

Gliederung der Vorlesung „Methoden der Aeroakustik“

Sommersemester 2024 TU Braunschweig, Prof. Dr.-Ing. J. Delfs

1. Theoretische/numerische Methoden

1.1 Wellengleichungsmethoden

1.1.1 Analytische Lösungen der aeroakustischen Analogie

Propellergeräusch, (Strahlgeräusch), Hinterkantengeräusch,
Tyler-Sofrin Regel für Rotor-Stator Auslegung in Kanälen

1.1.2 Numerische Lösungsverfahren für Wellengleichungen

Randelementeverfahren (BEM), (Finite Elemente-Verfahren (FEM)),
Schallstrahlenverfahren (Ray-tracing), Ffowcs-Williams und Hawkings
Gleichung/ Kirchhoffgleichung

1.2 Methoden zur Lösung von Störungsgleichungen

1.2.1 (Methode der angepassten asymptotischen Entwicklung)

Schallabstrahlung eines tanzenden Wirbelpaares

1.2.2 Numerische Aeroakustik (CAA)

Prinzip hochauflösender Finite Differenzenverfahren, DRP-Schema,
Rechenbeispiele CAA

2. Experimentelle Methoden

2.1 Akustische Sensoren und Messtechnik

2.1.1 Freifeldmikrophone, Frequenzgang und Immissionsrichtwirkung

2.1.2 Mikrophone in Strömungen (Nasenkonus)

2.1.3 Neise-Sonde

2.1.4 Miniatur-Oberflächendrucksensoren Ku-lite

2.2 (Signalverarbeitung)

2.2.1 Diskrete und schnelle Fouriertransformation

2.2.2 Filter/Fenster

2.3 Quellortungs- oder Quelllokalisierungsmethoden

2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

2.3.2 Multimikrophananordnung (Mikrophonarray)

2.4 Messanordnungen in der Aeroakustik

2.4.1 Aeroakustische Ähnlichkeit

2.4.2 Überflug- bzw. Vorbeifahrversuche / Windkanalversuche

Notwendige Datenreduktionstechniken, Umrechnung Flug-/Windkanal

2.5 Ausblick: Verschmelzung von Experiment und num. Simulation

Urheberhinweis

Dieses von mir, Prof. Dr.-Ing. Jan Delfs, verfasste Skript unterliegt dem deutschen Urheberrecht. Es darf nur zum persönlichen Gebrauch zu Zwecken des Studiums verwendet werden. Insbesondere ist es nicht erlaubt, das Skript oder Teile daraus zu bearbeiten, zu übersetzen, zu kopieren oder in elektronischer Form zu speichern und an andere Personen weiterzugeben, weder in Kopie, noch auf elektronischem Wege per Email, auf Speichermedien (z. B. CD, USB-Stick usw.), über Datenbanken oder andere Medien und Systeme. Lediglich die Herstellung von Kopien und Downloads für den persönlichen, privaten und nicht kommerziellen Gebrauch ist erlaubt.

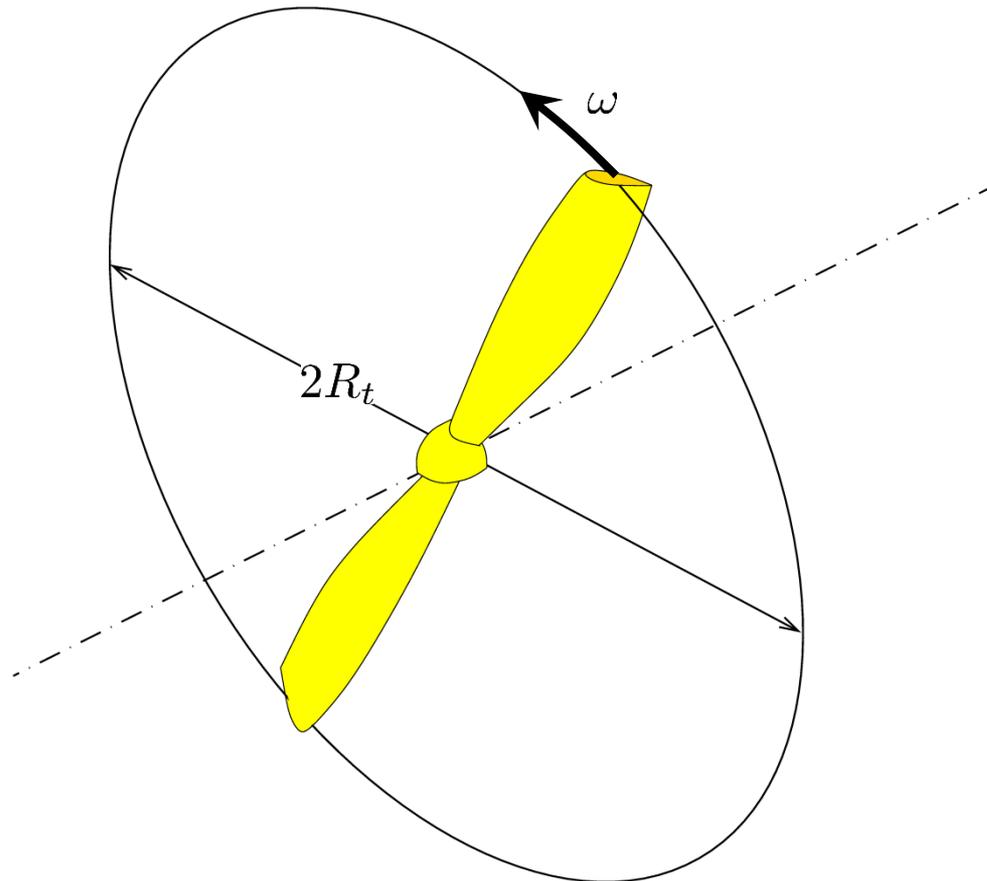
https://elib.dlr.de/203037/1/Vorlesung_Methoden_Aeroakustik_Delfs.pdf

Die Vorlesung baut auf diejenige zu „Grundlagen der Aeroakustik“ auf, dessen Manuskript zu finden ist unter:

https://elib.dlr.de/202954/1/Notes_Basics_of_Aeroacoustics_Delfs.pdf

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

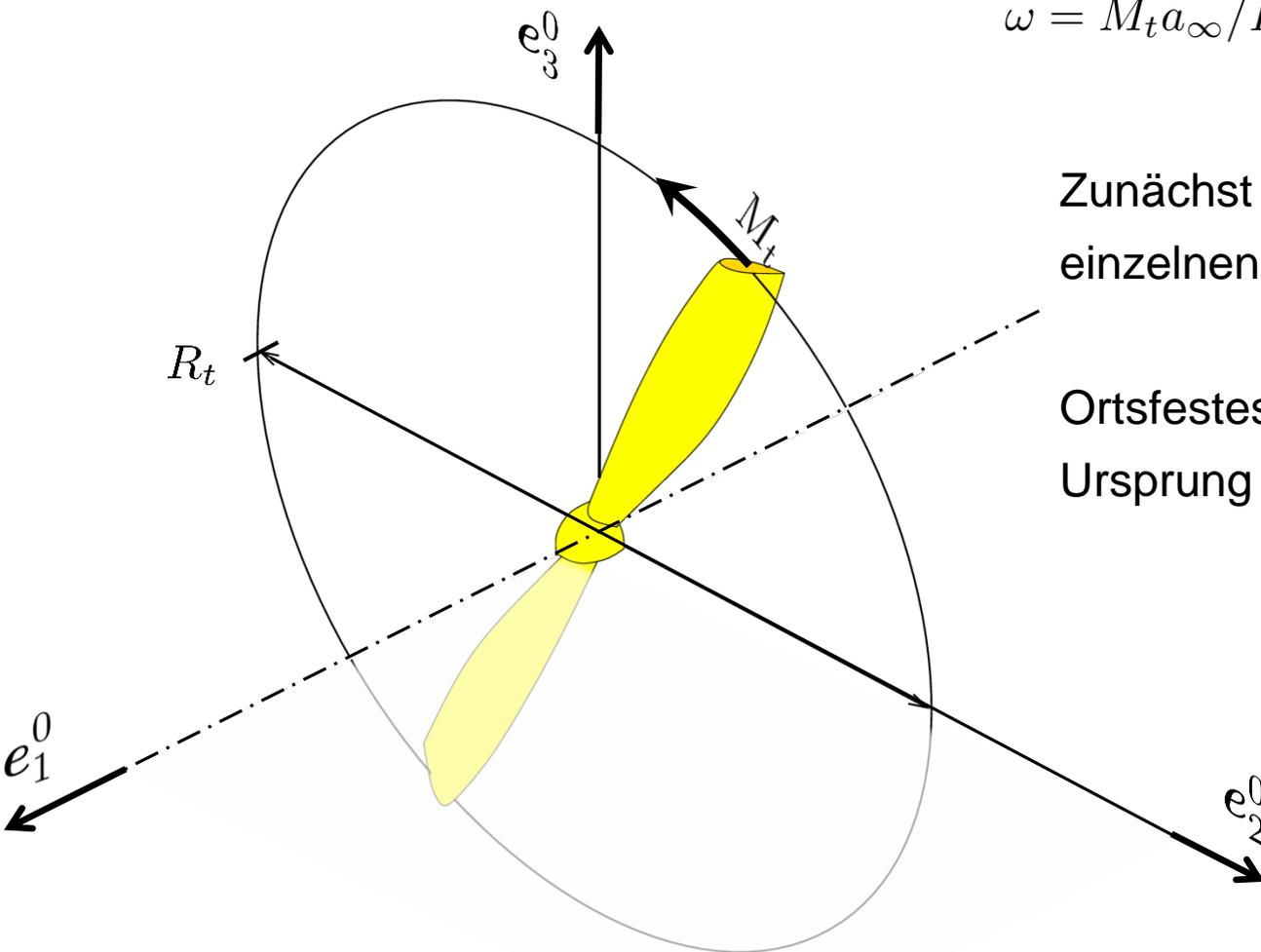
Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?

$$\omega = M_t a_\infty / R_t$$

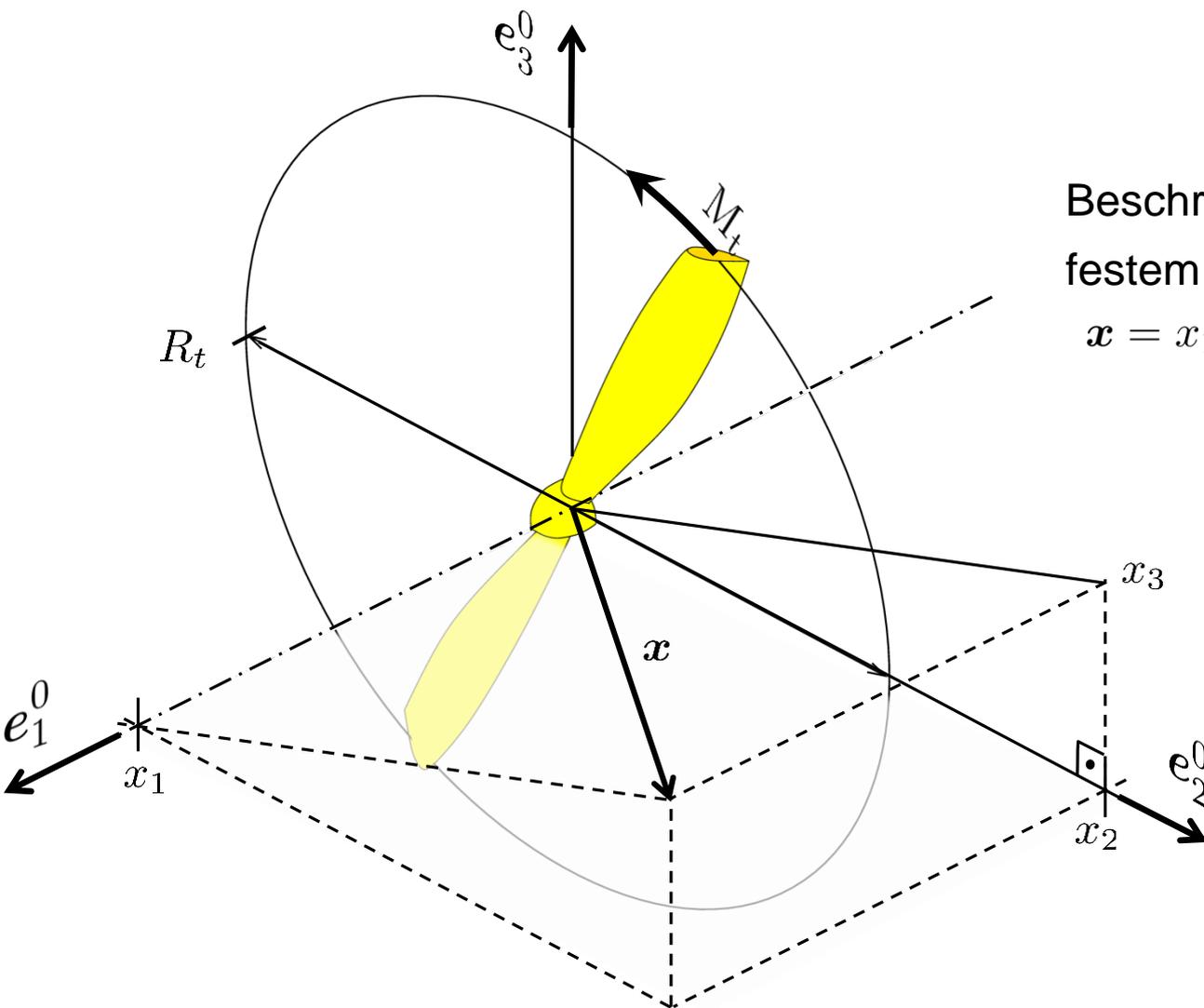


Zunächst Betrachtung eines einzelnen Propellerblatts.

Ortsfestes Koordinatensystem e_1^0, e_2^0, e_3^0
Ursprung in Propellerzentrum

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?

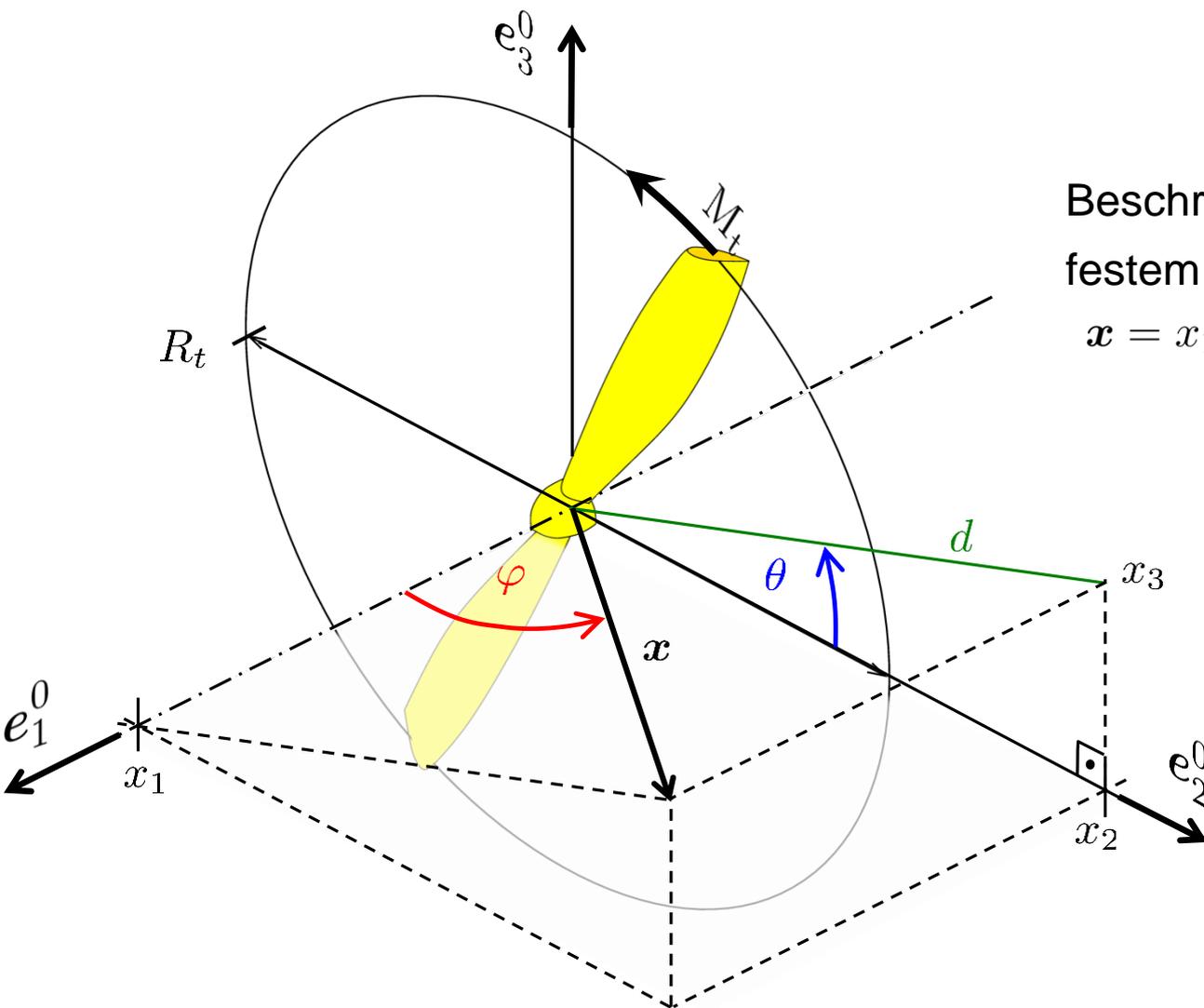


Beschreibung Beobachter in ortsfestem Koordinatensystem:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1^0 + x_2 \mathbf{e}_2^0 + x_3 \mathbf{e}_3^0 \quad (267)$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?



Beschreibung Beobachter in ortsfestem Koordinatensystem:

$$x = x_1 e_1^0 + x_2 e_2^0 + x_3 e_3^0 \quad (267)$$

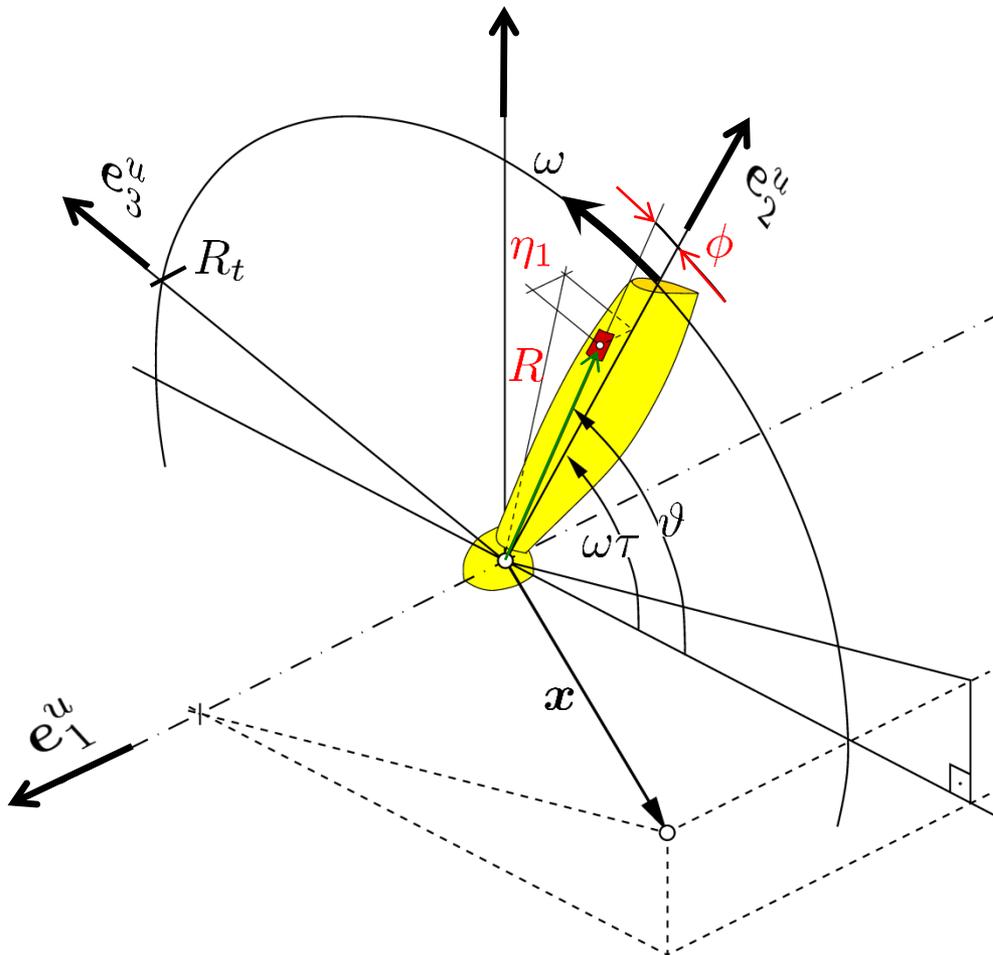
$$(x_1 = d \cot \varphi)$$

$$x_2 = d \cos \theta$$

$$x_3 = d \sin \theta$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Aufgabe: Propeller mit Radius R_t rotiert mit ω im ruhenden Medium: Schall?



Beschreibung der Position $\xi(\tau)$ der Blatt-
oberflächenelemente dS , d.h. Quellpunkte

$$\xi = \xi_1 e_1^0 + \xi_2(\tau) e_2^0 + \xi_3(\tau) e_3^0$$

$$dS = dS(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = dS(\xi)$$

Einfacher in mitrotierendem KO-System,
da dann Koordinatenwerte und Oberflä-
chenelement (starres Blatt) zeitunabhängig

$$\xi = \eta_1 e_1^u + \eta_2 e_2^u(\tau) + \eta_3 e_3^u(\tau) \quad (268)$$

$$dS = dS(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = dS(\eta)$$

$$\eta_1 = \xi_1$$

$$\eta_2 = R \cos \phi$$

$$\eta_3 = R \sin \phi$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

$$H = H(f)$$

$$f < 0 \text{ für } \eta \in V_B$$

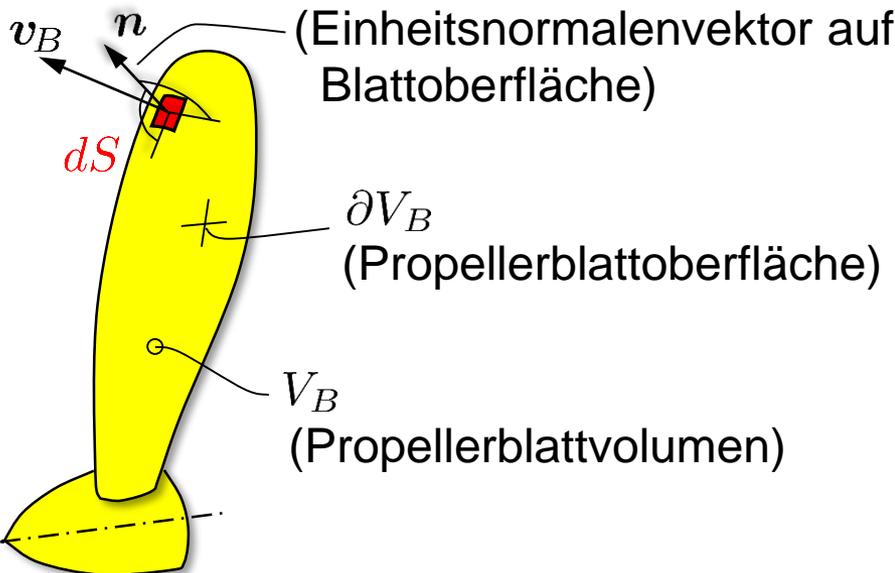
$$f > 0 \text{ für } \eta \in V_\infty \setminus V_B$$

$4\pi a_\infty^2 \rho'(\mathbf{x}, t) =$	$\nabla_x \cdot \nabla_x \cdot \int_{V_\infty} \frac{HT}{r 1 - M_r } dV(\eta) -$	Quadrupolschall
$-$	$\nabla_x \cdot \int_{\partial V_B} \frac{(-\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{I})\mathbf{n}}{r 1 - M_r } dS(\eta) +$	Belastungsschall
$+$	$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial V_B} \frac{\rho_\infty \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n}}{r 1 - M_r } dS(\eta)$	Verdrängungsschall

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_x \cdot \int_{V_B} \frac{\rho_\infty \mathbf{v}_B}{r|1 - M_r|} dV(\xi)$$



Grundlagen AA S. 221/222



Ffowcs-Williams Hawkings Gleichung für starre bewegte Körper (263)

(Oberflächenformulierung, d.h.

Bilanzfläche = Objekt Oberfläche)

$$M_r = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e}_r / a_\infty$$

$$\mathbf{e}_r := \mathbf{r} / r = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) / |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Weiterhin nur Schall im Fernfeld von Interesse

Fernfeldanteil: $r \rightarrow r_0, \quad \nabla_x \rightarrow -\frac{1}{a_\infty} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \frac{\partial}{\partial t}$

s. VL Grundlagen Kap.: 4.5

$$a_\infty^2 \rho'(\mathbf{x}, t) = p'(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{4\pi a_\infty^2 r_0} \mathbf{e}_{r_0} \mathbf{e}_{r_0} : \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_\infty} \frac{HT}{|1 - M_r|} dV(\eta)$$

$$+ \frac{1}{4\pi a_\infty r_0} \mathbf{e}_{r_0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial V_B} \frac{(p\mathbf{I} - \boldsymbol{\tau})\mathbf{n}}{|1 - M_r|} dS(\eta)$$

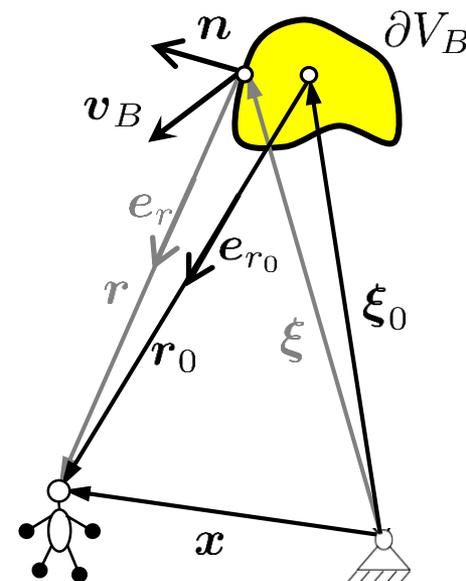
$$+ \frac{1}{4\pi a_\infty r_0} \mathbf{e}_{r_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_B} \frac{\rho_\infty \mathbf{v}_B}{|1 - M_r|} dV(\xi)$$

↑
Isentropie
in Fernfeld

$$\mathbf{F}_s(\boldsymbol{\xi}, \tau) := -\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{I}$$

$$\tau = t - \mathbf{r}/a_\infty$$

!



