

**IB 131-2007/01**

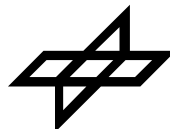
**UNTERSUCHUNG  
BRUCHMECHANISCHER  
FRAGESTELLUNGEN MIT CODAC**

D. Altendorf, J. Baaran

**DLR**

**Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik**

**Braunschweig**



**DEUTSCHES ZENTRUM  
FÜR LUFT- UND RAUMFAHRT e.V. (DLR)  
INSTITUT FÜR FASERVERBUNDLEICHTBAU UND ADAPTRONIK**

**IB 131-2007/01**

**UNTERSUCHUNG  
BRUCHMECHANISCHER  
FRAGESTELLUNGEN MIT CODAC**

Braunschweig, Februar 2007

Der Bericht umfasst:  
43 Seiten,  
15 Tabellen und  
36 Abbildungen

Institutsleiter:

Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. E. Breitbach

Dennis Altendorf

Zielfeldleiter:

Dr.- Ing. Jens Baaran

Dr.-Ing. Jan Teßmer

## Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung .....	1
2 Modus I .....	2
2.1 Einführung DCB-Probe .....	2
2.2 Analytische Lösung DCB-Probe .....	3
2.2.1 Verschiebungsfunktion des Biegebalken .....	3
2.2.2 Energiefreisetzungsrage .....	6
2.3 Vergleichslösung mit CODAC .....	9
2.3.1 Schalenelemente .....	9
2.3.2 Schalen- und Federelemente .....	19
3 Modus II .....	30
3.1 Einführung ENF-Probe .....	30
3.2 Analytische Lösung der ENF-Probe .....	31
3.3 Vergleichslösung mit CODAC .....	34
4 Zusammenfassung und Ausblick .....	41
Literaturverzeichnis .....	42

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Double Cantilever Beam Probe.....	2
Abbildung 2: Kragarm unter Einzellast .....	3
Abbildung 3: Lagerreaktionen .....	3
Abbildung 4: Schnittskizze .....	4
Abbildung 5: Querschnitt des Kragarms .....	5
Abbildung 6: Rissfortschritt infolge F .....	6
Abbildung 7: Modus I Rissausbreitung.....	8
Abbildung 8: Finite-Element-Netz.....	11
Abbildung 9: Ausschnitt aus dem FE-Netz mit Element- und Knotennummern.....	11
Abbildung 10: Formfunktionen auf dem Elementrand .....	13
Abbildung 11: Kraftverteilung .....	13
Abbildung 12: Lastverteilung für das Finite-Element-Netz.....	14
Abbildung 13: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 1mm$ ).....	15
Abbildung 14: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,5mm$ ).....	16
Abbildung 15: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,2mm$ ) .....	17
Abbildung 16: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung bei $a=32mm$ .....	18
Abbildung 17: DCB-Probe mit Zwischenelementen .....	19
Abbildung 18: Unterschied in den Randbedingungen .....	19
Abbildung 19: Einordnung der Federelemente .....	20
Abbildung 20: Finite-Element-Netz für die Rechnung mit Federelementen .....	21
Abbildung 21: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 1mm$ ).....	22
Abbildung 22: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,5mm$ ).....	23
Abbildung 23: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,2mm$ ) .....	24
Abbildung 24: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 1mm$ ).....	27
Abbildung 25: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,5mm$ ).....	28
Abbildung 26: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,2mm$ ) .....	29
Abbildung 27: ENF-Probe .....	30
Abbildung 28: Verschiebung infolge F.....	31
Abbildung 29: Rissfortschritt der ENF-Probe.....	32
Abbildung 30: Modus II Rissausbreitung .....	33
Abbildung 31: Finite-Element-Netz der ENF-Probe .....	35
Abbildung 32: Sandwichelement .....	35
Abbildung 33: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 1mm$ ).....	37
Abbildung 34: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,5mm$ ).....	38
Abbildung 35: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,2mm$ ) .....	39
Abbildung 36: Darstellung der Risslänge über der Verschiebung.....	40

**Tabellenverzeichnis**

Tabelle 1: CODAC-Resultate für $\Delta a = 1mm$ .....	15
Tabelle 2: CODAC-Resultate für $\Delta a = 0,5mm$ .....	16
Tabelle 3: CODAC-Resultate für $\Delta a = 0,2mm$ .....	17
Tabelle 4: CODAC-Resultate für $\Delta a = 1mm$ .....	22
Tabelle 5: CODAC-Resultate für $\Delta a = 0,5mm$ .....	23
Tabelle 6: CODAC-Resultate für $\Delta a = 0,2mm$ .....	24
Tabelle 7: Einfluss der Schubverformung $\Delta a = 1mm$ .....	25
Tabelle 8: Einfluss der Schubverformung $\Delta a = 0,5mm$ .....	25
Tabelle 9: Einfluss der Schubverformung $\Delta a = 0,2mm$ .....	26
Tabelle 10: CODAC-Resultate für $\Delta a = 1mm$ .....	27
Tabelle 11: CODAC-Resultate für $\Delta a = 0,5mm$ .....	28
Tabelle 12: CODAC-Resultate für $\Delta a = 0,2mm$ .....	29
Tabelle 13: CODAC-Resultate für $\Delta a = 1mm$ .....	37
Tabelle 14: CODAC-Resultate für $\Delta a = 0,5mm$ .....	38
Tabelle 15: CODAC-Resultate für $\Delta a = 0,2mm$ .....	39

# 1 Aufgabenstellung

Beim DLR Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik wird das Finite-Element-Tool CODAC (Composite Damage Tolerance Analysis Code) eingesetzt und beständig weiterentwickelt, um die Schadenstoleranz von Faserverbundstrukturen zu untersuchen. Für die Berechnung von Schadensentstehung und Schadenswachstum kommen in CODAC im Moment spannungsbasierte Schadenskriterien zur Anwendung. Um die Degradation im Fall einer Schädigung zu erfassen, werden Materialsteifigkeiten lokal abgemindert.

Spannungsbasierte Schadenskriterien können allerdings nur dann zur Modellierung des Schadensfortschritts verwendet werden, wenn sich die Auswirkung der Schädigung gut mit einer Abminderung von Werkstoffkennwerten erfassen lässt und Spannungsspitzen am Kerbrand das Schadenswachstum nicht zu stark beeinflussen. Bei Rissen, die lokal zu großen Spannungsspitzen führen, stößt die Schadensmechanik an Grenzen. Das Risswachstum beispielsweise von zug- oder schubbelasteten Bohrungen oder Kerben durch die komplette Laminatdicke, großen Delaminationen oder Haut-Stringerablösungen lässt sich genauer mit einer bruchmechanischen Herangehensweise modellieren.

Eine automatisierte Ermittlung von Energiefreisetzungsraten und Richtung des Schadenswachstums ist mit CODAC noch nicht möglich. Ziel der Arbeit ist die Demonstration der prinzipiellen Anwendbarkeit von CODAC auf verschiedene bruchmechanische Problemstellungen anhand einfacher Beispiele und unter Verwendung bestehender Modellierungsmöglichkeiten. Zur Modellierung von Faserverbundstrukturen stehen in CODAC einschichtige und mehrschichtige Schalenelemente, Balkenelemente und Federelemente zur Verfügung.

Abschließend sollen Wege aufgezeigt werden, wie CODAC erweitert werden kann, um eine benutzerfreundliche Modellierung und Berechnung bruchmechanischer Vorgänge zu ermöglichen.

## 2 Modus I

### 2.1 Einführung DCB-Probe

Bei dem in Abbildung 1 dargestellten Problem handelt es sich um die sogenannte DCB-Probe (Double Cantilever Beam). Diese Probe kommt in der Bruchmechanik zur Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrate  $G_{Ic}$  des Bruchmodus I zur Anwendung. In diesem Abschnitt wird sie dazu verwendet um die Lastverschiebungskurve des Modus I analytisch bzw. mit dem Programm CODAC darzustellen.

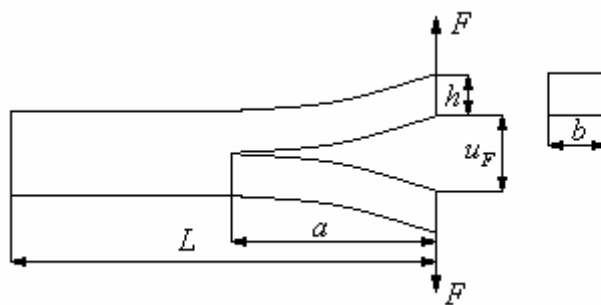


Abbildung 1: Double Cantilever Beam Probe

## 2.2 Analytische Lösung DCB-Probe

### 2.2.1 Verschiebungsfunktion des Biegebalken

Die analytische Lösung dieses Problems wird im Folgenden beschrieben, dazu wird die DCB-Probe wie in Abbildung 2 dargestellt zerlegt und die Aufweitung  $u_F$  infolge der Kraft  $F$  ermittelt. Bei der Zerlegung wird nur die obere Hälfte des symmetrisch aufgebauten Problems der Länge  $a$  betrachtet. Die hier durch die Kraft  $F$  hervorgerufene Verschiebung  $w$  entspricht somit der Hälfte der Verschiebung  $u_F$  in Abbildung 1:

$$w = \frac{u_F}{2} \quad (2.1)$$

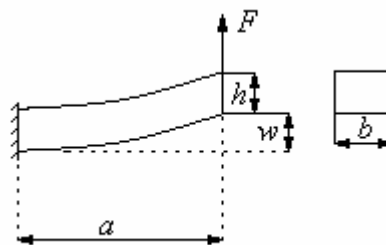


Abbildung 2: Kragarm unter Einzellast

Im ersten Schritt werden die Lagerreaktionen entsprechend Abbildung 3 bestimmt:

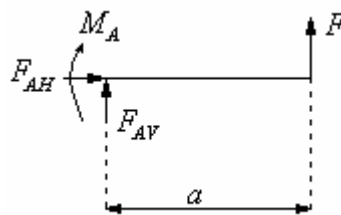


Abbildung 3: Lagerreaktionen

$$\begin{aligned} \rightarrow & : F_{AH} = 0 \\ \uparrow & : F_{AV} = -F \\ \curvearrowright A & : M_A = Fa \end{aligned}$$



Der nächste Schritt dient der Bestimmung des Biegemomentes, gemäß Abbildung 4, in Abhängigkeit des Abstandes  $x$  von der Einspannung  $A$ . Das Biegemoment wird benötigt um die Differentialgleichung der Biegelinie aufzustellen.

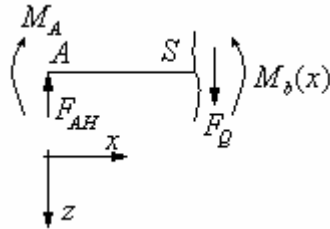


Abbildung 4: Schnittskizze

$$\uparrow : F_Q = F_{AV} = -F$$

$$\curvearrowright : M_b(x) = M_A + F_{AV}x$$

Daraus ergibt sich das Biegemoment zu:

$$M_b(x) = F(a - x) \quad (2.2)$$

Die Biegeliniendifferentialgleichung für die gerade Balkenbiegung lautet:

$$w''(x) = -\frac{M_b(x)}{EI_y} \quad (2.3)$$

Hierbei ist  $I_y$  das axiale Flächenträgheitsmoment, es errechnet sich mit dem in Abbildung 5 dargestellten Rechteckquerschnitt wie folgt:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad \rightarrow \quad I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (2.4)$$

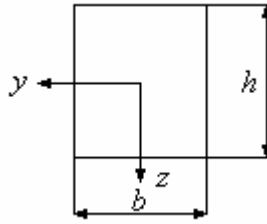


Abbildung 5: Querschnitt des Kragarms

Integriert man nun die Biegeliniendifferentialgleichung (Gleichung 2.3) zweimal, ergibt sich die Gleichung der Biegelinie zu:

$$w(x) = -\frac{(3ax^2 - x^3)F}{6EI_y} + C_1x + C_2$$

Die beiden Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  ergeben sich mit Hilfe der Randbedingungen  $w(x=0) = 0$  (Verschiebung am linken Rand) und  $w'(x=0) = 0$  (Biegewinkel am linken Rand) jeweils zu Null. Somit erhält man für das vorliegende Problem folgende Gleichung der Biegelinie.

→

$$w(x) = -\frac{(3ax^2 - x^3)F}{6EI_y} \quad (2.5)$$

## 2.2.2 Energiefreisetzungsrate

Im Folgenden wird auf die Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrate  $G_{Ic}$  eingegangen.

