Auswertung von Messdaten durch Regressionsrechnung und Fehlerrechnung

Joachim Zeller [1], Benedikt Kölsch [2]

[1] *Ingenieurbüro Zeller, Am Schnellbäumle 16, 88400 Biberach, +49 7351 14783, joachim.zeller@t-online.de*
[2] *Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR), Institut für Solarforschung, Linder Höhe, 51147 Köln, +49 2461 93730-214, benedikt.koelsch@dlr.de*

Einleitung

Im Zuge der derzeitigen internationalen Überarbeitung der Messnorm ISO 9972 für die Luftdurchlässigkeitsmessung von Gebäuden werden verschiedene Methoden der Regressionsrechnung und der Fehlerrechnung diskutiert. Die Methoden werden in diesem Beitrag erklärt. Es soll deutlich werden, welche Ideen hinter den Formeln stecken. Die Autoren möchten gleichzeitig über die internationalen Diskussionen zu ISO 9972 informieren und zum Verständnis der im Beitrag von Kölsch, Leprince und Zeller „Regression Techniques under ISO 9972 – A Comparative Analysis“ untersuchten Auswertungsverfahren beitragen.

Schritte der Auswertung

Die Auswertung einer Luftdurchlässigkeitsmessung nach dem Differenzdruck-verfahren besteht aus folgenden Schritten [ISO 9972]:

- Für jede Druckstufe wird aus der gemessenen Druckdifferenz die erzeugte Druckdifferenz berechnet, indem der Mittelwert der ebenfalls gemessenen natürlichen Druckdifferenz subtrahiert wird.
- Für den gemessenen Volumenstrom wird eine Dichtekorrektur vorgenommen, die vom Messverfahren für die Volumenstrommessung abhängig ist.
- Durch die **Regressionsrechnung** wird aus den Messdaten die Leckagekurve des Gebäudes gewonnen.
- Der Volumenstrom beim Referenz-Differenzdruck, in Deutschland und vielen anderen Ländern 50 Pa, wird berechnet (q_{50}). Dabei wird eine weitere Dichtekorrektur auf Normbedingungen (20 °C, $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa) vorgenommen.
- Die Kenngrößen, z.B. die Luftwechselrate bei 50 Pa, n_{50}, und die Luftdurchlässigkeit bei 50 Pa, q_{E50}, werden berechnet.
- Durch die **Fehlerrechnung** wird die Messunsicherheit für den Volumenstrom bei 50 Pa und für die abgeleiteten Größen ermittelt.

Nachfolgend sollen die Themen Regressionsrechnung und Fehlerrechnung näher erläutert werden.

Regressionsrechnung

Methode der kleinsten quadratischen Abweichung

Durch die Regressionsrechnung wird eine Ausgleichskurve (Leckagekurve des Gebäudes) bestimmt, die möglichst gut an die gemessenen Werte angepasst ist. Für die Leckagekurve wird folgender Ansatz verwendet:

$$q_{env} = C_{env} \cdot \Delta p^{n} \quad (1)$$

mit

q_{env}	Luftvolumenstrom durch die Gebäudehülle (envelope) (m^3/h)
C_{env}	Strömungskoeffizient ($m^3/h/Pa^n$)
Δp	erzeugte Druckdifferenz (Pa)
n	Strömungsexponent (-)

Die beiden Parameter Strömungsexponent und Strömungskoeffizient müssen ermittelt werden. Dazu werden die Messwerte der erzeugten Druckdifferenz und des Luftvolumenstroms logarithmiert. Gleichung (1) wird ebenfalls logarithmiert:

$$\ln(q_{env,i}) = \ln(C_{env}) + n \cdot \ln(\Delta p_i) \quad (2)$$

Diese Gleichung hat die Form einer Geradengleichung:

$$y = a\,x + b \quad (3)$$

Die Parameter n und $\ln(C_{env})$ lassen sich somit durch lineare Regression berechnen. Das Standardverfahren dafür ist die Methode der kleinsten Quadrate (englisch: ordinary least squares, OLS), das auch im informativen Anhang C von ISO 9972 beschrieben wird. Das Ergebnis dieser Regression zeigt Bild 1 in doppelt-logarithmischer Darstellung. Der Strömungsexponent beträgt bei diesem Beispiel $n_{OLS} = 0{,}579$.