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Weiterhin nur Schall im Fernfeld von Interesse

Fernfeldanteil: $r \rightarrow r_0 = \mathbf{x}$, $\nabla_x \rightarrow -\frac{1}{a_\infty} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{a_\infty} \frac{\mathbf{x}}{x} \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{a_\infty} \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial t}$

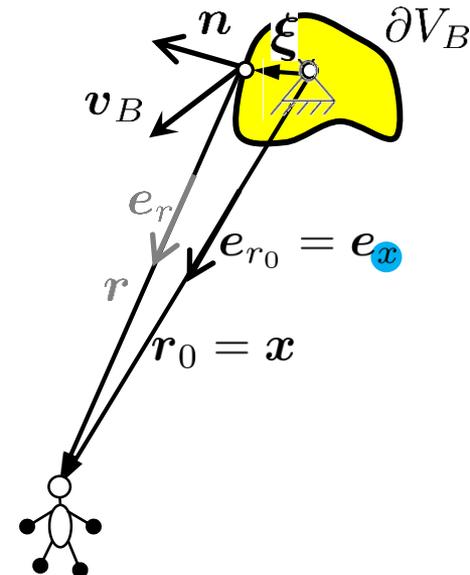
$$p'(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{4\pi a_\infty^2} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_\infty} \frac{HT}{|1 - M_r|} dV(\eta)$$

$$+ \frac{1}{4\pi a_\infty} \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial V_B} \frac{\mathbf{F}_s \mathbf{n}}{|1 - M_r|} dS(\eta)$$

$$+ \frac{1}{4\pi a_\infty} \mathbf{e}_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_B} \frac{\rho_\infty \mathbf{v}_B}{|1 - M_r|} dV(\xi)$$

$$\mathbf{F}_s(\xi, \tau) := -\tau + p\mathbf{I}$$

$$\tau = t - r/a_\infty$$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

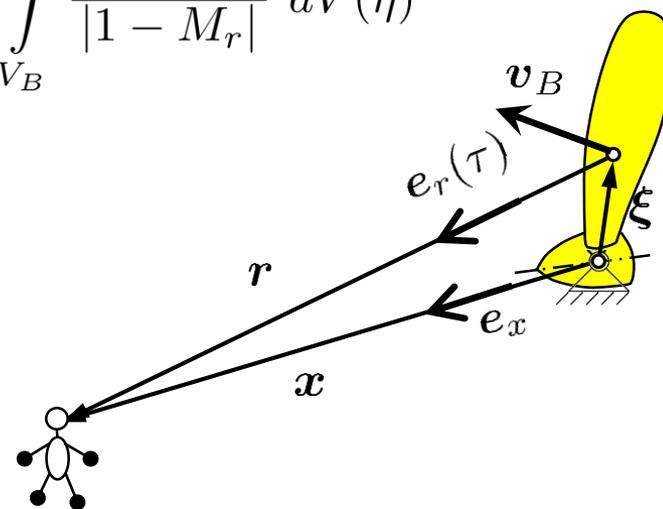
Weiterhin nur Schall im Fernfeld von Interesse

Fernfeldanteil: $r \rightarrow x, \quad \nabla_x \rightarrow -\frac{1}{a_\infty} \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial t}$

$$p'(x, t) \simeq \frac{1}{4\pi a_\infty x} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial V_B} \frac{(\mathbf{F}_s \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x}{|1 - M_r|} dS(\eta) + \frac{1}{4\pi a_\infty x} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_B} \frac{\rho_\infty \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{e}_x}{|1 - M_r|} dV(\eta)$$

↑
Belastungslärmanteil

Verdrängungslärmanteil
(Quadrupoldarstellung)



$$\mathbf{F}_s(\boldsymbol{\xi}, \tau) := -\boldsymbol{\tau} + p\mathbf{I}$$

$$\tau = t - r/a_\infty$$

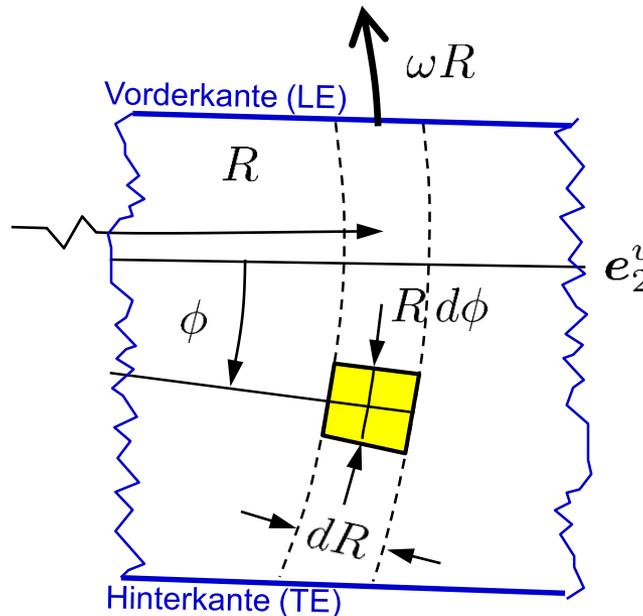
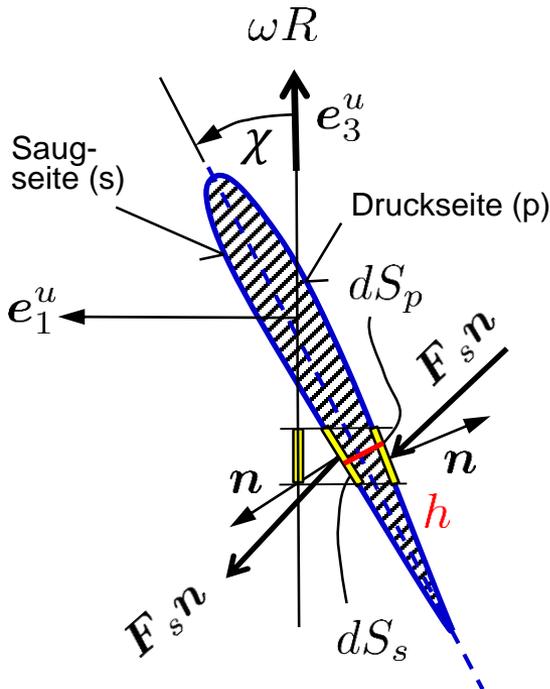
$$\boldsymbol{\xi} = \eta_1 \mathbf{e}_1^u + \eta_2 \mathbf{e}_2^u(\tau) + \eta_3 \mathbf{e}_3^u(\tau)$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Beschreibung Oberflächenintegrale in mitrotierendem kartesischen (e_1^u, e_2^u, e_3^u) bzw. Zylinderkoordinatensystem (e_R^u, e_ϕ^u, e_1^u) mit Koordinaten (R, ϕ, η_1). Beiträge zum Integral von Oberflächenelementen mit identischer Lage (R, ϕ) auf Saug- (s) und Druckseite (p) werden zu resultierender Luftkraft f_s zusammengefasst:

$$f_s(R, \phi) := (\mathbf{F}_s \mathbf{n})_{R, \phi, \eta_{1s}} + (\mathbf{F}_s \mathbf{n})_{R, \phi, \eta_{1p}} \quad (269)$$

$$v_B(R, \phi) := \frac{1}{2} [(\mathbf{v}_B)_{R, \phi, \eta_{1s}} + (\mathbf{v}_B)_{R, \phi, \eta_{1p}}]$$



$$|e_1^u \cdot \mathbf{n}| dS = R dR d\phi$$

$$\Rightarrow dS = |e_1^u \cdot \mathbf{n}|^{-1} R dR d\phi$$

schlankes Profil/Blatt:

$$|e_1^u \cdot \mathbf{n}|_s \simeq |e_1^u \cdot \mathbf{n}|_p \simeq \cos \chi$$

moderater Einstellwinkel ↗

$$\Rightarrow dS \simeq (\cos \chi)^{-1} R dR d\phi$$

$$\Rightarrow dV \simeq (\cos \chi)^{-1} h R dR d\phi$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

$p'_{L,T}$ müssen nach Fourier folgende Form besitzen (270) :

$$p'_{L,T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{p}_{(L,T)n} \exp(in\omega t) \text{ mit (271): } \hat{p}_{(L,T)n} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p'_{L,T}(t) \exp(-in\omega t) dt$$

eingesetzt:

$$\hat{p}_{Ln}(\mathbf{x}) \simeq \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\mathbf{e}_x}{4\pi a_\infty x} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \left[\frac{\mathbf{f}_s}{|1 - M_r|} \right]_\tau \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi \right\} \exp(-in\omega t) dt$$

$$= \frac{\omega}{8\pi^2 a_\infty x} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f}_s}{|1 - M_r|} \right]_\tau \exp(-in\omega t) dt \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi$$

$$= \frac{in\omega^2}{8\pi^2 a_\infty x} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \left[\frac{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f}_s}{|1 - M_r|} \right]_\tau \exp(-in\omega t) \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi dt$$

$$\hat{p}_{Tn}(\mathbf{x}) \simeq -\frac{n^2 \omega^3}{8\pi^2 a_\infty x} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \left[\frac{\rho_\infty \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v}_B}{|1 - M_r|} \right]_\tau \exp(-in\omega t) h \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi dt$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

$$\hat{p}_n(\mathbf{x}) \simeq \frac{in\omega^2}{8\pi^2 a_\infty x} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \left[\frac{\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{f}_s + in\omega\rho_\infty \mathbf{v}_B h)}{|1 - M_r|} \right]_\tau \exp(-in\omega t) \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi dt$$

transformieren nach τ

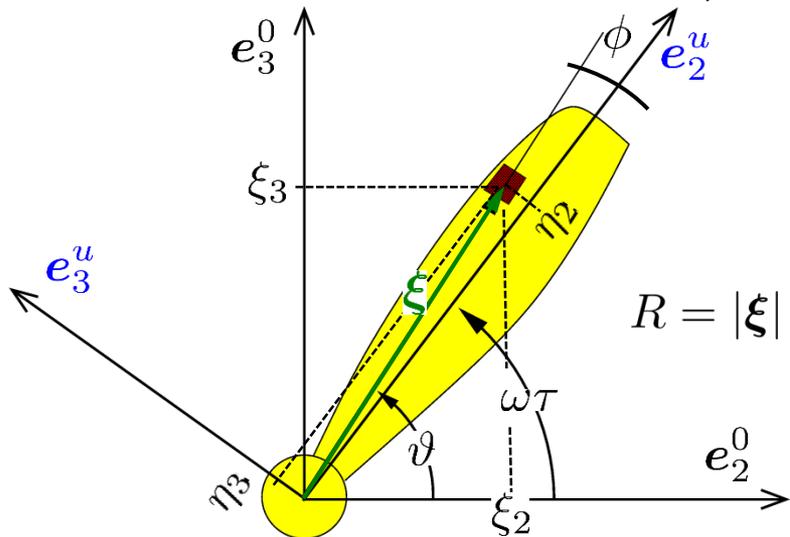
$$t = \tau + r/a_\infty \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = 1 - \frac{\mathbf{u}}{a_\infty} \cdot \mathbf{e}_r = 1 - M_r \Rightarrow dt = (1 - M_r) d\tau$$

$$\Rightarrow \hat{p}_n(\mathbf{x}) \simeq \frac{in\omega^2}{8\pi^2 a_\infty x} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \underbrace{[\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{f}_s + in\omega\rho_\infty \mathbf{v}_B h)]_\tau}_{:= \mathbf{f}_{FT}} \exp(-in\omega t) \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi d\tau$$

Beobachterzeit $t = \tau + r/a_\infty$ noch mit **Emissionszeit** τ ausdrücken
(beachte: es geht um die Zusatzphasenänderung wegen $r = r(\tau)$)

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Im Fernfeld lässt sich der Abstand $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ über $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ explizit als Funktion der Sendezeit τ ausdrücken, denn mit



$$r = x - \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{x^2} \right) : \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi} + \dots$$

\uparrow $\ll |\boldsymbol{\xi}|$ $\ll x^{-1}$
 $= \mathbf{e}_x$

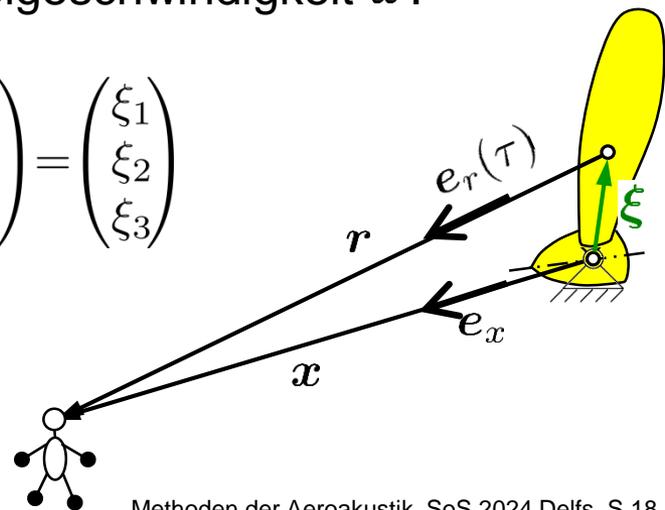
$$\boldsymbol{\xi} = \xi_1 \mathbf{e}_1^0 + \xi_2(\tau) \mathbf{e}_2^0 + \xi_3(\tau) \mathbf{e}_3^0$$

$$\boldsymbol{\xi} = \eta_1 \mathbf{e}_1^u + \eta_2 \mathbf{e}_2^u(\tau) + \eta_3 \mathbf{e}_3^u(\tau)$$

und der Beschreibung der Drehbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω :

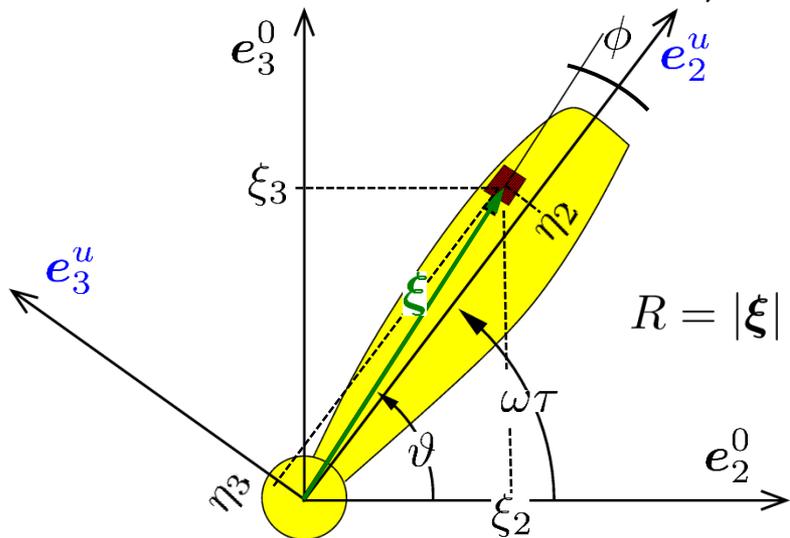
$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \\ 0 & \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2(\tau) \\ \xi_3(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

\mathbf{e}_1^u $\mathbf{e}_2^u(\tau)$ $\mathbf{e}_3^u(\tau)$ \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Im Fernfeld lässt sich der Abstand $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ über $\boldsymbol{\xi}(\tau)$ explizit als Funktion der Sendezeit τ ausdrücken, denn mit (Taylorreihe von $r(\boldsymbol{\xi})$ um \mathbf{x}):



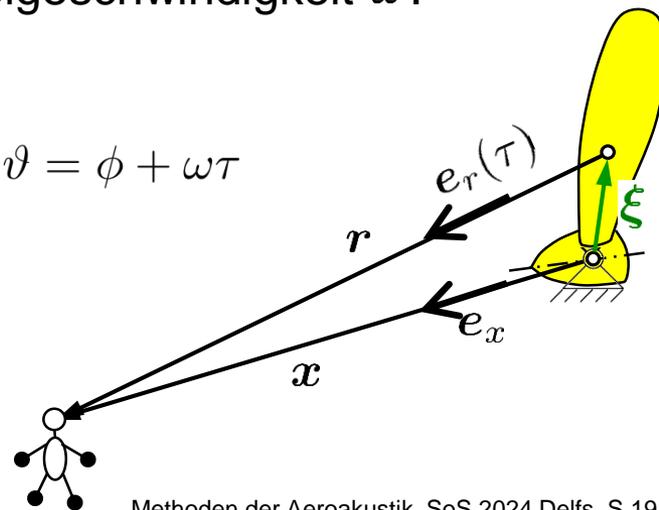
$$r = x - \frac{\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\mathbf{x} \mathbf{x}}{x^2} \right) : \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi} + \dots$$

\uparrow $\ll |\boldsymbol{\xi}|$ $\ll x^2$
 $= e_x$

und der Beschreibung der Drehbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\boldsymbol{\xi}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega \tau & -\sin \omega \tau \\ 0 & \sin \omega \tau & \cos \omega \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ R \cos \vartheta \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix}; \quad \vartheta = \phi + \omega \tau$$

gilt: $r = x - \frac{x_1 \eta_1}{x} - \frac{x_2 R \cos \vartheta}{x} - \frac{x_3 R \sin \vartheta}{x} + \dots$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

$$\Rightarrow \hat{p}_n(\mathbf{x}) \simeq -\frac{in\omega^2 e^{-in\omega x/a_\infty}}{8\pi^2 a_\infty x^2} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} [x_1 T + d(D + in\rho_\infty \omega^2 R h) \sin(\vartheta - \theta)] \times \quad (273)$$

$$\times \exp\left(-in\omega\left[\tau - \frac{dR}{xa_\infty} \cos(\vartheta - \theta)\right]\right) \frac{R}{\cos\chi} dR d\phi d\tau$$

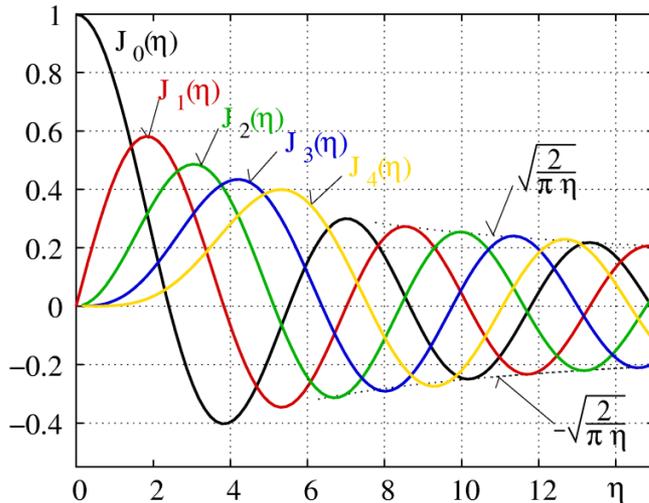
$$\omega\tau + \phi - \theta =: \alpha$$

Zeitintegral exakt lösbar mit:

$$\int_0^{2\pi} \exp(-i[n\alpha - s \cos \alpha]) d\alpha = 2\pi e^{in\pi/2} J_n(s) \quad (274)$$

$$s := \frac{n\omega d R}{xa_\infty} = \frac{ndM}{x}$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(-i[n\alpha - s \cos \alpha]) \sin \alpha d\alpha = -\frac{2\pi n}{s} e^{in\pi/2} J_n(s) \quad (275)$$

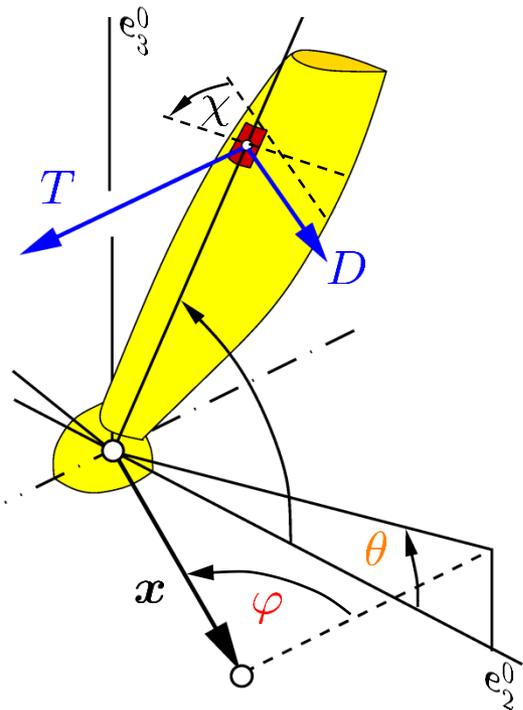


Besselfunktion 1. Art n-ter Ordnung

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Die Amplitude der n'ten Harmonischen eines Einblattpropellers, der mit der Kreisfrequenz ω dreht, ist also:

$$\hat{p}_n(\mathbf{x}) \simeq -\frac{in\omega e^{-in(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi a_\infty x} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \left[T \cos \varphi - \frac{D}{M} - in\rho_\infty a_\infty \omega h \right] J_n(nM \sin \varphi) e^{in\phi} \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi$$



Hierbei ist φ der Polarwinkel zwischen Beobachtungsrichtung und Achsrichtung und $M = \omega R/a_\infty$ die lokale Umfangsmachzahl des Propellerelements bei R , φ

Beachte: die negativen Ordnungen n sind tatsächlich konjugiert komplex zu den positiven $\hat{p}_{L(-n)} = \overline{\hat{p}_{Ln}}$, denn $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ und $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ sowie: $\overline{\hat{z}_1 \hat{z}_2} = \overline{\hat{z}_1} \overline{\hat{z}_2}$

Wie sieht das Signal bei B gleichartigen, gleichmäßig über Umfang verteilten Blättern aus?

⇒ Summe über alle Blätter, je versehen mit entsprechendem Phasenunterschied in θ :

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

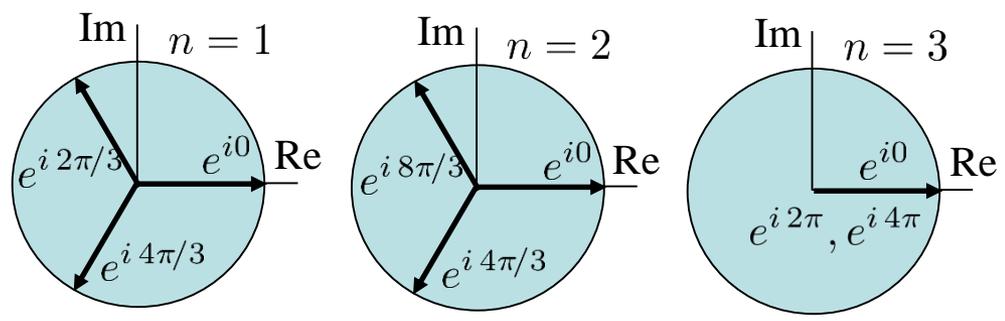
$$\hat{p}_{Ln}(\mathbf{x}) \simeq - \sum_{b=1}^B \frac{in\omega e^{-in(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi a_\infty x} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \left[T\left(\phi + \frac{2\pi(b-1)}{B}\right) \cos \varphi - \frac{D\left(\phi + \frac{2\pi(b-1)}{B}\right)}{M} - in\rho_\infty a_\infty \omega h\left(\phi + \frac{2\pi(b-1)}{B}\right) \right]$$

$$\simeq \sum_{b=1}^B \exp\left(in \frac{2\pi(b-1)}{B}\right)$$

$$\times J_n(nM \sin \varphi) e^{in(\phi + 2\pi(b-1)/B)} \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi$$

$$\times \frac{in\omega e^{-in(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi a_\infty x} \int_0^{R_t} \int_{\phi_{TE}}^{\phi_{LE}} \left[-T \cos \varphi + \frac{D}{M} + in\rho_\infty a_\infty \omega h \right] J_n(nM \sin \varphi) e^{in\phi} \frac{R}{\cos \chi} dR d\phi$$

= $\begin{cases} B & \text{für } n = B, 2B, 3B, 4B, \dots \\ 0 & \text{sonst Auslöschung!} \end{cases}$



Beispiel 3-Blatt Propeller, B=3

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Verallgemeinerung auf Propeller mit B gleichmäßig um den Umfang verteilten Blättern: ersetze n durch nB (Periodizitätsänderung). Wird der Dickenlärmanteil analog wie der Belastungslärmanteil berechnet und dazu addiert ist schließlich

$$\hat{p}_{nB}(\mathbf{x}) \simeq \frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi x} \times \quad (276)$$

$$\int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} \left[\underbrace{-R_t T \cos \varphi + R_t \frac{D}{M}}_{\text{Belastung}} + \underbrace{inB M_t \rho_\infty a_\infty^2 h}_{\text{Dicke}} \right] J_{nB}(nB M_t R^* \sin \varphi) e^{inB\phi} \frac{R^*}{\cos \chi} dR^* d\phi$$

$$R^* = R/R_t \quad (\text{Blattradius } R_t)$$

$$h(R^*, \phi) \quad - \text{ Dickenverteilung des Blattes}$$

$$M_t = \frac{\omega R_t}{a_\infty} \quad - \text{ Blattspitzenmachzahl}$$

$$M = \frac{\omega R}{a_\infty} \quad - \text{ Machzahl bei } R$$

$$\cos \chi \simeq 1 \quad - \text{ Einstellwinkel Blattschnitt}$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Dickenlärm $\sim \omega (nB)$: nur bei hohen Drehzahlen und Harmonischen wichtig, bei kleinen Drehzahlen, wo Blattspitzenmachzahl $M_t < 0.8$, vernachlässigbar

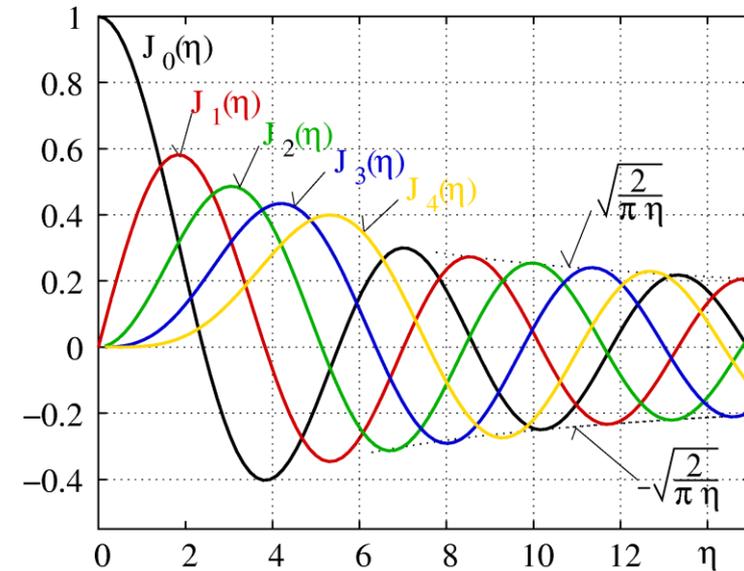
Quellregion

beachte: $J_m(z) \approx \frac{z^m}{2^m m!}$ für $0 < z < m$

für subsonische Props ist $M < 1$, außerdem $\sin \varphi < 1$, so dass Argument in Besselfunktion $nBM_t R^* \sin \varphi < nB$

$$J_{nB}(nBM_t R^* \sin \varphi) \approx \frac{1}{2^{nB} (nB)!} (nBM_t \sin \varphi)^{nB} R^{*nB}$$

wichtigster Quellbereich Blattspitze, $R^* \approx 1$
(ganz besonders für höhere Harmonische)



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

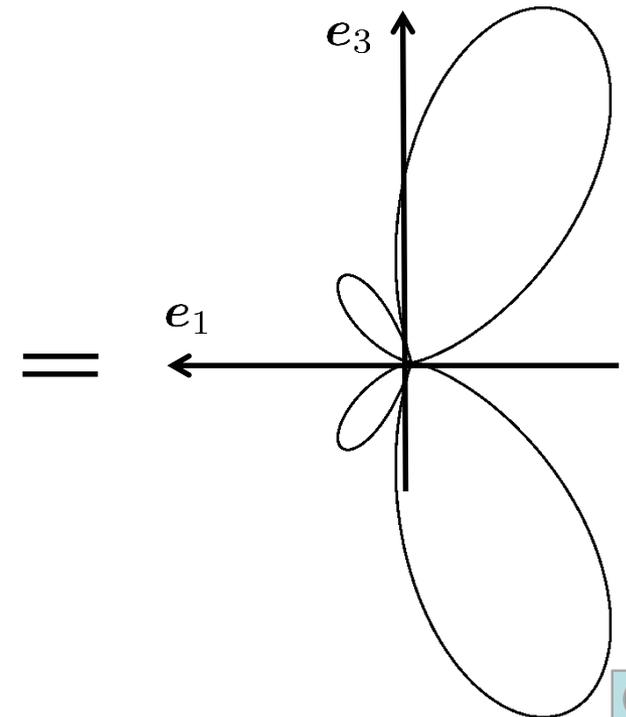
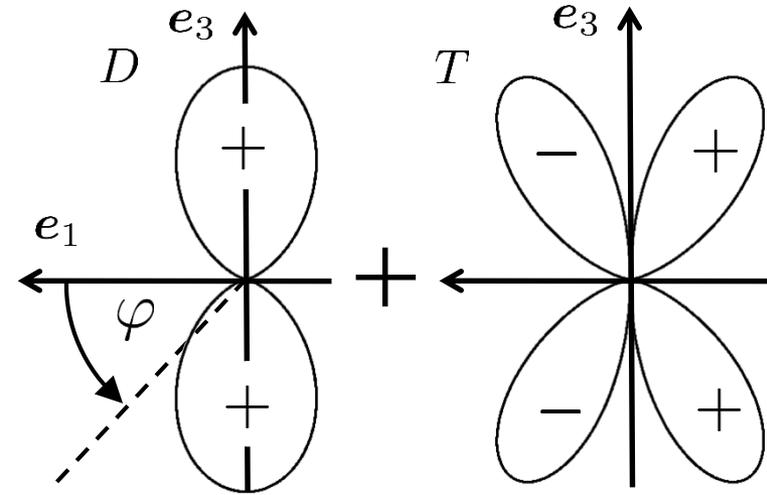
Interpretation

Richtwirkung:

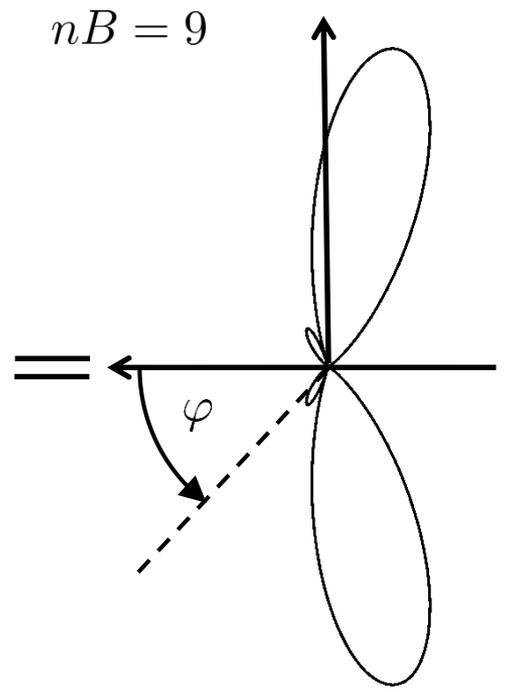
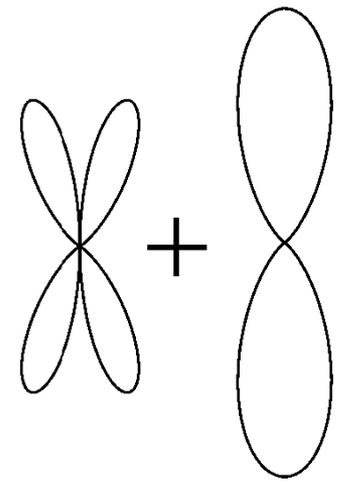
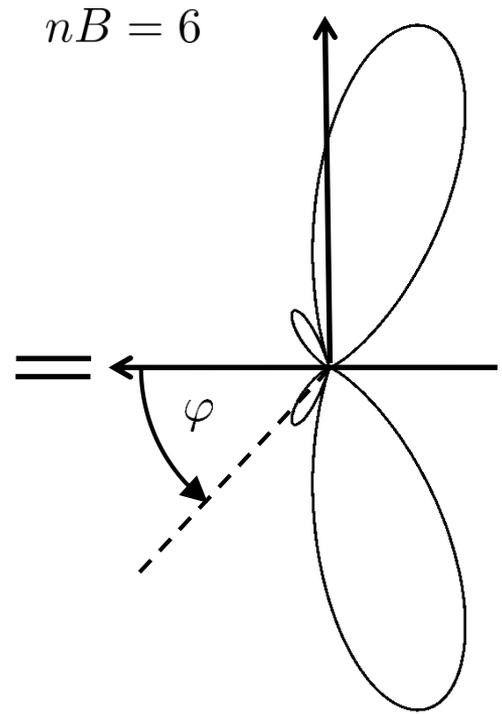
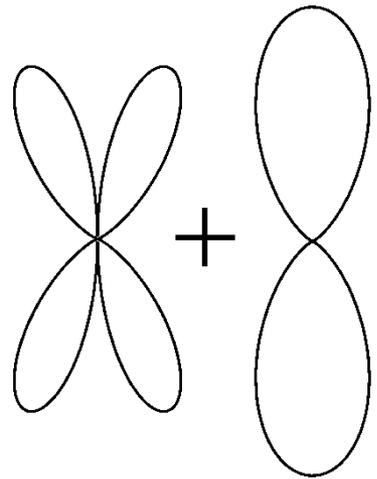
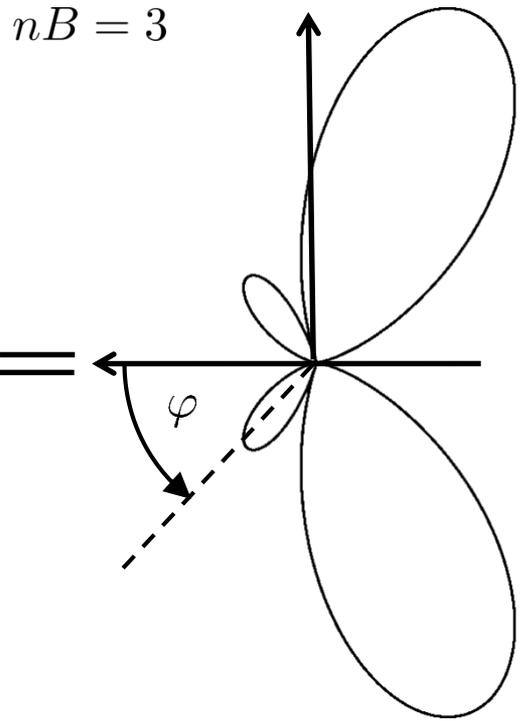
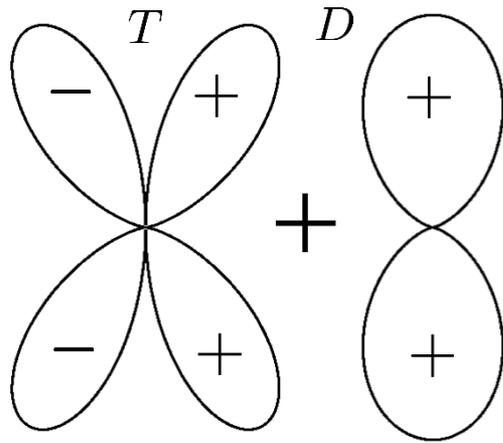
Schubanteil (T) $-\cos \varphi (\sin \varphi)^{nB}$

Widerstandsanteil (D) $(\sin \varphi)^{nB}$

- keine Abstrahlung in oder gegen Flugrichtung
- Maximalabstrahlung etwas in Abstromrichtung geneigt, im wesentlichen in Propellerebene
- Abstrahlungskeulen schmaler je höher Harmonische (Frequenz)
- Dickenlärm hat gleiche Charakteristik wie Widerstandsanteil



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

$$\hat{p}_{nB}(\mathbf{x}) \simeq \frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi x} \times$$

$$\int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} \left[-R_t T \cos \varphi + R_t \frac{D}{M} + inB M_t \rho_\infty a_\infty^2 h \right] J_{nB}(nB M_t R^* \sin \varphi) e^{inB\phi} \frac{R^*}{\cos \chi} dR^* d\phi$$

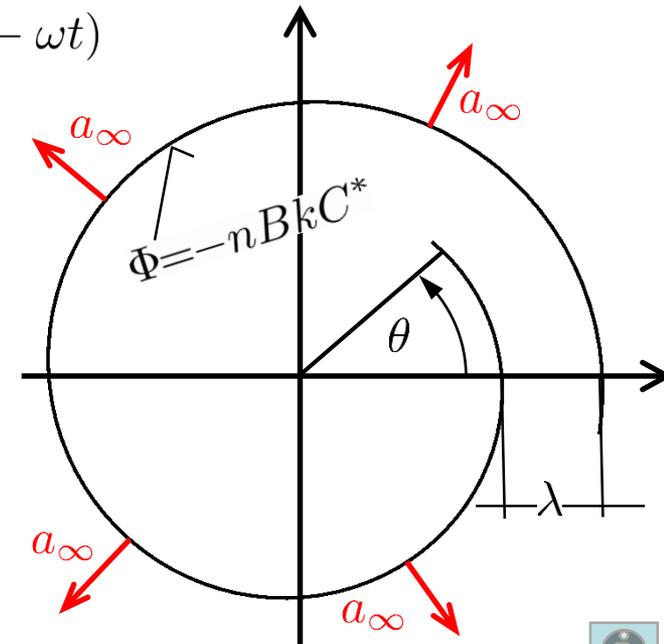
Phasenlage (alles Fernfeld):

Phase(nfunktion): $\Phi(\mathbf{x}, t) := -nB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2 - \omega t)$

Momentanbild einer Phasenfläche (Wellenfront), d.h.

