

Bachelorarbeit

Analyse und Lokalisierung von Verlustmechanismen in  
transsonischen Verdichterschaufelgittern mittels lokaler  
Entropieproduktion

von Müller, Gustav  
Matrikelnummer: 442482

Diese Arbeit wurde vorgelegt am  
Institut für Strahltriebwerke und Turbomaschinen

Fakultät für Maschinenwesen der  
RWTH Aachen University

1. Prüfer: Univ.-Prof. Dr.-Ing. Peter Jeschke
  2. Prüfer: Dr.-Ing. Stefan Henninger
- Betreuer: Dr.-Ing. Stefan Henninger, Dr.-Ing. Alexander Hergt (DLR)

Aachen, 20. April 2026



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1. Aerodynamische Verlustmechanismen in Verdichterschaufelgittern . . . . .	3
2.1.1. Grenzschichtverluste . . . . .	3
2.1.2. Stoßinduzierte Verluste . . . . .	4
2.1.3. Ausmischungsverluste . . . . .	4
2.2. Thermodynamische Grundlagen der Entropie . . . . .	4
2.2.1. Entropie und irreversible Prozesse . . . . .	5
2.2.2. Entropieproduktion in kompressiblen Strömungen . . . . .	5
2.3. Klassische Methoden zur Verlustbewertung in Verdichtern . . . . .	7
2.3.1. Globale Verlustkenngrößen . . . . .	7
2.3.2. Einschränkungen globaler Bewertungsansätze . . . . .	8
2.4. Lokalisierung von Verlustmechanismen . . . . .	8
2.4.1. Shock-Capturing . . . . .	8
2.4.2. Definition der Grenzschicht und des Nachlaufs . . . . .	9
<b>3. Methodik</b>	<b>11</b>
3.1. Transonic Cascade TEAMAero (TCTA) . . . . .	11
3.1.1. Geometrie und Betriebspunkte . . . . .	11
3.1.2. Strömungscharakteristik . . . . .	13
3.2. Herleitung einer gemittelten Entropietransportgleichung . . . . .	14
3.2.1. Favre-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	15
3.2.2. Turbulentes Schließungsproblem der Favre-gemittelten Entropietrans- portgleichung . . . . .	18
3.2.3. Schließung der Favre-gemittelten Entropietransportgleichung . . . . .	19
3.3. Einflüsse auf die Entropietransportgleichung . . . . .	21
3.3.1. Numerische Dissipation . . . . .	21
3.3.2. Approximation der Favre-gemittelten Entropie in RANS . . . . .	23
3.4. Numerisches Setup . . . . .	24
3.4.1. Strömungslöser TRACE . . . . .	24
3.4.2. Randbedingungen und Rechengebiet . . . . .	24
3.4.3. Modifikationen für LES . . . . .	25
3.5. Netzverfeinerungsstufen . . . . .	25
<b>4. Ergebnisse</b>	<b>27</b>
4.1. Off-Design Point (ODP) . . . . .	27
4.1.1. Globale Verlustauswertung . . . . .	27
4.1.2. Lokale Entropieproduktion . . . . .	27
4.1.3. Lokaler Entropietransport . . . . .	33
4.1.4. Vergleich zwischen Transport und Produktion der Entropie . . . . .	36
4.2. Aerodynamischer Auslegungspunkt (ADP) . . . . .	42
4.2.1. Vergleich der Ergebnisse aus URANS- und LES-Simulationen . . . . .	45
4.3. Netz- und Konvergenzstudien . . . . .	46

<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>49</b>
<b>Literatur</b>	<b>53</b>
<b>A. Herleitung der Entropietransportgleichung</b>	<b>55</b>
<b>B. Mittelungsregeln für zeitliche und Favre-Mittelung</b>	<b>57</b>
B.1. Reynolds-Mittelung . . . . .	57
B.1.1. Rechenregeln der Reynolds-Mittelung . . . . .	57
B.2. Favre-Mittelung . . . . .	58
B.2.1. Rechenregeln der Favre-Mittelung . . . . .	58

# Abbildungsverzeichnis

3.1.	Aufbau TCTA . . . . .	12
3.2.	Verdichtungsstoßstruktur aus [20] . . . . .	14
4.1.	Volumetrische Entropieproduktion $\dot{G}_s$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	28
4.2.	Lokale laminare Dissipation $D_l$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	29
4.3.	Lokale turbulente Dissipation $D_r$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	29
4.4.	Lokale Divergenz der laminaren irreversiblen Wärmeleitung $I_l$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	30
4.5.	Lokale Divergenz der turbulenten irreversiblen Wärmeleitung $I_t$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	30
4.6.	Summe aus Advektion der TKE, molekularer Diffusion und turbulentem Transport in $W/(Km^3)$ . . . . .	31
4.7.	Zonenaufteilung in Freier Strom (Violett), Grenzschicht (Grün), Nachlauf (Gelb), Verdichtungsstoß (Blau) . . . . .	32
4.8.	Lokale Divergenz der Entropieadvektion $S_{adv}$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	34
4.9.	Lokale Divergenz der laminaren reversiblen Wärmeleitung $R_l$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	35
4.10.	Lokale Divergenz der turbulenten reversiblen Wärmeleitung $R_t$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	35
4.11.	Gesamter Entropietransport $\dot{T}_s$ in $W/(Km^3)$ . . . . .	36
4.12.	Entropiefluss über x . . . . .	38
4.13.	Integrierte Entropieproduktion entlang der x-Achse ohne Verdichtungsstoßzone . . . . .	39
4.14.	Stromlinienverlauf zur Oszillationsauswertung . . . . .	39
4.15.	Oszillation in der Nachlaufregion $\frac{x}{C_x} = 1,04$ . . . . .	40
4.16.	Oszillation in der Nachlaufregion $\frac{x}{C_x} = 1,45$ . . . . .	40
4.17.	Oszillation in der Grenzschicht (Druckseite) $\frac{x}{C_x} = 0,23$ . . . . .	41
4.18.	Oszillation in der Grenzschicht (Saugseite) $\frac{x}{C_x} = 0,23$ . . . . .	41
4.19.	Oszillation am Stoß . . . . .	42
4.20.	Integrierte Entropieproduktion entlang der x-Achse ohne Verdichtungsstoßzone (ADP URANS) . . . . .	44
4.21.	Vergleich der Netze . . . . .	47



# Tabellenverzeichnis

3.1.	Geometrische und aerodynamische Kenngrößen des TCTA im ADP. . . . .	11
3.2.	Geometrische und aerodynamische Kenngrößen des TCTA im ADP und ODP. . . . .	12
3.3.	Stoffwerte des Arbeitsmediums (Luft als ideales Gas). . . . .	13
3.4.	Konstanten des Menter-SST-Turbulenzmodells. . . . .	17
4.1.	Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieterme ODP . . . . .	31
4.2.	Zonendefinition . . . . .	32
4.3.	Zonenbasierte Aufteilung von Entropieproduktion ODP . . . . .	32
4.4.	Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieterme ODP . . . . .	33
4.5.	Verbesserte Aufteilung von Entropietransport ODP . . . . .	36
4.6.	Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieproduktionsterme ADP URANS . . . . .	43
4.7.	Ergebnisse der Volumenintegration der Entropietransportsterme ADP URANS . . . . .	43
4.8.	Zonenbasierte Aufteilung von Entropieproduktion und -transport ADP URANS . . . . .	43
4.9.	Ergebnisse der Volumenintegration der Entropietransportsterme ADP LES .	45
4.10.	Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieproduktionsterme ADP LES	45
4.11.	Zonendefinition LES . . . . .	45
4.12.	Zonenbasierte Aufteilung von Entropieproduktion und -transport ADP LES	46
4.13.	Zonenbasierte Aufteilung des Entropietransports ADP (LES vs. URANS) .	46
4.14.	Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieterme ODP für verschiedene Netze . . . . .	47
4.15.	Fehler der Entropieterme im ODP in Abhängigkeit der Netzauflösung . . .	47
4.16.	Entropieproduktion im Verdichtungsstoß für unterschiedliche Netze . . . .	48



# Symbolverzeichnis

## Lateinische Formelzeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$c$	Sehnenlänge	$\text{m}$
$C_s$	Sutherlandkonstante	$\text{K}$
$C'$	Grenzschichtschwollenwert	-
$C_{\text{Shock}}$	Shock-Capturing-Schwollenwert	$1/\text{m}$
$C_x$	Sehnenlänge in x-Richtung	$\text{m}$
$c_p$	spezifische isobare Wärmekapazität	$\text{J}/(\text{kg K})$
$c_v$	spezifische isochore Wärmekapazität	$\text{J}/(\text{kg K})$
$D_1$	viskose Dissipation	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$D_r$	turbulente viskose Dissipation	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$D_t$	turbulente Dissipation	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$e$	spezifische innere Energie	$\text{J}/\text{kg}$
$\dot{G}_s$	Produktionsseite	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$h$	Enthalpie	$\text{J}/\text{kg}$
$I_1$	irreversible laminare Wärmeleitung	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$I_t$	irreversible turbulente Wärmeleitung	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$k$	spezifische turbulente kinetische Energie	$\text{J}/\text{kg}$
$\dot{m}$	Massenstrom	$\text{kg}/\text{s}$
$\mathbf{n}$	Normalenvektor	-
$Ma$	Machzahl	-
$p$	Druck	$\text{Pa}$
$Pr$	Prandtl-Zahl	-
$Pr_t$	turbulente Prandtl-Zahl	-
$\mathbf{q}$	Wärmestromdichtevektor	$\text{W}/\text{m}^2$
$\mathbf{q}_t$	turbulenter Wärmestromdichtevektor	$\text{W}/\text{m}^2$
$R$	spezifische Gaskonstante	$\text{J}/(\text{kg K})$
$R_1$	reversible laminare Wärmeleitung	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$R_t$	reversible turbulente Wärmeleitung	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$Re$	Reynolds-Zahl	-
$s$	spezifische Entropie	$\text{J}/(\text{kg K})$
$S$	Entropie	$\text{J}/\text{K}$
$S_{\text{adv}}$	Divergenz der Entropieadvektion	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$S_t$	instationärer Term	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$T$	Temperatur	$\text{K}$
$\dot{T}_s$	Transportseite	$\text{W}/(\text{K m}^3)$
$t$	Teilung	$\text{m}$
$t_c$	konvektive Zeiteinheit	$\text{s}$
$\mathbf{u}$	Geschwindigkeitsvektor	$\text{m}/\text{s}$
$u$	Geschwindigkeit in x-Richtung	$\text{m}/\text{s}$
$v$	Geschwindigkeit in y-Richtung	$\text{m}/\text{s}$
$V$	Volumen	$\text{m}^3$
$w$	Geschwindigkeit in z-Richtung	$\text{m}/\text{s}$

$\mathbf{x}$	kartesischer Koordinatenvektor	m
$x$	kartesische x-Koordinate	m
$y$	kartesische y-Koordinate	m
$z$	kartesische z-Koordinate	m

## Griechische Formelzeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$\beta$	Strömungswinkel	°
$\beta_s$	Staffelungswinkel	°
$\delta$	Kronecker-Delta	-
$\delta$	Grenzschichtdicke	m
$\mu$	dynamische Viskosität	Pa s
$\eta$	Teilungskoordinate	-
$\eta_t$	Wirbelviskosität	Pa s
$\epsilon$	turbulente Dissipationsrate	W/kg
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	W/(m K)
$\zeta$	Totaldruckverlustkoeffizient	-
$\kappa$	Isentropenexponent	-
$\rho$	Dichte	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	lokale Entropieproduktionsrate	W/(K m <sup>3</sup> )
$\tau^R$	Reynoldsspannung	N/m <sup>2</sup>
$\boldsymbol{\sigma}$	viskoser Spannungstensor	N/m <sup>2</sup>
$\omega$	spezifische turbulente Dissipationsrate	1/s

## Indizes

Zeichen	Bedeutung
0	Referenzzustand
1	Eintrittsebene
2	Austrittsebene
i	einsteinsche Summationskonvention
j	einsteinsche Summationskonvention
t	Totalgröße
$\infty$	Außenströmung
$\bar{\phi}$	zeitliches Mittel
$\phi'$	zeitliche Fluktuation
$\tilde{\phi}$	Favre-Mittel
$\phi''$	Favre-Fluktuation

## Abkürzungen

<b>Zeichen</b>	<b>Bedeutung</b>
ADP	Aerodynamic Design Point
CFD	Computational Fluid Dynamics
DGSEM	Discontinuous Galerkin Spectral Element Method
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
DNS	Direkte Numerische Simulation
iLES	implizite Large-Eddy-Simulation
IST	Institut für Strahlantriebe und Turbomaschinen
LES	Large-Eddy-Simulation
MUSCL	Monotonic Upstream-centered Schemes for Conservation Laws
ODP	Off-Design Point
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
URANS	unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes
SBLI	Shock-Boundary Layer Interaction
SGS	Subgrid Scales
SST	Shear Stress Transport
TCTA	Transonic Cascade TEAMAero
TKE	turbulente kinetische Energie



# 1. Einleitung

Konventionelle Verlustrechnungen für Triebwerkskomponenten beschränken sich in der Regel auf globale Verlustkenngrößen, die lediglich ein integrales Gesamtniveau der Verluste erfassen. Eine weiterführende Betrachtung besteht in der Quantifizierung und Dekomposition der Verluste in ihre zugrunde liegenden physikalischen Mechanismen. Die isolierte Bewertung einzelner Verlustanteile ermöglicht es, den Einfluss geometrischer Profilparameter gezielt auf spezifische Verlustmechanismen zurückzuführen. Darüber hinaus eröffnet sie die Möglichkeit, Unterschiede zwischen verschiedenen Simulationsansätzen differenzierter zu analysieren und zu bewerten.

Im Kontext moderner Verdichter sind insbesondere transsonische Gitterprofile von hoher Relevanz. Diese kommen typischerweise in gehäusenahen Schnitten der vorderen Rotorstufen zum Einsatz. Aufgrund des Trends zu größeren Triebwerksdurchmessern zur Effizienzsteigerung steigen die Umfangsgeschwindigkeiten an den Blattspitzen signifikant an, sodass dort für moderne Triebwerke in der Regel transsonische Strömungszustände auftreten. Diese sind durch komplexe, miteinander gekoppelte Verlustmechanismen gekennzeichnet, deren Wechselwirkungen bislang nur unzureichend verstanden sind. Eine differenzierte Quantifizierung dieser Mechanismen ist daher von besonderem Interesse, um deren Interaktionen systematisch zu untersuchen.

Als fundamentale Verlustkenngröße dient die irreversible Entropieproduktion, welche die dissipativen Prozesse innerhalb der Strömung direkt abbildet. Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Implementierung und Analyse einer Methode zur lokalen Quantifizierung von Verlusten auf Basis der irreversiblen Entropieproduktion innerhalb gängiger Simulationsansätze zur Berechnung der Strömung.

Untersuchungsgegenstand ist das transsonische Verdichterschaufelgitter „Transonic Cascade TEAMAero (TCTA)“. Für dieses Referenzgitter werden die einzelnen Verlustmechanismen innerhalb typischer Simulationsmethoden quantifiziert und miteinander verglichen. Die Arbeit entstand in Zusammenarbeit mit dem Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V. (DLR) und wurde fachlich betreut durch Dr.-Ing. Alexander Hergt.

Die Gliederung der Arbeit umfasst die theoretischen Grundlagen, die methodische Umsetzung sowie die Darstellung und Diskussion der Ergebnisse. In den theoretischen Grundlagen werden zunächst die Verlustmechanismen beschrieben, die in transsonischen Verdichterschaufelprofilen auftreten. Des Weiteren werden die thermodynamischen Grundlagen der Entropie sowie klassische Bewertungsansätze erläutert, gefolgt von der Methodik zur Lokalisierung von Verlustmechanismen.

Im Kapitel Methodik wird zunächst das TCTA-Gitter vorgestellt. Darauf folgt die Herleitung einer Entropietransportgleichung für Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS)-Simulationen. In diesem Zuge werden Einflüsse durch die numerische Diskretisierung sowie durch Approximationsfehler analysiert. Abschließend wird das gewählte numerische Setup

dargelegt und verschiedene Netzverfeinerungsstufen werden definiert.

Die Ergebnisse umfassen die Verlustrechnung für die zuvor definierten Betriebspunkte mit einer anschließenden Analyse des Einflusses der Netzauflösung.

## 2. Theoretische Grundlagen

Die aerodynamischen Verluste in axialen Verdichtern lassen sich klassisch in Profilverluste, Randseitenverluste und Spaltverluste unterteilen [4]. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich zweidimensionale Gitterkanalströmungen betrachtet. Folglich können Spaltverluste aufgrund der fehlenden radialen Spalte vernachlässigt werden. Randseitenverluste werden durch eine hinreichend große Wahl der Kanalhöhe eliminiert, sodass die Wandgrenzschichten und die daraus resultierenden Sekundärströmungen keinen Einfluss auf das Strömungsfeld in der Kanalmitte ausüben. Damit konzentriert sich die Untersuchung auf die reinen Profilverluste sowie die internen irreversiblen Prozesse.

### 2.1. Aerodynamische Verlustmechanismen in Verdichterschaufelgittern

Nach Denton [4] ist die physikalische Größe, die einen aerodynamischen Verlust exakt quantifiziert, die irreversible Entropieproduktion. Die thermodynamischen Ursachen hierfür unterteilen sich in viskose Reibung, irreversible Wärmeleitung und Nicht-Gleichgewichtsprozesse. Nicht-Gleichgewichtsprozesse können in einer schnellen Expansion oder in einem Verdichtungsstoß auftreten. Innerhalb eines Profilvergitters lassen sich die Verluste physikalisch in drei Hauptmechanismen kategorisieren: Reibungsverluste in den Grenzschichten, stoßinduzierte Verluste und Ausmischungsverluste in der freien Scherschicht, was auch als Nachlauf bezeichnet wird. Da Verdichterströmungen in guter Näherung als adiabatisch betrachtet werden können, resultiert jede Zunahme der Entropie ausschließlich aus internen Irreversibilitäten.

#### 2.1.1. Grenzschichtverluste

Die Grenzschicht resultiert aus der Haftbedingung an der Profilloberfläche. Durch das gescherte Geschwindigkeitsprofil entstehen viskose Spannungen, die kinetische Energie dissipieren und somit Verluste erzeugen. Die Höhe der Dissipation hängt maßgeblich vom Strömungszustand der Grenzschicht ab:

- **Laminare Grenzschicht:** Zeichnet sich durch eine geordnete Strömungsschichtung ohne signifikanten Impulsaustausch quer zur Strömungsrichtung aus. Die Dissipationsrate ist vergleichsweise gering.
- **Turbulente Grenzschicht:** Durch ungeordnete Wirbelbewegungen findet ein intensiver makroskopischer Impulsaustausch statt. Dies führt zu einer deutlich höheren Wandschubspannung und einem massiven Anstieg des Verlustniveaus.

Der Übergang zwischen diesen Zuständen (Transition) ist ein hochkomplexer Prozess. Eine weitere kritische Betriebsgrenze stellt die Grenzschichtablösung dar. Sie tritt auf, wenn die kinetische Energie der wandnahen Strömung nicht ausreicht, um einem positiven Druckgradienten ( $dp/dx > 0$ ) in Strömungsrichtung entgegenzuwirken. Dies kann zu einer lokalen Ablöseblase mit anschließender Wiederanlegung oder zu einer massiven, vollständigen Profilablösung führen. Dies ist häufig bei transsonischen Profilen zu beobachten, wobei das Verlustniveau im Vergleich zu einer rein anliegenden Strömung signifikant ansteigt.

### 2.1.2. Stoßinduzierte Verluste

In transsonischen Verdichtern kann das Gesamtverlustniveau im Vergleich zu rein subsonischen Profilen um eine Größenordnung ansteigen. Ursächlich hierfür sind Verdichtungsstöße, die Entropie primär auf zwei Wegen erzeugen:

- **Direkte Stoßverluste:** Die irreversible Zustandsänderung innerhalb der extrem dünnen Stoßfront sorgt, bedingt durch Nicht-Gleichgewichtsprozesse, für einen Verlust.
- **Indirekte Verluste (Interaktion):** Der Verdichtungsstoß interagiert stark mit der Saugseitengrenzschicht (*Shock-Boundary Layer Interaction*, SBLI). Dies erzwingt oft eine vorzeitige Transition oder stoßinduzierte Ablösungen, wodurch das Gesamtverlustniveau durch die gegenseitige Wechselwirkung deutlich über die Summe der Einzelverluste ansteigen kann.

Ein weiteres Charakteristikum transsonischer Profile ist ihre Instationarität: Verdichtungsstöße oszillieren häufig in ihrer Position über dem Profil, was zu einem stark zeitabhängigen Verhalten der Stoß-Grenzschicht-Interaktion führt [7].

### 2.1.3. Ausmischungsverluste

Stromab der Schaufelhinterkante entsteht eine instabile freie Scherschicht, die häufig als Nachlauf bezeichnet wird. Die Inhomogenitäten im Geschwindigkeits- und Temperaturfeld gleichen sich stromabwärts durch viskose Dissipation und Wärmeleitung aus, bis ein homogener Zustand erreicht ist. Diese turbulente Ausmischung stellt eine signifikante Quelle für die Gesamtentropieproduktion des Gitters dar.

