft zum Erreichen einer solchen Durchbiegung deutlich geringer wäre (wie auch in den Abschnitten 5.2 bzw. 5.4 gezeigt). Der relative Unterschied zwischen den Kräften aus geometrisch linearer und nichtlinearer Analyse wird jedoch vom Verschiebungszustand der Deckschicht bestimmt und ist daher bei gleichen Verschiebungen auch mit degradiertem Kern ähnlich groß.

Vergleicht man andererseits die beiden nichtlinearen Rechnungen *nl_DS* und *nl_DS&K*, so fällt auf, dass diese sich auch bei großen Durchbiegungen nur wenig unterscheiden. Dies bedeutet, dass die Durchbiegung viel stärker vermindert wird durch die nichtlinearen Anteile der biegebelasteten Deckschicht, als dass sie verstärkt wird durch die nichtlinearen Anteile des druckbelasteten Kerns. Würde nun zusätzlich die Tatsache berücksichtigt, dass der Kern bei diesen Durchbiegungen bereits geschädigt ist, so verringerte sich der Unterschied zwischen beiden nichtlinearen Varianten noch deutlich. Aus diesem Grund wurde in Abschnitt



(a) Durchbiegung der oberen Deckschicht.

(b) Spannungen in der oberen Deckschicht.

Abbildung 2.12: Verformungen und Spannungen bei linearer und nichtlinearer Analyse.

2.2.2 beschlossen, die nichtlinearen Verzerrungsanteile des Kerns nicht in die Impactanalyse einzufügen und somit Rechenzeit zu sparen.

Die Membranspannungen spielen bei der Versagensanalyse der impactbelasteten Deckschicht die entscheidende Rolle (siehe Abschnitt 3.2.3). Abb. 2.12(b) zeigt die maximalen Spannungen in x-Richtung am oberen und am unteren Rand der verformten Deckschicht in Abhängigkeit der Größe der transversalen Last. Bei den nichtlinearen Rechnungen sind die Druckspannungen am oberen Rand betragsmäßig geringer als die Zugspannungen am unteren Rand. Diese Verschiebung in Richtung positive Spannung entsteht durch eine Membran-Zugspannung, die bei linearer Rechnung nicht berücksichtigt wird. Diese zusätzliche Zugspannung ist jedoch deutlich geringer als die Biege-Zugspannung, die bei nichtlinearer Rechnung infolge der kleineren Durchbiegung eingespart wird. Dadurch ergeben sich bei den nichtlinearen Rechnungen geringere maximale Spannungen, was wichtig ist, um Deckschichtschäden nicht zu zeitig vorherzusagen. Für die Unterscheidung der beiden nichtlinearen Rechnungen gelten bei den Spannungen die selben Feststellungen, die bereits oben bei den Verschiebungen besprochen wurden. Erwähnenswert ist noch, dass bei Hinzunahme der nichtlinearen Verzerrungsanteile des Kerns die Druckspannung am oberen Rand nahezu gleich bleibt und die Zugspannung am unteren Rand leicht zunimmt. Dies bedeutet, dass sowohl die Biegespannung als auch die Membran-Zugspannung nur leicht ansteigen. Dass die Zunahme der Biegespannung (d. h. der Krümmung in Plattenmitte) im Verhältnis zur Zunahme der Durchbiegung relativ klein ist, hängt mit einer größeren flächigen Ausdehnung des biegebeanspruchten Bereichs infolge der größeren Kern-Nachgiebigkeit zusammen.

Für die in diesem Abschnitt bisher vorgestellten Ergebnisse der nichtlinearen Rechnungen wurde die transversale Last jeweils in 10 Lastschritte unterteilt, und die Steifigkeitsmatrix wurde anhand des Verzerrungszustandes des jeweils vorangegangenen Lastschrittes ermittelt. Wie in Abschnitt 2.2.4 erläutert, kann eine solche Näherung nicht zum exakten Ergebnis führen. Für eine Bewertung der erzielten Genauigkeit ist in Abb. 2.13 dargestellt, wie die berechnete Durchbiegung konvergiert, wenn die Anzahl der Lastschritte zunimmt. Am Beispiel der Rechnung *nl_DS* und einer Last von $10kN$ wird gezeigen, dass die Durchbiegung bereits sehr genau ermittelt wird, wenn 10 Lastschritte verwendet werden.

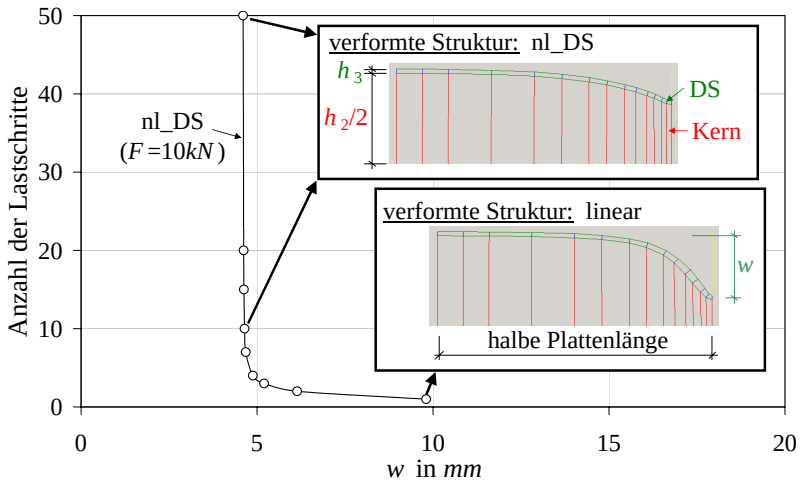


Abbildung 2.13: Durchbiegung der oberen Deckschicht bei nichtlinearer Analyse und variabler Lastschrittanzahl.

2.3.4 Verifizierung der Massenmatrizen

Für eine einfache Plausibilitätskontrolle der in den Abschnitten 2.1.8 und 2.2.7 hergeleiteten Massenmatrizen wird ein monolithischer, stählerner Kragträger zum Schwingen angeregt, siehe Abb. 2.14. Aus der sich anschließenden freien Schwingung kann die kleinste Eigenfrequenz des Systems abgelesen und mit einer analytischen Lösung verglichen werden.

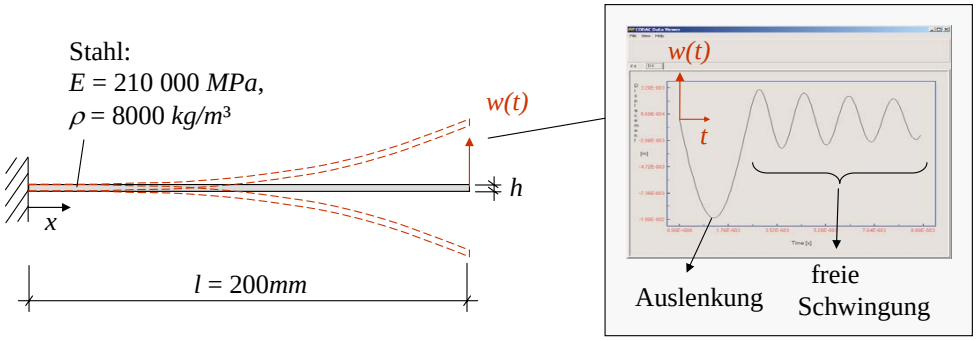


Abbildung 2.14: In Schwingung versetzter Kragträger mit Weg-Zeit-Verlauf $w(t)$.

Für die analytische Vergleichslösung wird die Differentialgleichung

$$EI\,\frac{d^4w(x,t)}{dx^4} + m\,\frac{d^2w(x,t)}{dt^2} = 0 \tag{2.74}$$

aufgestellt, die sich aus dem transversalen Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Trägerelement dx ergibt. Mit $m = \rho \cdot A$ ist die längenbezogene Masse des Balkens bezeichnet. Als Verschiebungsansatz wird die Funktion

$$w(x,t) = \sin(\omega t) \cdot (a_1 \sinh(\beta x) + a_2 \cosh(\beta x) + a_3 \sin(\beta x) + a_4 \cos(\beta x)) \tag{2.75}$$

verwendet, die mit β^4 ein über x konstantes Verhältnis zwischen d^4w/dx^4 und w liefert. Mit Hilfe der geometrischen und statischen Randbedingungen des Kragträgers kann β vorab bestimmt werden, und es ergibt sich aus (2.74) bzw.

$$(\beta^4 EI - \omega^2 m)\, w = 0 \tag{2.76}$$

die Eigenfrequenz

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{1,8751}{l}\right)^4 \frac{EI}{m}}\,. \tag{2.77}$$

Nun gilt diese analytische Lösung nur für eine über z konstante Querschnittsverdrehung, d. h. nur für homogene Querschnitte ohne weiche Kernschicht. Um hiermit dennoch bei der Modellierung durch die Sandwichelemente S89 und S815 die schichtbezogene Belegung der Massenmatrizen überprüfen zu können, wird der Trägerquerschnitt schichtweise verjüngt:

- $h = 30mm$:
  Alle drei Schichten bestehen aus je $10mm$ dickem Stahl.

- $h = 20mm$:
  Kern und obere Deckschicht bestehen aus je $10mm$ dickem Stahl. Die untere Deckschicht wird als Nullschicht definiert (Steifigkeit, Dicke und Masse sind nahe null).

- $h = 10mm$:
  Nur die obere Deckschicht besteht aus $10mm$ dickem Stahl. Kern und untere Deckschicht sind Nullschichten.

Das Weg-Zeit-Diagramm in Abb. 2.14 zeigt beispielhaft das Ergebnis einer CODAC-Rechnung, mit dem die jeweilige Eigenfrequenz ω bestimmt werden kann. Für die Zeitintegration wurde die NEWMARK-Methode verwendet, siehe hierzu Kapitel 4. Für die FE-Vernetzungen wurden in Längsrichtung je 10 Elemente verwendet, was hinsichtlich Netzfeinheit bereits gute Konvergenz liefert. In Abb. 2.15 sind die mit CODAC ermittelten Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Trägerdicke dargestellt und mit der analytischen Lösung (2.77) verglichen. Für beide Elemente S89 und S815 lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung feststellen. Mit größerer Trägerdicke ist bei den Ergebnissen der Elemente eine ganz leichte Tendenz zu geringeren Eigenfrequenzen zu erkennen, als es der lineare Verlauf der analytischen Lösung vorgibt. Dieses etwas weichere Verhalten resultiert daraus, dass sich dickere Querschnitte stärker schubverformen als dünne, was durch die Elemente S89 und S815 berücksichtigt wird, durch die Bernoulli-Annahmen der analytischen Lösung jedoch nicht.

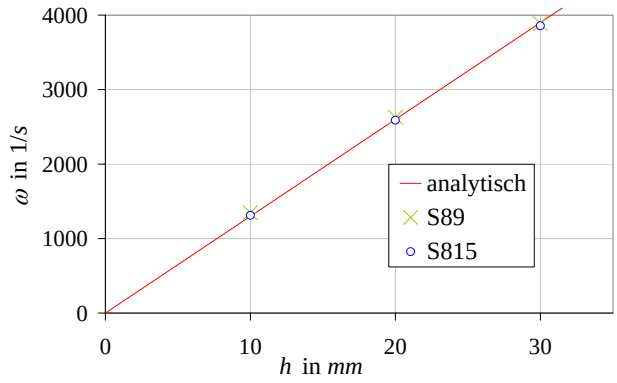


Abbildung 2.15: Eigenfrequenz des Kragträgers in Abhängigkeit der Trägerdicke.

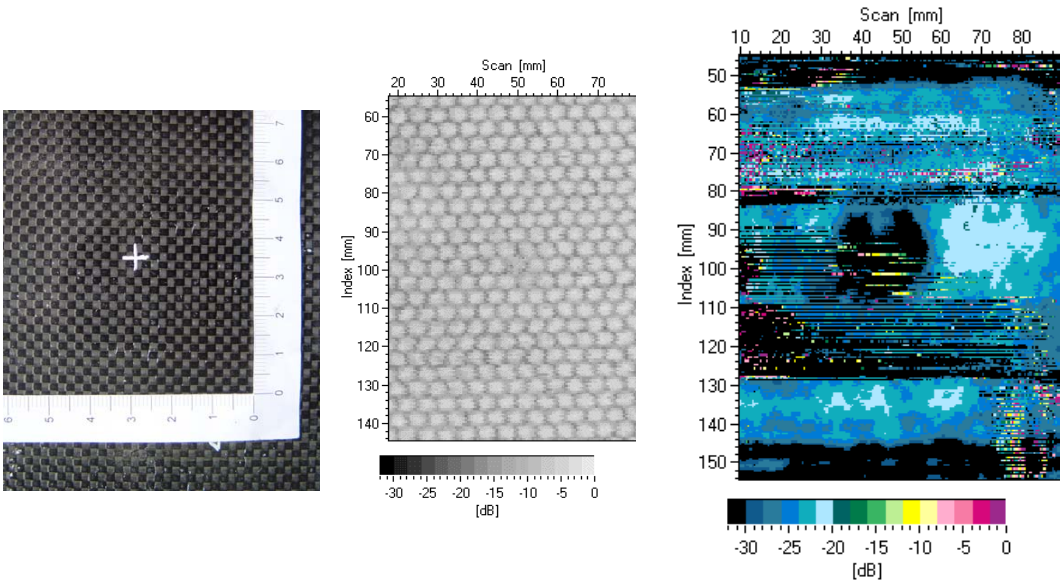
Kapitel 3

Versagensanalyse

3.1 Phänomenologie

3.1.1 Versagen des Sandwichverbundes

Bei den auftretenden Schadensformen wird zwischen nicht bis kaum sichtbaren Schäden und sichtbaren Schäden unterschieden. Während bei sichtbaren Schäden Deckschichtrisse oder Deckschichteindellungen deutlich zu erkennen sind, kann bei kaum sichtbaren Schäden nur mit Hilfe von kostspieligen Detektionsmethoden wie z. B. Ultraschall- oder Röntgenprüfungen Kenntnis vom Schädigungszustand gewonnen werden. In Abb. 3.1 ist eine impactgeschädigte Sandwichstruktur dargestellt, bei der die Deckschicht noch weitgehend unversehrt, der Kern jedoch großflächig zerstört ist. Die Schädigung des Kerns wurde hier mit Hilfe

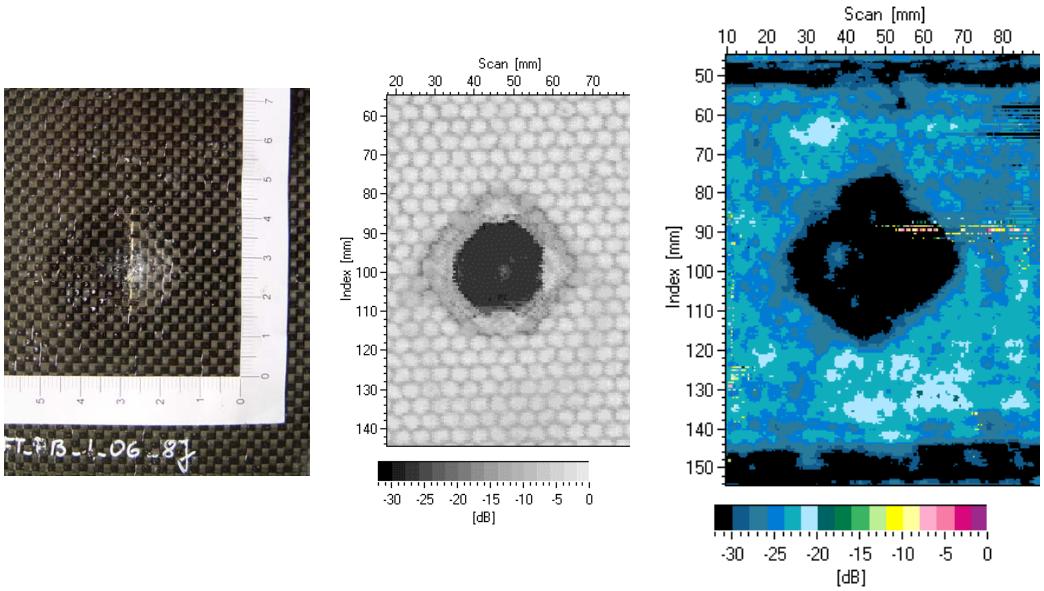


(a) Foto von der oberen Deckschicht.

(b) Ultraschall-Rückwandecho der oberen Deckschicht: Darstellung des Deckschichtschadens und der Anbindung an den Kern

(c) Ultraschall-Rückwandecho der unteren Deckschicht: Darstellung des Kernschadens

Abbildung 3.1: Schadensbilder mit kaum sichtbarem Impactschaden (Quelle: ILR Dresden [58]).



(a) Foto von der oberen Deckschicht.

(b) Ultraschall-Rückwandecho der oberen Deckschicht: Darstellung des Deckschichtschadens und der Anbindung an den Kern

(c) Ultraschall-Rückwandecho der unteren Deckschicht: Darstellung des Kernschadens

Abbildung 3.2: Schadensbilder mit sichtbarem Impactschaden (Quelle: ILR Dresden [58]).

von Ultraschall zerstörungsfrei detektiert. Im Vergleich zeigt Abb. 3.2 die sichtbare Schädigung eines Impacts höherer Energie, bei dem die Deckschicht gerissen und eine deutliche Eindellung entstanden ist. Das frühzeitige Auftreten eines Kernschadens bei niedrigen Energien, deutlich vor dem Beginn einer merklichen Deckschichtschädigung, wurde schon vielfach bei Impactversuchen beobachtet und in verschiedenen Arbeiten beschrieben, z. B. [33], [38], [41]. Zu Schäden in der impactabgewandten Deckschicht kommt es bei den hier untersuchten Impactenergien nicht, da die untere Haut sich deutlich weniger durchbiegt als die obere und da Komplettdurchschläge durch die obere Haut nur bei höheren Impactorgeschwindigkeiten auftreten.

3.1.2 Kernversagen

Kernschäden treten bereits bei sehr niedrigen Impactlasten auf und beeinflussen den Verlauf eines Impacts spürbar. Der Kern wird während des Impactvorgangs auf transversalen Druck und transversalen Schub belastet und versagt entsprechend bezüglich einer Kombination dieser beiden Komponenten, vgl. Abb. 3.3 sowie die Arbeit von Petras und Sutcliffe [45]. Je nach Art der Kernstruktur kann es dabei zu Sprödbrüchen, zum Beulen von Wabenwänden und in der Folge zu einem quasi-plastischen Verhalten kommen. Der Begriff Quasi-Plastizität bezieht sich auf das makroskopische Materialverhalten des geschädigten Kerns, das im Hinblick auf die postkritische Energieabsorption einer Plastizität ähnlich ist. Aufgrund der Sprödigkeit des Kernmaterials ist diese Quasi-Plastizität jedoch nicht mit dem plastischen Fließen von Metallen zu vergleichen.

Da bei low-velocity Impacts keine nennenswerten Dehnratenabhängigkeiten auftreten [3], können quasistatische Versuche zur phänomenologischen Untersuchung herangezogen wer-

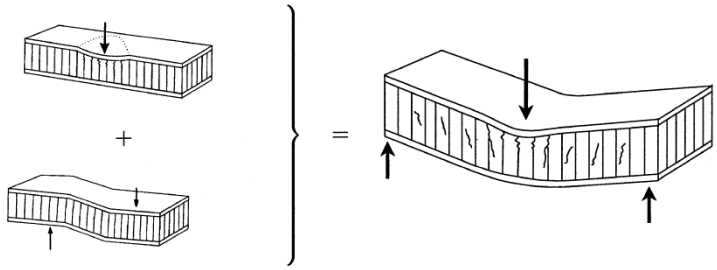


Abbildung 3.3: Transversales Druck-Schub-Versagen des Kerns nach Petras und Sutcliffe [45].

den. Für eine Studie des transversalen Versagensverhaltens typischer Sandwichkerne und zur Entwicklung geeigneter Versagensmodelle wurden kombinierte Druck-Schub-Versuche an Faltwaben- und Honigwabenkernen durchgeführt. Das prinzipielle Vorgehen sowie die wesentlichen Ergebnisse der Versuche werden im Folgenden kurz vorgestellt; für eine ausführliche Beschreibung sei auf die Studienarbeit von Kintscher [71] verwiesen. Wichtige Ergebnisse der Untersuchungen wurden auch in [72] veröffentlicht.

Versuchsaufbau und -durchführung

Zur Realisierung einer kombinierten Druck-Schub-Belastung wurde eine neue Vorrichtung konstruiert, die in Abb. 3.4 schematisch dargestellt ist. Für eine gleichmäßige Aufbringung der Schublast besteht der Prüfkörper aus zwei Kernen und drei Stahl-Deckschichten, über die die Schublast in die Kerne eingetragen wird. Eine Umlenkrolle sorgt dafür, dass beide Kerne gleichmäßig belastet werden. Weitere Maßnahmen zur Sicherung der Funktionsfähigkeit der Konstruktion sowie Ergebnisse entsprechender Vorversuche sind in [71] beschrieben.

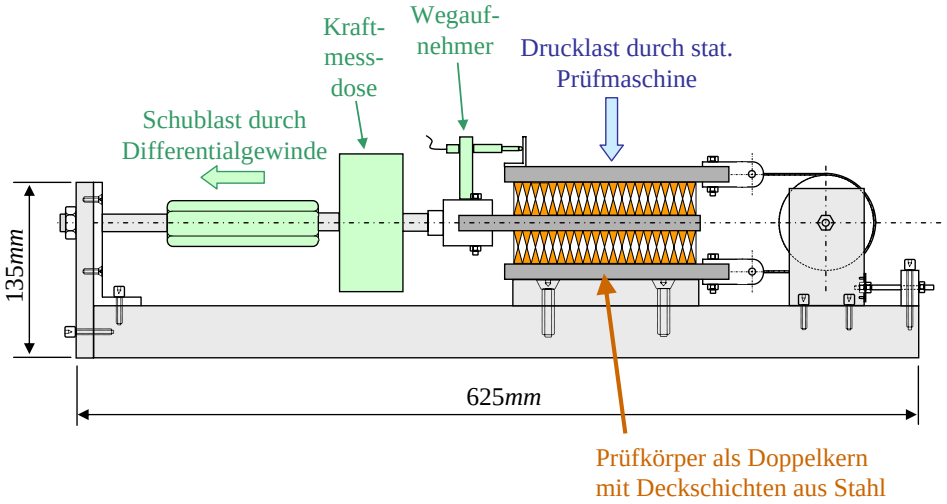


Abbildung 3.4: Prinzipskizze der Druck-Schub-Vorrichtung.

Bei der Durchführung eines kombinierten Druck-Schub-Versuchs wird zunächst eine bestimmte Schublast auf die Doppelkern-Probe aufgebracht. Anschließend wird die Probe mit einer statischen Prüfmaschine auf Druck belastet, siehe Abb. 3.5. Während des Versuchs werden Schubweg und Schubkraft sowie Druckweg und Druckkraft fortlaufend aufgezeichnet. In Abb. 3.6 sind beispielhaft für einen reinen Druck- und einen kombinierten Druck-

Schub-Versuch an NOMEX®-Honigwaben die Druckspannungs-Druckverzerrungs-Kurven sowie die Schubspannungs-Schubverzerrungs-Kurven dargestellt. Aus den Ergebnissen lassen sich die folgenden Informationen gewinnen:

1. Drucksteifigkeit des unversehrten Kerns in Abhängigkeit der Schubverzerrung,

2. Druckspannungen und Schubspannungen im Moment des Kernversagens
   ⇒ Entwicklung eines Versagenskriteriums,

3. Druck- und Schubspannungsverläufe des geschädigten Kerns
   ⇒ Entwicklung eines Degradationsmodells.

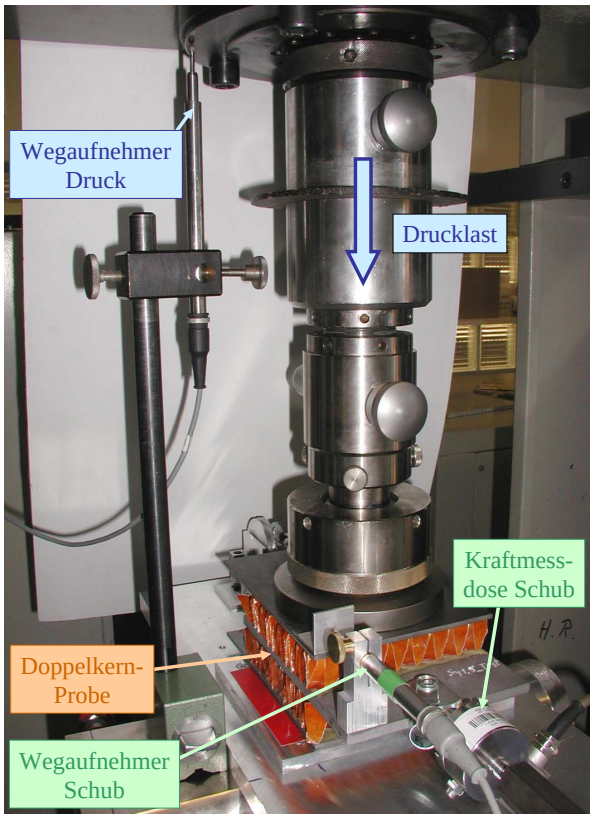
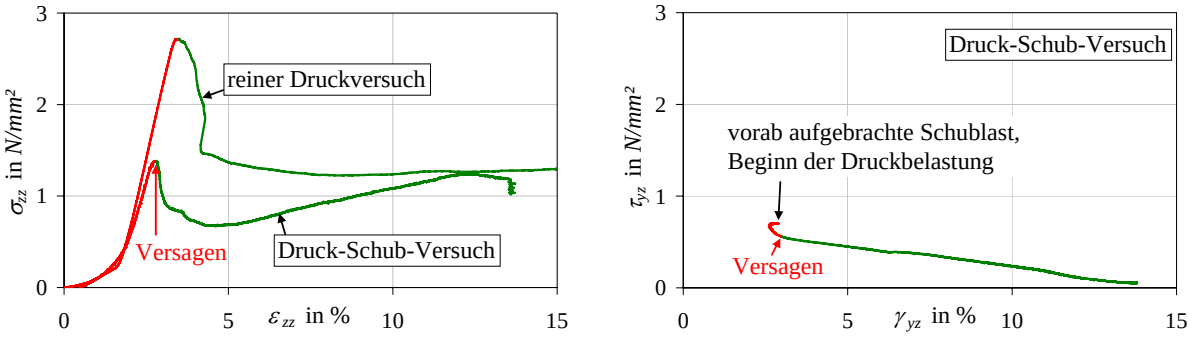


Abbildung 3.5: Versuchsaufbau: Druck-Schub-Vorrichtung in der statischen Prüfmaschine.

Versuchsprogramm und Ergebnisse

Bei dem in [71] vorgestellten Versuchsprogramm wurden Faltwaben- und Honigwabenkerne aus NOMEX®-Papier getestet. Die Faltwaben erreichten trotz kaum geringerer Dichte ($58 kg/m^3$ gegenüber $64 kg/m^3$) und bei vergleichbarer Dicke ($28 mm$ gegenüber $31 mm$) deutlich niedrigere Steifigkeiten und Festigkeiten als die Honigwaben. Diese schlechten mechanischen Eigenschaften resultierten vor allem aus Mängeln bei der Herstellung (große Schwankungen in der Faltgeometrie und der Kerndicke, Phenolharz-Beschichtung des Papiers anstatt Phenolharz-Durchtränkung). Mit neuen Technologien, optimierten Faltgeometrien und



(a) Druckspannungen.

(b) Schubspannungen.

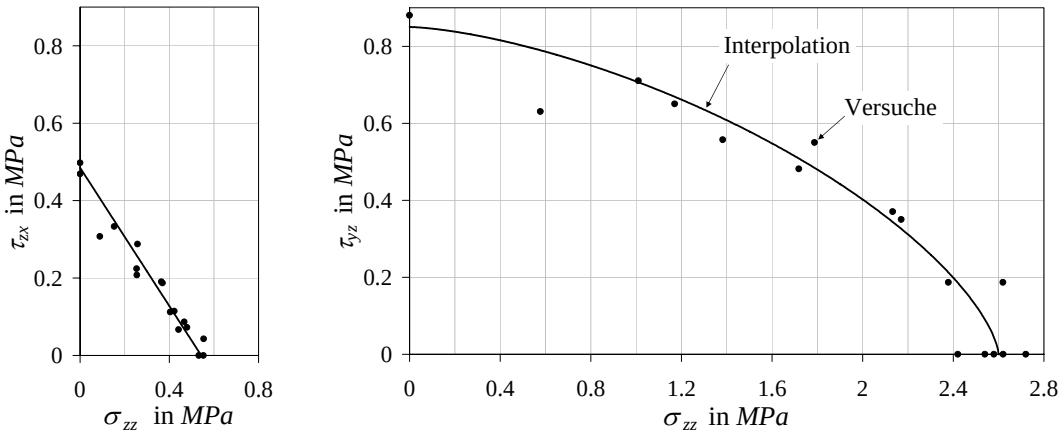
Abbildung 3.6: Spannungs-Dehnungs-Verläufe im Vergleich: reiner Druck-Versuch und kombinierter Druck-Schub-Versuch an NOMEX®-Honigwabenkernen.

Materialien lassen sich mit Faltwaben aktuell bereits deutlich bessere mechanischen Kennwerte erzielen, die mit denen von Honigwaben eher vergleichbar sind [73]. Für die Versuche stand leider nur eine begrenzte Anzahl an Proben zur Verfügung, so dass jeweils nur eine Schubrichtung geprüft werden konnte. Bei den Faltwaben war dies die x-Richtung, bei den Honigwaben die schwächere y-Richtung. Des Weiteren ergaben sich insbesondere bei den Faltwaben recht große Streuungen, die auf die mangelnde Qualität der Fertigung zurückgeführt wurden. Auch wenn das Versuchsprogramm aus diesen Gründen nicht für eine qualifizierte Materialkennwertbestimmung herhalten konnte, so diente es doch der Charakterisierung des Materialverhaltens. Zu den drei oben genannten Punkten wurden die folgenden Beobachtungen gemacht:

1. Mit zunehmender Schubvorlast sinkt die Drucksteifigkeit C_{33} des unversehrten Kerns, d. h. es gibt einen Zusammenhang zwischen den transversalen Schubverzerrungen und den transversalen Druckspannungen, der vom Verschiebungszustand abhängt und durch ein nichtlineares Materialmodell abgebildet werden müsste. Dieser nichtlineare Effekt lässt sich dadurch erklären, dass die Wabenwände infolge der Schubbelastung aus ihrer ursprünglichen Lage gebracht werden und durch die Schräglage der Druckbelastung weniger Steifigkeit entgegenbringen. In Abb. 3.6(a) wird dieser Effekt daran deutlich, dass der anfängliche Anstieg der Spannungs-Dehnungs-Kurve beim Druck-Schub-Versuch etwas geringer ist als beim reinen Druck-Versuch.

2. Mit zunehmender Schubspannung τ_{zx} bzw. τ_{yz} sinkt die ertragbare Druckspannung σ_{zz}, bei der Kernversagen eintritt. Bei den Faltwaben ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen den Druck- und Schubspannungen im Moment des Versagens, vgl. Abb. 3.7(a). Bei den Honigwaben lassen sich die Versuchsergebnisse durch eine nichtlineare Versagenskurve interpolieren, vgl. Abb. 3.7(b).

3. Mit zunehmender Schubvorlast sinkt die Druck-Stauchfestigkeit des geschädigten Kerns, und die Druck-Stauchsteifigkeit nimmt zu. Beispielhaft hierfür sind in Abb. 3.6(a) zwei Druckspannungs-Druckverzerrungs-Kurven mit unterschiedlicher Schubvorlast gezeigt. In Abb. 3.6(b) ist ein Schubspannungs-Schubverzerrungs-Verlauf dargestellt: Im Gegensatz zur Druckspannung nimmt die Schubspannung nach dem Versagen immer weiter ab.

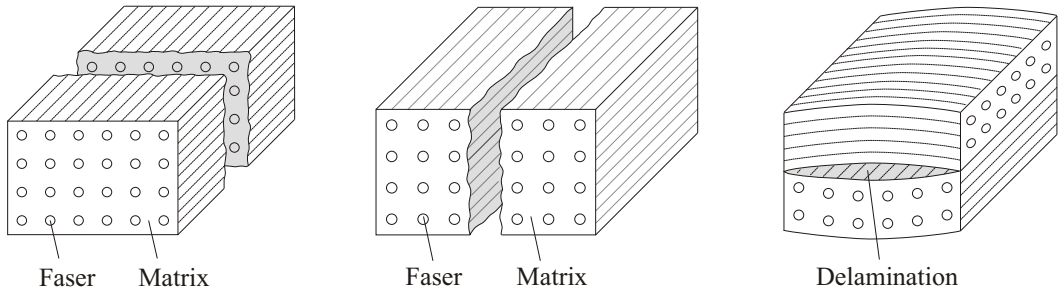


(a) Faltwabenkerne. (b) Honigwabenkerne.

Abbildung 3.7: Transversale Druck- und Schubspannungen im Moment des Kernversagens mit interpolierten 2D-Versagenskurven.

3.1.3 Deckschichtversagen

Das Versagensverhalten von Faserverbundlaminaten ist sehr komplex und durch verschiedene Versagensformen gekennzeichnet. Grundsätzlich können Faserbrüche und Matrixbrüche auftreten, siehe Abb. 3.8(a) und (b). Beide Versagensformen können als Sprödbrüche beschrieben werden, die sich in ihrem Verhalten jedoch stark unterscheiden. Eine spezielle Form des Matrixbruchs ist die Delamination, bei der die Bruchebene mit der Grenzfläche zweier Laminas zusammenfällt und ein interlaminarer Bruch entsteht, Abb. 3.8(c).



