

Interner Bericht

DLR-IB-SY-BS-2024-193

Analyse einer 2D- Wärmestromverteilung in einer geklebten Überlappungsverbindung

Masterarbeit

Billy Dimitri Monthe Tchegna

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

Institut für Systemleichtbau



DLR

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt

Dokumenteigenschaften

Titel	<u>Analyse einer 2D-Wärmestromverteilung in einer geklebten Überlappungsverbindung</u>
Betreff	<u>Masterarbeit</u>
Institut	<u>Systemleichtbau</u>
Erstellt von	<u>Billy Dimitri Monthe Tchegna</u>
Beteiligte	<u>Dipl.-Ing. Michael Lange</u>
Geprüft von	<u>Prof. Dr.-Ing. Alexander Vendl, Prof. Dr.-Ing. André Markus</u>
Freigabe von	<u>Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne</u>
Zugänglichkeit	<input checked="" type="checkbox"/> Stufe 1: Allgemein zugänglich (in elib ohne Zugangsbeschränkung) <input type="checkbox"/> Stufe 2: DLR intern zugänglich (in elib mit Beschränkung „nur DLR-intern zugänglich“)
Datum	<u>04.09.2024</u>
Version	<u>1.0</u>
Datei Info	<u>IB_2024_193_MA_Monthe_Tchegna.pdf</u>



**HOCHSCHULE
HANNOVER**
UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES
AND ARTS

*Fakultät II
Maschinenbau und
Bioverfahrenstechnik*

Masterarbeit

**Thema: Analyse einer 2D-Wärmestromverteilung in einer geklebten
Überlappungsverbindung**

Billy Dimitri Monthe Tchegna

Matrikel-Nr.: 1730848

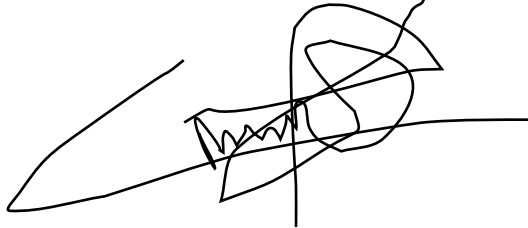
Aufgabesteller: Dipl. -Ing. Michael Lange
Dr. Cordula Reisch

Erster Prüfer: Prof. Dr. -Ing. Alexander Vendl

Zweiter Prüfer: Prof. Dr. -Ing. André Markus

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping loops and a long horizontal stroke extending to the right.

Hannover, den 04.09.2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung.....	1
1.1. Motivation	1
1.2. Ziel und Methodik der Arbeit	3
Kapitel 2. Grundlagen	5
2.1. Allgemeine Formulierung der Laplace Gleichung für ein Wärmeleitungsproblem.....	5
2.1.1. Differentialgleichung	5
2.1.2. Temperaturgradient.....	5
2.1.3. Temperaturverlauf in einem isotropen Werkstoff.....	6
2.1.4. Randbedingungen.....	7
2.2. Mathematische Konzepte.....	8
2.2.1. Eigenwert Problem	8
2.2.2. Trennung der Variablen	9
2.2.3. Prinzip von linearer Superposition	9
2.2.4. Fourier Reihe Funktion	9
2.3. Lösung der Wärmeleitungsgleichung in 1D.....	10
2.3.1. Dirichlet Randbedingungen.....	11
2.3.2. Anfangsbedingung.....	12
2.4. Lösung der 2D-Wärmeleitungsgleichung	12
2.4.1. Lösung des stationären Zustands	12
2.4.2. Lösung des transienten Zustands	16
2.5. Grenzen der Anwendung der Fourier Reihe und Gibbs Phänomene	17
2.6. Finite-Differenzen- Methode (FDM).....	18
2.7. Single-Lap Joint (SLJ).....	19
Kapitel 3. Lösung der thermischen Laplace Gleichung in einem SLJ	20
3.1. Vorgegebene Annahmen.....	20
3.1.1. Art der Wärmeübertragung.....	20
3.1.2. Vernachlässigung der Klebeschicht	20
3.1.3. Isotrope Materialeigenschaften	21
3.1.4. 2D- Modellierung.....	21
3.2. Referenzlösung: FEM-Lösung	22
3.2.1. Implementierung des Modells in ANSYS	22
3.2.2. Diskretisierung und Netzgenerierung.....	22
3.2.3. Definition der Rand- und Anfangsbedingungen	23
3.2.4. Berechnung und Auswertung.....	23
3.3. Definition der Randbedingungen für die analytische Lösung	24
3.3.1. Randbedingung am linken-unteren Rand ($x=0, 0<y<h_1$) des geklebten Bereichs des SLJ	25

3.3.2.	Randbedingung am rechten-oberen Rand ($x=L$, $h_1 < y < h_1+h_2$) des geklebten Bereiches des SLJ.....	28
3.4.	Analytische Lösung der Laplace Gleichung in einem SLJ mit der ersten Hypothese.....	30
3.4.1.	Wärmestrom gleicht Null am rechten Rand	32
3.4.2.	Wärmestrom gleicht Null am linken Rand.....	33
3.5.	Analytische Lösung der Laplace Gleichung in einem SLJ mit der zweiten Hypothese	35
3.5.1.	Definition des mathematischen Modells am rechten Rand des geklebten Bereichs des SLJ.....	35
3.5.2.	Lösung der Gleichung	38
Kapitel 4.	Ergebnisse und Vergleich.....	42
4.1.	Überprüfung der Korrektheit der analytischen Lösung.....	42
4.2.	Qualitativer Vergleich der verschiedenen Lösungen	43
4.3.	Quantitativer Vergleich der analytischen und FEM-Lösungen	46
4.3.1.	Variation des Wärmestroms Q	46
4.3.2.	Variation der Länge L des geklebten Bereiches	49
4.3.3.	Variation der Breite des unteren Laminats.....	51
Kapitel 5.	Diskussion	53
Kapitel 6.	Fazit und Ausblick	55
Anhang	57
1)	MATLAB-Code für die Darstellung des Wärmestroms.....	57
2)	Matlab-Code für die Berechnung des Temperaturfelds	59
Literaturquellen	62
Abbildungsverzeichnis	63
Tabellenverzeichnis	64

Kapitel 1. Einleitung

1.1. Motivation

Raumfahrzeuge müssen nicht nur mechanisch äußerst stabil sein, sondern auch so leicht und steif wie möglich. Zusätzlich zu den mechanischen Belastungen bei Start und Landung ist das System extremen Umgebungsbedingungen ausgesetzt, wobei die großen Temperaturunterschiede während des Fluges und Einsatzes eine große Rolle spielen. Eine der in der Luft- und Raumfahrtindustrie vielseitigen Werkstoffe, die häufig in Raumfahrzeugen für primäre und sekundäre Strukturen eingesetzt werden, sind faserverstärkte Kunststoffe (**FKV**), insbesondere Kohlefaser-Verbundwerkstoffe (**KFVW**). Um optimale Ergebnisse zu erzielen, muss der (Verbundwerkstoff-) Strukturdesignprozess die charakteristischen orthotropen mechanischen Eigenschaften berücksichtigen. Hierfür stehen entsprechende Finite-Elemente-Simulationsmethoden und analytische Methoden zur Verfügung. Neben ihren ausgezeichneten mechanischen Eigenschaften können FVKs auch ein hohes Potenzial für thermische Anwendungen bieten. Pitch Faser Verstärkungen können beispielsweise Wärmeleitfähigkeiten von 620W/mK in Faserrichtung oder mehr haben [1].

Während der frühen Entwurfsphase von Strukturen aus faserverstärkten Kunststoffen (**FKV**) stellen sich jedoch zwei große Herausforderungen: vielfache Designänderungen und die anisotropen Materialeigenschaften von FVK-Verbundstrukturen. Darüber hinaus teilen sich strukturelle und thermische Belastungen oft dieselben Wege in einer Struktur. Eine Änderung der Materialeigenschaften, wie zum Beispiel eine Erhöhung des Faservolumengehalts einer Laminatschicht, beeinflusst daher nicht nur die mechanischen, sondern auch die thermischen Eigenschaften der Struktur. Diese enge Verbindung zwischen Struktur- und Thermalentwurf legt eine teilweise gekoppelte Analyse nahe. Diese Analyse sollte eine systematische und schnelle Bewertung eines Entwurfs erlauben, der auf ein festes Set von Material- und Geometrieparametern basiert, und ohne eine detaillierte numerische Analyse durchführen zu müssen. Ein Konzept für eine mögliche gekoppelte Analyse ist in [2] vorgestellt. Diese versucht die Analogie zwischen den semi-analytischen und Finite Element Wärmestrom in Dickenrichtung der Fügenschicht einer Klebverbindung in Abhängigkeit der Klebeschichtlänge zu bilden (Abbildung 1). Als einfachste Ausgangsverbindung wurde hierfür die Single-Lap-Joint (SLJ) Verbindung gewählt.

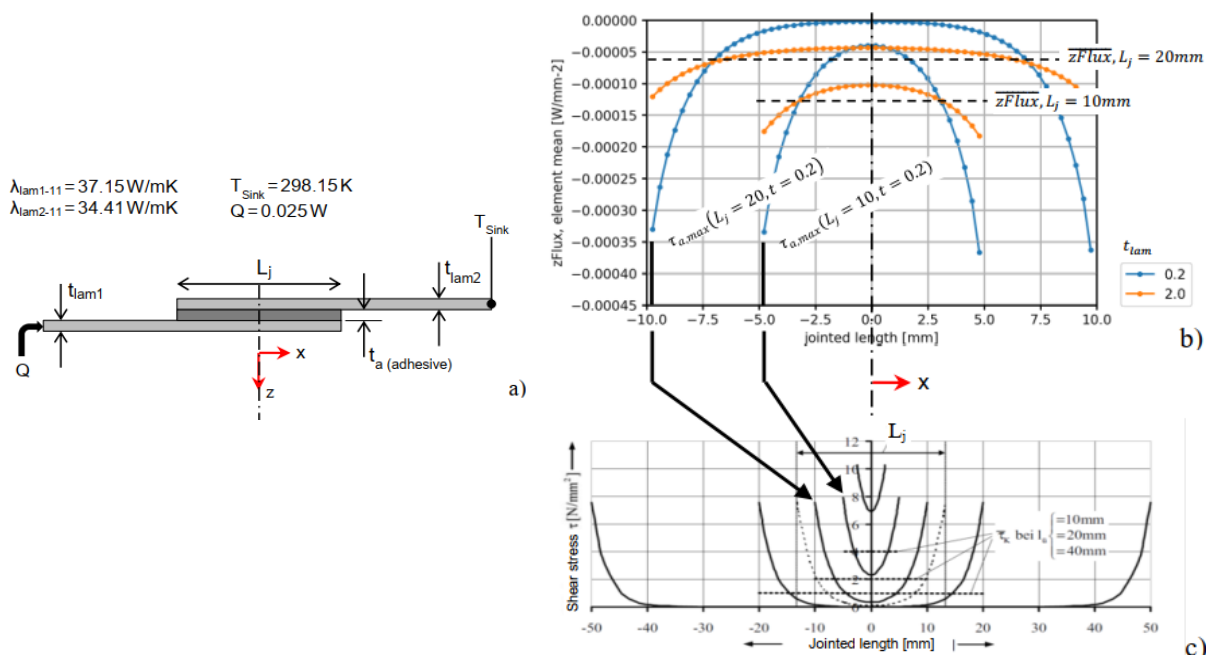


Abbildung 1: a) Single Lap Joint Konfiguration für die analytische und numerische Analyse; b) Simulierte mittlere Z-Komponente der Wärmestromverteilung in der Klebeschicht eines Single-Lap Joint für eine Verbindungslänge von $L_j = 10 \text{ mm}$ und $L_j = 20 \text{ mm}$; c) Scherspannungsverteilung in der Klebeschicht eines Single-Lap Joint für unterschiedliche Verbindungslängen L_j . [2]

Ein Beispiel, das von der Anwendung dieses Auslegungsverfahrens hätte profitieren können, ist der MASCOT-Lander. Dieser verfügt über viele Überlappungsverbindungen (Lap Joint), wie in (Abbildung 2) zu sehen.

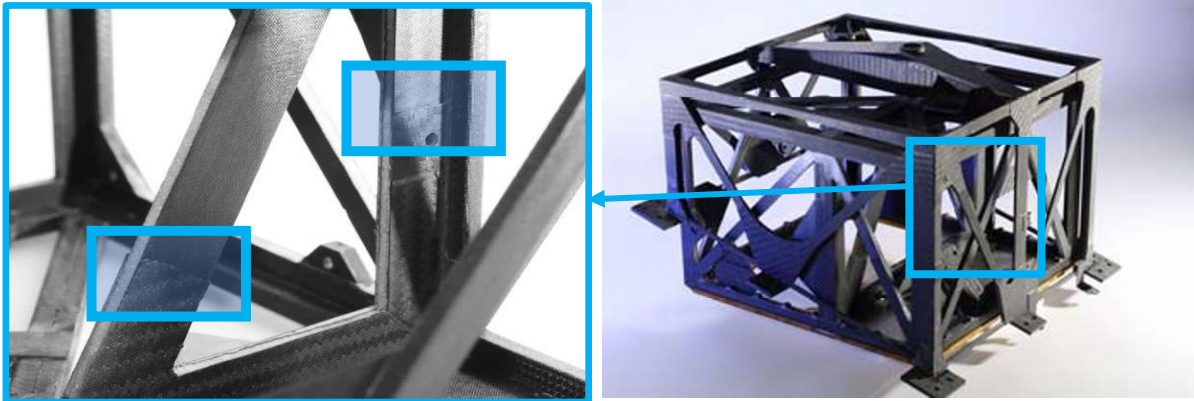


Abbildung 2: MASCOT-Struktur

Es ist zu bemerken, dass die Kurve (Abbildung 1) des Wärmestroms die gleiche U-Forme wie bei Schubspannungskurve entspricht. Die mathematische Gleichung, die die Schubspannungskurve regelt, ist folgendes:

$$\tau_a = \bar{\tau}_a \cdot \frac{\rho}{2} \left[\frac{\cosh\left(\frac{\rho x}{L_j}\right)}{\sinh\left(\frac{\rho}{2}\right)} - \frac{(1 - \psi) \cdot \sinh\left(\frac{\rho x}{L_j}\right)}{(1 - \psi) \cdot \cosh\left(\frac{\rho}{2}\right)} \right] \quad (E 1)$$

Dabei ist $\bar{\tau}_a$ die konstante durchschnittliche Schubspannung im Fügebereich, ρ eine Kennzahl der Klebeverbindung und ψ das Steifigkeitsverhältnis der Füge Teile:

$$\bar{\tau}_a = \frac{F_x}{L_j \cdot w}$$

$$\rho^2 = \frac{(1 + \psi) \cdot G_a \cdot L_j^2}{G_{lam1} \cdot t_{lam1} \cdot t_a}$$

$$\psi = \frac{G_{lam1} \cdot t_{lam1}}{G_{lam2} \cdot t_{lam2}}$$

Mit:

F_x : die Zugkraft.

G_a : Schubmodul des Klebstoffs

G_{lam1} und 2 : Schubmodul des Laminats 1 und 2

$t_{lam1(2)}$: Breite des Laminats 1 bzw. 2

L_j : Länge des Klebebereichs

t_a : Breite der Klebeschicht

w : Dicke der Verbindung

Die Idee von Lange war, eine Ersetzung der mechanischen Parameter in der Gleichung (E 1) durch thermische Parameter aufgrund der Ähnlichkeiten zu einer analytischen Beschreibung der Wärmestromverteilung in der Klebeschicht zu führen, die mit der numerischen Simulation in Abbildung 1b übereinstimmt. Um die in Gleichung (E 1) enthaltenen Modellannahmen zu kompensieren, wird die Dicke der Klebstoffschicht t_a entsprechend der Laminatdicke und der Kennzahl der Klebeverbindung angepasst [2]. Da sich diese Formel nicht als allgemein anwendbar erwies und die Anpassung der Parameter nicht rechtfertig ist, ist es notwendig eine allgemeine Formulierung zu untersuchen. Es stellt sich jetzt die Frage zu wissen, ob es eine geschlossene analytische Lösung gibt und ob es möglich wäre, auf diesen Korrekturfaktor verzichten zu können.

1.2. Ziel und Methodik der Arbeit

Um diese geschlossene analytische Lösung zu finden, wird das Single-Lap Joint (SLJ) genau untersucht. In der folgenden Abbildung ist der Temperaturverlauf im lila markierten Bereich am relevantesten für diese Arbeit. Hier besteht die Überlappungsverbindung aus zwei kohlenfaserverstärkten Kunststofflaminaten (Breite h_1 und h_2), die über eine Länge L mit einem Klebstoff der Breite t_a verklebt sind (Abbildung 3). Durch das Anlegen eines konstanten Wärmeflusses Q an einem Ende und das Halten der Temperatur T_{sink} am anderen entsteht eine bestimmte Wärmeflussverteilung innerhalb der verklebten Verbindung. Gezielt ist, die Wärmeflussverteilung in Dickenrichtung der Fügenschicht für isotropen Materialien mit numerischen und analytischen Berechnungsverfahren zu analysieren und einen Vergleich von der analytischen und Finite-Elemente-Lösung zu machen. Um das Problem zuerst zu vereinfachen, wird die Dicke der Klebeschicht vernachlässigt. (siehe §Kapitel 3)

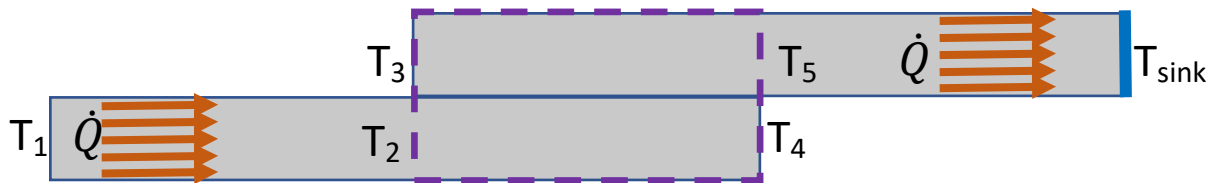


Abbildung 3: Aufgabestellung der Arbeit

Aufgrund der Tatsache, dass $T_2 \neq T_3$ und $T_4 \neq T_5$ und die Werte von T_1 , T_2 , T_3 , T_4 und T_5 unbekannt sind, ist es kompliziert, den Wärmestrom in den Klebeschichtbereich des Lap joints unabhängig von T_1 , T_2 , T_3 , T_4 und T_5 zu schreiben. Gesucht wird dann eine Funktion $F_{\text{Fluss}}(Q_{\text{in}}, \lambda, h_1, h_2, T_{\text{sink}}, L)$, wobei:

Q : Der am linken Rand konstante vorgegebene Wärmefluss

λ : Wärmeleitfähigkeit des Materials

h_1 : Breite des unteren Laminats

h_2 : Breite des oberen Laminats

T_{sink} : Die am rechten Rand vorgegebene Temperatur, die direkt bei Änderung der Parameter sich einfach anpassen lässt. Die Analyse sollte einen systematischen und fundamentalen Ansatz bieten, der es ermöglicht, in der Zukunft SLJ-Strukturen mit spezifischen richtungsabhängigen Wärmeleitfähigkeiten zu entwerfen, um Variationen im Aufbau des Laminats hinsichtlich der globalen Leitfähigkeiten zu bewerten.

Die Methodik dieser Arbeit zielt darauf ab, die Wärmeleitungseigenschaften des aus Kohlefaser-Verbundwerkstoffen (CFK) bestehenden Single-Lap (SLJ) Joint zu untersuchen. Die folgenden Schritte werden detailliert beschrieben.

Um ein fundiertes Verständnis für die thermischen Eigenschaften von Überlappungsverbindungen zu entwickeln, wird eine umfassende Literaturrecherche durchgeführt. Dabei werden relevante Quellen zu den Themen CFK-Materialien (prinzipiell Single-Lap Joint), Fourier-Reihe und Verfahren zur Lösung der Laplace-Gleichungen mit Randbedingungen gesucht und analysiert.

Die Literaturrecherche konzentriert sich auf wissenschaftliche Artikel, Forschungsberichte, Konferenzbeiträge und andere veröffentlichte Arbeiten, die sich mit Single-Lap Joint, CFK-Strukturen in der Raumfahrttechnik und speziell Wärmeleitung und Laplace-Gleichung beschäftigen. Dabei werden sowohl aktuelle als auch historische Studien berücksichtigt, um ein umfassendes Bild der Forschung auf diesem Gebiet zu erhalten. Die gesammelten Informationen werden sorgfältig analysiert, um wichtige Erkenntnisse über die thermischen Eigenschaften von Single Lap Joint zu gewinnen. Durch die Literaturrecherche und Analyse wird ein umfassendes Verständnis für die Herausforderungen und Möglichkeiten im Zusammenhang mit der Analyse von Single-Lap Joint entwickelt. Dies bildet die Grundlage für weitere experimentelle Untersuchungen und analytische und numerische Berechnungen, um die Temperaturverteilung im Single-Lap Joint erfolgreich zu beschreiben.

Nach der Literaturrecherche wird zuerst die Randbedingungen des Modells definiert (siehe Abbildung 4) und mit Hilfe der Fourier Reihe eine Lösung des Temperaturfelds gefunden.

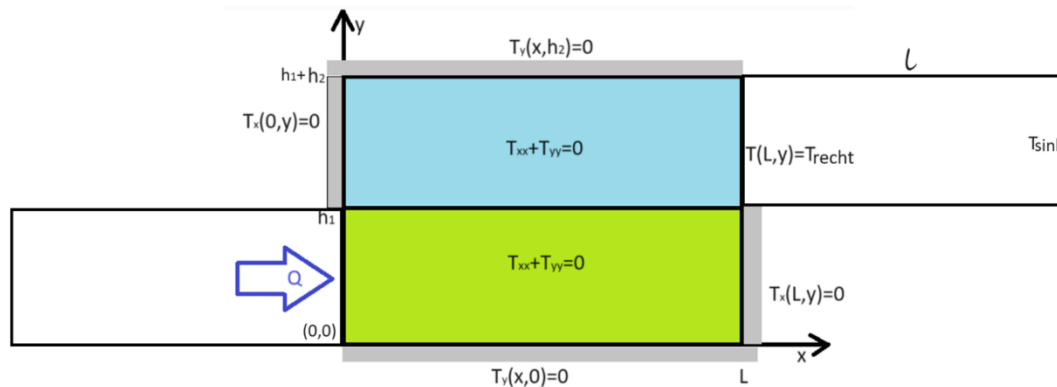


Abbildung 4 : Definition der Randbedingungen der geklebten Verbindung

Wobei:

Q : Der am linken Rand des SLJ konstante vorgegebene Wärmefluss

λ : Wärmeleitfähigkeit des Materials

h_1 : Breite des unteren Laminats

h_2 : Breite des oberen Laminats

T_{sink} : Die am rechten Rand des SLJ vorgegebene Temperatur

l : die Länge des Verlängerungsbereiches auf der rechten Seite.

L : Die Länge des Klebeschichtbereiches

Da die vorgegebene Randbedingungen nicht analytisch zu einer Lösung geführt haben, werden einige Annahmen, die sich der Realität nähern, getroffen. Ein mathematisches Modell, das besser die Randbedingungen darstellt, wird abgebildet, um das analytische Vorgehen zu ermöglichen. Das Modell berücksichtigt das Verhalten des Wärmestroms in Breiterichtung der Fügenschicht und repräsentiert die Randbedingung am rechten Rand.

Mit Hilfe der Trennung der Variablen und des Superposition-Prinzips wird die Laplace-Gleichung gelöst und die Lösung in MatLab geplottet, damit diese sich einfach mit der Finiten Differenzen-Methoden-Lösung (FDM) und Finiten Elementen-Methoden-Lösung (FEM) vergleichen lässt.

Die Idee danach ist die Vertraulichkeit und Fehlerschätzung der analytischen Lösung im Vergleich zu der FEM-Lösung (hier als Referenz-Lösung) bei Parameteränderung ($Q, \lambda, h_1, h_2, T_{\text{sink}}, L$) zu gewährleisten, damit die Auswirkungen der verschiedenen sowohl die vorgegebene (siehe §§3.1) als auch die für die analytische Lösbarkeit des Problems (siehe §§ 3.3) getroffene Annahmen sich beschreiben lassen.

Kapitel 2. Grundlagen

2.1. Allgemeine Formulierung der Laplace Gleichung für ein Wärmeleitungsproblem

2.1.1. Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung ist eine mathematische Gleichung, die eine unbekannte Funktion und ihre Ableitungen enthält. Sie beschreibt Beziehungen zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen in Bezug auf eine oder mehrere unabhängige Variablen. Sei S das kartesische System $S = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Die Ordnung solcher Gleichung entspricht dem Wert der höchsten Ableitungsordnung. Eine Differentialgleichung m-ter Ordnung einer beliebigen Funktion u ist linear, wenn diese die folgende Gleichung erfüllt:

$$F \left(x_1, \dots, x_n; u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}; \dots; \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_1^{(m)}}, \dots, \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x_n^{(m)}} \right) = 0 \text{ mit } n \in \mathbb{N}^* \quad (E 2)$$

Wobei F eine Funktion von x_i, u und ihre Ableitungen ist.

Die Differentialgleichung kann als homogen bezeichnet, wenn $u(x) = 0$ eine Lösung ist. Es sind viele Arten von Differentialgleichungen bekannt. Im Bereich der Aerodynamik und Aeronautik, sind zum Beispiel die Poisson- und Laplace Gleichung häufig getroffen. Im Kontext der Arbeit, wird die Laplace Gleichung betrachtet, welche wie folgt dargestellt ist:

$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ mit $n \in \mathbb{N}^*$. Wo Δ . der Laplace Operator repräsentiert. [3] Das heißt für eine stetige und differenzierbare Funktion u:

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \text{ mit } n \in \mathbb{N}. \quad (E 3)$$

2.1.2. Temperaturgradient

Unter einem Temperaturgradient versteht man einen gerichteten physikalischen Vektor, der die räumlichen Änderungen der Temperatur beschreibt und ist häufig als $\text{grad}(T)$, wobei T eine Temperaturfunktion ist, bezeichnet. Der Gradient einer Temperaturfunktion $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ kann wie folgendes berechnet werden:

$$\vec{f} = \text{grad}(T) = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial T}{\partial x_n} \right), \text{ mit } n \in \mathbb{N}^* \quad (E 4)$$

Die aus des fourierischen Gesetzes Wärmelux q, die die Fläche A durchquert, ist dann in isotropen Fällen gegeben als:

$$q = -\lambda A \text{grad}(T) = -\lambda A \vec{f} \quad (E 5)$$

mit der von der Temperatur durchgequerte Fläche A und der Thermische Wärmeleitfähigkeit λ . Es kommt ab und zu vor, dass man mit anisotroper Materialien arbeiten muss. In dem Fall lässt sich das Fourier-Gesetz in 3D zum Beispiel wie folgt schreiben:

$$\begin{cases} q_x = -A_x \left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ q_y = -A_y \left(\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ q_z = -A_z \left(\lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{cases}$$

Wobei die Matrize $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}$ die Wärmeleitfähigkeit-Matrize genannt ist. Und die

Koeffizienten λ_{ij} sind die Wärmeleitkoeffizienten in Richtung i in Anhänglichkeit der j-Richtung. [4]

2.1.3. Temperaturverlauf in einem isotropen Werkstoff

Gegeben sei das Volume Element und den Längen dx , dy , dz in dem kartesischen System (x,y,z) . Die Fläche in allen drei Richtungen sind identisch. Also $A_x = A_y = A_z = A$.

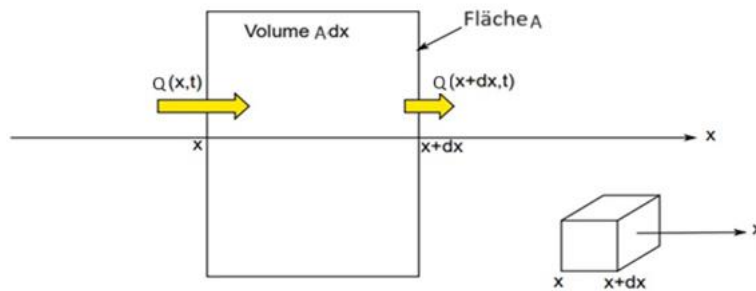


Abbildung 5: vom Wärmefluss durchgequertes infinitesimales Element

Die Fläche bei x (bzw. $x+dx$), orientiert entlang der Achse, wird von einem Wärmefluss $Q(x, t)$ (bzw. $Q(x+dx,t)$) durchgequert. Bei Abwesenheit einer äußeren thermischen Quelle gibt es keine Arbeit und mit der Anwendung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik zwischen den Zeitpunkten t und $t+dt$ ist die folgende Gleichung zu erhalten:

$$\frac{H(t + dt) - H(t)}{dt} = Q(x, t) - Q(x + dx, t) \quad (E 6)$$

Wobei $H(t)$ die Enthalpie des Systems im Zeitpunkt t ist.

Bei Übertragung des gleichen Verfahrens auf die Ebenen y und z erhält man die folgende Gleichung für das gesamte System:

$$\frac{H(t + dt) - H(t)}{dt} = Q(x, t) - Q(x + dx, t) + Q(y, t) - Q(y + dy, t) + Q(z, t) - Q(z + dz, t)$$

Mit infinitesimaler Betrachtung und Anwendung von (E 4) und (E 5) entsteht:

$$\frac{h(t + dt) - h(t)}{dt} = -\lambda \left[\frac{f(x, t) - f(x + dx, t)}{dx} + \frac{f(y, t) - f(y + dy, t)}{dy} + \frac{f(z, t) - f(z + dz, t)}{dz} \right]$$

Es ist aber bekannt, dass für eine stetige und differenzierbare Funktion $g(x, t)$:

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{g(x, t) - g(x + dx, t)}{dx} = \frac{\partial g(x, t)}{\partial x}$$

Es folgt dann:

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = -\lambda \left[\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} + \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} \right] \quad (E 7)$$

Ausgehen davon, dass es weder chemische Reaktionen noch einen Zustandswechsel im System gibt. Die Enthalpie ist daher nur eine Funktion von T (bei konstantem Druck). Es ist die folgende Gleichung zu erhalten:

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (E 8)$$

Wobei ρ die Dichte des Materials und C_p die isobare spezifische Wärmekapazität sind.

(E 8) in (E 7) ergibt:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

So erhält man die Laplace Gleichung im 3D:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (E 9)$$

Und im stationären Zustand:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (E 10)$$

2.1.4. Randbedingungen

Die Randbedingungen sind zusätzliche Informationen, die angeben, wie sich die Lösung an den Rändern oder Grenzen eines betrachteten Bereichs verhält. Diese Bedingungen helfen dabei, die allgemeine Lösung auf eine spezifische Lösung für das betrachtete Problem zu beschränken. Es ist verschiedene Arten von Randbedingungen bekannt, je nachdem, ob sie sich auf den Werten der Funktion oder ihren Ableitungen an den Grenzen basieren [4]. Angenommen sind f_1, f_2, f_3 und f_4 bekannte Funktionen. Man unterscheidet unter anderem:

- **Dirichlet Randbedingungen:** Diese Randbedingungen legen die Werte einer Funktion an den Grenzen eines bestimmten Bereichs fest. Zum Beispiel könnte dies bedeuten, dass man für eine Differentialgleichung, die eine Temperaturverteilung beschreibt, die genaue Temperatur an den Punkten entlang der Grenze des betrachteten Raums festlegt. Die Abbildung 6 schildern ein Beispiel einer 2D viereckigen Geometrie mit vorgegebenen Temperaturen am Rändern, wobei $T_{xx} + T_{yy} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ (Einsteins Notation).

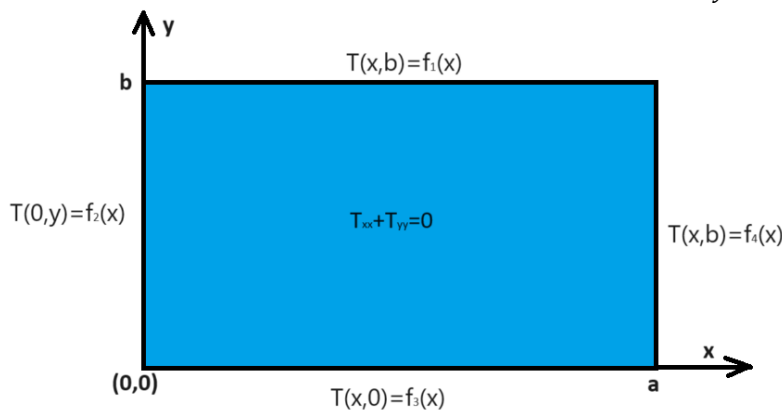


Abbildung 6: 2D Dirichlet Problem auf einem Viereck

- **Neumann Randbedingungen:** Im Gegensatz zu den Dirichlet-Randbedingungen beziehen sich die Neumann-Randbedingungen auf die Festlegung der Ableitungen oder Gradienten der Funktion an den Grenzen eines bestimmten Bereichs. Konkret heißt das, dass man bei Neumann-Randbedingungen die Änderungsraten oder Steigungen der Funktion an den Grenzen eines betrachteten Bereichs vorgibt. Zum Beispiel könnte dies bedeuten, dass man für eine Differentialgleichung, die eine Temperaturverteilung beschreibt, den Wärmefluss an den Rändern festlegt (siehe Abbildung 7).

