

Interner Bericht

DLR-IB-SY-BS-2024-188

Einfluss der nicht-linearen Berechnung auf die Strukturoptimierung von Tragwerksstrukturen

Studienarbeit

Mustafa Essou

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

Institut für Systemleichtbau



DLR

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt

Dokumenteigenschaften

Titel	<u>Einfluss der nicht-linearen Berechnung auf die Strukturoptimierung von Tragwerksstrukturen</u>
Betreff	<u>Studienarbeit</u>
Institut	<u>Systemleichtbau</u>
Erstellt von	<u>Mustafa Essou</u>
Beteiligte	<u>Sascha Dähne</u>
Geprüft von	<u>Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne</u>
Freigabe von	<u>Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne</u>
Zugänglichkeit	<input checked="" type="checkbox"/> Stufe 1: Allgemein zugänglich (in elib ohne Zugangsbeschränkung) <input type="checkbox"/> Stufe 2: DLR intern zugänglich (in elib mit Beschränkung „nur DLR-intern zugänglich“)
Datum	<u>20.09.2024</u>
Version	<u>1.0</u>
Datei Info	<u>IB_2024_188_SA_Essou.pdf</u>



Studienarbeit

**Einfluss der nicht-linearen
Berechnung
auf die Strukturoptimierung
von Tragwerksstrukturen**

Mustafa Essou
Computational Sciences in Engineering
Matr..Nr.: [REDACTED]

Erstprüfer : Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne
Betreuer : M.Sc. Sascha Dähne
Betreuer : [REDACTED]
Abgabedatum am : 20. September 2024

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VIII
Tabellenverzeichnis	XI
1 Einleitung	1
2 Finite Elemente Methode	3
2.1 Lineares FEM Problem	5
2.1.1 Post-Processing	7
2.2 Nichtlineare FEM	8
2.2.1 Geometrische Nichtlinearität	8
2.2.2 Physikalische Nichtlinearität	8
2.2.3 Kontaktprobleme	9
2.2.4 Besonderheiten von geometrischer Nichtlinearität	9
2.2.5 Vorgehen bei der nichtlinearen FE-Berechnung	12
3 Nichtlinearität am Flügelkasten	19
4 Strukturoptimierung	22
5 Parameterstudie	24
5.1 Flügelkasten	24
5.2 Daten generieren	26
5.3 Bewertungsmaß	33
5.4 Fehlermaß	37
5.5 Ergebnisse	38
5.6 Beulen der Außenhaut	58
6 DLR-F25	60
7 Schluss und Ausblick	68
A Anhang	70
A.1 HDF5-Generator	70
A.2 Extrapolation	72
Literaturverzeichnis	73

Abbildungsverzeichnis

1.1	Verlauf der Flügelstreckung über die Jahre[8]	2
2.1	Ein Würfel mit einfachen Randbedingungen, das heißt, dass auf der Stirnfläche gezogen wird und auf der gegenüberliegenden Seite festgehalten wird. Das hellgrüne Material ist die Matrix und das grüne ist das Fasermaterial. Dieser Würfel wird in der Multiscale Methode verwendet und wird representative volume element genannt, kurz RVE [20]	4
2.2	Modell eines 3-Punkt-Biegeversuchs. In dunkelblau der Impaktor, in blau die Außenlage, in gelb der Kern des Paneels, in magenta die Lagerung	5
2.3	Beide Platten werden mit einem konstanten Druck beaufschlagt. Man sieht, dass die lineare FEM Berechnung größere Deformationen aufweist [12]	10
2.4	Eine dünnwandige Box ist auf der einen Seite aufgespannt und auf der anderen mit einer Kraft belastet. Die nichtlineare Berechnung kann das Beulen auf der Oberschale berücksichtigen und verformt sich stärker. Die Deformationen wurde um das 10-fache skaliert [12]	11
2.5	Ein Stab gelagert mit einer Rotationsfeder(links) wird auf der anderen Seite mit einer Kraft beaufschlagt [24].	11
2.6	Ergebnisse des Stabbeispiels aus Abbildung 2.5. Die durchgezogene Linie ist die exakte Lösung, die punktierte ist die lineare Lösung. Die gestrichelte Lösung zeigt das Ergebnis an, wenn man den Cosinus bis zum zweiten Taylorpolynom approximiert [24]	11
2.7	Links die Lösungsschritte des Biegebalkens abgebildet. Rechts das Konvergenzverhalten des Newtonverfahren mit Liniensuchverfahren(blau) und des BFGS-Verfahrens(rot)	16
2.8	Kritische Punkte während einer nichtlineare Analyse[16]	16
2.9	B2000++ nichtlineare Lösungsverfahren	17
3.1	Daten von uCRM-13.5 und uCRM-9 [12]	19
3.2	relative Spannung und Differenz zwischen linear und nichtlinear des uCRM-13.5 [12]	20
3.3	Vergleich des Beulmaßes der linearen und nichtlinearen Berechnung des uCRM-13.5 [12]	20
3.4	[12]	21
5.1	Draufsicht des vereinfachten Flügelkastens mit den relevanten Maße	25
5.2	Seitenansicht des vereinfachten Flügelkastens mit den relevanten Maße . . .	26
5.3	Langer schmaler Flügel mit schlechten aerodynamischer Effizienz	28

5.4	Generischer 1D-Balken mit linearer und nichtlinearer Berechnung [21]. Nicht-lineare Berechnung verwendet Follower Kräfte.	30
5.5	Weg-Kraft Verlauf alle Berechnungen. Die vertikalen Linien sind Schnittlinien, die in 5.3 verwendet werden.	31
5.6	Weg-Kraft Verläufe der Flügelnummern 1, 6, 9, 10 und 14 ohne Pfeilung(siehe 5.3)	32
5.7	Flügelnummer 1 ohne Pfeilung bei einer Last von ca. 1500 kN. In den folgenden Abbildungen ist diese Lösung der blaue Punkt. Angegeben ist die Spannung in MPa	32
5.8	Tip Displacement über die Halbspannweite. Kurven entsprechen den Schnittlinien in Abbildung 5.5. Abgebildet sind Flügel ohne Pfeilung	35
5.9	Tip Displacement über die Halbspannweite ³ . Kurven entsprechen den Schnittlinien in Abbildung 5.5. Abgebildet sind Flügel ohne Pfeilung	36
5.10	relative z-Verschiebung über normalisierte z-Verschiebung der linearen Berechnung. Kurze Flügel haben eine große positive Steigung, lange Flügel eine große negative Steigung	39
5.11	Detaillierte Ansicht von 5.10 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung	39
5.12	Ein dimensionale Darstellung des Flügels mit der Nummer 10 ohne Pfeilung. Wird mit ca. 600 kN belastet. Lineare und nichtlineare z-Verschiebung sind nahe zu gleich	40
5.13	relativer Fehler der z-Verschiebung mit dem Bewertungsmaß $\frac{TipDisp.}{length_0^3}$. Lösungen werden gebündelt.	41
5.14	Detaillierte Ansicht von 5.13 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung	42
5.15	relativer Fehler der z-Verschiebung über der relativen Verlängerung des linearen Flügels	43
5.16	Detaillierte Ansicht von 5.15 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung	43
5.17	Vereinfachter Stab	44
5.18	Relativer RMSE über die normalisierte z-Verschiebung des linearen Flügelkastens	44
5.19	Detaillierte Ansicht von 5.18 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung	45
5.20	relativer RMSE mit dem Bewertungsmaß $\frac{TipDisp.}{length_0^3}$. Lösungen werden gebündelt.	46
5.21	Detaillierte Ansicht von 5.20 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung	46
5.22	relativer RMSE über die relative Verlängerung des Flügels. Verläufe folgen einer Geraden	47
5.23	Detaillierte Ansicht von 5.22 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung	47
5.24	relative Spannungsdifferenz für die normalisierte z-Verschiebungen mit den Ergebnissen ohne Pfeilung. Es soll gezeigt werden, dass für dieses Fehlermaß die Werte schon für kleine Verschiebungen divergiert	49
5.25	neue relative Spannungsdifferenz für die normalisierte z-Verschiebungen. Hier sieht man Divergenzen zu Beginn der Verformung, diese stellen sich für größere Verschiebungen auf kleine Werte ein	49
5.26	Detaillierte Abbildung von 5.25	50
5.27	relativer Spannungsdifferenz mit dem Bewertungsmaß $\frac{TipDisp.}{length_0^3}$. Lösungen werden gebündelt	50
5.28	Detaillierte Abbildung von 5.27. Flügel ohne Pfeilung	51

5.29	relativer Spannungsdifferenz über der relativen Verlängerung	51
5.30	Detaillierte Abbildung von 5.29. Flügel ohne Pfeilung	52
5.31	Verwölbung auf der Zugseite. Flügelnummer 14. Kraft nah am load limit point, ca. 700 kN	53
5.32	Konturplot des ursprünglichen Fehlermaßes am Flügelkasten. Zu vergleichen mit dem neuen in Abbildung 5.33	53
5.33	Blauer Punkt in den Diagrammen. Darstellung der neuen relativen Spannungsdifferenz. Zu vergleichen mit der alten in Abbildung 5.32	54
5.34	cyan Punkt siehe Abbildung 5.30. Neue Relative Spannungsdifferenz	54
5.35	roter Punkt siehe Abbildung 5.30. Hier ist die absolute Differenz der Spannung abgebildet. Angabe in MPa.	55
5.36	Gelber Punkt in den Abbildungen. Soll zeigen, woher die Divergenz kommt	55
5.37	Flügel, der mit drei Bäuchen beult. Damit verhalten sich Ergebnisse anders als die Anderen. Beispielsweise in Abbildung 5.19 der rote Verlauf. Spannung in MPa	56
5.38	ein Dimensionale Darstellung der Deformation des Flügels mit der Nummer 14. Der cyan Punkt in den Diagrammen. Zeigt, wie ein relativer RMSE von ca. 1% aussieht	56
5.39	ein Dimensionale Darstellung der Deformation des Flügels mit der Nummer 14. Der rote Punkt in den Diagrammen. Zeigt, wie ein relativer RMSE von ca. 5% aussieht	57
5.40	Blauer Punkt in den Diagrammen. Darstellung der absoluten Spannungsdifferenz. Spannung in MPa	57
5.41	Weg- Kraft Kurve der Flügelkasten mit einer Lagendicke von 0.125 mm	58
5.42	Flügelkasten mit gekrümmter Außenhaut, die dennoch beult. Konturplot zeigt die Dehnung an. Als wireframe ist die nichtlineare Berechnung abgebildet, ohne Rundung	59
6.1	DLR-F25 mit der Darstellung der Kräfte	60
6.2	Spannung-Konturplots in MPa. Links linear und rechts nichtlinear	61
6.3	Relative Spannungsdifferenz, wie behandelt in 5.5	61
6.4	Kinematischer Vergleich zwischen linear und nichtlinearer Berechnung	62
6.5	Kinematischer Vergleich zwischen linear und nichtlinearer Berechnung	63
6.6	Kinematischer Vergleich zwischen linear und nichtlinearer Berechnung	64
6.7	Rechenzeiten des linearen und nichtlinearen DLR-F25-Modells in Abhängigkeit von der Anzahl der Lastfälle	66
A.1	72

Tabellenverzeichnis

5.1	Materialeigenschaften der UD-Lage T300_5208	27
5.2	Laminataufbau der verwendeten Lamine	27
5.3	Streckung für verschiedene Kombinationen von Flügelkastenlänge und Pfeilungswinkel. Streckung errechnet sich aus $(2 \cdot \text{Halbspannweite})^2 / \text{Flügelfläche}$. Die zweite Zeile listet die Flügellängen auf.	29

1 Einleitung

Um die Klimawirkung des Luftverkehrs zu reduzieren und die Luftfahrt wirtschaftlicher zu gestalten, wird intensiv in die Entwicklung hocheffizienter Flugzeuge investiert. Ein zentrales Ziel ist die Reduktion des Treibstoffverbrauchs.

Zur Erreichung dieses Ziels werden Modelle entwickelt, die das Verhalten eines Flugzeugs im Betrieb abbilden und analysieren. Dabei müssen mindestens zwei Disziplinen berücksichtigt werden: die Strömungsmechanik und die Strukturmechanik. Diese Art von Analysen wird im Englischen als *multi-disciplinary analysis* (MDA) bezeichnet.

Um diese Herausforderungen zu bewältigen, werden Flugzeugmodelle mit Optimierungsalgorithmen verbessert. Diese Modelle dienen nicht nur der Analyse eines Designs, sondern auch der Verbesserung des bestehenden Designs in einem Optimierungsprozess, der als *multi-disciplinary optimization* (MDO) bekannt ist.

Zur Lösung des Optimierungsproblems wird eine Disziplin in einem numerischen Optimierungsalgorithmus mehrfach gelöst. Um die Rechenkosten des Optimierungsalgorithmus gering zu halten, werden häufig lineare Modelle, wie zum Beispiel ein lineares Finite-Elemente-Modell (FEM) oder vereinfachte Modelle [13], verwendet.

Bei der Lösung solcher Optimierungsprobleme zeigt sich, dass für eine höhere aerodynamische Effizienz und längere Flugstrecken eine größere Flügelstreckung angestrebt wird [6, 7]. Dies erklärt, warum die Streckung kommerzieller Flugzeuge im Laufe der Jahre zugenommen hat (siehe Abbildung 1.1). Berechnungen zeigen, dass Flügel mit großer Streckung unter Betriebsbedingungen auch größere Deformationen aufweisen [12]. Daher können lineare Modelle diese Flügel nicht mehr korrekt abbilden, da sie die Kinematik und das Spannungsfeld nicht mehr richtig erfassen. In [23] wird konkludiert, dass Flügel mit einer Streckungsverhältnis von 12 bereits in einem Bereich, wo Nichtlinearitäten berücksichtigt werden müssen.

Es gibt vereinfachte nichtlineare Modelle, die die Kinematik und Kräfte bei großen Deformationen korrekt berechnen können [13]. Diese haben jedoch den Nachteil, dass sie detaillierte

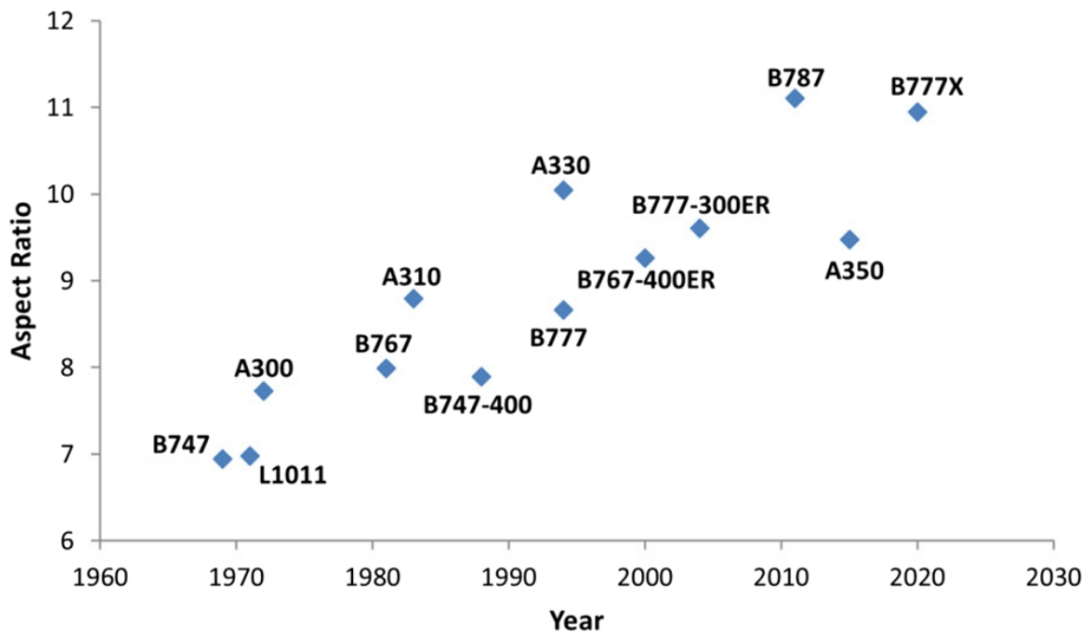


Abbildung 1.1: Verlauf der Flügelstreckung über die Jahre[8]

Spannungsverteilungen am Flügel nicht darstellen können.

Um sowohl detaillierte Spannungsverteilungen als auch die Kinematik bei großen Flügeldeformationen abzubilden, können nichtlineare FE-Modelle verwendet werden. Diese bringen jedoch neue Herausforderungen mit sich, wie zum Beispiel einen höheren Rechenaufwand, der in einem Optimierungsprozess zum Flaschenhals werden kann. Auch können einfache lineare Annahmen, wie das Skalieren der Feldgrößen oder das Wiederverwenden der Steifigkeitsmatrix, nicht mehr angewendet werden.

In dieser Arbeit wird zunächst auf die Finite-Elemente-Methode eingegangen. In diesem Kapitel werden sowohl die lineare als auch die nichtlineare FE-Methode behandelt. Im vierten Kapitel werden wir mittels eines vereinfachten Flügelkastens die Unterschiede beider Methoden herausarbeiten und analysieren.

2 Finite Elemente Methode

Um den Deformationszustand eines Flügelkastens zu berechnen, muss zuerst verstanden werden, wie sich Körper im Raum deformieren. Mit Hilfe der Kontinuumsmechanik lässt sich die Differentialgleichung(DGL) herleiten mit der man Deformation am Körper beschreiben kann. Mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik und unter der Annahme quasi-statische Deformation lässt sich folgende Gleichung herleiten(siehe [24]).

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}(x) d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}(x) d\Omega = 0, \forall x \in \Omega \quad (2.1)$$

In der Gleichung 2.1 steht Ω für das Gebiet des Kontinuums mit dem Rand Γ und x für eine beliebige Ortskoordinate im Gebiet Ω . Für ein Volumen ist der Rand die Oberfläche des Körpers. Die Gleichung besagt, dass sich die Kraftflüsse $\mathbf{t}(x)$ am Rand sich mit den inneren Volumenkräften $\mathbf{b}(x)$ im Gleichgewicht stehen müssen. Mit dem Cauchy Theorem $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}(x) \cdot \mathbf{n}$ lässt sich die Gleichung umformen zu $\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(x) \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b}(x) d\Omega = 0$. Wendet man darauf das Gaußintegral an, wird aus einem Randintegral ein Volumenintegral und dies lässt sich weiter vereinfachen bis sich die Differentialgleichung 2.2 ergibt.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(x) + \mathbf{b}(x) = 0, \forall x \in \Omega \quad (2.2)$$

Die Gleichung 2.2 kann man interpretieren als Gleichgewicht der Quellen der Spannung im Material $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ mit den äußeren Kräften $b(x)$ [2].

Für die folgende Überlegung wird diese Gleichung in ein eindimensionales Problem mit linear-elastischem Materialverhalten umgeschrieben, wie im Falle eines Stabes.

$$\frac{d}{dx} \left[e(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + b(x) = 0, e, u \in \mathbb{R} \forall x \in \Omega \quad (2.3)$$

Für ein Stab mit differenzierbarer Materialeigenschaft $e(x)$ lässt sich eine analytische(exakte) Lösung bestimmen[9]. Reale Probleme sind jedoch meistens komplex und für diese lassen sich nur mit hohem Aufwand oder gar nicht lösen.

Gründe für die Komplexität eines Systems sind zum Beispiel komplexe Geometrie, kom-

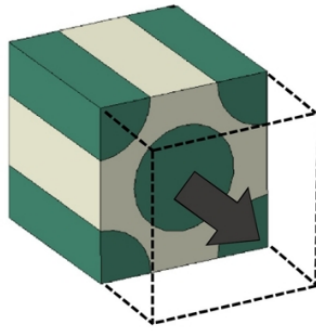


Abbildung 2.1: Ein Würfel mit einfachen Randbedingungen, das heißt, dass auf der Stirnfläche gezogen wird und auf der gegenüberliegenden Seite festgehalten wird. Das hellgrüne Material ist die Matrix und das grüne ist das Fasermaterial. Dieser Würfel wird in der Multiscale Methode verwendet und wird representative volume element genannt, kurz RVE [20]

plexe Randbedingungen, unstetige Materialeigenschaften. Das letztere kann am Ausdruck $\frac{d}{dx} \left[e(x) \frac{du(x)}{dx} \right]$ gezeigt werden. Wenn $e(x)$ unstetig ist, ist keine analytische Lösung vorhanden. Die Abbildung 2.1 ist ein praktisches Beispiel für inhomogene Materialeigenschaft und damit unstetiges Materialverhalten. Trotz einfacher Geometrie und einfachen Randbedingungen ist dieses Problem ohne weiteres nicht analytisch lösbar. Die Abbildung 2.2 zeigt ein 3-Punkt-Biegeversuch und ist ein weiteres Beispiel für die Nichtlösbarkeit der DGL 2.2. Gründe dafür ist die Inhomogenität zwischen Außenlagen und dem Kern, die Kontaktbedingungen zwischen Paneel und dem Impaktor und der Lagerung, unstetiges Materialverhalten durch Versagen, etc.

Um diese Beispiele und andere komplexe Probleme lösen zu können, kommen numerisch Lösungsverfahren zum Einsatz. Eines dieser Verfahren, das auch im Rahmen dieser Arbeit benutzt wurde, ist die Finite Elemente Methode (FEM).

FEM ist ein mächtiges Tool, das schon seit über 50 Jahren entwickelt wird. Damit kann man numerisch Differentialgleichungen zu lösen, nicht nur die oben genannte DGL 2.2, sondern auch Wärmeleitungsgleichungen, Strömungsgleichungen, etc. [24]. Die FEM hat bereits ein Reifegrad erreicht, sodass man es die Auslegung von für große komplexe und sicherheitsrelevanten Bauteilen benutzt, wie z. B. Crash-Boxes [17] oder Flügelkasten.

Im DLR wird FEM Umgebung B2000++ benutzt, um strukturmechanische Probleme zu lösen und wird im Rahmen dieser Arbeit verwendet. Alle folgenden FEM Probleme wurden mit B2000++ gelöst.

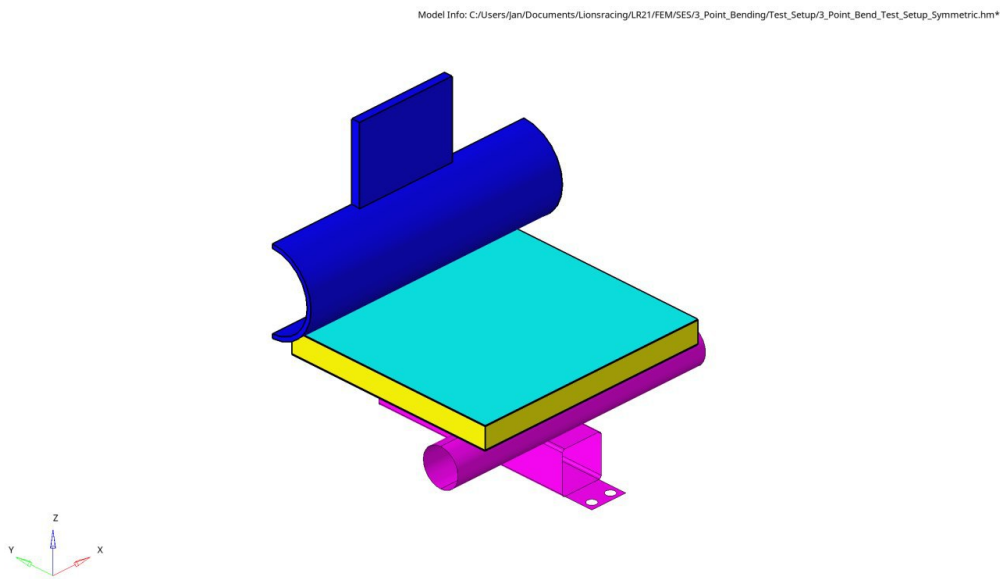


Abbildung 2.2: Modell eines 3-Punkt-Biegeversuchs. In dunkelblau der Impaktor, in blau die Außenlage, in gelb der Kern des Panels, in magenta die Lagerung

2.1 Lineares FEM Problem

Bis hier hin wurde gezeigt, dass die DGL2.2, um die Deformation eines Körpers zu beschreiben, nur für spezial Fälle lösbar ist. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie die FEM mit dieser DGL umgeht, und damit komplexe Probleme lösen können. Die Inhalte dieses Abschnitts werden den Leser dabei helfen Schritte nachzuvollziehen, die in späteren Kapiteln gemacht wurden. Z. B. wird im Kapitel Parameterstudie die Linearität des Problems verwendet, um das Ergebnis auf unterschiedliche Kraftniveaus zu extrapolieren.

Wie wir an Beispielen gesehen haben, kann man die DGL2.2 für komplizierte Probleme nicht lösen. In einem Beispiel wurde gezeigt, dass wenn das Material unstetiges Verhalten aufweist die Gleichung nicht lösbar ist. Um das zu umgehen, überführt man die Gleichung 2.2, die auch starke Formulierung genannt wird, in eine schwache Formulierung. Die schwache Formulierung setzt schwächere Forderung an die Differenzierbarkeit voraus. Damit ergeben sich beliebig viele schwache Lösungen[15]. Dies ermöglicht es uns nun die analytische Lösung als schwache Lösung zu approximieren.

Eine Möglichkeit die stark Formulierung in eine Schwache umzuwandeln ist das Prinzip der virtuellen Verschiebung(PvV)[9]. Dazu wird die Gleichung 2.2 mit einer virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ und dann über das gesamte Gebiet integriert. Durch eine partielle Integration wird die Ableitung von der Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ an die virtuelle Verschiebung übergeben 2.4. Wegen der

Ableitung wird aus $\delta \mathbf{u} \delta \boldsymbol{\varepsilon}$.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}(x) d\Omega = 0 \quad (2.4)$$

Ein weiterer Schritt ist die Approximation der Lösung \mathbf{u} mit 2.5, diese wird in der FEM auch primär Variable genannt. Üblicherweise wird die primär Variable mit Polynomfunktionen $\Phi(x)$ approximiert. Die Polynomfunktionen sind so gewählt, dass $\hat{\mathbf{u}}$ primär Variablen an Punkten im Gebiet Φ abbilden [9].

$$\mathbf{u} = \Phi^T \hat{\mathbf{u}} \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (2.6)$$

Um die Gleichung 2.4 nach $\hat{\mathbf{u}}$ lösen zu können, muss man die kinematischen und konstitutive Beziehungen einführen. Für die Dehnung wird die Beziehung 2.6 benutzt. \mathbf{D} ist ein linearer Operator(Matrix), die den Verschiebungsvektor \mathbf{u} in ein Dehnungsvektor abbildet. Als konstitutive Gleichung wird das hookesche Gesetz $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$ benutzt. Für die virtuelle Verschiebung verwenden wir die gleichen Ansatzfunktionen, wie für die Verschiebung. Setzen wir alles zusammen erhalten wir die Gleichung 2.7.

$$\delta \hat{\mathbf{u}} \left(\underbrace{\int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \Phi d\Omega}_{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{u}} + \underbrace{\int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{b} d\Omega}_{-\mathbf{f}} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Da der Vektor $\delta \hat{\mathbf{u}}$ aus beliebigen konstanten Werten besteht, kann dieser gestrichen werden und es bleibt der Ausdruck 2.8.

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (2.8)$$

Den Ausdruck 2.8 kann man interpretieren als Gleichgewicht der Reaktionskräfte im Inneren des Körpers mit den äußeren Kräften. Diese Form deutet auf die Linearität dieser Abbildung hin, worauf im folgenden Absatz eingegangen wird. Oftmals werden aber zu lösende Gleichungen nach null umgestellt, wie in Gleichung 2.9.

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{f} = \mathbf{R}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Diese Form wird im Kapitel Nichtlinearität wiederverwendet, da vorzugsweise Algorithmen zum Lösen von nichtlinearen Gleichungen nach dieser konstruiert werden.

Um die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und den Kraftvektor \mathbf{f} zu faktorisieren muss das Integral angewendet werden. Oftmals wird das numerisch mit der Gauß-Quadratur gemacht [9]. Für die

Gauß-Quadratur werden Stützstellen benutzt, die man auch Gaußpunkte nennt.