(a) Faserbruch. (b) Matrixbruch. (c) Delamination.

Abbildung 3.8: Versagensformen in Faserverbundlaminaten.

Für eine Impactsimulation ist die verbleibende Tragfähigkeit der geschädigten Struktur von Relevanz. Ist das Laminat funktionsgerecht ausgelegt, so sind die Fasern die primären Tragelemente der Deckschicht und erst ihr Versagen kann zum Zusammenbruch der Gesamtstruktur führen, vgl. [74]. Tatsächlich kommt es bei Impacts auf Sandwichstrukturen erst dann zu einem massiven Einbruch im Kontaktkraft-Zeit-Verlauf, wenn die Deckschicht komplett gerissen ist, d. h. wenn keiner Einzelschicht mehr Fasern zur Verfügung stehen, die die Struktur zusammenhalten können, siehe experimentelle Untersuchungen z. B. von Herup und Palazotto [33] oder Dear et al. [38]. Aus diesem Grund liegt der Schwerpunkt der Ausführungen sowohl bei der Phänomenologie als auch bei der Modellierung auf Faserbruch.

Ein sichtbarer Impactschaden ist durch Risse in der Deckschicht und eine deutliche Eindellung charakterisiert. Ist der Schaden kaum oder nicht sichtbar, so können dennoch einzelne Faserbrüche oder Matrixbrüche vorliegen. Diese geringfügigen Deckschichtschäden beeinträchtigen den Impactverlauf kaum, sie können aber die Restfestigkeit der Sandwichschale herabsetzen. Ferner können leichte, kaum fühlbare Eindellungen entstehen, die ebenfalls die Tragfähigkeit beeinträchtigen. Matrixbrüche begünstigen außerdem die Bildung von Delaminationen, siehe z. B. [75]. Die Anfälligkeit gegenüber Delaminationen wächst mit der Dicke der impactbelasteten Deckschicht, da dann die Querschubspannungen im Vergleich zu den Membranspannungen eine zunehmende Rolle spielen. Auch Delaminationen beeinflussen den Impactverlauf kaum; sie können aber die Restfestigkeit einer Sandwichschale herabsetzen, da die entstandenen Sub-Laminate ein schwächeres Stabilitätsverhalten aufweisen.

Wie bei der Analyse des Kernverhaltens können auch für die Beschreibung des Deckschichtverhaltens bei low-velocity Impacts quasistatische Versuche herangezogen werden, [3]. Abb. 3.9 zeigt den qualititativen Verlauf einer Kraft-Weg-Kurve, wie sie am Institut für Luft- und Raumfahrt der TU Dresden [58] bei Dreipunkt-Biegeversuchen an $1mm$ dünnen Faserverbund-Deckschichten aufgezeichnet wurde. Während die Kraft-Weg-Kurve eines reinen Zugversuchs in der Regel bis zum Bruch linear verläuft, wird sie beim Biegeversuch ab einer bestimmten Belastung nichtlinear. Das Materialverhalten einer biege- bzw. impactbelasteten Faserverbunddeckschicht lässt sich in drei Phasen unterteilen:

- Phase I: Alle Laminas sind ungeschädigt und verhalten sich linear-elastisch.
- Phase II: Einzelne Laminas sind durch Faserbrüche geschädigt.
- Phase III: Alle Laminas sind geschädigt; die Deckschicht ist durchrissen.

Ein Vergleich zwischen Biegeversuch und statischer Berechnung zeigt, dass die Festigkeiten an den Laminatoberflächen bereits zeitig und deutlich vor dem eigentlichen Biegebruch überschritten werden. Dass dadurch nicht sofort das gesamte Laminat versagt, lässt darauf schließen, dass die äußeren Laminas nach Überschreiten der Festigkeit noch eine Reststeifigkeit behalten.

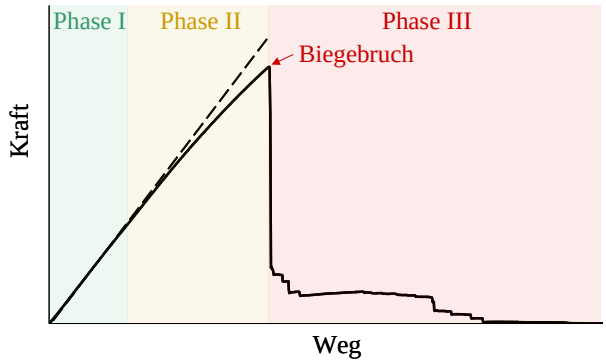


Abbildung 3.9: Typischer Kraft-Weg-Verlauf eines Biegeversuchs an dünnen Faserverbundlaminaten (Versuchsergebnisse vom ILR Dresden [58]).

3.1.4 Ablösung der Deckschicht vom Kern

Entsprechend den Anforderungen der Luftfahrtindustrie sollte die Verklebung zwischen Sandwichkern und Deckschicht so ausgeführt sein, dass sie bei großen Belastungen nicht vor dem Kernmaterial und der Deckschicht versagt. Kritische Belastungen für die Kern-Haut-Verbindung von Sandwichbauteilen sind jedoch nach wie vor die starken Druckänderungen, denen Flugzeuge durch den Druckunterschied zwischen Boden und Reiseflughöhe ausgesetzt sind. Impactlasten hingegen sind für die heutigen Standards der Klebetechnologie unproblematisch, d. h. bei Impacts auf passabel gefertigten Sandwichpaneelen versagt im Allgemeinen zuerst der Kern, bevor die Kern-Haut-Verklebung beeinträchtigt wird. Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Versuchen wurde keine durch Impact verursachte Kern-Haut-Ablösung beobachtet.

3.2 Modellierung

3.2.1 Allgemeine Aspekte

Für die Simulation des Impactverhaltens von Sandwichschalen ist eine realitätsnahe Beschreibung der Schadensentwicklung von entscheidender Bedeutung. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf Impactvorgängen niedriger Energie liegt, bei denen nicht oder kaum sichtbare Schäden entstehen, kommt der Modellierung des Versagensverhaltens der Kernstruktur in Abschnitt 3.2.2 eine größere Bedeutung zu, während das Verhalten der impactbelasteten Deckschicht in Abschnitt 3.2.3 nur bis zu dem Punkt beschrieben wird, an dem sie zu reißen beginnt. Das Ziel der Impactsimulation ist einerseits, die Größe eines kaum sichtbaren Impactschadens vorherzusagen, und andererseits, die kritische Energie herauszufinden, bei der eine sichtbare Deckschichtschädigung erstmalig entsteht.

Um die Impactsimulation effizient durchführen zu können, werden makroskopische Modelle der Schadensmechanik verwendet, bei denen der Kern und die einzelnen Deckschichtlaminas jeweils homogenisiert betrachtet werden. Die Schadensdetektion erfolgt durch spannungsbasierte Versagenskriterien. Vor und nach der Schädigung kommen linear elastische bzw. elasto-plastische Materialmodelle zum Einsatz, d. h. es erfolgt keine kontinuierliche Entfestigung. Im geschädigten Kern tritt bei makroskopischer Betrachtungsweise ein quasiplastisches Materialverhalten auf, das durch eine hohe Energieabsorption gekennzeichnet ist. Die Deckschichten versagen durch Sprödbrüche und zeigen keine derartige Quasi-Plastizität. Viskoelastizitäten oder -plastizitäten mit ratenabhängigen Materialmodellen müssen bei der Simulation von low-velocity Impacts nicht betrachtet werden, da die Verformungsgeschwindigkeiten niedrig sind und keine Verzögerung der Entfestigung bewirken [3]. Die vereinfachte Herangehensweise mit schrittweise linearen Modellen stößt bei der Modellierung des Deckschichtverhaltens an Grenzen, wenn der Fortschritt eines Risses beschrieben werden soll. In solchen Fällen sind Modelle der Bruchmechanik oder Modelle der Schadensmechanik mit kontinuierlicher Entfestigungs erforderlich. Da für eine schnelle Impactsimulation jedoch rechenintensive, iterative Prozesse vermieden werden sollen, sind solche energiebasierten, kontinuierlichen Degradationsverfahren nicht Bestandteil dieser Arbeit. Folglich wird die Größe eines deutlich sichtbaren Deckschichtschadens (Länge der Risse, Tiefe der Eindellung) nicht ermittelt. Für die Größe des zugehörigen Kernschadens kann bei gerissener Deckschicht eine obere Schranke angegeben werden, indem der Kern während der Simulation degradiert und die Deckschicht als unversehrt betrachtet wird. Eine untere Schranke für den Kernschaden erhält man bei einer Rechnung mit Deckschicht-Degradation, wenn die Deckschicht gerade zu reißen beginnt. Beispiele hierzu werden im Rahmen der experimentellen Validierung in Kapitel 5 vorgestellt.

In einem schadensmechanischen Modell kann eine Entfestigung zu einer Lokalisierung der Verformungen führen und somit Probleme hinsichtlich Netzunabhängigkeit und Konvergenz verursachen. Wie anhand von Beispielrechnungen in Abschnitt 5.4.3 gezeigt wird, werden mit dem in dieser Arbeit entwickelten Impactsimulationsverfahren netzunabhängige Ergebnisse erzielt, wobei die Netzunabhängigkeit für eine globale Betrachtung der Ergebnisse gilt, d. h. die endgültige Schadensgröße und der Kraftverlauf stimmen bei verschiedenen Vernetzungen ungefähr überein. Exakt übereinander liegen die Kraftverläufe nicht, da der Schadensfortschritt bei einem feineren Netz in kleineren Schritten abläuft. Auch die Detektion des ersten Schadens geschieht beim feinen Netz etwas eher als beim groben. Da die Entfestigung aber

nur in einer Stufe und nicht kontinuierlich erfolgt, entsteht kein Lokalisierungsproblem: Das geschädigte Element behält eine konstante Reststeifigkeit und die Last kann auf Nachbarelemente umgelagert werden, so dass diese ebenfalls sukzessiv versagen.

3.2.2 Modellierung des Kernversagens

Das im Folgenden erläuterte makromechanische Schadensmodell, welches den Kern homogenisiert betrachtet, deckt die möglichen Versagensformen (Sprödbrüche, Beulen, Fließen) pauschal ab, ohne verschiedene mesoskopische Vorgänge zu unterscheiden. Für eine vollständige Beschreibung des Impactverlaufs ist dabei die genaue Vorhersage des Augenblicks der Schadensentstehung (Versagenskriterien) weniger entscheidend als die realitätsnahe Modellierung des Materialverhaltens des geschädigten Kerns (Degradationsmodelle).

Versagenskriterien für den Kern

Als Versagen des Kerns wird während einer zunehmenden Belastung der Moment betrachtet, bei dem die Spannungen einen Maximalwert erreichen und daraufhin merklich abfallen. Ein etwaiges nichtlineares Materialverhalten kurz vor Erreichen des Maximalspannungswertes (was bei gebräuchlichen Kernstrukturen in der Regel sehr gering ausgeprägt ist) sei noch nicht als Schaden betrachtet und wird vom schrittweise linearen Materialmodell in der Impactsimulation von CODAC nicht erfasst. Da der Kern während eines Impactvorgangs bezüglich einer Kombination aus transversalem Druck und transversalem Schub versagt, vgl. Abb. 3.3, sollte ein geeignetes spannungsbasiertes Versagenskriterium sowohl die transversale Normalspannung σ_{zz} als auch die transversalen Schubspannungen τ_{xz}, τ_{yz} enthalten. Besant et al. [55] führten ein Versuchsprogramm durch, bei dem Aluminium-Honigwabenkerne unter kombinierter Druck-Schub-Belastung auf Versagen getestet wurden. Durch Interpolation der Versuchsergebnisse leiteten sie daraus das Versagenskriterium

$$\left(\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\mathrm{cu}}}\right)^n + \left(\frac{\tau_{xz}}{\tau_{\mathrm{lu}}}\right)^n + \left(\frac{\tau_{yz}}{\tau_{\mathrm{tu}}}\right)^n \geq 1 \tag{3.1}$$

ab, worin der Index u für *ultimate* steht und die Materialfestigkeiten des Kerns unter reinem Druck (c = *compression*) bzw. reinem Schub (l = *longitudinal*, t = *transversal*) bezeichnet. Die beste Übereinstimmung der Versagenskurve mit den Versuchsergebnissen ergab sich für die Aluminium-Honigwaben bei einem Exponenten von $n = 1,5$. Besant et al. geben hierzu jedoch den Hinweis, dass mit mäßiger Veränderung des Exponenten bis hin zu $n = 2$ das Versagensverhalten des Aluminium-Honigwabenkerns ebenfalls gut beschrieben werden kann. Für die Impactanalyse in CODAC wurde das Versagenskriterium von Besant et al. mit variablem Exponenten implementiert. Impact-Testrechnungen haben bestätigt, dass bei den Simulationsergebnissen nur eine geringe Sensitivität gegenüber dem Exponenten n besteht.

Um die Arbeit von Besant et al. besser bewerten zu können, sollen an dieser Stelle noch einige weitere Arbeiten zum Versagen von Sandwichkernen genannt und verschiedene Varianten von Versagensmodellen etwas umfassender dargestellt werden. Wie das Kriterium von Besant et al. basiert die Mehrheit der in der Literatur zu findenden makroskopischen Kern-Versagenskriterien auf der von Hill [76] weiterentwickelten von Mises-Fließbedingung, bei der die herrschenden Spannungen mit den zugehörigen einaxialen Materialfestigkeiten ins

Verhältnis gesetzt und unter Verwendung bestimmter Exponenten und Koeffizienten kombiniert werden. Obwohl Versagenskriterien dieser Art alle Spannungsinteraktionen mathematisch elegant und den experimentellen Ergebnissen entsprechend erfassen, so basieren sie doch auf keiner physikalischen Grundlage, weswegen sie für die Beschreibung des Versagens von Faserverbundlaminaten im Allgemeinen weniger gut geeignet sind, vgl. Abschnitt 3.2.3. Solche globalen Versagenskriterien decken vielmehr alle möglichen Versagensmechanismen pauschal ab, die in einer Kernstruktur auftreten können. Da das Kernmaterial in dieser Arbeit homogenisiert betrachtet wird, sind z. B. bei Wabenstrukturen die Informationen über die Dicke und über das Material der Wabenwände automatisch in den globalen Kernfestigkeiten enthalten. Dadurch werden sowohl Sprödbrüche als auch elastisches Beulen als Kernversagen erfasst. Für eine effiziente Modellierung, wie sie in dieser Arbeit angestrebt wird, ist ein globales Versagensmodell also durchaus gut geeignet, da es die experimentellen Beobachtungen zumindest makroskopisch richtig widerspiegelt.

Gibson et al. [77] untersuchten 1989 das Versagen von zellulären Schaumkernen unter multiaxialer Belastung und entwickelten ein multiaxiales Kriterium

$$\frac{\sigma_{\mathrm{VM}}}{\sigma_{\mathrm{u}}} + A\left(\frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{\sigma_{\mathrm{u}}}\right)^2 \geq 1 \tag{3.2}$$

für isotrope, homogene Schäume, wobei σ_{VM} die von Mises-Spannungen und σ_{m} die mittleren Spannungen sind. A ist eine Konstante, die von der Materialdichte des Schaums abhängt. Vergleichbare Formulierungen werden in der aktuelleren Arbeit von Gioux et al. [78] angegeben. Benderly und Putter [79] konzentrierten sich auf die einaxiale Druck-Schub-Belastung von homogenen, zellulären Schäumen (ROHACELL®-200WF, $\sigma_{\mathrm{cu}} = 9MPa$) und leiteten ähnlich wie Besant et al. aus ihren Versuchsergebnissen ein quadratisches Versagenskriterium

$$\left(\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\mathrm{cu}}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{xz}}{\tau_{\mathrm{u}}}\right)^2 \geq 1 \tag{3.3}$$

ab, welches auch für verschiedene Temperaturen von -40°C bis +70°C Gültigkeit zeigte. Eine vergleichbare Vorgehensweise führte Li et al. [80] bei der Untersuchung von ROHACELL®-51WF-Schäumen ($\sigma_{\mathrm{cu}} = 0,8MPa$) zu einem linearen Versagenskriterium

$$\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\mathrm{cu}}} + \frac{\tau_{xz}}{\tau_{\mathrm{u}}} \geq 1. \tag{3.4}$$

Diese divergierenden Ergebnisse könnten darauf hindeuten, dass bei Materialien geringerer Dichte bzw. geringerer Festigkeit die Kombination aus Druck und Schub das Versagen stärker fördert als bei Materialien hoher Festigkeit, vgl. Abb 3.10.

Im Bereich der Aluminium-Honigwaben führten neben Besant et al. [55] z. B. auch Hong et al. [81] umfangreiche Untersuchungen unter kombinierter Druck-Schub-Belastung durch. In [81] wird auch ein guter Überblick über frühere Arbeiten zu diesem Thema gegeben. Basierend auf experimentellen Ergebnissen leiten Hong et al. ihr Versagenskriterium direkt aus Hills Fließkriterium her und erhalten

$$\left(\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\mathrm{cu}}}\right)^2 + A\left(\frac{\tau_{\alpha z}}{\sigma_{\mathrm{cu}}}\right)^2 \geq 1, \tag{3.5}$$

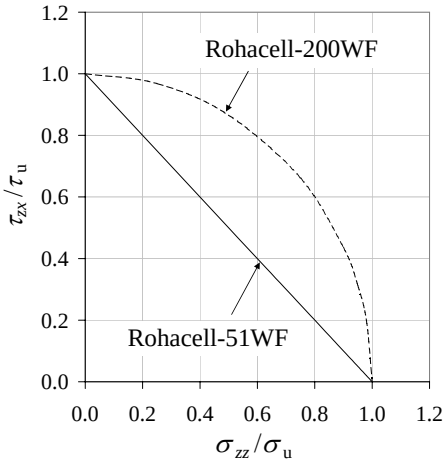


Abbildung 3.10: Anhand der Versuchsergebnisse in [79] und [80] interpolierte Versagenskurven für Schaumkerne unterschiedlicher Dichte.

wobei die Konstante A von der Richtung α der Schubbelastung $\tau_{\alpha z}$ abhängt und nur die reine Druckfestigkeit σ_{cu} als Festigkeitswert verwendet wird. Petras und Sutcliffe [43]-[45] haben sich ebenfalls intensiv mit dem quasistatischen Versagensverhalten von Sandwichstrukturen beschäftigt und dabei das Verhalten von NOMEX®-Honigwabenkernen unter kombinierter Druck-Schub-Belastung studiert [45]. Ihre Versuchsergebnisse konnten durch eine lineare Versagenskurve analog zu (3.4) interpoliert werden, wobei die longitudinale und die transversale Schubrichtung wegen der Orthotropie der Honigwaben separat betrachtet wurden. Die Linearität der Versagenskurve wurde für verschiedene Kerne, unabhängig von ihrer Festigkeit ($\sigma_{\mathrm{cu}} = 0,9 \ldots 11,0 MPa$), festgestellt. Im Gegensatz dazu ergab sich bei kombinierten Druck-Schub-Versuchen, die jüngst am DLR Braunschweig an NOMEX®-Honigwabenkernen ($\sigma_{\mathrm{cu}} = 2,6 MPa$) durchgeführt wurden (Abschnitt 3.1.2, [71]), ein nichtlineares Versagenskriterium

$$\left(\frac{\sigma_{zz}}{\sigma_{\mathrm{cu}}}\right)^{1,5} + \left(\frac{\tau_{yz}}{\tau_{\mathrm{tu}}}\right)^{1,5} \geq 1 \tag{3.6}$$

als beste Interpolation der Versuchsergebnisse, vgl. Abb. 3.7(b). Das gleiche Versuchsprogramm führte für NOMEX®-Faltwabenkerne ($\sigma_{\mathrm{cu}} = 0,55 MPa$) wiederum zu einem linearen Versagenskriterium analog zu (3.4), vgl. Abb. 3.7(a).

In Abhängigkeit von Material, Festigkeit und möglicherweise sogar vom Versuchsablauf scheint also der Exponent n im Versagenskriterium (3.1) von Besant et al. [55] tätsächlich im Bereich von $1.0 \leq n \leq 2.0$ zu schwanken. Da aber Impactrechnungen diesbezüglich keine nennenswerte Sensitivität zeigen, kommt der richtigen Wahl des Exponenten bei Impactsimulationen keine große Bedeutung zu.

Degradationsmodelle für den Kern

Wird mit Hilfe eines Versagenskriteriums eine Kernschädigung festgestellt, so muss in den betroffenen Bereichen die Veränderung des Strukturverhaltens berücksichtigt werden, um das Impactverhalten weiterhin gut beschreiben zu können. Diese Strukturveränderung, die im Allgemeinen mit einer Reduktion der Steifigkeiten und Festigkeiten verbunden ist, wird

als Degradation bezeichnet. Bei der Methode der finiten Elemente kann das Strukturmodell in beliebigen lokalen Bereichen degradiert werden, was ein entscheidender Vorteil gegenüber analytischen Methoden mit geschlossener Lösung ist. Gemäß der Spannungsberechnung in den vier Gaußpunkten eines Elements (Abschnitt 2.2.6) wird auch das Versagenskriterium in den Gaußpunkten überprüft und die Degradation der Materialeigenschaften erfolgt separat für jedes geschädigte Elementviertel, vgl. Abb. 3.11. In Dickenrichtung betrachtet, erfolgt die Degradation des entsprechenden Elementviertels über die gesamte Kernhöhe, sobald das Versagenskriterium an der Stelle mit der größten Materialausnutzung überschritten wird (i. d. R. an der oberen, impactzugewandten Seite).

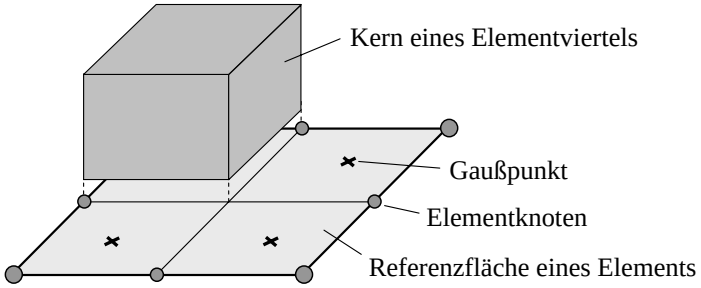


Abbildung 3.11: Finites 8-Knoten-Element mit vier Gaußpunkten und den zugehörigen Elementvierteln für eine diskrete Kerndegradation.

Für die Wahl eines geeigneten Degradationsmodells muss, wie in Abschnitt 3.1.2 beschrieben, das makroskopische Materialverhalten des geschädigten Kerns untersucht werden. Abb. 3.12 zeigt schematisch eine für Sandwichkernstrukturen typische Spannungs-Dehnungs-Kurve, deren Verlauf mit einem elastisch-plastischen Verhalten zu vergleichen ist. Nach dem Erreichen der Festigkeit σ_u kommt es zur Reduktion der Steifigkeit. Für die Modellierung dieser Materialveränderung werden die ursprünglichen Steifigkeitskomponenten C_{ij} mit Hilfe von Degradationsfaktoren D_{ij} reduziert, so dass sich die verbleibende Stauchsteifigkeit

$$\mathbf{C}_\mathrm{crush} = \begin{bmatrix} D_{11}C_{11} & D_{12}C_{12} & D_{13}C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22}C_{22} & D_{23}C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33}C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{44}C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & D_{55}C_{55} & 0 \\ & & & & & D_{66}C_{66} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

ergibt. Bei jedem geschädigten Elementviertel fließt nun für den Kern die reduzierte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C}_\mathrm{crush}$ in das HOOKEsche Materialgesetz (2.54) ein.

Von großer Bedeutung für das weitere Verformungsverhalten der geschädigten Sandwichstruktur ist neben der Reduktion der Steifigkeiten auch die verbleibende Stauchfestigkeit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_\mathrm{crush} &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx\mathrm{crush}} & \sigma_{yy\mathrm{crush}} & \sigma_{zz\mathrm{crush}} & \tau_{yz\mathrm{crush}} & \tau_{zx\mathrm{crush}} & \tau_{xy\mathrm{crush}} \end{bmatrix}^\mathrm{T} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{1\mathrm{crush}} & \sigma_{2\mathrm{crush}} & \sigma_{3\mathrm{crush}} & \sigma_{4\mathrm{crush}} & \sigma_{5\mathrm{crush}} & \sigma_{6\mathrm{crush}} \end{bmatrix}^\mathrm{T}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

die bewirkt, dass die Spannungs-Dehnungs-Kurve in Abb. 3.12 nach Erreichen der Festigkeit nicht auf Null zurückfällt. Wird der geschädigte Kern weiter zusammendrückt, so absorbiert

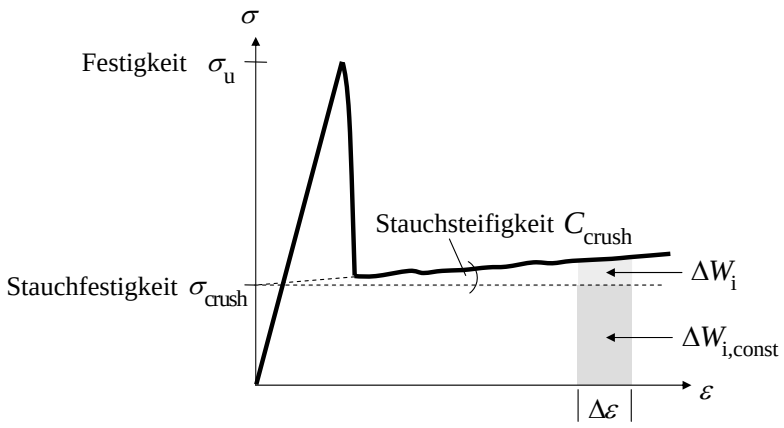


Abbildung 3.12: Typischer Spannungs-Dehnungs-Verlauf eines Kerns unter transversaler Belastung.

er aufgrund der Stauchfestigkeit $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{crush}}$ zusätzlich Energie. Damit der Kern nicht zu weich modelliert wird, muss diese Energie als innere Arbeit

$$\partial W_{\mathrm{i,const}} = \int \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{crush}} \partial \boldsymbol{\varepsilon} \, dV, \tag{3.9}$$

zusätzlich zu den inneren Arbeitsanteilen aus der Stauchsteifigkeit im Prinzip der virtuellen Verschiebungen (2.59) berücksichtigt werden. Analog zur Vorgehensweise bei der inneren Arbeit (2.60), bei der die verschiebungsabhängigen inneren Kräfte (2.63) bzw. (2.67) entstanden sind, ergeben sich nun aus (3.9) für die Kernschicht $L = 2$ die verschiebungsunabhängigen und daher konstanten inneren Kräfte

$$\mathbf{F}_{\mathrm{i,const}} = \int \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{crush}}^{\mathrm{T}} \int_{h_2} \mathbf{Z} \, \mathrm{d}z_2 \left(\mathbf{B}_{\mathrm{S815}} + \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathrm{S815}}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{u} \right) \, \mathrm{d}A, \tag{3.10}$$

wobei erneut die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung (2.50) verwendet wird und außerdem die (6×54)-Matrix

$$\mathbf{Z} = \left[\begin{array}{cccccccccc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E} & z_2\mathbf{E} & z_2^2\,\mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right], \tag{3.11}$$

die die Beziehung zwischen den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ an der Stelle z_2 und den schichtbezogenen Verzerrungsanteilen $\boldsymbol{\varepsilon}_L^0$, $\boldsymbol{\kappa}_L$ und $\boldsymbol{\omega}_L$ herstellt, vgl. (2.45). $\mathbf{E}$ ist die (6×6)-Einheitsmatrix. Da hier lediglich dem Kern eine Stauchfestigkeit $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{crush}}$ zugeordnet wird, vereinfacht sich die Berechnung der konstanten inneren Kräfte (3.10) dadurch, dass in den Matrizen $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{B}_{\mathrm{S815}}$ die Spalten bzw. Zeilen gestrichen werden können, die den Deckschichten zugeordnet sind. Damit entfällt auch der Anteil $\partial \mathbf{B}_{\mathrm{S815}} / \partial \mathbf{u}\, \mathbf{u}$, da für den Kern keine nichtlinearen Verzerrungsanteile berücksichtigt wurden, vgl. Abschnitt 2.2.2.

Zur Spezifizierung des Degradationsmodells für den Kern ist im Weiteren die Belegung der einzelnen Komponenten von Stauchsteifigkeit und Stauchfestigkeit erforderlich. Während einer Impactsimulation sind für die Kernverformung prinzipiell nur die transversalen Druck- und Schubkomponenten relevant. Die Membransteifigkeiten des Sandwichkerns sowie die Querdehnungsanteile C_{13}, C_{23} sind zum einen häufig von vornherein sehr klein und haben zudem einen geringen Einfluss auf die Verformungen. Sie können bei Kernschädigung pau-

schal auf einen Wert nahe Null gesetzt werden. Von hoher Relevanz für die Impactsimulation sind

- die Stauchsteifigkeiten $C_{33\text{crush}}$, $C_{44\text{crush}}$ und $C_{55\text{crush}}$ (bzw. die Degradationsfaktoren D_{33}, D_{44} und D_{55}),
- die Stauchfestigkeiten $\sigma_{zz\text{crush}}$, $\tau_{yz\text{crush}}$ und $\tau_{zx\text{crush}}$.

Bei reinen Druck- bzw. reinen Schublasten könnten diese Materialkennwerte entsprechend Abb. 3.12 den Spannungs-Dehnungs-Kurven aus uniaxialen, quasistatischen Versuchen entnommen werden. Da aber die Belastung während eines Impacts einer Kombination aus transversalem Druck und transversalem Schub entspricht, muss ein kombiniertes Verformungsverhalten abgebildet werden. Verwendete man sowohl für Druck als auch für Schub die Stauchsteifigkeiten und Stauchfestigkeiten aus den uniaxialen Versuchen, so würde der geschädigte Kern zu steif dargestellt. In der Realität sinkt die aufgrund von Druck absorbierte Energie, wenn zusätzlich eine Schub-Belastung vorliegt; und die durch Schub absorbierte Energie ist dann kleiner als bei reinem Schub. Bei der phänomenologischen Untersuchung des Kernversagens in Abschnitt 3.1.2 sind in Abb. 3.6 die Spannungs-Dehnungs-Verläufe eines reinen Druck- und eines kombinierten Druck-Schub-Versuchs dargestellt. Der Unterschied zwischen den beiden Druckspannungskurven in Abb. 3.6(a) zeigt deutlich, dass infolge der Schublast nicht nur die Druck-Festigkeit sondern auch die Druck-Stauchfestigkeit kleiner wird. Die Verringerung der Druck-Festigkeit wurde oben durch die Formulierung eines Versagenskriteriums erfasst. Die Veränderung von Druck-Stauchfestigkeit und Druck-Stauchsteifigkeit müsste theoretisch durch ein nichtlineares Degradationsmodell beschrieben werden, dessen Parameter von den transversalen Verzerrungen abhängen. Ebenso vom Verzerrungszustand abhängig müsste das Schubverhalten dargestellt werden, vgl. Abb. 3.6(b). Eine solche nichtlineare Modellierung hätte jedoch Nachteile:

- hoher Rechenaufwand,
- Bedarf an zahlreichen Materialdaten, die in den Herstellertabellen nicht angegeben sind und der Durchführung zusätzlicher Experimente bedürfen.

Bei der Entwicklung eines schnellen, für den Entwurfsprozess geeigneten Tools sollten diese beiden Punkte vermieden werden. Gesucht ist vielmehr ein einfaches Degradationsmodell, das auf Nichtlinearitäten verzichtet und trotzdem die Gesamtmenge an absorbierter Energie möglichst gut widergibt. Es wird darum für Impactsimulationen folgendes vorgeschlagen:

- Der Druck-Degradationsfaktor D_{33} und die Druck-Stauchfestigkeit $\sigma_{zz\text{crush}}$ werden entsprechend den Ergebnissen aus reinen quasistatischen Druckversuchen gewählt. Daraus ergibt sich das in Abb. 3.13 dargestellte Degradationsmodell.
- Die Schub-Degradationsfaktoren D_{44}, D_{55} und die Schub-Stauchfestigkeiten $\tau_{yz\text{crush}}$, $\tau_{zx\text{crush}}$ werden auf nahe Null gesetzt.

Der Vorschlag basiert auf den folgenden Überlegungen:

- Bei reinem transversalen Druck wird so das Verhalten des geschädigten Kerns gut beschrieben.

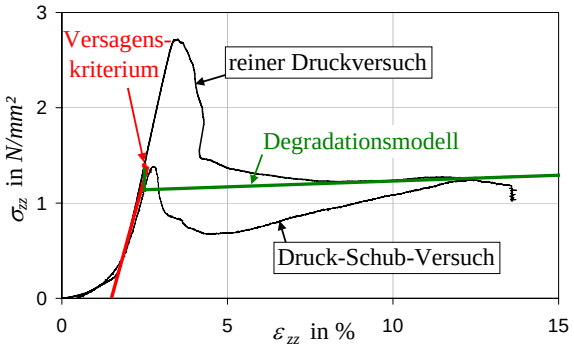


Abbildung 3.13: Lineares Degradationsmodell für eine transversale Druck-Schub-Belastung.