## 2.2. Thermodynamische Grundlagen der Entropie

Wie bereits dargelegt, ist ein aerodynamischer Verlust direkt mit der irreversiblen Entropieproduktion gleichzusetzen. Hierfür lassen sich Entropiebilanzen aufstellen, die sowohl

global als auch lokal ausgewertet werden können.

### 2.2.1. Entropie und irreversible Prozesse

Die spezifische Entropie  $s$  ist eine fundamentale thermodynamische Zustandsgröße [11]. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik kann die Entropie in einem abgeschlossenen System nicht abnehmen. In jedem irreversiblen Prozess nimmt die Entropie zu, weshalb sie als direktes Maß für Verluste herangezogen wird.

Für ein einphasiges Fluid genügen zwei unabhängige thermodynamische Zustandsgrößen zur vollständigen Beschreibung. Unter Verwendung der Fundamentalgleichung der Thermodynamik lassen sich für ein ideales Gas Zusammenhänge zwischen der spezifischen Entropie  $s$ , der Temperatur  $T$ , der Dichte  $\rho$  und dem Druck  $p$  aufstellen, womit sich mit der isobaren Wärmekapazität  $c_p$ , der isochoren Wärmekapazität  $c_v$  und der spezifischen Gaskonstante  $R$  der Zusammenhang

$$s - s_0 = c_p \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) - R \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (2.1)$$

beziehungsweise

$$s - s_0 = c_v \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) - c_p \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (2.2)$$

ergibt. Der Index 0 definiert hierbei einen beliebigen Referenzzustand. Da der absolute Wert der Entropie für die Verlustbetrachtung irrelevant ist, ermöglicht diese Formulierung die Bestimmung von Entropiedifferenzen. Da der Übergang vom statischen in den totalen (gestauten) Zustand per Definition isentrop erfolgt, ist die Berechnung der Entropiedifferenz mit Totalgrößen identisch zu jener mit statischen Größen.

Für ein offenes System lässt sich die globale Entropiebilanz formulieren. Das Volumenintegral der lokalen Entropieproduktionsrate  $\sigma$  über das Kontrollvolumen  $V$  entspricht der Summe aus der zeitlichen Änderung der Systementropie, dem Netto-Entropiestrom über die Systemgrenzen sowie dem Netto-Wärmestrom, dividiert durch eine thermodynamische Mitteltemperatur über die Systemgrenzen, was durch die Bilanzgleichung

$$\int_V \sigma \, dV = \frac{\partial S_{\text{sys}}}{\partial t} + \oint_{\partial V} \rho s (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \, dA + \oint_{\partial V} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{T} \, dA \geq 0 \quad (2.3)$$

beschrieben wird. Für ein stationäres, adiabates Verdichtergitter entspricht die im Volumen produzierte Entropie folglich exakt der Differenz zwischen dem Auslass- und dem Einlassentropiestrom.

### 2.2.2. Entropieproduktion in kompressiblen Strömungen

Die Grundlage zur Bestimmung der lokalen Entropieproduktion bilden die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie (Navier-Stokes-Gleichungen), welche in CFD-Simulationen

numerisch gelöst werden. In einsteinscher Summationskonvention lassen sich diese formulieren als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j + p \delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \frac{\partial[u_j(\rho e_t + p)]}{\partial x_j} = \frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (2.6)$$

Hierbei ist  $e_t = e + \frac{1}{2}u_i u_i$  die spezifische totale Energie, bestehend aus der spezifischen inneren Energie  $e$  und der spezifischen kinetischen Energie. Der viskose Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  für ein newtonsches Fluid mit der dynamischen Viskosität  $\mu$  ist definiert durch

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (2.7)$$

und der Wärmestromvektor  $q_j$  wird über das fouriersche Wärmeleitungsgesetz gemäß

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} = -\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.8)$$

modelliert, wobei in der numerischen Strömungsmechanik (CFD) die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  häufig über eine konstante Prandtl-Zahl  $Pr$  an die Viskosität gekoppelt wird.

Die dynamische Viskosität wird zudem häufig als Funktion der Temperatur modelliert. Hierfür findet das Sutherland-Gesetz

$$\mu = \mu_0 \frac{T_0 + C_s}{T + C_s} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.9)$$

Anwendung. Dabei ist  $\mu_0$  eine Referenzviskosität,  $T_0$  eine Referenztemperatur und  $C_s$  die Sutherland-Konstante.

Für kompressible Strömungen lässt sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen eine Entropietransportgleichung herleiten [21]. Dafür wird die Energietransportgleichung mittels der Fundamentalgleichung der Thermodynamik in eine Entropietransportgleichung umgeformt. Die vollständige Herleitung ist im Anhang A dargestellt und basiert auf der Beziehung

$$de = T ds - p d \frac{1}{\rho} \quad (2.10)$$

woraus sich die Entropietransportgleichung

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho s u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{q_j}{T} \right) = \frac{1}{T} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{c_p \mu}{Pr T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 \quad (2.11)$$

ergibt. Die linke Seite dieser Bilanz beschreibt die zeitliche Änderung, die Divergenz der Advektion der Entropie sowie den reversiblen Wärmetransport. Die rechte Seite stellt die lokale Entropieproduktionsrate  $\sigma$  dar, welche sich aus der viskosen Dissipation und

der irreversiblen Wärmeleitung zusammensetzt. Diese Produktionsterme sind gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik streng positiv, was sich durch die Ungleichung

$$\sigma = \frac{1}{T} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{c_p \mu}{Pr T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2 \geq 0 \quad (2.12)$$

ausdrücken lässt.

## 2.3. Klassische Methoden zur Verlustbewertung in Verdichtern

In Verdichtern werden komponentenweise oft globale Ansätze zur Verlustbewertung verwendet. Hierfür werden entsprechende globale Kenngrößen definiert.

### 2.3.1. Globale Verlustkenngrößen

In der Ingenieurpraxis wird häufig der Totaldruckverlust als primäre Verlustkenngröße herangezogen. Für ein inkompressibles Fluid ist der Totaldruck die Summe aus statischem und dynamischem Druck ( $p_t = p + \frac{1}{2} \rho u^2$ ). Da im Verdichter Strömungen mit hohen Machzahlen auftreten, muss für ein kompressibles Fluid die isentrope Beziehung

$$p_t = p \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (2.13)$$

verwendet werden. Nach dem Satz von Bernoulli ist der Totaldruck entlang einer verlustfreien Stromlinie konstant. Bei irreversiblen Prozessen nimmt er jedoch ab. Der Totaldruck lässt sich experimentell relativ einfach erfassen und wird zur globalen Bewertung oft in Form eines dimensionslosen Totaldruckverlustkoeffizienten  $\zeta$  gemäß

$$\zeta = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_{t1} - p_1} \quad (2.14)$$

dargestellt. Im Falle eines adiabaten Stators kann der Totaldruckabfall direkt in die Entropiezunahme

$$s_2 - s_1 = -R \ln \left( \frac{p_{t2}}{p_{t1}} \right) \quad (2.15)$$

überführt werden. Zur Auswertung des globalen Totaldrucks in einer Kontrollfläche (z. B. stromab des Gitters) ist jedoch eine Mittelungsmethode (flächen-, massenstrom- oder impulsstromgewichtet) erforderlich, um die Nachlaufdüse in einen homogenen, theoretisch vollständig ausgemischten Zustand zu überführen. Bewertet man den Verlust stattdessen direkt über das Flächenintegral des Entropiestroms

$$\dot{S}_A = \int_A \rho s (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2.16)$$

entfällt die Notwendigkeit einer solchen künstlichen Ausmischung. Die Herausforderung hierbei liegt in der Komplexität der experimentellen Ermittlung der Entropie, welche eine hohe örtliche und zeitliche Auflösung erfordert.

### 2.3.2. Einschränkungen globaler Bewertungsansätze

Ein globaler Bewertungsansatz liefert lediglich den aggregierten Nettoverlust über das gesamte Kontrollvolumen. Unterschiedliche Mittelungsmethoden können dabei zu Approximationsfehlern führen. Zudem ist der Totaldruck im strengen physikalischen Sinn keine direkte Erhaltungsgröße in den Transportgleichungen, was die Formulierung geschlossener Bilanzen für beliebig kleine Volumina erschwert. Die größte Einschränkung besteht jedoch darin, dass globale Kennzahlen keine räumliche Auflösung bieten. Um gezielte aerodynamische Optimierungen durchzuführen, ist eine lokale Beschreibung unerlässlich, mit der sich einzelne Verlustmechanismen präzise isolieren und detailliert bewerten lassen.

## 2.4. Lokalisierung von Verlustmechanismen

Zur detaillierten Untersuchung transsonischer Verdichterschaufelgitter ist es notwendig, die integralen Totaldruckverluste auf ihre räumlichen Ursachen zurückzuführen. Die Methode der lokalen Entropieproduktion ermöglicht es, Dissipationsprozesse räumlich aufzulösen und exakt zu quantifizieren. Um die berechneten Entropieproduktionsraten zuzuordnen, müssen die dominanten Gebiete im Strömungsfeld präzise lokalisiert und abgegrenzt werden.

### 2.4.1. Shock-Capturing

Beim Durchgang der Strömung durch einen Verdichtungsstoß kommt es infolge extrem steiler Gradienten zu einer irreversiblen Zustandsänderung. Um diese stoßinduzierten Verluste von der viskosen Dissipation zu separieren, werden die Stoßfronten im numerischen Lösungsgebiet lokalisiert (*Shock-Capturing*). Da ein Stoß durch einen starken Druckanstieg über eine sehr kurze Distanz charakterisiert ist, wird ein Schwellenwert für den normierten Druckgradienten herangezogen, der für den einzelnen Testfall durch die Bedingung

$$\frac{\|\nabla p\|}{p} \geq C_{\text{Shock}} \quad (2.17)$$

kalibriert wird [24]. Diese Bedingung ermöglicht eine robuste Detektion und die isolierte Integration der Entropieproduktion über das Stoßvolumen.

Ein besonderes Augenmerk liegt auf der korrekten numerischen Bilanzierung der Verdichtungsstöße. Um den mit dem Kriterium (2.17) bestimmten Ort des Stoßes im Strömungsfeld exakt zu validieren, wird das Kriterium der negativen Dilatation herangezogen, da ein Verdichtungsstoß physikalisch durch sprunghafte Kompression gekennzeichnet ist [16], was

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} < 0 \quad (2.18)$$

erfordert.

### 2.4.2. Definition der Grenzschicht und des Nachlaufs

Nach L. Prandtl (1904) bezeichnet die Grenzschicht den wandnahen Bereich, in dem die Viskosität einen dominierenden Einfluss auf die Strömung ausübt [21]. Klassischerweise wird die Grenzschichtdicke über ein kinematisches Geschwindigkeitsdefizit definiert (z. B.  $u(y = \delta_u) = 0,99u_\infty$ ). Da in dieser Arbeit die Verluste lokal thermodynamisch ausgewertet werden und die Entropie in der Grenzschicht im Vergleich zur annähernd isentropen Außenströmung ansteigt, wird analog ein Kriterium für das Entropieprofil der Grenzschicht durch

$$s(y = \delta_s) = Cs_\infty \quad (2.19)$$

definiert. Der Vorfaktor  $C$  muss folglich größer als eins sein und wird im Verlauf dieser Arbeit für die verschiedenen Testfälle kalibriert.

Der Nachlauf entsteht durch das Vermischen der saug- und druckseitigen Grenzschichten stromab der Schaufelhinterkante. Seine Abgrenzung erfolgt in Querrichtung zur ungestörten Kernströmung analog zur Grenzschichtdefinition: Die Ränder des Nachlaufs werden dort verortet, wo durch Dissipation eine signifikant erhöhte spezifische Entropie im Vergleich zur ungestörten Strömung messbar ist.



## 3. Methodik

In diesem Kapitel werden die theoretischen und numerischen Grundlagen der vorliegenden Arbeit erläutert. Dies umfasst die Beschreibung der untersuchten Geometrie, die numerischen Verfahren des Strömungslösers sowie die detaillierte Herleitung des entropiebasierten Analyseansatzes.

### 3.1. Transonic Cascade TEAMAero (TCTA)

Das transsonische Verdichterschauflgitter TCTA (Transonic Cascade TEAMAero) resultiert aus einem Optimierungsprozess, der am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) mithilfe der Software AutoOpti [23] und dem Strömungslöser TRACE durchgeführt wurde [18]. Die Optimierung basierte auf RANS-Simulationen unter Verwendung des Menter-SST-2003-Turbulenzmodells in Kombination mit einem  $\gamma - Re_\theta$ -Transitionsmodell [12]. Das primäre Optimierungsziel bestand darin, das Gesamtverlustniveau im aerodynamischen Auslegungspunkt (Aerodynamic Design Point, ADP) zu minimieren. Dabei wurde der Totaldruckverlustkoeffizient  $\zeta$  (siehe Gleichung (2.14)) als Kenngröße für den Gesamtverlust verwendet. Als sekundäres Ziel wurde die Minimierung der Verluste über den gesamten Arbeitsbereich bei konstanter Einlassmachzahl angestrebt.

#### 3.1.1. Geometrie und Betriebspunkte

Die aus der Optimierung generierte Profilgeometrie wurde unter Berücksichtigung von Fertigungsrestriktionen und maximaler mechanischer Belastung im Nachgang modifiziert. Dies umfasste insbesondere eine Verrundung der Vorderkante sowie eine Reduktion der Teilung [20]. Die resultierenden geometrischen und aerodynamischen Kenndaten des Gitters sind in Tabelle 3.1 dargestellt.

**Tabelle 3.1:** Geometrische und aerodynamische Kenngrößen des TCTA im ADP.

Größe	Symbol	Wert ADP
Sehnenlänge	$c$	0,1 m
Teilung	$t$	0,065 m
Staffelungswinkel	$\beta_s$	135,8°
Arbeitsbereich	$WR$	$> 2^\circ$

Für die experimentelle Auswertung wurden die beiden Messebenen MP1 und MP2 definiert. Die Messebene MP1 befindet sich eine halbe Teilung vor der Vorderkante. Die Messebene MP2 befindet sich  $0,48t$  hinter der Hinterkante. Für diese Ebenen wurden Kenngrößen experimentell bestimmt. Der Index 1 bezieht sich dabei auf die Messebene



quantifiziert, welche sich aus den Beziehungen

$$AVDR = \rho_2 v_2 \sin \beta_2 - \rho_1 v_1 \sin \beta_1, \quad \zeta = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_{t1} - p_1}, \quad FT = \beta_2 - \beta_1 \quad (3.2)$$

berechnen. Es zeigt sich ein deutlich größerer Gesamtverlust im ADP im Vergleich zum ODP, was auf die höhere Machzahl  $Ma_1$  zurückzuführen ist. Zur konsistenten Auswertung und Darstellung der Strömungsgrößen wird im Folgenden ein kartesisches Koordinatensystem verwendet. Der Ursprung liegt dabei an der Vorderkante des Profils. Die Koordinaten werden entdimensioniert, indem die x-Koordinate auf die Sehnenlänge in x-Richtung  $C_x$  normiert wird, welche sich aus

$$C_x = c \sin \beta_s \quad (3.3)$$

ergibt. Für die y-Richtung wird die dimensionslose Koordinate  $\eta$  eingeführt. Die Nulllinie liegt auf der Profilhne (siehe Abbildung 3.1) und die y-Koordinate wird mit der Teilung  $t$  entdimensioniert. Zur zeitlichen Entdimensionalisierung in instationären Betrachtungen wird eine konvektive Zeiteinheit  $t_c$  über

$$t_c = \frac{c}{|u|} \quad (3.4)$$

definiert. Für den ADP ergibt sich daraus ein Wert von  $t_c = 2,7 \times 10^{-4}$  s. Die für diese Arbeit relevanten Kenngrößen und Fluid-Stoffwerte sind in der Tabelle 3.3 zusammengefasst.

**Tabelle 3.3:** Stoffwerte des Arbeitsmediums (Luft als ideales Gas).

Größe	Symbol	Wert
spezifische ideale Gaskonstante	$R$	287,06 J/(kg K)
Isentropenexponent	$\kappa$	1,4
spez. isobare Wärmekapazität	$c_p$	1004,71 J/(kg K)
spez. isochore Wärmekapazität	$c_v$	717,65 J/(kg K)

### 3.1.2. Strömungscharakteristik

Eine skalenauflösende Simulation der Kaskade wurde mittels Large-Eddy-Simulation (LES) durch Klose et al. [8] für den ADP durchgeführt. Die LES zeigt, dass die Strömung im TCTA-Gitter durch eine komplexe Stoß-Grenzschicht-Interaktion geprägt ist. Auf der Saugseite bildet sich zunächst eine laminare Grenzschicht aus. Aufgrund der Überschallanströmung entsteht ein Verdichtungsstoß, der bei etwa mittlerer Sehnenlänge auf das Profil trifft. Dieser Stoß induziert einen extremen Druckanstieg, welcher die laminare Grenzschicht lokal zum Ablösen bringt. Es entsteht eine flache Ablöseblase. Infolge der hohen Instationarität legt sich die Strömung teilweise stromab wieder als turbulente Grenzschicht an das Profil an, kann aber auch vom Verdichtungsstoß bis zur Hinterkante abgelöst bleiben.

Gleichzeitig induziert der Verdichtungsstoß eine Transition der Grenzschicht. Die Grenzschicht auf der Druckseite ist durchgehend laminar, wird jedoch teilweise durch Stoßwellen stromab des Verdichtungsstoßes aufgrund des entgegengesetzten Druckgradienten zur Transition gebracht. Der Verdichtungsstoß erstreckt sich von der Grenzschicht

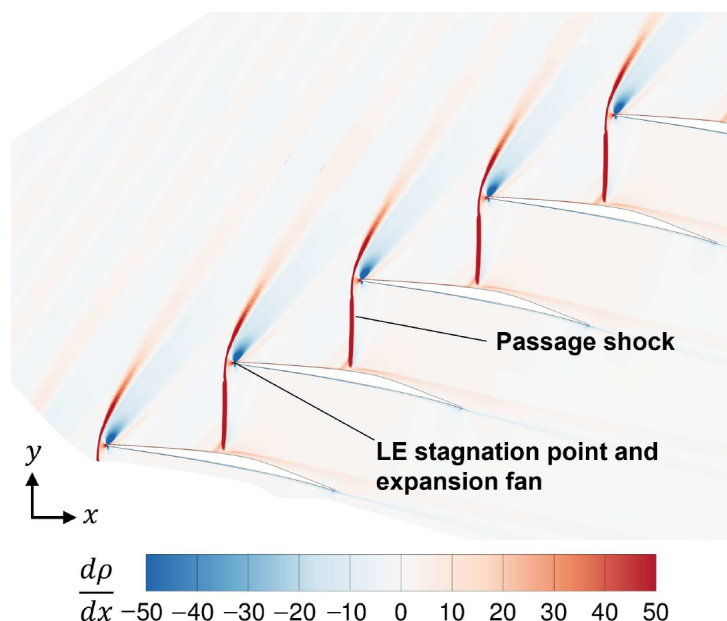


Abbildung 3.2: Verdichtungsstoßstruktur aus [20]

über die gesamte Passage und wird durch die Vorderkante des darüberliegenden Profils in Form einer Bugstoßwelle gekrümmt. Die Verdichtungsstoßstruktur ist in Abbildung 3.2 dargestellt und wurde durch Munoz et al. [20] experimentell ermittelt. Dabei ist die Stoß-Grenzschicht-Interaktion sehr instationär. Der Verdichtungsstoß oszilliert in seiner Position auf der Grenzschicht und sorgt dadurch für ein sehr instationäres Verhalten der stromab liegenden Grenzschicht und des Nachlaufs.

Munoz et al. [19] konnten experimentell feststellen, dass die Frequenz der Stoßoszillation für den ODP geringer ist als für den ADP. Des Weiteren konnte für den ODP in Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulationen (RANS-Simulationen) keine Ablösung der Strömung festgestellt werden. Stattdessen sorgt der Verdichtungsstoß lediglich für eine Transition der Grenzschicht. Es liegt nahe, dass der deutlich erhöhte Gesamtverlust im ADP im Vergleich zum ODP auch dadurch begründet ist, dass die Grenzschicht auf der Saugseite abgelöst ist und das Strömungsverhalten deutlich instationärer ausfällt.

## 3.2. Herleitung einer gemittelten Entropietransportgleichung

Die Grundlage der numerischen Strömungsmechanik (CFD) bilden die Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Eine direkte numerische Simulation (DNS), bei der alle turbulenten Skalen bis hin zu den Kolmogorov-Skalen [10] räumlich und zeitlich aufgelöst werden, übersteigt die derzeit verfügbaren Rechenkapazitäten für industrielle Anwendungen. Daher werden für kompressible RANS-Simulationen die Favre-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen verwendet.

