

Applied and
Computational
Mathematics

RWTHAACHEN
UNIVERSITY

Diese Arbeit wurde vorgelegt am
Lehrstuhl für Angewandte und Computergestützte Mathematik (ACoM)
The present work was submitted to the
Chair of Applied and Computational Mathematics (ACoM)

**Numerische Untersuchungen zu Eckenströmungen
durch turbulenzauflösende Simulationen mit
Reynolds-Spannungs-Modellierung**
Numerical investigations of corner flows using turbulence-resolving simulations
based on Reynolds stress modelling

Bachelorarbeit
Bachelor Thesis
Computational Engineering Science

Aachen, Mai 2025

Vorgelegt von Presented by	Philipp Grotowsky Matrikelnummer: XXXXXXXXXX philipp.grotowsky@rwth-aachen.de
Erstprüfer First examiner	Prof. Dr. Manuel Torrilhon Applied and Computational Mathematics RWTH Aachen University
Externer Betreuer external supervisor	M. Sc. Marius Herr Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik C ² A ² S ² E Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. - DLR

Abstrakt

In vielen aerodynamischen Anwendungsfällen treten Eckgeometrien auf, die aufgrund starker Sekundärströmungen eine besondere Herausforderung für numerische Simulationsmethoden darstellen. Ziel dieser Arbeit ist die Validierung der vom Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) entwickelten Improved Delayed Detached-Eddy Simulation, die mit einer Reynolds-Stress-Modellierung verknüpft wurde (RSM-IDDES), an einer solchen Eckströmung. Außerdem wird die Anwendbarkeit von Wandfunktionen in Verbindung mit Reynolds-Spannungs-Modellen (RSM) untersucht. Hierzu wurde eine Wandfunktion aus der Literatur implementiert, die den Druckgradienten berücksichtigt.

Für die Untersuchungen wurden zwei Geometrien betrachtet: eine quadratische Rohrströmung sowie ein rechteckiger, asymmetrischer Diffusor. Zum Einsatz kamen sowohl Simulationen mit Reynoldsgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) als auch wandmodellierten Large-Eddy-Simulationen (WMLES), welche das SSG/LRR- $\ln(\omega)$ -Turbulenzmodell verwenden. Die eingesetzte WMLES ist dabei ein Zweig der neu entwickelten RSM-IDDES-Methode. Es wurden Simulationen sowohl mit als auch ohne Verwendung von Wandfunktionen durchgeführt. Die Ergebnisse werden untereinander sowie mit Literaturdaten verglichen.

Der WMLES-Zweig der IDDES-Methode zeigte in der Untersuchung insgesamt eine gute Übereinstimmung mit den Literaturdaten und ist somit für subsonische Strömungen in Eckgeometrien als valide zu betrachten. In den RANS-Ergebnissen konnten bei Verwendung von Wandfunktionen, sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung des Druckgradienten, eine hohe Übereinstimmung mit den Referenzdaten beobachtet werden. Im Fall des Diffusors zeigte die Erweiterung der Wandfunktion um den Druckgradienten keine eindeutige Verbesserung. Im Einflussrohr des Diffusors konnte bei der entwickelnden Strömung leichte Verbesserungen erkannt werden. Für eine abschließende Bewertung sind jedoch weiterführende Untersuchungen erforderlich. Die Verwendung von Wandfunktionen führte in den WMLES-Simulationen zu numerischen Artefakten, die sich jedoch nur in sensitiven Strömungsgrößen beobachten ließen. Abgesehen von diesen Artefakten lieferten auch die WMLES-Ergebnisse mit Wandfunktionen insgesamt plausible Resultate.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	I
Tabellenverzeichnis	III
Liste der Symbole	V
Abkürzungsverzeichnis	VII
1. Einleitung	1
1.1. Einordnung & Motivation	1
1.2. Einblick in die Literatur	2
1.3. Struktur der Arbeit	3
2. Methodik	5
2.1. Navier - Stokes Gleichungen	5
2.2. Turbulenzmodellierung	5
2.2.1. Direkte Numerische Simulation	6
2.2.2. RANS - Modellierung	6
2.2.3. LES Methode	8
2.2.4. Hybride RANS-LES Methode	8
2.3. Wandfunktionen	10
2.3.1. Allgemeine Formulierung	11
2.3.2. Wandfunktion nach Knopp	11
2.3.3. Wandfunktion nach Nickels	12
3. Lösungsverfahren	15
3.1. Diskretisierung	15
3.2. Numerischer Strömungslöser	15
3.2.1. TAU	15
3.2.2. RANS Einstellungen	15
3.2.3. IDDES Einstellungen	16
3.3. Einbettung der Wandfunktionen	16
3.4. Implementierung der Wandfunktion nach Nickels	17
4. Ergebnisse	21
4.1. Periodische Rohrströmung mit quadratischem Querschnitt	21
4.1.1. Vergleich von RANS- und WMLES Lösungen mit Referenz (DNS)	23
4.1.1.1. Gitterkonstruktion	23
4.1.1.2. Ergebnisse	23

4.1.2.	Wandfunktionen in der Rohrströmung	29
4.1.2.1.	Gitterkonstruktion für Wandfunktion	29
4.1.2.2.	Anpassung des numerischen Setups	30
4.1.2.3.	RSM-RANS Wandfunktion Ergebnisse	31
4.1.2.4.	RSM-WMLES Wandfunktion Ergebnisse	34
4.2.	Stanford Diffusor	38
4.2.1.	Gitterkonstruktion	39
4.2.2.	RANS Ergebnisse	40
4.2.3.	Vorzeichen Druckgradienten	43
4.2.4.	Wandfunktion Ergebnisse	45
5.	Zusammenfassung	49
6.	Ausblick	51
	Literatur	57

Abbildungsverzeichnis

3.1. Angepasstes Polynom für Gleichung 2.28	18
4.1. a) Geometrie des quadratischen Rohrs, b) WMLES Gitter im Querschnitt, c) RANS und LES Zone der WMLES beim quadratischen Kanal	21
4.2. Vergleich der nach u_b normierten Strömungsgeschwindigkeiten mit der DNS von S. Pirozzoli [6] (rot gestrichelt)	25
4.3. Vergleich der normierten Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung entlang der Winkelhalbierenden	26
4.4. Konturplot der normierten Geschwindigkeit in y-Richtung mit verschiedenen numerischen Methoden und der DNS (rot gestrichelt)	27
4.5. a) Konturplots der Normalspannung R_{11}^+ für die durchgeführten Simulationen (quadrantenweise dargestellt) mit den DNS-Daten [6] (rot gestrichelt), b) R_{11}^+ entlang der Winkelhalbierenden, c) R_{12}^+ dargestellt wie in a)	28
4.6. RANS WF-Gitter mit entsprechendem Wandabstand	30
4.7. Geschwindigkeit in y-Richtung normiert mit u_b	31
4.8. Quadrantenweise Darstellung der RSM-RANS WF-Ergebnisse mit Knopp (lila) und Nickels (grün). In a) Geschwindigkeit in x-Richtung, b) Geschwindigkeit in y-Richtung normiert über u_b	33
4.9. RSM-RANS a) quadrantenweise Darstellung von R_{11}^+ mit Knopp (lila) und Nickels (grün), b) R_{11}^+ entlang $z/h = 0$ wobei Nickels (Ni) als durchgezogene und Knopp (Kn) als gestrichelte Linien dargestellt sind	34
4.10. quadrantenweise Darstellung von R_{12}^+ mit Knopp (lila) und Nickels (grün)	35
4.11. Vergleich der Ergebnisse (u/u_b) von RSM-WMLES mit Low-Re RSM- und WF	36
4.12. Vergleich von RSM-WMLES mit WF v/u_b mit den Referenzen a) Low-Re RSM-WMLES, b) DNS [6]	36
4.13. Vergleich $R_{ij,tot}^+$ der WF und Low-Re-Rechnung a) $R_{11,tot}^+$ b) $R_{12,tot}^+$. .	37
4.14. Geometrie: Diffusor 1 von Cherry et al. [9]	38
4.15. Gitter für den Stanford Diffusor mit verschiedenem Wandabstand . .	40
4.16. Positionierung der Querschnitte aus Abbildung 4.17	41
4.17. Geschwindigkeit in x-Richtung bei $x/h = 2$ (links), $x/h = 8$ (mitte) und $x/h = 15$ (rechts)	42
4.18. Vergleich cp auf dem Boden des Diffusors, bei $z/h = 3,33/2$ mit Daten aus [29]	43
4.19. Low-Reynolds: Druckfeld nahe der unteren Wand, mit Stromlinien und einer Linie (rot) bei $p_x^+ = 0$	44

4.20. Geschwindigkeit in x-Richtung bei $x/h = 2$ (links), $x/h = 8$ (mitte) und $x/h = 15$ (rechts), RANS-WF mit $y^+(1) = 25$, $u = 0$ (rot)	46
4.21. c_f an der oberen Wand im Einlassrohr, Lösung beider WF bei ver- schiedenem Wandabstand	47
4.22. $c_f = 0$ an der seitlich angewinkelten Wand, mit WF nach Knopp (Kn) und Nickels (Ni), die Geometrie ist grau hinterlegt	47
A.1. Partielle Ableitungen der Nickelswandfunktion	54
A.2. Geschwindigkeitsfeld in Wandfunktionslösungen	55

Tabellenverzeichnis

3.1.	Koeffizienten des Polynoms	18
4.1.	$Re_\tau = \frac{\rho \langle u_\tau \rangle h}{\mu}$ der RANS und WMLES im Vergleich zur DNS	24
4.2.	Eigenschaften der verschiedenen WF-Gitter	30
4.3.	Eigenschaften der Rechengitter für den Diffusor	40

Liste der Symbole

In dieser Arbeit werden die folgenden Symbole, Abkürzungen und Konventionen verwendet:

Symbole

Δx	Gitterauflösung [m]
μ	Dynamische Viskosität $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}}\right]$
ν	Kinematische Viskosität $[\text{m}^2/\text{s}]$
ω	Dissipationsrate $\left[\frac{1}{\text{s}}\right]$
ϕ	Generische Feldvariabel $[-]$
ϕ^+	Dimensionslose Größe, normiert mit u_τ $[-]$
ρ	Dichte $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$
τ_w	Wandschubspannung [2]
τ_{ij}	Spannungswert (i, j) $\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
Ma	Machzahl $[-]$
Re	Reynoldszahl $[-]$
$\tilde{f}_d$	Übergangsfunktion der IDDES $[-]$
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (u, v, w)^T$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
R	Spezifische Gaskonstante $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg K}}\right]$
C	Modellspezifische Konstante $[-]$
c_p	Druckbeiwert $[-]$
d	Wandabstand [m]
f_B	Übergangsfunktion der WMLES $[-]$
f_d	Übergangsfunktion der DDES $[-]$
f_e	Elevating-Funktion $[-]$
h	Höhe [m]
k	Turbulente kinetische Energie $\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right]$
l_{Methode}	Längenmaß der Simulationstechnik [m]
p	Druck [Pa]
R_{ij}	Reynoldsspannungswert (i, j) $\left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]$
t	Zeit [s]
T	Temperatur [K]

u_τ	Schubspannungsgeschwindigkeit $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$
v_i	Geschwindigkeit in i-Richtung $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

Abkürzungsverzeichnis

CFD	Computational Fluid Dynamics
DES	Detached Eddy Simulation
DDES	Delayed Detached Eddy Simulation
DLR	Deutsches Zentrum Für Luft- und Raumfahrt
DNS	Direct Numerical Simulation
HRLM	Hybride RANS-LES Methode
IDDES	Improved Delayed Detached Eddy Simulation
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes
RSM	Reynolds Spannungs-Modell
SA	Spalart-Allmaras
SST	Shear Stress Modell
WF	Wandfunktion(en)
WMLES	Wall-Modelled Large Eddy Simulation

1. Einleitung

1.1. Einordnung & Motivation

Die numerische Strömungsmechanik (Computational Fluid Dynamics, CFD) ist aus der heutigen Forschung und Industrie nicht mehr wegzudenken. Sie erweitert die klassische Strömungsmechanik um simulative Verfahren, mit denen sich komplexe Strömungsphänomene effizient und detailliert analysieren lassen. Die entwickelten CFD-Methoden und Modelle sind nicht nur von signifikanter Bedeutung in der wissenschaftlichen Grundlagenforschung, sondern sind fester Bestandteil der Entwicklung und Optimierung technischer Systeme in der Industrie [1].

Eine besondere Herausforderung stellt die präzise Vorhersage von Strömungen in Eckbereichen dar. Diese Eckenströmungen treten in vielen technischen Konfigurationen, wie bei der Flügel-Rumpf-Verschneidung an Flugzeugen, auf. In diesen Eckbereichen können Phänomene wie Rezirkulation und Ablösung entstehen, die einen maßgeblichen Einfluss auf das globale Strömungsverhalten aufweisen [2]. Das Auftreten statistischer Variation turbulenter Strömungsgrößen entspricht dabei einem zentralen Mechanismus, der die auftretenden Strömungscharakteristiken an den Ecken besonders prägt [3]. Die Qualität der numerischen Lösung weist somit eine hohe Abhängigkeit von der Turbulenzmodellierung auf.

Turbulenzauflösende Simulationen, wie die direkte numerische Simulation (DNS) und die Large Eddy Simulation (LES), liefern in der Regel hochpräzise Vorhersagen, gehen jedoch mit hohen Rechenkosten einher. Im Gegensatz dazu weisen Methoden mit Turbulenzmodellen als Ansatz, wie die Reynolds-gemittelten-Navier-Stokes-Simulationen (RANS), verbesserte Effizienz auf, jedoch zu Lasten der Genauigkeit. In der vorliegenden Arbeit wird ein Reynolds-Spannungs-Modell (RSM) als Turbulenzmodell verwendet. Das verwendete RSM-Modell wird in Verbindung mit RANS-Untersuchungen und darüber hinaus mit einem hybriden Ansatz, der turbulenzmodellierende und -auflösende Verfahren verknüpft, verwendet. Eine solche Methode verspricht, eine Balance zwischen Effizienz und Qualität zu schaffen. Im Fokus dieser Arbeit steht dabei die moderne am DLR entwickelte [4] RSM-IDDES-Methode (Improved Delayed Detached Eddy Simulation).

Ein weiterer Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Untersuchung von Wandfunktionen. Diese ermöglichen eine weitere Reduktion der Rechenkosten. Dabei steht die Validierung der Anwendbarkeit im Fokus. Betrachtet werden zwei Wandfunktionen mit verschiedenen Ansätzen. Untersucht wird eine universelle Wandfunktion und eine

Wandfunktion, die in der Formulierung den vorliegenden Druckgradienten berücksichtigt. Der universelle Ansatz entspricht der Betrachtung des Geschwindigkeitsprofils an einer ebenen Platte ohne Druckgradienten. Analysiert werden die beiden Varianten mithilfe der RANS-Methodik als auch der RSM-IDDES-Methode. Das Ziel dieser Arbeit entspricht einer Validierung der RSM-IDDES-Methode [4] im Kontext einer Eckenströmung. Darüber hinaus wird die Eignung von Wandfunktionen für die RANS- und IDDES-Methodik mit der RSM-Modellierung geprüft und bewertet. Dabei wird der Einfluss durch die Berücksichtigung des Druckgradienten in der Wandfunktion untersucht.

1.2. Einblick in die Literatur

Aus der Literaturrecherche geht hervor, dass bei der Untersuchung von Eckenströmung besonders der Fall einer Rohrströmung mit rechteckigem oder quadratischem Querschnitt häufig verwendet wird [3]. Diese Geometrie bietet eine ideale Testumgebung, die bereits mit verschiedenen Methodiken und variierenden Strömungsbedingungen untersucht wurde. Für niedrige Reynoldszahlen erstellte Gavrilakis [5] detaillierte DNS-Daten, während Pirozzoli et al. [6] einen Datensatz mit höheren Reynoldszahlen erstellten und untersuchten. Beide Studien zeigen eine zunehmende Intensität der Sekundärströmungen bei steigender Reynoldszahl. Dieser Befund wird auch weiter durch LES-Ergebnisse von J. Yao et al. [7] gestützt.

Auch geometrische Einflüsse wurden in verschiedenen Arbeiten untersucht. So analysierten Yang et al. [8] den Einfluss des Eckwinkels und konnten zeigen, dass die Sekundärströmung bei einem rechten Winkel besonders stark ausgeprägt ist, während sich bei geringen Winkeln eine tendenziell laminare Strömung einstellt. Da in der idealisierten periodischen Rohrströmung eine zweidimensionale Strömung vorliegt, in der kein Druckgradient in Strömungsrichtung vorliegt, wurden ergänzend dreidimensionale Konfigurationen untersucht. Besonders hervorzuheben sind die Experimente, die von Cherry et al. [9] durchgeführt worden sind. In deren Arbeit werden zwei verschiedene rechteckige Diffusoren betrachtet, die sich im Anstellwinkel zweier Wände unterscheiden. Zu diesen Diffusoren erstellten Ohlsson et al. [10] DNS-Daten, die eine hohe Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Experimente aufweisen. Bonnici et al. [11] führten ergänzend für einen der Diffusoren RANS-Rechnungen mit verschiedenen Turbulenzmodellen durch. Aus den Ergebnissen sind deutliche Abweichungen zu der DNS und dem Experiment zu erkennen. Die Nutzung von RSM-Modellen weist die besten Übereinstimmungen mit den DNS-Daten auf [11].

Die Integration von Wandfunktionen in hybriden RANS-LES Methoden, wie der Improved Delayed Detached Eddy Simulation (IDDES), wurde ebenfalls untersucht.

Gritskevich et al. [12] demonstrierten eine grundsätzliche Möglichkeit, Wandfunktionen mit hybriden Methoden zu verknüpfen. Herr et al. [13] untersuchten dies weiter mit einer SA-IDDES für verschiedene Geometrien und konnten zeigen, dass eine Reduktion der Rechenzeit bis zu zwei Drittel der ursprünglichen Rechenzeit möglich ist.

1.3. Struktur der Arbeit

Diese Bachelorarbeit unterteilt sich in folgende Kapitel: Zunächst wird in Kapitel 2 der physikalische und numerische Hintergrund der Arbeit erläutert. Dabei werden die Grundlagen der numerischen Strömungsmechanik, die verwendeten numerischen Verfahren und die Grundlagen der Wandfunktionen vorgestellt. Im Anschluss zum methodischen Hintergrund wird das Lösungsverfahren in Kapitel 3 beschrieben. Dabei werden der verwendete Strömungslöser und die Implementierung der Wandfunktionen vorgestellt.

In Kapitel 4 werden die durchgeführten Testfälle vorgestellt sowie die Simulationsergebnisse analysiert. Untersucht werden dabei die Testfälle einer Rohrströmung mit quadratischem Querschnitt und eines rechteckigen Diffusors. Für die Bewertung der Ergebnisse werden diese mit Daten aus der Literatur verglichen. Die Wandfunktionsergebnisse werden mit den erzeugten Lösungen ohne Wandfunktionen verglichen und auf Anwendbarkeit geprüft.

Die in dieser Arbeit erarbeiteten Erkenntnisse werden in Kapitel 5 zusammengefasst. Anschließend wird in Kapitel 6 ein Ausblick auf mögliche weiterführende Arbeiten gegeben und offene Fragestellungen aufgezeigt.

2. Methodik

2.1. Navier - Stokes Gleichungen

Für die Beschreibung von Flüssigkeiten und Gasen wird die Annahme getroffen, dass diese als kontinuierliches Medium beschrieben werden können. Mit der Annahme differenzierbarer physikalischer Feldvariablen ergeben sich die Navier-Stokes-Gleichungen (NSE). Die Impulserhaltungsgleichung der NSE lautet in einsteinscher Summenkonvention:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.1)$$

Betrachtet wird in dieser Gleichung die Dichte (ρ), die Geschwindigkeitskomponente (v_i) und der Druck (p) in den Koordinaten x_i . Das τ_{ij} bezieht sich dabei auf den viskosen Spannungstensor. Dieser enthält die Normal- und Scherspannungen, welche durch Reibungen im Fluid entstehen. Dabei unterliegt der Spannungstensor bei Newtonischen Fluiden folgendem Zusammenhang:

$$\tau_{ij} = \mu_l \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

Somit skalieren die Spannungen mit den Gradienten der Geschwindigkeitskomponenten. Für den Fall einer inkompressiblen Strömung ($\rho = \text{const}$) vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichung zu den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Dadurch vereinfacht sich die Impulserhaltungsgleichung zu:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu_l \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (2.3)$$

Die laminare Viskosität μ_l kann bei idealen Gasen über das Sutherland-Modell beschrieben werden. Dadurch ist die Viskosität rein von der Temperatur abhängig. Die Temperatur des Fluids ergibt sich durch die ideale Gasgleichung.

$$\mu_l = \frac{1,45 T^{3/2}}{T + 110} 10^{-6} \quad (2.4)$$

2.2. Turbulenzmodellierung

Unterscheidet werden Strömungen von Fluiden in laminare und turbulente Strömungen. In turbulenten Strömungen entstehen statistische Fluktuationen in den Strömungsgrößen. Diese Fluktuationen können auf unterschiedliche Art und Weisen in

den Simulationen betrachtet werden. Die Turbulenzen können modelliert und aufgelöst werden. Aufgelöste Turbulenzen beschreiben die direkte Berechnung der turbulenten Strukturen im Strömungsfeld. Turbulenzauflösende Methoden sind unter anderem die direkte numerische Simulation (DNS) und die Large-Eddy-Simulation (LES). Bei der Turbulenzmodellierung werden solche Strukturen nicht direkt berechnet, sondern über Modelle beschrieben.