Wird ein rissbehafteter, elastischer Körper wie in Abbildung 6 belastet, so dass sich infolge der Belastung ein infinitesimaler Rissfortschritt der Länge  $\Delta a$  einstellt, bezeichnet man die auf  $dA$  (Fläche des Rissfortschrittes, auch  $dA = bda$ ) bezogene freigesetzte Energie  $-d\Pi$  als Energiefreisetzungsrate  $G$ . Somit erhält man

$$G = -\frac{d\Pi}{dA}. \quad (2.6)$$

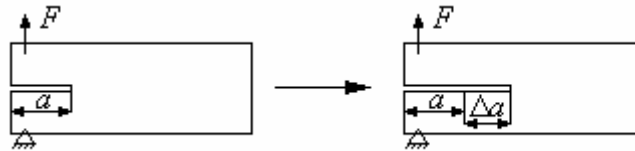


Abbildung 6: Rissfortschritt infolge F

Das Gesamtpotential  $\Pi$  ergibt sich für diesen Fall laut Gross [1] zu

$$\Pi = \Pi^i + \Pi^a = -\frac{1}{2} F u_F. \quad (2.7)$$

Hierbei gilt zwischen der Verschiebung  $u_F$  am Kraftangriffspunkt und der an-greifenden Kraft  $F$  die Beziehung  $u_F = CF$ .  $C$  ist hier die Nachgiebigkeit bzw. reziproke Steifigkeit des Kragarms. Wird nun ein Rissfortschritt zugelassen, so ändern sich  $C = C(a)$  und dadurch auch  $u_F = u_F(a)$ . Durch Einsetzen von Gleichung 2.7 in Gleichung 2.6 und durch Hinzunahme der aufgeführten Beziehungen erhält man für die Energiefreisetzungsrate

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = -\frac{d\Pi}{bda} = \frac{F^2}{2b} \frac{dC}{da}. \quad (2.8)$$

Die Nachgiebigkeit  $C$  lässt sich wie oben zu erkennen mit Hilfe der Beziehung  $C = \frac{u_F}{F}$  berechnen. Setzt man Gleichung 2.1 in Gleichung 2.5 an der Stelle  $x = a$  ein, so ergibt sich für die Nachgiebigkeit:

$$C = \frac{2a^3}{3EI}. \quad (2.9)$$

Aus dieser Beziehung erhält man für die Energiefreisetzungsrate:

$$G = \frac{12F^2 a^2}{b^2 h^3 E} \quad (2.10)$$

Um die Lastverschiebungskurve darstellen zu können, werden Materialkennwerte des Faserverbundwerkstoff AS4/3501-6 verwendet. Für diesen Werkstoff ist die kritische Energiefreisetzungsrate experimentell von Aliyu und Daniel [2] ermittelt worden. Mit den folgenden Werten für E-Modul, Schubmodul und Querkontraktionszahl (vgl. auch Fiolka, Matzenmiller [3]) ist die kritische Energiefreisetzungsrate experimentell bestimmt worden.

$$E_{11} = 138000 \frac{N}{mm^2}$$

$$E_{22} = 8960 \frac{N}{mm^2}$$

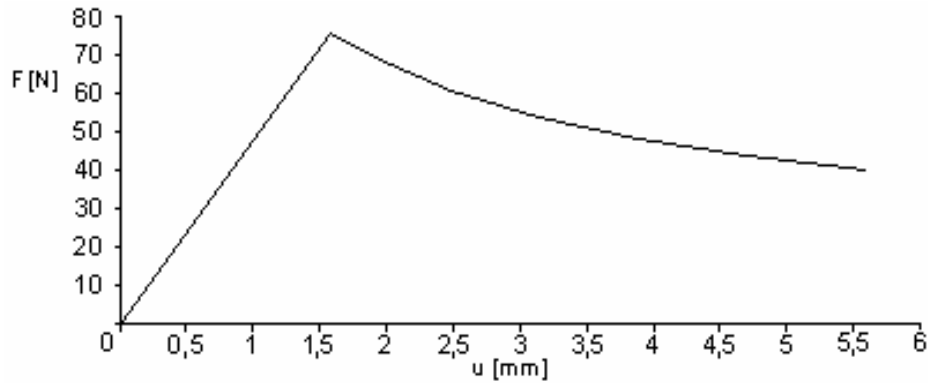
$$G_{12} = 7100 \frac{N}{mm^2}$$

$$G_{23} = 3446 \frac{N}{mm^2}$$

$$\nu = 0,3$$

$$G_{lc} = 0,222 \frac{N}{mm}$$

Mit Hilfe dieser Werte und den geometrischen Abmessungen von  $h = 1,525\text{mm}$  und  $b = 25,4\text{mm}$  ergibt sich die Lastverschiebungskurve wie in Abbildung 7 dargestellt. Hierbei stellt der lineare Anstieg den Bereich der Verformung dar, in dem kein Rissfortschritt stattfindet. Der Riss schreitet erst ab dem Punkt der Kurve fort, an dem der lineare Anstieg endet. Diese Kurve basiert auf einem Anriss von  $a = 32\text{mm}$ , der bei Kraft von  $75,53\text{N}$  und einer Aufweitung von  $u = 1,6\text{mm}$  anfängt zu wachsen.



**Abbildung 7: Modus I Rissausbreitung**

## 2.3 Vergleichslösung mit CODAC

### 2.3.1 Schalenelemente

Die Ermittlung der Lastverschiebungskurve mit Hilfe des Programms CODAC ist ähnlich der experimentellen Ermittlung. Im Experiment wird die Probe, die einen bestimmten Anriss der Länge  $a$  besitzt, solange einer Laststeigerung unterworfen, bis ein Rissfortschritt einsetzt. Zu dem Zeitpunkt des Einsetzens des Rissfortschritts werden die dafür benötigte Kraft  $F_1$  und die dazugehörige Rissaufweitung  $u_1$  gemessen. Um nun eine kritische Energiefreisetzungsrate bestimmen zu können wird ein Rissfortschritt der Länge  $\Delta a$  zugelassen. An der Stelle  $a + \Delta a$  werden nun wiederum die Kraft  $F_2$  und die entsprechende Aufweitung  $u_2$  gemessen. Die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_{Ic}$  lässt sich nun wie folgt berechnen (vgl. auch Carlsson und Pipes [4]):

$$G_{Ic} = \frac{F_1 \cdot u_2 - F_2 \cdot u_1}{2 \cdot b \cdot (a_2 - a_1)} \quad (2.11)$$

Bei der Bestimmung der Lastverschiebungskurve mit dem Programm CODAC, werden jeweils zwei Balken gemäß Abbildung 2 mit den unterschiedlichen Längen  $a_1$  und  $a_2$  mit einer Kraft  $F$  belastet. Wie in Abbildung 2 zu erkennen, erhält man infolge der Kraft die Verschiebungen  $w_1$  und  $w_2$  der Balkenenden. Aus Abbildung 1 und Gleichung 2.1 wird ersichtlich, dass diese Verschiebungen der Hälfte der Aufweitungen  $u_1$  und  $u_2$  aus Gleichung 2.11 entsprechen.

Da es sich hierbei um ein linear elastisches Problem handelt, ist es möglich, die für den entsprechenden Balken konstanten Quotienten  $\frac{F}{u}$  zu bilden. Als nächstes wird die Kraft  $F_1$ , die bei einer bestimmten Aufweitung  $u$  einen Rissfortschritt bewirkt, gesucht. Um diese Kraft ermitteln zu können, ist es nötig die Aufweitungen aus Gleichung 2.11 gleichzusetzen ( $u_1 = u_2 = u$ ). Somit erhält man:

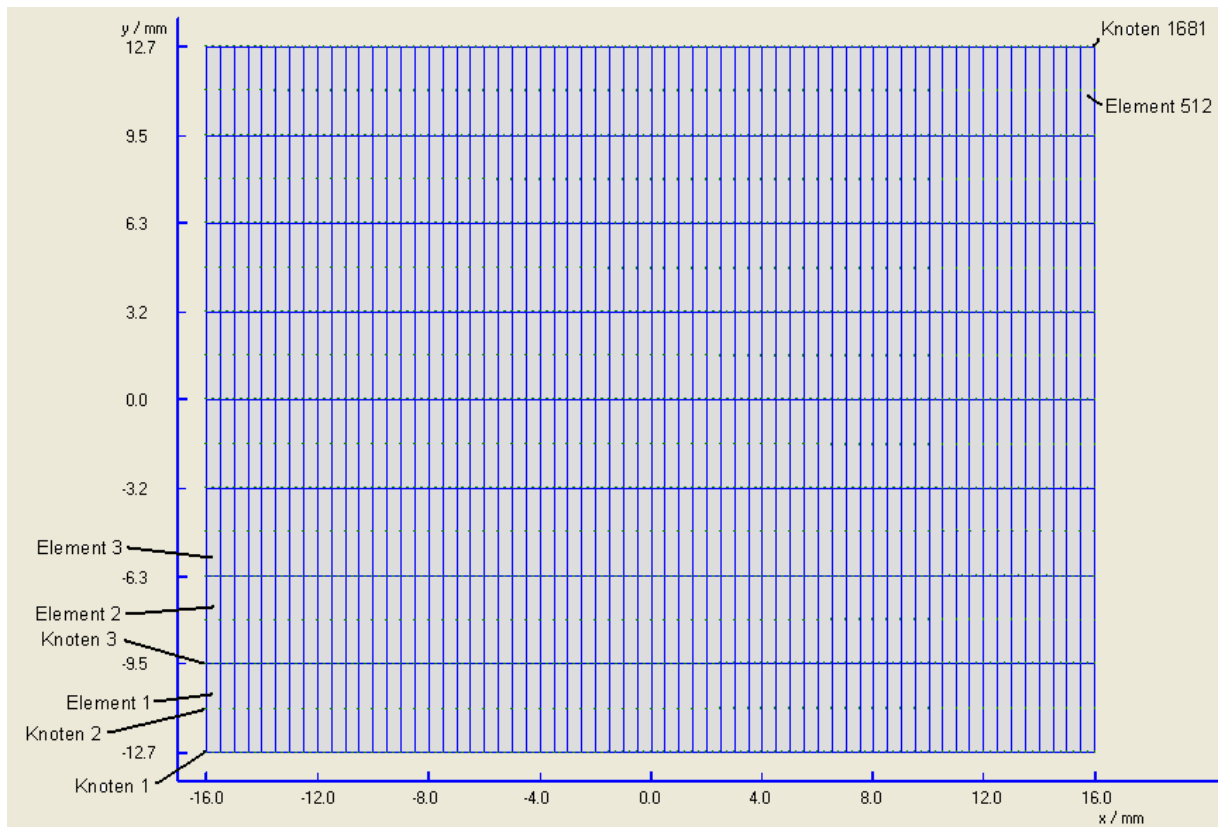
$$G_{Ic} = \frac{F_1 \cdot u - F_2 \cdot u}{2 \cdot b \cdot (a_2 - a_1)} \quad (2.12)$$

Nun ist es möglich, durch Umstellen von Gleichung 2.12 eine Aufweitung  $u$ , die sich einstellt, wenn es zu einem Rissfortschritt kommt, zu errechnen. Diese Aufweitung ergibt sich zu

$$u = \sqrt{\frac{2G_{Ic}b(a_2 - a_1)}{\frac{F_1}{u} - \frac{F_2}{u}}}. \quad (2.13)$$

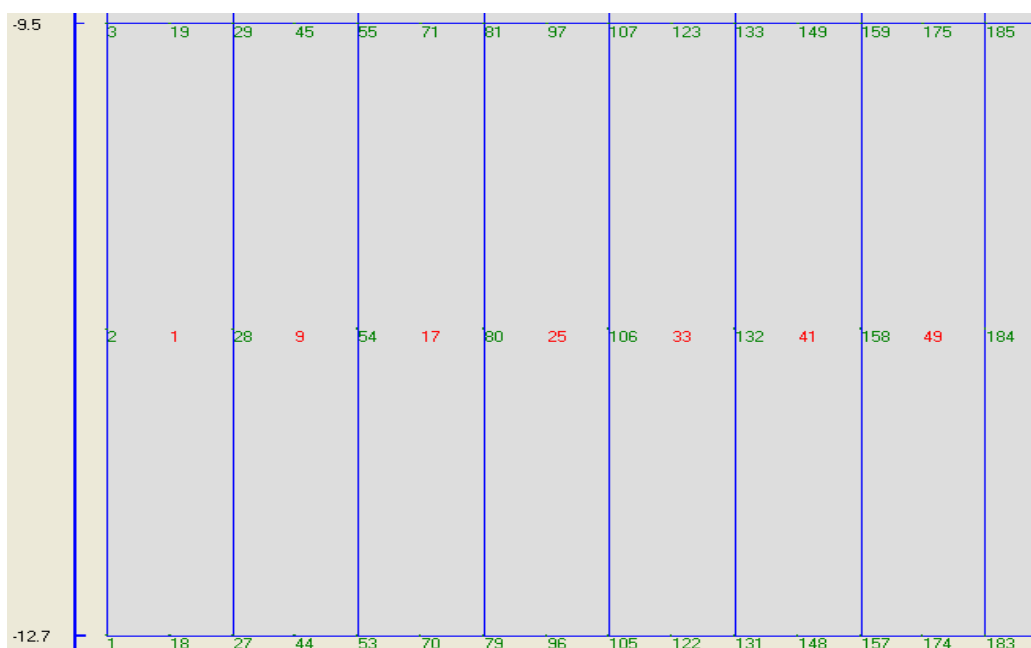
Da  $\frac{F_1}{u}$  und  $\frac{F_2}{u}$ , wie bereits erwähnt, bekannt sind, ist es nun möglich, einen Bereich zu definieren, in dem es zu einem Rissfortschritt kommt. Hierbei ist zu beachten, dass sich dieser Bereich, je kleiner  $\Delta a$  gewählt wird, immer näher an die analytische Lösung annähert. Dies wird im Folgenden durch Beispiele belegt.

Abbildung 8 zeigt das Finite-Element-Netz eines in CODAC modellierten Kragarms nach Abbildung 2. Die Abmaße  $b$  und  $h$  dieses Kragarms sind wiederum  $25,4mm$  bzw.  $1,525mm$ . In dieser Abbildung ist auch sehr gut zu erkennen, dass es sich hierbei um einen Kragarm der Länge  $a = 32mm$  handelt. Des weiteren wird deutlich, dass sich das Modell aus 512 Elementen (64 in x-Richtung und 8 in y-Richtung) sowie aus 1681 Knoten zusammensetzt.



**Abbildung 8: Finite-Element-Netz**

Aus Abbildung 9 wird ersichtlich, dass es sich bei den verwendeten Elementen um Rechteckelemente mit jeweils 8 Knoten handelt. Zum Beispiel gehören zum Element 1 die Knoten 1, 2, 3, 18, 19, 27, 28 und 29.