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := -nB(kx + \theta) = \text{const} =: -nBkC^*$$

$$\Rightarrow x = C^* - \theta/k = C^* - \lambda \frac{\theta}{2\pi} \quad (\text{Spirale})$$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

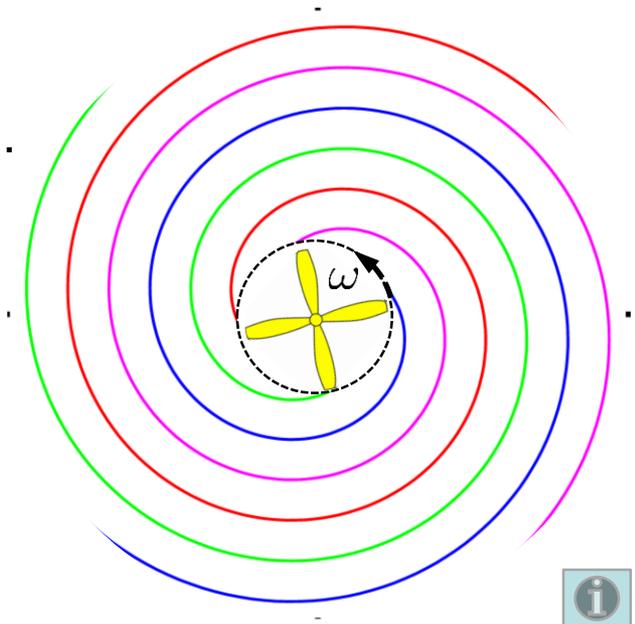
Interpretation

$$\hat{p}_{nB}(\mathbf{x}) \simeq \frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi x} \times \int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} \left[-R_t T \cos \varphi + R_t \frac{D}{M} + inB M_t \rho_\infty a_\infty^2 h \right] J_{nB}(nB M_t R^* \sin \varphi) e^{inB\phi} \frac{R^*}{\cos \chi} dR^* d\phi$$

Phasenlage (alles Fernfeld):

Phase(nfunktion) $\Phi(x, t) := -nB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2 - \omega t)$

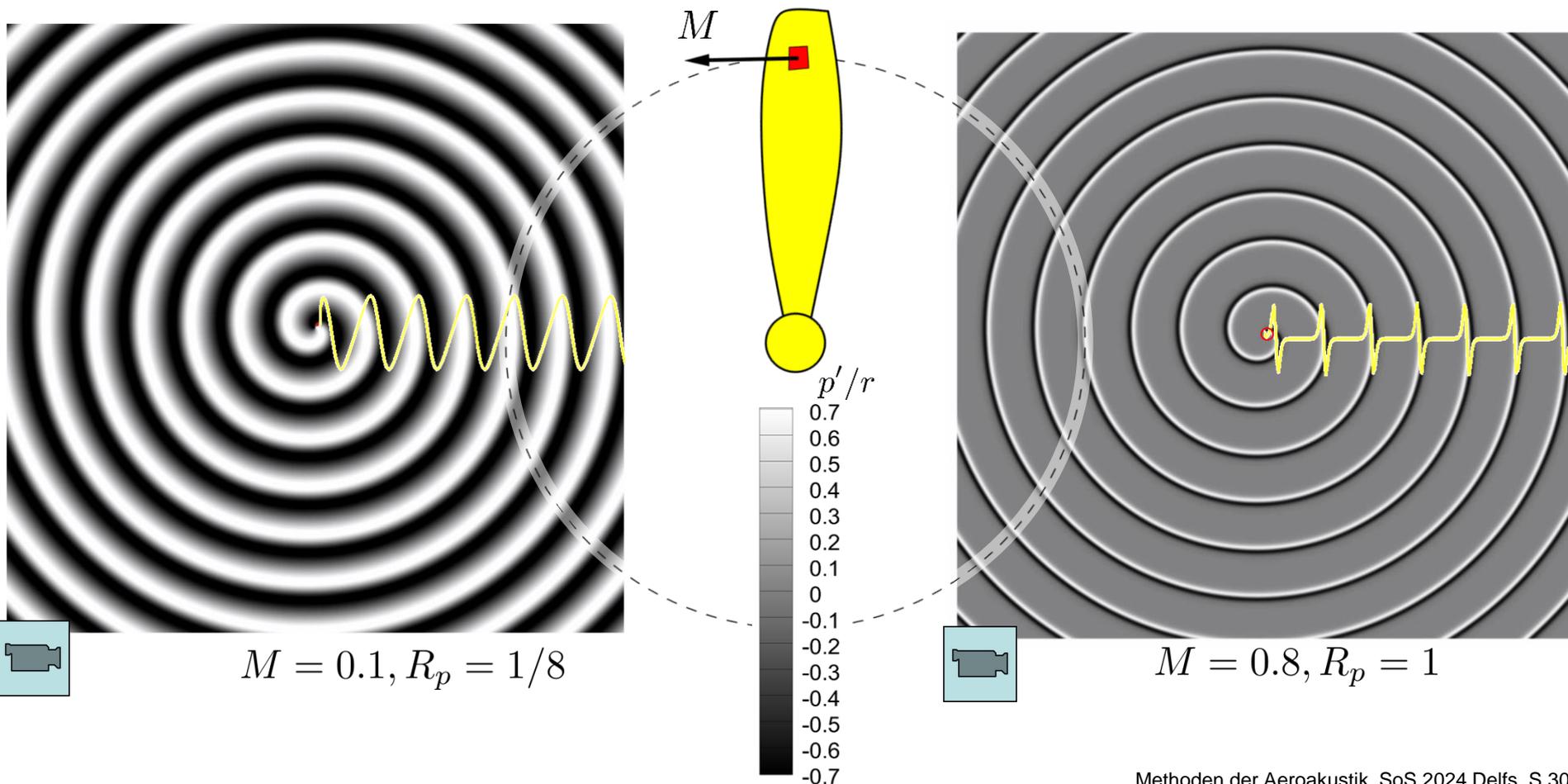
Während eines Umlaufs $\theta = 0 \rightarrow 2\pi$ entstehen bei festem x und t nB äquivalente Phasenlagen, d.h. die n 'te Harmonische produziert nB -fach mehrgängige Spirale $\Phi \sim nB\theta$



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Animation für Druckfeld (Einblattpropeller, nur Verdrängungsgeräusch, repräsentiert durch Punktmassenquelle, Rotationsebene)



1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

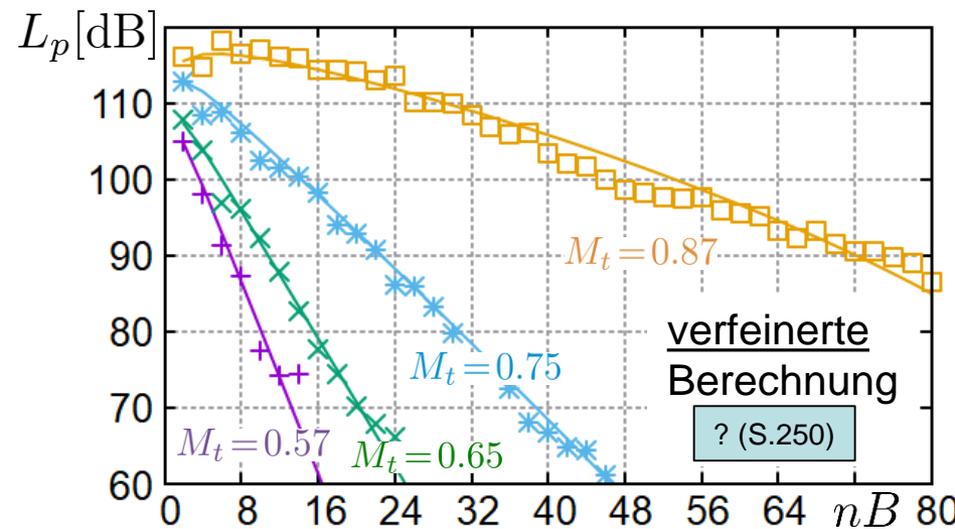
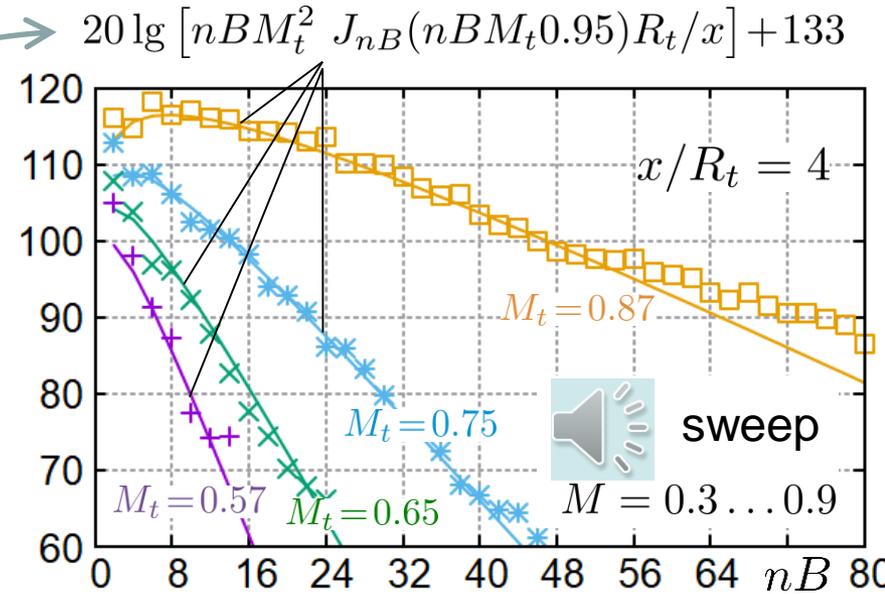
Interpretation

Spektralgehalt

$$\varphi = 90^\circ \Rightarrow$$

$$|\hat{p}_{nB}(\mathbf{x})| \simeq \frac{nBM_t}{x} \int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} R_t \frac{D}{M} J_{nB}(nBM_t R^*) R^* dR^* d\phi$$

- bei kleinen Blattspitzenmachzahlen fallen Amplituden stark mit Harmonischenordnung ab
- bei hohen (subsonischen) Machzahlen fallen Amplituden nur schwach mit Ordnung; bei sehr hohen subsonischen M_t können Amplituden zunächst mit Ordnung ansteigen



Symbole: Messung

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Schallminderungsmöglichkeiten

schätze (276) ab (Größenordnungen) mit

$$\boxed{J_{nB}(nBM_t R^* \sin \varphi)} \approx \frac{(nBM_t \sin \varphi)^{nB}}{2^{nB} (nB)!} R^{*nB}$$

Winkelabhängigkeit interessiert nicht und nur Bereich $R^* \approx 1$ wichtig, dann ist

$$|\hat{p}_{nB}| \sim \frac{(nBM_t)^{nB+1}}{2^{nB} (nB)!} \frac{1}{R_t} (BTR_t^2) \quad (*)$$

wobei nur Belastungsterm betrachtet wurde und T repräsentativ für spezif. Kräfte am Blatt steht.

$$\hat{p}_{nB}(\mathbf{x}) \simeq -\frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi x} \times \quad (276)$$

$$\int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} \left[R_t T \cos \varphi - R_t \frac{D}{M} - inBM_t \rho_\infty a_\infty^2 h \right] J_{nB}(nBM_t R^* \sin \varphi) e^{inB\phi} \frac{R^*}{\cos \chi} dR^* d\phi$$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Schallminderungsmöglichkeiten

- Blattzahleffekt (Hörbeispiel: 2-, 3-, 4-Blatt)

- Erhöhung Blattzahl B
 - gleicher Radius R_t
 - gleiche Drehzahl ω
- $$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} M_t = \text{const}$$
- gleicher Gesamtschub $\Rightarrow BT = \text{const}: B \uparrow \Rightarrow T \downarrow$

\Rightarrow (*): Harmonische mit erhöhtem Frequenzabstand (weniger Harmonische im hörbaren Bereich), allerdings keine Amplitudenminderung
 \Rightarrow hauptsächlich Frequenzverschiebungseffekt bei Höreindruck; wenig Gesamtminderungserfolg

- Blattspitzenmachzahleffekt (Hörbeispiel: 2-, 3-, 4-Blatt)

- gleiche Drehzahl ω
 - gleicher Gesamtschub BTR_t^2
 - gleiche spez. Blattbelastung T^*
 - Reduzierung Blattradius bei Erhöhung Blattzahl
- $$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{R_{t2}}{R_{t1}} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$$

*) für einen idealen Propeller (hier angenommen): $T \neq T(R)$

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Schallminderungsmöglichkeiten

- Blattspitzenmachzahleffekt (Hörbeispiel) ...

⇒ Harmonische mit erhöhtem Frequenzabstand (weniger Harmonische in hörbarem Bereich); außerdem

$$R_{t2} = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} R_{t1} < R_{t1} \Rightarrow M_{t2} < M_{t1}$$

Da $|\hat{p}_{nB}| \sim \frac{M_t^{nB+1}}{R_t} \sim M_t^{nB}$ wird Amplitude stark gemindert!

⇒ Verkleinerung des Blattradius' bei Erhöhung Blattzahl ergibt (über Reduzierung von M_t) starke Schallminderung

⇒ Radius R_t kann bei zusätzlicher Erhöhung der Blattbelastung unter Beibehaltung des Gesamtschubs weiter reduziert werden!

⇒ Problem: Maßnahmen erzeugen aerodynamisch höhere Verluste.
Leistungsbedarf $P \sim U_s(\rho U_s^2 R_t^2)$ mit selbem Schub $\rho U_{s2}^2 R_{t2}^2 = \rho U_{s1}^2 R_{t1}^2$
 $P_2/P_1 = U_{s2}/U_{s1} = R_{t1}/R_{t2} = \sqrt{B_2/B_1} > 1$, d.h. es handelt sich um ein multidisziplinäres Entwurfsproblem (Aerodynamik/Akustik).

U_s - mittlere Querschnittsgeschwindigkeit in Prop-Abstrom

1.1.1.1 Einfache Propellertheorie nach Gutin

Interpretation

Schallminderungsmöglichkeiten

- Maßnahmen bei Hochgeschwindigkeits-Propellern

⇒ geringe Blattdicke

- * reduziert Verdrängungsschall

- * reduziert Quadrupolschall aus lokalen Überschallgebieten am Blatt

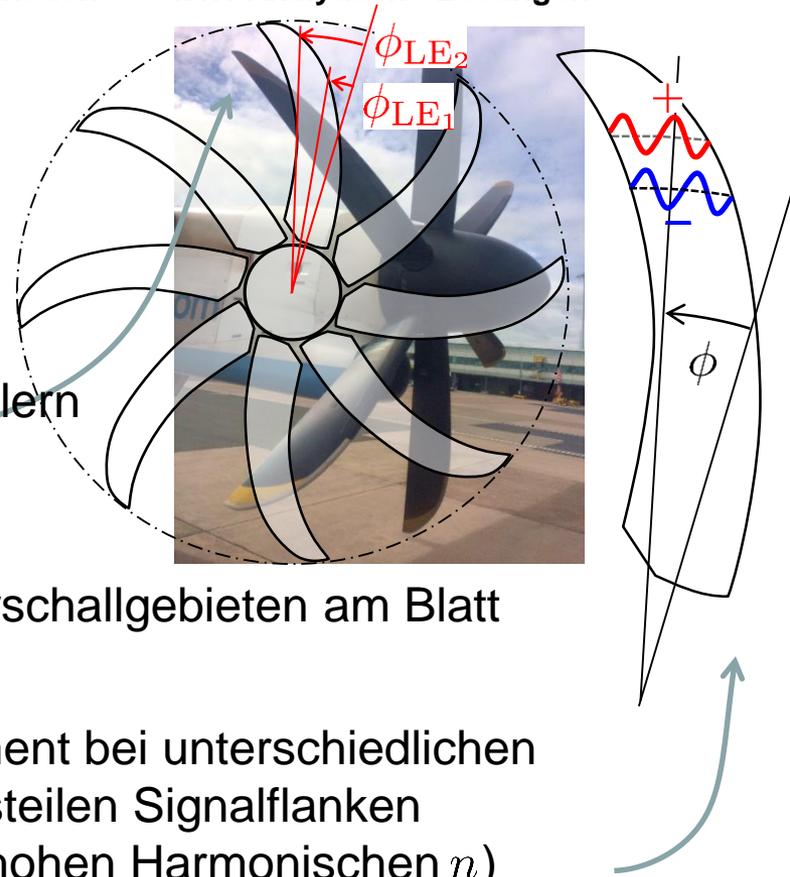
⇒ Blattsichelung

- * reduziert, weil Beitrag von jedem Blattsegment bei unterschiedlichen

- Sendzeitpunkten ausgesandt wird: keine steilen Signalfanken

- bzw.(äquivalent): Phasenlagen (stark bei hohen Harmonischen n)

- * Sichelung vermindert Stoß (vgl. Aerodynamik gepfeiler Flügel)

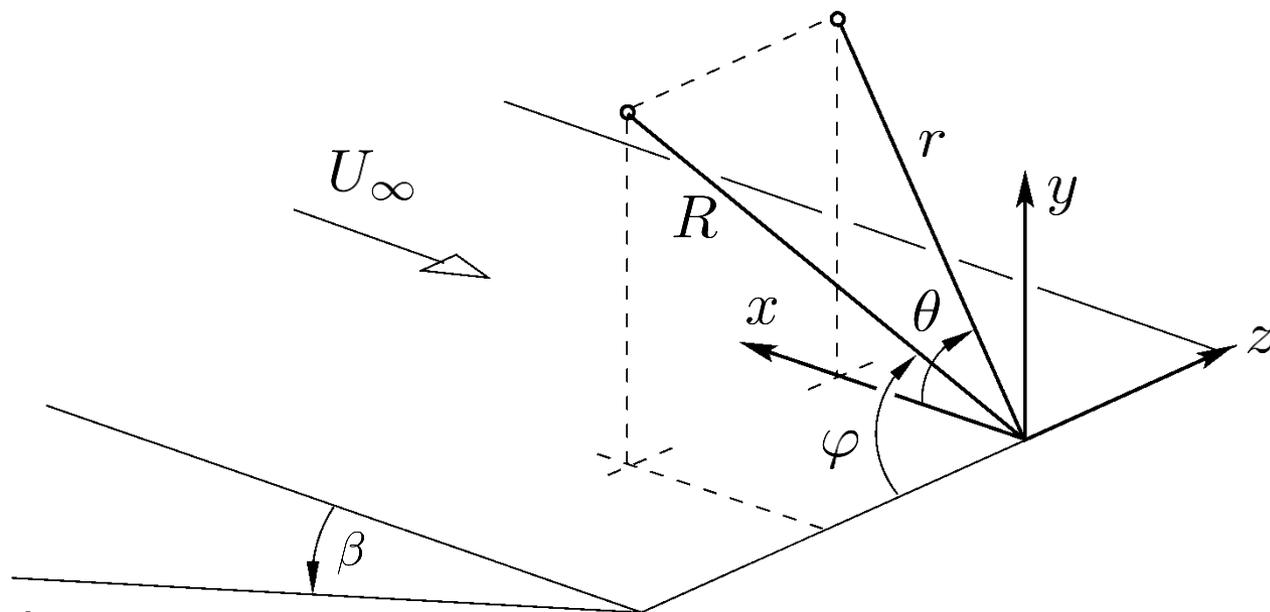


$$\hat{p}_{nB}(\mathbf{x}) \simeq -\frac{inB^2 M_t e^{-inB(\omega x/a_\infty + \theta - \pi/2)}}{4\pi x} \times \quad (276)$$

$$\int_0^1 \int_{\phi_{TE}(R^*)}^{\phi_{LE}(R^*)} \left[R_t T \cos \varphi - R_t \frac{D}{M} - inB M_t \rho_\infty a_\infty^2 h \right] J_{nB}(nB M_t R^* \sin \varphi) e^{inB\phi} \frac{R^*}{\cos \chi} dR^* d\phi$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten

Aufgabe: Turbulent überströmte Kante, Geschwindigkeit U_∞ , Keilwinkel β
Schall ?



Ansatz:

Lösung über Lighthill-Analogiegleichung in Druckformulierung (248)

$= s' \approx 0$ (kalte Strömung)

$$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \nabla \cdot \nabla \cdot (\rho v v - \tau) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{a_\infty^2} p' - \rho' \right)$$

Reibung vernachlässigt

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten

Dazu treten die Randbedingungen an der Platte: Annahme schallhart:

$$\frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{wand} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p'}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, 2\pi-\beta} = 0$$

Problem: zur Erfüllung der Randbedingungen wird exakte (maßgeschneiderte)

Green'sche Funktion G benötigt mit $\frac{\partial G}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, 2\pi-\beta} = 0$ denn damit wäre

$$p'(\mathbf{x}, t) = \int \int G \nabla \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV dt$$

G allerdings nicht allgemein verfügbar!* \Rightarrow ?

2 alternative Lösungswege: 1: Reziprozitätstheorem,
2: Methode der angepassten asympt. Entwicklung

*(für $\beta = 0$: Mac Donald, 1915, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 14, 410-427)

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1)

Lösungsabschätzung über Reziprozitätstheorem:

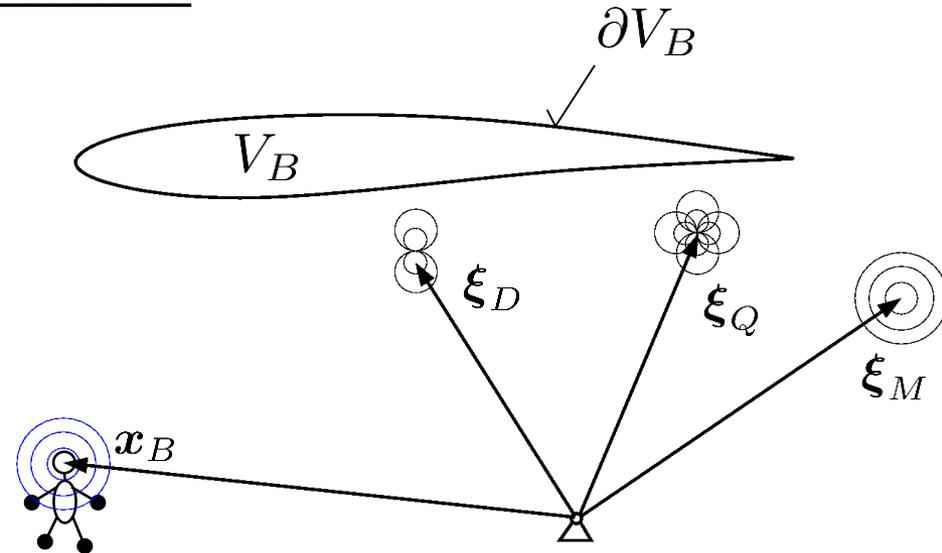
Einschub: Reziprozitätstheorem (1)

Betrachte inhomogene Helmholtzgleichung für Geschw. Potenzial $\hat{\phi}$:

$$k^2 \hat{\phi} + \Delta \hat{\phi} = -\hat{Q}_\phi$$

mit Schallschnelle $\hat{v} = \nabla \hat{\phi}$

und Schalldruck $\hat{p} = -i\omega\rho_\infty \hat{\phi}$



- * $\hat{\phi}_A$ sei akustisches Feld für Monopol bei ξ_M mit Stärke M , Dipol bei ξ_D mit Stärke \hat{f} und Quadrupol bei ξ_Q mit Stärke \hat{T}_0 , erfüllt also:

$$k^2 \hat{\phi}_A + \Delta \hat{\phi}_A = -\hat{M} \delta(\mathbf{x} - \xi_M) - \hat{f} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \xi_D) - \hat{T}_0 : \nabla \nabla \delta(\mathbf{x} - \xi_Q) \quad (277)$$

- * $\hat{\phi}_B$ sei akustisches Feld für Monopol bei x_B mit Stärke 1, erfüllt also:

$$k^2 \hat{\phi}_B + \Delta \hat{\phi}_B = -\delta(\mathbf{x} - x_B) \quad (278)$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Einschub: Reziprozitätstheorem (2)

- * Beide Felder (A, B) erfüllen die Randbedingungen auf der Oberfläche ∂V_B irgendwelcher Objekte V_B also: $\hat{z} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}_{A,B}}{\partial n} = \hat{\phi}_{A,B}$

- * Bilde $\hat{\phi}_B \cdot (277) - \hat{\phi}_A \cdot (278)$:

$$\underbrace{\hat{\phi}_B \Delta \hat{\phi}_A - \hat{\phi}_A \Delta \hat{\phi}_B}_{\nabla \cdot (\hat{\phi}_B \nabla \hat{\phi}_A - \hat{\phi}_A \nabla \hat{\phi}_B)} = -\hat{\phi}_B \hat{M} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_M) - \hat{\phi}_B \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_D) - \hat{\phi}_B \hat{\mathbf{T}}_0 : \nabla \nabla \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_Q) + \hat{\phi}_A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B)$$

- * Integriere über gesamtes Volumen $V_\infty \setminus V_B$:

$$\begin{aligned} & \int \nabla \cdot (\hat{\phi}_B \nabla \hat{\phi}_A - \hat{\phi}_A \nabla \hat{\phi}_B) dV = \\ & = \int -\hat{\phi}_B \hat{M} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_M) - \hat{\phi}_B \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_D) - \hat{\phi}_B \hat{\mathbf{T}}_0 : \nabla \nabla \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_Q) + \hat{\phi}_A \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) dV \\ & = -\hat{M} \hat{\phi}_B(\boldsymbol{\xi}_M) - \int \hat{\phi}_B \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_D) + \hat{\phi}_B \hat{\mathbf{T}}_0 : \nabla \nabla \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_Q) dV + \hat{\phi}_A(\mathbf{x}_B) \end{aligned}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Einschub: Reziprozitätstheorem (3)

$$\begin{aligned}
 & \int_V \nabla \cdot (\hat{\phi}_B \nabla \hat{\phi}_A - \hat{\phi}_A \nabla \hat{\phi}_B) dV = -\hat{M} \hat{\phi}_B(\xi_M) + \hat{\phi}_A(\mathbf{x}_B) - \\
 & = \underbrace{\int_{\partial V_B} \hat{\phi}_B \frac{\partial \hat{\phi}_A}{\partial n} - \hat{\phi}_A \frac{\partial \hat{\phi}_B}{\partial n} dS}_{= 0 \text{ (Rbn.)}} - \int_V \hat{\phi}_B \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla \delta(\mathbf{x} - \xi_D) dV - \\
 & \quad - \int_V \hat{\phi}_B \hat{\mathbf{T}}_0 : \nabla \nabla \delta(\mathbf{x} - \xi_Q) dV \\
 & = \int_V \nabla \cdot (\hat{\phi}_B \hat{\mathbf{T}}_0 \nabla \delta) - \nabla \cdot (\hat{\phi}_B \hat{\mathbf{T}}_0) \cdot \nabla \delta dV = \int_{\partial V} \hat{\phi}_B (\hat{\mathbf{T}}_0 \nabla \delta) \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \nabla \cdot \nabla \cdot (\hat{\phi}_B \hat{\mathbf{T}}_0 \delta) dV \\
 & \quad + \int_V \nabla \cdot \nabla \cdot (\hat{\phi}_B \hat{\mathbf{T}}_0) \delta dV \\
 & = \int_V \nabla \cdot (\hat{\mathbf{f}} \hat{\phi}_B \delta) - (\hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla \hat{\phi}_B) \delta dV = \int_{\partial V} \hat{\phi}_B \delta \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n} dS - (\hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla \hat{\phi}_B)(\xi_D) \quad (\hat{\mathbf{T}}_0 : \nabla \nabla \hat{\phi}_B)(\xi_Q)
 \end{aligned}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Einschub: Reziprozitätstheorem (4)

$$\Rightarrow \hat{\phi}_A(\omega, \mathbf{x}_B) = \hat{M}(\hat{\phi}_B)_{\xi_M} - \hat{\mathbf{f}} \cdot (\nabla \hat{\phi}_B)_{\xi_D} + \hat{\mathbf{T}}_0 : (\nabla \nabla \hat{\phi}_B)_{\xi_Q} \quad (279)$$

$$\text{bzw.}^* \phi_A(t, \mathbf{x}_B) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\tau) (\phi_B)_{(t-\tau), \xi_M} - \mathbf{f}(\tau) \cdot (\nabla \phi_B)_{(t-\tau), \xi_D} + \mathbf{T}_0(\tau) : (\nabla \nabla \phi_B)_{(t-\tau), \xi_Q} d\tau$$

Originalschallfeld A an Stelle \mathbf{x}_B gleich Summe aus Anteilen von künstlichem Monopolschallfeld B an den Positionen des Monopols, Dipols und Quadrupols.