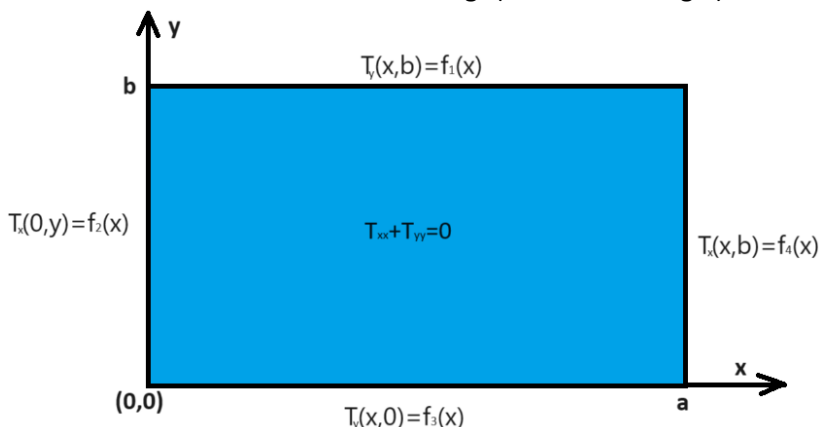


Abbildung 7: 2D Neumann Problem auf einem Viereck

- **Robin Randbedingungen:** Diese Randbedingungen kombinieren Aspekte der Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen. Robin-Randbedingungen sehen in der Regel wie folgt aus:

$$AT + B \frac{\partial T}{\partial n} = g$$

Hierbei steht: T: für die zu betrachtende Funktion

A, B und g: Konstante oder Funktionen.

n: ein Koordinate Vektor

Diese Randbedingungen können in physikalischen Kontexten beispielsweise verwendet werden, um die Wärmeleitung mit einem kombinierten Effekt von Temperaturwerten und Wärmeleitung an den Grenzen zu modellieren (siehe Abbildung 8). Ein typischer Fall dafür ist ein Rand mit Strahlung und vorgegebene Wärmestrom. Die Robin-Randbedingungen ermöglichen somit eine flexible Modellierung, bei der sowohl die Temperatur an den Grenzen als auch der Wärmefluss berücksichtigt werden.

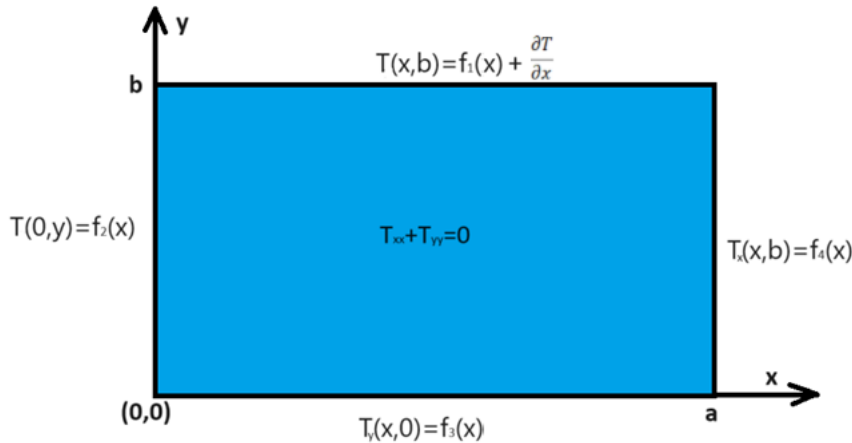


Abbildung 8: 2D Robin Problem auf einem Viereck

Diese nichtperiodischen Bedingungen, wie Dirichlet-Bedingungen (fester Wert) oder Neumann-Bedingungen (fester Gradient), stellen erhebliche Herausforderungen dar: [6]

- Diskontinuitäten: Nichtperiodische Randbedingungen können Diskontinuitäten oder scharfe Gradienten in der Nähe der Grenzen einführen, die insbesondere mit Spektralmethoden schwer genau darzustellen sein können
- Verlust der spektralen Genauigkeit: Methoden, die spektrale Genauigkeit für periodische Probleme erreichen, verlieren diese Eigenschaft häufig für nichtperiodische Probleme, was eine spezielle Behandlung der Grenzen erfordert.
- Rechenkomplexität: Die Handhabung nichtperiodischer Randbedingungen erfordert oft numerische Techniken, was die Rechenkomplexität des Lösungsprozesses erhöht.
- Inkompatibilität bei reine Wärmeleitungsproblem: Es kann auch aber nicht gleichzeitig Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen auf demselben Rand in einem reinen Konduktionswärmelungsproblem aufgeteilt werden. Das liegt daran, dass man einerseits auf einem Teil des Randes einen festen Temperaturwert vorgeben würde (Dirichlet), andererseits aber auch auf dem anderen Teil den Wärmestrom (Neumann) kontrollieren möchte, was inkonsistent ist, da der Wärmestrom von der Temperaturverteilung abhängt.

2.2. Mathematische Konzepte.

2.2.1. Eigenwert Problem

Ein Eigenwertproblem tritt auf, wenn nach Funktionen gesucht wird, die durch den Differentialoperator unverändert bleiben, abgesehen von einer Skalierung. Diese Funktionen werden als Eigenfunktionen und die zugehörigen Skalierungsfaktoren als Eigenwerte bezeichnet. Für den Laplace Operator hat man: $\Delta u = \beta u$. Wobei β der Eigenwert der Gleichung ist.

Lass uns das Konzept mit der folgenden Gleichung in zweiter Ordnung gut erklären. Sei die stetige und differenzierbare Funktion u , Lösung der homogenen Differenzialgleichung:

$$u''(x) - \beta u(x) = 0; 0 < x < L \quad (E 11)$$

Um besser das Eigenwert Problem darstellen zu können, kann die Gleichung (E 11) als $\Delta u(x) = \beta u(x)$ geschrieben werden. Der Parameter β ist durch die Randbedingungen zu berechnen. Man unterscheidet in solchen Situationen drei Fälle:

- **Fall 1:** $\beta > 0$: Hier kann die Variable Substitution $\beta = w^2$ gemacht werden. Die Lösung der Gleichung ist eine exponentielle Funktion: $u(x) = C_1 e^{wx} + D_1 e^{-wx}$ oder $u(x) = C_2 \cosh(wx) + D_2 \sinh(wx)$, wobei die Konstante $C_1; C_2; D_1$ und D_2 durch Randbedingungen zu berechnen sind.
- **Fall 2:** $\beta = 0$: In diesem Fall hat man $u''(x) = 0$ und die triviale Lösung ist durch die lineare Funktion $u(x) = Cx + D$ gegeben, wobei C und D durch die Randbedingungen zu berechnen sind.
- **Fall 3:** $\beta < 0$: Hier hat man $\beta = -w^2$ und die Lösung ist: $u(x) = C_1 e^{iwx} + D_1 e^{-iwx}$ über den komplexen Körper \mathbb{C} . Aber man kann auch nur mit dem realen Anteil arbeiten. Dann ist die Lösung durch die trigonometrische Funktion $u(x) = C_2 \cos(wx) + D_2 \sin(wx)$ gegeben, wobei $C_1; C_2; D_1$ und D_2 durch die Randbedingungen zu berechnen sind.

2.2.2. Trennung der Variablen

Das Prinzip der Trennung der Variablen ist sehr bekannt bei Lösung von partieller Differentialgleichung. Insbesondere wenn diese Gleichung linear und homogen sind. Die Idee dahinter besteht darin, anzunehmen, dass die Lösung der Differentialgleichung als das Produkt von Funktionen geschrieben werden kann, die jeweils nur von einer Variablen abhängen. Diese Annahme wird in die Differentialgleichung eingesetzt, um gewöhnliche Differentialgleichungen, die einfacher zu lösen sind, zu erhalten.

Hat man zum Beispiel die Funktion $u(t, x) = u(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$; mit $n \in \mathbb{N}^*$ dann ist der Ansatz $u(t, x) = H(t)X_1(x_1)X_2(x_2) \dots X_n(x_n)$; mit $n \in \mathbb{N}^*$. Setzt man diese in die partielle Differentialgleichung ein, erhält man gewöhnliche Differentialgleichungen für die neuen gesuchten Funktionen H, X_1, X_2, \dots, X_n . Ein Beispiel davon ist im §2.3 Lösung der Wärmeleitungsgleichung in 1D zu sehen.

2.2.3. Prinzip von linearer Superposition

Das Prinzip der linearen Superposition ist ein grundlegendes Konzept in der linearen Algebra und Differentialgleichungen. Es besagt, dass die Gesamtlösung einer linearen Gleichung als Summe der Lösungen ihrer einzelnen Teile betrachtet werden kann. In Bezug auf lineare Differentialgleichungen bedeutet dies, dass wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen einer linearen Differentialgleichung sind, ist auch $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind, eine Lösung derselben Differentialgleichung ist.

Dieses Prinzip ermöglicht es, Lösungen von Differentialgleichungen durch Kombination bekannter Lösungen zu erhalten. Es ist besonders nützlich bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, da dort die Überlagerungseigenschaft sehr stark ist.

2.2.4. Fourier Reihe Funktion

Eine auf \mathbb{R} definierte Funktion f heißt periodisch mit der Periode $T \neq 0$, wenn $f(x + nT) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$. Eine sogenannte Fourier-Funktion ist eine periodische und trigonometrische Funktion, die sich wie folgt schreiben lässt.

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right) \quad (E 12)$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe ist $f(x)$ stetig und die Funktionen $f(x) \cos\left(\frac{2\pi p}{T} x\right)$ und $f(x) \sin\left(\frac{2\pi p}{T} x\right)$ mit $p \in \mathbb{N}^*$ sind integrierbar auf $[0, T]$ und gliedweise Integration ist erlaubt.

Wenn man die Funktion f mit $\cos\left(\frac{2\pi p}{T} x\right)$ multipliziert und integriert, bekommt man:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi p}{T} x\right) dx &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \right) \right] \cos\left(\frac{2\pi p}{T} x\right) dx \\ &= \int_0^T a_0 \cos\left(\frac{2\pi p}{T} x\right) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \cos\left(\frac{2\pi p}{T} x\right) dx + b_k \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x\right) \cos\left(\frac{2\pi p}{T} x\right) dx \right] \\ &= \frac{T}{2} a_k \end{aligned}$$

Da $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_0 \cos\left(\frac{2\pi p}{T} x\right) dx = 0$;

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi p}{T}x\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + 1 \right] dx = \frac{T}{2} \text{ falls } p = k \\ \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos\left(\frac{\pi(k+p)}{2T}x\right) + \cos\left(\frac{\pi(k-p)}{2T}x\right) \right] dx = 0 \text{ falls } p \neq k \end{cases}$$

und

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi p}{T}x\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^T \sin\left(\frac{4\pi k}{T}x\right) dx = 0 \text{ falls } p = k \\ \frac{1}{2} \int_0^T \left(\sin\left(\frac{\pi(k+p)}{2T}x\right) + \sin\left(\frac{\pi(k-p)}{2T}x\right) \right) dx = 0 \text{ Falls } p \neq k \end{cases}$$

Hier wurde die folgende trigonometrische Gleichung angewendet.

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin(a) \cos(a) \\ \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \cos(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)) \end{aligned}$$

Von daher folgt, dass $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx$ und mit dem gleichen Verfahren lässt sich auch b_k durch $b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx$ berechnen.

Der letzte Parameter a_0 lässt sich berechnen, indem man die Fourier-Funktion über das Intervall $[0, T]$ integriert. Also:

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x) dx &= \int_0^T \left[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right) \right] dx \\ &= \int_0^T a_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^T a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx + \int_0^T b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \right] = a_0 T \end{aligned}$$

Da $\int_0^T a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx = \int_0^T b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx = 0$ und $\int_0^T a_0 dx = a_0 T$

Es folgt dann, dass: $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$

Zusammenfassend kann man die Fourier-Reihe wie folgt schreiben:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) \right) \quad (E 13)$$

mit $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx$; $b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx$; $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$.

2.3. Lösung der Wärmeleitungsgleichung in 1D

Laut der Gleichung (E 9) kann die 1D-Wärmeleitungsgleichung wie folgt ausgedrückt werden.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

o Stationärer Zustand

Hier ist der zweite Term der Gleichung gleich null. Und so hat man:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Und die Lösung ist die lineare Funktion: $\mathbf{T(x)=Ax+B}$. Wobei A und B Konstante, die durch die Randbedingungen zu bestimmen sind.

o Transienter Zustand

Bei Anwendung der Trennung der Variablen könnte die Funktion $T(t, x)$ als $T(t, x) = H(t)X(x)$ geschrieben werden und die Gleichung umgeschrieben als:

$$X''(x)H(t) + \frac{\rho C_p}{\lambda} X(x)H'(t) = 0$$

Dann folgt:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{H'(t)}{H(t)} = 0$$

Und

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{H'(t)}{\tau H(t)} = \beta^2$$

Wobei $\tau = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ die Temperaturleitzahl entspricht. [5]

Also wenn $T(t,x)$ eine Lösung der Gleichung ist, dann gilt $X''(x) = -\beta^2 X(x)$ und $H'(t) = \beta^2 \tau H(t)$. Es ist dann abhängig von der Art der Randbedingungen die Gleichung $X''(x) = -\beta^2 X(x)$ und $H'(t) = \beta^2 \tau H(t)$ zu lösen. Es wird im Folgenden die drei verschiedenen Randbedingungen betrachtet, um diese Wärmeleitungsgleichung zu lösen.

2.3.1. Dirichlet Randbedingungen

Die folgende Abbildung stellt die Dirichlet-Randbedingungen an einer Wand dar.

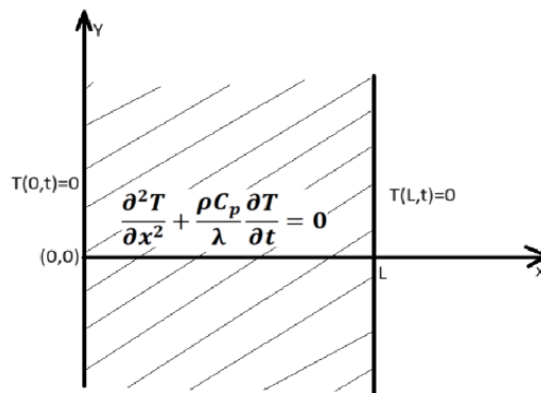


Abbildung 9: Wärmeleitung durch eine Wand mit Dirichlet-Randbedingungen

Mit der Annahme, dass die beiden Seite der Wand eine Null vorgegebene Temperaturen haben, also $T(t,0) = T(t,L) = 0$ und die Anfangstemperatur $T(0,x) = f(x)$ ist, folgt $X(0) = X(L) = 0$ und $H(0) = f(x)$. Diese zeitabhängige Gleichung lässt sich leicht lösen und man erhält: $H(t) = C e^{-\tau \beta^2 t}$. Um den Parameter β zu bestimmen, ist es nötig, die x-abhängige Gleichung genau zu betrachten.

Von $X''(x) = -\beta^2 X(x)$ bemerkt man, dass es sich um ein Eigenwert Problem handelt. Falls β gleich null ist, bekommt man mit den vorgegebenen Randbedingungen eine Temperatur, die überall null ist. Und das hat keine Bedeutung für das Weitergehen dieser Arbeit. Weil $-\beta^2$ negativ ist, konvergiert $H(t) = C e^{-\tau \beta^2 t}$ nicht gegen null und daher $T(x,t)$ auch. Laut §§2.2.1 folgt:

$$X(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)$$

Mit der Randbedingung $X(0) = 0$ folgt $A = 0$ und mit $X(L) = 0$, $B \sin(\beta L) = 0$. Hier ist es klar, dass $B \neq 0$ ist, ansonsten wäre $X(x)$ überall null und daher $T(t,x)$ auch. Der Wert des Parameters β ist dann die Lösung von $\sin(\beta L) = 0$. Das heißt: $\beta = \frac{\pi n}{L}$; mit $n \in \mathbb{N}$

Die einfache Lösung der Laplace Gleichung ist dann:

$$T(t,x) = C_0 e^{-\frac{\lambda \beta^2}{\rho C_p} t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

Und mit der Anwendung des Prinzips der linearen Superposition hat man die allgemeine Lösung:

$$T_n(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{\lambda \beta^2}{\rho C_p} t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

Und dies muss die letzte Randbedingung $T(0,x) = f(x)$ erfüllen. Das heißt:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

was eine Fourier Funktion darstellt. Und man erhält:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

Die allgemeine Lösung des Problems ist dann:

$$T_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx \right) e^{-\frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad (E 14)$$

2.3.2. Anfangsbedingung

Das gleiche Verfahren wird hier mit der Anfangsbedingung wiederholt. (Siehe Abbildung 10)

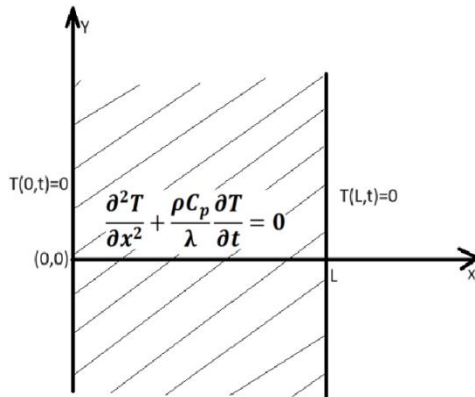


Abbildung 10: Wärmeleitung durch eine Wand mit Neumann Randbedingungen

Mit der Anfangsbedingung hat man zum Beispiel: $T(t, 0) = T(t, L) = 0$, und $\left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{(t,x)=(0,x)} = f(x)$.

Und die allgemeine Lösung der differenziellen Gleichung ist gegeben durch:

$$T_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

Welche die Randbedingungen um $\left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{(t,x)=(0,x)} = f(x)$ erfüllen muss.

$$\left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{(t,x)=(0,x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{L} C_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

Es folgt dann, dass:

$$C_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx$$

Und die allgemeine Lösung lautet:

$$T_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx \right) e^{-\frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \quad (E 15)$$

2.4. Lösung der 2D-Wärmeleitungsgleichung

Laut der Gleichung (E 9) kann man die 2D-Wärmeleitungsgleichung wie folgt ausdrücken.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

2.4.1. Lösung des stationären Zustands

Im stationären Zustand hat man:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Bei Anwendung des Prinzips der Trennung der Variablen kann die Lösung der Gleichung als $T(x, y) = X(x)Y(y)$ geschrieben werden. Wobei $X(x)$ (bzw. $Y(y)$) nur eine x-abhängige (bzw. y-abhängige) Funktion ist. Beim Einsetzen dieser Lösung in der Gleichung, bekommt man:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \text{ also } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \omega^2$$

$$X'' - \omega^2 X = 0 \text{ und } Y'' + \omega^2 Y = 0$$

Diese Gleichungen entsprechen die Fällen 1 und 3 der Eigenwertprobleme und Die Lösung der Gleichung kann wie folgt geschrieben werden:

$$T(x, y) = (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))(C e^{\omega y} + D e^{-\omega y})$$

Wobei die Parameter A, B, C und D von den Randbedingungen abhängen.

a) Dirichlet Randbedingungen

Als Dirichlet Randbedingungen kann man hier $T(0, y) = T(x, 0) = T(a, y) = 0, T(x, b) = f(x) \forall x$ und $\forall y$ mit $0 < x < a$ und $0 < y < b$ annehmen. Das heißt, eine gleich Null Temperatur auf drei Seite (Ebenen $x = 0, x = a$ und $y = 0$) des Vierecks und eine festgelegte Temperatur auf der Ebene $y = b$ (Abbildung 11).

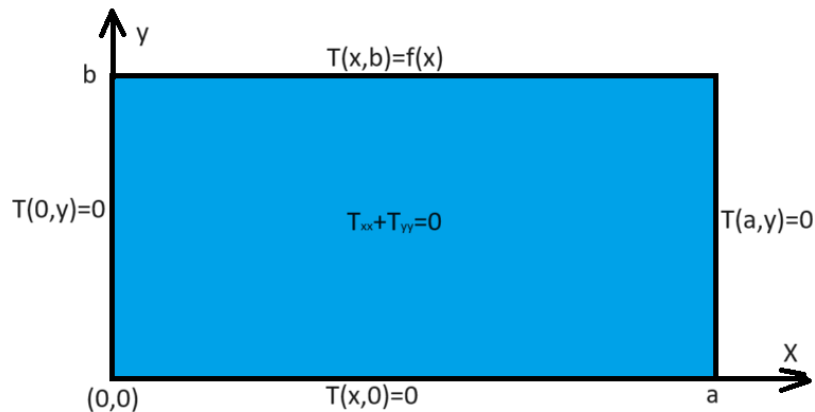


Abbildung 11: Wärmeleitung in einem Viereck mit 2D Dirichlet Randbedingungen

- Mit $T(0, y) = 0$, und $T(a, y) = 0$ erhält man $A = 0$ und $\omega = \frac{\pi n}{a}$, mit $n \in \mathbb{N}$. Das heißt:

$$T(x, y) = B \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \left(C e^{\frac{\pi n}{a} y} + D e^{-\frac{\pi n}{a} y} \right)$$

- Mit $T(x, 0) = 0$ ergibt sich, $C = -D$. Das heißt:

$$T(x, y) = B \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \left(C e^{\frac{\pi n}{a} y} - C e^{-\frac{\pi n}{a} y} \right)$$

$$T(x, y) = C_{st} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \left(e^{\frac{\pi n}{a} y} - e^{-\frac{\pi n}{a} y} \right)$$

$$T(x, y) = C_0 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{a} y\right)$$

Mit der Anwendung des Prinzips der Superposition, lässt sich die Lösung allgemein formulieren.

$$T_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_0 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{a} y\right)$$

Jetzt muss diese allgemeine Lösung die letzte Randbedingung erfüllen, nämlich: $T(x, b) = f(x) \forall x$.

$$T_n(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_0 \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right)$$

Was eine Fourier- Reihe mit der Konstanten $C_n \sinh\left(\frac{\pi n}{L} b\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ repräsentiert. Also hat man:

$$C_n \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx$$

Also

$$C_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben als:

$$T_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right)} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx \right] \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \quad (E 16)$$

b) Neumann Randbedingungen

Hier wird angenommen, dass die stationäre Wärmeverteilung auf der linken, unteren und rechten Seite isoliert ist und es gibt einen Temperaturfluss auf der oberen Seite des Vierecks (Abbildung 12). Das heißt:

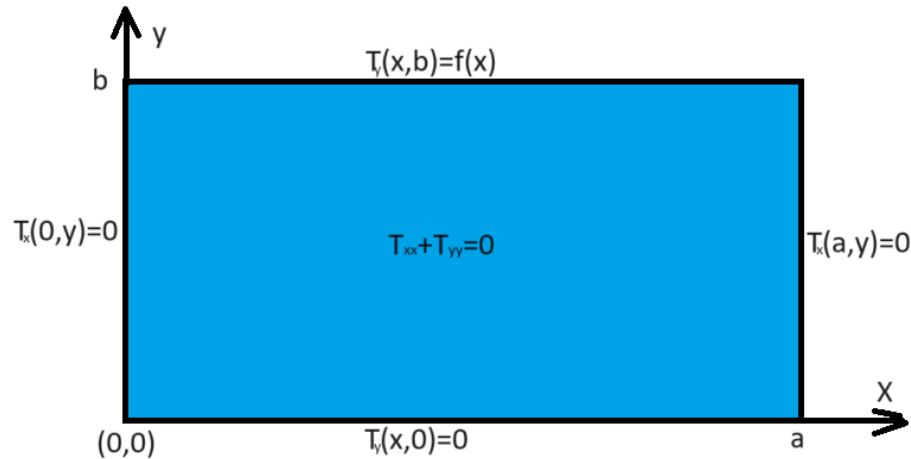


Abbildung 12: Wärmeleitung in einem Viereck mit 2D Neumann Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad \forall y; \text{ und } \left. \frac{\partial T(y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \left. \frac{\partial T(y)}{\partial y} \right|_{y=b} = f(x); \quad \forall x.$$

- Mit $\left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad \forall y$ bekommt man für die folgende Gleichung $B=0$ und $\omega = \frac{\pi n}{a}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$T(x, y) = (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))(C e^{\omega y} + D e^{-\omega y})$$

- Mit $\left. \frac{\partial T(y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$, bekommt man $C = D$.

Es folgt dann:

$$T(x, y) = A \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \left(C e^{\frac{\pi n}{a} y} + C e^{-\frac{\pi n}{a} y} \right)$$

Also:

$$T(x, y) = C_0 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \left(e^{\frac{\pi n}{a} y} + e^{-\frac{\pi n}{a} y} \right)$$

$$T(x, y) = C_0 \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cosh\left(\frac{\pi n}{a} y\right)$$

Mit der Anwendung des Prinzips der Superposition, lässt sich die Lösung allgemein formulieren.

$$T_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cosh\left(\frac{\pi n}{a} y\right)$$

Jetzt muss diese allgemeine Lösung die letzte Randbedingung erfüllen, nämlich: $\left. \frac{\partial T(y)}{\partial y} \right|_{y=b} = f(x); \quad \forall x.$

$$\left. \frac{\partial T(y)}{\partial y} \right|_{y=b} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\pi n}{a} \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right)$$

Was eine Fourier-Reihe mit den Konstanten $C_n \frac{\pi n}{a} \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellt. Also hat man:

$$C_n \frac{\pi n}{a} \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx$$

und

$$C_n = \frac{2}{\pi n \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx$$

Die allgemeine Lösung ist dann gegeben als:

$$T_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi n \sinh\left(\frac{\pi n}{a} b\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) dx \right] \cos\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \cosh\left(\frac{\pi n}{a} y\right) \quad (E 17)$$

c) Robin Randbedingungen

Hier wird angenommen, dass die stationäre Wärmeverteilung auf der rechten Seite isoliert ist, die Temperatur auf der linken und unteren Seite gleich null ist und auf der oberen Seite gleich einer Funktion f ist. Das heißt:

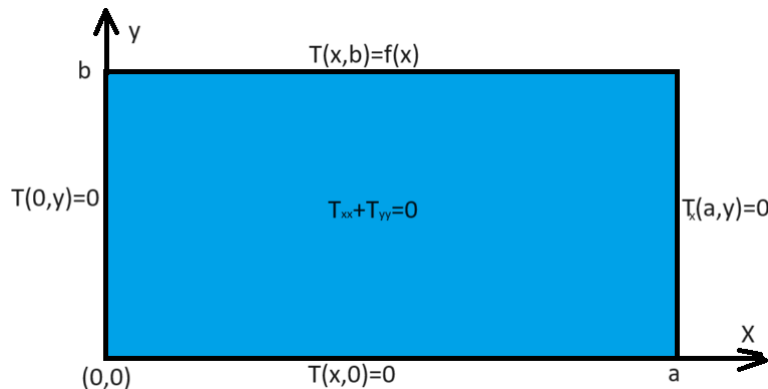


Abbildung 13: Wärmeleitung in einem Viereck mit 2D Robin Randbedingungen.

$$T(x, b) = f(x), \forall x; \quad T(x, 0) = T(0, y) = 0; \quad \left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0; \quad \forall y.$$

$$T(x, y) = (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))(C e^{\omega y} + D e^{-\omega y})$$

- Mit $T(0, y) = 0, \forall y$ hat man $A = 0$ und mit $\left. \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$ hat man $\omega = \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$T(x, y) = B \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \left(C e^{\frac{(2n-1)\pi}{2a} y} + D e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2a} y} \right)$$

- Mit $T(x, 0) = 0; \forall x$ hat man $C = -D$.

Es folgt dann:

$$T(x, y) = B \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \left(C e^{\frac{(2n-1)\pi}{2a} y} - C e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2a} y} \right)$$

Also:

$$T(x, y) = C_0 \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \left(e^{\frac{(2n-1)\pi}{2a} y} - e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2a} y} \right)$$

$$T(x, y) = C_0 \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} y\right)$$

Mit der Anwendung des Prinzips der Superposition, lässt sich die Lösung allgemein formulieren.

$$T_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} y\right)$$

Jetzt muss diese allgemeine Lösung die letzte Randbedingung erfüllen, nämlich: $T(x, b) = f(x), \forall x$.

$$T_n(x, b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} b\right)$$

Was eine Fourier-Reihe mit dem Konstant $C_n \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} b\right)$ darstellt. Also hat man:

$$C_n \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} b\right) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a} x\right) dx$$

und

$$C_n = \frac{2}{a \cdot \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}b\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}x\right) dx$$

Die finale Lösung ist dann gegeben als:

$$T_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a \cdot \sinh\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}b\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}x\right) dx \right] \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{a}y\right) \quad (E 18)$$

2.4.2. Lösung des transienten Zustands

Beim transienten Zustand lässt sich die Wärmeleitungsgleichung in 2D wie folgt schreiben.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\rho C_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Hier wird wieder das Prinzip von Trennung der Variablen angewendet und die Lösung der Differentialgleichung kann als $T(x,y,t) = X(x)Y(y)Z(t)$ geschrieben werden. Beim Einsetzen in die Differentialgleichung, kann sie wie folgt umgeschrieben werden.

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{\rho C_p}{\lambda Z} \frac{dZ}{dt} = 0$$

Die folgende Eigenwertprobleme sind zu lösen:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \omega^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \theta^2, \quad \frac{\rho C_p}{\lambda Z} \frac{dZ}{dt} = -(\theta^2 + \omega^2)$$

Es ist zuerst wichtig, die Werte ω und θ zu finden. Hier wird nur mit den Dirichlet Randbedingung weiterverfolgt werden, weil das Prinzip das gleiche wie im 2.4.1 bleibt. Die allgemeine Lösung der ersten beiden Eigenwertprobleme sind gegeben als:

$$X(x) = X_1 \cos(\omega x) + X_2 \sin(\omega x) \quad \text{und} \quad Y(y) = Y_1 \cos(\theta y) + Y_2 \sin(\theta y)$$

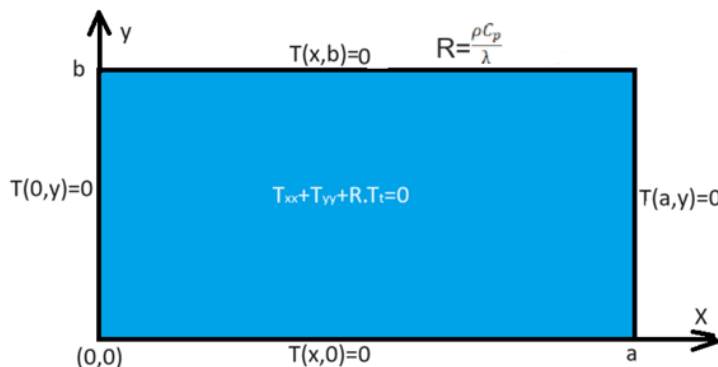


Abbildung 14: Transiente Wärmeleitung in einem Viereck mit Dirichlet Randbedingungen

- Mit den Randbedingungen $X(0) = X(a) = 0; Y(0) = Y(b) = 0$ lässt sich schnell X_1, X_2, Y_1 und Y_2 berechnen und man erhält:

$$X(x) = X_2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{und} \quad Y(y) = Y_2 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \forall x, \forall y, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

- Mit $\frac{\rho C_p}{kZ} \frac{dZ}{dt} = -(\theta^2 + \omega^2)$ folgt $\frac{\rho C_p}{kZ} \frac{dZ}{dt} = -\left(\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi y}{b}\right)^2\right)$

Also

$$\frac{\rho C_p}{kZ} \frac{dZ}{dt} = -\left(\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi y}{b}\right)^2\right)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{dZ}{dt} = -\frac{k}{\rho C_p} \left(\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi y}{b}\right)^2\right)$$

$$Z(t) = C e^{-\frac{k}{\rho C_p} \left(\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi y}{b}\right)^2\right) t}$$

Die allgemeine Lösung ist dann:

$$T_n(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-\frac{k}{\rho c_p} \left(\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi y}{b}\right)^2 \right) t}$$

Dies muss noch die letzte Bedingung erfüllen, nämlich: $T(x, y, 0) = T_0$.

$$T_n(x, y, 0) = T_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Was wie eine so zu sagen doppelte Fourier Reihe aussieht. Mit der Variable Substitution

$g_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{n,m} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$ erhält man:

$$T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Also

$$g_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b T_0 \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy$$

Und dann folgt:

$$C_{n,m} = \frac{2}{a} \int_0^a g_n(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$C_{n,m} = \frac{2}{a} \int_0^a \left[\frac{2}{b} \int_0^b T_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Und als allgemeine Lösung:

$$T_n(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} \int_0^a \left[\frac{2}{b} \int_0^b T_0 \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-\frac{k}{\rho c_p} \left(\left(\frac{n\pi x}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi y}{b}\right)^2 \right) t} \quad (E 19)$$

Die Lösung der Laplace Gleichung in 3D löst man immer mit dem gleichen Verfahren. Die Anwendung der Fourier Reihe zur Lösung der Laplace Gleichung stellt sich dann, wie ein optimales Verfahren. Aber außer Acht soll gelassen werden, dass diese Methode einige Grenze enthält.

2.5. Grenzen der Anwendung der Fourier Reihe und Gibbs Phänomene

Die Verwendung der Fourier-Reihe zur Lösung der Laplace-Gleichung in 2D ist eine bewährte Methode in der Ingenieurwissenschaften. Sie ermöglicht die Darstellung komplexer geometrischer Strukturen als lineare Kombination von trigonometrischen Funktionen und bietet eine analytische Lösung für harmonische Funktionen. Eine der bemerkenswerten Stärken dieser Methode liegt in ihrer Fähigkeit, komplexe Randbedingungen zu berücksichtigen und präzise Lösungen für Randwertprobleme zu liefern. Die Fourier-Reihe ermöglicht es, Randbedingungen in Form von periodischen Funktionen effizient darzustellen, was zu globalen Lösungen des Problems führt.

