Forschungsbericht 2024-32

Numerische Quantifizierung des Einflusses räumlich verteilter Out-of-Plane Welligkeiten auf die Materialfestigkeit von Faserverbundstrukturen mithilfe probabilistischer Verfahren

Andreas Schuster

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Systemleichtbau
Braunschweig

DLR Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

Forschungsbericht 2024-32

Numerische Quantifizierung des Einflusses räumlich verteilter Out-of-Plane Welligkeiten auf die Materialfestigkeit von Faserverbundstrukturen mithilfe probabilistischer Verfahren

Andreas Schuster

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Systemleichtbau
Braunschweig

195 Seiten
82 Bilder
12 Tabellen
233 Literaturstellen

Deutsches Zentrum
DLR für Luft- und Raumfahrt



Herausgeber:

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e. V.
Wissenschaftliche Information
Linder Höhe
D-51147 Köln

ISSN 1434-8454
ISRN DLR-FB-2024-32
Erscheinungsjahr 2024
DOI: 10.57676/0at2-xd18

Erklärung des Herausgebers
Dieses Werk – ausgenommen anderweitig gekennzeichneter Teile – ist lizensiert unter den Bedingungen der Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung 4.0 International (CC BY 4.0), abrufbar über https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode

Lizenz


Creative Commons Attribution 4.0 International

Faserverbundwerkstoff, Welligkeiten, Finite Elemente Methode, Zufallsfeldmodellierung, Versagensanalyse, Unsicherheitsbewertung

Andreas SCHUSTER
DLR, Institut für Systemleichtbau, Braunschweig

Numerische Quantifizierung des Einflusses räumlich verteilter Out-of-Plane Welligkeiten auf die Materialfestigkeit von Faserverbundstrukturen mithilfe probabilistischer Verfahren
Universität Bremen

Fertigungsbedingte Fehler stellen seit jeher die Herstellung von Flugzeugstrukturen aus Kohlenstofffaser-verstärktem Kunststoff (CFK) vor immensen Herausforderungen, um den hohen Qualitätsanforderungen der Luftfahrt gerecht zu werden. Unerwünschte Faserauslenkungen im Verbundwerkstoff, auch als Welligkeiten bezeichnet, repräsentieren hierbei einen charakteristischen Fehlertyp. Um das veränderte Material- und Tragverhalten unter dem Einfluss von Welligkeiten adäquat bestimmen zu können, kommen seit einiger Zeit vermehrt numerische Berechnungsverfahren zum Einsatz. Trotz der Verfügbarkeit moderner Rechentechnik beschränkt sich die simulationsbasierte Untersuchung der Thematik aufgrund der Komplexität jedoch auf ausgewählte Geometrien. Die vorliegende Arbeit stellt einen numerischen Bewertungsansatz vor, der die Vielzahl potentieller Welligkeitsgeometrien auf Beispiel von Out-of-Plane Effekten mithilfe einer nicht-deterministischen Berechnungsmethode abbildet. Zu diesem Zweck wird ein stochastisches Konzept auf Basis von Zufallsfeldern zur Geometrieparametrisierung beschrieben und diskutiert. Ergänzend dazu wird ein FEM-zentrierter Modellierungsansatz dargelegt, mit dem die Auswirkungen der Welligkeiten auf die Tragreserven des Materials strukturmechanisch untersucht werden können. Dies erfolgt mithilfe detaillierter Modelle der Einzellagen des Materialverbunds, mit denen belastungsabhängige Abminderungsfaktoren (KDF) zur Quantifizierung des Materialverhaltens bestimmt werden. Die KDF werden in der Arbeit anhand verschiedener Kriterien zur Charakterisierung des Versagensverhaltens im CFK-Verbund miteinander verglichen. Der dargelegte probabilistische Berechnungsansatz wird zusätzlich anhand repräsentativer Laminatkonfigurationen am Beispiel der Druckfestigkeit R_x demonstriert und daraus resultierend statistische Verteilungen des KDF der Materialkenngröße ermittelt. Im Vergleich der KDF zeigen sich je nach betrachtetem Versagenskriterium größere Unterschiede, die weiterführende Untersuchungen im Kontext motivieren. Für einen praktischen Einsatz der Methode werden abschließend verschiedene Geometrie-basierte Metriken miteinander verglichen, anhand derer eine näherungsweise Bestimmung des KDF ermöglicht werden kann. In den Untersuchungen zeigte sich, dass der maximale Welligkeitsgradient aufgrund eines geringen Variationskoeffizients für Winkel bis etwa 19 Grad eine geeignete Ersatzgröße darstellt. Dies bietet das Potential für einen fertigungsbegleitenden Einsatz der Methode zur Bewertung realitätsnaher Welligkeitsdefekte.

Fiber-reinforced composite, waviness, finite element method, random field modeling, failure analysis, uncertainty assessment

(Published in German)

Andreas SCHUSTER
German Aerospace Center (DLR), Institute of Lightweight Systems, Braunschweig

Numerical quantification of the influence of spatially distributed out-of-plane waviness on the material strength of fiber composite structures using probabilistic methods
Dissertation, University Bremen

Production-related defects have always posed immense challenges for the manufacture of aircraft structures made of carbon fiber-reinforced plastic (CFRP) in order to meet the high-quality requirements of aviation. Unwanted fiber deflections in the composite material, also known as waviness, represent a characteristic type of defect. In order to be able to adequately determine the changed material and load-bearing behavior under the influence of waviness, numerical calculation methods are now increasingly being used. Despite the availability of modern computing technology, however, simulation-based investigation of the topic is limited to selected geometries due to their complexity. The present work presents a numerical evaluation approach that maps the multitude of potential waviness geometries on the example of out-of-plane effects using a non-deterministic calculation method. For this purpose, a stochastic concept based on random fields for geometry parameterization is described and discussed. In addition, a FEM-centered modelling approach is presented, with which the effects of the waviness on the load-bearing reserves of the material can be investigated in terms of structural mechanics. This is done with the help of detailed models of the individual layers of the material composite, with which load-dependent reduction factors (KDF) are determined to quantify the material behavior. The KDFs are compared with each other in the thesis using various criteria to characterize the failure behavior in the CFRP composite. The presented probabilistic calculation approach is also demonstrated using representative laminate configurations using the example of the compressive strength R_x and the resulting statistical distributions of the KDF of the material parameter are determined. The comparison of the KDF shows major differences depending on the failure criterion considered, which motivate further investigations in this context. Finally, for a practical application of the method, various geometry-based metrics are compared with each other, on the basis of which an approximate determination of the KDF can be made possible. The investigations showed that the maximum waviness gradient is a suitable substitute variable for angles up to 19 degrees due to a low coefficient of variation. This offers the potential for using the method during production to evaluate realistic waviness defects.

NUMERISCHE QUANTIFIZIERUNG DES EINFLUSSES RÄUMLICH VERTEILTER OUT-OF-PLANE WELLIGKEITEN AUF DIE MATERIALFESTIGKEIT VON FASERVERBUNDSTRUKTUREN MITHILFE PROBABILISTISCHER VERFAHREN

Vom Fachbereich Produktionstechnik
der
UNIVERSITÄT BREMEN

zur Erlangung des Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte

Dissertation
von
M. Sc. Andreas Schuster

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. Richard Degenhardt, Universität Bremen

Prof. Dr.-Ing. Benedikt Kriegesmann, Technische Universität Hamburg

Tag der mündlichen Prüfung: 18.11.2024

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Systemleichtbau des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt e.V. in Braunschweig.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Richard Degenhardt für die Übernahme und intensive Betreuung der Arbeit als Erstgutachter. In diesem Zusammenhang möchte ich zudem Herrn Prof. Dr. Martin Wiedemannm, dem Direktor des Instituts für Systemleichtbau, für die fachliche Betreuung in den Anfängen meiner wissenschaftlichen Tätigkeit danken. Herrn Prof. Dr. Benedikt Kriegesmann, Leiter des Instituts für Strukturmechanik im Leichtbau an der Technischen Universität Hamburg, danke ich für die Übernahme des Koreferats. Herrn Prof. Dr. David May danke ich für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission sowie Herrn Dr. Dirk Wilckens, Herrn Christoph Hoffmeister und Herrn Gökdeniz Havuc für die Teilnahme an der Kommission.

Herrn Dr. Tobias Wille, Leiter der Abteilung Strukturmechanik, danke ich nicht nur für die Ermöglichung meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Institut sondern auch für das stete Vertrauen in die eigenen Ideen und die konstruktiven Diskussionen während der gesamten Zeit. Nicht zuletzt das kollegiale Umfeld der Abteilung waren eine wesentliche Stütze und Motivationshilfe zur Bewältigung der Herausforderungen der Arbeit. Neben allen Kollegen der Abteilung möchte ich an dieser Stelle zudem Herrn Dr. Sebastian Freund, Dr. Jean Lefèvre sowie Herrn Dr. Falk Odermann als Bürokollegen erwähnen, die fernab der Wissenschaft auch immer für interessante Gespräche ein offenes Ohr hatten. All meinen Freunden sei zudem an dieser Stelle gedankt, die für den nötigen privaten Ausgleich neben der Arbeit gesorgt haben.

Die letzten Worte gehören den wichtigsten Menschen. Zunächst meinen Eltern, die meinen persönlichen Lebensweg bis hierher begleitet haben und vieles erst ermöglicht haben. Mein allergrößter Dank gilt meiner Freundin Maren, ohne deren Unterstützung und Liebe über die Jahre hinweg diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Abschließend möchte ich die Arbeit meiner Schwester widmen. Auch wenn Sie diese Worte nicht mehr erreichen, so wird dieses Kapitel für mich immer mit Ihr verbunden sein.

Kurzfassung

Fertigungsbedingte Fehler stellen seit jeher die Herstellung von Flugzeugstrukturen aus Kohlenstofffaser-verstärktem Kunststoff (CFK) vor immensen Herausforderungen, um den hohen Qualitätsanforderungen der Luftfahrt gerecht zu werden. Unerwünschte Faserauslenkungen im Verbundwerkstoff, auch als Welligkeiten bezeichnet, repräsentieren hierbei einen charakteristischen Fehlertyp. Um das veränderte Material- und Tragverhalten unter dem Einfluss von Welligkeiten adäquat bestimmen zu können, kommen seit einiger Zeit vermehrt numerische Berechnungsverfahren zum Einsatz. Trotz der Verfügbarkeit moderner Rechentechnik beschränkt sich die simulationsbasierte Untersuchung der Thematik aufgrund der Komplexität jedoch auf ausgewählte Geometrien.

Die vorliegende Arbeit stellt einen numerischen Bewertungsansatz vor, der die Vielzahl potentieller Welligkeitsgeometrien auf Beispiel von Out-of-Plane Effekten mithilfe einer nichtdeterministischen Berechnungsmethode abbildet. Zu diesem Zweck wird ein stochastisches Konzept auf Basis von Zufallsfeldern zur Geometrieparametrisierung beschrieben und diskutiert. Ergänzend dazu wird ein FEM-zentrierter Modellierungsansatz dargelegt, mit dem die Auswirkungen der Welligkeiten auf die Tragreserven des Materials strukturmechanisch untersucht werden können. Dies erfolgt mithilfe detaillierter Modelle der Einzellagen des Materialverbunds, mit denen belastungsabhängige Abminderungsfaktoren (KDF) zur Quantifizierung des Materialverhaltens bestimmt werden. Die KDF werden in der Arbeit anhand verschiedener Kriterien zur Charakterisierung des Versagensverhaltens im CFK-Verbund miteinander verglichen.

Der dargelegte probabilistische Berechnungsansatz wird zusätzlich anhand repräsentativer Laminatkonfigurationen am Beispiel der Druckfestigkeit R_x demonstriert und daraus resultierend statistische Verteilungen des KDF der Materialkenngröße ermittelt. Im Vergleich der KDF zeigen sich je nach betrachtetem Versagenskriterium größere Unterschiede, die weiterführende Untersuchungen im Kontext motivieren. Für einen praktischen Einsatz der Methode werden abschließend verschiedene Geometrie-basierte Metriken miteinander verglichen, anhand derer eine näherungsweise Bestimmung des KDF ermöglicht werden kann. In den Untersuchungen zeigte sich, dass der maximale Welligkeitsgradient aufgrund eines geringen Variationskoeffizients für Winkel bis etwa 19 Grad eine geeignete Ersatzgröße darstellt. Dies bietet das Potential für einen fertigungsbegleitenden Einsatz der Methode zur Bewertung realitätsnaher Welligkeitsdefekte.

Abstract

Production-related defects have always posed immense challenges for the manufacture of aircraft structures made of carbon fibre-reinforced plastic (CFRP) in order to meet the high quality requirements of aviation. Unwanted fibre deflections in the composite material, also known as waviness, represent a characteristic type of defect. In order to be able to adequately determine the changed material and load-bearing behaviour under the influence of waviness, numerical calculation methods are now increasingly being used. Despite the availability of modern computing technology, however, simulation-based investigation of the topic is limited to selected geometries due to their complexity.

The present work presents a numerical evaluation approach that maps the multitude of potential waviness geometries on the example of out-of-plane effects using a non-deterministic calculation method. For this purpose, a stochastic concept based on random fields for geometry parameterisation is described and discussed. In addition, an FEM-centred modelling approach is presented, with which the effects of the waviness on the load-bearing reserves of the material can be investigated in terms of structural mechanics. This is done with the help of detailed models of the individual layers of the material composite, with which load-dependent reduction factors (KDF) are determined to quantify the material behaviour. The KDFs are compared with each other in the thesis using various criteria to characterise the failure behaviour in the CFRP composite.

The presented probabilistic calculation approach is also demonstrated using representative laminate configurations using the example of the compressive strength R_x and the resulting statistical distributions of the KDF of the material parameter are determined. The comparison of the KDF shows major differences depending on the failure criterion considered, which motivate further investigations in this context. Finally, for a practical application of the method, various geometry-based metrics are compared with each other, on the basis of which an approximate determination of the KDF can be made possible. The investigations showed that the maximum waviness gradient is a suitable substitute variable for angles up to 19 degrees due to a low coefficient of variation. This offers the potential for using the method during production to evaluate realistic waviness defects.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis viii

Tabellenverzeichnis xii

Nomenklatur xiv

Symbolverzeichnis . . . xiv

Abkürzungen . . . xv

1. Einleitung 1

1.1. Potential von Leichtbaustrukturen . . . 1

1.2. Motivation . . . 2

2. Stand der Forschung 4

2.1. Übersicht zu fertigungsinduzierten Defekten in Faserverbundstrukturen . . . 4

2.2. Out-of-Plane Welligkeiten . . . 8

2.3. Bewertung räumlich variabler Unsicherheiten . . . 13

3. Zielstellung der Arbeit 18

3.1. Neuheitswert . . . 18

3.2. Gliederung der Arbeit . . . 20

4. Stochastische Methoden zur Modellierung räumlich veränderlicher Größen 21

4.1. Vorüberlegungen . . . 21

4.2. Begriffsdefinitionen . . . 23

4.3. Räumliche Modellierung eines Zufallsfelds . . . 25

4.3.1. Theorie der Stochastischen Prozesse . . . 25

4.3.2. Variogram-basierte Zufallsfeld-Erzeugung . . . 30

4.4. Simulation stochastischer Prozesse . . . 30

4.4.1. Matrixzerlegungsmethoden . . . 31

4.4.2. Karhunen-Loève Expansion . . . 32

4.4.3. Berücksichtigung von Modellrandbedingungen . . . 38

4.5. Statistische Versuchsplanung . . . 40

4.5.1. Eigenschaften und Berwertung von Versuchsplänen . . . 40

4.5.2. Ausgewählte Verfahren zur Versuchsplanerstellung 42
4.6. Diskussion zur Eignung und Auswahl der Verfahren 48

5. Strukturmechanische Bewertung von Welligkeiten 54
5.1. Vorbetrachtung im Kontext stochastischer Analysen 54
5.2. Strukturmechanische Grundlagen von Faserverbundwerkstoffen 58
5.3. Bestimmung effektiver Festigkeiten auf Basis von Versagensvorhersagen . . . 63
5.3.1. Versagenscharakteristik von CFK-Materialien 63
5.3.2. Grundgedanken zur Versagensbewertung von OoP-Welligkeiten 65
5.3.3. Formale Definition eines Versagenskriteriums 66
5.4. Kriterien zur Versagensbewertung 69
5.5. Numerische Berechnung von Abminderungsfaktoren für Festigkeiten 76
5.6. FE-Modellierung 78
5.6.1. Elementformulierung und Randbedingungen 78
5.6.2. Numerische Parametrisierung der Welligkeit im FE-Modell 80
5.6.3. Kopplung von Zufallsfeld und FE-Modelltopologie 83
5.6.4. Anpassung von UD-Materialausgangsgrößen mithilfe mikromechanischer Modelle 85
5.7. Stochastische Bewertung 88
5.7.1. Beschreibung eines numerischen Prozesses zur stochastischen Analyse 88
5.7.2. Ableitung geometrischer Beziehung zwischen Welligkeit und KDF-Verteilungen von Materialparametern 93
5.7.3. Technische Realisierung des Analyseprozesses 96

6. Ergebnisse 99
6.1. Versuchsvorbereitung 99
6.1.1. Definition verwendeter Material und Modellgrößen 99
6.1.2. Stochastische Parametrisierung der Welligkeit 100
6.2. Deterministische Untersuchung 102
6.3. Probabilistische Analysen 107
6.3.1. Bestimmung eines repräsentativen Stichprobenumfangs 108
6.3.2. Empirische Dichteverteilungen des KDF 109
6.3.3. Analyse des Einflusses von Parametern des Referenzmodells 114
6.3.4. Analyse der Abhängigkeit geometrischer Größen des Zufallsfelds und resultierender KDF 122
6.4. Diskussion der Ergebnisse 131
6.4.1. Bewertung der Metriken zur KDF-Approximation 132
6.4.2. Grenzen der stochastischen Untersuchungen 134
6.5. Vergleich von stochastischer und deterministischer Parametrisierung 134

6.6. Experimentelle Validierung 136

7. Schlussbetrachtungen **140**

7.1. Zusammenfassung 140

7.2. Ausblick 142

A. Anhang **145**

A.1. Lokale und Globale Ansatzfunktionen zur Lösung der Fredholmgleichung . . 145

A.2. Materialmodelle von Faserverbundmaterialien 146

A.3. Transformatrizen zwischen globalem und lokalen Materialkoordinatensystem . 148

A.4. Kerndichteschätzung 149

A.5. Anpassung der UD-Materialkennwerte der einzelnen Lagen infolge der Elementverformung durch das ZF 150

A.6. Relative Abweichungen der KDF für verschiedene Bewertungsmetriken 151

Abbildungsverzeichnis

1.1. Anteil an Faserverbundwerkstoffen am Strukturgewicht verschiedener Flugzeugtypen, rot) Airbus, blau) Boeing, grün) McDonnell Douglas [1] 2
1.2. Gegenüberstellung physischer und simulationsbasierter Tests von Flugzeugstrukturen auf unterschiedlichen Skalen anhand eines 'Building-Block' Ansatzes [2]. 3

2.1. Schematische Darstellung eines Faser-Matrix-Verbundwerkstoffs bestehend aus Einzellagen unterschiedlicher Orientierung. 4
2.2. Mikroskopische Aufnahmen von Poren und Einschlüssen in Laminaten 6
2.3. Auftreten von Lücken und Überlappungen bei der Fertigung von CFK-Strukturen mittels AFP-Technologie 6
2.4. In-Plane und Out-of-Plane Einteilung von Faserwelligkeiten 7
2.5. Out-of-Plane Welligkeit 8
2.6. Unterschiedliche Ausprägung einer Welligkeit infolge der Towablage im AFP/ATL-Prozess 9
2.7. Vereinfachte Darstellung des Auftretens von Welligkeiten bei Durchführung von Infusionsverfahren 10
2.8. Beispiele verschiedener Typen von Out-of-Plane Welligkeiten in Faserverbundmaterialien 11
2.9. Stochastische Verteilung des E_{11} Parameters auf einem Kompositbauteil auf Basis einer probabilistischen, lokalen Untersuchung von Faserbündelstreuungen 15
2.10. Optisch vermessene Imperfektionen einer CFK-Zylinderstruktur und numerische Modellierung 15
2.11. Finite Elemente Modell eines repräsentativen Eckwinkels einer generischen Holmstruktur [3] 16

4.1. Allgemeines Schema zur Bewertung pyhsikalischer Probleme unter dem Einfluss unsicherer Eingangsgrößen 21
4.2. Vergleich von Kosinus-basierter und generischer, stochastisch motivierter Weligkeitsparametrisierung zur Beschreibung der veränderten Position zweier beliebigen Punkte x_1 und x_2 in einem idealisierten Laminat. 22

4.3. Dichtefunktionen ausgewählter Normal(N)-, Exponential(Exp), und Weibull(W)-Verteilungen 24
4.4. Ausgewählte Matérn-Kernelfunktionen für verschiedene Werte des Parameters ν. 29
4.6. Kumulierte Varianzreproduktion bei steigender Anzahl an verwendeten Eigenmoden für verschiedene Korrelationslängen eines Exponentiellen Kovarianzmodells zur Beschreibung eines Zufallsfeld (ZF) in einer Domäne der Länge $l = 8$ und Breite $b = 8$. Die gestrichelte Linie repräsentiert den Wert $p = 0.99$. . . . 35
4.7. Vergleich der erforderlichen Anzahl von Eigenwerten zur Beschreibung der räumlichen Variabilität für verschiedene Güteklassen *level* der ZF-Varianz in Abhängigkeit zu geometrischen Verhältnissen aus Modellabmessungen und Korrelationslänge. 36
4.8. Vergleich zufälliger Ausprägungen des ZF ohne Randbedingung (links) und mit Berücksichtigung von Randbedingungen (rechts). Zur Demonstration wurde ein 1D-Gitter aus 75 Netzpunkten einer Modellgeometrie der Länge 8 und eine Gaußsche Kovarianzfunktion mit $l_c = 1.0$ und $s^2 = 0.5$ gewählt. 40
4.9. Beispiel eines Latin Hypercubes mit 2 Parametern und 5 Stützstellen im Einheitsparameterraum. [4] 44
4.10. Beispiel einer initialen Voronoi Tesselierung und einer Centroidal Voronoi Tesselierung von Saka 45
4.11. Iterationsschritt aus Algorithmus 3 von Ju 47
4.12. Beispielhafte Stützstellenverteilung verschiedener Versuchspläne mit 51 Stützstellen im normierten Entwurfsraum Ω 49
4.13. Ergebnisse einzelner Prozessschritte bei der Übertragung von optischen Messungen an GFK-Schnittproben in ein Interpolationsmodell zur numerischen Modellableitung. 50
4.14. Karhunen-Loève-Expansion (KLE)-basierte Modellierung einer Out-of-Plane Welligkeit in einem Laminat 52

5.1. Schematische Darstellung eines Konzeptes zur Bestimmung von Materialgrößen unter dem Einfluss stochastische Out-of-Plane (OoP)-Welligkeiten für eine idealisierte CFK-Struktur. 56
5.2. Hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer Materialgröße in Abhängigkeit der geometrischen Maße eines betrachteten Materialausschnitts unter Berücksichtigung von OoP-Welligkeiten. 58
5.3. Spannungs- und Dehnungskomponenten am Materialausschnitt 59
5.4. Bezugskoordinatensysteme für Einzellage und Laminat 61
5.5. Faserbruch aufgrund von Zugbelastung. 63
5.6. Matrixversagen durch transversale Zug- und Druckbeanspruchung quer zur Faserrichtung 64

5.7. Stabilitätsversagen durch Druckbeanspruchung. 65
5.8. Kontinuumsmechanischer Ansatz zur Homogenisierung der Festigkeitskennwerte eines Laminats mit Imperfektionen 77
5.9. Definition von Knotenmengen am Modellrand und eingebrachte Knotenlast für einen einachsigen Zuglastfall. 80
5.10. Vergleich von zwei unterschiedlichen Parametrisierung der Welligkeit im Laminat, die sich aus einem 2D-ZF und einer Skalierungsfunktion in Laminatdickenrichtung zusammensetzt. 82
5.11. Unterschiedliche Diskretisierung zwischen FEM-Modell und Zufallsfeldmodell. 84
5.12. Vereinfachte Darstellung der linearen Interpolation von räumlichen Punktwerten eines Zufallsfelds(rote Pfeile) auf die Knoten einer FEM-Diskretisierung(schwarze Pfeile). Die Länge eines Pfeiles stellt den nominellen Wert an einem Knoten dar. 85
5.13. Verschiedene Packungsmodelle von Faser und Matrix. 87
5.14. Vereinfachte Darstellung eines Prozesses zur Bestimmung stochastischer Abminderungsfaktoren 89
5.15. Darstellung von zwei exemplarischen FE-Modellen unter Berücksichtigung zufälliger OoP-Welligkeiten 91
5.16. Darstellung einfacher geometrischer Größen des ZF 95
5.17. Darstellung der Hauptkrümmungen k_1 und k_2 für einen beliebigen Punkt einer diskretisierten Oberfläche 96
5.18. Technischer Aufbau von Diskless-HPC Systemen 97

6.1. Ermittelte Korrelationslängen für Materialproben auf Basis von Mikrofotografie 101
6.2. Betrachtetes Zufallsfeld für deterministische Knock-down Factor (KDF)-Berechnung eines Modells der Größe 20 mm×20 mm. 102
6.3. Vergleich der KDF für die ausgewählten Versagenskriterien auf Lagenebene . 103
6.4. Elementweiser Vergleich der KDF für gewählte Versagenskriterien der Lage an der Mittelfläche eines unidirektionalen Laminats mit 16 Lagen. 104
6.5. Faservolumengehalt entlang einer Schnittebene des Modells. 105
6.6. Vergleich des Einflusses unterschiedlicher Netzfeinheiten in x-Richtung (a) und z-Richtung (b) auf den KDF auf Lagen- und Laminatebene. 106
6.7. Einfluss der Stichprobengröße auf das arithmetische Mittel und Varianz des KDF für die LHS und LCVT Methode 108
6.8. KDF-Histogrammverteilung für ausgewählte Versagenskriterien eines unidirektionalen Laminats aus 32 Lagen 110
6.9. KDF-Histogrammverteilung für ausgewählte Versagenskriterien eines quasi-isotropen Laminats aus 32 Lagen 111
6.10. KDF-Histogrammverteilung für ausgewählte Versagenskriterien des Laminats Lam_{FH} 112

6.11. Verteilung der Mittelwerte und Standardabweichungen der lagenweisen KDF in einem unidirektionalen Laminat 113
6.12. Verteilung der Mittelwerte und Standardabweichungen der lagenweisen KDF in einem quasi-isotropen Laminat 114
6.13. Verteilung der Mittelwerte und Standardabweichungen der lagenweisen KDF des Laminats Lam_{FH} 115
6.14. Vergleich zweier beispielhafter Welligkeitsrealisierungen in Abhängigkeit des Skalierungsparameters z_{scale}. 116
6.15. Vergleich des Einflusses unterschiedlicher Propagation des Zufallsfelds zur äußeren Lage des Laminats. 117
6.16. Darstellung exemplarischer ZF-Realisierungen für unterschiedliche Anisotropiewinkel α 118
6.17. Einfluss des Anisotropiewinkels des ZF in Grad auf den KDF 119
6.18. Einfluss der Modellgröße auf den mittleren KDF für verschiedene Versagenskriterien 120
6.19. Unterschiedliche Welligkeitsgeometrien mit und ohne Berücksichtigung der Randbedingungen des ZF. 120
6.20. Einfluss der Modellgröße auf den mittleren KDF für verschiedene Versagenskriterien ohne Fixierung der Randknoten des ZF 121
6.21. Histogramm der Amplitudenverteilung 124
6.22. Darstellung der Abhängigkeit von Amplitudenverhältnis und ermittteltem KDF für ein unidirektionales Laminat 125
6.23. Darstellung der Abhängigkeit von Amplitudenverhältnis und ermitteltem KDF für ein quasi-isotropes Laminat 125
6.24. Darstellung der Abhängigkeit von Amplitudenverhältnis und resultierendem KDF das Laminat Lam_{FH}. 126
6.25. Einfluss des maximalen Welligkeitsgradienten in Belastungsrichtung auf den resultierenden KDF für ein unidirektionales Laminat. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet. 127
6.26. Einfluss des maximalen Welligkeitsgradienten in Belastungsrichtung auf den resultierenden KDF für ein quasi-isotropes Laminat. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet. 128
6.27. Einfluss des maximalen Welligkeitsgradienten in Belastungsrichtung auf den resultierenden KDF für das Laminat Lam_{FH}. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet. 128
6.28. Allgemeine Definition des Krümmungskreises an einem beliebigen Punkt einer Kurve. 129
6.29. Darstellung der Abhängigkeit von maximalem Krümmungsradius in Belastungsrichtung und ermitteltem KDF für ein unidirektionales Laminat 130

6.30. Darstellung der Abhängigkeit von maximalem Krümmungsradius in Belastungsrichtung und ermitteltem KDF für ein quasi-isotropes Laminat 130
6.31. Darstellung der Abhängigkeit von maximalem Krümmungsradius in Belastungsrichtung und ermitteltem KDF für das Laminat Lam_{FH} 131
6.32. Vergleich zweier exemplarischer FE-Modelle der Vergleichsstudie mit ähnlichen maximalen Welligkeitsgradienten in Abhängigkeit der gewählten Geometriebeschreibung. Zur besseren Defektdarstellung sind die Einzellagen oberhalb der Laminatmittelfläche nicht dargestellt. 135
6.33. Gegenüberstellung der Verteilung der KDF zwischen stochastischer(als transparente Kreise dargestellt) und deterministischer(Dreieck,Quadrat,Raute) Welligkeit für die gewählten Versagenskriterien in Abhängigkeit des maximalen Gradienten. 136
6.34. Verwendete Probenkörper ausgewählter Druckversuche in der Literatur. . . . 137

A.1. Einfluss einer elementweisen Anpassung der Materialgrößen auf den resultierenden KDF 150
A.2. Relative Streuung des gemittelten KDF in Abhängigkeit des Amplitudenverhältnisses 151
A.3. Relative Streuung des gemittelten KDF in Abhängigkeit des maximalen Gradienten 152
A.4. Relative Streuung des gemittelten KDF in Abhängigkeit des maximalen Krümmungsradius 153

Tabellenverzeichnis

5.1. Gegenüberstellung von Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors und den zugeordneten sechsdimensionalen Vektoren. 59
5.2. Zuordnung der Komponenten des Elastizitätstensors zu den korrespondierenden Einträgen der Elastizitätsmatrix. 60
5.3. Festigkeitskennwerte R_{ij} und entsprechenden Belastungsart σ_k 66
5.4. Aufgebrachte Randbedingungen und nominelle Werte für ausgewählte Knotensets und Lasten für einen einachsigen Zug- und Drucklastfall. 80

6.1. Steifigkeits- and Festigkeitsgrößen des ausgewählten IM7/8551-7 unidirektional (UD) Ausgangsmaterials 100
6.2. Berechnungszeit für Einzelschritte im Bewertungsprozess 105
6.3. Mittelwert und Standardabweichung einzelner KDF für die verschiedenen Versagenskriterien in Abhängigkeit der Modellgröße 119
6.4. Vergleich der normierten Variationskoeffizienten pro Metriken für die gewählten Laminate und Versagenskriterien 132
6.5. Vergleich der KDF für das UD-Laminat zwischen stochastischer Analyse und Literatur 138
6.6. Vergleich der KDF für das QI-Laminat zwischen stochastischer Analyse und Literatur 138

A.1. Materialkennwerte für Faser IM7 147
A.2. Materialkennwerte für Matrix 8551-7 147

Nomenklatur

Symbolverzeichnis

X	Zufallsvariable
$E[X]$	Erwartungswert
σ^2	Varianz
Σ	Kovarianzmatrix
$\mathbf{x}, \mathbf{x}'$	Punkte in einem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{h}$	Vektor zwischen zwei Punkten
$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	Mittelwertfunktion
$Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	Kovarianzfunktion
$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	Korrelationsfunktion
$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$	Distanzfunktion
$\boldsymbol{\omega}$	Vektor der Korrelationslängen
K_ν	Besselfunktion
T_{aff}	Affine Transformationsmatrix
Γ	Gamma-Funktion
R_{Cov}	Korrelationsmatrix
ξ	Vektor unkorrelierter, standardnormal-verteilter Zufallsvariablen
$H(\mathbf{x}, \omega)$	Zufallsfeld zweiter Ordnung
λ_i	Eigenwerte der Fredholm-Gleichung
ψ_i	Eigenfunktionen der Fredholm-Gleichung
γ	Variogramm
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$	Parameter des LCVT Verfahrens
$\boldsymbol{\sigma}$	Vektor der mechanischen Spannungen
$\boldsymbol{\epsilon}$	Vektor der mechanischen Dehnungen
C	Elastizitätstensor
E_m, E_f	Elastizitätsmoduln der Faser und Matrix
G_{12}, G_{13}, G_{23}	Schubmoduln eines Laminats
$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	Querkontraktionszahlen eines Laminats
ϑ_k, φ_k	Rotationswinkel der Lagenwinkel in der Laminatebene

V	Volumen
V_f, V_m	Faser- und Matrixvolumengehalt
e_1, e_2, e_3	Basisvektoren eines Koordinatensystems
$T^{\sigma,\epsilon}$	Matrizen zur Transformationen von Spannungen und Dehnungen
$\mathbf{R}$	Vektor der Materialfestigkeiten
M	Materialanstrengung
z_{rel}	Relative Position im Laminat
a_{rel}	Relative Welligkeitsamplitude im Vergleich zur Materialdicke
ϕ_{wave}	Welligkeitswinkel
Δ_{KDF}	Relative Abweichung des KDF
r	Krümmungsradius
Δ_{exp}	Relative Abweichung des zwischen im Vergleich zwischen Simulation und Experiment

Abkürzungen

CARA	Cluster for Advanced Research in Aerospace
CFK	Carbonfaser verstärkter Kunststoff
CLT	Classical Laminate Theory
CVT	Centroidal Voronoi Tesselation
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
DIC	Digital Image Correlation
DOE	Design of Experiments
FEM	Finite-Elemente-Methode
FFD	Full Factorial Design
FI	Failure Index
GFK	Glasfaserverstärkter Kunststoff
GP	Gauß-Prozess
HPC	High-Performance Computing
IP	In-Plane

KLE	Karhunen-Loève-Expansion
KDF	Knock-down Factor
LCVT	Latinized Centroidal Voronoi Tesselation
LHS	Latin Hypercube Sampling
MSA	Multi-Skalen Analyse
MFMC	Multi-Fidelity Monte Carlo
MLMC	Multi-Level Monte Carlo
MV	multivariate Verteilungen
OoP	Out-of-Plane
QI	Quasi-isotrop
RTM	Resin-Transfer Moulding
SVD	Singular Value Decomposition
SP	Stochastischer Prozess
UD	unidirektional
VK	Variationskoeffizient
ZF	Zufallsfeld

1. Einleitung

1.1. Potential von Leichtbaustrukturen

Nach Schätzungen der Vereinten Nationen wird die Weltbevölkerung von derzeit 8 Milliarden Menschen bis Mitte des Jahrhunderts auf über 10 Milliarden ansteigen [5]. Während die Bevölkerungszahl in den wichtigsten Industrienationen stagniert bzw. bereits rückläufig ist, steigt der Anteil der Bevölkerung in den Entwicklungs- und Schwellenländern weiterhin. Damit verbunden steigt der Ressourcenbedarf durch den Wunsch nach Teilhabe am Wohlstand stetig an, was insbesondere den Luftfahrtbereich vor enorme Herausforderungen stellt. Der durch den Menschen verursachte Klimawandel, der durch den Ausstoß von klimaschädlichem CO_2 maßgeblich beeinflusst wird, stellt dabei den zentralen Hauptaspekt dar. Nach Berechnungen des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) beträgt der Anteil des globalen Luftverkehrs an der Klimaerwärmung etwa 3,5 Prozent, des gesamten Verkehrsbereichs sogar 21 Prozent [6]. Die Reduktion von Treibhausgasen wie CO_2 ist eine der wesentlichen Voraussetzungen zur Erfüllung der Klimaziele von Paris, wobei der Einsatz von effizienten Flugzeugen das wichtigste Instrument zur Erreichung dieser Ziele darstellt.

Die Entwicklung moderner Flugzeugstrukturen ist seit Beginn der zivilen Luftfahrt von wirtschaftlichen Randbedingungen geprägt. Die Reduktion des Treibstoffverbrauchs im Betrieb ist dabei der zentrale Aspekt bei der Entwurfs- und Entwicklungsplanung. Dabei kommen last- und gewichtsoptimierte Strukturen unter Verwendung von Methoden des modernen Leichtbaus zum Einsatz. Neben spezifischen Bauweisen spielt auch die Materialauswahl eine wichtige Rolle, da dies wesentliche Auswirkungen auf die gesamte Flugzeugentwicklung hat. Verbundwerkstoffe, insbesondere carbonfaserverstärkte Kunststoffe (CFK), werden aufgrund ihrer im Vergleich zu alternativen Materialien wie Metall überlegenen mechanischen Eigenschaften vermehrt eingesetzt. Während Flugzeuge zu Beginn der modernen Luftfahrt hauptsächlich in Metallbauweise gefertigt wurden, steigt der Anteil an Komponenten aus CFK-Materialien am Gesamtflugzeug kontinuierlich an und verdrängt konventionelle Ansätze. Aktuelle Flugzeuge wie der Airbus A350 und die Boeing 787 Dreamliner bestehen bereits zu 50 Prozent aus CFK-Materialien (siehe Abbildung 1.1) [1].

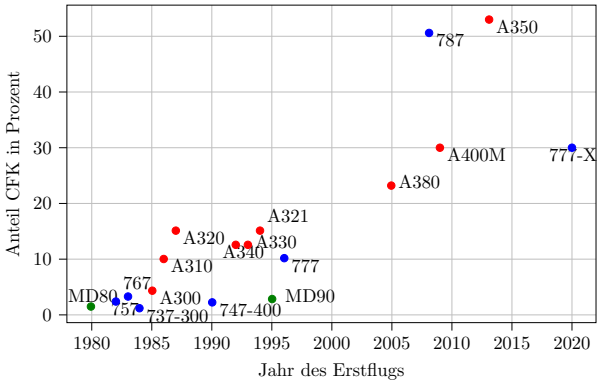


Abbildung 1.1.: Anteil an Faserverbundwerkstoffen am Strukturgewicht verschiedener Flugzeugtypen, rot) Airbus, blau) Boeing, grün) McDonnell Douglas [1]

1.2. Motivation

Aktuelle Entwicklungsprogramme moderner Flugzeugtypen stellen einen immensen betriebswirtschaftlichen und energetischen Ressourcenbedarf dar und beanspruchen, je nach Flugzeugtyp von der Kundenbeauftragung, bis zur Auslieferung eine Zeitspanne von etwa 8-10 Jahren. Die Programme durchlaufen dabei die typischen Phasen des Entwurfs, der Fertigung sowie der Zertifizierung und Indienststellung. Neben der Entwurfsaufgabe eines effizienten Flugzeugs mit dem Ziel hoher Verkaufszahlen für den Hersteller stellen die einzelnen Entwicklungsphasen hohe Anforderungen an die Qualität der einzelnen Baugruppen des Gesamtflugzeuges, um die Sicherheit der Passagiere während des Flugbetriebs gewährleisten zu können. Um die Integrität der Flugzeugstruktur sicherstellen zu können, sind spezifische Aspekte und Randbedingungen entlang des Gesamtprozesses zu berücksichtigen [7].

Materialien aus CFK besitzen im Vergleich zu metallischen Werkstoffen aufgrund ihrer hohen spezifischen Festigkeit (Verhältnis von Festigkeit zu Materialdichte) vorteilhafte Eigenschaften. Trotz des immensen Potenzials bringen Strukturen aus CFK-Material durch eine höhere Komplexität in der Bauteilentwicklung und -herstellung einige Herausforderungen mit sich. So können innerhalb der Fertigung durch verschiedene Störeinflüsse Defekte im Material auftreten, die jeweils von der Art der verwendeten Fertigungstechnologie abhängig sind [8]. Das Vorhandensein von Imperfektionen im Material begünstigt im Folgenden die Entstehung von Rissen und führt schlussendlich oft zu einer Verschlechterung der Tragfähigkeit der Struktur.

Aufgrund unzureichender Erfahrung im Umgang mit CFK-Materialien sind Hersteller von Luftfahrtstrukturen infolgedessen gezwungen, auf konservative Konstruktionen bei gleichzeitig

minimaler Fehlerquote zu setzen, um die Qualitäts- und Sicherheitsanforderungen zu erfüllen. Dies geschieht z.B. durch eine intensive Nachbehandlung und Qualitätsprüfung im Rahmen der Fertigung, die jedoch zeitaufwendig ist. Je nach Fertigungsverfahren kann der Prozessschritt der Nachkontrolle auf der zeitlichen Skala die zuvor benötigte Dauer zur Fertigung des Bauteils überschreiten [8]. Das Wissen über den Einfluss von Materialfehlern auf die strukturelle Integrität von Leichtbaukomponenten auf Basis von CFK-Materialien ist daher essenziell für die Entwicklung von Strukturentwürfen zugunsten einer Gesamtkostenreduktion und einer erhöhten Lebensdauer der Komponenten. Durch stetige Fortschritte moderner Rechentechnik werden zur Beurteilung von Materialfehlern bzw. allgemeinen Störeinflüssen auch vermehrt numerische Simulationsmethoden herangezogen. Diese können wesentlich dazu beitragen, kostenintensive Struktur- bzw. Materialtests zu reduzieren (siehe Abbildung 1.2).

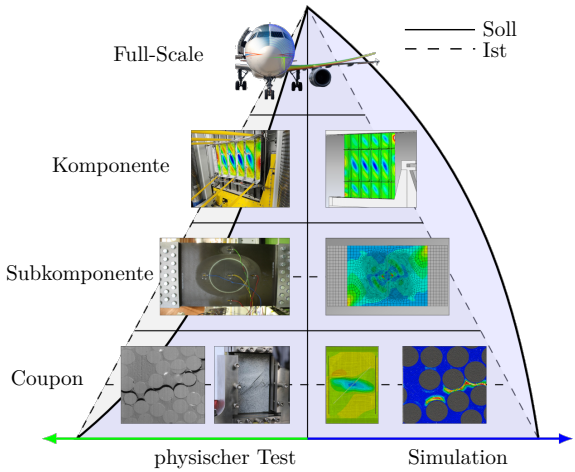


Abbildung 1.2.: Gegenüberstellung physischer und simulationsbasierter Tests von Flugzeugstrukturen auf unterschiedlichen Skalen anhand eines 'Building-Block' Ansatzes [2].

Die Verfügbarkeit verlässlicher Berechnungsmethoden ist dabei ein integraler Bestandteil zur Schaffung zukünftiger virtueller Zulassungsprozesse, um Entwicklungszeiten signifikant reduzieren zu können. Zu den am häufigsten auftretenden Defekten zählen Faserwelligkeiten im CFK-Material. Ihre physikalischen Ausprägungen und Einfluss auf das allgemeine Strukturverhalten sind zum gegenwärtigen Zeitpunkt aufgrund diverser, teilweise unbekannter Einflussgrößen nicht ausreichend quantifiziert. Die vorliegende Arbeit soll mithilfe nicht-deterministischer und numerischer Simulationsmethoden einen wichtigen Beitrag zur Bewertung leisten. Einzelne Bestandteile, welche in den folgenden Kapiteln näher erläutert werden, wurden zudem bereits in [9] veröffentlicht.

2. Stand der Forschung

Im folgenden Kapitel wird eine Übersicht zu fertigungsinduzierten Defekten beim Einsatz von Faserverbundwerkstoffen gegeben und auswählte Typen kurz beleuchtet. Im Weiteren sollen Out-of-Plane Welligkeitsdefekte als Fokus der Arbeit näher beleuchtet werden sowie eine erste Betrachtung geometrisch verteilter Aspekte von Fertigungsdefekten anhand von Literaturrecherchen durchgeführt werden.

2.1. Übersicht zu fertigungsinduzierten Defekten in Faserverbundstrukturen

CFK-Materialien bestehen, entsprechend dem Namen, aus einem Verbund aus Fasern aus Kohlenstoff, die in einer Kunststoffmatrix (zumeist Epoxidharz) eingebettet sind (siehe Abbildung 2.1).

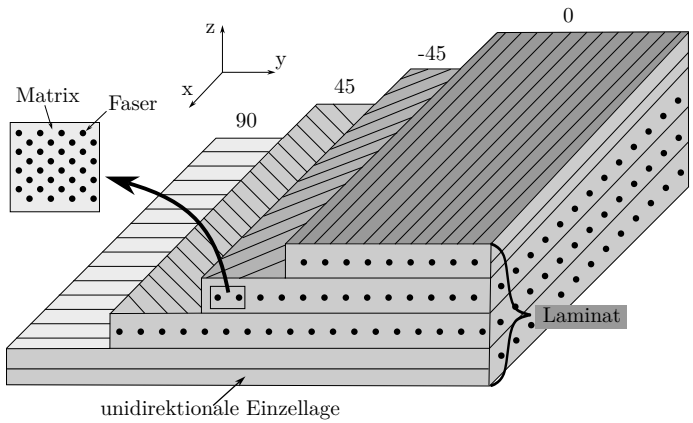


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung eines Faser-Matrix-Verbundwerkstoffs bestehend aus Einzellagen unterschiedlicher Orientierung.

Beide Komponenten besitzen ein jeweils spezifisches und raumrichtungsabhängiges Materialverhalten. Die Eigenschaften des Verbunds werden dabei wesentlich vom Fasermaterial

bestimmt. Um eine möglichst lastgerechte Auslegung von Strukturen aus CFK zu erreichen, werden einzelne Lagen des Faser-Matrix Verbunds in unterschiedlicher Orientierung aufeinander verlegt. Die Anordnung der Einzellagen wird auch als *Laminat* bezeichnet.

Die Fertigung von Leichtbaustrukturen aus CFK-Materialien erfordert den Einsatz verschiedenster Technologien zur Herstellung von Subkomponenten, welche hinsichtlich spezifischer Randbedingungen (u.a. Qualitätsanforderungen und Bauteilgeometrien) ausgewählt werden müssen. Damit verbunden ist eine Vielzahl von Defekten, welche sich fertigungsabhängig durch Störeinflüsse im Laminat ausbilden können. Häufig auftretende Fehler sind folgende:

- Poreneinschlüsse
- Verunreinigungen durch Fremdkörper
- Lücken/Überlappungen
- Faserwelligkeiten
- Ablösung von Einzellagen (Delamination)

Die genannten Fehler stellen zunächst nur einen Auszug der Vielzahl möglicher Materialdefekte dar und bedingen sich teilweise gegenseitig je nach Fertigungsverfahren. Im Weiteren werden ausgewählte Fehler, die am häufigsten auftreten, kurz vorgestellt.

Poreneinschlüsse

Poreneinschlüsse, oft auch Porositäten genannt, sind typische Fehler, welche häufig bei der Fertigung auf Basis von Infusionsverfahren entstehen können. Charakteristisch für das Verfahren ist das Einbringen von Matrix-Material, bestehend aus flüssigem Harz (z.B. Epoxidharz), in ein „Preform"-Bauteil aus Fasermaterial, welches in ein Formwerkzeug eingebettet ist. Die Finalisierung des Bauteils erfolgt durch Erzeugung eines Vakuums und anschließender Aushärtung in einem Autoklav. Die Hauptursachen für die Ausbildung von Poren im CFK liegen dabei zum einen in Fehlern, welche durch Undichtigkeiten der Vakuumfolie im Schritt der Vakuumerzeugung liegen und zum Eindringen von Luft von außen in das Bauteil führen können [10]. Demgegenüber können Einschlüsse im Matrix-Material durch Gasentwicklung aufgrund von chemischen Reaktionen während des Aushärtevorgangs entstehen. Zusätzlich zu den unterschiedlichen physikalischen Ursachen lässt sich zudem hinsichtlich geometrischer Skalen eine Unterteilung von Einschlüssen im CFK-Material in *Mikro-, Meso-* und *Makro*-Poren durchführen. Abbildung 2.2 veranschaulicht dies exemplarisch. Die verschiedenen Probengrößen führen im Weiteren zu spezifischen Veränderungen des Materialverhaltens und der Tragfähigkeit [11, 12].

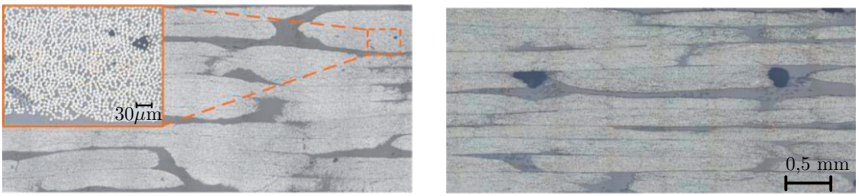


Abbildung 2.2.: Mikroskopische Aufnahmen von Poren und Einschlüssen in Laminaten [10].

Lücken/Überlappungen

Lücken und Überlappungen zählen zu den am häufigsten auftretenden Defekten bei der Fertigung mittels Automated Fiber Placement (AFP) bzw. Automated Tape Laying (ATL) Verfahren [8]. Mithilfe von AFP/ATL-Verfahren lassen sich großflächige Bauteile im Gegensatz zu manuellen Fertigungsmethoden durch einen höheren Grad an Automatisierung kostengünstiger fertigen. Das Grundprinzip beider Verfahren ist ein automatischer Faserablageprozess, bei dem einzelne Bänder, sogenannte "*tows*", aus trockenem oder vorimprägniertem Fasermaterial in einem vorprogrammierten Prozess mittels Roboter auf ein Formwerkzeug abgelegt werden. Trotz verschiedener Systemkomponenten, welche eine kontinuierliche Verarbeitbarkeit der Bänder und somit eine hohe Fertigungsqualität gewährleisten sollen, unterliegen beide Verfahren einer Vielzahl von Fehlerquellen. Lücken und Überlappungen können hierbei bspw. durch Schwankungen der Tow-Breite entstehen. Eine Übersicht zu verschiedenen Fehlerarten wird in [8] gegeben. Abbildung 2.3 veranschaulicht beispielhaft Lücken und Überlappungen aufgrund von Fehlern in der AFP/ATL Fertigung.

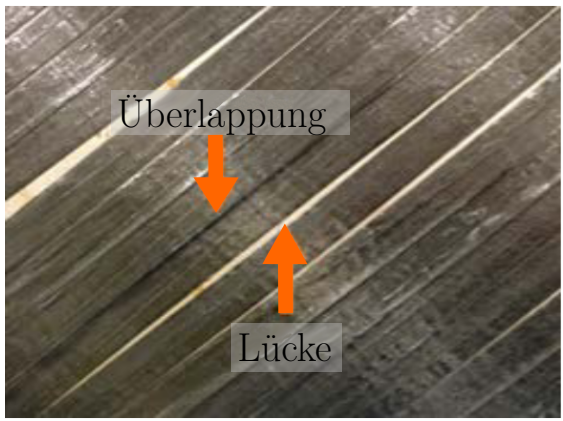


Abbildung 2.3.: Auftreten von Lücken und Überlappungen bei der Fertigung von CFK-Strukturen mittels AFP-Technologie [13]

Welligkeiten

Die Bezeichnung Welligkeit bzw. Ondulation (engl. *Waviness*, *Ondulation*) beschreibt die Abweichung der Faserorientierung im Laminat in einem lokalen Bereich des Materials ausgehend von seiner nominellen Faserausrichtung. Es wird zwischen *In-Plane* (IP) und *Out-of-Plane* (OoP) Welligkeit unterschieden. Erstere beschreibt die Abweichung in der Lagenebene, letztere die Abweichung in Laminatdickenrichtung (siehe Abbildung 2.4). Zusätzlich zur fertigungsinduzierten Entstehung können IP-Ondulationen in der Lagenebene auch durch gezielte Krümmung des Faserverlaufs (engl. *Fiber Steering*) mit dem Ziel der lastoptimierten Steifigkeitsanpassung eines CFK-Bauteils erreicht werden. Formal handelt es sich zunächst nicht um einen Materialdefekt. Infolge der gesteuerten Krümmung der Einzellagen können jedoch unerwünschte Welligkeiten in OoP-Richtung auftreten, die die Qualität des Bauteils somit nennenswert beeinflussen können.

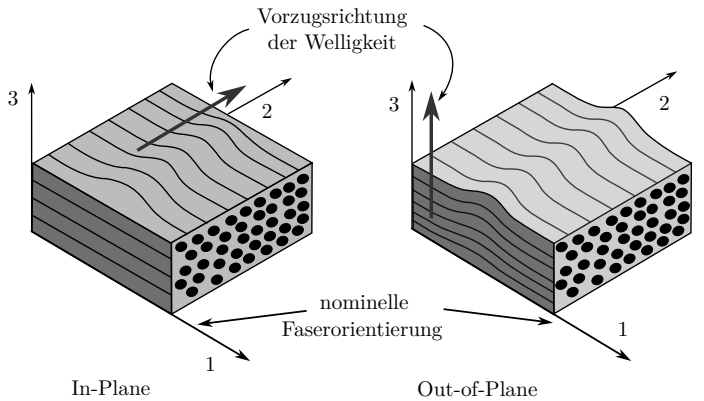


Abbildung 2.4.: In-Plane und Out-of-Plane Einteilung von Faserwelligkeiten

Das unbeabsichtigte Auftreten von Welligkeiten lässt sich anhand verschiedener Ursachen und Faktoren gruppieren. Diese sind wesentlich vom jeweils eingesetzten Fertigungsverfahren und dem zu fertigenden Bauteil abhängig. Neben technologischen Aspekten ist zudem die Materialauswahl der Faser- und Matrixkomponente des CFK-Laminats entscheidend für auftretende Welligkeitsdefekte während der Fertigung [14]. Ausgewählte Ursachen für die Entstehung von Faserondulationen lassen sich wie folgt beschreiben:

- Ungleichmäßiger Druck beim Aushärten: Während des Aushärtens des Bauteils kann es einer ungleichmäßigen Druckverteilung im Laminat führen, welches die Ausbildung von Welligkeiten begünstigt.
- Unzureichende Qualität der Werkzeugoberfläche: Eine unebene oder beschädigte Oberfläche des Werkzeugs kann dazu führen, dass das Laminat nicht gleichmäßig auf dem

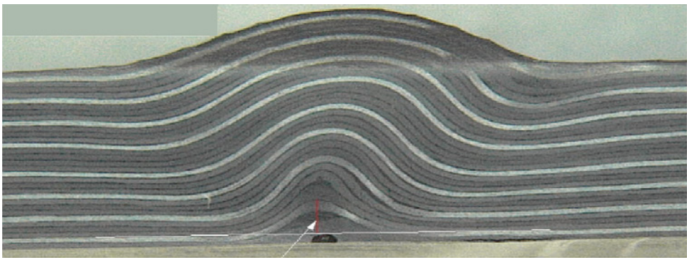


Abbildung 2.5.: Out-of-Plane Welligkeit [17]

Werkzeug aufliegt.

- Luftblasen: Eingeschlossene Luftblasen im Laminat können dazu führen, dass das Material an bestimmten Stellen nicht gleichmäßig anliegt. Als Folge können sich als sekundärer Defekt Welligkeiten entsprechend ausbilden.
- Temperatur- oder Feuchtigkeitsschwankungen: Schwankungen in Temperatur oder Luftfeuchtigkeit während des Fertigungsprozesses können die Laminatqualität beeinflussen und zu ungleichmäßiger Aushärtung und Wellenbildung führen.

Je nach Fertigungsverfahren sind Interaktionen verschiedener Fehlereinflüssen möglich und führen zu einer Vielzahl von Welligkeitsausprägungen. Eine sorgfältige Prozessplanung und Steuerung ist eine Grundvoraussetzung zur Gewährleistung einer hohen Bauteilqualität und Fehlerminimierung mit dem Ziel einer effizienten Hochratenproduktion insbesondere von Luftfahrtstrukturen.

2.2. Out-of-Plane Welligkeiten

Sowohl IP als auch OoP-Welligkeiten bewirken eine lokale, effektive Veränderung der nominellen Laminateigenschaften hinsichtlich Steifigkeit und Festigkeit, die in der Regel mit einer Reduktion der Tragfähigkeiten des Bauteils einhergeht. Bei der Betrachtung der Auswirkungen auf die mechanischen Eigenschaften für beide Defekttypen lassen sich zunächst aus qualitativen Gesichtspunkten ähnliche Ergebnisse feststellen [15]. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die Auswirkungen von OoP-Defekten unter Berücksichtigung verschiedener Aspekte näher untersucht werden. Dieser Defekttyp trifft im Vergleich zu Abweichungen in der Lagenebene häufiger auf [16] und ist in Abbildung 2.5 exemplarisch an einem real gefertigten Bauteil dargestellt.

Ursachen

OoP-Welligkeiten können bei verschiedenen Fertigungsverfahren durch äußere Störeinflüsse entstehen. Bei AFP/ATL-Verfahren bspw. begünstigen gekrümmte Bauteiloberflächen die Ausbildung von Welligkeiten im Material. Dies liegt in den unterschiedlichen Pfadlängen an den Rändern der Tows begründet, die auf dem Bauteil abgelegt werden. Bei der Ablage auf der Werkzeugoberfläche erfahren die Ränder der einzelnen Tows abhängig vom lokalen Krümmungsradius entlang des Ablagepfades auf der Oberfläche eine erzwungene Biegung, um der Werkzeuggeometrie zu folgen. Der innere Rand erfährt hierbei eine Druckbeanspruchung (siehe Abbildung 2.6), die zum Ausbeulen des Randes führt. Demgegenüber ist der äußere Bahnrand einer Zugbelastung ausgesetzt.

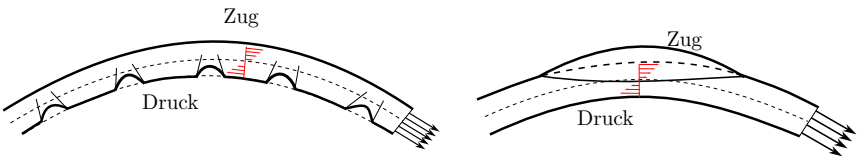


Abbildung 2.6.: Unterschiedliche Ausbildung einer Welligkeit infolge der Towablage auf einer gekrümmten Oberfläche, links) lokales Ausbeulen aufgrund Druckbelastung, rechts) Ausklappen des Tow durch Zugbeanspruchung [18]

Aufgrund der hohen Zugsteifigkeit der einzelnen Fasern im Tow kann dies zu einem Ausweichen des Materials führen und folglich das Tow lokal aus der Werkzeugebene herausklappt (engl. *Pull up*). Die Entstehung beider charakteristischer Defektausbildungen ist dabei wesentlich von der Verformbarkeit des Materials abhängig. Weitere Einflussfaktoren sind geometrische Größen wie der Krümmungsradius der Oberfläche und der Towbreite bzw. Dicke des Tows. Obwohl eine Minderung der Towbreite mit einem verringerten Risiko der Bildung von Wellen im Material einhergeht, entsteht jedoch gleichzeitig ein Zielkonflikt durch einen erhöhten zeitlichen Ablageaufwand und somit eine geminderte Ablagerate.

Weitere Fertigungsverfahren, bei der OoP-Faserwelligkeiten einen typischen Materialdefekt darstellen, sind Vakuuminfusions- bzw. Vakuumumformverfahren [19, 20]. Ein bekanntes Verfahren ist das sogenannte *Resin Transfer Molding*, kurz RTM. Ist bei der Fertigung die Geschwindigkeit der Harzzufuhr zu hoch bzw. werden die Fasern in der Form nur locker gehalten, können die Fasern durch den Fluss des Harzes verformt werden. Insbesondere bei der Herstellung unter sehr hohem Druck kann das injizierte Harz die Fasern lokal "auswaschen"(engl. *fiber wash out*). Abbildung 2.7 stellt diesen Aspekt grafisch dar. Das Auswaschen der Fasern stellt eine primäre Fehlerquelle für Welligkeiten dar. Zusätzlich dazu äußern sich OoP-Welligkeiten als sekundärer Fehler durch Lufteinschlüsse im Material (siehe vorheriger Abschnitt "Welligkeiten"), die ein Auslenken der Fasern bewirken.

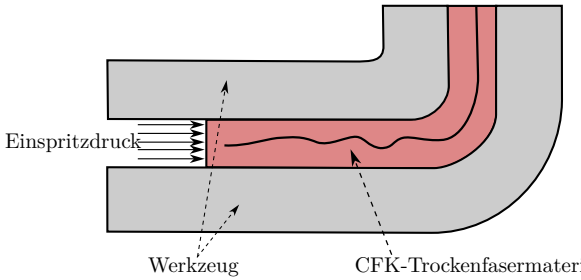


Abbildung 2.7.: Vereinfachte Darstellung des Auftretens von Welligkeiten bei Durchführung von Infusionsverfahren

Detektion und Klassifikation

Um das resultierende Materialverhalten sowohl numerisch als auch experimentell genau erfassen zu können, sind verschiedene Prüfverfahren notwendig, um die genaue Defektgeometrie erfassen zu können. Zentrales Werkzeug hierfür sind zerstörungsfreie Messverfahren zur korrekten Erkennung der lokalen Faserauslenkung. Zu den am häufigsten eingesetzten Verfahren zählen:

- Ultraschallmessung [21, 22]
- Wirbelstromprüfung [23, 24]
- Computertomografie [25–27]

Die Verfahren unterscheiden sich zum einen wesentlich in Bezug auf die zugrundeliegenden physikalischen Prinzipien (mechanisch, elektromagnetisch) und besitzen, je nach Methode, eine spezifische Auflösungsgrenze. Demgegenüber ist der Einsatz nicht zuletzt in Abhängigkeit der Messkomplexität und verbundenen hohen Kosten auf einzelne ausgewählte Material-proben und Bauteilen bestimmter Länge beschränkt. Dies gilt insbesondere für eine konsistente experimentelle Untersuchung der Defektproblematik, die neben der Geometrieerfassung auch eine genaue Erfassung der Schadensvorgänge bei entsprechender Beanspruchung beinhaltet. Letztere werden u.a. mittels Methoden der digitale Bildkorrelation (engl. *Digital Image Correlation*, DIC) erfasst [28].

Aufgrund der vielfältigen fertigungsbedingten Entstehungsursachen von Wellenbildungen in CFK-Laminaten ist es schwierig, ein generisches, geometrisch motiviertes Klassifikationsschemas zu identifizieren und darauf aufbauend problemspezifisch Schlussfolgerungen in Bezug auf resultierendes Materialverhalten zu ziehen. Ein erster Lösungsansatz wird in [16] anhand eines systematischen Überblicks über verschiedene Aspekte der OoP-Faserwelligkeit gegeben und erste Klassifizierungen typischer OoP-Welligkeitsfragestellungen vorgeschlagen. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit zeigt die Abbildung 2.8 einige konzeptionelle Klassifizierungen der

Welligkeit, die zudem eine Grundlage für ausgewählte Untersuchungen und Veröffentlichungen in der Literatur darstellen.

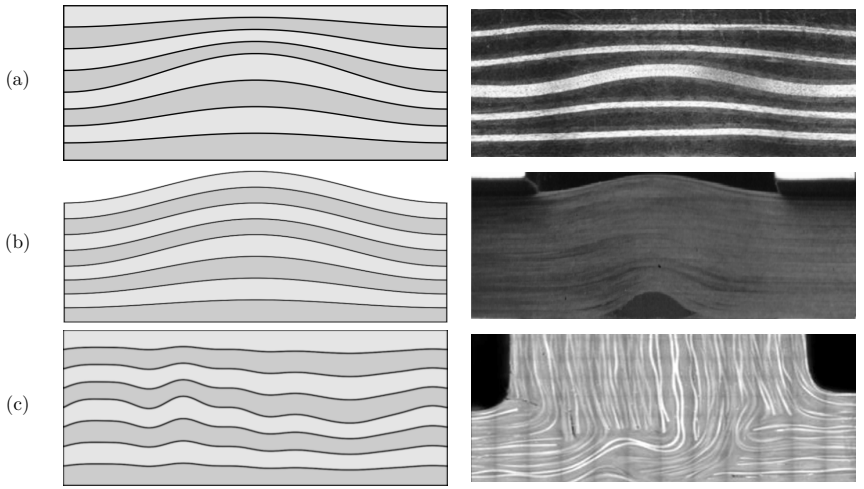


Abbildung 2.8.: Beispiele verschiedener Typen von Out-of-Plane Welligkeiten in Faserverbundmaterialien: **a)** Im Material eingebettete sinus-förmige Welligkeit [29], **b)** Von außen sichtbare Auswölbung von CFK-Material [30], **c)** Räumlich, stochastisch ausgeprägte Welligkeit [31]

Numerische und experimentelle Bewertung

Die phänomenologische Analyse von Welligkeiten in Faserverbundwerkstoffen im Hinblick auf die genaue Bestimmung der resultierenden Materialeigenschaften besitzt eine lange Historie und ist, selbst für einfache Testfälle und Randbedingungen, weiterhin Gegenstand aktueller Forschung. Der Schwerpunkt früher Forschungsarbeiten lag auf einfachen analytischen bzw. semianalytischen Modellen zur Beschreibung der komplexen Wechselwirkung zwischen Fasern und Matrix im Material sowie experimenteller Validierung für Druck- und Zugproben [32–35]. Bogetti [36] schlägt ein analytisches Modell zur Berechnung der Steifigkeiten und Festigkeiten eines Kreuzlaminates vor. Der zweidimensionale Ansatz basiert auf der klassischen Laminattheorie (CLT) [37] unter Verwendung einer repräsentativen Einheitszelle. Die OoP-Parametrisierung wird funktional über eine Sinus-Halbwelle beschrieben. Ein ähnlicher Ansatz wird in [33, 38, 39] verwendet und für unidirektionale Laminate (UD) angewandt. Die Beschreibung der Welligkeit im Laminat ist dabei identisch zu [36]. Ungeachtet des verwendeten Referenzlaminats und Testaufbaus kommen die Autoren zu ähnlichen Ergebnissen. Sowohl Steifigkeiten als auch Restfestigkeiten werden maßgeblich vom Verhältnis aus Amplitude und

Wellenlänge der Ondulation beeinflusst und deutlich reduziert. Aufgrund der vereinfachten, analytischen Modellierung und den getroffenen Annahmen lassen sich die erzielten Ergebnisse im Hinblick auf das komplexe Materialverhalten für dreidimensionale Strukturen aber nur schwer übertragen.