Beachte: ist A allg. Schallfeld nach $k^2 \hat{\phi}_A + \Delta \hat{\phi}_A = -\hat{Q}_\phi$ gilt:

$$\hat{\phi}_A(\mathbf{x}_B) = \int_{V_\infty} \hat{\phi}_B(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}_B) \hat{Q}_\phi(\boldsymbol{\xi}) dV(\boldsymbol{\xi})$$

*) Rücktrafo in Zeitbereich über Faltungstheorem

Ende Einschub Reziprozitätstheorem

Zurück: Lösung der Lighthillgleichung im Spektralbereich:

$$k^2 \hat{p} + \Delta \hat{p} = -\nabla \cdot \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \quad \text{nur für Turbulenzelement (Quadrupol } \hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}_0 \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_Q) \text{)}$$

das nah an Kante liegt, d.h. $k|\boldsymbol{\xi}_Q| \ll 1$ und Beobachter im Fernfeld, d.h. $k|\mathbf{x}_B| \gg 1$

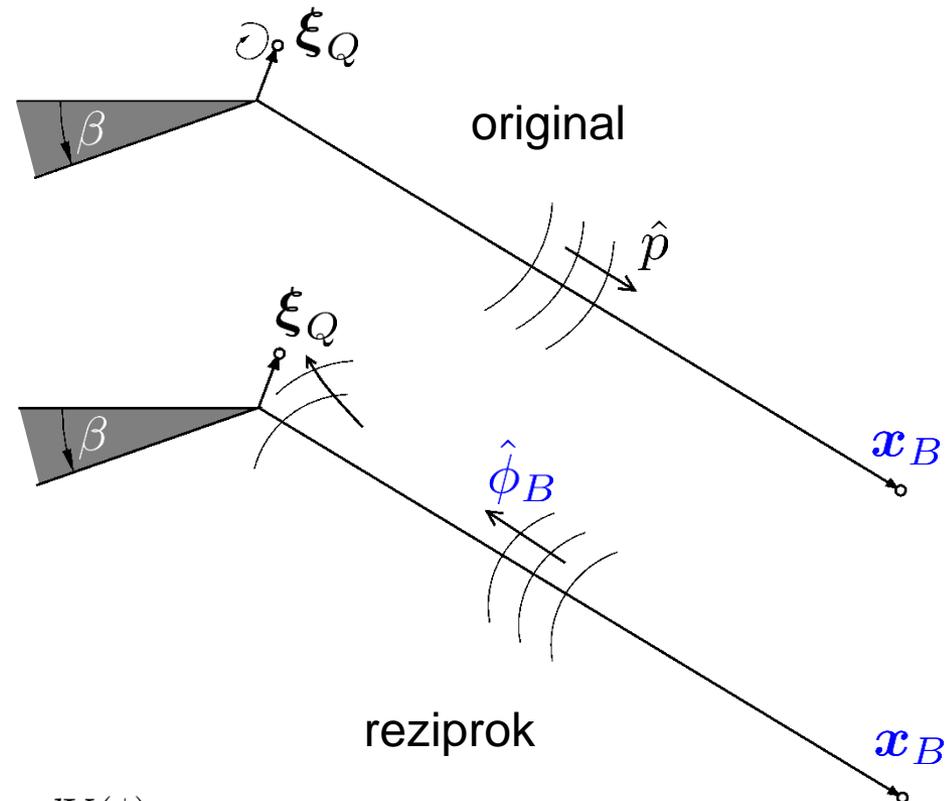
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Übersetze Problem auf (279): $\hat{\phi}_A(\mathbf{x}_B) = \hat{M}(\hat{\phi}_B)_{\xi_M} - \hat{\mathbf{f}} \cdot (\nabla \hat{\phi}_B)_{\xi_D} + \hat{\mathbf{T}}_0 : (\nabla \nabla \hat{\phi}_B)_{\xi_Q}$

- \mathbf{x}_B ist zugleich gewünschte Beobachterposition im Fernfeld
- $\hat{\phi}_A := \hat{p}$, $M = 0$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$

$$\Rightarrow \hat{p}(\mathbf{x}_B) = \hat{\mathbf{T}}_0 : (\nabla \nabla \hat{\phi}_B)_{\xi_Q} \Big|_* \quad (280)$$

- d.h. nur die Lösung des fiktiven Monopolproblems B in der Nähe der Kante wird benötigt!
- außerdem: nahe Singularitäten (vgl. 2.4.2.3 VL WS) geht Wellengl. in Poissongleichung über!
- in Kantennähe ist Quellterm des Problems B null!



*) bei verteilter Quelle: $\hat{p}(\mathbf{x}_B) = \int_{V_Q} \hat{\mathbf{T}} : \nabla \nabla \hat{\phi}_B dV(\xi)$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

⇒ für (280) kann $\hat{\phi}_B$ aus $\Delta\hat{\phi}_B = 0$ (Laplace Gleichung) bestimmt werden.

Lösung 2D: konforme Abbildungen: „jede komplexe Funktion

$\tilde{\phi}(z) := \phi(z) + i\psi(z)$ von $z = x + iy$ löst 2D Laplace-Gleichung“.

Wahl von $\tilde{\phi} = z^m$ mit $m = \frac{\pi}{2\pi - \beta}$ löst das Kantenproblem mit Keilwinkel β !

Denn in Zeigerdarstellung $z = r \exp(i\theta)$ ist $\tilde{\phi} = r^m \exp(im\theta)$ bzw.

$\phi = r^m \cos(m\theta)$ und die Randbedingung $\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Big|_{\theta=0,2\pi-\beta} = 0$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Also ist $\hat{\phi}_B \sim \phi$ oder $\hat{\phi}_B = \text{const} \cdot r^m \cos(m\theta)$

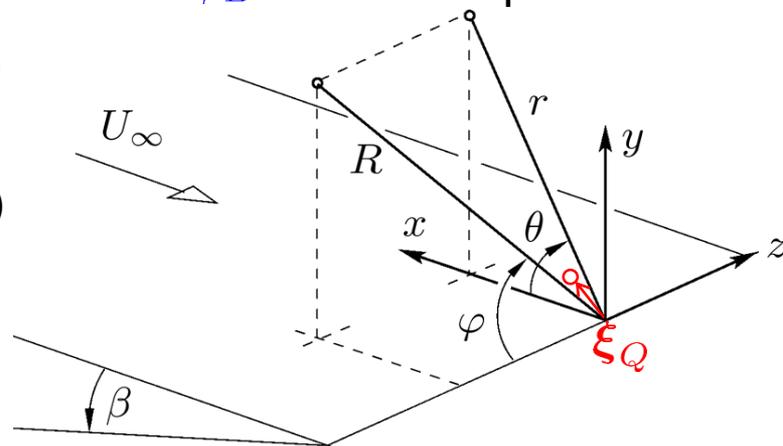
Bestimme „const“ über Dimensionsanalyse:

3D-Welle für $k|\mathbf{x}_B| \gg 1$ trifft als ebene Welle auf ξ_Q in Kantennähe; besitzt Amplitude $\sim 1/R$ mit $R = |\mathbf{x}_B - \xi_Q| \simeq |\mathbf{x}_B|$; einzige Längenskala kann nur Wellenlänge des Schalls $\lambda = 2\pi/k$ sein; außerdem muss $\hat{\phi}_B$ im 3D entsprechend Wellengleichung die Dimension $[\text{Länge}]^{-1}$ haben*.

Das führt zwangsläufig auf:

$$\hat{\phi}_B \sim (kr)^m \cos(m\theta) \frac{1}{R} \quad (\text{in der Nähe von } \xi_Q)$$

Bilde für (277) $\nabla \nabla \hat{\phi}_B$ in Zylinderkoordinaten:



$$\begin{aligned} \nabla \nabla (\dots) = & \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\dots) + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\dots) \right] + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (\dots) + \\ & \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\dots) - \frac{(\dots)}{r} \right] + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\dots) + \frac{\partial}{\partial r} (\dots) \right] + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} (\dots) + \\ & \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} (\dots) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} (\dots) + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\dots) \end{aligned} \quad (281)$$

*) $k^2 \hat{\phi}_B + \Delta \hat{\phi}_B = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B) = -\delta(x - x_B) \delta(y - y_B) \delta(z - z_B) [\text{Länge}]^{-3}$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

$$\dots \hat{p} \sim \hat{T}_0 : \nabla \nabla \hat{\phi}_B = m(m-1)k^m |\xi_Q|^{m-2} \frac{1}{R} [(\hat{T}_{0rr} - \hat{T}_{0\theta\theta}) \cos(m\theta) - 2\hat{T}_{0r\theta} \sin(m\theta)]$$

Schätze Terme ab: $T_{rr} \sim \rho_\infty v_r v_r dV \sim \rho_\infty U_\infty^2 l^3$ ($\sim T_{r\theta} \sim T_{\theta\theta}$)

$$k = 2\pi/\lambda; \tau = \lambda/a_\infty = l/U_\infty \Rightarrow \lambda \sim l/M; M = U_\infty/a_\infty \\ \Rightarrow k \sim M/l, \quad l \text{ ist Maß für turb. Längenskala } (\sim |\xi_Q|)$$

Insgesamt ist die Amplitude damit

$$|p'| \sim m(m-1)M^m \frac{\overset{l}{\underbrace{1}} |\xi_Q|^{m-2} l^3}{R l^m} \rho_\infty U_\infty^2 \sim M^{m+2} \rho_\infty a_\infty^2 l/R$$

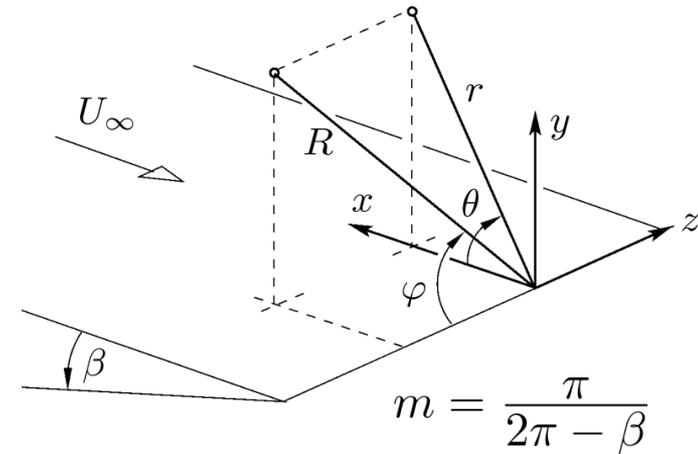
Intensität $I = \overline{p'v'_r}$ im Fernfeld mit (83) $v'_r \simeq p' / (\rho_\infty a_\infty)$:

$$I \simeq \overline{p'^2} / (\rho_\infty a_\infty) \sim \frac{m^2(m-1)^2}{R^2} l^2 \rho_\infty \frac{U_\infty^{2m+4}}{a_\infty^{2m+1}}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

$$I \simeq \frac{\overline{p'^2}}{\rho_\infty a_\infty} \sim \frac{m^2(m-1)^2}{R^2} l^2 \rho_\infty \frac{U_\infty^{2m+4}}{a_\infty^{2m+1}}$$

$$= \frac{m^2(m-1)^2}{R^2} l^2 \rho_\infty a_\infty^3 M^{2m+4}$$



- unendlich dünne Platte ($m = 1/2$) am lautesten: $I \sim U_\infty^5$
- vergl. mit Schallintensität in freier Turbulenz nach Lighthill U_∞^8
 (265) aus 5.1 VL WS: $I_{FT} \sim \frac{1}{R^2} l^2 \rho_\infty \frac{U_\infty^8}{a_\infty^5} \Rightarrow \frac{I_K}{I_{FT}} \sim m^2(m-1)^2 M^{2m-4}$
- d.h. bei kleinen Machzahlen dominiert Kantenschall ($I_K(m = 1/2) \sim M^{-3} I_{FT}$)
- $m = 1$ entartet (keine Singularität, d.h. keine Kante)
- unter Schrägeinfall wäre für Bestimmung Längenskala auf S.44 zu ersetzen
 gewesen $k \rightarrow k \sin \varphi$ und damit $I(\varphi) = I(\varphi = 0) \sin^{2m} \varphi$
 (keine Abstrahlung exakt spannweitig)

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 1 - Reziprozitätstheorem)

Beachte: im 2D Fall hätte die Dimensionsanalyse ergeben

$$\hat{\phi}_B \sim (kr)^m \cos(m\theta) \frac{1}{\sqrt{kR}} \quad k^2 \hat{\phi}_B + \Delta \hat{\phi}_B = -\overbrace{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_B)}^{[\text{Länge}]^{-2}}$$

weil

a) $\hat{\phi}_B$ nach Wellengleichung im 2D dimensionslos sein muss und

b) Amplituden im 2D mit $1/\sqrt{R}$ skalieren

$$\Rightarrow |p'| \sim m(m-1) M^{m-1/2} \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{|\xi_Q|^{m-2} l^2}{l^{m-1/2}} \rho_\infty U_\infty^2$$

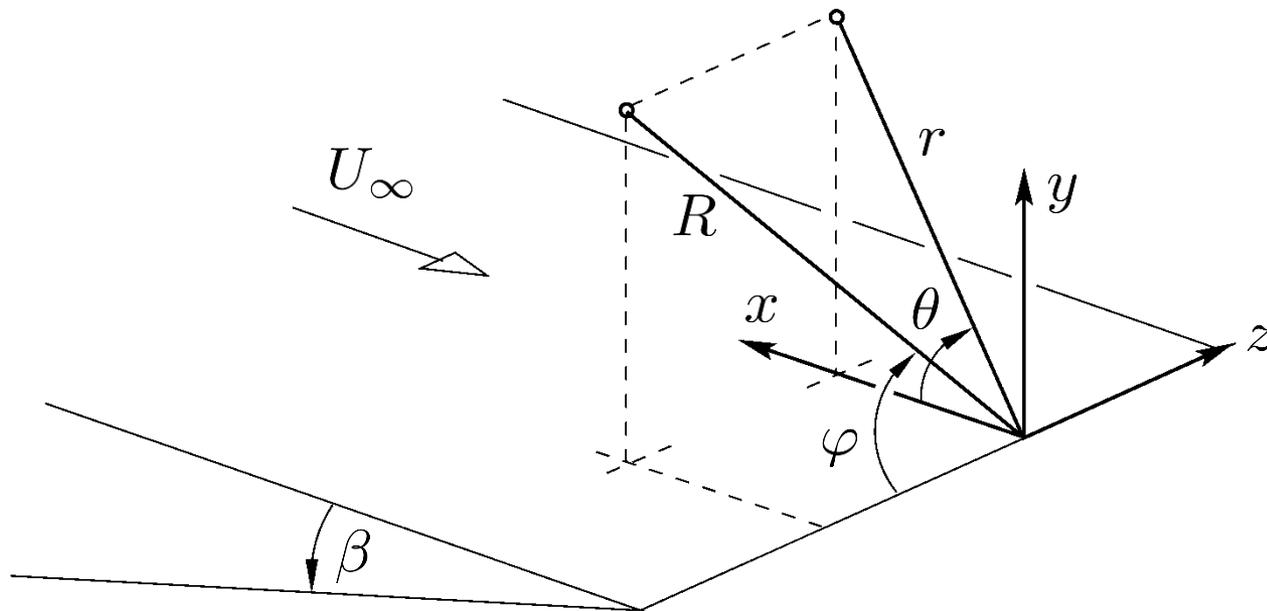
und damit:
$$I_{2D} \sim U_\infty^{2m+3} = U_\infty^{-1} I_{3D}$$

allgemein: 2D Rechnungen der Intensität ergeben immer eine um exakt 1 verminderte Potenz in U_∞ im Vergleich zu 3D Rechnungen* !

)* beachte: auch bei 2D Geometrien ist die schallerzeugende Turbulenz 3D!

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten

Aufgabe: Turbulent überströmte Kante, Geschwindigkeit U_∞ , Keilwinkel β
Schall ?



$$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \nabla \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v})$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Angepasste asymptotische Entwicklung (matched asymptotic expansion)

Voraussetzung:

Problem hat in verschiedenen Teilgebieten sehr unterschiedliches Verhalten

⇒ versuche zunächst separate Lösungen zu finden (einfacher)

⇒ danach separate Lösungen aneinander anpassen

Beispiel 1: Grenzschichttheorie: innere Lösung in Wandnähe, äußere (Potential)

Lösung weit weg von der Wand,

Beispiel 2: aeroakustische Schallerzeugung: innere Lösung im Quellbereich,

äußere Lösung weit weg von Quelle.

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Angepasste asymptotische Entwicklung (matched asymptotic expansion)

Die Methode kann in 4 Teilschritten (i-iv) beschrieben werden:

- (i) Identifikation eines asymptotisch kleinen definierenden Parameters ε für das Problem:
- (ii) 2 dimensionslose Schreibweisen der Grundgleichung in Bereichen (a) und (b)
- (iii) separate („zonale“) Lösung von Problem (a) und (b)
- (iv) Anpassen der Lösung (a) bei asymptotisch großen Abständen mit Lösung (b) bei asymptotisch kleinen Abständen
(über Bestimmung freier Konstanten in Lösungen (a) und (b))
⇒ Gesamtlösung !

z.B. kleine Machzahl $\varepsilon = M \ll 1$
oder Reynoldszahl $\varepsilon = Re^{-1} \ll 1$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Angepasste asymptotische Entwicklung (matched asymptotic expansion)

(i) Identifikation eines asymptotisch kleinen definierenden Parameters ε für das Problem:

→ soll Analyse für kleine Strömungsmachzahl M sein, d.h.

$$\varepsilon = \frac{U_\infty}{a_\infty} = M \ll 1$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(ii) **Dimensionslose Schreibweise der Grundgleichung:**

(a) Entdimensionierung mit charakteristischen Größen des Quellbereichs (Turbulenzgrößen, z.B. Grenzschichtdicke δ)

→ Referenzzeitskala $t_{\text{ref}} = \frac{l}{U_\infty}$; l – Quellbereich charakterisierende Referenzlänge z.B. $l \sim \delta$

→ Referenzdruck $p_{\text{ref}} = \rho_\infty U_\infty^2$ dynamischer Druck der Strömung

benutze Druckform der Lighthill Gleichung (248):

$$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{T} \simeq \rho_\infty \mathbf{v} \mathbf{v}$$

$$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{U_\infty^2}{l^2} \cancel{\rho_\infty U_\infty^2} \frac{\partial^2 p'^*}{\partial t^{*2}} - \frac{1}{l^2} \cancel{\rho_\infty U_\infty^2} \Delta^* p'^* = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{l^2} \cancel{\nabla \cdot \nabla \cdot} \mathbf{T}^*$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{U_\infty^2}{a_\infty^2}}_{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 p'^*}{\partial t^{*2}} - \Delta^* p'^* = \nabla^* \cdot \nabla^* \cdot \mathbf{T}^*$$

$$\varepsilon^2 \ll 1$$

* markiert dimensionslose Größen

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(ii) **Dimensionslose Schreibweise der Grundgleichung:**

(a) ...Gleichung für den Druck p_i im Quellbereich ist demnach (wieder dimensionsbehaftet)

$$\Delta p_i = -\nabla \cdot \nabla \cdot T$$

d.h. im Quellbereich ist nicht die Wellengleichung, sondern die (einfachere) Poissongleichung zu lösen

(b) Entdimensionierung mit charakteristischen Größen des akustischen Bereichs (weit weg von Objekt, bzw. Quelle):

→ einzige Längenskala im akustischen Bereich ist Wellenlänge λ der Schallwellen; hängt mit charakteristischen Frequenz f_{ref} zusammen:

$\lambda = \frac{a_\infty}{f_{\text{ref}}}$ beachte: charakt. Zeitskala $t_{\text{ref}} = 1/f_{\text{ref}}$ in (a) und (b) gleich:

$$\lambda = \frac{a_\infty}{U_\infty} l = \frac{l}{M}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(ii) Dimensionslose Schreibweise der Grundgleichung:

(b) ...

→ Referenzdruck $p_{\text{ref}} = \rho_{\infty} a_{\infty}^2$ (Maß für statischen Druck in akust. Medium)

$$\frac{1}{a_{\infty}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}; \quad \mathbf{T} \simeq \rho_{\infty} \mathbf{v} \mathbf{v}$$

$$\frac{1}{a_{\infty}^2} \frac{U_{\infty}^2}{l^2} \frac{\partial^2 p'^*}{\partial t^{*2}} - \frac{U_{\infty}^2}{a_{\infty}^2 l^2} \Delta^* p'^* = \frac{U_{\infty}^2}{a_{\infty}^2 l^2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \nabla^* \cdot \nabla^* \cdot \mathbf{T}^*$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p'^*}{\partial t^{*2}} - \Delta p'^* = \underbrace{\frac{U_{\infty}^2}{a_{\infty}^2}}_{\varepsilon^2 \ll 1} \nabla^* \cdot \nabla^* \cdot \mathbf{T}^*$$

Gleichung für den Druck p_a im akustischen (äußeren) Bereich (mit Dimens.)

$$\boxed{\frac{1}{a_{\infty}^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0}$$

d.h. homogene anstatt inhomogene Wellengleichung

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

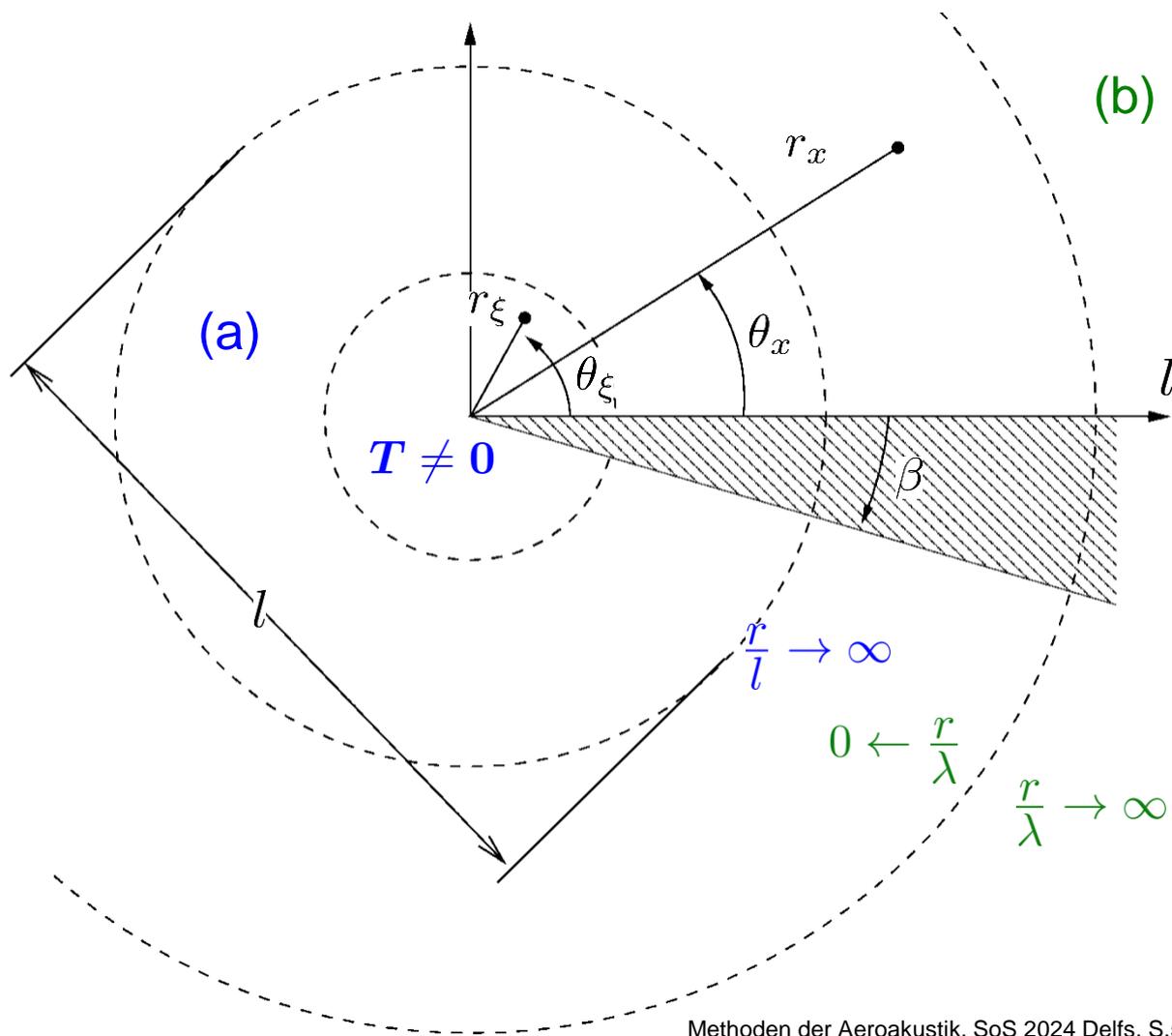
iii) separate („zonale“) Lösung von Problem (a) und (b)

(a) $\Delta p_i = -\nabla \cdot \nabla \cdot T$

auch : „innere Lösung“

(b) $\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0$

auch : „äussere Lösung“



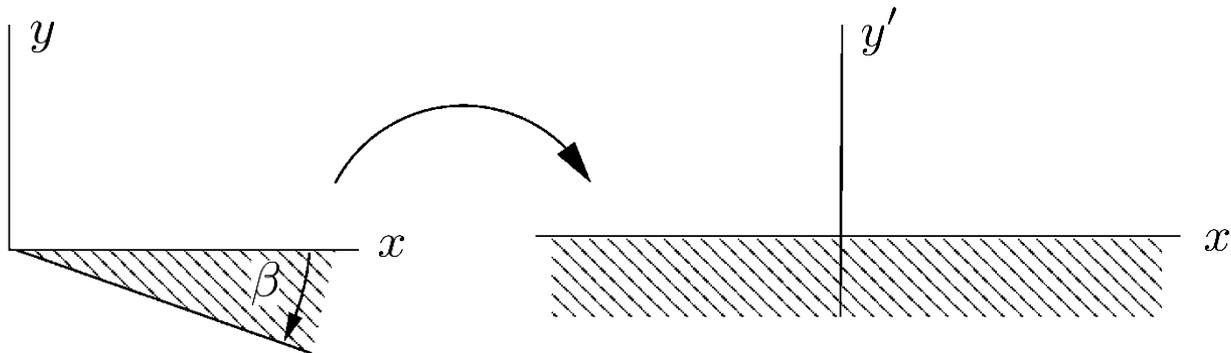
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) $\Delta p_i = -\nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}$ Lösung über Methode der Green'schen Funktionen:

konstruiere maßgeschneiderte (exakte) Green'sche Funktion g für 2D Laplace Gleichung $\Delta g = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ mit $\frac{\partial g}{\partial n} \Big|_{\theta=0, 2\pi-\beta} = 0$

zunächst konforme Abbildung des Keils auf Halbebene (Halbebenenproblem einfacher zu lösen): $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$; $\boldsymbol{\xi} \rightarrow \boldsymbol{\xi}'$

$$\begin{aligned} x' + iy' &:= (x + iy)^m; & \xi' + i\eta' &:= (\xi + i\eta)^m \\ r'_x \exp(i\theta'_x) &:= r_x^m \exp(im\theta_x); & r'_\xi \exp(i\theta'_\xi) &:= r_\xi^m \exp(im\theta_\xi) \end{aligned}$$

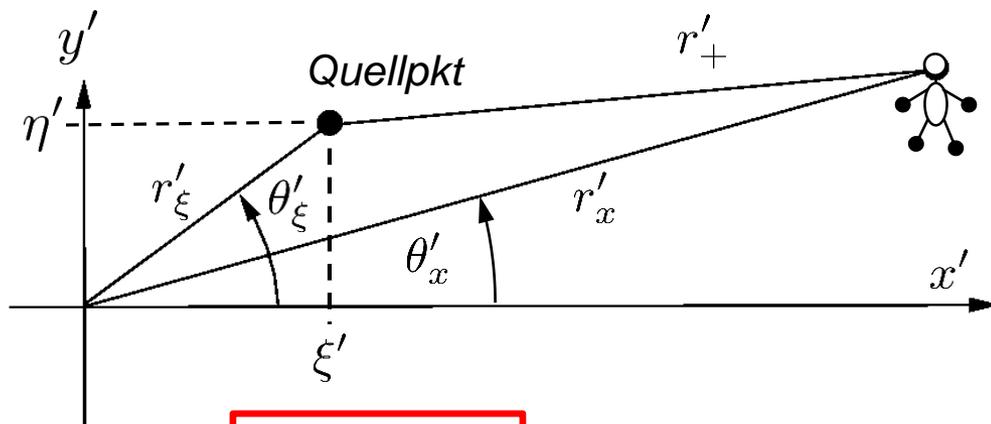


1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) Green'sche Funktion für Halbebenenproblem durch Quellenspiegelung
(Superposition der Freifeld GF (Tab. B1 VL WS) für Quell- und Spiegelquellort)

$$g' = \frac{1}{2\pi} \ln r'_+$$

$$r'_+ = \sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2}$$



equation	1D $\mathbf{x} = x$ $\boldsymbol{\xi} = \xi$	2D	3D
		$\mathbf{x} = {}^t(x, y)$ $\boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi, \eta)$	$\mathbf{x} = {}^t(x, y, z)$ $\boldsymbol{\xi} = {}^t(\xi, \eta, \zeta)$
$\Delta G = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$	$\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{2\pi} \ln r$	$-\frac{1}{4\pi r}$
$\Delta G + k^2 G = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$	$\frac{i}{2k} \exp(-ikr)$	$\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr)$	$\frac{-\exp(-ikr)}{4\pi r}$
$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \Delta G = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau)$	$\frac{a_\infty^2}{2} H(t - \tau - \frac{r}{a_\infty})$	$\frac{1}{2\pi} \frac{H(t - \tau - \frac{r}{a_\infty})}{\sqrt{(t - \tau)^2 - \frac{r^2}{a_\infty^2}}}$	$\frac{\delta(t - \tau - \frac{r}{a_\infty})}{4\pi r}$