Jedoch ist es wichtig, die Einschränkungen der Fourier-Reihenlösung zu beachten. Ein bekanntes Phänomen ist das Gibbs-Phänomen, bei dem es zu Oberschwingungen kommt, wenn eine Funktion an einer Diskontinuität approximiert wird. Dies kann dazu führen, dass die Approximation auch in Bereichen mit geringer Variation ungenau bleibt, selbst wenn die Anzahl der Terme in der Fourier-Reihe erhöht wird. Die Konvergenzgeschwindigkeit der Fourier-Reihe kann auch ein Problem darstellen, insbesondere bei Funktionen mit scharfen Gradienten oder diskontinuierlichen Randbedingungen. In solchen Fällen kann die Reihe langsam konvergieren, was zu ungenauen Ergebnissen oder einem erhöhten Rechenaufwand führen kann, um eine akzeptable Genauigkeit zu erreichen. Ein weiterer Nachteil ist die Begrenzung auf periodische Randbedingungen. Wenn das Problem nicht periodisch ist, kann die Anwendung der Fourier-Reihe zu ungenauen Lösungen führen oder zusätzliche Maßnahmen erfordern, um die Randbedingungen anzupassen. Also die Konvergenzgeschwindigkeit der Fourier-Reihe hängt stark von den Eigenschaften der zu approximierenden Funktion und den Randbedingungen des Problems ab. Darüber hinaus ist die Fähigkeit einigen Spitzen zu glätten, beim Fourier Reihe sehr bekannt. Aufgrund, dass die Fourier Funktion aus trigonometrischen Funktionen bestehen, werden diese bei einigen Verhalten der Funktion am Rand die Werte glätten. [7]

Aber für glatte, periodische Funktionen oder Funktionen mit begrenzten Variationen kann die Fourier-Reihe schnell konvergieren und eine genaue Approximation liefern. In solchen Fällen können bereits wenige Terme ausreichen, um eine hohe Genauigkeit zu erreichen. Aber die Konvergenz kann langsamer sein, wenn die Funktion scharfe Knickpunkte oder diskontinuierliche Stellen aufweist. Das Gibbs-Phänomen kann auftreten, was zu Oberschwingungen führt und die Genauigkeit der Approximation beeinträchtigt. In solchen Fällen kann es erforderlich sein, eine größere Anzahl von Termen in der Fourier-Reihe zu verwenden, um eine akzeptable Genauigkeit zu erzielen. [8]

Trotz dieser Einschränkungen bleibt die Fourier-Reihenlösung ein leistungsfähiges Werkzeug zur Lösung von Laplace-Gleichungen in 2D, insbesondere bei gutartigen Funktionen und periodischen Randbedingungen. Durch die Berücksichtigung des Gibbs-Phänomens und die angemessene Anpassung der Anzahl der Terme kann die Genauigkeit der Approximation verbessert werden, was zu zuverlässigen Ergebnissen führt. In Kombination mit anderen numerischen Methoden bietet die Fourier-Reihenlösung ein breites Spektrum an Anwendungen in der mathematischen Modellierung und der numerischen Analyse von physikalischen Phänomenen. Eine Alternative die Laplace Gleichung anders zu lösen ist die Finite Differenzen Methode.

2.6. Finite-Differenzen- Methode (FDM)

Das Prinzip der Finite-Differenzen-Methode ist einfach und nahe liegend: Ableitungen werden durch endliche (*finite*) Differenzenquotienten ersetzt. Für die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ bedeutet das:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}$$

Und in zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Das heißt für den Laplace-Operator:

$$\Delta f(x, y) \approx \frac{f(x+h_x, y) - 2f(x, y) + f(x-h_x, y)}{h_x^2} + \frac{f(x, y+h_y) - 2f(x, y) + f(x, y-h_y)}{h_y^2} \quad (E 20)$$

Wenn die beiden Koordinaten äquivalent sind, wählt man sinnvollerweise $h_y = h_x = h$, damit vereinfacht sich der Ausdruck (E 20) und ist in Programmen mit weniger Aufwand zu implementieren. Die Erweiterung von (E 20) auf drei oder mehr Dimensionen ist analog. Im Rahmen dieser Arbeit, wird nur die zwei Dimensionen behandelt, deswegen wird sich das Verfahren nur auf 2D beschränken.

Das Prinzip wird jetzt auf die Temperaturverteilung in einer rechteckigen Platte angewendet. Die Temperatur ist an allen Rändern vorgegeben (Dirichletsche Randbedingungen). Die stationäre Temperaturverteilung ist zu berechnen, d. h. für den Innenbereich ist die Laplace-Gleichung zu lösen. (Abbildung 15)

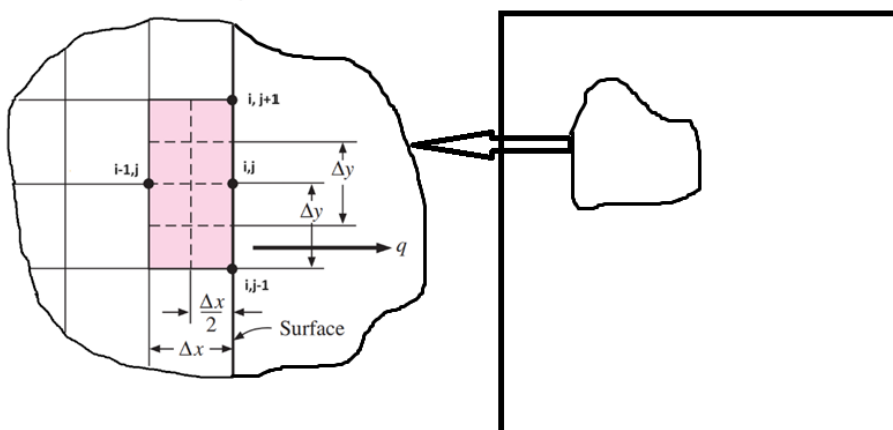


Abbildung 15: Finite Darstellung in ein vier eckiges Element

Im stationären Fall lässt sich die Laplace Gleichung als $\Delta T = 0$ schreiben. Also:

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_i^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_j^2} = 0$$

Wobei die kontinuierlichen Variablen x und y durch Indizes $i = 1 \dots n$ und $j = 1 \dots m$ ersetzt werden
Mit der Annahme, dass $h_i = h_j = h$, bekommt man:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})$$

Daraus wird eine Iterationsvorschrift, wenn man rechts den Zustand nach n , links den nach $n + 1$ Iterationen einsetzt:

$$T_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(T_{i+1,j}^{(n)} + T_{i-1,j}^{(n)} + T_{i,j+1}^{(n)} + T_{i,j-1}^{(n)}) \quad (E 21)$$

Wichtig ist die richtige Behandlung der Randbedingungen. Dazu gibt es (mindestens) zwei Möglichkeiten: Man spart den Rand aus dem Wertebereich der Indizes i und j aus oder man regeneriert die Randbedingungen nach jedem Iterationsschritt. Die erste Möglichkeit wird man immer dann wählen, wenn nur eine rechteckige äußere Begrenzung mit festen Randwerten vorliegt (Dirichle-Randbedingungen). Die zweite wird ausgewählt, wenn der Randverlauf komplizierter ist oder wenn zusätzliche Randbedingungen im Innenbereich zu berücksichtigen sind (Neumann- und Jonsin-Randbedingungen). Die Iterationsvorschrift der Gleichung (E 21) lässt sich sehr leicht in ein Rechnerprogramm umsetzen. [9]

2.7. Single-Lap Joint (SLJ)

Ein Single Lap Joint (auch bekannt als einseitige Überlappungsverbindung) ist eine gängige Methode in der Fügetechnik, um zwei Bauteile miteinander zu verbinden. Bei diesem Verfahren werden die Bauteile so angeordnet, dass eines über das andere läppt. Typischerweise wird Klebstoff oder Schweißmaterial zwischen den beiden Bauteilen aufgetragen, um eine feste Verbindung zu gewährleisten. Der Single Lap Joint wird häufig in verschiedenen Branchen wie der Automobil-, Luft- und Raumfahrt-, Schiffsbau- und Bauindustrie eingesetzt. Er bietet mehrere Vorteile, darunter eine Verteilung der Belastungen über die gesamte Verbindungsfläche, hohe Festigkeit und Steifigkeit und gute Temperaturverteilung sowie die Möglichkeit, verschiedene Materialien miteinander zu verbinden.

Die Konstruktion und Auslegung eines Single-Lap Joints erfordert eine sorgfältige Berücksichtigung verschiedener Faktoren wie der Belastung, den Eigenschaften der zu verbindenden Materialien, der Umgebungseinflüsse und der gewünschten Anwendung und Lebensdauer der Verbindung. Eine geeignete Vorbereitung der Oberflächen, die Auswahl des richtigen Klebstoffs oder Klebmaterials sowie die richtige Dimensionierung der Verbindung sind entscheidend für die Qualität und Leistungsfähigkeit des Single-Lap Joints.

Es existieren viel Arten von Überlappungsverbindung (siehe Abbildung 16) wobei sich diese Arbeit als einfachste bzw. Grundbauform auf einfache Überlappungsverbindungen beschränkt.

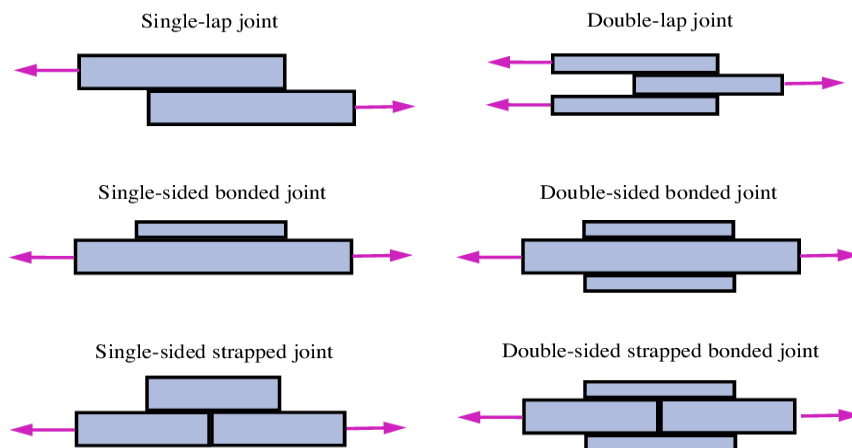


Abbildung 16: Verschiedene Arten von Überlappungsgelenke (Lap Joint) [16]

Kapitel 3. Lösung der thermischen Laplace Gleichung in einem SLJ

Nachdem im vorherigen Kapitel kurz über die mathematischen Konzepte gesprochen wurde, werden nun verschiedenen Ansätze zur Lösung der thermischen Laplace-Gleichung in einem Single Lap Joint (SLJ) betrachtet. Dabei werden drei Ansätze zur Bestimmung der Temperaturverteilung zu beschreiben. Dies umfasst numerische und analytische Ansätze, die sich in ihrer Genauigkeit und Anwendbarkeit unterscheiden. Um das Problem zu untersuchen, wurden einige vorgegebene Annahme getroffen.

3.1. Vorgegebene Annahmen

3.1.1. Art der Wärmeübertragung

Das DLR Mobile Asteroid Surface Scout (MASCOT)-Projekt steht vor der Herausforderung, eine effiziente Wärmeableitung in seiner Struktur zu gewährleisten. Hierfür sind Konvektion, Konduktion und Strahlung die drei Mechanismen der Wärmeübertragung, die in und über die Struktur auftreten können. Bei CFK-Strukturen, die im MASCOT-Projekt verwendet werden, spielt nur eine von den drei Mechanismen eine Rolle, wobei ihre relative Bedeutung von verschiedenen Faktoren wie Temperatur, Material- und Oberflächenbeschaffenheit abhängt.

Konvektion bezieht sich auf den Wärmeaustausch zwischen einem Festkörper und einem strömenden Medium wie Gas oder Flüssigkeit. Ein wichtiges Merkmal der Weltraumumgebung ist ihr hohes Vakuum. Laut Dr. Peter Fortescue in [10] Raumfahrzeuge werden im Allgemeinen in Umlaufbahnen gebracht, in denen der Restluftdruck und damit der Luftwiderstand sehr gering sind. Bei einem umlaufenden Raumfahrzeug können die aerodynamische Erwärmung und tatsächlich jede konvektive Wechselwirkung zwischen Raumfahrzeug und Umgebung vernachlässigt werden. Weil diese Arbeit für die Raum- und Luftfahrzeuge geeignet ist, wird daher die Konvektion vernachlässigt.

Konduktion ist der Mechanismus, bei dem Wärme durch direkten Kontakt zwischen Festkörpern übertragen wird. In CFK-Strukturen können Wärme und Temperaturänderungen entlang der Fasern und zwischen den Fasern hindurch geleitet werden. Die effiziente Wärmeableitung entlang der Fasern kann helfen, Hotspots zu vermeiden und die Temperaturverteilung innerhalb der Struktur zu steuern. Gleichzeitig kann die geringe Wärmeleitung quer zu den Fasern (entspricht Wärmeleitung des Harzes) genutzt werden, um Wärmeverluste zu minimieren und bestimmte Bereiche thermisch zu isolieren. Weil die Lamine des SLJ durch das Klebstoff im Kontakt sind und eine Temperatur bzw. einen Wärmestrom aufgebracht werden, ist es sinnvoll diese Art der Wärmeübertragung genau zu betrachten.

Strahlung ist die Übertragung von Wärmeenergie durch elektromagnetische Wellen. Im Weltraum ist die Strahlungswärmeübertragung besonders relevant, da sie unabhängig von einem Medium stattfindet. CFK-Materialien haben eine niedrigere Absorptions- und Emissionsrate für Wärmestrahlung im Vergleich zu anderen Materialien. Für den MASCOT-Lander sind die unterschiedlichen Teile des Landers so gebaut, dass es keine Strahlung zwischen den Elementen gibt. Demensprechend sind die Bauteile von Strahlung komplett isoliert. Daher wird diese Art der Wärmeübertragung vernachlässigt.

Es wird dann zusammengefasst die Konvektion- und Strahlungswärmeleitung nicht betrachtet und nur die Konduktion ist für diese Arbeit relevant.

3.1.2. Vernachlässigung der Klebeschicht

Da komplexe Aspekte wie die Wärmestromverteilung innerhalb der Klebeschicht und die analytische Iteration zwischen Klebstoff und Lamine schwer zu berücksichtigen werden können, wird die mathematische Modellierung vereinfacht, indem man die beiden verbundenen Materialien als direkt miteinander in Kontakt annimmt. Darüber hinaus ist die Klebschicht sehr dünn (ca. 0,1 mm) im Vergleich zu dem der Laminatschicht (4,75mm) und hat eine Wärmeleitfähigkeit (ca. 0,3 W/(m*K)), deren Größenordnung mit der eine Epoxid- bzw. Cyanatester-Harzsysteme wie es bei MASCOT (37,15W/m*K) verwendet wurde, vernachlässigbar (0,8%) ist.

Noch ein wichtiger Aspekt ist, dass der Klebstoff in der Regel zu viele Irregularitäten enthält. Der Aushärtungsprozess eines Klebers, beispielsweise durch Erhitzen oder UV-Bestrahlung, kann zu einer bevorzugten Ausrichtung von Molekülketten oder Fasern im Klebstoff führen, was zu mikroanisotropen mechanischen Eigenschaften führt. Klebstoffe können Füllstoffe oder Verstärkungen enthalten, wie Fasern oder Partikel, die eine anisotrope Verteilung haben können. Solche Verstärkungen verleihen dem Material unterschiedliche Festigkeiten und Steifigkeiten in verschiedene Richtungen und sind in der Regel mathematisch nicht beschreibbar. Es wird dann zuerst für die Vereinfachung der analytischen Berechnung und Verständnis der Grundlagen zugenommen, dass die analytische Lösung ohne den Klebeschicht untersucht ist.

3.1.3. Isotrope Materialeigenschaften

Bei der Analyse von Verbundwerkstoffen, insbesondere bei Laminatschichten, ist es oft hilfreich, zunächst anzunehmen, dass die Materialien isotrope Eigenschaften besitzen. Diese Annahme vereinfacht die Modellierung und Berechnung der mechanischen und thermischen Eigenschaften des Laminats. Einige Gründe diese Annahmen zu treffen sind:

- **Vereinfachung der Berechnungen:** Isotrope Materialien haben in alle Richtungen gleiche physikalische Eigenschaften, wie Elastizitätsmodul, Wärmeleitfähigkeit und Ausdehnungskoeffizient. Dies vereinfacht die mathematische Modellierung erheblich, da die Materialeigenschaften durch skalare Werte beschrieben werden können, anstatt durch Tensoren oder Matrizen, die für anisotrope Materialien notwendig sind.
- **Erste Näherung:** Die Annahme (quasi-)isotroper Eigenschaften dient oft als erste Näherung, um ein grundlegendes Verständnis der Verhaltensweisen des Laminats zu gewinnen. Sie ermöglicht es, einfache Modelle zu erstellen, ohne sofort komplexe und detaillierte Daten zu benötigen.
- **Vergleichsbasis für die Anisotropie:** Bei der Annahme der (quasi-)isotropen Eigenschaften ist eine Basis geschaffen, um die Auswirkungen von Anisotropie besser zu verstehen. Nach der Berechnung der Eigenschaften unter der Annahme von (Quasi-)Isotropie kann man durch die Einführung von anisotropen Effekten die Unterschiede und zusätzlichen Herausforderungen erkennen und analysieren.
- **Materialauswahl und Design:** In frühen Studien der Materialauswahl und des Designs kann es hilfreich sein, isotrope Materialien in Betracht zu ziehen, um eine breite Palette von möglichen Materialien zu bewerten. Nachdem der Lastpfad (in unserem Fall die Wärmestromverteilung) bekannt ist, können spezifischere anisotrope Eigenschaften später berücksichtigt werden, um die Leistung zu optimieren.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Annahme von isotropen Materialeigenschaften in Laminatschichten ein praktischer Schritt sein kann, um den Einstieg in die Analyse zu erleichtern und eine Vergleichsbasis zu schaffen. Im weiteren Verlauf der Analyse und Optimierung können bzw. müssen dann spezifische, anisotrope Materialeigenschaften berücksichtigt werden, um präzisere und maßgeschneiderte Lösungen zu entwickeln.

3.1.4. 2D- Modellierung

Sobald es angenommen wurde, dass die Lamine isotrope sind und weil der am linken Rand des SLJ aufgebrachte Wärmestrom und die am rechten Rand festgelegte Temperatur das gleiche in Dicke-Richtung bleiben, bleibt das Verhalten der Wärmeverteilung in Dicke-Richtung unveränderbar. Also reicht es nur eine Dicke-Ebene zu betrachten.

Ferner reduziert das 2D-Modell die Komplexität der mathematischen Berechnungen erheblich. Es ermöglicht die Analyse von Wärmeströmen entlang einer Ebene, ohne die zusätzlichen Herausforderungen zu berücksichtigen, die in einer dritten Dimension auftreten. Dies führt zu weniger Variablen und einer einfacheren Lösung der Wärmeleitungsgleichungen. Außerdem erfordert die Analyse in 2D weniger Rechenressourcen und kann daher schneller durchgeführt werden als eine 3D-Analyse. Dies ist besonders nützlich in der frühen Designphase oder bei der Durchführung von Parameterstudien, bei denen viele Szenarien untersucht werden müssen. Zudem kann man leicht durch die Betrachtung eines 2D-Modells identifizieren, wo die größten Temperaturgradienten und damit die

höchsten Wärmeströme auftreten. Diese kritischen Bereiche können dann in einer späteren 3D-Analyse detaillierter untersucht werden. Ein 2D-Modell kann als erster Schritt zur Validierung eines numerischen oder analytischen Modells verwendet werden. Sobald das 2D-Modell gut funktioniert und zuverlässige Ergebnisse liefert, kann man sicher sein, dass das Modell in 3D korrekt erweitert wird. Diese Vorgehensweise bietet eine solide Basis für ein grundlegendes Verständnis und erleichtert den Übergang zu detaillierteren und komplexeren 3D-Modellen, wenn dies notwendig ist. Basiert auf diese vorgegebene Randbedingungen, wird eine FEM-Simulation durchgeführt und die daraus resultierende Lösung als Referenzlösung angenommen.

3.2. Referenzlösung: FEM-Lösung

Um die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der analytischen Lösung der Temperaturverteilung und danach der Wärmestromverteilung zu bestimmen, wird die Finite-Elemente-Methode (FEM) als Referenzlösung herangezogen. Diese Methode bietet eine leistungsstarke und flexible Möglichkeit, komplexe thermische Probleme zu analysieren, insbesondere wenn es um die Bestimmung der Temperatur- und Wärmestromverteilung in Strukturen wie Single Lap Joints (SLJ) geht. Durch die Verwendung der Software ANSYS können detaillierte Modelle erstellt werden, die sowohl die geometrischen Komplexitäten als auch die analytisch unlösbaren Randbedingungen akkurat abbilden.

3.2.1. Implementierung des Modells in ANSYS

Um die FEM-Analyse durchführen zu können, wird in ANSYS zunächst ein detailliertes 3D-Modell des SLJ erstellt (siehe Abbildung 17). Dieses Modell enthält die Geometrie des Verbundes, die Schichtstruktur der CFK und die entsprechenden Materialeigenschaften. Die Materialparameter, insbesondere die Wärmeleitfähigkeiten des Laminats oder die Art des Modells (2D oder 3D) werden sorgfältig definiert, um eine korrekte Lösung zu bekommen.

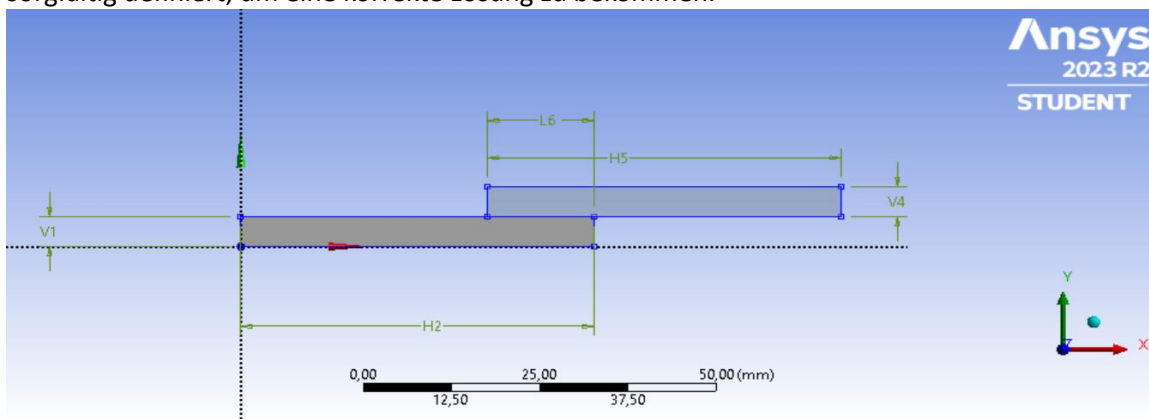


Abbildung 17: Geometrie des im ANSYS implementierten Modells

Wobei zuerst:

V1=4,75mm: Breite/Dicke des unteren Laminats

V4=4,75mm: Breite/Dicke des oberen Laminats

H2=50mm : Länge des unteren Laminats

L6= 10mm : Länge des Klebeschichtbereiches

H5=50mm : Länge des oberen Laminats

3.2.2. Diskretisierung und Netzgenerierung

Ein entscheidender Schritt in der FEM-Analyse ist die Diskretisierung des Modells in ein Netz aus finiten Elementen. Die Wahl der Netzgröße und -dichte spielt eine zentrale Rolle für die Genauigkeit der Ergebnisse. Ein feines Netz kann eine höhere Genauigkeit bieten, erfordert jedoch mehr Rechenressourcen und somit Rechenzeit. In dieser Analyse wurde eine Elementgröße von 0,5 mm und die Elemente viereckig gewählt (Siehe Abbildung 18).

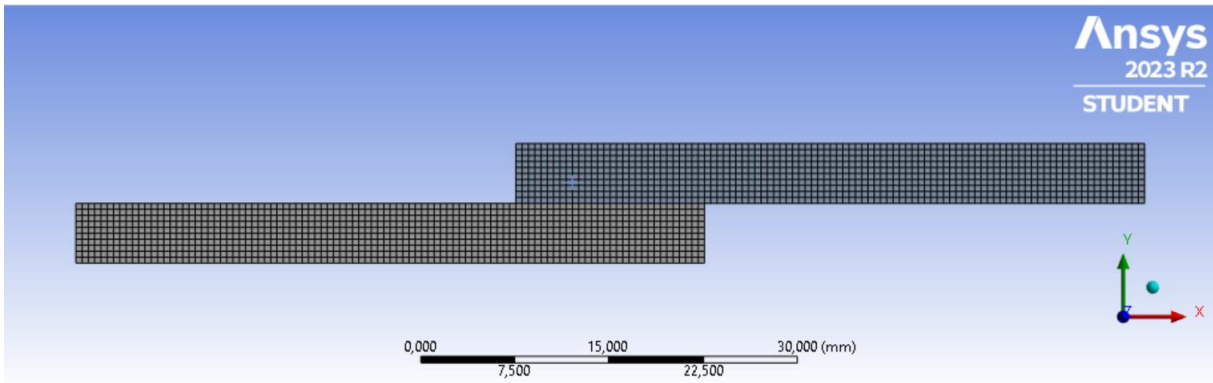


Abbildung 18: Vernetztes FEM-Model mit der Elementgröße von 0,5mm, quadratischer Ansatzfunktion und trapezoidaler Methode

3.2.3. Definition der Rand- und Anfangsbedingungen

Die Randbedingungen sind essenziell für die präzise Simulation des Wärmeflusses. In ANSYS wurden diese Bedingungen so definiert, dass sie die realen thermischen Belastungen und Umgebungsbedingungen nachbilden. Dazu gehören eine feste Temperatur von 300K (Abbildung 19b) am rechten Rand der SLJ, ein konstanter Wärmestrom von 0,05W am linken Rand (Abbildung 19a). Die komplette Simulation wird in einer adiabatischen Umgebung durchgeführt. Als Anfangsbedingung wird eine homogene Starttemperatur von 250K festgelegt, um den Anfangszustand des Systems zu definieren und den Rechenaufwand zu reduzieren.

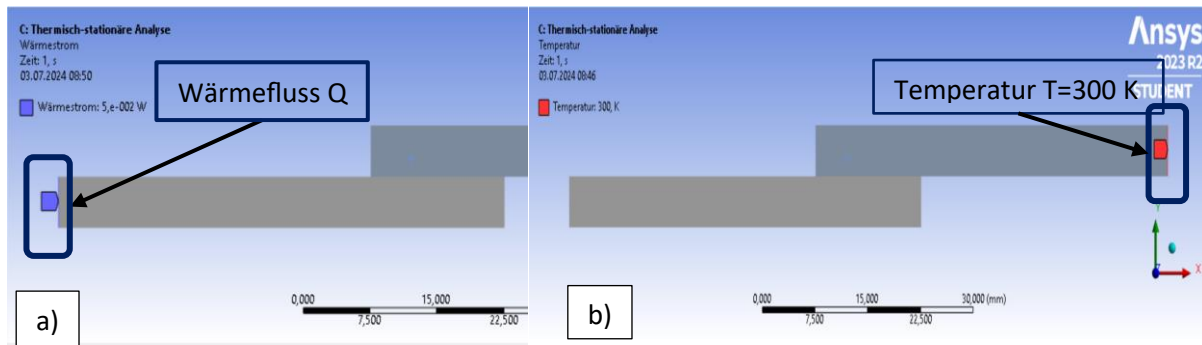


Abbildung 19: Randbedingungen des FEM-Modells; a) Konstanter Wärmefluss; b) feste Temperatur

3.2.4. Berechnung und Auswertung

Nach der Definition des Modells und der Bedingungen wird die Simulation in ANSYS durchgeführt. Die Software löst das thermische Problem numerisch, indem sie die Wärmeleitungsgleichungen auf das Netzwerk aus finiten Elementen anwendet. Die resultierenden Temperaturverteilungen sind auf der folgenden Abbildung 20 zu sehen.

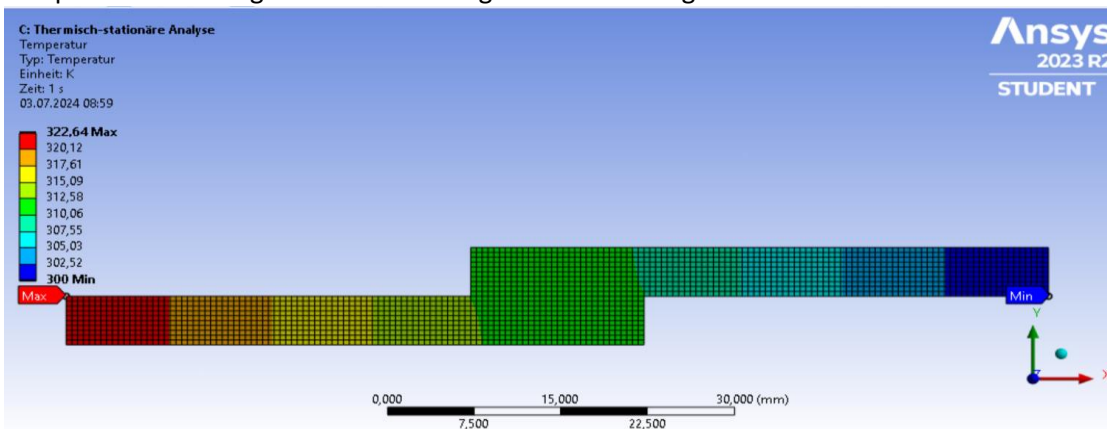


Abbildung 20: Lösung der numerischen Temperaturverteilung in dem SLJ

Es ist festzustellen, dass die Temperaturen in den Verlängerungsbereichen des SLJ in y-Richtung relativ konstant sind. Die gleiche Erscheinung ist auch bei der Wärmestromverteilung auf der folgenden Abbildung 21 zu sehen. Zusätzlich dazu entsteht eine Symmetrie in dem geklebten Bereich und der Wärmestrom bleibt konstant in den Verlängerungen (Hellgrün).

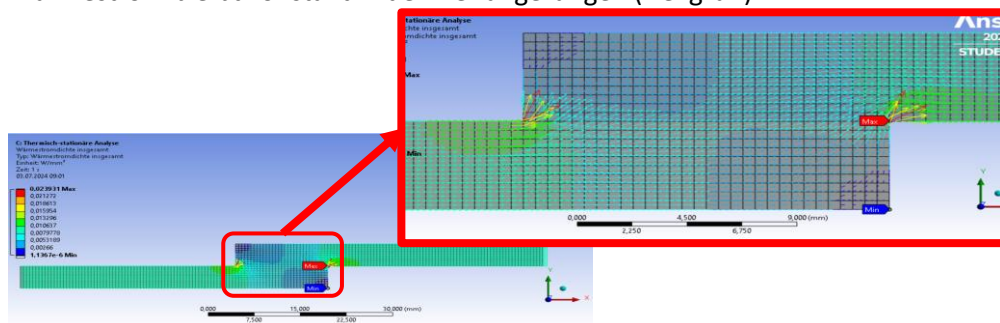


Abbildung 21 : Wärmestromverteilung in den SLJ

Nach Bearbeitung der Temperaturlösungen in Excel und plotten in MatLab sind die folgenden Abbildungen für die Klebeschichtlänge (L) von 10mm und 20mm zu sehen.

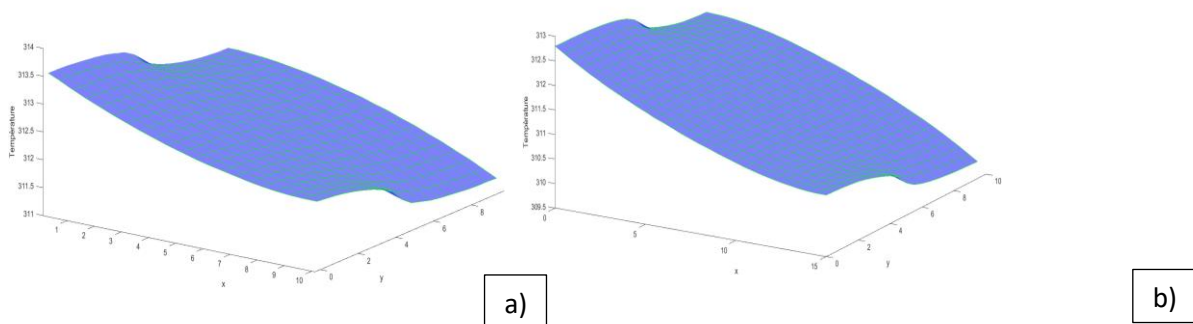


Abbildung 22 : Temperaturverteilung in dem SLJ mit verschiedener Länge der Klebeschicht a) L=10mm und b) L=20mm

3.3. Definition der Randbedingungen für die analytische Lösung

Die Randbedingungen sind entscheidend für die Genauigkeit der Modellierung und das letztliche Ergebnis der Simulation. In diesem Abschnitt werden die thermischen Randbedingungen festgelegt, die für die analytische Modellierung des Wärmeflusses im SLJ erforderlich sind. Weil die Berechnung in 2D durchgeführt ist, wird weiterhin wie in der Referenzlösung die aus ANSYS für die Berechnung herausgegebene Dicke $e = 1mm$ benutzt. Besonders relevant für diese Arbeit ist der geklebte Bereich des SLJ. Weil die Berechnung für eine adiabatische Umgebung durchgeführt werden sollte, ist es für die oberen und unteren Ränder des geklebten Bereichs des SLJ (grün markierter Bereich auf der Abbildung 23) klar, eine adiabatische Randbedingung dort anzunehmen. Also:

$$\left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 ; \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=h_1+h_2} = 0 ; \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0; h_1 < y < h_2} = 0 \text{ und } \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=L; 0 < y < h_1} = 0 \quad (E 22)$$

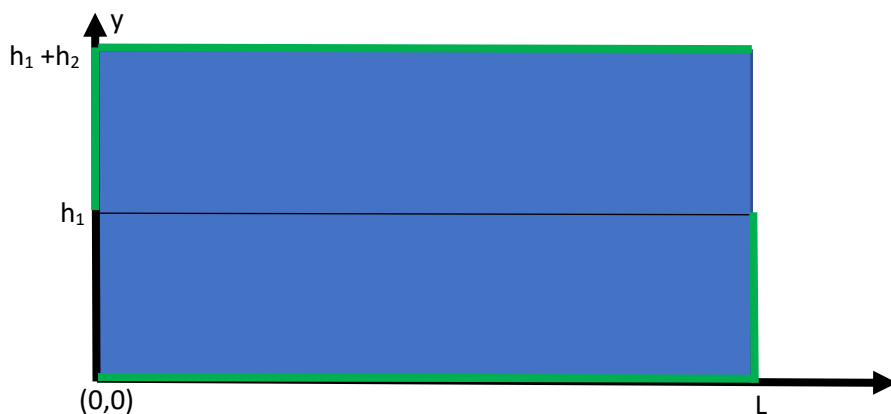


Abbildung 23 : Adiabatische Randbedingungen am oberen und unteren Rand des geklebten Bereichs des SLJ.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie sich die Randbedingungen am linken-unteren und rechten-oberen Ränder des SLJ definieren lassen könnten. Dafür wurde die Überlappungsverbindung in drei Teile aufgeteilt: Verlängerung des SLJ am linken Rand; geklebter Bereich des SLJ und Verlängerung des SLJ am rechten Rand (siehe Abbildung 4 : Definition der Randbedingungen der geklebten Verbindun im §§Ziel und Methodik der Arbeit1.2).