### 3.2.1. Favre-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Die Favre-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen werden durch eine zeitliche Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet. Dabei werden zwei verschiedene Mittelungen benötigt. Die grundsätzliche Idee dabei ist, dass sich eine turbulente Größe statistisch durch einen Mittelwert und einen Fluktuationsanteil darstellen lässt. Dabei wird häufig die Reynolds-Dekomposition verwendet. Hierbei wird eine Strömungsgröße  $\phi$  in einen zeitlichen Mittelwert  $\bar{\phi}$  und einen Fluktuationsanteil  $\phi'$  zerlegt, was sich durch

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad \text{mit} \quad \bar{\phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi \, dt \quad (3.5)$$

ausdrücken lässt. Für kompressible Strömungen wird diese Methode durch die dichtegegewichtete Favre-Mittelung erweitert, um die Entstehung zusätzlicher Dichtefluktuationsterme in den gemittelten Erhaltungsgleichungen zu vermeiden, sodass

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \quad \text{und} \quad \phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad (3.6)$$

definiert wird. Die Mittelungen unterliegen dabei Mittelungsregeln, die einzelne Terme weiter vereinfachen können. Einige dieser Regeln sind im Anhang B dargelegt.

Mittels zeitlicher Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen und unter Verwendung der Reynolds-Dekomposition für die Dichte und den Druck sowie einer Favre-Mittelung für die restlichen Größen lassen sich die kompressiblen RANS-Gleichungen aufstellen [25]. Diese setzen sich zusammen aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (3.7)$$

der Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\overline{\rho u_j'' u_i''})}{\partial x_j} \quad (3.8)$$

und der Energietransportgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \bar{\rho} \left( \tilde{e} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \tilde{u}_j \left( \tilde{h} + \frac{\tilde{u}_i \tilde{u}_i}{2} \right) + \tilde{u}_j \frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} \right] \\ & = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \tilde{u}_i \left( \bar{\sigma}_{ij} - \overline{\rho u_j'' u_i''} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -\bar{q}_j - \overline{\rho u_j'' h''} + \overline{\sigma_{ji} u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dadurch lassen sich Erhaltungsgleichungen mit gemittelten Größen formulieren. Jedoch entstehen durch die zeitliche Mittelung Terme, die Mittelungen von turbulenten Fluktuationen enthalten. Diese Terme lassen sich durch weitere Mittelungen nicht eliminieren, was als das turbulente Schließungsproblem bezeichnet wird. Um die kompressiblen RANS-Gleichungen zu schließen, werden all diese Terme modelliert. Dies nennt man Turbulenzmodellierung.

Zunächst zeigt sich, dass die gemittelte Kontinuitätsgleichung (3.7) durch die Verwendung der Favre-Mittelung keine Fluktuationsterme enthält. Die gemittelte Impulsgleichung (3.8) hingegen enthält den Term der Reynoldsspannungen  $\tau_{ij}^R = -\overline{\rho u_i'' u_j''}$ . Dessen Modellierung ist der zentrale Bestandteil der Turbulenzmodellierung. In der vorliegenden Arbeit wird hierzu das Menter-Shear-Stress-Transport (SST)-Turbulenzmodell in der Version von 2003 [17] verwendet. Die Modellierung erfolgt dabei auf Basis der Boussinesq-Hypothese. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeitsfluktuationen wie zusätzliche viskose Spannungen wirken und analog zu den viskosen Spannungen durch eine zusätzliche Wirbelviskosität (Eddy Viscosity)  $\mu_t$  angenähert werden, was zu dem Zusammenhang

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \delta_{ij} \quad (3.10)$$

führt. In der Energietransportgleichung (3.9) treten noch einige weitere Terme auf. Zum einen der Term  $\frac{\overline{\rho u_i'' u_i''}}{2} = \bar{\rho} k$ , welcher als turbulente kinetische Energie definiert ist. Des Weiteren wird der Term  $\overline{\rho u_j'' h''} = q_j^t$  als turbulenter Wärmefluss bezeichnet. Dieser wird analog zur laminaren Wärmeleitung modelliert, indem die dynamische Viskosität  $\mu$  durch die Wirbelviskosität  $\mu_t$  ersetzt wird und die Prandtl-Zahl durch eine turbulente Prandtl-Zahl, die typischerweise auf  $Pr_t = 0,9$  gesetzt wird, was sich durch

$$q_j^t = \overline{\rho u_j'' h''} = -\frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

ausdrücken lässt. Zuletzt treten die Terme  $\overline{\tau_{ji} u_i''}$  (molekulare Diffusion) und  $\overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''}$  (turbulenter Transport) auf. Hierfür wird die Approximation

$$\overline{\tau_{ji} u_i''} - \overline{\rho u_j'' \frac{1}{2} u_i'' u_i''} = (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (3.12)$$

verwendet, wobei  $\sigma_k$  eine Modellkonstante ist. Um die neu entstandenen Größen der Wirbelviskosität  $\mu_t$  und der turbulenten kinetischen Energie  $\bar{\rho} k$  zu modellieren, werden zwei neue Transportgleichungen aufgestellt. Zum einen wird die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j k) = \bar{\rho} \tau_{ij}^R \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \bar{\rho} k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.13)$$

gelöst. Hierbei treten neben dem konvektiven und diffusiven Transportterm zwei Quellterme auf. Der Quellterm  $\bar{\rho} \tau_{ij}^R \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}$  beschreibt die Erzeugung der turbulenten kinetischen Energie durch Scherung der gemittelten Strömung. Der Quellterm  $\beta^* \bar{\rho} k \omega$  erfasst die Umwandlung der turbulenten kinetischen Energie in Wärmeenergie. Hierbei tritt die neue Größe der spezifischen turbulenten Dissipationsrate  $\omega$  auf. Der Faktor  $\beta^* = 0,09$  ist ein Schließungskoeffizient, welcher durch Kalibrierung gewonnen wurde. Der Diffusionsterm wird mit bereits bekannten Größen modelliert.

Für die spezifische turbulente Dissipationsrate  $\omega$  wird die zweite Transportgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j \omega) \\ &= \alpha \frac{\omega}{k} \bar{\rho} \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \beta \bar{\rho} k \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \bar{\rho} \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (3.14)$$

herangezogen. Diese Transportgleichung der spezifischen turbulenten Dissipationsrate unterteilt sich in einen konvektiven Term, zwei Diffusionsterme und zwei Quellterme. Dabei gilt als Schließungsannahme  $\sigma_{\omega 2} = 0,856$ . Um die Modellkonstanten  $\sigma_k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\sigma_\omega$  zu bestimmen, wird die Blending-Funktion  $F_1$  verwendet. Diese kombiniert die Eigenschaften eines reinen  $k$ - $\omega$ - und eines reinen  $k$ - $\epsilon$ -Modells, da sie in Wandnähe etwa den Wert eins und in der freien Strömung den Wert null annimmt. Für eine beliebige Modellkonstante  $\phi$  gilt dann die Beziehung

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2. \quad (3.15)$$

Die entsprechenden Werte der Konstanten für das Menter-SST-Turbulenzmodell sind in Tabelle 3.4 dargestellt.

**Tabelle 3.4:** Konstanten des Menter-SST-Turbulenzmodells.

Konstante	$\phi_1$	$\phi_2$
$\alpha$	0,556	0,44
$\beta$	0,075	0,0828
$\sigma_k$	0,85	1,0
$\sigma_\omega$	0,5	0,856

Zuletzt wird die Wirbelviskosität  $\mu_t$  über den Zusammenhang

$$\mu_t = \frac{\bar{\rho}a_1k}{\max(a_1\omega, SF_2)} \quad (3.16)$$

berechnet. Hierbei gilt  $a_1 = 0,31$  und für  $S$  findet die Formulierung

$$S = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)} \quad (3.17)$$

Anwendung. Zuletzt beschreibt  $F_2$  eine weitere Blending-Funktion, die ein grundlegend analoges Verhalten wie  $F_1$  aufweist. Damit sind alle benötigten Größen modelliert und es stehen genügend Variablen zur Verfügung, um das folgende Gleichungssystem, bestehend aus

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i\tilde{u}_j + \bar{p}\delta_{ij})}{\partial x_j} = \frac{\partial\bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial\tau_{ij}^R}{\partial x_j} \quad (3.19)$$

und

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{e}_t + \bar{p}k)}{\partial t} + \frac{\partial[\tilde{u}_j(\bar{\rho}\tilde{e}_t + \bar{p}k + \bar{p})]}{\partial x_j} = \frac{\partial(\bar{\sigma}_{ij}\tilde{u}_i + \tau_{ij}^R\tilde{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial\left(-\bar{q}_j - q_j^t + \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j}, \quad (3.20)$$

zuzüglich der Transportgleichungen (3.13) und (3.14) lösen zu können.

### 3.2.2. Turbulentes Schließungsproblem der Favre-gemittelten Entropietransportgleichung

Die bereits aufgestellte Entropietransportgleichung (2.11) gilt für Felder, in denen die Turbulenz räumlich und zeitlich aufgelöst ist. Um eine solche Transportgleichung in RANS-Simulationen verwenden zu können, muss diese zeitlich gemittelt werden, was in der Form

$$\overline{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial(\rho s u_i)}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{T} \right)} = \overline{\frac{1}{T} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2} \quad (3.21)$$

resultiert. Unter Verwendung der Mittelungsregeln lassen sich die Terme der zeitlichen Ableitung gemäß

$$\overline{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}} = \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{s})}{\partial t} \quad (3.22)$$

und der Divergenz gemäß

$$\overline{\frac{\partial(\rho s u_i)}{\partial x_i}} = \frac{\partial(\bar{\rho} \tilde{s} \tilde{u}_i)}{\partial x_i} + \overline{\frac{\partial(\rho s'' u_i'')}{\partial x_i}} \quad (3.23)$$

vereinfachen. Dabei unterteilt sich die gemittelte Divergenz der Entropieadvektion in die Divergenz einer Entropieadvektion aus gemittelten Größen und in einen turbulenten Entropietransport. Es zeigt sich hier bereits, dass durch die Favre-Mittlung neue Fluktuationsterme entstehen, die in der aktuellen Approximation des turbulenten Schließungsproblems in RANS-Simulationen nicht modelliert werden.

Des Weiteren lässt sich feststellen, dass Fluktuationsterme, die durch die Dekomposition der Temperatur im Nenner entstehen, vernachlässigbar sind. Kock und Herwig haben dies mittels einer Taylorreihenentwicklung für eine Reynolds-Dekomposition gezeigt [9]. Analog gilt dies auch für Favre-gemittelte Größen, wodurch sich

$$\frac{1}{\tilde{T} + T''} = \frac{1}{\tilde{T}} \frac{1}{\left(1 + \frac{T''}{\tilde{T}}\right)} = \frac{1}{\tilde{T}} \left(1 - \frac{T''}{\tilde{T}} + \left(\frac{T''}{\tilde{T}}\right)^2 - \dots\right) \quad (3.24)$$

ergibt. Somit kann in guter Näherung die Vereinfachung

$$\overline{\frac{1}{T} \phi} \approx \frac{1}{\tilde{T}} \bar{\phi} \quad (3.25)$$

getroffen werden. Für eine Zerlegung der viskosen Dissipation wird die Geschwindigkeit im Geschwindigkeitsgradienten mittels Favre-Zerlegung ( $u = \tilde{u} + u''$ ) aufgeteilt. Es gilt somit die Aufteilung

$$\overline{\frac{1}{T} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{1}{\tilde{T}} \left( \overline{\sigma_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} \right), \quad (3.26)$$

wobei nach Wilcox [25] für den Fluktuationsterm der Zusammenhang

$$\overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i''}{\partial x_j}} = \bar{\rho} \epsilon \quad (3.27)$$

gilt. Es zeigt sich, dass sich der viskose Dissipationsterm aus der Summe der viskosen Dissipation aus gemittelten Größen und der in RANS-Simulationen aufgelösten turbulenten Dissipationsrate zusammensetzt. Der Term der reversiblen Wärmeleitung lässt sich mit der Vereinfachung der Temperaturfluktuationen im Nenner auf die Form

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{T} \right)} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right) \quad (3.28)$$

bringen. Für diesen Term sind somit alle notwendigen Größen in RANS-Simulationen enthalten. Zuletzt lässt sich auch der Term der irreversiblen Wärmeleitung unter Verwendung der Näherung für die Temperaturfluktuationen im Nenner umformen. Der Temperaturgradient muss jedoch ebenfalls mittels Favre-Mittelung ( $T = \tilde{T} + T''$ ) aufgeteilt werden. Ein Ausmultiplizieren führt zu der Darstellung

$$\overline{\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2} = \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial \tilde{T} T''}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial T''}{\partial x_i} \right)^2 \right), \quad (3.29)$$

bei der sich auch hier die Temperaturfluktuationen nicht durch bekannte RANS-Größen direkt bestimmen lassen. Somit lautet die vollständige Entropietransportgleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{s})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{s}\tilde{u}_i + \overline{\rho s'' u_i''})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\tilde{T}} \left( \overline{\sigma_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} + \bar{\rho} \epsilon \right) + \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial \tilde{T} T''}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial T''}{\partial x_i} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Eine weitere Zerlegung des Terms  $\bar{\rho} \epsilon$  ist mit der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie (3.13) möglich. Im Folgenden wird der Term  $\bar{\rho} \epsilon$  aufgrund des großen Einflusses der Reynoldsspannungen in eine turbulente viskose Dissipation durch die Reynoldsspannungen  $D_r$  und in eine zusammengefasste Summe aus der Konvektion der turbulenten kinetischen Energie sowie der Approximation aus Gleichung (3.12) aufgeteilt. Um die zusammengefasste Summe nicht direkt zu berechnen, da für die Bestimmung der Konstante  $\sigma_k$  die Blending-Funktion  $F_1$  gelöst werden müsste, wird diese aus der Differenz

$$\underbrace{\frac{1}{\tilde{T}} \bar{\rho} \epsilon}_{D_t} - \underbrace{\frac{1}{\tilde{T}} \overline{\rho \tau_{ij}^R} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{D_r} = \underbrace{\frac{1}{\tilde{T}} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_j k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \right]}_{\text{Zusammengefasster Term}} \quad (3.31)$$

gebildet. Dabei wurde für die Berechnung der turbulenten Dissipationsrate  $\epsilon$  aus der spezifischen turbulenten Dissipationsrate  $\omega$  der Zusammenhang

$$\epsilon = \beta^* k \omega \quad (3.32)$$

verwendet. Die Herleitung stammt aus persönlicher Kommunikation mit Dr. Michael Bergmann [3].

### 3.2.3. Schließung der Favre-gemittelten Entropietransportgleichung

Für die Schließung der aufgestellten Entropietransportgleichung (3.30) müssen der turbulente Entropietransport und die durch die Temperaturfluktuationen entstandenen Korrelationen approximiert werden. Dazu wird der Vergleich mit einer weiteren Approximation

der gemittelten Entropietransportgleichung durchgeführt. Nach Zhao und Sandberg [26] lässt sich aus der Favre-gemittelten Energietransportgleichung (3.9) eine Favre-gemittelte Entropietransportgleichung herleiten. Dafür wird die Fundamentalgleichung der Thermodynamik mit gemittelten Größen durch

$$d\tilde{e} = \tilde{T}d\tilde{s} - \bar{p}d\frac{1}{\bar{\rho}} \quad (3.33)$$

angenähert. Damit kann, analog zur Herleitung der instantanen Entropietransportgleichung (siehe Anhang A), eine Favre-gemittelte Entropietransportgleichung aufgestellt werden, welche die Form

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{s}\tilde{u}_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{q}_i}{\tilde{T}} \right) \\ = & \frac{1}{\tilde{T}} \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\tilde{T}} \tau_{ij}^R \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\tilde{T}} \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i^t) - \frac{1}{\tilde{T}} \frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} - \frac{1}{\tilde{T}} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}_i k)}{\partial x_i} \\ & + \frac{1}{\tilde{T}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (3.34)$$

annimmt. Dabei ist es nicht direkt möglich zu bestimmen, ob ein Term reversibel ist oder nicht. Ein Vergleich mit der zuvor hergeleiteten Favre-gemittelten Entropietransportgleichung (2.11) zeigt jedoch, dass durch die Aufteilung der turbulenten Dissipation aus Gleichung (3.31) die meisten Terme identisch berechnet werden. Der Unterschied liegt in der turbulenten Wärmeleitung und den entstandenen, noch ungelösten Fluktuations-termen.

Daher wird für diese Arbeit als Approximation angenommen, dass die turbulente Wärmeleitung analog zur laminaren Wärmeleitung in einen reversiblen und einen irreversiblen Teil aufgeteilt werden kann. Der irreversible Teil nähert dabei die unbekanntenen Einflüsse der Temperaturfluktuationen an, während der reversible Teil den turbulenten Entropietransport abbildet, woraus sich die Annäherungen

$$\frac{\partial(\overline{\rho s'' u_i''})}{\partial x_i} \approx \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\tilde{T}} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right) \quad (3.35)$$

und

$$\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( 2 \frac{\partial \tilde{T} \tilde{T}''}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial \tilde{T}''}{\partial x_i} \right)^2 \right) \approx \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.36)$$

ergeben. Daraus folgt die in dieser Arbeit verwendete Approximation der Favre-gemittelten Entropietransportgleichung gemäß

$$\begin{aligned} \dot{T}_s & := \underbrace{\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{s})}{\partial t}}_{S_t} + \underbrace{\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{s}\tilde{u}_i)}{\partial x_i}}_{S_{adv}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right)}_{R_l} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\tilde{T}} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right)}_{R_t} \\ & = \underbrace{\frac{1}{\tilde{T}} \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{D_l} + \underbrace{\frac{1}{\tilde{T}} \bar{\rho} \epsilon}_{D_t} + \underbrace{\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2}_{I_l} + \underbrace{\frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2}_{I_t} := \dot{G}_s. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Dabei wird die reversible Seite der Transportgleichung als  $\dot{T}_s$  definiert und die irreversible Seite als  $\dot{G}_s$ . Beide Seiten beschreiben den lokalen Verlust. Die Transportseite  $\dot{T}_s$  besteht aus einem instationären Term  $S_t$ , der Divergenz der Favre-gemittelten Entropieadvektion  $S_{adv}$ , einer reversiblen laminaren Wärmeleitung  $R_l$  sowie einer reversiblen turbulenten Wärmeleitung  $R_t$ . Die Produktionsseite  $\dot{G}_s$  setzt sich aus der viskosen Dissipation  $D_l$ , der turbulenten Dissipation  $D_t$ , der irreversiblen laminaren Wärmeleitung  $I_l$  und der irreversiblen turbulenten Wärmeleitung  $I_t$  zusammen.

Dabei sind alle Terme der Produktionsseite strikt positiv. Dies ergibt sich daraus, dass in Erweiterung zu Gleichung (2.12) die turbulente Dissipation positiv ist, da alle enthaltenen Größen positiv sind, und die irreversible Wärmeleitung aufgrund der Quadrierung des Temperaturgradienten ebenfalls positiv ist, was sich durch die Ungleichung

$$\frac{1}{\tilde{T}} \left( \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \bar{\rho} \epsilon \right) + \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2 \geq 0 \quad (3.38)$$

ausdrücken lässt.

### 3.3. Einflüsse auf die Entropietransportgleichung

In kompressiblen RANS-Simulationen treten zusätzliche Einflüsse auf die Entropietransportgleichung auf. Zum einen entsteht durch numerische Dissipation eine Diskrepanz zwischen der definierten Produktionsseite und der definierten Transportseite. Zum anderen kann die Favre-gemittelte spezifische Entropie in RANS nicht exakt bestimmt werden.

#### 3.3.1. Numerische Dissipation

Die kompressiblen RANS-Gleichungen bilden mathematisch ein System hyperbolisch-parabolischer Erhaltungsgleichungen. Zur numerischen Lösung dieses Systems ist eine räumliche Diskretisierung erforderlich, die sowohl eine hohe Genauigkeit in glatten Strömungsbereichen als auch Stabilität in der Nähe von Unstetigkeiten gewährleistet [14]. In dieser Arbeit wird das Finite-Volumen-Verfahren verwendet. Dabei werden die Erhaltungsgleichungen für einzelne Teilvolumina formuliert. Um Flüsse über die Zellfläche zu bestimmen, muss ein Zustand in dieser Fläche approximiert werden.

#### Fromm-Schema und die Notwendigkeit von Limitern

In dieser Arbeit wird das Fromm-Schema zur Berechnung der Zellflächenflüsse verwendet. Es handelt sich dabei um eine Methode aus der Klasse der *Monotonic Upstream-centered Schemes for Conservation Laws* (MUSCL). Der Parameter  $\hat{\kappa}$  wird dabei auf null gesetzt. Das Verfahren stellt ein lineares Hochauflösungsverfahren zweiter Ordnung dar, das eine

Mittelstellung zwischen einem Upwind-Schema und einem zentralen Differenzenschema einnimmt. Im Vergleich zu reinen Upwind-Verfahren reduziert es die numerische Dissipation deutlich [13].

Nach dem Theorem von Godunov neigen jedoch alle linearen Schemata höherer Ordnung dazu, in Bereichen mit starken Gradienten nicht-physikalische Oszillationen zu erzeugen [15]. Zur Unterdrückung dieser Oszillationen ist der Einsatz von Gradientenlimitern zwingend erforderlich.

In dieser Arbeit wird der Van-Albada-2-Limiter verwendet, der die Rekonstruktion der Variablen an den Zellflächen so modifiziert, dass das Schema die TVD-Eigenschaft (*Total Variation Diminishing*) erfüllt [1].