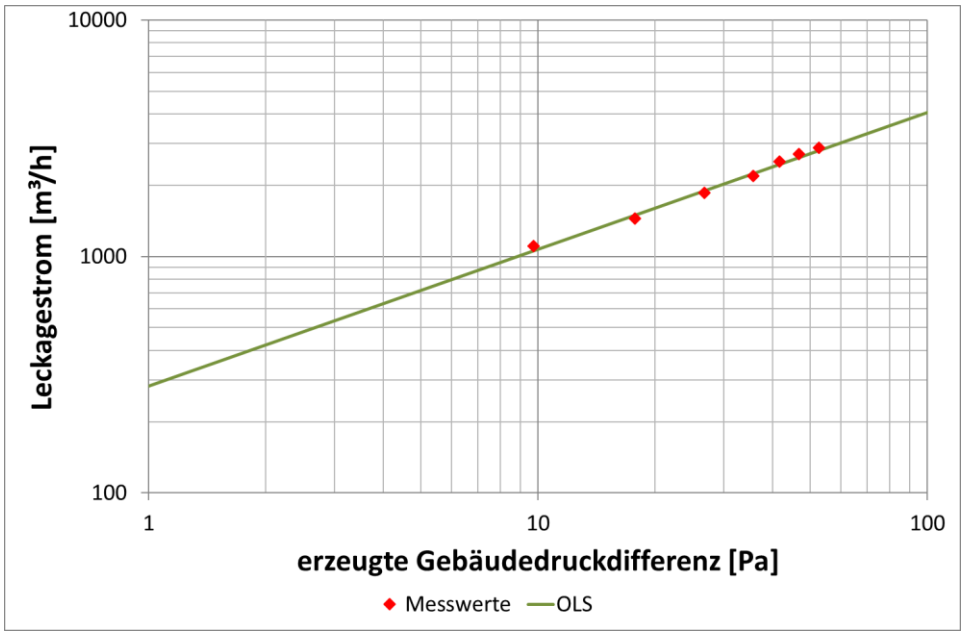


Bild 1: doppeltlogarithmische Darstellung von Messwerten und Ausgleichskurve nach der Methode der kleinsten Quadrate

Diese Näherung ist zwar für die logarithmierten Werte optimal, nicht aber für die ursprünglichen Messdaten. Das liegt daran, dass durch das Logarithmieren die Skalen verzerrt werden: Eine Differenz von z.B. 10 Pa ist bei kleinen Werten größer als bei großen (Bild 1). Dadurch bekommen die kleinen Messwerte einen besonders großen Einfluss auf das Ergebnis.

Gewichtung zur Kompensation des Logarithmierens

Der Effekt des Logarithmierens lässt sich kompensieren, indem man die Messwerte für die Regressionsrechnung mit dem Quadrat des Volumenstroms gewichtet (englisch: weighted least squares, WLS). Dieses Verfahren ist im nationalen informativen Anhang NC der deutschen Ausgabe von ISO 9972 beschrieben [DIN EN ISO 9972]. Das Ergebnis zeigt Bild 2 als rote Linie (n_{WLS} = 0,606).