Die Gleichung 2.7 gilt lokal nur für ein Element. Üblicherweise benutzt man für ein Modell viele Elemente. Deshalb müssen die Steifigkeitsmatrizen und Kraftvektoren in jeweils eine globale Matrix und Kraftvektor zusammengesetzt werden.

Die Verschiebungen an den Stützstellen (oder auch Knotenpunkte genannt) der Polynomfunktionen ergeben sich durch das Lösen der Gleichung 2.8 nach $\hat{\mathbf{u}}$.

Zum Schluss dieses Abschnittes soll kurz auf die Linearität der Gleichung 2.8 eingegangen werden. Linear ist eine Abbildung $L(u) = f$ dann, wenn Homogenität und Additivität gilt. Beides lässt sich mit der Gleichung 2.10 darstellen. $L(u)$ ist nach 2.8 $\mathbf{K}\hat{\mathbf{u}}$.

$$\mathbf{L}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{L}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{f} = \alpha\mathbf{f}_u + \beta\mathbf{f}_v \quad (2.10)$$

Für das FEM Problem bedeutet das, dass ob ich zuerst die Kraft \mathbf{f}_u und dann die Kraft \mathbf{f}_v oder beide zusammen berechne, das Ergebnis in beiden Fällen identisch ist. Diese Eigenschaft wird im Verlauf dieser Arbeit verwendet. Das Problem wird für eine Kraft gelöst und das Ergebnis wird in den interessanten Stellen skaliert.

2.1.1 Post-Processing

Nach dem man das lineare FEM Problem gelöst hat, erhält man die Deformationen an den einzelnen Knotenpunkten mit $\hat{\mathbf{u}}$. Mit der Gleichung 2.5 erhält man das Deformationsfeld \mathbf{u} an jedem Punkt \mathbf{x} im Gebiet Ω . Um das Dehnungsfeld zu erhalten muss man nach der kinematischen Beziehung 2.6 \mathbf{u} ableiten (siehe 2.11). Je nach Polynomgrad von $\Phi(\xi, \eta)$ ist ε lokal in ξ und η nicht konstant. Damit ist auch die Spannung nicht konstant. Es muss noch die Frage beantwortet werden an welcher Stelle die Dehnungen und Spannungen ausgewertet werden. Viele kommerzielle FEM Tools, wie Abaqus, und auch B2000++ werten diese an den Integrationspunkten aus, weil diese genauere Ergebnisse liefern.

$$\varepsilon = \mathbf{D} \Phi(\xi, \eta) \hat{\mathbf{u}} \quad (2.11)$$

$$\sigma = \underbrace{\mathbf{E} \mathbf{D} \Phi(\xi, \eta)}_{\mathbf{S}(\xi, \eta)} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.12)$$

2.2 Nichtlineare FEM

Lineare FEM Probleme, wie im letzten Abschnitt beschrieben, sind gute Annäherungen, wenn Deformation und Kräfte sich wenig von der Referenzkonfiguration¹ unterscheiden. Jedes reale System wird sich irgendwann nichtlinear verhalten, wenn Deformation und Kräfte groß genug werden [24]. Nach [24] und [2] gibt es drei Arten von Nichtlinearitäten in der Strukturmechanik, die sind geometrische und physikalische² Nichtlinearität und Kontaktprobleme.

2.2.1 Geometrische Nichtlinearität

Viele Bauteile erfahren im Betrieb geringe Deformationen und Dehnung, wie z. B. ein Fahrradrahmen. Dementsprechend ist es oftmals ausreichend für das Modell geringe Deformationen und Dehnung anzunehmen, was bei der linearen FEM der Fall ist. Dennoch gibt es viele Bauteile die große Deformationen und Rotationen aufweisen, wo eine nichtlineare Berechnung unerlässlich wird [24]. Beispiel hierfür ist eine Angelrute. Diese muss zu Beginn eine Biegebeanspruchung ertragen, aber bei fortschreitender Deformation und Rotation wird diese immer mehr auf Zug beansprucht. Dieses Beispiel ist ein Fall für große Deformation aber kleine Dehnung und linear-elastisches Materialverhalten.

2.2.2 Physikalische Nichtlinearität

Oftmals tritt bei großen Dehnungen nichtlineares Materialverhalten auf. Man denke hierbei an einem Zugversuch von duktilem Stahl. Zuerst verhält sich das Material linear-elastisch. Doch ab der Dehngrenze beginnt der Werkstoff an zu Fließen. Beim Fließen verringert sich die Steifigkeit des Materials, dies erkennt man abflachen der Kurve im Spannungsdehnungs-Diagramm. Weiter mit dem Elastizitätsmodul zu rechnen wäre nicht richtig.

In diesem Beispiel kann man trotz nichtlinearem Materialverhalten kleine Deformation und Dehnung annehmen [10]. Genau wie im Abschnitt zuvor folgt die eine Nichtlinearität nicht zwangsweise aus der anderen.

¹auch Anfangszustand oder undeformierter Zustand

²oftmals Material- Nichtlinearität

2.2.3 Kontaktprobleme

Deformieren sich zwei Körper in der FEM auf einer Weise, dass ab ein gewissen Zeitpunkt ein Knoten von einem Körper ein Element vom anderen penetrieren würde, dann wird dieser Knoten an dieser Stelle über eine Randbedingung gebunden [2]. Diese Randbedingung ändert sich in diesem Fall unstetig und somit nichtlinear. Zusätzliche Nichtlinearitäten können durch Reibung auftreten.

Von den drein Nichtlinearitäten werden wir im Folgenden nur auf die geometrische eingehen, da es sich in dieser Arbeit nur um die nichtlineare Deformationen eines Flügelkastens handelt. Fälle bei denen die anderen Nichtlinearitäten berücksichtigt werden müssten, wären z. B. Schädigungsanalysen oder ein Vogelschlagtest.

2.2.4 Besonderheiten von geometrischer Nichtlinearität

Bevor auf die geometrischen Nichtlinearitäten eines Flügelkastens eingegangen wird, sollen in diesem Abschnitt einige Besonderheiten dargelegt werden, die im Verlauf der Arbeit immer wieder aufgegriffen werden.

Das erste Beispiel ist eine geometrische Versteifung im Vergleich zu linearen Berechnung. Ein Beispiel dazu ist in der Abbildung 2.3 dargestellt. Zu sehen sind zwei identische Platten, die an den Rändern fest aufgespannt sind und mit konstanten Druck belastet werden. Auffallend ist die große Verschiebung der linearen Berechnung im Vergleich zu nichtlinearen Berechnung. Dieser Unterschied lässt sich damit erklären, dass die lineare Berechnung immer von der Referenzkonfiguration ausgeht und jede Abweichung von dieser vernachlässigt. Wenn der Druck auf die Referenzkonfiguration lastet, dann werden nur Plattensteifigkeiten berücksichtigt. Die Membransteifigkeit wird vernachlässigt, weil keine Verschiebung und keine Zugspannung in Ebenenrichtung erkannt wird.

Anders ist es bei der nichtlinearen Berechnung. Da hier die Momentankonfiguration³ in jedem Schritt berücksichtigt wird, erkennt der nichtlineare Löser zusätzlichen Membransteifigkeiten und addiert diese der Plattensteifigkeit hinzu. Dadurch hat das System eine höhere Steifigkeit und verformt sich weniger.

³die aktuelle Zustand oder deformierter Zustand

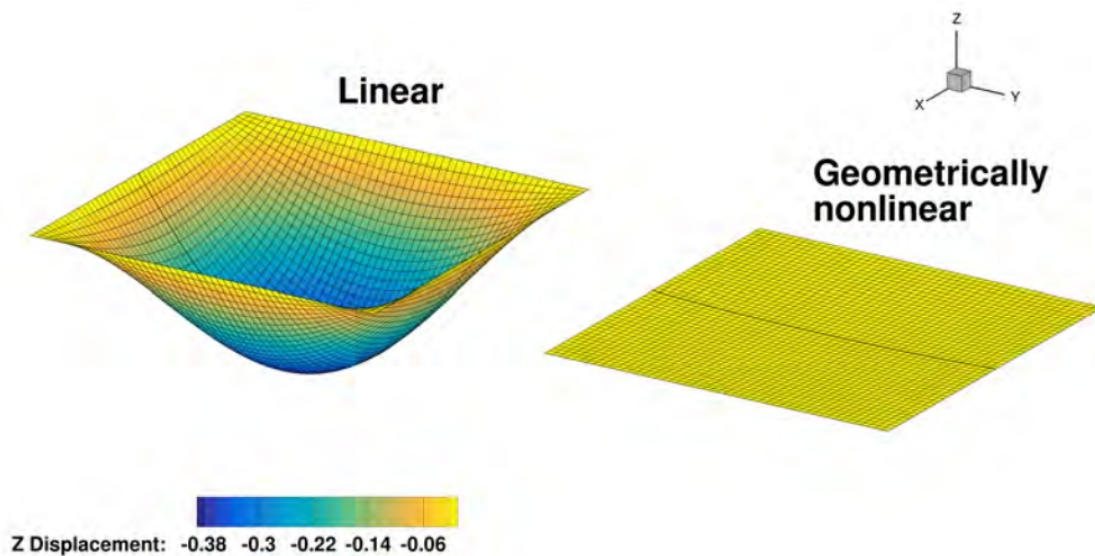


Abbildung 2.3: Beide Platten werden mit einem konstanten Druck beaufschlagt. Man sieht, dass die lineare FEM Berechnung größere Deformationen aufweist [12]

Neben der geometrische Versteifung kann auch eine geometrische Weichung auftreten. Dieser Effekt tritt hauptsächlich bei geometrischen Instabilitäten auf. Beispiele hierfür sind Knicken und Beulen. Die Abbildung 2.4 zeigt, wie im Fall einer nichtlinearen Berechnung die Oberseite beult. Das lineare FEM Modell beult sich nicht und ist dem entsprechend steifer.

Das nächste Beispiel für nichtlineare Berechnungen ist entnommen aus [24]. Abbildung 2.5 zeigt ein Stab, der durch eine Rotationsfeder mit der Steifigkeit c Momente aufnehmen kann. Dieser wird mit einer Kraft F gegenüber von der Lagerung belastet. Durch die Last entsteht ein Moment, das von der Feder aufgenommen wird. Das Momentengleichgewicht berechnet man mit $F l \cos \phi = c \phi$, wobei ϕ der Drehwinkel ist. Am Ausdruck $l \cos \phi$ kann man sehen, dass sich der Hebelarm mit größer werden dem Winkel verkürzt. Das linearisierte Modell ergibt sich aus der Linearisierung des Cosinus und der Zusammenhang ist $F l = c \phi$. Abbildung 2.6 gibt Aufschluss, wie die Beziehung zwischen der Kraft und dem Drehwinkel ist. Bis zum einem Winkel von circa 30° ist die linearisierte Berechnung eine gute Näherung an der exakten Lösung. Über 30° verhält sich die exakte Berechnung steifer als die lineare. Grund dafür ist die Verkürzung des Hebelarms. Je kürzer der Hebelarm desto mehr Kraft muss angewendet werden um die gleiche Rotation zurückzulegen. Das linearisierte Modell hingegen rechnet bei jedem Winkel mit dem Anfangshebelarm, dadurch bleiben Kraft und Winkel proportional zueinander. Dieses Verhalten kann man sich wie eine Verlängerung des Stabes vorstellen.

Bei einer nichtlinearen FE-Berechnung kann man auch sogenannte Follower-Kräfte berücksichtigen.

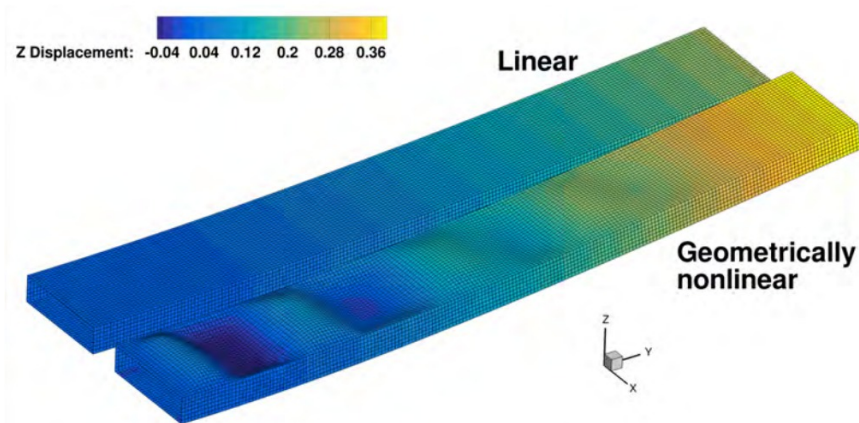


Abbildung 2.4: Eine dünnwandige Box ist auf der einen Seite aufgespannt und auf der anderen mit einer Kraft belastet. Die nichtlineare Berechnung kann das Beulen auf der Oberschale berücksichtigen und verformt sich stärker. Die Deformationen wurde um das 10-fache skaliert [12]

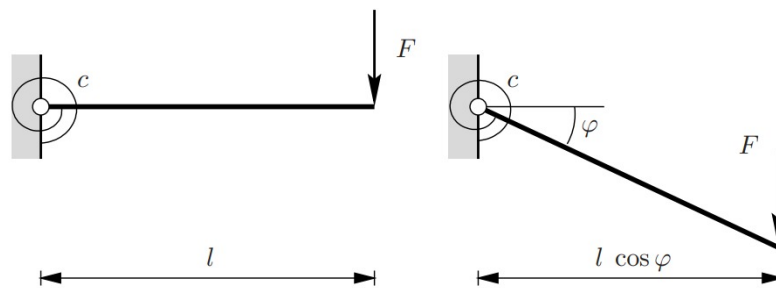


Abbildung 2.5: Ein Stab gelagert mit einer Rotationsfeder(links) wird auf der anderen Seite mit einer Kraft beaufschlagt [24].

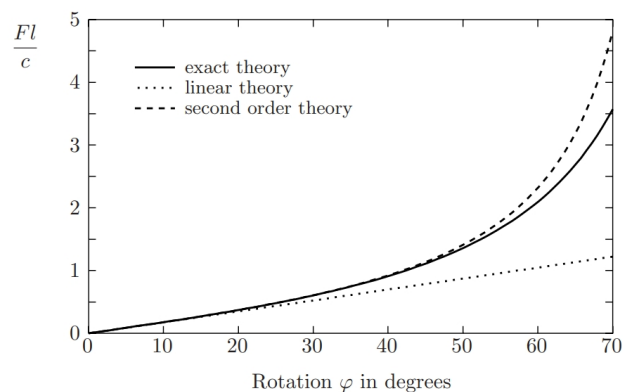


Abbildung 2.6: Ergebnisse des Stabbeispiels aus Abbildung 2.5. Die durchgezogene Linie ist die exakte Lösung, die punktierte ist die lineare Lösung. Die gestrichelte Lösung zeigt das Ergebnis an, wenn man den Cosinus bis zum zweiten Taylorpolynom approximiert [24]

sichtigen. Diese sind Kräfte, die der Deformation des Körpers folgen. Dies funktioniert nur, weil die nichtlineare Berechnung die Momentankonfiguration mitberücksichtigt.

Man stelle sich die Bildung von Seifenblasen vor. Wenn man dies linear berechnet, dann würde sich die Blase verformen, wie die lineare Berechnung in Abbildung 2.3. Vergrößert man den Druck auf dem Seifennetz, dann würde sich die Blase im linearen Fall nur in die Länge ziehen, weil die Kräfte sich nicht mit dem Seifennetz mitrotieren, stattdessen ihre Anfangsrichtung beibehalten. Berechnet man dieses nichtlinear mit Follower-Kräften, wirken die Kräfte immer senkrecht zum Seifennetz und können somit die runde Kontur der Seifenblase erfassen.

Druckkräfte, wie im Fall der Seifenblase, sind Kräfte, die immer senkrecht auf der Außenschale wirken. Die aerodynamischen Kräfte bei einem Flugzeugflügel sind auch Druckkräfte. Deformiert sich der Flügel so rotieren die Kräfte auf der Außenschale mit. Deswegen ist es für große Deformationen zu empfehlen mit Follower-Kräften zu rechnen.

2.2.5 Vorgehen bei der nichtlinearen FE-Berechnung

Im letzten Abschnitt wurden Unterschiede zwischen linearer Berechnung und nichtlinearer Berechnung gezeigt. Wie auch besprochen, entstehen diese Unterschiede dadurch, dass die lineare Berechnung immer von der Referenzkonfiguration ausgeht und die nichtlineare die Momentankonfiguration mitberücksichtigt.

Für die lineare FE-Berechnung wird in Gleichung 2.10 die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} in der Referenzkonfiguration faktorisiert und für alle Lastfälle konstant gehalten. Aus den Beispielen im letzten Abschnitt kann man zeigen, dass das nicht immer sinnvoll ist. Um die Momentankonfiguration in der FE-Berechnung miteinzubeziehen, muss sich die Steifigkeitsmatrix entsprechend der Nichtlinearität⁴ anpassen. Dadurch kann man $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{u}})$ nicht mehr von $\hat{\mathbf{u}}$ trennen. Für nichtlineare Gleichungen gibt es verschiedene Lösungsverfahren aber das am häufigste angewandte Verfahren ist das Newton-Raphson Algorithmus[24]. Der Algorithmus wurde so konstruiert, dass dieser die Gleichung 2.9 löst.

Bevor im nächsten Schritt das Newton-Verfahren erläutert wird, soll hier kurz auf das Residuum eingegangen werden. Das Residuum kann man als Gleichgewicht zwischen inneren Reaktionskräften und äußeren Lasten interpretieren. Ist das System nicht im Gleichgewicht, ist das Residuum ungleich null. Daraus lässt sich schließen, dass das Residuum ein Maß für das Ungleichgewicht ist, also für den Fehler. Für die lineare Berechnung in Gleichungen haben wir gezeigt, dass das Residuum immer null ist. Das ist jedoch das Residuum

⁴bedingt durch Deformation, Material-Nichtlinearität, Kontakt

für die Momentankonfiguration. Eingangs wurde gesagt, dass sich die Steifigkeitsmatrix im Verlauf entsprechend der Nichtlinearität ändert. Mit veränderter Steifigkeitsmatrix kann die Gleichung nicht mehr null sein. Für die veränderte Steifigkeitsmatrix müsste ein neues \mathbf{u} gefunden werden, das die Gleichung löst, und dasselbe erneut für das neue \mathbf{u} . Um ein möglichst gutes \mathbf{u} zu finden, wird anhand des Newton-Algorithmus erklärt.

Die Grundlage des Newton-Raphson-Verfahrens ist die Taylorreihenentwicklung. Eine nicht-lineare Gleichung $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ kann um einen Näherungspunkt \mathbf{u}_k durch eine Taylorreihe erster Ordnung genähert werden:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) \approx \mathbf{R}(\mathbf{u}_k) + \mathbf{K}_T(\mathbf{u}_k)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k) \quad (2.13)$$

Um $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ zu lösen, setzen wir den Näherungsausdruck gleich null und lösen nach \mathbf{u} auf:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k - \mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{u}_k)\mathbf{R}(\mathbf{u}_k) \quad (2.14)$$

wobei $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_k)$ die Jacobi-Matrix (oder auch Tangentensteifigkeitsmatrix) des Residualvektors $\mathbf{R}(\mathbf{u}_k)$ ist, definiert als:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_k) = \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_k} \quad (2.15)$$

. Der Algorithmus des Newton-Verfahrens wird in 2.2.5 gezeigt. Beginnend mit einem Startwert, oftmals der undeformierte Zustand, wird im ersten Schritt das Residuum und die Tangentensteifigkeitsmatrix berechnet. Mit diesen wird im zweiten Schritt Δu_{i+1} gelöst. Mit dieser wird im dritten Schritt der Verschiebungsvektor hinzuaddiert und verbessert den Deformationszustand im Sinne des Residuums. Im vierten Schritt wird überprüft ob mit dem neuen Verschiebungsvektor das Residuum innerhalb der gewünschten Toleranz liegt. Wenn nicht, dann wird die Schleife nochmal durchlaufen, sonst wird die Schleife erfolgreich beendet.

Theoretisch ist es möglich mit dem oben gezeigten Verfahren die Konvergenz zu erreichen. Da aber für das Newton-Verfahren keine globale Konvergenz garantiert werden kann[2] wird die Last oftmals in Inkrementen aufgeteilt. Über der Iterationsschleife in 2.2.5 wird eine Inkrementenschleife hinzugefügt. Wenn die Iterationsschleife konvergiert, wird die Last um einen Schritt erhöht und die Iterationsschleife wird erneut durchlaufen.

Um diese Konvergenzprobleme zu verringern kann auch ein gedämpftes Newton-Verfahren benutzt werden. Statt ein vollen Newton Schritt zu machen, wird der Schritt um α_i ver-

kleinert, wie in Gleichung 2.16 dargestellt. Diese Methode wird in anderen Zusammenhängen auch Liniensuchverfahren genannt und in B2000++ heißt die Einstellung “accelerated_newton,,

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \alpha_i \Delta \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i - \alpha_i \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{R}_i, \quad \alpha_i \in (0, 1] \quad (2.16)$$

Ein Nachteil des Newton-Verfahrens ist, dass die Tangentensteifigkeitsmatrix in jedem Inkrement faktorisiert und ein Gleichungssystem gelöst werden muss. Das Faktorisieren der Matrix braucht $\mathbf{O}(n^2)$ Auswertungen für n Freiheitsgrade. Lösen von Δu_{i+1} braucht $\mathbf{O}(n^3)$ Auswertungen, wenn die Struktur der Matrix unbekannt ist. Das zeigt, dass das Lösen eines großen nichtlinearen Systems vom Rechenaufwand sehr teuer werden kann im Vergleich zur linearen Lösung. Die lineare FEM geht die Iterationsschleife nur einmal durch⁵. Ein Vorteil des Newton-Verfahrens ist seine lokale quadratische Konvergenzeigenschaft. Das bedeutet, dass kurz vor der exakten Lösung der Fehler des nächsten Schrittes kleiner ist als das Quadrat des jetzigen Fehlers.

Algorithmus des Newton-Raphson Verfahrens [24]

Startwerte: $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_k$

Iterationsschleife $i = 0, 1, \dots$ bis zur Konvergenz

1. Berechne $\mathbf{R}(\mathbf{u}_i, \bar{\lambda})$ und $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i)$
2. Berechne die Verschiebung für das jeweilige Inkrement:
 $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i) \Delta \mathbf{u}_{i+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{u}_i, \bar{\lambda})$
3. Berechne die neue Verschiebung: $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_{i+1}$
4. Überprüfe Konvergenz

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{u}_{i+1}, \bar{\lambda})\| \begin{cases} \leq \text{TOL} & \text{Set : } \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_{i+1}, \text{ STOP} \\ > \text{TOL} & \text{Set } i = i + 1, \text{ gehe zu 1} \end{cases}$$

⁵man kann mit dem Newton-Verfahren eine lineare Lösung erzwingen, wenn man den gesamten Lastschritt verwendet und die Toleranz sehr hoch setzt.

Modifiziertes Newton-Verfahren

Eine einfache Änderung des Newton-Raphson-Algorithmus besteht darin, die Tangentensteifigkeitsmatrix nicht in jedem Iterationsschritt zu faktorisieren, sondern nur im ersten Inkrementsschritt. Diese Methode wird modifiziertes Newton-Verfahren genannt.

Die einzelnen Iterationen können schneller berechnet werden, dafür müssen mehr Iterationen berechnet werden, als beim konventionellen Newton-Verfahren, da man hier die quadratische Konvergenz verloren geht. Bei schwach nichtlinearen Problemen kann damit dennoch die Rechenzeit verkürzt werden.

Quasi-Newton-Verfahren

Mit derselben Idee, nicht in jedem Schritt die Tangentensteifigkeitsmatrix faktorisieren zu müssen, wird in dieser Methode die Matrix approximiert. Die Tangentensteifigkeitsmatrix wird durch eine Sekante approximiert, die aus den bekannten Verformungszuständen der vorherigen Iterationen berechnet wird. Auch kann man mit dieser Methode direkt die inverse der Tangentensteifigkeitsmatrix approximieren. Diese Methode wird als Quasi-Newton-Verfahren oder auch als BFGS-Methode bezeichnet. Sie kann als Kompromiss zwischen dem konventionellen und dem modifizierten Newton-Verfahren betrachtet werden.

In [12] wurde die Quasi-Newton-Methode in der BFGS Variante auf ein einfachen Biegebalken verwendet. Es wurde gezeigt, dass die BFGS-Methode für dieses Problem schlechte Konvergenzeigenschaften hat (siehe Abbildung 2.7), jedoch wurden keine zeitlichen Angaben gemacht.

Neben diesem Ergebnis zeigen [19], dass die BFGS-Methode sowohl für schwachnichtlineare FEM-Probleme als auch für starknichtlineare Probleme robust und schnell ist, im Vergleich zu der modifizierten Newton Methode. [19] sagen, dass man nicht in Panik geraten sollte, wenn die Anzahl der Iterationen groß ist. In B2000++ ist diese Methode nicht vorhanden.

Weitere Verfahren

Neben diesen drein etablierten Verfahren gibt es noch weitere, die aber für unser Folgendes Problem keine Relevanz haben. Einige dieser sind in [4, 16] erklärt und diskutiert.

Als Beispiel für eine weitere Methode ist das Bogenlängen Verfahren, auch genannt Arc-Length-Methode. Diese Methode ist nützlich, wenn es darum geht komplexe, nichtlineare Lösungspfade zu berechnen, wie in Abbildung 2.8. Komplexe Lösungspfade treten zum bei

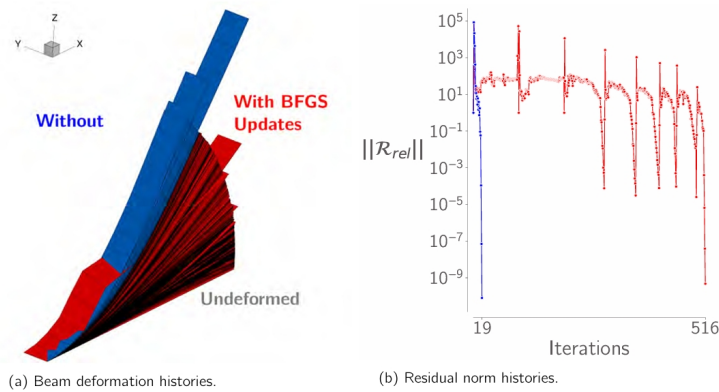


Abbildung 2.7: Links die Lösungsschritte des Biegebalkens abgebildet. Rechts das Konvergenzverhalten des Newtonverfahren mit Liniensuchverfahren(blau) und des BFGS-Verfahrens(rot)

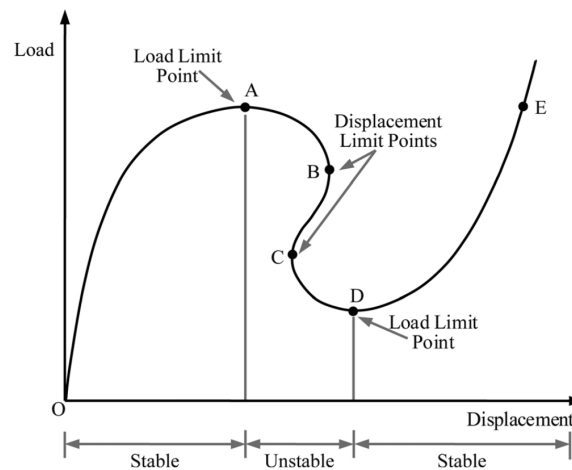


Abbildung 2.8: Kritische Punkte während einer nichtlineare Analyse[16]

Strukturinstabilitäten auf, wie zum Beispiel bei Schalenbeulen. In dieser Arbeit wird ein biegebalkenähnliches Problem betrachtet, das sich stark verbiegt, jedoch keine Stabilitätsgrenzen erreicht und die Abweichung zur linearen Lösung gering ist. Die Berechnungen am Flügelkasten werden maximal bis zum Load Limit Point berechnet(siehe Abb. 2.8). Angestrebt sind Methoden die ein solches Problem schnell lösen können. Da aber die Arc-Length Methode mit zusätzlichen Rechenaufwand verbunden ist, wird sie für die Folgenden Berechnungen nicht benutzt.