#### Herleitung der numerischen Dissipation

Der Einsatz eines Limiters wie des Van-Albada-2 führt dazu, dass das Schema in Bereichen starker Gradienten lokal auf ein Verfahren erster Ordnung zurückfällt. Dies lässt sich mathematisch durch die Betrachtung des modifizierten Flusses  $\Phi$  verdeutlichen. Ein Fluss höherer Ordnung lässt sich allgemein als Summe eines stabilen Flusses niedriger Ordnung  $\Phi^L$  und eines Korrekturterms darstellen, was auf die Form

$$\Phi^H = \Phi^L + \Psi(r) \cdot (\Phi^{\text{diff}}) \quad (3.39)$$

führt. Dabei ist  $\Psi(r)$  die Limiter-Funktion, die vom Verhältnis benachbarter Gradienten  $r$  abhängt. Für den Van-Albada-2-Limiter gilt der Zusammenhang

$$\Psi_{\text{VA}}(r) = \frac{r^2 + r}{r^2 + 1}. \quad (3.40)$$

Durch die Limitierung weicht der numerische Fluss vom Fluss zweiter Ordnung ab. Diese Differenz kann formal als zusätzliche numerische Dissipation interpretiert werden.

#### Einfluss auf die Entropiebilanz

Die numerische Dissipation hat signifikante Auswirkungen auf die Auswertung der Verlustmechanismen. Sie kann als zusätzliche Dissipation interpretiert werden, die nicht in der Produktionsseite enthalten ist.

Betrachtet man ausschließlich die Produktionsseite der Entropietransportgleichung, ergibt sich eine Bilanzlücke. Das bedeutet, dass die Summe der lokal berechneten Entropieproduktionen nicht der globalen Entropiezunahme zwischen Ein- und Auslass entspricht, woraus

$$\Delta \dot{S}_{\text{global}} \neq \int_V \dot{G}_s^{\text{RANS}} dV \quad (3.41)$$

folgt. Die Differenz entspricht unter anderem der über das Volumen integrierten numerischen Dissipation. Insbesondere in der Region des Verdichtungsstoßes, in der der Limiter aktiv ist, ist dieser Anteil dominant.

Für eine präzise Lokalisierung der Verluste ist es daher erforderlich, diesen numerischen Beitrag entweder über die Differenz zwischen Transport- und Produktionsseite zu erfassen oder durch eine hinreichende Gitterverfeinerung zu minimieren.

### 3.3.2. Approximation der Favre-gemittelten Entropie in RANS

Für ein ideales Gas lässt sich die spezifische Entropie  $s$  als Funktion von Dichte  $\rho$  und Druck  $p$  darstellen, was

$$s - s_0 = c_v \ln \left( \frac{p}{p_0} \right) - c_p \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (3.42)$$

ergibt. In RANS-Lösungen stehen jedoch nur die zeitlich gemittelten Größen  $\bar{p}$  und  $\bar{\rho}$  zur Verfügung. Häufig wird daher die Approximation

$$\tilde{s} - s_0 \approx c_v \ln \left( \frac{\bar{p}}{p_0} \right) - c_p \ln \left( \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right) \quad (3.43)$$

verwendet. Allerdings ist die Entropie der gemittelten Größen im Allgemeinen nicht identisch mit der Favre-gemittelten Entropie  $\tilde{s} = \frac{\overline{\rho s}}{\bar{\rho}}$ . Setzt man die Zustandsgleichung in die Definition der Favre-Mittelung ein, ergibt sich

$$\tilde{s} - s_0 = c_v \frac{\overline{\rho \ln p}}{\bar{\rho}} - c_p \frac{\overline{\rho \ln \rho}}{\bar{\rho}} - c_v \ln p_0 + c_p \ln \rho_0. \quad (3.44)$$

Da der Logarithmus eine nichtlineare Funktion ist, gilt im Allgemeinen  $\overline{\rho \ln \rho} \neq \bar{\rho} \ln \bar{\rho}$ .

Zur Abschätzung des Fehlers wird der Druck in einen Mittelwert und eine Fluktuation zerlegt ( $p = \bar{p} + p'$ ). Eine Taylorreihenentwicklung von  $\ln p$  um die Stützstelle  $\bar{p}$  liefert

$$\ln p = \ln \bar{p} + \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{p'^2}{2\bar{p}^2} + \mathcal{O}(p'^3). \quad (3.45)$$

Eingesetzt in die gewichtete zeitliche Mittelung (unter Berücksichtigung von  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ ) ergibt sich folglich

$$\overline{\rho \ln p} = \overline{(\bar{\rho} + \rho') \left( \ln \bar{p} + \frac{p'}{\bar{p}} - \frac{p'^2}{2\bar{p}^2} \right)} = \bar{\rho} \ln \bar{p} + \frac{\overline{\rho p'}}{\bar{\rho}} - \frac{\overline{\rho p'^2}}{2\bar{p}^2} + \dots \quad (3.46)$$

Da in turbulenten Strömungen im Allgemeinen  $\overline{\rho p'} \neq 0$  gilt, verschwinden diese Terme nicht. Da RANS-Lösungen jedoch keine Informationen über die Fluktuationen  $p'$  und  $\rho'$  liefern, müssen diese Terme vernachlässigt werden.

Der resultierende Fehler liegt in der Größenordnung  $\mathcal{O}\left(\frac{p'^2}{\bar{p}^2}\right)$  bzw.  $\mathcal{O}\left(\frac{\rho'^2}{\bar{\rho}^2}\right)$ .

## 3.4. Numerisches Setup

Der beschriebene Analyseansatz mittels der Entropietransportgleichung wird für das TC-TA angewendet. Dabei kommt der Strömungslöser TRACE [5] zum Einsatz. Der ODP wird stationär mittels RANS-Simulationen berechnet. Für den ADP wird eine URANS-Simulation durchgeführt, da der ADP in stationären Betrachtungen nicht konvergiert.

Die URANS-Simulation wird analog zu der von Klose et al. [8] beschriebenen Vorgehensweise aufgebaut und ebenfalls über einen Zeitraum von 50 konvektiven Zeiteinheiten  $t_c$  ausgewertet. Dabei werden die einzelnen Terme der Entropietransportgleichung zeitlich gemittelt. Der instationäre Term entfällt aufgrund der statistisch stationären Betrachtung. Zur Validierung der berechneten Verlustaufteilung in RANS wird die von Klose et al. [8] beschriebene LES ausgewertet und mit der URANS-Simulation verglichen.

### 3.4.1. Strömungslöser TRACE

Sämtliche Simulationen werden mit dem DLR-Code *TRACE* durchgeführt [5]. TRACE löst die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen sowohl mittels eines Finite-Volumen-Verfahrens als auch mit DGSEM [2]. Der Code ist speziell auf die Anforderungen der Turbomaschinen-Aerodynamik zugeschnitten und unterstützt RANS-, URANS- sowie LES-Methoden.

### 3.4.2. Randbedingungen und Rechengebiet

Das Rechengebiet wird als einzelner Schaufelkanal mit periodischen Randbedingungen in Teilungsrichtung modelliert. Die Schaufeloberfläche wird als viskos und adiabat definiert. Die Seitenwände werden in dieser Arbeit als reibungsfrei und adiabat angenommen, um ein zweidimensionales Strömungsfeld zu erzwingen und Sekundärströmungseffekte zu unterdrücken.

An den Ein- und Auslassgrenzen werden charakteristikbasierte Randbedingungen verwendet [22], um akustische Reflexionen zu vermeiden, die insbesondere in transsonischen Rechnungen die Konvergenz stören könnten.

Zusätzlich kommt das Menter-SST-Turbulenzmodell in der Version von 2003 [17] zum Einsatz, da es für viele Referenzfälle für Turbomaschinen verwendet wird. Des Weiteren wird das  $\gamma$ - $Re_\theta$ -Transitionsmodell [12] verwendet. Da die Verluste im TCTA maßgeblich von der Lage des Transitionsortes abhängen, ist eine korrekte Abbildung der ablöseinduzierten Transition innerhalb der Saugseitenblase unerlässlich.

Die Bewertung der Gitterverluste erfolgt zunächst über die globale Entropiebilanz. Das Kontrollvolumen ist thermodynamisch vollständig adiabat isoliert. Aufgrund der periodi-

schen Randbedingungen heben sich die Entropieflüsse über die oberen und unteren Ränder gegenseitig auf. Daher entspricht die im Kontrollvolumen generierte Entropieproduktion exakt der Differenz zwischen dem Entropiestrom am Auslass und dem Entropiestrom am Einlass.

### 3.4.3. Modifikationen für LES

Für die LES wird die Entropietransportgleichung (2.11) modifiziert. Die LES löst die großskaligen Turbulenzstrukturen auf Basis räumlich gefilterter Größen auf, während die kleinskalige Turbulenz modelliert werden muss. Diese führt in der Entropietransportgleichung zu zusätzlichen Dissipationstermen  $\phi^{\text{SGS}}$ , die durch nicht aufgelöste Skalen verursacht werden [26], woraus die modifizierte Form

$$\frac{\overline{\partial(\rho s)}}{\partial t} + \frac{\overline{\partial(\rho s u_i)}}{\partial x_i} + \frac{\overline{\partial}}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{T} \right) = \frac{1}{T} \overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{T^2} \overline{\left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2} + \overline{\phi^{\text{SGS}}} \quad (3.47)$$

resultiert. Der LES-Datensatz besteht aus 96 instantanen Feldern aus einer Periode der Stoßoszillation. Aufgrund der geringen zeitlichen Abdeckung ist die Auswertung nicht statistisch konvergiert. Daher kann der instationäre Term nicht vernachlässigt werden und muss explizit berechnet werden. Hierfür wird die zentrale Differenzenmethode verwendet, sodass

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} \approx \frac{(\rho s)^{n+1} - (\rho s)^{n-1}}{2\Delta t} \quad (3.48)$$

gilt. Der Index  $n + 1$  bzw.  $n - 1$  bezeichnet dabei einen Zeitschritt nach bzw. vor dem aktuellen Zeitpunkt.

Die LES wurde als implizite LES (iLES) durchgeführt. In einer iLES ist numerische Dissipation inhärent vorhanden und wirkt als Modell für die Dissipation nicht aufgelöster kleinräumiger Turbulenzstrukturen [6]. Diese numerische Dissipation kann jedoch nicht explizit bestimmt werden. Das bedeutet, dass auch in der iLES eine Diskrepanz zwischen Transport- und Produktionsseite entsteht, die nicht direkt quantifiziert werden kann.

In der LES wird in Spannweitenrichtung eine periodische Randbedingung angewendet. Zudem muss die Kanalhöhe (in Spannweitenrichtung) hinreichend groß gewählt werden. Beide Maßnahmen tragen dazu bei, eine künstliche Unterdrückung dreidimensionaler turbulenter Sekundärströmungsstrukturen zu vermeiden und somit unverfälschte Simulationsergebnisse zu gewährleisten. Dies wurde von Klose et al. [8] für die vorliegende LES nachgewiesen.

## 3.5. Netzverfeinerungsstufen

Die Qualität der numerischen Lösung wird maßgeblich durch die räumliche Diskretisierung bestimmt. Zur Quantifizierung des Einflusses der numerischen Dissipation wurden für die

RANS-Simulationen drei Gitterverfeinerungsstufen untersucht. In allen Fällen wird eine strukturierte H-O-H-Topologie verwendet, die eine gezielte Auflösung der Grenzschicht sowie des Nachlaufs ermöglicht.

Die Gitter sind in Einlass-, Profil- (O-Gitter) und Auslassbereiche unterteilt. Die jeweilige Diskretisierung in Knotenpunkten ist wie folgt festgelegt:

- **Grob:** H-Einlass ( $45 \times 33 \times 7$ ), O-Gitter ( $228 \times 25 \times 7$ ), H-Auslass ( $60 \times 25 \times 7$ ), Ober-/Unterseite ( $190 \times 25 \times 7$ )
- **Mittel:** H-Einlass ( $68 \times 50 \times 7$ ), O-Gitter ( $341 \times 38 \times 7$ ), H-Auslass ( $90 \times 38 \times 7$ ), Ober-/Unterseite ( $284 \times 38 \times 7$ )
- **Fein:** H-Einlass ( $90 \times 66 \times 7$ ), O-Gitter ( $453 \times 50 \times 7$ ), H-Auslass ( $120 \times 50 \times 7$ ), Ober-/Unterseite ( $378 \times 50 \times 7$ )

Daraus ergeben sich die folgenden Gesamtanzahlen an Kontrollvolumina:

- **Grob:** 126.070
- **Mittel:** 324.228
- **Fein:** 570.252

Die gewählte Gitterverfeinerung zielt insbesondere darauf ab, die numerische Dissipation zu reduzieren und deren Einfluss auf die Entropiebilanz systematisch zu untersuchen.

## 4. Ergebnisse

Die beschriebene Verlustquantifizierung wird im Folgenden zunächst für den Off-Design-Punkt (ODP) und den aerodynamischen Auslegungspunkt (ADP) angewandt. Um den Einfluss der numerischen Dissipation zu minimieren, werden die Ergebnisse primär für die feinste Netzstufe präsentiert. Abschließend wird der direkte Einfluss der numerischen Dissipation anhand der unterschiedlichen Netzverfeinerungsstufen dargestellt.

### 4.1. Off-Design Point (ODP)

Im Gegensatz zum ADP konvergiert der ODP in RANS-Simulationen, weshalb dieser Betriebspunkt mittels RANS simuliert wurde. Die Konvergenz wird durch die instationären Effekte der Stoß-Grenzschicht-Interaktion beeinträchtigt. Die Einlassmachzahl beginnt durch diese Instationarität in der stationären Berechnung zu schwingen. Für den ODP hat sich gezeigt, dass dieses schwingende Verhalten ebenfalls auftritt, wenn das Netz über die beschriebenen Stufen hinaus weiter verfeinert wird. Daher ist die mögliche Reduzierung der numerischen Dissipation bei diesem Fall limitiert.

#### 4.1.1. Globale Verlustauswertung

Zunächst wird der globale Verlust quantifiziert. Zur Bestimmung der globalen Verluste des Gitters wurden Kontrollflächen am Ein- und Auslass definiert. Nach der globalen Entropiebilanz aus Gleichung (2.3) gilt der Zusammenhang

$$\int_V \sigma \, dV = \dot{S}_{\text{out}} - \dot{S}_{\text{in}}. \quad (4.1)$$

Die Auswertung ergibt einen Einlassentropiestrom von 33,705 W/(K s) und einen Auslassentropiestrom von 35,161 W/(K s). Dies resultiert in einer Gesamtentropieproduktion von 1,456 W/(K s). Der massenstromgemittelte Totaldruck am Einlass beträgt 83 131 Pa und am Auslass 81 137 Pa. Bei einem Massenstrom von 0,2112 kg/s ergibt sich nach der thermodynamischen Relation zur Entropieproduktion (siehe Gleichung (2.15)) im Kontrollvolumen ein Wert von 1,472 W/(K s) für die gesamte Entropieproduktion. Die Approximation über den Totaldruck ist somit sehr genau.

#### 4.1.2. Lokale Entropieproduktion

Ein lokaler Verlust lässt sich in RANS nach der Entropietransportgleichung (3.37) durch die Summe aller Entropietransportterme oder durch die Summe aller Produktionsterme

berechnen. Jedoch sorgt die numerische Dissipation (vgl. Abschnitt 3.3.1) für eine Diskrepanz zwischen diesen Verlusten. Zunächst wird der Verlust über die Produktionsseite  $\dot{G}_s$  durch den Ausdruck

$$\dot{G}_s := \underbrace{\frac{1}{\tilde{T}} \sigma_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}}_{D_1} + \underbrace{\frac{1}{\tilde{T}} \bar{\rho} \epsilon}_{D_t} + \underbrace{\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2}_{I_1} + \underbrace{\frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\tilde{T}^2} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right)^2}_{I_t} \quad (4.2)$$

beschrieben. Durch die mathematische Formulierung der einzelnen Terme und die Positivität der zugrundeliegenden Größen wird bereits ersichtlich, dass die gesamte Entropieproduktion  $\dot{G}_s$  an jedem Ort zwingend positiv sein muss.



**Abbildung 4.1:** Volumetrische Entropieproduktion  $\dot{G}_s$  in  $W/(Km^3)$

Abbildung 4.1 zeigt die Verteilung des Verlustes, der durch alle Produktionsterme  $\dot{G}_s$  berechnet wurde. Es fällt auf, dass der lokalisierte Anteil des Verdichtungsstoßes sehr gering ist und der größte Teil der Entropie in der Grenzschicht sowie im Nachlauf entsteht. Zudem nimmt die Entropieproduktion im Nachlauf stromabwärts kontinuierlich ab, bis sie im vollständig ausgemischtem Zustand null erreicht.

Eine Aufteilung in die einzelnen Terme ist in den Abbildungen 4.2 bis 4.6 dargestellt. Des Weiteren wurde die turbulente Dissipation  $D_t$  nach Gleichung (3.31) in eine turbulente viskose Dissipation  $D_r$  und eine zusammengefasste Summe aus der Advektion der turbulenten kinetischen Energie, der molekularen Diffusion und dem turbulenten Transport aufgeteilt. Es wird deutlich, dass die viskosen Dissipationen  $D_1$  und  $D_r$  eine Größenordnung über den entsprechenden irreversiblen Wärmeleitungen  $I_1$  und  $I_t$  liegen. Des Weiteren sind die turbulenten Entropieproduktionen durch die viskose Dissipation  $D_r$  und die irreversible Wärmeleitung  $I_t$  signifikant größer als ihr laminares Äquivalent. Dies begründet sich im Verhältnis der modellierten Wirbelviskosität zur laminaren Viskosität, welche