Mit dem Aufkommen und der vielseitigen Anwendung von Finite-Elemente-Methoden (FEM) zur simulationsgestützen Bewertung konnten umfangreichere Untersuchung an dreidimensionalen Laminatmodellen durchgeführt werden[40–46]. Khattab [43] schlägt eine auf der CLT basierende 3D-Berechnungsmethode zur Bestimmung von Materialkennwerte auf Lagen und Laminatebene unter dem Einfluss einer OoP-Welligkeit vor. Diese wird in [43] zudem einem FEM-basierter Ansatz gegenübergestellt und hinsichtlich der Ergebnisgüte verglichen. Für UD-Laminate zeigte der Vergleich eine gute Übereinstimmung beider Ansätze bei der Berechnung der Steifigkeitsänderungen infolge der Welligkeit. Im Falle von unterschiedlichen Lagenorientierung im Laminat zeigten sich jedoch größere Abweichung zwischen beiden Ansätzen. Diese waren zudem abhängig vom Verhältnis von Amplitude und Wellenlänge, bei dem größere Auslenkungen im Laminat zu größeren Abweichungen zwischen den Ergebnissen führten. Die Bestimmung von Festigkeitsgrößen erfolgt in [43] ausschließlich über einen FEM-Ansatz. Dazu wird ein 3D-Versagenskriterium nach Hashin [47] zur Bestimmung der Schadensinitiierung verwendet und mit einem spezifischem Schadensmodell zur Schadensfortschrittsberechnung kombiniert. Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen wurden in einem weiteren Schritt anhand experimenteller Versuche validiert. Einen ähnlichen kombinierten Ansatz unter Nutzung numerischer Berechnungen und experimenteller Validierung verfolgt Thor [40] und Mukhopadhyay [48].

Inzwischen wurden weitere methodische Ansätze mittels netzfreier Methoden ergänzend zur FEM-Methodik entwickelt, um den Einfluss von Defekten wie OoP-Welligkeiten in CFK-Laminaten auf die Materialschädigung und Schadensausbreitung genauer abschätzen zu können. Ein neuer Ansatz stellt die Peridynamik dar [49, 50]. Der wesentliche Vorteil der Methode besteht in der Fähigkeit, Diskontinuitäten (z.B. in Form von Rissen im Material) im Vergleich zu den kontinuumsmechanischen Annahmen der FEM genauer abbilden zu können. Den Potentialen zur detaillierten Bestimmung steht allerdings noch ein sehr hoher Berechnungsaufwand gegenüber, was einen praktischen Einsatz zur Simulation komplexer Bauteile aus CFK selbst auf verfügbaren, modernen Hochleistungsrechner derzeit noch erschwert. Mit diesem Punkt einher geht ferner eine eingeschränkte Untersuchung des Einflusses verschiedener Störgrößen im Laminat mittels stochastischer Analysen, welche die Berechnungskomplexität zusätzlich erhöhen.

Neben der Sensitivitätsanalyse von Defekten auf die Laminateigenschaft für repräsentative Zug- und Druckbelastungen müssen die Auswirkungen von Welligkeiten im Material zudem durch kombinierte Materialschädigung und Belastung, z.B. durch gezieltes Einbringen von Vorschädigungen infolge von äußeren Schlag- bzw. Stoßbeanspruchungen [51, 52], untersucht

werden. Al-Kathemi [52, 53] untersucht in diesem Zusammenhang Interaktionseffekte zwischen Welligkeits- und Schlagschäden bei der Bewertung von Restfestigkeiten im Rahmen experimenteller Druckversuche.

Obwohl numerische Methoden zunehmend in der Lage sind, das komplexe Laminatverhalten durch Materialdefekte in Bezug auf Festigkeit und Steifigkeit mit verbesserter Genauigkeit zu erfassen, ist ein umfassender Einsatz in der Praxis immer noch stets auf real durchgeführte Validierungsexperimente angewiesen [35, 52, 54, 55]. Eine wesentliche Herausforderung hierbei ist die Sicherstellung einer hohen Wiederholgenauigkeit sowohl der defekt-behafteten Probenfertigung als auch Probenprüfung im Experiment. Erstere wird in der Literatur häufig durch manuelles Einsetzen von künstlichen Fehlern (z.B. vorausgehärtete Harzkörper) in den Prüfkörper erreicht. Aufgrund der hohen Kosten experimenteller Testverfahren konzentriert sich der Einsatz zunächst nur auf ausgewählte Probengeometrien und schränkt somit die Betrachtung aus nicht-deterministischer Sicht, um eine Vielzahl von Welligkeitsgeometrien abbilden zu können, stark ein.

2.3. Bewertung räumlich variabler Unsicherheiten

Die zuvor dargestellte Literaturübersicht zur experimentellen und numerischen Bewertung von OoP-Welligkeiten geht zunächst von der Prämisse aus, dass die beschriebenen OoP-Defekte in ihrem phänomenologischen Auftreten und ihrer Ausdehnung als singulär anzusehen sind und ihre Auswirkungen im Hinblick auf veränderte materielle Eigenschaften nur lokal sind. Während diese Vereinfachung für grundlegende Untersuchungen zu physikalischen Zusammenhängen durchaus gerechtfertigt ist, lässt sich dies jedoch mit Blick auf eine realitätsnahe Bewertung von Bauteilen auf der makroskopischen Skala aufgrund möglicher Interaktionseffekte nur eingeschränkt argumentieren.

Aufgrund einer Vielzahl der fertigungsbedingten Einflussfaktoren ist eine genaue Vorhersage der räumlichen Verteilung von auftretenden OoP-Welligkeiten nur bedingt möglich. Gegenwärtige Erkenntnisse und Methoden in der Literatur zur Analyse des veränderten Materialverhaltens infolge der Imperfektion sind daher nur eingeschränkt anwendbar. Stochastische Analysemethoden, die die physikalische Darstellung lokaler Imperfektionen mit einer zufälligen räumlichen Verteilung kombinieren, sind daher für eine realitätsnahe Bewertung komplexer CFK-Strukturen unerlässlich.

Im Allgemeinen erfolgt eine Bewertung struktureller Tragfähigkeiten auf Basis Steifigkeits- und Festigkeitskenngrößen des betrachteten Bauteils. Um räumlich verteilte OoP-Welligkeiten physikalisch fundiert zu bewerten, müssen sie zunächst durch geometrische Abmessungen und Ausdehnungen beschrieben und in einem zweiten Schritt in ein handhabbares Berechnungsmodell zur Bestimmung der resultierenden Materialkenngrößen überführt werden. Anhand

einfacher akademischer Beispiele kann bereits gezeigt werden, dass die Wahrscheinlichkeit des Strukturversagens signifikant durch räumliche Abweichungen einzelner Materialparameter beeinflusst werden kann [56].

Mit Hilfe zunehmender Rechenressourcen wird die Behandlung räumlich verteilter Unsicherheiten im Maschinenbau in Bezug auf Anwendungen von Verbundwerkstoffen in der letzten Dekade immer häufiger berücksichtigt [3]. Aufgrund der Vielzahl möglicher Material- und Laminatkonfigurationen, konzentrieren sich die in der Literatur veröffentlichten Analysen zu räumlichen Materialfluktuationen mittels stochastischer Ansätze in der Regel auf Teilaspekte in verschiedenen Materiallängenskalen. Diese reichen von der mikroskopischen Ebene bis zur Bauteilebene [57]. Zahlreiche Veröffentlichungen untersuchen dabei nur implizit den stochastischen Einfluss von Materialdefekten, indem eine allgemeine, räumliche Verteilung der resultierenden Materialkennwerte angenommen wird [58, 59].

Im Vergleich zu skalen-separierten Untersuchungen beschäftigen sich einige Arbeiten darüber hinaus mit der Kombination verschiedener Betrachtungsebenen durch einen skalenübergreifenden Ansatz [60]. Damit ist es bspw. möglich, Detailphänomene des Materialverhaltens in ihrem Einfluss auf die Tragfähigkeit von Gesamtstrukturen genauer untersuchen zu können und gleichzeitig den erforderlichen Berechnungsumfang so stark wie möglich zu reduzieren. Zusätzlich zu konventionellen Mehrschicht-Verbundwerkstoffen werden in diesem Zusammenhang auch andere Materialklassen wie z.B. Gewebelaminate entsprechend komplexer, teilweise räumlicher Unsicherheitsgrößen mittels numerischer Simulation untersucht [61, 62].

Auf mikroskopischer Ebene zeigen Arai et al. [63] einen probabilistischen Ansatz, basierend auf Messungen mithilfe von Rasterelektronenmikroskopie-Methoden, zur räumlichen Modellierung der Mikrostruktur von Verbundwerkstoffen. Rauter [64, 65] schlägt einen ähnlichen Ansatz für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls von kurzfaserverstärkten Verbundwerkstoffen vor, der durch eine experimentelle Überprüfung anhand von Zugversuchen validiert wird.

In [66] wird eine Methodik zur räumlichen Modellierung lokaler Abweichungen des Faservolumenanteils mit Schwerpunkt auf der Frequenzanalyse einer repräsentativen Verbundplatte vorgestellt (siehe Abbildung 2.9). Auf der Grundlage experimenteller Studien wurde gezeigt, dass bei ausgewählten Eigenfrequenzen ein numerischer Modellierungsansatz, der räumlich variierende Materialeigenschaften einbezieht, im Vergleich zu einem gemittelten Berechnungsansatz zu einer besseren Übereinstimmung mit Ergebnissen aus physikalischen Tests führen kann.

Zein et al. [67] schlagen eine Methode zur Simulation räumlicher Verteilungen des Faservolumenanteils über eine weitgehend gekrümmte Verbundstruktur vor, wobei der Schwerpunkt auf der Steifigkeits- und Festigkeitsanalyse und verschiedenen geometrischen Parametern liegt. In [68] wird eine quantitative Bewertung der numerischen Beulstabilität von zylindrischen CFK-Strukturen unter Berücksichtigung von räumlich variierenden Imperfektionen durch-

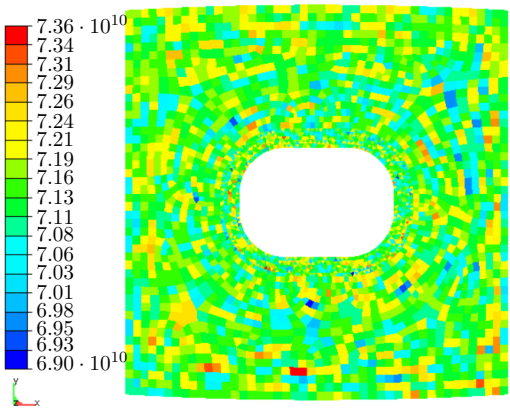


Abbildung 2.9.: Stochastische Verteilung des Parameters E_{11} auf einem Kompositbauteil auf Basis einer probabilistischen, lokalen Untersuchung von Faserbündelstreuungen [66]

geführt, die auf Basis optischer Messungen im FE-Modell eingeprägt werden. Lauterbach [69] verfolgt einen ähnlichen Ansatz (siehe Abbildung 2.10). Kriegesmann [70, 71] untersucht flächig verteilte, geometrische Imperfektionen zusätzlich für einfach versteifte Panelstrukturen. Van den Broek [72, 73] analysiert den Einfluss räumlich variierender Störgrößen am Beispiel der Laminatdicke und des Elastizitätsmoduls auf das numerische Beulverhalten unversteifter CFK-Strukturen.

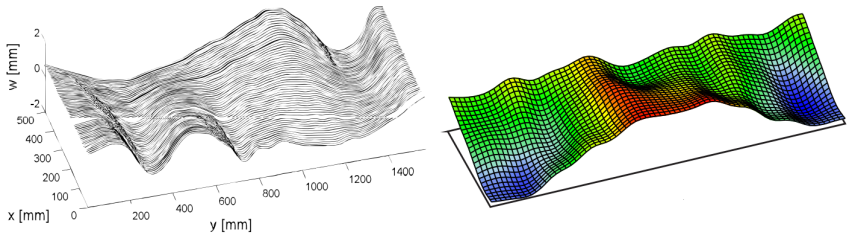


Abbildung 2.10.: Optisch vermessene Imperfektionen einer CFK-Zylinderstruktur (links) [71] und numerische Modellierung (rechts) [69]

Darüber hinaus werden in [74] mithilfe einer stochastischen Beschreibung von IP-Faserwelligkeiten in einzelnen Lagen eines Laminats bei quasi-isotropem (QI) Lagenaufbau[1] die Auswirkung auf die strukturellen Tragreserven einer ebenen Platte auf Festigkeit und Stabilität unter-

[1]Ein QI-Laminat ist ein Verbund von Einzellagen, dessen elastische Eigenschaften in der Ebene des Laminats invariant bezüglich der Drehung um die Laminatnormale sind.

sucht. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt zudem auf der Demonstration eines probabilistischen Analyseprozesses, welcher einen Multi-Level Monte-Carlo Ansatz verfolgt. Bei diesem Ansatz werden Modelle unterschiedlicher Diskretisierungsfeinheit kombiniert mit dem Ziel einer effizienten Bestimmung statistischer Ergebnisgrößen. In der Arbeit konnte so ein beachtlicher Effizienzvorteil gegenüber einer singulären Betrachtung mittels hochaufgelöster Modelle erzielt werden, welcher die Nutzung der Methode für weitere Fragestellungen motiviert. Sutcliffe et al. [75] untersuchten des Weiteren den Größeneffekt von zufälligen Faserwinkelabweichungen im Verhältnis zu den Probekörperabmessungen eines zweidimensionalen Modells in Bezug auf die Druckfestigkeit.

In [3] wurde eine numerische Bewertung stochastisch parametrisierter OoP-Welligkeiten in einem CFK-Material mit Fokus auf Festigkeitsfragestellungen infolge von Biegebeanspruchungen für ein repräsentatives Modell einer Flügelholmstruktur als industriell motivierte Fallstudie durchgeführt. Zur besseren Übersicht veranschaulicht Abbildung 2.11 das numerische Modell.

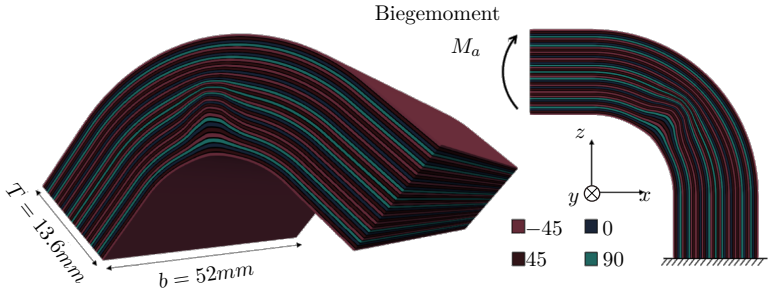


Abbildung 2.11.: Finite Elemente Modell eines repräsentativen Eckwinkels einer generischen Holmstruktur [3]

Basierend auf Ultraschall-Messdaten wurde die Parametrisierung der OoP-Welligkeit im Inneren des Materials mittels eines räumlich zufällig verteilten Modells definiert. Die Parameter der stochastischen Welligkeitsgeometrie wurden mithilfe eines Bayeschen Ansatzes unter Verwendung der Markov-Chain Monte Carlo Methode bestimmt. Die OoP-Welligkeit wurde aus Komplexitätsgründen und auf Basis der Messungen nur im Querschnitt des 3D-Modells betrachtet, sodass in Tiefenrichtung (y-Achse in Abbg. 2.11) von einer konstanten Ausprägung der Welligkeit ausgegangen wurde. Trotz des Potentials des vorgeschlagenen Ansatzes aus numerischer Bewertungssicht bleiben offene Fragen bzgl. der Übertragbarkeit und Repräsentativität der Ergebnisse aufgrund der getroffenen Annahmen und gewählten Modellgeometrie.

Gemessen an der Vielzahl und der betrachteten Aspekte der ausgewählten Veröffentlichungen stellt die detaillierte, numerische Bewertung und Charakterisierung des Materialverhaltens

von ebenen bzw. schwach-gekrümmten Strukturen aus CFK unter dem Einfluss komplexer, räumlicher Welligkeitsgeometrien weiterhin eine Lücke dar. Unabhängig der vielfältigen Studien der Literatur fehlen allerdings gegenwärtig umfangreiche Daten aus physikalischen Messungen im Sinne einer räumlichen Verteilung [76]. Dies gilt auch im Rahmen der Arbeit.

3. Zielstellung der Arbeit

Dieses Kapitel stellt den zentralen Forschungsaspekt der Arbeit sowie deren Neuheitswert dar. In Abschnitt 3.1 werden die zentralen Forschungs- und Arbeitshypothesen beschrieben. Abschnitt 3.2 stellt die einzelnen Schwerpunkte der Kapitel der Arbeit dar.

3.1. Neuheitswert

Trotz der kontinuierlichen Verbesserung industrieller Herstellungsprozesse stellen fertigungsbedingte Defekte aus ökonomischer und sicherheits-technischer Sicht die Herstellung von CFK-Bauteilen für die Luft- und Raumfahrtindustrie vor großen Herausforderungen. Störungen im Material mindern dabei nicht nur die Reproduzierbarkeit der gefertigten Strukturen, sondern beeinflussen auch die Materialfestigkeit, was ein sicherheitskritisches Problem darstellen kann. Dies gilt für verschiedene Arten von Störungen, insbesondere jedoch für Out-of-plane Welligkeiten, welche Gegenstand der Arbeit sind.

Aus Zulassungsgründen werden innerhalb aktueller Entwicklungsprozesse in der Luft- und Raumfahrtindustrie Abminderungsfaktoren bei der Material- und Strukturbewertung berücksichtigt, die dieser Problematik Rechnung tragen. Diese Faktoren sollen dabei nicht nur die physikalische Phänomenologie adäquat abbilden, sondern auch nicht-deterministische Aspekte im Material angemessen berücksichtigen. Die Detektion von Fehlern und deren Verteilung in Strukturen ist dabei trotz hochauflösender optischer Messtechnik sehr aufwendig und verhindert einen umfangreichen und fertigungsbegleitenden Einsatz. Demgegenüber stehen hohe Kosten bei der experimentellen Festigkeitsuntersuchung von CFK-Komponenten. Infolgedessen werden Abminderungsfaktoren oft konservativ definiert und mindern somit das Leichtbau-Potential von CFK-Strukturen zusätzliche. Numerische Berechnungsmethoden stellen daher seit langer Zeit eine unabdingbare Methode dar, um Auswirkungen von fertigungsinduzierten Welligkeiten im Verbundwerkstoff genau bewerten und vorhandene Konservatismen zu reduzieren.

Trotz genauer numerischer Analysemethoden und steigender Rechenleistung ist in diesem Zusammenhang der Einfluss von räumlich variierenden OoP-Welligkeiten auf die Materialfestigkeit von Laminaten kaum erforscht. Wenige Arbeiten [3, 74] beschäftigen sich mit der Fragestellung. Schwerpunkt der strukturmechanischen Untersuchungen liegt in der phänomeno-

logischen Analyse einfacher Welligkeitsgeometrien [40, 77, 78] unter Nutzung trigonometrischer Parametrisierungen. Die Ursache dafür liegt im Wesentlichen in der guten Reproduzierbarkeit von Testkörpern für experimentelle Validierungen.

Trotz dieses Punktes besitzt das Vorgehen allerdings Grenzen bei der Bewertung komplexer Welligkeitsausprägungen über einen Bauteilbereich größerer Abmessung und unregulär schwankender Amplituden. Anhand experimenteller Untersuchungen an gefertigten thermoplastischen CFK-Proben kann die Ausbildung derartiger Störungen bei spezifischen Prozessbedingungen zudem bereits bei ebenen Strukturen gezeigt werden [20]. Die Auftrittswahrscheinlichkeit hängt jedoch stark von der zugrundeliegenden Fertigungsmethode und den jeweiligen Prozessparametern ab. Des Weiteren konnte in [79] zunächst für räumlich verteilte IP-Welligkeiten experimentell gezeigt werden, dass der Ursprung für einsetzendes Materialversagen nicht immer im Bereich maximaler welligkeitsinduzierter Faserverformungen liegt, sondern weitere, räumliche Aspekte im Materialausschnitt als mögliche Ursachen auszumachen sind. Aus diesem Grund ist daher eine umfassende Untersuchung geometrischer Sensitivitäten essentiell, um das komplexe Versagensverhalten auch bei OoP-Geometrien genau klassifizieren zu können.

Eine numerische Berechnungsmethode, welche die beschriebenen Aspekte in einem adäquaten nicht-deterministischem Modell berücksichtigt, ermöglicht dabei eine effektive Vorhersage der Schadensvorgänge im Material sowie die nominelle Bestimmung von Abminderungsfaktoren zur Bewertung der Materialdefekte. Der Bewertungsansatz besitzt somit das Potential zur Einsparung kostenintensiver Nachbehandlungs- und Reparaturarbeiten während der CFK-Bauteilfertigung und stellt deshalb einen wichtigen Baustein der in Kapitel 1.2 beschriebenen Thematik dar.

Folgerichtig lautet die zentrale Forschungsfragestellung:

> "Mithilfe eines numerischen Verfahrens lässt sich eine quantitative Bauteilbewertung des Einflusses von Out-of-Plane Welligkeitsdefekten in CFK-Materialien bei stochastisch verteilt auftretenden Ausprägungen durchführen."

Ausgehend von der zentralen Fragestellung lassen sich folgende Arbeitshypothesen ableiten:

1. Die Phänomenologie der möglichen Welligkeitsformen im Material kann durch ein geeignetes mathematisches Modell abgebildet werden.
2. Komplexe Beanspruchungszustände, die sich aus der Deformation der inneren CFK-Materialstruktur durch Welligkeiten ergeben, lassen sich durch ein geeignetes numerisches Modell ermitteln.
3. Es lassen sich wesentliche geometrische Parameter identifizieren, mit denen die Problematik aus statistischer Sicht vereinfacht werden kann. Mithilfe des vereinfachten

Parametermodells lassen sich verschiedene stochastische Welligkeitsformen in ihrem Effekt auf die veränderte Festigkeit von CFK-Laminaten quantifizieren.

3.2. Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit besteht aus folgenden Kapiteln:

- **Kapitel 1 Einleitung** Das Kapitel stellt die Bedeutung von CFK-Materialien für die Entwicklung von effizienten Flugzeugen und Raumfahrtstrukturen dar. Zusätzlich beschreibt es kurz die Problematik auftretender Defekte als Ergebnis komplexer, heutiger Fertigungsprozesse.
- **Kapitel 2 Stand der Forschung** In diesem Kapitel wird eine systematische Übersicht von Defekten bei der Fertigung von CFK-Strukturen dargelegt. Desweiteren wird der aktuelle Stand der Forschung zur experimentellen und numerischen Bewertung der Defekte betrachtet und zusammengefasst.
- **Kapitel 3 Zielstellung der Arbeit** Das vorliegende Kapitel beschreibt die Zielstellung der Arbeit und stellt deren Neuheitswert dar.
- **Kapitel 4 Stochastische Methoden zur Modellierung räumlich veränderlicher Größen** Das Kapitel umfasst die mathematischen Grundlagen der Modellierung von räumlich-aufgelösten Welligkeiten mithilfe stochastischer Verfahren. Hierbei werden wesentliche in der Literatur verwendeten Methoden beschrieben und auf ihre Eignung im Kontext der Arbeit diskutiert.
- **Kapitel 5 Strukturmechanische Bewertung von Welligkeiten** Das Kapitel beschreibt die Grundkonzepte zur strukturmechanischen Bewertung der Welligkeiten im Hinblick auf Festigkeit von Faserverbundmaterialien. Darüber hinaus wird ein Bewertungsprozess beschrieben, welcher eine umfassende stochastische Analyse des physikalischen Problems ermöglicht.
- **Kapitel 6 Ergebnisse** Das Kapitel fasst die für das beschriebene numerische Bewertungskonzept durchgeführten probabilistischen Studien zusammen und analysiert die ermittelten Ergebnisse anhand ausgewählter statischer Ergebnisgrößen. Zusätzlich wird eine Analyse zur Abhängigkeit geometrischer Welligkeitsparameter in Bezug auf ermittelte Abminderungsfaktoren durchgeführt.
- **Kapitel 7 Schlussbetrachtungen** Das Kapitel fasst die erzielten Resultate im Hinblick auf den Kontext der Arbeit zusammen. Als Abschluss wird ein Ausblick auf weiterführende Fragestellungen gegeben.

4. Stochastische Methoden zur Modellierung räumlich veränderlicher Größen

In diesem Kapitel wird auf die theoretischen Grundlagen zur Unsicherheitsmodellierung eingegangen welche zur Betrachtung der Welligkeitsdefekte erforderlich sind.

4.1. Vorüberlegungen

Die im Kapitel 3 definierte wissenschaftliche Fragestellung der Arbeit erfordert ein systematisches Vorgehen in Bezug auf die Beschreibung und Bewertung einer stochastisch motivierten Charakteristik von OoP-Welligkeiten. Ungeachtet des konkreten zugrundeliegenden physikalischen bzw. strukturmechanischen Problems lässt sich das Vorgehen dabei generisch anhand von Abbildung 4.1 in einzelne Aspekte unterteilen, welche den organisatorischen Rahmen der Arbeit repräsentieren.

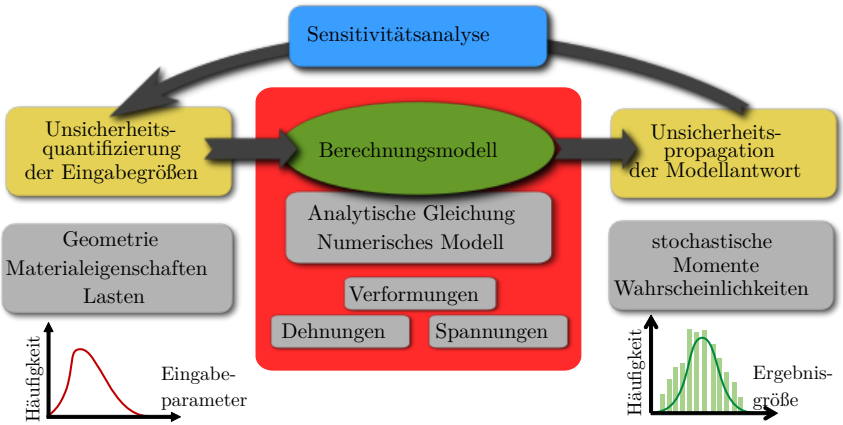
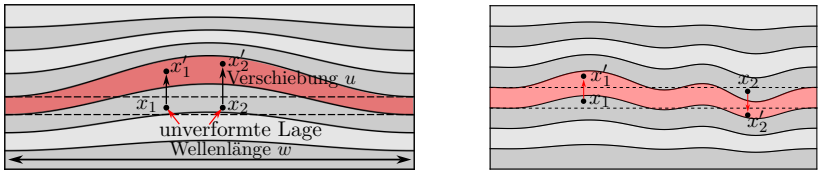


Abbildung 4.1.: Allgemeines Schema zur Bewertung pyhsikalischer Probleme unter dem Einfluss unsicherer Eingangsgrößen

Das Schema folgt drei wesentlichen Phasen [80, 81]:



(a) Welligkeit auf Basis eines Kosinusansatzes

(b) Nicht-deterministische Welligkeitsformulierung

Abbildung 4.2.: Vergleich von Kosinus-basierter und generischer, stochastisch motivierter Weligkeitsparametrisierung zur Beschreibung der veränderten Position zweier beliebigen Punkte x_1 und x_2 in einem idealisierten Laminat.

1. Definition unsicherer Eingangsgrößen
2. Auswahl eines geeigneten Modells zur Lösung des physikalischen Problems
3. Analyse der System- bzw. Modellantwort aus Schritt 2

Im Folgenden wird zunächst der initiale Schritt 1 des Schemas aus formeller Sicht näher beleuchtet und wichtige Definitionen zum weiteren Verständnis eingeführt. Schritt 2 und 3 sind Bestandteile des Kapitels 5.

Der erste Schritt beinhaltet die Ermittlung unsicherer Eingangsgrößen welche die Phänomenologie von Welligkeitsdefekten in CFK-Laminaten adäquat beschreiben[1]. Zur zielgerichteten Einführung wird der Aspekt zunächst anhand einer vereinfachten Parametrisierung erläutert und in Abbildung 4.2 zusätzlich veranschaulicht.

Parallel zur formalen Definition der Eingangsgrößen ist zusätzlich eine funktionale Beschreibung erforderlich, um beliebigen (materiellen) Punkten x_1 und x_2 im homogenen CFK-Verbund geometrische Koordinaten in einem defektbehafteten Modell zuweisen zu können. In der Literatur wird dazu von einem homogenem Laminat ausgegangen, dessen idealisierte Fasern der Einzellagen in Lagendickenrichtung ausgelenkt werden. Mukhopadhyay [48] beschreibt folglich die Auslenkung Δh eines Punktes x_1 mittels eines Kosinusansatzes:

$$\Delta h = \begin{cases} B\frac{a}{2}cos\left(\frac{2\pi x}{w}\right) & -\frac{w}{2} \leq x \leq \frac{w}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.1}$$

In Gleichung 4.1 kennzeichnet w die Wellenlänge und a die Amplitude der Kosinusfunktion. B beschreibt einen Skalierungsfaktor in Laminatdickenrichtung. Der Einfachheit halber wird zunächst für die Modelllänge und Wellenlänge der gleiche Wert angenommen. In Gleichung

[1] Der Einfachheit halber wird von einem kontinuierlichen und singulärem Welligkeitsproblem aus geometrischer Sicht ausgegangen werden, sodass sekundäre Defekte im Laminat (z.B. Harznester), die Folge der Welligkeit sein können, nicht betrachtet werden.

4.1 stellen w, a und B freie Parameter dar, die als unsichere Eingangsgrößen betrachtet und entsprechend funktional beschrieben werden können. Als Folge der Formulierung lassen sich jedoch nur spezifische Welligkeitsausprägungen aus geometrischer Sicht erzeugen, sodass ein erweiterter Ansatz erforderlich ist, um die in Abbildung 4.2b) beispielhaft dargestellte Geometrie abbilden zu können. Die theoretischen Grundlagen des Ansatzes werden im Folgenden dargelegt.

4.2. Begriffsdefinitionen

Unsichere Größen lassen sich mithilfe verschiedener stochastischer Methoden modellieren, wobei häufig auf Ansätze zu kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zurückgegriffen wird. Demgegenüber stehen alternative Verfahren der Possibilitätstheorie (engl. *possibility theory* bzw. *fuzzy theory*), welche bereits vereinzelt zur Bewertung strukturmechanischer Fragestellungen verwendet wurden [82–84]. Diese werden in der Arbeit jedoch nicht weiter betrachtet. In der vorliegenden Arbeit wird, analog zu Abbildung 4.2 und Gleichung 4.1, die welligkeitsinduzierte Auslenkung Δh im Laminat stattdessen mithilfe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen modelliert. Der wesentliche Vorteil der Methodik entgegen anderer Verfahren besteht in der konsistenten und geschlossenen Erweiterung auf Probleme räumlich variierender Größen, wie sie in der Arbeit untersucht werden. Zusätzlich zu erwähnen ist hierbei zudem die Verfügbarkeit von umfangreichen Programmbibliotheken zur numerischen Berechnung und Simulation der Problemstellungen.

Sei X nun eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \Xi$ welche mittels einer Funktion jeder möglichen Ausprägung $\omega_i \in \Omega$ eine dazugehörige Wahrscheinlichkeit $P(X = \omega_i)$ zuordnet [85]. Im Fall kontinuierlicher Zufallsvariablen erfolgt dies auf Basis einer spezifischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (engl. *probability density function*, PDF) $f_p(x)$. Repräsentative Funktionen sind in Abbildung 4.3 grafisch dargestellt. Verglichen mit der Betrachtung von Ausprägungen diskreter Zufallsvariablen wird die Wahrscheinlichkeit einzelner Ausprägungen von kontinuierlichen Zufallsvariablen mithilfe einer integralen Formulierung ausgedrückt:

$$P(X \leq \omega_i) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega_i} f_P(\omega)\,\mathrm{d}\omega \tag{4.2}$$

Die Funktion $F(\omega)$ in Gleichung 4.2 wird Verteilungsfunktion (engl. *cumulative distribution function*, CDF) genannt. Sie beschreibt mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Zufallsvariable einen Wert kleiner oder gleich ω_i annimmt.

Neben der CDF und PDF ist der Erwartungswert E eine zentrale Größe. Er beschreibt, welchen Wert eine Zufallsvariable im Mittel annimmt. Er wird auch mit μ gekennzeichnet.

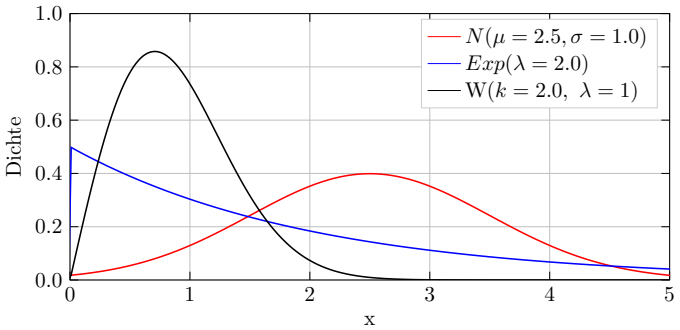


Abbildung 4.3.: Dichtefunktionen ausgewählter Normal(N)-, Exponential(Exp), und Weibull(W)-Verteilungen

Für diskrete Zufallsvariablen wird er wie folgt berechnet:

$$E[X] =: \mu =: \sum_{i=1}^{n} \omega^i \cdot P(\{\omega^i\}). \tag{4.3}$$

Analog dazu gilt für stetige Zufallsvariablen X mit ihrer Dichtefunktion f_p:

$$E[X] =: \mu =: \int_{-\infty}^{+\infty} \omega \cdot f(\omega) dx \tag{4.4}$$

Weiteren wichtige Eigenschaften sind:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \tag{4.5}$$

$$E[X + a] = E[X] + a \tag{4.6}$$

Weitere Größen zur Beschreibung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind die Varianz Var und Standardabweichung σ. Die Varianz beschreibt den quadratischen Abstand der Zufallsvariablen vom Erwartungswert und entspricht dem Quadrat der Standardabweichung:

$$\begin{aligned} Var(X) =: \sigma^2(X) &=: E\left[(X - E[X])^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Kovarianz ergibt sich bei der Betrachtung der Summe der Varianz zweier Zufallsvariablen

X und Y

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= E[X+Y-E[X+Y]]^2 \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot E\left[(X-E[X])(Y-E[Y])\right]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Hierbei muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Varianz der Summe zweier Zufallszahlen ungleich der Summe der Einzelvarianzen ist. Der zusätzliche Term in Gleichung 4.8 wird allgemein auch als Kovarianz Cov bezeichnet.

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &=: E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Wird die Kovarianz um die Einzelvarianzen ergänzt und entsprechend normiert, so ergibt sich der sogenannte *Korrelationskoeffizient* Cor. Er ist eine dimensionslose Größe und wird formal wie folgt beschrieben:

$$Cor(X,Y) =: \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}. \tag{4.10}$$

Für $\sigma(X) = \sigma(Y)$ gilt

$$Cov(X,Y) = \sigma^2 \cdot Cor(X,Y). \tag{4.11}$$

Handelt es sich bei X und Y um mehrdimensionale Verteilungen, so wird die Kovarianz bzw. Korrelation durch entsprechende Kovarianz- und Korrelationsmatrizen R_{Cov} und Σ ausgedrückt, die paarweise Abhängigkeitsbeziehungen der univariaten Randverteilungen repräsentieren.

4.3. Räumliche Modellierung eines Zufallsfelds

4.3.1. Theorie der Stochastischen Prozesse

Mithilfe der zuvor eingeführten Größen kontinuierlicher Zufallsvariablen lässt sich nun eine mathematische Formulierung ableiten, mit der eine allgemeine Parametrisierung von geometrischen Parametern von Welligkeiten mittels eines stochastischen Ansatzes möglich ist.

Ausgangspunkt weiterer Betrachtungen stellt der sogenannte Stochastischer Prozess (SP) dar [86], der formal betrachtet als Familie von Zufallsvariablen $X_t \colon \Omega \to \Xi,\ t \in T$ und einer Abbildung

$$X \colon \Omega \times T \to Z,\ (\omega, t) \mapsto X_t(\omega) \tag{4.12}$$

definiert ist. Allgemein ausgedrückt beschreibt die Gleichung 4.12 eine Funktion, die jedem

Punkt $t \in T$ eine Zufallsvariable X (analog dem vorherigen Abschnitt) zuordnet. Eine Spezialisierung stochastischer Prozesse stellt der sogenannte Gauß-Prozess (GP) dar. Ein Prozess wird auch als GP bezeichnet, wenn die in jedem Punkt $t \in T$ definierte Zufallsvariable X_t durch eine Normalverteilung beschrieben wird. Einfach ausgedrückt stellt dies die Erweiterung von multivariaten Normalverteilungen auf eine unendliche Anzahl an Variablen dar. Eine wesentliche Eigenschaft von Gauß-Prozessen ist, ähnlich zu gewöhnlichen Normalverteilungen, dass sie durch ihre Momente zweiter Ordnung, der Mittelwert- $\mu(x)$ und Kovarianzfunktion $Cov_{GP}(x, x')$, beschrieben werden.

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(\mu(x), Cov(x, x')) \tag{4.13}$$

Aus Gründen der Einfachheit wird des Weiteren zunächst für jeden Punkt $x \in T$ $\mu(x) = 0$ angenommen. Die Formulierung eines SP bzw. GP stellt zunächst einen kontraintuitiven Ansatz zur stochastischen Parametrisierung von räumlich variierenden Größen dar. Um den Fragestellungen der Arbeit in Bezug auf Welligkeitsphänomene in CFK-Laminaten Rechnung zu tragen, lässt sich die mathematische Definition eines SP bzw. GP jedoch dahingehend erweitern. Formal bedeutet das, die Indexmenge T auf d-dimensionale Räume $\mathbb{R}^d$ zu erweitern. Mit dieser Definition lassen sich stochastische Eingangsgrößen an Punkten in einem zusammenhängenden physikalischen Raum beschreiben. In der Literatur wird in diesem Zusammenhang auch der Begriff Zufallsfeld(ZF)[2] als Synonym verwendet. Für die weiteren Ausführungen wird die Bezeichnung ZF als Synonym für das theoretische Konzept des Gauss-Prozesses verwendet. Ein ZF ermöglicht die Parametrisierung von OoP-Welligkeiten über die Definition einer zufälligen vertikalen Faserauslenkung für einen beliebigen Materialpunkt innerhalb des Laminats bezogen auf eine ungestörte Konfiguration. Die gewählte Formulierung des ZF mit $\mu(x) = 0$ impliziert zunächst die Annahme einer Standard-Normalverteilung der Faserauslenkung. Diese ist jedoch nicht ausschließend und kann durch geeignete Verfahren in nicht-gaußsche Verteilungen überführt werden [87–90].

Kovarianzfunktion

Analog zur allgemeinen Definition von GP bzw. ZF kann die Kovarianzfunktion als Erweiterung der Kovarianzmatrix multivariater Normalverteilungen aufgefasst werden. Der wesentliche Unterschied besteht in der zusätzlichen Definition einer räumlichen Abhängigkeit zwischen den Zufallsvariablen an zwei beliebigen Punkten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ im ZF. Formal lassen sich Kovarianzfunktionen $Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ durch folgende Gleichung für univariaten Normalverteilungen an Punkten des ZF ausdrücken:

$$Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma^2 \cdot \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \tag{4.14}$$

[2] im Englischen als *random field* bezeichnet

In Gleichung 4.14 stellt σ^2 die Varianz einer Zufallsgröße an beliebigen Punkten eines ZFs dar. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ beschreibt die räumliche Korrelation zweier Punkte im ZF durch eine spezifische Funktion. Sie wird häufig auch als *Korrelationsfunktion* bzw. im Englischen *Kernel function* bezeichnet. Gleichung 4.14 lässt sich zudem auf m-dimensionale multivariate Verteilungen (MV) an den ZF-Punkten erweitern. Es muss jedoch beachtet werden, dass die räumliche Korrelation für jede Abhängigkeit der multivariaten Variablen an den ZF-Punkten gewährleistet ist. Für ausgewählte Fälle von $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ lässt sich diese Bedingung formell durch eine Entkopplung von räumlicher Korrelation und stochastische Abhängigkeit der MV realisieren. In diesem Fall kann eine Kovarianzfunktion folgendermaßen definiert werden:

$$Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = Diag(\sigma)\mathbf{R}Diag(\sigma) \cdot \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \tag{4.15}$$

In Gleichung 4.15 repräsentiert $Diag(\sigma)$ zusätzlich eine Diagionalmatrix, dessen Einträge auf der Hauptdiagonalen den Varianzen der m-dimensionalen Randverteilungen entsprechen. $\mathbf{R}$ repräsentiert die $m \times m$ Korrelationsmatrix, welche die stochastische Abhängigkeit zwischen den Variablen der MV beschreibt. An dieser Stelle lässt sich deutlich die Ähnlichkeit zur Definition der Kovarianz von univariaten Zufallsgrößen in Gleichung 4.11 und Abschnitt 4.2 erkennen, die nun auf einen unendlichen Raum erweitert wird.

Eine wesentliche Voraussetzung zur funktionalen Beschreibung der räumlichen Abhängigkeit ist die Definition eines Distanzmaßes zur Bestimmung des Abstands zweier Punkte im ZF. Ein häufig verwendetes Maß stellt hierbei die Euklidsche Distanz d_{eucl} dar:

$$d_{eucl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + \cdots + (x_n' - x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i' - x_i)^2} \tag{4.16}$$

Eng im Zusammenhang damit steht Korrelationslänge (im Weiteren l_c genannt), die eine zentrale Größe der Kovarianzfunktion darstellt und die Abhängigkeitsbeziehung zwischen den Punkten anhand der räumlichen Distanz wichtet. Die Korrelationslänge kann sowohl einen skalaren Wert als auch Vektor repräsentieren, der eine raumrichtungs-abhängige Wichtung erlaubt.

Grundsätzlich unterliegen Kovarianzfunktionen aus mathematischer Sicht wenig Einschränkungen. Die resultierende Kovarianzmatrix[3] muss jedoch symmetrisch und im mathematischen Sinne positiv semidefinit sein. Die Matrix kann zudem dünn besetzt sein, wenn der Abstand zweier Punkte sich außerhalb einer charakteristischen Länge befindet und somit die entsprechenden Einträge 0 ergeben. Dies kann insbesondere aus Komplexitätsgründen vorteilhaft sein.

[3]Die Kovarianzmatrix stellt in diesem Kontext die diskretisierte Form der Kovarianzfunktion dar. Abschnitt 4.4 beleuchtet den Prozessschritt der Diskretisierung im Detail.

Im Zusammenhang mit einer allgemeinen Definition sind weitere Eigenschaften der Kovarianzfunktion je nach Anwendungsfall von Bedeutung, anhand derer sich diese klassifizieren lassen. Zu diesen gehören:

- *Stationarität*: Ein ZF wird als *stationär* bezeichnet, wenn die Mittelwertfunktion $\mu(\mathbf{x})$ unabhängig von der Position $\mathbf{x}$ im Parameterraum ist, sodass $\mu(\mathbf{x}) = \mu$ gilt, und die Kovarianzfunktion die Form

$$Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = Cov(h) \quad mit \quad h = \mathbf{x} - \mathbf{x}' \tag{4.17}$$

  hat [91]. Informell bedeutet dies, dass das ZF invariant gegenüber einer Verschiebung im Raum ist.

- *Isotropie*: Ein ZF wird als *isotrop* bezeichnet, wenn die Kovarianzfunktion nur von $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|_2$ abhängt und somit invariant gegenüber jeder Starrkörperverschiebung (Translation und Rotation) des Raumes ist. Das Gegenteil der Isotropie wird auch als *Anisotropie* bezeichnet. Eine spezielle Form der Anisotropie stellt die *geometrische*,"*affine*"bezeichnete Anisotropie dar [91]. Sie erhält man, indem auf den räumlichen Koordinaten eines isotropen Kovarianzmodells eine lineare Transformation T_{aff} angewendet wird, bspw. mit

$$Cov(\mathbf{h}) = s^2 \cdot Cov(|T_{aff}\mathbf{h}|) \tag{4.18}$$

  Anisotrope Funktionen können hilfreich sein, um Welligkeiten, die durch raumrichtungsabhängige Steifigkeiten einzelner Lagen eines Laminats hervorgerufen werden können, adäquat im Modell zu berücksichtigen.

Ohne Anspruch der Vollständigkeit werden im Folgenden verschiedene Arten von stationären Korrelationsfunktionen aufgelistet.

Matérn Kernel

Ein Beispiel für ein räumliches Korrelationsmodell, welches in verschiedenen wissenschaftlichen Feldern verwendet wird, ist der sogenannte Matérn Kernel [91, 92]. Funktional wird dies mit

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\Gamma(\nu)2^{\nu-1}} \frac{\sqrt{2\nu}}{l_c} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^{\nu} K_{\nu} \left(\frac{\sqrt{2\nu}}{l_c} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) \tag{4.19}$$

beschrieben. In Gleichung 4.19 repräsentiert Γ die Gamma-Funktion und K_{ν} die Bessel Funktion. Die Funktion $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ beschreibt ein Distanzmaß zwischen zwei Punkten im ZF. Mithilfe der Variable ν lassen sich im Weiteren eine Vielzahl von spezifischen Korrelationsfunktionen ableiten, was in Abbildung 4.4 dargestellt ist.

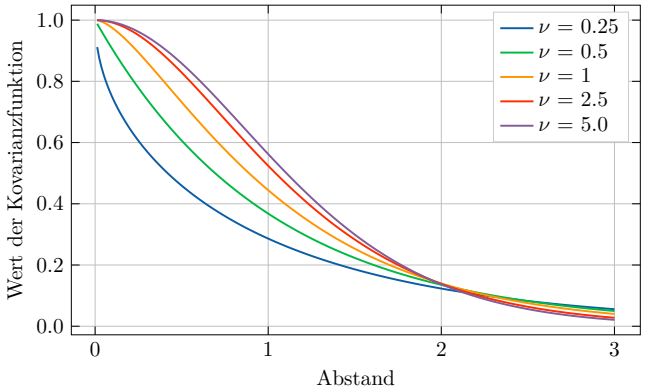


Abbildung 4.4.: Ausgewählte Matérn-Kernelfunktionen für verschiedene Werte des Parameters ν.

Exponentielles Modell

Das Exponentielle Kovarianzmodell stellt einen Spezialfall des Matérn Kernels dar, der sich für den Fall $\nu = 0.5$ ergibt.

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\boldsymbol{l_c}}\right\|_2\right) \tag{4.20}$$

Quadratisch-Exponentielles Modell

Die quadratisch-exponentielle Kovarianzfunktion erhält man für den Fall $\nu \to \infty$. Die Funktion wird auch als *Gaußsche Kovarianzfunktion* bezeichnet.

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\|\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{\boldsymbol{l_c}}\right\|_2^2\right) \tag{4.21}$$

Spherisches Modell

Beim sphärischen Modell handelt es sich um eine Kovarianzfunktion, die neben der Korrelationslänge l_c einen weiteren freien Parameter a beinhaltet. Dieser beschreibt einen Radius, indem eine räumliche Korrelation zwischen zwei Punkten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ definiert ist. Außerhalb dieses Radius liegt keine räumliche Abhängigkeit vor. Mathematisch lässt sich dies wie folgt

ausdrücken:

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \begin{cases} 0, & h \leq a \\ 1 - \frac{1}{2a} d(\mathbf{x},\mathbf{x}') \left(3 - \frac{1}{a^2} d(\mathbf{x},\mathbf{x}')^2\right), & sonst \end{cases} \tag{4.22}$$
$$mit \quad d(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \left\| \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\boldsymbol{l_c}} \right\|_2$$

Der Parameter a darf nicht mit der Korrelationslänge l_c trotz einer formellen Ähnlichkeit gleichgesetzt werden.

4.3.2. Variogram-basierte Zufallsfeld-Erzeugung

Variogramme stellen eine weitere Methode zur stochastischen Modellierung räumlicher Abhängigkeitsbeziehungen dar und besitzen methodisch viele Gemeinsamkeiten mit dem zuvor beschriebenen Konzept der Kovarianzfunktionen. Gegenüber der Annahme der Stationarität bei gewöhnlichen SPs liegt bei einer Variogramm basierten Formulierung eine schwache Form zugrunde. Variogramme wurden bereits in verschiedenen Bereichen zur Bewertung räumlicher Variabilität und Defekten in Verbundwerkstoffen genutzt. Ein Beispiel ist die Bewertung von Einflüssen lokaler Störungen in Form von Partikeln oder Einschlüssen auf die thermo-mechanische Antwort von Kompositmaterialien [93]. Yun [94] verwendet Variogramme zur Modellierung räumlich variierender Permeabilität von CFK-Gewebe bei der simulationsgestützten Analyse des Harzflusses im Kontext von Vakuum-Infusionsprozessen. An dieser Stelle wird auf eine detaillierte Beschreibung der Eigenschaften verzichtet. Für weiterführende Information wird der Leser auf [66, 95–97] verwiesen.

4.4. Simulation stochastischer Prozesse

Die zuvor beschriebenen Konzepte der Kovarianzfunktionen und Variogramme ermöglichen zunächst nur eine allgemeine, analytische Beschreibung von räumlichen Abhängigkeitsbeziehungen in zusammenhängenden Domänen. Im folgenden Abschnitt wird darauf aufbauend eine Methodik erläutert, die die Anwendung auf numerische Modelle als Baustein der Modellbildung in der vorliegenden Arbeit ermöglicht. Damit verbunden wird der Aspekt der Erzeugung stochastischer Welligkeitsausprägungen entsprechend beleuchtet.

In der Literatur wird das vorgestellte Vorgehen auch als *Simulation* eines ZFs bezeichnet. Für die ZF-Simulation existieren verschiedene Methoden, zu denen u.a. folgende gehören:

- Matrixzerlegungsmethoden
- *Turning-Bands*-Methode
- *Circulant-Embedding*-Methode

- Spektralmethoden
- Methoden auf Basis von Reihenentwicklungen (z.B. Karhunen-Loeve Expansion)

Exemplarisch werden im Weiteren ausgewählte Matrixzerlegungsmethoden bzw. die Karhunen-Loeve Expansion Methode als Vertreter der Reihenentwicklungsmethoden näher vorgestellt. Letztere wird zudem innerhalb der Arbeit verwendet. Für weitere Informationen zu alternativen ZF-Simulationsmethoden wird der Leser auf [98] verwiesen.

4.4.1. Matrixzerlegungsmethoden

Im Allgemeinen erfolgt die Simulation eines ZFs mittels einer Diskretisierung über einer endlichen Menge an Punkten (z.B. in einem d-dimensionalen Gitter) $x_1, x_2, \ldots, x_M$ des ZFs. Der daraus abgeleitete Vektor

$$Z := (Z(x_1, \omega), Z(x_2, \omega), ..., Z(x_M, \omega))^T \tag{4.23}$$

der Länge M ist eine multivariate Zufallsvariable, welche in der Literatur vereinzelt auch als diskretes Zufallsfeld bezeichnet wird. Für Gauß-ZF repräsentiert Z eine multivariate gaußsche Zufallsvariable mit gegebenem Mittelwert μ gemäß

$$\mu = E[Z] \in \mathbb{R}^M \tag{4.24}$$

und der Kovarianzmatrix Σ mit

$$\Sigma = E[(Z - \mu)(Z - \mu)]^T \in \mathbb{R}^{M \times M} \quad . \tag{4.25}$$

Ferner wird angenommen, dass die Kovarianzmatrix Σ positiv semidefinit ist. Für diesen Fall lässt sich die Matrix auf Basis einer Cholesky-Zerlegung [99–101] nun in ein Produkt einzelner Matrizen wie folgt zerlegen:

$$\Sigma = L \cdot L^T \tag{4.26}$$

L repräsentiert eine untere Dreiecksmatrix der Größe $M \times M$. Lässt sich eine entsprechende Faktorisierung ermitteln, kann ein diskretes ZF Z nun durch folgenden Zusammenhang

$$Z = L \cdot \xi \tag{4.27}$$

„simuliert “ werden, bei dem $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M)^T$ einen zufällig erzeugten Vektor von unkorrelierten standard-normalverteilten Zufallszahlen (Mittelwert $E[\xi_i] = 0$, Varianz $\sigma^2_{\xi_i} = 1$)

kennzeichnet. L und ξ beschreiben nun vollständig das Zufallsfeld. Ferner gilt:

$$E[Z] = E[L\xi] = LE[\xi] = 0, and \tag{4.28}$$

$$E[ZZ^T] = E[L\xi\xi^T L^T] = LE[\xi\xi^T]L^T = LL^T = \Sigma. \tag{4.29}$$

Zur ZF-Simulation ist zunächst nur eine einmalige Zerlegung der Kovarianzmatrix notwendig. Eine beliebige Erzeugung von unterschiedlichen Realisierungen von Z lässt sich durch einfache Erzeugung von Vektoren von ξ mittels Pseudo-Zufallszahlengeneratoren und anschließender Matrix-Vektormultiplikation gemäß Gleichung 4.27 erzielen. Demgegenüber steht jedoch bei der Anwendung der Methode ein hoher numerischer Aufwand. Der Aufwand zur Matrix-Zerlegung skaliert hierbei kubisch mit $O(M^3)$, bei dem M die Anzahl an diskretisierten Punkten in der betrachteten Domäne ist.

Zusätzlich zum erhöhten Berechnungsaufwand kann die Verwendung der Cholesky-Zerlegung zu Problemen der numerischen Robustheit führen. Um derartige Probleme zu vermeiden bzw. zu mindern, kann als Alternative die *Singulärwert-* bzw. *Spektralwertzerlegung* (*engl. Singular Value Decomposition*,SVD) verwendet werden. Die Singulärwert-Zerlegung einer generischen Kovarianzmatrix kann mittels folgendem funktionalen Zusammenhang ausgedrückt werden:

$$\Sigma = VSV^T, \quad S = diag(s_1, s_2, \ldots, s_M) \tag{4.30}$$

In Gleichung 4.30 repräsentiert S eine Diagonalmatrix bestehend aus den Singulärwerten $s_1, s_2, \ldots, s_M$ und V die zugehörenden Eigenvektoren von Σ. Da die Singulärwerte positiv sind, kann Gleichung 4.30 zu

$$\Sigma = \left(V\sqrt{S}\right)\left(V\sqrt{S}\right)^T \tag{4.31}$$

umgewandelt werden. Der Term $V\sqrt{S}$ lässt sich somit in Verbindung mit Gleichung 4.26 als Matrix L ausdrücken. Zufällige ZF-Realisierungen für Z lassen sich dann analog zur Cholesky-Zerlegung gemäß Gleichung 4.27 erzeugen. Trotz der besseren numerischen Eigenschaften verglichen mit der Cholesky-Zerlegung wächst der Aufwand der SVD dennoch mit $O(M^3)$ sofern alle Eigenwerte und Funktionen bestimmt werden. Um diese Problematik zu umgehen lässt sich ein Schwellwert der Eigenwerte definieren, sodass nur eine Teilmenge aller Eigenwerte ausgewählt werden. Dies reduziert folglich die Anzahl freier, stochastischer Variablen.

4.4.2. Karhunen-Loève Expansion

Die KLE stellt eine kontinuierliche Erweiterung der im vorherigen Abschnitt beschriebenen SVD dar. Die KLE repräsentiert ein ZF durch eine unendliche Anzahl orthogonaler Funktionen. Verglichen mit weiteren Reihenexpansionsmethoden wird die KLE aufgrund ihrer Optimalität in Bezug auf globale Fehlermetriken häufig verwendet [102]. Im Allgemeinen besagt sie, dass

ein gewöhnliches Zufallsfeld zweiter Ordnung $H(\mathbf{x},\omega)$ genau wie folgt dargestellt werden kann:

$$H(\mathbf{x},\omega) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\psi_i(\mathbf{x})\,\xi_i(\omega) \tag{4.32}$$

In Gleichung 4.32 stellt $\mu(\mathbf{x})$ die Mittelwertfunktion des Feldes dar, $\xi_i(\omega)$ beschreiben unkorrelierte normal-verteilte Zufallsvariablen analog zu Gleichung 4.27. An dieser Stelle wird zur Vereinfachung des Aspekts angenommen, dass das Zufallsfeld $H(\mathbf{x},\omega)$ zur Beschreibung der vertikalen Auslenkung der Fasern der Einzellagen einen Mittelwert von Null hat. Der entsprechende Term $\mu(\mathbf{x})$ liefert somit keinen Beitrag zum Zufallsfeld. Die Parameter λ_i und $\psi_i(\mathbf{x})$ beschreiben die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Kovarianzfunktion. Sie lassen sich aus der Lösung der homogenen Fredholm-Integralgleichung zweiter Ordnung gewinnen:

$$\int_{\Omega} Cov(\mathbf{x},\mathbf{x}')\psi_i(\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}' = \lambda_i\psi_i(\mathbf{x}) \tag{4.33}$$

Gemäß dem Mercer Theorem [103] sind die Eigenwerte λ_i positiv, die dazugehörigen Eigenfunktionen $\psi_i(\mathbf{x})$ kontinuierlich definiert und orthogonal zueinander. Daraus folgt entsprechend die Reihendarstellung der Kovarianzfunktion

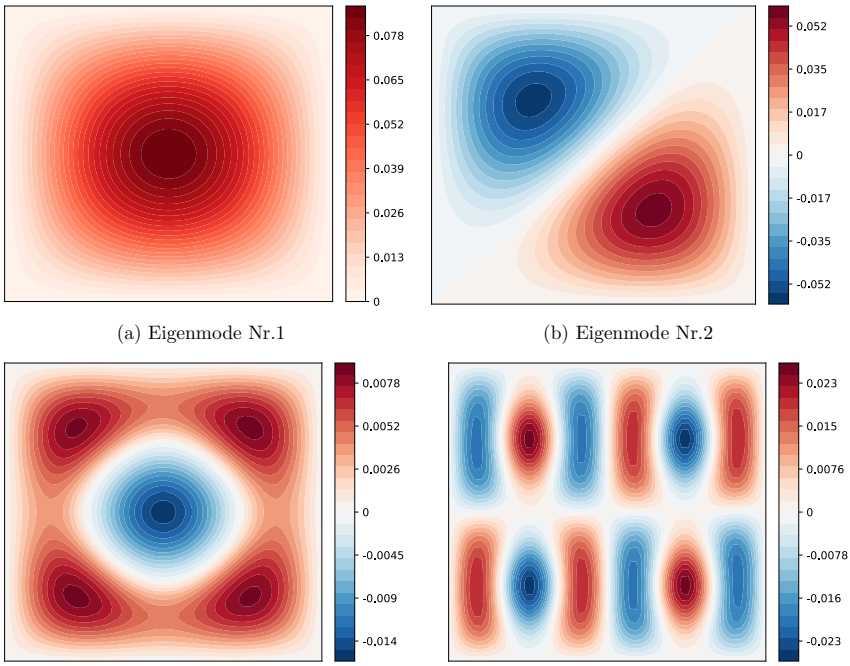
$$Cov(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\psi_i(\mathbf{x})\,\psi_i(\mathbf{x}') \tag{4.34}$$

Eine analytische Lösung des in Gleichung 4.33 angegebenen integralen Eigenwertproblems lässt sich nur für einige wenige Kovarianzfunktonen und einfache Geometrien (z.B. Rechteck, Quadrat) des ZFs ermitteln [104]. Daher muss das Eigenwertproblem mithilfe einer numerischen Berechnungsmethode gelöst werden (siehe folgender Abschnitt 4.4.2). Aus Gründen der technischen Realisierbarkeit ist es notwendig, die Formulierung einer unendlichen Reihenentwicklung in Gleichung 4.32 durch eine alternative Definition zu ersetzen, die das Problem durch eine reduzierte Anzahl an Eigenwerten und Funktionen repräsentiert. Mathematisch wird dies wie folgt ausgedrückt:

$$\hat{H}(\mathbf{x},\omega) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N_{KLE}} \sqrt{\hat{\lambda}_i}\hat{\psi}_i(\mathbf{x})\,\hat{\xi}_i(\omega) \tag{4.35}$$

In Gleichung 4.35 repräsentieren $\hat{\lambda}_i$ und $\hat{\psi}_i$ nun Näherungen der theoretischen Eigenwerte λ_i bzw. Eigenfunktionen ψ_i der Länge N_{KLE}, die entsprechend ihrem Wert in absteigender Reihenfolge sortiert sind. Ausgewählte Eigenfunktionen eines zweidimensionalen ZFs darstellt, welches mit der KLE-Methode approximiert wurde, sind in Abbildung 4.5 beispielhaft darstellt, welches mit der KLE-Methode approximiert wurde.

Wie leicht erkennbar ist, wirkt sich die Größe der Variable N_{KLE} direkt auf die Genauigkeit



(a) Eigenmode Nr.1

(b) Eigenmode Nr.2

(c) Eigenmode Nr.5

(d) Eigenmode Nr.25

Abbildung 4.5.: Darstellung ausgewählter Eigenfunktionen eines Zufallsfelds, welches auf eine quadratischen Modellgeometrie angewendet wird.[4]

der zu modellierenden ZF-Variationen aus. Demgegenüber erhöht sie zusätzlich auch den Rechenaufwand bei der Lösung des Eigenwertproblems. Die Anzahl N_{KLE} der Eigenwerte zur Approximation ist abhängig vom zugrundeliegenden physikalischen Problem und Eingangsdaten des Modells wie geometrische Abmaße und Korrelationslängen sowie die geforderte Approximationsgüte im Sinne der reproduzierbaren Variabilität des ZFs. Aufgrund eines fehlenden Formalismusses ist es hilfreich, einen Parameter p einzuführen, der beschreibt, wie viel Prozent der ursprünglichen ZF-Modellierung mittels Approximation reproduziert werden sollen. Gewöhnlich wird $p \geq 0.99$ angenommen. Mithilfe des Parameters kann nun bestimmt werden, wie viele Eigenwerte zur KLE-basierten ZF-Approximation benötigt werden. Ist eine Matrix, im konkreten Fall die Kovarianzmatrix des diskretisierten ZFs, diagonalisierbar, so entspricht die Spur der Matrix (engl. *trace*, tc) der Summe ihrer Eigenwerte, in diesem Fall

[4]Das Zufallsfeldformulierung wurde so modifiziert, dass für den Modellrand $\hat{H}(\mathbf{x}, \omega) = 0$ gilt. Die Behandlung von Randbedingungen ist Bestandteil des Abschnitts 4.4.3

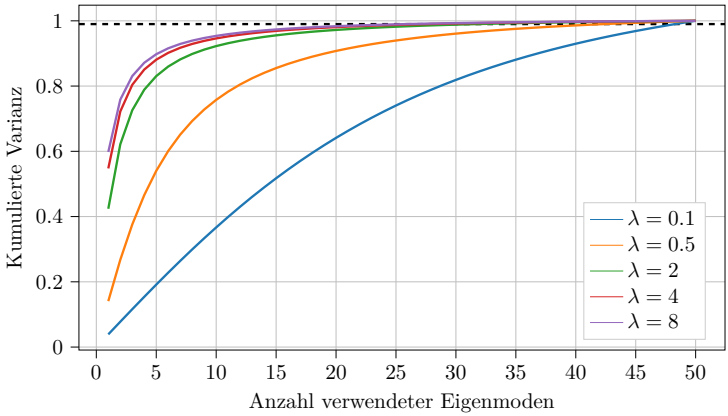


Abbildung 4.6.: Kumulierte Varianzreproduktion bei steigender Anzahl an verwendeten Eigenmoden für verschiedene Korrelationslängen eines Exponentiellen Kovarianzmodells zur Beschreibung eines ZF in einer Domäne der Länge $l = 8$ und Breite $b = 8$. Die gestrichelte Linie repräsentiert den Wert $p = 0.99$.

die Eigenwerte der KLE-Approximation.

$$tr(\mathbf{\Sigma}) = \sum_{k=1}^{n} \Sigma_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \hat{\lambda} \tag{4.36}$$

Darauf aufbauend wird nun der Wert n_{min} gesucht, sodass

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \geq p\hat{\lambda} \rightarrow n_{min} = k \tag{4.37}$$

gilt. Die Abbildungen 4.6 und 4.7 ordnen diesen Aspekt für verschiedene Korrelationslängen und geometrische Abmaße eines ZFs ein. Anhand beider Abbildungen ist deutlich erkennbar, dass für kleine Verhältnisse aus Korrelationslänge und geometrischen Modellabmaßen des ZF eine hohe Anzahl an Eigenwerten erforderlich ist, um die Variabilität des ZFs adäquat zu approximieren.

Numerische Lösung des Eigenwertproblems

Für die Ermittlung der Eigenfunktionen existieren in der Literatur verschiedene numerische Algorithmen [105]. Diese lassen sich in drei Kategorien einteilen:

- Degenerierte Kernelmethoden [106]
- Nyström Methoden [106]

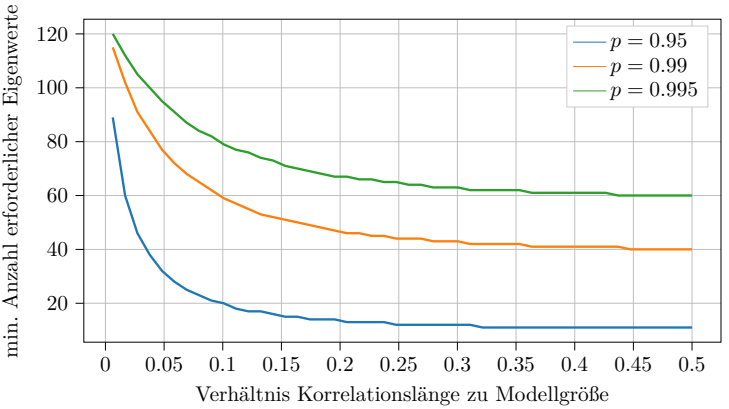


Abbildung 4.7.: Vergleich der erforderlichen Anzahl von Eigenwerten zur Beschreibung der räumlichen Variabilität für verschiedene Güteklassen *level* der ZF-Varianz in Abhängigkeit zu geometrischen Verhältnissen aus Modellabmessungen und Korrelationslänge. Das repräsentative Kovarianzmodell im Beispiel ist die exponentielle Kovarianzfunktion.

- Projektionsverfahren

Alle Algorithmen lösen das Eigenwertproblem näherungsweise, indem die unbekannten Eigenfunktion durch eine Menge an Funktionen ersetzt werden

$$\psi_i(\mathbf{x}) \approx \hat{\psi}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{M} d_j^i h_j(\mathbf{x}) \tag{4.38}$$

bei dem die Koeffizienten $d_j^i \in \mathbb{R}$ bestimmt werden müssen. Im Folgenden wird die Galerkin-Projektion, welche den Projektionsverfahren zugeordnet werden kann, näher beleuchtet. Die Methode wird auch im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet.