**Abbildung 9: Ausschnitt aus dem FE-Netz mit Element- und Knotennummern**



Dieses Merkmal ist von Bedeutung, da die Aufbringung der Last von den Formfunktionen des Elementes abhängig ist. Dies beruht auf der Tatsache, dass es noch nicht möglich ist Linienlasten in CODAC vorzugeben. Deshalb muss die konstante Linienlast am Ende des Kragarms auf die einzelnen Knoten verteilt werden. Für die hier verwendeten Elemente sind die Verläufe der Formfunktionen auf dem Elementrand in Abbildung 10 graphisch dargestellt. Der obere Index der Polynome  $g_k^{(j)}$  bezeichnet den Polynomgrad  $j$ , dieser ist in diesem Fall  $j = 2$ , der untere Index kennzeichnet den jeweiligen Knoten  $k$ . Der Wert von  $g_k^{(j)}$  ist wie in Abbildung 10 zu erkennen am dazugehörigen Knoten  $k$  gleich 1. Um die Polynome formelmäßig angeben zu können, ist die Einführung der dimensionslosen Koordinate  $\xi$  zweckmäßig (vgl. auch Knothe und Wessels [5]):

$$\xi = \frac{2}{a}(x - x_e) \quad (2.14)$$

Die dargestellten Polynome lassen sich mit Hilfe von  $\xi$  als Produkt von linear veränderlichen Funktionen aufbauen:

$$g_k^{(j)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{j+1} \frac{\xi_i - \xi}{\xi_i - \xi_k} \quad (2.15)$$

Aus Gleichung 2.15 erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung 2.14:

$$\begin{aligned} g_1^{(2)} &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ g_2^{(2)} &= (1+\xi)(1-\xi) \\ g_3^{(2)} &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Jeder Knoten bekommt entsprechend dem Integral seiner Formfunktion über den belasteten Elementrand seinen Anteil an der Linienlast. Bei gleichmäßiger Diskretisierung des belasteten Randes bekommen die Knoten in der Mitte des Elementrandes die vierfache Last eines Elementeckknotens (siehe Abbildung 10/11).

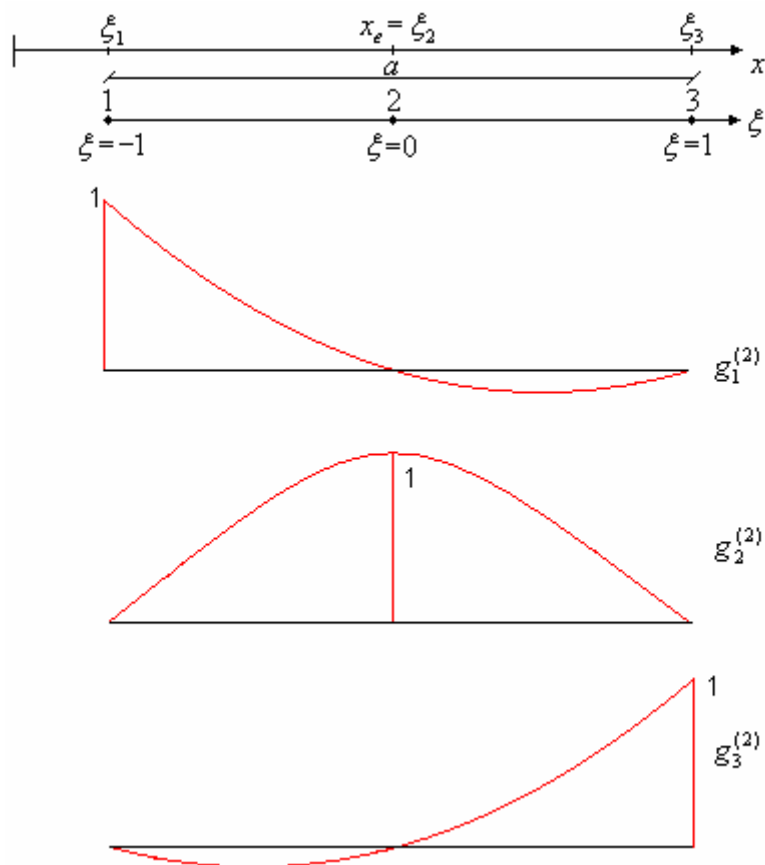


Abbildung 10: Formfunktionen auf dem Elementrand

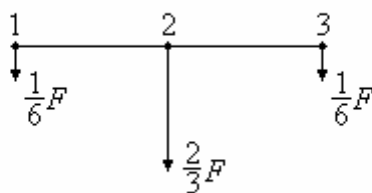
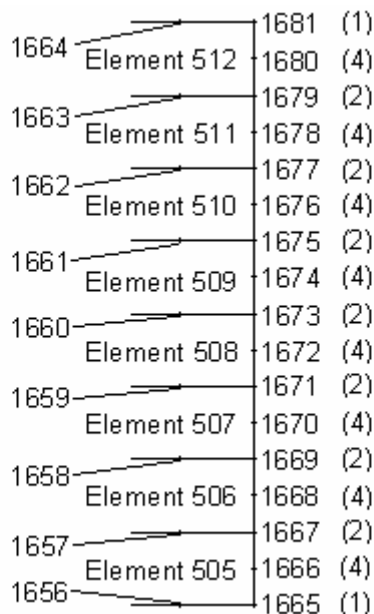


Abbildung 11: Kraftverteilung

Grenzt ein Eckknoten an zwei oder mehrere Elemente, summieren sich die Anteile (siehe Abbildung 12). Für das Finite-Element-Netz aus Abbildung 8 ergibt sich eine Lastverteilung entsprechend Abbildung 12. Hier ist die rechte Seite bzw. ein Teil der Elemente 505 bis 512 des Netzes aus Abbildung 8 detailliert dargestellt. Die Zahlen 1656 bis 1681 identifizieren die entsprechenden Knoten. Die in Klammern stehenden Zahlen geben die auf den jeweiligen Knoten aufbrachten Kräfte an. Daraus ergibt sich, dass der Biegebalken mit einer Gesamtlast von  $F = 48N$  belastet wird.



**Abbildung 12: Lastverteilung für das Finite-Element-Netz**

Eine Alternative dieser Art der Lastaufbringung ist, anstelle einer Linienlast eine konstante Knotenverschiebung in z-Richtung vorzugeben und die berechneten Knotenlasten  $F_{z,i}$  zur Gesamtkraft zu summieren.

Die nachfolgend aufgeführten Tabellen enthalten die mit CODAC berechneten Werte für die Verschiebungen  $w_1$  und  $w_2$  an der Kraftangriffsstelle. Mit Hilfe dieser Verschiebungen ergeben sich die bereits angesprochenen Kraft-Verschiebungs-Beziehungen  $\frac{F}{w_1}$  und  $\frac{F}{w_2}$ . Durch Verwendung der Gleichung 2.13 besteht nun die

Möglichkeit, die Verschiebung  $w$  an der Stelle des einsetzenden Rissfortschritts zu bestimmen. Daraus ergibt sich dann der Bereich  $F_1$  bis  $F_2$ , in dem die kritische Kraft, die für den Rissfortschritt verantwortlich ist, liegt.

Tabelle 1 und Abbildung 13 stellen die Ergebnisse für einen Rissfortschritt der Länge  $\Delta a = 1mm$  dar. In der Abbildung ist zu erkennen, dass die analytisch errechnete Kurve zwischen denen, die mit CODAC ermittelt worden sind, liegt.

Tabelle 1: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 1mm$ 

$a_0$ [mm]	$w_1$ [mm]	$w_2$ [mm]	$F$ [N]	$\frac{F}{w_1}$ [N/mm]	$\frac{F}{w_2}$ [N/mm]	$w$ [mm]	$F_1$ [N]	$F_2$ [N]
32	0,5132	0,5623	48	93,53	85,36	0,83	77,72	70,93
35	0,6698	0,7283	48	71,66	65,91	0,99	70,93	65,23
40	0,9966	1,073	48	48,16	44,73	1,28	61,76	57,36
45	1,416	1,512	48	33,90	31,75	1,62	54,87	51,38
50	1,939	2,057	48	24,76	23,33	1,99	49,33	46,50
55	2,578	2,720	48	18,62	17,65	2,41	44,84	42,50
60	3,343	3,513	48	14,36	13,66	2,85	40,90	38,92

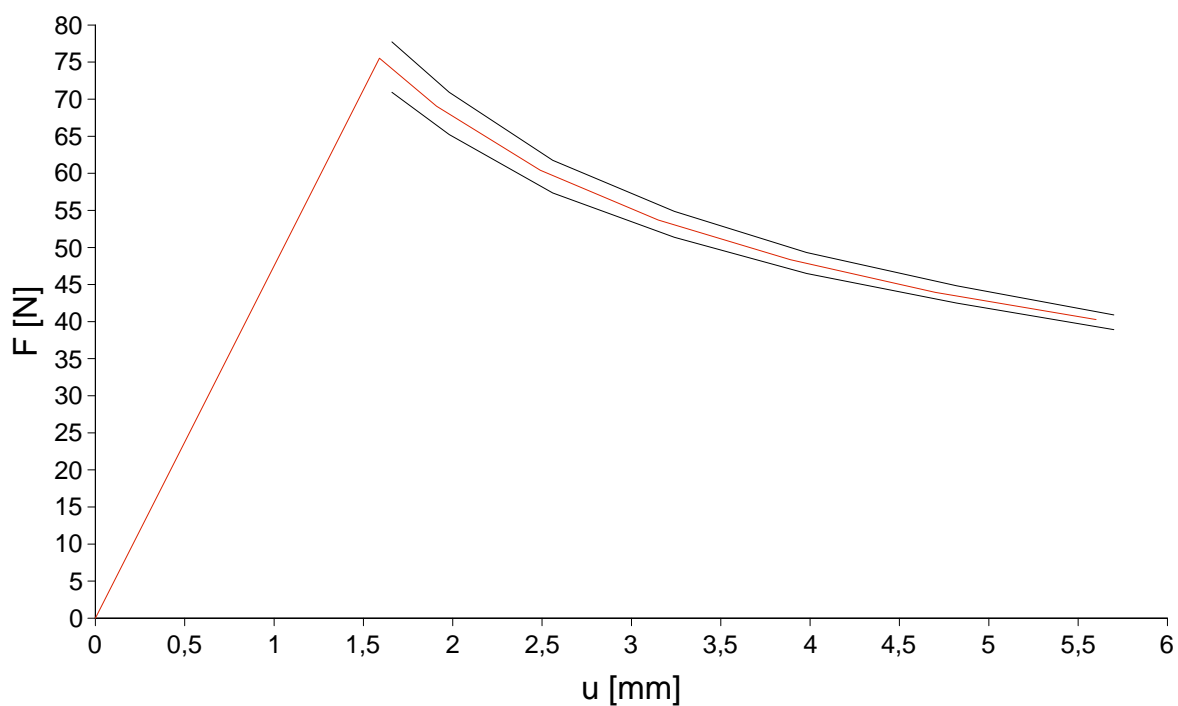
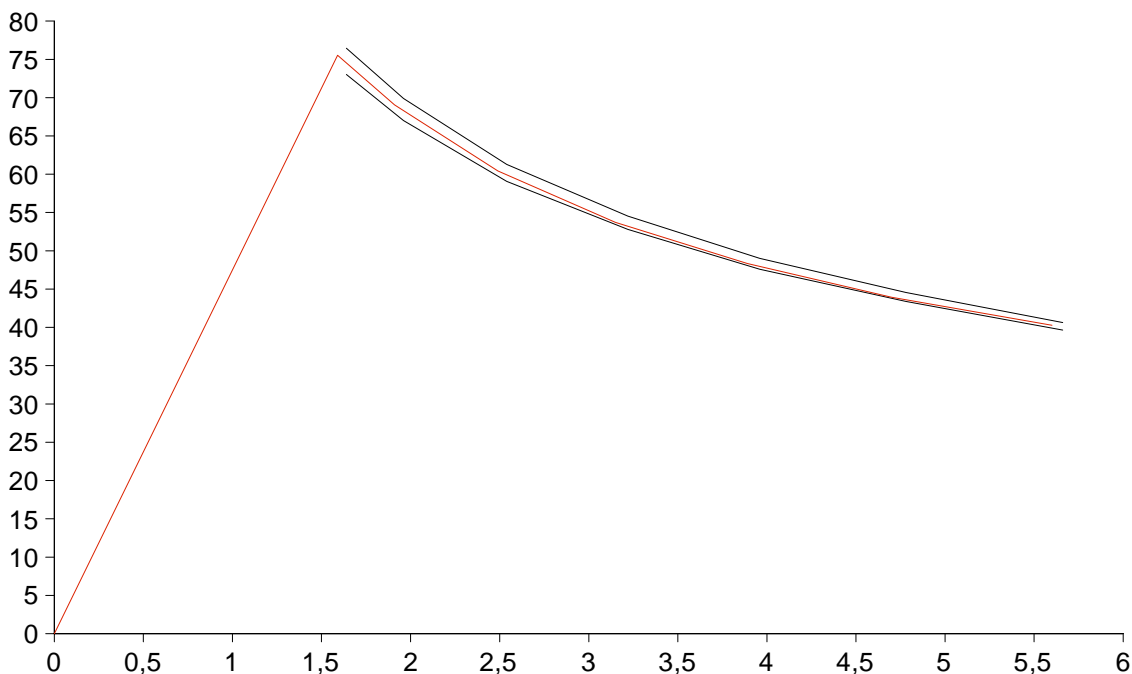
Abbildung 13: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 1mm$ )

Tabelle 2 sowie Abbildung 14 enthalten die entsprechenden Werte für einen Rissfortschritt der Länge  $\Delta a = 0,5\text{mm}$ . Hier wird deutlich, dass sich der Bereich der zum Rissfortschritt erforderlichen Kraft im Vergleich Abbildung 13 verkleinert hat.

