

# Forschungsbericht 2016-70

## Analyse und Synthese akustischer Interaktionsmoden von Turbomaschinen

Ulf Tapken

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt  
Institut für Antriebstechnik  
Berlin



Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt

# **Forschungsbericht 2016-70**

## **Analyse und Synthese akustischer Interaktionsmoden von Turbomaschinen**

**Ulf Tapken**

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt  
Institut für Antriebstechnik  
Berlin

**251 Seiten**  
**148 Bilder**  
**39 Tabellen**  
**155 Literaturstellen**



*Herausgeber:*

Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt e. V.  
Wissenschaftliche Information  
Linder Höhe  
D-51147 Köln

ISSN 1434-8454  
ISRN DLR-FB-2016-70  
Erscheinungsjahr 2016  
DOI: [10.57676.vrp9-w653](https://doi.org/10.57676.vrp9-w653)

**Erklärung des Herausgebers**

Dieses Werk – ausgenommen anderweitig gekennzeichneter Teile – ist lizenziert unter den Bedingungen der Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung-Keine Bearbeitungen 4.0 International (CC BY-ND 4.0), abrufbar über <https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/legalcode.en>

**Lizenz**



Creative Commons Attribution-NoDerivatives 4.0 International

*Turbomaschine, Akustik, Rotor-Stator-Interaktion, Modenanalyse, Modensynthese*

Ulf TAPKEN

DLR, Institut für Antriebstechnik, Berlin

***Analyse und Synthese akustischer Interaktionsmoden von Turbomaschinen***

Technische Universität Berlin (Dissertation)

Die Modenanalyse und die Modensynthese tragen wesentlich zur Entwicklung lärmärmer Turbomaschinen und von Schallminderungsmaßnahmen bei. Mithilfe der Modenanalyse wird die Amplitude jeder Mode im Strömungskanal bestimmt und so die Schallanregung einer Turbomaschine detailliert erfasst. Durch Modensynthese werden einzelne Moden gezielt angeregt, um die Übertragungseigenschaften von Turbomaschinenkomponenten zu untersuchen und Rotor-Stator-Interaktionsmoden durch destruktive Interferenz aktiv zu unterdrücken.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass Modenanalysen und Modensynthesen unter Verwendung wandbündig installierter Arrays von Mikrofonen bzw. Lautsprechern mit hoher Genauigkeit realisierbar sind. Die Anforderungen und Beschränkungen wurden eingehend untersucht und Einsatzrichtlinien formuliert. Eine systematische Optimierung der axialen Arraypositionen ermöglicht Modenanalysen bei hohen Frequenzen, wie sie bisher nur mit Mikrofonrechen erzielt wurden. Eine mit zunehmender Frequenz abnehmende Trennschärfe des wandbündigen Arrays muss jedoch durch eine größere Gesamtzahl an Messpositionen ausgeglichen werden.

Die in der Optimierung der Modenanalyse gewonnenen Erkenntnisse lassen sich auf die Modensynthese übertragen. Weitere Effekte, die zu Ungenauigkeiten in der Modensynthese führen können, wurden experimentell und mit einem Modell des Modensynthesizers untersucht. Resonanzen in der Lautsprecheranordnung äußern sich in einer relativen Änderung der Pegel von Zielmode und unerwünschten Spillovermoden. Reflexionen im Kanal stören die Übertragungsfunktionen der Lautsprecherringe so, dass die Pegel der Spillovermoden stark angehoben werden und die Zielmode nicht dominant erzeugbar ist.

*turbomachinery, acoustics, rotor-stator-interaction, mode analysis, mode synthesis*

(Published in German)

Ulf TAPKEN

German Aerospace Center (DLR), Institute of Propulsion Technology, Berlin

***Analysis and synthesis of acoustic interaction modes of turbomachinery***

Technische Universität Berlin (dissertation)

Acoustic mode analysis and acoustic mode synthesis are essential tools for developing low-noise designs and of noise reduction techniques for turbomachinery. Mode analysis determines the amplitude of each mode in the flow duct, enabling a detailed assessment of the turbomachinery sound generation. Mode synthesis can selectively excite individual duct modes. This facilitates the thorough examination of the acoustic transfer functions of turbomachinery components, as well as the active elimination of rotor-stator interaction modes by destructive interference.

The thesis demonstrates that high-accuracy mode analysis and synthesis are feasible using arrays of wall-flush mounted microphones resp. loudspeakers. The method's requirements and limitations were investigated, enabling the formulation of guidelines for its use within a prescribed frequency range. Systematic optimization of the axial array positions allows accuracies previously achievable only with microphone rakes. However, the decreasing resolution of the wall-flush array at higher frequencies must be compensated by increasing the number of measurement positions.

The knowledge gained in the mode analysis optimization is transferable to the mode synthesis method. Further effects impairing the accuracy of the synthesis were investigated experimentally and using a model of the mode synthesizer. Resonances in the loudspeaker arrangement cause a relative change in the levels of the target mode and unwanted spillover modes. Reflections in the duct interfere with the transfer functions of the loudspeaker rings such that the levels of the spillover modes are strongly increased and the target mode cannot be generated dominantly.

---

## DISSERTATION

---

### ANALYSE UND SYNTHESE AKUSTISCHER INTERAKTIONSMODEN VON TURBOMASCHINEN

vorgelegt von  
Dipl.-Phys.  
Ulf Tapken  
aus Bremerhaven

von der Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme  
der Technischen Universität Berlin  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften  
– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Dieter Peitsch  
Gutachter: Prof. Dr. rer.nat. Lars Enghardt  
Prof. Dr.-Ing. Thomas Carolus

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 11. Mai 2015

Berlin 2016  
D83



---

## KURZFASSUNG

---

Die Verfahren der akustischen Modenanalyse und Modensynthese liefern wichtige Beiträge zur Entwicklung lärmärmer Designs und innovativer Maßnahmen zur Schallminderung von Turbomaschinen. Durch eine Modenanalyse werden die Amplituden aller Moden im Strömungskanal bestimmt und damit die Schallanregung einer Turbomaschine detailliert erfasst. Die Modensynthese wird zur gezielten Anregung einzelner Moden eingesetzt, um die akustischen Übertragungseigenschaften von Turbomaschinenkomponenten umfassend zu charakterisieren und um in aktiven Lärminderungsverfahren Rotor-Stator-Interaktionsmoden durch destruktive Interferenz auszulöschen.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass sich Modenanalysen und Modensynthesen unter Verwendung wandbündig installierter Mikrofonarrays bzw. wandbündig installierter Lautsprecherarrays mit hoher Genauigkeit realisieren lassen. Eine Voraussetzung dafür ist die Abstimmung der Arrays auf den zu untersuchenden Frequenzbereich. Beide Verfahren wurden mit analytischen und experimentellen Methoden bezüglich ihrer Anforderungen, Beschränkungen und Genauigkeit untersucht. Die Ergebnisse ermöglichen die Formulierung von Richtlinien für den optimalen Einsatz der Modenanalyse und der Modensynthese an Turbomaschinen-Versuchsständen.

Wandbündige Mikrofone besitzen im Vergleich zu radial im Kanal angeordneten Mikrofonreihen den Vorteil, die Strömung nicht zu verblocken und das Schallfeld nicht zu stören, können aber die radialen Eigenschwingungsformen der Moden nur anhand der axialen Wellenzahlen unterscheiden. Für die Modenanalyse wurde ein Verfahren entwickelt, mit dem sich die axialen Messpositionen systematisch optimieren und die Fortpflanzung von Messfehlern auf die Modenamplituden detailliert bewerten lassen. Damit konnte nachgewiesen werden, dass optimierte wandbündige Mikrofonarrays Modenanalysen in vergleichbarer Genauigkeit ermöglichen, wie sie bei hohen Frequenzen bisher nur mit Mikrofonreihen erzielt wurde. Eine mit zunehmender Frequenz abnehmende Trennschärfe des wandbündigen Arrays muss allerdings durch eine größere Gesamtzahl an Messpositionen ausgeglichen werden.

Die in der Optimierung der Modenanalyse gewonnenen Erkenntnisse lassen sich auf die Modensynthese übertragen. In der Kombination einer umfangreichen experimentellen Studie mit einem Modell des Modengenerators wurden weitere Effekte identifiziert, die zu Ungenauigkeiten in der Modensynthese führen können. Ein Effekt geht auf das resonante Verhalten der Lautsprecheranordnung zurück und äußert sich in einer relativen Änderung der Pegel von Zielmode und unerwünschten Spillovermoden. Ein weiterer Effekt wird durch Reflexionen im Kanal verursacht und stört die modalen Übertragungsfunktionen von Lautsprecherringen derart, dass die Amplituden der Spillovermoden bis auf das Niveau der Zielmode angehoben werden. Die Ergebnisse erklären die beschränkte Ausschöpfung theoretisch vorhandener Reduktionspotentiale, die in Versuchen zur aktiven Minderung von Rotor-Stator-Interaktionsmoden beobachtet wurden.



---

## ABSTRACT

---

The acoustic mode analysis method and the acoustic mode synthesis method are essential tools in the development of low-noise designs and of innovative noise reduction techniques for turbomachinery applications. By means of mode analysis the amplitudes of all modes in the flow duct are determined and thus the sound generation of a turbomachine can be assessed in detail. The mode synthesis enables the selective excitation of individual duct modes, which is useful for the thorough characterization of acoustic transfer functions of turbomachinery components and for the elimination of rotor-stator interaction modes by destructive interference in active noise control concepts.

In the thesis it is shown that using arrays of wall-flush mounted microphones respectively loudspeakers mode analysis and mode synthesis of high accuracies are feasible. A prerequisite is the appropriate layout of the arrays for the frequency range of interest. The methods requirements and limitations as well as the achievable accuracies were investigated by both theoretical and experimental approaches. The outcome of the studies allowed the formulation of guidelines for the optimal application of mode analysis and mode synthesis at turbomachinery test rigs.

In contrast to radial microphone rakes, arrays of wall-flush mounted microphones do not disturb the flow and the acoustic field, but they have the drawback that modes of different radial order have to be distinguished solely by reference to their axial wave numbers. To overcome this problem a procedure was developed for the systematic optimization of the axial measurement positions. It enabled also the detailed assessment of the error propagation from the measured sound pressure to the mode amplitudes. Thus it could be proven that in analyses with optimized wall-flush microphone arrays at high frequencies accuracies can be realized that before were achievable only with microphone rakes. However, the fact that the resolution of the wall-flush array is reducing with increasing frequency has to be compensated by an enlarged overall number of measurement positions.

The knowledge gained in the mode analysis optimization is transferable to the mode synthesis method. Further effects impairing the accuracy of the synthesis were identified with help of a comprehensive experimental study and a theoretical model of the mode generator. One effect results from the resonant behaviour of the loudspeaker arrangement and alters the relative levels of the target mode and the unwanted spillover modes. Another effect is caused by reflections within the duct and disturbs the modal transfer functions of loudspeaker rings in such a way that the amplitudes of spillover modes are elevated up to the level of the target mode. The findings give an explanation for the incomplete cancellation of rotor-stator interaction modes that was observed in several active noise controls tests.



---

## INHALTSVERZEICHNIS

---

<b>1 EINLEITUNG</b>	<b>1</b>
1.1 Einsatzgebiete von Modenanalyse und Modensynthese	3
1.2 Stand der Forschung	8
1.2.1 Modenanalyse	8
1.2.2 Modensynthese	12
1.3 Wissenschaftliche Fragestellungen	14
1.4 Aufbau der Arbeit	15
<b>2 AUSBREITUNG VON MODEN IN STRÖMUNGSKANÄLEN</b>	<b>17</b>
2.1 Homogene konvektive Wellengleichung	17
2.2 Modenansatz	19
2.3 Moden in uniformer axialer Strömung	21
2.3.1 Radiale Eigenlösungen	21
2.3.2 Ausbreitung in axialer Richtung	22
2.3.3 Dämpfung nicht ausbreitungsfähiger Moden	26
2.4 Einfluss des Nabenvorhältnis	27
2.4.1 Radiale Eigenwerte und Eigenfunktionen	27
2.4.2 Cut-on-Frequenzen und Ausbreitungsfaktoren	29
2.5 Einfluss von Strömungsdrall	31
2.6 Schallintensität und Schalleistung	33
<b>3 EXPERIMENTELLE MODENALANALYSEVERFAHREN</b>	<b>35</b>
3.1 Separation von Schaufeltonen aus Schalldruckmessungen	35
3.1.1 Unterdrückung inkohärenter Druckschwankungen	36
3.1.2 Adaptive Neuabtastung zum Ausgleich von Drehzahlschwankungen	37
3.1.3 Standardabweichung und Signal-Rausch-Abstand	38
3.2 Azimutalmodenanalyse	39
3.2.1 Diskrete Fourier-Transformation	39
3.2.2 Bewertung der Analysegenauigkeit	40
3.3 Inverse Radialmodenanalyse	42
3.3.1 Elementare Sensoranordnungen	42
3.3.2 Vollständige Zerlegung des Schalldruckfelds	45
3.3.3 Zerlegung von Azimutalmodenamplituden	46
3.3.4 Partielle Zerlegung des Schalldruckfelds	47
3.3.5 Verfahren der Singulärwerte-Zerlegung	48
3.3.6 Bewertung der Analysegenauigkeit	49
3.4 Radialmodenanalyse auf Basis eines Beamforming-Algorithmus	52
<b>4 OPTIMIERUNG VON SENSORARRAYS FÜR DIE INVERSE RADIALMODENANALYSE</b>	<b>57</b>
4.1 Konditionsanalyse der Modellmatrix	57
4.1.1 Untersuchter Parameterbereich	58
4.1.2 Ursachen schlechter Kondition	59
4.1.3 Anordnung mit zwei radialen Sensorrechen (Anordnung A-I)	60

4.1.4	Sensoranordnung mit bündigen Sensoren an der Außenwand (A-IV)	62
4.1.5	Vernachlässigung von Reflexionen	63
4.2	Bestimmung des optimalen axialen Sensorabstands	64
4.3	Bewertung der Analysegenauigkeit	67
4.3.1	Relativer Gesamtfehler	67
4.3.2	Modale Standardabweichung	68
4.4	Vergrößerung des analysierbaren Frequenzbereichs	72
4.4.1	Variation der Anzahl axialer und radialer Messstellen	73
4.4.2	Axiale Sensorabstände und Gesamtlängen der Arrays	74
5	ERPROBUNG DER MODENANALYSE MIT WANDBÜNDIGEN MIKROFONARRAYS	77
5.1	Vergleich mit Mikrofonrechnen	77
5.1.1	Spezifikationen der Mikrofonarrays	77
5.1.2	Analyse der Schalldruck-Zeitsignale	79
5.1.3	Ergebnisse der Modenanalysen	81
5.1.4	Mögliche Gründe für abweichende Analyseergebnisse	85
5.2	Einfluss von Messdauer und Aufbau des Messgitters	88
5.2.1	Spezifikation des Mikrofonarrays	88
5.2.2	Signal-Rausch-Abstand der Schalldruckmessungen	88
5.2.3	Modenanalyse mit vollständigem Messgitter und 15 s Messdauer	90
5.2.4	Einfluss der Messdauer auf die Analysequalität	94
5.2.5	Variation des Messgitters	97
5.3	Regularisierung suboptimaler Arrays und Partielle Modenanalyse	99
5.3.1	Spezifikation des Mikrofonarrays	100
5.3.2	Ergebnis der Standard-Analyse	101
5.3.3	Regularisierung der Modellmatrix	102
5.3.4	Untersuchung der Wirkungsweise der Regularisierung	104
5.3.5	Partielle Radialmodenanalyse mit stehenden Arrays	108
6	EXPERIMENTELLES MODENSYNTHESEVERFAHREN	111
6.1	Modenanregung durch eine punktförmige Monopolquelle	112
6.2	Modell einer Lautsprechereinheit	116
6.2.1	Trichter-Übertragungsfunktion	116
6.2.2	Schallstrahlungswiderstand und Schalltransmission	118
6.2.3	Einfluss der Öffnungsfläche am Trichterausgang	119
6.3	Modell des Lautsprecherarrays	121
6.3.1	Wechselwirkung der Lautsprechereinheiten	121
6.3.2	Einfluss von Ringabstand und Ringstaffelungswinkel	123
6.4	Berücksichtigung von Reflexionen im Strömungskanal	126
6.5	Gezielte Anregung von azimutalen Modenordnungen	127
6.6	Gezielte Anregung von radialen Modenordnungen	130
7	ERPROBUNG DER MODENSYNTHESE	139
7.1	Versuchsaufbau	139
7.1.1	Komponenten des Versuchsstands	139
7.1.2	Messelektronik	143
7.2	Versuchsdurchführung und Datenverarbeitung	147
7.2.1	Versuchsvariationen	147

7.2.2	Messablauf	148
7.2.3	Berechnung der Lautsprecher-Zeitsignale	149
7.2.4	Schallfeldanalyse	151
7.3	Verifizierung des Modells einer Lautsprechereinheit	154
7.4	Anregung eines Lautsprechers in Abhängigkeit der Arraykonfiguration	157
7.5	Spillover-Moden durch Störungen in den Lautsprechersignalen	161
7.5.1	Messungen in verschiedenen Versuchsvarianten	161
7.5.2	Modellierung von Störungen in den Lautsprechersignalen	164
7.5.3	Abschätzung der Empfindlichkeit der Modensynthese gegenüber Störungen	165
7.5.4	Einfluss der Arraykonfiguration auf die Dominanz der Zielmoden	169
7.6	Verstärkung des Spillover-Effekts bei gezielter Anregung radialer Moden	170
8	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	177
8.1	Modenanalyse	178
8.2	Modensynthese	181
A	BESTIMMUNG DER EIGENWERTE DER BESELFFUNKTIONEN 1. UND 2. ART	185
B	DETAILLIERTE BESCHREIBUNG DER MODENANALYSE-GLEICHUNGSSYSTEME	187
C	BEWERTUNG DER ANALYSEGENAUIGKEIT BEI DER ZERLEGUNG VON SCHALLDRUCKFELDERN	191
D	ANALYSE DER RADIALMODENANALYSE-MODELLMATRIZ	195
E	ABHÄNGIGKEIT DER FEHLERFORTPFLANZUNG VOM MODENAMPLITUDENSPEKTRUM	197
F	MODALER SIGNAL-RAUSCH-ABSTAND FÜR VERSCHIEDENE MODENAMPLITUDENSPEKTREN	199
G	ZUSÄTZLICHE DATEN UND ERGEBNISSE DER MESSUNGEN AM FANRIG UFA	203
G.1	Prüfstand und Betriebspunktdaten	204
G.2	Charakteristiken der Mikrofonarrays	204
G.3	Messdurchführung	207
H	ZUSÄTZLICHE DATEN UND ERGEBNISSE DER MESSUNGEN AM TURBINEN-PRÜFSTAND	209
H.1	Prüfstand und Betriebspunktdaten	209
H.2	Charakteristiken des Mikrofonarrays	210
H.3	Messdurchführung	211
H.4	Analyse der Schalldruckmessungen	212
H.5	Modenanalysen am Betriebspunkt Cutback	216
H.6	Modenanalysen am Betriebspunkt Sideline	219
I	ZUSÄTZLICHE DATEN UND ERGEBNISSE DER MESSUNGEN AM DLR-UHBR-FAN	223
I.1	Prüfstand und Betriebspunktdaten	223
I.2	Analyse der Schalldruck-Zeitsignale	224
J	KONDITION VON TRANSFERMATRIZEN IN DER GEZIELTEN SYNTHESE VON RADIALMODEN	227
K	EXPERIMENTE ZUR MODENSYNTHESE IM VERSUCHSAUFBAU MIT AXIAL-VENTILATOR	231
K.1	Aufbau und Betrieb des Axialventilators	231

K.2 Akustische Anregung des Axialventilators	232
K.3 Streuung am Ventilator und an der Einlaufdüse	233
L VERSUCHSVARIANTEN ZUR ERPROBUNG DER MODENSYNTHESE	237
LITERATURVERZEICHNIS 241	

---

## SYMBOLVERZEICHNIS

---

$a_l$	Zufallszahl gemäß Standardnormalverteilung
$\mathbf{a}$	Vektor der Modenamplituden
$\mathbf{a}_m$	Vektor der Modenamplituden der Ordnung m
$A_{mn}^{\pm}$	Schalldruckamplitude einer Mode
$b$	Kantenlänge eines Kolben
$b_j$	Zufallszahl gemäß Gleichverteilung
$b(\theta)$	Winkelfunktion
$B$	Anzahl Rotorblätter
$c$	Schallgeschwindigkeit
$c_{g,mn}$	Gruppengeschwindigkeit einer Mode
$c_{p,mn}$	Phasengeschwindigkeit einer Mode
$C_{vw}$	Element der Modenanalyse-Modellmatrix
$d$	axialer Lautsprecherringabstand
$D_{vw}$	Element der Modenanalyse-Modellmatrix
$D_\mu$	Hilfs-Matrix in Konstruktion der Lautsprecherarray-Transfermatrix
$\mathbf{e}$	Fehler-Vektor
$E_\mu$	Hilfs-Matrix in Konstruktion der Lautsprecherarray-Transfermatrix
$f$	Frequenz
$f_{BPF}$	Blattpassierfrequenz
$f_{c,mn}$	Cut-on-Frequenz einer Mode
$f_{mn}$	radiale Eigenfunktion einer Mode
$f_R$	Rotordrehfrequenz
$f_s$	Abtastfrequenz
$f_t$	Testfrequenz
$F_{mn}$	Normierungsfaktor der radialen Eigenfunktion einer Mode
$g^{\rightarrow}(x, r, \phi   \check{x}, \check{r}, \check{\phi})$	Greensche Funktion
$h$	Harmonische der Blattpassierfrequenz
$\mathbf{h}_\mu$	Transferfunktionsvektor eines Lautsprecherrings zur Anregung der Ordnung $\mu$
$H(\theta_{mn}^-   \theta_w)$	Beamforming-Richtungsfunktion
$\mathbf{H}_\mu$	Transferfunktionsmatrix eines Lautsprecherarrays zur Anregung der Ordnung $\mu$
$I_x$	axiale Komponente der Schallintensität
$J$	Kosten-Funktional
$J_m$	Besselfunktion 1. Art und m-ter Ordnung
$k$	Wellenzahl unter Freifeldbedingungen

$k_{mn}^\pm$	axiale Wellenzahl einer Mode
$(kR)$	Helmholtzzahl
$(kR)_{mn}$	dimensionslose Cut-on-Frequenz
$K$	Adiabatenexponent
$l$	Länge
$L_x$	axiale Abmessung eines Sensorarrays
$L_{mn}$	Dämpfung einer nicht ausbreitungsfähigen Mode
$m$	azimutale Modenordnung
$M$	Anzahl azimutaler Ordnungen
$M_p$	Tupel azimutaler Ordnungen
$M_x$	axiale Machzahl
$M_\phi$	azimutale Machzahl
$n$	radiale Modenordnung
$N_{avg}$	Anzahl Mittelungen
$N_{mes}$	Anzahl Einzelmessungen
$N_{mod}$	Anzahl ausbreitungsfähiger Moden
$N_n(m)$	Anzahl stromab bzw. stromauf laufender Moden der Ordnung $m$
$N_{pos}$	Anzahl Positionen des Messgitters
$N_w$	Anzahl FFT-Fenster
$N_\phi$	Anzahl azimutaler Messpositionen
$N_\check{\phi}$	Anzahl azimutaler Quellpositionen
$N_r$	Anzahl radialer Messpositionen
$N_T$	Anzahl Signalperioden
$N_x$	Anzahl axialer Messpositionen
$N_{\check{x}}$	Anzahl axialer Quellringpositionen
$p$	Druck
$p_0$	Ruhedruck
$\mathbf{p}$	Vektor der Schalldruckamplituden
$p_m$	Azimutalmodenamplitude
$\mathbf{p}_m$	Vektor der Azimutalmodenamplituden
$P$	Schallleistung
$P_m^\pm$	Schallleistung aller Moden der Ordnung $m$
$P_{mn}^\pm$	Schallleistung einer Mode
$q$	Volumenfluss
$\hat{q}$	Volumenfluss-Stellgröße eines Lautsprecherrings
$Q_{mn}$	Eigenwert einer Mode
$r$	radiale Koordinate
$\check{r}$	radiale Koordinate einer Schallquelle
$r_{mn}, R_{mn}$	Reflexionsfaktor einer Mode
$R$	Außenradius eines Kanals

$R_i$	Innenradius eines ringförmigen Kanals
$R_s$	spezifische Gaskonstante
$s$	ganzzahliger Index
$s_p$	Standardabweichung der Schalldruckamplitude
$s_m$	Standardabweichung der Azimutalmodenamplitude
$s_{mn}$	Standardabweichung der Modenamplitude
$S_m$	Standardabweichung der Schallleistung $P_m$
$S_{mn}$	Standardabweichung der Schallleistung $P_{mn}$
$t$	Zeit
$t_{mn}$	Transmissionsfaktor einer Mode
$T$	statische Temperatur
$T$	Transfermatrix
$T_s$	Abtastperiode
$T_w$	Fensterlänge
$u_{Bj}(t)$	Spannungs-Treppenfunktion des j-ten Lautsprecherkanals
$u_j(t)$	Spannungszeitsignal des j-ten Lautsprechers
$u_n$	Normalkomponente der Schnelle
$u_r$	radiale Geschwindigkeitskomponente
$u_{r,mn}^\pm$	radiale Schnelleamplitude einer Mode
$u_x$	axiale Geschwindigkeitskomponente
$u_{x,mn}^\pm$	axiale Schnelleamplitude einer Mode
$u_\phi$	azimutale Geschwindigkeitskomponente
$u_{\phi,mn}^\pm$	azimutale Schnelleamplitude einer Mode
$\mathbf{U}$	Vektor der stationären Strömung
$\mathbf{U}$	Matrix der Links-Singulärvektoren
$U_j$	Spannungsamplitude des j-ten Lautsprechers
$\hat{U}$	Spannungs-Stellgröße eines Lautsprecherrings
$U_x$	axiale Komponente der stationären Strömung
$U_\phi$	azimutale Komponente der stationären Strömung
$V$	Anzahl Statorschaufeln
$\mathbf{V}$	Matrix der Rechts-Singulärvektoren
$\mathbf{V}_m$	Matrix der azimutalen Eigenfunktionen der Ordnung m
$\mathbf{W}$	Modellmatrix der Modenanalyse
$\mathbf{W}_m$	Modellmatrix der Modenanalyse der Ordnung m
$x$	axiale Koordinate
$\check{x}$	axiale Koordinate einer Schallquelle
$x_r$	axiale Koordinate einer Reflexionsstelle
$X$	Hilfs-Matrix in Konstruktion der Modenanalyse-Modellmatrix
$y(t)$	Zeitsignal
$Y_m$	Besselfunktion 2.Art und m-ter Ordnung

$\mathbf{Y}$	Hilfs-Matrix in Konstruktion der Modenanalyse-Modellmatrix
$\mathbf{Y}^{(i)}$	Hilfs-Matrix in Konstruktion der Modenanalyse-Modellmatrix
$z$	axiale Koordinate des Trichters
$Z_{mn}^{\pm}$	modale Impedanz
$\check{Z}_{ij}$	durch Quelle $j$ am Ort der Quelle $i$ induzierte Impedanz
$\tilde{Z}$	akustischer Wellenwiderstand
$\alpha_{mn}$	Ausbreitungsfaktor einer Mode
$\beta$	Dopplerfaktor $\sqrt{1 - M_x^2}$
$\gamma$	Dämpfungskoeffizient
$\gamma_i$	Adaptionsfaktor des Lautsprecherring $i$
$\delta_A$	relativer Gesamtfehler der Modenanalyse
$\delta_{A_m}$	relativer Gesamtfehler der Modenanalyse der Ordnung $m$
$\delta_{ij}$	Kronecker-Delta
$\delta\psi_l$	Störung des Übertragungsfaktors des $j$ -ten Lautsprechers
$\Delta b$	Differenz zwischen Modenausbreitungs- und Beobachtungswinkel
$\Delta b_w$	Hauptkeulenbreite der Richtungsfunktion
$\Delta L$	akustische Dämpfung
$\Delta r$	radialer Abstand
$\Delta x$	axialer Abstand
$\Delta x_{krit}$	kritischer axialer Sensorabstand
$\Delta x_{Ny}$	axialer Sensorabstand gemäß Nyquist-Kriterium
$\Delta x_{opt}$	optimaler axialer Sensorabstand
$\Delta \check{x}$	axialer Quellringabstand
$\Delta \phi$	azimutaler Abstand
$\epsilon$	Unschärfeparameter
$\zeta_j$	$j$ -ter Singulärwert
$\zeta_{lim}$	Singulärwertschranke
$\eta$	Naben-Verhältnis
$\theta_{mn}$	Ausbreitungswinkel einer Mode
$\kappa$	Konditionszahl
$\lambda_{mn}$	axiale Wellenlänge einer Mode
$\mu$	azimutale Modenordnung
$\nu$	radiale Modenordnung
$\xi_{mn}$	Cut-on-Verhältnis
$\rho$	Dichte
$\rho_0$	Ruhedichte
$\sigma_{mn}$	Eigenwert einer Mode
$\tau$	Regularisierungsparameter

$\phi$	azimutale Koordinate
$\check{\phi}$	azimutale Koordinate einer Schallquelle
$\Phi$	akustisches Potential
$\chi_{mn}^{\pm}$	Amplitudenfaktor einer Mode
$\psi_j$	elektro-mechanischer Übertragungsfaktor des j-ten Lautsprechers
$\Psi^n$	normierte Frequenzfunktion
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
$\Omega$	Winkelgeschwindigkeit der Drallströmungskomponente
$\nabla$	Nabla-Operator
$\Delta$	Laplace-Operator
$\mathbb{1}$	Einheitsmatrix
$'$	Wechselanteil einer Größe (in Kapitel 2)
$'$	Normierung einer Größe bezüglich Dopplerfaktor (in Kapitel 3 - 5)
$''$	Normierung einer Größe bezüglich Dopplerfaktor und Nabenverhältnis
$\pm$	Ausbreitung relativ zur axialen Koordinate
$\leftrightarrow$	Ausbreitung relativ zur axialen Quellposition
$*$	komplexe Konjugation
${}^H$	adjungierte Form der Matrix
${}_m$	Einschränkung auf Komponenten der Ordnung m
$\bar{}$	zeitlicher Mittelwert einer Größe
$\langle \rangle$	Erwartungswert einer Größe
$^o$	unverfälschter Anteil einer verrauschten Größe
${}_{eff}$	Effektivwert einer Größe
$\tilde{}$	Rauschkomponente einer Größe
$\check{}$	Drall-modifizierte Größe
$\Re(\cdot), \Re^{re}$	Realteil einer komplexen Größe
$\Im(\cdot), \Im^{im}$	Imaginärteil einer komplexen Größe
$\ \cdot\ $	2-Norm
BP	Betriebspunkt
BPF	Blattpassierfrequenz
CAA	Computational Aeroacoustic
CFD	Computational Fluid Dynamics
DFT	Diskrete Fourier-Transformation
EO	Engine Order
FFT	Fast Fourier-Transformation
LMS	Least-Mean-Square

NASA	National Aeronautics and Space Administration
RMA	Radialmodenanalyse
RMD	Radial Mode Detection Device
SNR	Signal-Rausch-Abstand (engl. signal-to-noise ratio)
SNR <sub>p</sub>	Signal-Rausch-Abstand der Schalldruckamplitude
SNR <sub>m</sub>	Signal-Rausch-Abstand der Azimutalmodenamplitude
SNR <sub>mn</sub>	Signal-Rausch-Abstand der Modenamplitude
SPL	Sound Pressure Level
SVD	Singulärwerte-Zerlegung (engl. singular value decomposition)
UFFA	Universal Fan Facility Adaptation
UHBR	Ultra-High Bypass Ratio

---

## EINLEITUNG

---

Turbomaschinen wie Ventilatoren, Verdichter und Turbinen stellen in unserer Umwelt nach wie vor erhebliche aeroakustische Lärmquellen dar, obwohl ihre Geräuschentwicklung durch den technischen Fortschritt der letzten Jahrzehnte bereits deutlich reduziert werden konnte. Im Bereich des Luftverkehrs wurde eine erhebliche Verbesserung erreicht, indem das Nebenstromverhältnis der Turbofantriebwerke erhöht wurde. Damit einher ging eine drastische Verminderung des Strahllärms und inzwischen ist der Turbofan zu einer der wichtigsten Schallquellen des Triebwerks geworden [42]. Auch der im Bereich der Niederdruckturbine erzeugte Schall gewinnt zunehmend an Bedeutung: insbesondere bei Triebwerkskonzepten mit Getriebefan kann er das nach hinten abgestrahlte Geräusch bei mittleren bis hohen Frequenzen dominieren [14, 54]. Unter der Maßgabe, die Performance nicht zu beeinträchtigen, ist die akustische Optimierung von Turbomaschinenkomponenten eine hohe technische Herausforderung. Moderne lärmarme Designs oder innovative Maßnahmen zur Schallminderung können nur auf Basis eines vertieften Verständnisses der Schallerzeugung und der Schallausbreitung entwickelt werden. Die Verfahren der akustischen Modenanalyse und Modensynthese liefern hierzu wichtige Beiträge.

Die Modenanalyse und die Modensynthese basieren auf der Lösung der Wellengleichung, der zufolge eine Schallwelle im Strömungskanal in eine Serie akustischer Moden entwickelt werden kann. Jede Mode stellt eine Eigenschwingungsform der Luftsäule im Kanal dar. Im Kanalquerschnitt wird sie durch eine azimutale und radiale Eigenfunktion mit zugehörigen Ordnungszahlen charakterisiert. Die Ausbreitung der Mode entlang der Kanalachse ist von der Anregungsfrequenz abhängig und wird durch eine spezifische axiale Wellenzahl beschrieben. Mit der Anregungsfrequenz erhöht sich die Gesamtzahl ausbreitungsfähiger Moden und die räumliche Druckverteilung wird feiner.

Zweck der Modenanalyse ist die messtechnische Bestimmung der Amplituden aller Moden. Da die Modenamplituden mit den Stärken und den räumlichen Verteilungen der anregenden Quellen zusammenhängen, können auf diese Weise Rückschlüsse auf die Schallentstehungsmechanismen in der Turbomaschine gezogen werden. Eine lokale Schalldruckmessung mit einem Mikrofon reicht für solch eine Analyse nicht aus, weil das Schallfeld durch die Überlagerung aller Moden ortsabhängig variiert. Zur Zerlegung in die einzelnen Moden muss das Schallfeld auf einem ausgedehnten Messgitter abgetastet werden.

Ziel der Modensynthese ist die gezielte Anregung einzelner Moden. Einzelne Moden ermöglichen eine genaue experimentelle Untersuchung von Schallausbreitungsvorgän-

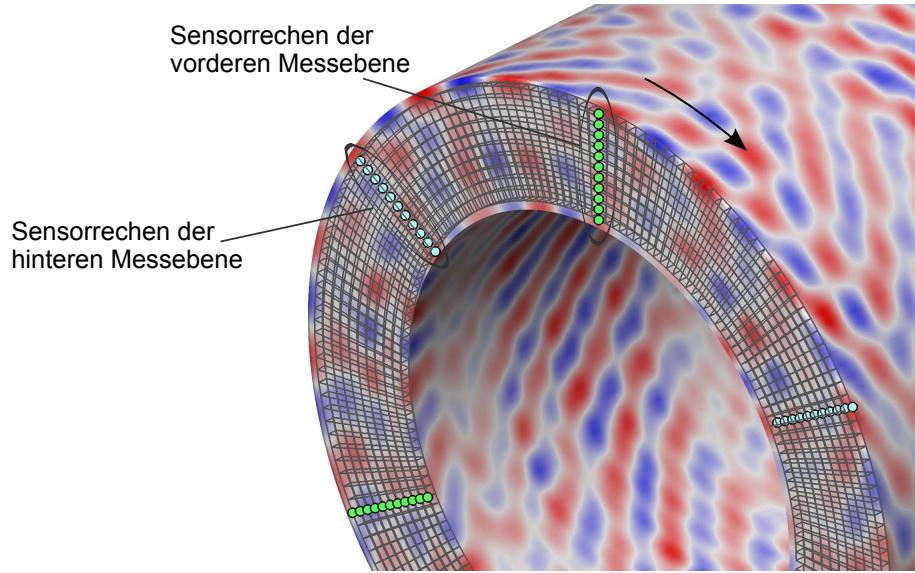


Abbildung 1.1: Veranschaulichung der Modenanalyse mit radialen Sensorrechen. Dargestellt ist ein Schalldruckfeld, in dem 1324 Moden ausbreitungsfähig sind, welches aber durch wenige Rotor-Stator-Interaktionsmoden dominiert wird. Es wird an 11 radialen Positionen in zwei dicht benachbarten Kanalquerschnittsebenen abgetastet. Die Sensoren sind durch Punkte symbolisiert und werden zum Aufbau eines Datengitters schrittweise in Umfangsrichtung gedreht.

gen, was insbesondere zur Validierung von Berechnungsverfahren nützlich ist. Bei der Umsetzung gibt es eine zur Modenanalyse vergleichbare Schwierigkeit: Eine einzelne Quelle regt alle Moden im Kanal an. Bei Verwendung mehrerer, räumlich geschickt angeordneter Quellen und mit passender Abstimmung der Anregungssignale kann eine bestimmte Mode erzeugt und ungewünschte Moden durch destruktive Interferenz unterdrückt werden.

Bei der Modenanalyse und bei der Modensynthese besteht die messtechnische Herausforderung in der Erfüllung räumlicher Abtastbedingungen. Relativ einfach ist die Analyse und Synthese des azimutalen Schalldruckverlaufs: Hierfür wird lediglich ein Ring mit azimutal äquidistant angeordneten Sensoren beziehungsweise Aktuatoren benötigt. Die radiale Schalldruckverteilung lässt sich theoretisch am besten an mehreren gleichmäßig über den Kanalradius verteilten Positionen analysieren beziehungsweise synthetisieren. Eine vollständige Modenanalyse oder Modensynthese ist demzufolge auf einem regelmäßig aufgebautem Messgitter möglich, welches sich über den gesamten Kanalquerschnitt erstreckt (siehe Abbildung 1.1). Nachteile dieses direkten Ansatzes bestehen in der Verblockung der Strömung und Störung des Schallfelds durch die Installationen im Kanal. Aus diesem Grund gibt es ein großes Interesse daran, die Sensoren und Aktuatoren in den Kanalwänden zu installieren. Eine mögliche Realisierung ist in Abbildung 1.2 skizziert. Moden verschiedener radialer Ordnungen können an den Kanalwänden allerdings nur indirekt, anhand der axialen Wellenzahlen, unterschieden werden. Die zentrale Frage dieser Arbeit lautet daher: Mit welcher Genauigkeit können Moden in Kanälen mithilfe wandbündig installierter Sensoren und Aktuatoren analysiert beziehungsweise synthetisiert werden?

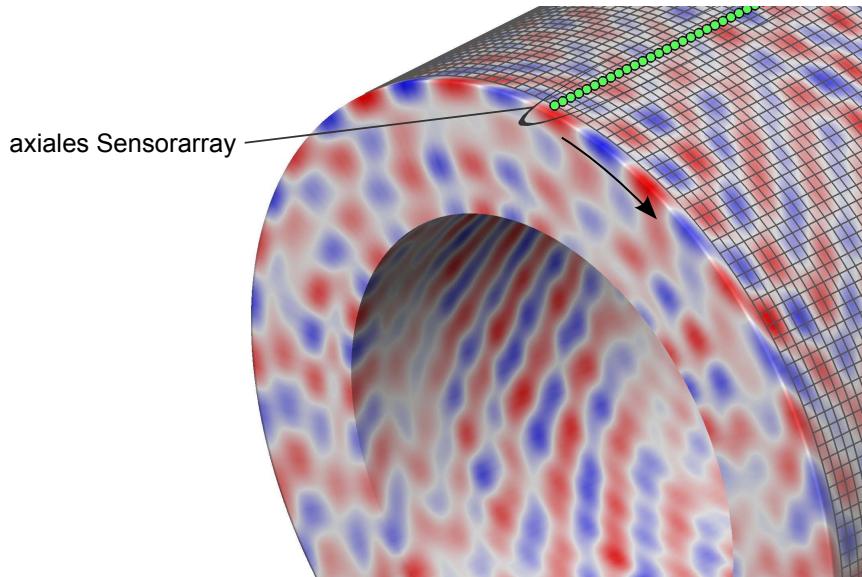


Abbildung 1.2: Veranschaulichung der Modenanalyse mit axial gestaffelten, bündig mit der Kanalwand installierten Sensoren. Die Sensoren sind durch Punkte symbolisiert und werden zum schrittweisen Aufbau des Messgitters in Umfangsrichtung gedreht.

### 1.1 EINSATZGEBIETE VON MODENANALYSE UND MODENSYNTHES

Das von einer Turbomaschine erzeugte Geräusch setzt sich aus tonalen und breitbandigen Komponenten zusammen. Die meisten Lärmminderungsansätze konzentrieren sich auf die diskreten Töne, da diese das Schallfeld dominieren und vom Menschen als am störendsten empfunden werden, aber auch weil ihre physikalische Entstehung am einfachsten zu verstehen, zu modellieren und zu beeinflussen ist. Die in dieser Arbeit behandelten Modenanalyse- und Modensyntheseverfahren sind auf die tonalen Komponenten von Turbomaschinen ausgerichtet.

Die Hauptquelle der Töne stellt die *Rotor-Stator-Interaktion* dar, bei der durch das Auftreffen der Rotornachläufe auf den Statorschaufeln periodische Druckschwankungen erzeugt werden, welche in Abhängigkeit der Schaufelzahlen sehr effektiv Schall in den Strömungskanal abstrahlen können. Wie Tyler und Sofrin [143] gezeigt haben, werden in einer Turbomaschineneinstufe mit  $B$  Rotorblättern und  $V$  Statorschaufeln Schaufeltöne bei den Harmonischen der *Blattpassierfrequenz (BPF)*

$$\hbar f_{\text{BPF}} = \hbar B f_R \quad (1.1)$$

und mit azimutalen Modenordnungen

$$m = \hbar B \pm sV \quad (1.2)$$

angeregt, wobei  $f_R$  die Rotordrehfrequenz,  $\hbar = 1, 2, \dots$  die Ordnungen der BPF-Harmonischen und  $s = 1, 2, \dots$  eine beliebige ganze Zahl bezeichnen. Bei genügend dichtem Abstand der Schaufelreihen kommt es zu einer Wechselwirkung des mit dem Rotor rotierenden Potentialfelds mit dem Strömungsfeld an den Statorschaufeln. Dabei wird ebenfalls Schall bei den von Tyler und Sofrin beschriebenen Frequenzen und Moden

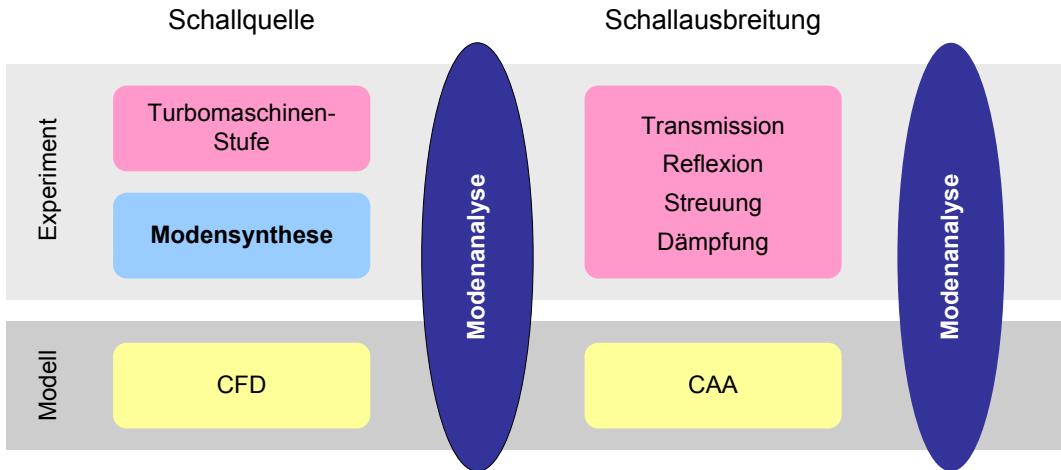


Abbildung 1.3: Modenanalyse und Modensynthese stellen wichtige Hilfsmittel in der experimentellen Untersuchung und bei der Weiterentwicklung der Designs von Turbomaschinen dar.

erzeugt. Eine weitere wichtige tonale Quelle tritt bei den Harmonischen der Rotordrehfrequenz auf, wenn das Rotorblatt mit Überschallgeschwindigkeit angeströmt wird und es zu Verdichtungsstößen an den Schaufelkanten kommt: das so genannte Kreissägengeräusch (engl. buzz saw noise) [88, 78]. Weitere Quellmechanismen sind die Nachlauf- und Potentialfeld-Wechselwirkung des Rotors mit Kanaleinbauten wie Streben oder Pylonen sowie die Interaktion von stationären Einlaufstörungen oder großskaligen Turbulenzballen mit dem Rotor. Auch diese führen zur Anregung eines – mitunter breiten – spezifischen Spektrums von Moden. Im Gegensatz zu den Schaufeltönen sind die breitbandigen Schallfeldkomponenten weitgehend zeitlich und räumlich inkohärent. Sie resultieren unter anderem aus stochastischen Blattkräften, welche z. B. aus einer Interaktion der Schaufeln mit der Zuströmerturbulenz, der Interaktion der turbulenten Schaufelgrenzschicht mit der Schaufelhinterkante oder Strömungsablösungen folgen. Übersichten über die verschiedenen Schallquellen und ihre Entstehungsmechanismen sind z. B. bei Morfey [87], Goldstein [40], Neise [96], Neise und Michel [97], Groeneweg [42], Carolus [17] und Schneider [117] zu finden.

### *Optimierung von Turbomaschinen-Designs*

In Abbildung 1.3 ist der vielfältige Nutzen der Modenanalyse und der Modensynthese bei der Entwicklung geräuscharmer Turbomaschinen-Designs zusammengefasst. Durch die Bestimmung der Amplituden aller dominanten Moden im Strömungskanal ermöglicht die Modenanalyse

- Rückschlüsse auf die Schallentstehungsmechanismen einer Turbomaschine,
- die Quantifizierung der im Kanal transportierten Schallleistung,
- die detaillierte Untersuchung von Schallausbreitungsvorgängen,
- die Validierung von numerischen Berechnungsverfahren und
- die Bereitstellung von Eingangsdaten für numerische Vorhersagen der Schallabstrahlung.

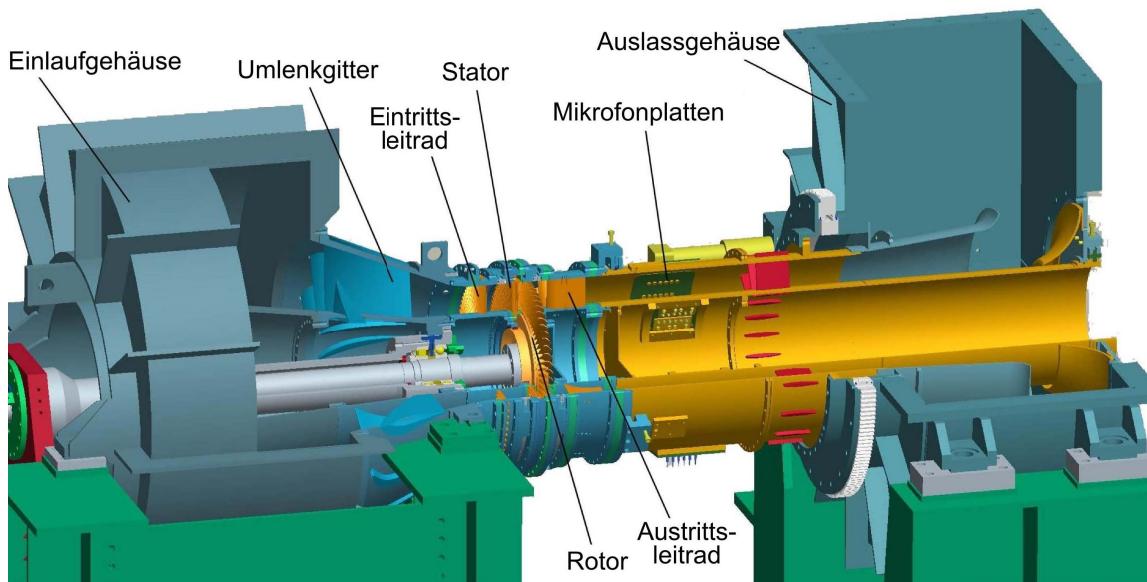


Abbildung 1.4: 1,5-Stufen-Niederdruckturbinen-Rig der TU Graz zur Untersuchung von lärmarmen Schaufeldesigns [91]. Die für die Modenanalyse der Schaufeltöne genutzten, bündig in Kanalaußenwand und Nabenhörner installierten Mikrofonarrays wurden nach den Richtlinien dieser Arbeit ausgelegt.

In der Untersuchung von Schallausbreitungsvorgängen ist es oft einfacher, das Schallfeld durch eine Modensynthese zu erzeugen als eine Turbomaschinenstufe als Versuchsschallquelle zu nutzen. Der Betrieb von Lautsprechern ist weniger aufwendig und erlaubt eine flexiblere Anregung von Testschallfeldern. So können durch Variation der Anregungsfrequenzen und Modenordnungen die akustischen Eigenschaften eines Untersuchungsobjekts umfassend charakterisiert werden. Im Folgenden werden einige Einsatzmöglichkeiten der Modenanalyse und der Modensynthese anhand von Beispielen verdeutlicht.

Abbildung 1.4 zeigt einen von der Firma MTU Aero Engines initiierten Turbinenprüfstand, an dem intensiv von der Modenanalyse Gebrauch gemacht wird. Zur Abtastung des Schallfelds sind in der Messsektion jeweils drei gleichmäßig über den Umfang verteilt Mikrofonplatten in die äußere Kanalwand und in den Nabenhörner eingesetzt. Jede Mikrofonplatte ist mit zwölf in axialer Richtung gestaffelten Mikrofonen instrumentiert. Zur vollständigen räumlichen Erfassung des Schallfelds wird die Messsektion in Schritten von  $2^\circ$  um insgesamt  $120^\circ$  in Umfangsrichtung traversiert. Die Mikrofonanordnung wurde mit den in dieser Arbeit dargestellten Methoden ausgelegt und ausgewertet [132, 136]. Aufgrund der gewählten Schaufelzahlen der Lauf- und Leiträder ließen sich die ermittelten dominanten Modenamplituden mit Berücksichtigung von Gleichung (1.2) eindeutig verschiedenen Schaufelreihen-Interaktionen zuordnen. Damit wurden unter anderem die explizite Vermessung der Abhängigkeit der Schallanregung vom Stator-Rotor-Abstand [14] und die genaue Bewertung verschiedener Designs des Austrittsleitads möglich [13, 15]. Anhand der gemessenen Daten konnten analytische und numerische Vorhersageverfahren validiert werden [13, 14, 15].

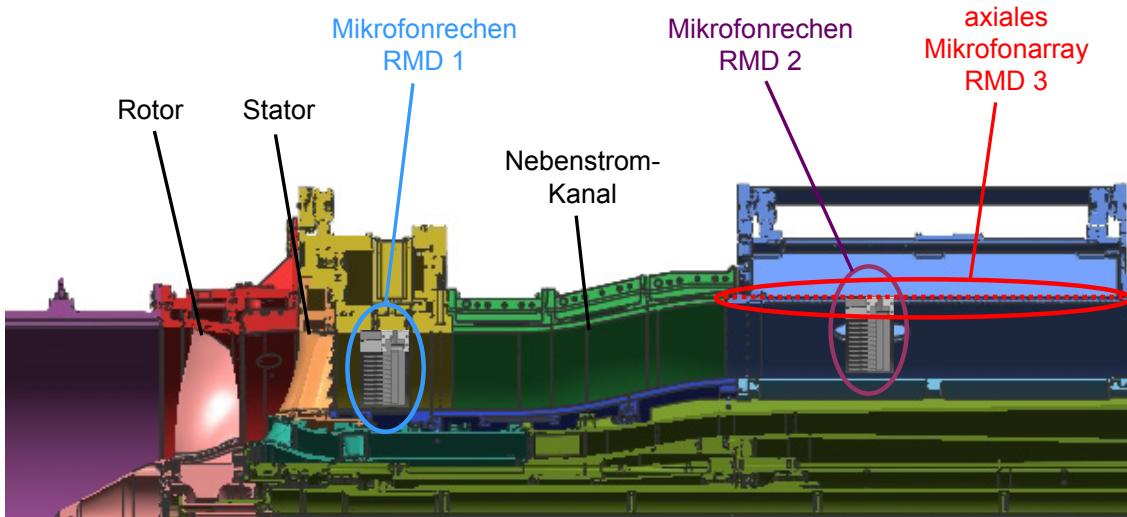


Abbildung 1.5: Universal-Fan-Facility-Adaption (UFFA)-Testrig der Firma Anecom AeroTest [93].

Mit den Methoden dieser Arbeit wurden die mit RMD 1, RMD 2 und RMD 3 bezeichneten Mikrofonarrays ausgelegt. Sie werden zur Analyse der Rotor-Stator-Interaktion sowie zur Untersuchung von schalldämpfenden oder schallstreuenden Elementen im Nebenstromkanal eingesetzt [134].

Der in Abbildung 1.5 dargestellte Prüfstand wurde für akustische Untersuchungen eines kompletten Triebwerksfan-Systems unter realitätsnahen Bedingungen konzipiert. Neben der detaillierten Analyse der Schallanregung des Fans sollen auch die schalldämpfenden und schallstreuenden Eigenschaften von Installationen im Nebenstromkanal vermessen werden [10, 134]. Beispiele sind akustische Liner, Triebwerkspylyonen oder Splitterplatten. Hierfür sind Modenanalysen in zwei Messsektionen vorgesehen: am Fanaustritt mit den als RMD 1 bezeichneten Mikrofonrechen zur Bestimmung der einlaufenden und reflektierten Moden und stromab der Kanalaufweitung mit den als RMD 2 bezeichneten Mikrofonrechen zur Bestimmung der transmittierten Moden. Um die Beeinflussung des Strömungs- und Schallfelds zu vermeiden, wurde die Möglichkeit geprüft, wandbündig installierte Mikrofonarrays anstelle der Mikrofonrechen zu verwenden. Aufgrund von Bauraumbeschränkungen ließ sich nur das mit RMD 3 bezeichnete axial linienförmige Mikrofonarray in der stromab liegenden Sektion realisieren. Die gemessenen Modenamplituden werden zur Validierung numerischer Modellrechnungen sowie als Eingangsdaten für die Vorhersage der Schallabstrahlung aus einer fiktiven Düse ins Freie genutzt.

Zur Untersuchung aeroakustischer Effekte, die bei der Ausbreitung von Schallwellen aus der Düse durch das Strahlsystem ins Freie auftreten [35, 139], wurde der in Abbildung 1.6 gezeigte Prüfstand entwickelt [5, 133]. An diesem Prüfstand kommt das Modensynthese-Verfahren zur Simulation von Fangeräuschen im Nebenstromkanal zum Einsatz. Mithilfe des so genannten Modengenerators, der aus 30 ringförmig an der Wand des Nebenstromkanals montierten Lautsprechern besteht, wurden Moden bei verschiedenen Frequenzen und mit unterschiedlichen azimutalen Ordnungen angeregt. Weil aber nur ein einziger Lautsprecherring verwendet wurde, konnte die radiale Schallfeldstruktur nicht beeinflusst werden. Zur Bestimmung von Referenzdaten für numerische Modellrechnungen musste deshalb im Kanal eine Modenanalyse durchgeführt werden.

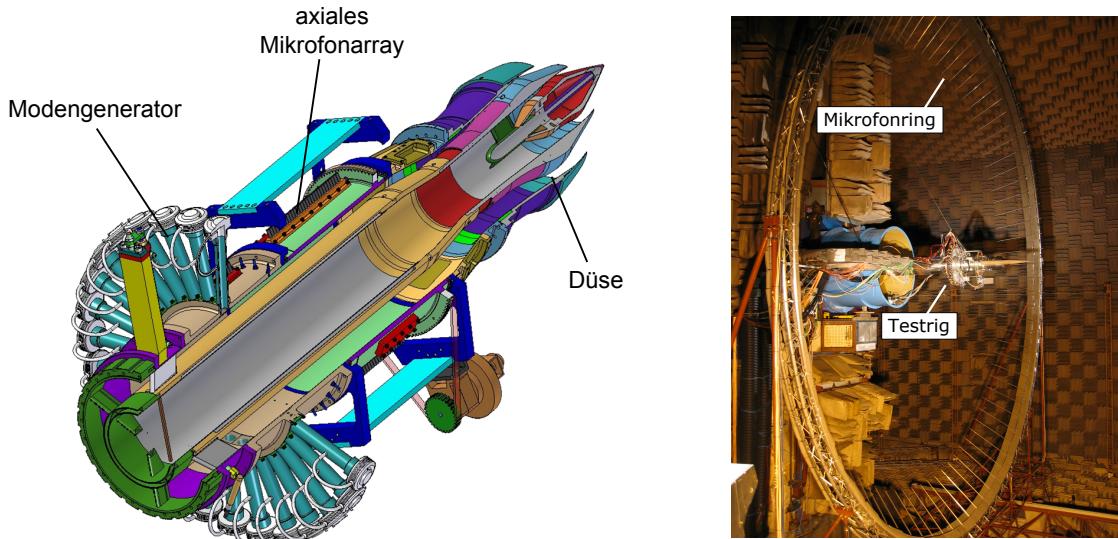


Abbildung 1.6: Testrig zur Untersuchung der Schallabstrahlung aus Triebwerksdüsen in der Noise Test Facility der Firma QinetiQ. Für die Simulation von Rotor-Stator-Interaktionsmoden wurde eine ringförmige Anordnung von Lautsprechern eingesetzt. Eine drehbare Mikrofonsektion im Nebenstromkanal lieferte Referenzdaten für Schallabstrahlungsvorhersagen. Das akustische Fernfeld wurde in einer reflexionsarmen Versuchshalle durch einen großen Mikrofonring erfasst [5, 133].

Hierzu wurde das in Abbildung 1.6 gekennzeichnete drehbare axiale Mikrofonarray stromab des Modengenerators verwendet. Die Abstrahlcharakteristik der Moden wurde im Fernfeld durch einen Mikrofonring vermessen, der einen äußeren Durchmesser von 12 m hatte, mit 80 Mikrofonen bestückt war und zur Erfassung verschiedener Abstrahlwinkel entlang der Strahlachse traversiert werden konnte. Die Analyse der azimutalen Schalldruckverteilung im Fernfeld ermöglichte die Validierung eines Computational Aeroacoustic (CAA)-Verfahren auf Basis von Modenamplituden [103].

#### *Aktive Minderung der Schaufeltöne von Turbomaschinen*

In zukünftigen Triebwerkskonzepten mit sehr hohen Nebenstromverhältnissen wird der Fan durch ein Getriebe im Verhältnis von etwa 1:3 unterstellt und mit reduzierter Drehzahl betrieben. Aufgrund einer gleichzeitigen Verringerung der Rotorblattzahl wird der Fan Schaufeltöne bei erheblich niedrigeren Blattfolgefrequenzen generieren, so dass für eine effiziente Dämpfung die Dicke der akustischen Liner in den Triebwerkskanälen erhöht werden müsste. Das hätte eine deutliche Zunahme der Triebwerksabmessungen und des Gewichts zur Folge. Eine effektive Reduktion der Fantöne durch aktive Lärmreduzierungsmaßnahmen würde zu einer erheblichen Verbesserung der Situation führen. Im Idealfall könnte die Rotor-Stator-Anordnung allein unter dem Gesichtspunkt der aerodynamischen Performance optimiert werden. Zum einen könnte auf eine cut-off-Auslegung der Rotor-Stator-Interaktion [142] verzichtet werden, so dass sich mit einer geringeren Statorblattzahl nicht nur eine Gewichtsreduktion, sondern zugleich eine Verminderung des angeregten Breitbandlärms erzielt ließe [34]. Ebenso wäre ein geringer axialer Rotor-Stator-Abstand möglich, was durch entsprechende Verkürzung des Triebwerkgehäuses zu einer Gewichtersparnis führen würde.

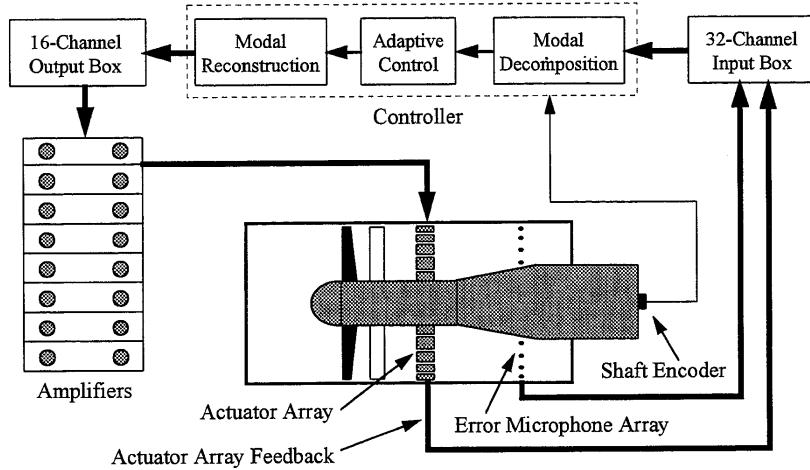


Abbildung 1.7: Versuchsanordnung zur aktiven Minderung von Rotor-Stator-Interaktionsmoden, mit der Pla et al [105] erstmalig den modalen Regelungsalgorithmus erprobt haben.

Als bisher am aussichtsreichsten stellte sich das so genannte *modale Regelungskonzept* heraus, das erstmals von Pla et al [105, 106] vorgestellt wurde. In diesem aktiven Lärm-minderungsansatz nehmen die akustische Modenanalyse und Modensynthese eine zentrale Rolle ein. Das Regelungsprinzip soll kurz anhand der Illustration aus Referenz [105] erläutert werden, welche in Abbildung 1.7 zu sehen ist. Ziel ist es, mithilfe von Lautsprechern ein Sekundärschallfeld zu erzeugen, dass das vom Fan erzeugte Primärschallfeld durch destruktive Interferenz ausgelöscht wird. Die aktive modale Regelung erfolgt in drei Schritten: Zuerst werden das zu regelnde Primärschallfeld an mehreren Fehlermicrofonringen abgetastet und die Amplituden der Rotor-Stator-Interaktionsmoden mittels einer Modenanalyse bestimmt. Die Modenamplituden werden der adaptiven Reglereinheit zugeführt, welche im zweiten Schritt die modalen Kompensationssignale berechnet. Aus den modalen Kompensationssignalen werden im dritten Schritt die Zeitsignale der einzelnen ringförmig angeordneten Aktuatoren berechnet und von diesen zur Synthese des modalen Sekundärfelds ausgegeben.

## 1.2 STAND DER FORSCHUNG

### 1.2.1 Modenanalyse

In der Literatur ist eine Vielzahl von Verfahren zu finden, die sich mit der Analyse von modalen Schallfeldern in Strömungskanälen beschäftigen. Die Verfahren unterscheiden sich erheblich bezüglich des erforderlichen Mess- und Datenanalyseaufwands, unterliegen verschiedenen Beschränkungen und liefern Informationen mit unterschiedlichen Detailgraden. Die folgende Übersicht fast vorwiegend Verfahren zusammen, mit denen sich die Amplituden einzelner Moden bestimmen lassen.

### *Azimutalmodenanalyse*

Der Grundstein für die experimentelle Analyse von Turbomaschinen-Rotor-Stator-Interaktionsmoden wurde 1962 durch die Veröffentlichung von Tyler und Sofrin [143] gelegt. In dieser Arbeit wurde nicht nur die analytische Zerlegung der tonalen Schallfeldkomponenten in axial laufende Moden mit einer von verschiedenen azimutalen und radialen Eigenfunktionen abhängenden Druckverteilung im Kanalquerschnitt beschrieben. Tyler und Sofrin haben auch den ersten messtechnischen Nachweis der durch einen Fan angeregten dominanten azimutalen Modenordnungen erbracht, indem sie die Zeitsignale eines an verschiedenen Umfangspositionen im Kanaleintritt eingesetzten Mikrofons verglichen, welche zuvor schmalbandig gefiltert und mit Hilfe eines 1-Puls-pro-Rotordrehung-Signals auf den gleichen Bezugszeitpunkt getriggert wurden.

In der Folge entwickelten und erprobten Mugbridge [92] sowie Harel und Perulli [48] Messverfahren zur Zerlegung von Fantönen in die verschiedenen azimutalen Modenordnungen, die auf der Kreuzkorrelation eines feststehenden und eines über den Kanalumfang traversierten Sensors beruhten. Bei der Analyse der azimutalen Schallfeldstruktur bietet es sich grundsätzlich an, die Orthogonalität der azimutalen Eigenfunktionen auszunutzen. Moore schlägt in [84] die Anwendung einer räumlichen diskreten Fouriertransformation (DFT) auf die an mehreren äquidistant über den Umfang verteilten Positionen gemessenen Schalldruckamplituden vor. Kerschen und Johnston [68] übertragen diesen Ansatz vom Frequenzbereich in den Zeitbereich und können damit auch instationäre Schallfelder analysieren, mit dem Nachteil einer geringeren Unterdrückung von hydrodynamischen Druckschwankungen durch Verzicht auf ein Triggersignal. Die Azimutalmodenanalyse in einem Sensorring eignet sich auch für eine aktive Regelung von Rotor-Stator-Interaktionstönen sehr gut: Pla [105] und Sutliff [131] nutzen sie für eine Formulierung des Regelungsalgorithmus aus, in der jede azimutale Ordnung individuell durch einen einkanaligen Regler kontrolliert wird, so dass – im Vergleich zum alle Moden global regelnden Least-Mean-Square (LMS)-Ansatz [77] – schließlich der Regelungsaufwand auf die dominanten Moden des Primärfeldes beschränkt werden konnte. Wie Rademaker et al in [111] zeigen, kann eine azimutale Fourieranalyse auch mit nicht-äquidistant angeordneten Sensoren durchgeführt werden. Hierdurch kann bei hohen Frequenzen die Anzahl Messpositionen verringert werden, der Nachteil besteht jedoch in einem reduzierten Messdynamikbereich. Wenn kein Triggersignal vorliegt, kann bei einer auf Kreuzspektren basierenden Azimutalmodenanalyse der Einfluss von inkohärenten Schallwellen und turbulenten Druckschwankungen durch Hinzuziehen eines Referenzmikrofons oder durch Anwendung einer Hauptachsentransformation reduziert werden [122].

### *Inverse Radialmodenanalyse*

Die weitere Zerlegung der Azimutalmoden in die voneinander unabhängigen radialen Modenordnungen erfordern einen erheblich größerem Aufwand als die Azimutalmodenanalyse selbst. Der naheliegendste Ansatz besteht in Messungen an mehreren radialen Positionen zur direkten Abtastung der radialen Druckverteilung. Um bei hohen Frequenzen die Sensoranzahl zu begrenzen, werden hierfür meistens ein oder mehrere radiale Messrechen eingesetzt, so dass durch die schrittweise Traversierung in azimutaler Richtung ein Messgitter aufgebaut werden kann, welches der Darstellung in Abbildung 1.1 entspricht. Moore diskutiert in [85] zwei verschiedene Analysemethoden. Die erste Me-

thode basiert auf einer Integration des Produkts der gemessenen Druckverteilung mit einzelnen radialen Eigenfunktionen unter Ausnutzung der radialen Orthogonalitätsrelation. Sie ist aber empfindlich gegenüber Rauscheinflüssen. Die zweite Methode beruht auf der Lösung eines Gleichungssystems, welches die gemessenen Schalldruckamplituden mit den gesuchten Modenamplituden verknüpft und ist der ersten Methode insbesondere dann überlegen, wenn die Zahl der Messpositionen die Anzahl der Modenamplituden deutlich übersteigt. Die als *inverse Radialmodenanalyse* bezeichnete zweite Methode findet eine standardmäßige Anwendung in akustischen Fan-Prüfständen der NASA [50, 127]. Als Besonderheit hervorzuheben ist dort die kontinuierliche Drehung eines radialen Mikrofonrechen, wodurch die Schallfeldanteile der azimutalen Ordnungen aufgrund individueller Doppler-Verschiebungen bei unterschiedlichen Wellendrehharmonischen im Frequenzspektrum abgebildet werden. Messungen in einer einzigen Kanalquerschnittsebene haben zwar den Vorteil eines numerisch stabilen Auswertesystems, sind jedoch nicht dazu geeignet, die Beiträge stromab und stromauf laufender Moden zu trennen. Holste und Neise [53] haben zu diesem Zweck bei der Untersuchung eines gegenläufigen Propfan-Modells die radialen Schalldruckmessungen auf zwei Ebenen erweitert. Die radialen Mikrofonrechen wurden zur sequentiellen Abtastung des Schallfelds schrittweise in Umfangsrichtung traversiert. Eine Variante mit sehr langsammer kontinuierlicher Drehung der Mikrofonrechen zur Einsparung von Messzeit hat Sijtsma [121] erprobt.

Messungen mit radial im Kanal angeordneten Mikrofonen sind problematisch, weil sie das Strömungsfeld verblocken und das Schallfeld durch Interaktion mit der Turbomaschinestufe sowie durch Streuung erheblich stören [49]. Deswegen haben Pickett et al [104] die Eignung von bündig in die Kanalwand eingesetzten Sensorarrays untersucht. Bei ihrem inversen Analyseverfahren werden die verschiedenen radialen Ordnungen aufgrund ihrer unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten durch Messungen an verschiedenen axialen Positionen getrennt. Mit einer für zwei Frequenzen optimierten unregelmäßigen Anordnung von 10 Mikrofonen sind Pickett et al in der Lage, die Amplituden zweier Rotor-Stator-Interaktionsmoden mit guter Genauigkeit zu messen. Sie stellen aber zunehmende Fehler bei zunehmender Anzahl ausbreitungsfähiger Moden fest. Den Nachweis, dass mit mehreren wandbündig installierten Mikrofonringen das gleiche Ergebnis wie mit radialen Sensorrechen erzielt werden kann, erbrachten Enghardt et al [32] erstmals für ein aus zwei radialen Ordnungen bestehendes Verdichterschallfeld. In einer Weiterentwicklung der modalen Regelungsstrategie von Pla [105] zur aktiven Minde rung von Fantönen kombinierten verschiedene Autoren [31, 39, 77, 112, 138, 153, 154] Azimutalmodenanalysen an mehreren Sensoringen und führten damit implizit eine Schallfeldzerlegung in die radialen Modenordnungen durch. Alternative inverse Verfahren, die auf Transferfunktions- bzw. Kreuzkorrelationsmessungen beruhen und auch zur Analyse von inkohärenten Schallfeldern eingesetzt werden können, werden von Åbom [110], Arnold [4], Enghardt et al [25, 26] und Jürgens [63, 64] beschrieben.

#### *Fourieranalyse der axialen Wellenzahlen*

Die einfachste, d.h. numerisch stabilste Methode, zur Separation der verschiedenen radialen Modenordnungen besteht in einer Fourieranalyse der axialen Wellenzahlen und wurde erstmals von Harel und Perulli [48] durch Korrelation eines feststehenden und eines über drei Meter entlang der Kanalachse verschobenen Mikrofons realisiert.

Joppa [59] verwendete 32 Mikrofone, die entlang einer Linie über eine Gesamtlänge von 1.625 m verteilt waren, zur Modenanalyse im Einlauf eines JT15D Turbofan Triebwerks. Im axialen Wellenzahlspektrum konnte er die bei der höchsten Frequenz dominant angeregten Modenordnungen (-13,0), (-13,1), (-13,2) und (22,0) mittels einer diskreten Fourier-Transformation deutlich voneinander trennen. Grundsätzlich besteht das Problem bei der Verwendung eines Linienarrays darin, dass Moden verschiedener Ordnungen ( $m,n$ ) sehr ähnliche Wellenzahlen haben können und damit in den meisten Fällen schwer trennbar sind. Dadurch, dass die axialen Wellenzahlen in direktem Zusammenhang mit dem modalen Ausbreitungswinkel relativ zur Kanalachse stehen [114], kann ein linienförmiges, axiales Sensorarray auch als akustische Antenne mit variabler winkelabhängiger Richtcharakteristik (engl. beamforming) interpretiert werden. Joseph et al [62] schlagen eine Kombination von 12 axialen Linienarrays mit je 12 Mikrofonen für eine Anwendung in aktiven Lärmreduzierungsstufen vor. In Simulationsrechnungen, in denen allerdings nur wenige dominante Moden im Schallfeld angenommen wurden, konnten Moden mit großen Ausbreitungswinkeln im Kanal und somit zugleich großen Abstrahlwinkels ins Fernfeld erfolgreich reduziert werden. Ein überzeugender Nachweis für eine praktische Umsetzung der Beamforminganalyse in Systemen zur aktiven Lärmreduzierung steht jedoch aus. Smith und Burdisso [124] verwendeten lediglich vier Mikrofone zur Regelung dreier radialer Modenordnungen, erzielten aber eine Reduktion der Abstrahlung in kleine statt in die gewünschten großen Winkelbereiche. Ähnliche Ergebnisse wurden von Sutliff et al [129] für ein nur aus drei Mikrofonen bestehendes Linienarray berichtet, in dem die Abstrahlung niedriger radialer Modenordnungen durch die Einführung von Gewichtungsfaktoren verbessert kontrolliert werden sollte.

#### *Modelle zur Beschreibung der Schallausbreitung in Strömungskanälen*

Allen bisher beschriebenen Analyseverfahren ist gemein, dass sie für eine Anwendung in zylindrischen Kanälen mit konstantem Außenradius, konstantem Nabenvorhältnis und schallharten Wänden konzipiert sind. Der Einfluss der Strömung geht in der Regel nur in Form einer mittleren axialen Machzahl ein, was eine analytische Lösung der Wellengleichung ermöglicht und für einen weiten Anwendungsbereich eine sehr praktikable und gute Annäherung darstellt. Die einfachste Erweiterung besteht darin, dass ein eventuell vorhandener Strömungsdrall durch eine Starrkörperrotation abgebildet wird. Dieses Strömungsmodell ist insbesondere für größere Nabenvorhältnisse gut geeignet [2, 100] und wurde erfolgreich bei experimentellen Modenanalysen z. B. im Austritt von Turbinenprüfständen ohne Austrittsleitrad angewandt [29, 125]. Die Strömungsverhältnisse zwischen Rotor und Stator einer Verdichterstufe werden in verschiedenen Studien [6, 8, 67, 74, 100] realistischer durch die zusätzliche Überlagerung eines Potentialwirbels beschrieben. Zentrifugal- und Corioliseffekte führen dann zu einer mathematischen Kopplung von akustischen, wirbelartigen und entropiebedingten Störungen. Diese Effekte sind im Frequenzbereich der Fanschaufeltöne zwar schwach [41], die modalen Eigenwerte und Eigenfunktionen können für dieses Modell aber nur noch mit hohem numerischen Aufwand ermittelt werden. Dies gilt ebenso für die Lösung der Wellengleichung unter Berücksichtigung von Strömungsgrenzschichten. Zu diesem Effekt gab es bereits früh eine grundlegende Untersuchung für 2-dimensionale Strömungen von Pridmore-Brown [109], die später auf zylindrische Kanäle übertragen wurde (siehe hierzu z. B. die Übersichten von Kousen [74] sowie von Vilenski und Rienstra [144]). Laut Kornow [72] wirkt sich die Kanalgrenzschicht in einer Art Beugungseffekt nur bei

relativ hohen Frequenzen auf stromab und stromauf laufende Moden niedriger Ordnungen signifikant aus. Zur Bestimmung der modalen Eigenlösungen sind verschiedene numerische Ansätze vorgeschlagen worden [12, 22, 74, 72, 94, 83]. Für experimentelle Modenanalysen wurden sie bisher allerdings nur in zwei Studien zur Berücksichtigung des Grenzschichteffekts eingesetzt [22, 28].

In Kanälen mit variierendem Querschnitt verändern sich die modalen Eigenlösungen. Unter der Annahme, dass sich die Kanalradien nur schwach im Vergleich zu den modalen Wellenlängen ändern, haben Ovenden und Rienstra [102] das so genannte Triple-Plane-Pressure-Matching (TPP)-Verfahren entwickelt. Es basiert auf einem von Rienstra [115] entwickelten analytischen Modell, in dem eine von der axialen Koordinate abhängige langsame Veränderung der Modeneigenfunktionen durch einen Mehrskalen-Ansatz (engl. multiple scales approach) beschrieben wird. In diesem Modell werden Grenzschichten oder Drall nicht berücksichtigt. Mit dem TPP-Modenanalyseverfahren wird die Schalldruckverteilung in drei dicht benachbarten Kanalquerschnittsflächen ausgewertet. Probleme können in Fällen auftreten, in denen aufgrund der Querschnittsänderung eine Mode mitten in der Analysesektion ihre Ausbreitungsfähigkeit verliert. Die dann auftretenden Streuungen werden durch den Mehrskalen-Ansatz nicht immer richtig beschrieben [101]. Das TPP-Verfahren wurde bisher ausschließlich auf numerische Daten angewandt, etwa zur Kopplung eines die Quellen einer Rotor-Stator-Stufe umfassenden CFD-Rechengebiets mit einem der Schallausbreitungsberechnung dienenden CAA-Gitter [148]. Zur Filterung der Strömungsnachläufe in unmittelbarer Nähe des Verdichteraustritts haben Weckmüller et al [148] die Modellgleichungen des TPP-Verfahrens um hydrodynamische Moden erweitert.

### *Modenanalyse des abgestrahlten Schallfelds*

Seit Ende der 1990er Jahre werden verschiedene Verfahren zur Modenanalyse des aus dem Eintritt oder Austritt eines Triebwerks abgestrahlten Schallfelds hinsichtlich eines Einsatzes als Messtechnik an realen Triebwerken untersucht [20, 36, 75, 76, 141]. Eine prinzipielle Schwierigkeit besteht darin, dass die modale Abstrahlcharakteristik und damit die Qualität der Analyse empfindlich von den Details des Strömungsfelds und der Düsengeometrie abhängen. Auf analytischen Schallausbreitungsmodellen basierende Verfahren erweisen sich daher als kaum praxistauglich [141, 149], weshalb die meisten Autoren numerische Verfahren zur Berechnung der Transferfunktionen vom Kanal an die Fernfeldsensoren einsetzen [19, 75, 76]. Während die Analysen tonaler Komponenten im Vergleich zu Modenmessungen im Strömungskanal überwiegend signifikante Abweichungen zeigen [19, 75], ergeben die von Castres und Joseph [19] durchgeföhrten Analysen von breitbandigen Fangeräuschen plausible Modenverteilungen.

#### 1.2.2 Modensynthese

Seit Anfang der 1970er Jahre werden Arrays akustischer Aktuatoren zur gezielten Anregung von Moden in Strömungskanälen eingesetzt [107, 119]. In den meisten Fällen werden konventionelle elektrodynamische Lautsprecher benutzt, da diese über einen weiten Frequenzbereich phasengenau und mit hohen Schallpegeln angesteuert werden können. Um die Strömung nicht zu beeinflussen, werden die Lautsprecher von außen an die Wand des Strömungskanals angeschlossen. Zur Verbesserung der Impedanzanpassung

sind die Lautsprecher oft mit Trichtern versehen. Üblicherweise werden die Lautsprecher ringförmig, mit äquidistantem azimutalem Abstand angeordnet, da auf diese Weise am besten Einfluss auf Moden unterschiedlicher azimutaler Ordnungen genommen werden kann. Ein *Lautsprecherarray* wird in der Literatur auch als *Aktuatorarray*, *Modengenerator* oder *Modensynthesizer* bezeichnet. Insbesondere unter den beiden letzten Begriffen wird gelegentlich die gesamte instrumentierte Kanalsektion mitsamt Signalgeneratoren und Signalverstärkern verstanden.

Aufgrund des geringen technischen Aufwands wird zur Untersuchung von Schallausbreitungsvorgängen oft nur ein einzelner Lautsprecherring verwendet, z. B. zur Vermessung der akustischen Dämpfungs- und Streueigenschaften von Linern [147] oder zur Untersuchung der Schallabstrahlung aus Triebwerksdüsen [5, 133, 145]. Mit Hilfe eines einzelnen Quellrings können die Amplituden von Moden verschiedener radialer Ordnungen jedoch nicht individuell eingestellt werden. Dies haben Risi et al [116] in einer analytischen Studie zur aktiven Regelung von Fan-Tönen erkannt. Erste experimentelle Tests mit mehreren Aktuatorringen führten Sutliff und Walker [130] durch. Sie steuerten, ebenfalls für eine aktive Lärminderung, je vier Aktuatorringe in der Einlaufsektion und im Nebenstromkanal eines Fans durch einen modalen Regelungsalgorithmus an, um die Ausbreitung von insgesamt sechs radialen Modenordnungen in beide Abstrahlrichtungen zu reduzieren. Dabei bemerkten Sutliff und Walker, dass das theoretisch vorhandene Reduktionspotential nicht erreicht wurde, was sie auf eine unbeabsichtigte Anregung von zusätzlichen Moden, so genannten *Spillovermoden*, zurückführten.

Für die Realisierung einer aktiven Lärminderung am Triebwerk bietet sich die Integration der Aktuatoren in die Statorschaufeln und damit in direkter Nähe der Primärquellen an. Erste Versuche mit sogenannten aktiven Statoren wurden von Sutliff et al [128] und Just et al [65] realisiert. Eine große Herausforderung besteht in der Herstellung kompakter und trotzdem leistungsfähiger Aktuatoren, für welche zumeist in die Schaufeloberflächen integrierte piezoelektrische Platten verwendet werden [39, 65, 112, 128]. Auch für diese Anregungsart wurde von Spillover-Effekten berichtet [39, 112, 128].

Azimutale Spillovermoden können durch räumliche Unterabtastung entstehen [146], werden aber in allen veröffentlichten Studien durch die Verwendung einer hinreichenden Anzahl von Aktuatoren im Ring vermieden. Als Ursache für die Anregung der störenden Spillovermoden vermuten Walker [146] und Genoulaz et al [39] Abweichungen im Anregungsverhalten einzelner Aktuatoren. Diese Vermutung wird von Enghardt et al [30] in einer Studie zur aktiven Minderung von Fangeräuschen bestärkt: Mit einem modalen Regelungsansatz und bei Verwendung von vier Lautsprecherringen wurde die vollständige Unterdrückung eines Schaufeltöns um 24 dB erreicht – allerdings nur durch gleichzeitige Regelung aller Moden des Schallfelds. Bei einer Beschränkung der Regelung auf die dominante Fan-Interaktionsmode wurde eine Gesamtreduktion von nur 3 dB festgestellt. Näheren Aufschluss über den begrenzten Regelungserfolg lieferten die in Abbildung 1.8 dargestellten Ergebnisse von Radialmodenanalysen. Im ungeregelten Schallfeld lag der Pegel der dominanten Interaktionsmode (-2,0) um 10 dB oberhalb aller sonstigen Moden. Mit Anwendung der aktiven Regelung wurde der Pegel dieser Mode so deutlich verringert, so dass eine Gesamtreduktion von 10 dB zu erwarten wäre. Obwohl die Lautsprecherringe ausschließlich auf die Erzeugung der Mode (-2,0) eingestellt waren, wurden jedoch gleichzeitig die Pegel einiger anderer Moden angehoben.

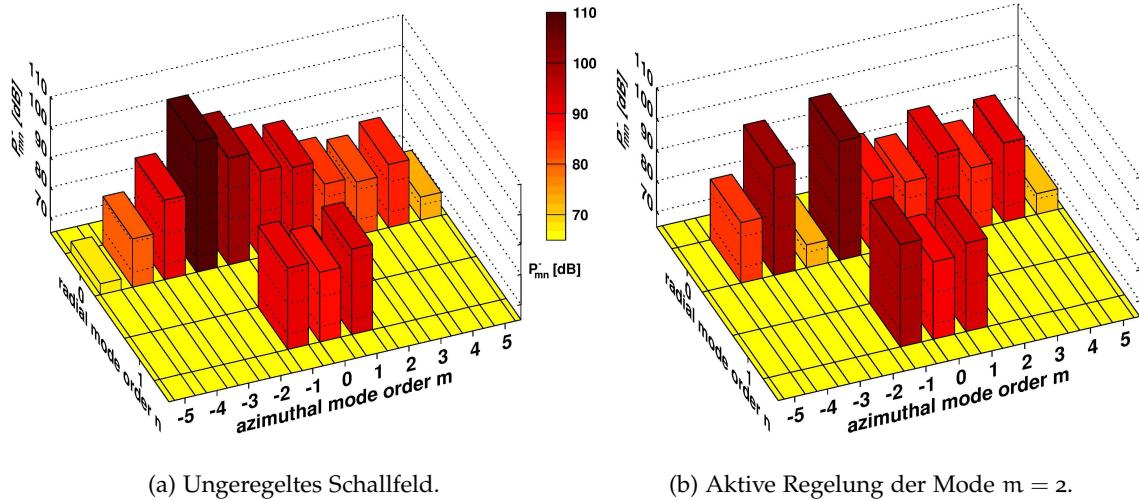


Abbildung 1.8: Schalleistungspegel aller stromauf laufenden ausbreitungsfähigen Moden im Ansaugkanal eines Modellfans bei der 2-fachen Blattfolgefrequenz [30]. Durch Anwendung eines aktiven Regelungsverfahrens wurde die dominante Interaktionsmode  $(-2,0)$  um mehr als 30 dB unterdrückt. Aufgrund der Anhebung anderer Modenordnungen betrug die Gesamtreduktion jedoch nur 3 dB.

Insbesondere die Verstärkung der Moden  $(-1,0)$ ,  $(-1,1)$  und  $(-3,0)$  führte dazu, dass die gesamte Reduktion des Schallfelds nur noch 3 dB betrug. Wie in den anderen experimentellen Studien auch, konnten hier die Ursachen der Spillovermoden aufgrund der geringen Anzahl von Versuchsvariationen nicht systematisch erörtert werden.

### 1.3 WISSENSCHAFTLICHE FRAGESTELLUNGEN

Zentraler Untersuchungsgegenstand der Arbeit ist die Analyse und Synthese von Moden unterschiedlicher azimutaler und radialer Ordnungen unter Verwendung von Sensoren bzw. Aktuatoren, die bündig mit der Kanalwand installiert sind. Während die Erfassung und die Anregung der azimutalen Eigenschwingungsformen vergleichsweise einfach ist, besteht eine große Herausforderung bezüglich der radialen Eigenschwingungsformen: Anstatt die radiale Druckverteilung direkt abzutasten, müssen Moden verschiedener radialer Ordnungen über axial gestaffelte Stützstellen anhand ihrer axialen Wellenzahlen unterschieden werden. Für beide Verfahren ergeben sich als gemeinsame übergeordnete Fragen:

- Wie hängen die Genauigkeiten der Modenanalyse und der Modensynthese von der Anordnung der Sensoren beziehungsweise Aktuatoren ab?
- Können die Anzahl und Positionen der Stützstellen optimal gewählt werden?
- Wodurch wird die Genauigkeit der Modenanalyse und der Modensynthese noch beeinflusst?

Anknüpfend an den aktuellen wissenschaftlichen Kenntnisstand und mit Hinsicht auf die derzeitigen Anforderungen an die Anwendungen, werden im Folgenden spezielle Fragestellungen für beide Verfahren formuliert.

### *Modenanalyse*

Für die Modenanalyse wird der inverse Analyseansatz gewählt, der auf der Lösung eines Gleichungssystems beruht. Die auf Messungen mit radialen Sensorrechen basierende Modenanalyse gilt als numerisch robust, da die radialen Eigenfunktionen von Moden identischer azimuthaler Ordnung orthogonal sind, und hat sich als Standardverfahren an Turbomaschinenprüfständen etabliert. Die axialen Eigenfunktion von Moden identischer azimuthaler Ordnung sind nicht orthogonal. Es stellt sich daher die Frage, ob – bei Verwendung der gleichen Sensoranzahl – mit wandsbündig installierten Sensoren Modenanalysen bei ähnlich hohen Frequenzen und mit vergleichbarer Genauigkeit durchgeführt werden können, wie mit Mikrofonrechen.

Im Strömungskanal einer Turbomaschine sind der akustischen Messung turbulente Druckschwankungen und bezüglich der Schaufeltöne inkohärente Schallkomponenten überlagert. Es ist davon auszugehen, dass sich diese stochastischen Fehlerquellen signifikant auf die Ergebnisse von Modenanalysen auswirken. Daher muss die Fortpflanzung dieser Messungsgenauigkeiten auf die Modenamplituden untersucht werden.

### *Modensynthese*

Die gezielte und ungestörte Synthese höherer radialer Modenordnungen ist eine Voraussetzung für die detaillierte Untersuchung von Schallausbreitungsvorgängen in Strömungskanälen sowie für die maximale Ausschöpfung des vorhandenen Reduktionspotentials durch ein aktives Lärmminderungsverfahren. Da bisher nur wenige Erkenntnisse bei einzelnen Frequenzen und in der direkten Anwendungsumgebung gewonnen wurden, soll in dieser Arbeit die Anregbarkeit akustischer Moden durch ein Lautsprecherarray unter idealisierten akustischen Versuchsbedingungen grundlegend untersucht werden.

Durch systematische Variation des Versuchsaufbaus und der Anregungsparameter soll geklärt werden, ob sich bestimmte Moden bevorzugt anregen lassen, ob es prinzipielle Beschränkungen der Modensynthese gibt und welche Ursachen zur verstärkten Anregung der unerwünschten Spillovermoden führen.

## 1.4 AUFBAU DER ARBEIT

In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung der Schallausbreitung in Strömungskanälen dargestellt. Darin enthalten ist eine Studie, die verallgemeinerte, vom Nabenvorhältnis des Strömungskanals unabhängige Darstellungen ermöglicht. Die Kapitel 3 bis 5 umfassen die Untersuchungen zur Modenanalyse. Das Verfahren der Modenanalyse wird in Kapitel 3 in verschiedenen Varianten beschrieben, zusammen mit einer Methode zur Separation der Turbomaschinen-Schaufeltöne aus den Mikrofonmessungen und einer Vorgehensweise zur Bewertung der Analysegenauigkeit. In Kapitel 4 wird ein systematisches Verfahren zur Optimierung von Sensorarrays für Modenanalysen vorgestellt und auf vier Sensoranordnungen angewendet, die aus radialen Sensorrechen bzw. wandsbündig installierten Sensoren bestehen. Dabei werden die spezifischen Ursachen von Analysegenauigkeiten eingehend untersucht und die

messtechnischen Aufwände der Arrays verglichen. Gegenstand von Kapitel 5 ist die experimentelle Erprobung wandbündiger Mikrofonarrays für Modenanalysen bei hohen Frequenzen und die Überprüfung der in Kapitel 4 aufgestellten Richtlinien zur optimalen Gestaltung von Mikrofonarrays. Anhand der Daten von drei verschiedenen Turbomaschinenprüfständen werden unter anderem ein Vergleich mit auf Mikrofonrechen basierenden Analysen angestellt und die Einflüsse von der Messdauer und der Größe des Messgitter auf das Analyseergebnis untersucht. Kapitel 6 und 7 beinhalten die Untersuchungen zur Modensynthese. In Kapitel 6 wird ein Modell des Lautsprecherarrays aufgestellt, welches die Abhängigkeiten der Schallanregung von der räumlichen Anordnung der Lautsprecher sowie von weiteren Details des Versuchsaufbaus erfassen und damit die Interpretation der in Kapitel 7 angestellten experimentellen Untersuchungen unterstützen soll. Die Algorithmen, die zur Berechnung der Lautsprechersignale für eine gezielte Anregung von Moden einzelner azimutaler und radialer Ordnungen benötigt werden, werden ebenfalls in Kapitel 6 beschrieben. In Kapitel 7 wird der Versuchsstand vorgestellt, der zur Erprobung der Modensynthese aufgebaut wurde. Im Anschluss daran werden mehrere Versuchsreihen erläutert, die der Verifizierung des Lautsprechermodells dienen und die Effekte aufklären sollen, die zu einer verstärkten Anregung von Spillovermoden führen. Kapitel 8 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen.

# 2

---

## AUSBREITUNG VON MODEN IN STRÖMUNGSKANÄLEN

---

Die Form und die Ausbreitung von akustischen Moden werden in Strömungskanälen maßgeblich durch das Nabenvorhältnis und die stationären Strömungsgrößen beeinflusst. Ein wesentlicher Gegenstand dieses Kapitels ist es, die Abhängigkeiten der Moden von den wichtigsten Parametern eingehend zu untersuchen. Von einer abgeleiteten verallgemeinerten Darstellung wird insbesondere in Kapitel 4 bei der Optimierung von Sensorarrays für Modenanalysen in verschiedenen Einsatzgebieten Gebrauch gemacht.

In der Fachliteratur sind zahlreiche Herleitungen der modalen Eigenlösungen für zylindrische und ringförmige Kanäle zu finden, in denen die stationäre Strömung lediglich eine axiale Komponente mit ebenem Profil aufweist. Als eine der ältesten Veröffentlichungen sei hier die von Tyler und Sofrin genannt [143]. Ihr Vorteil besteht in der analytischen Formulierung, welche schnelle numerische Datenanalysen und damit umfangreiche Parameterstudien ermöglicht. Das einfache Strömungsmodell stellt erfahrungsgemäß eine sehr gute Annäherung für viele Anwendungen im Bereich der Turbomaschinen dar. Die relevantesten Abweichungen von dem Modell bestehen in der Strömungsgrenzschicht an der Kanalwand sowie einem Strömungsdrall, der sich vor allem in Testkonfigurationen mit fehlendem Lauf- oder Leitrad signifikant auf die Modenausbreitung auswirken kann. In den um beide Strömungsphänomene erweiterten Grundgleichungen sind die akustischen Schwankungen im Allgemeinen mit wirbelartigen und entropiebedingten Strömungsstörungen mathematisch gekoppelt [8]. Da die zugehörigen Modenformfunktionen nur mit aufwändigen numerischen Verfahren bestimmt werden können, werden die Einflüsse der Kanalgrenzschicht und des Strömungsdralls im Folgenden nur am Rande betrachtet.

### 2.1 HOMOGENE KONVEKTIVE WELLENGLEICHUNG

Das Strömungsmedium sei isentrop und besitze keine thermische Leitfähigkeit. Ausgangspunkt für die Beschreibung des Strömungsfeldes im zylindrischen Kanal sind die Kontinuitätsgleichung und die Eulergleichungen in Zylinderkoordinaten ( $x, r, \phi$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho u_\phi) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \phi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_\phi}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_r u_\phi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi}. \quad (2.4)$$

In den vorstehenden Gleichungen bezeichnen  $\rho$  die Dichte,  $p$  den Druck und  $(u_x, u_r, u_\phi)$  die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit. Äußere Kräfte spielen in der vorliegenden Arbeit keine Rolle und wurden in den Gleichungen vernachlässigt.

Der Kanal habe einen konstanten kreis- oder ringförmigen Querschnitt und werde in axialer und azimutaler Richtung stationär durchströmt. Für die stationäre Strömung gelte  $\mathbf{U} = (U_x(r), 0, U_\phi(r))$ . Eine Kanalgrenzschicht wird demnach durch die radial abhängige axiale Gleichströmungskomponente  $U_x(r)$  erfasst. Eine drallbehaftete Strömung besitzt in der Regel ebenfalls eine radiale Abhängigkeit und wird hier durch  $U_\phi(r)$  beschrieben. Alle weiteren stationären Strömungsgrößen, wie die Temperatur und die Dichte, seien in der betrachteten Kanalsektion zeitlich und räumlich konstant. Mit diesen Annahmen können die Größen des Strömungsfeldes in stationäre und schwankende Komponenten aufgespalten werden:

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, r, \phi, t), \quad (2.5)$$

$$p = p_0 + p'(x, r, \phi, t), \quad (2.6)$$

$$u_x = U_x(r) + u'_x(x, r, \phi, t), \quad (2.7)$$

$$u_r = u'_r(x, r, \phi, t), \quad (2.8)$$

$$u_\phi = U_\phi(r) + u'_\phi(x, r, \phi, t). \quad (2.9)$$

Zur Unterscheidung von stationären Komponenten sind die schwankenden Feldgrößen durch Striche gekennzeichnet. Für die Machzahlen der axialen und azimutalen Gleichströmungskomponente gelte  $M_x = U_x/c < 1$  und  $M_\phi = U_\phi/c < 1$ . Wenn das das Strömungsfeld frei von Quellen und Senken ist, dann liefert Einsetzen der Gleichungen (2.5) bis (2.9) in die Gleichungen (2.1) bis (2.4)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U_x \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial \phi} + \rho_0 \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\rho_0}{r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} + \rho_0 \frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{\rho_0}{r} u'_r = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u'_x}{\partial t} + U_x \frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial u'_x}{\partial \phi} + \frac{dU_x}{dr} u'_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u'_r}{\partial t} + U_x \frac{\partial u'_r}{\partial x} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial u'_r}{\partial \phi} - 2 \frac{U_\phi}{r} u'_\phi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u'_\phi}{\partial t} + U_x \frac{\partial u'_\phi}{\partial x} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi} + \frac{U_\phi}{r} u'_r = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \phi}. \quad (2.13)$$

Terme höherer Ordnung der gestrichenen Größen sind vernachlässigt worden. Zur vollständigen Beschreibung des Problems fehlt eine Beziehung zwischen den Druck- und Dichteschwankungen. Diese wird durch die Energiegleichung hergestellt, welche sich im Fall eines isentropen Strömungsfelds reduziert zu [24]

$$p' = c^2 \rho', \quad (2.14)$$

wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. In einem idealen Gas stehen Schallgeschwindigkeit und Temperatur wie folgt in Beziehung

$$c = \sqrt{K R_s T}. \quad (2.15)$$

Hier bezeichnet  $K$  den Adiabatenexponenten,  $R_s$  die spezifische Gaskonstante und  $T$  ist die statische Temperatur des Fluids gemessen in Kelvin.

Das System der oben angegebenen Differentialgleichungen ist durch die Terme  $\frac{dU_x}{dr} u'_r$ ,  $-2\frac{U_\phi}{r} u'_\phi$  und  $\frac{U_\phi}{r} u'_r$  gekoppelt. Der Strömungsdrall wird in verschiedenen Studien [8, 74, 100] durch die Kombination eines Potentialwirbels und eines rotierenden Starrkörpers modelliert. In vielen Fällen, insbesondere bei größeren Nabenvorhältnissen, reicht die alleinige Näherung durch den mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  rotierenden Starrkörper bereits aus [2, 100]. Es gilt dann  $U_\phi = \Omega r$ , was zu wichtigen Vereinfachungen führt. So zeigt Heinig in [51], dass  $-2\frac{U_\phi}{r} u'_\phi = -2\Omega u'_\phi$  und  $\frac{U_\phi}{r} u'_r = 2\Omega u'_r$  Coriolis-Terme darstellen, die bei hinreichend kleinem Verhältnis zur Schallfrequenz  $|\Omega/\omega| \ll 1$  vernachlässigt werden können<sup>1</sup>. Damit können die Gleichungen (2.10) bis (2.13) in folgende konvektive Wellengleichung für den Schalldruck überführt werden:

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{D}{Dt} \right)^2 p' - \rho \frac{dU_x}{dr} \frac{\partial u'_r}{\partial x} - \Delta p' = 0. \quad (2.16)$$

Die Drallströmung kommt jetzt lediglich noch in der substantiellen Ableitung zum Ausdruck:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + U_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (2.17)$$

In den vorstehenden Gleichungen bezeichnet  $\Delta$  den Laplace-Operator und  $\nabla$  den Nabla-Operator in zylindrischen Koordinaten. Die weiteren Abschnitte beziehen sich entweder ausschließlich auf die Gleicheanteile oder die Wechselanteile der Strömungsgrößen, so dass die Striche an den Wechselanteilen ab jetzt fortgelassen werden.

## 2.2 MODENANSATZ

Für zeitlich harmonische Druckschwankungen der Form  $p \propto \exp(-i\omega t)$  wird aus der Wellengleichung

$$\begin{aligned} k^2 p + 2ikM_x \frac{\partial p}{\partial x} + 2ik \frac{\Omega}{c} \frac{\partial p}{\partial \phi} + (1 - M_x^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\Omega^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} \\ - 2M_x \frac{\Omega}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - 2\rho c \frac{dM_x}{dr} \frac{\partial u_r}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

An dieser Stelle ist mit  $k = \omega/c$  die Wellenzahl für Schallausbreitung unter Freifeldbedingungen eingeführt worden. Die partielle Differentialgleichung (2.18) stellt zusammen mit den Randbedingungen des Strömungskanals ein Eigenwertproblem dar. Es kann durch einen Separationsansatz gelöst werden. Für den zylindrischen Strömungskanal können die Ausdrücke für Schalldruck und Schallschnelle in folgende Serien von Moden entwickelt werden:

$$p(x, r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{mn}^+ \cdot e^{ik_{mn}^+ x} + A_{mn}^- \cdot e^{ik_{mn}^- x} \right) \cdot f_{mn}(r) \cdot e^{im\phi} \quad (2.19)$$

$$u_x(x, r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( u_{x,mn}^+ \cdot e^{ik_{mn}^+ x} + u_{x,mn}^- \cdot e^{ik_{mn}^- x} \right) \cdot f_{mn}(r) \cdot e^{im\phi} \quad (2.20)$$

---

<sup>1</sup> Laut Heinig [51] gilt für Niederdruckturbinen kommerzieller Flugantriebe  $|\Omega/\omega| < 0.1$ .

$$u_r(x, r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (u_{r,mn}^+ \cdot e^{ik_{mn}^+ x} + u_{r,mn}^- \cdot e^{ik_{mn}^- x}) \cdot \frac{d}{dr} f_{mn}(r) \cdot e^{im\phi} \quad (2.21)$$

$$u_\phi(x, r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (u_{\phi,mn}^+ \cdot e^{ik_{mn}^+ x} + u_{\phi,mn}^- \cdot e^{ik_{mn}^- x}) \cdot f_{mn}(r) \cdot e^{im\phi} \quad (2.22)$$

Die Moden breiten sich in axialer und azimutaler Richtung wellenförmig aus. Die Ordnungszahlen  $m$  und  $n$  charakterisieren die verschiedenen speziellen Lösungen.  $A_{mn}^\pm$ ,  $u_{x,mn}^\pm$ ,  $u_{r,mn}^\pm$  und  $u_{\phi,mn}^\pm$  bezeichnen die komplexen Amplituden<sup>2</sup>, wobei mit „+“ und „-“ Moden unterschieden werden, die bezüglich der axialen Koordinate in positiver beziehungsweise negativer Richtung laufen. Die Amplitude jeder Mode hängt von der Art, der räumlichen und zeitlichen Verteilung der Schallquellen im Strömungskanal sowie von den Randbedingungen ab [44].  $k_{mn}^\pm$  stellt die axiale Komponente des modalen Wellenvektors dar. Die azimutale Komponente des Wellenvektors ist mit der Ordnungszahl  $m$  identisch und gibt die Periode der Lösung in azimutaler Richtung an.  $m$  wird auch als *azimutale Ordnung* oder *Umfangsmodenordnung* bezeichnet. In der hier angewendeten Notation bezeichnet  $+m$  eine Mode die in positive  $\phi$ -Richtung läuft und  $-m$  eine Mode die in negative  $\phi$ -Richtung läuft. In radialer Richtung stellen sich Eigenlösungen ein, die von den akustischen Eigenschaften der Kanalwände abhängen. Sie werden durch die radialen Eigenfunktionen  $f_{mn}(r)$  beschrieben. Die Ordnungszahl  $n$  gibt die Anzahl der Knotenlinien entlang des Kanalradius an und wird deshalb auch als *Radialmodenordnung* bezeichnet.

Zur Ableitung der radialen Eigenwertgleichung wird die radiale Schnelle der Mode  $(m, n)$  als Funktion des Schalldrucks durch Einsetzen von Gleichung (2.21) in die Impulsgleichung (2.12) und mit Vernachlässigung des Coriolis-Terms formuliert:

$$u_{r,mn}^\pm = \frac{-i}{\rho c (k - M_x k_{mn}^\pm - \frac{m\Omega}{c})} \frac{\partial p_{mn}^\pm}{\partial r}. \quad (2.23)$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung führt das Einsetzen von Gleichung (2.19) in Gleichung (2.18) zu

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} - \frac{2k_{mn}^\pm}{k - M_x k_{mn}^\pm - \frac{m\Omega}{c}} \frac{dM_x}{dr} \right) \frac{df_{mn}}{dr} + \left( \frac{\sigma_{mn}^2}{R^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) f_{mn} = 0, \quad (2.24)$$

wobei folgende Abkürzung eingeführt wurde:

$$\frac{\sigma_{mn}^2}{R^2} = \left( \left( k - \frac{m\Omega}{c} \right) - M_x k_{mn}^\pm \right)^2 - (k_{mn}^\pm)^2. \quad (2.25)$$

Gleichung (2.25) setzt die Kreisfrequenz  $\omega = kc$  mit der axialen Komponente des Wellenvektors in Beziehung und stellt eine Dispersionsbeziehung dar. Der radiale Gradient  $dM_x/dr$  in Gleichung (2.24) verhindert nach wie vor eine analytische Lösung der gewöhnliche Differentialgleichung. Lösungsansätze wurden für diese Problemstellung beispielsweise durch Mungur [94], Shankar [120], Kousen [74] und Moinier [83] entwickelt. Im folgenden Abschnitt wird die vereinfachte analytische Lösung für ein konstantes axiales Strömungsprofil abgeleitet. Der Einfluss von Strömungsdrall wird in Abschnitt 2.5 wieder aufgegriffen.

<sup>2</sup> Die physikalischen Größen erhält man durch Realteilbildung, welche zur Vereinfachung der Schreibweise in der Regel fort gelassen wird.

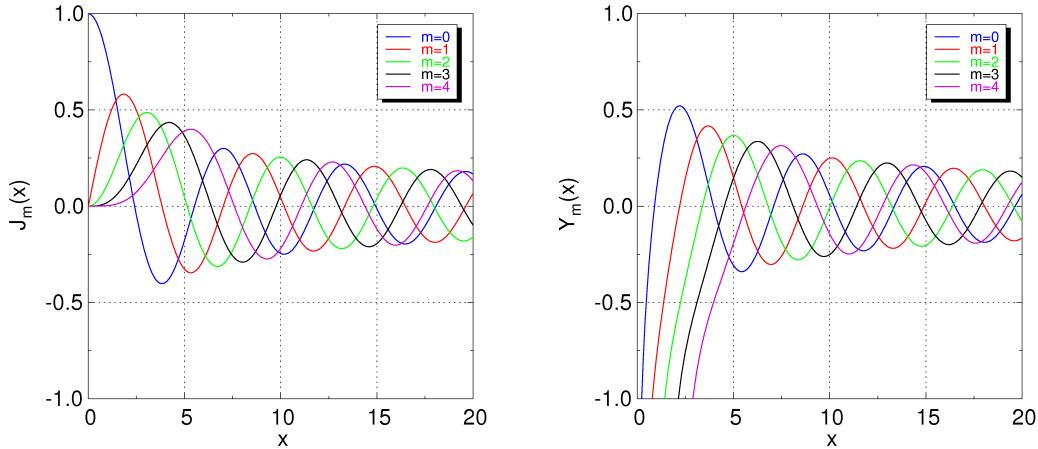


Abbildung 2.1: Besselfunktionen  $J_m$  und  $Y_m$  der Ordnungen  $m = 0$  bis  $m = 4$ .

### 2.3 MODEN IN UNIFORMER AXIALER STRÖMUNG

In diesem Abschnitt sollen die modalen Eigenlösungen für die in der Praxis am häufigsten angewandte Annäherung bestimmt und diskutiert werden: eine drallfreie und in axialer Richtung gleichförmige Strömung  $\mathbf{U} = (U_x, 0, 0)$ .

#### 2.3.1 Radiale Eigenlösungen

Für ein bezüglich jeder Koordinate konstantes axiales Strömungsprofil  $U_x = \text{const.}$  vereinfacht sich die radiale Eigenwertgleichung (2.24) zu:

$$\frac{d^2 f_{mn}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_{mn}}{dr} + \left( \frac{\sigma_{mn}^2}{R^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) f_{mn} = 0. \quad (2.26)$$

Die Gleichung (2.26) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Besselschen Typ. Ihre Lösungen werden nachfolgend für einen Strömungskanal mit konstantem Querschnitt, mit dem Außenradius  $R$  und im Fall eines ringförmigen Kanals mit dem Innenradius  $R_i = \eta R$  angegeben, wobei  $\eta$  das Nabenverhältnis bezeichnet. Die Wände des Kanals werden als schallhart, dass heißt starr und strömungsundurchlässig, betrachtet. Daraus folgt, dass die wandnormale Komponente der Schallschnelle an der Kanalwand verschwinden muss, d.h. nach Gleichung (2.23) ist  $u_r \propto \partial p / \partial r \propto df_{mn} / dr = 0$  für  $r = R$  und  $r = \eta R$ . Diese Randbedingungen werden erfüllt durch die Funktion

$$f_{mn}(r) = \frac{1}{\sqrt{F_{mn}}} (J_m(\sigma_{mn} r/R) + Q_{mn} Y_m(\sigma_{mn} r/R)), \quad (2.27)$$

welche eine allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung (2.26) darstellt. Sie setzt sich aus zwei linear unabhängigen Lösungen  $J_m$  und  $Y_m$  zusammen, wobei  $J_m$  die Besselfunktion 1. Art und  $m$ -ter Ordnung und  $Y_m$  die Besselfunktion 2. Art und  $m$ -ter Ordnung (Neumannfunktion) kennzeichnet. Zur Illustration sind in Abbildung 2.1 die Besselfunktionen für die Ordnungen  $m = 0$  bis  $m = 4$  dargestellt.  $\sigma_{mn}$  und  $Q_{mn}$  sind die Eigenwerte zu den Eigenfunktionen  $m$ -ter Ordnung. Sie sind spezifisch für das Nabenverhältnis  $\eta$  des Strömungskanals. Einen Spezialfall stellt ein Kanal ohne Nabenkörper dar ( $\eta = 0$ ), für den  $Q_{mn} \equiv 0$  gilt. Unabhängig vom Nabenverhältnis ist für

die Grundmode ( $o, o$ ) der Eigenwert  $\sigma_{o,o} = o$ . Näheres zur Bestimmung der Eigenwerte ist in Anhang A zu finden.  $F_{mn}$  bezeichnet einen Normierungsfaktor, der in Anlehnung an Holste [52] wie folgt definiert ist:

$$F_{mn} = \frac{1}{R^2} \int_{R_i}^R \hat{f}_{mn}^2(r) r dr \quad (2.28)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \eta^2), & m = n = o, \\ \frac{1}{2} \left( \left( 1 - \frac{m^2}{\sigma_{mn}^2} \right) \hat{f}_{mn}^2(R) - \left( \eta^2 - \frac{m^2}{\sigma_{mn}^2} \right) \hat{f}_{mn}^2(\eta R) \right), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.29)$$

mit

$$\hat{f}_{mn}(r) = J_m(\sigma_{mn} r / R) + Q_{mn} Y_m(\sigma_{mn} r / R). \quad (2.30)$$

Mit Verwendung des Normierungsfaktors wird folgende Integralgleichung erfüllt:

$$\frac{1}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\phi} \int_{R_i}^R f_{mn}(r) f_{vw}(r) r dr d\phi = \delta_{mv} \delta_{nw}. \quad (2.31)$$

Erst durch die Normierung werden die Amplituden von Moden unterschiedlicher Ordnungen energetisch vergleichbar, siehe auch Abschnitt 2.6. Für die Modenanalyse ergibt sich hieraus – im Vergleich zu der von Holste [52] verwendeten Formulierung – der Vorteil, dass jede Modenordnung entsprechend ihrer energetischen Gewichtung berücksichtigt wird.

### 2.3.2 Ausbreitung in axialer Richtung

Die Ausbreitung einer Mode wird im Strömungskanal durch die Dispersionsbeziehung (2.25) bestimmt. Von ihr lassen sich fundamentale Bezugsgroßen der Kanalakustik ableiten, die sich in vielen Studien zur Charakterisierung der Modenausbreitung im Kanal und der Modenabstrahlung ins Fernfeld als nützlich erwiesen haben [60, 114, 113].

#### Axiale Wellenzahl, Ausbreitungsfaktor und Cut-on-Frequenz

Für eine gleichförmige axiale Strömung kann Gleichung (2.25) geschrieben werden als

$$(k_{mn}^\pm)^2 + \left( \frac{\sigma_{mn}}{R} \right)^2 = (k - M_x k_{mn}^\pm)^2. \quad (2.32)$$

Durch Umformung lässt sich die axiale Wellenzahl berechnen als

$$k_{mn}^\pm = \frac{k}{1 - M_x^2} \left( -M_x \pm \sqrt{1 - (1 - M_x^2) \frac{\sigma_{mn}^2}{(kR)^2}} \right). \quad (2.33)$$

Offensichtlich unterscheiden sich die axialen Wellenzahlen für Modenausbreitung in und entgegen der Strömungsrichtung durch den Wurzelterm

$$\alpha_{mn} = \sqrt{1 - (1 - M_x^2) \frac{\sigma_{mn}^2}{(kR)^2}}, \quad (2.34)$$

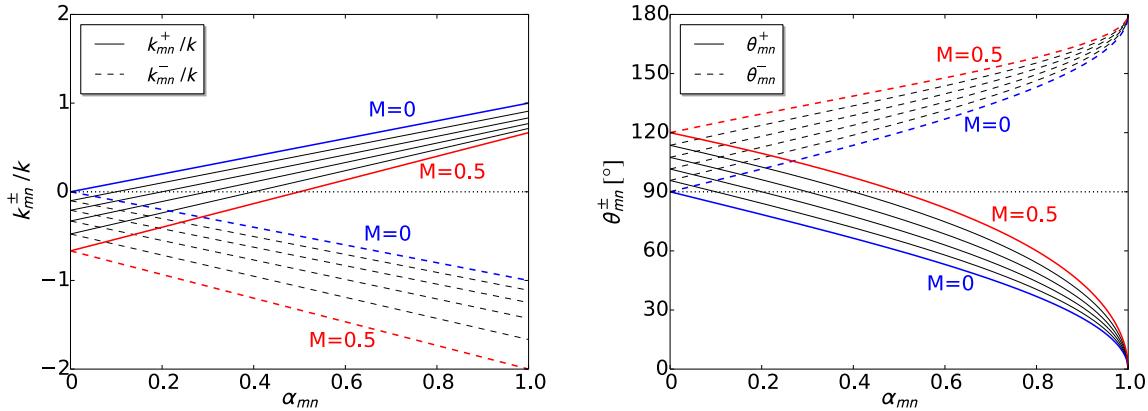


Abbildung 2.2: Variation der axialen Wellenzahl  $k_{mn}^{\pm}/k$  und des modalen Ausbreitungswinkels  $\theta_{mn}^{\pm}$  mit dem Ausbreitungsfaktor  $\alpha_{mn}$ . Die Kurvenscharen wurden für axiale Strömungsmachzahlen  $M_x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 0.5$  berechnet.

welcher aufgrund seiner Bedeutung im Weiteren als *Ausbreitungsfaktor* (englisch *cut-on factor*) bezeichnet wird. Der Ausbreitungsfaktor stellt ein Maß für die Übereinstimmung der axialen Wellenzahl mit der Wellenzahl der Grundmode  $(0,0)$  dar: Für alle ausbreitungsfähigen Modenordnungen  $(m,n) \neq (0,0)$  gilt  $0 \leq \alpha_{mn} < \alpha_{00} = 1$ . Für eine reguläre Ausbreitung der Mode  $(m,n)$  bei der Frequenz  $kR$  muss der Faktor  $\alpha_{mn}$  reell sein. Dies ist der Fall, wenn

$$kR \geq \sqrt{1 - M_x^2} \sigma_{mn} =: (kR)_{mn} \quad (2.35)$$

erfüllt ist. Für Frequenzen  $kR < (kR)_{mn}$  hingegen ist  $\alpha_{mn}$  imaginär, d. h. die axiale Wellenzahl komplex und die Mode wird in axialer Richtung gedämpft (siehe Abschnitt 2.3.3). Die dimensionslose Frequenz  $(kR)_{mn}$  hängt über den Eigenwert  $\sigma_{mn}$  vom Nabenvorhältnis ab und wird in Anlehnung an den englischen Sprachgebrauch als *Cut-on-Frequenz* der Mode  $(m,n)$  bezeichnet. Gelegentlich ist das Verhältnis einer zu analysierenden Frequenz zur dimensionslosen Cut-on-Frequenz von Interesse:

$$\xi_{mn} = kR / (kR)_{mn} = \sqrt{1 / (1 - \alpha_{mn}^2)}. \quad (2.36)$$

Die Größe  $\xi_{mn}$  wird im Englischen auch als *cut-on ratio* bezeichnet.

Ohne stationäre Strömung gilt für die Cut-on-Frequenz  $(kR)_{mn} = \sigma_{mn}$  und für die axiale Wellenzahl  $k_{mn}^{\pm} = \pm \alpha_{mn} k$ , d. h. nahe der Cut-on-Frequenz geht die axiale Wellenzahl gegen Null. Das linke Diagramm in Abbildung 2.2 veranschaulicht die Entwicklung der axialen Wellenzahl mit dem Ausbreitungsfaktor  $\alpha_{mn}$ . Eine überlagerte Gleichströmung setzt die Cut-on-Frequenzen aller Moden herab und führt zu einer konvektiven Komponente in der axialen Wellenzahl, die von der Modenordnung unabhängig ist. Gegen die Strömungsrichtung laufende Moden besitzen aufgrund des Doppler-Effekts eine höhere Raumfrequenz als in Strömungsrichtung laufende Moden: Es gilt  $|k_{mn}^+/k| < \alpha_{mn}$  und  $|k_{mn}^-/k| > \alpha_{mn}$ .