- Gibt es neben einer Druck- auch eine transversale Schubbelastung, so ist die durch Druck absorbierte Energie zwar kleiner als im Modell angenommen, vgl. unterste Kurve in Abb. 3.13. Die durch Schub absorbierte Energie kommt in der Realität jedoch noch hinzu, vgl. Abb. 3.6(b), und wirkt somit ausgleichend auf den zuvor in Kauf genommenen Fehler.

- Die vermeintliche Begünstigung der Schubverformung gegenüber der transversalen Druckverformung des Kerns wird in Kauf genommen, da bei geschädigtem Kern die Art der Verformung ohnehin maßgeblich von den Möglichkeiten der Deckschichten bestimmt wird.

- Bei dünnen impactbelasteten Deckschichten ist das Verhalten des Kerns druckdominiert. Bei den in Kapitel 5 vorgestellten Impacttests waren die Druckspannungen des Kerns im Moment des Versagens um ein bis zwei Größenordnungen größer als die Schubspannungen (die Druckfestigkeiten betrugen nur das zwei- bis vierfache der Schubfestigkeiten).

- Zusätzlich zu den vom Hersteller des Kernmaterials standardmäßig bekannten Steifigkeiten und Festigkeiten für Druck und Schub werden nur die Stauchsteifigkeiten und Stauchfestigkeiten für Druck benötigt.

Validierungsrechnungen haben gezeigt, dass dieses einfache Degradationsmodell das Verformungsverhalten des geschädigten Kerns für die in dieser Arbeit verfolgten Zwecke einer effizienten Impactsimulation ausreichend gut beschreibt, siehe experimentelle Validierung in Kapitel 5. Speziell für die drei Verhaltensmerkmale, die bei den transversalen Druck-Schub-Versuchen in Abschnitt 3.1.2 beobachtet wurden, haben die hier vorgeschlagenen Materialmodelle die folgenden Bedeutungen:

1. Die transversalen Druck- und Schubsteifigkeiten des unversehrten Kerns werden als konstant angenommen, d. h. eine Kopplung zwischen Druck- und Schubverzerrungszustand wird im Materialmodell nicht erfasst. Der im Versuch beobachtete Effekt der Drucksteifigkeitsminderung infolge einer Schubbelastung ist bei kleinen Schubverformungen relativ gering und hat auf den Impactverlauf kaum einen Einfluss.

2. Für Impactsimulationen mit Sandwichstrukturen, die aus dem untersuchten Faltwabenkern bestehen, käme das Versagenskriterium (3.1) mit dem Exponenten $n = 1,0$

zum Einsatz. Für Impactsimulationen mit dem untersuchten Honigwabenkern wäre der Exponent $n = 1,5$ zu wählen, so wie es auch von Besant et al. [55] vorgeschlagen wurde.

3. Für das lineare Degradationsmodell werden jeweils die Druck-Stauchfestigkeiten und die Druck-Stauchsteifigkeiten aus dem reinen Druckversuch verwendet.

Es kann abschließend festgestellt werden, dass kombinierte Druck-Schub-Versuche zwar aufschlussreich für eine qualitative Analyse des Materialverhaltens von Kernstrukturen sind. Außerdem sind sie wichtig für eine exakte Modellierung bei Impactsimulationen, die hohe Ansprüche an die Genauigkeit stellen und die für Nachweisrechnungen qualifiziert sind. Nicht erforderlich sind sie jedoch für die einfachen, abschnittsweise linearen Modelle, die in dieser Arbeit für eine effiziente Impactsimulation vorgeschlagen werden. Für die Ermittlung von Stauchsteifigkeit und Stauchfestigkeit genügt ein reiner transversaler Druckversuch. Die Steifigkeiten und Festigkeiten des ungeschädigten Kerns sind für transversalen Druck und transversalen Schub standardmäßig vom Hersteller bekannt. Die Größe des Exponenten n im Versagenskriterium (3.1) ist, wie oben beschrieben, für eine Impactanalyse von nebensächlicher Bedeutung und macht somit die Durchführung zusätzlicher kombinierter Druck-Schub-Versuche ebenfalls nicht erforderlich.

3.2.3 Modellierung des Deckschichtversagens

Versagenskriterien

Faserbrüche und Matrixbrüche stellen unterschiedliche Versagensmechanismen dar und haben sehr verschiedenartige Auswirkungen auf die verbleibende Tragfähigkeit. Während beim Kern verschiedene Versagensarten (Sprödbruch, Beulen, Fließen) die makroskopischen Steifigkeiten und Festigkeiten in ähnlicher Weise verändern, ist bei den Deckschichten die Versagensart von großer Relevanz. Globale Kriterien wie z. B. das von Tsai und Wu [82] sollten daher für die Beschreibung des Versagens von Faserverbundlaminaten nicht verwendet werden. Hashin [83] etablierte mit seinen Versagenskriterien für Faserbruch und Matrixbruch die Unterscheidung zwischen einzelnen Versagensmechanismen. Auf seinem Konzept basieren z. B. die Versagenskriterien von Puck [84] und von Cuntze [85], die innerhalb der Matrixbrüche noch zwischen verschiedenen Bruchmoden unterscheiden und diese entsprechend der Mohrschen Bruchhypothese [86] durch die Bruchebene und die auf sie wirkenden Spannungen charakterisieren. Auch die jüngst entwickelten, sehr exakten LaRC03-Kriterien [87], die sogar Faserondulationen mit berücksichtigen, beruhen auf dem Konzept von Hashin und verwenden zudem die von Puck eingeführten Bruchebenen.

Die Fasern eines Laminatverbundes werden nahezu ausschließlich durch die Membrannormalspannungen $\sigma_{||}$ beansprucht, die parallel zur Faserachse wirken. Daher empfiehlt sich für die Vorhersage von Faser-Zugbrüchen das einfache Maximalspannungskriterium. Bei Faser-Druckbrüchen spielt außerdem die stützende Wirkung der Matrix eine gewisse Rolle, weswegen das LaRC03-Kriterium [87] hier auch die Membranspannungen $\sigma_{\perp}$ und $\tau_{||\perp}$ berücksichtigt, die quer zur Faser wirken. Bei Chang-Chang [88] und Hashin [83] beinhalten die Faserbruchkriterien auch für Zug noch zusätzliche Spannungskomponenten quer zur Faser. Puck [84] gibt jedoch an, dass die Abweichungen zwischen dem einfachen Maximalspannungskriterium und komplizierteren Formulierungen normalerweise unter 5% liegen.

Er empfiehlt deshalb das Maximalspannungskriterium als allgemein anwendbar und zudem praktikabel. Da durch den Membranspannungszustand in einer impactbelasteten Sandwichhaut die Zugspannungen dominieren und somit der Einfluss der Spannungen quer zur Faser zusätzlich gering ist, wurde für diese Arbeit das Maximalspannungskriterium

$$\left| \frac{\sigma_{\parallel}}{\sigma_{\parallel(\mathrm{t,c})\mathrm{u}}} \right| \geq 1 \tag{3.12}$$

sowohl für Zug (Festigkeit $\sigma_{\parallel \mathrm{tu}}$) als auch für Druck (Festigkeit $\sigma_{\parallel \mathrm{cu}}$) als geeignet eingeschätzt. Vergleichende Impactrechnungen mit dem Simulationstool CODAC haben den geringen Einfluss von Spannungen quer zur Faser bestätigt.

Zahlreiche Versagenskriterien wurden für Matrixbruch und Delamination entwickelt. Da diese Schadensarten jedoch einen sehr geringen Einfluss auf das Impactverhalten von Sandwichstrukturen haben, wurden die Kriterien für Matrixbruch und Delamination im Rahmen dieser Arbeit nicht ausführlich untersucht und bewertet. Für einen Überblick über bestehende Kriterien sei z. B. auf die Arbeit von Nahas [89] hingewiesen. Soden, Hinton und Kaddour [90]-[96] haben in der so genannte *World-Wide Failure Exercise* 19 Versagenskriterien verglichen und Versuchsergebnissen gegenübergestellt. Für definierte, statische Lastfälle konnten daraus Empfehlungen abgeleitet werden, vgl. [97]. Für Impactlasten gibt es keine derartigen vergleichenden Studien. Puck [98] z. B. empfiehlt seine Kriterien, die bei der *World-Wide Failure Exercise* sehr gut abgeschnitten haben, ausdrücklich nicht für Impactlasten. Im Gegensatz dazu wurden Kriterien für Matrixbruch und Delamination von Chai und Gädke [99], Choi und Chang [100] speziell für die Simulation von Impactvorgängen entwickelt. Es wurden dabei jedoch ausschließlich monolithische Laminate betrachtet. Auch wenn die vorgeschlagenen Versagenskriterien prinzipiell auf Sandwich-Deckschichten anwendbar sind, ist die Schadensmodellierung von Monolithen nicht eins zu eins auf Sandwichdeckschichten übertragbar. Delaminationen sind z. B. in Sandwichstrukturen weit weniger kritisch als in Laminaten, da die Deckhäute viel dünner sind und somit die transversalen Spannungen eine geringere Rolle spielen. Für eine zuverlässige Aussage hinsichtlich Matrixbruch und Delamination fehlen leider die Ergebnisse einer experimentellen Untersuchung.

Degradationsmodelle

Die Modellierung des sich ändernden Materialverhaltens der impactbelasteten Deckschicht soll aus Gründen der Effizienz schrittweise linear erfolgen und sich nach den in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen drei Phasen des Deckschichtversagens richten. Die dritte Phase, das Verhalten der gerissenen Deckschichten, lässt sich mit linearen Materialmodellen nicht geeignet beschreiben. Nach Überschreiten der Festigkeit kommt es zu einer Entfestigung der Faserverbunddeckschicht (siehe Abb. 3.14), welche zu negativen Steifigkeiten und somit zu Konvergenzproblemen führen würde. Besser geeignet sind hierfür Modelle der Bruchmechanik oder energiebasierte Modelle der Schadensmechanik mit kontinuierlicher Entfestigung. Solche aufwendigeren, nichtlinearen Verfahren werden für die Simulation von high-velocity Impacts auf monolithische Laminate z. B. von Iannucci [101] oder Johnson [102] vorgeschlagen. Aktay et al. [57] wenden das von Johnson entwickelte Entfestigungsmodell auch für die Deckschichten von Sandwichstrukturen an. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit jedoch auf effizienten Methoden liegt, wird der Rissfortschritt in der Deckschicht nicht modelliert. Ziel ist es vielmehr, Phase I und Phase II geeignet zu beschreiben und den Beginn

der Rissbildung vorherzusagen.

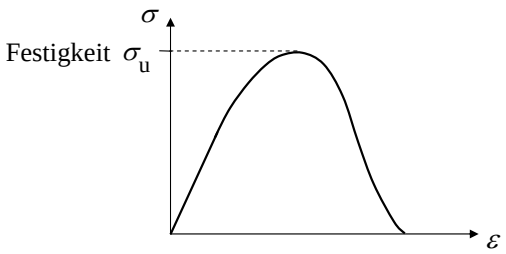


Abbildung 3.14: Spannungs-Dehnungs-Diagramm mit Entfestigung.

Rosen und Hashin [103] bezeichnen das Versagensverhalten von Faserverbunden als sehr komplex und begründen dies mit der großen Variabilität von Faserfestigkeit und Fasergeometrie (Faserondulationen). Dadurch können lokale Schäden entstehen, die zwar eine Minderung der Gesamtsteifigkeit bewirken, aber nicht notwendigerweise zu einem sogenannten *Weakest-Link Failure* [104] führen, bei dem die benachbarten Fasern durch die größere Belastung sofort auch brechen und die gesamte Lamina versagt. In [103] werden einige Hypothesen zu Versagensmechanismen von Faserverbunden unter Zugbelastung vorgestellt (*Cumulative Weakening Failure* [105], *Fibre Break Propagation Failure* [104], *Cumulative Group Mode Failure*), bei denen eine Lastumlagerung von den schwächsten, gebrochenen Fasern zu den Nachbarfasern und dem Matrixmaterial erfolgt. Bei Druckspannungen (welche in impactbelasteten Deckschichten durch den Membranspannungszustand kleiner sind als die Zugspannungen) zeigt sich durch das Knicken einzelner Fasern auch ein nichtlineares Verhalten. Da in dieser Arbeit einfache Modelle gesucht sind, werden die Spannungsinteraktionen zwischen gebrochenen Fasern, Matrix und intakten Fasern nicht betrachtet, sondern die makroskopischen Steifigkeiten der Laminas werden reduziert. Durch die Steifigkeitsreduktion in den äußeren Laminas erfolgt eine Lastumlagerung hin zu den inneren Laminas und die Biegesteifigkeit des Gesamtlaminates wird etwas geringer. Abb. 3.15 veranschaulicht für den Zugbereich einer biegebelasteten Deckschicht die Spannungsumlagerung, wobei hier beispielhaft unterschiedlich starke Ondulationen als Grund für unterschiedlich stark belastete Fasern fungieren. Das Gesamtlaminat versagt erst dann, wenn durch die Lastumlagerung schließlich in allen Einzelschichten die Festigkeit überschritten ist.

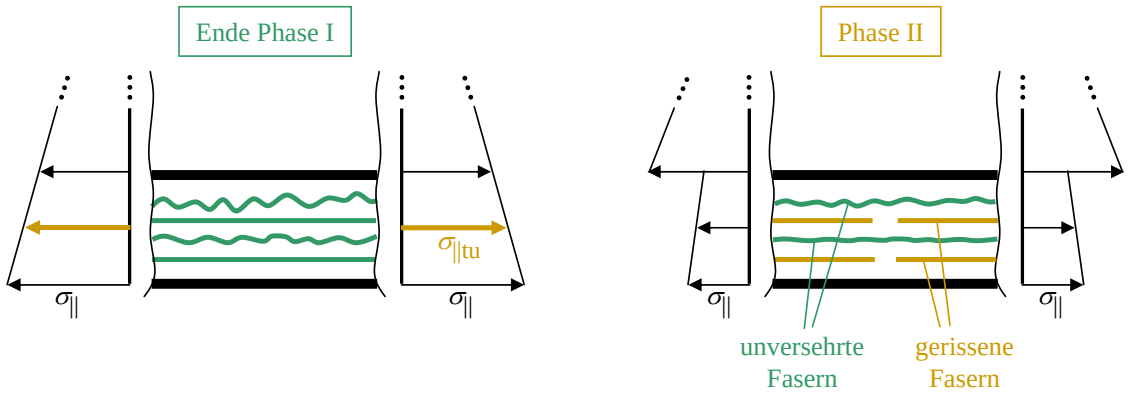


Abbildung 3.15: Membranzugspannungen in der untersten Lamina einer Gewebelagen-Deckschicht vor und nach dem Versagen einzelner Fasern aufgrund von unterschiedlich starken Ondulationen.

Während in Phase I bei allen Laminas die ursprünglichen Materialsteifigkeiten verwendet werden, müssen in Phase II diejenigen Laminas entsprechend degradiert werden, bei denen das Faserbruchkriterium (3.12) überschritten wurde. Die Überprüfung des Versagenskriteriums erfolgt an den Gaußpunkten der Elemente, siehe Erläuterungen zum Kern in Abschnitt 3.2.2. In Dickenrichtung gesehen, wird das Versagenskriterium jeweils in der Mitte der Einzelschichten ausgewertet. Wird Faserbruch festgestellt, so werden die Materialeigenschaften der betroffenen Lamina im zugehörigen Elementviertel degradiert. Analog zum Vorgehen bei der Kerndegradation werden dafür die ursprünglichen Steifigkeitskomponenten C_{ij} mit Hilfe von Degradationsfaktoren D_{ij} reduziert, so dass die reduzierte Steifigkeit (3.7) entsteht, die bei der weiteren Impactberechnung in das HOOKEsche Materialgesetz (2.54) einfließt. Für den Impactverlauf von Bedeutung sind bei der Deckschicht die folgenden Steifigkeitskomponenten:

- bei unidirektionalen Einzelschichten die Membransteifigkeit C_{11} in Faserrichtung,
- bei Multiaxialgelege- und Gewebeschichten die Membransteifigkeiten C_{11} und C_{22} (hier sind die beiden Faserrichtungen gesondert zu behandeln, d. h. Auswertung des Faserbruchkriteriums in beiden Richtungen und separate Reduktion der Membransteifigkeiten).

Alle anderen Steifigkeitskomponenten haben bei einer dünnen Sandwich-Deckschicht keinen großen Einfluss auf den Impactverlauf. Aus diesem Grund müssen auch Matrixbrüche und Delaminationen im Degradationsmodell nicht explizit berücksichtigt werden. Im Fall eines Faserbruchs können die anderen Steifigkeitskomponenten der Einfachheit halber auf einen Wert nahe Null gesetzt werden, ohne das Verformungsverhalten merklich zu verfälschen. Die Größe der Degradationsfaktoren D_{11} bzw. D_{22} hängt von der Qualität des Faserverbundmaterials und vom Lagenaufbau ab. Bei Geweben sind die Degradationsfaktoren durch größere Ondulationsschwankungen im Allgemeinen größer als bei unidirektionalen Laminaten, welche plötzlicher versagen. Für ihre Ermittlung konnte bisher jedoch keine allgemeingültige Vorschrift entwickelt werden. Sofern die Ergebnisse von Biege- oder Impactversuchen vorliegen, können die Degradationsfaktoren für die Sandwichdeckschichten daraus abgeleitet werden. Für die Deckschichten aus CYTEC® 977-2/HTA-Gewebeschichten, die bei den in Abschnitt 5.1 vorgestellten Impactversuchen verwendet wurden, lieferte ein Wert von $D_{11} = D_{22} = 0,5$ eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Es ist darüber hinaus denkbar, dass mit einem genauen Versagensanalyse-Tool, welches mit mikro- oder mesomechanischen Modellen arbeitet, makromechanische Degradationsfaktoren berechnet werden, die als Eingangswerte in die Impactanalyse von CODAC einfließen können.

Oben wurde bereits angesprochen, dass durch die Degradation der äußeren Laminas eine Lastumlagerung hin zu den inneren Laminas erfolgt. Interessant zu erwähnen ist, dass dadurch die Deckschicht-Durchbiegung einer impactbelasteten Sandwichschale nur wenig größer wird und dass entsprechend auch der Anstieg der Kontaktkraft-Zeit-Kurve durch diese Materialveränderung kaum abnimmt. Der Grund hierfür ist der Verlust an Membransteifigkeit im geschwächten Deckschichtbereich, der zu einer größeren Membrandehnung führt, während sich der unversehrte Bereich der Platte wieder leicht entspannt. Folglich wird der Membranspannungszustand im geschwächten Bereich verstärkt, die Gesamtdurchbiegung nimmt jedoch kaum zu. Je geringer die Steifigkeiten der geschädigten Laminas, um so größer werden die Zugspannungen in den intakten inneren Schichten und um so eher reißt

das gesamte Laminat. Die Wahl der Degradationsfaktoren D_{11} bzw. D_{22} ist folglich entscheidend für die richtige Vorhersage des Beginns der Rissbildung. Für die Beschreibung eines Impactverlaufs ohne sichtbare Schädigung ist sie hingegen wenig relevant.

3.2.4 Modellierung der Deckschicht-Kern-Ablösung

Da bei Impactlasten auf passabel gefertigten Sandwichpaneelen stets zuerst der Kern versagt, werden durch das Kern-Degradationsmodell die transversalen Schubsteifigkeiten bereits reduziert. Sollte es daraufhin noch zum Ablösen des Kerns von der Deckschicht kommen, so sind davon keine weiteren Steifigkeitseinbußen zu erwarten, die den Impactverlauf beeinflussen. Folglich wird eine Deckschicht-Kern-Ablösung beim hier vorgeschlagenen Impactsimulationsverfahren nicht modelliert.

Kapitel 4

Transiente Impactanalyse

Bei einer dynamischen Finite-Elemente-Analyse, wie sie für die Impactsimulation benötigt wird, bilden die Bewegungsgleichungen der Elementknoten im linearen Fall das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}}, \tag{4.1}$$

wobei $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{K}$ die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen, $\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$ der Vektor der äußeren Kräfte und $\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$ die Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren des Finite-Elemente-Systems sind. Bei einem low-velocity Impact tritt im Allgemeinen keine geschwindigkeitsabhängige Dämpfung auf, so dass die Bewegungsgleichungen im Rahmen dieser Arbeit kurz durch

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}} \tag{4.2}$$

beschrieben werden können. Gesucht sind die Verschiebungen $\mathbf{u}$ zu einer Zeit t, die das Gleichungssystem (4.2) sowie die gegebenen Startbedingungen $\mathbf{u}^{(0)}$, $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ und $\ddot{\mathbf{u}}^{(0)}$ zur Zeit $t = t^{(0)}$ erfüllen. Zur Lösung des Differentialgleichungssystems werden in Finite-Elemente-Berechnungen der Praxis hauptsächlich direkte Integrationsmethoden verwendet, bei denen die Bewegungsgleichungen mit Hilfe eines numerischen Schritt-für-Schritt-Verfahrens direkt integriert werden, ohne sie vorher in eine andere Form zu transformieren. Das Gleichungssystem wird dabei nicht für eine beliebige Zeit t gelöst, sondern nur in diskreten Zeitintervallen Δt, bei denen der Bewegungszustand früherer Zeitschritte bekannt ist und der Bewegungszustand $\mathbf{u}^{(n+1)}$, $\dot{\mathbf{u}}^{(n+1)}$, $\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)}$ zur Zeit $t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t$ ermittelt wird. Man unterscheidet zwischen Einschritt- und Mehrschritt-Methoden. Während bei Mehrschritt-Methoden die Lösung zur Zeit $t^{(n+1)}$ von den Ergebnissen mehrerer vorangegangener Zeitschritte abhängt, lässt sich bei Einschritt-Methoden die Lösung allein aus den Kinematen $\mathbf{u}^{(n)}$, $\dot{\mathbf{u}}^{(n)}$, $\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}$ des unmittelbar vorangegangenen Zeitschritts n ermitteln, vgl. Abb. 4.1.

Innerhalb der Zeitintervalle Δt wird ein Ansatz gewählt, der die Kinematen benachbarter Zeitschritte verknüpft, so dass sich das Gleichungssystem (4.2) nach einem Kinemat des Zeitschritts $n+1$ (i. d. R. $\mathbf{u}^{(n+1)}$) auflösen lässt. Dieser Ansatz bestimmt auch die Stabilität, die Genauigkeit und den numerischen Aufwand des Lösungsverfahrens. Ist zur Berechnung der Lösung $\mathbf{u}^{(n+1)}$ keine Zerlegung der Systemsteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ erforderlich, so spricht man von *expliziten Integrationsmethoden*. Zumeist ist dies dann der Fall, wenn die Bewe-

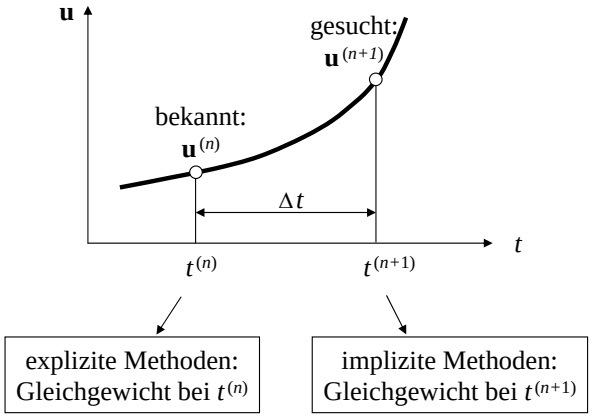


Abbildung 4.1: Prinzip einer Einschritt-Integrationsmethode.

gungsgleichungen (4.1) zur Zeit $t^{(n)}$ aufgestellt werden. Methoden, bei denen die Systemsteifigkeitsmatrix zur Lösung des Gleichungssystems zerlegt werden muss, heißen *implizite Integrationsmethoden*. Bei ihnen wird die Lösung $\mathbf{u}^{(n+1)}$ in der Regel unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen zur Zeit $t^{(n+1)}$ bestimmt. Einzelne Vertreter sowie ausführliche Erläuterungen zu diesen beiden Arten von Integrationsmethoden sind in den Werken von Bathe [66], Belytschko und Hughes [106], [107] oder Zienkiewicz und Taylor [108] zu finden. Eine umfangreiche Übersicht über verfügbare Methoden wurde von Dokainish und Subbaraj [109], [110] veröffentlicht.

Für die Impactanalyse in CODAC sind die Newmark-Methode als Vertreter der impliziten Integrationsverfahren und die zentrale Differenzenmethode als explizites Integrationsverfahren programmtechnisch umgesetzt. Während die Newmark-Methode bereits vor Beginn dieser Arbeit in CODAC zur Verfügung stand, wurde die zentrale Differenzenmethode neu implementiert, um die Vorzüge des expliziten Integrationsverfahrens hinsichtlich des numerischen Aufwands zu prüfen. Beide Integrationsmethoden sind in Abschnitt 4.1 kurz beschrieben. Bei der Berechnung von Impactvorgängen muss zusätzlich ein Kontaktalgorithmus in die dynamische Analyse integriert werden, der die Interaktion zwischen Impactor und impactbelasteter Struktur beschreibt. In Abschnitt 4.2 wird das in CODAC verwendete Kontaktgesetz vorgestellt. Die Einbindung des Kontaktgesetzes in den Impactalgorithmus ist vom Zeitschrittverfahren abhängig und wird in Abschnitt 4.3 für die in CODAC verwendeten Integrationsmethoden erläutert. Das Konvergenzverhalten von impliziten und expliziten Integrationsmethoden wird in Abschnitt 4.4 erläutert und in Abschnitt 4.5 anhand von Beispielen veranschaulicht. In Abschnitt 4.6 werden schließlich Schlussfolgerungen für den Einsatz der Integrationsmethoden gezogen.

4.1 Integrationsmethoden in CODAC

4.1.1 Newmark-Methode

Das NEWMARKsche Integrationsschema [111] ist eines der bekanntesten und am häufigsten eingesetzten impliziten Integrationsverfahren. Es verwendet für die Funktionen der Kinematen zur Zeit $t^{(n+1)}$ eine TAYLOR-Reihenentwicklung, die nach dem quadratischen Glied abgebrochen ist,

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\,\ddot{\mathbf{u}}^{(n)} + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)}\right], \tag{4.3}$$

$$\dot{\mathbf{u}}^{(n+1)} = \dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \Delta t\left[(1-\delta)\,\ddot{\mathbf{u}}^{(n)} + \delta\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)}\right]. \tag{4.4}$$

Abb. 4.2 illustriert beispielhaft den Ansatz (4.3), der die Verschiebungen $\mathbf{u}^{(n+1)}$ in Abhängigkeit der Kinematen des Zeitschritts n und der Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)}$ beschreibt. Die In-

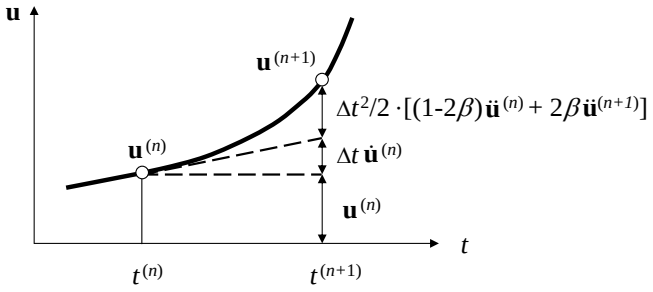


Abbildung 4.2: Ansatz für $\mathbf{u}^{(n+1)}$ bei der NEWMARK-Methode.

tegrationsparameter β und δ bestimmen die Stabilität und den Grad der Genauigkeit des Integrationsverfahrens. Für $\delta \geq 0,5$ und $\beta \geq 0,25\,(\delta + 0,5)^2$ ist das Integrationsschema unbedingt stabil, d.h. die Lösung wächst auch bei beliebig großen Zeitschritten nicht unbegrenzt (siehe Abschnitt 4.4 für nähere Erläuterungen zur Konvergenz). Zusammen mit (4.3) und (4.4) ergibt sich aus dem Gleichgewicht (4.2) zum Zeitpunkt $t^{(n+1)}$,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{(n+1)} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n+1)}, \tag{4.5}$$

das Gleichungssystem

$$\left[\mathbf{K} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}\right]\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n+1)} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{u}^{(n)} + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}\right] \tag{4.6}$$

zum Lösen der Unbekannten $\mathbf{u}^{(n+1)}$. Für nichtlineare Probleme erfolgt entsprechend Abschnitt 2.2.4 (mit dem dort erläuterten Verzicht auf Iterationen innerhalb eines Zeitschritts) eine Linearisierung im Zeitintervall Δt, und es wird analog zum Kräftegleichgewicht (2.66) mit

$$\left[\mathbf{K}^{(n)} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}\right]\Delta\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n+1)} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}\right] - \mathbf{F}_{\mathrm{i}}^{(n)} \tag{4.7}$$

der Verschiebungszuwachs $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ berechnet, wobei $\mathbf{F}_{\mathrm{i}}^{(n)}$ die inneren Kräfte (2.67) im Zeitschritt n sind.

4.1.2 Zentrale Differenzenmethode

Bei der zentralen Differenzenmethode werden die Beschleunigungen und Geschwindigkeiten zur Zeit $t^{(n)}$ durch die folgenden Finite-Differenzen-Ausdrücke angenähert:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(n)} = \frac{1}{2\Delta t}\left(-\mathbf{u}^{(n-1)} + \mathbf{u}^{(n+1)}\right), \tag{4.8}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^{(n)} = \frac{1}{\Delta t^2}\left(\mathbf{u}^{(n-1)} - 2\mathbf{u}^{(n)} + \mathbf{u}^{(n+1)}\right). \tag{4.9}$$

Abb. 4.3 zeigt den Ansatz (4.8), der die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}^{(n)}$ in Abhängigkeit der Verschiebungen der beiden benachbarten Zeitschritte ausdrückt. Entsprechend der Vorgehensweise

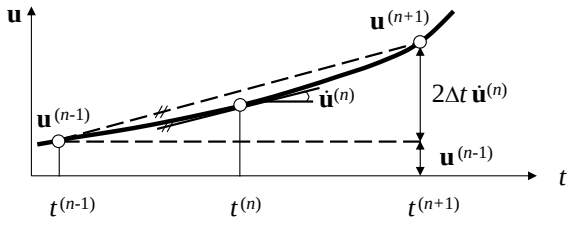


Abbildung 4.3: Ansatz für $\dot{\mathbf{u}}^{(n)}$ bei der Differenzenmethode.

bei expliziten Integrationsmethoden werden die Bewegungsgleichungen (4.2) zur Zeit $t^{(n)}$ herangezogen,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{(n)} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n)}, \tag{4.10}$$

um die Verschiebungen zur Zeit $t^{(n+1)}$ zu berechnen. Mit (4.8) und (4.9) ergibt sich das Gleichungssystem

$$\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n)} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right)\mathbf{u}^{(n)} - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(n-1)}. \tag{4.11}$$

Für die Berechnung des Verschiebungszuwachses $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ bei nichtlinearen Problemen wird

$$\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\Delta\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n)} - \mathbf{F}_{\mathrm{i}}^{(n)} + \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(n)} - \frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}\mathbf{u}^{(n-1)} \tag{4.12}$$

verwendet. Es zeigt sich, dass zur Bestimmung der Lösung $\mathbf{u}^{(n+1)}$ bzw. $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ neben $\mathbf{u}^{(n)}$ auch $\mathbf{u}^{(n-1)}$ benötigt wird. Da als Startbedingung $\mathbf{u}^{(0)}$, $\dot{\mathbf{u}}^{(0)}$ und $\ddot{\mathbf{u}}^{(0)}$ bekannt sind, können mit (4.8) und (4.9) die Verschiebungen zur Zeit $-\Delta t$ berechnet werden,

$$\mathbf{u}^{(-1)} = \mathbf{u}^{(0)} - \Delta t\dot{\mathbf{u}}^{(0)} + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{\mathbf{u}}^{(0)}. \tag{4.13}$$

Die zentrale Differenzenmethode ist nur bedingt stabil. Um Stabilität zu gewährleisten, muss der Zeitschritt Δt kleiner sein als ein kritischer Wert Δt_{kr}, siehe hierzu Abschnitt 4.4.

4.2 Kontaktgesetz

Heinrich Hertz [112] schuf in den 1880er Jahren mit seinen Arbeiten zur Berührung fester elastischer Körper die Grundlage für die Kontaktforschung. In der Hertzschen Theorie des elastischen Normalkontakts beschreibt Grundfall 1 die Berührung zweier rotationssymmetrischer Körper, deren Kontaktbereich ein Kreis ist. In diese erste Kategorie fällt auch die Berührung zwischen einem kugelförmigen Impactor und einer Platte, wie sie im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden. Wie Abrate [113] erläutert, können Kontaktgesetze, die für den statischen Fall gelten, auch für die dynamische Analyse von low-velocity Impacts verwendet werden, da hier Dehnraten und Wellenausbreitungseffekte gewöhnlich vernachlässigbar sind. Tatsächlich nutzte Timoshenko [114] bereits 1913 eine einfache Beziehung zwischen Kontaktkraft und Eindellung, um den Impactvorgang einer Stahlkugel auf einen Balken zu berechnen.