Galerkin-Projektion

Für die weitere Herleitung des Verfahrens wird zunächst repräsentativ Ω_h als Diskretisierung einer drei-dimensionalen Oberfläche Ω betrachtet. Ferner sei $h_j(x) \in L^2(\Omega_h)$ in Gleichung 4.38 eine quadratisch-integrierbare Funktion in Ω_h, welche sowohl auf den Knoten als auch Elementen der Diskretisierung Ω_h definiert sein kann. Aus Gründen der Nachvollziehbarkeit der Methodik wird an dieser Stelle keine spezifische Definition der Funktion vorgenommen. Sei nun $\mathbf{V_h} \subset L^2(\Omega_h)$ die Menge der Ansatzfunktionen in Ω_h der Länge N. Die Fredholm-Gleichung

4.33 lässt sich nun als diskretisiertes Eigenwert-Problem folgendermaßen ausdrücken:

$$\int_{\Omega} Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{\psi}\left(\mathbf{x}'\right) d\mathbf{x}' = \hat{\lambda}\hat{\psi}\left(\mathbf{x}\right) \tag{4.39}$$

bei dem $\hat{\psi}(x) \in \mathbf{V_h}$ eine Näherung von $\psi(x)$ ist und $\hat{\lambda}$ die aproximierten Eigenwerte darstellt. Betrachtet man weiterhin eine Residuumsfunktion $r(x)$ mit

$$r(x) = \int_{\Omega} Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\hat{\psi}\left(\mathbf{x}'\right) d\mathbf{x}' - \hat{\lambda}\hat{\psi}\left(\mathbf{x}\right) \tag{4.40}$$

und setzt man die Formulierung von $\hat{\psi}(x)$ gemäß Gleichung 4.38 in Gleichung 4.40 ein, so ergibt sich:

$$r(x) = \int_{\Omega} Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sum_{j=1}^{N} d_j h_j\left(\mathbf{x}'\right) d\mathbf{x}' - \hat{\lambda} \sum_{j=1}^{N} d_j h_j\left(\mathbf{x}\right) \tag{4.41}$$

Der Kern der Galerkin-Projektion besteht in der Suche einer Lösung für $\hat{\psi}(x)$, bei der die Residuumsfunktion in $\mathbf{V_h}$ verschwindet, d.h. $r(x) = 0$. Dies impliziert die Forderung der Orthogonalität von $r(x)$ gegenüber jeder Ansatzfunktion $h_i(x)$:

$$\int_{\Omega_h} r(x)h_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0, \quad for\ i = 1, \ldots, N. \tag{4.42}$$

Folglich führt die Projektion zum generalisierten Eigenwertproblem

$$Ad = \hat{\lambda}Bd \tag{4.43}$$

bei dem

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega_h} h_i(\mathbf{x}) \int_{\Omega_h} Cov(\mathbf{x}, \mathbf{x}')h_j(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'d\mathbf{x}, \\ B_{ij} &= \int_{\Omega_h} h_i(\mathbf{x})h_j(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Die numerische Integration über dem Gebiet Ω_h erfolgt näherungsweise durch entsprechende Quadraturformeln unter der Nutzung von spezifischen Integrationsgewichten w_q und Punkten $\overline{x}_q$. Die Einträge der Matrizen A und B lassen sich dann folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{p=1}^{Q} \sum_{q=1}^{Q} w_p w_q Cov(\overline{x}_p, \overline{x}_q)h_i(\overline{x}_p)h_j(\overline{x}_q), \\ B_{ij} &= \sum_{q=1}^{Q} w_q h_i(\overline{x}_q)h_j(\overline{x}_q) \end{aligned} \tag{4.45}$$

Auf Basis der ermittelten Matrizen A und B kann das Eigenwertproblem in Gleichung 4.43 mithilfe allgemeiner numerischer Verfahren gelöst werden [107]. Für weiterführende Erläuterungen zur Wahl angemessener Funktionen $h_{i,j}$ sei der Leser auf Anhang A.1 verwiesen.

4.4.3. Berücksichtigung von Modellrandbedingungen

Innerhalb strukturmechanischer Fragestellungen ist es notwendig, spezifische Randbedingungen für das zu lösende numerische Problem zu definieren. Dies resultiert u.a. aus Lösungsannahmen der Ausgabegrößen in Form von Verschiebungen oder Spannungen an den Rändern eines idealisierten numerischen Modells. Zusätzlich zu diesen Größen können Anforderungen an die Ausgangsgeometrie des Modellrands vorliegen, um Einflüsse numerischer Fehler bei der Abstraktion des physikalischen Grundproblems zu mindern. Verbunden mit der Thematik der Arbeit erfordert dies eine entsprechende Anpassung des ZF-Modells.

Sind die Werte oder Ableitungen an bestimmten Punkten des Modells (oder den Modellrändern) bekannt, kann ein ZF so modifiziert werden, dass er dieses Vorwissen widerspiegelt [108]. Formal wird dies durch die Modifikation des ZFs beschrieben, die wie folgt definiert ist:

$$ZF \sim \mathcal{GP}(\tilde{\mu}^*, Cov^*) \tag{4.46}$$

In Gleichung 4.46 beschreibt $\tilde{\mu}^*$ und Cov^* die korrigierte Mittelwertfunktion bzw. Kovarianzfunktion. Die Formulierung beinhaltet nun jedoch Informationen zu bekannten Werten oder Ableitungen an Punkten bzw. Bereichen des ZFs. Um die bekannten Werte und Ableitungen einzubeziehen, wird zunächst ein erweiterter Vektor als $[\tau, t]^T$ definiert, wobei τ der Untervektor der Werte an beliebigen Punkten des zugrundeliegenden GPs (im weiteren Inferenzpunkte genannt) und t der Untervektor der bekannten Werte und Ableitungen des Prozesses an einigen Punkten ist. Die Lage der Punkte τ und t müssen nicht notwendigerweise übereinstimmen. Aus Gründen der Einfachheit ist es allerdings oftmals vorteilhaft, eine Teilmenge der Interferenzpunkte für die Definition der Punktmenge t zu verwenden.

Für den Vektor $[\tau, t]^T$ wird dann ein Gaußscher Prozess angenommen als

$$\begin{bmatrix} \tau \\ t \end{bmatrix} \sim \mathcal{GP}\left(\begin{bmatrix} \tilde{\tau} \\ \tilde{t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Cov_{\tau\tau} & Cov_{\tau t} \\ Cov_{t\tau} & Cov_{tt} \end{bmatrix} \right) \tag{4.47}$$

bei dem $\tilde{t}$ die Werte oder Ableitungen an beliebigen Punkten des GPs darstellt und $Cov_{\tau\tau}$, $Cov_{\tau t}$, $Cov_{t\tau}$, Cov_{tt} Kovarianzfunktionen repräsentieren, die auf ausgewählte Punktepaare der Interferenzpunkte aus τ und t angewendet werden. $\tilde{\tau}$ bezeichnet die Mittelwertfunktion an unabhängigen Interferenzpunkten. Ferner lässt sich nun schlussfolgern, dass die Verteilung für Werte an Inferenzpunkten, die von bekannten Werten und Ableitungen abhängen, ebenfalls

ein Gauß-Prozess ist, der durch [108–110]

$$\tau|(t=y) \sim \mathcal{GP}(\tilde{\tau}^*, Cov^*) \tag{4.48}$$

$$\tilde{\tau}^* = \tilde{\tau} + Cov_{\tau\tau}(Cov_{tt} + R_y)^{-1}(y - \tilde{\tau}) \tag{4.49}$$

$$Cov^* = Cov_{\tau\tau} - Cov_{\tau t}(Cov_{tt} + R_y)^{-1}(Cov_{\tau t})^T \tag{4.50}$$

beschrieben ist. In Gleichung 4.50 stellt y den Vektor bekannter Werte und Ableitungen dar, R_y repräsentiert eine Fehlermatrix. Gleichung 4.50 entspricht nun der Gleichung 4.46, erzwingt aber die bekannten Werte und Ableitungen innerhalb eines bestimmten Fehlers für jede Realisierung des ZFs. Zum besseren Verständnis wird zunächst $R_y = 0$ und $y - \tilde{\tau} = 0$ angenommen. Damit vereinfacht sich Gleichung 4.50 zu

$$\tau|(t=y) \sim \mathcal{GP}(\tilde{\tau}, Cov_{\tau\tau} - Cov_{\tau t}(Cov_{tt})^{-1}(Cov_{\tau t})^T) \tag{4.51}$$

Für ein repräsentatives, dreidimensionales ZF sind Ableitungen von t in Bezug auf eine der drei orthogonalen Koordinatenrichtungen x_1, x_2 oder x_3 definiert. Um Ableitungen in allgemeinen Richtungen zu berücksichtigen, werden die Ableitungen in den drei Koordinatenrichtungen für denselben physikalischen Ort getrennt in t aufgenommen. Die Kovarianzmatrix in Gleichung 4.47 wird aus einem gewählten kontinuierlichen Kovarianzkern $\mathcal{K}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n)$ für die Kovarianz zwischen den Werten von τ an verschiedenen physikalischen Orten $\mathbf{x}_m = [x_{m,1}, x_{m,2}, x_{m,3}]^T$ und $\mathbf{x}_n = [x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}]^T$ erzeugt. Die Kovarianz zwischen zwei Werten, zwischen einem Wert und einer Ableitung und zwischen zwei Ableitungen ist gegeben durch [108–110]

$$Cov(\tau_m, \tau_n) = \mathcal{K}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) \tag{4.52}$$

$$Cov\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)_m, \tau_n\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{K}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) \tag{4.53}$$

$$Cov\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)_m, \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right)_n\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\mathcal{K}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n). \tag{4.54}$$

Die Bestimmung der Ableitungen wird beispielhaft für die Gaußsche Kovarianzfunktion $\mathcal{K}_{se}$ in Anlehnung an Gleichung 4.14 und 4.21 durchgeführt. Entsprechend der Gleichung 4.53 und 4.54 ergibt somit:

$$Cov(\tau_m, \tau_n) = \mathcal{K}_{se}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) = \sigma^2 exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{|x_{m,i} - x_{n,i}|^2}{l_i^2}\right] \tag{4.55}$$

$$Cov\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)_m, \tau_n\right) = -\frac{1}{l_i^2}(x_{m,i} - x_{n,i})\mathcal{K}_{se}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) \tag{4.56}$$

$$Cov\left(\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)_m, \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_j}\right)_n\right) = \frac{1}{l_i^2}\left(\delta_{i,j}^K - \frac{1}{l_j^2}(x_{m,i} - x_{n,i})(x_{m,j} - x_{n,j})\right)\mathcal{K}_{se}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) \tag{4.57}$$

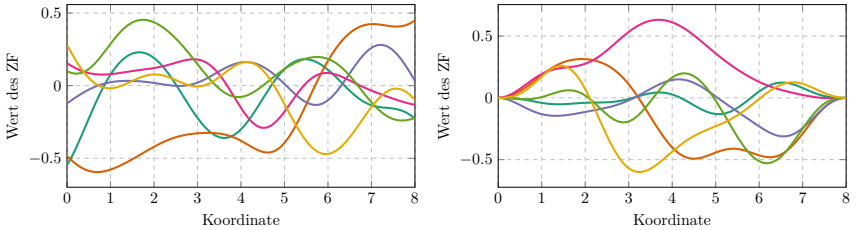


Abbildung 4.8.: Vergleich zufälliger Ausprägungen des ZF ohne Randbedingung (links) und mit Berücksichtigung von Randbedingungen (rechts). Zur Demonstration wurde ein 1D-Gitter aus 75 Netzpunkten einer Modellgeometrie der Länge 8 und eine Gaußsche Kovarianzfunktion mit $l_c = 1.0$ und $s^2 = 0.5$ gewählt.

$\delta^K_{i,j}$ beschreibt das Kronecker-Delta. Angewendet auf ein ausgewähltes Modellbeispiel stellt Abbildung 4.8 anhand willkürlicher Ausprägungen eines ZF die Unterschiede bzgl. der Berücksichtigung von Randbedingungen abschließend gegenüber.

4.5. Statistische Versuchsplanung

4.5.1. Eigenschaften und Berwertung von Versuchsplänen

Die vorangegangenen Darlegungen fokussierten sich zunächst auf eine konsistente und parametrische Beschreibung räumlich-variierender Größen. Für eine quantitative Bewertung eines physikalischen Problems aus probabilistischer Sicht sind entsprechende deterministische Ausprägungen der unsicheren Modellgrößen zu erzeugen. Der Prozess der Erzeugung dieser Ausprägungen wird in der Literatur als *statistische Versuchsplanung* (engl. *Design of Experiments (DOE)*) bezeichnet. DOEs sind nicht nur für stochastische Fragestellung ein essentieller Bestandteil, sondern werden im Allgemeinen auch bei Fragestellungen von effizienten mathematischen Ersatzmodellen für numerisch aufwendige Simulationsmodelle angewendet.

Der zentrale Aspekt von DOE's ist die Frage, wie n Stützstellen $X = (x^1, \ldots, x^n)$ in einem d-dimensionalen Entwurfsraum $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ verteilt werden können, sodass die Verteilung bestimmte Eigenschaften aufweist. Aus Gründen der Einfachheit werden die Stützstellen zumeist in einem normierten Entwurfsraum $\tilde{\Omega}$

$$\tilde{\Omega} = [0,1]^d =: \{(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_d)^T \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq \tilde{x}_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq \tilde{x}_d \leq 1\} \tag{4.58}$$

generiert. Um eine entsprechende Verteilung der Stützstellen gemäß der initial definierten Eingangsverteilungen -im Konkreten die unkorrelierten Normalverteilungen der ZF-Approximation- zu erhalten, wird in einem nachfolgenden Schritt eine Transformation mittels

der invertierten CDF $F^{-1}(.)$ (siehe Gleichung 4.2) der Eingangsverteilungen durchgeführt [111].

Um Methoden zur Versuchsplanung nominell zu bewerten gibt es verschiedene Metriken, die ein Maß der Güte einer Stützstellenverteilung im Entwurfsraum repräsentieren. Ziel ist es zum Einen, angemessene Metriken hinsichtlich gewünschter Eigenschaften der Stützstellenverteilungen auszuwählen. Zu diesen gewünschten Eigenschaften zählen:

- **Hohe volumetrische Uniformität**: Sie repräsentiert den Grad gleichmäßiger Stützstellenverteilungen mit möglichst identischem Abstand benachbarter Stützstellen.
- **niedrige Diskrepanz**: Die Diskrepanz beschreibt ein Maß der Abweichung einer Stützstellenmenge zu einer Gleichverteilung. Im Konkreten wird das Maß auf die projizierte Punktmenge in den einzelnen Koordinatenachsen von Ω angewendet.

Zum anderen sind konkrete Verfahren zur Stützstellenerzeugung zu identifizieren, die unter den gewählten Metriken zu optimalen Verteilungen im Entwurfsraum führen.

Johnson [112] beschreibt zwei Distanz-basierte Metriken zur Bewertung einer Stützstellenmenge, welche auch als *Maximin*(Mm) bzw. *Minimax*(mM) Kriterium bezeichnet werden Das *Maximin* Kriterium maximiert die minimale Distanz zwischen zwei Punkten einer Stützstellenmenge. Mathematisch wird dies mit

$$Mm\left(X^n\right) = \max_{x_i \in X^n} \left[\min_{\substack{x_k \in X^n \\ k \neq i}} dist\left(x^i, x^k\right) \right] \tag{4.59}$$

dargestellt. $dist\left(x^i, x^k\right)$ beschreibt ein Distanzmaß zwischen zwei beliebigen Punkten. Die Euklidsche Distanz (siehe Gleichung 4.16) repräsentiert ein häufig verwendetes Maß in diesem Zusammenhang. Das Minimax Kriterium ist formell wie folgt definiert:

$$mM\left(X^n\right) = \min_{x_i \in X^n} \left[\max_{\substack{x_k \in X^n \\ k \neq i}} dist\left(x^i, x^k\right) \right] \tag{4.60}$$

Das *Minimax* Kriterium minimiert die maximale Distanz zwischen zwei Punkten einer Stützstellenmenge. In [113] wird ergänzend die Minimin-Metrik definiert mit:

$$MinMin\left(X^n\right) = \min_{x_i \in X^n} \left[\min_{\substack{x_k \in X^n \\ k \neq i}} dist\left(x^i, x^k\right) \right] \tag{4.61}$$

Ein hoher Wert von *MinMin* entspricht dabei einer gleichmäßigen Streuung von Punkten im Entwurfsraum und stellt sicher, dass ein Punkt nie einen zu geringen Abstand zu jedem

anderen Punkt hat.

Zusätzlich wird in [114, 115] ein Abdeckungsmaß, kurz M_{Cov}, vorgeschlagen mit:

$$M_{Cov} = \frac{1}{\overline{\gamma}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i - \overline{\gamma})^2}, \quad \gamma_i = \min_{k \neq i} dist\left(x^i, x^k\right) \quad \overline{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i-1}^{n} \gamma_i \tag{4.62}$$

Ein niedriger Wert von M_{Cov} entspricht einer Stützstellenverteilung, die einem regelmäßigen Gitter ähnelt. Es wird hiermit erreicht, dass die Stützstellen den Entwurfsraum möglichst umfangreich ausfüllen.

Auf Basis der vorgestellten Metriken werden im folgenden Methoden zur Versuchsplanung erläutert.

4.5.2. Ausgewählte Verfahren zur Versuchsplanerstellung

4.5.2.1. Vollfaktorieller Versuchsplan

Bei einem vollfaktoriellen Versuchsplan (engl. Full Factorial Design (FFD)) handelt es sich um ein Versuchsplan, bei der für jede betrachtete Eingangsvariable eine gleichmäßig verteilte Punktmenge der Länge n_b erzeugt wird und mit jeder Ausprägung zusätzlich betrachteter Parameter kombiniert wird. Für $d = 2$ und $n_b = 7$ resultiert dies zu einem Gitter an Stützstellen entsprechend der Abbildung 4.12 a). Die Anzahl an Stützstellen ergibt sich aus

$$n = {n_b}^d \tag{4.63}$$

Aufgrund der resultierenden Verteilung der Stützstellen erfüllt die Methode die Anforderung an eine hohe volumetrische Uniformität der Stichprobe. Der wesentliche Vorteil besteht im maximalen Informationsgewinn, da alle Haupteffekte und Interaktionen zwischen einzelnen Größen unabhängig untersucht und abgeschätzt werden können. Demgegenüber steht jedoch eine hohe Berechnungskomplexität, die mit zunehmender Parameteranzahl exponentiell ansteigt, was somit einen effektiven Einsatz zur statistischen Untersuchung von hochdimensionalen numerischen Fragestellungen stark einschränkt und lediglich eine punktuelle Analyse des Parameterraums einzelner Parameter erlaubt. Zudem ist die Diskrepanz bei diesem Ansatz aufgrund der mehrfachen Belegung eines Parameters sehr hoch (siehe Abbildung 4.12 a)).

4.5.2.2. Monte-Carlo

Gegenüber der systematischen Stützstellenverteilung beim FFD werden bei der Monte-Carlo Methode (MC) im Parameterraum zufällig und voneinander unabhängige Stützstellen ausgewählt (siehe Abbildung 4.12 b)). Vorteil der Methode ist die einfache technische Realisierbarkeit

im Vergleich zu anderen Verfahren, was zudem aufgrund der Unabhängigkeit der generierten Stützstellen eine effiziente Ausführung auf modernen hoch parallelen Rechnerarchitekturen zusätzlich motiviert wird. Demgegenüber stellt die unabhängige Erzeugung der Stützstellen gleichzeitig einen Nachteil dar. Bei der Untersuchung von physikalischen Systemen mittels abstrahierter mathematischer Modelle auf Basis unsicherer Eingangsgrößen sind bei ähnlichen Stützstellen vergleichbare Ergebnisse der betrachteten Modellantworten zu erwarten. Dies führt in Folge zu einer schlechten Konvergenz der Methode, ausgedrückt mit $1/\sqrt{n}$ [116]. Die Größe n repräsentiert dabei die Anzahl zufällig generierter Werte der stochastischen Variablen.

4.5.2.3. Latin Hypercube

Um die Nachteile von Monte-Carlo Verfahren zu umgehen und Stützstellen von hoher Güte in Bezug auf die verschiedenen Metriken aus Abschnitt 4.5.1 zu erzeugen, existieren verschiedene Verfahren. Eine vielfach verwendete Methode ist das sogenannte Latin Hypercube Sampling (LHS), was von McKay [117] beschrieben wurde und seinen Ursprung im lateinischen Quadrat hat.

Der Bereich jeder Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird für eine gegebene Stützstellenmenge der Länge N in gleichgroße, sich nicht überschneidende Intervalle ohne Lücken mit einer identischen Auswahlwahrscheinlichkeit $1/N$ unterteilt. Aus jedem Intervall wird ein Wert nach dem Zufallsprinzip im Hinblick auf die Wahrscheinlichkeitsdichte im Intervall ohne zurücklegen ausgewählt. Die so erhaltenen N Werte für x_1 werden nach dem Zufallsprinzip mit den N Werten von x_2 gepaart. Diese N Paare werden nach dem Zufallsprinzip mit den N Werten von x_3 kombiniert, um N n-Tupel zu bilden. Das Verfahren wird dann für alle übrigen Variablen fortgeführt, bis eine Menge von N n-Tupeln gebildet ist. Dieser Satz von N n-Tupeln ist die Latin-Hypercube-Stichprobe. Folglich gibt es für gegebene Werte von N und n also $(N!)^{n-1}$ mögliche Intervallkombinationen für ein LHS. Abbildung 4.9 stellt exemplarisch ein Ergebnis eines LHS für $N = 5$ Stützstellen und $n = 2$ Parametern dar.

Das LHS-Verfahren ermöglicht die Erzeugung von Stichproben von geringer Diskrepanz. Demgegenüber ist jedoch für das zufällige LHS keine hohe volumetrische Uniformität gewährleistet, sodass die Stichprobe lokale Punktanhäufungen (engl. Cluster) aufweisen kann. Zu Verbesserung dieser Eigenschaft kann mithilfe der Minimax-Metrik aus Gleichung 4.60 ein raumfüllender Latin Hypercube durch Optimierung der Stützstellenpositionen gefunden werden. Dies wird beispielsweise durch Forrester [118, Kap. 1.4.3] beschrieben. Nachteilig stellt sich beim vorgestellten Algorithmus jedoch der hohe Berechnungsaufwand für sehr große Stützstellen- und Parameteranzahlen dar. Beachkofski [119] schlägt daher einen verbesserten Ansatz (engl. *Improved Latin Hyercube Sampling*, (IHLS)) vor. Mit dem Ziel einer verbesserten volumetrische Uniformität wird der Entwurfsraum zunächst für einen Satz initialer

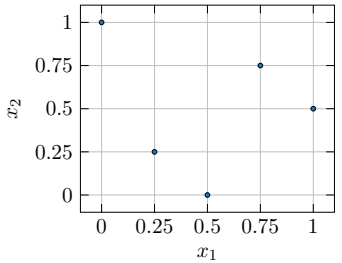


Abbildung 4.9.: Beispiel eines Latin Hypercubes mit 2 Parametern und 5 Stützstellen im Einheitsparameterraum. [4]

Stützstellen in Unterräume aufgeteilt. Anschließend erfolgt eine Optimierung der Stützstellen durch eine Maximierung der Abstände aller Stützstellen zueinander.

4.5.2.4. Zentrische Voronoi-Tesselierung

Die Erläuterungen basieren auf den Schilderungen zum Verfahren in [4].

Definition Das Centroidal Voronoi Tesselation (CVT)-Verfahren basiert auf Voronoi-Diagrammen (auch Dirichlet-Zerlegung genannt). Voronoi-Diagramme bezeichnen eine Zerlegung des Raumes in Regionen, die durch eine vorgegebene Menge an Punkten des Raumes bestimmt werden. Diese werden im weiteren Kontext auch als *Generatoren* bezeichnet.

Ein Voronoi-Diagramm (auch *Tesselierung* genannt) in $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist eine Menge von Punktmengen $V = (V_1, \ldots, V_n)$, die nach Du [120] und Saka [121] folgende Eigenschaften besitzen:

- $V_i \subset \Omega$,
- V_i ist eine abgeschlossene Menge,
- $\cup_{i=1}^{n} V_i = \Omega$,
- $\mu(V_i \cap V_j) = 0$ für alle $i \neq j$.

Die Variable n repräsentiert die Anzahl an Stützstellen, $i, j = 1, \ldots, n$. Die Variable μ bezeichnet das sogenannte Lebesque-Maß, ein Maß zur Beschreibung des Inhalts eines Gebiets im euklidischen Raum auf Ω.

Eine Voronoi-Zerlegung von Ω bezüglich einer Menge an Stützstellen $X = (x^1, \ldots, x^n)$ der Kardinalität n mit $x^i \in \Omega$ ist eine Menge, die

$$V_i = \{z \in \Omega : \|z - x^i\| \leq \|z - x^j\|\} \tag{4.64}$$

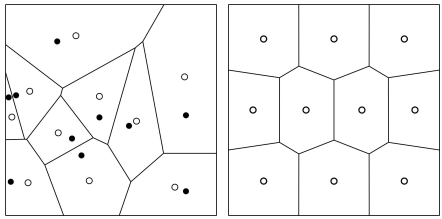


Abbildung 4.10.: Beispiel einer initialen Voronoi Tesselierung (links) und einer Centroidal Voronoi Tesselierung (rechts) von Saka [121]. Der schwarze Punkt stellt die Stützstelle und der weiße den Flächenschwerpunkt dar.

für alle $i \neq j$ erfüllt. Die Mengen $V = (V_1, \ldots, V_n)$ heißen Voronoi-Diagramme und $(x^1, \ldots, x^n)$ sind die dazugehörigen Generatoren. Jede Menge V_i heißt Voronoi-Region oder auch Voronoi-Zelle bezüglich x^i. Vereinfacht ausgedrückt umfasst jede Voronoi-Region alle Punkte des Raumes, die gemessen an einer gewählten Distanzmetrik näher am Generator der Region liegen als an jedem anderen Generator.

Für eine zentrische Voronoi Tesselierung müssen zusätzlich alle Generatoren der Voronoi-Regionen in deren Schwerpunkten $\overline{x}^i$ liegen. Somit gilt folgende Bedingung für eine zentrische Voronoi Tesselierung

$$x^i = \overline{x}^i \tag{4.65}$$

mit dem Schwerpunkt $\overline{x}^i$, der sich durch den Erwartungswert

$$\overline{x}^i = E[V_i] \tag{4.66}$$

beschreiben lässt.

Abbildung 4.10 stellt die gewöhnliche Voronoi-Zerlegung (links) der zentrischen Voronoi-Zerlegung(rechts) gegenüber. Im linken Bild sind die schwarzen Punkte als Generatoren der Voronoi-Regionen dargestellt. Demgegenüber beschreiben die Punkte mit weißer Füllung den Schwerpunkt der Voronoi-Regionen. Für das CVT auf der rechten Seite sind Generatoren und Schwerpunkte gemäß Gleichung 4.65 koinzident.

Aufgrund der Anforderung, dass die Inhalte der einzelnen Voronoi-Regionen ähnlich groß sein müssen, lässt sich für Stützstellenmengen auf Basis von CVT-Verfahren eine sehr gute volumetrische Uniformität ableiten, was zusätzlich anhand der Abbildungen 4.10 und 4.12 d) gut erkennbar ist. Auf der anderen Seite lässt sich eine hohe Diskrepanz von CVTs zu einer Gleichverteilung auf den Parameterachsen im Vergleich zum Latin-Hypercube aus Unterabschnitt 4.5.2.3 feststellen.

Numerisches Verfahren zur Erstellung von CVTs CVTs müssen iterativ ermittelt werden, da es keine direkte algebraische Vorschrift zur Erstellung gibt. Laut Ju [122] sind verschiedene numerische Verfahren möglich, die zur Lösung eingesetzt werden können. Ju schlägt in seinem Algorithmus 1 vor, dass zunächst initiale Generatoren x_i mithilfe eines anderen Versuchsplans, wie z.B. der Monte-Carlo-Methode, erzeugt werden. Anschließend wird ein Punkt iterativ zufällig erzeugt, welcher gewichtet mit dem nächstliegenden Generator x_i den Generator x_i für die nächste Iteration liefert. Dieser Prozess wird so oft wiederholt, bis ein Konvergenzkriterium erreicht wird. Obwohl dieses probabilistische Verfahren pro Iteration geringe Kosten verursacht, benötigt es viele Iterationen, um zu konvergieren.

Algorithmus 2 verwendet auch initiale Generatoren x^i, die mithilfe eines anderen Versuchsplans erstellt werden. Mit diesen Generatoren werden die Voronoi-Regionen V_i und ihre Schwerpunkte $\overline{x}^i$ geometrisch ermittelt. Diese Schwerpunkte werden dann als neue Generatoren verwendet, um den Prozess iterativ fortzusetzen. Im Gegensatz zum vorherigen Algorithmus ist dieses Verfahren deterministisch, solange die gleichen initialen Generatoren verwendet werden. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist jedoch der hohe numerische Aufwand, der in jeder Iteration erforderlich ist, um die Voronoi-Regionen und ihre Schwerpunkte zu ermitteln.

Ju beschreibt den dritten Algorithmus als eine Generalisierung der beiden zuvor vorgestellten Verfahren, da er eine Kombination beider Ansätze darstellt. Da Ju dieses Verfahren als vorteilhaft im Vergleich zu den vorherigen beiden Verfahren ansieht, wird es in dieser Arbeit angewendet und ausführlich vorgestellt.

Algorithmus. In der Region $\hat{\Omega}$ mit der Stützstellenanzahl n werden diese Schritte durchgeführt:

1. Es werden eine natürliche Zahl n_q mit $n_q > 0$ und die reellen Werte $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ gewählt, sodass gilt $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0,\ \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ und $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Eine initiale Stützstellenmenge X wird z.B. mithilfe der Monte-Carlo-Methode 4.5.2.2 bestimmt. Die Größen $k_i = 1$ mit $i = 1 \dots n$ werden gesetzt.

2. Es werden n_q Stützstellen $Z = (z^1, \dots, z^{n_q})$ beispielsweise mit der Monte-Carlo-Methode gewählt.

3. Für alle $i = 1 \dots n$ werden die Mengen W_i erstellt und die Punkte z_j, die in der Voronoi-Region V_i (Gl. 4.64) liegen, der Menge W_i zugeordnet. Ist W_i leer, wird zu 4. gesprungen. Anderenfalls wird das arithmetische Mittel $\overline{u}_i$ mit $\overline{u}_i = E[W_i]$ ermittelt und

$$x^i \leftarrow \frac{(\alpha_1 k_i + \beta_1)x^i + (\alpha_2 k_i + \beta_2)\overline{u}^i}{k_i + 1} \tag{4.67}$$

sowie

$$k_i \leftarrow k_i + 1 \tag{4.68}$$

gesetzt. Die neuen x^i beschreiben die neuen Stützstellen, die in der nächsten Iteration verwendet werden.

4. Erfüllen die neuen x^i ein Konvergenzkriterium, so wird abgebrochen. Andernfalls wird bei Schritt 2 fortgefahren.

Werden für diesen Algorithmus $n_q = \alpha_1 = \beta_2 = 1$ und $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ gewählt, so erhält man das gleiche Verfahren wie in Algorithmus 1. Ist $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ und $\alpha_2 = \beta_2 = 1$, so nähert sich dieses Verfahren mit steigendem n_q an eine probabilistische Version des Algorithmus 2 an. In dieser Arbeit wird für die im Schritt 1 zu wählenden Parameter auf Basis der Erkenntnisse von Ju und Untersuchungen von Freund [4] $n_q = 5 \cdot n,\ \alpha_1 = 0.95,\ \alpha_2 = 0.05,\ \beta_1 = 0.5,\ \beta_2 = 0.5$ gewählt. Abbildung 4.11 verdeutlicht Schritt 2 und 3 aus dem Algorithmus. Mit Hilfe von Gleichung 4.67 werden die neuen Generatoren $(x^1_{neu}, \ldots, x^n_{neu})$ aus einer Linearkombination der alten Generatoren $(x^1_{alt}, \ldots, x^n_{alt})$ und der arithmetischen Mitteln $(\overline{u}^1, \ldots, \overline{u}^n)$ der Mengen $(W_1, \ldots, W_n)$ erzeugt.

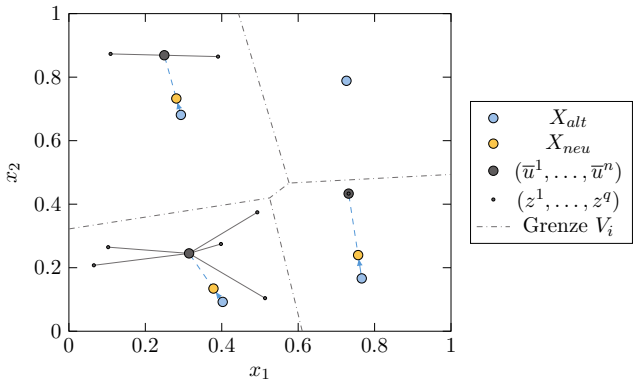


Abbildung 4.11.: Iterationsschritt aus Algorithmus 3 von Ju. Mithilfe einer Linearkombination der alten Generatoren X_{alt} und der arithmetischen Mittel $(\overline{u}^1, \ldots, \overline{u}^n)$ der Mengen $(W_1, \ldots, W_n)$ werden die neuen Generatoren X_{neu} erzeugt.

Als Metrik für ein Konvergenzkriterium verwendet Ju mit

$$\mathcal{K}(X, V) = \sum_{i=1}^{n} Var(V_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{V_i} |x - x^i|^2 \, dx \tag{4.69}$$

die Summe der Varianzen der Voronoi-Regionen. Aufgrund fehlender Angaben zu Schwellenwerten in der Veröffentlichung lässt sich das Kriterium ohne weiterführende Untersuchungen auf die Problemstellung in der Arbeit nicht anwenden. Stattdessen kommt eine Metrik nach [123] zum Einsatz. Beide Konvergenzkriterien konvergieren jedoch nicht monoton gegen einen Wert, was eine robuste Verwendung erschwert. Freund [4] definiert daher als Kriterium für die

Konvergenz des Verfahrens, wenn der zu einem Iterationsschritt ermittelte niedrigste Wert für die folgenden 10 Iterationen nicht unterschritten wird. Diese Annahme wurde auf Basis verschiedener Parameterstudien getroffen.

4.5.2.5. Latinisierte zentrische Voronoi-Tesselierung

Um den Nachteil der hohen Diskrepanz von CVTs zu umgehen, führt Saka [121] die Latinisierung von Stützstellenmengen ein, die er auf CVTs anwendet und als Latinized Centroidal Voronoi Tesselation (LCVT) bezeichnet.

Algorithmus. Gegeben sei die Anzahl der Parameter d, der Anzahl der Stützstellen n, $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, d$ und die Stützstellen $X = (x^1, \ldots, x^n)$ mit $x^i = (x^i_1, \ldots, x^i_d)^T$ und $\forall x^i \in [0, 1]^d$.

Für jedes $k = 1, \ldots, d$ werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Sortiere X nach dem k-ten Parameter. Die sortierten Stützstellen seien $Z = (z^1, \ldots, z^n)$.
2. Setze den k-ten Parameter jeder Stützstelle i in Z so, dass sie ihrer Sortierung nach gleichmäßig im Entwurfsraum verteilt sind.

$$z^i_k \leftarrow \frac{i-1}{n-1} \tag{4.70}$$

   Die resultierenden Stützstellen seien wieder X.

Wie in Abbildung 4.12 e) dargestellt, weist das LCVT eine weiterhin hohe volumetrische Uniformität aber eine deutlich niedrigere Diskrepanz im Vergleich zu seinem ursprünglichen CVT aus Abbildung 4.12 d) auf.

4.6. Diskussion zur Eignung und Auswahl der Verfahren

Die im Kapitel erläuterten Methoden zur Modellierung räumlich-variierender Größen und Stützstellenplanung werden an dieser Stelle im Hinblick auf die Fragestellung der vorliegenden Arbeit eingeordnet und problem-spezifische Methoden ausgewählt.

Stochastische Parametrisierung der OoP-Welligkeit

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt wurde, stellt eine wesentliche Herausforderung bei der nichtdeterministischen Betrachtung von OoP-Welligkeiten die geringe Menge verfügbarer Messdaten in der Literatur dar. Dieser Aspekt erschwert insbesondere einen quantitativen Vergleich der verschiedenen Korrelationsfunktionen zur räumlichen Modellierung (siehe Abschnitt 4.3.1), der als Teilschritt zur geometrischen Modellbeschreibung erforderlich ist. Die Auswahl der für

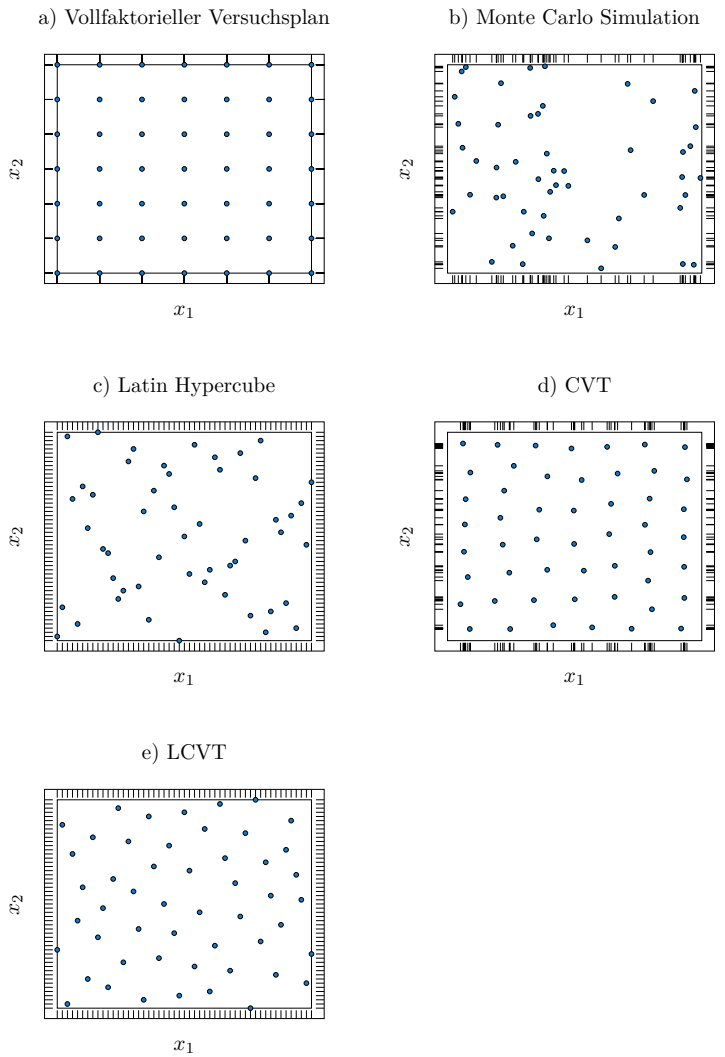


Abbildung 4.12.: Beispielhafte Stützstellenverteilung verschiedener Versuchspläne mit 51 Stützstellen im normierten Entwurfsraum $\Omega = [0,1]^d$ [4] a) Vollfaktorieller Versuchsplan (49 Stützstellen), b) Monte Carlo, c) Latin Hypercube, d) CVT, e) LCVT

die vorliegende Arbeit verwendeten Methoden wird daher aus qualitativen Gesichtspunkten mithilfe der Literatur getroffen und für die Fragestellung der Arbeit motiviert.

Trotz der beschriebenen Herausforderung lassen sich dennoch Ansätze der Literatur für eine Bewertung heranziehen. Die ausgewählten Methoden basieren im Wesentlichen auf einer optischen Vermessung von CFK-Materialproben. Chen [46] beschreibt zu diesem Zweck einen deterministischen Algorithmus, der anhand von Schnittbildern von Materialproben aus glasfaserverstärktem Kunststoff (GFK) eine Erkennung der einzelnen Lagen des Laminats durchführt. Unter der Annahme eines spezifischen analytischen Modells der Lagenwelligkeit werden bezogen auf die vorliegenden Messdaten in einem weiteren Prozessschritt die freien Parameter des Grundmodells entsprechend bestimmt und festgelegt. Aufgrund der begrenzten optischen Auflösung werden in einem finalen Schritt Zwischenbereiche des Laminats, welche nicht genau erfasst werden können, durch Interpolation parametrisch beschrieben. Zur besseren Übersicht stellt Abbildung 4.13 exemplarisch die einzelnen Berechnungsschritte des vorgestellten Verfahrens dar. Wie angedeutet handelt es sich um ein rein deterministisches Verfahren, bei dem für jede Schnittprobe unabhängig voneinander die Parameter des Welligkeitsmodell ermittelt werden.

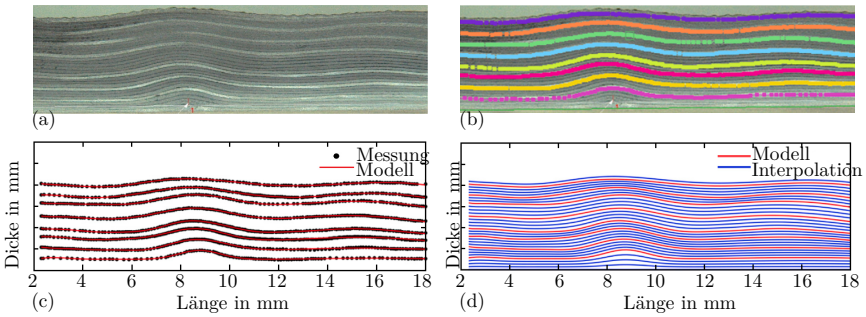


Abbildung 4.13.: Ergebnisse einzelner Prozessschritte bei der Übertragung von optischen Messungen an GFK-Schnittproben in ein Interpolationsmodell zur numerischen Modellableitung[46].

Zur formalen Parametrisierung der ondulierten Lagengeometrie wird zunächst die Annahme getroffen, dass diese sich mittels Überlagerung von Gaußschen Funktionen beschreiben lässt:

$$
\begin{aligned}
F_i(x_i) &= \sum_{j=1}^{N_i^{Gauss}} f_j(x_i) \quad mit \\
f_j(x_i) &= a_{ij} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x_i - b_{ij})^2}{c_{ij}^2}\right) \\
&(i = 1, 2, \ldots, N_{inspect}, j = 1, 2, \ldots, N_i^{Gauss})
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

Die Gleichung 4.71 und insbesondere die Anzahl überlagerter Gauß-Funktionen wird für jede Lage i individuell bestimmt. Die Variable x_i beschreibt die horizontale Position eines beliebigen Punkts in der einzelnen Lage. Die Bestimmung der Parameter a_{ij}, b_{ij} und c_{ij} erfolgt dann automatisiert und mittels numerischer Fitting-Verfahren. Im Hinblick einer stochastischen Herangehensweise lässt sich Gleichung 4.71 als deterministische Implementierung der gaußschen Kovarianzfunktion interpretieren.

Sandhu [3] stellt demgegenüber ein Verfahren zur stochastischen Welligkeitsmodellierung am Beispiel einer gekrümmten CFK-Flügelholmstruktur dar, an der eine Erfassung der inneren Materialstruktur mithilfe eines Ultraschall-Messverfahrens durchgeführt wurde. Die innere Materialparametrisierung wird in der Veröffentlichung durch einen KLE-basierten Ansatz gemäß

$$W(\mathbf{x}, \xi) = g_1(x_1) g_3(x_3) \sum_{i=1}^{N_w} a_i f_i(x_1, \lambda) \tag{4.72}$$

beschrieben. Die Terme f_i in Gleichung 4.72 repräsentieren die ersten N_w KLE-Eigenmoden (siehe Abschnitt 4.4.2) auf Basis einer gewählten Kovarianzfunktion. In der Veröffentlichung wird eine quadratisch-exponentielle Kovarianzfunktion mit

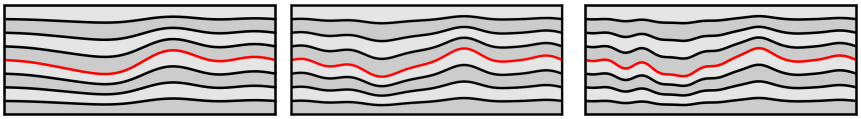
$$Cov(x_1, x_2) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{\lambda^2}\right) \tag{4.73}$$

verwendet.

Darauf aufbauend und im Zusammenhang mit der Arbeitshypothese 1 lässt sich abschließend festhalten, dass mithilfe der beschriebenen Methoden der ZF-Modellierung eine allgemeine räumlich-stochastische Parametrisierung der OoP-Welligkeiten möglich ist. Im Konkreten eignen sich für den Anwendungsfall in der Arbeit quadratisch-exponentielle bzw. gaußsche Kovarianzfunktionen zur Beschreibung der räumlichen Korrelation im Material. Die Funktionen haben zudem aufgrund der unendlichen Ableitbarkeit [110] aus numerischen Gesichtspunkten (z.B. Glattheit der Funktion, vgl. Gleichung 4.55 bis 4.57) vorteilhafte Eigenschaften.

Die Wahl der Methode kann an dieser Stelle jedoch nur aus qualitativer Sicht getroffen werden. Angewendet auf das Anwendungsszenario der Arbeit zeigt Abbildung 4.14 für eine idealisierte, ebene CFK-Materialgeometrie exemplarisch die Modellierung einer im Material vorhandenen Welligkeit, die mit einer Gaußschen Kovarianzfunktion modelliert wurde. Die unterschiedlichen Detailstufen repräsentieren die verschiedenen Genauigkeiten der KLE-basierten ZF-Beschreibung. Aufgrund der ähnlichen Vorgehensweise zu [3] sind die dargestellten Ergebnisse und Abbildung vergleichbar.

Im Vergleich zu [3] und [46] wird die stochastische Parametrisierung zudem auf drei-dimensionale Materialgeometrien erweitert, was aufgrund der allgemeingültigen Definition von ZF einfach



(a) 6 Moden (b) 12 Moden (c) 20 Moden

Abbildung 4.14.: KLE-basierte Modellierung einer Out-of-Plane Welligkeit aufgetragen an einem zweidimensionalen Schnitt eines exemplarischen Faserverbundlaminats für verschiedene Anzahl an KLE-Variablen. Das durch KLE-beschriebene Zufallsfeld ist rot markiert.

realisierbar ist. Analog zu [3] lässt sich des Weiteren die Nutzung der KLE-Methode motivieren. Die empirische Bestimmung einer geeigneten Kovarianzfunktion erfolgt grundsätzlich auf Basis vorhandener experimenteller Daten. Bei Verwendung optischer Messverfahren ist hierbei zu berücksichtigen, dass die dafür genutzte Messtechnik immer eine spezifische, maximale Auflösung besitzt. Diese Grenze ermöglicht es sowohl aus praktischer Sicht und mit Blick auf eine effiziente Bewertung auf Basis numerischer Simulationen, das theoretische Korrelationsmodell des ZFs durch ein vereinfachtes Modell darzustellen. Dies ist durch die KLE-Methode realisierbar, bei der eine reduzierte Menge an Eigenfunktionen der Kovarianzfunktion bestimmt wird, deren erforderliche Anzahl an die optische Genauigkeit gekoppelt werden kann. Eigenfunktionen höherer Ordnung können infolge dessen vernachlässigt werden, sofern sie höherfrequente Bestandteile der räumlich-stochastischen Modellierung repräsentieren, die aufgrund von Auflösungsgrenzen experimentell nicht nachgewiesen werden können.

Bewertung der Verfahren zur DOE-Erstellung

Neben der Auswahl der räumlichen Geometriebeschreibung der OoP-Welligkeit ist für eine genaue stochastische Analyse der strukturmechanischen Auswirkungen die Auswahl eines effizienten Verfahrens zur Stützstellenplanung von Bedeutung. Trotz der vereinfachten ZF-Modellierung im Rahmen der KLE-Methode mittels einer reduzierten Anzahl an Eigenfunktionen liegt die Anzahl an stochastischen Variablen des ZFs in Abhängigkeit des Verhältnisses von Korrelationslänge zur Modellgröße in der Größenordnung zwischen 50-200. Dies schränkt die Auswahl geeigneter DOE-Verfahren stark ein.

Für eine quantitative Bewertung der erläuterten DOE-Verfahren sind die in Abschnitt 4.5.1 beschriebenen Metriken anzuwenden und die Ergebnisse entsprechend miteinander zu vergleichen. Zu diesem Zweck untersucht Saka [121] verschiedene Verfahren zur Stützstellengenerierung, darunter LHS, ILHS, Hammersley Sequenzen und Halton Sequenzen. Es stellte sich heraus, dass das LCVT-Verfahren die besten Eigenschaften bzgl. Uniformität und Diskrepanz als Vergleichskriterium hat. Da in der Publikation ein Vergleich nur für Stützstellenmengen geringer Dimension durchgeführt wurde, sind die Erkenntnisse im hochdimensionalen Kontext der

Arbeit allerdings kritisch zu prüfen und einzuordnen. Aufgrund der vorteilhaften Eigenschaften des LCVT-Verfahrens wird dieses dennoch im Rahmen der Studien der Arbeit verwendet. Für die robuste und effektive Nutzbarkeit des Verfahrens bei normalverteilten Eingangsgrößen ist neben der Wahl geeigneter Steuerungsvariablen des Algorithmus darauf zu achten, dass die Lage der generierten Punkte auf den Rändern des normierten Entwurfsraums $\tilde{\Omega}$ (siehe Gleichung 4.58) korrigiert werden müssen. Dies liegt in der Definition der inversen CDF der Normalverteilungen begründet, die für Werte von 0 und 1 nicht definiert ist. In der Arbeit werden die Punkte daher jeweils um einen Faktor ϵ verschoben, um gültige Werte bestimmen zu können. Dieser wird mit $\epsilon = 10^{-6}$ entsprechend klein gewählt, um die Variabilität des ZFs nur geringfügig einzuschränken.

Ein alternatives Verfahren stellt der WSP-Algorithmus dar [115]. Die Methode basiert auf einem iterativen Ansatz zur Erzeugung von Stützstellen, indem schrittweise einzelne Punkte entfernt werden, die innerhalb eines festgelegten minimalen Abstands d_{min} zu bereits ausgewählten Punkten der Stichprobe liegen und somit die Qualität der Bewertungsmetrik mindern könnten. Aufgrund der Methodik kann folglich eine hohe Anzahl initial zu erzeugender Stützstellen erforderlich sein, um die gewünschte Zielgröße der Stichprobe zu erreichen. Zudem erfolgt die Auswahl eines angemessenen Werts für den Abstand d_{min} auf Basis numerischer Optimierungsverfahren, die für die betrachteten Stützstellenanzahlen und Dimensionen der Abhandlung spezifisch durchgeführt wurden. Eine unmittelbare Verwendung im Rahmen der Fragestellung der Arbeit erscheint somit ohne größeren Aufwand schwierig.

Aufgrund der Dimensionsgröße des stochastischen Problems ist abschließend anzumerken, dass alle in der Literatur verfügbaren Verfahren zur Stützstellengenerierung stets nur einen Ausschnitt des gesamten Parameterraums der Eingangsvariablen abdecken, da das Gesamtvolumen mit steigender Dimensionsanzahl exponentiell wächst. Dies wird allgemein auch *Fluch der Dimensionen* bezeichnet [118]. Neben der theoretischen Problemkomplexität steigt zudem auch der Berechnungsaufwand im technischen Sinne aufgrund der umfangreichen Datenhaltung und Speicherung als Bestandteil der Algorithmen. Dies kommt insbesondere bei der Anwendung geeigneter Distanzmaße $dist\left(x^i, x^k\right)$ zur Bestimmung der Abstände einzelner Stützstellen x^i und x^k im n-dimensionalen Raum wesentlich zum Tragen.

5. Strukturmechanische Bewertung von Welligkeiten

Im folgenden Kapitel werden die wesentlichen Prinzipien der physikalischen Mechanismen bei der strukturmechanischen Analyse von räumlich-verteilten Welligkeiten dargelegt. Darauf aufbauend wird ein Bewertungsprozess unter Berücksichtigung stochastischer Effekte bzw. Einflüsse erläutert.

5.1. Vorbetrachtung im Kontext stochastischer Analysen

Die in Kapitel 4 beschriebenen stochastischen Methoden zur räumlichen Parametrisierung von OoP-Welligkeiten werden im Folgenden zur Bewertung der strukturmechanischen Auswirkungen in CFK-Materialien mithilfe numerischer Verfahren verwendet. Zu diesem Zweck wird initial ein numerisches Modellierungs- und Bewertungskonzept dargelegt und diskutiert, was für allgemeine Strukturen aus CFK anwendbar ist. Das Konzept ist in seinen wesentlichen Grundzügen in Abbildung 5.1 zudem veranschaulicht. Für eine allgemeingültige Anwendung sind die in Abschnitt 4.3 beschriebenen Methoden zur ZF-Modellierung daher auf flächige CFK-Strukturen anzuwenden.

Das verteilte Auftreten von OoP-Welligkeiten im Bauteil kann grundsätzlich aufgrund des komplexen Zusammenspiels von Fertigungsprozess- und Materialeinflüssen sehr schwer abgeschätzt werden. Erschwerend hinzu kommen hohe Kosten bei der Fertigung von CFK-Bauteilen und nachfolgender Vermessung von Störungen in der Struktur, die eine valide, statistische (d.h. auf Basis einer hinreichenden Probengröße physischer Bauteile, vgl. Abb. 5.1 I.)) Ableitung spezifischer Parameter von ZF-Modellen stark einschränken. Ungeachtet des Stichprobenumfangs gefertigter Bauteile stellt eine Betrachtung auf der Gesamtstrukturebene die numerische ZF-Parametrisierung vor Herausforderungen. Im Zusammenhang mit den theoretischen Ausführungen im vorangegangenen Kapitel ist das Verhältnis der Korrelationslängen l_c (siehe Abschnitt 4.3.1) zu den Bauteilabmessungen, unabhängig vorhandener empirischer Messdaten, i.d.R sehr groß. Dies erfordert entsprechend Abbildung 4.7 bei einer Betrachtung des ZFs auf der Bauteilstrukturebene eine sehr große Anzahl an unabhängigen stochastischen Variablen, die mit steigendem Verhältnis nahezu exponentiell steigt (siehe Abb.5.1 II.)). Zur Lösung stellt Panunzio[124] einen Algorithmus vor, der die initiale Formulierung in disjunkte Teilbereiche

aufteilt und zunächst eine entkoppelte ZF-Betrachtung in den Bereichen vornimmt. In einem nächsten Schritt wird die globale Korrelation durch Konditionierung der Teilbereiche wiederhergestellt. Die Komplexität und Umfang des Lösungsraums einer Welligkeitsformulierung auf der globalen Gesamtstrukturebene bleibt aus formaler Sicht dennoch bestehen.

Trotz der theoretischen Realisierbarkeit ist das grundsätzliche Vorgehen einer globalen, einheitlichen ZF-Beschreibung als eingeschränkt gültig anzusehen. Nicht-deterministische Fertigungseinflüsse führen im Allgemeinen zu einer inhomogenen und instationären Welligkeitsverteilung und lassen sich daher in Abhängigkeit der Bauteilcharakteristik in verschiedene Bereiche unterschiedlicher Intensität einteilen. Ebene Strukturen neigen grundsätzlich zu einer geringeren Ausbildung von Welligkeiten im Vergleich zu gekrümmten und versteiften Strukturen. Materialinhomogenitäten entstehen bei letzterem z.B. durch unterschiedliche Aushärtegrade und Steifigkeiten zwischen Haut und Versteifungselementen, welche die Ausbildung der Welligkeiten am Übergang der Subkomponenten während der gemeinsamen Aushärtung begünstigen können. Einen möglichen Lösungsansatz zur Beschreibung inhomogener Welligkeitsverteilungen stellt die Verwendung von instationären ZFs dar [125]. Aus formalen Gesichtspunkten erweitern instationäre ZFs die in Kapitel 4 u.a. durch die Annahme einer räumlich variablen Mittelwertfunktion (siehe Gleichung 4.13) bzw. Varianz. Die zuvor beschriebenen Herausforderungen der ZF-Modellierung, insbesondere bei der numerischen Simulation von ZFs, auf der globalen Bauteilskala gelten jedoch auch hier [126, 127]. Im weiteren Verlauf wird daher eine Methodik angewendet, die das Prinzip der getrennten Teilbereiche in [124] aufgreift. Die einzelnen Teilbereiche des numerischen Berechnungsmodells der globalen Struktur werden daraufhin unabhängig voneinander betrachtet, d.h. die Parameter der zugeordneten ZFs können mit unterschiedlichen nominellen Werten versehen werden (siehe Abb. 5.1 III.a)) .

Die strukturmechanische Bewertung des Einflusses von stochastischen Welligkeiten auf die Tragfähigkeiten einer Struktur erfolgt in einem Teilschritt mittels etablierter numerischer Berechnungsmethoden. Zur Modellierung und Lösung wird die FEM verwendet, wobei die Struktur in Teilbereiche sogenannte finite Elemente unterteilt wird. Da eine detaillierte, räumliche Auflösung des Strukturmodells zu rechenintensiv ist, gibt es eine Reihe von Idealisierungen für dünnwandige Strukturen. So wird die Verformung mit Hilfe von finiten Schalenelemente [128] approximiert und das Laminat mit der klassischen Laminattheorie (CLT) beschrieben [37]. Die CLT geht dabei von einem idealen Mehrschichtverbund aus, was jedoch für die in der Arbeit betrachteten Welligkeiten in OoP-Richtung nicht an jeder Position im Laminat gültig ist. Daraus resultiert als Folge die wesentliche Herausforderung einer physikalisch fundierten Repräsentation der Einflüsse von Welligkeitsdefekten in Form von entsprechenden Verteilungen der Materialparameter in den einzelnen finiten Elementen der Gesamtstruktur.

Um die lokale Heterogenität des Materials aufgrund der Welligkeiten im Rahmen der FEM bei dünnwandigen Strukturen dennoch ausreichend genau abzubilden, können unterschiedli-

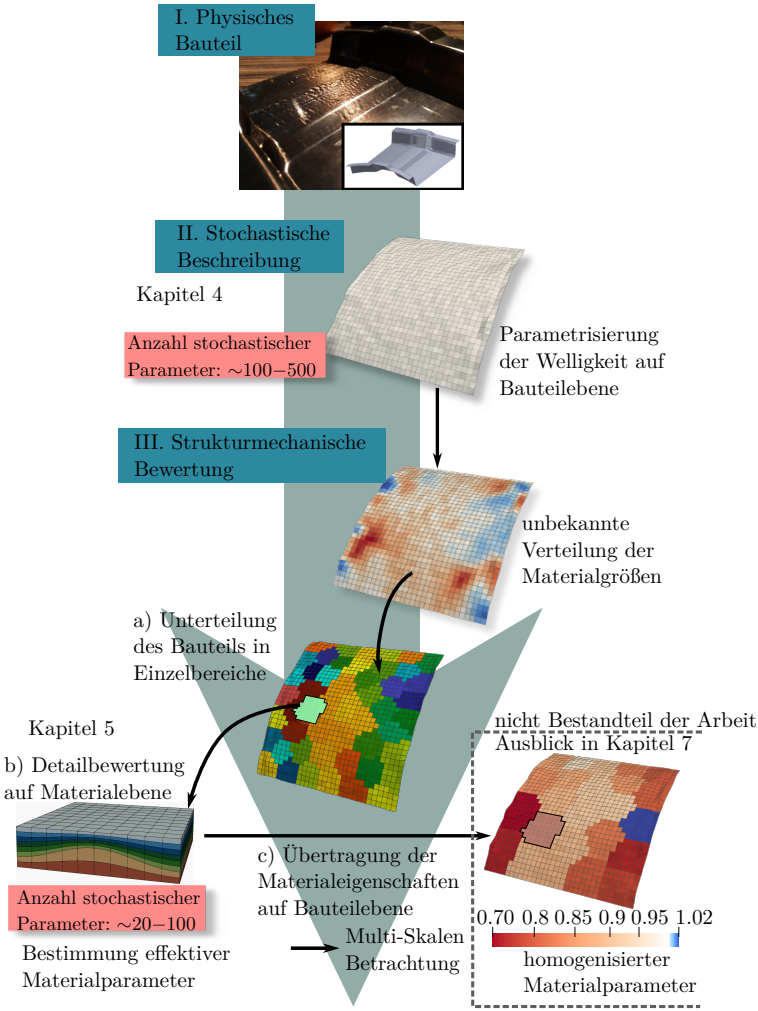


Abbildung 5.1.: Schematische Darstellung eines Konzeptes zur Bestimmung von Materialgrößen unter dem Einfluss stochastischer OoP-Welligkeiten für eine idealisierte CFK-Struktur.

che Betrachtungsebenen des Materials mithilfe hochaufgelöster mikromechanischer Modelle miteinander gekoppelt werden (siehe Abb. 5.1 III.b)). Diese Betrachtung wird in der Literatur auch als Multi-Skalen Analyse (MSA) bezeichnet [129–131]. Die MSA ermöglicht die Bestimmung von homogenisierten Materialeigenschaften mithilfe der mikromechanischen Modelle eines Materialausschnitts unter Berücksichtigung von spezifischen Randbedingungen und äußeren Lasten, die von der globalen Betrachtungsebene (Bauteilskala) abgeleitet werden. Die ermittelten Materialgrößen (im wesentlichen Steifigkeits- und Festigkeitskenngrößen) können dann qualitativ auf die Bauteilebene transformiert werden (siehe Abb. 5.1 III.c)). Eine Betrachtung der Auswirkungen auf Bauteilebene ist jedoch nicht Bestandteil der Arbeit.

Mithilfe der MSA erfolgt eine lokale und voneinander unabhängige Betrachtung der Teilbereiche der Struktur. Ein nicht zu vernachlässigender Fehler entsteht durch die Annahme spezifischer Randbedingungen und Lasten des repräsentativen Materialausschnitts. Durch eine entkoppelte Betrachtung der Materialauschnitte des idealisierten Bauteils ist zudem die Kontinuität der ZF-Formulierung verletzt. Die Anwendung der MSA zur Beantwortung der Fragestellungen der Arbeit kann dennoch begründet werden. Es ist zunächst davon auszugehen, dass infolge einer verteilten Welligkeitsparametrisierung eine Veränderung der effektiven Materialeigenschaften durch Lastumlagerungen nur in einem begrenzten Radius eines beliebigen Punkts innerhalb der Bauteilgeometrie auftritt und dieser Effekt schnell abklingt.

Aufgrund dieses Sachverhalts hat die Wahl einer angemessenen Größe des Materialausschnitts einen direkten Einfluss auf die Genauigkeit der MSA. Abbildung 5.2 verdeutlicht diesen Punkt schematisch. Ist der Ausschnitt zu klein gewählt (grauer Bereich in Abbg. 5.2), so können neben der intrinsischen Veränderung der lokalen Materialeigenschaften zusätzliche Überlagerungseffekte aufgrund von Einflüssen der idealisierten Modellrandbedingungen und Lasten im Rahmen der Modellbildung entstehen, welche eine erhöhte Varianz der effektiven Materialkennwerte zu Folge haben kann. Als vorteilhaft stellt sich allerdings die geringere stochastische Komplexität aufgrund des größeren nominellen Verhältnisses aus Modellgröße und ZF-Korrelationslänge dar, was eine geringere Anzahl variabler Eingangsgrößen erfordert. Demgegenüber ist mit einer zu großen Wahl (blauer Bereich in Abbg. 5.2 rechts) des Materialausschnitts ein gegensätzliches Verhalten zu erwarten. Hierbei sind die resultierenden Unsicherheiten durch die Modellidealisierungen der MSA als vernachlässigbar einzustufen, sodass die stochastischen Verteilungen der homogenisierten Materialeigenschaften ausschließlich durch die Materialinhomogenität aufgrund der OoP-Welligkeit entstehen. Eine Vergrößerung des Materialausschnitts bewirkt jedoch eine Zunahme des stochastischen Berechnungsumfangs, da die Anzahl der variablen Eingangsgrößen durch das abnehmende Verhältnis von Korrelationslängen und Modellabmaße steigt. Für eine genaue Bestimmung der Materialverteilungen ist somit eine große Anzahl an Stützstellen zu berechnen. Dies gilt jedoch nur solange, wie die Ausdehnung der stochastischen Welligkeitscharakteristik auf der makroskopischen

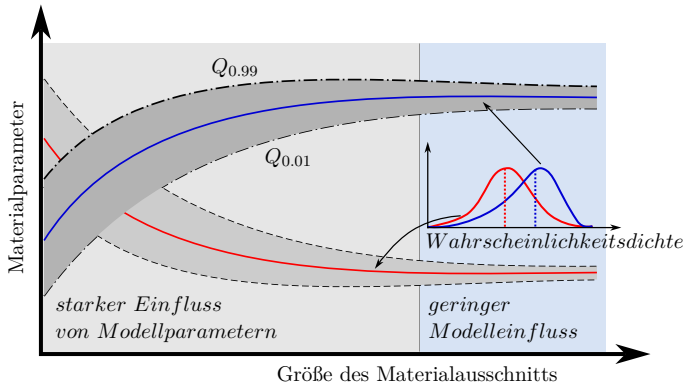


Abbildung 5.2.: Hypothetische Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer Materialgröße in Abhängigkeit der geometrischen Maße eines betrachteten Materialausschnitts unter Berücksichtigung von OoP-Welligkeiten.[1]

Bauteilebene gegeben ist. Zusätzlich zu geometrischen Überlegungen stellt sich die Frage des qualitativen Verhaltens jedes Materialparameters in Abhängigkeit der Größe des Materialausschnitts. Hierbei spielen erneut äußere Modellrandbedingungen und aufgeprägte Lasten eine wesentliche Rolle, die zu spezifischen Ausprägungen (rote und blaue Kurve in Abbg. 5.2) der Kenngrößen in Abhängigkeit der Modellgröße sowie deren allgemeine stochastische Parameterverteilung führen.

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Überlegungen bei der strukturmechanischen Bewertung von Welligkeiten werden nun aus formaler, mathematischer Sicht im Detail beleuchtet. Ausgewählte und im Detail erläuterte Berechnungskonzepte in den Abschnitten 5.2 bis 5.5 basieren dabei auf den Vorarbeiten und Erläuterungen in [132].

5.2. Strukturmechanische Grundlagen von Faserverbundwerkstoffen

Grundlage weiterführender Untersuchungen ist die Definition eines Modells des Materialverhaltens von CFK-Materialien. Ein angemessenes Modell stellt das Hookesche Materialmodell dar, welches den linearen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Dehnungsfeldgrößen darstellt. Es verknüpft die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ über den Elastizitätstensor $\boldsymbol{C}$

[1] Es wird angenommen, dass für jede Größe des Materialausschnitts identische stochastische Welligkeitsparameter (z.B. Korrelationslänge) vorliegen. Die Größen $Q_{0.99}$ und $Q_{0.01}$ repräsentieren sogenannte p-Quantile Q_p. Sie kennzeichnen eine reelle Zahl x_p, unterhalb der ein vorgegebener Anteil p aller Fälle einer Verteilung (bzw. Stichprobe von) X liegt. Es gilt $P(X \leq x_p) \geq p$.

miteinander:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{5.1}$$

Mithilfe der Einsteinschen Summenkonvention lässt es sich wie folgt ausdrücken:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{5.2}$$

Hierzu gibt Abbildung 5.3 die an einem Materialausschnitt auftretenden Feldgrößen wieder.