3.3.1. Randbedingung am linken-unteren Rand ($x=0, 0 < y < h_1$) des geklebten Bereichs des SLJ

Um das Problem der Randbedingung besser beschreiben zu können, wird die mathematische Gliederung wie folgt durchgeführt. Der linken Verlängerungsbereich $-l < x < 0$ und $0 < y < h_1$ wird betrachtet, in dem ein konstanter Wärmefluss Q an der linken Seite $x = -l$ angelegt wird. Die oberen und unteren Ränder $y = 0$ und $y = h_1$ sind adiabat. Über den rechten Rand $x = 0$ liegen zunächst keine Informationen vor (siehe Abbildung 24).

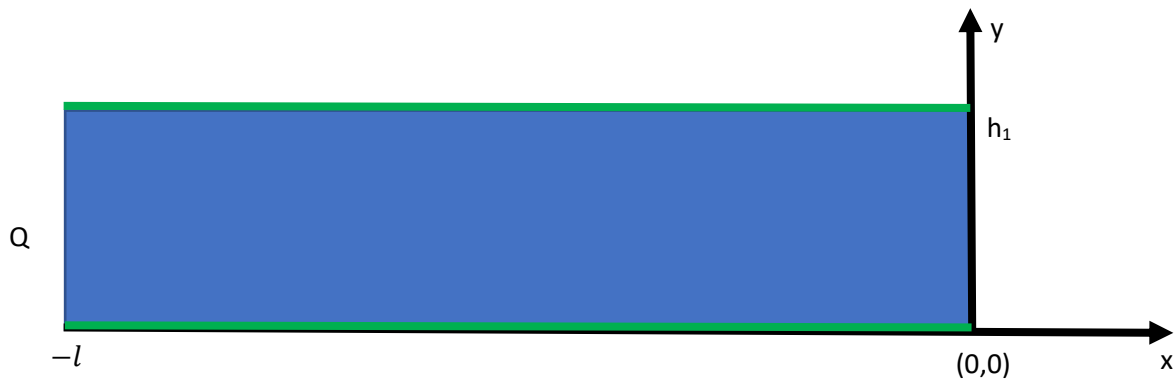


Abbildung 24: Verlängerung des SLJ am linken Rand

Die stationäre zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung aus (E 9) lautet:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

wobei $T(x, y)$ die Temperatur an einem Punkt (x, y) innerhalb des Rechtecks darstellt. Die Randbedingungen können wie folgt formuliert werden.

- Linker Rand ($x = -l$): Ein konstanter Wärmefluss Q wird aufgebracht. Dies führt zu einer Neumann-Randbedingung aus dem Fourier-Gesetz (siehe §§2.1.2):

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right|_{x=-l} = -\frac{Q}{\lambda h_1} \text{ mit } 0 < y < h_1.$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Materials ist.

- Oberer und unterer Rand ($y = 0$) und ($y = h_1$): Da diese Ränder adiabat sind, gilt:

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=h_1} = 0; -l < x < 0.$$

Um die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu finden, wird die Methode der Variablentrennung (siehe §§2.2.2) verwendet. Angesetzt wird $T(x, y) = X(x)Y(y)$, was zu zwei separaten Differentialgleichungen führt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$T(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + (A \cosh(\omega x) + B \sinh(\omega x))(C \cos(\omega y) + D \sin(\omega y))$$

Die Randbedingung:

- Adiabatische Randbedingungen an den oberen und unteren Kanten ergeben: $D = 0$ und $\omega = \frac{\pi n}{h_1}, n \in \mathbb{N}^*$. Daher wird $Y_n(y)$ zu:

$$Y_n(y) = C_n \cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right) \text{ und } Y_0(y) = D_0$$

Und die allgemeine Lösung lautet:

$$T(x, y) = D_0(A_0 x + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) + B_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right)$$

- Die Wärmeflussbedingung an der linken Seite ($x = -l$) führt zu:

$$\left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=-l} = -\frac{Q}{\lambda e h_1} = D_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\pi n}{h_1} \left(A_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) + B_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right)$$

Was eine Fourier-Reihe mit den Konstanten $C_n \frac{\pi n}{h_1} \left(A_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) + B_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) \right)$, mit $n \in \mathbb{N}$ ist. Nach Einsetzen des Verfahrens zur Berechnung der Fourierreihen-Koeffizienten (siehe §§ 2.2.4) erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} C_n \frac{\pi n}{h_1} \left(A_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) + B_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) \right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ D_0 A_0 = -\frac{Q}{\lambda e h_1} \end{cases}$$

Also entweder $C_n \frac{\pi n}{h_1} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ oder $\left(A_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) + B_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) \right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Die erste Bedingung ist im Moment nicht möglich, weil man für $C_n = 0$, $Y_n(y) = 0$ und daher $T(x,y) = -\frac{Q}{\lambda e h_1} x + D_0 B_0$ bekommt. Was bedeutet, dass die Temperatur nur von der Variable x abhängig ist. Dies entspricht leider nicht der Referenzlösung, weil diese eine kleine Änderung in y -Richtung in der Nähe von $x=0$ (Blau durchgestrichener Kreis in der folgenden Abbildung) enthält.

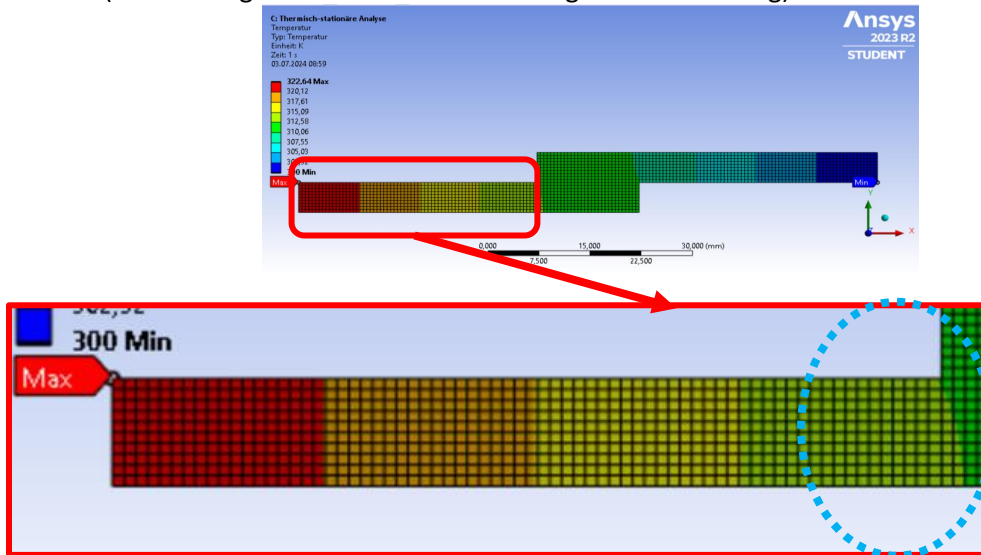


Abbildung 25: Referenzlösung des linken Verlängerungsbereichs des SLJ

Also bleibt die Bedingung:

$$\left(A_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) + B_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) \right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Das heißt:

$$B_n = -\tanh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung lautet somit:

$$T(x,y) = -\frac{Q}{\lambda e h_1} x + D_0 B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \left(\cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) - \tanh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right) \quad (E 23)$$

Der Teil $-\frac{Q}{\lambda e h_1} x + D_0 B_0$ der Lösung beschreibt eine lineare Temperaturabnahme in x -Richtung. Dieser Teil der Lösung ist unabhängig von der Variabel y , was impliziert, dass die Temperatur in y -Richtung für den Lösungsteil konstant bleibt. Der zusätzliche Term:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \left(\cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) - \tanh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right)$$

beschreibt die Abweichungen von dieser linearen Verteilung aufgrund der spezifischen Randbedingungen an den übrigen Rändern des Rechtecks, insbesondere am Rand $x = 0$, für den keine genaue Bedingung spezifiziert wurde. Die Hyperbelfunktionen $\left(\cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) - \tanh\left(\frac{\pi n}{h_1} l\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) \right)$ tragen dazu bei, dass die Temperatur an den Rändern, wo keine Wärmestrominformation vorliegt, angepasst wird. Die adiabatischen Bedingungen an den oberen und unteren Rändern ($y = 0$) und ($y = h_1$) sorgen dafür, dass kein Wärmestrom durch diese Ränder tritt. Dies manifestiert sich in der Lösung durch die kosinusförmige Funktion $\cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right)$. Da für den rechten Rand ($x = l$) keine spezifische Bedingung bekannt ist, bleibt die genaue Form der Temperaturverteilung in der Nähe dieses Randes unbestimmt. Alternativ hätte gewesen, dass man die Temperatur auch am linken Rand ($x = 0$) bekommt. Damit hätte man $C_n A_n$ und $D_0 B_0$ bestimmen können.

Die Referenz-Lösung zeigt, dass die Wärme sich im rechteckigen Bereich hauptsächlich in x -Richtung entwickelt. Die Anpassung durch die Konstante $C_n A_n$ der Hyperbelfunktionen in x -Richtung beschreibt die Anpassungen, die nötig wären, um die Randbedingungen an ($x = 0$) oder ($x = l$) mit einer Temperatur zu erfüllen, falls diese gegeben wären. Somit ist zwar $C_n A_n \neq 0$, aber vermutlich sehr klein.

Diese Lösung zeigt, dass die Hauptkomponente der Temperaturverteilung in diesem rechteckigen Bereich eine lineare Funktion in (x) ist, während die y -Richtung keine signifikante Änderung der Temperatur zeigt, außer den Anpassungen durch die Randbedingungen. Die fehlende Dirichlet-Randbedingung macht es jedoch erforderlich, entweder zusätzliche Informationen zu haben wie zum Beispiel die Temperatur am linken Rand $x = -l$ (bzw. rechten Rand $x = 0$) oder Annahmen zu treffen, um eine vollständig bestimmte Lösung zu erhalten.

Bei genauer Betrachtung der Referenzlösung erkennt man eine Differenz in y -Richtung von $T(0,0) - T(0,h_1) \approx 0,23K$ über eine gesamte Temperaturdifferenz im geklebten Bereich von ca. $2,24K$ also ca. $10,3\%$. Um weiter zu berechnen, wurde dann mit einem Fehler in y -Richtung von ca. 10% über die Temperatur angenommen, dass die Temperatur in y -Richtung bei $x=0$ konstant und gleich einen Wert T_0 ist. Es ist aber zu betonen, dass diese Annahme sehr grob ist.

Die Einsetzung dieser Annahme in der allgemeinen Lösung (E 26) ergibt:

$$C_n A_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{und} \quad D_0 B_0 = T_0$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung lautet somit:

$$T(x, y) = -\frac{Q}{\lambda e h_1} x + T_0$$

Die Lösung zeigt, dass die Temperaturverteilung innerhalb des Rechtecks linear in x ist, mit einem Temperaturgradienten, der proportional zum aufgebrachtten Wärmefluss Q ist. Die Konstante T_0 stellt die Basis-Temperatur dar, die durch zusätzliche Bedingungen bestimmt werden könnte. Die Abhängigkeit von y entfällt aufgrund der Annahme über die konstante Temperatur in y -Richtung bei $x = 0$. Es ist zu bemerken, dass der Wärmestrom immer konstant bleibt: $\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = -\frac{Q}{\lambda e h_1}$ mit $0 < y < h_1$ und $-l < x < 0$. Daraus folgt, dass in dem Verlängerungsbereich des SLJ ein konstanter Wärmestrom herrscht. Dies entspricht dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik: „In einem abgeschlossenen System kann der Gesamtbetrag der Energie weder vergrößert noch verkleinert werden. Es können lediglich die verschiedenen Energiearten ineinander umgewandelt werden.“ [11] Anders gesagt für den Fall dieses Abschnittes: der Wärmestrom, der am linken Rand $x = -l$ hineinkommt, gleicht dem Wärmestrom, der am rechten Rand $x = 0$ herauskommt. Und weil dies in y -Richtung konstant ist, kann man diesen Wärmestrom als Randbedingung am linken Rand $x = 0$ des geklebten Bereiches des SLJ annehmen. Dies reicht nicht aus, um den Wert von T_0 zu ermitteln, trägt aber dazu bei, die Randbedingung am linken unteren Rand ($x = 0, 0 < y < h_1$) des geklebten Bereiches des SLJ rechtfertigen zu können. Nämlich:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 & \text{für } h_1 < y < h_1 + h_2 \\ \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{Q}{\lambda e h_1} & \text{für } 0 < y < h_1 \end{cases}$$

3.3.2. Randbedingung am rechten-oberen Rand ($x=L, h_1 < y < h_1+h_2$) des geklebten Bereiches des SLJ

Das gleiche Vorgehen wie im §3.3.1 wird hier benutzt, um die Randbedingung am rechten oberen Rand ($x = L, h_1 < y < h_1 + h_2$) des geklebten Bereiches des SLJ zu definieren. Ein rechteckiges Gebiet $L < x < L + l$ und $h_1 < y < h_1 + h_2$ wird betrachtet, in dem eine konstante Temperatur T_{sink} am rechten Rand $x = L + l$ festgelegt wird. Die oberen und unteren Ränder $y = h_1$ und $y = h_1 + h_2$ sind adiabatisch. Um die analytische Lösung leichter zu lösen, wird eine kartesische Systemverschiebung in y -Richtung von $y - h_1$ gemacht werden, so dass der Ursprung bei $(L, 0)$ liegt. Über den linken Rand $x = L$ liegen zunächst keine Informationen vor (siehe Abbildung 26).

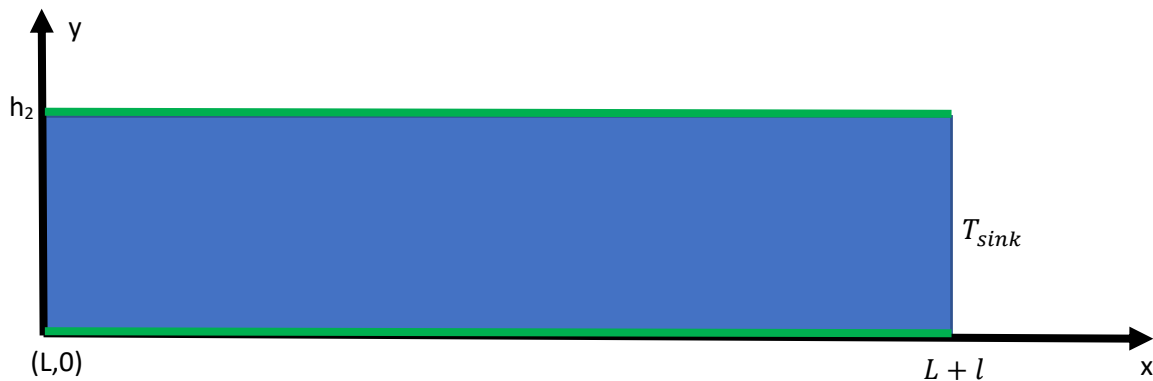


Abbildung 26: Verlängerung des SLJ am rechten Rand

Die stationäre zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung aus (E 9) lautet:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

wobei $T(x, y)$ die Temperatur an einem Punkt (x, y) innerhalb des Rechtecks darstellt. Die Randbedingungen können wie folgt formuliert werden.

- Rechte Seite ($x = L + l$): Eine konstante Temperatur T_{sink} wird festgelegt. Dies führt zu einer Dirichlet-Randbedingung:

$$T(L + l, y) = T_{sink} \text{ mit } 0 < y < h_2 .$$

- Obere und untere Seiten ($y = 0$) und ($y = h_1$): Da diese Ränder adiabatisch sind, gilt:

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 ; \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=h_1} = 0 ; L < x < L + l .$$

Um die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu finden, wird die Methode der Variablentrennung (siehe §§2.2.2) verwendet. Angesetzt wird $T(x, y) = X(x)Y(y)$, was zu zwei separaten Differentialgleichungen führt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$T(x, y) = (A_0 x + B_0)(C_0 y + D_0) + (A \cosh(\omega x) + B \sinh(\omega x))(C \cos(\omega y) + D \sin(\omega y))$$

Die Randbedingung liefern:

- Adiabatische Randbedingungen an den oberen und unteren Kanten ergibt: $D = 0$ und $\omega = \frac{\pi n}{h_1}, n \in \mathbb{N}^*$. Daher wird $Y_n(y)$ zu:

$$Y_n(y) = C_n \cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right) \text{ und } Y_0(y) = D_0$$

Und die allgemeine Lösung lautet:

$$T(x, y) = D_0(A_0 x + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) + B_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1} x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right)$$

- Feste Temperatur am rechten Rand ($x = L + l$) führt zu:

$$T_{sink} = D_0(A_0(L + l) + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L + l)\right) + B_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L + l)\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1} y\right),$$

was eine Fourier-Reihe mit den Konstanten $C_n \left(A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) + B_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) \right)$ und Anfangswert $D_0(A_0(L+l) + B_0)$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellt. Nach Einsetzen des Verfahrens zu der Berechnung der Fourierreihe-Koeffizienten (siehe §§ 2.2.4) ist die folgende Gleichung zu erhalten:

$$\begin{cases} C_n \left(A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) + B_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) \right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ B_0 = -(L+l)A_0 + T_{\text{sink}} \end{cases}$$

Also entweder $C_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ oder $\left(A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) + B_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) \right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Die erste Bedingung ist im Moment nicht möglich, weil für $C_n = 0$, bekommt man $Y_n(y) = 0$ und daher $T(x, y) = D_0 A_0 (x - (L+l)) + T_{\text{sink}}$. Was bedeutet, dass die Temperatur nur von der Variable x abhängig ist. Dies entspricht leider nicht der Referenzlösung, weil diese eine kleine Änderung in y -Richtung in der Nähe von $x=L$ enthält. (siehe blau gestrichenen Kreis in Abbildung 27)

Also bleibt die Bedingung:

$$\left(A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) + B_n \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) \right) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Das heißt:

$$A_n = -\tanh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung lautet somit:

$$T(x, y) = Q_0(x - (L+l)) + T_{\text{sink}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n C_n \left(\sinh\left(\frac{\pi n}{h_1}x\right) - \tanh\left(\frac{\pi n}{h_1}(L+l)\right) \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1}x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1}y\right) \quad (E 24)$$

mit $Q_0 = D_0 A_0$

Also die gleiche Funktionsart wie bei §§3.3.1. und die entsprechende Referenzlösung ist in der folgenden Abbildung zu sehen.

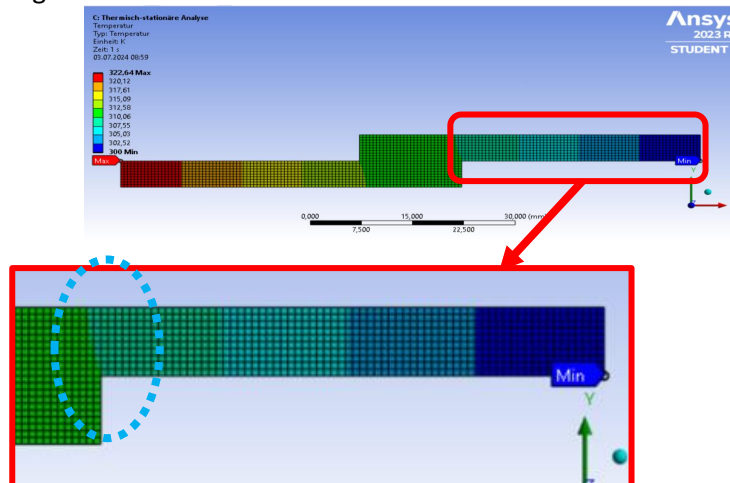


Abbildung 27: Referenzlösung der Temperaturverteilung in dem rechten Verlängerungsbereich des SLJ

Wenn man ähnlich die gleiche Annahme wie bei §§3.3.1 trifft, bekommt man:

$$T(x, y) = Q_0(x - (L+l)) + T_{\text{sink}} \quad (E 25)$$

Diese Lösung zeigt, dass die Hauptkomponente der Temperaturverteilung in diesem Verlängerungsbereich ebenfalls (vgl. §§3.3.1) eine lineare Funktion in x -Richtung ist, während die y -Richtung keine Änderung der Temperatur zeigt. Der Koeffizient Q_0 repräsentiert die Ableitung der Temperatur in x -Richtung in dem rechten Verlängerungsbereich des SLJ, anders gesagt der Wärmestrom in x -Richtung. Weil diese Lösung nicht von der y -Richtung abhängig ist, bedeutet dies, dass der Wärmestrom in y -Richtung null ist. Die vorgegebene Randbedingungen reichen leider nicht aus, die Randbedingung am rechten oberen Rand ($x = L, h_1 < y < h_1 + h_2$) des geklebten Bereiches des SLJ zu rechtfertigen. Die fehlende Randbedingung am linken Rand $x=L$ des Verlängerungsbereiches

macht es jedoch erforderlich, entweder zusätzliche Informationen – wie zum Beispiel eine Dirichlet-Randbedingung bei $(x = L, 0 < y < h_1 + h_2)$ oder eine Neumann-Randbedingung bei $(x = L, h_1 < y < h_1 + h_2)$ - zu haben oder Annahmen zu treffen, um eine vollständig bestimmte Lösung für den geklebten Bereich zu erhalten. Dazu werden zwei Hypothesen betrachtet:

- Hypothese 1: Konstanter Wärmestrom im rechten Verlängerungsbereich wie im §3.3.1. Diese Hypothese bezieht sich auf einer Neumann-Randbedingung bei $(x = L, h_1 < y < h_1 + h_2)$. Basiert auf dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik wurde -um Q_0 zu schätzen- eine Annahme getroffen, indem der am ganz linken Rand $(x = -l)$ des SLJ hereinkommende Wärmestrom dem am rechten oberen Rand $(x = L, 0 < y < h_1 + h_2)$ des geklebten Bereiches des SLJ herauskommenden entspricht, weil es weder einen Energiegewinn noch einen Energieverlust gibt. Es ist aber zu bemerken, dass diese Annahme sehr grob ist. In dem Fall bekommt man $Q_0 = \frac{Q}{\lambda e h_2}$ und es folgt:

$$T(x, y) = \frac{Q}{\lambda e h_2} (x - (L + l)) + T_{sink}$$

Die allgemeinen Bedingungen am rechten Rand des geklebten Bereichs lassen sich dann wie folgend mathematisch definieren:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{Q}{\lambda e h_2} \text{ für } h_1 < y < h_1 + h_2 \\ \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \text{ für } 0 < y < h_1 \end{cases}$$

- Hypothese 2: Diese Hypothese bezieht sich auf einer Dirichlet-Randbedingung bei $(x = L, 0 < y < h_1 + h_2)$. Hier soll basiert auf der Referenzlösung ein differenzierteres mathematisches Modell entwickelt werden, um die Temperaturverteilung am rechten Rand des geklebten Bereichs genauer zu beschreiben. Dazu muss das Modell so definiert werden, dass die Eigenschaften des Systems besser widerspiegelt sind. Eine Möglichkeit besteht darin, eine nicht-konstante Temperaturverteilung am rechten Rand $x=L$ zuzulassen, die durch die Geometrieparameter und Wärmeleitfähigkeit des Materials bestimmt wird. Dies könnte durch die Einführung einer Funktion $f(y)$ geschehen, die die Variation der Temperatur basiert auf die Referenzlösung in der y -Richtung beschreibt: $T(L, y) = f(y) + T_{sink}$. Gezielt wäre nun die Funktion $f(y)$ so zu definieren, dass sie den Verlauf der Referenz-Temperatur auf der Ebene $(x = L, 0 < y < h_1 + h_2)$ nicht perfekt aber schon besser verfolgt.

Die Wahl zwischen diesen beiden Hypothesen hängt davon ab, welche physikalischen Randbedingungen am besten zur Beschreibung des spezifischen Problems geeignet sind. Deswegen werden diese beiden Hypothesen in den nächsten Schritten dieser Arbeit genau betrachtet.

3.4. Analytische Lösung der Laplace Gleichung in einem SLJ mit der ersten Hypothese

Die folgende Abbildung 28 stellt die kompletten Randbedingungen des geklebten Bereichs des SLJ dar.

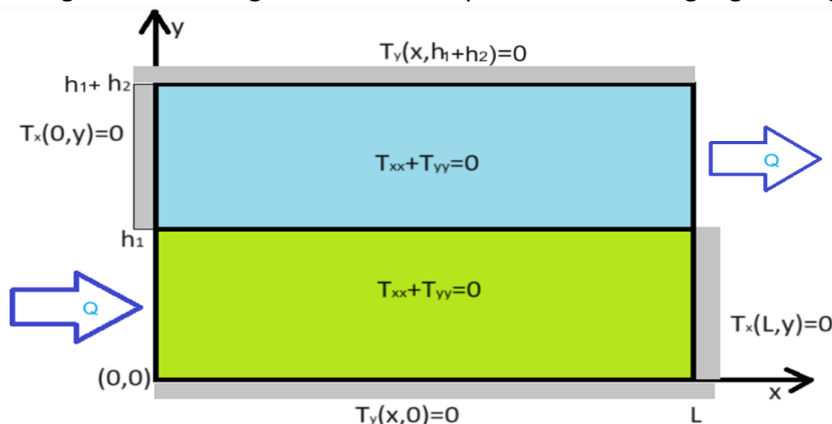


Abbildung 28: Komplette Randbedingung auf dem geklebten Bereich des SLJ

Noch einmal die Randbedingungen zusammengefasst:

- Unteren $y = 0$ und oberen $y = h_1 + h_2$ Ränder: Adiabatische Randbedingungen.

$$\left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \text{ und } \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=h_1+h_2} = 0 \quad (E 26)$$

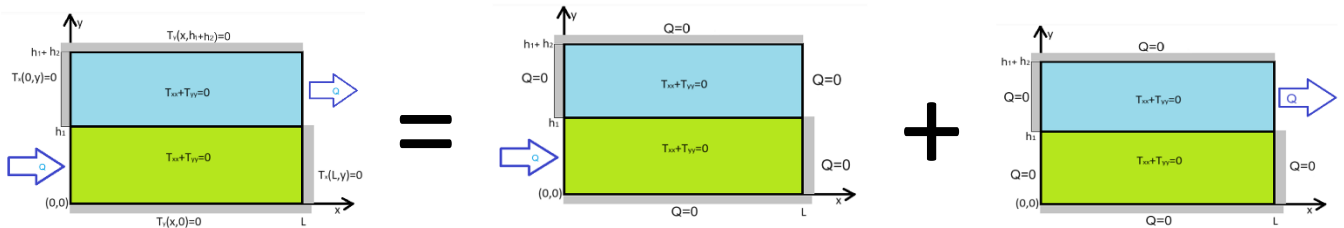
- Linker Rand:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \text{ für } h_1 < y < h_1 + h_2 \\ \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{Q}{\lambda h_1} \text{ für } 0 < y < h_1 \end{cases} \quad (E 27)$$

- Rechter Rand: $T(L, y) = \frac{Q}{\lambda} l + T_{\text{sink}}$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{Q}{\lambda h_2} \text{ für } h_1 < y < h_1 + h_2 \\ \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \text{ für } 0 < y < h_1 \end{cases} \quad (E 28)$$

Um das Problem lösen zu können, wird dies in zwei Teilen aufgeteilt:



Die stationäre zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung aus (E 9) lautet:

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

wobei $T(x,y)$ die Temperatur an einem Punkt (x,y) innerhalb des Rechtecks darstellt. Die Randbedingungen an den unteren und oberen Seiten des geklebten Bereichs des SLJ führen zu:

$$\left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} \right|_{y=h_1+h_2} = 0; 0 < x < L.$$

Um die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu finden, wird die Methode der Variablentrennung (siehe §§2.2.2) verwendet. Angesetzt wird $T(x,y) = X(x)Y(y)$, was zu zwei separaten Differentialgleichungen führt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$T(x,y) = (A_0x + B_0)(C_0y + D_0) + (A \cosh(\omega x) + B \sinh(\omega x))(C \cos(\omega y) + D \sin(\omega y))$$

Beim Einsetzen der Randbedingung ergibt sich heraus: $D = 0$ und $\omega = \frac{\pi n}{h_1+h_2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Daher wird $Y_n(y)$ zu:

$$Y_n(y) = C_n \cos\left(\frac{\pi n}{h_1+h_2} y\right) \text{ und } Y_0(y) = D_0$$

Und

$$T(x,y) = (A_0x + B_0)D_0 + \left(A \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1+h_2} x\right) + B \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1+h_2} x\right) \right) C_n \cos\left(\frac{\pi n}{h_1+h_2} y\right) \quad (E 29)$$

Um die Konstante A_0, B_0, D_0, A, B und C_n zu bestimmen, wird jeder einzelne Teil des Problems betrachtet. Diese allgemeine Lösung (E 29) gilt für den Abschnitten §§3.4.1 und §§3.4.2. Es wird daher für diese Abschnitte nicht mehr die adiabatischen Randbedingungen auf den Ebenen $y = 0$ und $y = h_1 + h_2$ berechnet.

3.4.1. Wärmestrom gleicht Null am rechten Rand

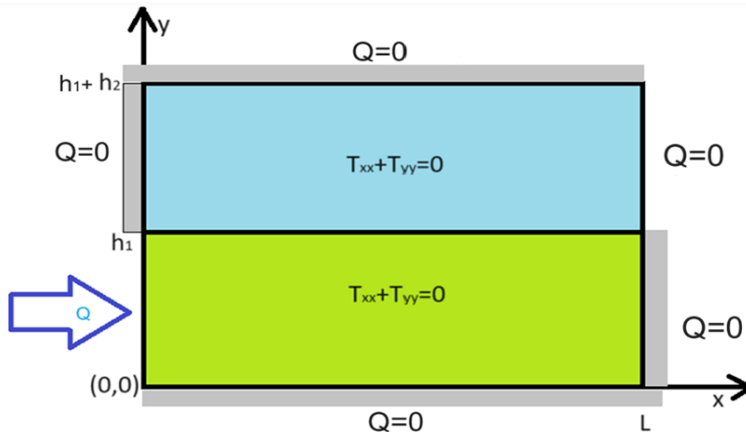


Abbildung 29: Darstellung der Randbedingungen mit einem Wärmestrom gleich Null am rechten Rand

Für $(x = 0)$ wird ein konstanter Wärmefluss Q bei $0 < y < h_1$ und eine adiabatische Randbedingung bei $h_1 < y < h_1 + h_2$ aufgebracht. Dies führt zu einer Neumann-Randbedingung:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{cases} -\frac{Q}{\lambda e h_1} & \text{mit } 0 < y < h_1 \\ 0 & \text{mit } h_1 < y < h_1 + h_2 \end{cases},$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Materials und Q der konstanter Wärmefluss ist.

- $\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$ für $0 < y < h_1 + h_2$ führt zu:

$$\begin{cases} B_n = -\tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right) A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ D_0 A_0 = 0 \end{cases}$$

Und die allgemeine Lösung aus (E 29) lautet:

$$T_1(x,y) = D_0 B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \left(\cosh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) - \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right)$$

- Wärmeflussbedingung an der linken Seite ($x = 0$) führt zu:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = f(y) = \begin{cases} -\frac{Q}{\lambda e h_1} & \text{mit } 0 < y < h_1 \\ 0 & \text{mit } h_1 < y < h_1 + h_2 \end{cases}$$

$$f(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \frac{\pi n}{h_1 + h_2} \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right),$$

was eine Fourier-Reihe mit den Konstanten $C_n A_n \frac{\pi n}{h_1 + h_2} \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellt. Nach Einsetzen des Verfahrens zur Berechnung der Fourierreihe-Koeffizienten (siehe §§ 2.2.4) ist die folgende Gleichung zu erhalten:

$$C_n A_n = \frac{2Q(h_1 + h_2) \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right)}{\lambda e h_1 (n\pi)^2 \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ und } D_0 A_0 = \text{unbekannt}$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung lautet somit:

$$T_1(x,y) = T_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Const.} \left(\cosh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) - \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right) \quad (\text{E 30})$$

Mit $T_{01} = \text{unbekannt}$ und $\text{Const.} = \frac{2Q(h_1 + h_2) \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right)}{\lambda e h_1 (n\pi)^2 \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right)}$

3.4.2. Wärmestrom gleicht Null am linken Rand

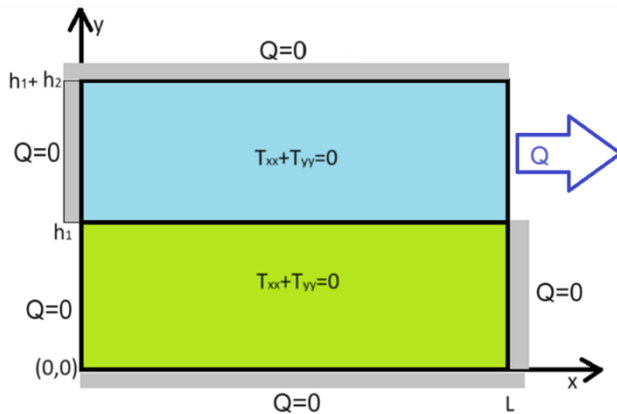


Abbildung 30: Darstellung der Randbedingungen mit einem Wärmestrom gleich Null am linken Rand

Bei $(x = L)$ wird ein konstanter Wärmefluss Q bei $h_1 < y < h_1 + h_2$ und eine adiabatische Randbedingung bei $x = L, 0 < y < h_1$ eingesetzt. Dies führt zu einer Neumann-Randbedingung:

$$\left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=L} = \begin{cases} \frac{Q}{\lambda e h_2} & \text{mit } h_1 < y < h_1 + h_2 \\ 0 & \text{mit } 0 < y < h_1 \end{cases}$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Materials und Q der konstanter Wärmefluss ist.