Das Hertzsche Kontaktgesetz

$$F_\mathrm{c} = k_\mathrm{c}\,\alpha^{\frac{3}{2}}, \tag{4.14}$$

beschreibt den für das dynamische Verhalten der impactbelasteten Platte so entscheidenden Zusammenhang zwischen der Kontaktkraft F_c und der Eindellung α. Die Kontaktsteifigkeit k_c lässt sich durch

$$k_\mathrm{c} = \frac{4}{3}\,E\,R^{\frac{1}{2}}, \tag{4.15}$$

berechnen, wobei der äquivalente Radius R im betrachteten Fall gleich dem Radius R_imp des Impactors ist und der äquivalente Elastizitätsmodul E mit

$$\frac{1}{E} = \frac{1-\nu_\mathrm{imp}^2}{E_\mathrm{imp}} + \frac{1-\nu_\mathrm{plate}^2}{E_\mathrm{plate}} \tag{4.16}$$

von den Elastizitätsmoduln des Impactors und der Platte abhängt. Für Sandwichdeckschichten aus Faserverbund ist $E_\mathrm{plate} = E_{zz}$ der äußersten Schicht. Die durch die Kontaktkraft belastete Kontaktfläche ist durch

$$\text{den Radius} \quad a = \left(\frac{3F_\mathrm{c}R}{4E}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \tag{4.17}$$

$$\text{die Druckverteilung} \quad p(r) = p_0\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2} \tag{4.18}$$

beschrieben, wobei p_0 der maximale Kontaktdruck und r die radiale Entfernung vom zentralen Impactpunkt sind, vgl. Abb. 4.4.

Obwohl Hertz eine Reihe von Voraussetzungen für die Gültigkeit seines Kontaktgesetzes (4.14) angab (Kontaktkörper sind homogene, isotrope, elastische Halbräume, Oberflächen sind kontinuierlich und reibungsfrei, Verzerrungen sind klein), ist es doch für eine Vielzahl von Fällen, die diese Bedingungen nicht erfüllen, anwendbar. So wird es für Faserverbundstrukturen, die weder isotrop noch homogen sind, heute weitverbreitet eingesetzt (z. B. in [115], [116] für Monolithe oder in [48], [117] für Sandwichstrukturen). Darüber hinaus wurden auch Modifikationen des Hertzschen Kontaktgesetzes entwickelt, um das inelastische Verhalten von geschädigten Faserverbundmaterialien geeigneter zu modellieren. Eine Über-

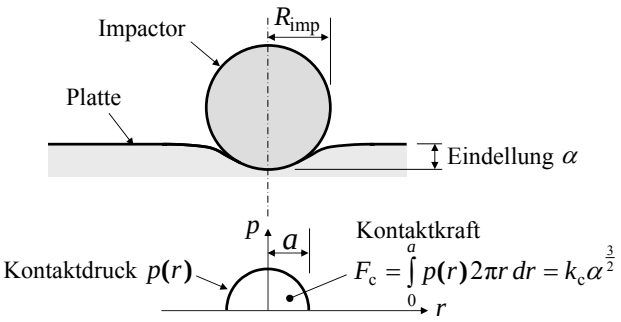


Abbildung 4.4: Impactbelastete Platte und Druckverteilung auf der Kontaktfläche.

sicht hierzu sowie Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen veröffentlichten YANG und SUN [118]. Bei der Anwendung von modifizierten HERTZschen Kontaktgesetzen für die Impactanalyse von Faserverbundstrukturen (z.B. in [119]-[122] für Monolithe oder in [55] für Sandwichstrukturen) wird in der Belastungsphase das Kontaktgesetz (4.14) zumeist noch unverändert eingesetzt. In der Entlastungsphase wird dann zur Berücksichtigung der Energieabsorption ein Kontaktgesetz der Form

$$F_c = F_{cmax}\frac{(\alpha - \alpha_{res})^m}{(\alpha_{max} - \alpha_{res})^p}, \tag{4.19}$$

verwendet, worin F_{cmax} die maximale Kontaktkraft, α_{max} die maximale Eindellung und α_{res} die bleibende Eindellung sind. Die Exponenten m und p variieren zwischen $\frac{3}{2}$ und $\frac{5}{2}$ und werden, wie auch α_{res}, empirisch bestimmt. Eine von (4.14) und (4.19) abweichende Modifikation des HERTZschen Kontaktgesetzes wird von KHALILI et al. [123] für Sandwichstrukturen vorgeschlagen. Darin hängt jedoch die Kontaktsteifigkeit k_c u. a. auch von den E-Moduln des Kerns und der impactabgewandten Deckschicht ab, was die Gültigkeit dieses Modells fraglich erscheinen lässt. Bei Impactsimulationen mit sehr feiner Diskretisierung, bei denen auch der Impactor als FE-vernetzter Körper modelliert wird, kommen im Allgemeinen iterative Kontaktalgorithmen zum Einsatz (z. B. in [50]-[52] für Sandwichstrukturen). Bei solchen Verfahren werden LAGRANGE-Multiplikatoren oder Penalty-Methoden zur Lösung der Variationsungleichungen genutzt, die durch die schwache Formulierung der Kontaktbedingungen (z. B. keine Durchdringung der Körper, keine Übertragung von Zugkräften) entstehen; einen Überblick hierzu gibt u. a. WRIGGERS [124].

Die Ziele der Impactanalyse in dieser Arbeit sind vornehmlich eine hohe Effizienz und eine Minimierung der empirischen Parameter, die für die verwendeten Modelle benötigt werden. Auch weil der Entlastungsprozess keinen weiteren Schadenszuwachs mit sich bringt, erfolgt die Beschreibung des Impactvorgangs bislang nur bis zur maximalen Belastung. Deshalb wird im Simulationstool CODAC bisher ausschließlich das originale HERTZsche Kontaktgesetz (4.14) verwendet. Anhand des Radius (4.17) der HERTZschen Kontaktfläche wird die Anzahl der belasteten Elemente bestimmt, die je nach Feinheit der Vernetzung mit steigender Kontaktkraft schrittweise zunimmt. Eine Simulation über die maximale Belastung hinaus, bei der sowohl ein modifiziertes HERTZsches Kontaktgesetz als auch das Materialverhalten bei Entlastung berücksichtigt wird, brächte zusätzlich Auskunft über die Größe einer bleibenden Eindellung und wäre interessant für eine Weiterentwicklung des hier vorgestellten Impactsimulationsverfahrens.

4.3 Einbindung des Kontaktgesetzes in die Integrationsmethoden

4.3.1 Impactalgorithmus mit der Newmark-Methode

Zur Bestimmung der Verschiebungsinkremente $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ der impactbelasteten Platte mit dem NEWMARKschen Gleichungssystem (4.7) werden neben den Kinematen $\mathbf{u}^{(n)}$, $\dot{\mathbf{u}}^{(n)}$, $\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}$ und den inneren Kräften $\mathbf{F}_{\mathrm{i}}^{(n)}$ zur Zeit $t^{(n)}$ auch die äußeren Kräfte $\mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n+1)}$ zur Zeit $t^{(n+1)}$ benötigt. Diese bestehen mit

$$\mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a,con}}^{(n+1)} + \mathbf{F}_{\mathrm{a,rest}}^{(n+1)} \tag{4.20}$$

aus eventuellen statischen Kräften $\mathbf{F}_{\mathrm{a,rest}}^{(n+1)}$, welche über alle Zeitschritte konstant sind, und aus den Kontaktkraft-Komponenten $\mathbf{F}_{\mathrm{a,con}}^{(n+1)}$ der impactbelasteten Knoten, die sich aus der Kontaktkraft (4.14) im Zeitschritt $n+1$,

$$F_{\mathrm{c}}^{(n+1)} = k_{\mathrm{c}} \left(\alpha^{(n+1)}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{4.21}$$

und der Kontaktdruckverteilung (4.18) ergeben. In (4.21) ist die Eindellung

$$\alpha^{(n+1)} = w_{\mathrm{c}}^{(n+1)} - w_{\mathrm{imp}}^{(n+1)} \tag{4.22}$$

die Diskrepanz zwischen der transversalen Verschiebung $w_{\mathrm{c}}^{(n+1)}$ der Plattenoberfläche am zentralen Impactknoten und der Verschiebung $w_{\mathrm{imp}}^{(n+1)}$ des Impactors zur Zeit $t^{(n+1)}$. Die Größe der Kontaktkraft $F_{\mathrm{c}}^{(n+1)}$ hängt mit $w_{\mathrm{c}}^{(n+1)}$ folglich von der Lösung $\Delta\mathbf{u}^{(n+1)}$ des Gleichungssystems (4.7) ab. Unabhängig von möglichen materiellen Nichtlinearitäten müssten also zur Bestimmung der Kontaktkraft mehrere Iterationen innerhalb eines Zeitschritts durchgeführt werden. Eine derartige Iterationsschleife wurde beispielsweise im Impactsimulationstool CDTAC umgesetzt, aus dem CODAC ursprünglich hervorgegangen war. Wenn jedoch innerhalb eines Zeitschritts geometrische Linearität angenommen wird (was in CODAC der Fall ist, siehe Ausführungen am Ende des Abschnitts 2.2.4), so lassen sich die Verschiebungen superponieren, und eine effizientere direkte Lösung ist möglich: Das Gleichungssystem (4.7) wird in zwei Teilgleichungssysteme aufgeteilt:

$$\left[\mathbf{K}^{(n)} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}\right] \mathbf{u}_{\mathrm{con}}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a,con}}^{(n+1)}, \tag{4.23}$$

$$\left[\mathbf{K}^{(n)} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}\right] \Delta\mathbf{u}_{\mathrm{rest}}^{(n+1)} = \mathbf{F}_{\mathrm{a,rest}}^{(n+1)} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(n)} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}\right] - \mathbf{F}_{\mathrm{i}}^{(n)}. \tag{4.24}$$

Teilgleichungssystem (4.23) erfasst den Verschiebungsanteil $\mathbf{u}_{\mathrm{con}}^{(n+1)}$, welcher allein aus der noch unbekannten Kontaktkraft resultiert. Teilgleichungssystem (4.24) erfasst den restlichen Verschiebungsanteil $\Delta\mathbf{u}_{\mathrm{rest}}^{(n+1)}$, der aus allen übrigen Kräften resultiert, die bereits bekannt sind. Durch Superposition der Verschiebungsanteile ergibt sich

$$\Delta\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}_{\mathrm{con}}^{(n+1)} + \Delta\mathbf{u}_{\mathrm{rest}}^{(n+1)}. \tag{4.25}$$

Für das transversale Verschiebungsinkrement $\Delta w_{\mathrm{c}}^{(n+1)}$ der Plattenoberfläche am zentralen Impactknoten gilt analog

$$\Delta w_{\mathrm{c}}^{(n+1)} = w_{\mathrm{c,con}}^{(n+1)} + \Delta w_{\mathrm{c,rest}}^{(n+1)} \,. \tag{4.26}$$

Der Verschiebungsanteil $\Delta w_{\mathrm{c,rest}}^{(n+1)}$, welcher infolge aller anderen Kräfte außer der Kontaktkraft entsteht, ist bekannt. Der Verschiebungsanteil $w_{\mathrm{c,con}}^{(n+1)}$ lässt sich durch

$$w_{\mathrm{c,con}}^{(n+1)} = F_{\mathrm{c}}^{(n+1)}\, w_{\mathrm{c,con1}} \tag{4.27}$$

in Abhängigkeit der Kontaktkraft $F_{\mathrm{c}}^{(n+1)}$ ausdrücken, wobei $w_{\mathrm{c,con1}}$ die bekannte transversale Verschiebung der Plattenoberfläche am zentralen Impactknoten ist, die infolge einer Einheits-Kontaktkraft entsteht, die mit dem Betrag $F_{\mathrm{c}} = 1$ entsprechend der Kontaktdruckverteilung auf die impactbelasteten Knoten wirkt. Mit (4.26) und (4.27) wird aus der für die Eindellung (4.22) benötigten Verschiebung der Plattenoberfläche:

$$w_{\mathrm{c}}^{(n+1)} = w_{\mathrm{c}}^{(n)} + F_{\mathrm{c}}^{(n+1)}\, w_{\mathrm{c,con1}}^{(n+1)} + \Delta w_{\mathrm{c,rest}}^{(n+1)} \,. \tag{4.28}$$

Sowohl die Verschiebungen w_{c} der Plattenoberfläche als auch die Verschiebungen w_{imp} des Impactors sind in Abb. 4.5 für die Zeitschritte n und $n+1$ illustriert. Die für die Eindellung (4.22) ebenfalls benötigte Impactorverschiebung $w_{\mathrm{imp}}^{(n+1)}$ kann nach (4.3) wie folgt berechnet werden:

$$w_{\mathrm{imp}}^{(n+1)} = w_{\mathrm{imp}}^{(n)} + \Delta t \dot{w}_{\mathrm{imp}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\,\ddot{w}_{\mathrm{imp}}^{(n)} + 2\beta \ddot{w}_{\mathrm{imp}}^{(n+1)}\right] \,. \tag{4.29}$$

Die Impactorbeschleunigung zur Zeit $t^{(n+1)}$ lautet

$$\ddot{w}_{\mathrm{imp}}^{(n+1)} = g + \frac{F_{\mathrm{c}}^{(n+1)}}{m_{\mathrm{imp}}} \tag{4.30}$$

mit der Erdbeschleunigung $g = -9,81 \frac{m}{s^2}$, der Masse m_{imp} des Impactors und der noch unbekannten Kontaktkraft $F_{\mathrm{c}}^{(n+1)}$. In (4.29) lässt sich die bekannte Verschiebung, die der Impactor zur Zeit $t^{(n+1)}$ erreichen würde, wenn es keine Kontaktkraft gäbe, durch

$$w_{\mathrm{imp0}}^{(n+1)} = w_{\mathrm{imp}}^{(n)} + \Delta t \dot{w}_{\mathrm{imp}}^{(n)} + \frac{\Delta t^2}{2}\left[(1-2\beta)\,\ddot{w}_{\mathrm{imp}}^{(n)} + 2\beta\, g\right] \tag{4.31}$$

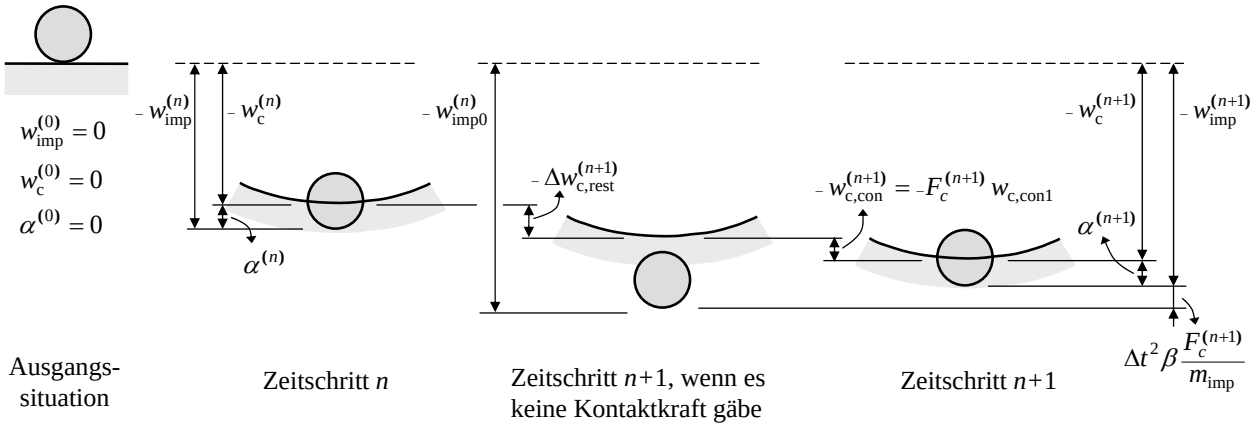


Abbildung 4.5: Verschiebungen w_{c} der Plattenoberfläche am zentralen Impactknoten, Impactorverschiebungen w_{imp} und Eindellungen α in verschiedenen Zeitschritten.

zusammenfassen. Für die tatsächliche Impactorverschiebung (4.29) gilt somit

$$w_{\mathrm{imp}}^{(n+1)} = w_{\mathrm{imp0}}^{(n+1)} + \Delta t^2 \beta \, \frac{F_{\mathrm{c}}^{(n+1)}}{m_{\mathrm{imp}}} \, . \tag{4.32}$$

Aus dem Kontaktgesetz (4.21), der Eindellung (4.22) sowie der Plattenverschiebung (4.28) und der Impactorverschiebung (4.32) lässt sich schließlich die Beziehung

$$k_{\mathrm{c}} \left(\alpha^{(n+1)}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{w_{\mathrm{c}}^{(n)} + \Delta w_{\mathrm{c,rest}}^{(n+1)} - w_{\mathrm{imp0}}^{(n+1)} - \alpha^{(n+1)}}{\Delta t^2 \beta \frac{1}{m_{\mathrm{imp}}} - w_{\mathrm{c,con1}}^{(n+1)}} \tag{4.33}$$

herleiten, die als einzige Unbekannte die Eindellung $\alpha^{(n+1)}$ enthält. Nach Berechnung der Eindellung kann aus dem Kontaktgesetz (4.21) die Kontaktkraft $F_{\mathrm{c}}^{(n+1)}$ ermittelt werden. Für die Verschiebungen $\mathbf{u}^{(n+1)}$ ergibt sich analog zu (4.28) schließlich

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} + F_{\mathrm{c}}^{(n+1)} \, \mathbf{u}_{\mathrm{con1}}^{(n+1)} + \Delta \mathbf{u}_{\mathrm{rest}}^{(n+1)} \, . \tag{4.34}$$

4.3.2 Impactalgorithmus mit der zentralen Differenzenmethode

Zur Bestimmung der Verschiebungsinkremente $\Delta \mathbf{u}^{(n+1)}$ der impactbelasteten Platte mit dem Gleichungssystem (4.12) der zentralen Differenzenmethode werden die äußeren Kräfte $\mathbf{F}_{\mathrm{a}}^{(n)}$ zur Zeit $t^{(n)}$ benötigt. Neben eventuellen statischen Kräften gehören dazu die Kontaktkraft-Komponenten der impactbelasteten Knoten, die in der Summe die Kontaktkraft (4.14) ergeben, d. h. zur Zeit $t^{(n)}$ gilt

$$F_{\mathrm{c}}^{(n)} = k_{\mathrm{c}} \left(\alpha^{(n)}\right)^{\frac{3}{2}} . \tag{4.35}$$

Die Eindellung $\alpha^{(n)}$ ergibt sich analog zu (4.22) aus der Verschiebungsdiskrepanz

$$\alpha^{(n)} = w_{\mathrm{c}}^{(n)} - w_{\mathrm{imp}}^{(n)} \, . \tag{4.36}$$

Anders als bei der Integrationsmethode nach Newmark ist hier die Verschiebung $w_{\mathrm{c}}^{(n)}$ der Plattenoberfläche am zentralen Impactknoten aus dem vorangegangenen Zeitschritt bekannt. Das Gleichungssystem (4.12) kann folglich direkt gelöst und die Verschiebungsinkremente $\Delta \mathbf{u}^{(n+1)}$ können bestimmt werden.

Die im nächsten Zeitschritt benötigte Impactorverschiebung $w_{\mathrm{imp}}^{(n+1)}$ kann mit (4.9) wie folgt berechnet werden:

$$w_{\mathrm{imp}}^{(n+1)} = 2 w_{\mathrm{imp}}^{(n)} - w_{\mathrm{imp}}^{(n-1)} + \Delta t^2 \left(g + \frac{F_{\mathrm{c}}^{(n)}}{m_{\mathrm{imp}}} \right) . \tag{4.37}$$

4.4 Konvergenzverhalten

Der Rechenaufwand eines Zeitschrittverfahrens ist direkt proportional zur Anzahl der benötigten Zeitschritte. Für die Effizienz einer Integrationsmethode ist folglich die Zeitschrittlänge entscheidend, die weder zu groß sein darf für eine ausreichend gute Konvergenz noch unnötigerweise zu klein. Butcher [125] zeigt, dass ein Algorithmus automatisch konvergiert, wenn Stetigkeit und Stabilität gesichert sind (siehe hierzu Abschnitt 4.4.1). Ist diese Konvergenzbedingung erfüllt, so dient des Weiteren die Genauigkeit als Maß für die Güte der Konvergenz, d. h. wie gut die wahre Lösung angenähert wird (Abschnitt 4.4.2). In den Werken von Bathe [66], Belytschko und Hughes [106], [107] werden mehrere implizite und explizite Integrationsmethoden sehr ausführlich auf Stabilität und Genauigkeit hin untersucht. In den folgenden Abschnitten wird insbesondere auf die im Simulationstool CODAC umgesetzten Integrationsmethoden eingegangen.

4.4.1 Stabilität

Ein Integrationsverfahren ist dann stabil, wenn Fehler im Verlauf der Integration nicht unbegrenzt wachsen. Eine hinreichende Bedingung für Stabilität ist die genaue Integration eines dynamischen Systems bis zu seiner höchstfrequenten Komponente. Dies lässt sich prinzipiell durch eine Zeitschrittlänge Δt realisieren, die deutlich kleiner ist als die kleinste Periodendauer $T_{\min}$ des Systems (z. B. $T_{\min}/100$). Diese Bedingung ist jedoch nicht unbedingt notwendig, d. h. in bestimmten Fällen können auch größere Zeitschritte für eine stabile Rechnung sorgen.

Zur Ermittlung der Stabilität einer Integrationsmethode muss das Verhalten der numerischen Lösung bei bestimmten Ausgangsbedingungen untersucht werden. Man verwendet dafür die Rekursionsbeziehung

$$\hat{\mathbf{u}}^{(n+k)} = \mathbf{A}^k \, \hat{\mathbf{u}}^{(n)} \,, \tag{4.38}$$

in der $\mathbf{A}$ die Übertragungsmatrix der Integrationsapproximation darstellt und die Vektoren $\hat{\mathbf{u}}^{(n)}$ die Lösungsgrößen enthalten, z.B. $\hat{\mathbf{u}}^{(n)} = [\mathbf{u}^{(n)} \; \dot{\mathbf{u}}^{(n)} \; \ddot{\mathbf{u}}^{(n)}]^T$. Stabilität ist dann gegeben, wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ kleiner als 1 sind. Sowohl für die Newmark-Methode als auch für die zentrale Differenzenmethode hat z. B. Bathe [66] die Übertragungsmatrizen $\mathbf{A}$ hergeleitet und die Stabilitätskriterien durch Berechnung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ spezifiziert.

Stabilität der Newmark-Methode

Bei der Newmark-Methode hängt die Stabilität von den Integrationsparametern β und δ ab. Für $\delta \geq 0,5$ und $\beta \geq 0,25\,(\delta + 0,5)^2$ sind die Eigenwerte der Übertragungsmatrix für jede beliebig große Zeitschrittlänge kleiner als 1. Man spricht in einem solchen Fall von unbedingter Stabilität, da das Integrationsschema bei jeder Zeitschrittlänge stabil ist.

Stabilität der zentralen Differenzenmethode

Die zentrale Differenzenmethode ist nur bedingt stabil, d. h. nur für kleine Zeitschrittlängen $\Delta t \leq \Delta t_{\text{kr}}$ wächst die Lösung nicht unbegrenzt. Als Stabilitätsgrenze gilt bei der zentralen Differenzenmethode die kritische Zeitschrittlänge

$$\Delta t_{\mathrm{kr}} = \frac{T_{\min}}{\pi}\,, \tag{4.39}$$

wobei $T_{\min}$ die kleinste Periodendauer des Systems ist.

Die bedingte Stabilität und die damit erforderlichen sehr kleinen Zeitschrittlängen der zentralen Differenzenmethode sind ein großer Nachteil gegenüber der impliziten NEWMARK-Methode. Je feiner die Vernetzung ist, um so kleiner werden die Elemente und um so kleiner wird auch die Stabilitätsgrenze. Unbedingte Stabilität kann nur von manchen nichtlinearen expliziten Integrationsmethoden (z. B. einige RUNGE-KUTTA-Methoden höherer Ordnung) erreicht werden, bei denen sich jedoch die Genauigkeit signifikant verschlechtert, wenn das Zeitintervall größer wird, vgl. [106], [109]. Zahlreiche Anstrengungen wurden bereits unternommen, um diese Schwäche expliziter Integrationsmethoden zu vermeiden, siehe z. B. die Arbeiten von JENSEN [126] und PARK [127]. Es konnte jedoch kein geeignetes Verfahren gefunden werden, das zuverlässig und ohne signifikante Genauigkeitsverluste eine deutliche Verbesserung des Stabilitätsverhaltens erreicht. In der Literatur wird schließlich die zentrale Differenzenmethode als bestgeeignete explizite Integrationsmethode empfohlen, [127], [128]. Die Stabilitätsgrenze von expliziten Integrationsmethoden lässt sich aber immerhin durch Veränderungen im dynamischen System erhöhen, wodurch ihr Einsatz attraktiver wird:

- Bei materieller Nichtlinearität sind die Auswirkungen numerischer Instabilität weniger dramatisch, [106], [129]. Durch die Änderungen in der Systemsteifigkeitsmatrix verändern sich während der kinematischen Analyse die Eigenfrequenzen des Systems; bei Degradation werden sie kleiner. Durch Elasto-Plastizität wird zudem die Energie hochfrequenter Moden schneller dissipiert und numerische Fehler potenzieren sich nicht so stark wie bei einer linearen Rechnung. Folglich können dann auch größere Zeitschrittlängen zu Stabilität führen (gehemmte Instabilität, vgl. [106]).

- Eine Konzentration der Elementmassenmatrizen, welche ursprünglich zur Verringerung des Rechenaufwandes bei expliziten Methoden eingeführt wurde, kann in manchen Fällen zu einer Vergrößerung der kritischen Zeitschrittlänge Δt_{kr} führen, siehe Beispiel in Abschnitt 4.5.2 sowie [108], [130]. Einige Methoden der Massenkonzentration sind inklusive Vor- und Nachteilen in Anhang B erläutert. Für die Sandwichelemente S89 und S815 wurde die HRZ-Methode [130] als bestgeeignetes Verfahren ausgewählt und in CODAC implementiert.

4.4.2 Genauigkeit

Die Zuverlässigkeit eines Algorithmus ist nicht nur dadurch gekennzeichnet, dass er ohne Abbruch durchläuft, sondern auch durch eine ausreichende Genauigkeit der Ergebnisse. Bei der Zeitintegration können Fehler in Form von Periodenverlängerung und Amplitudenverringerung auftreten. Das Ausmaß des Fehlers hängt vom Verhältnis zwischen Zeitschrittlänge und Periodendauer sowie von der anregenden Last ab. BATHE [66] zeigt, dass bei jeder Integrationsmethode die Verschiebungsantwort einer Schwingungsmode m im Allgemeinen dann genau ist, wenn der Zeitschritt Δt kleiner ist als ungefähr $0,01\ T_m$. Ist Δt größer, so erfährt die numerische Integration in Abhängigkeit vom Verfahren unterschiedliche Genauigkeitsverluste. Diese Genauigkeitsverluste haben jedoch nur dann einen merklichen Einfluss auf die Strukturantwort, wenn die betroffene Schwingungsmode durch die Belastung auch

bedeutend erregt wird. Häufig bestimmen nur die niedrigsten und einige wenige mittlere Moden die gesamte kinetische Antwort, während die Antworten der hochfrequenten Moden vernachlässigbar sind und der durch sie induzierte Fehler nicht künstlich anwächst. Dadurch kann bei gesicherter Stabilität der gewählte Zeitschritt in der Regel deutlich größer sein als die kleinste Periodendauer des Systems, um eine gute Genauigkeit zu erzielen.

Genauigkeit der Newmark-Methode

Die implizite NEWMARK-Methode ist unbedingt stabil und es besteht hier die Gefahr, Zeitschritte so groß zu wählen, dass der Fehler infolge der Zeitintegration dominant wird. Untersuchungen zu Fehlerabschätzung und Zeitschrittanpassung von impliziten Zeitschrittverfahren wurden z. B. in den Arbeiten von WIBERG und LI [131], CHOI und CHUNG [132] sowie RUGE [133] durchgeführt. Die NEWMARK-Methode zeichnet sich gegenüber anderen impliziten Integrationsmethoden wie z. B. der WILSON- [134] oder der HOUBOLT-Methode [135] dadurch aus, dass der numerische Fehler relativ klein ist. Ebenfalls bezeichnend für die NEWMARK-Methode ist, dass bei $\delta = 0,5$ und $\beta = 0,25$ (d. h. zwischen zwei Zeitschritten wird eine konstante mittlere Beschleunigung angenommen) die höchste Genauigkeit erreicht wird und außerdem nur Periodenverlängerung, aber keine Amplitudenabnahme auftritt. Eine Amplitudenabnahme, die bei $\delta > 0,5$ eintritt, hat aber auch den nicht zu vernachlässigenden Nebeneffekt, dass bei großen $\Delta t/T$ hochfrequente Antworten herausgefiltert werden können. Es kann also zum Vermeiden ungewollter Oszillationen und folglich zum Glätten der Strukturantwort vorteilhaft sein, einen NEWMARK-Parameter $\delta > 0,5$ zu wählen, siehe Beispiele in Abschnitt 4.5.

Da bei impliziten Methoden die Gleichgewichtsbedingungen zur Zeit $t+\Delta t$ aufgestellt werden, sind bei nichtlinearen Rechnungen im Allgemeinen mehrere Iterationen innerhalb eines Zeitschritts notwendig, um die vom Verschiebungszustand abhängigen Steifigkeiten richtig zu erfassen und somit eine gute Genauigkeit zu erzielen. Die kinetische Antwort einer Struktur ist zwar durch den Beitrag der Massenmatrix i. d. R. weniger oszillierend als die statische Antwort und konvergiert damit schneller, doch auch wenn nur wenige Iterationsschritte pro Zeitschritt erforderlich sind, so bedeutet dies für jeden Zeitschritt ein mehrmaliges Zerlegen der Systemsteifigkeitsmatrix und damit einen extrem hohen Rechenaufwand. Zugunsten der Effizienz wird im Impactsimulationstool CODAC auf diesen Mehraufwand verzichtet, und die Steifigkeiten zur Zeit $t + \Delta t$ werden näherungsweise anhand des Verformungszustandes zur Zeit t bestimmt. Um ein Anwachsen des dadurch in Kauf genommenen Fehlers von Zeitschritt zu Zeitschritt zu vermeiden, werden die tatsächlichen Steifigkeiten im jeweils folgenden Zeitschritt durch die inneren Kräfte richtig erfasst, vgl. Abschnitt 2.2.4 und Abb. 2.4(c).

Genauigkeit der zentralen Differenzenmethode

Bei der expliziten Differenzenmethode ist durch die bedingte Stabilität eine maximale Zeitschrittlänge vorgegeben. Dadurch spielen numerische Fehler aus der Zeitintegration in der Regel eine deutlich geringere Rolle für die Genauigkeit als Fehler infolge einer zu groben Diskretisierung. Bei nichtlinearen Rechnungen können aufgrund der Modenveränderungen jedoch auch größere Zeitschrittlängen als die kritische für stabile Rechnungen sorgen und somit Genauigkeitsverluste provozieren, siehe Beispiel in Abschnitt 4.5.2 und [106].

4.5 Beispiele zur Demonstration des Konvergenzverhaltens

4.5.1 Eingespannte Stahlplatte

Zur Veranschaulichung der Konvergenzeigenschaften sowie für eine Plausibilitätskontrolle der in CODAC implementierten NEWMARK-Methode und der zentralen Differenzenmethode wird in diesem einfachen Beispiel eine rundum eingespannte, monolithische Stahlplatte mit nur vier finiten Schalenelementen vernetzt und mit einer einzelnen transversalen Knotenkraft mittig zum Schwingen angeregt, siehe Abb. 4.6. Die Anregung erfolgt durch einen kurzen Stoß. Daraufhin kommt es zur freien Schwingung, bei der sich hauptsächlich die beiden in Abb. 4.7 dargestellten Schwingungsmoden überlagern. Unsymmetrische Moden treten in diesem Fall nicht auf, da Belastung und Lagerung symmetrisch sind. Die Schwingung wird von der ersten Schwingungsmode (größte Periodendauer T_1) dominiert. Sowohl für die NEWMARK- als auch für die Differenzenmethode werden in diesem Beispiel konsistente Massenmatrizen verwendet. Der Fehler infolge einer Konzentration der Massen in den Elementknoten ist bei dieser groben Vernetzung mit nur vier Elementen zu groß (ein Beispiel zur Massenkonzentration folgt im nächsten Abschnitt).

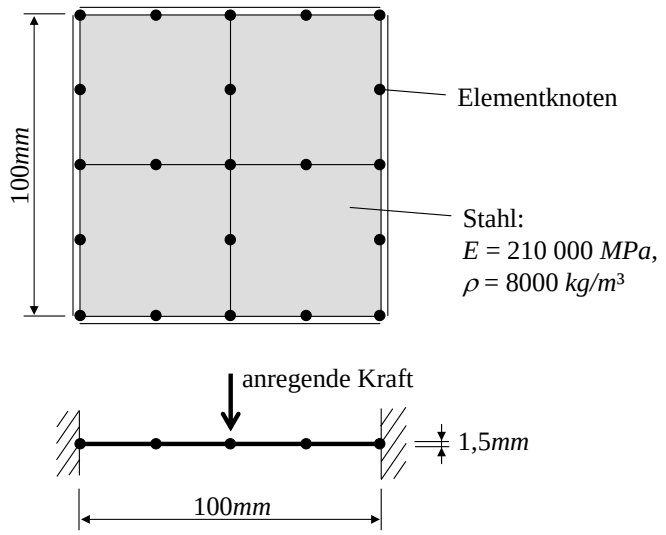


Abbildung 4.6: Eingespannte Stahlplatte mit vier Schalenelementen.