Die Abbildung 2.9 zeigt die Auswahlmöglichkeiten in B2000++ für den nichtlinearen Löser⁶. Die Auswahl „newton“ ist eine Löser- Einstellung ohne Liniensuchverfahren, also in jedem Inkrement wird ein Newton-Vollschritt benutzt(siehe 2.2.5). Mit „accelerated_newton“ wird

⁶Löser wird im englischen Solver genannt

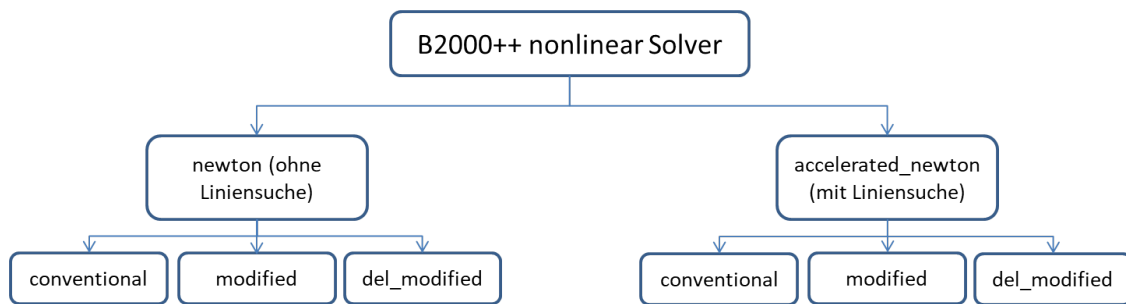


Abbildung 2.9: B2000++ nichtlineare Lösungsverfahren

eine hybride Variante benutzt, zuerst wird mit Newton-Vollschritten gerechnet und wenn das Verfahren divergiert, wird auf das Liniensuchverfahren umgestellt. Diese beiden Einstellung kann man verwenden mit „conventional“, „modified“ und „delayed_modified“. Das zweite wurde in Abschnitt 2.2.5 behandelt, und das dritte ist eine abgewandelte Variante des zweiten, wo man auch in der zweiten Iteration die Tangentensteifigkeitsmatrix faktorisiert. Damit erhofft man sich starke Nichtlinearitäten zu Beginn eines Newton-Schrittes (Inkrement) mit einer weiteren Faktorisierung zu beschleunigen, wie zum Beispiel bei Kontaktproblemen. Es wird empfohlen „accelerated_newton“ in Kombination mit den beiden modifizierten Verfahren zu verwenden, da in diesen Verfahren Divergenzen wahrscheinlicher sind als bei dem konventionellen Newton-Verfahren. Wie auch in Abschnitt 2.2.5 angemerkt sind ist Einstellung für schwachnichtlineare Probleme geeignet, wie im Fall des Flügelkastens.

Weitere interessante Einstellparameter sind „newton_periodic_update“, „max_divergences“, „max_newton_iterations“, „step_size_init“ und „step_size_min“. „newton_periodic_update“ gilt für alle modifizierten Newton-Verfahren ohne Liniensuche. Mit diesem Wert kann man einstellen, ab welchem Inkrement die Tangentialsteifigkeitsmatrix erneut faktorisiert werden muss. Gerade dann, wenn große Newton-Schritte gewählt werden, und während eines Schrittes größere Nichtlinearitäten auftreten, kann es manchmal helfen zwischendurch die Tangentialsteifigkeitsmatrix zu erneuern.

Mit „max_divergences“ kann man die Anzahl der hintereinander folgenden Divergenzen in einem Newton-Schritt einstellen, wo der Schritt dann abgebrochen wird und der Newton-Schritt reduziert wird. Szenarien, wo im Verfahren Divergenzen auftreten könnten, sind Unstetigkeiten im Lösungsverlauf, wie bei Kontaktproblemen oder Schädigungsanalysen, oder bei Load Limits. Da im Fall eines Flügelkastens diese Szenarien nicht zu erwarten sind, kann man davon ausgehen, dass dieser Wert hier weniger eine Rolle spielt. Wenn aber während der Optimierung durchs Beulen ein Load Limit erreicht wird, kann dieser Wert dabei helfen die Berechnung früher abubrechen, dafür muss man kleine Werte nehmen.

„max_newton_iterations“ bestimmt die gesamte Anzahl der Newton-Iterationen für den je-

weiligen Newton-Schritt(Inkrement). Dieser Wert muss passend für das jeweilige Problem angepasst werden. Ist dieser Wert zu groß, dann verbringt das Verfahren an einem Newton-Schritt viel Zeit, wenn die Konvergenzgeschwindigkeit langsam ist. Das kann an Stellen hoher Nichtlinearitäten passieren. Dort würde es sich empfehlen den Newton-Schritt abubrechen, und ein kleineren Schritt zu wählen. Wenn man aber den Schritt abbricht, geht der Fortschritt des jeweiligen Newton-Schritt verloren. Für jedes Verfahren muss dieser Wert neu bestimmt werden, da die Konvergenzgeschwindigkeit vom jeweiligen Verfahren abhängt.

„step_size_init“ stellt ein wie groß die Lastschritt im ersten Inkrement sein soll. Ist dieser zu groß, wird der Solver Schwierigkeiten haben zu konvergieren. Wenn zu Beginn hohe Nichtlinearitäten zu erwarten sind, wie bei Kontaktproblemen, dann ist ein kleiner Wert zu wählen. Bei schwachnichtlinearen Problemen, dementsprechend ein großer Wert, um von Beginn aus größere Schritte zu machen.

„step_size_min“ kann als Abbruchkriterium genutzt werden. Wenn der Löser Konvergenzprobleme hat und den Newton-Schritt immer weiter verkleinern muss, bricht dieser die Berechnung ab, wenn der Newton-Schritt kleiner als dieser Wert wird. Für starke nichtlinearitäten empfiehlt sich ein sehr kleiner Wert.

```
1 case 1
2   ebc 1
3   nbc 1
4   analysis nonlinear
5   newton_method modified
6   correction_type accelerated_newton
7   step_size_max 1
8   step_size_min 1e-16
9   max_steps 200
10  max_newton_iterations 200
11  newton_periodic_update 2
12  step_size_init 0.2
13  autospc yes
14  gradients 1
15 end
```

Listing 2.1: B2000++ Solver-Einstellung

Um das Konvergenzverhalten des Löser vollständig analysieren zu können, werden Residuum-Iteration-Diagramme genutzt. Da B2000++ nur für das jeweilige Inkrement Informationen gewährt, kann keine vollständige Analyse gemacht werden.

3 Nichtlinearität am Flügelkasten

In diesem Abschnitt sollen Ergebnisse präsentiert werden bezüglich nichtlineare FE-Berechnungen an einem Flügelkasten.

In [12] wurde als Flügelkastenmodell das Common Research Model (CRM) benutzt. Dieser Flügelkasten wird von NASA als Benchmarkmodell bereitgestellt (siehe [5]). Von diesem Modell wurden zwei Konfigurationen für die Analysen benutzt, den uCRM-13.5 und uCRM-9. Die Daten dieser Flügel sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Der uCRM-9 den typischen Streckungsverhältnissen aktueller Verkehrsflugzeuge, während das uCRM-13.5 ein größeres Streckungsverhältnissen hat. Für den Verlauf dieser Arbeit ist der uCRM-13.5 von größerer Interesse, da in diesem höhere Nichtlinearitäten erwartet wird.

[12] hat für die folgenden Ergebnisse die Lasten am Flügel durch eine getrimmte aeroelastische Analysen berechnet. Dafür wurden unterschiedliche Manöver am linearen FE-Modell simuliert. Das Material an den Flügel ist Aluminium, daher kann eine von-Mises Vergleichsspannung herangezogen werden.

Beim uCRM-13.5 gibt es signifikante Unterschiede in den Spannungen und dem Beulmaß, mit einer Erhöhung der Von-Mises-Spannungen in der Außenhaut und den Holmen um 25-40% und einer Erhöhung des Beulmaßes in den Rippen in der nichtlinearen Analyse (siehe

Table 4.1: Key parameters of the uCRM planforms [81].

Parameter	uCRM-9	uCRM-13.5	Unit
Aspect-ratio	9	13.5	
Taper-ratio	0.275	0.25	
Span	58.76	72.0	m
Root chord	11.92	11.07	m
Tip chord	2.736	2.06	m
Reference area	383.74	383.78	m ²
1/4 chord sweep	35	35	°

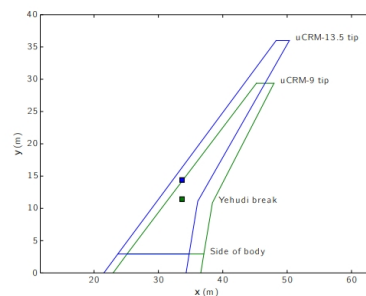


Figure 4.1: Schematics of the uCRM planforms [81]

Abbildung 3.1: Daten von uCRM-13.5 und uCRM-9 [12]

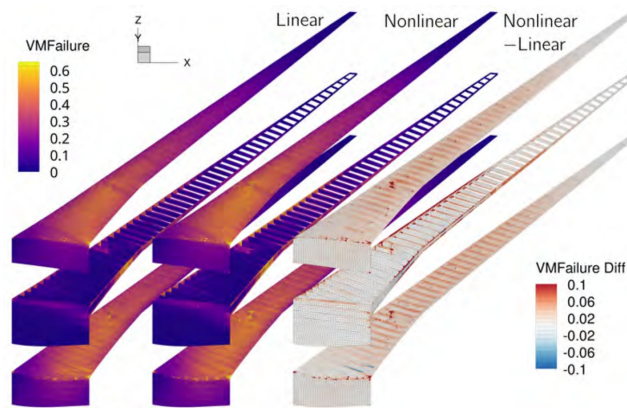


Abbildung 3.2: relative Spannung und Differenz zwischen linear und nichtlinear des uCRM-13.5 [12]

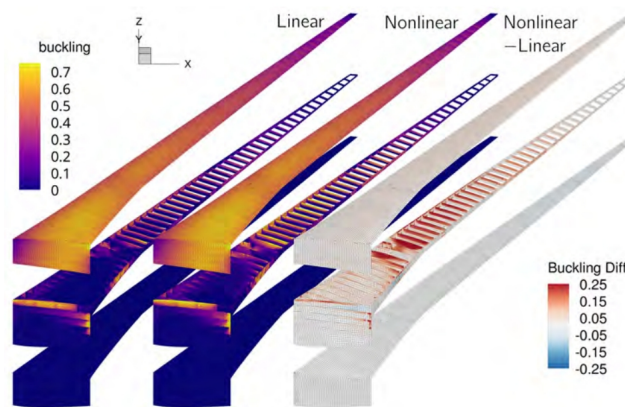


Abbildung 3.3: Vergleich des Beulmaßes der linearen und nichtlinearen Berechnung des uCRM-13.5 [12]

Abbildung 3.2). An der Außenhaut und den Holmen konnte kein ausgeprägtes Beulverhalten beobachtet werden.

In Abbildung 3.2 ganz rechts, ist die Differenz zwischen der beiden Berechnung abgebildet. Das in diesem Konturplot nahe zu nur rote Bereiche angezeigt werden, deutet darauf hin, dass die Spannung im nichtlinearen höher ist, als in der linearen Berechnung. Dies wird zurückgeführt auf die Follower Kräfte, die in der nichtlinearen Berechnung berücksichtigt werden aber in der linearen nicht. Abbildung 3.3 vergleicht den Wert des Beulmaßes aus denselben Berechnungen. Auffällig ist sind die Rippen im Differenzkonturplot. Diese sind rot gefärbt und dies deutet darauf hin, dass die Belastungen an den Rippen nicht richtig erfasst werden.

Auch wurde eine getrimmte aeroelastische Analyse gemacht, sowohl linear als auch nichtlinear. Anders als bei der reinen strukturmechanischen Berechnung, hat die Außenhaut der

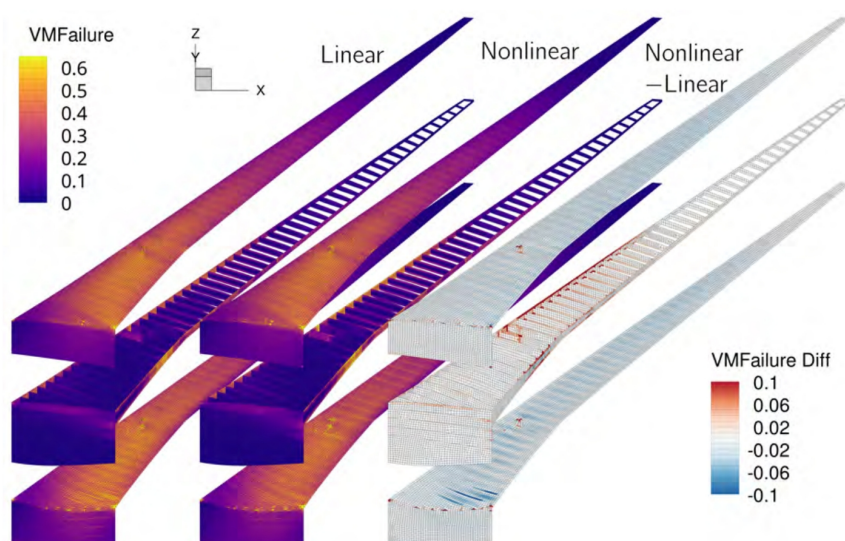


Abbildung 3.4: [12]

nichtlineare Berechnung eine vergleichsweise geringere Spannung als die lineare. Es wird davon ausgegangen, dass diese Verringerung durch die Verringerung des Auftriebes bei der nichtlinearen aeroelastischen Berechnung zurückzuführen ist. Eines der Gründe, warum sich der Auftrieb verringert, ist wegen der Verkürzung der Spannweite bei der Auslenkung.

In [23] wurde die lineare und nichtlineare aeroelastische Berechnung eines Flügelkastens mit einem Streckungsverhältnis von 12 verglichen. Es wird gezeigt, dass die Spannung der nichtlinearen Berechnung bis zu 40% geringer ist als in der linearen Berechnung. Dieses Verhalten kann man auf das Beulen der Außenhaut zurückführen. Auch wird in [23] gezeigt, dass einzelne Rippen im linearen Fall unter Zug belastet werden, wobei die nichtlineare Fall Druckkräfte erfährt. [23] konkludiert damit, dass die lineare Berechnung kein Beulen erfassen kann. Auch wird konkludiert, dass für Flügelkästen ab einer Streckungsverhältnis von 12 Nichtlinearitäten berücksichtigt werden sollte.

4 Strukturoptimierung

In der Strukturoptimierung wird oftmals ein Optimierungsproblem folgendermaßen formuliert:

$$\begin{array}{llll} \text{minimiere} & m(a) & & \\ \text{durch Variation von} & a_i \geq a_{\min} & & i = 1, \dots, 15 \\ \text{unter der Bedingung} & |\sigma_j(a, u)| - \sigma_{\max} \leq 0 & & j = 1, \dots, 15 \\ \text{während der Lösung von} & Ku - q = 0 \text{ (auch } R(u) = 0) & & \\ \text{durch Variation von} & u_l & & l = 1, \dots, 18 \end{array}$$

$m(a)$ ist häufig die Masse, kann aber auch eine andere Größe sein, wie zum Beispiel die Steifigkeit, und wird Zielfunktion genannt. a_i sind die Designvariablen, und $|\sigma_j(a, u)| - \sigma_{\max} \leq 0$ und $Ku - q = 0$ sind die Randbedingungen des Gleichungssystems. Die erstere Bedingung setzt voraus, dass die Spannung des Systems unter einer vorgegebenen Spannungsobergrenze bleiben muss, und wird auch Ungleichheitsrestriktion genannt. Die zweite Bedingung wird Gleichheitsrestriktion genannt und setzt die Lösung des strukturmechanischen Problems voraus. Diese Randbedingung besagt also, dass das strukturmechanische Problem im zulässigen Optimum im Gleichgewicht sein muss (vgl. 2.9).

In der Strukturoptimierung gibt es verschiedene Variationen dieses Problems. Eine davon ist die Topologieoptimierung, bei der die Dichten der einzelnen Elemente die Designvariablen sind.

Ein weiteres Beispiel ist die Size-Optimierung, bei der einzelne geometrische Größen, wie zum Beispiel der Durchmesser eines Rohres, optimiert werden. Bei [12] wurde solch ein Problem für einen Flügelkasten gelöst, wobei die Designvariablen die Dicke der Außenhaut des Flügels und die geometrischen Größen der Versteifungselemente sind.

Ist man daran interessiert, die gesamte Form des Flügels zu optimieren, spricht man von einer Shape-Optimierung.

Ein Optimierungsproblem muss oftmals numerisch gelöst werden, da das strukturelle Modell kein geschlossener mathematischer Ausdruck ist, sondern als Black-Box betrachtet wird, was bei der FE-Methode häufig der Fall ist. In einem numerischen Verfahren müssen die Modelle in jeder Iteration erneut gelöst werden. Daraus kann man schließen, dass das Modell in einem Optimierungsprozess viele Male berechnet werden muss, und dies kann zu langen Prozesszeiten führen. Ziel ist es nun den gesamten Optimierungsprozess zu beschleunigen, in dem man reduzierte Modelle und geeignete Optimierungsverfahren benutzt. Reduzierte Modelle reduzieren die Dauer der einzelnen Schritte und geeignete Optimierungsverfahren für eine geringere Anzahl der Schritte (Evaluationen). Beispiele für das Erste sind Surrogate Modelle [14] oder linearisierte Modelle, wie in diesem Fall das lineare FE-Modell. Beispiele für das Zweite sind CG-Verfahren (conjugate gradient) oder SQP-Verfahren [18].

Im Kontext dieser Studienarbeit hat [11, 12] eine Shape-Optimierung für ein Flügelkastenmodell durchgeführt. Die Kräfte an dem Flügel wurden durch eine lineare aeroelastische Berechnung ermittelt. Diese Kräfte wurden in der Optimierung verwendet. Optimierte wurde ein Flügelkasten sowohl mit linearer FE-Berechnung als auch nichtlinearer FE-Berechnung. Es konnte gezeigt werden, dass im nichtlinearen Fall der Flügelkasten 6% mehr Masse besitzt als in der Optimierung mit einer linearen Berechnung. Diesen Unterschied kann man aus den Beobachtungen aus dem Kapitel 3 ableiten. Dort wurde gezeigt, dass aus der nichtlinearen FE-Berechnung höhere Spannungen resultieren. Ein Grund war, dass die nichtlineare Berechnung Follower-Kräfte benutzt.

Für das gleiche Optimierungsproblem wurde in [12] ein Bi-Level-Ansatz ausprobiert. Bi-Level-Optimierung ist ein Ansatz, bei dem man zuerst mit dem günstigeren Modell das Optimierungsproblem löst und diese Lösung als Startpunkt für die teure Berechnung verwendet. Damit soll die Berechnungszeit insgesamt reduziert werden, da mit dem günstigen Modell schneller eine Lösung gefunden werden kann und man annimmt, dass die Lösung des linearen Modells sich in der Nähe der Lösung des nichtlinearen Modells befindet.

Diese Idee wurde sowohl für ein schlechtes Anfangsdesign, also fern vom Optimum, als auch für ein gutes, also nah am Optimum der nichtlinearen Strukturoptimierung, ausprobiert. Im Fall des guten Anfangsdesigns konnte gezeigt werden, dass der Bi-Level-Ansatz langsamer ist als der herkömmliche Ansatz, also von Anfang an eine nichtlineare Strukturoptimierung. Für das schlechte Design konnte mit diesem Ansatz jedoch das Optimum schneller gefunden werden als mit dem herkömmlichen Design.

5 Parameterstudie

In diesem Abschnitt soll der Frage nachgegangen werden, welche Charakteristiken zum Vorschein treten wenn ein Flügelkasten nichtlinear gerechnet wird. Auch wird auf die Frage eingegangen, ab wann man ein Flügelkasten nichtlinear rechnen muss.

Ein FEM Problem wird in einem numerischer Optimierungsalgorithmus vielfach berechnet. Deswegen sollte der Rechenaufwand des FEM Modells nicht zu groß sein, damit das Optimierungsproblem im Rahmen der gegebenen Anforderungen, wie zum Beispiel Zeit und Rechenkapazitäten, gelöst werden kann. Ein lineares FEM Modell kostet ein Bruchteil so viel, wie ein nichtlineares, kann, wie wir gesehen haben, große Deformationen nicht richtig abbilden.

Daher soll im Folgenden ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und der Aufwand zwischen diesen beiden Methoden gefunden werden.

5.1 Flügelkasten

Um den Unterschied zwischen nichtlinearen und linearen Berechnungen von Flügelkästen zu charakterisieren, könnte man sich zwei oder mehr reale Flügelkästen nehmen, die sich in den geometrischen Abmaßen unterscheiden. Diese könnte man sich aus den Benchmarkmodelle erzeugen, so wie es in [12] gemacht wurde(siehe 3). Diese berechnet man dann linear und nichtlinear und analysiert beide Ergebnisse nach den Unterschieden.

Das Ergebnis dieser Analyse würde sich nur auf diese zwei Flügel beschränken. Diese Studie würde keinen Aufschluss darüber geben, wie sich das Verhalten über unterschiedliche Längen, Seitenverhältnisse, Deformationen, Breiten, Höhen und Pfeilungen verändert.

Ein realer Flügel ist zu komplex, um die Erkenntnisse von einem auf den anderen zu übertragen. Auch unterscheiden sich reale Flügel in der Materialauswahl, was einen Vergleich umso komplexer macht.

Besser lassen sich Ergebnisse vergleichen, wenn man einen einheitlichen Flügel benutzt und

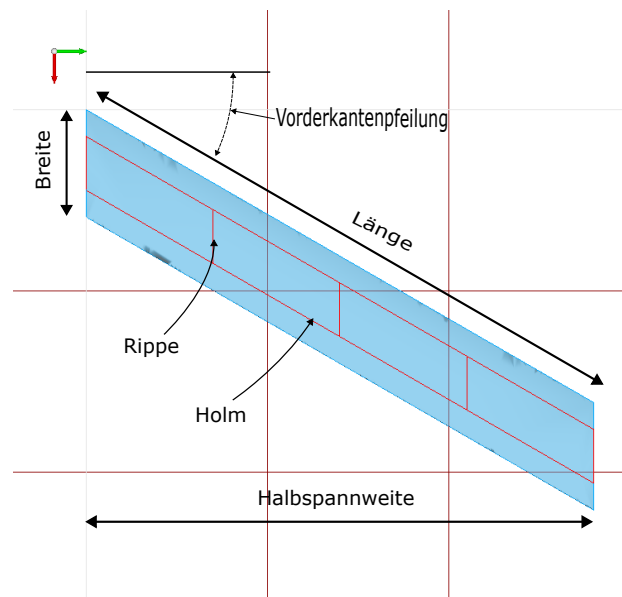


Abbildung 5.1: Draufsicht des vereinfachten Flügelkastens mit den relevanten Maße

diesen in seiner Geometrie verändern kann. Für die Studie würden unterschiedliche Geometrien berechnet und verglichen. Dadurch werden die Ergebnisse kontinuierlicher und man kann analysieren, wie sich die Nichtlinearität auf die Länge, Breite, Kraft und Pfeilung auswirkt.

Daher wird im Folgenden ein einfacher Flügelkasten herangezogen, um die Komplexität zu verringern und um die Ergebnisse besser miteinander vergleichen zu können.

Der Flügelkasten ein konstanten rechteckigen Querschnitt mit jeweils fünf Rippen, die ein Abstand von 0.25 eta^1 zueinander haben. Abbildung 5.1 ist eine Draufsicht auf ein gepfeilten Flügel. In transparent blau ist das aerodynamische Flügelprofil, die roten Linien sind die Ansätze des Flügelkastens. Die roten Linien in axialer Flügelrichtung sind die Holme und die in vertikaler Richtung sind die Rippen. Für diesen einfachen Flügelkasten wurden drei innere Rippen ausgewählt. Die Außenhaut des Flügelkastens wird durch das Trimmen des aerodynamischen Profiels mit den Holmen erzeugt. In dieser Abbildung ist auch zu erkennen, dass die Halbspannweite eines Flügels nicht die Länge ist. Die Halbspannweite ist der Abstand der Flügelspitze zum Rumpf in y- Richtung (grüner Pfeil). Diese kann man auch beschreiben mit $\text{Halbspannweite} \cdot \cos \phi = \text{Länge}$, wobei ϕ der Pfeilungswinkel ist. Ist dieser null, dann stimmen Halbspannweite und Länge über ein, sonst die Länge größer als diese.

Abbildung 5.2 ist eine Seitenansicht des Flügelprofils. Hier sieht man das es tatsächlich um ein rechthöckigen Querschnitt handelt. Diese Abbildung zeigt auch, dass die Breite des aerodynamischen Profiels sich vom Flügelkasten unterscheidet. Das aerodynamische Profil

¹relative Flügelposition in axialer Richtung

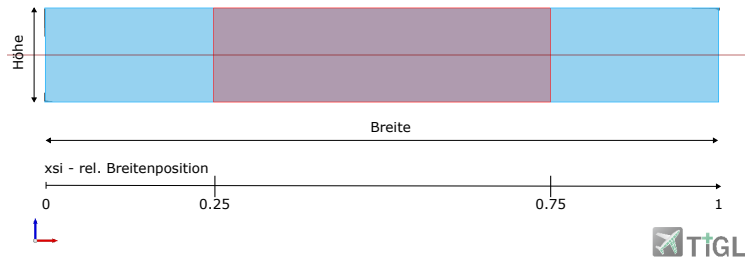


Abbildung 5.2: Seitenansicht des vereinfachten Flügelkastens mit den relevanten Maße

wird bei x_{si}^2 von 0.25 und bei x_{si} von 0.75 geschnitten, und aus der Schnittfläche die Holme erzeugt. Bei der Wahl der relativen Abstände der Holme, wurde versucht ein Kompromiss zwischen realen Werten und anschaulichen Werten zu machen. Die relativen Breitenposition des DLR-F25 sind ca. 0.2 und 0.67. Für den vereinfachten Flügelkasten wurden diese Werte um 0.05 x_{si} verschoben und die relative Breite um 0.03 erweitert. Das Verschieben macht kein Unterschied, da es sich um ein rechtwinkligen Querschnitt handelt, die Vergrößerung ist somit der Kompromiss. Diese Vergrößerung wird aber keine Auswirkungen auf die Ergebnisse haben, da die Breite eine abhängige Größe ist, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird. Bezüglich des Materials haben die Rippen und Flügelaußenhaut den gleichen Lagenaufbau. Der Lagenaufbau ist in Tabelle 5.2 unter Axial angegeben. Der Lagenaufbau für die Holme hat halb so viele Lagen. Beide Aufbauten benutzen den Faserverbundwerkstoff T300_5208, dessen Daten in Tabelle 5.1 abgebildet sind. Das Material hat im Rahmen dieser Arbeit eine sekundäre Rolle, auch hätte man an dieser Stelle sich für ein isotropes Material entscheiden können, jedoch war dieses gegeben. Welche Auswirkung das Material auf das Ergebnis hat, wird im folgenden nicht betrachtet.

5.2 Daten generieren

Im letzten Abschnitt haben wir den vereinfachten Flügelkasten beschrieben, den wir für Parameterstudie heranziehen wollen. Die Einfachheit des Flügelkastens soll dazu ausgenutzt werden, um viele unterschiedliche geometrische Variationen anzuwenden und diese zwischen lineare und nichtlineare FE-Berechnung zu vergleichen. Bis hier hin sind die Variablen des Flügelkastens die Länge, die Breite, Höhe und die Pfeilung und die Kraft. Da wir uns an

²relative Breitenposition

Tabelle 5.1: Materialeigenschaften der UD-Lage T300_5208

Parameter	Wert
Name	T300_5208
ρ	1.76 t mm^{-3}
E_1	181 000 MPa
E_2	10 300 MPa
G_{12}	7170 MPa
G_{23}	3780 MPa
G_{31}	7170 MPa
ν	0.27

Tabelle 5.2: Laminataufbau der verwendeten Laminat

Name	Lagenaufbau	Material Name	Lagendicke
Shear	[45, -45, 0, 0, -45, 45]	T300_5208	0.005
Axial	[45, -45, 45, -45, 0, 0, 0, 0, -45, 45, -45, 45]	T300_5208	0.005

einem Richtigen orientieren wollen machen wir die Breite

Die Geometrie des Flügelkastens ist in CPACS[1] beschrieben. Dort kann man die geometrischen Größen beliebig einstellen. Wie Eingangs besprochen sind die Größen: Länge, Breit, Höhe, Pfeilungswinkel, Kraft.