2.2.1. Direkte Numerische Simulation

In der direkten numerischen Simulation werden die NSE direkt gelöst und die Turbulenzen direkt aufgelöst. Die DNS erfordert jedoch eine hohe Auflösung des Rechenetzes. Dadurch wird die numerische Simulation rechenintensiv und erfordert hohe Rechenzeiten. Dadurch begrenzt sich die Nutzung der DNS auf Untersuchungsfälle mit geringen Reynoldszahlen, wodurch sich die DNS eher in Ausnahmefällen für industrielle Anwendungen eignet.

Daher werden Methoden entwickelt, um die Rechenkosten zu verkürzen. Dies kann durch die gänzliche oder teilweise Modellierung der turbulenten Größen erzielt werden.

2.2.2. RANS - Modellierung

Eine Methode der Turbulenzmodellierung ist die RANS-Methode. Diese Methode bezieht sich auf die Reynolds-Averaged Navier-Stokes-Gleichungen (RANS). Für diese Gleichungen werden die Feldvariablen in einen zeitlichen Mittelwert und eine zeitliche Fluktuation aufgeteilt.

$$\bar{\phi} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \phi dt$$

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'$$

Mit der Hilfe dieser Definition ergibt sich aus der inkompressiblen NSE die folgende Impulserhaltungsgleichung:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu_l \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

Durch diese partielle Differentialgleichung können die zeitlichen Mittelwerte der Strömungsgrößen berechnet werden. Durch diese Umformulierung taucht ein zusätzlicher unbekannter Term $\tau_{ij}^R = -\rho \overline{v'_i v'_j}$ auf. Dieser Term entspricht einer Impulsübertragung

der turbulenten Fluktuationen. Diese neuen Unbekannten werden auch als Reynoldsspannungen bezeichnet. Um das Gleichungssystem zu schließen, wird eine zusätzliche Annäherung benötigt.

Ein weit verbreiteter Ansatz für die Turbulenz-Modellierung besteht aus der Näherung nach Boussinesq. Diese entspricht der Formulierung:

$$\tau_{ij}^R = \rho R_{ij} = \mu_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

Dabei entspricht μ_t der Wirbelviskosität. Diese ist eine weitere Unbekannte, die mithilfe von Turbulenzmodellen beschrieben werden kann.

SA - Modell

Das Turbulenzmodell von Spalart und Allmaras (SA) schließt die RANS-Gleichung mithilfe einer zusätzlichen Gleichung [14]. In dieser Gleichung wird die Wirbelviskosität gelöst mit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_t}{\partial t} + v_i \frac{\partial \nu_t}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu + \nu_t) \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x_j^2} \\ &+ C_{b1} \left(1 - \frac{\nu_t}{\nu_t + \sigma} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - C_{b2} \frac{\nu_t}{(\nu_t + \sigma)^2} \frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x_i \partial x_i} \end{aligned}$$

In dieser Gleichung entsprechen C_b und σ Konstanten. Auf Grundlage dieses Modells wurden in der Literatur weitere Erweiterungen entwickelt. Dazu gehört unter anderem die „Quadratic Closure Relation“ (QCR) [15]. Die SA-Modellierung steht nicht im Fokus dieser Arbeit und wird somit nicht genauer dargestellt.

RSM - Modell

Das Reynoldsspannungsmodell nutzt eine solche Näherung von Boussinesq nicht. Stattdessen werden die Reynoldsspannungen über die Reynoldsspannungs-Transport-Gleichung beschrieben:

$$\frac{\partial \bar{\rho} R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} R_{ij} \bar{u}_k) = \bar{\rho} (P_{ij} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij} + D_{ij}) \quad (2.7)$$

Dabei steht P für den Produktionsterm, Π für die Pressure-Strain-Korrelation, ϵ für die Dissipation und D für den Diffusionsterm. Während für den Produktionsterm

keine weiteren Annahmen nötig sind, müssen die weiteren Terme durch Modelle beschrieben werden.

$$\bar{\rho}P_{ij} = -\bar{\rho}R_{ik}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \bar{\rho}R_{jk}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (2.8)$$

Die übrigen Terme können verschieden modelliert werden. In dieser Arbeit wird das SSG/LRR-ln(ω) Modell verwendet [16].

2.2.3. LES Methode

Die Large Eddy Simulation (LES) ist eine skalenauflösende Methode. Dies bedeutet, dass große turbulente Skalen direkt aufgelöst und kleine Skalen über ein ergänzendes Modell approximiert werden. Durch die Auflösung zeitvarianter Turbulenzen entspricht die Lösung der LES einer instationären Lösung.

Für die Nutzung der LES wird eine Filterfunktion verwendet. Mithilfe dieser Filterung teilen sich die Feldvariablen in einen aufgelösten und einen modellierten Term auf.

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad (2.9)$$

$$\tilde{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} \phi(r, \tau) G(\vec{x} - \vec{r}, t - \tau) d\vec{r} d\tau \quad (2.10)$$

G entspricht dabei der Filterfunktion. Aus der Anwendung des Filters ergibt sich aus der Impulserhaltung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \rho \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \mu_l \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \tau_{ij}^S}{\partial x_j} \quad (2.11)$$

In dieser Gleichung entspricht τ_{ij}^S dem Spannungstensor der modellierten Skalen. Für die Lösung dieses Spannungstensors wird die Näherung nach Boussinesq verwendet.

2.2.4. Hybride RANS-LES Methode

DES

Ein weitverbreiteter Ansatz für die hybride Verknüpfung von RANS und LES ist die Detached-Eddy-Simulation (DES). Der Kerngedanke der DES entspricht der Verwendung der RANS-Modellierung in Grenzschichten und der LES-Methode in Bereichen der Strömungsablösung [17]. Dadurch werden die turbulenten Strukturen in solchen Ablösungsgebieten räumlich und zeitlich aufgelöst, wodurch eine höhere Präzision in der Vorhersage erzielt werden kann. Dafür wird ein neues Längenmaß verwendet:

$$l_{DES} = \min(l_{RANS}, C_{DES}\Delta) \quad (2.12)$$

C_{DES} ist eine kalibrierte Konstante und $\Delta = \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Das Längenmaß der RANS-Modellierung ist abhängig vom Turbulenzmodell. Bei dem SA-Modell entspricht l_{RANS} dem Wandabstand d . Mithilfe dieses hybriden Längenmaßes wird in der Grenzschichtumgebung das RANS-Modell verwendet und außerhalb dieser Grenzschicht wird $l_{LES} = C_{DES}\Delta$ für den Spannungstensor der LES verwendet.

DDES

Die beschriebene Definition der DES weist jedoch eine grundsätzliche Problematik auf. Diese Problematik kann im äußeren Teil der Grenzschicht auftreten. Dort kann ein Wechsel zu dem LES-Längenmaß auftreten, auch wenn die Gitterauflösung dafür zu grob ist. Das Verringern der modellierten Turbulenz kann dort nicht durch aufgelöste Turbulenz kompensiert werden [18]. Dies führt zu einer „modelled-stress depletion“ (MSD) [18]. Um diese Problematik zu umgehen, wird eine Verzögerung in die Formulierung der DES hinzugefügt, wodurch sich die Methode der Delayed Detached Eddy Simulation (DDES) ergibt. Diese bedient sich einer Funktion f_d für den Übergang der RANS zur LES-Zone:

$$l_{DDES} = l_{RANS} - f_d \max\{0, (l_{RANS} - l_{LES})\} \quad (2.13)$$

Die Funktion f_d steht in Abhängigkeit mit dem verwendeten Turbulenzmodell. Da die DDES-Funktionalität nicht weiter in dieser Arbeit verwendet wird, wird diese nicht genauer betrachtet.

IDDES

Eine weitere Erweiterung der DDES-Methodik ist das Hinzufügen der Wall-Modelled LES-Funktionalität (WMLES). In der WMLES wird der innere Teil der Grenzschicht im RANS-Modus gelöst. Der weitere Bereich der Grenzschicht wird mithilfe des LES-Längenmaßes berechnet und die Turbulenz aufgelöst. Die Improved DDES (IDDES) enthält sowohl DDES als auch WMLES als Modi [19]. Durch das Vorliegen dieser Modi in der IDDES kann diese bei Bedarf umschalten. Dadurch wird in Gebieten ohne aufgelöste Turbulenz die DDES-Formulierung und in Gebieten mit aufgelösten Turbulenzen die WMLES verwendet. Für die Verknüpfung dieser Modi wird folgendes Längenmaß verwendet:

$$l_{IDDES} = \tilde{f}_d(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - \tilde{f}_d)l_{LES} \quad (2.14)$$

Die „Elevation“-Funktion f_e verhindert eine Dämpfung der modellierten Reynoldsspannungen im Übergangsbereich von RANS- zu LES-Methode [4]. Für den Übergang

zwischen DDES und WMLES wird die Übergangsfunktion $\tilde{f}_d$ wie folgt definiert.

$$\tilde{f}_d = \max\{(1 - f_d), f_B\} \quad (2.15)$$

Die Definition von f_d entspringt der Definition der DDES. Die Funktion f_B entspricht dem Übergang von RANS- zu LES-Methode in der WMLES. Dadurch entspricht das Längenmaß der WMLES der Definition:

$$l_{WMLES} = f_B(1 + f_e)l_{RANS} + (1 - f_B)l_{LES}$$

Diese Übergangsfunktion ist in der WMLES rein geometrisch bedingt. Diese wird definiert mit:

$$f_B = \min\{2 \exp(-11,09\alpha_g^2); 1\}$$

$$\alpha_g = 0,25 - d/h_{max}$$

In der Definition von α_g entspricht d dem Wandabstand und dem lokalen Gitterabstand h_{max} . Die in dieser Arbeit verwendete RSM-IDDES-Methodik verknüpft die IDDES mit dem SSG/LRR- $\ln(\omega)$ Modell als Turbulenzmodell. Das Längenmaß l_{RANS} entspricht dabei:

$$l_{RANS} = \frac{\sqrt{\tilde{k}}}{c_\mu \omega}$$

Die Größen $\tilde{k}$ und ω ergeben sich aus den Gleichungen des erwähnten RSM-Modells. Für den LES-Bereich der IDDES wird eine Eddy-Viskosität für die Turbulenzmodellierung verwendet [4]. Hintergrund dafür ist, dass bei Nutzung des differentiellen Ansatzes eine unzureichende Dissipation in den kleinen turbulenten Skalen vorliegt. Die Eddy-Viskositäts-Formulierung nutzt die Boussinesq-Annäherung mit der Viskosität:

$$\nu_t = \frac{\tilde{k}}{\omega}$$

Für den RANS-Bereich werden in [4] zwei Varianten vorgestellt. Bei der einen wird die Eddy-Viskositäts-Formulierung für den RANS-Bereich beibehalten. Der andere Ansatz erzeugt einen Übergang zu der differentiellen Variante des Modells. Dieser ist analog zum Übergang von LES zu RANS-Umgebung in der IDDES.

2.3. Wandfunktionen

Die Idee hinter den Wandfunktionen besteht darin, den wandnahen Bereich verschiedener Strömungsfälle durch eine algebraische Funktion zu beschreiben. Diese Idee entspringt der Annahme, dass die Grenzschicht an der Wand universell beschreibbar ist [20]. Nach dieser Annahme ist das skalierte Strömungsprofil an einer ebenen Plattenströmung identisch zum Profil an Wänden von komplexeren Strömungsfällen. Daher ergibt sich die Möglichkeit, den wandnahen Bereich durch eine algebraische Funktion zu beschreiben.

2.3.1. Allgemeine Formulierung

Für die Anwendung der Wandfunktion wird die Randbedingung an den Wänden angepasst. Ohne Wandfunktion wird die Wandhaftbedingung gesetzt. Dabei wird $u_w = 0$ gesetzt. u_w beschreibt die Geschwindigkeit tangential zur Wand. Dadurch, dass in der wandanliegenden Grenzschicht hohe Gradienten vorliegen, ist in dem Fall der Wandhaftbedingung eine hohe Auflösung erforderlich. Für den Wandabstand $y^+(1)$ der wandanliegenden Zelle wird ein Maximalwert von $y^+(1) = 1$ für eine ausreichende Auflösung gewählt.

Bei der Nutzung der Wandfunktionen wird die Wandhaftbedingung durch eine Neumann-Randbedingung ersetzt. Diese Randbedingung wird mithilfe der Wandschubspannung τ_w gesetzt. Die Neumann-Randbedingung entspricht der Gleichung $\tau_w = \mu_l \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$. Die Wandschubspannung wird mithilfe der Wandfunktionen bestimmt.

Die Wandfunktionen ergeben sich aus der Grenzschichtgleichung. Um diese Gleichung zu erhalten, wird die Impulserhaltungsgleichung als Grundlage verwendet. Diese vereinfacht sich unter der Annahme, dass eine stationäre eindimensionale Strömung vorliegt, bei der der konvektive Fluss in Strömungsrichtung vernachlässigt werden kann. Aus dem inkompressiblen Impulserhaltungssatz ergibt sich:

$$\frac{d}{dy}((\mu + \mu_t) \frac{du}{dy}) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (2.16)$$

Durch die Verwendung der viskosen Normierung $u^+ = u/u_\tau$, $y^+ = yu_\tau/\nu$, $\mu^+ = \mu_t/\mu_l$, $p_x^+ = \nu/(\rho u_\tau^3) \frac{dp}{dx}$ ergibt sich die Gleichung:

$$(1 + \nu^+) \frac{du^+}{dy^+} = 1 + p_x^+ y^+ \quad (2.17)$$

Diese Differentialgleichung kann bei bekanntem ν^+ analytisch gelöst werden. Alternativ kann auch eine Funktion mithilfe von Daten aus Experimenten oder Simulationen kalibriert werden. Diese Funktionen sind die erwähnten Wandfunktionen, die definiert werden mit.

$$u^+ = F(y^+) \rightarrow y^+ = F^{-1}(u^+) \quad (2.18)$$

2.3.2. Wandfunktion nach Knopp

Für die Formulierung der Wandfunktion nach Knopp [21] wird eine weitere Annahme für die Vereinfachung der Grenzschichtgleichung verwendet. Diese Vereinfachung ist die Vernachlässigung des Druckgradienten. Die Wandfunktion nach Knopp ergibt sich

aus der hybriden Verknüpfung dreier Wandgesetze aus der Literatur. Verknüpft werden die Wandgesetze von Spalding, Reichardt und das logarithmische Wandgesetz:

$$F_{Sp}^{-1}(u^+) = u^+ + e^{-5,2\kappa u^+} (e^{\kappa u^+} - \sum_{n=0}^5 \frac{(\kappa u^+)^n}{n!})$$

$$F_{Rei}(y^+) = \frac{\ln(1 + 0,4y^+)}{\kappa} + 7,8(1 - e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11}e^{-y^+/3}) \quad (2.19)$$

$$F_{log}(y^+) = \frac{\ln(y^+)}{\kappa} + 5,1 \quad (2.20)$$

κ bezeichnet dabei die Kármán Konstante mit einem Wert von 0,41. Sowohl Reichardts als auch Spaldings Wandgesetz sind für den gesamten y^+ Bereich anwendbar. Das logarithmische Wandgesetz ist im Gegensatz zu den anderen beiden Wandgesetzen nur für hohe y^+ -Werte gültig.

Verknüpft werden die Wandgesetze in [22] über zwei Gewichtsfunktionen B_1 und B_2 . Über diese Verknüpfung werden die drei Wandgesetze zu einer Formulierung zusammengeführt.

$$F_{Rei,Log} = (1 - B_1)F_{Rei} + B_1F_{Log} \quad (2.21)$$

$$F_{Kn}(y^+) = (1 - B_2)F_{Sp} + B_2F_{Rei,Log} \quad (2.22)$$

Die Gewichtsfunktionen sind abhängig vom gewählten Turbulenzmodell. Diese turbulenzmodellspezifischen Funktionen werden mithilfe der numerischen Lösung mit dem jeweiligen Turbulenzmodell kalibriert. Für die Gewichtsfunktionen bei der RSM-Modellierung können die Gewichtsfunktionen für das SST-Modell verwendet werden. Diese entsprechen:

$$B_1 = \tanh((\frac{y^+}{27})^4) \quad B_2 = \tanh((\frac{y^+}{50})^2) \quad (2.23)$$

2.3.3. Wandfunktion nach Nickels

Nickels setzt die analytische Wandfunktion in [23] aus drei verschiedenen Termen zusammen. Diese Terme werden Sublayer-, Overlap- und Wake-Funktion genannt. Diese stehen für die entsprechenden Regionen der turbulenten Grenzschicht. Aufeinander addiert ergeben diese Funktionen die Wandfunktion nach Nickels, wobei κ_0 eine Konstante mit dem Wert 0,39 ist. Die Wandfunktion nach Nickels ist definiert durch:

$$F_{Ni}(y^+) = F_{Sublayer} + F_{Overlap} + F_{Wake} \quad (2.24)$$

$$F_{Sublayer}(y^+) = y_c^+ [1 - (1 + 2(\frac{y^+}{y_c^+}) + \frac{1}{2}(3 - y_c^+ p_x^+)(\frac{y^+}{y_c^+})^2 - \frac{3}{2}y_c^+ p_x^+ (\frac{y^+}{y_c^+})^3) e^{-3\frac{y^+}{y_c^+}}] \quad (2.25)$$

$$F_{Overlap}(y^+) = \frac{\sqrt{1 + y_c^+ p_x^+}}{6\kappa_0} \ln \frac{1 + (0.6\frac{y^+}{y_c^+})^6}{1 + \eta^6} \quad (2.26)$$

$$F_{Wake}(y^+) = b(1 - e^{\frac{5(\eta^4 + \eta^8)}{1 + 5\eta^3}}) \quad (2.27)$$

Für diese Formulierung wird zusätzlich der Druckgradient p_x^+ und der kritische Wandabstand y_c^+ verwendet. Das y_c^+ wird implizit wie folgt definiert:

$$p_x^+ y_c^{+3} + y_c^{+2} - R_c^2 = 0 \quad (2.28)$$

Dabei ist der Druckgradient definiert durch:

$$p_x^+ = \nu / (\rho u_\tau^3) \frac{dp}{dx}$$

R_c ist als kritische Reynoldszahl zu interpretieren und wird empirisch auf 12 gesetzt [23]. Die Gleichung 2.28 muss somit für jedes p_x^+ gelöst werden. Da diese Gleichung bis zu 3 reellwertige Nullstellen besitzen kann, wird die Lösung über die kleinste positive Nullstelle eindeutig definiert.

Die Wandfunktion nach Nickels kann mithilfe einer Annahme vereinfacht werden. Bei einem $\eta = y/\delta$ deutlich geringer als 1 gilt, dass der Exponent in der Wake-Funktion gegen 0 läuft, wodurch der exponential-Term gegen 1 konvergiert. Daraus ergibt sich näherungsweise:

$$b(1 - e^{\frac{5(\eta^4 + \eta^8)}{1 + 5\eta^3}}) \approx 0, \eta \ll 1$$

Für diese Vereinfachung muss angenommen werden, dass die Wandfunktion innerhalb der Grenzschicht ausgewertet wird. Mit der gleichen Annahme vereinfacht sich auch die Overlap-Funktion wie folgt:

$$\ln \left(\frac{1 + (0.6\frac{y^+}{y_c^+})^6}{1 + \eta^6} \right) \approx \ln (1 + (0.6\frac{y^+}{y_c^+})^6), \eta \ll 1$$

Mithilfe dieser grundlegenden Annahme kann die Wandfunktion so vereinfacht werden, dass die Funktion keine Abhängigkeit von η aufweist.

$$F_{Ni}(y^+) = y_c^+ [1 - (1 + 2(\frac{y^+}{y_c^+}) + \frac{1}{2}(3 - y_c^+ p_x^+)(\frac{y^+}{y_c^+})^2 - \frac{3}{2}y_c^+ p_x^+ (\frac{y^+}{y_c^+})^3) e^{-3\frac{y^+}{y_c^+}}] + \frac{\sqrt{1 + y_c^+ p_x^+}}{6\kappa_0} \ln (1 + (0.6\frac{y^+}{y_c^+})^6) \quad (2.29)$$

In dieser Form wird die Wandfunktion nach Nickels auch in der weiteren Arbeit implementiert und verwendet.

3. Lösungsverfahren

3.1. Diskretisierung

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind nur unter sehr spezifischen Umständen durch analytische Methodiken lösbar. Daher ist es für die meisten Fälle notwendig, für eine Approximation der Lösung numerische Verfahren heranzuziehen. Besonders in der numerischen Strömungsmechanik ist die Finite-Volumen-Methode etabliert. Für diese Methode wird das Rechengebiet in eine endliche Anzahl an Kontrollvolumina aufgeteilt. Ein Kontrollvolumen wird dabei als Zelle bezeichnet und die Zusammensetzung der verschiedenen Zellen ergibt das Rechengitter. Diese Feldvariablen werden in den Mittelpunkten der Zellen definiert.