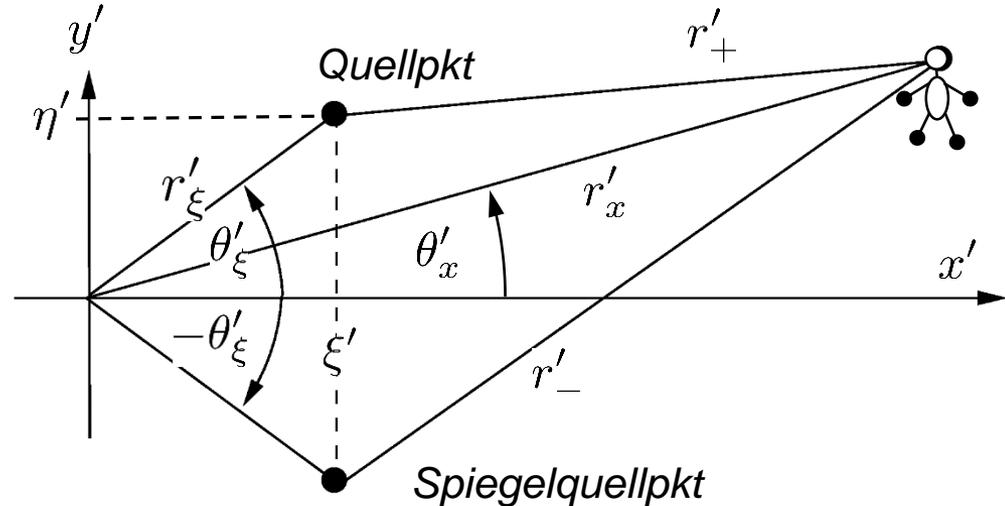
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) Green'sche Funktion für Halbebenenproblem durch Quellenspiegelung
(Superposition der Freifeld GF (Tab. B1 VL WS) für Quell- und Spiegelquellort)

$$g' = \frac{1}{2\pi} \ln r'_+ + \frac{1}{2\pi} \ln r'_-$$

$$r'_{\pm} = \sqrt{(x' - \xi')^2 + (y' \mp \eta')^2}$$

$$r'_- = r'_+ - 2(\mathbf{e}_{y'} \cdot \mathbf{r}'_+) \mathbf{e}_{y'}$$



Funktionen, die Laplacegleichung in konform abgebildetem Gebiet erfüllen, erfüllen sie auch im Originalgebiet, d.h.

$$g'(r'_{\pm}) = g(r'_{\pm}) = \frac{1}{4\pi} \ln(r'^2_+ r'^2_-)$$

$$x' = r_x^m \cos(m\theta_x) \quad \xi' = r_{\xi}^m \cos(m\theta_{\xi})$$

$$y' = r_x^m \sin(m\theta_x) \quad \eta' = r_{\xi}^m \sin(m\theta_{\xi})$$

$$r'^2_{\pm} = r_x^{2m} + r_{\xi}^{2m} - 2r_x^m r_{\xi}^m \cos[m(\theta_x \mp \theta_{\xi})]$$

$$r'^2_+ r'^2_- = (r_x^{2m} + r_{\xi}^{2m} - 2r_x^m r_{\xi}^m \cos[m(\theta_x - \theta_{\xi})]) \cdot (r_x^{2m} + r_{\xi}^{2m} - 2r_x^m r_{\xi}^m \cos[m(\theta_x + \theta_{\xi})])$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) Lösung: $p_i = -\int (\nabla_\xi \cdot \nabla_\xi \cdot \mathbf{T}) g dV(\xi)$

Ableitungen auf g abwälzen (Gauss'scher Satz): ... $p_i = -\int \mathbf{T} : (\nabla_\xi \nabla_\xi g) dV(\xi)$
in Zylinderkoordinaten

$$p_i = -\rho_\infty \int_0^{2\pi-\beta} \int_0^\infty v_r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r_\xi^2} + v_r v_\theta \frac{2}{r_\xi} \frac{\partial}{\partial \theta_\xi} \left[\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{g}{r} \right] + v_\theta^2 \frac{1}{r_\xi} \left[\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r_\xi} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta_\xi^2} \right] r_\xi dr_\xi d\theta_\xi$$

bilde die diversen Ableitungen, z.B.:

$$4\pi \frac{\partial^2 g}{\partial r_\xi^2} = \frac{2mr_\xi^{m-2} r_x^m}{r_\pm'^2} \left\{ -2m \frac{r_\xi^m}{r_x^m} \frac{r_x^{2m}}{r_\pm'^2} \left[\frac{r_\xi^m}{r_x^m} - \cos [m(\theta_x \mp \theta_\xi)] \right]^2 + \right. \\ \left. + (2m-1) \frac{r_\xi^m}{r_x^m} - (m-1) \cos [m(\theta_x \mp \theta_\xi)] \right\}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(a) Lösung soll für asymptotisch große r_x ausgewertet werden:

$$\frac{r_\xi}{r_x} \ll 1 \Rightarrow \frac{r_\xi^2}{r_x^{2m}} \rightarrow 1$$

für $m \neq 1$ heißt das:

$$\begin{aligned} 4\pi \frac{\partial^2 g}{\partial r_\xi^2} &\simeq -\frac{2mr_\xi^{m-2}}{r_x^m} (m-1) \cos [m(\theta_x \mp \theta_\xi)] \\ &= -4m(m-1) \frac{r_\xi^{m-2}}{r_x^m} \cos(m\theta_x) \cos(m\theta_\xi) \end{aligned}$$

für $m = 1$ heißt das:

$$\begin{aligned} 4\pi \frac{\partial^2 g}{\partial r_\xi^2} &\simeq -\frac{2}{r_x^2} \left[1 - 2 \cos^2(\theta_x \mp \theta_\xi) \right] \\ &= -\frac{4}{r_x^2} \cos(2\theta_x) \cos(2\theta_\xi) \end{aligned}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)(a) nach Auswertung aller Terme und für $r_x \gg r_\xi$ für $m \neq 1$:

$$p_i \simeq \frac{m(m-1) \cos(m\theta_x)}{\pi r_x^m} \int_0^{2\pi-\beta} \int_0^\infty \rho_\infty \left[(v_r^2 - v_\theta^2) \cos(m\theta_\xi) - 2v_r v_\theta \sin(m\theta_\xi) \right] r_\xi^{m-1} dr_\xi d\theta_\xi$$

(282)

für $m = 1$:

$$p_i \simeq \frac{\cos(2\theta_x)}{\pi r_x^2} \int_0^{2\pi-\beta} \int_0^\infty \rho_\infty \left[(v_r^2 - v_\theta^2) \cos(2\theta_\xi) - 2v_r v_\theta \sin(2\theta_\xi) \right] r_\xi dr_\xi d\theta_\xi$$

(283)

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(b) äußere Lösung, d.h. $\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0$ erfüllt Randbed.!

Separationsansatz: $p_a = \hat{p}_a \exp(i\omega t) = CF(r_x) \cos(m\theta_x) \exp(i\omega t)$

$$\cancel{\cos(m\theta_x)} \left\{ k^2 F + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} F \right) \right\} + F \frac{1}{r^2} (-m^2) \cancel{\cos(m\theta_x)} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2 F}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dF}{d\eta} + \left(1 - \frac{m^2}{\eta^2} \right) F = 0; \quad \eta := kr} \quad (284)$$

Besselsche DGL

für Zeitfaktor $\exp(+i\omega t)$ erfüllt Hankelfunktion m'ter Ordnung, 2.Art die Dgl.:

$$F(\eta) = H_m^{(2)}(\eta)$$

Benötigt wird (in Schritt iv) die äußere Lösung bei asymptotisch kleinem η

$$H_m^{(2)}(kr_x) |_{kr_x \rightarrow 0} = \frac{i}{\pi} \Gamma(m) \left(\frac{1}{2} k \right)^{-m} r_x^{-m} \quad (285)$$

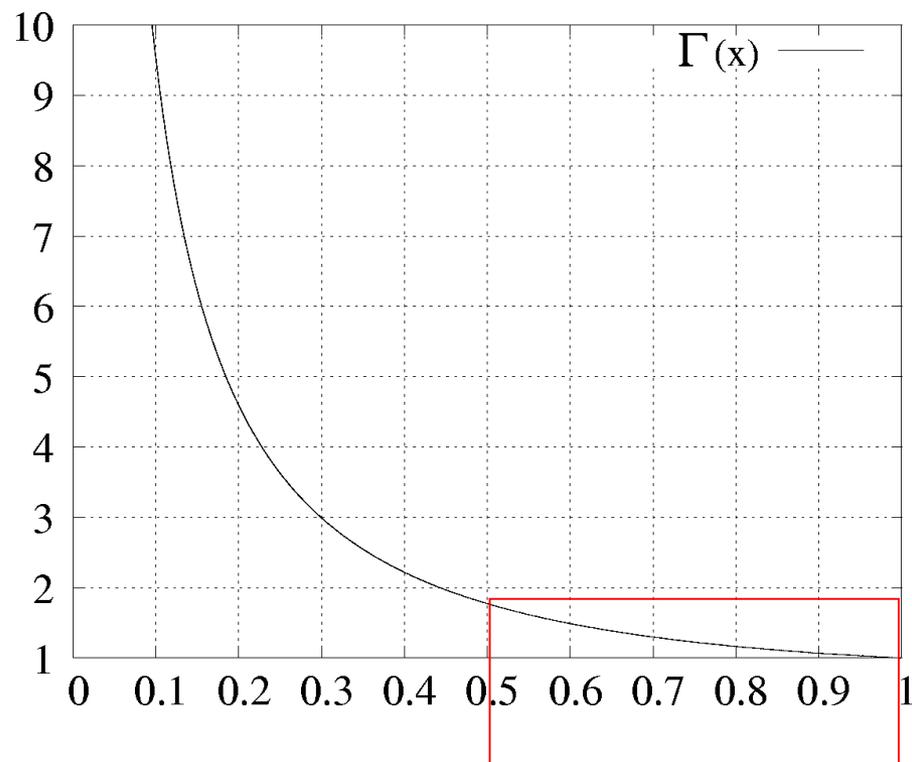
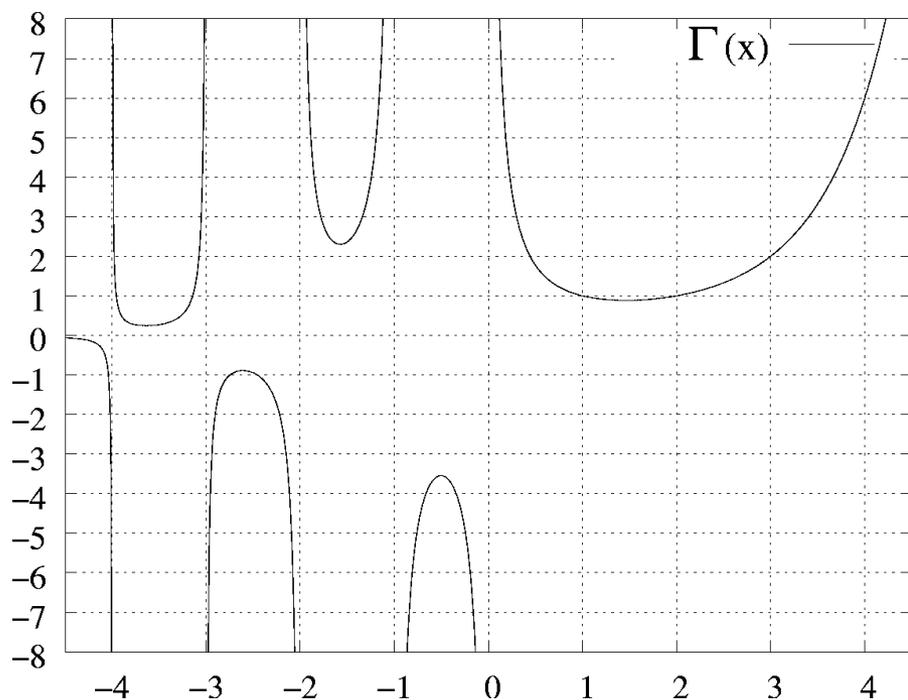


Gammafunktion (verallg. Fakultät) $m \in \mathbb{N}: \Gamma(m+1) = m!$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

(b) Gammafunktion (verallgemeinerte Fakultät)



1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

- iv) Anpassen der Lösung (a) bei asymptotisch großen Abständen mit Lösung (b) bei asymptotisch kleinen Abständen

(Bestimmung freier Konstanten in Lösungen (a) und (b)) ⇒ Gesamtlösung !

$$m \neq 1 : \hat{p}_i \simeq \frac{m(m-1) \cos(m\theta_x)}{\pi r_x^m} \int_0^{2\pi-\beta} \int_0^\infty \rho_\infty \left[(\hat{v}_r^2 - \hat{v}_\theta^2) \cos(m\theta_\xi) - 2\hat{v}_r \hat{v}_\theta \sin(m\theta_\xi) \right] r_\xi^{m-1} dr_\xi d\theta_\xi$$

$$\hat{p}_a = C H_m^{(2)}(r_x) \cos(m\theta_x)$$

Anpassung von äußerer und innerer Lösung $\hat{p}_a(r_x \rightarrow 0) \stackrel{!}{=} \hat{p}_i(r_x \rightarrow \infty)$

$$C \frac{i}{\pi} \Gamma(m) \left(\frac{1}{2}k\right)^{-m} r_x^{-m} \cos(m\theta_x) \stackrel{!}{=} H_m^{(2)}(r_x \rightarrow 0) = \frac{i}{\pi} \Gamma(m) \left(\frac{1}{2}k\right)^{-m} r_x^{-m}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{m(m-1) \cos(m\theta_x)}{\pi r_x^m} \underbrace{\int_0^{2\pi-\beta} \int_0^\infty \rho_\infty \left[(\hat{v}_r^2 - \hat{v}_\theta^2) \cos(m\theta_\xi) - 2\hat{v}_r \hat{v}_\theta \sin(m\theta_\xi) \right] r_\xi^{m-1} dr_\xi d\theta_\xi}_{I_s}$$

beachte: Anpassung hat funktioniert, denn C ergibt sich wirklich als Konstante!

$$\Rightarrow C = i \frac{m(m-1)}{\Gamma(m)} 2^{-m} k^m I_s$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

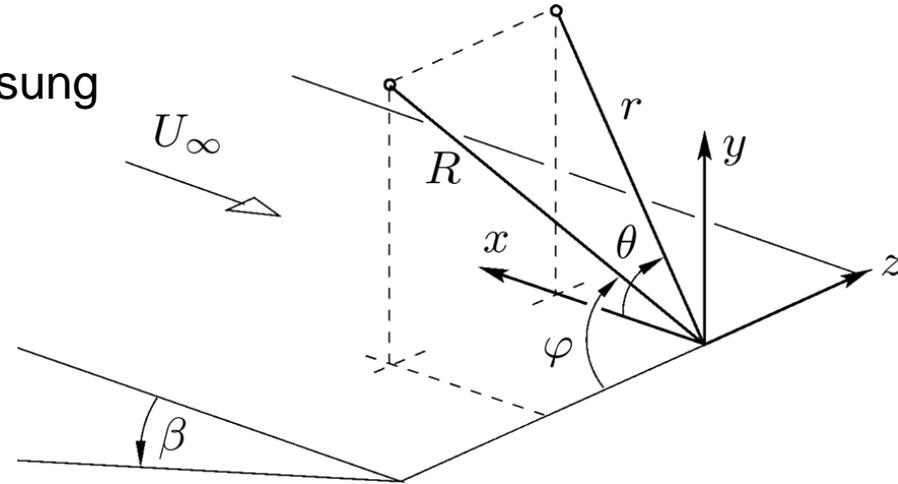
iv) Anpassung von innerer und äußerer Lösung

Interesse besteht nur an Fernfeldlösung, d.h.

$$\hat{p}_a(r_x \rightarrow \infty)$$

beachte dazu:

$$H_m^{(2)}(kr_x)|_{kr_x \rightarrow \infty} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi kr_x}} \exp\left[-i\left(kr_x - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right] \quad (286)$$



$$\hat{p}_a(r_x \rightarrow \infty) \simeq 2^{\frac{1}{2}-m} \frac{m(m-1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m)} \frac{\cos(m\theta_x)}{\sqrt{r_x}} k^{m-\frac{1}{2}} \exp(-ikr_x) \exp\left(\frac{i}{2}m\pi + \frac{i}{4}\pi\right) \times \int_0^{2\pi-\beta} \int_0^{\infty} \rho_{\infty} \left[(\hat{v}_r^2 - \hat{v}_{\theta}^2) \cos(m\theta_{\xi}) - 2\hat{v}_r \hat{v}_{\theta} \sin(m\theta_{\xi}) \right] r_{\xi}^{m-1} dr_{\xi} d\theta_{\xi} \quad (287)$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

- Abschätzung der Abhängigkeit der Schallintensität I von Strömungsparametern: charakteristische Frequenz f entsteht durch Wirbelpassage (bei charakterist. Wirbeldimension: l)

$$f \sim \frac{U_\infty}{l} \quad \text{andererseits ist } f \sim \frac{a_\infty}{\lambda}, \quad \text{also } \frac{1}{\lambda} \sim \frac{M}{l}, \quad \text{bzw. } k \sim \frac{2\pi M}{l}$$

Die Größenordnung des Integrals wird nach den charakteristischen Größen abgeschätzt:

$$\int_0^{2\pi-\beta} \int_0^\infty \rho_\infty \left[(\widehat{v}_r^2 - \widehat{v}_\theta^2) \cos(m\theta_\xi) - 2\widehat{v}_r \widehat{v}_\theta \sin(m\theta_\xi) \right] r_\xi^{m-1} dr_\xi d\theta_\xi \sim \rho_\infty U_\infty^2 l^m$$

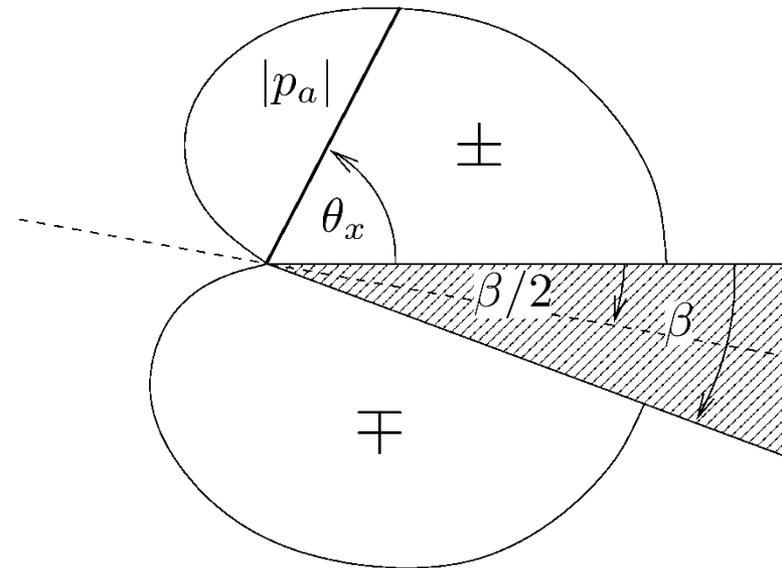
eingesetzt in (287):

$$p'_a \sim 2^{\frac{1}{2}-m} m(1-m) \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^{m-\frac{1}{2}} M^{m-\frac{1}{2}} \rho_\infty a_\infty^2 M^2 l^m = \pi^{m-\frac{1}{2}} m(1-m) \sqrt{\frac{l}{r}} M^{\frac{3}{2}+m} \rho_\infty a_\infty^2$$

$$I \sim \frac{\overline{p'^2}}{\rho_\infty a_\infty} \sim \frac{\pi^{2m-1} m^2 (1-m)^2}{\Gamma^2(m)} \rho_\infty a_\infty^3 \frac{l}{r} M^{3+2m}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

- Richtcharakteristik : $\cos(m\theta_x)$ heißt auch „Kardioide“
keine Abstrahlung in Richtung der Winkelhalbierenden des Keils
- Gegenphasige Abstrahlung auf den beiden Seiten des Keils
- Schallintensität skaliert mit M^{3+2m} , d.h. über m abhängig von Keilwinkel



1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Sonderfall $m = 1$ (keine Singularität) hätte analog zur Herleitung von (287) ergeben:

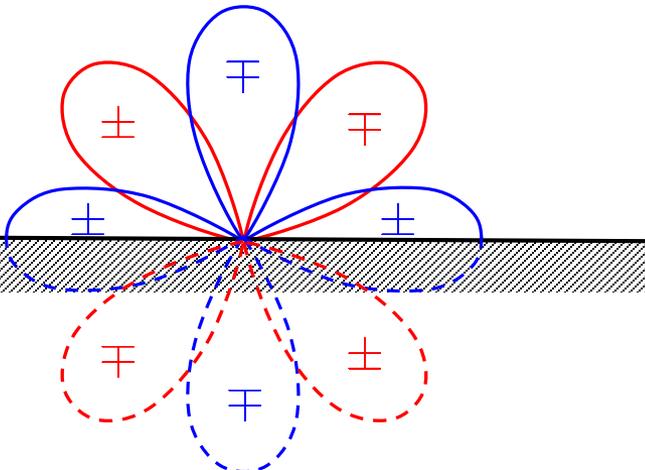
$$\hat{p}_a(r_x \rightarrow \infty) \simeq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(2\theta_x)}{\sqrt{r_x}} k^{\frac{3}{2}} \exp(-ikr_x) \exp(i\frac{3}{4}\pi) \times \int_0^{2\pi-\beta} \int_0^{\infty} \rho_{\infty} \left[(\hat{v}_r^2 - \hat{v}_{\theta}^2) \cos(2\theta_{\xi}) - 2\hat{v}_r \hat{v}_{\theta} \sin(2\theta_{\xi}) \right] r_{\xi} dr_{\xi} d\theta_{\xi} \quad (288)$$

und damit:

$$I \sim \frac{\overline{p'^2}}{\rho_{\infty} a_{\infty}} \sim \rho_{\infty} a_{\infty}^3 \frac{l}{r} M^7$$

Quadrupol! vgl. freie Turbulenz
beachte:

für 3D gilt $I^{3D} \sim I^{2D} M^1,$
 $\sim M^8!$



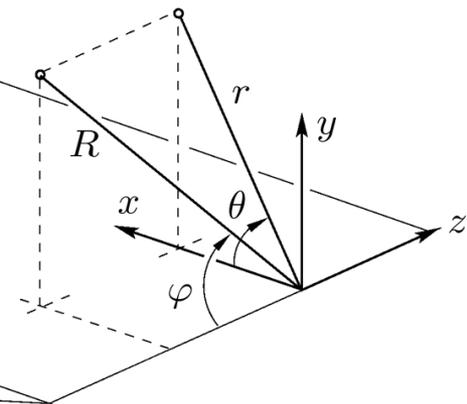
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Vergleiche (287) für $m = \frac{1}{2}$ mit exakter 3D Lsg. für Platte von Ffowcs-Williams & Hall (1970):

$$(287): \hat{p}_{2D} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_x)}{\sqrt{r_x}} \exp(-ikr_x) \exp(i\frac{3}{2}\pi) \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \rho_{\infty} \left[(\widehat{v}_r^2 - \widehat{v}_{\theta}^2) \cos(\frac{1}{2}\theta_{\xi}) - 2\widehat{v}_r \widehat{v}_{\theta} \sin(\frac{1}{2}\theta_{\xi}) \right] r_{\xi}^{-\frac{1}{2}} dr_{\xi} d\theta_{\xi}}_{:= I_s}$$

$$\hat{p}_{3D} = \frac{k^{\frac{1}{2}}}{4\pi\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(\frac{1}{2}\theta_x)}{R_x} \exp(-ikR_x) \exp(i\frac{1}{4}\pi) \sin^{\frac{1}{2}}\varphi \cdot \int_b I_s dz \quad (289)$$

b - Spannweite



FW-Hall: v_z - Fluktuationen (in Spannweitenrichtung) spielen keine Rolle bei Schallerzeugung!

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Direktvergleich in x-y-Ebene (bzw. $\varphi = \pi/2$):

$$\frac{\hat{p}_{2D}}{\hat{p}_{3D}} = \exp(i\frac{5}{4}\pi) \frac{I_s}{\int_b I_s dz} \sqrt{\frac{2\pi R_x}{k}} = -\frac{(1+i)}{L_z} \sqrt{\frac{\pi R_x}{k}} \quad \text{also:}$$

$\Rightarrow L_z^{-1}$ (L_z Maß für spannweite Korrelation der Quelle)

$$\hat{p}_{3D} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi R_x}} (1-i) L_z \hat{p}_{2D} \quad \text{oder} \quad I_{3D} = \frac{\hat{p}_{3D} \hat{p}_{3D}^*}{\rho_\infty a_\infty} = \frac{L_z^2 k}{2\pi R_x} I_{2D} \quad (290)$$

(290) stellt exakte Umrechnung 2D→3D für beliebige 2D-Geometrien dar

(Oberai et al.)

$$|\hat{p}_{3D}| = \sqrt{\frac{k}{2\pi R_x}} L_z |\hat{p}_{2D}|$$

beachte: Intensität darf nur linear mit Spannweite b wachsen: $\Rightarrow L_z = \sqrt{bl_z}$

l_z stellt also die spannweite Korrelationslänge der Quelle dar

typisch: $l_z \sim \omega^{-1}$: Umrechnung 2D/3D im wesentlichen frequenzunabhängig

(wg. $\sqrt{kl_z} \sim \sqrt{k/\omega} = a_\infty^{-1/2}$) d.h. Schalldruckspektrum bleibt erhalten!

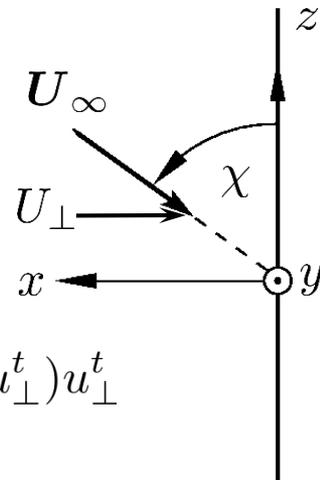
1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Intensitätsabschätzung in 3D auf der Grundlage von (289)

$$\hat{p}_{3D} \simeq \frac{k^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1}{2}} \varphi \cos(\frac{1}{2}\theta_x)}{R_x} \rho_{\infty} U_{\perp}^2 \frac{l}{l^{\frac{1}{2}}} (bl_z)^{\frac{1}{2}} ; \quad l \quad \sim \text{charakt. Ausdehnung Quellgebiet (z.B. Grenzschichtdicke)}$$

Nach (289) geht nur die Geschwindigkeitskomponente von U ein, die senkrecht auf der Kante steht, U_{\perp} . Diese wiederum setzt sich aus einem zeitgemittelten und einem (turbulenten) Wechselanteil zusammen:

$$U_{\perp}^2 = (\bar{U}_{\perp} + u_{\perp}^t)^2 = \underbrace{\bar{U}_{\perp}^2}_{\text{stationär (kein Beitrag)}} + (2\bar{U}_{\perp} + u_{\perp}^t)u_{\perp}^t \quad \Rightarrow \quad U_{\perp}^2 \sim (2U_{\infty} \sin \chi + u_{\perp}^t)u_{\perp}^t$$



worin χ der Winkel zwischen Anströmrichtung und Kante ist.

Die turbulenten Schwankungsamplituden skalieren etwa proportional mit der Anströmgeschwindigkeit; Beschreibung über Turbulenzintensität

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u^{t2}} + \overline{v^{t2}} + \overline{w^{t2}})} / U_{\infty}}$$

1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Die Turbulenzintensität α lässt sich mit Hilfe der gebräuchlicheren kinetischen Turbulenzenergie $k_t := \frac{1}{2}(\overline{u^{t2}} + \overline{v^{t2}} + \overline{w^{t2}})$ ausdrücken, wobei für den Zweck der Abschätzung vereinfachend angenommen wird, dass isotrope Turbulenz vorliegt. Dann ist $k_t := \frac{3}{2}\overline{u^{t2}}$ und für die Turbulenzintensität gilt $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}k_t}/U_\infty$

(typisch: $\alpha \simeq 0.1$)

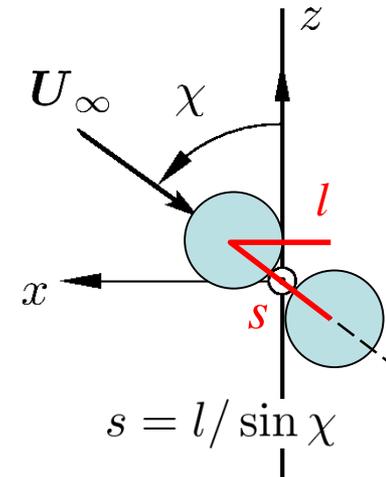
Eine, nämlich die kantenparallele Komponente geht nicht ein: $\overline{u_\perp^{t2}} = 2\overline{u^{t2}} = 2\alpha^2 U_\infty^2$

$$U_\perp^2 \simeq (2U_\infty \sin \chi + u_\perp^t)u_\perp^t \Rightarrow U_\perp^2 \sim (2U_\infty \sin \chi + \sqrt{2}\alpha U_\infty)\sqrt{2}\alpha U_\infty$$

Im Fernfeld wird die Schallintensität des Kantengeräuschs damit

$$I_{3D} = \frac{\hat{p}_{3D}\hat{p}_{3D}^*}{\rho_\infty a_\infty} \simeq \frac{k \sin \varphi \cos^2(\frac{1}{2}\theta_x) \rho_\infty}{a_\infty R_x^2} \sim M \sin \chi / l \quad (\sqrt{2} \sin \chi + \alpha)^2 \alpha^2 U_\infty^4 l b l_z$$

$$I_{3D} \simeq \rho_\infty \frac{b l_z}{R_x^2} \frac{U_\infty^5}{a_\infty^2} \alpha^2 \sin \chi (\sqrt{2} \sin \chi + \alpha)^2 \sin \varphi \cos^2(\frac{1}{2}\theta_x)$$



1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

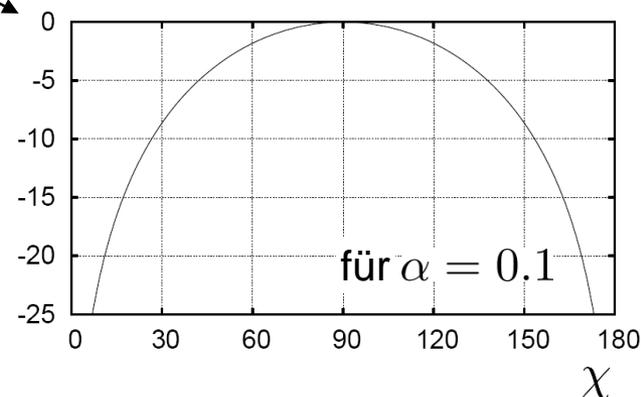
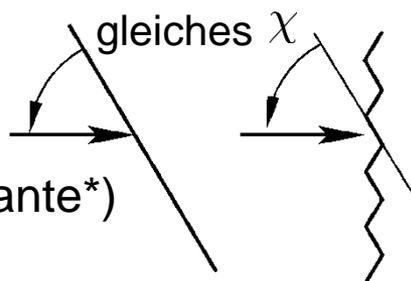
Als Schallintensitätspegel:

$$L_I \simeq 10 \lg \left(\frac{\rho_\infty U_\infty^5}{a_\infty^2 I_{\text{ref}}} \right) + 10 \lg \left(\frac{bl_z}{R_x} \right) + 10 \lg \left(\alpha^2 (\sqrt{2} \sin \chi + \alpha)^2 \sin \chi \right) + 10 \lg (|\sin \varphi|) + 10 \lg \left(\cos^2 \left(\frac{1}{2} \theta_x \right) \right)$$

Richtcharakteristik

Minderungsmaßnahmen für Kantengeräusch:

- U_∞ reduzieren
- An-/Abströmwinkel χ an Kante weit weg von 90° :
geschrägte, oder gezahnte Kante*)
- Turbulenzintensität α verringern
- Korrelationslänge der Turbulenz l_z verringern
- Temperatur in Kantennähe erhöhen: $T_\infty \uparrow \Rightarrow \frac{\rho_\infty}{a_\infty^2} = \frac{p_\infty}{RT_\infty RT_\infty} \sim \frac{1}{T_\infty^2} \downarrow$



id. Gas

$$\frac{\rho_\infty}{a_\infty^2} = \frac{p_\infty}{RT_\infty RT_\infty} \sim \frac{1}{T_\infty^2} \downarrow$$

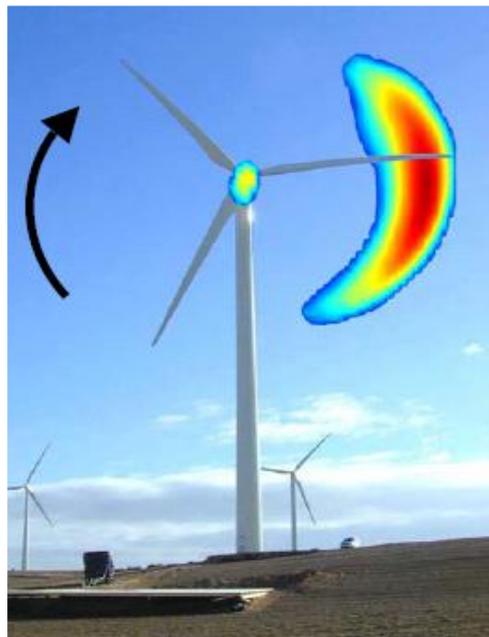
Übersichtsartikel Kantengeräusch, s. auch:

Howe, M. S., A Review of the Theory of Trailing Edge Noise, Journal of Sound and Vibration, Vol. 61, No. 3, 1978, pp. 437465.