Um B2000++ benutzen zu können müssen wir den CPACS Datensatz in eine Eingabedatei in einer mdl Form konvertieren. Dies Erfolgt über den Umweg aus CPACS eine Bulk Data Format(bdf) Eingabedatei zu generieren und anschließend die MDI-Datei. Der zugehörige Code wird im Block 5.1 gelistet. Mit der generierten MDL datei kann man den Flügelkasten mit dem linearen Löser rechnen. Will man aber nichtlinear rechnen, muss man die Solver-einstellungen in der mdl Datei selbst anpassen.

Diese Studie soll sich möglichst nah an Flügelgeometrien orientieren. Würden man die geometrischen Größen dem Zufall überlassen, dann würden wir auch kurze sehr schmale Flügel berücksichtigen(siehe 5.3).

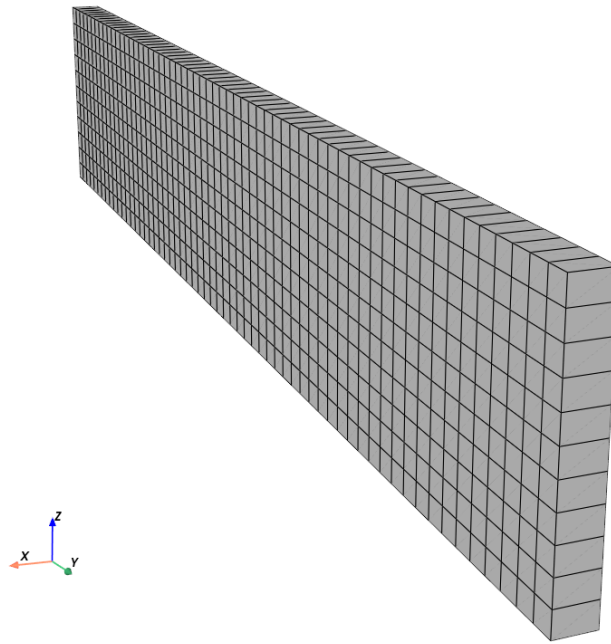


Abbildung 5.3: Langer schmaler Flügel mit schlechten aerodynamischer Effizienz

Daher wurde für die Folgenden geometrischen Abmessungen Beschränkungen eingeführt. Die Höhe ist abhängig von der Breite mit dem Zusammenhang $h = 0.14 * b$ und die Breite errechnet sich aus der vorgegebenen Fläche von 383 m^2 und der Länge des Flügels. Damit bleiben zwei freie Parameter übrig, die Flügellänge und der Pfeilungswinkel. Die unterschiedlichen Konfigurationen sind in Tabelle 5.3 abbildet.

Für diese Studie kann man sich auch fragen, ob Follower-Kräfte berücksichtigt werden müssen oder nicht. Mit Follower-Kräften könnte man die Ergebnisse der Studie auf aeroelastische Analysen übertragen. Also, wie groß könnten Unterschiede sein, wenn mit Aerodynamischen Kräften gerechnet wird. Die Vernachlässigung von Follower-Kräften entspricht der Annahme, dass die Kräfte trotz großer Deformation sich verhalten, wie die Kräfte eines undeformierten Flügels. Für keine Verschiebung und Rotation sind die Unterschiede genau so klein. Jedoch nimmt die Kraft in axialer Flügelrichtung³ um den Faktor des Winkels zu⁴. Ein Beispiel mit Follower-Kräften ist in Abbildung 5.4 angezeigt. Zum Beispiel würde ein Flügel bei einer relativen Verschiebung der Flügelspitze um 10% eine zusätzliche axiale Last erfahren, die ungefähr ein Zehntel so groß, wie die ursprüngliche Kraft an diesem Punkt⁵. In 3 wurde gezeigt, dass Follower Kräfte Einfluss auf die Spannung auf der Außenhaut haben.

³also in negativer y- Richtung

⁴linearisierter sinus: $F_y = F \cdot \sin \alpha \approx F \cdot \alpha$

⁵ $\frac{TipDisp.}{b/2} = 10\% \approx \tan \alpha \approx \alpha \rightarrow F_y \approx F \cdot 0.1$, durch die zusätzliche axiale Kraft vergrößert sich die Krümmung, was wiederum zu einer größeren axialen Kraft führt

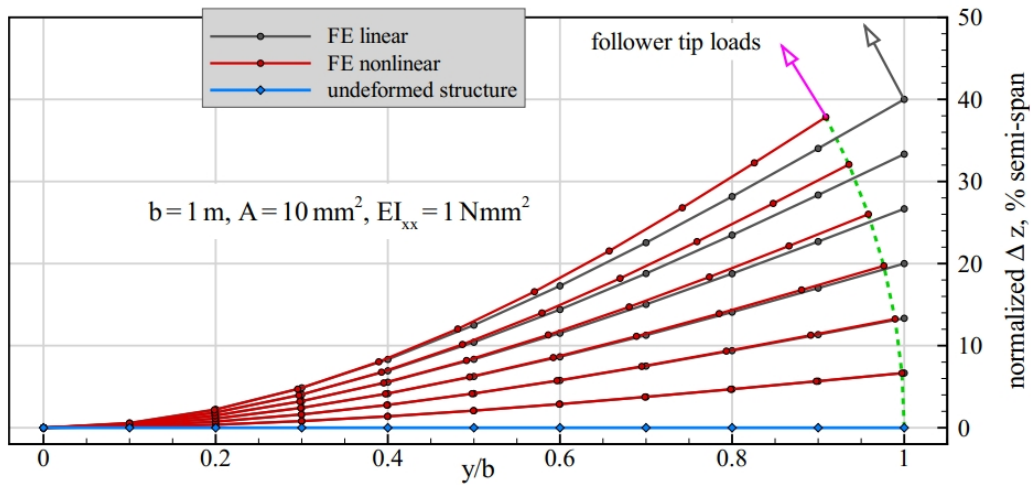


Abbildung 5.4: Generischer 1D-Balken mit linearer und nichtlinearer Berechnung [21]. Nicht-lineare Berechnung verwendet Follower Kräfte.

```

10         'mesh_size_from_curvature' : 0,
11         'mesh_smoothing' : 0},
12         wing_geometry_tolerance=1e-1)
13 main(['--cpacs-filename', filename])
14
15 print('convert from bdf to mdl')
16 bdf_file = filename.split('.')[0] + ".bdf"
17 B2kInterface.convert_from_bdf(bdf_file)

```

Listing 5.1: convert_xml_2_mdl

In Abbildung 5.5 und 5.6 sind die Weg-Kraft Kurven abgebildet. Auf beiden Abbildungen sind Punkte zu sehen, diese Punkte werden in folgenden Kapiteln näher betrachtet. Abbildung 5.5 zeigt Weg-Kraft Kurven aller Berechnungen. Die vertikalen Linien in diesem Bild sind Schnittlinien die im Abschnitt 5.3 verwendet werden. Kurze Flügel haben eine kleine Steigung, während lange Flügel eine große Steigung haben. Dieses über dem blauen Pfeil mit der Kennzeichnung „Länge“ angezeigt. Diese Kennzeichnung wird auch in den Folgenden Bildern verwendet und soll zeigen, wie sich die Ergebnisse über die Länge verhalten. Einige dieser Ergebnisse sind zur Übersicht in Abbildung 5.6 abgebildet. Diese zeigen die Flügelkästen mit den Nummern 1, 6, 9, 10 und 14 ohne Pfeilung. Ebenfalls dargestellt sind die linearen Verläufe der linearen Berechnungen. In dieser Abbildung kann man erkennen, ab wann sich die Verläufe vom linearen Verhalten abspalten. Man kann beobachten, dass kurze Flügelkästen im Vergleich zur linearen Rechnung nachgiebiger sind. Dies lässt sich daran erkennen, dass der Verlauf des Flügelkastens mit der Nummer 1 über dem linearen Verlauf verläuft. Anders ist es bei langen Flügelkästen, dort verläuft die Weg-Kraft-Kurve unter dem

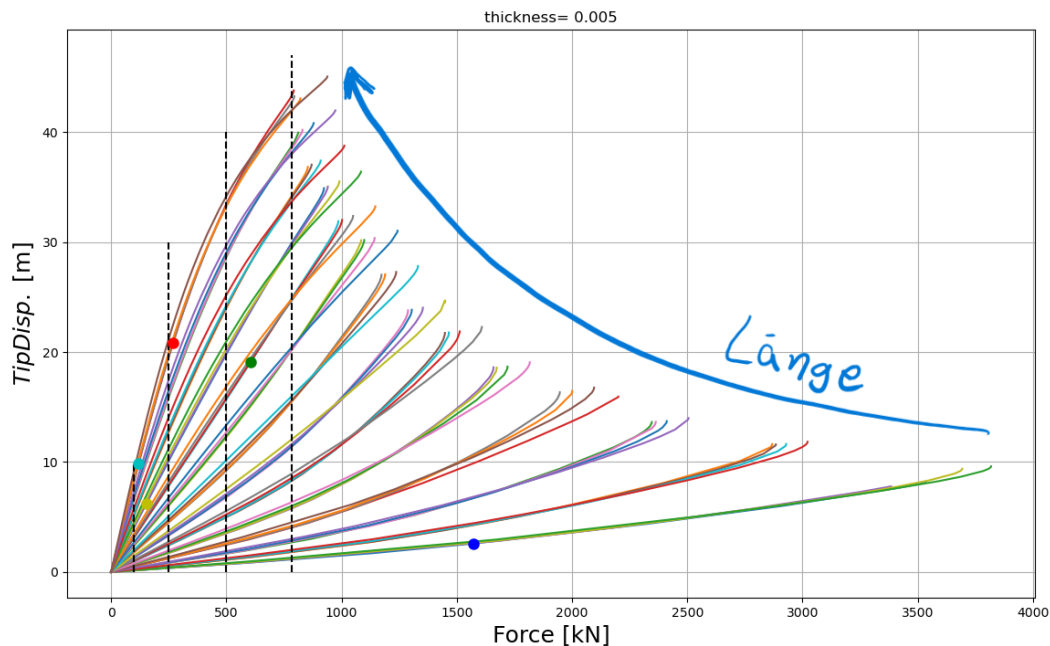


Abbildung 5.5: Weg-Kraft Verlauf alle Berechnungen. Die vertikalen Linien sind Schnittlinien, die in 5.3 verwendet werden.

linearen Verlauf und ist somit steifer. Dazwischen liegt der Flügelkasten mit der Nummer 10, der nahezu einen linearen Verlauf beibehält.

Um dies zu verstehen, muss man sich die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.2.4 vergegenwärtigen. Dort wurden geometrische Versteifung und nachgiebiges Verhalten durch Beulen gezeigt. Für die versteifenden Effekte wurden zwei Beispiele gezeigt, eines davon war der gelagerte Stab. Dort war es so, dass durch die Verkürzung des Hebelarms in der nichtlinearen Berechnung das System steifer wurde im Vergleich zur linearen Berechnung, wo der Hebelarm konstant bleibt. Dieses Verhalten tritt auch bei diesen Flügelkästen auf. Die nichtlineare Berechnung verkrümmt sich aufgrund der Last und behält nahezu die Anfangslänge, weil die axiale Last gering ist⁶. Dadurch wird der Hebelarm kleiner und somit auch das Moment kleiner. Für die lineare Berechnung bleibt der Hebelarm nahezu konstant.

Das nachgiebige Verhalten bei kurzen Flügelkästen tritt aufgrund von Beulen auf. Dies kann man in Abbildung 5.7 beobachten.

⁶Da hier keine Follower-Forces berücksichtigt wurden, erfährt der Balken bei höheren Verformungen eine axiale Last, da sich der Flügel rotiert und die Last nicht. Dies wurde auch bei dem Stab-Beispiel erkannt

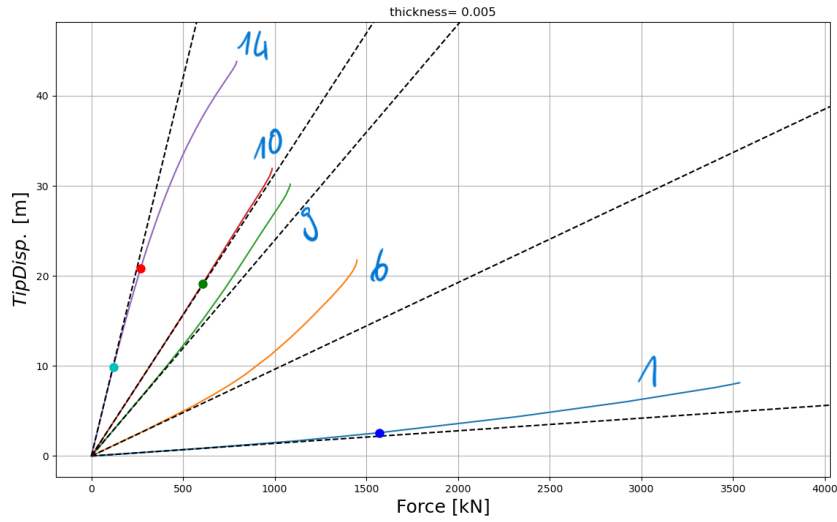


Abbildung 5.6: Weg-Kraft Verläufe der Flügelnummern 1, 6, 9, 10 und 14 ohne Pfeilung (siehe 5.3)

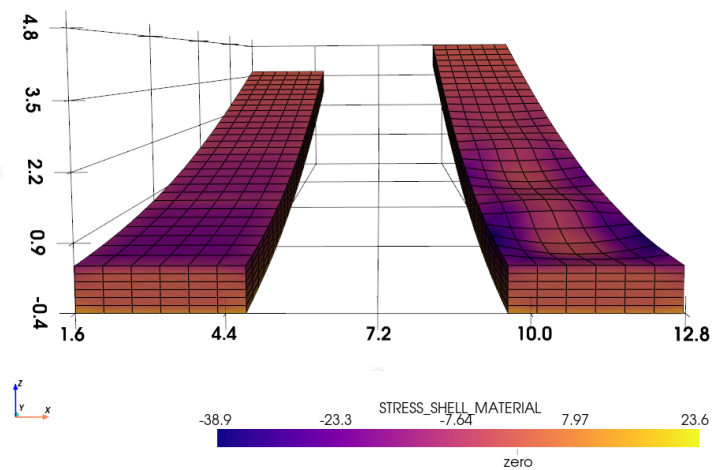


Abbildung 5.7: Flügelnummer 1 ohne Pfeilung bei einer Last von ca. 1500 kN. In den folgenden Abbildungen ist diese Lösung der blaue Punkt. Angegeben ist die Spannung in MPa

5.3 Bewertungsmaß

Ab wann Nichtlinearität berücksichtigt werden sollte, gibt es in der Literatur unterschiedliche Angaben. [23] wird behauptet, dass ab einem Spannweitenverhältnis von 12 Nichtlinearitäten berücksichtigt werden sollte. In [3, 10] wird die Dehnung von 5 % als Richtwert angegeben, ab wann geometrische Nichtlinearität berücksichtigen sollte. In [21] wird festgestellt, dass bei einer normalisierten z -Verschiebung der Flügelspitze um 10% größere Unterschiede zwischen linear und nichtlinear auftreten.

Das Spannweitenverhältnis ist eine geometrische Angabe des Flügels. Diese Angabe allein sagt nichts über die Nichtlinearität aus. Ein Flügel mit großem Verhältnis, der sich aber wenig verformt, wird weniger Nichtlinearität zeigen, als ein Flügel mit kleinem Verhältnis, aber großen Verformungen.

Die Dehnungsangabe ist für unsere Betrachtung auch nicht zielführend. Diese Empfehlung kommt daher, dass die wahre Dehnung nicht linear von der Deformation abhängt, wie im linearen Abschnitt behandelt. Die 5 %-Angabe bezieht sich darauf, dass sich die lineare Dehnung, auch Ingenieursdehnung, bei 5 % von der wahren unterscheidet

Wie im Kapitel 2.2.4 behandelt, wird bezüglich des Flügelkastens große Deformationen und kleine Dehnungen betrachtet. Die Dehnung, ohne es zu zeigen, liegt bei ca. 2 Prozent für den Flügelkasten mit der Nummer 8. Diese Dehnung wurde gemessen bei einer normalisierten z -Verschiebung von ca. 50%, dabei hatte die nichtlineare Berechnung Verwölbungen an der Einspannung. Ähnlich ist es auch bei allen anderen Flügelkästen.

Dieses Beispiel soll zeigen, dass die Nichtlinearität am Flügelkasten hauptsächlich durch große Deformation entsteht und Dehnungen eine untergeordnete Rolle spielen. Unser Problem ist, wie bei einer Angelrute (siehe Abschnitt 2.2). Die Nichtlinearität im Flügel entsteht hauptsächlich dadurch, dass sich der geometrische Endzustand aufgrund von großen Rotationen und Verschiebungen weit vom Anfangszustand unterscheidet.

Auch ist die Verlängerung des Flügels charakteristisch für die Nichtlinearität. Wie am Beispiel des gelagerten Stabes gezeigt wurde, erkennt die lineare Berechnung nicht die Rotation und die Verkürzung des Hebelarms. Stattdessen bleibt trotz Verschiebung der Hebelarm konstant, und damit wird der Stab länger. Die Verlängerung kann man sich aus der linearen Berechnung errechnen. Diese wird auch im Folgenden als Bewertungsmaß in Betracht gezogen.

normalisierte Verschiebung

In diesem Abschnitt werden zwei Bewertungsmaße behandelt. Zum Einen die normalisierte Verschiebung. Diese wird definiert als Verhältnis zwischen der z -Verschiebung der Flügelspitze⁷ und der Spannweite. Diese Größe ist gängig in der Flugmechanik und ist anschaulich, da die Verschiebung nun als relative Größe betrachtet wird. Die normalisierte Verschiebung zwischen Flügelspitzenverschiebung und der Spannweite kann man sich auch als den Tangens des Winkels zwischen diesen beiden Punkten vorstellen. In den Folgenden Abbildungen wird diese Größe als $\frac{TipDisp.}{(b/2)}$ dargestellt. b ist die Spannweite, somit ist $(b/2)$ die Halbspannweite⁸.

Das zweite Bewertungsmaß wird aus einem Zusammenhang mit dem Bernoulibalken bestimmt. Die Auslenkung der Spitze eines eingespannten Bernoulibalkens wird mit $TipDisp. = \frac{Fl^3}{3EI}$ berechnet, wobei l die Länge, EI die Steifigkeit des Balkens ist und die Kraft F auf der Spitze wirkt.

Aus dieser Gleichung kann man eine Proportionalität bestimmen mit $\frac{TipDisp.}{l^3} = const. \rightarrow TipDisp. \sim l^3$. Daraus kann man annehmen, dass $\frac{TipDisp.}{l^3}$ die Verformung eines Balkens besser beschreibt als $\frac{TipDisp.}{(b/2)}$. Man kann diesen Gedanken auch auf die Kraft erweitern, also die Proportionalität $TipDisp. \sim F$. Diese Proportionalität würde aussagen, dass je weiter weg sich das System von diesen Zusammenhang entfernt, desto nichtlinearer ist dieser. Dieses Erkenntnis haben wir im Abschnitt zuvor festgestellt (siehe Abb. 5.6). Auch könnte man beide Proportionalitäten zusammenführen mit $\frac{TipDisp.}{Fl^3} = \frac{1}{3EI} \rightarrow TipDisp. \sim Fl^3$. Dieses Bewertungsmaß würde die Geometrischen Größen in der Flächenträgheit als Konstant voraussetzen, wobei der Elastizitätsmodul konstant ist. Eine Vergrößerung dieses Maßes würde auf eine Verwölbung der Geometrie hindeuten, was auch auf die Nichtlinearität hindeutet. Trotz dessen wird die Kraft im Folgenden nicht im Bewertungsmaß berücksichtigt, weil nach einem Maß gesucht wird, denn man auf lineare Berechnung anwenden kann. In der linearen FE-Berechnung hängt die Kraft linear von der Verschiebung ab. Somit wäre das Maß für beliebige Zustände konstant⁹ und man hätte kein Erkenntnisgewinn.

Korrelation

In diesem Abschnitt wollen wir uns auf die Korrelationen, die im vorherigen Abschnitt angesprochen wurden, eingehen und zeigen, wie sich diese Überlegung an Hand der Ergebnisse abbilden lassen.

⁷im Englischen auch Tip Displacement, kurz Tip Disp.

⁸im englischen auch semi-span

⁹ $\frac{TipDisp.}{Fl^3} = \frac{TipDisp.}{(k \cdot TipDisp.)l^3} = \frac{1}{kl^3} = const.$

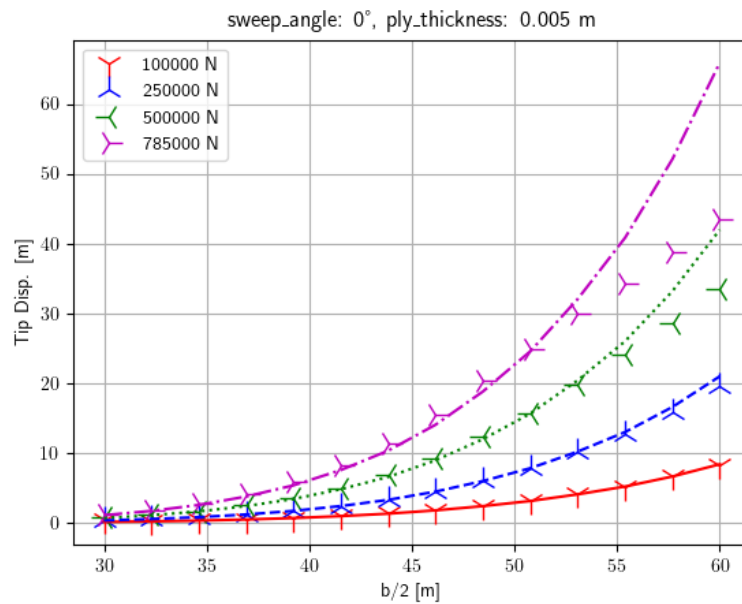


Abbildung 5.8: Tip Displacement über die Halbspannweite. Kurven entsprechen den Schnittlinien in Abbildung 5.5. Abgebildet sind Flügel ohne Pfeilung

Im Folgenden werden die Zusammenhänge zwischen Verschiebung, Kraft und Länge an den Abbildungen 5.8 und 5.9 gezeigt. Diese Verläufe kann man sich als vertikalen Schnitt der Ergebnisse in 5.5 vorstellen. Dieser Schnitt ist als vertikale gestrichelte Linien dargestellt. Betrachtet werden die Kräfte 100 kN, 250 kN, 500 kN, 785 kN.

An dieser Abbildung erkennt man, dass die Unterschiede zwischen den Pfeilungswinkel gering sind und deshalb oftmals nur auf den Flügel ohne Pfeilung eingegangen wird. Die Abbildung 5.8 zeigt die Beziehung zwischen z-Verschiebung und Halbspannweite. Die Sterne sind Punkte aus der nichtlinearen FE-Berechnung und die gestrichelte Kurven bilden die lineare FE-Berechnungen ab. Die Beziehungen wurden für die oben genannten Kräfte bestimmt.

Für 100 kN und 250 kN sind die Unterschiede zwischen linear und nichtlineare Berechnung gering. Diese Beobachtung kann man auch an der Abbildung 5.5 erkennen, für die ersten beiden vertikalen Linien verhalten sich alle Ergebnisse noch linear. Erst bei 500 kN, also bei der grünen Kurve, sind Unterschiede zwischen linear und nichtlinear zu erkennen. Diese treffen auch erst bei Halbspannweiten von ca. 52 m ein. Wenn die Sterne unter der gestrichelten Linie liegen, dann heißt das, dass die nichtlineare Kurve für diese Kraft unter der Linearen befindet. Das kann man mit der lilanen Kurve in Abbildung 5.6 vergleichen. Liegen die Sterne über der gestrichelten Linie, dann ist der nichtlineare Flügel nachgiebiger. Bei der magentafarbenen Kurve in Abbildung 5.8 kann man sehen, dass zwischen 40 m und 50 m Halbspannweiten die nichtlinearen Ergebnisse nachgiebiger sind. Ab 50 ist die nichtli-

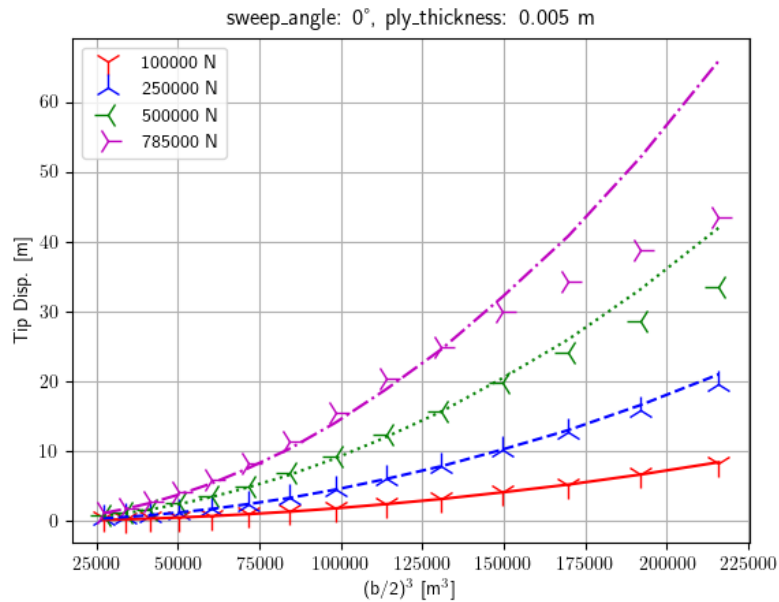


Abbildung 5.9: Tip Displacement über die Halbspannweite³. Kurven entsprechen den Schnittlinien in Abbildung 5.5. Abgebildet sind Flügel ohne Pfeilung

neare Lösung steifer. Für das zweite Bild (Abb. 5.9) sind die Beobachtungen identisch, nur mit dem Unterschied, dass die x-Achse skaliert ist. Verständlicherweise sollte die Skalierung der x-Achse keine Auswirkung auf die Ergebnisse haben. Mit dieser Skalierung soll die Proportionalität aus dem linearen Bernoulibalken ausgenutzt werden, siehe Abschnitt 5.3. Im Folgenden werden nur die Verläufe der Kurven verglichen.

Im ersten Bild haben die Verläufe ein quadratischen Charakter, ähnelt im zweiten Bild eher einer Geraden oder die Kurven sind zumindest weniger gekrümmt. An dieser Stelle kann man sich Fragen, warum sich die lineare FE-Berechnung im zweiten Bild nicht vollständig linear verhält, also sich wie ein Bernoulibalken verhält. Für kurze Flügel kann man sich dies mit einem schubweichen Verhalten des Flügels erklären. Nach unserer Flügelbemaßung (siehe Abschnitt 5.2) ist ein kurzer Flügel dicker und anfälliger für Schubweichverformungen, wobei der Bernoulibalken schubstarke Verformung beschreibt. Für den gesamten Verlauf gilt auch, dass der Querschnitt sich mit der Länge des Flügels verändert. Das heißt, die Proportionalitätskonstante ist in Wahrheit nicht Konstant, weil sich das Flächenträgheitsmoment mit der Länge verändert ($\frac{TipDisp.}{l^3} = \frac{const}{I(l)}$).

relative Verlängerung

Ein weiterer Bewertungsmaß ist die Verlängerung des Flügels. Dieses Maß selbst deutet auf die Nichtlinearität hin. Diese Charakteristik wurde bereits in Abschnitt Nichtlinearität besprochen. Am Beispiel eines Stabes konnte man zeigen, dass sich die Lineare Berechnung für beliebige deformationen sich verlängert, auch an der Abbildung 5.4 kann man dieses Verhalten erkennen.

5.4 Fehlermaß

In diesem Abschnitt wird der Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen FE-Berechnungen anhand von drei Größen bewertet: zwei geometrische und eine Feldgröße.

Die erste geometrische Größe ist $\frac{\text{Tip Disp.}_{nl} - \text{Tip Disp.}_{lin}}{\text{Tip Disp.}_{lin}}$, also der relative Unterschied der z-Verschiebung der Flügelspitze bezogen auf die lineare Berechnung. Diese soll Aufschluss über den geometrischen Fehler geben.