Zu beachten ist, dass der modale Ausbreitungsfaktor  $\alpha_{mn}$  in nicht-linearer Weise von der Frequenz abhängt. Bei einer festen Frequenz sind die Ausbreitungsfaktoren aller Moden ungleichmäßig verteilt. Dies ist in Abbildung 2.3 für eine Frequenz von  $kR = 17$  und eine Strömungsmachzahl von  $M_x = 0.24$  illustriert. Deutlich ist zu erkennen, dass die

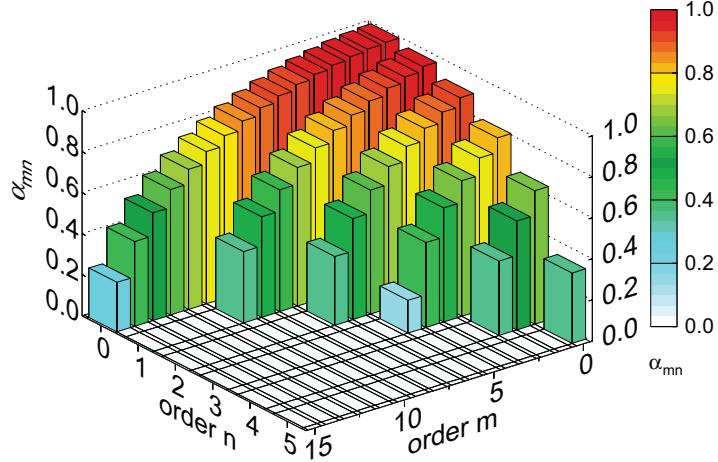


Abbildung 2.3: Ausbreitungsfaktoren aller Moden der Frequenz  $kR = 17.03$  in einem Kanal ohne Nabenkörper bei einer axialen Machzahl von  $M_x = 0.24$  und einer statischen Temperatur von  $T = 290.1$  K.

Ausbreitungsfaktoren der niedrigen Ordnungen asymptotisch gegen den Wert  $\alpha_{mn} = 1$  laufen. Insbesondere die Tatsache, dass die Ausbreitungsfaktoren der niedrigen radialen Ordnungen sehr nahe bei einander liegen, wird sich noch als maßgebliches Problem für die Modenanalyse herausstellen.

#### *Ausbreitungswinkel, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit*

Im Allgemeinen breiten sich die modalen Wellenfronten auf einer spiralförmigen Bahn um die Kanalachse herum aus. In radialer Richtung existiert aufgrund der Randbedingungen stets ein stehendes Wellenbild. Abbildung 2.4 verdeutlicht dies am Beispiel der Schalldruckkontur dreier stromauf laufender Moden  $(-6, 0)$ ,  $(-6, 1)$  und  $(-6, 2)$ . Die Winkel, welche die Wellennormalen der Moden relativ zur Kanalachse einnehmen, können aus der Dispersionsrelation (2.32) abgeleitet werden. Geometrischen Betrachtungen von Rice [114] zufolge repräsentiert  $\sigma_{mn}/R$  die kombinierte radial-azimuthale Wellenzahl in der  $r\phi$ -Ebene. Die rechte Seite der Gleichung (2.32) stellt die Wellenzahl der Normalen dar, so dass der axiale Ausbreitungswinkel  $\theta_{mn}^\pm$  durch

$$\cos(\theta_{mn}^\pm) = \frac{k_{mn}^\pm}{k - M_x k_{mn}^\pm} = \frac{-M_x \pm \alpha_{mn}}{1 \mp M_x \alpha_{mn}}. \quad (2.37)$$

berechnet werden kann. Die Ausbreitungswinkel der in Abbildung 2.4 dargestellten Moden sind zusammen mit den Ausbreitungswinkeln der stromab laufenden Moden der gleichen Ordnungen in Tabelle 2.1 aufgelistet. Für die axiale Phasengeschwindigkeit einer Mode gilt

$$c_{p,mn}^\pm = \frac{\omega}{k_{mn}^\pm} = c \frac{1 - M_x^2}{\pm \alpha_{mn} - M_x} \quad (2.38)$$

Die Gruppengeschwindigkeit in axialer Richtung ist

$$c_{g,mn}^\pm = \frac{d\omega}{dk_{mn}^\pm} = c \frac{\alpha_{mn}(1 - M_x^2)}{\pm 1 - \alpha_{mn}M_x} \quad (2.39)$$

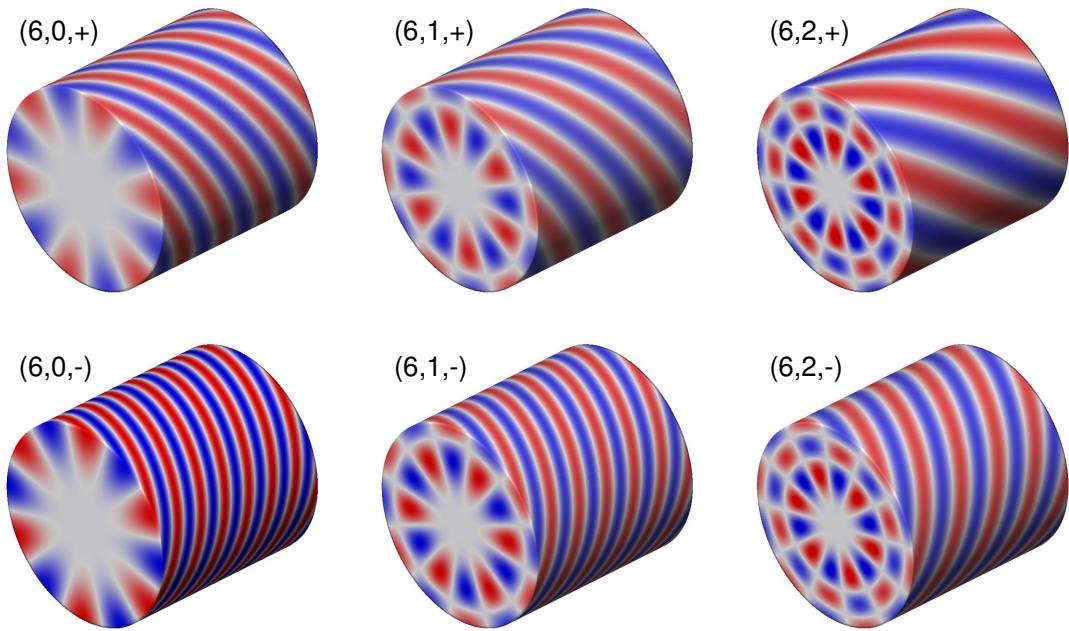


Abbildung 2.4: Normierte Schalldruckkonturen der stromab (+) und stromauf (-) laufenden Moden der azimuthalen Ordnung  $m=6$  in einem Kanal ohne Nabenkörper und mit den Strömungsfeldgrößen  $M_x = 0.24$  und  $T = 290.1 \text{ K}^3$ .

Für Frequenzen nahe der cut-on Grenze ist der Ausbreitungsfaktor  $\alpha_{mn} \approx 0$  und die Wellenfronten verlaufen nahezu parallel zur Kanalachse. Die axiale Gruppengeschwindigkeit geht dann gegen Null und die Mode transportiert nahezu keine Schallenergie (vergleiche auch Abschnitt 2.6). Die Variation des modalen Ausbreitungswinkel mit dem Ausbreitungsfaktor ist im rechten Diagramm der Abbildung 2.2 veranschaulicht. Für Frequenzen weit oberhalb der Cut-on-Frequenz, d. h.  $\alpha_{mn} \rightarrow 1$ , verlaufen die Wellenfronten fast senkrecht zur Kanalachse. Die axiale Phasengeschwindigkeit nähert sich dann der um den konvektiven Anteil erhöhten Schallgeschwindigkeit an, d.h.  $c_{p,mn}^\pm \rightarrow c(1 \pm M_x)$ .

Hingewiesen werden soll auf einen Effekt, der von manchen Autoren [126, 81] als *Blockierungseffekt* bezeichnet wird: Im Fall einer überlagerten axialen Gleichströmung ergibt sich ein Frequenzintervall  $(kR)_{mn} < kR < \sigma_{mn}$ , in welchem  $\alpha_{mn} < M_x$  und damit

<sup>2</sup> Es handelt sich um die Rotor-Stator-Interaktionsmoden, die vom DLR-UHBR-Fan bei der 2-fachen Blattfolgefrequenz im Betriebspunkt Approach angeregt werden und die Gegenstand von Untersuchungen in Kapitel 5 sind.

$m$	$n$	$\alpha_{mn}$	$\cos \theta_{mn}^+ [\circ]$	$\cos \theta_{mn}^- [\circ]$
-6	0	0.904	32.0	160.0
-6	1	0.743	52.2	146.5
-6	2	0.492	73.3	130.9

Tabelle 2.1: Ausbreitungsfaktoren und axiale Ausbreitungswinkel der in Abbildung 2.4 dargestellten Moden.

für die Phasengeschwindigkeit  $c_{p,mn}^{\pm} < 0$  gilt. In diesem Intervall breitet sich die mit „+“ gekennzeichnete Mode scheinbar entgegengesetzt der Strömung aus. Dies kommt in Abbildung 2.2 durch eine negative axiale Wellenzahl und durch einen modalen Ausbreitungswinkel größer als 90 Grad zum Ausdruck. Eine Betrachtung der Gruppengeschwindigkeiten zeigt jedoch, dass die Energie beider Moden tatsächlich in die dem Vorzeichen entsprechende Richtung transportiert wird, so dass man von einem virtuellen Effekt sprechen kann.

### 2.3.3 Dämpfung nicht ausbreitungsfähiger Moden

Bei einer Modenanalyse soll in den meisten Fällen der Einfluss von nicht ausbreitungsfähigen, so genannten *Cut-off*-Moden vermieden werden. Dafür ist ein hinreichend großer Abstand zu den Schallquellen erforderlich. Für eine Abschätzung des Mindestabstands muss die Pegelminderung einer Mode bekannt sein. Im Allgemeinen ist die Pegelminderung  $\Delta L$  über eine Strecke  $\Delta x$  wie folgt definiert:

$$\Delta L = 20 \log_{10} (e^{\gamma \Delta x}) \text{ dB.} \quad (2.40)$$

Dem reellen Dämpfungskoeffizienten  $\gamma$  entspricht hier der Imaginärteil der axialen Wellenzahl aus Gleichung (2.33), der nur für Cut-off-Moden ungleich Null ist. Bei der Beschreibung der Dämpfung ist die Verwendung des Cut-on-Verhältnis aus Gleichung (2.36) vorteilhaft. Für Frequenzen unterhalb der dimensionslosen Cut-on-Frequenz ist  $\xi_{mn} < 1$  und Gleichung (2.33) lässt sich schreiben als

$$k_{mn}^{\pm} = \frac{k}{1 - M_x^2} \left( -M_x \pm i \cdot \sqrt{\frac{1}{\xi_{mn}^2} - 1} \right). \quad (2.41)$$

Zu beachten ist, dass mit einer überlagerten Gleichströmung für den Realteil  $\Re(k_{mn}^{\pm}) < 0$  gilt. Es findet dann also eine Wellenausbreitung statt, der eine Dämpfung überlagert ist. Für die Dämpfung der Mode  $(m, n)$  erhält man schließlich

$$\Delta L_{mn} = -\frac{20}{\ln(10)} \frac{kR}{(1 - M_x^2)} \sqrt{\frac{1}{\xi_{mn}^2} - 1} \frac{\Delta x}{R} \text{ dB.} \quad (2.42)$$

Die Dämpfung einer Cut-off-Mode hängt demnach stark von dem Cut-on-Verhältnis  $\xi_{mn}$  ab: Je näher eine Frequenz der dimensionslosen Cut-on-Frequenz kommt, desto schwächer wird die Mode gedämpft. Die Pegelminderung ist proportional zur axialen Wegstrecke  $\Delta x$  und zur dimensionslosen Frequenz  $kR$ . Eine überlagerte Gleichströmung führt zu einer erhöhten Dämpfung.

In Abbildung 2.5 ist die Dämpfung  $\Delta L_{mn}$  über eine dem Kanalradius entsprechende axiale Strecke, d. h.  $\Delta x = R$ , in Abhängigkeit des Cut-on-Verhältnis  $\xi_{mn}$  und für verschiedene Frequenzen dargestellt. Es ist festzustellen, dass insbesondere bei niedrigen Frequenzen Moden nahe der dimensionslosen Cut-on-Frequenz schwach gedämpft werden. Hieraus folgt, dass bei Messungen entweder ein ausreichend großer Abstand zu den Quellen eingehalten oder in der Modenanalyse eine größere Anzahl von Cut-off-Moden berücksichtigt werden muss.

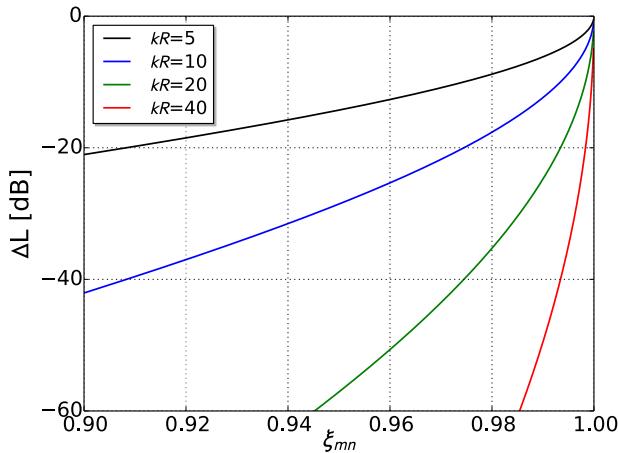


Abbildung 2.5: Dämpfung einer nicht ausbreitungsfähigen Mode über eine dem Kanalradius entsprechende axiale Strecke in Abhängigkeit des Cut-on-Verhältnis und für vier verschiedene dimensionslose Frequenzen. Die Werte gelten für einen Strömungskanal ohne Nabenkörper und ohne Durchströmung.

## 2.4 EINFLUSS DES NABENVERHÄLTNIS

Ein Nabenkörper übt einen erheblichen Einfluss sowohl auf die Modenform als auch auf die axialen Wellenzahlen aus. Es wird sich in Kapitel 4 zeigen, dass die Modenanalyse des Schallfelds essentiell von der Separation der axialen Wellenzahlen abhängt. Aus diesem Grund werden die Abhängigkeiten der axialen Wellenzahlen von den maßgeblichen Größen, den radialen Eigenwerten und den modalen Ausbreitungsfaktoren, in diesem Abschnitt für verschiedene Nabenvhältnisse eingehend untersucht.

### 2.4.1 Radiale Eigenwerte und Eigenfunktionen

In Abbildung 2.6 sind die Spektren der radialen Eigenwerte  $\sigma_{mn}$  für vier Nabenvhältnisse und für azimutale Ordnungen  $0 \leq m \leq 80$  gegenüber gestellt. Die radialen Eigenwerte werden für ein gegebenes Nabenvhältnis  $\eta = R_i/R$  aus der Eigenwertgleichung (2.26) bestimmt. Zur besseren Übersicht sind die radialen Eigenwerte gleicher Ordnung durch Linien miteinander verbunden. Offensichtlich macht sich der Einfluss der Nabe vorwiegend bei niedrigen azimutalen Ordnungen bemerkbar. Je größer das Nabenvhältnis ist, desto größer ist bei konstantem  $m$  und variablem  $n$  der relative Abstand aufeinander folgender Eigenwerte. Im dargestellten Wertebereich sind für die Ordnung  $m=0$  bei einem Nabenvhältnis von  $\eta=0$  insgesamt 26 radiale Ordnungen, hingegen beim Nabenvhältnis  $\eta=0.75$  nur sieben radiale Ordnungen abgebildet. Bei sehr hohen azimutalen Ordnungen ist hingegen der Einfluss eines Nabekörpers kaum noch feststellbar. Insbesondere können folgende grobe, aber nützliche Abschätzungen gemacht werden:

- Bei der azimutalen Ordnung  $m=0$  besitzen die Eigenwerte aufeinander folgender radialer Ordnungen näherungsweise einen äquidistanten Abstand<sup>4</sup>:

$$\sigma_{0,n} \approx n \cdot \sigma_{0,1} \quad (\text{beliebiges } \eta). \quad (2.43)$$

<sup>4</sup> Die Gültigkeit der Näherung nimmt mit zunehmendem Nabenvhältnis zu.

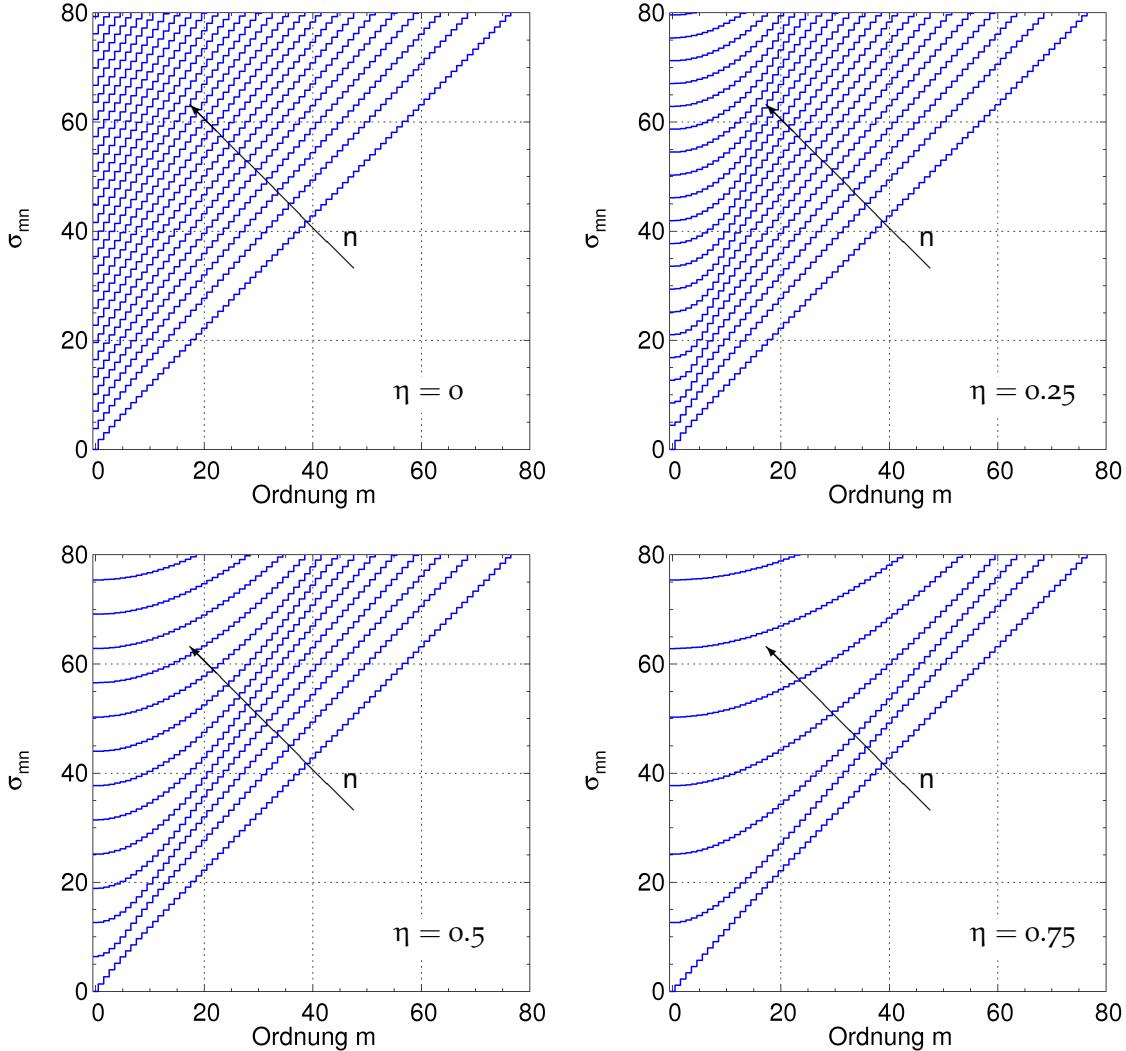


Abbildung 2.6: Spektren der radialen Eigenwerte  $\sigma_{mn}$  für Kanäle mit den Nabenvorhältnissen  $\eta=0, 0.25, 0.5$  und  $0.75$ . Die Eigenwerte der gleichen radialen Ordnung sind durch Linien miteinander verbunden.

- Bei der azimutalen Ordnung  $m=0$  stehen die Eigenwerte derselben radialen Ordnung bezüglich unterschiedlicher Nabenvorhältnisse  $\eta_1$  und  $\eta_2$  in einem einfachen Verhältnis zueinander:

$$\frac{(1-\eta_1)}{(1-\eta_2)} \frac{\sigma_{0,n}(\eta_1)}{\sigma_{0,n}(\eta_2)} \approx 1 \quad (m=0, \text{beliebige } \eta_1, \eta_2). \quad (2.44)$$

- Für die Eigenwerte der nullten radialen Ordnung gilt in etwa

$$\sigma_{m,0} \approx m + 1 \quad (|m| > 0, \text{ beliebiges } \eta). \quad (2.45)$$

Die Gleichungen (2.43) und (2.44) gelten in hinreichender Näherung für alle praktisch relevanten Nabenvorhältnisse.

Das Nabenvorhältnis hat auch einen signifikanten Einfluss auf die radiale Schalldruckverteilung der Moden im Strömungskanal. Dies ist in Abbildung 2.7 anhand der radialen

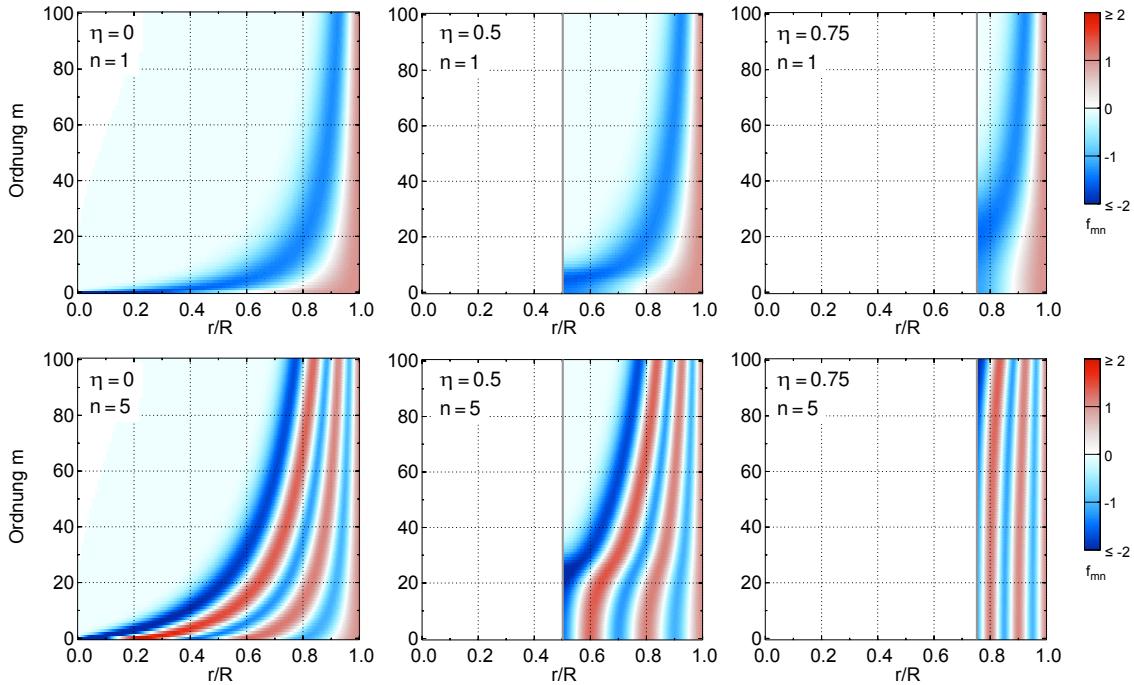


Abbildung 2.7: Variation der radialen Eigenfunktionen mit der azimutalen Ordnung  $m$  dargestellt für die radialen Ordnungen  $n = 1$  und  $n = 5$  in Kanälen mit den Nabenvöhältnissen  $\eta=0$ ,  $0.5$  und  $0.75$  (qualitative Darstellung).

Ordnungen  $n = 1$  und  $n = 5$  illustriert. Gegenüber gestellt sind die Verläufe der radialen Eigenfunktionen in Abhängigkeit der azimutalen Ordnung für drei Nabenvöhältnisse  $\eta=0$ ,  $0.5$  und  $0.75$ . Bei kleinen Nabenvöhältnissen findet mit zunehmender azimutaler Ordnung die Schallausbreitung immer mehr in der Nähe der äußeren Kanalwand statt, während bei großen Nabenvöhältnissen sich die radialen Eigenfunktionen niedriger und hoher azimutaler Ordnungen kaum unterscheiden. Bei sehr hohen azimutalen Ordnungen sind kaum Unterschiede zwischen der Ausbreitung im kreisrunden Kanal und einem Ringkanal großen Nabenvöhältnisses sichtbar. Für die Modenanalyse ergibt sich hieraus die Konsequenz, dass in Kanälen kleinerer und mittlerer Nabenvöhältnisse mit Mikrofonen nahe der Kanalmitte keine hohen azimutalen Ordnungen detektiert werden können.

#### 2.4.2 Cut-on-Frequenzen und Ausbreitungsfaktoren

Gemäß Gleichung (2.35) ist in einer gleichförmigen axialen Strömung die dimensionslose Cut-on-Frequenz direkt proportional zum modalen Eigenwert:  $(kR)_{mn} = \sqrt{1 - M_x^2} \sigma_{mn}$ . Die in einem Kanal ausbreitungsfähigen Modenordnungen können demzufolge leicht aus den Eigenwertspektren – wie sie in Abbildung 2.6 dargestellt sind – abgelesen werden. In einem Kanal ohne Gleichströmung sind beispielsweise bei einer Frequenz von  $kR = 60$  alle Modenordnungen  $(m, n)$  ausbreitungsfähig, für die  $(kR)_{mn} = \sigma_{mn} \leq 60$  gilt. Während die höchste azimutale Ordnung vom Nabenvöhältnis fast unabhängig ist (vgl. Gleichung (2.45)), nimmt die maximal vorhandene radiale Ordnung entsprechend der Verschiebung der Eigenwerte mit zunehmenden Nabenvöhältnis erheblich ab. Abbildung 2.8 veranschaulicht die Auswirkung auf die Gesamtzahl von Cut-on-Moden im Kanal.

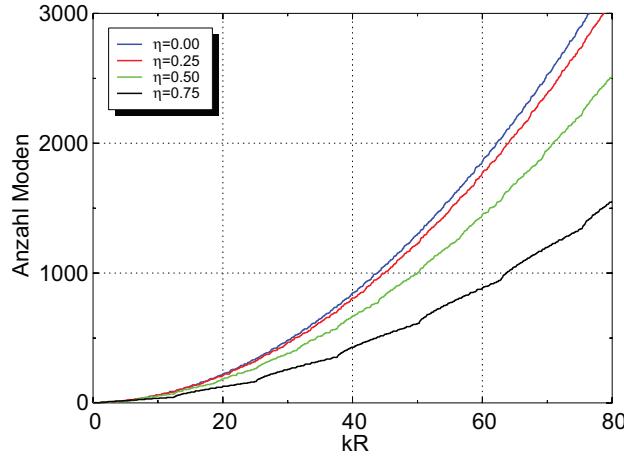


Abbildung 2.8: Gesamtzahl ausbreitungsfähiger Moden in Kanälen verschiedener Nabenvorhältnisse ohne überlagerte stationäre Strömung.

Es soll nun die frequenzabhängige Entwicklung der Ausbreitungsfaktoren untersucht werden. Sie hat einen maßgeblichen Einfluss auf die Genauigkeit einer Analyse der axialen Wellenzahlen. Für einen direkten Vergleich der Charakteristiken verschiedener Nabenvorhältnisse wird folgende normierte Frequenzfunktion eingeführt:

$$\Psi_m^\eta(kR) = \frac{kR - (kR)_{m,0}^\eta}{(kR)_{m,10}^\eta - (kR)_{m,0}^\eta} \quad (2.46)$$

Die azimutale Ordnung  $m$  und das Nabenvorhältnis  $\eta$  stellen die Bezugsparameter dar. Der Nenner definiert ein Bezugsfrequenzintervall, welches hier die dimensionslose Cut-on-Frequenzen der radialen Ordnungen  $n=0$  bis  $10$  umfassen soll. Im Zähler wurde der Subtrahend  $(kR)_{m,0}^\eta$  eingeführt, um der spezifischen Verschiebung der Cut-on-Frequenzen in Abhängigkeit der azimutalen Ordnung Rechnung zu tragen.

Die Entwicklung der Ausbreitungsfaktoren ist in Abbildung 2.9 als Funktion der normierten Frequenz  $\Psi$  für die Nabenvorhältnisse  $\eta=0$  und  $\eta=0.75$  gegenübergestellt. Insgesamt besteht die größte Deckungsgleichheit für die azimutale Ordnung  $m=0$ , was in Übereinstimmung mit Gleichung (2.43) steht. Hingegen treten für die höheren azimutalen Ordnungen spezifische Intervalle auf, in denen die Cut-on-Frequenzen entsprechend der relativen Stauchung der Eigenwerte zusammenrücken.

Mit Hinsicht auf die Anforderungen an die Modenanalyse lässt sich aus Abbildung 2.9 folgern, dass sich die Ausbreitungsfaktoren am stärksten für die Ordnung  $m=0$  und hohe Nabenvorhältnisse verdichten: Bei hohen Frequenzen, was hier  $\Psi \rightarrow 1$  entspricht, nähern sich die axialen Wellenzahlen der radialen Ordnungen  $n=0$  und  $n=1$  so sehr, dass sie sich kaum noch unterscheiden lassen. Dieses Verhalten ist bei großen Nabenvorhältnissen etwas stärker ausgeprägt. Aus diesem Grund werden in Kapitel 4 für die Optimierung und Bewertung der Modenanalyse-Messanordnungen die azimutale Ordnung  $m=0$  und das Nabenvorhältnis  $\eta=0.75$  als Referenzparameter herangezogen.

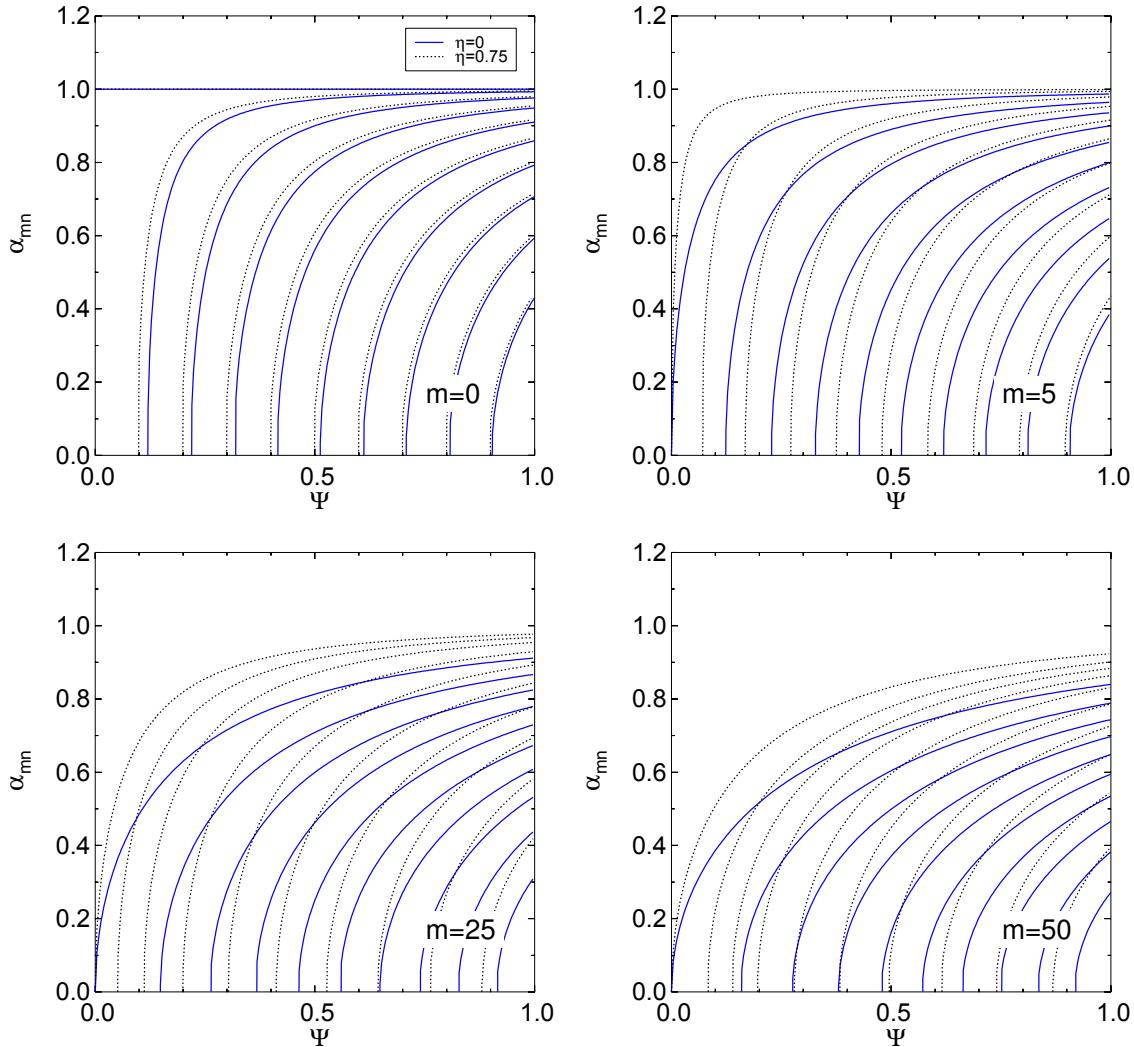


Abbildung 2.9: Gegenüberstellung der Ausbreitungsfaktoren der Ordnungen  $m=0, 5, 25$  und  $50$  für die Nabenverhältnisse  $\eta=0$  und  $0.75$ . Für den direkten Vergleich wurden die Ausbreitungsfaktoren gegen die normierte Frequenz  $\Psi$  im Intervall der Cut-on-Frequenzen der Ordnungen  $n=0$  bis  $10$  aufgetragen.

## 2.5 EINFLUSS VON STRÖMUNGSDRALL

Der Einfluss einer drallbehafteten Strömung lässt sich laut Studien von Ali et al [2] und Nijboer [100] bei größeren Nabenverhältnissen gut durch eine Starrkörperrotation annähern. Das Modell mit Starrkörperrotation kann demnach als Referenzlösung bei komplizierteren Strömungsverhältnissen herangezogen werden. Eine derart modellierte Drallströmung geht mit einem Dopplereffekt in azimutaler Richtung einher und führt zu einer ordnungsabhängigen Modifikation der Freifeldwellenzahl, wie ein Vergleich der Gleichungen (2.25) und (2.32) zeigt:

$$\check{k}_m = k - \frac{m\Omega}{c}. \quad (2.47)$$

Die axiale Wellenzahl und der Ausbreitungsfaktor ändern sich entsprechend:

$$k_{mn}^{\pm} = \frac{\check{k}_m}{1 - M_x^2} (-M_x \pm \check{\alpha}_{mn}), \quad (2.48)$$

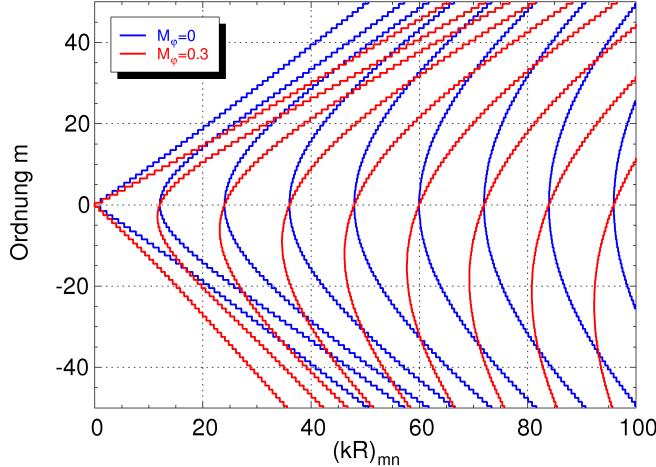


Abbildung 2.10: Einfluss von Strömungsdrall auf die Cut-on-Frequenzen in einem Kanal mit dem Nabenverhältnis  $\eta = 0.75$  und einer axialen Machzahl von  $M_x = 0.3$ . Der Strömungsdrall ist durch eine Starrkörperrotation mit einer Machzahl von  $M_\phi(R) = 0.3$  an der Kanalwand modelliert.

$$\check{\alpha}_{mn} = \sqrt{1 - (1 - M_x^2) \frac{\sigma_{mn}^2}{(\check{k}_m R)^2}}. \quad (2.49)$$

Die Cut-on-Frequenzen verschieben sich proportional zur azimutalen Ordnung

$$(k\check{R})_{mn} = \sqrt{1 - M_x^2} \sigma_{mn} + \frac{m \Omega R}{c}, \quad (2.50)$$

so dass sich bei einer gegebenen Frequenz mehr Moden entgegen und weniger Moden in Richtung der Drallströmung ausbreiten. Dies ist in Abbildung 2.10 am Beispiel eines Kanals mit dem Nabenverhältnis  $\eta = 0.75$  illustriert, in dem am äußeren Radius die axiale Machzahl  $M_x = 0.3$  mit der azimutalen Machzahl der Strömung übereinstimmt – was in einer Turbomaschine stromab des Statorgitters bereits einen relativ extremen Fall darstellen würde. Das gesamte Spektrum der Cut-on-Frequenzen ist um den Fußpunkt bei  $(m, kR) = (0,0)$  gekippt. Bei einer Frequenz von  $kR = 30$  ergeben sich dadurch beispielsweise als höchste und niedrigste azimutale Ordnung  $\max(m) = 22$  bzw.  $\min(m) = -41$  im Vergleich zum drallfreien Fall mit  $\max(m) = -\min(m) = 28$ . Für spezifische Bänder negativer azimutaler Ordnungen verschieben sich die Cut-on-Frequenzen der höheren Radialmoden zu tieferen Frequenzen und markieren damit – statt der nullten azimutalen Ordnung – die obere Frequenzgrenze der Modenanalyse.

Das Spektrum der Ausbreitungsfaktoren bleibt bis auf die relative Verschiebung auf der Frequenzachse jedoch in seiner Form unberührt, was sich leicht anhand von Gleichung (2.49) nachvollziehen lässt. Somit ergibt sich als Fazit dieses Abschnitts, dass eine überlagerte festkörperartige Drallströmung die Genauigkeit einer axialen Wellenzahlanalyse nicht beeinträchtigt. Sie wird daher bei der Optimierung der Sensoranordnungen in Kapitel 4 nicht berücksichtigt.

## 2.6 SCHALLINTENSITÄT UND SCHALLEISTUNG

Der von einer Turbomaschine angeregte Schall wird am Besten durch die Angabe einer Schallleistung quantifiziert. Die im Strömungskanal transportierte Schallleistung ergibt sich aus der Integration der axialen Komponente der Schallintensität  $I_x$  über die Kanalquerschnittsfläche,

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^R I_x r dr d\phi. \quad (2.51)$$

Morfey [86] zufolge berechnet man die axiale Intensitätskomponente für eine Welle in einer axial gleichförmigen und festkörperartig rotierenden Strömung als

$$I_x = (1 + M_x^2) \bar{p}^r \bar{u}_x^r + \frac{M_x}{\rho c} \bar{p}^r \bar{p}^r + \rho c M_x \bar{u}_x^r \bar{u}_x^r + \rho c M_\phi \bar{u}_\phi^r \bar{u}_x^r + M_x M_\phi \bar{p}^r \bar{u}_\phi^r. \quad (2.52)$$

Der Oberstrich bezeichnet einen zeitlichen Mittelwert über die jeweiligen Produkte, die aus den reellen Größen Schalldruck und Schallschnelle gebildet werden. Für harmonische Schwankungen und die bisher verwendete komplexe Notation gilt:

$$I_x = \frac{1}{2} \Re \left\{ (1 + M_x^2) p^* u_x + \frac{M_x}{\rho c} p^* p + \rho c M_x u_x^* u_x + \rho c M_\phi u_\phi^* u_x + M_x M_\phi p^* u_\phi \right\}. \quad (2.53)$$

Diese Gleichung kann unter Verwendung der Modenentwicklungen des Schalldruck (2.19) und der Schallschnellekomponenten (2.20) und (2.22) ausgewertet werden. Die Amplituden der axialen und azimutalen Komponenten der Schnelle werden durch Einsetzen in die zugehörigen Impulsgleichungen (2.11) und (2.13) bestimmt:

$$u_{x,mn}^\pm = \frac{1}{\rho_0 c} \left( \frac{\pm \check{\alpha}_{mn} - M_x}{1 \mp \check{\alpha}_{mn} M_x} \right) A_{mn}^\pm, \quad (2.54)$$

$$u_{\phi,mn}^\pm = \frac{m/r}{\rho_0 c} \frac{1}{\check{k}} \left( \frac{1 - M_x^2}{1 \mp \check{\alpha}_{mn} M_x} \right) A_{mn}^\pm. \quad (2.55)$$

Bei der Auswertung des Integrals aus Gleichung (2.51) muss die Integralgleichung (2.31) berücksichtigt werden. Die Gesamtschallleistung ergibt sich je Ausbreitungsrichtung zu

$$P^+ = \sum_m \sum_n P_{mn}^+ \quad (2.56)$$

$$P^- = \sum_m \sum_n P_{mn}^- \quad (2.57)$$

mit

$$P_{mn}^\pm = \frac{\pi R^2}{\rho c} \frac{k}{\check{k}} \frac{\check{\alpha}_{mn} (1 - M_x^2)^2}{(1 \mp \check{\alpha}_{mn} M_x)^2} |A_{mn}^\pm|^2. \quad (2.58)$$

Es muss über alle ausbreitungsfähigen Modenordnungen summiert werden. Bei der Beurteilung von Rotor-Stator-Interaktionen ist oft die Schallleistung einer azimutalen Ordnung von Interesse. Diese wird durch Summation über die radialen Ordnungen berechnet, in der Regel getrennt für stromab und stromauf laufende Moden:

$$P_m^+ = \sum_n P_{mn}^+, \quad (2.59)$$

$$P_m^- = \sum_n P_{mn}^- \quad (2.60)$$

Die Schallleistung einer Mode ist proportional zum Quadrat ihrer Amplitude. Bei drallfreier Strömung steckt die einzige weitere Abhängigkeit von der Modenordnung im Ausbreitungsfaktor  $\alpha_{mn}$ ,

$$P_{mn}^\pm = \frac{\pi R^2}{\rho c} \frac{\alpha_{mn} (1 - M_x^2)^2}{(1 \mp \alpha_{mn} M_x)^2} |A_{mn}^\pm|^2. \quad (2.61)$$

Zwei Moden mit identischen Ausbreitungsfaktoren besitzen also dieselbe Schallleistung, wenn ihre Amplituden betragsmäßig gleich sind. Im Fall ohne Strömung reduziert sich Gleichung (2.61) zu

$$P_{mn}^\pm = \alpha_{mn} \frac{\pi R^2}{\rho c} |A_{mn}^\pm|^2. \quad (2.62)$$

Die durch eine Mode in axialer Richtung transportierte Schallleistung ist dann direkt proportional zum modalen Ausbreitungsfaktor.

# 3

---

## EXPERIMENTELLE MODENANALYSEVERFAHREN

---

Vor der Durchführung einer Modenanalyse müssen die kohärenten Komponenten des Schaufeltons aus den Zeitreihen der Druckschwankungen separiert werden, die z. B. mithilfe von Mikrofonen im Strömungskanal gemessen wurden. Hierzu geeignete Methoden sind in Abschnitt 3.1 dargestellt. Moden unterschiedlicher azimutaler Ordnungen können auf einfache Weise mit Hilfe der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Azimutalmodenanalyse separiert werden. Für eine vollständige Zerlegung des Schallfelds in die einzelnen Moden azimutaler und radialer Ordnungen wird das Verfahren der Radialmodenanalyse genutzt<sup>1</sup>. Das im Fokus dieser Arbeit stehende inverse Verfahren wird in Abschnitt 3.3 in verschiedenen Varianten zusammen mit einer Vorgehensweise zur Bewertung der Analysegenauigkeit dargestellt. In Abschnitt 3.4 wird ein Beamforming-Ansatz beschrieben, mit dessen Hilfe sich die Amplituden einzelner Moden vergleichsweise ungenau bestimmen lassen, der aber bei der Analyse von Ursachen schlechter Modellmatrix-Konditionen in Kapitel 4 nützlich ist.

### 3.1 SEPARATION VON SCHAUFELTÖNEN AUS SCHALDRUCKMESSUNGEN

Alle Verfahren beruhen auf der Verwendung von Schalldrucksensoren. Für die hier angestellten Betrachtungen ist es unerheblich, ob ihr Messprinzip auf einem Kondensator oder dem piezo-elektrischen Effekt basiert. Da in der Analyse viele Sensoren miteinander korreliert werden, besteht jedoch eine wichtige Voraussetzung darin, dass alle Sensoren nach einer Kalibrierung möglichst identische Übertragungsfunktionen besitzen.

Es wird davon ausgegangen, dass die von den Sensoren detektierten Schalldruckzeitsignale  $y(t)$  durch eine Messdatenerfassungsanlage mit hinreichend hoher Abtastrate  $f_s = 1/T_s > 2 \max(f)$  und ausreichender Dynamik digitalisiert werden. Das Frequenzspektrum kann aus den diskreten Zeitwerten  $y(nT_s)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , mittels einer Diskreten Fourier-Transformation (DFT) berechnet werden:

$$p(2\pi f) = \sum_{n=0}^{N-1} w(nT_s) y(nT_s) \cdot e^{-in2\pi f T_s}. \quad (3.1)$$

$w(nT_s)$  bezeichnet eine optionale Fensterfunktion. Die durch Rotor-Stator-Interaktion erzeugten Schaufeltöne liegen gemäß der Gleichung 1.1 bei den Harmonischen der Blattpassierfrequenz vor. Ihre Analyse wird durch stochastische und systematische Störungen beeinträchtigt. Als wichtigste stochastische Fehlereinflüsse der Schalldruckmessung kommen in Frage:

---

<sup>1</sup> Aufgrund der besseren Lesbarkeit wird die Radialmodenanalyse außerhalb dieses Kapitels und außerhalb der Literaturübersicht von Abschnitt 1.2.1 meistens kurz mit *Modenanalyse* bezeichnet.

- turbulente Druckschwankungen der Kanalströmung,
- Beiträge inkohärenter aeroakustischer Quellen,
- Fluktuationen der durch Rotor-Stator-Interaktion angeregten kohärenten Quellen und
- Rauschkomponenten in der Messkette vom Mikrofon bis hin zu den Wählern der Datenerfassungsanlage.

Systematische Fehlerquellen bestehen u. a. in Drehzahlenschwankungen der Antriebswelle, Vibrationen des Versuchsstands und systembedingten Störungen der Kanalströmung.

### 3.1.1 Unterdrückung inkohärenter Druckschwankungen

Grundsätzlich müssen bei einer Messung im Strömungskanal zunächst akustische und turbulente Druckschwankungen voneinander getrennt werden. Turbulente Druckschwankungen können unter Umständen größere Amplituden als die akustischen Druckschwankungen aufweisen. Sie sind nur über einen gewissen räumlichen und zeitlichen Bereich kohärent und zu den akustischen Druckschwankungen inkohärent [10]. Die akustischen Druckschwankungen setzen sich aus kohärenten und inkohärenten Anteilen zusammen, die ursächlich mit verschiedenen Schallentstehungsmechanismen zusammenhängen. Inkohärente Schallfeldkomponenten entstehen beispielsweise durch stochastische Blattkräfte infolge der turbulenten Anströmung der Rotorblätter. Die Energie von inkohärenten Druckschwankungen ist im Allgemeinen über das gesamte Frequenzband verteilt.

Arnold gibt in [4] zwei verschiedene hinreichende Bedingungen für eine vollständige Kohärenz des Schallfeldes im Kanal ohne äußere Störungen an:

- Es tritt nur eine einzige Mode auf. Dies ist z. B. der Fall, wenn nur die ebene Welle ausbreitungsfähig ist. Die Anzahl der Quellen hat keinerlei Einfluss.
- Es treten mehrere Moden auf, die miteinander vollständig korreliert sind. Dieser Fall liegt vor, wenn alle Moden von derselben Quelle oder von mehreren vollständig miteinander korrelierten Quellen angeregt werden.

Für die durch Rotor-Stator-Interaktion angeregten Moden trifft die zweite Bedingung zu. Zur Unterdrückung der inkohärenten turbulenten und akustischen Druckschwankungen wird in der Analyse von Turbomaschinen-Schaufeltönen standardmäßig ein Triggersignal heran gezogen. Es wird beispielsweise durch einen in die Rotorwelle integrierten Drehgeber erzeugt und liefert eine Information über die zeitliche Winkelposition der Antriebswelle. Setzt man in einer DFT-Auswertung gemäß Gleichung (3.1) über mehrere Zeitfenster den Startpunkt  $y[0]$  eines jeden Abschnitts mit der Einnahme einer festgelegten Referenzwinkelposition gleich, dann werden durch Mittelung die nicht-periodischen Signalanteile effektiv reduziert. Die Analyse ergibt komplexe Schalldruckamplituden nicht nur bei den Harmonischen der BPF, sondern bei den ganzzahlig Vielfachen der Rotordrehfrequenz  $f_R$ . Die Phase der Schalldruckamplitude ist dabei durch die relative Lage der Messposition zu der ausgezeichneten Wellenposition bestimmt, welche gleichbedeutend mit einer festen Position des Rotors relativ zum Stator ist.

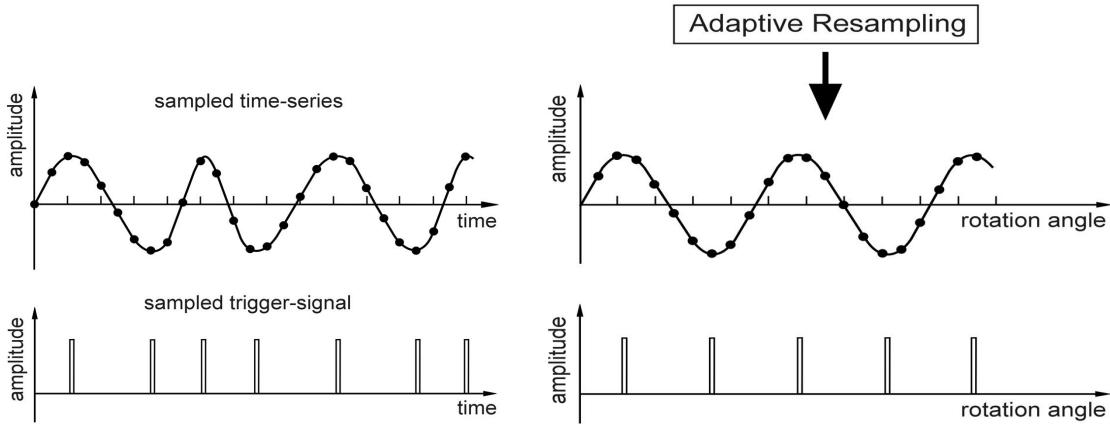


Abbildung 3.1: Mit Hilfe einer adaptiven Neuabtastung können durch Schwankungen der Wellendrehzahl bedingte Verzerrungen der harmonischen Schaufeltöne ausgeglichen werden.

Sollte kein Rotortriggersignal zur Verfügung stehen, so können die Schalldruckspektren auch mit Hilfe der auf Chung [21] zurückgehenden Drei-Mikrofon-Methode gemessen werden, in welcher drei Kreuzleistungsspektren in Beziehung gesetzt werden. In diesem Fall muss dem resultierenden reellen Spektrum allerdings nachträglich eine Referenzphase hinzugefügt werden, die dem Kreuzspektrum des Messmikrofons mit einem festgelegten Referenzmikrofon entnommen werden kann [63]. Die vollständige Kohärenz des Schallfeldes ist Voraussetzung für die Anwendung des Verfahrens und kann ebenfalls mit der Drei-Mikrofon-Methode überprüft werden [82].

### 3.1.2 Adaptive Neuabtastung zum Ausgleich von Drehzahlschwankungen

Insbesondere bei längeren Mittelungszeiten kommt es bei der Berechnung der Schalldruckspektren häufig zu Verschmierungen der Frequenzlinien infolge von Schwankungen der Rotordrehzahl. Eine wesentliche Verbesserung lässt sich mit der Methode der adaptiven Neuabtastung erzielen, die in der Literatur auch unter dem Begriff *Order Tracking* zu finden ist [9, 38, 151]. Das Prinzip ist in Abbildung 3.1 erläutert. Im linken Bild sind ein Schalldrucksignal und das Triggersignal der Antriebswelle dargestellt, welche beide im Zeitbereich mit einer konstanten Abtastrate gewandelt werden. Aufgrund von Drehzahlschwankungen treten die Trigger in zeitlich unregelmäßiger Reihenfolge auf. Im ersten Schritt werden mit Hilfe einer Interpolation die exakten Zeitpunkte ermittelt, zu denen das Triggersignal einen Referenzwert überschreitet, d. h. die Rotorwelle wiederholt eine ausgezeichnete Winkelposition eingenommen hat. Auf Basis dieser Triggerzeitpunkte kann im nächsten Schritt das Schalldrucksignal vom Zeitbereich auf den zeitlich abgewickelten Drehwinkel der Antriebswelle abgebildet werden. Dazu wird die Zeitserie auf Basis konstanter Winkelinkremente der Rotordrehung neu abgetastet, wodurch das Schalldrucksignal von den Drehzahlschwankungen entzerrt wird, siehe die rechte Darstellung von Abbildung 3.1. Das Spektrum der Schalldruckamplituden kann dann wie gewohnt mittels der Fouriertransformation berechnet werden, wobei die Fourierkomponenten sich nun als Vielfache der Rotordrehharmonischen darstellen.

Anstatt die Referenz nachträglich herzustellen, kann das Wellentriggersignal auch di-

rekt zur Synchronisation der Datenerfassung eingesetzt werden. Dies ist insbesondere bei schnellen *Online*-Datenanalysen vorteilhaft. Eine mögliche experimentelle Umsetzung ist in Abschnitt 7.2.4 beschrieben.

### 3.1.3 Standardabweichung und Signal-Rausch-Abstand

Für die spätere Bewertung der Modenanalyse-Genauigkeit wird die Standardabweichung benötigt, mit der die Sensoren eines Mikrofonarrays den Schalldruck unter den gegebenen Einsatzbedingungen gemessen haben. Eine Grundlage der folgenden Betrachtungen ist, dass sich die von einem Sensor gemessene Schalldruckamplitude aus der *wahren* Schalldruckamplitude  $p^0$  und der aus dem Messprozess rührenden Rauschamplitude  $\tilde{p}$  zusammensetzt:

$$p = p^0 + \tilde{p}. \quad (3.2)$$

Wenn die Rauschamplitude das Resultat von mehreren, voneinander unabhängigen stochastischen Prozessen ist, dann wird gemäß dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik die Verteilung der Rauschamplitude in guter Annäherung durch die Gaußsche Normalverteilung beschrieben. Systematische Messfehler werden in dieser Betrachtung nicht erfasst. Der Erwartungswert eines einzelnen Sensors beträgt

$$\langle \tilde{p}_l \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Für alle Sensoren des Arrays gelte, dass die an verschiedenen Positionen gemessenen zufälligen Schalldruckschwankungen paarweise nicht miteinander korrelieren:

$$\langle \tilde{p}_l \tilde{p}_{l'}^* \rangle = s_p^2 \delta_{ll'}. \quad (3.4)$$

In vorstehender Gleichung ist mit  $s_p$  die Standardabweichung der gemessenen Schalldruckamplituden bezeichnet. Es wird angenommen, dass  $s_p$  unabhängig vom Messort ist, d.h. dass alle Sensoren und Signalwege identisch sind. Es soll nun die Standardabweichung und der Signal-Rausch-Abstand der Schalldruckmessung in Abhängigkeit der Messdauer ermittelt.

Als Ausgangspunkt der statistischen Analyse wird ein Ensemble von Einzelmessungen eines Sensors betrachtet. Unter einer Einzelmessung wird hier die Durchführung einer Fourieranalyse mittels einer Fast Fourier-Transformation (FFT) verstanden, wobei die Dauer der Einzelmessung durch die Anzahl der zu mittelnden FFT-Fenster  $N_w$  und die Fensterlänge  $T_w$  definiert ist. Wenn  $p[j]$  die komplexe Schalldruckamplitude einer Frequenzkomponente bezeichnet, z. B. der Blattpassierfrequenz, die mit dem  $j$ -ten FFT-Fenster berechnet wurde, dann ergibt sich für diese Frequenzkomponente als Ergebnis einer Einzelmessung

$$p_{N_w} = \frac{1}{N_w} \sum_{j=0}^{N_w-1} p[j]. \quad (3.5)$$

Für eine Auswertung der Standardabweichung wird eine Serie von Einzelmesswerten  $p_{N_w}[k]$  mit  $k=0, 1, \dots, N_{mes}-1$  benötigt. In der praktischen Umsetzung können statt einer Messung von  $N_{mes}$  separaten Zeitreihen die Einzelmessungen auch aus einer einzigen

gen ausreichend langen Zeitreihe geschnitten werden. Diese muss dann aus mindestens  $N_{mes} \times N_w$  FFT-Fenstern bestehen. Dann berechnet sich die k-te Einzelmessung durch

$$p_{N_w}[k] = \frac{1}{N_w} \sum_{j=0}^{N_w-1} p[kN_w + j]. \quad (3.6)$$

Für eine Einzelmessung der Dauer  $N_w \times T_w$  erhält man dann die Standardabweichung der Schalldruckamplitude aus

$$s_{p,N_w} = \sqrt{\frac{1}{N_{mes}-1} \sum_{k=0}^{N_{mes}-1} (p_{N_w}[k] - p^0)^2}. \quad (3.7)$$

Hieraus berechnet sich der Signal-Rausch-Abstand (engl. signal-to-noise ratio) (SNR) zu

$$SNR_{p,N_w} = 20 \log \left( \frac{p^0}{s_{p,N_w}} \right). \quad (3.8)$$

Die unverfälschte Schalldruckamplitude  $p^0$  ist per Definition nicht bekannt. Sie muss in den voran stehenden Gleichungen durch die Größe  $\bar{p}$  angenähert werden, die den Mittelwert über alle zur Verfügung stehenden FFT-Fenster darstellt:

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} p[j]. \quad (3.9)$$

Für die Anzahl der FFT-Fenster gilt  $N \geq N_{mes} \times N_w$ .

## 3.2 AZIMUTALMODENANALYSE

Die Azimutalmodenanalyse ist in der Triebwerksakustik von großer Bedeutung, da sie mit geringem messtechnischem Aufwand bereits wichtige Aussagen hinsichtlich dominanter Schallentstehungsmechanismen zulässt. Beispielsweise können die in Rotor-Stator-Konfigurationen dominant angeregten azimutalen Ordnungen der Schaufeltöne gemessen und mit Hilfe des Modells von Tyler und Sofrin [143] oder den auf mehrere Schaufelreihen erweiterten Modellen von Holste und Neise [53] bzw. Enghardt et al. [33] interpretiert werden. Die Azimutalmodenanalyse ist robust und kann nahezu in Echtzeit durchgeführt werden [11].

### 3.2.1 Diskrete Fourier-Transformation

Die in Gleichung (2.19) eingeführte Modenentwicklung des Schalldrucks lässt sich in folgender Form schreiben:

$$p(x, r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m(x, r) \cdot e^{im\phi}, \quad (3.10)$$

wobei

$$p_m(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_{mn}^+ \cdot e^{ik_{mn}^+ x} + A_{mn}^- \cdot e^{ik_{mn}^- x} \right) \cdot f_{mn}(r). \quad (3.11)$$

Obwohl  $p_m = p_m(x, r)$  eine Funktion darstellt, wird dieser Ausdruck üblicherweise als *Azimutalmodenamplitude* oder als *Umfangsmodenamplitude* bezeichnet. In der zeitabhängigen Darstellung beschreibt eine Azimutalmode eine in azimutaler Richtung laufende Welle, deren Amplitude im allgemeinen Fall mit der axialen und radialen Koordinate variiert. Die in Gleichung (3.10) angegebene Darstellung legt es nahe, die Azimutalmodenamplituden mittels einer Diskreten Fourier-Transformation (DFT) zu ermitteln:

$$p_m(x_o, r_o) = \frac{1}{N_\phi} \sum_{l=1}^{N_\phi} p(x_o, r_o, \phi_l) \cdot e^{-iml\Delta\phi}. \quad (3.12)$$

Diese Berechnung setzt die Messung von Schalldruckspektren an  $N_\phi$  Sensoren voraus, welche auf einer Kreislinie  $(x_o, r_o)$  mit äquidistantem azimutalem Abstand  $\Delta\phi$  angeordnet sind. Eine häufige Realisierung besteht in einem ringförmigen Einbau der Sensoren in die Kanalausßenwand, bei dem die Mikrofonmembran bündig mit der Kanalwand abschließt. Die höchste, d. h. ohne räumliches Aliasing messbare azimutale Ordnung  $\max(m)$  ergibt sich aus dem Nyquist-Theorem:

$$N_\phi = \frac{2\pi}{\Delta\phi} > 2 \max |m| \quad (3.13)$$

Messungen bei hohen Frequenzen mit entsprechend hohen Modenordnungen erfordern gemäß dem Nyquist-Kriterium eine große Anzahl von Sensoren. Rademaker et al. zeigen in [111], dass sich die Anzahl der Sensoren begrenzen lässt, wenn die Sensoren nicht-äquidistant in azimutaler Richtung angeordnet werden. Nachteile des modifizierten Verfahrens bestehen in der begrenzten Anzahl auswertbarer Moden und in einem geringeren Signal-Rausch-Verhältnis.

Quantitative Aussagen, z. B. zur transportieren Schallleistung, sind mit Hilfe der Azimutalmodenanalyse prinzipiell nicht möglich. Werden Azimutalmodenanalysen jedoch an mehreren axialen und radialen Positionen  $(x_j, r_k)$  durchgeführt, so können die Azimutalmodenspektren als Eingangsdaten für eine vollständige Modenanalyse verwendet werden, siehe Abschnitt 3.3.3.

### 3.2.2 Bewertung der Analysegenauigkeit

Im Folgenden wird die Messung von Schalldruckamplituden an  $N_\phi$  ringförmig angeordneten Positionen angenommen. Das Einsetzen von Ansatz (3.2) in Gleichung (3.12) liefert dann

$$p_m = \underbrace{\frac{1}{N_\phi} \sum_{l=1}^{N_\phi} p(\phi_l)^o e^{-iml2\pi/N_\phi}}_{p_m^o} + \underbrace{\frac{1}{N_\phi} \sum_{l=1}^{N_\phi} \tilde{p}(\phi_l) e^{-iml2\pi/N_\phi}}_{\tilde{p}_m}. \quad (3.14)$$

Für die azimutale Rauschamplitude gilt unter Berücksichtigung von Gleichung (3.4) folglich

$$\langle \tilde{p}_m \tilde{p}_{m'}^* \rangle = \frac{1}{N_\phi^2} \sum_l \sum_{l'} \langle \tilde{p}(\phi_l) \tilde{p}^*(\phi_{l'}) \rangle e^{-i(ml-m'l')2\pi/N_\phi} \quad (3.15)$$

$$= \frac{s_p^2}{N_\phi^2} \sum_l e^{-i(m-m')l2\pi/N_\phi} \quad (3.16)$$

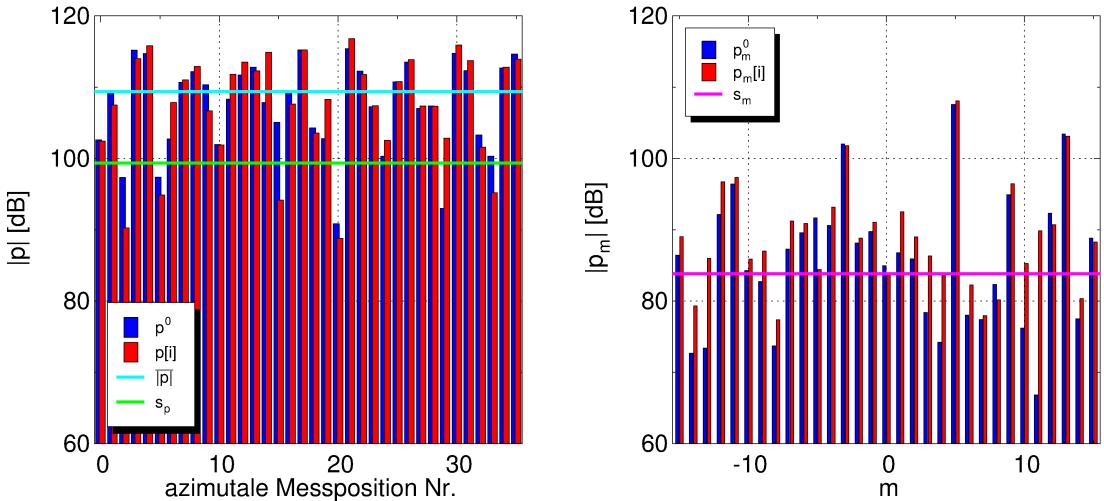


Abbildung 3.2: Simulation einer Azimutalmodenanalyse mit 36 Sensoren. Das linke Diagramm zeigt eine Gegenüberstellung der synthetischen Schalldruckdaten mit dem Ergebnis einer simulierten Messung, der zugehörigen Standardabweichung und dem Mittelwert des Schalldrucks über alle Messpositionen. Das rechte Diagramm zeigt die zugehörigen Azimutalmodenamplituden.

$$= \frac{s_p^2}{N_\phi^2} \delta_{mm'}. \quad (3.17)$$

Mit  $\langle \tilde{p}_m \tilde{p}_m^* \rangle = s_m^2$  ergibt sich hieraus der Zusammenhang

$$s_m = \frac{s_p}{\sqrt{N_\phi}} \quad (3.18)$$

für die Standardabweichung. Diese Gleichung enthält die wichtige Aussage, dass die Standardabweichung der Azimutalmodenamplituden unabhängig von der Ordnung  $m$  und stets geringer als die Standardabweichung der Schalldruckamplituden ist. Wenn das Schallfeld nur von wenigen azimutalen Ordnungen dominiert wird, besitzen demzufolge die dominanten Azimutalmodenamplituden einen erheblich größeren Signal-Rausch-Abstand als die Schalldruckamplitude, die sich im Mittel über die  $N_\phi$  Messpositionen ergibt:

$$(SNR)_m = 20 \log \left( \frac{p_m}{s_m} \right) = 20 \log \left( \sqrt{N_\phi} \frac{p_m}{s_p} \right). \quad (3.19)$$

Dieser Sachverhalt ist anhand einer simulierten Messung in Abbildung 3.2 illustriert. Die Simulation wurde für eine zufällige synthetische Schalldruckverteilung an  $N_\phi = 36$  Sensorpositionen in ähnlicher Weise durchgeführt, wie es in Abschnitt 3.3.6 für die Radialmodenanalyse beschrieben ist. In der Abbildung sind die synthetischen Schalldruckamplituden und die synthetischen Azimutalmodenamplituden jeweils den Daten einer durch  $[i]$  gekennzeichneten Einzelmessung aus einem Ensemble von 500 Einzelmessungen gegenübergestellt. Die Standardabweichung der Schalldruckmessung beträgt 100 dB und der Signal-Rausch-Abstand beträgt  $(SNR)p = 10$  dB, wobei dieser Wert auf die über alle Positionen gemittelte Schalldruckamplitude  $\bar{p}$  bezogen ist. Für die Azimutalmodenamplituden ergibt die Simulationsrechnung in Übereinstimmung mit Gleichung (3.18) eine Standardabweichung von  $s_m = 83.8$  dB. Für die dominante Mode  $m = 5$  ergibt sich

hieraus mit  $(SNR)_m = 24$  dB im Vergleich zur mittleren Schalldruckamplitude ein deutlich größerer Signal-Rausch-Abstand.

### 3.3 INVERSE RADIALMODENANALYSE

Das inverse Radialmodenanalyse-Verfahren beruht auf der Lösung eines linearen Gleichungssystems, in welchem ein gemessenes Schalldruckfeld über Modelfunktionen mit den gesuchten Modenamplituden verknüpft ist. In dieser Arbeit werden vier grundsätzlich verschiedene Messvarianten mit radialen Mikrofonrechen bzw. mit wandbündig installierten Mikrofonarrays betrachtet. Die Sensoranordnungen werden in Abschnitt 3.3.1 eingeführt. Eine vollständige Zerlegung in alle ausbreitungsfähigen Modenordnungen kann auf zwei verschiedene Arten realisiert werden. Diese werden in den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.3 vorgestellt. Basierend auf den vorgenannten Ansätzen wird in Abschnitt 3.3.4 die Methode der partiellen Radialmodenanalyse vorgeschlagen, die eine schnelle Analyse oder Abschätzung der Schallleistung mit erheblich geringerem Messaufwand ermöglicht. Alle Verfahren greifen auf das in Abschnitt 3.3.5 beschriebene Verfahren der Singulärwerte-Zerlegung von Matrizen zurück. In Abschnitt 3.3.6 wird ein Verfahren zur Bewertung der Genauigkeit der Modenanalyse vorgestellt.

#### 3.3.1 Elementare Sensoranordnungen

Prinzipiell können für eine Radialmodenanalyse nahezu beliebige radiale und axiale Messpositionen im Strömungskanal verwendet werden. Anordnungen mit unregelmäßig verteilten Sensorpositionen lassen sich jedoch nur für sehr eingeschränkte Frequenzbereiche und spezielle Geometrien optimieren [18, 43]. Daher werden in dieser Arbeit nur regelmäßig aufgebaute Messgitter betrachtet.

In Abbildung 3.3 sind vier Sensoranordnungen skizziert, die sich bezüglich der Art der messtechnischen Umsetzung fundamental unterscheiden und deren Charakteristika in Kapitel 4 ausführlich diskutiert und gegenüber gestellt werden. Die Sensoranordnungen sind wie folgt definiert:

- Anordnung A-I: Sensorrechen sind an  $N_x = 2$  axialen Positionen mit dem Abstand  $\Delta x$  eingesetzt. In jedem Rechen befinden sich in radialer Richtung  $N_r$  Sensoren mit äquidistantem Abstand, d. h. die radialen Positionen sind definiert durch

$$r_j = R_i + j \cdot \Delta r \quad \text{und} \quad \Delta r = (R - R_i) / (N_r + 1) \quad (3.20)$$

- Anordnung A-II: Sensorrechen sind an  $N_x = 4$  axialen Positionen mit äquidistantem Abstand  $\Delta x$  eingesetzt. In jedem Rechen befinden sich in radialer Richtung  $N_r$  Sensoren mit äquidistantem Abstand  $\Delta r$ , deren Abstand ebenfalls durch Gleichung (3.20) definiert ist.
- Anordnung A-III: Die Sensoren sind an  $N_x$  axialen Positionen am inneren Radius  $R_i$  und am äußeren Radius  $R$  bündig mit der Kanalwand installiert ( $N_r = 2$ ). Die Sensoren besitzen in axialer Richtung den äquidistanten Abstand  $\Delta x$ . Diese Anordnung lässt sich nur in Strömungskanälen mit vorhandenem Nabenkörper realisieren.

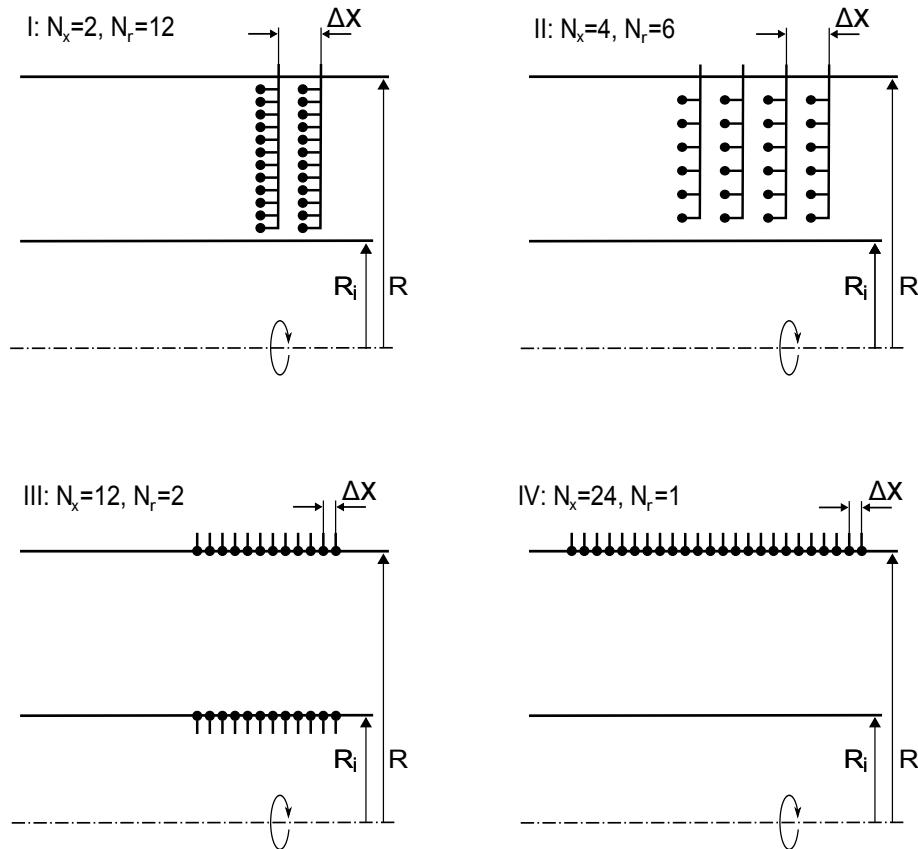


Abbildung 3.3: Vier fundamental verschiedene Sensoranordnungen für eine Radialmodenanalyse in einem Strömungskanal mit Nabenhöhe  $R_i$  und äußerem Radius  $R$ . Anordnung I und II bestehen aus radialen Sensorreihen, in Anordnung III und IV sind die Sensoren bündig mit der Kanalwand installiert.

- Anordnung A-IV: Die Sensoren sind an  $N_x$  axialen Positionen am äußeren Radius  $R$  bündig mit der Kanalwand installiert ( $N_r = 1$ ). Die Sensoren besitzen in axialer Richtung den äquidistanten Abstand  $\Delta x$ .

Es muss angemerkt werden, dass die Anzahl kombinierter axialer und radialer Messstellen  $N_x \times N_r = 24$  der in Abbildung 3.3 dargestellten Sensoranordnungen willkürlich ist. Grundsätzlich muss die für eine Modenanalyse erforderliche Gesamtzahl von Sensoren  $N_x \times N_r$  in Abhängigkeit des zu analysierenden Frequenzbereichs und des Nabenvorhältnis individuell für jede Sensoranordnung bestimmt werden. Dies gilt ebenso für den noch nicht spezifizierten axialen Sensorabstand  $\Delta x$ . Es ist Gegenstand von Kapitel 4 die Abhängigkeiten zu untersuchen und Richtlinien für eine optimale Gestaltung der Sensorarrays zu formulieren<sup>2</sup>.

Die aus zwei radialen Sensorreihen bestehende Anordnung A-I stellt das Referenzmessverfahren für die Bewertung der Anordnungen A-III und A-IV dar, in denen die Sensoren wandbündig installiert sind. Anordnung A-II ist eine Alternative zu Anordnung A-I für den Fall, dass die Kanalhöhe für den Einbau von  $N_r$  Sensoren nicht

<sup>2</sup> In den Untersuchungen wird angenommen, dass in den Anordnungen A-I und A-II die Zahl axialer Messstellen  $N_x$  festgelegt ist. In den Anordnungen A-III und A-IV ist die Zahl der radialen Sensorpositionen  $N_r$  unveränderbar.

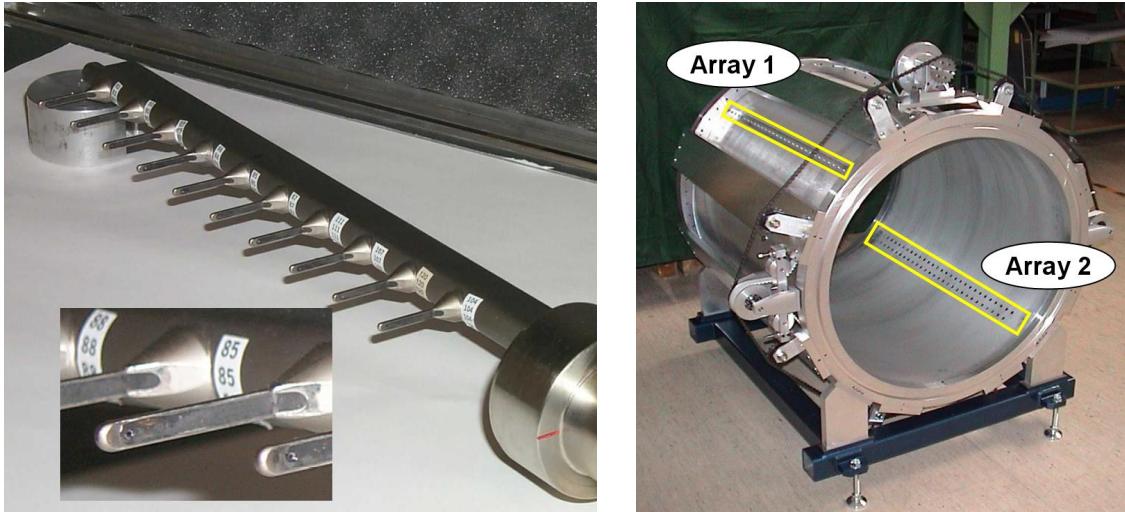


Abbildung 3.4: Das linke Bild zeigt einen mit Kulite-Drucksensoren ausgestatteten Messrechen [29]. Im rechten Bild ist eine für zwei wandbündig installierte axiale Mikrofonarrays vorbereitete drehbare Kanalsektion dargestellt [137].

ausreicht und diese daher auf vier statt zwei radiale Rechen verteilt werden. Mit den Sensorrechen wird die radiale Schalldruckverteilung gleichmäßig an mehreren radialen Positionen abgetastet. Durch Messungen an mindestens zwei axial versetzten Kanalquerschnitten können Moden verschiedener axialer Ausbreitungsrichtungen getrennt werden. Abbildung 3.4 zeigt im linken Foto als Beispiel einen Rechen, der mit Kulite-Druckaufnehmern ausgestattet ist und für Messungen im Austritt einer Niederdruckturbine eingesetzt wurde. Die Verwendung von Sensorrechen hat aus messtechnischer Sicht mehrere Nachteile: Im Eintritt einer Turbomaschine können die Strömungsnachläufe durch Wechselwirkung mit einem stromab liegenden Rotor zur Anregung von unerwünschtem Schall führen. In Kanälen mit kleinen Abmessungen kann die räumliche Ausdehnung der Sensorrechen zudem zu einer erheblichen Modifikation des Strömungsfeldes führen. Außerdem können signifikante Streuungen der Moden an den Rechen auftreten, die in einer Auswertung gegebenenfalls berücksichtigt werden müssten, jedoch nur schwer abzuschätzen sind. Nicht zuletzt ist die Installation mit Toleranzen z. B. bezüglich Verkippung und Verdrehung der Rechen verbunden. Solche Störungen werden durch die Installation der Sensoren in der Kanalwand vermieden. Eine für diese Messart vorbereitete Kanalsektion ist im rechten Foto von Abbildung 3.4 zu sehen. Zur Abtastung des axialen Schalldruckverlaufs am Kanalausßenradius kann jede der axial linienförmig angelegten Lochreihen mit dreißig  $1/4"$  Kondensatormikrofonen bestückt werden.

Für eine vollständige Modenanalyse des Schallfelds müssten Gleichung (3.13) zufolge  $N_\phi$  Sensorrechen bzw. axiale Arrays in Umfangsrichtung installiert werden. Schon bei moderaten Frequenzen treten so hohe azimutale Ordnungen auf, dass der messtechnische Aufwand nicht mehr realisierbar ist. In der Praxis wird das Messgitter dann zeitlich sukzessiv aufgebaut, d. h. durch schrittweise Drehung einer mit wenigen Sensorarrays instrumentierten Kanalsektion in Umfangsrichtung.

### 3.3.2 Vollständige Zerlegung des Schalldruckfelds

Für die vollständige Modenanalyse werden Schalldruckmessungen auf einem regelmäßig aufgebauten Gitter von  $N_{\text{pos}} = N_x \times N_r \times N_\phi$  Positionen im Strömungskanal benötigt. Der am Ort  $(x_j, r_k, \phi_l)$  gemessene Schalldruck kann nach Gleichung (2.19) wie folgt in die Beiträge der verschiedenen Moden entwickelt werden:

$$\begin{aligned} p(x_j, r_k, \phi_l) &= \sum_{m=\min(m)}^{\max(m)} \sum_{n=0}^{N_n(m)-1} A_{mn}^+ \cdot e^{ik_{mn}^+ x_j} \cdot f_{mn}(r_k) \cdot e^{im\phi_l} \\ &+ \sum_{m=\min(m)}^{\max(m)} \sum_{n=0}^{N_n(m)-1} A_{mn}^- \cdot e^{ik_{mn}^- x_j} \cdot f_{mn}(r_k) \cdot e^{im\phi_l}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hier bezeichnen  $\min(m)$  und  $\max(m)$  die niedrigste beziehungsweise höchste bei der gegebenen Frequenz ausbreitungsfähige azimutale Ordnung. Durch  $N(m)$  wird die Anzahl radialer Ordnungen angegeben, die in Abhängigkeit der Ordnung  $m$  ausbreitungsfähig sind. Das aus der Messung resultierende Gleichungssystem lässt sich in Kurzform schreiben als

$$\mathbf{p} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.22)$$

Darin bezeichnet  $\mathbf{p}$  den Vektor der komplexen Schalldruckamplituden,  $\mathbf{a}$  den Vektor der gesuchten komplexen Modenamplituden und  $\mathbf{W}$  die Modellmatrix, deren Einträge sich aus den Produkten der modalen Eigenfunktionen zusammensetzen. Eine detaillierte Beschreibung dieser Größen ist in Anhang B zu finden.

In den meisten Anwendungen ist das Gleichungssystem überbestimmt. Eine Überbestimmung wird in der praktischen Anwendung oft bewusst herbeigeführt, um den Einfluss von Messfehlern durch einen Fehlerausgleich zu reduzieren [98, 99]. Die optimale Lösung im Sinne des kleinsten Fehlerquadrats wird wie folgt berechnet [108]:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{W}^H \mathbf{W}]^{-1} \mathbf{W}^H \cdot \mathbf{p}. \quad (3.23)$$

Die Matrix  $[\mathbf{W}^H \mathbf{W}]^{-1} \mathbf{W}^H$  wird als *Pseudo-Inverse* zur Matrix  $\mathbf{W}$  bezeichnet. Sie kann mithilfe des Verfahrens der Singulärwerte-Zerlegung berechnet werden, welches in Abschnitt 3.3.5 näher beschrieben ist. Der resultierende Vektor der Modenamplituden minimiert das Funktional

$$J = \|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{Wa} - \mathbf{p}\|^2. \quad (3.24)$$

Das Residuum  $\|\mathbf{e}\|^2$  beinhaltet die systematischen und stochastischen Analysegenauigkeiten.

Die Anzahlen von Messpositionen in den drei Kanalkoordinaten orientieren sich grundsätzlich an den höchsten auftretenden azimutalen und radialen Modenordnungen. Die Zahl der azimutalen Positionen  $N_\phi$  eines regelmäßig aufgebauten Gitters wird gemäß dem Nyquist-Kriterium (3.13) durch die höchste azimutale Ordnung bestimmt. Aufgrund der Orthogonalität werden die Moden verschiedener azimutaler Ordnungen dann – wie in einer normalen Azimutalmodenanalyse – bereits implizit in dem großen Gleichungssystem hinreichend getrennt, vgl. Anhang B. Für die weitere Zerlegung ist nun

die Zahl an radialen Ordnungen  $N_n(m)$  von Bedeutung. Wie in den Abschnitten 2.3 ff. diskutiert wurde, tritt die maximale Anzahl von radialen Ordnungen immer für die azimutale Ordnung  $m=0$  auf<sup>3</sup>. Aus mathematischer Sicht erfordert die Bestimmung von  $2 \max(N_n(m))$  Moden mindestens

$$N_x N_r \geq 2 \max(N_n(m)) \quad (3.25)$$

kombinierte axiale und radiale Messstellen. Zur Trennung von stromab und stromauf laufenden Moden sind mindestens  $N_x = 2$  axiale Messpositionen erforderlich. Wie die Untersuchungen in Kapitel 4 noch zeigen werden, muss jedoch – insbesondere bei hohen Frequenzen und bei wandbündig installierten Sensoren – die Anzahl der Messpositionen oft deutlich größer als die Anzahl Moden sein, so dass  $N_x N_r \gg 2 \max(N_n(m))$ .

### 3.3.3 Zerlegung von Azimutalmodenamplituden

Alternativ zum voran beschriebenen Verfahren lässt sich die Modenanalyse auch in zwei Schritten umsetzen. Im ersten Schritt werden Azimutalmodenanalysen an  $N_x$  axialen und  $N_r$  radialen Messpositionen gemäß Abschnitt 3.2 durchgeführt. Im zweiten Schritt kann dann analog zum vorherigen Abschnitt jede Azimutalmodenamplitude – einzeln – in die radialen Ordnungen zerlegt werden. Die Analyse geht von folgender Verknüpfung der Azimutalmodenamplituden und der Radialmodenamplituden basierend auf Gleichung (3.11) aus:

$$p_m(x_j, r_k) = \sum_{n=0}^{N(m)-1} A_{mn}^+ \cdot e^{ik_{mn}^+ x_j} \cdot f_{mn}(r_k) + \sum_{n=0}^{N(m)-1} A_{mn}^- \cdot e^{ik_{mn}^- x_j} \cdot f_{mn}(r_k), \quad (3.26)$$

mit  $j = 1, 2, \dots, N_x$  und  $k = 1, 2, \dots, N_r$ . In Matrixnotation lässt sich dies schreiben als

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{a}_m. \quad (3.27)$$

Der Vektor  $\mathbf{a}_m$  hat  $2N_n(m)$  Einträge, dies sind die Modenamplituden aller zur azimutalen Ordnung  $m$  gehörigen radialen Ordnungen. Eine detaillierte Beschreibung der Vektoren und der Kopplungsmatrix wird in Anhang B gegeben. Analog zum Verfahren des vorherigen Abschnitts berechnet man die optimale Lösung mithilfe der Pseudo-Inversen von  $\mathbf{W}_m$ :

$$\mathbf{a}_m = [\mathbf{W}_m^H \mathbf{W}_m]^{-1} \mathbf{W}_m^H \cdot \mathbf{p}_m \quad (3.28)$$

Das zugehörige Funktional lautet  $\|\mathbf{e}_m\|^2 = \|\mathbf{W}_m \mathbf{a}_m - \mathbf{p}_m\|^2$ . Die Pseudo-Inverse wird mithilfe des in Abschnitt 3.3.5 beschriebenen Verfahren berechnet.

Der Vorteil dieser Analysevariante besteht darin, dass die Modenzerlegung auf wenige interessierende, z. B. aktiv zu regelnde azimutale Ordnungen eingeschränkt werden kann. Wenn  $\mu$  die niedrigste zu analysierende azimutale Ordnung ist, dann muss für die Anzahl kombinierter axialer und radialexialer Messpositionen nur folgende Forderung erfüllt sein:

$$N_x N_r \geq 2N_n(\mu). \quad (3.29)$$

---

<sup>3</sup> Eine Ausnahme kann es im Fall einer stark drallbehafteten Strömung geben, siehe Abschnitt 2.5

Bei hinreichend großer Ordnung  $\mu$ , d. h. wenn  $N_n(\mu) \ll N_n(0)$  gilt, lässt sich der Messaufwand durch Einsparung von axialen Messpositionen mitunter erheblich gegenüber dem in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Verfahren reduzieren. Das Verfahren kann aber auch – bei gleichem Messaufwand – für die vollständige Zerlegung des Schallfelds eingesetzt werden.

In Anhang B ist der Zusammenhang zwischen den Modenanalyseansätzen dieses Abschnitts und des voran gegangenen Abschnitts dargestellt. Das Gleichungssystem (3.22) lässt sich Gleichung (B.15) zufolge unter Verwendung der Modellmatrix  $\mathbf{W}_m$  auch in eine Reihe über alle azimutale Ordnungen entwickeln:

$$\mathbf{p} = \sum_{m=0}^M \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{a}_m. \quad (3.30)$$

Die Einträge der Matrix  $\mathbf{V}_m$  bestehen gemäß Gleichung (B.14) nur aus den azimutalen Eigenfunktionen, die zur Abbildung der Modenamplituden auf die Umfangsmesspositionen benötigt werden.

Es liegt die Vermutung nahe, dass sich in den beiden Analysevarianten die Messfehler und die Unzulänglichkeiten der Modelle in unterschiedlicher Weise auf die Fehlervektoren  $\mathbf{e}$  beziehungsweise  $\mathbf{e}_m$  abbilden. Einen maßgeblichen Einfluss übt hierbei die Kondition der Modellmatrizen aus, siehe auch Abschnitt 3.3.5. Theoretisch können sich unterschiedliche Lösungen ergeben. Die Erfahrung zeigt jedoch, dass in Messungen mit optimierten Sensoranordnungen die Unterschiede zwischen den beiden Analysevarianten sehr klein sind. Als Beispiel sei auf die in Abschnitt 5.3 dargestellten Untersuchungen verwiesen, bei denen trotz schlechter Kondition bei der Analyse niedriger azimutaler Ordnungen das Ergebnis der Zerlegung höherer azimutaler Ordnungen auch bei Verwendung des Lösungsansatzes (3.23) nicht beeinflusst wird. Dies ist in der Orthogonalität der azimutalen Ordnungen begründet, die gemäß Gleichung (3.30) implizit auch im Verfahren zur vollständigen Zerlegung des Schalldruckfelds wirksam ist.

### 3.3.4 Partielle Zerlegung des Schalldruckfelds

In manchen Anwendungen kann es sein, dass das in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Verfahren bei hohen Frequenzen selbst bei Beschränkung auf höhere azimutale Ordnungen, eine zu große Anzahl von Messpositionen erfordert. Die Grundidee der partiellen Radialmodenanalyse besteht darin, dass auf die ringförmige Sensoranordnung zur Auflösung aller azimutaler Ordnungen verzichtet werden kann, wenn sicher gestellt ist, dass das Schallfeld nur durch wenige azimutale Modenordnungen dominiert wird, z. B. durch die Rotor-Stator-Interaktionsmoden. Im Extremfall einer einzigen dominanten Modenordnung ließe sich das Messgitter auf eine einzelne radial oder axial angeordnete Linie von Mikrofonen reduzieren.

Der Ansatz der partiellen Radialmodenanalyse sieht eine Zerlegung des gemessenen Schalldruckfelds in einem Schritt vor, ähnlich wie es in Abschnitt 3.3.2 für die vollständige Zerlegung des Schalldruckfelds beschrieben wurde. Jedoch wird das in Gleichung (3.22) angegebene Gleichungssystem auf ein a priori festgelegtes Tupel azimutaler Ordnungen  $M_p = \{m_1, m_2, \dots\}$  eingeschränkt. Alle Elemente des Vektors  $\mathbf{a}$  und alle Spal-

ten der Modellmatrix  $\mathbf{W}$  die nicht zu den ausgewählten azimutalen Ordnungen gehören, werden von der Formulierung des Gleichungssystems ausgenommen. Die reduzierten Größen werden mit  $\mathbf{a}_{M_p}$  und  $\mathbf{W}_{M_p}$  bezeichnet. Aus Gleichung (3.22) wird so

$$\mathbf{p} = \mathbf{W}_{M_p} \cdot \mathbf{a}_{M_p}. \quad (3.31)$$

Gleichung (B.15) lautet sinngemäß

$$\mathbf{p} = \sum_{m \in M_p} \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{a}_m. \quad (3.32)$$

Die optimale Lösung des Gleichungssystems wird – wie in den Abschnitten zuvor – mithilfe der Pseudo-Inversen der Modellmatrix  $\mathbf{W}_{M_p}$  berechnet. Dabei kommt wieder das in Abschnitt 3.3.5 beschriebene Verfahren zum Einsatz. Die Gesamtzahl der für die Analyse mindestens erforderlichen Messpositionen orientiert sich an folgender Abschätzung:

$$N_{\text{pos}} \geq \sum_{m \in M_p} 2N_n(m). \quad (3.33)$$

Sofern nur die stromab oder nur die stromauf laufenden Moden berücksichtigt werden sollen, reduziert sich das Gleichungssystem diesem Kriterium entsprechend. Da die Beiträge aller nicht berücksichtigten Modenordnungen in Form systematischer Fehler auf die analysierten Modenordnungen abgebildet werden, sollte die Gesamtzahl Messpositionen im Sinne des besten Fehlerausgleichs möglichst groß gewählt werden. Unter dem Gesichtspunkt einer guten Trennung von  $N_m$  azimutalen Ordnungen erscheint der Einsatz von mindestens  $N_m$  über den Umfang verteilten, axialen (oder radialen) Sensorarrays sinnvoll. Jedes Array sollte mit mindestens  $N_x = 2N_n(m)$  ( $m \in M_p$ ) Sensoren ausgestattet sein. Die Frage, in welchem axialen Abstand die Sensoren gestaffelt werden sollten, wird in Kapitel 4 beantwortet.

### 3.3.5 Verfahren der Singulärwerte-Zerlegung

Für die Berechnung der Inversen Modellmatrix wird das Verfahren der Singulärwerte-Zerlegung (engl. singular value decomposition) (SVD) angewandt. Das Verfahren bietet im Vergleich zu einfacheren numerischen Verfahren, wie z. B. dem Gaußverfahren, mehrere Vorteile: Wenn das zu lösende Gleichungssystem vollständig oder nahezu singulär ist, kann mit dem SVD-Verfahren eine Diagnose durchgeführt und u. U. noch eine sinnvolle Lösung berechnet werden [99, 152].

Mit Hilfe des SVD-Verfahrens wird nach [108] die  $(M \times N)$  Matrix  $\mathbf{W}$  zerlegt in

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} [\text{diag}(\zeta_j)] \mathbf{V}^H. \quad (3.34)$$

Die Singulärwerte  $\zeta_j$  bilden die Diagonale der  $(N \times N)$  Matrix  $[\text{diag}(\zeta_j)]$ . Die  $(M \times N)$  Matrix  $\mathbf{U}$  und die  $(N \times N)$  Matrix  $\mathbf{V}^H$  sind im reellen Fall orthogonal. In der vorliegenden Anwendung sind sie aufgrund der komplexwertigen Elemente jedoch unitär. Der Lösungsvektor von Gleichung (3.22) berechnet sich durch

$$\mathbf{a} = \mathbf{V} [\text{diag}(1/\zeta_j)] \mathbf{U}^H \mathbf{p}. \quad (3.35)$$

Die Robustheit der Lösung hängt vom Spektrum der Singulärwerte ab. Wenn einer oder mehrere der Singulärwerte  $\zeta_j$  Null sind, dann ist die Matrix singulär und es existiert ohne weitere Maßnahmen keine Lösung. Ist die Matrix zwar nicht singulär, aber sind einige Singulärwerte im Vergleich zum größten Singulärwert relativ klein, dann tragen die zugehörigen Komponenten kaum zur Matrixabbildung bei, d. h. für die aufgestellte Matrix  $\mathbf{W}$  liegt der gegebene Vektor  $\mathbf{p}$  nicht vollständig im Bildbereich. Die Konsequenz für die Lösung lässt sich anhand von Gleichung (3.35) nachvollziehen: Wenn der  $j$ -te Singulärwert sehr klein ist, dann gehen die  $j$ -te Spalte der Matrix  $\mathbf{V}$  und die  $j$ -te Zeile der Matrix  $\mathbf{U}^H$  mit sehr großem Gewicht in jedes Element des Lösungsvektors ein. Die Anpassung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist demzufolge stark Fehlerbehaftet. Als relatives Bewertungsmaß für die Stabilität des numerischen Verfahrens wird das Verhältnis des größten zum kleinsten Singulärwert herangezogen [118]:

$$\kappa = \frac{\zeta_{\max}}{\zeta_{\min}}. \quad (3.36)$$

Die Größe  $\kappa$  wird als Konditionszahl bezeichnet. Eine Matrix wird als schlecht konditioniert bezeichnet, wenn die Konditionszahl so groß ist, dass  $1/\kappa$  in die Größenordnung der Rechengenauigkeit gelangt.

Ist eine Matrix schlecht konditioniert, kann man versuchen sie durch ein besser konditioniertes System zu ersetzen, etwa indem man die Modellmatrix  $\mathbf{W}$  besser aufstellt. Von dieser Möglichkeit wird in Kapitel 4 durch systematische Variation der Messpositionen Gebrauch gemacht. Alternativ und ohne notwendiges Vorwissen gibt es die Möglichkeit, die Kondition des Problems einfach durch Nullsetzen der kleinsten Singulärwerte oder durch Regularisierung zu verbessern [70, 152]. Obwohl damit Freiheitsgrade des Systems verloren gehen, lässt sich auf diesem Wege oft ein besserer Lösungsvektor und damit ein geringeres Residuum erzielen. Eine Regularisierung kommt in Abschnitt 5.3 zur Anwendung.

### 3.3.6 Bewertung der Analysegenauigkeit

Die wichtigsten stochastischen und systematischen Fehlereinflüsse auf die Schalldruckmessung wurden bereits in Abschnitt 3.1 zusammen gefasst. In der Modenanalyse kommen weitere systembedingte Ursachen von Ungenauigkeiten hinzu:

- ungünstige Wahl der Messpositionen,
- Toleranzen im Versuchsaufbau,
- Toleranzen bei der Sensorinstallation,
- Störung der Strömung durch die Sensorgehäuse,
- Schallstreuung an den Sensorgehäusen,
- unzureichende Modellierung des stationären Strömungsfelds (z. B. Geschwindigkeits- oder Temperaturgradienten, Nachlaufdellen von Leitgittern) und
- unzureichende Modellierung des instationären Druckfelds (z. B. von Rotornachläufen verursachte konvektive Moden).

Der Einfluss der Messpositionen auf das Analyseergebnis wird ausführlich in Kapitel 4 behandelt. Die Einflüsse der anderen potentiellen Fehlerquellen sind stark situationsspezifisch und lassen sich schwieriger in verallgemeinerter Form untersuchen. Zum Teil hängen sie mit der eingesetzten Sensoranordnung zusammen und können bereits durch sorgfältige Versuchsplanung minimiert werden. Insbesondere die drei letzten Punkte erfordern eine Weiterentwicklung des Modells, welches der Analyse zugrunde liegt.

Die im Folgenden beschriebene Vorgehensweise ist zur Analyse der Fortpflanzung stochastischer Störungen der Schalldruckmessung auf die Modenamplituden konzipiert. Mit Blick auf die in Kapitel 4 durchgeführten Untersuchungen beziehen sich die Darstellungen auf das in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Modenanalyseverfahren zur Zerlegung von Azimutalmodenamplituden. Eine Übertragung der Darstellungen auf die beiden anderen Modenanalyseverfahren ist in Anhang C zu finden.

#### *Kondition der Modellmatrix*

Im vorherigen Abschnitt wurde die Konditionszahl als Maß für die Lösbarkeit und die Stabilität eines inversen numerischen Verfahrens eingeführt. Für die Analyse der Modenordnung  $m$  mit der Modellmatrix  $\mathbf{W}_m$  ist sie definiert als

$$\kappa_m = \frac{\zeta_{\max}(\mathbf{W}_m)}{\zeta_{\min}(\mathbf{W}_m)}. \quad (3.37)$$

Die Konditionszahl stellt ein Maß für die Verstärkung von Fehlern in den Eingangsgrößen dar, es gilt die Abschätzung [118]

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_m\|}{\|\mathbf{a}_m\|} \leq \kappa_m \frac{\|\tilde{\mathbf{p}}_m\|}{\|\mathbf{p}_m\|}. \quad (3.38)$$

Eine Konditionszahl von  $\kappa_m = 1$  bedeutet, dass die Schwankungen der Eingangsgrößen  $\tilde{\mathbf{p}}_m$  nicht verstärkt, d.h. höchstens in gleichem Ausmaß in die Abbildungsgrößen  $\tilde{\mathbf{a}}_m$  transformiert werden. Dies stellt den Idealfall dar, in dem die Matrix  $\mathbf{W}_m$  Diagonalform besitzt. Wenn das Gleichungssystem überbestimmt ist, können die Schwankungen  $\tilde{\mathbf{a}}_m$  durch den Fehlerausgleich allerdings sogar geringer ausfallen.

#### *Relativer Gesamtfehler, modale Standardabweichung und modaler Signal-Rausch-Abstand*

Bei der Durchführung der Modenanalyse stellt sich die Frage, wie sich die Fehler der Schalldruckmessung auf die einzelnen Modenamplituden fortspflanzen. Zur Bewertung der Fehlerfortpflanzung wurde ein Verfahren entwickelt, dessen Berechnungsschritte in Abbildung 3.5 schematisch dargestellt sind:

1. Im ersten Schritt werden auf Basis des z. B. aus einer Messung bekannten Vektors von Modenamplituden  $\mathbf{a}_m^0$  mit Hilfe von Gleichung (3.27) die Azimutalmodenamplituden  $\mathbf{p}_m^0$  an den  $N_x \times N_r$  Gitterpositionen  $(x_j, r_k)$  rekonstruiert.
2. Es werden nun  $N_{avg}$  Modenanalysen mit charakteristischen Messfehlern simuliert. Dazu wird jeder rekonstruierten Azimutalmodenamplitude  $p_m^0$  in der  $i$ -ten simulierten Messung die Rauschamplitude

$$\tilde{p}_m(x_j, r_k)[i] = s_m a_{jk}[i] e^{i 2 \pi b_{jk}[i]} \quad (3.39)$$

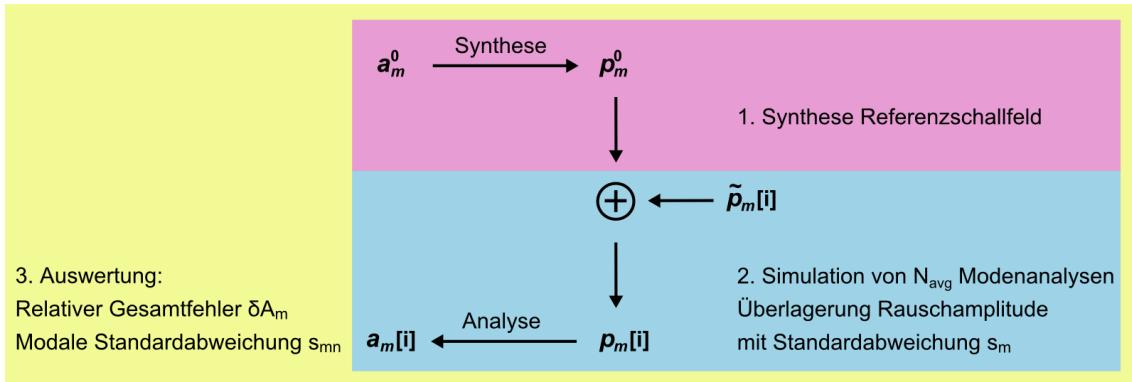


Abbildung 3.5: Simulationsschema zur Bewertung der Fortpflanzung von Messungenauigkeiten in die Modenamplituden bei der Zerlegung von Azimutalmodenamplituden.

überlagert. Die Standardabweichung der Azimutalmodenamplituden  $s_m$  wurde zuvor aus den Schalldruckmessungen ermittelt, siehe Abschnitt 3.2.2. Die Größe  $a_1[i]$  stellt eine zufällige reelle, der Standardnormalverteilung genügende Zahl und  $b_1[i]$  eine zufällige reelle, gleichmäßig im Intervall  $[0, 1]$  verteilte Zahl dar. Für jede Einzelmessung  $\mathbf{p}_m[i]$  wird der Vektor der Radialmodenamplituden  $\mathbf{a}_m[i]$  gemäß Gleichung (3.28) ermittelt.

- Nach  $N_{avg}$  simulierten Modenanalysen kann die Analysegenauigkeit auf zwei Arten quantifiziert werden:
  - als relativer Gesamtfehler  $\delta A_m$  für alle Moden und
  - in Form einer Standardabweichung  $s_{mn}^\pm$  für jede einzelne Mode.

Der relative Gesamtfehler ist definiert als

$$\delta A_m = \frac{\|\tilde{\mathbf{a}}_m\| / \|\mathbf{a}_m^0\|}{\|\tilde{\mathbf{p}}_m\| / \|\mathbf{p}_m^0\|} \quad (3.40)$$

und ermöglicht eine genauere Abschätzung des Analysefehlers als durch die Konditionszahl in Gleichung (3.38). Es gilt  $\delta A_m \leq \kappa_m$ . Zur Auswertung von Gleichung (3.40) müssen zuvor die Mittelwerte der Schwankungsterme über alle simulierten Einzelmessungen berechnet werden, d.h.

$$\overline{\|\tilde{\mathbf{p}}_m\|} = \frac{1}{N_{avg}} \sum_{i=0}^{N_{avg}-1} \sqrt{\sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_r-1} |\mathbf{p}_m(x_j, r_k)[i] - \mathbf{p}_m^0(x_j, r_k)|^2} \quad (3.41)$$

und

$$\overline{\|\tilde{\mathbf{a}}_m\|} = \frac{1}{N_{avg}} \sum_{i=0}^{N_{avg}-1} \sqrt{\sum_{n=0}^{N_n} |A_{mn}^\pm[i] - A_{mn}^{\pm o}|^2}. \quad (3.42)$$

Schließlich lässt sich aus den simulierten Messungen die Standardabweichung jeder Modenamplitude bestimmen:

$$s_{mn}^\pm = \sqrt{\frac{1}{N_{avg}-1} \sum_{i=0}^{N_{avg}-1} |A_{mn}^\pm[i] - A_{mn}^{\pm o}|^2}. \quad (3.43)$$

Dies ermöglicht die Angabe eines modalen Signal-Rausch-Abstands:

$$(\text{SNR})_{mn}^{\pm} = 20 \log \left( \frac{|A_{mn}^{\pm(o)}|}{s_{mn}} \right). \quad (3.44)$$

Für die modale Schallleistung kann mithilfe einer Fehlerfortpflanzungsrechnung eine als  $S_{mn}^{\pm}$  bezeichnete Standardabweichung berechnet werden. Wie in Abschnitt C ausgeführt ist, ergibt sich diese zu

$$S_{mn}^{\pm} = \frac{\pi R^2 \alpha_{mn} (1 - M_x^2)^2}{\rho c (1 \mp \alpha_{mn} M_x)^2} (2|A_{mn}^{\pm}|s_{mn}^{\pm} + (s_{mn}^{\pm})^2). \quad (3.45)$$

#### *Differenz zwischen gemessenem und rekonstruiertem Schallfeld*

Mit dem zuvor beschriebenen Verfahren wird der Einfluss der gewählten Messpositionen auf die numerische Stabilität der Analyse beurteilt. Systematische Fehler, die z. B. auf den eingangs erwähnten Unzulänglichkeiten der Modellgleichungen beruhen, werden in dieser Beurteilung nicht erfasst. Die Relevanz systematischer Fehler kann durch Berechnung der Differenz zwischen dem gemessenen Schallfeld und den aus dem Modenamplituden rekonstruierten Schallfeld einschätzen:

$$\|\Delta p_m\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_r-1} |p_m(x_j, r_k) - p_m^{rek}(x_j, r_k)|^2 / \|p_m\|^2}. \quad (3.46)$$

Die rekonstruierten Azimutalmodenamplituden  $p_m^{rek}$  werden durch Einsetzen des Vektors  $a_m$  in Gleichung (3.27) berechnet.

### 3.4 RADIALMODENANALYSE AUF BASIS EINES BEAMFORMING-ALGORITHMUS

In der Literaturübersicht in Abschnitt 1.2.1 wurde auf alternative Verfahren zur Radialmodenzerlegung mittels einer Fouriertransformation des gemessenen Schalldruckfeldes in axialer Richtung hingewiesen. Der Nachteil solch einer axialen Wellenzahlanalyse besteht – im Vergleich zur Frequenzanalyse im Zeitbereich – in der vergleichsweise geringen Auflösung aufgrund der beschränkten Anzahl von Messstellen. Hinzu kommt, dass das Spektrum der axialen Wellenzahlen nicht-äquidistant ist und es bei der Fourieranalyse zu Leckeffekten kommt. Insbesondere bei hohen Frequenzen lassen sich die Beiträge einzelner Moden mit diesem Ansatz nur sehr schlecht separieren. Der Grund dieses Verfahren hier trotzdem darzustellen besteht darin, dass die Radialmodenanalyse eine axiale Wellenzahlanalyse impliziert. Die im Folgenden dargestellten Betrachtungen sind in Kapitel 4 bei der Analyse von Ursachen schlechter Modellmatrix-Konditionen hilfreich.

Das Beamforming-Verfahren beruht auf dem Prinzip akustischer Richtantennen, in dem ein Array von Mikrofonen dazu benutzt wird, Wellen verschiedener Laufrichtungen voneinander zu unterscheiden. In der Übertragung der Anwendung vom Freifeld auf den Strömungskanal beziehen sich einige Autoren auf den axialen Ausbreitungswinkel [61, 62]. Dieser ist anschaulicher als die axiale Wellenzahl und liefert zudem eine grobe Abschätzung des Abstrahlwinkels vom Kanal ins Freie. Die axiale Wellenzahl  $k_{mn}^{\pm}$

kann durch Umformung von Gleichung (2.37) wie folgt als Funktion des Ausbreitungswinkels  $\theta_{mn}^\pm$  geschrieben werden:

$$k_{mn}^\pm = kb(\theta_{mn}^\pm) \quad \text{mit} \quad b(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{1 + M_x \cos(\theta)}. \quad (3.47)$$

Die Modenentwicklung des Schallfelds aus Gleichung (2.19) wird damit zu

$$p(x, r, \phi) = \sum_m \sum_n \left( A_{mn}^+ e^{ikb(\theta_{mn}^+)x} + A_{mn}^- e^{ikb(\theta_{mn}^-)x} \right) f_{mn}(r) e^{im\phi}. \quad (3.48)$$

Für eine Fourierzerlegung des vom axialen Ausbreitungswinkel abhängigen Schallfelds werden nun Schalldruckmessungen an  $N_x$  gleichmäßig angeordneten axialen Positionen  $x_j = x_0 + j\Delta x$  ( $j = 0, \dots, N_x - 1$ ) vorausgesetzt. Zur Vermeidung einer Unterabtastung ist der Sensorabstand  $\Delta x$  entsprechend der Nyquistbedingung zu wählen, welche mit der größten auftretenden axialen Wellenzahl und damit mit der stromauf laufenden Mode  $(0, 0)$  verknüpft ist:

$$\Delta x < \Delta x_{Ny} = \frac{\pi}{k_{max}} = \frac{\pi}{k_{0,0}^-} = \frac{\pi}{k} (1 - M_x). \quad (3.49)$$

Die Schalldruckamplitude einer Mode, die im Beobachtungswinkel  $\theta_w$  auf das Sensorarray an der Kanalwand  $r = R$  und der Umfangsposition  $\phi$  auftritt, kann dann geschätzt werden durch

$$\hat{p}(\theta_w, \phi) = \frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} p(x_j, R, \phi) \cdot e^{-ikb(\theta_w)(x_0 + j\Delta x)} \quad (3.50)$$

Diese Formel wird als Arrayantwortfunktion bezeichnet. Im weiteren werden nur noch Beobachtungswinkel von stromauf laufenden Moden betrachtet, z. B. zur Modenanalyse im Eintritt einer Strömungsmaschine. Außerdem wird ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit die Referenzmessposition auf  $x_0 = 0$  gesetzt. Einsetzen von Gleichung (3.48) in Gleichung (3.50) liefert

$$\hat{p}(\theta_w, \phi) = \sum_m \sum_n A_{mn}^- f_{mn}(R) e^{im\phi} \underbrace{\frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} e^{ik(b(\theta_{mn}^-) - b(\theta_w))j\Delta x}}_{H(\theta_{mn}^- | \theta_w)}. \quad (3.51)$$

An dieser Stelle wurde die so genannte *Richtungsfunktion*  $H(\theta_{mn}^- | \theta_w)$  eingeführt. Wie z. B. auf Seite 369f. in Referenz [89] ausgeführt wird, lässt sie sich unter Verwendung der Summenformel für geometrische Reihen umformen:

$$H(\theta_{mn}^- | \theta_w) = H(\Delta b) = \frac{1}{N_x} \frac{\sin\left(\frac{N_x}{2}\Delta b\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta b\right)} e^{i\Delta b(N_x-1)/2}. \quad (3.52)$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$\Delta b = k\Delta x (b(\theta_{mn}^\pm) - b(\theta_w)) \quad (3.53)$$

verwendet. Die Güte der Modenanalyse hängt entscheidend vom Verlauf der Richtungsfunktion ab. Im Idealfall müsste für die Separation der Mode  $(m, n)$  gelten

$$|H(\theta_{mn}^- | \theta_w)| = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \theta_w = \theta_{mn}^-, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

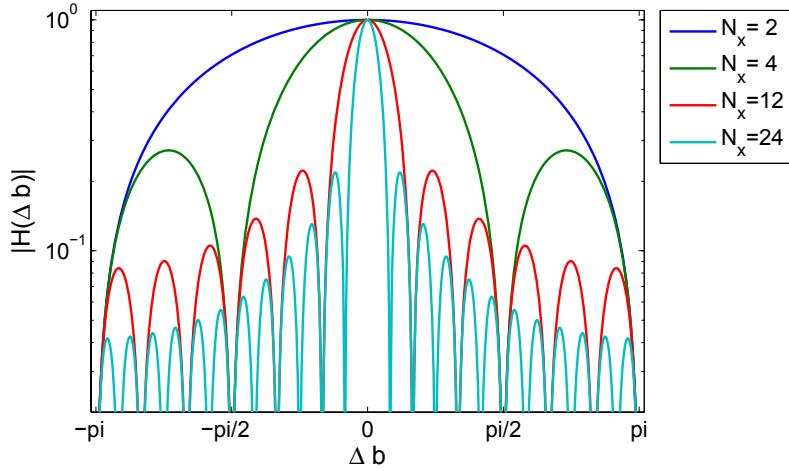


Abbildung 3.6: Beamforming-Richtungsfunktion eines axialen Arrays an der Kanalwand für vier verschiedene Sensoranzahlen  $N_x$ .

Tatsächlich hat die Richtungsfunktion jedoch die in Abbildung 3.6 dargestellte Form. Sie besitzt Hauptkeulen an den Stellen  $\Delta b = z 2\pi$  mit  $z \in \mathbb{Z}$  und pro Periode zu jeder Seite  $N_x/2 - 1$  Nebenkeulen. Die Größe  $\Delta b$  in Gleichung (3.53) spiegelt die Differenz zwischen dem Beobachtungswinkel und dem Modenausbreitungswinkel wieder. Sollen in der Arrayantwortfunktion (3.50) die Beiträge von zwei Moden getrennt werden, deren Ausbreitungswinkel dicht benachbart sind, so muss die Hauptkeule der Richtungsfunktion möglichst schmal sein. Dies kann, wie Abbildung 3.6 zeigt, durch eine möglichst hohe Anzahl von Messpositionen erreicht werden. Grundsätzlich gilt, dass Arrays endlicher Länge eine Hauptkeule endlicher Breite besitzen [57]. Die Breiten der abgebildeten Hauptkeulen  $\Delta b_w$  sind in Tabelle 3.1 gegenübergestellt. Zur Charakterisierung der Keulenbreite wurde die übliche Definition herangezogen: Die Keulenbreite entspricht dem Winkelbereich, innerhalb dessen die Amplitude relativ zum Maximum und zu jeder Seite um 3dB abfällt.

Eine weitere wichtige Größe stellt die Dynamik der Richtungsfunktion dar. Definiert man diese als das Amplitudenverhältnis des Hauptmaximum zum erstem Nebenmaximum, d. h.  $\Delta H = H(0)/H(3\pi/N_x)$ , dann ergeben sich für Arrays mit  $N_x = 4, 12$  und  $24$  Sensoren die in Tabelle 3.1 angegebenen Dynamiken (für das aus zwei Sensoren bestehende Array lässt sich keine Dynamik spezifizieren). Die Dynamik ist in allen Fällen recht begrenzt, eine Verdopplung der Sensorzahl von  $12$  auf  $24$  führt offenbar zu keiner signifikanten Verbesserung. Bezieht man die Dynamik hingegen auf den Verlauf der

$N_x$	$\Delta b_w$	$ \Delta H  [\text{dB}]$
2	$\pi$	–
4	1.43	11.4
12	0.465	13.2
24	0.232	13.4

Tabelle 3.1: Hauptkeulenbreite  $\Delta b_w$  und Dynamik  $\Delta H$  der Richtungsfunktion  $H(\Delta b)$ .