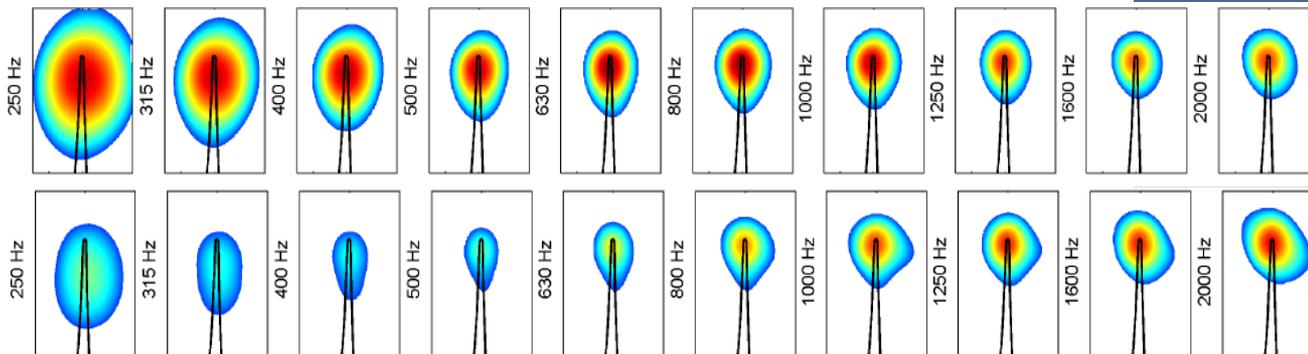
*) tatsächlich komplizierter durch Phasenauslöschung zwischen Einkerbungen und Spitzen)

Hinterkantenschrägung an Rotorblatt WEA

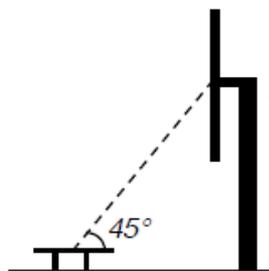
- Drehtonanteile (Propeller) irrelevant bei Windenergieanlage (WEA)
- Hinterkanten- und Blattspitzengeräusch vornehmlich im Blattaußenbereich (größte Geschwindigkeiten)



serration baseline



Farbumfang 12dB



Oerlemans et al. AIAA 2008-2819

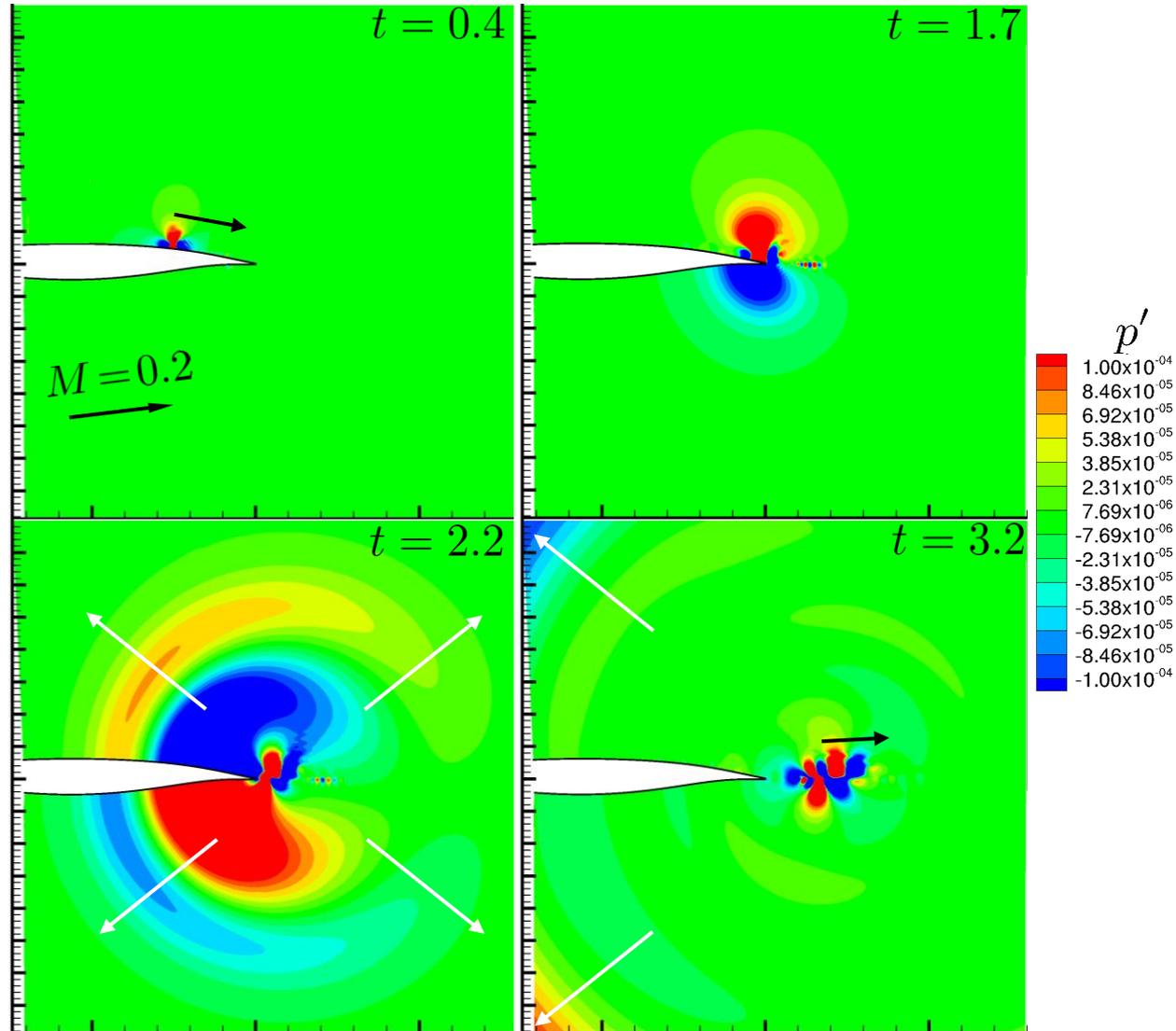
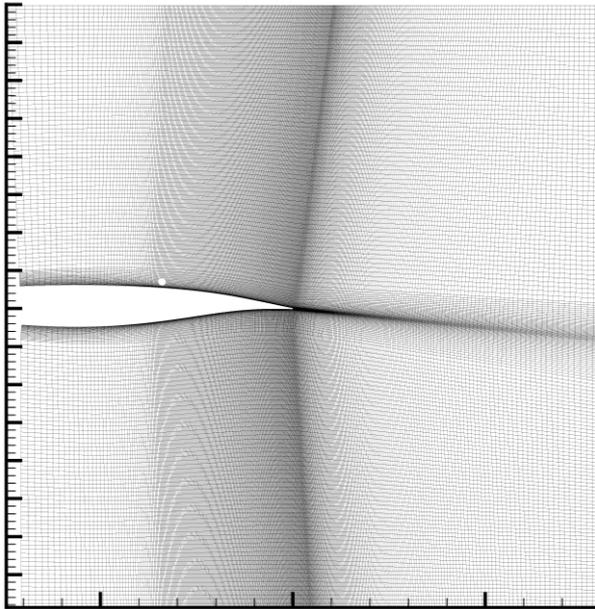
Hinterkantenschrägung PC Lüfter



Hinterkantengeräuschestehung

Numerische Simulation

Konvektion eines Einzelwirbels über Profilhinterkante



auch S.286



1.1.1.2 Schallerzeugung an Kanten (Lösungsweg 2 – AAE)

Abschlussbemerkung:

- Analyse nicht beschränkt auf Außenkanten (Lösung gültig auch für $m > 1$)
- Innenkanten für $1 < m < \infty$

$\beta = 0^\circ (m = \frac{1}{2}) :$



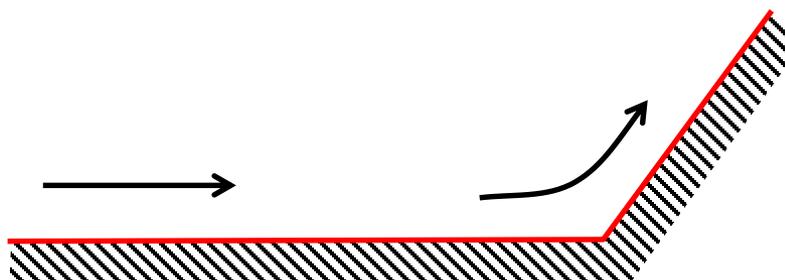
$I \sim U_\infty^5$

$\beta = 180^\circ (m = 1) :$



$I \sim U_\infty^8$

$\beta = 225^\circ (m = \frac{4}{3}) :$



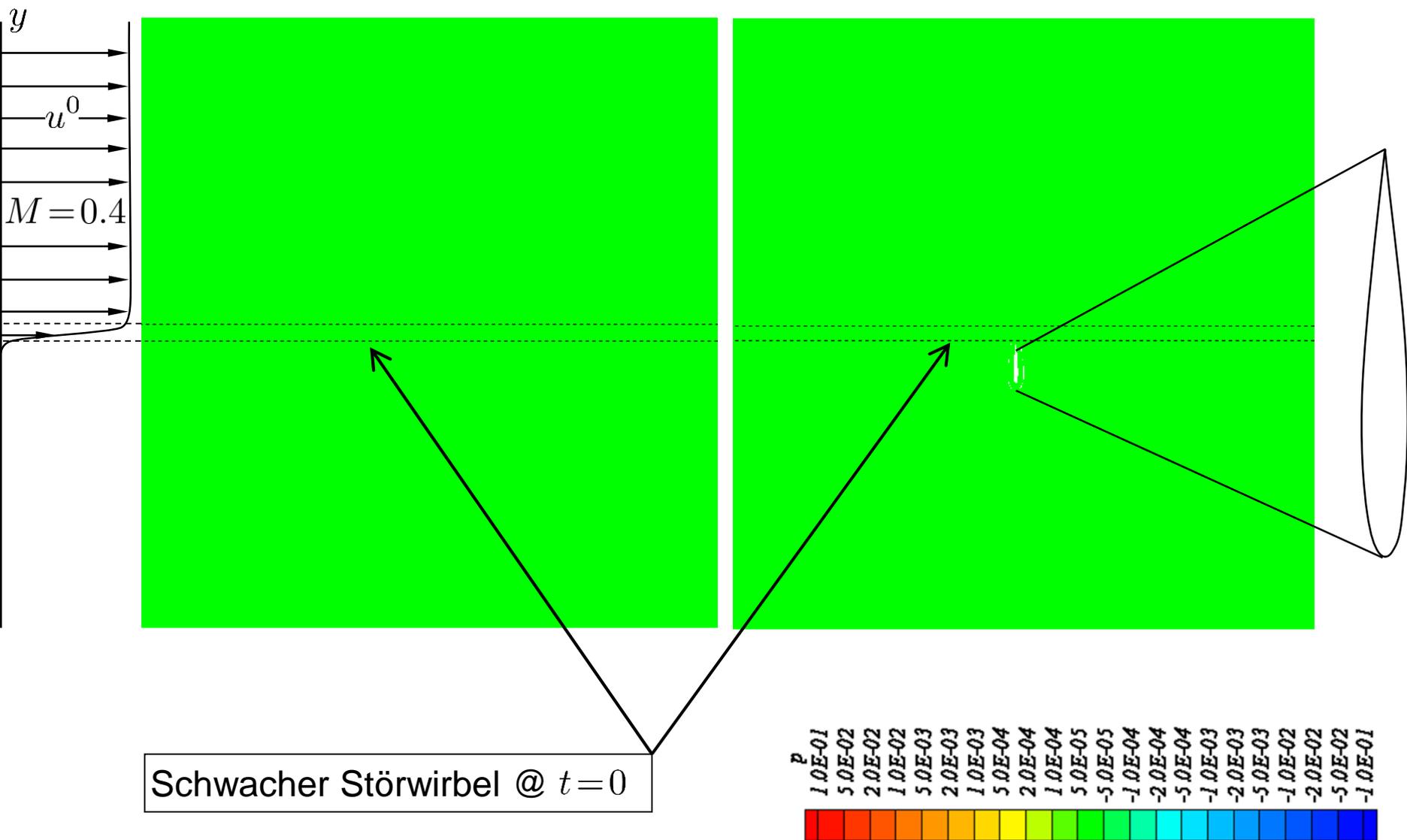
$I \sim U_\infty^{6\frac{2}{3}}$

$\beta = 270^\circ (m = 2) :$



$I \sim U_\infty^8$

Umströmungsgeräusch - Quellmechanismen

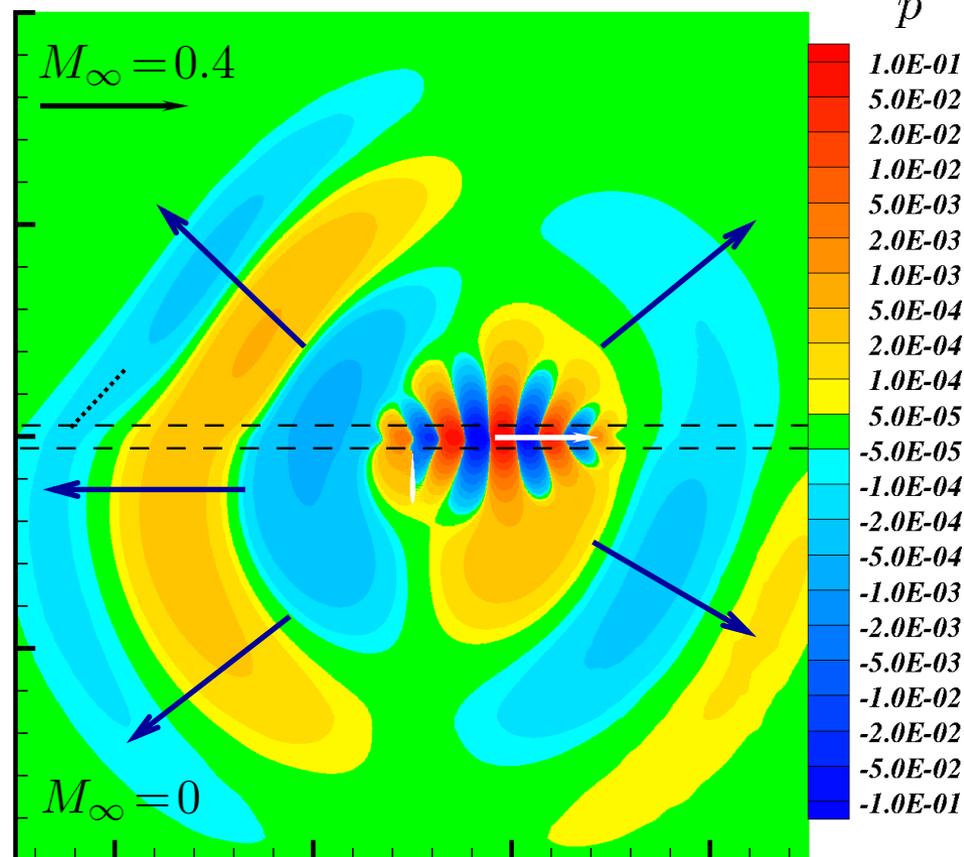
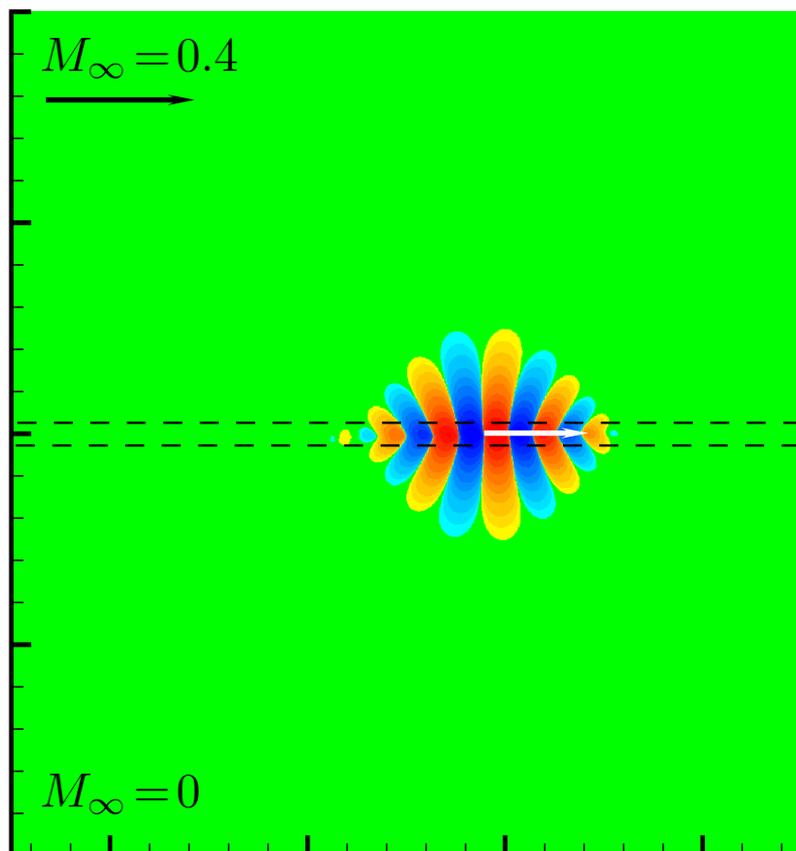


Schallentstehung an scharfer Schneide

freie Scherschicht:
anwachsendes Wellenpaket

$t = 40$

Scherschicht & Schneide:
Schallentstehung an Kante

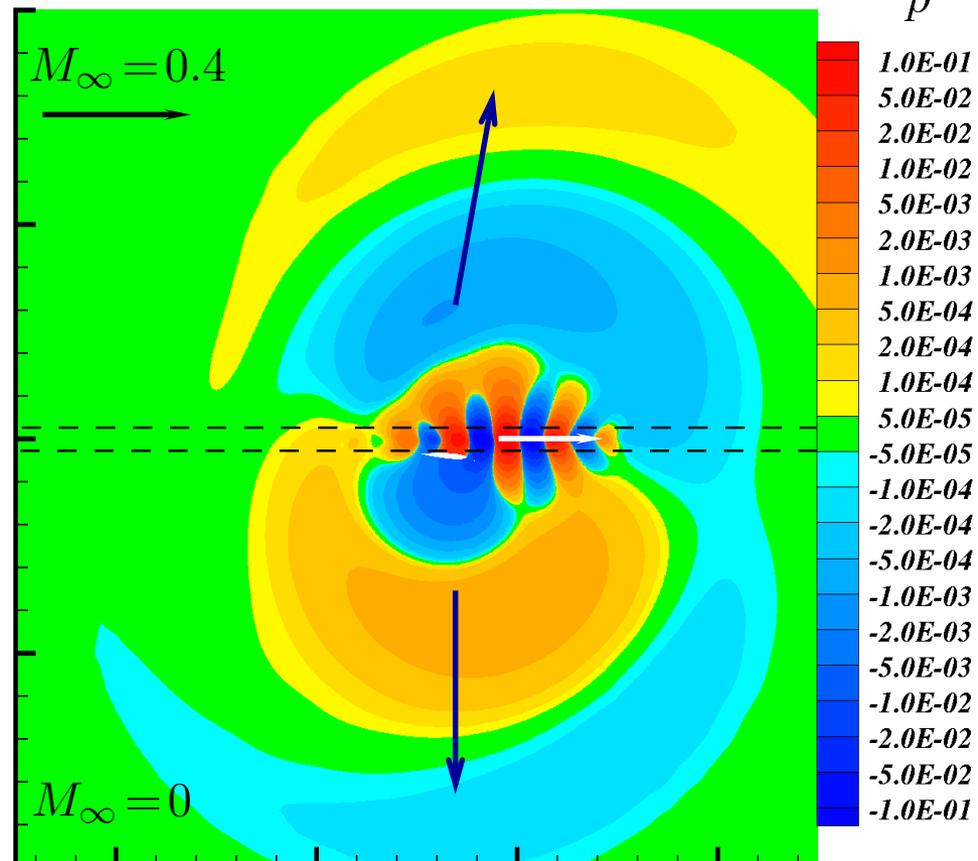
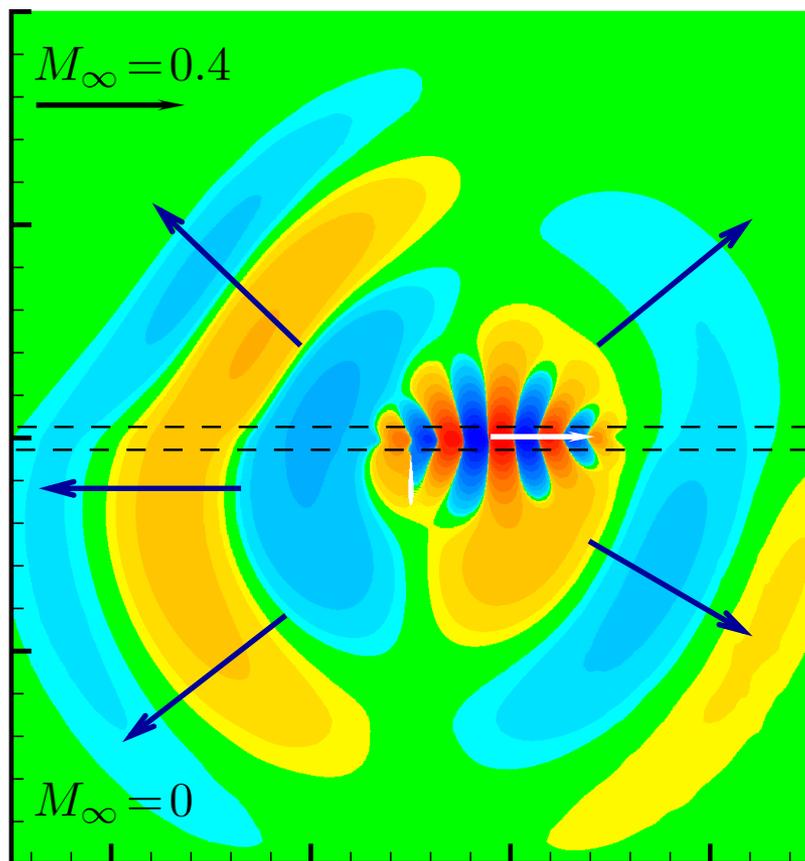


Einfluss Schneidenausrichtung

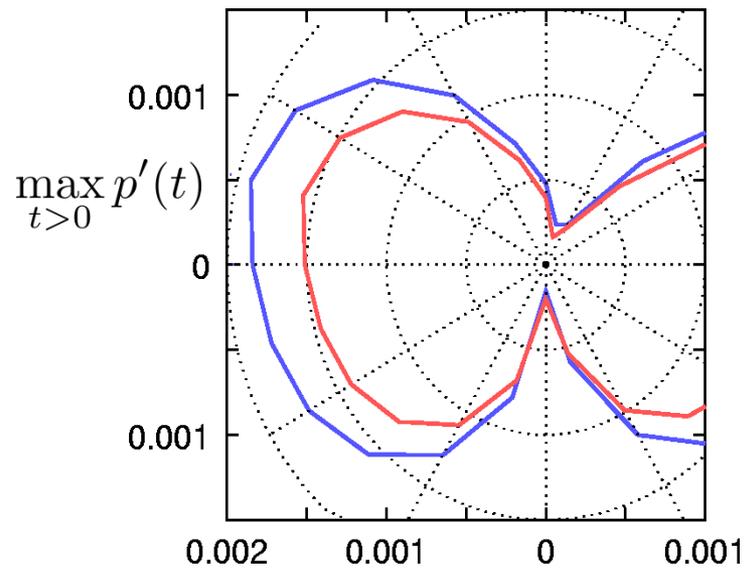
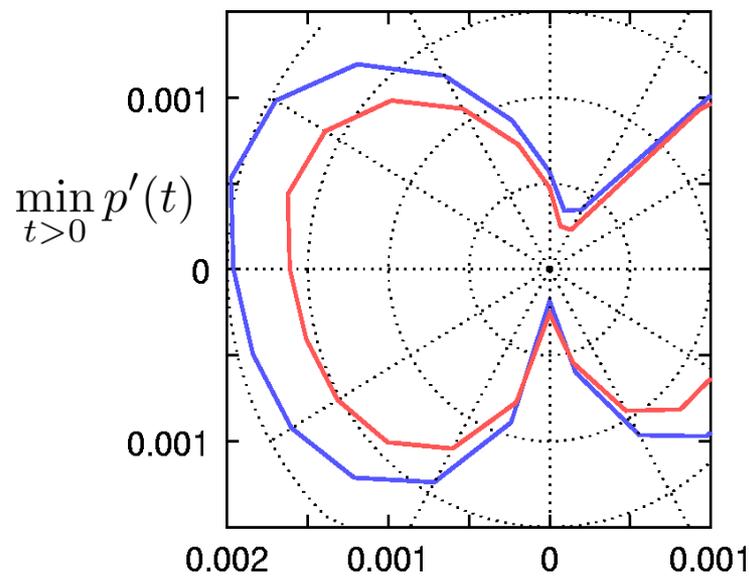
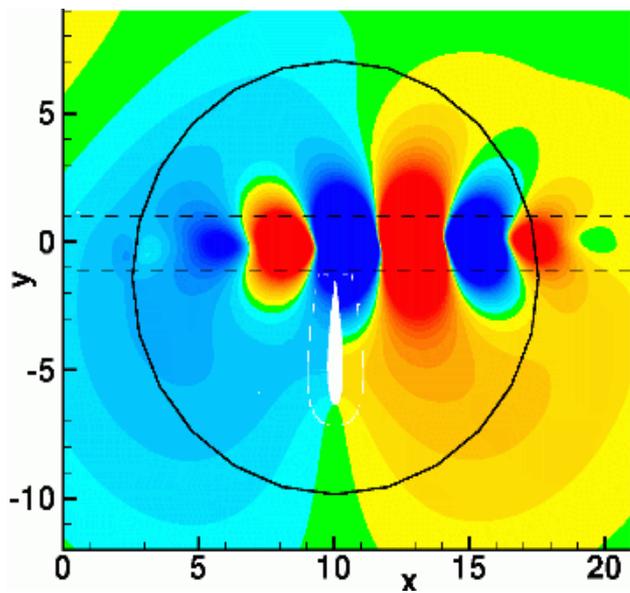
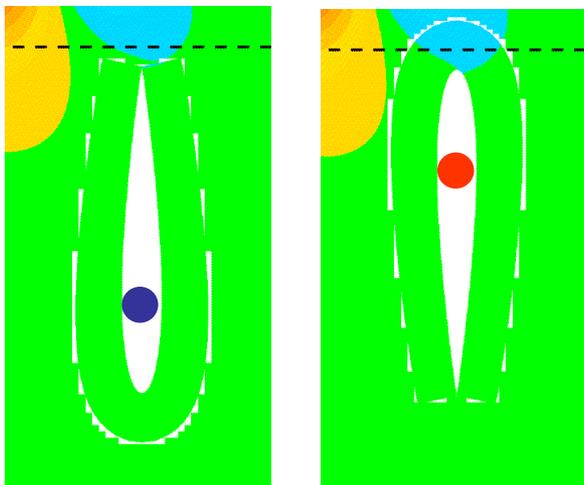
$t = 40$

vertikal

horizontal

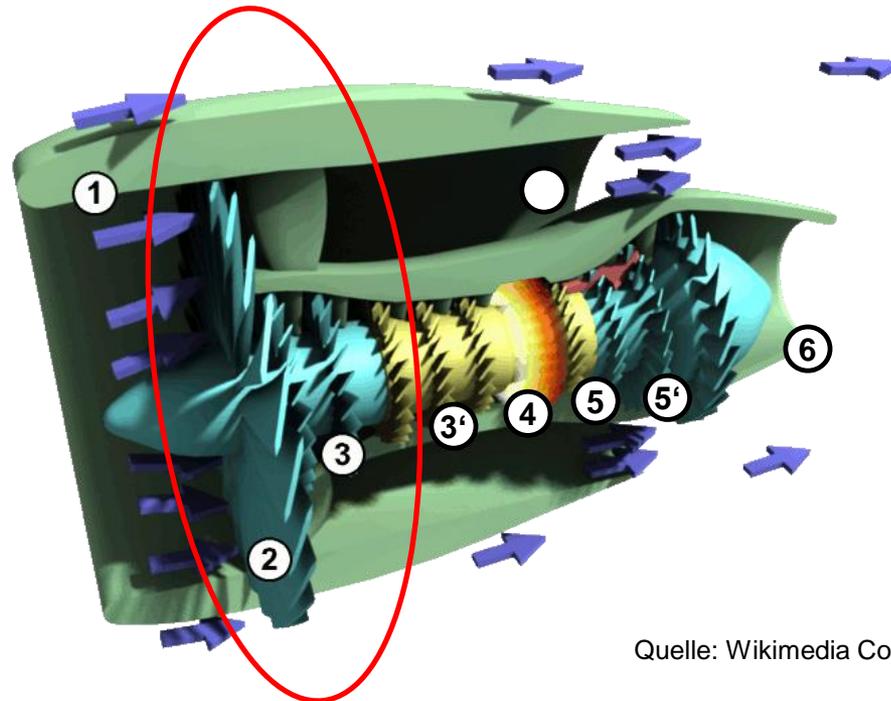


Einfluss Schneidengestalt



1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

(mit Material von Dr. Marco Rose, Rolls-Royce Deutschland)