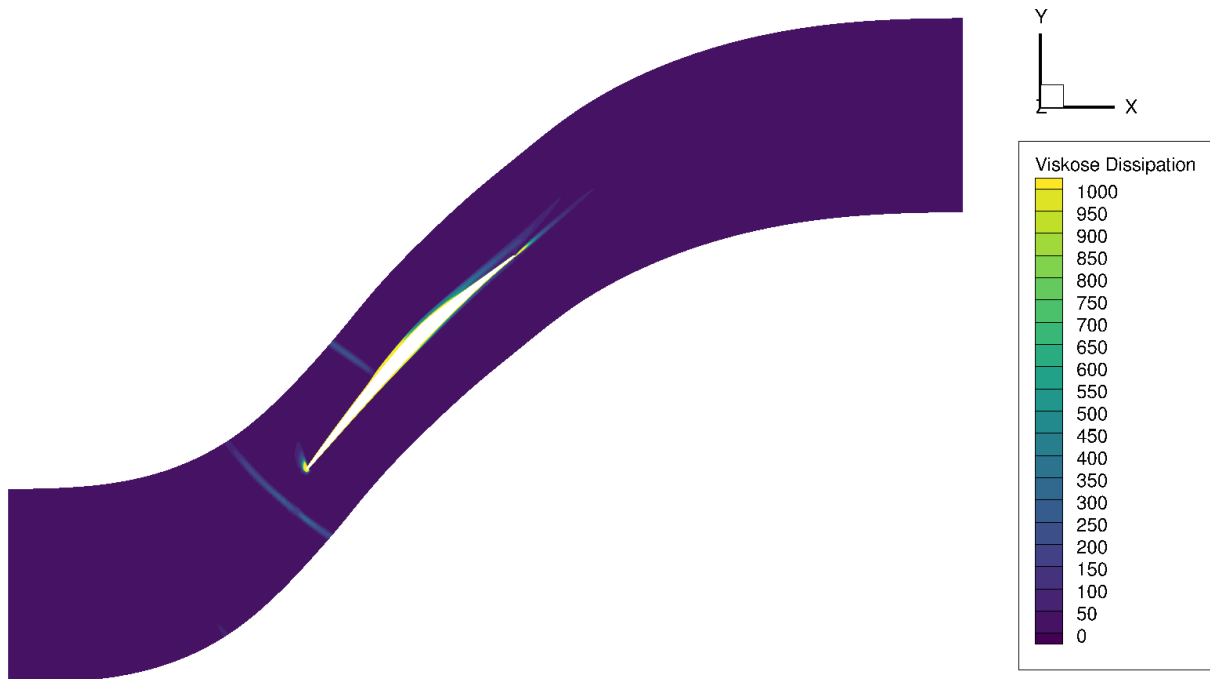


Abbildung 4.2: Lokale laminare Dissipation  $D_l$  in  $W/(Km^3)$



Abbildung 4.3: Lokale turbulente Dissipation  $D_t$  in  $W/(Km^3)$

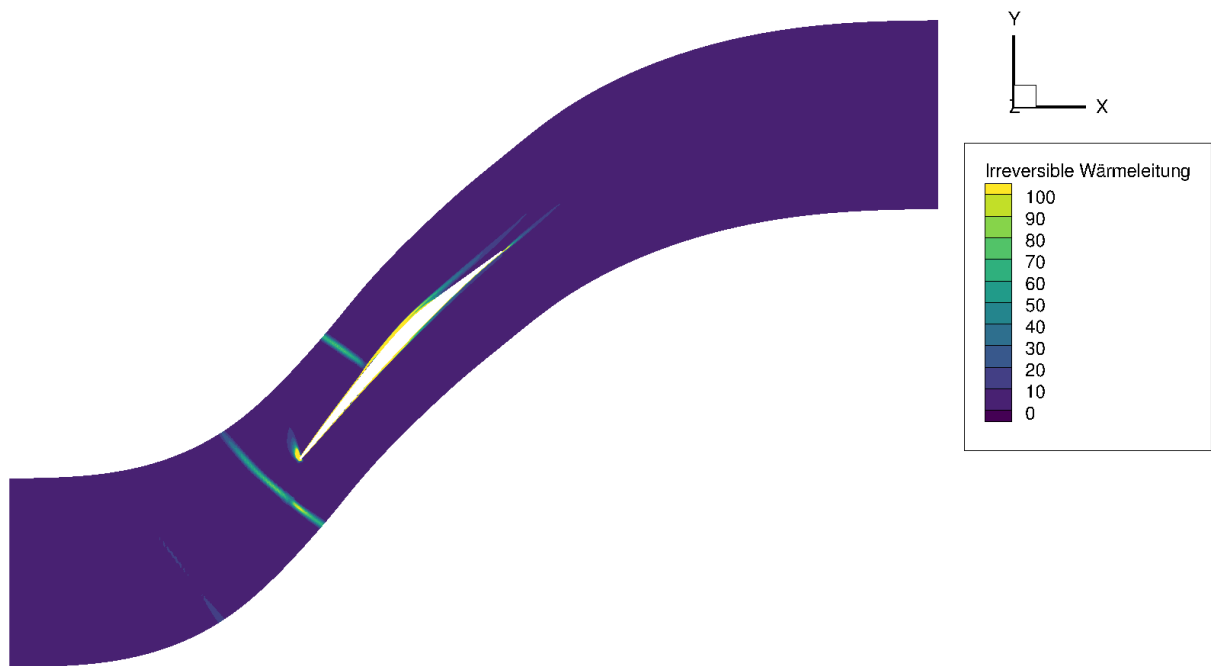
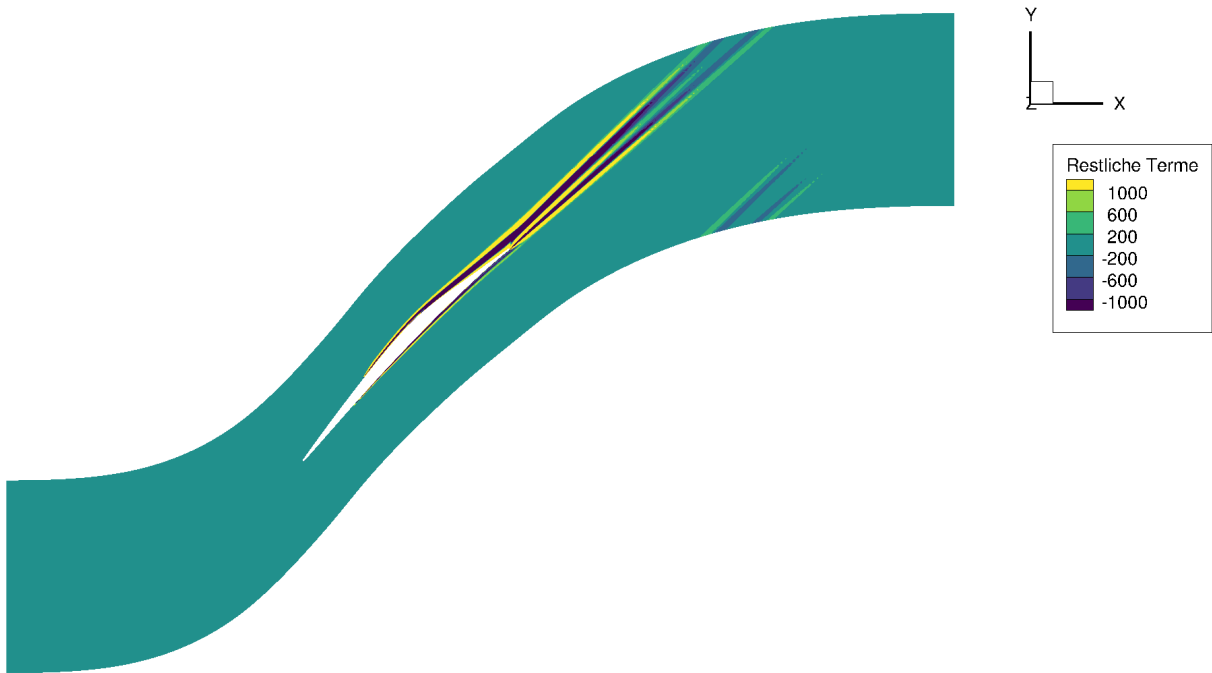


Abbildung 4.4: Lokale Divergenz der laminaren irreversiblen Wärmeleitung  $I_l$  in  $W/(Km^3)$



Abbildung 4.5: Lokale Divergenz der turbulenten irreversiblen Wärmeleitung  $I_t$  in  $W/(Km^3)$



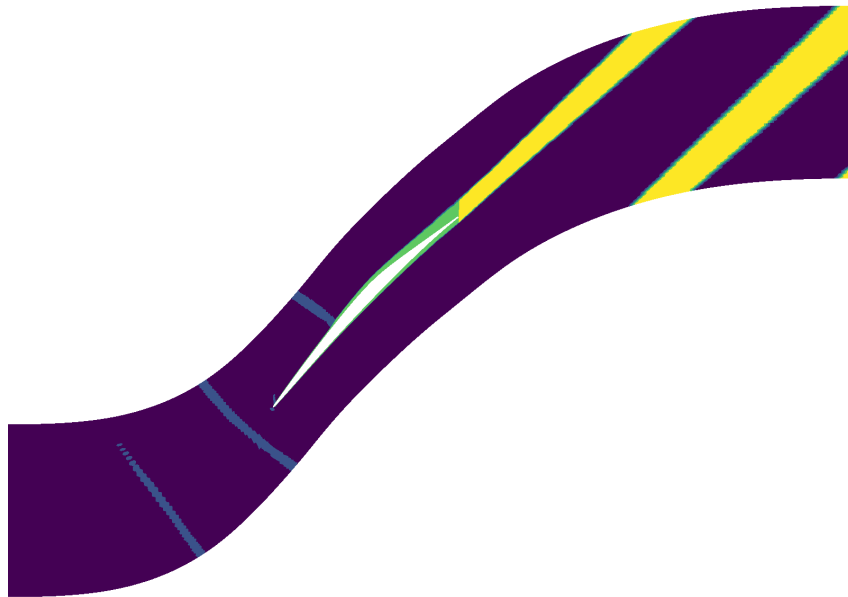
**Abbildung 4.6:** Summe aus Advektion der TKE, molekularer Diffusion und turbulentem Transport in  $W/(Km^3)$

im Nachlauf und in der turbulenten Grenzschicht bei einem Wert von über 100 liegt. Die Summe aus der Advektion der TKE, der molekularen Diffusion und des turbulenten Transports ist hingegen nicht strikt positiv und lokal nicht vernachlässigbar klein. Dabei beschränkt sich das Feld dieses Beitrags auf die Bereiche der turbulenten Grenzschicht und den Nachlauf.

Eine Volumenintegration der einzelnen Produktionsterme ist in Tabelle 4.1 aufgeführt. Der wesentliche Anteil resultiert aus den viskosen Dissipationen  $D_1$  und  $D_r$ , wobei insbesondere der turbulente Anteil  $D_r$  sehr hoch ausfällt. Der globale Verlustanteil aus der Summe von TKE-Advektion, molekularer Diffusion und turbulentem Transport ist global betrachtet vernachlässigbar. Auch zeigt sich, dass die Wärmeleitungsterme  $I_1$  und  $I_t$  eine Größenordnung unter den viskosen Dissipationen liegen. Letztlich wird ersichtlich, dass der Gesamtverlust durch eine reine Betrachtung der Produktionsterme  $\dot{G}_s$  deutlich unterschätzt wird.

**Tabelle 4.1:** Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieterme ODP

Term	Integrierter Wert in W/K
Viskose Dissipation $D_1$	$1,503 \cdot 10^{-1}$
Turbulente viskose Dissipation $D_r$	$4,347 \cdot 10^{-1}$
Irreversible Wärmeleitung $I_1$	$1,184 \cdot 10^{-2}$
Irreversible turb. Wärmeleitung $I_t$	$3,409 \cdot 10^{-2}$
Restliche Terme	$-1,123 \cdot 10^{-4}$
<b>Gesamte berechnete Dissipation <math>\dot{G}_s</math></b>	<b>0,631</b>



**Abbildung 4.7:** Zonenaufteilung in Freier Strom (Violett), Grenzschicht (Grün), Nachlauf (Gelb), Verdichtungsstoß (Blau)

**Tabelle 4.2:** Zonendefinition

Zone	Größe	Wert
Verdichtungsstoß	$C_{\text{Shock}}$ und $\nabla \cdot \mathbf{u}$	$> 71$ und $< 0$
Grenzschicht	$C$ und $x/C_x$	$1,02$ und $< 1$
Nachlauf	$C$ und $x/C_x$	$1,02$ und $> 1$

**Tabelle 4.3:** Zonenbasierte Aufteilung von Entropieproduktion ODP

Zone	Produktion $\dot{G}_s$ in W/K
Freier Strom	$7,672 \cdot 10^{-3}$
Verdichtungsstoß	$2,473 \cdot 10^{-3}$
Grenzschicht	$4,530 \cdot 10^{-1}$
Nachlauf	$1,747 \cdot 10^{-1}$

Für das Feld der lokalen Entropieproduktion  $\dot{G}_s$  lässt sich eine Quantifizierung der einzelnen Verlustmechanismen durch eine Einteilung des Kontrollvolumens in spezifische Zonen durchführen. Hierfür werden die Kriterien aus Abschnitt 2.4 verwendet. Die verwendeten Schwellenwerte sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Daraus resultiert die in Abbildung 4.7 dargestellte räumliche Aufteilung: Violett markiert den freien Strom, Blau den Verdichtungsstoß, Grün die Grenzschicht und Gelb den Nachlauf. Tabelle 4.3 zeigt die entsprechende Aufteilung der Entropieproduktion. Diese verdeutlicht, dass der Verlust im Verdichtungsstoß maßgeblich unterschätzt wird, da weder die Stoßzone noch der angrenzende freie Strom eine relevante Entropieproduktion aufweisen. Dies legt die Vermutung nahe, dass der Verdichtungsstoß in diesem Testfall deutlich numerisch dissipiert ist. Die Zonenaufteilung zeigt zudem, dass die Vorderkante nicht vollständig aus der Stoßzone herausgefiltert wird. Aufgrund der geringen Entropieproduktion in diesem Bereich ist dies für die Gesamtverlustaufteilung jedoch irrelevant.

### 4.1.3. Lokaler Entropietransport

Die lokale Entropieproduktion bildet den Gesamtverlust nicht vollständig ab. Daher wird ein lokaler Verlust zusätzlich über die Summe aller Entropietransportterme errechnet, was auf die Form

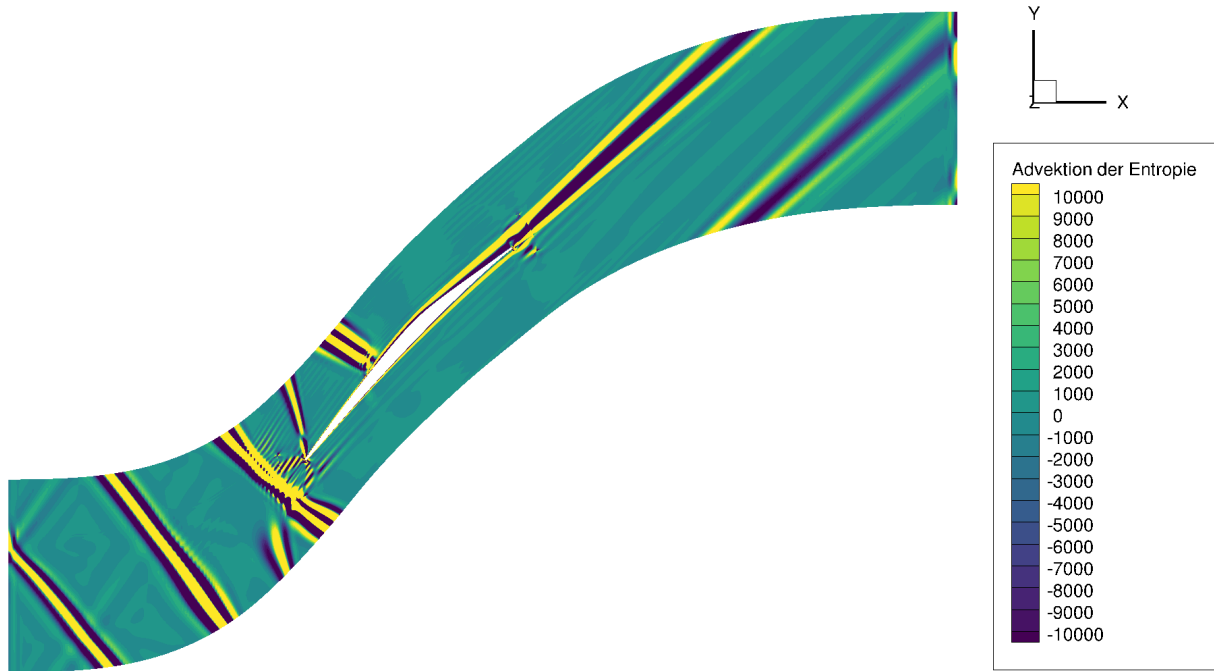
$$\dot{T}_s := \underbrace{\frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{s}\tilde{u}_i)}{\partial x_i}}_{S_{adv}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{\tilde{T}} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right)}_{R_1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \frac{1}{\tilde{T}} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) \right)}_{R_t} \quad (4.3)$$

führt. Die exakte Verbindung zwischen lokaler und globaler Verlustbewertung liegt dabei zunächst in der Divergenz der Entropieadvektion  $S_{adv}$ . Nach dem Gaußschen Integralsatz entspricht das Volumenintegral der Divergenz der Entropieadvektion den Flächenintegralen der Entropieströme über die Ränder des Kontrollvolumens. Tabelle 4.4 zeigt die Volumenintegration aller Transportterme. Dabei zeigt sich, dass das Volumenintegral der Divergenz der Entropieadvektion den berechneten Wert für die Differenz der Entropieströme sehr genau widerspiegelt. Des Weiteren zeigt die Volumenintegration der reversiblen Wärmeleitungsterme  $R_1$  und  $R_t$  ein annähernd adiabates Verhalten.

**Tabelle 4.4:** Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieterme ODP

Term	Integrierter Wert in W/K
Divergenz der Entropieadvektion $S_{adv}$	1,458
Divergenz der laminaren rev. Wärmeleitung $R_1$	$-1,727 \cdot 10^{-2}$
Divergenz der turbulenten rev. Wärmeleitung $R_t$	$1,478 \cdot 10^{-3}$
<b>Integrierter Entropietransport <math>\dot{T}_s</math></b>	<b>1,442</b>

Abbildung 4.8 visualisiert die räumliche Verteilung der Divergenz der Entropieadvektion  $S_{adv}$ . Es zeigen sich besonders in diesem Term unphysikalische Oszillationen. Besonders im Verdichtungsstoß sind diese sichtbar.



**Abbildung 4.8:** Lokale Divergenz der Entropieadvektion  $S_{adv}$  in  $W/(Km^3)$

Das gesamte Kontrollvolumen kann global als adiabat angenommen werden, lokal trifft dies jedoch nicht zu. Aus diesem Grund wird die Divergenz der laminaren ( $R_l$ ) und der turbulenten reversiblen Wärmeleitung ( $R_t$ ) berechnet. Die räumlichen Verteilungen sind in den Abbildungen 4.9 und 4.10 abgebildet. Die Größenordnung der Divergenz der laminaren reversiblen Wärmeleitung ist deutlich kleiner als die der Entropieadvektion. Entgegen der Definition von Zhao und Sandberg [26] wird hier deutlich, dass der turbulente Wärmefluss in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil aufgespalten werden sollte. Im Nachlauf bildet sich zentral ein Bereich aus, in dem die Divergenz der Entropieadvektion negativ ist. Da die Divergenz der turbulenten reversiblen Wärmeleitung dort jedoch positiv ist, gleicht die Summe beider Terme diesen Bereich aus, sodass er insgesamt positiv wird und sich dem Feld der gesamten Entropieproduktion deutlich annähert.

Die Summe aller Transportterme führt zu dem in Abbildung 4.11 gezeigten Feld für den gesamten Entropietransport  $\dot{T}_s$ . Ohne numerische Dissipation und Approximationsfehler müsste dieses Feld identisch mit der Produktionsseite sein und dementsprechend überall positive Werte aufweisen. Dennoch treten negative Gebiete auf. Insbesondere im Bereich der Verdichtungsstöße ist eine Oszillation in Strömungsrichtung erkennbar. Unmittelbar stromab der Hinterkante tritt zudem eine Oszillation quer zur Strömungsrichtung auf.

Außerdem stimmt die Zonendefinition aus Abschnitt 2.4 nicht exakt mit dem Feld der Divergenz aller Entropietransporte überein. Die Oszillationen in diesem Feld führen dazu, dass der Einfluss der Verlustmechanismen weitaus größer ist, als durch die festgelegten Kriterien erfasst werden kann. Abschnitt 4.1.4 diskutiert dies detailliert. Besonders betroffen sind die Region der Verdichtungsstöße sowie der Bereich kurz stromab der Hinterkante. Das Feld der Divergenz der Entropietransporte lässt hier auf eine hohe numerische Dissipation schließen. Um eine Zonenaufteilung für die Divergenz des Entropietransports

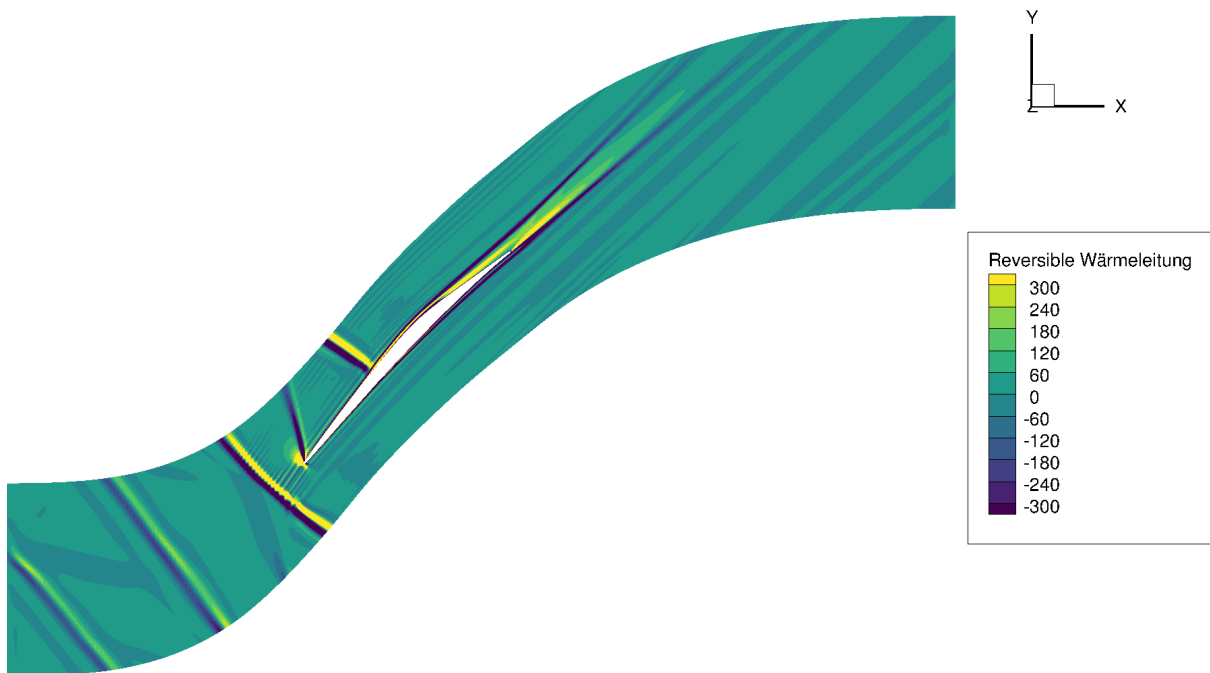


Abbildung 4.9: Lokale Divergenz der laminaren reversiblen Wärmeleitung  $R_l$  in  $W/(Km^3)$