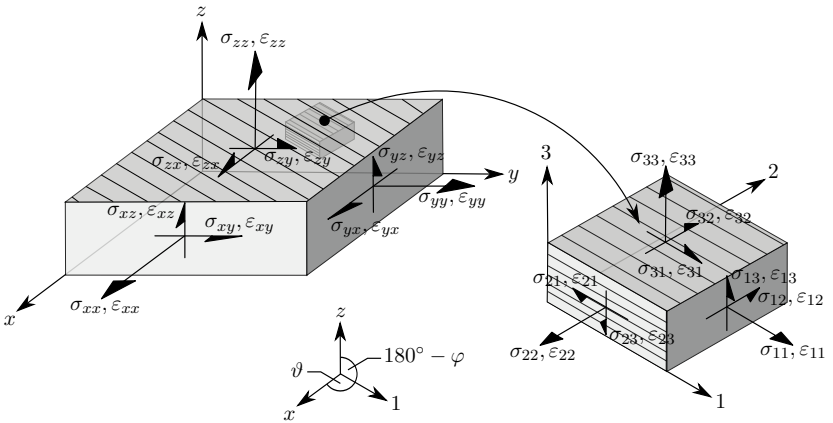


Abbildung 5.3.: Spannungs- und Dehnungskomponenten an einem Materialausschnitt, beschrieben im lokalen Materialkoordinatensystem $(1, 2, 3)$ und im globalen Referenzkoordinatensystem (x, y, z) nach [133]. Die Winkel ϑ und φ sind relevant für die Transfomation der Feldgrößen vom Materialkoordinatensystem in das Laminatkoordinatensystem.

Tabelle 5.1.: Gegenüberstellung von Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors und den zugeordneten sechsdimensionalen Vektoren.

Tensorkomponente σ_{ij}	σ_p	Tensorkomponente ε_{ij}	ε_p
σ_{11}, σ_{xx}	σ_1	ε_{11}, ε_{xx}	ε_1
σ_{22}, σ_{yy}	σ_2	ε_{22}, ε_{yy}	ε_2
σ_{33}, σ_{zz}	σ_3	ε_{33}, ε_{zz}	ε_3
$\sigma_{23} = \sigma_{32}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{32}$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{zy}$	ε_4
$\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$	σ_5	$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{31}$, $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{zx}$	ε_5
$\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{21}$, $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{yx}$	ε_6

Im Folgenden wird die indexbasierten Vektor-Matrix-Form (auch *Voigt*-Notation genannt) genutzt. Hierbei ist die Einsteinsche Summenkonvention entsprechend anzuwenden, indem

Tabelle 5.2.: Zuordnung der Komponenten des Elastizitätstensors zu den korrespondierenden Einträgen der Elastizitätsmatrix.

Tensorkomponente C_{ijkl}		Matrixkomponente C_{pq}	
ij:	11, 22, 33	p:	1, 2, 3
	23, 13, 12		4, 5, 6
kl:	11, 22, 33	q:	1, 2, 3
	23, 13, 12		4, 5, 6

über doppelt auftretende Indizes (von 1 bis 6) summiert wird (siehe Tabelle 5.1 und 5.2).

$$\sigma_p = C_{pq}\varepsilon_q, \text{ mit } p,q = 1\ldots 6, \tag{5.3}$$

Aus dieser Matrixschreibweise resultieren bis zu 21 unabhängige Parameter. Beim Entwurf und Auslegung von Strukturen aus CFK lassen sich jedoch aus der allgemeinen Formulierung Spezialfälle ableiten, welche sich im praktischen Gebrauch bewährt haben. Von größerer Bedeutung sind hierbei monotropes ($\boldsymbol{C}^{\text{Monotrop}}$), orthotropes ($\boldsymbol{C}^{\text{Orthotrop}}$) und transversalisotropes ($\boldsymbol{C}^{\text{Transversal Isotrop}}$) Materialverhalten. Vorteil der Spezialfälle ist eine Reduzierung der Anzahl unabhängiger Komponenten, welche sich durch Berücksichtigung zusätzlicher Materialsymmetrien ergibt. Im Weiteren wird angenommen, dass die 3-Achse orthogonal zu einer Materialsymmetrieebene (vgl. Abbildung 5.3) ist. Für den Fall von orthotropem Verhalten lassen sich drei orthogonale Symmetrieebenen im Material identifizieren (vgl. Abbildung 5.3). Dadurch reduziert sich für $\boldsymbol{C}^{\text{Orthotrop}}$ die Anzahl unabhängiger Steifigkeitskomponenten auf 9 (siehe Gleichung A.5). Aus praktischen Gründen werden für Ingenieuranwendungen oft die elastischen Eigenschaften eines orthotropen Werkstoffs durch drei Elastizitätsmoduln, drei Schubmoduln und drei Querkontraktionszahlen gemäß Gleichung A.6 ausgedrückt.

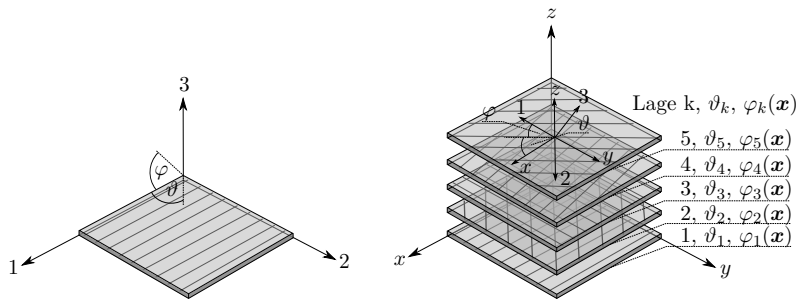
Die transversale Isotropie repräsentiert einen Sonderfall des orthotropen Materialverhaltens und ist für diverse Anwendungen im Maschinenbau von größerer Relevanz. Sie wird zudem für die weiterführenden Untersuchungen als Referenzmaterialmodell im Rahmen der numerischen Modellbildung in der Arbeit verwendet. Die Anzahl der unabhängigen Matrixeinträge reduziert sich für diesen Fall auf 5. Für die Elastizitätsmatrix $\boldsymbol{C}^{\text{Transversal Isotrop}}$ ergibt sich:

$$[C_{pq}]^{\text{Transversal Isotrop}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & \frac{1}{2}(C_{22}C_{33}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Zwischen den Ingenieurkonstanten lassen sich für den Fall transversaler Isotropie folgende

Beziehung herleiten:

$$E_{22} = E_{33},\ \nu_{12} = \nu_{13},\ G_{12} = G_{13} \text{ und } G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1+\nu_{23})}. \tag{5.5}$$



(a) Materialkoordinatensystem der Einzellage (lokal).

(b) Referenzkoordinatensystem des Laminats (global).

Abbildung 5.4.: Definition des Materialkoordinatensystems auf Einzellagenebene (Abb. (a)) und des globalen Referenzkoordinatensystems auf Laminatebene (Abb. (b)). Die Winkel ϑ und φ kennzeichnen die Rotation der Lagenorientierung in der Laminatebene bzw. aus dieser heraus in Laminatdickenrichtung (z-Achse).[132]

Zur Beschreibung eines Schichtverbunds aus Fasern beliebiger Orientierung ist ein entsprechendes Bezugssystem erforderlich (siehe Abbildung 5.4). Auf der Einzellagenebene ist das orthogonale Materialkoordinatensystem $(1, 2, 3)$ als Bezugssystem definiert. Die 1-Achse folgt hierbei der Faserorientierung (sog. Faserlängsrichtung) und die 2-Achse entspricht einer Orientierung quer zur Faser (auch Fasertransversalrichtung genannt). Die 3-Achse zeigt in Lagendickenrichtung (normal zur Lagenebene). In Abbildung 5.4(b) ist ergänzend ein weiteres orthogonales, globales Koordinatensystem (x, y, z) dargestellt, welches als zusätzliches Referenzkoordinatensystem für das Laminat dient. Die Winkel ϑ und φ beschreiben die jeweiligen Faserausrichtungen jeder Einzellage, wobei letzterer eine Auslenkung des Fasermaterials aus der Lagenebene in Richtung der z-Achse repräsentiert. Eine Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ bildet die Basis (e_1, e_2, e_3) des (lokalen) Materialkoordinatensystems in die Basis (e_x, e_y, e_z) des (globalen) Referenzkoordinatensystem ab. In allgemeiner Form enthält $\boldsymbol{T}$ die Richtungskosinus der neuen Koordinatenachsen (e_1, e_2, e_3) gemäß Gleichung A.7(vgl. [134]). Für die Darstellung gemäß der Voigt-Notation ergeben sich durch Anwenden von Transformationsgleichungen für Tensoren die Transformationsmatrizen $\boldsymbol{T}^\sigma$ und $\boldsymbol{T}^\varepsilon$ entsprechend Gleichung A.8 und A.9(s. [134]). Desweiteren sind folgende Zusammenhänge zwischen den Transformationsmatri-

zen gültig:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{T}^{\sigma})^{-1} &= (\boldsymbol{T}^{\varepsilon})^{T} = \boldsymbol{T}^{\sigma'} \\ (\boldsymbol{T}^{\varepsilon})^{-1} &= (\boldsymbol{T}^{\sigma})^{T} = \boldsymbol{T}^{\varepsilon'}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Die Gleichung 5.3 lässt sich nun, bei entsprechender Überführung in das globale Referenzkoordinatensystem, ebenfalls für den Schichtverbund anwenden. Gemäß Gleichung A.7 folgt daraus für die Transformation der Spannungen und Dehnungen von Ausgangsbasis $\boldsymbol{\sigma}$ in Zielbasis $\boldsymbol{\sigma}'$ (s. [134]):

$$\text{global} \rightarrow \text{lokal:} \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{T}^{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{5.7}$$

$$\text{global} \rightarrow \text{lokal:} \boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{T}^{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{5.8}$$

$$\text{lokal} \rightarrow \text{global:} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{T}^{\sigma'} \cdot \boldsymbol{\sigma}', \tag{5.9}$$

$$\text{lokal} \rightarrow \text{global:} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{T}^{\varepsilon'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'. \tag{5.10}$$

Im gleichen Maße lassen sich die Elastizitätsmatrizen transformieren. Es gilt (s. [134]):

$$\begin{aligned}\text{global} \rightarrow \text{lokal:} \boldsymbol{C}' &= \boldsymbol{T}^{\sigma} \cdot \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{T}^{\sigma})^{T}, \\ \text{lokal} \rightarrow \text{global:} \boldsymbol{C} &= (\boldsymbol{T}^{\varepsilon})^{T} \cdot \boldsymbol{C}' \cdot \boldsymbol{T}^{\varepsilon}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Größen, die in Gleichung 5.6 bis 5.11 mit einem Apostroph versehen sind, beziehen sich auf das Materialkoordinatensystem $(1, 2, 3)$. Dementsprechend lassen sich für die Spannungen σ_i' und Dehnungen ε_j' folgende Vektoren im Materialkoordinatensystem darstellen:

$$\sigma_i' = \begin{bmatrix} \sigma_{11}' \\ \sigma_{22}' \\ \sigma_{33}' \\ \sigma_{23}' \\ \sigma_{13}' \\ \sigma_{12}' \end{bmatrix} \text{ und } \varepsilon_j' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}' \\ \varepsilon_{22}' \\ \varepsilon_{33}' \\ \varepsilon_{23}' \\ \varepsilon_{13}' \\ \varepsilon_{12}' \end{bmatrix} \text{ mit } j = 1, 6. \tag{5.12}$$

Die mit den Indizes 11, 22 und 12 gekennzeichneten Spannungs- und Dehnungskomponenten bilden Spannungen bzw. Deformationen der Lagenebene in Faserlängsrichtung, quer zur Faser und durch intralaminaren Schub ab. Die durch 33 gekennzeichneten Komponenten beschreiben interlaminare Spannungen und Dehnungen normal zur Ebene einer Lage im Laminat. Die zwei übrigen Komponenten mit den Indizes 23 und 13 definieren interlaminare Schubkomponenten. Spannungen σ_i und Dehnungen ε_j, die auf das globale Referenzkoordinatensystem bezogen

sind, lassen analog zu Gleichung 5.12 wie folgt beschreiben:

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \text{ und } \varepsilon_j = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \text{ mit } j = 1, 6. \tag{5.13}$$

Aufbauend auf dem erläuterten theoretischen Fundament werden im Weiteren verschiedene Aspekte zur Bestimmung effektiver Festigkeitsgrößen diskutiert, um die Auswirkung von Materialinhomogenitäten am Beispiel der betrachteten OoP-Welligkeiten quantifizieren zu können.

5.3. Bestimmung effektiver Festigkeiten auf Basis von Versagensvorhersagen

5.3.1. Versagenscharakteristik von CFK-Materialien

Das charakteristische Materialversagen von Faserverbundwerkstoffen lässt sich aufgrund des inhomogenen Aufbaus und anisotropem Materialverhaltens in verschiedene Klassen einteilen. Diese sind zudem abhängig von der Betrachtungsebene (Konstituenten-, Lagen-, Laminat- und Gesamtstruktur) des Materials. Allgemeine Versagensformen von CFK sind [135]:

Faserversagen Faserversagen, was auch als Faserbruch bezeichnet wird, tritt bei Überschreitung der Faserfestigkeit in Zugrichtung auf und ist daher gewöhnlich einfach zu ermitteln (siehe Abbildung 5.5).

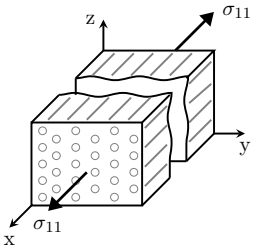
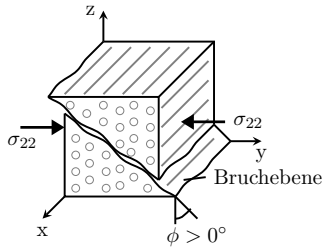
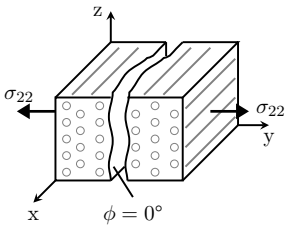


Abbildung 5.5.: Faserbruch aufgrund von Zugbelastung.

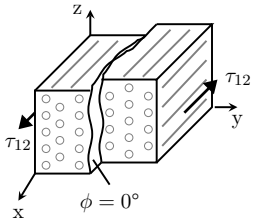
Matrixversagen Die auch Matrixbruch genannte Versagensart stellt intralaminares Versagen in der Einzellage dar, was wesentlich das Vorliegen von Rissen charakterisiert ist. Matrixdominierte Lastfälle (quer zur Faserrichtung und Scherung) rufen im allgemeinen Matrixversagen hervor. Abbildung 5.6 veranschaulicht grafisch die unterschiedlichen Belastungsarten, welche Matrixversagen verursachen.



(a) Druckbeanspruchung



(b) Zugbeanspruchung



(c) Matrixversagen durch Scherbeanspruchung in Faserrichtung.

Abbildung 5.6.: Matrixversagen durch transversale Zug- und Druckbeanspruchung quer zur Faserrichtung

Stabilitätsversagen Diese spezifische Versagensart, die auch als Faserknicken bekannt ist, resultiert aus der Einwirkung von Schub- oder Druckbelastungen. Grundsätzlich führt dies nicht sofort zum Versagen des Faserverbundwerkstoffs. Jedoch begünstigen größere Deformationen aufgrund der Belastungsart verschiedene andere Versagensmechanismen, die letztendlich zum vollständigen Ausfall des Materials führen können (siehe Abbildung 5.7).

Bindungsversagen (Lagendelamination) Bindungsversagen ist charakterisiert durch interlaminares Versagen zwischen Einzellagen. Es wird gewöhnlich durch Schubspannungen oder hohe Spannungen in Laminatdickenrichtung ausgelöst.

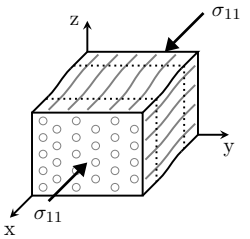


Abbildung 5.7.: Stabilitätsversagen durch Druckbeanspruchung.

5.3.2. Grundgedanken zur Versagensbewertung von OoP-Welligkeiten

Ungeachtet der umfangreichen Forschungsaktivitäten [136] ist es aktuell noch nicht gelungen, eine vollständige und validierte Methodik zur Versagensvorhersage von Faserverbundwerkstoffen zu identifizieren [135, 137]. Dies gilt insbesondere im Kontext materieller Schädigung, wie sie in der vorliegenden Arbeit untersucht wird. Die Gründe dafür sind vielschichtig und sind unter anderem in der phänomenologischen Komplexität der Schadensvorgängen im CFK begründet. Als Haupteinflussgrößen für den Schadensfortschritts und somit folglich das Materialversagen [135, 137, 138] zählen neben Geometrieparametern, der spezifische Lagenaufbau, die äußeren Belastungen sowie die Versagensart [139, S. 94].

Die Auswahl eines geeigneten Kriteriums zur Vorhersage der Schadensinitiierung und eine adäquate Gesetzmäßigkeit zu Schadensentwicklung zu definieren, ist daher mit großen Herausforderungen verbunden. Eine Vielzahl von Literaturquellen [135–137, 140–142] beschäftigen sich mit der Vorhersage von Schadensinitiierung und -entwicklung. Grundsätzlich lassen sich Versagenskriterien in drei Kategorien einteilen [138]:

- Grenzwertkriterien
- Interaktionskriterien
- Hybridkriterien

Grenzwertkriterien berücksichtigen Spannungs- oder Dehnungskomponenten individuell, während Interaktionskriterien eine Relation zwischen diesen zulassen. Hybridkriterien vereinen beide Ansätze.

Versagensmechanismen wie Faserbruch oder Matrixriss werden i.d.R auf der Lagenebene mithilfe analytischer Modelle beschrieben. Demgegenüber erfolgt auf der Laminatebene im Allgemeinen eine lagenweise Betrachtung unter Verwendung empirischer Modelle zur Beschreibung von Faser und Matrixversagen. Der Zusammenhang zwischen beiden Betrachtungsebenen ist allerdings nicht genau definiert. Hinzu kommen Details auf der Strukturebene wie Bohrungen oder Versteifungselemente, die einen zusätzlichen Einfluss auf die Schadensvorgänge der Lagen- und Laminatebene ausüben. Dies erschwert eine Verknüpfung der Kriterien in

den verschiedenen Betrachtungsebenen und beeinträchtigt folglich die Interpretation und Validierung der Ergebnisse.

Die ertragbare, einachsige Belastung eines anisotropen Materials, die ab dem Versagen eintritt, wird durch entsprechende Festigkeitskennwerte $\boldsymbol{R}$ beschrieben. Diese sind vielfach in Abhängigkeit der Richtung zu betrachten. Die Art der Belastung beeinflusst zudem wesentlich den Versagensmechanismus im Material [137], wobei eine Unterscheidung zwischen Zug- und Druckbelastung gemacht werden muss. In Verbindung mit Gleichung 5.12 sind die Einträge R_{ij} von $\boldsymbol{R}$ jeweils einer Spannungskomponente zugeordnet und in Tabelle 5.3 übersichtlich zusammengefasst.

Tabelle 5.3.: Zuordnung der Festigkeitskomponenten R_{ij} zu den entsprechenden Belastungsarten σ_k.

Belastungs-art	Belastungs-richtung	Festigkeits-komponente R_{ij}	Spannungs-komponente σ_k
Druck	faserparallel	$R_{11}^{(-)}$	$-\sigma_1$
	transversal	$R_{22}^{(-)}$	$-\sigma_2$
	transversal	$R_{33}^{(-)}$	$-\sigma_3$
Zug	faserparallel	$R_{11}^{(+)}$	σ_1
	transversal	$R_{22}^{(+)}$	σ_2
	transversal	$R_{33}^{(+)}$	σ_3
Schub	-	R_{12}	σ_6
	-	R_{13}	σ_5
	-	R_{23}	σ_4

Superskripte $(+), (-)$ kennzeichnen eine Zugfestigkeit $(+)$ bei Normalspannungen σ_k mit positivem bzw. eine Druckfestigkeit $(-)$ bei Normalspannungen σ_k mit negativem Vorzeichen.

Anhand der Literatur[143–149] kann des weiteren gezeigt werden, dass neben den zuvor beschriebenen Einflussgrößen zusätzlich die Position der Einzellage im Laminat Einfluss auf spezifische Festigkeitsgrößen haben kann. Dieses Phänomen kann u.a. auf die Stützwirkung benachbarter Lagen mit verschiedener Orientierung zurückgeführt werden, wodurch insbesondere transversale und Schubfestigkeiten einer Einzellage beeinflusst werden.

5.3.3. Formale Definition eines Versagenskriteriums

Spannungsbasierte Versagenskriterien (SVK) stellen das zentrale Hilfsmittel zur fundierten Versagensanalyse mittels mathematischer Verfahren dar [137]. Sie werden aus formaler Sicht durch allgemeine Funktionen f des vorliegenden Spannungszustandes $\boldsymbol{\sigma}$ und der materiellen Festigkeitskennwerte $\boldsymbol{R}$ repräsentiert. Jeder dieser Funktionen f transformiert $\boldsymbol{\sigma}$ in einen

skalaren Wert, welche häufig auch als Versagensindex (engl. *failure index*, FI) bezeichnet wird:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{R}) = FI. \tag{5.14}$$

Für das in Gleichung 5.14 beschriebene, allgemeine Kriterium lassen sich 3 verschiedene Fallunterscheidungen treffen. Für den Fall das $FI < 1$ entspricht, beschreibt dies den Materialzustand bei dem für alle Spannungszustände die Festigkeitsgrenzen noch nicht erreicht werden. Die Menge aller Spannungszustände, für die dieser Fall gilt, beschreibt den sogenannten *Versagenskörper*. Der Fall $FI = 1$ beschreibt eine Grenzfläche des Körpers, die die Grenzen der zulässigen Materialbelastung im sechsdimensionalen Spannungsraum repräsentiert. Die Durchstoßpunkte der Spannungsachsen mit der Grenzfläche entsprechen den Festigkeiten bei einachsiger Belastung. Für alle Zustände, bei denen $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{R}) > 1$ gilt, liegt Materialversagen vor.

Zu jedem Vektor im Spannungsraum lässt sich ein positiver Faktor, auch als Reservefaktor bezeichnet, $f_R(\boldsymbol{\sigma})$ (vgl. [150, S. 46]) bestimmen, der den Spannungszustand auf die Grenzfläche des Versagenskörpers projiziert:

$$f(f_R(\boldsymbol{\sigma}), \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{R}) = 1. \tag{5.15}$$

Da der Reservefaktor $f_R(\boldsymbol{\sigma})$ für $\boldsymbol{\sigma} = 0$ unendliche Werte annimmt ist daher aus Gründen der numerischen Robustheit die Verwendung der Materialanstrengung M der Definition des Reservefaktors vorzuziehen.

Analog zu Gleichung 5.14 überführt die Materialanstrengung M im gleichen Maße einen Vektor aus dem sechsdimensionalen Spannungsraum in eine skalare Größe. Der Skalar repräsentiert den Grad der Ausnutzung der Festigkeitsgrenzen des Materials. Die Materialanstrengung M ergibt sich im Allgemeinen durch Auswerten eines beliebigen Versagenskriteriums $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{R})$. M bestimmt sich wie folgt:

$$M = \frac{1}{f_R(\boldsymbol{\sigma})}. \tag{5.16}$$

Die Gleichung 5.16 besitzt jedoch nur Gültigkeit für den Fall, dass das Kriterium homogen vom Grad k in $\boldsymbol{\sigma}$ ist. Die Berechnung von M ist dementsprechend aufwendiger sobald $f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{R})$ verschiedene Polynomgrade von $\boldsymbol{\sigma}$ aufweist. Auf Basis der Materialanstrengung M lässt sich folglich die noch ertragbare Last des Materials bis zum Versagen ableiten [138, 151]. Durch Multiplikation des Spannungsvektors mit dem Reziproken von M, was einer gleichartigen Erhöhung aller Spannungskomponenten entspricht, ergibt sich die Versagenslast [150, S. 46ff.].

Im Kontext von Out-of-Plane Faserwelligkeiten kann die Annahme eines komplexen Spannungszustand getroffen werden, bei der insbesondere Spannungskomponenten in Laminatdickenrichtung auftreten können. Lokale Spannungskonzentrationen sind in diesem Zusam-

menhang häufig die Ursache der Schadensinitiierung im Laminat. Viele spannungsbasierten Versagenskriterien für CFK vernachlässigen diesen komplexen Zustand im Material.[2]

Die in der Literatur verwendeten Analyseverfahren und Modelle zur Schadensvorhersage ähneln sich in ihrer grundlegenden Herangehensweise. Dies gilt insbesondere in Bezug auf die Vorhersage der Schadensinitiierung und Fortschritt. Hinsichtlich der Vorhersagemethodik lassen sich die Verfahren in zwei Kategorien einteilen:

- Analytische Ansätze
- Numerische Methoden auf FEM-Basis

Obwohl analytische Verfahren gegenüber numerischen Methoden besonders im Bereich probabilistischer Untersuchungen Vorteile bei der Berechnungskomplexität haben, bilden sie die durch lokale Welligkeiten induzierten Spannungskonzentrationen nur sehr eingeschränkt ab. Dies ist einer der Hauptgründe für die umfangreiche Verwendung von numerisch-basierten Verfahren. Die Verfahren unterscheiden sich zusätzlich in der Grundannahme des Materialversagens zwischen dem Versagen der ersten Lage (engl. *First-Ply Failure*, Erstlagenversagen) [152, 153] und Totalversagen (engl. *Last-Ply Failure*). Letztere erfolgt in der Literatur mithilfe von Schadensfortschrittsanalysen mit entsprechenden Materialdegradationsmodellen zur Versagensvorhersage. Hierbei sind die Kriterien für die Schadensinitiierung, das Degradationsmodell sowie der Algorithmus für die Schadensausbreitung wesentliche Faktoren, welche die Genauigkeit der Vorhersage des Schadensfortschritts grundlegend beeinflussen [154]. Trotz einer genaueren Abbildung des Schadensvorgangs gegenüber First-Ply-Failure Methoden kann das Ergebnis einer Schadensfortschrittsanalyse signifikant vom Experiment abweichen. Mukhopadhyay zeigt [48, 155] dies exemplarisch mithilfe von ausgereiften Kriterien und Modellen. Gründe für die Abweichungen liegen hier unter anderem in der mitunter willkürlichen Wahl der Parameter des Degradationsmodells und in der Netzabhängigkeit des Prozesses des Schadensausbreitung. Für eine genaue Schadensfortschrittsanalyse sind zudem weitere Materialkennwerte in Form von Energiefreisetzungsraten im Berechnungsmodell erforderlich. Da diese jedoch im Rahmen von Experimenten nur bedingt spezifisch bestimmt werden können, stellen diese eine zusätzliche Fehlerquelle im vorhergesagten Versagensmechanismus dar und können im Folgenden zu signifikanten Unterschieden bei der Festigkeitsvorhersage eines Faserverbundwerkstoffs führen [156].

Grundsätzlich liefern Bewertungsmethoden unter Annahme des Erstlagenversagens verglichen mit Schadensfortschrittsanalysen konservative Aussagen in Bezug auf die Versagensvorhersage [39, 157, 158]. Die Vorhersageergebnisse werden dabei wesentlich durch das gewählte Versagenskriterium beeinflusst [158, 159]. Trotz des inhärenten Konservatismusses können belastbare Ergebnisse bei einer Bewertung nach Erstlagenversagen mithilfe geeigneter Kriterien

[2] Die Annahme eines ebenen Spannungszustands ist für homogene dünne Einzellagen zulässig, da die Laminatdickenrichtung auftretenden Spannungskomponenten im Allgemeinen als vernachlässigbar klein im Vergleich zu den Spannungen in der Lagenebene angesehen werden können.

für die Schadensinitiierung sowie spezifische Methoden zur Auswertung der lokalen Spannungszustände dennoch erreicht werden [160–162]. Das kann beispielsweise lastfall-abhängig in Bezug auf die Wahl eines geeigneten Versagenskriteriums [158, 161] erfolgen. Die Auswahl der Kriterien kann zusätzlich auch in Abhängigkeit vom Schadensmechanismus durchgeführt werden [158, 163].

5.4. Kriterien zur Versagensbewertung

Im folgenden werden ausgewählte Versagenskriterien, die in der Arbeit verwendet werden, beschrieben. Diese stellen jedoch nur einen Ausschnitt der derzeit in der Literatur verfügbaren Kriterien dar.

Maximalspannungskriterium

Das Maximalspannungskriterium steht den einfachsten Ansatz zur Beschreibung einer Grenzfläche im Spannungsraum dar:

$$FI^{MS} = \max\left(\left|\frac{\sigma_{ij}}{R_{ij}^{(+,-)}}\right|\right), \qquad i,j = 1,2,3. \tag{5.17}$$

Interaktionen einzelner Spannungskomponenten werden bei diesem Kriterium jedoch vernachlässigt. Somit kann ggf. die Festigkeit des Materials überschätzt werden. Die Materialanstrengung ist für das Maximalspannungskriterium wie folgt definiert:

$$M = FI^{MS}. \tag{5.18}$$

Das einfache Kriterium findet häufig Anwendung bei der Bestimmung von Faserversagen bei Vorliegen einer faserparallelen Belastung. Es basiert auf der Annahme, dass die Schadensinitiierung ausschließlich durch faserparallele Normalspannungskomponenten hervorgerufen wird.

$$FI^{MS} = \left|\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^{(+,-)}}\right|. \tag{5.19}$$

Ein möglicher Einfluss von Schubspannungskomponenten auf die Schadensinitiierung der Faser ist jedoch nicht auszuschließen.

Das Maximalspannungskriterium stellt eine wesentliche Grundlage der im Folgenden erläuterten Kriterien dar, um Faserversagens unter faserparalleler Druckbeanspruchung zu

beschreiben:

$$\sigma_{11} < 0: \qquad FI^{MS} = \left| \frac{\sigma_{11}}{R_{11}^{(-)}} \right|. \tag{5.20}$$

Tsai-Wu

Das Tsai-Wu Kriterium [164] ist ein Kriterium, welches auf Tensorpolynomen basiert. Mittels Anwendung der Einsteinschen Summenkonvention lässt es sich in Indexschreibweise, mit $i, j, k, l, m, n = 1, 2, 3$, wie folgt beschreiben (nach [165]):

$$f\left(\sigma_{ij}, \boldsymbol{R}\right) = \left(F_{ij}^{\alpha}(\boldsymbol{R})\sigma_{ij}\right)^{\alpha} + \left(F_{ijkl}^{\beta}(\boldsymbol{R})\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)^{\beta} + \left(F_{ijklmn}^{\gamma}(\boldsymbol{R})\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}\right)^{\gamma} + \ldots = 1. \tag{5.21}$$

In Gleichung 5.21 repräsentieren die Komponenten der Tensoren $\boldsymbol{F}^{\alpha}, \boldsymbol{F}^{\beta}$ und $\boldsymbol{F}^{\gamma}$ richtungsabhängige Funktionen der Materialfestigkeiten. Die Formulierung stellt eine Grundlage für eine Vielzahl polynomialer Versagenskriterien dar. Tsai et. al. verwenden jedoch eine vereinfachte Definition bei der $\alpha = 1$ und $\beta = 1$ als Exponenten festgelegt werden und das Polynom nach dem quadratischen Glied abgebrochen wird:

$$f\left(\sigma_{ij}, \boldsymbol{R}\right) = \left(F_{ij}^{\alpha}(\boldsymbol{R})\sigma_{ij}\right) + \left(F_{ijkl}^{\beta}(\boldsymbol{R})\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right) = 1. \tag{5.22}$$

Mithilfe der Vereinfachung lässt die Anzahl zu bestimmender Materialkennwerte in $\boldsymbol{F}^{\alpha}$ und $\boldsymbol{F}^{\beta}$ deutlich reduzieren. Auf Grundlage von Gleichung 5.22 formulieren Tsai et. al. [164] ein allgemeines Versagenskriterium für anisotropes Materialverhalten im sechsdimensionalen Spannungsraum:

$$f\left(\sigma_i, \boldsymbol{R}\right) = F_i^{I}(\boldsymbol{R})\sigma_i + F_{ij}^{II}(\boldsymbol{R})\sigma_i\sigma_j = 1, \qquad i, j = 1, \ldots, 6. \tag{5.23}$$

Für eine angemessene Wahl bzw. Definition der Materialtensoren $\boldsymbol{F}^{I}$ und $\boldsymbol{F}^{II}$ verwenden die Autoren experimentelle Erkenntnisse und nutzen Materialsymmetrien aus. Die Tensoren lauten in reduzierter Form:

$$\boldsymbol{F}^{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{11}^{(+)}} - \frac{1}{R_{11}^{(-)}} \\ \frac{1}{R_{22}^{(+)}} - \frac{1}{R_{22}^{(-)}} \\ \frac{1}{R_{33}^{(+)}} - \frac{1}{R_{33}^{(-)}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{F}^{II} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{11}^{(+)}R_{11}^{(-)}} & F_{12}^{II} & F_{13}^{II} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{R_{22}^{(+)}R_{22}^{(-)}} & F_{23}^{II} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{R_{33}^{(+)}R_{33}^{(-)}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{R_{23}^{2}} & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & & \frac{1}{R_{13}^{2}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{R_{12}^{2}} \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

Durch Vereinfachung von $\boldsymbol{F}^I$ und $\boldsymbol{F}^{II}$ resultiert die Versagensgrenzfläche aus der allgemeinen Form (Gleichung 5.23) wie folgt:

$$\begin{aligned} FI^{TW} = {} & F_1^I\sigma_{11} + F_2^I\sigma_{22} + F_3^I\sigma_{33} + F_{11}^{II}\sigma_{11}^2 + F_{22}^{II}\sigma_{22}^2 + F_{33}^{II}\sigma_{33}^2 \\ & + F_{44}^{II}\sigma_{23}^2 + F_{55}^{II}\sigma_{13}^2 + F_{66}^{II}\sigma_{12}^2 + 2F_{12}^{II}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{13}^{II}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2F_{23}^{II}\sigma_{22}\sigma_{33}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Die Elemente F_{12}^{II}, F_{13}^{II} und F_{23}^{II} auf der Nebendiagonalen in $\boldsymbol{F}^{II}$ stellen Interaktionen von Spannungskomponenten dar. Die Bestimmung der einzelnen Tensorkomponenten erfolgt mithilfe von Materialversuchen unter mehrachsiger Belastung. Durch Integration der Nebenbedingung

$$F_{ii}^{II}F_{jj}^{II} - \left(F_{ij}^{II}\right)^2 \geq 0 \tag{5.26}$$

lässt sich der Gültigkeitsbereich der Einträge F_{12}^{II}, F_{13}^{II} gemäß [164] zusätzlich einschränken:

$$F_{12}^{II} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}^{II}F_{22}^{II}}, \tag{5.27}$$

$$F_{13}^{II} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{11}^{II}F_{33}^{II}}, \tag{5.28}$$

$$F_{23}^{II} = -\frac{1}{2}\sqrt{F_{22}^{II}F_{33}^{II}}. \tag{5.29}$$

Aufgrund des inhomogenen Grads der berücksichtigten Spannungen (siehe Gleichung 5.25) resultiert im Tsai-Wu-Kriterium für die Materialanstrengung eine quadratische Gleichung. Hier stellt der positive Anteil der Gleichungslösung das einzig sinnvolle Ergebnis dar mit:

$$M = \frac{2Q}{\sqrt{4Q + L^2} - L} \tag{5.30}$$

wobei Q und L

$$\begin{aligned} Q = {} & F_{11}^{II}\sigma_{11}^2 + F_{22}^{II}\sigma_{22}^2 + F_{33}^{II}\sigma_{33}^2 + F_{44}^{II}\sigma_{23}^2 + F_{55}^{II}\sigma_{13}^2 + F_{66}^{II}\sigma_{12}^2 \\ & + 2F_{12}^{II}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{13}^{II}\sigma_{11}\sigma_{33} + 2F_{23}^{II}\sigma_{22}\sigma_{33} \\ L = {} & F_1^I\sigma_{11} + F_2^I\sigma_{22} + F_3^I\sigma_{33}. \end{aligned},$$

entsprechen. In [164] zeigen die Autoren, dass das Kriterium (Gleichung 5.25) weitere tensorpolynomiale Kriterien einschließt.

Hashin

Das Hashin-Kriterium [47] beschreibt die Versagensgrenzfläche im Spannungsraum eines transversal-isotropen Materials mittels eines vollständigen quadratischen Polynoms, welches

durch entsprechende Spannungsinvarianten formuliert wird.

Im Gegensatz zum Tsai-Wu-Kriterium, welches keine Unterscheidung des dominierenden Versagensmodus erlaubt[3], unterscheidet Hashin unterschiedliche Versagensarten. Dies wird über Normal- und Schubspannungskomponenten, die in einer Bruchebene wirken, begründet. Sofern kein Kennwert aus einem biaxialen Zugversuch ermittelt wurden, lässt sich das Faserversagen bei faserparalleler Zugbeanspruchung durch das folgende quadratische Interaktionskriterium bestimmen:

$$\sigma_{11} \geq 0: \quad FI^{HS} = \left(\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^{(+)}}\right)^2 + \frac{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}{R_{12}^2}. \tag{5.31}$$

Einflüsse auf das Faserversagen durch die verbliebenen Spannungskomponenten (σ_{22}, σ_{33} und σ_{23}) werden an dieser Stelle vernachlässigt. Des Weiteren lässt sich Gleichung 5.31 durch einen zusätzlichen Faktor α^{HS} erweitern, der eine spezifische Gewichtung des Einflusses von faserparallelen Schubspannungen (σ_{12} und σ_{13}) gegenüber der faserparallelen Normalspannung (σ_{11}) [166] erlaubt:

$$\sigma_{11} \geq 0: \quad FI^{HS} = \left(\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^{(+)}}\right)^2 + \alpha^{HS}\frac{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}{R_{12}^2}, \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{5.32}$$

Für den Fall faserparalleler Druckbeanspruchung wird das Faserversagen mithilfe eines entsprechenden Maximalspannungskriteriums (Gleichung 5.20) formuliert:

$$\sigma_{11} < 0: \quad FI^{HS} = \left|\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^{(-)}}\right|.$$

In [167] wird zusätzlich vorgeschlagen, für diesen Lastfall Gleichung 5.31 in korrigierter Form, bei der anstelle von $R_{11}^{(+)}$ nun $R_{11}^{(-)}$ verwendet wird, anzuwenden:

$$\sigma_{11} < 0: \quad FI^{HS} = \left(\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^{(-)}}\right)^2 + \frac{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}{R_{12}^2}. \tag{5.33}$$

Für den Fall, dass $R_{12}! = R_{13}$ gilt können die Gleichungen 5.31 und 5.33 wie folgt beschrieben werden:

$$FI^{HS} = \left(\frac{\sigma_{11}}{R_{11}^{(+,-)}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{R_{13}}\right)^2.$$

Die Gleichung 5.34 entspricht nun dem beschriebenen Kriterium in [168] in erweiterter

[3] Kriterien dieser Art werden gewöhnlich auch als Pauschalkriterien bezeichnet.

Form. Auf Basis des Versagensindex lässt sich die Materialanstrengung in Abhängigkeit des Polynomgrades n durch Wurzelziehen bestimmen:

$$M = \left(FI^{HS}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad n = 1, 2. \tag{5.34}$$

Im Vergleich zum Faserversagen unter Druck- oder Zugbeanspruchung differenziert Hashin [47] zwei zusätzliche Versagensmodi für Zwischenfaserbruch:

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} \geq 0: \quad FI^{HS} = \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{\left(R_{22}^{(+)}\right)^2} + \frac{(\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33})}{R_{23}^2} + \frac{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}{R_{12}^2}. \tag{5.35}$$

Der Zwischenfaserbruch infolge einer Druckbeanspruchung quer zur Faser wird in [47] durch einen dreidimensionalen Spannungszustand wie folgt beschrieben:

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} \leq 0: \quad FI^{HS} = \left[\left(\frac{R_{22}^{(-)}}{2R_{23}}\right)^2 - 1\right] \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{R_{22}^{(-)}} + \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{4R_{23}^2} + \frac{(\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33})}{R_{23}^2} + \frac{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}{R_{12}^2}. \tag{5.36}$$

Analog zu Gleichung 5.33 schlägt Murray zudem bei Druckbeanspruchung quer zur Faser eine Anpassung der Gleichung 5.35 vor:

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} \leq 0: \quad FI^{HS} = \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{\left(R_{22}^{(-)}\right)^2} + \frac{(\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33})}{R_{23}^2} + \frac{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}{R_{12}^2}. \tag{5.37}$$

Sofern $R_{22}! = R_{33}$ und $R_{12}! = R_{13}$ gilt, können die Gleichungen 5.35 und 5.36 entsprechend erweitert werden zu:

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} \geq 0: \quad FI^{HS} = \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{R_{22}^{(+)} R_{33}^{(+)}} + \frac{(\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33})}{R_{23}^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{R_{13}}\right)^2, \tag{5.38}$$

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} \leq 0: \quad FI^{HS} = \left[\frac{R_{22}^{(-)} R_{33}^{(-)}}{(2R_{23})^2} - 1\right] \left[\frac{\sigma_{22}}{R_{22}^{(-)}} + \frac{\sigma_{33}}{R_{33}^{(-)}}\right] + \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{4R_{23}^2} + \frac{(\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33})}{R_{23}^2} + \left(\frac{\sigma_{12}}{R_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{13}}{R_{13}}\right)^2. \tag{5.39}$$

Die Materialanstrengung bei Belastung quer zur Faser errechnet sich wie folgt:

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} \geq 0: \quad M = \sqrt{FI^{HS}}, \tag{5.40}$$

$$\sigma_{22} + \sigma_{33} \leq 0: \quad M = \frac{2Q}{\sqrt{4Q + L^2} - L}. \tag{5.41}$$

Q und L fassen die im Versagenskriterium enthaltenen quadratischen bzw. linearen Terme zusammen (vgl. Gleichung 5.36):

$$Q = \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{4R_{23}^2} + \frac{(\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33})}{R_{23}^2} + \frac{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}{R_{12}^2},$$

$$L = \left[\left(\frac{R_{22}^{(-)}}{2R_{23}}\right)^2 - 1\right] \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{R_{22}^{(-)}}.$$

Für ebene Spannungszustände liefert das Hashin-Kriterium gute Ergebnisse. Für dreidimensionale Spannungszustände erscheint die Schadensinitiierung durch den Interaktionsterm zwischen σ_{22}, σ_{33} und σ_{23} unrealistisch [132, 141].

Puck

[150] formuliert ein sogenanntes wirkebenenbezogenes Versagenskriterium. Im Wesentlichen basiert dieses parabolische Kriterium für transversal-isotrope Werkstoffe auf der Mohrschen Hypothese über die Ausbildung von Bruchebenen beim Sprödbruch. Im Gegensatz zu vielen anderen Versagenskriterien benötigt Puck für die Versagensvorhersage nur drei Spannungskomponenten (σ_n, τ_{nt} und τ_{nl}), die in einer sogenannten Wirkebene auftreten. Den Spannungen in dieser Ebene sind entsprechende Festigkeitskennwerte ($R_n^{(+)}$, R_{nt} und R_{nl}) zugeordnet [141].

Ein Winkel θ beschreibt die Ausrichtung der Wirkebene (Rotation um die faserparallele Koordinatenachse) zum Materialkoordinatensystem der Einzellage. Eine Transformationsmatrix $\boldsymbol{T}$ überführt den dreidimensionalen Spannungszustand (σ_2, σ_3, σ_4, σ_5 und σ_6) vom Materialkoordinatensystem der Einzellage in das Koordinatensystem der Wirkebene:

$$\boldsymbol{T}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

Dementsprechend ergeben sich die Spannungskomponenten $\sigma_n(\theta)$, $\tau_{nt}(\theta)$ und $\tau_{nl}(\theta)$ im Wir-

kebenenkoordinatensystem zu [141]:

$$\begin{bmatrix}\sigma_n(\theta)\\ \tau_{nt}(\theta)\\ \tau_{nl}(\theta)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & c^2 & 2sc & 0 & 0\\ sc & -sc & (c^2-s^2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & c & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}, \text{ mit } s=\sin(\theta) \text{ und } c=\cos(\theta). \tag{5.43}$$

Der dreidimensionale Spannungsunterraum mit den Komponenten ($\sigma_n(\theta)$, $\tau_{nt}(\theta)$ und $\tau_{nl}(\theta)$) beschreibt die Versagensgrenze des Materials. Diese Spannungskomponenten spannen eine Bruchebene auf [141]:[4]

$$\sigma_n \geq 0: \quad FI^P = \sqrt{\left(\frac{1}{R_n^{(+)}} - q^{(+)}\right)^2 \sigma_n^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{nt}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{nl}}\right)^2} + q^{(+)}\sigma_n, \tag{5.44}$$

$$\sigma_n < 0: \quad FI^P = \sqrt{\left(q^{(-)}\sigma_n\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nt}}{R_{nt}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{nl}}\right)^2} + q^{(-)}\sigma_n, \tag{5.45}$$

mit

$$q^{(+,-)} = \frac{p_{nt}^{(+,-)}}{R_{nt}}\cos^2(\psi) + \frac{p_{nl}^{(+,-)}}{R_{nl}}\sin^2(\psi), \tag{5.46}$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{\tau_{nl}}{\tau_{nt}}\right). \tag{5.47}$$

Die auftretenden Schubspannungskomponenten τ_{nt} und τ_{nl} verursachen die Schadensinitiierung durch Faserbruch. Zugspannungen ($\sigma_n \geq 0$) in der Wirkebene unterstützen die Schadensinitiierung. Druckspannungen hingegen behindern diesen Vorgang. Die zugehörigen Festigkeitskennwerte ($R_n^{(+)}$, R_{nt} und R_{nl}) der Wirkebene ergeben sich wie folgt:

$$R_n^{(+)} = R_{22}^{(+)} = R_{33}^{(+)}, \tag{5.48}$$

$$R_{nt} = \frac{R_{22}^{(-)}}{2(1+p_{nt}^{(-)})} \tag{5.49}$$

$$R_{nl} = R_{12} = R_{13} \tag{5.50}$$

Die Neigungsparameter $p_{nt}^{(+)}$, $p_{nt}^{(-)}$, $p_{nl}^{(+)}$ und $p_{nl}^{(-)}$ sind freie Parameter des Modells. Sie müssen

[4] Die winkelabhängigen Spannungskomponenten werden für den weiteren Gebrauch im Rahmen der vorliegenden Arbeit wie folgt abgekürzt: $\sigma_n(\theta) = \sigma_n$, $\tau_{nt}(\theta) = \tau_{nt}$ und $\tau_{nl}(\theta) = \tau_{nl}$.

folgende Anforderungen erfüllen:

$$0 < p_{nt}^{(-)} \leq p_{nt}^{(+)} \leq \frac{R_{nt}}{R_n^{(+)}}, \tag{5.51}$$

$$0 < p_{nl}^{(-)} \leq p_{nl}^{(+)} \leq \frac{R_{nl}}{R_n^{(+)}}. \tag{5.52}$$

Das Versagenskriterium von Puck ist im Polynomgrad der Spannungskomponenten homogen. Folglich ergibt sich die Materialanstrengung zu:

$$M = FI^P \tag{5.53}$$

Unter dem Winkel θ_B stellt sich in der Einzellage die maximale Materialanstrengung ein. Im dreidimensionalen Raum existiert eine unendliche Anzahl möglicher Bruchebenen. Der Bruchwinkel θ_B ergibt sich in diesem Fall üblicherweise iterativ. Ein einfacher Weg zur Bestimmung von θ_B ist die schrittweise Berechnung von Gleichung 5.43 im Bereich $0° \leq \theta \leq 180°$ und die anschließende Auswertung der Gleichung 5.44 bzw. 5.45.

5.5. Numerische Berechnung von Abminderungsfaktoren für Festigkeiten

Gegenwärtige Methoden zur Bewertung der Festigkeit von Faserverbundwerkstoffen gehen davon aus, dass die Festigkeitswerte, die an standardisierten Prüfkörpern experimentell bestimmt wurden, repräsentativ und auf andere Strukturen aus Faserverbundwerkstoffen übertragbar sind. Diese Annahme gilt streng genommen jedoch nur für idealisierte Geometrien und Randbedingungen, die in Normversuchen verwendet werden. Abweichungen von diesen idealisierten Bedingungen führen folglich zu Veränderungen im Versagensverhalten. Insbesondere die Größe des Prüfkörpers hat einen großen Einfluss darauf, wie sich das Material verhält und kann somit das Versagensverhalten beeinflussen [75, 144, 169]. Aufgrund dessen konnte sich keins der verfügbaren Kriterien als verlässliche Bewertungsmethode, trotz intensiver Auseinandersetzung in der Wissenschaft, durchsetzen. Zur Bewertung von strukturmechanischen Auswirkungen von räumlich-verteilten OoP-Welligkeiten in CFK-Materialien wird daher eine Methodik zur Bestimmung effektiver Festigkeitskennwerte verwendet, welche zur Bewertung von Lücken und Überlappungen (siehe Abbildung 2.3) entwickelt und untersucht wurde [41]. Aus phänomenologischen Gesichtspunkten lassen sich die physikalischen Auswirkungen von Welligkeiten und Lücken und Überlappungen im CFK aufgrund geometrischer Ähnlichkeiten in der Modellbildung gut vergleichen. Eine Anwendung der Methodik im Kontext der Arbeit stellt somit ein valides Mittel zur Bestimmung effektiver Kennwerte dar.

Die Bestimmung der Festigkeitskennwerte erfolgt mithilfe detaillierter Laminatmodelle in

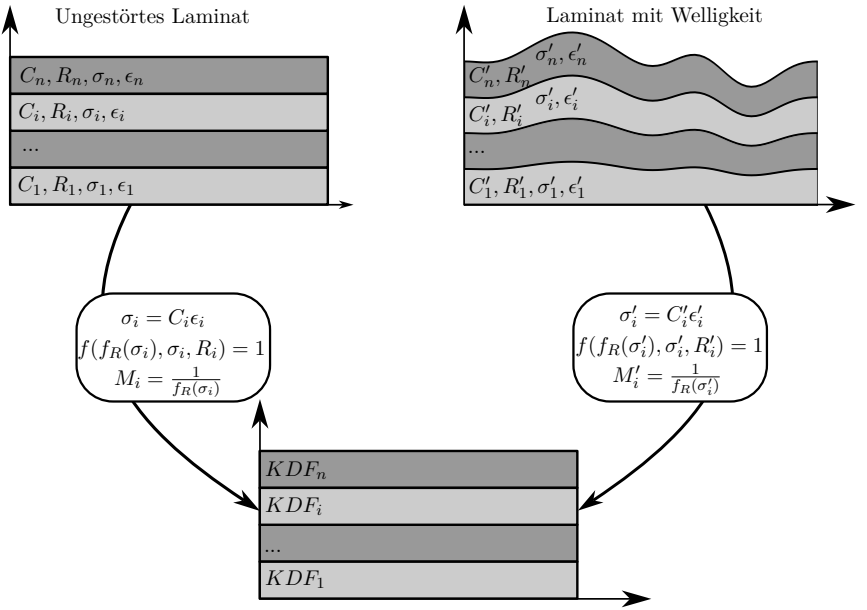


Abbildung 5.8.: Kontinuumsmechanischer Ansatz zur Homogenisierung der Festigkeitskennwerte eines Laminats mit Imperfektionen. Es erfolgt eine lagenweise Bestimmung der größten Materialanstrengung [132].

voneinander getrennten FE-Analysen. Abbildung 5.8 veranschaulicht das Vorgehen grafisch. Zur Ermittlung jedes Kennwerts des Laminats und Einzellage werden dazugehörige quasistatischen Lastfälle im Modell aufgeprägt, aus denen sich individuelle Spannungsverteilungen ergeben. Diese Verteilungen werden dann mit Fokus auf die Schadensinitiierung unter Verwendung spannungsbasierter Versagenskriterien ausgewertet.

Hierzu wird zu jedem Laminat mit stochastisch verteilter Welligkeit das zugehörige ungestörte Referenzlaminat betrachtet. Beide Modelle sind im Hinblick auf Netzdiskretrisierung, äußeren Randbedingungen und aufgeprägten Lasten identisch. In Abbildung 5.8 kann die lagenweise Analyse der resultierenden Spannungsverteilungen im imperfekten und im Referenzlaminat grafisch nachvollzogen werden. In jeder Einzellage i des Laminats mit Imperfektion wird dazu gemäß Gleichung 5.16 das finite Element mit der größten Materialanstrengung (M_i^{def}) ermittelt. Unter Nutzung desselben Versagenskriteriums wird parallel in der gleichen Lage i des FE-Netzes die Materialanstrengung (M_i^{ref}) des dazugehörigen finiten Elementes des ungestörten Referenzlaminats ermittelt.

Für jeden einachsigen Lastfall wird aus den Materialanstrengungen (M_i^{ref} und M_i^{def}) das

Verhältnis bestimmt, dass dem Abminderungsfaktor (engl. *Knock-down factor*, KDF) des zugeordneten Festigkeitskennwertes (vgl. [36, 161]) entspricht: [5]

$$KDF_i = \frac{M_i^{ref}}{M_i^{def}} = \frac{f_R^{def}(\boldsymbol{\sigma}_i)}{f_R^{ref}(\boldsymbol{\sigma}_i)}. \qquad (5.54)$$

Da die Amplitude pro Lastfall für beide Laminatmodelle identisch ist, können die KDF als Skalierungsfaktoren für die Spannungen im imperfekten Laminat betrachtet werden. Sie kennzeichnen die notwendige Belastung für ein einsetzendes Versagen im Referenzlaminat (vgl. [161, 170]). Es resultieren des Weiteren aus der Gleichung 5.54 und verbunden mit jeden Lastfall neun KDF der Festigkeitskennwerte jeder virtuellen 0-Einzellage i.

Die Versagensbewertung des Gesamtlaminats auf Basis der Materialanstrengungen in den Einzellagen für beide Laminatmodelle (defektbehaftetes und ungestörtes Referenzlaminat) wird mittels Erstlagenversagens bestimmt. Zu diesem Zweck wird für beide Modelle die Einzellage ermittelt, welche die größte Materialanstrengung aufweist. Setzt man diese jeweils ins Verhältnis, ergibt sich für jeden einachsigen quasi-statischen Lastfall ein KDF des entsprechenden Festigkeitskennwerts für das gesamte Laminat. Aufgrund des Berechnungsansatzes können für beide Laminatmodelle die größten Materialanstrengungen in unterschiedlichen Einzellagen vorherrschen:

$$KDF_{Lam} = \frac{M_{max}^{ref}}{M_{max}^{def}} = \frac{f_{R_{max}}^{def}(\boldsymbol{\sigma}_i)}{f_{R_{max}}^{ref}(\boldsymbol{\sigma}_i)}. \qquad (5.55)$$

5.6. FE-Modellierung

5.6.1. Elementformulierung und Randbedingungen

Die Bestimmung der KDF gemäß Gleichung 5.54 und 5.55 erfolgt entsprechend der vorhergehenden Betrachtungen mithilfe der Finite-Elemente-Methode. Zu diesem Zweck wird ein numerisches Referenzmodell eines CFK aufgebaut, welches die lokalen Material- und Spannungsflüsse infolge einer räumlich parametrisierten Welligkeit adäquat repräsentiert.

Im Hinblick auf die erforderliche Genauigkeit zur qualitativen Bestimmung der inneren Beanspruchungen und des KDF werden die einzelnen Lagen des Laminats mit unidirektionalen Eigenschaften mittels fein diskretisierter Volumenelemente modelliert, um den komplexen

[5] Aus Gleichung 5.54 entstehen neun Verhältnisgleichungen für: $R_{xx}^{(+)def}$, $R_{xx}^{(-)def}$, $R_{yy}^{(+)def}$, $R_{yy}^{(-)def}$, $R_{zz}^{(+)def}$, $R_{zz}^{(-)def}$, R_{xy}^{def}, R_{xz}^{def} und R_{yz}^{def}. Die Superskripte kennzeichnen, ob es sich um einen Kennwert des imperfekten $(\cdot)^{def}$ oder des ungestörten Laminats $(\cdot)^{ref}$ handelt.

Spannungszustand genau abbilden zu können. Um diesen über die Schichtdicke physikalisch adäquat bestimmen zu können, wird im FE-Modell ein quadratischer Verformungsansatz mit 20-Knoten-Volumenelementen gewählt[6] [128]. Dieser weist im Vergleich zu Elementen mit linearen Ansatzfunktionen bessere numerische Konvergenzeigenschaften und eine geringere Empfindlichkeit gegenüber *Shear-Locking*[7] auf. Reinarz [172] verwenden einen ähnlichen Ansatz zur Analyse von Welligkeitsdefekten in gekrümmten CFK-Strukturen und demonstrieren anhand von Konvergenzstudien die Notwendigkeit.

Aus Gründen der Berechnungskomplexität werden im Weiteren bei der numerischen Modellapproximation keine interlaminaren Effekte berücksichtigt, sodass benachbarte Einzellagen im FE-Modell direkt durch koinzidente Knoten miteinander verbunden sind und eine Modellierung von Zwischenschichten entfällt. Zwischenschichten können jedoch bei spezifischen Fragestellungen wie z.B. Schlagschädenuntersuchung von zentraler Bedeutung sein für die Bewertung von Restfestigkeiten im Material [173]. Die Vernachlässigung dieses Aspekts wirkt sich wesentlich beim Berechnungsumfang im Rahmen der stochastischen Analyse aus, da die resultierende Modellauflösung signifikant reduziert werden kann.

Für die Bestimmung der KDF mittels quasi-statischer Lastfälle werden sogenannte homogene Verschiebungsrandbedingungen im Model aufgebracht. Diese erwirken einen makroskopisch aufgeprägten Dehnungszustand im Modell. Jede Deformation des Modells, welche nicht konform zu diesem Verformungszustand ist, kann mit diesen Randbedingungen unterbunden werden. Das Modellrandgebiet kann sich dabei, entgegen alternativer periodischer Verschiebungsrandbedingungen [174, 175], nicht frei verformen. Zu jedem Lastfall, welcher zu den neun unabhängigen, homogenen Festigkeiten in Tabelle 5.3 zugeordnet werden kann, sind unterschiedliche Randbereiche des Modells zu fixieren, die entsprechend zur einfachen Modellapplikation unterteilt werden. Abbildung 5.9 stellt diesen Sachverhalt schematisch für den im Weiteren betrachteten einachsigen Lastfall zur Ermittlung der faserparallelen Druckfestigkeit dar.[8]

Die Einleitung der äußeren Last (F_x in Abbildung 5.9) in das Modell erfolgt über einen zentralen Referenzknoten N^{ref}. Um einen makroskopischen aufgeprägten Belastungszustand im Modell korrekt zu applizieren, ist zusätzlich eine Kopplung zwischen der Verschiebung des Referenzknoten und den für jeden Lastfall individuellen Flächenknoten des Modellrandgebiets erforderlich. Die aufgebrachte Last im Knoten N^{ref} skaliert dabei zudem mit der Referenzfläche der zugeordneten Flächenknoten. Für das Beispiel in Abbildung 5.9 entspricht diese der durch die Knoten des Modellbereichs $yzPI^{+}$ aufgespannten Fläche, die durch die Modellabmessungen des idealen Laminats unter Vernachlässung von Welligkeitsdefekten

[6] sogenannte *Serendipity*-Elemente mit Knoten auf den Elementkanten ohne Mittelflächenknoten

[7] Shear-Locking kennzeichnet ein Phänomen in der FEM, dass Element-Formulierungen bei Schubbelastungen zu steif reagieren. [171]

[8] Die Anwendung der Methode zur Bestimmung homogenisierter Steifigkeitseigenschaften erfolgt analog, wird jedoch hier nicht weiter betrachtet. Für weitere Informationen wird der Leser auf [132] verwiesen.

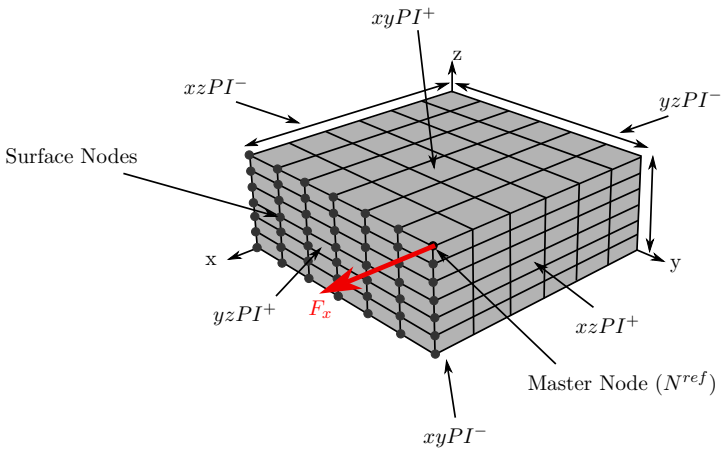


Abbildung 5.9.: Definition von Knotenmengen am Modellrand und eingebrachte Knotenlast für einen einachsigen Zuglastfall. Angepasst von [132]

Tabelle 5.4.: Aufgebrachte Randbedingungen und nominelle Werte für ausgewählte Knotensets und Lasten für einen einachsigen Zug- und Drucklastfall.

x-Richtung	**y-Richtung**
$u^{yzPI^-} = 0$	$u^{xzPI^-} = 0$
$u^{yzPI^+} = u^{N^{ref}}$	$u^{xzPI^+} = 0$
$F_x = \sigma \cdot A^{yzPI^+}$ $\sigma = \pm 1$	

bestimmt werden kann. Ergänzend zu den beispielhaften Ausführungen fasst Tabelle 5.4 die spezifischen Modellrandbedingungen für einen einachsigen Zug und Drucklastfall zusammen.

5.6.2. Numerische Parametrisierung der Welligkeit im FE-Modell

Die in Abschnitt 5.6.1 erläuterten Formulierungen zur FEM-Modellbeschreibung sind um die Generierung der Welligkeit gemäß den Schilderungen in Kapitel 4 zu erweitern, um eine numerische KDF-Bestimmung zu ermöglichen. Entsprechend Kapitelabschnitt 4.3.1 sind die beiden relevanten Größen zur ZF-Beschreibung der Welligkeit die stochastisch variierende Streuung der Materialauslenkung an einem beliebigen Punkt sowie die Korrelationsfunktion $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ zur Beschreibung der räumlichen Abhängigkeit zwischen einzelnen Punkten im Referenzmodell.

Es wird zunächst angenommen, dass mit erstem nur eine Auslenkung in Laminatdickenrichtung beschrieben wird und somit Punkte mit identischen x, y Koordinaten auch nach der Verformung in der projizierten x, y-Ebene übereinanderliegen. Ist darüber hinaus die Definition einer horizontale Auslenkung erforderlich, so ist dies durch zusätzliche Variablen zu realisieren. Hierbei ist zu beachten, dass neben der Wahl von $\rho(.)$ eine begründete Wahl der Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den Auslenkungen in den Raumrichtungen vorzunehmen ist. Die Beschreibung einer horizontalen Relativbewegung einzelner Lagen wird im Rahmen der Untersuchungen zunächst nicht weiter betrachtet. Trotz der Auswahl ist eine variable OoP-Verformung in Dickenrichtung bei einer generischen Definition von $\rho(.)$ im gesamten (x, y, z)-Referenzkoordinatensystem des numerischen Modells zunächst realisierbar. Die Ermittlung einer physikalisch fundierten Wahl der Korrelationsfunktion ist jedoch ein wesentliches Problem. Zusätzlich sind Aspekte des numerischen Lösungsaufwands innerhalb der Simulation eines dreidimensionalen-ZFs anzuführen, sodass bei Anwendung auf großen Laminatmodellen eine immense Steigerung des Berechnungsaufwands erwartbar ist. Insbesondere Verfahren wie die SVD, die auf der Zerlegung der Kovarianzmatrix Σ basieren, sind somit im Hinblick erforderlicher technischer Ressourcen nur für grob-aufgelöste 3D-Modelle anwendbar[9] und sind zudem anfällig gegenüber Rundungsfehlern [176]. Alternative Verfahren zur ZF-Simulation (siehe Kapitel 4.4) stehen jedoch, ungeachtet vorhandener Effizienzvorteile, gleichermaßen vor den technischen Herausforderungen.

Zur Reduktion des Berechnungsaufwands wird in [177] das Konzept der $\mathcal{H}$-Matrix (engl. *Hierarchical Matrix*) beschrieben, was eine Approximation und somit numerisch günstigere Zerlegung der Kovarianzmatrix ermöglicht. Es ist allerdings festzustellen, dass dadurch nur ein Teil der Berechnungskomplexität gemindert werden kann und somit die grundsätzliche Problematik bestehen bleibt. Li [178] schlägt eine alternative, effiziente Berechnungsmethode zur Zerlegung der Kovarianzmatrix vor, sofern die Korrelationsfunktion separierbar ist, d.h. folgende Beziehung

$$\rho(h_x, h_y, h_z) = \rho(h_x)\rho(h_y)\rho(h_z) \tag{5.56}$$

gilt. In der Gleichung repräsentieren h_x, h_y und h_z die Abstände zwischen zwei Punkten in den Raumrichtungen. Die Gültigkeit der Eigenschaft ist für den jeweiligen Anwendungsfall stets zu prüfen. Abschließend bleibt jedoch die Frage der Größe des Parameterraums der unkorrelierten Variablen als variable Größen zur ZF-Erzeugung offen.

Schlussfolgend zu den Erläuterungen wird daher zur Welligkeitsparametrisierung eine angepasste 3D ZF-Formulierung verwendet. Diese setzt sich aus einer 2D-ZF-Formulierung in (x, y) und Skalierungsfunktion $f_{scale}(z, z_{Ref})$ zur Modellierung in Laminatdickenrichtung zusammen. Sie lässt sich formal wie folgt definieren:

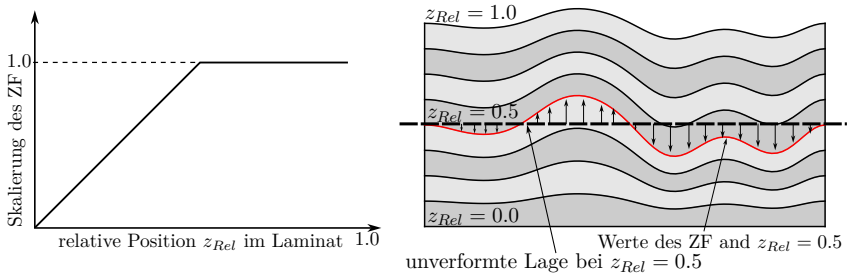
[9] Die Korrelationsmatrix eines 3D-ZFs der Größe $100 \times 100 \times 100$ besitzt die Größe $10^6 \times 10^6$

$$u^z_{OoP}(x,y,z) = f_{scale}(z, z_{Ref}) \cdot \mathrm{ZF}_{z_{Ref}}(x,y) \tag{5.57}$$

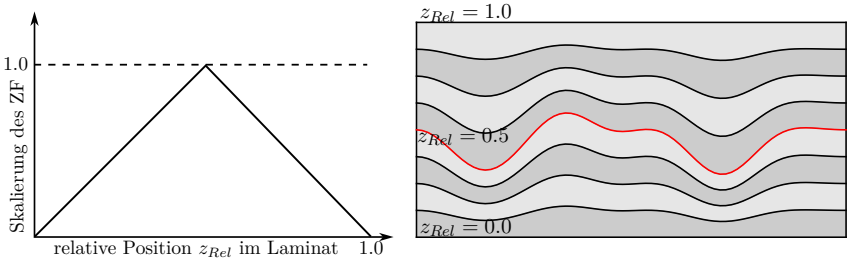
Gleichung 5.57 beschreibt die Verschiebung u^z_{OoP} eines Punktes $\mathbf{x} = (x,y,z)$ im Laminat. $\mathrm{ZF}_{z_{Ref}}(x,y)$ repräsentiert das 2D-ZF an einer beliebigen relativen Position z_{Ref} im Laminat, dessen gültiger Wertebereich zwischen $z = 0$ (untere Lage) und $z = 1$ (obere Lage) liegt. Ein Umrechnung von globalen Koordinaten z_{global} in relative z-Koordinaten in Abhängigkeit der Laminatgesamtdicke t_{lam} gemäß

$$z = \frac{z_{global}}{t_{lam}} \tag{5.58}$$

ist in einem vorherigen Schritt dementsprechend durchzuführen. Zur Veranschaulichung der Formulierung kann zusätzlich Abbildung 5.10 herangezogen werden.