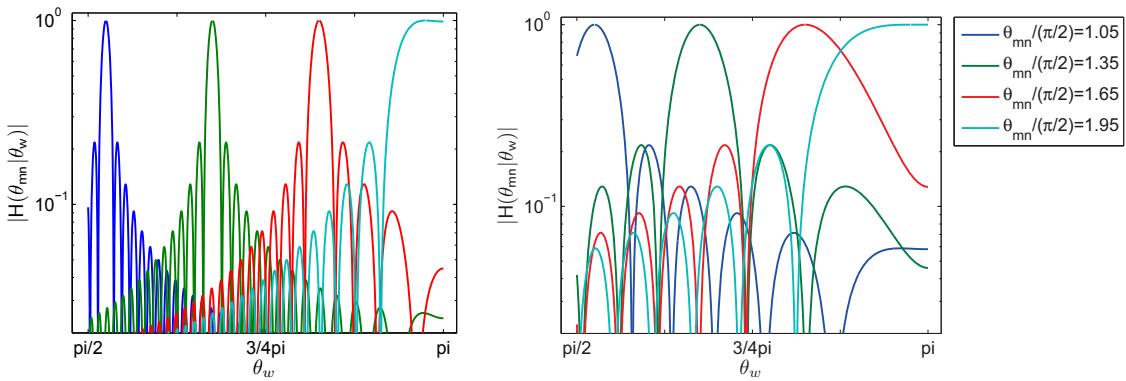


Abbildung 3.7: Richtcharakteristik eines aus  $N_x = 60$  Positionen bestehenden axialen Sensorarrays für vier verschiedene modale Ausbreitungswinkel  $\theta_{mn}$  im Fall ohne Strömung. Im linken Diagramm beträgt der axiale Sensorabstand  $\Delta x = 0.95\Delta x_{Nyq}$ , im rechten Diagramm ist der axiale Sensorabstand  $\Delta x = 0.2\Delta x_{Nyq}$ .

Einhüllenden in Abhängigkeit der Winkeldifferenz  $\Delta b$ , dann nimmt diese mit zunehmender Sensorzahl in stärkerem Maße ab.

Die Richtcharakteristik eines Sensorarrays variiert aufgrund der cos-Abhängigkeit in Gleichung (3.47) empfindlich mit dem modalen Ausbreitungswinkel. Dies ist in Abbildung 3.7 für vier Moden und ein Array mit  $N_x = 60$  Sensoren illustriert. Moden relativ steiler Ausbreitungswinkel  $\pi/2 \leq \theta_{mn} \leq 3/4\pi$  lassen sich demnach besser voneinander trennen als Moden mit flachen Ausbreitungswinkel. Unglücklicherweise flacht der Ausbreitungswinkel einer Mode mit zunehmender Frequenz recht schnell ab, so dass gerade in diesem ungünstigen Bereich die Ausbreitungswinkel von Moden niedriger radikal Ordnungen dicht zusammen rücken. Dies kann leicht anhand von Abbildung 2.9 in Kombination mit Gleichung (2.37) nachvollzogen werden, die sich im Fall ohne Strömung auf  $\cos(\theta_{mn}) = \pm \alpha_{mn}$  reduziert.

Eine zusätzliche Schwierigkeit tritt dann auf, wenn die zu analysierende Frequenz und die axiale Staffelung der Sensoren nicht gut aufeinander abgestimmt sind. Im bereits diskutierten Fall ist die Abstimmung nahezu optimal: bezogen auf die Analysefrequenz  $k$  beträgt der axiale Abstand  $\Delta x = 0.95\Delta x_{Nyq}$ . Wird dagegen ein kleinerer Abstand gewählt, dann werden die Keulen deutlich breiter. Dies verdeutlicht das rechte Diagramm der Abbildung 3.7. Es zeigt die modalen Richtcharakteristiken derselben Moden für ein Array mit den axialen Sensorabständen  $\Delta x = 0.2\Delta x_{Nyq}$ . Bezogen auf die Richtungsfunktion wirkt sich das Produkt  $k\Delta x$  in Gleichung (3.53) als Skalierungsfaktor aus. Für den Fall, dass eine Modenanalyse über einen größeren Frequenzbereich durchgeführt werden soll, wäre eine Schachtelung von Arrays unterschiedlicher Sensorabstände von Vorteil.



# 4

---

## OPTIMIERUNG VON SENSORARRAYS FÜR DIE INVERSE RADIALMODENANALYSE

---

In diesem Kapitel wird eine Vorgehensweise zur Optimierung von Sensorarrays für das inverse Radialmodenanalyseverfahren vorgestellt und auf vier für die praktische Anwendung relevante Messanordnungen angewendet: Radiale Sensorrechen, mit denen das Schallfeld im Kanalinneren abgetastet wird und axiale Sensorarrays, die zur Abtastung des Schallfelds an der Kanalwand verwendet werden können. Für einen möglichst universellen Vergleich wird eine vom Nabenvorhältnis und der Strömungsgeschwindigkeit unabhängige Darstellung gewählt. Die Optimierungen sind für alle drei in Abschnitt 3.3 beschriebenen Ansätze gültig.

Die Abhängigkeiten der Kondition der Modellmatrix von den axialen Positionen der Sensorarrays und Ursachen schlechter Matrixkonditionen werden in Abschnitt 4.1 eingehend untersucht. In Abschnitt 4.2 werden bei gleicher Anzahl von Sensorpositionen für jedes Array der optimale axiale Sensorabstand und die höchste analysierbare Frequenz abgeleitet. Gegenstand von Abschnitt 4.3 ist die Auswertung und Gegenüberstellung der Analysegenauigkeiten, mit der sich einzelne Moden durch die verschiedenen Sensorarrays bestimmen lassen. Abschnitt 4.4 beschäftigt sich mit der Frage, wie viele axiale Messpositionen die Sensorarrays für die Modenanalyse bei einer bestimmten Frequenz mit vorgegebener Genauigkeit benötigen und welche axiale Ausdehnung des Arrays damit verbunden ist.

### 4.1 KONDITIONSANALYSE DER MODELLMATRIX

Zur Untersuchung von inversen Problemstellungen hat sich die Methode der Konditionsanalyse in den letzten Jahren als nützlich erwiesen [19, 98, 99, 138]. Im vorliegenden Fall hängt die Kondition der Modenanalyse-Modellmatrix  $\mathbf{W}$  bzw.  $\mathbf{W}_m$  grundsätzlich von einer großen Anzahl von Parametern ab: der Frequenz, den ausbreitungsfähigen azimutalen und radialen Modenordnungen, dem Nabenvorhältnis, den Gleichströmungsgrößen und den axialen und radialen Sensorpositionen. Eine auf den gesamten Paramterraum ausgedehnte systematische Studie ist jedoch nicht erforderlich. Die in den Kapiteln 2 und 3 angestellten Überlegungen erlauben eine Einschränkung der Untersuchungen auf die Modenordnung  $m=0$ . Die Ordnung  $m=0$  setzt sich – abgesehen vom Fall extremer drallbehafteter Strömung – aus der höchsten Anzahl ausbreitungsfähiger radialer Ordnungen mit den höchsten axialen Wellenzahlen zusammen und ist damit bezüglich der Anforderungen an die Modenanalyse maßgebend. Des Weiteren sind die für die Ordnung  $m=0$  berechneten Ergebnisse weitgehend vom Nabenvorhältnis unabhängig gültig.

#### 4.1.1 Untersuchter Parameterbereich

Für alle Untersuchungen in diesem Kapitel wird angenommen, dass die stationäre Strömung drallfrei und der Einfluss eines radialen Strömungsprofils auf die Modenformen vernachlässigbar ist. Der konvektive Einfluss der axialen Strömungskomponente kann durch Anwendung der Prandtl-Glauert-Transformation eliminiert werden:

$$\begin{aligned} x &= \beta x', \\ k &= \beta k'. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hierin bezeichnet  $\beta = \sqrt{1 - M_x^2}$  den Dopplerfaktor und sind die transformierten Größen durch den Strich gekennzeichnet. Die Notation wird gegebenenfalls auf alle abhängigen Größen übertragen, z. B. auf den Ausbreitungsfaktor:

$$\alpha'_{mn} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{mn}^2}{(k'R)^2}}. \quad (4.2)$$

Eine speziell für die Modenordnung  $m=0$  gültige, vom Nabenvorhältnis nahezu unabhängige Darstellung der axialen Koordinate und der Wellenzahl wird durch folgende Normierung ermöglicht:

$$x'' = \frac{x'}{1-\eta} = \frac{x}{\beta(1-\eta)}, \quad (4.3)$$

$$k'' = (1-\eta) k' = \frac{(1-\eta)}{\beta} k. \quad (4.4)$$

Diese Definition geht auf die Abschätzung in Gleichung (2.44) zurück. Entsprechend der Diskussion von Abschnitt 2.4.2 sind alle in den folgenden Abschnitten für die doppelt gestrichenen Größen  $x''$  und  $k''$  dargestellten Berechnungen für das Nabenvorhältnis  $\eta = 0.75$  durchgeführt worden.

Die Anzahl kombinierter axialer und radialem Positionen wurde für alle Sensoranordnungen A-I bis A-IV willkürlich auf 24 festgelegt. Theoretisch lassen sich hiermit je bis zu zwölf stromab und stromauf laufende radiale Modenordnungen analysieren. Alle

$\eta$	0	0.75
$(k''R)_{0,12}$	37.7	37.7
$(k'R)_{0,12}$	38.5*	150.8
$(kR)_{0,12}$	36.7*	143.9
$f_{0,12}$ [Hz]	4010*	15714
$\max(m)$	35	146
$\max(n)$	12	12
$N_{mod}$	786	5196

Tabelle 4.1: Kenngrößen der Modenfelder in Strömungskanälen mit den Nabenvorhältnissen  $\eta = 0$  und  $\eta = 0.75$ , jeweils Außenradius  $R = 0.5$  m, Machzahl  $M_x = 0.3$  und Temperatur  $T = 20^\circ$  C bei einer Referenzfrequenz von  $k''R = (k''R)_{0,12} = 37.7$  (\* exakte Werte).

Berechnungen wurden folglich in einem Frequenzbereich durchgeführt, der nach oben durch die Cut-on-Frequenz der Mode  $(0,12)$  begrenzt wird:  $0 \leq k''R < (k''R)_{0,12} = 37.7$ . Tabelle 4.1 gibt einen Eindruck der sehr unterschiedlichen Parameterbereiche, die durch die Normierung bezüglich des Nabenvorhältnis in einer Darstellung zusammengefasst werden konnten.

In allen Betrachtungen wird ein ausreichend großer Abstand der Sensorarrays zu den Schallquellen angenommen, so dass nicht-ausbreitungsfähige Moden in der Analyse nicht berücksichtigt werden müssen. Weiterhin seien die Sensoren punktförmig, d.h. die Abmessungen der Sensormembran sind vernachlässigbar klein gegenüber den Wellenlängen in den drei Koordinatenrichtungen.

#### 4.1.2 Ursachen schlechter Kondition

In Abbildung 4.1 ist die Konditionszahl der Modellmatrix  $\mathbf{W}_o$  für die Sensoranordnungen A-I und A-IV dargestellt. Die Eigenschaften der Sensoranordnungen A-II und A-III werden durch diese beiden Arrays eingegrenzt und erst in Abschnitt 4.2 genauer betrachtet. Die Konditionszahl ist in logarithmischer Skala und farblicher Kodierung als Funktion der skalierten dimensionslosen Frequenz  $k''R$  und des skalierten dimensionslosen axialen Sensorabstands  $\Delta x''/R$  aufgetragen.

Im Allgemeinen kann festgestellt werden, dass die Kondition der Matrix empfindlich mit der Frequenz und mit dem axialen Sensorabstand variiert. Für eine Analyse bei niedrigen Frequenzen scheint ein größerer Sensorabstand vorteilhaft zu sein. Das Gleiche gilt für Analysen nahe der Cut-on-Frequenzen. Mit zunehmender Frequenz verringert sich der günstigste axiale Sensorabstand. Auffällig ist der starke Anstieg der Matrixkondition des wandbündigen axialen Sensorarray A-IV im mittleren Frequenzbereich. Im höheren Frequenzbereich gibt es nur noch begrenzte Intervalle niedriger Kondition in Zusammenhang mit größeren Sensorabständen. Insgesamt stellt sich im relativen Vergleich die Kondition der Anordnung A-I günstiger als die Kondition der Anordnung A-IV dar. Die Ursachen für eine schlechte Matrixkondition werden nun im Detail untersucht.

Für eine vertiefte Analyse wird die Modellmatrix  $\mathbf{W}_m$  in mehrere Matrizen zerlegt. Die detaillierte Zerlegung ist in Anhang D ausgeführt. Maßgeblich für die Kondition ist die Matrix  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}$ , die sich in vier quadratische Matrizen unterteilen lässt:

$$\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}^{(1)} & | & \hat{\mathbf{Y}}^{(2)} \\ - & - & + & - & - & - \\ \hat{\mathbf{Y}}^{(3)} & | & \hat{\mathbf{Y}}^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Jedes Element  $\hat{Y}_{vw}^{(i)}$  dieser Matrizen bildet – paarweise für die radialen Ordnungen  $v$  und  $w$  – Wellenzahlanalysen in radialer und axialer Richtung ab, und zwar in folgender Weise<sup>1</sup>:

$$\hat{Y}_{vw}^{(i)} = C_{vw} D_{vw}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (4.6)$$

mit

$$C_{vw} = \sum_{k=0}^{N_r-1} f_{mv}(r_k) f_{mw}(r_k) \quad (4.7)$$

<sup>1</sup> Die folgenden Formeln gelten für alle azimutalen Ordnungen.

und

$$D_{vw}^{(1)} = \left( D_{vw}^{(4)} \right)^* = \sum_{j=0}^{N_x-1} e^{-i(\alpha''_{mw} - \alpha''_{mv})k''j\Delta x''}, \quad (4.8)$$

$$D_{vw}^{(2)} = \left( D_{vw}^{(3)} \right)^* = \sum_{j=0}^{N_x-1} e^{-i(\alpha''_{mw} + \alpha''_{mv})k''j\Delta x''}, \quad (4.9)$$

wobei jeweils  $0 \leq v < N_n$  und  $0 \leq w < N_n$ .

Die Summe  $C_{vw}$  stellt die diskrete Formulierung der radialen Orthogonalitätsrelation (2.31) dar. Im Idealfall, wenn die Anzahl radialer Messpositionen mindestens so groß wie die Anzahl ausbreitungsfähiger radialer Ordnungen ist, d.h.  $N_r \geq N_n$ , werden mit dem Array die Anteile der verschiedenen radialen Eigenschwingungen vollständig voneinander getrennt. Dann gilt unabhängig von der Frequenz für die Hauptdiagonalelemente  $|C_{vv}| \gg 0$  und alle sonstigen Elemente mit  $v \neq w$  sind ungefähr Null. Dies wirkt sich günstig auf die Kondition der Modellmatrix aus.

Jedes Element  $D_{vw}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) stellt eine axiale Wellenzahlanalyse dar, wie sie in ähnlicher Weise für das Beamformingverfahren in Abschnitt 3.4 beschrieben wurde. Unter Verwendung der Abkürzung  $\Delta b = (\alpha''_{mw} \pm \alpha''_{mv}) k'' \Delta x''$  können die Ausdrücke direkt in Gleichung (3.52) überführt werden. Im übertragenen Sinne drückt jedes Element  $D_{vw}^{(i)}$  über die entsprechende modifizierte Funktion  $H(\alpha''_{mv} | \alpha''_{mw})$  die Fähigkeit des Sensorarrays aus, zwei Moden der Ordnungen  $(m, v)$  und  $(m, w)$  durch Messung an den gegebenen axialen Positionen voneinander zu trennen. Die Elemente  $D_{vw}^{(1)}$  und  $D_{vw}^{(4)}$  betreffen dabei Moden gleicher Laufrichtung und die Elemente  $D_{vw}^{(2)}$  und  $D_{vw}^{(3)}$  Moden entgegengesetzter Laufrichtung. Die Güte der Trennung hängt von der Keulenbreite  $\Delta b_w$  ab, welche in Tabelle 3.1 für die vier betrachteten Sensoranordnungen angegeben ist. Im Sinne einer niedrigen Konditionszahl müssen alle Elemente  $D_{vw}^{(i)}$  – mit Ausnahme der Hauptdiagonalelemente  $D_{vv}^{(1)}$  und  $D_{vv}^{(4)}$  – möglichst klein sein. Dies ist dann der Fall, wenn folgende Bedingungen für alle möglichen Parameterkombinationen erfüllt sind:

$$|(\alpha''_{mw} - \alpha''_{mv}) k'' \Delta x'' - z \cdot 2\pi| > \epsilon \quad (4.10)$$

und

$$|(\alpha''_{mw} + \alpha''_{mv}) k'' \Delta x'' - z \cdot 2\pi| > \epsilon, \quad (4.11)$$

wobei  $z \in \mathbb{Z}$  eine beliebige ganze Zahl ist. Der Parameter  $\epsilon$  gibt einen Unschärfebereich an, der in Zusammenhang mit der Keulenbreite der Richtungsfunktion steht, d.h. es gilt  $\epsilon \propto \Delta b_w$ . Prinzipiell können drei Konstellationen auftreten in denen eine oder beide Bedingungen verletzt werden. Diese werden im Folgenden anhand der beiden Sensorarrays A-I und A-IV diskutiert.

#### 4.1.3 Anordnung mit zwei radialen Sensorrechen (Anordnung A-I)

Sensoranordnung A-I besitzt mit  $N_r = 12$  radialen Positionen ausreichend Stützstellen für eine vollständige Zerlegung in die radialen Modenordnungen. Alle Nebendiagonalelemente der Matrizen  $Y_{vw}^{(1)}$  bis  $Y_{vw}^{(4)}$  sind Gleichung (4.7) zufolge näherungsweise Null.

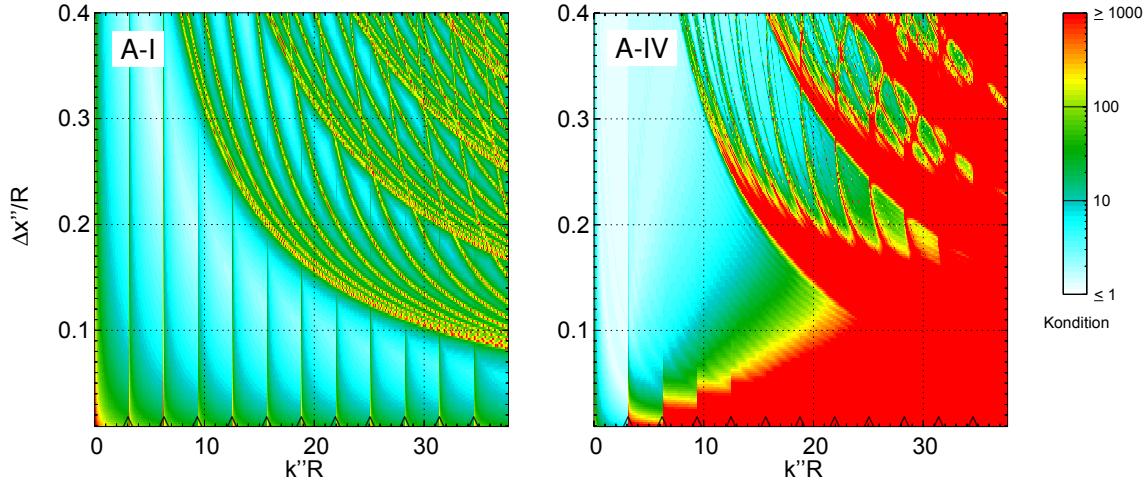


Abbildung 4.1: Kondition der Modellmatrix  $\mathbf{W}_m$  für die Analyse der Ordnung  $m=0$  mit Sensorarray A-I und A-IV. Die Cut-on-Frequenzen der Ordnungen  $n=1$  bis  $n=11$  sind durch das Symbol  $\Delta$  gekennzeichnet.

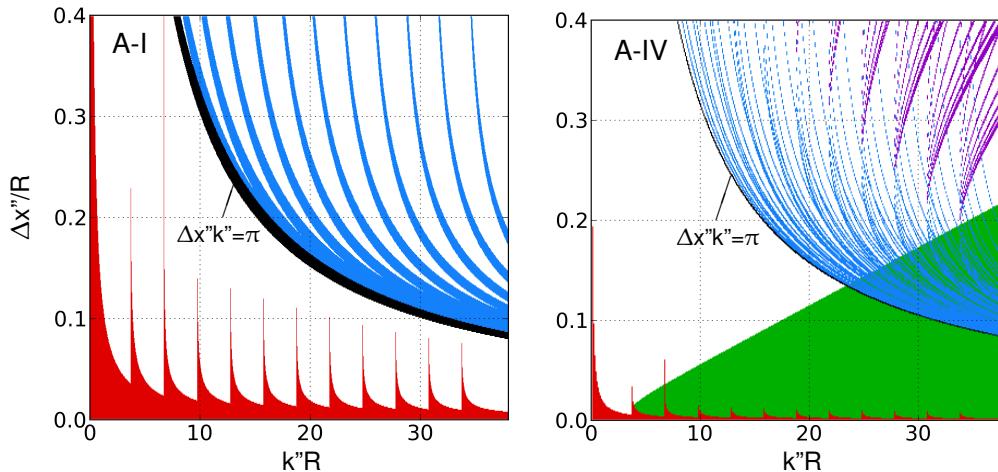


Abbildung 4.2: Farblich markiert sind mithilfe der Gleichungen (4.10) und (4.11) identifizierte Bereiche, in denen die Trennschärfe der Arrays unzureichend bezüglich der paarweisen Separation von Moden der Ordnung  $m=0$  und ungleichen axialen Laufrichtungen (rot, blau) bzw. gleichen axialen Laufrichtungen (grün, violett) ist.

Es verbleibt die Aufgabe die verschiedenen Ausbreitungsrichtungen zu trennen. Hierbei kommt es auf die Hauptdiagonalelemente  $D_{vw}^{(i)}$  der Matrizen  $Y_{vw}^{(2)}$  bis  $Y_{vw}^{(3)}$  an. Für eine gute Separation muss Gleichung (4.11) paarweise für alle hin- und rücklaufenden Moden der *gleichen* Ordnung erfüllt sein. Das linke Diagramm in Abbildung 4.2 zeigt Kombinationen von  $k''$  und  $\Delta x''$ , für die dies nicht zutrifft. Der Unschärfeparameter entspricht in dieser Darstellung einem Zwölftel der Keulenbreite der Richtungsfunktion, d. h.  $\epsilon = \Delta b_w / 12 = 0.26$ .

Rot gefärbt sind die Bereiche, in denen Gleichung (4.11) für  $z=0$  nicht erfüllt ist. Dies ist insbesondere an der Cut-on-Grenze einer Mode der Fall. Anschaulich gesehen besteht das Problem in dem sehr kleinen Ausbreitungsfaktor  $\alpha_{ov}'' \approx 0$  und der damit verbundenen sehr geringen Phasenänderung der hin- und zurücklaufenden Moden. Diese kann durch die beiden im Abstand  $\Delta x$  angeordneten Messebenen nicht detektiert werden.

Blau gekennzeichnet sind Kurvenscharen, für die Gleichung (4.11) mit  $z=1$  nicht erfüllt sind. Die Kurvenscharen beschreiben für die zugehörigen Modenordnungen eine räumliche Fehlabtastung in dem Sinne, dass bezogen auf die modale Wellenlänge die Abstastpunkte gerade ungefähr im Periodenabstand  $\pi$  angeordnet sind. In Abbildung 4.2 ist die zu den hin- und zurücklaufenden Moden der Ordnung  $(0,0)$  gehörige Kurve in schwarzer Farbe hervorgehoben. Die Kurve definiert eine frequenzabhängige Schranke für den axialen Sensorabstand. Mit  $\alpha''_{00} \equiv 1$  kann der kritische Sensorabstand wie folgt eingegrenzt werden:

$$\frac{\pi - \frac{\epsilon}{2}}{k''} \leq \Delta x''_{\text{krit}} \leq \frac{\pi + \frac{\epsilon}{2}}{k''}. \quad (4.12)$$

Für  $\epsilon = 0$  ergibt sich hieraus

$$\Delta x''_{\text{krit}} = \frac{\pi}{k''} \quad \text{bzw.} \quad \Delta x_{\text{krit}} = (1 - M_x^2) \frac{\pi}{k'}, \quad (4.13)$$

d.h. ein Kriterium, dass sich um den Faktor  $(1 + M_x)$  vom Nyquist-Kriterium (3.49) unterscheidet<sup>2</sup>.

#### 4.1.4 Sensoranordnung mit bündigen Sensoren an der Außenwand (A-IV)

Mit Sensoranordnung A-IV wird die Zerlegung in die verschiedenen radialen Komponenten ausschließlich über eine axiale Wellenzahlanalyse durchgeführt. Alle Elemente der Matrizen  $Y_{vw}^{(1)}$  bis  $Y_{vw}^{(4)}$  sind von Null verschieden, d.h. im Vergleich zu Anordnung A-I ist die Modellmatrix ganz anders aufgestellt. Die kritischen Kombinationen von  $k''$  und  $\Delta x''$ , für die sich nicht alle Modenpaare voneinander trennen lassen, sind in Abbildung 4.2 im rechten Diagramm dargestellt. Hier wurde als Unschärfe parameter  $\epsilon = \Delta b_w / 6$  gewählt.

Offensichtlich können mit Sensoranordnung A-IV Moden nahe der Cut-on-Grenze besser als mit Sensoranordnung A-I detektiert werden. Begründet ist dies in der erheblich längeren Messstrecke  $L_x = (N_x - 1)\Delta x = 23\Delta x$ , durch welche schwache Phasenänderungen besser erfasst werden können. Hervorzuheben ist der Vorteil insbesondere bei der Analyse von tiefen Frequenzen  $k''R < (k''R)_{0,1}$ , wie der Vergleich der rot eingefärbten Flächen in Abbildung 4.2 zeigt.

Die blau gekennzeichneten Kurvenscharen, welche die räumliche Fehlabtastung eines Modenpaares gleicher Ordnung aber unterschiedlicher Laufrichtung beschreiben, treten für alle Kombinationen von  $v$  und  $w$  auf, da die Nebendiagonalelemente der Modellmatrix mangels radialer Messpositionen nicht ausgeblendet werden. Die Kurven sind aufgrund der – im Vergleich zu Array A-I – bedeutend geringeren Unschärfe  $\epsilon = 0.039$  deutlich schmäler, vgl. Tabelle 3.1. Die durch die hin- und zurücklaufenden Moden der Ordnung  $n=0$  definierte Kurve ist auch hier mit schwarzer Farbe gekennzeichnet. Sie beschreibt die gleiche frequenzabhängige Schranke für den axialen Sensorabstand, wie sie mit Gleichung (4.12) bzw. (4.13) für Anordnung A-I festgestellt wurde.

<sup>2</sup> Im Gegensatz zu einer Fourieranalyse kommt es beim Inversen Modenanalyseverfahren allerdings nicht zum Aliasing-Effekt: Eine korrekte Modenanalyse lässt sich – in spezifischen Frequenzintervallen – auch mit Sensorabständen  $\Delta x > \Delta x_{\text{krit}}$  durchführen.

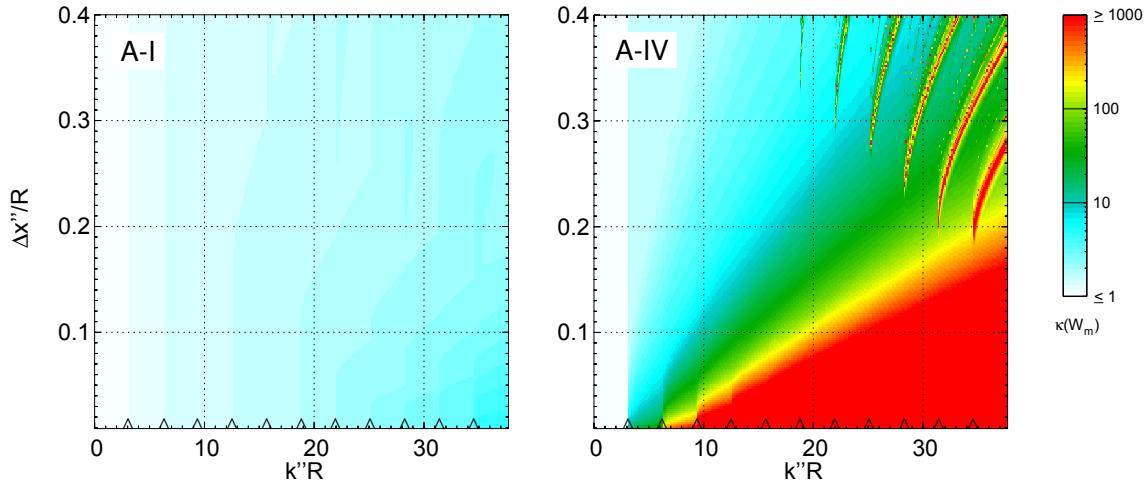


Abbildung 4.3: Kondition der Modellmatrix  $\mathbf{W}_m$  für die Analyse der Ordnung  $m=0$  mit Sensorarrays A-I und A-IV bei Vernachlässigung der reflektierten Komponenten.

Neu hinzu gekommen sind der grün eingefärbte Bereich und die violetten Kurvenscharen. Sie bringen das mangelnde Vermögen des Arrays A-IV zum Ausdruck, Moden gleicher Laufrichtung zu trennen. Abgebildet sind die Kombinationen von  $k''$  und  $\Delta x''$ , welche die Bedingung (4.10) für  $z=0$  bzw.  $z=1$  verletzen. Anschaulich gesehen liegt das Problem darin begründet, dass sich mit zunehmender Frequenz die Wellenzahlen niedriger radialer Ordnungen kaum noch voneinander unterscheiden. Das linke obere Diagramm in Abbildung 2.9 macht dies anhand der frequenzabhängigen Entwicklung der Ausbreitungsfaktoren deutlich. Die obere Abgrenzung des grünen Bereichs ist auf die kleinste Wellenzahldifferenz zurückzuführen, welche sich für das Modenpaar  $(0,0)$  und  $(0,1)$  ergibt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Modenanalyse mit Sensoranordnung A-IV hierdurch am Stärksten eingeschränkt wird. Eine zu Gleichung (4.12) analoge Abschätzung wäre wünschenswert, lässt sich aber nicht formulieren.

#### 4.1.5 Vernachlässigung von Reflexionen

Es gibt Situationen, in denen die Amplituden der reflektierten Moden vernachlässigbar klein gegenüber den Modenamplituden sind, die von der zu analysierenden Quelle abgestrahlt werden. Auf der Eintrittsseite eines Turbofans treten signifikante Reflexionen vornehmlich bei tiefen Frequenzen und in der Nähe von Cut-on-Frequenzen auf [123, 155], die durch einen akustischen Liner zusätzlich gedämpft werden. Auf der Abströmseite hängt das Ausmaß der Reflexionen von der Beschaffenheit der Einbauten im Nebenstromkanal, wie z. B. Streben, Pylonen und akustische Liner, und von der Gestaltung des Kompressors im Hauptstromkanal ab. Sofern sichergestellt ist, dass die reflektierten Anteile nicht berücksichtigt werden müssen, kann die Modellmatrix  $\mathbf{W}_m$  entsprechend verkleinert und die Analyse stabilisiert werden.

Das Ergebnis der Konditionsanalyse der reduzierten Matrix  $\mathbf{W}_m$  ist in Abbildung 4.3 dargestellt und lässt sich leicht mit Hilfe von Abbildung 4.2 nachvollziehen. Für die Kondition der Modenanalyse ist nur noch die Matrix  $\hat{\mathbf{Y}}^{(1)}$  aus Gleichung (4.6) relevant, dem entsprechend muss nur noch Bedingung (4.10) berücksichtigt werden. Diese Bedin-

gung ist für das Sensorrechen-Arrays A-I nicht relevant, so dass die Matrixkondition unabhängig vom axialen Sensorabstand im gesamten Frequenzbereich nahezu ideal ist. Prinzipiell würde sogar eine Messebene für die Modenanalyse ausreichen. Für das wandbündige Sensorarray A-IV verbleiben der in Abbildung 4.2 grün markierte Bereich und die violett markierten Kurvenscharen. Gegenüber dem Fall mit Reflexionen gibt es bei vergrößertem axialen Sensorabstand offenbar einen deutlich weiteren Frequenzbereich niedriger Kondition.

#### 4.2 BESTIMMUNG DES OPTIMALEN AXIALEN SENSORABSTANDS

Im vorherigen Abschnitt wurden die Ursachen schlechter Matrixkondition identifiziert und auf diese Weise Ansätze für eine Array-Optimierung aufgezeigt. Der optimale axiale Sensorabstand und die höchste analysierbare Frequenz könnten prinzipiell mit Hilfe der Konditionsanalyse ermittelt werden. Die erreichbare Analysegenauigkeit wird – insbesondere an der oberen Frequenzgrenze – durch die Konditionszahl jedoch nur mit unbekannter Unsicherheit abgeschätzt. Präziser ist es die Analysegenauigkeit aus simulierten Messungen mit Hilfe des in Abschnitt 3.3.6 beschriebenen Verfahrens zu bestimmen. Da die Randbedingungen der eingesetzten Sensorarrays anwendungsspezifisch sind, wird in den folgenden Betrachtungen davon ausgegangen, dass reflektierte Moden berücksichtigt werden müssen.

In Abbildung 4.4 ist der relative Gesamtfehler  $\delta A_m$  dargestellt, der sich bei der Analyse der azimutalen Ordnung  $m=0$  aufgrund von Messungenauigkeiten mit den Sensoranordnungen A-I bis A-IV ergibt. Für jede Frequenz und jeden Sensorabstand wurden  $N_{avg} = 50$  Messungen simuliert. Für jede Messung wurde ein Testschallfeld generiert, in dem die Beträge aller Modenamplituden derselben Ausbreitungsrichtung identisch sind, sich aber die Amplituden der stromab und stromauf laufenden Moden um 10 dB unterscheiden<sup>3</sup>. Die Phasen der synthetischen Modenamplituden besitzen zufällige Werte. Zur Simulation von Messfehlern wurde jeder Einzelmessung gemäß Gleichung (3.39) eine Rauschamplitude mit einem modalen Signal-Rausch-Abstand von 20 dB überlagert. Mit Blick auf die Allgemeingültigkeit muss angemerkt werden, dass die Simulationsergebnisse nahezu unabhängig von der modalen Zusammensetzung sind, solange der Signal-Rausch-Abstand keine extremen Werte annimt. Dies haben die in Anhang E zusammengefassten Untersuchungen bestätigt.

Mit Hilfe der Diagramme in Abbildung 4.4 kann für jede Sensoranordnung ein optimaler axialer Sensorabstand  $\Delta x''_{opt}$  spezifiziert werden. Die Optimierung erfolgt hier mit dem Ziel, eine Modenanalyse bei einer möglichst hohen Frequenz, in einem möglichst großen, zusammenhängenden Frequenzbereich und mit möglichst geringem Sensorabstand zu ermöglichen. In die Diagramme eingezeichnet ist die durch Gleichung (4.13) definierte Kurve  $\Delta x'' k'' = \pi$ , welche eine obere Schranke für alle Sensoranordnungen darstellt. In allen Fällen liegt der optimale Sensorabstand dicht an dieser Kurve. Die höchste analysierbare Frequenz  $\max(k'' R)$  liegt allerdings je tiefer, desto geringer das Verhältnis von radialen Messpositionen im Sensorarray zur Anzahl radialer Modenordnungen  $N_r/N_n$  ist.

---

<sup>3</sup> siehe Schallfeld A in Tabelle E.1

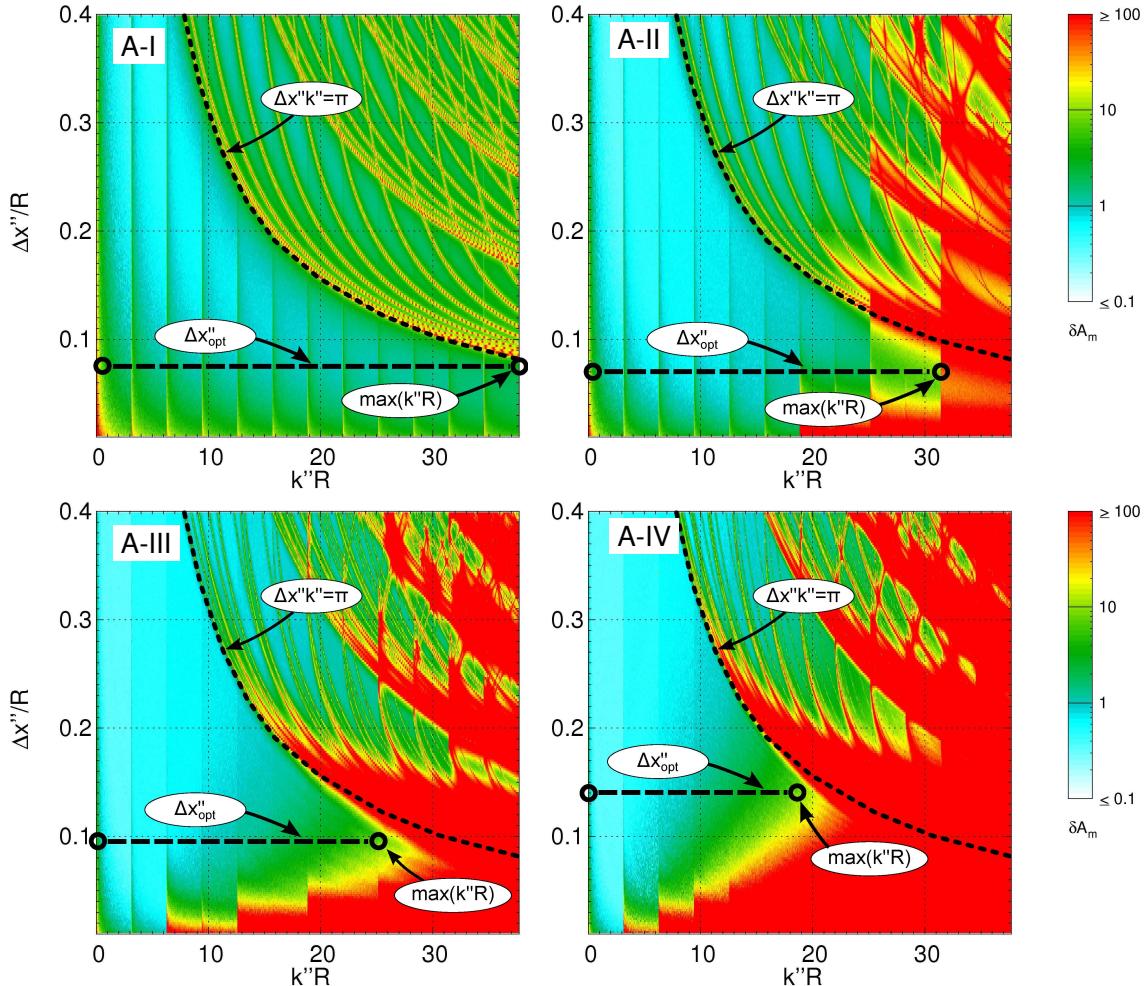


Abbildung 4.4: Relativer Gesamtfehler  $\delta A_m$  bei der Zerlegung der Mode  $m=0$  mit Sensoranordnung A-I bis A-IV in Abhängigkeit der Frequenz und des axialen Sensorabstands.

Setzt man als maximale Fehlertoleranz  $\delta A_m \leq 10$  an – dies entspricht einer pauschalen Verstärkung der Messgenauigkeiten um maximal 20 dB – dann können die in Tabelle 4.2 angegebenen Werte aus den Diagrammen der Abbildung 4.4 abgelesen werden. Zusätzlich angegeben und markiert ist die jeweils niedrigste analysierbare Frequenz  $\min(k''R)$ . Die Analysegenauigkeiten der verschiedenen optimierten Sensoranordnungen sind im rechten Diagramm von Abbildung 4.5 graphisch einander gegenübergestellt<sup>4</sup>.

Die charakteristischen Unterschiede der Sensoranordnungen sind klar erkennbar. Im Vergleich zu Sensoranordnung A-I, kann – bei gleicher Anzahl kombinierter axialer und radialer Messpositionen – mit Sensorarray A-IV nur etwa der halbe Frequenzbereich analysiert werden. Betont werden muss jedoch die deutlich geringere Empfindlichkeit der wandbündigen Sensorarrays in der Nähe der Cut-on-Grenzen, so dass diese den Anordnungen A-I und A-II im Frequenzbereich bis  $k''R = 10$  augenfällig überlegen sind. Die

<sup>4</sup> Es ist zu beachten, dass das Verhältnis von Konditionszahl und relativem Gesamtfehler nicht konstant ist, wie der Vergleich der beiden Diagramme in Abbildung 4.5 zeigt. Hierbei spielt es eine Rolle, dass bei niedrigen Frequenzen die Anzahl Moden geringer als die Anzahl Messstellen ist, so dass in der Auswertung ein besserer Fehlerausgleich als bei hohen Frequenzen stattfinden kann.

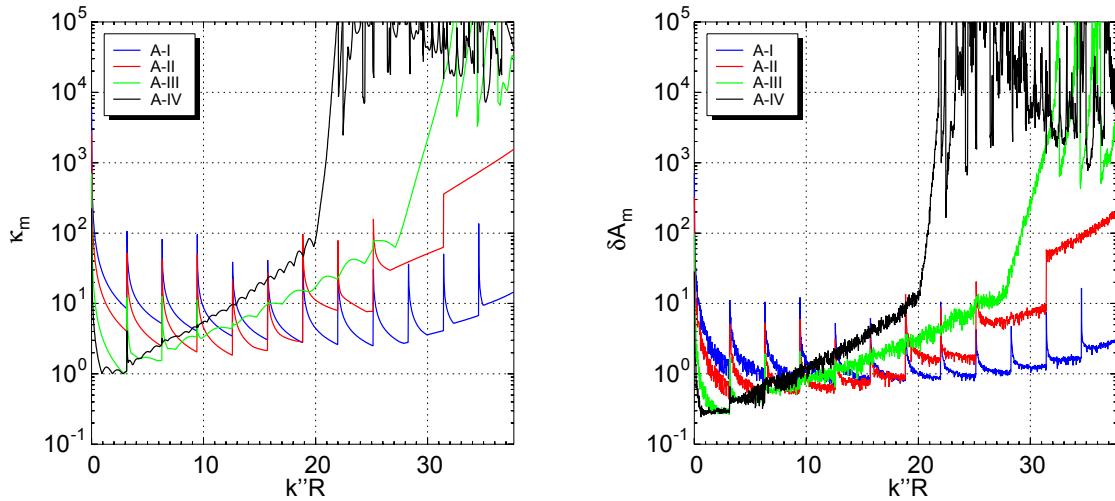


Abbildung 4.5: Kondition und relativer Gesamtfehler bei der Zerlegung der Mode  $m=0$  mit den optimierten Sensoranordnungen A-I bis A-IV.

Unterschiede im relativen Gesamtfehler betragen teilweise mehr als 20 dB. Die Tatsache, dass mit Sensorarrays A-III und A-IV genauere Messungen bei relativ tiefen Frequenzen durchgeführt werden können, stellt z. B. dann einen Vorteil dar, wenn Analysen der Schaufeltöne bei den Wellendrehzahlharmonischen durchgeführt werden sollen, wie es bei Überschallanströmung der Rotorblätter der Fall ist.

Der Vorteil radialer Messpositionen wird beim Vergleich der Anordnung A-II mit A-I deutlich: Bis zur Cut-on-Frequenz der Mode (0,6) ist die Signatur beider Arrays gleich. Aufgrund der größeren axialen Sensorarrayabmessung zeigt Array A-II bis zur Cut-on-Frequenz der Mode (0,6) sogar eine bessere Analysegenauigkeit. Oberhalb dieser Frequenz ändert sich das Verhältnis der Anzahl radialer Messpositionen zur Anzahl Radialmoden jedoch zu  $N_r/N_n < 1$  und der Messfehler steigt sprunghaft an.

	A-I	A-II	A-III	A-IV
$\Delta x''_{\text{opt}}/R$	0.075	0.07	0.095	0.14
$\min(k''R)$	0.417	0.234	0.050	0.028
$\max(k''R)$	37.7	31.4	25.0	18.8
$\eta = 0$				
$\Delta x'_{\text{opt}}/R$	0.075	0.07	0.095	0.14
$\min(k'R)$	0.417	0.234	0.050	0.028
$\max(k'R)$	37.7	31.4	25.0	18.8
$\eta = 0.75$				
$\Delta x'_{\text{opt}}/R$	0.0188	0.0175	0.0238	0.0350
$\min(k'R)$	1.7	0.9	0.2	0.1
$\max(k'R)$	150.8	125.6	100.0	75.2

Tabelle 4.2: Optimaler axialer Sensorabstand sowie untere und obere Grenzen der Frequenzbereiche, die mit 24 kombinierten axialen und radialen Positionen in den Sensoranordnungen A-I bis A-IV analysiert werden können.

Als praktischer Nachteil erweist sich für kleine Nabenverhältnisse der vergleichsweise große axiale Sensorabstand der Anordnung A-IV: Für einen Kanal ohne Nabenkörper beträgt die Gesamtlänge des Arrays  $L_{x'} = (N_x - 1)\Delta x'_{opt}$  etwa drei Kanalradien. In Kanälen mit Nabenkörper ist die Array-Gesamtlänge allerdings deutlich kleiner und kann bei Einsatz von Sensoren auf dem Nabenkörper noch einmal mehr als halbiert werden.

#### 4.3 BEWERTUNG DER ANALYSEGENAUIGKEIT

Nachdem die Sensoranordnungen für einen Analyse der azimutalen Ordnung  $m=0$  optimiert wurden, stellt sich die Frage nach dem relativen Gesamtfehler bei der Analyse höherer azimutaler Ordnungen und nach der Genauigkeit mit der einzelne Modenamplituden bestimmt werden können.

##### 4.3.1 Relativer Gesamtfehler

In den Abbildungen 4.6 und 4.7 ist der relative Gesamtfehler jeder azimutalen Ordnung dargestellt, der sich in Messungen mit den optimierten Sensoranordnungen A-I bis A-IV in Strömungskanälen der Nabenverhältnisse  $\eta=0$  bzw.  $\eta=0.75$  ergibt. Auf den ersten Blick sind sehr unterschiedliche Verläufe festzustellen. Sie stehen in Zusammenhang mit der charakteristischen, vom Nabenverhältnis abhängigen Entwicklung der Eigenwerte. Bei gleicher Anzahl axialer und radialer Messpositionen können in Strömungskanälen mit großen Nabenverhältnissen Analysen bei vielfach höheren Frequenzen und azimutalen Ordnungen umgesetzt werden.

Sensoranordnung A-I ermöglicht Analysen in Strömungskanälen beliebiger Nabenverhältnisse mit relativen Gesamtfehlern  $\delta A_m \leq 10$  über nahezu den gesamten Frequenzbereich. Wie bereits in den vorherigen Abschnitten ausführlich erörtert wurde, treten erhöhte Messfehler nur bei sehr tiefen Frequenzen und in der Nähe der Cut-on-Frequenzen auf.

Mit Sensoranordnung A-II, d. h. mit der doppelten Anzahl von Messebenen, ist der relative Gesamtfehler in der gesamten unteren Frequenzhälfte kleiner als mit Sensoranordnung A-I. Dies gilt weiterhin in der oberen Frequenzhälfte für niedrige radiale Ordnungen. Auffällig ist, dass in einem Kanal mit dem Nabenverhältnis  $\eta=0$  alle azimutalen Ordnungen  $|m| \geq 2$  über den gesamten Frequenzbereich mit einem relativen Fehler von  $\delta A_m < 20$  analysiert werden können. In einem Kanal mit  $\eta=0.75$  trifft dies dagegen nur für die Ordnungen  $|m| \geq 73$  zu.

Bezüglich der wandbündigen Sensorarrays A-III und A-IV gilt für die höheren azimutalen Ordnungen das gleiche, was zuvor in Abschnitt 4.2 für die Mode  $m=0$  beschrieben wurde: Die Messgenauigkeit ist in den Frequenzbändern sehr gut, in denen nur wenige radiale Ordnungen ausbreitungsfähig sind. Bei sehr hohen Frequenzen und hohen azimutalen Ordnungen ist der relative Gesamtfehler kleiner als Eins, d. h. Messungenauigkeiten werden bei der Abbildung auf die Modenamplituden sogar gedämpft. Treten in einer Turbomaschine nur Rotor-Stator-Interaktionsmoden in diesem Bereich auf, dann ließen sich Modenanalysen auch bei noch höheren Frequenzen realisieren. Auffällig sind

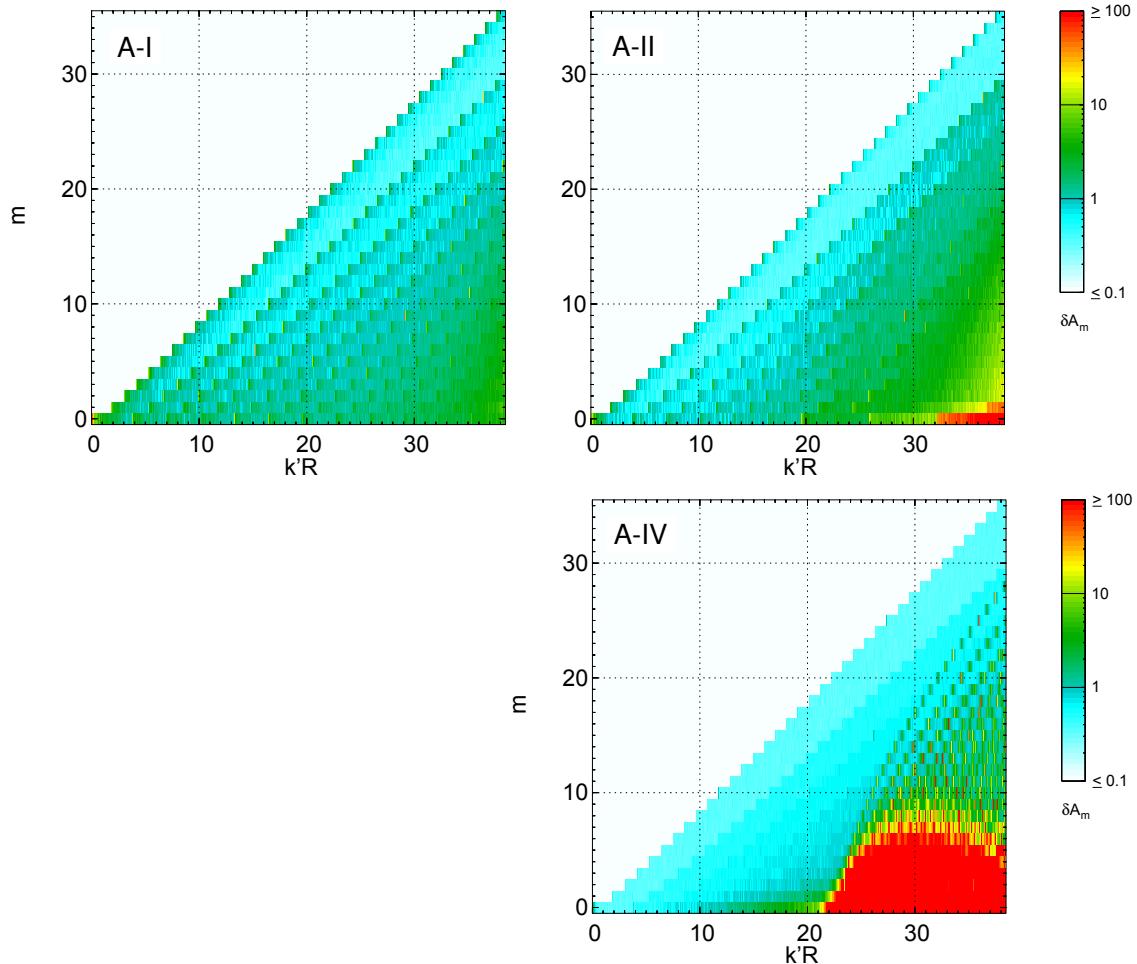


Abbildung 4.6: Relativer Gesamtfehler  $\delta A_m$  bei Zerlegung der azimuthalen Ordnung  $m$  mit den optimierten Sensoranordnungen A-I, A-II und A-IV in einem Strömungskanal des Nabenvorhältnis  $\eta = 0$ .

im Fall des Strömungskanals ohne Nabenkörper die schmalen Frequenzbänder erhöhter Messfehler, die im oberen Frequenzbereich bei azimuthalen Ordnungen  $m > 10$  auftreten. Sie können möglicherweise durch eine gezielte Optimierung der Sensorpositionen vermieden werden.

#### 4.3.2 Modale Standardabweichung

In der Bewertung einer experimentellen Modenanalyse als auch im Entwurf von geeigneten Sensoranordnungen ist die Genauigkeit, mit der die *einzelne* Modenamplitude festgestellt werden kann, von großem Interesse. Das in Abschnitt 3.3.6 beschriebene Verfahren zur Analyse der Fehlerfortpflanzung ermöglicht die Berechnung einer Standardabweichung für jede einzelne Mode.

In Abbildung 4.8 sind die modalen Standardabweichungen  $s_{mn}$  dargestellt, die sich bei Zerlegung der azimuthalen Ordnung  $m = o$  in die radialen Ordnungen  $o \leq n \leq 11$  mit den optimierten Sensoranordnungen A-I bis A-IV ergeben. Für jede Frequenzkomponente wurden  $N_{avg} = 50$  Einzelmessungen simuliert, bei der jedes Datenfeld individuell ge-

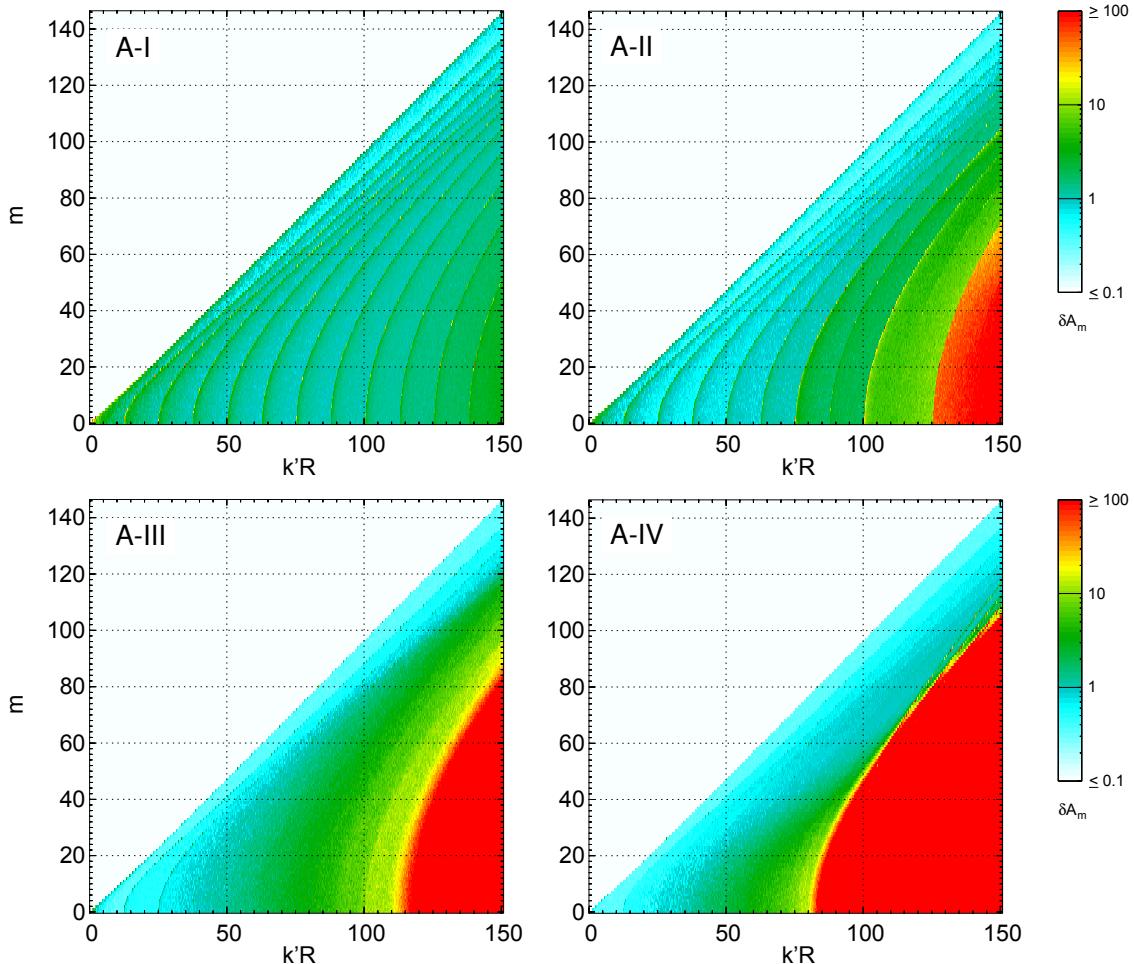


Abbildung 4.7: Relativer Gesamtfehler  $\delta A_m$  bei Zerlegung der azimutalen Ordnung  $m$  mit den optimierten Sensoranordnungen A-I bis A-IV in einem Strömungskanal des Nabbenverhältnis  $\eta = 0.75$ .

mäß Gleichung (3.39) verrauscht wurde. Die modalen Standardabweichungen sind – wie schon der relative Gesamtfehler – unabhängig vom Modenspektrum des Referenzschallfelds, welches der Simulation zugrunde lag. Für eine vom Rauschpegel unabhängigen Darstellung sind die modalen Standardabweichungen mit der Standardabweichung der Azimutalmodenamplituden  $s_m$  normiert. Da die Charakteristik der Standardabweichungen für die stromauf und stromab laufenden Moden gleicher Ordnungen sehr ähnlich ist, wurden die Darstellungen auf die stromab laufenden Moden beschränkt.

Der Vergleich der Graphen zeigt, dass sich die Standardabweichungen verschiedener radialer Ordnungen teilweise um Größenordnungen unterscheiden. Eine wichtige Feststellung ist, dass insbesondere für die Arrays A-I und A-II die Standardabweichung jeder radialen Ordnung in der Nähe der zugehörigen Cut-on-Frequenz  $(k'R)_{0,n}$  zwar stark vergrößert ist, die Standardabweichungen aller anderen radialen Ordnungen mit  $\nu \neq \nu$  hiervon jedoch unberührt bleiben. Somit kann in der Nähe der Cut-on-Frequenzen trotz eines erhöhten Gesamtfehlers noch eine sinnvolle Analyse durchgeführt werden. Für die Arrays A-III und A-IV gilt, dass mit zunehmender Frequenz die Standardabweichungen aller radialen Ordnungen kontinuierlich anwachsen. Während bei den Anordnungen A-

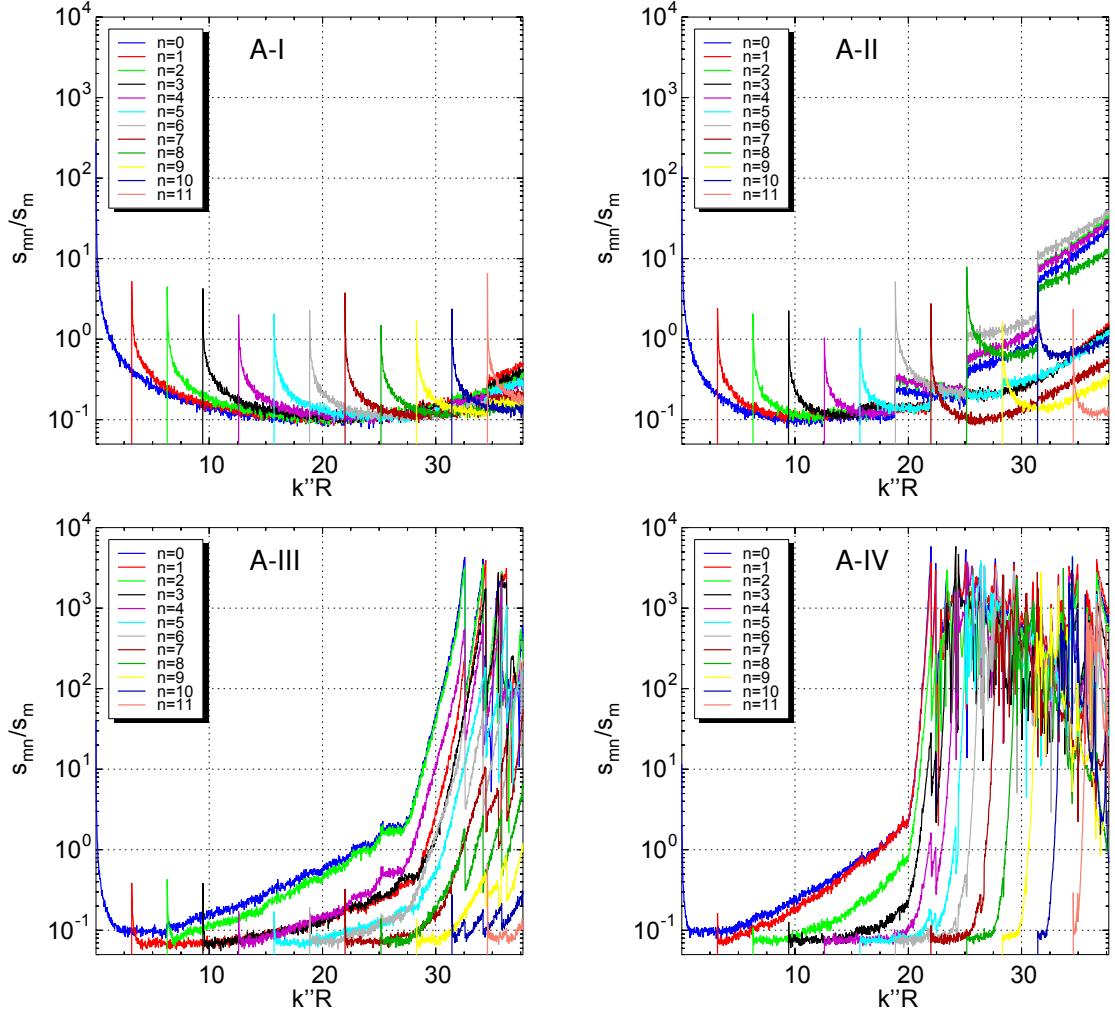


Abbildung 4.8: Normierte Standardabweichungen aller radialen Ordnungen in der Analyse der azimutalen Ordnung  $m = 0$  mit den optimierten Sensoranordnungen A-I bis A-IV.

I und A-II die größten Standardabweichungen bei den höchsten radialen Ordnungen auftreten, sind bei den Anordnungen A-III und A-IV gerade die niedrigsten radialen Ordnungen hiervon betroffen.

Dieses Bild trifft auch für höhere azimutale Ordnungen zu, wie die Diagramme der Abbildungen 4.9 und 4.10 am Beispiel der Analysefrequenzen  $k'R = 20$  bzw.  $k'R = 80$  illustrieren, die bezüglich der höchsten auftretenden radialen Ordnungen vergleichbar sind. In den Analyseergebnissen der Anordnung A-I ist deutlich zu erkennen, dass bei jeder azimutalen Ordnung stets die Amplitude der höchsten radialen Ordnung mit der größten Analysegenauigkeit versehen ist. Umgekehrt gilt für die wandbündigen Sensoranordnungen, dass nur die niedrigen azimutalen Ordnungen mit großen Ungenauigkeiten behaftet sind. In Abhängigkeit des Nabenvorhältnis fällt der Bereich der betroffenen azimutalen Ordnungen sehr unterschiedlich aus. Bei einer Analyse mit Anordnung A-IV im Kanal ohne Nabenkörper stechen nur große Standardabweichungen der Modenordnungen um  $m = 0$  heraus. Im Kanal des Nabenvorhältnis  $\eta = 0.75$  ist die Fehlercharakteristik der Anordnung A-III besonders auffällig. Die Standardabweichung der radialen Ordnung  $n = 1$  ist im Bereich niedriger azimutaler Ordnungen sehr klein.

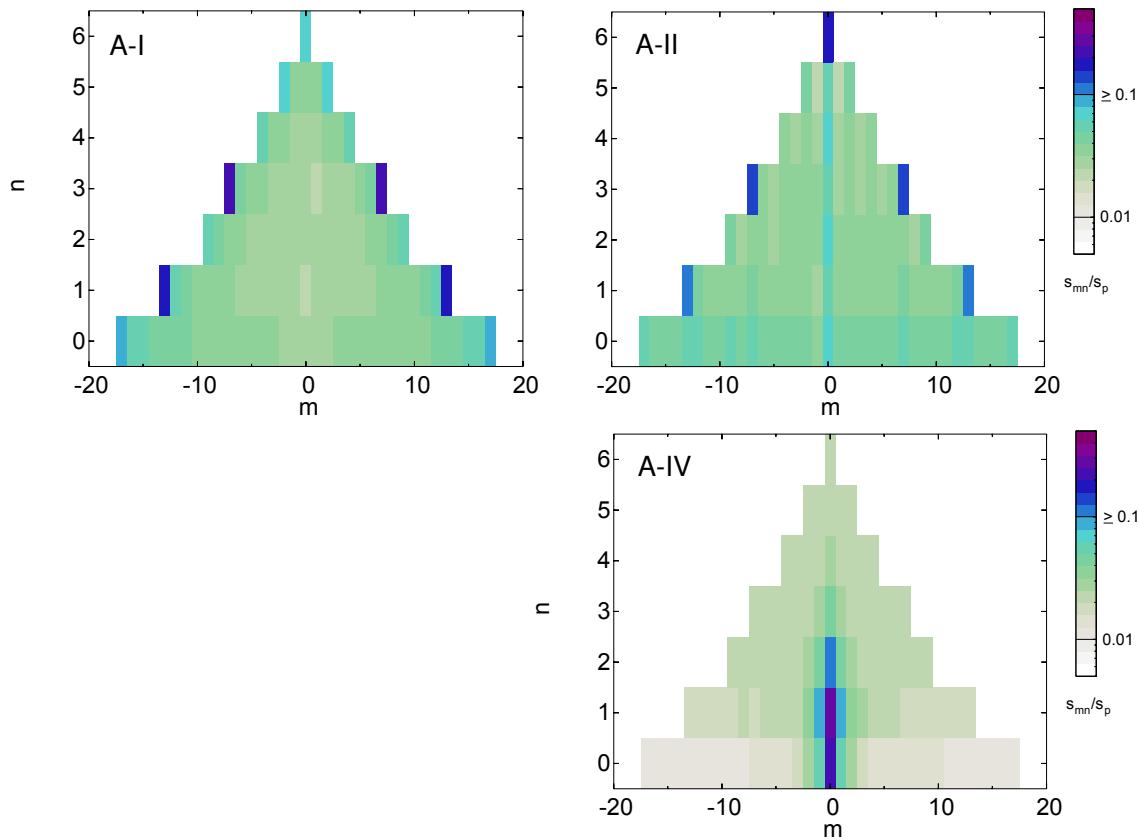


Abbildung 4.9: Normierte Standardabweichung aller Moden bei Zerlegung der Frequenz  $k'R = 20$  mit den optimierten Sensoranordnungen A-I, A-II und A-IV in einem Strömungs-kanal des Nabenvorhältnis  $\eta = 0$ .

Dies lässt sich zumindest teilweise erklären: Bei beiden Anordnungen A-III und A-IV wird die Analysegenauigkeit der niedrigen radialen Ordnungen dadurch beeinträchtigt, dass mit zunehmender Frequenz die Ausbreitungsfaktoren immer ähnlicher werden, vgl. die Diagramme in Abbildung 2.9. Mit Anordnung A-III können Moden ungerader radialer Ordnungen gemäß Gleichung (4.7) tatsächlich jedoch besser getrennt werden, da die radialen Eigenfunktionen an der Kanalausenwand und an der Nabe Werte mit unterschiedlichen Vorzeichen besitzen. Nicht erklärt wird hierdurch allerdings der starke Anstieg der Standardabweichungen der Ordnung  $n=1$  bei hohen azimutalen Ordnungen.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Sensoranordnungen A-I und A-II im Vorteil bei der Analyse im mittleren bis oberen Frequenzbereich und von Moden mit großen Ausbreitungsfaktoren  $\alpha_{mn} \rightarrow 1$  sind. Hingegen sind die Sensoranordnungen A-III und A-IV genauer in der Analyse im unteren Frequenzbereich und von Modenordnungen, deren Ausbreitungsfaktoren gegen Null gehen. Die relativen Unterschiede zwischen den mit Arrays A-I bis A-IV ermittelten modalen Standardabweichungen können dabei mehr als 20 dB betragen.

Die Konsequenzen, die sich aus den modalen Standardabweichungen für das Ergebnis einer Modenanalyse ergeben, hängen stark von der Verteilung der Modenamplituden im Schallfeld ab. Es ist daher schwierig verallgemeinerte Aussagen zu treffen. Anhang F il-

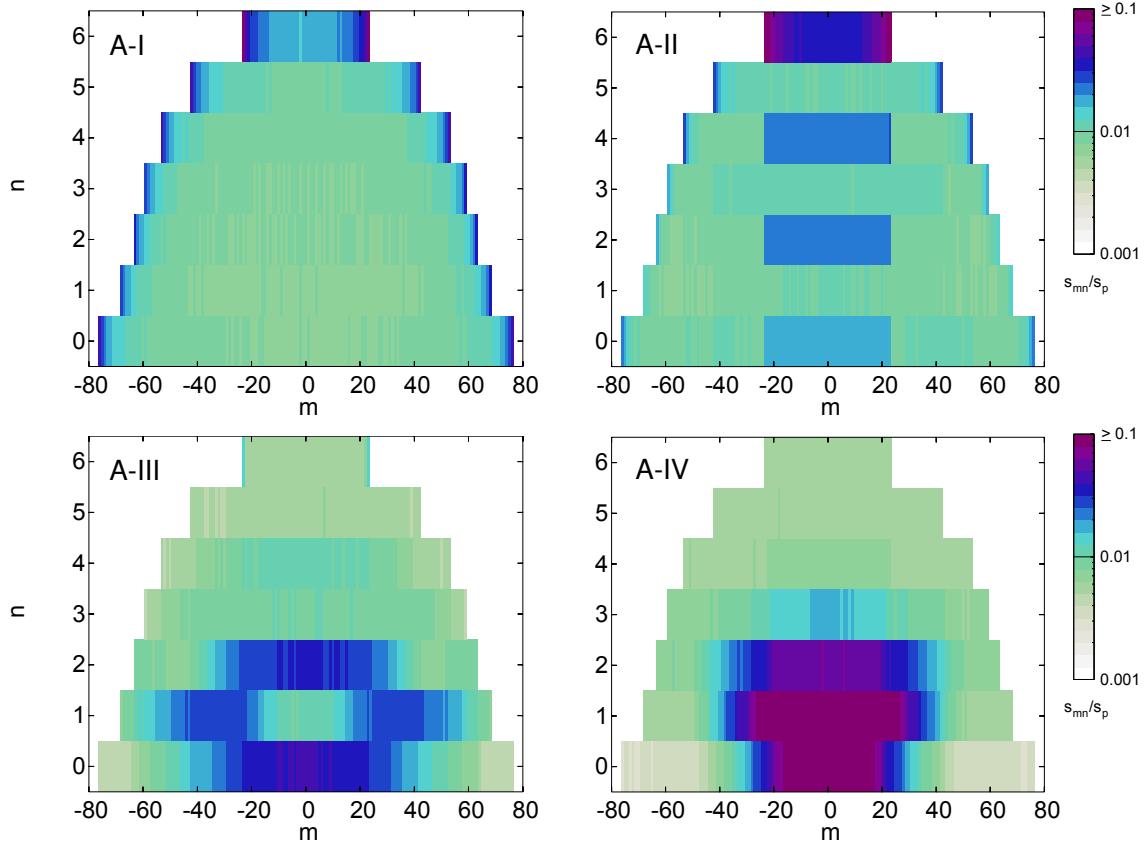


Abbildung 4.10: Normierte Standardabweichung aller Moden bei Zerlegung der Frequenz  $k'R = 80$  mit den optimierten Sensoranordnungen A-I bis A-IV in einem Strömungskanal des Nabenhältnis  $\eta = 0.75$ .

lustriert dies anhand zweier Testschallfelder. Dort wird zudem für den Extremfall, in dem das Schallfeld nur aus einer Mode besteht, ein Zusammenhang zwischen dem Signal-Rausch-Abstand der Schalldruckmessung und dem Signal-Rausch-Abstand der Mode hergestellt, was für eine Abschätzung der Mindestmessdauer nützlich sein kann.

#### 4.4 VERGRÖSSERUNG DES ANALYSIERBAREN FREQUENZBEREICHES

Die Frequenzbereiche, die durch die Sensoranordnungen A-I bis A-IV mit einer bestimmten Genauigkeit analysiert werden können, fallen sehr unterschiedlich aus. Nur Array A-I ermöglicht Analysen im nahezu gesamten betrachteten Frequenzbereich  $k''R < (k''R)_{0,12} = 37.7$ , mit Einschränkungen bei sehr niedrigen Frequenzen und in der Nähe der Cut-on-Frequenzen. Durch Erhöhung der Anzahl radialer bzw. axialer Messpositionen kann der analysierbare Frequenzbereich prinzipiell jedoch für alle Anordnungen vergrößert und die Analysegenauigkeit verbessert werden. Betrachtet wird an dieser Stelle nur eine Ausdehnung der oberen Frequenzgrenze. Verbesserte Messungen bei sehr tiefen Frequenzen können unabhängig von den hier untersuchten Arrays am besten durch Messstellen mit sehr großen axialen Abständen realisiert werden.

Zur Ermittlung der höchsten analysierbaren Frequenz in Abhängigkeit des axialen Sensorabstandes wurden weitere Simulationsrechnungen mit systematischer Variation

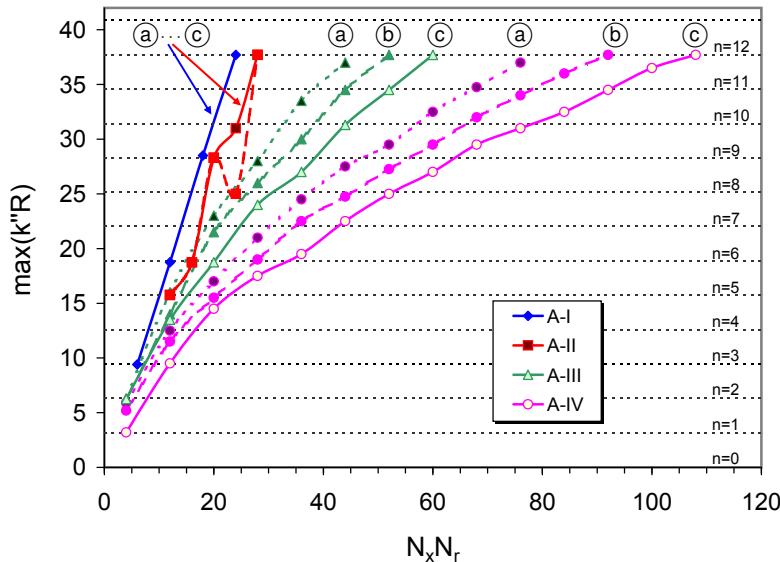


Abbildung 4.11: Höchste mit den Sensoranordnungen A-I bis A-IV analysierbare Frequenzen in Abhängigkeit der Anzahl kombinierter axialer und radialer Sensorpositionen. Die Kurven (a), (b) bzw. (c) wurden für die Genauigkeitskriterien  $s_{o,o}/s_o = 2, 1$  und 0.5 ausgewertet.

der Anzahl radialer Sensorpositionen  $N_r$  in den Arrays A-I und A-II sowie Variation der Anzahl axialer Sensorpositionen  $N_x$  in den Arrays A-III und A-IV durchgeführt. Als Bewertungskriterium wurde diesmal die Standardabweichung der Mode  $(o,o)$  herangezogen, für die  $s_{o,o} \geq s_{o,n}$  in Array A-III und A-IV gilt. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.11 bis 4.13 für drei verschiedene Schranken der relativen Standardabweichung zusammengefasst:

- (a)  $s_{o,o}/s_o \leq 2,$
- (b)  $s_{o,o}/s_o \leq 1,$
- (c)  $s_{o,o}/s_o \leq 0.5.$

Für die vier Sensoranordnungen haben die drei Schranken unterschiedliche Bedeutung. Dies zeigt ein Blick auf die Diagramme der Abbildung 4.8. Für Anordnung A-I gilt  $s_{o,o}/s_o \leq 0.5$  über den gesamten Frequenzbereich (mit Ausnahme des Bereichs der Cut-on-Frequenzen), d. h. die höheren Schranken haben keine Bedeutung. Mit Anordnung A-IV ergeben sich hingegen unterschiedliche Frequenzgrenzen. Die obere Schranke  $s_{o,o}/s_o = 2$  liegt nahe der Frequenz, an der die Kondition der Modellmatrix sprunghaft steigt.

#### 4.4.1 Variation der Anzahl axialer und radialer Messstellen

In Abbildung 4.11 ist die höchste mit  $N_x \times N_r$  Sensorpositionen analysierbare Frequenz dargestellt. Zusätzlich eingezeichnet sind die Cut-on-Frequenzen der Modenordnungen  $n=o$  bis  $n=12$ . Sensorarray A-I stellt die Referenzkonfiguration dar, durch welche mit  $N_r = N_n$  radialen und  $N_x = 2$  axialen Messstellen stets eine Analyse aller  $N_n$  stromauf und  $N_n$  stromab laufenden Moden möglich ist. Modenanalysen mit Sensorarray A-II

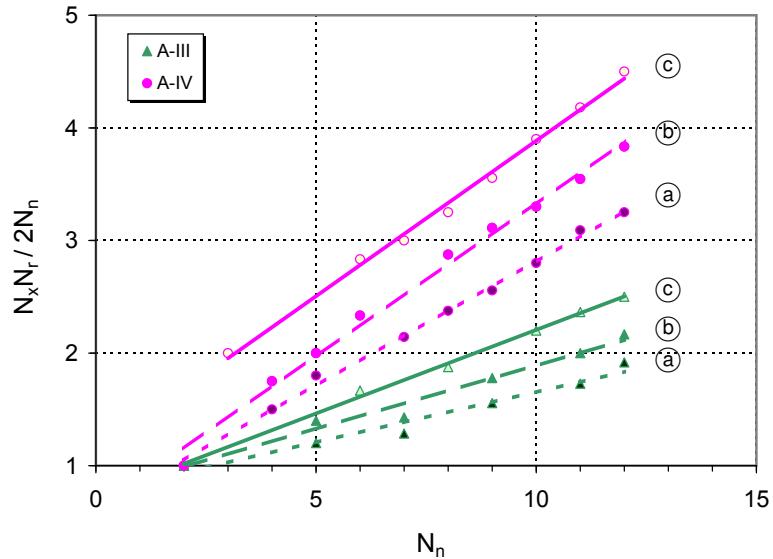


Abbildung 4.12: Auf die Anzahl radialer und axialer Messpositionen bezogener Grad der Überbestimmung, der in Array A-III bzw. Array A-IV für eine Analyse von je  $N_n$  stromab und stromauf laufenden Moden der Ordnung  $m=0$  realisiert werden muss. Die Daten wurden dem Diagramm aus Abbildung 4.11 entnommen.

erfordern einen geringfügig erhöhten Messaufwand: Die in den  $N_x = 4$  Messebenen installierten Rechen müssen für eine Analyse von  $N_n$  ausbreitungsfähigen radialen Ordnungen mit etwa  $N_r = N_n/2 + 1$  Sensoren bestückt werden.

Ein anderes Bild ergibt sich für die Sensoranordnungen A-III und A-IV: Offensichtlich benötigt die Analyse einer vergrößerten Zahl ausbreitungsfähiger Radialmoden eine überproportionale Erhöhung der Anzahl Sensorpositionen. Dies wird durch das Diagramm in Abbildung 4.12 verdeutlicht. Für eine Zerlegung der azimuthalen Ordnung  $m=0$  in zwei stromab und zwei stromauf laufende Moden reichen in beiden Mikrofonarrays  $N_x \times N_r = 4$  Positionen aus. Eine Analyse von  $N_n(m) = 12$  radialen Ordnungen mit modalen Standardabweichungen  $s_{m,n}/s_m \leq 1$ , erfordert hingegen in Array A-III die 2.2-fache Zahl und in Array A-IV sogar die 3.8-fache Zahl von axialen und radialen Messstellen im Vergleich zu zwei radialen Sensorrechen. Darüber gilt, dass man zur Verdopplung der Messgenauigkeit bei festgehaltener Frequenz die Anzahl axialer Messstellen in Sensorarray A-III um etwa 15% und in Sensorarray A-IV um etwa 20% vergößern muss.

#### 4.4.2 Axiale Sensorabstände und Gesamtlängen der Arrays

Mit der Variation der Anzahl Messstellen geht nicht nur eine Variation der höchsten analysierbaren Frequenz sondern auch des optimalen axialen Sensorabstands einher. Das Diagramm von Abbildung 4.13 zeigt, dass es – trotz der individuellen Abhängigkeiten – einen gemeinsamen Korridor günstiger Sensorabstände gibt. Jedes simulierte Ensemble wurde unter Heranziehung der drei Genauigkeitskriterien ausgewertet und ist durch ein Symbol repräsentiert. Die grüne in die Auftragung eingezeichnete obere Schranke steht in Zusammenhang mit Gleichung (4.12), d. h. gibt die um eine geschätzte Unschärfe von  $\epsilon = 0.1\pi$  nach unten korrigierte Abtastbedingung wieder. Die meisten optimalen Senso-

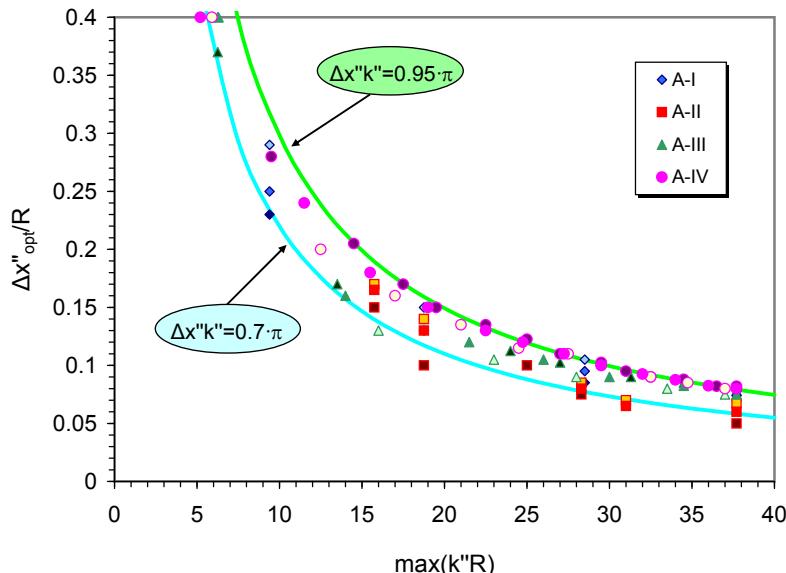


Abbildung 4.13: Optimale axiale Sensorabstände in den Arrays A-I bis A-IV in Abhängigkeit der höchsten zu analysierenden Frequenz. Die dargestellten Daten stehen in Verbindung mit dem Diagramm von Abbildung 4.11.

rabstände liegen nahe dieser Kurve. Wenn eine höhere Messgenauigkeit verlangt wird, verringert sich der optimale axiale Sensorabstand tendenziell. Aus der graphischen Darstellung kann als untere Schranke die Kurve  $\Delta x''k'' = 0.7\pi$  abgelesen werden.

Insbesondere in Strömungskanälen mit kleinen Nabenvorhältnissen ergeben sich für wandbündig installierte Sensorarrays angesichts der hohen Anzahl erforderlicher axialer Messpositionen Kanalsektionen sehr großer Baulängen. Dies ist in Tabelle 4.3 anhand verschiedener Beispiele illustriert. Die axiale Baulänge berechnet sich aus der Zahl axialer Messposition und dem axialen Sensorabstand – ohne Berücksichtigung der Sensorabmessungen – als

$$L_x' / R = (N_x - 1) \Delta x'_{opt} / R. \quad (4.14)$$

Für eine optimale Analyse von beispielsweise bis zu  $N_n = 6$  radialen Ordnungen mit Sensoranordnung A-IV wird in einem Kanal ohne Nabenkörper eine Messsektion benötigt, deren Länge etwa dem vierfachen Kanalradius entspricht. Diese Anforderung wird in der Praxis, etwa im Einlauf eines Triebwerks, kaum umsetzbar sein. In einem Kanal des Nabenvorhältnis  $\eta = 0.75$  reduziert sich die Abmessung allerdings um 75%. So erscheint in diesen Kanälen selbst eine Modenanalyse bis zu  $N_n = 12$  radialen Ordnungen mit einer Messsektionslänge von etwa 1.8 Kanalradien realisierbar. Eine interessante Alternative zu Anordnung A-IV stellt die Instrumentierung des Nabenkörpers in Sensoranordnung A-III dar, durch welche die Länge des Sensorarray substanzial auf weniger als einen halben Kanalradius verkürzt werden kann.

Abschließend muss darauf hingewiesen werden, dass die verallgemeinerten Darstellungen dieses Kapitels keine Optimierung eines Sensorarrays für den Einzelfall ersetzen können. Sie sind jedoch in der Planungsphase eines Experiment zur Abschätzung des Messaufwands nützlich. So lässt sich mit Hilfe der Darstellungen z. B. schnell einschätzen, ob der in einem Versuchsstand verfügbare Bauraum für eine Installation der

	$N_x \times N_r$	$\max(k''R)$	$N_n$	$\Delta x''_{\text{opt}}/R$	$L_{x'}/R$ ( $\eta=0$ )	$L_{x'}/R$ ( $\eta=0.75$ )
A-I	12	18.8	6	0.14	0.14	0.035
	18	28.5	9	0.095	0.095	0.024
	24	37.7	12	0.074	0.074	0.019
A-II	12	15.8	5	0.165	0.495	0.124
	20	28.3	9	0.08	0.24	0.06
	28	37.7	12	0.06	0.18	0.045
A-III	12	14.0	4	0.16	—	0.2
	28	26.0	8	0.105	—	0.341
	52	37.7	12	0.075	—	0.469
A-IV	12	11.5	4	0.24	2.64	0.66
	28	19.0	6	0.15	4.05	1.013
	52	27.3	9	0.11	5.61	1.403
	92	37.7	12	0.08	7.28	1.82

Tabelle 4.3: Höchste analysierbare Frequenz, höchste analysierbare radiale Ordnung, optimaler axialer Sensorabstand und axiale Baulänge für verschiedene Zahlen kombinierter axialer und radialer Messpositionen in Sensorarrays A-I bis A-IV. Die Angaben gelten für eine maximale modale Standardabweichung von  $s_{mn}/s_m = 1$ .

Sensoranordnungen A-III oder A-IV ausreicht.

# 5

---

## ERPROBUNG DER MODENANALYSE MIT WANDBÜNDIGEN MIKROFONARRAYS

---

Die Eignung wandbündiger Mikrofonarrays für Modenanalysen bei hohen Frequenzen und die in Kapitel 4 gewonnenen Erkenntnisse konnten anhand von Daten aus Messserien an drei Versuchsständen überprüft werden. Ein direkter Vergleich zwischen einem wandbündigen Mikrofonarrays und radialen Mikrofonrechen wurde im Nebenstromkanal eines Fan-Prüfstands realisiert und ist in Abschnitt 5.1 dargestellt. Für die in Abschnitt 5.2 vorgestellte ausführliche Fehleranalyse hinsichtlich der Einflüsse von der Messdauer sowie von der Größe und Gestalt des Messgitters wurden Daten eines Turbinenprüfstands verwendet. In Abschnitt 5.3 wird die Wirkungsweise eines Regularisierungsverfahrens für einen Fall untersucht, in dem das wandbündige Mikrofonarray im Einlauf eines Fans aufgrund von Bauraumbeschränkungen nicht optimal gestaltet werden konnte und daher stark fehlerbehafteten Ergebnisse produzierte. Anhand der Daten konnte darüber hinaus erstmalig das Potential der partiellen Modenanalyse für ein axial linienförmig angeordnetes Mikrofonarray geprüft werden.

### 5.1 VERGLEICH MIT MIKROFONRECHEN

In der Nebenstromkanalstrecke des aeroakustischen Fanprüfstands UFFA (Universal Fan Facility for Acoustics), der von der Firma AneCom AeroTest betrieben wird, können drei verschiedene Radialmodenanalyse-Messanordnungen installiert werden. Sie sind schematisch in der Versuchsstrecke in Abbildung 1.5 zu sehen. Das Mikrofonrechenarray RMD<sub>2</sub> und das wandbündige Array RMD<sub>3</sub> befinden sich in derselben Kanalsektion. Die Messungen mit den beiden Arrays wurden zeitlich getrennt und gemäß dem Kriterium der Machzahlähnlichkeit unter weitestgehend reproduzierten Betriebsbedingungen durchgeführt und eignen sich daher gut für eine Gegenüberstellung. Die folgenden Darstellungen konzentrieren sich auf die Analysen der Schalldruckmessungen. Weitergehende Informationen zum Prüfstand und zur Messdurchführung sind in Referenz [134] sowie Anhang G zu finden.

#### 5.1.1 Spezifikationen der Mikrofonarrays

Die Sensorarrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub> wurden unter Anwendung der in Kapitel 4 beschriebenen Vorgehensweise mit der Maßgabe entwickelt, Modenanalysen der Schaufeltöne bis zu Frequenzen von  $kR = 75$  zu ermöglichen. An der oberen Frequenzgrenze sollten bei dem gegebenen Nabenvorhältnis etwa 2200 Moden mit azimutalen Ordnungen bis zu  $m = \pm 80$  und radialen Ordnungen bis  $n = 9$  detektiert werden. Ergebnis der individuellen Optimierungen waren die in Tabelle 5.1 angegebenen Messgitter. Einen

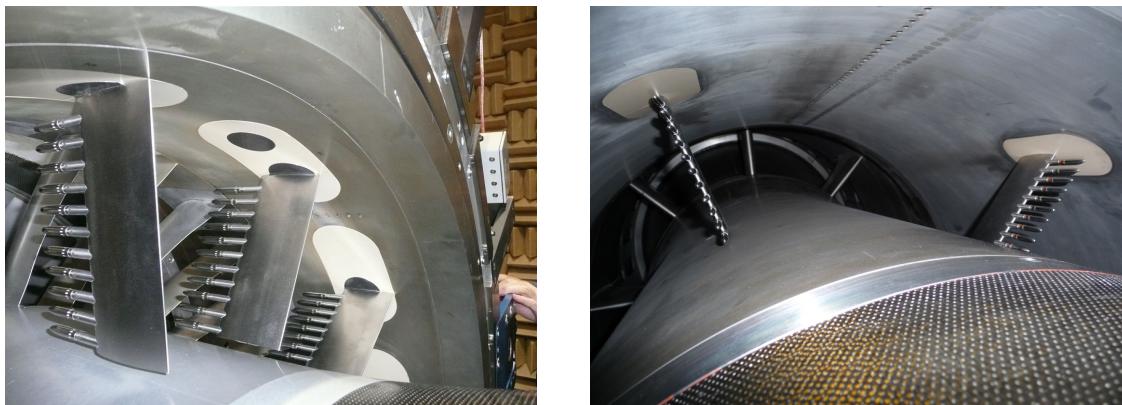


Abbildung 5.1: Das linke Foto zeigt die am Fan-Prüfstand UFFA verwendeten Mikrofonrechenstromab des Fanleitrads [134]. Das rechte Foto zeigt die gleichen Mikrofonrechen in der Installation als Array RMD2 sowie die linienförmig angeordneten Einbaupositionen des alternativen wandbündigen axialen Arrays RMD3 in der Austrittssektion.

Eindruck von den Messanforderungen sowie den Fehlercharakteristiken der beiden Arrays geben die Abbildungen G.2 bis G.4.

Das Array RMD2 besteht aus Mikrofonrechen in  $N_x = 2$  Kanalquerschnittsebenen. In jedem Rechen sind  $N_r = 11$  Mikrofone gleichmäßig über den Radius verteilt. Zur Verkürzung der Messdauer können in jeder Ebene drei um  $120^\circ$  gestaffelte Rechen eingesetzt werden, so dass das Messsegment zur Erstellung des vollständigen Datengitters von 3960 Positionen schrittweise um insgesamt  $120^\circ$  gedreht werden muss. Um die aerodynamische Interaktion zu minimieren sind die Rechen der beiden Ebenen um eine halbe Umfangsteilung gegeneinander verschoben. Abbildung 5.1 zeigt verschiedene Ansichten der Rechen im Kanal.

Für eine vergleichbare Modenanalyse werden im wandbündigen Array RMD3  $N_x = 60$  Mikrofone in der Kanalausßenwand benötigt. Der durch die Zahl kombinierter radialer und axialex Messstellen  $N_x \times N_r$  ausgedrückte Messaufwand ist gegenüber dem Array RMD2 etwa drei mal so hoch. Eine Instrumentierung der Nabe wurde aus technischen Gründen nicht in Erwägung gezogen. Bei Verwendung von drei gleichmäßig über den Umfang versetzten Arrays und bei azimutaler Auflösung von  $2^\circ$  wie mit dem Array RMD2 wird durch schrittweise Traversierung ein Datengitter mit insgesamt 10800

	RMD2	RMD3
Anzahl axialex Mikrofonpositionen $N_x$	2	60
Anzahl radialer Mikrofonpositionen $N_r$	11	1
Messpunkte in Umfangsrichtung $N_\phi$	180	180
Gesamtzahl Messpunkte $N_x \times N_r \times N_\phi$	3960	10800

Tabelle 5.1: Kenngrößen der Mikrofonarrays RMD2 und RMD3 des Fan-Prüfstands UFFA. Erweiterte Angaben sind in Tabelle G.1 zu finden.

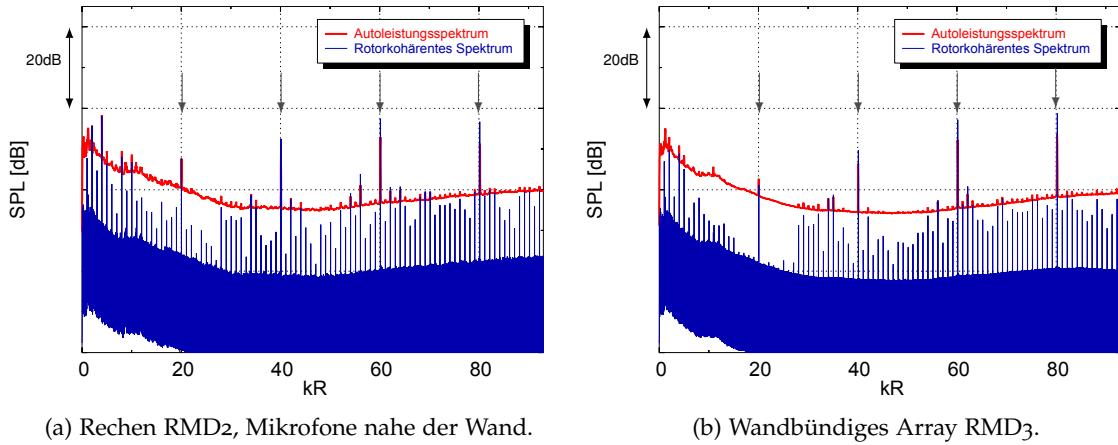


Abbildung 5.2: Mittleres Autoleistungsspektrum und mittleres rotorkohärentes Spektrum gemessen im Nebenstromkanal des UFFA-Rigs bei der relativen Fan-Drehzahl von 80%. Die Pfeile markieren die Harmonischen der Blattfolgefrequenzen.

Positionen erzeugt. Im rechten Foto von Abbildung 5.1 sind die axial linienförmig aufgereihten Einbauöffnungen der RMD3-Mikrofone an der oberen Umfangsposition zu erkennen.

### 5.1.2 Analyse der Schalldruck-Zeitsignale

Aus den gemessenen Schalldruckzeitreihen wurden die rotorkohärenen Bestandteile mithilfe des in Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahrens unter Einbeziehung der adaptiven Neuabtastung ermittelt. Abbildung 5.2 zeigt bei einer relativen Drehzahl von 80% gemessene rotorkohärente Spektren im Vergleich zu Autoleistungsspektren. Die Spektren stellen das Ergebnis einer Mittlung von Einzelspektren dar, die an derselben radialen Koordinate erfasst wurden. Im Fall von Array RMD2 gingen die 360 an der äußersten radialen Positionen detektierten Spektren ein. Für die mittleren Spektren von Array RMD3 wurden alle an der Kanalwand gelegenen 10800 Positionen berücksichtigt. Offensichtlich wurden in der Berechnung der phasengemittelten Spektren die breitbandigen Schallfeldkomponenten, die nicht vollständig mit der Wellendrehgeschwindigkeit korrelieren, um mehr als 15 dB unterdrückt. Weiterhin können für alle BPF-Harmonischen Pegel-Erhöhungen fest gestellt werden. Sie gehen auf die Kompensation von Drehzahl-schwankungen zurück, die im Bereich von 0.1% lagen. Allerdings muss der Effekt der akustischen Liner in der Kanalstrecke berücksichtigt werden, der sich zwischen Fan und Messsektion befand und der besonders zu einer Dämpfung der BPF-Komponente führte.

Für die weiteren Analysen wurden die beiden in Tabelle 5.2 angegebenen Schaufel-töne bei der zweiten und dritten Harmonischen der Blattfolgefrequenz ausgewählt. Die Datensätze sind repräsentativ, d.h. an ihnen lassen sich die Charakteristiken und Unterschiede der Arrays RMD2 und RMD3 gut erkennen und diskutieren. Zur Illustration sind in Abbildung 5.3 die instationären Druckverteilungen dargestellt, die mit den beiden Arrays bei 80% relativer Drehzahl für die 3-fache Blattpassierfrequenz erfasst wurden. Dargestellt sind die jeweils über das gesamte Messgitter interpolierten Realteile der Schalldruckamplitude. Die Druckverteilung wird deutlich durch einzelne azimutale Mo-

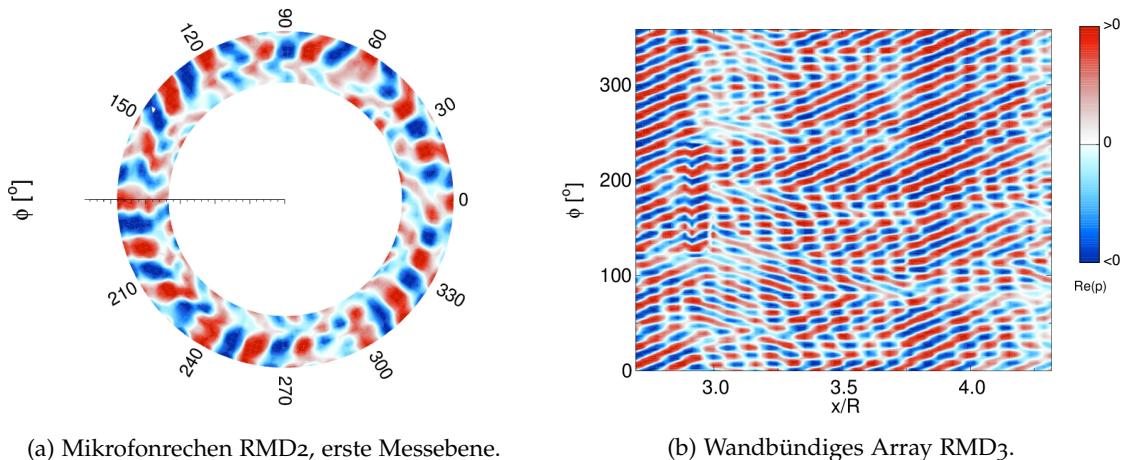


Abbildung 5.3: Instationäre Druckverteilung der 3BPF-Komponente im Nebenstromkanal des UFFA-Rigs bei der relativen Fan-Drehzahl von 80%.

denordnungen dominiert.

Vor der Ausführung der Modenanalyse wurden für die Bewertung der Analysegenauigkeiten die Signal-Rausch-Abstände der Schalldruckamplituden gemäß Abschnitt 3.1.3 ermittelt. Abbildung 5.4 zeigt das Ergebnis für die 3BPF-Harmonische bei der relativen Rotordrehzahl von 80%. Dargestellt ist die Standardabweichung  $s_{p,N_w}$  in Abhängigkeit der Dauer einer Einzelmessung, welche durch die Anzahl gemittelter FFT-Fenster  $N_w$  definiert ist. Im Array RMD<sub>2</sub> wurden die Signale von 23 Mikrofonen und im Array RMD<sub>3</sub> die Signale von 31 Mikrofonen an drei Traversierpositionen mit verlängerter Messdauer von 120 s ausgewertet. Die Positionen der Mikrofone waren gleichmäßig über die Arrays verteilt. Zur Bewertung von Einzelmessungen großer Zeitdauer wurde die Analyse mit Überlappen der FFT-Fenster durchgeführt. Bei der Standardmessdauer von 15 s, welche einer Mittlung über insgesamt etwa  $N_w = 42$  Fenster entsprach, betrug der Signal-Rausch-Abstand der RMD<sub>3</sub>-Messung  $SNR_p = 19.4$  dB. Er fiel damit um drei Dezibel besser aus als in den Messungen mit Array RMD<sub>2</sub>. Für den zweiten, im folgenden Abschnitt betrachteten Schaufelton, die 2BPF-Komponente bei einer relativen Drehzahl von 50%, waren die Signal-Rausch-Abstände deutlich geringer: sie betrugen nur 6 dB und 7.8 dB in den Messungen mit Array RMD<sub>2</sub> bzw. mit Array RMD<sub>3</sub>. Die niedrigeren Signal-Rausch-Abstände resultieren aus der Tatsache, dass die 2BPF-Komponente in den Frequenzbereich fällt, in dem der akustische Liner im Nebenstromkanal seine größte Effektivität besitzt.

rel. Drehzahl	BPF-Harm.	kR	max  m	max(n)	N <sub>Mod</sub>
50%	2BPF	25.51	23	2	234
80%	3BPF	60.19	62	7	1332

Tabelle 5.2: Frequenzen, höchste Ordnungen und Gesamtzahl ausbreitungsfähiger Moden in der UFFA-Messektion für die beiden in Abschnitt 5.1.3 vorgestellten repräsentativen Datensätze.

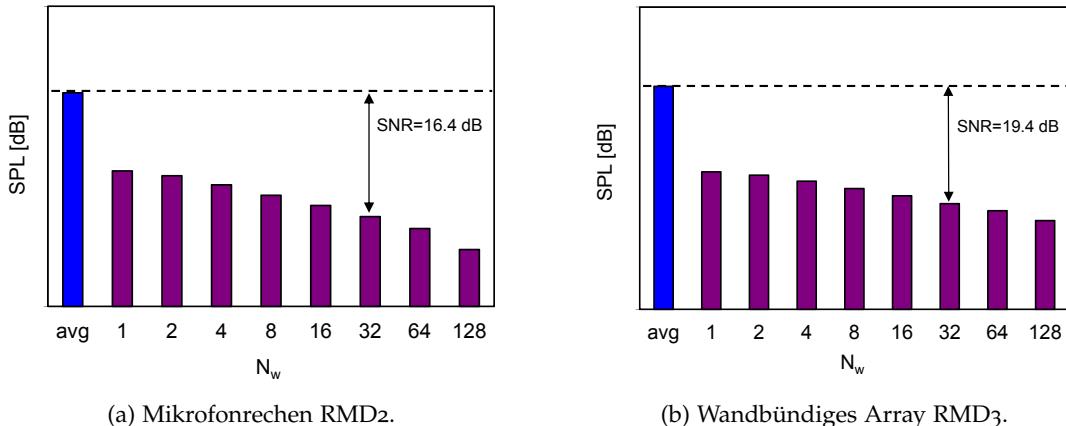


Abbildung 5.4: Variation der Standardabweichung  $s_p$  der 3BPF-Komponente des Fans mit der Anzahl analyserter FFT-Fenster  $N_w$  bei der relativen Drehzahl von 80%. Der blaue Balken gibt den mittleren Schalldruckpegel  $\bar{p}$  als Referenz für den Signal-Rausch-Abstand an.

Bei der Bewertung der Signal-Rausch-Abstände ist zu bedenken, dass den Arraysignalen in unterschiedlicher Weise inkohärente Druckschwankungen überlagert waren. Während die Mikrofonrechen die Turbulenz der Strömung innerhalb des Kanals detektierten, nahmen die Mikrofone der wandbündigen Arrays die turbulenten Druckschwankungen der Kanalgrenzschicht auf. Eine Analyse zeigt dabei eine Variation der Störpegel mit der azimutalen Messposition, wofür vermutlich die Strömungsnachläufe der Fan-Statorschaufeln verantwortlich sind [73]. Da die Positionen der Schaufelnachläufe unbekannt sind, kann bezüglich des Einfluss dieser Störkomponenten in der vorliegenden Studie keine Aussage getroffen werden. Weitere Störgeräusche unbekannten Ausmaßes resultierten für das RMD2-Array aus der Umströmung der Mikrofone und der Rechenkörpers [16].

### 5.1.3 Ergebnisse der Modenanalysen

In Abbildung 5.5 (a) sind die Ergebnisse der Modenanalysen für die 2BPF-Komponente am Betriebspunkt mit der relativen Drehzahl von 50% zu sehen. Die mit den Arrays RMD2 und RMD3 detektierten Amplituden der vom Fan stromab abgestrahlten Moden sind direkt gegenüber gestellt. Die Modenanalysen wurden mit dem in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Ansatz durchgeführt. Zusätzlich abgebildet sind die Standardabweichungen der Modenamplituden, welche auf Basis der zuvor ausgewerteten Standardabweichungen der Schalldruckmessungen berechnet wurden. Im Bereich der azimutalen Ordnungen  $-13 \leq m \leq 13$  liegt insgesamt eine gute Übereinstimmung vor. Nur für wenige dominante Moden, z. B. für die Ordnungen  $(-2, 1)$ ,  $(0, 2)$  und  $(6, 0)$ , sind Differenzen von mehreren Dezibel feststellbar, deren Gründe nicht unmittelbar ersichtlich sind. Bei den höheren azimutalen Ordnungen treten größere systematische Abweichungen auf. Ein Blick auf die modalen Standardabweichungen in Abbildung 5.5 (b) legt nahe, dass die mit den Mikrofonrechen RMD2 analysierten Modenamplituden zu groß sind. Auffällig sind insbesondere die hohen Pegel der Moden  $(-19, 1)$  und  $(19, 1)$ . Sie liefern einen Beleg für die größere Fehleranfälligkeit des RMD2-Arrays im Bereich der Cut-on-Frequenzen.

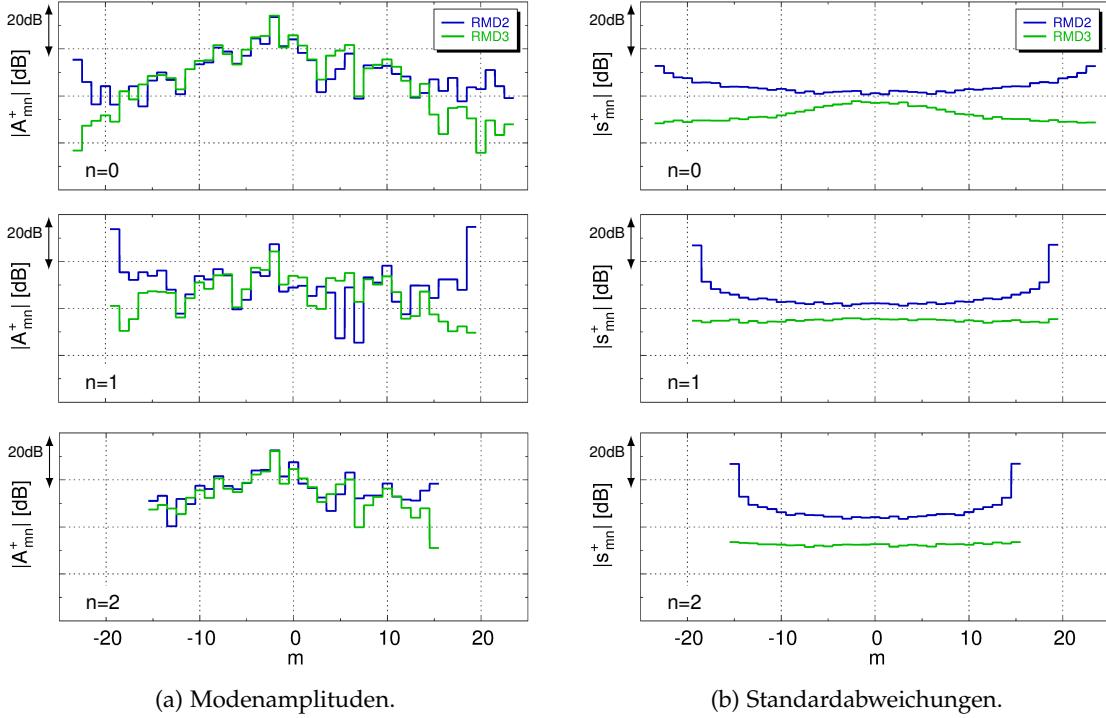


Abbildung 5.5: Amplituden und Standardabweichungen der stromab laufenden Moden aus der Analyse der 2BPF-Komponente des UFFA-Rig mit den Arrays RMD2 und RMD3 bei einer relativen Rotordrehzahl von 50%.

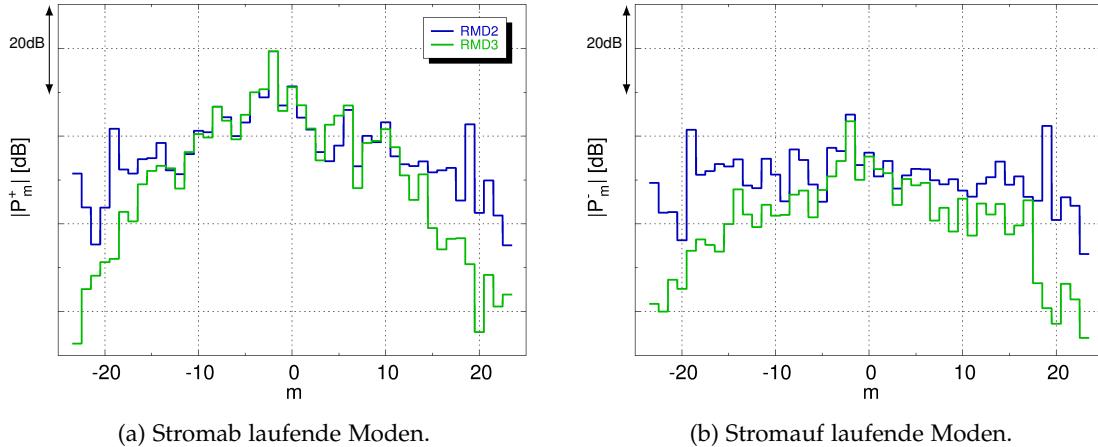


Abbildung 5.6: Schallleistungen der azimutalen Modenordnungen aus der Analyse der 2BPF-Komponente des UFFA-Rig mit den Arrays RMD2 und RMD3 bei einer relativen Rotordrehzahl von 50%.

In der Beurteilung der Analyseergebnisse hinsichtlich der Schallquellen des Versuchsträgers ist von Bedeutung, dass aus der Interaktion der Schaufelreihen, für die 2BPF-Komponente und bei einer relativen Drehzahl von 50%, gemäß der Formel von Tyler und Sofrin (1.2) nur die Anregung von Moden der Ordnungen  $m = -2$  und  $m = -4$  zu erwarten war. Tatsächlich sind die Amplituden dieser Moden nur moderat höher als die sonstigen Moden bzw. treten gar nicht erkennbar hervor. Ursache könnte der bereits erwähnte, stromab des Fans installierte akustische Liner sein. Der Vergleich der mit den

Arrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub> detektierten Pegel lässt jedoch eine interessante Folgerung zu: Eine übliche Hypothese ist, dass die Moden, die keiner Schaufelreihen-Interaktion zugeordnet werden können, ein Artefakt des Analyseprozess darstellen, d. h. etwa der Abbildung von Rauschanteilen aus den Messsignalen auf die Modenamplituden entsprechen. Die weitgehend übereinstimmenden Ergebnisse der RMD<sub>2</sub>- und RMD<sub>3</sub>-Arrays und die niedrigen Niveaus der modalen Standardabweichungen liefern jedoch Indizien dafür, dass auch die Moden, die nicht als Rotor-Stator-Interaktionsmoden identifiziert werden können, tatsächlich durch kohärente Schallquellen angeregt wurden<sup>1</sup>.

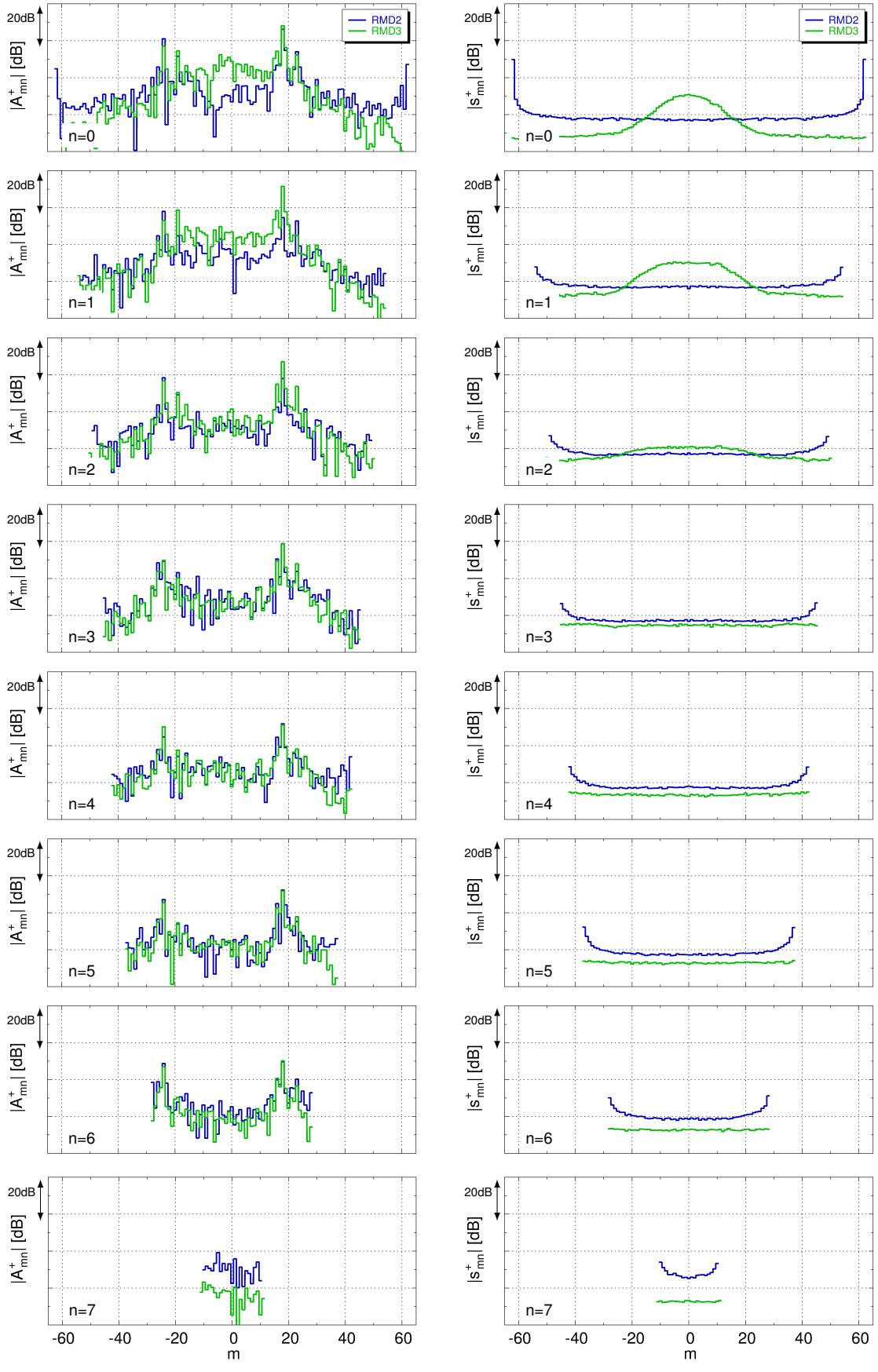
Für die Bewertung der Schallanregung einer Turbomaschine ist die Angabe der erzeugten akustischen Leistung am zweckmäßigsten. Sie ist in den Diagrammen der Abbildung 5.6 für die vom Fan stromab abgestrahlten und für die am Kanalaustritt stromauf reflektierten Moden dargestellt. Die Schallleistungen sind unter Verwendung der Gleichungen (2.59) und (2.60) für jede azimutale Ordnung aufsummiert. Diese kompakte Darstellung ermöglicht eine direkte Gegenüberstellung mit Modellvorhersagen und wird oft für einen Vergleich verschiedener Testkonfigurationen bevorzugt. Im Vergleich zur Abbildung der Amplituden fallen hier die Abweichungen des Mikrofonrechenarrays und des wandbündigen Mikrofonarrays für die stromab laufenden Moden der Ordnungen  $-13 \leq m \leq 13$  noch geringer aus. Auffallend sind die annähernd gleich großen Pegel der Moden der Ordnungen  $|m| > 13$ , die mit den Mikrofonrechen RMD<sub>2</sub> für die stromab und stromauf laufenden Moden festgestellt wurden. Solch hohe Reflexionen am Versuchsstreckenaustritt sind unrealistisch und daher ein weiterer Ausdruck der Fehleranfälligkeit des RMD<sub>2</sub>-Arrays in diesem Parameterbereich. Für die Gesamtleistungsbewertung entsprechend der Gleichungen (2.56) und (2.57) spielen die festgestellten Differenzen jedoch keine Rolle, da die Amplituden von Moden nahe der Cut-on-Grenze in der Leistungsbewertung geringer gewichtet werden. Für die stromab laufenden Moden beträgt die Differenz der Gesamtschallleistungen nur  $\Delta P^+ = P_{RMD_3}^+ - P_{RMD_2}^+ = 0.1 \text{ dB}$ . Für die stromauf laufenden Moden gilt  $\Delta P^- = -4.8 \text{ dB}$ .