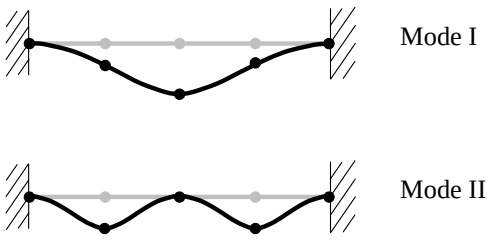


Abbildung 4.7: Schwingungsmoden der Stahlplatte.

Für die im Folgenden vorgestellten Ergebnisse wird die Stahlplatte mit den neuen dreischichtigen Schalenelementen S815 (Abschnitt 2.2) vernetzt, wobei die Deckschichten und die Kernschicht eines Elementes jeweils $0,5mm$ dick und aus Stahl sind. An der Einspannung werden jeweils alle 15 Knotenfreiheitsgrade festgehalten. Für einen Vergleich der stabilen Zeitschrittlängen bei der zentralen Differenzenmethode erfolgen außerdem Rechnungen mit den in Dickenrichtung nicht kompressiblen, dreischichtigen Schalenelementen S89 (Abschnitt 2.1) sowie weitere Rechnungen mit einschichtigen Schalenelementen der Schubdeformationstheorie 1. Ordnung (MINDLIN-Elemente). Alle drei Schalenelemente haben jeweils 8 Knoten.

Genauigkeit der Newmark-Methode in Abhängigkeit der Zeitschrittlänge

Für eine NEWMARK-Integration mit den Parametern $\delta = 0,5$ und $\beta = 0,25$ (d. h. mit konstanter mittlerer Beschleuigung zwischen den Zeitschritten und mit maximaler Genauigkeit, vgl. Abschnitt 4.4.2) zeigt Abb. 4.8 die berechnete kinetische Antwort für verschiedene Zeitschrittlängen Δt. Ist die Zeitschrittlänge deutlich kleiner als die kleinste Periodendauer, die noch einen Einfluss auf die gesamte kinetische Antwort hat, so liefert die Zeitintegration eine genaue Lösung. Dies ist im demonstrierten Beispiel bei $\Delta t = T_\mathrm{I}/10^5$ der Fall, wobei T_I die Periodendauer der Schwingungsmode I ist, die etwa 52 mal so groß wie die Periodendauer T_II ist. Beträgt die Zeitschrittlänge $\Delta t = T_\mathrm{I}/10^3$, so kann die niedrigfrequente Mode I noch genau berechnet werden. Bei der höherfrequenten Mode II kommt es hingegen zu einer Periodenverlängerung. Je nach Anforderung an die Genauigkeit der kinematischen Antwort kann dieses Ergebnis aber auch akzeptabel sein. Erhöht sich die Zeitschrittlänge weiter auf $\Delta t = T_\mathrm{I}/100$, so wird die Periodendauer der Mode I nach wie vor richtig berechnet. Die Amplituden der Moden I und II sind hier jedoch fehlerhaft, weil die Kraft des anregenden kurzen Stoßes nicht mehr exakt erfasst werden kann, vgl. Abb. 4.8 oben. Dieser Fehler wächst deutlich, wenn die Zeitschrittlänge auf $\Delta t = T_\mathrm{I}/50$ zunimmt.

Genauigkeit der Newmark-Methode in Abhängigkeit der Integrationsparameter

Werden die NEWMARK-Parameter $\delta = 0,5$ oder $\beta = 0,25\,(\delta + 0,5)^2$ verkleinert, so wird die Rechnung instabil. Welche Auswirkungen eine Vergößerung der Parameter hat, zeigt Abb. 4.9: Ist $\delta > 0,5$, so verringert sich die Amplitude. Ist $\beta > 0,25\,(\delta + 0,5)^2$, so verlängert sich die Periodendauer. Beide Genauigkeitsverluste wirken sich auf die hochfrequente Schwingung stärker aus als auf die niedrigfrequente. Die Amplitudenabnahme kann von Vorteil sein, wenn Oszillationen vermieden werden sollen. In einem solchen Fall (z. B. bei $\delta = 0,7$) macht sich die Periodenverlängerung (infolge von $\beta > 0,25\,(\delta + 0,5)^2 = 0,36$) so gut wie nicht bemerkbar.

Stabilität der Differenzenmethode in Abhängigkeit der Freiheitsgradanzahl

Im Gegensatz zur impliziten NEWMARK-Methode ist die explizite Differenzenmethode nur bedingt stabil, d. h. es ist eine Zeitschrittlänge $\Delta t \leq \Delta t_\mathrm{kr}$ nötig, damit die Lösung nicht unbegrenzt wächst. Wie Abb. 4.10 zeigt, liegt die stabile Zeitschrittlänge Δt_kr bei einer Vernetzung mit vier Schalenelementen S815 zwischen $T_\mathrm{I}/33\,300$ und $T_\mathrm{I}/33\,200$. Erfolgt die Vernetzung der Stahlplatte mit vier Elementen des Typs S89 oder mit MINDLIN-Elementen, so verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade, die Periodendauer der höchstfrequenten

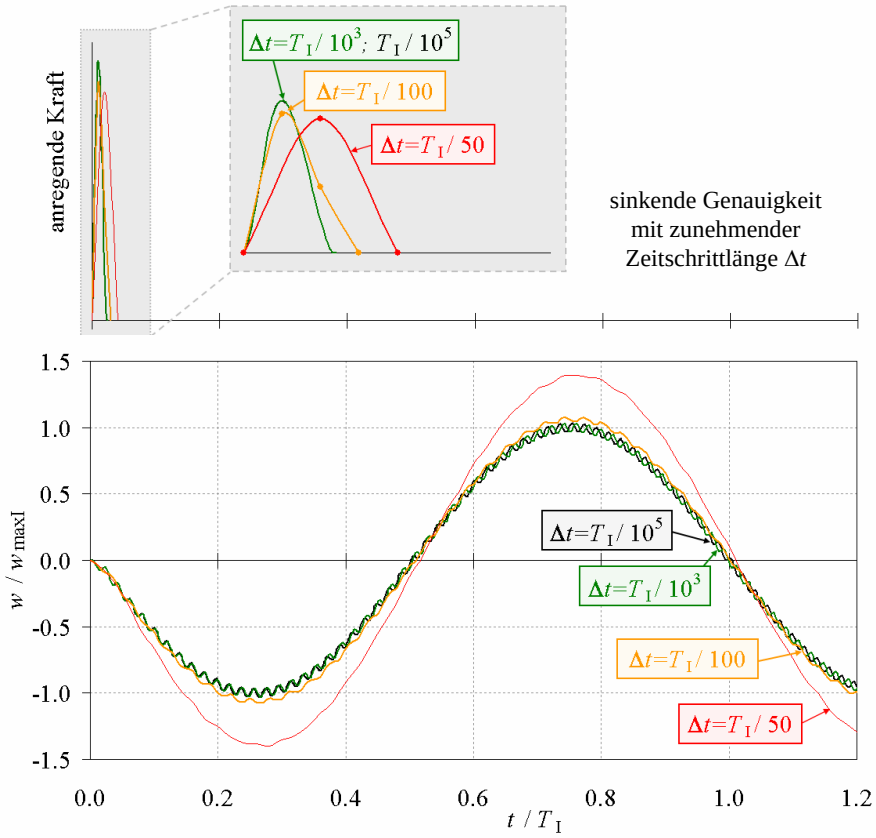


Abbildung 4.8: Kraft-Zeit- und Weg-Zeit-Verläufe bei Anwendung der Newmark-Methode mit verschiedenen Zeitschrittlängen und $\delta = 0,5$; $\beta = 0,25$.

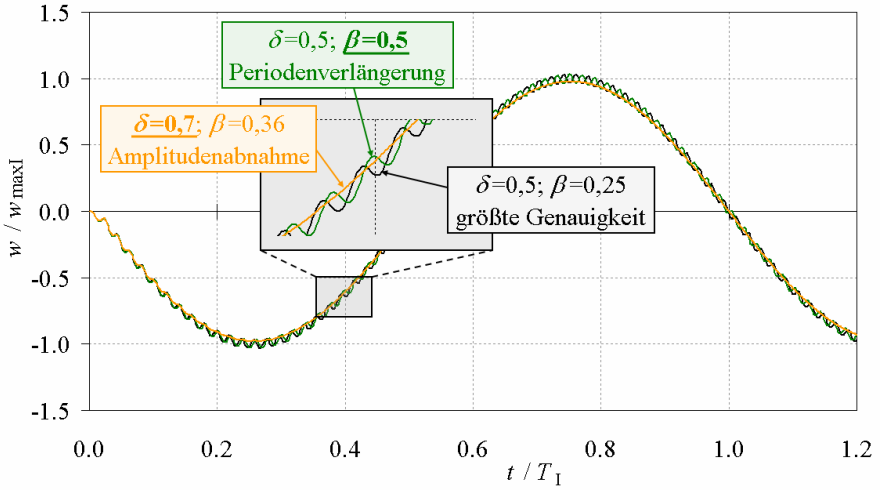


Abbildung 4.9: Weg-Zeit-Verläufe bei Anwendung der Newmark-Methode mit verschiedenen Integrationsparametern und $\Delta t = T_\mathrm{I}/10^3$.

Schwingung wird größer und folglich wächst auch die stabile Zeitschrittlänge Δt_kr, siehe Tab. 4.1. Während sich die Stabilitätsgrenzen der verschiedenen Elementtypen stark unterscheiden, sind die Ergebnisse der stabilen Rechnungen nahezu gleich, da die dünne Stahlplatte weder große transversale Normalverzerrungen noch große transversale Schubverzerrungen erfährt. In einem solchen Fall sind MINDLIN-Schalenelementen also völlig ausreichend, um eine hohe Genauigkeit zu erzielen, und natürlich effizienter, da weniger Freiheitsgrade benötigt werden und auch eine größere Zeitschrittlänge verwendet werden kann.

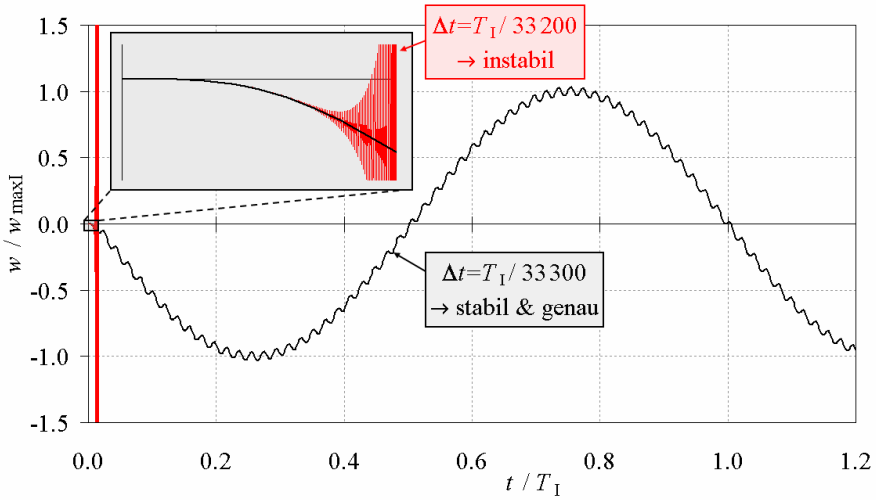


Abbildung 4.10: Weg-Zeit-Verläufe bei Anwendung der zentralen Differenzenmethode mit zwei Zeitschrittlängen in der Nähe der Stabilitätsgrenze.

Elementtyp	Δt_{kr}
S815 mit 15 Knoten-Freiheitsgraden	$T_{\mathrm{I}}/33\,300$
S89 mit 9 Knoten-Freiheitsgraden	$T_{\mathrm{I}}/7\,300$
MINDLIN mit 5 Knoten-Freiheitsgraden	$T_{\mathrm{I}}/2\,500$

Tabelle 4.1: Stabile Zeitschrittlängen bei Verwendung verschiedener Elementtypen.

4.5.2 Impactbelastete Sandwichplatte

Das Ziel dieses Beispiels ist es, das Konvergenzverhalten verschiedener Zeitintegrationen bei der Simulation eines Impactvorgangs auf einer realen Sandwichschale zu untersuchen. Dafür wird eine Sandwichplatte verwendet, die im November 2003 am ILR Dresden [58] auf Impact getestet wurde und die in Kapitel 5 zur Validierung der Impactsimulation dient. Das mechanische System wurde bereits bei einem Beispiel zur Verformungsanalyse in Abschnitt 2.3.3 genutzt und ist in Abb. 2.11 dargestellt. Während die Flächenlast dort als statische Last betrachtet wurde, wird sie nun als dynamische Kontaktkraft entsprechend den Abschnitten 4.2 und 4.3 berechnet. Der Impact erfolgt mit einer $1,1kg$ schweren Stahlkugel und einer Energie von 1J. Für genaue Angaben zu den Materialeigenschaften der Sandwichplatte sei auf Abschnitt 5.1 verwiesen. Im Rahmen der Verformungs- und Spannungsanalyse in Kapitel 2 wurde gezeigt, dass einschichtige MINDLIN-Schalenelemente oder auch die Sandwichelemente S89 nicht genau genug sind, um das Verhalten von Sandwichstrukturen unter konzentrierten transversalen Lasten richtig zu beschreiben. Daher kommen für die Impactsimulation von Sandwichstrukturen die Elemente S815 zum Einsatz, auch wenn sie bei der bedingt stabilen Zeitintegration der zentralen Differenzenmethode deutlich kleinere Zeitschrittlängen erfordern. Als Vernetzung wird für dieses Beispiel das Netz verwendet, welches auch für die meisten Rechnungen der experimentellen Validierung genutzt wurde und in diesem Zusammenhang in Abschnitt 5.3 beschrieben und in Abb. 5.5(a) dargestellt ist.

Ergebnisse der Newmark-Methode

Abbildung 4.11 zeigt die Ergebnisse von vier Impactsimulationen, bei denen das NEWMARK-Verfahren verwendet und die Zeitschrittlänge Δt sowie die Integrationsparameter δ und β

variiert wurden. Anhand der Kontaktkraft-Zeit-Verläufe wird deutlich, dass die Rechnungen mit den Parametern $\delta = 0,5$ und $\beta = 0,25$ stärker oszillieren, während die Verläufe bei Erhöhung von δ auf $0,7$ merklich glatter werden. Die Parameter $\delta = 0,5$ und $\beta = 0,25$ liefern zwar die größere Genauigkeit für alle höherfrequenten Schwingungsmoden. Bei $\delta = 0,7$ wird aber die dominante Schwingung mit der niedrigsten Eigenfrequenz, d. h. die Gesamtdurchbiegung w der oberen Deckschicht, ebenfalls sehr genau berechnet. Der Parameter β, der mit zunehmender Größe eine Periodenverlängerung bewirkt, hat in diesem Fall keinen merklichen Einfluss auf das Ergebnis, solange $\beta \geq 0,25\,(\delta + 0,5)^2 = 0,36$ und somit eine stabile Rechnung garantiert ist. Die Berechnungen mit der Zeitschrittlänge $\Delta t = 0,05ms$ zeigen nur geringe Genauigkeitseinbußen gegenüber den feineren Zeitintegrationen mit $\Delta t = 0,01ms$ und sind folglich für eine effiziente Impactsimulation gut geeignet.

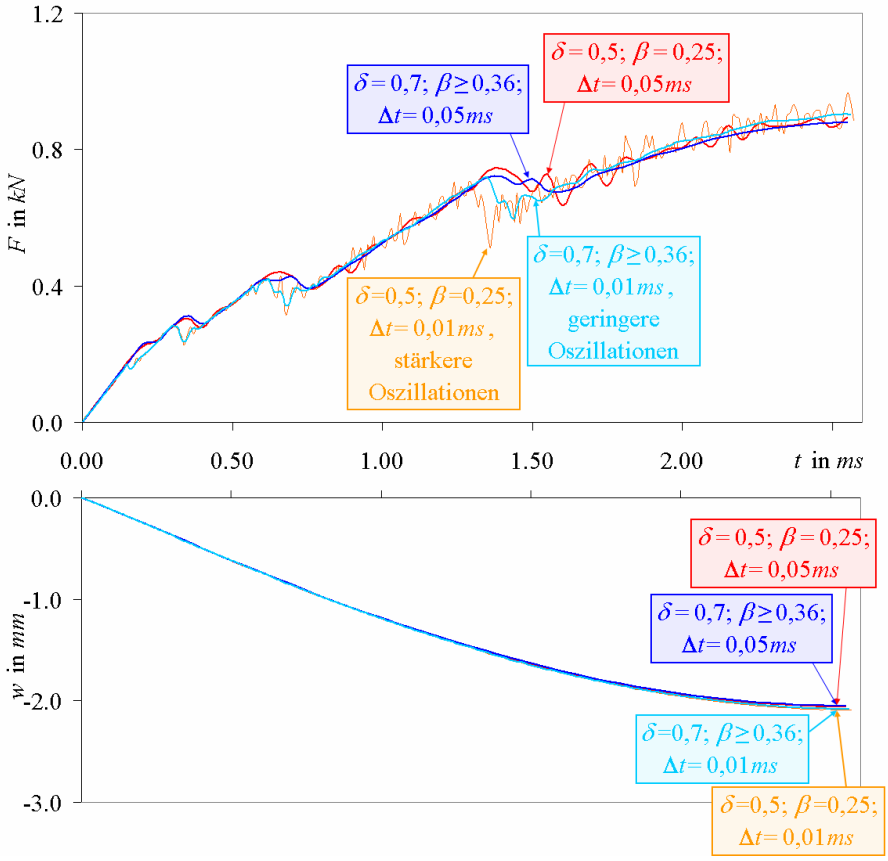


Abbildung 4.11: Kontaktkraft-Zeit- und Durchbieguns-Zeit-Verläufe bei Anwendung der NEWMARK-Methode mit verschiedenen Integrationsparametern δ, β und Zeitschrittlängen Δt.

Ergebnisse der zentralen Differenzenmethode

Bei Anwendung der zentralen Differenzenmethode bestimmt die Zeitschrittlänge die Stabilität der Zeitintegration. Wie bereits im vorangegangenen Beispiel dargestellt, sind die erforderlichen Zeitschrittlängen beim Sandwichelement S815 sehr klein. Im aktuellen Beispiel sind bei Verwendung von konsistenten Massen Zeitschrittlängen von $\Delta t < 10^{-15}s$ für eine stabile Rechnung notwendig (noch kleinere Werte wurden wegen schwindender Praktikabilität nicht getestet). Wie in Abschnitt 4.4.1 angesprochen und in Anhang B erläutert, können durch eine Konzentration der Massenmatrix eventuell auch größere Zeitschrittlängen eine stabile

Zeitintegration bewirken. Bei Anwendung der in CODAC implementierten HRZ-Methode [130] lässt sich in diesem Beispiel tatsächlich eine Verbesserung der Stabilität erreichen: Mit einer Zeitschrittlänge von $\Delta t = 4 \cdot 10^{-8} s$ verläuft das Differenzenverfahren jetzt über mehrere tausend Zeitschritte stabil (bei $\Delta t = 5 \cdot 10^{-8} s$ steigt es nach weniger als 10 Zeitschritten aus). Die im Vergleich zur kleinsten Periodendauer relativ große Zeitschrittlänge $\Delta t = 4 \cdot 10^{-8} s$ bringt jedoch Ungenauigkeiten mit sich, die sich erst nach einigen tausend Zeitschritten bemerkbar machen, wie die Kontaktkraft-Zeit- und Durchbieguns-Zeit-Verläufe in Abb. 4.12 zeigen. Kleinere Zeitschrittlängen als $\Delta t = 4 \cdot 10^{-8} s$ liefern ähnliche Ergebnisse.

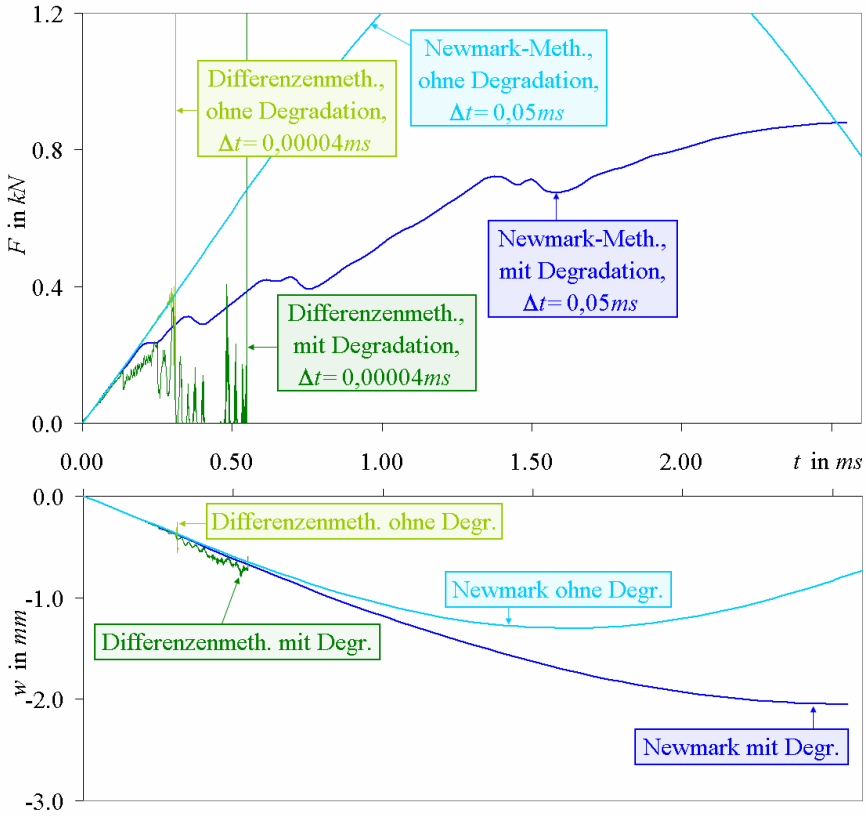


Abbildung 4.12: Kontaktkraft-Zeit- und Durchbieguns-Zeit-Verläufe der zentralen Differenzenmethode im Vergleich mit der NEWMARK-Methode ($\delta = 0,7$; $\beta = 0,5$).

Neben den Ergebnissen einer vollständigen Impactsimulation mit Berücksichtigung von Materialdegradation, sind in Abb. 4.12 auch Ergebnisse dargestellt, bei denen die Degradationen nicht berücksichtigt, d. h. lineares Materialverhalten angenommen wurde. In Abschnitt 4.4.1 wurde neben der Massenkonzentration auch die materielle Nichtlinearität als mögliches Mittel zur Vergrößerung der stabilen Zeitschrittlänge bei expliziten Methoden genannt. Auch wenn im vorgestellten Beispiel die Rechnung mit Degradation längere Zeit brauchbare Durchbiegungen berechnet als die Rechnung ohne Degradation, so wird doch der angesprochene Effekt im eigentlichen Sinne nicht erreicht. Dies liegt möglicherweise daran, dass die materielle Nichtlinearität bei der Impactsimulation in CODAC im Grunde eine schrittweise Linearität ist, d.h. dass sich die Steifigkeiten nur gelegentlich und zwar dann verändern, wenn ein neuer Schaden detektiert wird.

4.6 Vorzüge und Einsatzbereiche der Integrationsmethoden

4.6.1 Allgemeine Betrachtungen

	implizit	explizit
Dauer des Prozesses	lang	kurz
Umfang der Systemsteifigkeitsmatrix	gering	hoch
Grad an Nichtlinearität	gering	hoch
Ordnung der finiten Elemente	hoch	gering
Massenmatrix	konsistent	konzentriert

Tabelle 4.2: Tendenzen für den Einsatz von impliziten und expliziten Integrationsmethoden.

Als grundsätzliche Richtlinie lässt sich sagen, dass explizite Integrationsmethoden um so geeigneter gegenüber impliziten Methoden sind, je kürzer ein dynamischer Prozess dauert, je umfangreicher die Systemsteifigkeitsmatrix und je höher der Grad der Nichtlinearität ist. Doch nicht nur lineare, sondern auch viele nichtlineare Computercodes nutzen trotz des großen rechentechnischen Aufwandes pro Zeitschritt eine implizite Zeitintegration. Als möglichen Grund hierfür geben Belytschko und Hughes [106] die große Flexibilität des impliziten Codes an, die seine Einsetzbarkeit für verschiedenste Elementtypen ermöglicht. Im Gegensatz dazu kann sich die Konvergenz eines expliziten Verfahrens extrem verschlechtern, wenn seine Anwendung über den ursprünglich spezifizierten Bereich hinaus erweitert wird.

Beim Einsatz einer expliziten Integrationsmethode ist es i. d. R. besser, finite Elemente niedriger Ordnung zu verwenden, um die größte Eigenfrequenz klein zu halten. Für eine Vernetzung mit Schalenelementen bieten sich folglich 4-Knoten-Elemente eher an als 8- oder 9-Knoten-Elemente. Im Gegensatz dazu sind bei impliziten Zeitintegrationen im Allgemeinen wenige Elemente höherer Ordnung besser geeignet, um das Verformungsverhalten effizient zu beschreiben, vgl. [66]. Bei expliziten Methoden bewirkt eine konzentrierte Massenmatrix eine deutliche Reduzierung des numerischen Aufwandes sowie gegebenenfalls auch eine Vergrößerung der stabilen Zeitschrittlänge, vgl. Anhang B. Sie ist daher bei expliziten Methoden besser geeignet als eine konsistente Massenmatrix. Bei impliziten Zeitschrittverfahren liefern hingegen konsistente Massen eine größere Genauigkeit.

Wenn es lokal innerhalb einer Vernetzung sehr unterschiedliche Bereiche hinsichtlich Eigenfrequenz oder Nichtlinearität gibt, so ist es theoretisch auch möglich, an verschiedenen Stellen im Netz verschiedene Zeitintegratoren zu verwenden. Ausführlich diskutiert werden solche Methoden von Belytschko und Hughes [106]. Für den Fall, dass es temporär innerhalb eines dynamischen Prozesses extrem nichtlineare und quasi-lineare Phasen gibt, so kann es gegebenenfalls sinnvoll sein, zwischen expliziter und impliziter Methode zu wechseln, Vorschläge dazu machen z.B. Noels et al. [136]. Solche gemischten Zeitintegrationen sind für komplexe dynamische FE-Programme erwägenswert. Sie lohnen sich jedoch nicht für ein schnelles Impactanalysetool und werden daher im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter vertieft.

4.6.2 Schlussfolgerungen für den Einsatz in CODAC

Für die Impactsimulation mit dem schnellen Tool CODAC eignet sich die implizite NEWMARK-Methode besser als die explizite zentrale Differenzenmethode. Dafür sprechen die Ergebnisse der Beispielrechnungen sowie die folgenden Gründe:

- Die verwendeten finiten Elemente sind 8-Knoten-Elemente mit einer relativ hohen Zahl an Freiheitsgraden pro Knoten. Dadurch ist eine relativ grobe Vernetzung ausreichend für eine gute Beschreibung des Verformungszustandes. Diese Konstellation ist für eine implizite Zeitintegration besser geeignet als für eine explizite, vgl. [66].
- Bei der NEWMARK-Methode wird innerhalb eines Zeitschrittes auf Gleichgewichtsiterationen verzichtet. Dadurch sinkt der rechentechnische Aufwand der impliziten Zeitintegration.
- Das nichtlineare Materialverhalten wird durch schrittweise Linearität modelliert, bei der die Materialsteifigkeiten nur in den Zeitschritten verändert werden, in denen ein neuer Schaden auftritt. Dies ist durch die relativ grobe Vernetzung, die in CODAC möglich ist, nicht so häufig der Fall, wodurch sich die Vorzüge einer expliziten Zeitintegration gegenüber einer impliziten weiter verringern.
- Die konzentrierten Massenmatrizen, die bei der zentralen Differenzenmethode zum Einsatz kommen, sind bei den Elementen S89 und S815 keine reinen Diagonalmatrizen, vgl. Anhang B.4. Dadurch wird die bei expliziten Integrationsmethoden benötigte Zerlegung der Massenmatrix aufwendiger.

Aufgrund dieser Punkte überwiegt der Mehraufwand der zentralen Differenzenmethode durch die erforderliche hohe Anzahl an Zeitschritten deutlichen den Mehraufwand der NEWMARK-Methode, der durch die Zerlegung der Systemsteifigkeitsmatrix innerhalb eines Zeitschrittes erforderlich ist.

Kapitel 5

Beispiele und experimentelle Validierung

Eine Impactversuchsreihe, die im Jahr 2003 am Institut für Luft- und Raumfahrt (ILR) der TU Dresden an Sandwichpaneelen mit Honigwabenkernen durchgeführt wurde, soll als Referenz dienen für die Validierung der in dieser Arbeit vorgestellten Modelle und Methoden für eine effiziente Impactsimulation. Die verwendeten Versuchsergebnisse in Form von Kontaktkraft-Zeit-Verläufen und Schadensbildern wurden vom ILR Dresden [58] zur Verfügung gestellt. Erste Ergebnisse von Impactsimulationen mit dem Tool CODAC sowie ein Vergleich mit den Dresdner Impactversuchen wurden von KÄRGER et al. [137], [138] veröffentlicht. In diesen Artikeln ist jedoch die geometrische Nichtlinearität der impactbelasteten Deckschicht noch nicht berücksichtigt, so dass nur Impactverläufe niedriger Energie und ohne Deckschichtversagen beschrieben sind. Ergebnisse von Impactsimulationen mit Deckschichtversagen wurden kürzlich zur Veröffentlichung eingereicht [139], [140].

5.1 Versuchsaufbau und Materialien

Abb. 5.1 zeigt die Impact-Fallanlage des ILR Dresden. $400mm \times 400mm$ große Sandwichpaneele wurden vollflächig gelagert und gegen Hochspringen gesichert. (*Anmerkung: Die vollflächige Lagerung wurde im Versuch aus praktischen Gründen gewählt, da sie im Vergleich zu gelenkiger Lagerung und Einspannung am besten reproduzierbar ist. Auch bei einer Randlagerung wird die untere Deckschicht wegen des unsymmetrischen Sandwichaufbaus bei den untersuchten Energien nur wenig durchgebogen und nicht beschädigt. Für die Sandwichelemente S815 und die Impactsimulation mit CODAC ist eine Randlagerung gleichermaßen möglich.*) Die Platten wurden in acht Abschnitte der Größe $100mm \times 200mm$ unterteilt, wovon jeweils sieben Abschnitte mit Impactenergien von $1J$ bis $15J$ belastet wurden. Als Impactor diente eine Halbkugel aus Stahl mit einem Durchmesser von $25,4mm$ und einer Masse von $1,10kg$.

Die Sandwichplatten bestehen aus Faserverbund-Deckschichten und $28mm$ dicken Honigwabenkernen des Materials NOMEX® 4.8-48. Da die obere Deckschicht als Impactdetektor dienen soll und die untere Deckschicht die Hauptlasten zu tragen hat, ist das Sandwich unsymmetrisch: Die dünne obere Deckschicht besteht aus nur drei Gewebelagen des Materials CYTEC® 977-2/HTA und hat eine nominale Dicke von $0,633mm$. Die untere Deckschicht

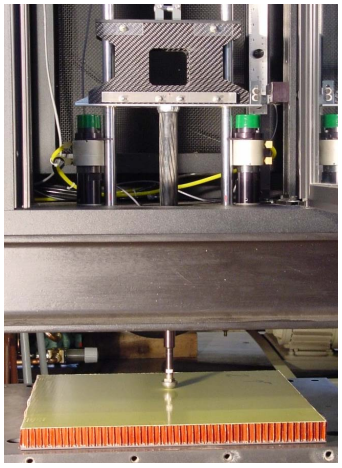


Abbildung 5.1: Impact-Fallanlage des ILR Dresden [58].

setzt sich aus einer unteren Gewebelage und 20 unidirektionalen Tape-Lagen des Materials CYTEC® 977-2/HTS mit dem Aufbau $[(0_2/45/90/-45)_s]_s$ zusammen; ihre Gesamtdicke beträgt $2,7mm$. Die Gewebelagen werden verwendet, um den Impactschutz zu erhöhen. Die Tape-Lagen liefern höhere Membran- und Schubsteifigkeiten bzw. -festigkeiten für ein gutes Gesamttragverhalten. Die für die Impactsimulation benötigten Materialdaten sind in den Tabellen 5.1 und 5.2 angegeben.

	E_{xx}/MPa	E_{yy}/MPa	E_{zz}/MPa	G_{yz}/MPa	G_{xz}/MPa	G_{xy}/MPa
Gewebe 977-2/HTA	53 400	53 400	9 100	4 200	4 200	5 200
Tape 977-2/HTS	130 000	8 000	8 000	3 400	5 000	5 200
Honigwabe 4.8-48	1	1	138	23,5	44,8	1

Tabelle 5.1: Elastizitäts- und Schubmoduln der für die Impacttests verwendeten Materialien.

	$\sigma_{\parallel\mathrm{tu}}/MPa$	$\sigma_{\perp\mathrm{tu}}/MPa$	$\sigma_{\parallel\mathrm{cu}}/MPa$	$\sigma_{\perp\mathrm{cu}}/MPa$
Gewebe 977-2/HTA	757	721	458	429
Tape 977-2/HTS	1670	75	1080	170
	σ_{cu}/MPa	τ_{lu}/MPa	τ_{tu}/MPa	
Honigwabe 4.8-48	2,24	1,21	0,69	

Tabelle 5.2: Festigkeiten der für die Impacttests verwendeten Materialien.