- $\left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ für $0 < y < h_1 + h_2$ führt zu:

$$\begin{cases} B_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

Und die allgemeine Lösung lautet:

$$T_1(x,y) = D_0 B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right)$$

- Wärmeflussbedingung an der rechten Seite ($x = L$) führt zu:

$$\left. \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \right|_{x=L} = f(y) = \begin{cases} \frac{Q}{\lambda e h_2} & \text{mit } h_1 < y < h_1 + h_2 \\ 0 & \text{mit } 0 < y < h_1 \end{cases}$$

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \frac{\pi n}{h_1 + h_2} \sinh\left(\frac{\pi n L}{h_1 + h_2}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right)$$

Was eine Fourier-Reihe mit den Konstanten $C_n A_n \frac{\pi n}{h_1 + h_2} \sinh\left(\frac{\pi n L}{h_1 + h_2}\right)$ wobei $n \in \mathbb{N}$ und $D_0 A_0$ darstellt. Nach Einsetzen des Verfahrens zur Berechnung der Fourierreihe-Koeffizienten (siehe §§ 2.2.4) ist die folgende Gleichung zu erhalten:

$$\begin{cases} C_n A_n = \frac{2Q(h_1 + h_2) \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right)}{\lambda e h_2 (n\pi)^2 \sinh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ D_0 B_0 = \text{unbekannt} \end{cases}$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung lautet somit:

$$T_2(x,y) = T_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Q(h_1 + h_2) \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right)}{\lambda e h_2 (n\pi)^2 \sinh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right)} \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right) \quad (E 31)$$

Die finale Lösung für den Fall lässt sich dann wie folgende schreiben:

$$T_{final1} = T_1 + T_2$$

Wobei:

$$T_1(x, y) = T_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} Const. \left(\cosh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) - \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right) \sinh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right)$$

$$\text{Mit } Const = \frac{2Q(h_1 + h_2) \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right)}{\lambda e h_1 (n\pi)^2 \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right)} \quad (E 32)$$

$$\text{Und } T_2(x, y) = T_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Q(h_1 + h_2) \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right)}{\lambda e h_2 (n\pi)^2 \sinh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right)} \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right)$$

$T_{01} = \text{unbekannt}$ und $T_{02} = \text{unbekannt}$

Beim Plotten dieser Lösung für $T_{01} = T_{02} = 0$ auf Matlab, wird die folgende Abbildung erhalten:

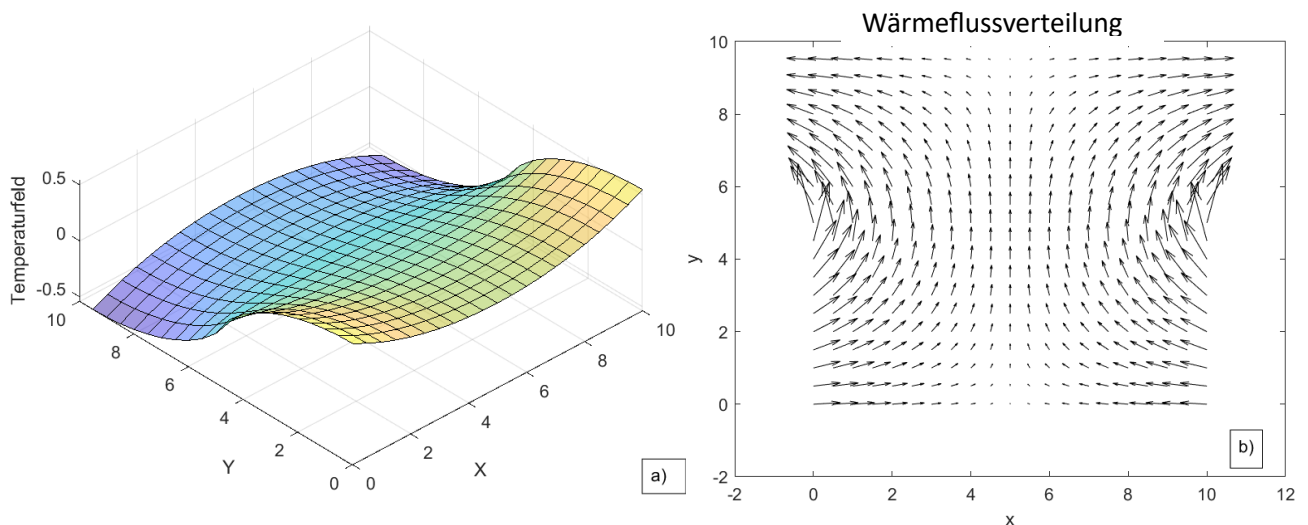


Abbildung 31: Analytische Lösung der Temperaturverteilung der ersten Hypothese a) Temperaturfeld b) Wärmeflussverteilung

Man erkennt, dass die Pfeile eine Symmetrie um die zentrale Achse $x = \frac{L}{2}$ des Gebietes aufweisen. An den linken und rechten Rändern ($x = 0, 0 < y < h_1 + h_2$) und ($x = L, 0 < y < h_1 + h_2$) sieht man, dass der Wärmefluss je nach Region in y -Richtung entweder in das Gebiet hinein- oder aus dem Gebiet herausfließt. Die Pfeile zeigen, dass der Fluss nicht gleichmäßig bleibt, was darauf hindeutet, dass es schwierig ist, sowohl die konstante Wärmeflussbedingung als auch die adiabatische Randbedingung an demselben Rand ($x = 0, 0 < y < h_1 + h_2$) und ($x = L, 0 < y < h_1 + h_2$) gleichzeitig zu erfüllen. Die Form des Flusses in der Nähe der Ränder deuten darauf hin, dass das System versucht, das Problem ohne Temperatur-Offset (ohne Dirichlet-Randbedingung) abzubilden. Dies führt zu einer Unvereinbarkeit, die zu instabilen oder physikalisch nicht analytisch realisierbaren Lösungen führt. Anders gesagt: Die festgelegten Bedingungen in der ersten Hypothese schließen sich gegenseitig aus, was einen komplexen und widersprüchlichen Fluss erzeugt. Obwohl theoretisch eine analytische Lösung gefunden werden könnte, ist diese instabil und nicht eindeutig. Insbesondere führt das Fehlen von Dirichlet-Randbedingungen (bei denen die Temperatur festgelegt wird) dazu, dass das System nicht stabilisiert wird, was unbestimmte Konstanten in den analytischen Lösungen hinterlässt. Zusammenfassend scheint dieses System mit der aktuellen Hypothese nicht lösbar zu sein, da sie einen inkohärenten Wärmefluss erzeugen. Das Fehlen von festen Temperaturwerten (durch Dirichlet-Randbedingungen) trägt zu dieser Unbestimmtheit bei, wodurch Konstanten wie T_{01} und T_{02} undefiniert bleiben und die Gesamtlösung physikalisch inkohärent wird.

3.5. Analytische Lösung der Laplace Gleichung in einem SLJ mit der zweiten Hypothese

3.5.1. Definition des mathematischen Modells am rechten Rand des geklebten Bereichs des SLJ

Bei Betrachtung der Referenzlösung (siehe Abbildung 32) stellt sich heraus, dass die Kurve in etwa symmetrische Werte bezüglich des Punkt $y = h_1$ bezieht. Die Steigung von $T(L, y) = f(y)$ ist bei $y = 0$ und $y = h_1 + h_2$ nahe zu null. Dies entspricht der adiabatischen Bedingung bei $y = 0$ und $y = h_1 + h_2$.

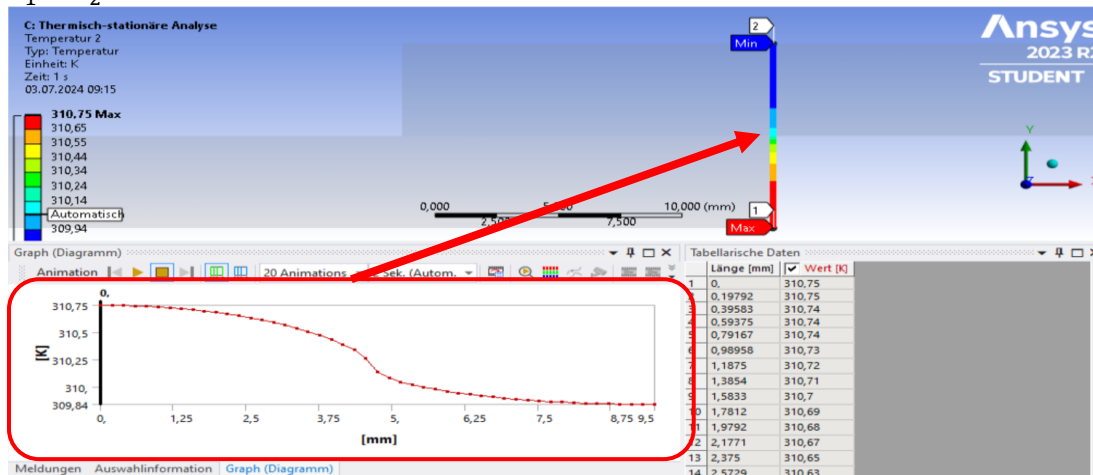


Abbildung 32 : Temperaturverhalten am rechten Rand des geklebten Bereiches des SLJ

Eine Funktion, die das Verhalten des Temperaturfeldes unter Berücksichtigung der Referenzlösung am rechten Rand in etwa abbildet, ist die Arkustangens-Funktion. Die *Arctan*-Funktion (auch bekannt als Arkustangens-Funktion) ist definiert als:

$$\text{Arctan}(y) = \int \frac{1}{1 + y^2} dy$$

Diese hat folgende Eigenschaften:

- $\lim_{y \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(y) = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{y \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(y) = \frac{\pi}{2}$
- $\text{Arctan}(-y) = -\text{Arctan}(y)$

Durch die beiden ersten Eigenschaften ergibt sich, dass die Funktionsteigung Null an den Rändern hat. Die letzte Bedingung beschreibt die Punkt-Symmetrie der Funktion. Die Kurve der Arctan-Funktion sieht wie folgt aus.

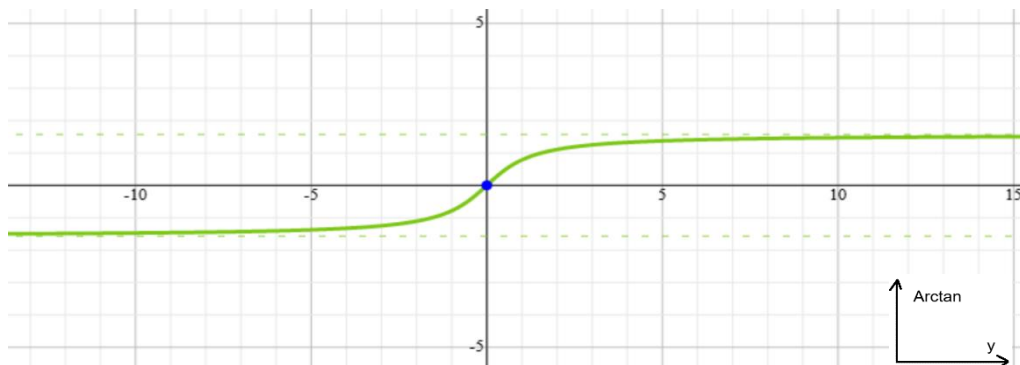


Abbildung 33: Darstellung einer Arctan-Funktion

Um den in Abbildung 32 dargestellten Temperaturverlauf qualitativ zu erhalten, lässt sich das mathematische Modell wie folgt schreiben:

$$T_{Model}(L, y) = \Delta T_0 \arctan\left(\frac{y - y_0}{a}\right) + T_0 \quad (E 33)$$

wobei: T_0 : Eine Basis- (Offset-) Temperatur ist.

ΔT_0 : Die maximale Temperaturdifferenz beschreibt.

y_0 : Die Verschiebung entlang der Y-Achse

a : ein Parameter ist, der die Breite der Übergangszone beeinflusst.

Es ist aber wichtig zu beachten, dass die Basis-Temperatur T_0 den Wert des Mittelpunktes in dem mathematischen Modell repräsentiert. Also die Verschiebung des Mittelpunktes (blau markiert in der folgenden Tabelle) des Modells in Arctan-Richtung. Die folgende Tabelle beschreibt das Phänomen:

Tabelle 1: Darstellung des mathematischen Modells für unterschiedlichen Werte von der Basis-Temperatur

$\arctan(y) + 0$	
$\arctan(y) + 6$	
$\arctan(y) + 2,5$	

Das Arkustangens Modell beschreibt die Temperaturverteilung am rechten Rand auf eine Weise, die Übergänge und Anpassungen an Randbedingungen berücksichtigt. Jetzt stellt sich die Frage, wie die Parameter sich bestimmen lassen. Weil der Verlauf der Referenzlösung um den Punkt $y = h_1$ punktsymmetrisch ist, monoton fallend und die Temperatur am Rand (bei $y = h_1 + h_2$) nicht gegen Null gehen soll, sondern eine konkrete Basis-Temperatur annehmen soll, folgt, dass $a < 0$ z. B. $a = -1$ und $y_0 = h_1$ angenommen werden können. Damit wird sich das Modell von der Symmetrieachse ($y = 0$) zu der Achse ($y = h_1$) verschieben. Die maximale Temperaturdifferenz wurde durch den ersten Hauptsatz der Thermodynamik eingeschätzt $\Delta T_0 = \frac{Q}{\lambda e h_2}$. Es wurde angenommen, dass der durch den rechten Rand ($x = L, 0 < y < h_1 + h_2$) durchlaufende Wärmestrom dem durch den linken Rand

($x = 0, 0 < y < h_1 + h_2$) durchlaufenden Wärmestrom entspricht. Die Bestimmung von T_0 ergibt sich aus dem Fourier-Gesetz, eingesetzt in den rechten Verlängerungsbereich des SLJ (siehe Abbildung 34).

$$T_{x=L} = T_{\text{sink}} + \frac{Ql}{\lambda e h_2}$$

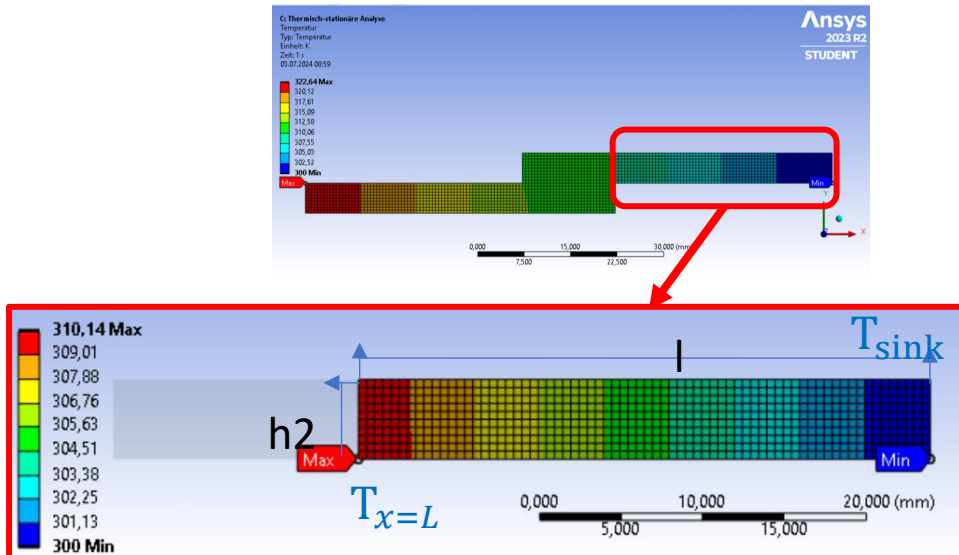


Abbildung 34: Referenzlösung von dem Verlängerungsbereich

Der Wert $T_{x=L}$ sollte der Basis-Temperatur des Modells an dem Punkt ($x = L, y = h_1 + h_2$) entsprechen, damit das Modell besser die Referenzlösung verfolgt. Das Modell kann dann wie folgend geschrieben werden:

$$T_{\text{Model}}(L, y) = \frac{Q}{\lambda e h_2} (\arctan(h_1 - y) + 1) + T_{\text{sink}} + \frac{Ql}{\lambda e h_2},$$

wobei:

- e : ist die Dicke des Laminats,
- Q : ist die Wärmestromdichte,
- λ : ist die thermische Leitfähigkeit,
- h_1 : die Höhe des Laminats, die den Symmetriepunkt der Temperaturverteilung in der y -Richtung beschreibt,
- T_{sink} : ist die ganz rechts festgelegte Temperatur des SLJ,
- l : ist eine charakteristische Länge entlang der x -Achse des rechten Verlängerungsbereichs des SLJ.

Das Addieren von „+1“ dient dazu, die Arkustangens-Funktion so zu verschieben, dass für $y = h_1$, der Temperaturwert $T_{\text{Model}}(L, y)$ den physikalischen Randbedingungen entspricht, indem die gesamte Kurve in T -Richtung verschoben wird. Ohne die Addition von „+1“ ergibt die Arkustangens-Funktion bei $y = h_1$ den Wert $\arctan(0) = 0$. Das bedeutet, dass der Temperaturbeitrag an dieser Stelle lediglich T_{rechts} ist, was nicht der Fall ist, weil $T_{x=L}$ dem Wert des Punkts ($x = L, y = h_1 + h_2$) entspricht. Also muss die Kurve verschoben werden. Durch das Addieren von „+1“ wird eine zusätzliche Temperaturerhöhung um die maximale Temperaturdifferenz ermöglicht. Dies stellt sicher, dass der Temperaturwert an dieser Stelle den erwarteten Randbedingungen entspricht. (siehe Abbildung 35)

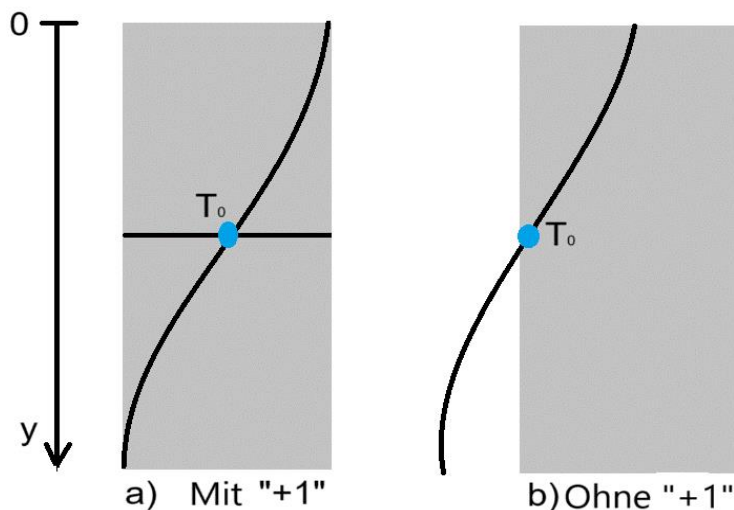


Abbildung 35: Verschiebung des mathematischen Modells

Zusammengefasst gibt die folgende Abbildung die kompletten Randbedingungen des Problems.

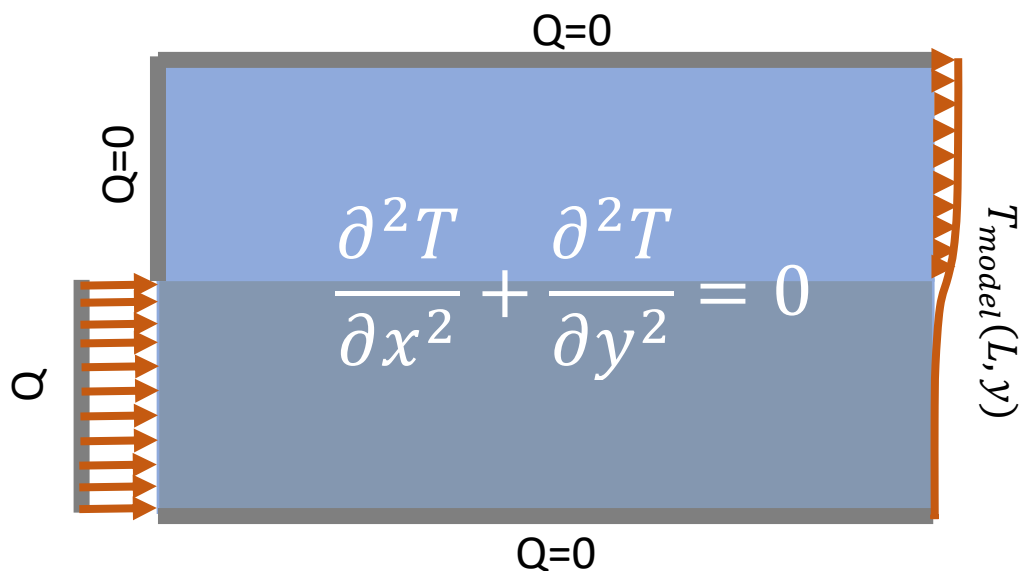


Abbildung 36: Neue Randbedingungen mit dem mathematischen Modell

3.5.2. Lösung der Gleichung

Die stationäre zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

wobei $T(x, y)$ die Temperatur an einem Punkt (x, y) innerhalb des Rechtecks darstellt. Die Randbedingungen an den unteren und oberen Seiten des geklebten Bereichs des SLJ führen zu:

$$\left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right|_{y=h_1+h_2} = 0; \quad 0 < x < L.$$

Um die Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu finden, wird die Methode der Variablentrennung verwendet. Angesetzt wird $T(x, y) = X(x)Y(y)$, was zu zwei separaten Differentialgleichungen führt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$T(x, y) = (A_0x + B_0)(C_0y + D_0) + (A \cosh(\omega x) + B \sinh(\omega x))(C \cos(\omega y) + D \sin(\omega y))$$

Beim Einsetzen der Randbedingung ergibt sich heraus: $D = 0$ und $\omega = \frac{\pi n}{h_1+h_2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Daher wird $Y_n(y)$

zu:

$$Y_n(y) = C_n \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right) \text{ und } Y_0(y) = D_0$$

Die Lösung $Y_n(y)$ gilt für den beiden folgenden Abschnitten. Um die Lösung $X_n(x)$ zu bestimmen, wird das Problem in zwei einfache Aufgaben wie in §3.4 zerlegt. (siehe folgende Abbildung)

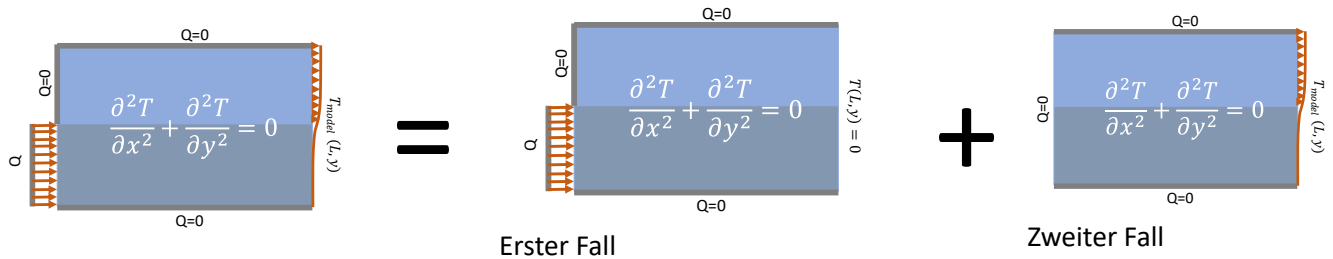


Abbildung 37: Zerlegung der Randbedingungen in zwei gemixte Randbedingungen

- Erster Fall:

Für $(x = 0)$ wird ein konstanter Wärmefluss Q bei $(x = 0, 0 < y < h_1)$ und eine adiabatische Randbedingung bei $(x = L, h_1 < y < h_1 + h_2)$ aufgebracht. Dies führt zu einer Neumann-Randbedingung:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \begin{cases} -\frac{Q}{\lambda e h_1} & \text{mit } 0 < y < h_1 \\ 0 & \text{mit } h_1 < y < h_1 + h_2 \end{cases}.$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Materials und Q der konstanter Wärmefluss ist.

- $T(L, y) = 0$ für $0 < y < h_1 + h_2$ führt zu:

$$\begin{cases} A_n = -\tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right) B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ D_0 B_0 = -L D_0 A_0 \end{cases}$$

Und die allgemeine Lösung lautet somit:

$$T_1(x, y) = D_0 A_0 (x - L) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n B_n \left(\sinh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) - \tanh\left(\frac{n\pi L}{h_1 + h_2}\right) \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) \right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right)$$

- Wärmeflussbedingung an der linken Seite ($x = 0$) führt zu:

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = f(y) = \begin{cases} -\frac{Q}{\lambda e h_1} & \text{mit } 0 < y < h_1 \\ 0 & \text{mit } h_1 < y < h_1 + h_2 \end{cases}$$

$$f(y) = D_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n B_n \frac{\pi n}{h_1 + h_2} \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right),$$

was eine Fourier-Reihe mit den Konstanten $C_n B_n \frac{\pi n}{h_1 + h_2}$ mit $n \in \mathbb{N}$ darstellt. Nach Einsetzen des Verfahrens zur Berechnung der Fourierreihe-Koeffizienten (siehe §§ 2.2.4) wird die folgende Gleichung erhalten:

$$\begin{cases} C_n B_n = -\frac{2Q(h_1 + h_2)}{\lambda e h_1 (n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ D_0 A_0 = -\frac{Q h_1}{\lambda e h_1 (h_1 + h_2)} \end{cases}$$

Die Lösung $T_{M1}(x, y)$ für den ersten Fall mit dem mathematischen Modell der Wärmeleitungsgleichung lautet somit:

$$T_{M1}(x, y) = T_{01}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \left(\sinh(\omega_n x) - \tanh(\omega_n L) \cosh(\omega_n x) \right) \cos(\omega_n y),$$

(E 34)

$$\text{wobei } \omega_n = \frac{\pi n}{h_1 + h_2}; E_n = -\frac{2Q(h_1 + h_2)}{\lambda e h_1 (n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right)$$

$$\text{und } T_{01}(x) = -\frac{Q h_1}{\lambda (h_1 + h_2)} (x - L)$$

- Zweiter Fall:

Die Temperaturverteilungsfunktion des mathematischen Modells lautet immer:

$$T(x, y) = (A_0x + B_0)(C_0y + D_0) + (A \cosh(\omega x) + B \sinh(\omega x))(C \cos(\omega y) + D \sin(\omega y))$$

Für $(x = L)$ wird eine Funktion $T_{Model}(L, y)$ festgelegt. Dies führt zu einer Dirichlet-Randbedingung:

$$T_{Model}(L, y) = \frac{e \cdot Q}{\lambda e h_2} (\arctan(h_1 - y) + 1) + T_{\text{sink}} + \frac{Ql}{\lambda e h_2},$$

wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Materials und Q der Konstanter Wärmefluss ist.

$$\blacksquare \left. \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \text{ führt zu:}$$

$$\begin{cases} B_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ D_0 A_0 = 0 \end{cases}$$

Und die allgemeine Lösung lautet:

$$T_{M2}(x, y) = D_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \cosh\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} x\right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right)$$

Durch die festgelegte Temperatur am rechten Rand ergibt sich:

$$T_{Model}(L, y) = f(y) = \frac{e \cdot Q}{\lambda e h_2} (\arctan(h_1 - y) + 1) + T_{\text{sink}} + \frac{Ql}{\lambda e h_2}$$

$$f(y) = D_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n \cosh\left(\frac{\pi n L}{h_1 + h_2}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{h_1 + h_2} y\right),$$

was eine Fourier-Reihe mit den Konstanten $C_n A_n \cosh\left(\frac{\pi n L}{h_1 + h_2}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $D_0 A_0$ darstellt. Nach Einsetzen des Verfahrens zu Berechnung der Fourierreihe-Koeffizienten (siehe §§ 2.2.4) erhält man die folgende Gleichung:

$$\begin{cases} C_n A_n = \frac{2}{(h_1 + h_2) \cosh\left(\frac{\pi n L}{h_1 + h_2}\right)} \int_0^{h_1 + h_2} f(y) \cos\left(\frac{n \pi y}{h_1 + h_2}\right) dy \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ D_0 A_0 = \frac{1}{(h_1 + h_2)} \int_0^{h_1 + h_2} f(y) dy \end{cases}$$

Die Lösung der Laplace-Gleichung lautet somit:

$$T_{M2}(x, y) = T_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cosh(\omega_n x) \cos(\omega_n y),$$

$$\text{wobei } \omega_n = \frac{\pi n}{h_1 + h_2}; T_{02} = \frac{1}{(h_1 + h_2)} \int_0^{h_1 + h_2} f(y) dy \text{ und}$$

(E 35)

$$F_n = \frac{2}{(h_1 + h_2) \cosh\left(\frac{\pi n L}{h_1 + h_2}\right)} \int_0^{h_1 + h_2} f(y) \cos\left(\frac{n \pi y}{h_1 + h_2}\right) dy \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Die finale Lösung des gesamten Problems lautet somit:

$$T_M(x, y) = T_{M1}(x, y) + T_{M2}(x, y),$$

wobei:

$$T_{M1}(x, y) = T_{01}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n (\sinh(\omega_n x) - \tanh(\omega_n L) \cosh(\omega_n x)) \cos(\omega_n y)$$

(E 36)

und

$$T_{M2}(x, y) = T_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cosh(\omega_n x) \cos(\omega_n y)$$

Die Werte von $T_{01}(x)$, T_{02} , ω_n , E_n und F_n sind in den Gleichungen (E 34) und (E 35) zu sehen. Bei Plotten dieser Lösung im Matlab, ist die folgende Abbildung zu sehen:

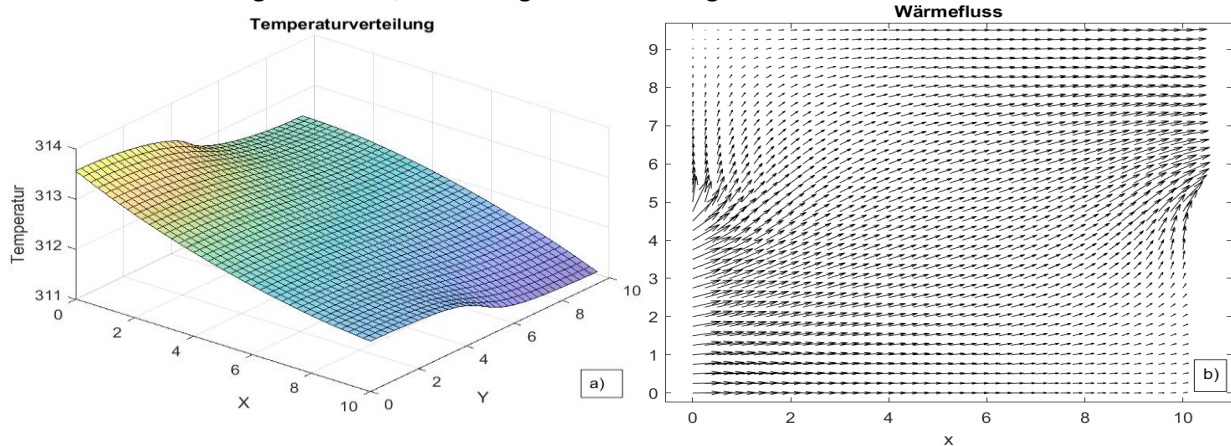


Abbildung 38: Lösung der Laplace Gleichung in dem geklebten Bereich des SLJ mit dem modellierten mathematischen Modell a) Temperaturverteilung; b) Wärmestrom.

Im Vergleich zum vorherigen (siehe Abbildung 31) Vektorfeld fällt auf, dass der Wärmefluss nun viel gleichmäßiger und organisierter ist. Der Fluss scheint klar entlang der rechten Seite des Systems gerichtet zu sein und weist eine deutlich stärkere Struktur in der Mitte des Systems auf. Bei genauer Betrachtung der adiabatischen Ränder ist es zu erkennen, dass die Pfeile parallel zum Rand gerichtet sind. Die Pfeile in der Nähe der unteren linken ($x = 0$, $0 < y < h_1$) und oberen rechten ($x = L$, $h_1 < y < h_1 + h_2$) Ränder zeigen weiterhin komplette Verhaltensmuster. An den Ecken ($x = L$, $y = 0$) und ($x = 0$, $y = h_1 + h_2$) sind die Pfeile knapp zu sehen, obwohl das Phänomen nur stark an der Ecke ($x = 0$, $y = h_1 + h_2$) zu sehen ist. Bei ($x = L$, $y = 0$) sind die Pfeile zwar knapp zu sehen, aber sie sind leicht in x-Richtung noch gerichtet. Ein Zeichnen davon, dass das Modell zwar die Referenzlösung annähert, aber lässt trotzdem etwa kleine Wärme rausfließen. Dies wird genau in §§4.3 berichtet.

Es ist zu erkennen, dass die Symmetrie des Wärmeflusses besser abgebildet ist und das System zeigt jetzt eine stabilere und vorhersagbare Verteilung des Flusses. Das Modell führt zu einer gleichmäßigen Wärmeverteilung, die den physikalischen Erwartungen an den Rändern des Systems näherkommt. Durch die Einführung dieses mathematischen Modells wird das System stabiler und besser lösbar. Die zuvor bestehenden Probleme mit der Unlösbarkeit aufgrund der Randbedingungen wurden durch die Anwendung des Modells gemildert.

Neben der analytischen Lösung kann das System auch mit der Finite-Differenzen-Methode (FDM) gelöst werden. Da diese nicht Ziel dieser Arbeit ist, wird dieses Verfahren nicht tief betrachtet. Es existiert bereits viel Literatur, die das Vorgehen genau beschreiben. Eine davon ist das Buch von Helmut Martin (worauf diese Lösung besonders basiert) [12], wo er viel über dieses Verfahren berichtet. Nach Einsetzung der FDM auf der Lösung der Laplace Gleichung in einem SLJ, ergibt sich die folgende Abbildung.