**Tabelle 2: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 0,5\text{mm}$**

$a_0[\text{mm}]$	$w_1[\text{mm}]$	$w_2[\text{mm}]$	$F[\text{N}]$	$\frac{F}{w_1}[\text{N/mm}]$	$\frac{F}{w_2}[\text{N/mm}]$	$w[\text{mm}]$	$F_1[\text{N}]$	$F_2[\text{N}]$
32	0,5132	0,5374	48	93,53	89,32	0,82	76,46	73,02
35	0,6698	0,6987	48	71,66	68,70	0,98	69,89	67,00
40	0,9966	1,034	48	48,16	46,42	1,27	61,27	59,06
45	1,416	1,463	48	33,90	32,81	1,61	54,54	52,79
50	1,939	1,997	48	24,76	24,04	1,98	49,02	47,60
55	2,578	2,648	48	18,62	18,13	2,39	44,56	43,38
60	3,343	3,427	48	14,36	14,01	2,83	40,64	39,64

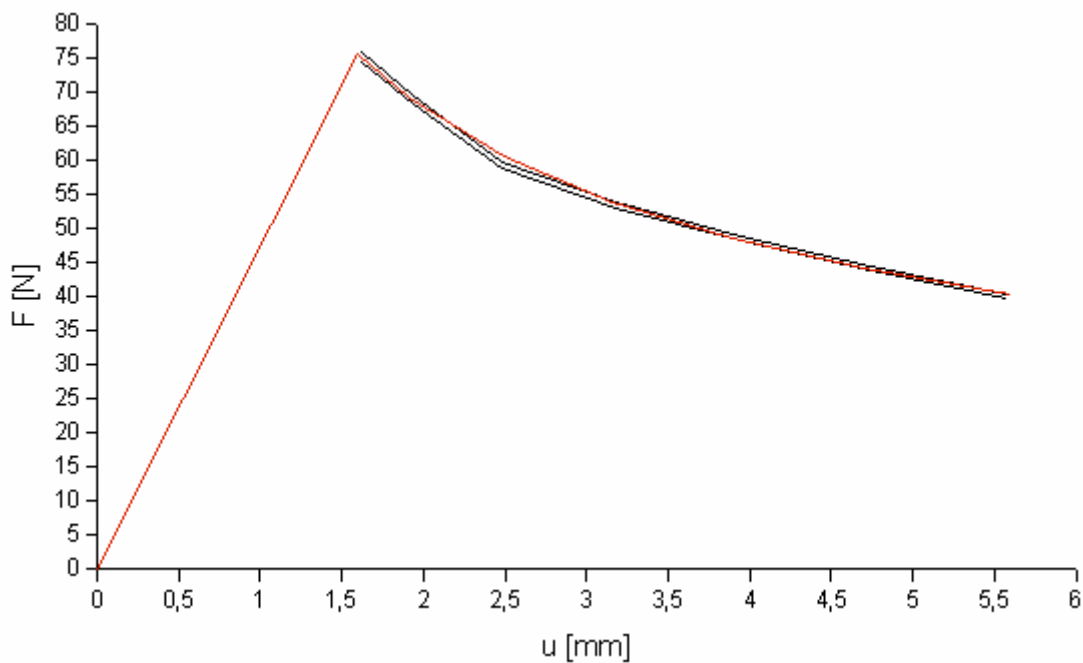


**Abbildung 14: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,5\text{mm}$ )**

Bei einem Rissfortschritt von  $\Delta a = 0,2\text{mm}$ , welcher in Tabelle 3 und Abbildung 15 dargestellt ist, erhält man eine sehr gute Annäherung an die Ergebnisse der analytischen Lösung.

**Tabelle 3: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 0,2\text{mm}$**

$a_0[\text{mm}]$	$w_1[\text{mm}]$	$w_2[\text{mm}]$	$F[\text{N}]$	$\frac{F}{w_1}[\text{N/mm}]$	$\frac{F}{w_2}[\text{N/mm}]$	$w[\text{mm}]$	$F_1[\text{N}]$	$F_2[\text{N}]$
32	0,5132	0,5228	48	93,53	91,81	0,81	75,79	74,4
35	0,6698	0,6813	48	71,66	70,45	0,97	69,20	68,03
40	0,9966	1,012	48	48,16	58,84	1,24	59,74	58,83
45	1,416	1,435	48	33,90	33,45	1,59	53,73	53,02
50	1,939	1,962	48	24,76	24,46	1,97	48,80	48,23
55	2,578	2,606	48	18,62	18,42	2,37	44,21	43,73
60	3,343	3,377	48	14,36	14,21	2,79	40,10	39,70



**Abbildung 15: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,2\text{mm}$ )**

Als Beispiel für die Annäherung der mit CODAC ermittelten Werte an die analytische Lösung, sind in Abbildung 16 die Werte für einen Anriss von  $a = 32\text{mm}$  dargestellt. Hier ist deutlich zu erkennen, dass sich  $F_1$  und  $F_2$  mit abnehmenden  $\Delta a$  an die analytisch errechnete Last annähert. Das gleiche gilt für die Rissöffnung  $u$ .

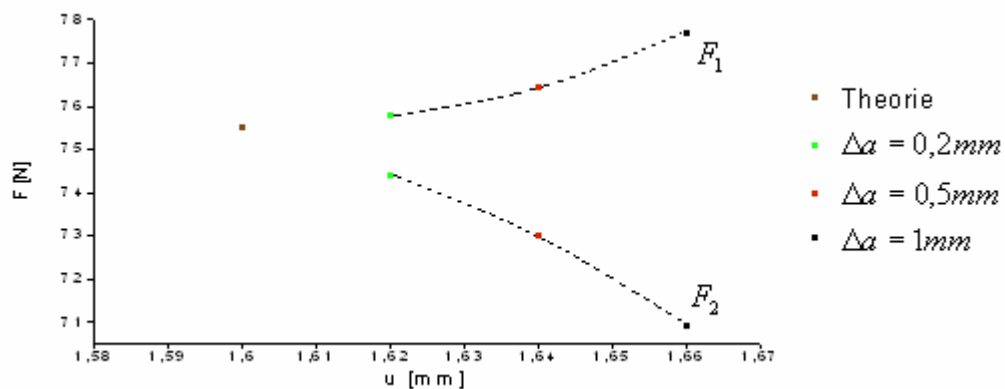


Abbildung 16: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung bei  $a=32\text{mm}$

### 2.3.2 Schalen- und Federelemente

In diesem Abschnitt wird das in Abbildung 1 dargestellte Problem wie in Abbildung 17 zu erkennen analysiert. Die verwendeten Materialkennwerte entsprechen denen aus Abschnitt 2.2.2.

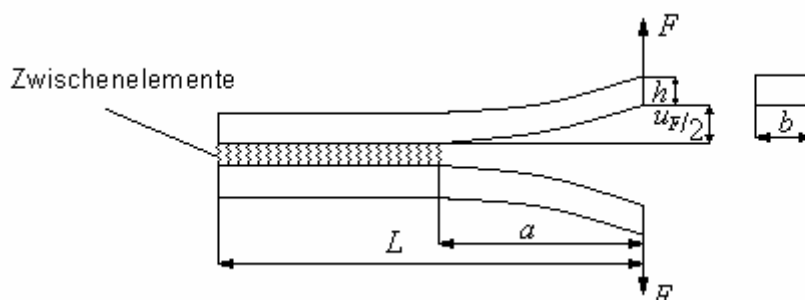


Abbildung 17: DCB-Probe mit Zwischenelementen

Bei den in dieser Abbildung vorhandenen Zwischenelemente, handelt es sich um Federelemente. Die Höhe der Federelemente wurde mit  $5 \cdot 10^{-10} m$  festgelegt, so dass das elastische Verhalten des Systems nur unwesentlich beeinflusst wird. In diesem Fall ist es nun möglich, auch für ein nicht symmetrisch aufgebautes Problem, die Aufweitung  $u_F$  infolge der Kraft  $F$  mit dem Programm CODAC zu bestimmen.

Im Gegensatz zu Abschnitt 2.2 ist das dargestellte Problem nicht an der Risspitze eingespannt. Dadurch ist eine Schubverformung und eine Verschiebung in z-Richtung an der Risspitze möglich. Eine Gegenüberstellung dieser unterschiedlichen Randbedingungen ist in Abbildung 18 zu erkennen.

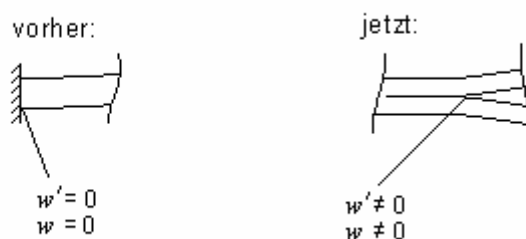
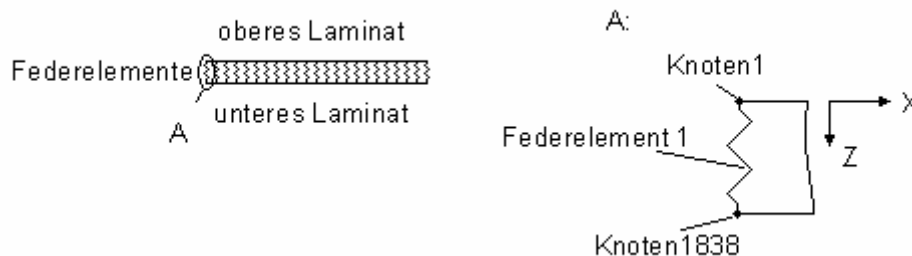


Abbildung 18: Unterschied in den Randbedingungen

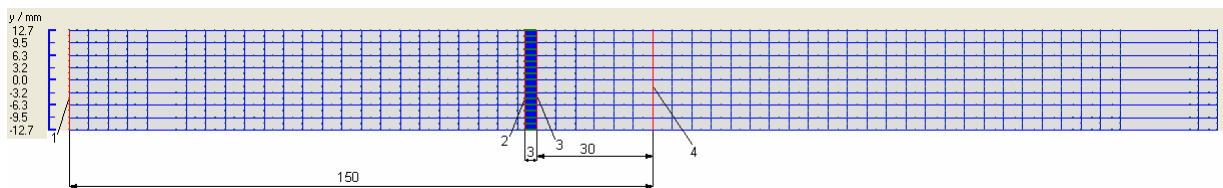


Das für die Berechnung erforderliche Finite-Element-System setzt sich aus 2 Laminaten gemäß des in Abbildung 8 dargestellten Laminats zusammen. Die Entfernung der Lamine voneinander wird durch die Höhe der Federelemente bestimmt. Die Federelemente werden jeweils gegenüberliegenden Knoten zugeordnet. Abbildung 19 zeigt exemplarisch die Einordnung des ersten Federelementes in das System. Hierbei ist Knoten 1 der erste Knoten des oberen und Knoten 1838 der erste Knoten des unteren Laminates. Diese beiden Knoten haben die gleichen x- und y-Koordinaten. Aufgrund der Federelemente liegt die z-Koordinate des Knotens 1838  $5 \cdot 10^{-10} m$  von Knoten 1 entfernt. Es handelt sich wie auch im vorherigen Abschnitt um das Modell mit einem Anriss von 32mm.



**Abbildung 19: Einordnung der Federelemente**

Zur besseren Veranschaulichung ist in Abbildung 20 das Finite-Element-Netz des oberen Laminats für einen Anriss der Länge  $a = 33\text{mm}$  dargestellt. Es sind hier 4 vorgehobene Linien zu erkennen. Diese dienen der Verdeutlichung der zur Berechnung notwendigen Geometrie. An der linken Seite (Linie 1) ist das Modell eingespannt. Im Bereich zwischen Linie 1 und Linie 2 sind wie in Abbildung 19 erläutert, Federelemente an den einzelnen Knoten vorhanden. Linie 4 gibt die Stelle des Kraftangriffs an. Das vorliegende Finite-Element-Netz ist für alle notwendigen Berechnungen genutzt worden. Es wurde jeweils für den entsprechenden Fall die Einspannung, die Kraftangriffsstelle sowie die Anzahl der Federelemente variiert. Somit ergibt sich für das Gesamtsystem eine Knotenanzahl von 3674 und eine Elementanzahl von 1120 Schalenelementen sowie 615 ( $a = 33\text{mm}$ ) bis 1005 ( $a = 60\text{mm}$ ) Federelementen. Der Bereich zwischen den Linien 2 und 3 dient der Modellierung des Rissfortschrittes  $\Delta a$ , hier wurde eine Netzverfeinerung vorgenommen.



**Abbildung 20: Finite-Element-Netz für die Rechnung mit Federelementen**

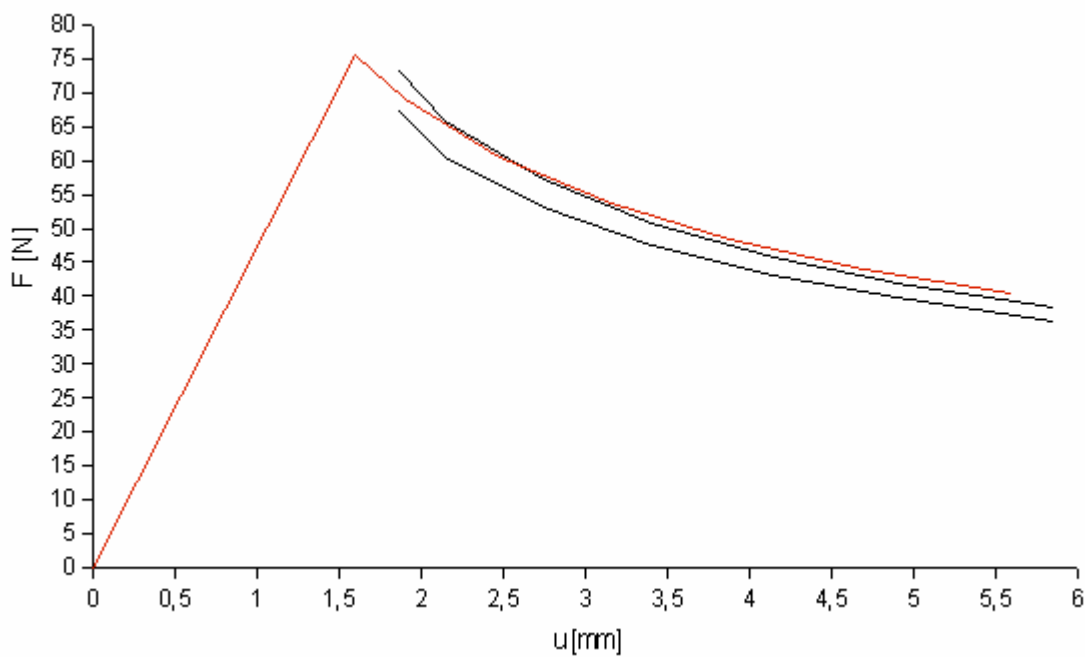
Die Aufbringung der Kraft erfolgt wie im vorangegangenen Abschnitt und wie in Abbildung 17 und Abbildung 19 ersichtlich am oberen Laminat entgegen der z-Richtung und am unteren Laminat in z-Richtung. Für die Auswertung der Ergebnisse gelten die bereits vorgestellten Gleichungen 2.11 – 2.13.