Es sind des Weiteren Informationen zum Verhalten des geschädigten Materials erforderlich. Mit dem Honigwabenkern NOMEX® 4.8-48 wurden entsprechende transversale Druck- und Schubversuche am ILR Dresden durchgeführt. Der für das Kern-Degradationsmodell benötigte Degradationsfaktor D_{33} sowie die Druck-Stauchfestigkeit $\sigma_{zz\mathrm{crush}}$ können anhand der im Versuch gemessenen Spannungs-Dehnungs-Kurven ermittelt werden: $D_{33} = 0,015$; $\sigma_{zz\mathrm{crush}} = 0,3 \cdot \sigma_{\mathrm{cu}} = 0,672MPa$, vgl. Abb. 5.2. Biegeversuche an den 0,633mm dünnen Deckschichten wurden leider nicht durchgeführt. Der Degradationsfaktor für die Gewebelagen musste folglich anhand der Ergebnisse der Impactversuche abgeschätzt werden und wurde mit $D_{11} = D_{22} = 0,5$ festgelegt.

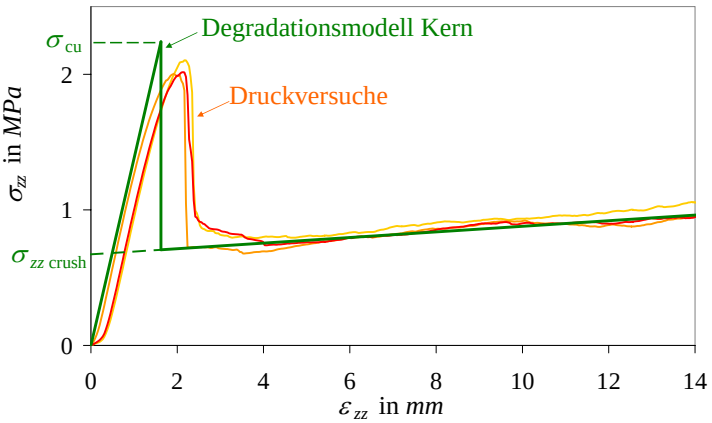


Abbildung 5.2: Degradationsmodell des Kerns im Vergleich mit den Spannungs-Dehnungs-Verläufen der reinen Druckversuche am ILR Dresden [58].

5.2 Versuchsergebnisse

Exemplarisch zeigt Abb. 5.3 die Kontaktkraft-Zeit-Verläufe der Impactenergien $1J$, $4J$ und $15J$. Um die Streuung der Ergebnisse darzustellen, sind für jede Impactenergie jeweils zwei Kurven dargestellt. Bei den Verläufen lassen sich zwei Typen unterscheiden: Während die $1J$-Kurven durchgängig nahezu sinusförmig verlaufen, kommt es bei den $4J$- und $15J$-Kurven zu einem starken Einbruch in der Kontaktkraft, wenn etwa $1kN$ überschritten ist. Dieser Einbruch wird durch das abrupte Versagen der Deckschicht verursacht, die in dem Moment zu reißen beginnt. Einen weiteren, viel geringeren Knick erfahren alle Kraft-Zeit-Kurven bereits bei deutlich niedrigerer Kontaktkraft, wenn die Kernschädigung einsetzt.

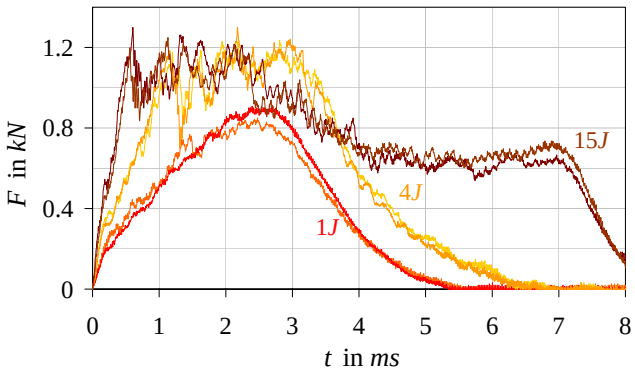
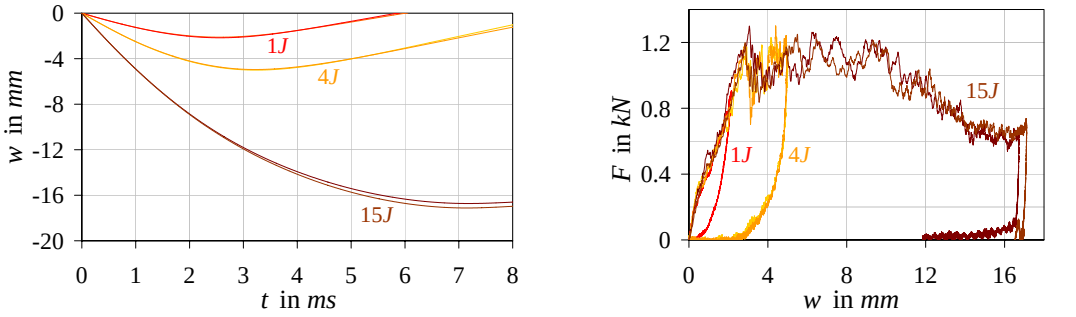


Abbildung 5.3: Kontaktkraft-Zeit-Verläufe der Impactversuche am ILR Dresden [58].

Zusätzlich zur Kontaktkraft kann auch die Durchbiegung der oberen Deckschicht zur Beschreibung des Impactverlaufs herangezogen werden. Die Durchbiegung wurde im Versuch jedoch nicht direkt gemessen, sondern die Verschiebung des Impactors wurde anhand der gemessenen Kontaktkraft und der Bewegungsgleichung, die auch für die Impactsimulation verwendet wird, berechnet. Damit ergeben sich die in Abb. 5.4(a) dargestellten Verschiebungs-Zeit-Verläufe. Neben der nicht überraschenden Erkenntnis, dass die Durchbiegung bei höherer Energie größer ist als bei niedriger, lässt sich aus diesen Kurven keine weitere Information schöpfen. Eine Betrachtung des Verschiebungs-Zeit-Verlaufs bringt auch deswegen keine neuen Aufschlüsse über die Güte der Simulationsergebnisse, weil die Verschiebungen bei Versuch



(a) Verschiebungs-Zeit-Verläufe.

(b) Kontaktkraft-Verschiebungs-Verläufe.

Abbildung 5.4: Ergebnisse der Impactversuche am ILR Dresden [58].

und Simulation auf gleichem Wege aus den Kontaktkräften ermittelt werden. Anstelle der Kontaktkraft-Zeit-Verläufe in Abb. 5.3 könnte man die Kontaktkraft-Verschiebungs-Verläufe in Abb. 5.4(b) für den Vergleich zwischen Versuch und Simulation verwenden. Aus diesen Kurven kann die durch den Impactor in die Sandwichstruktur eingebrachte Energie unmittelbar abgelesen werden. Da die entscheidenden Merkmale des Impactverlaufs (Anstiege und Einbrüche der Kontaktkraft) aber auch im Kontaktkraft-Zeit-Verlauf enthalten sind, wird die Verschiebung für die Validierung der Simulation nicht zusätzlich herangezogen.

Ein weiterer Indikator für das Impactverhalten von Sandwichpaneelen sind die Kern- und Deckschichtschäden. Am Anfang des Kapitels 3 zur Schadensanalyse sind bereits Fotos und Ultraschallbilder abgebildet, die von der hier untersuchten Impact-Versuchsreihe stammen: Abb. 3.1 zeigt die kaum sichtbare Schädigung eines $1J$-Impacts, bei der der Kern geschädigt und die Deckschicht nahezu unversehrt geblieben ist. In Abb. 3.2 ist die deutlich sichtbare Schädigung eines $8J$-Impacts dargestellt, diese ist qualitativ die gleiche wie bei $4J$- oder $15J$-Impacts: Die Deckschicht ist eingedellt und gerissen, der Kernschaden hat eine etwas größere Fläche als der Deckschichtschaden. Eine Zusammenstellung der Schadensbilder für alle Impactenergien einer Versuchsreihe ist in Anhang C zu finden.

5.3 Eingangsdaten für die Simulation und FE-Modell

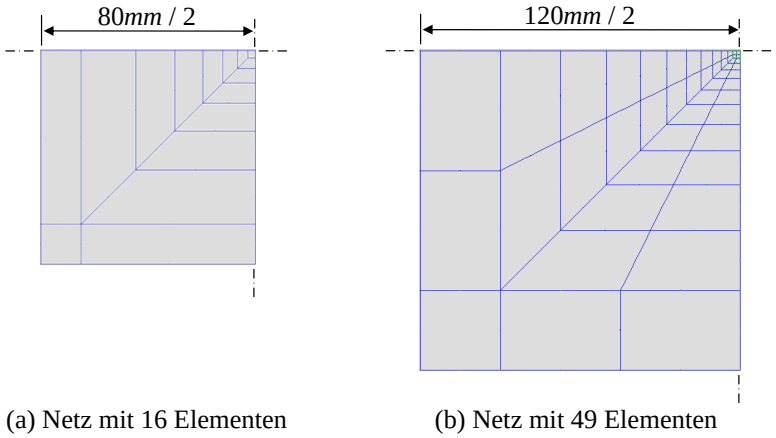
Für die Impactsimulation wird entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4 das implizite Zeitschrittverfahren von Newmark mit den Parametern $\delta = 0,7$, $\beta = 0,5$ und einem Zeitschritt von $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} s$ verwendet. Der Impactor wird als Punktmasse modelliert und der Kontakt zwischen Impactor und Deckschicht wird mit dem Hertzschen Kontaktgesetz beschrieben. Die Kontaktkraft wird als parabelförmig verteilte Flächenlast aufgebracht. Die Anzahl der belasteten Elemente richtet sich nach der Hertzschen Kontaktfläche und wächst mit zunehmender Kontaktkraft. In der Arbeit von Kärger et al. [137] wird auf die Auswirkungen verschiedener Möglichkeiten zur Modellierung der Kontaktkraft näher eingegangen. Es stellt sich dabei heraus, dass netzunabhängige Ergebnisse nur dann erzielt werden, wenn die Kontaktkraft als Flächenlast aufgebracht wird. Bei einer einzelnen Knotenlast hingegen reagiert das FE-Modell um so weicher, je feiner es vernetzt ist. Bei den hier vorgestellten Versuchsergebnissen wurde deshalb die Kontaktkraft stets als Flächenlast aufgebracht.

Als finite Elemente kommen die in Abschnitt 2.2 vorgestellten, dreischichtigen Schalenelemente S815 zum Einsatz, wobei die Membran-Verzerrungen der oberen Deckschicht nichtli-

near formuliert sind. Zur Modellierung der vollflächigen Lagerung der Sandwichplatte wird an jedem Elementknoten die transversale Verschiebung der unteren Deckschicht festgehalten. Für die Schadensanalyse werden die in Kapitel 3 herausgearbeiteten Versagenskriterien und Degradationsmodelle verwendet.

Im Versuch wurden Sandwichpaneele der Größe $400mm \times 400mm$ mit Impacts belastet. Dass nicht ein gesamtes Paneel von der Impactlast beeinflusst wird, zeigt bereits die Unterteilung der Paneele im Versuch in acht $100mm \times 200mm$ Abschnitte und die mehrmalige Impactierung eines großen Paneels. Für die Simulation ist es folglich nicht notwendig, die gesamte Platte zu modellieren. Vergleichende Rechnungen haben gezeigt, dass es genügt, eine $80mm \times 80mm$ große Platte zu vernetzen. Um weitere Rechenzeit zu sparen, wurden Symmetrierandbedingungen genutzt und nur eine Viertelplatte modelliert. Da die impactbelastete Deckschicht nur aus Gewebelagen besteht, der Kern ebenfalls symmetrisch ist und die untere, vollflächig gelagerte Deckschicht keinen Einfluss auf den Impactverlauf hat, ist die Verwendung der Symmetrierandbedingungen zulässig. Das entsprechende mechanische System ist bereits bei der Verifizierung der finiten Elemente verwendet worden und in Abb. 2.11 dargestellt.

Um die Anzahl der Elemente möglichst gering zu halten und dennoch die Spannungsspitzen und das inkrementelle Schadenswachstum am Impactpunkt genau genug zu erfassen, wird die Sandwichplatte derart vernetzt, dass die Größe der Elemente zum Impactpunkt hin abnimmt. Hinsichtlich der Netzfeinheit wurden vergleichende Rechnungen durchgeführt, bei denen sich herausstellte, dass bereits mit 16 Elementen und dem in Abb. 5.5(a) dargestellten Netz zuverlässige Ergebnisse erzielt werden. Die Mehrzahl der im folgenden Abschnitt vorgestellten Ergebnisse wurde mit diesem Netz berechnet. Zur Demonstration der Netzunabhängigkeit und der ausreichenden Plattengröße von $80mm \times 80mm$, wird für eine weitere Rechnung das in Abb. 5.5(b) dargestellte Netz mit 49 Elementen und einer Plattengröße von $120mm \times 120mm$ verwendet.



(a) Netz mit 16 Elementen (b) Netz mit 49 Elementen

Abbildung 5.5: Für die Impactsimulation verwendete FE-Netze.

5.4 Simulationsergebnisse und Validierung

Anhand der Impactenergien $1J$ und $4J$ soll zunächst etwas ausführlicher vorgestellt und erläutert werden, welche Auswirkungen die Degradationsmodelle für den Kern und die obere Deckschicht auf die Simulationsergebnisse haben. Während der $1J$-Impact als Beispiel für eine kaum sichtbare Schädigung dient, kommt es beim $4J$-Impact bereits zum Aufreißen der Deckschicht. Im Anschluss folgt ein Vergleich der Simulationsergebnisse für verschiedene FE-Vernetzungen. Abschließend werden die Simulations- und Versuchsergebnisse für alle getesteten Impactenergien zusammengestellt.

5.4.1 Impact mit nicht sichtbarem Schaden

In Abb. 5.6 werden drei Kontaktkraft-Zeit-Verläufe aus verschiedenen Simulationen mit den Versuchsergebnissen des 1J-Impacts verglichen. Die oberste, schwarze Kurve stellt das Simulationsergebnis dar, wenn keine Degradation berücksichtigt wird. Dieser stark vereinfachte Ansatz modelliert die Sandwichplatte deutlich zu steif, berechnet zu große Kontaktkräfte und zu kleine Verformungen. Folglich ist auch die Größe des berechneten Kernschadens zu klein, wie im mittleren Schadensbild in Abb. 5.7 anhand des zu kleinen blau-gekreuzten Bereichs zu sehen ist. Wird hingegen der Kern mit dem in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Degradationsmodell jeweils dort degradiert, wo ein Kernschaden detektiert wird, so sinkt die Kontaktkraft und die grüne Kurve in Abb. 5.6 entsteht. (*Anmerkung: Die berechneten Kurven sind nur bis zum Zeitpunkt der maximalen Durchbiegung dargestellt, da das Materialverhalten bei Entlastung bisher noch nicht in CODAC implementiert ist. Der Entlastungsprozess bringt keinen weiteren Schadenszuwachs und wurde daher im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr behandelt. Interessant wird er jedoch dann, wenn für geschädigte Deckschichten bleibende Eindellungen ermittelt werden sollen.*) Das Simulationsergebnis stimmt nun bereits sehr gut mit dem Versuchsergebnis überein. Der berechnete Kernschaden (rechts oben in Abb. 5.7) ist zwar etwas größer als im Versuch, bewegt sich aber auf der konservativen Seite und ist somit akzeptabel. Wird zusätzlich noch das in Abschnitt 3.2.3 vorgestellte Degradationsmodell für die Deckschicht (DS) hinzugeschaltet, so ändert sich beim $1J$-Impact das Simulationsergebnis kaum. Die Deckschichtschädigung ist minimal: In der Simulation wird das Faserbruchkriterium nur in sehr kleinen Bereichen der beiden äußeren Laminas überschritten, was jedoch

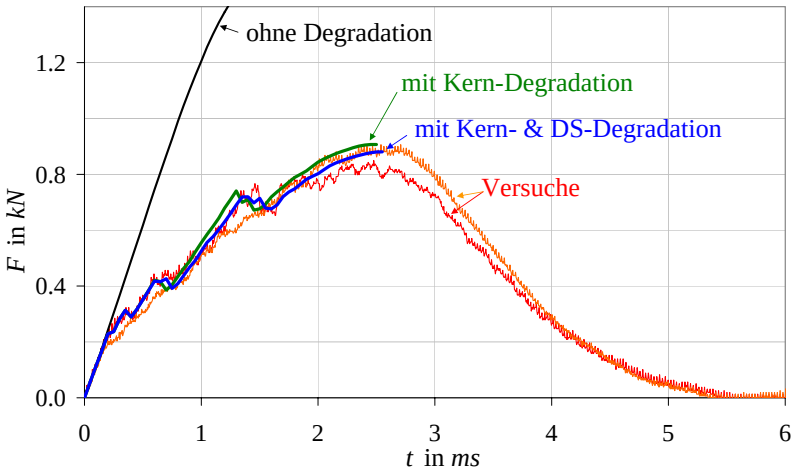


Abbildung 5.6: Kontaktkraft-Zeit-Verläufe des $1J$-Impacts für verschiedene Stufen der Degradation.

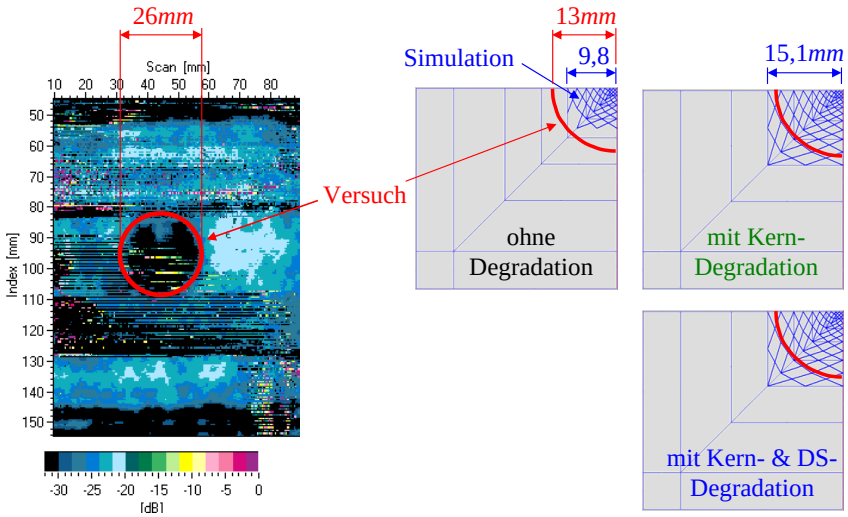


Abbildung 5.7: Größe des Kernschadens beim $1J$-Impact für verschiedene Stufen der Degradation.

die Tragfähigkeit der Deckschicht noch nicht merklich herabsetzt. Da sich in den Ultraschallbildern des Versuchs gar keine Deckschichtschädigung erkennen lässt (vgl. mittleres Bild in Abb. 3.1), ist eine Validierung der berechneten Faserbruch- und Matrixbruch-Bereiche an dieser Stelle leider nicht möglich; hierfür wären Schnittbilder und Röntgenuntersuchungen nötig gewesen. Delaminationen treten bei derart dünnen Deckschichten im Allgemeinen nicht auf; sie wären normalerweise auch im Ultraschallbild von Abb. 3.1 erkennbar.

5.4.2 Impact mit sichtbarem Schaden

Erfolgt ein Impact mit höherer Energie, so beginnt die Deckschicht zu reißen, wenn eine Kontaktkraft von etwa $1kN$ überschritten wird. Dies ist beim $4J$-Impact der Fall, wie die Kontaktkraft-Zeit-Verläufe in Abb. 5.8 zeigen. Den Versuchsergebnissen in Abb. 5.8 sind wieder drei Simulationsergebnisse gegenübergestellt: Wird Degradation nicht berücksichtigt, so werden zu große Kontaktkräfte berechnet und die obere, schwarze Kurve entsteht. Bei Verwendung des Kern-Degradationsmodells wird der Anstieg des Kraft-Zeit-Verlaufs kleiner, sobald Kernschaden auftritt (grüne Kurve). Der weitere Kurvenverlauf stimmt bis zu einer Kontaktkraft von etwa $1kN$ gut mit den Versuchsergebnissen überein. Um an dieser Stelle

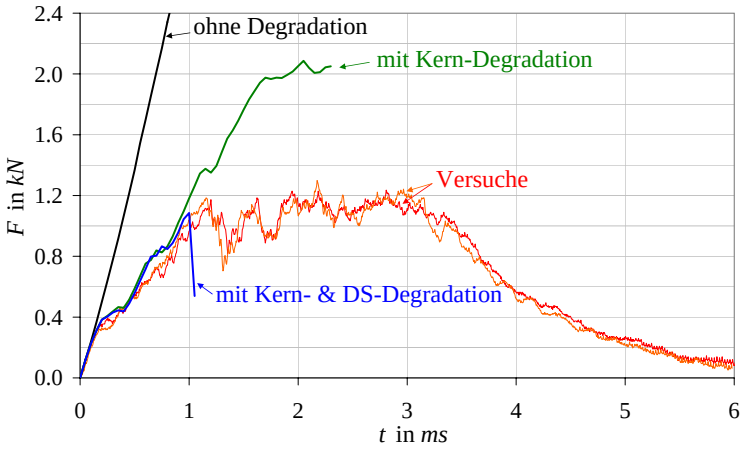


Abbildung 5.8: Kontaktkraft-Zeit-Verläufe des $4J$-Impacts für verschiedene Stufen der Degradation.

den Einbruch in der Kontaktkraft simulieren zu können, muss das Degradationsmodell für die Deckschicht hinzugeschaltet werden. Dieses bewirkt bis zu $1kN$ kaum eine Veränderung im Kraft-Zeit-Verlauf (blaue Kurve), da bis dahin nur die äußeren Laminas geringfügig angegriffen sind, die Deckschicht insgesamt aber noch tragfähig ist. Erst wenn die Festigkeit aller Laminas überschritten wird, reißt die Deckschicht auf und die Kontaktkraft fällt ab. In der Simulation geschieht dies etwas eher als im Versuch, diese Differenz ist jedoch sehr gering ($1,09kN$ im Vergleich zu $1,17kN$). Aus den im Deckschicht-Degradationsmodell verankerten und in Abschnitt 3.2.3 erläuterten Gründen, stoppt die Simulation im Moment des Aufreißens der Deckschicht. Das Ziel war, den Impactverlauf zu beschreiben, solange der Schaden noch nicht deutlich sichtbar ist, und gegebenenfalls den Beginn der Rissbildung vorherzusagen.

Ein Blick auf das rechte, untere Schadensbild in Abb. 5.9 zeigt, dass der berechnete Kernschaden etwas zu klein ist, wenn die Deckschicht degradiert wird und die Simulation abgebrochen wird, sobald die Deckschicht zu reißen beginnt. Dies ist nicht verwunderlich, da der Impact in Realität natürlich weiterläuft, die Deckschicht sich weiter durchbiegt und der Schaden weiter wächst. Die Größe des Kernschadens im Moment des Deckschichtversagens ist nur eine untere Schranke für die tatsächliche Schadensgröße. Eine obere Schranke kann durch eine Simulation ohne Deckschicht-Degradation abgeschätzt werden (rechtes, oberes Bild in Abb. 5.9). Bei einer solchen Rechnung ist die Durchbiegung der unversehrten Deckschicht flacher und großflächiger. Folglich wird der Kern über eine größere Fläche belastet und der Kernschaden ist größer als im Versuch. Dass die Deckschicht beim $4J$-Impact gerissen und sichtbar geschädigt ist, zeigen die Schadensbilder C.1(c) und C.2(c) im Anhang. Dass die Größe des endgültigen Deckschichtschadens mit den zur Verfügung stehenden effizienten Methoden nicht berechnet werden kann, wurde in Kapitel 3 bereits mit der Notwendigkeit bruchmechanischer Modelle oder energiebasierter Entfestigungsmodelle begründet. Im Moment des Aufreißens der Deckschicht ist der durch Faserbruch geschädigte Bereich zunächst nur sehr klein, wie das in Abb. 5.10 dargestellte Simulationsergebnis zeigt.

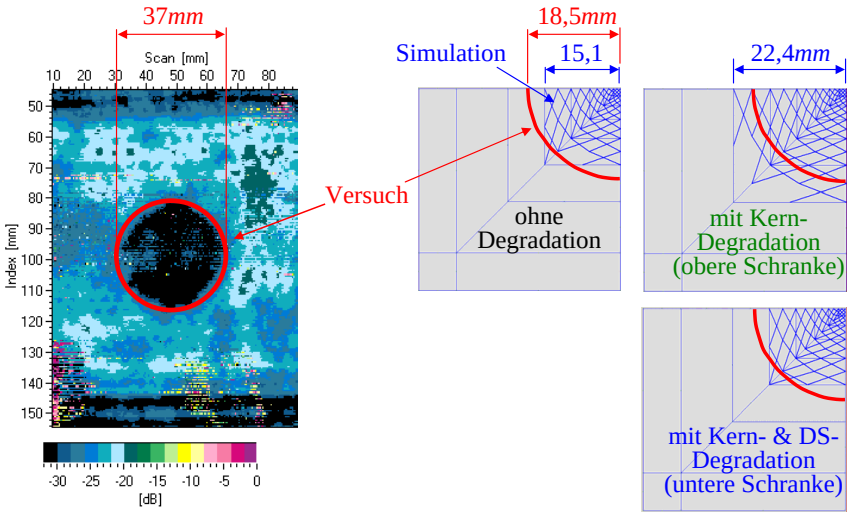


Abbildung 5.9: Größe des Kernschadens beim $4J$-Impact für verschiedene Stufen der Degradation.

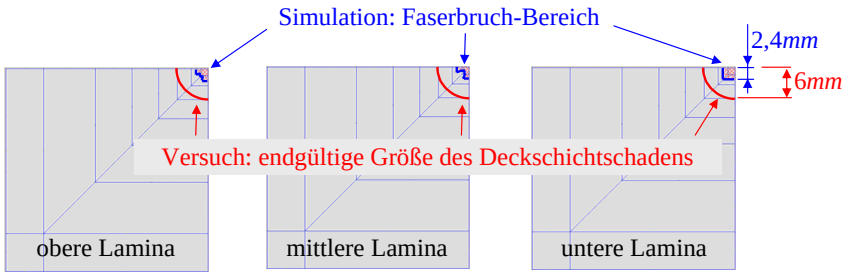


Abbildung 5.10: Größe des berechneten Faserbruch-Bereichs im Moment des Aufreißens der Deckschicht im Vergleich mit der endgültigen Schadensgröße beim $4J$-Impact.

5.4.3 Netzunabhängigkeit der Simulation

Zur Demonstration der Netzunabhängigkeit der Impactsimulation werden die Simulationsergebnisse der beiden in Abb. 5.5 dargestellten FE-Netze miteinander verglichen. Die Kontaktkraft-Zeit-Verläufe in Abb. 5.11 liegen zwar nicht exakt übereinander, da der Schadensfortschritt beim feineren Netz (49 Elemente) in kleineren Schritten abläuft als beim groben Netz (16 Elemente). Für die Zwecke einer effizienten Impactsimulation ist es aber vor allem wichtig, dass das Verhalten global richtig erfasst wird und dass am Ende die Schadensgröße richtig bestimmt wird. Wie die guten Übereinstimmungen der Kraftverläufe in Abb. 5.11 sowie der Kernschäden in Abb. 5.12 zeigen, wird eine solche globale Netzunabhängigkeit durchaus erreicht. Dieses Verhalten beruht auf Versagensmodellen, durch die das Material konstant entfestigt wird und Lokalisierungen nicht ausarten, vgl. Abschnitt 3.2. Der Unterschied bei der Größe der Kernschäden zeigt, dass das gröbere Netz tendenziell kleinere untere Schranken und größere obere Schranken für den Kernschaden liefert als das feine Netz. Dadurch, dass die Fläche des 49-Elemente-Netzes größer ist als die des 16-Elemente-Netzes, wird außerdem gezeigt, dass der Einflussbereich des Impacts auf eine kleinere Fläche als $80mm \times 80mm$ begrenzt ist. Durch den Vergleich mit weiteren Testrechnungen erwies sich das grobe Netz mit nur 16 Elementen tatsächlich als groß und fein genug, um ausreichend genaue Ergebnisse zu liefern.

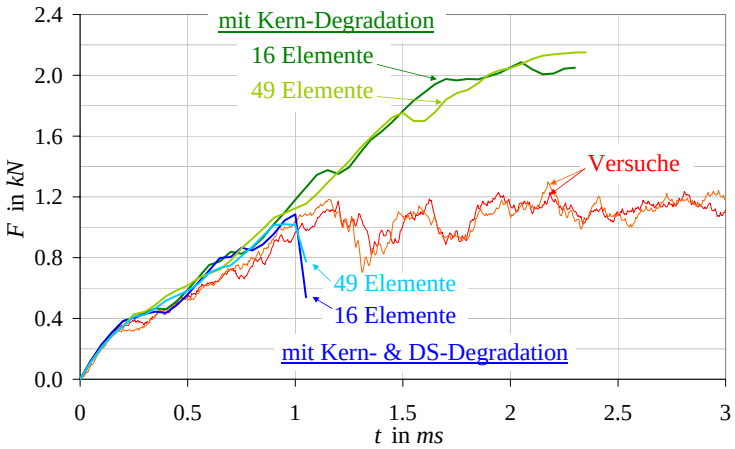


Abbildung 5.11: Kontaktkraft-Zeit-Verläufe des $4J$-Impacts für verschiedene Vernetzungen.

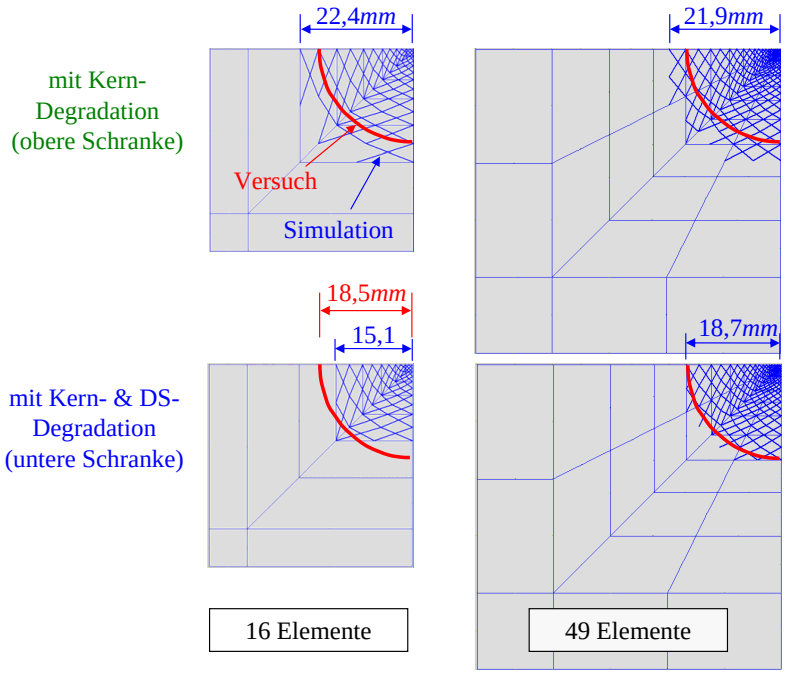


Abbildung 5.12: Größe des Kernschadens beim $4J$-Impact für verschiedene Vernetzungen.