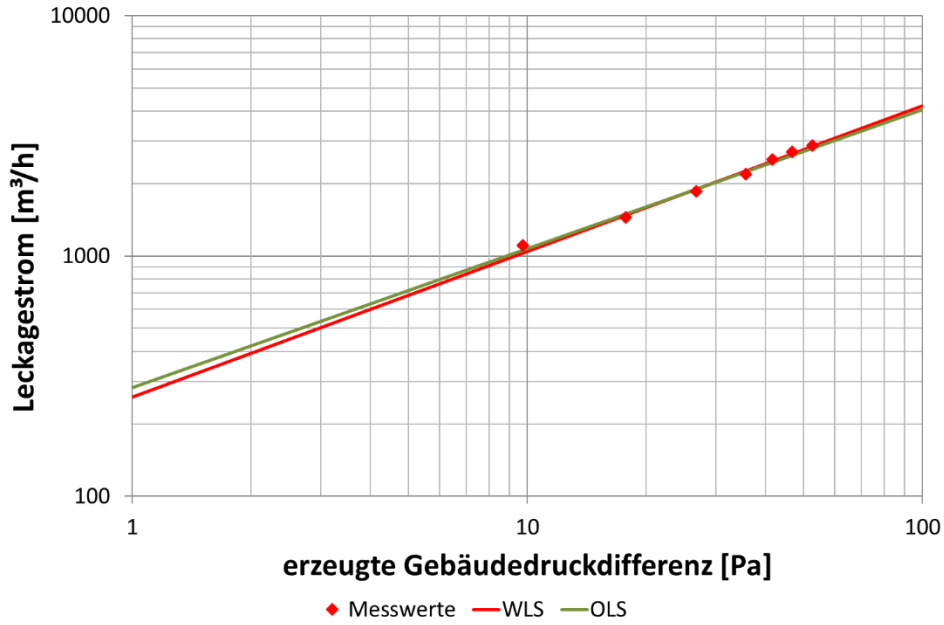


Bild 2: doppeltlogarithmische Darstellung von Messwerten und Ausgleichskurven nach der Methode der kleinsten Quadrate ohne (OLS) und mit (WLS) Gewichtung.

Rechengang

Die Regressionsrechnung zur Bestimmung der Parameter a und b in Gleichung (3) erfordert folgende Rechenschritte:

Bestimmung der Mittelwerte:

$$\bar{x} = 1/N \sum x_i \quad (4)$$
$$\bar{y} = 1/N \sum y_i \quad (5)$$

Bestimmung der Varianzen:

$$s_x^2 = 1/N \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad (6)$$
$$s_y^2 = 1/N \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (7)$$

Bestimmung der Kovarianz

$$s_{xy} = 1/N \sum (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y}) \quad (8)$$

Das Bestimmtheitsmaß r^2 ist

$$r^2 = s_{xy}^2/(s_x^2\, s_y^2) \quad (9)$$

Für die Methode der kleinsten quadratischen Abweichung (OLS) ergibt sich die Geradensteigung a folgendermaßen

$$a_{OLS} = s_{xy}/s_x^2 = r\, s_y/s_x \quad (10)$$

Man erkennt aus Gleichung (10), dass sich beim Vertauschen der Variablen x und y als Steigung nicht der Kehrwert von a_{OLS} ergibt. Das Ergebnis hängt also davon ab, welche der beiden Variablen als die unabhängige angesehen wird.

Organische Korrelation

Da im Fall der Luftdurchlässigkeitsmessung beide Variablen, also Differenzdruck und Volumenstrom bzw. die Logarithmen davon, gleichermaßen als abhängig oder unabhängig angesehen werden können, und da beide Variablen mit einer gewissen Messunsicherheit behaftet sind, schlug Christophe Delmotte vor, das Verfahren der organischen Korrelation zu verwenden [Delmotte 2017].