Etwas anders stellt sich die Situation im oberen Frequenzbereich dar: Abbildung 5.7 zeigt die Modenamplituden und Standardabweichungen der stromauf laufenden Moden für die 3BPF-Harmonische bei der relativen Drehzahl von 80%, welche einer Frequenz von  $kR = 60.19$  entspricht. Zusätzlich zu den Differenzen an den Cut-on-Grenzen sind größere Abweichungen insbesondere für Moden der azimutalen Ordnungen  $-20 \leq m \leq 20$  und der radialen Ordnungen  $n = 0$  und  $n = 1$  zu erkennen. Der Standardabweichungsanalyse zufolge können diese vermutlich auf die systembedingten erhöhten Messungsgenauigkeiten des RMD<sub>3</sub>-Arrays zurückgeführt werden. Hiermit nicht erklärbar, aber besonders auffällig, sind zudem die hohen Pegeldifferenzen der dominanten Moden  $(-24, 0), (-24, 1), (-19, 1), (16, 1), (16, 2), (18, 1), (18, 2), (23, 1)$  und  $(23, 2)$ . Eine relativ gute Übereinstimmung gibt es bei den Amplituden der radialen Ordnungen  $n = 4$  bis  $n = 6$ . Auffällig ist, dass insbesondere für das Array RMD<sub>2</sub> die Amplituden der radialen Ordnungen  $n = 6$  und  $n = 7$  mit den Kurven der Standardabweichungen zusammen fallen.

Größere Differenzen zwischen den Arrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub> zeigen auch die Schall-

---

<sup>1</sup> In Abschnitt 7.5 wird gezeigt, dass beispielsweise bereits geringe Abweichungen in den Phasenbeziehungen symmetrisch angeordneter Quellen für eine signifikante Anregung von Moden ausreichen, die sich ansonsten aufgrund symmetriebedingter destruktiver Interferenzen nicht ausbreiten würden.



(a) Modenamplituden.

(b) Standardabweichungen.

Abbildung 5.7: Modenamplituden und Standardabweichungen der stromab laufenden Moden der 3BPF-Komponente des UFFA-Rig als Ergebnisse der Modenanalysen mit den Arrays RMD2 und RMD3 bei einer relativen Rotordrehzahl von 80%.

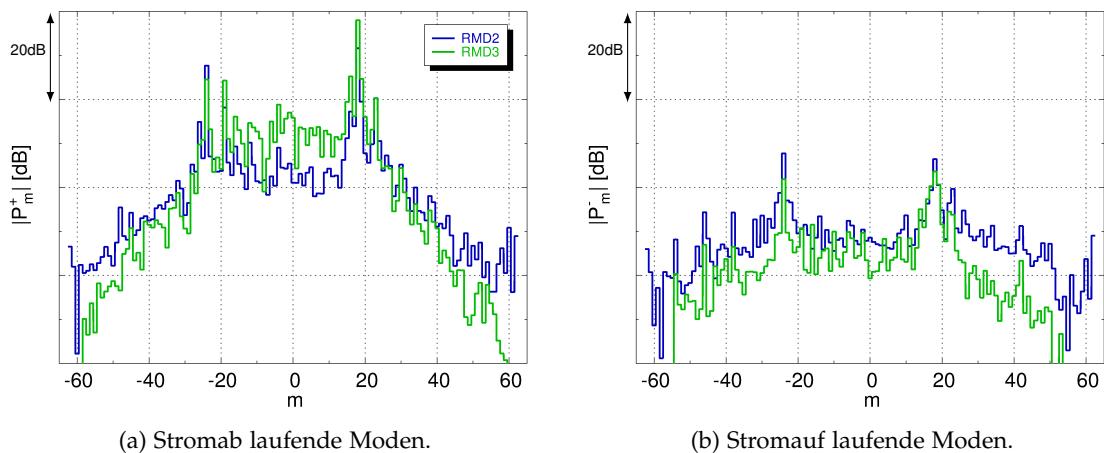


Abbildung 5.8: Schallleistungen der azimutalen Modenordnungen aus der Analyse der 3BPF-Komponente des UFFA-Rig mit den Arrays RMD2 und RMD3 bei einer relativen Rotordrehzahl von 80%.

leistungen der einzelnen azimutalen Ordnungen, die in Abbildung 5.8 zu sehen sind. Die Pegel der dominanten Rotor-Stator-Interaktionsmoden  $m = -24$  und  $m = 18$  differieren in den Analysen der beiden Arrays um 3 dB bzw. 6 dB. Letztere Pegeldifferenz dominiert aufgrund der Dominanz der Mode  $m = 18$  auch die Differenz der Gesamtschallleistungen:  $\Delta P^+ = 5.2$  dB. Für die stromauf laufenden Moden gilt  $\Delta P^- = 3$  dB.

#### 5.1.4 Mögliche Gründe für abweichende Analyseergebnisse

Durch die vorliegende Studie ist der Nachweis erbracht, dass mit wandbündigen Mikrofonarrays bei hohen Frequenzen Modenanalysen in der gleichen Qualität wie mit Mikrofonrechen durchgeführt werden können. Zwischen den beiden Messverfahren sind jedoch unbefriedigend hohe Differenzen fest zu stellen – die allerdings nicht den Schluss zulassen, dass eines der beiden Arrays generell besser geeignet ist. Es kann eine Einteilung in folgende Kategorien vorgenommen werden:

1. Ungenauigkeiten in der Analyse von Moden nahe der Cut-on-Grenze mit dem aus Mikrofonrechen bestehenden Array RMD<sub>2</sub>.
  2. Ungenauigkeiten in der Analyse von Moden niedriger azimutaler und niedriger radialer Ordnungen bei hohen Frequenzen mit dem wandbündigen Array RMD<sub>3</sub>.
  3. Abweichungen, die sich nicht eindeutig auf die Eigenschaften von Array RMD<sub>2</sub> oder RMD<sub>3</sub> zurückführen lassen.

Die Ungenauigkeiten der ersten beiden Kategorien konnten mithilfe der Standardabweichungsanalyse identifiziert werden, ihre Ursachen wurden in Kapitel 4 bereits eingehend untersucht. Mögliche Erklärungen für Abweichungen der dritten Kategorie werden im Folgenden diskutiert.

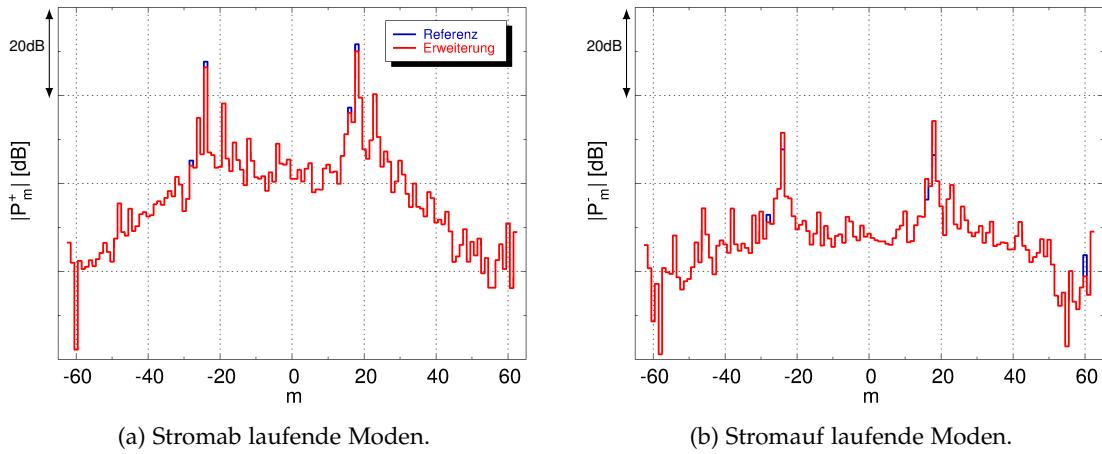


Abbildung 5.9: Schallleistungen der azimutalen Modenordnungen aus der Analyse der 3BPF-Komponente des UFFA-Rig mit dem Array RMD2 bei einer relativen Rotordrehzahl von 80%. Die mit *Referenz* bezeichneten Daten entsprechen den in Abbildung 5.8 dargestellten Spektren. In der mit *Erweiterung* bezeichneten Analyse wurden zusätzlich aerodynamische Moden berücksichtigt.

## *Streuungen und Reflexionen am Rechenkörper*

An den relativ massiven Rechenkörpern können einlaufende Moden spürbar reflektiert und in andere Ordnungen gestreut werden. Es ist davon auszugehen, dass das Ausmaß der Reflexionen von der Verblockung des Kanals abhängt, welche effektiv mit dem Einfallwinkel der Mode relativ zum Rechenkörper variiert, vgl. die Arbeit von Hanson zur Reflexion von Moden an Schaufelreihen [47]. Moden mit großen Ausbreitungswinkel werden stärker reflektiert. Zudem können Streuungen in andere radiale und azimutale Ordnungen auftreten. Es ist davon aus zu gehen, dass die Reflexionen und Streuungen an Mikrofonrechen der ersten Ebene stärker von den Rechen der zweiten Messebene detektiert werden und umgekehrt.

Einbautoleranzen der Rechen

Eine weitere potentielle Fehlerquelle ist mit Einbautoleranzen der Rechen verbunden, die im allgemeinen unbekannt sind. Für eine Einschätzung der Empfindlichkeit wurde vom Autor eine Studie [134] durchgeführt. Es wurden Messdaten auf Gittern simuliert, deren Koordinaten von den tatsächlichen Messkoordinaten entsprechend individuellen Verdrehungen oder Verkippungen eines Rechen abwichen. Die auf verschiedene Raumkoordinaten bezogenen Einbautoleranzen wirken sich auf unterschiedliche Modenordnungen aus. Bereits wenige Zehntel Millimeter axialer Versatz oder eine Verschiebung der Rechen um Bruchteile eines Grads in Umfangsrichtung können zu Fehlern in den Modenamplituden führen, deren Größenordnungen mit den Auswirkungen von überlagerten turbulenten Druckschwankungen vergleichbar sind.

### *Überlagerte aerodynamische Moden*

Die Interaktion der Rotorströmungsnachläufe mit dem Stator führen nicht nur zur Anregung akustischer Moden, sondern es entstehen auch kohärente aerodynamische Moden. Diese breiten sich mit konvektiver Geschwindigkeit aus. In der vorliegenden Messserie wurden aerodynamischen Moden nachweislich durch die Mikrofone der RMD2-Rechen erfasst [134]. Eine Detektion durch die wandbündigen Mikrofone des RMD3-Arrays konnte nicht festgestellt werden. Die aerodynamischen Moden treten bei den Harmonischen der Blattfolgefrequenzen mit den gleichen azimutalen Ordnungen auf, die nach dem Modell von Tyler und Sofrin [143] für die akustische Anregung vorhergesagt werden. Weckmüller et al [148] haben das Problem der Überlagerung von akustischen und aerodynamischen Moden in der Analyse von CFD-Rechnungen unmittelbar stromab eines Austrittsleitads behandelt. Ihr Ansatz besteht darin, die stromab laufenden aerodynamischen Moden mit den radialen Formfunktionen der akustischen Moden sowie an die konvektive Geschwindigkeit angepassten axialen Wellenzahlen zu modellieren und in der Modenanalyse zu berücksichtigen. Dieser Ansatz wurde an den experimentellen Daten erprobt und führte zu einer Reduktion der ausgewerteten akustischen Pegel der Rotor-Stator-Interaktionsmoden, wie das Beispiel in Abbildung 5.9 zeigt. Die Pegel der stromauf laufenden Moden haben sich in dem modifizierten Anpassungssystem zum Teil erhöht. Die festgestellten Änderungen führen jedoch zu keiner signifikanten Annäherung an die Ergebnisse des RMD3-Arrays. Die Qualität der erweiterten Modenanalyse muss in der experimentellen Anwendung noch eingehender untersucht werden. In der Anwendung auf CFD-Daten unmittelbar stromab einer Fan-Stufe ist die Methode aufgrund der erheblich höheren Datendichte und den geringeren Störeinflüssen möglicherweise robuster. Zu klären ist zudem der Einfluss der in der vorliegenden Anwendung langen Ausbreitungsstrecke bis zum Array RMD2.

### *Strömungsgrenzschichten an den Kanalwänden*

Bei der Ableitung der Modenformfunktionen wurde eine stationäre Strömung mit einem vom Kanalquerschnitt unabhängigen axialen Strömungsprofil vorausgesetzt. Im vorliegenden Fall besteht die wesentliche Abweichung zu dieser Annahme in der Existenz von Strömungsgrenzschichten an den Kanalwänden. Die Grenzschichten wirken sich nach Aussage verschiedener theoretischer Studien [12, 72, 74] in Modifikationen sowohl der radialen Modenformfunktionen als auch der axialen Wellenzahlen aus. Das Ausmaß der Abweichungen zum kastenförmigen Strömungsprofil hängt dabei u. a. von der Frequenz sowie den Modenordnungen ab und kann beträchtlich sein. Angesichts der verschiedenen Ansätze, in denen primär entweder das radiale Schalldruckmuster über den Querschnitt oder das axiale Schalldruckmuster an der Wand hinsichtlich der modalen Zusammensetzung analysiert wird, ist es plausibel, dass der Grenzschichteneinfluss sich in unterschiedlicher Weise auf die Ergebnisse der Arrays RMD2 und RMD3 auswirkt. Konkrete Aussagen bezüglich der Relevanz des Grenzschichteffekts bedürfen weiterer umfangreicher Untersuchungen.

## 5.2 EINFLUSS VON MESSDAUER UND AUFBAU DES MESSGITTERS

Eine ideale Bewertungsgrundlage für den Einfluss von der Messdauer und der Messgittergestaltung auf die Analysegenauigkeit stellt das an der Technischen Universität Graz befindliche 1,5-stufige Niederdruck-Turbinenrig dar. Es wurde explizit für aeroakustische Untersuchungen konzipiert und bietet als Vorteile u. a. eine Versuchsstrecke von durchgehend konstantem Kanalquerschnitt sowie klar trennbare Schaufelreihen-Interaktionen. Eine Übersicht über die Referenzkonfiguration des Prüfstands ist in Abbildung 1.4 gegeben. Abbildung 5.10 gibt einen detaillierten Einblick in die Messsektion. An dem Rig wurden umfangreiche Messungen durchgeführt [132, 136]. Informationen zum Prüfstand und zur Messdurchführung sind in Anhang H zu finden.

### 5.2.1 Spezifikation des Mikrofonarrays

Für die Spezifikation des Sensorarrays wurde das Ziel formuliert, Modenanalysen bis zu einer maximalen Frequenz von  $kR = 70$  durchzuführen, zusammen mit der Anforderung, dass die Gesamtlänge der Messsektion 2.1 Kanalradien nicht überschreitet. Bei der höchsten Frequenz muss das Schallfeld in circa 1800 Moden zerlegt werden, wobei die maximale azimutale Ordnungen  $\max|m|=72$  und die maximale radiale Ordnung  $\max(n)=8$  beträgt, vgl. Abbildung H.1. Es wurden Simulationsrechnungen mit allen vier verschiedenen Basis-Sensoranordnungen A-I bis A-IV mit unterschiedlichen axialen und radialen Sensoranzahlen  $N_x$  und  $N_r$  durchgeführt [135]. Den wandbündigen Arrays wurde aufgrund der geringeren Beeinflussung der Strömung und des Schallfelds Vorzug gegeben. Als Optimum stellte sich die Verwendung von  $N_x = 12$  axialen Messpositionen in Anordnung A-III mit einem äquidistantem Abstand von  $\Delta x_{\text{opt}}/R = 0.032$  jeweils in der Gehäusewand und in der Nabe heraus<sup>2</sup>. Die Länge des Sensorarrays beträgt  $L_x/R = 0.352$  und ließ sich damit gut in den Prüfstand integrieren. Abbildung 5.10 zeigt die Einbausituation. Die Mikrofone wurden zur Erleichterung der Installation in der Nabe wandbündig in Platten vormontiert. Aufgrund der Mikrofonabmessungen mussten die Mikrofone in zwei Reihen zu jeweils sechs Mikrofonen montiert werden. Wie auf dem rechten Foto zu sehen ist, waren dabei in axialer Richtung aufeinander folgende Mikrofone jeweils in einem Winkel von  $12^\circ$  gegeneinander versetzt. Zur Abtastung des in Tabelle 5.3 angegebenen vollen Messgitters wurde das Mikrofonarray in Schritten von jeweils  $2^\circ$  traversiert.

### 5.2.2 Signal-Rausch-Abstand der Schalldruckmessungen

Die gemessenen Zeitreihen des Schalldrucks wurden mit Hilfe des Verfahren der adaptiven Neuabtastung analysiert. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.11 für die Betriebspunkte Cutback und Sideline dargestellt. Die rotorkohärenten Spektren und Autoleistungsspektren resultieren aus einer Mittelung über die 2160 Messpositionen der Kanalaussenwand und sind als Funktion der Harmonischen der Wellendrehzahl (engl. *engine order, EO*) aufgetragen. Schallfeldanteile, die nicht vollständig mit der Wellengeschwindigkeit korrelieren, werden deutlich sichtbar unterdrückt. Dies gilt auch für die starken schmalbandigen Störkomponenten, die in Frequenzbändern etwas unterhalb der BPF, zwischen

<sup>2</sup> Der normierte Sensorabstand  $\Delta x''_{\text{opt}}/R = 0.0863$  weicht von dem in Tabelle 4.2 angegebenen Wert aufgrund unterschiedlicher angewandter Genauigkeitskriterien ab.

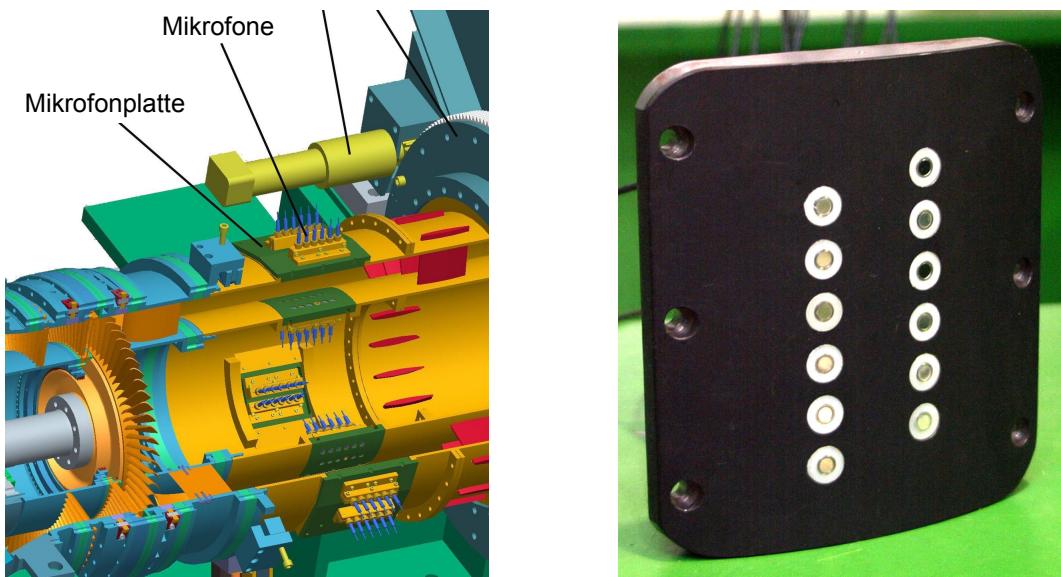


Abbildung 5.10: Schnittzeichnung der Messsektion des Turbinenrads der TU Graz und instrumentierte Mikrofonplatte [91]

BPF und 2BPF sowie zwischen 2BPF und 3BPF auftreten, die aber nicht auf eine Rotor-Stator-Interaktion zurück gehen und für die keine plausible Erklärung gefunden wurde. Bei der Sideline-Betriebsbedingung ist im Autoleistungsspektrum die Energie der BPF-Harmonischen über relativ große Seitenbänder verschmiert. Dies ist auf Drehzahlenschwankungen zurück zu führen. Sie lagen beim Betriebspunkt Sideline im Bereich von  $\pm 1.5\%$ , während sie unter Cutback-Bedingungen nur etwa  $\pm 0.14\%$  betragen. Als Beispiel sei die 3-fache Blattfolgefrequenz genannt, welche der 216-fachen Wellendrehharmonischen entspricht und deren Verschmierung sich im Autoleistungsspektrum ohne adaptive Neuabtastung über  $\pm 0.015 * 216 = \pm 3.24$  EO bzw. über ein Frequenzband von etwa 340 Hz erstreckt. Mit der adaptiven Neuabtastung wird dies sehr effektiv korrigiert und es ergeben sich bis zu 10 dB höhere Pegel für die BPF-Harmonischen.

Das unterschiedliche Ausmaß der Drehzahlenschwankungen spiegelt sich auch in der Analyse des Signal-Rausch-Abstands wider. Das Ergebnis ist in Tabelle 5.4 zusammen gefasst, eine ausführliche Darstellung findet sich in Abschnitt H.4 des Anhang. Schon bei Auswertung nur eines einzigen FFT-Fensters, d. h. ohne Mittelung, beträgt bei Cutback der Signal-Rausch-Abstand der BPF und 2BPF-Harmonischen mehr als  $SNR_p = 16$  dB. Beim Betriebspunkt Sideline sind es hingegen 13.1 dB bei der BPF-Harmonischen und

---

Anzahl axialer Mikrofonpositionen $N_x$	12
Anzahl radialer Mikrofonpositionen $N_r$	2
Messpunkte in Umfangsrichtung $N_\phi$	180
Gesamtzahl Messpunkte $N_x \times N_r \times N_\phi$	4320

---

Tabelle 5.3: Standardmäßig verwendetes Messgitter für Modenanalysen am 1,5-stufigen Turbinenrad der TU Graz.

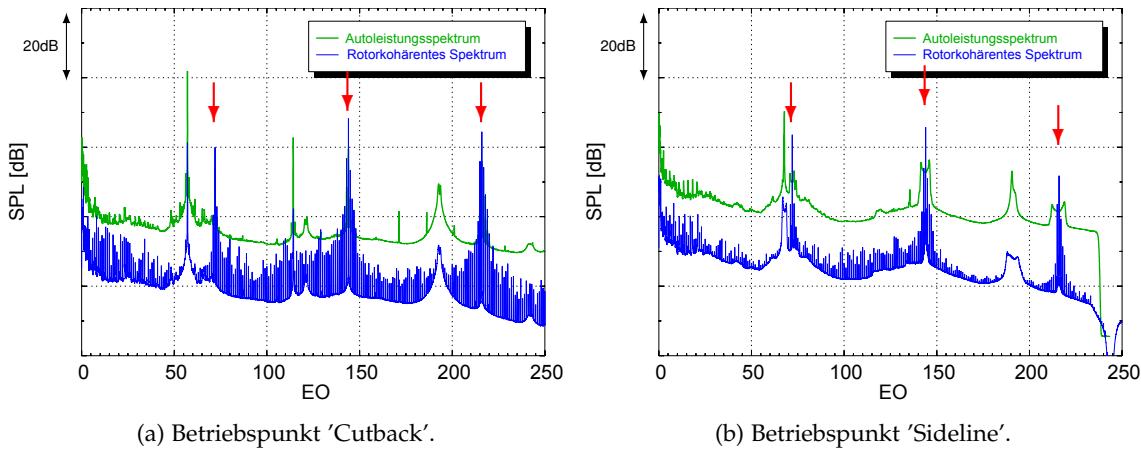


Abbildung 5.11: Autoleistungsspektrum und rotorkohärentes Schalldruckspektrum im Austritt des Turbinenrigs. Jedes Spektrum ist das Ergebnis einer FFT über 15 s und wurde über 2160 Messpositionen an der Kanalausenwand gemittelt. Die roten Pfeile markieren die Harmonischen der Blattpassierfrequenz.

nur 5.1 dB bei 2BPF-Harmonischen. Möglicherweise ist die Signalqualität der 2BPF-Harmonischen durch Überlagerung mit einer der eingangs erwähnten schmalbandigen Störkomponenten beeinträchtigt. Durch Mittelung über die volle Messdauer von 15 s wird der Signal-Rausch-Abstand um 14 bis 17 dB verbessert.

### 5.2.3 Modenanalyse mit vollständigem Messgitter und 15 s Messdauer

In den Abbildungen 5.12 und 5.13 sind die Ergebnisse der Modenanalysen der BPF- und 2BPF-Harmonischen beim Betriebspunkt Sideline dargestellt<sup>3</sup>. Die Schallfeldanalysen wurden mit dem in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Verfahren durchgeführt. Abgebildet

3 Die Ergebnisse für den Betriebspunkt Cutback sind in den Abbildungen H.7 und H.8 im Anhang H zu finden

		$N_w$	$\text{SNR}_p$ [dB]
Cutback	BPF	1	17.3
	BPF	45	34.4
	2BPF	1	16.3
	2BPF	45	31.8
Sideline	BPF	1	13.1
	BPF	48	28.4
	2BPF	1	5.1
	2BPF	48	19.0

Tabelle 5.4: Standardabweichungen und Signal-Rausch-Abstände der Schalldruckamplituden der BPF- und 2BPF-Komponenten des Turbinenrigs an verschiedenen Betriebspunkten. Die Mittlungsduer der Analysen ist durch die Anzahl FFT-Fenster  $N_w$  gegeben.

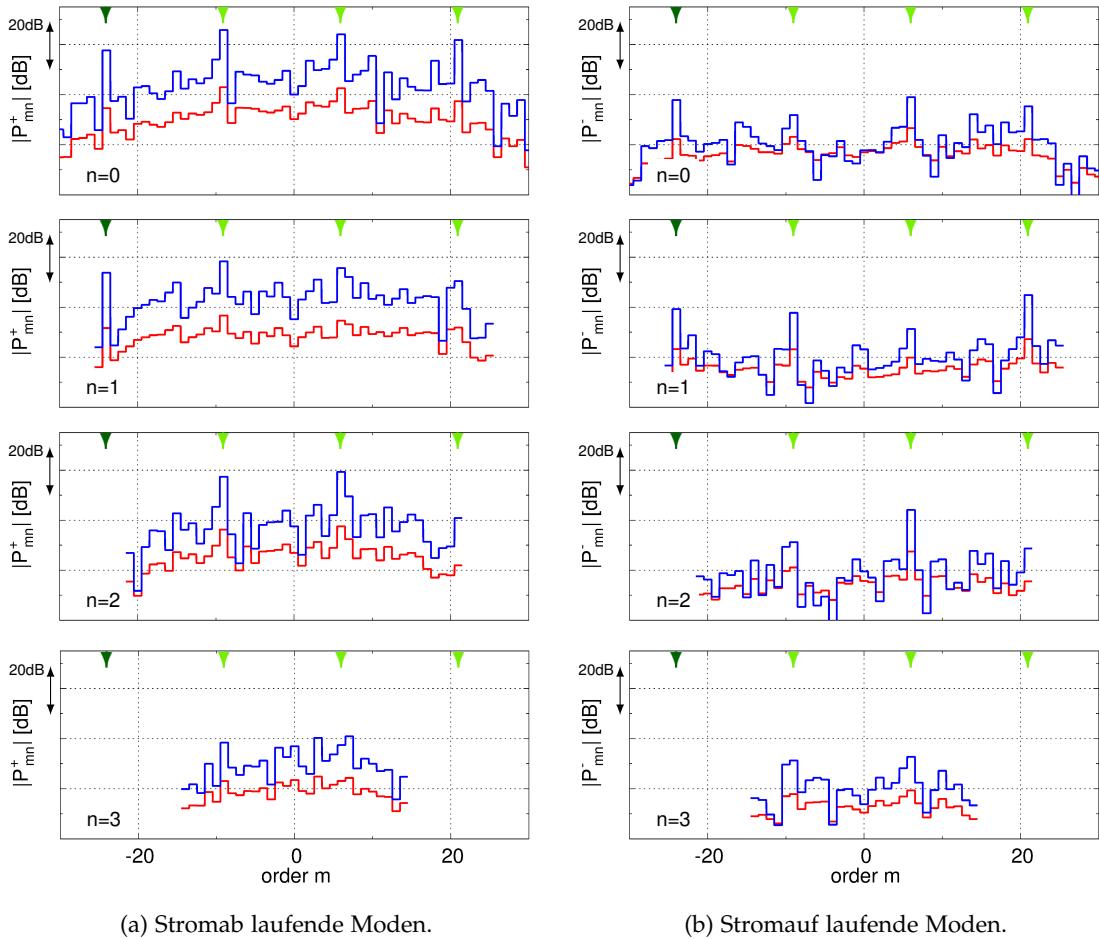


Abbildung 5.12: Schallleistungen (blaue Linien) und Standardabweichungen (rote Linien) aller Moden als Ergebnis der Radialmodenanalyse der BPF-Komponente des Turbinenrads beim Betriebspunkt Sideline. Durch Pfeile gekennzeichnete Moden gehen auf die Interaktion von Stator und Rotor zurück.

sind die Schallleistungen jeder Mode und die zugehörigen Standardabweichungen  $S_{mn}^\pm$ . In allen Spektren treten einige azimutale Ordnungen deutlich erkennbar hervor. Sie sind auf die verschiedenen Interaktionen von Eintrittsleitrad, Stator, Rotor und Austrittsleitrad zurück zu führen. Die Strömungsnachlauf- und Potentialfeld-Wechselwirkungen von Stator und Rotor fallen aufgrund des geringen axialen Abstands dieser Schaufelreihen am Stärksten aus. Der Übersichtlichkeit halber sind in den nachfolgend dargestellten Modenspektren nur diese Interaktionsmoden gekennzeichnet.

Bei der Grundharmonischen der Blattfolgefrequenz  $kR = 30.96$  werden gemäß der Formel von Tyler und Sofrin aus Gleichung (1.2) durch den Stator mit 96 Schaufeln und den Rotor mit 72 Blättern nur Moden der azimutalen Ordnung  $m = -24$  ausbreitungsfähig angeregt. Sie sind in Abbildung 5.12 durch einen dunkelgrünen Pfeil markiert. Auf dem Ausbreitungsweg zur Messsektion entstehen aus den Rotor-Stator-Interaktionsmoden durch Streuung am Austrittsleitrad mit 15 Schaufeln noch weitere Moden:  $m = -24 - k \cdot 15$  mit  $k = -1, -2, -3$ . Sie sind durch hellgrüne Pfeile gekennzeichnet.

Bei der 2BPF-Harmonischen  $kR = 61.92$  sieht das Modenspektrum noch signifikanter

aus. Gemäß Tyler und Sofrin sind Rotor-Stator-Interaktionsmoden bei zwei azimutalen Modenordnungen zu erwarten:  $m = -48$  und  $m = 48$ . Deutlich sichtbar sind allerdings nur die Moden der Ordnung  $m = 48$ , welche in Abbildung 5.13 durch einen dunkelblauen Pfeil markiert sind. Die mit hellblauen Pfeilen markierten Moden der Ordnungen  $m = 48 - k \cdot 15$  mit  $k = 1, \dots, 7$  resultieren aus Streuungen am Nachleitrad. Interessanterweise besitzen die Streumoden teilweise sehr viel höhere Pegel als die einfallenden Moden, d. h. es hat durch den Streuvorgang eine erhebliche Umverteilung der Schallleistung statt gefunden. Auffällig ist dabei, dass bei manchen Moden die Schallleistung mit der radialen Ordnung zunimmt, siehe z. B. die Moden der Ordnung  $m = 33$ , während bei anderen Moden eher die entgegen gesetzte Tendenz zu beobachten ist, siehe z. B. die Moden der Ordnung  $m = -12$ .

Sowohl bei der BPF- als auch bei der 2BPF-Harmonischen sind die Pegel der reflektierten Moden stets deutlich geringer. Es ist bekannt, dass Reflexionen an Kanalquerschnittsänderungen, wie hier stromab der Messsektion, nur in der Nähe von Cut-on-Frequenzen von Bedeutung sind [155]. Da somit das Spektrum der reflektierten Moden den Erwartungen entspricht, kann dies als Indiz für eine gute Analysequalität angesehen werden.

Die durch rote Linien dargestellten Standardabweichungen liegen bei der BPF-Harmonischen deutlich unterhalb der modalen Schallleistungen. Bezogen auf die Pegel der stromab laufenden Moden, die sich keiner Schaufelreiheninteraktion zuordnen lassen, beträgt der Abstand -20 dB bis -10 dB. Bei der 2-fachen BPF-Harmonischen des Betriebspunkt Sideline hingegen fallen die Kurven der Standardabweichungen mit den Pegeln der nicht identifizierbaren Moden zusammen. Die höhere Fehlerempfindlichkeit war nach der SNR-Analyse der Schalldruckmessungen zu erwarten. Fehlerverstärkend wirken sich zudem die schlechtere Matrixkondition und der geringere Fehlerausgleich aufgrund der hohen Modenzahl aus. Allerdings beträgt der Pegelabstand der dominanten Stator-Rotor-Interaktionsmoden zur Standardabweichung immer noch mindestens 10 dB, bei den sehr dominanten Moden sogar mehr als 20 dB. Auffällig sind die unterschiedlichen mittleren Verläufe der Standardabweichungen der Ordnungen  $n = 1$  und  $n = 2$  mit lokalen Minima im Bereich der azimutalen Ordnungen  $m = 0$  bzw.  $m = \pm 25$  bei den 2BPF-Harmonischen. Wie in Abschnitt 4.3.2 beschrieben, sind sie typisch für eine Modenanalyse mit einem Sensorarray, in dem sich Mikrofone in der Kanalausenwand und in der Nabe befinden. Die Pegel der nicht identifizierbaren Moden variieren beim Betriebspunkt Sideline in etwa der gleichen Weise.

Insgesamt gesehen kann die Qualität der Messdaten als sehr hoch eingestuft werden. Die charakteristischen Schallleistungsverteilungen über die Radialmoden enthalten umfassende Informationen über die Schallquellmechanismen, Schallquellpositionen und Schallausbreitungsvorgänge, und stellen damit eine gute Grundlage für die Validierung von Vorhersageverfahren dar. Der Vergleich der Modenanalyseergebnisse mit einem semi-analytischen Modell sowie mit numerischen Simulationen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung [13, 14, 15].

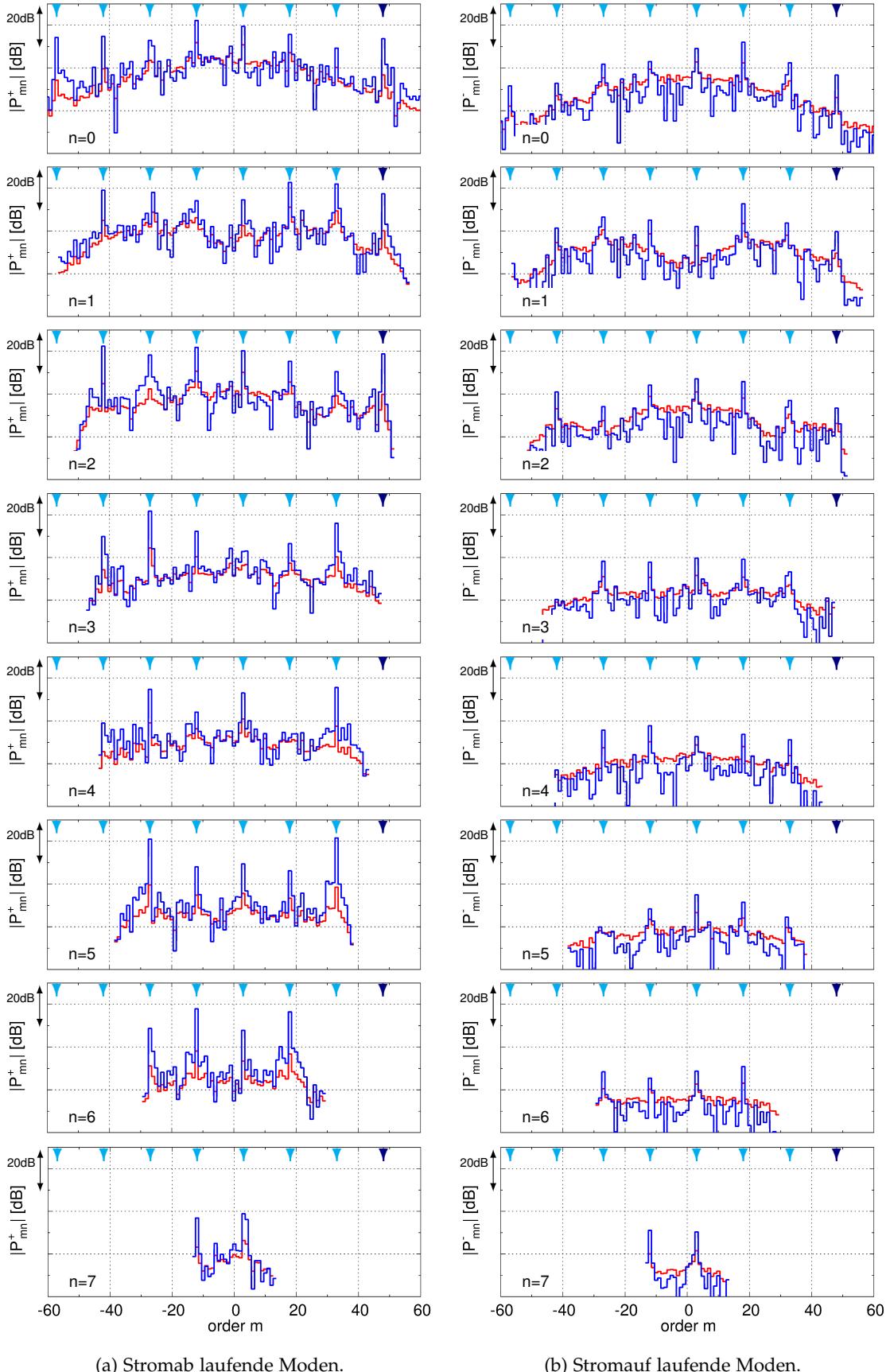


Abbildung 5.13: Schallleistungen (blaue Linien) und Standardabweichungen (rote Linien) aller Moden aus der Radialmodenanalyse der 2BPF-Komponente des Turbinenrigs beim Betriebspunkt Sideline. Durch Pfeile gekennzeichnete Moden gehen auf die Interaktion von Stator und Rotor zurück.

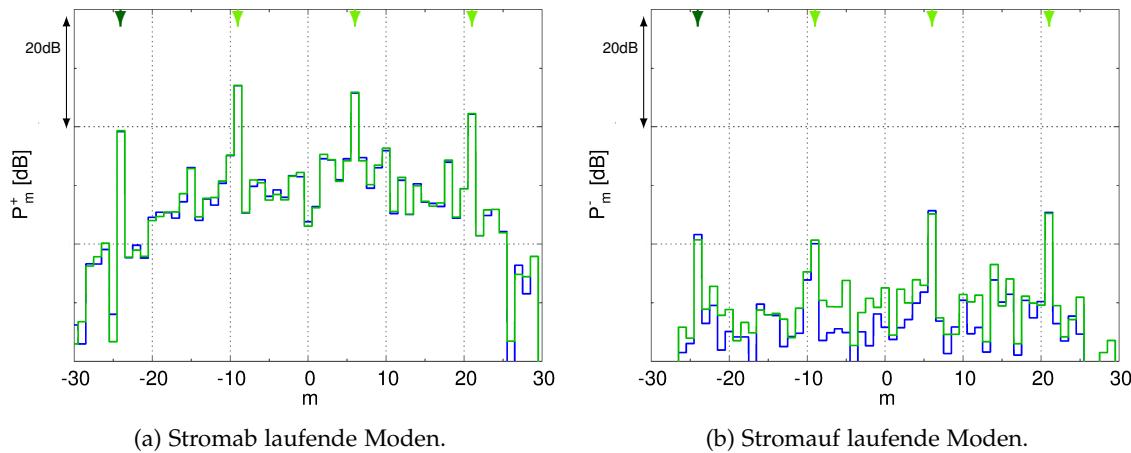


Abbildung 5.14: Schallleistungen der azimutalen Modenordnungen aus der Analyse der BPF-Komponente des Turbinen-Rigs über 48 Zeitfenster (blaue Linien) bzw. 1 Fenster (grüne Linie) beim Betriebspunkt Sideline.

#### 5.2.4 Einfluss der Messdauer auf die Analysequalität

Aus praktischer Sicht stellt sich die Frage, wie sich eine Verkürzung der Messdauer auf die Genauigkeit der Modenanalyse auswirkt. Die extremste Verkürzung stellt die Verwendung nur eines FFT-Fensters dar. Im Sideline-Betriebspunkt umfasst ein FFT-Fenster nur 32 Wellenumdrehungen, was einer Messdauer von etwa 0.3 s entspricht. Der Signal-Rausch-Abstand reduziert sich drastisch auf die in Tabelle 5.4 angegebenen Werte. Trotzdem sind die Auswirkungen überraschend gering. Die Abbildungen 5.14 und 5.15 zeigen eine Gegenüberstellung mit den Ergebnissen der Standardmessdauer für die BPF- und 2BPF-Harmonische beim Betriebspunkt Sideline<sup>4</sup>. Für eine kompaktere Darstellung wurden die Schallleistungen der radialen Ordnungen entsprechend der Gleichungen (2.59) und (2.60) aufsummiert. Selbst bei der 2BPF-Harmonischen können die stromab laufenden dominanten Rotor-Stator-Interaktionsmoden mit nahezu derselben Genauigkeit ermittelt werden, wie bei Verwendung der 48-fachen Messdauer. Bei der BPF-Harmonischen ist noch nicht mal eine Pegelerhöhung von Modenordnungen zu beobachten, die keiner Schaufelreiheninteraktion zugeordnet werden können. Hieraus können mehrere Folgerungen gezogen werden.

Es besteht ein großes Potential für schnelle Modenanalysemessungen. Angesichts der kurzen Messdauer pro Position, könnte die Messung alternativ zur schrittweisen Traversierung mit kontinuierlicher Drehung der Mikrofonsektion durchgeführt werden. Bei der Konzeption der schnellen Messung muss bedacht werden, dass die Genauigkeit der Analyse neben einem hinlänglichen Signal-Rausch-Abstand auch vom Grad der Überbestimmung des Analysesystems abhängt. Im vorliegenden Fall der 2BPF-Harmonischen am Sideline-Betriebspunkt wurden 1372 Moden auf einem Messgitter mit 4320 Positionen ausgewertet.

Bereits in Abschnitt 5.1.3 wurden Indizien dafür gefunden, dass auch solche Moden,

<sup>4</sup> In Anhang H sind in Abbildung H.12 für die 2BPF-Harmonische die Pegel der einzelnen radialen Ordnungen dargestellt. Resultate für den Betriebspunkt Cutback zeigen die Abbildungen H.9 und H.10.

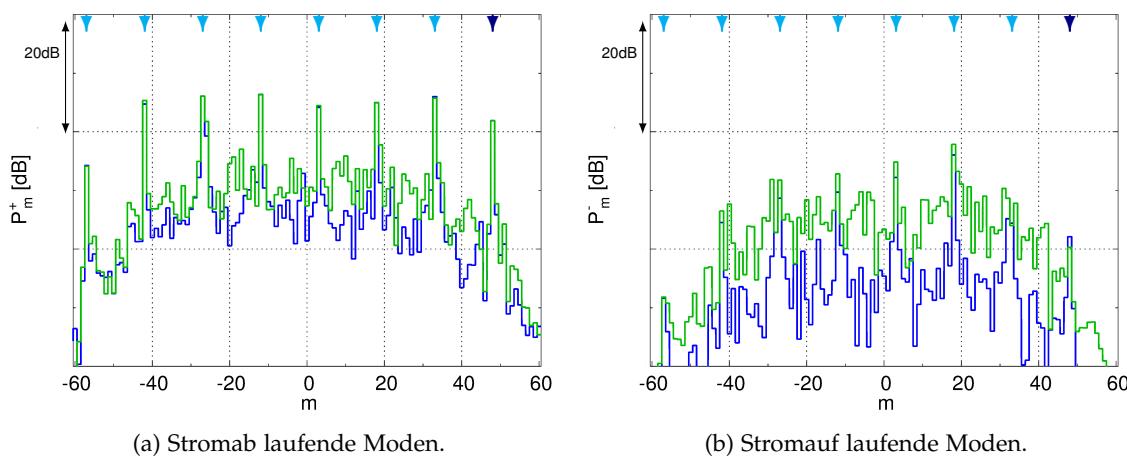


Abbildung 5.15: Schallleistungen der azimutalen Modenordnungen aus der Analyse der 2BPF-Komponente des Turbinen-Rigs über 48 Zeitfenster (blaue Linien) bzw. 1 Fenster (grüne Linie) beim Betriebspunkt Sideline.

die nicht direkt auf Schaufelreihen-Interaktionen zurückführbar sind, kohärent durch Schallquellen des Versuchsträgers angeregt angeregt worden sein können und deshalb in der Gesamtbewertung der Geräuschentstehung gegebenenfalls zu berücksichtigen sind. Die Ergebnisse dieses Abschnitts bekräftigen diese Interpretation. Es hängt allerdings vom Signal-Rausch-Abstand ab, inwiefern die kohärenten Moden im Spektrum sichtbar oder verdeckt sind. Die modalen Standardabweichungen helfen bei der Beurteilung der Situation. Im Fall der BPF-Harmonischen ist die Analysegenauigkeit der stromab laufenden Moden auch bei Verwendung nur eines FFT-Fensters hoch. Die Kurven der modalen Standardabweichungen in Abbildung 5.12 verschieben sich um etwa 10 dB nach oben. Dies ist weniger, als zunächst aufgrund der um 15.3 dB unterschiedlichen Signal-Rausch-Abstände der Schalldruckmessungen zu erwarten ist, lässt sich aber anhand Gleichung (3.45) zur Berechnung der Standardabweichung der Schalleistung  $S_{mn}$  nachvollziehen, in welche nicht nur die Standardabweichung der Modenamplituden  $s_{mn}$  sondern auch die Modenamplituden  $A_{mn}$  eingeht. Offensichtlich erreicht die Kurve der Standardabweichung nur das Niveau von schwächeren Moden, siehe auch Abbildung H.11. In Abbildung 5.16(a) ist die Unsicherheit der modalen Schalleistungen alternativ in Form von Fehlerbalken dargestellt. Aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit sind nur die Endpunkte der Fehlerbalken dargestellt und wurden diese nicht direkt in das Diagramm von Abbildung 5.14 eingezeichnet. Die Fehlerbalken beziehen sich auf die Schallleistungspegel, d.h. es gilt  $\pm\Delta P_m^+ = (P_m^+ \pm S_m^+) / P_m^+$ . Für fast alle azimuthalen Modenordnungen ist der Fehlerbalken kleiner als 2 dB und insbesondere für die Moden, die signifikant zur Gesamtschallleistung beitragen, ist der Fehlerbalken sogar im Bereich von nur 1 dB oder geringer.

Anders stellt sich die Situation bei der 2BPF-Harmonischen dar. Bei Verwendung von 48 Zeitfenstern liegen die modalen Standardabweichungen leicht unterhalb der Pegel der Modenamplituden oder reichen an diese heran. Bei Verwendung von nur einem Zeitfenster hingegen ragen nur noch die dominanten Rotor-Stator-Interaktionsmoden über das Niveau der modalen Standardabweichungen hinaus, siehe Abbildung H.12. Für die sonstigen Moden kann nicht beurteilt werden, ob die Pegel von kohärenten Schallan-

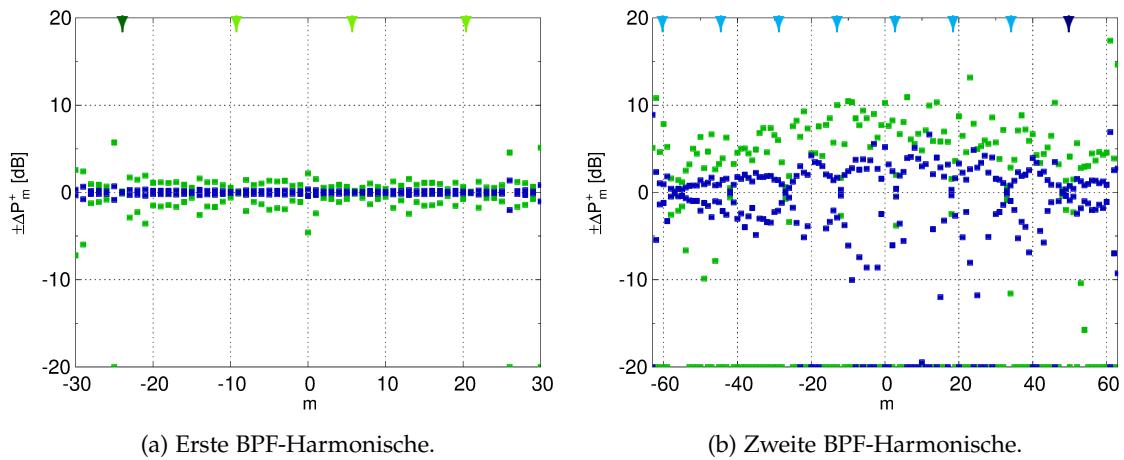


Abbildung 5.16: Relative Unsicherheiten der Schallleistungen der stromab laufenden Moden bei einer Analyse von 1 Fenster (grüne Balken) bzw. 48 Zeitfenstern (blaue Balken) am Betriebspunkt Sideline des Turbinenrigs.

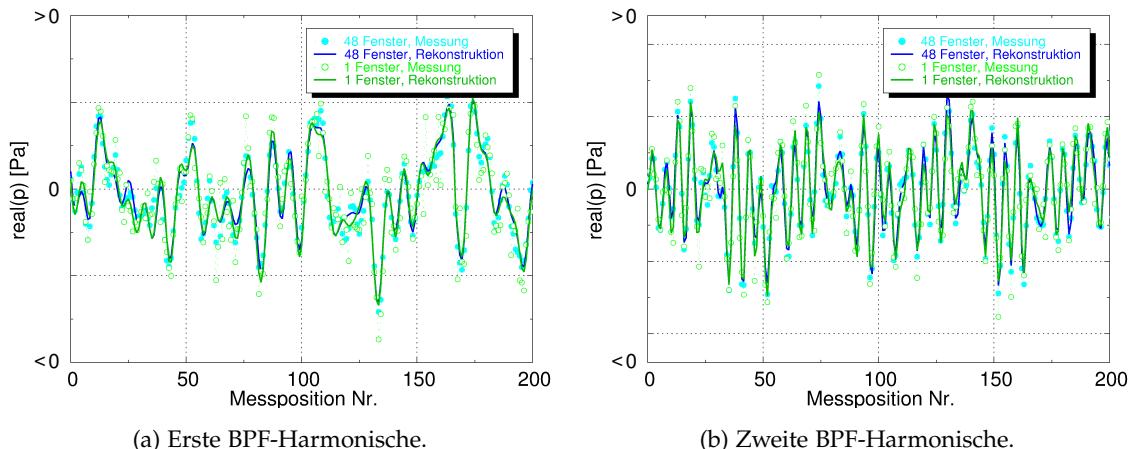


Abbildung 5.17: Gegenüberstellung des gemessenen und des aus den Modenamplituden rekonstruierten Schalldrucks für eine Analyse von 48 Zeitfenstern bzw. 1 Fenster beim Betriebspunkt Sideline des Turbinenrigs. Es ist ein Ausschnitt von 200 Positionen des aus 4320 Positionen bestehenden Messgitters dargestellt.

regungsprozessen stammen oder eine Abbildung von Rauschprozessen darstellen. In Abbildung 5.16 (b) ist dieser Sachverhalt in der Fehlerbalkendarstellung veranschaulicht. Die Analysegenauigkeit der dominanten Stator-Rotor-Interaktionsmoden ist auch bei Verwendung von nur einem FFT-Fenster nach wie vor hoch. Die Gesamtgenauigkeit der Moden  $m = 48$  inklusive der am Austrittsleitrad gestreuten Anteile beträgt nur  $\pm \Delta P_m^+ = +1.1 / -0.5 \text{ dB}^5$ .

Die Qualität der Modenanalyse kann anhand eines weiteren Kriteriums eingeschätzt werden: durch die Abweichungen der Schalldruckamplituden auf dem Messgitter, die sich gemäß Gleichung (C.13) aus der Differenz des gemessenen Schallfelds und des aus den Modenamplituden rekonstruierten Schallfelds ergeben. Abbildung 5.17 zeigt exem-

<sup>5</sup> Weitere Angaben zu den Genauigkeiten, mit denen sich die verschiedenen Schaufelreiheninteraktionen bei den verschiedenen Messdauern bestimmen ließen, sind in den Tabellen H.6 und H.7 zu finden.

plarisch vergleiche für 200 der 4320 Messpositionen. In der Analyse der BPF-Harmonischen über 48 Zeitfenster beträgt die Abweichung 19% und in der Analyse über 1 Fenster beträgt die Abweichung 31%. In der Analyse der 2BPF-Harmonischen betragen die Abweichungen 25% beziehungsweise 37%. Die Differenzen der rekonstruierten Schallfelder, die für die beiden unterschiedlichen Messdauern berechnet wurden, sind allerdings gering – was mit den sehr ähnlichen Modenspektren zusammenhängt. Interessanterweise werden durch den Mittelungsprozess offenbar nicht die Modenspektren verbessert, sondern in erster Linie die Streuung der gemessenen Schalldruckamplituden verringert. Die Schalldruckamplituden werden dabei an den meisten Messpositionen unterschätzt, was möglicherweise eine systematische Unzulänglichkeit der Modenanalyse aufdeckt.

### 5.2.5 Variation des Messgitters

In den bisherigen Analysen der BPF-Harmonischen sind die Gleichungssysteme stark überbestimmt gewesen. Beim Betriebspunkt Sideline wurden die Amplituden von 368 Moden durch Anpassung an 4320 Messpositionen bestimmt. Es gibt mehrere Möglichkeiten das Messgitter unter Beibehaltung einer regelmäßigen Anordnung auf 720 oder 480 Positionen zu reduzieren. Dabei eröffnet sich die Möglichkeit einige der in Kapitel 4 aufgestellten Leitlinien zu verifizieren.

Tabelle 5.5 gibt eine Übersicht über alle Messgitter-Varianten, die unter Einhaltung der in Gleichung (3.25) angegebenen Forderung prinzipiell für eine Analyse der BPF-Harmonischen geeignet sein könnten. Die Anzahl der Umfangspositionen wurde auf  $N_\phi = 60$  begrenzt<sup>6</sup>. Für jedes Messgitter wurde die maximale Analysefrequenz nach dem Genauigkeitskriterium einer modalen Standardabweichung von  $s_{mn}/s_m \leq 1$  ermittelt und in das Diagramm in Abbildung 5.18 eingetragen. Die grauen Linien grenzen den Korridor der in Kapitel 4 optimierten Sensoranordnungen ein und wurde aus Abbildung 4.13 übernommen. Das Diagramm gibt eine erste Einschätzung bezüglich der Eignungen der Messgitter.

Abbildung 5.19 zeigt einen Vergleich der mit den verschiedenen Messgittern ausge-

<sup>6</sup> Dies verhindert die Trennung der Ordnungen  $m = -30$  und  $m = 30$ , was für die hier angestellten Untersuchungen aber nicht weiter relevant ist.

Array ID	$N_x$	$N_r$	$N_\phi$	$N_{pos}$	$d/\Delta x$	$\max(k''R)$	$\kappa$	$\delta A$
12×2-1	12	2	180	4320	1	23.48	4.0	0.40
12×1-1	12	1	60	720	1	6.30	290	29.0
6×2-1	6	2	60	720	1	12.58	21.9	2.05
6×2-2	6	2	60	720	2	13.41	5.1	1.03
4×2-2	4	2	60	480	2	11.30	20.0	2.47
4×2-3	4	2	60	480	3	8.90	16482	513.2

Tabelle 5.5: Für die Radialmodenanalyse der BPF-Komponente des Turbinenrigs verwendete Messgitter.

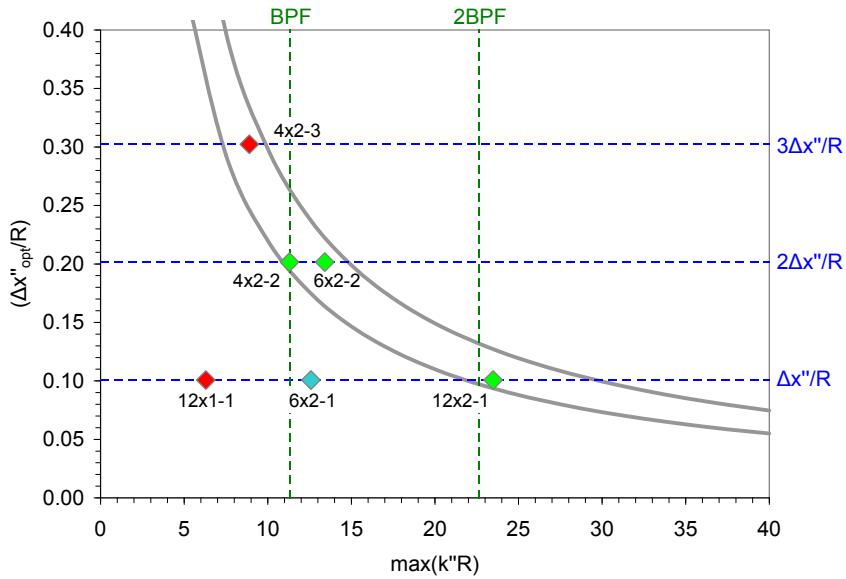


Abbildung 5.18: Einordnung der in Tabelle 5.5 angegebenen Messgitter bezüglich des in Abbildung 4.13 angegebenen Korridors optimaler Sensorabstände unter den Sideline-Betriebsbedingungen des Turbinenrigs.

werteten Modenspektren und die zugehörigen Standardabweichungen. Für die Referenzkonfiguration  $12 \times 2-1$  wurden die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts übertragen. Alle Analysen wurden auf den Datensatz angewendet, der nur ein Zeitfenster umfasst. Eine zur Referenz vergleichbare Analysegenauigkeit besitzt das Array  $6 \times 2-2$ . Der Gesamtfehler der Analyse  $\delta A$  hat sich laut Tabelle 5.5 nur um den Faktor  $1.03/0.4 \approx 2.6$  erhöht, obwohl die Anzahl der Messpositionen um den Faktor 6 reduziert wurde. Die Schallleistung der Stator-Rotor-Interaktionsmoden, in denen die Streuanteile am Austrittsleitrad einbezogen sind, und die Gesamtschallleistung aller Moden sind in Tabelle 5.6 angegeben. Zwischen den Arrays  $12 \times 2-1$  und  $6 \times 2-2$  ist trotz des Unterschieds der modalen Standardabweichungen von etwa 6 dB (vgl. Abbildung 5.19(b)) ein nur geringer Unterschied fest zu stellen. Das Array  $6 \times 2-2$  ist demnach gut für eine schnelle Modenanalyse geeignet. Bei Einsatz von jeweils 6 Mikrofonen in Kanalaufwand und Nabe, und Traversierung des Mikrofonarrays an  $N_\phi = 60$  Umfangspositionen, würde theoretisch eine Gesamtzeit von 18.3 s ausreichen, wobei die Zeit für die Kanaltraversierung hinzugerechnet werden müsste.

Merklich größer sind die Analysegenauigkeiten bei Anwendung des Arrays  $6 \times 2-1$ , in dem der axiale Sensorabstand weit entfernt vom in Abbildung 5.18 markierten günstigen Bereich ist. Dies spiegelt sich in einer größeren Matrixkondition sowie in einer jeweils um 1.5 dB zu großen Abschätzung der Pegel der dominanten Moden und der Gesamtschallleistung wieder. Das Array  $4 \times 2-2$  befindet sich im Korridor optimaler Sensorabstände, aber die maximale Analysefrequenz fällt gerade mit der Blattpassierfrequenz zusammen. Die Analyse mit diesem Array zeigt ähnliche Abweichungen wie das mit Array  $6 \times 2-1$  erzielte Ergebnis.

Für eine Modenanalyse ungeeignet sind die Arrays  $4 \times 2-3$  und  $12 \times 1-1$  (die Ergebnisse wurden daher nicht in Abbildung 5.19 und Tabelle 5.6 dargestellt). Das Array  $4 \times 2-3$  liegt

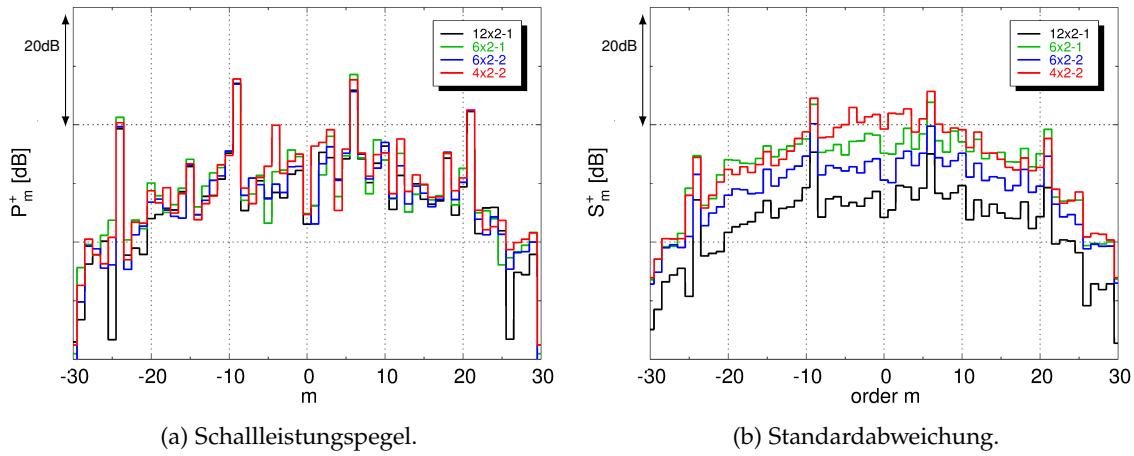


Abbildung 5.19: Schallleistungen der azimutalen Modenordnungen aus der Analyse der BPF-Komponente des Turbinenrigs beim Betriebspunkt Sideline mit den in Tabelle 5.5 angegebenen Messgittern.

Array ID	$N_\phi$	Stator-Rotor-Interaktion		alle Moden	
		$P^+$ [dB]	$\pm\Delta P^+$ [dB]	$P^+$ [dB]	$\pm\Delta P^+$ [dB]
12x2-1	180	0.0 <sup>(*)</sup>	0.2 / -0.2	0.0 <sup>(*)</sup>	0.3 / -0.4
6x2-1	60	+1.5	1.3 / -1.9	+1.5	3.0 / -19.5
6x2-2	60	-0.1	0.9 / -1.1	+0.1	1.9 / -3.5
4x2-2	60	+1.6	1.8 / -3.0	+1.6	4.0 / -

Tabelle 5.6: Relative Schallleistungen der BPF-Komponente des Turbinenrigs beim Betriebspunkt Sideline in der Analyse mit verschiedenen Messgittern und bei Verwendung eines FFT-Fensters (aus Gründen der Vertraulichkeit sind alle Werte *relativ* zu dem mit (\*) gekennzeichneten Schallleistungspegel angegeben). Die Unsicherheiten  $\pm\Delta P^+$  beziehen sich auf die in Abbildung 5.19 dargestellten *Absolut*pegel.

zwar im Korridor optimaler axialer Sensorabstände, die maximale Analysefrequenz ist jedoch niedriger als die Blattpassierfrequenz. Das Array 12x1-1 stellt die einzige Variante dar, in der Mikrofone ausschließlich in der Kanalausenwand installiert sind. Der axiale Sensorabstand ist für die Analyse mit einer solchen Anordnung jedoch viel zu klein und führt bereits bei niedrigen Frequenzen zu einem ähnlich sprunghaften Anstieg der Kondition, wie in Abbildung 4.4 für die Gegenüberstellung der Sensoranordnungen A-III und A-IV zu sehen ist.

### 5.3 REGULARISIERUNG SUBOPTIMALER ARRAYS UND PARTIELLE MODENANALYSE

In einer Versuchsreihe zur aktiven Minderung von Fanschaufeltönen wurden Schallfeldmessungen mit einem wandbündigen Mikrofonarray im Einlauf des DLR-UHBR-Fans am Mehrstuifen-Zweiwellen-Axialverdichter-Prüfstand (M2VP) durchgeführt [27, 137]. Im Vergleich zu den bisher dargestellten Messungen gab es eine besondere Herausforderung: Gemäß den Untersuchungen von Kapitel 4 erfordert die optimale Modenanalyse in einem Kanal ohne Nabenkörper ein Array mit einer relativ großen Zahl axialer Sensor-

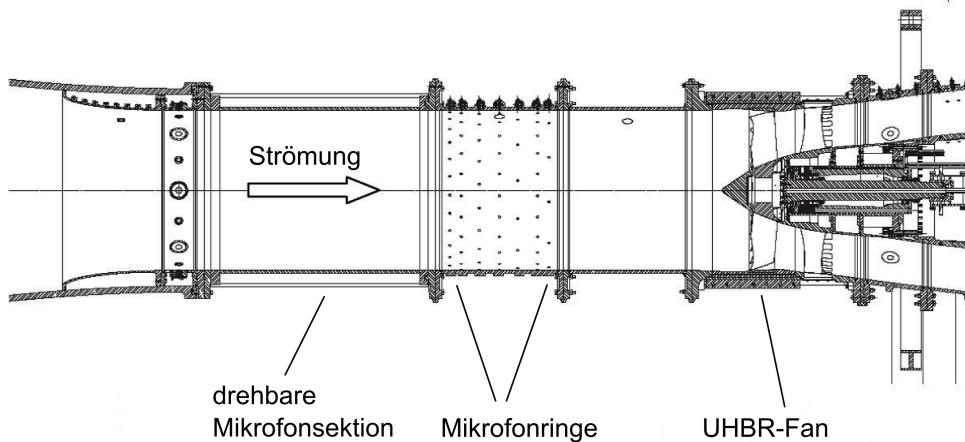


Abbildung 5.20: Mikrofonmesssektionen in der Ansaugstrecke des UHBR-Fans am Verdichterprüfstand M2VP.

positionen sowie mit relativen großen axialen Sensorabständen. Ein Array entsprechender Länge ließ sich aufgrund von Bauraumbeschränkungen nicht realisieren. Stattdessen wurde ein suboptimales Array installiert. In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die mit dem Array verbundene beeinträchtigte Analysegenauigkeit durch Einbindung eines Regularisierungsverfahrens verbessern lässt. Zudem wird gezeigt, dass das Array trotz der Einschränkung für eine Partielle Modenanalyse eingesetzt werden kann.

### 5.3.1 Spezifikation des Mikrofonarrays

Abbildung 5.20 zeigt die Ansaugstrecke des UHBR-Fans am Verdichterprüfstand M2VP, in die zwei Kanalsegmente mit akustischer Instrumentierung integriert wurden<sup>7</sup>. In der vorliegenden Studie wird nur die drehbare Mikrofonsektion betrachtet. Sie ist auch auf dem rechten Foto in Abbildung 3.4 zu sehen und hat einen Durchmesser von 800 mm. Die im Foto als *Array 2* bezeichnete Mikrofonanordnung wurde mit dem Ziel definiert, den maximal verfügbaren axialen Bauraum von etwa 900 mm für eine Modenanalyse mit 60 Mikrofonen optimal zu nutzen. Unter den gegebenen Bedingungen wurde diese Anforderung am besten durch den maximal möglichen axialen Mikrofonabstand von  $\Delta x = 14.5$  mm erfüllt. Aufgrund der Abmessungen der Sensoren musste das Array auf zwei axiale Linien aufgeteilt werden, d. h. jedes zweite Mikrofon wurde in der zweiten Reihe mit einem Versatz von  $4.5^\circ$  in Umfangsrichtung gegenüber der ersten Reihe installiert.

Bezogen auf den Betriebspunkt Approach beträgt der dimensionslose Sensorabstand  $\Delta x' = 0.0373R$  und liegt damit weit entfernt vom optimalen Sensorabstand  $\Delta x'_{opt} = 0.088R$ , siehe das linke Diagramm in Abbildung 5.21. Dargestellt ist die Kondition der Modellmatrix für eine Analyse der Mode  $m = 0$  mit variablem axialen Sensorabstand. Tatsächlich liegt die höchste analysierbare Frequenz mit  $\max(k'R) \approx 18$  nicht einmal so hoch, wie im Optimalfall durch ein Array mit  $N_x = 24$  Sensoren zu erreichen wäre, vgl. Tabelle 4.2. Die axiale Gesamtabmessung eines solchen Arrays würde allerdings bei über 2 m Länge liegen und wäre daher nicht realisierbar.

<sup>7</sup> Informationen zu Fan, Prüfstand und Messdurchführung sind in Anhang I zu finden.

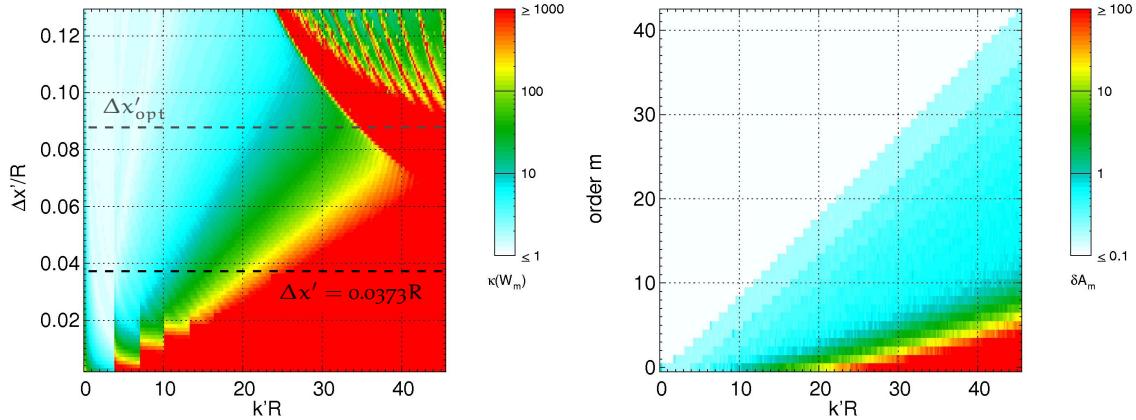


Abbildung 5.21: Modenanalyse mit einem aus  $N_x = 60$  Positionen bestehenden axialen Sensorarray. Das linke Diagramm zeigt die Kondition der Modellmatrix für eine Zerlegung der Mode  $m = 0$  in Abhängigkeit des axialen Sensorabstands. Im rechten Diagramm ist der relative Gesamtfehler bei der Zerlegung jeder azimutalen Ordnung  $m$  mit axialem Sensorabstand  $\Delta x' = 0.0373R$  dargestellt.

Anders stellt sich die Situation bei höheren azimutalen Ordnungen dar. Der Vergleich des rechten Diagramm von Abbildung 5.21 mit dem unteren Diagramm von Abbildung 4.6 zeigt, dass mit Hilfe des Drehkanalarrays eine Modenanalyse der Ordnungen  $2 \leq m \leq 10$  bei erheblich höheren Frequenzen möglich ist, als mit einem optimal gestalteten Array von 24 Sensoren. Dies ist insbesondere für die Analyse der Rotor-Stator-Interaktionsmode  $m = 6$  bei der 2-fachen Blattfolgefrequenz von Vorteil, die Hauptuntersuchungsgegenstand der Testserie war.

### 5.3.2 Ergebnis der Standard-Analyse

Am Betriebspunkt *Approach* entsprach die zu analysierende 2-fache Blattfolgefrequenz einer dimensionslosen Frequenz von  $kR = 17.03$ . Bei dieser Frequenz waren in der Ansaugstrecke des Fans insgesamt 168 stromauf und stromab laufende Moden mit maximaler azimutaler Ordnung  $\max|m| = 15$  und maximaler radialer Ordnung  $\max(n) = 5$  ausbreitungsfähig. Das Spektrum aller modaler Ausbreitungsfaktoren ist in Abbildung 2.3 dargestellt und vermittelt einen Eindruck von der Schwierigkeit die Radialmoden niedriger azimutaler Ordnungen zu trennen. Für die Modenanalyse wurde das Schallfeld auf einem aus 3600 Punkten bestehenden Datengitter abgetastet. Das Gitter wurde durch Traversierung der Messsektion in  $N_\phi = 60$  Schritten zu je  $6^\circ$  aufgebaut.

Das Ergebnis der Modenanalyse mit dem in Abschnitt 3.3.2 beschriebene Verfahren ist in Abbildung 5.22 a) und b) dargestellt. Abgebildet sind die Schallleistungen  $P_{mn}^-$  aller stromauf abgestrahlten Moden und die Schallleistungen  $P_{mn}^+$  aller in Strömungsrichtung zurück reflektierten Moden in farblicher Kodierung. Deutlich sind die durch Rotor-Stator-Interaktion angeregten Moden der Ordnung  $m = 6$  zu erkennen. Das Spektrum der stromauf abgestrahlten Moden suggeriert neben den dominanten Rotor-Stator-Interaktionsmoden weitere Moden der Ordnung  $m = 0$  mit signifikant hohen Pegeln.

Zur Absicherung der Beobachtung wurden Azimutalmodenanalysen der azimutalen

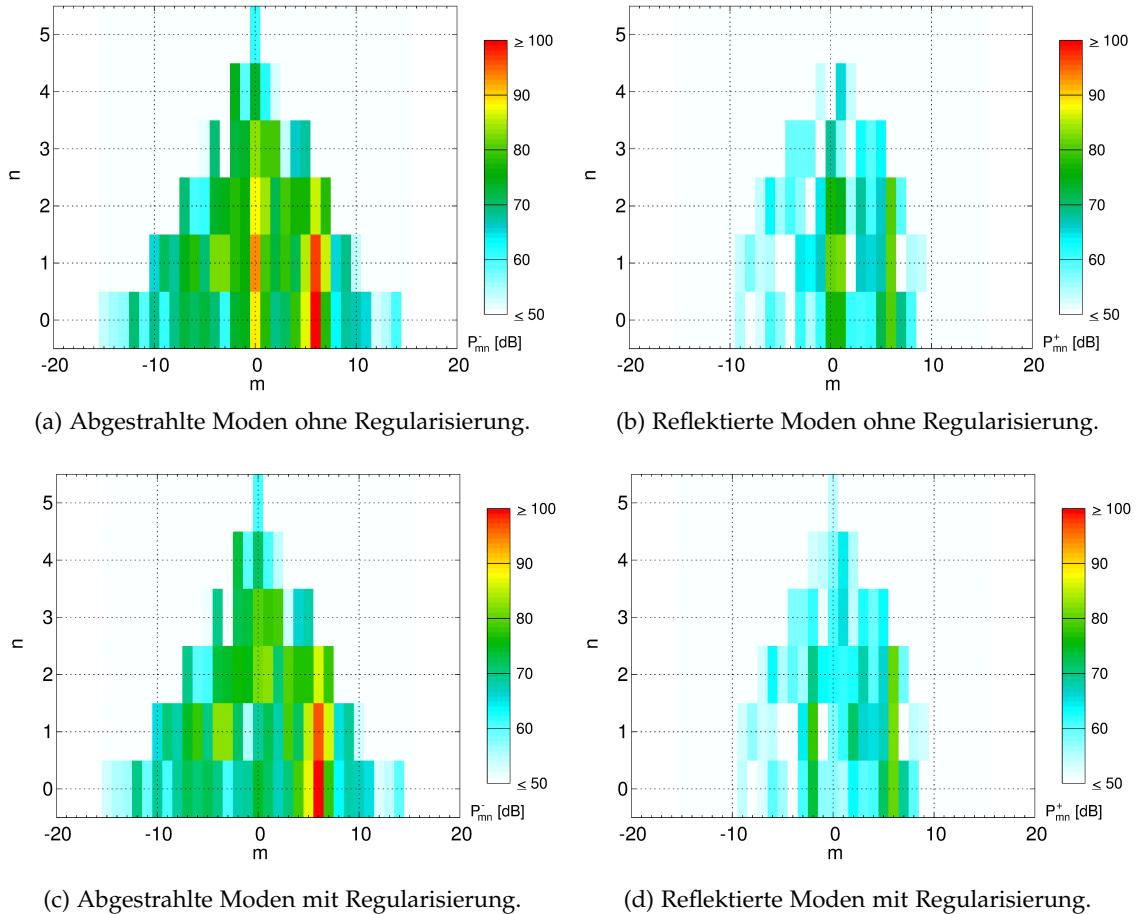


Abbildung 5.22: Schallleistung aller Moden als Ergebnis der Radialmodenanalyse der 2BPF-Komponente mit dem vollen Messgitter im Einlauf des UHBR-Fans.

Schalldruckverteilung durchgeführt. In Abbildung 5.23 sind repräsentative Ergebnisse für sechs aufeinander folgende axiale Position dargestellt. Die Existenz dominanter Moden der Ordnung  $m=0$  kann demnach ausgeschlossen werden, d. h. es muss sich bei den hohen Pegeln der Mode  $m=0$  im Spektrum a) der Abbildung 5.22 um ein Artefakt der Radialmodenanalyse handeln. Ein Blick auf den Verlauf des relativen Gesamtfehlers in Abbildung 5.21 legt als Fehlerursache eine zu schlechte Kondition der Modenanalysematrix bezüglich der Ordnung  $m=0$  nahe. Das Array ist vermutlich nicht in der Lage die axialen Wellenzahlen der niedrigen radialen Ordnungen auf zu lösen, die sehr dicht zusammen liegen (vergleiche Tabelle 5.7). In vergleichbaren Anwendungen konnte das Analyseergebnis durch Anwendung eines numerischen Regularisierungsverfahren erheblich verbessert werden [69, 70].

### 5.3.3 Regularisierung der Modellmatrix

Das Ziel von Regularisierungsverfahren besteht im Allgemeinen darin, das Spektrum der Singulärwerte einer Modellmatrix so zu verändern, dass der mithilfe des inversen Ansatzes berechnete Lösungsvektor die Realität bestmöglich wiedergibt. Die kritische Aufgabe besteht darin den optimalen Grad an Regularisierung zu finden. Eine Methode, die in der letzten Zeit bei der Rekonstruktion von Schallquellen erprobt

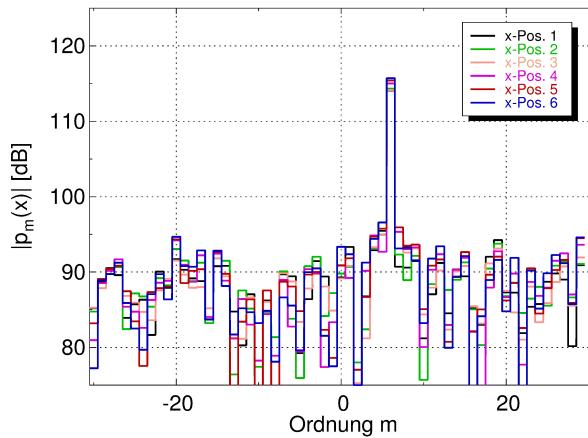


Abbildung 5.23: Azimutalmodenanalyse der 2BPF-Harmonischen des UHBR-Fan durch DFT der azimutalen Schalldruckverteilung an sechs axialen Positionen des Messgitters.

wurde und welche ohne Vorabinformationen bezüglich der Messungenauigkeiten oder einer ersten Schätzung des Lösungsvektors auskommt, ist die so genannte *Tikhonov-Regularisierung* [70]. Grundlage ist die Minimierung einer erweiterten Kostenfunktion. In Übertragung auf die vorliegende Anwendung würde die gegenüber Gleichung (3.24) erweiterte Kostenfunktion  $J = \|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{Wa} - \mathbf{p}\|^2 + \tau \|\mathbf{La}\|^2$  lauten. Darin bezeichnen  $\tau$  einen Regularisierungsparameter und  $\|\mathbf{La}\|$  eine Zusatzbedingung. Die Wirkungsweise der Regularisierung lässt sich am einfachsten verstehen, wenn für  $L$  eine Einheitsmatrix angenommen wird. Dann wird jedes Element der inversen Matrix der Singulärwerte mit einem Faktor  $R_f = \zeta_j^2 / (\zeta_j^2 + \tau)$  multipliziert, was eine Dämpfung der Beiträge sehr kleiner Singulärwerte im Lösungsvektor von Gleichung (3.35) zur Folge hat [70]. Ziel ist es eine Balance zwischen den beiden Termen der Kostenfunktion  $J$  her zu stellen. Der erste Term steht für die Abweichungen aufgrund der Verstärkung von Messungenauigkeiten und nimmt in der Regel mit zunehmender Regularisierung ab, da sich durch die Dämpfung der Singulärwerte die Matrixkondition verbessert. Der zweite Term soll eine Über-Regularisierung verhindern, welche sich oft in stark anwachsenden Amplituden des Lösungsvektors ausdrückt. Zur Berechnung des optimalen Regularisierungsparameters können die *General Cross Validation-Methode* oder die *L-Curve-Methode* eingesetzt werden.

$n$	$\alpha_{mn}$	$k_{mn}^-$ [1/m]	$\lambda_{mn}^-$ [m]	$\cos \theta_{mn}^-$ [ $^\circ$ ]
0	1.000	55.95	0.112	179.7
1	0.976	54.85	0.115	170.1
2	0.917	52.17	0.120	161.4
3	0.815	47.57	0.132	151.9
4	0.650	40.15	0.156	140.3
5	0.344	26.30	0.239	122.6

Tabelle 5.7: Ausbreitungsfaktor, axiale Wellenzahl, axiale Wellenlänge und axialer Ausbreitungs-winkel relativ zur Kanalachse für alle stromauf laufenden Moden der Ordnung  $m = 0$  im Ansaugkanal des UHBR-Fan bei der Frequenz  $kR = 17.03$ .

werden [70].

In dieser Arbeit wird ein anderer Ansatz verfolgt. Statt des Residuums des Schalldruckfelds wird durch die Regularisierung die Abweichung der Modenamplituden minimiert. Dies wird durch Einbeziehung des in Abschnitt 3.3.6 eingeführten Simulationsverfahren ermöglicht. Die Abweichung der Modenamplituden wird hier konkret durch den relativen Gesamtfehler  $\delta A$  repräsentiert und ist als statistische Größe unabhängig von der konkreten Zusammensetzung des Modenfelds. In der Regularisierung wird der relative Gesamtfehler in Abhängigkeit einer Singulärwertschranke ausgewertet. Der Regularisierungsparameter  $\tau$  wird durch das Verhältnis der Singulärwertschranke zum größten Singulärwert definiert:

$$\tau = \left( \frac{\zeta_{\lim}}{\zeta_{\max}} \right)^2. \quad (5.1)$$

Singulärwerte, die unter die Schranke fallen, werden einfach zu Null gesetzt<sup>8</sup>. Für den kleinsten Singulärwert der regularisierten Modellmatrix gilt dann

$$\zeta_{\min} \geq \zeta_{\lim} = \sqrt{\tau} \cdot \zeta_{\max}. \quad (5.2)$$

Eine Anhebung des Regularisierungsparameters  $\tau$  wirkt sich gemäß Gleichung (3.37) direkt auf die Konditionszahl der Modellmatrix  $\kappa(\mathbf{W})$  aus.

In Abbildung 5.22 c) und d) ist das Ergebnis nach optimaler Regularisierung der Modenanalyse dargestellt. Die Amplituden der Ordnung  $m=0$  wurden auf das mittlere Niveau aller sonstigen Moden gesenkt, ohne dass sich die Pegel der dominanten Rotor-Stator-Interaktionsmoden geändert haben. Im folgenden Abschnitt wird untersucht, wie sich das Analyseergebnis mit der Singulärwertschranke verändert und wie sich der richtige Grad an Regularisierung finden lässt.

#### 5.3.4 Untersuchung der Wirkungsweise der Regularisierung

Die Wirkungsweise der Regularisierung wurde für die fünf in Tabelle 5.8 definierten Messgitter anhand der Modenzerlegung der 2BPF-Komponente untersucht. Das erste

---

<sup>8</sup> Die Methode wird im Englischen mit *Singular Value Discarding* oder als *Truncated Singular Value Decomposition* bezeichnet [99].

Array ID	$N_x$	$d/\Delta x$	$N_\varphi$	$N_{\text{pos}}$	$\tau_{\text{opt}}$	$\kappa(\mathbf{W})$	$\delta A_m$	$\text{rank}(\mathbf{W})$
60-1	60	1	60	3600	$1.5 \cdot 10^{-2}$	6.7	0.45	160
30-2	30	1	30	900	$1.2 \cdot 10^{-2}$	7.2	0.67	155
20-3	20	3	30	600	$1.9 \cdot 10^{-2}$	5.8	0.74	157
15-4	15	4	30	450	$6.3 \cdot 10^{-2}$	3.5	0.83	144
12-5	12	5	30	360	$4.5 \cdot 10^{-2}$	3.6	0.95	139

Tabelle 5.8: Regularisierungsparameter und Genauigkeit der Modenanalyse der 2BPF-Komponente des UHBR-Fans für verschiedene Messgitter.

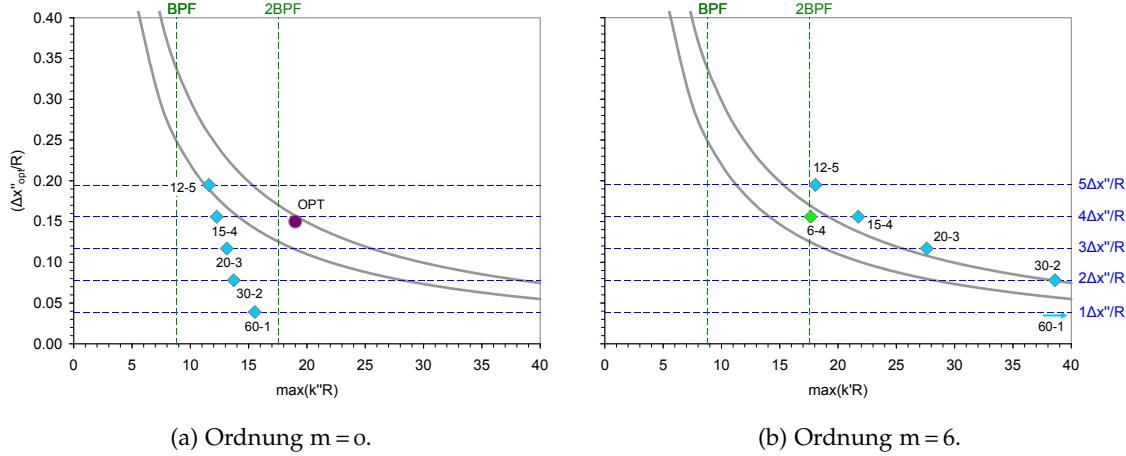


Abbildung 5.24: Einordnung der in Tabelle 5.8 angegebenen Messgitter bezüglich des in Abbildung 4.13 angegebenen Korridors optimaler Sensorabstände unter der Approach-Betriebsbedingung des UHBR-Fan-Prüfstands.

Array 60-1 bildet das volle Gitter ab, während die anderen vier Messgitter aus einer Ausdünnung dieses Referenzarrays hervorgehen. In dem kleinsten Messgitter 12-5 wurden beispielsweise nur  $N_x = 12$  axiale Messstellen mit fünffachem axialen Sensorabstand  $d = 5\Delta x$  ausgewertet. Weiterhin wurde in allen ausgedünnten Gittern jede zweite azimutale Messtelle fortgelassen und damit die Zahl der Gitterpositionen um bis zu 90% reduziert. Eine Einschränkung der Anzahl azimutaler Messpositionen auf  $N_\phi = 30$  führte durch Verletzung der Abtastbedingung in Gleichung (3.13) zu einer Spiegelung der Moden  $m = -15$  und  $m = 15$ , was im vorliegenden Fall aufgrund der schwachen Modenamplituden keine weiteren Konsequenzen hatte.

Abbildung 5.24 zeigt die Abschätzung des Auflösungsvermögen der Messgitter. Dargestellt sind die höchsten Frequenzen, an denen die Moden  $m = 0$  bzw.  $m = 6$  mit einer relativen Standardabweichung von höchstens  $s_{mn}/s_m = 1$  in die radialen Ordnungen zerlegt werden können. Zum Vergleich ist der in Abbildung 4.13 eingeführte Korridor optimaler axialer Mikrofonabstände eingezeichnet. Der Vorhersage zufolge gilt für alle Messgitter, dass die azimutale Ordnung  $m = 0$  der 2BPF-Komponente nicht analysiert werden kann, während die Analyse der Rotor-Stator-Interaktionsmode  $m = 6$  mit ausreichender Genauigkeit möglich sein sollte.

In Abbildung 5.25 ist die Wirkung der Regularisierung für die fünf Messgitter veranschaulicht. Das Diagramm a) gibt die Spektren der Singulärwerte wieder. Die Anzahl der Singulärwerte stimmt mit der Anzahl der Moden überein. Zur besseren Übersichtlichkeit wurden die Singulärwerte in absteigender Reihenfolge geordnet. Für jedes Messgitter gilt, dass die meisten Singulärwerte deutlich größer als 10 sind und ab einem bestimmten für das Messgitter spezifischen Punkt dann stark abfallen. Die Spreizungen der größten zu den kleinsten Singulärwerten, d.h. die Konditionszahlen ohne Regularisierung, unterscheiden sich erheblich. Je geringer die Anzahl axialer Messpositionen ist, desto größer sind die Unterschiede und damit die Konditionszahl der nicht regularisierten Matrix.

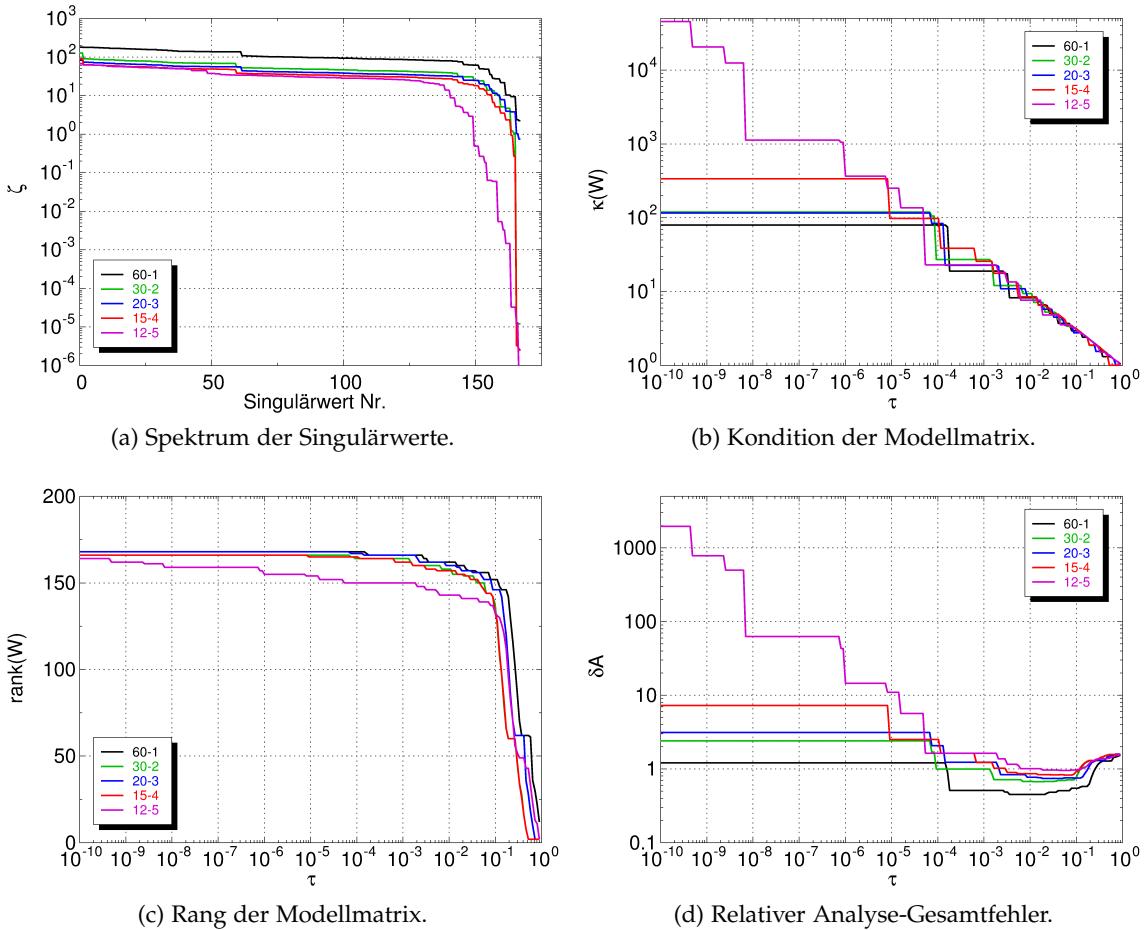


Abbildung 5.25: Singulärwerte und Variation der Eigenschaften der Modenanalyse-Modellmatrix mit dem Regularisierungsparameter im Vergleich für fünf Messgitter.

Die Veränderungen der Konditionszahlen durch Erhöhung des Regularisierungsparameters sind in Abbildung 5.25 b) dargestellt. Durch das Aussortieren der Singulärwerte verliert das Modenanalysesystem die Fähigkeit alle Moden voneinander zu separieren. Dies spiegelt sich in einer Abnahme des Matrixrangs  $\text{rank}(W)$  in Abbildung 5.25 c) wieder. Die Frage, auf wie viele Freiheitsgrade in der Analyse verzichtet werden kann, ist anhand der Konditionszahl nicht zu beantworten. Theoretisch ergibt sich die optimale Konditionszahl von eins, wenn mehr oder weniger alle Singulärwerte aussortiert werden. Die Entwicklung der relativen Gesamtfehler  $\delta A_m$  in Abbildung 5.25 d) zeigt aber, dass der Regularisierungsparameter nicht zu groß werden darf. Offenbar gibt es für jedes Messgitter einen optimalen Regularisierungsparameter  $\tau_{\text{opt}}$ . Dieser kann in einer automatisierten Auswertung einfach mithilfe einer iterativen Minimumssuche gefunden werden.

Der relative Gesamtfehler, die Matrixkondition, der Matrixrang und der zugehörige optimale Regularisierungsparameter sind in Tabelle 5.8 für alle Messgitter gegenübergestellt. Im Vergleich zu den Ausgangswerten liegen die Analysegenauigkeiten nach der Regularisierung relativ dicht zusammen. Größere Unterschiede gibt es im Matrix-Rang: Bei der Regularisierung des Referenzgitters 60-1 wurden nur 8 Singulärwerte aussortiert,

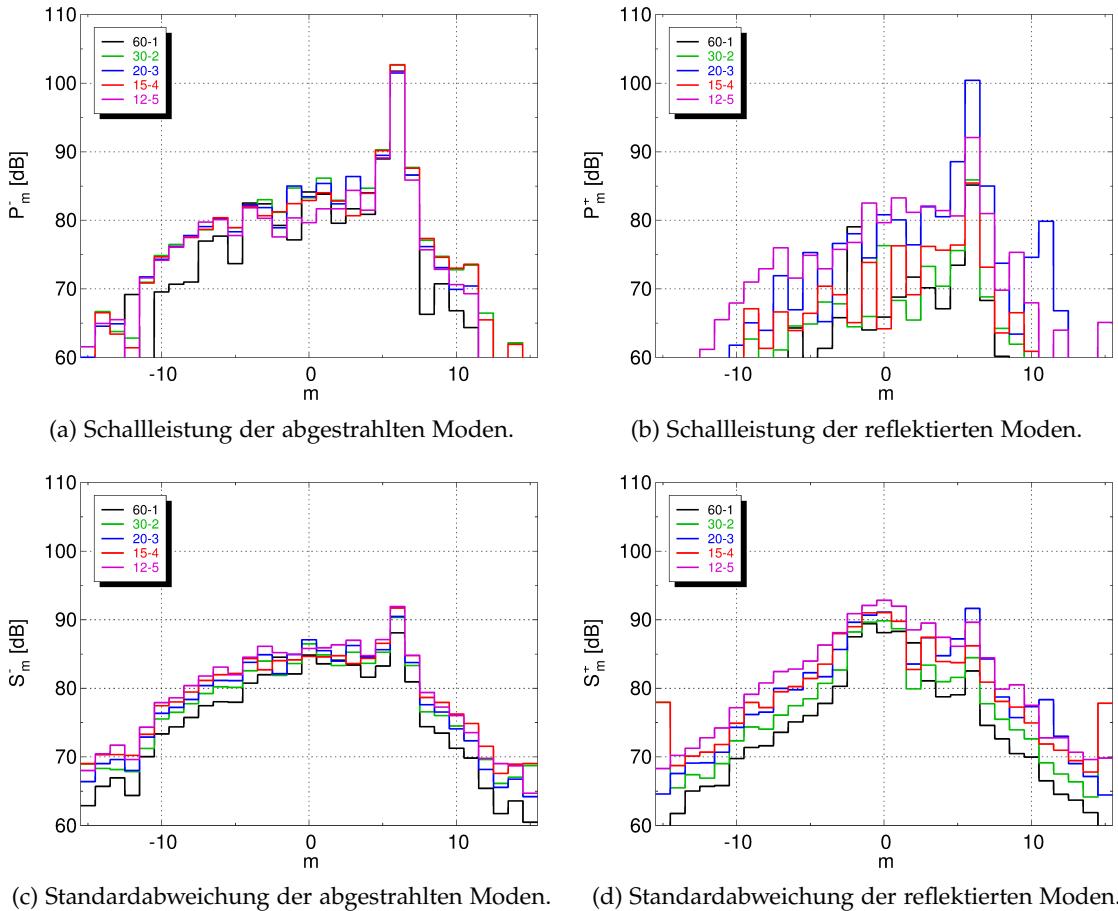


Abbildung 5.26: Schallleistung der azimutalen Modenordnungen nach optimaler Regularisierung der Modenanalyse für die fünf in Tabelle 5.8 definierten Messgitter.

beim Gitter 12-5 waren es hingegen 29 Singulärwerte. Auf die Bestimmung der dominanten Modenamplituden hat dies im vorliegenden Fall nur sehr geringe Konsequenzen.

Die mit den verschiedenen Messgittern und durch Anwendung der Regularisierung erzielten Modenanalyse-Ergebnisse sind in Abbildung 5.26 a) und b) gegenüber gestellt. Zur besseren Übersichtlichkeit wurden die Schallleistungen für jede azimutale Ordnung durch Summation über alle radialen Ordnungen zusammengefasst. Offensichtlich wird die dominante Mode  $m = 6$  mit den Messgittern 60-1, 20-3 und 12-5 mit nahezu identischem Pegel detektiert. Mit den beiden anderen Gittern wird die Schallleistung dieser Mode um etwa 1.5 dB zu hoch abgeschätzt. Die relativ großen Abweichungen können nicht durch eine Abbildung von rauschhaften Messfehlern auf die Modenamplituden erklärt werden. In Abbildung 5.26 c) und d) sind zum Vergleich die Standardabweichungen der modalen Schallleistungen zu sehen. Sie lagen auch beim kleinsten Messgitter etwa 10 dB unterhalb des Pegels der Rotor-Stator-Interaktionsmode, was einer relativen Pegelgenauigkeit von 0.4 dB entspricht. Auffällig sind die hohen reflektierten Anteile, die mit den Gittern 20-3 und 12-5 detektiert wurden. Aufgrund der Proportionalität  $P_m^\pm \propto 1/(1 \mp \alpha_{mn} M_x)^2$  sind die Schallleistungen von stromab laufenden Moden mit Ausbreitungsfaktoren  $\alpha_{mn}$  nahe Eins bei gleicher Amplitude deutlich größer als bei anderen Modenordnungen. Dies erklärt den in Abbildung 5.26 d) sichtbaren sprunghaften

Anstieg der Standardabweichung der Ordnungen  $m = -1, 0$  und  $1$ . Die hohen Pegel der Ordnungen  $m = 5$  und  $m = 6$  lassen sich hiermit aber nicht begründen. Als eine mögliche Ursache der beobachteten Unstimmigkeiten werden großskalige turbulente Strukturen des Strömungsfelds in Betracht gezogen, die aus der Beruhigungskammer in den Einlauf gesogen wurden. Sie können zum einen erhöhte Druckschwankungen an den Mikrofonen verursacht haben, die räumlich begrenzt sind und sich mit der Strömungsgeschwindigkeit ausbreiten. Zudem besteht die Vermutung, dass durch Interaktion der turbulenten Wirbel mit dem Fan zusätzliche Schaufeltonkomponenten erzeugt werden [7, 79], deren Pegel und modale Struktur sich zeitlich verändern.

### 5.3.5 Partielle Radialmodenanalyse mit stehenden Arrays

Eine vollständige Zerlegung des Schallfelds in alle ausbreitungsfähigen Moden erfordert bei hohen Frequenzen ein Datengitter solch hoher Auflösung, dass dieses nur in zeitlich aufeinander folgenden Schritten mithilfe drehbarer Mikrofonarrays aufgebaut werden kann. In Fällen, in den z. B. durch eine Azimutalmodenanalyse bekannt ist, dass nur wenige azimutale Modenordnungen das Schalldfeld dominieren, könnten die Modenamplituden mit einer deutlich reduzierten Anzahl von Messpositionen detektierbar sein. In dem Ansatz der partiellen Modenanalyse besteht die Grundidee darin, auf die implizite Azimutalmodenanalyse zu verzichten. Das Messgitter besitzt etwa nur so viele azimutale Positionen, wie es azimutale Ordnungen gibt. Im vorliegenden Fall sollte demzufolge eine axiale Linie von Mikrofonen ausreichen. Aufgrund der drastischen Reduktion der Anzahl Messpositionen ist ein geringerer Ausgleich an Messfehlern im Anpassungsprozess zu erwarten. Es stellt sich dabei die wichtige Frage, in welcher Weise sich die Amplituden von nicht berücksichtigten Moden im Analyseergebnis widerspiegeln.

In Tabelle 5.9 sind vier axiale Mikrofonarrays definiert, mit denen die partielle Radialmodenanalyse der Rotor-Stator-Interaktionsmode  $m = 6$  am UHBR-Fan erprobt wurde. Das Array F-60-1 ist mit dem Array 60-1 des vorherigen Abschnitts identisch, bis auf die Tatsache, dass für die Analyse nur die Daten einer Traversierposition verwendet wurden. Die Einordnung des Array F-6-4 in Abbildung 5.24 zeigt (markiert durch den grünen Punkt), dass sogar das kleinste, aus nur sechs Positionen bestehende Array für die Analyse ausreichen sollte.

In Abbildung 5.27 sind die detektierten Schallleistungspegel der radialen Ordnungen

Array ID	$N_x$	$d/\Delta x$	$N_\varphi$	$N_{\text{pos}}$	$\tau_{\text{opt}}$	$\kappa(\mathbf{W})$	$\delta A_m$	$\text{rank}(\mathbf{W})$
F-60-1	60	1	1	60	–	1.75	0.33	6
F-30-2	30	2	1	30	–	3.17	0.48	6
F-15-4	15	4	1	15	–	7.00	0.69	6
F-6-4	6	4	1	6	0.23	0.92	2.95	4

Tabelle 5.9: Für die partielle Radialmodenanalyse der 2BPF-Komponente verwendete Messgitter inklusive Angaben zur erzielbaren Analysegenauigkeit.

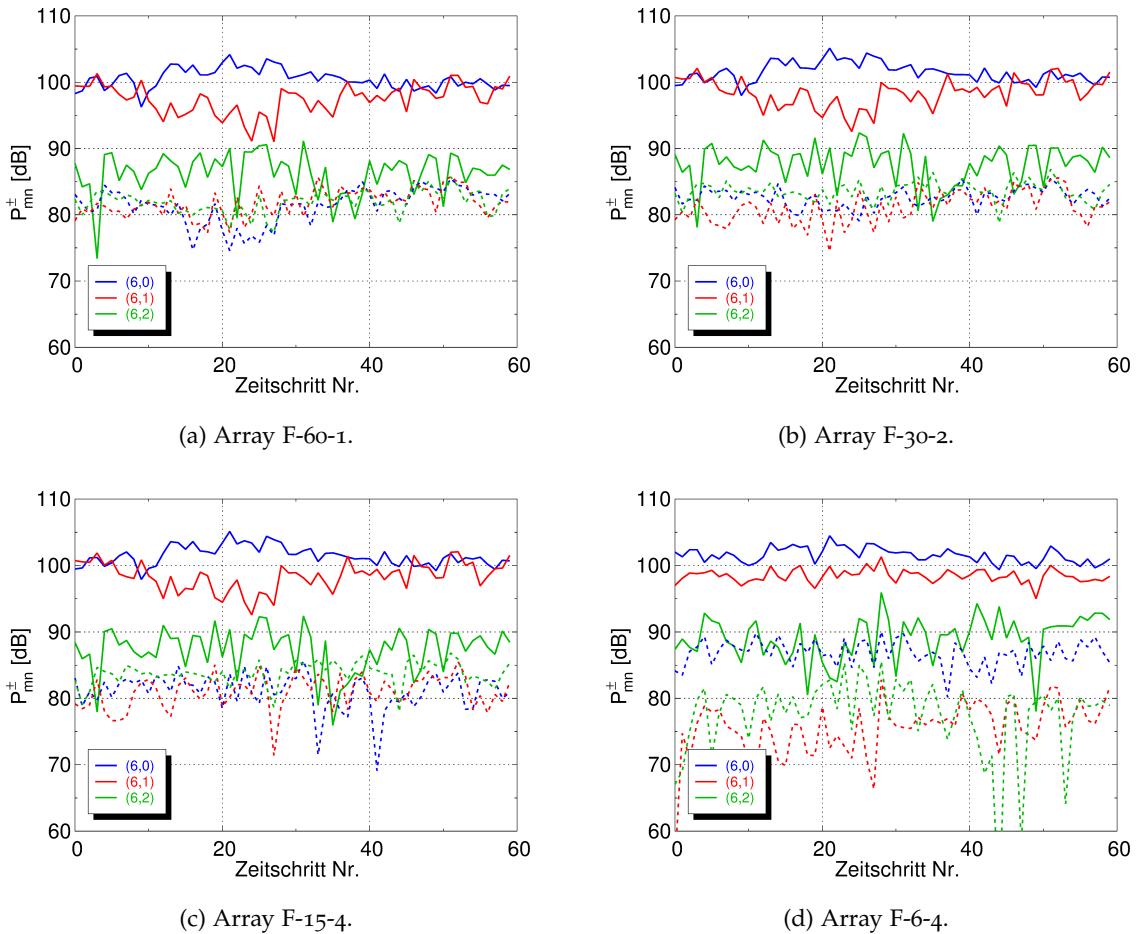


Abbildung 5.27: Zeitliche Entwicklung der Schalleistungen der Rotor-Stator-Interaktions-Moden als Ergebnisse der Partiellen Modenanalysen der 2BPF-Komponente mit den vier Mikrofonarrays, die in Tabelle 5.9 definiert sind.

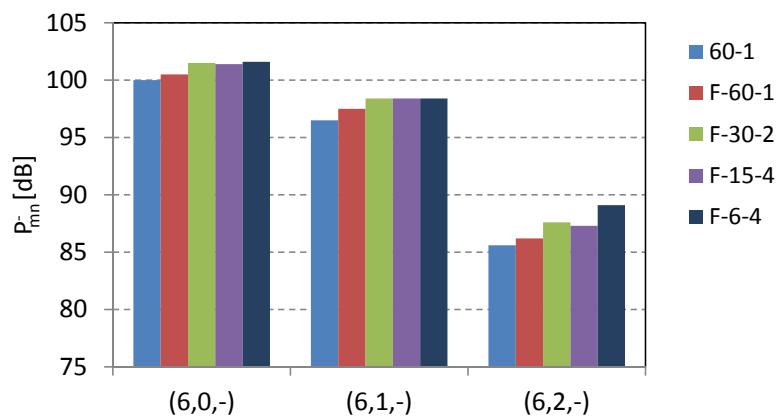


Abbildung 5.28: Mittlere Schalleistungen der Rotor-Stator-Interaktionsmoden als Ergebnis der in Abbildung 5.27 dargestellten partiellen Modenanalysen im Vergleich mit dem Ergebnis der vollständigen Modenanalyse.

in einer zeitlichen Entwicklung dargestellt. Da keine zeitlich längeren Messerien an einer festen Umfangsposition vorlagen, wurde die partielle Radialmodenanalyse auf die Datenreihen angewandt, die zeitlich aufeinander folgend an den 60 Traversierpositionen der Drehkanalmessung aufgezeichnet wurden. Die Dauer jeder Messung betrug 10 s. Überraschenderweise liefern die Arrays F-60-1, F-30-2 und F-15-4 selbst für die Ordnung (6,2) mit relativ niedriger Amplitude den gleichen Pegelverlauf. Für die drei Arrays musste keine Regularisierung angewandt werden, was die Einschätzung der Array-Eignung gemäß Abbildung 5.24 bestätigt. Die Pegel der beiden dominanten Moden (6,0) und (6,1) zeigen langsame zeitliche Schwankungen, was auf eine entsprechende Veränderung der Schallquellen schließen lässt. Die mit dem kleinsten Array F-6-4 analysierten Pegel zeigen einen abweichenden, vermeintlich stabileren Verlauf, sind aber am unsichersten einzustufen, da für das Ergebnis eine Regularisierung erforderlich war.

Abbildung 5.28 zeigt, dass im Mittel über alle Zeitschritte die Analyseergebnisse sehr gut mit der Analyse des vollen Messgitters übereinstimmen. Die Pegel der in der partiellen Modenanalyse nicht erfassten Modenordnungen scheinen im vorliegenden Fall das Analyseergebnis nur gering zu beeinflussen. Die Studie lässt den Schluss zu, dass die partielle Radialmodenanalyse für eine schnelle Abschätzung der Pegelvariation von Rotor-Stator-Interaktionsmoden z. B. in fein aufgelösten Kennlinienfeldmessungen geeignet ist.

# 6

---

## EXPERIMENTELLES MODENSYNTHESEVERFAHREN

---

Akustische Moden können in zylindrischen Strömungskanälen am Besten mit ringförmig angeordneten Quellen erzeugt werden. Eine einzelne Quelle regt im Allgemeinen alle Moden mit einem spezifischen Amplitudenverhältnis an. Die Anordnung mehrerer Quellen mit äquidistantem azimutalen Abstand in einem Ring ermöglicht die Ausnutzung symmetriebedingter Interferenzeffekte und damit auf einfache Weise eine Beschränkung der Modensynthese auf eine gewünschte azimutale Ordnung. Die gezielte Anregung von einzelnen radialen Ordnungen erfordert jedoch einen weitaus höheren Aufwand. Es müssen die Signale mehrerer axial verteilter Quellringe phasenrichtig aufeinander abgestimmt werden. Hierfür wird ein spezieller Algorithmus benötigt. Für die praktische Umsetzung der Modensynthese wird in der Regel ein Lautsprecherarray verwendet, wie es in Abbildung 6.1 zu sehen ist. Es wird mitunter als Modengenerator oder Modensynthesizer bezeichnet. In diesem Kapitel wird ein Modell des Lautsprecherarrays entwickelt. Das Modell dient als Grundlage für die technische Umsetzung der gezielten Modensynthese, für die optimale Gestaltung der Lautsprecheranordnung



Abbildung 6.1: Aus drei Aktuatorringen bestehendes Lautsprecherarray in aufgeschnittener Darstellung. In jedem Ring können bis zu acht Lautsprecher mit äquidistantem azimutalem Abstand und in Verbindung mit Trichtern bündig mit der Kanalwand installiert werden.

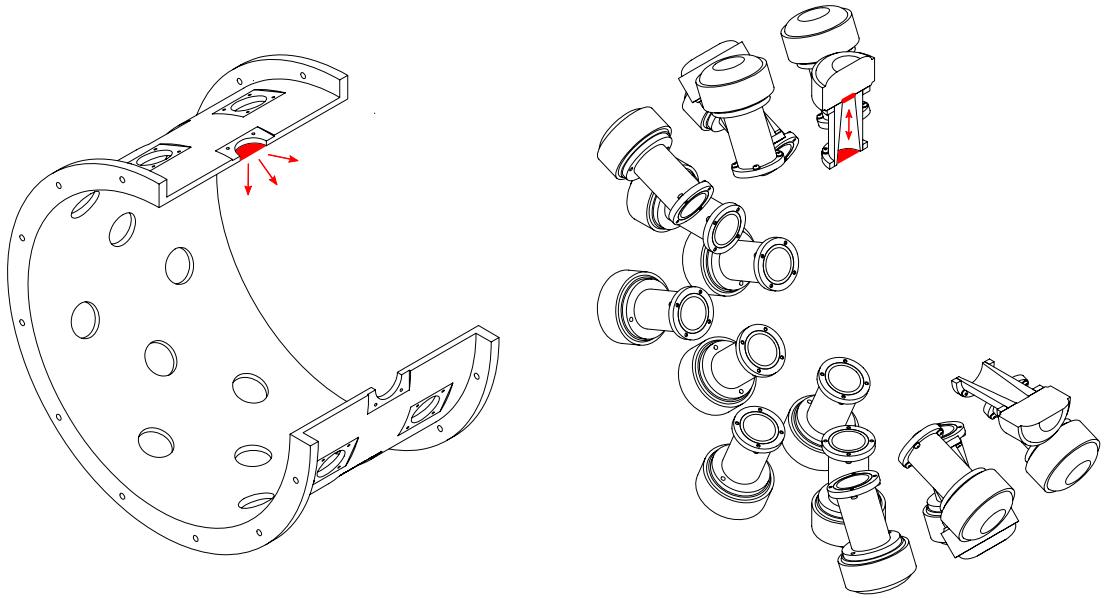


Abbildung 6.2: Die separat für die Lautsprechereinheiten und für den Strömungskanal entwickelten Modelle werden rechnerisch an den Schnittstellen der Teilsysteme verkoppelt.

und zur Gegenüberstellung mit experimentellen Ergebnissen in Kapitel 7.

Üblicherweise wird das durch ein Lautsprecherarray angeregte modale Schallfeld einfach mithilfe der Greenschen Funktion einer punktförmige Monopolquelle beschrieben [61, 55, 140, 150]. Hierbei werden jedoch mehrere Effekte vernachlässigt, die auf die Abmessungen und das resonante Verhalten des einzelnen Trichters sowie auf die akustische Wechselwirkung aller Lautsprechereinheiten zurück zu führen sind. Daher wird das Modell des Gesamtsystems um die Übertragungsfunktionen der Trichter erweitert. Hierbei fließt ein Ansatz ein, der von Hallez für ein Herschel-Quincke-Röhrensystem formuliert wurde [45]. Die Grundidee besteht darin, die Schallanregung im Strömungskanal und die Schallausbreitung in der Lautsprechereinheit zunächst separat zu beschreiben, und dann die beiden Teilsysteme durch Anpassung der akustischen Variablen zu verkoppeln, vgl. Abbildung 6.2.

### 6.1 MODENANREGUNG DURCH EINE PUNKTFÖRMIGE MONOPOLQUELLE

Zur Berechnung des durch eine Quellverteilung angeregten Schallfelds bedient man sich im Allgemeinen des Greenschen Formalismus. Für Strömungskanäle gibt es wenige, zumeist auf bestimmte Anwendungen ausgerichtete theoretische Beschreibungen [3, 81, 140]. Allgemein gehalten ist Morfeys Darstellung [86] für verschiedene axial kompakte Quelltypen in Kanälen beliebigen Querschnitts mit Strömungsüberlagerung. Doaks Artikel [23] ist von grundsätzlichem Interesse, da er sehr ausführlich die durch Massen- und Multipolquellen in rechteckigen Kanälen erzeugten Moden in Abhängigkeit der Quellpositionen diskutiert und zudem die Druck- und Geschwindigkeitsfelder auch innerhalb der Quellregion beschreibt. Ein Standardwerk in der analytischen Beschreibung des durch Strömungsmaschinen angeregten Schallfelds stellt das Buch von Goldstein [40] dar.

Die Modenanregung der einzelnen Lautsprecher kann vereinfacht durch an der Kanalwand befindliche punktförmige Monopolquellen angenähert werden. Die benötigte Greensche Funktion kann unter der Annahme zeitlich harmonischer Schwankungen auf Basis der in Gleichung (2.18) formulierten konvektiven Helmholtzgleichung abgeleitet werden. Für eine punktförmige Monopolquelle am Ort  $(\check{x}, \check{r}, \check{\phi})$  in drallfreier gleichförmiger Strömung lautet der Ansatz

$$k^2 g - 2ikM_x \frac{\partial g}{\partial x} - M_x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \Delta g = -\delta(x - \check{x})\delta(r - \check{r})\delta(\phi - \check{\phi}). \quad (6.1)$$

Für einen reflexionsfrei abgeschlossenen Kanal und bei Verwendung der Beschreibung von Hallez [45] erhält man folgende zu Goldstein [40] äquivalente Lösung

$$g^{\rightarrow}(x, r, \phi | \check{x}, \check{r}, \check{\phi}) = \frac{i}{4\pi R^2 k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{mn}(r)f_{mn}(\check{r})}{\alpha_{mn}} e^{im(\phi-\check{\phi})} e^{ik_{mn}^{\pm}(x-\check{x})}. \quad (6.2)$$

Die Pfeilsymbole geben die Gültigkeitsbereiche der Lösung an: die durch „ $\rightarrow$ “ und „ $\leftarrow$ “ gekennzeichneten Greenschen Funktionen beschreiben das Schallfeld stromab bzw. stromauf der Monopolquelle und stehen in Zusammenhang mit den axialen Wellenzahlen der entsprechenden Ausbreitungsrichtung.