(a) Von außen sichtbare Welligkeit, welche die Lagen oberhalb der Mittellinie zur äußeren Lage im gleichen Verhältnis verformt. links) Skalierungsfunktion des ZF, rechts) Darstellung der verformten Laminatkonfiguration. Das ZF ist rot markiert



(b) Innenliegende Welligkeit, welche zu den Randlagen im Laminat ausläuft. links) Skalierungsfunktion des ZF, rechts) Darstellung der verformten Laminatkonfiguration. Das ZF ist rot markiert

Abbildung 5.10.: Vergleich von zwei unterschiedlichen Parametrisierung der Welligkeit im Laminat, die sich aus einem 2D-ZF und einer Skalierungsfunktion in Laminatdickenrichtung zusammensetzt.

Die vertikale Verschiebung eines Punktes erfolgt nun auf Basis der Werte des Referenz-ZF und der relativen Lage im Laminat. Dazu wird der Wert des ZF mit einem positionsabhängigen Faktor multipliziert, der mithilfe der Skalierungsfunktion f_{Scal} bestimmt wird. Der Wertebereich der Abszisse liegt, entsprechend der relativen Formulierung von z, zwischen 0 und 1. Der gültige Wertebereich des Skalierungsfaktors liegt analog dazu ebenfalls zwischen 0 und 1. Die Wahl einer geeigneten Skalierungsfunktion hat im Hinblick auf die abzubildende Art der Welligkeit zu erfolgen. Abbildung 5.10 zeigt anhand zweier, beispielhafter Funktionen die Modellierung von unterschiedlichen OoP-Welligkeitstypen. Der wesentliche Vorteil der gewählten Formulierung liegt in der signifikanten Reduktion der stochastischen Lösungskomplexität in ein zweidimensionales Problem. Demgegenüber ergeben sich mit der Definition von $f_{scale}(z, z_{Ref})$ zusätzliche freie Parameter, die entsprechend der Problemstellung plausibel ausgewählt werden müssen. Einer der Nachteile der Formulierung 5.57 besteht in der eingeschränkten Variabilität zur Abbildung der OoP-Welligkeit infolge der Reduktion auf ein 2D-Problem.

5.6.3. Kopplung von Zufallsfeld und FE-Modelltopologie

In den vorangegangenen Betrachtungen ist zunächst davon ausgegangen worden, dass die numerische Diskretisierung des ZFs und die FE-Diskretisierung des strukturmechanischen Modells übereinstimmen. Diese Annahme ist jedoch aus Komplexitätsgründen nicht angemessen, sodass stattdessen eine getrennte Diskretisierung der ZF-Approximation und des FE-Modells zur Berechnung der Strukturantwort vorgenommen wird. Abbildung 5.11 stellt den Aspekt der getrennten Betrachtung grafisch dar. Der verwendete Ansatz bedingt folglich die Kopplung beider numerischer Diskretisierungen durch problem-spezifische Interpolationsmethoden. Das Vorgehen soll kurz motiviert werden.

Die wesentliche Größe, welche die erforderliche Netzfeinheit des ZFs bestimmt, ist die Korrelationslänge, die zudem gleichzeitig mit der Variabilität des ZFs verknüpft ist. Demgegenüber wird die Wahl einer geeigneten FE-Diskretisierung maßgeblich u.a. durch die gegebene Modellgeometrie und den lokalen Spannungsgradienten auf Basis der strukturmechanischen Modellverformungen beeinflusst. Die Berücksichtigung dieses Aspekts schränkt die praktische Verwendung eines einheitlichen Netzes deutlich ein. Der Autor in [179] bekräftigt diese Schlussfolgerung. Der gewählte Ansatz kann zusätzlich durch den Umstand bekräftigt werden, dass insbesondere für stark-korrelierte Zufallsfelder eine wesentlich gröbere Diskretisierung erforderlich ist im Kontrast zur erforderlichen Genauigkeit der Diskretisierung des mechanischen Problems mithilfe der FEM. Daraus folgt zudem eine signifikante Reduktion der Problemkomplexität aus statistischer Sicht, da eine geringere Anzahl an Zufallsvariablen im Rahmen der ZF-Approximation (z.B. mittels KLE) benötigt wird.

Die Nutzung von getrennten Netzen ist insbesondere bei strukturmechanischen Problemstel-

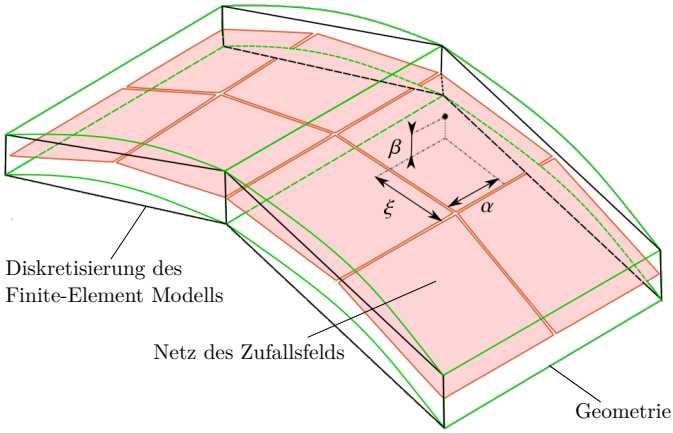


Abbildung 5.11.: Unterschiedliche Diskretisierung zwischen FEM-Modell und Zufallsfeldmodell. Darstellung angepasst von [73]

lungen, die eine feine Auflösung der FE-Modelle erfordern, der derzeit einzige, angemessene Ansatz [180, 181]. Der Vollständigkeit halber ist hier jedoch zu erwähnen, dass die Nutzung eines einheitlichen Netzes für die Zufallsfeld- und FE-Betrachtung dennoch für ausgewählte Fragestellungen insbesondere aus technischen Gesichtspunkten Vorteile gegenüber einer entkoppelten Betrachtung haben kann. Bezüglich der angemessenen Wahl der Diskretisierungsauflösung des ZF gegenüber der FE-Diskretisierung kann mithilfe der Literatur ein Wert von $L \approx b/4 \div b/2$ festgelegt werden, bei dem b die ZF-Korrelationslänge und L eine typische Elementkantenlänge darstellt [182, 183].

Die Verwendung zweier getrennter Diskretisierungen erfordert zudem den Einsatz von geeigneten Interpolationsfunktionen zur Übertragung der Werte zwischen ZF und FE-Modell. Eine wesentliche Anforderung an diesen Schritt ist die Minimierung von Fehlern oder Störeinflüssen infolge der Interpolation. Abbildung 5.12 veranschaulicht die Netzinterpolation anhand zweier eindimensionaler Beispielnetze zur ZF- und FEM-Netzdiskreitisierung.

Da die betrachtete Zufallsvariable im zugeordneten ZF die vertikale Auslenkung eines Materialpunkts zur Erzeugung der Welligkeit eine geometrische Größe darstellt, ist eine Übertragung auf die Knoten des FEM-Modells zweckmäßig[10]. Hinsichtlich der Interpolationsgüte wird im Weiteren zunächst eine stückweise lineare Interpolationsfunktion zwischen den Knotenwerten beider Netze definiert und angewendet. Die geringere Genauigkeit im Vergleich zu Verfahren höherer Ordnung [184, 185] kann für die untersuchten Modellskalen und Korrelationslängen in der Arbeit als vernachlässigbar eingestuft werden.

[10]Formal betrachtet können ZF zusätzlich Knotenwerten auch Elementwerte numerischer Diskretisierung abbilden. Ihre Betrachtung soll hier jedoch aus Umfangsgründen nicht erfolgen

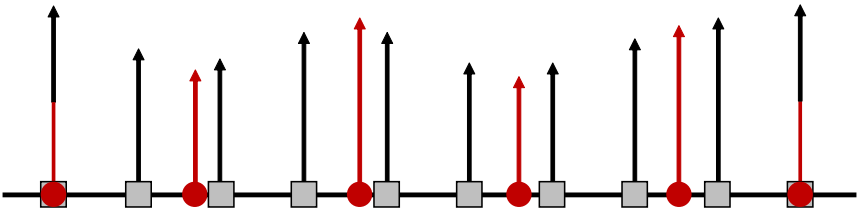


Abbildung 5.12.: Vereinfachte Darstellung der linearen Interpolation von räumlichen Punktwerten eines Zufallsfelds(rote Pfeile) auf die Knoten einer FEM-Diskretisierung(schwarze Pfeile). Die Länge eines Pfeiles stellt den nominellen Wert an einem Knoten dar.

Ein weiterer Vorteil von unabhängigen Diskretisierungen besteht in der robusteren Anwendung bei der Untersuchung von Einflüssen von Modellrandbedingungen. Als Beispiel dienen hierbei Bereiche am Modellrand mit geringer Netzdichte, die keine Verformung durch das ZF erfahren und im Weiteren bei numerischen ZF-Approximation nicht berücksichtigt werden. Dies kann eine effektive Methode darstellen um unerwünschte Störeffekte, induziert durch die Kombination von äußeren Lasten und Randbedingungen, zu mindern. Die Modellunterteilung ließe sich formal auch durch Fesselung der entsprechenden Knoten bei der ZF-Diskretisierung der Kovarianzfunktion realisieren. Aus Robustheitsgründen der numerischen ZF-Lösungsverfahren ist dieser Ansatz nicht angemessen, da die zusätzlichen, gefesselten Knoten zu einer Dimensionserhöhung der Kovarianzmatrix führen, jedoch keinen weiteren signifikanten Informationsgewinn im Rahmen der ZF-Simulation darstellen.

5.6.4. Anpassung von UD-Materialausgangsgrößen mithilfe mikromechanischer Modelle

Die zuvor erläuterten Methoden fokussierten sich zunächst auf geometrische Aspekte der numerischen Modellbildung zur Applikation von Welligkeitsdefekten und vernachlässigten daraus folgende Inhomogenitäten in der Materialformulierung. Im Vergleich zu realen Materialproben zeigt sich jedoch, dass die Annahme der Materialhomogenität zwischen lokalen Bereichen der Einzellagen je nach Intensität der Welligkeit aufgrund des unterschiedlichen Materialverhaltens von Faser und Matrix nur eingeschränkt gültig ist. In Abhängigkeit vom gewählten Fertigungsverfahren (siehe Kapitel 2.2) kann u.a. auftretender Harzfluss im Bauteil zu lokalen Unterschieden im Verhältnis von Faser und Matrix in einem beliebigen Materialausschnitt und somit zu Abweichungen von der angenommenen, homogenen Verteilung des unidirektionalen Materialverhaltens führen.

Die Bestimmung der Materialkonstituenten einer UD-Einzellage mithilfe mikromechanischer Modelle beruht in Veröffentlichungen auf dem Konzept der Mischungsregel (engl. *rule of mixture*, ROM), die einen jeweiligen Materialparameter funktional aus dem Verhältnis der

Materialparameter für Faser- und Matrixmaterial bestimmen. Im Fall des Elastizitätsmoduls E_1 wird dies wie folgt bestimmt [186]:

$$E_1 = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m \tag{5.59}$$

E_f und E_m repräsentieren in Gleichung 5.59 das Elastizitätsmodul für die Faser respektive die Matrix. Der Parameter V_f beschreibt den sogenannten Faservolumengehalt, der aus dem Verhältnis des Volumens der Faserbündel im Verhältnis zum Gesamtvolumen eines idealisierten CFK-Materials bestimmt wird. Demgegenüber repräsentiert V_m den Matrixvolumengehalt. Dieser wird unter der Bedingung $V_f + V_m = 1$ aus dem Faservolumengehalt abgeleitet. Die Anwendung der ROM lässt sich analog zur Bestimmung der Querkontraktionszahl

$$\nu_{12} = \nu_m \cdot V_m + \nu_f \cdot V_f \tag{5.60}$$

verwenden. Dieses Vorgehen stellt für die weiteren Materialparameter E_2, E_3, G_{12}, G_{23} und G_{13} jedoch kein angemessenes Modell dar, was insbesondere anhand experimenteller Untersuchungen in der Literatur [187] gezeigt werden kann. Hopkins und Chamis [188] schlagen daher einen alternativen Ansatz zur Bestimmung von E_2 und G_{12} vor:

$$E_2 = E_m \left((1 - \sqrt{V_f}) + \frac{\sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f}(1 - \frac{E_m}{E_{f2}})} \right) \tag{5.61}$$

$$G_{12} = G_m \left((1 - \sqrt{V_f}) + \frac{\sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f}(1 - \frac{G_m}{G_{f12}})} \right) \tag{5.62}$$

Aus Gründen der Einfachheit soll weiterhin $E_2 = E_3$ und $G_{13} = G_{12}$ gelten. Die Bestimmung von G_{23} lässt sich nach [189] wie folgt bestimmen:

$$G_{23} = G_m \left(\frac{V_f + \eta_{23}(1 - V_f)}{\eta_{23}(1 - V_f) + V_f \frac{G_m}{G_f}} \right) \tag{5.63}$$

$$mit \tag{5.64}$$

$$\eta_{23} = \frac{3 - 4V_m + \frac{G_m}{G_f}}{4(1 - V_m)} \tag{5.65}$$

Im Weiteren wird zunächst davon ausgegangen, dass die Materialkennwerte für Faser und Matrix konstant sind und somit nur der Faservolumengehalt V_f die veränderliche Größe darstellt. Aufgrund der vernachlässigbaren Kompressibilität der Fasern in verformten Einzellagen eines Laminats kann der Faservolumengehalt über die Veränderung des Gesamtvolumens eines

Materialausschnitts (z.B. ein Element des FE-Modells) im Vergleich zu einem ungeschädigten Materialvolumen bestimmt werden. Dazu wird zunächst das von der Faser eingenommene Volumen Vol_{Faser} bestimmt:

$$Vol_{Faser} = V_f \cdot Vol_{Gesamt} \tag{5.66}$$

Infolge der Verformung durch die OoP-Welligkeit kann der lokal-variierende Faservolumengehalt V_f' mithilfe des veränderten Materialvolumens Vol'_{Gesamt} gemäß

$$V_f' = \frac{Vol_{Faser}}{Vol'_{Gesamt}} \tag{5.67}$$

berechnet werden. Neben der mathematischen Grenze des maximalen Faservolumengehalts von $V_{f_{max}} = 1$ existiert zusätzlich eine physikalische Grenze. Dieser Grenze liegen zwei grundsätzliche Packungsmodelle, der hexagonalen und quadratischen Packung, zugrunde, die die maximale Packungsdichte von Faser und Matrix definieren und in Abbildung 5.13 veranschaulicht sind. Für die quadratische Packung liegt der maximale Wert von V_f bei ≈0,79, bei der hexagonale Packung bei ≈0,91. Da im Allgemeinen das vorherrschende Packungsmodell während der Fertigung nicht beeinflusst werden kann, liegt i.d.R eine Kombination beider Modelle im Material vor.



(a) Hexagonale Packung (b) Quadratische Packung

Abbildung 5.13.: Verschiedene Packungsmodelle von Faser und Matrix.

Abschließend muss ergänzt werden, dass mit einer variablen Konzentration der Fasern in den Einzellagen neben der Korrektur der Steifigkeitsparameter auch eine nominelle Anpassung der Festigkeiten formell durchzuführen ist. In [148] ist ein entsprechender Ansatz unter Nutzung von Mischungsregeln zur mikromechanischen Beschreibung der Festigkeiten in faserlängs- und faserquer-Richtung sowie Schubfestigkeiten erläutert. Dieser Aspekt wird jedoch im Rahmen der Arbeit aus Komplexitätsgründen zunächst vernachlässigt.

5.7. Stochastische Bewertung

Ausgehend von der räumlichen ZF-Parametrisierung der OoP-Welligkeit und der numerischen Bewertung in Bezug auf die resultierende Abminderung von Materialkennwerten wird im Folgenden ein geeigneter Analyseprozess erarbeitet und dargelegt werden, um die Problemstellung aus probabilistischer Sicht zu betrachten.

5.7.1. Beschreibung eines numerischen Prozesses zur stochastischen Analyse

Ungeachtet des konkreten physikalischen Problems lassen sich FEM-basierte Analysemethoden unter Berücksichtigung stochastischer Einflussgrößen in zwei wesentliche Kategorien unterteilen: *intrusive* bzw. *nicht-intrusive* Verfahren.

Charakteristisches Merkmal intrusiver Verfahren ist die direkte Integration der Parametrisierung der stochastischen Eingangsvariablen in die Steifigkeitsmatrix innerhalb der klassischen FEM-Formulierung, um eine Lösung aus probabilistischer Sicht zu ermöglichen [190–193]. Intrusive Methoden können je nach Anwendungsfall Effizienzvorteile bei der Lösungsermittlung gegenüber nicht-intrusiven Ansätzen aufweisen. Beide Ansätze sind jedoch im Allgemeinen im Hinblick von Konvergenzfragestellungen miteinander vergleichbar [194, 195]. Demgegenüber steht jedoch eine erhöhte Komplexität intrusiver Ansätze in Bezug auf die technischen Umsetzung, wodurch ein effizienter Einsatz oft nur bei idealisierten, akademischen Fragestellungen realisierbar ist und sinnvoll erscheint.

Im Kontrast dazu stehen nicht-intrusive Methoden, die die stochastische Parametrisierung der Eingangsgrößen und die deterministische FEM-Lösung des mechanischen Problems unabhänging voneinander betrachten [196–199]. Die stochastischen Ergebnisgrößen werden durch die Analyse unabhängig bestimmter Strukturantworten ermittelt, die aus verschiedenen Stichproben der Eingangsgrößen abgeleitet sind. Monte-Carlo Verfahren stellen ein repräsentatives Beispiel dieser Vorgehensweise dar. Ein wesentlicher Vorteil der Methodik ist die einfache Implementierung in aktuelle numerische Berechnungsprogramme bzw. Software-Umgebungen und ist daher die häufigste Vorgehensweise in der Literatur zur Lösung einer Vielzahl unterschiedlicher Fragestellungen [200–202].

Aufgrund der komplexen Detailaspekte bei der numerischen Modellbildung (siehe Abschnitt 5.6) wird daher im Folgenden der stochastische Analyseprozesses auf Basis eines nicht-intrusiven Ansatz umgesetzt. Der implementierte Gesamtprozess ist in Abbildung 5.14 grafisch vereinfacht dargestellt. Hierbei ist der numerische Berechnungsaufwand das zentrale Auswahlkriterium, da bei einem vergleichbaren intrusiven Ansatz aufgrund der sehr großen Anzahl an stochastischen Eingangsvariablen der ZF-Formulierung und der daraus resultierenden Größe der Gesamtsteifigkeitsmatrix die numerische Lösbarkeit mittels aktueller Rechenkapazitäten nicht mehr gewährleistet ist[193].

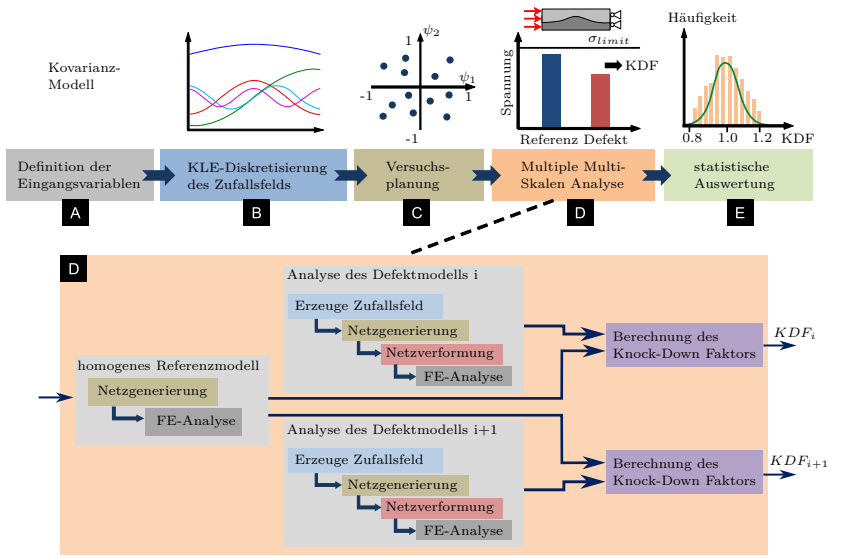


Abbildung 5.14.: Vereinfachte Darstellung eines Prozesses zur Bestimmung stochastischer Abminderungsfaktoren

Der Prozess lässt sich in folgende Abschnitte unterteilen:

(A) Bestimmung der Eingangsgrößen
(B) KLE-basierte Diskretisierung des Welligkeitsfelds
(C) Stützstellenplanung
(D) Bestimmung der KDF mithilfe eines Multi-Skalen-Ansatzes
(E) Bestimmung stochastischer Momente der KDF

Die einzelnen Prozessbestandteile greifen die in den vorherigen Kapiteln und Abschnitten beschriebenen formalen Aspekte der numerischen Bewertung auf und werden in einem prozeduralen Ablauf zusammengeführt sowie um technische Implementierungsaspekte ergänzt werden.

5.7.1.1. Bestimmung der Eingangsgrößen und KLE-basierte Diskretisierung des Welligkeitsfelds

Initialer Schritt ist die Bestimmung der streuenden Eingangsgrößen durch die Definition eines geeigneten räumlichen ZF-Modells zur Beschreibung der OoP-Welligkeit (siehe Kapitel 4.3.1). Bei der Wahl des Zufallsmodells sind zudem etwaige Randbedingungen (analog zu Kapitel 4.4.3) zu berücksichtigen. Mithilfe der gewählten Korrelationsfunktion werden in

einem folgenden Schritt die geometrischen Abmaße und Netzfeinheit des zu betrachtenden Zufallsfelds definiert, auf die die Korrelationsfunktion angewendet wird. Das Ergebnis stellt die Kovarianzmatrix dar, dessen Zeilen- und Spaltenanzahl der Knotenmenge des diskretisierten ZFs entspricht.

Nachfolgend wird die Kovarianzmatrix mittels der KLE Methode approximiert (Kasten B, vgl. Kapitel 4.4.2), dessen Approximationsgüte dabei abhängig von der gewählten Anzahl zu betrachtender Moden ist. Die Anzahl an Moden ist gleichzeitig die wichtigste Einflussgröße in der statistischen Versuchsplanung (Kasten C, vgl. Kapitel 4.5) und entspricht der Länge der unkorrelierten, standardnormal verteilten Variablen (siehe Gleichung 4.35).

5.7.1.2. Stützstellenplanung

Aufgrund des Berechnungsaufwands der FEM-Verfahren zur KDF-Bestimmung beeinflusst die gewählte Modenanzahl gleichzeitig die Auswahl der Methode zur Versuchsplanung, da eine beliebig große Anzahl an Stützstellen trotz verfügbarer Rechenressourcen nicht möglich ist. Abschnitt 4.6 diskutiert zu diesem Zweck die Auswahl des LCVT-Verfahrens als Referenzmethode im Prozess.

5.7.1.3. Bestimmung der KDF mithilfe eines Homogenisierungsansatzes

Auf Basis der erzeugten Stützstellen aus der Versuchsplanung und der KLE-basierten Approximation des ZFs können unterschiedliche Realisierungen der Welligkeiten im numerischen FEM-Modell erzeugt werden, um daraus folgend mithilfe des in Abschnitt 5.5 beschriebenen Konzepts eine deterministische Bestimmung der Knock-Down-Faktoren durchzuführen (Block D). Da der umgesetzte Analyseprozess auf einem nicht-intrusiven Ansatz basiert, kann eine unabhängige Analyse der verschiedenen Welligkeitsfelder durchgeführt werden, was einen hohen Parallelisierungsgrad ermöglicht. Abbildung 5.15 stellt grafisch zwei beispielhafte FE-Modelle auf Basis von beliebigen ZF-Realisierungenen dar.

Algorithmische Aspekte zur effizienten Modellerzeugung

Der initiale Modellierungsschritt beinhaltet die strukturierte Netzgenerierung der Laminatkonfiguration (siehe u.a. [203]). Anschließend wird eine Netzverformung jeder Einzelschicht im Laminat mithilfe von Gleichung 5.57 gemäß der generierten ZF-Realisierungen durchgeführt, um die gewünschten dreidimensionalen Modelldefekte zu erzeugen. Ein wesentlicher Vorteil von strukturierten Verfahren gegenüber unstrukturierten Methoden ist hierbei die effiziente Wiederverwendbarkeit innerhalb der probabilistischen Berechnungsstudien. Für

[11] Zur besseren Sichtbarkeit sind die Lagen oberhalb der Laminatmittellinie transparent dargestellt. Die farbliche Kodierung beschreibt die relative Verschiebung eines Materialpunktes der Mittellage in Bezug auf eine unverformte Konfiguration.

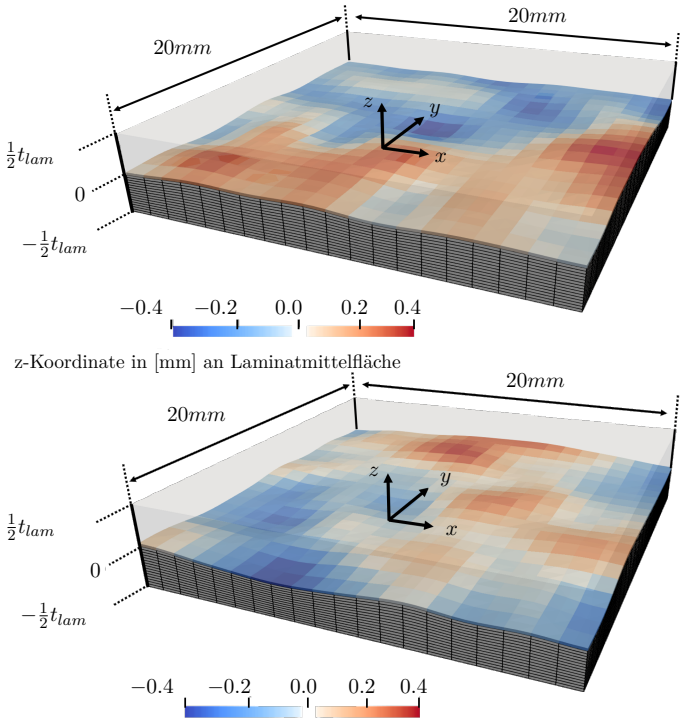


Abbildung 5.15.: Darstellung von zwei ausgewählten FE-Modellen eines Referenzlaminats mit der Dicke t_{lam}, besteht aus etwa 169,000 Freiheitsgraden, unter Berücksichtigung stochastischer OoP-Welligkeiten.[11]

die FE-basierte Bestimmung der Materialeigenschaften und inneren Beanspruchungen des ungestörten Laminats muss ein strukturiertes Netz nur einmal generiert werden. Dieses kann dann für alle welligkeitsbehafteten Modelle als Referenz zur KDF-Bestimmung verwendet werden. Aufgrund des identischen Ausgangsnetzes kann für jedes Element des geschädigtem Laminats, ungeachtet der ZF-Realisierung und Netzverformung, ein Referenzelement eindeutig zugeordnet werden. Als nachteilig dieser Herangehensweise stellen sich etwaige Sensitivitäten in Bezug auf die numerische Genauigkeit der FE-Lösung heraus. Für den Fall eines großen Verhältnisses der Korrelationslängen des ZFs in den einzelnen Raumrichtungen kann dies eine allgemeine Verfeinerung des gesamten Modells bedingen, um stark verzehrte Elemente durch unterschiedliche Netzfeinheiten in den Raumrichtungen des Modells zu vermeiden.

Dieser Aspekt kann im Kontext von Welligkeiten im CFK-Material relevant sein. Die stark

unterschiedlichen und richtungsabhängigen Steifigkeiten von Faser- und Matrixmaterial beeinflussen maßgeblich die geometrische Ausrichtung der Welligkeit und rechtfertigt die Verwendung von raumrichtungsabhängigen Korrelationslängen des ZF-Modells. Der Umstand ist jedoch nur bei unidirektionalen Laminaten wesentlich gegeben, da bei Laminaten mit einer Vielzahl unterschiedlicher Lagenorientierungen eine Stützwirkung der einzelnen Lagen untereinander angenommen werden kann, sodass dies die Verwendung ähnlicher Korrelationslängen in der Raumrichtungen plausibel erscheinen lässt.

Gegenüber einer strukturierten Generierung ermöglichen unstrukturierte Verfahren die Erzeugung lokal verfeinerter Netze. Dies kann sich als vorteilhaft erweisen, um z.B. Bereiche des ZFs mit großen Gradienten adäquat diskretisieren zu können und ungestörte Bereiche sehr grob zu vernetzen. Dies beruht auf der Annahme, dass diese Bereiche im Hinblick auf die resultierenden KDF i.d.R. einen großen Einfluss haben. Die praktische Anwendung der Methodik wird jedoch dadurch eingeschränkt, da es keinen robusten, steuerbaren Prozess gibt, der eine vergleichbare FEM-Diskretisierung auf Basis unterschiedlicher ZF-Realisierungen erzeugt und eine allgemeine Vergleichbarkeit durch die zugrundeliegende Komplexität der ZF-Parametrisierung in Frage zu stellen ist. Vergleichbar bedeutet in diesem Zusammenhang die Anwendung von Qualitätskriterien der Netze, um numerische Störeinflüsse und Robustheitsprobleme der FEM-Lösung und KDF-Bestimmung zu mindern. Sofern lokal angepasste Modelldiskretisierungen auf Basis unstrukturierter Methoden zu einer stichprobenartigen Verringerung der Berechnungskomplexität führen, so muss durch die unterschiedliche Netzdichte (und fehlenden Steuerungsmöglichkeit) für jede stochastisch berechnete Welligkeitsausprägung ein separates, ungestörtes Referenzlaminatmodell erzeugt werden. Dies erhöht jedoch den Berechnungsumfang der stochastischen KDF-Bestimmung vielfach, sodass die Nutzung strukturierter Generierungsmethoden nach Abwägen der Vor- und Nachteile unstrukturierten Verfahren zu bevorzugen ist.

Aufgrund der hohen Rechenanforderungen des probabilistischen Berechnungsansatzes wird in der vorliegenden Arbeit für die Analyse der FE-Lösung zur KDF-Bestimmung auf quell-offene FEM-Berechnungsprogramme zurückgegriffen, die die Anforderung des hohen Parallelisierungsgrads erfüllen können. Im konkreten wird das FEM-Programm B2000++ [204] zur Berechnung der linear statischen Modellverformung und der mechanischen Spannungen verwendet.

5.7.1.4. Bestimmung stochastischer Momente des KDFs

Für die ermittelten KDFs der unabhängigen und deterministischen Analysen werden in einem finalen Analyseschritt statistische Ergebnisgrößen (auch *Momente* genannt) abgeleitet (Block E). Analog zu Gleichung 5.54 und 5.55 in Abschnitt 5.5 erfolgt dies auf Lagen- bzw.

Laminatebene. Zu den wichtigsten Größen zählen das arithmetische Mittel

$$\overline{KDF} = \frac{1}{n_{Sim}} \left(\sum_{j=1}^{n_{Sim}} KDF_j \right) \tag{5.68}$$

und die empirische Varianz entsprechend

$$Var\,(KDF) = \frac{1}{n_{Sim} - 1} \left(\sum_{j=1}^{n_{Sim}} (KDF_j - \overline{KDF})^2 \right) \tag{5.69}$$

, die auf Basis der KDF-Stichprobe der Größe n_{sim} ermittelt werden können. Neben den statistischen Momenten der KDFs ist die zugrundeliegende Verteilung von größerem Interesse. Aufgrund diverser Einflussfaktoren innerhalb des FEM-basierten Berechnungsansatzes kann eine geschlossen analytische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion jedoch nicht ermittelt werden, sodass die zugrundeliegende Verteilung geschätzt werden muss. Zu diesem Zweck ist ein probates Mittel anhand der Stichprobe ein Histogramm abzuleiten, welches die absoluten Häufigkeiten einzelner Stichprobenwerte KDF_j in äquidistanten Bereichen des Ergebnisraums übersichtlich darstellt. Histogramme besitzen jedoch die wesentliche Limitierung der Unstetigkeit. Trotz verschiedener numerischer Einflüsse kann jedoch angenommen werden, dass den KDFs eine kontinuierliche Verteilung zugrunde liegt. In Bezug zur Annahme wird in der Arbeit daraus folgend ein sogenannter Kerndichteschätzer verwendet, mit dem eine kontinuierliche Verteilung ermittelt werden kann [205].

Demgegenüber existieren alternative Berechnungsansätze, die darauf beruhen, dass die Stichprobe einer gewöhnlichen parametrischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (z.B. Normal, Exponential oder Weibull) folgt. Mittels der Grundannahme können die zugehörigen Parameter der Dichtefunktion gemäß der vorliegenden Stichprobe in dem Maße ermittelt werden, sodass die Wahrscheinlichkeit, die Stichprobe als entsprechende Realisierung zu erhalten, maximiert wird. Die Methodik wird in der Literatur auch als Maximum-Likelihood-Schätzung bezeichnet [206]. Bayessche Inferenzmethoden stellen weitere Ansätze zur Schätzung geeigneter Verteilungen der numerischen KDF-Stichprobe dar [207]. Da die theoretische KDF-Verteilung jedoch unbekannt ist, sind alle Ergebnisse der Parameterschätzung ausschließlich innerhalb der numerischen Genauigkeiten und Grundannahmen der Schätzmethoden gültig.

5.7.2. Ableitung geometrischer Beziehung zwischen Welligkeit und KDF-Verteilungen von Materialparametern

Die berechneten KDFs sowie deren Histogramme bzw. geschätzten Verteilungen lassen sich folglich zur Bewertung der Tragfähigkeiten des CFK-Laminats (bzw. der Laminatkonfigurationen) aus nicht-deterministischer Sicht verwenden. Für einen praktischen Einsatz des

stochastischen Analyseprozesses in Abb. 5.14 ist dieses Vorgehen zunächst nur eingeschränkt anwendbar. Ziel einer KDF-Bestimmung mittels numerischer Verfahren ist eine Unterstützung für eine fundierte Bewertung von welligkeitsinduzierten Bauteilfehlern während der physischen Fertigung. Zu diesem Zweck ist eine Herangehensweise vorteilhaft, die die komplexe Fehlergeometrie und resultierende Änderung der nominellen Materialkennwerte mithilfe von wenigen geometrischen Größen bestmöglich approximiert. Diese sollten sich idealerweise am real gefertigten Bauteil effizient und einfach erfassen lassen. Die Eignung des Vorgehens kann dadurch begründet werden, dass die Schadensinitiierung eng mit hohen lokalen Gradienten oder Amplituden der Welligkeitsgeometrie zusammenhängt. Studien in der Literatur [3, 40, 55, 208] haben einen solchen Zusammenhang für einfache und symmetrische Welligkeitsparametrisierungen (z.B. per Sinusfunktion) bereits exemplarisch gezeigt. Es stellt sich jedoch die Frage, ob sich dieser Ansatz ohne Weiteres auf die betrachteten stochastischen und zweidimensionalen Geometrien der Arbeit übertragen lässt.

Zur Beantwortung der Frage in der Arbeit ist die Verwendung von geeigneten Metriken erforderlich. Diese orientieren sich wesentlich, analog zu bereits ermittelten Zusammenhängen in der Literatur, an den Extrempunkten der Welligkeitsgeometrie. Sie lassen sich durch n-fache Ableitung der ZFs bestimmen.

Maximale Amplitude Die maximale Amplitude der Welligkeit ergibt sich aus dem nominellen Maximal- $max(ZF)$ und Minimalwert $min(ZF)$ der ZFs (siehe Abbildung 5.16(a)). Für einen Vergleich verschiedener Laminatkonfigurationen kann die Amplitude darüber hinaus auf die jeweilige Laminatdicke t_{lam} bezogen werden, sodass sich eine normierte Amplitude a_{rel} im Bereich zwischen 0 und 1 ergibt. Diese wird dann wie folgt berechnet:

$$a_{rel} = \frac{max(ZF) - min(ZF)}{t_{lam}} \tag{5.70}$$

Die maximale Amplitude stellt die einfachste geometrische Bewertungsgröße dar. Gleichzeitig unterliegt ihr die größte Ungenauigkeit, da die Betrachtung über globale Größen des ZF erfolgt.

Maximaler Gradient des ZFs Im Gegensatz zur Amplitude repräsentiert der maximale Gradient des ZFs lokale geometrische Veränderungen, die Ursache für Spannungskonzentrationen und somit Rissinitiierungen sein können. Der Gradient kann durch Ableitung des ZFs nach den Raumrichtungen bestimmt werden. Entgegen einer geschlossen, analytischen Parametrisierung lassen sich Gradienten für ZF nur numerisch bestimmen. Dies erfolgt in der Arbeit mithilfe finiter Differenzenverfahren, bei der im Inneren des ZFs zentrale- und an den

ZF-Modellrändern Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzen angewendet werden [85]:

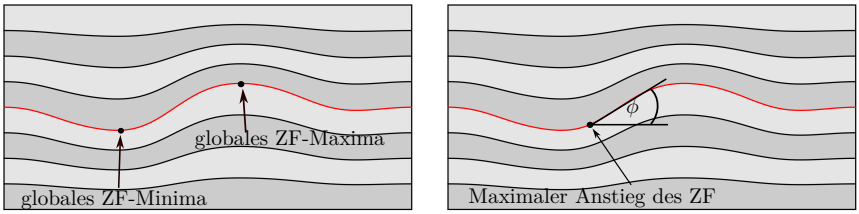
$$\frac{\partial f_{ZF}^{+}}{\partial x} = \frac{f_{ZF}(x+h) - f_{ZF}(x)}{h} \tag{5.71}$$

$$\frac{\partial f_{ZF}^{-}}{\partial x} = \frac{f_{ZF}(x) - f_{ZF}(x-h)}{h} \tag{5.72}$$

$$\frac{\partial f_{ZF}^{c}}{\partial x} = \frac{f_{ZF}(x+h) - f_{ZF}(x-h)}{2h} \tag{5.73}$$

$f_{ZF}^{+}, f_{ZF}^{-}, f_{ZF}^{c}$ in Gleichung 5.71-5.73 bezeichnen das Vorwärts-, Rückwarts- und zentrale Differenzenverfahren[12]. h repräsentiert die Schrittweite. Diese ist für eine gute Gradientenapproximation hinreichend klein zu wählen. In Zusammenhang mit dem Gradienten steht der Anstiegswinkel ϕ (siehe Abbildung 5.16(b)), der wie folgt definiert ist:

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{\partial f_{ZF}}{\partial x}\right) \tag{5.74}$$



(a) ZF-Minima und ZF-Maxima (b) Maximal ZF-Gradient

Abbildung 5.16.: Darstellung einfacher geometrischer Größen des ZF

Maximale Krümmungen des ZFs Die Krümmung des ZF beschreibt die Änderung des Gradienten und kann, analog zur Gradientenberechnung, numerisch durch zweimalige Ableitung an den Gitterpunkten des ZFs in den Raumrichtungen ermittelt werden:

$$\frac{\partial^2 f_{ZF}^{+}}{\partial x} = \frac{f_{ZF}(x+h) - 2f_{ZF}(x) + f_{ZF}(x-h)}{h^2} \tag{5.75}$$

Zu jeder regulären Fläche existieren neben den Krümmungen in den Raumrichtung zwei Hauptkrümmungen k_1 und k_2, die den Maximal- und Minimalwert der Krümmung in jeder Tangentialrichtung eines beliebigen Punkts der regulären Fläche darstellt. Auf den Hauptkrümmungen aufbauend repräsentieren die Gaußsche Krümmung mit $K = k_1 k_2$ und die mittlere Krümmung mit $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ wichtige skalare Maße zur Krümmungsbeschreibung. Aus

[12]Die Anwendung der Gleichungen in y-Richtung erfolgt sinngemäß.

allen Krümmungswerten an den ZF-Punkten können folgend die Extremwerte des gesamten ZFs ermittelt werden.

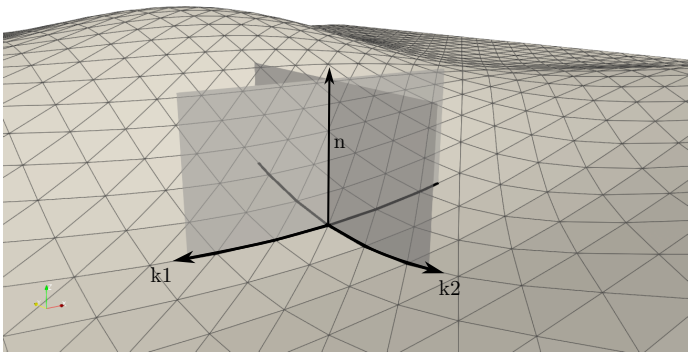


Abbildung 5.17.: Darstellung der Hauptkrümmungen k_1 und k_2 für einen beliebigen Punkt einer diskretisierten Oberfläche

Alle beschriebene Metriken lassen sich sowohl auf Lagen als auch auf Laminatebene anwenden. Bei letzterem erscheint aufgrund der gewählten ZF-Parametrisierung eine Auswertung der geometrischen Größen an der relativen Position z_{Rel} des ZFs (siehe Abschnitt 5.6.2) sinnvoll. Auf Lagenebene können Gradienten- bzw. krümmungsbasierte Metriken zudem auf die jeweilige Lagenorientierung bezogen werden, sodass eine Rotation des ZFs um den vorliegenden Lagenwinkel durchgeführt werden muss. Dieser Ansatz kann vor dem Hintergrund richtungsabhängiger UD-Steifigkeiten der Einzellagen vorteilhaft sein, um angemessene Bewertungskriterien auf Lagenebene abzuleiten.

5.7.3. Technische Realisierung des Analyseprozesses

Abschließend sollen die beschriebenen Analyseschritte des probabilistischen Prozesses mit Fokus auf technische Randbedingungen eingeordnet werden. Die genaue Bestimmung der stochastischen Momente der KDF erfordert, je nach Anzahl der unkorrelierten Eingangsvariablen des ZF, einen hohen numerischen Berechnungsaufwand. Eine Verwendung von Hochleistungsrechnern (engl. *High Performance Computing*, HPC) ist daher zwingend notwendig [209]. Obwohl die Hochleistungsrechenkapazitäten zunehmen, müssen die Entscheidungen zur technischen Implementierung des Prozesses sorgfältig im Hinblick auf die technischen Spezifikationen des auszuführenden Systems getroffen werden.

Allgemein sind HPC-Systeme in ihrem grundsätzlichen Aufbau mit herkömmlichen Desktopsystemen vergleichbar. Die höhere Rechenleistung entsteht durch die Kombination einer großen Anzahl von unabhängigen Berechnungseinheiten (den sogenannten Rechenknoten) im

gesamten HPC-Rechensystem, die aus elementaren Komponenten wie Prozessor, Arbeitsspeicher und Festplatte bestehen. Zwischen den Recheneinheiten existiert ein Netzwerk zum schnellen Datenaustausch. Der grundlegende Aufbau führt zu einem erhöhten Ausfallrisiko und damit verbundenen finanziellen Risiken. Dies hat in den letzten Jahren zu einer verstärkten Nutzung alternativer HPC-Architekturen geführt. Ein zentrales Konzept sind sogenannte *Diskless* HPC-Systeme [210], deren Aufbau schematisch in Abbildung 5.18 dargestellt ist und für die Analysen der Arbeit verwendet wird.

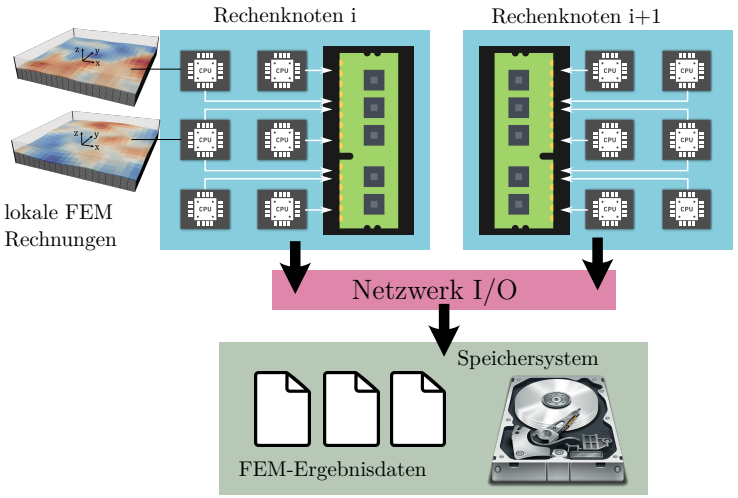


Abbildung 5.18.: Technischer Aufbau von Diskless-HPC Systemen

Wesentlicher Unterschied zu konventionellen HPC-Systemen früherer Generationen ist die Trennung von Komponenten zur Datenhaltung, wie z.B. Festplatten, und Komponenten, welche ausschließlich für Rechenaufgaben verwendet werden. Dies bietet aus Wartungsaspekten Vorteile beim Betrieb der Systeme. Für die technische Realisierung des stochastischen Analyseprozesses hat dies jedoch signifikante Auswirkungen.

Jede Recheneinheit des HPC-Systems besteht aus einer Anzahl an physischen Prozessoren, die im Prozess zur FE-Berechnung und folgenden KDF-Bestimmung für die voneinander unabhängigen Welligkeitsrealisierungen verwendet werden. Die Verwendung des FEM-Programms *B2000++* bedingt jedoch aus diversen Gründen einen hohen I/O Datendurchsatz, da Verformungs- und Spannungsgrößen persistent in Ergebnisdateien abgespeichert werden. Bei einer Vielzahl von zeitgleichen FE-Berechnungen erzeugt dies eine große Menge zu speichernder Daten, die die parallele Effizienz der probabilistischen Analyse deutlich mindern können.

Für die detaillierten Untersuchungen im folgenden Kapitel wurde der sogenannte HPC-Cluster CARA verwendet, der sich am DLR befindet. Er umfasst insgesamt fast 146000 physikalische CPU-Kerne, verteilt auf 2280 Rechenknoten, die auf AMD EPYC 7601 Prozessoren basieren [211]. Aufgrund des hohen Datendurchsatzes der verschiedenen Schritte bei der Implementierung des numerischen Ansatzes wurden in jeder der Studien nur ein Teil der verfügbaren physischen Kerne verwendet, die jeweils mit einer einzigen stochastischen Stichprobenberechnung belegt waren.

6. Ergebnisse

Im folgenden Kapitel werden die im vorherigen Kapitel erläuterte Methodik zur stochastischen Analyse für verschiedene Anwendungsfälle untersucht.

6.1. Versuchsvorbereitung

6.1.1. Definition verwendeter Material und Modellgrößen

Aufgrund des großen Parameterraums der stochastischen Welligkeitsparametrisierung im CFK-Material ist für die numerische Bewertung initial eine sorgfältige Auswahl geeigneter Materialien und Modellparameter durchzuführen. Zielstellung bei der Auswahl geeigneter Materialien ist dabei die Repräsentativität im industriellen Maßstab, um die praktische Nutzbarkeit der Methode zu gewährleisten.

Wesentliche Modell- und Materialparameter im Kontext der Fragestellung sind im Folgenden:

- unidirektionale Materialkennwerte
- Lagenaufbau der untersuchten Laminatkonfigurationen
- Geometrische Abmessungen (Länge, Breite) des numerischen Referenzmodells

Als Zielgröße wird der berechnete KDF für die Druckfestigkeit in 1-Richtung (siehe Abbildung 5.3) betrachtet. Zur besseren Einordnung und für eine Validierung der ermittelten statistischen Größen auf Basis numerischer Rechenmodelle werden zudem Laminatkonfigurationen verwendet, bei denen experimentelle Studien in Bezug auf Festigkeitsuntersuchungen in der Literatur verfügbar sind. Auf Basis einer initialen Literaturrecherche wurden folgende Laminatkonfigurationen ausgewählt [9]:

1. unidirektional
2. quasi-isotrop $[(0, 45, -45, 90)]_s$
3. $[45, 0, -45, 90, 45, 0, 0, 45, 0, -45, 0, 0, 45, 90, 45, 0]_s$

Die Konfigurationen wurden dabei entsprechend der Betrachtung unterschiedlicher Komplexität im Hinblick auf resultierende KDF ausgewählt. Lagenaufbau Nr. 3 (im Folgenden mit

Lam_{FH} abgekürzt) repräsentiert eine Konfiguration als Teil einer optimierten Tragflügelstruktur [212, 213]. Der Entwurf des Lagenaufbaus Lam_{FH} erfolgte hierbei nach speziellen, erfahrungsbasierten Designregeln mit dem Zweck einer industriellen Anwendbarkeit [214].

Als Referenzmaterial einer unidirektionalen Einzellage wird im Folgenden IM7/8551-7 verwendet (siehe auch Tabelle 6.1). Es ergibt sich aus der Berechnung der Einzelkennwerte für Faser und Matrix gemäß der Gleichungen 5.59 bis 5.63 aus Kapitel 5.6.4 für einen Faservolumengehalt von $V_f = 0.6$. Die benötigten Steifigkeitsparameter für Faser- und Matrixsystem sind im Anhang in den Tabellen A.1 und A.2 aufgelistet. Die betrachtete nominelle Dicke einer einzelnen Lage beträgt 0,125 mm. Zur besseren Vergleichbarkeit wird die Gesamtdicke für alle gewählten Laminattypen mit 4 mm festgelegt, was einer Gesamtanzahl von 32 Einzellagen entspricht.

Tabelle 6.1.: Steifigkeits- and Festigkeitsgrößen des ausgewählten IM7/8551-7 UD Ausgangsmaterials [215]

	Kenngröße	Wert
Elastizitätsmodul	E_{11}	$163\,000\,\mathrm{N\,mm^{-2}}$
	E_{22}, E_{33}	$8500\,\mathrm{N\,mm^{-2}}$
Schubmodul	G_{12}, G_{13}	$4200\,\mathrm{N\,mm^{-2}}$
	G_{23}	$3360\,\mathrm{N\,mm^{-2}}$
Querkontraktionszahl	ν_{12}, ν_{13}	0.35
	ν_{23}	0.26
Zugfestigkeit	R_x	$2610\,\mathrm{N\,mm^{-2}}$

Für die durchgeführten probabilistischen Analysen wird, wenn nicht abweichend explizit gekennzeichnet, ein numerisches Referenzmodell mit den Abmaßen 20 mm×20 mm betrachtet.

6.1.2. Stochastische Parametrisierung der Welligkeit

Die Auswahl eines angemessenen und repräsentativen stochastischen Welligkeitsmodells erweist sich aufgrund limitiert verfügbarer Messdaten aus Materialuntersuchungen als anspruchsvoll. In diesem Kontext ist es wichtig, zwischen der qualitativen Beschreibung der Welligkeit aus probabilistischer Sicht, im Konkreten dem Typ Korrelationsfunktion, und der quantitativen Definition zu unterscheiden, welche durch die maximale Streuung der Zufallsvariable und die Korrelationslänge charakterisiert ist. In Anlehnung der Diskussion in Abschnitt 4.6 in Kapitel 4 wird zunächst eine Gaußsche Korrelationsfunktion angenommen. Für die spezifische Festlegung des nominalen Werts der stochastischen OoP-Amplitude wird im Folgenden auf die Arbeiten von [76] zurückgegriffen, da die Veröffentlichung die einzige verfügbare Literaturquelle darstellt, aus der genaue Werteverteilungen entnommen werden können.

Die veröffentlichten Daten in [76] wurden für eine Laminatkonfiguration ermittelt, die zu einem großen Teil aus unidirektionalen Einzellagen bestand. Eine genaue Beschreibung der

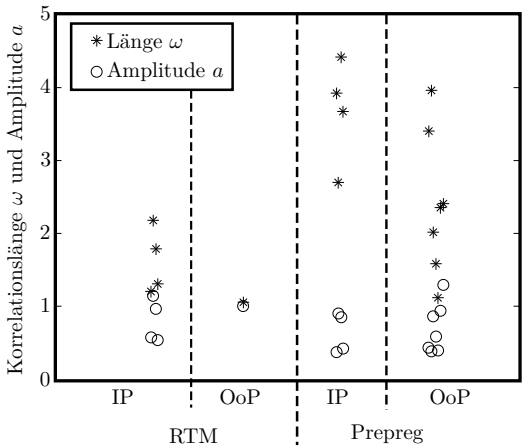


Abbildung 6.1.: Ermmittelte Korrelationslängen für Materialproben auf Basis von Mikrofotografie [76].

Orientierung der übrigen Einzellagen im Laminat sowie Erfassung der Gesamtdicke des Laminats findet jedoch nicht statt. Die Verwendung im Rahmen der Studien für die zuvor ausgewählten Materialien muss daher kritisch betrachtet werden und begründete Anpassungen vorgenommen werden. Zu Demonstrationszwecken wird im Weiteren von *Prepreg*-Laminaten ausgegangen. Laminate diesen Typs weisen, in Anlehnung an Abbildung 6.1, fertigungsbedingt größere Streuungen bei OoP-Welligkeiten im Vergleich zu *RTM*-basierten Laminaten auf[1]. Die Korrelationslängen liegen hierbei zwischen 1 mm und 4 mm, die Welligkeitsamplituden in OoP-Richtung zwischen 0,5 mm und 1,3 mm. Für Laminatkonfigurationen, bestehend aus Lagen unterschiedlicher Orientierung, müssen die nominellen Parametergrößen aufgrund des veränderten Materialverhaltens während des Fertigungsprozesses in den einzelnen Raumrichtungen entsprechend abgeschätzt werden. In Anlehnung an das Sparsamkeitsprinzip [216] wird für die verwendeten Materialkonfigurationen zunächst davon ausgegangen, dass resultierende Korrelationslängen und Amplituden ähnliche Abmessungen bzw. maximale Schwankungsbreiten im Vergleich zur vorhandenen Quelle aufweisen. Für die weiteren Untersuchungen werden folgende Werte für die Korrelationslängen $\boldsymbol{l_c}$ in x- und y-Richtung verwendet:

$$\boldsymbol{l_c} = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} mm \tag{6.1}$$

Für die Varianz der Welligkeitsamplitude wird $s^2 = 0{,}0625$ verwendet. Aufgrund der sym-

[1] Die Wahl des Laminattyps an dieser Stelle impliziert keine Unterschiede bzgl. der numerischen Modellbildung bzw. Analyse und dient nur zu Demonstrationszwecken großer nominellen Defektausprägungen aus nichtdeterministischer Sicht

metrischen Verteilung der ZF-Werte um den Erwartungswert $\mu = 0$ kann für den gewählten Varianzwert eine maximale OoP-Verformung in Laminatdickenrichtung von $\pm 0{,}49\,\text{mm}$ für 95 Prozent aller ZF-Realisierungen bestimmt werden. Bezogen auf die Laminatdicke der betrachteten Laminatkonfigurationen entspricht dies einem Verhältnis von etwa 0,25.

6.2. Deterministische Untersuchung

Im folgenden Abschnitt wird die in Kapitel 5 vorgestellte Analysemethode zunächst exemplarisch und ausschließlich deterministisch angewendet. Als Referenzmaterial des numerischen FE-Modells wird ein unidirektionales Laminat, bestehend aus 16 Lagen, zunächst verwendet. Das 2D-Zufallsfeld zur Beschreibung der Welligkeit wird mithilfe eines Zufallsfeldmodells mit den Parametern aus Gleichung 6.1 erzeugt. Abbildung 6.2 veranschaulicht das verwendete Zufallsfeld grafisch. Die maximale Amplitude 0,45mm entspricht einem Verhältnis von 22,5 % der Laminatdicke.

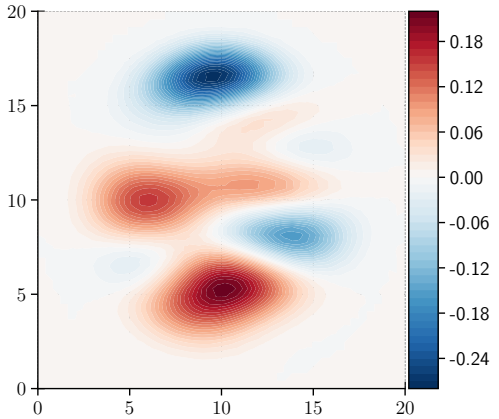


Abbildung 6.2.: Betrachtetes Zufallsfeld für deterministische KDF-Berechnung eines Modells der Größe $20\,\text{mm} \times 20\,\text{mm}$.

Für die Bestimmung der KDF werden die in Kapitel 5.4 beschriebenen spannungsbasierten Versagenkriterien auf die ausgewählte Modellkonfiguration angewendet. Abbildung 6.3 stellt die minimalen KDF für die einzelnen Lagen des gewählten UD-Laminats gegenüber.

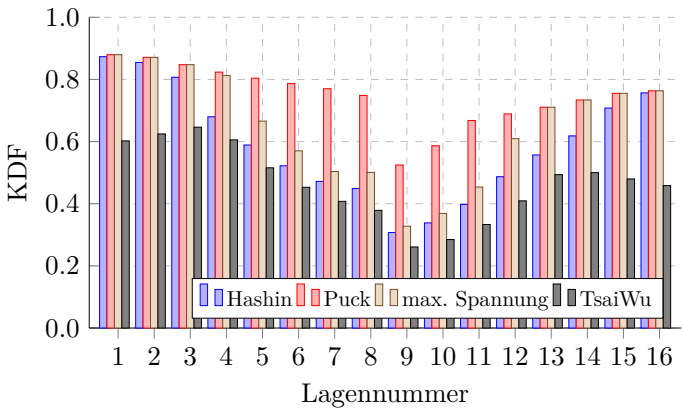


Abbildung 6.3.: Vergleich der KDF für die ausgewählten Versagenskriterien auf Lagenebene

Deutlich erkennbar ist eine um die Laminatmittelebene asymmetrische Verteilung der resultierenden KDF. Die maximalen Abweichungen der Werte für die Einzellagen der unteren Laminathälfte betragen etwa 52 % für die Lagen 8 und 9 an der Laminatfläche. Aufgrund der relativen Abnahme der Lagenverformungen durch die Welligkeit und daraus folgend der höhere KDF in Dickenrichtung reduziert sich die Abweichung auf etwa 15 % für die äußeren beiden Randlagen. Anhand der Abbildung fällt zudem auf, dass für alle Lagen die geringste Materialabminderung des betrachteten Festigkeitskennwerts beim Puck-Kriterium vorliegt. Dieses unterscheidet sich insbesondere für innere Lagen deutlich von den anderen drei Kriterien um bis zu 100 %, nähert sich jedoch auch hier zu den Randlagen dem Hashin und Maximalspannungskriterium (im Weiteren als σ_{max} Kriterium bezeichnet) an. Lediglich das Tsai-Wu Kriterium stellt hierbei einen Ausreißer dar, dessen Abweichungen aufgrund einer Abnahme des KDFs gegenüber den anderen Kriterien sogar zunehmen.

Die identifizierten Diskrepanzen zwischen den Kriterien in den Einzellagen können vielfältigen Ursachen unterliegen. Obwohl durch die Wahl der Randbedingungen ein spezifischer Verformungszustand an ausgewählten Modellrandbereichen erzwungen wird (siehe Kapitel 5.6.1), ist eine mögliche Ursache für die auftretenden Phänomene zunächst in der ZF-basierten, unsymmetrischen Faserauslenkung (Abbildung 6.2) zu finden. Ein damit verbundener Hauptfaktor ist die lokale Korrektur der Materialkennwerte in den einzelnen finiten Elementen des Modells. Analog zu Kapitel 5.6.4 liegt diese dem veränderten Faservolumengehalt V_f zugrunde, der durch die Lagenverformung induziert wird. Zur Verdeutlichung werden kritische Modellbereiche in Bezug auf den KDF herangezogen. Die minimalen Werte für alle Kriterien liegen hierbei entlang einer $x-z$-Schnittebene des Modells bei etwa y =5 mm. Zum Vergleich ist in Abbildung 6.4 der KDF für die Lage 8 in x- und y-Richtung elementweise dargestellt.

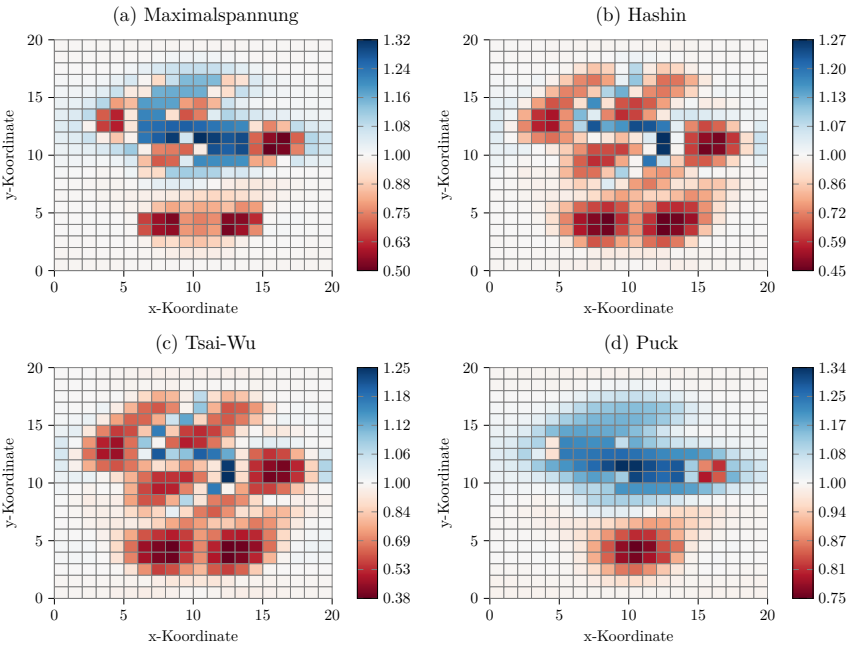


Abbildung 6.4.: Elementweiser Vergleich der KDF für gewählte Versagenskriterien der Lage an der Mittelfläche eines unidirektionalen Laminats mit 16 Lagen.[2]

Der lokal ermittelte Faservolumengehalt für Elemente an der Schnittebene ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Es ist erkennbar, dass durch die vertikale Faserauslenkung in negativer z-Richtung eine starke Kompression einzelner Elemente der unteren Lagen vorhanden ist, die einen deutlich erhöhten Faservolumengehalt zu Folge hat.

Anhand der maximalen Werte des V_f mit ca. 0,79 zeigt sich im Vergleich mit den Betrachtungen in Kapitel 5.6.4, dass in lokalen Modellbereichen fast ausschließlich Fasern vorhanden sind und somit die Materialsteifigkeit maßgeblich bestimmen. Demgegenüber wird die Steifigkeit für Lagen oberhalb der Laminatmittelfläche durch die Matrix überproportional dominiert. Der daraus resultierende große Steifigkeitsgradient ruft an der Laminatmittelfläche eine entsprechende Schubspannung hervor, die den KDF bestimmt.

Anmerkung bzgl. der KDF-Bestimmung An dieser Stelle muss ferner erwähnt werden, dass Bereiche in der Nähe der Modellrandbedingungen zur Bestimmung der KDF ausgenommen sind. Mögliche Einflüsse von Modellrandbedingungen sind des Weiteren durch Anpassung des Zufallsfeldmodells an den Modellrändern gemindert. Dies wird gemäß der beschriebenen

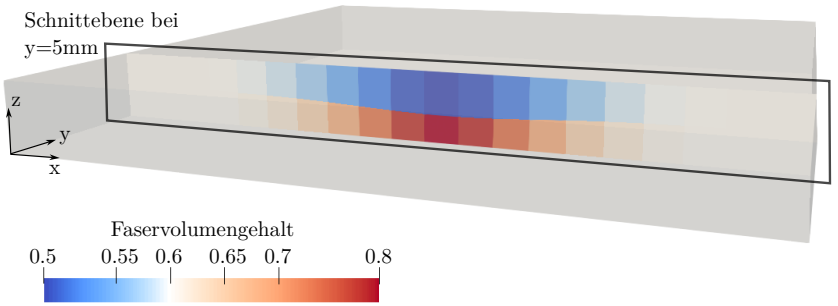


Abbildung 6.5.: Faservolumengehalt entlang einer Schnittebene des Modells.

Methodik in Kapitel 4.4.3 durch Vorgabe der Ableitungen der ZF in x- und y-Richtung umgesetzt, sodass an den Modellrändern keine Verformung in Laminatdickenrichtung vorliegt.

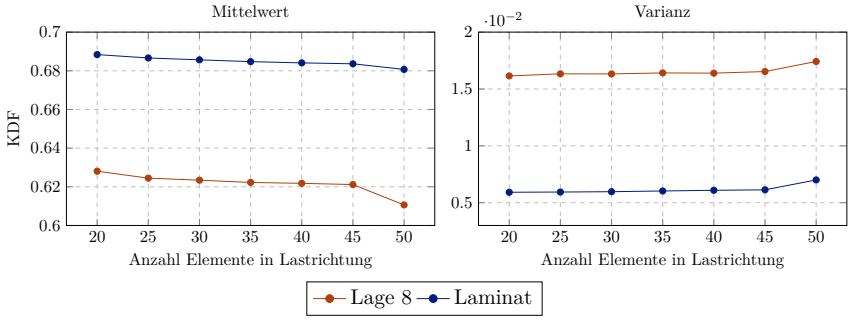
Aus Sicht der Berechnungskomplexität ist in Tabelle 6.2 die benötigte Rechenzeit für verschiedene Prozessschritte der KDF-Berechnung auf der Grundlage einer deterministischen Analyse der defekten und Referenzkonfiguration dargestellt. Erwartungsgemäß entfällt der größte Teil der Rechenzeit auf die Finite-Elemente-Berechnung.