Das Ergebnis der organischen Korrelation (englisch: line of organic correlation, LOC) ist unabhängig davon, welche Variable unabhängig und welche abhängig ist. Die Geradensteigung wird dabei folgendermaßen berechnet [Helsel et.al. 2020]:

$$a_{LOC} = s_y/s_x = a_{OLS}/r \qquad (11)$$

Bei der Luftdurchlässigkeitsmessung entspricht die Geradensteigung a dem Strömungsexponenten n. Für Messungen nach ISO 9972 sind die Unterschiede zwischen den nach beiden Methoden ermittelten Strömungsexponenten sehr klein, denn für eine normgerechte Messung muss das Bestimmtheitsmaß mindestens $r^2 = 0{,}98$ betragen. Die Ergebnisse nach beiden Methoden unterscheiden sich daher um maximal 1 %.

Die organische Korrelation scheint wenig bekannt zu sein. Anscheinend wird sie vor allem in biologischen Zusammenhängen verwendet, beispielsweise um eine Korrelation zwischen den Maßen verschiedener Körperteile zu beschreiben. In einem Online-Lexikon der EU findet man sogar die Frage, ob dieser Begriff überhaupt notwendig sei [IATE 2025].

Vergleich der Regressionsverfahren

Bild 3 zeigt alle drei Verfahren im Vergleich. Dabei wurde für LOC die gleiche Gewichtung vorgenommen wie für WLS. Delmotte verbindet den Vorschlag der organischen Korrelation dagegen mit dem Vorschlag, jeden Wert mit dem Kehrwert seiner Messunsicherheit zu gewichten.

Der Unterschied der Kurven WLS und LOC ist in Bild 3 kaum zu erkennen: LOC ist mit $n_{LOC} = 0{,}609$, wie zu erwarten, geringfügig steiler als das Standardverfahren mit $n_{WLS} = 0{,}606$. Gewichtet man die Werte für die organische Korrelation mit dem Differenzdruck, was vermutlich im Mittel der Gewichtung mit den Messunsicherheiten entspricht, fällt der Unterschied zwischen der gebräuchlichen Regression WLS und der organischen noch geringer aus ($n_{LOC} = 0{,}608$, im Bild nicht dargestellt).

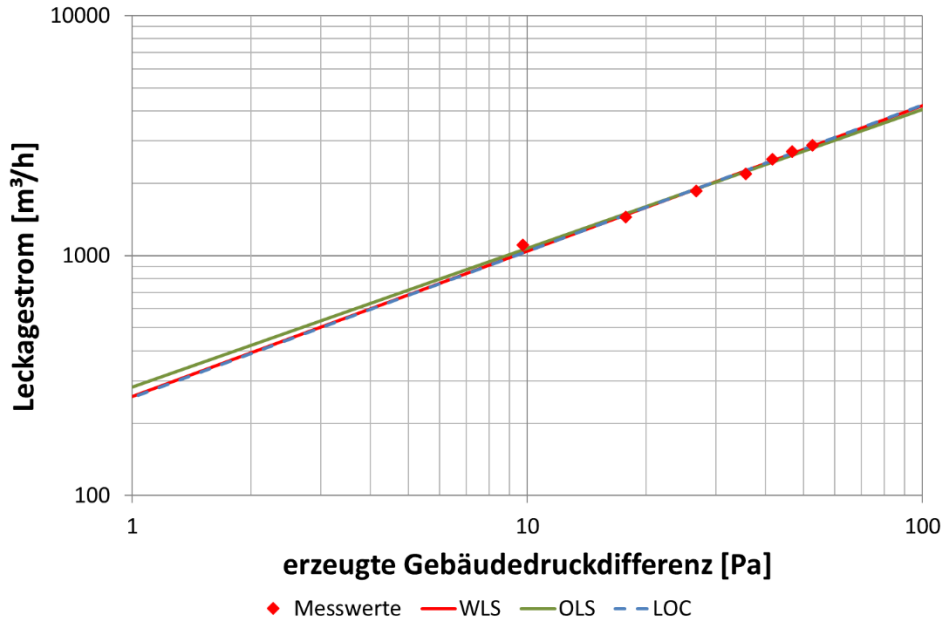


Bild 3: doppeltlogarithmische Darstellung von Messwerten und Ausgleichskurven nach den im Text beschriebenen Methoden. Die Gerade für die organische Korrelation (LOC, blau gestrichelt) entspricht beinahe der nach der gewichteten Methode der kleinsten Quadrate (WLS, rot). Die Gewichtung wurde für LOC gleich wie für WLS gewählt.