Als elementare Lösung der Helmholtzgleichung kann die Greensche Funktion zur Berechnung des akustischen Potentials einer räumlich ausgedehnten Massenquelle benutzt werden:

$$\Phi(x, r, \phi | \check{x}, \check{r}, \check{\phi}) = \int_A u_n(\check{x}, \check{r}, \check{\phi}) g(x, r, \phi | \check{x}, \check{r}, \check{\phi}) dA. \quad (6.3)$$

Hier bezeichnet  $A$  die Oberfläche des Quellgebiets und  $u_n$  die mit dem Oberflächenelement  $dA$  verbundene Normalkomponente der Schnelle. Aus dem akustischen Potential lässt sich der Schalldruck durch eine potentielle Ableitung nach der Zeit berechnen [80]:

$$p = \rho \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Unter Berücksichtigung des harmonischen Ansatzes  $\propto \exp(-i\omega t)$  führt dies zu

$$p(x, r, \phi | \check{x}, \check{r}, \check{\phi}) = -i\omega \rho \int_A u_n(\check{x}, \check{r}, \check{\phi}) g(x, r, \phi | \check{x}, \check{r}, \check{\phi}) dA. \quad (6.5)$$

Für die in diesem Abschnitt betrachtete punktförmige Monopolquelle mit der Schnelle  $u_n(\check{x}, \check{r}, \check{\phi}) = u_n \delta(x - \check{x})\delta(r - \check{r})\delta(\phi - \check{\phi})$  ergibt sich dann für das Schalldruckfeld

$$p^{\rightarrow}(x, r, \phi | \check{x}, \check{r}, \check{\phi}) = -i\omega \rho q \cdot g^{\rightarrow}(x, r, \phi | \check{x}, \check{r}, \check{\phi}) \quad (6.6)$$

$$= q \frac{\rho c}{4\pi R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{mn}(r)f_{mn}(\check{r})}{\alpha_{mn}} e^{im(\phi-\check{\phi})} e^{ik_{mn}^{\pm}(x-\check{x})}. \quad (6.7)$$

Die an dieser Stelle eingeführte Größe  $q$  bezeichnet den durch die Quelle verursachten akustischen Volumenfluss. Zu beachten ist, dass das durch eine punktförmige Schallquelle angeregte Schallfeld in azimutaler Richtung symmetrisch ist, d.h. es bildet sich ein durch  $(e^{im\phi} + e^{-im\phi}) = 2\cos(m\phi)$  beschriebenes stehendes Wellenbild aus. Dies

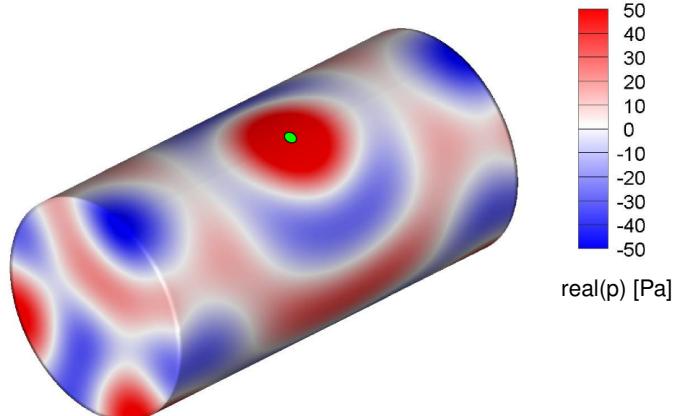


Abbildung 6.3: Durch eine punktförmige Monopolquelle im Kanal angeregtes Schalldruckfeld. Die durch einen grünen Punkt gekennzeichnete Quelle befindet sich an der Wand und schwingt mit einer Frequenz von  $kR = 5.55$ .

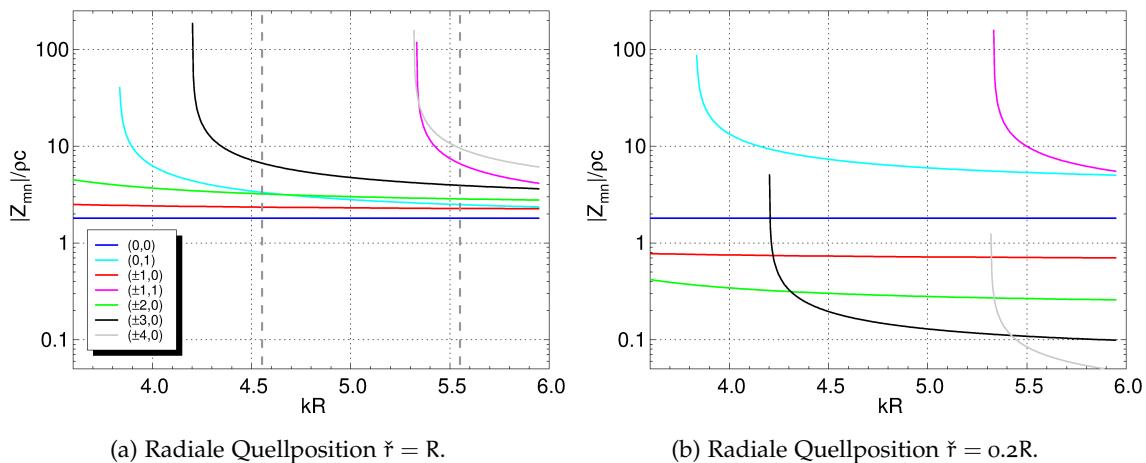


Abbildung 6.4: Relative Anregung der Mode  $(m, n)$  durch eine punktförmige Monopolquelle in einem zylindrischen Strömungskanal ( $\eta = 0$ ) ohne Strömungsüberlagerung.

ist in Abbildung 6.3 für einen Kreiskanal ohne Strömungsüberlagerung veranschaulicht.

Vergleicht man Gleichung (6.7) mit der Modenentwicklung des Schalldruckfelds nach Gleichung (2.19), so kann man folgenden Ausdruck für die Modenamplitude der Ordnung  $(m, n)$  ablesen:

$$A_{mn}^{\vec{q}}(q, \check{x}, \check{r}, \check{\phi}) = q \frac{\rho c}{4\pi R^2} \frac{f_{mn}(\check{r})}{\alpha_{mn}} e^{-im\check{\phi}} e^{-ik_{mn}^{\pm}\check{x}}. \quad (6.8)$$

Die Amplitude und Phase jeder Mode hängt empfindlich vom Ort der Quelle, von der Geometrie des Kanals und über den Ausbreitungsfaktor von der Anregungsfrequenz ab. Durch eine Normierung mit dem Volumenfluss kann die Anregbarkeit einer Mode in Form einer ortsabhängigen modalen Impedanz charakterisiert werden [23]:

$$Z_{mn}^{\vec{q}}(\check{x}, \check{r}, \check{\phi}) = \frac{A_{mn}^{\vec{q}}(\check{x}, \check{r}, \check{\phi})}{q}. \quad (6.9)$$

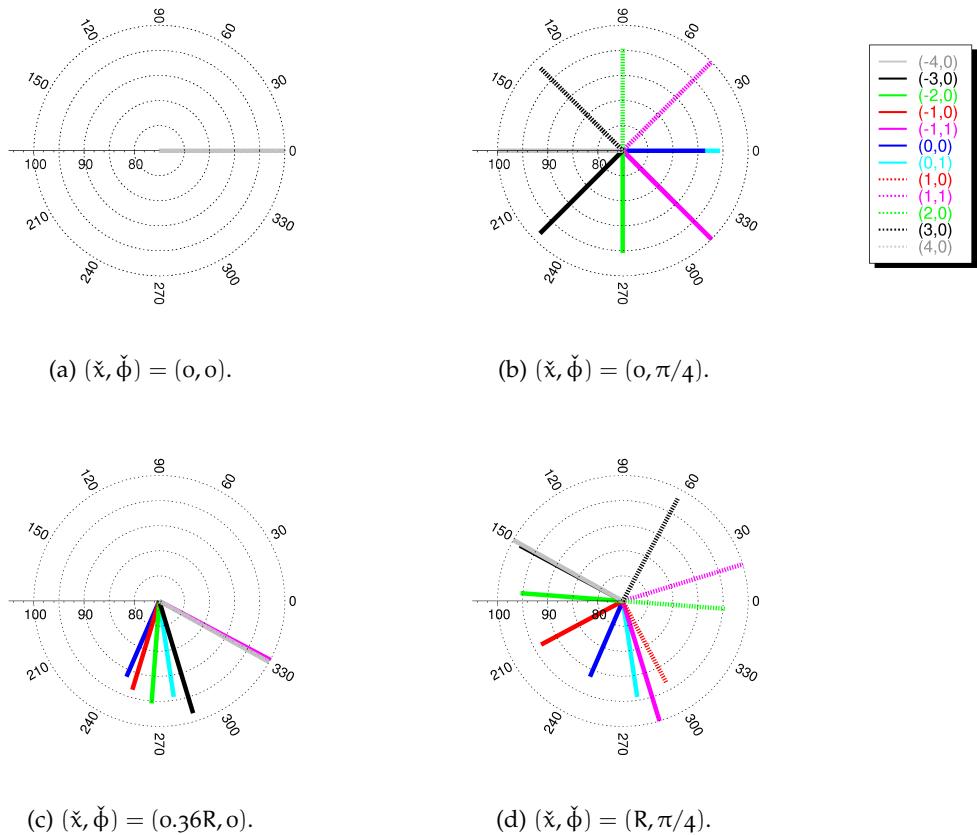


Abbildung 6.5: Variation der Modenamplituden mit der azimutalen und axialen Position der Monopolquelle bei einer Anregung an der Kanalaußenwand mit dem Volumenfluss  $q = 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$  und der Frequenz  $kR = 5.55$ .

Abbildung 6.4 zeigt eine Gegenüberstellung der Modenspektren, die von einer Punktquelle an zwei verschiedenen radialen Positionen erzeugt werden. Eine an der Kanalwand befindlichen Quelle regt stets alle Moden an. Wenn die Monopolquelle im Kanallinneren liegt, dann hängt die Anregbarkeit der Mode hingegen maßgeblich vom Wert der radialen Eigenfunktion ab<sup>1</sup>. Ein Vergleich mit Abbildung 2.7 verdeutlicht, dass insbesondere höhere azimutale Ordnungen durch Quellen nahe der Kanalachse schlecht angeregt werden. Liegt die Monopolquelle in einem radialen Schwingungsknoten, so ist die Schallabstrahlung in die betreffende radiale Ordnung sogar unabhängig von der Frequenz immer gleich Null. In der Nähe der cut-on-Frequenzen tritt eine resonanzartige Überhöhung der Amplituden auf. Diese wird in Gleichung (6.8) durch den Ausbreitungsfaktor  $\alpha_{mn}$  wiedergegeben.

Abbildung 6.5 veranschaulicht den Einfluss der axialen und azimutalen Quellposition auf das Modenspektrum bei einer einzelnen Frequenz im Zeigerdiagramm. Eine Variation der azimutalen Koordinate um  $\Delta\phi$  macht sich in einer Phasenverschiebung  $m\Delta\phi$  bemerkbar, die unabhängig von der radiaalen Ordnung ist. Eine Variation der axialen Koordinate um  $\Delta x$  führt hingegen zu einer individuellen Veränderung der Phase um  $k_{mn}^\pm \Delta x$ , die aber für die positiven und negativen azimutalen Ordnungen gleich ausfällt.

<sup>1</sup> Es ist zu beachten, dass das Verhältnis der Modenamplituden von der in Gleichung (2.27) angegebenen Normierung der radialen Eigenfunktionen abhängt.

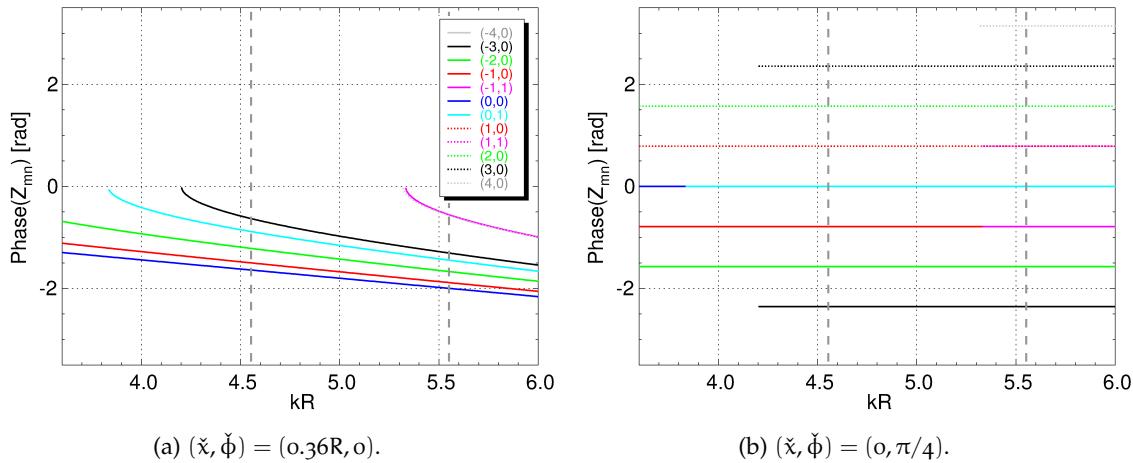


Abbildung 6.6: Variation der Phasen der Modenamplituden mit der Position der Monopolquelle sowie in Abhängigkeit der Frequenz bei einer Anregung an der Kanalaufßenwand mit dem Volumenfluss  $q = 0.001 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Die Auswirkung einer Frequenzvariation auf die Phasen der Modenamplituden ist in Abbildung 6.6 illustriert.

## 6.2 MODELL EINER LAUTSPRECHEREINHEIT

Abweichend von der Annahme einer punktförmigen Quelle setzt sich im Experiment jede Lautsprechereinheit aus einem Druckkammerlautsprecher und einem konischen Trichter zusammen. Im Modell werden die Amplitudenänderungen des Schalldrucks und der Schallschnelle bei der Ausbreitung von der Lautsprechermembran bis zum Trichterausgang durch Übertragungsfunktionen beschrieben. Das Modell kann für eine Optimierung der Schalltransmission in den Strömungskanal durch Anpassung der Trichterabmessungen genutzt werden. Gleicher gilt für den Strahlungswiderstand am Trichtereingang, der maßgeblich für eine gute Ankopplung der schwingenden Luftsäule an die Lautsprechermembran ist. Ab einer spezifischen Grenzfrequenz muss der Tatsache Rechnung getragen werden, dass die Schallschnelle im Trichterausgang zum Strömungskanal über die Verbindungsöffnungsfläche verteilt ist.

### 6.2.1 Trichter-Übertragungsfunktion

In Abbildung 6.7 ist die Geometrie eines Trichters in vereinfachter Weise dargestellt. Der Trichter setzt sich aus einem konischen Rohrstück der Länge  $l_{I,II} = z_{II} - z_I$  und einem kurzen Verbindungsstück der Länge  $l_{II,III} = z_{III} - z_{II}$  zusammen. Letzteres hat einen durchgehend konstanten Radius und resultiert aus der Wanddicke des Hauptströmungskanals. Für Frequenzen, die unterhalb der Cut-on-Frequenz der ersten höheren Mode liegen, kann die Schallausbreitung zwischen der Horntreibermembran und der Trichteroftnung mittels eindimensionaler Modellgleichungen beschrieben werden. Berücksichtigt wird sowohl die vom Lautsprecher angeregte Welle als auch eine in umgekehrter Richtung, d. h. vom Strömungskanal in den Trichter, eingekoppelte Welle. An den Übergangsstellen  $z_I$ ,  $z_{II}$  und  $z_{III}$  lassen sich die Beziehungen von Schalldruck und

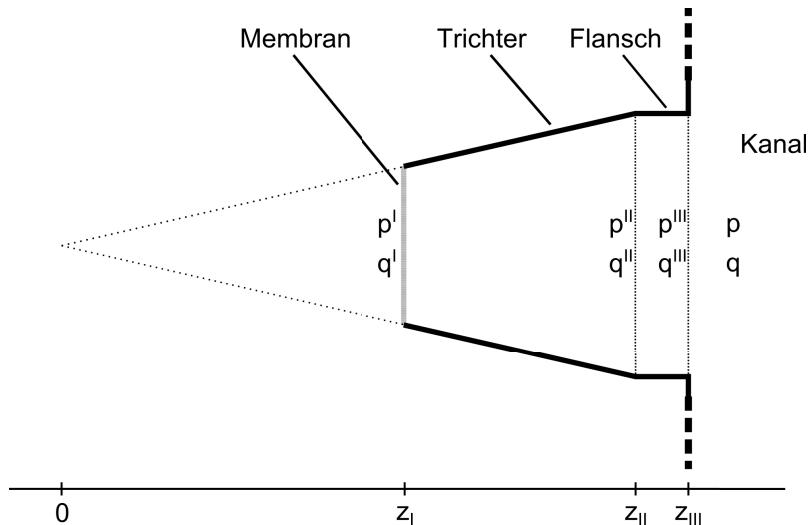


Abbildung 6.7: Vereinfachte Darstellung des Lautsprechertrichters für eine eindimensionale Beschreibung der Schallausbreitung mit Kennzeichnung der Übergangsstellen  $z_I$  zwischen Horntreibermembran und Eingang der konischen Sektion,  $z_{II}$  zwischen Ausgang der konischen Sektion und Flanscheingang und  $z_{III}$  zwischen Flanschausgang und Hauptströmungskanal.

Volumenfluss der  $i$ -ten Lautsprechereinheit durch eine Verkettung von zwei Transfermatrizen  $\mathbf{T}_{I,II}$  und  $\mathbf{T}_{II,III}$  darstellen, d. h.

$$\begin{pmatrix} p_i^I \\ q_i^I \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{I,II} \begin{pmatrix} p_i^{II} \\ q_i^{II} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} p_i^{II} \\ q_i^{II} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{II,III} \begin{pmatrix} p_i^{III} \\ q_i^{III} \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Der Schalldurchgang durch das konische Rohrstück wird durch die Lösung der Weberschen Horngleichung beschrieben [80]:

$$\mathbf{T}_{I,II} = \begin{pmatrix} \frac{z_{II}}{z_I} \cos(kl_{I,II}) - \frac{\sin(kl_{I,II})}{kz_I} & i\tilde{Z}_{II} \frac{z_{II}}{z_I} \sin(kl_{I,II}) \\ \frac{i}{\tilde{Z}_{II}} \left\{ \frac{z_I}{z_{II}} \left( 1 + \frac{1}{k^2 z_I z_{II}} \right) \sin(kl_{I,II}) - \left( 1 - \frac{z_I}{z_{II}} \right) \frac{\cos(kl_{I,II})}{kz_{II}} \right\} & \frac{\sin(kl_{I,II})}{kz_{II}} + \frac{z_I}{z_{II}} \cos(kl_{I,II}) \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Hierin bezeichnen  $\tilde{Z}_{II} = \rho c / \pi r_{II}^2$  den auf die Stelle  $z_{II}$  bezogenen akustischen Wellenwiderstand und  $r_{II}$  den zugehörigen Rohrradius. Die Übertragungsfunktion des Verbindungsstücks setzt sich aus zwei Matrizen zusammen:

$$\mathbf{T}_{II,III} = \begin{pmatrix} \cos(kl_{II,III}) & i\tilde{Z}_{III} \sin(kl_{II,III}) \\ i \sin(kl_{II,III}) / \tilde{Z}_{III} & \cos(kl_{II,III}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -Z_{gaze} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Durch die linke Matrix wird die Phasendrehung infolge der Wellenausbreitung durch das Rohrstück der Länge  $l_{II,III}$  beschrieben [80]. Die zweite Matrix gibt den Einfluss der Gaze wieder, die sich im Übergang zwischen Lautsprechereinheit und Strömungskanal befindet.  $Z_{gaze}$  ist die akustische Impedanz der Gaze, welche von verschiedenen Parametern wie der Dicke und der Maschenweite der Gaze als auch der Viskosität der Luft abhängt, wie im Detail von Ingard und Ising [56] beschrieben wird. Die Gaze wirkt sich in einer Dämpfung und Phasenänderung des Schalldrucks aus. Für den akustischen Wellenwiderstand gilt hier  $\tilde{Z}_{II} = \tilde{Z}_{III}$ .

### 6.2.2 Schallstrahlungswiderstand und Schalltransmission

Bei der Berechnung des Schallstrahlungswiderstands am Trichtereintritt und der Schalltransmission vom Trichterausgang muss die akustische Ankopplung des Hauptströmungskanals berücksichtigt werden. Für eine einfache Abschätzung wird die eindimensionale Beschreibung der Schallausbreitung in den Hauptströmungskanal fortgesetzt: Eine vom i-ten Lautsprecher abgestrahlte Welle erfährt an der Übergangsstelle  $z_{III}$  einen Querschnittssprung, unter der Bedingung dass Schalldruck und Volumenfluss erhalten bleiben, d.h.

$$\begin{pmatrix} p_i^{III} \\ q_i^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Die Variablen ohne hoch gestellten Index bezeichnen die Schallfeldgrößen im Strömungskanal. Somit kann folgende Transferfunktion für Schalldruck und Volumenfluss zwischen Strömungskanaleingang und Trichtereingang aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} p_i^I \\ q_i^I \end{pmatrix} = T_{I,II} T_{II,III} \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Wenn das Schallfeld im Strömungskanal bekannt ist, lässt sich unter Heranziehung von Gleichung (6.14) der Strahlungswiderstand am Trichtereingang ermitteln:

$$Z_i^I = \frac{p_i^I}{q_i^I}. \quad (6.15)$$

Der Transmissionsfaktor ist wie folgt definiert:

$$t_i^+ = \frac{p_i^+}{(p_i^I)^+}. \quad (6.16)$$

Für die Auswertung muss von der Zerlegung in hin- und rücklaufende Wellen Gebrauch gemacht werden:

$$p_i = p_i^+ + p_i^-, \quad (6.17)$$

$$q_i = \frac{p_i^+}{\tilde{Z}} - \frac{p_i^-}{\tilde{Z}}, \quad (6.18)$$

mit  $\tilde{Z} = \rho c / \pi r^2$  als Wellenwiderstand der ebenen Welle.

In Abbildung 6.8 sind der Strahlungswiderstand und die Transmission für verschiedene Längen des konischen Rohrstücks  $l_{I,II}$  dargestellt. Für die Berechnung wurde ange nommen, dass vom Hauptströmungskanal keine Welle in den Trichter hineinläuft, d.h.  $p_i^- = 0$ . Die Frequenz wurde mit dem Radius  $R = 0.25$  m des Hauptströmungskanals ent dimensionalisiert. Die Radien von Trichtereingang und Trichterausgang stimmen mit den im Experiment verwendeten Abmessungen überein, vgl. Abbildung 7.5. Wenn der Druckkammertreiber direkt an die Kanalwand montiert würde, was hier durch einen Querschnittssprung über eine Länge von  $l/R = 0.004$  simuliert ist, wären der Strahlungswiderstand und die Transmission über den gesamten Frequenzbereich sehr klein. Durch

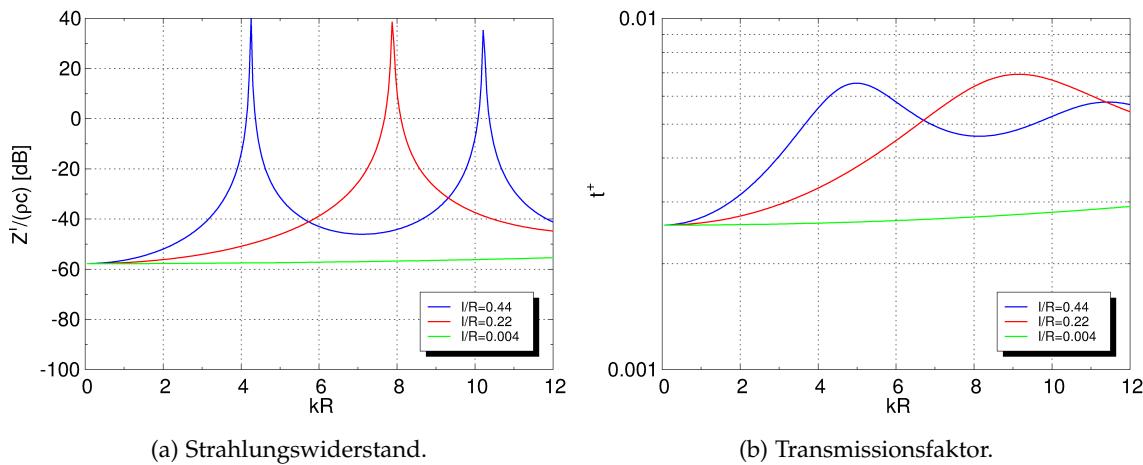


Abbildung 6.8: Schallstrahlungswiderstand am Trichtereingang und Schalltransmission in den Strömungskanal in Abhängigkeit der Länge des Lautsprechertrichters mit Eingangs- bzw. Ausgangsradius von  $r_I/R = 0.0508$  und  $r_{II}/R = 0.1$ .

Verwendung eines Trichters endlicher Länge wird die Ankopplung der Luft an die Membran des Horntreibers hingegen offenkundig verbessert und die Transmission im mittleren bis oberen Frequenz etwa verdoppelt. Die Tatsache, dass die Schalltransmission vom Trichter in den Kanal unter 1% bleibt, ist auf den extremen Querschnittssprung von der Trichteröffnung zum Strömungskanal zurückzuführen und könnte nur durch Vergrößerung der Flächenverhältnisses signifikant verbessert werden. Für das Experiment wurde die Trichterlänge auf  $l_{I,II}/R = 0.44$  festgelegt.

### 6.2.3 Einfluss der Öffnungsfläche am Trichterausgang

Bei der Ableitung der Greenschen Funktion in Abschnitt 6.1 wurde eine punktförmige Massenquelle angenommen. Im Trichterausgang ist die anregende Schnelle jedoch über die Öffnungsfläche an der Kanalwand verteilt. Um den Einfluss der Quellenausdehnung auf die Modenanregung zu erfassen wird die Schnelleverteilung durch einen schwingenden Kolben angenähert, mit den Annahmen, dass die radial zur Kanalwand erfolgende Kolbenauslenkung vernachlässigbar klein gegenüber dem Kanalradius ist und Randeffekte wie etwa durch eine akustische Grenzschicht an der Trichterwand vernachlässigt werden können. Der Schalldruck, der durch eine an der mittleren Position  $(\tilde{x}_j, R, \tilde{\phi}_j)$  befindliche Quelle mit der über die Oberfläche konstanten Schnelle  $u_j$  erzeugt wird, lässt sich durch Integration der Greenschen Funktion über die Kolbenoberfläche berechnen:

$$p^{\vec{e}}(x, r, \phi | \check{x}_j, R, \check{\phi}_j) = -i\omega\rho u_j \int_{\check{x}_j-b}^{\check{x}_j+b} \int_{\check{\phi}_j-\theta}^{\check{\phi}_j+\theta} g^{\vec{e}}(x, r, \phi | \check{x}, R, \check{\phi}) R d\check{\phi} d\check{x}. \quad (6.19)$$

Wie in Abbildung 6.9 skizziert, wird zur vereinfachten analytischen Auswertung der Integrale die Kolbenfläche als rechteckig angenommen. Die Integrale lassen sich so für die axiale und radiale Koordinate getrennt berechnen. Die Kantenlängen des Kolbens seien  $2\theta R$  in der azimutalen und  $2b$  in der axialen Richtung, die Kolbenoberfläche be-

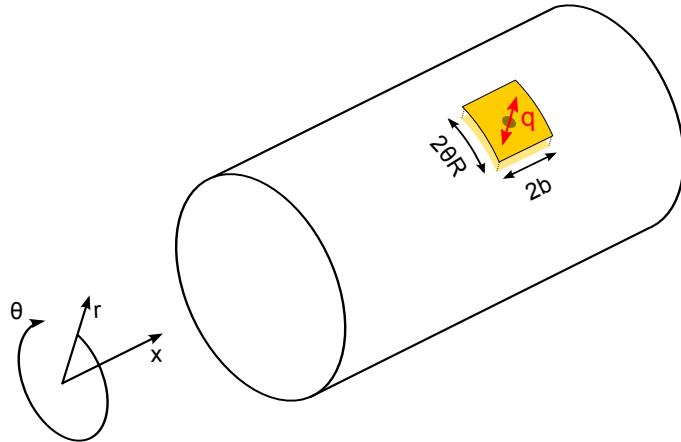


Abbildung 6.9: Radial in der Kanalwand schwingender rechteckiger Kolben zur Modellierung der im Trichterausgang angeregten Schnelleverteilung.

trägt damit  $A = 4b\theta R$ . Für den stromauf bzw. stromab der Quellverteilung angeregten Schalldruck ergibt sich [45]

$$p^{\vec{e}}(x, r, \phi | \ddot{x}_j, R, \dot{\phi}_j) = q_j \frac{\rho c}{4\pi R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \text{sinc}(m\theta) \text{sinc}(k_{mn}^{\pm} b) \frac{f_{mn}(r) f_{mn}(R)}{\alpha_{mn}} e^{im(\phi - \dot{\phi}_j)} e^{ik_{mn}^{\pm}(x - \ddot{x}_j)}, \quad (6.20)$$

und für die angeregten Modenamplituden gilt

$$A_{mn}^{\vec{e}} = q_j \text{sinc}(m\theta) \text{sinc}(k_{mn}^{\pm} b) \frac{\rho c}{4\pi R^2} \frac{f_{mn}(R)}{\alpha_{mn}} e^{-im\dot{\phi}_j} e^{-ik_{mn}^{\pm}\ddot{x}_j}. \quad (6.21)$$

Für den Volumenfluss gilt hierbei  $q_j = A u_j = 4bR\theta v_j$ . Als Erweiterung gegenüber der für die punktförmigen Monopolquelle gültigen Gleichungen (6.7) und (6.8) wird die Wirkung der flächigen Schnelleverteilung durch zwei zusätzliche Gewichtungsfunktionen  $\text{sinc}(m\theta)$  und  $\text{sinc}(k_{mn}^{\pm} b)$  beschrieben. Bei der Funktion  $\text{sinc}$  handelt es sich um die aus der Optik bekannte Spaltfunktion

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für alle } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

Die Spaltfunktion hat einen zur Beamforming-Richtungsfunktion aus Gleichung (3.52) ähnlichen Verlauf. Ausgehend von einer punktförmigen Kolbenausdehnung gilt, dass für eine feste Wellenzahl  $m$  bzw.  $k_{mn}^{\pm}$  die angeregte Modenamplitude mit zunehmender azimutaler bzw. axialer Kolbenabmessung kontinuierlich bis zur ersten Nullstelle der Spaltfunktion abnimmt. Dieses Verhalten lässt sich anschaulich als eine destruktive Interferenz von Teilwellen erklären, wenn man sich die Kolbenfläche aus vielen Monopolen zusammen gesetzt vorstellt.

Folgende Abschätzungen zeigen, dass die kreisrunde Trichteröffnung in der Kanalwand, durch die der von den Lautsprechereinheiten erzeugte Schall in den Kanal eingekoppelt wird, im experimentell untersuchten Frequenzbereich auch ohne Verwendung

der Korrekturterme durch eine punktförmige Monopolquelle angenähert werden kann. Die azimutale und die axiale Kantenlänge des Kolben betragen  $2\theta R = 2b = 50$  mm, was gleichbedeutend mit  $\theta = b/R = 1/10$  ist. Damit ergibt sich für die höchste betrachtete azimutale Ordnung  $\max|m|=4$  ein Amplitudengewichtungsfaktor von  $\text{sinc}(4\theta) = 0.97$  und für die bei der höchsten Frequenz von  $kR = 5.9$  auftretende maximale axiale Wellenzahl  $\max(k_{mn}^\pm) = k_{0,0}^\pm$  ein Amplitudengewichtungsfaktor von  $\text{sinc}(k_{0,0}^\pm b) = 0.94$ . Da die Öffnung in der Realität kreisförmig ist, dürften die Interferenzeffekte sogar geringer ausfallen.

### 6.3 MODELL DES LAUTSPRECHERARRAYS

Nachdem in den vorherigen Abschnitten Beschreibungen für die Schallfeldanregung durch eine Monopolquelle im Hauptströmungskanal und für das resonante Verhalten der einzelnen Lautsprechereinheit entwickelt wurden, können diese nun zur Modellierung des gesamten Lautsprecherarrays zusammen gefügt werden. Dies erfolgt durch eine Anpassung der akustischen Variablen an den gemeinsamen Schnittstellen, d. h. an den Trichteröffnungen in der Kanalwand, wie in Abbildung 6.2 schematisch angedeutet ist. Das Modell folgt im Ansatz der Arbeit von Hallez [45] und wurde im Detail von Nagai und Tapken in [95] beschrieben<sup>2</sup>. Es wird für einen Einblick in die passive Dämpfungswirkung des Resonatorsystems in Abhängigkeit des Ringabstands und der Ringsstaffelung genutzt. Die Rückwirkung auf die Modenanregung einer einzelnen Lautsprecherquelle wird in Gegenüberstellung mit experimentellen Daten ausführlich in Abschnitt 7.4 diskutiert.

#### 6.3.1 Wechselwirkung der Lautsprechereinheiten

Das akustische Feld im Strömungskanal setzt sich im Allgemeinen aus den von allen Lautsprechereinheiten einzeln angeregten Schallfeldern – und optional einer z. B. von einer Fanstufe erzeugt einlaufenden Welle – zusammen. An der Position der i-ten Trichteröffnung gilt entsprechend für den mittleren kanalseitigen Schalldruck

$$p_i = \sum_j \check{Z}_{ij} q_j + p_i^e \quad (6.23)$$

bzw. in Matrizendarstellung

$$\mathbf{p} = \check{\mathbf{Z}} \mathbf{q} + \mathbf{p}^e. \quad (6.24)$$

In vorstehender Gleichung bezeichnet  $p_i^e$  den mit der einlaufenden Welle verbundenen Schalldruck, welcher im Weiteren als bekannt voraus gesetzt wird.  $\check{Z}_{ij}$  stellt formal eine Impedanz dar. Sie wird benötigt um den Schalldruck  $p_i$  in der i-ten Lautsprecheröffnung zu berücksichtigen, der durch die j-te Quelle mit dem Volumenfluss  $q_j$  induziert wird, vgl. Abbildung 6.10. Die Berechnung der Impedanz erfordert eine Mittelung der in der Lautsprecheröffnung induzierten Schalldruckverteilung:

$$\check{Z}_{ij} = \frac{1}{A} \int_{x_i-b}^{x_i+b} \int_{\phi_i-\theta}^{\phi_i+\theta} \frac{p(x, R, \phi | \check{x}_j, R, \check{\phi}_j)}{q_j} R d\phi dx. \quad (6.25)$$

---

<sup>2</sup> Die in dieser Arbeit vorgestellte mathematische Formulierung weicht von der Darstellung in [95] ab.

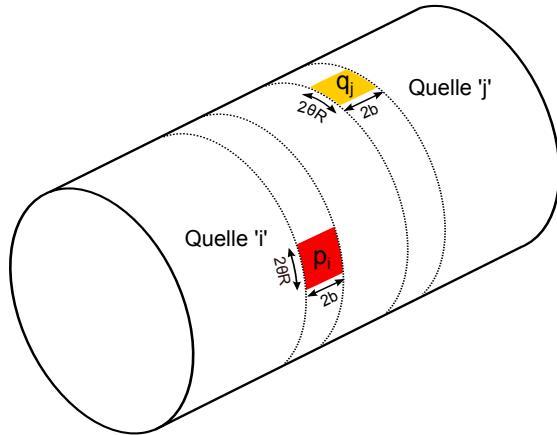


Abbildung 6.10: Illustration der Abstrahlungs- und Empfängerposition zur Berechnung der von der j-ten Quelle an der Kopplungsfläche der i-ten Quelle induzierten Impedanz.

A bezeichnet die Fläche der Lautsprecheröffnung an der Kanalwand, die wie zuvor in Abschnitt 6.2.3 als rechteckig mit den Kantenlängen  $2\theta R$  und  $2b$  angenähert wird. Die Auswertung des Integrals hängt von den relativen Positionen der beiden Quellen ab. Wenn die Quell- und Empfängerpositionen in unterschiedlichen Ringen liegen und sich die Lautsprecherringe axial nicht überlappen, d. h. wenn der axiale Ringabstand  $d = |x_i - x_j| > 2b$  ist, dann kann die Impedanz durch Einsetzen von Gleichung (6.20) in Gleichung (6.25) berechnet werden. Das Ergebnis lautet

$$\check{Z}_{ij} = \frac{\rho c}{4\pi R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \text{sinc}^2(m\theta) \text{sinc}^2(k_{mn}^{\pm} b) \frac{f_{mn}^2(R)}{\alpha_{mn}} e^{im(\phi_i - \phi_j)} e^{ik_{mn}^{\pm}(x_i - \check{x}_j)}. \quad (6.26)$$

Je nach relativer Lage von Quell- und Empfängerposition muss entweder die durch „+“ oder „-“ gekennzeichnete axiale Wellenzahl verwendet werden. Für den Fall, dass Quell- und Empfängerposition im gleichen Ring liegen, gilt folgende Lösung [45]:

$$\check{Z}_{ij} = \frac{\rho c}{4\pi R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \text{sinc}^2(m\theta) \frac{f_{mn}^2(R)}{\alpha_{mn}} e^{im(\phi_i - \phi_j)} \times \left[ \frac{1}{ik_{mn}^+} - \frac{1}{ik_{mn}^-} + \frac{1 - e^{ik_{mn}^+ 2b}}{2b(k_{mn}^+)^2} + \frac{1 - e^{-ik_{mn}^- 2b}}{2b(k_{mn}^-)^2} \right]. \quad (6.27)$$

Ziel ist es im Folgenden, die in den Trichterausgängen der Lautsprechereinheiten erzeugten Volumenflüsse  $q_j$  zu berechnen, welche zur Vorhersage des Schalldruckfelds an einer beliebigen Stelle im Strömungskanal benötigt werden. Hierfür werden das Schallfeldmodell des Strömungskanal und das Trichtermodell an allen Verbindungsöffnungen gekoppelt. An jeder Kopplungsstelle muss

$$p_i = p_i^{\text{III}} \quad (6.28)$$

$$q_i = q_i^{\text{III}} \quad (6.29)$$

erfüllt sein. Bekannt sind bisher nur die Volumenflüsse  $q_i^I$  an den Trichtereingängen. Zur Berechnung der fehlenden Größen wird auf die Matrizen  $T_{I,II}$  und  $T_{II,III}$  der Gleichungen (6.11) und (6.12) zurück gegriffen, welche die Schallgrößen an Trichterausgang und

Trichtereingang jeder Lautsprechereinheit in Beziehung setzen. Für die vorliegende Anwendung müssen sie invertiert werden. Zur Vereinfachung der weiteren Beschreibung werden sie in einer neuen Matrix  $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_{I,II} \mathbf{T}_{II,III}]^{-1}$  zusammengefasst, so dass folgendes Gleichungssystem formuliert werden kann:

$$\begin{pmatrix} p_i^{III} \\ q_i^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i^I \\ q_i^I \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

Gleichung (6.30) wird unter Berücksichtigung der Identitäten aus den Gleichungen (6.28) und (6.29) in Gleichung (6.24) eingesetzt und wie folgt umgestellt:

$$\mathbf{p}^I = [T_{11} \mathbb{1} - T_{21} \check{\mathbf{Z}}]^{-1} ((T_{22} \check{\mathbf{Z}} - T_{12} \mathbb{1}) \mathbf{q}^I + \mathbf{p}^e). \quad (6.31)$$

Das Gleichungssystem (6.31) ermöglicht die Berechnung aller an den Trichtereingängen vorliegenden Schalldrücke. Diese können zusammen mit den Volumenflüssen  $q_i^I$  in Gleichung (6.30) eingesetzt werden, um schließlich die gesuchten Volumenflüsse in den Trichteröffnungen  $q_i$  zu bestimmen.

### 6.3.2 Einfluss von Ringabstand und Ringstaffelungswinkel

Die passive Wirkung des Resonatorsystems lässt sich gut anhand von einzelnen, von außen in das Lautsprecherarray laufenden Moden demonstrieren. Betrachtet wird ein aus zwei Ringen mit je 8 Lautsprechereinheiten bestehender Modengenerator, in dem alle Lautsprecher inaktiv sind<sup>3</sup>. Die Ringe sind um eine halbe Teilung in Umfangsrichtung gestaffelt. Der Hauptkanal ist nicht durchströmt und besitzt keinen Nabenkörper. Die Lautsprechertrichter haben die im Experiment verwendeten Abmessungen.

Abbildung 6.11 veranschaulicht die resonante Wirkung bei einem Abstand der Lautsprecherringe von  $d/R = 0.36$  für verschiedene Moden<sup>4</sup>. Die Daten sind in dem Frequenzbereich abgebildet, in dem die erste Resonanz auftritt und der für die experimentelle Untersuchungen relevant ist. In allen Fällen gibt es ein schmales Frequenzband, in dem die einfallende Mode zum überwiegenden Teil reflektiert wird, außerhalb des Resonanzbereiches wird jede Mode fast vollständig transmittiert. Referenzebenen zur Berechnung der Transmission und Reflexion sind die Austrittsseite bzw. die Eintrittsseite des Lautsprecherarrays. Auffällig ist, dass die Resonanzen deutlich unterhalb der Resonanzfrequenz des isolierten Trichtersystems liegen, welche mittels der eindimensionalen Beschreibung in Abschnitt 6.2.2 als  $kR = 4.2$  berechnet wurde. Ausnahmen stellen die Moden (1,1) und (3,0) dar, deren Cut-on-Frequenzen höher liegen, die aber ansonsten ein vergleichbares Verhalten zeigen.

Eine Besonderheit ist für die einfallende Mode (0,0) fest zu stellen. Sie wird im Frequenzintervall  $3.8 < kR < 4.4$  zum überwiegenden Teil in die transmittierte Mode (0,1) und in die reflektierte Mode (0,1) gestreut. Dies lässt sich dadurch erklären, dass eine einfallende Mode in der Resonanz hohe Volumenflüsse in den Lautsprecheröffnungen

<sup>3</sup> Für jeden inaktiven Lautsprecher wird der Volumenfluss  $q_i^I$  zu Null gesetzt. Dies entspricht schallharten Trichterabschlüssen, was streng genommen von der Realität abweicht, da die Membranen mit der dahinterliegenden Mechanik nachgiebig sind.

<sup>4</sup> Die in den Abbildungen 6.11 bis 6.13 dargestellten Daten sind dem Bericht von Nagai und Tapken [95] entnommen.

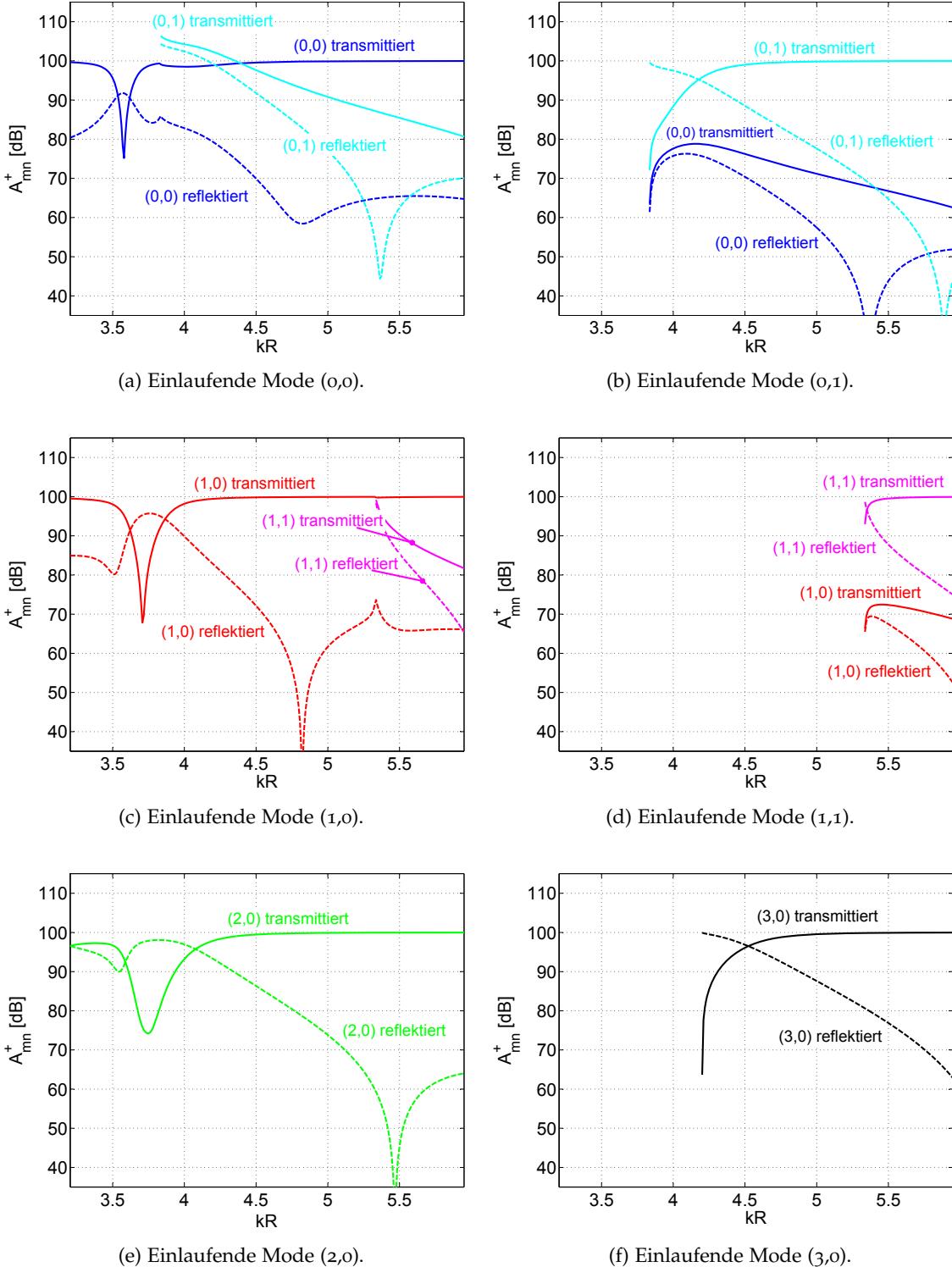


Abbildung 6.11: Streuung einzelner, in das Lautsprecherarray einlaufenden Moden. Das Array besteht aus zwei Ringen je 8 Lautsprechern. Die einlaufende Mode besitzt eine Amplitude von 100 dB.

induziert. Im vorliegenden Fall kommt hinzu, dass die Cut-on-Frequenz der Mode (0,1) gerade in den betreffenden Frequenzbereich fällt und daher leicht anregbar ist, was in Abbildung 6.4 anhand der hohen modalen Impedanz nachvollzogen werden kann.

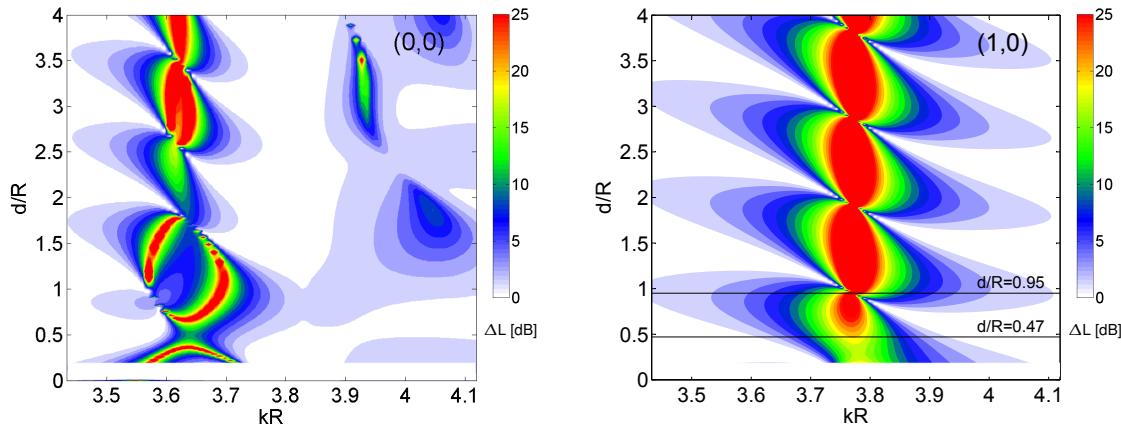


Abbildung 6.12: Passive Dämpfungswirkung zweier Lautsprecherringe mit variablem axialen Abstand auf einlaufende Moden  $(0,0)$  bzw.  $(1,0)$ .

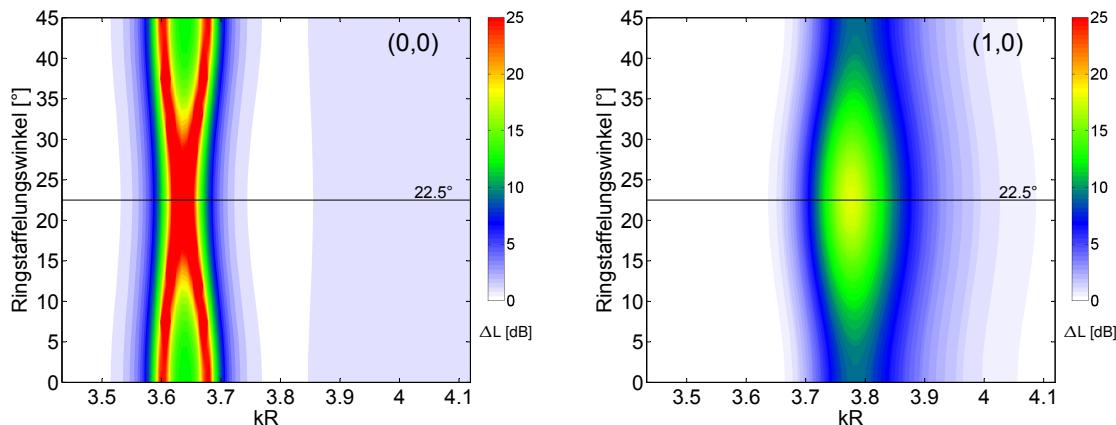


Abbildung 6.13: Passive Dämpfungswirkung zweier Lautsprecherringe mit variabler relativer Staffelung und einem axialen Abstand von  $d/R = 0.36$  auf einlaufende Moden  $(0,0)$  bzw.  $(1,0)$ .

Die Mittenfrequenzen und die Bandbreiten der Resonanzen fallen für die verschiedenen Ordnungen unterschiedlich aus. Ein Zusammenhang mit den unterschiedlichen Ausrichtungen der modalen Wellenfronten relativ zu den Lautsprecherpositionen liegt nahe und lässt sich anhand einer Variation der relativen Anordnung der beiden Ringe verdeutlichen. Dazu ist in Abbildung 6.12 die relative Änderung der transmittierten Modenamplitude bei kontinuierlicher Variation des Ringabstands in Form der Durchgangsdämpfung  $\Delta L$  dargestellt<sup>5</sup>. Im Diagramm der Mode  $(1,0)$  ist eine Periodizität klar erkennbar. Die Resonanzen sind am Schärfsten ausgeprägt, wenn der Ringabstand ein Vielfaches der halben axialen Wellenlänge beträgt. Für die Mode  $(1,0)$  gilt beispielsweise bei  $d/R = \pi/(k_{mn}^+ R) = 0.95$ . Das Diagramm der Mode  $(0,0)$  zeigt aufgrund der partiellen Streuung in die höhere radiale Ordnung diesen klaren Verlauf nicht, außerdem fallen die Maxima der Durchgangsdämpfung kleiner aus. In Abbildung 6.13 ist ein Einfluss des relativen Staffelungswinkels der beiden Ringe sichtbar, die in diesem Fall im Abstand

<sup>5</sup> Da das in Abschnitt 6.3.1 entwickelte Modell nicht für überlappende Lautsprecherringe gilt, wurden die Rechnungen nur für Abstände  $d/R > 2b/R = 0.2$  durchgeführt.

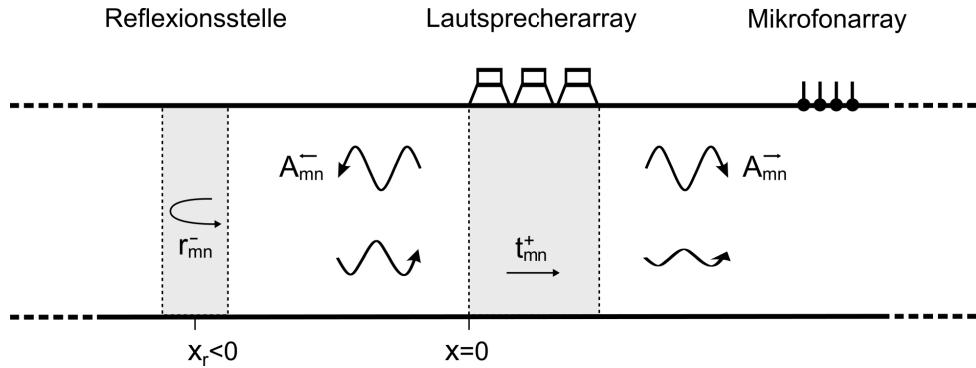


Abbildung 6.14: Schematische Darstellung des in Kapitel 7 verwendeten Versuchsaufbaus zur Veranschaulichung des Einfluss von Reflexionen auf die Modensynthese.

von  $d/R = 0.36$  angeordnet sind.

#### 6.4 BERÜKSICHTIGUNG VON REFLEXIONEN IM STRÖMUNGSKANAL

In den bisherigen Beschreibungen wurden außerhalb des Lautsprecherarrays beidseitig reflexionsfreie Randbedingungen angenommen. Im Versuchsstand können die vom Array erzeugten Moden jedoch an Kanalinhomogenitäten gestreut werden und dadurch zu einer signifikanten Veränderung des Gesamtschallfelds führen. Prinzipiell hängt die Überlagerung der abgestrahlten und gestreuten Moden von der relativen räumlichen Lage der Schallquellen zu den Reflexionsstellen ab. Eine für die in Kapitel 7 angestellten Untersuchungen relevante Situation ist in Abbildung 6.14 dargestellt. Die vom Lautsprechersegment nach links abgestrahlte Mode wird an der Reflexionsstelle zum Teil in eine nach rechts laufende Welle gestreut, welche sich nach Transmission durch das Array mit der nach rechts abgestrahlten Mode überlagert. Es wird angenommen, dass die Reflexionsstelle so beschaffen ist, dass keine Streuung in andere azimutale und radiale Ordnungen auftreten<sup>6</sup>. Die in der Mikrofonsektion mit Bezug zur Position  $x=0$  gemessenen Modenamplituden setzen sich dann wie folgt zusammen:

$$A_{mn}^+ = A_{mn}^- + t_{mn}^+ r_{mn}^- e^{i(k_{mn}^+ - k_{mn}^-)|x_r|} A_{mn}^-, \quad (6.32)$$

$$A_{mn}^- = 0. \quad (6.33)$$

Während der Transmissionsfaktor  $t_{mn}^+$  mithilfe des in Abschnitt 6.3 entwickelten Modells bestimmt werden kann, ist der Reflexionsfaktor  $r_{mn}^-$  im Allgemeinen unbekannt. Der Einfluss von Mehrfach-Reflexionen spielt in der Regel eine untergeordnete Rolle und wird hier nicht berücksichtigt. Für eine vereinfachte Schreibweise wird folgende Abkürzung eingeführt

$$R_{mn}^- := t_{mn}^+ r_{mn}^- e^{i(k_{mn}^+ - k_{mn}^-)|x_r|}. \quad (6.34)$$

Die durch jede Lautsprechereinheit stromab des Modengenerators angeregten Modenamplituden lassen sich dann wie folgt berechnen:

$$A_{mn}^+ = q_j \operatorname{sinc}(m\theta) \operatorname{sinc}(k_{mn}^\pm b) \frac{\rho c}{4\pi R^2} \frac{f_{mn}(R)}{\alpha_{mn}} e^{-im\phi_j} \left( e^{-ik_{mn}^+ \tilde{x}_j} + R_{mn}^- e^{-ik_{mn}^- \tilde{x}_j} \right).$$

<sup>6</sup> Diese Annahme ist für die Interpretation der Messergebnisse in Kapitel 7 ausreichend und vermeidet eine aufwändige Bestimmung von modalen Streumatrizen.

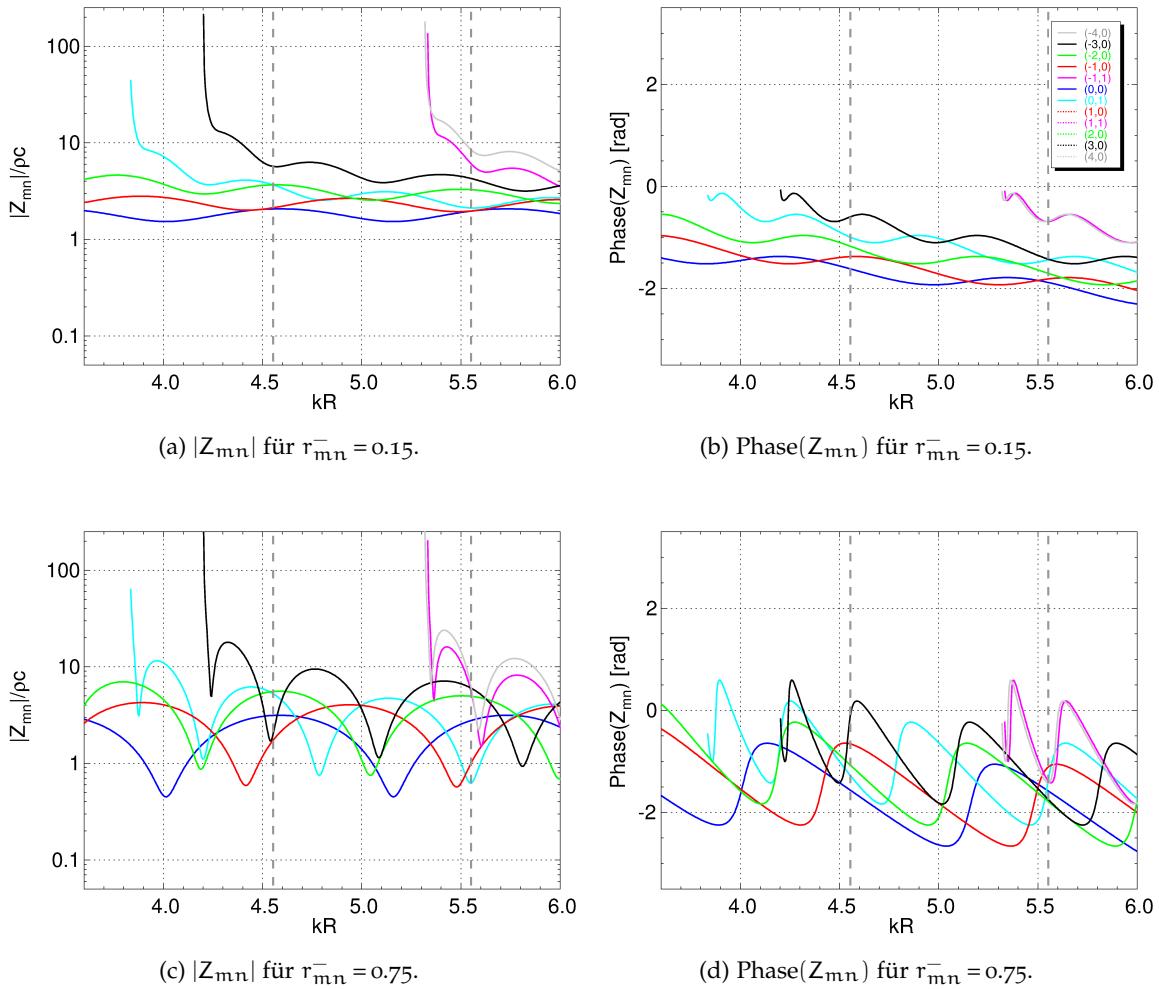


Abbildung 6.15: Einfluss einer an der Stelle  $x_r = -3.1R$  befindlichen Reflexionsstelle auf das durch eine Monopolquelle angeregte Modenspektrum. Die Quelle befindet sich an der Position  $(\ddot{x}, \ddot{r}, \ddot{\phi}) = (0.36R, R, 0)$ .

(6.35)

Die Auswirkung einer links vom Lautsprecherarray liegenden Reflexionsstelle auf das angeregte Modenspektrum ist in Abbildung 6.15 veranschaulicht. Dargestellt ist die modale Impedanz für eine isolierte Quelle, d. h. alle anderen Lautsprechereinheiten sind nicht installiert, so dass  $t_{mn}^+ \equiv 1$  gilt. Der Reflexionsfaktor sei unabhängig von der Modenordnung  $r_{mn}^- \equiv 0.15$  bzw.  $r_{mn}^- \equiv 0.75$ . Die Diagramme sind mit Abbildung 6.4 (a) bzw. Abbildung 6.6 (a) zu vergleichen. Durch die Interferenz der direkt in '+'-Richtung abgestrahlten Moden mit den reflektierten Moden weist das Modenspektrum sowohl bezüglich Betrag als auch bezüglich der Phase eine erhebliche Welligkeit auf.

## 6.5 GEZIELTE ANREGUNG VON AZIMUTALEN MODENORDNUNGEN

Bei der Untersuchung von Schallausbreitungsvorgängen sowie auch in der aktiven Lärmreduktion ist es das Ziel eine einzelne, durch Rotor-Stator-Interaktion generierte azimuthale Modenordnung präzise nachzubilden, d. h. ohne gleichzeitige Anregung sonstiger azimuthaler Ordnungen. Dies lässt sich durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften

einer äquidistanten Anordnung von Quellen leicht realisieren.

Zunächst soll ein koaxialer Ring von  $N_\phi$  Monopolquellen an der axialen Position  $\check{x} = \check{x}_0$  in einem reflexionsfrei abgeschlossenen Kanal betrachtet werden. In den hier interessierenden Anwendungen liegen alle Quellen immer an der äußeren Kanalwand, weshalb fortan die radiale Quellposition nicht mehr explizit aufgeführt wird und die radialen Eigenfunktionen stets an der Position  $\check{r} = R$  auszuwerten ist. Jeder Monopol wird mit der Quellstärke  $q(\check{\phi}_l) = q(\check{x}_0, \check{\phi}_l)$  angeregt ( $l = 0, 1, \dots, N_\phi - 1$ ). Die Überlagerung aller Monopolquellen ergibt

$$A_{mn}^{\rightarrow} = \frac{\chi_{mn}^{\pm}}{\alpha_{mn}} e^{-ik_{mn}^{\pm}\check{x}_0} \sum_{l=0}^{N_\phi-1} q(\check{\phi}_l) e^{-im\check{\phi}_l}. \quad (6.36)$$

Zur besseren Übersichtlichkeit wurde in vorstehender Gleichung der Faktor

$$\chi_{mn}^{\pm} = \frac{\rho c}{4\pi R^2} \operatorname{sinc}(m\theta) \operatorname{sinc}(k_{mn}^{\pm} b) f_{mn}(R) \quad (6.37)$$

eingeführt. Aus Gleichung (6.36) geht unmittelbar hervor, dass die Radialmoden derselben azimuthalen Modenordnung nur in einem festen, von den Quellstärken der einzelnen Monopole unabhängigen Amplituden- und Phasenverhältnis angeregt werden können:

$$\frac{A_{mn}^{\rightarrow}}{A_{mv}^{\rightarrow}} = \frac{\alpha_{mv}}{\alpha_{mn}} \frac{\chi_{mn}^{\pm}}{\chi_{mv}^{\pm}} e^{-i(k_{mn}^{\pm} - k_{mv}^{\pm})\check{x}_0}. \quad (6.38)$$

Es kann mit einem Ring also beispielsweise nicht die Mode  $(\mu, 0)$  unterdrückt und gleichzeitig die Mode  $(\mu, 1)$  dominant angeregt werden. Entsprechend der Anzahl Freiheitsgrade können aber grundsätzlich die Azimuthalmodenamplituden von  $N_\phi$  azimuthalen Ordnungen kontrolliert werden. Zur gezielten Anregung der azimuthalen Ordnung  $m = \mu$  werden die Monopolquellen am Besten äquidistant in Umfangsrichtung verteilt:

$$\check{\phi}_l = \frac{l}{N_\phi} 2\pi \quad (l = 0, 1, \dots, N_\phi - 1). \quad (6.39)$$

Werden alle Quellen mit gleichem Betrag und einem Phasenversatz entsprechend folgender Formel angeregt,

$$q_\mu(\check{\phi}_l) = \hat{q}_\mu \cdot e^{i\mu\check{\phi}_l}, \quad (6.40)$$

dann stellt sich für die Mode  $(m, n)$  folgende Amplitude ein:

$$A_{mn}^{\rightarrow} = \hat{q}_\mu \cdot \frac{\chi_{mn}^{\pm}}{\alpha_{mn}} e^{-ik_{mn}^{\pm}\check{x}} \sum_{l=0}^{N_\phi-1} e^{i(\mu-m)\frac{l}{N_\phi} 2\pi}. \quad (6.41)$$

Es müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Für die Moden der azimuthalen Ordnung  $m_j = \mu - j \cdot N_\phi$  mit  $j = \dots, -1, 0, 1, \dots$  und der radialen Ordnung  $n$  ergeben sich die Amplituden

$$A_{m_j n}^{\rightarrow} = N_\phi \hat{q}_\mu \frac{\chi_{m_j n}^{\pm}}{\alpha_{m_j n}} e^{-ik_{m_j n}^{\pm}\check{x}} \quad (6.42)$$

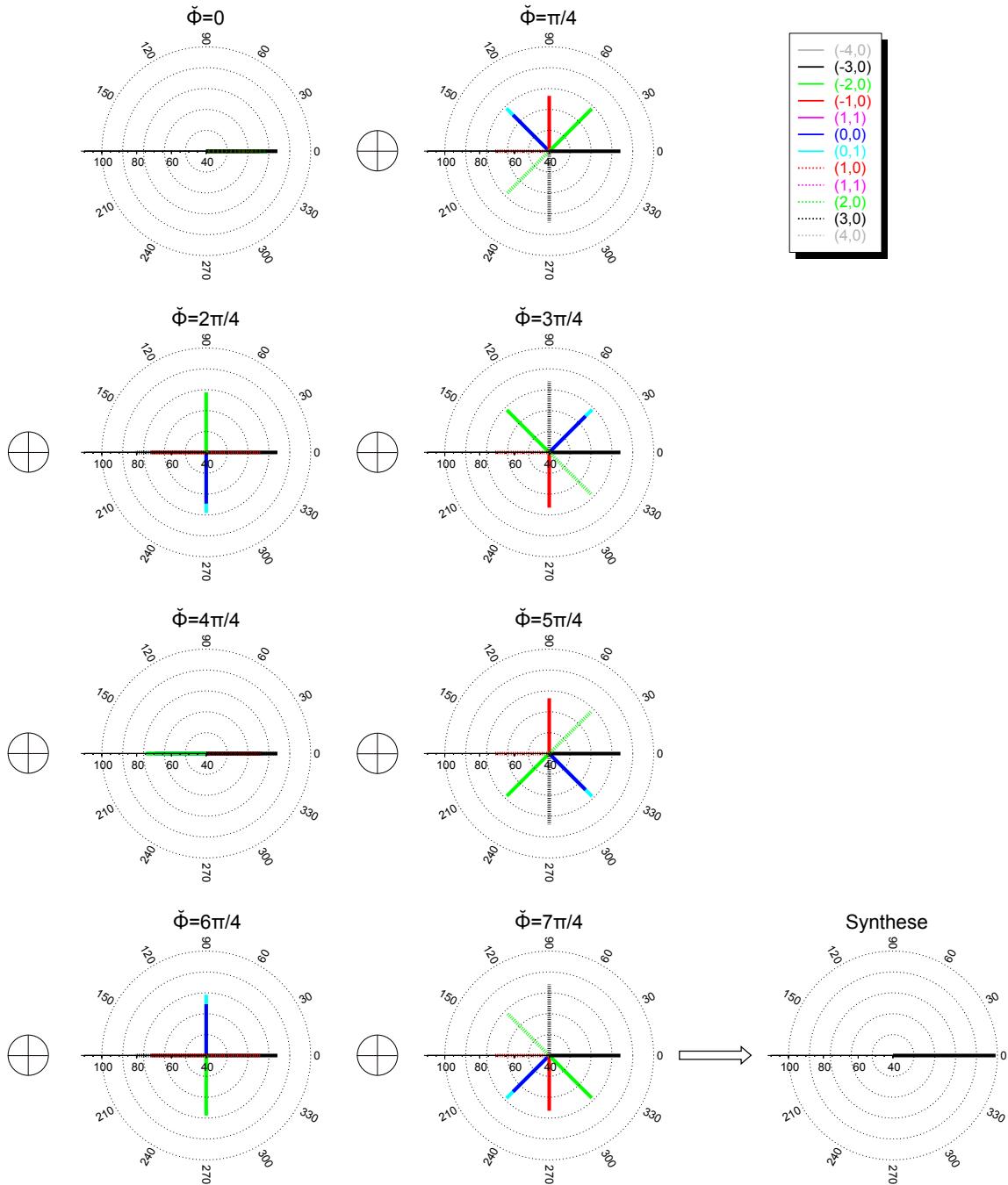


Abbildung 6.16: Die Phasen der Anregungssignale von acht ringförmig angeordneten Quellen sind bei der Frequenz  $kR = 4.55$  so aufeinander abgestimmt, dass aus der Überlagerung der einzelnen Schallfelder die azimuthale Ordnung  $m = 3$  resultiert.

2. Für Moden der azimuthalen Ordnungen  $m \neq \mu - j \cdot N_{\check{\phi}}$  hingegen folgt  $A_{mn}^{\vec{r}} = 0$ .

In Abbildung 6.16 ist am Beispiel der Mode  $m = 3$  illustriert, wie sich die Modenspektren von acht Quellen so überlagern, dass sich alle ungewünschten azimuthalen Ordnungen auslöschen. Die in den Zeigerdiagrammen für die einzelnen Quellen abgebildeten Modenamplituden wurden unter Verwendung der Gleichungen (6.40) und (6.21) an der

Position  $\check{x} = 0$  und für einen Volumenfluss von  $q = 0.00008 \text{ m}^3/\text{s}$  berechnet<sup>7</sup>.

Bei Verwendung von zu wenigen Quellen kommt es zum *Spillover-Effekt*: Zusätzlich zur gewünschten azimutalen Ordnung  $\mu$  werden weitere azimutale Ordnungen  $m$  erzeugt. Dies ist in Abbildung 6.17 verdeutlicht. Der Fall ist mit dem zuvor in Abbildung 6.16 gezeigten Fall identisch, es wurden lediglich die Quellen an den Positionen  $\check{\phi} = 0, \pi/2, \pi$  und  $3\pi/2$  fort gelassen. Dadurch ergibt sich zusätzlich die Ordnung  $m_1 = -1$ . Soll der Spillover-Effekt für alle ausbreitungsfähigen Modenordnungen verhindert werden, so muss die Anzahl Quellen einem Nyquist-Kriterium genügen, d. h.

$$N_{\check{\phi}} \geq 2 \max |m| + 1. \quad (6.43)$$

Die Anzahl benötigter Quellen kann allerdings reduziert werden, wenn die Anregung auf azimutale Ordnungen  $\mu < \max |m|$  eingeschränkt wird. Dann reicht folgende Anzahl von Quellen aus:

$$N_{\check{\phi}} = \max |m| + |\mu| + 1. \quad (6.44)$$

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 6.18 am Beispiel der Ordnung  $m = 0$  veranschaulicht, für deren Erzeugung vier Lautsprecher ausreichen, obwohl Moden bis zur azimutalen Ordnung  $\max |m| = 3$  ausbreitungsfähig sind.

Für die in Abbildung 6.14 dargestellte Messsituation, d. h. unter Berücksichtigung der Reflexionsstelle, und bei Einhaltung der Bedingung (6.44), gilt für die Modenamplituden auf der Seite des Mikrofonarrays

$$A_{\mu n}^+ = N_{\check{\phi}} \hat{q}_\mu \frac{\chi_{\mu n}^+}{\alpha_{\mu n}} \left( e^{-ik_{\mu n}^+ \check{x}} + R_{\mu n}^- e^{-ik_{\mu n}^- \check{x}} \right). \quad (6.45)$$

Die Überlagerung aller ausbreitungsfähigen radialen Ordnungen ergibt für eine Position im Bereich des Mikrofonarrays an der Kanalausenwand folgende Azimutalmodenamplitude:

$$A_\mu^+(x) = N_{\check{\phi}} \hat{q}_\mu \sum_{n=0}^{N_n} \chi_{\mu n}^+ \alpha_{\mu n} f_{\mu n}(R) \left( e^{-ik_{\mu n}^+ \check{x}} + R_{\mu n}^- e^{-ik_{\mu n}^- \check{x}} \right) e^{ik_{\mu n}^+ x}. \quad (6.46)$$

Für die gezielte Anregung einer azimutalen Modenordnung  $m = \mu$  muss nur eine einzige komplexe Stellgröße  $\hat{q}_\mu = \hat{q}_\mu(\check{x}_0)$  spezifiziert werden. Sollen mit einem Quellring mehrere azimutale Ordnungen gleichzeitig angeregt werden, so kann dies durch simultane Verwendung entsprechend vieler Stellgrößen erreicht werden.

## 6.6 GEZIELTE ANREGUNG VON RADIALEN MODENORDNUNGEN

Wenn Einfluss auf die radiale Schallfeldstruktur einer gewünschten azimutalen Ordnung genommen werden soll, dann reicht ein Ring von Monopolquellen nicht aus. Die gezielte Synthese von  $N_n$  radialen Ordnungen erfordert vielmehr den Einsatz von  $N_{\check{x}} \geq N_n$  Quellringen an verschiedenen axialen oder radialen Positionen. Im Folgenden wird ein

<sup>7</sup> An der Quellposition  $\check{\phi} = 0$  besitzen alle Modenamplituden die Phase 0 und können daher nicht im Zeigerdiagramm voneinander unterschieden werden.

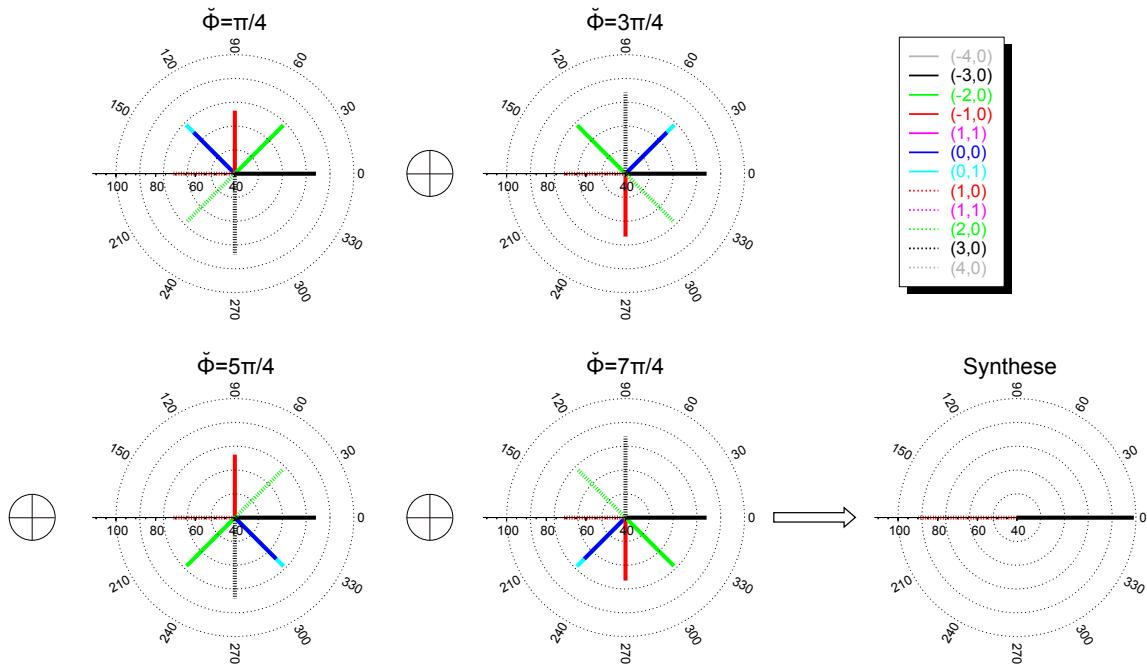


Abbildung 6.17: Bei Verwendung von nur vier Quellen, statt den in Abbildung 6.16 gezeigten acht Quellen, entsteht zusätzlich zur gewünschten Ordnung  $m=3$  die Spillovermoden-Ordnung  $m=-1$ .

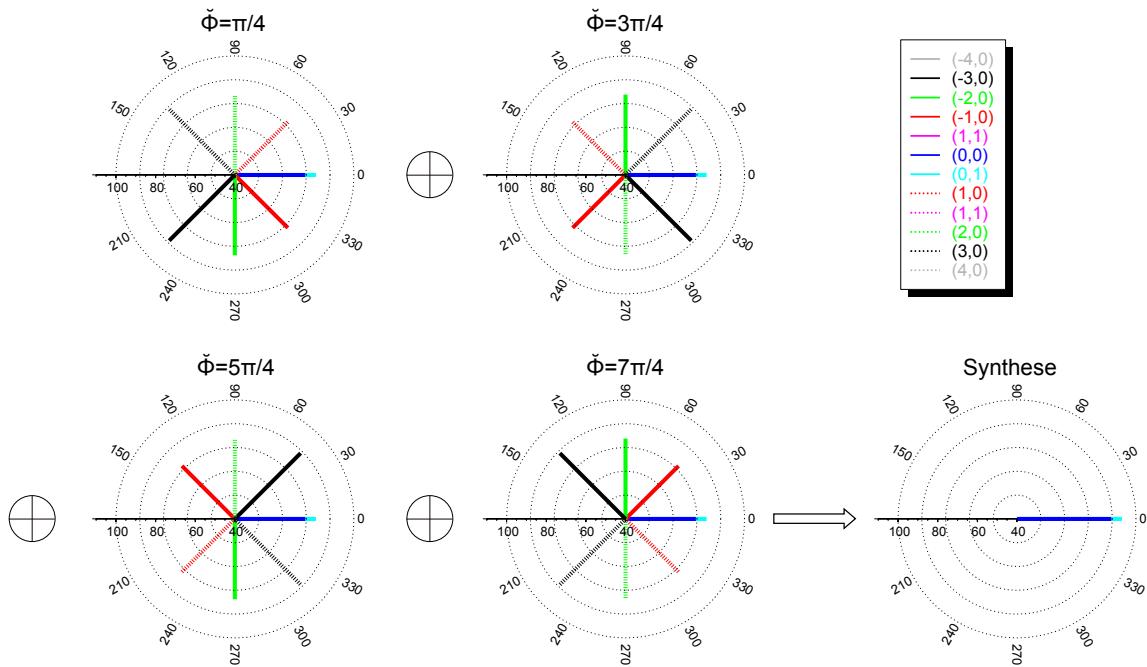


Abbildung 6.18: Die azimutale Modenordnung  $m=0$  kann bei der Frequenz  $kR = 4.55$  durch vier ringförmig angeordnete Quellen ohne Spillover-Effekt erzeugt werden.

Ansatz zur Berechnung der erforderlichen Stellgrößen der Lautsprecherringe hergeleitet und der Einfluss des Ringabstands sowie einer etwaigen Reflexionsstelle diskutiert.

Die Vorgehensweise soll anhand von Abbildung 6.19 illustriert werden. Im dargestellten Beispiel ist es das Ziel die Mode  $(0,0)$  mit einer Amplitude von  $100 \text{ dB}$  und der Phase  $0^\circ$  zu erzeugen und die Mode  $(0,1)$  gleichzeitig zu unterdrücken. Hierzu werden zwei Quellringe im Abstand von  $d/R = 0.36$  eingesetzt. Jeder Quellring erzeugt separat, bei gezielter Ansteuerung gemäß Formel (6.40) mit der Stellgröße  $\hat{q}'_\mu(\check{x}_i) = 0.0001 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $i=1,2$ ) und  $\mu = 0$  die in der oberen Zeile dargestellten Modenspektren. Anschaulich gesehen müssen die Modenspektren der einzelnen Quellringe nun derart überlagert werden, dass das angestrebte Radialmodenspektrum resultiert. Dazu wird für jeden Ring ein Adoptionsfaktor  $\gamma_i$  benötigt. Die Adoptionsfaktoren können mithilfe von Transferfunktionen ermittelt werden, welche die Beziehung zwischen einer Quellring-Stellgröße und den angeregten Modenamplituden beschreiben. Für den  $i$ -ten Quellring gilt in vektorieller Schreibweise<sup>8</sup>:

$$\mathbf{a}_{\mu,i} = \hat{q}_\mu(\check{x}_i) \mathbf{h}_\mu(\check{x}_i). \quad (6.47)$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{a}_{\mu,i}$  den  $N_n \times 1$  Vektor der angestrebten Modenamplituden und  $\mathbf{h}_\mu(\check{x}_i)$  einen Transferfunktionsvektor der gleichen Dimension. Der Transferfunktionsvektor wird in der Regel messtechnisch bestimmt<sup>9</sup>:

$$\mathbf{h}_\mu(\check{x}_i) = \frac{1}{\hat{q}'_\mu(\check{x}_i)} \mathbf{a}'_{\mu,i}. \quad (6.48)$$

Prinzipiell könnte der Transferfunktionsvektor auch mithilfe des Modells berechnet werden. Dies ist jedoch dadurch erschwert, dass z. B. die frequenzabhängigen reflektierenden Randbedingungen des Versuchsstand meist nicht bekannt sind.

Die Transferfunktionen der einzelnen Quellringe lassen sich zu einer Matrix kombinieren, so dass ein Gleichungssystem formuliert werden kann, in dem die Stellgrößen mit dem Vektor der gewünschten Modenamplituden verknüpft sind:

$$\mathbf{a}_\mu = \mathbf{H}_\mu \mathbf{q}_\mu. \quad (6.49)$$

$\mathbf{q}_\mu$  ist der von der Anzahl Quellringe abhängige  $N_x \times 1$  Vektor der Stellgrößen. Die Transferfunktionsmatrix  $\mathbf{H}_\mu$  hat die Dimension  $N_n \times N_x$  und ist im Allgemeinen nicht quadratisch. Die Lösung des Gleichungssystems wird mithilfe der Pseudo-Inversen berechnet [108]:

$$\mathbf{q}_\mu = [\mathbf{H}_\mu^H \mathbf{H}_\mu]^{-1} \mathbf{H}_\mu^H \cdot \mathbf{a}_\mu. \quad (6.50)$$

Die Anwendung des Vektors der Quellring-Stellgrößen  $\mathbf{q}_\mu$  liefert das in der unteren Zeile in Abbildung 6.19 dargestellte Syntheseergebnis. Die Adoptionsfaktoren wurden mit Gleichung (6.50) nur implizit ermittelt. Sie lassen sich nachträglich berechnen durch

$$\gamma_i = \frac{\hat{q}_\mu(\check{x}_i)}{\hat{q}'_\mu(\check{x}_i)}. \quad (6.51)$$

In einer selektiven Radialmodensynthese kann die Anzahl Quellringe durchaus geringer als die Anzahl ausbreitungsfähiger radialer Ordnungen sein, d. h.  $N_x < N_n$ . In

<sup>8</sup> Es werden nur die in positiver axialer Richtung abgestrahlten Moden betrachtet. In den folgenden Gleichungen wird zur Vereinfachung der Schreibweise der hoch gestellte Index '+' fort gelassen.

<sup>9</sup> Die durch  $\square'$  gekennzeichneten Größen sind Ergebnis der Transferfunktionsmessung und stimmen im Allgemeinen nicht mit den Größen überein, die für die gezielte Radialmodensynthese erforderlich sind.

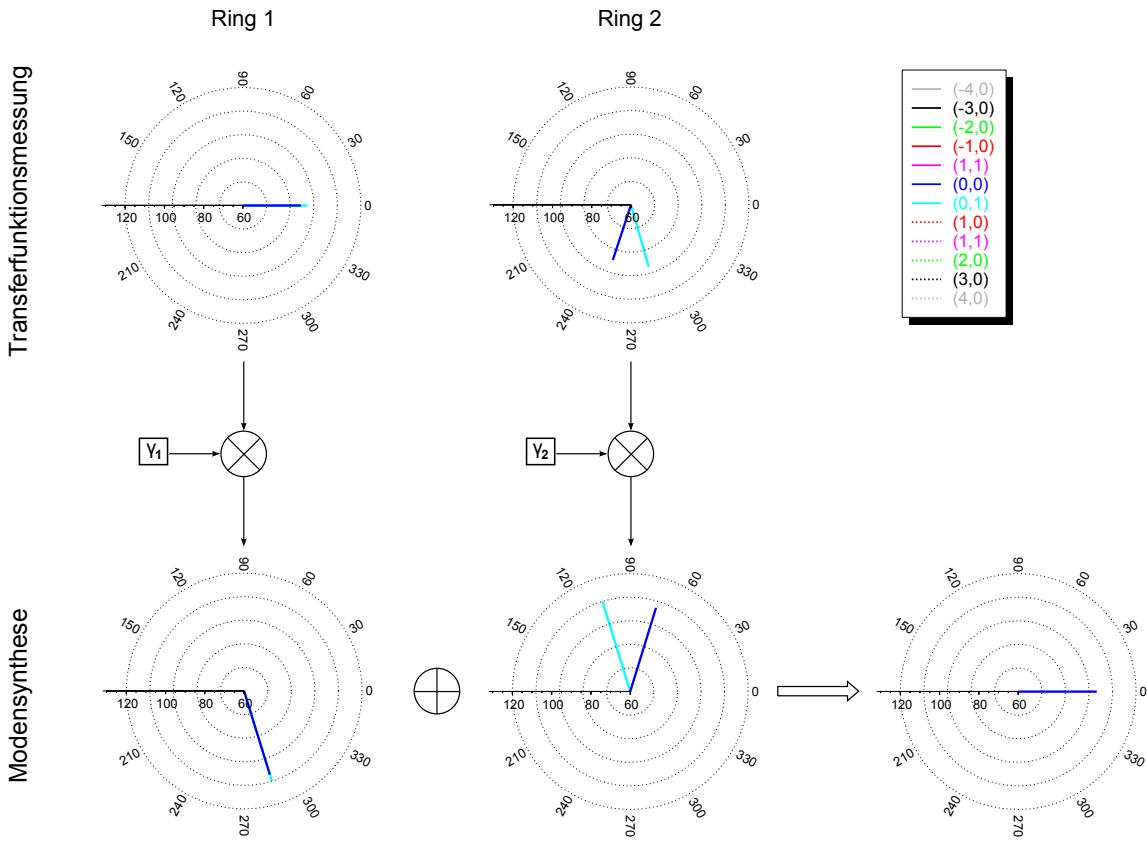


Abbildung 6.19: Gezielte Synthese der Mode  $(0,0)$  bei der Frequenz  $kR = 5.25$  mit zwei Quellringen.  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  stellen für das Syntheseergebnis benötigte Adoptionsfaktoren dar.

diesem Fall werden die nicht im Gleichungssystem explizit angegebenen Modenamplituden in linearer Abhängigkeit zu den adressierten Modenamplituden angeregt. Sollen Radialmoden verschiedener azimutaler Ordnungen gleichzeitig gezielt angeregt werden, dann können die Quellring-Stellgrößen mittels Gleichung (6.50) separat für jede azimutale Ordnung ermittelt und anschließend die Amplituden der einzelnen Quellen durch Überlagerung der Einzellösungen von Gleichung (6.40) berechnet werden.

Die Stabilität der Lösung (6.50) hängt von der Kondition der Transfermatrix  $H_\mu$  in vergleichbarer Weise ab, wie ausführlich in Kapitel 4 für die Radialmodenanalyse diskutiert wurde. Sie soll im Folgenden für die in Abbildung 6.14 dargestellte Versuchsanordnung untersucht werden. Aus praktischen Gründen werden für jeden Quellring des Modengenerators die gleiche Anzahl von  $N_\phi$  Quellen angenommen. Weiterhin sollen alle Quellringe axial äquidistant mit Abstand  $d$  gestaffelt sein, d. h. sich an den Positionen  $\tilde{x}_j = \tilde{x}_0 + j \cdot d$  ( $j = 0, 1, \dots, N_\phi - 1$ ) befinden. Gemäß Gleichung (6.45) ergeben sich aus der Überlagerung der einzelnen Quellringe die Modenamplituden

$$A_{\mu n}^+ = N_\phi N_\chi \frac{\chi_{\mu n}^+}{\alpha_{\mu n}} \sum_{j=0}^{N_\phi-1} \hat{q}_\mu(\tilde{x}_j) \left( e^{-ik_{\mu n}^+ \tilde{x}_j} + R_{\mu n}^- e^{-ik_{\mu n}^- \tilde{x}_j} \right). \quad (6.52)$$

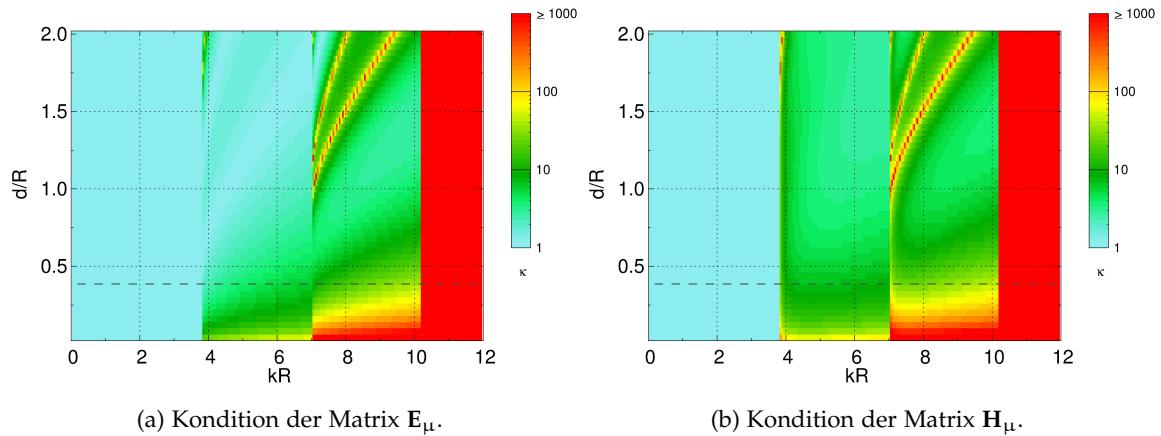


Abbildung 6.20: Kondition der Transfermatrizen in einer gezielten Synthese von Radialmoden der Ordnung  $\mu = 0$  mit einem aus drei Quellringen bestehenden Modengenerator mit variablem Ringabstand.

Ein Element der Transfermatrix stellt sich somit wie folgt dar:

$$H_\mu(n, j) = N_{\check{x}} N_{\check{\phi}} \frac{\chi_{\mu n}^+}{\alpha_{\mu n}} \left( e^{-ik_{\mu n}^+ \check{x}_j} + R_{\mu n}^- e^{-ik_{\mu n}^- \check{x}_j} \right). \quad (6.53)$$

Die Transfermatrix lässt sich als Produkt zweier Matrizen schreiben:

$$H_\mu = D_\mu \cdot E_\mu. \quad (6.54)$$

Bei der Matrix  $D_\mu$  handelt es sich um eine  $N_n \times N_n$  Diagonalmatrix mit den Elementen

$$D_\mu(n, n) = N_{\check{x}} N_{\check{\phi}} \frac{\chi_{\mu n}^+}{\alpha_{\mu n}}. \quad (6.55)$$

Die  $N_n \times N_{\check{x}}$  Matrix  $E_\mu$  beinhaltet die axialen Übertragungsfunktionen mit den Elementen

$$E_\mu(n, j) = e^{-ik_{\mu n}^+ (\check{x} + jd)} + R_{\mu j}^- e^{-ik_{\mu n}^- (\check{x} + jd)}. \quad (6.56)$$

Im Fall eines Versuchsaufbaus ohne Reflexionsstelle, d. h. für  $R_{\mu j}^- \equiv 0$ , ist die Matrix  $E_\mu$  mit der Matrix  $W_m$  identisch, die in Abschnitt 3.3.3 zur Radialmodenzerlegung von Azimutalmodenamplituden formuliert wurde. Allerdings entspricht der hier betrachtete Regelfall der Modensynthese, in dem die Modenabstrahlung auf eine axiale Richtung beschränkt ist, in der Radialmodenanalyse einem Sonderfall, vgl. auch Abschnitt 4.1.5. Es stellt sich nun die Frage, welche Abweichungen zwischen der Gesamt-Transfermatrix  $H_\mu$  und der Modenanalysematrix  $W_m$  bestehen.

Abbildung 6.20 ist zu entnehmen, dass es zwar eine überwiegende aber nicht vollständige Übereinstimmung gibt. Gegenübergestellt sind die Konditionszahlverläufe für einen aus drei Quellringen bestehenden Modengenerator mit variablem Ringabstand. Die Diagramme wurden für eine Synthese von Radialmoden der Ordnung  $\mu = 0$  berechnet. Im Vergleich zum Diagramm der Matrix  $E_\mu$ , ist im Diagramm der Matrix  $H_\mu$  nahe der Cut-on-Frequenzen der höheren radialen Ordnungen (0,1) und (0,2) ein verstärkter

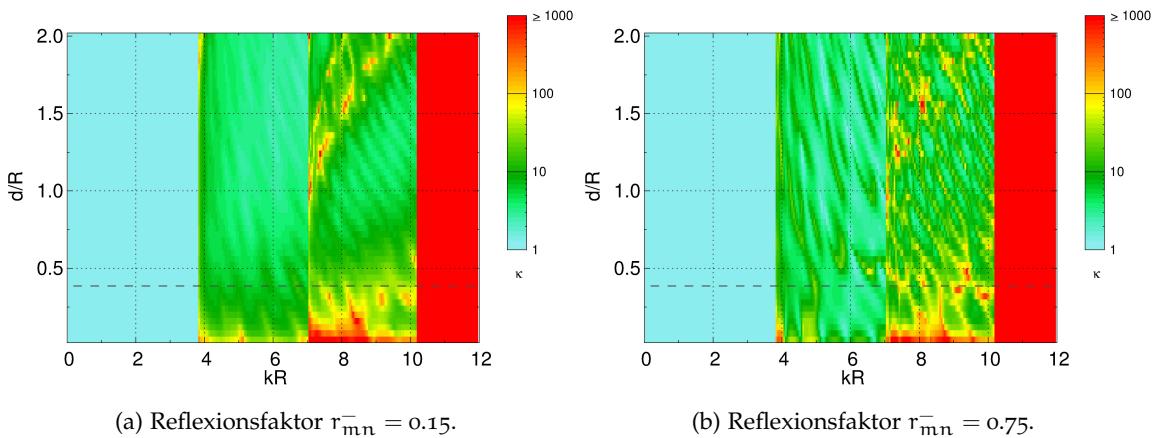


Abbildung 6.21: Einfluss einer Reflexionsstelle im Versuchsaufbau auf die Kondition der Gesamt-Transfermatrix  $\mathbf{H}_\mu$  in einer gezielten Synthese von Radialmoden der Ordnung  $\mu=0$  mit einem aus drei Quellringen bestehenden Modengenerator.

sprunghafter Anstieg der Kondition festzustellen. Dieser lässt sich auf die numerische Instabilität der Matrix  $\mathbf{D}_\mu$  zurückführen, welche durch den sehr kleinen Ausbreitungsfaktor  $\alpha_{\mu\nu}$  verursacht wird. Der Einfluss der Matrix  $\mathbf{D}_\mu$  bleibt auch bei höheren Frequenzen sichtbar.

Die Konditionsanalyse kann dazu verwendet werden, einen optimalen axialen Abstand für die Quellringe zu identifizieren. In Übertragung von Abschnitt 4.1 können zwei Kriterien formuliert werden. Die Erfüllung von Gleichung (4.10) mit  $z=0$  bedeutet, dass die Quellringe einen frequenzabhängigen Mindestabstand haben müssen, um die gewünschten Moden mit ausreichend unterschiedlichen Phasenbeziehungen erzeugen zu können. Auf der anderen Seite darf der Quellringabstand nicht zu groß sein, um die räumliche Abtastbedingung nicht zu verletzen. Dies wird durch Gleichung (4.10) mit  $z>0$  beschrieben. In dem in Abbildung 6.20 dargestellten Fall liegt der optimale Quellringabstand bei etwa  $d/R = 0.75$  und ist damit deutlich größer, als der im experimentellen Aufbau realisierte Abstand von  $d/R = 0.36$ , welcher durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet ist.

Mit Reflexionsstellen im Versuchsaufbau stellt sich die Situation komplexer dar. Dies wird in Abbildung 6.21 deutlich. Die Kondition der Transfermatrix wurde für die in Abbildung 6.14 skizzierte Versuchsanordnung berechnet, in der die Reflexionsstelle bei  $x_r/R = 3.1$  angenommen wurde. Es sind signifikante Störungen im Konditionszahlverlauf sichtbar. Die Störungen sind umso stärker, je höher der Reflexionsfaktor ist. Die Konditionszahl wird allerdings nicht nur erhöht, sondern es treten auch Abschwächungen auf, d. h. die Transfermatrix wird in manchen Frequenzbändern stabilisiert. Insgesamt ist das Bild heterogener und bei starken Reflexionen die Bestimmung eines optimalen Quellringabstands nicht mehr so klar wie im Fall ohne Reflexionen.

Abbildung 6.22 gibt einen Überblick bezüglich der gezielten Radialmodensynthese verschiedener azimutaler Ordnungen. Dargestellt sind die Konditionszahlen für zwei und für drei Quellringe. Der axiale Ringabstand beträgt in beiden Fällen  $d/R = 0.36$ . Ohne Reflexionen erscheinen die Konditionen bis zu den Cut-on-Frequenzen der Ordnun-

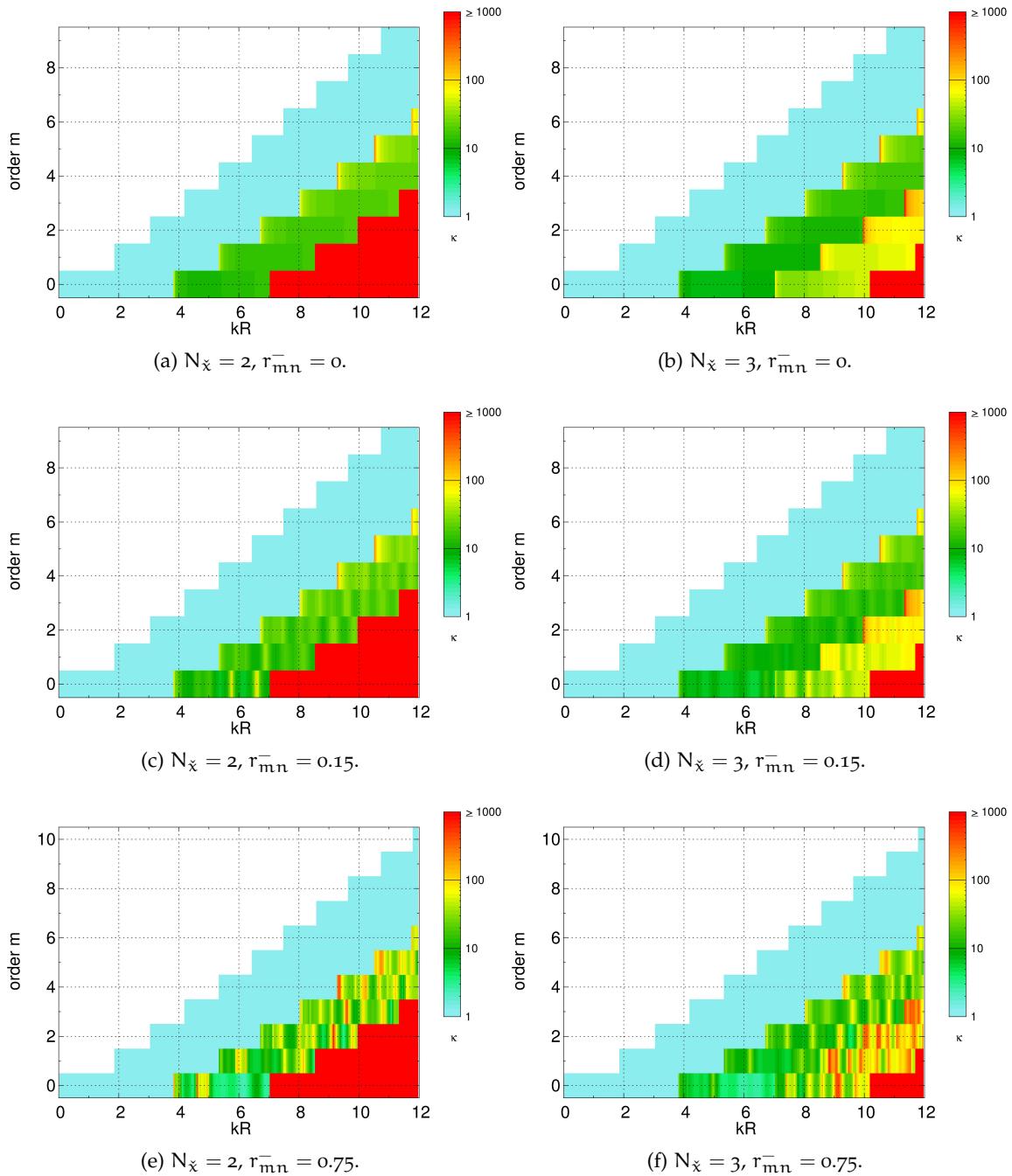


Abbildung 6.22: Kondition der Transfermatrix  $H_\mu$  in der gezielten Radialmodensynthese verschiedener azimutaler Ordnungen mit einem aus zwei bzw. drei Quellringen bestehenden Modengenerator unter Berücksichtigung einer Reflexionsstelle im Versuchsaufbau mit Reflexionsfaktor  $r_{mn}^-$ . Die Quellringe besitzen einen axialen Abstand von  $d/R = 0.36$ .

gen  $n = 2$  unkritisch. Mit Reflexionen ändert sich das Bild bei allen azimutalen Ordnungen. Die schmalbandigen Störungen treten individuell in verschiedenen Frequenzbändern auf. Dabei zeigt sich zusätzlich eine Variation mit der Zahl der Quellringe, was aufgrund der unterschiedlichen Zahl interferierender Teilwellen plausibel ist. Der Vergleich mit Abbildung J.3 verdeutlicht die Verbesserungen, die sich mit doppeltem Quellringab-

stand erzielen lassen.

Im Vergleich zur Modenanalyse mit Mikrofonarrays wird die systematische Identifizierung einer optimalen Quellanordnung dadurch erschwert, dass die festgestellten schmalbandigen Störungen nicht nur individuell für die azimutalen Ordnungen ausfallen, sondern empfindlich vom Reflexionsfaktor und der Position der Reflexionsstelle abhängen. Da in der Praxis mehrere Reflexionsstellen vorliegen können, deren Eigenschaften in der Regel unbekannt sind, verbleibt in den meisten Fällen nur die Möglichkeit die Quellanordnung ohne Berücksichtigung von Reflexionen zu optimieren. Bei moderaten Reflexionen sollte hiermit aber die bestmögliche Anordnung gefunden werden können.

Schwierig einzuschätzen ist die Bedeutung der Konditionszahl der Transfermatrix. Es stellt sich die Frage, bis zu welcher Kondition die Modenamplituden sich noch mit einer vorgegebenen Genauigkeit einstellen lassen und ob ab einem bestimmten Maß gar keine gezielte Modensynthese mehr möglich ist. Des Weiteren stellt sich die Frage, ob durch eine hohe Konditionszahl – neben der systembedingten Beschränkung die Moden mit den benötigten Phasenunterschieden einstellen zu können – auch noch Verstärkungen von Störungen in den Anregungssignalen zu größeren Ungenauigkeiten im Synthesergebnis führen. Hinweise liefert in dieser Sache die in Abschnitt 7.6 vorgestellte experimentelle Studie.



# 7

---

## ERPROBUNG DER MODENSYNTHESE

---

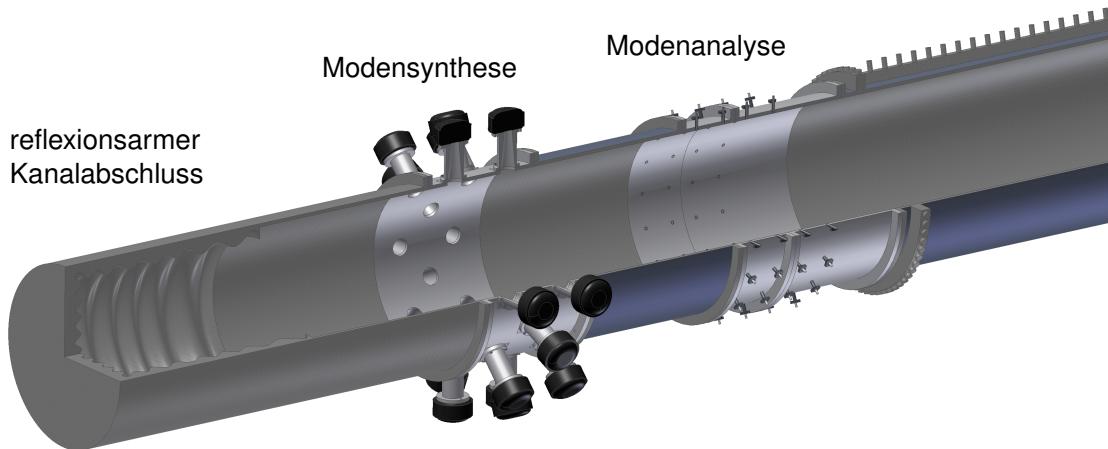


Abbildung 7.1: Auschnitt aus dem Versuchsaufbau zur Erprobung der Modensynthese.

Zur Erprobung der Modensynthese sowie zur Untersuchung von Störeinflüssen wurde der in Abbildung 7.1 im Ausschnitt dargestellte Versuchsstand aufgebaut und eine Software zur Signalgenerierung auf einer digitalen Signalprozessorkarte entwickelt. In verschiedenen Testkonfigurationen wurden entweder ein einzelner Lautsprecher, ein Lautsprecherring oder zwei Lautsprecherringe mit sinusförmigen Schwingungen angeregt. Die erzeugten Schallfelder wurden mithilfe der Radialmodenanalysetechnik detailliert untersucht. Eine Gegenüberstellung mit dem Modengeneratormodell ermöglicht Rückschlüsse zu verschiedenen Effekten, die zu einer verstärkten Anregung von Spillover-Moden und damit zu einer Beeinträchtigung der Syntheseergebnis führen können.

### 7.1 VERSUCHSAUFBAU

#### 7.1.1 Komponenten des Versuchsstands

Abbildung 7.2 zeigt den Versuchsaufbau in schematischer Darstellung in zwei Varianten. In der ersten Variante werden zu beiden Seiten des Lautsprecherarrays reflexionsarme Kanalabschlüsse installiert. Der im Bild rechts dargestellte Kanalabschluss stellt Messbedingungen her, die von der Norm DIN ISO 5136 für die Schallleistungsbestimmung an Ventilatoren mithilfe des Kanalverfahrens [1] gefordert werden, und ist durchströmbar. Im Vergleich dazu kann der andere Kanalabschluss, der auf der anderen Seite direkt an

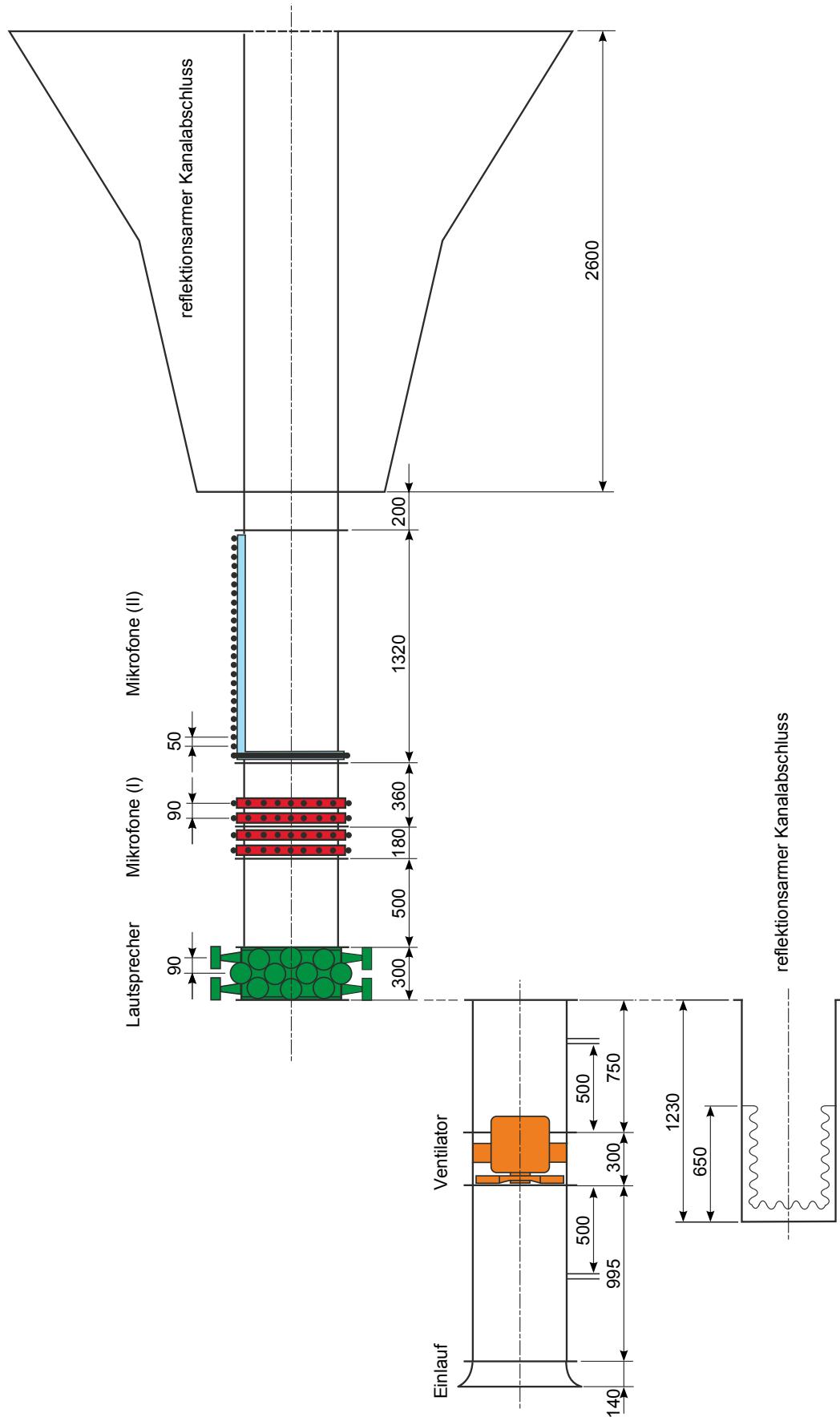


Abbildung 7.2: Versuchsaufbau mit Bemaßung. Auf der Einlasseite kann alternativ zum akustisch reflexionsarmen Kanalabschluss ein Axialventilator installiert werden.

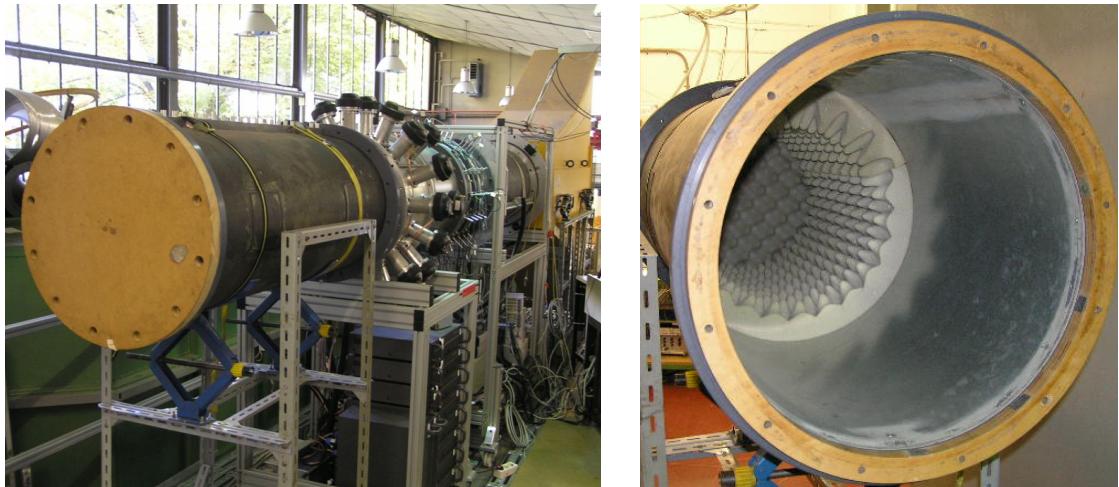


Abbildung 7.3: Das linke Bild zeigt eine Ansicht des Versuchsaufbaus mit akustisch reflexionsarmen Kanalabschlüssen stromauf und stromab des Modengenerators. Im rechten Bild ist der mit akustischen Absorbermatten ausgekleidete Kanalabschluss zu sehen, der optional auf der Einlassseite verwendet wurde.

den Modengenerator angeschlossen ist, nur als näherungsweise reflexionsarm bezeichnet werden. Wie die Fotos in Abbildung 7.3 zeigen, handelt es sich hier um ein Rohrsegment, welches einlassseitig mit einer Holzplatte verschlossen wurde und das provisorisch mit akustischen Absorbermatten ausgekleidet ist. In der zweiten Versuchsvariante kann der reflexionsarme Kanalabschluss durch einen Axialventilator ersetzt werden, welcher der Erzeugung von Versuchsbedingungen mit überlagerter Gleichströmung oder auch als Primärschallquelle für Versuche zur aktiven Lärminderung dient. Zur Analyse der angeregten Schallfelder stehen eine feststehende und eine drehbare Mikrofonmessanordnung zur Verfügung. Alle Kanalsektionen sind zylindrisch und besitzen einen Radius von 250 mm. Im Folgenden werden der Aufbau des Lautsprecherarrays und der Mikrofonarrays ausführlich beschrieben. Der Axialventilator spielt in den Darstellungen dieses Kapitels eine untergeordnete Rolle, Details sind in Anhang K zu finden.

#### *Modengenerator*

In Abbildung 7.4 ist ein Foto des verwendeten Lautsprecherarrays zu sehen. Der Modengenerator setzt sich aus drei axial äquidistant angeordneten Lautsprecherringen zusammen. In jedem Lautsprecherring können bis zu acht Lautsprecher in gleichmäßig azimutalen Abstand von  $45^\circ$  und in Kombination mit einem Trichter bündig mit der Wand des Strömungskanals montiert werden. Der Staffelungswinkel aufeinander folgender Lautsprecherringe beträgt  $22.5^\circ$ . Der axiale Abstand zweier Ringe beträgt 90 mm.

Jede Lautsprechereinheit besteht – wie in Abbildung 7.5 zu sehen ist – aus einem Druckkammbertreiber und einem Trichter von konischer Geometrie, welcher einer verbesserten akustischen Ankopplung des Lautsprechers an den Strömungskanal dient. Der Druckkammbertreiber vom Typ Monacor MRD-140 besitzt eine Resonanzfrequenz von 500 Hz und wurde in den Untersuchungen bei Frequenzen oberhalb von 750 Hz betrieben. Der Radius des Trichtereingangs wurde auf den Radius der Lautsprecheröffnung abgestimmt. Die Trichterlänge wurde für eine maximale Einkopplung des erzeugten

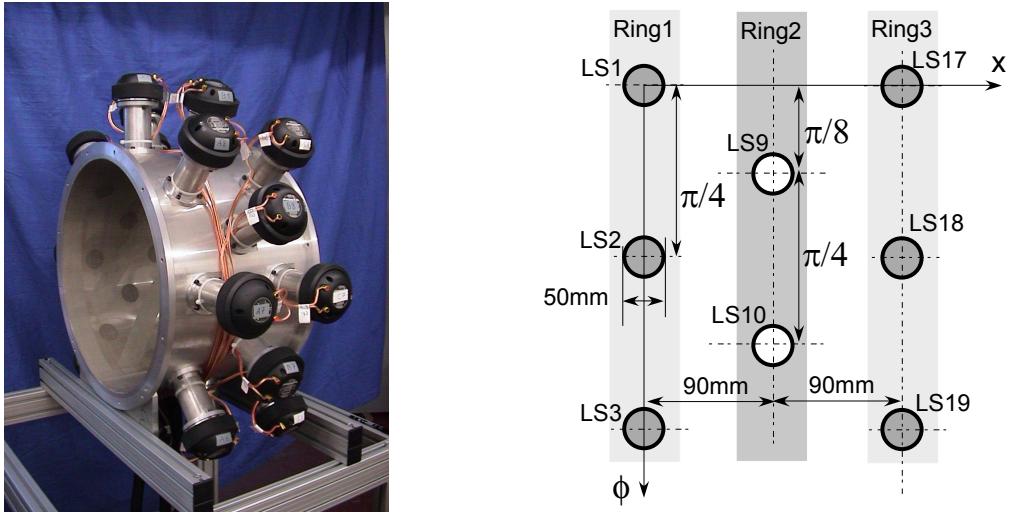


Abbildung 7.4: Der Modengenerator besteht aus drei Aktuatorringen, in denen jeweils bis zu acht Lautsprechereinheiten mit äquidistantem azimutalen Abstand montiert werden können.

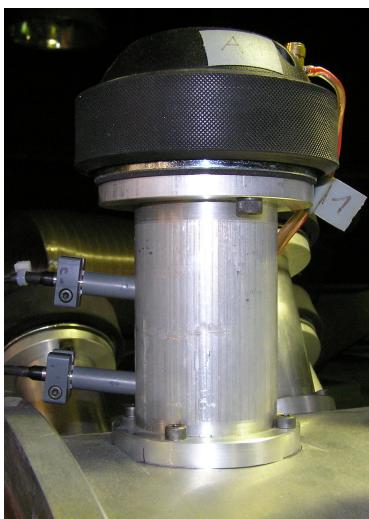


Abbildung 7.5: Jede Lautsprechereinheit besteht aus einem Druckkammerlautsprecher und einem konischen Trichter. Der an Position  $0^\circ$  in Ring 1 verwendete Trichter wurde für die Aufnahme zweier  $1/4"$  Kondensator-Mikrofone präpariert.

Schalls in den Hauptströmungskanal wie in Abschnitt 6.2.2 beschrieben optimiert.