Es wird jedoch gezeigt, dass diese Größe ungeeignet ist, um den tatsächlichen geometrischen Fehler zu erkennen. Daher wird auch auf den Root Mean Square Error (RMSE) eingegangen, der als durchschnittlicher Fehler aller Knoten betrachtet werden kann. Dieser ist wichtig für die aeroelastische Berechnung, da die aerodynamischen Kräfte am Flügel von der Geometrie abgeleitet werden. Der RMSE errechnet sich aus Gleichung 5.1. Hier ist n die Anzahl der Knoten und y_i die Position der Knoten.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (5.1)$$

Um daraus eine relative Größe zu machen wird diese mit der Länge dividiert, also $\frac{RMSE}{length_0}$.

Die dritte Größe beschreibt den relativen Fehler in der Spannung, der sich aus der Gleichung 5.2 berechnet. Dabei werden nur die Spannungen in der lokalen x-Richtung betrachtet, da es sich um ein Faserverbundmaterial handelt. Die lokale x-Richtung des Laminats ist die steifste Achse, und die Lamine werden so angeordnet, dass die steifste Achse in Hauptlastrichtung liegt. Auch kann man an den vorhandenen Ergebnissen zeigen, dass in dieser Richtung die größten Spannungen auftreten.

$$rel.Stress = \left\| \frac{Stress_x \text{ nlin} - Stress_x \text{ lin}}{Stress_x \text{ lin}} \right\|_{\infty} \quad (5.2)$$

$Stress_x$ ist ein Vektor, dessen Einträge die Spannungen an einem Element abbilden. Die Spannung am Element wird gebildet durch den Durchschnitt aller Knotenpunkte des jeweiligen Elementes. Die Gleichung 5.2 wendet die Maximumnorm an, um aus allen relativen Fehlern den Betraggrößten auszuwählen. Die relative Spannung ist entscheidend für die Strukturoptimierung, da in der Strukturoptimierung die Spannung benötigt wird, um das Material auszulegen.

Eine berechtigte Frage ist, warum der RMSE für die Spannung nicht berücksichtigt wird. Der RMSE kann als Durchschnitt aller Fehler bezogen auf die Spannung verstanden werden und erfasst somit den Fehler im globalen Sinne. Im Gegensatz dazu erfasst das Fehlermaß in Gleichung 5.2 den Fehler lokal. Für die Strukturoptimierung und die Fragestellung, wann ein Modell nichtlinear gerechnet werden sollte, ist der lokale Fehler von größerem Interesse. Im Folgenden wird gezeigt, dass der Fehler über den gesamten Flügel betrachtet gering ist, jedoch in lokalen Bereichen, wie beispielsweise an den Rippen oder Holmen, erheblich sein kann.

5.5 Ergebnisse

In den letzten beiden Abschnitten wurden die Bewertungs- und Fehlermaße bestimmt. Die Idee hinter dem Bewertungsmaß ist es, eine Größe zu finden, die Nichtlinearität identifiziert. Anhand der Ergebnisse aus Kapitel 5.2 sollen die unterschiedlichen Bewertungsmaße bewertet werden. Für die Strukturoptimierung sind hauptsächlich Verschiebung und Spannung von Interesse, für die im letzten Abschnitt die Fehlermaße bestimmt wurden. Das Vorgehen wird so sein, dass zuerst in einer Abbildung alle Ergebnisse mit den jeweiligen Maßen dargestellt werden und dann in einer zweiten Abbildung ins Detail gegangen wird. Aus der ersten Abbildung soll nur das globale Verhalten der Ergebnisse entnommen werden, also das Verhalten zwischen den unterschiedlichen Pfeilungen und das Verhalten über den gesamten Ergebnisverlauf. Im zweiten Bild wird der interessante Bereich vergrößert und es wird nur auf ungefeilte Flügel eingegangen. Insgesamt verhalten sich die Flügelkästen mit Pfeilung ähnlich wie die ohne. In den Abbildungen sind Punkte zu sehen, die Ergebnisse darstellen, wo auch auf die visualisierten FE-Ergebnisse eingegangen wird.

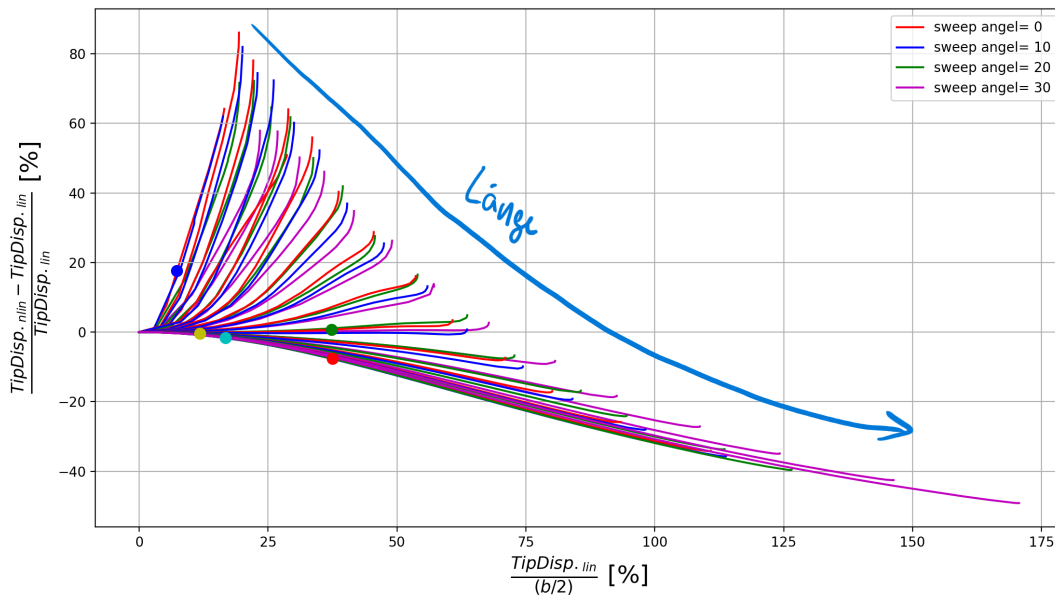


Abbildung 5.10: relative z-Verschiebung über normalisierte z-Verschiebung der linearen Berechnung. Kurze Flügel haben eine große positive Steigung, lange Flügel eine große negative Steigung

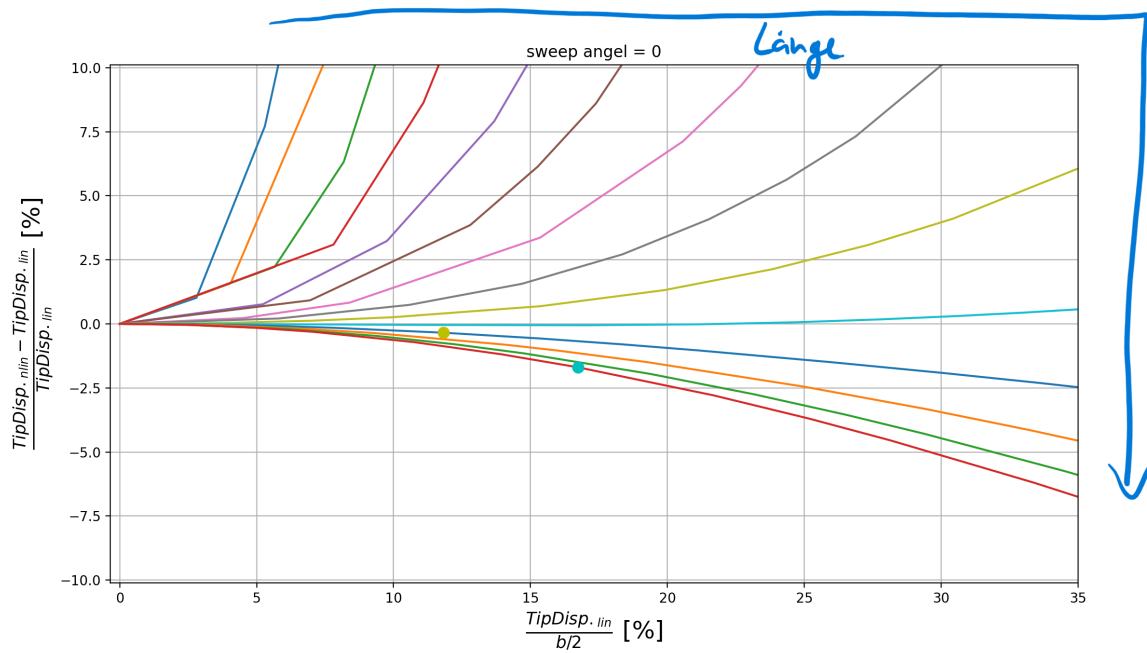


Abbildung 5.11: Detaillierte Ansicht von 5.10 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung

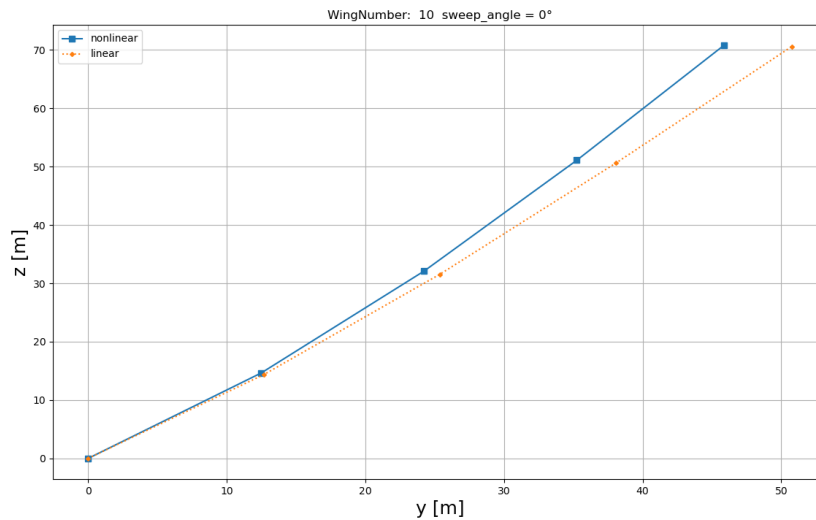


Abbildung 5.12: Ein dimensionale Darstellung des Flügels mit der Nummer 10 ohne Pfeilung. Wird mit ca. 600 kN belastet. Lineare und nichtlineare z-Verschiebung sind nahe zu gleich

Fehlermaß: z-Verschiebung

Betrachte man als erstes die Abbildung 5.10. Zu Beginn folgen alle Kurven einem negativ parabelförmigen Verlauf. Je kürzer der Flügel, desto früher weicht er von diesem Verlauf ab und je länger, desto mehr schmiegen sich die Kurven an diesen Verlauf an. Es ist auch ein Bündel an Kurven zu sehen, die über der relativen Verschiebung fast konstant null bleiben. Abbildung 5.11 zeigt die gleichen Ergebnisse in einem engeren Bereich. Außerdem sind nur Flügel ohne Pfeilung abgebildet, da in der vorherigen Abbildung zu sehen war, dass das Verhalten sich zwischen Flügeln mit unterschiedlichem Pfeilwinkel, aber gleicher Länge, ähnlich verhält. Hier kann man sehen, wie sich die Verläufe von positiven relativen Fehlern bis hin zu negativen relativen Fehlern auffächern.

Zuerst werden die Ergebnisse im ersten Quadranten betrachtet. In diesem Bereich befinden sich die Flügel mit Halbspannweiten bis zu 50 m. Die Kurven erreichen bei geringen relativen Verschiebungen große Fehler. Es lässt sich beobachten, dass je länger der Flügel ist, desto flacher werden die Kurven. Das bedeutet, dass ein beliebiger Fehler bei längeren Flügeln sich erst später einstellt. Dies gilt bis zu einer Halbspannweite von ca. 50 m. Bei 50 m gibt es einen Übergang zu einem gegenteiligen Verhalten. Der Übergang selbst erweckt den Anschein, als gäbe es eine Konfiguration, bei der lineare und nichtlineare FE-Berechnung keinen Unterschied machen. Dieses Verhalten kann auch an den Bildern 5.8 und 5.6 beobachtet werden.

Abbildung 5.12 zeigt, wie dieser Verlauf interpretiert werden kann. Es ist erkennbar, dass

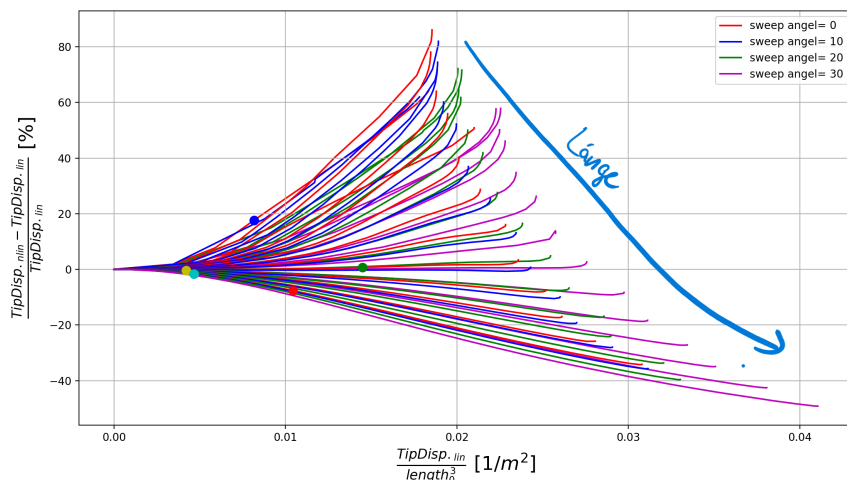


Abbildung 5.13: relativer Fehler der z-Verschiebung mit dem Bewertungsmaß $\frac{TipDisp.}{length_0^3}$. Lösungen werden gebündelt.

sich die lineare von der nichtlinearen FE-Berechnung in der Verschiebung deutlich unterscheiden. Jedoch kann auch festgestellt werden, dass die Spitzenverschiebung der beiden Berechnungen übereinstimmt. Deshalb wurde in Abbildung 5.12 angezeigt, dass der Fehler fast null ist. Somit ist dieses Fehlermaß nicht geeignet, um den geometrischen Fehler zu bestimmen.

Die gleichen Ergebnisse kann man auch nach $\frac{TipDisp.}{length_0^3}$ abbilden. Es lässt sich beobachten, dass durch dieses Bewertungsmaß die Verläufe zusammengebündelt werden. Durch das Zusammenrücken kann nun ein Wert festgelegt werden, bei dem alle Fehler innerhalb eines Wertes liegen. Zum Beispiel liegt bei $0.005 \frac{TipDisp.}{length_0^3}$ der Fehler zwischen -5% und 5%. Wie auch in der vorherigen Abbildung gibt es einen Übergang von positiven Fehlern bei kurzen Flügelkästen zu negativen Fehlern bei langen Flügelkästen. In diesem Übergang reduziert sich der Fehler bis hin zu ca. null. Wie zuvor gezeigt, entsteht dieser Übergang, weil nur die vertikale Verschiebung der Flügelspitze verglichen wird. Für das Bewertungsmaß $\frac{\delta length}{length_0}$ sind die Ergebnisse in den Abbildungen 5.15 und 5.16 dargestellt. Im Vergleich zu den vorherigen Abbildungen zeigt sich, dass dieses Maß kurze Flügel stärker bestraft. Das bedeutet, dass der Fehler bereits bei kleinen relativen Verlängerungen für kurze Flügel stark ansteigt. In Abbildung 5.16 ist erkennbar, dass lange Flügel zu Beginn entlang der schwarz gestrichelten Linie folgen und nach und nach von dieser abweichen. Diese gestrichelte Linie kann als idealer Fehlerverlauf interpretiert werden, also der Verlauf des Fehlers, wenn im Modell kein Beulen und keine Verwölbung auftritt. Diesen Verlauf kann folgendermaßen berechnet wer-

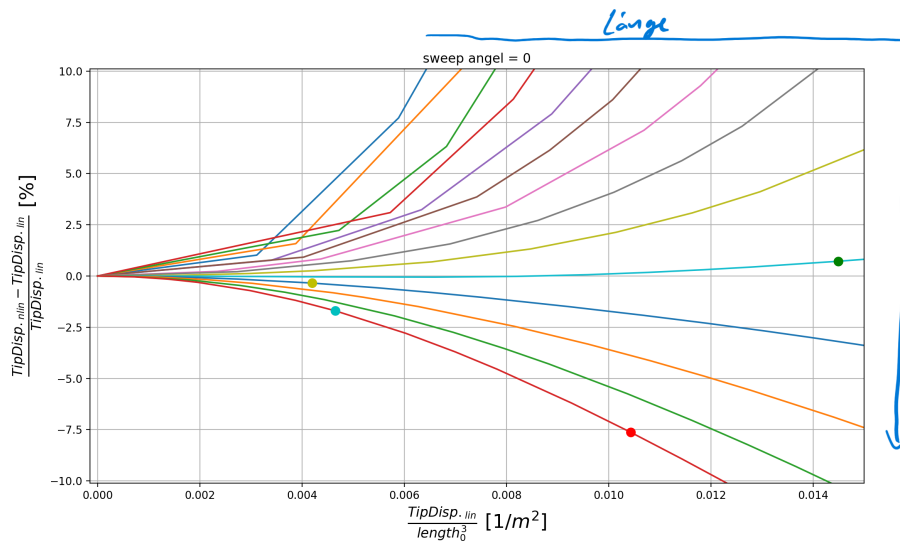


Abbildung 5.14: Detaillierte Ansicht von 5.13 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung

den. Zuerst werden die Größen in Bild 5.17 betrachtet. $\Delta TipDisp.$ ist der Unterschied der z-Verschiebungen, wie auch in den bereits gezeigten Abbildungen. Diese Größe kann auch berechnet werden mit $\sin(\alpha) \cdot \Delta length$. Teilt man dies durch $TipDisp_{lin}$, erhält man das Fehlermaß. $TipDisp_{lin}$ kann auch geschrieben werden als $(\Delta length + length_0) \cdot \sin(\alpha)$, und es ergibt sich die Gleichung 5.3 mit der die gestrichelte Kurve berechnet wurde.

$$\frac{\Delta TipDisp}{TipDisp_{lin}} = \frac{\Delta length}{(\Delta length + length_0)} = \frac{\frac{\Delta length}{length_0}}{\left(\frac{\Delta length}{length_0} + 1\right)} \quad (5.3)$$

Fehlermaß: RMSE

Beginnend mit der Abbildung 5.18, kann man sehen, dass die länsten Flügel sich einem parabelförmigen Verlauf anschmiegen. Je kürzer die die Flügel desto eher weichen sie von dieser ab. Diesen Zusammenhang kann man auch für die Pfeilung erkennen. Also, je kleiner der Pfeilungswinkel desto früher weicht die Kurve vom parabelförmigen Verlauf ab. Detaillierter kann man dieses Verhalten in der Abbildung 5.19 erkennen. Der rote Graph in dieser Abbildung verhält sich anders als die anderen Kurven. Das ist der Flügelkasten Nummer vier aus der Tabelle 5.3. Dieser hat ein an der Einspannung bis zu ersten Rippe ein anderes Beulfeld als die anderen Flügelkästen. Dieser beult mit drei Bäuche, statt mit zwei oder einem, wie die anderen es tun. Dies kann man in Abbildung 5.37 sehen.

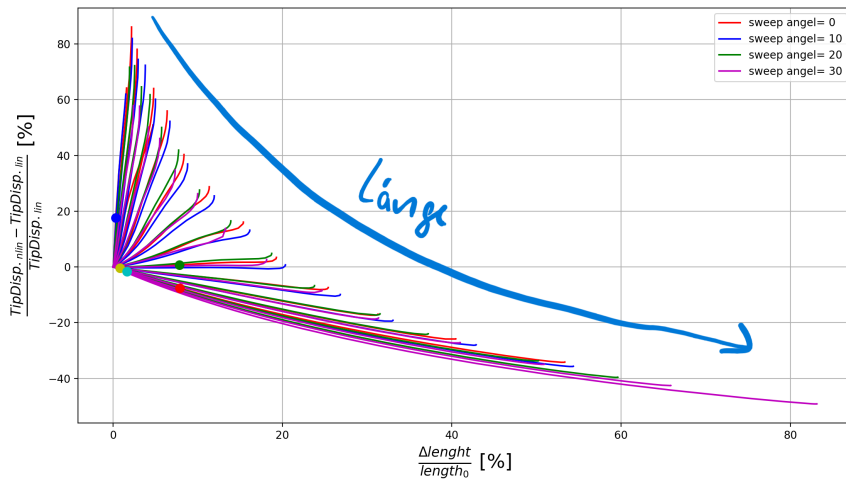


Abbildung 5.15: relativer Fehler der z-Verschiebung über der relativen Verlängerung des linearen Flügels

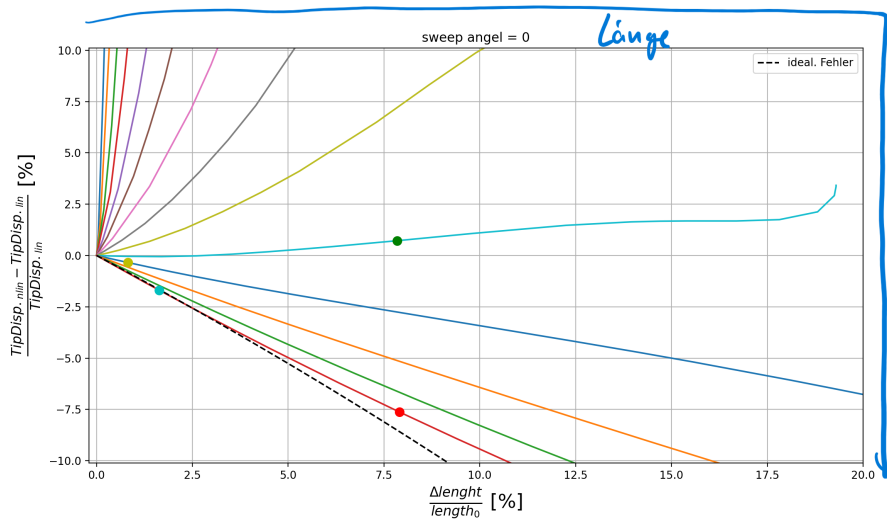


Abbildung 5.16: Detaillierte Ansicht von 5.15 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung

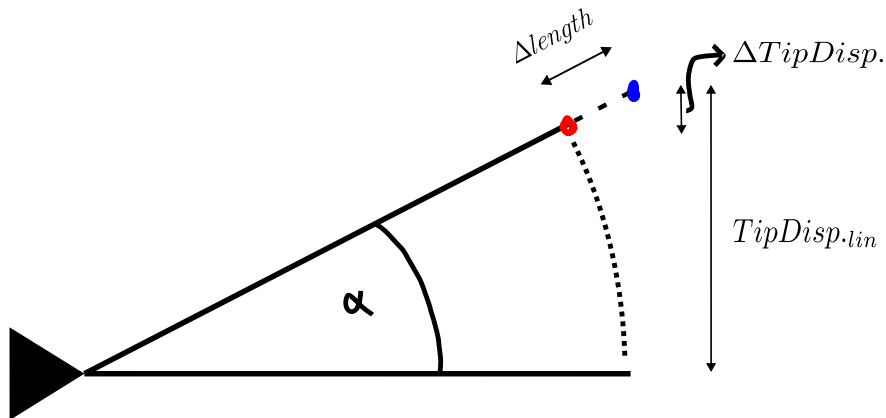


Abbildung 5.17: Vereinfachter Stab

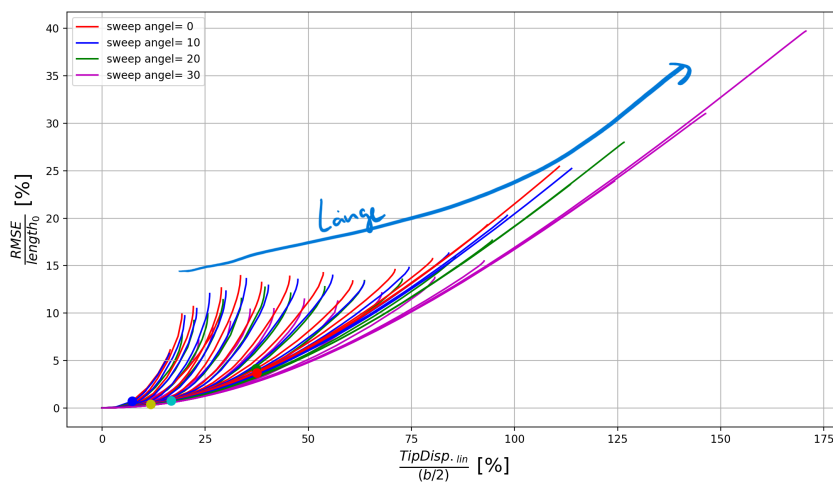


Abbildung 5.18: Relativer RMSE über die normalisierte z-Verschiebung des linearen Flügelkastens

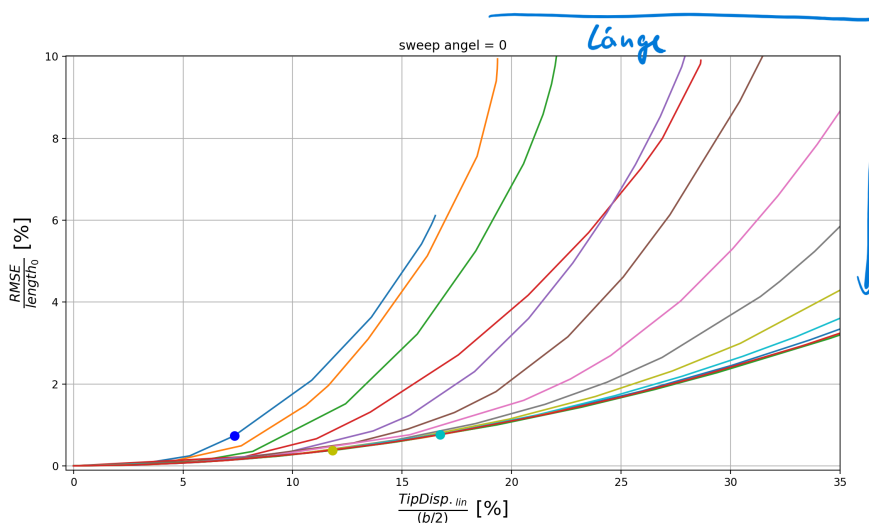


Abbildung 5.19: Detaillierte Ansicht von 5.18 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung

Für den Bewertungsmaß $\frac{TipDisp.lin}{length_0^3}$ gilt das gleiche, wie im letzten Abschnitt. Dieser bündelt die Ergebnisse zusammen, wie an an der Abbildung 5.20 sehen kann. Vergleicht man Abbildung 5.21 und 5.19, sieht man, dass beim ersteren die Ergebnisse weniger von der Länge der Flügel abhängen. Wenn die relative Verlängerung auf den RMSE angewendet wird (siehe Abb. 5.22), ähneln sich die Verläufe denen von Abbildung 5.18. Mit dem Unterschied, dass sich die Verläufe einer Geraden anschmiegen. Auch hier gilt: Je kürzer der Flügel, desto früher weicht der Verlauf von dieser Geraden ab.

Bei der nahezu perfekten Geraden stellt sich die Frage, ob es einen Zusammenhang zwischen dem Fehlermaß und dem Bewertungsmaß gibt. Zur Erklärung wird der Stab in Abbildung 5.17 herangezogen. Wenn der RMSE an der Spitze des Stabes angewendet wird, ergibt sich $\sqrt{(y_i - \hat{y}_i)^2}$. Das Summenzeichen entfällt, da es sich nur um einen Punkt handelt. Der Ausdruck in der Klammer ist der Fehlervektor, der mit sich selbst skalar multipliziert wird, wodurch sich das Quadrat der Länge ergibt. Die Wurzel daraus ergibt $\Delta length$. Teilt man den RMSE durch die Anfangslänge, so erhält man $\frac{\Delta length}{length_0}$, was unserem Bewertungsmaß entspricht.

Die Steigung ist jedoch nicht eins, was dadurch erklärt werden kann, dass der RMSE vom gesamten Modell betrachtet wird und nicht nur vom letzten Knoten. Das gesamte Modell enthält beispielsweise Knoten an der Einspannung, die sich nicht verschieben und somit den RMSE reduzieren. Auch Elemente nahe der Einspannung verlängern sich weniger als die an der Flügelspitze. Daher ist die Steigung der Geraden kleiner als eins.