Bild 4 zeigt die Messwerte und die verschiedenen Ausgleichskurven in der linearen Darstellung. In dieser Darstellung fällt vor allem auf, dass die Kurve nach der Methode der kleinsten Quadrate (OLS) bei größeren Werten unterhalb der anderen Kurven verläuft. Wegen der falschen Gewichtung bewirkt der zu hohe Wert bei 10 Pa, dass der Volumenstrom bei 50 Pa unterschätzt wird. Bei diesem Beispiel spielt allerdings auch eine Rolle, dass nur ein Messpunkt oberhalb von 50 Pa liegt.

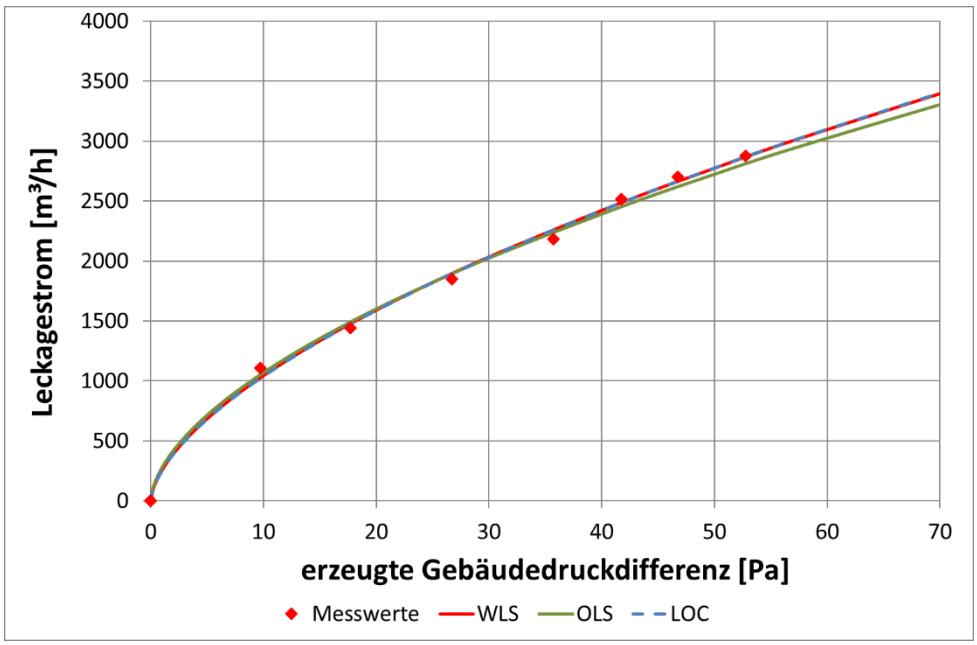


Bild 4: lineare Darstellung von Messwerten und Ausgleichskurven

Bei einer Messung unter ungünstigen Randbedingungen wird der Nachteil der ungewichteten Auswertung OLS gegenüber den Verfahren mit adäquater Gewichtung WLS und LOC noch deutlicher. Bild 5 zeigt die Messdaten und die Ausgleichskurven für die baubegleitende Messung eines sanierten Hochhauses mit sieben über die gesamte Gebäudehöhe verteilten Gebläsen. Die wegen der Lüftungsanlagen angestrebte Luftdichtheit war im untersuchten Bauzustand noch nicht erreicht, so dass mit der installierten Gebläseleistung nur ein maximaler Wert der erzeugten Gebäudedruckdifferenz von 33 Pa erreicht wurde. Die Messdaten mussten daher auf 50 Pa extrapoliert werden. Dazu kamen starke windbedingte Druckschwankungen [ebök 2006].