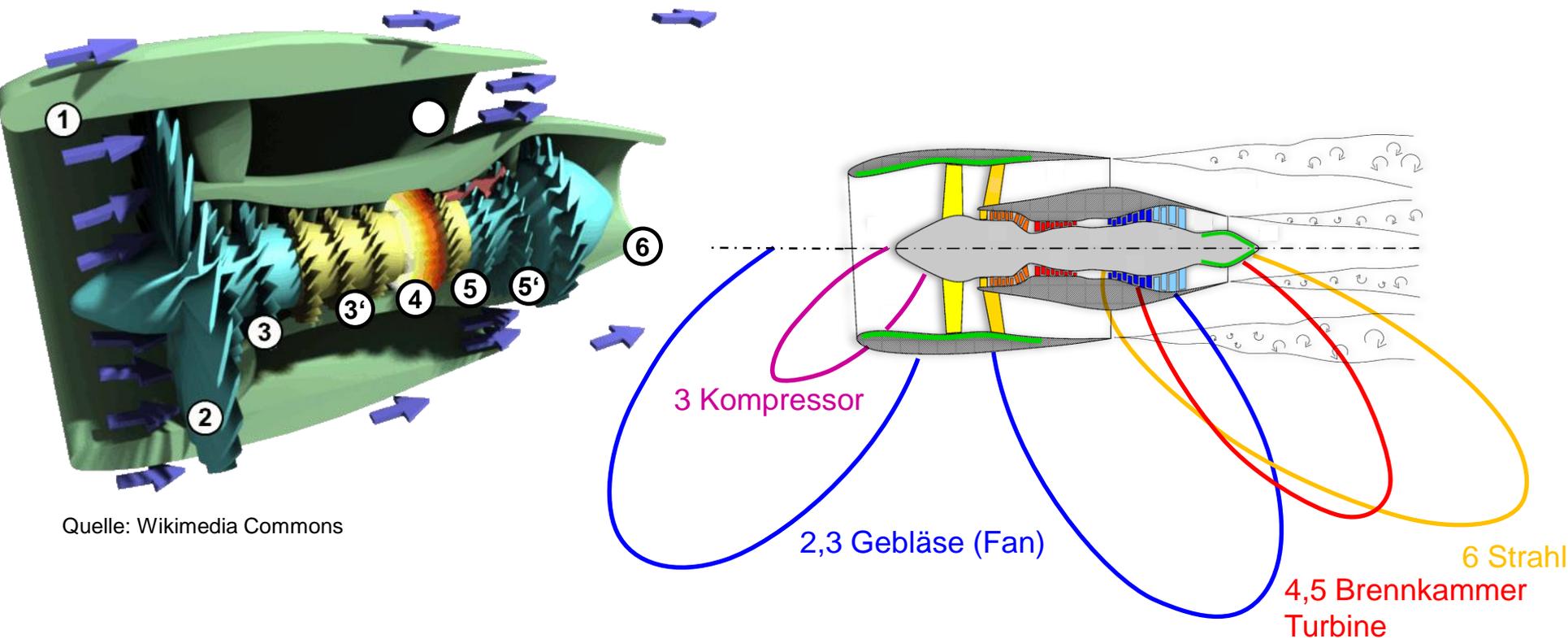


Quelle: Wikimedia Commons

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Hintergrund: tonale Schallanregung in axialen Turbomaschinen

Quellen am Triebwerk und Richtcharakteristiken schematisch



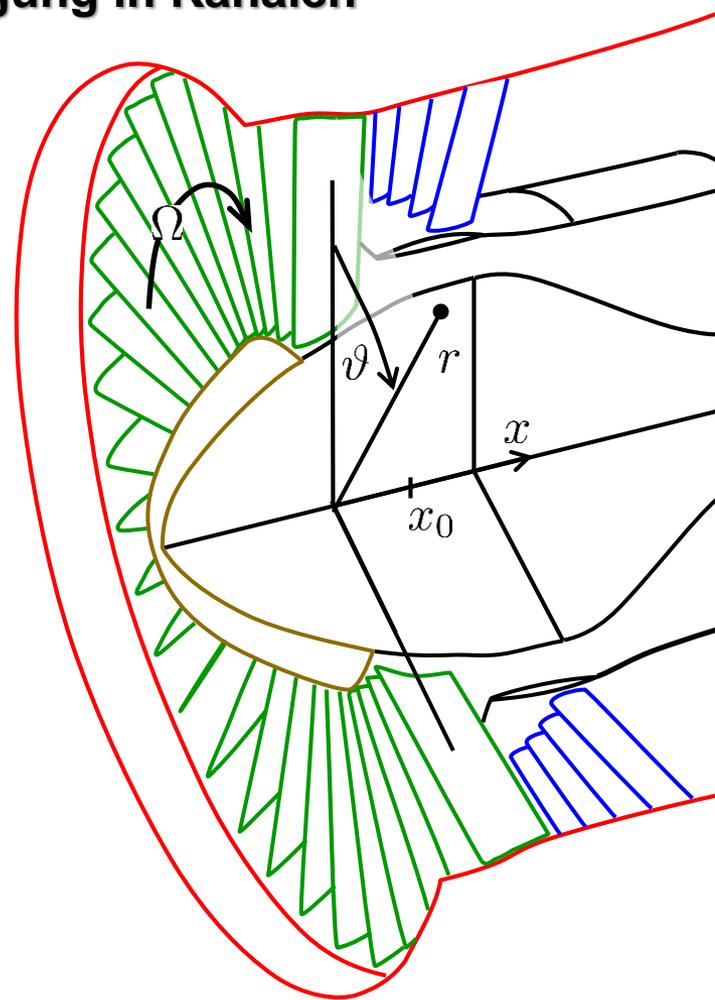
Beispiel: Schallabstrahlung Triebwerk mit hohem Nebenstromverhältnis

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Tonschallberechnung von Rotor-Stator Kombination

- a) Welche Druckfelder werden angeregt?
- b) Wie propagiert der Schall durch den Kanal?

Rotor mit B Schaufeln rotiert mit Winkelgeschw. Ω
stromauf des Stators mit V Schaufeln



a) Welche Druckfelder werden angeregt?

Ohne Rotor wäre Statordruckfeld periodisch mit
Schaufelteilung $2\pi/V$ in ϑ

$$p(\vartheta, x = x_0, r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \cos \left[-kV\vartheta + \varphi_k(r) \right]$$

Amplitudenmodulation vom Rotor mit Schaufelteilung $2\pi/B$ in ϑ

$$a_k(\vartheta, t, r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu k}(r) \cos \left[\nu B(-\vartheta + \Omega t) + \varphi_{\nu}(r) \right]$$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$p(\vartheta, t, x = x_0, r) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k} \left\{ \cos [\nu B(-\vartheta + \Omega t) - kV\vartheta + \varphi_{\nu}(r) + \varphi_k(r)] + \right. \\ \left. + \cos [\nu B(-\vartheta + \Omega t) + kV\vartheta + \varphi_{\nu}(r) - \varphi_k(r)] \right\}$$

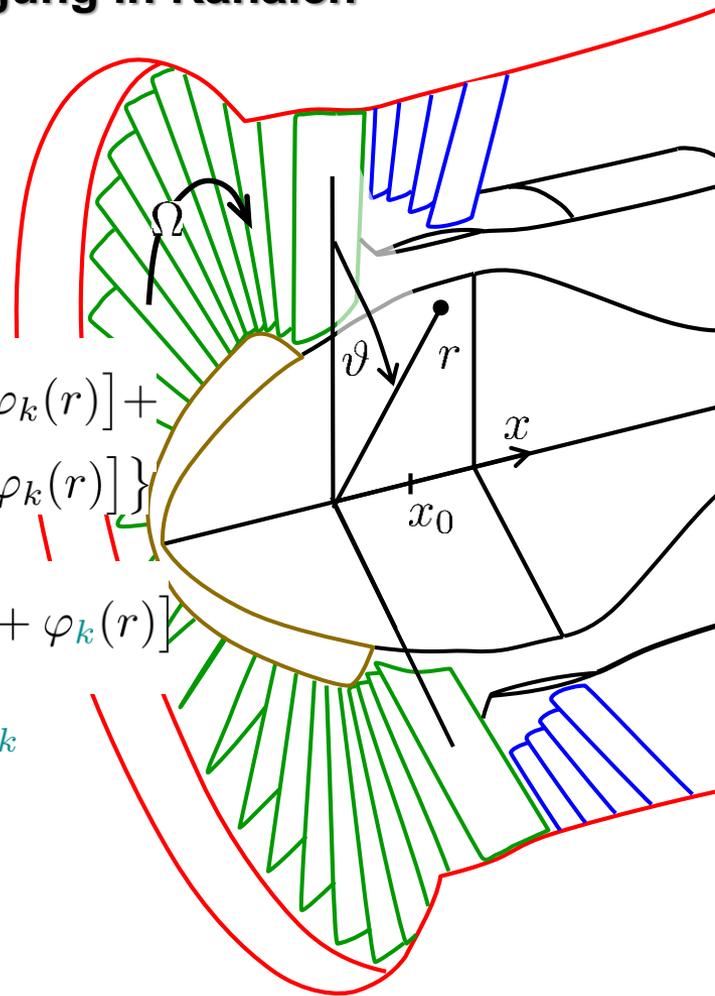
$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{\nu k} \cos [\nu B(-\vartheta + \Omega t) - kV\vartheta + \varphi_{\nu}(r) + \varphi_k(r)]$$

$$\text{mit } a_{\nu(-k)} = a_{\nu k}, \varphi(-k) = -\varphi_k$$

Einführung neuer Index $m := \nu B + kV$ und

Umnummerierung der Koeffizienten $a_{\nu k}$ zu neuem

Koeffizienten $A_{m\nu} := a_{\nu(\nu B + kV)}/2$



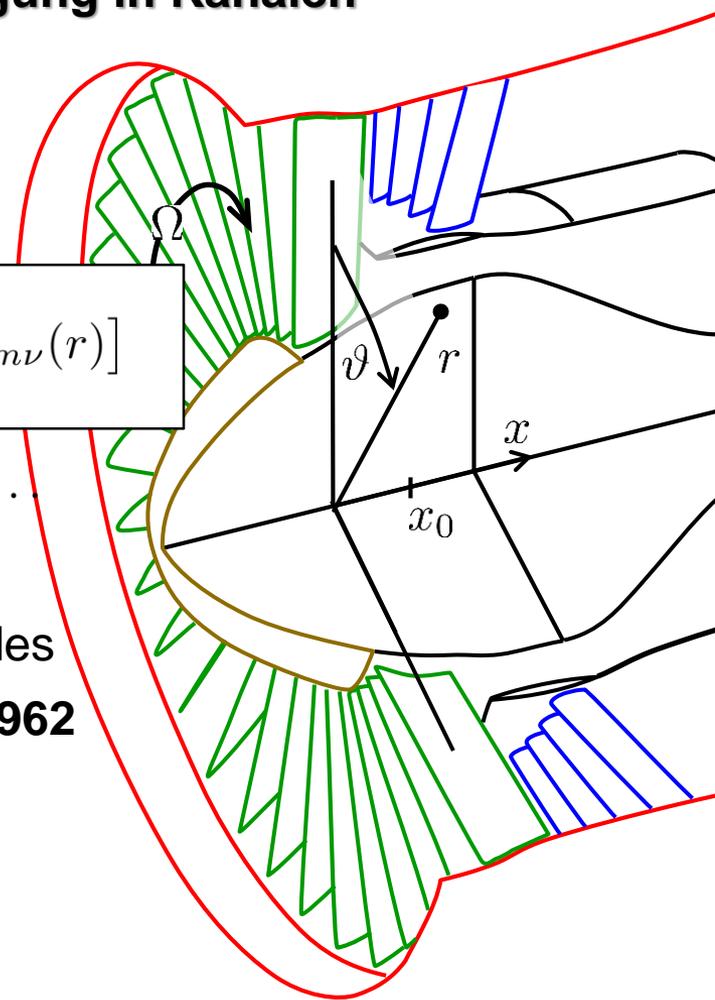
1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

$$p(\vartheta, t, x = x_0, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{m\nu}(r) \cos [\nu B \Omega t - m\vartheta + \varphi_{m\nu}(r)]$$

$$m := \nu B + kV; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Beschreibung von Druckstruktur des Wechseldruckfeldes
von Rotor und Stator

TYLER/SOFRIN, 1962



! Bemerkung: in der Summe über $m := \nu B + kV$ sind in der Regel nicht alle $m \in \mathbb{Z}$ enthalten (**lückenhafter Index!**), d.h. nicht alle Rotor/Statorkombinationen erzeugen alle denkbaren Umfangsmoden

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Komplexe Darstellung der durch Rotor – Stator Interaktion erzeugten Druckverteilung an der Quelle:

$$p(\vartheta, t, x = x_0, r) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{A_{m\nu}(r) \exp(i[\omega_\nu t - m\vartheta + \varphi_{m\nu}(r)])}_{=: \hat{p}_{m\nu}} \right\}$$

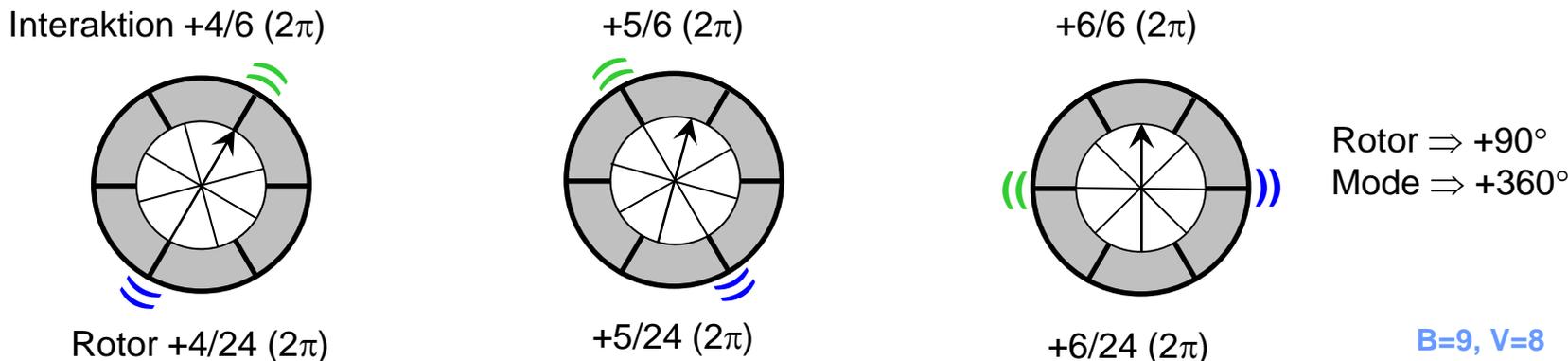
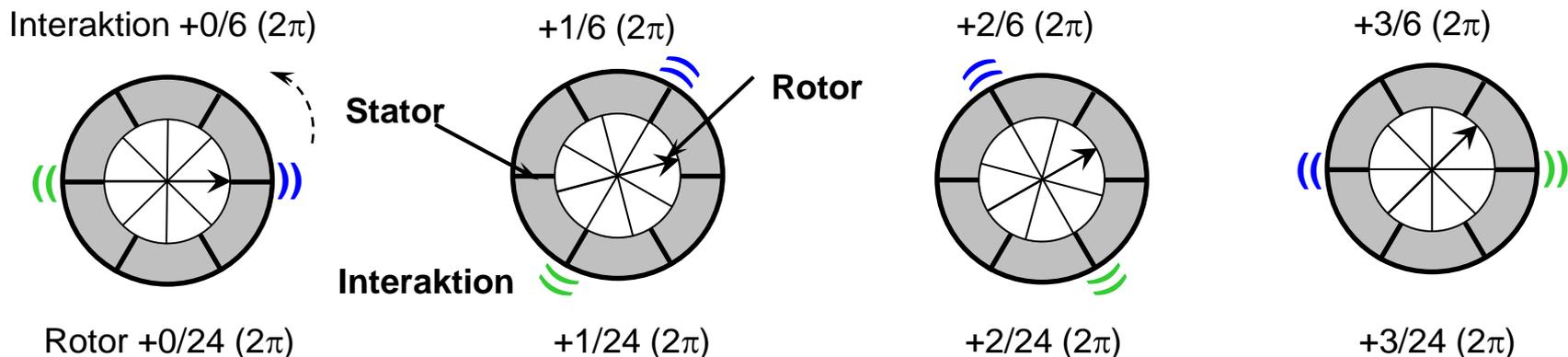
$\omega_\nu := \nu B\Omega$

- $\operatorname{Re}\{\hat{p}_{m\nu}\}$
 - m -te räumliche Komponente (Mode)
 - ν -te zeitliche Komponente

der instationären Druckverteilung bei x_0
- Fall “Rotor ohne Stator” ($V=0$) eingeschlossen
- Repräsentiert eine in Umfangsrichtung laufende Mode:
 - $m > 0$ - Mode läuft in Drehrichtung des Rotors
 - $m < 0$ - Mode läuft entgegengesetzt der Drehrichtung des Rotors
 - Mode (der Ordnung m) rotiert mit Winkelgeschwindigkeit: $\omega_{m\nu} := \frac{\omega_\nu}{m} = \frac{\nu B\Omega}{m}$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

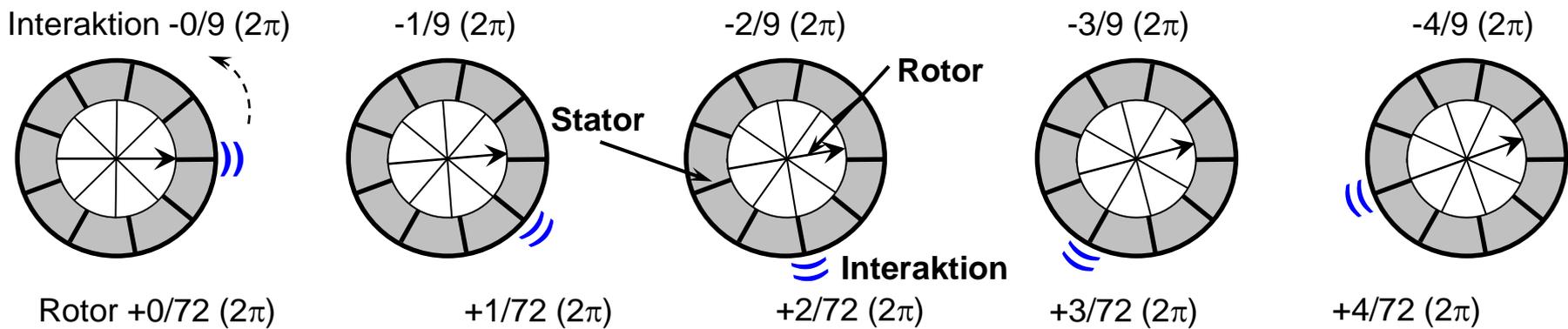
- Beispiel 1 ($B > V$): Rotor – Stator Interaktion $B=8, V=6$
- Für $\nu=1$ (Fundamentale) ergibt sich die Mode mit *niedigster Ordnung* (mit $k=-1$) zu $m=2$.
- Rotationsgeschwindigkeit $4\Omega > 0$ (in Richtung des Rotors – ‘**co-rotating mode**’!)



Rotor-Stator Interaktion nach TYLER/SOFRIN /5/

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Beispiel 2 ($B < V$): Rotor – Stator Interaktion $B=8, V=9$
- Für $v=1$ (Fundamentale) ergibt sich die Mode mit *niedigster Ordnung* (mit $k=-1$) zu $m=-1$.
- Rotationsgeschwindigkeit $-8\Omega < 0$ (entgegen Drehrichtung des Rotors – ‘counter-rotating mode’!)



Rotor $\Rightarrow +45^\circ$
Mode $\Rightarrow -360^\circ$

$B=14, V=15$

Rotor-Stator Interaktion nach TYLER/SOFRIN /5/

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

b) Wie propagiert der Schall durch den Kanal?

Voraussetzungen

- Ringkanal äußerer Radius R , innerer Radius ηR , ($0 < \eta < 1$), schallhart
- Stationäre Parallelströmung U entlang $+x$ (Kanalachse)

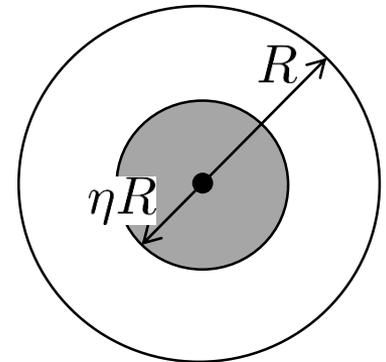
Wellengleichung für den Schalldruck

- „konvektiver Wellenoperator“

$$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{D^2 p'}{Dt^2} - \Delta p' = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$$

- spektral und in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{a_\infty^2} \left(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \hat{p} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \hat{p} = 0$$



1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Lösungsansatz

- Separation der Variablen

$$p'(x, r, \vartheta, t) = \underbrace{A X(x) f(r) \Theta(\vartheta)}_{\hat{p}} e^{i\omega t}$$

$$\hat{p}(\vartheta, x, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp(-i\alpha_m x) f_m(r) \exp(-im\vartheta)$$

\hat{p} – komplexe Amplitude des Schalldrucks

- $x = \text{const} \Rightarrow$ Wellenausbreitung in ϑ , $\vartheta = \text{const} \Rightarrow$ Wellenausbreitung in x
 \Rightarrow Kombination aus rotierendem und axial fortschreitendem Druckfeld
- Einsetzen in Wellengleichung \Rightarrow Separationskonstante C_m^2

$$\underbrace{\left[\frac{a_\infty^{-2} \left(i\omega + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}}{X(x)} \right]}_{-a_\infty^{-2} (\omega - \alpha_m U)^2 + \alpha_m^2} = \frac{\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right] f_m}{f_m} =: -C_m^2$$

Problem periodisch in $\vartheta \Rightarrow$
 $\Theta(\vartheta) = \exp(-im\vartheta)$, $m \in \mathbb{Z}$

Problem homogen in $x \Rightarrow$
 $X(x) = \exp(-i\alpha_m x)$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

$$-a_\infty^{-2} (\omega - \alpha_m U)^2 + \alpha_m^2 = \frac{\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right] f_m}{f_m} =: -C_m^2$$

- Quadratische Gl. für axiale Wellenzahlkomponente α_m

$$\alpha_m^2 = k^2 \left(1 - \frac{\alpha_m U}{\omega} \right)^2 - C_m^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_m^\pm = \frac{k}{1 - M^2} \left[-M \pm \sqrt{1 - (1 - M^2) \frac{C_m^2}{k^2}} \right]$$

$$k := \omega / a_\infty$$

- Bessel'sche DGL für radiale Moden f_m

$$r^2 f_m'' + r f_m' + (r^2 C_m^2 - m^2) f_m = 0$$

vgl. Rechteckkanal
3.1.1.3 WiS

$$\hat{p}^z + C_z^2 \frac{d^2 \hat{p}^z}{dz^2} = 0$$

$$\hat{p}^y + C_y^2 \frac{d^2 \hat{p}^y}{dy^2} = 0$$

- Substitution $\rho_m := C_m r$ ergibt: $\rho_m^2 f_m'' + \rho_m f_m' + (\rho_m^2 - m^2) f_m = 0$

- mit der allgemeinen Lösung $f_m(\rho_m) = J_m(\rho_m) + Q_m Y_m(\rho_m)$

beachte (bei neg.m): $J_{-m} = (-1)^m J_m, \quad Y_{-m} = (-1)^m Y_m$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- J_m – Besselsche Funktion (Zylinderfunktion) der 1. Gattung und der Ordnung m
 Y_m – Besselsche Funktion 2. Gattung und der Ordnung m (Weberfunktion, Neumannfunktion)
- Q_m , wie auch ρ_m (bzw. C_m^2) werden als Eigenwerte aus den Randbedingungen bestimmt. Damit liegt auch α_m fest

Randbedingungen

- Funktion $f_m(r)$ wird
 - durch die Geometrie des Ringkanals (Nabenverhältnis) und
 - durch die akustischen Eigenschaften der Wand bestimmt
 - (kein Nabenkörper (kreisrundes Rohr) $\Rightarrow Q_m = 0, \forall m$)

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Randbedingung bei $r = R, r = \eta R$ bei schallharter Wand:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}(r = R) = \frac{\partial \hat{p}}{\partial r}(r = \eta R) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow f'_m(r = R) = f'_m(r = \eta R) = 0 \quad (\text{beachte: gleich bei bei pos./neg. } m)$$

- Zwei Gleichungen zur Bestimmung der n ten Nullstellen $\sigma_{mn} := C_{mn}R$ und der Konstanten Q_{mn}

$$J'_m(\sigma_{mn}) + Q_{mn}Y'_m(\sigma_{mn}) = 0, \quad J'_m(\eta\sigma_{mn}) + Q_{mn}Y'_m(\eta\sigma_{mn}) = 0$$

(numerische Lösung)

(beachte: $\sigma_{mn} = \sigma_{(-m)n}$, s.o.)

- damit ist die Wellenzahl in Achsrichtung (vgl. Gl. (189) in Grundlagen AA)

$$\alpha_{mn}^{\pm} = \frac{k}{1 - M^2} \left[-M \pm \sqrt{1 - (1 - M^2) \left(\frac{\sigma_{mn}}{kR} \right)^2} \right]$$

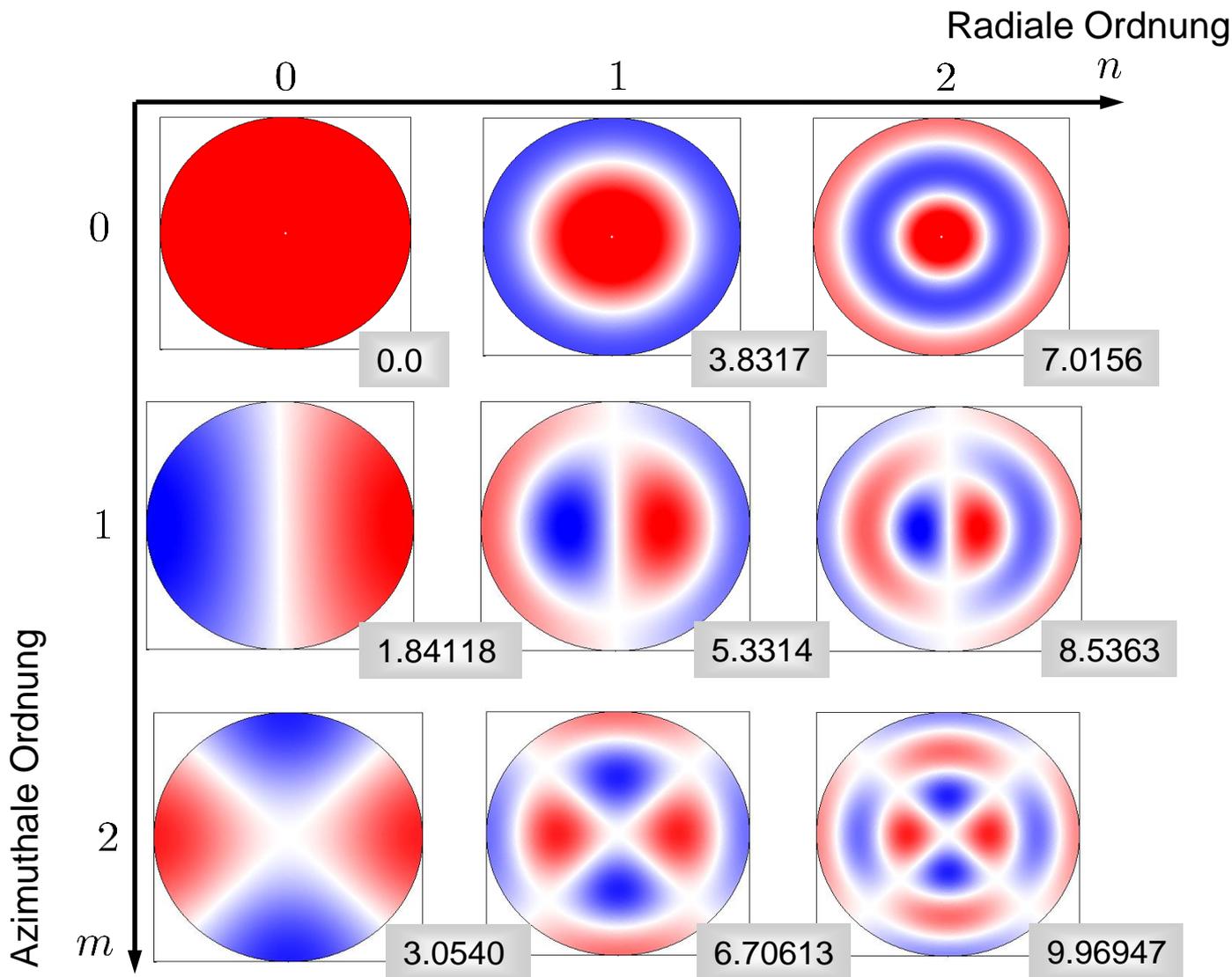
$$\hat{p}(\vartheta, x, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{mn}^+ \exp(-i\alpha_{mn}^+ x) + A_{mn}^- \exp(-i\alpha_{mn}^- x) \right) f_{mn}(r) \exp(-im\vartheta)$$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

$$\eta = 0$$

$$J_n(r) \exp(-im\vartheta)$$

$$\sigma_{mn} =$$



Modenstruktur und Eigenwerte σ_{mn} für kreiszylindrische Rohr, nach Stahl /4/

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

$$\hat{p}(\vartheta, x, r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{mn}^+ \exp(-i\alpha_{mn}^+ x) + A_{mn}^- \exp(-i\alpha_{mn}^- x) \right) f_{mn}(r) \exp(-im\vartheta)$$

Diskussion der Lösung

- Mode A_{mn}^+ läuft in positive Richtung der x-Achse und stromab (in Richtung der Strömung)
 Mode A_{mn}^- läuft in negative Richtung der x-Achse und stromauf (entgegen der Richtung der Strömung)
- α_{mn} – Wellenzahlkomponente der akustischen Mode axialer Richtung x
- (m, n) - Ordnung der akustischen Mode in azimuthaler (ϑ) bzw. radialer (r) Richtung
- \Rightarrow Tonerzeugung: Quelle generiert in der Referenzebene x_0 Moden mit festgelegter Struktur und Rotationsgeschwindigkeit, bestimmt durch Beschau felung und Wellendrehzahl
- Erfüllt das erzeugte, rotierende Druckfeld die Wellengleichung im Sinne in axialer Richtung ausbreitungsfähiger, periodischer Druckschwankungen?