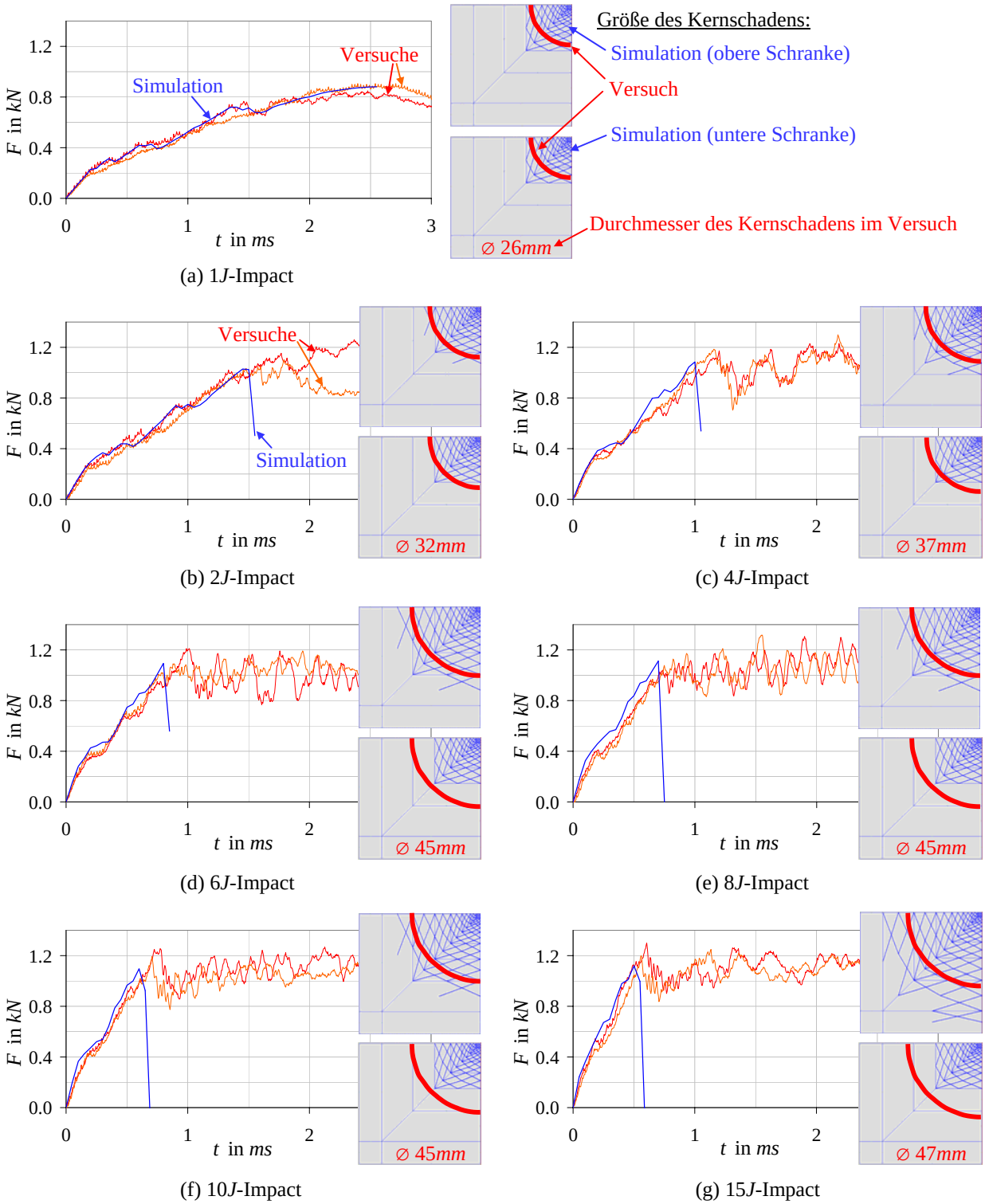
5.4.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für alle Impactenergien

In Abb. 5.13 sind für wachsende Impactenergien von $1J$ bis $15J$ die Kontaktkraft-Zeit-Verläufe und die Kernschadensflächen dargestellt. Für jede Energie werden die Simulationsergebnisse (blau) mit den Versuchsergebnissen (rot) verglichen, wobei für die Größe des Kernschadens jeweils eine obere und eine untere Schranke angegeben ist. Die Durchmesser der Kernschäden aus dem Versuch wurden mit Hilfe der Ultraschall-Rückwandechos an der unteren Deckschicht ermittelt, siehe Abb. C.3 im Anhang. Analysiert man die Ergebnisse im Hinblick auf die zunehmende Impactenergie, so lässt sich folgendes feststellen:

- Der anfängliche Anstieg der Kontaktkraft-Zeit-Kurve ist um so größer, je größer die Impactenergie ist. Er wird von der Simulation für jede Energie richtig ermittelt, d. h. das Impactverhalten der unversehrten Sandwichplatte wird durch den Impactalgorithmus und die dreischichtigen Sandwichelemente S815 gut modelliert.

- Zum ersten Kernschaden kommt es bereits bei sehr niedriger Kontaktkraft, woraufhin der Anstieg der Kraft-Zeit-Kurve geringer wird. Dieser flachere Anstieg wird von der Simulation richtig beschrieben, d. h. das Impactverhalten der Sandwichplatte mit geschädigtem Kern wird durch das Kern-Degradationsmodell gut erfasst.

- Ist die Impactenergie groß genug, um eine bestimmte Kontaktkraft zu erreichen, so versagt die Deckschicht und die Kontaktkraft fällt deutlich ab. Beim $1J$-Impact ist dies nicht der Fall, was sowohl der Versuch als auch die Berechnung zeigen. Der $2J$-Impact ist ein Grenzfall: In einem Versuch bricht die Kontakkraft merklich ein, im anderen verläuft sie ungefähr sinusförmig weiter (zu diesem zweiten Versuch gehören die Schadensbilder C.1(b) - C.3(b) im Anhang). In der Simulation wird bei $2J$ ein Einreißen der Deckschicht festgestellt. Bei allen höheren Energien versagt die Deckschicht



(a) 1*J*-Impact

(b) 2*J*-Impact

(c) 4*J*-Impact

(d) 6*J*-Impact

(e) 8*J*-Impact

(f) 10*J*-Impact

(g) 15*J*-Impact

Abbildung 5.13: Kontaktkraft-Zeit-Verläufe und Kernschäden für alle Impactenergien.

sowohl in den Versuchen als auch bei der Berechnung. Bei der Berechnung geschieht dies jeweils zwischen $1,03kN$ und $1,12kN$. Bei den Versuchen schwankt die kritische Kontaktkraft etwas stärker zwischen $1,05kN$ und $1,30kN$. Die Berechnung liegt somit auf der sicheren Seite, ist aber nicht zu konservativ, d. h. das Degradationsmodell für die Deckschicht ist geeignet, um das Einreißen der Deckschicht vorherzusagen.

- Die Größe des Kern- und des Deckschichtschadens wächst im Versuch mit zunehmender Impactenergie, solange die Energie noch relativ klein ist ($1J$ bis $6J$). Ab etwa $6J$ übersteigt der Durchmesser der Deckschichtschädigung den Durchmesser des Impactors und wird bei höheren Energien nicht mehr deutlich größer, vgl. Abb. C.2 im Anhang. Folglich wächst dann auch der Kernschaden kaum weiter, Abb. C.3. Da in der Simulation die Schädigung der Deckschicht nicht modelliert wird, kann bei gerissener Deckschicht weder die Größe des Deckschichtschadens, noch die des Kernschadens genau bestimmt werden. Für den Kernschaden können jedoch obere und untere Schranken angegeben werden, die die Versuchsergebnisse im untersuchten Fall sehr gut einfassen.

5.5 Numerischer Aufwand

Ein entscheidender Vorteil der in dieser Arbeit entwickelten Modelle und Methoden ist ihre Effizienz, die es ermöglicht, die Impactsimulation im Entwurfsprozess einzusetzen. Dafür ist zum einen eine einfache Anwendbarkeit dienlich, die maßgeblich durch eine geringe Anzahl an wählbaren Parametern und die Möglichkeit einer unkomplizierten FE-Modellierung erreicht wird. Außerdem ist ein geringer numerischer Aufwand von Vorteil, da dann der Einsatz von Hochleistungsrechnern vermieden werden kann und der Zeitaufwand gering bleibt, wenn für den Entwurf z. B. Lagenaufbauten und Materialien umfangreich variiert werden sollen.

Die hier vorgestellten Rechnungen wurden mit einem PC Pentium 4 mit $2,3GHz$ durchgeführt. Bei Verwendung des FE-Netzes mit 16 Elementen dauerte eine Impactsimulation zwischen $0{:}30min$ und $1{:}40min$, je nachdem ob die Rechnung nur bis zum Deckschichtversagen lief oder darüber hinaus bis zur maximalen Durchbiegung, wenn die Deckschichtschädigung nicht berücksichtigt wurde. Beim 49-Elemente-Netz betrug die Rechendauer zwischen $2min$ und $8min$. Diese Rechenzeiten sind für Impactsimulationen extrem gering. Jedoch scheinen sie für die geringe Anzahl an Elementen doch recht hoch zu sein. Untersuchungen hierzu haben ergeben, dass im Programm CODAC ein beträchtlicher Zeitanteil für das Aufstellen des Gleichungssystems benötigt wird. Im vorgestellten Beispiel macht sich dies dadurch bemerkbar, dass bei dreifacher Elementanzahl insgesamt nur etwa die vierfache Zeit benötigt wird und nicht annähernd die 27-fache, wie sie für das Lösen eines Gleichungssystems nötig wäre. Durch Verbesserung der Mathematik-Routinen im Programm CODAC ließe sich hier bestimmt ein Zeitgewinn erzielen. Eine solche rein rechentechnische Weiterentwicklung wurde in dieser Arbeit jedoch nicht verfolgt.

Der entscheidende Pluspunkt der Impactsimulation ist, dass sie mit einer sehr kleinen Zahl an Elementen auskommt. Dadurch kann auf den Einsatz von Großrechnern verzichtet werden, die bei Impactsimulationen mit kommerziellen Tools im Allgemeinen nötig sind und die für die dort erforderlichen sehr feinen FE-Netze Rechenzeiten von mehreren Stunden benötigen.

Kapitel 6

Zusammenfassung

6.1 Ergebnisse

Mit dieser Arbeit wurde ein Verfahren geschaffen, welches auf effiziente Weise Impactvorgänge niedriger Energie in Sandwichstrukturen simuliert und somit in kurzer Zeit eine Aussage über die Größe eines Impactschadens ermöglicht. Durch die programmtechnische Umsetzung der entwickelten Methoden im Finite-Elemente-Programm CODAC steht ein leistungsfähiges Werkzeug zur Verfügung, das mit unkomplizierter Modellgenerierung und geringer Parameteranzahl einfach zu bedienen und für den Einsatz im Entwurfsprozess geeignet ist.

Zur Beschreibung des Verformungs- und Spannungsverhaltens von Sandwichstrukturen wurden zwei neue Schalenmodelle entwickelt und die zugehörigen finiten Schalenelemente formuliert. Beide Schalenelemente sind dreischichtig und können somit das spezifische Verformungsverhalten von doppelschaligen Strukturen geeignet abbilden. Element S89 basiert auf einem ebenen Spannungszustand. Es ist in der Lage, mit geringem numerischen Aufwand Verformungen infolge von Membranlasten und kontinuierlichen transversalen Lasten ausreichend genau zu modellieren. Element S815 berücksichtigt auch die Verformbarkeit der Sandwichschale in Dickenrichtung. Es ist zwar rechentechnisch aufwendiger als Element S89, liefert bei konzentrierten transversalen Lasten wie Impacts jedoch deutlich bessere Ergebnisse. Um bei großen Durchbiegungen der impactbelasteten Deckschicht den Membranspannungszustand mit zu erfassen, enthält Element S815 auch nichtlineare Verzerrungsanteile. Ausgewählte Beispiele illustrierten die Funktionalität und die Leistungsfähigkeit der beiden Sandwichelemente.

Die Phänomenologie des Versagens von Sandwichstrukturen wurde anhand experimenteller Studien beschrieben und diskutiert. Der Sandwichkern versagt infolge einer Kombination aus transversalem Druck und transversalem Schub. Das Versagen der Faserverbunddeckschichten wird maßgeblich von Faserbrüchen bestimmt, Matrixbrüche und Delaminationen sind für den Impactverlauf kaum relevant. Aus den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen wurden makroskopische Versagensmodelle entwickelt. Die Schadensdetektion erfolgt durch spannungsbasierte Versagenskriterien. Die Materialeigenschaften werden durch schrittweise lineare Materialmodelle degradiert. Das makroskopische Versagensverhalten des Kerns kann somit vollständig beschrieben werden. Das Versagen der Deckschicht wird bis zu dem Punkt modelliert, an dem sie zu reißen beginnt. Folglich kann die Größe eines nicht bzw. kaum

sichtbaren Schadens sowie der Zeitpunkt des Durchreißens der Deckschicht vorhergesagt werden.

Für die Zeitintegration des Impactvorgangs können im FE-Programm CODAC die NEWMARK-Methode oder die zentrale Differenzenmethode eingesetzt werden. Der Kontakt zwischen Impactor und Sandwich-Deckschicht wird durch das HERTZsche Kontaktgesetz beschrieben, welches entsprechend in die Zeitschrittverfahren eingebunden wurde. Konvergenzbetrachtungen und numerische Beispiele haben gezeigt, dass die implizite NEWMARK-Methode für das vorgestellte Impactsimulationsverfahren besser geeignet ist als die explizite Differenzenmethode.

Mit Hilfe eines Vergleiches zwischen Experimenten und Berechnung wurde das Impactsimulationsverfahren validiert. Die Ergebnisse bestätigten, dass die Steifigkeiten der ungeschädigten Sandwichplatte korrekt modelliert werden, dass der Eintritt des ersten Kernschadens rechtzeitig erkannt und dass das Verhalten mit geschädigtem Kern richtig beschrieben wird. Somit können Impactvorgänge mit nicht sichtbarem Schaden vollständig simuliert werden und die Kernschadensgröße wird zuverlässig berechnet. Des Weiteren wird das Verhalten einer leicht geschädigten Deckschicht geeignet erfasst und das Aufreißen der Deckschicht wird zum richtigen Zeitpunkt festgestellt. Verschiedene Finite-Elemente-Modelle lieferten netzunabhängige und auch bei sehr groben Netzen bereits brauchbare Ergebnisse. Kurze Rechenzeiten demonstrierten den geringen numerischen Aufwand des Simulationsverfahrens.

6.2 Perspektiven

Bei einem Impact ohne Deckschichtrisse können Kernschadensgröße und Kontaktkraftverlauf bereits zuverlässig ermittelt werden. Eine Aussage über Art und Größe des kaum sichtbaren Deckschichtschadens (Faserrisse, Matrixbrüche, Delaminationen) ist zwar ebenfalls möglich, wurde jedoch bisher mangels Versuchsergebnissen nicht validiert. Hierfür sind Impact- oder Biegeversuche mit umfangreicher, experimenteller Schadensprüfung notwendig, um die Schadensentwicklung fundiert analysieren zu können. Des Weiteren wird bei einem Impact ohne Deckschichtrisse die Berechnung einer bleibenden Eindellung möglich, wenn der Impactverlauf über die maximale Belastung hinaus simuliert und dabei das Entlastungsverhalten des geschädigten Kerns und der leicht geschädigten Deckschicht geeignet modelliert wird.

Die Simulation eines Impacts mit deutlich sichtbarem Deckschichtschaden erfolgt bisher nur bis zu dem Moment, an dem die Deckschicht zu reißen beginnt, und sie liefert eine obere und eine untere Schranke für die Kernschadensgröße. Die Modellierung des Risswachstums wird nicht als vordergründiges Ziel für die Weiterentwicklung des Simulationstools angesehen, da eine solche Berechnung im Entwurfsprozess nicht unbedingt benötigt wird und sie außerdem aufwendige Methoden erfordert, die dem eigentlichen Zweck eines schnellen Entwurfs-Hilfsmittels nicht mehr dienlich sind. Für eine Verbesserung der Schadensberechnung wäre vielmehr eine zuverlässige und reproduzierbare Ermittlung der Deckschicht-Degradationsfaktoren wichtig. Bisher wurden diese anhand von Impact- bzw. Biegeversuchsergebnissen bestimmt. Interessant wäre die Entwicklung eines effektiven Verfahrens, das die richtigen Degradationsfaktoren anhand des Materialverhaltens der einzelnen Laminas ermittelt. Außerdem wäre denkbar, eine Schnittstelle zu einem genaueren Tool zu schaffen, welches auf mikromechanischer Ebene arbeitet und für bestimmte Laminataufbauten die nötigen globalen Degradationsfaktoren berechnen kann.

Die Impactsimulation wurde in dieser Arbeit für ungekrümmte Sandwichpaneele mit Faserverbunddeckschichten und Honigwabenkernen validiert. Für eine weitergehende Validierung der bisher implementierten Modelle könnten Impactversuche an leicht einaxial gekrümmten Sandwichpaneelen oder an Paneelen mit anderen Kernmaterialien (z. B. Schäumen) durchgeführt werden. Darüber hinaus ließen sich die Sandwichelemente noch für doppelte Krümmung erweitern. Zur Analyse von Sandwichstrukturen mit Metalldeckschichten, wie sie z. B. im Schiffbau weitverbreitet eingesetzt werden, wäre eine Erweiterung der Deckschicht-Versagensmodelle auf plastisches Fließen denkbar.

Interessant wäre auch die Anwendung der entwickelten Impactsimulationsmethoden auf impactbelastete Sandwichstrukturen unter Druck- oder Zuglast. Mit Hilfe entsprechender Experimente ließe sich untersuchen, für welche Lastbereiche die Methoden noch Gültigkeit haben und wann welche Weiterentwicklungen nötig werden.

Anhang A

Operatormatrizen der Schalenelemente S89 und S815

A.1 Kinematische Operatormatrizen

Die kinematischen Operatormatrizen $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_L}$ bzw. $\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_L}$ stellen durch

$$\mathbf{u}_L(x,y,z) = \mathbf{\Omega}_{\mathrm{Element}_L}(z)\,\mathbf{u}(x,y) \tag{A.1}$$

die Beziehung zwischen den Verschiebungen $\mathbf{u}_L(x,y,z)$ eines Punktes in der Schicht L (Gl. (2.1) bzw. (2.39)) und den Verschiebungsfreiheitsgraden $\mathbf{u}(x,y)$ (Gl. (2.3) bzw. (2.41)) her. Für Schalenelement S89 lauten sie

$$\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.2}$$

$$\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & z_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & z_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.3}$$

$$\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S89}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & h_2 & 0 & z_L & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & h_2 & 0 & z_L \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

Für Schalenelement S815 lauten sie

$$\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z_L & z_L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.5}$$

$$\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & 0 & z_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & 0 & z_L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 & 0 & 0 & z_L & z_L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.6}$$

$$\mathbf{\Omega}_{\mathrm{S815_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & z_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & 0 & z_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & \left(\frac{h_1}{2}\right)^2 & 0 & 0 & h_2 & h_2^2 & 0 & 0 & z_L & z_L^2 \end{bmatrix}. \tag{A.7}$$

A.2 Operatormatrizen der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung

Die Operatormatrizen $\mathbf{B}_{\mathrm{S89}}$ bzw. $\mathbf{B}_{\mathrm{S815}}$ stellen durch

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y) = \mathbf{B}_{\mathrm{Element}} \cdot \mathbf{u}(x,y) \tag{A.8}$$

die Beziehung zwischen den Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}(x,y)$ und den Verschiebungsfreiheitsgraden $\mathbf{u}(x,y)$ her. Bei Element S89 ist die Operatormatrix der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehung eine (24×9)-Matrix. Sie verknüpft die Verzerrungen (2.11) mit den Freiheitsgraden (2.3) und lautet

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S89}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & h_2\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & h_2\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & h_2\frac{\partial}{\partial y} & h_2\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.9}$$

Bei Element S815 verknüpft die Operatormatrix $\mathbf{B}_{\mathrm{S815}}$ die Verzerrungen (2.51) mit den Freiheitsgraden (2.41) und besteht folglich aus 54×15 Komponenten. Das erste Matrixdrittel mit 18×15 Komponenten beschreibt die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ in der unteren Deckschicht $L = 1$ und lautet

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_1}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}. \tag{A.10}$$

Das zweite Matrixdrittel, welches die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ im Kern beschreibt, lautet

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_2}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1^2}{4}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{h_1^2}{4}\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}. \tag{A.11}$$

Das letzte Matrixdrittel, für die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ in der oberen Deckschicht, lautet

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_3}} = \tag{A.12}$$

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & h_2\frac{\partial}{\partial x} & 0 & (1,10) & (1,11) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & h_2\frac{\partial}{\partial y} & (2,10) & (2,11) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1^2}{4}\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & h_2\frac{\partial}{\partial y} & h_2^2\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{h_1^2}{4}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & h_2\frac{\partial}{\partial x} & h_2^2\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{h_1}{2}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & h_2\frac{\partial}{\partial y} & h_2\frac{\partial}{\partial x} & (6,10) & (6,11) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

mit den vom Verschiebungszustand abhängigen Komponenten

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_3}}(1,10) = \frac{h_2^2}{2}\frac{\partial\psi_{z2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{h_2^3}{2}\frac{\partial\varphi_{z2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\,, \tag{A.13}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_3}}(1,11) = \frac{h_2^3}{2}\frac{\partial\psi_{z2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{h_2^4}{2}\frac{\partial\varphi_{z2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\,, \tag{A.14}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_3}}(2,10) = \frac{h_2^2}{2}\frac{\partial\psi_{z2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{h_2^3}{2}\frac{\partial\varphi_{z2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{A.15}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_3}}(2,11) = \frac{h_2^3}{2}\frac{\partial\psi_{z2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{h_2^4}{2}\frac{\partial\varphi_{z2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\,, \tag{A.16}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_3}}(6,10) = \frac{h_2^2}{2}\left(\frac{\partial\psi_{z2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\psi_{z2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{h_2^3}{2}\left(\frac{\partial\varphi_{z2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_{z2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\,, \tag{A.17}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{S815_3}}(6,11) = \frac{h_2^3}{2}\left(\frac{\partial\psi_{z2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\psi_{z2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{h_2^4}{2}\left(\frac{\partial\varphi_{z2}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_{z2}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\,. \tag{A.18}$$

Anhang B

Konzentration von Elementmassenmatrizen

Eine konsistente Elementmassenmatrix ist durch

$$\mathbf{M}_\mathrm{e} = \int_{A_\mathrm{e}} \mathbf{N}_\mathrm{e}^\mathrm{T}\, \mathbf{M}\, \mathbf{N}_\mathrm{e}\, \mathrm{d}A_\mathrm{e} \tag{B.1}$$

beschrieben, wobei $\mathbf{M}$ die flächenbezogene Massenmatrix, $\mathbf{N}_\mathrm{e}$ die Matrix der Formfunktionen und A_e die Fläche des Elementes ist. Beispielhaft für die Elemente S89 und S815 sind die konsistenten Elementmassenmatrizen in den Abschnitten 2.1.8 bzw. 2.2.7 angegeben.

Beim Verfahren der Massenkonzentration wird die Gesamtmasse eines Elementes nach einer betimmten Vorschrift in den Elementknoten konzentriert. Dadurch wird die massenbezogene Verknüpfung der Knoten innerhalb eines Elementes aufgehoben und folglich erhält die konzentrierte Elementmassenmatrix $\mathbf{M}_\mathrm{e}$ die gleiche Bandbreite wie die flächenbezogene Masse $\mathbf{M}$. Ist $\mathbf{M}$ eine Diagonalmatrix, so ist die konzentrierte Elementmassenmatrix ebenfalls diagonal. Aus diesem Grund wird das Verfahren der Massenkonzentration häufig auch Diagonalisierung der Massenmatrix genannt. Konzentrierte bzw. diagonalisierte Massen eignen sich bei expliziten Integrationsmethoden hauptsächlich als numerisches Hilfsmittel zur Verringerung des Rechenaufwandes bei gleichzeitiger Inkaufnahme von Genauigkeitsverlusten. Der Fehler, der durch die Massenkonzentration verursacht wird (längere Periodendauer), kann aber auch von Vorteil sein, wenn dadurch Fehler aus der Zeitintegration kompensiert werden, [109]. Folglich lässt sich die Genauigkeit bei expliziten Methoden in manchen Fällen sogar verbessern und numerische Oszillationen können effektiv ausgelöscht werden, [108], [130]. Es wird dann auch ein besseres Stabilitätsverhalten erzielt, welches größere Zeitschrittlängen als Δt_kr zulässt. Belytschko und Hughes [106] erläutern zudem, dass die größten Eigenfrequenzen bei konzentrierten Massen stets etwas kleiner sind als bei konsistenten Massen, und dass damit Δt_kr im Allgemeinen größer wird.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, um Massenmatrizen zu diagonalisieren. Sehr detailliert werden einige Methoden z. B. von Zienkiewicz und Taylor [65] oder von Felippa [141] vorgestellt und diskutiert. Bei der Konzentrierung einer Massenmatrix muss in jedem Fall sichergestellt sein, dass die Gesamtmasse der Elemente erhalten bleibt. Bei reiner Translation kann diese Bedingung anhand des gleichbleibenden Trägheitsmomentes im Allgemeinen

problemlos garantiert werden. Bei Freiheitsgraden höherer Ordnung wie z. B. Drehfreiheitsgraden ist die Erhaltung der zugehörigen Trägheitsmomente zum einen schwieriger, zum anderen aber auch nicht in jedem Fall günstig. Je nach Methode kommt es hier zu unterschiedlichen Einschränkungen in der Genauigkeit. Für die in CODAC verwendeten schubweichen Schalenelemente, die jeweils auch Drehfreiheitsgrade enthalten, wurden drei Diagonalisierungsvarianten in Erwägung gezogen: die Methode der Zeilensummation, die HRZ-Methode [130] und die RC-Methode nach Archer und Whalen [142].

B.1 Methode der Zeilensummation

Bei der Methode der Zeilensummation werden die Diagonalwerte der konzentrierten Matrix über die Summe der Zeilenwerte der konsistenten Matrix berechnet. Es gilt folglich für die Massenkomponenten

$$\mathbf{M}_\mathrm{e}(i,j) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{A_\mathrm{e}} \mathbf{N}_\mathrm{e}^\mathrm{T}(i)\,\mathbf{M}\,\mathbf{N}_\mathrm{e}(k)\;\mathrm{d}A_\mathrm{e} & i = j \\ \mathbf{0} & i \neq j \end{cases}, \tag{B.2}$$

wobei $\mathbf{N}_\mathrm{e}(i)$ der zum Knoten i gehörende Teil der Matrix der Formfunktionen ist, und n ist die Anzahl der Knoten. Die Summation erfolgt sinnvollerweise nur jeweils über die Komponenten mit gleicher physikalischer Bedeutung. In Abbildung B.1 ist für ein 8-Knoten-Element die sich ergebende Verteilung der konzentrierten Massen auf die einzelnen Knoten dargestellt. Es zeigt sich, dass an den Eckknoten negative Werte entstehen, was sich ungünstig auf die Stabilität des Zeitschrittalgorithmus auswirkt. Die Methode der Zeilensummation ist folglich für 8-Knoten-Elemente weniger gut geeignet.

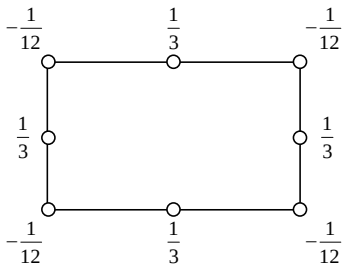


Abbildung B.1: Massenkonzentration mit der Methode der Zeilensummation für ein rechteckiges 8-Knoten-Element

B.2 HRZ-Methode

Die HRZ-Methode erhielt ihren Namen von ihren Entwicklern Hinton, Rock und Zienkiewicz [130]. Die Diagonalisierung erfolgt dadurch, dass die Diagonalwerte aus der konsistenten Massenmatrix gleichmäßig so skaliert werden, dass insgesamt Massenerhaltung gegeben ist, während die Nebendiagonalkomponenten, die die Knoten eines Elementes miteinander

koppeln, zu Null gesetzt werden:

$$\mathbf{M}_\mathrm{e}(i,j) = \begin{cases} a \int\limits_{A_\mathrm{e}} \mathbf{N}_\mathrm{e}^\mathrm{T}(i)\,\mathbf{M}\,\mathbf{N}_\mathrm{e}(i)\;\mathrm{d}A_\mathrm{e} & i = j \\ \mathbf{0} & i \neq j \end{cases}, \tag{B.3}$$

wobei a so gewählt wird, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_\mathrm{e}(i,i) = \int\limits_{A_\mathrm{e}} \mathbf{M}\;\mathrm{d}A_\mathrm{e} \tag{B.4}$$

gilt. Diese Diagonalisierungsmethode hat drei Vorteile: Sie ist einfach zu implementieren, sie ist für jedes Element anwendbar, dessen Masse mit einer konsistenten Massenmatrix beschrieben werden kann, und sie produziert keine negativen Diagonalwerte, wie die Verteilung für ein 8-Knoten-Element in Abbildung B.2 zeigt. Insbesondere der letzte Punkt ist sehr wichtig, da

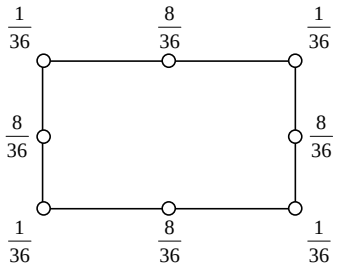


Abbildung B.2: Massenkonzentration mit der HRZ-Methode für ein rechteckiges 8-Knoten-Element

die HRZ-Methode dadurch physikalisch zulässig bleibt und keine numerischen Instabilitäten verursacht. Für den Fall, dass ein Element nur translatorische Freiheitsgrade hat, liefert die HRZ-Methode im Allgemeinen verlässliche Ergebnisse. Bei Elementen mit Drehfreiheitsgraden, die auch in CODAC verwendet werden, können durch diese Diagonalisierung jedoch Ungenauigkeiten entstehen. Archer und Whalen [142] haben gezeigt, dass zur exakten Modellierung der Rotationsträgheit bei einer Starrkörperdrehung zwei Anteile berücksichtigt werden müssen: die Rotationsmasse eines jeden infinitesimalen Elementstreifens um seine eigene Schwereachse und die Rotationsmasse des Elementstreifens um die Elementachse. Bei der HRZ-Methode wird der zweite Anteil vernachlässigt, so dass Ungenauigkeiten entstehen, wenn signifikante Starrkörperdrehungen auftreten. Wenn für die Rotationsträgheit jedoch hauptsächlich Schubdeformationen wichtig sind, so liefert die HRZ-Methode gute Ergebnisse.

B.3 RC-Methode

Um die wahre Trägheit von Elementen mit Drehfreiheitsgraden auch bei einer Starrkörperdrehung durch eine diagonalisierte Massenmatrix zu beschreiben, haben Archer und Whalen [142] eine Methode vorgeschlagen, mit der eine rotationskonsistente (RC = rotationally consistent) Diagonalmassenmatrix hergeleitet werden kann. Diese Herleitung wurde für

MINDLIN-Plattenelemente, EULER-BERNOULLI- sowie TIMOSHENKO-Balkenelemente vorgeführt. Der Gewinn durch eine solche RC-Diagonalmassenmatrix bringt jedoch auch einige Nachteile mit sich. Die RC-Methode ist nicht ohne Weiteres auf Elemente beliebiger Geometrie anwendbar und außerdem für Elemente höherer Ordnung deutlich aufwendiger. Bei MINDLIN-Plattenelementen entstehen negative Komponenten für die Rotationsanteile in der Massenmatrix, was bei bestimmter Schwingungsanregung Probleme im Hinblick auf die Stabilität mit sich bringen kann. Spielt in der kinetischen Antwort des Elementes Schubdeformation eine signifikante Rolle, so enthält die RC-Massenmatrix Ungenauigkeiten und es sind belastungsabhängig Modifikationen notwendig.

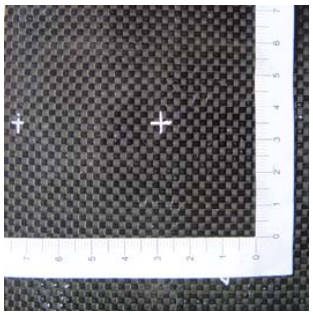
B.4 Umsetzung in CODAC

Konzentrierte Massen kommen im Impactsimulationstool CODAC nur bei Anwendung der expliziten Differenzenmethode zum Einsatz. Bei einer impliziten Methode ist zum einen die durch die Massenkonzentration erzielte Verringerung des numerischen Aufwands nur sehr klein. Zum anderen wird der numerische Fehler verstärkt, da sowohl die implizite Zeitintegration als auch die Massenkonzentration eine Periodenverlängerung verursachen, [109]. Bei der NEWMARK-Methode werden folglich konsistente Massen verwendet.

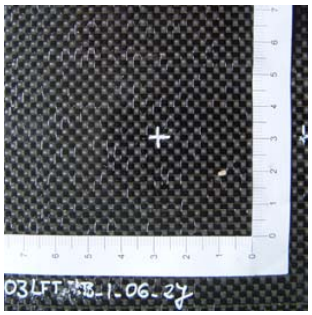
Die für die Differenzenmethode benötigte Konzentration der Massenmatrix erfolgt in CODAC mit Hilfe der HRZ-Methode, da die in Kapitel 2 vorgestellten Sandwichelemente S89 und S815 schubweiche 8-Knoten-Elemente sind und negative Matrixkomponenten zu Stabilitätsproblemen führen würden. Infolge der außerhalb der Schwereachse liegenden Bezugsebene kommt es bei den Elementen S89 und S815 in der Massenmatrix zu Nebendiagonalkomponenten, die Translationen und Rotationen verknüpfen. Eine Diagonalisierung wäre hier zwar theoretisch mit Hilfe einer Eigenwertanalyse möglich. Die dafür nötigen Eigenwertermittlungen und Koordinatentransformationen würden jedoch insbesondere durch die wechselnden Steifigkeitsverhältnisse bei Schädigung einen immensen Aufwand bedeuten. Folglich sind die konzentrierten Massenmatrizen der Elemente S89 und S815 keine reinen Diagonalmatrizen.