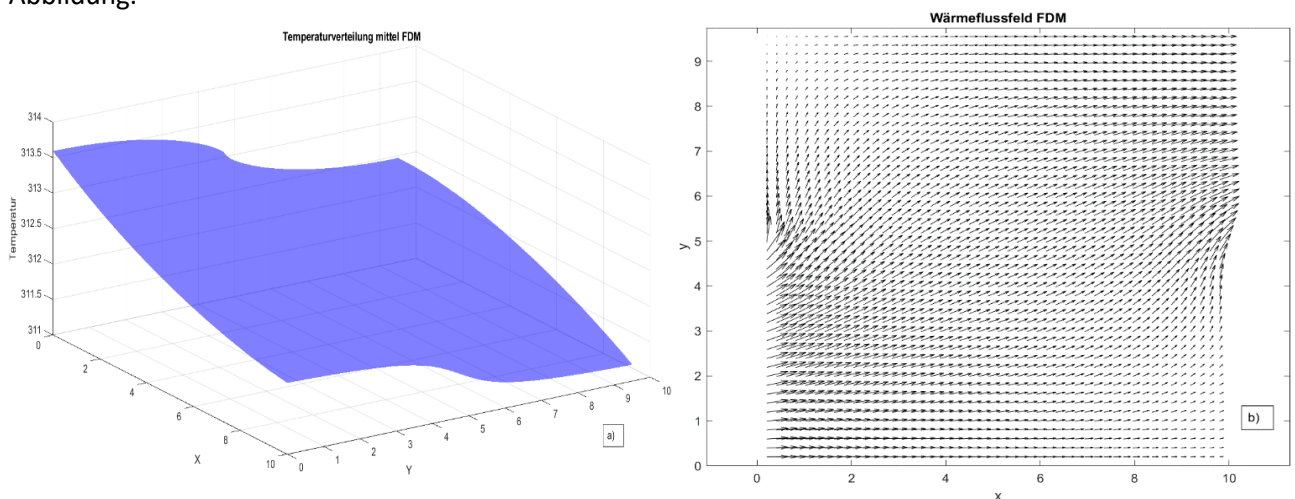


Abbildung 39: Lösung der Laplace Gleichung in dem geklebten Bereich des SLJ mittel FDM. a) Temperaturverteilung; b) Wärmestrom.

Kapitel 4. Ergebnisse und Vergleich

In diesem Kapitel werden die zentralen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit dargestellt und im Hinblick auf ihre Bedeutung für die Anwendung auf den SLJ diskutiert. Zuerst wird überprüft, ob die analytische Lösung richtig berechnet und im Matlab richtig implementiert wurde. Basiert auf dieser Korrektheit, wird eine kritische Reflexion der durchgeführten analytischen Lösung unternommen, um potenzielle Grenzen sowie seine Zuverlässigkeit und seinen Validitätsbereich zu erörtern. Dafür wird zuerst ein qualitativer Vergleich zwischen der analytischen und FEM-Lösung durchgeführt. Danach wird ein quantitativer Vergleich durch eine Parameterstudie unternommen, indem die verschiedenen Parameters variiert werden, um das Verhalten der analytischen Lösung im Vergleich zu der FEM-Lösung zu äußern.

4.1. Überprüfung der Korrektheit der analytischen Lösung

Es ist wichtig, bevor man die analytische Lösung mit der FEM-/FDM-Lösung vergleicht, zu überprüfen, ob die analytische Lösung korrekt berechnet und im Matlab implementiert wurde. Dafür werden die gleichen Randbedingungen wie im Abschnitt §3.5 im ANSYS angegeben und damit die FEM-Lösung herausgefunden und es wird überprüft, wie gut diese FEM-Lösung mit der analytischen Lösung zusammenpassen. Die folgende Abbildung zeigt den Betrag des Wärmestroms der analytischen und FEM-Lösung auf der Ebene $y = h_1$ des geklebten Bereiches des SLJ bei Änderung der Länge des Klebeschichtbereiches. Weil die Idee hier noch nicht das Verhalten der analytischen Lösung zu betrachten aber nur seine Korrektheit, wird nur das Modell im Mittelbereich bei Änderung der Klebeschichtlänge hierfür betrachtet. Es ist zu erkennen, dass die FEM-Lösung relativ größere Spitzenwerte am Rand $x = 0$ ergibt. Besonders zwischen den ersten und zweiten Elementen (erster und zweiter roter Punkt auf der linken Seite der Abbildung 40) lässt sich ein großer Sprung abbilden. Dies entspricht den roten und orangen markierten Elementen auf der Abbildung 41b). Danach liegen die Kurven mehr oder weniger übereinander bis ungefähr in der Nähe des Randes $x = L$. An diesem Rand erkennt man eine leichte Abweichung von maximal ca. $4 \cdot 10^{-5} W$ zwischen den analytischen und FEM-Lösungen. Dort ergibt das FEM-Verfahren etwas kleinere Werte im Vergleich zu der analytischen Lösung. Grund dafür ist die Bearbeitung und Umwandlung der Werten von Matlab zu ANSYS für die Berechnung der FEM-Lösung. Dies führt zu Rundungsfehler und daher wirkt auf die FEM-Lösung aus. Dieser Fehler können aber mittel Verfeinerung des Netzes für die FEM-Berechnung noch verkleinert werden. Was hier aufgrund des Rechenpowers des Computers nicht gemacht wurde.

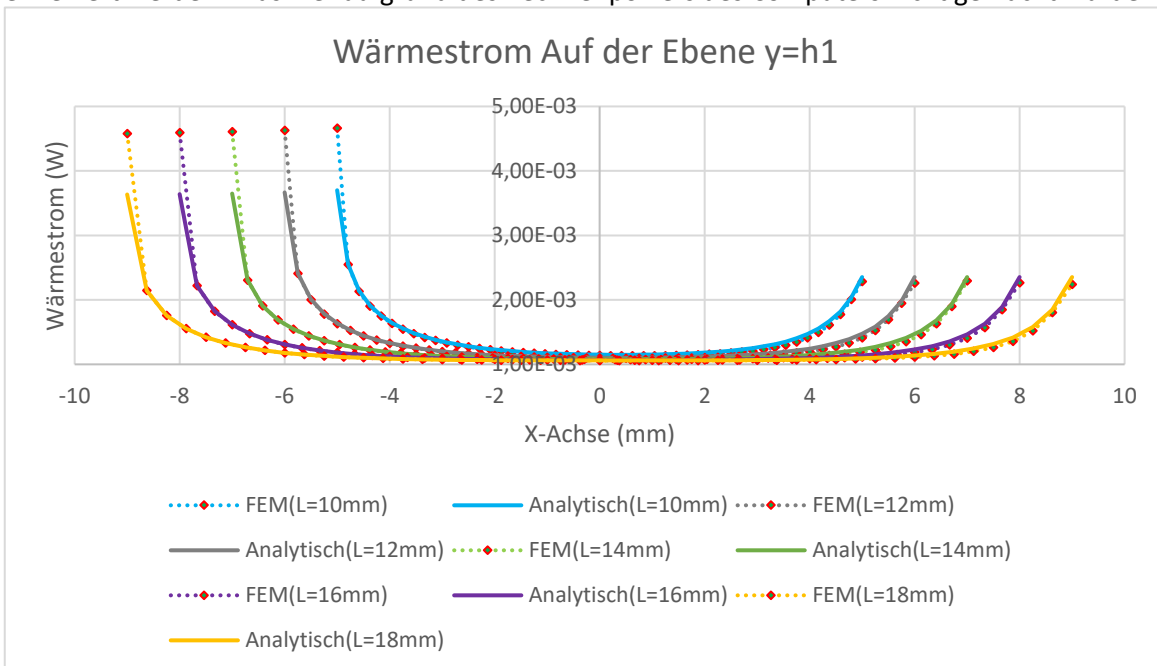


Abbildung 40: Wärmestromverteilung von der analytischen und FEM-LÖSUNG auf der Ebene $y=h_1$ bei Änderung der Klebeschichtlänge

Bei Betrachtung der linken Rand bei $x = 0$ stellt sich aber die Frage, warum eine so starke Spitze am linken Rand auf der FEM-Lösung. Dafür wurde die FEM-Lösung noch mal genau betrachtet und den thermischen Fehler herausgefunden. Die Zuverlässigkeit von FEM-Analyse hängt von viele Faktoren – wie Diskretisierungsfehler, falsche Werkstoffdaten, falsche oder fehlerhafte Problemanalyse oder Toleranzen der Parameter – ab. Über diese Faktoren berichtet der Prof. Michael Brand in [13]. Hier wird prinzipiell über Diskretisierungsfehler berichtet, weil es bereits auf den anderen Faktoren bei der Berechnung gut aufgepasst wurde. Der Diskretisierungsfehler entsteht, weil die FEM ein kontinuierliches Problem, das in einem unendlichen Funktionsraum definiert ist, durch eine endliche Anzahl von Funktionen und Knotenpunkten approximiert. Dies führt zu einer Diskretisierung, die unvermeidlich Rundungsfehler erzeugt. Das gleiche Phänomen ist aber bei der Implementierung im Matlab der analytischen Lösung auch zu sehen. Die beiden letzten roten Punkten auf der vorherigen Abbildung (Abbildung 40) entsprechen die beiden roten Elemente auf der folgenden Abbildung (Abbildung 41b). Es ist zu erkennen, dass die FEM-Lösung auf diese Stelle einen maximalen thermischen Diskretisierungsfehler von ca. $3,96 \cdot 10^{-7} K$ vorweist. Die Betrachtung der Wärmestromverteilung in den folgenden Abbildung 41a) und Abbildung 41c) ergibt, dass an der Ecke bei $(x = 0, y = h_1)$ eine starke Temperaturänderung entsteht. Dies ist die Folge davon, dass das FEM-Verfahren versucht, den konstanten Wärmestrom (bei $x = 0$ und $0 < y < h_1$) und die adiabatischen Randbedingung (bei $x = 0$ und $h_1 < y < h_1 + h_2$) an denselben Rand ($x = 0$) abzubilden. Aussehen von allen dieser Faktoren kann dann gesagt werden, dass bei gleichen Randbedingungen, die analytische und FEM-Lösungen im Klebeschichtbereich die gleichen Werte mit einem maximalen Fehler von ca. $4 \cdot 10^{-5} W$ für den Wärmestrom ergeben würden.

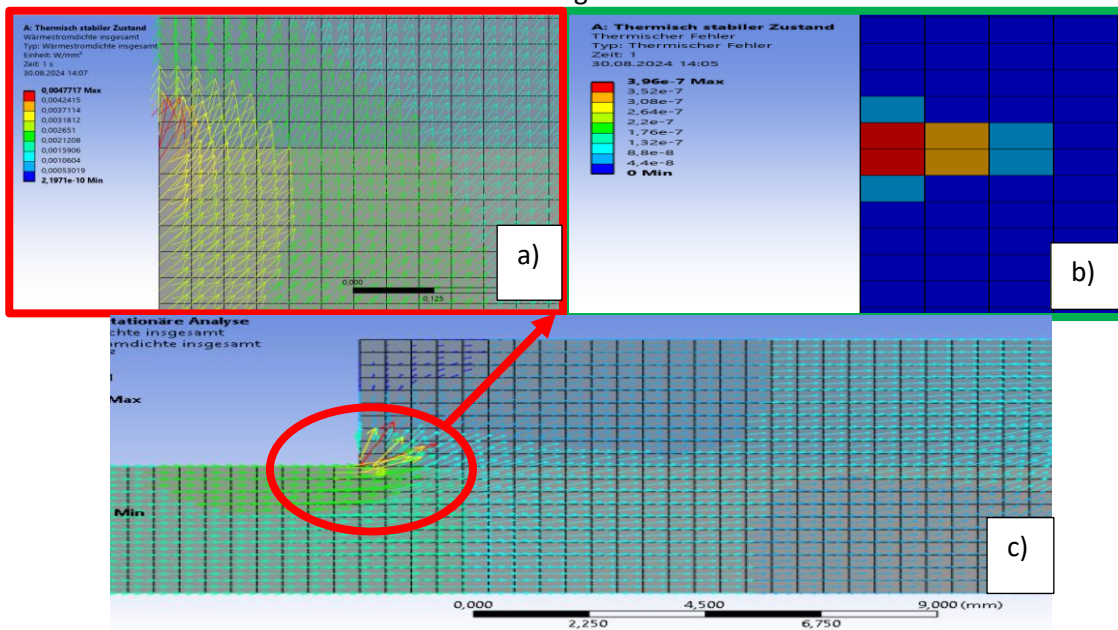


Abbildung 41: Diskretisierungsfehler der FEM-Lösung. a) und c) Wärmestromverteilung an der Ecke $x = 0, y = h_1$; b) Thermischer Fehler der FEM-Lösung

4.2. Qualitativer Vergleich der verschiedenen Lösungen

Im Laufe der Arbeit wurden drei verschieden Verfahren, die unterschiedliche Ansätze zur Lösung des Problems anbieten, genauer untersucht: die FEM-Lösung (als Referenzlösung bezeichnet); die analytische Lösung; und die FDM-Lösung. Weil für diese Arbeit nur der geklebte Bereich relevant ist, wird nur diese betrachtet. Dafür wurden die folgenden Parameter für die drei Verfahren eingesetzt:

- Wärmefluss: $Q = 0.05 W$
- Wärmeleitfähigkeit: $\lambda = 37,15 \frac{W}{m \cdot K}$
- Breite des Laminats : $h_1 = h_2 = 4.75 mm$
- Festgelegte Temperatur am rechten Rand des SLJ: $T_{sink} = 300 K$
- Klebeschichtlänge: $L = 10 mm$

- Gesamtlänge des Laminats $L + l = 50\text{mm}$, wobei l die Länge des Verlängerungsbereich des SLJ ist.

Um den analytischen Wärmestrom abzubilden, wurde aus der Gleichung (E 36) mittels Fourier-Gleichung den folgenden Wärmestrom berechnet:

$$q_{M1}(x) = -\frac{Q}{e(h_1 + h_2)} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} E_{n1} \omega_n (\cosh(\omega_n x) - \tanh(\omega_n L) \sinh(\omega_n x)) \cos(\omega_n y),$$

$$q_{M1}(y) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} E_{n1} \omega_n (\sinh(\omega_n x) - \tanh(\omega_n L) \cosh(\omega_n x)) \sin(\omega_n y),$$
(E 37)

$$\text{wobei } \omega_n = \frac{\pi n}{h_1 + h_2}; E_{n1} = -\frac{2Q(h_1 + h_2)}{h_1 \lambda e (n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi h_1}{h_1 + h_2}\right)$$

und

$$q_{M2}(x) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} F_n \omega_n \sinh(\omega_n x) \cos(\omega_n y); q_{M2}(y) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} F_n \omega_n \cosh(\omega_n x) \sin(\omega_n y),$$

$$\text{wobei } \omega_n = \frac{\pi n}{h_1 + h_2}; \text{ und}$$
(E 38)

$$F_n = \frac{2}{(h_1 + h_2) \cosh\left(\frac{\pi n L}{h_1 + h_2}\right)} \int_0^{h_1 + h_2} f(y') \cos\left(\frac{n\pi y'}{h_1 + h_2}\right) dy' \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

daher

$$q_M(x) = q_{M1}(x) + q_{M2}(x)$$

$$q_M(y) = q_{M1}(y) + q_{M2}(y)$$

$$q_M = \sqrt{q_M(x)^2 + q_M(y)^2}$$
(E 39)

Es wurde dann im Matlab die Gleichung (E 39) programmiert (siehe Anhang) und die folgenden Abbildungen zeigen die Darstellung des Betrags des berechneten Wärmeflusses mit den drei Verfahren.

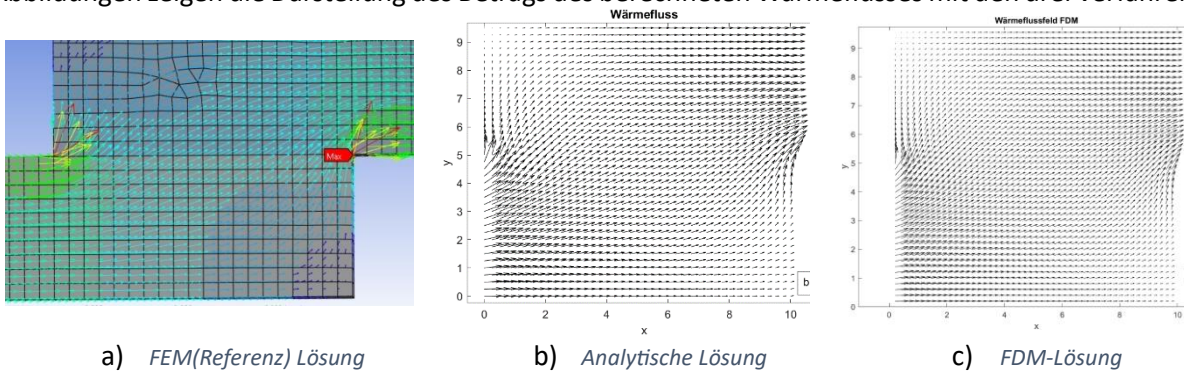


Abbildung 42: Wärmeflussverteilung der drei Verfahren in dem geklebten Bereich des SLJ

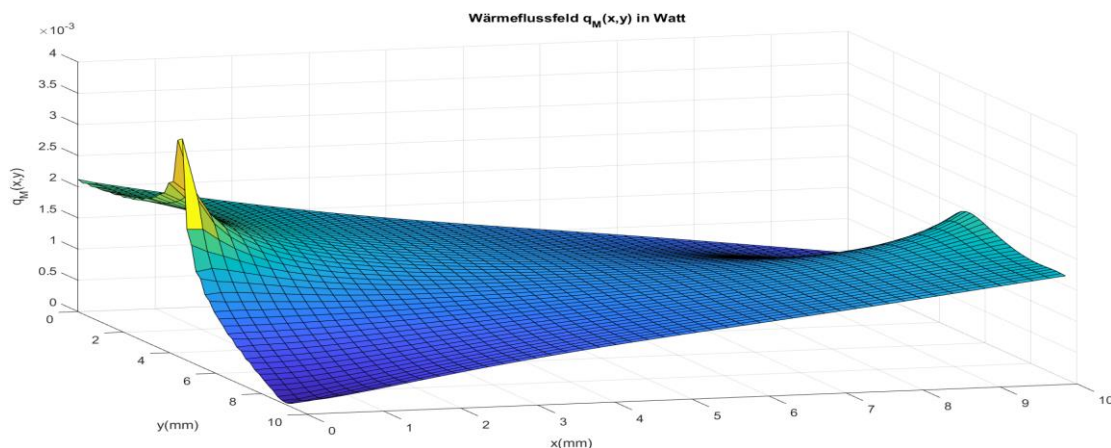


Abbildung 43: Wärmestromfeld der analytischen Lösung

Bei Betrachtung der drei Darstellungen ist zu bemerken, dass die Verläufe der drei Verfahren ähnlich aussehen. Auf der linken Seite des geklebten Bereichs bei $(x = 0, 0 < y < h_1)$ (bzw. $(x = L, h_1 < y < h_1 + h_2)$) bemerkt man, dass die Pfeile alle ins Innere (bzw. Äußere) des Gebiets gerichtet sind. Dies entspricht der Randbedingung des hineinkommenden (bzw. herauskommenden) Wärmeflusses von dem linken Verlängerungsbereich (bzw. aus dem geklebten Bereich) des SLJ. Bei $(x = 0, h_1 < y < h_1 + h_2)$ (bzw. $(x = L, 0 < y < h_1)$) sind die Pfeile nach oben und vertikal ausgerichtet. Dieses Verhalten entspricht den adiabatischen Randbedingungen an diesen Rändern. Die Pfeile auf der oberen $(0 < x < L, y = h_1 + h_2)$ und unteren $(0 < x < L, y = 0)$ Seite sind alle horizontal und nach rechts gerichtet und charakterisieren die adiabatischen Randbedingungen an diesen Rändern. Die knapp an den Ecken $(x = L, y = 0)$ und $(x = 0, y = h_1 + h_2)$ im Betrag kleinen Pfeile zeigen die geringere Änderung der Temperatur und deshalb die geringere Werte des Wärmestroms.

Zusammengefasst kommt der Wärmestrom bei $(x = 0, 0 < y < h_1)$ in den inneren Bereich des geklebten Bereiches des SLJ hinein und läuft parallel zu den Rändern und kommt bei $(x = L, h_1 < y < h_1 + h_2)$ aus dem Bereich für die drei Verfahren heraus

Im Vergleich der drei Lösungen untereinander fällt eine lokal starke Wärmestromversammlung an den Ecken $(x = 0, y = h_1)$ auf (siehe Abbildung 43). Diese sind auf lokale Effekte wie unterschiedliche Randbedingungen (adiabatisch und konstanter Wärmestrom) auf demselben Rand zurückzuführen (siehe §§4.1).

Betrachtet man nur die Wärmeflussverläufe, kann zusammengefasst gesagt werden, dass die Lösungen qualitativ übereinstimmen. Nicht außer Acht gelassen werden sollte der Temperaturfeld, insofern dass der nicht nur die Gradient-, sondern auch die Temperaturabweichungen schildert. Auf der Abbildung 44 sind die Temperaturverteilungen der drei Verfahren dargestellt.

Die dargestellten Temperaturverläufe zeigen eine relativ glatte, stetige Verteilung über die Fläche. Dies deutet darauf hin, dass die Temperatur in diesem System graduell sanft abnimmt. Die Kurven verlaufen gleichmäßig von höheren Temperaturwerten (im Bereich von 313,5 K) zu niedrigeren Werten (um 311,5 K). Die analytische Lösung zeigt eine glatte, kontinuierliche Verteilung, die eng an den anderen beiden Modellen anliegt. Die Ähnlichkeit der Muster zwischen den drei Lösungen zeigt, dass alle Modelle das gleiche physikalische Verhalten reproduzieren. Eine relative Abweichung zwischen den analytischen (bzw. FDM-) und FEM-Verläufen an einigen Stellen sind aber zu erkennen. Besonders in der Nähe des Punktes $(x = L, y = 0)$, wo die FEM-Lösung knapp größer als die analytische (bzw. FDM-) Lösung ca. 0,207K ist. Diese können auf unterschiedliche Modellierungsansätze zurückgeführt werden. Eine davon ist die Annahme des mathematischen Modells am rechten Rand des geklebten Bereichs des SLJ für die analytische Berechnung.

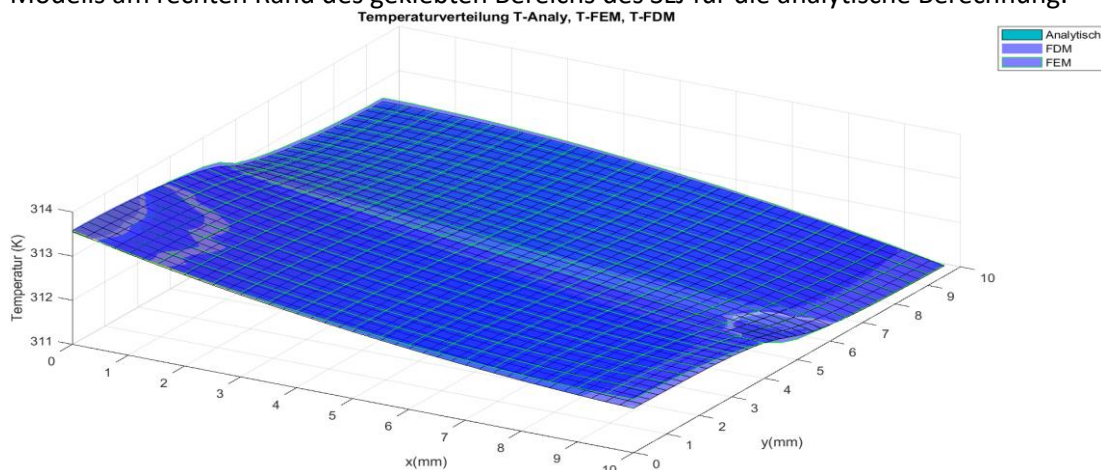


Abbildung 44: Temperaturverteilung der analytischen, FEM- und FDM-Lösung in dem geklebten Bereich des SLJ

Die Genauigkeit und Stabilität der Lösung hängen insbesondere von der Gittergröße, den zeitlichen und räumlichen Diskretisierungen, den Stabilitätskriterien sowie den angewandten Iterationsverfahren bei der drei Verfahren ab. Da die FDM-Lösung nicht Teil der Aufgabestellung ist, wird diese im Folgenden

nicht mehr im Detail betrachtet. Über die Genauigkeit und Stabilität der FDM- Lösung berichtet viel Prof. Dr. -ing. Roger Grundmann von der Fakultät Maschinenwesen der Technische Universität Dresden in [14].

4.3. Quantitativer Vergleich der analytischen und FEM-Lösungen

Die aus der analytischen herausgefundenen Lösung ist von drei relevanten Parametern abhängig, nämlich:

- Der Quotient Wärmestrom (Q) durch Wärmeleitfähigkeit des Laminats (λ),
- Die Länge des geklebten Bereichs
- Die Höhe/Breite des Laminats

Um den Einfluss dieser Parameter auf die finale analytische Lösung quantitativ abzuschätzen, wird eine Parameterstudie durchgeführt, indem die Abweichung der analytischen Lösung von der FEM-Lösung mittels Änderung der Werte dieser verschiedenen Parameter bestimmt wird. Hierfür werden die Parameter wie in die folgende Tabelle variiert und in jedem Fall bleiben die anderen Parameter der analytischen und FEM-Lösungen konstant. Weil nur der Wärmestrom für diese Arbeit relevant ist, wird im Folgenden nur den Betrag davon analysieren und nicht mehr den Temperaturfeld.

Tabella 2: Wertebereich der Parameterstudie

Parameter	Startwert	Endwert	Inkrement
Q (W)	0,01	0,05	0,01
L (mm)	10	18	2
H_1 (mm)	0,75	4,75	1

Gezielt ist die Sensibilität der herausgefundenen analytischen Lösung gegen die verschiedenen getroffenen Annahmen zu ermitteln. Betrachtet wird im Folgenden der Betrag des Wärmeflusses an den Rändern des geklebten Bereichs des SLJ ($x = 0, x = L, y = 0$ und $y = h_1 + h_2$) und dem Mittelbereich bei $y = h_1$. Besonders relevant für die Abbildung der Analogie zwischen dem mechanischen und thermischen Verhalten des SLJ ist der Wärmestrom auf der Ebene $y = h_1$. Hier im Abbildung 45 zur Erinnerung an das Koordinatensystem.

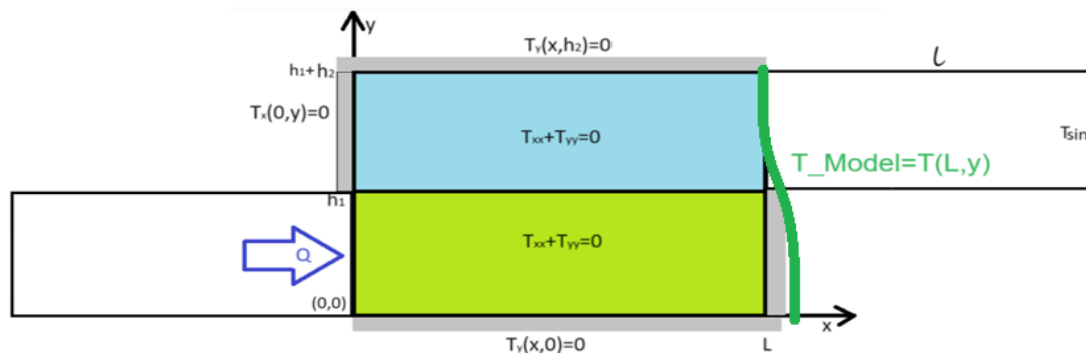


Abbildung 45: SLJ und finale verschiedene Randbedingungen

4.3.1. Variation des Wärmestroms Q

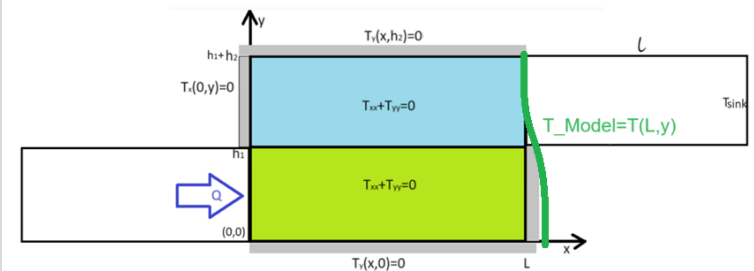
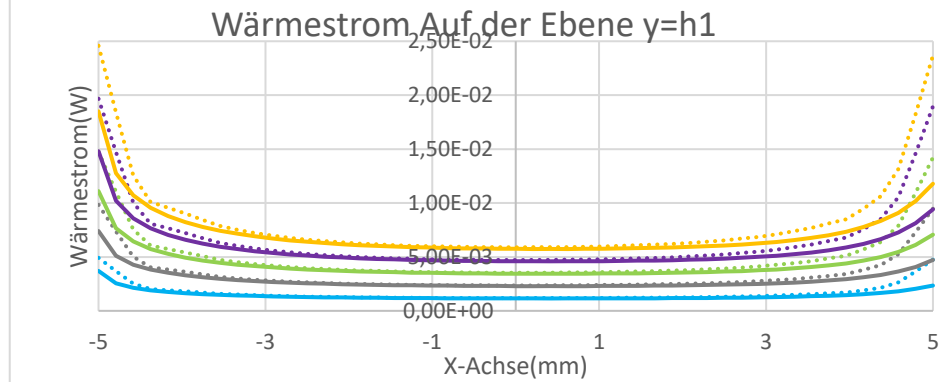
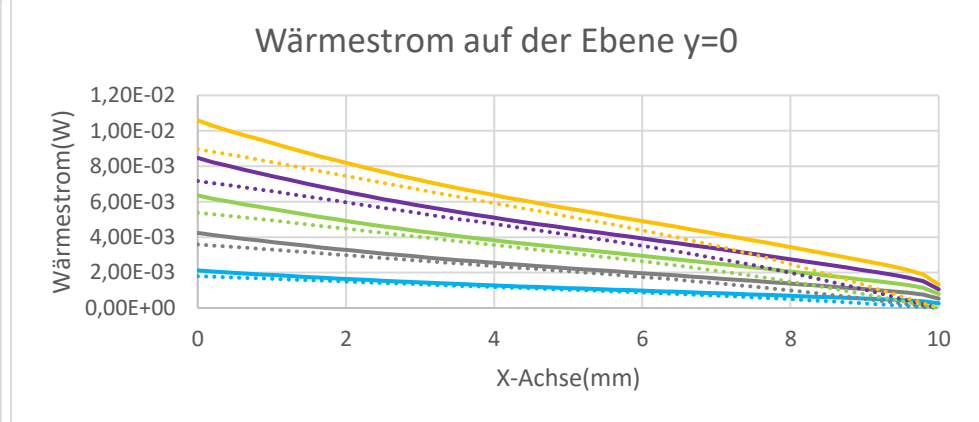
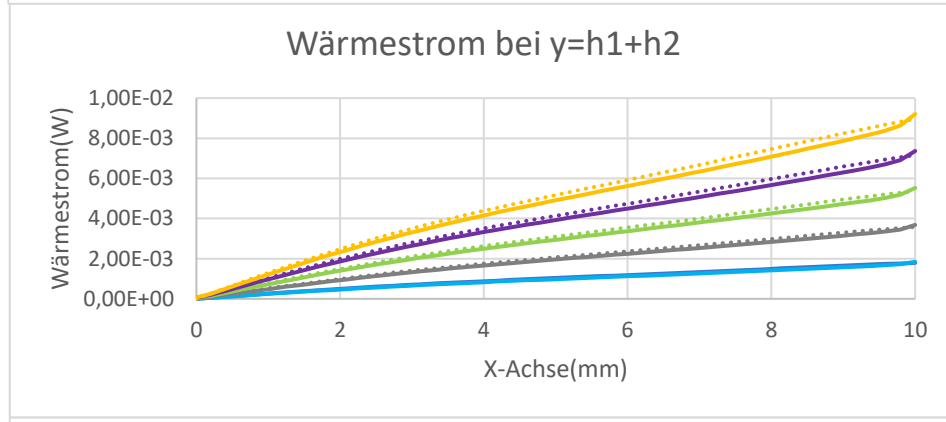
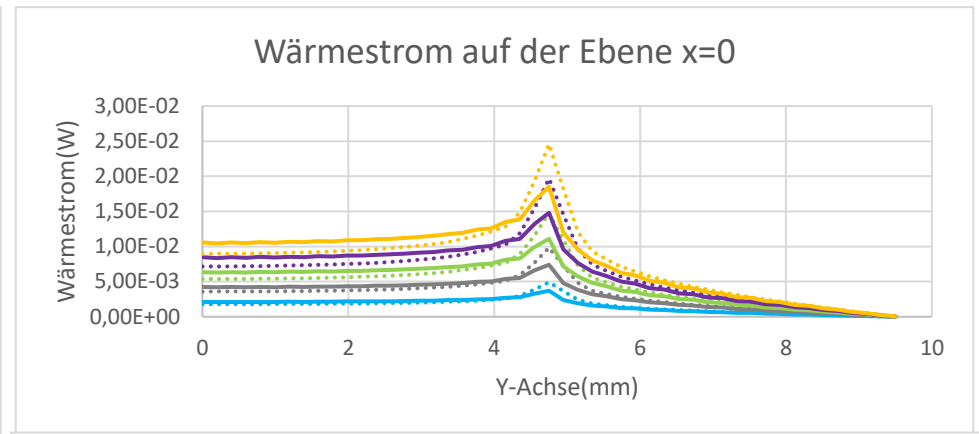
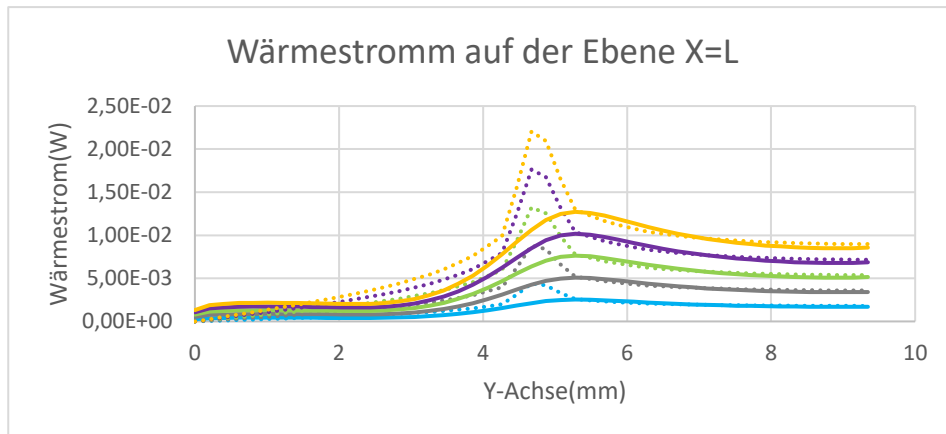
Die folgenden Diagramme stellen das Verhalten des Wärmeflussfeldes an den Rändern des geklebten Bereichs des SLJ bei Änderung des am linken Rand $x = -l$ konstant angenommenen hineinkommenden Wärmestroms dar. Die Idee hier ist zu überprüfen, wie gut oder schlecht verhält sich die analytische Lösung mit der getroffenen Annahme der am linken Rand konstanten Wärmestrom. Die Diagramme auf der Ebenen $x = 0$ und $x = L$ zeigen deutliche Spitzenwerte im geklebten Bereich (ungefähr bei $y=h_1$), sowohl bei $x = 0$ als auch bei $x = L$. Diese Spitzen deuten auf signifikante Wärmeflussänderungen in diesem Bereich hin, was erwartet wird, da diese Stelle genau den Materialübergang und den adiabatischen und konstanten Wärmestromrandbedingung entspricht (siehe Abbildung 41b). Die FEM-Lösung zeigt auf der Ebene $x = L$ eine etwas höhere Spitzenamplitude im Vergleich zur analytischen Lösung. Besonders bei höheren durchlaufenden Wärmeströmen (z.B. $Q = 0.05W$) ist dieser Unterschied deutlich. Diese Abweichung kommt von der Tatsache, dass die

analytische Lösung mit trigonometrischen Funktionen, die diesen Bereich glätten, abgebildet ist. Während auf der Ebene $x = L$ an der Stelle $y = 0$ eine relative leichte Abweichung und an der Stelle $y = h_1 + h_2$ die Überlappung der Lösungen eine relativ gute Übereinstimmung zu sehen ist, ist es das Gegenteil auf der Ebene $x = L$. Die große Abweichung in der Nähe der Punkte $(x = 0, y = 0)$ und $(x = L, y = 0)$ ist die Folge der Annahme über den hinein- und bzw. herauskommenden konstanten Wärmestrom und das mathematische Modell für die Berechnung der analytischen Lösung.