Die Tabellen 4-6 und die Abbildungen 21-23 enthalten die mit CODAC ermittelten Werte und zeigen im Vergleich dazu die in Abbildung 7 dargestellte, analytisch ermittelte Lastverschiebungskurve. Es zeigt sich in den Abbildungen, dass sich der Rissfortschritt bei einer deutlich geringeren Last, aber einer größeren Aufweitung einstellen würde. Die größere Aufweitung resultiert daraus, dass sich an der Risspitze eine Querschubverformung und bedingt durch die Federelemente eine Verschiebung in z-Richtung einstellt. Aufgrund der Querschubverformung werden die Quotienten  $\frac{F}{u}$  und somit die zum Rissfortschritt erforderliche Kraft im Vergleich zu

Abschnitt 2.3.1 kleiner.

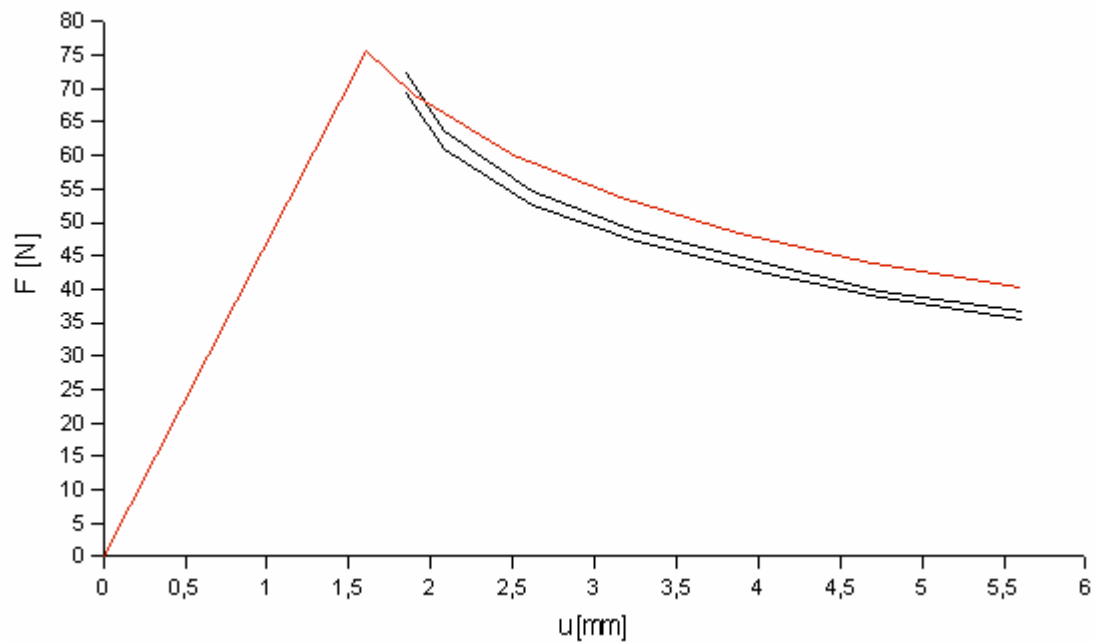
Tabelle 4: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 1mm$ 

$a_0[mm]$	$u_1[mm]$	$u_2[mm]$	$F[N]$	$\frac{F}{u_1}[N/mm]$	$\frac{F}{u_2}[N/mm]$	$u[mm]$	$F_1[N]$	$F_2[N]$
32	1,226	1,336	48	39,15	35,93	1,87	73,23	67,20
35	1,572	1,708	48	30,53	28,10	2,15	65,76	60,53
40	2,294	2,472	48	20,92	19,42	2,74	57,25	53,12
45	3,212	3,436	48	14,94	13,97	3,40	50,84	47,53
50	4,348	4,622	48	11,40	10,39	4,15	45,83	43,11
55	5,722	6,052	48	8,39	7,93	4,97	41,65	39,38
60	7,362	7,752	48	6,52	6,20	5,86	38,23	36,31

Abbildung 21: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 1mm$ )

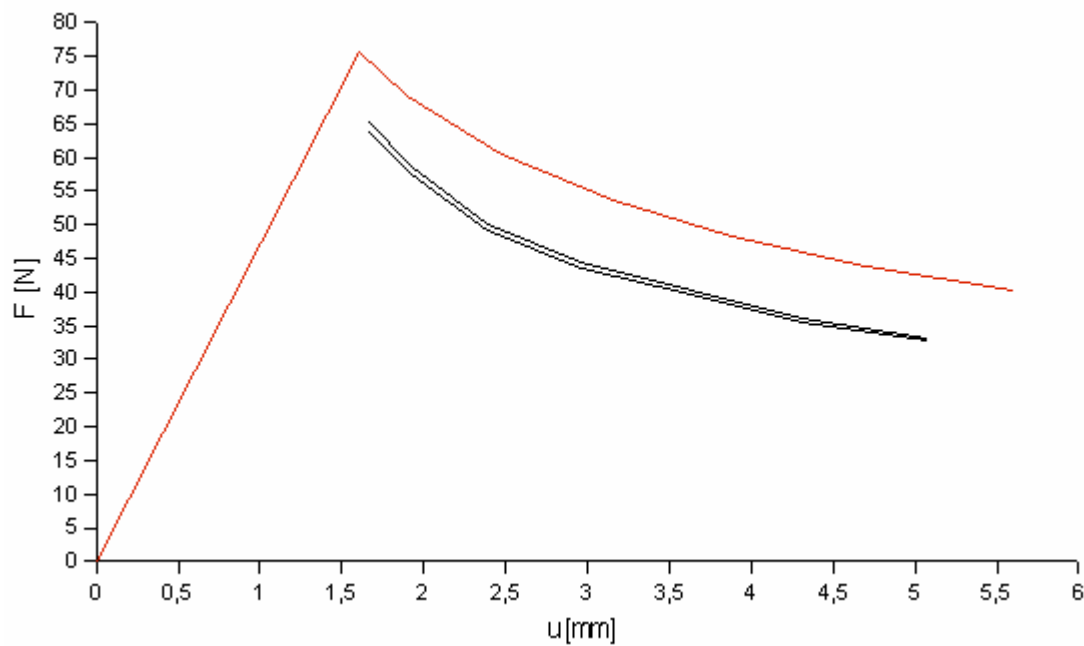
**Tabelle 5: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 0,5\text{mm}$** 

$a_0[\text{mm}]$	$u_1[\text{mm}]$	$u_2[\text{mm}]$	$F[\text{N}]$	$\frac{F}{u_1}[\text{N/mm}]$	$\frac{F}{u_2}[\text{N/mm}]$	$u[\text{mm}]$	$F_1[\text{N}]$	$F_2[\text{N}]$
32	1,226	1,280	48	39,15	37,5	1,85	72,34	69,29
35	1,572	1,642	48	30,53	29,23	2,08	63,55	60,84
40	2,294	2,388	48	20,92	20,10	2,62	54,75	52,59
45	3,212	3,330	48	14,94	14,41	3,26	48,76	47,04
50	4,348	4,492	48	11,40	10,69	3,99	44,07	42,65
55	5,722	5,898	48	8,39	8,14	4,75	39,81	38,63
60	7,362	7,570	48	6,52	6,34	5,61	36,58	35,57


**Abbildung 22: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,5\text{mm}$ )**

**Tabelle 6: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 0,2mm$** 

$a_0[mm]$	$u_1[mm]$	$u_2[mm]$	$F[N]$	$\frac{F}{u_1}[N/mm]$	$\frac{F}{u_2}[N/mm]$	$u[mm]$	$F_1[N]$	$F_2[N]$
32	1,226	1,252	48	39,15	38,34	1,67	65,21	63,86
35	1,572	1,604	48	30,53	29,93	1,92	58,76	57,58
40	2,294	2,338	48	20,92	20,53	2,39	50,08	49,14
45	3,212	3,268	48	14,94	14,69	2,97	44,35	43,59
50	4,348	4,416	48	11,40	10,87	2,64	40,21	39,59
55	5,722	5,806	48	8,39	8,27	4,31	36,16	35,64
60	7,362	7,462	48	6,52	6,43	5,08	33,13	32,68


**Abbildung 23: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,2mm$ )**

Die Auswirkung der Querschubverformung auf die Verschiebung an der Kraftangriffsstelle, aufgrund der in Abbildung 18 dargestellten Randbedingung  $w' \neq 0$ , ist in den Tabellen 7-9 dargestellt. Darin stellt  $y_{rot}$  den an der Risspitze vorhandenen den Winkel dar. Die Verschiebungen  $\bar{u}_1$  und  $\bar{u}_2$  sind die an der Kraftangriffsstelle hervorgerufenen Verschiebungen infolge  $y_{rot1}$  und  $y_{rot2}$ . Die weiteren Spalten enthalten die in den Tabellen 1-3 ermittelten Verschiebungen  $w_1$  und  $w_2$  sowie zum Vergleich die aus den Tabellen 4-6 stammenden Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$ .

**Tabelle 7: Einfluss der Schubverformung  $\Delta a = 1mm$**

$a_0 [mm]$	$y_{rot1} \cdot 10^{-3}$	$y_{rot2} \cdot 10^{-3}$	$\bar{u}_1 [mm]$	$\bar{u}_2 [mm]$	$w_1 [mm]$	$w_2 [mm]$	$\frac{u_1}{2} - \bar{u}_1$	$\frac{u_2}{2} - \bar{u}_2$
32	3,192	3,289	0,102	0,109	0,513	0,562	0,511	0,559
35	3,800	3,599	0,133	0,130	0,670	0,728	0,653	0,724
40	4,343	4,107	0,174	0,168	0,997	1,073	0,973	1,068
45	4,886	4,617	0,220	0,212	1,416	1,512	1,386	1,506
50	5,427	5,127	0,271	0,261	1,939	2,057	1,903	2,050
55	5,966	5,638	0,328	0,316	2,578	2,720	2,533	2,710
60	6,503	6,149	0,390	0,375	3,343	3,513	3,291	3,501

**Tabelle 8: Einfluss der Schubverformung  $\Delta a = 0,5mm$**

$a_0 [mm]$	$y_{rot1} \cdot 10^{-3}$	$y_{rot2} \cdot 10^{-3}$	$\bar{u}_1 [mm]$	$\bar{u}_2 [mm]$	$w_1 [mm]$	$w_2 [mm]$	$\frac{u_1}{2} - \bar{u}_1$	$\frac{u_2}{2} - \bar{u}_2$
32	3,192	3,240	0,102	0,105	0,513	0,537	0,511	0,535
35	3,800	3,545	0,133	0,126	0,670	0,699	0,653	0,695
40	4,343	4,053	0,174	0,164	0,997	1,034	0,973	1,030
45	4,886	4,562	0,220	0,208	1,416	1,463	1,386	1,501
50	5,427	5,072	0,271	0,256	1,939	1,997	1,903	1,990
55	5,966	5,583	0,328	0,310	2,578	2,648	2,533	2,639
60	6,503	6,093	0,390	0,369	3,343	3,427	3,291	3,416

**Tabelle 9: Einfluss der Schubverformung  $\Delta a = 0,2mm$** 

$a_0 [mm]$	$y_{rot1} \cdot 10^{-3}$	$y_{rot2} \cdot 10^{-3}$	$\bar{u}_1 [mm]$	$\bar{u}_2 [mm]$	$w_1 [mm]$	$w_2 [mm]$	$\frac{u_1 - \bar{u}_1}{2}$	$\frac{u_2 - \bar{u}_2}{2}$
32	3,192	3,235	0,102	0,104	0,513	0,523	0,511	0,522
35	3,800	3,519	0,133	0,124	0,670	0,681	0,653	0,678
40	4,343	4,027	0,174	0,162	0,997	1,012	0,973	1,007
45	4,886	4,537	0,220	0,205	1,416	1,435	1,386	1,429
50	5,427	5,047	0,271	0,253	1,939	1,962	1,903	1,955
55	5,966	5,558	0,328	0,307	2,578	2,606	2,533	2,596
60	6,503	6,069	0,390	0,365	3,343	3,377	3,291	3,366

Wenn man den Schubmodul  $G_{23}$  des Laminats auf das hundertfache erhöht, wird das Material steifer und die Schubverformung an der Risspitze reduziert sich. Daraus resultiert wie in den Tabellen 10-12 und Abbildungen 24-26 zu erkennen, eine recht gute Übereinstimmung der mit CODAC ermittelten Werte zu den in Abschnitt 2.2 berechneten, bei denen eine Querschubverformung von Null als Randbedingung vorgegeben war.

Für einen Rissfortschritt der Länge  $\Delta a = 1mm$  sowie  $\Delta a = 0,5mm$  ergeben sich sehr gute Übereinstimmungen bei der zum Rissfortschritt benötigten Kraft und der dazugehörigen Aufweitung. Es zeigt sich aber auch schon hier, dass sich der ermittelte Bereich, indem die kritische Kraft liegt, mit kleiner werdendem  $\Delta a$  nach oben verschiebt. Diese Verschiebung wird bei  $\Delta a = 0,2mm$  sehr deutlich, da die hier zum Rissfortschritt ermittelte Kraft deutlich über der analytisch ermittelten liegt. Diese Netzabhängigkeit konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht werden und sollte Gegenstand nachfolgender Untersuchungen sein.