Zur Variation der Lautsprecherkonfiguration kann jede Lautsprechereinheit entfernt und die verbleibende Öffnung in der Kanalwand durch einen Deckel verschlossen werden, dessen Innenseite die Kontur der Kanalwand nachbildet. Zur messtechnischen Bestimmung des Schallflusses wurde die an der Position  $0^\circ$  in Ring 1 installierte Lautsprechereinheit mit zwei Mikrofonen ausgestattet. Die Einbaupositionen der Mikrofone können Abbildung 7.5 entnommen werden. Zur Vermeidung von Strömungsablösungen bei Experimenten mit Strömungsüberlagerung wurde die Öffnung des Trichters an

Anzahl Aktuatorringe $N_x$	3
Anzahl azimutaler Aktuatorpositionen $N_\phi$	8
Axialer Abstand der Aktuatorringe $\Delta x$ [mm]	90
Staffelungswinkel der Aktuatorringe	$22.5^\circ$
Radius des Trichtereinlass [mm]	12.7
Radius des Trichterauslass [mm]	25
Länge des Trichter [mm]	110
Öffnungsverhältnis der Gaze	0.16
Maschendicke der Gaze [mm]	0.24
Öffnungsradius der Gaze [mm]	0.09

Tabelle 7.1: Kenngrößen des Modengenerators.

der Kanalwand mit einer Gaze überspannt. Die Maße des Lautsprecherarrays sind in Tabelle 7.1 zusammen gefasst.

### *Mikrofonarrays*

In dem Versuchsstand können zwei unterschiedliche Mikrofonsektionen zur Schallfeldanalyse eingesetzt werden. Die Mikrofonsektion I setzt sich aus  $N_x = 4$  Ringen zusammen, die einen äquidistanten axialen Abstand von  $\Delta x = 90$  mm besitzen. Wie in Abbildung 7.6 dargestellt, stehen in jedem Ring 16 äquidistant angeordnete Umfangspositionen für den Einbau von Mikrofonen zur Verfügung. Für die Schallfeldanalysen dieser Arbeit wurden je Ring nur  $N_\phi = 8$  Mikrofone installiert. Die Mikrofonanordnung ist für eine Modenanalyse in dem zu untersuchenden Frequenzbereich optimal gestaltet. Für die Messungen wurden 1/4" Kondensatormikrofone vom Typ G.R.A.S. 40-BP in Kombination mit Vorverstärkern vom Typ G.R.A.S. 26-AC verwendet. Die Mikrofone wurden derart eingebaut, dass die Membran bündig mit der Kanalwand abschloss. Nicht verwendete Einbaupositionen wurden durch Stopfen verschlossen.

Stromab der Mikrofonsektion I befand sich eine drehbare Kanalsektion, in der bis zu  $N_x = 24$  Mikrofone wandbündig in linienförmiger Anordnung an einer Umfangsposition und mit einem axialen Abstand von  $\Delta x = 50$  mm eingesetzt werden können. Diese als Mikrofonsektion II bezeichnete Analyseeinheit konnte mit Hilfe einer PC-gesteuerten Verfahrenseinheit präzise an beliebige azimutale Positionen verfahren werden. Alle in diesem Kapitel dargestellten Ergebnisse wurden mit Mikrofonsektion I erzielt. Die Mikrofonsektion II wurde lediglich zu einer Verifizierung der mit Mikrofonsektion I erzielten Analyseergebnisse eingesetzt.

#### 7.1.2 Messelektronik

Die Komponenten des Messsystems und die Datenkommunikationswege sind in Abbildung 7.7 veranschaulicht. Das Messsystem wurde für zwei Anwendungen entworfen

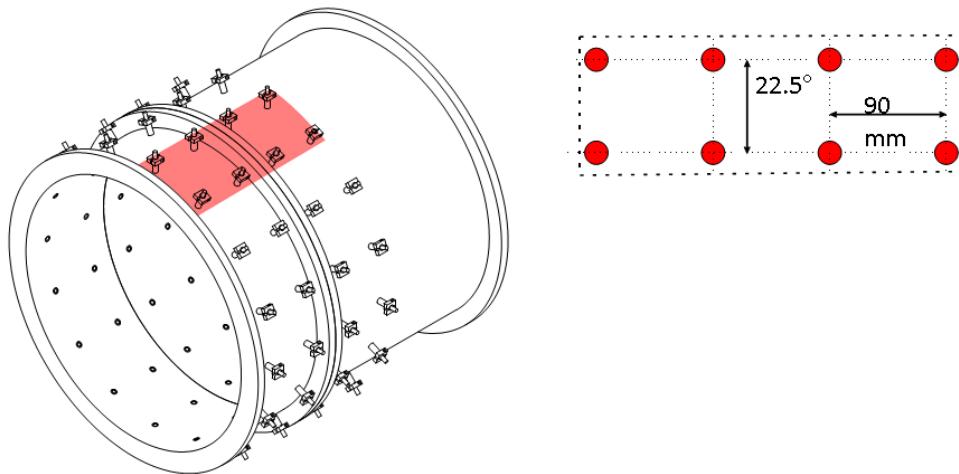


Abbildung 7.6: In Mikrofonsektion I können bis zu 16 Mikrofone in jedem der vier Ringe installiert werden.

und optimiert: die experimentelle Untersuchung der Modensynthese sowie die aktive Regelung der Rotor-Stator-Interaktionsmoden des Axialventilators. Der gesamte Messablauf wurde global durch einen PC gesteuert, der mit einem 3,2 GHz Intel Pentium-IV Prozessor und dem Betriebssystem Windows XP ausgestattet war. Die A/D und D/A-Wandlung der Signale erfolgte auf einer digitalen Signalprozessorkarte (DSP). Alle zeitunkritischen Datenverarbeitungsschritte wurden im Sinne einer maximalen Performance der DSP-Karte auf den PC ausgelagert. Dies beinhaltete die Umsetzung der Radialmodenanalyse und die Visualisierung der analysierten Daten während der Messdurchführung.

#### *Digitale Signalprozessorkarte*

Es wurde eine DSP-Karte der Firma SORCUS vom Typ X-MAX 6pci verwendet. Die Karte wurde über die PCI-Schnittstelle mit dem Rechner verbunden und war mit insgesamt sechs Modulen bestückt:

- 1 PROZESSOR-MODUL X-MAX-1 mit einem 486-CPU 100 MHz Prozessor, 16 MByte RAM und einem echtzeitfähigen Betriebssystem,
- 1 A/D-WANDLER-MODUL X-AD14-20 mit einem für 20 Kanäle und mit 14 Bit Auflösung multiplexfähigen A/D-Wandler und
- 4 D/A-WANDLER-MODULE X-DA16-4 mit jeweils vier D/A-Wandlern mit 16 Bit Auflösung.

Für die Modensynthese lief der Datenaustausch zwischen der DSP-Karte und dem Mess-PC nach folgendem Schema ab: Zunächst wurden die auszugebenden D/A-Datensätze auf dem PC berechnet und in den Speicher der DSP-Karte herunter geladen. Im nächsten Schritt wurden auf der Karte durch einen internen Interrupt die kontinuierlich und synchron laufenden D/A- und A/D-Wandlungsprozeduren gestartet. Jeder Wandlungsschritt wurde dabei durch den Timer des CPU-Moduls ausgelöst. Bei einer CPU-Timerfrequenz von 1.1892 MHz konnten nur Wandlungen mit den Sampling-Frequenzen

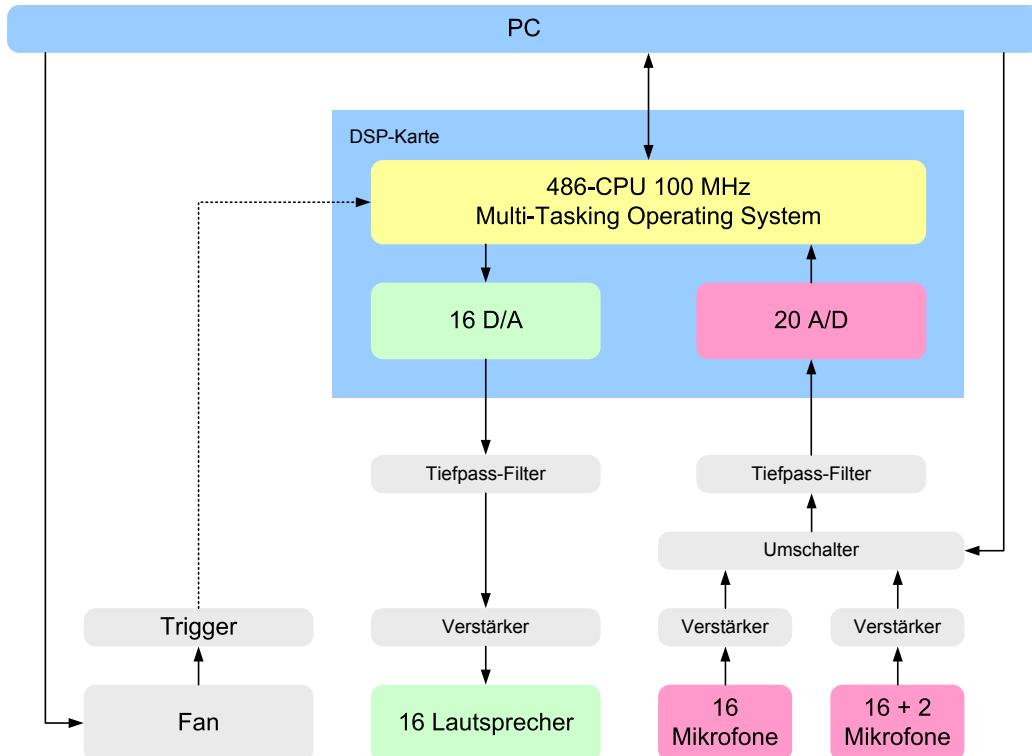


Abbildung 7.7: Übersicht über die in den Experimenten verwendete Elektronik und die Signalwege. In einer Versuchsvariante zur aktiven Minderung von Rotor-Stator-Interaktionsmoden wurden die Wandlungsprozesse extern durch einen Rotorwellentrapper getaktet.

$f_s = 1.1892 \text{ MHz}/N$  (für ganze Zahlen  $N \geq 1$ ) realisiert werden. Der im CPU-Modul zur Verfügung stehende Speicherbereich ließ eine Wandlung von maximal 1000 A/D-Sample je Kanal zu. Nach der Wandlung wurden die A/D-Datensätze aus dem RAM zur weiteren Analyse auf den PC geladen. Bei simultaner Wandlung von 16 D/A- und 16 A/D-Kanälen konnte trotz Optimierung der Signalverarbeitungsprozesse eine maximale Abtastrate von lediglich  $f_s = 3900 \text{ Hz}$  erreicht werden. Diese relativ niedrige Abtastrate erlaubte keine direkte Ausgabe von sinusförmigen Signalen im interessierenden Frequenzbereich, sondern machte die Entwicklung von speziellen Routinen zur Synthese der Lautsprecherzeitsignale und zur Analyse der Schalldruckamplituden erforderlich. In den Routinen, die in den Abschnitten 7.2.3 und 7.2.4 beschrieben sind, wurde die Testfrequenz in feste Beziehung zur Abtastfrequenz gesetzt:

$$f_t = \frac{f_s}{3} = \frac{1.1892 \text{ MHz}}{3N}. \quad (7.1)$$

Es ergab sich demzufolge eine maximale Testfrequenz von  $f_t = 1300 \text{ Hz}$ .

In der Versuchsvariante zur aktiven Lärmreduktion wurden die D/A- und A/D-Wandlungsschritte extern durch ein 72 Pulse/Umdrehung-Signal der Rotorwelle getriggert. Die Datenverarbeitungsprozesse liefen zudem kontinuierlich ab, d.h. die D/A-Wandlung lief ohne Unterbrechung und die A/D-Wandlung wurde zur Erfassung des geregelten Schallfelds periodisch wiederholt. In Abhängigkeit des Regelungsalgorithmus wurden die an die Lautsprecher ausgegebenen D/A-Daten aktualisiert.

Aufgrund der Phasenempfindlichkeit der Modenanalyse und der Modensynthese wurden die zeitliche Synchronität der Wandlungsprozesse messtechnisch überprüft. Die D/A-Wandlungssignale wurden paarweise auf einem Oszilloskop verglichen. Es wurden zeitliche Verzögerungen von ca. 30 µs zwischen den Samples fest gestellt, die von verschiedenen D/A-Module generiert wurden. Die Ursache war, dass die Wandlung eines jeden D/A-Moduls durch einen eigenen Funktionsaufruf ausgelöst werden muss. Weiterhin wurde zwischen den D/A-Kanäle desselben Moduls ein hardwarebedingter relativer Zeitversatz von ca. 3 µs gemessen. Die auf die D/A-Wandler zurückgehenden Verzögerungen stellten sich als frequenzunabhängig heraus und konnten durch entsprechende Berücksichtigung in der Berechnung der Ansteuerungssignale reduziert werden.

#### *Signalverstärker, Filter und sonstige Geräte*

Wie in Abbildung 7.7 dargestellt, liefen die meisten Signalleitungen an der DSP-Karte zusammen. Auf der A/D-Eingangsseite wurden die 32 Mikrofone des Modenanalyse-Arrays I und optional die beiden an der ersten Lautsprechereinheit montierten Mikrofone eingelesen. Alle Mikrofone wurden durch eine DLR-eigene Elektronik versorgt und verstärkt. Um die Messung aller Mikrofone mit 20 A/D-Kanälen zu realisieren musste ein elektronischer Umschalter verwendet werden. Der Umschalter, bei dem es sich um eine DLR-Eigenentwicklung handelt, konnte über eine RS232-Schnittstelle vom Mess-PC aus auf die Mikrofonkanäle 1 bis 16 oder 17 bis 34 umgeschaltet werden. Zur Vermeidung von Aliasing bei der Berechnung der Schalldruckspektren wurden die Mikrofonsignale vor Durchführung der A/D-Wandlung mit einem elektronischen Tiefpassfilter gefiltert. Der Tiefpassfilter verfügte über 80 Kanäle mit einer in acht Stufen einstellbaren Grenzfrequenz von  $2^{-N} \cdot 50$  kHz ( $N = 0, 1, \dots, 7$ ), einer Dämpfung oberhalb der Grenzfrequenz von -48 dB/Oktave und einer Verstärkung der Ausgangssignale vom Faktor 2.5.

Auf der Ausgangsseite der DSP-Karte wurde das nach der D/A-Wandlung treppenförmige Lautsprechersignal mit Hilfe desselben Tiefpassfilters in ein Sinussignal überführt und anschließend durch HiFi-Leistungsstufen verstärkt. Bei einer Kontrolle der Übertragungsfunktionen stellte sich heraus, dass einige der anfänglich verwendeten Endstufen vom Typ Dynacord L 300 frequenzabhängige Phasenverschiebungen von bis zu 15° verursachten. Aus diesem Grund wurden sie zu einem späteren Zeitpunkt durch Endstufen vom Typ KME SPA 240 E ersetzt.

Nicht in Abbildung 7.7 dargestellt ist die automatische Erfassung der Lufttemperatur im Strömungskanal, welche für die Umsetzung einer Online-Modenanalyse erforderlich war. Hierzu wurde die Ausgangsspannung eines pt100-Temperatursensors mit Hilfe eines Voltcraft-Multimeters gemessen und über eine RS232-Schnittstelle an den Mess-PC übermittelt. Alle auf dem PC laufenden Analyse- und Steuerungsprogramme sowie die auf der DSP-Karte laufenden Echtzeit-Programme wurden in der Programmiersprache C entwickelt.

## 7.2 VERSUCHSDURCHFÜHRUNG UND DATENVERARBEITUNG

### 7.2.1 Versuchsvariationen

Es wurden Experimente mit verschiedenen Konfigurationen des Lautsprecherarrays und des Versuchsstands sowie mit systematischer Variation der Schallanregungsparameter durchgeführt. Alle untersuchten Varianten sind tabellarisch in Anhang L aufgelistet. In diesem Kapitel werden nur die in Tabelle 7.2 angegebenen Variationen dargestellt und diskutiert. Die zugehörigen Ergebnisse sind repräsentativ für die Verifizierung der Modensynthese und bezüglich des Einfluss von störenden Effekten.

Im Lautsprecherarray muss zwischen der Anzahl der je Ring montierten Lautsprecherreinheiten und der je Ring aktiv betriebenen Lautsprechern unterschieden werden. Nicht betriebene aber installierte Lautsprecherreinheiten üben aufgrund des Impedanzsprungs an der Kanalwand einen Einfluss auf die Modenanregung aus. Die in den Ringen 1, 2 und 3 montierte bzw. aktiv betriebene Anzahl von Lautsprechern wird durch die Notation  $N_1-N_2-N_3$  gekennzeichnet. Im Fall 1–0–0 befindet sich der Lautsprecher an der Umfangsposition  $\phi = 0^\circ$ .

Der für die Untersuchungen verfügbare Frequenzbereich wurde durch die Resonanzfrequenz der Lautsprecher nach unten und durch die maximale Abtastrate der DSP-Karte nach oben auf  $800 \leq f \leq 1300$  Hz begrenzt. Bei einer Temperatur von  $20^\circ$  C entspricht dies einem dimensionslosen Frequenzbereich von  $3.6 \leq kR \leq 5.9$ . Tabelle 7.3 gibt einen Überblick über die cut-on-Frequenzen der Moden in den Kanalsektionen des Prüfstands für den Fall ohne überlagerte Gleichströmung. Bei der höchsten analysierbaren Frequenz von  $kR = 5.9$  waren Moden der azimutalen Ordnungen  $-4 \leq m \leq +4$  und der

UNTERSUCHUNG	LAUTSPRECHERARRAY		ZIEL-MODEN ORDNUNGEN
	AKTIV	MONTIERT	
Anregung eines Lautsprechers	1 – 0 – 0	1 – 0 – 0	-
Verifizierung des Modell des Lautsprecherarrays	1 – 0 – 0	1 – 0 – 0	-
	1 – 0 – 0	8 – 0 – 0	-
	1 – 0 – 0	8 – 8 – 0	-
	1 – 0 – 0	8 – 8 – 8	-
Gezielte Anregung von azimutalen Modenordnungen	8 – 0 – 0	8 – 0 – 0	$m = 0/1/2/3$
	8 – 0 – 0	8 – 8 – 0	$m = 0/1/2/3$
	8 – 0 – 0	8 – 8 – 8	$m = 0/1/2/3$
Gezielte Anregung von radialen Modenordnungen	8 – 8 – 0	8 – 8 – 0	(0,0), (0,1)
	8 – 8 – 0	8 – 8 – 0	(1,0), (1,1)

Tabelle 7.2: In Kapitel 7 behandelte Variationen des Versuchsaufbaus zur Verifizierung der Modensynthese und zur Untersuchung von Störeffekten. Die vollständige Liste aller Versuchsvariationen befindet sich Anhang L.

radialen Ordnungen  $n=0$  und  $n=1$  ausbreitungsfähig. Es ist zu beachten, dass die Cut-on-Frequenzen der Moden (1,1) und (4,0) fast identisch sind. Im Fall des Axialventilatorbetriebs wirkte sich die erzeugte stationäre Strömung aufgrund der relativ kleinen axialen Machzahlen von  $M_x < 0.05$  nur unwesentlich auf die Cut-on-Frequenzen der Moden aus.

### 7.2.2 Messablauf

Die Vermessung einer Versuchsvariation setzte sich in der Regel entweder aus 96 oder 192 Messungen an separaten Frequenzen zusammen. Die Anregungsfrequenzen wurden mit Gleichung (7.1) berechnet und während des Messablaufs sukzessive erhöht. Die rechnerisch realisierbaren Frequenzschrittweiten hingen vom Teiler der CPU-Timer-Frequenz ab und lagen im untersuchten Frequenzbereich zwischen  $\Delta f_t = 0.54 \text{ Hz}$  und  $\Delta f_t = 1.42 \text{ Hz}$ . Durch passende Teilerauswahl wurden relativ gleichmäßige Schrittweiten von etwa 5.2 Hz bzw. etwa 2.6 Hz realisiert.

In jedem Testdurchlauf wurden folgende Prozessschritte wiederholt durchgeführt:

1. Einstellung der Testfrequenz.
2. Start der Schallfeldsynthese:
  - a) Berechnung der Lautsprecheranregungsamplituden für jeden Kanal.
  - b) Berechnung der D/A-Zeitreihen für jeden Kanal.
  - c) Transfer der Zeitreihen vom PC auf die DSP-Karte.
  - d) Start der D/A-Wandlung.
3. Prüfung der Schallfeldsynthese:
  - a) A/D-Wandlung von  $N_T$  Signalperioden der Mikrofonkanäle 17 - 34.
  - b) Transfer der gemessenen Zeitreihen von der DSP-Karte auf den PC.
  - c) Berechnung der Schalldruckamplituden.
  - d) Optional: Berechnung des Volumenfluss von Lautsprecher 1 in Ring 1.

	$n = 0$		$n = 1$		$n = 2$	
	$f_{c,mn} [\text{Hz}]$	$(kR)_{mn}$	$f_{c,mn} [\text{Hz}]$	$(kR)_{mn}$	$f_{c,mn} [\text{Hz}]$	$(kR)_{mn}$
$ m  = 0$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>838</b>	<b>3.84</b>	<b>1533</b>	<b>7.02</b>
$ m  = 1$	<b>403</b>	<b>1.84</b>	<b>1165</b>	<b>5.33</b>	<b>1866</b>	<b>8.54</b>
$ m  = 2$	<b>668</b>	<b>3.06</b>	<b>1466</b>	<b>6.71</b>	<b>2179</b>	<b>9.97</b>
$ m  = 3$	<b>918</b>	<b>4.20</b>	<b>1752</b>	<b>8.02</b>	<b>2483</b>	<b>11.36</b>
$ m  = 4$	<b>1162</b>	<b>5.32</b>	<b>2029</b>	<b>9.29</b>	<b>2771</b>	<b>12.68</b>
$ m  = 5$	<b>1402</b>	<b>6.42</b>	<b>2299</b>	<b>10.52</b>	<b>3057</b>	<b>13.99</b>

Tabelle 7.3: Cut-on-Frequenzen der Moden im Prüfstandskanal des Radius  $R = 0.25 \text{ m}$  bei einer Temperatur von  $T = 20^\circ \text{C}$  und ohne Durchströmung ( $M_x = 0$ ). Die im analysierbaren Frequenzbereich ausbreitungsfähigen Modenordnungen sind hervorgehoben.

e) Falls

- der Messbereich über- oder untersteuert wird,
- einzelne Lautsprechersignale deutlich vom mittleren Schalldruckpegel abweichen,
- ein frequenzunabhängig gleicher Volumenfluss an Lautsprecher 1 in Ring 1 ein geregelt werden soll,

dann werden die Lautsprecheranregungsamplituden korrigiert und es wird zurück zu Schritt 2b) gesprungen. Sonst wird mit Punkt 4 fortgefahrene.

4. Durchführung der Schallfeldanalyse:

- a) Umschaltung auf die Mikrofonkanäle 1-16.
- b) A/D-Wandlung von  $N_T$  Signalperioden der Mikrofonkanäle 1-16.
- c) Umschaltung auf die Mikrofonkanäle 17-34.
- d) A/D-Wandlung von  $N_T$  Signalperioden der Mikrofonkanäle 17-34.
- e) Transfer der gemessenen Zeitreihen von der DSP-Karte auf den PC.
- f) Berechnung der Schalldruckamplituden.
- g) Durchführung der Radialmodenanalyse.

5. Stop der Schallfeldsynthese.

6. Visualisierung der gemessenen Daten zu Kontrollzwecken.

Wenn nicht anders angegeben, dann wurden  $N_T = 1000$  Signalperioden für eine Frequenzkomponente gemessen und ausgewertet. Dies entspricht in Abhängigkeit der Testfrequenz einer Messdauer zwischen 1.25 s und 0.77 s.

Abbildung 7.8 zeigt ein typisches, durch einen einzelnen Lautsprecher erzeugtes Schalldruckspektrum. Die Lautsprecherpegel wurden in allen Tests so eingestellt, dass die infolge nichtlinearer Effekte angeregten Oberschwingungen der Druckkammertreiber mindestens 30 dB unterhalb des Testtonpegels lagen. Um individuelle Abweichungen zwischen den Übertragungswegen näherungsweise auszugleichen, wurden vor jeder Messserie für jeden Lautsprecher Korrekturfaktoren ermittelt. Hierzu wurden Einzelmessungen an jeweils fünf gleichmäßig verteilten Frequenzen unter der Annahme durchgeführt, dass alle Aktuatoren desselben Rings im Mittel über alle Mikrofonpositionen den gleichen Schalldruckpegel erzeugen. Die Korrekturfaktoren wurden über die fünf Testfrequenzen gemittelt und wichen um bis zu 25% voneinander ab.

### 7.2.3 Berechnung der Lautsprecher-Zeitsignale

Für die messtechnische Umsetzung der in Kapitel 6 beschriebenen Modensynthese wird eine Beziehung zwischen dem vom D/A-Wandler erzeugten Spannungssignal und dem vom Lautsprecher verursachten Volumenfluss benötigt:

$$q_j = \psi_j U_j. \quad (7.2)$$

In dieser vereinfachten Formulierung beinhaltet der Übertragungsfaktor  $\psi_j$  die Transfunktionen aller elektrischen und mechanischen Bauteile, die im Signalweg des i-ten

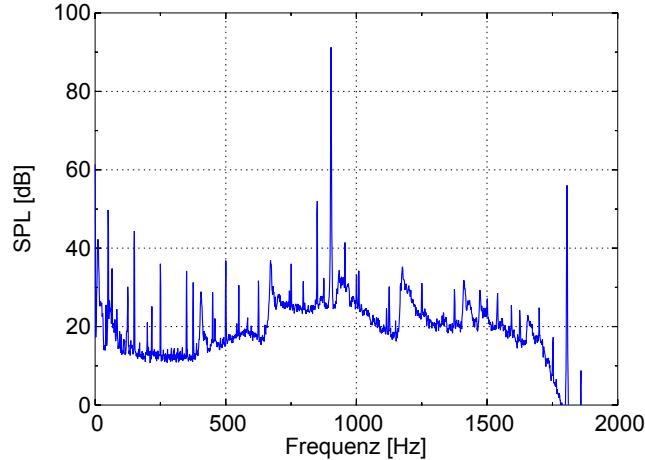
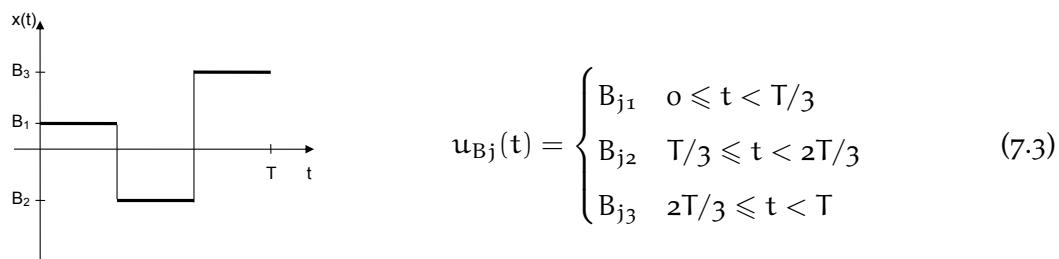


Abbildung 7.8: Durch einen mit der Testfrequenz  $f_t = 903$  Hz angeregten Lautsprecher erzeugtes Schalldruckspektrum. Das Spektrum gibt den Mittelwert aller in Mikrofonsektion I verwendeten Mikrofone wieder und wurde zu Referenzzwecken mit einer LMS CADA-X Messanlage aufgezeichnet.

Lautsprechers zwischen dem D/A-Wandlerausgang und dem von der Membran verursachten Volumenfluss wirksam sind. Der Übertragungsfaktor ist komplexwertig und hängt im Allgemeinen nichtlinear von der Frequenz, der Aussteuerung und der Belastung ab.

Angesichts der maximalen Ausgaberate der DSP-Karte von 3900 Hz stellte sich die Frage, wie ein sinusförmiges Lautsprechersignal  $u_j(t) = U_j \exp(-i2\pi f_t t)$  mit einer Frequenz im Bereich  $800 \leq f_t \leq 1300$  Hz erzeugt werden kann. Für eine feinskalige Annäherung des sinusförmigen Verlaufs durch den D/A-Wandler wäre eine im Vergleich zur Signalfrequenz vielfach höhere Wandlerrate erforderlich. Die Lösung lag in der Ausgabe eines treppenförmigen Signals, welches die gewünschte Signalfrequenz als Grundharmonische enthält, und dessen höhere Signalharmonische mittels eines Tiefpassfilters entfernt werden.

Für eine eindeutige Analyse eines periodischen Signals ist gemäß des Nyquist-Theorems eine Abtastung an drei äquidistanten Stellen pro Periode notwendig und hinreichend. Aus dieser Tatsache lässt sich im umgekehrten Sinne für eine Synthese ableiten, dass die Periode  $T$  des Signals durch eine Treppenfunktion  $u_{Bj}(t)$  bestehend aus drei Treppenstufen  $B_{j1}$ ,  $B_{j2}$  und  $B_{j3}$  angenähert werden kann:



Im Folgenden wird die Beziehung zwischen den reellen Größen  $B_{j1}$ ,  $B_{j2}$  und  $B_{j3}$  sowie der komplexen Spannungsamplitude  $U_j = |U_j| e^{i\varphi_j}$  des für den  $j$ -ten Lautsprecher zu

erzeugenden Signals abgeleitet. Gemäß der Fourier-Theorie kann ein beliebiges reelles, kontinuierliches Zeitsignal  $y_j(t)$  in eine Fourierreihe entwickelt werden,

$$y_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_{jn} e^{-in2\pi f_0 t}, \quad (7.4)$$

in der  $f_0$  die Grundfrequenz und  $Y_{jn}$  die komplexen Fourierkoeffizienten der Harmonischen der Ordnung  $n$  beschreiben. Die Fourierkoeffizienten können mit Hilfe folgenden Integrals berechnet werden:

$$Y_{jn} = \frac{1}{T} \int_0^T y_j(t) e^{in2\pi f_0 t} dt \quad (7.5)$$

Im vorliegenden Fall muss das Lautsprechersignal mit der Grundharmonischen des Signals  $y_j(t)$  identisch sein, d.h. für die Grundfrequenz muss  $f_t = f_0$  und für den Fourierkoeffizienten  $Y_{j1} = U_j$  gelten. Durch Einsetzen der Treppenfunktion  $u_{Bj}(t)$  aus Gleichung (7.3) in die Integralgleichung (7.5) und mit der Zusatzbedingung, dass der Gleichanteil  $Y_{0j}$  des Zeitsignals  $y_j(t)$  gleich Null sein soll, kann ein Gleichungssystem aufgestellt werden, dessen Lösung die gesuchten Stufen der Treppenfunktion ergibt:

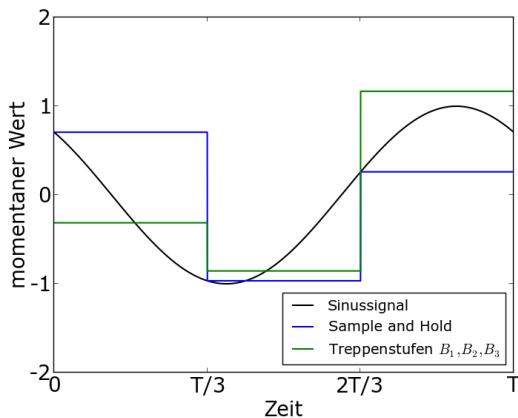
$$\begin{aligned} B_{j1} &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |U_j| \cos(\varphi_j) - \frac{\pi}{3} |U_j| \sin(\varphi_j) \\ B_{j2} &= -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \\ B_{j3} &= \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |U_j| \cos(\varphi_j) + \frac{\pi}{3} |U_j| \sin(\varphi_j) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Durch die sukzessive wiederholte Ausgabe der drei Spannungsstufen des Signals  $u_{Bj}(t)$  und die anschließende analoge Tiefpassfilterung zur Entfernung der höheren harmonischen Signalanteile wurde das gewünschte sinusförmige Lautsprecherzeitsignal generiert. Diese Methode erforderte für die Erzeugung aller 16 Lautsprechersignale lediglich eine Abspeicherung von  $3 \cdot 16 = 48$  Sample im RAM der DSP-Karte.

Abbildung 7.9 illustriert die erfolgreiche Umsetzung im Vergleich mit einem *Sample-and-Hold*-Ansatz, welcher zuerst in Betracht gezogen wurde. Mit dem Sample-and-Hold-Verfahren wird einfach der zum Abtastzeitpunkt gültige Momentanwert der gewünschten Sinusschwingung ausgegeben. Die Fourieranalyse zeigt, dass auf diese Weise ein Signal mit fehlerhafter Amplitude und Phasen erzeugt wird.

#### 7.2.4 Schallfeldanalyse

Da in den Messserien stets nur einzelne Töne mit schrittweise ansteigender Frequenz angeregt werden konnten, sowie mit dem Hintergrund, dass die DSP-Karte nur eine Aufzeichnung von 1000 Samples je A/D-Kanal zu ließ, wurde die Analyse des Schallfelds auf diese eine Anregungsfrequenz beschränkt. Die tonalen Komponenten wurden direkt mittels einer diskreten Fouriertransformation (DFT) ausgewertet. Auf diese Weise konnte die Zeit, die für die Modenanalyse benötigt wird, signifikant reduziert werden.



	$ Y_1 $	$\arg(Y_1)$
Sinussignal	0.5	$45^\circ$
Sample and Hold	0.41	$-15^\circ$
Treppenstufen $B_i$	0.5	$45^\circ$

Abbildung 7.9: Annäherung eines sinusförmigen Zeitsignals durch aus drei Stufen bestehende periodische Treppenfunktionen nach zwei verschiedenen Ansätzen. In der Tabelle sind die Koeffizienten der grundharmonischen Komponenten einer Fourierreihenentwicklung gegenüber gestellt.

#### Berechnung der Schalldruckamplituden aus der A/D-Wandlung

Aus  $N$  Samples der abgetasteten Schalldruckzeitreihe  $y(0), y(T_s), \dots, y((N-1)T_s)$  kann die Schalldruckamplitude der tonalen Frequenzkomponente  $f_t$  mit Hilfe der DFT wie folgt berechnet werden:

$$p(\omega_t) = \sum_{n=0}^{N-1} y(nT_s) e^{-i2\pi f_t n T_s}. \quad (7.7)$$

Gemäß den Grundlagen der diskreten Signalverarbeitung werden in der DFT solche Frequenzkomponenten ohne eine Verschmierung durch andere Spektralkomponenten gerade dann berechnet, wenn sie Vielfache der Frequenzauflösung  $\Delta f = f_s/N = 1/NT_s$  sind. Diese Forderung wurde im Experiment für die Frequenzkomponente  $f_t$  durch eine feste Verknüpfung der Abtastrate mit dem dreifachen der untersuchten Signalfrequenz  $f_s = 3f_t$  und für eine Sampleanzahl von  $N = 3 \cdot j, j \in \mathbb{Z}$ , stets erfüllt<sup>1</sup>.

Das Diagramm in Abbildung 7.10 a) gibt exemplarisch einen Eindruck von der Standardabweichung der Schalldruckmessungen bei sinusförmiger Anregung eines Lautsprechers mit einer Frequenz von  $kR = 5$ . Die Standardabweichung wurde analog zu dem in Abschnitt 3.1.3 beschriebenen Vorgehen berechnet, wobei hier  $N_T$  die Anzahl Signalperioden bezeichnet, über die in der fiktiven  $i$ -ten Einzelmessung gemittelt wird. Für die Darstellung wurden alle in Mikrofonsektion I installierten Mikrofone ausgewertet. Unter den idealen Bedingungen der beidseitig reflexionsarm abgeschlossenen Versuchsstrecke wurden inkohärente Komponenten in den Mikrofonsignalen hauptsächlich durch das Rauschen der Tiefpassfilter verursacht, die zur Filterung sowohl der Lautsprecher- als

<sup>1</sup> Im Fall der Analyse der Blattfolgefrequenz des Ventilators wurde die aktuelle Abtastfrequenz parallel zu jeder A/D-Wandlung durch Auswertung der an die DSP-Karte gelegten Triggerpulsfolge ausgewertet. Der auf der Rotorwelle befindliche Drehgeber erzeugte eine Folge von  $3B = 72$  Pulsen pro Umdrehung, d.h. genau das Dreifache der Blattfolgefrequenz. Die feste Verknüpfung von A/D-Wandlung und Rotortrigger-Signal gewährleistet eine zu jedem Zeitpunkt rotorkohärente Schalldruckanalyse, so dass keine zusätzliche adaptive Neuabtastung der Signalfolge angewendet werden braucht.

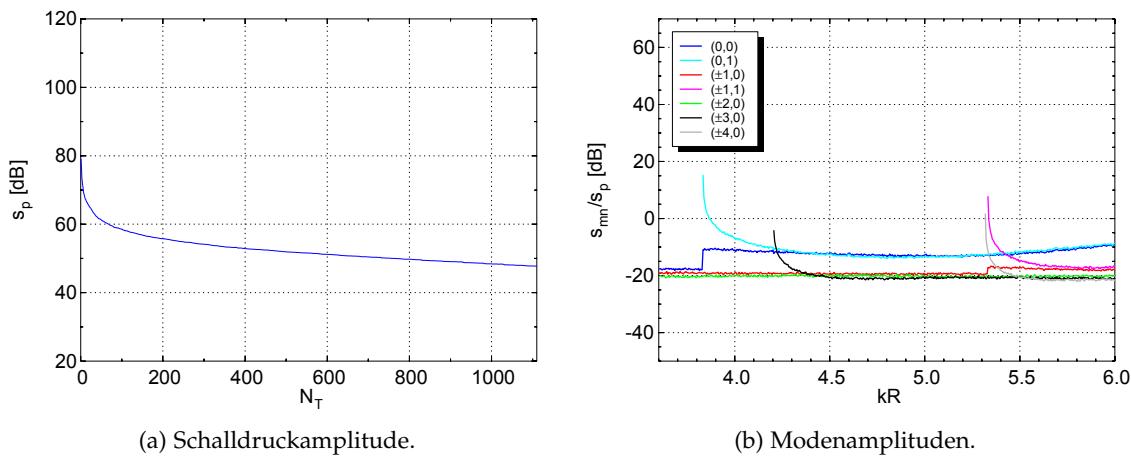


Abbildung 7.10: Standardabweichungen der Schallfeldanalysen im Versuchsaufbau mit beidseitig reflexionsarmen Kanalabschlüssen. Die Standardabweichung der Schalldruckamplitude wurde für die Anregung eines Lautsprechers mit einem Testton bei der Frequenz  $kR = 5$  ausgewertet.

auch der Mikrofonzeitreihen verwendet wurden. Die Rauschanregung aller sonstigen Bestandteile des Versuchsaufbaus waren dem gegenüber vernachlässigbar. In der standardmäßig ausgeführten Mittelung über  $N_T = 1000$  Perioden betrug die Standardabweichung  $s_p = 48$  dB. Der Vergleich mit Abbildung 7.8 zeigt, dass der Signal-Rausch-Abstand dann im Bereich von 40 dB lag. Das Ergebnis ist repräsentativ für Anregungen bei anderen Frequenzen, mit anderen Quellamplituden sowie für alle eingesetzten Lautsprecher. Im Versuchsaufbau mit Ventilatorbetrieb lag die Standardabweichung bei  $s_p = 72$  dB. Durch verstärkte Aussteuerung der Lautsprecherkanäle war ein Signal-Rausch-Abstand von mehr als 20 dB weiterhin gewährleistet.

### Modenanalyse

Prinzipiell konnte die aus vier Ringen je acht Mikrofonen bestehende Sensoranordnung für Azimutalmodenanalysen ohne modales Aliasing bis zur Ordnung  $m = 3$  und für eine Radialmodenzerlegung in die Ordnungen  $n = 0$  und  $n = 1$  eingesetzt werden. Zur Beurteilung der erzielbaren Modenanalysegenauigkeit wurden die in Abschnitt 3.3.6 beschriebenen Simulationsrechnungen durchgeführt. Abbildung 7.10 zeigt die resultierenden modalen Standardabweichungen.

In den Messungen mit beidseitig reflexionsarmen Kanalabschlüssen resultierten bei einer Standardabweichung der Schalldruckmessungen von  $s_p = 48$  dB für die meisten Frequenzen sehr geringe modale Standardabweichungen von etwa  $s_{mn} = 28$  dB bis  $s_{mn} = 40$  dB. Bei entsprechender Aussteuerung ließen sich in den Experimenten daher hohe modale Signal-Rausch-Abstände realisieren. In Untersuchungen mit angeschlossenem Ventilator lagen die modalen Standardabweichungen dagegen mit etwa  $s_{mn} = 52$  dB bis  $s_{mn} = 64$  dB schon in einem Pegelbereich, der für einige Untersuchungen der folgenden Abschnitte zu Beschränkungen führt. Es ist zu beachten, dass im Bereich der Cut-on-Frequenzen die modalen Standardabweichungen deutlich über den genannten Werten liegen können.

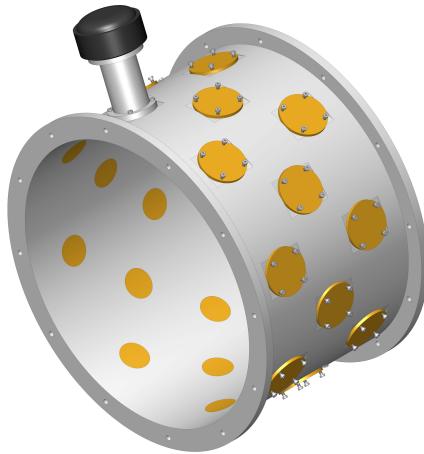


Abbildung 7.11: Für die Anordnung 1–0–0 des Modengenerators wurden bis auf einen Lautsprecher alle anderen Lautsprecher demontiert. Alle Öffnungen in der Kanalwand wurden mit Deckeln verschlossen, deren Innenseite die Kontur der Kanalwand nachbilden.

### 7.3 VERIFIZIERUNG DES MODELLS EINER LAUTSPRECHEREINHEIT

Die Beschreibung der von einer Lautsprechereinheit im Kanal angeregten Modenverteilung durch eine Monopolquelle ist fundamentaler Bestandteil des in Kapitel 6 entwickelten Modells. Mangels existierender Nachweise wurde vor der Durchführung weiterer Versuche zunächst die Gültigkeit dieses Ansatzes experimentell überprüft. Dazu wurden bis auf den Lautsprecher an der Position 1 im ersten Ring alle anderen Lautsprechereinheiten demontiert und die verbleibenden Öffnungen verschlossen, vgl. Abbildung 7.11. Das Ergebnis der Messungen ist in Abbildung 7.12 in Form der durch Gleichung (6.9) definierten modalen Impedanz dargestellt<sup>2</sup>. Die theoretischen Werte wurden mithilfe von Gleichung (6.21) berechnet. Um eine vergleichbare Anregung des Schallfelds bei allen Frequenzen zu gewährleisten wurde der Volumenfluss auf einen konstanten Wert eingeregelt<sup>3</sup>.

Die gemessenen Modenamplituden zeigen generell eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Modell. Als Abweichungen können in allen Kurven eine überlagerte Welligkeit und Störungen nahe der Cut-on-Frequenzen festgestellt werden. Die Form der Welligkeit legt den Einfluss von Reflexionen nahe. Unterstützt wird diese Annahme durch die in Abbildung 7.13 gezeigten Spektren. Dargestellt sind die in den vier Ringen des Mikrofonarrays gemessenen Schalldruckamplituden, die jeweils aus einer Betragsmittelung über alle Umfangspositionen hervorgehen. Die Scheitelpunkte der Kurven liegen in systematischer Abfolge, was aufgrund der unterschiedlichen Abstände zur Reflexionsstelle plausibel ist. Abgesehen hiervon verdeutlicht die Abbildung die Variationsbreite mit der das Schalldruckfeld bei konstantem Volumenfluss durch eine Quelle angeregt wird.

<sup>2</sup> In Abbildung 7.12 ff. sind die Cut-on-Frequenzen der Moden, die im untersuchten Frequenzbereich liegen, durch Dreiecke gekennzeichnet.

<sup>3</sup> Für die Ermittlung des Volumenflusses wurden die beiden in den Trichter integrierten Mikrofone, vgl. Abbildung 7.5, und die in Abschnitt 6.2.1 beschriebene Trichter-Übertragungsfunktion verwendet.

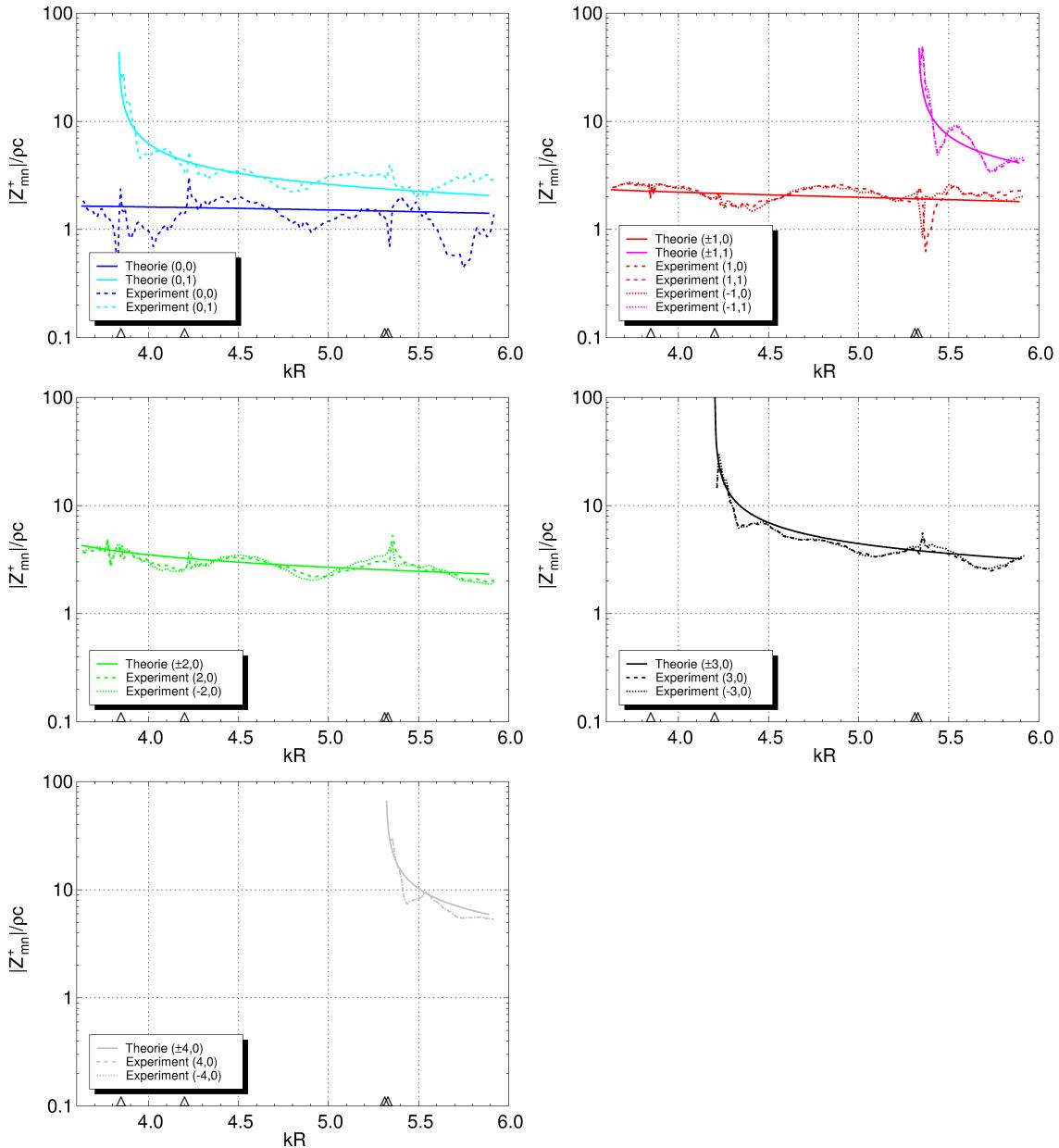


Abbildung 7.12: Gegenüberstellung der gemessenen und der theoretisch vorhergesagten Modenamplituden, die von einer Lautsprechereinheit in der Konfiguration 1–0–0 des Modengenerators im Kanal angeregt werden.

Der Versuchsaufbau wurde systematisch auf Reflexionsstellen untersucht. Stromab der Mikrofonmesssektion befinden sich nur durchgehend glatte Rohrsegmente und der reflexionsarme Kanalabschluss. Hier auftretende Reflexionen würden nur durch erneute Reflexion, z. B. am stromauf liegenden Lautsprecherarrays, in die Amplituden der stromab laufenden Moden eingehen und sind deshalb von untergeordneter Bedeutung. Innerhalb des Modengenerators sind Reflexionen aufgrund der demontierten sonstigen Lautsprecher auszuschließen. Die Welligkeit ist auch nicht auf die Lautsprecheranregung zurückzuführen, dies haben Versuche mit und ohne geregelten Lautsprechervolumenfluss ergeben. Weiterhin handelt es sich um keinen Artefakt der Radialmodenanalyse, da die Welligkeit ebenso in gemittelten Schalldruckspektren wieder zu finden ist. Somit verbleibt als mögliche Ursache der stromauf liegende provisorisch gestaltete refle-

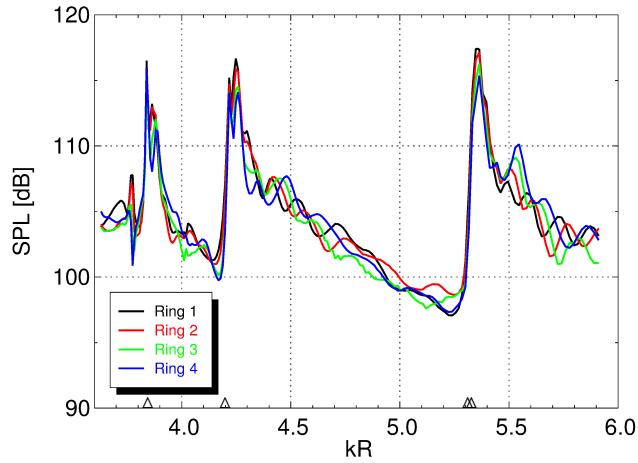


Abbildung 7.13: Das Diagramm zeigt die bei Anregung eines einzelnen Lautsprechers in der Konfiguration 1–0–0 des Modengenerators im Mittel an den Mikrofonringen gemessenen Schalldruckamplituden.

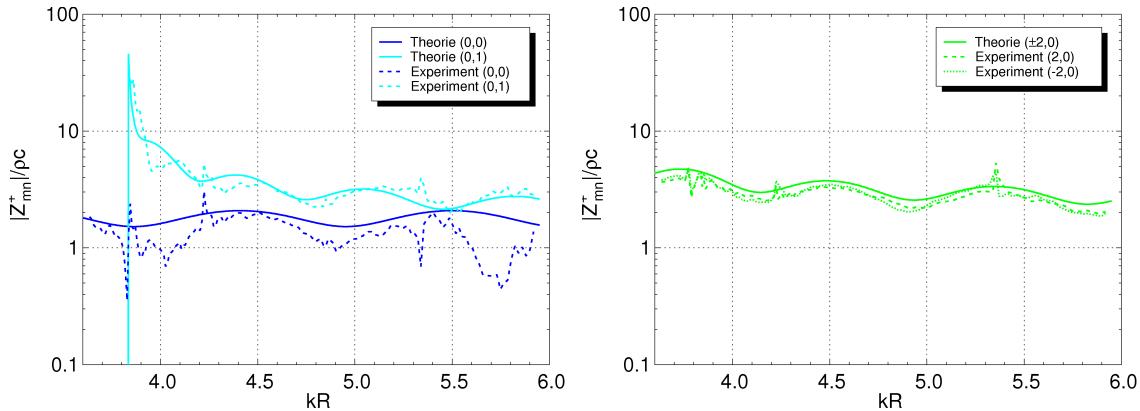


Abbildung 7.14: Vergleich von in Abbildung 7.12 dargestellten Messdaten mit einem um eine Reflexionsstelle erweiterten Modell des Verschaufbaus.

xionsarme Kanalabschluss.

Zur Identifikation der potentiellen Reflexionsstelle wurden die in Abschnitt 6.4 beschriebenen, erweiterten Modellgleichungen angewendet. Mit Hilfe eines iterativen Verfahrens konnten als Reflexionsstelle  $x_r = -0.775 \text{ m}$  und als frequenzunabhängiger Reflexionsfaktor  $r_{mn}^- = 0.15$  bestimmt werden. Der Vergleich in Abbildung 7.14 zeigt am Beispiel der Modenordnungen  $m = 0$  und  $m = 2$ , dass hiermit die Welligkeit relativ gut reproduziert werden kann. Die ermittelte Reflexionsstelle liegt in der ersten Hälfte des mit Absorbermatten ausgekleideten Kanalstücks und stellt daher eine etwas unbefriedigende Erklärungsvariante dar. Möglicherweise ließe sich das beobachtete Verhalten besser mit mehreren axial verteilten, frequenzabhängigen Reflexionsfaktoren beschreiben. Insgesamt kann für die folgenden Untersuchungen fest gehalten werden, dass schwache Reflexionen vorliegen, die durch einen einfachen Reflexionsfaktor näherungsweise berücksichtigt werden können.

Für die schmalbandigen Störungen der Modenamplituden im Bereich der Cut-on-

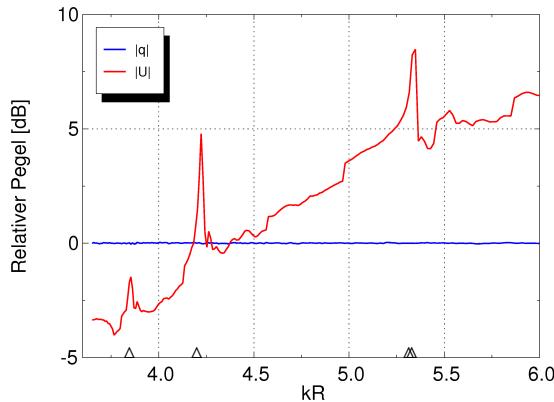


Abbildung 7.15: Aussteuerung des Lautsprechers in der Konfiguration 1-0-0 des Modengenerators zur Einstellung eines konstanten Volumenfluss.

Frequenzen gibt es verschiedene Erklärungsansätze. Aus Kapitel 4 ist bekannt, dass hin- und zurücklaufende Moden der gleichen azimutalen Ordnung in direkter Nähe der Cut-on-Grenze nur ungenau getrennt werden können. Neben diesem Analyseproblem gibt es einen bezüglich der Anregung wichtigen physikalischen Effekt: Offenbar ist nahe unterhalb der Cut-on-Frequenz einer Mode eine deutlich erhöhte Lautsprecherspannung zur Erzeugung eines konstanten Volumenflusses notwendig, siehe das rechte Diagramm in Abbildung 7.15. Dieses Phänomen wird von Johnson [58] als *pre cut-on loading effect* bezeichnet: Induziert durch die noch nicht ausbreitungsfähige Mode steigt die Kanaleingangs-Impedanz etwas unterhalb der Cut-on-Frequenz stark an, d. h. der Lautsprecher arbeitet unter einer starken Belastung, die Schallenergie kann jedoch erst oberhalb der cut-on Frequenz abtransportiert werden. Es ist fraglich, ob in diesem Frequenzbereich der Volumenfluss auf Basis der Mikrofonmessungen und mit Verwendung des Trichtermodells korrekt ermittelt wurde. Eine Fehleinstellung des Volumenfluss wirkt sich auf alle Modenamplituden aus.

#### 7.4 ANREGUNG EINES LAUTSPRECHERS IN ABHÄNGIGKEIT DER ARRAYKONFIGURATION

Für den Fall, dass mehr als eine Lautsprechereinheit installiert ist, stellt das Lautsprecherarray ein System gekoppelter akustischer Resonatoren dar und übt einen wechselseitigen Einfluss auf die Schallfeldabstrahlung eines jeden Aktuators aus. Zur experimentellen Untersuchung der Auswirkungen wurde der an der obersten Umfangsposition in Ring 1 befindliche Lautsprecher in den Arraykonfigurationen 1-0-0, 8-0-0, 8-8-0, und 8-8-8 angeregt. Der Einfluss der Arraykonfiguration auf die Moden ist separat für jede azimutale Ordnung in den linken Diagrammen der Abbildungen 7.16 und 7.17 dargestellt. Es können zwei wesentliche Effekte festgestellt werden:

- Im Frequenzbereich  $3.6 < kR < 4.5$  fallen die Anregungsamplituden *aller* Moden mit zunehmender Anzahl installierter Lautsprechereinheiten etwa gleichermaßen schwächer aus.
- In der Nähe der Cut-on-Frequenz fällt die resonanzartige Überhöhung *der zugehörigen* Mode mit zunehmender Anzahl Lautsprechereinheiten schwächer aus.

Die Mode  $(3, 0)$  ist in besonderem Maße betroffen, da die Cut-on-Frequenz  $kR = 4.2$  beträgt und sich daher beide Effekte überlagern. Ihre Amplitude reduziert sich im Extremfall um einen Faktor von mehr als 10. Der erste Effekt ist in isolierter Form gut im Spektrum der Mode  $(2, 0)$  zu beobachten. Offenbar über hier nur stromab liegende Ringe einen Einfluss aus. Hingegen wird der zweite Effekt auch durch eine Variation der Lautsprecheranzahl im gleichen Ring beeinflusst. Für alle Moden gilt, dass außerhalb der angegebenen Frequenzbereiche keine Auswirkung des Resonatorsystems auf die transmittierte Amplitude festzustellen ist.

Beide beobachteten Effekte beruhen auf der Resonanz der modalen Wellenzahlen mit den Resonatorabmessungen und werden durch das analytische Modell des Lautsprechersystems qualitativ bestätigt. Die Ergebnisse der Simulationen sind in den Diagrammen der rechten Spalte von Abbildung 7.16 und 7.17 zu sehen. Für das Modell musste ein schallharder Trichterabschluss angenommen werden, da die tatsächliche Impedanz der Schallwandler messtechnisch nur schwer zu spezifizieren ist und zudem im Allgemeinen mit den Betriebsbedingungen variiert [37]. In der Simulation wurde die Anregung des aktiven Lautsprechers so eingestellt, dass der Volumenfluss in der Trichteröffnung mit dem experimentellen Wert übereinstimmt. Die Ausprägung und Frequenzlage der maximalen Resonanz werden bis auf einen Offset von etwa 6 dB und mit Ausnahme der Mode  $(0, 0)$  gut wieder gegeben. Auffällig ist – im Vergleich zur Simulation einer in den Modengenerator von außen einlaufenden Welle in Abbildung 6.12 – eine deutliche Frequenzverschiebung der Resonanzen der Moden  $(0, 0)$  und  $(0, 1)$  zu höheren Frequenzen mit der Erweiterung des Lautsprecherarrays. Diese ist deutlicher in den Simulationen zu erkennen, findet sich aber auch in den Messdaten wieder. Weiterhin fällt in den Simulationen eine Anhebung der Amplituden der Moden  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  und  $(2, 0)$  entweder im Bereich oder etwas oberhalb davon auf. Dieser Effekt ist in den Messungen in schwacher Form für die Mode  $(1, 0)$  fest zu stellen. Möglicherweise hängen die Differenzen mit den unterschiedlichen Abschlussbedingungen der Trichter zusammen, die im Experiment beziehungsweise in der Simulation angenommen wurden.

Im untersten Diagramm der Abbildung 7.17 sind die Lautsprecherspannungen gegenübergestellt, welche für einen konstanten Volumenfluss eingestellt werden mussten. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den verschiedenen Aktuatorkonfigurationen ist nur in unmittelbarer Nähe der Cut-on-Frequenzen der Moden  $(0, 1)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(4, 0)$  und  $(1, 1)$  festzustellen. Offenbar wird der im vorherigen Abschnitt beschriebene *pre cut-on loading effect* durch den Anbau weiterer Lautsprechereinheiten im Nahfeld des aktiven Aktuators vermindert. Die Tatsache, dass für alle sonstigen Frequenzen keine signifikanten Unterschiede in den Lautsprecherspannungen festgestellt werden können deutet darauf hin, dass sich eine Vergrößerung der an den Strömungskanal angebrachten Lautsprecherinheiten nicht in einer Verminderung des angeregten Schallflusses auswirkt.

Aus den vorstehenden Beobachtungen ergeben sich mehrere praktisch relevante Schlussfolgerungen:

- In Systemen mit mehreren Lautsprecherringen muss die im Resonanzbereich auftretende erhöhte Dämpfung der Modenamplituden durch eine Verstärkung der Anregungsamplituden kompensiert werden. Dies kann zu einer Überlastung der

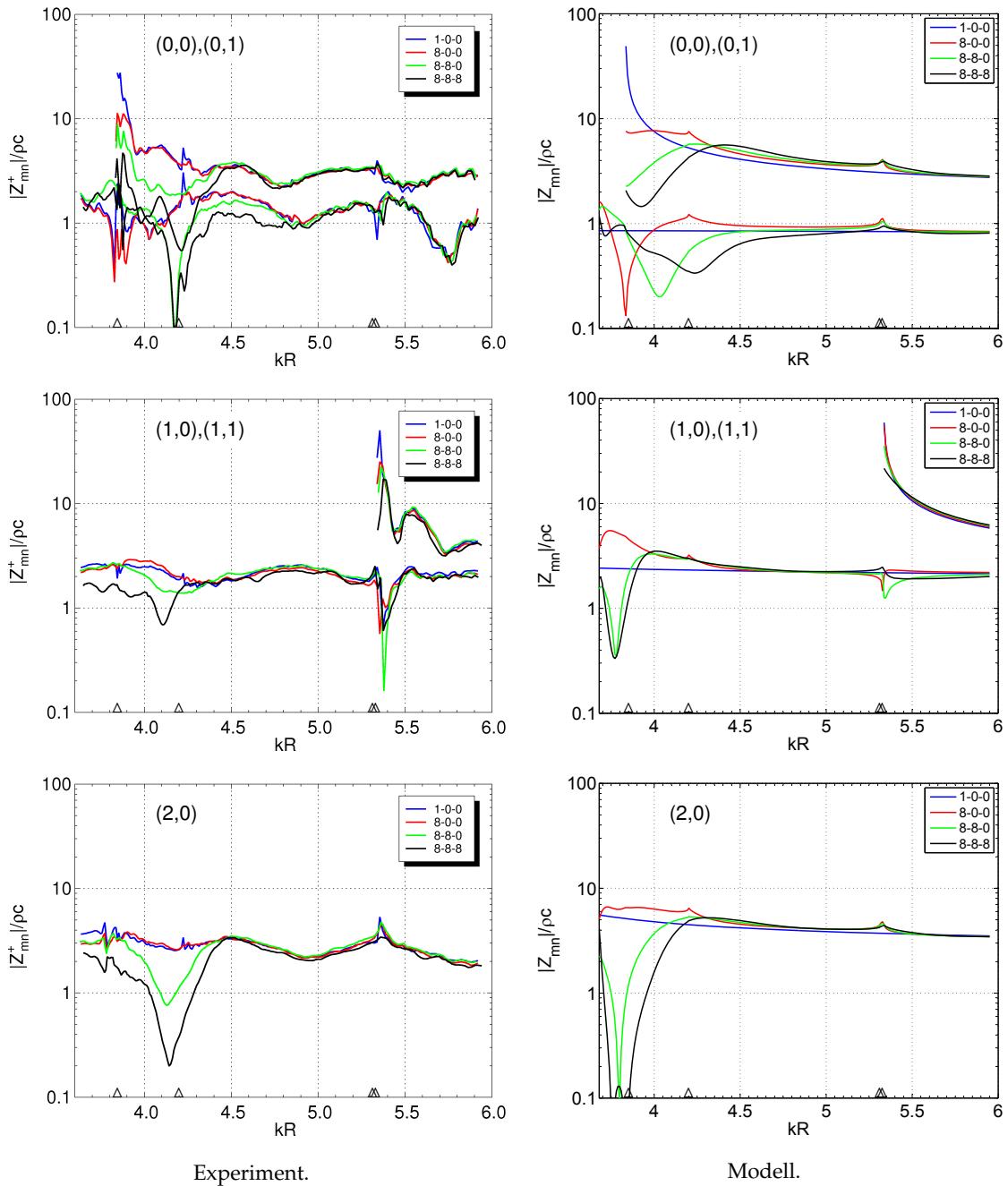


Abbildung 7.16: Durch einen Lautsprecher angeregtes Modenfeld in vier verschiedenen Lautsprecherarray-Konfigurationen bei konstantem Volumenfluss in der Trichteröffnung (Fortsetzung in Abbildung 7.17).

Lautsprecher führen<sup>4</sup>.

- Das Verhältnis zweier Modenamplituden  $A_{mn}^+/A_{vw}^+$  unterschiedlicher Ordnungen kann sich durch Änderung der Anzahl eingebauter Lautsprechereinheiten erheblich verschieben, da die Resonanzeffekte individuell von den Modenordnungen

<sup>4</sup> Im Fall einer aktiven Regelung ist allerdings zu berücksichtigen, dass neben den angeregten Modenamplituden des Sekundärfelds auch die Modenamplituden des Primärfelds durch das Resonatorsystem gedämpft werden, d.h. die Transmission beider Schallfeldkomponenten in vergleichbarem Maße herabgesetzt wird.

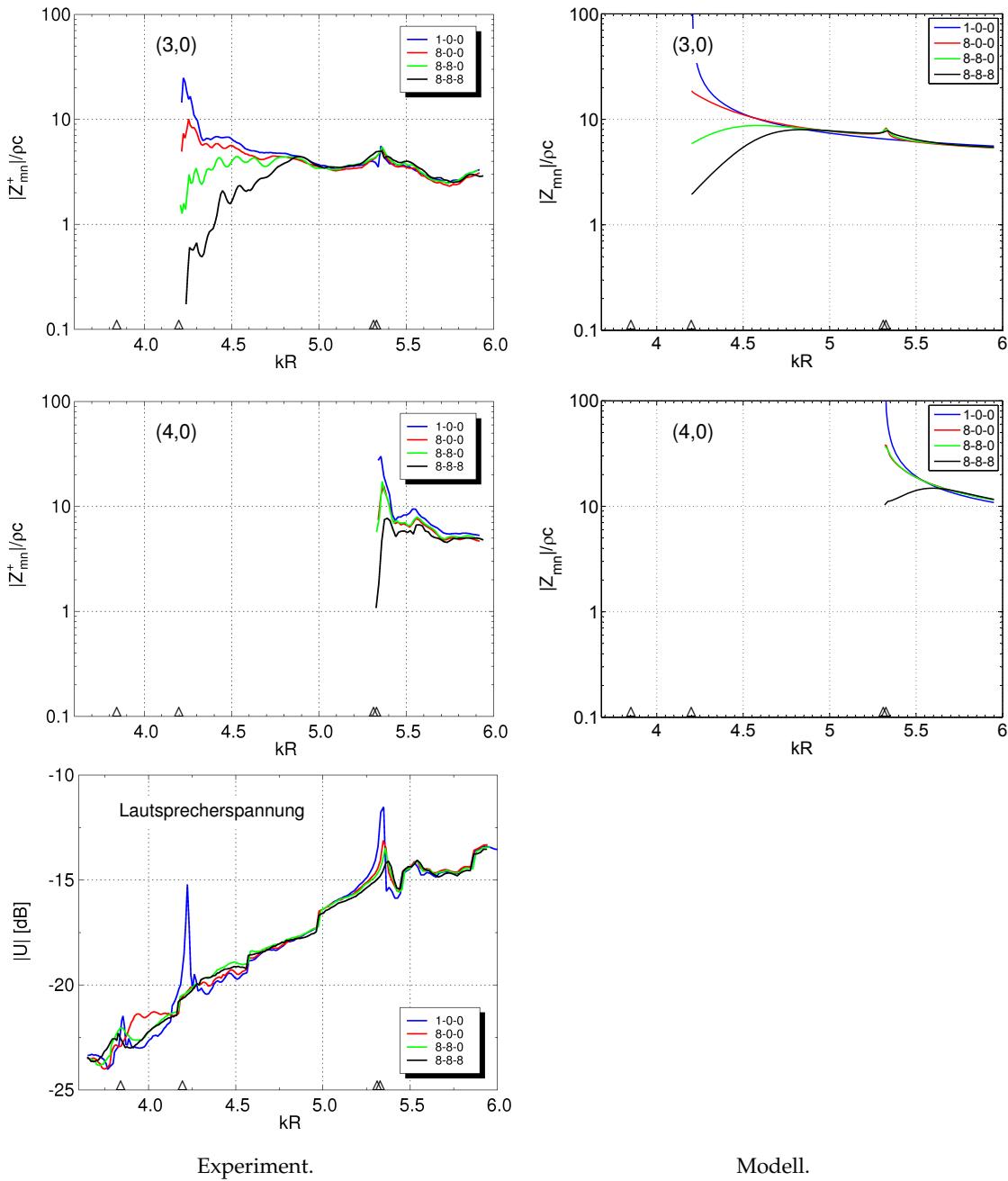


Abbildung 7.17: Durch einen Lautsprecher angeregtes Modenfeld in vier verschiedenen Lautsprecherarray-Konfigurationen bei konstantem Volumenfluss in der Trichteröffnung (Fortsetzung von Abbildung 7.16). Das untere Diagramm zeigt die eingestellte Lautsprecherspannung.

und Frequenzen abhängen.

- Die Modenamplitude hängt von der Position der Messung relativ zur Lage des angeregten Aktuators im Lautsprecherarray ab.

Wie in den folgenden Abschnitten zu sehen sein wird, wirken sich die beiden zuletzt genannten Punkte auf die Dominanz aus, mit der einzelne Moden in einer gezielten Synthese durch ein Array von Lautsprechern angeregt werden können.

## 7.5 SPILLOVER-MODEN DURCH STÖRUNGEN IN DEN LAUTSPRECHERSIGNALEN

Theoretisch kann mit einem Lautsprecherring unter idealen Bedingungen und bei Einhaltung des Kriteriums (6.44) die azimutale Ordnung  $\mu$  exklusiv, d. h. bei gleichzeitiger Unterdrückung aller sonstigen azimutalen Ordnungen  $m \neq \mu$ , angeregt werden. Im Rahmen einer Parameterstudie wurde untersucht, mit welcher Genauigkeit sich dies in der Praxis umsetzen lässt, wodurch es zu Beschränkungen kommt und wie groß das Optimierungspotential ist. Die Tabellen L.2 und L.4 geben einen Überblick über alle Versuchsvariationen. Im Folgenden werden die Ergebnisse anhand repräsentativer Beispiele diskutiert.

Zur Erzeugung der azimutalen Modenordnung  $\mu$  wurden die acht Lautsprecher eines Modengeneratorrings in Übertragung von Gleichung (6.40) mit folgenden Spannungsamplituden angesteuert:

$$U(\check{\phi}_l) = \frac{\hat{q}_\mu}{\psi_l} \cdot e^{i\mu\check{\phi}_l} = \hat{U}_\mu \cdot e^{i\mu\check{\phi}_l}. \quad (7.8)$$

In dieser Gleichung bezeichnen  $\hat{q}_\mu$  und  $\hat{U}_\mu$  die auf den Volumenfluss bzw. auf die Spannung bezogene Stellgröße des Quellrings und  $\psi_l$  den in Gleichung (7.2) eingeführten Übertragungsfaktor. Prinzipiell kann die zur Einstellung eines speziellen Pegels benötigte Stellgröße unter Heranziehung der Gleichung (6.45) oder (6.46) berechnet werden. Aus praktischen Gründen wurde in den Einzelmessungen die Spannungs-Stellgröße  $\hat{U}_\mu$  jedoch auf einen konstanten Wert eingestellt, so dass sich in Verknüpfung mit den Übertragungsfaktoren  $\psi_l$  eine frequenzabhängige Variation der Volumenflüsse ergab.

### 7.5.1 Messungen in verschiedenen Versuchsvarianten

Das linke Diagramm in Abbildung 7.18 zeigt das Ergebnis der gezielten Synthese von Moden der Ordnung  $\mu=1$ . Die Messung wurde in der Modengeneratorkonfiguration mit zwei installierten Ringen 8–8–0, beidseitig reflexionsfreien Kanalabschlüssen und bei Verwendung der Endstufen vom Typ Dynacord L 300 durchgeführt. Bis zur Cut-on-Frequenz der Moden  $(-1,1)$  und  $(1,1)$  bei  $kR=5.35$  durfte nur die Mode  $(1,0)$  erzeugt werden. Tatsächlich wurden jedoch zusätzlich alle weiteren Modenordnungen mit signifikanter Amplitude angeregt. Dieser Effekt wird genauso unter dem englischen Begriff *Spillover* eingeordnet, wie die Anregung der Moden, die bei Verwendung einer zu geringen Anzahl von Quellen entstehen. Zur Bewertung der Dominanz der Zielmoden  $(1,0)$  und  $(1,1)$  wurde die in Abbildung 7.18 beispielhaft eingezeichnete Pegeldifferenz  $\Delta A_{\mu\nu}^+ = A_{\mu\nu}^+/A_{mn}^+$  eingeführt. Die Dominanz der Mode  $(1,0)$  variierte zwischen 10 dB und 20 dB und war insbesondere an den Cut-on-Grenzen der Moden  $(0,1)$ ,  $(4,0)$  und  $(1,1)$  eingeschränkt.

Die Ursache der Spillover-Moden muss in Abweichungen von der theoretisch perfekten destruktiven Interferenz liegen, die sich für alle Ordnungen  $m \neq \mu$  aus der Überlagerung der von den einzelnen Quellen angeregten Modenfelder ergeben sollte, vgl. Abbildungen 6.16 bis 6.18. Ein Einfluss der in den beiden voran gegangenen Abschnitten diskutierten Effekte kann ausgeschlossen werden, da sowohl der provisorische reflexionsarme Kanalabschluss als auch die Anordnung der Lautsprecher im Modengenerator axialsymmetrisch sind und sich daher gleichermaßen auf die einzelnen Quellen

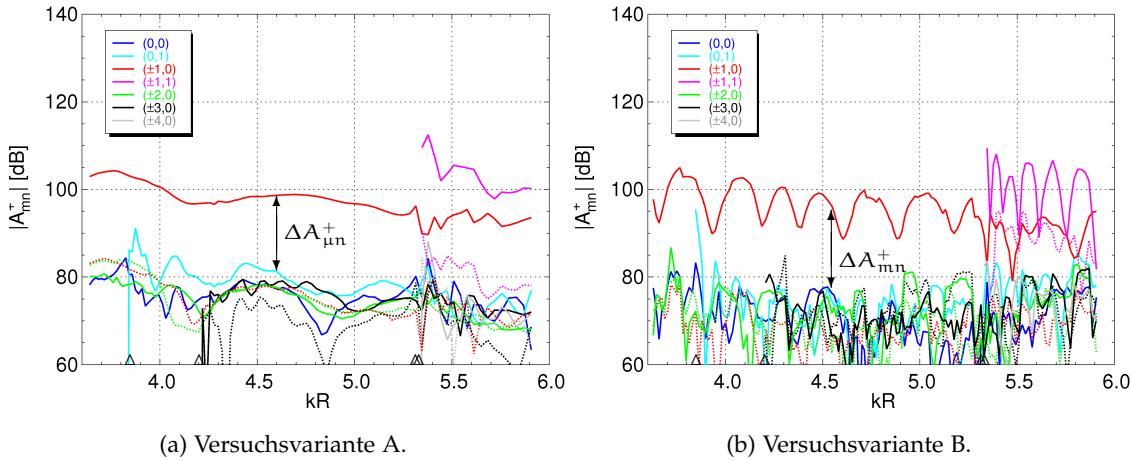


Abbildung 7.18: Modenspektrum bei gezielter Synthese der azimuthalen Ordnung  $\mu=1$  mit dem ersten Lautsprecherring in Arraykonfiguration 8–8–0. Versuchsvariante A wurde mit beidseitig reflexionsarmen Kanalabschlüssen und Endstufen vom Typ Dynacord L 300. Versuchsvariante B wurde mit angeschlossenem Axialventilator und Endstufen vom Typ KME SPA 240 E gemessen.

auswirken. Zu suchen sind vielmehr individuelle Abweichungen der einzelnen Lautsprecherkanäle. Verschiedene Autoren [39, 112, 128, 146] vermuteten Bautoleranzen der Aktuatoren als Ursache, berichteten aber nicht über eingehendere Untersuchungen. Im vorliegenden Fall wurde zur genaueren Eingrenzung von Fehlerquellen die gesamten Signalwege von den D/A-Wandlerausgängen bis hin zu den Lautsprechern messtechnisch untersucht.

Zeitliche Verzögerungen zwischen den einzelnen D/A-Wandlerkanälen wurden schon bei der Implementierung und dem Test der DSP-Karte festgestellt. Da sie sich überwiegend als systematisch und frequenzunabhängig herausstellten, konnten sie durch Modifikationen der Ansteuerungssoftware zwar weitgehend reduziert werden. Es verblieben aber zeitliche Ungenauigkeiten in der Größenordnung einer Mikrosekunde, die zu Phasenunterschieden in den Signalwegen von etwa einem Grad führen können. Die Übertragungsfunktionen der Kabel und der Tiefpassfilter erwiesen sich als nahezu identisch. Als ein sehr kritisches Bauteil stellten sich die Endstufenverstärker heraus. Sie wurden paarweise überprüft, indem auf je zwei Verstärkereingänge das gleiche sinusförmige Signal gegeben und die Ausgangssignale auf einem Oszilloskop miteinander verglichen wurden. Es traten Abweichungen in den Verstärkungsfaktoren von bis zu 10% und in den Phasengängen von bis zu  $15^\circ$  auf, die nichtlinear von der Frequenz und der Aussteuerung abhingen<sup>5</sup>. Die elektrisch-mechanischen Übertragungsfunktionen der Lautsprecher ließen sich nicht systematisch miteinander vergleichen. Sie hängen im Allgemeinen nichtlinear von den Betriebsparametern sowie der Einbausituation ab und lassen sich laut Hersteller messtechnisch nur mit einem sehr hohen Aufwand ermitteln [37]. Eine detaillierte Vermessung kam im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht in Frage.

Durch die in Abschnitt 7.2.2 genannte vereinfachte Messung von Korrekturfaktoren

<sup>5</sup> Ein Grund für das instabile Verhalten wurde in der niedrigen Reglerstellung des Geräts vermutet, welche sich in Abstimmung mit den anderen Geräten der Signalkette nicht vermeiden ließ.

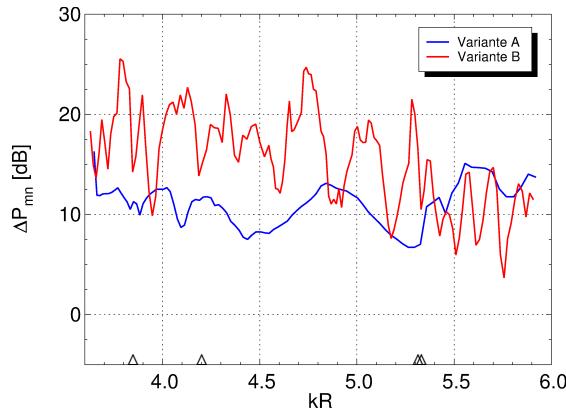


Abbildung 7.19: Genauigkeit der Synthese der azimutalen Ordnung  $\mu = 1$  in den beiden Versuchsvarianten, deren Messergebnisse in Abbildung 7.18 dargestellt sind.

konnte das komplexe Übertragungsverhalten der einzelnen Signalwege nicht kompensiert werden. Eine Verbesserungsmöglichkeit bestünde in einer frequenzabhängigen Kalibrierung der gesamten Übertragungsstrecke, eventuell unter Einbeziehung der Modenanalyse. Solche eine Kalibrierung kann sehr aufwändig sein. Zu beachten wäre der bezüglich Frequenz und Aussteuerung der Verstärker und Lautsprecher eingeschränkte Gültigkeitsbereich. Angesichts dessen erscheint es vorteilhaft, bei der Auswahl der Geräte auf möglichst geringe Toleranzen zu achten. Das hiermit verbundene Verbesserungspotential ließ sich zu einem späteren Zeitpunkt der Untersuchungen durch Austausch der Verstärkerendstufen eindrucksvoll belegen. Im rechten Diagramm von Abbildung 7.18 ist das Ergebnis einer Messserie dargestellt, in der die bisherigen Endstufen durch Geräte vom Typ KME SPA 240 E ersetzt wurden, welche nahezu identische Übertragungseigenschaften besaßen. Auffällig ist zunächst die starke Welligkeit des Modenspektrums. Diese ist darin begründet, dass im Versuchsaufbau der provisorische reflexionsarme Kanalabschluss durch den Axialventilator ersetzt wurde, der deutlich höhere Reflexionen verursacht, vergleiche Anhang K.3. Um Interferenzen mit den Schaufeln zu vermeiden, wurde in jeder Einzelmessung die Ventilatordrehzahl so mitgeführt, dass die Blattfolgefrequenz dem 0.9-fachen der Lautsprecheranregungsfrequenz entsprach. Obwohl es auf den ersten Blick nicht unmittelbar ersichtlich ist, wurden die Spillover-Moden im Mittel deutlich schwächer angeregt, als mit dem zuvor betrachteten Versuchsaufbau. Ein klareres Bild liefert die Darstellung des relativen Schallleistungspegels in Abbildung 7.19. Der relative Schallleistungspegel wurde nach folgender Definition berechnet:

$$\Delta P_{\mu}^{+} = \frac{\sum_{\nu} P_{\mu\nu}^{+}}{\sum_{m \neq \mu} \sum_{n} P_{mn}^{+}}. \quad (7.9)$$

Das Kriterium ist für eine pauschale Beurteilung der Genauigkeit der Modensynthese besser geeignet als die Angabe von Amplitudenverhältnissen bezüglich einzelner Modenordnungen. Dies trifft insbesondere bei hohen Frequenzen zu, bei denen die azimutale Zielmodenordnung sich aus mehreren radialen Ordnungen zusammensetzt.

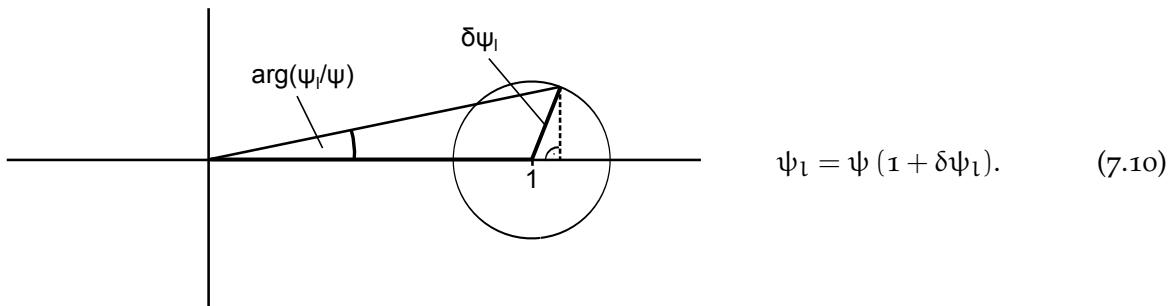
Der Vergleich der beiden Versuchsvarianten lässt die höhere Genauigkeit der Modensynthese bei Verwendung der stabileren Endstufen deutlich zu erkennen: Der Abstand

zu den Spillover-Moden ist zum Teil um mehr als 10 dB höher.

Die Feststellung, dass unter reflektierenden Randbedingungen die Dominanz der Modensynthese stark frequenzabhängig variiert, ist mit großen Konsequenzen verbunden. Sie wirkt sich bei einem Einsatz des Modengenerators zur Untersuchung von Schallausbreitungsvorgängen z. B. auf die Genauigkeit der gemessenen Transmissionsfaktoren aus. In Anwendungen zur aktiven Lärminderung kann der Modengenerator sogar zum begrenzenden Element im Sinne der erzielbaren Reduktion werden, wenn im Primärfeld die Schalleistungsdifferenz der zu regelnden Moden größer ist als im Sekundärschallfeld nachgebildet werden kann. Der folgende Abschnitt vermittelt einen Eindruck von der Empfindlichkeit der Modensynthese bezüglich Störungen in den einzelnen Signalwegen.

### 7.5.2 Modellierung von Störungen in den Lautsprechersignalen

Zur Vorhersage des Einfluss von Abweichungen in den Signalwegen auf die Modensynthese werden die Übertragungsfaktoren in einen kanalunabhängigen idealen Übertragungsfaktor und einen individuellen Störterm aufgespalten:



Für den Volumenfluss der  $l$ -ten Lautsprechereinheit gilt demzufolge

$$q_\mu(\check{\phi}_l) = \hat{U}_\mu \psi (1 + \delta\psi_l) \cdot e^{i\mu\check{\phi}_l} = \hat{q}_\mu (1 + \delta\psi_l) \cdot e^{i\mu\check{\phi}_l}. \quad (7.11)$$

Die durch eine Störung verursachte relative Veränderung der  $l$ -ten Quelle wird durch den Quotienten  $\psi_l/\psi = (1 + \delta\psi_l)$  zum Ausdruck gebracht. Der Betrag  $|\delta\psi_l|$  beschreibt eine relative Verstärkung. Der Imaginärteil des Störterms gibt eine Modifikation der Phase wieder, es gilt  $\arg(\psi_l/\psi) = \arctan(\Im(\delta\psi_l))$ .

Führt man die vorstehenden gestörten Quellsignale in Gleichung (6.36) ein, so resultieren für einen an der Position  $\check{x} = 0$  befindlichen Lautsprecherring unter Berücksichtigung der stromauf liegenden Reflexionsstelle folgende Modenamplituden:

$$A_{mn}^+ = \hat{q}_\mu \frac{\chi_{mn}^+}{\alpha_{mn}} (1 - R_{mn}^-) \left( \sum_{l=0}^{N_\phi-1} e^{i(\mu-m) \frac{l}{N_\phi} 2\pi} + \sum_{l=0}^{N_\phi-1} \delta\psi_l \cdot e^{i(\mu-m) \frac{l}{N_\phi} 2\pi} \right). \quad (7.12)$$

Der erste Term entspricht Gleichung (6.41) und beschreibt die ideale Modensynthese. Die Auswertung der gewünschten Moden der azimutalen Ordnung  $m = \mu$  ergibt

$$A_{\mu\nu}^+ = \hat{q}_\mu \frac{\chi_{\mu\nu}^+}{\alpha_{\mu\nu}} (1 - R_{\mu\nu}^-) \left( N_\phi + \sum_{l=0}^{N_\phi-1} \delta\psi_l \right). \quad (7.13)$$

Der zweite Term beschreibt die Anregung der unerwünschten Spillover-Moden der Ordnungen  $m \neq \mu$ :

$$A_{mn}^+ = \hat{q}_\mu \frac{\chi_{mn}^+}{\alpha_{mn}} (1 - R_{mn}^-) \sum_{l=0}^{N_\phi - 1} \delta\psi_l \cdot e^{i(\mu-m)\frac{1}{N_\phi} 2\pi}. \quad (7.14)$$

Die in Gleichung (7.14) gegebene Summe kann als räumliche Fourieranalyse der Störterme interpretiert werden. So bilden sich beispielsweise systematische zeitliche Verzögerungen aufeinander folgender Lautsprecherkanäle anders auf die azimutalen Modenordnungen ab als zufällig verteilte Bauteiltoleranzen. Eine verallgemeinerte Analyse ist nur beschränkt möglich. Es soll jedoch versucht werden, den Einfluss auf die Genauigkeit der Modensynthese tendenziell anhand von Beispielen zu erfassen.

Im Folgenden wird die Auswirkung der Störungen auf das Amplitudenverhältnis veranschaulicht. Es soll zunächst angenommen werden, dass in einem aus acht Quellen bestehenden Ring nur die Quelle an der Position  $\phi_1 = \pi/4$  gestört ist. Bei Vernachlässigung der Reflexionen gilt für die Amplituden der Spillover-Moden

$$A_{mn}^+ = \hat{q}_\mu \frac{\chi_{mn}^+}{\alpha_{mn}} \delta\psi_1 e^{i(\mu-m)\frac{2\pi}{N_\phi}} \quad (7.15)$$

und für das Amplitudenverhältnis

$$\Delta A_{\mu\nu}^+ = \frac{A_{\mu\nu}^+}{A_{mn}^+} = \frac{\chi_{\mu\nu}^+}{\chi_{mn}^+} \frac{\alpha_{mn}}{\alpha_{\mu\nu}} \left( \frac{N_\phi}{\delta\psi_1} + 1 \right) e^{i(\mu-m)\frac{2\pi}{N_\phi}}. \quad (7.16)$$

Alle Spillover-Moden werden gleichermaßen angeregt, wie es der Vorstellung einer über den Kanalumfang gewickelten Rechteckpulsfunktion entspricht. Anschaulich gesehen werden alle von der gestörten Quelle angeregten Moden gegenüber den Modenfeldern der anderen Quellen so hervorgehoben, dass in der Überlagerung nach dem in Abschnitt 6.5 dargestellten Schema keine vollständige gegenseitige Auslöschung der Ordnungen  $m \neq \mu$  mehr erreicht wird. Die nun sichtbaren Moden stellen also tatsächlich im Sinne des englischen Begriffs *Spillover* einen Überschuss dar.

Das Verhältnis der Modenamplituden hängt noch von den Ausbreitungsfaktoren und den Werten der radialen Eigenfunktionen ab. Dies ist in Abbildung 7.20 anhand einer simulierten Synthese der Ordnung  $\mu = 1$  bei einer Frequenz von  $kR = 4.55$  illustriert. Das linke Zeigerdiagramm zeigt als Referenz den ungestörten Fall. Im mittleren Diagramm wurde die an der Position 1 befindliche Quelle mit einem Faktor von  $\psi_1/\psi = 1.1$  verstärkt angeregt. Die Pegeldifferenz der Mode  $(1,0)$  zu der am stärksten angeregten Spillover-Mode  $(3,0)$  beträgt etwa  $\Delta A_{1,0}^+ = 30 \text{ dB}$ . Im rechten Diagramm wurde die Phase der Quellamplitude um  $\arg(\psi_1/\psi) = 5.7^\circ$  verändert. Offenbar entstehen hier die Moden mit den gleichen Pegeldifferenzen wie im mittleren Diagramm, lediglich die relativen Phasen der Moden sind verändert. Dies liegt daran, dass in diesem Fall mit  $\Im(\delta\psi_1) = \tan(\arg(\psi_1/\psi)) = 0.1$  die gleiche Verstärkung wie im mittleren Diagramm mit  $\delta\psi_1 = 0.1$  eingestellt wurde.

### 7.5.3 Abschätzung der Empfindlichkeit der Modensynthese gegenüber Störungen

Die folgenden Betrachtungen sollen einen Eindruck davon geben, in welchem Maß Abweichungen in den Signalwegen und die Genauigkeit der Modensynthese in Beziehung

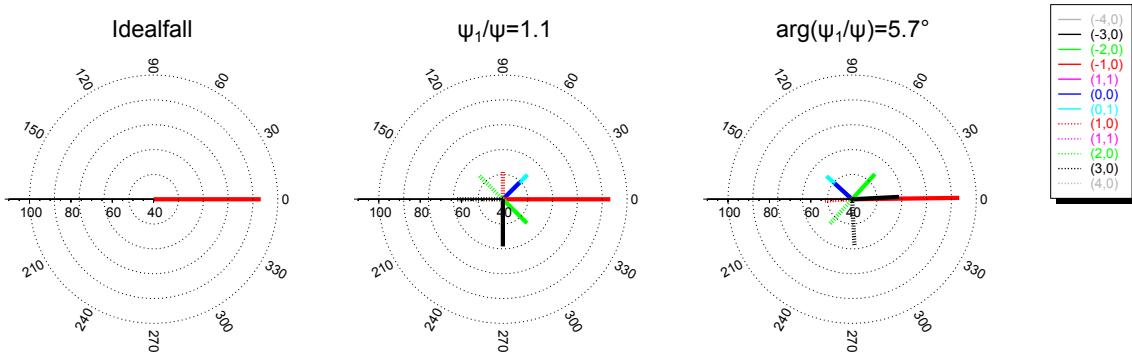


Abbildung 7.20: Einfluss der Störung einer Quelle in einem aus acht Quellen bestehenden Modengeneratorring in der gezielten Synthese der azimuthalen Ordnung  $\mu=1$  bei der Frequenz  $kR = 4.55$ .

stehen.

Es wird zunächst versucht, die im Experiment aufgetretenen Störungen der Lautsprechersignalwege abzuschätzen. Abbildung 7.21 zeigt einen Vergleich des erweiterten Modells mit den Messdaten, die im linken Diagramm von Abbildung 7.18 dargestellt sind. Die Amplituden wurden im linken Diagramm von Abbildung 7.21 für einen besseren optischen Vergleich normiert. In der Simulation wurden die in Tabelle 7.4 angegebenen relativen Übertragungsfaktoren verwendet sowie die schwachen Reflexionen am einlassseitigen Kanalabschluss berücksichtigt. Die Störterme wurden manuell angepasst, die messtechnisch festgestellten Abweichungen der Verstärkerendstufen wurden dabei einbezogen. Trotz der Annahme frequenzunabhängiger Übertragungsfaktoren wird die Anregung der Spillover-Moden qualitativ gut nachgebildet. Offensichtlich reichen geringe Störungen von nur wenigen Quellen aus, um die Modensynthese signifikant zu beeinträchtigen.

Abbildung 7.22 veranschaulicht die empfindliche Abhängigkeit von den Freiheitsgraden der Störungen. Betrachtet wird die Schallleistung, mit der Moden der Ordnung  $\mu=1$  relativ zu den Pegeln der Spillover-Moden angeregt werden, wenn zwei von acht Quellen im Ring gestört sind. Das linke Diagramm zeigt die Abhängigkeit von den relativen azimuthalen Positionen der beiden gestörten Quellen. Im Fall der blauen Kurve besitzt der Signalweg der ersten Quelle eine Phasenverschiebung von  $\arg(\psi_0/\psi) = 10^\circ$  und der Signalweg einer benachbarten Quelle eine Phasenverschiebung von  $\arg(\psi_1/\psi) = -10^\circ$ . Im Fall der roten Kurve sind die beiden Störungen an gegenüber liegenden Umfangspositionen platziert. Generell ist eine starke Variation der erzielten Schallleistung mit der Frequenz sichtbar. Die signifikantesten Änderungen sind in der Nähe von Cut-on-Frequenzen festzustellen. Dies hängt mit den Ausbreitungsfaktoren der Moden zusammen: Durch Einsetzen von Gleichung (7.13) bzw. von Gleichung (7.14) in Gleichung (2.62) lässt sich nachvollziehen, dass sich die Schallleistung der Moden proportional zu  $1/\alpha_{mn}^2$  verhält. Im Bereich oberhalb der Cut-on-Frequenz der Moden  $(-3,0)$  und  $(3,0)$ , d.h.  $kR > 4.2$ , führt dies im Fall der benachbarten Störungen zu einer starken Gewichtung dieser Moden und damit zu einer Verminderung der Dominanz der Zielmode um bis zu 10 dB. Im Fall der gegenüber liegenden Störungen werden hingegen die Moden  $(\pm 3,0)$  kaum angeregt und der Effekt ist nur schwach sichtbar. Positiv ist der Einfluss des Aus-

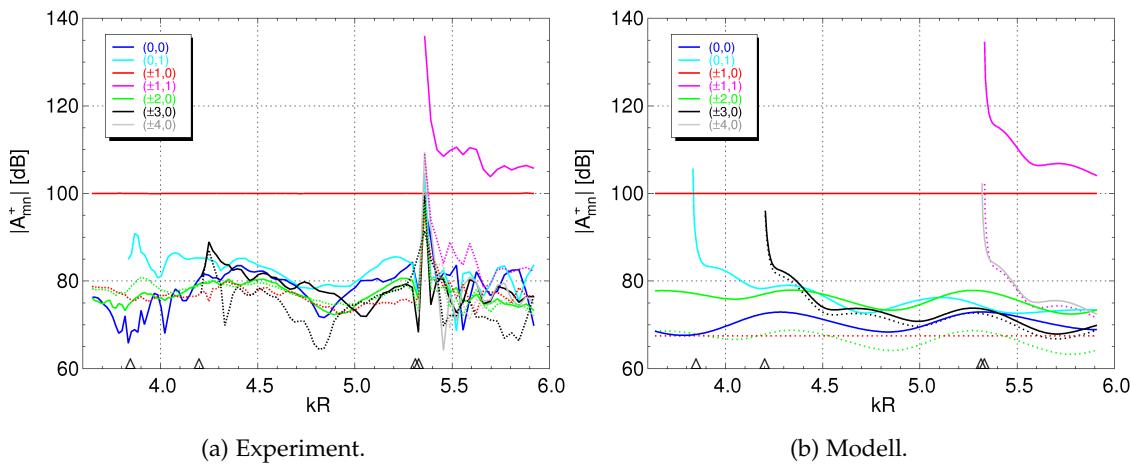


Abbildung 7.21: Qualitative Reproduktion einer experimentellen Synthese der azimuthalen Modenordnung  $m=1$  mithilfe des Modengenerator-Modells unter Berücksichtigung der in Tabelle 7.4 angegebenen Abweichungen in den Lautsprechersignalen.

breitungsfaktors dann, wenn die Anregungsfrequenz nahe der Cut-on-Frequenz einer radialen Ordnung der Zielmode liegt. Im dargestellten Fall kommt dies allerdings nicht effektiv zum Tragen, da die Cut-on-Frequenz der gewünschten Mode  $(1,1)$  nahezu mit der Cut-on-Frequenz der Spillover-Mode  $(\pm 4,0)$  zusammenfällt.

Der Vergleich mit den in Abbildung 7.19 dargestellten Ergebnissen deutet darauf hin, dass sich mit zunehmender Zahl gestörter Quellen die oben beschriebenen Einflüsse der Ausbreitungsfaktoren im realen Experiment ausgleichen. Eine Bewertung ist jedoch durch die überlagerten Reflexionen erschwert. In welchem Maß sich Reflexionen auf die Dominanz der Modensynthese auswirken können ist im rechten Diagramm von Abbildung 7.22 illustriert. Berechnet wurde die Schallleistungsdifferenz für die zuvor betrachteten benachbarten Störungen unter Einfluss dreier unterschiedlicher Reflexionsfaktoren. Die Reflexionsstelle liegt bei  $x = -0.775$  m. Der Einfachheit halber wurden die Reflexionsfaktoren als frequenzunabhängig und für alle Moden gleich angenommen. Wie schon in den Messergebnissen beobachtet wurde, können Reflexionen zu einer erheblichen Herabsetzung der Modendominanz führen. Auf die betroffenen Frequenzbänder lässt sich aber beispielsweise durch eine Abstimmung des axialen Abstands von Lautsprecherring und Reflexionsstelle Einfluss nehmen.

Die Abhängigkeit der Modendominanz von der Stärke der Störung lässt sich wieder-

QUELLINDEX	$l$	1	2	3	4	5	6	7	8
RELATIVER ÜBERTRAGUNGSFAKTO	$ \psi_l/\psi $	1	1	1	1	1	1	1	1
RELATIVER ÜBERTRAGUNGSFAKTO	$\arg(\psi_l/\psi)$	$0^\circ$	$5^\circ$	$8^\circ$	$3^\circ$	$0^\circ$	$-8^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$

Tabelle 7.4: Übertragungsfaktoren von acht ringförmig angeordneten Quellen zur Simulation des Einfluss von Störungen in den Lautsprechersignalwegen.

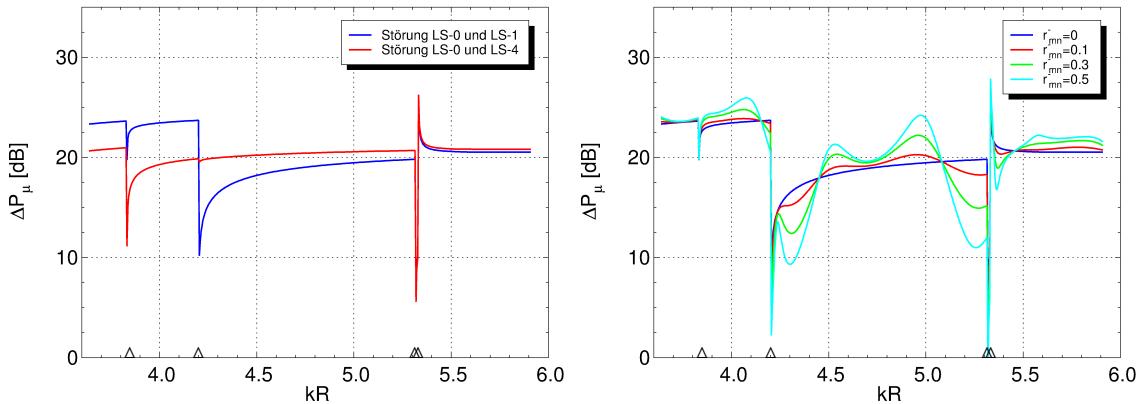


Abbildung 7.22: Das linke Diagramm zeigt den Einfluss der Positionen zweier gestörter Quellen auf die Schallleistung, welche sich in der Synthese der Modenordnung  $\mu=1$  relativ zu den Pegeln der Spillover-Moden erzielen lässt. Im rechten Diagramm wird der zusätzliche Einfluss von Reflexionen veranschaulicht.

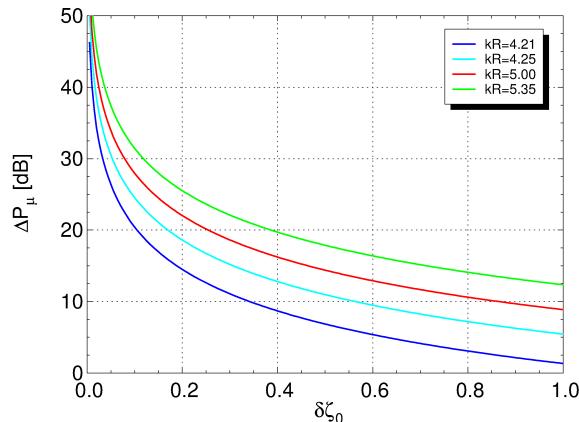


Abbildung 7.23: Abhängigkeit der Modendominanz von der Stärke der Störung einer einzelnen Quelle in einem aus acht Quellen bestehenden Modengeneratorring.

um am Einfachsten für eine einzelne Quelle einschätzen. Für den Fall ohne Strömungsüberlagerung und bei Vernachlässigung von Reflexionen gilt

$$\Delta P_\mu^+ = \frac{\sum_v \frac{|\chi_{\mu v}^+|^2}{\alpha_{\mu v}}}{\sum_{m \neq \mu} \sum_n \frac{|\chi_{mn}^+|^2}{\alpha_{mn}}} \frac{|\mathcal{N}_\phi + \delta \psi_o|^2}{|\delta \psi_o|^2}. \quad (7.17)$$

In Abbildung 7.23 ist die Variation der Schallleistungsdifferenz mit dem reellwertigen Störterm  $\delta \psi_o$  dargestellt. Die Formel wurde für acht Quellen und für vier Anregungsfrequenzen ausgewertet. Die Frequenzen  $kR = 4.21$  und  $kR = 4.25$  liegen nahe oberhalb der Cut-on-Frequenz der Moden ( $\pm 3, 0$ ), die Frequenzen  $kR = 5.00$  und  $kR = 5.35$  liegen deutlich unterhalb bzw. nahe oberhalb der Cut-on-Frequenzen der Moden ( $\pm 4, 0$ ) und ( $\pm 1, 1$ ). Die Darstellung verdeutlicht den bereits zuvor beschriebenen Sachverhalt, dass die Modendominanz erheblich von der relativen Lage der Anregungsfrequenz zu den Cut-on-Frequenzen anhängt. Hinsichtlich einer Spezifikation der Toleranz der Lautsprechersignalwege kann Abbildung 7.23 als Richtwert entnommen werden, dass für eine hinreichende Modendominanz die relative Störung kleiner als 10% sein sollte.

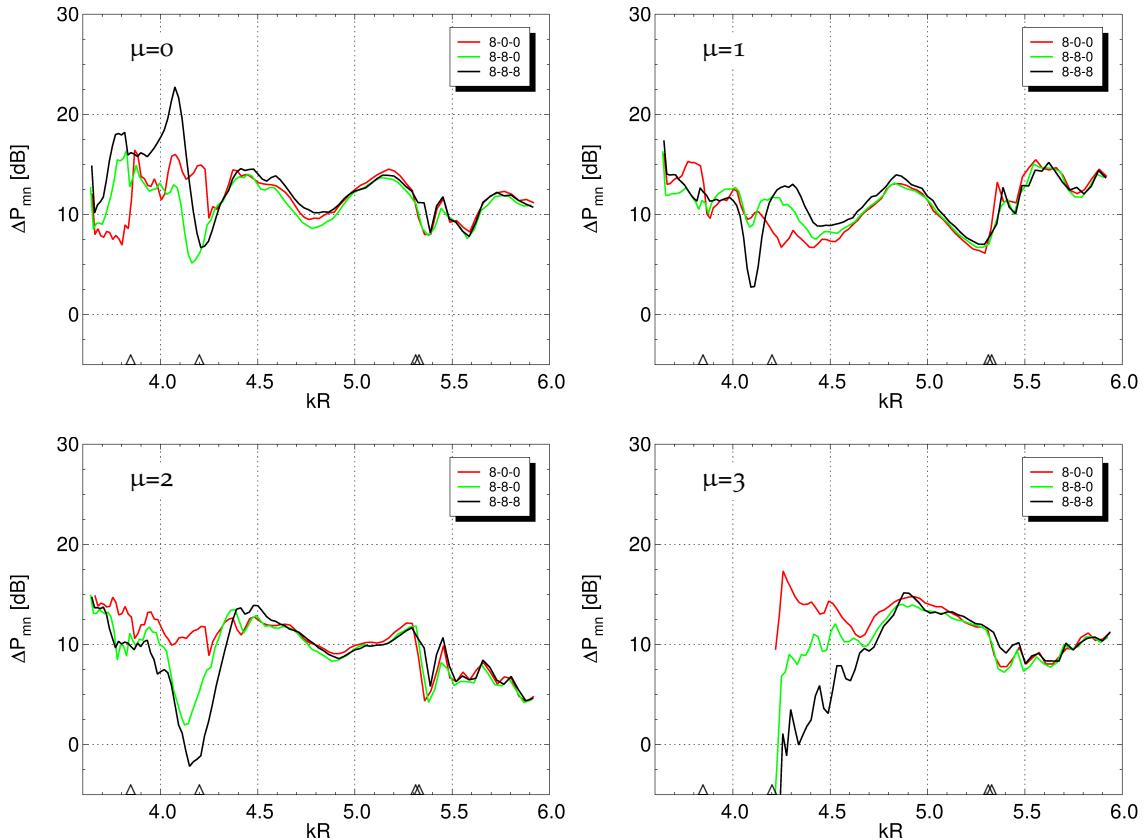


Abbildung 7.24: Einfluss der Anzahl installierter Lautsprecherringe auf die Dominanz verschiedener, mit dem ersten Lautsprecherring angeregten Zielmoden.

#### 7.5.4 Einfluss der Arraykonfiguration auf die Dominanz der Zielmoden

Der zur Verfügung stehende Modengenerator ermöglicht die Installation von bis zu drei Lautsprecherringen. Im Anschluss an die in Abschnitt 7.4 durchgeführten Untersuchungen stellt sich die Frage, wie sich die innerhalb des Modengenerators auftretenden Resonanzen auf die gezielte Anregung verschiedener azimutaler Ordnungen auswirken. Abbildung 7.24 zeigt die Schallleistungspegel, mit denen die Ordnungen  $\mu=0$  bis  $\mu=3$  mithilfe des ersten Lautsprecherrings jeweils in Relation zu den Spillover-Moden angeregt werden konnten. Die Messungen wurden in den drei Arraykonfigurationen 8–0–0, 8–8–0 und 8–8–8 mit beidseitig reflexionsarmen Kanalabschlüssen und mit den Dynacord-Endstufen durchgeführt.

Auffallend sind die schwachen Anregungen der Moden  $\mu=2$  und  $\mu=3$  im Frequenzbereich  $4.2 < kR < 4.5$ , wenn mehrere Lautsprecherringe installiert sind. Dieser Sachverhalt lässt sich nachvollziehen, wenn man die in den Abbildungen 7.16 und 7.17 dargestellten modalen Impedanzen miteinander vergleicht: Durch einen einzelnen Lautsprecher werden die Moden  $\mu=2$  und  $\mu=3$  im Vergleich zu den Modenordnungen  $\mu=0$  und  $\mu=1$  mit deutlich kleineren Amplituden angeregt. In der Konfiguration 8–8–8 verschieben sich die Amplitudenverhältnisse um einen Faktor von bis zu vier. Störungen in den Signalwegen führen daher zu einer verhältnismäßig stärkeren Anregung der Spillover-Moden aus.

Umgekehrt wirkt sich die Verschiebung der Modenamplitudenverhältnisse auf die Synthese der Ordnungen  $\mu=0$  und  $\mu=1$  positiv aus: Die Dominanz der Moden wird in den erweiterten Arraykonfigurationen durch die reduzierte Anregung von Spillovermoden in manchen Frequenzbändern sogar verbessert.

## 7.6 VERSTÄRKUNG DES SPILLOVER-EFFEKTES BEI DER GEZIELTEN ANREGUNG VON RADIALEN MODENOORDNUNGEN

In Abschnitt 6.6 wurde ein Verfahren vorgestellt, dass es ermöglicht in der Synthese der azimutalen Ordnung  $\mu$  durch Kombination von  $N_n$  Lautsprecherringen die Amplituden von  $N_n$  verschiedenen radialen Ordnungen unabhängig voneinander einzustellen. Die Eignung des Verfahrens konnte aufgrund der Beschränkung der verfügbaren Messelektronik auf Anregungsfrequenzen von  $f < 1,3$  kHz bzw.  $kR < 6$  nur anhand der Ordnungen  $\mu=0$  und  $m=1$  erprobt werden. Der in den folgenden Untersuchungen gefundene Effekt lässt sich jedoch auf höhere Frequenzen und Moden übertragen.

Die Anregungstests wurden in der Modengeneratorkonfiguration 8–8–0, im Versuchsaufbau mit beidseitig reflexionsarmen Kanalabschlüssen und mit Verwendung der stabileren Lautsprecherverstärker KME SPA 240 E durchgeführt. Da die Cut-on-Frequenz der Mode (1,1) im oberen analysierbaren Frequenzbereich liegt werden im Folgenden nur Ergebnisse für die kontrollierte Anregung der Moden (0,0) und (0,1) dargestellt und diskutiert. Als Zielvorgaben wurden die beiden Fälle in Tabelle 7.5 definiert, in denen jeweils eine Mode mit der Amplitude  $|A_{mn}^+| = 2$  Pa und der Phase 0 angeregt und die andere Modenordnung gleichzeitig vollständig unterdrückt werden soll. Die Synthese wurde – unter Einbeziehung des in Abschnitt 7.2.2 beschriebenen Messablauf – Frequenz für Frequenz in folgenden Schritten umgesetzt:

1. Kalibrierung der Lautsprecher (für jede fünfte Frequenzkomponente),
2. Messung der modalen Transferfunktionen für die Ordnung  $m=0$ 
  - a) Anregung von Lautsprecherring 1 mit der Stellgröße  $\hat{q}'_\mu(\tilde{x}_1)$  und Messung des angeregten Modenspektrums  $a'_{\mu,1}$ ,
  - b) Anregung von Aktuatorring 2 mit der Stellgröße  $\hat{q}'_\mu(\tilde{x}_2)$  und Messung des angeregten Modenspektrums  $a'_{\mu,2}$ ,
  - c) Berechnung der Transfermatrixelemente gemäß Gleichung (6.48),

	MODEN	BETRAG	PHASE
SYNTHESE-TEST A	(0,0)	100 dB	0
	(0,1)	0 dB	–
SYNTHESE-TEST B	(0,0)	0 dB	–
	(0,1)	100 dB	0

Tabelle 7.5: Definition der Testfälle für die gezielte simultane Anregung der Moden (0,0) und (0,1).

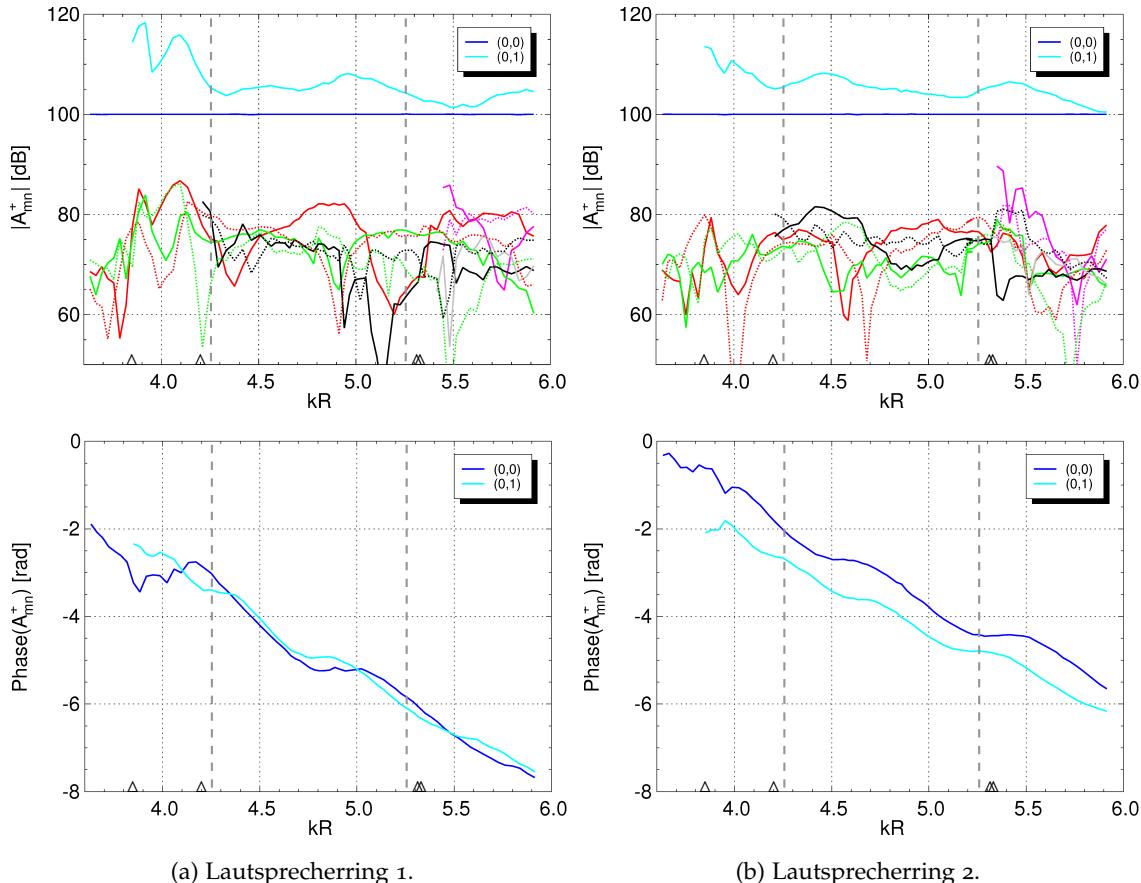


Abbildung 7.25: Durch Lautsprecherring 1 und Lautsprecherring 2 separat erzeugte Modenspektren zur Bestimmung der modalen Transferfunktionen für die Zielmoden (0,0) und (0,1).

3. Berechnung der modifizierten Aktuatorring-Stellgrößen  $\hat{q}_\mu(\tilde{x}_1)$  und  $\hat{q}_\mu(\tilde{x}_2)$  mit Hilfe von Gleichung (6.50),
4. Erzeugung der Zielmoden durch gemeinsame Anregung der Aktuatorringe 1 und 2,
5. Kontrolle des Ergebnis durch Radialmodenanalyse an den Mikrofonringen.

Die in der Transferfunktionsmessung mit Aktuatorring 1 bzw. 2 angeregten Modenspektren sind in Abbildung 7.25 dargestellt. Die Amplitudenspektren wurden zur besseren Übersichtlichkeit auf die Mode (0,0) normiert. Zwischen den Spektren bestehen offenbar Unterschiede, welche mit Hilfe der vorherigen Untersuchungen wie folgt begründet werden können:

- Die für Aktuatorring 1 und 2 verwendeten Endstufenkanäle und Druckkammerlautsprecher besitzen individuelle Phasen- und Verstärkungsfehler.
- Im Vergleich zu Aktuatorring 2 werden die durch Aktuatorring 1 erzeugten Moden auf dem Weg zur stromab liegenden Mikrofonsektion stärker innerhalb des Modengenerators gestreut.
- Aufgrund der unterschiedlichen axialen Abstände werden die stromauf abgestrahlten Moden mit unterschiedlichen Phasen am Kanalabschluss reflektiert, so dass

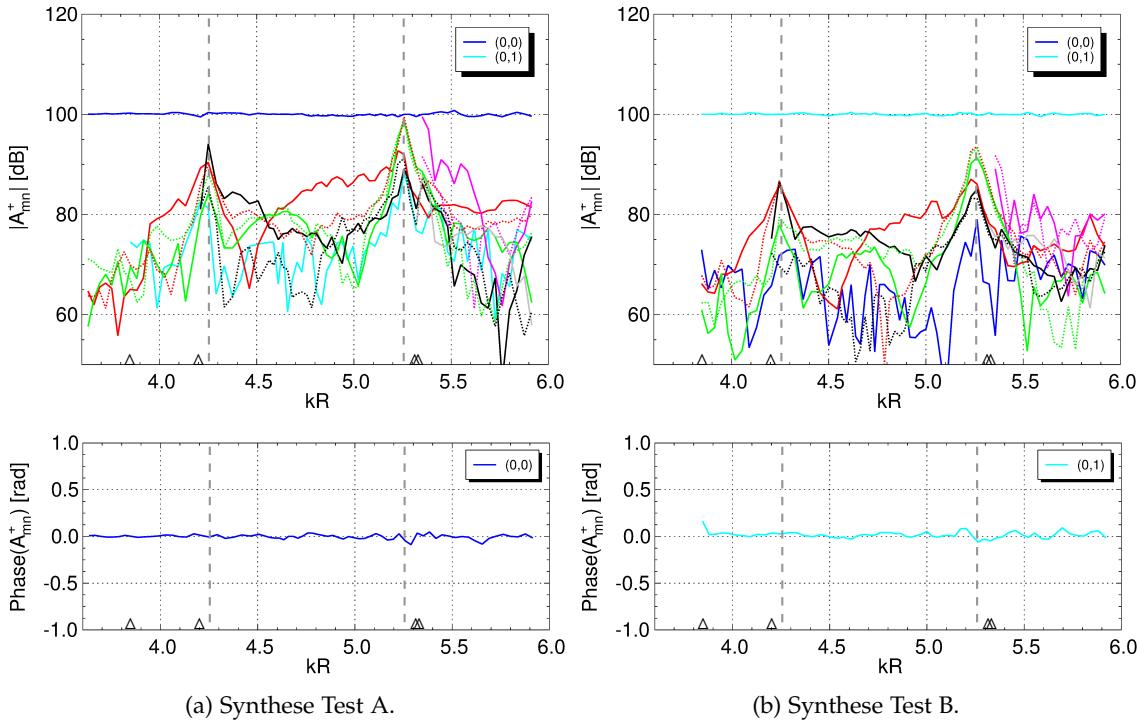


Abbildung 7.26: Ergebnis der Synthese-Testfälle A und B zur gezielten Anregung der Moden (0,0) bzw. (0,1).

sich für Aktuatorring 1 und 2 verschiedene modale Interferenzen ergeben.