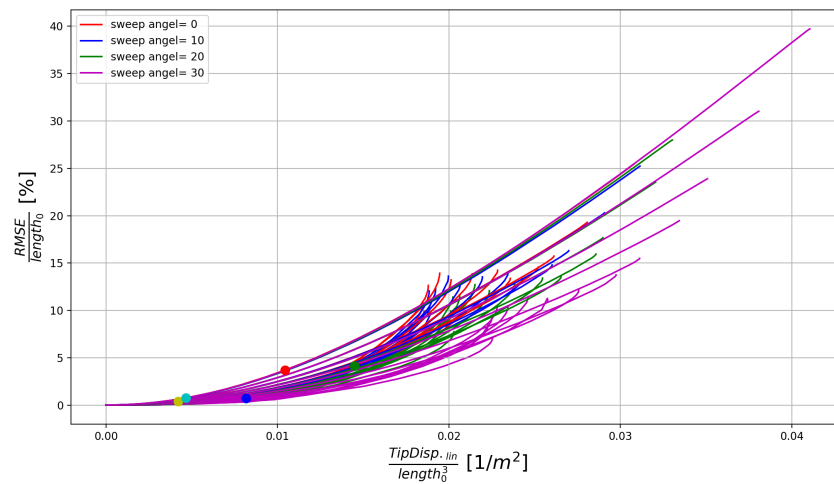


Abbildung 5.20: relativer RMSE mit dem Bewertungsmaß $\frac{TipDisp. lin}{length_0^3}$. Lösungen werden gebündelt.

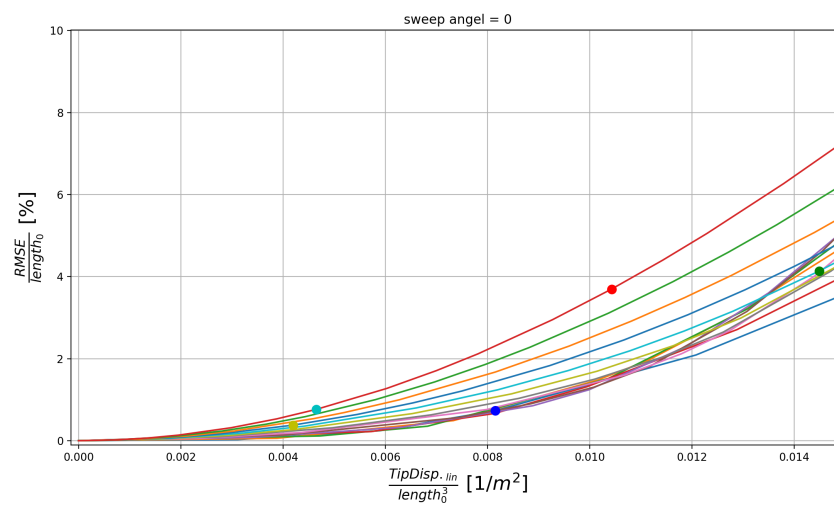


Abbildung 5.21: Detaillierte Ansicht von 5.20 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung

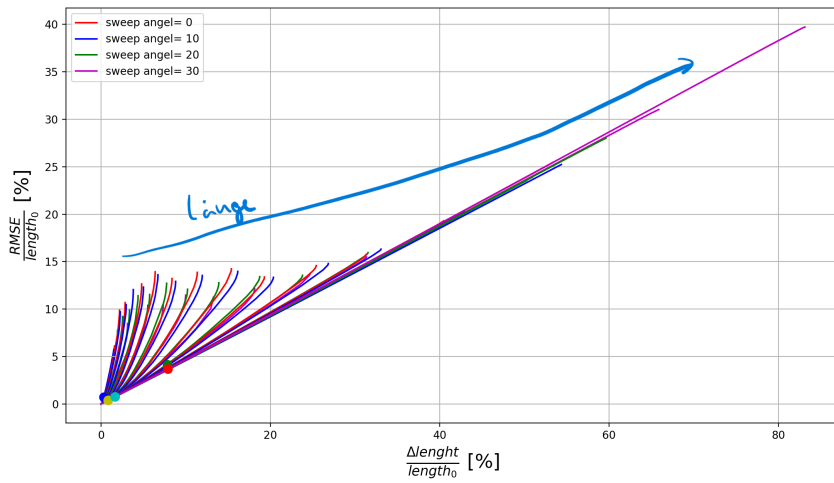


Abbildung 5.22: relativer RMSE über die relative Verlängerung des Flügels. Verläufe folgen einer Geraden

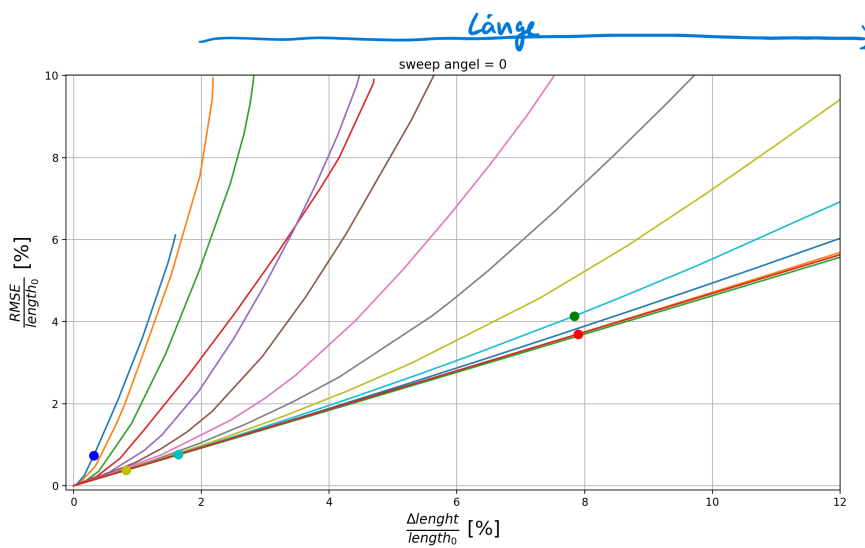


Abbildung 5.23: Detaillierte Ansicht von 5.22 mit den Ergebnissen ohne Pfeilung

Fehlermaß: relative Spannungsdifferenz

Beginnend mit der Abbildung 5.24, kann man sehen, dass die Fehler bereits für sehr kleine normalisierte z-Verschiebungen divergieren. Um dies zu verstehen, wird der Konturplot dieses Fehlermaßes am Flügelkasten betrachtet (siehe Abb. 5.32). Es fällt auf, dass der Fehler an der Biegelinie des Flügelkastens divergiert. Die großen Werte können so interpretiert werden, dass bei der linearen FE-Berechnung die Spannungen an der Biegelinie nahe null sind. In der nichtlinearen FE-Berechnung werden jedoch die Verwölbung des Kastens berücksichtigt, wodurch die Spannungen dort ungleich null sind. Auch wenn die Differenz gering ist, entstehen durch das Dividieren mit null diese großen Werte. Dies ist kein ungewollter Fehler, sondern der tatsächliche relative Fehler. Da dieser Fehler jedoch für die Fragestellung dieser Arbeit nicht von Interesse ist, wird das Fehlermaß umgeformt in

$$\frac{\|\text{Stress}_{x,\text{nl}} - \text{Stress}_{x,\text{lin}}\|_{\infty}}{|\text{Stress}_{x,\text{lin}}|}$$

Mit diesem Ausdruck wird die betragsgrößte Differenz betrachtet und davon die relative Größe, indem durch die an der Stelle anliegende Spannung der linearen Berechnung geteilt wird. Abbildung 5.34 zeigt den Konturplot dieser Größe. Hier ist anzumerken, dass für den Konturplot nicht mit der am Knoten anliegenden linearen Spannung geteilt wurde, sondern mit derjenigen, wo die größte Differenz auftritt. Würde dies nicht so gemacht, ergäbe sich wieder ein Plot ähnlich der Abbildung 5.32. In den Konturplots, wo der relative Fehler berechnet wurde, wurde zusätzlich mit

$$\frac{|\text{Stress}_{\text{nl}}| - |\text{Stress}_{\text{lin}}|}{\| |\text{Stress}_{\text{nl}}| - |\text{Stress}_{\text{lin}}| \|}$$

multipliziert, um das Vorzeichen zu erfassen, also ob die nichtlineare Spannung größer oder kleiner als die lineare ist. Diese Berechnung ist nur dann korrekt, wenn die Spannungen selbst das gleiche Vorzeichen haben.

Die Ergebnisse des umgeformten Fehlermaßes sind in den Abbildungen 5.25 bis 5.30 dargestellt. Genau wie bei RMSE flachen die Kurven ab, je länger der Flügel ist. Auch hier kann dies auf das Beulen zurückgeführt werden. Es ist zu berücksichtigen, dass kurze Flügel eine größere Höhe haben, was sowohl die Spannung erhöht als auch das Beulen begünstigt für eine beliebige normalisierte Verschiebung. Am auffälligsten ist der Anfangsbereich mit den spitzen Bergen. Auf den Bildern ist nicht deutlich erkennbar, dass diese zu den längsten Flügeln gehören. Dies kann folgendermaßen interpretiert werden: Die lineare Berechnung geht immer von der Referenzkonfiguration aus. Da zu Beginn der Belastung

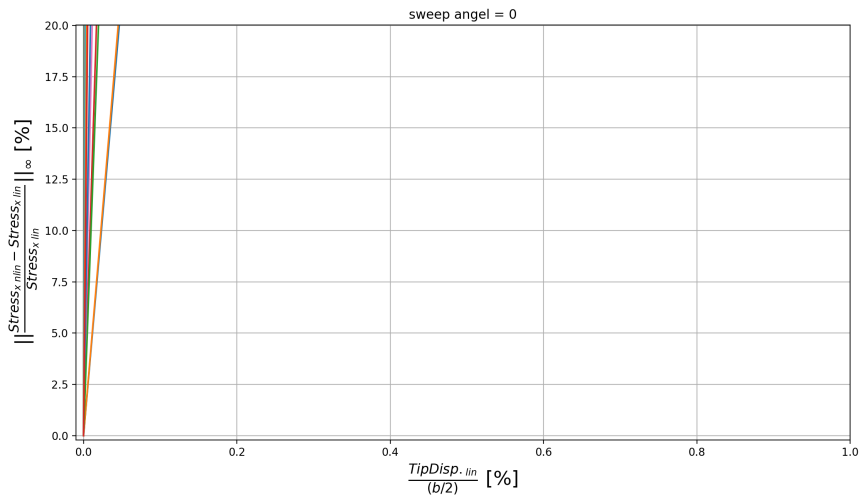


Abbildung 5.24: relative Spannungsdifferenz für die normalisierte z-Verschiebungen mit den Ergebnissen ohne Pfeilung. Es soll gezeigt werden, das für dieses Fehlermaß die werte schon für kleine Verschiebungen divergiert

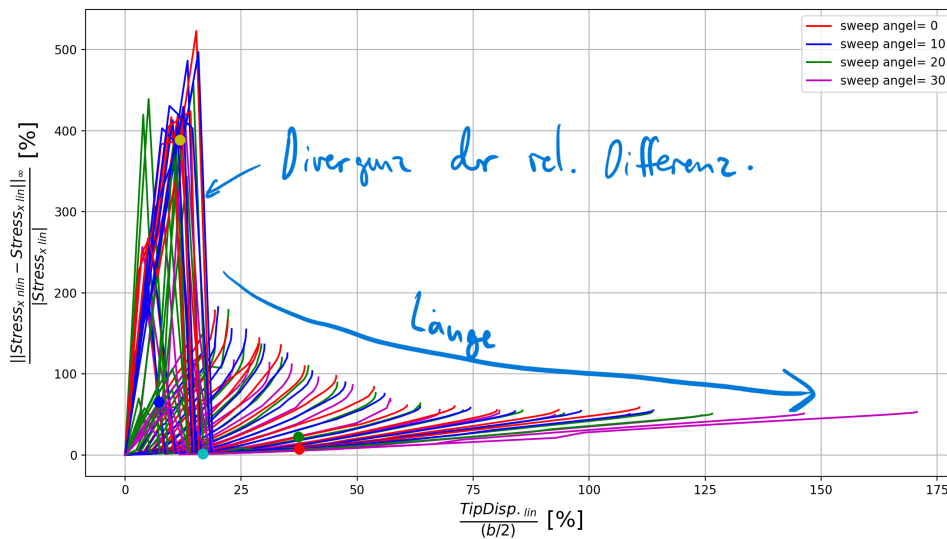


Abbildung 5.25: neue relative Spannungsdifferenz für die normalisierte z-Verschiebungen. Hier sieht man Divergenzen zu Beginn der Verformung, diese stellen sich für größere Verschiebungen auf kleine Werte ein

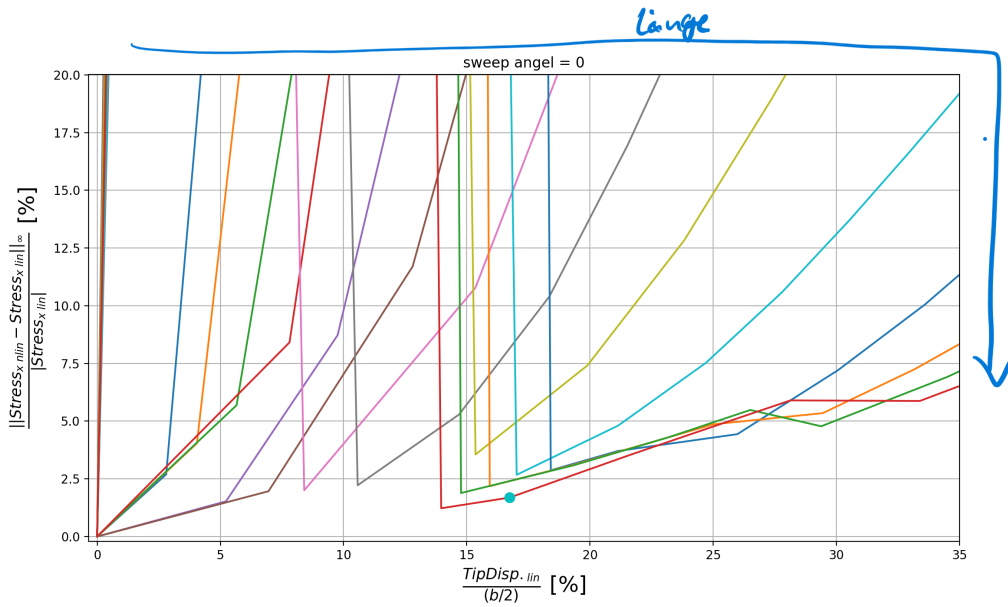


Abbildung 5.26: Detaillierte Abbildung von 5.25

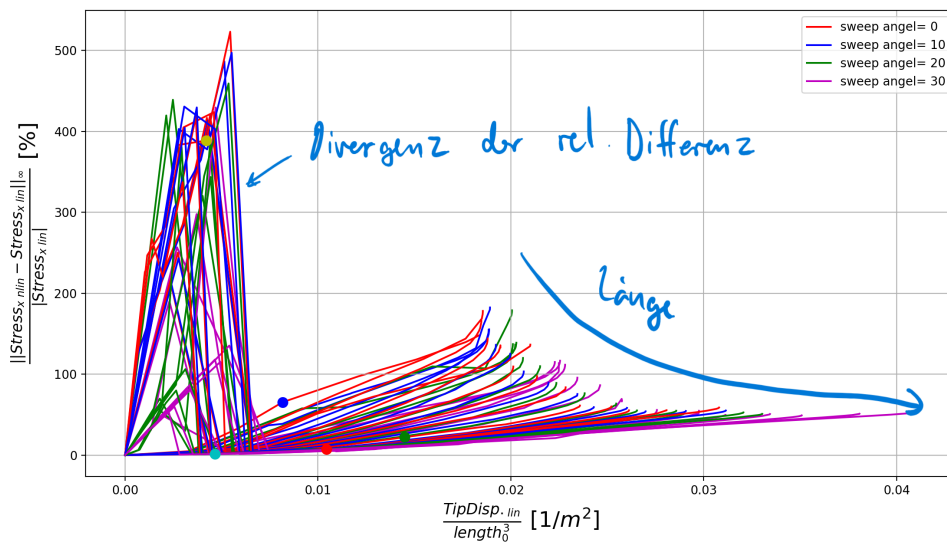


Abbildung 5.27: relativer Spannungsdifferenz mit dem Bewertungsmaß $\frac{TipDisp_{lin}}{length_0^3}$. Lösungen werden gebündelt

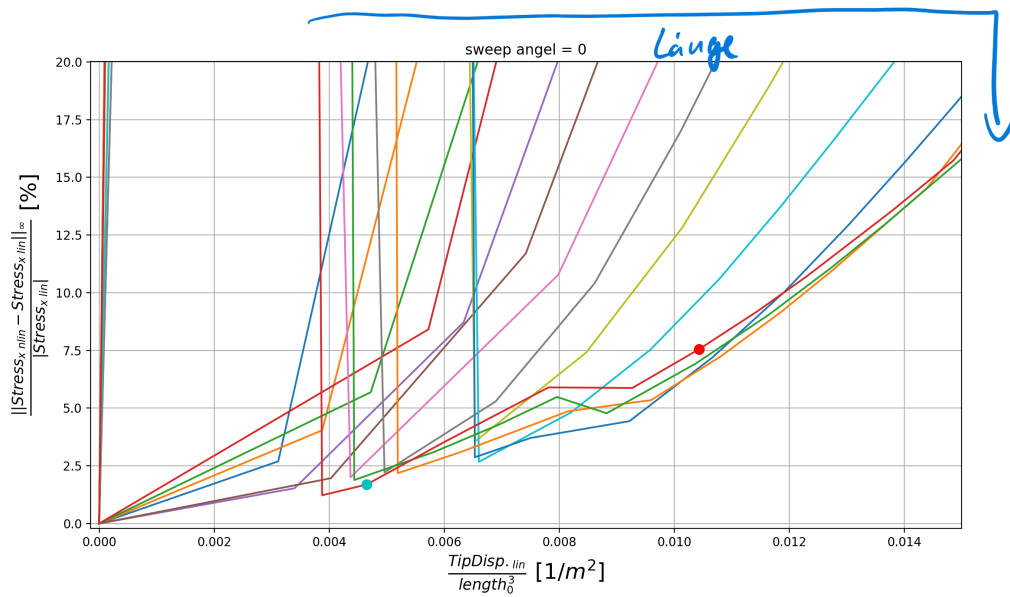


Abbildung 5.28: Detaillierte Abbildung von 5.27. Flügel ohne Pfeilung

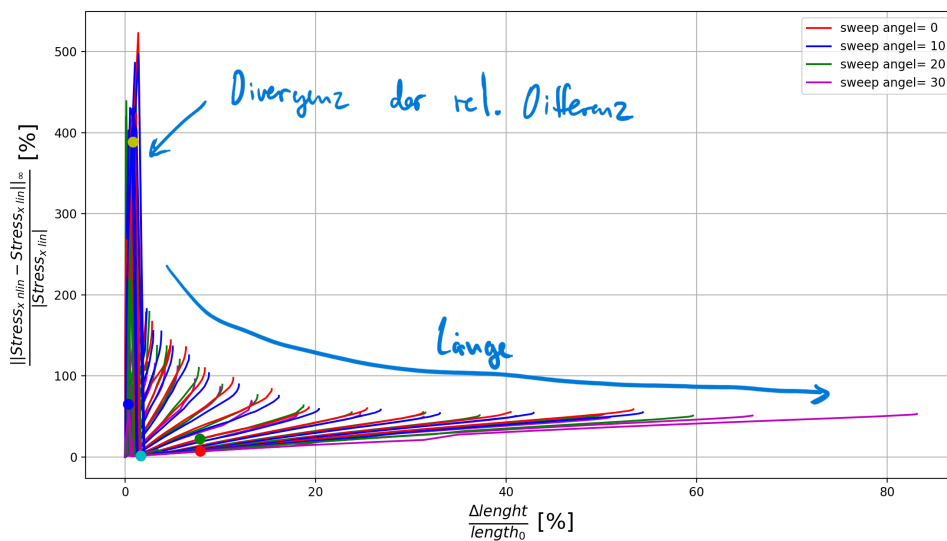


Abbildung 5.29: relativer Spannungsdifferenz über der relativen Verlängerung

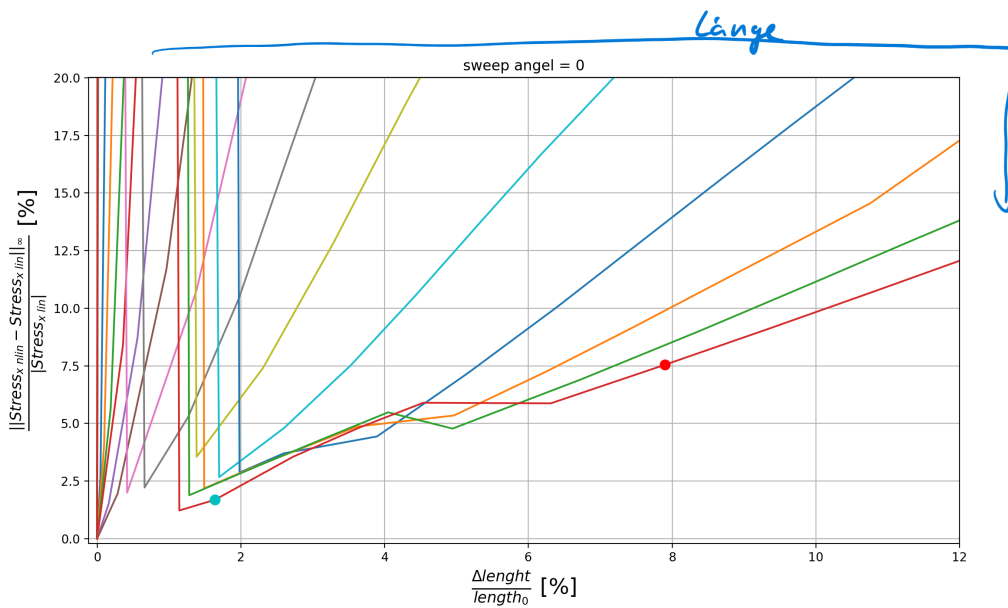


Abbildung 5.30: Detaillierte Abbildung von 5.29. Flügel ohne Pfeilung

die Kräfte an den Rippen nahezu null sind, wird sich an diesen Stellen auch für höhere Lasten keine Spannung aufbauen. Die nichtlineare Berechnung hingegen berücksichtigt die Momentankonfiguration und erkennt die Spannung, die sich an den Rippen aufbaut. Dies führt dazu, dass für kleine Verschiebungen, wo das Beulen noch nicht ausgeprägt ist und die Außenhaut der linearen und nichtlinearen FE-Berechnung nahezu identisch ist, der Spannungsunterschied an den Rippen am größten ist. Weil die Spannung im linearen Modell an den Rippen nahezu null ist, divergiert der relative Ausdruck solange, bis Beulen auf der Außenhaut auftreten. Durch das Beulen verlagert sich die Spannung von der Außenhaut des Flügelkastens in die Ränder. Diese Verlagerung wird von der linearen FE-Berechnung nicht erkannt und die Spannung baut sich weiterhin auf der Außenhaut auf. Dies führt dazu, dass der Spannungsunterschied an dieser Stelle groß wird.

Auch hier erkennt man, wie das Bewertungsmaß $\frac{\text{TipDisp.}}{\text{length}_0^3}$ die Verläufe bündelt, im Vergleich zu den anderen. Anders als bei den anderen Fehlermaßen, sind kaum Muster erkennbar, an denen man etwas ableiten könnte. Betrachtet man den relativen Fehler von etwa 2% mit der cyan Farbe (siehe Abb. 5.34), sieht man, dass auf der Außenhaut des Flügelkastens die lineare Berechnung größere Spannungen aufweist, sowohl auf der Druckseite als auch auf der Zugseite. Dies kann mit dem Beulen begründet werden. Die nichtlineare Berechnung führt zu einem Spannungsabfall an dieser Stelle, da die Außenhaut beult, während die lineare Berechnung dies nicht berücksichtigt. Auf der Zugseite verwölbt sich die Außenhaut ins Innere des Flügelkastens, wodurch das Flächenträgheitsmoment reduziert wird und geringere Spann-

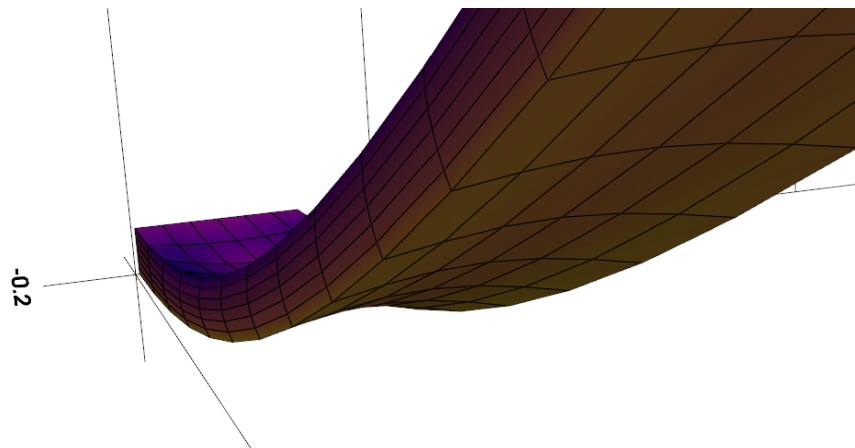


Abbildung 5.31: Verwölbung auf der Zugseite. Flügelnummer 14. Kraft nah am load limit point, ca. 700 kN

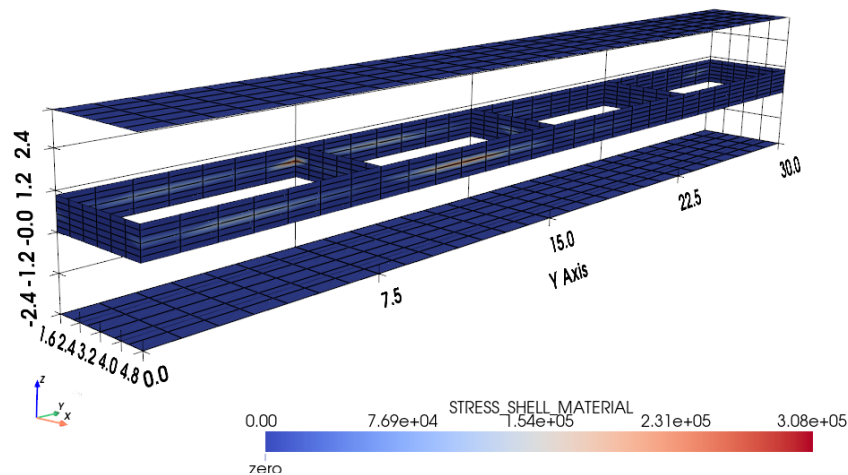


Abbildung 5.32: Konturplot des ursprünglichen Fehlermaßes am Flügelkasten. Zu vergleichen mit dem neuen in Abbildung 5.33

gen auftreten (siehe Abb. 5.31). Es kann auch beobachtet werden, dass die Holme nahe der Einspannung etwas höhere Spannungen aufweisen, da sie sich dort verwölben. Ebenso zeigen sich an der ersten Rippe höhere Spannungen für die nichtlineare Berechnung im Vergleich zur linearen. In der nächsten Abbildung wird für dasselbe Problem die absolute Differenz dargestellt. Die Differenzen an den einzelnen Knoten wurden als Beträge genommen, daher gibt es nur positive Werte. Die Einheit ist kN. Die absolute Differenz ist auf der Außenhaut an der Einspannung am größten und an der ersten Rippe gering. Abbildung 5.35 zeigt das gleiche Modell unter höherer Last. Diese Abbildung entspricht dem roten Punkt in den Diagrammen. Im Vergleich zur vorherigen Abbildung zeigt sich, dass sich die Spannung auf der Außenhaut lokalisiert.