Tabelle 10: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 1mm$ 

$a_0[mm]$	$u_1[mm]$	$u_2[mm]$	$F[N]$	$\frac{F}{u_1}[N/mm]$	$\frac{F}{u_2}[N/mm]$	$u[mm]$	$F_1[N]$	$F_2[N]$
32	1,028	1,126	48	46,69	42,63	1,67	77,78	71,01
35	1,344	1,460	48	35,71	32,88	1,99	71,20	65,54
40	2,002	2,152	48	23,98	22,30	2,60	62,28	57,94
45	2,844	3,034	48	16,88	15,82	3,27	55,13	51,68
50	2,896	4,128	48	12,32	11,63	4,04	49,72	46,93
55	5,178	5,460	48	9,27	8,79	4,85	44,99	42,67
60	6,716	7,050	48	7,15	6,81	5,77	41,25	39,29

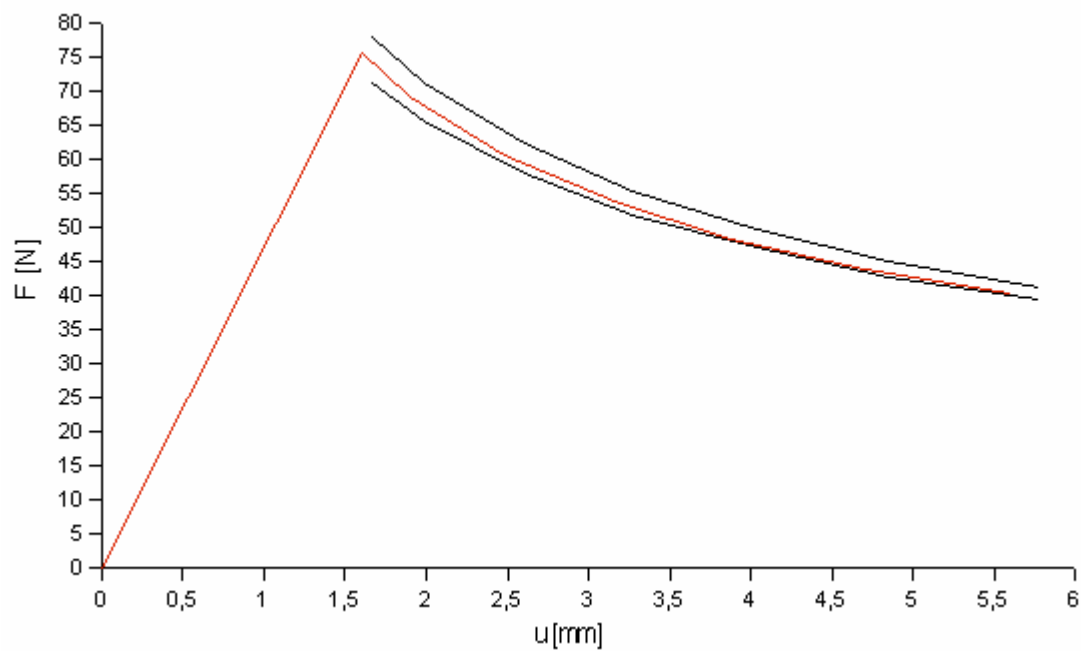
Abbildung 24: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 1mm$ )



Tabelle 11: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 0,5mm$ 

$a_0[mm]$	$u_1[mm]$	$u_2[mm]$	$F[N]$	$\frac{F}{u_1}[N/mm]$	$\frac{F}{u_2}[N/mm]$	$u[mm]$	$F_1[N]$	$F_2[N]$
32	1,028	1,076	48	46,69	44,61	1,65	76,83	73,40
35	1,344	1,400	48	35,71	34,29	1,99	70,96	68,12
40	2,002	2,074	48	23,98	23,14	2,60	62,41	60,24
45	2,844	2,936	48	16,88	16,35	3,27	55,11	53,38
50	2,896	4,008	48	12,32	11,98	4,05	49,86	48,47
55	5,178	5,314	48	9,27	9,03	4,88	45,19	44,04
60	6,716	6,878	48	7,15	6,98	5,79	41,36	40,39

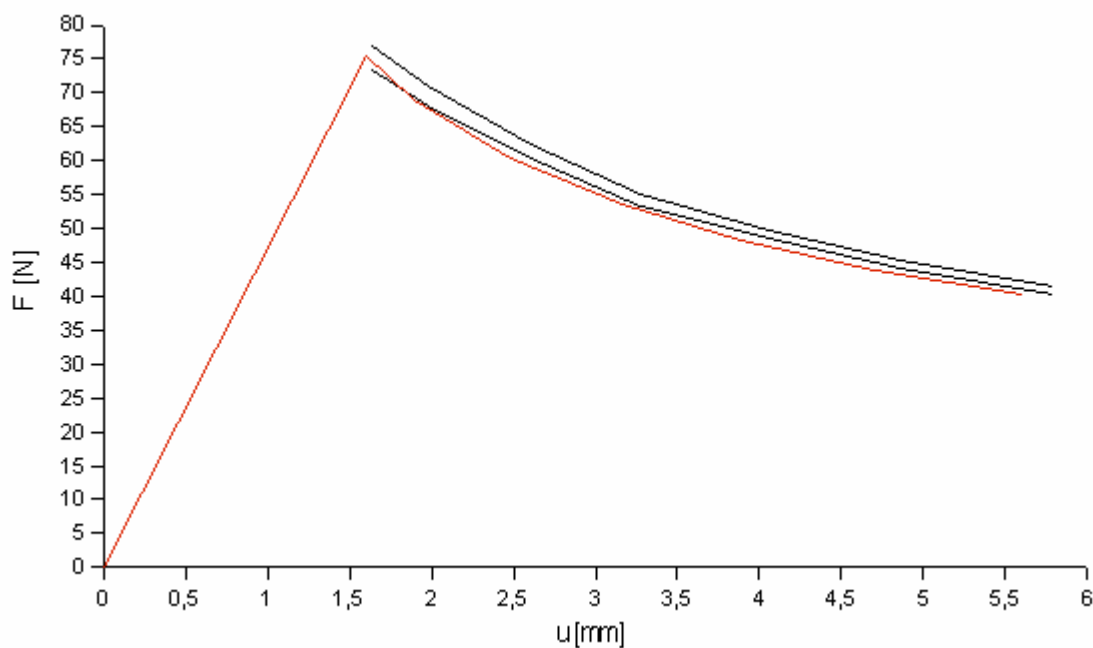
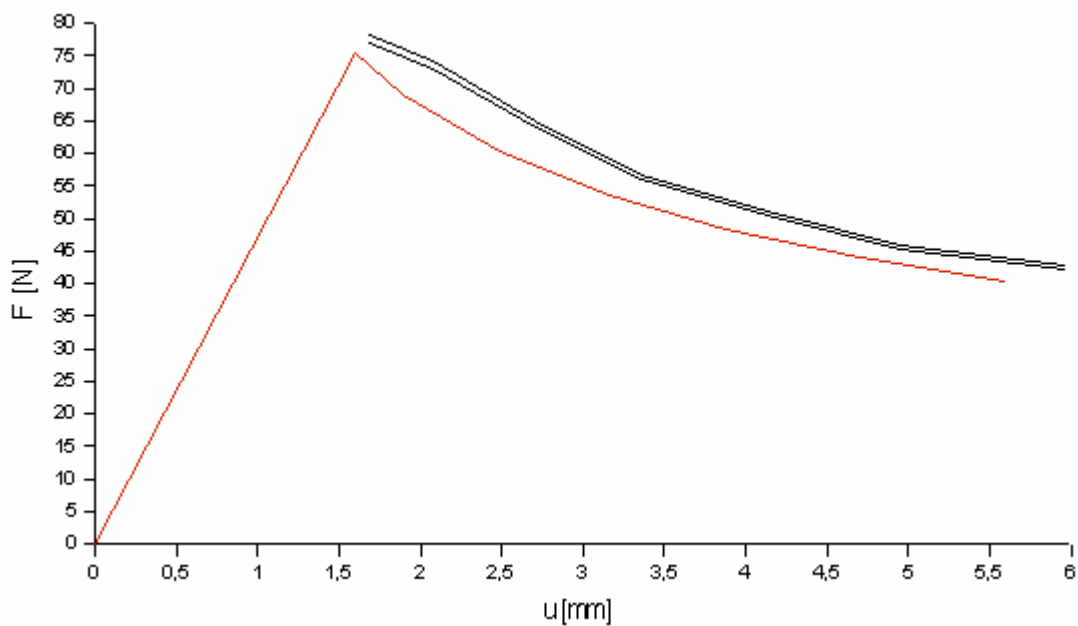
Abbildung 25: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,5mm$ )

Tabelle 12: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 0,2mm$ 

$a_0[mm]$	$u_1[mm]$	$u_2[mm]$	$F[N]$	$\frac{F}{u_1}[N/mm]$	$\frac{F}{u_2}[N/mm]$	$u[mm]$	$F_1[N]$	$F_2[N]$
32	1,028	1,046	48	46,69	45,89	1,68	78,23	76,88
35	1,126	1,364	48	35,71	35,19	2,08	74,12	73,03
40	2,002	2,028	48	23,98	23,67	2,71	64,95	64,11
45	2,844	2,878	48	16,88	16,68	3,36	56,77	56,09
50	3,896	3,938	48	12,32	12,19	4,14	51,04	50,50
55	5,178	5,230	48	9,27	9,18	4,95	45,86	45,40
60	6,716	6,776	48	7,15	7,08	5,97	42,67	42,29

Abbildung 26: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,2mm$ )

## 3 Modus II

### 3.1 Einführung ENF-Probe

Bei dem in Abbildung 27 dargestellten Problem handelt es sich um die sogenannte ENF-Probe (End Notched Flexure). Diese Probe kommt in der Bruchmechanik zur Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrate  $G_{IIc}$  des Bruchmodus II zur Anwendung. In diesem Abschnitt wird sie dazu verwendet um die Lastverschiebungskurve des Modus II analytisch bzw. mit dem Programm CODAC darzustellen.

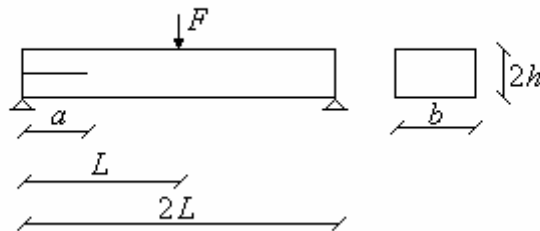


Abbildung 27: ENF-Probe

### 3.2 Analytische Lösung der ENF-Probe

Wie auch bei der Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrate des Bruchmodus I, ist es nötig, die Verformung  $u_F$  (Abbildung 28) infolge der Kraft  $F$  zu ermitteln. Diese Verschiebung ergibt sich laut de Moura und Chousal [6] zu:

$$u_F = \frac{3a^3 + 2L^3}{8Ebh^3} F \quad (\text{für } a < L) \quad \text{bzw.} \quad u_F = \frac{F}{Ebh^3} \left( L^3 - \frac{3}{8}(2L-a)^3 \right) \quad (\text{für } a > L) \quad (3.1)$$

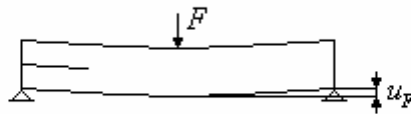


Abbildung 28: Verschiebung infolge F

In der ersten Gleichung von Gleichung 3.1 ist sehr gut zu erkennen, dass  $\frac{L^3}{4Ebh^3} F$  der Verformung des in Abbildung 27 dargestellten Biegebalkens an der Kraftangriffsstelle entspricht, wenn der Balken keinen Anriss aufweist. Dies lässt sich leicht nachvollziehen, indem unter Zuhilfenahme der Biegetheorie des Balkens gemäß Abschnitt 2.2.1, die Verformungsfunktion (vgl. Gleichung 3.2) ermittelt wird.

$$w(x) = -\frac{F}{12EI} x^3 + \frac{FL^3}{4EI} \quad \text{für } 0 < x < L \quad \text{mit } I = \frac{b(2h)^3}{12} \quad (3.2)$$

Daraus lässt sich schließen, dass der Term  $\frac{3a^3}{8Ebh^3} F$  dem Einfluss des Risses zuzurechnen ist.

Die Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrate erfolgt analog zu Kapitel 2.2.2. In diesem Fall wird der rissbehaftete elastische Körper gemäß Abbildung 26 belastet. Stellt sich nun wie in Abbildung 29 ein infinitesimaler Rissfortschritt der Länge  $\Delta a$  ein, so wird die auf  $bda$  bezogene freigesetzte Energie  $-d\Pi$  als Energiefreisetzungsrate  $G$  bezeichnet. Somit ergibt sich auch hier die Gleichung 2.6.