Tabelle 6.2.: Berechnungszeit für Einzelschritte im Bewertungsprozess

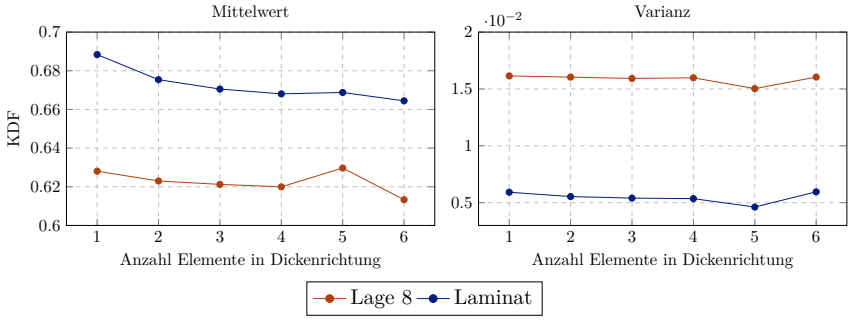
	Dauer	
Berechnungsschritt	Defekt	Ungeschädigt
FE-Modellgenerierung	31.75s	25.75s
FE-Analyse	120.09s	112.83s
Ergebnisauswertung	5.44s	5.30s
Gesamtlaufzeit	157.28s	143.83s

Untersuchung der Modellfeinheit

Der hohe Berechnungsaufwand aus stochastischer Sicht für die folgenden Analysen im Kapitel, der mit der großen Anzahl an unkorrelierten und normalverteilten ZF-Variablen ξ_i einher geht, erfordert eine genaue Vordefinition der verwendeten Modellfeinheit der FEM-Diskretisierung. Ziel ist, bei der Definition einen angemessenen Kompromiss zwischen der möglichst effizienten numerischen Bestimmung mittels eines groben Modells und der erforderlichen Ergebnisgenauigkeit zu finden. Zu diesem Zweck wurde zunächst eine Analyse der Modellsensitivität bei verschiedenen Netzdiskretisierungen im Hinblick auf den KDF als betrachtete Zielgröße durchgeführt.



(a) Netzverfeinerung in x-Richtung



(b) Netzverfeinerung in z-Richtung

Abbildung 6.6.: Vergleich des Einflusses unterschiedlicher Netzfeinheiten in x-Richtung (a) und z-Richtung (b) auf den KDF auf Lagen- und Laminatebene.

In einem ersten Schritt wurde die Netzdichte in x-Richtung, der Belastungsrichtung des gewählten Lastfalls, für jede Schicht des Laminats variiert, sodass sich eine numerische Modellgröße zwischen 50 und 350 Tausend Freiheitsgraden ergab. Verglichen mit der geometrischen Dimension des Modells betrag die Elementkantenlänge in x-Richtung zwischen 0,4 mm für die feinste Netzgröße und 1,0 mm für die gröbste Netzkonfiguration. Um eine zu starke Wichtung singulärer Phänomene einzelner deterministischer Berechnungen zu vermeiden wurden zur Bewertung 500 Stützstellen ausgewählt. Abbildung 6.6(a) zeigt die Ergebnisse der berechneten KDF auf Laminatebene und für die Mittellage des Laminats. In der Abbildung sind jeweils der arithmetische Mittelwert und die Varianzen des KDF aufgetragen. Der berechnete KDF repräsentiert den minimalen Wert über alle betrachtete Versagenskriterien.

Es ist deutlich erkennbar, dass die unterschiedliche Netzfeinheit auf Gesamtlaminatebene und für die mittlere Lage keinen signifikanten Einfluss auf den KDF hat. Die größten Unterschiede von etwa 3.3% zwischen den unterschiedlichen Feinheiten wurden für die mittlere Lage

ermittelt. Darüber hinaus konnte zudem anhand der dargestellten Varianz kein relevanter Einfluss aus statistischer Sicht ermittelt werden.

Zusätzlich wurde in einer zweiten Untersuchung eine Netzverfeinerung in Richtung der Laminatdicke durchgeführt, deren Ergebnisse analog zu den vorangegangenen Ausführungen in Abbildung 6.6(b) dargestellt sind. In der numerischen Studie wurde die Anzahl der Elemente zwischen einem und 6 Elementen über die Dicke jeder Lage des Laminats variiert. Bei zunehmender Verfeinerung in Dickenrichtung sinkt der KDF des Gesamtlaminats um 3.6% auf einen mittleren Wert von $KDF = 0.664$, wobei die größte relative Abminderung bis zu einer Auflösung von 5 Elementen ermittelt wurde. Die Beobachtungen sind -trotz unterschiedlicher Modellgeometrien- qualitativ mit den Schilderungen in [3] vergleichbar. Im Vergleich zum Gesamtlaminat bewirkt eine Verfeinerung bis zu einer Auflösung von vier Elementen für die mittlere Lage des Laminats keine signifikante Veränderung des KDF. Bei einer sehr feinen Modellauflösung in z-Richtung ist hier jedoch ein spontaner Anstieg des KDF und anschließender Abfall zu erkennen. Die Ursache für dieses Phänomen konnte zunächst nicht identifiziert werden und bedarf somit einer weiterführenden Analyse. Der Aspekt wird jedoch aufgrund der geringen relativen Unterschiede für die Entscheidungsfindung zur abschließenden Auswahl der Modellparameter nicht weiter berücksichtigt.

Wahl der Modelldiskretisierung

Auf Basis der dargestellten Ergebnisse kann zunächst geschlussfolgert werden, dass mit der Verwendung fein-aufgelöster FE-Modelle nicht zwangsläufig eine signifikante Steigerung der Genauigkeit des berechneten KDF einher geht bzw. die Verwendung rechtfertigt. Aus diesem Grund kann zunächst für die Feinheit in x- und y-Richtung eine Auflösung von 20 Hexaeder-Elementen mit der in Abschnitt 5.6.1 beschriebenen Elementformulierung gewählt werden. [3] Entlang der Lagendicke in z-Richtung wird eine Auflösung von $n_{elem} = 3$ gewählt. An dieser Stelle muss ausdrücklich daraufhin gewiesen werden, dass die Schlussfolgerung nur für die zugrundeliegende Modellgeometrie, das verwendete Material sowie das Zufallsfeldmodells zutrifft. Zudem ist die gewählte Stichprobe der Welligkeitsausprägungen sehr klein im Verhältnis zur Größe des Parameterraums der ZF-Variablen, die somit nur einen kleinen Ausschnitt repräsentieren kann.

6.3. Probabilistische Analysen

Im folgenden Abschnitt soll die stochastische Bestimmung der KDF an repräsentativen Laminatkonfigurationen demonstriert und die erzielten Ergebnisse dargestellt werden.

[3] 20-Knoten, quadratische Ansatzfunktionen zur Verformungsbeschreibung

6.3.1. Bestimmung eines repräsentativen Stichprobenumfangs

Für die Ermittlung der Verteilung und charakteristischen Größen der KDF auf Lagenebene und im Gesamtlaminat wurden initial für alle gewählten Laminate eine feste Anzahl an Stützstellen mithilfe einer Parameterstudie ermittelt. In der Studie wurde das LCVT Sampling-Verfahren auf Basis der Vorbetrachtungen in Kapitel 4.6 ausgewählt. Zur abschließenden Prüfung der grundsätzlichen Eignung des Verfahrens wurde dieses zudem anhand einer Stichprobe vom Umfang zwischen 1600 und 12800 Stützstellen mit dem LHS Verfahren verglichen. Als Vergleichsmaterial wurde das QI-Laminat verwendet. Für jede Stützstelle wurde der minimale KDF für alle betrachteten Versagenskriterien bestimmt. Zum Vergleich der beiden Sampling-Verfahren wurden für alle gewählten Stichprobenumfänge jeweils der Mittelwert sowie die Varianz der resultierenden KDF-Verteilung bestimmt (siehe Kapitelabschnitt 5.7.1.4). Die erzielten Ergebnisse der Studie sind in Abbildung 6.7 dargestellt. Es ist zunächst zu erkennen, dass sowohl LHS als auch LCVT im Mittelwert ähnliche Ergebnissen erzielen. Der Unterschied liegt hierbei bei etwa 1,6 %. Demgegenüber weißt das LCVT jedoch eine um 31 % höhere Varianz pro betrachtete Stichprobe auf, die mit zunehmender Größe der Stichprobe 5 % abnimmt.

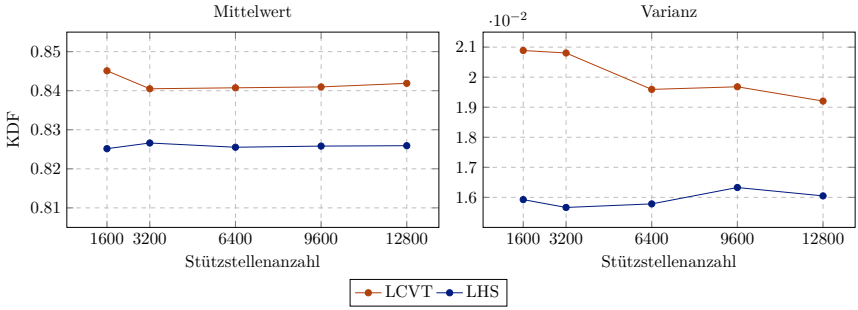


Abbildung 6.7.: Einfluss der Stichprobengröße auf das arithmetische Mittel und Varianz des KDF für die LHS und LCVT Methode

Mithilfe der Ergebnisse der Studie wurden für weitere probabilistische Analysen die Anzahl an zufällig generierten Stützstellen auf 5000 festgelegt, die mithilfe der LCVT Methode erzeugt werden. Dies stellt zugleich einen angemessenen Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Ergebnisse und dem zu erwartenden Berechnungsaufwand dar. Da die ermittelte Varianz der LCVT-Methode über der des LHS-Verfahrens liegt bei geringeren relativen Unterschieden des arithmetischen Mittels, wird dementsprechend eine breitere Abdeckung des KDF-Wertbereichs geschlussfolgert. Insbesondere kritische Bereiche niedriger KDF könnten somit besser berücksichtigt werden. Mithilfe der Ergebnisse kann die Eignung der LCVT-Methode im Kontext der Arbeit zunächst grundsätzlich festgehalten werden.

6.3.2. Empirische Dichteverteilungen des KDF

KDF-Verteilung des Gesamtlaminats

Die Abbildungen 6.8-6.10 stellen die erzielten Ergebnisse in Form einer Histogramverteilung der KDF des Gesamtlaminats in Abhängigkeit der angewendeten Versagenskriterien dar. Die x-Achse repräsentiert den nominellen Wert des KDFs, die y-Achse die absolute Häufigkeit einzelner KDF-Intervalle. In allen Abbildungen ist zudem der Mittelwert durch eine rote Line sowie die 5 %, 50 % und 95 %-Quantile ($Q_{0.05}$,$Q_{0.50}$ und $Q_{0.95}$) durch entsprechende Markierungen hervorgehoben. Zusätzlich ist das Ergebnis einer Kerndichteschätzung unter Nutzung des Gaußkerns (siehe Anhang A.4) mithilfe der Histogrammdaten durch eine schwarze Linie hervorgehoben.

Anhand Abbildung 6.8 lässt sich für das UD-Laminat unmittelbar erkennen, dass die KDF-Verteilung der zwischen den einzelnen Versagenskriterien teilweise signifikant voneinander abweicht. Dies ist wesentlich für das Puck-Kriterium erkennbar, dessen arithmetischer Mittelwert um etwa 61 bis 98 % über den der drei anderen Kriterien und insbesondere die Varianz sich um den Faktor $2{,}5 - 3{,}6$ unterscheidet. Der Unterschied bei den Mittelwerten ist zudem vergleichbar mit den in Abschnitt 6.2 beschriebenen Ergebnissen der rein deterministischen Analyse. Im Vergleich aller Kriterien zeigt sich des Weiteren, dass die Werte symmetrisch um den Mittelwert verteilt sind und somit eine Normalverteilung eine erste plausible Annahme zur Grundverteilung der KDFs darstellt.

Abbildung 6.9 veranschaulicht die Ergebnisse für das QI-Laminat. Im Vergleich zum UD-Laminat sind hierbei die Abweichungen der KDF aller Versagenskriterien untereinander deutlich geringer. Hinzu kommt, dass der KDF im Mittel etwa um den Faktor 3 höher liegt als beim UD-Laminat, was eine signifikant größere Festigkeit des Materials gegenüber Welligkeitsdefekten verdeutlicht. Auch hier zeigt das Puck-Kriterium die größten Abweichungen. Auffällig ist zudem für alle KDF, dass diese im Gegensatz zum UD-Laminat stark asymmetrisch verteilt sind. Dies deutet auf einen Wechsel des Versagensmodus zwischen faser- und matrixdominiertem Versagen hin.

Mithilfe von Abbildung 6.10 ist für das Lam_{FH}-Laminat ein Verhalten erkennbar, welches mit dem QI-Laminat durch die stark asymmetrische KDF-Verteilung qualitativ vergleichbar ist, aus quantitativer Sicht jedoch signifikant davon abweicht. Wesentliches Merkmal über alle Versagenskriterien hinweg ist eine absolute Häufung der nominellen KDF-Stützstellenwerte im Bereich zwischen 0.95 und 1.0. Diese Beobachtung deutet auf eine lokal vernachlässigbare Auswirkung der Welligkeit auf die Druckfestigkeit und damit die Tragfähigkeit des Materials hin. Demgegenüber verteilt sich der KDF für eine kleine Teilmenge der Stützstellen in einem breiten Band zwischen 0.4 und 0.95 annähernd gleichverteilt.[4]

[4] Aus Gründen der besseren Gesamtinterpretation wurde in der Abbildung 6.10 die untere Grenze der dargestellten Werte der Histogramme bei 0.6 begrenzt.

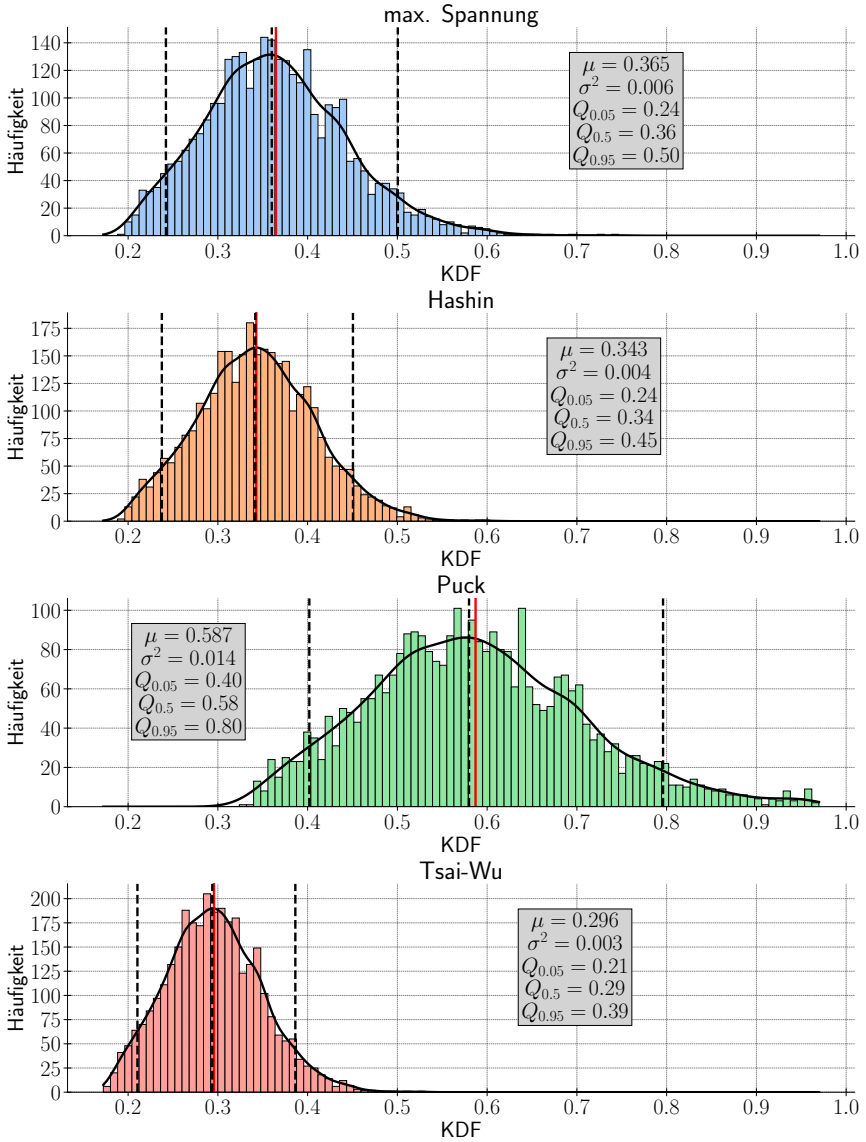


Abbildung 6.8.: KDF-Histogrammverteilung für ausgewählte Versagenskriterien eines unidirektionalen Laminats aus 32 Lagen

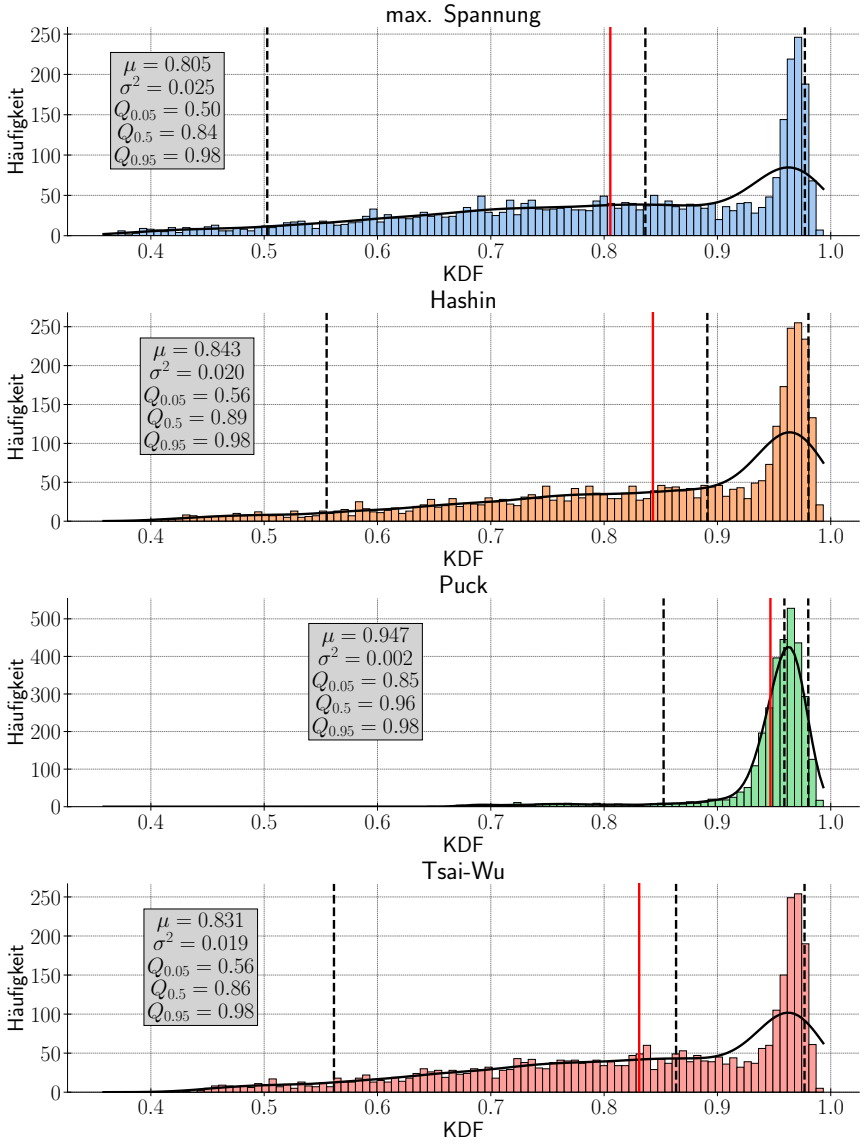


Abbildung 6.9.: KDF-Histogrammverteilung für ausgewählte Versagenskriterien eines quasi-isotropen Laminats $[0°, 45°, -45°, 90°]$ aus 32 Lagen

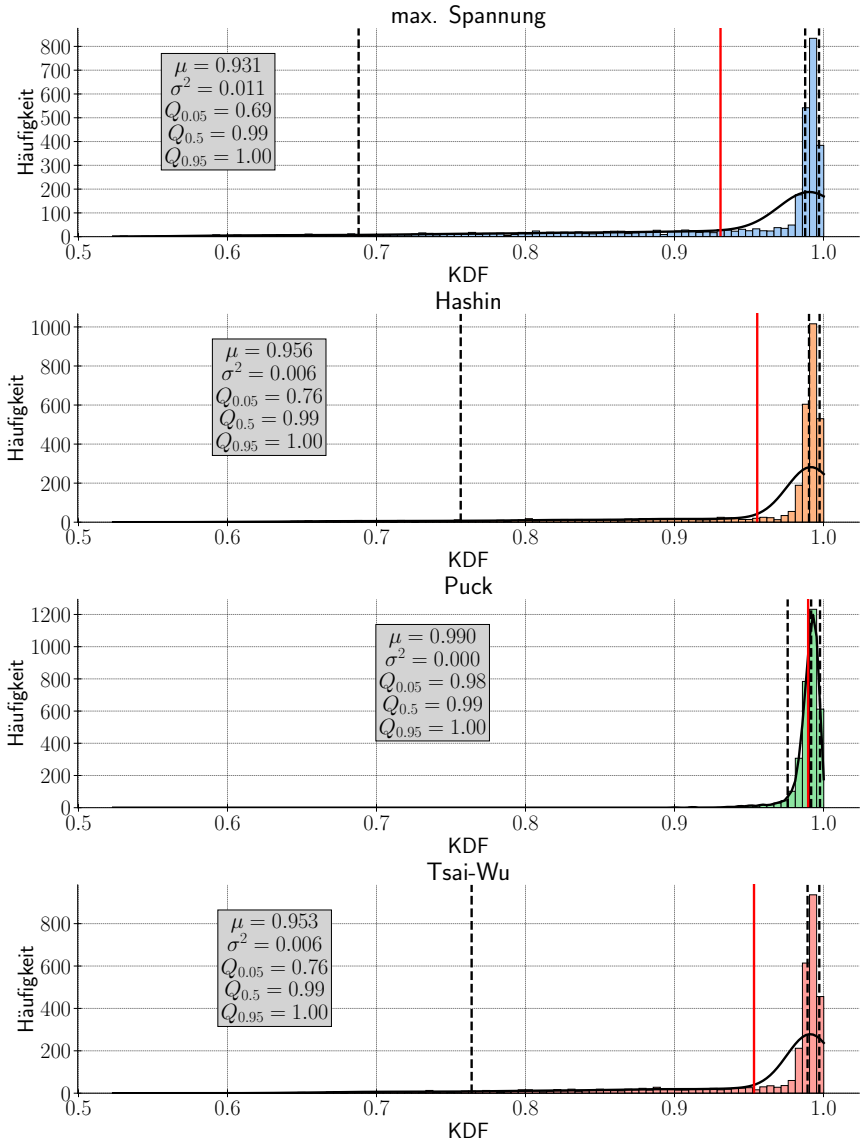


Abbildung 6.10.: KDF-Histogrammverteilung für ausgewählte Versagenskriterien des Laminats Lam_{FH}

Lagenweise Bewertung des KDF

In den Abbildungen 6.11,6.12 und 6.13 sind für die einzelnen Lagen der Laminate die ermittelten Abminderungsfaktoren im arithmetischen Mittel sowie deren Standardabweichunen aufgetragen. Die zuvor in Abbildung 6.8 identifizierten Abweichungen beim ausgewählten UD-Laminat in Bezug auf den Einfluss des verwendeten Versagenskriteriums können mithilfe von Abbildung 6.11 auch auf der Lagenebene bestätigt werden. Darüber hinaus wurde im Mittel für die gesamte Stichprobe eine symmetrische Verteilung der KDF in den Einzellagen um die Laminatmittelfläche ermittelt. Für eine bessere Interpretation der Ergebnisse auf Lagenebene ist daher in den Abbildungen 6.11 bis 6.13 nur die unter Laminathälfte dargestellt.

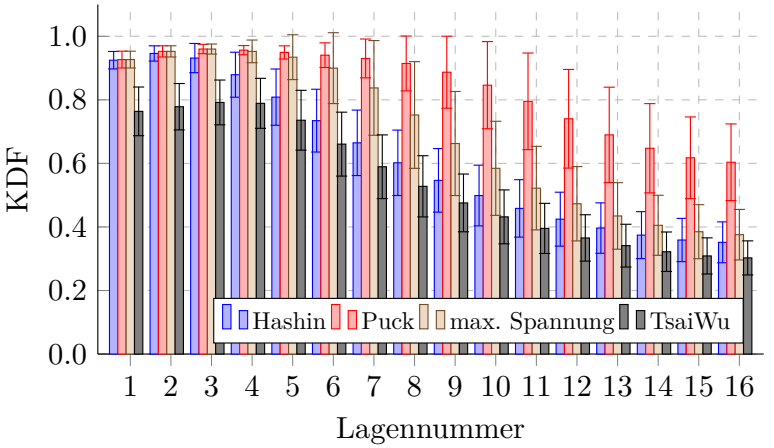


Abbildung 6.11.: Verteilung der Mittelwerte und Standardabweichungen der lagenweisen KDF in einem unidirektionalen Laminat

Mithilfe der Abbildung lässt sich zusätzlich erkennen, dass die Streuung des KDF für Lagen in der Nähe der Laminatmittelfläche zunimmt im Vergleich zu den äußeren Lagen. Dies gilt für alle vier Versagenskriterien. Die Ursache für dieses Verhalten liegt der größeren relativen Lagenverformung im Vergleich zu den äußeren Lagen aufgrund der Welligkeit zugrunde, sodass die Tragfähigkeit der UD-Einzellage durch eine veränderte Materialorientierung im Raum gemindert ist. Aufgrund der unidirektionalen Faserorientierung besitzen benachbarte Lagen keinen stützenden Effekt, um Normal- bzw. Schubspannungen quer zur Hauptbelastungsrichtung aufzunehmen.

Abbildung 6.12 veranschaulicht die erzielten Ergebnisse für das QI-Laminat. Im Vergleich zum UD-Laminat, bei dem eine kontinuierliche Abnahme des KDF zur Laminatmittelebene

erkennbar ist, ist für das QI-Laminat ein von der Lagenorientierung abhängiges Verhalten erkennbar. Dabei ist deutlich ersichtlich, dass die 0° Lagen in Belastungsrichtung die größte Minderung der Druckfestigkeit erfahren. Zudem ist für diese Lagen ein deutlicher Unterschied zwischen dem Puck-Kriterium und Hashin, Tsai-Wu sowie dem Maximalspannungskriterium zu erkennen. Für Lagen mit einer Lagenorientierung $\vartheta_{Lage} = \pm 45°$ lassen sich, unabhängig der relativen Position im Laminat, keine signifikanten Unterschiede im Mittelwert sowie den Standardabweichungen des KDFs feststellen, der im Mittel bei etwa 0,95 liegt.

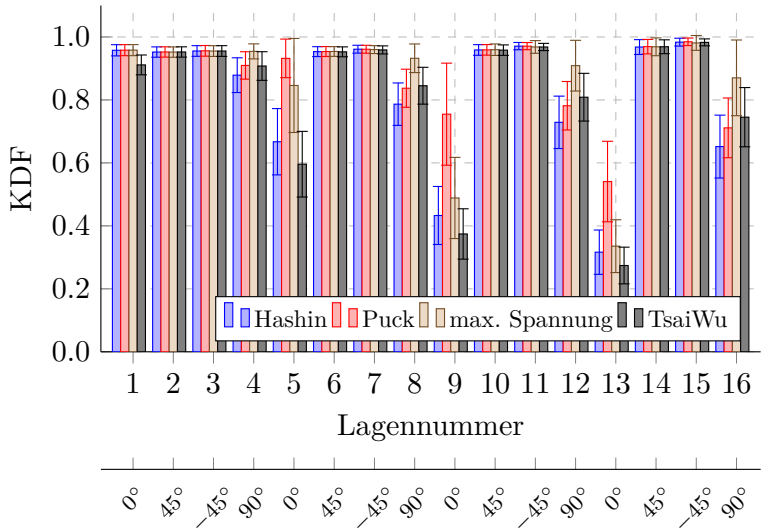


Abbildung 6.12.: Verteilung der Mittelwerte und Standardabweichungen der lagenweisen KDF in einem quasi-isotropen Laminat

Ergänzend zu den vorangegangenen Ausführungen ist in Abbildung 6.13 die lagenweise Verteilung des KDF für das Laminat Lam_{FH} veranschaulicht. Im Vergleich zum QI-Laminat wurde ein ähnliches Verhalten des resultierenden KDFs identifiziert, was insbesondere für Lagenorientierungen von $\vartheta_{Lage} = \pm 45°$ in der Abbildung deutlich erkennbar ist. Für diese Lagen beträgt die Abminderung maximal 2,5 Prozent, sodass keine relevante Veränderung der Restfestigkeit vorliegt. Gegenüber des QI-Laminats ist die KDF-Verteilung für Lagen mit einer Orientierung $\vartheta_{Lage} = 0°$ relativ zur Position im Laminat zudem vergleichbar.

6.3.3. Analyse des Einflusses von Parametern des Referenzmodells

Im weiteren werden, neben geometrischer Einflussgrößen des ZFs, weitere Parameter des numerischen Modells in ihrem Einfluss auf die Abminderung des KDFs quantifiziert.

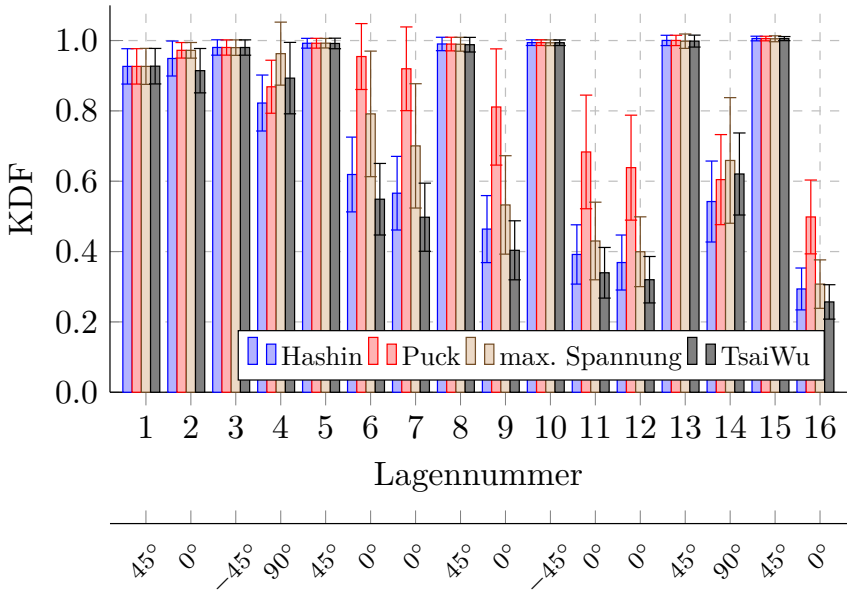
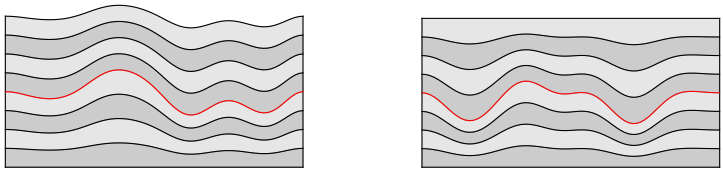


Abbildung 6.13.: Verteilung der Mittelwerte und Standardabweichungen der lagenweisen KDF des Laminats Lam_{FH}

Skalierung der absoluten Welligkeit in z-Richtung zur äußeren Lage

In Abbildung 6.15 sind für die einzelnen Laminatkonfigurationen die Ergebnisse im Vergleich von zwei unterschiedlich gewählten Skalierungsfaktoren z_{scale} (siehe Kapitelabschnitt 5.6.2) aufgetragen. Entgegen den vorangegangenen Ergebnissen wird hierbei aus Gründen einer einfacheren Vergleichbarkeit nur der minimale KDF aller Kriterien betrachtet. Analog zu Gleichung 5.57 repräsentiert ein Wert von $z_{scale} = 0{,}5$ eine Welligkeit auf der Laminatdeckfläche dessen absolute Werte 50 Prozent der Welligkeit der Laminatmittelfläche entsprechen. Die dargestellten Werte für $z_{scale} = 1{,}0$ entsprechend den zuvor bereits diskutierten Ergebnissen für Welligkeiten, die sich vollständig im Inneren des Laminats befinden (zum Vergleich siehe Abbildung 6.14).

Mithilfe der Abbildung ist erkennbar, dass lediglich für das betrachtete QI-Laminat eine Veränderung der KDF-Verteilung vorliegt. In diesem Fall erhöht sich der Mittelwert des KDF marginal für $z_{scale} = 1{,}0$ um etwa 5 % von 0,76 auf 0,8, was somit eine höhere Tragfähigkeit bei innen liegenden Welligkeiten bedeutet. Da jedoch beim UD- und Lam_{FH}-Laminat keine nennenswerte Veränderung des Materialverhaltens erkennbar ist, kann somit ein Einfluss von unterschiedlichen Steifigkeiten der Einzellagen (aufgrund des ROM-Ansatzes zur Bestimmung



(a) $z_{scale} = 0{,}5$ (b) $z_{scale} = 1{,}0$

Abbildung 6.14.: Vergleich zweier beispielhafter Welligkeitsrealisierungen in Abhängigkeit des Skalierungsparameters z_{scale}.

der unidirektionalen Materialkennwerte) und des Gesamtlaminats im Vergleich beider Modellgeometrien zunächst ausgeschlossen werden. Aufgrund der Vielzahl der getroffenen Annahmen innerhalb des FEM-basierten Berechnungsansatzes können vielfältige Ursachen der geringen Abweichungen beim QI-Laminat zugrunde liegen, die im Weiteren eine physikalisch-motivierte Schlussfolgerung nicht rechtfertigen.

Variation des Anisotropiewinkels

Aufgrund der komplexen Wechselwirkung aus Faser und Matrix bei der Fertigung kann die Ausbildung der Welligkeiten in einem Winkel α ungleich der Hauptbelastungsrichtung eines Bauteils erfolgen. Um dies adäquat im ZF-Modell zu berücksichtigen, ist in Gleichung 4.18 in Kapitel 4.3.1 eine geometrische Transformation T eingeführt worden, die diesen Aspekt im Modell adäquat berücksichtigen kann. Mithilfe von T und einem spezifischen Anisotropiewinkel α kann eine Rotation zweier beliebiger Punkte im ZF beschrieben werden. Der Einfluss des Winkels auf den resultierenden KDF soll im Folgenden näher untersucht werden. Dazu wurde der Parameter in einer Studie mithilfe des Lam_{FH}-Laminats in einem Wertebereich von 0° bis 90° variiert. Abbildung 6.16 veranschaulicht ausgewählte ZF-Beispiele der untersuchten Stichproben für verschiedene Werte des Anisotropiewinkels.

In Abbildung 6.17 sind die resultierenden Verteilungsfunktionen des KDF mittels des Gaußschen Dichteschätzers für verschiedene Winkel aufgetragen, um eine besseren visuelle Interpretation zu ermöglichen. Es ist deutlich erkennbar, dass der Einfluss des Anisotropie-Winkels auf die Gesamtverteilung des KDF nur gering ist. Lediglich im Bereich $0.6 < KDF < 0.8$ weichen die Verteilungen des KDF für die verschiedenen Winkel geringfügig voneinander ab. Die Schlussfolgerungen zum Parametereinfluss sind vergleichbar mit den in [44] veröffentlichten Ergebnissen zu Untersuchungen bei vereinfachten Sinus- bzw. Kosinusfunktionen zur Parametrisierung der Welligkeitsgeometrie.

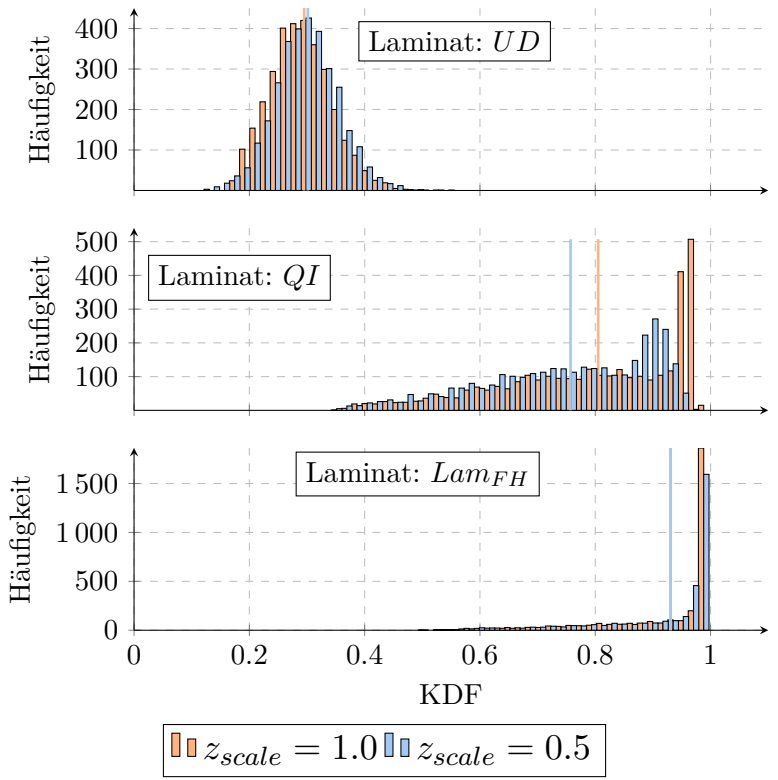
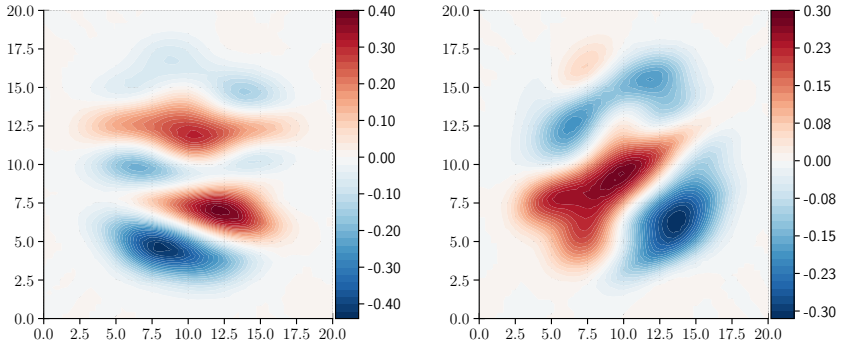


Abbildung 6.15.: Vergleich des Einflusses unterschiedlicher Propagation des Zufallsfelds zur äußeren Lage des Laminats.

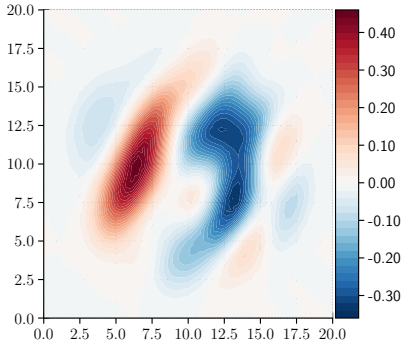
Einfluss der Modellgröße

In Kapitelabschnitt 5.1 und im Zusammenhang mit Abbildung 5.2 wurde die Frage aufgeworfen, welchen Einfluss die Modellgröße eines betrachteten Laminats auf den KDF hat. Zur Beantwortung der Frage wurde eine entsprechende Berechnungsstudie durchgeführt. Die Größe des betrachteten Laminatmodells wurde innerhalb der Studie zwischen 20 und 60mm variiert. Da die Korrelationslänge und Amplitude des ZF-Modells über alle Modellgrößen als konstant betrachtet wird, ist folglich von einer stark steigenden Anzahl unabhängiger Zufallsvariablen zur ZF-Beschreibung auszugehen. Für die untersuchten Modellgrößen und das ZF-Modell ergab dies einen Umfang zwischen 29 bei einer Modellgröße von 20mm und 235 Zufallsvariablen für 50mm. Dies bedingte zusätzlich eine Steigerung der Netzfeinheit des ZFs. Die minimale erforderliche Varianzapproximation des ZFs wurde mit 90 Prozent

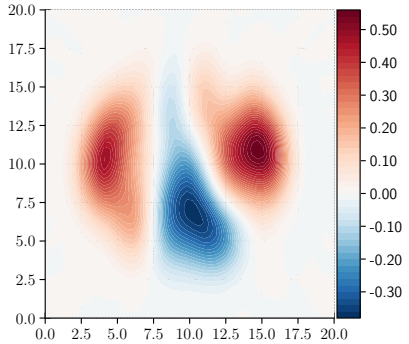


(a) $\alpha = 0°$

(b) $\alpha = 30°$



(c) $\alpha = 60°$



(d) $\alpha = 90°$

Abbildung 6.16.: Darstellung exemplarischer ZF-Realisierungen für unterschiedliche Anisotropiewinkel α

festgelegt. Aufgrund der Zunahme der Zufallsvariablen musste die Anzahl zu berechnender Stützstellen entsprechend skaliert werden, um eine angemessene Aussagekraft der Ergebnisse im statistischen Sinne zu gewährleisten. Die Stützstellenanzahl wurde hierbei im Konkreten für das größte Modell auf 25000 festgelegt, für das kleinste Modell auf 5000.

Die vergrößerte Netzdichte des diskretisierten ZFs erforderte in einem weiteren Schritt eine Anpassung der Netzdichte des FE-Modells, um die Variabilität des ZFs im FE-Modell adäquat abbilden zu können. Zu diesem Zwecken wurde die Netzdichte mit einer Auflösung zwischen 20 und 50 Elementen in x- und y-Richtung definiert, was einer Erhöhung der Anzahl Freiheitsgraden um den Faktor 6,25 für das 60mm Modell im Vergleich zum 20mm Modell entspricht.

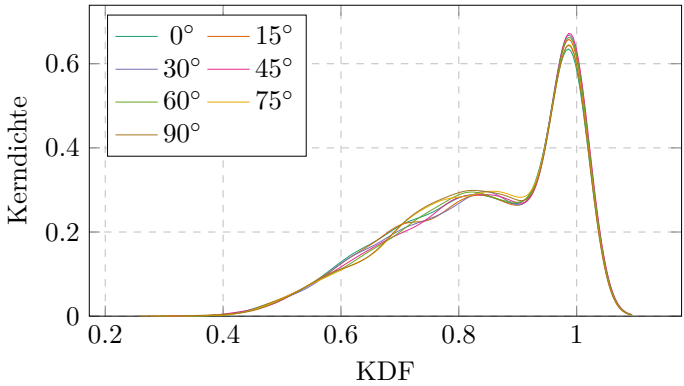


Abbildung 6.17.: Einfluss des Anisotropiewinkels des ZF in Grad auf den KDF

Die innerhalb der Studie ermittelten KDF für das quasi-isotrope Laminat sind in Abbildung 6.18 in Abhängigkeit der Versagenskriterien grafisch aufgetragen. Für einen numerischen Vergleich der Kriterien sind zudem der Mittelwert sowie die Standardabweichung in Tabelle 6.3 dargestellt.

	Mittelwert				Standardabweichung			
Kriterium	20mm	30mm	45mm	60mm	20mm	30mm	45mm	60mm
Hashin	0.955	0.942	0.911	0.912	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$	$9.6 \cdot 10^{-3}$	$9.0 \cdot 10^{-3}$
Puck	0.989	0.995	0.989	0.990	$0.81 \cdot 10^{-4}$	$1.88 \cdot 10^{-4}$	$7.03 \cdot 10^{-5}$	$5.07 \cdot 10^{-5}$
Tsai-Wu	0.953	0.941	0.911	0.914	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$6.8 \cdot 10^{-3}$	$8.7 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-3}$
σ_{max}	0.931	0.913	0.872	0.873	0.0105	0.0129	0.0156	0.0151

Tabelle 6.3.: Mittelwert und Standardabweichung einzelner KDF für die verschiedenen Versagenskriterien in Abhängigkeit der Modellgröße

Anhand der beiden Darstellungen lassen sich unterschiedliche Tendenzen in Abhängigkeit des Versagenskriteriums ableiten. Mit Ausnahme des Puck-Kriteriums sinkt der mittlere KDF bei allen übrigen Kriterien bei Zunahme der Modellgröße mit einem Maximum von etwa 6,5 Prozent. Zwischen einer Modellgröße von 45mm und 60mm ist jedoch kein Unterschied erkennbar. Zusätzlich ist zu erkennen, dass mit steigender Modellgröße die resultierende Standardabweichung des KDF um etwa 29 bis 31 Prozent zunimmt. Auch hier stellt das Puck-Kriterium eine Ausnahme dar, bei der diese um etwa 41 Prozent abnimmt. Das identifizierte Phänomen widerlegt zunächst teilweise die Annahme aus Kapitel 5.1, dass die statistische Varianz des KDF durch äußere Last- und Randbedingungen im Wesentlichen beeinflusst wird und mit zunehmender Modellgröße abnimmt. In der Studie wurden jedoch zunächst nur ZF-Modelle betrachtet, an deren Ränder keine vertikale Verschiebung vorlag und die Ableitung zudem Null war. Um die Randverschiebungen und Ableitungen korrekt abzubilden,

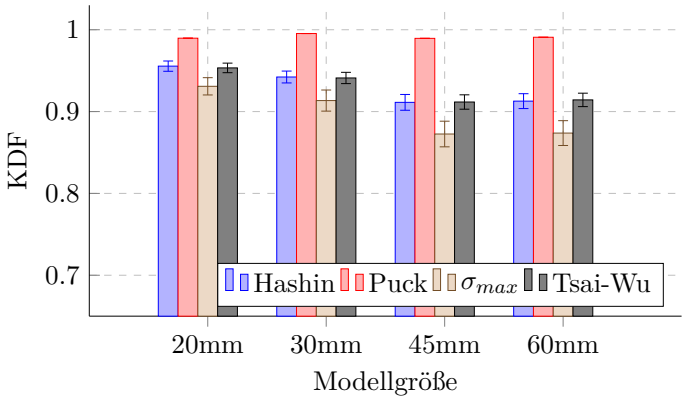
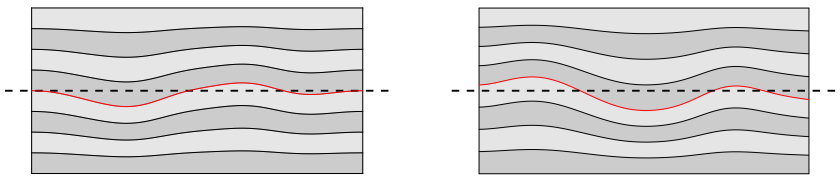


Abbildung 6.18.: Einfluss der Modellgröße auf den mittleren KDF für verschiedene Versagenskriterien. Für jedes Kriterium ist neben dem arithmetischen Mittelwert zudem die Standardabweichung der berechneten Stichprobe aufgetragen.

resultierten daraus ZF-Stichproben, bei der Modellbereiche in der Nähe der Modellrändern nahezu ungeschädigt waren. Da der Anteil an ungeschädigten Modellbereichen bei Zunahme der Modellgröße im Verhältnis sinkt, kann dies eine Erklärung für die Reduktion des KDF sein. Die Zunahme der Standardabweichung legt die Vermutung nahe, dass nicht-deterministische Faktoren aufgrund der ZF-Formulierung gegenüber numerischen Modellfehlern (z.B. Last- und Randbedingungen) dominieren.

Für eine abschließende Bewertung der Fragestellung und aufgestellter These wurde darüber hinaus eine Vergleichsstudie durchgeführt, bei der an den Modellrändern des zugrundeliegenden ZF-Modells eine Verschiebung in vertikaler Richtung erlaubt wurde (siehe Abbildung 6.19(b)).



(a) mit ZF-Randbedingungen (b) ohne ZF-Randbedingungen

Abbildung 6.19.: Unterschiedliche Welligkeitsgeometrien mit und ohne Berücksichtigung der Randbedingungen des ZF. Die gestrichelte Linie stellt die Laminatmitelebene eines unverformten Laminats dar.

Abbildung 6.20 stellt die ermittelten Abminderungsfaktoren in Abhängigkeit der Modellgröße dar.

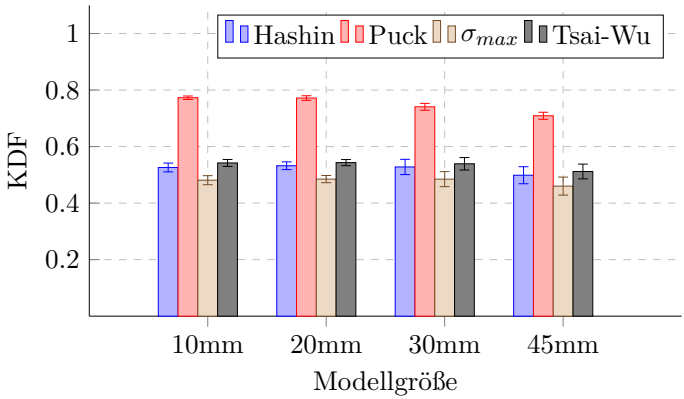


Abbildung 6.20.: Einfluss der Modellgröße auf den mittleren KDF für verschiedene Versagenskriterien **ohne Fixierung** der Randknoten des ZF. Für jedes Kriterium ist neben dem arithmetischen Mittelwert zudem die Standardabweichung der berechneten Stichprobe aufgetragen.

Im Vergleich zu Abbildung 6.18 ist ein stark abweichendes Verhalten erkennbar. Der wesentlich Unterschied besteht in deutlich reduzierten KDF um bis zu 49 Prozent gegenüber der vorangegangenen Studie, bei der an den Modellrändern keine initiale Lagenverformung aufgeprägt wurde. Die zuvor ermittelten Abweichungen zwischen dem Puck- und den weiteren Kriterien konnten auch in diesem Zusammenhang identifiziert werden. Anhand der Abbildung lässt sich für den mittleren KDF in Abhängigkeit der Modellgröße mit Ausnahme des Puck-Kriteriums keine grundsätzliche Tendenz ableiten. Es ist jedoch erkennbar, dass bei steigender Modellgröße die Varianz des KDF um den Faktor ~ 2 zunimmt.

Ein erstes Indiz für die erkennbaren Abweichungen zwischen beiden Studien liefert hierbei das veränderte Versagensverhalten, was am σ_{max}-Kriterium deutlich wird. Werden Randbedingungen des ZF nicht berücksichtigt, bestimmen ausschließlich die Schubspannungen τ_{xz} das Erstlagenversagen. Dies lässt sich auf Randeffekte des Modells zurückführen. Durch die Lagenverformung und der daraus resultierenden unsymmetrischen Steifigkeit gemäß der mikromechanischen Modellierung der UD-Materialkennwerte wird zusätzlich zum homogenen Spannungszustand in Belastungsrichtung ein Biegemoment am Modellrand induziert, was eine hohe Schubverformung zur Folge hat. Es konnte zudem anhand ausgewählter Einzellagen eine starke Häufung einzelner Modellbereiche ermittelt werden, in denen der KDF den niedrigsten Wert besitzt und dort somit initiales Materialversagen prognostiziert wird. Dies steht im Kontrast zur Studie, bei der eine Lagenverformung am Modellrand unterbunden wird. Dort konnte über alle Kriterien eine gleichmäßige Verteilung der für die KDF-Bestimmung kritischen Modellbereiche identifiziert werden. Trotz der Tatsache, dass für alle untersuchten Studien

Bereiche in der Nähe des Modellrands von der Bestimmung des KDF ausgenommen wurde, unterstreicht dies einmal mehr die Bedeutung einer fundierten numerischen Modellbildung zur Abstraktion ingenieurmäßiger Problemstellungen, um fehlerhafte Schlussfolgerungen zu vermeiden.

Auf Basis der gewonnenen Erkenntnisse kann die aufgeworfene These bzgl. der Konvergenz der Abminderungsfaktoren in Abhängigkeit der Modellgröße zunächst nur für ausgewählte Modellidealisierungen eingeschränkt bestätigt werden. Im Hinblick einer angemessenen Übertragung des Materialverhaltens auf die Gesamtstrukturebene ist dennoch eine Mindestgröße von 50 mm×50 mm für zusammenhängende Bereiche entlang der Bauteilgeometrie empfehlenswert.

6.3.4. Analyse der Abhängigkeit geometrischer Größen des Zufallsfelds und resultierender KDF

Eine zentrale Arbeitshypothese der Arbeit lautet, dass sich trotz der stochastischen Problemkomplexität die strukturmechanischen Auswirkungen von OoP-Welligkeiten durch ein vereinfachtes Modell zur näherungsweisen Bestimmung des KDF abbilden lassen. Zur Beantwortung wurden in Kapitel 5.7.2 verschiedene geometrische Kenngrößen vorgestellt, deren numerische Einflüsse in Bezug auf den resultierenden KDF im Weiteren quantifiziert werden.

Bestimmung der relativen Abweichung des KDF

Für die genaue numerische Bewertung der betrachteten Metriken auf deren Eignung zur KDF-Approximation ist eine Bestimmung der relativen Streuungen für den gesamten Wertebereich der Metrik erforderlich. Aus theoretischer Sicht wird zunächst davon ausgegangen, dass der KDF als unbekannte Funktion $f(\mathbf{x})$ einer oder mehrerer Eingangsvariablen beschrieben werden kann:

$$KDF \sim f(\mathbf{x}) + \epsilon_{unkn} \tag{6.2}$$

$\mathbf{x}$ bezeichnet die Menge von bekannten Variablen, im konkreten die untersuchten Metriken in diesem Abschnitt , sowie unbekannten Größen des Modells. Der Parameter ϵ_{unkn} fasst darüber hinaus weitere Fehlereinflüsse des numerischen Berechnungsmodells zusammen. Es kann im Weiteren angenommen werden, dass ϵ_{unkn} den Erwartungswert 0 hat und symmetrisch um die Ergebnisgröße verteilt ist. Darauf aufbauend lässt sich Gleichung 6.2 wie folgt umformulieren:

$$KDF \sim \hat{f}(x) + \epsilon_y + \epsilon_{unkn} \tag{6.3}$$

$\hat{f}(x)$ repräsentiert nun Funktionsterme, in denen nur eine spezifische Variable x enthalten ist. ϵ_y beschreibt darüber hinaus die Varianz, die aus den Funktionstermen der übrigen Variablen

von $\mathbf{x}$ resultiert[5]. Das Ziel einer Approximation ist die Identifikation von geeigneten Variablen, sodass ϵ_y gleichzeitig minimal wird.

Im Gegensatz zu ϵ_{unkn} ist die Annahme der Zentrierung um den Wert 0 und symmetrischer Verteilung ϵ_y nun jedoch nicht mehr gerechtfertigt. Darüber hinaus muss zudem angenommen werden, dass ϵ_y über den gesamten Wertebereich von x in seinem absoluten Wert variiert. Daraus resultiert die Schwierigkeit der Bestimmung des „wahren“ KDF-Funktionswerts an einer beliebigen Stelle im Wertebereich von x, sodass dieser entsprechend für beliebige Werte von x geschätzt werden muss. Dazu wird der Wertebereich jeder betrachteten Metrik in m diskrete Teilbereiche unterteilt und für jedes Intervall $[a,b]_{i;\ 1\leq i\leq m}$ eine Berechnung durchgeführt. Ferner wird das stückweise definierte, arithmetische Mittel des KDF $\overline{\mu}_{KDF}$ als Schätzfunktion für $\hat{f}(x)$ in den Einzelbereichen verwendet. Daraus lässt sich dann in einem weiteren Schritt die Streuung ϵ_y der Metrik mittels des Variationskoeffizienten VK des KDF vereinfacht ableiten mit:

$$\epsilon_y \simeq c_V = \frac{s}{\overline{\mu}} \tag{6.4}$$

Die Größe s repräsentiert die empirische Standardabweichung pro Intervall. Durch die Wahl des Berechnungsansatzes und der geringen Stützstellenmenge im Verhältnis zum Parameterraum der ZF-Eingangsvariablen unterliegt die Verteilung der relativen Abweichung großen lokalen Schwankungen infolge der unterschiedlichen Stichprobenumfänge pro Intervall. Es kann daher vorteilhaft sein, einen normierten VK zu bestimmen, der die Stützstellenmenge n miteinbezieht:

$$c_V' = \frac{c_V}{\sqrt{n}} \tag{6.5}$$

Für die nachfolgende Bewertung sind die relativen Abweichungen für alle geometrischen Bewertungsmetriken und Laminattypen im Abschnitt A.6 des Anhangs dargestellt.

Amplitudenverhältnis

Als initiale Kenngröße soll das Verhältnis aus maximaler Welligkeitsamplitude und Laminatdicke bewertet werden. Zu diesem Zweck sind für die verwendeten Laminatkonfigurationen für jede deterministische KDF-Berechnung die entsprechenden Amplitudenverhältnisse a_{rel} bestimmt worden und in den Abbildungen 6.22, 6.23 und 6.24 dargestellt. Zusätzlich ist in Abbildung 6.21 das Histogramm der Amplituden dargestellt, anhand der eine große Häufung (90 Prozent aller Werte) der nominellen Werte zwischen 0,1 und 0,27 erkennbar ist. Bezogen auf die gewählten Modellparameter der Laminate bedeutet dies eine maximale Amplitude zwischen 0,4 mm und 0,8 mm.

[5] Die gewählte Formulierung impliziert, dass der Funktionswert sich additiv aus einzelnen Funktionstermen und voneinander unabhängigen Variablen zusammensetzt. Diese Definition muss jedoch nicht zwingend gültig sein und wird nur zur Vereinfachung des Sachverhalts gewählt.

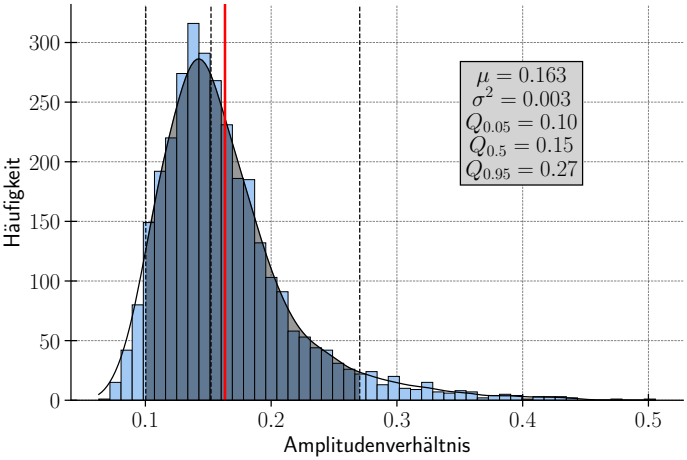


Abbildung 6.21.: Histogramm der Amplitudenverteilung

Im Vergleich der Laminatkonfigurationen zeigen sich zunächst spezifische Charakteristika. Für das unidirektionale Laminat nimmt der minimale KDF mit zunehmendem Verhältnis von a_{rel} signifikant bis zu einem Verhältnis von etwa 0,25 ab. Für größere Verhältnisse konvergiert der Wert abhängig vom betrachteten Versagenskriterium gegen eine spezifische untere Grenze. Weiterhin ist erkennbar, dass mit Ausnahme des Tsai-Wu Kriteriums, welches keine Unterscheidung des wirkenden Versagensmechanismusses macht, alle anderen Kriterien fast ausschließlich eine Hauptversagensart ermitteln. Lediglich beim Puck Kriterium zeigt sich ein unterschiedliches Versagensverhalten, bei der für wenige ausgewählte Stützstellen Faserbruch als Versagensart im Gegensatz zum überwiegend ausgeprägtem Zwischenfaserbruch, welches das Versagen der Matrix charakterisiert, ermittelt wurde. Für das quasi-isotrope Laminat (siehe Abbildung 6.23) zeigt sich ein zum UD-Laminat leicht unterschiedliches Verhalten, was zunächst anhand der großen Streuungen des KDF für ähnliche Verhältnisse von a_{rel} visuell deutlich erkennbar ist. Mit Ausnahme des Puck-Kriteriums sind alle Versagenskriterien qualitativ vergleichbar. Dies gilt zudem für das Laminat Lam_{FH} (siehe Abbildung 6.24).

In Bezug auf das eingeführte Bewertungsmaß in Abschnitt 6.3.4 lassen sich im Fall des Amplitudenverhältnisses unterschiedliche Resultate ermitteln. Die größten Streuungen mit einem c'_V von 0,0194 wurden bei einem Verhältnis von etwa 0,2 für das quasi-isotrope Laminat und das σ_{max}-Kriterium ermittelt. Die geringsten maximalen VK mit $c'_V = 0{,}025$ traten beim Laminat Lam_{FH} auf. Die größten Streuungen für das UD-Laminat liegen bei $c'_V = 0{,}0193$.

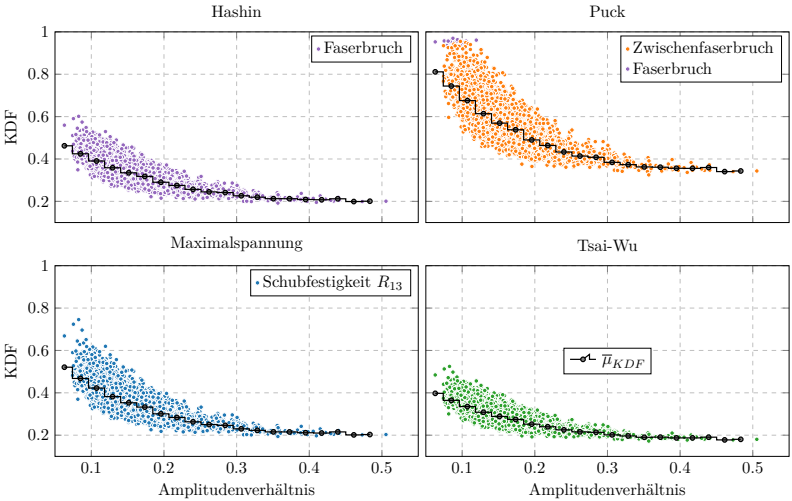


Abbildung 6.22.: Darstellung der Abhängigkeit von Amplitudenverhältnis und ermitteltem KDF für ein unidirektionales Laminat. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

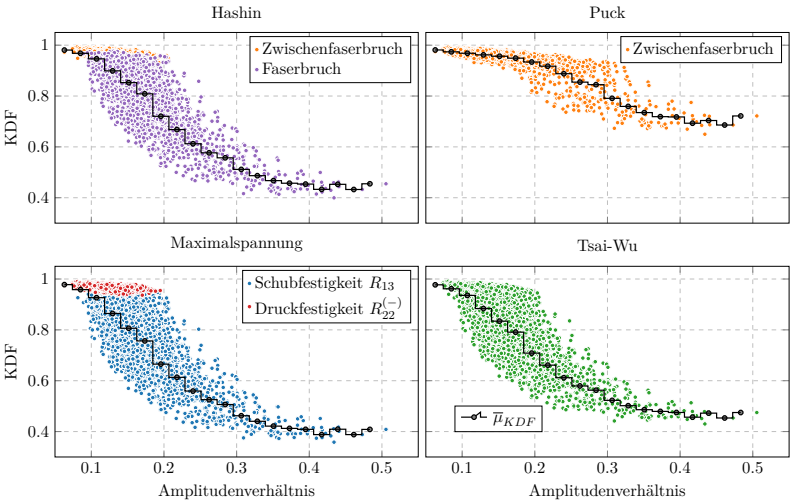


Abbildung 6.23.: Darstellung der Abhängigkeit von Amplitudenverhältnis und ermitteltem KDF für ein quasi-isotropes Laminat. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

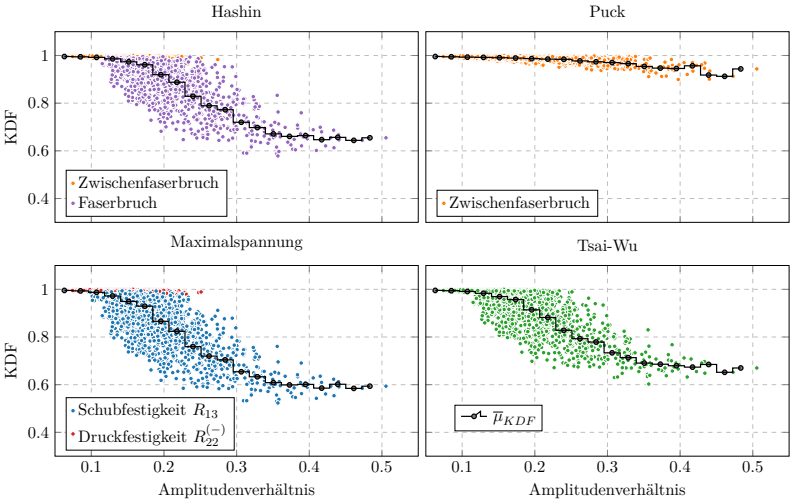


Abbildung 6.24.: Darstellung der Abhängigkeit von Amplitudenverhältnis und resultierendem KDF das Laminat Lam_{FH}. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

Maximaler Welligkeitsgradient

Aufgrund der großen Streuung des KDF bei ähnlichen Amplitudenverhältnissen wird im Folgenden der lokale Gradient des Zufallsfelds näher beleuchtet und in seinem Effekt auf die KDF-Verteilung quantifiziert werden. Analog zum Aufbau des vorherigen Abschnitts sind in den folgenden Abbildungen 6.25, 6.26 und 6.27 die Verteilung des KDF in Abhängigkeit des maximalen Zufallsfeldgradienten in Lastrichtung (x-Achse) dargestellt. Aus Gründen der besseren Interpretation der Ergebnisse wurde als Darstellung der Anstiegswinkel in Grad, im Weiteren mit β_{wave} bezeichnet, als betrachtete Größe gewählt und entsprechend aufgetragen. Der Winkel kann mittels des Arcustangens des Gradienten bestimmt werden.

Für das unidirektionale Laminat lässt sich eine annähernd umgekehrt proportionale Abhängigkeit des KDF zum maximalen Anstiegswinkel des ZFs erkennen. Wesentlicher Unterschied im Vergleich zur maximalen Amplitude ist hierbei die deutliche Reduktion der relativen Streuung des KDFs. Diese ist mit einem Wert des VK von $c'_V = 0{,}09$ für das σ_{max}-Kriterium am größten, mit $c'_V = 0{,}063$ für das Puck-Kriterium am geringsten.

Demgegenüber zeigt sich anhand Abbildung 6.26 für das QI-Laminat ein differierendes Verhalten, insbesondere im Vergleich der betrachteten Versagenskriterien. Bis zu einem Winkel von $\sim 5°$ weisen alle Kriterien keine grundlegenden Unterschiede auf, wobei der KDF moderat um etwa 7,5 % sinkt. Mit steigendem Gradienten sinkt der KDF für das σ_{max}-, das

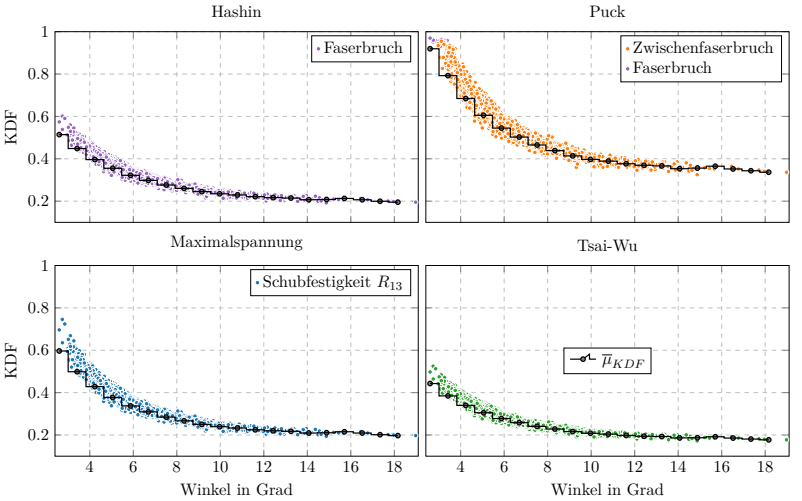


Abbildung 6.25.: Einfluss des maximalen Welligkeitsgradienten in Belastungsrichtung auf den resultierenden KDF für ein unidirektionales Laminat. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

Hashin und das Tsai-Wu Kriterium deutlich und konvergiert bei einem Winkel von ∼15° gegen die untere Grenze des KDF für das jeweilige Kriterium. Im Vergleich zu den drei genannten Kriterien weist das Puck-Kriterium bis etwa 8° eine geringe Reduktion des KDF um 10,0 % auf, sinkt dann jedoch auch stärker. Über alle Kriterien betrachtet zeigt sich auch für das QI-Laminat eine deutliche Reduktion des maximalen VK im Vergleich zwischen Amplitude und Gradient als untersuchte Metrik. Der maximale Wert für c'_V für das QI-Laminat liegt bei etwa 0,051 und damit geringfügig niedriger im Vergleich zum UD-Laminat.