Anhang C

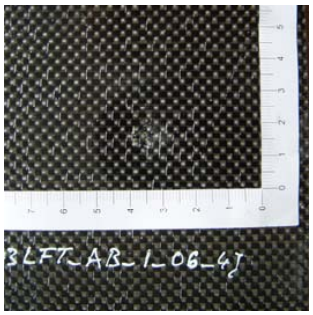
Schadensbilder von Sandwichplatten mit Honigwabenkern



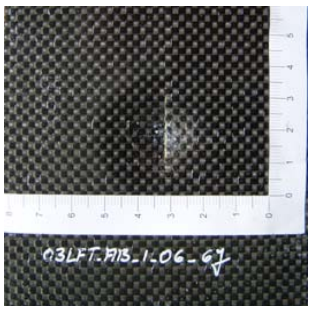
(a) 1*J*-Impact



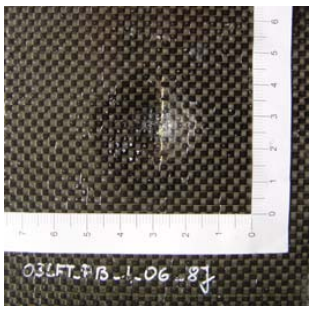
(b) 2*J*-Impact



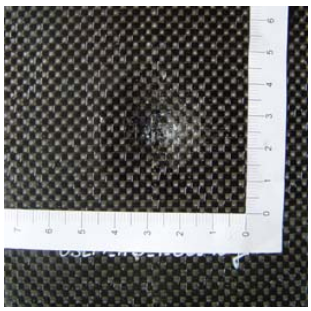
(c) 4*J*-Impact



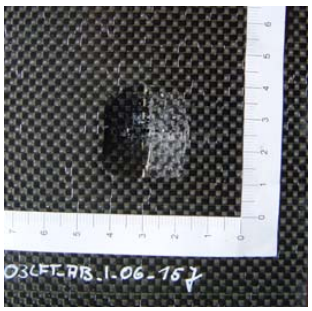
(d) 6*J*-Impact



(e) 8*J*-Impact

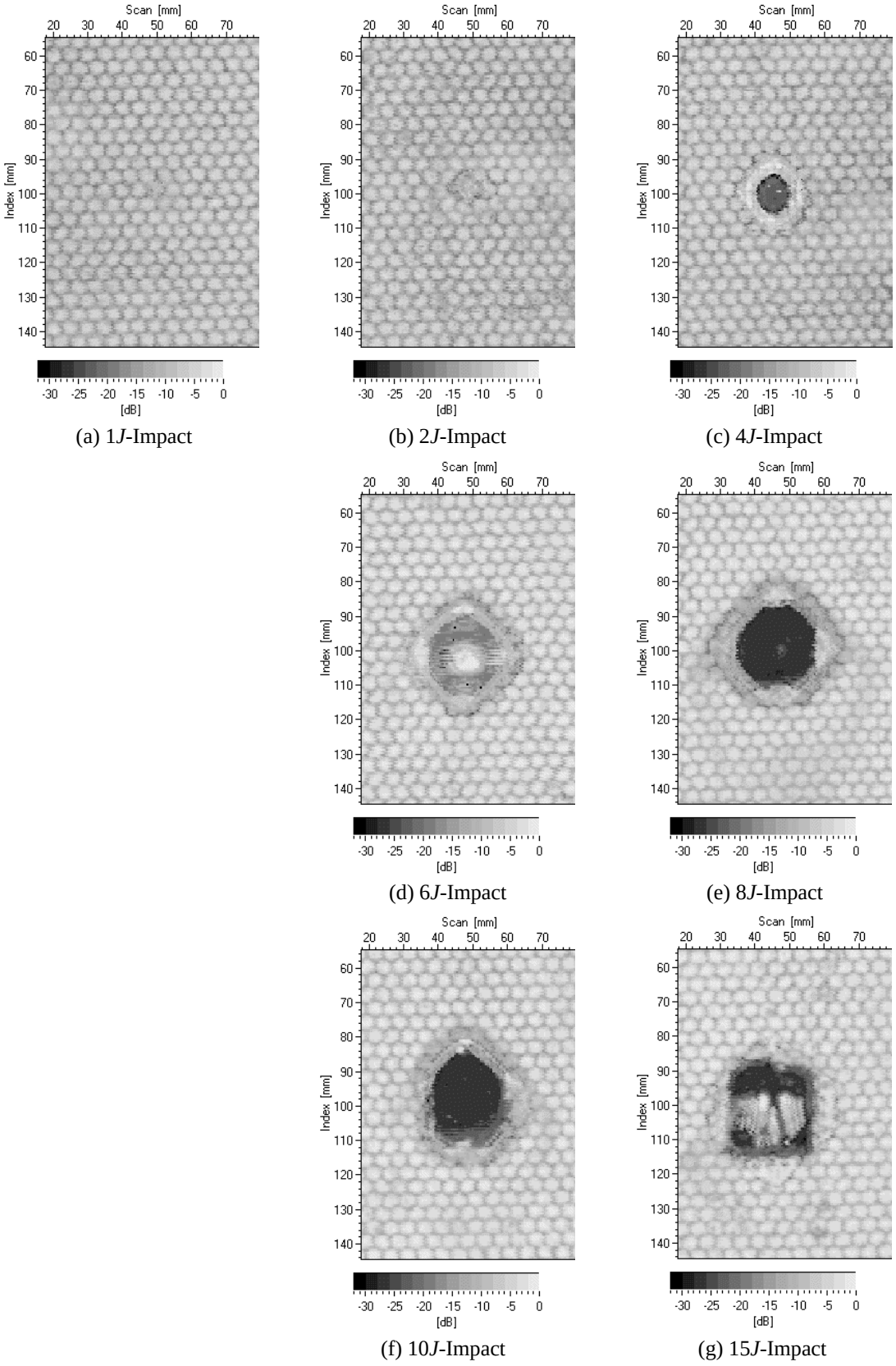


(f) 10*J*-Impact



(g) 15*J*-Impact

Abbildung C.1: Fotos von den geschädigten Deckschichten für alle Impactenergien der Versuchsreihe 03LFT_AB_I_06 am ILR Dresden [58].

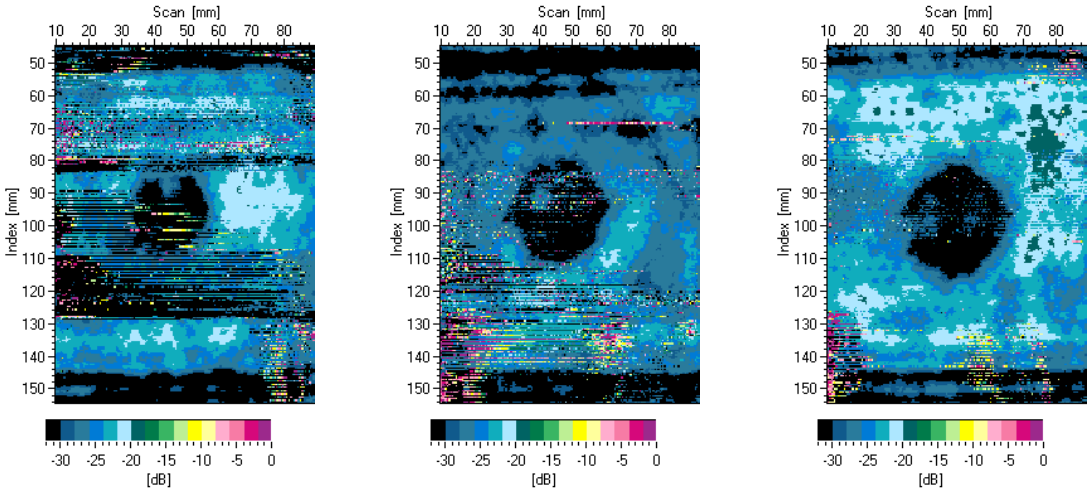


(a) 1*J*-Impact (b) 2*J*-Impact (c) 4*J*-Impact

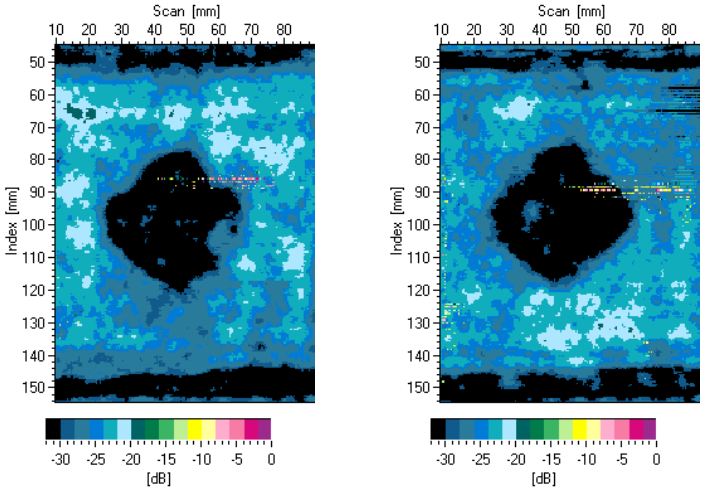
(d) 6*J*-Impact (e) 8*J*-Impact

(f) 10*J*-Impact (g) 15*J*-Impact

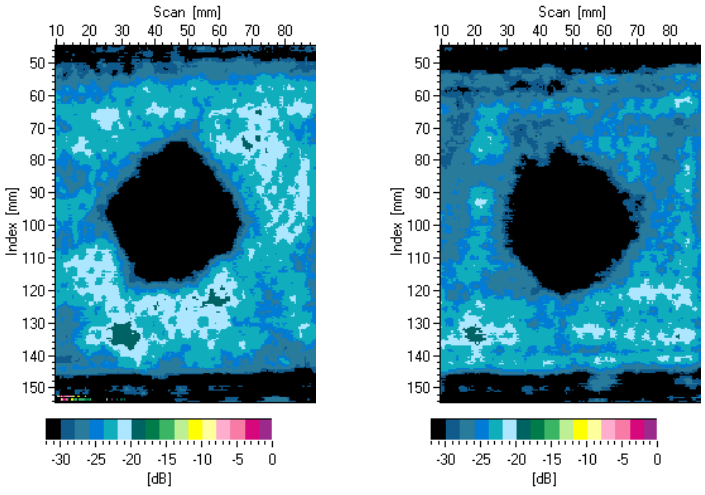
Abbildung C.2: Ultraschallbilder (Rückwandechos obere Deckschicht) zur Darstellung des Deckschichtschadens und der Anbindung an den Honigwabenkern für alle Impactenergien der Versuchsreihe 03LFT_AB_I_06 am ILR Dresden [58].



(a) 1*J*-Impact (b) 2*J*-Impact (c) 4*J*-Impact



(d) 6*J*-Impact (e) 8*J*-Impact



(f) 10*J*-Impact (g) 15*J*-Impact

Abbildung C.3: Ultraschallbilder (Rückwandechos untere Deckschicht) zur Darstellung des Kernschadens für alle Impactenergien der Versuchsreihe 03LFT_AB_I_06 am ILR Dresden [58].

Literaturverzeichnis

[1] Hexcel® Corporation: *HexWeb® Honeycomb attributes and properties.* Hexcel® Composite Materials, 1999.

[2] Mudra, C.: *Bestimmung mechanischer Kennwerte von faserverstärkten Faltwaben unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente.* Diplomarbeit, Institut für Luft- und Raumfahrt, TU Dresden, 2002.

[3] Olsson, R.: *Mass criterion for wave controlled impact response of composite plates.* Composites Part A 31: 879-887, 2000.

[4] Noor, A. K.; Burton, W. S.: *Assessment of computational models for multilayered composite shells.* Applied Mechanics Review 43: 67-97, 1990.

[5] Carrera, E.: *Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells.* Archives of Computational Methods in Engineering 9: 87-140, 2002.

[6] Carrera, E.: *Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking.* Archives of Computational Methods in Engineering 10: 215-297, 2003.

[7] Rohwer, K.: *Application of higher order theories to the bending analysis of layered composite plates.* International Journal of Solids and Structures 29: 105-119, 1992.

[8] Rohwer, K.; Friedrichs, S.; Wehmeyer, C.: *Analyzing laminated structures from fibre-reinforced composite material - An assessment.* Technische Mechanik 25: 59-77, 2005.

[9] Gaudenzi, P.; Barboni, R.; Mannini, A.: *A finite element evaluation of single-layer and multi-layer theories for the analysis of laminated plates.* Composite Structures 30: 427-440, 1995.

[10] Park, J. W.; Lee, K. C.; Kim, Y. H.: *Comparative study of finite element based response evaluation methods for laminated plates.* Computational Mechanics 32: 115-133, 2003.

[11] Mindlin, R. D.: *Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates.* Journal of Applied Mechanics 18: 31-38, 1951.

[12] Reissner, E.: *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates.* Journal of Applied Mechanics 12: 69-77, 1945.

[13] Madabhusi-Raman, P.; Davalos, J. F.: *Static shear correction factor for laminated rectangular beams.* Composites Part B 27B: 285-293, 1996.

[14] Pai, P. F.; Schulz, M. J.: *Shear correction factors and an energy-consistent beam theory.* International Journal of Solids and Structures 36: 1523-1540, 1999.

[15] Altenbach, H.: *An alternative determination of transverse shear stiffnesses for sandwich and laminated plates.* International Journal of Solids and Structures 37: 3503-3520, 2000.

[16] Hutchinson, J. R.: *Shear coefficients for Timoshenko beam theory.* Journal of Applied Mechanics 68: 87-92, 2001.

[17] Pryor, C. W.; Barker, R. M.: *A finite element analysis including transverse shear effects for application to laminate plates.* AIAA Journal Vol. 9: 912-917, 1971.

[18] Rolfes, R.; Rohwer, K.: *Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory.* International Journal for Numerical Methods in Engineering 40: 51-60, 1997.

[19] Carrera, E.; Demasi, L.: *Two benchmarks to assess two-dimensional theories of sandwich.* AIAA Journal 41: 1356-1362, 2003.

[20] Pai, P. F.; Palazotto, A. N.: *A higher-order sandwich plate theory accounting for 3-d stresses.* International Journal of Solids and Structures 38: 5045-5062, 2001.

[21] Barut, A.; Madenci, E.; Heinrich, J.; Tessler, A.: *Analysis of thick sandwich construction by a 3,2-order theory.* International Journal of Solids and Structures 38. 6063-6077, 2001.

[22] Matsunaga, H.: *Assessment of a global higher-order deformation theory for laminated composite and sandwich plates.* Composite Structures 56. 279-291, 2002.

[23] Carrera, E.: *Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells.* Applied Mechanics Review. 56: 287-308, 2003.

[24] Lekhnitskii, S. G.: *Strength calculation of composite beams.* Vestnik Inzhen I Tekhnikov 9: 137-148, 1935.

[25] Ambartsumian, S. A.: *Theory of anisotropic plates.* Translated from Russian by T. Cheron, Edited by J. E. Ashton, Technomic Publishing Company, 1969.

[26] Reissner, E.: *On a certain mixed variational theory and a proposed application.* International Journal for Numerical Methods in Engineering 20: 1366-1368, 1984.

[27] Sun, C.-T.; Whitney, J. M.: *Theories for the dynamic response of laminated plates.* AIAA Journal 11: 178-183, 1973.

[28] Di Sciuva, M.: *Development of an anisotropic, multilayered, shear-deformable rectangular plate element.* Computers and Structures 21: 789-796, 1985.

[29] Lee, K. H.; Senthilnathan, N. R., Lim, S. P.; Chow, S. T.: *An improved zig-zag model for the bending of laminated composite plates.* Composite Structures 15: 137-148, 1990.

[30] Icardi, U.: *Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations.* Composites Part B 32: 343-354, 2001.

[31] Murakami, H.: *Laminated composite plate theory with improved in-plane responses.* Journal of Applied Mechanics 53: 661-666, 1986.

[32] Carrera, E.: *On the use of the Murakami's zig-zag function in the modelling of layered plates and shells.* Computers and Structures 82: 541-554, 2004.

[33] Herup, E. J.; Palazotto, A. N.: *Low-velocity impact damage initiation in graphite/epoxy/Nomex honeycomb-sandwich plates.* Composite Science and Technology 57: 1581-1598, 1997.

[34] Mines, R. A. W.; Worrall, C. M.; Gibson, A. G.: *Low velocity perforation behaviour of polymer composite sandwich panels.* International Journal of Impact Engineering 21: 855-879, 1998.

[35] Anderson, T.; Madenci, E.: *Experimental investigation of low-velocity impact characteristics of sandwich composites.* Composite Structures 50: 239-247, 2000.

[36] Gustin, J.; Mahinfalah, M.; Nakhaie Jazar, G.; Aagaah, M. R.: *Low-velocity impact of sandwich composite plates.* Society for Experimental Mechanics 44: 574-583, 2004.

[37] Gustin, J.; Joneson, A.; Mahinfalah, M.; Stone, J.: *Low velocity impact of combination Kevlar/carbon fibre sandwich composites.* Composite Structures 69: 396-406, 2005.

[38] Dear, J. P.; Lee, H.; Brown, S. A.: *Impact damage processes in composite sheet and sandwich honeycomb materials.* International Journal of Impact Engineering 32: 130-154, 2005.

[39] Schubel, P. M.; Luo, J.-J.; Daniel, I. M.: *Low velocity impact behavior of composite sandwich panels.* Composites Part A 36: 1389-1396, 2005.

[40] Suvorov, A. P.; Dvorak, G. J.: *Enhancement of low velocity impact damage resistance of sandwich plates.* International Journal of Solids and Structures 42: 2323-2344, 2005.

[41] Olsson, R.: *Prediction of impact damage in sandwich panels.* Proc. Third Int. Conf. on Sandwich Construction: 659-668, 1996.

[42] Türk, M. H.; Hoo Fatt, M. S.: *Localized damage response of composite sandwich plates.* Composites: Part B 30: 157-165, 1999.

[43] Petras, A.; Sutcliffe, M. P. F.: *Failure mode maps for honeycomb sandwich panels.* Composite Structures 44: 237-252, 1999.

[44] Petras, A.; Sutcliffe, M. P. F.: *Indentation resistance of sandwich beams.* Composite Structures 46: 413-424, 1999.

[45] Petras, A.; Sutcliffe, M. P. F.: *Indentation failure analysis of sandwich beams.* Composite Structures 50: 311-318, 2000.

[46] Hoo Fatt, M. S.; Park, K. S.: *Dynamic models for low-velocity impact damage of composite sandwich panels - Part B: Damage initiation.* Composite Structures 52: 353-364, 2001.

[47] McCormack, T. M.; Miller, R.; Kesler, O.; Gibson, L. J.: *Failure of sandwich beams with metallic foam cores.* Int. Journal of Solids and Structures 38: 4901-4920, 2001.

[48] Olsson, R.: *Engineering method for prediction of impact response and damage in sandwich panels.* Journal of Sandwich Structures and Materials 4: 3-29, 2002.

[49] Lee, Y.-J.; Shyu, Y.: *Low velocity impact failure analysis of sandwich beams.* Proc. ICCM-11, Volume II: 495-502, 1997.

[50] Hähnel, F.; Wolf, K.: *Numerical simulation of CFRP honeycomb sandwich subjected to low-velocity impact.* Proc. Fifth Int. Conf. on Sandwich Construction, 2000.

[51] Meo, M.; Morris, A. J.; Vignjevic, R.; Marengo, G.: *Numerical simulations of low-velocity impact on an aircraft sandwich panel.* Composite Structures 62: 353-360, 2003.

[52] Meo, M.; Vignjevic, R.; Marengo, G.: *The response of honeycomb sandwich panels under low-velocity impact loading.* International Journal of Mechanical Sciences 47: 1301-1325, 2005.

[53] Nguyen, M. Q.; Jacombs, S. S.; Thomson, R. S.; Hachenberg, D.; Scott, M. L.: *Simulation of impact on sandwich structures.* Composite Structures 67: 217-227, 2005.

[54] Palazotto, A. N.; Herup, E. J.; Gummadi, L. N. B.: *Finite element analysis of low-velocity impact on composite sandwich plates.* Composite Structures 49: 209-227, 2000.

[55] Besant, T.; Davies, G. A. O.; Hitchings, D.: *Finite element modelling of low velocity impact of composite sandwich panels.* Composites Part A 32: 1189-1196, 2001.

[56] Davies, G. A. O.; Hitchings, D.; Besant, T.; Clarke, A.; Morgan, C.: *Compression after impact strength of composite sandwich panels.* Composite Structures 63: 1-9, 2004.

[57] Aktay, L.; Johnson, F. A.; Holzapfel, M.: *Prediction of impact damage on sandwich composite panels.* Computational Materials Science 32: 252-260, 2005.

[58] Wolf, K.; Hähnel, F.; Steinbach, K.: Persönliche Korrespondenz. Institut für Luft- und Raumfahrt, TU Dresden.

[59] Wetzel, A.; Kärger, L.: *Impact- und Restfestigkeitsversuche an Sandwichplatten mit Faltwabenkernen.* Interner Bericht IB 131-2006/35, DLR Braunschweig, 2006.

[60] Kärger, L.; Wetzel, A.: *Entwicklung von finiten Sandwichelementen für eine schnelle Verschiebungs- und Spannungsanalyse im Programm CODAC.* Interner Bericht IB 131-2003/44, DLR Braunschweig, 2003.

[61] Kärger, L.; Wetzel, A.; Rolfes, R.; Rohwer, K.: *A three-layered sandwich element with improved transverse shear stiffness and stresses based on FSDT.* Computers and Structures 84: 843-854, 2006.

[62] Wetzel, A.; Kärger, L.; Rolfes, R.; Rohwer, K.: *Evaluation of two finite element formulations for a rapid 3D stress analysis of sandwich structures.* Computers and Structures 83: 1537-1545, 2005.

[63] Altenbach, H.; Altenbach, J.; Rikards, R.: *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke.* Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart, 1996.

[64] Reddy, J. N.: *Mechanics of laminated composite plates and shells - Theory and Analysis.* USA: CRC Press, Boca Raton, 2004.

[65] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method, 4th ed., Vol. 1: Basic formulation and linear problems.* McGRAW-Hill Book Company, London, 1989.

[66] Bathe, K.-J.: *Finite Elemente Methoden.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[67] Rolfes, R.; Rohwer, K.; Ballerstaedt, M.: *Efficient linear transverse normal stress analysis of layered composite plates.* Computers and Structures 68: 643-652, 1998.

[68] Sansour, C.: *A theory and finite element formulation of shells at finite deformations including thickness change: circumventing the use of a rotation tensor.* Archive of Applied Mechanics 65: 194-216, 1995.

[69] Matheas, J.: *Entwicklung von Finiten Schalenelementen zur Berechnung von Verstärkungen aus Textilbeton bei Flächentragwerken.* Dissertation, Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Technische Universität Dresden, 2006.

[70] Pagano, N. J.: *Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending.* Journal of Composite Materials 3: 398-411, 1969.

[71] Kintscher, M.; Kärger, L.: *Versagen von Faltwaben- und Honigwabenkernen unter kombinierter Druck-Schub-Belastung - Entwicklung von Materialmodellen und Versagenskriterien.* Interner Bericht IB 131-2006/07, DLR Braunschweig, 2006.

[72] Kintscher, M.; Kärger, L.; Wetzel, A.; Hartung, D.: *Stiffness and failure behaviour of folded sandwich cores under combined transverse shear and compression.* Composites Part A 38: 1288-1295, 2007.

[73] Kehrle, R.; Drechsler, K.: Aktuelle Forschungsarbeiten zu Faltwabenkernstrukturen am Institut für Flugzeugbau, Universität Stuttgart, 2006.

[74] Tessmer, J.: *Theoretische und algorithmische Beiträge zur Berechnung von Faserverbundschalen.* Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 2000.

[75] Wang, J.; Karihaloo, B. L.: *Matrix crack-induced delamination in composite laminates under transverse loading.* Composite Structures 38: 661-666, 1997.

[76] Hill, R.: *The mathematical theory of plasticity.* Oxford University Press, New York, 1950.

[77] Gibson, L. J.; Ashby, M. F.; Zhang, J.; Triantafillou, T. C.: *Failure surface for cellular materials under multiaxial loads. I Modelling.* International Journal of Mechanical Sciences 31: 635-663, 1989.

[78] Gioux, G.; McCormack, T. M.; Gibson, L. J.: *Failure of aluminum foams under multiaxial loads.* International Journal of Mechanical Sciences 42: 1097-1117, 2000.

[79] Benderly, D.; Putter, S.: *Characterization of the shear/compression failure envelope of Rohacell foam.* Polymer Testing 23: 51-57, 2004.

[80] Li, Q. M.; Mines, R. A. W.; Birch, R. S.: *The crush behaviour of Rohacell 51-WF structural foam.* International Journal of Solids and Structures 37: 6321-6341, 2000.

[81] Hong, S.-T.; Pan, J.; Tyan, T.; Prasad, P.:*Quasi-static crush behavior of aluminium honeycomb specimens under compression dominant combined loads.* International Journal of Plasticity 22: 73-109, 2006.

[82] Tsai, S. W.; Wu, E. M.: *A general theory of strength for anisotropic materials.* Journal of Composite Materials 5: 58-80, 1971.

[83] Hashin, Z.: *Failure criteria for unidirectional fibre composites.* Journal of Applied Mechanics 47: 329-334, 1980.

[84] Puck, A.: *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis.* Carl Hanser Verlag, München, 1996.

[85] Cuntze, R.; Deska, R.; Szelinski, B.; Jeltsch-Fricker, R.; Meckbach, S.; Huybrechts, D.; Kopp, J.; Kroll, L.; Gollwitzer, S.; Rackwitz, R.: *Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbund unter mehrachsiger Beanspruchung - Modellbildung und Experimente.* VDI Fortschritt-Berichte Reihe 5, Nr. 506, 1997.

[86] Mohr, O.: *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?* Zeitschrift des VDI 24 (45): 1524-1530 und (46): 1572-1577, 1900.

[87] Davila, C. G.; Camanho, P. P.; Rose, C. A.: *Failure criteria for FRP laminates.* Journal of Composite Materials 39: 323-345, 2005.

[88] Chang, F.-K.; Chang, K.-Y.: *A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations.* Journal of Composite Materials 21: 834-855, 1987.

[89] Nahas, M. N.: *Survey of failure and post-failure theories of laminated fibre reinforced composites.* Journal of Composites Technology & Research 8 (4): 138-153, 1986.

[90] Hinton, M. J.; Soden, P. D.: *Predicting failure in composite laminates: the background to the exercise.* Composites Science and Technology 58: 1001-1010, 1998.

[91] Soden, P. D.; Hinton, M. J.; Kaddour, A. S.: *Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates.* Composites Science and Technology 58: 1011-1022, 1998.

[92] Soden, P. D.; Hinton, M. J.; Kaddour, A. S.: *A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates.* Composites Science and Technology 58: 1125-1254, 1998.

[93] Soden, P. D.; Hinton, M. J.; Kaddour, A. S.: *Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data.* Composites Science and Technology 62: 1489-1514, 2002.

[94] Hinton, M. J.; Kaddour, A. S.; Soden, P. D.: *A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence.* Composites Science and Technology 62: 1725-1797, 2002.

[95] Hinton, M. J.; Kaddour, A. S.; Soden, P. D.: *A further assessment of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: comparison with experimental evidence.* Composites Science and Technology 64: 549-588, 2004.

[96] Soden, P. D.; Kaddour, A. S.; Hinton, M. J.: *Recommendations for designers and researchers resulting from the world-wide failure exercise.* Composites Science and Technology 64: 589-604, 2004.

[97] Altendorf, D.; Kärger, L.: *Bewertung von Versagenskriterien für Faserverbunde anhand der Studien von Soden, Hinton und Kaddour.* Interner Bericht IB 131-2005/31, DLR Braunschweig, 2005.

[98] Puck, A.; Schürmann, H.: *Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models.* Composite Science and Technology 58: 1045-1067, 1998.

[99] Chai, Y.; Gädke, M.: *Impact damage simulation and compression after impact of composite stiffened panels.* Interner Bericht IB 131-99/20, DLR Braunschweig, 1999.

[100] Choi, H. Y.; Chang, F.-K.: *A model for predicting damage in graphite/epoxy laminated composites resulting from low-velocity impact.* Journal of Composite Materials 14: 2134-2168, 1992.

[101] Iannucci, L.: *Progressive failure modelling of woven carbon composite under impact.* International Journal of Impact Engineering 32: 1013-1043, 2006.

[102] Johnson, F. A.: *Modelling fabric reinforced composites under impact loads.* Composites Part A 32: 1197-1206, 2001.

[103] Rosen, B. W.; Hashin, Z.: *Analysis of material properties.* Engineered Materials Handbook, Vol. 1, Composites, ASM International: 185-205, 1987.

[104] Zweben, C.: *Tensile failure analysis of fibrous composites.* AIAA Journal 6: 2325-2331, 1968.

[105] Rosen, B. W.: *Tensile failure of fibrous composites.* AIAA Journal 2: 1982-1991, 1964.

[106] Belytschko, T.; Hughes, T. J. R.: *Computational methods for transient analysis.* Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, 1983.

[107] Hughes, T. J. R.: *The Finite Element Method: Linear static and dynamic finite element analysis.* Dover Publications, Mineola, New York, 2000.

[108] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method, 4th ed., Vol. 2: Solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity.* McGRAW-Hill Book Company, London, 1991.

[109] Dokainish, M. A.; Subbaraj, K.: *A Survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics - I. Explicit methods.* Computers and Structures 32: 1371-1386, 1989.

[110] Subbaraj, K.; Dokainish, M. A.: *A Survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics - II. Implicit methods.* Computers and Structures 32: 1387-1401, 1989.

[111] Newmark, N. M.: *A Method for computation of structural dynamics.* Journal of Engineering Mechanics - Proc. ASCE 85(EM3): 67-94, 1959.

[112] Hertz, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper.* Journal für die reine und angewandte Mechanik 92: 156-171, 1881.

[113] Abrate, S.: *Impact on composite structures.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[114] Timoshenko, S. P.: *Zur Frage nach der Wirkung eines Stosses auf einen Balken.* Zeitschrift für Mathematik und Physik 62: 198-209, 1913.

[115] Olsson, R.: *Analytical prediction of large mass impact damage in composite laminates.* Composites Part A 32: 1207-1215, 2001.

[116] Icardi, U.; Zardo, G.: *C^0 plate element for delamination damage analysis, based on a zig-zag model and strain energy updating.* International Journal of Impact Engineering 31: 579-606, 2005.

[117] Qiao, P.; Yang, M.: *Static and nonlinear impact analyses of free-free sandwich plates on a solid half-space.* Journal of Sandwich Structures and Materials 7: 519-551, 2005.

[118] Yang, S. H.; Sun, C. T.: *Indentation law for composite laminates.* Composite Materials: Testing and Design (Sixth Conference), ASTM STP 787: 425-449, 1982.

[119] Davies, G. A. O.; Zhang, X.: *Impact damage prediction in carbon composite structures.* International Journal of Impact Engineering 16: 149-170, 1995.

[120] Abrate, S.: *Modelling of impact on composite structures.* Composite Structures 51: 129-138, 2001.

[121] Guan, Z.; Yang, C.: *Low-velocity impact and damage process of composite laminates.* Journal of Composite Materials 36: 851-871, 2002.

[122] Krishnamurthy, K. S.; Mahajan, P.; Mittal, R. K.: *Impact response and damage in laminated composite cylindrical shells.* Composite Structures 59: 15-36, 2003.

[123] Khalili, M. R.; Malekzadeh, K.; Mittal, R. K.: *Effect of physical and geometrical parameters on transverse low-velocity impact response of sandwich panels with a transversely flexible core.* Composite Structures 77: 430-443, 2007.

[124] Wriggers, P.: *Finite element methods for contact problems with friction.* Tribology International 29: 651-658, 1996.

[125] Butcher, J. C.: *Numerical methods for ordinary differential equations.* John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2003.

[126] Jensen, P. S.: *Transient analysis of structures by stiffly stable methods.* Computers and Structures 4: 615-626, 1974.

[127] Park, K. C.: *Practical aspects of numerical time integration.* Computers and Structures 7: 343-353, 1977.

[128] Krieg, R. D.: *Unconditional stability in time integration methods.* Journal of Applied Mechanics 40: 417-421, 1973.

[129] Hibbitt; Karlsson; Sorenson: *ABAQUS Theory Manual, Version 5.8.* Hibbitt, Karlsson & Sorenson, Inc., 1998.

[130] Hinton, E.; Rock, T.; Zienkiewicz, O. C.: *A note on mass lumping and related processes in the Finite Element Method.* International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics 4: 245-249, 1976.

[131] Wiberg, N. E.; Li, X. D.: *A post-processing technique and an a posteriori error estimate for the Newmark Method in dynamic analysis.* International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics 22: 465-489, 1993.

[132] Choi, C.-K.; Chung, H.-J.: *Error estimates and adaptive time stepping for various direct time integration methods.* Computers and Structures 60: 923-944, 1996.

[133] Ruge, P.: *A priori local error estimation with adaptive time-stepping.* Communications in Numerical Methods in Engineering 15: 479-491, 1999.

[134] Wilson, E. L.; Farhoomand, I.; Bathe, K.-J.: *Nonlinear dynamic analysis of complex structures.* International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1: 241-252, 1973.

[135] Houbolt, J. C.: *A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft.* Journal of Aeronautical Sciences 17: 540-550, 1950.

[136] Noels, L.; Stainier, L.; Ponthot, J.-P.: *Combined implicit/explicit algorithms for crashworthiness analysis.* International Journal of Impact Engineering 30: 1161-1177, 2004.

[137] Kärger, L.; Baaran, J.; Tessmer, J.: *Rapid simulation of impacts on composite sandwich panels inducing barely visible damage.* Composite Structures 79: 527-534, 2007.

[138] Kärger, L.; Baaran, J.; Tessmer, J.: *FE-Tool CODAC for an efficient simulation of low-velocity impacts on composite sandwich structures.* Proc. Third European Conf. on Computational Mechanics, Lisbon, 2006.

[139] Kärger, L.; Baaran, J.; Tessmer, J.: *Efficient simulation of low-velocity impacts on composite sandwich structures.* Computers and Structures: in press, 2007.

[140] Kärger, L.; Baaran, J.; Tessmer, J.: *Experimental validation of efficient impact simulation methodologies of sandwich structures.* Proc. 12th Australian Int. Aerospace Congress, Melbourne, 2007.

[141] Felippa, C. A.: *Introduction to Finite Element Methods.* Lecture Notes, Aerospace Engineering Science Department, University of Colorado, 2004.

[142] Archer, G. C.; Whalen, T. M.: *Development of rotationally consistent diagonal mass matrices for plate and beam elements.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194: 675-689, 2005.