Die ungewichtete Auswertung OLS führt zu einem unplausiblen Wert des Strömungsexponenten von n = 0,976 und zu einer Luftwechselrate bei 50 Pa von 2,9 h^{-1}. Auch bei den gewichteten Verfahren sind die Werte des Strömungsexponenten noch auffällig hoch (WLS: n = 0,827, LOC: n = 0,843), aber deutlich plausibler. Das damals verwendete Verfahren WLS ergab eine Luftwechselrate bei 50 Pa von 2,6 h^{-1}, LOC führt zum gleichen Ergebnis.

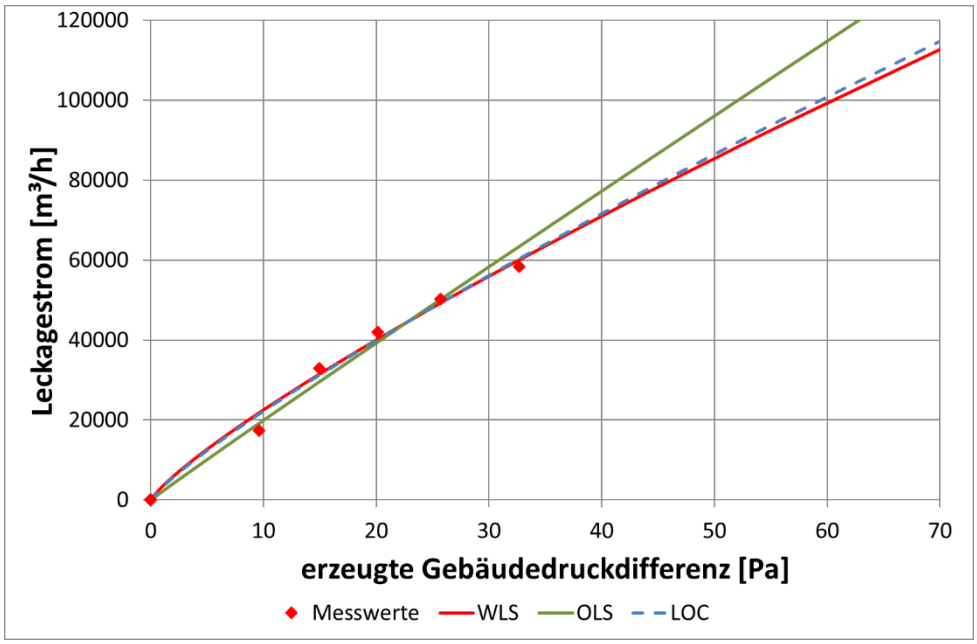


Bild 5: Messwerte und Ausgleichskurven für eine Messung unter ungünstigen Bedingungen

Fehlerrechnung

Allgemein

Die Fehlerrechnung, die nach heutigem Sprachgebrauch eher Berechnung der Messunsicherheiten heißen müsste, dient dazu, aus den Messunsicherheiten der gemessenen Größen die Unsicherheit der abgeleiteten Größen zu berechnen. Eine Anleitung dazu gibt der „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“ [JCGM 100, 2008]. Nach diesem Standard werden zwei Typen der Messunsicherheit unterschieden:

- Typ A: Berechnung der Messunsicherheit durch statistische Analyse der Messungen (z.B. Standardabweichung), früher als statistischer Fehler (englisch: random error) bezeichnet.
- Typ B: Berechnung der Messunsicherheit mit anderen als statistischen Mitteln (z.B. Messunsicherheit des Messgeräts lt. Hersteller).

Carl Friedrich Gauß bezeichnete die Messunsicherheit vom Typ B als „unbekannten systematischen Fehler“.