Die Navier-Stokes-Gleichungen werden in ihrer konservativen Form als Oberflächenintegral umschrieben. Mithilfe dieser können nun numerische Flüsse zwischen den Zellen berechnet werden. Dadurch entsteht ein algebraisches System, welches mithilfe numerischer Methodiken gelöst werden kann. Die Flüsse lassen sich in konvektive und viskose Flüsse aufteilen.

3.2. Numerischer Strömungslöser

3.2.1. TAU

Für die numerische Lösung der Strömungsprobleme wird der vom Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt entwickelte kompressible Strömungslöser TAU verwendet. Dieser wird für alle in der Arbeit vorgestellten Lösungen verwendet. Diese Software basiert auf einem Finiten Volumen Löser für dreidimensionale Systeme. Dabei kann TAU auf strukturierten und auch unstrukturierten Gittern operieren. Durch die parallele Programmierung von TAU ist es möglich, die Strömungssimulationen durch Berechnungen auf mehreren CPUs zu beschleunigen.

3.2.2. RANS Einstellungen

Die Diskretisierung der konvektiven Terme erfolgt durch das schiefsymmetrische zentrale Schema nach Kok [24]. Zusätzlich wird eine hohe Dissipation verwendet. Für

die zeitliche Diskretisierung wird das implizite Backward-Euler-Schema verwendet. Das über diese Diskretisierung erstellte Gleichungssystem wird mithilfe der LUSGS (Lower Upper Symmetric Gauß-Seidel) Methode gelöst.

3.2.3. IDDES Einstellungen

In den durchgeführten Untersuchungen wird der WMLES Modus der IDDES erzwungen. Für die WMLES wird das gleiche zentrale Schema für die Diskretisierung verwendet. Für die Dissipation wird ein hybrides Low-Dissipations- und Dispersions-Schema verwendet (LD2). In diesem wird im RANS-Bereich eine erhöhte Dissipation verwendet und im LES-Bereich eine geringe Dissipation.

Für die zeitliche Diskretisierung wird ein duales Zeitschrittverfahren verwendet. In diesem werden Pseudozeitschritte durchgeführt, bis ein gewähltes Konvergenzkriterium erfüllt ist. In dieser Arbeit wird als Konvergenzkriterium das Cauchy-Kriterium verwendet. Die fallspezifische Wahl der Kriterien und des Zeitschrittes wird zu Beginn des Kapitels 4.1 präsentiert.

Cauchy Konvergenz

Das erwähnte Cauchy-Konvergenzkriterium entspricht der Formulierung:

$$\frac{\phi^n - \phi^{n-k}}{\phi^n} \leq \epsilon \forall k = \{1, \dots, (N-1)\} \quad (3.1)$$

ϕ entspricht dabei dem Strömungsparameter, für den das Konvergenzkriterium angewendet wird. Das Konvergenzkriterium wird an N Proben geprüft. Dafür wird das Konvergenzkriterium am Pseudozeitschritt n anhand der N vorherigen Pseudozeitschritte geprüft.

3.3. Einbettung der Wandfunktionen

Für die Verwendung der Wandfunktionen werden, wie in Kapitel 2.3 beschrieben, die Wandhaftbedingung durch eine Neumann-Bedingung ersetzt. Die Randbedingung wird mithilfe der Wandschubspannung τ_w gesetzt. Ermittelt wird τ_w durch die algebraischen Wandfunktionen. Dafür ist eine Umformulierung der Wandfunktion nötig.

$$u^+ = F(y^+) \Rightarrow 0 = F(y^+) - u^+ \quad (3.2)$$

Mit der Definition der skalierten Größen ($u^+ = u/u_\tau$, $y^+ = yu_\tau/\nu$) kann die Gleichung zusätzlich umgeformt werden zu:

$$0 = u_\tau F(y^+(u_\tau)) - u \quad (3.3)$$

Für das Lösen der Wandfunktion sind die Größen u , y und ν bereits bekannt. Dadurch ist die einzige Unbekannte der Gleichung u_τ . Die Gleichung 3.3 wird mithilfe des Newton-Verfahrens iterativ nach u_τ gelöst. Anschließend kann mithilfe von u_τ die Wandschubspannung τ_w berechnet werden.

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 \quad (3.4)$$

3.4. Implementierung der Wandfunktion nach Nickels

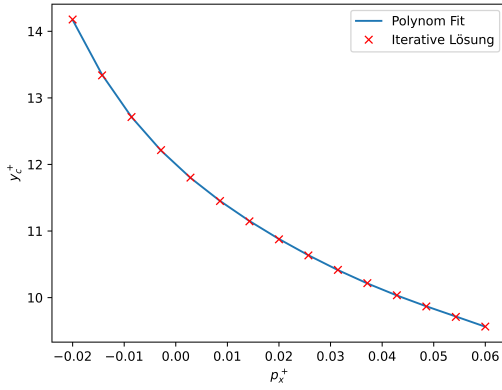
Für die Implementierung der Wandfunktion nach Nickels [23] werden die vorher vorhandenen Strukturen der bereits in TAU implementierten Wandfunktion nach Knopp [22] verwendet. Für das Lösen der Wandfunktion nach Nickels wird dem Verfahren zusätzlich der Druckgradient $\frac{\partial P}{\partial s}$ übergeben. Dieser Druckgradient entspricht dem Gradienten entlang der Stromlinie. Die Initialisierung des Newton-Verfahrens wird von der vorhandenen Implementierung übernommen. Somit entspricht der Initialwert $u_\tau = \sqrt{\frac{uw}{y}}$.

Für die Wandfunktion nach Nickels sind Anpassungen im Code notwendig. Die Wandfunktion nach Nickels weist im Gegensatz zu der Wandfunktion nach Knopp weitere Abhängigkeiten auf, die bei der numerischen Lösung mit dem Newton Verfahren berücksichtigt werden müssen. Die Wandfunktion nach Nickels, lässt sich mit allen Abhängigkeiten in der folgenden Form schreiben:

$$F_{Ni}(y^+) = F_{Ni}(y^+(u_\tau), p_x^+(u_\tau), y_c(p_x^+)) \quad (3.5)$$

Die Parameter dieser Wandfunktion unterliegen verschiedener Abhängigkeiten von u_τ . Während $p_x^+(u_\tau)$, genau wie $y^+(u_\tau)$, direkt mit dem u_τ des vorherigen Iterationsschrittes berechnet werden kann, liegt $y_c^+(u_\tau)$ nur implizit durch die Gleichung 2.28 vor. Für die Lösung dieser Gleichung wird ein angepasstes Polynom verwendet, welches für ein beliebiges p_x^+ im Definitionsbereich das korrespondierende y_c^+ berechnet.

Das zugrunde liegende Polynom wurde vorab vom DLR an die Daten angepasst. Die Datenanpassung wurde mithilfe von iterativen Lösungen der Gleichung 2.28 erstellt. Für den Datensatz wurde eine sehr geringe Schrittweite von p_x^+ verwendet. Das vorliegende Polynom entspricht einem Polynom fünften Grades mit der Form $p(x) = \sum_{i=0}^5 a_i x^i$.



i	a_i
0	11,994
1	-71,560
2	1.171,026
3	-25.769,724
4	400.752,023
5	-2.545.378,700

Tabelle 3.1. Koeffizienten des Polynoms

Abbildung 3.1. Angepasstes Polynom für Gleichung 2.28

Das Newton-Verfahren ist ein iteratives Verfahren, das eine Gleichung der Form $0 = f(x)$ nach der Variable x löst. Der Iterationsschritt des Newton-Verfahrens ist dabei wie folgt definiert:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (3.6)$$

Die Iteration wird durchgeführt, bis das Cauchy-Konvergenz-Kriterium der gesuchten Größe x erfüllt wird. Dadurch, dass in der Wandfunktion u_τ nur indirekt von den in Gleichung 3.5 gezeigten Parametern abhängig ist, ist ein Update der Größen y^+ , p_x^+ und y_c^+ in jedem iterativen Schritt für eine genaue Anwendung der Wandfunktion nach Nickels notwendig. Somit werden zu Beginn jeder Iteration diese Größen erneut berechnet. Dafür wird zuerst der Druckgradient mit dem aktuellen u_τ skaliert und im Anschluss y_c^+ über das gezeigte Polynom berechnet. Da die Wandfunktion nach Nickels nur indirekt von u_τ abhängig ist, ergibt sich die erste Ableitung nach u_τ zu:

$$\frac{dF_{Ni}}{du_\tau} = \frac{\partial F_{Ni}}{\partial y^+} \frac{\partial y^+}{\partial u_\tau} + \frac{\partial F_{Ni}}{\partial y_c^+} \frac{\partial y_c^+}{\partial p_x^+} \frac{\partial p_x^+}{\partial u_\tau} + \frac{\partial F_{Ni}}{\partial p_x^+} \frac{\partial p_x^+}{\partial u_\tau} \quad (3.7)$$

Die Ableitungen von $y^+(u_\tau)$ und $p_x^+(u_\tau)$ ergeben sich aus deren Definition, während $\frac{\partial y_c^+}{\partial p_x^+}$ aus der Gleichung 2.28 folgt:

$$\frac{\partial y_c^+}{\partial p_x^+} = \frac{y_c^2}{3p_x^+ y_c^+ + 2} \quad (3.8)$$

Da die Newton-Iteration ein explizites Verfahren ist, kann diese implizite Formulierung der Ableitung ohne weitere Umformulierungen verwendet werden. Im Iterationsschritt werden somit die Werte aus dem vorherigen Schritt in Gleichung 3.8 eingesetzt.

Da die Wandfunktion für p_x^+ in $[-0,02; 0,06]$ definiert ist, wird das p_x^+ auf diesen Definitionsbereich beschränkt. Bei p_x^+ Werten außerhalb des Definitionsbereichs wird

3.4. Implementierung der Wandfunktion nach Nickels

der Wert auf den nächsten Definitionsrand gesetzt. Im Falle, dass p_x^+ auf den Definitionsbereich gesetzt werden muss, werden $\frac{\partial F_{Ni}}{\partial y_c^+}$ und $\frac{\partial F_{Ni}}{\partial p_x^+}$ vernachlässigt, da diese sonst zu numerischen Instabilitäten führen können.

4. Ergebnisse

4.1. Periodische Rohrströmung mit quadratischem Querschnitt

Testfall Vorstellung

Die periodische Rohrströmung mit quadratischem Querschnitt ist ein klassischer Untersuchungsfall in Bezug auf Strömungen entlang einer Ecke. Dabei handelt es sich um eine turbulent vollentwickelte Strömung. Bei dieser entwickelten Strömung bleiben die Strömungsgrößen in Stromrichtung konstant, wodurch nur eine Abhängigkeit innerhalb der Querschnittsebene vorliegt. Da die Daten der DNS von Pirozzoli et al. [6] als Referenz dienen, orientieren sich die Geometrie wie auch die Strömungsbedingungen an der gleichen Arbeit von Pirozzoli et al. In [6] wird $Ma = 0,2$ und $Re_{2h} = 40.000$ gewählt. Diese Länge des Kanals beträgt $L = 6\pi h$, wobei h der Halbhöhe des Rohrs entspricht. Durch diese Strömungsbedingungen ergibt sich nach der Referenz $Re_\tau = \frac{\rho \langle u_\tau \rangle h}{\mu} = 1.055$. $\langle u_\tau \rangle$ bezieht sich dabei auf das räumlich über die Wände gemittelte $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$. Die vier Wände werden als isotherme viskose Wände betrachtet und für den Ein- und Auslass werden periodische Randbedingungen gesetzt. Quellterme in den Impulsgleichungen kompensieren die im Rohr entstehenden Reibungsverluste. Die Verwendung dieser Quellterme orientiert sich an der periodischen Kanalströmung in [13].

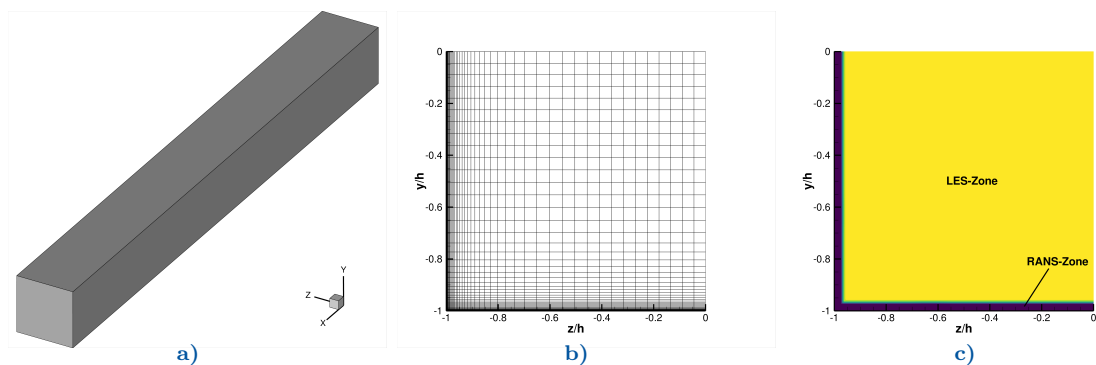


Abbildung 4.1. a) Geometrie des quadratischen Rohrs, b) WMLES Gitter im Querschnitt, c) RANS und LES Zone der WMLES beim quadratischen Kanal

Zeitdiskretisierung für IDDES

Wie in Abschnitt 2.2.4 dargelegt, handelt es sich bei der IDDES um ein instationäres Verfahren mit Nutzung eines globalen Zeitschrittes. Dieser globale Zeitschritt ist von bedeutender Relevanz für die Lösung der IDDES. Analog zu [13] und [25] bestimmt sich der Zeitschritt zu:

$$dt = dt^+ \frac{h^2 \rho}{\mu Re_\tau} = 1,09 \cdot 10^{-4} \quad (4.1)$$

Als Zeitschrittverfahren wird das duale Zeitschrittverfahren verwendet. In diesem werden für jeden globalen Zeitschritt Pseudoiterationen durchgeführt, bis ausgewählte Größen das Cauchy-Konvergenz-Kriterium erfüllen. Hier sind die betrachteten Größen für die Cauchy-Konvergenz c_{drag} , maximale Eddy-Viskosität, gesamte turbulente kinetische Energie und gesamte Wirbelstärke.

Die WMLES benötigt zusätzlich eine Anfangsbedingung, von der an die instationäre Simulation beginnen kann. Dafür liegt die Verwendung einer RANS-Lösung nahe. Deshalb liegt bei allen in der Arbeit angegebenen WMLES eine RANS Lösung als initiales Strömungsfeld zugrunde. In der WMLES ist die Definition der RANS und LES Zonen rein geometrisch bedingt und der RANS-Bereich beschränkt sich auf die direkte Wandnähe.

Störungen in der numerischen Lösung begünstigen eine schnelle Ausbildung aufgelöster Turbulenzen. Zu diesem Zweck wird in den WMLES-Rechnungen ein synthetischer Turbulenz-Generator (STG) verwendet. Dieser STG erzeugt in seinem Wirkungsbereich zeitliche und räumliche Fluktuationen in den Strömungsgrößen und führt so aufgelöste Turbulenzen ins System ein. Der STG bleibt für eine CTU (Computational Time Unit) eingeschaltet. Dabei beschreibt eine CTU die Zeit, die die Strömung im Durchschnitt braucht, um das Rohr einmal zu durchschreiten. Nach der ersten CTU erfolgt die Einschwingphase. Ab dieser wird der STG deaktiviert. Für das Einschwingen simuliert die WMLES-Rechnung 5 weitere CTUs, da nach diesen die integralen Strömungsgrößen keinen Trend mehr aufweisen und somit die Strömung sich an das Verfahren angepasst hat. Im Anschluss erfolgt die Ermittlung der zeitlichen Mittelwerte der Strömungsgrößen. Dies erfolgt über 15 weitere CTUs. Nach der zeitlichen Mittelung erfolgt eine räumliche Mittelung entlang des Rohrs. Dies ist möglich, da in Hauptströmungsrichtung eine symmetrische Strömung vorliegt.

4.1.1. Vergleich von RANS- und WMLES Lösungen mit Referenz (DNS)

4.1.1.1. Gitterkonstruktion

Für die RANS und WMLES Simulationen werden strukturierte Gitter verwendet. Das RANS Gitter ist nach den üblichen Diskretisierungskriterien [26] konstruiert. Somit werden 40 Zellen in der Grenzsicht gesetzt, wodurch bei einer entwickelten Strömung ein 80x80 Gitter im Querschnitt des Rohrs generiert wird. In Stromrichtung beträgt der Zellabstand $\Delta x = 2,35h$. Für die RANS- und WMLES-Untersuchungen wird $y^+(1) \leq 1$ gewählt, der sich bei den Simulationen zu einem Wert von $y^+(1) \approx 0,9$ ergibt. Dieser wandnormale Zellabstand wird mithilfe eines Expansionsfaktors von $r = 1,15$ vergrößert.

Der Wandabstand, wie auch der Expansionsfaktor, werden für die WMLES übernommen. Für die WMLES expandiert der wandnormale Zellabstand nur bis zu einer Größe von $0,05\delta$, wobei $\delta = h$ und wird von da an konstant gehalten [27]. Dieser Wert wird zusätzlich für Δx in Strömungsrichtung gewählt.

4.1.1.2. Ergebnisse

Die untersuchten Daten stammen aus einem zuvor durchgeführten Praktikum am DLR. Als Daten liegen eine RANS-Lösung, die ein RSM-Modell nutzt, eine SA-QCR-IDDES, welche eine QCR (quadratic constitutive relation) Erweiterung nutzt, und zwei RSM-IDDES vor. Als RSM-Modell wird, sofern nicht anders angegeben, das SSG/LRR Modell [16] verwendet. Für die IDDES wird der Wall-Modelled-LES (WMLES) Modus verwendet, wodurch sich die RANS-Zone auf wandnahe Bereiche beschränkt (vgl. Abbildung 4.1c). Die beiden RSM-WMLES nutzen verschiedene Ansätze der Turbulenz-Modellierung. So basiert eine auf einer Eddy-Viskositäts-Formulierung des RSM-Modells und die andere nutzt die Übergangsfunktion der WMLES, um im RANS-Bereich das RSM-Modell einzubinden. Diese beiden Methoden werden in [4] vorgestellt. Die zweite Art der Einbindung des RSM wird mit RSM-Blending bezeichnet. Die Ergebnisse dieser Daten werden im folgenden Abschnitt betrachtet.

Zunächst werden die in Tabelle 4.1 aufgeführten Re_τ -Werte der verschiedenen Simulationen untersucht. Dafür wird das u_τ über die Wände des Kanals gemittelt und in $Re_\tau = \frac{\rho \langle u_\tau \rangle h}{\mu}$ umgerechnet. Damit ist ein direkter Vergleich mit der in der Referenz [6] angegebenen Reynoldszahl möglich, da diese dort identisch definiert ist. Beim Vergleichen fällt auf, dass die RSM-RANS das $\langle u_\tau \rangle$ überschätzt, während die WMLES

ein niedrigeres $\langle u_\tau \rangle$ liefert. Außerdem wird der Fehler mit komplexerem Turbulenzmodell geringer. So weicht das RSM-WMLES mit dem RSM-Blending am geringsten von der DNS ab und die SA-QCR-WMLES am meisten. Für die Normierungen in den weiteren Ergebnissen werden die korrespondierenden $\langle u_\tau \rangle$ der verschiedenen Simulationen verwendet.

	Re_τ	relative Abweichung $\langle u_\tau \rangle$
DNS(Pirozzoli)	1055	
RSM-RANS	1070	1,46%
SA-QCR-WMLES	1006	-4,67%
RSM-WMLES	1029	-2,48%
RSM-WMLES-bl.	1052	-0,25%

Tabelle 4.1. $Re_\tau = \frac{\rho \langle u_\tau \rangle h}{\mu}$ der RANS und WMLES im Vergleich zur DNS

In Abbildung 4.2 wird die Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung (x-Richtung) betrachtet. Diese wird über die räumlich mittlere Geschwindigkeit u_b normiert. Dabei wird jede Simulation separat voneinander dargestellt. Aus Symmetriegründen wird über die einzelnen Quadranten zusätzlich gemittelt. Dafür werden alle Ecken durch Rotation des Rohrs übereinander projiziert und die Strömungsgrößen entsprechend der Rotation verrechnet. Dadurch stimmen die einzelnen Ecken im Strömungsfeld überein. Somit wird schließlich jede Simulation reduziert auf eine Ecke dargestellt. Dargestellt ist in Abbildung 4.2a die RSM-RANS, Abbildung 4.2b die SA-QCR-WMLES, in Abbildung 4.2c die RSM-WMLES und in Abbildung 4.2d die RSM-WMLES mit dem RSM-Blending. Zusätzlich zu den Simulationen werden die DNS-Daten von S. Pirozzoli [6] über beschriftete Isolinien dargelegt. Die Beschriftung der Isolinien entspricht den Isoleveln in der angegebenen Legende. Außerdem ist in Abbildung 4.2a als schwarz gestrichelte Linie die Winkelhalbierende eingezeichnet.