An den Rändern bei $y = 0$ (bzw. $y = h_1 + h_2$) zeigt der Wärmestrom einen abnehmenden (bzw. zunehmenden) Verlauf entlang der x-Achse. Dieser Trend ist in allen betrachteten Wärmeströmen vorhanden, unabhängig von der verwendeten Methode (FEM oder analytisch). Im Vergleich zu der Stelle $(x = 0, y = 0)$, wo die FEM-Lösung leicht unter der analytischen Lösung mit den höheren Werten des durchlaufenden Wärmestroms liegt, ist diese bei $y = h_1 + h_2$ der Gegenteil. Auf der Ebene $y = h_1 + h_2$ stimmen die FEM- und die analytischen Lösungen knapp gut überein, was auf eine vergleichbare Modellierung des oberen Randbereichs hinweist. Der Anstieg in dem Fall $(y = h_1 + h_2)$ des Wärmestroms entlang der x-Achse deutet darauf hin, dass sich im oberen Bereich eine signifikante Wärmekonzentration aufbaut.

An den Rändern der Ebene $y = h_1$, also $(x = 0, y = h_1)$ und $(x = L, y = h_1)$, ist es eine große Abweichung zwischen den beiden Verfahren zu bemerken. Im Mittelbereich aber verlaufen die Kurven der beiden Verfahren in weitgehender Übereinstimmung entlang der x-Achse. Die Abweichungen an den Rändern $(x = 0, y = h_1)$ und $(x = L, y = h_1)$ ist auf den Diskretisierungsfehler der FEM-Lösung und die getroffenen Annahmen zur analytischen Berechnung zurückzuführen.

Trotz der unterschiedlichen Methoden zeigen alle Diagramme ähnliche Trends, was auf die grundsätzliche Korrektheit und Verlässlichkeit der analytischen Lösung hinweist. Jedoch ist ersichtlich, dass wo die analytische Lösung die Werte glättet, die FEM-Lösung eine größere Sensibilität für lokale Wärmeflussänderungen hat. Dies gilt besonders bei höheren durchlaufenden Wärmeströmen. Die Abweichungen gegenüber einer Änderung des im geklebten Bereich durchlaufenden Wärmestroms zwischen den analytischen und FEM-Lösungen an den Rändern des geklebten Bereiches des SLJ basieren grundsätzlich auf den getroffenen Annahmen des konstanten Wärmestromes und mathematischen Modells aufgrund nicht genügend bekannter Randbedingungen. Ferner ist es zu betonen, dass Beim allgemeinen Vergleich der Abweichungen zwischen der analytischen und FEM-Lösung ergibt sich heraus, dass die Annahme des mathematischen Modells im Vergleich zu der Annahme mit konstanten Wärmestrom größere Abweichungen vorweist. Dies ist besonders zwischen den Ebenen $x = 0$ und $x = h_1$ oder auf der Ebene $y = h_1$ zu sehen.



- FEM (Q=0,01W) — Analytisch (Q=0,01W) FEM (Q=0,02W)
- Analytisch (Q=0,02W) FEM (Q=0,03W) — Analytisch (Q=0,03W)
- FEM (Q=0,04W) — Analytisch (Q=0,04) FEM (Q=0,05W)
- Analytisch (Q=0,05W)

Abbildung 46: Wärmestrom an den Rändern für verschiedene Werte des durchlaufenden Wärmestroms im SLJ

4.3.2. Variation der Länge L des geklebten Bereiches

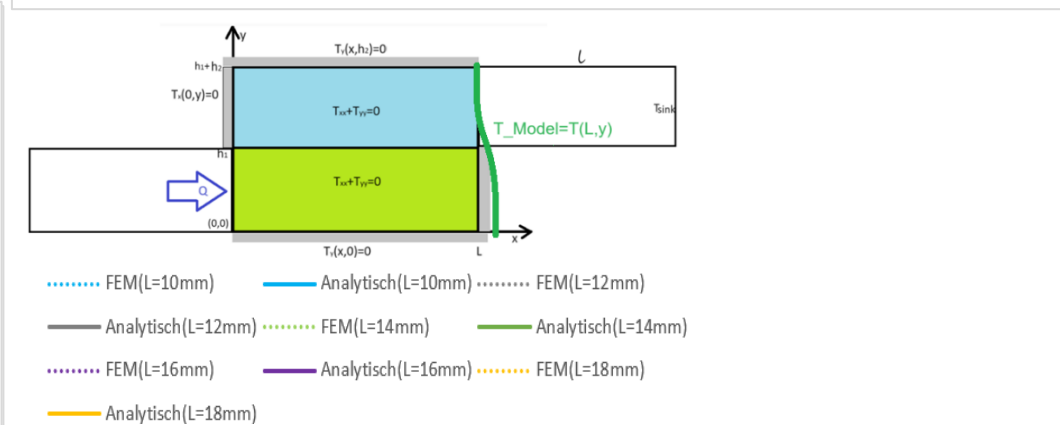
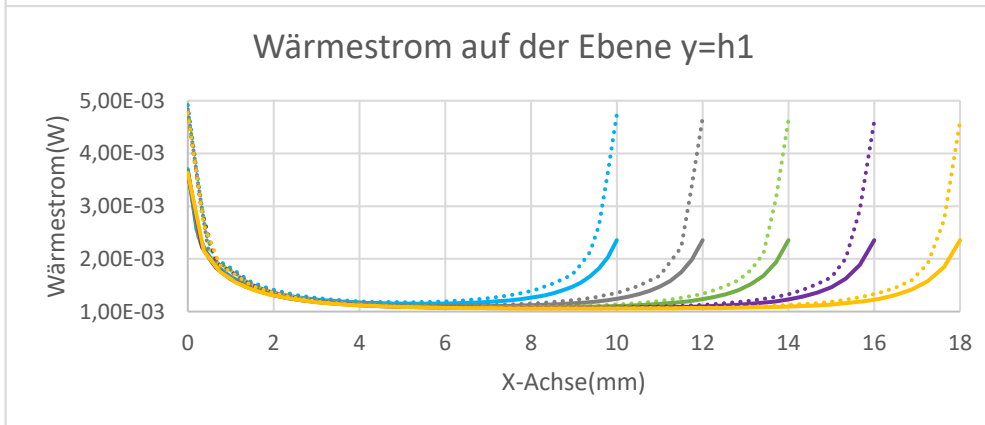
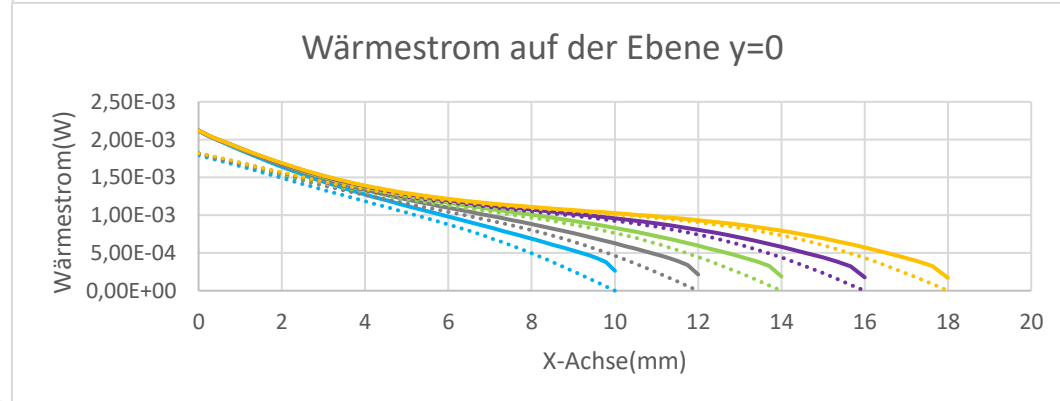
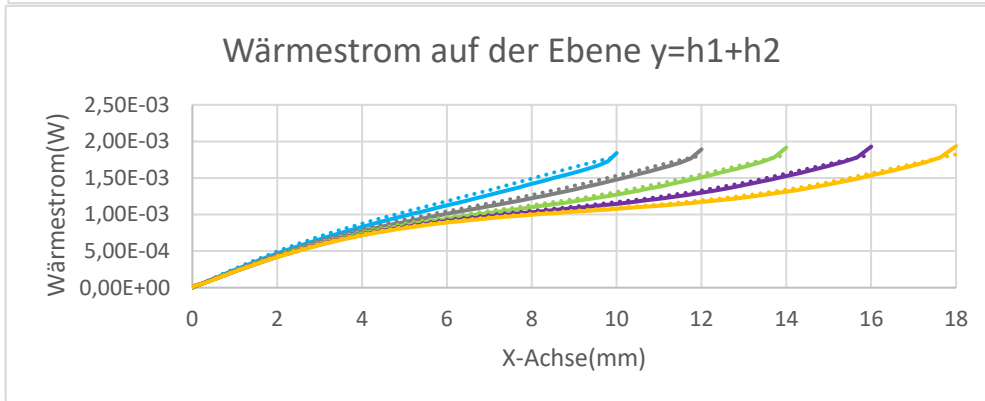
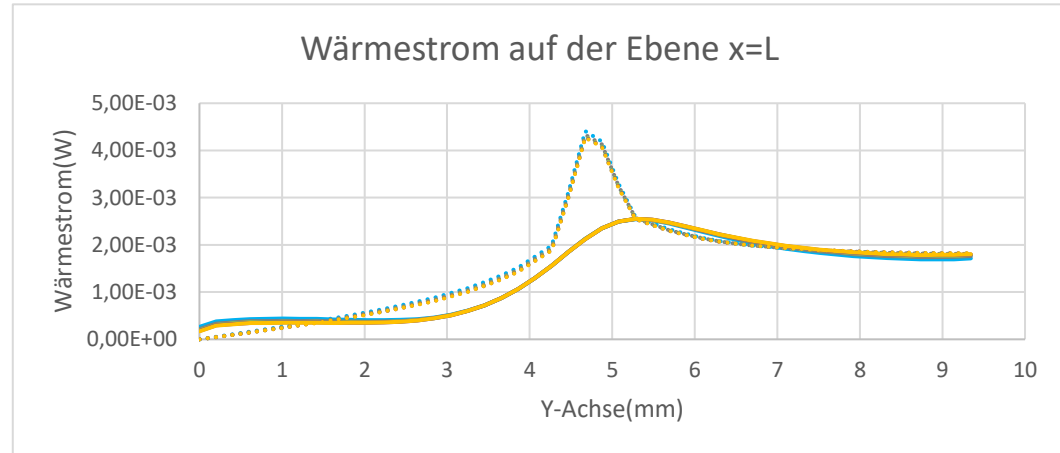
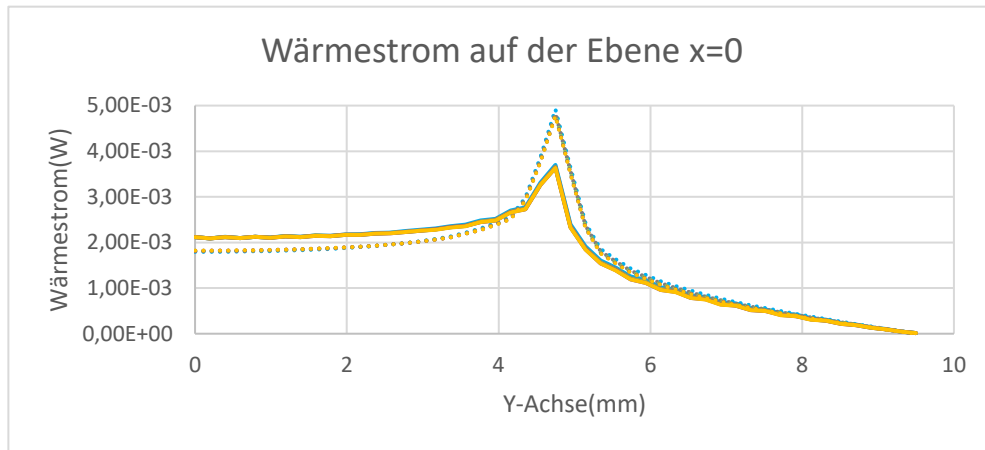
Die in Abbildung 47 dargestellten Diagramme zeigen den Betrag des Wärmestroms an verschiedenen Rändern (bei $x = 0, x = L, y = h_1 + h_2$, und $y = 0$) und bei $y = h_1$ für unterschiedliche Werte der Klebeschichtlänge (L) des geklebten Bereiches (siehe Tabelle 2). Sowohl der Betrag des FEM- als auch die analytische Wärmestroms ist dargestellt. Hier ist das Ziel zu überprüfen, wie sich der analytische Wärmestrom bei Änderung der Länge des Klebeschichtbereiches verhält.

Auf die Ebenen $x = 0$ und $x = L$ zeigen sich deutliche Maxima im Wärmestrom an der Stelle $y = h_1$, die im Bereich des geklebten Teils des Modells auftreten. Es ist zu bemerken, dass sowohl die FEM-Lösung als auch die analytische Lösung mit der Variation der Klebeschichtlänge sehr kleine Werteänderung vorweisen. Wie bei der Variation des konstant angenommenen Wärmestroms ist es hier auch zu erkennen, dass das mathematische Modell relativ große Abweichungen im Vergleich zu der Annahme mit dem konstanten Wärmestrom ergibt. Besonders auf der Ebene $x = L$ ist dies gut zu erkennen. Dort sind die analytischen Kurven, wo die FEM-Lösung Spitzenwerte zeigt, eher abgerundet. Das Phänomen ist auf der Ebene $x = 0$ aber nicht zu sehen.

Die Diagramme auf der Ebene $y = h_1 + h_2$ (bzw. $y = 0$) zeigen einen ansteigenden (bzw. abnehmenden) Verlauf des Wärmestroms entlang der x -Achse. Dieser Anstieg (bzw. Abnahme) ist in beiden Lösungsmethoden zu beobachten, wobei die Unterschiede zwischen FEM und analytischer Lösung vor allem bei längeren Klebeschichten deutlicher werden. Es sind auf der Ebene $y = h_1 + h_2$ mit den ansteigenden Werten von x leicht höhere Wärmestromwerte von der FEM-Lösung im Vergleich zu der analytischen Lösung zu sehen, während bei $y = 0$ die FEM-Lösung mit ansteigenden Werten von x geringeren Werten im Vergleich zu der analytischen Lösung liefert. Das Phänomen entsteht, weil die Ebene $y = 0$ direkt von den groben Annahmen mit dem konstanten Wärmestrom und dem mathematischen Modell betroffen ist. Was bei $y = h_1 + h_2$ nicht der Fall ist, weil diese Ebene nur von der Annahme des mathematischen Modells betroffen ist. Darüber hinaus ist es zu bemerken, dass am rechten Rand bei $x = L$ sind die Werte des Wärmestroms nicht null sondern entsprechen etwas $1,6 \cdot 10^{-4} W$. Das heißt obwohl das mathematische Modell das physikalische Verhalten gut abbildet, fließt trotzdem ein kleiner Wärmestrom an der Ecke ($x = L, y = 0$) mit dem mathematischen Modell.

Die Kurven auf der Ebene $y = h_1$ zeigen ein gemeinsames Muster, bei dem der Wärmestrom am Anfang (bei niedrigen x -Werten) relativ hoch ist, dann stark abfällt, ein Minimum erreicht und schließlich wieder ansteigt, wobei die Höhe des Anstiegs von der Länge der Klebeschicht am linken Rand ($x = 0$) und rechten Rand ($x = L$) ziemlich gleichbleibt und ist relativ höher am linken als am rechten Rand. An der Ecke, also in der Nähe von ($x = 0, y = h_1$) und ($x = L, y = h_1$), weisen die FEM-Lösungen (gepunktete Linien) etwas größere Wärmeströme im Vergleich zu den analytischen Lösungen (durchgezogene Linien) auf. Dies ist ein Indiz dafür, dass in diesem Bereich die Wärmeverteilung aufgrund der angenommenen analytischen Randbedingungen stark beeinflusst wird und die FEM-Lösung eine extreme Empfindlichkeit gegen die Wärmeflussänderung hat (siehe §4.1). Wenn man sich von diesen Rändern entfernt, passen die analytische und die FEM-Lösung relativ gut zueinander.

Die Diagramme zeigen insgesamt, dass sowohl die FEM- als auch die analytische Lösung auf den Ebenen $x = 0$ und $x = L$ weitergehend unverändert bleiben. Auf den Rändern $y = 0$ und $y = h_1 + h_2$ und auch bei $y = h_1$ ist allgemein eine Konservierung der Musterverläufe und an der Ecke ($x = L, y = 0$) fließt etwa ein kleiner Wärmestrom raus mit dem mathematischen Modell. Es besteht trotzdem eine relativ leichte Abweichung zwischen den FEM- und den analytischen Lösungen. Die Variation der Länge der Klebeschicht hat dann, im Vergleich zu der Variation des Quotienten Wärmestrom durch Wärmeleitfähigkeit, einen geringeren Einfluss auf den Wärmestromverlauf.



50 } Abbildung 47: Wärmestrom an den Rändern für verschiedene Werte der Klebeschichtlänge im SLJ

4.3.3. Variation der Breite des unteren Laminats

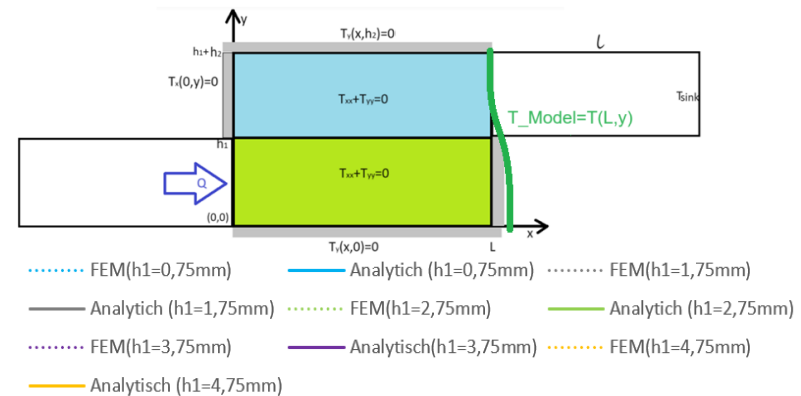
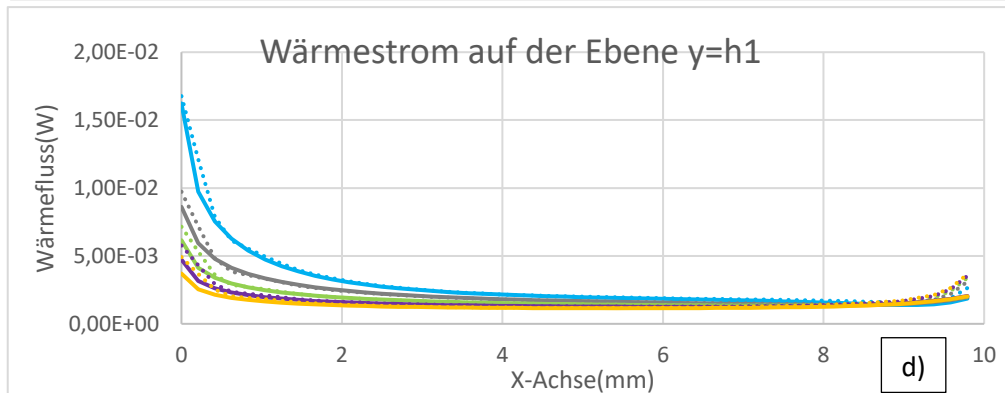
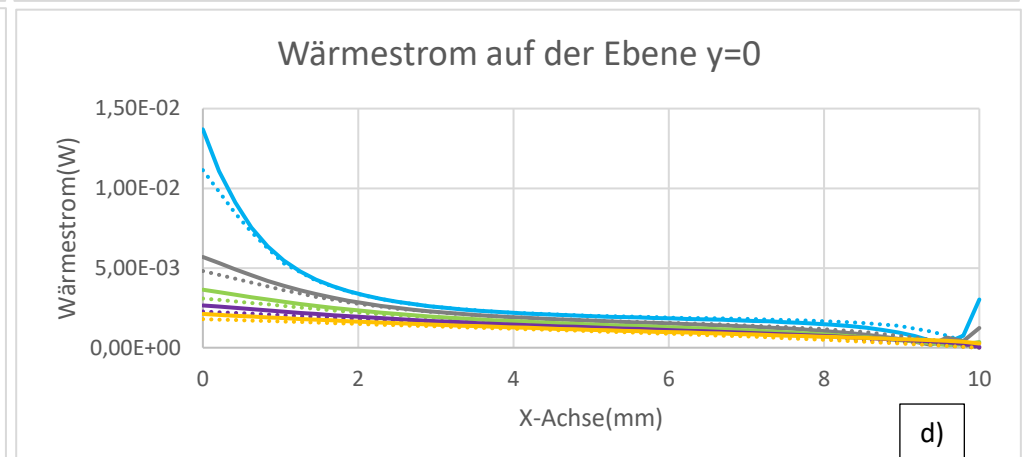
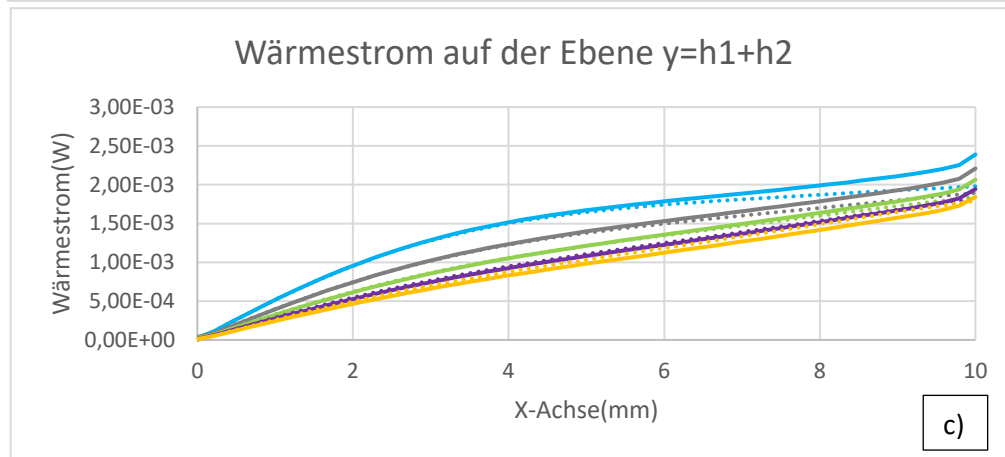
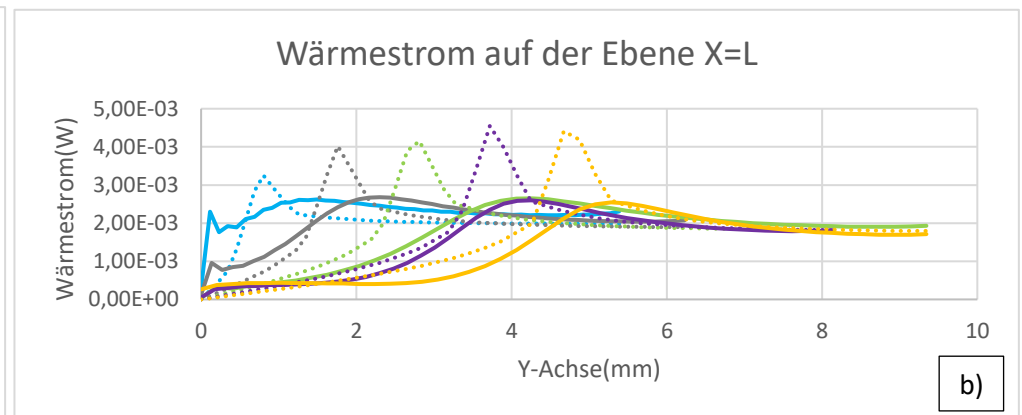
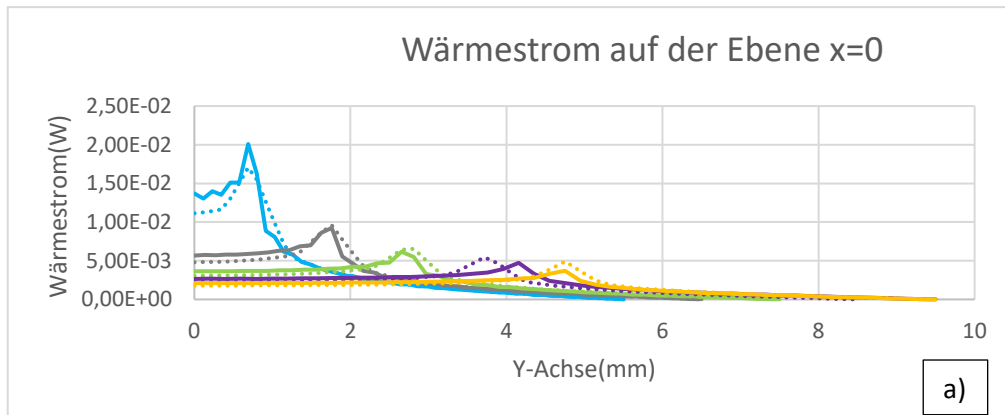
Die folgenden Diagramme stellen den Einfluss der Breite des Laminats h_1 auf die Lösungen dar. Dafür bleibt h_2 konstant. Ziel ist es das Verhalten der analytischen Lösung für unsymmetrischen Werte der Breite des Laminats zu untersuchen. Beide Diagramme auf den Ebenen $x = 0$ und $x = L$ (Abbildung 48a und Abbildung 48b) zeigen, dass der Wärmestrom in der Mitte des Klebebereichs (um $y = h_1$) am höchsten ist, während er zu den Rändern (bei niedrigen und hohen Werten auf der Y-Achse) deutlich abnimmt. Die Wärmeströme auf den Ebenen $x = 0$ und $x = L$ erreichen ihren Höhepunkt in der Nähe vom $y = h_1$ und weisen einen charakteristischen Peak auf. Die FEM-Kurven (gepunktet) zeigen in den meisten Fällen höhere Wärmeströme als die analytischen Kurven (durchgezogen). Dies deutet darauf hin, dass FEM lokale Effekte oder Randbedingungseinflüsse stärker beeinflusst als die analytische Lösung. Es ist darüber hinaus zu bemerken, dass die analytische Lösung im Vergleich zu der FEM-Lösung relativ glatte Kurve abbildet. Ein zusätzlicher Beweis dafür, dass die in der analytischen Lösung trigonometrischen Funktionen einen Glätteeffekt auf die Lösungen haben. Ferner während auf der Ebene ($x = 0$) der Musterverlauf von der analytischen und FEM-Lösung beibehalten ist, ist es bei ($x = L$) nicht der Fall. Die Kurve bei ($x = L$) sind eher geglättet und nicht hypersensibel an der Stelle ($y = h_1$). Einen Beweis noch dafür der Idealisierung mit der Annahme des mathematischen Modells.

Auf der Ebene $y = h_1 + h_2$ (Abbildung 48c) ist ein ansteigender Wärmestrom von links nach rechts (auf der X-Achse) zu sehen. Der Wärmestrom beginnt bei ungefähr null und nimmt fast linear zu, wobei er in der Nähe von $x = L$ also am Rand mit der Annahme des mathematischen Modells anfängt, abzuweichen. Es ist zu betonen, dass die Abweichung mit kleineren Werten von h_1 (blau Kurve Abbildung 48c) immer größer wird aber je größer ist h_1 , desto kleiner wird die Abweichung. Die FEM-Lösung liefert im Vergleich zu der analytischen Lösung in diesen Fällen über den gesamten Bereich relativ geringere Werte.

Auf der Ebene $y = 0$ (Abbildung 48d) nimmt der Wärmestrom von links nach rechts (X-Achse) ab. Ähnlich wie bei $y = h_1 + h_2$ zeigt die FEM-Methode über den gesamten Bereich hinweg leicht kleinere Wärmeströme als die analytische Lösung. Auf den Stellen ($x = L, y = 0$) und ($x = L, y = h_1 + h_2$) ist eine Abknickung der analytischen Kurve nach oben zu sehen. Dies ist mehr oder weniger eine Folge des am rechten Rand definierten mathematischen Modells.

Auf der Ebene $y = h_1$ zeigt die Kurve zunächst einen starken Wärmestromannahme bei niedrigen X-Werten, gefolgt von einem relativ konstanten Abfall, und dann einen leichten Anstieg gegen Ende des Bereichs. Die FEM- und analytische Kurven zeigen eine deutliche Akkumulation des Wärmestroms an den linken $x = 0$ Randbereichen und eine gleichmäßige und sanfte Verteilung mit hohen X-Werte. Die FEM und analytische Lösung liefern hier im mittelbereich quasi die gleichen Werte.

Die FEM neigt dazu, höhere lokale Wärmeströme zu berechnen, insbesondere an den Randbereichen und in den Übergangsbereichen der Geometrie (zum Beispiel bei den Rändern $x = 0$ und $x = L$). Analytische Lösungen liefern oft glatte Kurven und können daher lokale Spitzen nicht erfassen. Die allgemeine Tendenz zeigt, dass FEM eine potenziell komplexere Darstellung der Wärmeströme liefert, während die analytischen Methoden eher aufgrund der getroffenen Annahme eine geglättete Version der physikalischen Realität an den Rändern $x = 0$ und $x = L$ darstellen. Aber obwohl die beiden Lösungen auf den Ebenen $x = 0$ und $x = L$ unterschiedliche Werte liefern, - was aufgrund der angenommenen Randbedingungen zu erwarten war - stimmen sie im Mittelstelle des geklebten Bereichs des SJL allgemeine zu. Also genau an der für diese Arbeit relevanten Stelle.



Kapitel 5. Diskussion

Besonders relevant für diese Arbeit ist das Verhalten des Wärmestroms im Klebeschichtbereich bei $y = h_1$. Es wird daher auf diese Stelle genau eingegangen und diskutiert. Gezielt hier ist das Analogieverhalten zwischen dem Schubspannungsverlauf und dem Wärmestromverlauf in dem geklebten Bereich eines SLJ.

Aus der Änderung der Breite eines Laminats ergeben sich die folgenden Darstellungen. Auf der Abbildung 49a steht den Verlauf der Schubspannung und auf der Abbildung 49b den Vergleich der analytischen und FEM- Lösungen für ungleiche Laminatbreite.