Das Ergebnis der Synthesetests A und B ist in Abbildung 7.26 dargestellt. Es ist zu beachten, dass die Modenamplituden ohne nachträgliche Iteration erzeugt wurden, und dass in der Auftragung dieser Daten keine Normierung durchgeführt wurde. In beiden Testfällen wurden die spezifizierten Modenamplituden im Rahmen der Messgenauigkeit eingestellt. Im Vergleich zu den Einzelspektren der Transferfunktionsmessungen in Abbildung 7.25 ist jedoch in großen Teilen des Frequenzbereichs eine deutliche Zunahme des Spillover-Effekts festzustellen. Die Pegeldifferenz der dominant angeregten Moden variiert stark: im Fall A gilt  $0 \text{ dB} \leq |\Delta A_{0,0}^+| \leq 20 \text{ dB}$  und in Fall B gilt  $7 \text{ dB} \leq |\Delta A_{0,1}^+| \leq 30 \text{ dB}$ , wobei die größten Werte in den Bereich der Cut-on-Frequenz der Mode (0,1) bei  $kR = 3.84$  fallen. In einer aktiven Regelung wäre das Regelungspotential für die Mode (0,1) größer als für die Mode (0,0), was aufgrund der unterschiedlichen modalen Impedanzen plausibel ist.

Besonders auffällig ist das starke Auftreten von Spillover-Moden – und damit einhergehend eine geringe Pegeldifferenz – bei den Frequenzen  $kR = 4.25$  und  $kR = 5.25$ , die in den Diagrammen markiert sind. Die im Experiment identifizierten gestörten Frequenzbänder stimmen nicht mit der in Abbildung 6.22 (c) dargestellten Vorhersage überein, welche mithilfe der Konditionsanalyse der Transfermatrix berechnet wurde<sup>6</sup>. Ursache ist vermutlich eine unzureichende Einschätzung der Reflexionsstelle im Versuchsaufbau, die in Abschnitt 7.3 pauschal als unabhängig von Frequenz und Modenordnung angenommen wurde. Dass die Modensynthese tatsächlich aufgrund von Reflexionen beeinträchtigt wurde, belegen die folgenden für Synthese-Test A dargestellten Analysen.

<sup>6</sup> Es gibt eine Temperaturabweichung zwischen der Vorhersage und dem Experiment von etwa 5 K, deren

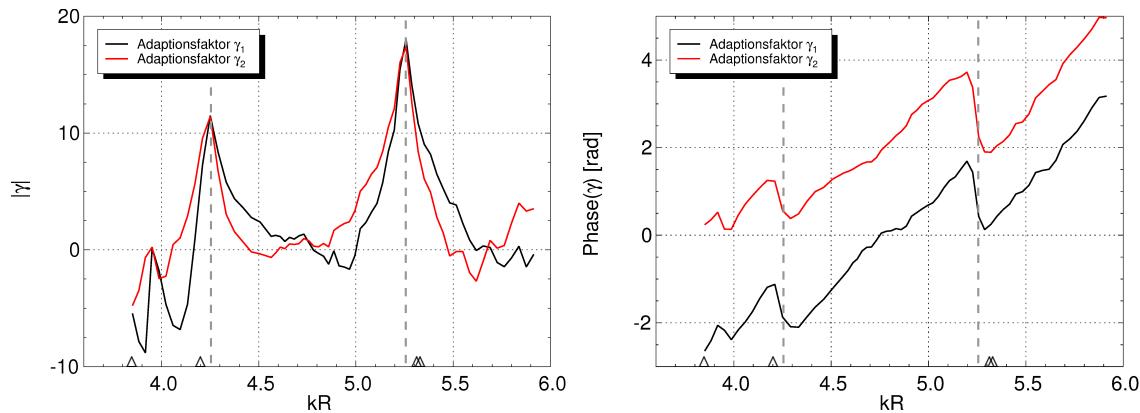


Abbildung 7.27: Betrag und Phase der Adoptionsfaktoren der Lautsprecherringe 1 und 2, die zur Erzeugung von Synthese-Test A benötigt wurden.

In Abbildung 7.27 sind die Adoptionsfaktoren der beiden Aktuatorringe  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  dargestellt. Die Adoptionsfaktoren wurden gemäß Gleichung (6.51) berechnet und geben an, in welchem Maß die in den Transferfunktionsmessungen bestimmten Amplituden der Moden  $(0,0)$  und  $(0,1)$  verstärkt oder bezüglich der Phase gedreht werden mussten. Das Ergebnis der Adaption ist in Abbildung 7.28 zu sehen. Offenbar müssen bei den kritischen Frequenzen beide Aktuatorringe mit außerordentlich hohen Pegeln ausgesteuert werden. Auffällig sind die sprunghaften Änderungen der Phasen der Aktuatorring-Stellgrößen, und zwar derart, dass die Phasen der Modenamplituden  $(0,0)$  und  $(0,1)$  insbesondere bei der Frequenz  $kR = 5.25$  zusammenfallen. Die Phasendifferenzen, mit denen die Moden  $(0,0)$  und  $(0,1)$  durch Aktuatorring 1 und Aktuatorring 2 angeregt werden können – beziehungsweise für die Zielmoden eingestellt werden müssen – scheinen entscheidend für das beobachtete Problem zu sein und sollen noch näher betrachtet werden. Im linken Diagramm von Abbildung 7.29 sind die aus Abbildung 7.28 ermittelten modalen Phasendifferenzen  $\Delta_h = \{\arg(A_{0,1}^+) - \arg(A_{0,0}^+)\}_h$  für die Ringe  $h = 1$  und  $h = 2$  aufgetragen. Bei den kritischen Frequenzen sind die Phasendifferenzen ungefähr gleich, d. h. es gilt  $\Delta_1 \approx \Delta_2$ . Der Vergleich mit dem rechten Diagramm zeigt, dass hierfür die Reflexionsstelle verantwortlich ist. Dargestellt sind die mit dem Lautsprechermodell berechneten modalen Phasendifferenzen, die sich unter Berücksichtigung des Reflexionsfaktors von  $r_{mn,1}^- = 0.15$  ergeben. Für die Frequenz  $kR = 5.25$  gibt das vereinfachte Modell das Messergebnis gut wieder und unterstreicht, dass bereits ein relativ kleiner Reflexionsfaktor zur Erzeugung des Effekts ausreicht.

In Abschnitt 6.6 wurde die Frage nach der Abhängigkeit der Synthesegenaugigkeit von der Konditionszahl der Transfermatrix gestellt. Obige Darstellungen haben gezeigt, dass die beiden Lautsprecherringe an den Frequenzen  $kR = 4.25$  und  $kR = 5.25$  fast redundant waren, woraus folgt, dass die Transfermatrix nahezu singulär ist. Trotz dieser Einschränkung konnten die Zielmoden jedoch mit etwa der gleichen Genauigkeit wie bei anderen Frequenzen eingestellt werden. Wie die folgenden Betrachtungen zeigen, besteht das Problem nicht unmittelbar in der Einstellgenauigkeit der Zielmoden, sondern in der relativen Verstärkung der Spillover-Moden. Zur Erklärung, warum die Spillover-Moden

Einfluss jedoch vernachlässigbar ist.

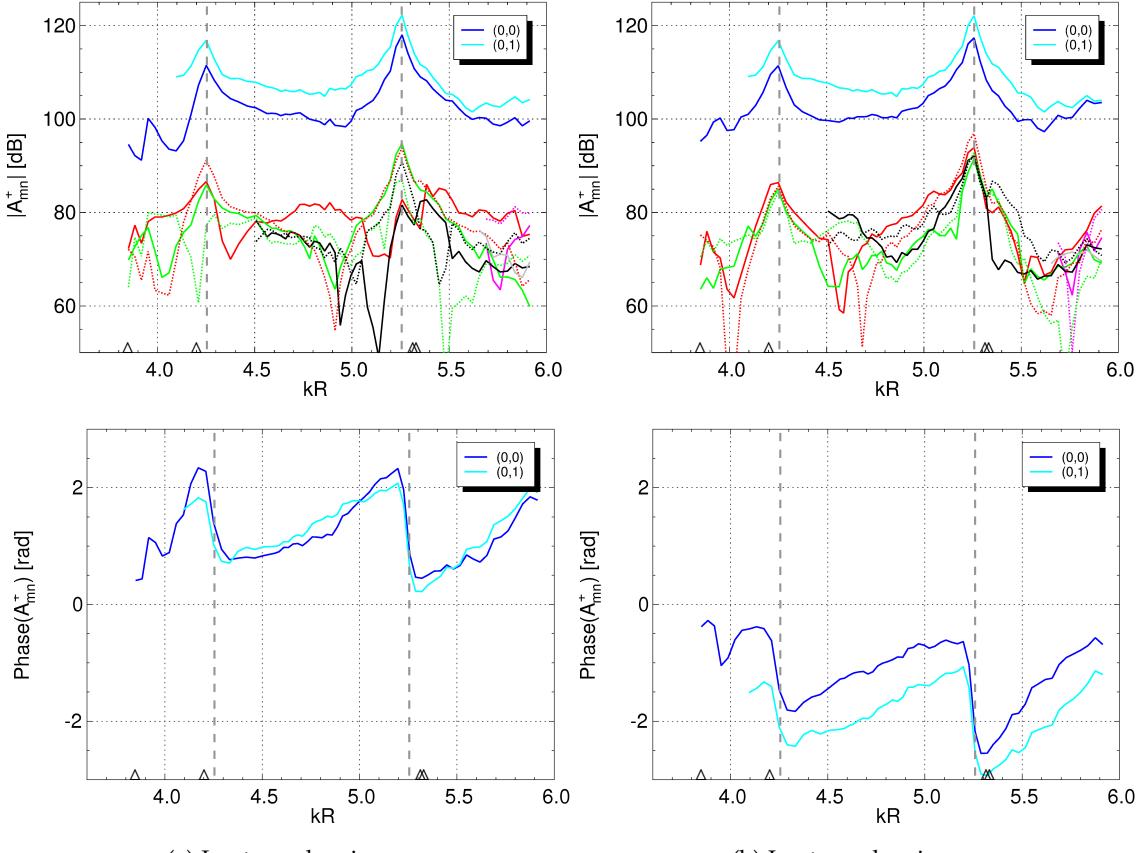


Abbildung 7.28: Durch Lautsprecherring 1 und 2 in Synthese-Test A erzeugte Modenspektren, die aus der Multiplikation der in Abbildung 7.25 dargestellten Transferfunktionsmessungen mit den in Abbildung 7.27 dargestellten Adoptionsfaktoren resultieren.

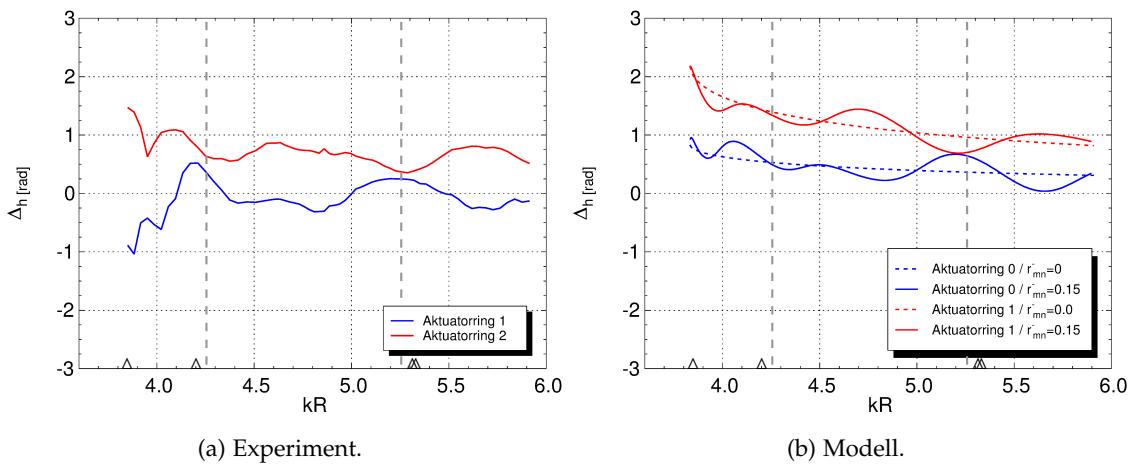


Abbildung 7.29: Phasendifferenz zwischen den Moden (0,0) und (0,1) bei separater Anregung durch Aktuatorring 1 bzw. Aktuatorring 2. Im linken Diagramm ist die Auswertung der in Abbildung 7.25 dargestellten Transferfunktionsmessung und im rechten Diagramm das Ergebnis von Modellrechnungen ohne und mit Berücksichtigung von Reflexionen dargestellt.

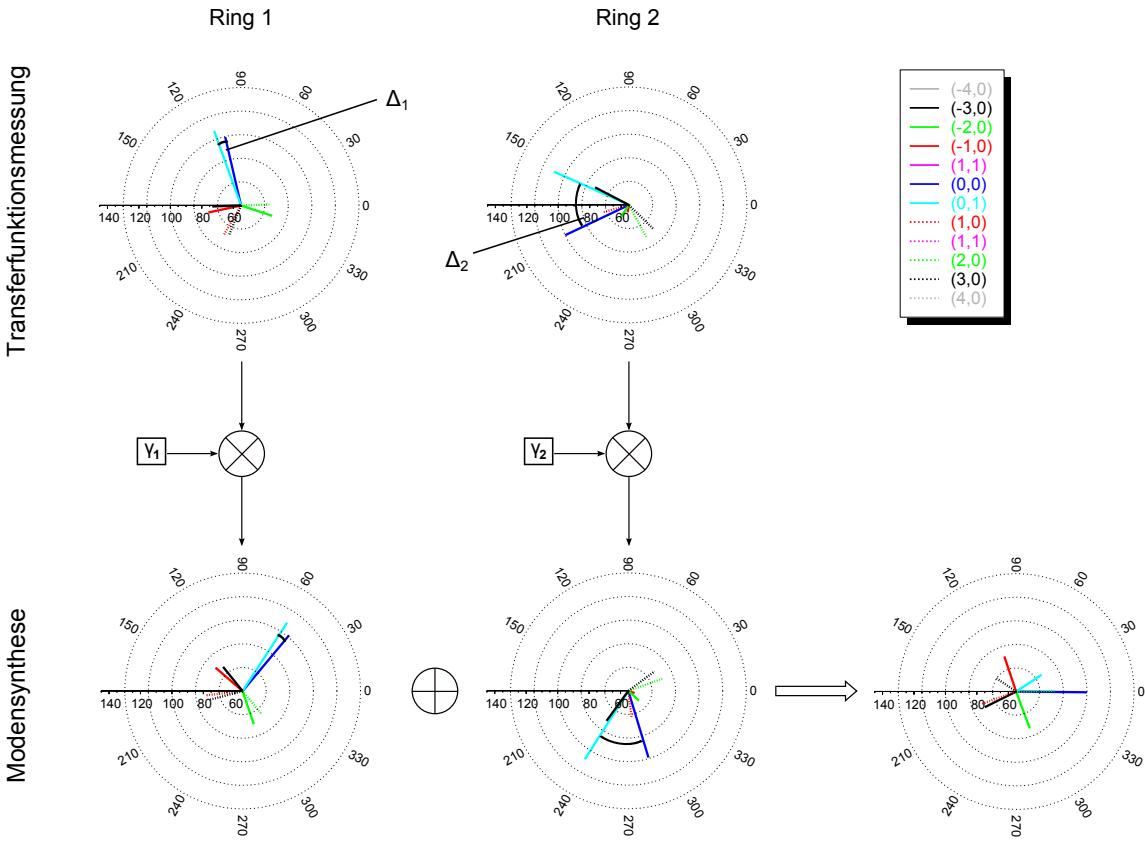


Abbildung 7.30: Gezielte Synthese der Mode  $(0,0)$  bei der Frequenz  $kR = 4.55$  mit zwei Quellringen.  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  stellen für das Syntheseergebnis benötigte Adoptionsfaktoren dar.

im Extremfall so groß werden, sind in den Abbildungen 7.30 und 7.31 die Modensynthesen für zwei ausgewählte Frequenzen in Form von Polardiagrammen dargestellt. Wie schon in Abbildung 6.19 für den Idealfall illustriert wurde, müssen in Synthese-Test A die Vektoren der Mode  $(0,1)$  für eine Auslöschung die gleiche Amplitude haben aber im Zeigerdiagramm an entgegengesetzten Positionen stehen, während gleichzeitig die Vektoren der Mode  $(0,0)$  so ausgerichtet werden müssen, dass sie in der Addition die Zielamplitude ergeben. Bei der unkritischen Frequenz  $kR = 4.55$  sind die modalen Phasendifferenzen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  so verschieden, dass die beiden Bedingungen einfach durch Adaption der Phasen und ohne nennenswerte Verstärkung erreicht werden können. Bei der kritischen Frequenz  $kR = 5.25$  hingegen ist es angesichts der fast identischen Phasenbeziehungen in beiden Aktuatorringen  $\Delta_1 \approx \Delta_2$  nur aufgrund der extremen Verstärkung der Modenamplituden möglich beide Bedingungen gleichzeitig zu erfüllen. In beiden Fällen wird dasselbe Anregungsergebnis für die Moden  $(0,0)$  und  $(0,1)$  erzielt. Durch die hohe Verstärkung von nahezu 20 dB werden bei der kritischen Frequenz jedoch alle sonstigen Modenamplituden so stark angehoben, dass sie das Niveau der Zielmodenamplitude erreichen.

Als Fazit der Untersuchungen kann festgehalten werden, dass Reflexionsstellen im Strömungskanal die gezielte Synthese von Moden erheblich beeinträchtigen können. Die Konditionszahl der Transfermatrix lässt sich als Indikator für eine Beschränkung

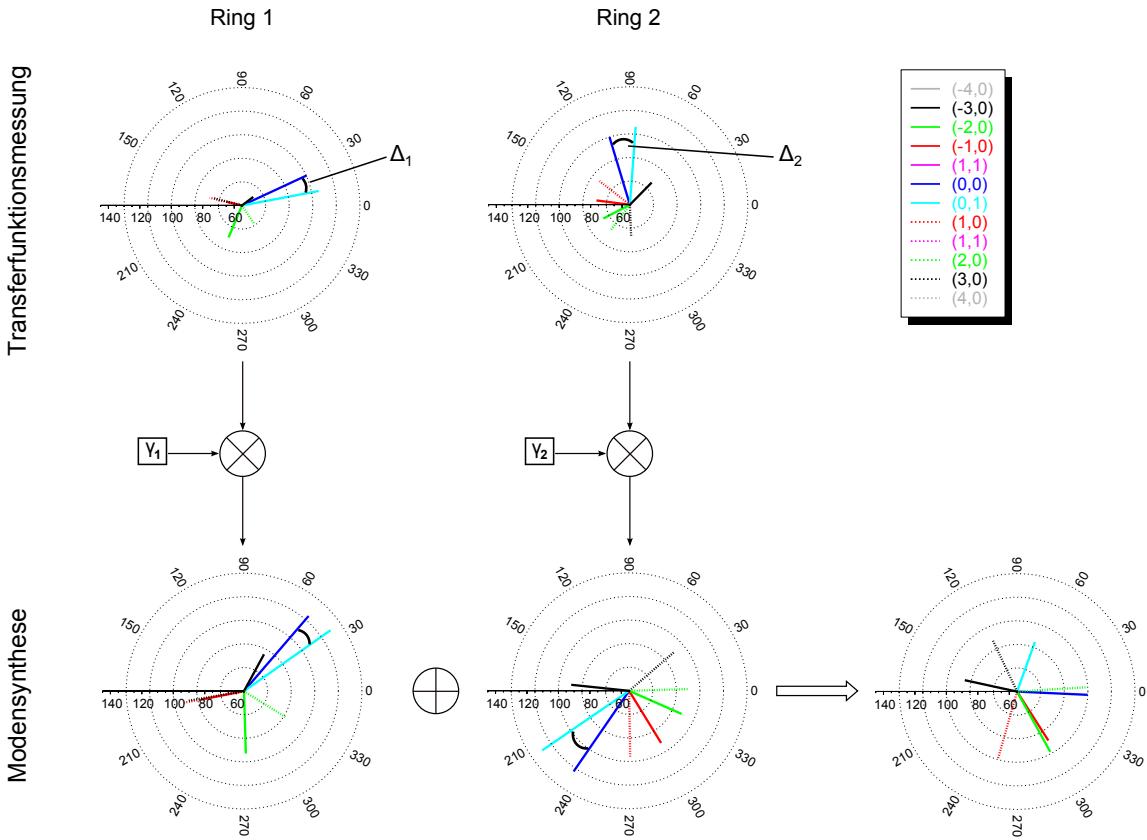


Abbildung 7.31: Gezielte Synthese der Mode  $(0,0)$  bei der Frequenz  $kR = 5.25$  mit zwei Quellringen.  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  stellen für das Syntheseergebnis benötigte Adoptionsfaktoren dar.

der Modensynthesegenauigkeit nutzen. Das Ausmaß der Beeinträchtigung wird aber vom Grundpegel der Spillover-Moden bestimmt und hängt damit von anderen Gegebenheiten des Versuchsstands ab. Durch Justierung der Aktuatorringabstände und des Abstands des Aktuatorarrays zu den Reflexionsstellen kann die Modensynthese gezielt für ausgesuchte Frequenzbänder optimiert werden.

# 8

---

## ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

---

Akustische Interaktionsmoden von Turbomaschinen können mithilfe einer Modenanalyse, basierend auf wandbündig installierten Mikrofonarrays, sehr genau gemessen sowie mithilfe einer Modensynthese, basierend auf wandbündig installierten Lautsprecherarrays, sehr genau nachgebildet werden. Eine Voraussetzung dafür ist die optimale Abstimmung der Anzahl und der axialen Positionen der Mikrofone bzw. Lautsprecher auf den zu untersuchenden Frequenzbereich. In der vorliegenden Arbeit wurden die Anforderungen, die systembedingten Beschränkungen sowie die Ursachen von Ungenauigkeiten der Modenanalyse und der Modensynthese eingehend theoretisch und experimentell untersucht. Die erzielten Ergebnisse ermöglichen die Formulierung von Richtlinien für den optimalen Einsatz der Modenanalyse und der Modensynthese an Versuchsständen.

Für die Modenanalyse wurde ein Verfahren entwickelt, mit dem sich die Anzahl und Positionen der axialen Stützstellen systematisch optimieren und die Fortpflanzung von Messfehlern auf die Modenamplituden detailliert bewerten lassen. Damit konnte nachgewiesen werden, dass optimierte wandbündige Mikrofonarrays Modenanalysen in vergleichbarer Genauigkeit ermöglichen, wie sie bei hohen Frequenzen bisher nur mit radial im Kanal angeordneten Mikrofonreihen erzielt wurden. Entscheidend für die Analysegenauigkeit sind das Spektrum der axialen Wellenzahlen und die von der Anordnung der Mikrofone abhängige Trennschärfe. Für beide Arten von Arrays, wandbündig und radial, wurden Beschränkungen gefunden, die sich in spezifischen oberen Frequenzgrenzen der Analyse auswirken und die Genauigkeit einzelner Moden in schmalen Frequenzbändern herabsetzen.

Das Optimierungsverfahren und die gewonnenen Erkenntnisse lassen sich von der Modenanalyse auf die Modensynthese übertragen, weil die das Problem beschreibenden Modellmatrizen mathematisch ähnlich aufgebaut sind. Für Modensynthesen fallen die mit dem Messgitter verbundenen Beschränkungen geringer aus, wenn Moden nur in eine axiale Richtung gezielt abgestrahlt werden sollen. Dies wird typischerweise zur Untersuchung von Schallausbreitungseffekten gemacht und unterscheidet sich von der Modenanalyse, mit der in der Regel stromab und stromauf laufende Moden getrennt werden müssen. In der Kombination einer umfangreichen experimentellen Studie mit einem Modell des Modengenerators wurden weitere Effekte identifiziert, die zu Ungenauigkeiten in der Modensynthese führen können. Ein Effekt geht auf das resonante Verhalten der Lautsprecheranordnung zurück und äußert sich in einer relativen Änderung der Pegel von Zielmode und unerwünschten Spillovermoden. Ein weiterer Effekt wird durch Reflexionen im Kanal verursacht und stört die modalen Übertragungsfunktionen von Lautsprecherringen derart, dass die Amplituden der Spillovermoden bis auf

das Niveau der Zielmode angehoben werden. Die Ergebnisse erklären die beschränkte Ausschöpfung theoretisch vorhandener Reduktionspotentiale, die in Versuchen zur aktiven Minderung von Rotor-Stator-Interaktionsmoden beobachtet wurden.

### 8.1 MODENANALYSE

Für die Modenanalyse wurde ein Verfahren zur systematischen Bestimmung der mindestens erforderlichen Anzahl axialer Messpositionen und deren optimaler axialer Abstände entwickelt. Das Verfahren wurde auf vier für den praktischen Einsatz relevante Mikrofonanordnungen angewendet, die sich bezüglich der axialen und radialen Messpositionen fundamental unterscheiden. Mit den Mikrofonanordnungen sind unterschiedliche Fehlercharakteristiken verknüpft. Die Genauigkeit jeder Messanordnung hängt von der numerischen Kondition der Modellmatrix ab, auf der die Modenanalyse basiert. Mittels einer systematischen Konditionsanalyse konnten spezifische optimale axiale Sensorabstände für jede Messanordnung abgeleitet werden. Zur Quantifizierung der Fortpflanzung von Störungen des Schalldruckfelds auf die Modenamplituden wurde ein Bewertungsschema eingeführt. Es drückt den relativen Gesamtfehler der Analyse als skalare Größe aus, welche besser zur pauschalen Bewertung der Analysegenauigkeit geeignet ist als die Konditionszahl der Modellmatrix, und ermittelt die Standardabweichungen für die einzelnen Modenamplituden auf Basis eines gegebenen Signal-Rausch-Abstands der Schalldruckmessungen.

Grundsätzlich sind mit allen Sensoranordnungen nach einer Optimierung Modenanalysen mit hoher Genauigkeit in weiten Frequenzbereichen möglich. Jede Messanordnung ist mit charakteristischen Fehlern verbunden, welche bei niedrigen Signal-Rausch-Abständen in spezifischen Frequenzbändern und bei spezifischen Modenordnungen sichtbar werden. In einer analytischen Studie wurden die Ursachen der unterschiedlichen Fehlercharakteristiken der vier Sensoranordnungen herausgearbeitet.

In drei Situationen wird die Kondition der Modellmatrix so schlecht, dass es nicht mehr möglich ist, bestimmte Moden anhand ihrer axialen Wellenzahlen zu unterscheiden:

1. Wenn die Analysefrequenz dicht oberhalb einer Cut-on-Frequenz liegt, sind die axialen Wellenzahlen der zugehörigen stromab und stromauf laufenden Moden fast identisch. Die axiale Ausdehnung eines realistischen Arrays reicht nicht aus, um den relativen Phasenunterschied dieses Modenpaares zu detektieren. Von der Problematik sind Analysen mit Mikrofonrechen stärker betroffen, da Mikrofonrechenarrays eine axial kompaktere Bauform im Vergleich zu wandbündigen Mikrofonarrays besitzen.
2. Bei sehr hohen Analysefrequenzen nähern sich die axialen Wellenzahlen eines Modenpaares benachbarter radialer Ordnungen, welches dieselbe axiale Ausbreitungsrichtung und dieselbe azimutale Ordnung besitzt, so sehr an, dass ihre relativen Phasenänderungen von einem wandbündigen axialen Array mit begrenzter Ausdehnung nicht getrennt werden können. Dieses Problem ist am stärksten bei den niedrigsten radialen Ordnungen ausgeprägt und existiert nur für wandbündige Arrays, da mit Mikrofonrechen die Moden unterschiedlicher radialer Ordnungen

und gleicher Laufrichtung in der Analyse anhand der Orthogonalität der radialen Eigenfunktionen separiert werden.

3. Wenn der axiale Abstand der Sensoren zu groß wird, kommt es zur Unterabtastung des axialen Schalldruckverlaufs, der sich an der Wand durch die Überlagerung aller Moden ergibt. Die Unterabtastung wird durch Erfüllung eines Kriterium vermieden, das einem auf Raumfrequenzen übertragenen Nyquist-Kriterium sehr ähnlich ist. Es unterscheidet sich in der Formulierung lediglich um den Faktor  $(1 + M_x)$ . Das axiale Abtastkriterium definiert eine obere Grenze für den axialen Sensorabstand und muss durch jede Messanordnung eingehalten werden.

Eine aus Mikrofonrechen bestehende Messanordnung kann für einen Turbomaschinenprüfstand einfach anhand der höchsten Analysefrequenz ausgelegt werden: die Anzahl der notwendigen radialen Messpositionen ist durch die höchste radiale Ordnung und der axiale Abstand der Messsebenen durch das axiale Abtastkriterium bestimmt. Für wandbündige Mikrofonarrays stellt die mit zunehmender Frequenz abnehmende Trennschärfe eine große Beschränkung dar. Die mit einem wandbündigen Array maximal analysierbare Frequenz liegt bei hohen Anforderungen weit unterhalb der Frequenz, die bei Verwendung der gleichen Anzahl von Messposition mit Mikrofonrechen aufgelöst werden kann. Aufgrund des axialen Abtastkriteriums besteht für das wandbündige Array die einzige Verbesserungsmöglichkeit in der Verwendung einer größeren Anzahl axialer Messstellen.

Insbesondere in Kanälen ohne Nabenkörper können die axialen Abmessungen wandbündiger Sensoranordnungen sehr groß werden und zu Problemen bei der Integration in den Prüfstand führen. In ringförmigen Kanälen stellt die gleichzeitige Instrumentierung von Außenwand und Nabenkörper eine sinnvolle Alternative dar. Dann wird eine geringere Gesamtzahl an Messstellen benötigt und es kann im Vergleich zur ausschließlichen Instrumentierung der Außenwand der Bauraum mehr als halbiert werden kann.

Der genaue Zusammenhang zwischen der maximalen Analysefrequenz, dem optimalen axialen Sensorabstand und der benötigten Anzahl axialer Messstellen muss für ein wandbündiges Array mithilfe des Optimierungsverfahren bestimmt werden. Zur Abschätzung des messtechnischen Aufwands in der Konzeptphase eines Experiments wurden Richtlinien erstellt. Sie basieren auf Simulationen mit unterschiedlichen Sensoranzahlen und sind aufgrund einer vom Nabenvorhältnis und der axialen Strömungsmachzahl unabhängigen Darstellung universell.

Die Gültigkeit des Optimierungsverfahren und der Richtlinien wurden anhand von Testdaten von drei Turbomaschinenprüfständen verifiziert. Die zu Mikrofonrechen vergleichbare Genauigkeit der Modenanalyse mit wandbündigen Mikrofonarrays ließ sich durch Messungen im Nebenstromkanal eines großskaligen Turbo-Fan-Prüfstands belegen. Es wurden 60 axial gestaffelte Mikrofone für die Analysen der Rotor-Stator-Interaktionsmoden mit bis zu 11 radialen Ordnungen an Frequenzen bis zu  $kR=75$  eingesetzt. Die Ergebnisse wurden einer aus Sensorrechen bestehenden Konfiguration gegenübergestellt, in welcher Mikrofone an je 11 radialen Positionen in zwei axial versetzten Kanalquerschnitten eingesetzt wurden. Beide Mikrofonanordnungen lieferten bis zur gemeinsamen Obergrenze des analysierbaren Frequenzbereichs Modenspektren vergleichbarer Qualität. Im Detail wurden allerdings für einzelne Moden Schalleistungsdifferenzen

von mehreren Dezibel gefunden. Diese konnten zum Teil mit den numerischen Eigenschaften der Modellmatrizen in Verbindung gebracht werden, wobei sich die Standardabweichungsanalyse als wertvolles Instrument erwies. Eine weitere Ursache der Abweichungen wird in den Strömungsgrenzschichten an der Kanalwand vermutet. Diese sind im vereinfachten Schallausbreitungsmodell nicht erfasst und wirken sich wahrscheinlich unterschiedlich auf die Modenanalysen mit wandbündigen Mikrofonen beziehungsweise Mikrofonrechen aus.

Die Fortpflanzung von stochastischen Ungenauigkeiten der Schalldruckmessung auf die Modenamplituden in Abhängigkeit der Messdauer konnte anhand von Messungen an einem 1,5-stufigen Niederdruck-Turbinen-Prüfstand studiert werden. Bei hinreichend großem Signal-Rausch-Abstand lieferte bereits nur ein FFT-Fenster pro Messposition, ein hochwertiges Analyseergebnis und zeigte damit ein großes Potential für schnelle Messungen z. B. zur Abschätzung der transportierten Schallleistung auf. Das für die Analyse der Blattfolgefrequenz überdimensionierte Messgitter wurde für eine Überprüfung und Bestätigung der in der theoretischen Studie zur Bestimmung optimaler Sensorpositionen aufgestellten Richtlinien genutzt.

Untersuchungen im Eintritt eines UHBR-Turbo-Fans zeigen, dass eine Modenanalyse mit einer wandbündigen Mikrofonanordnung, die aus Bauraumbeschränkungen nicht optimal gestaltet werden konnte, fehlerhafte Ergebnisse liefert. Durch Anwendung eines Regularisierungsverfahrens konnte dieses Defizit behoben werden. Der in der Fehlerfortpflanzungsanalyse berechnete relative Gesamtfehler der Modenanalyse erwies sich hierbei als nützliches Kriterium für die Identifikation des optimalen Grads an Regularisierung. Weiterhin konnte das vielversprechende Potential der partiellen Modenanalyse demonstriert werden. Mit diesem Ansatz lässt sich die Gesamtzahl Messstellen erheblich reduzieren, wenn sichergestellt ist, dass nur wenige dominante Rotor-Stator-Interaktionsmoden auftreten.

In zukünftigen Untersuchungen sollten die Ursachen der Abweichungen, die in der experimentellen Erprobung der Modenanalysen mit Mikrofonrechen und mit wandbündigen Arrays bei hohen Frequenzen am Fanrig beobachtet wurden, weiter aufgeklärt werden. Um einen unmittelbaren Bezug zu den theoretischen Studien dieser Arbeit zu ermöglichen, wären Experimente bei hohen Frequenzen mit synthetischen, durch einen Modengenerator erzeugten Schallfeldern in Kanälen ohne überlagerte Gleichströmung sinnvoll. Ein wichtiger Schritt besteht in der Erweiterung der Modenanalyse für eine explizite Berücksichtigung der Effekte von Strömungsgrenzschichten und Strömungsdrall. Weiter vertieft werden sollte die Erprobung von Regularisierungsverfahren zur Verbesserung der Trennschärfe von Mikrofonarrays bei kritischen Frequenzen und Modenordnungen. Der in der vorliegende Arbeit verwendete Ansatz des Aussortieren von Singulärwerten könnte mit einer Tikhonov-Regularisierung verglichen werden, in welcher der Einfluss von kleinen Singulärwerten, die typischerweise mit hohen Raumfrequenzen verbunden sind, mithilfe von Filterkoeffizienten nur gedämpft und nicht völlig ausgeschaltet wird.

Diese Arbeit hat verschiedene Ansätze gezeigt, mit denen sich der experimentelle Aufwand und damit Testkosten an Prüfständen reduzieren lassen. Die zur Erzielung einer gewünschten Analysegenauigkeit erforderliche Messdauer kann vor einer Messung mit

Hilfes des Bewertungsschemas auf Basis einer gesonderten Signal-Rausch-Abstandsanalyse ermittelt werden. Eine wichtige Voraussetzung besteht in der repräsentativen Erfassung des Signal-Rausch-Abstands für das gesamte Messgitter. Bei geringer erforderlicher Messdauer pro Position wären schnelle Überblickmessungen an einer größeren Zahl von Betriebspunkten auch durch kontinuierliche Traversierung des Messsegments denkbar. Für Anwendungen, in denen die Traversierung eines Mikrofonkanalsegments nicht realisiert werden kann und in denen sichergestellt ist, dass nur wenige Rotor-Stator-Interaktionsmoden angeregt werden, sollte die Methode der Partiellen Modenanalyse weiter untersucht werden. Da der Fehlerausgleich aufgrund des erheblich geringeren Verhältnis der Anzahl Messpositionen zur Gesamtzahl ausbreitungsfähiger Moden geringer ausfällt, ist hier eine ausschlaggebende Frage, in welchem Maß Messungenauigkeiten auf die analysierten Moden abgebildet werden.

## 8.2 MODENSYNTHES

Mit einem wandbündigen Lautsprecherarray können einzelne Moden bei gleichzeitig weitgehender Unterdrückung von störenden Spillover-Moden in einem breiten Frequenzband angeregt werden, sofern das Lautsprecherarray gut an die Versuchsumgebung angepasst ist. In einer umfangreichen experimentellen Studie wurden mehrere Effekte identifiziert, die zu Beschränkungen in der Modensynthese führen können. Durch die Kombination mit einem eigens entwickelten Modell des Modengenerators, sowie durch sukzessive Erweiterung der Komplexität des Versuchsaufbaus und der akustischen Anregung, konnten verschiedene Effekte erfolgreich voneinander abgegrenzt und Hinweise zur Optimierung der Versuchsanordnung abgeleitet werden. Die Ergebnisse liefern eine Erklärung für die beschränkte Ausschöpfung von Regelungspotentialen, wie sie zum Teil in Versuchen zur aktiven Minderung von Rotor-Stator-Interaktionsmoden beobachtet wurden.

In dem Modengeneratormodell wird die Schallanregung der Lautsprecher an der Wand des Strömungskanals mithilfe der Greenschen Funktion einer punktförmigen Monopolquelle beschrieben. Die Gültigkeit dieses Ansatzes wurde erstmals in einer Studie, in der nur ein Lautsprecher am Strömungskanal montiert war, messtechnisch verifiziert. Dabei wurde festgestellt, dass Abweichungen vom Modell der Monopolquelle auftreten, wenn mehrere Lautsprechereinheiten installiert sind. Jede Laustprechereinheit, die in dieser Arbeit aus einem Druckkammerlautsprecher mit vorgeschaltetem Trichter bestand, stellt einen akustischen Resonator dar und übt einen Einfluss auf das Modenfeld im Strömungskanal aus. Das Lautsprechersystem wurde demzufolge als ein System gekoppelter Resonatoren modelliert. Hierfür wurden zunächst die Schallanregung im Strömungskanal und die Schallausbreitung in der Lautsprechereinheit getrennt beschrieben und dann durch Anpassung der akustischen Variablen zum Gesamtsystem verkoppelt. Mithilfe des Modells wurde festgestellt, dass das System in spezifischen Frequenzbändern eine Dämpfung ausübt, welche von der Modenordnung, den Abmessungen der Lautsprechereinheiten sowie der räumlichen Anordnung der Lautsprecherringe abhängt. Diese Beobachtungen werden durch experimentelle Ergebnisse bestätigt und sind für die praktische Anwendung von Bedeutung.

Mithilfe eines Lautsprecherrings können Moden verschiedener azimutaler Ordnungen

gezielt synthetisiert werden. Im Idealfall, und bei äquianter Anordnung der Quellen in Umfangsrichtung, werden durch destruktive Interferenz alle ungewünschten Moden unterdrückt. Ausgenutzt werden hierbei die Symmetrieeigenschaften der Modenfelder, die jede einzelne Quelle erzeugt. In der Realität wird dies allerdings schon durch geringe Toleranzen der Signalwege und Lautsprecher verhindert: Verstärkungs- und Phasenfehler führen zur Entstehung von störenden, so genannten Spillover-Moden. Die Spillover-Moden können die Dominanz der Zielmoden erheblich beeinträchtigen. Es wurden drei maßgebliche Effekte festgestellt, die das Verhältnis der Amplituden von Zielmoden und Spillovermoden nachteilig beeinflussen können:

1. die verstärkte Anregung von Moden in der Nähe ihrer Cut-on-Frequenz,
2. die unterschiedliche Dämpfung verschiedener Modenordnungen durch das rezonante Verhalten des Lautsprecherarrays und
3. Interferenzeffekte, die auf Reflexionsstellen im Kanal außerhalb des Modengenerators zurückgehen.

Ein bisher nicht bekannter, von Reflexionen hervorgerufener Effekt wurde bei Tests mit zwei Lautsprecherringen zur gezielten Synthese von zwei Moden verschiedener radialer und gleicher azimutaler Ordnungen gefunden. In weiten Frequenzbereichen wurde eine radiale Ordnung, bei gleichzeitiger Unterdrückung der anderen radialen Ordnung, mit einem Pegelabstand von mehr als 20 dB zu den Spillovermoden erzeugt. In schmalen Frequenzbändern ließ sich jedoch nur eine geringe oder sogar gar keine Dominanz gegenüber den Spillovermoden herstellen. Als Grund konnte eindeutig eine Angleichung der modalen Transferfunktionen festgestellt werden. In einem solchen Fall lassen sich die Zielmoden nur mit extremen Lautsprecheramplituden erzeugen, wodurch die vorhandenen Spillover-Moden massiv bis auf das Niveau der Zielmoden angehoben werden. Die Angleichung der modalen Transferfunktionen wird durch Reflexionen im Strömungskanal verursacht. Dies ist die Erklärung für die unvollständige Ausschöpfung des theoretisch vorhandenen Reduktionspotentials, welche in verschiedenen Ansätzen zur aktiven Lärminderung beobachtet wurde. Im Extremfall können Reflexionen zur Redundanz von Aktuatorringen führen und es muss in den betroffenen Frequenzbändern auf die explizite Regelung einer oder mehrerer radialer Ordnungen verzichtet werden. In den betroffenen Frequenzbändern kann mit einer aktiven modenbasierten Regelung keine Reduktion des Primärschallfelds erreicht werden.

Die Auswirkungen von Reflexionsstellen im Strömungskanal zeigen sich auch in einer Konditionsanalyse der Modellmatrix, welche analog zur Modenanalyse zur systematischen Optimierung der axialen Anzahl und Abstände der Lautsprecher genutzt werden kann. Es treten Störungen in schmalen Frequenzbändern auf, die von der Position der Reflexionsstelle sowie vom Reflexionsfaktor abhängen. Dadurch, dass die schmalbandigen Störungen individuell für die azimutalen Ordnungen ausfallen, wird die Identifizierung einer optimalen Quellanordnung für einen breiten Frequenzbereich und zur simultanen Regelung mehrerer azimutaler Ordnungen erschwert.

Der wichtigste Ansatzpunkt zur Optimierung der Modensynthese besteht in der Entwicklung von Maßnahmen zur reduzierten Anregung von Spillover-Moden. Abweichungen in den Übertragungsfunktionen der Lautsprecher sollten individuell und schmalbandig korrigiert werden. Für die Ermittlung der Korrekturfaktoren könnte die Radial-

modenanalyse in Kombination mit dem Lautsprechermodell eingesetzt werden.

Da sich Spillover-Moden in der Realität nicht vollkommen vermeiden lassen, sollten die Effekte, die zu einer verstärkten Anregung von Spillover-Moden in der Radialmodensynthese führen, so beeinflusst werden, dass sie möglichst außerhalb des zu nutzenden Frequenzbereichs auftreten. Für eine Anwendung in Systemen zur aktiven Lärmminderung ließe sich eine derartige Optimierung durch Variation der geometrischen Parameter des Modengenerators sowie durch eine Abstimmung des axialen Abstands von Modengenerator und Reflexionsstellen im Versuchsaufbau erreichen. Wenn mehrere Reflexionsstellen vorliegen, deren Eigenschaften unbekannt sind, verbleibt die Möglichkeit die axialen Positionen der Lautsprecher ohne Berücksichtigung von Reflexionen zu optimieren. Bei moderaten Reflexionen sollte hiermit die bestmögliche Anordnung gefunden werden können. Gänzlich vermieden werden kann der Einfluss von Reflexionen durch radiale Staffelung mehrerer Aktuatorringe in einer Kanalquerschnittsebene. Hierbei ist allerdings die Problematik der Installation von räumlich kompakten, leistungsfähigen Aktuatoren im Kanalinneren zu lösen. In Versuchsständen zur Untersuchung von Schallausbreitungsvorgängen sollte eine möglichst reflexionsarme Kanalstrecke auf der Seite des Modengenerators realisiert werden, die der Teststrecke abgewandt ist.

Bezüglich der Gestaltung des Modengenerators muss in zukünftigen Untersuchungen noch explizit analysiert werden, wie sich die im Inneren auftretenden Resonanzeffekte auf das Verhältnis der Zielmoden zu den Spillover-Moden auswirken, wenn mehrere Ringe aktiv für die Synthese eingesetzt werden. Weiterhin stellt sich die Frage, in welcher Weise sich die Resonanzeffekte verändern, wenn auf Lautsprechertrichter verzichtet wird, d. h. die Lautsprecher direkt an der Wand montiert würden. Zu bedenken ist, dass die Öffnungsfläche der Lautsprecher an der Kanalwand eventuell reduziert werden muss, so dass die Quelle auch bezüglich großer modaler Wellenzahlen noch als weitgehend kompakt angesehen werden kann.

Mit Hinblick auf den praktischen Einsatz, beispielsweise zur Untersuchung von Transmissionseffekten in Turbomaschinenkanälen, muss die experimentelle Studie der Radialmodensynthese auf höhere Frequenzen erweitert werden, bei denen mehr als zwei radiale Ordnungen zu regeln sind. In Übertragung der in der Modenanalyse festgestellten Schwierigkeit ergibt sich die Frage, mit welcher Genauigkeit Moden niedriger radialer Ordnungen durch ein wandbündiges Aktuatorarray gezielt angeregt werden können, deren axiale Wellenzahlen sich bei hohen Frequenzen kaum noch unterscheiden. Der Einfluss von Reflexionsstellen in der Kanalstrecke auf die simultane Synthese von Moden unterschiedlicher Laufrichtungen muss z. B. für die Anwendung in einer aktiven Minderung von Fantönen geklärt werden, wenn gleichzeitig die Schallabstrahlung in den Einlauf und in den Austritt des Kanals reduziert werden soll.



# A

---

## BESTIMMUNG DER EIGENWERTE DER BESELFFUNKTIONEN 1. UND 2. ART

---

Die unnormierte radiale Eigenfunktion  $\hat{f}_{mn}(r)$  ist als Lösung der radialen Eigenwertgleichung 2.26 eine Summe aus der Besselfunktion und der gewichteten Neumannfunktion,

$$\hat{f}_{mn}(r) = J_m(\sigma_{mn}r/R) + Q_{mn}Y_m(\sigma_{mn}r/R). \quad (\text{A.1})$$

$\sigma_{mn}$  und  $Q_{mn}$  sind die zugehörigen Eigenwerte, welche unter der Randbedingung verschwindender Schallschnelle an der Kanalwand gemäß Gleichung (2.23) bestimmt werden. Aus  $\frac{d\hat{f}_{mn}}{dr} = 0$  folgt für

$$r = R_i : \quad J'_m(\eta\sigma_{mn}) + Q_{mn}Y'_m(\eta\sigma_{mn}) = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$r = R : \quad J'_m(\sigma_{mn}) + Q_{mn}Y'_m(\sigma_{mn}) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Einfache Umformungen führen zu folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$J'_m(\eta\sigma_{mn})Y'_m(\sigma_{mn}) - J'_m(\sigma_{mn})Y'_m(\eta\sigma_{mn}) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$Q_{mn} = -\frac{J'_m(\sigma_{mn})}{Y'_m(\sigma_{mn})}. \quad (\text{A.5})$$

Mit Verwendung der folgenden Identitäten lassen sich die Eigenwerte direkt aus den Bessel- und Neumann-Funktionen berechnen (vgl. [Abramowitz]):

$$2J'_m(x) = J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x), \quad (\text{A.6})$$

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad (\text{A.7})$$

$$2Y'_m(x) = Y_{m-1}(x) - Y_{m+1}(x), \quad (\text{A.8})$$

$$Y'_0(x) = -Y_1(x). \quad (\text{A.9})$$

Für  $m = 0$  folgt

$$J_1(\eta\sigma_{mn})Y_1(\sigma_{mn}) - J_1(\sigma_{mn})Y_1(\eta\sigma_{mn}) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$Q_{mn} = -\frac{J_1(\sigma_{mn})}{Y_1(\sigma_{mn})}, \quad (\text{A.11})$$

und für  $m > 0$

$$(J_{m-1}(\eta\sigma_{mn}) - J_{m+1}(\eta\sigma_{mn})) (Y_{m-1}(\sigma_{mn}) - Y_{m+1}(\sigma_{mn})) \\ - (J_{m-1}(\sigma_{mn}) - J_{m+1}(\sigma_{mn})) (Y_{m-1}(\eta\sigma_{mn}) - Y_{m+1}(\eta\sigma_{mn})) = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$Q_{mn} = \frac{J_{m+1}(\sigma_{mn}) - J_{m-1}(\sigma_{mn})}{Y_{m-1}(\sigma_{mn}) - Y_{m+1}(\sigma_{mn})}. \quad (\text{A.13})$$

Die Nullstellen  $\sigma_{mn}$  der Gleichung (A.4) wurden in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe der Routinen zbrac (zur Eingrenzung der Nullstelle) und zbrent (zur Bestimmung der Nullstelle) aus den Numerical Recipes in C [108] berechnet. Die Bessel- und Neumannfunktionen sowie ihre Ableitungen wurden mit der Routine bessjy [108] berechnet.

Der numerischen Berechnung der Besselfunktionen sind mit den angegebenen Routinen allerdings Grenzen gesetzt: Für kleine Nabenverhältnisse  $\eta$ , große Modenordnungen  $m$  und kleine Ordnungen  $n$  nimmt die Neumannfunktion für normierte Radien  $r \rightarrow \eta$  sehr große, unphysikalische Werte an. Als Konsequenz kann die Nullstelle  $\sigma_{mn}$  nach Gleichung (A.12) nicht mehr exakt bestimmt werden. Asymptotisch gilt für diese Fälle  $Q_{mn} \rightarrow 0$ , weshalb zur Unterdrückung von Artefakten  $Q_{mn} = 0$  gesetzt wurde.

# B

---

## DETAILLIERTE BESCHREIBUNG DER MODENANALYSE-GLEICHUNGSSYSTEME

---

Zur übersichtlicheren Darstellung werden in den folgenden Beschreibungen die Moden mit zwei alternativen Indizes gekennzeichnet:

$$\begin{array}{ll} \text{azimutale Ordnung} & o, 1, \dots, M \sim \min(m), \min(m) + 1, \dots, \max(m) \\ \text{radiale Ordnung} & o, 1, \dots, N \sim (o, +), (1, +), \dots, (\max(n), -) \end{array}$$

In der Indizierung der radialen Ordnungen sind die radiale Ordnungszahl und die Orientierung der Mode bezüglich der Kanalachse zusammen gefasst.

### *Vollständige Zerlegung des Schalldruckfelds*

Das Gleichungssystem der vollständigen Radialmodenanalyse aus Gleichung (3.22) lautet

$$\mathbf{p} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{B.1})$$

Der Vektor der komplexen Schalldruckamplituden, der Vektor der gesuchten komplexen Modenamplituden und die Kopplungsmatrix setzen sich wie folgt zusammen:

$$\mathbf{p} = (p(x_1, r_1, \phi_1), p(x_1, r_1, \phi_2), \dots, p(x_{N_x}, r_{N_r}, \phi_{N_\phi}))^t, \quad (\text{B.2})$$

Die Dimension des Vektors  $\mathbf{p}$  entspricht der Gesamtzahl an Messpositionen ( $N_x N_r N_\phi \times 1$ ).

$$\mathbf{a} = (A_{o,0}, A_{o,1}, \dots, A_{M,N})^t, \quad (\text{B.3})$$

Die Dimension des Vektors  $\mathbf{a}$  ist ( $N_{\text{mod}} \times 1$ ), d. h. sie entspricht der Gesamtzahl stromab und stromauf laufender Moden.

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \psi_{0,0}(x_1, r_1) e^{i\phi_1} & \psi_{0,1}(x_1, r_1) e^{i\phi_1} & \dots & \psi_{M,N}(x_1, r_1) e^{iM\phi_1} \\ \psi_{0,0}(x_1, r_1) e^{i\phi_2} & \psi_{0,1}(x_1, r_1) e^{i\phi_2} & \dots & \psi_{M,N}(x_1, r_1) e^{iM\phi_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_{0,0}(x_{N_x}, r_{N_r}) e^{i\phi_{N_\phi}} & \psi_{0,1}(x_{N_x}, r_{N_r}) e^{i\phi_{N_\phi}} & \dots & \psi_{M,N}(x_{N_x}, r_{N_r}) e^{iM\phi_{N_\phi}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Die axiale und die radiale Eigenfunktion wurden zusammengefasst zu

$$\psi_{m,n}(x_j, r_k) = e^{ik_m x_j} f_{m,n}(r_k). \quad (\text{B.5})$$

Die Dimension der Modellmatrix  $\mathbf{W}$  ist  $(N_{\text{pos}} \times N_{\text{mod}})$ .

In der obigen Darstellung sind die Einträge im Vektor  $\mathbf{a}$  und die Spalten in der Matrix  $\mathbf{W}$  aufsteigend bezüglich der azimutalen Ordnungen sortiert. Wenn die Modenamplituden gleicher azimutaler Ordnung  $m$  wie folgt zusammen gefasst werden,

$$\mathbf{a}_m = (A_{m,0}, A_{m,1}, \dots, A_{m,N})^t, \quad (\text{B.6})$$

dann kann der Amplitudenvektor aus Gleichung (B.3) auch geschrieben werden als

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M)^t. \quad (\text{B.7})$$

Der Vektor  $\mathbf{a}_m$  hat die Dimension  $2N_n(m) \times 1$ , d. h. umfasst die stromab und stromauf laufenden Moden. Die Modellmatrix lässt sich in vergleichbarer Weise unterteilen:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} & & & \\ & \mathbf{W}'_0 & \mathbf{W}'_1 & \dots & \mathbf{W}'_M \\ & & & & \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Das Gleichungssystem (B.1) lässt sich damit auch als Summe über die einzelnen azimutalen Ordnungen schreiben, was nützlich für einen Vergleich mit dem Ansatz ist, der im folgenden Abschnitt beschriebenen wird:

$$\mathbf{p} = \sum_{m=0}^M \mathbf{W}'_m \cdot \mathbf{a}_m. \quad (\text{B.9})$$

### Zerlegung von Azimutalmodenamplituden

Das Gleichungssystem (3.22), welches die Zerlegung einer azimutalen Ordnung beschreibt, lautet

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{a}_m. \quad (\text{B.10})$$

Hierin bezeichnet  $\mathbf{p}_m$  den Vektor komplexer Azimutalmodenamplituden der Ordnung  $m$ ,  $\mathbf{a}_m$  den Vektor der gesuchten komplexen Radialmodenamplituden und  $\mathbf{W}_m$  die zugehörige Kopplungsmatrix. Für den Vektor  $\mathbf{a}_m$  gilt die in Gleichung (B.6) angegebene Definition. Für die beiden anderen Größen gilt:

$$\mathbf{p}_m = (p_m(x_1, r_1), p_m(x_1, r_2), \dots, p_m(x_{N_x}, r_{N_r}))^t, \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{W}_m = \begin{pmatrix} \psi_{m,0}(x_1, r_1) & \psi_{m,1}(x_1, r_1) & \dots & \psi_{m,N}(x_1, r_1) \\ \psi_{m,0}(x_2, r_2) & \psi_{m,1}(x_2, r_2) & \dots & \psi_{m,N}(x_2, r_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \psi_{m,0}(x_{N_x}, r_{N_r}) & \psi_{m,1}(x_{N_x}, r_{N_r}) & \dots & \psi_{m,N}(x_{N_x}, r_{N_r}) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Die Dimension des Vektors  $\mathbf{p}_m$  ist  $(N_x N_r \times 1)$ , die Dimension der Modellmatrix  $\mathbf{W}_m$  ist entsprechend  $(N_x N_r \times 2N_n(m))$ .

### Zusammenhang zwischen den beiden Modenanalyse-Ansätzen

Zwischen den Matrizen  $\mathbf{W}$  aus Gleichung (B.1),  $\mathbf{W}'_m$  aus Gleichung (B.9) und  $\mathbf{W}_m$  lässt sich der folgende Zusammenhang herstellen. Gemäß Gleichung (3.11) kann der Vektor der Schalldruckamplituden in die Beiträge einzelner azimutaler Ordnungen entwickelt werden:

$$\mathbf{p} = \sum_{m=0}^M \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{p}_m. \quad (\text{B.13})$$

Der Vektor  $\mathbf{p}_m$  entspricht der oben angegebenen Definition. Die Einträge der Matrix  $\mathbf{V}_m$  lauten:

$$\mathbf{V}_m = \begin{pmatrix} e^{im\phi_0} & 0 & \dots & 0 \\ e^{im\phi_1} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{im\phi_{N_\phi}} & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & e^{im\phi_0} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & e^{im\phi_{N_\phi}} & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & e^{im\phi_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{im\phi_{N_\phi}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Einsetzen von Gleichung B.10 in Gleichung (B.13) ergibt

$$\mathbf{p} = \sum_{m=0}^M \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{a}_m. \quad (\text{B.15})$$

Der Vergleich mit Gleichung (B.9) zeigt, dass

$$\mathbf{W}'_m = \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{W}_m \quad (\text{B.16})$$

gelten muss. Die Matrix  $\mathbf{W}'_m$  stellt die Erweiterung der Matrix  $\mathbf{W}_m$  bezüglich der Abbildung der Modenamplituden auf die azimutalen Schalldruck-Messpositionen dar.



# C

---

## BEWERTUNG DER ANALYSEGENAUIGKEIT BEI DER ZERLEGUNG VON SCHALDRUCKFELDERN

---

In Abschnitt 3.3.6 wurden das Vorgehen und geeignete Größen zur Beurteilung der Genauigkeit der Modenanalyse beschrieben, die auf der Zerlegung von Azimutalmodenamplituden basiert. In diesem Abschnitt ist die Übertragung auf die Verfahren formuliert, die für eine Modenanalyse von Schalldruckfeldern mit den in Abschnitten 3.3.2 und 3.3.4 beschriebenen Ansätzen eingesetzt werden können. Bei Verwendung des Verfahren zur partiellen Zerlegung des Schalldruckfelds müssen in der folgenden Beschreibung die Vektoren der Modenamplituden  $\mathbf{a}$  und  $\tilde{\mathbf{a}}$  durch  $\mathbf{a}_{M_p}$  und  $\tilde{\mathbf{a}}_{M_p}$  ersetzt werden.

### *Kondition der Modellmatrix*

Die Kondition der Modellmatrix  $\mathbf{W}$  ist definiert als

$$\kappa = \frac{\zeta_{\max}(\mathbf{W})}{\zeta_{\min}(\mathbf{W})}. \quad (\text{C.1})$$

Die Konditionszahl stellt ein Maß für die Verstärkung von Fehlern in den Eingangsgrößen dar, es gilt die Abschätzung [118]

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{a}}\|}{\|\mathbf{a}\|} \leq \kappa \frac{\|\tilde{\mathbf{p}}\|}{\|\mathbf{p}\|}. \quad (\text{C.2})$$

### *Relativer Gesamtfehler und Standardabweichung der Modenamplituden*

Die Schritte zur Ermittlung des relativen Gesamtfehlers und der modalen Standardabweichung sind in Abbildung C.1 schematisch dargestellt:

1. Für den aus einer Messung resultierenden Vektor von Modenamplituden  $\mathbf{a}^o$  werden mit Hilfe von Gleichung (3.22) die Schalldruckamplituden  $\mathbf{p}^o$  an den  $N_x \times N_r \times N_\phi$  Gitterpositionen  $(x_j, r_k, \phi_l)$  rekonstruiert.
2. Es werden nun  $N_{avg}$  Modenanalysen mit charakteristischen Fehlern simuliert. Dazu wird jeder rekonstruierten Amplitude  $p^o(x_j, r_k, \phi_l)$  in der  $i$ -ten Messung die Rauschamplitude

$$\tilde{p}(x_j, r_k, \phi_l)[i] = s_p a_{jk}[i] e^{i 2 \pi b_{jk}[i]} \quad (\text{C.3})$$

überlagert. Die Standardabweichung  $s_p$  wurde zuvor aus den Schalldruckmessungen ermittelt, siehe Abschnitt 3.1.3. Die Größe  $a_l[i]$  stellt eine zufällige reelle, der Standardnormalverteilung genügende Zahl und  $b_l[i]$  eine zufällige reelle, gleichmäßig im Intervall  $[0, 1]$  verteilte Zahl dar. Für jede Einzelmessung  $p[i]$  wird der Vektor der Radialmodenamplituden  $\mathbf{a}[i]$  gemäß Gleichung (3.23) ermittelt.

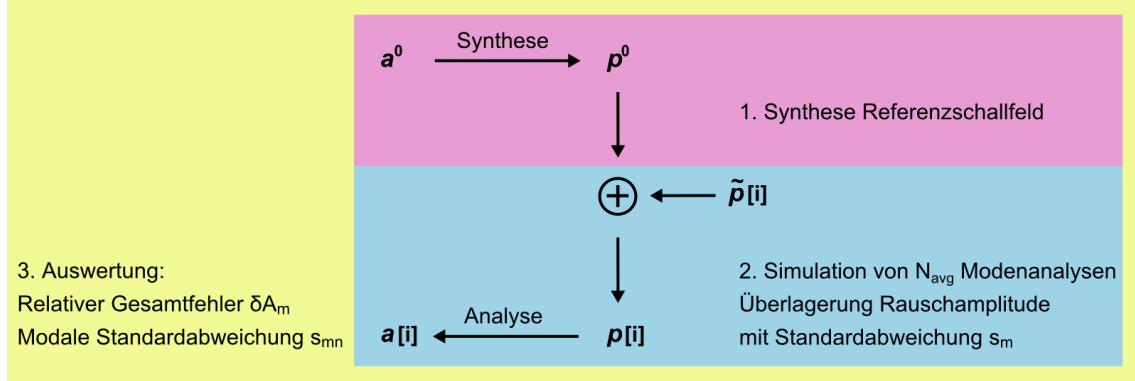


Abbildung C.1: Simulationsschema zur Bewertung der Fortpflanzung von Messungenauigkeiten in die Modenamplituden bei der Modenanalyse des Schalldruckfelds.

3. Nach  $N_{avg}$  simulierten Modenmessungen kann die Analysegenauigkeit auf zwei Arten quantifiziert werden:
  - als relativer Gesamtfehler  $\delta A$  für alle Moden und
  - in Form einer Standardabweichung  $s_{mn}^\pm$  für jede einzelne Mode.

Mit Hilfe des relativen Gesamtfehlers kann die in Gleichung (3.38) angegebene obere Fehlerabschätzung präzisiert werden als

$$\delta A = \frac{\|\tilde{\mathbf{a}}\|/\|\mathbf{a}^0\|}{\|\tilde{\mathbf{p}}\|/\|\mathbf{p}^0\|} \quad (C.4)$$

Zur Auswertung der vorstehenden Formel müssen zuvor die Schwankungsterme über alle Einzelmessungen gemittelt werden, d. h.

$$\|\tilde{\mathbf{p}}\| = \frac{1}{N_{avg}} \sum_{i=0}^{N_{avg}-1} \sqrt{\sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_r-1} \sum_{l=0}^{N_\phi-1} |p(x_j, r_k, \phi_l)[i] - p^0(x_j, r_k, \phi_l)|^2} \quad (C.5)$$

und

$$\|\tilde{\mathbf{a}}\| = \frac{1}{N_{avg}} \sum_{i=0}^{N_{avg}-1} \sqrt{\sum_{m=\min(m)}^{\max(m)} \sum_{n=0}^{N_n} |A_{mn}^\pm[i] - A_{mn}^{\pm o}|^2}. \quad (C.6)$$

Der Vergleich von Gleichung(C.4) mit Gleichung (3.38) zeigt, dass der relative Gesamtfehler nach oben durch die Konditionszahl der Modellmatrix  $\mathbf{W}$  abgeschätzt wird:

$$\delta A \leq \kappa \quad (C.7)$$

Die Standardabweichung jeder Modenamplitude (als Ergebnis einer Einzelmessung) lässt sich aus den Simulationsrechnungen wie folgt bestimmen

$$s_{mn}^\pm = \sqrt{\frac{1}{N_{avg}-1} \sum_{i=0}^{N_{avg}-1} |A_{mn}^\pm[i] - A_{mn}^{\pm o}|^2}. \quad (C.8)$$

Die Unsicherheit der Modenamplitude kann damit im Sinne eines Fehlerbalken durch  $[|A_{mn}^\pm| - s_{mn}^\pm; |A_{mn}^\pm| + s_{mn}^\pm]$  angegeben werden. D.h. nach Ausführung einer Schalldruckmessung, die aufgrund stochastischer Messfehler mit der Standardabweichung  $s_p$  versehen ist, liegen die resultierenden Modenamplituden mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% in dem angegebenen Intervall.

#### *Standardabweichung der modalen Schallleistung*

Die Fortpflanzung des Analysefehlers von der Modenamplitude auf die Schallleistung wird durch eine Taylor-Reihenentwicklung ermittelt:

$$P_{mn}^\pm (|A_{mn}^\pm| + s_{mn}^\pm) = P_{mn}^\pm + \frac{dP_{mn}^\pm}{d|A_{mn}^\pm|} s_{mn}^\pm + \frac{1}{2} \frac{d^2P_{mn}^\pm}{d|A_{mn}^\pm|^2} (s_{mn}^\pm)^2 \quad (C.9)$$

$$= \frac{\pi R^2}{\rho c} \frac{\alpha_{mn} (1 - M_x^2)^2}{(1 \mp \alpha_{mn} M_x)^2} (|A_{mn}^\pm|^2 + 2|A_{mn}^\pm|s_{mn}^\pm + (s_{mn}^\pm)^2). \quad (C.10)$$

Da der Standardfehler  $s_{mn}^\pm$  in die Größenordnung der Modenamplitude  $|A_{mn}^\pm|$  kommen kann, wird zusätzlich zum linearen Glied auch das quadratische Glied berücksichtigt. Die Standardabweichung der modalen Schallleistung wird mit  $S_{mn}^\pm$  bezeichnet und berechnet sich Gleichung (??) zufolge als

$$S_{mn}^\pm = \frac{\pi R^2}{\rho c} \frac{\alpha_{mn} (1 - M_x^2)^2}{(1 \mp \alpha_{mn} M_x)^2} (2|A_{mn}^\pm|s_{mn}^\pm + (s_{mn}^\pm)^2). \quad (C.11)$$

Für die auf die Schallleistung von azimutalen Modenordnungen  $P_m^\pm$  (vgl. Gleichungen (2.59) und (2.60)) bezogene Standardabweichung gilt:

$$S_m^\pm = \sum_n S_{mn}^\pm. \quad (C.12)$$

#### *Differenz zwischen gemessenem und rekonstruiertem Schallfeld*

Systematische Fehler, die auf den Unzulänglichkeiten der Modellgleichungen beruhen, lassen sich durch die Berechnung der Differenz zwischen dem gemessenen Schallfeld und den aus den Modenamplituden rekonstruierten Schallfelddaten bewerten. Ein relatives Bewertungsmaß stellt folgender Quotient dar, in dem die Differenz auf die Norm des Vektors der gemessenen Schalldruckamplituden bezogen ist:

$$\|\Delta p\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_r-1} \sum_{l=0}^{N_\phi-1} |p(x_j, r_k, \phi_l) - p^{rek}(x_j, r_k, \phi_l)|^2 / \|p\|^2}. \quad (C.13)$$

Die rekonstruierten Schalldruckamplituden  $p^{rek}$  werden vorher durch Einsetzen des Vektors  $a$  in Gleichung 3.22 berechnet.



# D

---

## ANALYSE DER RADIALMODENANALYSE-MODELLMATRIZ

---

Für äquidistant gewählte axiale Sensorabstände  $x_j = x_0 + j\Delta x$  und unter Verwendung der Prandtl-Glauert-Transformation (4.1) und (4.2) kann die an der Position  $(x_j, r_k)$  gemessene Azimutalmodenamplitude der Ordnung  $m$  aus Gleichung (3.11) auch geschrieben werden als<sup>1</sup>

$$p_o(x_j, r_k) = e^{-iM_x k' j \Delta x'} \sum_{n=0}^{N_{m-1}} f_{mn}(r_k) \left( A_{mn}^+ e^{i\alpha'_{mn} k' j \Delta x'} + A_{mn}^- e^{-i\alpha'_{mn} k' j \Delta x'} \right) \quad (\text{D.1})$$

Die Matrix  $\mathbf{W}_m$  kann somit in das Produkt zweier Matrizen zerlegt werden:

$$\mathbf{W}_m = \mathbf{X}\mathbf{Y} \quad (\text{D.2})$$

Bei der Matrix  $\mathbf{X}$  handelt es sich um eine Diagonalmatrix mit den Elementen

$$X_{vw} = \begin{cases} e^{-iM_x k' j \Delta x'}, & v = w, j N_r \leq v < (j+1) N_r, 0 \leq j < N_x, \\ 0, & v \neq w. \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

In der Matrix  $\mathbf{Y}$  sind die Elemente derart angeordnet, dass in den ersten  $N_n$  Spalten die Beiträge aller stromab laufenden Moden  $(m, n)^+$ , in den darauf folgenden Spalten die Beiträge aller stromauf laufenden Moden  $(m, n)^-$  aufgeführt sind, d.h.

$$\mathbf{Y} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{Y}^{(1)} & \mathbf{Y}^{(2)} \end{array} \right) \quad (\text{D.4})$$

mit

$$Y_{vw}^{(1)} = f_{mw}(r_{v-j N_r}) e^{i\alpha'_{mw} k' j \Delta x'} \quad (\text{D.5})$$

und

$$Y_{vw}^{(2)} = f_{mw}(r_{v-j N_r}) e^{-i\alpha'_{mw} k' j \Delta x'} = (Y_{vw}^{(1)})^*. \quad (\text{D.6})$$

Dabei gilt für die Indizes  $j N_r \leq v < (j+1) N_r$ ,  $0 \leq j < N_x$  und  $0 \leq w < N_n$ .

Die Pseudo-Inverse der Modellmatrix  $\mathbf{W}_m$  aus Gleichung (3.28) berechnet sich dann zu

$$[\mathbf{W}_m^H \mathbf{W}_m]^{-1} \mathbf{W}_m^H = [\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}]^{-1} \mathbf{Y}^H \mathbf{X}^{-1} \quad (\text{D.7})$$

---

<sup>1</sup> Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit wird zur Vereinfachung der Beschreibungen  $x_0 = 0$  gesetzt.

Für die Kondition der Matrix  $\mathbf{W}_m$  ist demnach die Matrix  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}$  entscheidend, welche sich in vier quadratische Untermatrizen unterteilen lässt:

$$\mathbf{Y}^H \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}^{(1)} & & & \\ & \hat{\mathbf{Y}}^{(2)} & & \\ & & \hat{\mathbf{Y}}^{(3)} & \\ & & & \hat{\mathbf{Y}}^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

Die Elemente jeder Matrix  $\hat{\mathbf{Y}}^{(i)}$  können nun als das Produkt zweier Summenterme dargestellt werden:

$$\hat{Y}_{vw}^{(i)} = C_{vw} D_{vw}^{(i)}, \quad \text{mit } i = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{D.9})$$

wobei

$$C_{vw}(r, N_r) = \sum_{k=0}^{N_r-1} f_{mv}(r_k) f_{mw}(r_k) \quad (\text{D.10})$$

und

$$D_{vw}^{(1)}(k', \Delta x', N_x) = \sum_{j=1}^{N_x} e^{-i(\alpha'_{mw} - \alpha'_{mv}) k' j \Delta x'}, \quad (\text{D.11})$$

$$D_{vw}^{(2)}(k', \Delta x', N_x) = \sum_{j=1}^{N_x} e^{-i(\alpha'_{mw} + \alpha'_{mv}) k' j \Delta x'}, \quad (\text{D.12})$$

$$D_{vw}^{(3)} = \left( D_{vw}^{(2)} \right)^*, \quad (\text{D.13})$$

$$D_{vw}^{(4)} = \left( D_{vw}^{(1)} \right)^*, \quad (\text{D.14})$$

mit jeweils  $0 \leq v < N_n$  und  $0 \leq w < N_n$ . Die Matrix  $\mathbf{Y}^H \mathbf{Y}$  ist hermitesch.

# E

---

## ABHÄNGIGKEIT DER FEHLERFORTPFLANZUNG VOM MODENAMPLITUDENSPEKTRUM

---

In diesem Abschnitt soll verdeutlicht werden, was bei der Bewertung der Fehlerfortpflanzung mittels des in Abschnitt 3.3.6 beschriebenen Verfahren zu beachten ist. Dazu wurden Messungen zweier fundamental verschiedener Referenz-Schallfelder A und B simuliert. Die Ergebnisse werden hier exemplarisch für eine Zerlegung der azimutalen Modenordnung  $m = 0$  mit Sensoranordnung A-III dargestellt. Der axiale Sensorabstand beträgt  $\Delta x''/R = 0.09$ . Die Parameter der Schallfelder A und B sind in Tabelle E.1 angegeben. Beide Schallfelder stellen hinsichtlich der Verteilung der Modenamplituden Extremfälle dar und grenzen auf diese Weise realistische Modenspektren ein. In Schallfeld A ist der Betrag aller Modenamplituden der gleichen Ausbreitungsrichtung identisch, wobei die Amplituden der stromauf laufenden Moden 10dB geringer als die der stromab laufenden Moden sind. Das Referenz-Schallfeld B besteht einzig aus der sich in Strömungsrichtung ausbreitenden Mode  $(0, 0)$ . In beiden Schallfeldern besitzen die Phasen der synthetischen Modenamplituden zufällige Werte.

Im rechten Diagramm in Abbildung E.1 ist der relative Gesamtfehler  $\delta A_m$  aufgetragen, der sich für die Analyse der Schallfelder A und B bei einer Mittelung über  $N_{avg} = 500$  Ensembles ergibt. Obwohl sich die Schallfelder A und B hinsichtlich der Modenverteilung fundamental unterscheiden sind die Verläufe der relativen Gesamtfehler sehr ähnlich. Durch weitere Simulationsrechnungen, in denen das modale Signal-Rausch-Verhältnis ( $SNR)_m$  variiert wurde, konnte bestätigt werden, dass der relative Gesamtfehler tatsächlich nahezu unabhängig vom konkreten Schallfeld ist. Lediglich extrem kleine bzw. extrem große Signal-Rausch-Verhältnisse ( $SNR)_m$  sind aus numerischer Sicht zur Spezifikation des Gesamtfehlers ungünstig und sollten daher vermieden.

	SCHALLFELD A	SCHALLFELD B
stromab laufende Moden	$ A_{o,n}^+  = 85\text{dB } \forall n$	$ A_{o,0}^+  = 93.4\text{dB},$ $ A_{o,n}^+  = 0\text{dB } \forall n > 0$
stromauf laufende Moden	$ A_{o,n}^-  = 75\text{dB } \forall n$	$ A_{o,0}^-  = 0\text{dB } \forall n$
modale Standardabweichung $s_o$	80dB	80dB
Signal-Rausch-Abstand ( $SNR)_o$	20dB	20dB

Tabelle E.1: Testschallfelder A und B der Ordnung  $m=0$  zur Analyse der Fehlerfortpflanzung. Die komplexen Amplituden besitzen statistisch gleich verteilte zufällige Phasen.

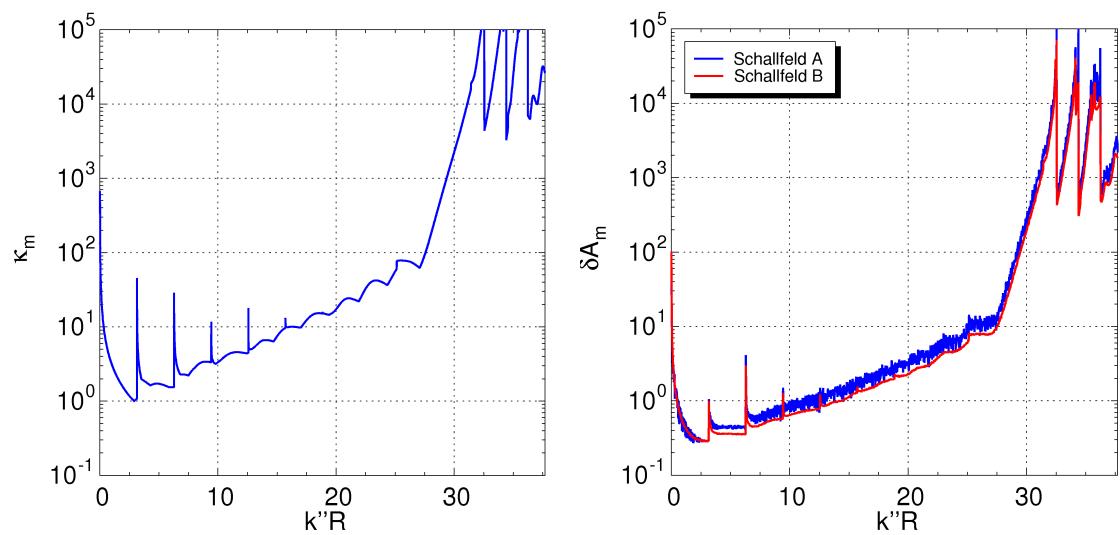


Abbildung E.1: Kondition (links) und relativer Gesamtfehler (rechts) bei der Zerlegung der Testschallfelder A und B mit der optimierten Sensoranordnung A-III.

# F

---

## MODALER SIGNAL-RAUSCH-ABSTAND FÜR VERSCHIEDENE MODENAMPLITUDENSPEKTREN

---

Die folgenden Betrachtungen sollen anhand zweier Testschallfelder illustrieren, in welcher Weise die relative modale Standardabweichung  $s_{mn} / s_m$ , der Signal-Rausch-Abstand der Azimutalmodenamplituden ( $SNR)_m$  und der Signal-Rausch-Abstand der Modenamplituden ( $SNR)_{mn}$  in Beziehung stehen. Ausgangspunkt sind zwei die beiden in Tabelle E.1 angegebenen Referenz-Schallfelder A und B. In den Abbildungen F.1 und F.2 sind die Modenverteilungen der Referenzschallfelder zusammen mit den modalen Standardabweichungen und den Ergebnissen einer simulierten Messung mit Sensoranordnung A-III bei einer Frequenz von  $kR = 82.9$  dargestellt.

Die jeweils linken Diagramme zeigen den Verlauf der Azimutalmodenamplitude der Ordnung  $m=0$  an den  $N_x N_r = 24$  Messpositionen der Außenwand und Nabe. Zusätzlich eingezeichnet sind die Rauschamplituden der  $i$ -ten Messung. In den simulierten Messungen wurden den Referenz-Schallfeldern A und B dieselben Folgen azimutaler Rauschamplituden überlagert. Die Signal-Rausch-Abstände der Azimutalmodenamplituden können in Übertragung von Gleichung als Mittelwert über alle Messpositionen ausgewertet werden:

$$(SNR)_m = 20 \log \left( \frac{\overline{A_m}}{s_m} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{N_x N_r} \left( \sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_r-1} |A_m^o(x_j, r_k)| \right) / s_m \right). \quad (F.1)$$

In beiden Schallfeldern beträgt die mittlere Azimutalmodenamplitude  $\overline{A}_o = 100$  dB, so dass sich mit der gegebenen Standardabweichung von  $s_o = 80$  dB ein Signal-Rausch-Abstand von  $(SNR)_o = 20$  dB ergibt. Die Schallfelder A und B sind demzufolge bezüglich der Messunsicherheit vergleichbar.

In den jeweils rechten Diagrammen der Abbildungen F.1 und F.2 sind für die azimutale Ordnung  $m=0$  die Modenamplituden aller radialen Ordnungen dargestellt. Das Spektrum der modalen Standardabweichungen ist von der Beschaffenheit des Referenz-Schallfeld unabhängig und daher in beiden Fällen identisch. Die Konditionszahl der Modenanalysematrix beträgt  $\kappa_o = 37.6$ , für die Mode der Ordnung  $(0,0)$  gilt  $s_{0,0}/s_o = 1$ . Wie zu erwarten, ergeben sich sehr unterschiedliche modale Signal-Rausch-Abstände. Der Signal-Rausch-Abstand der Mode  $(0,0)$  kann mithilfe von Gleichung (3.44) berechnet werden und ist in Schallfeld A mit  $(SNR)_{0,0} = 5$  dB deutlich geringer als in Schallfeld B mit  $(SNR)_{0,0} = 13.4$  dB. Tabelle F.1 gibt eine Übersicht für alle stromab laufenden Moden.

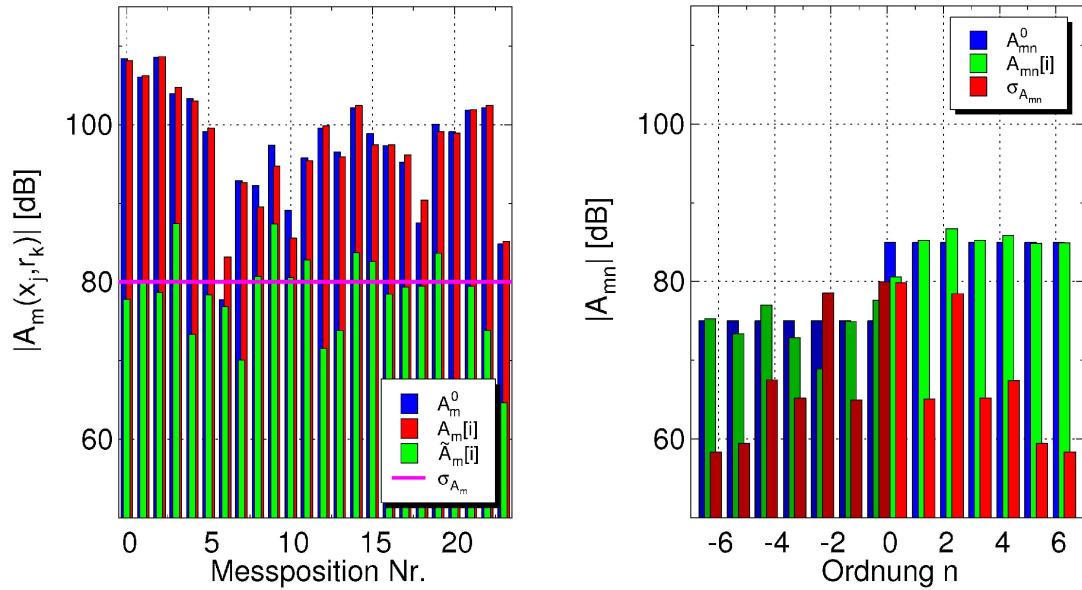


Abbildung F.1: Im linken Bild ist für Referenz-Schallfeld A bei der Frequenz  $kR = 82.9$  der Amplitudenverlauf der Azimutalmode  $m = 0$  inklusive Rauschanteil der i-ten Messung an den  $N_x N_r = 24$  Messpositionen des Sensorarrays A-III dargestellt. Das rechte Bild zeigt das unverrauschte gleichförmige Radialmodenspektrum, das in der i-ten Messung bestimmte Radialmodenspektrum und die modalen Standardabweichungen.

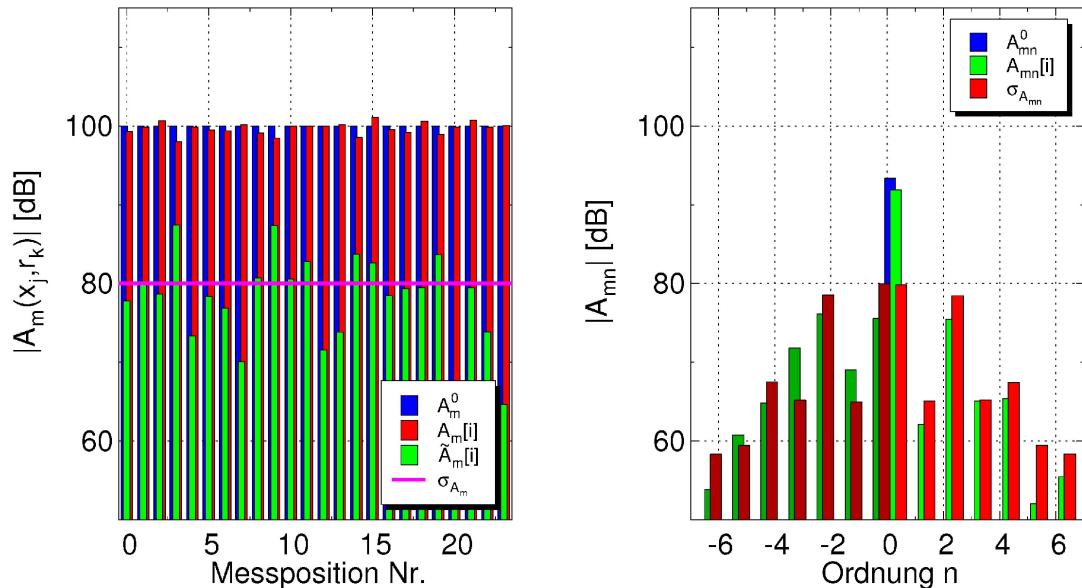


Abbildung F.2: Darstellungen analog zu Abbildung F.1 für Referenz-Schallfeld B, welches allein durch die stromab laufende Mode (0,0) definiert ist.

*Modaler Signal-Rausch-Abstand in Abhängigkeit des Signal-Rausch-Abstands der Schalldruckmessung*

Eine Abschätzung des in den Schalldruckmessungen mindestens zu realisierenden Signal-Rausch-Verhältnisses wäre bereits im Auslegungsprozess eines Sensorarrays sehr nützlich. Für das Schallfeld B und die Mode  $(o, o, +)$  lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Signal-Rausch-Abstand der Azimutalmodenamplituden und dem modalen Signal-Rausch-Abstand ableiten. Für die Mode  $(o, o)$  gilt

$$A_o^o(x_j, r_k) = A_{o,o}^{+(o)} f_{o,o}(r_k) e^{ik_{o,o}^+ x_j} = \frac{A_{o,o}^{+(o)}}{\sqrt{F_{o,o}}} e^{ik_{o,o}^+ x_j}, \quad (\text{F.2})$$

womit aus Gleichung (F.1) folgt

$$(SNR)_o = 20 \log \left( \frac{1}{N_x N_r} \left( \sum_{j=0}^{N_x-1} \sum_{k=0}^{N_r-1} \left| A_{o,o}^{+(o)} / \sqrt{F_{o,o}} \right| \right) / s_o \right) \quad (\text{F.3})$$

$$= 20 \log \left( \frac{|A_{o,o}^{+(o)}|}{s_o} \right) - 20 \log \left( \sqrt{F_{o,o}} \right). \quad (\text{F.4})$$

Ausgehend von Gleichung (3.44) gilt dann für die Modenamplitude  $(o, o, +)$

$$(SNR)_{o,o}^+ = 20 \log \left( \frac{|A_{o,o}^+|}{s_{o,o}} \right) = 20 \log \left( \frac{|A_{o,o}^+|}{s_o} \right) - 20 \log (s_{o,o}/s_o). \quad (\text{F.5})$$

Die Subtraktion von Gleichung (F.4) ergibt schließlich als Abschätzung des Signal-Rausch-Abstands der Mode  $(o, o)$ :

$$(SNR)_{o,o}^+ = (SNR)_o + 20 \log \left( \sqrt{F_{o,o}} \right) - 20 \log (s_{o,o}/s_o). \quad (\text{F.6})$$

Damit kann für einen Strömungskanal ohne Nabenkörper folgende Abschätzung gemacht werden,

$$(SNR)_{o,o}^+ = (SNR)_o - 3\text{dB} - 20 \log \left( \frac{s_{o,o}}{s_o} \right), \quad (\text{F.7})$$

n	$s_{mn}/s_m$	SCHALLFELD A	SCHALLFELD B
		$(SNR)_{o,o}^+ [\text{dB}]$	$(SNR)_{o,o}^+ [\text{dB}]$
0	1.00	5.0	13.4
1	0.19	19.8	—
2	0.85	6.4	—
3	0.19	19.7	—
4	0.25	17.5	—
5	0.10	25.5	—
6	0.09	26.5	—

Tabelle F.1: Relative Standardabweichungen und modale Signal-Rauschabstände der stromab laufenden Moden einer Messung der Testschallfelder A und B mit Sensoranordnung A-III.

während in einem Strömungskanal mit Nabenvorhältnis  $\eta = 0.75$

$$(\text{SNR})_{o,o}^+ = (\text{SNR})_o - 6.6 \text{dB} - 20 \log \left( \frac{s_{o,o}}{s_o} \right) \quad (\text{F.8})$$

zutrifft. Hieraus lässt sich beispielsweise für ein Sensorarray in einem Kanal ohne Nabenkörper, welches derart gestaltet ist, dass bei einer gegebenen Frequenz die relative modale Standardabweichung  $s_{o,o}/s_o = 1$  beträgt, folgende Schlussfolgerung ziehen: Wenn bei der Analyse der Mode  $(0,0)$  der modale Signal-Rauschabstand  $(\text{SNR})_{o,o} = 17 \text{ dB}$  betragen soll, dann müssen die Azimutalmodenamplituden mit einem Signal-Rausch-Abstand von  $(\text{SNR})_o = 20 \text{ dB}$  gemessen werden. In Tabelle F.2 sind weitere Angaben für verschiedene modale Standardabweichungen  $s_{o,o}/s_o$  zu finden.

$(\text{SNR})_o [\text{dB}]$	$s_{o,o}/s_o$	$(\text{SNR})_{o,o} [\text{dB}]$
20	0.1	37
20	0.5	23
20	1	17
20	2	11
20	10	-3

Tabelle F.2: Abhängigkeit des Signal-Rausch-Abstands der Mode  $(0,0)$  von der relativen Standardabweichung der Modenamplituden  $s_{o,o}/s_o$  bei einer Messung in einem Kanal ohne Nabenkörper und unter der Annahme, dass die azimutale Ordnung  $m=0$  nur aus der Mode  $(0,0)$  besteht und der Signal-Rausch-Abstand der Azimutalmodenanalyse  $(\text{SNR})_m = 20 \text{ dB}$  beträgt.

# G

---

## ZUSÄTZLICHE DATEN UND ERGEBNISSE DER MESSUNGEN AM FANRIG UFFA

---

Der von der Firma AneCom AeroTest in Wildau betriebene aeroakustische Fanprüfstand UFFA (Universal Fan Facility for Acoustics) [93] ermöglicht Tests von Triebwerksbestandteilen hoher technologischer Entwicklungsreife unter realistischen Bedingungen. Aufgrund seines modularen Aufbaus lassen sich Variationen des Einlaufs, des Laufrads, des Leitrads und schalldämpfender Kanalsegmente schnell umsetzen. Während die Schallabstrahlung aus dem Einlauf mithilfe von Mikrofonen unter Freifeldbedingungen direkt vermessen kann, vgl. das linke Foto in Abbildung G.1, ist dies baulich bedingt auf der Abströmseite nicht möglich. Ersatzweise wurde in der Nebenstromkanalstrecke eine umfangreiche Vermessung des Schallfelds mittels der Modenanalysetechnik vorgenommen. Es wurden vom Autor im Rahmen des EU-Forschungsprogramms VITAL drei Radialmodenanalyse-Messanordnungen entwickelt:

- ein Mikrofonrechenarray (RMD<sub>1</sub>) in einer unmittelbar stromab des Fanleitrads liegenden Sektion,
- ein Mikrofonrechenarray (RMD<sub>2</sub>) in einer Sektion, an die sich in einem Triebwerk die Austrittsdüse anschließen würde und
- ein wandbündiges Mikrofonarray (RMD<sub>3</sub>) in der gleichen Sektion, in der auch RMD<sub>2</sub> montiert werden kann.

Ein Teil der Instrumentierung ist im rechten Foto von Abbildung G.1 von außen sichtbar. Die drei Mikrofonarrays wurden erstmalig für den gleichen Rigaufbau und unter



Abbildung G.1: Fan-Rig in der reflexionsarmen Versuchshalle der Firma AneCom AeroTest [93]. Der Einlauf des Fan-Rigs ist mit einem Turbulenzschirm versehen [134].

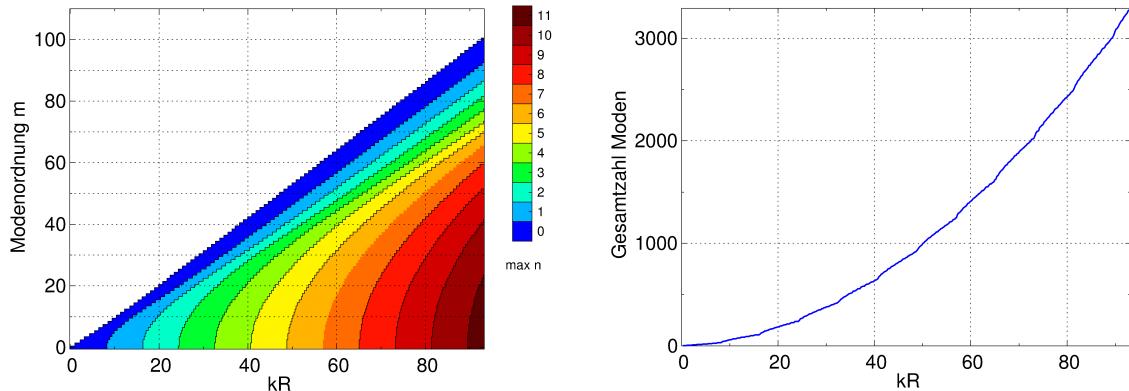


Abbildung G.2: Azimutale und radiale Ordnungen (linkes Diagramm) und Gesamtzahl ausbreitungsfähiger Moden (rechtes Diagramm) in der Messsektion der Arrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub>.

den gleichen Betriebsbedingungen vom DLR in einem Unterauftrag von Rolls-Royce Deutschland vermessen<sup>1</sup>.

Die folgenden Abschnitte geben einen Überblick über den Prüfstand, die gemessenen Betriebspunkte, die Analysecharakteristiken der Mikrofonarrays und die Parameter der Schallmessungen.

#### G.1 PRÜFSTAND UND BETRIEbspUNKTdatEN

Das UFFA-Rig ist in Abbildung 1.5 in einer Schnittzeichnung dargestellt. Der Fan hat einen Durchmesser von 34 Zoll und wird durch einen elektrischen Motor mit 18 MW Leistung angetrieben. Zur Gewährleistung einer räumlich gleichmäßigen turbulenten Zuströmung und damit einer repräsentativen akustischen Anregung des Fans ist das Rig mit einem Turbulenzschirm versehen [71].

Die Messungen wurden auf einer Arbeitslinie bei relativen Rotordrehzahlen von 50%, 70%, 80%, 90% und 100% sowie an einem weiteren Arbeitspunkt bei 100% relativer Drehzahl durchgeführt. Die Kanalstrecke zwischen Fanaustritt und der Messsektion der Arrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub> war mit einem akustisch dämpfenden Liner ausgekleidet. Aus Geheimhaltungsgründen können keine genaueren Angaben zu den Betriebspunkten, der Fangeometrie und zu Details der Strömungskanalstrecke gemacht werden. Dies stellt jedoch keine Einschränkung in der Diskussion der Modenanalysegenauigkeiten dar.

#### G.2 CHARAKTERISTIKEN DER MIKROFONARRAYS

In Tabelle G.1 sind die Kenngrößen der Arrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub> angegeben, welche in individuellen Optimierungen gemäß der in Kapitel 4 beschriebenen Vorgehensweise für jedes Array ermittelt wurden. Ziel war die Durchführung von Modenanalysen der Schaufeltöne bis zu Frequenzen von  $kR = 75$ . Wie die Diagramme von Abbildung G.2

<sup>1</sup> Der Auftrag wurde im Rahmen des vom Bundesland Brandenburg geförderten Projekts OPAL ausgeführt.

	RMD2	RMD3
Anzahl axialer Mikrofonpositionen $N_x$	2	60
Anzahl radialer Mikrofonpositionen $N_r$	11	1
Messpunkte in Umfangsrichtung $N_\phi$	180	180
Gesamtzahl Messpunkte $N_x \times N_r \times N_\phi$	3960	10800
Axialer Mikrofonabstand $\Delta x_{opt}/R$	0.0265	0.0275
Normierter axialer Mikrofonabstand $\Delta x''_{opt}/R$	0.0863	0.0896
Axiale Abmessung des Mikrofonarrays $L_x/R^*$	0.0265	1.6225
Höchste analysierbare Frequenz $\max(k/R)$	89.5	76.4
Normierte höchste analysierbare Frequenz $\max(k''/R)$	34.55	29.4

Tabelle G.1: Kenngrößen der Mikrofonarrays RMD2 und RMD3 des UFFA-Rigs (\* bezogen auf die Mittelpunkte der Mikrofonmembranen, d.h. bei den Rechen sind die Abmaße des Rechenkörpers außer Acht gelassen).

zeigen, sollten an der oberen Frequenzgrenze etwa 2200 Moden mit azimutalen Ordnungen bis zu  $m = \pm 80$  und radialen Ordnungen bis  $n = 9$  detektiert werden. Die ermittelten Kenngrößen der Arrays stimmen mit den Beziehungen zwischen der Anzahl kombinierter radialer und axialer Messpositionen  $N_x N_r$ , dem optimalen axialen Abstand  $\Delta x''/R$ , der höchsten analysierbaren Frequenz  $k''/R$  sowie der Gesamtzahl analysierbarer radialer Ordnungen  $N_n$  überein, die in den Abbildungen 4.11 bis 4.13 graphisch zusammengefasst wurden<sup>2</sup>.

In Abbildung G.3 sind die Fehlercharakteristiken der Arrays RMD2 und RMD3 gegenüber gestellt. Bis zu einer Frequenz von  $kR \approx 50$  ist der relative Gesamtfehler des Arrays RMD3 im Vergleich zum Array RMD2 um bis zu eine Größenordnung geringer. Dies trifft auch bei höheren Frequenzen für höhere azimutale Ordnungen zu und ist in der etwa 3-fachen Anzahl von Messpositionen und dem damit verbundenen besseren Fehlerausgleich begründet.

Abbildung G.4 liefert einen vertieften Einblick am Beispiel der relativen modalen Standardabweichungen für die azimutalen Ordnungen  $m = 0$  und  $m = 30$ . Die Messgenauigkeit des Arrays RMD2 ist in der Nähe der Cut-on-Frequenzen aufgrund der geringen axialen Abtastung des Schallfelds deutlich erhöht, wie ausführlich in Kapitel 4 erläutert wurde. Für das axial ausgedehnte Array RMD3 stellt sich dieses Problem nicht dar. Bemerkenswert ist, dass für die meisten radialen Ordnungen  $s_{mn}/s_m \approx 0.1$  gilt, d.h. die Standardabweichung sich gegenüber der Azimutalmodenzerlegung etwa um den Faktor 10 verringert. Wenn Standardabweichungen  $s_{mn}/s_m > 1$  akzeptiert werden können, d.h. der Signal-Rausch-Abstand ausreichend gut ist, dann lassen sich mit RMD3 auch Analysen bis zu Frequenzen von  $kR \approx 87$  durchführen.

In den Mikrofonarrays werden 1/4"-Kondensatormikrofone vom Typ G.R.A.S. 40-BP

<sup>2</sup> Die höchste analysierbare Frequenz  $k''/R$  wurde nach dem Kriterium einer maximalen relativen Standardabweichung von  $s_{on}/s_m \leq 1$  bestimmt

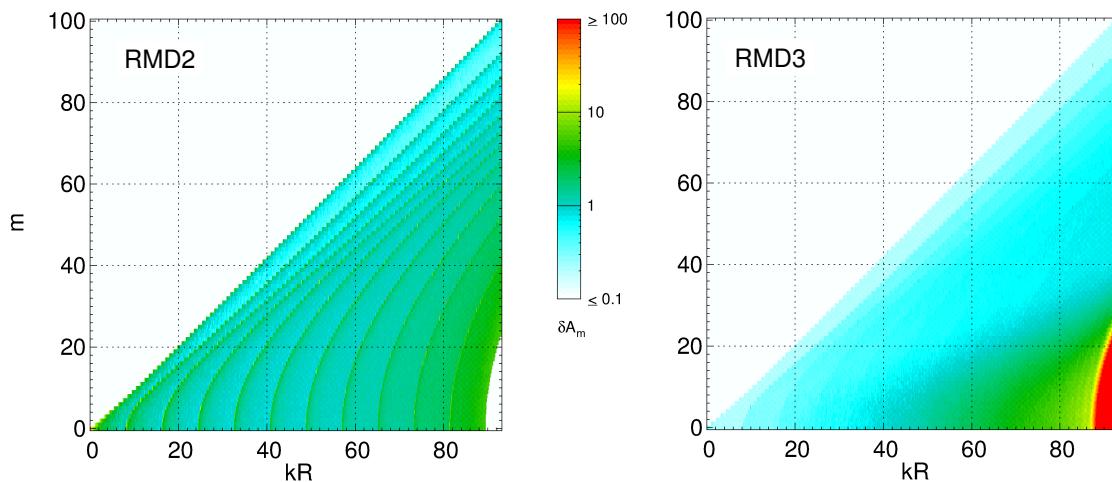


Abbildung G.3: Relativer Gesamtfehler bei Zerlegung der azimuthalen Modenordnungen mit den Mikrofonarrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub>.

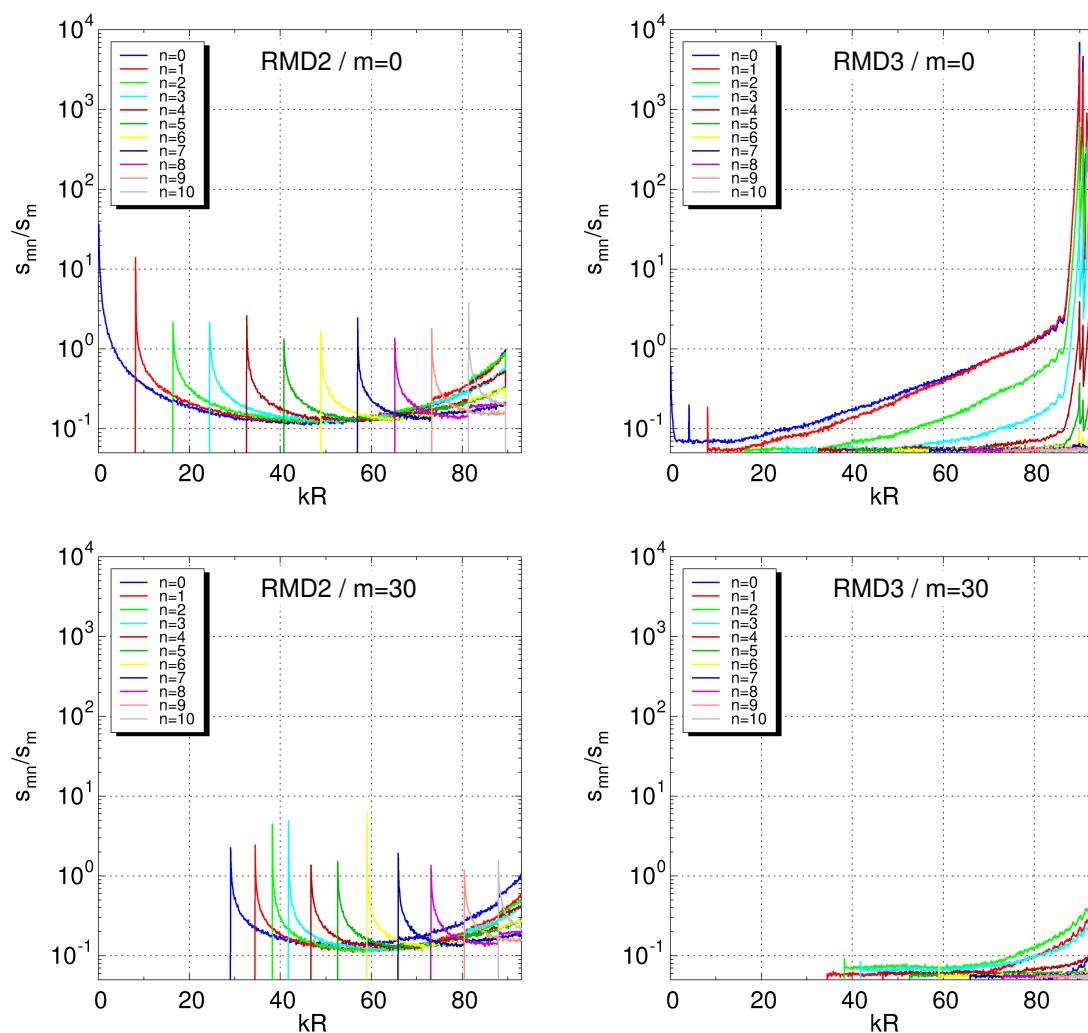


Abbildung G.4: Normierte Standardabweichungen in der Analyse der Modenordnungen  $m=0$  und  $m=30$  mit den Mikrofonarrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub>.

in Kombination mit Vorverstärkern des Typ G.R.A.S. 26-AC verwendet. Die in den Rechen eingebauten Mikrofone zeigen in Stromaufrichtung und sind zur Reduktion von Umströmungsgeräuschen mit Nasenkonen ausgerüstet. Die Rechenkörper besitzen ein aerodynamisch günstiges symmetrisches Flügelprofil.

### G.3 MESSDURCHFÜHRUNG

Die Messungen der Arrays RMD<sub>2</sub> und RMD<sub>3</sub> wurden separat durchgeführt, d. h. es wurde jeweils nur ein Array zur Zeit installiert. Zur Herstellung einer Vergleichbarkeit wurden die Prüfstandsbedingungen nach dem Kriterium der Machzahlähnlichkeit reproduziert. Durch Rotation der Messekktion mit der vollen Instrumentierung wurden die Messgitter in Schritten von 2° zeitversetzt sukzessive aufgebaut. Die Standardmessdauer betrug je Position 15 s. Für die Analyse des Signal-Rausch-Abstands wurden an drei äquidistant verteilten Traversierschritten Zeitreihen mit einer verlängerten Messdauer von 120 s aufgezeichnet. Die Datenerfassung wurde mit einer DLR-eigenen Anlage mit einer Auflösung von 24 Bit und einer Abtastrate von 48.2 kHz in den RMD<sub>2</sub>-Messungen bzw. einer Abtastrate von 24.1 kHz in den RMD<sub>3</sub>-Messungen durchgeführt.





---

## ZUSÄTZLICHE DATEN UND ERGEBNISSE DER MESSUNGEN AM TURBINENPRÜFSTAND

---

Am Institut für Thermische Strömungsmaschinen und Maschinendynamik der Technischen Universität Graz wurde im Rahmen des EU-Forschungsprogramms VITAL ein 1,5-stufiges Niederdruck-Turbinenrig aufgebaut. An dem Prüfstand, der auch kurz mit STTF(Subsonic Turbine Test Facility) bezeichnet wird, sollten verschiedene von der Firma MTU Aero Engines spezifizierte Beschaufelungsvarianten akustisch untersucht werden. Die Abteilung Triebwerksakustik des DLR-Instituts für Antriebstechnik war mit dem Entwurf der Messanordnung sowie der Durchführung und Analyse der akustischen Messungen beauftragt [135, 136, 132]. Das Ziel bestand in der vollständigen Aufschlüsselung der Schallfeldstruktur im Strömungskanal stromab des Austrittsleitads in Form der akustischen Moden zur Verbesserung des Verständnisses über die Schallanregungsmechanismen und zur Erstellung einer Datenbasis für die Validierung von numerischen Prognoseverfahren.

### H.1 PRÜFSTAND UND BETRIEbspunktdaten

Das in Abbildung 1.4 dargestellte Turbinenrig besitzt auf der Einlaufseite ein spiralförmiges Einlaufgehäuse, in dem die Strömung um  $90^\circ$  umgelenkt wird. Dem folgt eine Düse, in der durch Leitschaufeln der Drall aus der Strömung entfernt wird, und ein Lochblech. Im Eingangsleitrad (Inlet Guide Vane, IGV) kann der Strömung dann durch Schaufelverstellung ein definierter Drall aufgeprägt werden. Es folgen die Turbinenstufe mit Stator und Rotor sowie das Ausgangsleitrad (Exit Guide Vane, EGV). Die Blattzahlen der verschiedenen Gitter sind in Tabelle H.1 zusammengefasst. Weiter stromab liegt die für die akustische Instrumentierung vorgesehene Kanalsektion, sie besitzt ein

	BLATTZAHL
IGV	83
Stator	96
Rotor	72
EGV	15

Tabelle H.1: Anzahl der Rotorblätter und Statorschaufeln.

	$m_{red}$	$n_{red}$
Approach	6.94	4059
Cutback	8.97	5206
Sideline	9.96	5568
ADP	10.13	5718

Tabelle H.2: Reduzierte Massenströme und Drehzahlen verschiedener Betriebspunkte.

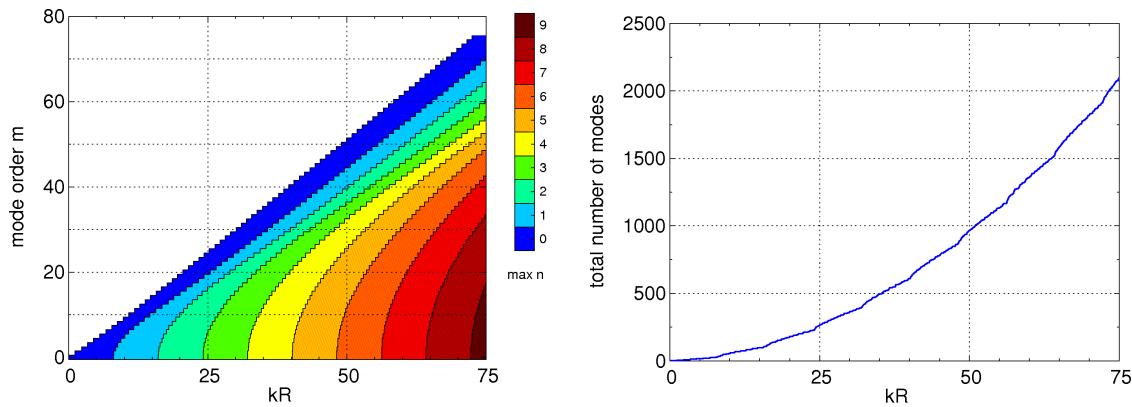


Abbildung H.1: In der Messsektion des Turbinenrigs beim Betriebspunkt 'Sideline' ausbreitungs-fähige Modenordnungen.

Nabenverhältnis von  $\eta = 0.66$ . Im Ausgangsgehäuse wird die Strömung wieder um  $90^\circ$  umgelenkt und durch einen Abluftturm ins Freie gelassen. Messungen wurden für die drei in Tabelle H.2 angegebenen Betriebspunkte 'Approach', 'Cutback' und 'Sideline' durchgeführt, die den typischen Lärmzertifizierungspunkten für Flugzeuge entsprechen. Eine umfassende Beschreibung des Prüfstands wird von Moser et al in [90] gegeben.

## H.2 CHARAKTERISTIKEN DES MIKROFONARRAYS

Abbildung H.1 gibt einen Überblick über die beim Betriebspunkt Sideline ausbreitungs-fähigen Modenordnungen. In Tabelle H.3 sind die Modenordnungen und die Gesamtzahl Moden angegeben, die bei den BPF- und 2BPF-Harmonischen an den verschiedenen Betriebspunkten zu detektieren sind. Für eine Analyse bis zur maximalen Frequenz von  $kR = 70$  erwies sich das in Tabelle H.4 spezifizierte Mikrofonarray im Auslegungsprozess als optimal geeignet. Es sieht eine Verwendung von Mikrofonen in der Außenwand und in der Nabe des Strömungskanals vor. In Abbildung H.2 ist die Abschätzung des Ge-samtfeliers der Modenanalyse  $\delta A_m$  für den Betriebspunkt Sideline in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Die Fehlercharakteristik ist konsistent mit dem in Abbildung 4.7 für das Nabenvorhältnis 0.75 dargestellten Diagramm der Sensoranordnung A-III.

Für die Messungen wurden 1/4"-Kondensatormikrofone vom Typ G.R.A.S. 40-BP in Kombination mit Vorverstärkern des Typ G.R.A.S. 26-AC verwendet. Die Messsektion konnte zur räumlichen Erfassung des Schallfelds mittels eines ferngesteuerten Moto-

		$kR$	$\max  m $	$\max(n)$	$N_{Mod}$
Cutback	BPF	28.35	27	3	304
	2BPF	57.70	55	6	1090
Sideline	BPF	30.96	30	3	368
	2BPF	61.92	63	7	1372

Tabelle H.3: Frequenzen, höchste Ordnungen und Gesamtzahl ausbreitungsfähiger Moden in der Messsektion des STTF-Prüfstands.

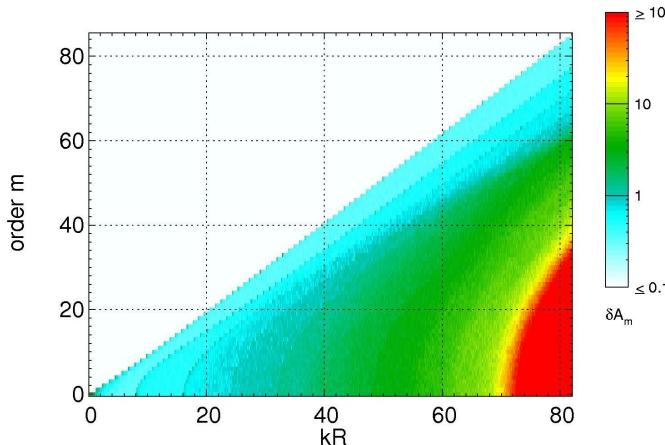


Abbildung H.2: Relativer Gesamtfehler  $\delta A_m$  bei Zerlegung der azimutalen Ordnung  $m$  mit der wandbündigen Sensoranordnung des Turbinenrigs.

rantriebs rotiert werden. Um eine gemeinsame Drehung zu gewährleisten wurden das Gehäuse und die Nabe durch 17 unprofilierte Streben verbunden, die stromab der Mikrofonplatten gleichmäßig über den Kanalumfang montiert waren.

### H.3 MESSDURCHFÜHRUNG

Das von der Turbinenstufe im Austritt angeregte Schallfeld wurde durch Traversierung der Mikrofonsektion in Schritten zu je  $\Delta\phi = 2^\circ$  an der Kanalwand sowie auf der Nabe abgetastet und damit ein gleichmäßiges Gitter von 4320 Messpunkten erstellt. In den ersten fünf Testserien wurden die Messungen mit einer DLR-eigenen Datenerfassung durchgeführt. Es waren insgesamt 72 Mikrofone in drei gleichmäßig über den Umfang versetzten Mikrofonplatten von Nabe und äußerer Gehäusewand installiert, so dass die instrumentierte Kanalsektion nur in 60 Schritten um insgesamt  $120^\circ$  gedreht werden musste. In späteren Testserien verwendete die TU Graz 24 Mikrofone in je einer Mikrofonplatte der Nabe und der äußeren Gehäusewand. Zur Erfassung von Messgittern derselben Auflösung wurde die Mikrofonsektion in 180 Schritten um insgesamt  $360^\circ$  ge-

Anzahl axialer Mikrofonpositionen $N_x$	12
Anzahl radialer Mikrofonpositionen $N_r$	2
Messpunkte in Umfangsrichtung $N_\phi$	180
Gesamtzahl Messpunkte $N_x \times N_r \times N_\phi$	4320
Axialer Mikrofonabstand $\Delta x_{opt}/R$	0.032
Normierter axialer Mikrofonabstand $\Delta x''_{opt}/R$	0.0863
Axiale Abmessung des Mikrofonarrays $L_x/R$	0.352
Höchste analysierbare Frequenz $\max(k/R)$	70.0
Normierte höchste analysierbare Frequenz $\max(k''/R)$	25.6

Tabelle H.4: Kenngrößen der drehbaren Mikrofonsektion und der Modenanalyse-Messungen am Turbinenrig.

dreht. Zusätzlich zu den Mikrofonen des Drehkanals wurde stets mindestens ein ortsfestes Referenzmikrofon und ein Triggersignal der Rotorwelle aufgezeichnet. Standardmäßig betrug die Abtastrate in allen Testserien 51.2 kHz, die digitale Auflösung 24 Bit und Standardmessdauer 15 s je Traversierposition. In den ersten vom DLR durchgeführten Messungen wurde an den Traversierpositionen  $n_\phi = 1, 13, 25, 37$  und  $49$  die Messdauer auf  $T_{\text{meas,ext}} = 120$  s verlängert. Die verlängerten Zeitreihen sind als Eingangsdaten für eine Abschätzung des Messfehlers vorgesehen. Eine ausführliche Beschreibung des verwendeten Messaufbaus und der Messdurchführung ist im Testbericht [136] zu finden.