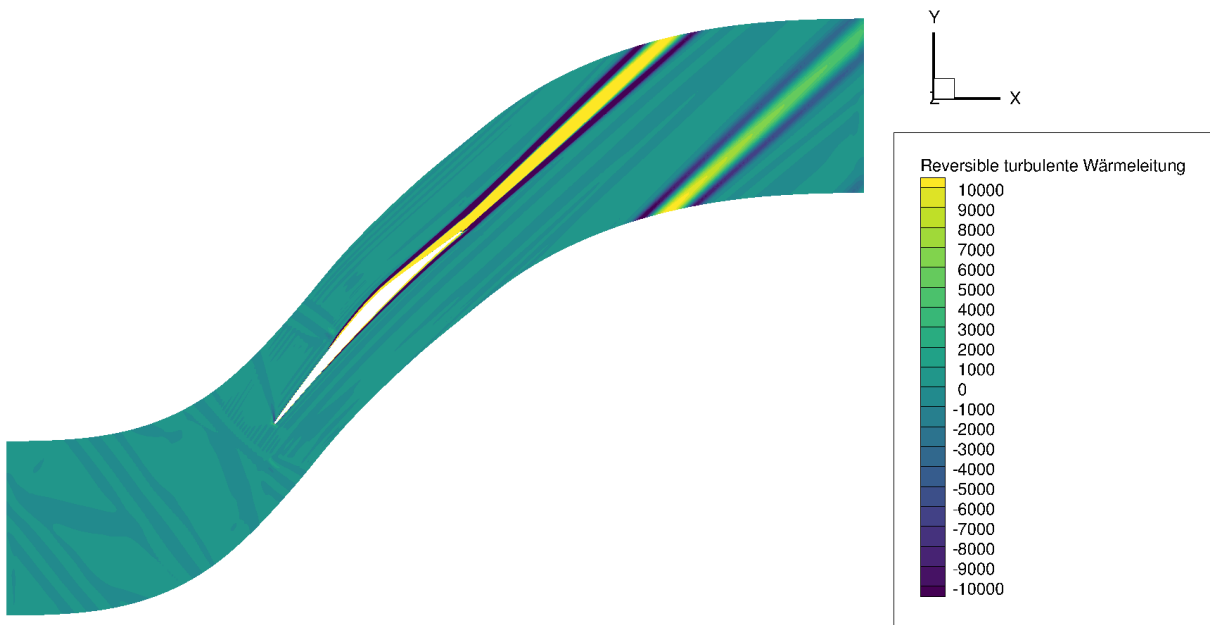


Abbildung 4.10: Lokale Divergenz der turbulenten reversiblen Wärmeleitung  $R_t$  in  $W/(Km^3)$

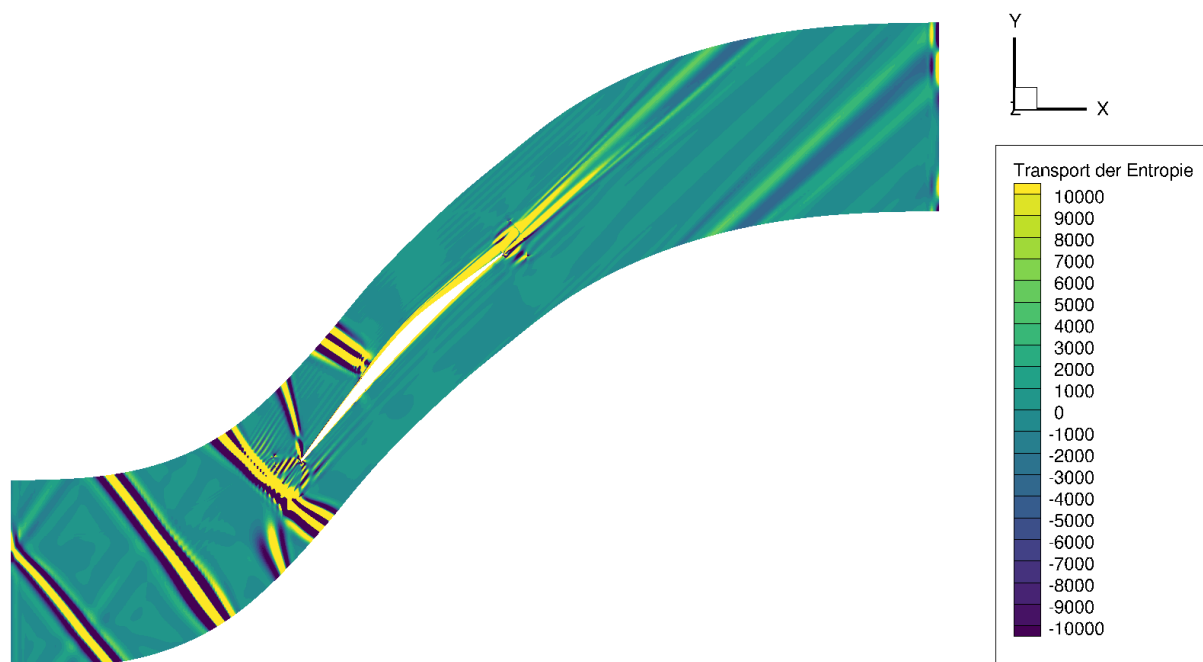


Abbildung 4.11: Gesamter Entropietransport  $\dot{T}_s$  in  $\text{W}/(\text{Km}^3)$

vorzunehmen, wurden manuell einzelne Kontrollvolumina definiert. Die Ergebnisse dieser Auswertung sind in Tabelle 4.5 dargestellt und den Werten aus Tabelle 4.3 gegenübergestellt.

Tabelle 4.5: Verbesserte Aufteilung von Entropietransport ODP

Zone	Transport $\dot{T}_s$ in $\text{W}/\text{K}$	Produktion $\dot{G}_s$ in $\text{W}/\text{K}$
Freier Strom	$1,122 \cdot 10^{-3}$	$7,672 \cdot 10^{-3}$
Verdichtungsstoß	$8,079 \cdot 10^{-1}$	$2,473 \cdot 10^{-3}$
Grenzschicht	$4,482 \cdot 10^{-1}$	$4,530 \cdot 10^{-1}$
Nachlauf	$1,852 \cdot 10^{-1}$	$1,747 \cdot 10^{-1}$

#### 4.1.4. Vergleich zwischen Transport und Produktion der Entropie

Die Analyse der lokalen Entropieproduktion verdeutlicht eine Diskrepanz zwischen dem summierten Entropietransport und den summierten Dissipationstermen. Dabei ist das zentrale Ergebnis der Untersuchung, dass das Feld der viskosen und thermischen Dissipation die realen Verluste nicht vollständig abbildet. Eine Volumenintegration der lokalen Entropieproduktionsraten über das gesamte Kontrollvolumen erreicht nicht den Wert der Entropiestromdifferenz zwischen Ein- und Auslass.

Das Feld der Entropieadvektion  $S_{\text{adv}}$  hingegen weist lokal signifikante negative Bereiche auf. Diese sind physikalisch als „negative Dissipation“ nicht interpretierbar. Dennoch zeigt sich, dass die Volumenintegration der Entropieadvektion exakt der Differenz der Entro-

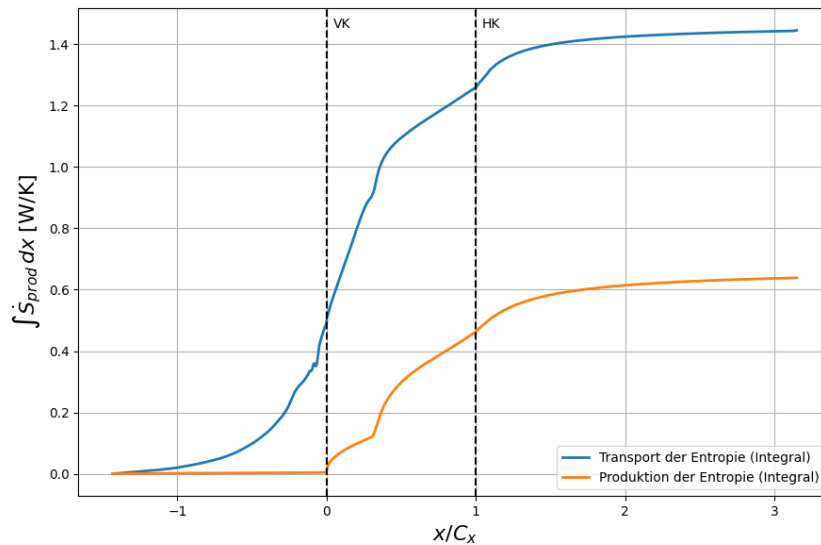
pieströme entspricht. Dabei fällt auf, dass die Oszillationen auf der Transportseite eine kriterienbasierte Zoneneinteilung analog zur Produktionsseite unmöglich machen.

Die Bilanzierung der einzelnen Zonen belegt, dass die Dissipationsterme die Verluste mit Ausnahme des Verdichtungsstoßes weitgehend korrekt quantifizieren. Im Bereich des Stoßes liegt die berechnete Dissipation jedoch um zwei Größenordnungen unter dem theoretisch erwarteten Wert. Die Transportseite zeigt jedoch, dass sie den Verlust über den gesamten Stoß quantifizieren kann, auch wenn der Verlust lokal negativ ist.

Die Ursache für dieses Phänomen liegt in der numerischen Auflösung von Verdichtungsstößen. In der Realität weisen Stöße nahezu unendliche Gradienten der Zustandsgrößen (Geschwindigkeit, Temperatur, Dichte, Druck und Entropie) auf. Numerische Verfahren müssen diese Gradienten begrenzen, um die Differenzbeträge der Größen über den Stoß hinweg stabil und endlich zu halten. Die Entropietransportgleichung offenbart, dass die negativen Gebiete dieser Oszillationen lokal unphysikalisch sind; die räumliche Integration über die gesamte Oszillation liefert jedoch den physikalisch korrekten Gesamtwert des Verlustmechanismus im Kontrollvolumen. Zudem zeigt sich, dass die Differenz der Produktionsseite und der Transportseite für die Grenzschicht deutlich geringer als für den Nachlauf ist. Vermutlich liegt dies an der Oszillation im Nachlaufbeginn. Hier ist eine deutliche Verbreiterung der relevanten Zone auf der Transportseite erkennbar.

Abbildung 4.12 zeigt den Verlauf der integrierten Entropieproduktion entlang der x-Achse. Dabei wird sowohl die Produktionsseite als auch die Transportseite ausgewertet. Es ist ein größtenteils monoton steigender Verlauf zu erkennen, mit einer Ausnahme auf der Transportseite stromauf der Vorderkante. Dies ist vermutlich darin begründet, wie die Auswerteebene ein negatives Gebiet der Oszillation des Verdichtungsstoßes schneidet. Die Produktionsseite weist durch den unterschätzten Verdichtungsstoß bis zur Vorderkante keine relevante Entropieproduktion auf. Auch im Verlauf von der Vorderkante bis zur Transition ist durch den Verdichtungsstoß ein deutlicher Unterschied erkennbar. Gleichzeitig ist auf der Produktionsseite eine Einteilung in die einzelnen Verlustmechanismen erkennbar. Mit dem Beginn der Vorderkante baut sich die laminare Grenzschicht auf. Der Verdichtungsstoß induziert die Transition auf der Saugseite, was zu einer erheblichen Verluststeigerung führt. Zuletzt sorgt das Aufeinandertreffen der saugseitigen und der druckseitigen Grenzschicht stromab der Hinterkante für einen leichten Anstieg der momentanen Entropieproduktion im Vergleich zur Entropieproduktion der einzelnen Grenzschichten. Die Entropieproduktion nimmt dann stromab immer weiter ab, bis ein ausgemischter homogener Zustand erreicht ist.

Um den Unterschied in der Grenzschicht und dem Nachlauf zu visualisieren, wurde der Verdichtungsstoß mit seiner Oszillation aus dem Kontrollvolumen entfernt. Abbildung 4.13 zeigt die integrierte Entropieproduktion entlang der x-Achse. Nach der Transition wird ein leichter Unterschied zwischen Produktion und Transport erkennbar, wobei die Produktion den Transport unterschätzt. Über den gesamten Verlauf der Grenzschicht hinweg wird der Gesamtverlust jedoch annähernd gleich quantifiziert. Stromab der Hinterkante wird durch numerische Dissipation mehr Entropie erzeugt als auf der Produktionsseite. Weiter stromab nähert sich der Gesamtverlust der Produktion im Nachlauf wieder dem Verlauf des Transports an, bleibt jedoch leicht darunter. Zusätzlich ist eine



**Abbildung 4.12:** Entropiefluss über  $x$

geringfügige numerische Dissipation in der Nähe des Austrittsrandes festzustellen.

Im Folgenden erfolgt die Auswertung der in Abbildung 4.14 dargestellten Schnitte durch das Kontrollvolumen hinsichtlich der Produktions- und Transportseite. Abbildung 4.15 zeigt den Vergleich zwischen der Entropieproduktion und dem Entropietransport entlang eines Schnittes orthogonal zur  $x$ -Achse bei  $\frac{x}{C_x} = 1,04$  stromab der Hinterkante. Dafür wird im Folgenden die Teilungskoordinate  $\eta$  verwendet (siehe Abschnitt 3.1.1). Dabei fällt eine erhebliche Oszillation im Entropietransport auf, die deutlich breiter als die Einflusszone der Produktionsseite ist. Dies führt dazu, dass auch dort keine Einteilung der Verlustmechanismen mit den verwendeten Kriterien möglich ist. Dennoch zeigt sich, dass beide Verläufe den Einfluss des Verlustmechanismus enthalten. Dabei ist die relevante Entropieproduktion, die durch die Grenzschicht der Druckseite entsteht, wesentlich schmäler in ihrem Einfluss als die der Saugseite. Jedoch ist der maximale druckseitige Wert deutlich größer als auf der Saugseite. Der integrierte Flächenwert ist jedoch vergleichbar groß. Weiter stromab klingt die Entropieproduktion ab. Wie in Abbildung 4.16 ersichtlich, bleibt die Oszillation bestehen. Es zeigt sich, dass der Unterschied zwischen der Druckseite und der Saugseite durch die Ausmischung dabei fast nicht mehr erkennbar ist.

Die Abbildungen 4.17 und 4.18 zeigen einen Schnitt durch die laminare Grenzschicht auf der Saug- und der Druckseite bei  $\frac{x}{C_x} = 0,23$ . Auch hier tritt eine Oszillation beim Transport der Entropie auf, der Wert bleibt jedoch weitestgehend positiv. Der integrale Wert über die Länge ist ebenfalls annähernd identisch. Auf der Produktionsseite zeigt sich dabei für die Saugseite ein kontinuierlich steigender Verlauf des Verlustes von der freien Strömung bis zur Profilloberfläche. Auf der Druckseite hingegen erreicht der Verlust vor der Profilloberfläche bereits sein Maximum und fällt bis zur Profilloberfläche auf ca. 20 Prozent des Maximums wieder ab.

Zuletzt ist die Oszillation des Verdichtungsstoßes in Abbildung 4.19 dargestellt. Hierfür wurde eine Stromlinie berechnet, deren Verlauf in Abbildung 4.14 ersichtlich ist. Es zeigt

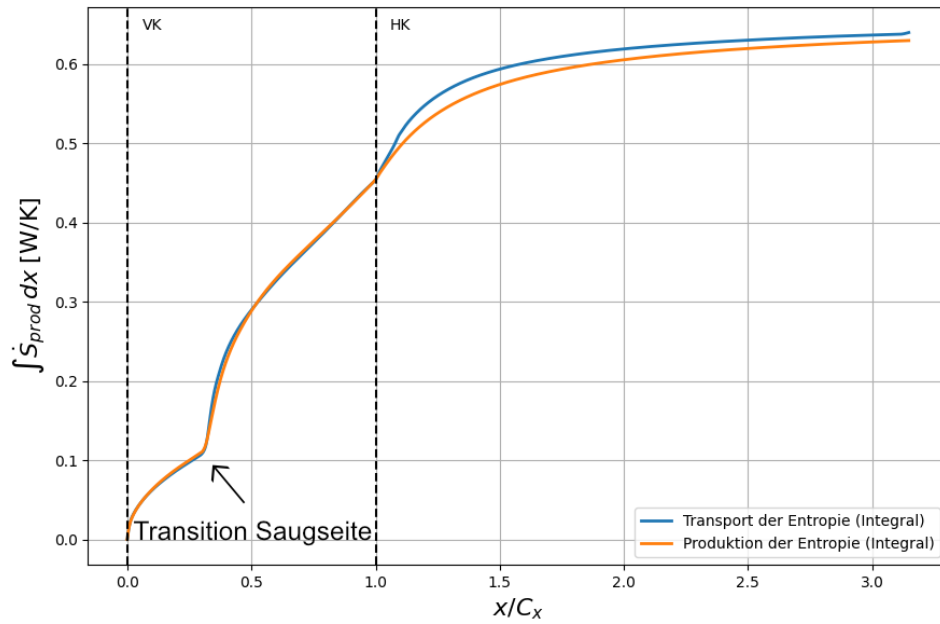


Abbildung 4.13: Integrierte Entropieproduktion entlang der x-Achse ohne Verdichtungsstoßzone

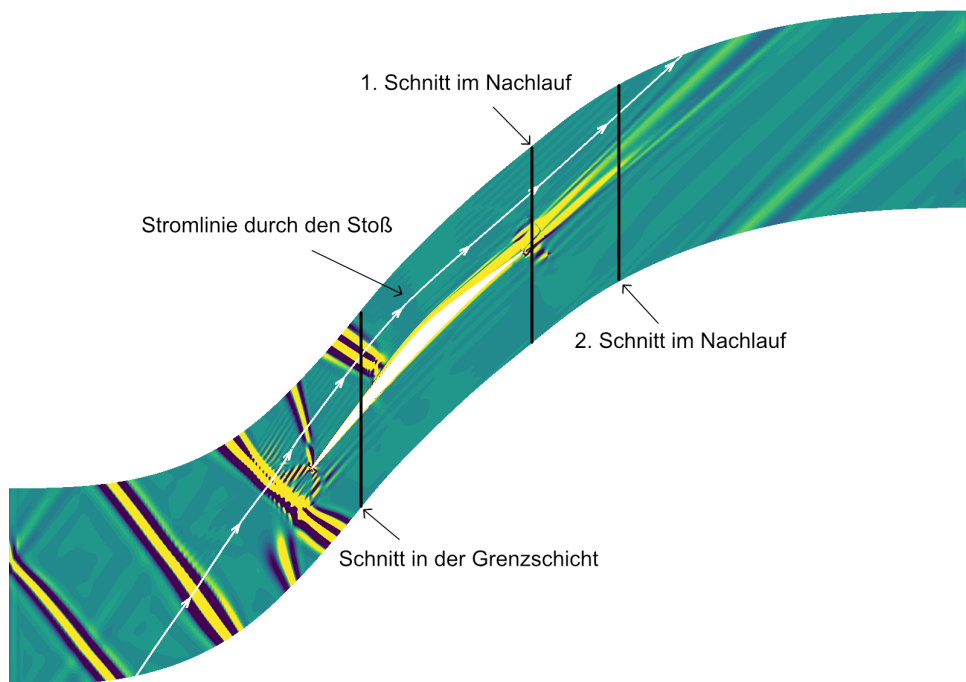


Abbildung 4.14: Stromlinienverlauf zur Oszillationsauswertung

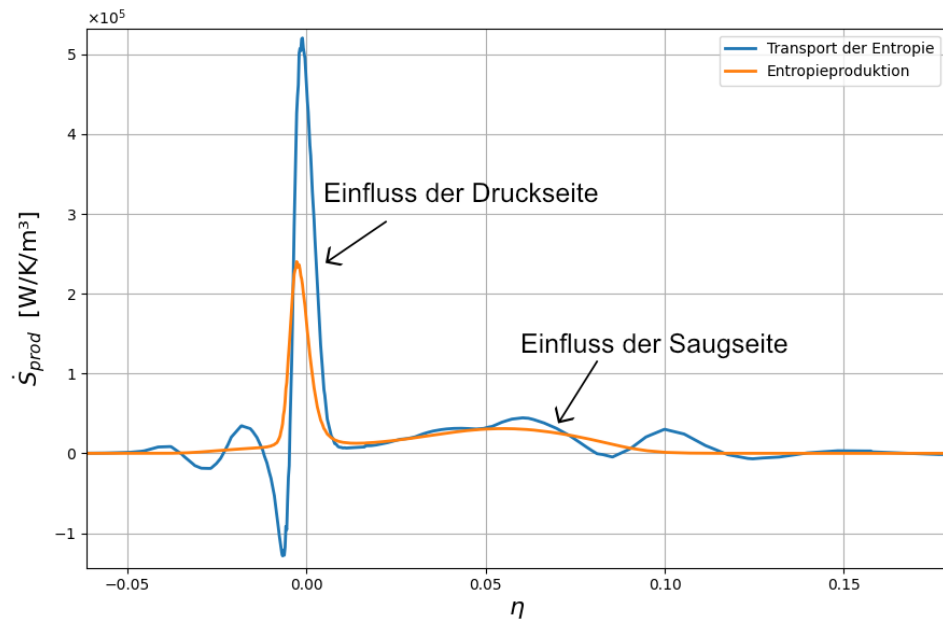


Abbildung 4.15: Oszillation in der Nachlaufregion  $\frac{x}{C_x} = 1,04$

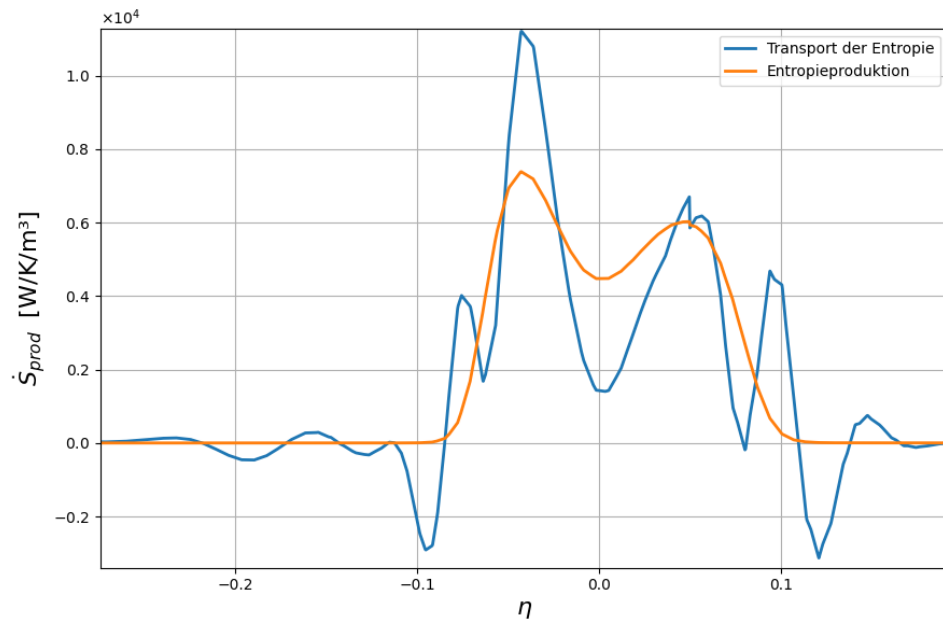


Abbildung 4.16: Oszillation in der Nachlaufregion  $\frac{x}{C_x} = 1,45$

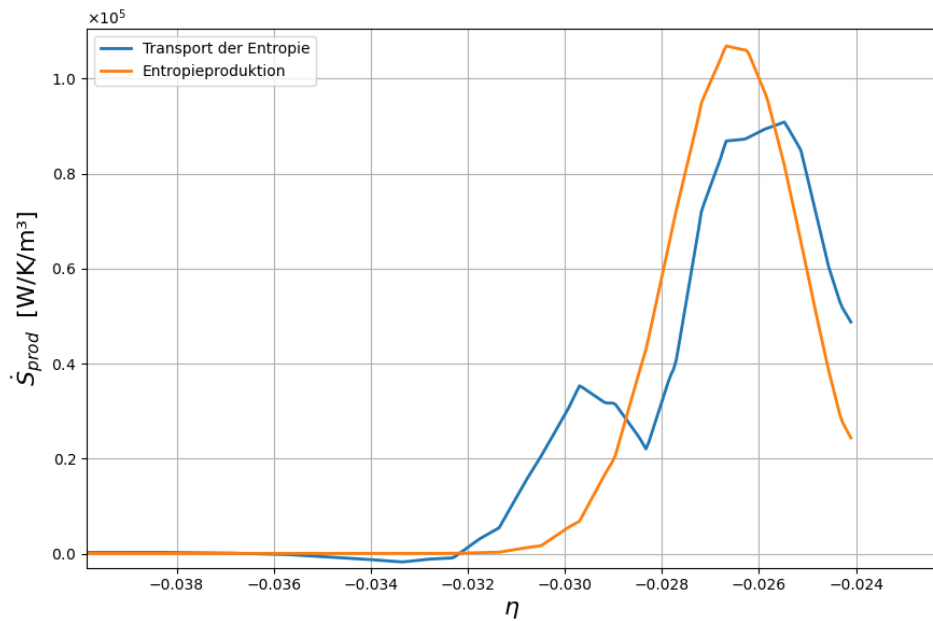


Abbildung 4.17: Oszillation in der Grenzschicht (Druckseite)  $\frac{x}{C_x} = 0,23$