Für das Laminat Lam_{FH} zeigt sich im Verhältnis zum QI-Laminat ein vergleichbares Verhalten in Abhängigkeit der Versagensart. Für kleine Winkel des Gradienten bis etwa 5,5° ist auch hier zunächst nur eine sehr geringe Abnahme des KDF für die Kriterien mit Ausnahme des Puck-Kriteriums erkennbar. Bei weiterer Zunahme des Winkels erfolgt beim Hashin-Kriterium sowie dem σ_{max}-Kriterium ein Wechsel des dominierenden Versagensmodus. Einher geht damit ein starker Abfall des entsprechenden KDFs, der bei steigendem Winkel zudem eine Zunahme der relativen Streuung aufweist. Deren maximaler Wert des VK von $c'_V = 0{,}053$ liegt bei einem Winkel von $\approx 9{,}5°$ vor. In diesem Zusammenhang ist jedoch anzumerken, dass aufgrund der geringen Stützstellenanzahl bei größeren Winkeln die Bestimmung der relativen Abweichung mit einem erhöhten Fehler versehen ist.

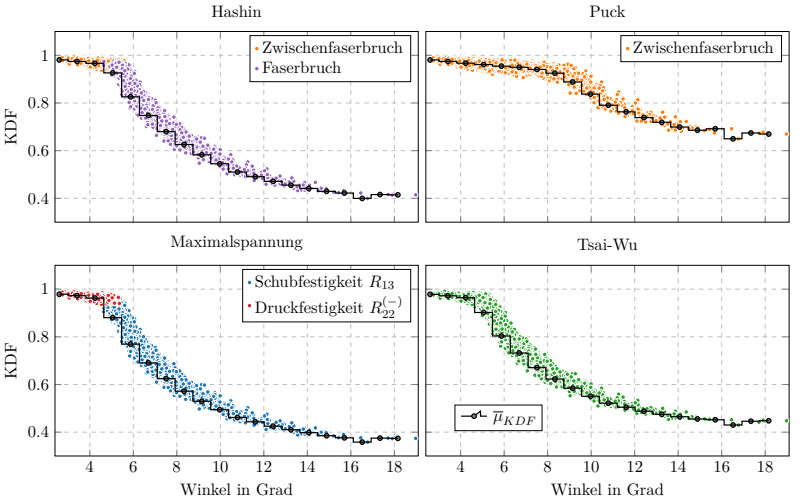


Abbildung 6.26.: Einfluss des maximalen Welligkeitsgradienten in Belastungsrichtung auf den resultierenden KDF für ein quasi-isotropes Laminat. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

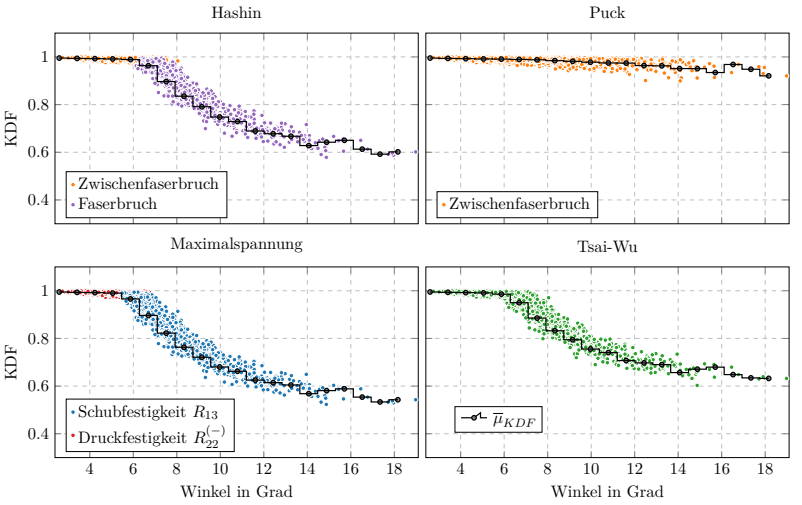


Abbildung 6.27.: Einfluss des maximalen Welligkeitsgradienten in Belastungsrichtung auf den resultierenden KDF für das Laminat Lam_{FH}. Die jeweils identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

Maximale Krümmung

Abschließend soll die Krümmung als dritte Metrik in ihrem Einfluss auf die KDF-Verteilung untersucht werden. Zu diesem Zweck ist der maximale Krümmungsradius des Welligkeitsfelds in Belastungsrichtung in den Abbildungen 6.29,6.30 und 6.31 aufgetragen. Der Radius berechnet sich folgendermaßen [85]:

$$r_{Curv} = \left| \frac{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x_)} \right| \tag{6.6}$$

$f'(x)$ und $f''(x)$ bezeichnen die erste und zweite Ableitung des Welligkeits-ZF entlang einer definierten Richtung. Aus der Definition folgen bei großer Krümmung niedrige Krümmungsradien und umgekehrt. Zum besseren Verständnis ist in Abbildung 6.28 die formale Definition des Krümmungsradiusses vereinfacht grafisch dargestellt.

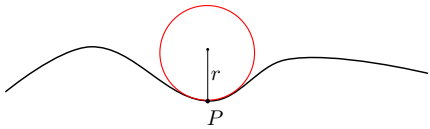


Abbildung 6.28.: Allgemeine Definition des Krümmungskreis an einem beliebigen Punkt einer Kurve.

Für die ausgewählten Laminate zeigen sich bei diesem Bewertungskriterium analog zu den vorangegangenen Ausführungen deutliche Unterschiede im Hinblick des Einflusses auf den KDF. Für das UD-Laminat ist anhand Abb. 6.29 erkennbar, dass im Mittel bei steigendem Krümmungsradius der KDF linear ansteigt. Des Weiteren ist festzustellen, dass die Streuung der KDF mit sinkendem Radius signifikant abnimmt. Die maximale relative Streuung mit einem Wert für den VK von etwa 0,151 Prozent wurde bei einem Radius r_{Curv} von 35 für das σ_{max}-Kriterium ermittelt.

Anhand Abbildung 6.30 lässt sich für das QI-Laminat in Abhängigkeit von r_{Curv} ein unterschiedliches Verhalten erkennen. Während mit sinkendem Radius eine Abnahme des KDF zu erkennen ist, steigt jedoch die zugrundeliegende Streuung des KDF, repräsentiert durch den VK. Dieser besitzt einen maximalen Wert von $c'_V = 0,128$ bei einem Radius von $r_{Curv} \approx 18°$. Im Vergleich zum maximalen Gradienten zeigt sich nicht nur eine erhöhte lokale Streuung der Krümmungsmetrik, sondern auch eine größere Überlappung der dominierenden Versagensmodi beim Hashin- und σ_{max}-Kriterium in Abhängigkeit des Krümmungsradius. Demgegenüber ist beim Puck-Kriterium die maximale Streuung, ähnlich zu den beiden vorherigen Metriken, über alle Kriterien betrachtet am geringsten.

Für das Laminat Lam_{FH} ist im Vergleich zum QI-Laminat ein vergleichbares Verhalten

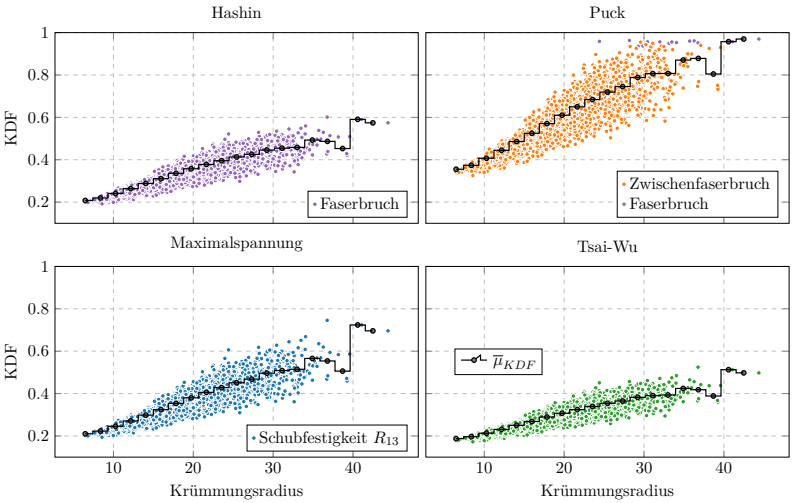


Abbildung 6.29.: Darstellung der Abhängigkeit von maximaler Krümmung in Belastungsrichtung und ermitteltem KDF für ein unidirektionales Laminat. Die identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

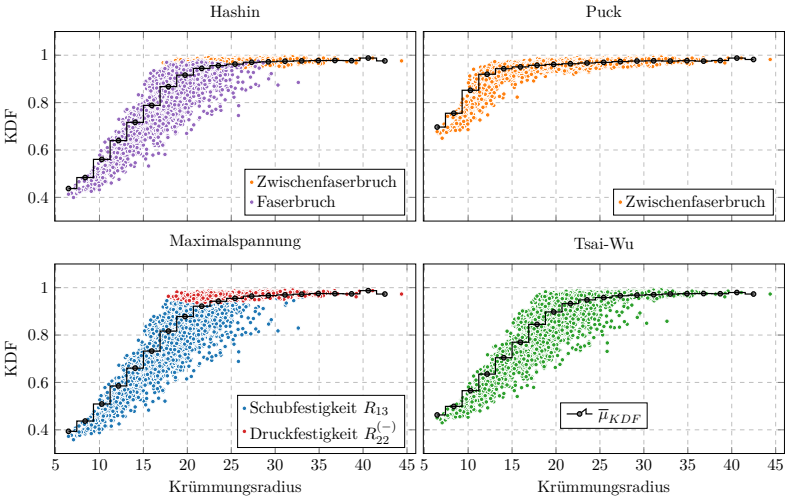


Abbildung 6.30.: Darstellung der Abhängigkeit von maximaler Krümmung in Belastungsrichtung und ermitteltem KDF für ein quasi-isotropes Laminat. Die identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

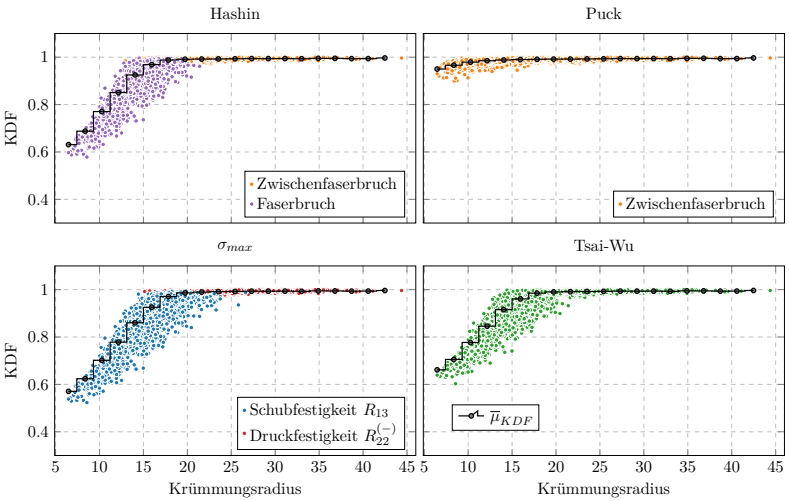


Abbildung 6.31.: Darstellung der Abhängigkeit von maximaler Krümmung in Belastungsrichtung und ermitteltem KDF für das Laminat Lam_{FH}. Die identifizierten Versagensmoden sind farbig gekennzeichnet.

erkennbar. Wesentlicher Unterschied ist hierbei jedoch ein konstanter KDF bis zu einem Radius von etwa $r = 25$ bzw. $r = 20$ beim Puck-Kriterium. Im Vergleich mit Kapitel 5.7.2 werden an dieser Stelle alternative Krümmungsdefinitionen (z.B. Gauß- und mittlere Krümmung) nicht weiter beleuchtet, da diese eine signifikante niedrigere Ergebnisqualität aufwiesen gegenüber der hier betrachteten maximale Krümmung in Belastungsrichtung.

6.4. Diskussion der Ergebnisse

Die in den vorherigen Abschnitten dargestellten Ergebnisse sollen im Folgenden mit Fokus auf verschiedene Aspekte bewertet und eingeordnet werden. Anhand der ausgewählten Laminatkonfigurationen und den ermittelten statistischen Abminderungsfaktoren kann festgehalten werden, dass mit zunehmendem Grad der Materialanisotropie eine signifikante Reduktion des Einflusses von Welligkeitsdefekten erreicht wird. Dies unterstreicht somit erneut die bereits bekannten Potentiale im Hinblick der Tragfähigkeiten von Faserverbundwerkstoffen. Im Zusammenhang mit der Auswahl des Laminats Lam_{FH} ist zudem erkennbar, dass die Berücksichtigung von Fertigungsrandbedingungen beim Laminatentwurf einen mindernden Effekt der Sensitivität des Materials gegenüber Defekten haben kann. Aufgrund der Einzelbetrachtung ist die Schlussfolgerung jedoch im Rahmen weiterführender Studien für weitere Laminatkonfigurationen zu überprüfen. Hierbei ist insbesondere eine Untersuchung

des Anteils von Einzellagen mit einem Winkel $\neq 0°$ empfehlenswert, um den Einfluss auf die Druckfestigkeit in 1-Richtung genauer quantifizieren zu können.

6.4.1. Bewertung der Metriken zur KDF-Approximation

Für einen Gesamtvergleich der betrachteten Bewertungsmetriken sind in Tabelle 6.4 die ermittelten Ergebnisse für jedes Laminat und Metrik zusammenfassend aufgetragen.

Tabelle 6.4.: Vergleich der normierten Variationskoeffizienten pro Metriken für die gewählten Laminate und Versagenskriterien

		Metrik		
Kriterium	Laminat	Amplitude	Gradient	Krümmung
	QI	0.179	0.051	0.117
Hashin	UD	0.159	0.064	0.120
	Lam_{FH}	0.131	0.051	0.093
	QI	0.092	0.035	0.086
Puck	UD	0.183	0.063	0.141
	Lam_{FH}	0.025	0.029	0.027
	QI	0.167	0.048	0.113
Tsai-Wu	UD	0.159	0.068	0.119
	Lam_{FH}	0.119	0.045	0.080
	QI	0.194	0.056	0.128
max. Spannung	UD	0.193	0.090	0.151
	Lam_{FH}	0.157	0.053	0.097

Bezug nehmend auf die Arbeitshypothese 3 in Kapitel 3 lässt sich festhalten, dass im Vergleich der untersuchten Metriken der maximale Gradient der Welligkeit die geeignetste Größe zur näherungsweisen Beschreibung des resultierenden KDF darstellt. Dies bestätigt somit die gewonnenen Erkenntnisse in [44] im Vergleich mit vereinfachten Welligkeitsformulierungen auch im stochastischen Kontext der Arbeit. Aufgrund der relativen Abweichung des KDF von bis 20 % für Stützstellen mit ähnlichem Gradienten sind jedoch weitere, davon abgeleitete Metriken zu identifizieren, um verbessere geometrischen Kenngrößen zu identifizieren. Unabhängig der untersuchten Metrik ist allerdings festzuhalten, dass verschiedene, unbekannte Fehlerquellen des Berechnungsmodells Einfluss auf die Ergebnisgenauigkeit des KDF und die statistische Unsicherheit einer geometrischen Ersatzgröße des ZF-Modells haben können. Durch die komplexe numerische Modellierung des physikalischen Problems mittels des FEM-zentrierten Ansatzes ist eine genaue Fehleranalyse aufwendig und erschwert somit eine genaue Angabe maximaler Fehlertoleranzen bei Bewertung geeigneter geometrischer Metriken zur KDF-Berechnung.

Im Vergleich aller untersuchten Versagenskriterien zeigen sich mitunter größere Unterschiede. Diese liegen hauptsächlich zwischen dem Puck-Kriterium einerseits und dem Tsai-Wu, Hashin

und σ_{Max}-Kriterium anderseits. Letztere sind aus qualitativer Sicht vergleichbar. Insbesondere zwischen dem Hashin und σ_{Max}-Kriterium zeigen sich analog zur formellen Definition gemäß Kapitel 5.4 deutliche Ähnlichkeiten. Die Berücksichtigung faserparalleler Schubspannungen $\tau_{12,13}$ haben somit einen geringen Einfluss auf den resultierenden Versagensindex gegenüber der fasernormalen Spannung σ_{11}. Lediglich bei größerer Welligkeitsgradienten war dieser messbar. Über alle betrachteten Laminattypen bestimmt das Puck-Kriterium die niedrigsten Materialabminderungen (bzw. größten KDF) und ist somit im Vergleich weniger konservativ. Eine Empfehlung zur allgemeinen Verwendung bei der Bewertung von Welligkeitsdefekten kann zunächst jedoch nicht ausgesprochen werden. Im Rahmen der Studien identifizierte das Puck-Kriterium Matrixbruch als wesentliche Versagensart. Experimentelle Materialuntersuchungen in [48] bestätigen indes initiales Matrixversagen anhand einfacher ausgewählter Welligkeitsproben. Infolge dessen werden zwischen einzelnen Lagen Delaminationen induziert, welche bei Druckbelastung u.a. aufgrund der fehlenden Stützwirkung der Matrix zu einem Ausknicken der Fasern führen. Dies geht mit einer deutlichen Minderung der Tragfähigkeit des Verbunds einher und führt schlussendlich zum Totalversagen des Laminats. Die in der Arbeit erfolgte Bewertung auf Basis des Erstlagenversagens überschätzt im Falle des Puck-Kriteriums hierbei wohl möglich die eigentlichen Tragreserven des Materials. Im Zweifel ist daher ein eher konservatives Kriterium bei der Bewertung zu bevorzugen, sofern Erstlagenversagen als Bewertungskriterium herangezogen wird.

Hinzu kommt, dass bei allen Versagenskriterien auf Basis höherwertiger Formulierungen oftmals freie Modellparameter vorhanden sind, deren plausibler Wert experimentell bestimmt und validiert werden muss. Dies gilt ebenso für das physikalisch-motivierte Puck-Kriterium. Trotz entsprechender Empfehlungen durch den Autor des Kriteriums zur Bestimmung der Bruchebenenparameter können diese Richtlinien aufgrund der teilweise experimentellen Kalibrierung nicht als allgemeingültig angesehen und somit verwendet werden [217]. Aus diesem Grund kann das σ_{Max}-Kriterium aufgrund der einfachen Formulierung ohne zusätzliche Modellparameter ein probates Kriterium darstellen.

Ergänzend zur Bewertung der Extremwerte der Metriken des ZFs konnte zusätzlich festgestellt werden, dass die Güte aller geometrischer Ersatzgrößen über den gesamten Wertebereich wesentlich sinkt, wenn die Metrik an der Position des minimalen KDF im Modell ausgewertet wird. Dies basiert unter anderem auf der gewonnen Erkenntnis, dass der Ursprung für einsetzendes Materialversagen nicht zwingend im Bereich maximaler geometrischer Änderungen der OoP-Welligkeit liegen muss. Diese Erkenntnis konnte bereits in [79] mithilfe von Materialtests mit In-Plane Welligkeiten unter Biegebelastung erzielt werden. Eine mögliche Erklärung für dieses Phänomen besteht darin, dass lokale Bereiche größerer Lagenverformung und demzufolge einer größeren Abweichung des Faserwinkels eine größere Nachgiebigkeit des Materials aufweisen im Vergleich zu umliegenden Bereichen. Dies kann eine lokale Reduktion der Spannung zur Folge haben und induziert somit möglicherweise eine höhere Spannung in

Bereichen mit geringerer Welligkeit, sodass in diesen Bereichen die eigentliche Initiierung des Materialversagen vorliegt. Ähnlich zu den Erläuterungen der experimentellen Ergebnisse in [79] konnten die Annahmen zur genauen Ursache des identifizierten Phänomens abschließend jedoch nicht verifiziert werden. Es bedarf somit weiterführenden Untersuchungen, um das zugrunde liegende mechanische Materialverhalten genau charakterisieren zu können.

6.4.2. Grenzen der stochastischen Untersuchungen

Ein wesentlicher Aspekt bei der Analyse der numerischen Ergebnisse ist zudem deren Aussagekraft, da diese zunächst nur im Rahmen der untersuchten Modelle und Konfigurationen gegeben ist. Ein Hauptgrund ist dabei die begrenzte Stichprobenanzahl, die trotz verfügbarer Rechenressourcen dennoch eine limitierende Größe darstellt. Da für ausgewählte Studien eine unabhängige Variation einzelner Parameter durchgeführt wurde, sind darüber hinaus komplexe Interaktionen zwischen Modellparametern möglich, die einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Gesamtbewertung der stochastischen Ergebnisse haben können. Innerhalb der probabilistischen Untersuchungen wurde zudem festgestellt, dass für eine Teilmenge (etwa 5 Prozent) der ausgewählten ZF-Stichprobe keine FEM-Lösung der inneren Verformungen und Spannungen ermittelt werden konnte. Erste Analysen ergaben jedoch keine eindeutigen Indizien in Bezug auf unphysikalische Modellparameter, z.B. durch fehlerhafte Berechnung der UD-Materialparameter infolge starker initialer Lagenverformung auf Basis des ZF analog zur erläuterten Methodik in Kapitelabschnitt 5.6.4. Daher sind weiterführende Untersuchungen zur Identifikation der Problemursache notwendig.

6.5. Vergleich von stochastischer und deterministischer Parametrisierung

Aufbauend auf den gewonnenen Erkenntnissen wird im Folgenden ein Vergleich der ermittelten KDF auf Basis der stochastisch-parametrisierten Welligkeit mit einer deterministischen Geometriedefinition in Abhängigkeit des maximalen Gradienten durchgeführt. Damit ist es möglich, den Einfluss einer komplexen Defektgeometrie im Vergleich zu singulären Welligkeitsausprägungen besser einordnen und quantifizieren zu können.

Vereinfachte Geometriebeschreibungen werden in der Literatur im Allgemeinen durch Sinus- und Kosinus-Funktionen zur Beschreibung der vertikalen Faserauslenkung repräsentiert, die durch die Angabe der Wellenlänge w und Amplitude a vollständig definiert sind [48]. Die in diesem Zusammenhang eingeführte Formulierung in Gleichung 4.1(siehe Kapitel 4.1) wird für die Vergleichsuntersuchungen im Weiteren verwendet.

Bei Verwendung einer ZF-basierten Welligkeitsbeschreibung sind die Größen w und a nur implizit durch die stochastische Varianz und Korrelationslänge gegeben, sodass eine adäquate

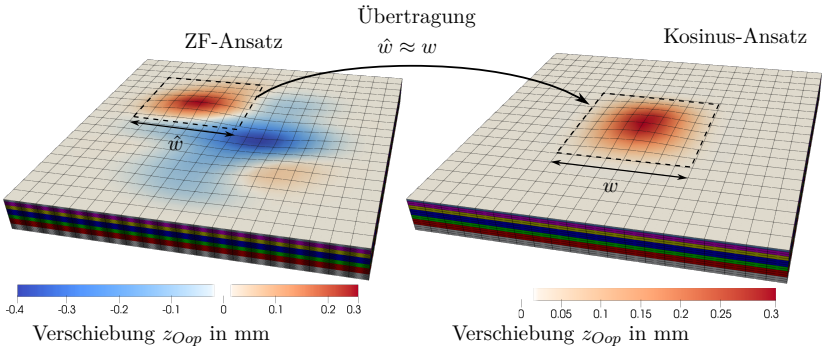


Abbildung 6.32.: Vergleich zweier exemplarischer FE-Modelle der Vergleichsstudie mit ähnlichen maximalen Welligkeitsgradienten in Abhängigkeit der gewählten Geometriebeschreibung. Zur besseren Defektdarstellung sind die Einzellagen oberhalb der Laminatmittelfläche nicht dargestellt.

Wahl der nominellen Werte für einen sinnhaften Vergleich zwischen den Parametrisierungen getroffen werden muss. Es ist allerdings anzumerken, dass eine Untersuchung beider Geometriebeschreibungen aufgrund des unterschiedlichen mathematischen Konzepts stets nur qualitativ erfolgen kann. Für die durchgeführten Untersuchungen wurden zunächst für ausgewählte ZF-Realisierungen mithilfe grafischer Vermessungen lokale Wellenlängen $\hat{w}$ ermittelt (siehe Abbildung 6.32 links). Anschließend wurden daraus repräsentative ganzzahlige Werte für w =[8,10,12]mm abgeleitet und in einem finalen Schritt zentrisch in einem entsprechenden FEM-Vergleichsmodell des betrachten Laminats integriert (siehe Abbildung 6.32).

Mithilfe der Wellenlänge kann folglich der Wertebereich der Amplitude bestimmt werden, um eine repräsentative Menge an Modellen mit ähnlichem Welligkeitsgradienten zu generieren. Die Ergebnisse der berechneten KDF in Abhängigkeit des maximalen Gradienten im Vergleich zur ZF-Parametrisierung für das quasi-isotrope Laminat sind in Abbildung 6.33 dargestellt.

Anhand der Abbildung ist zum Einen erkennbar, dass mit Ausnahme des Puck-Kriteriums für alle anderen Versagenskriterien die ermittelten KDF zwischen den beiden Parametrisierungen vergleichbar sind und zudem für einen großen Parameterraum innerhalb der Einhüllenden der probabilistischen Berechnungsergebnisse liegen. Zudem kann festgestellt werden, dass die jeweils dominierenden Versagensmoden zwischen deterministischer und probabilistischer Analyse bei ähnlichem Gradienten übereinstimmen und somit ein ähnlicher innerer Belastungszustand im Material vorliegt. Im Vergleich aller Kriterien weißt das Puck-Kriterium die größten Unterschiede zwischen beiden untersuchten Geometriebeschreibungen auf. Dabei ist deutlich zu erkennen, dass die resultierenden KDF bei diesem Kriterium stets niedriger sind als die der probabilistischen Betrachtung und für $w = 12mm$ fast linear in Abhängigkeit des maximalen Gradienten abnehmen. Aus den Ergebnissen lässt sich ableiten, dass die vor-

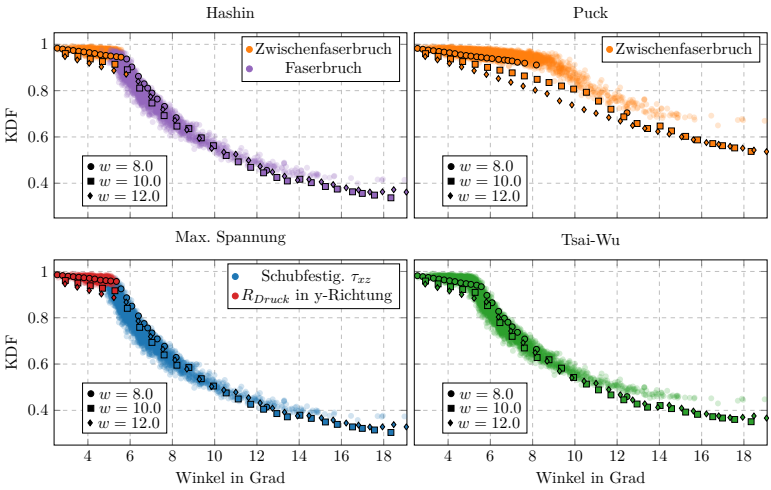


Abbildung 6.33.: Gegenüberstellung der Verteilung der KDF zwischen stochastischer(als transparente Kreise dargestellt) und deterministischer(Dreieck,Quadrat,Raute) Welligkeit für die gewählten Versagenskriterien in Abhängigkeit des maximalen Gradienten.

handenen Tragreserven des Laminats ungeachtet der spezifischen Ausprägung der Welligkeit stets durch lokale Bereiche starker Schädigung dominiert werden. Umliegende Bereiche haben somit nur einen begrenzten Einfluss unabhängig einer vorhandenen Schädigung oder eines homogenen Materialzustands in den Einzellagen. Im Sinne einer praktischen Anwendbarkeit der Methodik auf allgemeine Welligkeitsgeometrien muss allerdings eine fundierte Abschätzung des resultierenden KDF vorgenommen werden, da im Vergleich mit Abbildung 6.33 verschiedene Faktoren infolge der Welligkeit einen stützenden bzw. abschwächenden Einfluss haben.

6.6. Experimentelle Validierung

Die Aussagekraft der erzielten Ergebnisse ist aufgrund der rein numerischen Betrachtungsweise stark eingeschränkt und bedarf entsprechender experimenteller Validierung. Zum Zeitpunkt des Verfassens der Arbeit konnten zunächst jedoch keine Veröffentlichungen zu experimentellen Materialuntersuchungen ermittelt werden, die sich auf den spezifischen Anwendungsfall der Arbeit anwenden lassen. Eine wesentliche Ursache dafür liegt u.a. in der Herausforderung einer verlässlichen Generierung von komplexen Welligkeitsgeometrien in repräsentativen Materialproben im Sinne einer stochastischen Betrachtung.

Für eine Validierung der ermittelten KDF-Ergebnisse werden daher ausgewählte Quellen herangezogen, die sich mit der experimentellen Bestimmung von Abminderungsfaktoren für vereinfachte OoP-Welligkeitsgeometrien beschäftigen. Aufgrund der Heterogenität der experimentellen Prüfbedingungen sowie verwendeter Materialien und Probengeometrien wird im Weiteren der maximale OoP-Welligkeitswinkel ϕ_{wave} als Auswahlgröße für Modellvergleiche zwischen Experiment und numerischer Simulation verwendet.

Da die ZF-basierte Welligkeitsparametrisierung der numerischen Berechnungsmodelle eine explizite Definition des Winkels nicht ermöglicht, ist eine Auswahl von berechneten Stützstellen der stochastischen Analysen in einem Bereich mit definiertem Abstand $d < \epsilon$ um den Vergleichswert der experimentellen Studien zu ermitteln. Aus allen identifizierten Stützstellen mit ähnlichem ϕ_{wave} wird dann der minimale KDF ermittelt. Aufgrund eines fehlenden angemessenen Grenzwertes bzw. Formalismus für ϵ sowie die konservative Auswahl des minimalen KDF aus allen Werten ist dieses Vorgehen nicht repräsentativ und entsprechend fehlerbehaftet. Demgegenüber ist festzuhalten, dass die ermittelten Winkel innerhalb der experimentellen Studien der Literatur mittels optischer Messverfahren auch Fehlern unterliegt und diese die zugrundeliegende Defektgeometrie nicht detailgetreu erfassen können. Zusätzlich ist anzumerken, dass die ermittelten Abminderungsfaktoren im Rahmen der Experimente aufgrund diverser systematischer und zufälliger Einflussgrößen das genaue Tragverhalten nicht exakt abbilden können.

Mithilfe einer Literaturrecherche konnten drei Quellen, die sich für eine Validierung eignen, identifiziert werden [39, 40, 48]. Diese untersuchen OoP-Effekte jeweils für UD und QI-

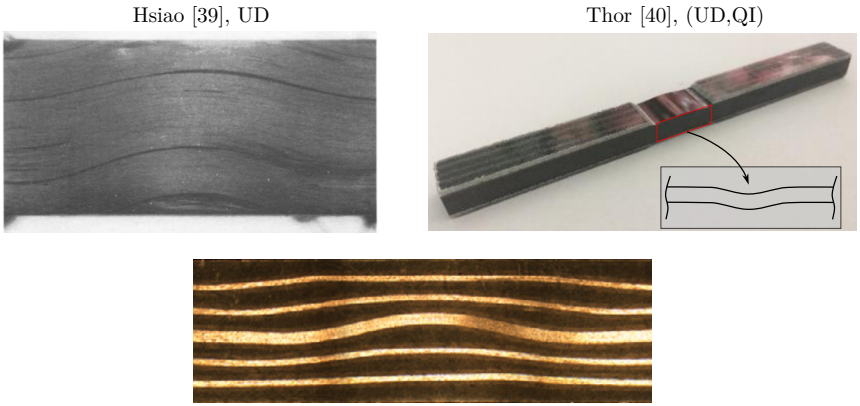


Abbildung 6.34.: Verwendete Probenkörper ausgewählter Druckversuche in der Literatur.

Laminate. Die Tabellen 6.5 und 6.6 fassen den Vergleich zwischen experimentell bestimmten

Abminderungsfaktoren KDF_{exp} und den numerischen Ergebnissen der stochastischen Analysen KDF_{prob} für beide Laminattypen zusammen. Die Größe Δ_{Rel} beschreibt hierbei die relative Abweichung zwischen beiden KDF. Sie wird wie folgt bestimmt:

$$\Delta_{Rel} = \left| \frac{KDF_{exp} - KDF_{prob}}{KDF_{exp}} \right| \tag{6.7}$$

Zusätzlich sind in den Tabellen für die ausgewählten Quellen die grundlegende Art der Welligkeitsgeometrie vermerkt. Diese unterscheidet sich in den Veröffentlichungen zwischen einer Welligkeit im Inneren des Materials (als *IW* gekennzeichnet) und einer Welligkeit, bei der alle Lagen inklusive der Decklage eine Verformung in Materialdickenrichtung erfahren (im Folgenden mit *AW* beschrieben). Die ausgewählten KDF der numerischen Analysen innerhalb dieses Abschnitts basieren auf dem Welligkeitstyp *IW*.

Tabelle 6.5.: Vergleich der KDF für das UD-Laminat zwischen stochastischer Analyse und Literatur

Quelle	ϕ_{wave}	KDF_{exp}	KDF_{prob}	Δ_{Rel} *in %*	Typ
[40]	7,16°	0.495	0.27	44.9	AW
	15°	0.25	0.2	20.0	
[39]	7,2°	0.65	0.27	58.4	IW
	15°	0.19	0.2	5.0	

Tabelle 6.6.: Vergleich der KDF für das QI-Laminat zwischen stochastischer Analyse und Literatur

Quelle	ϕ_{wave}	KDF_{exp}	KDF_{prob}	Δ_{Rel} *in %*	Typ
[48]	5,25°	0.82	0.8	2.4	IW
	10,1°	0.66	0.51	22.7	
	11°	0.67	0.45	32.8	
[40]	7,16°	0.68	0.69	1.5	AW
	15°	0.34	0.36	5.9	

Anhand Tabelle 6.5 lässt sich für das UD-Laminat eine große Abweichung von bis zu 58 Prozent zu den gewählten Vergleichsexperimenten für moderate OoP-Winkel in Laminatdickenrichtung erkennen. Bei zunehmendem Winkel sinkt diese auf bis zu 5 Prozent. Die ermittelten Diskrepanzen für geringe Faserauslenkungen können u.a. auf die deutlichen Unterschiede zwischen dem numerischen Referenzmodell und den getesteten Probenkörpern in Bezug auf die Gesamtlaminatdicke zurückgeführt werden. Mit steigender Dicke nimmt die Dehn- und Biegsteifigkeit des UD-Materials entsprechend zu, was einen höheren KDF zur Folge hat.

Hierbei spielt die Stützwirkung der Fasern im Verhältnis zur Matrix eine entscheidende Rolle. Mit Zunahme der maximalen Faserauslenkung reduziert sich jedoch die Tragfähigkeit der Fasern in Belastungrichtung, da die matrix-dominierten Materialeigenschaften quer zur Faser das Materialverhalten bestimmen. Bei Laminaten höherer Gesamtdicke können insbesondere Schubverformungen in Dickenrichtung einen wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis haben. Dies relativiert den möglichen Einfluss der höheren Steifigkeit der Probekörper im Verhältnis zum numerischen Referenzmodell. Zusätzlich muss erneut auf die Unterschiede der Versagensbetrachtung zwischen Erstlagenversagen beim numerischen Modell und Gesamtversagen in den Experimenten hingewiesen werden, was zu einer Verzerrung der KDF-Bewertung führt.

Im Vergleich zum UD-Laminat zeigt sich für das QI-Laminat anhand Tabelle 6.6 ein unterschiedliches Verhalten. Für moderate Winkel sind die Unterschiede zwischen numerischer Berechnung und Experiment Nr.1 [48] zunächst nur gering, während mit zunehmendem Winkel eine größere Abweichung mit einem Maximum von etwa 33 % vorliegt. Erkennbar ist zudem, dass unabhängig von der Welligkeitsgeometrie, der mittels numerischer Simulation bestimmte KDF unter dem des Experiments liegt und somit eher konservativ ist. Dies ist, wie im vorherigen Abschnitt angedeutet, möglicherweise auf die unterschiedliche Versagensbewertung zurückzuführen. Demgegenüber weichen die Ergebnisse zwischen numerischer Simulation und Experiment in [40] nur geringfügig voneinander ab. Ein Indiz kann die unterschiedliche Ausgangsgeometrie zwischen Testkörper und numerischem Modell sein. Da bei ersterem eine Verformung aller Lagen im Gegensatz zum FEM-Modell vorhanden ist, ist somit auch die Gesamttragfähigkeit des Materials in relevantem Maße gemindert.

Abschließend muss festgehalten werden, dass die durchgeführte Validierung der numerischen Ergebnisse mithilfe der Literatur nur einen begrenzten Ausschnitt der Thematik betrachten kann und weiterführende Untersuchungen erforderlich sind. Dies beinhaltet insbesondere die Sicherstellung konsistenter Rahmenbedingungen von Experiment und Simulation, sofern dies aufgrund der zahlreichen Annahmen in der Simulation überhaupt möglich ist.

7. Schlussbetrachtungen

7.1. Zusammenfassung

Prozessinduzierte Defekte stellen die Fertigung von Luftfahrtstrukturen aus CFK-Laminaten vor Herausforderungen, sodass die theoretische Leistungsfähigkeit der verwendeten Materialien in vielen Fällen nicht erzielt werden kann. Out-of-Plane Welligkeiten (OoP) stellen hierbei eine charakteristische Defektausprägung dar, die mit einem veränderten Tragverhalten der Strukturen einhergeht. In der vorliegenden Arbeit wurde eine Methodik zur numerischen Bewertung der OoP-Defekte auf Basis von hochaufgelösten Simulationsmodellen erarbeitet. Entgegen einer Vielzahl an verfügbaren Literaturquellen, welche sich mit vereinfachten Welligkeitsgeometrien auseinandersetzen, untersucht die Arbeit zudem den Einfluss komplexer, räumlich variabler Geometrien auf resultierende Festigkeitseigenschaften mittels eines probabilistischen Ansatzes. Zusätzlich zur zentralen Forschungsfrage wurden in Kapitel 3.1 Arbeitshypothesen definiert, die zur Beantwortung der Frage aus methodischer Sicht näher untersucht wurden.

In Bezug auf die erste Arbeitshypothese wurde in Kapitel 4 ein theoretisches Konzept zur Beschreibung räumlich veränderlicher Zufallsgrößen, sogenannter gaußscher Zufallsfelder (ZF), erläutert, das im Kontext der Arbeit zur geometrischen Parametrisierung generischer OoP-Welligkeitsformen im Laminat eingesetzt werden kann. Die Anwendbarkeit der ZF-Methode zur dreidimensionalen Welligkeitsbeschreibung wurde diskutiert und konnte analog zu fachverwandten Fragestellungen in der Literatur aufgezeigt werden. Ergänzend zur formalen Definition wurde ein Vorgehen zur numerischen Approximation der ZF-Formulierung beschrieben, welches auf Basis der Karhunen-Loève-Expansionsmethode eine erhebliche Reduktion des stochastischen Berechnungsaufwands je nach Anwendungsfall ermöglicht.

Im Rahmen der Untersuchung der Arbeitshypothese 2 wurde in Kapitel 5 eine numerische Berechnungsmethode vorgestellt, die eine Bewertung des Einflusses von OoP-Welligkeiten aus strukturmechanischer Sicht ermöglicht. Für eine physikalisch fundierte Bestimmung des resultierenden Materialverhaltens auf Laminat- und Einzellagenebene wurde ein FEM-basierter Homogenisierungsansatz mithilfe detaillierter Volumenmodelle verwendet und erläutert. Die Bestimmung der effektiven Festigkeitseigenschaften erfolgt mittels voneinander unabhängig bestimmter Verformungsantworten eines ungeschädigten Laminatreferenzmodells und des

welligkeitsbehafteten Modells. Um Aussagen über den Einfluss von OoP-Welligkeiten auf materielle Festigkeitsgrößen treffen zu können, wurde ein sogenannter Abminderungsfaktor (engl. *Knock-down factor*, KDF) definiert, der den Effekt der untersuchten Materialimperfektion numerisch quantifiziert. Für die allgemeine Bestimmung des KDF für Festigkeitskennwerte wurden ausgewählte spannungsbasierte Versagenskriterien vorgestellt, die das komplexe Versagensverhalten von CFK-Laminaten mittels unterschiedlicher Ansätze abbilden.

In Kapitel 6 wurde die vorgestellte stochastische Bewertungsmethode anhand repräsentativer CFK-Laminatkonfigurationen am Beispiel der longitudinalen Druckfestigkeit in Belastungsrichtung demonstriert. In Bezug auf die zweite Arbeitshypothese und die Abbildung der komplexen Beanspruchungszustände im Material konnte ein unterschiedliches Versagensverhalten zwischen den Versagenskriterien in den numerischen Untersuchungen festgestellt werden. Dies erschwert eine genaue abschließende Bewertung der Hypothese und erfordert insbesondere weiterführende experimentelle Untersuchungen, um die unterschiedlichen Annahmen der Kriterien bzgl. der Schadensphänomenologie im Laminat zu verifizieren. Im Vergleich der betrachteten Laminatkonfigurationen bestätigte sich zudem das Potential der raumrichtungsabhängigen Materialeigenschaften von Verbundwerkstoffen aus CFK. Durch gezielte Verwendung von Einzellagen unterschiedlicher Lagenorientierung konnte eine gesteigerte strukturelle Tragfähigkeit des Laminats selbst bei Vorhandensein von Welligkeiten erzielt werden. Darüber hinaus konnten zusätzliche Tragreserven infolge einer Berücksichtigung von Fertigungsrichtlinien im Laminatentwurf exemplarisch ermittelt werden. Da die Stichprobe jedoch gering ist im Vergleich zum Umfang möglicher Laminatvarianten, sollte dieser Aspekt durch weitere Untersuchungen bekräftigt werden.

Im Zusammenhang mit der dritten Arbeitshypothese wurden in Kapitel 5.7.2 verschiedene geometrisch motivierte Metriken eingeführt, die eine vereinfachte Bewertung der stochastischen Welligkeitsgeometrien ermöglichen. Es zeigte sich anhand ausgewählter Studien, dass der maximale Welligkeitsgradient eine geeignete Ersatzgröße zur näherungsweisen Bestimmung des KDFs darstellt. Verbunden mit der Formulierung eines stückweise definierten, mittleren KDF in Abhängigkeit des Gradienten besitzt dieser im Vergleich zu alternativen Metriken wie z.B. maximalen Amplituden bzw. Krümmungen über den gesamten Parameterraum den niedrigsten Variationskoeffizienten. Ergänzend dazu konnte im Vergleich mit vereinfachten Welligkeitsgeometrien gezeigt werden, dass der Einfluss komplexer Geometrie auf die Festigkeit des Laminats maßgeblich durch lokale Teilbereiche im Modell dominiert wird. Dies erweitert die für einfache Geometrien erzielten Erkenntnisse in der Literatur auf der stochastischen Ebene und eröffnet Möglichkeiten für eine realitätsnahe Anwendung der Methode auf komplexe Gesamtstrukturen.

Zusammenfassend lässt sich die zentrale Forschungshypothese anhand der geschilderten Aspekte im Wesentlichen bestätigen. Die Aussage kann jedoch nur innerhalb der getroffenen Annahmen der spezifischen Teilaspekte und Einzelfragestellungen getätigt werden. Insbeson-

dere die aus qualitativen Gesichtspunkten gewählte stochastische Welligkeitsformulierung und die auf Erstlagenversagen konzentrierte Bewertung des Schadensverhaltens schränken die Allgemeingültigkeit der Aussagen erheblich ein. Ungeachtet dieser Aspekte wurde dennoch mit der vorliegenden Arbeit ein simulationsbasiertes Rahmenwerk geschaffen, mit der eine verbesserte, fertigungsbegleitende Bewertung von generischen OoP-Welligkeitsdefekten ermöglicht werden kann.

7.2. Ausblick

Abschließend sollen verschiedene Aspekte, die den Rahmen weiterführender Forschungsaktivitäten zum Thema der Arbeit repräsentieren, kurz erläutert werden.

KDF-Bestimmung weiterer Materialkenngrößen

In der Arbeit wurde die implementierte Berechnungsmethode zunächst nur für einen einachsigen Drucklastfall zur Bestimmung der reduzierten Druckfestigkeit demonstriert. In einem weiteren Schritt ist die Methode auf Zug- und Schubfestigkeiten in den einzelnen Raumrichtungen anzuwenden. Für jede zugeordnete Belastungsart ergibt sich dabei ein entsprechendes Schadensverhalten des betrachteten Referenzlaminats, aus dem folglich individuelle, statistische Verteilungen der einzelnen Festigkeitskenngrößen resultieren. Für einen vollständigen Satz an Materialparametern zur Beschreibung des Materialverhaltens infolge des Defekts müssen zudem korrigierte Steifigkeitsgrößen bestimmt werden. In diesem Zusammenhang wird in [132] ein FEM-basierter Homogenisierungsansatz zur Bestimmung der effektiven Steifigkeitsparameter vorgeschlagen. Dieser besitzt aus Implementierungssicht viele Übereinstimmungen mit dem in der Arbeit betrachteten Ansatz zur Bestimmung der korrigierten Festigkeitskennwerte.

Effiziente Ermittlung der statistischen KDF-Verteilungen

Eine der wesentlichen Herausforderungen dieser Arbeit ist trotz verfügbarer technischer Kapazitäten der hohe Berechnungsaufwand, der durch die hochdimensionale ZF-Formulierung verursacht wird. Für die genaue Bestimmung der KDF-Verteilungsfunktionen des jeweiligen Materialkennwerts ist folglich eine große Anzahl an Stützstellen erforderlich. Verbunden mit den bereits untersuchten Metriken können weitere, generische Ersatzmodelle in diesem Kontext eine allgemeine Herangehensweise zur Effizienzsteigerung und Minderung des technischen Ressourcenaufwands darstellen. Im Kontext der Arbeit bedeutet dies ein funktionales Modell des KDF in Abhängigkeit der unkorrelierten Eingangsvariablen der ZF. Der Umfang des Parameterraums der Eingangsgrößen schränkt jedoch die Auswahl geeigneter Ersatzmodelle erheblich ein. Ansätze wie [218–220] für den Einsatz in hoch-dimensionalen Parameterräumen

können dennoch vielversprechende Kandidaten sein, müssen allerdings im nicht-linearen Kontext der Arbeit detailliert analysiert werden. Darüber hinaus stellen neuronale Netze eine einfach anzuwendende Methode dar [221–223]. Hierbei muss jedoch, unabhängig von der konkreten Auswahl des Ersatzmodells, die Genauigkeit und Plausibilität der resultierenden KDFs genau geprüft werden.

Eine zusätzliche Möglichkeit zur Effizienzsteigerung besteht darin, schnelle Lösungsverfahren (z.B. CLT bzw. Schubdeformationstheorie erster Ordnung (FSDT) [224–226]) auf Basis vereinfachter Ansätze zur Bestimmung des inneren Verformungs- und Spannungszustands zu verwenden. Die Gültigkeit der jeweiligen Annahmen der einzelnen Verfahren hinsichtlich des mechanischen Materialverhaltens ist jedoch in Bezug auf die OoP-Welligkeitscharakteristik kritisch zu prüfen. Für eine effiziente Gesamtlösung des physikalischen Problems ist neben der Berechnung des mechanischen Materialverhaltens zudem die Ermittlung einer geschlossen-analytischen Lösung der Fredholm-Gleichung zur ZF-Parametrisierung der OoP-Welligkeit empfehlenswert. Diese kann jedoch nur für spezifische Modellgeometrien und ZF-Modelle bestimmt werden.

Trotz der fehlerbehafteten Vereinfachungen können die Effizienzvorteile schneller Lösungsverfahren durch Kombination mit höherwertigen Ansätzen z.B. mittels FEM zur genauen Bestimmung der KDF-Verteilungsfunktionen ausgenutzt werden. Diese Methodik entspricht den in der Literatur beschriebenen *Multilevel Monte Carlo Methoden* (MLMC) [74] bzw. *Multi-Fidelity Monte Carlo Methoden* (MFMC) [227–229], die aus wissenschaftlicher Sicht großes Potenzial für die betrachtete Problemstellung der Arbeit bergen. Eines der zentralen Aspekte hierbei besteht in der Auswahl geeigneter Steuerungsparameter der Algorithmen, um einen guten Kompromiss zwischen hoher Ergebnisgenauigkeit und geringem Berechnungsumfang zu finden.

Übertragung des Materialverhaltens auf die Strukturebene

Der vorgestellte probabilistische Berechnungsansatz wurde zunächst ausschließlich auf der lokalen Materialskala angewandt, wobei Abmessungen zwischen 2 cm und 5 cm vorlagen. Um die Auswirkungen der lokalen Materialschwankungen auf der Bauteilebene und somit die Tragfähigkeiten von Gesamtstrukturen im Detail zu quantifizieren, ist eine Übertragung der Ergebnisse auf dieser Skala erforderlich. Eine mögliche Umsetzung kann sich dabei an den Vorbetrachtungen in Kapitel 5.1 orientieren (siehe Abbildung 5.1), die auf einer unabhängigen stochastischen Parametrisierung der einzelnen Bereiche des Strukturbauteils basieren. Die erforderliche Anzahl der Teilbereiche der Struktur mit unterschiedlichen Materialparametern muss auf Grundlage von Konvergenzstudien ermittelt werden. In jedem Teilbereich sind die stochastischen Verteilungsfunktionen aller erforderlichen Materialgrößen mittels der KDFs der Einzellagen des Laminats zu ermitteln. Aus konzeptioneller Sicht sind die effektiven

Materialparameter auf Basis identischer Welligkeitsgeometrien zwangsläufig voneinander abhängig, sodass eine gültige Menge an stochastischen Verteilungen die Kopplung der Randverteilungen der einzelnen, lagenweise definierten Materialparameter berücksichtigen muss. Aufgrund der komplexen Wechselwirkungen im Material kann die Verwendung einfacher Korrelationskoeffizienten zur Kopplung der Randverteilungen ungenau sein. Zur Lösung dieser Problematik wurden sogenannte *Copulas*, bezogen auf mehrdimensionale Verteilungen *vine-Copulas*, entwickelt [230–232]. Sie ermöglichen eine flexiblere Modellierung der Parameterinteraktionen. Die Anwendung dieser Methoden hängt jedoch von der spezifischen Verteilung ab. Es muss zudem aus pragmatischen Gründen überprüft werden, in welchen Bereichen der CFK-Struktur eine stochastische Parametrisierung einzelner Materialparameter der Einzellagen angemessen ist und wo Einflüsse von Schwankungen aufgrund niedriger Abminderungsfaktoren vernachlässigt werden können. Die Überlegungen sollten auch im Zusammenhang mit der erwartbaren Fertigungsqualität betrachtet werden, wenn die Methode auf ein dediziertes reales Anwendungsszenario und Bauteil angewendet werden soll.

Experimentelle Validierung der Berechnungsmethode

Angesichts der begrenzten Menge an verfügbaren experimentellen Daten zur Charakterisierung komplexer, räumlicher Welligkeitsgeometrien und der daraus resultierenden Materialeigenschaften ist die Gültigkeit der in der Arbeit angewendeten Berechnungsmethode und die dabei erzielten Ergebnisse stark eingeschränkt. In zukünftigen Untersuchungen ist daher eine experimentelle Validierung der numerischen Ergebnisse, die über die durchgeführten Vergleichsstudien in Kapitel 6.6 hinausgehen, durchzuführen. Dies umfasst sowohl die genaue Bestimmung der Eingangsparameter der stochastisch parametrisierten Welligkeitsgeometrien in ausgewählten Referenzlaminaten als auch die Bewertung der Tragfähigkeit repräsentativer Materialproben unter Anwendung genormter Prüfverfahren. Die Herstellung solcher Proben stellt eine zusätzliche Herausforderung dar, insbesondere in Bezug auf Reproduzierbarkeit und Qualität. Eine Methodik zur Probenfertigung mit eingebrachten In-Plane Welligkeiten wurde in [233] beschrieben und kann somit einen ersten Ausgangspunkt zur Herstellung von Referenzproben unter Einfluss von entsprechenden OoP-Defekten darstellen. Dennoch bleibt die exakte Abbildung von Fertigungs- und Geometrierandbedingungen bei der Herstellung von CFK-Bauteilen ein ungelöstes Problem, um die Anwendbarkeit eines experimentellen Validierungsprozesses für generische Materialproben im Hinblick auf eine realistische Bauteilbewertung zu gewährleisten. Die Herstellung von Referenzproben durch die Zerstörung von gefertigten Gesamtstrukturen ist nicht nur kostspielig, sondern auch unpraktikabel.

A. Anhang

A.1. Lokale und Globale Ansatzfunktionen zur Lösung der Fredholmgleichung

In Bezug auf die Lösung der Fredholm-Gleichung in Kapitel 4.4.2 mithilfe der Galerkin-Projektion kann die genaue Wahl der unbekannten Funktionen $h_j(x)$ in Gleichung 4.38 mittels eines *globalen* bzw. *lokalen* Ansatzes getroffen werden. Bei einem globalen Ansatz können bspw. Legendre-Polynome der Ordnung $N-1$ oder spezielle trigonometrische Funktionen verwendet werden, die die Forderung der Orthogonalität erfüllen.

Bei einem lokalen Ansatz kann die Orthogonalität durch die lokale Definition von $h_j(x)$ innerhalb von Ω_h erzielt werden. $h_j(x)$ kann beispielhaft als konstante Funktion in einem Element j angenommen werden, für den der Wert in jedem anderen Element den Wert Null annimmt. Demgegenüber können lineare Funktionen im Element betrachtet werden, bei dem der Wert für einen Knoten j in Ω_h den Wert eins annimmt und Null für alle anderen Knoten im Gebiet. Dieses Vorgehen ähnelt der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen mithilfe der Finiten-Element Methode. Vorteil der Methodik ist die Anwendbarkeit auf beliebig komplexe Geometrien Ω unter Voraussetzung einer realisierbaren Diskretisierung des Gebiets in finite Elemente. Damit lässt sich Gleichung 4.44 entsprechend der Anzahl diskretisierter Elemente, hier mit N_{fe} bezeichnet, wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{e=1}^{N_{fe}} \int_{D^{(e)}} h^{(e)}\left(\mathbf{x}\right) h^{(e)}\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} \\ B &= \sum_{e=1}^{N_{fe}} \sum_{f=1}^{N_{fe}} \int_{D^{(f)}} \left(\int_{D^{(e)}} Cov\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) h^{(e)}\left(\mathbf{x}'\right) d\mathbf{x}' \right) h^{(f)}\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} \end{aligned} \tag{A.1}$$

In Gleichung A.1 repräsentieren $D^{(e)}$ und $D^{(f)}$ die Domänen zweier beliebiger Elemente e und f. Im Weiteren werden für die Ansatzfunktionen die lokalen Formfunktionen der Elemente $N^{(e)}(\xi)$ entsprechend der zugrundeliegenden Elementtopologie verwendet. Damit einher geht eine notwendige Koordinatentransformation vom globalen Koordinatensystem des Gebiets Ω_h in das jeweilige Elementkoordinatensystem mit den natürlichen Koordinaten ζ. Die Transformation ermöglicht zudem die numerische Integration über dem jeweiligen

Elementgebiet, welches nun in den Grenzen $[-1, 1]$ parametrisiert ist. Die Matrizen B und C bezogen auf die Elemente e und f ergeben sich somit zu:

$$\begin{aligned} A_{ee} &= \int_{-1}^{1} \left(\mathbf{N}_{(e)}\left(\zeta_1\right)\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{N}_{(e)}\left(\zeta_1\right) |J^{(e)}| d\zeta_1 \\ B_{ef} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Cov\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) \left(\mathbf{N}_{(e)}\left(\zeta_2\right)\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{N}_{(f)}\left(\zeta_1\right) |J^{(e)}||J^{(f)}| d\zeta_2 d\zeta_1 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Die Terme $|J^{(e)}|$ und $|J^{(f)}|$ in Gleichung A.2 repräsentieren die Determinante der Jacobi-Matrix, welche aus der Koordinatentransformation zwischen dem globalen und lokalen Koordinatensystem resultiert. Gleichung A.2 kann nun mithilfe numerischer Quadraturformeln ähnlich zu Gleichung 4.45 näherungsweise gelöst werden:

$$\begin{aligned} A_{ee} &= \sum_{p=1}^{N_{GP}} \left(\mathbf{N}_{(e)}\left(\zeta_1\right)\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{N}_{(e)}\left(\zeta_1\right) |J^{(e)}| w_p \\ B_{ef} &= \sum_{p=1}^{N_{GP}} \sum_{q=1}^{N_{GP}} Cov\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) \left(\mathbf{N}_{(e)}\left(\zeta_p\right)\right)^{\mathbf{T}} \mathbf{N}_{(f)}\left(\zeta_q\right) |J^{(e)}||J^{(f)}| w_p w_q \end{aligned} \tag{A.3}$$

Die Variablen w_p und w_q entsprechen den Gewichten und ζ_p und ζ_q den Koordinaten der verwendeten Quadraturregel. Aus Gründen der Vollständigkeit muss hier angemerkt werden, dass die Position der Koordinaten $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ des ZF nicht mit denen der Quadraturformeln ζ_p und ζ_q übereinstimmen. Nachdem die Einträge der Elementmatrizen ermittelt wurden, werden sie abschließend, ähnlich dem Vorgehen in der FEM, zu globalen Gesamtmatrizen A und B zusammengesetzt.

A.2. Materialmodelle von Faserverbundmaterialien

Das Hookesche Gesetz lässt sich in ausführlicher Form wie folgt beschreiben:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & \text{Sym.} & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

Orthotropes Material

$$[C_{pq}]^{\text{Orthotrop}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

$$\left([C_{pq}]^{\text{Orthotrop}}\right)^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & \text{Sym.} & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}}_{\text{Nachgiebigkeitsmatrix } \boldsymbol{S}^{\text{Orthotrop}}}. \tag{A.6}$$

Materialkennwerte für Faser- und Matrixsystem

Für die probabilistischen Untersuchungen in Kapitel 6 wird das Material IM7/8551-7 verwendet. Tabelle A.1 und A.2 listen die Materialeigenschaften der zugehörigen Matrix und Faser auf, die mittels mikromechanischer Modelle zur Bestimmung der unidirektionaler Materialgrößen IM7/8551-7 verwendet werden.

Tabelle A.1.: Materialkennwerte für Faser IM7

Kenngröße	Wert
E_{11}	$276\,000\,\text{N}\,\text{mm}^{-2}$
E_{22}, E_{33}	$19\,000\,\text{N}\,\text{mm}^{-2}$
G_{12}, G_{13}	$27\,000\,\text{N}\,\text{mm}^{-2}$
G_{23}	$7000\,\text{N}\,\text{mm}^{-2}$
ν_{12}, ν_{13}	0.2

Tabelle A.2.: Materialkennwerte für Matrix 8551-7

Kenngröße	Wert
E_m	$4080\,\text{N}\,\text{mm}^{-2}$
G_m	$1478\,\text{N}\,\text{mm}^{-2}$
ν_m	0.38

A.3. Transformatrizen zwischen globalem und lokalen Materialkoordinatensystem

Allgemeine Transformationsvorschrift

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos(e_1, e_x) & \cos(e_1, e_y) & \cos(e_1, e_z) \\ \cos(e_2, e_x) & \cos(e_2, e_y) & \cos(e_2, e_z) \\ \cos(e_3, e_x) & \cos(e_3, e_y) & \cos(e_3, e_z) \end{bmatrix}. \tag{A.7}$$

Matrixnotation zur Anwendung tensorieller Transformationsgleichungen

$$[T_{ij}]^{\varepsilon} = \begin{bmatrix} T_{11}^2 & T_{12}^2 & T_{13}^2 & T_{12}T_{13} & T_{11}T_{13} & T_{11}T_{12} \\ T_{21}^2 & T_{22}^2 & T_{23}^2 & T_{22}T_{23} & T_{21}T_{23} & T_{21}T_{22} \\ T_{31}^2 & T_{32}^2 & T_{33}^2 & T_{32}T_{33} & T_{31}T_{33} & T_{31}T_{32} \\ 2T_{21}T_{31} & 2T_{22}T_{32} & 2T_{23}T_{33} & T_{22}T_{33}+T_{23}T_{32} & T_{21}T_{33}+T_{23}T_{31} & T_{21}T_{32}+T_{22}T_{31} \\ 2T_{11}T_{31} & 2T_{12}T_{32} & 2T_{13}T_{33} & T_{12}T_{33}+T_{13}T_{32} & T_{11}T_{33}+T_{13}T_{31} & T_{11}T_{32}+T_{12}T_{31} \\ 2T_{11}T_{21} & 2T_{12}T_{22} & 2T_{13}T_{23} & T_{12}T_{23}+T_{13}T_{32} & T_{11}T_{23}+T_{13}T_{21} & T_{11}T_{22}+T_{12}T_{21} \end{bmatrix}, \tag{A.8}$$

$$[T_{ij}]^{\sigma} = \begin{bmatrix} T_{11}^2 & T_{12}^2 & T_{13}^2 & 2T_{12}T_{13} & 2T_{11}T_{13} & 2T_{11}T_{12} \\ T_{21}^2 & T_{22}^2 & T_{23}^2 & 2T_{22}T_{23} & 2T_{21}T_{23} & 2T_{21}T_{22} \\ T_{31}^2 & T_{32}^2 & T_{33}^2 & 2T_{32}T_{33} & 2T_{31}T_{33} & 2T_{31}T_{32} \\ T_{21}T_{31} & T_{22}T_{32} & T_{23}T_{33} & T_{22}T_{33}+T_{23}T_{32} & T_{21}T_{33}+T_{23}T_{31} & T_{21}T_{32}+T_{22}T_{31} \\ T_{11}T_{31} & T_{12}T_{32} & T_{13}T_{33} & T_{12}T_{33}+T_{13}T_{32} & T_{11}T_{33}+T_{13}T_{31} & T_{11}T_{32}+T_{12}T_{31} \\ T_{11}T_{21} & T_{12}T_{22} & T_{13}T_{23} & T_{12}T_{23}+T_{13}T_{32} & T_{11}T_{23}+T_{13}T_{21} & T_{11}T_{22}+T_{12}T_{21} \end{bmatrix}. \tag{A.9}$$

A.4. Kerndichteschätzung

Bei der Kerndichteschätzung handelt es sich um ein Verfahren zur Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von Zufallsvariablen. Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Histogramm ermöglicht das Schätzverfahren, eine kontinuierliche Verteilung auf Basis einer Stichprobe zu ermitteln. Dem Verfahren liegt die Annahme zugrunde, dass die unbekannte Verteilung einer betrachteten Größe eine stetige Dichtefunktion besitzt. Im folgenden wird eine $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ eine Stichprobe eine unbekannten Verteilungsfunktion betrachtet. Sei K nun ein Kern und $h > 0$ ein Parameter zur Beschreibung einer Bandbreite. Dann ist ein *Kerndichteschätzer* beschrieben durch [205]:

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} k_h(t - x_j) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^{n} k\left(\frac{t - x_j}{h}\right) \tag{A.10}$$

Der Kern K ist eine messbare Funktion für die gilt:

- $K(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1$

In der folgenden Tabelle sind gebräuchliche Kerne aufgelistet:

Bezeichnung	Formel
Gaußkern	$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$
Cauchy-Kern	$k(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$
Picard-Kern	$k(t) = \frac{1}{2} exp(-\lvert t \rvert)$
Epanechnikov-Kern	$k(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-t^2) & wennt \in [-1;1] \\ 0 & sonst \end{cases}$

A.5. Anpassung der UD-Materialkennwerte der einzelnen Lagen infolge der Elementverformung durch das ZF

Abbildung A.1 stellt für die Laminatkonfigurationen den Einfluss der Materialparameteranpassung mittels der mikromechanischen Berechnungsmodelle aus Kapitel 5.6.4 auf den resultierenden KDF dar. Deutlich erkennbar ist, analog zur vorherigen Abbildung 6.15, eine Zunahme des mittleren KDF für alle drei Laminattypen.