Eine Messunsicherheit vom Typ A kann nur angegeben werden, wenn die betreffende Messgröße mehrfach gemessen wird. Bei physikalischen Experimenten wird üblicherweise die größere der beiden Messunsicherheiten in die Auswertung einbezogen. Für den Fall der Luftdurchlässigkeitsmessung ist allerdings nicht von vornherein klar, welche der beiden Messunsicherheiten dominiert.

Fehlerrechnung nach ISO 9972:2015

Im informativen Anhang C von ISO 9972 wird die Regressionsrechnung und die Fehlerrechnung beschrieben. Letztere berücksichtigt allerdings nur die statistischen Abweichungen der einzelnen Messpunkte (Druckstufen) von der Ausgleichskurve (Typ A). Bei wenig schwankenden Windverhältnissen fällt die so berechnete Messunsicherheit sehr klein aus. Insbesondere kann sie kleiner ausfallen, als die vom Hersteller angegebene Messunsicherheit der Volumenstrommessung.

Eine Besonderheit dieses Verfahrens liegt darin, dass asymmetrische Fehlergrenzen für den Volumenstrom angegeben werden. So kann es nicht vorkommen, dass die untere Fehlergrenze einen negativen Wert annimmt. Bei anderen Verfahren kann das vorkommen, wenn sie für einen Referenzdruck von nur 4 Pa angewendet werden.

Nationaler Anhang DIN EN ISO 9972:2018

Anfang der 2000er-Jahre erarbeitete eine Arbeitsgruppe des Fachverbands Luftdichtheit im Bauwesen e.V. (FLiB) einen Algorithmus für die Fehlerrechnung, der zunächst nur im Verband kommuniziert, später in [Zeller 2008] veröffentlicht wurde. Mit kleinen Korrekturen wurde diese Fehlerrechnung in den informativen nationalen Anhang NC der 2018 erschienenen deutschen Ausgabe von ISO 9972 übernommen.

Bei dieser Methode wird die Unsicherheit des Volumenstroms nach einem Verfahren vom Typ B mit dem Ergebnis nach Anhang C des internationalen Teils der Norm (Typ A) verglichen. Der größere der beiden Werte wird weiter verwendet.

Das Verfahren berücksichtigt unter anderem die Messungenauigkeiten des Druckmessgeräts und der Volumenstrommessapparatur, den Fehler aufgrund einer unzureichenden Dichtekorrektur und den möglichen Fehler aufgrund eines Ventileffekts, falls nur bei Unter- oder Überdruck gemessen wird. Auch die Änderung der natürlichen Druckdifferenz vor und nach der Messreihe geht in die Auswertung ein.

Belgischer Vorschlag zur Überarbeitung von ISO 9972

Für die derzeitige Überarbeitung von ISO 9972 liegt ein belgischer Vorschlag für eine Fehlerrechnung vom Typ A vor. Dabei werden für jede Druckstufe mehrere Messwerte von Differenzdruck und Volumenstrom aufgenommen. Die Berechnung der Gesamtunsicherheit basiert auf den Werten der Standardabweichung für die einzelnen Messwerte.

Vergleich der Methoden

Basierend auf Messdaten von rund 6000 Messungen an mehreren Häusern wurden von Kölsch et al. die verschiedenen Methoden der Regressions- und Fehlerrechnung rechnerisch verglichen [Kölsch et al. 2025]. Gewichtung, Regressionsmethode und Fehlerrechnung wurden jeweils entsprechend dem internationalen Anhang C von ISO 9972, dem nationalen Anhang NC von DIN EN ISO 9972 und dem belgischen Vorschlag gewählt (Tabelle 1).