Allgemein kann in Abbildung 4.2 eine geringe Asymmetrie in den Daten beobachtet werden, was durch die eingezeichnete Winkelhalbierende in Abbildung 4.2a betont wird. Während die verschiedenen Simulationen insgesamt eine allgemeine Übereinstimmung in der Geschwindigkeit in Stromrichtung aufweisen (hier nicht dargestellt), sind im Vergleich zu DNS einzelne Unterschiede erkennbar. Alle Simulationen zeigen eine hohe Abweichung in der Mitte des Rohrs in der Umgebung der zwölften Isolinie auf, wobei dies am deutlichsten in der RSM-RANS ist. In der Umgebung der Isolinien 10 und 11 liegt eine geringe Verbesserung durch die WMLES im Vergleich zur RSM-RANS vor, wobei die RSM-WMLES mit dem RSM-Blending im Vergleich die DNS diesbezüglich am besten approximiert. Ähnliches ist auch in der Umgebung der siebten Isolinie zu erkennen. Unerwarteterweise zeigt der Bereich um die achte Isolinie der DNS eine auffallend hohe Übereinstimmung mit der RSM-RANS, obwohl bei den

4.1. Periodische Rohrströmung mit quadratischem Querschnitt

weiteren Isolinien eine deutlichere Abweichung vorliegt. Eine ähnliche Übereinstimmung gelingt bei den WMLES nur mit RSM-Blending. Aus dieser Betrachtung geht hervor, dass bezüglich der Geschwindigkeit in x-Richtung die RSM-WMLES mit dem RSM-Blending die höchste Übereinstimmung mit der DNS [6] erzielt.

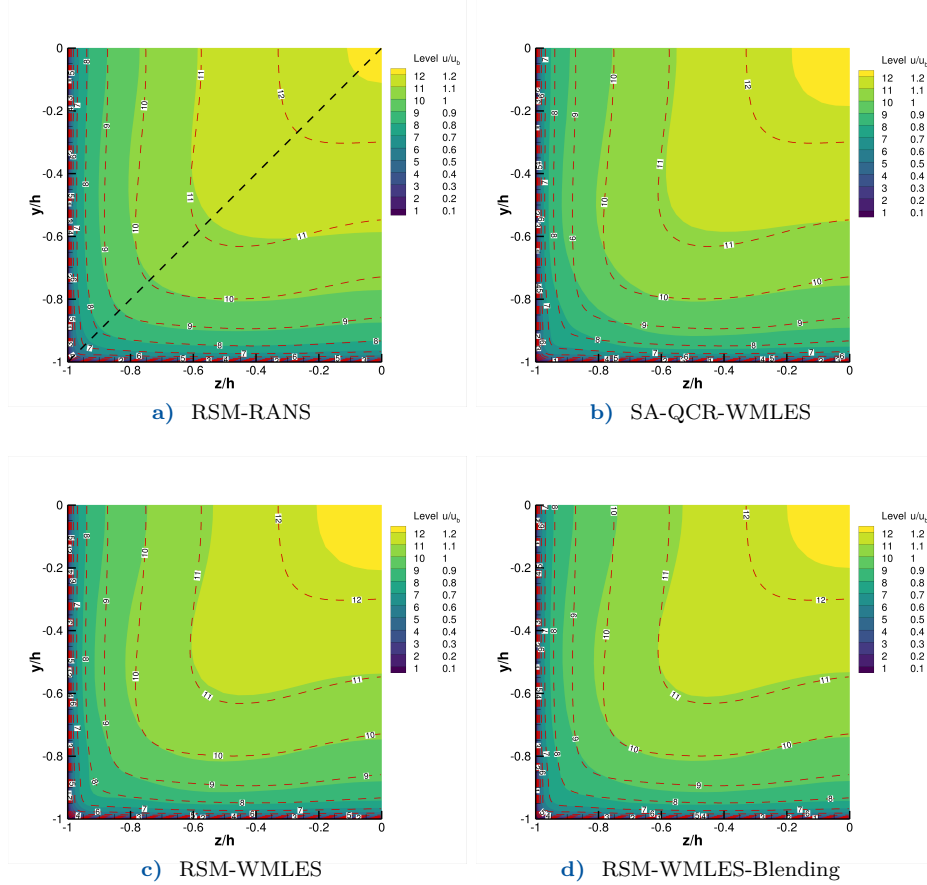


Abbildung 4.2. Vergleich der nach u_b normierten Strömungsgeschwindigkeiten mit der DNS von S. Pirozzoli [6] (rot gestrichelt)

Die über $\langle u_\tau \rangle$ normierten Geschwindigkeiten in Stromrichtung werden in Abbildung 4.3 über die in Abbildung 4.2a eingezeichnete Winkelhalbierende aufgetragen. Definiert sind die aufgeführten Größen mit $u^+ = u/\langle u_\tau \rangle$ und $y = d\langle u_\tau \rangle \rho_{ref}/\mu_{ref}$. Dabei entspricht d dem Wandabstand. Beim Betrachten von Abbildung 4.3 zeigt sich, dass die SA-QCR-WMLES Lösung mit den DNS-Daten am besten übereinstimmt, während die RSM-RANS-Rechnung die größten Abweichungen zeigt. Die SA-QCR-WMLES Lösung zeigt somit auch im RANS-Bereich (aktiv bis $y^+ = 52$) bessere Übereinstimmungen im Vergleich zum RSM-RANS Modell, was nicht den Erwartungen entspricht.

Neben der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung spielt die Querströmung eine wich-

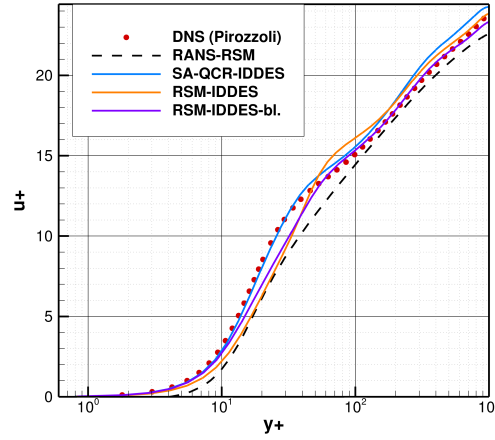


Abbildung 4.3. Vergleich der normierten Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung entlang der Winkelhalbierenden

tige Rolle, da diese Teil der vorliegenden Sekundärströmung ist. In Abbildung 4.4 werden die Strömungsgeschwindigkeiten in y-Richtung der verschiedenen Simulationen in jeweils einem Quadranten des Rohrs dargestellt. Wie in Abbildung 4.2 werden die Isolinien der DNS für den Vergleich ergänzend visualisiert. Dabei beziehen sich die Nummern der Isolinien auf die in der Legende angegebenen Werte. So ist der Isolinie 1 der Wert $-0,02$ zuzuordnen. Da für ein $y/h > 0$ aufgrund der Symmetrie ein Vorzeichenwechsel vorliegt, wird dieser Wechsel auf die Zuordnung der Nummerierung übertragen. So entspricht zum Beispiel die Isolinie 8 bei $y/h < 0$ dem Wert $0,012$ und bei $y/h > 0$ dem Wert $-0,012$. Dies hat den Vorteil, dass sowohl in den unteren als auch in den oberen Quadranten die Nummern der Isolinien für die gleichen Strukturen identisch bleiben und so die Beschreibungen übertragbar für alle Quadranten sind.

Grundlegend weisen alle Simulationen ähnliche Grundstrukturen in den Quergeschwindigkeiten auf. Lediglich die RSM-RANS zeigt sowohl größere Abweichungen zur DNS als auch zu den WMLES in der Umgebung der Isolinie 4 und in der Umgebung der Linie 8 bei $z/h \approx 0$. Diese Isolinien zeigen, zusätzlich mit der achten Isolinie in Wandnähe, die deutlichsten Variationen im Vergleich zur DNS auf. In der räumlichen Umgebung dieser Isolinien sind höhere Quergeschwindigkeiten im Vergleich zum übrigen Geschwindigkeitsfeld festzustellen. In diesen Umgebungen unterschätzt die RSM-RANS die Geschwindigkeit in y-Richtung. Die WMLES-Lösungen zeigen eine bessere Übereinstimmung mit den DNS-Daten. Abbildung 4.4 zeigt, dass alle Methoden eine vergleichbare Sekundärströmung wie die DNS-Lösung [6] vorhersagen.

Im Kontrast zu den Geschwindigkeitskomponenten weisen die Reynoldsspannungen größere Abweichungen zwischen den numerischen Methoden und den DNS-Daten auf.

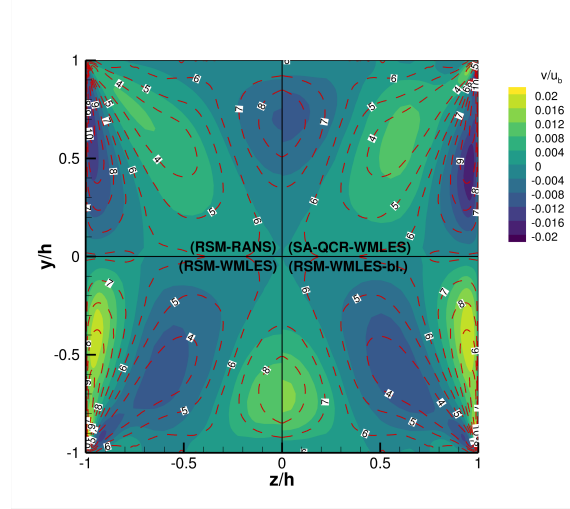


Abbildung 4.4. Konturplot der normierten Geschwindigkeit in y-Richtung mit verschiedenen numerischen Methoden und der DNS (rot gestrichelt)

In Abbildung 4.5 ist die Normalspannung in x-Richtung $R_{11,tot}^+$ und in Abbildung 4.5c die Scherspannung $R_{12,tot}^+$ dargestellt. Diese werden als Summe der modellierten und aufgelösten Spannungen betrachtet $R_{ij,tot} = R_{ij,mod} + R_{ij,res}$. Normiert werden die Spannungen mit $R_{ij}^+ = R_{ij}/(\langle u_\tau \rangle)^2$. In den Abbildungen 4.5a und 4.5c sind die Simulationsergebnisse in Quadranten eingeteilt.

Weitestgehend unterschätzen die WMLES-Lösungen die Reynoldsspannung im Vergleich zu den DNS-Ergebnissen. Die WMLES-Ergebnisse erreichen dennoch eine ähnliche Verteilung im Querschnitt. Die RSM-RANS weist hingegen erhebliche Probleme in Wandnähe auf. Der Anstieg der Reynoldsspannung nahe der Wand missachtet die RANS. Auch auffällig ist das Verhalten der Reynoldsspannung entlang der Winkelhalbierenden. Bei genauerer Betrachtung ist zu erkennen, dass die Isolinen der DNS weiter in Richtung Ecke verlaufen, als es in den WMLES der Fall ist. Dieses Verhalten wird deutlicher durch die Darstellung von R_{11}^+ entlang der Winkelhalbierenden in Abbildung 4.5b. Das Maximum der Normalspannung in x-Richtung ist in den WMLES örtlich in Richtung der Kanalmitte verschoben. Dadurch, dass das Extremum aus der DNS innerhalb der RANS-Region der WMLES-Rechnung liegt, lässt sich die Hypothese aufstellen, dass diese räumliche Verschiebung durch die RANS-Modellierung bedingt ist. Das Ergebnis der RSM-RANS bekräftigt diese These, da die RANS dieses Maximum nicht abbilden kann. Bei der Scherspannung erzielt die RANS bessere Ergebnisse als bei der Normalspannung (vgl. Abbildung 4.5c). Die RSM-RANS stimmt bezüglich der Scherspannung in Kanalmitte weitestgehend mit der DNS überein, zeigt jedoch in Richtung der Ecken zunehmend größere Abweichungen zu den Isolinen auf. Auf der anderen Seite erzeugen die WMLES miteinander übereinstimmende Ergebnisse bezüglich der Scherspannung. Die WMLES entsprechen der DNS in den

Bereichen der Isolinen 2, 3 und 4 präzise, bis diese im Eckbereich $|z/h| > 0,6$ größere Abweichungen aufweisen.

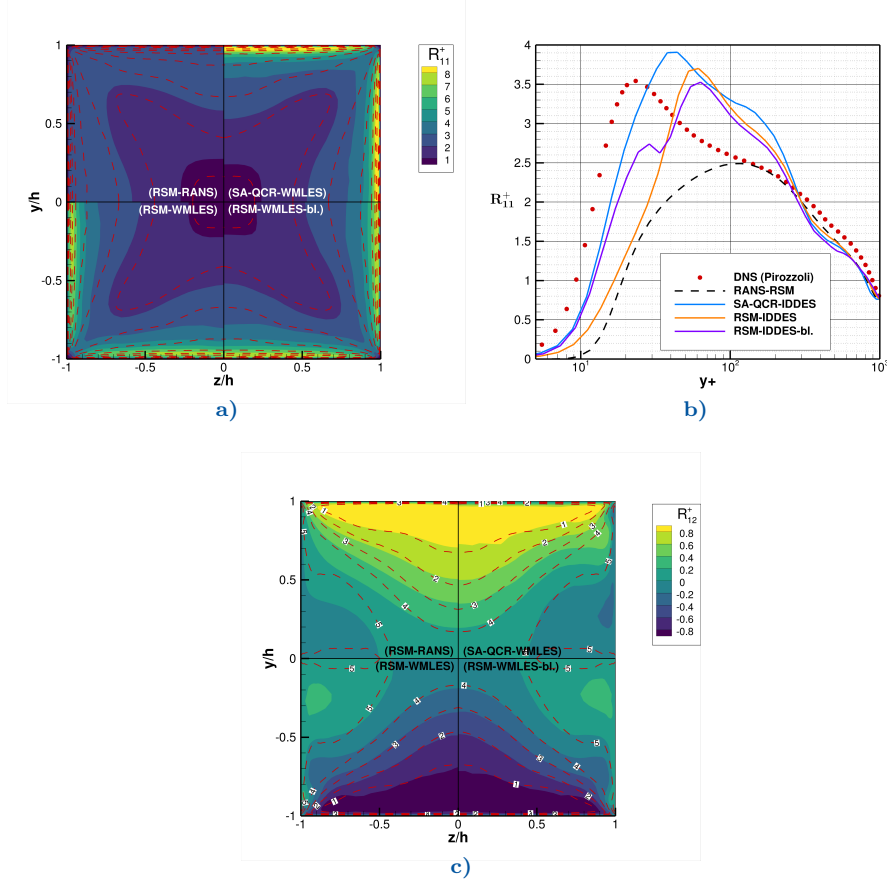


Abbildung 4.5. a) Konturplots der Normalspannung R_{11}^+ für die durchgeführten Simulationen (quadrantenweise dargestellt) mit den DNS-Daten [6] (rot gestrichelt), b) R_{11}^+ entlang der Winkelhalbierenden, c) R_{12}^+ dargestellt wie in a)

Zusammenfassend weisen die WMLES und RANS-Simulationen akzeptable Ergebnisse auf. So ist in den Geschwindigkeiten eine gute Übereinstimmung der numerischen Methoden mit den DNS-Daten ersichtlich. Während die RANS größere Abweichungen der Geschwindigkeit in y -Richtung in der Mitte der Quadranten zeigt, erreichen die WMLES dort eine höhere Übereinstimmung mit den Daten von Pirozzoli et al. [6]. Bezüglich der Reynoldsspannungen erreichen die WMLES-Methoden eine höhere Genauigkeit als die RANS-Methode. So gibt es besonders in der LES-Zone der WMLES eine höhere Übereinstimmung mit der Referenz. Die größten Unterschiede zur Referenz treten bei den Geschwindigkeiten, wie auch bei den Reynoldsspannungen in Ecknähe auf. Von den WMLES erzielt die RSM-WMLES mit dem RSM-Blending die höchste Übereinstimmung mit der Referenz.

Insgesamt bieten die WMLES eine Verbesserung gegenüber der RANS-Rechnung. Diese scheint in dem Fall der Rohrströmung mit quadratischem Querschnitt noch gering, kann jedoch in komplexeren Fällen eine größere Verbesserung der Ergebnisse einbringen. Diese Ergebnisse werden im Anschluss als Grundlage für die Untersuchung mit Wandfunktionen verwendet. Damit wird der Einfluss der Wandfunktionen auf das Strömungsfeld untersucht.

4.1.2. Wandfunktionen in der Rohrströmung

Die Nutzung von Wandfunktionen ermöglicht den Wandabstand zum wandnächsten Gitterpunkt ($y^+(1)$) signifikant zu erhöhen. Dadurch werden der Rechenaufwand und die Rechenzeit der Simulation im Vergleich zum Low-Reynolds-Ansatz verringert. Damit die Wandfunktionen anwendbar sind, sollten diese konsistente Lösungen im Vergleich zur Low-Reynolds-Simulation liefern. Mit Low-Reynolds-Simulation sind Rechnungen gemeint, die einen Wandabstand von $y^+(1) \approx 1$ vorweisen und an Wänden eine Wandhaftbedingung als Randbedingung setzen.

4.1.2.1. Gitterkonstruktion für Wandfunktion

Für die Validierung der Nutzung von Wandfunktionen (WF) wurden zunächst vier weitere strukturierte RANS-Gitter konstruiert, die sich im Abstand der ersten Zellen zur Wand ($y^+(1)$ in $\{12,5; 25; 50; 100\}$) unterscheiden. Die Wandabstände, die Anzahl an Zellen und die prozentuale Einsparung sind in Tabelle 4.2 gegeben. Aus 4.2 geht hervor, dass die erstellten Wandfunktionsgitter eine signifikante Zelleinsparung von bis zu 92% ($y^+(1) = 100$) aufweisen. Für eine größtmögliche Konsistenz zwischen den WF-Gittern besitzen die Zellen in der Rohrmitte ähnliche Zellenabstände wie das Low-Reynolds-Netz aus Abschnitt 4.1.1. Für die RANS-Gitter wird erneut ein Expansionsfaktor von 1,15 gewählt. Da bei einem Wandabstand $y^+(1) = 100$ die Zellen bereits relativ groß sind, werden diese in wandnormaler Richtung nicht vergrößert. Stattdessen ergibt sich ein homogenes Gitter. Weiterhin wird für alle WF-Gitter die Auflösung in Strömungsrichtung Δx unverändert aus der Low-Reynolds-Betrachtung übertragen.

Für die Untersuchung der WF mit der WMLES-Methode wird ein einzelnes Gitter mit einem mittleren $y^+(1)$ Wert von 25 generiert. Dieser Wert orientiert sich an der Größenordnung für industrielle Anwendungen. Der Expansionsfaktor und sonstige Zellgrößen werden aus der Low-Reynolds-Rechnung übernommen. Die RANS Gitter werden in Abbildung 4.6 mit dem zugehörigen Wandabstand $y^+(1)$ dargestellt. Das WMLES Gitter wird nicht abgebildet, da dieses sich nur geringfügig vom RANS-Gitter unterscheidet.

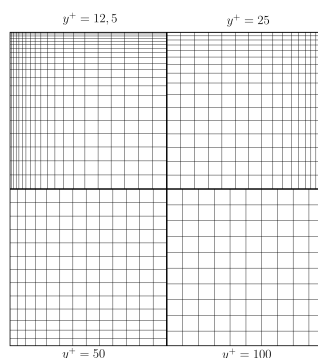


Abbildung 4.6. RANS WF-Gitter mit entsprechendem Wandabstand

Netz	y+	#Zellen	Zelleinsparung
RANS 1)	0,9	48.672	
RANS 2a)	12,5	22.400	54,0%
RANS 2b)	25	8.192	83,2%
RANS 2c)	50	5.408	88,9%
RANS 2d)	100	3.200	93,4%
WMLES 3)	0,9	$29,43 \cdot 10^5$	
WMLES 4)	25	$7,36 \cdot 10^5$	73,8%

Tabelle 4.2. Eigenschaften der verschiedenen WF-Gitter

4.1.2.2. Anpassung des numerischen Setups

Für die Nutzung der Wandfunktionen dienen die RANS und WMLES Setups aus Abschnitt 4.1.1.2 als Grundlage. Dadurch bleibt das numerische Verfahren konsistent zu den Low-Reynolds-Daten, wodurch Unterschiede im Strömungsfeld auf die Gitter und die Wandbehandlung zurückzuführen sind. Das Setup unterscheidet sich lediglich in der Wärmebehandlung an den Wänden. Dieser Wechsel der Randbedingung ist notwendig, da in TAU, zum Zeitpunkt dieser Arbeit keine Implementierung von Wandfunktionen für isotherme Wände vorliegt.

Numerische Oszillationen in WMLES-Rechnungen

Bei der Nutzung von Wandfunktionen sind in der Lösung der RSM-WMLES numerische Artefakte sichtbar. Diese numerischen Artefakte sind in einzelnen Größen wie dem Druck und der Quergeschwindigkeit sichtbar. Um auszuschließen, dass diese Artefakte durch die Methode der RSM-WMLES entstehen, wurde zusätzlich eine SA-WMLES durchgeführt. Die Lösung der SA-WMLES wird in Abbildung 4.7 dargestellt.