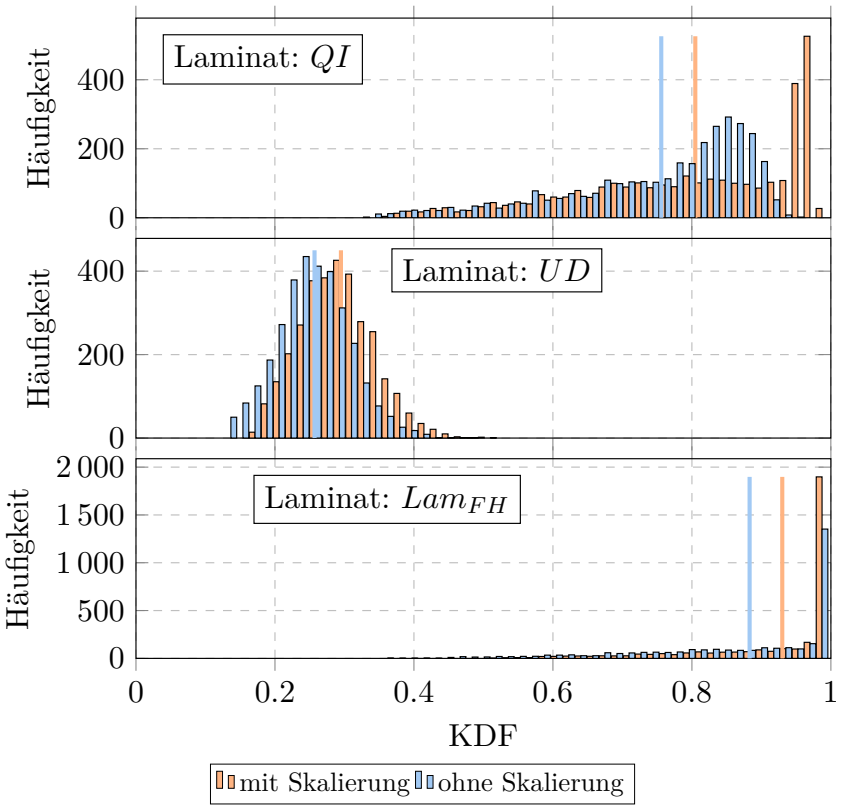


Abbildung A.1.: Einflusses einer elementweisen Anpassung der Materialgrößen auf den resultierenden KDF

A.6. Relative Abweichungen der KDF für verschiedene Bewertungsmetriken

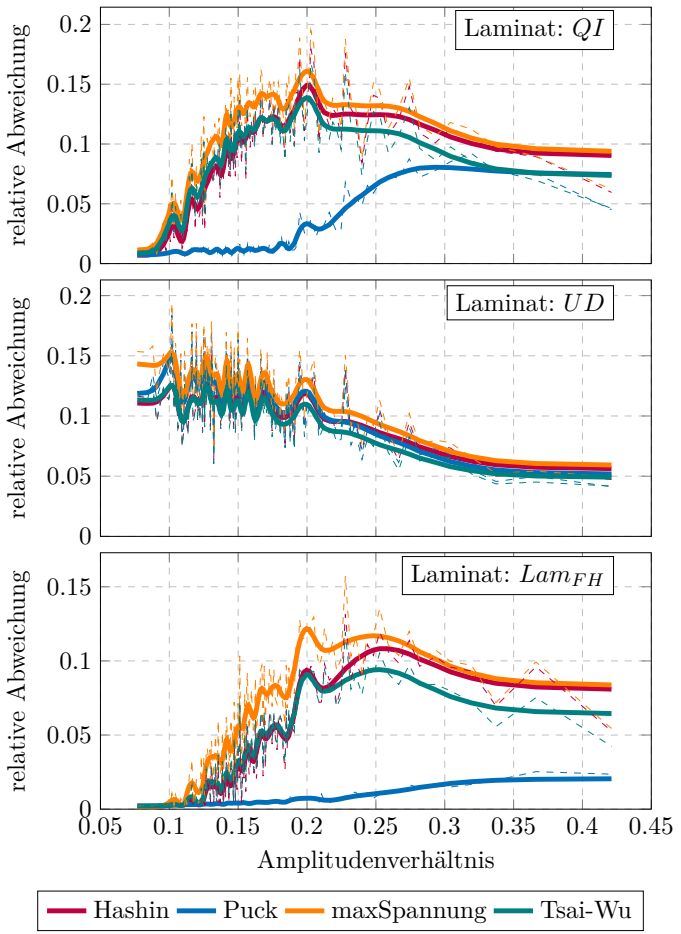


Abbildung A.2.: relative Streuung des gemittelten KDF in Abhängigkeit des Amplitudenverhältnisses

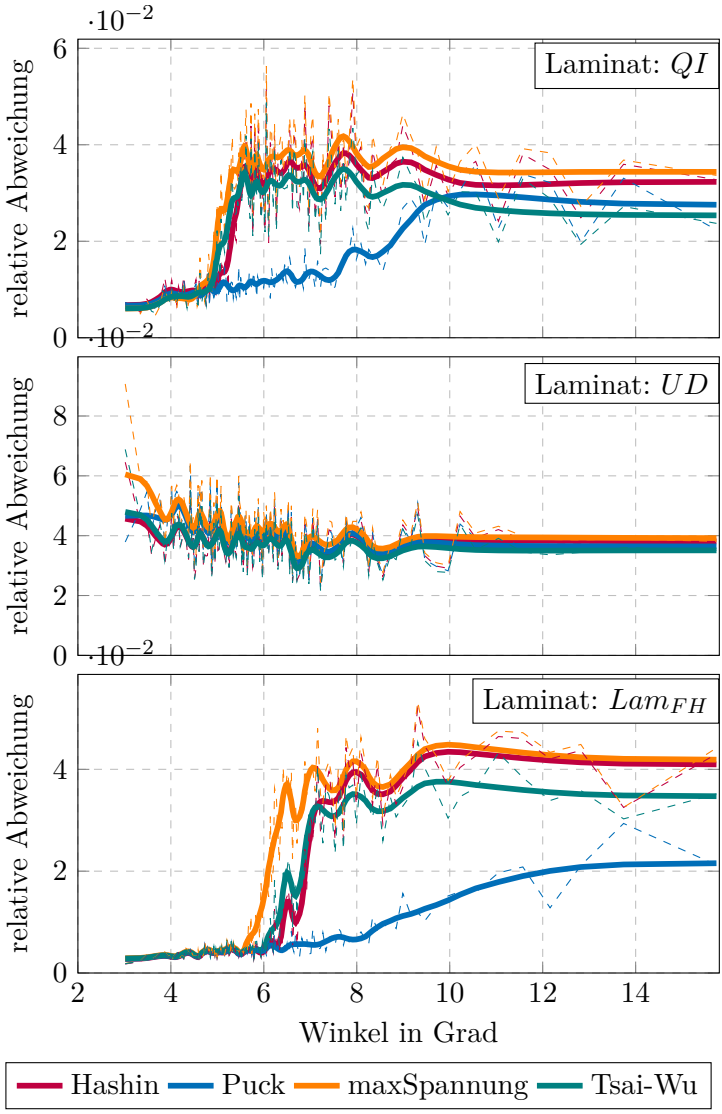


Abbildung A.3.: relative Streuung des gemittelten KDF in Abhängigkeit des maximalen Gradienten

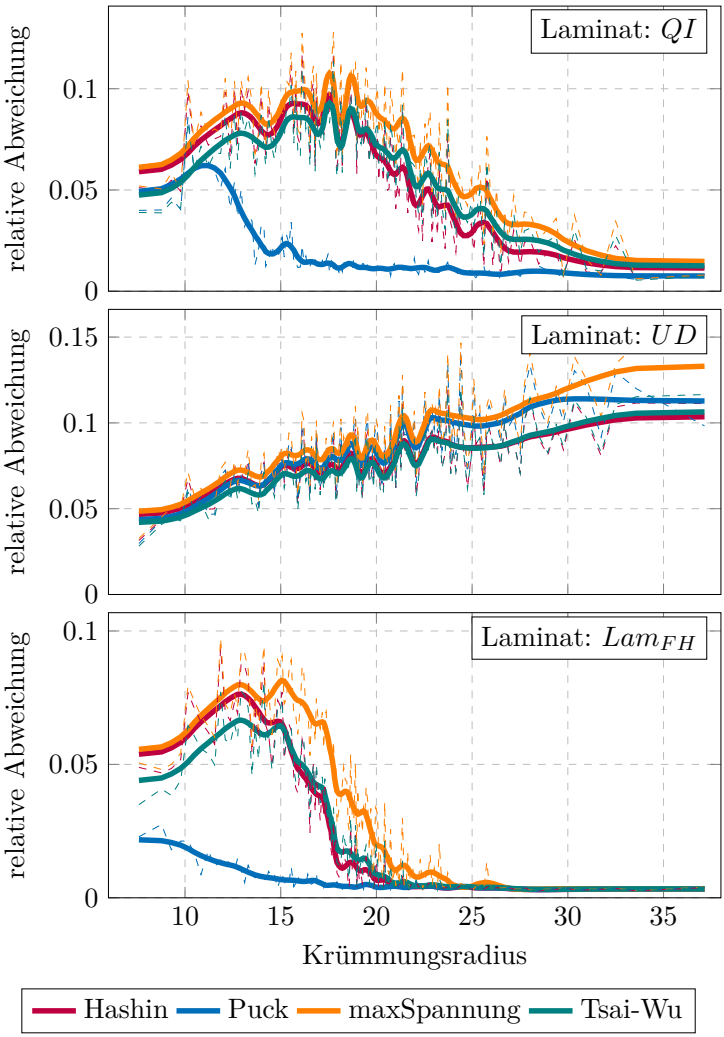


Abbildung A.4.: relative Streuung des gemittelten KDF in Abhängigkeit des maximalen Krümmungsradius

Literaturverzeichnis

[1] Jin Zhang, Gang Lin, Uday Vaidya, and Hao Wang. Past, present and future prospective of global carbon fibre composite developments and applications. *Composites Part B: Engineering*, 250:110463, 2023. ISSN 13598368. doi: 10.1016/j.compositesb.2022.110463.

[2] R. W. Hollmann, A. Schäfer, O. Bertram, and M. Rädel. Virtual testing of multifunctional moveable actuation systems. *CEAS Aeronautical Journal*, 13(4):979–988, 2022. ISSN 1869-5582. doi: 10.1007/s13272-022-00602-5.

[3] A. Sandhu, A. Reinarz, and T. J. Dodwell. A bayesian framework for assessing the strength distribution of composite structures with random defects. *Composite Structures*, 205:58–68, 2018. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2018.08.074.

[4] Sebastian Freund. *Metamodelle mehrerer Genauigkeitsstufen zur Stabilitätsanalyse versteifter Schalen aus Faserverbundwerkstoffen*. PhD thesis, Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, 2020.

[5] UN DESA. United nations, department of economic and social affairs, population division. world population prospects 2022: file gen/01/fev1: Demographic indicators by region, subregion and country, annually for 1950–2100.

[6] D. S. Lee, D. W. Fahey, A. Skowron, M. R. Allen, U. Burkhardt, Q. Chen, S. J. Doherty, S. Freeman, P. M. Forster, J. Fuglestvedt, A. Gettelman, R. R. de León, L. L. Lim, M. T. Lund, R. J. Millar, B. Owen, J. E. Penner, G. Pitari, M. J. Prather, R. Sausen, and L. J. Wilcox. The contribution of global aviation to anthropogenic climate forcing for 2000 to 2018. *Atmospheric Environment*, 244:117834, 2021. ISSN 1352-2310. doi: 10.1016/j.atmosenv.2020.117834. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1352231020305689`.

[7] Sang Yoon Park and Won Jong Choi. 3 production control effect on composite material quality and stability for aerospace usage. In Ehsan Bafekrpour, editor, *Advanced Composite Materials: Properties and Applications*, pages 112–194. De Gruyter Open, Warsaw and Berlin, 2017. ISBN 9783110574432. doi: 10.1515/9783110574432-003.

[8] Falk Heinecke and Christian Willberg. Manufacturing-induced imperfections in composite parts manufactured via automated fiber placement. *Journal of Composites Science*, 3(2):56, 2019. doi: 10.3390/jcs3020056.

[9] Andreas Schuster, Richard Degenhardt, Christian Willberg, and T. Wille. Influence of spatially distributed out-of-plane cfrp fiber waviness on the estimation of knock-down factors based on stochastic numerical analysis. *Journal of Composites Science*, 2022.

[10] Mahoor Mehdikhani, Larissa Gorbatikh, Ignaas Verpoest, and Stepan V. Lomov. Voids in fiber-reinforced polymer composites: A review on their formation, characteristics, and effects on mechanical performance. *Journal of Composite Materials*, 53(12):1579–1669, 2019. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/0021998318772152.

[11] David Chrupalla. *Numerische Steifigkeitsbewertung poröser CFK-Bauteile*. Dissertation, Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, 2014.

[12] A. G. Stamopoulos, K. I. Tserpes, P. Prucha, and D. Vavrik. Evaluation of porosity effects on the mechanical properties of carbon fiber-reinforced plastic unidirectional laminates by x-ray computed tomography and mechanical testing. *Journal of Composite Materials*, 50(15):2087–2098, 2016. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/0021998315602049.

[13] Ramy Harik, Clint Saidy, Stephen Williams, Zafer Gurdal, and Brian Grimsley. Automated fiber placement defect identity cards: cause, anticipation, existence, significance, and progression. 01 2018.

[14] E.T.M. Krämer, W.J.B. Grouve, L. L. Warnet, S. Koussios, and R. Akkerman. Tool-ply interaction in the formation of waviness during c/peek consolidation. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 144:106327, 2021. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2021.106327.

[15] Jared W. Nelson, Trey W. Riddle, and Douglas S. Cairns. Effects of defects in composite wind turbine blades – part 1: Characterization and mechanical testing. *Wind Energy Science*, 2(2):641–652, 2017. ISSN 2366-7443. doi: 10.5194/wes-2-641-2017.

[16] Michael Thor, Markus G. R. Sause, and Roland M. Hinterhölzl. Mechanisms of origin and classification of out-of-plane fiber waviness in composite materials—a review. *Journal of Composites Science*, 4(3):130, 2020. doi: 10.3390/jcs4030130.

[17] P. Hallander, J. Sjölander, and M. Åkermo. Forming induced wrinkling of composite laminates with mixed ply material properties; an experimental study. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 78:234–245, 2015. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2015.08.025. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X15002961`.

[18] Dirk H.-J.A. Lukaszewicz, Carwyn Ward, and Kevin D. Potter. The engineering aspects of automated prepreg layup: History, present and future. *Composites Part B: Engineering*, 43(3):997–1009, 2012. ISSN 13598368. doi: 10.1016/j.compositesb.2011.12.003. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836811005452.

[19] P. Hallander, M. Akermo, C. Mattei, M. Petersson, and T. Nyman. An experimental study of mechanisms behind wrinkle development during forming of composite laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 50:54–64, 2013. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2013.03.013. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X1300095X.

[20] E.T.M. Krämer, W.J.B. Grouve, S. Koussios, L. L. Warnet, and R. Akkerman. Real-time observation of waviness formation during c/peek consolidation. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 133:105872, 2020. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2020.105872.

[21] J. P. Zardan, C. Gueudré, and G. Corneloup. Study of induced ultrasonic deviation for the detection and identification of ply waviness in carbon fibre reinforced polymer. *NDT & E International*, 56:1–9, 2013. ISSN 09638695. doi: 10.1016/j.ndteint.2013.02.001. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0963869513000297.

[22] Haiyan Zhang, Li Peng, Hui Zhang, Ting Zhang, and Qi Zhu. Phased array ultrasonic inspection and automated identification of wrinkles in laminated composites. *Composite Structures*, 300:116170, 2022. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2022.116170.

[23] Koichi Mizukami, Yoshihiro Mizutani, Kenshi Kimura, Akiyoshi Sato, Akira Todoroki, Yoshiro Suzuki, and Yoshiaki Nakamura. Visualization and size estimation of fiber waviness in multidirectional cfrp laminates using eddy current imaging. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 90:261–270, 2016. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2016.07.008. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X16302287.

[24] Koichi Mizukami, Yoshihiro Mizutani, Akira Todoroki, and Yoshiro Suzuki. Detection of in-plane and out-of-plane fiber waviness in unidirectional carbon fiber reinforced composites using eddy current testing. *Composites Part B: Engineering*, 86:84–94, 2016. ISSN 13598368. doi: 10.1016/j.compositesb.2015.09.041. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836815005855.

[25] S. C. Garcea, Y. Wang, and P. J. Withers. X-ray computed tomography of polymer composites. *Composites Science and Technology*, 156:305–319, 2018. ISSN 02663538. doi: 10.1016/j.compscitech.2017.10.023.

[26] Gennadiy Nikishkov, Yuri Nikishkov, and Andrew Makeev. Finite element mesh generation for composites with ply waviness based on x-ray computed tomography. *Advances in Engineering Software*, 58:35–44, 2013. ISSN 09659978. doi: 10.1016/j.advengsoft.2013.01.002.

[27] Akinori Yoshimura, Ryohei Hosoya, Jun Koyanagi, and Toshio Ogasawara. X-ray computed tomography used to measure fiber orientation in cfrp laminates. *Advanced Composite Materials*, 25(1):19–30, 2016. ISSN 0924-3046.

[28] Michael A. Sutton, Jean-José Orteu, and Hubert W. Schreier. *Image correlation for shape, motion and deformation measurements: Basic concepts, theory and applications*. Springer, New York, NY, 2009. ISBN 9780387787466. URL `http://lib.myilibrary.com?id=212669`.

[29] Supratik Mukhopadhyay, Mike I. Jones, and Stephen R. Hallett. Modelling of out-of-plane fibre waviness; tension and compression tests. In *Proc. 4th ECCOMAS Thematic Conf. on the Mechanical Response of Composites, Azores*, pages 17–22, 2013.

[30] Paul Davidson, Anthony Waas, Chandra Yerramalli, Karthick Chandraseker, and W. Faidi. Effect of fiber waviness on the compressive strength of unidirectional carbon composites. 2012. ISBN 978-1-60086-937-2. doi: 10.2514/6.2012-1422.

[31] R. M. Hinterhölzl, H. Haller, M. Luger, and R. Klar. Strategy for a simulation based assessment of effects of manufacturing. In *Proceedings of the 5th International Conference Supply Wings Airtech, Frankfurt*. 2010.

[32] Yu. M. Tarnopol'skii, G. G. Portnov, and I. G. Zhigun. Effect of fiber curvature on the modulus of elasticity for unidirectional glass-reinforced plastics in tension. *Polymer Mechanics*, 3(2):161–166, 1971. ISSN 1573-8922. doi: 10.1007/BF00858855. URL `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00858855.pdf`.

[33] H. M. Hsiao and I. M. Daniel. Elastic properties of composites with fiber waviness. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 27(10):931–941, 1996. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/1359-835X(96)00034-6.

[34] M. R. Piggott. The effect of fibre waviness on the mechanical properties of unidirectional fibre composites: A review. *Composites Science and Technology*, 53(2):201–205, 1995. ISSN 02663538. doi: 10.1016/0266-3538(95)00019-4. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0266353895000194`.

[35] Daniel O'Hare Adams and Steven J. Bell. Compression strength reductions in composite laminates due to multiple-layer waviness. *Composites Science and Technology*, 53(2):207–212, 1995. ISSN 02663538. doi: 10.1016/0266-3538(95)00020-8. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0266353895000208`.

[36] Travis A. Bogetti, John W. Gillespie, and Mark A. Lamontia. Influence of ply waviness on the stiffness and strength reduction on composite laminates. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 5(4):344–369, 1992. ISSN 0892-7057. doi: 10.1177/089270579200500405.

[37] Christian Mittelstedt and Wilfried Becker. *Strukturmechanik ebener Laminate*. Studienbereich Mechanik Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 1. auflage edition, 2016. ISBN 3935868995.

[38] Heoung-Jae Chun, Jai-Yoon Shin, and Isaac M. Daniel. Effects of material and geometric nonlinearities on the tensile and compressive behavior of composite materials with fiber waviness. *Composites Science and Technology*, 61(1):125–134, 2001. ISSN 02663538. doi: 10.1016/S0266-3538(00)00201-3. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353800002013`.

[39] H. M. Hsiao and I. M. Daniel. Effect of fiber waviness on stiffness and strength reduction of unidirectional composites under compressive loading. *Composites Science and Technology*, 56(5):581–593, 1996. ISSN 02663538. doi: 10.1016/0266-3538(96)00045-0. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0266353896000450`.

[40] M. Thor, U. Mandel, M. Nagler, F. Maier, J. Tauchner, M. G. R. Sause, and R. M. Hinterhölzl. Numerical and experimental investigation of out-of-plane fiber waviness on the mechanical properties of composite materials. *International Journal of Material Forming*, 14(1):19–37, 2021. ISSN 1960-6206. doi: 10.1007/s12289-020-01540-5.

[41] F. Heinecke and T. Wille. In-situ structural evaluation during the fibre deposition process of composite manufacturing. *CEAS Aeronautical Journal*, 9(1):123–133, 2018. ISSN 1869-5582. doi: 10.1007/s13272-018-0284-5. URL `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s13272-018-0284-5.pdf`.

[42] Sina Eskandari, F. M. Andrade Pires, P. P. Camanho, and A. T. Marques. Damage analysis of out of plane undulated fiber composites. *Composite Structures*, 152:464–476, 2016. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.05.062. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822316303671`.

[43] I. A. Khattab. *A novel numerical approach and experimental study on the waviness defects in composite structures*. Dissertation, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Magdeburg, 2013. URL `https://books.google.de/books?id=Sm9JngEACAAJ`.

[44] Ningbo Xie, Robert A. Smith, Supratik Mukhopadhyay, and Stephen R. Hallett. A numerical study on the influence of composite wrinkle defect geometry on compressive strength. *Materials & Design*, 140:7–20, 2018. ISSN 02613069. doi: 10.1016/j.matdes.2017.11.034.

[45] Heloisa Guedes Mendonça, Lars Pilgaard Mikkelsen, Xiao Chen, Johannes Bode, Flemming Mortensen, Philipp Ulrich Haselbach, and Kim Branner. Methodology to predict stiffness knock-down in laminates for wind turbine blades with artificial wrinkles. *Wind Energy Science*, 7(6):2513–2525, 2022. ISSN 2366-7443. doi: 10.5194/wes-7-2513-2022. URL `https://wes.copernicus.org/articles/7/2513/2022/wes-7-2513-2022.pdf`.

[46] Xiao Chen, Wilfried Njomo-Wandji, and Xing-Yuan Miao. A robust and automated method for geometric modelling of thick laminates with multiple and asymmetric ply wrinkles. *Composite Structures*, 287:115319, 2022. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2022.115319. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822322001258`.

[47] Z. Hashin. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2):329, 1980. ISSN 0021-8936. doi: 10.1115/1.3153664. URL `http://appliedmechanics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1405139`.

[48] Supratik Mukhopadhyay, Mike I. Jones, and Stephen R. Hallett. Compressive failure of laminates containing an embedded wrinkle; experimental and numerical study. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 73:132–142, 2015. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2015.03.012. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X15001013`.

[49] Christian Willberg and Falk Heinecke. Evaluation of manufacturing deviations of composite materials. *PAMM*, 20(1):e202000345, 2021. ISSN 16177061. doi: 10.1002/pamm.202000345. URL `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/pamm.202000345`.

[50] Christian Willberg, Jan-Timo Hesse, and Daniel Krause. Peridynamic simulation plattform to determine virtual allowables of manufacturing deviations. In *Proceedings of the 33rd Congress of the international council of the aeronautical sciences, ICAS 2022*. 2022.

[51] Chenjun Wu, Yizhuo Gu, Liang Luo, Peng Xu, Shaokai Wang, Min Li, and Zuoguang Zhang. Influences of in-plane and out-of-plane fiber waviness on mechanical properties of carbon fiber composite laminate. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 37 (13):877–891, 2018. ISSN 0731-6844. doi: 10.1177/0731684418765981.

[52] N. Al-kathemi, T. Wille, F. Heinecke, R. Degenhardt, and M. Wiedemann. Interaction effect of out of plane waviness and impact damages on composite structures – an experimental study. *Composite Structures*, 276:114405, 2021. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.114405.

[53] Nagham Al-Kathemi. *Physical interaction effects of out of plane waviness and impact damages of fiber composite structures*. PhD thesis, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), 2022.

[54] I. Al-din Khattab, J. Kreikemeier, and N. S. Abdelhadi. Manufacturing of cfrp specimens with controlled out-of-plane waviness. *CEAS Aeronautical Journal*, 5(1):85–93, 2014. ISSN 1869-5582. doi: 10.1007/s13272-013-0091-y. URL `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s13272-013-0091-y.pdf`.

[55] Rani F. Elhajjar and Seyedmohammad S. Shams. Compression testing of continuous fiber reinforced polymer composites with out-of-plane fiber waviness and circular notches. *Polymer Testing*, 35:45–55, 2014. ISSN 01429418. doi: 10.1016/j.polymertesting.2014.02.004.

[56] Stani Carbillet, Fabrice Richard, and et Lamine Boubakar. Reliability indicator for layered composites with strongly non-linear behaviour. *Composites Science and Technology*, 69(1):81–87, 2009. ISSN 02663538. doi: 10.1016/j.compscitech.2007.10.053.

[57] Srinivas Sriramula and Marios K. Chryssanthopoulos. Quantification of uncertainty modelling in stochastic analysis of frp composites. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 40(11):1673–1684, 2009. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2009.08.020.

[58] P. Sasikumar, R. Suresh, and Sayan Gupta. Analysis of cfrp laminated plates with spatially varying non-gaussian inhomogeneities using sfem. *Composite Structures*, 112:308–326, 2014. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2014.02.025. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382231400083X`.

[59] P. Sasikumar, R. Suresh, P. K. Vijayaghosh, and Sayan Gupta. Experimental characterisation of random field models for cfrp composite panels. *Composite Structures*, 120:451–471, 2015. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2014.10.023. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822314005418`.

[60] Benedikt Kriegesmann, Georgios Balokas, and Tobias Wille. Uncertainty quantification of composite structures with manufacturing defects within the sucohs project, 2022. URL `http://hdl.handle.net/11420/12902`.

[61] Georgios Balokas, Benedikt Kriegesmann, Steffen Czichon, and Raimund Rolfes. Stochastic modeling techniques for textile yarn distortion and waviness with 1d random fields. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 127:105639, 2019. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2019.105639.

[62] Georgios Balokas, Benedikt Kriegesmann, Steffen Czichon, and Raimund Rolfes. A variable-fidelity hybrid surrogate approach for quantifying uncertainties in the nonlinear response of braided composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 381:113851, 2021. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2021.113851.

[63] Yuki Arai, Keitaro Fukuda, and Sei-ichiro Sakata. Random field modeling of microstructure in unidirectional fiber–reinforced plastic using sem–image and image processing for multiscale stochastic stress analysis considering random fiber arrangements. *Advanced Engineering Materials*, 24(5):2270020, 2022. ISSN 1438-1656. doi: 10.1002/adem.202270020.

[64] Natalie Rauter. A computational modeling approach based on random fields for short fiber-reinforced composites with experimental verification by nanoindentation and tensile tests. *Computational Mechanics*, 67(2):699–722, 2021. ISSN 0178-7675. doi: 10.1007/s00466-020-01958-3.

[65] Natalie Rauter and Rolf Lammering. Correlation structure in the elasticity tensor for short fiber-reinforced composites. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 62:103100, 2020. ISSN 0266-8920. doi: 10.1016/j.probengmech.2020.103100.

[66] G. Machina and M. W. Zehn. A methodology to model spatially distributed uncertainties in thin-walled structures. *ZAMM*, 87(5):360–376, 2007. ISSN 00442267. doi: 10.1002/zamm.200610321.

[67] S. Zein, A. Laurent, and D. Dumas. Simulation of a gaussian random field over a 3d surface for the uncertainty quantification in the composite structures. *Computational Mechanics*, 63(6):1083–1090, 2019. ISSN 0178-7675. doi: 10.1007/s00466-018-1637-y.

[68] Jendi Kepple, Manudha T. Herath, Garth Pearce, B. Gangadhara Prusty, Rodney Thomson, and Richard Degenhardt. Stochastic analysis of imperfection sensitive unstiffened composite cylinders using realistic imperfection models. *Composite Structures*, 126:159–173, 2015. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.02.063. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822315001518`.

[69] S. Lauterbach, M. Fina, and W. Wagner. Influence of stochastic geometric imperfections on the load-carrying behaviour of thin-walled structures using constrained random fields. *Computational Mechanics*, 62(5):1107–1125, 2018. ISSN 0178-7675. doi: 10.1007/s00466-018-1554-0.

[70] Benedikt Kriegesmann, Raimund Rolfes, Christian Hühne, Jan Teßmer, and Johann Arbocz. Probabilistic design of axially compressed composite cylinders with geometric and loading imperfections. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 10(04):623–644, 2010. ISSN 0219-4554. doi: 10.1142/S0219455410003658.

[71] Benedikt Kriegesmann. *Probabilistic Design of Thin-Walled Fiber Composite Structures*. PhD thesis, Leibniz Universität Hannover, Hannover, 2012.

[72] S. van den Broek, S. Minera, E. Jansen, A. Pirrera, P. M. Weaver, and R. Rolfes. Improving the static structural performance of panels with spatially varying material properties using correlations, 2019. URL `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-11969-0_9.pdf`.

[73] Sander van den Broek, Sergio Minera, Alberto Pirrera, Paul M. Weaver, Eelco Jansen, and Raimund Rolfes. Enhanced deterministic performance of panels using stochastic variations of geometry and material. *AIAA Journal*, 58(5):2307–2320, 2020. ISSN 0001-1452. doi: 10.2514/1.J058962.

[74] T. J. Dodwell, S. Kynaston, R. Butler, R. T. Haftka, Nam H. Kim, and R. Scheichl. Multilevel monte carlo simulations of composite structures with uncertain manufacturing defects. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 63:103116, 2021. ISSN 0266-8920. doi: 10.1016/j.probengmech.2020.103116.

[75] M.P.F. Sutcliffe. Modelling the effect of size on compressive strength of fibre composites with random waviness. *Composites Science and Technology*, 88:142–150, 2013. ISSN 02663538. doi: 10.1016/j.compscitech.2013.09.002.

[76] M.P.F. Sutcliffe, S. L. Lemanski, and A. E. Scott. Measurement of fibre waviness in industrial composite components. *Composites Science and Technology*, 72(16):2016–2023, 2012. ISSN 02663538. doi: 10.1016/j.compscitech.2012.09.001.

[77] Supratik Mukhopadhyay, Oliver J. Nixon-Pearson, and Stephen R. Hallett. An experimental and numerical study on fatigue damage development in laminates containing embedded wrinkle defects. *International Journal of Fatigue*, 107:1–12, 2018. ISSN 01421123. doi: 10.1016/j.ijfatigue.2017.10.008.

[78] Paul Davidson and Anthony M. Waas. The effects of defects on the compressive response of thick carbon composites: An experimental and computational study. *Composite Structures*, 176:582–596, 2017. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.05.046. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822317308164`.

[79] R.D.R. Sitohang, W.J.B. Grouve, L. L. Warnet, S. Wijskamp, and R. Akkerman. The relation between in-plane fiber waviness severity and first ply failure in thermoplastic composite laminates. *Composite Structures*, 289:115374, 2022. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2022.115374. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822322001751`.

[80] EASA. Modelling & simulation - cs-25 structural certification specifications: Notification of a proposal to issue a certification memorandum, 2020.

[81] Bruno Sudret. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models–contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. *Habilitationa diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France*, 147:53, 2007.

[82] Jan-Uwe Sickert, Michael Beer, Wolfgang Graf, and B. Möller. Fuzzy probabilistic structural analysis considering fuzzy random functions. 2003.

[83] Ivo Babuška and Mohammad Motamed. A fuzzy-stochastic multiscale model for fiber composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 302:109–130, 2016. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2015.12.016.

[84] Dmytro Pivovarov, Thomas Oberleiter, Kai Willner, and Paul Steinmann. Fuzzy-stochastic fem-based homogenization framework for materials with polymorphic uncertainties in the microstructure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 116(9):633–660, 2018. ISSN 00295981. doi: 10.1002/nme.5947. URL `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.5947`.

[85] W. Hackbusch, H. R. Schwarz, and E. Zeidler. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Springer eBook Collection Life Science and Basic Disciplines. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden and s.l., 2., durchgesehene auflage edition, 2003. ISBN 9783322967817. doi: 10.1007/978-3-322-96781-7.

[86] Iosif I. Gichman and Anatolij V. Skorochod. *Introduction to the theory of random processes*. Dover books on mathematics. Dover Publications, Mineola, NY, 1996. ISBN 9780486693873. URL `https://books.google.de/books?id=q0lo91imeD0C`.

[87] Johann Guilleminot. Modeling non-gaussian random fields of material properties in multiscale mechanics of materials, 2020.

[88] Dongfang Chen, Dingping Xu, Gaofeng Ren, Quan Jiang, Guofeng Liu, Liangpeng Wan, and Ning Li. Simulation of cross-correlated non-gaussian random fields for layered rock mass mechanical parameters. *Computers and Geotechnics*, 112:104–119, 2019. ISSN 0266-352X. doi: 10.1016/j.compgeo.2019.04.012. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X19301156`.

[89] Chunsheng Ma. Construction of non-gaussian random fields with any given correlation structure. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(3):780–787, 2009. ISSN 0378-3758. doi: 10.1016/j.jspi.2008.03.043. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378375808002048`.

[90] Tengyuan Zhao and Yu Wang. Non-parametric simulation of non-stationary non-gaussian 3d random field samples directly from sparse measurements using signal

decomposition and markov chain monte carlo (mcmc) simulation. *Reliability Engineering & System Safety*, 203:107087, 2020. ISSN 09518320. doi: 10.1016/j.ress.2020.107087. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832020305883.

[91] Pieterjan Robbe. *Multilevel Uncertainty Quantification Methods for Robust Design of Industrial Applications*. Dissertation, KU Leuven, Leuven, 2019.

[92] B. Matern. Spatial variation. stochastic models and their application to some problems in forest surveys and other sampling investigations. *Meddelanden fran Statens Skogsforskningsinstitut*, 49(5), 1960.

[93] M. Li, S. Ghosh, O. Richmond, H. Weiland, and T. N. Rouns. Three dimensional characterization and modeling of particle reinforced metal matrix composites part ii: damage characterization. *Materials Science and Engineering: A*, 266(1-2):221–240, 1999. ISSN 0921-5093. doi: 10.1016/S0921-5093(98)01133-2. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509398011332.

[94] Min-young Yun, Pavel Simacek, Christophe Binetruy, and Suresh Advani. Random field generation of stochastically varying through the thickness permeability of a plain woven fabric. *Composites Science and Technology*, 159:199–207, 2018. ISSN 02663538. doi: 10.1016/j.compscitech.2018.02.035.

[95] Georges Matheron. Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58(8):1246–1266, 1963. ISSN 0361-0128. doi: 10.2113/gsecongeo.58.8.1246.

[96] G. Matheron. *The Theory of Regionalized Variables and Its Applications*. Centre de Morphologie Mathématique Fontainebleau: Les cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau. École national supérieure des mines, 1971. URL https://books.google.de/books?id=TGhGAAAAYAAJ.

[97] Tilmann Gneiting, Zoltán Sasvári, and Martin Schlather. Analogies and correspondences between variograms and covariance functions. *Advances in Applied Probability*, 33(3): 617–630, 2001. ISSN 00018678. URL http://www.jstor.org/stable/1428478.

[98] Dionissios T. Hristopulos. *Random Fields for Spatial Data Modeling: A Primer for Scientists and Engineers*. Springer eBook Collection. Springer Netherlands and Imprint Springer, Dordrecht, 1st ed. 2020 edition, 2020. ISBN 978-94-024-1916-0. doi: 10.1007/978-94-024-1918-4.

[99] Michael W. Davis. Production of conditional simulations via the lu triangular decomposition of the covariance matrix. *Mathematical Geology*, 19(2):91–98, 1987. ISSN 1573-8868. doi: 10.1007/BF00898189. URL https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00898189.pdf.

[100] William F. Quimby. *Selected topics in spatial statistical analysis: Nonstationary vector kriging, large scale conditional simulation of three dimensional gaussian random fields, and hypothesis testing in a correlated random field.* Dissertation, University of Wyoming, Laramie, 1986.

[101] G. Golub and W. Kahan. Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series B Numerical Analysis*, 2(2):205–224, 1965. ISSN 0887-459X. doi: 10.1137/0702016.

[102] K. Karhunen. *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Annales Academiae Scientiarum Fennicae: Ser. A 1. Universitat Helsinki, 1947. URL `https://books.google.de/books?id=bGUUAQAAIAAJ`.

[103] James Mercer. Xvi. functions of positive and negative type, and their connection the theory of integral equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 209(441-458): 415–446, 1909. ISSN 0264-3952. doi: 10.1098/rsta.1909.0016.

[104] Sebastian Fink. *Simulation of elastic-plastic material behaviour with uncertain material parameters : a spectral stochastic finite element method approach.* PhD thesis, Leibniz Universität Hannover, Hannover, 2015.

[105] Wolfgang Betz, Iason Papaioannou, and Daniel Straub. Numerical methods for the discretization of random fields by means of the karhunen–loève expansion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 271:109–129, 2014. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2013.12.010.

[106] Kendall E. Atkinson. *The numerical solution of integral equations of the second kind*, volume 4 of *Cambridge monographs on applied and computational mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. ISBN 9780521583916. doi: 10.1017/CBO9780511626340.

[107] Gene H. Golub and Charles F. van Loan. *Matrix computations.* Johns Hopkins studies in the mathematical sciences. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, fourth edition edition, 2013. ISBN 1421407949.

[108] Carlos A. Michelén Ströfer, Xin-Lei Zhang, Heng Xiao, and Olivier Coutier-Delgosha. Enforcing boundary conditions on physical fields in bayesian inversion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 367:113097, 2020. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2020.113097.

[109] E. Solak, R. Murray-smith, W. Leithead, D. Leith, and Carl Rasmussen. Derivative observations in gaussian process models of dynamic systems. *Advances in Neural*

Information Processing Systems, 15, 2002. URL https://proceedings.neurips.cc/paper/2002/file/5b8e4fd39d9786228649a8a8bec4e008-Paper.pdf.

[110] Carl Edward Rasmussen and Christopher K. I. Williams. *Gaussian processes for machine learning*. Adaptive computation and machine learning. MIT Press, Cambridge, Mass., 3. print edition, 2008. ISBN 9780262182539.

[111] Luc Devroye. *Non-uniform random variate generation*. Springer, New York and Heidelberg, 1986. ISBN 978-1-4613-8645-2. doi: 10.1007/978-1-4613-8643-8.

[112] M. E. Johnson, L. M. Moore, and D. Ylvisaker. Minimax and maximin distance designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 26(2):131–148, 1990. ISSN 0378-3758. doi: 10.1016/0378-3758(90)90122-B. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037837589090122B.

[113] Victoria C.P. Chen, Kwok-Leung Tsui, Russell R. Barton, and Martin Meckesheimer. A review on design, modeling and applications of computer experiments. *IIE Transactions*, 38(4):273–291, 2006. ISSN 0740-817X. doi: 10.1080/07408170500232495.

[114] M. Gunzburger and J. Burkardt. Uniformity measures for point samples in hypercubes. 2004.

[115] J. Santiago, M. Claeys-Bruno, and M. Sergent. Construction of space-filling designs using wsp algorithm for high dimensional spaces. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 113:26–31, 2012. ISSN 0169-7439. doi: 10.1016/j.chemolab.2011.06.003.

[116] Norbert Henze. *Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Lehrbuch. Springer Spektrum, Wiesbaden, 10., überarb. aufl. edition, 2013. ISBN 3658030763.

[117] Michael D. McKay. Latin hypercube sampling as a tool in uncertainty analysis of computer models. In Robert C. Crain, editor, *Proceedings of the 24th conference on Winter simulation*, ACM Conferences, pages 557–564, New York, NY, 1992. ACM. ISBN 0780307984. doi: 10.1145/167293.167637.

[118] Alexander Forrester, Andras Sobester, and Andy J. Keane. *Engineering Design via Surrogate Modelling: A Practical Guide*. John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, England and Hoboken, NJ, 1. auflage edition, 2008. ISBN 978-0-470-06068-1.

[119] Brian Beachkofski and Ramana Grandhi. Improved distributed hypercube sampling. In *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. ISBN 978-1-62410-117-5. doi: 10.2514/6.2002-1274. URL http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2002-1274.

[120] Qiang Du, Vance Faber, and Max Gunzburger. Centroidal voronoi tessellations: Applications and algorithms. *SIAM Review*, 41(4):637–676, 1999. ISSN 0036-1445. doi: 10.1137/S0036144599352836.

[121] Yuki Saka, Max Gunzburger, and John Burkardt. Latinized, improved lhs, and cvt point sets in hypercubes. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 4(3-4):729–743, 2007. URL `https://www.researchgate.net/profile/Yuki_Saka/publication/242577446_Latinized_improved_LHS_and_CVT_point_sets_in_hypercubes/links/546e60600cf29806ec2eb2d1/Latinized-improved-LHS-and-CVT-point-sets-in-hypercubes.pdf`.

[122] Lili Ju, Qiang Du, and Max Gunzburger. Probabilistic methods for centroidal voronoi tessellations and their parallel implementations. *Parallel Computing*, 28 (10):1477–1500, 2002. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167819102001515`.

[123] Max D. Morris and Toby J. Mitchell. Exploratory designs for computational experiments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 43(3):381–402, 1995. ISSN 0378-3758. doi: 10.1016/0378-3758(94)00035-T. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037837589400035T`.

[124] Alfonso M. Panunzio, Régis Cottereau, and Guillaume Puel. Large scale random fields generation using localized karhunen–loève expansion. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 5(1):1–29, 2018. doi: 10.1186/s40323-018-0114-7. URL `https://amses-journal.springeropen.com/counter/pdf/10.1186/s40323-018-0114-7`.

[125] Yanbin Li, Sameer B. Mulani, Rakesh K. Kapania, Shaoqing Wu, and Qingguo Fei. Non-stationary random vibration analysis using multi-correlated random processes excitations. In *AIAA SciTech*, Place of publication not identified, 2016. publisher not identified. ISBN 978-1-62410-392-6. doi: 10.2514/6.2016-2173.

[126] William Kleiber. High resolution simulation of nonstationary gaussian random fields. *Computational Statistics & Data Analysis*, 101:277–288, 2016. ISSN 0167-9473. doi: 10.1016/j.csda.2016.03.005. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947316300482`.

[127] H. P. Hong, X. Z. Cui, and D. Qiao. An algorithm to simulate nonstationary and non-gaussian stochastic processes. *Journal of Infrastructure Preservation and Resilience*, 2(1):17, 2021. ISSN 2662-2521. doi: 10.1186/s43065-021-00030-5. URL `https://jipr.springeropen.com/counter/pdf/10.1186/s43065-021-00030-5`.

[128] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin [u.a.], 2002. ISBN

3540668063 9783540668060. URL http://www.worldcat.org/search?qt=worldcat_org_all&q=3540668063.

[129] Rudraprasad Bhattacharyya and Douglas Adams. Multiscale analysis of multi-directional composite laminates to predict stiffness and strength in the presence of micro-defects. *Composites Part C: Open Access*, 6:100189, 2021. ISSN 26666820. doi: 10.1016/j.jcomc.2021.100189. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666682021000839.

[130] Xiao-Yi Zhou, Sheng-Yu Qian, Neng-Wei Wang, Wen Xiong, and Wen-Qing Wu. A review on stochastic multiscale analysis for frp composite structures. *Composite Structures*, 284:115132, 2022. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2021.115132. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S026382232101549X.

[131] Nicholas Fantuzzi. Novel approaches for the multiscale analysis of composite materials and structures. *Composites Part C: Open Access*, 10:100336, 2023. ISSN 26666820. doi: 10.1016/j.jcomc.2022.100336. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666682022000998.

[132] Falk Heinecke. *Strukturmechanische Auswirkung fertigungsbedingter Imperfektionen aus Faserverbundablegeprozesses*. PhD thesis, Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Braunschweig, 2020. URL https://elib.dlr.de/136013/.

[133] VDI. Guideline VDI 2014. Part 3: Development of Fibre Reinforced Plastics Components, Analysis. *Aircr. Eng. Aerosp. Technol.*, 79(1):159, jan 2007. ISSN 0002-2667. doi: 10.1108/aeat.2007.12779aae.002. URL http://www.emeraldinsight.com/doi/10.1108/aeat.2007.12779aae.002.

[134] H. Altenbach, J. Altenbach, and R. B. Rikards. *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke: Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Stuttgart, 1996. ISBN 3-342-00681-1.

[135] A. C. Orifici, I. Herszberg, and R. S. Thomson. Review of methodologies for composite material modelling incorporating failure. *Composite Structures*, 86(1-3):194–210, 2008. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2008.03.007.

[136] A. S. Kaddour, M. J. Hinton, S. Li, and P. A. Smith. The world-wide failure exercises: How can composites design and manufacture communities build their strength. In *Proc. 16th Eur. Conf. Compos. Mater*, pages 22–26, Sevilla, 2014. ISBN 9780000000002.

[137] K. Rohwer. Predicting fiber composite damage and failure. *Journal of Composite Materials*, 49(21):2673–2683, 2015. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/0021998314553885.

[138] Athanasios J. Kolios and Stefano Proia. Evaluation of the reliability performance of failure criteria for composite structures. *World Journal of Mechanics*, 02(03):162–170, 2012. ISSN 2160-049X. doi: 10.4236/wjm.2012.23019.

[139] G. Niemann, H. Winter, and B.-R. Höhn. *Maschinenelemente*, volume 1. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 4 edition, 2005. ISBN 3-540-25125-1. doi: 10.1007/b137557. URL `http://link.springer.com/10.1007/b137557`.

[140] M. N. Nahas. Survey of failure and post-failure theories of laminated fiber-renforced composites. *J. Compos. Technol. Res.*, 8(4):138–153, 1986. ISSN 08846804. doi: 10.1520/CTR10335J.

[141] T. J. Juhasz. *Ein neues physikalisch basiertes Versagenskriterium für schwach 3D-verstärkte Faserverbundlaminate*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2003.

[142] Y. M. Elsherbini. Validating the classical failure criteria for applicability to the notched woven-roving composite materials. *J. Compos.*, 2014:12, 2014. doi: 10.1155/2014/329153.

[143] P. P. Camanho, C. G. Dávila, S. T. Pinho, L. Iannucci, and P. Robinson. Prediction of in situ strengths and matrix cracking in composites under transverse tension and in-plane shear. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 37(2):165–176, 2006. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2005.04.023.

[144] P. P. Camanho, P. Maimí, and C. G. Dávila. Prediction of size effects in notched laminates using continuum damage mechanics. *Composites Science and Technology*, 67 (13):2715–2727, 2007. ISSN 02663538. doi: 10.1016/j.compscitech.2007.02.005.

[145] C. S. Lopes. *Damage and Failure of Non-Conventional Composite Laminates*. Dissertation, Delft University of Technology, 2009.

[146] C. Schuecker, C. G. Dávila, and C. A. Rose. Comparison of damage models for predicting the non-linear response of laminates under matrix dominated loading conditions. URL `http://hdl.handle.net/2060/20100037764`.

[147] T. A. Sebaey, J. Costa, P. Maimí, Y. Batista, N. Blanco, and J. A. Mayugo. Measurement of the in situ transverse tensile strength of composite plies by means of the real time monitoring of microcracking. *Composites Part B: Engineering*, 65:40–46, 2014. ISSN 13598368. doi: 10.1016/j.compositesb.2014.02.001.

[148] A. Krimmer. *Mikromechanische Modellierung von Fasergelege-Kunststoff-Verbunden auf Basis von Normprüfungen unter Berücksichtigung der in-situ-Eigenschaften der Matrix*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 2014.

[149] K. W. Gan, T. Laux, S. T. Taher, J. M. Dulieu-Barton, and O. T. Thomsen. A novel fixture for determining the tension/compression-shear failure envelope of multidirectional composite laminates. *Composite Structures*, 184(October 2017):662–673, 2018. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.10.030.

[150] Alfred Puck. *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten: Modelle für die Praxis*. Hanser, München and Wien, 1996. ISBN 3446181946.

[151] K. Liu. A progressive quadratic failure criterion for a laminate. *Composites Science and Technology*, 58(7):1023–1032, 1998. ISSN 02663538. doi: 10.1016/S0266-3538(96)00141-8. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353896001418`.

[152] J. N. Reddy and A. K. Pandey. A first-ply failure analysis of composite laminates. *Computers & Structures*, 25(3):371–393, 1987. ISSN 00457949. doi: 10.1016/0045-7949(87)90130-1. URL `http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0045794987901301`.

[153] T. Y. Kam and E. S. Chang. Reliability formulation for composite laminates subjected to first-ply failure. *Composite Structures*, 38(1-4):447–452, 1997. ISSN 02638223. doi: 10.1016/S0263-8223(97)00079-2.

[154] S. V. Lomov, D. S. Ivanov, I. Verpoest, M. Zako, T. Kurashiki, H. Nakai, and S. Hirosawa. Meso-fe modelling of textile composites: Road map, data flow and algorithms. *Composites Science and Technology*, 67:1870–1891, 2007. ISSN 02663538. doi: 10.1016/j.compscitech.2006.10.017.

[155] Supratik Mukhopadhyay, Mike I. Jones, and Stephen R. Hallett. Tensile failure of laminates containing an embedded wrinkle; numerical and experimental study. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 77:219–228, 2015. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2015.07.007. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X15002390`.

[156] S. L. Lemanski, J. WANG, M.P.F. Sutcliffe, K. D. Potter, and M. R. Wisnom. Modelling failure of composite specimens with defects under compression loading. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 48:26–36, 2013. ISSN 1359835X. doi: 10.1016/j.compositesa.2012.12.007. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X13000043`.

[157] T. A. Bogetti, J. W. Gillespie, and M. A. Lamontia. The influence of ply waviness with nonlinear shear on the stiffness and strength reduction of composite laminates. *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 7(2):76–90, 1994. ISSN 0892-7057. doi:

10.1177/089270579400700201. URL http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/089270579400700201.

[158] H. Zhu, B. V. Sankar, and R. V. Marrey. Evaluation of failure criteria for fiber composites using finite element micromechanics. *Journal of Composite Materials*, 32 (8):766–782, 1998. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/002199839803200804. URL http://jcm.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/002199839803200804.

[159] H. Nakayasu and Z. Maekawa. A comparative study of failure criteria in probabilistic fields and stochastic failure envelopes of composite materials. *Reliability Engineering & System Safety*, 56(3):209–220, 1997. ISSN 09518320. doi: 10.1016/S0951-8320(95)00085-2. URL http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0951832095000852.

[160] C. G. Dávila and E. R. Johnson. Analysis of delamination initiation in postbuckled dropped-ply laminates. *AIAA Journal*, 31(4):721–727, 1993. ISSN 0001-1452. doi: 10.2514/3.49019. URL http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.49019.

[161] G. Karami and M. Garnich. Effective moduli and failure considerations for composites with periodic fiber waviness. *Composite Structures*, 67(4):461–475, 2005. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2004.02.005. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822304000455.

[162] Andreas Altmann, Philipp Gesell, and Klaus Drechsler. Strength prediction of ply waviness in composite materials considering matrix dominated effects. *Composite Structures*, 127:51–59, 2015. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.02.024. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822315001002.

[163] Y.-C. Ng. Deriving composite lamina properties from laminate properties using classical lamination theory and failure criteria. *Journal of Composite Materials*, 39(14):1295–1306, 2005. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/0021998305050429. URL http://jcm.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/0021998305050429.

[164] S. W. Tsai and E. M. Wu. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 5(1):58–80, 1971. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/002199837100500106. URL http://jcm.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/002199837100500106.

[165] I. I. Gol'denblat and V. A. Kopnov. Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state. *Polym. Mech.*, 1(2):54–59, 1966. ISSN 0032-390X. doi: 10.1007/BF00860685. URL http://link.springer.com/10.1007/BF00860685.

[166] A. de Luca and F. Caputo. A review on analytical failure criteria for composite materials. *AIMS Mater. Sci.*, 4(5):1165–1185, 2017. ISSN 2372-0484. doi: 10.3934/matersci.2017.5.1165. URL http://www.aimspress.com/article/10.3934/matersci.2017.5.1165.

[167] Y. D. Murray. Manual for ls-dyna wood material model 143. *1360-5518*, (August). ISSN 1360-5518. URL https://www.fhwa.dot.gov/publications/research/safety/04097/04097.pdf.

[168] S. E. Yamada and C. T. Sun. Analysis of Laminate Strength and Its Distribution. *J. Compos. Mater.*, 12(3):275–284, 1978. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/002199837801200305. URL http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/002199837801200305.

[169] Holm Altenbach and Tomasz Sadowski, editors. *Failure and Damage Analysis of Advanced Materials*. CISM International Centre for Mechanical Sciences. Springer Vienna, Vienna, 2015. ISBN 978-3-7091-1834-4. doi: 10.1007/978-3-7091-1835-1.

[170] M. R. Garnich and G. Karami. Localized fiber waviness and implications for failure in unidirectional composites. *Journal of Composite Materials*, 39(14):1225–1245, 2005. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/0021998305048748. URL http://jcm.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/0021998305048748.

[171] Yunhua Luo. *On Shear Locking in Finite Elements a Field Consistence Solution Yunhua Luo*. VDM Verlag Dr. Müller, Saarbrücken, 2008. ISBN 9783639090819.

[172] Anne Reinarz, Tim Dodwell, Tim Fletcher, Linus Seelinger, Richard Butler, and Robert Scheichl. Dune-composites – a new framework for high-performance finite element modelling of laminates. *Composite Structures*, 184:269–278, 2018. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2017.09.104. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822317321797.

[173] Christopher Gorsky. A simple stochastic modelling approach to analyze the effect of a spatially varying material imperfection on impact damage. In *9th International Symposium on Composites Manufacturing for High Performance Applications*, 2021. URL https://elib.dlr.de/148148/.

[174] Luke Mizzi, Daphne Attard, Ruben Gatt, Krzysztof K. Dudek, Brian Ellul, and Joseph N. Grima. Implementation of periodic boundary conditions for loading of mechanical metamaterials and other complex geometric microstructures using finite element analysis. *Engineering with Computers*, 37(3):1765–1779, 2021. ISSN 1435-5663. doi: 10.1007/s00366-019-00910-1. URL https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00366-019-00910-1.pdf.

[175] Weidong Wu, Joseph Owino, Ahmed Al-Ostaz, and Liguang Cai. Applying periodic boundary conditions in finite element analysis. In *SIMULIA community conference, Providence*, pages 707–719, 2014.

[176] Gordon A. Fenton. Error evaluation of three random–field generators. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(12):2478–2497, 1994. ISSN 0733-9399. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1994)120:12(2478). URL https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281994%29120%3A12%282478%29.

[177] Wolfgang Hackbusch. *Hierarchical Matrices: Algorithms and Analysis*, volume 49 of *SpringerLink Bücher*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1st ed. 2015 edition, 2015. ISBN 9783662473245. doi: 10.1007/978-3-662-47324-5.

[178] Dian-Qing Li, Te Xiao, Li-Min Zhang, and Zi-jun Cao. Stepwise covariance matrix decomposition for efficient simulation of multivariate large-scale three-dimensional random fields. *Applied Mathematical Modelling*, 68:169–181, 2019. ISSN 0307904X. doi: 10.1016/j.apm.2018.11.011. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X18305407.

[179] Armen Der Kiureghian and Jyh-Bin Ke. The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(2):83–91, 1988. ISSN 0266-8920. doi: 10.1016/0266-8920(88)90019-7.

[180] C. A. Schenk and G. I. Schuëller. Buckling analysis of cylindrical shells with random geometric imperfections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(7):1119–1132, 2003. ISSN 0020-7462. doi: 10.1016/S0020-7462(02)00057-4. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746202000574.

[181] Dimos C. Charmpis and Manolis Papadrakakis. Improving the computational efficiency in finite element analysis of shells with uncertain properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1447–1478, 2005. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2003.12.075. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504004013.

[182] B. A. Zeldin and P. D. Spanos. On random field discretization in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, 65(2):320–327, 1998. ISSN 0021-8936. doi: 10.1115/1.2789057. URL https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/65/2/320/5465755/320_1.pdf.

[183] Chun-Ching Li and A. Der Kiureghian. Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(6):1136–1154, 1993. ISSN 0733-9399. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1993)119:6(1136). URL https://ascelibrary.org/doi/pdf/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281993%29119%3A6%281136%29.

[184] Andreas Schuster, Lars Reimer, and Jens Neumann. A mesh-free parallel moving least-squares-based interpolation method for the application in aeroelastic simulations with the flow simulator. 132:573–583, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-27279-5{\textunderscore}50. URL https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-27279-5_50.pdf.

[185] H. Wendland, R. Ahrem, and Armin Beckert. A meshless spatial coupling scheme for large-scale fluid-structure-interaction problems. *Cmes-computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2006.

[186] R. M. Jones. *Mechanics Of Composite Materials*. 500 Tips. Taylor & Francis, 1998. ISBN 9781560327127. URL https://books.google.de/books?id=oMph2kNG3yAC.

[187] Ronald F. Gibson. *Principles of composite material mechanics*. Mechanical engineering. CRC Press, an imprint of Taylor and Francis, Boca Raton, FL, fourth edition edition, 2016. ISBN 9780429190582. doi: 10.1201/b19626.

[188] Dale A. Hopkins and Christos c. Chamis. A unique set of micromechanics equations for high-temperature metal matrix composites. 1988.

[189] Ever J. Barbero. *Introduction to composite materials design*. Taylor & Francis CRC Press, Boca Raton, third edition edition, 2018. ISBN 1315296497. URL https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=1622721.

[190] Mohammad S. Ghavami, Bedrich Sousedik, Hooshang Dabbagh, and Morad Ahmadnasab. Stochastic galerkin finite element method for nonlinear elasticity and application to reinforced concrete members. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 12(6):1–22, 2022. ISSN 2152-5080. doi: 10.1615/Int.J.UncertaintyQuantification.2022038435.

[191] Ivo Babuška, Raúl Tempone, and Georgios E. Zouraris. Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method: the stochastic formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1251–1294, 2005. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2004.02.026. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504003949.

[192] Zhibao Zheng, Michael Beer, Hongzhe Dai, and Udo Nackenhorst. A weak-intrusive stochastic finite element method for stochastic structural dynamics analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 399:115360, 2022. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2022.115360. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578252200439X.

[193] George Stefanou. The stochastic finite element method: Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(9-12):1031–1051, 2009. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2008.11.007.

[194] M. Herzog, A. Gilg, M. Paffrath, P. Rentrop, and U. Wever. From nano to space: Applied mathematics inspired by roland bulirsch, 2007. URL `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-540-74238-8_13.pdf`.

[195] Zehor Oudni, Mouloud Féliachi, and Hassane Mohellebi. Assessment of the probability of failure for ec nondestructive testing based on intrusive spectral stochastic finite element method. *The European Physical Journal Applied Physics*, 66(3):30904, 2014. ISSN 1286-0042. doi: 10.1051/epjap/2014130494.

[196] Nick Pepper, Francesco Montomoli, and Sanjiv Sharma. Multiscale uncertainty quantification with arbitrary polynomial chaos. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357:112571, 2019. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2019.112571. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782519304360`.

[197] Mohammad Hadigol and Alireza Doostan. Least squares polynomial chaos expansion: A review of sampling strategies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 332:382–407, 2018. ISSN 00457825. doi: 10.1016/j.cma.2017.12.019. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782517307697`.

[198] Manuel Miranda and George Deodatis. Generalized variability response functions for beam structures with stochastic parameters. *Journal of Engineering Mechanics*, 138(9): 1165–1185, 2012. ISSN 0733-9399. doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000421.

[199] Hui Huo, Wentao Xu, Wenpei Wang, Guohai Chen, and Dixiong Yang. New non-intrusive stochastic finite element method for plate structures. *Computers & Structures*, 268:106812, 2022. ISSN 00457949. doi: 10.1016/j.compstruc.2022.106812. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794922000724`.

[200] G. I. Schuëller. Developments in stochastic structural mechanics. *Archive of Applied Mechanics*, 75(10-12):755–773, 2006. ISSN 0939-1533. doi: 10.1007/s00419-006-0067-z. URL `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00419-006-0067-z.pdf`.

[201] Sachin K. Sachdeva, Prasanth B. Nair, and Andy J. Keane. On using deterministic fea software to solve problems in stochastic structural mechanics. *Computers & Structures*, 85(5-6):277–290, 2007. ISSN 00457949. doi: 10.1016/j.compstruc.2006.10.008. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794906003385`.

[202] Christian A. Schenk and Gerhart I. Schuëller. *Uncertainty assessment of large finite element systems*, volume 24 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Springer, Berlin and Heidelberg, 2005. ISBN 3-540-25343-2. doi: 10.1007/11673941.

[203] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, 2009. ISSN 00295981. doi: 10.1002/nme.2579. URL `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.2579`.

[204] SMR. B2000++ finite element analysis environment, 2022. URL `https://www.smr.ch/products/b2000/`.

[205] Ludwig Fahrmeir, Christian Heumann, Rita Künstler, Iris Pigeot, and Gerhard Tutz. *Statistik: Der Weg zur Datenanalyse*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin and Heidelberg, 8., überarbeitete und ergänzte auflage edition, 2016. ISBN 978-3-662-50371-3. doi: 10.1007/978-3-662-50372-0.

[206] Ted A. Laurence and Brett A. Chromy. Efficient maximum likelihood estimator fitting of histograms. *Nature Methods*, 7(5):338–339, 2010. ISSN 1548-7105. doi: 10.1038/nmeth0510-338. URL `https://www.nature.com/articles/nmeth0510-338.pdf`.

[207] Nick Heard. *An introduction to Bayesian inference, methods and computation*. Springer, Cham, 2021. ISBN 978-3-030-82807-3. doi: 10.1007/978-3-030-82808-0.

[208] Daniel O'Hare Adams and M. W. Hyer. Effects of layer waviness on the compression strength of thermoplastic composite laminates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 12(4):414–429, 1993. ISSN 0731-6844. doi: 10.1177/073168449301200404.

[209] Thomas L. Sterling, Matthew Anderson, Maciej Brodowicz, and C. Gordon Bell. *High performance computing: Modern systems and practices*. Morgan Kaufmann an imprint of Elsevier, Cambridge, MA, 2018. ISBN 9780124201583. doi: 10.1016/C2013-0-09704-6.

[210] K. Salah, R. Al-Shaikh, and M. Sindi. Towards green computing using diskless high performance clusters. In *2011 7th International Conference on Network and Service Management*, pages 1–4, 2011.

[211] Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V. Hochleistungsrechner cara, 2023. URL `https://www.dlr.de/de/forschung-und-transfer/forschungsinfrastruktur/grossforschungsanlagen/hpc-cluster/cara`.

[212] T. F. Wunderlich, S. Dähne, L. Reimer, and A. Schuster. Global aero-structural design optimization of composite wings with active manoeuvre load alleviation. *CEAS Aeronautical Journal*, pages 1–24, 2022. ISSN 1869-5582. doi: 10.1007/s13272-022-00585-3. URL `https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s13272-022-00585-3.pdf`.

[213] J.K.S. Dillinger. *Static Aeroelastic Optimization of Composite Wings with Variable Stiffness Laminate*. PhD thesis, Delft University of Technology, 2014.

[214] M. M. Schwartz. Mil-hdbk-17-3f: Composite materials handbook, polymer matrix composites: Materials usage, design, and analysis. *Composite Materials Handbook; US Department of Defense: Arlington County, VA, USA*, 3, 2002.

[215] A. S. Kaddour and M. J. Hinton. Input data for test cases used in benchmarking triaxial failure theories of composites. *Journal of Composite Materials*, 46(19-20):2295–2312, 2012. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/0021998312449886.

[216] W. Hamilton and R. Turnbull. *Discussions on Philosophy and Literature, Education and University Reform: Chiefly from the Edinburgh Review*. Longman, Brown, Green and Longman's, 1853. URL `https://books.google.de/books?id=D6atDXwP_J0C`.

[217] A. Puck, J. Kopp, and M. Knops. Guidelines for the determination of the parameters in puck's action plane strength criterion. *Composites Science and Technology*, 62(3): 371–378, 2002. ISSN 02663538. doi: 10.1016/S0266-3538(01)00202-0. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266353801002020`.

[218] Iason Papaioannou, Max Ehre, and Daniel Straub. Pls-based adaptation for efficient pce representation in high dimensions. *Journal of Computational Physics*, 387:186–204, 2019. ISSN 00219991. doi: 10.1016/j.jcp.2019.02.046. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999119301639`.

[219] Yushan Liu, Luyi Li, and Sihan Zhao. A global surrogate model for high-dimensional structural systems based on partial least squares and kriging. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 164:108246, 2022. ISSN 08883270. doi: 10.1016/j.ymssp.2021.108246.

[220] A. A. Basmaji, A. Fau, J. H. Urrea-Quintero, M. M. Dannert, E. Voelsen, and U. Nackenhorst. Anisotropic multi-element polynomial chaos expansion for high-dimensional non-linear structural problems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 70:103366, 2022. ISSN 0266-8920. doi: 10.1016/j.probengmech.2022.103366.

[221] Bassam El Said. Predicting the non-linear response of composite materials using deep recurrent convolutional neural networks. *International Journal of Solids and Structures*, 276:112334, 2023. ISSN 00207683. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2023.112334. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768323002317`.

[222] Dug-Joong Kim, Gyu-Won Kim, Jeong-hyeon Baek, Byeunggun Nam, and Hak-Sung Kim. Prediction of stress-strain behavior of carbon fabric woven composites by deep neural network. *Composite Structures*, 318:117073, 2023. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2023.117073.

[223] E. Ghane, M. Fagerström, and S. M. Mirkhalaf. A multiscale deep learning model for elastic properties of woven composites. *International Journal of Solids and Structures*,

page 112452, 2023. ISSN 00207683. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2023.112452. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768323003499.

[224] J. M. Whitney and N. J. Pagano. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 37(4):1031–1036, 1970. ISSN 0021-8936. doi: 10.1115/1.3408654. URL https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/37/4/1031/5450994/1031_1.pdf.

[225] J. M. Whitney. Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *Journal of Applied Mechanics*, 40(1):302–304, 1973. ISSN 0021-8936. doi: 10.1115/1.3422950. URL https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanics/article-pdf/40/1/302/5452712/302_1.pdf.

[226] T. S. Chow. On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. *Journal of Composite Materials*, 5(3):306–319, 1971. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/002199837100500302.

[227] Michael B. Giles. Multilevel monte carlo methods. *Acta Numerica*, 24:259–328, 2015. ISSN 1474-0508. doi: 10.1017/S096249291500001X. URL https://www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/C5AF9A57ED8FF8FDF08074C1071C5511/S096249291500001Xa.pdf/div-class-title-multilevel-monte-carlo-methods-div.pdf.

[228] Benjamin Peherstorfer, Karen Willcox, and Max Gunzburger. Survey of multifidelity methods in uncertainty propagation, inference, and optimization. *SIAM Review*, 60(3):550–591, 2018. ISSN 0036-1445. doi: 10.1137/16M1082469.

[229] Benjamin Peherstorfer. Multifidelity monte carlo estimation with adaptive low-fidelity models. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*, 7(2):579–603, 2019. doi: 10.1137/17M1159208.

[230] Qidi Li, Yong Cai, Hu Wang, Zhiwei Lv, and Enying Li. An efficient d-vine copula-based coupling uncertainty analysis for variable-stiffness composites. *Composite Structures*, 219:221–241, 2019. ISSN 02638223. doi: 10.1016/j.compstruct.2019.03.067.

[231] Jiaxin Zhang and Michael Shields. On the quantification and efficient propagation of imprecise probabilities with copula dependence. *International Journal of Approximate Reasoning*, 122:24–46, 2020. ISSN 0888-613X. doi: 10.1016/j.ijar.2020.04.002.

[232] Can Xu, Zhao Liu, Wei Tao, and Ping Zhu. A vine copula-based hierarchical framework for multiscale uncertainty analysis. *Journal of Mechanical Design*, 142(3), 2020. ISSN 1050-0472. doi: 10.1115/1.4045177. URL https://asmedigitalcollection.asme.org/mechanicaldesign/article-pdf/142/3/031101/6648904/md_142_3_031101.pdf.

[233] R. D.R. Sitohang, W. J.B. Grouve, L. L. Warnet, S. Koussios, and R. Akkerman. An experimental approach to reproduce in-plane fiber waviness in thermoplastic composites test coupons using a reverse forming method. *Journal of Composite Materials*, 56(4): 561–574, 2022. ISSN 0021-9983. doi: 10.1177/00219983211026734.