Nach Abschluss der DLR-Testserien stellte sich heraus, dass die auf verschiedenen Eingangskanalblöcken gemessenen Zeitreihen nicht synchron waren. Der Synchronisationsfehler hat keinen Einfluss auf die Berechnung einzelner Schalldruckspektren, so dass die Daten für die Analyse des Signal-Rausch-Abstands genutzt werden konnten. Da sich der Synchronisationsfehler jedoch durch die Kombination aller Mikrofone auf die Genauigkeit der Modenanalyse auswirkt, wurden für die in dieser Arbeit dargestellten Modenanalysen nur die von der TU Graz aufgezeichneten Schalldruckzeitreihen verwendet.

#### H.4 ANALYSE DER SCHALLDRUCKMESSUNGEN

Die Zeitreihen wurden mit Hilfe des Verfahrens der adaptiven Neuabtastung analysiert. Bei der Interpolation des Zeitsignals auf die Winkelkoordinate der Antriebswelle wurden 1024 neue Datenpunkte zwischen aufeinander folgende Triggerpulse gelegt. Dadurch ergab sich in Abhängigkeit der Wellendrehzahl des Betriebspunkts eine etwa 1.5 bis 2-fache Auflösung im Vergleich zur A/D-Wandlungsraten der Messanlage, siehe auch Tabelle H.5. In der FFT wurde ein Rechteckfenster der Länge von 32768 Sample benutzt, d. h. ein Fenster umfasste genau 32 Wellenumdrehungen. Dementsprechend konnte für die Standardmessdauer in Abhängigkeit der Wellendrehzahl eine Mittelung über etwa 35 bis 49 FFT-Fenster durchgeführt werden, was 1120 bis 1568 Wellenumdrehungen entspricht. Die Zeitreihen der erweiterten Messdauer von 120 s umfassten etwa 280 bis 392 Fenster mit 8960 bis 12544 Wellenumdrehungen. In Abbildung H.3 sind die Schwankungen der Wellendrehzahl zu sehen. Aufgetragen ist der zeitliche Abstand aufeinander folgender Triggerpulse. Die Schwankungen lagen beim Betriebspunkt Cutback im Bereich von  $\pm 0.14\%$  und betrugen bei Sideline etwa  $\pm 1.5\%$ .

	$f_R$ [Hz]	$f_s$ [Hz]	$f_{s,i}$ [Hz]	$N_{\text{total}}$	$T_w$ [s]
Approach	76.67	51200	78507	35.9	0.417
Cutback	98.33	51200	100693	46.1	0.325
Sideline	105.17	51200	107691	49.3	0.304

Tabelle H.5: Rotordrehfrequenz  $f_R$ , Abtastrate der Messanlage  $f_s$ , Abtastrate nach adaptiver Neuabtastung  $f_{s,i}$  mit 1024 Punkten zwischen zwei Rotortriggern, Anzahl FFT-Fenster  $N_{\text{total}}$  bei 15s Messdauer und 32768 Samples pro Fenster und zeitliche Länge eines FFT-Fenster  $T_w$  bei den Messungen am 1.5-Stufen-ND-Turbinen-Prüfstands.

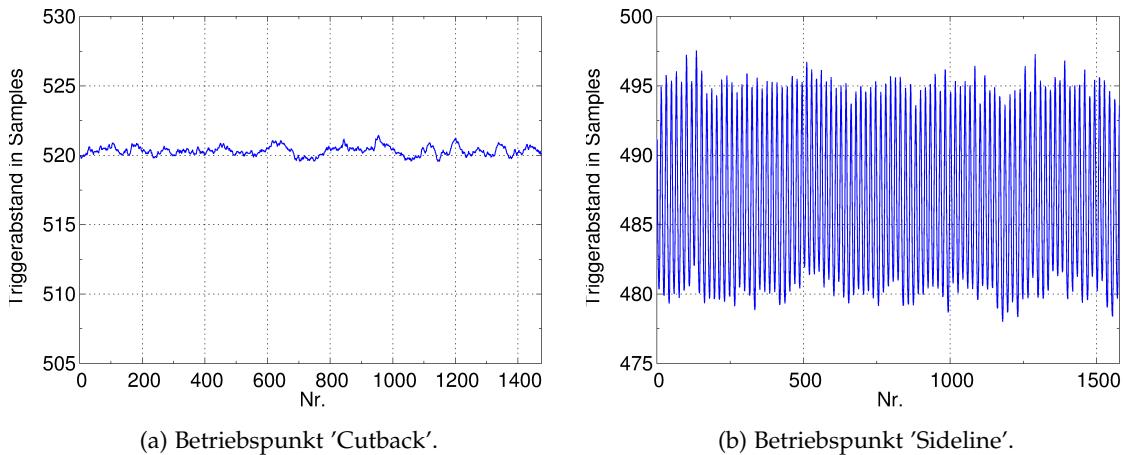


Abbildung H.3: Drehzahlschwankungen des STTF-Prüfstands. Der zeitliche Abstand aufeinander folgender Wellentriggerpulse ist durch die Anzahl dazwischen liegender Abtastsample dargestellt.

Abbildung H.4 zeigt den Unterschied der Spektralanalyse, der sich bei der FFT eines einzelnen Fensters im Gegensatz zur FFT der vollständigen Zeitreihe für die Betriebspunkte Cutback und Sideline ergibt.

In Abbildung H.5 ist am Beispiel der 2BPF-Grundharmonischen zu sehen, dass die gemessenen Schalldruckamplituden bei Sideline größeren zeitlichen Schwankungen unterliegen als bei Cutback. Dargestellt ist der Verlauf der Schalldruckamplitude  $p[j]$ , der sich in der Analyse mit dem  $j$ -ten FFT-Fenster an 10 Messpositionen ergab. Es besteht die Vermutung, dass die stärkeren Schwankungen bei Sideline auf eine drehzahlabhängige Variation der Schallquellamplituden zurückgeht, welche nicht mit der adaptiven Neuabtastung korrigiert werden kann. Unklar ist, ob der 2BPF-Komponente noch Anteile einer der Störtöne überlagert sind, die im Spektrum des Betriebspunkts Cutback bei der Wellenharmonischen 115 bzw. 122 zu sehen sind.

Abbildung H.6 zeigt das Ergebnis der Signal-Rausch-Abstands-Analyse der gemessenen Schalldruckamplituden. Zwischen den Betriebspunkten Cutback und Sideline sind deutliche Unterschiede erkennbar.

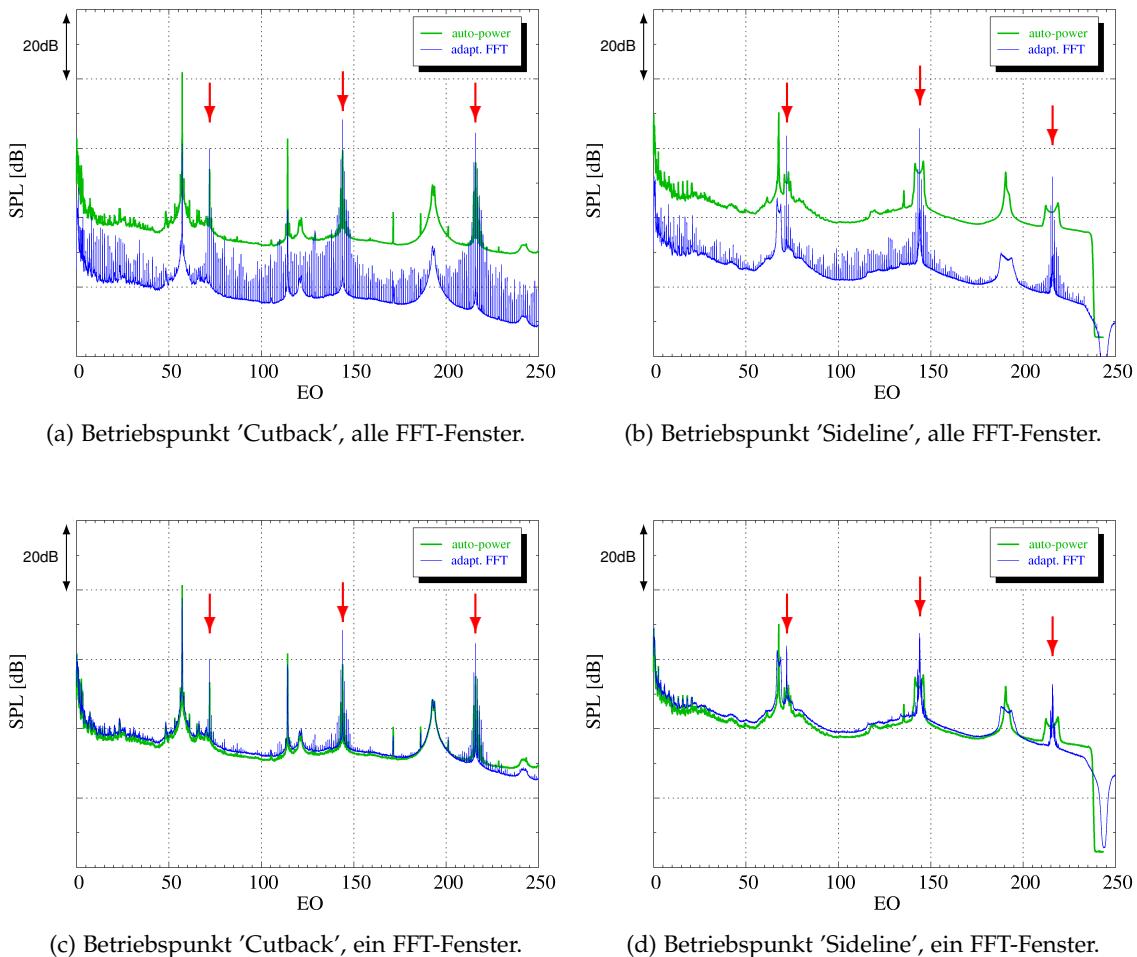


Abbildung H.4: Autoleistungsspektren und rotorkohärente Schalldruckspektren im Austritt des Turbinenrigs bei Auswertung über variable Anzahl von FFT-Fenstern. Jedes Spektrum ist über 2160 Messpositionen an der Kanalausenwand gemittelt. Die roten Pfeile markieren die Harmonischen der Blattpassierfrequenz.

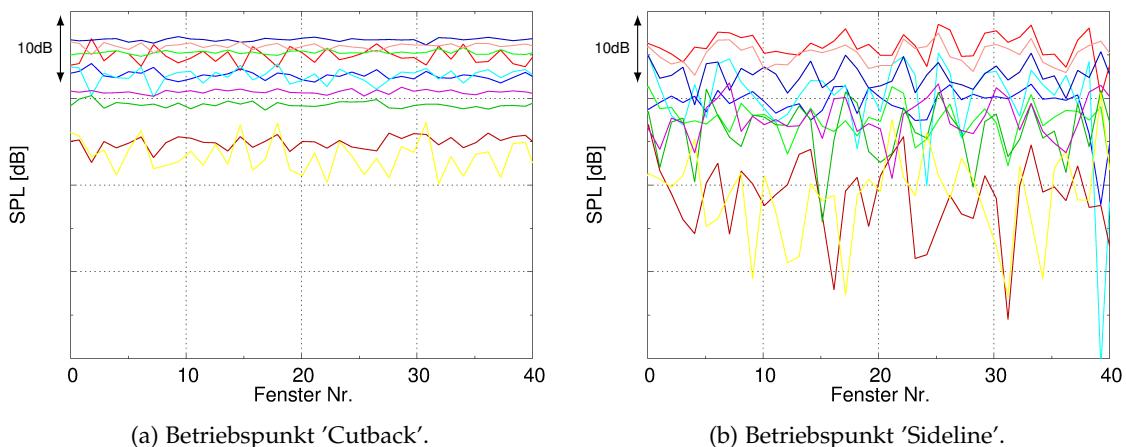


Abbildung H.5: Fluktuation des Schalldruckpegels der 2BPF-Harmonischen. Ausgewertet wurden 40 zeitlich aufeinander folgende FFT-Fenster an 10 Messpositionen der Kanalausenwand.

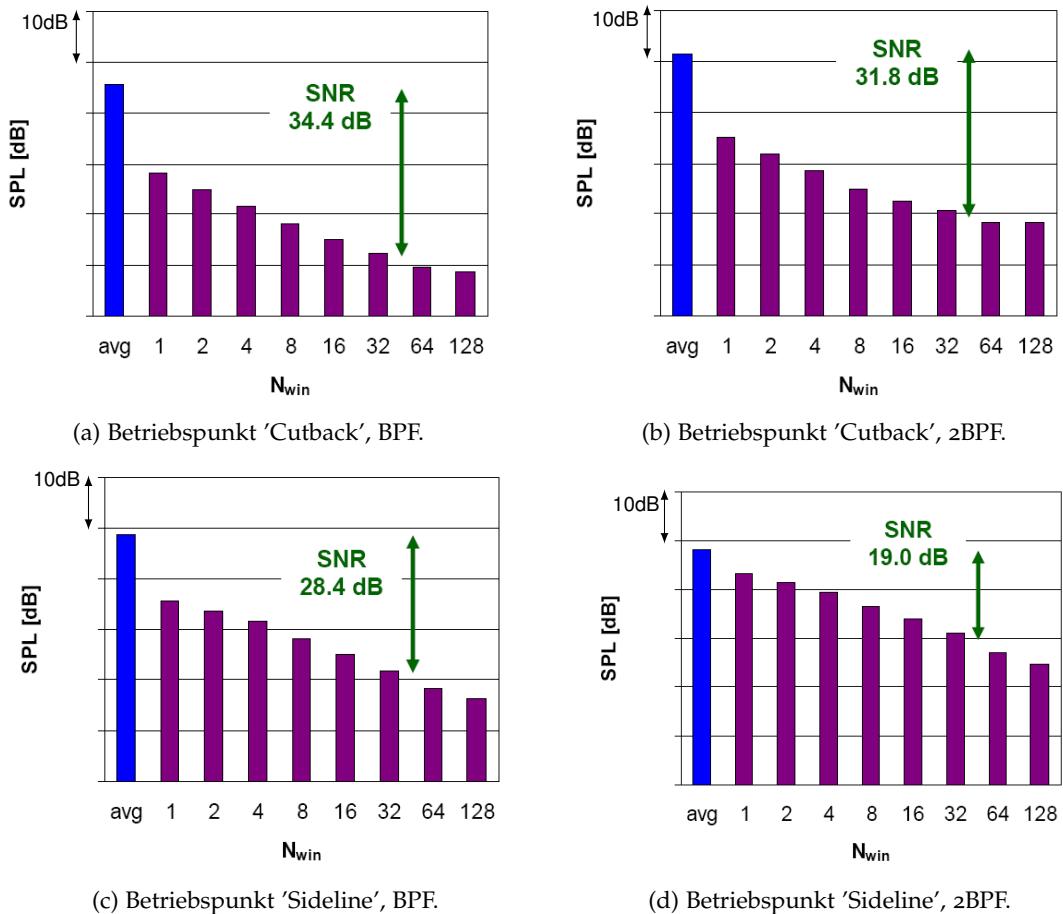


Abbildung H.6: Variation der Standardabweichung  $s_p$  mit der Anzahl analysierter FFT-Fenster  $N_w$  und in Gegenüberstellung mit dem mittleren Schalldruckpegel  $\bar{p}$  (blauer Balken). In grüner Schrift ist der Signal-Rausch-Abstand für eine Mittelung über 45 bzw. 48 FFT-Fenster angegeben.

## H.5 MODENANALYSEN AM BETRIEbspUNKT CUTBACK

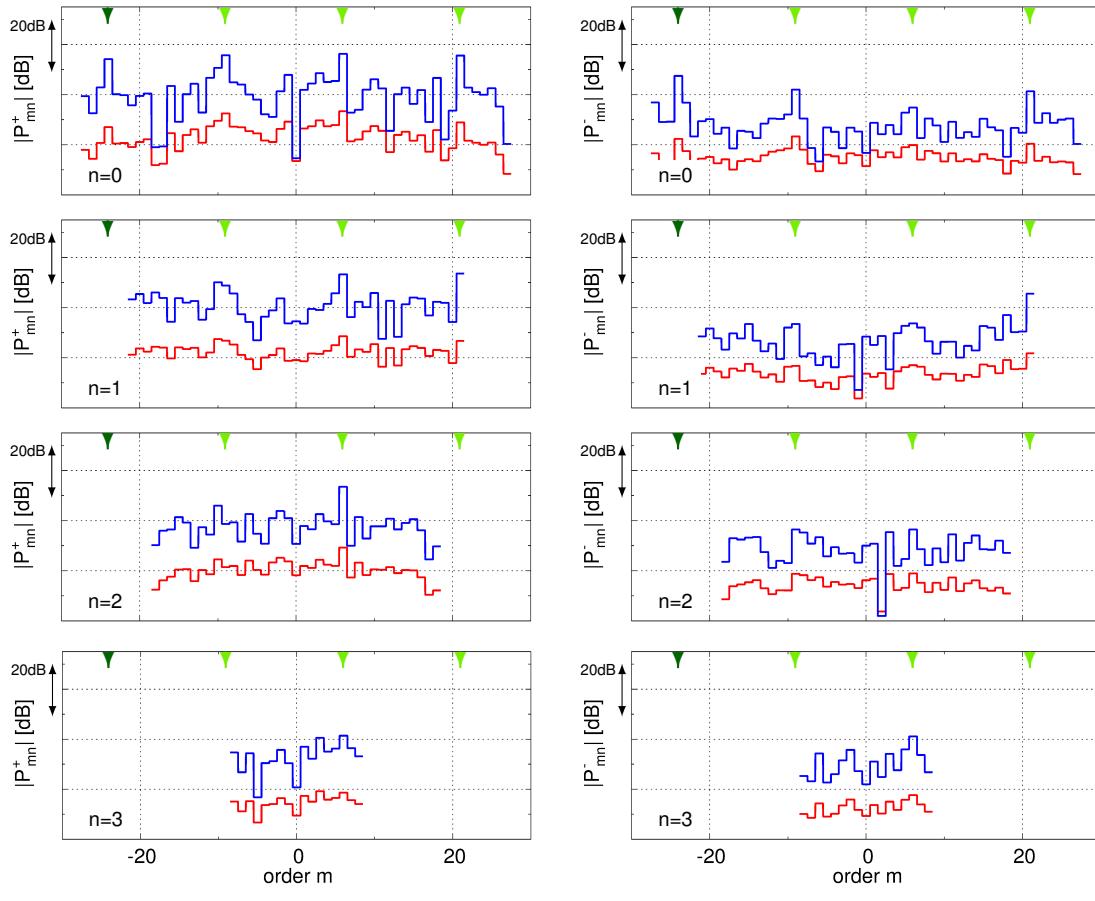


Abbildung H.7: Schallleistung aller Moden (blaue Linien) und Schallleistungsäquivalent der modalen Standardabweichung (rote Linien) als Ergebnis der Radialmodenanalyse der BPF-Komponente des Turbinenrigs mit der vollen Messdauer beim Betriebspunkt Cutback.

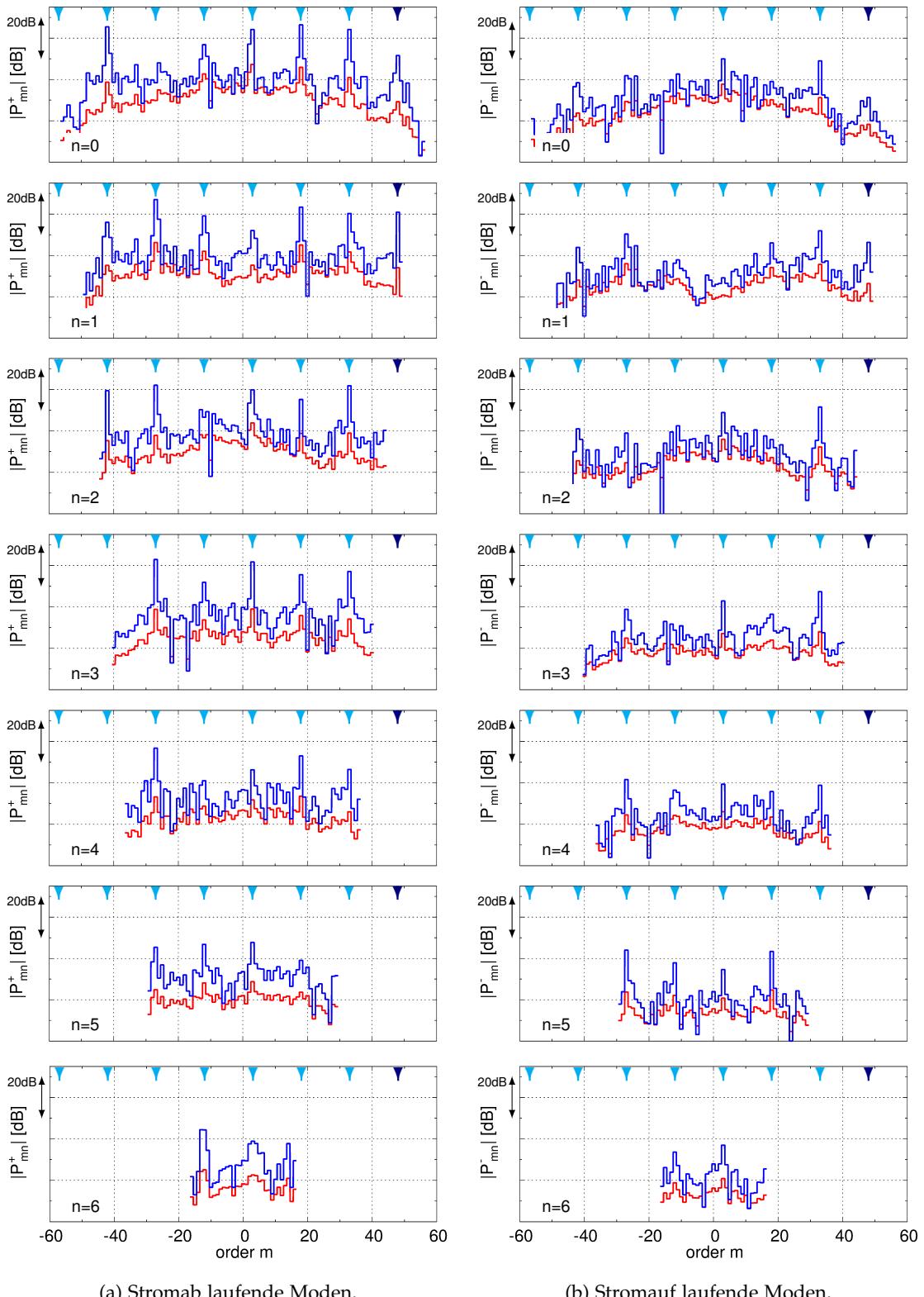


Abbildung H.8: Schallleistung aller Moden (blaue Linien) und Schallleistungsäquivalent der modalen Standardabweichung (rote Linien) als Ergebnis der Radialmodenanalyse der 2BPF-Komponente des Turbinenrigs mit der vollen Messdauer beim Betriebspunkt Cutback.

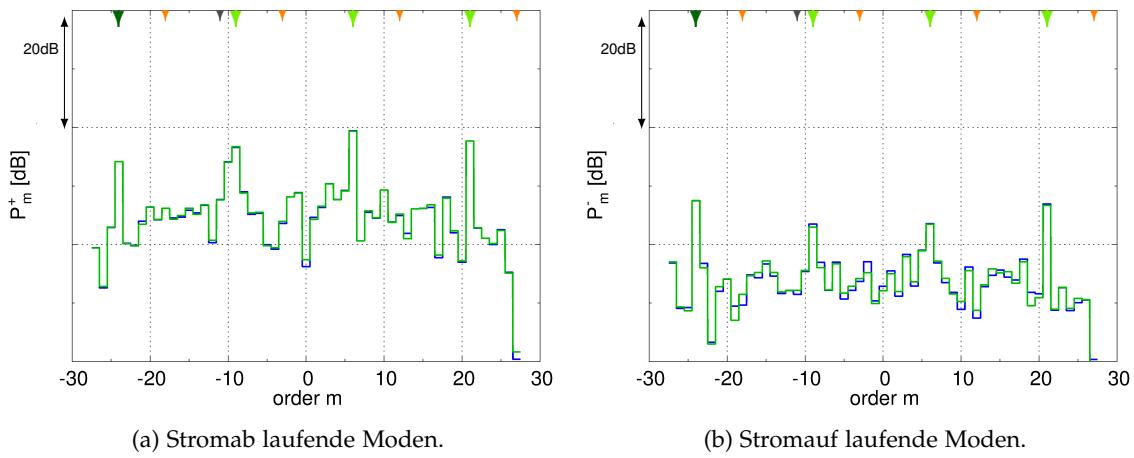


Abbildung H.9: Schalleistung der azimutalen Modenordnungen aus der Analyse von 45 Zeitfenstern (blaue Linien) bzw. 1 Fenster (grüne Linie) für die BPF-Komponente des Turbinenrigs beim Betriebspunkt Cutback.

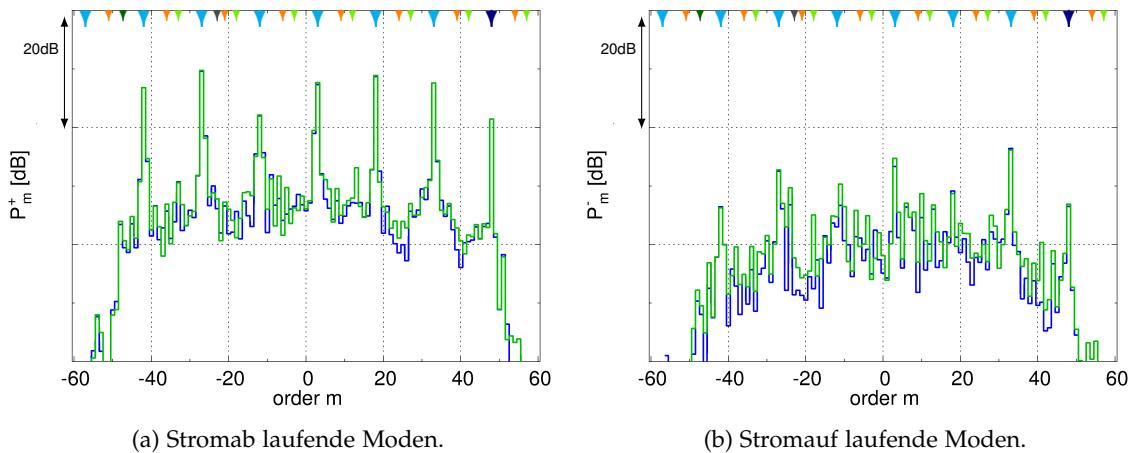
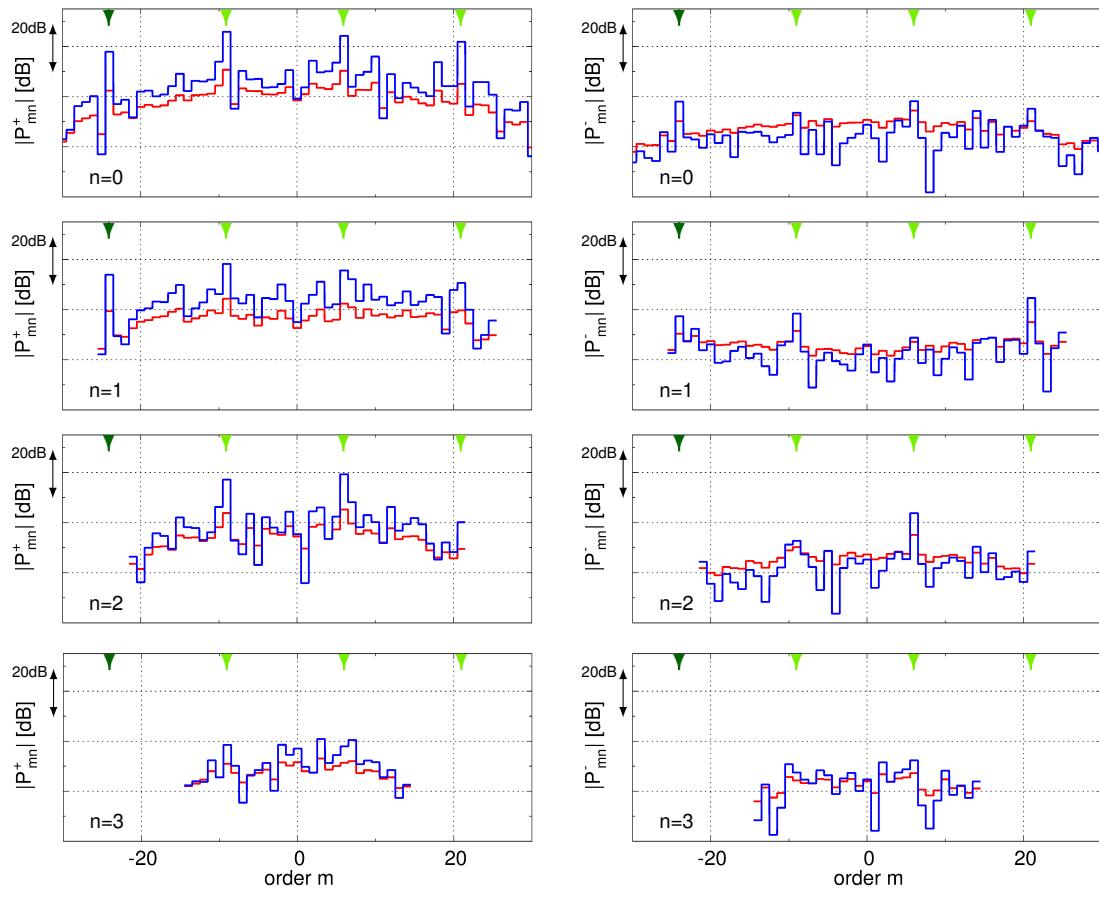


Abbildung H.10: Schalleistung der azimutalen Modenordnungen aus der Analyse von 45 Zeitfenstern (blaue Linien) bzw. 1 Fenster (grüne Linie) für die 2BPF-Komponente des Turbinenrigs beim Betriebspunkt Cutback.

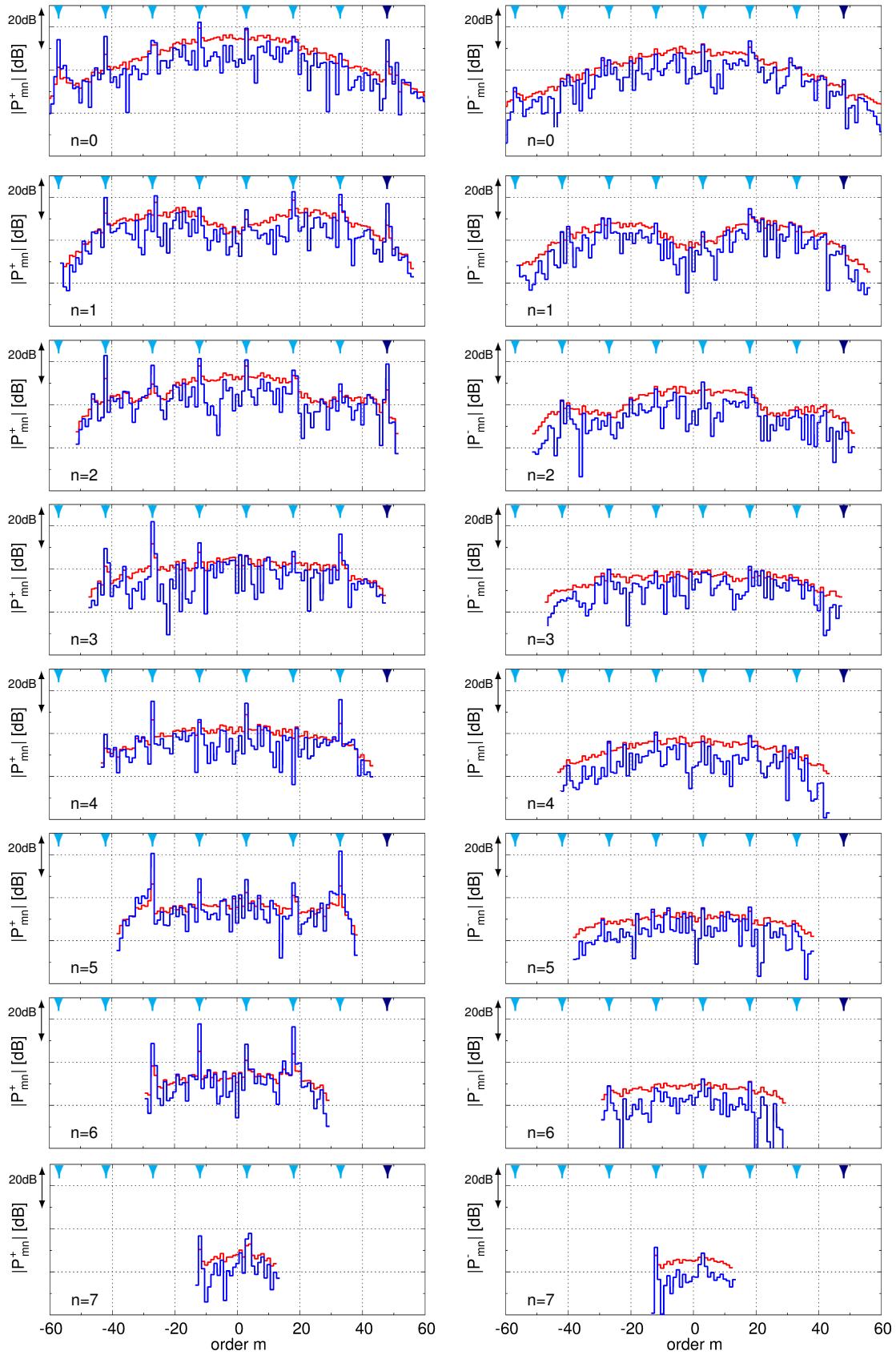
## H.6 MODENANALYSEN AM BETRIEbspunkt SIDELINE



(a) Stromab laufende Moden.

(b) Stromauf laufende Moden.

Abbildung H.11: Schalleistungen aller Moden (blaue Linien) und Schallleistungsäquivalente der modalen Standardabweichungen (rote Linien) aus der Radialmodenanalyse der BPF-Komponente des Turbinenrads beim Betriebspunkt Sideline bei Verwendung eines FFT-Fensters. Durch Pfeile gekennzeichnete Moden gehen auf die Interaktion von Stator und Rotor zurück.



(a) Stromab laufende Moden.

(b) Stromauf laufende Moden.

Abbildung H.12: Schalleistungen aller Moden (blaue Linien) und Schallleistungsäquivalente der modalen Standardabweichungen (rote Linien) aus der Radialmodenanalyse der 2BPF-Komponente des Turbinenrigs beim Betriebspunkt Sideline bei Verwendung eines FFT-Fensters. Durch Pfeile gekennzeichnete Moden gehen auf die Interaktion von Stator und Rotor zurück.

	$P^+ [\text{dB}]$	$\pm \Delta P^+ [\text{dB}]$
<i>48 FFT-Fenster</i>		
Stator-Rotor $m = -24 + k \cdot 15$	0.0 <sup>(*)</sup>	0.0 / 0.0
andere Schaufelreiheninteraktionen	-15.3	0.2 / -0.2
sonstige Moden	-4.1	0.1 / -0.1
Summe	+1.5	0.1 / -0.1
<i>1 FFT-Fenster</i>		
Stator-Rotor $m = -24 + k \cdot 15$	+0.1	0.2 / -0.2
andere Schaufelreiheninteraktionen	-15.1	0.9 / -1.2
sonstige Moden	-4.0	0.8 / -0.9
Summe	+1.6	0.3 / -0.4

Tabelle H.6: Schallleistungen der Schaufelreiheninteraktionen und der sonstigen Moden berechnet für die BPF-Komponente des Turbinen-Rigs beim Betriebspunkt Sideline in der Analyse über 48 FFT-Fenster bzw. über 1 FFT-Fenster. Aus Gründen der Vertraulichkeit sind alle Werte *relativ* zu dem mit <sup>(\*)</sup> gekennzeichneten Schallleistungspegel angegeben. Die Vertrauensintervalle  $\pm \Delta P^+$  beziehen sich auf die in Abbildung 5.19 dargestellten *Absolut*pegel.

	$P^+ [\text{dB}]$	$\pm \Delta P^+ [\text{dB}]$
<i>48 FFT-Fenster</i>		
Stator-Rotor $m = 48 + k \cdot 15$	0.0 <sup>(*)</sup>	0.2 / -0.2
Stator-Rotor $m = -48 + k \cdot 15$	-23.9	3.6 / -
andere Schaufelreiheninteraktionen	-20.0	2.6 / -7.5
sonstige Moden	-6.9	1.7 / -3.0
Summe	+0.9	0.6 / -0.6
<i>1 FFT-Fenster</i>		
Stator-Rotor $m = 48 + k \cdot 15$	+0.1	1.1 / -1.5
Stator-Rotor $m = -48 + k \cdot 15$	-17.1	7.6 / -
andere Schaufelreiheninteraktionen	-16.0	7.0 / -
sonstige Moden	-3.2	5.4 / -
Summe	+1.9	3.2 / -

Tabelle H.7: Wie in Tabelle H.6, aber für die 2BPF-Komponente.



# I

---

## ZUSÄTZLICHE DATEN UND ERGEBNISSE DER MESSUNGEN AM DLR-UHBR-FAN

---

Im Rahmen des nationalen Luftfahrt-Forschungsprogramms wurde im Projekt NASGeT (Neuartige aktive / passive Systeme zur Geräuschrückbildung von Triebwerken) eine Versuchsreihe zur aktiven Minderung von Fanschaufeltönen durchgeführt. Aufgabe der DLR-Abteilung Triebwerksakustik war die Bewertung des Primärschallfelds und der Performance der getesteten ANC-Konzepte durch eine vollständige Radialmodenzerlegung der Rotor-Stator-Interaktionstöne.

### I.1 PRÜFSTAND UND BETRIEbspunktdaten

Abbildung I.1 zeigt ein Foto des in der Testserie verwendeten DLR-eigenen UHBR-Fanmodells am Mehrstufen-Zweiwellen-Verdichterprüfstand (M2VP) des DLR-Institut für Antriebstechnik in Köln. Bei dem UHBR-Fan-Modell, dessen Kenndaten in Tabelle I.1 aufgelistet sind, handelt es sich um eine Variante des von Kaplan et al [66] aerodynamisch und akustisch optimierten Entwurf. Die Anzahl Stator-Schaufeln wurde so gewählt, dass die Rotor-Stator-Interaktion bei der BPF-Grundharmonischen Cut-off ist. Bei der zweiten Blattpassierfrequenz ist nach der in Gleichung (1.2) angegebenen Formel von Tyler und Sofrin eine Anregung der Mode  $m = 2B - V = 6$  zu erwarten.

Eine ausführliche Beschreibung des Versuchsstands ist in Referenz [27] zu finden. Der laufende Verdichter zieht über einen Ansaugturm Luft aus der Umgebung ein, die



Abbildung I.1: DLR-UHBR-Fan im M2VP-Prüfstand des Instituts für Antriebstechnik.

Rotorblattzahl B	22
Statorblattzahl V	38
Rotorradius [m]	0.4
Drehzahl [1/min]	7846
rel. Blattspitzen-Machzahl	1.05

Tabelle I.1: Auslegungsparameter des DLR-UHBR Fans.

red. Drehzahl [1/min]	3126
red. Massenstrom*	0.481
Druckverhältnis*	0.72
Totaldruck [kPa]	101.04
Totaltemperatur [K]	293.5

Tabelle I.2: Betriebsparameter im Punkt *Approach* (\*normiert auf Auslegung).

Kanalradius R [m]	0.4
Nabenverhältnis $\eta$	0
Anzahl axialer Arrays	1
Anzahl axialer Sensorpositionen $N_x$	60
Axialer Sensorabstand $\Delta x$ [mm]	14.5

Tabelle I.3: Kenngrößen der drehbaren akustischen Messsektion am UHBR-Fan-Prüfstand

in eine Beruhigungskammer geleitet wird. Hier soll es durch die extrem langsamen Strömungsgeschwindigkeiten zu einem Turbulenzabbau in der Strömung kommen und sich ein gleichmäßiges Strömungsfeld vor der Düse einstellen. In der Düse wird die Luft beschleunigt, durchläuft die Messstrecke und trifft schließlich auf den Fan. Hinter diesem schließen sich eine Drossel, deren Querschnitt während der Messung zur Einstellung verschiedener Betriebspunkte variiert wird.

Alle Tests wurden beim Betriebspunkt *Approach* durchgeführt, was dem Landeanflugszustand entspricht, bei dem die Schallabstrahlung des Fans aus der Ansaugöffnung der Triebwerke in Richtung Boden besonders stark ist. Die Betriebspunktdaten des untersuchten Betriebspunkts sind in Tabelle I.2 zusammen gestellt.

## I.2 ANALYSE DER SCHALldruck-ZEITSIGNALE

Für die Modenanalysen wurden 1/4"-Kondensatormikrofone vom Typ G.R.A.S. 40-BP in Kombination mit Vorverstärkern vom Typ G.R.A.S. 26-AC in das axiale Array des Drehkanals eingesetzt. Durch Traversierung der Messsektion in  $N_\phi = 60$  Schritten zu je  $6^\circ$  wurde ein gleichmäßiges aus insgesamt 3600 Punkten bestehendes Datengitter aufgebaut. An jeder Traversierposition wurden Zeitreihen von  $t_{\text{meas}} = 10$  s Dauer mit einer Auflösung von 24 Bit und einer Abtastfrequenz von 42 kHz aufgenommen. Zusätzlich aufgezeichnet wurden die Signale von 14 Referenzmikrofonen, die in der feststehenden Messsektion stromab des Drehkanals eingebaut waren.

Im linken Diagramm der Abbildung I.2 ist das rotorkohärente Schalldruckspektrum im Vergleich zum Auto-Power-Spektrum als Funktion der Wellendrehzahl-Harmonischen (engl. Engine Order) dargestellt. Beide Spektren wurden durch eine FFT mit einer Fensterlänge von 32768 Sample über die gesamte Messdauer ausgewertet und resultieren aus einer anschließenden Mittlung über alle 3600 Positionen des Messgitters. Durch die in

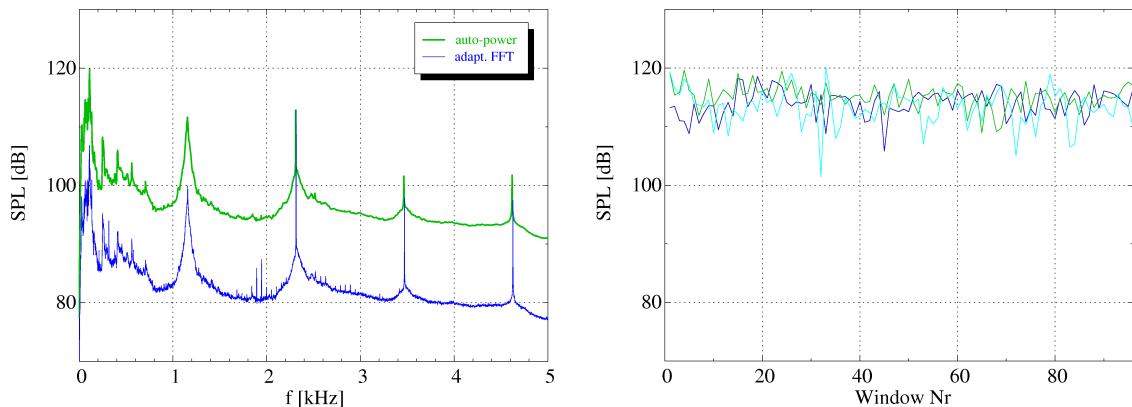


Abbildung I.2: Das linke Diagramm zeigt das mittlere Rotor-kohärente Schalldruckspektrum im Vergleich zum mittleren Auto-Power-Spektrum. Im rechten Diagramm sind die zeitlichen Schalldruck-Fluktuationen der 2BPF-Komponente (EO 44) an drei Mikrofonen über eine Dauer von 60 s abgebildet.

2-fache Blattpassierfrequenz [Hz]	2313
$kR_{2\text{BPF}}$	17.03
Statische Temperatur $T_s$ [K]	290.1
Axiale Machzahl $M_x$	0.239
Messpunkte in Umfangsrichtung $N_\phi$	60
Gesamtzahl Messpunkte $N_x N_\phi$	3600
Messdauer pro Umfangsposition $t_{\text{meas}}$ [s]	10

Tabelle I.4: Kenngrößen der Modenanalysen am UHBR-Fan-Prüfstand im Betriebspunkt Approach.

Abschnitt 3.1 beschriebene adaptive Neuabtastung wurden Wellendrehzahlschwankungen ausgeglichen und alle unkorrelierten Schallfeldanteile weitgehend reduziert.

Zwei unerwartete Effekte fallen in den Schalldurckspektren auf: Trotz des Cut-off-Designs besitzt die BPF-Grundharmonische signifikante Pegel. Des Weiteren treten unterhalb der BPF starke tonale Komponenten auf. Eine Erklärungsmöglichkeit besteht in der Interaktion des Fans mit großskaligen turbulenten Strömungsstrukturen, die sich in der Beruhigungskammer nicht ausreichend abgebaut haben und aufgrund eines fehlenden Turbulenzschirms in den Zuströmkanal eingesogen wurden. Die Entstehung von schmalbandigen Schallkomponenten durch Interaktion des Fans mit räumlich ausgedehnten kohärenten Turbulenzgebieten ist in der Literatur von anderen Fan-Prüfständen bekannt, siehe z. B. McArdle et al [79], und wurde theoretisch nachgewiesen [7].

Die im Weiteren zu analysierende zweite BPF-Harmonische liegt bei der Frequenz  $f = 2313$  Hz, was unter den gegebenen Bedingungen der dimensionslosen Frequenz  $kR = 17.03$  entspricht. Das rechte Diagramm der Abbildung I.2 zeigt, dass auch dieser Schaufelton von starken Fluktuationen betroffen war. Dargestellt ist das Ergebnis einer Kurzzeitspektralanalyse der neuabgetasteten Zeitreihen von drei Referenzmikrofonen

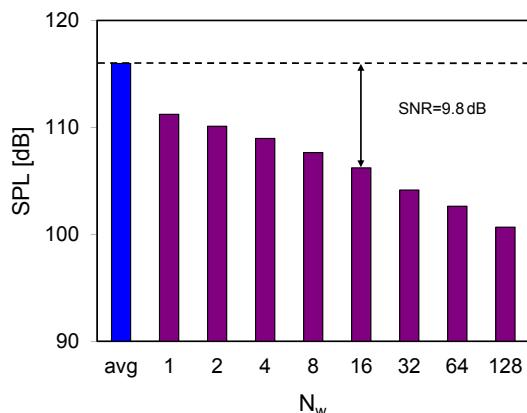


Abbildung I.3: Variation der Standardabweichung  $s_p$  der 2BPF-Komponente des UHBR-Fans mit der Anzahl analysierter FFT-Fenster  $N_w$ . Der blaue Balken gibt den mittleren Schalldruckpegel  $\bar{p}$  als Referenz für den Signal-Rausch-Abstand an.

über eine Messdauer von 60 s, was äquivalent zu 96 aufeinander folgenden FFT-Fenstern ist.

Für die Analyse der Fortpflanzung in die Modenamplituden wird die Standardabweichung des Schalldrucks für eine Messdauer von 10 s benötigt. Die Drehkanalmikrofone sind für diese Auswertung nicht geeignet, da der Schalldruck mit jeder Traversierung einer räumlichen Variation unterliegt. Deshalb mussten die Zeitsignale aller 14 Referenzmikrofone heran gezogen werden. Für die statistischen Analyse wurden die Zeitreihen, die von jedem Referenzmikrofon an den aufeinander folgenden Traversierzeitpunkten gemessen wurden, einfach aneinander gehängt. Die Annahme, dass das mittlere Schallfeld an den Referenzmikrofonen während der Gesamtmessdauer von  $N_\phi \times t_{\text{meas}} = 600$  s konstant blieb, ist aufgrund der sehr geringen Rotordrehzahlschwankungen von 0.1% zulässig. Für die gewählten Parameter entsprach die Gesamtmessdauer einer Anzahl von  $N_{\text{total}} = 960$  FFT-Fenstern. In Abbildung I.3 ist die Standardabweichung des Schalldrucks für verschiedene Messdauern  $N_w$  im Vergleich zum Mittelwert dargestellt. Zur Simulation einer ausreichenden Zahl von Einzelmessungen wurde die Auswertung bei größeren Messdauern mit Overlap durchgeführt. Wie zu erwarten nimmt der Signal-Rausch-Abstand mit zunehmender Messdauer zu. Für die tatsächlich verwendete Messdauer von 10 s, welche einer Mittelung über  $N_w = 16$  Fenster entspricht, betrug die Standardabweichung  $s_p = 4.1$  Pa. Bezogen auf den mittleren Schalldruck von  $\bar{p} = 12.6$  Pa entspricht dies einem Signal-Rausch-Abstand von nur 9.8dB.

---

KONDITION VON TRANSFERMATRIZEN IN DER GEZIELTEN  
SYNTHESSE VON RADIALMODEN

---

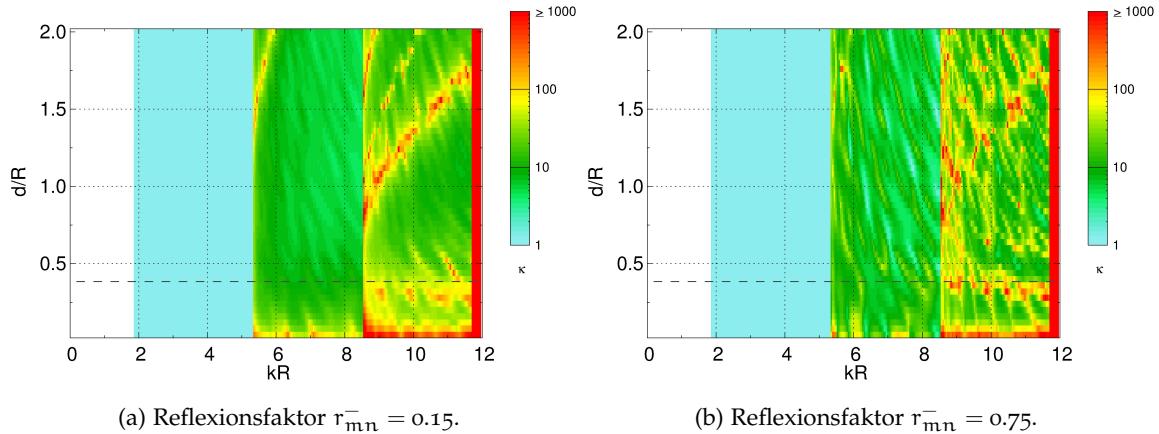


Abbildung J.1: Einfluss einer Reflexionsstelle im Versuchsaufbau auf die Kondition der Gesamt-Transfermatrix  $\mathbf{H}_\mu$  in einer gezielten Synthese von Radialmoden der Ordnung  $\mu=1$  mit einem aus  $N_x = 3$  Quellringen bestehenden Modengenerator.

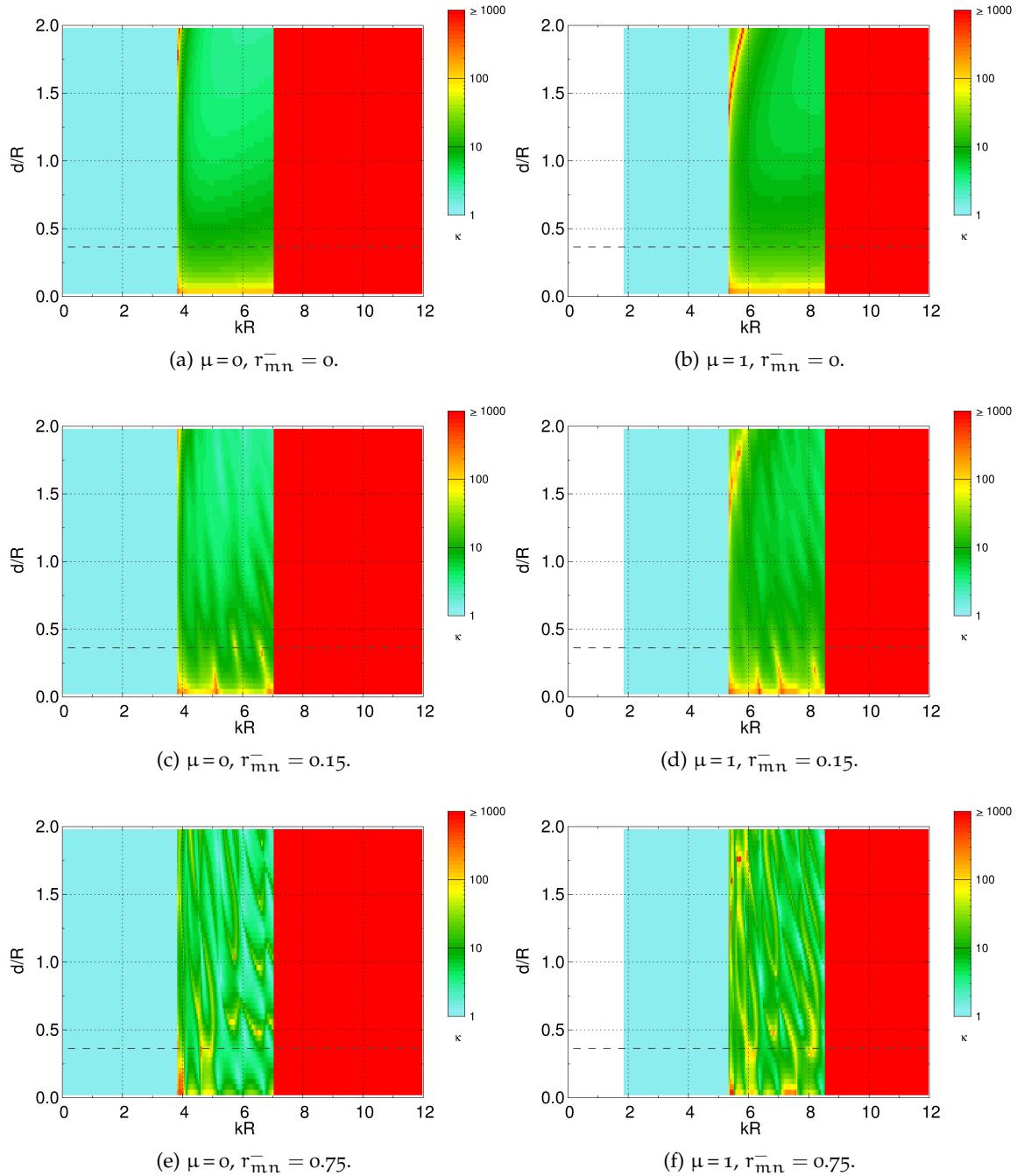


Abbildung J.2: Kondition der Transfermatrix  $H_\mu$  in der gezielten Radialmodensynthese der azimutalen Ordnung  $\mu$  mit einem aus  $N_x = 2$  Quellringen bestehenden Modengegeneratoren mit variablem Ringabstand unter Berücksichtigung einer Reflexionsstelle im Versuchsaufbau mit Reflexionsfaktor  $r_{mn}^-$ .

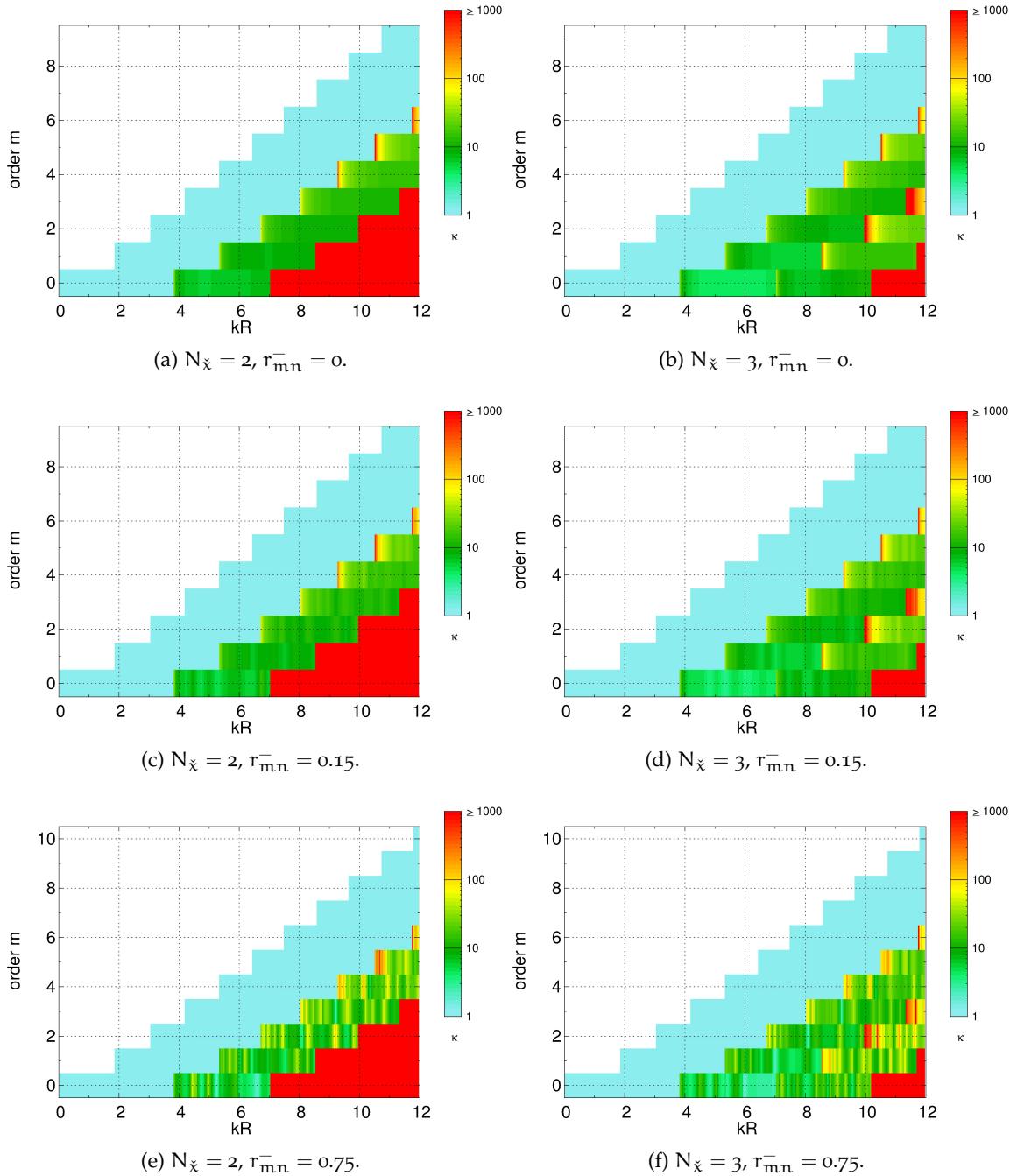


Abbildung J.3: Kondition der Transfermatrix  $H_\mu$  in der gezielten Radialmodensynthese verschiedener azimutaler Ordnungen mit einem aus zwei bzw. drei Quellringen bestehenden Modengenerator unter Berücksichtigung einer Reflexionsstelle im Versuchsaufbau mit Reflexionsfaktor  $r_{mn}^-$ . Die Quellringe besitzen einen axialen Abstand von  $d/R = 0.72$ .



# K

---

## EXPERIMENTE ZUR MODENSYNTHESЕ IM VERSUCHSAUFBAU MIT AXIALVENTILATOR

---

### K.1 AUFBAU UND BETRIEB DES AXIALVENTILATORS



Abbildung K.1: Blick in den Kanaleinlass auf den Rotor des Axialventilators (links) und auf eine Gehäusestrebe ohne und mit in Position 3 aufgesetztem Blech zur Verringerung des Abstandes zum stromauf liegenden Rotor(rechts).

Abbildung K.1 zeigt eine Ansicht stromauf des Rotors. Bei dem Ventilator handelt es sich um die Modifikation eines für industrielle Anwendungen konzipierten Ventilators der Firma Adrian. Zur Erhöhung der Blattfolgefrequenz wurde die Anzahl Rotorblätter im Vergleich zur Standardausführung auf  $B = 24$  Rotor-Blätter verdoppelt. Der Ventilator besitzt stromab des Rotors kein Leitrad, sondern lediglich fünf äquidistant über den Umfang verteilte, unprofilierte Streben. Die Streben bilden die Unterstützung des Motorgehäuses und haben einen relativ zum Rotor vergrößerten axialen Abstand.

Die Drehfrequenz des Gleichstrommotors wurde mit Hilfe eines Frequenzumrichters des Typs Danvoss VLT 5008 eingestellt und ist auf maximal  $f_{\text{Rotor}} = 55$  Hz begrenzt. Drehzahlschwankungen des Rotors wurden durch einen im Frequenzumrichter enthaltenen Regelkreis minimiert und betragen etwa 0.1%. Der Arbeitspunkt des Ventilators konnte mit Hilfe von in den Kanalaustritt eingeschobenen Sieben variiert werden. Bei der Standard-Siebeinstellung und einer Drehfrequenz von  $f_{\text{Rotor}} = 50$  Hz betragen die durch den Ventilator erzeugte Druckerhöhung  $\Delta p_0 = 870$  Pa und die Strömungsgeschwindigkeit  $U_x = 12.3$  m/s, was bei einer Labortemperatur von  $T = 20^\circ \text{C}$  einer Machzahl von  $M_x = 0.036$  entspricht. Die aerodynamischen Kenndaten des Ventilator

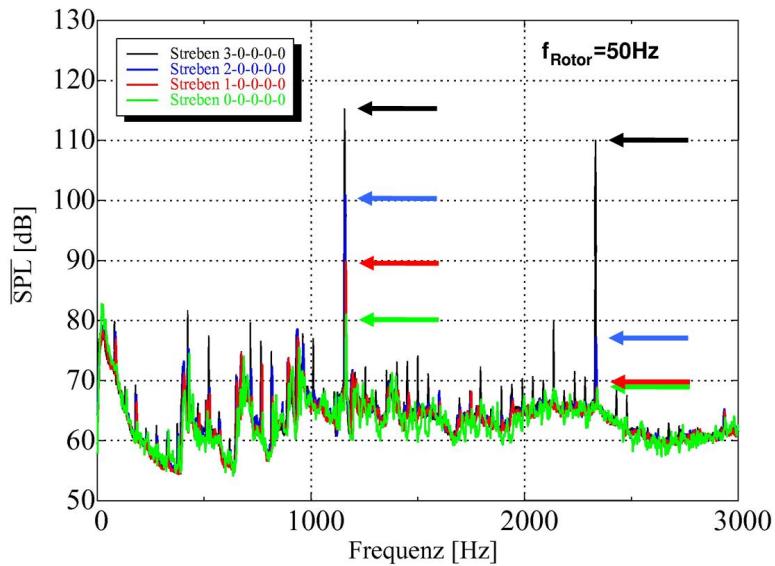


Abbildung K.2: Gemitteltes Schalldruckspektrum des Axialventilators bei einer Drehfrequenz von 50 Hz. Auf der stromab liegenden Seite wurden vier unterschiedliche Abstände zwischen Rotor und einer der fünf Gehäusestreben eingestellt.

sind angesichts des fehlenden Leitrades als nicht optimal einzustufen. Bei dieser Einschätzung ist allerdings zu berücksichtigen, dass das Hauptkriterium bei der Modifikation des Versuchsventilators die Anregung von Rotor-Stator-Interaktionstönen mit hohen Blattfolgefrequenzen und großen stabilen Schallpegeln war.

Wie im Messsteuerungsschema in Abbildung 7.7 angedeutet, konnte im Versuchsbetrieb die Rotordrehzahl vom Steuerungs-PC aus eingestellt werden. Hierzu wurde eine RS-485-Schnittstelle des Frequenzumrichters genutzt. Auf der Rotorwelle des Ventilators wurde ein Drehgeber der Firma Baumer installiert. Er lieferte mit Hilfe einer nach geschalteten Elektronik sowohl ein 1 Puls pro Umdrehung-Signal als auch ein 72 Pulse pro Umdrehung-Signal. Beide Signale wurden auf die DSP-Einsteckkarte gelegt und dienten dort als Triggersignal für die Wandlungsprozesse sowie als Referenz für die Datenanalyse.

## K.2 AKUSTISCHE ANREGUNG DES AXIALVENTILATORS

Bei der maximalen Rotordrehfrequenzen von  $f_{\text{Rotor}} = 55$  Hz betrug die Grundharmonische der Blattfolgefrequenz 1320 Hz und lag damit nahezu vollständig in dem Frequenzbereich, der mithilfe der DSP-Karte analysiert werden konnte. Durch die Interaktion der Rotornachläufe mit den Gehäusestreben bestand der Formel von Tyler und Sofrin (1.2) zufolge das Schallfeld aus Moden der azimutalen Ordnungen  $m_{TS} = \hbar B \pm sV = 1 \cdot 24 \pm s_5 = \dots, -6, -1, 4, \dots$ , wobei im überwiegenden Teil des Drehzahlbereichs nur die Mode  $-1, 0$  ausbreitungsfähig war. In der Referenzkonfiguration wurden die Interaktionsmoden nur mit geringen Pegeln angeregt. Durch Aufschrauben von Blechen konnten jedoch verkürzte axiale Abstände der Gehäusestreben zum Rotor realisiert und damit Interaktionsmoden deutlich höherer Pegel erzeugt werden. Der Einfluss ist in Abbildung K.2 anhand der Verstellung nur einer Gehäusestrebe illustriert. Die Zahl

o bezeichnet dabei den größten und die Zahl 3 den kleinsten Abstand zwischen Rotor und Strebe. Das Schalldruckspektrum berechnet sich aus der Mittelung über 20 in dem drehbaren Messegemünt II installierten Mikrofone, die kontinuierlich in Umfangsrichtung um  $360^\circ$  traversiert wurden. Zum Ausgleich von Drehzahlschwankungen wurde das in Abschnitt 3.1 beschriebene Verfahren der adaptiven Neuabtastung angewendet. Die im Folgenden dargestellten Untersuchungen wurden in der Strebenkonfiguration 2-2-2-2-2 durchgeführt.

### K.3 STREUUNG AM VENTILATOR UND AN DER EINLAUFDÜSE

Für die Experimente zur aktiven Lärminderung wird der reflexionsarme Kanalabschluss auf der Einlaufseite durch die Kombination aus Düse und Axialventilator ersetzt. Um der Frage nach zu gehen, wie sich diese veränderten Randbedingungen auf die angeregten Modenamplituden auswirken, wurden Untersuchungen mit einem einzelnen aktiven Lautsprecher in der in Tabelle 7.2 angegebenen Konfiguration mit zwei montierten Aktuatorringen und mit stehendem sowie laufendem Rotor durchgeführt.

Das Ergebnis der Untersuchungen ist in Abbildung K.3 am Beispiel der Moden (2,0) und (-2,0) illustriert. Bei stehendem Rotor unterscheiden sich die Modeamplituden kaum voneinander. Die starke Welligkeit lässt auf große Reflexionen der vom Modengenerator entgegen der Strömungsrichtung abgestrahlten Modenamplituden  $A_{mn}^{\leftarrow}$  schließen, welche sich in der Mikrofonsektion mit den direkt in Strömungsrichtung abgestrahlten Modenamplituden  $A_{mn}^{\rightarrow}$  überlagern. Die beiden zusätzlich eingezeichneten Kurven dienen der Identifikation von Reflexionsstellen.

Am Ventilator können Reflexionen am Rotor, an den Streben und am Motorgehäuse auftreten. Für ein aus V-Schaufeln bestehendes Gitter gilt im Allgemeinen, dass eine einfallende Mode der Ordnung  $m = \mu$  in die Ordnungen  $m_j = \mu - j \cdot V$  ( $j = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) gestreut wird [29]. Am stehenden Rotor tritt aufgrund der hohen Blattzahl im betrachteten Frequenzbereich keine Streuung in andere Modenordnungen auf. Offenbar findet jedoch eine relativ starke Reflexion in die gleiche Modenordnung statt: Die rote Kurve, die für eine Reflexionsstelle an der mittleren axialen Position des Rotors  $x_{r2} = -2.295$  m und für einen – frequenzunabhängigen – Reflexionsfaktor von  $r_{(2,0),2} = -0.45$  berechnet wurde, gibt die gemessenen Modenamplituden im Mittel recht gut wieder. An den fünf Streben des Ventilators werden die Moden (2,0) und (-2,0) theoretisch zusätzlich in die ausbreitungsfähigen Moden (-3,0) bzw. (3,0) gestreut. Hier nicht dargestellte Untersuchungen haben ergeben, dass alle von den Streben – wie auch am Motorgehäuse – verursachte Streuanteile vernachlässigbar sind.

Auffällig ist der relativ identische Kurvenverlauf der beiden Moden (2,0) und (-2,0). Laut einer von Hanson ausgeführten analytischen Studie [46] hängen Reflexion und Transmission vom Ausbreitungswinkel der Mode relativ zum Anstellwinkel der Schaufeln ab und hätten sich daher für die in positiver bzw. negativer Umfangsrichtung drehenden Moden frequenzabhängig unterscheiden müssen. Auch für den Extremfall sehr großer Ausbreitungswinkel, wie sie im untersuchten Frequenzbereich beispielsweise in der Nähe der Cut-on-Frequenz der Moden (3,0) und (-3,0) auftreten, konnte kein Unterschied gefunden werden. Eine mögliche Erklärung ist der flache Anstellwinkel der

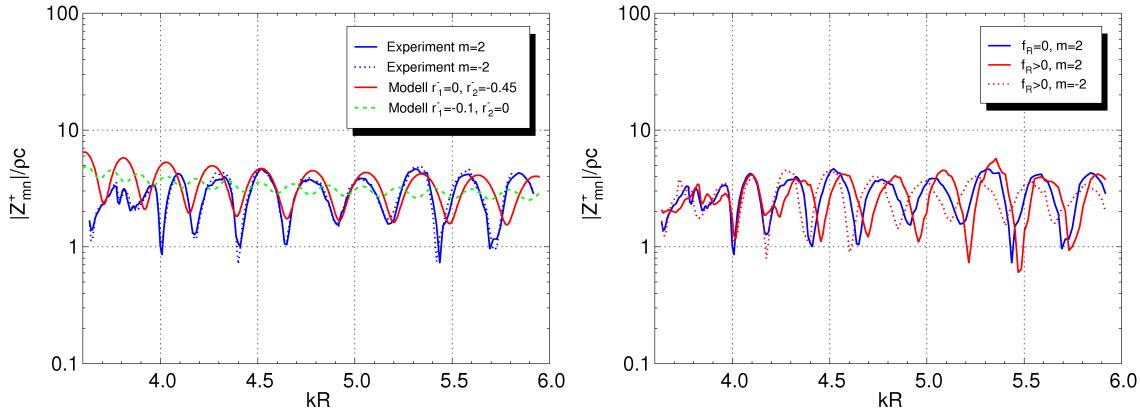


Abbildung K.3: Einfluss von Ventilator und Düse auf die stromab des Modengenerators gemessenen Moden  $(2, 0)$  und  $(-2, 0)$ . Das linke Bild zeigt das Messergebnis für stehenden Rotor im Vergleich mit Modellrechnungen für zwei Reflexionsstellen. Im rechten Bild ist der Einfluss des mit wachsender Drehzahl betriebenen Rotors dargestellt.

Blätter und die relativ hohe *Solidity*, die aus der nachträglichen Verdopplung der Rotorblattzahl bei unveränderter Sehnenlänge resultiert.

Um einen Eindruck vom potentiellen Einfluss der Düse zu bekommen, wurde die grün gestrichelte Kurve für die axiale Düsenposition  $x_{r1} = -3.485$  m, einen Reflexionsfaktor von  $r_{(2,0),1}^- = -0.1$  und Transmissionsfaktoren  $t_{(2,0),2}^- = t_{(2,0),2}^+ = 1$  berechnet. Die resultierende Welligkeit stimmt aufgrund des größeren räumlichen Abstands nicht mit den gemessenen Amplitudenverläufen überein, d. h. Reflexionen am Einlauf sind scheinbar vernachlässigbar. Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit Zorumskis Berechnungen [155], die eine signifikante Streuung nur bei sehr tiefen Frequenzen und in der Nähe von Cut-on-Frequenzen vorhersagen. Angemerkt werden soll trotzdem, dass auch eine Überlagerung von Reflexionen an Düse und Rotor zu keiner verbesserten Anpassung führten.

Der Einfluss des drehenden Rotors ist im rechten Diagramm in Abbildung K.3 dargestellt (zur besseren Übersichtlichkeit wurde die Kurve der Mode  $(-2, 0)$  für den Fall des stehenden Rotors nicht eingezeichnet). In der ANC-Anwendung muss die Frequenz  $f_t$  des vom Modengenerator angeregten Sekundärschallfeldes mit der vom Ventilator angeregten Blattfolgefrequenz identisch sein. Zur besseren Analyse der Modenstreuung wurden hier die beiden Frequenzen jedoch leicht verstimmt: Die Drehfrequenz des Rotors variierte mit der Testfrequenz gemäß

$$f_R = \text{BPF}/24 = 0.9 f_t/24. \quad (\text{K.1})$$

Hanson [46] zufolge wird die einfallende Mode der azimutalen Ordnung  $m = \mu$  in verschiedene Frequenzen  $f_h = f_t - h \cdot B \cdot f_R$  und die Ordnungen  $m_h = \mu + h \cdot B$  gestreut, wobei  $B$  die Rotorblattzahl bezeichnet und  $h = \dots, -1, 0, 1, \dots$  ist. Für die hier betrachtete nullte Streuharmonische gilt  $m_h = \mu$ , d. h. die azimutale Ordnung bleibt bei der Reflexion erhalten. Die relative Verschiebung der Amplitudenmaxima auf der Frequenzachse kann mit der rotierenden Randbedingung erklärt werden, welche sich im entgegen gesetzten Sinne auf die in positiver bzw. negativer azimutaler Richtung drehenden Moden

auswirkt. Dabei ist die Tendenz festzustellen, dass mit zunehmender Drehzahl die Reflexionen der sich in Richtung des Rotors drehenden Mode  $(-2, 0)$  abnehmen, während die Reflexionen der Mode  $(2, 0)$  anwachsen.



# L

---

## VERSUCHSVARIANTEN ZUR ERPROBUNG DER MODENSYNTHESЕ

---

	LAUTSPRECHERARRAY		TEMPERATUR [°C]
	AKTIV	MONTIERT	
A1	1 - 0 - 0	1 - 0 - 0	22.3
A6	1 - 0 - 0	4 - 0 - 0	22.4
A7	1 - 0 - 0	8 - 0 - 0	22.6
A15	1 - 0 - 0	8 - 4 - 0	22.5
A16	1 - 0 - 0	8 - 8 - 0	21.3
A17	1 - 0 - 0	8 - 8 - 8	22.8
A23	1 - 0 - 0	1 - 8 - 0	22.1
A24	1 - 0 - 0	1 - 0 - 8	22.1
A31	0 - 1 - 0	8 - 8 - 8	23.8
A32	0 - 0 - 1	8 - 8 - 8	24.2
A33	0 - 1 - 0	8 - 8 - 0	24.9
A34	0 - 0 - 1	8 - 0 - 8	24.6
A35	1 - 0 - 0	8 - 0 - 8	22.0
W1	1 - 0 - 0	1 - 0 - 0	25.7
W2	1 - 0 - 0	8 - 0 - 0	25.4
W3	1 - 0 - 0	8 - 8 - 0	26.1

Tabelle L.1: Konfigurationen des Modengenerators in den Experimenten zur Anregung einer einzelnen Lautsprechereinheit. Die Messungen wurden mit beidseitig reflexionsarmen Kanalabschlüssen und mit Regelung des Volumenfluss am Trichterausgang umgesetzt. In den Messungen W1 bis W3 waren die Lautsprecheröffnungen an der Kanalwand mit einer Gaze abgedeckt. In den Messungen der A-Serie wurden die Endstufen Dynacord L 300 und in den Messungen der W-Serie die Endstufen KME SPA 240E zur Verstärkung der Lautsprechersignale eingesetzt. In allen Fällen wurde eine Radialmodenanalyse des angeregten Schallfelds durchgeführt.

	LAUTSPRECHERARRAY		ZIEL-MODEN	TEMPERATUR [°C]	MODENANALYSE	
	AKTIV	MONTIERT			A MA	R MA
D <sub>1</sub>	2 - o - o	2 - o - o	m = o/1	22.1	x	x
D <sub>1</sub>	2 - o - o	2 - o - o	m = o	22.1	x	
D <sub>2</sub>	2 - o - o	4 - o - o	m = o/1	22.6	x	
D <sub>3</sub>	4 - o - o	4 - o - o	m = o/1/2	22.5	x	
D <sub>4</sub>	2 - o - o	8 - o - o	m = o/1	22.8	x	
D <sub>5</sub>	4 - o - o	8 - o - o	m = o/1/2	22.8	x	
D <sub>6</sub>	8 - o - o	8 - o - o	m = o/1/2/3/4	22.8	x	x
D <sub>7</sub>	8 - o - o	8 - 1 - o	m = o/1/2/3/4	22.9	x	
D <sub>9</sub>	8 - o - o	8 - 4 - o	m = o/1/2/3/4	23.4	x	
D <sub>10</sub>	8 - o - o	8 - 8 - o	m = o/1/2/3/4	24.1	x	x
D <sub>11</sub>	8 - o - o	8 - 8 - 8	m = o/1/2/3/4	23.1	x	x
D <sub>12</sub>	8 - o - o	8 - o - 8	m = o/1/2/3/4	22.8	x	
D <sub>13</sub>	o - 8 - o	8 - 8 - o	m = o/1/2/3/4	23.9	x	x
D <sub>14</sub>	o - 8 - o	8 - 8 - 8	m = o/1/2/3/4	22.9	x	
D <sub>22</sub>	o - 8 - o	1 - 8 - o	m = o/1/2/3/4	23.6	x	x
D <sub>23</sub>	o - 8 - o	o - 8 - o	m = o/1/2/3/4	23.1	x	x

Tabelle L.2: Konfigurationen des Modengenerators in den Experimenten zur gezielten Anregung einer azimutalen Modenordnung mit einem Lautsprecherring. Die Messungen wurden mit beidseitig reflexionsarmen Kanalabschlüssen und mit den Endstufen Dynacord L 300 zur Verstärkung der Lautsprechersignale umgesetzt. In den meisten Fällen wurde nur eine Azimutalmodenanalyse des angeregten Schallfelds mit Mikrofonring 1 durchgeführt.

	LAUTSPRECHERARRAY		TEMPERATUR [°C]	ROTORBETRIEB
	AKTIV	MONTIERT		
X <sub>1</sub>	1 - o - o	1 - o - o	22.3	nein
X <sub>3</sub>	1 - o - o	8 - 8 - o	22.4	nein
Y <sub>1</sub>	1 - o - o	1 - o - o	26.0	ja
Y <sub>2</sub>	1 - o - o	8 - o - o	27.0	ja
Y <sub>3</sub>	1 - o - o	8 - 8 - o	25.7	ja
Y <sub>7</sub>	1 - o - o	8 - 8 - o	25.9	ja

Tabelle L.3: Konfigurationen des Modengenerators in den Experimenten zur Anregung einer einzelnen Lautsprechereinheit. Die Messungen wurden mit angeschlossenem Axialventilator, mit Regelung des Volumenfluss am Trichterausgang, mit Gazeabdeckung der Lautsprecheröffnungen an der Kanalwand und mit den Endstufen KME SPA 240E zur Verstärkung der Lautsprechersignale umgesetzt. Die Rotordrehzahl wurde für jede Testfrequenz  $f_t$  so eingestellt, dass für die Blattfolgefrequenz des Ventilators  $BPF = 0.9f_t$  galt. In allen Fällen wurde eine Radialmodenanalyse des angeregten Schallfelds durchgeführt.

	LAUTSPRECHERARRAY		ZIEL-MODEN	TEMPERATUR	ROTORBETRIEB
	AKTIV	MONTIERT		[°C]	
Z <sub>0</sub>	8 – o – o	8 – 8 – o	m = 0/1/2	26.0	ja
Z <sub>1</sub>	o – 8 – o	8 – 8 – o	m = 0/1/2	26.0	ja

Tabelle L.4: Konfigurationen des Modengenerators in den Experimenten zur gezielten Anregung einer azimutalen Modenordnung mit einem Lautsprecherring. Die Messungen wurden mit angeschlossenem Axialventilator, mit Gazeabdeckung der Lautsprecheröffnungen an der Kanalwand und den Endstufen KME SPA 240E zur Verstärkung der Lautsprechersignale umgesetzt. Die Rotordrehzahl wurde für jede Testfrequenz  $f_t$  so eingestellt, dass für die Blattfolgefrequenz des Ventilators  $BPF = 0.9f_t$  galt. In allen Fällen wurde eine Radialmodenanalyse des angeregten Schallfelds durchgeführt.

	LAUTSPRECHERARRAY		ZIEL-MODEN		TEMPERATUR		
	AKTIV	MONTIERT	A <sub>o,o</sub> <sup>+</sup>	arg(A <sub>o,o</sub> <sup>+</sup> )	A <sub>i,o</sub> <sup>+</sup>	arg(A <sub>o,i</sub> <sup>+</sup> )	[°C]
V <sub>1</sub>	8 – 8 – o	8 – 8 – o	2 Pa	0	0 Pa	0	25.3
V <sub>2</sub>	8 – 8 – o	8 – 8 – o	0 Pa	0	2 Pa	0	24.7
V <sub>3</sub>	8 – 8 – o	8 – 8 – o	2 Pa	0	0 Pa	0	26.0
V <sub>4</sub>	8 – 8 – o	8 – 8 – o	0 Pa	0	2 Pa	0	26.1

Tabelle L.5: Konfigurationen des Modengenerators in den Experimenten zur gezielten Anregung zweier radialen Modenordnungen mit zwei Lautsprecherringen. Die Messungen wurden mit beidseitig reflexionsarmen Kanalabschlüssen, mit Gazeabdeckung der Lautsprecheröffnungen an der Kanalwand und den Endstufen KME SPA 240E zur Verstärkung der Lautsprechersignale umgesetzt. In allen Fällen wurde eine Radialmodenanalyse des angeregten Schallfelds durchgeführt.



---

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [1] *Akustik - Bestimmung der von Ventilatoren und anderen Strömungsmaschinen in Kanäle abgestrahlten Schalleistung - Kanalverfahren (ISO 5136 -2003)*, 2003.
- [2] ALI, A. A., O. V. ATASSI und H. M. ATASSI: *Acoustic eigenmodes in a coannular duct with a general swirling flow*. In: *6th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; June 2000, Lahaina, USA*, Nr. AIAA 2000-1954, 2000.
- [3] ALONSO, J. S. und R. A. BURDISSO: *Green's Functions for the Acoustic Field in Lined Ducts with Uniform Flow*. AIAA Journal, 45(11):2677–2687, 2007.
- [4] ARNOLD, F.: *Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Schalleistungsbestimmung in Strömungskanälen*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 7, Nr. 353, 1999.
- [5] ARNOLD, F., U. TAPKEN, R. BAUERS und J. ZILLMANN: *Turbomachinery Exhaust Noise Radiation Experiments – Part 1: Polar Directivity Measurements*. In: *14th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 5-7 May 2008, Vancouver, Canada*, Nr. AIAA 2008-2857, 2008.
- [6] ATASSI, H., A. ALI, O. ATASSI und I. VINOGRADOV: *Scattering of incident disturbances by an annular cascade in a swirling flow*. Journal of Fluid Mechanics, 499:111–138, 2004.
- [7] ATASSI, H. M. und M. M. LOGUE: *Fan Broadband Noise in Anisotropic Turbulence*. In: *15th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 11-13 May 2009, Miami, Florida*, Nr. AIAA 2009-3148, 2009.
- [8] ATASSI, O. V.: *Computing the sound power in non-uniform flow*. Journal of Sound and Vibration, 266(1):75 – 92, 2003.
- [9] BAI, M., J. JENG und C. CHEN: *Adaptive Order Tracking Technique Using Recursive Least-Square Algorithm*. Journal of Vibrations and Acoustics, 124(4):502–511, 2002.
- [10] BAUERS, R. und U. TAPKEN: *Separation of hydrodynamic perturbations in acoustic liner insertion loss measurements at a fan rig*. In: *18th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 4-6 June 2012, Colorado Springs, Colorado*, Nr. AIAA 2012-2277, 2012.
- [11] BÖHNING, P., L. ENGHARDT, W. NEISE und P. KÖLTZSCH: *Entwicklung einer Software zur Kurzzeit-Modenanalyse*. In: *Fortschritte der Akustik DAGA 2000*, S. 656–657, 2000.
- [12] BROOKS, C. J.: *Prediction and control of sound propagation in turbofan engine bypass ducts*. Dissertation, University of Southampton, 2007.
- [13] BROSZAT, D., F. KENNEPOHL, U. TAPKEN, M. MOSER und F. HEITMEIR: *Validation of an Acoustically 3d-designed Turbine Exit Guide Vane*. In: *16th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 7-9 Jun 2010, Stockholm, Sweden*, Nr. AIAA 2010-3806, 2010.
- [14] BROSZAT, D., D. KORTE, U. TAPKEN und M. MOSER: *Validation of turbine noise prediction tools with acoustic rig measurements*. In: *15th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 11-13 May 2009, Miami, Florida*, Nr. AIAA 2009-3283, 2009.

- [15] BROSZAT, D., U. TAPKEN, L. ENGHARDT, D. LENGANI und A. MARN: *Validation of an integrated acoustic absorber in a turbine exit guide vane*. In: *17th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 05-08 June 2011, Portland, Oregon*, Nr. AIAA 2011-2915, 2011.
- [16] BUSSE, S., L. ENGHARDT und U. TAPKEN: *Microphone forebody/nose cone measurements, investigating the influence of shape on the acoustic behaviour*. DLR Interner Bericht IB 92517-08/B2, DLR, 2008.
- [17] CAROLUS, T.: *Ventilatoren - Aerodynamischer Entwurf, Schallvorhersage, Konstruktion*. Vieweg+Teubner Verlag, 2. Aufl., 2009.
- [18] CASTRES, F., P. JOSEPH und J. ASTLEY: *Mode detection in turbofan inlets from acoustic pressure measurements in the radiated field*. In: *10th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 10-12 May 2004, Manchester, UK*, Nr. AIAA 2004-2953, 2004.
- [19] CASTRES, F. O. und P. F. JOSEPH: *Experimental investigation of an inversion technique for the determination of broadband duct mode amplitudes by the use of near-field sensor arrays*. Journal of the Acoustical Society of America, 122(2):848–859, 2007.
- [20] CASTRES, F. O. und P. F. JOSEPH: *Mode detection in turbofan inlets from near field sensor arrays*. The Journal of the Acoustical Society of America, 121(2):796–807, 2007.
- [21] CHUNG, J.: *Rejection of flow noise using a coherence function method*. Journal of the Acoustical Society of America, 62:388–395, 1977.
- [22] DAHL, M. D. und D. L. SUTLIFF: *Numerical Technique for Analyzing Rotating Rake Mode Measurements in a Duct with Passive Treatment and Shear Flow*. In: *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 21-23 May, Roma, Italy*, Nr. AIAA 2007-3439, 2007.
- [23] DOAK, P.: *Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (I): The effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern*. Journal of Sound and Vibration, 31(1):1–72, 1973.
- [24] EHRENFRIED, K.: *Strömungsaustik, Skript zur Vorlesung*. Mensch & Buch Verlag, Berlin, 2004. ISBN: 3-89820-699-8.
- [25] ENGHARDT, L., A. HOLEWA und U. TAPKEN: *Comparison of different analysis techniques to decompose a broad-band ducted sound field in its mode constituents*. In: *13th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 21–23 May 2007, Rome, Italy*, Nr. AIAA 2007-3520, 2007.
- [26] ENGHARDT, L. und C. LOWIS: *Broadband Sound Power Determination in Flow Ducts*. In: *Institute of Acoustics, Vol 28 (Part 1). Institute of Acoustics Spring Conference 2006, 03-04.04.2006, Southampton, U.K*, 2006.
- [27] ENGHARDT, L., T. RAITOR, U. TAPKEN und A. GIEBMANN: *Abschlussbericht: Neuartige aktive/passive Systeme zur Geräuschminderung an Triebwerken - NaSGeT*. Projektbericht, Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie, 2009.
- [28] ENGHARDT, L., U. TAPKEN, O. KORNOW und F. KENNEPOHL: *Acoustic Mode Decomposition of Compressor Noise under Consideration of Radial Flow Profiles*. In: *11th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; May 2005, Monterery, USA*, Nr. AIAA 2005-2833, 2005.

- [29] ENGHARDT, L., U. TAPKEN, W. NEISE, F. KENNEPOHL und K. HEINIG: *Turbine Blade / Vane Interaction Noise: Acoustic Mode Mode Analysis using In-Duct Sensor Rakes*. In: *7th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; May 2001, Maastricht, Netherlands*, Nr. AIAA 2001-2153, 2001.
- [30] ENGHARDT, L., U. TAPKEN, W. NEISE und P. SCHIMMING: *Experimentelle Untersuchungen zur aktiven Schallminderung*. Projektbericht, AG Turbo, Turbotech II, Teilprojekt 1.231 Förderkennzeichen 0327040D, 2000.
- [31] ENGHARDT, L., U. TAPKEN, W. NEISE, P. SCHIMMING, R. MAIER und J. ZILLMANN: *Active control fan noise from high-byass ratio aeroengines: experimental results*. The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society, 106:501–506, 2002.
- [32] ENGHARDT, L., Y. ZHANG und W. NEISE: *Experimental verification of a radial mode analysis technique using wall-flush mounted sensors*. In: *Collected Papers from the Joint Meeting "Berlin 99" TU-Berlin, March 14-19, 1999, 137th regular meeting of the Acoustical Society of America, 2nd convention of the EAA: Forum Acusticum - integrating the 25th German Acoustics DAGA Conference*; ISBN 3-9804568-5-4, Bd. Paper 3pPA5, 1999.
- [33] ENGHARDT, L., Y. ZHANG, W. NEISE und F. KENNEPOHL: *Acoustical radial mode analysis at a three-stage low pressure axial compressor*. In: *VDI-GET-Tagung Turbokompressoren im industriellen Einsatz*, S. 337–346. VDI-Berichte 1425, 1998.
- [34] ENVIA, E.: *Fan Noise Reduction: An overview*. Techn. Ber. TM-2001-210699, NASA, 2001.
- [35] EWERT, R., O. KORNOW, C. POWLES, B. TESTER, J. DELFS und M. ROSE: *Spectral broadening of jet engine turbine tones*. In: *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (29th AIAA Aeroacoustics Conference), Vancouver, Canada, 5-7 May 2008*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.
- [36] FARASSAT, F., D. NARK und R. THOMAS: *The detection of radiated modes from ducted fan engines*. In: *7th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; May 2001, Maastricht, Netherlands*, Nr. AIAA 2001-2138, 2001.
- [37] FIRMA MONACOR: *Telefonische Mitteilung*. Juli 2005.
- [38] GADE, S., H. HERLUFSEN, H. KONSTANTIN-HANSEN und N. WISMER: *Order Tracking Analysis*. Technical Review 2, Brüel & Kjær A/S, 1995.
- [39] GENOULAZ, N., J. JULLIARD, E. BOUTY, R. MAIER, J. ZILLMANN, R. DOBRIETZ, L. E. A. MOREAU, A. ROURE und M. WINNIGER: *Experimental Validation of an Active Stator Technology Reducing Turbofan Engine Noise*. In: *13th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 21-23 May 2007, Rome, Italy*, Nr. AIAA 2007-3688, 2007.
- [40] GOLDSTEIN, M.: *Aeroacoustics*. McGraw-Hill, New York, 1976.
- [41] GOLUBEV, V. V. und H. M. ATASSI: *Acoustic-vorticity waves in swirling flows*. Journal of Sound and Vibration, 209(2):203 – 222, 1998.
- [42] GROENEWEG, J., T. SOFRIN, E. RICE und P. GLIEBE: *Aeroacoustics of Flight Vehicles – Theory and Practice, Vol. 1: Noise Sources*, Kap. Turbomachinery Noise, S. 151–204. Acoustical Society of America, 1994.

- [43] GROOT, J.: *Identifying Sound Sources in a Circular Flow Duct*. Training Period Report, Eindhoven University of Technology, Faculty of Mathematics and Computer Science und DLR, Institut für Antriebstechnik, Abt. Turbulenzforschung, 2005.
- [44] GUÉRIN, S., A. MOREAU und U. TAPKEN: *Relation between source models and acoustic duct modes*. In: *15th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 11-13 May 2009, Miami, Florida*, Nr. AIAA 2009-3364, 2009.
- [45] HALLEZ, R.: *Investigation of the Herschel-Quincke Tube Concept as a Noise Control Device for Turbofan Engines*. Diplomarbeit, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 2001.
- [46] HANSON, D.: *Acoustic Reflection and Transmission of Rotors and Stators Including Mode and Frequency Scattering*. In: *3rd AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, Atlanta, Georgia*, Nr. AIAA 97-1610, 1997.
- [47] HANSON, D. B.: *Acoustic Reflection and Transmission of 2-Dimensional Rotors and Stators, Including Mode and Frequency Scattering Effects*. Techn. Ber. NASA / CR-1999-20888o, NASA, 1997.
- [48] HAREL, P. und M. PERULLI: *Measurement, in a duct, of the space-structure of the discrete-frequency noise generated by an axial compressor*. Journal of Sound and Vibration, 23(4):487–506, 1972.
- [49] HEIDELBERG, L. und D. ELLIOTT: *A comparison of measured tone modes for two low noise propulsion fans*. In: *6th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 12-14 June 2000, Lahaina, USA*, Nr. AIAA 2009-1989, 2000.
- [50] HEIDELBERG, L. und D. HALL: *Inlet Acoustic Mode Measurements Using a Continuously Rotating Rake*. AIAA Journal of Aircraft, 32(4):761–767, 1995.
- [51] HEINIG, K.: *Ein Beitrag zur Berechnung der Schallemission mehrstufiger Verdichter und Turbinen von Flugzeugtriebwerken*. Dissertation, TU Berlin, 1994.
- [52] HOLSTE, F.: *Ermittlung der aerodynamischen Lärmquellen und Berechnung des abgestrahlten Schallfeldes mittels der im Nahfeld gemessenen Druckschwankungen am Beispiel eines Triebwerksmodells*. Fortschrittberichte VDI, Reihe 7, Nr. 272, 1995.
- [53] HOLSTE, F. und W. NEISE: *Noise Source Identification in a Propfan Model by Means of Acoustical Near Field Measurements*. Journal of Sound and Vibration, 203(4):641–665, 1997.
- [54] HULTGREN, L. S.: *Editorial: Emerging importance of turbine noise*. International Journal of Aeroacoustics, 10(1), 2011.
- [55] HUTCHESON, F. und C. FULLER: *An investigation of active control of ultra-high bypass turbofan noise using a boundary integral equation method*. In: *6th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; June 2000, Lahaina, USA*, Nr. AIAA-2000-1908, 2000.
- [56] INGARD, U. und H. ISING: *Acoustic Nonlinearity of an Orifice*. Journal of the Acoustical Society of America, 42(1):6–17, 1967.
- [57] JOHNSON, D. H. und D. E. DUDGEON: *Array Signal Processing: Concepts and Techniques*. Prentice Hall, 1993.

- [58] JOHNSON, M. E. und C. R. FULLER: *Development and Testing of a High Level Axial Array Duct Sound Source for the NASA Flow Impedance Test Facility*. Techn. Ber. CR-2000-210645, NASA, 2000.
- [59] JOPPA, P.: *Acoustic Mode Measurements in the Inlet of a Turbofan Engine*. AIAA Journal of Aircraft, 24(9), 1987.
- [60] JOSEPH, P. und C. L. MORFEY: *Multimode radiation from an unflanged, semi-infinite circular duct*. Journal of the Acoustical Society of America, 105(5):2590–2600, 1999.
- [61] JOSEPH, P., P. NELSON und M. FISHER: *Active control of fan tones radiated from turbofan engines. I. External error sensors*. Journal of the Acoustical Society of America, 106(2):766–778, 1999.
- [62] JOSEPH, P., P. NELSON und M. FISHER: *Active control of fan tones radiated from turbofan engines. II. Induct error sensors*. Journal of the Acoustical Society of America, 106(2):779–786, 1999.
- [63] JÜRGENS, W., B. PARDOWITZ, L. ENGHARDT und U. TAPKEN: *Separation of broadband noise sources in aeroengine ducts with respect to modal decomposition*. In: *17th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, 5-8 June 2011, Portland, Oregon*, Nr. AIAA 2011-2879, 2011.
- [64] JÜRGENS, W., U. TAPKEN, B. PARDOWITZ, P. KAUSCHE, G. J. BENNETT und L. ENGHARDT: *Technique to Analyze Characteristics of Turbomachinery Broadband Noise Sources*. In: *16th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, 7-9 June 2010, Stockholm, Sweden*, Nr. AIAA 2010-3979, 2010.
- [65] JUST, W., I. U. BORCHERS, H. ANTOINE, E. BOUTY, J. ZILLMANN und R. MAIER: *Control of fan noise by active stators*. In: *7th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 28-30 May 2001, Maastricht, Netherlands*, Nr. AIAA 2011-2154, 2001.
- [66] KAPLAN, B., E. NICKE und C. Voss: *Design of a highly efficient low-noise fan for ultra-high bypass engines*. In: *ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea and Air; 8-11 May 2006, Barcelona, Spain*, Nr. GT 2006-90363, 2006.
- [67] KERREBROCK, J.: *Small disturbances in turbomachine annuli with swirl*. AIAA Journal, 15:794–803, 1977.
- [68] KERSCHEN, E. und J. JOHNSTON: *A modal separation measurement technique for broadband noise propagating inside circular ducts*. Journal of Sound and Vibration, 76(4):499–515, 1981.
- [69] KIM, Y. und P. NELSON: *Estimation of acoustic source strength within a cylindrical duct by inverse methods*. Journal of Sound and Vibration, 275(1-2):391–413, 2004.
- [70] KIM, Y. und P. NELSON: *Optimal Regularisation of Acoustics Source Reconstruction by Inverse Methods*. Journal of Sound and Vibration, 275(3-5):463–487, 2004.
- [71] KÖHLER, W.: *The influence of the TCS on the circumferential mode distribution in the inlet of a fanrig (UFFA)*. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2012, June 11-15, 2012, Copenhagen, Denmark*, Nr. GT2012-69762, 2012.

- [72] KORNOW, O. und L. ENGHARDT: *Der Einfluss des radialen Strömungsprofils auf die Schallausbreitung von höheren Moden in zylindrischen und koaxialen Strömungskanälen.* DLR Interner Bericht IB 92517-05/B1, DLR, 2005.
- [73] KOSCHEL, S.: *Filterung der von Turbofan-Modellen angeregten breitbandigen Geräuschkomponenten mittels axialer Wellenzahlanalyse.* Bachelorarbeit, Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik, Technische Universität Berlin, 2013.
- [74] KOUSEN, K.: *Eigenmode analysis of ducted flows with radially dependent axial and swirl components.* In: *1st AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, Munich, Germany*, Nr. AIAA 95-160, 1995.
- [75] LAN, J., J. PREMO und D. SUTLIFF: *Inlet mode measurements with an inflow control device microphone array.* In: *8th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 17-19 Jun 2002, Breckenridge, Colorado*, Nr. AIAA 2002-2563, 2002.
- [76] LEWY, S.: *Inverse method predicting spinning modes radiated by a ducted fan from free-field measurements.* Journal of the Acoustical Society of America, 117(2):744–750, 2005.
- [77] MAIER, R., J. ZILLMANN, A. ROURE, M. WINNINGER, L. ENGHARDT, U. TAPKEN, W. NEISE, H. ANTOINE und E. BOUTY: *Active control of fan noise from aircraft engines.* In: *7th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; May 2001, Maastricht, Netherlands*, Nr. AIAA 2001-2220, 2001.
- [78] McALPINE, M. und M. FISHER: *Buzz Saw Noise: A Comparison of Measurement with Prediction.* Journal of Sound and Vibration, 290:1202–1233, 2006.
- [79] MCARDLE, J., W. JONES, L. HEIDELBERG und L. HOMYAK: *Comparison of Several Inflow Control Devices for Flight Simulation of Fan Tone Noise using a JT15D-1 Engine.* Techn. Ber. Report TM-81505, NASA, 1980.
- [80] MECHEL, F. (Hrsg.): *Formulas of Acoustics.* Nr. ISBN 3-540-42548-9. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1st Aufl., 2002.
- [81] MICHALKE, A.: *On the propagation of sound generated in a pipe of circular cross-section with uniform mean flow.* Journal of Sound and Vibration, 134(2):203–234, 1989.
- [82] MICHALKE, A., F. ARNOLD und F. HOLSTE: *On the coherence of the sound field in a circular duct with uniform mean flow.* Journal of Sound and Vibration, 190(2):261–271, 1996.
- [83] MOINIER, P. und M. B. GILES: *Eigenmode Analysis for Turbomachinery Applications.* Journal of Propulsion and Power, 21(6):973–978, 2005.
- [84] MOORE, C.: *In-duct investigation of subsonic fan 'rotor alone' noise.* Journal of the Acoustical Society of America, 51:1471–1482, 1972.
- [85] MOORE, C.: *Measurement of Radial and Circumferential Modes in Annular and Circular Ducts.* Journal of Sound and Vibration, 62(2):235–256, 1979.
- [86] MORFEY, C.: *Sound transmission and generation in ducts with flow.* Journal of Sound and Vibration, 14(1):37 – 55, 1971.

- [87] MORFEY, C.: *Rotating blades and aerodynamic sound*. Journal of Sound and Vibration, 28(3):587–617, 1973.
- [88] MORFEY, C. und M. FISHER: *Shock-Wave Radiation from a Supersonic Ducted Rotor*. The Aeronautical Journal of The Royal Aeronautical Society, 74:579–585, 1970.
- [89] MÖSER, M. (Hrsg.): *Messtechnik der Akustik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st Aufl., 2010.
- [90] MOSER, M., G. KULHANEK, F. HEITMEIR und G. KAHL: *Construction of a Subsonic Test Turbine Facility for Experimental Investigations of Sound Generation and Propagation for Low Pressure Turbines*. In: XVIII International Symposium on Air Breathing Engines (ISABE), 2-7 Sep 2007, Beijing, China, Nr. ISABE-2007-1366, 2007.
- [91] MOSER, M., U. TAPKEN, L. ENGHARDT und L. NEUHAUS: *An investigation of low pressure turbine blade-vane interaction noise: measurements in a 1.5-stage rig*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy, 223(6):687–695, 2009.
- [92] MUGRIDGE, B.: *The measurement of spinning acoustic modes generated in an axial flow fan*. Journal of Sound and Vibration, 10(2):227–246, 1969.
- [93] MÜLLER, D., H.-J. SCHULZ, G. ZITOUNI und W. BAUMANN: *Europes Largest Aero Acoustic Test Facility for Aero Engine Fans – The Development and Operation of the AneCom AeroTest Anechoic Chamber*. In: 11th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; May 2005, Monterery, USA, Nr. AIAA 2005-3050, 2005.
- [94] MUNGUR, P. und G. GLADWELL: *Acoustic wave propagation in a sheared fluid contained in a duct*. Journal of Sound and Vibration, 9(1):28–48, 1969.
- [95] NAGAI, K. und U. TAPKEN: *Acoustic resonances of mode synthesizers in flow ducts: An analytical and experimental study*. DLR Interner Bericht IB 92517-06/B13, DLR, 2006.
- [96] NEISE, W.: *Lärm und Lärmbekämpfung bei Ventilatoren - Eine Bestandsaufnahme*. Techn. Ber. 80-16, DFVLR-Forschungsbericht, 1980.
- [97] NEISE, W. und U. MICHEL: *Aerodynamic Noise of Turbomachines*. DLR Interner Bericht 22314-94/B5, DLR, 1994.
- [98] NELSON, P.: *A review of some inverse problems in acoustics*. International Journal of Acoustics and Vibration, 6(3):118–134, 2001.
- [99] NELSON, P. und S. YOON: *Estimation of Acoustic Source Strength by Inverse Methods: Part I, Conditioning of the Inverse Problem*. Journal of Sound and Vibration, 233(4):643–668, 2000.
- [100] NIJBOER, R.: *Eigenvalues and eigenfunctions of ducted swing flows*. In: 7th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; May 2001, Maastrichty, Netherlands, Nr. AIAA 2001-2178, 2001.
- [101] OVENDEN, N., W. EVERSMAN und S. RIENSTRA: *Cut-on cut-off transition in flow ducts: comparing multiple-scales and finite-element solutions*. In: 10th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 10-12 May 2004, Manchester, UK, Nr. AIAA 2004-2945, 2004.

- [102] OVENDEN, N. und S. RIENSTRA: *Mode-Matching Strategies in Slowly Varying Engine Ducts*. AIAA Journal, 42(9):1832–1840, 2004.
- [103] ÖZYÖRÜK, Y. und B. TESTER: *Application of frequency-domain linearized Euler solutions to the prediction of aft fan tones and comparison with experimental measurements on model scale turbofan exhaust nozzles*. Journal of Sound and Vibration, 330(16):3846 – 3858, 2011. {COMPUTATIONAL} AERO-ACOUSTICS (CAA) {FOR} {AIRCRAFT} {NOISE} {PREDICTION} - {PART} A.
- [104] PICKETT, G., T. SOFRIN und R. WELLS: *Method of fan sound mode structure determination*. Technical Report CR-135293, NASA, 1977.
- [105] PLA, F., Z. HU und D. L. SUTLIFF: *Active Control of Fan Noise – Feasibility Study. Vol.3: Active Fan Noise Cancellation in the NASA Lewis Active Noise Control Fan Facility*. Techn. Ber. CR-198511, NASA, 1996.
- [106] PLA, F. und H. RAJIYAH: *Active Control of Fan Noise – Feasibility Study. Vol.2: Cancelling Noise Source Design of an Acoustic Plate Radiator Using Piezoceramic Actuators*. Techn. Ber. CR-195440, NASA, 1995.
- [107] POSEY, J.: *A selected history of duct mode synthesis*. Journal of the Acoustical Society of America, 117(4):2387–2387, 2005.
- [108] PRESS, W., S. TEUKOLSKY, W. VETTERLING und B. P. FLANNERY: *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [109] PRIDMORE-BROWN, D.: *Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct*. Journal of Fluid Mechanics, 4:393–406, 1958.
- [110] ÅBOM, M.: *Modal Decomposition In Ducts Based On Transfer Functions Measurements between Microphone Pairs*. Journal of Sound and Vibrafion, 135(1):95–114, 1989.
- [111] RADEMAKER, E., P. SIJTSMA und B. TESTER: *Mode detection with an optimised array in a model turbofan engine intake at varying shaft speeds*. In: *7th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 28-30 May 2001, Maastricht, Netherlands*, Nr. AIAA 2001-2181, 2001.
- [112] REMINGTON, P., D. SUTLIFF und S. SOMMERFELDT: *Active control of low-speed fan tonal noise using actuators mounted in stator vanes. Part 1: Control system design and implementation*. In: *9th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 12-14 May 2003, Hilton Head, USA*, Nr. AIAA 2003-3190, 2003.
- [113] RICE, E.: *Multi-modal far field radiation patterns using cut-off ratio*. AIAA Journal, 16:906–911, 1979.
- [114] RICE, E. und M. HEIDMANN: *Modal propagation angles in a cylindrical duct with flow and their relation to sound propagation*. In: *Proceedings of the 17th Aerospace Science Meeting, 15-17 Jan 1979, New Orleans, USA*, Nr. Paper 79-0183, 1979.
- [115] RIENSTRA, S.: *Sound Transmission in Slowly Varying Circular and Annular Lined Ducts with Flow*. Journal of Fluid Mechanics, 380:279–296, 1999.
- [116] RISI, J., R. BURDISSO und C. FULLER: *Analytical investigation of active control of radiated inlet fan noise*. Journal of the Acoustical Society of America, 99(1):408–416, 1996.

- [117] SCHNEIDER, M.: *Der Einfluss der Zuströmbedingungen auf das breitbandige Geräusch eines Axialventilators.* Fortschrittberichte VDI, Reihe 7, Nr. 478, Düsseldorf, VDI-Verlag, 2006.
- [118] SCHWARZ, H. R. und N. KÖCKLER: *Numerische Mathematik.* Teubner, 2004.
- [119] SEINER, J. M.: *Development of a Spinning-Mode Synthesizer to Study Complex Propagating Duct Modes.* The Journal of the Acoustical Society of America, 49(1A):109–109, 1971.
- [120] SHANKAR, P.: *Acoustic Refraction and Attenuation in cylindrical and annular ducts.* Journal of Sound and Vibration, 22:233–246, 1972.
- [121] SIJTSMA, P. und H. ORSI: *Azimuthal and radial mode detection by a slowly rotating rake.* In: *19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 27-29 May, Berlin, Germany,* Nr. AIAA 2013-2244, 2013.
- [122] SIJTSMA, P. und J. ZILLMANN: *In-duct and far-field mode detection techniques.* In: *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 21-23 May, Roma, Italy,* Nr. AIAA 2007-3439, 2007.
- [123] SILVA, F., PH.GUILLEMAIN, J.KERGOMARD, B.MALLARONI und A.N.NORRIS: *Approximation formulae for the acoustic radiation impedance of a cylindrical pipe.* Journal of Sound and Vibration, 322(1-2):255–263, 2009.
- [124] SMITH, J. und R. BURDISSO: *Active Control of Inlet Noise from a Turbofan Engine using Inlet Wavenumber Sensors.* In: *5th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 10-12 May 1999, Bellevue, MA,* Nr. AIAA 99-1808, 1999.
- [125] SPITALNY, M., U. TAPKEN, C. FAUSTMANN und L. ENGHARDT: *Radial mode decomposition of sound fields in flow ducts under consideration of a rigid body like swirl.* In: *International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA), 15-17 Sep, Leuven, Belgium,* Nr. 169, 2014.
- [126] STAHL, B.: *Experimenteller Beitrag zur Schallerzeugung durch die Turbulenz in einer Rohrströmung hinter einer unstetigen Querschnittserweiterung.* Techn. Ber. 86-08, DFVLR-Forschungsbericht, 1986.
- [127] SUTLIFF, D.: *Rotating Turbofan Duct Mode Measurement System.* NASA TM TM-213828, NASA, 2005.
- [128] SUTLIFF, D., A. CURTIS, L. HEIDELBERG und P. REMINGTON: *Performance of an active noise control system for fan tones using vane actuators.* In: *6th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; June 2000, Lahaina, USA,* Nr. AIAA 2000-1906, 2000.
- [129] SUTLIFF, D., P. REMINGTON und B. WALKER: *Active control of low-speed fan tonal noise using actuators mounted in stator vanes. Part 3: Results.* In: *9th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 12-14 May 2003, Hilton Head, USA,* Nr. AIAA 2003-3193, 2003.
- [130] SUTLIFF, D. und B. WALKER: *Multi-mode simultaneous inlet/exhaust active noise control of fan tones.* In: *6th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; June 2000, Lahaina, USA,* Nr. AIAA 2000-1907, 2000.

- [131] SUTLIFF, D. L., Z. HU, F. G. PLA und L. J. HEIDELBERG: *Active Noise Control of Low Speed Fan Rotor-Stator Modes*. In: *3rd AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, Atlanta, Georgia*, Nr. AIAA 97-1641, 1997.
- [132] TAPKEN, U.: *Akustische Modenanalyse am 1.5 Stufen Turbinenrig der TU Graz – Analyse-Bericht zu den Messkampagne 1-4, UA VITAL, Mai 2008 bis Februar 2009*. DLR Interner Bericht IB 92517-09/B10, DLR, 2009.
- [133] TAPKEN, U., R. BAUERS, F. ARNOLD und J. ZILLMANN: *Turbomachinery Exhaust Noise Radiation Experiments – Part 2: In-Duct and Far-Field Mode Analysis*. In: *14th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 5-7 May 2008, Vancouver, Canada*, Nr. AIAA 2008-2858, 2008.
- [134] TAPKEN, U., R. BAUERS, L. NEUHAUS, N. HUMPHREYS, A. WILSON, C. STOEHR und M. BEUTKE: *A New Modular Fan Rig Noise Test and Radial Mode Detection Capability*. In: *17th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 5-8 June 2011, Portland, Oregon*, Nr. AIAA 2011-2897, 2011.
- [135] TAPKEN, U. und W. NEISE: *Auslegung der Sensoranordnung für eine akustische Modenanalyse im Austritt eines 1.5-Stufen Turbinenrigs*. DLR Interner Bericht IB 92517-05/B10, DLR, 2005.
- [136] TAPKEN, U., L. NEUHAUS und L. ENGHARDT: *Akustische Modenanalyse am 1.5 Stufen Turbinenrig der TU Graz – Test-Bericht zu Messkampagne MK-1 (Mai/Jun 2008), Messkampagne MK-2 (Sep 2008), Messkampagne MK-3 (Dez 2008), Messkampagne MK-4 (Feb 2009)*. DLR Interner Bericht IB 92517-08/B5, DLR, 2009.
- [137] TAPKEN, U., T. RAITOR und L. ENGHARDT: *Tonal Noise Radiation from an UHBR-Fan – Optimized In-Duct Radial Mode Analysis*. In: *15th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 11-13 May 2009, Miami, Florida*, Nr. AIAA 2009-3288, 2009.
- [138] TAPKEN, U., Y. ZHANG, L. ENGHARDT und W. NEISE: *A modal concept for active noise control in circular or annular ducts*. In: *RTO Meeting Proceedings 51, Symposium on Active Control Technology for Enhanced Performance Operational Capabilities of Military Aircraft, Land Vehicles and Sea Vehicles*, NATO Research and Technology Agency, May 8-11, 2000, Braunschweig, 2000.
- [139] TESTER, B., G. GABARD und Y. OZYORUK: *Influence of mean flow gradients on fan exhaust noise predictions*. In: *Proceedings of the 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (29th AIAA Aeroacoustics Conference)*, May 2008.
- [140] TESTER, B. J., P. SIJTSMA, P. JOSEPH und C. LOWIS: *Fan broadband noise simulation*. In: *12th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 8–10 May 2006, Cambridge, MA*, Nr. AIAA 2006-2684, 2006.
- [141] THOMAS, R., F. FARASSAT, L. CLARK, C. GERHOLD, J. KELLY und L. BECKER: *A mode detection method using the azimuthal directivity of a turbofan model*. In: *5th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 10-12 May 1999, Bellevue, MA*, Nr. AIAA 99-1954, 1999.
- [142] TOPOL, D.: *Rotor wake/stator interaction noise: prediction vs. data*. *Journal of Aircraft*, 30:728–735, 1993.
- [143] TYLER, J. und T. SOFRIN: *Axial Flow Compressor Noise*. *SAE Transcation*, 70, 1962.

- [144] VILENSKI, G. und S. RIENSTRA: *Numerical study of acoustic modes in ducted shear flow*. Journal of Sound and Vibration, 307:610–626, 2007.
- [145] VILLE, J. und R. SILCOX: *Experimental Investigation of the Radiation of Sound From an Unflanged Duct and a Bellmouth, Including the Flow Effect*. Techn. Ber. TP 1697, NASA, 1980.
- [146] WALKER, B.: *Sensitivity issues in active control of circular duct modes using axially-spaced actuator arrays*. Noise Control Engineering Journal, 49(1):6–14, 2001.
- [147] WATSON, W.: *An acoustic evaluation of circumferentially segmented duct liners*. AIAA Journal, 22:1229–1233, 1984.
- [148] WECKMUELLER, C., S. GUERIN und G. ASHCROFT: *CFD-CAA Coupling Applied to DLR UHBR-Fan: Comparison to Experimental Data*. In: *15th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 11-13 May 2009, Miami, USA*, Nr. AIAA 2009-3342, 2009.
- [149] WECKMUELLER, C., S. GUERIN und C. RICHTER: *Numerical Investigation of Geometry and Mean Flow Effects on Acoustic Radiation from a Duct Inlet*. In: *13th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 21-23 May 2007, Rome, Italy*, Nr. AIAA 2007-3535, 2007.
- [150] WILKINSON, M. J. und P. F. JOSEPH: *Active control of buzz-saw tones: Experimental results from a laboratory-scale, no-flow rig*. The Journal of the Acoustical Society of America, 119(5):2618–2627, 2006.
- [151] WISMER, N.: *Time Domain Averaging Combined with Order Tracking*. Application Note BO 0420, Brüel & Kjær.
- [152] YOON, S. und P. NELSON: *Estimation of Acoustic Source Strength by Inverse Methods: Part II, experimental investigation of methods for choosing regularisation parameters*. Journal of Sound and Vibration, 233(4):665–701, 2000.
- [153] ZILLMANN, J., R. MAIER, E. BOUTY, H. ANTOINE, W. JUST, I. BORCHERS, L. ENGHARDT und U. TAPKEN: *Control of fan noise by active stators*. In: *Proceedings Internoise 2001, 30th International Congress on Noise Control Engineering, 27.-30. August 2001, The Hague, Netherlands*, S. 701–707, 2001.
- [154] ZILLMANN, J. und U. TAPKEN: *Tonal Noise Radiation from UHBR Fan – Active Control of Radiation Characteristic*. In: *15th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference; 11-13 May 2009, Miami, USA*, Nr. AIAA 2009-3226, 2009.
- [155] ZORUMSKI, W. E.: *Generalized radiation impedances and reflection coefficients of circular and annular ducts*. Journal of the Acoustical Society of America, 54(6):1667–1673, 1973.