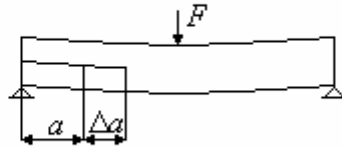


Abbildung 29: Rissfortschritt der ENF-Probe

Der Unterschied zu Kapitel 2.2.2 liegt darin, dass die Nachgiebigkeit dieses beidseitig gelagerten Balkens eine andere ist. Für die Nachgiebigkeit ergibt sich mit Gleichung 3.1:

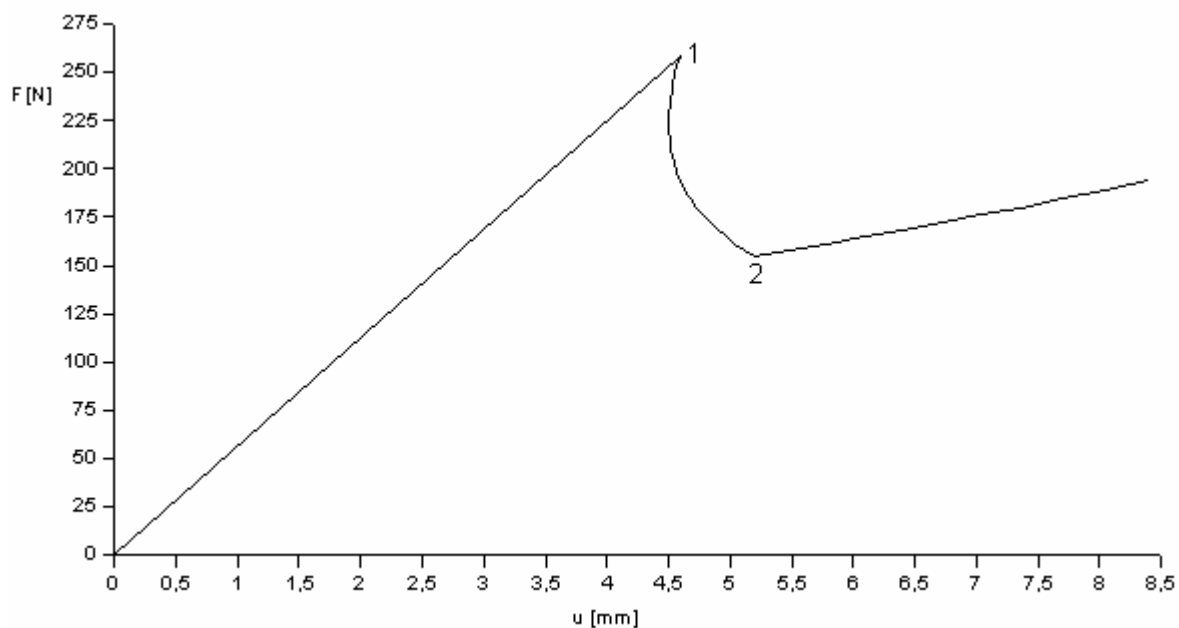
$$C = \frac{3a^3 + 2L^3}{8Eb^3h^3} \quad (\text{für } a < L) \quad \text{bzw.} \quad C = \frac{1}{Eb^3h^3} \left( L^3 - \frac{3}{8}(2L-a)^3 \right) \quad (\text{für } a > L). \quad (3.3)$$

Daraus erhält man für die Energiefreisetzungsrate:

$$G_{II} = \frac{9F^2 a^2}{16Eb^2h^3} \quad (\text{für } a < L) \quad \text{bzw.} \quad G_{II} = \frac{9F^2(2L-a)^2}{16Eb^2h^3} \quad (\text{für } a > L). \quad (3.4)$$

Zur Darstellung der analytisch ermittelten Lastverschiebungskurve, werden Materialkennwerte von Aluminium verwendet. Fiolka und Matzenmiller [3] geben hierfür einen Elastizitätsmodul von  $E = 69000 \text{ N/mm}^2$ , eine Querkontraktionszahl von  $\nu = 0,3$  sowie eine kritische Energiefreisetzungsrate von  $G_{IIC} = 1,45 \text{ N/mm}$  an. Aufgrund dieser Kennwerte und den geometrischen Abmessungen von

$L = 50\text{mm}$ ,  $h = 1,5\text{mm}$ , und  $b = 10\text{mm}$ , ergibt sich die Lastverschiebungskurve gemäß Abbildung 30. Diese Kurve basiert auf einem Anriss von  $a = 30\text{mm}$ . Der Punkt 1 kennzeichnet den einsetzenden Rissfortschritt, für den eine Kraft von  $F = 258,26\text{N}$  bei einer Verschiebung von  $u_F = 4,59\text{mm}$  erforderlich ist. Punkt 2 gibt die Stelle an, bei der sich der Riss genau bis unter die Kraftangriffsstelle fortgepflanzt hat, hier beträgt die Kraft  $F = 155,07\text{N}$  und die Verschiebung ist  $u_F = 5,20\text{mm}$ .



**Abbildung 30: Modus II Rissausbreitung**

### 3.3 Vergleichslösung mit CODAC

Um die Lastverschiebungskurve mit Hilfe des Programms CODAC ermitteln zu können, ist eine Vorgehensweise wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben erforderlich.

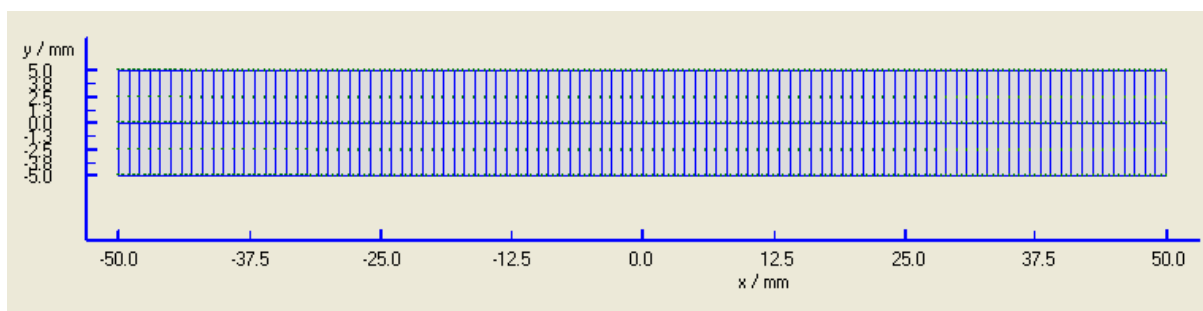
Beim Bruchmodus II wird die Probe gemäß Abbildung 27 einer Laststeigerung unterworfen. Zum Zeitpunkt des einsetzenden Rissfortschritts kann eine dafür benötigte Kraft  $F_1$  und die dazugehörige Verschiebung  $u_1$  ermittelt werden. Die kritische Energiefreisetzungsrate lässt sich bestimmen, in dem man einen Rissfortschritt der Länge  $\Delta a$  zulässt. Die an der Stelle  $a + \Delta a$  vorherrschende Kraft  $F_2$  und die entsprechende Verschiebung  $u_2$  werden nun wie in Gleichung 3.5 ersichtlich zur Bestimmung der kritischen Energiefreisetzungsrate herangezogen.

$$G_{IIc} = \frac{F_1 \cdot u_2 - F_2 \cdot u_1}{2 \cdot b \cdot (a_2 - a_1)} \quad (3.5)$$

Für die Bestimmung der Lastverschiebungskurve mit dem Programm CODAC wird der in Abbildung 27 dargestellte Biegebalken bei unterschiedlichen Anrissen  $a_1$  und  $a_2$  mit einer Kraft  $F$  belastet. Die daraus errechneten Verschiebungen  $u_1$  und  $u_2$  werden, wie auch die Aufweitungen im Abschnitt 2.3.1, zur Bestimmung der konstanten Quotienten  $\frac{F}{u}$  herangezogen. Setzt man im Folgenden die Verschiebungen aus Gleichung 3.5 gleich, ist es möglich mit Hilfe der ermittelten Kraft-Verschiebungsquotienten die sich beim Rissfortschritt einstellende Verschiebung  $u$  gemäß Gleichung 3.6 zu ermitteln.

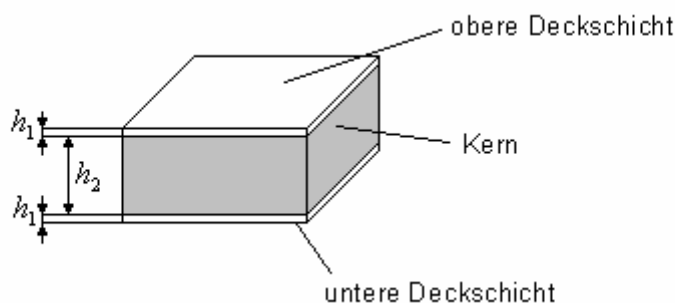
$$u = \sqrt{\frac{2G_{IIc} b (a_2 - a_1)}{\frac{F_1}{u} - \frac{F_2}{u}}} \quad (3.6)$$

Bei der Vergleichslösung mit CODAC kommt ein Finite-Element-Netz nach Abbildung 31 zum Einsatz. Dieses als Beispiel herangezogene Netz wurde für die Berechnung des oben vorgestellten Problems mit einem Anriss der Länge  $a = 30\text{mm}$  verwendet. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass das Finite-Element-Netz aus 100 Elementen in x-Richtung, sowie 2 Elementen in y-Richtung, also insgesamt 200 Elementen, aufgebaut ist. Daraus ergeben sich auch die geometrischen Abmessungen von  $100\text{mm} \times 10\text{mm}$ .



**Abbildung 31: Finite-Element-Netz der ENF-Probe**

Bei den in Abbildung 31 verwendeten Elementen, handelt es sich um im Programm CODAC implementierte S815 Sandwichelemente. Der Unterschied zu den in Abschnitt 2 verwendeten Schalenelementen liegt darin, dass die Sandwichelemente aus einer oberen und einer unteren Deckschicht bestehen und dass sich zwischen diesen beiden Schichten noch eine dritte Schicht, der sogenannte Kern, befindet. Eine veranschaulichende Darstellung bietet Abbildung 32. Weitere Informationen zu den Sandwichelementen sind in Wetzel et al. [7] zu finden.



**Abbildung 32: Sandwichelement**



Der oberen und der unteren Deckschicht werden die in 3.2 eingeführten Materialkennwerte zugeordnet. Die Höhe dieser beiden Schichten beträgt  $h_1 = 1,5\text{mm}$ , die Höhe des Kerns beträgt  $h_2 = 1 \cdot 10^{-7}\text{m}$ . Dem Kern werden im Bereich ohne Riss die gleichen Materialkennwerte wie den Deckschichten zugeordnet. Im Bereich des Anrisses werden dem Kern sehr kleine E-Module in x- bzw. y-Richtung zugewiesen, der E-Modul in z-Richtung ist dagegen sehr groß zu wählen (hier  $E_x = E_y = 1\text{N/m}^2$  und  $E_z = 1 \cdot 10^{20}\text{N/m}^2$ ). Damit wird eine Durchdringung der beiden Schichten minimiert, während sich in der x-y-Ebene gegeneinander verschieben können.

Die Lastaufbringung erfolgt entsprechend Abschnitt 2.3.1, das bedeutet, dass auch hier eine Zerlegung der insgesamt aufzubringenden Kraft gemäß Abbildung 11 erforderlich ist.

Die Tabellen 13-15 sowie die Abbildungen 33-35 beinhalten die mit CODAC ermittelten Ergebnisse. In den Abbildungen ist außerdem die analytisch ermittelte Lastverschiebungskurve enthalten. Man kann in den Abbildungen sehr gut erkennen, dass sich die mit Hilfe von CODAC berechnete Lastverschiebungskurve wiederum mit abnehmenden  $\Delta a$  an die analytisch ermittelte annähert. Selbst bei einem Rissfortschritt von  $\Delta a = 1\text{mm}$  erhält man schon eine sehr gute Annäherung.

Tabelle 13: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 1mm$ 

$a_0[mm]$	$u_1[mm]$	$u_2[mm]$	$F[N]$	$\frac{F}{u_1}[N/mm]$	$\frac{F}{u_2}[N/mm]$	$u[mm]$	$F_1[N]$	$F_2[N]$
30	4,247	4,354	240	56,51	55,12	4,57	258,24	251,89
31	4,354	4,468	240	55,12	53,72	4,54	250,30	243,92
32	4,468	4,589	240	53,72	52,30	4,52	243,06	236,65
33	4,589	4,717	240	52,30	50,88	4,52	236,41	230,00
34	4,717	4,854	240	50,88	49,44	4,49	228,64	222,19
35	4,854	4,998	240	49,44	48,02	4,51	223,09	216,66
40	5,662	5,850	240	42,39	41,03	4,61	195,58	189,29
45	6,700	6,937	240	35,82	34,60	4,87	174,37	168,42
46	6,937	7,185	240	34,60	33,40	4,93	170,49	164,61
47	7,185	7,444	240	33,40	32,24	5,00	166,86	161,05
48	7,444	7,713	240	32,24	31,12	5,08	163,73	158,02
49	7,713	7,993	240	31,12	30,03	5,16	160,50	154,88
50	7,993	8,275	240	30,03	29,00	5,32	159,85	154,40
55	9,292	9,521	240	25,83	25,21	6,83	176,47	172,23
60	10,34	10,52	240	23,21	22,81	8,55	198,34	194,95

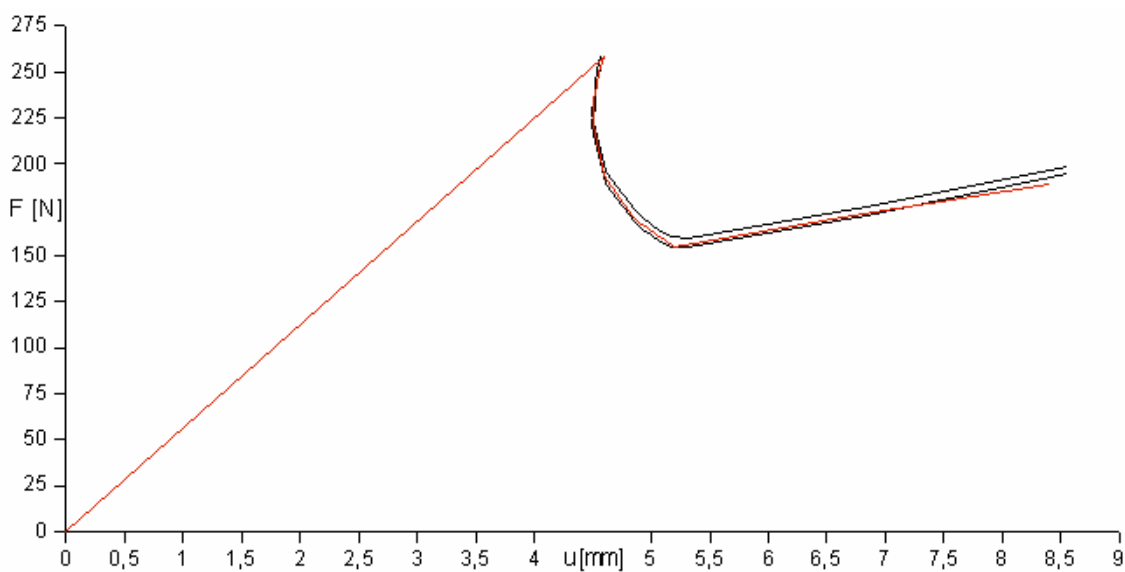
Abbildung 33: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 1mm$ )