In der SA-WMLES treten die numerischen Artefakte mit ähnlicher Intensität wie in der RSM-WMLES auf.

Um zu überprüfen, ob diese Artefakte durch eine Variation der numerischen Methode unterdrückt werden können, wurden verschiedene Einstellungen getestet. Bei der WMLES aus 4.1.1.2 wird ein hybrides LD2 (Low-Dissipation) verwendet. Für die WMLES-WF wurden zusätzlich die Auswirkungen bei einem nicht hybriden Schema und doppelter Dissipation geprüft. Diese zeigten keine direkte Verbesserung bezüglich dieser Artefakte. Auch das Wechseln der Vorkonditionierung (Prim) und der Ordnung des numerischen Schemas für die konvektiven Flüsse (erste/zweite Ordnung) der Turbulenz zeigen keine Verbesserung. Da durch die Variation des numerischen Setups keine Verbesserung ersichtlich ist, bleibt diese für die WF-Untersuchungen identisch zu den vorherigen Simulationen aus Abschnitt 4.1.1.2.

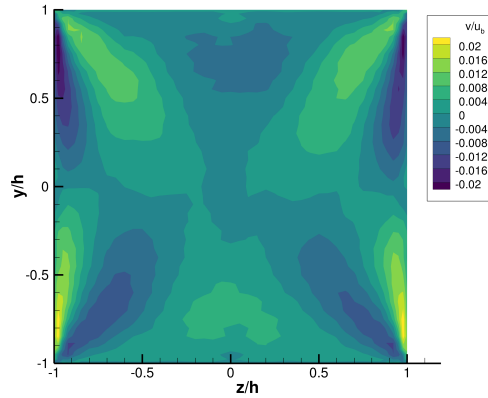


Abbildung 4.7. Geschwindigkeit in y-Richtung normiert mit u_b

4.1.2.3. RSM-RANS Wandfunktion Ergebnisse

Die Auswirkung der WF auf die Lösung wird mithilfe der in Tabelle 4.2 angegebenen Rechengittern untersucht. Für jedes dieser Gitter werden jeweils RSM-RANS-Rechnungen mit den WF nach Knopp und Nickels durchgeführt und mit den RSM-RANS-Ergebnissen aus Abschnitt 4.1.1.2 verglichen.

In Abbildung 4.8 sind die Geschwindigkeiten in x-Richtung (vgl. Abbildung 4.8a) und in y-Richtung (vgl. Abbildung 4.8b) im Querschnitt aufgetragen. Dabei sind die Werte, wie in Abschnitt 4.1.1.2 beschrieben, über die Quadranten gemittelt. Die unterschiedlichen Simulationsergebnisse werden in jeweils einem Quadranten dargestellt. Dargestellt sind in Abbildung 4.8 die Low-Reynolds-Simulation (schwarz) und die Lösung mit den WF nach Knopp (lila) und Nickels (grün) in der Form von Isolinien.

In jedem Quadranten werden die Ergebnisse zu jeweils einem Netz aufgetragen. Die korrespondierenden $y^+(1)$ sind in den Quadranten eingetragen.

Im Vergleich zu der Low-Reynolds-Simulation sind gute Übereinstimmungen in der Geschwindigkeit in x-Richtung bis zu einem $y^+(1) = 25$ festzustellen. Stärkere Abweichungen zu der Low-Reynolds-Rechnung sind bei den anderen beiden RANS-Gittern zu erkennen. Während das Gitter mit einem Wandabstand $y^+(1)$ von 50 noch vergleichsweise geringe Unterschiede aufweist, nehmen die Abweichungen bei $y^+(1) = 100$ deutlich zu.

Aus den Isolinen in Abbildung 4.8 geht hervor, dass die beiden WF in den Geschwindigkeiten nahezu identische Lösungen zueinander liefern. Die verschiedenen WF weichen nur in wenigen Umgebungen voneinander ab. In der Mitte des Rohres sind die Abweichungen zwischen den beiden WF bezüglich der Geschwindigkeit in x-Richtung am größten. Dies geht aus den Lösungen am Gitter für $y^+(1) = 12,5$ und $y^+(1) = 25$ hervor.

Bei der Geschwindigkeit in Querrichtung ist Vergleichbares zu beobachten (vgl. Abbildung 4.8b). Dort stimmen die Lösungen der WF bei einem $y^+(1) \leq 50$ weitestgehend mit der Lösung der Low-Reynolds-Rechnung überein. Wiederum zeigen die Simulationen mit WF für ein y^+ von 12,5 und 25 in der Umgebung von $z/h = 0$ und $y/h = 0,75$ eine weitere Isolinie im Vergleich zur Low-Reynolds-Lösung. Dadurch sagen diese Lösungen an der Stelle eine höhere Geschwindigkeit in Querrichtung voraus. Dieser Bereich ähnelt den Lösungen der WMLES und der DNS aus Abschnitt 4.1.1.2 (vgl. Abbildung 4.2). Deutlichere Abweichungen sind in Richtung der Ecken bei $y^+(1) = 50$ zu erkennen. Dort wird in der Umgebung der Isolinie 4 die Low-Reynolds-Rechnung unterschätzt. In der Quergeschwindigkeit sind bei $y^+(1) = 100$ deutliche Unterschiede zur Low-Reynolds-Simulation zu erkennen. Bei diesem Wandabstand sind die Abweichungen noch ausgeprägter als bei der Geschwindigkeit in x-Richtung. Diese Abweichungen scheinen durch das gröbere Gitter bedingt.

Bei der Betrachtung der Reynoldsspannung sind grundsätzlich ähnliche Abweichungen wie bei den Geschwindigkeiten erkennbar. Die betragsmäßig größte Normalspannung R_{11}^+ wird analog zur Abbildung 4.8 in Abbildung 4.9a dargestellt. Zusätzlich wird die gleiche Normalspannung entlang $z/h = 0$ gegen $y^+ = \frac{\langle u_\tau \rangle \rho d}{\mu}$ in Abbildung 4.9b aufgetragen. Da es sich um RANS-Rechnungen handelt, entspricht hier $R_{ij,tot}^+ = R_{ij,mod}^+$ und wird somit in diesem Abschnitt nur mit R_{ij}^+ bezeichnet.

In den Abbildungen 4.9a und 4.9b sind erneut hohe Übereinstimmungen der verschiedenen WF zueinander zu erkennen. Bei den Wandabständen von $y^+(1) \leq 25$ sind nur geringe Abweichungen beobachtbar. Bei den weiteren 2 Gittern mit $y^+ > 25$ sind im Vergleich größere Unterschiede zwischen Low-Reynolds- und WF-Rechnungen ersichtlich. In Wandnähe erhöht sich die Anzahl an dargestellten Isolinen bei höherem $y^+(1)$. Die zusätzlichen Isolinen liegen dabei räumlich nah aneinander. Folglich

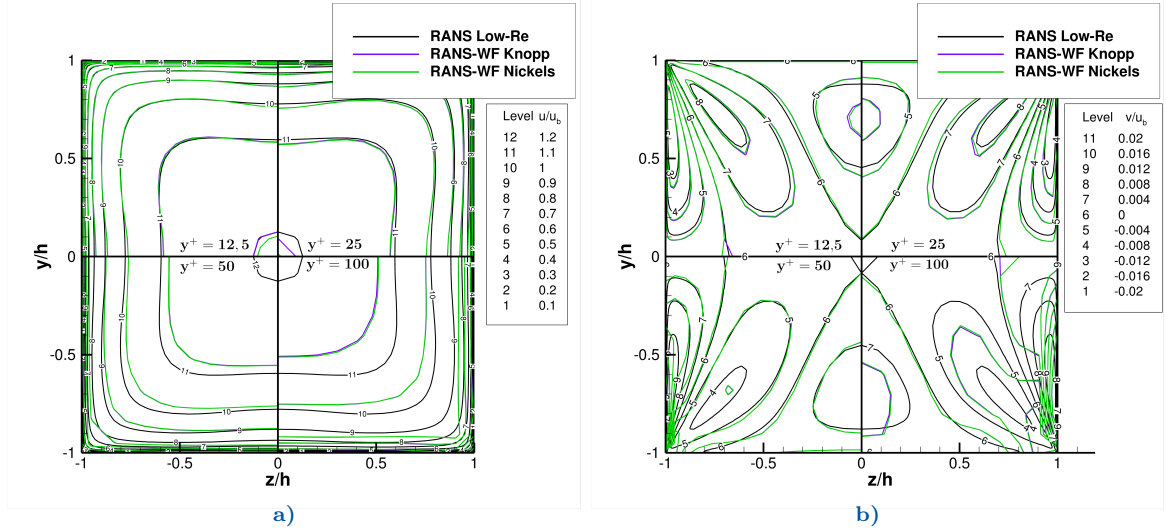


Abbildung 4.8. Quadrantenweise Darstellung der RSM-RANS WF-Ergebnisse mit Knopp (lila) und Nickels (grün). In a) Geschwindigkeit in x-Richtung, b) Geschwindigkeit in y-Richtung normiert über u_b

liegen ein erhöhtes Maximum und ein höherer Gradient in diesem Bereich vor. Aus Abbildung 4.9b geht hervor, dass die WF-Rechnungen einen deutlich erhöhten Wert für die Reynoldsspannung am wandanliegenden Punkt vorhersagen. Durch den erhöhten Wert entsteht der in Abbildung 4.9a beobachtete Gradient. Dieser erhöhte Wert scheint mit $y^+(1)$ zu skalieren.

In Abbildung 4.10 können ähnliche Verhaltensweisen in R_{12}^+ beobachtet werden. So liegen größere Abweichungen bei den Netzen mit $y^+ \geq 50$ vor. Diese Abweichungen sind besonders am Kanalrand deutlich. In der Kanalmitte ab $|z/h| < 0,3$ verbessern sich die Ergebnisse wieder. Der Wandabstand der ersten Gitterzelle $y^+(1)$ wirkt sich folglich nur geringfügig auf die Verteilung von R_{12} in der Kanalmitte aus.

Die Ergebnisse lassen den Schluss zu, dass bei der quadratischen Rohrströmung bis zu einem Wandabstand von $y^+(1) = 50$ nur geringe Abweichungen in den Geschwindigkeiten und Reynoldsspannungen durch den Einsatz von WF bei RSM-RANS-Rechnungen entstehen. Erst bei größeren Wandabständen zeigen die Lösungen größere Abweichungen von der ursprünglichen Low-Reynolds-Rechnung. Die größten Abweichungen lassen sich bei dem Netz mit $y^+(1) = 100$ in den Ecken lokalisieren. Aber auch bei einem Wandabstand von $y^+(1) = 50$ lassen sich größere Unterschiede in den Ecken feststellen. Für Anwendungen könnte dies bedeuten, dass Eckbereiche mit einem geringeren Wandabstand behandelt werden sollten als andere Wände.

Bezüglich der WF-Ergebnisse zeigt die implementierte WF nach Nickels eine sehr hohe Übereinstimmung mit der WF nach Knopp. Die Ergebnisse der WF überschneiden sich in allen Strömungsgrößen sehr deutlich. Dies ist nachvollziehbar, da in der

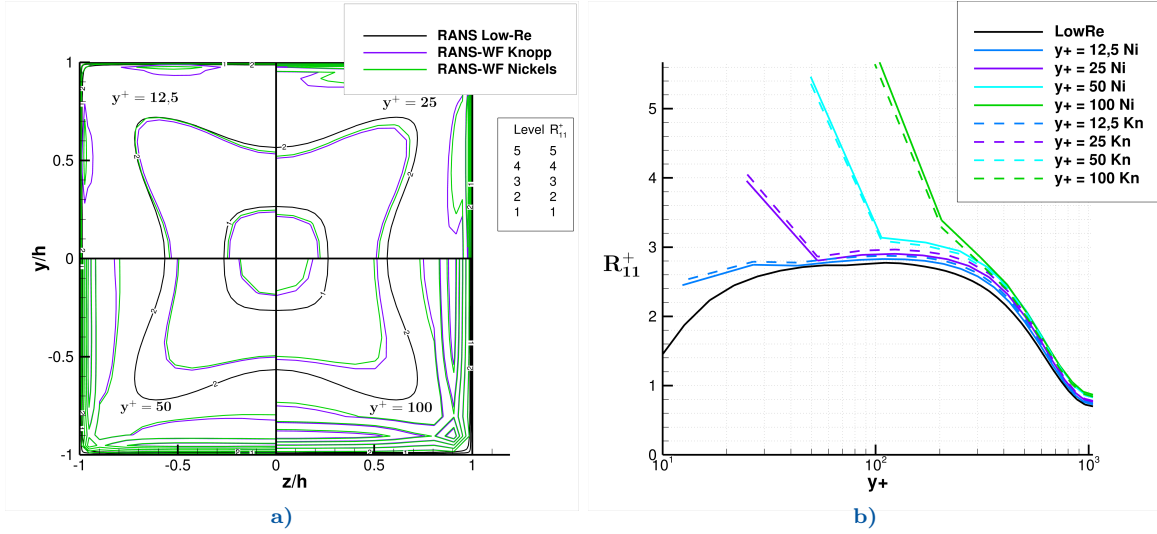


Abbildung 4.9. RSM-RANS a) quadrantenweise Darstellung von R_{11}^+ mit Knopp (lila) und Nickels (grün), b) R_{11}^+ entlang $z/h = 0$ wobei Nickels (Ni) als durchgezogene und Knopp (Kn) als gestrichelte Linien dargestellt sind

periodischen Rohrströmung kein Druckgradient in x-Richtung vorliegt. Da die Sekundärströmung nur ungefähr eine Intensität von 1% im Vergleich zur Geschwindigkeit in x-Richtung beträgt, ergibt sich p_x^+ aus dem abgeschwächten geringen Druckgradienten in y- und z-Richtung. Somit entspricht p_x^+ ungefähr 0. Damit konnte anhand der Rohrströmung gezeigt werden, dass die neu implementierte WF nach Nickels für $p_x^+ = 0$ vergleichbare Ergebnisse wie die WF nach Knopp liefert.

4.1.2.4. RSM-WMLES Wandfunktion Ergebnisse

Die WMLES vereint die RANS-Modellierung in wandnahen Regionen und LES-Modellierungen in wandentfernten Gebieten. Ein verbreiteter Ansatz ist, RANS-Wandfunktionen auch bei WMLES zu verwenden. Die WF sind ursprünglich für RANS-Untersuchungen entwickelt worden. Die Hypothese lautet, dass WF auch bei WMLES in den RANS-Bereichen verwendet werden können. Ähnliche Untersuchungen mit WF in Kombination mit WMLES wurden bereits in [13] unter anderem mit der SA-WMLES Methode durchgeführt. In dieser Arbeit wird hingegen geprüft, welche Auswirkungen WF bei einer RSM-WMLES bei einer Rohrströmung mit quadratischem Querschnitt haben. Da festgestellt werden kann, dass das sogenannte RSM-Blending (vgl. Abschnitt 2.2.4) nicht für die beschriebenen Oszillationen verantwortlich ist 4.1.2.2, wird dieses für die folgenden RSM-WMLES mit WF (RSM-WMLES-WF) verwendet. Somit liegt im LES-Bereich die Eddy-Viskositäts-Formulierung vor und im RANS-Bereich die Formulierung des Reynoldsspannungsmodells [16]. Da alle in

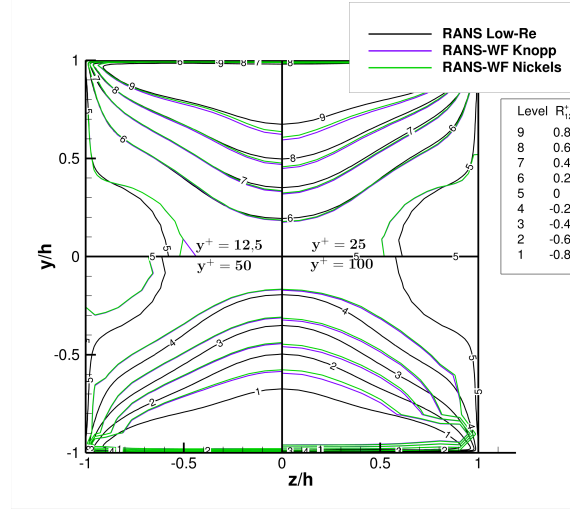


Abbildung 4.10. quadrantenweise Darstellung von R_{12}^+ mit Knopp (lila) und Nickels (grün)

diesem Abschnitt dargestellten Lösungen mit dem RSM-Blending erzeugt werden, wird diese Zusatzbezeichnung in diesem Abschnitt weggelassen.

In Abbildung 4.11 sind die Isolinen der mittleren Geschwindigkeit in x-Richtung dargestellt. Dabei sind die Isolinen der Low-Reynolds-Rechnung aus 4.1.1.2 (schwarz) eingezeichnet, sowie die Lösungen mit den WF nach Knopp (lila) und Nickels (grün). Aus Abbildung 4.11 geht eine Abweichung der WMLES-WF-Rechnung und der Low-Reynolds-WMLES-Rechnung hervor. In den Umgebungen der Isolinen 11 und 10 ist dies gut beobachtbar. Die Isolinen der WMLES-WF ähneln im Verlauf stärker der quadratischen Geometrie, während die Low-Re-Rechnung größere Ausbuchtungen zeigen. Die WF nach Knopp und nach Nickels geben übereinstimmende Ergebnisse bezüglich der Geschwindigkeit in x-Richtung.

In Abbildung 4.12 wird die Geschwindigkeit in y-Richtung in einem Quadranten dargestellt. Dabei werden bei gleichbleibender Farbkodierung die Lösung der WF einmal mit der Low-Reynolds-Lösung und einmal mit der DNS-Referenz [6] verglichen. Die Rechnungen mit den verschiedenen WF zeigen untereinander große Übereinstimmung. In der Geschwindigkeit in y-Richtung sind die Störungen deutlich erkennbar (vgl. Abbildung 4.12a). So sind Unregelmäßigkeiten in den Isolinen ersichtlich. Diese Unregelmäßigkeiten entspringen nicht einer unzureichenden Mittelung, da auch nach weiterer Mittelung diese Erscheinungen weiterhin auftreten. Beim erneuten Vergleich mit den DNS-Daten von Pirozzoli et al. [6] fällt auf, dass die WMLES-WF in Wandnähe größere Übereinstimmung mit den DNS-Daten zeigt. Auch in der Umgebung der Isolinen 4 und 5 gibt es Übereinstimmungen mit der DNS. Vermutet wird, dass größere Abweichungen durch die Störung in der Lösung hervorgerufen werden und die Methodik der WF in geringerem Maße zur Abweichung beiträgt. Größere Abweichun-

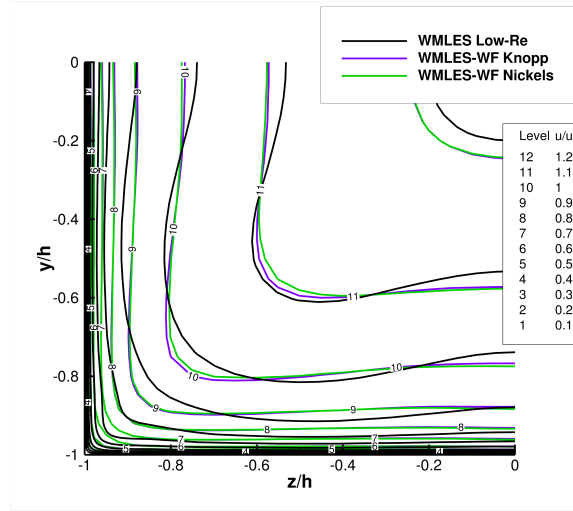


Abbildung 4.11. Vergleich der Ergebnisse (u/u_b) von RSM-WMLES mit Low-Re RSM- und WF

gen zwischen diesen beiden WMLES-WF Lösungen könnten möglicherweise durch eine gering unterschiedlich ausgeprägte Störung bedingt sein.

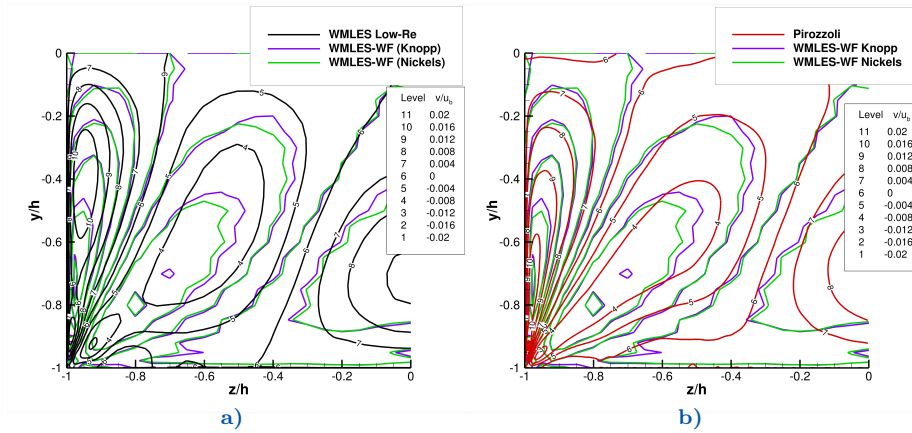


Abbildung 4.12. Vergleich von RSM-WMLES mit WF v/u_b mit den Referenzen a) Low-Re RSM-WMLES, b) DNS [6]

Bei der Begutachtung der Reynoldsspannungen fällt auf, dass die Rechnungen mit den verschiedenen WF sehr ähnliche Ergebnisse liefern. Diese Ergebnisse sind in 4.13 innerhalb eines Quadranten dargestellt. Dabei ist in 4.13a $R_{11,tot}^+$ und in 4.13b $R_{12,tot}^+$ dargestellt. Im Vergleich zu der Low-Reynolds-Rechnung sind hohe Übereinstimmungen in $R_{11,tot}^+$ zu erkennen. Besonders in der Umgebung der Isolinien 1 bis 3 liegen hohe Übereinstimmungen vor. Eine größere Abweichung zu Low-Reynolds-WMLES liegt in der Umgebung der Isolinie 5 vor. Dort liegt ein Sprung in den Ergebnissen vor.