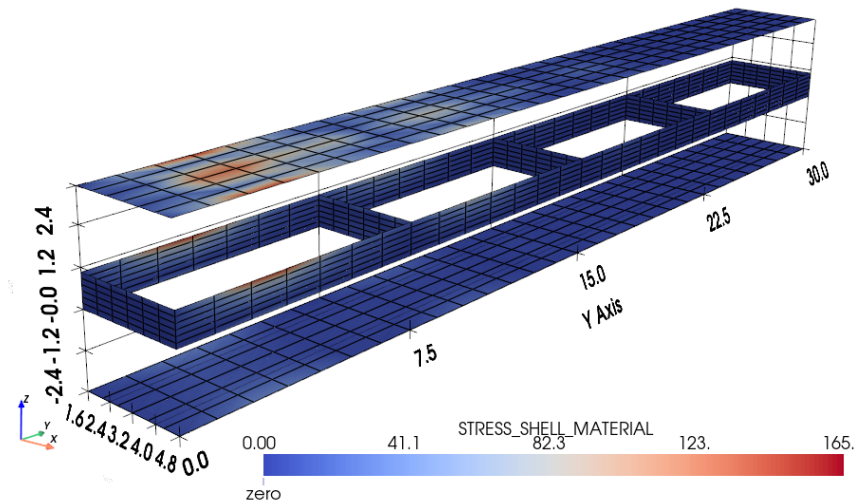


Abbildung 5.33: Blauer Punkt in den Diagrammen. Darstellung der neuen relativen Spannungsdifferenz. Zu vergleichen mit der alten in Abbildung 5.32

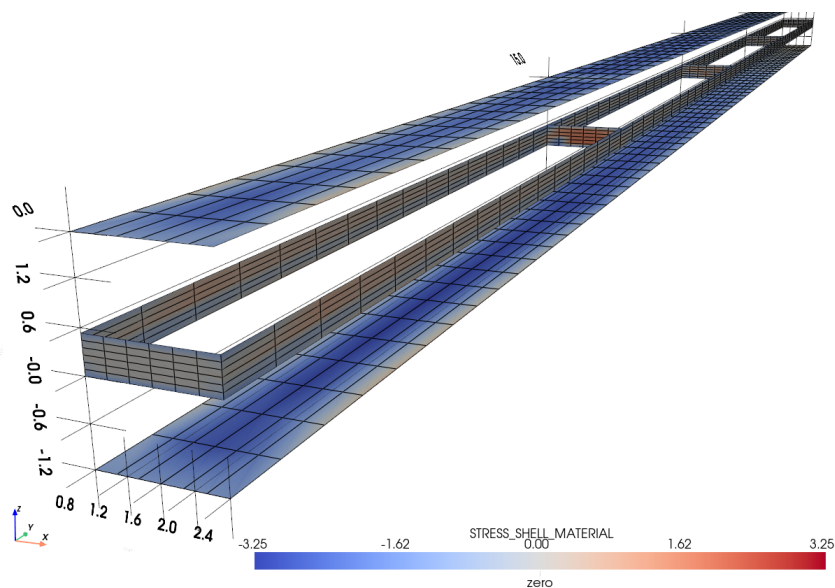


Abbildung 5.34: cyan Punkt siehe Abbildung 5.30. Neue Relative Spannungsdifferenz

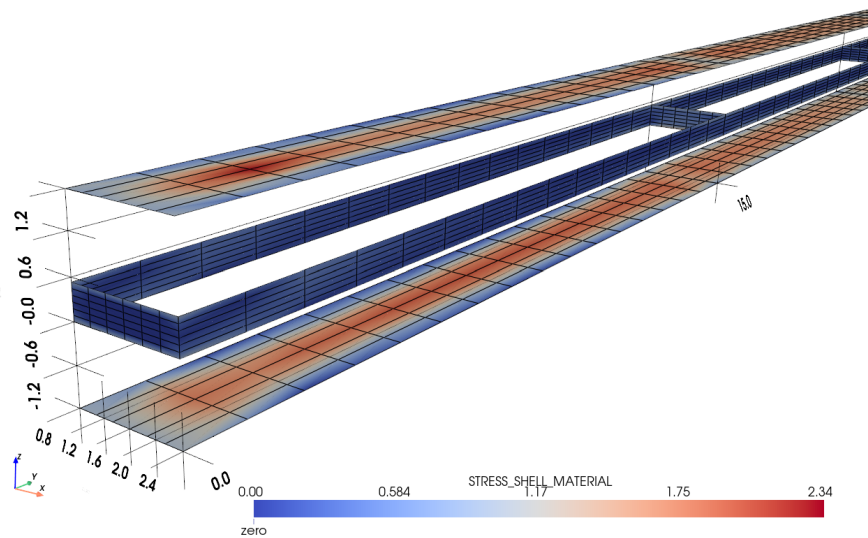


Abbildung 5.35: roter Punkt siehe Abbildung 5.30. Hier ist die absolute Differenz der Spannung abgebildet. Angabe in MPa.

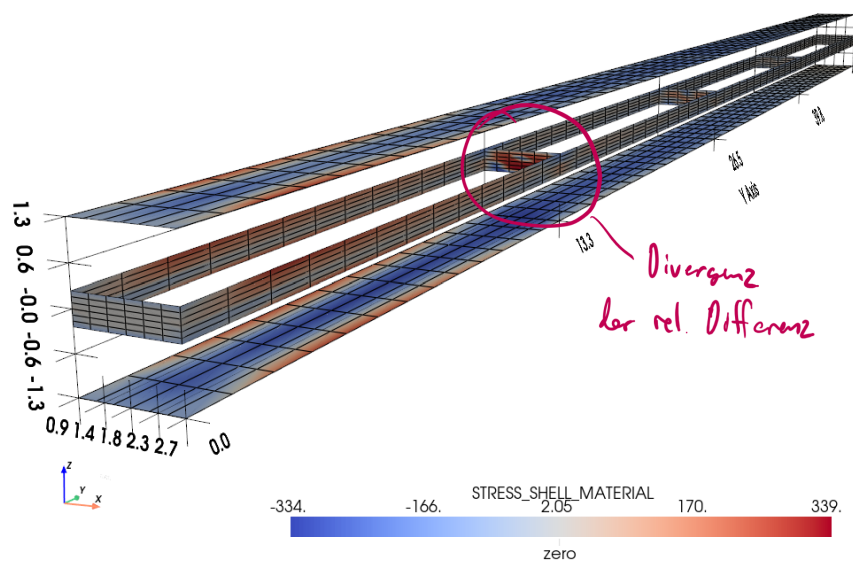


Abbildung 5.36: Gelber Punkt in den Abbildungen. Soll zeigen, woher die Divergenz kommt

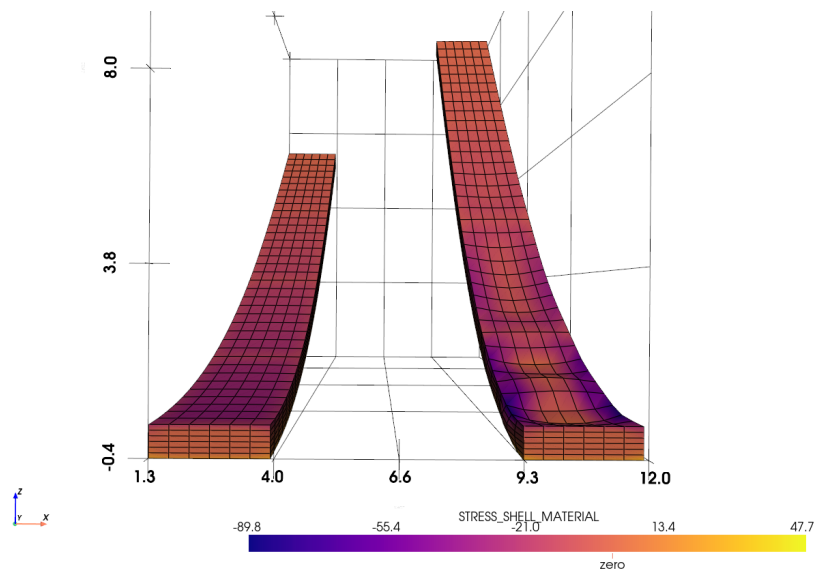


Abbildung 5.37: Flügel, der mit drei Bäumen beult. Damit verhalten sich Ergebnisse anders als die Anderen. Beispielsweise in Abbildung 5.19 der rote Verlauf. Spannung in MPa

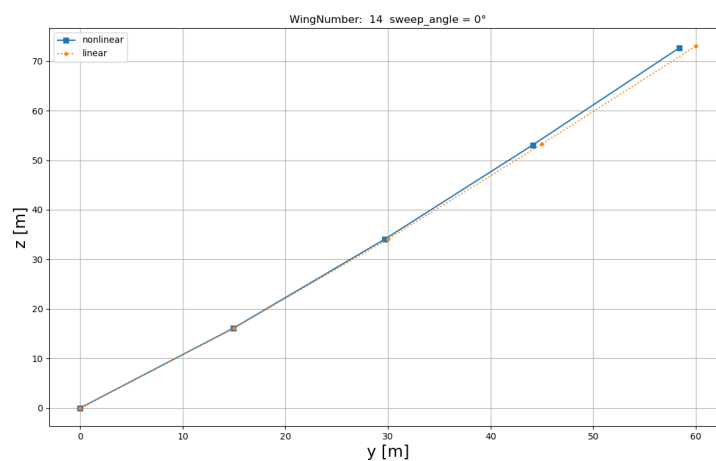


Abbildung 5.38: ein Dimensionale Darstellung der Deformation des Flügels mit der Nummer 14. Der cyan Punkt in den Diagrammen. Zeigt, wie ein relativer RMSE von ca. 1% aussieht

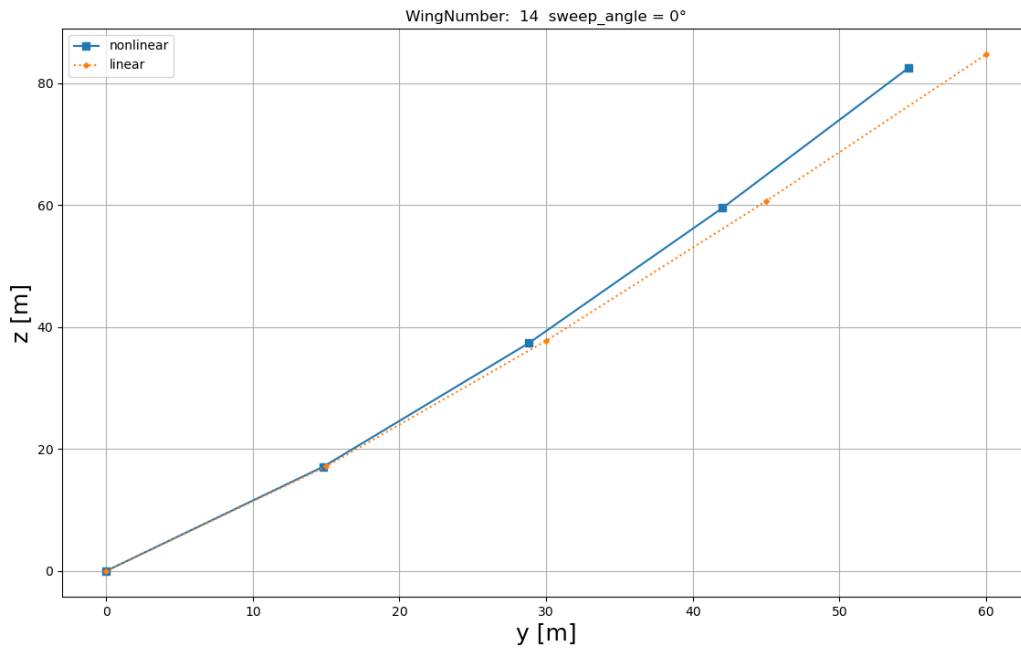


Abbildung 5.39: ein Dimensionale Darstellung der Deformation des Flügels mit der Nummer 14. Der rote Punkt in den Diagrammen. Zeigt, wie ein relativer RMSE von ca. 5% aussieht

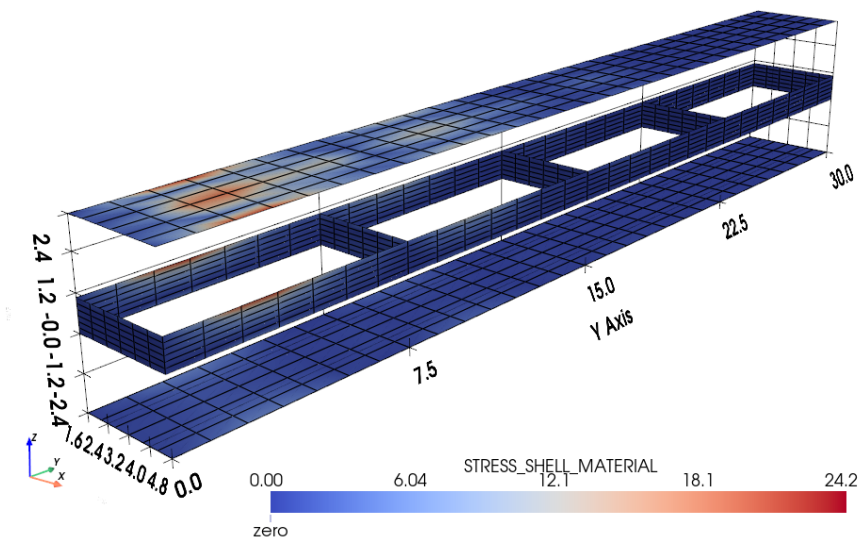


Abbildung 5.40: Blauer Punkt in den Diagrammen. Darstellung der absoluten Spannungsdifferenz. Spannung in MPa

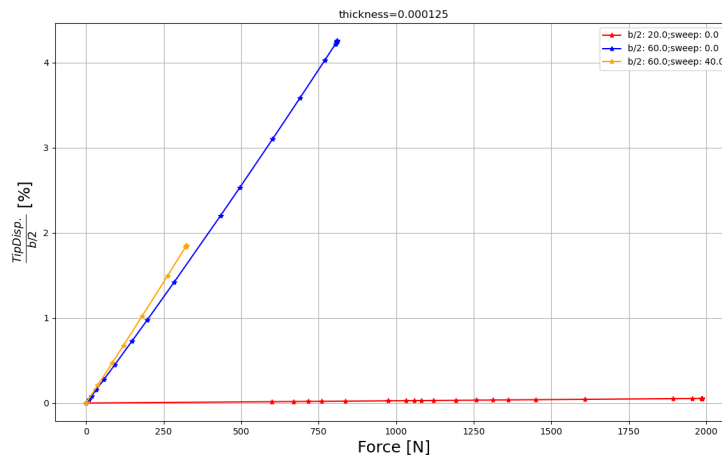


Abbildung 5.41: Weg- Kraft Kurve der Flügelkasten mit einer Lagendicke von 0.125 mm

5.6 Beulen der Außenhaut

In den Abschnitten zuvor hat man sehen können, dass das Beulen auf der Außenhaut des Flügelkasten ein großen Einfluss auf die Ergebnisse nimmt. Zum einen werden die Flügelkästen durch das Beulen Nachgiebiger, zum anderen findet an diesen Stellen eine Spannungsverlagerung statt. Bei reale Flügel treten diese Effekte nur gering auf.

Um dem Beulen entgegen zu wirken wurde die Lagendicke erhöht und eine Rundung auf der Außenhaut dimensioniert.

Der Flügelkasten hatte zu Beginn Lagen mit einer Dicke von 0.125 mm benutzt. Die Außenhaut war aber zu dünn um hohe Beanspruchung stand zu halten. Abbildung 5.41 zeigt die Weg-Kraft, von diesen Flügelkasten. Die maximale Kraft wurde über dem Limit Point gesetzt, sodass der nichtlineare Löser bei den Endpunkten der Graphen divergiert. Die normalisierte z-Verschiebung ist maximal 4%. Das ist zu gering um eine nichtlineare Analyse zu machen. Durch Ausprobieren zeigte sich, dass bei 5 mm Lagendicke dick genug ist um ausgeprägte geometrische Nichtlinearitäten zu erfassen. Die Kraft-Weg Kurven dieser Dicke wurde bereits in Abbildung 5.5 gezeigt.

Auch wurde versucht über eine Rundung der Außenhaut das Beulen entgegenzuwirken. Abbildung 5.42 zeigt, dass das Beulen immer noch Auftaucht.

Eine weitere Möglichkeit wäre die Anzahl der Rippen zu erhöhen. Dies wurde nicht ausprobiert, weil dadurch die Idee des vereinfachten Flügelkasten verloren geht.

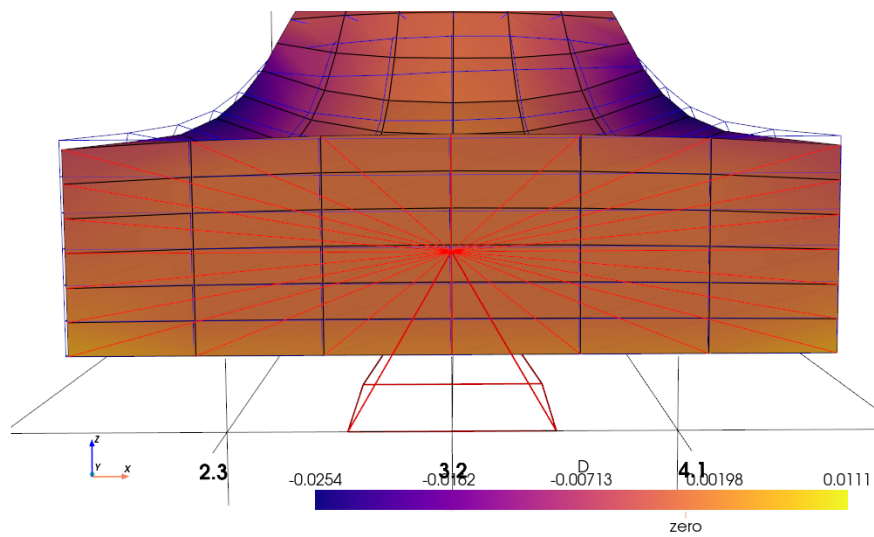


Abbildung 5.42: Flügelkasten mit gekrümmter Außenhaut, die dennoch beult. Konturplot zeigt die Dehnung an. Als wireframe ist die nichtlineare Berechnung abgebildet, ohne Rundung

6 DLR-F25

Für Optimierungsaufgaben wird im DLR der Flügel DLR-F25 benutzt. Für diesen Flügel werden unterschiedliche aerodynamische Lastfälle bestimmt. Für das Folgende wird der Lastfall mit der größten Deformation ausgewählt (siehe Abbildung 6.1)

Die pyramidenförmigen Kennzeichnungen im Bild links weisen auf die Randbedingung hin. Zu sehen sind zwei Einspannungen. Die Erste ganz links beschränkt die Knotenpunkte in Richtung y und z und die Zweite in Richtung x und z .

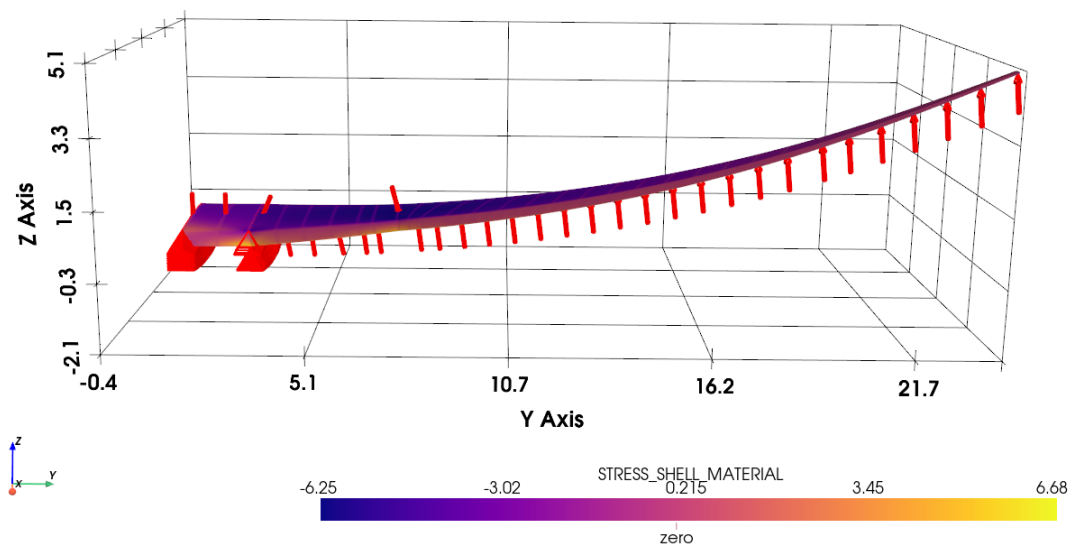


Abbildung 6.1: DLR-F25 mit der Darstellung der Kräfte

Spannungsvergleich

Abbildung 6.2 zeigt links die lineare und rechts die nichtlineare Berechnung. Der Konturplot zeigt die Spannung an in x -Richtung des Laminatkoordinatensystems an.

Da die Unterschiede schlecht erkennbar sind, wird in Abbildung auch der Konturplot von

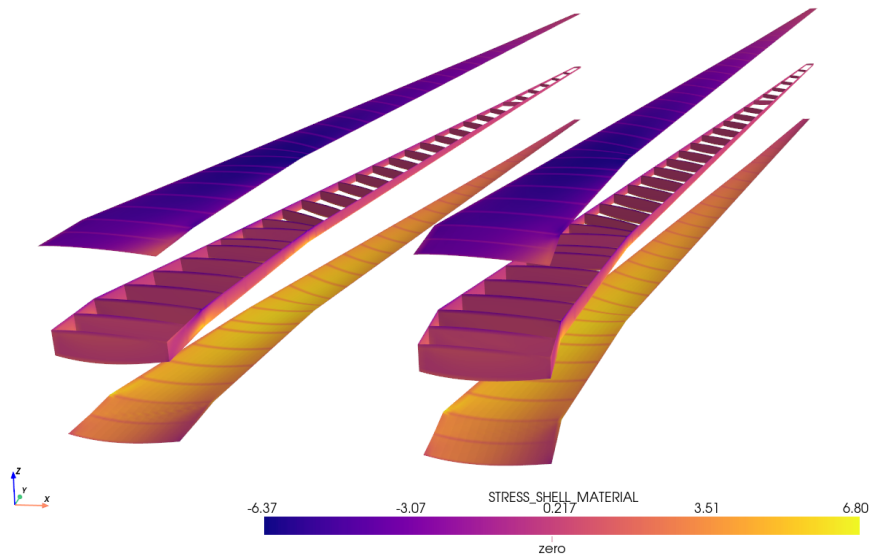


Abbildung 6.2: Spannung-Konturplots in MPa. Links linear und rechts nichtlinear

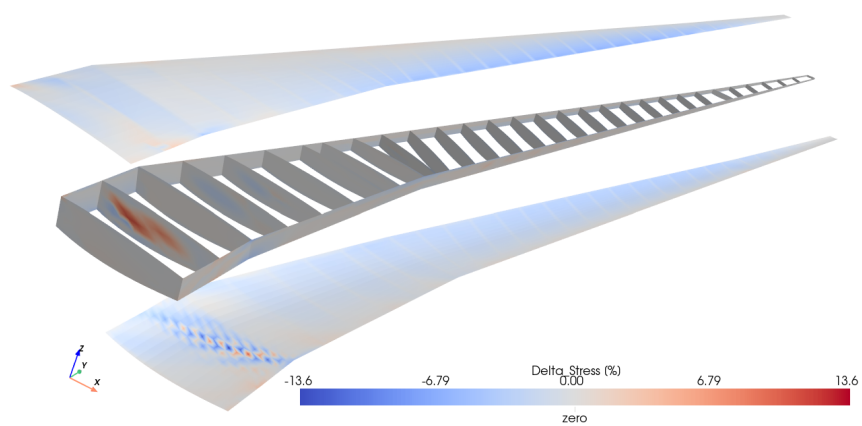


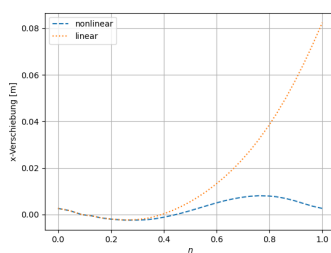
Abbildung 6.3: Relative Spannungsdifferenz, wie behandelt in 5.5

der relativen Differenz angezeigt, diese wird berechnet, wie in Abschnitt 5.5. Zu sehen ist, dass ein großer Bereich weiß gefärbt ist, was darauf hindeutet, dass in diesem Bereich die Spannungsdifferenz nahe zu null ist. Auch ist der blaue Bereich nach der Flügelspitze auffällig. Die blaue Färbung bedeutet, dass die Druckspannung im linearen Fall größer ist als im nichtlinearen Fall. Dies entspricht nicht den Beobachtungen, die in [12] gemacht wurden (siehe Abschnitt 3). Das kann man damit begründen, dass in [12] mit Follower Kräften gerechnet wurde und diese höhere Biegemomente verursachen. Bei der Berechnung am DLR-F25 wurden keine Follower Kräfte benutzt.

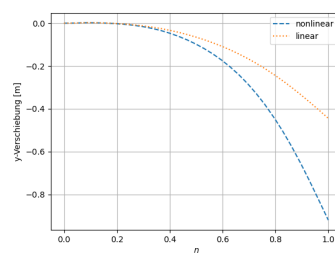
Auch könnte das Beulen Grund für geringere Spannungen sein. In [23] wurde gezeigt, wie das Beulen für geringere Spannungen auf der Außenhaut sorgt.

Vergleich der kinematischen Größen

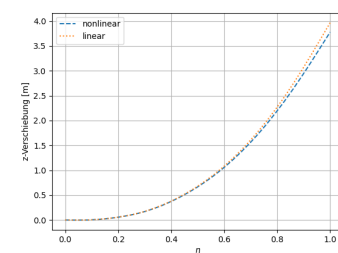
Abbildungen in 6.4 zeigen kinematische Größen, die relevant für aeroelastische Berechnungen sind. An diesen Abbildungen sieht man, dass die Kinematik des Flügels zwischen den beiden Rechenarten Unterschiede im Verlauf, ausgenommen Abbildung (c). Es ist aber hier auf die Größenordnung zu achten. Abbildung (b) zeigt eine negative y-Verschiebung bei der linearen Berechnung, der Grund hierfür ist, dass die Kräfte am Flügel Anteile in y-Richtung haben. Die nichtlineare Berechnung zeigt größere y- Verschiebung, das man mit der Verkürzung der Flügelspannweite erklären kann. Abbildung (a) zeigt, dass die x- Verschiebung an der Einspannung nicht Null ist. Die ist entgegengesetzt der Erwartung. Dies kann man jedoch damit erklären, dass die erste Einspannung die Knoten nicht in x- Richtung verspannt und damit auch Verschiebungen in x- Richtung möglich sind.



(a) x- Verschiebung über eta



(b) y- Verschiebung über eta



(c) z- Verschiebung über eta

Abbildung 6.4: Kinematischer Vergleich zwischen linear und nichtlinearer Berechnung

Vergleich des DLR-F25 mit der Parameterstudie

Abbildungen 6.5 und 6.6 zeigen einen Vergleich der Ergebnisse aus der Parameterstudie mit denen des DLR-F25. Das Erstere bezieht sich auf das RMSE-Fehlermaß, während das Zweite die absolute Spannungsdifferenz darstellt.

Es ist zu beachten, dass die Ergebnisse in den folgenden Abbildungen Rechteckkästen mit einem Pfeilungswinkel von 30° darstellen, da der DLR-F25 ebenfalls einen solchen Pfeilungswinkel aufweist.

Die farbigen Linien repräsentieren die Ergebnisse der Rechteckkästen aus Kapitel 5, während die Ergebnisse des DLR-F25 als schwarz gestrichelte Kurve dargestellt sind.