Tabelle 14: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 0,5mm$ 

$a_0[mm]$	$u_1[mm]$	$u_2[mm]$	$F[N]$	$\frac{F}{u_1}[N/mm]$	$\frac{F}{u_2}[N/mm]$	$u[mm]$	$F_1[N]$	$F_2[N]$
30	4,248	4,300	240	56,50	55,81	4,61	260,27	257,13
31	4,354	4,410	240	55,12	54,42	4,55	250,88	247,70
32	4,468	4,527	240	53,72	53,01	4,55	244,46	241,28
33	4,589	4,652	240	52,30	51,59	4,52	236,64	233,43
34	4,718	4,785	240	50,87	50,16	4,51	229,52	226,30
35	4,854	4,925	240	49,44	48,73	4,51	223,00	219,79
40	5,662	5,755	240	42,39	41,70	4,60	195,02	191,87
45	6,700	6,818	240	35,82	35,20	4,84	173,24	170,24
46	6,938	7,061	240	34,59	33,99	4,91	169,69	166,73
47	7,186	7,314	240	33,40	32,81	4,98	166,35	163,44
48	7,445	7,578	240	32,24	31,67	5,06	163,20	160,33
49	7,714	7,853	240	31,11	30,56	5,13	159,65	156,82
50	7,994	8,137	240	30,02	29,49	5,24	157,39	154,62
55	9,292	9,408	240	25,83	25,51	6,75	174,28	172,13
60	10,34	10,43	240	23,21	23,01	8,51	197,49	195,79

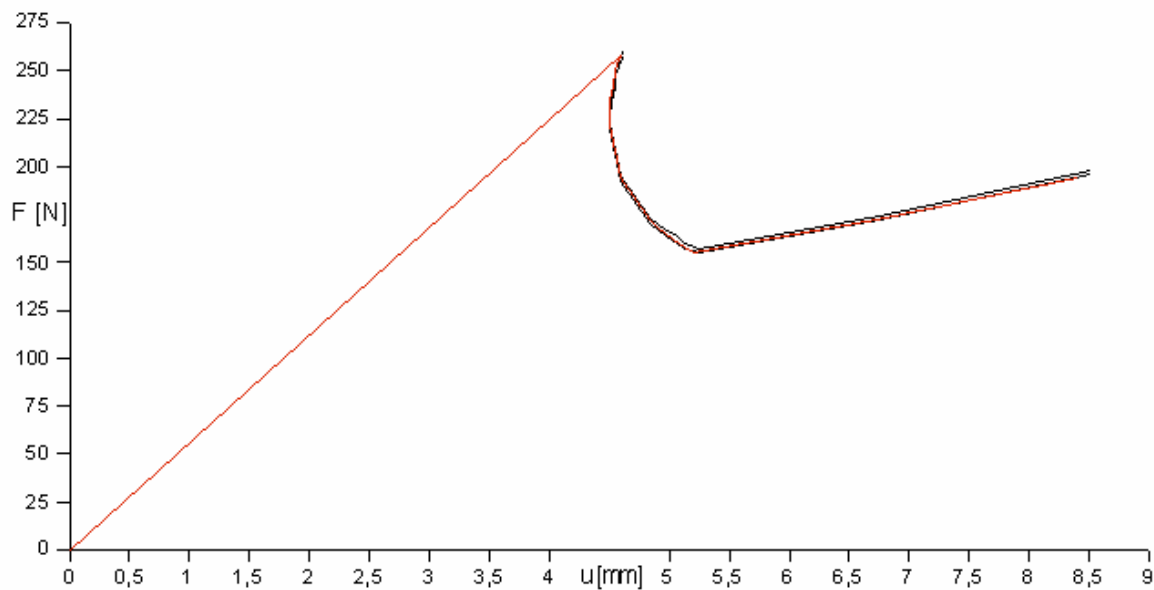
Abbildung 34: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,5mm$ )

Tabelle 15: CODAC-Resultate für  $\Delta a = 0,2mm$ 

$a_0[mm]$	$u_1[mm]$	$u_2[mm]$	$F[N]$	$\frac{F}{u_1}[N/mm]$	$\frac{F}{u_2}[N/mm]$	$u[mm]$	$F_1[N]$	$F_2[N]$
30	4,248	4,269	240	56,50	56,22	4,57	258,10	256,83
31	4,354	4,377	240	55,12	54,83	4,47	246,66	245,36
32	4,468	4,492	240	53,72	53,43	4,50	241,48	240,19
33	4,589	4,614	240	52,30	52,02	4,52	236,61	235,33
34	4,718	4,745	240	50,87	50,58	4,48	227,71	226,41
35	4,855	4,883	240	49,43	49,15	4,52	223,61	222,33
40	5,663	5,700	240	42,38	42,11	4,59	194,60	193,33
45	6,701	6,748	240	35,82	35,57	4,82	172,70	171,50
46	6,939	6,987	240	34,59	34,35	4,94	170,88	169,71
47	7,187	7,238	240	33,39	33,16	4,96	165,80	164,63
48	7,445	7,499	240	32,24	32,00	5,00	161,14	159,98
49	7,715	7,770	240	31,11	30,89	5,13	159,65	158,52
50	7,994	8,052	240	30,02	29,81	5,18	155,48	154,36
55	9,293	9,340	240	25,83	25,70	6,68	172,53	171,66
60	10,34	10,38	240	23,21	23,12	8,05	186,91	186,19

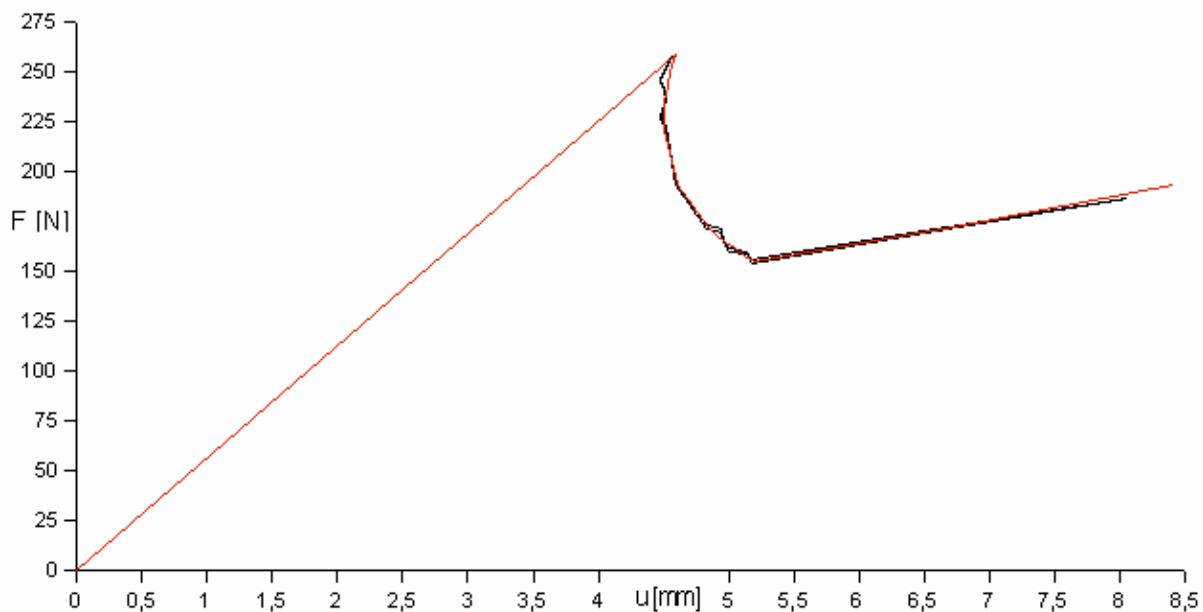
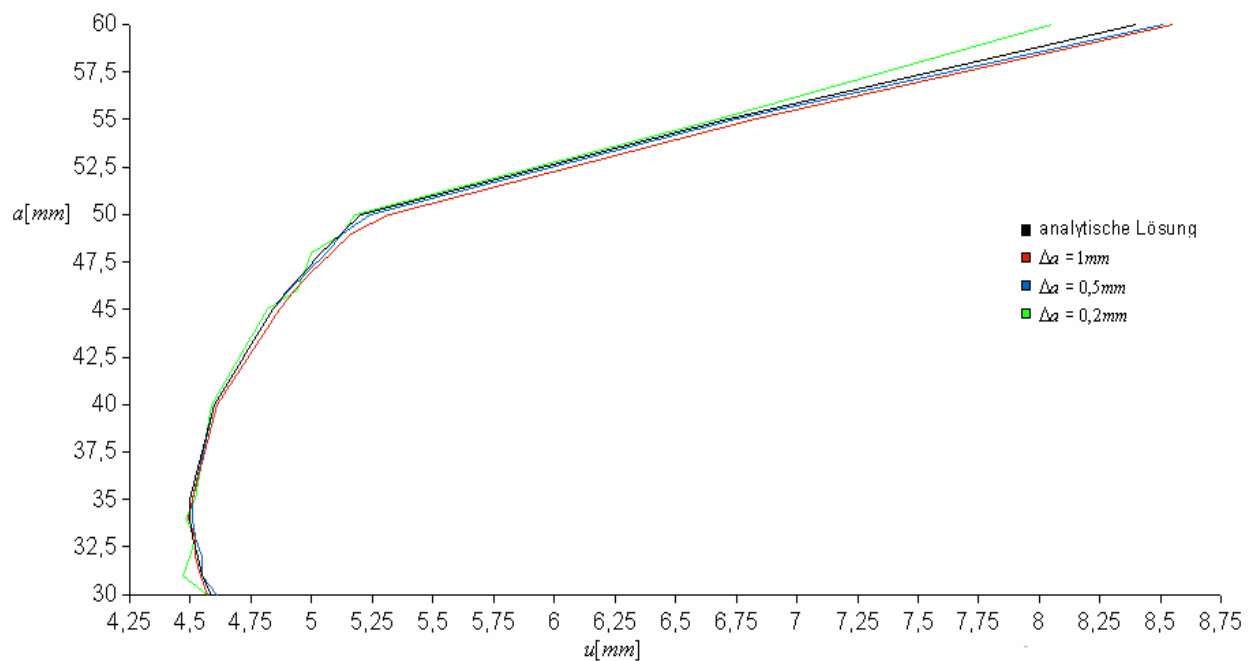
Abbildung 35: Vergleich CODAC Berechnung mit analytischer Lösung ( $\Delta a = 0,2mm$ )

Abbildung 36 stellt die Risslänge  $a$  über der Verschiebung  $u$  dar. Die ermittelten Werte für  $\Delta a = 0,5\text{mm}$  und  $\Delta a = 1\text{mm}$  weisen auch hier eine gute Übereinstimmung zu der analytischen Lösung auf. Wie schon in Abbildung 35 ist auch hier eine Verschlechterung der Ergebnisse bei  $\Delta a = 0,2\text{mm}$  zu erkennen. Diese Netzabhängigkeit konnte, wie die in Abschnitt 2.3.2 erwähnte, in dieser Arbeit nicht näher untersucht werden und sollte somit Gegenstand nachfolgender Untersuchungen sein.



**Abbildung 36: Darstellung der Risslänge über der Verschiebung**

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, dass prinzipiell die Möglichkeit besteht das Finite-Element-Tool CODAC auf bruchmechanische Problemstellungen anzuwenden.

Es hat sich gezeigt, dass die Modus I Rissausbreitung mit Hilfe des Modells eines Kragarms sehr gut abgebildet werden kann. Es wurde aber auch festgestellt, dass bei der Berechnung des Bruchmodus I unter Verwendung eines Modells bestehend aus zwei Laminaten als Deckschichten und Federelementen als Zwischenelemente, eine deutliche Abweichung zu der analytischen Lösung auftritt. Dies bedeutet aber nicht, dass das Programm CODAC falsche Ergebnisse liefert. Der Grund dieser Abweichung ist eine, infolge des gewählten Modells, an der Rissspitze auftretende Querschubverformung. Im weiteren Verlauf sollte somit ein besonderes Augenmerk auf dieses Problem gelegt werden. Eine mögliche Lösung dieses Sachverhaltes sollte sich ergeben, wenn die in CODAC implementierten Sandwichelemente zur Berechnung des Bruchmodus I genutzt werden können. Dies ist zur Zeit nicht der Fall, da es noch nicht möglich ist eine Aufweitung bzw. eine zur Aufweitung nötige Kraft vorzugeben.

Die Rissausbreitung des Bruchmodus II konnte mit Hilfe der in CODAC implementierten S815 Sandwichelemente in sehr guter Übereinstimmung mit der analytischen Lösung dargestellt werden.

Des Weiteren hat sich gezeigt, dass es aufgrund einer Netzabhängigkeit in beiden Fällen zu Ergebnisschwankungen bei kleiner werden Elementen kommt. Diese Netzabhängigkeit sollte in weiteren Untersuchungen Beachtung finden.

## Literaturverzeichnis

- 1 Gross D.  
Bruchmechanik  
2. Auflage  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996  
ISBN: 3-540-61205-X
  
- 2 Aliyu A. A., Daniel I. M.  
Effects of Strain Rate on Delamination Fracture Toughness of  
Graphite/Epoxy  
In: Delamination and Debonding of of Materials, S.336-348  
ASTM STP 876, Johnson W. S., 1985
  
- 3 Fiolka M., Matzenmiller A.  
Berechnung fortschreitender Risse in Laminaten  
Institut für Mechanik, Universität Kassel, Mönchbergstrasse 7,  
34109 Kassel
  
- 4 Carlsson L.A., Pipes R.B.  
Hochleistungsfaserverbundwerkstoffe  
B.G. Teubner Stuttgart, 1989  
ISBN: 3-519-03250-3
  
- 5 Knothe K., Wessels H.  
Finite Elemente  
Eine Einführung für Ingenieure  
3. Auflage  
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999  
ISBN: 3-540-64491-1

- 6 de Moura M.F.S.E., Chousal J.A.G  
Cohesive and continuum damage models applied to fracture  
characterization of bonded joints  
In: International Journal of Mechanical Sciences 48. 493-503, 2006
  
- 7 Wetzel A., Kärger L., Rolfes R., Rohwer K.  
Evaluation of two finite element formulations for a rapid 3D stress analysis  
of sandwich structures  
In: Computers and Structures 83. 1537-1545, 2005