Vermutet wird, dass dieser Sprung durch die Überschätzung der Normalspannung am wandanliegenden Punkt erzeugt wird. Eine solche Überschätzung wurde bereits bei den RANS-Ergebnissen beobachtet (vgl. Abbildung 4.9b). In der Scherspannung $R_{12,tot}^+$ werden Abweichungen zur Low-Reynolds-Rechnung in Eckennähe deutlich. Diese Abweichungen sind in den Umgebungen der Isolinien 2 und 3 beobachtbar. Mittig des Rohres bei $z/h > -0,5$ ist wieder eine hohe Übereinstimmung mit den Low-Reynolds-Daten ersichtlich.

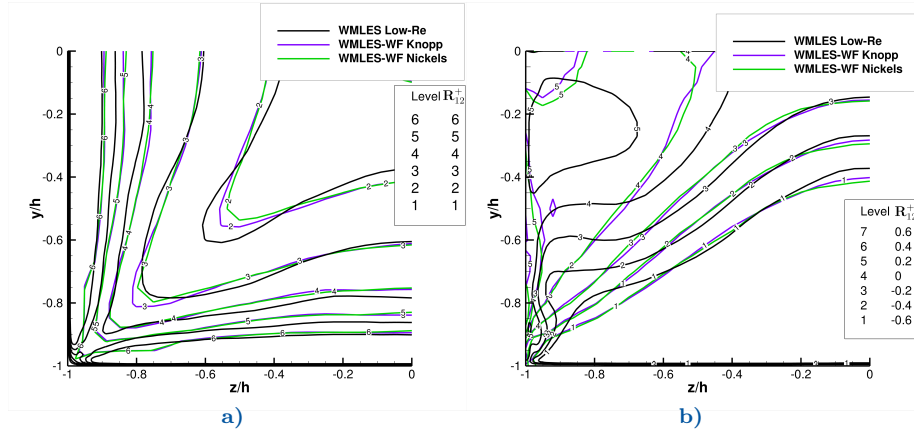


Abbildung 4.13. Vergleich $R_{ij,tot}^+$ der WF und Low-Re-Rechnung a) $R_{11,tot}^+$ b) $R_{12,tot}^+$

Aus den gezeigten Ergebnissen geht hervor, dass die Anwendung beider WF-Ansätze geringfügige Abweichungen zueinander zeigt. Im Vergleich zur Low-Re-Lösung ist in den Reynoldsspannungen und der Geschwindigkeit in x-Richtung eine gute Übereinstimmung zu erkennen. Die beschriebenen Oszillationen zeigten große Auswirkungen auf die Quergeschwindigkeiten. Da diese jedoch nur ungefähr ein Hundertstel der x-Komponente entsprechen, ist diese deutlich sensitiver. Unklar ist, wie groß die Auswirkung der Störung auf das instationäre Verfahren ist. Ein Fazit für die Anwendung kann nicht eindeutig getroffen werden. Zwar scheint die RSM-WMLES mit den WF ähnliche Strukturen und Ergebnisse wie die Low-Reynolds-Rechnung zu liefern, jedoch ist die beschriebene Störung nicht vollständig zu vernachlässigen. Um die Ursache der gezeigten Störung auszumachen, sind weitere Untersuchungen notwendig. In anderen, hier nicht gezeigten, Testfällen konnte ein solches Phänomen bereits bei Low-Reynolds-Untersuchungen bei anderen Geometrien beobachtet werden. In diesen Strömungsfällen lag keine Eckenströmung vor, somit scheint die Geometrie nicht der Ursprung dieser Artefakte zu sein. Ein Ursprung für diese Artefakte kann somit in der niedrigen Dissipation liegen.

4.2. Stanford Diffusor

Im Folgendem wird der Testfall eines asymmetrischen Diffusors untersucht. Der asymmetrische Diffusor mit rechteckigem Querschnitt ist ein Strömungsfall mit einer dreidimensionalen Strömung mit einem Rückstromgebiet. Dadurch handelt es sich um eine komplexe Eckenströmung. Mit dieser kann nicht nur die Genauigkeit numerischer Verfahren, sondern auch WF auf ihre Anwendbarkeit geprüft werden. Besonders durch den auftretenden Druckgradienten kann die Wirksamkeit der Nickels-WF untersucht werden. Die Geometrie für den Diffusor wird übernommen aus der Untersuchung zur geometrischen Sensitivität von Cherry et al. [9]. Cherry et al. stellen zwei Diffusoren vor. An beiden Diffusoren werden Experimente durchgeführt und Geschwindigkeitsdaten erhoben [9]. Die für die Rechendomäne relevanten Bauteile des Versuchsaufbaus bestehen aus dem Einflussrohr, dem Diffusor und dem Ausflussrohr. Die beiden Experimente in [9] unterscheiden sich in dem Diffusor und der Querschnittsfläche des Ausflussrohrs. Zwei der vier Wände des Diffusors sind angewinkelt und erzeugen so eine Expansion der Querschnittsfläche. Der Diffusor 1 aus [9] weist eine höhere Querschnittserweiterung auf und zeigt ein größeres Rückstromgebiet. Dieser Diffusor dient in dieser Arbeit als Grundlage. Die Diffusor-Geometrie wird in Abbildung 4.14 dargestellt.

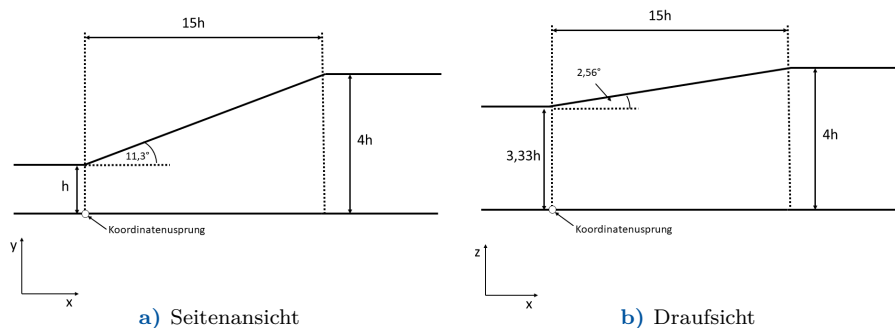


Abbildung 4.14. Geometrie: Diffusor 1 von Cherry et al. [9]

Das Einflussrohr ist ein rechteckiges Rohr mit Höhe h und einer Breite von $3,33h$. Dieses Einflussrohr dient dazu, eine vollentwickelte turbulente Strömung am Diffusor-Einlass zu gewährleisten. Die obere Wand des Diffusors wird mit einem Winkel von $11,3^\circ$ angewinkelt. Die Wand an der rechten Seite wird mit einem Winkel von $2,35^\circ$ angewinkelt. Nach einer Länge von $L = 15h$ mündet der Diffusor in ein quadratisches Ausflussrohr mit der Breite von $4h$. Im Anschluss an das Ausflussrohr liegt ein konvergenter Abschnitt vor. Dieser konvergente Abschnitt wird in dieser Arbeit ausgelassen, da dieser unerheblich für die Diffusorströmung ist.

In der Arbeit von Ohlsson et al. [10] wird zu dem Diffusor 1 eine DNS durchgeführt. Diese dient als Grundlage für die folgenden Untersuchungen. Die Länge des Einflussrohres entspricht $63h$, um eine entwickelte Strömung zu gewährleisten. Für das quadratische Rohr hinter dem Diffusor wird eine Länge von $12,5h$ verwendet. Da sich nach [9] und [10] die Rückströmung nach $5h$ hinter dem Diffusor aufgelöst hat, wird diese Länge als ausreichend angenommen. Die Untersuchung von Ohlsson et al. [10] und das Experiment [9] stimmen in den Strömungsbedingungen überein. Die Strömung wird so eingestellt, dass sich ein $Re_h = u_b h / \nu$ von 10.000 im rechteckigen Rohr ergibt. u_b entspricht dabei der mittleren Geschwindigkeit der entwickelten Strömung in x-Richtung. Da in den Referenzen Wasser als Fluid gewählt wurde, wird von der Referenz keine Machzahl angegeben. Da in dieser Arbeit Luft als Medium verwendet wird, muss eine Machzahl im inkompressiblen Bereich festgelegt werden. Gesetzt wird eine Machzahl von $Ma = 0,03$, wodurch die Vergleichbarkeit zu den Referenzen gewährleistet ist.

Für das numerische Setup liegt der Koordinatenursprung am Anfang des Diffusors in der Ecke beider nicht angewinkelten Wände. Die Wände werden als viskose no-slip Wände betrachtet. Am Beginn des Einlassrohres wird für die Einstromungsbedingung eine konstante Geschwindigkeit u_∞ gesetzt. Da die entwickelte Strömung Resultat des Einflusses ist, ergibt sich $u_b = u_\infty$. Am Ende des Ausflussrohres wird der Druck vorgegeben, der zuvor an den Druck an einem Messpunkt angepasst wurde. Für die Geschwindigkeiten wird eine Nullgradienten-Randbedingung normal zum Rand angewendet.

4.2.1. Gitterkonstruktion

Für die vorgestellte Geometrie werden vier Gitter erstellt. Konstruiert sind diese für RANS-Untersuchungen und orientieren sich erneut an den gängigen Diskretisierungskriterien [26]. Dabei dienen drei der vier Gitter für die Anwendung von WF. Für die Low-Reynolds-Rechnung wird wie bei der Rohrströmung ein 80×80 -Gitter im Querschnitt gesetzt. Dadurch befinden sich im rechteckigen Einflussrohr 40 Zellen in der Grenzschicht der entwickelten Strömung. Der Wandabstand wird an den Wänden des Einflussrohres so gesetzt, dass bei der entwickelten Strömung $y^+(1) = 1$ gilt. Der Wandabstand am Anfang des Rohres ist leicht erhöht, um große $y^+(1)$ Werte am Einlass zu verhindern. Es wird wieder ein Expansionsfaktor von $r = 1,15$ gewählt. Im Diffusor vergrößern sich die Zellen stetig. Dabei sind die wandanliegenden Zellen normal zu den Wänden ausgerichtet und der Wandabstand wird konstant gehalten. Dadurch vergrößern sich die Zellen hauptsächlich mittig des Diffusors. Im Einlassrohr wird zu Beginn $\Delta x = 3h$ gewählt. Dieser Wert entwickelt sich über eine tanh-Funktion zu einem $\Delta x = 0,5h$. Damit wird die gesamte Anzahl an Zellen verringert und gleichzeitig eine erhöhte Auflösung für den Untersuchungsbereich angewendet. Anschließend

wird der Zellabstand Δx im Diffusor konstant gehalten. Dadurch soll eine ausreichend hohe Auflösung für das Rückstromgebiet gewährleistet werden. Im Auslassrohr wird Δx wieder über eine tanh-Funktion auf $1h$ erhöht.

Für die Nutzung der WF wird das Low-Reynolds-Gitter als Grundlage verwendet. Für die drei Gitter wird der wandnormale Zellabstand variiert. Die in Tabelle 4.3 angegebenen $y^+(1)$ beziehen sich dabei auf den Wandabstand im rechteckigen Einlassrohr. Zusätzlich werden die wandanliegenden Zellen orthogonal zur Wand entwickelt. Die Orthogonalität ist für eine korrekte Anwendung der WF essenziell. Durch den konstanten Zellabstand wird es im Diffusor zu geringeren $y^+(1)$ -Werten kommen. Dadurch dass die WF auch für kleinere Wandabstände $y^+(1) < 12$ definiert sind, stellt dies kein Problem in der Anwendung dar. Aus Tabelle 4.3 geht hervor, dass über den erhöhten Wandabstand bis zu 90% der Zellen eingespart werden können.

Netz	Wandabstand im Rohr	#Zellen	Einsparung
Netz 1)	$y^+(1) = 1$	$4,67 \cdot 10^5$	
Netz 2)	$y^+(1) = 12,5$	$1,60 \cdot 10^5$	65,8%
Netz 3)	$y^+(1) = 25$	$9,13 \cdot 10^4$	80,5%
Netz 4)	$y^+(1) = 50$	$4,69 \cdot 10^4$	90,0%

Tabelle 4.3. Eigenschaften der Rechengitter für den Diffusor

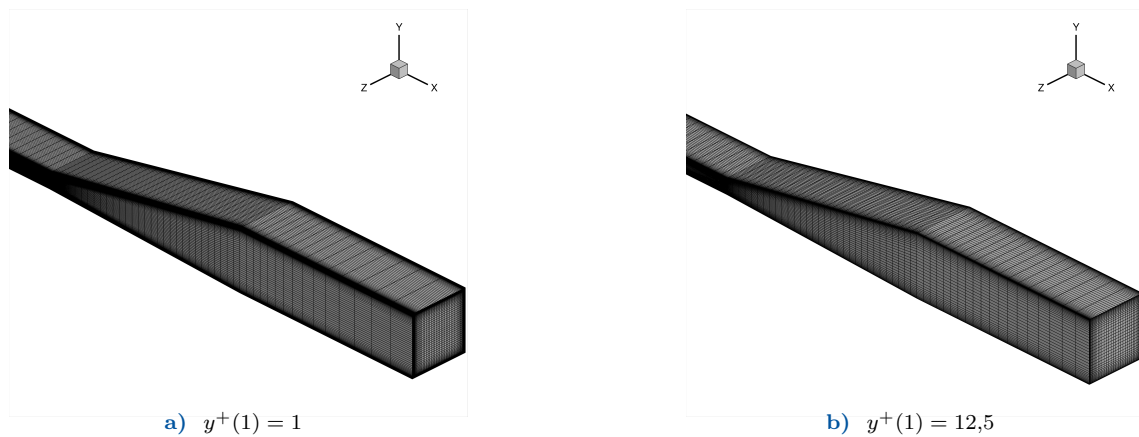


Abbildung 4.15. Gitter für den Stanford Diffusor mit verschiedenem Wandabstand

4.2.2. RANS Ergebnisse

In Abbildung 4.17 wird die Geschwindigkeit in x-Richtung der RSM-RANS, SA-QCR-RANS und auch der DNS von Ohlsson et al. [10] dargestellt. Dabei wird sich auf 3 Querschnitte innerhalb des Diffusors beschränkt (x/h in $\{2; 8; 15\}$). Aus den gezeigten

Verteilungen der Geschwindigkeit sind große Abweichungen der RANS-Modellierung zur DNS zu erkennen. In der Verteilung der Geschwindigkeit bei $x/h = 2$ ist zu erkennen, dass nahe dem Einlass eine gute Übereinstimmung der verschiedenen Methoden vorliegt. Jedoch ist an der oberen rechten Ecke zu erkennen, dass das Rückstromgebiet in den RANS-Lösungen einen größeren Anteil am Querschnitt, belegt, als dies bei der DNS der Fall ist. Die RANS-Modellierungen überschätzen somit die Rückströmung zu Beginn des Diffusors.

Ein solches Verhalten ist auch im weiteren Diffusor präsent. Bei $x/h = 8$ ist besonders erkennbar, dass das Rückstromgebiet bei den RANS-Ergebnissen stärker ausgebildet ist. Dieses Rückstromgebiet entwickelt sich an der rechten Wand stärker als bei der DNS. In der Nähe der linken nicht angewinkelten Wand sind höhere Geschwindigkeiten in den RANS-Ergebnissen im Vergleich zur Referenz zu erkennen. Somit scheint in den RANS-Lösungen das Rückstromgebiet an der Ecke zwischen den angewinkelten Wänden zu entstehen und sich nur geringfügig in z-Richtung auszubreiten. Währenddessen scheinen die Bereiche an den nicht angewinkelten Wänden im Vergleich zur DNS schwächer abzubremesen.

Gegen Ende des Diffusors bei $x/h = 15$ sind weitere Unterschiede zwischen den RANS-Lösungen erkennbar. Während sich in der SA-QCR-RANS das Rückstromgebiet entlang der rechten Wand befindet, begrenzt sich das Rückstromgebiet in der RSM-RANS hauptsächlich auf die Ecke der beiden angewinkelten Wände. Zusätzlich sind in der RSM-RANS in der rechten unteren und in der linken oberen Ecke zwei kleinere Rückstromgebiete zu erkennen. Ähnliche Ergebnisse sind in der Literatur zu finden. So zeigen Bonnici et al. [11] ähnliche RANS-Ergebnisse. Dadurch scheint die Abweichung der Ergebnisse durch die RANS-Modellierungen bedingt zu sein. Malmé et al. haben in ihrer Arbeit gezeigt, dass sinusoidale oszillierende Bewegungen auftreten [28]. Dieses instationäre physikalische Verhalten kann zu den gezeigten Abweichungen in den RANS-Rechnungen führen.

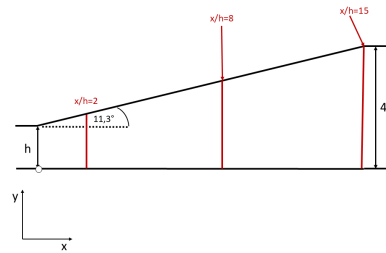


Abbildung 4.16. Positionierung der Querschnitte aus Abbildung 4.17

In Abbildung 4.18 wird der Druckbeiwert $c_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}$ von der RSM-RANS, der SA-QCR-RANS und der Messung von Cherry et al. [29] dargestellt. Die Messdaten von Cherry et al. wurden an der unteren Wand bei $z/B = 0,5$ erhoben. Dabei entspricht B der Breite des Einflussrohres und für p_∞ wird der Wert bei $x/L = 0,05$ gewählt.

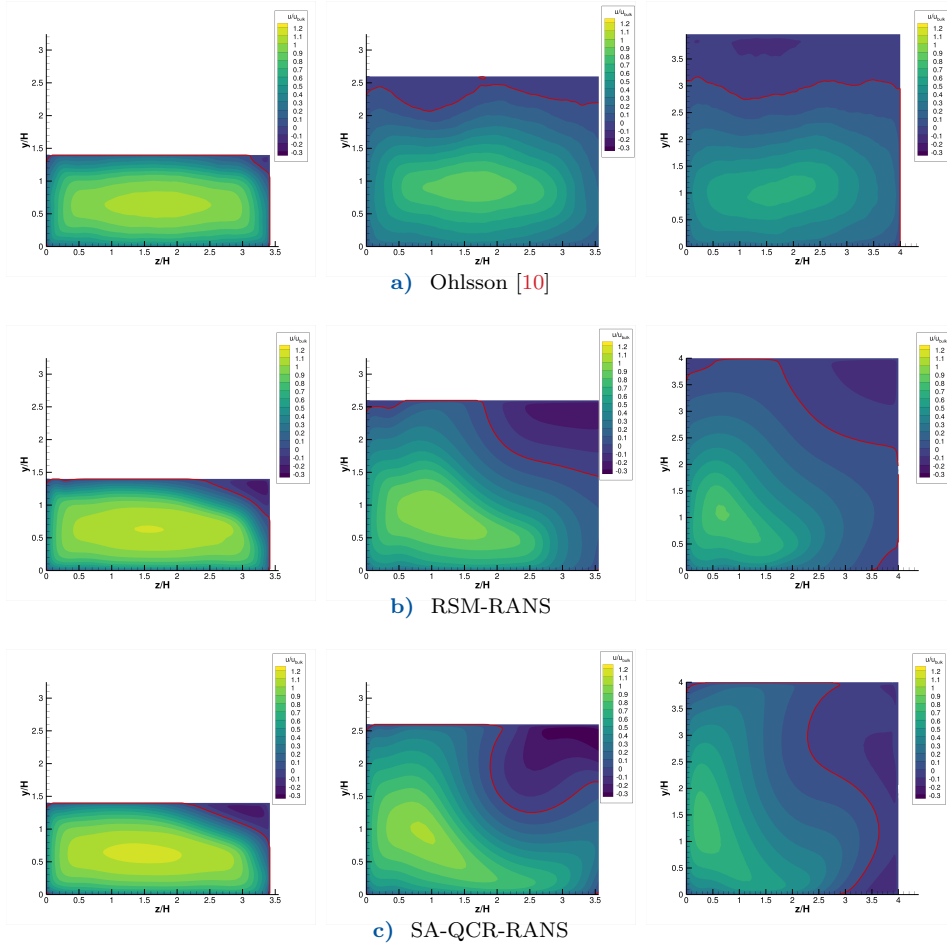


Abbildung 4.17. Geschwindigkeit in x-Richtung bei $x/h = 2$ (links), $x/h = 8$ (mitte) und $x/h = 15$ (rechts)

Die RANS-Rechnungen zeigen große Übereinstimmungen untereinander im Anfangsbereich des Diffusors und im Ausflussrohr. Dort liegen die in Abbildung 4.18 gezeigten Kurven aufeinander. Nach dem steilen Anstieg bis $x/L = 0,2$ weichen die Kurven der RANS-Ergebnisse stärker voneinander ab. Die Kurve der RSM-RANS zeigt einen quasi logarithmischen Verlauf. Die Kurve der SA-QCR-RANS zeigt einen deutlich geringeren Anstieg im Bereich von $x/L = 0,2$ bis $x/L = 0,4$. Ab einem $x/L = 0,7$ nähern sich die beiden Kurven wieder einander an. Eine ähnliche c_p -Kurve für eine RSM-RANS wurde auch in [11] für ein anderes RSM-Modell gezeigt. Im Vergleich zu den experimentellen Daten zeigen die RANS Ergebnisse ein abweichendes Verhalten. Zu Beginn des Diffusors scheint es bis zu $x/L = 0,15$ große Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten zu geben. Bei $x/L > 0,2$ sind große Abweichungen zu den Messdaten erkennbar. Die c_p -Daten der RANS Ergebnisse sind deutlich kleiner als die Messdaten. Bezüglich der Form der Kurven scheint die RSM-RANS die grundsätzliche

Form der Messdaten besser darzustellen. So scheint es, dass die RSM-RANS verfrüht abflacht.