Tabelle 1: Auswertungsvergleich von B. Kölsch

Quelle	Bezeichnung	Gewichtung	Regression	Fehlerrechnung
ISO 9972:2015	OLS	1	kleinste Quadrate	Typ A nach ISO 9972:2015
DIN EN ISO 9972:2018	WLS	Quadrat des Volumenstroms	kleinste Quadrate	Typ A und Typ B kombiniert nach nationalem Anhang von DIN EN ISO 9972:2018 konzipiert für Referenzdruck 50 Pa (Typ B dominiert)
belgischer Vorschlag für ISO 9972	WLOC	Kehrwert der Messunsicher-heiten	organische Korrelation	Typ A nach Vorschlag für ISO 9972

Die Ergebnisse des Vergleichs werden in Benedikt Kölschs Beitrag zu diesem Symposium präsentiert [Kölsch et al. 2025 a].

Bei der Bewertung dieser Ergebnisse im Hinblick auf die Überarbeitung der Norm ist zu berücksichtigen, dass die Zuordnung von Gewichtung und Fehlerrechnung zu den beiden Regressionsverfahren auch anders gewählt werden kann.

Fazit

Die Regressionsmethode der organischen Korrelation erscheint sinnvoll, wenngleich sie wenig bekannt ist und der Unterschied zur Regression nach der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung sehr klein ist. Wichtig ist dagegen, dass die logarithmierten Daten geeignet gewichtet werden. Zumindest muss der Effekt des Logarithmierens kompensiert werden. Zusätzlich ist es auch möglich, Messunsicherheiten für die einzelnen Druckstufen zu berücksichtigen. Das setzt allerdings voraus, dass für jede Druckstufe entsprechend viele Einzelwerte vorliegen.

Wegen der erhöhten Messdauer ist das wenig attraktiv und sollte daher nur bei stark schwankenden Windverhältnissen obligatorisch werden.

Um weiterhin mit vorhandener Software arbeiten zu können ist es außerdem wichtig, dass die Themen Regressionsrechnung und Fehlerrechnung in der Norm nur informativ und nicht normativ beschrieben werden.

Literatur

Delmotte, Christophe (2017). Airtightness of buildings – considerations regarding the zero-flow pressure and the weighted line of organic correlation. Proceedings of the 38th AIVC Conference, Nottingham, UK.

DIN EN ISO 9972 (2018). Wärmetechnisches Verhalten von Gebäuden – Bestimmung der Luftdurchlässigkeit von Gebäuden – Differenzdruckverfahren (ISO 9972:2015), Deutsche Fassung EN ISO 9972:2015

ebök (2006). unveröffentlichte Messwerte der Unterdruckmessung in einem sanierten Hochhaus. Ingenieurbüro ebök, Tübingen.

Helsel, D.R., Hirsch, R.M., Ryberg, K.R., Archfield, S.A., and Gilroy, E.J., (2020), Statistical methods in water resources: U.S. Geological Survey Techniques and Methods, book 4, chap. A3, 458 p., https://doi.org/10.3133/tm4a3. [Supersedes USGS Techniques of Water-Resources Investigations, book 4, chap. A3, version 1.1.]

IATE (2025). Interactive Terminology for Europe. URL: https://iate.europa.eu/entry/result/1571050/all (Abrufdatum: 24.04.2025)

ISO 9972 (2015). Wärmetechnisches Verhalten von Gebäuden – Bestimmung der Luftdurchlässigkeit von Gebäuden – Differenzdruckverfahren

JCGM 100 (2008). Joint Committee for Guides in Metrology, Evaluation of Measurement Data - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements.

Kölsch, Benedikt, Valérie Leprince, Joachim Zeller, Iain S. Walker (2025), Uncertainty in building airtightness tests: Comparison of regression techniques using a comprehensive dataset of 6,000 tests, Energy and Buildings, Volume 330, ISSN 0378-7788, https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2025.115328.

Kölsch, Benedikt, Valérie Leprince, Joachim Zeller (2025 a). Regression Techniques under ISO 9972 – A Comparative Analysis. Reader BuildAir-Symposium

Zeller, Joachim (2008). Messung der Luftdurchlässigkeit der Gebäudehülle. In FLiB-Buch Band 1, 1. Auflage, Fachverband Luftdichtheit im Bauwesen e.V., Kassel.