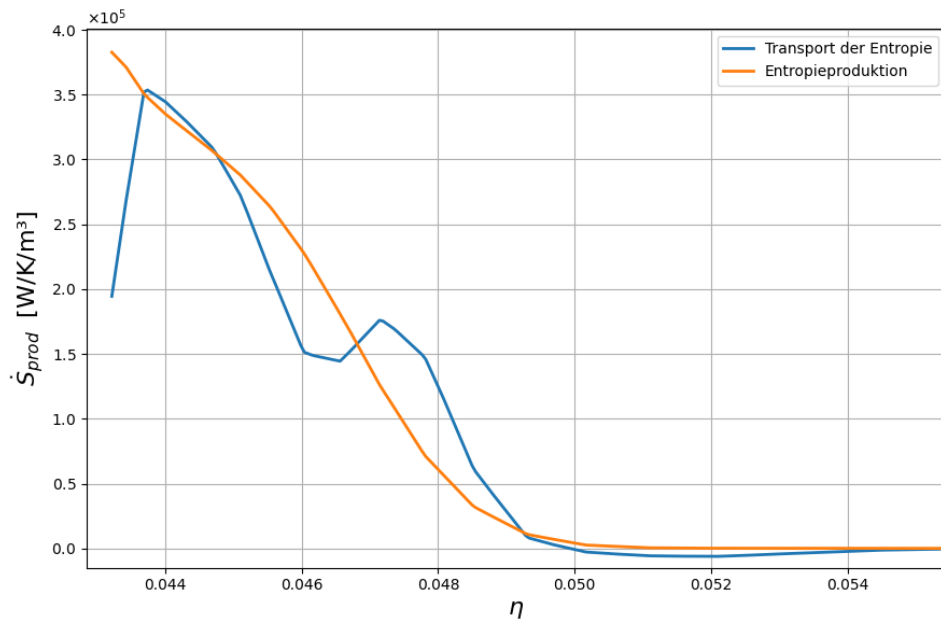


Abbildung 4.18: Oszillation in der Grenzschicht (Saugseite)  $\frac{x}{C_x} = 0,23$

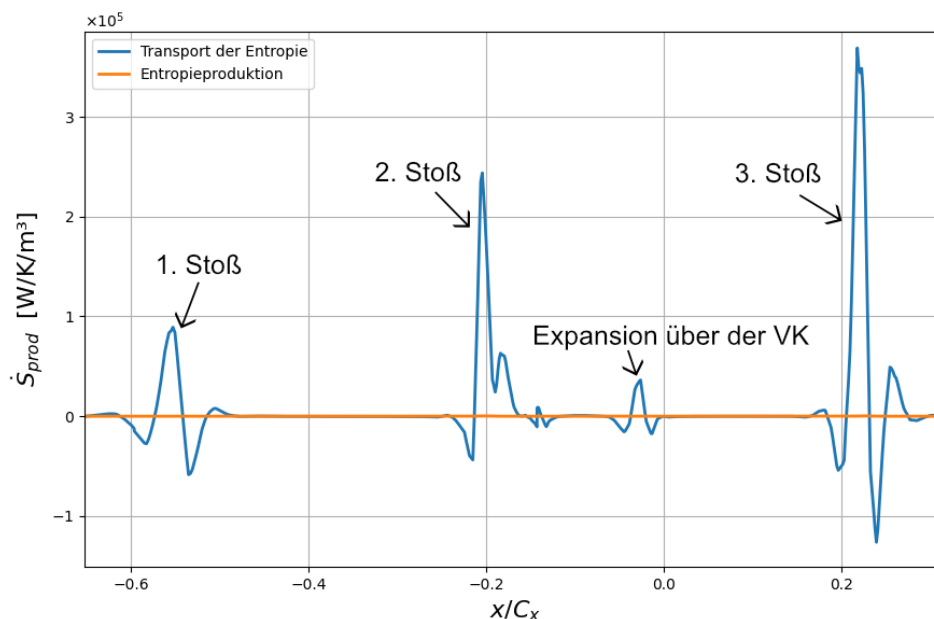


Abbildung 4.19: Oszillation am Stoß

sich eine sehr starke Oszillation im Entropietransport, während die Entropieproduktion nahezu null beträgt. Des Weiteren zeigt sich eine Oszillation bei der Expansion über der Vorderkante, für die ebenfalls die Produktionsseite nahezu null ist. Eine Volumenintegration hat dabei ergeben, dass der Verlust nahe null ist und dementsprechend dem freien Strom hinzugefügt wird.

## 4.2. Aerodynamischer Auslegungspunkt (ADP)

Im Gegensatz zum ODP konvergiert der ADP nicht in RANS-Simulationen, weshalb das schwingende Verhalten mit einer URANS-Simulation aufgelöst werden muss. Es fällt auf, dass das charakteristische Verhalten des Entropietransports und der Entropieproduktion weiterhin besteht. Der veränderte Betriebspunkt weist ein deutlich höheres Verlustniveau auf, was durch die Ablösung und die merklich breitere turbulente Grenzschicht begründet ist. Das Verlustniveau ist dabei ungefähr dreimal so hoch. Tabelle 4.6 zeigt die Aufteilung der Volumenintegrationsergebnisse für die Produktionsseite  $\dot{G}_s$ . Erneut zeigt sich, dass die viskose Dissipation, insbesondere der turbulente Anteil  $D_r$ , den größten Teil des Verlusts ausmacht. Allerdings beschreibt die Produktionsseite den Gesamtverlust auch hier nicht vollständig, da wieder ein großer Teil numerisch dissipiert wird.

Tabelle 4.7 zeigt die Ergebnisse der Volumenintegration für die einzelnen Terme der Transportseite  $\dot{T}_s$ . Das Integral der Entropieadvektion  $S_{adv}$  entspricht dabei dem Gesamtverlust. Die integrierten Divergenzen der reversiblen Wärmeleitungsterme  $R_l$  und  $R_t$  weisen abermals auf ein adiabates Verhalten hin.

**Tabelle 4.6:** Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieproduktionsterme ADP URANS

Term	Integrierter Wert in W/K
Viskose Dissipation $D_1$	$1,801 \cdot 10^{-1}$
Turbulente viskose Dissipation $D_r$	1,882
Irreversible Wärmeleitung $I_1$	$1,660 \cdot 10^{-2}$
Irreversible turb. Wärmeleitung $I_t$	$1,454 \cdot 10^{-1}$
<b>Gesamte berechnete Dissipation <math>\dot{G}_s</math></b>	<b>2,224</b>

**Tabelle 4.7:** Ergebnisse der Volumenintegration der Entropietransportterme ADP URANS

Term	Integrierter Wert in W/K
Divergenz rev. Wärmeleitung $R_1$	$-1,884 \cdot 10^{-2}$
Divergenz rev. turb. Wärmeleitung $R_t$	$-2,361 \cdot 10^{-2}$
Divergenz Entropieadvektion $S_{adv}$	4,241
<b>Divergenz des Entropietransportes <math>\dot{T}_s</math></b>	<b>4,198</b>

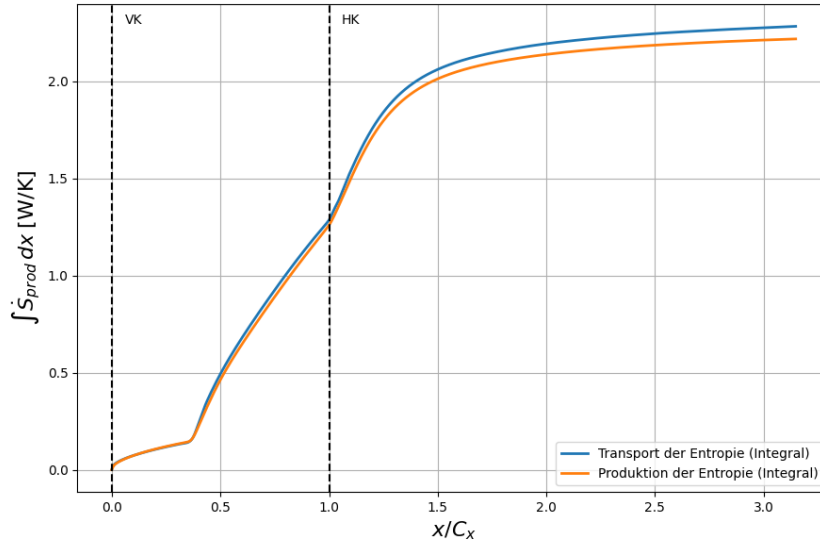
Zudem beschreiben die definierten Zonenkriterien die Produktionsseite erneut hinreichend genau. Die Kriterien sind identisch mit denen des ODP (siehe Tabelle 4.2). Für die Transportseite gilt dies jedoch nicht. Durch eine manuelle Aufteilung ergeben sich die in Tabelle 4.8 dargestellten Werte. Hier ist wiederum deutlich erkennbar, dass der Verlust des Verdichtungsstoßes signifikant unterschätzt wird. Grenzschicht und Nachlauf weisen ein geringes Maß an numerischer Dissipation auf, wobei der Nachlauf auch hier stärker von numerischer Dissipation betroffen ist als die Grenzschicht.

**Tabelle 4.8:** Zonenbasierte Aufteilung von Entropieproduktion und -transport ADP URANS

Zone	Produktion $\dot{G}_s$ in W/K	Transport $\dot{T}_s$ in W/K
Freier Strom	$4,494 \cdot 10^{-3}$	$5,652 \cdot 10^{-3}$
Verdichtungsstoß	$5,912 \cdot 10^{-3}$	1,909
Grenzschicht	1,263	1,288
Nachlauf	$9,501 \cdot 10^{-1}$	$9,964 \cdot 10^{-1}$

Eine Integration der Entropieproduktion unter Auslassung der Verdichtungsstoßzone ist in Abbildung 4.20 dargestellt. Ähnlich wie bei der RANS-Simulation für den ODP stimmt der Verlauf in der Grenzschicht weitestgehend überein. Im Nachlauf zeigt sich eine Diskrepanz, bei der die Produktionsseite die Transportseite unterschätzt.

Für den ADP steht eine LES, beschrieben von Klose et al., zur Verfügung [8]. Diese LES wird verwendet, um die Ergebnisse der URANS-Simulation zu validieren. In der LES sorgt die numerische Dissipation ebenfalls für eine Diskrepanz zwischen der Transport-



**Abbildung 4.20:** Integrierte Entropieproduktion entlang der x-Achse ohne Verdichtungsstoßzone (ADP URANS)

und der Produktionsseite. Im Unterschied zur URANS-Simulation hängt die numerische Dissipation hier jedoch weniger von hohen Gradienten ab; vielmehr wird sie benötigt, um kleinskalige Turbulenz zu modellieren. Allerdings lassen sich für die LES instantane Felder auswerten. Um die Auswertung der LES von der bisherigen RANS-Methodik abzugrenzen, werden die gefilterten Terme im Folgenden mit dem Index „LES“ versehen. Die Gesamtbilanz zwischen Transport ( $\dot{T}_{s,LES}$ ) und Produktion ( $\dot{G}_{s,LES}$ ) lässt sich direkt über die Gleichung

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho s)}{\partial t}}_{S_{inst}} + \underbrace{\frac{\partial(\rho s u_i)}{\partial x_i}}_{S_{adv,LES}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{q_i}{T} \right)}_{R_{LES}} = \underbrace{\frac{1}{T} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{D_{LES}} + \underbrace{\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{1}{T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2}_{I_{LES}} + \underbrace{\phi^{SGS}}_{\Phi_{SGS}} \quad (4.4)$$

auswerten. Die Dissipation durch die kleinskalige Turbulenz  $\Phi_{SGS}$  (Subgrid-Scale) kann dabei nicht direkt bestimmt werden. Durch die statistische Unsicherheit muss auf der Transportseite zusätzlich der instationäre Term  $S_{inst}$  der Entropietransportgleichung berücksichtigt werden. Eine Integration über die einzelnen Transportterme ist in Tabelle 4.9 dargestellt. Es zeigt sich, dass der instationäre Term nicht vernachlässigbar ist. Zudem bestätigt sich erneut, dass das System annähernd adiabat ist. Dabei entspricht die Volumenintegration der Entropieadvektion  $S_{adv,LES}$  erneut dem globalen Verlust, der durch die Differenz der Entropieströme berechnet wurde.

Für die Produktionsseite lassen sich durch die instantane Auswertung direkt die viskose Dissipation  $D_{LES}$  und die irreversible Wärmeleitung  $I_{LES}$  bestimmen. Die Ergebnisse der Volumenintegration sind in Tabelle 4.10 dargestellt. Es zeigt sich, dass die irreversible Wärmeleitung erneut eine Größenordnung kleiner als die viskose Dissipation ist. Jedoch unterschätzt die Produktionsseite den Entropietransport erheblich, was auf den fehlenden Anteil der Subgrid-Skalen  $\Phi_{SGS}$  zurückzuführen ist.

Für die Bestimmung der Zonen wurden abermals die bereits beschriebenen Kriterien

**Tabelle 4.9:** Ergebnisse der Volumenintegration der Entropietransportterme ADP LES

Term	Integrierter Wert in W/K
Divergenz rev. Wärmeleitung $R_{LES}$	$-6,539 \cdot 10^{-3}$
Divergenz Entropieadvektion $S_{adv,LES}$	1,027
Instationäre Terme $S_{inst}$	$2,858 \cdot 10^{-1}$
<b>Gesamter berechneter Entropietransport <math>\dot{T}_{s,LES}</math></b>	<b>1,306</b>

**Tabelle 4.10:** Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieproduktionsterme ADP LES

Term	Integrierter Wert in W/K
Viskose Dissipation $D_{LES}$	$1,620 \cdot 10^{-1}$
Irreversible Wärmeleitung $I_{LES}$	$1,550 \cdot 10^{-2}$
<b>Gesamte berechnete Dissipation</b>	<b>0,1775</b>

kalibriert. Die Werte sind in Tabelle 4.11 dargestellt. Dabei wurde festgestellt, dass die Zonen, die die einzelnen Verlustmechanismen charakterisieren, sowohl auf der Transport- als auch auf der Produktionsseite deckungsgleich sind. Ebenso treten keine systematischen Oszillationen in der Verdichtungsstoßregion oder in anderen Gebieten auf. Die Ergebnisse der Volumenintegration über die einzelnen Zonen sind in Tabelle 4.12 aufgeführt. Es zeigt sich, dass die Auswertung der rein aufgelösten Produktionsseite in keiner Zone den korrekten Verlust liefert. Die numerische bzw. modellierte Dissipation ist in allen Zonen sehr groß, wengleich der Verdichtungsstoß wieder besonders stark betroffen ist.

**Tabelle 4.11:** Zonendefinition LES

Zone	Größe	Wert
Verdichtungsstoß	$C_{Shock}$ und $\nabla \cdot \mathbf{u}$	$> 22$ und $< 0$
Grenzschicht	$C$ und $x/C_x$	1,02 und $< 1$
Nachlauf	$C$ und $x/C_x$	1,02 und $> 1$

#### 4.2.1. Vergleich der Ergebnisse aus URANS- und LES-Simulationen

Für den Vergleich der Ergebnisse des ADP zwischen URANS und LES muss der Verlust auf die Kanalhöhe bezogen werden. Die Spannweite  $b$  beträgt für den LES-Fall 0,01 m und für die RANS-Simulationen 0,03 m. Nach Klose et al. [8] hat die Breite bei der LES keinen Einfluss mehr auf das Ergebnis. Aufgrund der geringen Dreidimensionalität beider Strömungsfelder ist ein direkter Vergleich zulässig. Da die berechnete Produktion in der LES den Gesamtverlust in jedem Gebiet deutlich unterschätzt, wird für beide Fälle die Seite des Entropietransports verglichen. Nach der Skalierung ergibt sich die in Tabelle 4.13 dargestellte Verteilung. Es ist ersichtlich, dass die URANS-Simulation den Gesamtverlust

**Tabelle 4.12:** Zonenbasierte Aufteilung von Entropieproduktion und -transport ADP LES

Zone	Produktion in W/K	Transport in W/K
Freier Strom	$1,380 \cdot 10^{-3}$	$3,888 \cdot 10^{-2}$
Verdichtungsstoß	$4,470 \cdot 10^{-3}$	$4,257 \cdot 10^{-1}$
Grenzschicht	$1,515 \cdot 10^{-1}$	$5,107 \cdot 10^{-1}$
Nachlauf	$2,079 \cdot 10^{-2}$	$3,218 \cdot 10^{-1}$

leicht überschätzt. Dabei wird der Verlust im Verdichtungsstoß überschätzt und in der Grenzschicht unterschätzt.

**Tabelle 4.13:** Zonenbasierte Aufteilung des Entropietransports ADP (LES vs. URANS)

Zone	LES in W/(Km)	URANS in W/(Km)
Freier Strom	$3,888 \cdot 10^{-1}$	$1,884 \cdot 10^{-2}$
Verdichtungsstoß	4,257	6,363
Grenzschicht	5,107	4,293
Nachlauf	3,218	3,321
<b>Gesamter berechneter Transport</b>	13,06	13,99

### 4.3. Netz- und Konvergenzstudien

Die numerische Genauigkeit der vorliegenden Untersuchung wird maßgeblich durch die räumliche Diskretisierung des Rechengebiets beeinflusst. Im Rahmen der Netz- und Konvergenzstudie wurde sichergestellt, dass die Lösung gitterunabhängig ist. Dies bedeutet, dass zum einen die Residuen der Erhaltungsgleichungen um einige Größenordnungen abgeklungen sind und zum anderen die globalen Zielgrößen (wie Totaldruckverhältnis und Massenstrom) ein stationäres Verhalten aufweisen. Da numerische Dissipation zu Abweichungen zwischen dem über die Transportseite bestimmten Verlust und dem durch die Produktionsseite bestimmten Verlust führt, wurde der Einfluss der Netzauflösung auf diese Diskrepanz untersucht. Eine globale Betrachtung zeigt, dass mit der Variation der Netzdichte der Gesamtverlust annähernd konstant bleibt. Tabelle 4.14 zeigt die im Kontrollvolumen errechnete gesamte Entropieproduktion, bestimmt mittels der Differenz der Entropieströme.