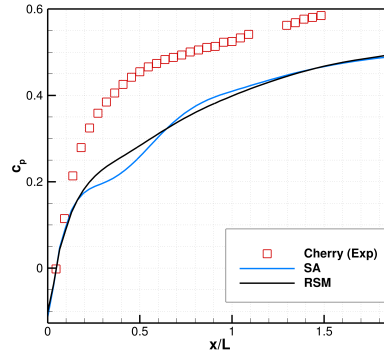


Abbildung 4.18. Vergleich c_p auf dem Boden des Diffusors, bei $z/h = 3,33/2$ mit Daten aus [29]

Die verwendeten RANS-Modellierungen zeigen erhebliche Abweichungen zur DNS in der Vorhersage der Strömung im Stanford Diffusor. Dabei wird das Rückstromgebiet besonders überschätzt. In den SA-QCR-RANS-Ergebnissen ist das Rückstromgebiet hauptsächlich an der rechten angewinkelten Wand zu verorten. Die RSM-RANS beschränkt das Rückstromgebiet auf die Ecken zwischen den angewinkelten Wänden. Dadurch liegt an der unteren Wand eine leicht verbesserte Geschwindigkeitsverteilung vor. Jedoch zeigt auch die RSM-RANS große Abweichungen zur Referenz. Aus den Referenzdaten der DNS geht hervor, dass sich das Rückstromgebiet nach der Entstehung in der oberen rechten Ecke auf die gesamte obere Wand erweitert. Dieses Verhalten konnte sowohl die SA- als auch die RSM-RANS nicht vorhersagen. Auch im Druckbeiwert c_p konnte eine Abweichung zum Experiment und somit auch zu den DNS-Daten beobachtet werden. Somit konnte auch die Druckerhöhung im Diffusor nicht korrekt erfasst werden.

Für den Strömungsfall des Stanford Diffusors wurden im Rahmen dieser Arbeit keine RSM-WMLES durchgeführt. Dies könnte in anknüpfenden Untersuchungen durchgeführt werden. Die Daten der RSM-RANS werden im Anschluss als Referenz für die Untersuchung mit WF verwendet.

4.2.3. Vorzeichen Druckgradienten

Für die korrekte Anwendung der WF nach Nickels muss der Druckgradient entlang der Stromlinien richtig implementiert sein. Das bedeutet für den Druckgradienten, dass die Stromrichtung relevant für das Vorzeichen des Gradienten ist. Somit muss im Falle einer Rückströmung das Vorzeichen korrigiert werden. In [13] wird gezeigt, dass diese Vorzeichenkorrektur zum Zeitpunkt der Veröffentlichung von [13] nicht vorlag.

In Abschnitt 4.2.2 wurde gezeigt, dass eine Rückströmung im Diffusor auftritt. Somit ist eine Überprüfung des Vorzeichens von p_x^+ , für eine korrekte Anwendung im Diffusor notwendig. Für die Betrachtung des Vorzeichens werden die RSM-RANS Low-Reynolds-Lösung aus Abschnitt 4.2.2 verwendet. Dort wird die Ebene der wand-nächsten Punkte an der unteren Wand untersucht. Das Druckfeld bei dieser Ebene wird zusätzlich mit den Stromlinien der Strömung in Abbildung 4.19 dargestellt. Nahe der unteren Wand entspricht die Geschwindigkeit in y-Richtung ungefähr 1% der Geschwindigkeit in z-Richtung. Dadurch kann für die Stromlinien in der Ebene die Geschwindigkeit in y-Richtung vernachlässigt werden. Zusätzlich ist in Abbildung 4.19 eine Linie mit dem Wert $p_x^+ = 0$ in rot eingezeichnet. Unterhalb der roten Linie ist $p_x^+ > 0$ und oberhalb $p_x^+ < 0$.

Der Druck im Diffusor steigt in x-Richtung an. Dadurch sollten Stromlinien, die in positiver x-Richtung verlaufen, einen positiven Druckgradienten aufweisen. Bei Stromlinien, die in negativer x-Richtung verlaufen, sollte das p_x^+ dementsprechend negativ sein. An Stellen, wo die Stromlinien in z-Richtung verlaufen, kann pauschal keine Erwartung gestellt werden. Das liegt daran, dass der Druckgradient nicht trivial aus Abbildung 4.19 folgt. In Abbildung 4.19 wird deutlich, dass das Vorzeichen von p_x^+ , wie beschrieben, im Falle der Rückströmung wechselt. Die vorher beschriebenen Erwartungen an das Vorzeichen treffen auf die Ergebnisse in Abbildung 4.19 zu. So liegt in der Rückströmung ein negatives p_x^+ vor und im sonstigen Strömungsgebiet ein positives p_x^+ . Damit konnte gezeigt werden, dass eine Vorzeichenkorrektur für p_x^+ vorliegt. Somit muss im Rahmen dieser Arbeit der Simulations-Code nicht um eine Korrektur ergänzt werden.

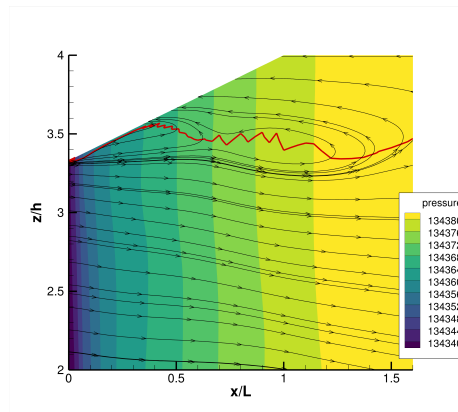


Abbildung 4.19. Low-Reynolds: Druckfeld nahe der unteren Wand, mit Stromlinien und einer Linie (rot) bei $p_x^+ = 0$

4.2.4. Wandfunktion Ergebnisse

Für die Auswertung der Ergebnisse der RSM-RANS mit WF wird die RSM Low-Reynolds Rechnung aus Abschnitt 4.2.2 als Vergleich verwendet. Die Geschwindigkeitsprofile werden äquivalent zu Abbildung 4.17 in Abbildung 4.20 dargestellt. Dabei sind von den Wandfunktionslösungen nur die Lösungen mit einem Wandabstand von $y^+(1) = 25$ abgebildet.

Die dargestellten Querschnitte zeigen, dass die Lösung mit den WF nach Knopp eine stärkere Übereinstimmung mit der Kontur-Topologie der Low-Reynolds-Zahl-Rechnung aufweist. In den Ergebnissen mit der WF nach Nickels ist ein größeres Rückstromgebiet ersichtlich. Besonders bei $x/h = 8$ wird dies deutlich. Am Ende des Diffusors bei $x/h = 15$ kann des Weiteren ein ausgeprägteres Rückstromgebiet in der linken oberen und der rechten unteren Ecke beobachtet werden.

Zusätzlich zur Geschwindigkeit in x-Richtung wird die Wandreibung c_f der WF- und Low-Reynolds-Lösung betrachtet. In Abbildung 4.21 wird c_f des Einflussrohres abgebildet. Dabei werden die Lösungen der Low-Reynolds-Rechnung und der WF-Rechnungen dargestellt. In diesem Einflussrohr liegt ein negativer Druckgradient ohne Ablösung vor. In Abbildung 4.21a sind große Übereinstimmungen der beiden WF-Lösungen bei einem Wandabstand von $y^+(1) = 12,5$ ersichtlich. Größere Abweichungen zwischen den WF-Ergebnissen sind in der Umgebung von $x/L = -1$ erkennbar. Dort liegt eine weitere Isolinie in der Lösung mit der WF nach Knopp vor. Diese Isolinie lässt sich dem fünften Isowert zuschreiben. Somit sagt die Lösung mit der WF nach Knopp einen erhöhten c_f -Wert im Vergleich zur Lösung mit der WF nach Nickels voraus. In dieser Umgebung zeigt die Lösung mit dem Ansatz nach Nickels eine höhere Übereinstimmung mit der Low-Reynolds-Rechnung. In dem restlichen Rohr stimmen die Ergebnisse mit den verschiedenen WF größtenteils überein. Dadurch weichen diese im restlichen Rohr vergleichbar groß von der Low-Reynolds Rechnung ab. Besonders zu Beginn des Rohres sind große Übereinstimmungen zu erkennen, während größere Abweichungen in der Umgebung der dritten Isolinie sichtbar sind. Beim wachsenden Wandabstand erhöhen sich die Abweichungen der Ergebnisse der beiden WF. Dargestellt werden die Ergebnisse mit den Wandabständen von $y^+(1) \in \{25; 50\}$ in Abbildung 4.21b und 4.21c. In der Umgebung der vierten Isolinie liegen vergleichbare Übereinstimmungen der Lösungen mit der WF nach Nickels im Vergleich zu der Low-Reynolds-Rechnung vor. Die Lösungen mit der WF nach Knopp weisen in diesen Umgebungen einen erhöhten c_f -Wert auf. In der Umgebung der dritten Isolinie der Low-Reynolds-Rechnung liegen zusätzliche Abweichungen vor. In diesem Bereich zeigt nur die WF nach Nickels bei einem Wandabstand von $y^+(1) = 25$ ähnliche Werte wie die Low-Reynolds-Lösung.

In Abbildung 4.22 wird aus der Seitenansicht das c_f an der im Diffusor angewinkelten Wand dargestellt. Dabei wird ausschließlich die Isolinie für $c_f = 0$ als Indikator

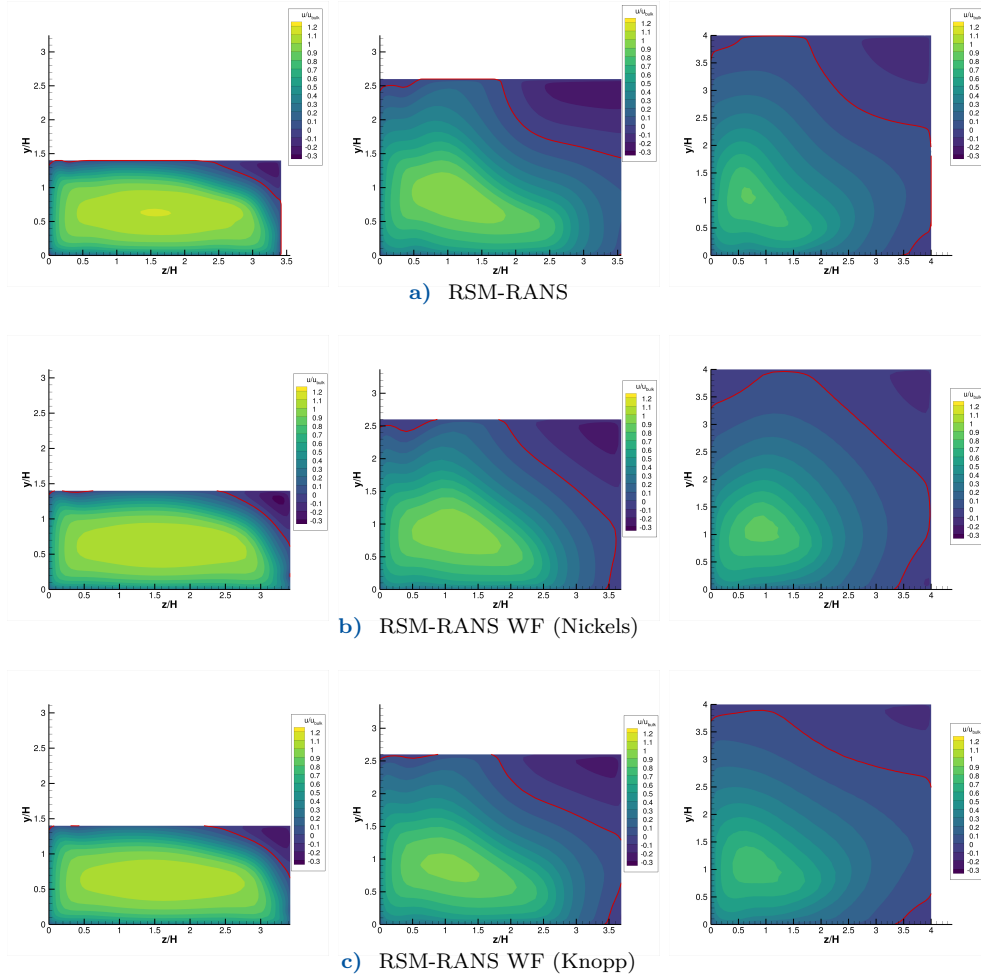


Abbildung 4.20. Geschwindigkeit in x-Richtung bei $x/h = 2$ (links), $x/h = 8$ (mitte) und $x/h = 15$ (rechts), RANS-WF mit $y^+(1) = 25$, $u = 0$ (rot)

für Ablöse- und Wiederanlegepunkt abgebildet. Für die vollständige Darstellung der Ablösung wird der Diffuser-Abschnitt $x/L \in [0; 1]$ und das Ausflussrohr $x/L > 1$ abgebildet. Bei den Ergebnissen muss beachtet werden, dass im Diffusor hauptsächlich ein $|p_x^+| > 0,06$ vorliegt. Da die WF nach Nickels für solche Werte nicht definiert ist, können Abweichungen zur Low-Reynolds-Lösung dadurch bedingt sein. Für einen Wandabstand von $y^+(1) = 12,5$ stimmen die Ergebnisse mit den verschiedenen WF weitestgehend überein. Diese zeigen ähnliche Ablösegebiete im Vergleich zur Low-Reynolds-Rechnung. Die vorwärts gerichtete Strömung liegt innerhalb der beiden Isolinen für $c_f = 0$. Somit liegen bei $x/L = 0$ und $x/L = 1,8$ ein $v_x > 0$ vor. Größere Abweichungen der WF-Rechnung zur Low-Reynolds-Rechnung sind im Ausflussrohr zu erkennen. In den WF-Ergebnissen liegt ein räumlich verfrühter Anlegepunkt vor. Bei einem Wandabstand von $y^+(1) = 25$ sind größere Unterschiede der WF-Rechnungen

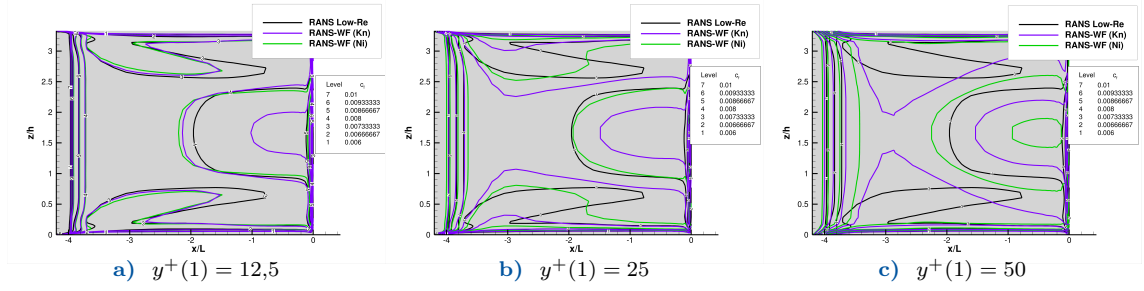


Abbildung 4.21. c_f an der oberen Wand im Einlassrohr, Lösung beider WF bei verschiedenem Wandabstand

zu erkennen. So ist in einem Bereich von $x/L = 0,4$ bis $x/L = 0,8$ ein Rückstromgebiet in der Lösung mit den WF nach Nickels zu erkennen. Ein solches Verhalten zeigt die Lösung mit dem Ansatz nach Knopp nicht. Dort verhält sich das Rückstromgebiet ähnlich zu der Low-Reynolds-Rechnung und den Ergebnissen bei $y^+(1) = 12,5$. Die Lösung mit dem Ansatz nach Knopp zeigt bei diesem Wandabstand größere Übereinstimmung mit den Low-Reynolds-Ergebnissen. Die Ergebnisse mit den verschiedenen WF zeigen bei einem $y^+(1) = 50$ wieder hohe Übereinstimmungen untereinander. Ersichtlich wird, dass beide WF-Lösungen ein größeres Rückstromgebiet im Bereich von $x/L = 0,3$ bis $x/L = 0,7$ vorhersagen, als die Low-Reynolds-Rechnung. Dies wird bei der Betrachtung der dritten Isolinie deutlich. Zu Beginn des Diffusors sind weitere Abweichungen der WF-Lösungen von der Low-Reynolds-Rechnung erkennbar.

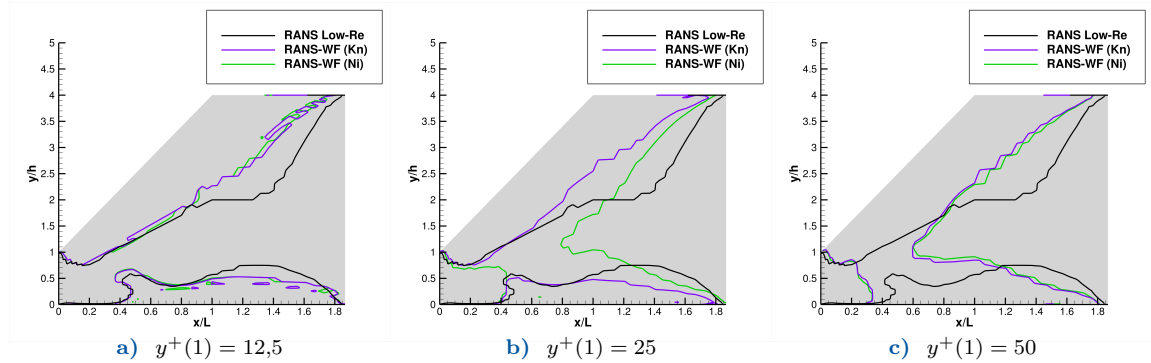


Abbildung 4.22. $c_f = 0$ an der seitlich angewinkelten Wand, mit WF nach Knopp (Kn) und Nickels (Ni), die Geometrie ist grau hinterlegt

Aus den gezeigten Ergebnissen sind im Diffusor keine Verbesserungen in der Vorhersage der c_f Werte durch die WF nach Nickels ersichtlich. Auf der anderen Seite konnte im Einflussrohr eine höhere Übereinstimmung mit der Low-Reynolds-Rechnung durch die Nutzung der WF nach Nickels gezeigt werden. Dadurch wird deutlich, dass die Betrachtung des Druckgradienten eine bessere Vorhersage der Wandreibung ermög-

licht. Die Abweichungen im Diffusorabschnitt lässt jedoch weitere Fragen offen. So ergibt sich die Fragestellung, ob die größeren Abweichungen im Diffusor durch das Rückstromgebiet oder durch ein zu hohes p_x^+ bedingt sind.

Für eine bessere Bewertung der WF nach Nickels kann in anknüpfenden Untersuchungen einfachere Strömungsfälle betrachtet werden. So bieten sich dafür Fälle an, in denen ein Druckgradient p_x^+ vorliegt, aber eine Rückströmung ausbleibt. Auch ein zweidimensionaler Strömungsfall mit Rückströmung, wie die Hügelströmung, könnte die Auswirkung der WF nach Nickels auf ein Rückstromgebiet veranschaulichen. Da im Diffusor eine relativ geringe Reynoldszahl vorliegt, könnten auch Fälle mit höherer Reynoldszahl andere Ergebnisse liefern. Eine höhere Reynoldszahl kann zu geringeren p_x^+ -Werten führen. So gilt in einer entwickelten Rohrströmung, dass dP/ds mit $\sqrt{u_\tau}$ skaliert [30]. Mit der Definition $p_x^+ = \nu/(\rho u_\tau^3) \frac{dP}{ds}$ skaliert p_x^+ mit $u_\tau^{-2,5}$. In Fällen, wo ähnliche Zusammenhänge gelten, kann so der Gradient im Betrag verringert werden.

5. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden Eckenströmungen mithilfe von numerischen Methoden, die auf Reynolds-Spannungs-Modellierung basieren, untersucht. Verwendet wurden RANS- und WMLES-Verfahren. Die Untersuchungsfälle sind dabei eine Rohrströmung mit quadratischem Querschnitt und der sogenannte Stanford-Diffusor, ein Diffusor mit rechteckigem Querschnitt. Zusätzlich wurde im Rahmen dieser Arbeit die Wandfunktion (WF) nach Nickels im DLR-TAU Code implementiert. Die Ergebnisse bei Nutzung dieser WF nach Nickels wurden bei beiden dieser Fälle mit den Ergebnissen mit der WF nach Knopp verglichen. Durchgeführt wurden sowohl RANS- als auch WMLES-Rechnungen mit Wandfunktionen.

In der Rohrströmung zeigen alle Methoden und Modelle mit einem Low-Reynolds-Ansatz eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten von Pirozzoli et al. [6]. Besonders die RSM-WMLES mit RSM-Blending zeigt dabei die geringsten Abweichungen. In der Rohrströmung konnte in den RANS-Rechnungen mit Wandfunktionen eine hohe Übereinstimmung bis zu einem y^+ von 50 gezeigt werden. Aus den Resultaten geht hervor, dass die Nutzung von Wandfunktionen konsistente Ergebnisse mit dem verwendeten Reynolds-Spannungs-Modell erzeugen. Die Ergebnisse mit der Wandfunktion nach Nickels zeigten eine sehr hohe Übereinstimmung mit denen der Wandfunktion nach Knopp. Daraus folgt, dass die WF nach Nickels konsistent zur WF nach Knopp ist, sofern kein Druckgradient vorliegt. Ergebnisse der WMLES mit Wandfunktionen in der Rohrströmung weisen hohe Übereinstimmung mit den Low-Reynolds-Lösungen. Jedoch treten in diesen Lösungen numerische Artefakte in der Querströmung auf. Diese sind bereits in anderen, hier nicht gezeigten, Geometrien aufgetreten. Es wird vermutet, dass diese Störungen durch das verwendete Low-Dissipation-Schema (LD2) bedingt sind. Bei einer signifikant höheren Dissipation besteht die Möglichkeit, dass diese Artefakte ausbleiben. Abgesehen von den beschriebenen Artefakten scheint die Nutzung von Wandfunktionen in WMLES valide zu sein.

Im anderen Testfall, dem Stanford Diffusor, zeigten die RANS-Ergebnisse hohe Abweichungen zu den Referenzdaten aus der DNS [10] und dem Experiment [9]. Ein Grund für die Abweichungen könnte eine möglicherweise zu grobe räumliche Diskretisierung sein. Die RSM-RANS zeigt leicht verbesserte Ergebnisse gegenüber der SA-QCR-RANS. Jedoch sagt auch die RSM-RANS ein stark abweichendes Rückstromgebiet und ein stark abweichendes Geschwindigkeitsfeld voraus. So ist in den RANS-Ergebnissen eine verfrühte Ablösung ersichtlich, wodurch ein großes Rückstromgebiet vorhergesagt wird. Bei den RANS-WF Untersuchungen des Stanford Diffusors zeigte die Berücksichtigung des Druckgradienten in der WF leicht verbesserte Ergebnisse im Einlassrohr des Diffusors. Dadurch wird deutlich, dass eine potenzielle Verbesserung

durch die WF nach Nickels möglich ist. Innerhalb des Diffusors konnte keine Verbesserung durch die WF nach Nickels festgestellt werden. Aus den Ergebnissen geht hervor, dass bei hohem Wandabstand der wandanliegenden Zelle das Rückstromgebiet vergrößert wird. Dieser Effekt ist mit der WF nach Nickels bei geringeren Wandabständen als bei Nutzung der WF nach Knopp zu sehen.

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass die RSM-WMLES grundsätzlich geeignet für subsonische Eckenströmungen sind, wie sie in zum Beispiel Flugzeugkonfigurationen auftreten können. Außerdem ging hervor, dass Wandfunktionen in WMLES-Untersuchungen für eine Reduktion der Rechenzeit verwendbar sind. Eine Verbesserung der Ergebnisse durch die Betrachtung des Druckgradienten in der Wandfunktion konnte nicht eindeutig nachgewiesen werden.

6. Ausblick

Durch die weitere Validierung der RSM-WMLES kann diese anschließend in komplexeren Geometrien verwendet werden. Dies bedeutet, dass diese Methode in industriellen Anwendungen mit Eckgeometrien weiterverwendet werden kann. Die Untersuchung des Stanford Diffusors wurde in dieser Arbeit nur mit RANS-Modellierungen vorgenommen. Somit bietet es sich an, in einer zukünftigen Arbeit diesen Fall mit der in dieser Arbeit verwendeten RSM-WMLES zu untersuchen. Dadurch könnte das Verfahren der RSM-WMLES weiter untersucht und bewertet werden.

Die Nutzung der Wandfunktionen zeigen gute Ergebnisse und können somit in weiteren Untersuchungen mit RSM-Modellierung verwendet werden. Jedoch konnte nicht gezeigt werden, ob die WF nach Nickels einen Vorteil gegenüber anderen Wandfunktionen durch die Berücksichtigung des Druckgradienten erhält. Daher könnten weitere Untersuchungen einen besseren Einblick bieten. Ein Strömungsfall mit vorliegendem Druckgradienten, jedoch ohne Ablösung, eignet sich für einen besseren Einblick. Auch ein einfacher Strömungsfall mit einer Ablösung könnte zeigen, ob sich die Nutzung der WF bei einer Ablösung eignet. Die Hügelströmung, der sogenannte „NASA wall mounted Hump“, entspricht einem solchen Strömungsfall. Außerdem könnte ein Testfall mit hoher Reynoldszahl von Interesse sein, da bei erhöhter Reynoldszahl der normierte Druckgradient (p_x^+) sinkt. Dadurch kann sichergestellt werden, dass sich der Druckgradient innerhalb des Kalibrierungsbereichs der Nickels WF befindet. Die Ergebnisse der WMLES mit den WF erzeugten neue Fragen. In diesen Ergebnissen treten numerische Artefakte auf, deren Ursprung nicht im Rahmen dieser Arbeit aufgeklärt werden konnte. Es besteht die Möglichkeit, dass diese Störungen in anderen Geometrien oder Strömungsfällen auftreten. Für die Aufklärung und Unterdrückung dieser Artefakte könnten weitere Untersuchungen durchgeführt werden.

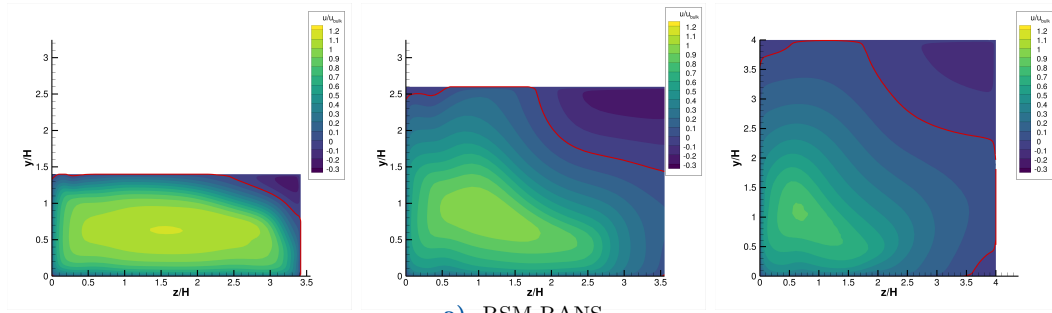
Appendices

$$\frac{\partial F_{Ni}}{\partial y^+} = [1 + (3 + p_x^+ y_c^+) \frac{y^+}{y_c^+} + (9/2 + 3p_x^+ y_c^+) (\frac{y^+}{y_c^+})^2 - 9/2 p_x^+ y_c^+ (\frac{y^+}{y_c^+})^3] \exp(-3 \frac{y^+}{y_c^+}) \\ + \frac{\sqrt{1 + p_x^+ y_c^+}}{\kappa_0 y_c^+ (1 + 0,6^6 (\frac{y^+}{y_c^+})^6)} \cdot 0,6^6 (\frac{y^+}{y_c^+})^5$$

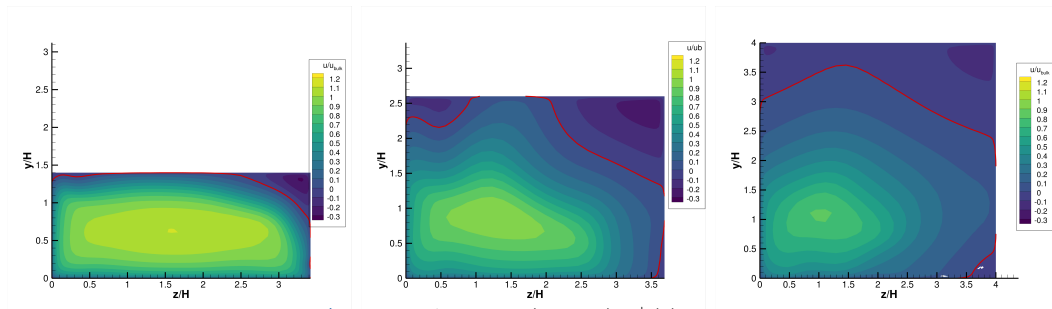
$$\frac{\partial F_{Ni}}{\partial p_x^+} = (y_c^+)^2 [\frac{1}{2} \frac{y^+}{y_c^+})^2 + \frac{3}{2} \frac{y^+}{y_c^+})^3] \exp(-3 (-\frac{y^+}{y_c^+})^3) \\ + 1/2 y_c^+ \frac{\ln(1 + 0,6^6 (\frac{y^+}{y_c^+})^6)}{6 \kappa_0 \sqrt{1 + p_x^+ y_c^+}}$$

$$\frac{\partial F_{Ni}}{\partial y_c^+} = 1 + \exp(-3 \frac{y^+}{y_c^+}) [-1 - 3 \frac{y^+}{y_c^+} - 9/2 (\frac{y^+}{y_c^+})^2 - 9/2 (\frac{y^+}{y_c^+})^3 + 9/2 p_x^+ y_c^+ (\frac{y^+}{y_c^+})^4] \\ + 1/2 y_c^+ \frac{\ln(1 + 0,6^6 (\frac{y^+}{y_c^+})^6)}{6 \kappa_0 \sqrt{1 + p_x^+ y_c^+}} - 0,6^6 (\frac{y^+}{y_c^+})^6 \frac{\sqrt{1 + p_x^+ y_c^+}}{y_c^+ \kappa_0 (1 + 0,6^6 (\frac{y^+}{y_c^+})^6)}$$

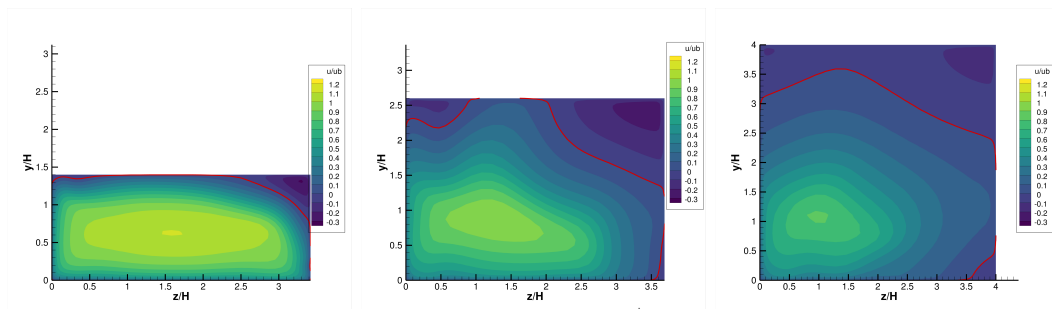
Abbildung A.1. Partielle Ableitungen der Nickelswandfunktion



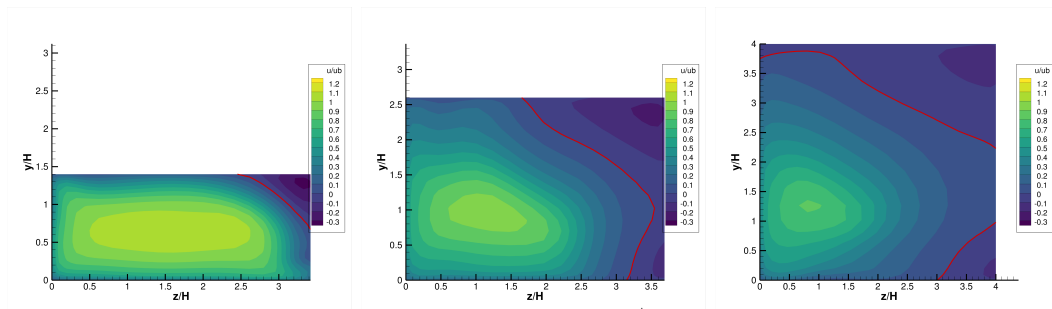
a) RSM-RANS



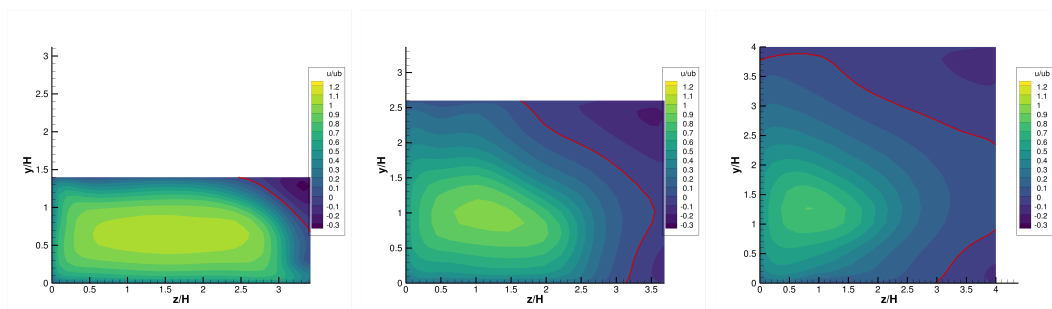
b) RSM-RANS WF (Nickels) $y^+(1) = 12$



c) RSM-RANS WF (Knopp) $y^+(1) = 12$



d) RSM-RANS WF (Nickels) $y^+(1) = 50$



e) RSM-RANS WF (Knopp) $y^+(1) = 50$

Literatur

- [1] J. H. Ferziger und M. Perić. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer, 2002.
- [2] K. Sabnis, P. R. Spalart, D. Galbraith, H. Babinsky und J. Benek. „Capabilities and Limitations of the Quadratic Constitutive Relation in Corner Flow Prediction“. In: *AIAA AVIATION 2021 FORUM*. URL: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2021-2883>.
- [3] V. Kornilov. „Three-dimensional turbulent near-wall flows in streamwise corners: Current state and questions“. In: *Progress in Aerospace Sciences* 94 (2017), S. 46–81. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042117300556>.
- [4] M. Herr, R. Radespiel und A. Probst. „Improved Delayed Detached Eddy Simulation with Reynolds-stress background modelling“. In: *Computers & Fluids* 265.106014 (2023). Hrsg. von P. Sagaut. URL: <https://elib.dlr.de/196453/>.
- [5] S. Gavrilakis. „Numerical simulation of low-reynolds-number turbulent flow through a straight square duct“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 244 (1992). Cited by: 406, S. 101–129. URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0026797843&doi=10.1017%2fS0022112092002982&partnerID=40&md5=80b081fd42aa795a6cf642b80e766b63>.
- [6] S. Pirozzoli, D. Modesti, P. Orlandi und F. Grasso. „Turbulence and secondary motions in square duct flow“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 840 (2018), S. 631–655.
- [7] J. Yao, Y. Zhao und M. Fairweather. „Numerical simulation of turbulent flow through a straight square duct“. In: *Applied Thermal Engineering* 91 (2015), S. 800–811. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431115008613>.
- [8] R. Yang, D. Modesti, Y.-x. Zhao, Q.-c. Wang, Z.-g. Wang und S. Pirozzoli. „Influence of corner angle in streamwise supersonic corner flow“. In: *Physics of Fluids* 33.5 (2021), S. 056108. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0046716>.
- [9] E. M. Cherry, C. J. Elkins und J. K. Eaton. „Geometric sensitivity of three-dimensional separated flows“. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29.3 (2008). The Fifth International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP5), S. 803–811. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X08000131>.

-
- [10] J. Ohlsson, P. Schlatter, P. F. Fischer und D. S. Henningson. „Direct numerical simulation of separated flow in a three-dimensional diffuser“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 650 (2010), S. 307–318.
- [11] M. Bonnici, S. A. Prince und K. Garry. „Turbulence model assessment of the separated flow in the Stanford diffuser“. In: ICAS. 2021.
- [12] M. Gritskevich, A. Garbaruk und F. Menter. „A comprehensive study of improved delayed detached eddy simulation with wall functions“. In: *Flow, Turbulence and Combustion* 98 (2017), S. 461–479.
- [13] M. Herr und A. Probst. „Efficient Modelling of Near-Wall Turbulence in Hybrid RANS-LES Simulations“. In: *22nd STAB/DGLR Symposium on New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics XIII*. Hrsg. von A. Dillmann, G. Heller, E. Krämer und C. Wagner. Bd. 151. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. Hardcover ISBN 978-3-030-79560-3 Softcover ISBN 978-3-030-79563-4 eBook ISBN 978-3-030-79561-0 Series ISSN 1612-2909 Series E-ISSN 1860-0824. Springer Nature, 2021, S. 615–624. URL: <https://elib.dlr.de/136146/>.
- [14] P. Spalart und S. Allmaras. „A one-equation turbulence model for aerodynamic flows“. In: *30th aerospace sciences meeting and exhibit*. 1992, S. 439.
- [15] P. Spalart. „Strategies for turbulence modelling and simulations“. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 21.3 (2000), S. 252–263. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X00000072>.
- [16] B. Eisfeld, C. Rumsey und V. Togiti. „Verification and Validation of a Second-Moment-Closure Model“. In: *AIAA Journal* 54.5 (2016), S. 1524–1541. URL: <https://doi.org/10.2514/1.J054718>.
- [17] P. R. Spalart. „Comments on the Feasibility of LES for Wings and on the Hybrid RANS/LES Approach“. In: *Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES, 1997*. 1997, S. 137–147.
- [18] P. R. Spalart, S. Deck, M. L. Shur, K. D. Squires, M. K. Strelets und A. Travin. „A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities“. In: *Theoretical and computational fluid dynamics* 20 (2006), S. 181–195.
- [19] M. L. Shur, P. R. Spalart, M. K. Strelets und A. K. Travin. „A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities“. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 29.6 (2008), S. 1638–1649. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X08001203>.
- [20] G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino und P. Durbin. „Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions“. In: *Journal of Computational Physics* 204.1 (2005), S. 265–291. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999104004164>.

- [21] T. Knopp. *A new adaptive wall-function method for subsonic and transonic turbulent flows*. Techn. Ber. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, 2005. URL: <https://elib.dlr.de/19383/>.
- [22] T. Knopp, T. Alrutz und D. Schwamborn. „A grid and flow adaptive wall-function method for RANS turbulence modelling“. In: *Journal of Computational Physics* 220.1 (2006), S. 19–40. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999106002208>.
- [23] T. B. NICKELS. „Inner scaling for wall-bounded flows subject to large pressure gradients“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 521 (2004), S. 217–239.
- [24] J. Kok. „A high-order low-dispersion symmetry-preserving finite-volume method for compressible flow on curvilinear grids“. In: *Journal of Computational Physics* 228.18 (2009), S. 6811–6832.
- [25] A. Probst, J. Löwe, S. Reuß, T. Knopp und R. Kessler. „Scale-Resolving Simulations with a Low-Dissipation Low-Dispersion Second-Order Scheme for Unstructured Finite-Volume Flow Solvers“. In: *AIAA Science and Technology Forum and Exposition (AIAA SciTech 2015)*. Conference Proceedings online 0816. 2015, S. 1–18. URL: <https://elib.dlr.de/94011/>.
- [26] F. Menter, R. Sechner und A. Matyushenko. „Best practice: RANS turbulence modeling in Ansys CFD“. In: *Ansys Germany GmbH. Matyushenko A., NTS, St. Petersburg, Russia* (2021).
- [27] F. R. Menter. „Best practice: scale-resolving simulations in ANSYS CFD“. In: *ANSYS Germany GmbH* 1 (2012), S. 1–70.
- [28] J. Malm, P. Schlatter und D. S. Henningson. „Coherent structures and dominant frequencies in a turbulent three-dimensional diffuser“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 699 (2012), S. 320–351.
- [29] E. M. Cherry, C. J. Elkins und J. K. Eaton. „Letter to the Editors“. English. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 30.1 (2009), S. 1–2.
- [30] M. V. ZAGAROLA und A. J. SMITS. „Mean-flow scaling of turbulent pipe flow“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 373 (1998), S. 33–79.