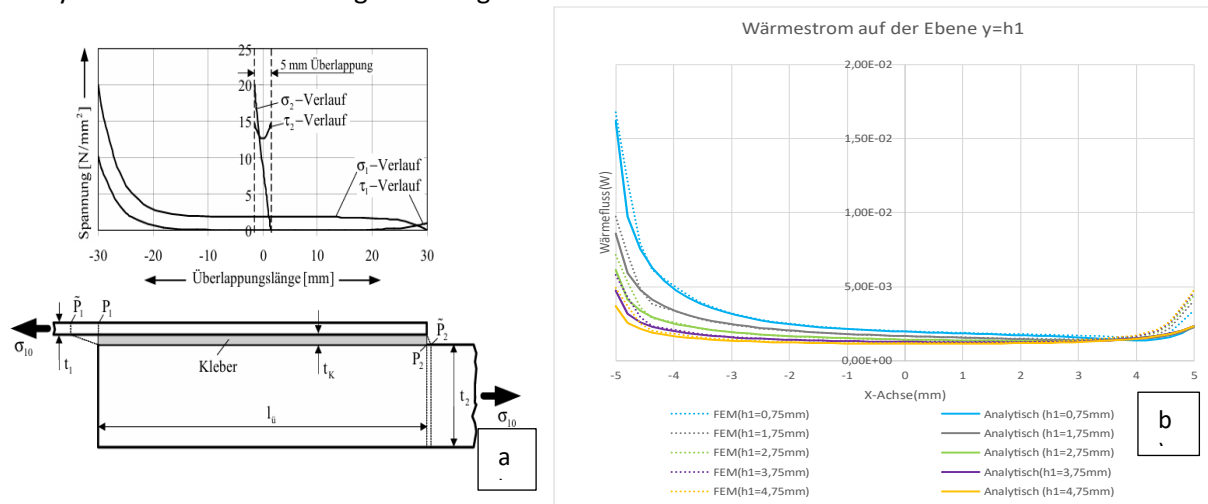


Abbildung 49: Vergleich der verschiedenen Lösungen für unterschiedliche Laminatbreite. a) Schubspannung [20] und b) Wärmestrom

Da das dickere Laminat in Abbildung 49a bei $x = L$ sehr dehnsteif ist, muss der Kleber nur eine kleine Verschiebung durch Schubverformung überbrücken. Auf der gegenüberliegenden Seite wird dem Kleber durch die große Dehnung des dünnen Fügeparts eine sehr hohe Schubspannung aufgezwungen. Dieses Verhalten ist auf dem Schubspannungsverlauf zu sehen, wo am linken Rand eine starke Schubspannung im Klebeschichtbereich und am rechten Rand relative geringere Schubspannung auftritt. Das gleiche Verhalten ist bei der thermischen Betrachtung auf der Abbildung 49b zu sehen. Der Wärmestrom versammelt sich stark am Anfang bei $x = -\frac{L}{2}$ und sinkt bis zu einem Minimum bei $x = 0$ und nimmt dann leicht zu. Interessant ist, dass die analytische Lösung bei Änderung der Breite eines den beiden Laminaten die gleichen Muster beibehält.

Bei Änderung der Klebeschichtlänge lassen sich die folgenden Abbildungen darstellen.

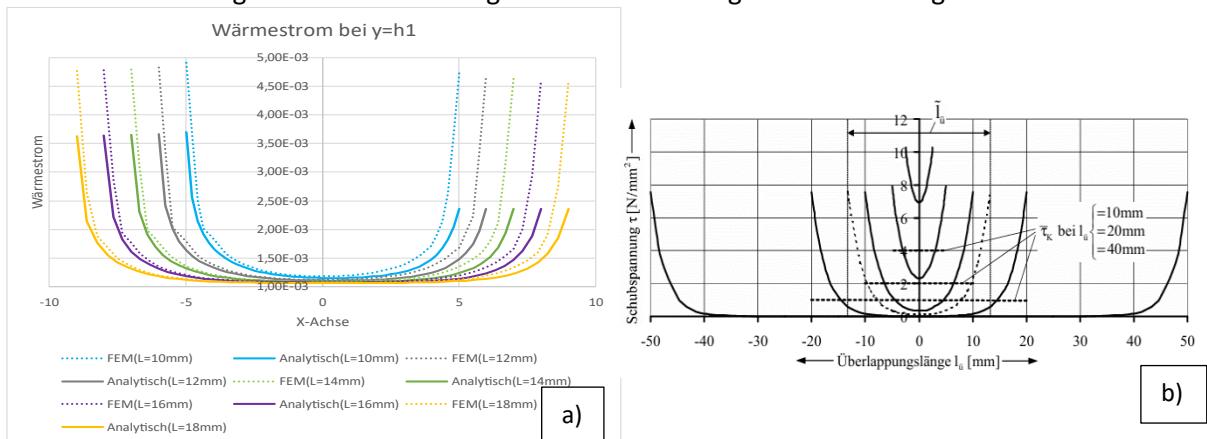


Abbildung 50: Finale Lösungen des Wärmestroms auf dem Klebeschichtbereich des SLJ in Abhängigkeit der Länge des Klebeschichtbereichs a) Vergleich der FEM und analytischen Lösung in Abhängigkeit von L; b) Änderung der Schubspannung bei Variationen von der Klebeschichtlänge [20]

Die Betrachtung der Kurven in Abbildung 50a ergibt, dass das Muster des Wärmestromverlaufs in der Klebeschichtebene ungefähr gleichbleibt, egal welche Berechnungsverfahren benutzt werden und unabhängig davon, welche Werte der Klebeschichtlänge eingesetzt wurden. Der Wärmestrom fängt an, sich zuerst stark zu akkumulieren und dann sinkt komplett bis zu einem Minimum ab und akkumuliert sich am herauskommenden Rand noch stark. Es ist eine große Abweichung an den Rändern zwischen die analytische und FEM-Lösung aufgrund der angenommenen Randbedingungen zu sehen. Dieser allgemeine gültige U-förmige Verlauf ist auch bei der Schubspannungsverteilung in Abbildung 50b zu sehen. Der Schubspannung ist an den Rändern relativ stark im Vergleich zu dem Mittelbereich. An den beiden Enden der Klebung sind die hohen Schubspannungsspitzen zu erkennen. Bei kurzen Überlappungen sind sie besonders hoch. Man erkennt, dass mit wachsender Überlappungslänge die mittlere Schubspannung sinkt. Die das Versagen auslösenden Spannungsspitzen bleiben jedoch in der vollen Höhe erhalten.

Vereinfacht man die Gleichung (E 1) von Schürmann aus [14], indem man die Fügeiteildehnsteifigkeiten gleichsetzt, also gleiche isotrope Materialien

$$\psi = \frac{G_{lam1} \cdot t_{lam1}}{G_{lam2} \cdot t_{lam2}} = 1$$

so erhält man einen Ausdruck, der sich gut zur Parameter-Diskussion eignet. Die Schubspannungsspitze entspricht:

$$\tau_{max} = \frac{F_x}{h} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{G_{lam} \cdot t_{lam}} \cdot \frac{G_a}{t_a}} \quad (E 40)$$

- $\tau_{max} \sim \frac{F_x}{h}$: Die Spannungsspitze ist direkt proportional zu der äußeren Kraft an den Fügeiteilen. Sie lässt sich einfach und am wirksamsten dadurch senken, indem man die Laminatbreite vergrößert. Das gleiche Verhalten ist bei der thermischen analytischen Lösung zu sehen (Abbildung 50 und Abbildung 49). Bei Erhöhung des Wärmestroms oder der Reduktion der Laminatbreite steigen die Wärmestromspitzen (die Maxima) an den Rändern an.
- $\tau_{max} \sim \sqrt{\frac{1}{G_{lam} \cdot t_{lam}}}$: Die Dehnsteifigkeit der Fügeiteile geht unproportional ein. Steife Fügeiteile – entweder infolge hohen G-Moduls oder infolge einer großen Fügeiteildicke – verursachen geringere Spannungsspitzen im Kleber als dehnweiche Fügeiteile. Vergleicht man dieses Verhalten mit den thermischen Eigenschaften, bemerkt man, dass die analytische Lösung unproportional zu der Wärmeleitfähigkeit ist. Also kleinere Werte der Wärmeleitfähigkeit entsprechen höheren Wärmeströmen im Material.

Ausgehend von der durchgeführten Arbeit hinsichtlich der Analogie zwischen thermischen und mechanischen Parametern könnte sich die folgende Tabelle in einem Single-Lap Joint ergeben.

Tabelle 3: Analogie zwischen mechanischen und thermischen Parametern eines Überlappungsverbindung

Mechanische Parameter	Thermische Parameter
Schubspannung τ	Wärmeflussdichte \dot{q}
Zugkraft (F_x)	Hinein- und Heraus Wärmestrom Q
Schubmodule G	Wärmeleitfähigkeit des Laminats λ

Kapitel 6. Fazit und Ausblick

Im Kapitel 1 wurde die Methode von Lange dargestellt, um die Analogie zwischen den mechanischen und thermischen Eigenschaften eines SLJ zu bilden. Daraus resultierte, dass diese nicht allgemein gültig war, weil sie von einem analytisch schwer schätzbaren Parameter abhängig war. Es wurde dann nach einer allgemeinen analytischen Lösung gesucht mit dem Ziel, das Verhalten des Wärmestroms in dem Klebeschichtbereich eines SLJ zu untersuchen. Weil die vorgegebenen Randbedingungen nicht zu einer analytischen Lösung geführt haben, war es notwendig, einige Annahmen zu treffen. Es wurde zuerst angenommen, dass der Wärmestrom im Eingang und Ausgang des SLJ konstant war. Aber diese Lösung führte zu einem unphysikalischen Verlauf des Wärmestroms. Grund dafür war, dass es keine Dirichlet-Randbedingungen für das Problem gab und daher keinen Temperaturoffset (siehe Abbildung 31). Um dieses zu korrigieren und mit der analytischen Berechnung weiterzugehen, wurde ein mathematisches Modell am rechten Rand des geklebten Bereichs des SLJ definiert, damit die Laplace Gleichung analytisch gelöst werden konnte. Zur Validierung der gefundenen analytischen Lösung wurde auch eine FEM- und FDM- Lösung berechnet und deren Ergebnisse damit verglichen.

Die Ergebnisse zeigen, dass die analytische Lösung, die Finite-Elemente-Methode (FEM) und die Finite-Differenzen-Methode (FDM) qualitativ ähnliche Verläufe des Wärmeflusses und der Temperaturverteilung im geklebten Bereich des SLJ aufweisen. Diese Verläufe-Übereinstimmung bestätigt die grundsätzliche Korrektheit der analytischen Lösung, insbesondere im Hinblick auf das reproduzierte physikalische Verhalten. Die analytische Lösung bietet, trotz ihrer idealisierten Annahmen und der Glättung lokaler Effekte, eine valide Darstellung des thermischen Verhaltens des SLJ. In der Nähe von Randbereichen und Übergängen, wo unterschiedliche Randbedingungen aufeinandertreffen, wie etwa adiabatische Ränder und konstanter Wärmestrom, oder Laminatübergängen ($x = 0, y = h_1$) und ($x = L, y = h_1$) zeigt die FEM jedoch deutlichere lokale starke Spitzen im Wärmestrom im Vergleich zu der analytischen Lösung. Diese Unterschiede sind grundsätzlich auf den Diskretisierungsfehler der Finite-Elemente-Methode und für die Berechnung der analytischen Lösung getroffene Annahme zurückzuführen. Diese lokale Sensibilität der FEM-Lösung weist auf die Notwendigkeit hin, solche numerischen Methoden zu berücksichtigen, wenn eine detailliertere Analyse erforderlich ist. Also zeigt die detailliertere Betrachtung durch die FEM, dass diese Methode trotz ihrer höheren Komplexität und des höheren Rechenaufwandes, in bestimmten Anwendungen, bei denen lokale Effekte und Präzision eine größere Rolle spielen, unverzichtbar ist.

Die durchgeführte Parameterstudie verdeutlicht, dass sowohl der hinein- und herauslaufenden Wärmestrom als auch die geometrischen Parameter des SLJ (Länge des geklebten Bereichs und Breite des Laminats) einen signifikanten Einfluss an den Rändern des geklebten Bereichs auf die resultierenden analytischen Wärmeflussverläufe haben. Es wurde festgestellt, dass die FEM im Vergleich zur analytischen Lösung insbesondere in Randbereichen empfindlicher auf Änderungen dieser Parameter reagiert. Dies betont die Bedeutung der Berücksichtigung von Randbedingungen und geometrischen Details bei der Modellierung. Aber trotz dieser Abweichung an den Rändern stimmen die Lösungen im Mittelbereich des geklebten Bereiches relativ überein, was die Validierung der analytischen Lösung gewährleistet.

Diese analytische Lösung kann eine effiziente und schnelle Möglichkeit anbieten, das thermische Verhalten des SLJ modellieren zu können, sobald man genug Randbedingungen hat. Bei genug Randbedingungen macht die analytische Lösung zu einem nützlichen Werkzeug für erste Abschätzungen und das Verständnis von grundlegendem Verhalten des Wärmestroms in dem SLJ. Für zukünftige Anwendungen und Forschungen sollte eine Kombination beider Ansätze angestrebt werden: Die analytische Lösung kann als erste Näherung oder zur Validierung grundlegender Konzepte dienen, während die FEM zur Verfeinerung und detaillierten Analyse herangezogen wird.

Außer Acht soll nicht gelassen werden, dass diese analytische Lösung mit einer groben Annahme des konstanten Wärmestrom am linken Rand des geklebten Bereiches und einem idealisierten mathematischen Modell, das die physikalischen Randbedingung am rechten Rand des geklebten Bereichs des SLJ abbildet, verknüpft ist. Daraus folgt, dass die Lösung an diesen Rändern

nicht präzise abgebildet wird, und es entsteht dort eine große Abweichung zu der FEM-Lösung besonders bei Änderung der Klebeschichtlänge. Also hilft die herausgefundene analytische Lösung aufgrund der getroffenen Annahmen nur, um den Vergleich des Wärmestromverhaltens und Schubspannungsverhalten in der geklebten Ebene zu machen und nicht, die exakten Werten des Wärmestroms im gesamten geklebten Bereich zu bestimmen. Um dieser Letzte zu bestimmen, muss alle Randbedingungen vorgegeben werden. Außerdem wurde das SLJ nur mit isotropen Materialien betrachtet. Bei anisotropen Materialien sollte auf die Wärmeleitfähigkeit-Matrix geachtet werden. Ferner könnte die herausgefundene Lösung genutzt werden, um weitere Eigenschaften des SLJ zu bestimmen. Mittels Fourier-Gesetz könnte zum Beispiel die Kurve des Wärmewiderstands bestimmt werden und somit die Stelle des SLJ, die am besten die Temperatur leiten, herausfinden. Die könnte in der Zukunft benutzt werden, um die Temperaturleitung des SLJ durch Anpassung der Kunststoffmatrix oder Verstärkungsfasern besser zu kontrollieren. Ein wichtiger Punkt ist auch auf die Ausdehnung (auf Englisch Dilatation) des Laminats – was die Plastizität bei mechanischer Betrachtung entspricht – aufzupassen. Denn es gibt für jede Laminatmaterial eine bestimmte Ausdehnung Temperatur, die nicht überschreiten sein sollte, damit die herausgefunden analytische Lösung gelten sei. Diese ist leider nicht Teil dieser Arbeit aber bei Auftretung der Dilatation sollte dieses Problem anders betrachten werden, indem der Ausdehnungskoeffizient genau betrachtet werden sollte. Es muss dann in den Fall den thermischen Längenausdehnungskoeffizienten α (auch linearer Wärmeausdehnungskoeffizient), den thermischen Flächenausdehnungskoeffizienten β (auch flächiger oder quadratischer Ausdehnungskoeffizient) und/oder den thermischen Raumausdehnungskoeffizienten γ (auch räumlicher oder Volumen- oder kubischer Ausdehnungskoeffizient) betrachtet werden.

Anhang

1) MATLAB-Code für die Darstellung des Wärmestroms

```
% Parameter
L = 10; %Länge des Klebeschichtbereiches
h1 = 4.75; % Höhe/Breite des unteren Laminates
h2 = 4.75; % Höhe/Breite des oberen Laminates
lambda = 0.03715; % Konstante Wärmeleitfähigkeit k
Q = 0.01; % Konstanter Wärmefluss Q
N = 50; % Anzahl von Iterationen
l = 50-L; % Länge des Verllängerungsbereiches des SLJ
T_sink = 300; % Vorgegebene Temperatur am rechten Rand des SLJ
T_recht = T_sink + ((Q*l) / (lambda*h2)); % Temperatur T_rechts

% Abbildung des Gitternetzes
x = linspace(0, L, 49);
y = linspace(0, h1 + h2, 49);

% Initialisierung der Wärmestromkomponenten
qm_x = zeros(length(x), length(y));
qm_y = zeros(length(x), length(y));

% Berechnung der Fourier-Reihe Komponente und Omega
omega = @(n) pi*n/(h1 + h2);
En1 = @(n) (-2*Q*(h1 + h2)/(h1*(lambda*((n*pi)^2)))) * sin(n*pi*h1/(h1 + h2));
Fn = @(n) (2/((h1 + h2)*cosh(pi*n*L/(h1 + h2)))) * integral(@(y) f(y, h1, h2,
Q,lambda, T_recht).*cos((n*pi*y)/(h1 + h2)), 0, h1 + h2);

% Berechnung von qM1(x,y) et qM2(x,y)
for i = 1:length(x)
    for j = 1:length(y)
        sum_qm1_x = 0;
        sum_qm1_y = 0;
        sum_qm2_x = 0;
        sum_qm2_y = 0;

        for n = 1:N
            omega_n = omega(n);
            En1_n = En1(n);
            Fn_n = Fn(n);

            % qM1(x,y) für x
            sum_qm1_x = sum_qm1_x + En1_n * omega_n * ...
                (cosh(omega_n * x(i)) - tanh(omega_n * L) * sinh(omega_n * x(i))) *
                cos(omega_n * y(j));

            % qM1(x,y) für y
            sum_qm1_y = sum_qm1_y + En1_n * omega_n * ...
                (sinh(omega_n * x(i)) - tanh(omega_n * L) * cosh(omega_n * x(i))) *
                sin(omega_n * y(j));

            % qM2(x,y) für x
            sum_qm2_x = sum_qm2_x + Fn_n * omega_n * ...
                sinh(omega_n * x(i)) * cos(omega_n * y(j));

            % qM2(x,y) für y
            sum_qm2_y = sum_qm2_y + Fn_n * omega_n * ...
                cosh(omega_n * x(i)) * sin(omega_n * y(j));
        end
    end
end
```

```

        % qM(x,y) für x und y
        qm_x(i, j) = (-Q)/(lambda*(h1+h2)) + sum_qm1_x + sum_qm2_x;
        qm_y(i, j) = -sum_qm1_y - sum_qm2_y;
    end
end

% Berechnung des Betrags des Wärmestroms qM
qM = lambda*sqrt(qm_x.^2 + qm_y.^2);

% Darstellung der Lösung
figure;
surf(x, y, qM);
xlabel('x(mm)');
ylabel('y(mm)');
zlabel('q_M(x,y)');
title('Wärmeflussfeld q_M(x,y) in Watt');

% Funktion für das mathematische Modell
function result = f(y, h1, h2, Q,lambda, T_recht)
    result = (Q/(lambda*h2))*(atan(-y + h1)+1) + T_recht;
end

```

2) Matlab-Code für die Berechnung des Temperaturfelds

```

% Parameters
L = 10; %Länge des Klebeschichbereiches
h1 = 4.75;%Breite/Höhe des unteren Laminats
h2 = 2*h1;%Breite/Höhe des oberen und unteren Laminats
k = 0.03715; % Konstante Wärmeleitfähigkeit k
Q = 0.05; % Konstanter Wärmefluss Q
N = 50; % Anzahl von Iterationen für das analytische Verfahren
l= 50-L;%Länge des Verlängerungsbereiches des SLJ
T_sink = 300; % Konstante Temperatur am rechten Rand des SLJ
T_recht = T_sink + ((Q*l)/(k*(h2-h1))); % Temperatur T_sink

% Parametrisierung für die numerische Lösung
Nx = 80; % Anzahl der Gitterpunkt in x-Richtung
Ny = 80; % Anzahl von Gitterpunkt in y-Richtung
dx = L / (Nx - 1); % Inkrement von x
dy = h2 / (Ny - 1); % Inkrement von y
w = 2/(1+(pi/Nx)); %Konvergenzparameter der FDM-Lösung

% Définition des Gitternetzes für die analytische Lösung
x_values_analytic = 0:0.25:L;
y_values_analytic = 0:0.25:h2;

% Initialisierung der Matrix, um die Summe Tn der analytischen Temperatur zu
speichern
Tn = zeros(length(y_values_analytic), length(x_values_analytic));

%Initialisierung des Gitternetzes
[X_analytic, Y_analytic] = meshgrid(x_values_analytic, y_values_analytic);

% Berechnung der einzelnen Terme der Fourier-Reihe
for n = 1:N
    integral1 = integral(@(y) (atan((4.75-y))), 0, h2);
    integral2 = integral(@(y) (M_Model(y, h1,h2, Q,k, T_recht)).*cos((n*pi*y)/h2),
0, h2);
    Const1 = -(2*Q*h2*sin((n*pi*h1)/h2))/(((n*pi)^2)*k*h1);
    Const2 = (2/(h2*cosh((n*pi*L)/h2)))*(integral2);
    term1 = Const1* (sinh((n*pi*X_analytic)/h2) - tanh((n*pi*L)/h2) .*
cosh((n*pi*X_analytic)/h2)) .* cos((n*pi*Y_analytic)/h2);
    term2 = Const2* cosh((n*pi*X_analytic)/h2) .* cos((n*pi*Y_analytic)/h2);
    Tn = Tn + term1 +term2 ;
end

% Gesamte Temperatur
T_total_analytic = - ((Q)*(X_analytic-L)/(k*h2)) + (Q/(k*(h2-h1)))+ T_recht +
(Q*integral1)/(h2*k*(h2-h1)) + Tn ;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FDM-Lösung %%%%%%%%%%%%%%
% Initialisierung der Matrize für die Berechnung von T_FDM als T genannt
T = zeros(Nx, Ny);

% Festlegung des mathematischen Modell am rechten Rand
T_right = zeros(1, Ny);
for j = 1:Ny
    y = (j-1) * dy;
    if y > 0 && y <= h2
        T_right(j) = (Q/(k*(h2-h1)))*(atan((-y + h1))+1) +T_recht;
    else
        T_right(j) = 0;
    end
end

```

```

    end
end

% Definition der anderen Randbedingungen
qx_left = zeros(Nx, Ny); % Initialisierung der Wärmefluss am linken Rand
qx_left(1, 1:floor(Ny/2)) = Q/(k*h1);
qx_left(1, floor(Ny/2)+1:end) = 0;

qy_top = 0; % Wärmefluss bei y=h1+h2
qy_bottom = 0; % Wärmefluss bei y=0

% Anfang Bedingung für die FDM-Lösung
T_initial = 0;

% Iterationsparameters für das numerische Verfahren
max_iter = 1000000; % maximale Anzahl von Iterationen 10^-6
tolerance = 3.96e-7; % Tolérance der Convergence basiert auf $4.1

% Iterationsverfahren für die FDM-Lösung
for iter = 1:max_iter
    T_old = T;
    for i = 2:Nx-1
        for j = 2:Ny-1
            T(i, j) = (1-w)*T_old(i, j) + 0.25*w*((T_old(i+1, j) + T(i-1, j)) +
            ((T_old(i, j+1) + T(i, j-1)))));
        end
    end
    % Aktualisierung der Randbedingungen
    T(1,:) = T(2,:) + qx_left(1,:) * dx;
    T(Nx,:) = T_right;
    T(:,1) = T(:,2);
    T(:,Ny) = T(:,Ny-1);

    % Überprüfung der Convergence
    if max(abs(T - T_old)) < tolerance
        fprintf('Convergenz erreicht nach %d Iterationen.\n', iter);
        break;
    end
end
end
% FEM MODEL

% Importierung der Daten aus Excell
data = readmatrix('Temperatur_Data.xlsx');

% Extraktion der entsprechenden Variable x, y et T
x_excel = data(1, 2:end);
y_excel = data(2:end, 1);
T_excel = data(2:end, 2:end);

% Erstellung des Gitternetzes
[X_excel, Y_excel] = meshgrid(x_excel, y_excel);

% Darstellung der Lösungen
figure;

% Analytische Lösung
surf(x_values_analytic, y_values_analytic, T_total_analytic, 'FaceAlpha', 0.5);
hold on;

%FDM-Lösung
[X_num_mesh, Y_num_mesh] = meshgrid(0:dx:L, 0:dy:h2);

```

```

surf(X_num_mesh, Y_num_mesh, T', 'EdgeColor', 'none', 'FaceAlpha', 0.5,
'FaceColor', 'interp', 'FaceColor', 'blue');

%FEM-Lösungsdaten
surf(X_excel, Y_excel, T_excel, 'EdgeColor', 'green', 'FaceAlpha', 0.5,
'FaceColor', 'interp', 'FaceColor', 'blue');

% Titres et labels
title('Temperaturverteilung T-Analy, T-FEM, T-FDM');
xlabel('x(mm)');
ylabel('y(mm)');
zlabel('Temperatur (K)');

% Légende
legend('Analytisch', 'FDM', 'FEM');

% Fin du hold
hold off;

function result = M_Model(y, h1,h2, Q,k, T_recht)
    result = ((Q)/(k*((h2-h1))))*(atan((-y + 4.75))+1) + T_recht;
end

```

Literaturquellen

- [1] M. Lange, V. Baturkin, C. Hühne und O. Mierheim, „Simulation and measurement of thermal fluxes in load-bearing bonde FRP Single-Lap Joint,“ 27-30 September 2016.
- [2] M. Lange , V. Baturkin , C. Hühne und O. Mierheim, „Validation of an analytical model describing the heat flux distribution in load-bearing CFRP single-lap joints,“ Germany, 2018.
- [3] W. F. Trench, Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems, Pacific Grove, CA 93950 USA: Bob Pirtle, 2001.
- [4] D. W. Hahn und M. N. Özisik, Heat Conduction S.28, Kanada: John Wiley& Sohn, Inc., 2012.
- [5] W. F. Trench, „Elementary Differential Equation with Boundary Value Problems,“ Pacific Grove, CA 93950 USA, Bob Pirtle, 2001, pp. 613-614.
- [6] H. Ludwig, *Hybrid Fourier-Reservoir Model for Partial Differential Equations with non-periodic Boundary-Conditions*, Austria: Johannes Kepler University Linz, 2024.
- [7] A. Brehm, „Wärmeübertragung,“ Universität Oldenburg, Oldenburg.
- [8] J. P. Kahane, *Série de fourier absolument convergente*, Bd. I, Berlin: Springer, 2019.
- [9] T. H. Grönwall, *Sur le phénomène de Gibbs et les sommes trigonométrique*, Hal Open Science, 2012.
- [10] K. Betzler, „Numerische Lösung Partieller Differenzialgleichungen,“ Osnabruck, 2005.
- [11] P. Fortescue, J. Stark und G. Swinerd, *Spacecraft Systems Engineering (S. 356)*, Bd. III, John Wiley & Sons Ltd, 2003.
- [12] M. Dehli, D. Ernst und S. Herbert , *Grundlagen der technischen Thermodynamik*, Bd. 10, Deutschland: Springer, 2023.
- [13] H. Martin, *numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik*, Deutschland: Springer, 2011.
- [14] M. Brand, *FEM-Praxis mit SolidWorks*, Niederuzwil, Switzerland: Springer, 2013.
- [15] J. D. Anderson , G. Degrez, D. Eric und R. Grundmann, *Computational Fluid Dynamik (CFD)*, Bd. 2, Belgium: Springer, 1996.
- [16] H. Schürmann, *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV)*, Darmstadt: Springer, 2007.
- [17] DLR, „DLR_Webseite,“ 2020. [Online]. Available: <https://www.dlr.de/de/forschung-und-transfer/projekte-und-missionen/hayabusa2>. [Zugriff am 10 April 2024].
- [18] M. Lange, Olaf Mierheim und Christian Hühne, „MASCOT-Structures Design and qualification of an "Organic" mobile lander platform for low gravity bodies,“ p. 2, Juni 2014.
- [19] DLR, „dlr.webseite,“ 2020. [Online]. Available: <https://www.dlr.de/de/forschung-und-transfer/projekte-und-missionen/hayabusa2>. [Zugriff am 10 April 2024].
- [20] A. Z. Khan, „The Engineers Blog,“ 2024. [Online]. Available: <https://engineersblog.net/what-is-single-lap-joint/>. [Zugriff am 21 März 2024].
- [21] M.Neher, „Fourier Reihe (S. 423),“ in *Anschauliche Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 1*, Springer, 2018.
- [22] E. Kircher, R. Girwidz und P. Häußler, *Physikdidaktik: Theorie und Praxis*, Bd. III, Berlin Heidelberg: Springer , 2014.
- [23] M. Melzani, „Résolution numérique de l'équation de Laplace,“ *Physique Chimie*, 2018.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: a) Single Lap Joint Konfiguration für die analytische und numerische Analyse; b) Simulierte mittlere Z-Komponente der Wärmestromverteilung in der Klebeschicht eines Single-Lap Joint für eine Verbindungslänge von $L_j = 10$ mm und $L_j = 20$ mm; c) Scherspannungsverteilung in der Klebeschicht eines Single-Lap Joint für unterschiedliche Verbindungslängen L_j . [2]	1
Abbildung 2: MASCOT-Struktur	2
Abbildung 3: Aufgabestellung der Arbeit	3
Abbildung 4 : Definition der Randbedingungen der geklebten Verbindung	4
Abbildung 5: vom Wärmefluss durchgequertes infinitesimales Element	6
Abbildung 6: 2D Dirichlet Problem auf einem Viereck	7
Abbildung 7: 2D Neumann Problem auf einem Viereck.....	7
Abbildung 8: 2D Robin Problem auf einem Viereck	8
Abbildung 9: Wärmeleitung durch eine Wand mit Dirichlet Randbedingungen.....	11
Abbildung 10: Wärmeleitung durch eine Wand mit Neumann Randbedingungen	12
Abbildung 11: Wärmeleitung in einem Viereck mit 2D Dirichlet Randbedingungen	13
Abbildung 12: Wärmeleitung in einem Viereck mit 2D Neumann Randbedingungen.....	14
Abbildung 13: Wärmeleitung in einem Viereck mit 2D Robin Randbedingungen.	15
Abbildung 14: Transiente Wärmeleitung in einem Viereck mit Dirichlet Randbedingungen	16
Abbildung 15: Finite Darstellung in ein vier eckiges Element	18
Abbildung 16: Verschiedene Arten von Überlappungsgelenke (Lap Joint) [16]	19
Abbildung 17: Geometrie des im ANSYS implementierten Modells	22
Abbildung 18: Vernetztes FEM-Model mit der Elementgröße von 0,5mm, quadratischer Ansatzfunktion und trapezoidaler Methode	23
Abbildung 19: Randbedingungen des FEM-Modells; a) Konstanter Wärmefluss; b) feste Temperatur.	23
Abbildung 20: Lösung der numerischen Temperaturverteilung in dem SLJ	23
Abbildung 21 : Wärmestromverteilung in den SLJ	24
Abbildung 22 : Temperaturverteilung in dem SLJ mit verschiedener Länge der Klebeschicht a) $L=10$ mm und b) $L=20$ mm	24
Abbildung 23 : Adiabatische Randbedingungen am oberen und unteren Rand des geklebten Bereichs des SLJ.....	24
Abbildung 24: Verlängerung des SLJ am linken Rand.....	25
Abbildung 25: Referenzlösung des linken Verlängerungsbereichs des SLJ.....	26
Abbildung 26: Verlängerung des SLJ am rechten Rand	28
Abbildung 27: Referenzlösung der Temperaturverteilung in dem rechten Verlängerungsbereich des SLJ	29
Abbildung 28: Komplette Randbedingung auf dem geklebten Bereich des SLJ	30
Abbildung 29: Darstellung der Randbedingungen mit einem Wärmestrom gleich Null am rechten Rand	32
Abbildung 30: Darstellung der Randbedingungen mit einem Wärmestrom gleich Null am linken Rand	33
Abbildung 31: Analytische Lösung der Temperaturverteilung der ersten Hypothese a) Temperaturfeld b) Wärmeflussverteilung	34
Abbildung 32 : Temperaturverhalten am rechten Rand des geklebten Bereiches des SLJ	35
Abbildung 33: Darstellung einer Arctan-Funktion	35
Abbildung 34: Referenzlösung von dem Verlängerungsbereich.....	37
Abbildung 35: Verschiebung des mathematischen Modells	38
Abbildung 36: Neue Randbedingungen mit dem mathematischen Modell.....	38
Abbildung 37: Zerlegung der Randbedingungen in zwei gemixte Randbedingungen.....	39
Abbildung 38: Lösung der Laplace Gleichung in dem geklebten Bereich des SLJ mit dem modellierten mathematischen Modell a) Temperaturverteilung; b) Wärmestrom.	41
Abbildung 39: Lösung der Laplace Gleichung in dem geklebten Bereich des SLJ mittel FDM. a) Temperaturverteilung; b) Wärmestrom.	41

Abbildung 40: Wärmestromverteilung von der analytischen und FEM-LÖSUNG auf der Ebene $y=h_1$ bei Änderung der Klebeschichtlänge.....	42
Abbildung 41: Diskretisierungsfehler der FEM-Lösung. a) und c) Wärmestromverteilung an der Ecke $x = 0, y = h_1$; b) Thermischer Fehler der FEM-Lösung.....	43
Abbildung 42: Wärmeflussverteilung der drei Verfahren in dem geklebten Bereich des SLJ	44
Abbildung 43: Wärmestromfeld der analytischen Lösung	44
Abbildung 44: Temperaturverteilung der analytischen, FEM- und FDM-Lösung in dem geklebten Bereich des SLJ	45
Abbildung 45: SLJ und finale verschiedene Randbedingungen.....	46
Abbildung 46: Wärmestrom an den Rändern für verschiedene Werte des durchlaufenden Wärmestroms im SLJ	48
Abbildung 47: Wärmestrom an den Rändern für verschiedene Werte der Klebeschichtlänge im SLJ..	50
Abbildung 48: Wärmestrom an den Rändern für verschiedene Werte der Breite des unteren Laminats	52
Abbildung 49: Vergleich der verschiedenen Lösungen für unterschiedliche Laminatbreite. a) Schubspannung [20] und b) Wärmestrom	53
Abbildung 50: Finale Lösungen des Wärmestroms auf dem Klebeschichtbereich des SLJ in Abhängigkeit der Länge des Klebeschichtbereichs a) Vergleich der FEM und analytischen Lösung in Abhängigkeit von L ; b) Änderung der Schubspannung bei Variationen von der Klebeschichtlänge [20]	53

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Darstellung des mathematischen Modells für unterschiedlichen Werte von der Basis-Temperatur	36
Tabelle 2: Wertebereich der Parameterstudie	46
Tabelle 3: Analogie zwischen mechanischen und thermischen Parametern eines Überlappungsverbindung.....	54