Eine Integration der Entropieproduktion für die Transport- und die Produktionsseite ist in Abbildung 4.21 dargestellt. Dabei wurde die Verdichtungsstoßzone entfernt, da diese eine Diskrepanz enthält, die sich nicht durch Netzverfeinerungen in einer praxisgerechten Größenordnung beheben lässt. Es zeigt sich eine abnehmende Differenz zwischen der Transportseite und der Produktionsseite bei feineren Netzen. Des Weiteren ist der Verlauf der Transportseite direkt stromab der Hinterkante bei gröberen Netzen zunehmend

**Tabelle 4.14:** Ergebnisse der Volumenintegration der Entropieterme ODP für verschiedene Netze

Netzverfeinerungsstufe	Gesamte Entropieproduktion in W/K
Grob	1,42
Mittel	1,41
Fein	1,46

unstetig. Auch zeigt sich für das grobe Netz eine deutliche Diskrepanz im Verlauf bis zur Hinterkante.

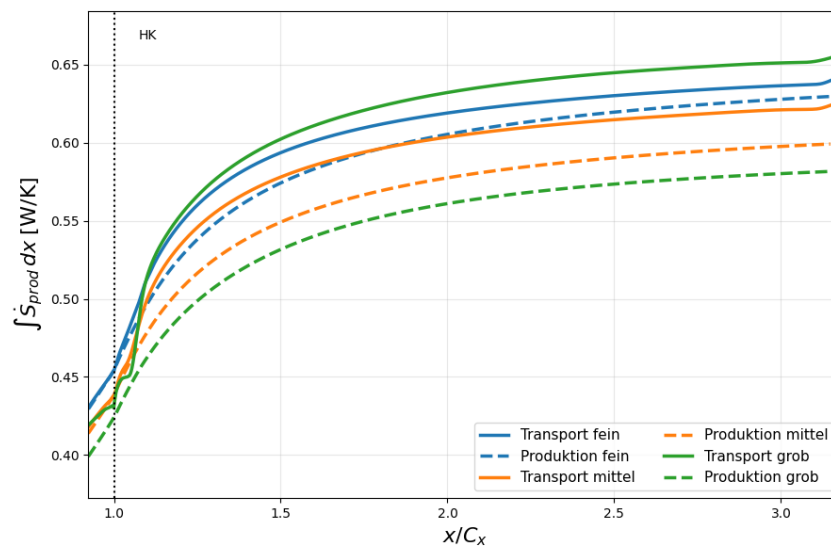
**Abbildung 4.21:** Vergleich der Netze

Tabelle 4.15 zeigt den prozentualen Fehler der integrierten Entropiebilanz bis zur Hinterkante (HK) und ab der Hinterkante. Der Fehler entspricht dabei der Differenz bezogen auf die Transportseite. Es ist zu erkennen, dass in der Grenzschicht kaum numerische Dissipation vorhanden ist, im Nachlauf jedoch schon. Die Ergebnisse belegen eine erhebliche Reduzierung der numerischen Dissipation durch die Netzverfeinerungen.

**Tabelle 4.15:** Fehler der Entropieterme im ODP in Abhängigkeit der Netzauflösung

Netzverfeinerungsstufe	Fehler bis HK %	Fehler ab HK %
Grob	1,72	-29,40
Mittel	0,18	-13,71
Fein	-0,13	-5,76

Tabelle 4.16 zeigt die Verluste in der Verdichtungsstoßzone auf der Produktionsseite für die unterschiedlichen Netze. Es zeigt sich eine Erhöhung der berechneten Produktion bei feineren Netzen. Allerdings lässt sich diese nicht mit dem Verlust durch die Transportseite vergleichen, da der Unterschied des Verdichtungsstoßverlustes für die einzelnen Netze

größer ist als die erlangte Verbesserung. Des Weiteren ist eine zusätzliche Verfeinerung durch den Unterschied über zwei Größenordnungen nicht sinnvoll.

**Tabelle 4.16:** Entropieproduktion im Verdichtungsstoß für unterschiedliche Netze

<b>Netzverfeinerungsstufe</b>	<b>Entropieproduktion im Verdichtungsstoß in W/K</b>
Grob	$1,458 \cdot 10^{-3}$
Mittel	$1,981 \cdot 10^{-3}$
Fein	$2,473 \cdot 10^{-3}$

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit zeigt, dass eine mechanismentrennscharfe Quantifizierung von Verlusten für das untersuchte TCTA-Verdichterschaukelgitter sowohl im ODP als auch im ADP grundsätzlich möglich ist. Grundlage hierfür ist die Herleitung und Anwendung einer Entropietransportgleichung, die unter physikalisch begründeten Approximationen innerhalb von RANS-Simulationen einsetzbar ist.

Die Ergebnisse belegen, dass in RANS-Simulationen sowohl Produktions- als auch Transportterme zur Beschreibung von Grenzschicht- und Nachlaufverlusten beitragen, während Stoßverluste ausschließlich durch die Transportterme erfasst werden. Diese klare funktionale Trennung zeigt, dass etablierte Verlustmodelle, die primär auf Produktionsmechanismen basieren, strukturell unvollständig sind.

Zentral ist die Erkenntnis, dass die numerische Dissipation den dominanten Approximationsfehler darstellt und die physikalische Interpretierbarkeit der Verlustzerlegung maßgeblich limitiert. Da konventionelle Kriterien zur Zuordnung einzelner Verlustmechanismen genau diese Interpretierbarkeit voraussetzen, lässt sich gegenwärtig nur die Produktionsseite konsistent kriterienbasiert auswerten.

In LES wirkt die numerische Dissipation grundlegend anders. Zwar können sowohl Produktions- als auch Transportterme mithilfe konventioneller Kriterien räumlich strukturiert werden, eine konsistente Quantifizierung der Verluste ist jedoch ausschließlich über die Transportterme möglich. Der Vergleich mit URANS-Simulationen zeigt darüber hinaus signifikante Abweichungen und belegt damit eindeutig die ausgeprägte Modell- und Auflösungsabhängigkeit der Verlustzuordnung.

Aus diesen Ergebnissen folgt, dass bestehende Methoden zur Verlustquantifizierung in ihrer aktuellen Form keine hinreichend robuste Grundlage für den Einsatz in der aerodynamischen Optimierung auf Basis von RANS-Ansätzen darstellen. Insbesondere fehlt eine kriterienbasierte und physikalisch konsistente Definition der Transportterme.

Für zukünftige Arbeiten ergibt sich daraus ein klarer Handlungsbedarf: Erstens ist eine systematische und belastbare Methodik zur Abgrenzung und Quantifizierung der Transportterme zu entwickeln. Zweitens muss der Einfluss der numerischen Dissipation isoliert, quantifiziert und kontrolliert werden, um deren verzerrenden Einfluss auf die Verlustzerlegung gezielt zu reduzieren. Ohne diese Weiterentwicklungen bleibt eine zuverlässige, mechanismentreue Analyse von Verlustmechanismen in transsonischen Gitterströmungen nicht erreichbar.



# Literaturverzeichnis

- [1] ALBADA, G. D. ; VAN LEER, B. ; ROBERTS JR, W.: A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. In: *Astronomy and Astrophysics*, vol. 108, no. 1, Apr. 1982, p. 76-84. 108 (1982), S. 76–84
- [2] BERGMANN, M. ; GÖLDEN, R. ; MORSBACH, C.: Numerical investigation of split form nodal discontinuous Galerkin schemes for the implicit LES of a turbulence channel flow. In: *Proceedings of the 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics*, 2018
- [3] BERGMANN, M. ; MORSBACH, C. ; MÖLLER, F. M. ; KLOSE, B. F. ; HERGT, A. ; GOINIS, G.: A Comparative Study of Varying Incidence Angle Effects on a Low-Reynolds-Number Compressor Cascade Based on Experiments and Low-Fidelity and High-Fidelity Numerical Simulations. In: *International Journal of Turbomachinery, Propulsion and Power* 10 (2025), Nr. 4. <http://dx.doi.org/10.3390/ijtp10040042>. – DOI 10.3390/ijtp10040042. – ISSN 2504–186X
- [4] DENTON, J. D.: Loss Mechanisms in Turbomachines. In: *Journal of Turbomachinery* 115 (1993), S. 621–656
- [5] DEUTSCHES ZENTRUM FÜR LUFT- UND RAUMFAHRT (DLR): *3D Framework TRACE*. <https://www.dlr.de/de/at/forschung-und-transfer/softwareloesungen/3d-framework-trace>. Version: 2025. – TRACE-Portal
- [6] GRINSTEIN, F. F. ; MARGOLIN, L. G. ; RIDER, W. J.: *Implicit large eddy simulation*. Bd. 10. Cambridge university press Cambridge, 2007
- [7] KLINNER, J. ; MUNOZ LOPEZ, E. J. ; HERGT, A. ; WILLERT, C. E.: The Unsteady Shock-Boundary Layer Interaction in a Compressor Cascade—Part I: Measurements With Time-Resolved Particle Image Velocimetry. In: *Journal of Turbomachinery* 147 (2025), 02, Nr. 9, 091001. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4067467>. – DOI 10.1115/1.4067467. – ISSN 0889–504X
- [8] KLOSE, B. F. ; MORSBACH, C. ; BERGMANN, M. ; MUNOZ LOPEZ, E. J. ; HERGT, A. ; KÜGELER, E.: The Unsteady Shock–Boundary Layer Interaction in a Compressor Cascade—Part II: High-Fidelity Simulation. In: *Journal of Turbomachinery* 147 (2025), 02, Nr. 9, 091002. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4067097>. – DOI 10.1115/1.4067097. – ISSN 0889–504X
- [9] KOCK, F. ; HERWIG, H.: Local entropy production in turbulent shear flows: A high-Reynolds number model with wall functions. In: *International journal of heat and mass transfer* 47 (2004), Nr. 10-11, S. 2205–2215
- [10] KOLMOGOROV, A. N.: The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number. In: *Cr Acad. Sci. USSR* 30 (1941), S. 301

- [11] LANGEHEINECKE, K. ; KAUFMANN, A. ; LANGEHEINECKE, K. ; THIELEKE, G.: *Thermodynamik für Ingenieure*. Springer, 2025
- [12] LANGTRY, R. B. ; MENTER, F.: Correlation-based transition modeling for unstructured parallelized computational fluid dynamics codes. In: *AIAA journal* 47 (2009), Nr. 12, S. 2894–2906
- [13] LEER, B. van: Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method. In: *Journal of Computational Physics* 32 (1979), Nr. 1, 101-136. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1). – DOI [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(79\)90145-1](https://doi.org/10.1016/0021-9991(79)90145-1). – ISSN 0021-9991
- [14] LENG, Y. ; LI, X. ; FU, D. ; MA, Y.: Optimization of the MUSCL scheme by dispersion and dissipation. In: *Science China Physics, Mechanics and Astronomy* 55 (2012), Nr. 5, S. 844–853
- [15] LEVEQUE, R. J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*. NSF Award Number 9803442. Directorate for Mathematical and Physical Sciences, Division Of Mathematical Sciences. 1998., Juli 1998
- [16] LIEPMANN, H. W. ; ROSHKO, A.: *Elements of gasdynamics*. Courier Corporation, 2001
- [17] MENTER, F. ; FERREIRA, J. C. ; ESCH, T. ; KONNO, B. ; GERMANY, AC: The SST turbulence model with improved wall treatment for heat transfer predictions in gas turbines. In: *Proceedings of the international gas turbine congress* Bd. 1 Tokyo, Japan, 2003, S. 2–7
- [18] MUNOZ LOPEZ, E. J. ; HERGT, A. ; GRUND, S. ; GÜMMER, V.: The New Chapter of Transonic Compressor Cascade Design at the DLR. In: *Journal of Turbomachinery* 145 (2023), 04, Nr. 8, 081001. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4056982>. – DOI 10.1115/1.4056982. – ISSN 0889-504X
- [19] MUNOZ LOPEZ, E. J. ; HERGT, A. ; KLINNER, J. ; GRUND, S. ; KARBOUJIAN, J. ; FLAMM, J. ; GÜMMER, V.: Investigations of the Unsteady Shock-Boundary Layer Interaction in a Transonic Compressor Cascade. Volume 13D: Turbomachinery — Multidisciplinary Design Approaches, Optimization, and Uncertainty Quantification; Radial Turbomachinery Aerodynamics; Unsteady Flows in Turbomachinery (2023), 06, V13DT36A015. <https://doi.org/10.1115/GT2023-102622>
- [20] MUNOZ LOPEZ, E. J. ; HERGT, A. ; OCKENFELS, T. ; GRUND, S. ; GÜMMER, V.: The Current Gap between Design Optimization and Experiments for Transonic Compressor Blades. In: *International Journal of Turbomachinery, Propulsion and Power* 8 (2023), Nr. 4. <http://dx.doi.org/10.3390/ijtp8040047>. – DOI 10.3390/ijtp8040047. – ISSN 2504-186X
- [21] SCHLICHTING, H. ; GERSTEN, K.: *Grenzschicht-theorie*. Springer, 2006
- [22] SCHLÜSS, D. ; FREY, C. ; ASHCROFT, G.: Consistent non-reflecting boundary conditions for both steady and unsteady flow simulations in turbomachinery applications. In: *Proceedings of the 7th Europ* (2016)

- [23] VOSS, C. ; AULICH, M. ; KAPLAN, B. ; NICKE, E.: Automated multiobjective optimisation in axial compressor blade design. In: *Turbo expo: power for land, sea, and air* Bd. 4241, 2006, S. 1289–1297
- [24] W., Ziniu ; X., Yizhe ; W., Wenbin ; H., Ruifeng: Review of shock wave detection method in CFD post-processing. In: *Chinese Journal of Aeronautics* 26 (2013), Nr. 3, 501-513. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cja.2013.05.001>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.cja.2013.05.001>. – ISSN 1000–9361
- [25] WILCOX, D. C.: *Turbulence modeling for CFD*. Bd. 2. DCW industries La Canada, CA, 1998
- [26] ZHAO, Y. ; SANDBERG, R. D.: Using a New Entropy Loss Analysis to Assess the Accuracy of RANS Predictions of an High-Pressure Turbine Vane. In: *ASME Journal of Turbomachinery* 142 (2020), S. 081008–1–081008–8. <http://dx.doi.org/10.1115/1.4046531>. – DOI 10.1115/1.4046531



# A. Herleitung der Entropietransportgleichung

Für kompressible Strömungen lässt sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen nach thermodynamischen Umformungen eine Entropietransportgleichung herleiten [21]. Die Energie-transportgleichung beinhaltet verschiedene Terme, darunter die Dissipation durch viskose Spannungen und Wärmeleitung. Um diese in eine Entropiebilanz zu überführen, wird die spezifische innere Energie mittels der Gibbs'schen Fundamentalgleichung

$$de = Tds - pd\frac{1}{\rho} \quad (\text{A.1})$$

in die spezifische Entropie umgeformt. Hieraus lässt sich eine Formulierung für die substanzielle Ableitung der Größen

$$T\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (\text{A.2})$$

aufstellen. Die substanzielle Ableitung des spezifischen Volumens lässt sich durch die Kettenregel zu

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \quad (\text{A.3})$$

umformulieren. Die Kontinuitätsgleichung ergibt unter Hinzunahme der Produktregel den Zusammenhang

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (\text{A.4})$$

und damit die Beziehung

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (\text{A.5})$$

Eingesetzt in die Fundamentalgleichung der Thermodynamik ergibt sich nach anschließender Multiplikation mit der Dichte

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \rho\frac{De}{Dt} + p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (\text{A.6})$$

Durch die Kontinuitätsgleichung gilt allgemein für eine beliebige Größe  $\phi$  der Zusammenhang

$$\rho\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\phi u_j)}{\partial x_j}. \quad (\text{A.7})$$

Zur weiteren Umformung wird die totale Energie in innere und kinetische Energie aufgeteilt. Durch skalare Multiplikation der Impulstransportgleichung mit  $u_i$  lässt sich eine Transportgleichung für die kinetische Energie

$$u_i\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + u_i\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.8})$$

aufstellen. Unter Anwendung der Produktregel lassen sich die ersten beiden Terme als

$$u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.9})$$

schreiben. Die partiellen Ableitungen der kinetischen Energie ergeben sich dabei zu

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right) = \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \rho u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.10})$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) = \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}. \quad (\text{A.11})$$

Eingesetzt in die modifizierte Impulsgleichung folgt

$$\frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) + \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right) = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (\text{A.12})$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt zudem zwingend

$$\frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} u_i u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{A.13})$$

weshalb sich die Transportgleichung für die kinetische Energie zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right) = -u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.14})$$

vereinfacht. Subtrahiert man diese Gleichung der kinetischen Energie von der Energietransportgleichung, folgt die Gleichung der inneren Energie

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho e)}{\partial x_j} = -\frac{\partial(u_j p)}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial(\sigma_{ij} u_i)}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j}. \quad (\text{A.15})$$

Unter erneuter Anwendung der Produktregel lässt sich dies zu

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho e)}{\partial x_j} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (\text{A.16})$$

zusammenfassen. Mit dieser Beziehung und der fundamentalen thermodynamischen Relation lässt sich die Entropietransportgleichung

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho s u_j)}{\partial x_j} = \frac{1}{T} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{T} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (\text{A.17})$$

bilden. Der Wärmeleitungsterm wird anschließend in einen reversiblen und irreversiblen Anteil

$$-\frac{1}{T} \frac{\partial q_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{q_j}{T} \right) + q_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{T} \right) \quad (\text{A.18})$$

aufgespalten, wobei für die Ableitung der inversen Temperatur

$$q_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{T} \right) = -q_j \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (\text{A.19})$$

gilt. Setzt man das Fourier'sche Wärmeleitungsgesetz ein, ergibt sich schließlich die vollständige Entropietransportgleichung

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho s u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{q_j}{T} \right) = \frac{1}{T} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{c_p \mu}{Pr T^2} \left( \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)^2. \quad (\text{A.20})$$

# B. Mittelungsregeln für zeitliche und Favre-Mittelung

In diesem Anhang werden die grundlegenden Mittelungsoperatoren sowie deren Rechenregeln für die Reynolds- und Favre-Mittelung dargestellt.

## B.1. Reynolds-Mittelung

Die Reynolds-Mittelung basiert auf einer zeitlichen Mittelung einer physikalischen Größe  $\phi$  gemäß der Definition

$$\bar{\phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(\tau) d\tau. \quad (\text{B.1})$$

Dabei wird die Größe  $\phi$  in einen Mittelwert und eine Fluktuation

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (\text{B.2})$$

zerlegt, wobei für den Mittelwert der Fluktuation definitionsgemäß

$$\overline{\phi'} = 0 \quad (\text{B.3})$$

gilt.

### B.1.1. Rechenregeln der Reynolds-Mittelung

Für den Reynolds-Mittelungsoperator gelten verschiedene mathematische Eigenschaften.

**Linearität** Sei  $\psi$  eine weitere turbulente Größe und seien  $a$  und  $b$  konstante Faktoren, so gilt

$$\overline{a\phi + b\psi} = a\bar{\phi} + b\bar{\psi}. \quad (\text{B.4})$$

**Produktregel** Das Mittel eines Produkts zweier Größen lässt sich durch

$$\overline{\phi\psi} = \bar{\phi}\bar{\psi} + \overline{\phi'\psi'} \quad (\text{B.5})$$

ausdrücken.

**Ableitungen** Unter der Voraussetzung, dass die Mittelung und die Differentiation vertauschbar sind, gelten für die zeitlichen und räumlichen Ableitungen die Beziehungen

$$\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial t} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

sowie

$$\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x_i}. \quad (\text{B.7})$$

## B.2. Favre-Mittelung

Für kompressible Strömungen ist die Favre-Mittelung zweckmäßig, welche als dichtegegewichtete Mittelung durch

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \quad (\text{B.8})$$

definiert wird. Die Zerlegung der Größe erfolgt analog zur Reynolds-Mittelung in der Form

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'', \quad (\text{B.9})$$

wobei für die Favre-Fluktuation die wichtige Eigenschaft

$$\overline{\rho\phi''} = 0 \quad (\text{B.10})$$

erfüllt ist.

### B.2.1. Rechenregeln der Favre-Mittelung

**Linearität** Auch für den Favre-Operator gilt für konstante Faktoren die Linearität

$$a\widetilde{\phi} + b\widetilde{\psi} = \widetilde{a\phi + b\psi}. \quad (\text{B.11})$$

**Beziehung zur Reynolds-Mittelung** Der Zusammenhang zwischen der Favre-Mittelung und der zeitlichen Mittelung wird durch

$$\tilde{\phi} = \bar{\phi} + \frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}} \quad (\text{B.12})$$

beschrieben.

**Produktregel** Das Produkt zweier Favre-gemittelter Größen lässt sich analog zur Reynolds-Mittelung als

$$\widetilde{\phi\psi} = \tilde{\phi}\tilde{\psi} + \widetilde{\phi''\psi''} \quad (\text{B.13})$$

darstellen.

**Wichtige Identitäten** Es ist zu beachten, dass der reine Mittelwert der Favre-Fluktuation im Allgemeinen ungleich Null ist ( $\overline{\phi''} \neq 0$ ). Hingegen folgt aus der Definition direkt die Identität

$$\overline{\rho\phi} = \bar{\rho}\tilde{\phi}. \quad (\text{B.14})$$