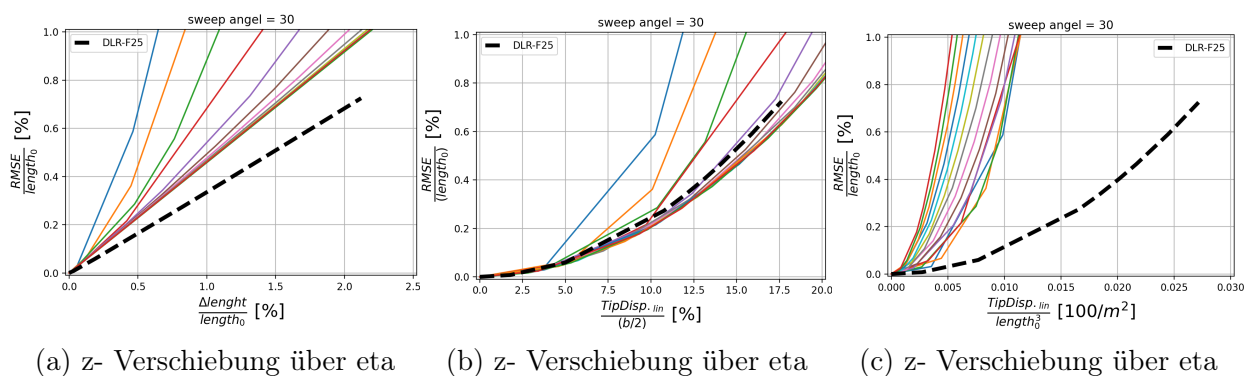


Abbildung 6.5: Kinematischer Vergleich zwischen linear und nichtlinearer Berechnung

Bezüglich des relativen RMSE ist erkennbar, dass der Verlauf der gestrichelten Linie den farbigen Linien entspricht. Besonders interessant sind die Ergebnisse hinsichtlich der relativen Verlängerung und der normalisierten Verschiebung. Bei der relativen Verlängerung zeigen sowohl die Rechteckkästen als auch der reale Flügel einen linearen Verlauf.

Für dieses Verhalten kann die Erklärung aus Abschnitt 5.5 herangezogen werden. Dort wurde gezeigt, dass das lineare Verhalten durch die Rotation eines eindimensionalen Stabes erklärt werden kann. Es wurde angemerkt, dass bei dem rotierendem eindimensionalen Stab der RMSE der Verlängerung des Stabes entspricht. Da in der Bewertungsgröße nur die Verlängerung des linearen Flügels bezogen auf die Ursprungsgeometrie betrachtet wird, geht man davon aus, dass die Verlängerung allein durch die Rotation des Flügels verursacht wird¹, und dass die Länge des nichtlinearen Flügels konstant bleibt. Da Flugzeugflügel kaum in axialer Richtung belastet werden, ist diese Annahme in vielen Fällen zutreffend.

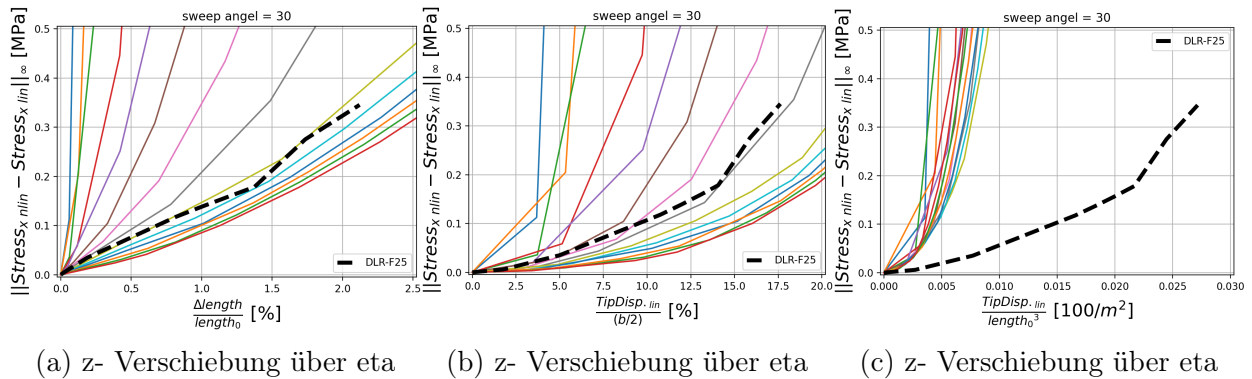
Bei der normalisierten Verlängerung zeigt sich für beide Modelle ein quadratischer Verlauf. Zudem ist auffällig, dass der Verlauf des realen Flügels dem der Rechteckkästen sehr ähnlich

¹gemeint ist die unrealistische Verlängerung des linearen Flügels und nicht die Verlängerung aufgrund einer axialen Belastung

ist.

Für das Bewertungsmaß $\frac{\text{TipDisp.}}{\text{length}_0^3}$ lässt sich jedoch erkennen, dass die gestrichelte Kurve deutlich von den farbigen Linien abweicht, weshalb dieses Bewertungsmaß als ungeeignet anzusehen ist.

Bei diesem Vergleich, konnte gezeigt werden, dass die Ergebnisse aus der Parameterstudie mit dem DLR-F25 zusammengebracht werden können, abgesehen von den Ergebnissen mit dem Bewertungsmaß $\frac{\text{TipDisp.}}{\text{length}_0^3}$. Die relative Verlängerung stellt für den RMSE ein linearen Verlauf ein, den man für Optimierungszwecke verwenden kann. Um die Steigung zu berechnen, braucht man eine lineare und eine nichtlineare Berechnung des Flügels. Es würde ein minimalen Betrag des Lastfalls ausreichen, um die Steigung zu erfassen. Mit dem linearen Zusammenhang kann man dann bestimmen, wie groß der RMSE geworden ist, in dem man aus der linearen Berechnung des gesamten Lastfalls, die relative Verlängerung berechnet. Bezüglich der normalisierten Verschiebung, muss untersucht werden, ob die gestrichelte Kurve immer dem Bündel der Parameterstudie folgt. Wenn das der Fall ist, dann kann man direkt aus der linearen Berechnung den RMSE abschätzen.



(a) z- Verschiebung über eta (b) z- Verschiebung über eta (c) z- Verschiebung über eta

Abbildung 6.6: Kinematischer Vergleich zwischen linear und nichtlinearer Berechnung

In den Abbildungen 6.6 wurde die absolute Spannungsdifferenz anstelle der relativen Spannungsdifferenz verwendet, wie sie in Abschnitt 5.5 besprochen wurde. Der Grund ist, weil es bei dem DLR-F25 um einen realen Flügel handelt. Der reale Flügel selbst wird optimiert und es wird das in Kapitel 4 behandelte Optimierungsproblem auf diesen angewendet. Die Spannungsrandbedingungen werden in absoluten Größen betrachtet, weshalb der absolute Unterschied zwischen linearer und nichtlinearer Berechnung von Interesse ist. Bei den Rechteckkästen wurden relative Größen betrachtet, um die Ergebnisse auf den realen Flügel zu übertragen. Dies ist bei dem realen Flügel nicht mehr von Nöten.

Wenn die relative Spannungsdifferenz beispielsweise 300% beträgt², handelt es sich um einen

²bedeutet, dass die Differenz zwischen linear und nichtlinearer Berechnung 3 mal größer ist als die dort anliegende Spannung der linearen Berechnung ($\frac{\Delta\sigma}{\sigma_{lin}}$)

großen relativen Fehler, der darauf hinweist, dass die lineare Berechnung an dieser Stelle gewisse Effekte vernachlässigt (siehe Divergenz in Abschnitt 5.5). Gleichzeitig kann der absolute Fehler im Hinblick auf die Festigkeit des Materials oder die Spannungsrestriktion σ_{\max} im Optimierungsproblem jedoch gering sein³.

Bei der Betrachtung der absoluten Spannungsdifferenz ist zu erkennen, dass die Ergebnisse bei der relativen Verlängerung und der normalisierten Verschiebung nahe bei denen der Rechteckkästen liegen. Allerdings muss berücksichtigt werden, dass die Spannungsfelder nicht direkt miteinander vergleichbar sind. Die maximale Spannungsdifferenz bei den Rechteckkästen tritt an den Außenschalen auf, während sie beim realen Flügelkasten an den Rippen liegt. Diese wurden hier lediglich zur Orientierung dargestellt. Auch hier zeigt sich, dass der Verlauf der gestrichelten Linie nahezu linear oder quadratisch ist, jedoch ab einem bestimmten Punkt einen Knick aufweist. An diesem Punkt findet ein Übergang statt: Vor dem Knick befindet sich die maximale Spannungsdifferenz an den Außenschalen, während sie nach dem Knick auf die Rippen übergeht.

Auch hier zeigt sich das Bewertungsmaß $\frac{\text{TipDisp.}}{\text{length}_0^3}$ als ungeeignet, da es weit von den Ergebnissen der Rechteckkästen abweicht.

An den Ergebnissen zeigt sich, dass der Fehler bei dem realen Flügel gering ist. Für den relativen RMSE liegt dieser unter 1%, was gemäß Abbildung 5.38 als klein anzusehen ist. Die maximale Spannungsdifferenz beträgt etwa 0,4 MPa, was im Verhältnis zur Versagensgrenze eines typischen Faserverbundwerkstoffs (ca. 600 MPa, je nach Faserart) als sehr gering zu bewerten ist.

Vergleich der Rechenzeit zwischen den linearen und nichtlinearen DLR-F25

In Kapitel 4 wurde darauf hingewiesen, dass ein FE-Modell in einem Optimierungsprozess wiederholt, jedoch mit unterschiedlichen Designwerten, berechnet werden muss. Durch die wiederholte Berechnung verlängert sich die Gesamtdauer des Optimierungsprozesses um ein Vielfaches der Dauer der einzelnen FE-Berechnung. Dies kann dazu führen, dass das Problem innerhalb der vorgegebenen zeitlichen Anforderungen nicht mehr lösbar ist. Daher ist es wichtig, die Rechenzeit so gering wie möglich zu halten.

In diesem Abschnitt sollen die Rechenzeiten des linearen DLR-F25 mit denen des nichtlinearen Modells verglichen werden. Häufig wird ein Flugzeugflügel für mehrere Manöver

³Zum Beispiel, wenn $\frac{\Delta\sigma}{\sigma_{lin}} \gg \frac{\Delta\sigma}{\sigma_{max}}$ bei $\sigma_{lin} \approx 0$ und $\sigma_{max} > \Delta\sigma$

optimiert, was bedeutet, dass das Modell in einem Optimierungsschritt für verschiedene Lastfälle erneut berechnet werden muss. Wie in Abschnitt 2.1 gezeigt, kann die aufgestellte und zerlegte Steifigkeitsmatrix im linearen Fall für mehrere Lastfälle wiederverwendet werden. Für das nichtlineare FE-Modell ist dies jedoch nicht möglich, da die Steifigkeitsmatrix vom Lastfall selbst abhängt. Das bedeutet, dass für jeden Lastfall eine separate nichtlineare FE-Berechnung durchgeführt werden muss.

Aus diesem Grund soll nicht nur die Rechenzeit der einzelnen Berechnungen gegenübergestellt werden, sondern auch deren Abhängigkeit von der Anzahl der Lastfälle (siehe Abbildung 6.7).

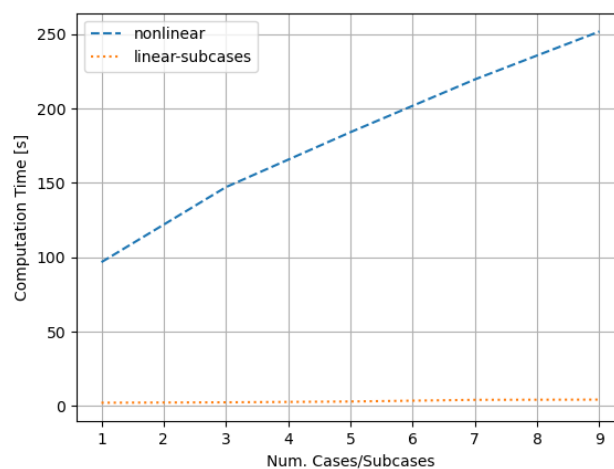


Abbildung 6.7: Rechenzeiten des linearen und nichtlinearen DLR-F25-Modells in Abhängigkeit von der Anzahl der Lastfälle

Das Diagramm zeigt die Rechenzeiten des linearen und nichtlinearen DLR-F25-Modells in Abhängigkeit von der Anzahl der Lastfälle. Dabei wurde derselbe Lastfall mehrfach berechnet. Es wurden keine unterschiedlichen Lastfälle verwendet, da die Lastfälle untereinander unterschiedlich nichtlinear sein können und im nichtlinearen Fall zu verschiedenen Rechenzeiten führen könnten. Da hier der Einfluss der Anzahl der Lastfälle auf die Rechenzeit untersucht werden soll, wurde ein einzelner Lastfall betrachtet.

An der Abbildung ist zu erkennen, dass die Kurve im linearen Fall eine geringe Steigung aufweist. Bei einem Lastfall dauert die Berechnung etwa 2,5 s, während bei neun Lastfällen die Berechnung ungefähr 5 s in Anspruch nimmt. Dies zeigt, dass sich die Rechenzeit im linearen Fall nur geringfügig mit der Anzahl der Lastfälle erhöht.

Im Gegensatz dazu zeigt die nichtlineare Berechnung, wie erwartet, eine deutlich größere Steigung. Dies bedeutet, dass die Rechenzeit mit zunehmender Anzahl der Lastfälle erheblich ansteigt. Eine nichtlineare Berechnung dauert etwa 100 s, während bei neun Lastfällen eine Rechenzeit von ca. 250 s erforderlich ist. Somit ist die nichtlineare Berechnung im Vergleich 40- bis 50-mal teurer.

Es ist zu beachten, dass die Dauer der nachfolgenden Berechnungen nicht das Vielfache der ersten Berechnung sind.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die lineare Berechnung hinsichtlich der Rechenzeit eine deutliche Rechenzeiterparnis gegenüber der nichtlinearen Berechnung aufweist, insbesondere bei einer großen Anzahl von Lastfällen.

Während die Rechenzeit im linearen Fall nur geringfügig mit der Anzahl der Lastfälle ansteigt, vergrößert sich die Rechenzeit im nichtlinearen Fall deutlich.

In Anwendungen, bei denen nichtlineare Effekte nur eine untergeordnete Rolle spielen, kann durch die Verwendung des linearen Modells erheblich an Rechenzeit gespart werden. Daher wird empfohlen, wann immer die lineare Berechnung die Genauigkeitsanforderungen erfüllt, auf die lineare Berechnung zurückzugreifen. Sollte die Genauigkeitsanforderung nicht erfüllt werden, kann die Bi-Level-Optimierung in Betracht gezogen werden (siehe Kapitel 4).

7 Schluss und Ausblick

In dieser Arbeit wurde der Vergleich zwischen linearen und nichtlinearen Berechnungen für den Flügelkasten analysiert.

In Kapitel 3 wurde anhand von Literaturergebnissen gezeigt, dass nichtlineare Berechnungen zu höheren Spannungen führen und somit die Optimierung des Flügelkastens zu einem höheren Materialeinsatz führt (siehe auch Kapitel 4). [12] zeigte, dass die nichtlineare Strukturoptimierung eines Flügelkastens zu einem um 6% erhöhten Materialbedarf im Vergleich zur linearen Berechnung führte, was auf die Berücksichtigung von Follower-Kräften und damit entstandenen höhere Spannungen zurückzuführen ist.

In Kapitel 5 wurde durch eine Parameterstudie versucht, heuristisch zu bestimmen, bei welchen Flügelgeometrien und Kräften sich Flügel nichtlinear verhalten. Die Studie zeigte einen quadratischen Zusammenhang zwischen dem relativen RMSE und der normalisierten z-Verschiebung sowie einen linearen Zusammenhang zwischen dem RMSE und der relativen Verlängerung. Diese Erkenntnisse konnten auf einen realen Flügel übertragen werden. Ähnliche Beobachtungen wurden bei der absoluten Spannungsdifferenz und dem realen Flügel gemacht. Der lineare Zusammenhang könnte in einem Optimierungsprozess genutzt werden, um den Fehler durch eine lineare Berechnung abzuschätzen. Es wäre ausreichend, eine nichtlineare Berechnung¹ durchzuführen, um die Steigung zu bestimmen. Damit ließe sich der Fehler für weitere Berechnungen erfassen.

In dieser Arbeit wurde dieser Zusammenhang für unterschiedliche Geometrien nachgewiesen, es bleibt jedoch zu klären, ob dies auch für verschiedene Lastfälle gilt. Für zukünftige Arbeiten wäre es daher interessant, zu untersuchen, wovon die Steigung abhängt und ob diese in einem Optimierungsprozess wiederverwendet werden kann.

Eine wesentliche Einschränkung der Parameterstudie liegt in der Untersuchung eines stark vereinfachten Flügelkastens. Dieser zeigte ein ausgeprägtes Beulverhalten, was die Übertragung der Ergebnisse auf einen realen Flügelkasten erschwerte, zum Beispiel durch unterschiedliche Spannungsfelder. Darüber hinaus wurde der Einfluss von Follower-Kräften nicht

¹mit geringer Belastung, um eine schnelle Konvergenz zu erzielen

untersucht, was bei aerodynamischen Kräften jedoch unerlässlich ist. Für zukünftige Arbeiten wäre es sinnvoll, das Beulverhalten des vereinfachten Flügelkastens zu reduzieren, beispielsweise durch eine höhere Anzahl an Rippen und Rundungen auf der Außenschale.

Die Analyse des DLR-F25 ergab, dass die Fehlerwerte sowohl für den RMSE als auch für die Spannungsdifferenzen gering sind. Der relative RMSE lag unter 1%, und die maximale Spannungsdifferenz von 0,4 MPa ist im Verhältnis zur Versagensgrenze eines typischen Faserverbundwerkstoffs (ca. 600 MPa) vernachlässigbar. Dies zeigt, dass die lineare Berechnung in diesem Fall trotz ihrer Vereinfachungen als ausreichend genau betrachtet werden kann.

Der DLR-F25 wurde auch dazu verwendet, um die Rechenzeiten zwischen der linearen und nichtlinearen FEM zu vergleichen. Es konnte gezeigt werden, dass sich die Rechenzeit im linearen Fall nur geringfügig mit der Anzahl der Lastfälle erhöht, während die Rechenzeit im nichtlinearen Fall deutlich ansteigt. Zwischen einem und neun Lastfällen ist die Rechenzeit der nichtlinearen Berechnung 40- bis 50-mal größer als die der linearen Berechnung. Diese Unterschiede verdeutlichen die erheblichen rechentechnischen Anforderungen bei der Verwendung nichtlinearer Modelle, insbesondere bei der Optimierung mit mehreren Lastfällen.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse dieser Arbeit, dass der Fehler zwischen linearen und nichtlinearen Berechnungen stetig verläuft. Das bedeutet, dass die Entscheidung, ob nichtlineare Berechnungen notwendig sind, nicht auf einen lokalen Punkt beschränkt werden kann, sondern eine Abwägung erfordert. Zukünftige Arbeiten könnten den Einfluss des Fehlers auf die Zielfunktion des Optimierungsproblems untersuchen, um Kriterien zu entwickeln, ab welchem Fehler nichtlineare Berechnungen erforderlich sind.

A Anhang

A.1 HDF5-Generator

Die Datenbank(memcom), die B2000++ zum Speichern benutzt, kann nur auf einem linux Betriebssystem installiert werden. Um mit einem Windows Betriebssystem auf die Ergebnisse zugreifen zu können wurde der Code A.1 programmiert. Dieser wandelt die memcom Datenbank in eine hdf5 Datei um. Wenn man die Ergebnisse mit vitables anzeigt, dann fehlen die Datensätze mit string Format. Das Problem liegt an vitales, da dieses Programm diesen Datentyp nicht darstellen kann.

```
1 import argparse
2 import h5py
3 import numpy as np
4 import memcom as mc
5 from lightworks.fem.b2k.b2k_interface import B2kInterface
6
7 def write_hdf5(db, output_file):
8     with h5py.File(output_file, 'w') as f:
9         for key in sorted(db.keys()):
10             if key in ['FIELDS', 'TITLE'] or ('IP' in key and not '_IP' in key):
11                 continue
12             print(key)
13             group=f.create_group(key)
14             data = db[key][:]
15             if isinstance(data, list):
16                 if isinstance(data[0], mc.tb):
17                     sub_set=group.create_group('set')
18                     for i, e in enumerate(data):
19                         #i+1 weil internal id's in B2k ab 1 anfangen
20                         e_set = sub_set.create_group(str(i+1))
21                         save_to_hdf5(e_set, e)
22             else:
23                 data = np.array(data).squeeze()
```

```
24     group.create_dataset('set', data=data, maxshape=data.shape,
25 compression='gzip', compression_opts=9)
26     elif isinstance(data, mc.tb):
27         sub_set = group.create_group('set')
28         save_to_hdf5(sub_set, data)
29     else:
30         if np.size(data)==1:
31             group.create_dataset('set', data=data)
32         else:
33             data = np.array(data).squeeze()
34             group.create_dataset('set', data=data, maxshape=data.shape,
35 compression='gzip', compression_opts=9)
36         if db[key].desc:
37             desc_group = group.create_group('desc')
38             save_to_hdf5(desc_group, db[key].desc)
39
40 def save_to_hdf5(group, data):
41     for key, value in data.items():
42         if isinstance(value, mc.tb):
43             subgroup = group.create_group(key)
44             save_to_hdf5(subgroup, value)
45         else:
46             value = [value] if isinstance(value, str) else np.array(value, dtype
47 ='S')
48             group.create_dataset(key, data=value)
49
50 if __name__ == "__main__":
51     parser = argparse.ArgumentParser()
52     parser.add_argument('input_file', type=str, help='Input file')
53     parser.add_argument('--filepath', '-p', type=str, default='.', help='file
54 path')
55     parser.add_argument('--output', '-o', type=str, default='result_tables.hd5
56 ', help='Output file path')
57
58 args = parser.parse_args()
59
60 filename = args.input_file
61 filepath = args.filepath
62 output_file = args.output
63
64 b2k = B2kInterface(filename, filepath)
```

```
63 memcom_db = b2k._get_database()  
64 print('write hdf5 file')  
65 write_hdf5(memcom_db, output_file)
```

Listing A.1: convert_xml_2_md1

A.2 Extrapolation

Extrapolation von Werten an den Integrationspunkten zu den Knotenpunkten nach der Methode vom Paper “*A local extrapolation method for finite elements*“. Für Q4 Elemente ergibt sich die einfache Formel $\mathbf{w}=\mathbf{N}\mathbf{v}$. \mathbf{w} ist ein Vektor mit Werten von einem beliebigen Feld für die jeweiligen Integrationspunkte für das jeweilige Element. \mathbf{v} ist sind entsprechende Werter an den Knotenpunkte und \mathbf{N} ist die lineare Abbildungsmatrix. Um die Werte für die Knotenpunkte zu bekommen diese Gleichung nach v gelöst werden.

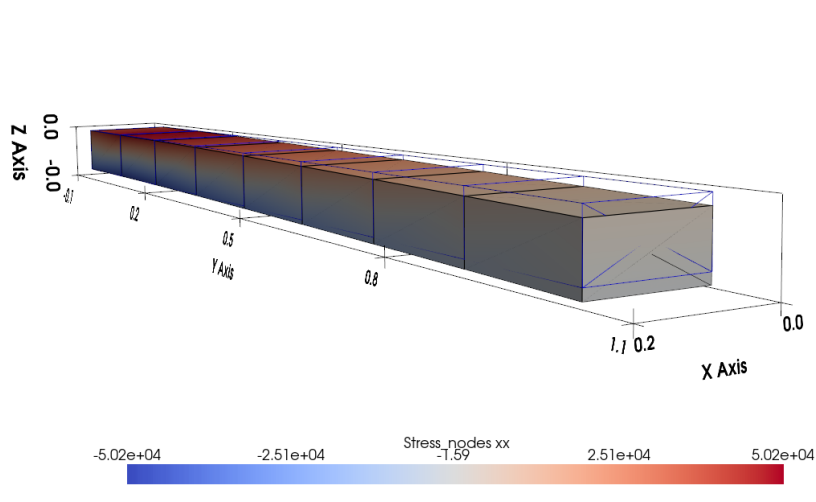


Abbildung A.1

Literaturverzeichnis

- [1] Alder, M., Moerland, E., Jepsen, J. & Nagel, B. „Recent Advances in Establishing a Common Language for Aircraft Design with CPACS“. In: *Aerospace Europe Conference 2020*. 2020.
- [2] Bäker, M. *Numerische Methoden in der Materialwissenschaft*. Fachbereich Maschinenbau der Technischen Universität Braunschweig, 2009.
- [3] Bäker, M. „How to get meaningful and correct results from your finite element model“. In: (Nov. 2018).
- [4] Bergan, P. „Solution algorithms for nonlinear structural problems“. In: 12.4 (1980), S. 497–509.
- [5] Brooks, T. R., Kenway, G. K. W. & Martins, J. R. R. A. „Benchmark Aerostructural Models for the Study of Transonic Aircraft Wings“. In: *AIAA Journal* 56.7 (2018), S. 2840–2855. eprint: <https://doi.org/10.2514/1.J056603>.
- [6] Burton, Scott A., Alyanak, Edward J. & Kolonay, Raymond M. „Efficient supersonic air vehicle design using the Service-Oriented Computing Environment (SORCER)“. In: *Int. J. Simul. Multisci. Des. Optim.* 5 (2014), A25.
- [7] Calderon, D., Cooper, J., Lowenberg, M., Neild, S. & Coetzee, E. „Sizing High-Aspect-Ratio Wings with a Geometrically Nonlinear Beam Model“. In: *Journal of Aircraft* 56 (Juni 2019), S. 1–16.
- [8] Castellani, M., Cooper, J. & Lemmens, Y. „Nonlinear Static Aeroelasticity of High-Aspect-Ratio-Wing Aircraft by Finite Element and Multibody Methods“. In: *Journal of Aircraft* 54 (2017), S. 548–560.
- [9] Dinkler, D. & Kowalsky, U. *Introduction to Finite Element Methods*. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2023.
- [10] Goelke, M. „Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis using OptiStruct“. In: (2018).
- [11] Gray, A. C. & Martins, J. R. „Geometrically Nonlinear High-fidelity Aerostructural Optimization for Highly Flexible Wings“. In: *AIAA Scitech 2021 Forum*.
- [12] Gray, A. C. „Geometrically Nonlinear High Fidelity Aerostructural Optimisation for Highly Flexible Wings“. Delft University of Technology, 2020.
- [13] Howcroft, C., Calderon, D., Lambert, L., Castellani, M., Cooper, J., Lowenberg, M., Neild, S. & Cook, R. „Aeroelastic Modelling of Highly Flexible Wings“. In: Jan. 2016.

- [14] Koziel, S. & Ogurtsov, S. „Surrogate-Based Optimization“. In: *Antenna Design by Simulation-Driven Optimization*. Cham: Springer International Publishing, 2014, S. 13–24.
- [15] Langemann, D. & Reisch, C. *So einfach ist Mathematik - Partielle Differenzialgleichungen für Anwender*. Springer Spektrum Berlin, Heidelberg, 2018.
- [16] Leon, S. E., Paulino, G. H., Pereira, A., Menezes, I. F. M. & Lages, E. N. „A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes“. In: *Applied Mechanics Reviews* 64.4 (Aug. 2012), S. 040803. eprint: https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanicsreviews/article-pdf/64/4/040803/5443183/040803_1.pdf.
- [17] Makiela, P. A. „Auslegung einer energieabsorbierenden Struktur aus Faser-Metall-Laminaten für einen Formula Student Rennwagen mithilfe numerischer Simulationen“. Universität Braunschweig, 2009.
- [18] Martins, J. & Ning, A. *Engineering Design Optimization*. Okt. 2021.
- [19] Matthies, H. & Strang, G. „The solution of nonlinear finite element equations“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14.11 (1979), S. 1613–1626. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620141104>.
- [20] Omairey, S. L., Dunning, P. D. & Sriramula, S. „Development of an ABAQUS plugin tool for periodic RVE homogenisation“. In: *Engineering with Computers* (2021).
- [21] Ritter, M. R. *An Extended Modal Approach for Nonlinear Aeroelastic Simulations of Highly Flexible Aircraft Structures*. Techn. Ber. Technische Universität Berlin, 2019.
- [22] smr. 38.1.1 *Contact formulations in Abaqus/Standard*. <https://www.smr.ch/doc/b2000pp/b2user/html/elements.html>.
- [23] Verri, A. A., Bussamra, F. L. & Cesnik, C. E. S. „Outcomes of Nonlinear Static Aeroelasticity for Wing Stress and Buckling Applied to a Transport Aircraft“. In: *AIAA SCITECH 2024 Forum* (2024).
- [24] Wriggers, P. *Nonlinear Finite Element Methods*. Springer Berlin, Heidelberg, 2010.