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Abkürzung:

$$\zeta_{mn} := 1 - (1 - M^2) \left(\frac{\sigma_{mn}}{kR} \right)^2$$

$$\Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm} = \frac{k}{1 - M^2} \left[-M \pm \sqrt{\zeta_{mn}} \right]$$

Fallunterscheidung :

- (1) $\zeta_{mn} \geq 0 \Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm}$ reell: beschreibt Welle, die sich für (periodische Lösungen):
- a) $\alpha_{mn}^+ > 0$: in positive x-Richtung (stromab) ungedämpft ausbreitet
 - b) $\alpha_{mn}^- < 0$: in negative x-Richtung (stromauf) ungedämpft ausbreitet

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- i. $\zeta_{mn} = 0 \Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm}$ ist reell (Sonderfall von Fall (1)); dieser Fall tritt ein, wenn:
- die akustische Wellenzahl k bzw. die Frequenz $\omega = 2\pi f = ka_{\infty}$ einen bestimmten Wert annimmt (so daß die Helmholtz-Zahl $kR = \sigma_{mn} \sqrt{1 - M^2}$):

$$f_{mn,c} = \frac{\sigma_{mn}}{2\pi R} a_{\infty} \sqrt{1 - M^2}^*$$



s.274-285

- Mode (m, n) ist nur **oberhalb** dieser Grenzfrequenz **ausbreitungsfähig**
 \Rightarrow **“Cut-On Frequency”**
- **Unterhalb** dieser Frequenz ist die akustische Mode **nicht ausbreitungsfähig**

- ii. $\zeta_{mn} = 1 \Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm}$ ist reell (Sonderfall von Fall (1)); dieser Fall tritt ein, wenn:
- Die Eigenwerte σ_{mn} verschwinden. Damit ist die Mode unabhängig von der Frequenz ausbreitungsfähig. Dies trifft für die Mode der Ordnung (0,0) zu.

*) vgl. Rechteckkanal $f_{mn,c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{d_y^2} + \frac{n^2}{d_z^2}} a_{\infty} \sqrt{1 - M^2}$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

(2) $\zeta_{mn} < 0 \Rightarrow \alpha_{mn}^{\pm}$ ist komplex und beschreibt gedämpfte Ausbreitung des räumlichen Schwingungszustandes (aperiodische Lösungen):

- Für stromab und stromauf laufende Wellen
- Zustand klingt ab in axialer Richtung
- Im Gegensatz zu (1) i. wird der Zustand als **“Cut-Off”** bezeichnet
- ‘Cut-Off Ratio’ der Mode (m, n) :

$$\xi_{mn} := \frac{f}{f_{mn,c}} = \frac{\nu B k R}{\sigma_{mn} \sqrt{1 - M^2}} = \frac{\nu B M_{tip}}{\sigma_{mn} \sqrt{1 - M^2}} \stackrel{!}{<} 1$$

$$f = \nu B \Omega / 2\pi$$

- Ist das ‘Cut-Off Ratio’ größer 1, ist die Frequenz der Mode (m, n) hoch genug, um ausbreitungsfähig zu sein (Fall (1))

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Weitere wichtige Zusammenhänge:

- Axiale Phasengeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Fläche konstanter Phase) der Mode:

$$c_{ph} = \frac{\omega}{\alpha_{mn}^{\pm}} = \frac{a_{\infty}(1 - M^2)}{-M \pm \sqrt{\zeta_{mn}}}$$

- Für $\sqrt{\zeta_{mn}} > M$ ist die axiale Phasengeschwindigkeit positiv/negativ
⇒ Transport der Information stromab/stromauf
- Gruppengeschwindigkeit (Geschwindigkeit der Einhüllenden eines Wellenpakets):

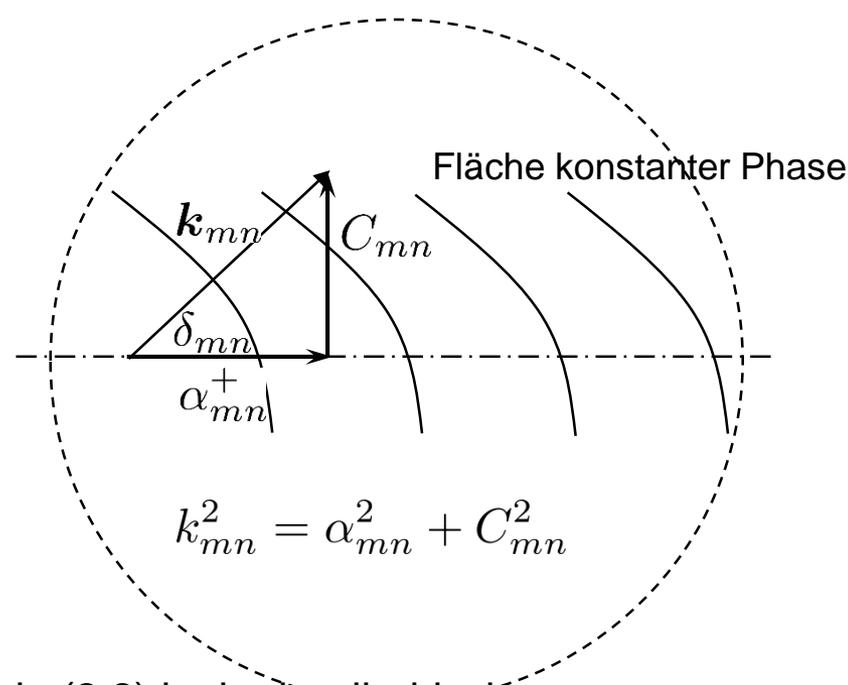
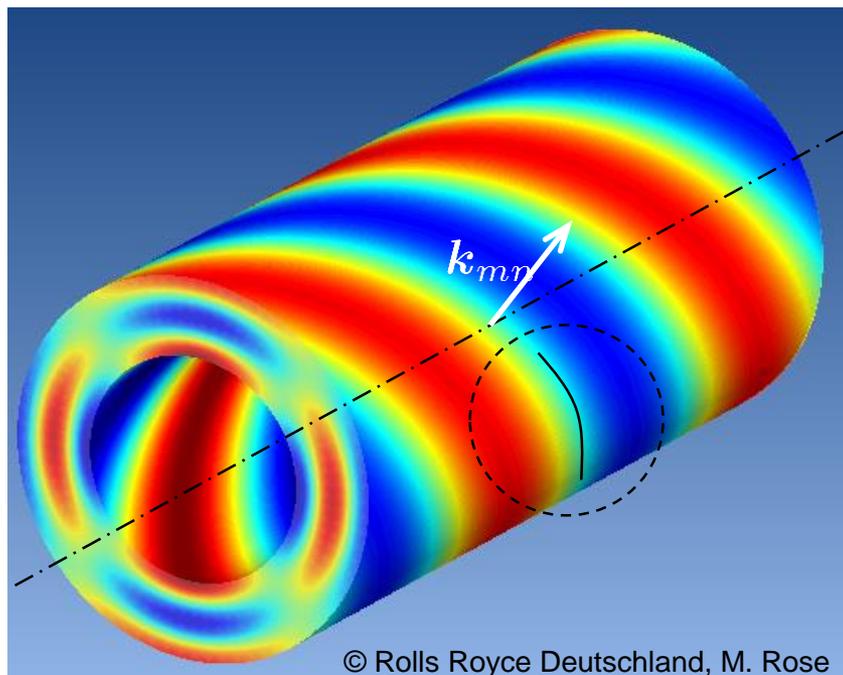
$$c_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_{mn}^{\pm}} = \frac{a_{\infty}(1 - M^2)}{-M \pm \sqrt{\zeta_{mn}}^{-1}}$$

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Für alle reellen Werte $\sqrt{\zeta_{mn}}$
Ausbreitungsrichtung wird durch Winkel δ_{mn} gekennzeichnet (oberes Vorzeichen \Rightarrow stromab):

$$\cos \delta_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{|\mathbf{k}_{mn}|} = \frac{\alpha_{mn}}{\sqrt{\alpha_{mn}^2 + C_{mn}^2}} = \frac{-M \pm \sqrt{\zeta_{mn}}}{1 \mp M \sqrt{\zeta_{mn}}}$$

(Ausbreitungsrichtung der Mode, wenn sie sich frei ausbreiten könnte, also ohne Außenberandung)



Ausbreitungsrichtung der höheren akustischen Mode (2,2) im kreiszylindrischen Ringkanal, nach Stahl /4/

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

- Ausbreitungswinkel ist von der Mach-Zahl und der Frequenz abhängig
- Ist die Frequenz oberhalb der Grenzfrequenz $f_{mn,c}$ sind verschiedene Ausbreitungswinkel möglich, je nach Laufrichtung der Schallwelle ($\alpha_{mn}^+/\alpha_{mn}^-$, stromab/stromauf)
- Ausbreitungswinkel bei Grenzfrequenz ($\zeta_{mn} = 0$, “Cut-On”):

$$\cos \delta_{mn} = -M$$

- Bei diesem Winkel wird der Energietransport der stromauf laufenden Welle (α_{mn}^-) durch die Strömungsgeschwindigkeit kompensiert, und $c_{gr} \rightarrow 0$
- **Resonanz!** Schallenergie wird nicht abtransportiert \Rightarrow Schalldruck im Rohr wird sehr groß

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Einige Auslegungsregeln

1. Anzahl der Rotoren / Statoren keine Vielfache voneinander ⇒ Vermeidung der Mode $(m, n) = (0, 0)$ bei kleinen Werten von $\nu, |k|$ $m = \nu B + kV \neq 0$
2. V so groß wählen, daß Fundamentale $\nu = 1$ (Blattfolgefreq.) „cut-off“ ist*
3. V gewählt, so daß auch höhere Harmonische „cut-off“ sind ist prinzipiell möglich, aber selten realisierbar
4. Abstand zwischen Rotor/Stator (Stator/Rotor) möglichst groß wählen (Interaktion Nachlauf/Potentialfeld mit Rotor bzw. Stator minimieren)

*) betrachte cutoff-ratio $\xi_{mn}^2 = \frac{(\nu B)^2 M_{tip}^2}{\sigma_{mn}^2 (1 - M^2)} \stackrel{!}{<} 1$ bzw. $\frac{M_h^2 - M^2}{1 - M^2} \stackrel{!}{<} \frac{\sigma_{mn}^2}{(\nu B)^2}$

$M_h = \sqrt{M_{tip}^2 + M^2}$ „helikale Blattspitzenmachzahl“. Erweitert:

$$\frac{M_h^2 - M^2}{1 - M^2} \stackrel{!}{<} \frac{\sigma_{mn}^2}{m^2} \left(1 + \frac{kV}{\nu B}\right)^2, \text{ für Fundamentale also } \frac{M_h^2 - M^2}{1 - M^2} \stackrel{!}{<} \frac{\sigma_{mn}^2}{m^2} \left(1 + k \frac{V}{B}\right)^2$$

* beachte₁ : linke Seite für subsonische Rotoren <1 und es gilt $\sigma_{mn} > |m|$. Daher macht Wahl $V > 2B$ Fundamentale cutoff (beliebige k)!

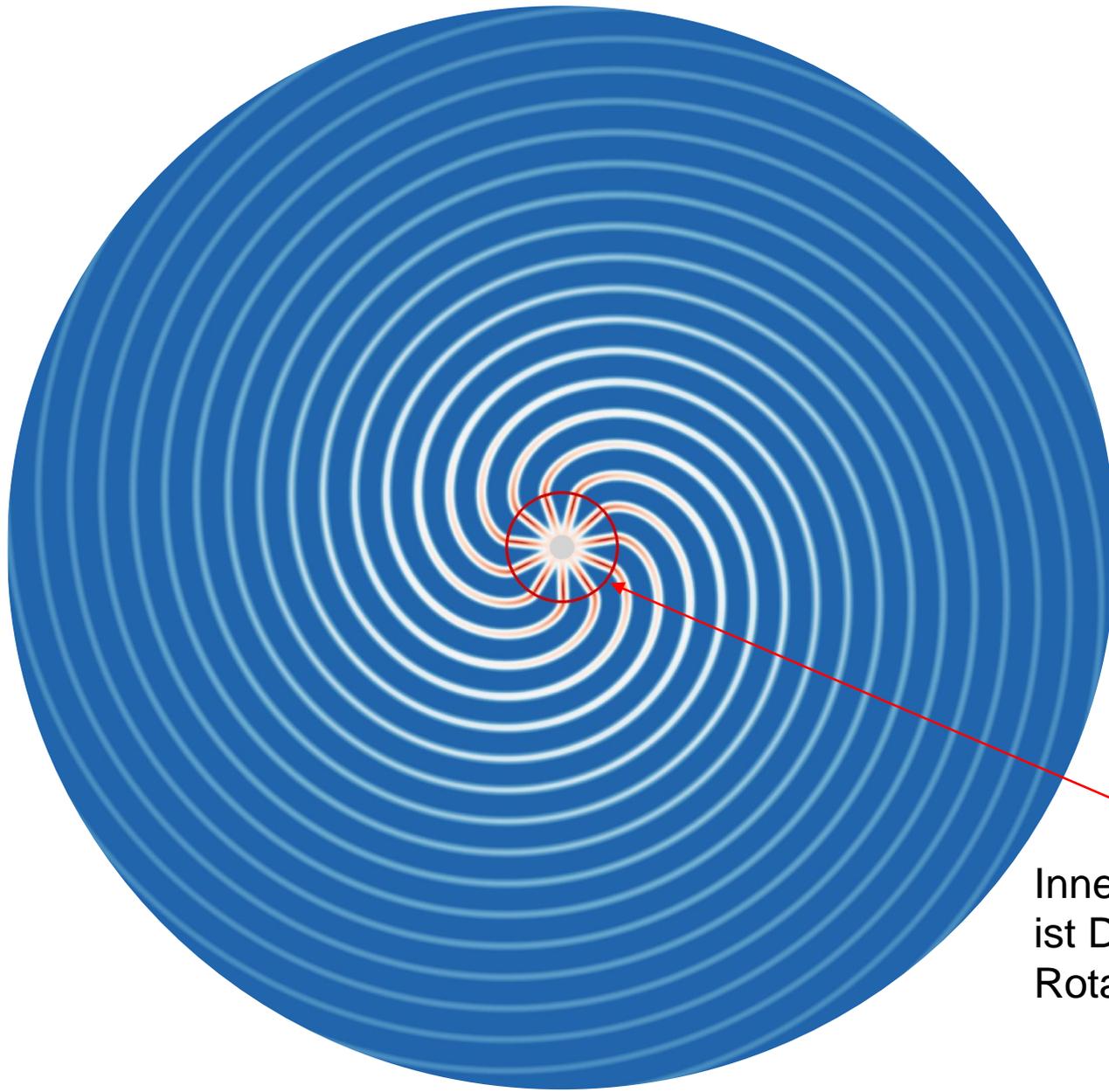
* beachte₂: subsonische Rotoren ($V=0$) komplett cutoff (kein Tonschall)!

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

Weiterführende Literatur

- /1/ Hubbard, H. H.: Aeroacoustics of flight vehicles: theory and practice, volume 1: noise sources. NASA Reference publication 1258, vol.1, WRDC technical report 90-3052, 1991.
- /2/ Munjal, M. L.: Acoustics of ducts and mufflers. John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- /3/ Smith, M. J. T.: Aircraft noise. Cambridge university press, 1989.
- /4/ Stahl, B.: Experimenteller Beitrag zur Schallerzeugung durch die Turbulenz in einer Rohrströmung hinter einer un stetigen Querschnittserweiterung. Forschungsbericht DFVLR-FB 86-06, 1986.
- /5/ Tyler, J. M.; Sofrin, T. G.: Axial flow compressor noise studies. SAE Transaction 70, 1962, pp 309-332.

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen

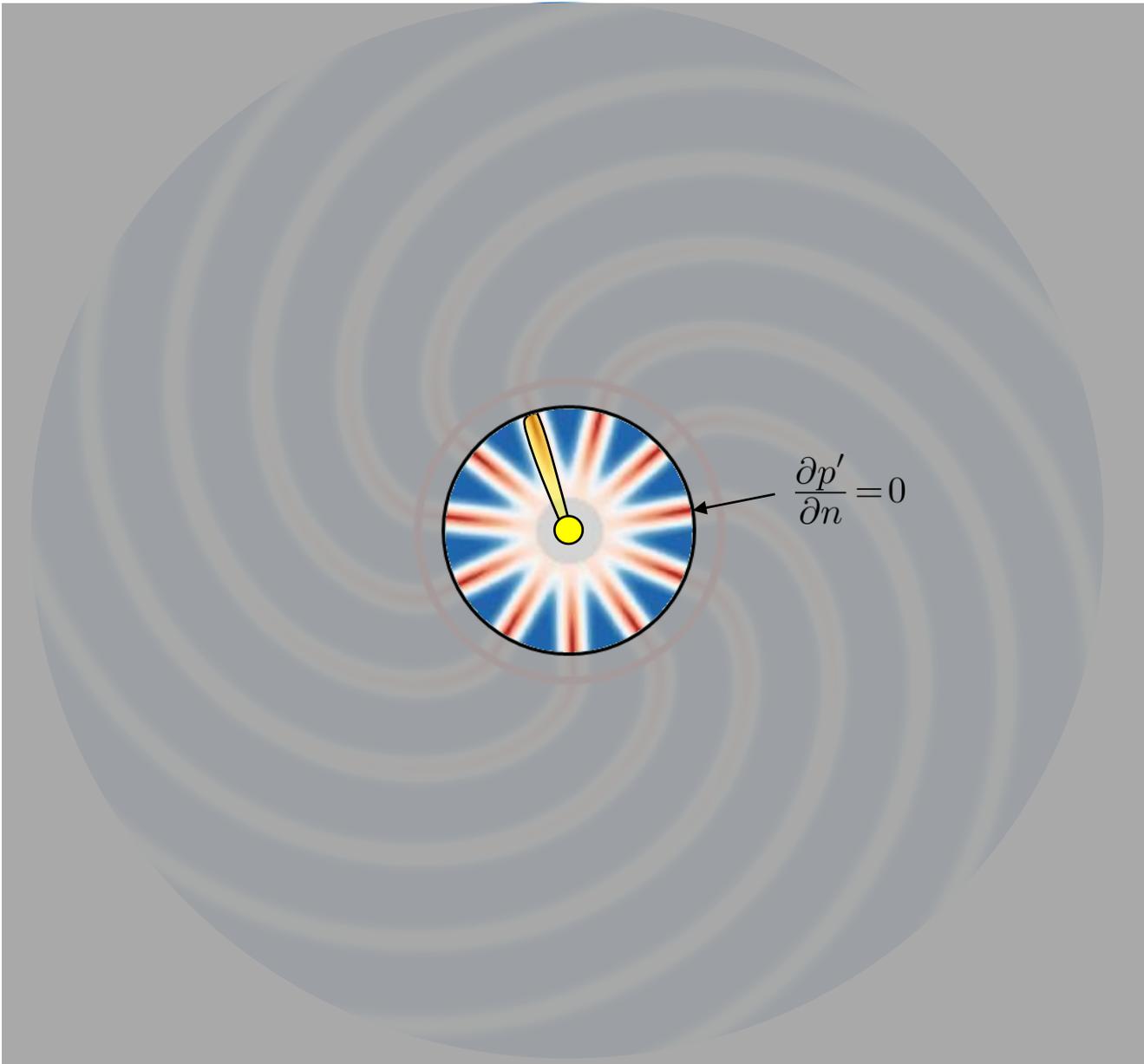


freier Rotor
ohne Kanal
(Propellerschall)



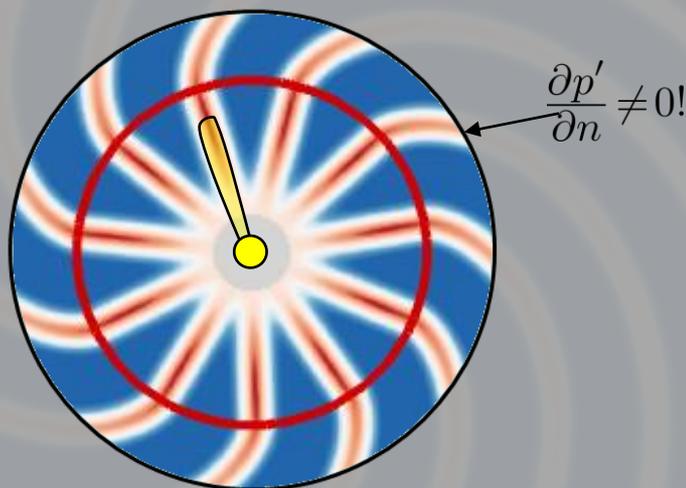
Innerhalb **sonischen Kreises**
ist Drucksignatur an Starrkörper-
Rotation des Blatts gebunden

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



bleibt Rotor und
Druckmuster innerhalb
sonischen Kreises
keine Schallausbreitung
in Kanal (cutoff)

1.1.1.3 Tyler-Sofrin Regel für Rotor- Stator Auslegung in Kanälen



Ist Kanalradius größer
als sonischer Radius
sind progierende
Druckmuster innerhalb
Kanal
→ Schallausbreitung

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Aufgabe: Löse Helmholtzgleichung $k^2 \hat{p} + \Delta \hat{p} = -\hat{Q}_p^*$

für Außenraumproblem mit beliebigen Objekten B mit allg. Oberflächenrandbedingungen (Robin):

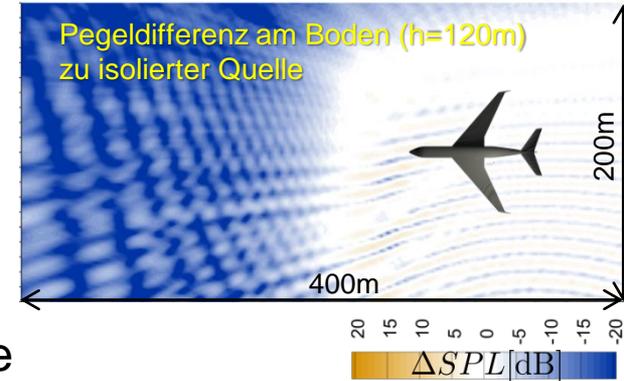
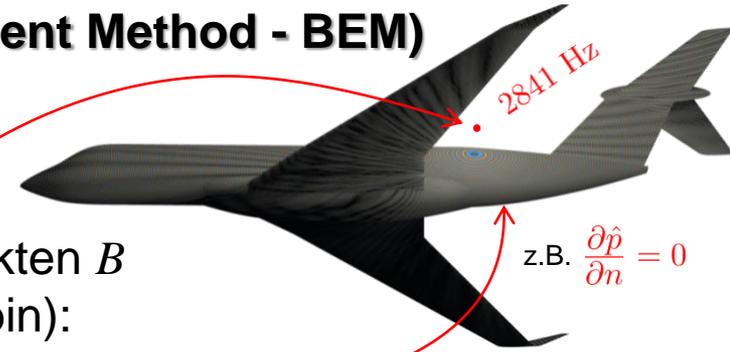
$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = -ik\rho_\infty a_\infty (\hat{a}\hat{p} + \hat{v}_n^{vib})$$

Problem: keine Green'sche Funktion bekannt

Lösung: transferiere tatsächliche Problemstellung in künstliches Freifeldproblem durch Aufnahme der Objekte in das Rechengebiet (über Heaviside Funktion, vgl. Grundlagenvorlesung) und nutze (bekannte) Freifeld-Green'sche Funktion \hat{G}_0 für die Helmholtzgleichung

$$(129): \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) = - \int_{V_s} \hat{Q}_p(\boldsymbol{\xi}, \omega) \hat{G}_0 dV(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\partial V_B} \hat{p} \frac{\partial \hat{G}_0}{\partial n} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} \hat{G}_0 dS(\boldsymbol{\xi})$$

*) nach Lighthillanalogie $\hat{Q}_p = \nabla \cdot \nabla \cdot [\widehat{\rho v v} - \hat{\tau}] - k^2 (\hat{p} - a_\infty^2 \hat{\rho})$



1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

nach Einsetzen von \hat{G}_0 in (129):

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \frac{\hat{Q}_p \exp(-ikr)}{r} dV(\xi) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V_B} \left[(ikr+1) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\hat{p}}{r} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} \right] \frac{\exp(-ikr)}{r} dS(\xi)$$

$r = |\mathbf{x} - \xi|$; \mathbf{n} weist nach außerhalb von V_B

→ benötigt: $\hat{p}, \frac{\partial \hat{p}}{\partial n}$ auf Wand (rechte Seite)!

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_{\xi} r = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r$$

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial n} = -ik\rho_{\infty} a_{\infty} (\hat{a} \hat{p} + \hat{v}_n^{vib})$$

noch unbekannt!
(Lösung selbst wird auf
Wand benötigt: implizites
Problem)

wesentlicher Schritt: wähle Beobachterposition \mathbf{x} auf Wand, $\mathbf{x} \in \partial V_B$

→ Integralgleichung für \hat{p} auf ∂V_B

beachte:

Wenn \mathbf{x} auf Rand liegt, läuft Oberflächenintegrationsvariable ξ irgendwann gegen \mathbf{x} , d.h. $r \rightarrow 0$ Singularität!

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Beitrag Oberflächenintegral $I_1 := \int_{\partial V_B} \frac{\exp(-ikr)}{r} (ikr + 1) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r \frac{\hat{p}}{r} dS(\xi)$ für $r \rightarrow 0$

Für Teilfläche $\Delta S \in \partial V_B$: $I_1(r \rightarrow 0) = \int_{\Delta S} \hat{p}(\xi \rightarrow \mathbf{x}) \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS(\xi) = \hat{p}(\mathbf{x}) \underbrace{\int_{\Delta S} \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS(\xi)}_{\hat{p} \text{ stetig}} =: \Phi$

Für Φ betrachte \mathbf{x} in Abstand $\varepsilon\sqrt{\Delta S} \rightarrow 0$ von ΔS :

Für stetige Oberflächen sind über alle lokalen Teilflächen $\Delta S(\xi)$ mit Ausdehnung $\sqrt{\Delta S} \ll R(\xi)$ (kleinerer Hauptkrümmungsradius an lokaler Kontur) Krümmungseffekte asymptotisch klein (ΔS quasi eben).

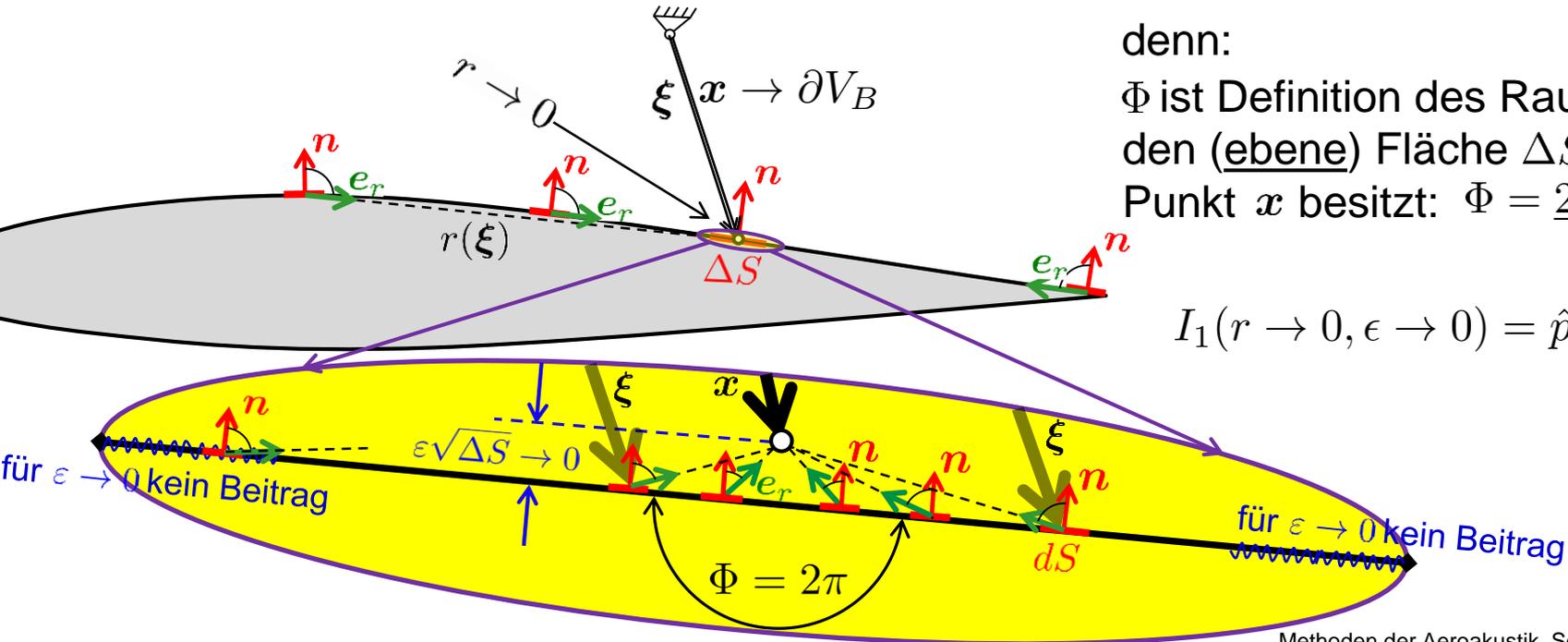
$\mathbf{e}_r \perp \mathbf{n} \Rightarrow I_1 = 0?$ nein!

denn:

Φ ist Definition des Raumwinkels, den (ebene) Fläche ΔS bezgl.

Punkt \mathbf{x} besitzt: $\Phi = 2\pi$

$$I_1(r \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0) = \hat{p}(\mathbf{x}) 2\pi$$



1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

betrachte zweiten Teil des Oberflächenintegrals:

$$I_2(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V_B} \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} \frac{\exp(-ikr)}{r} dS(\xi)$$

In der Umgebung $\Delta S(\xi \rightarrow \mathbf{x})$ der singulären Stelle $\xi \rightarrow \mathbf{x}$ ergibt das Integral

$$I_2(r \rightarrow 0) = 0 \quad , \text{ da } dS(\xi) \sim r^2 d\Phi$$

⇒ Integralgleichung für \hat{p} :

"unter Ausschluss der Singularität bei $r = 0$ (Cauchy'scher Hauptwert)"

$$2\pi\hat{p}(\mathbf{x}) = \int_{V_s} \frac{\hat{Q}_p(\xi) \exp(-ikr)}{r} dV(\xi) + \oint_{\partial V_B} \frac{\exp(-ikr)}{r} \left[(ik+r^{-1}) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} \right] \hat{p} dS(\xi) + \int_{\partial V_B} \frac{\exp(-ikr)}{r} ik\rho_\infty a_\infty v_n^{vib} dS(\xi) \quad \mathbf{x} \in \partial V_B \quad (291)$$

BEM Grundgleichung

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Kleiner Exkurs in Raumakustik

Betrachte Wirkung von Wänden/Kanten/Ecken auf Oberflächendruckamplitude infolge einfallenden Schallfelds \hat{p}_i bei ebenen, passiven ($v_n^{vib} = 0$) Wänden

$$\left(1 - \frac{\Phi}{4\pi}\right) \hat{p}(\mathbf{x}_S) = \int_{V_s} \frac{\hat{Q}_p(\boldsymbol{\xi}) \exp(-ikr)}{4\pi r} dV + \oint_{\partial V_B} \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \left[(ik+r^{-1}) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} \right] \hat{p} dS$$

Punkt auf:

ebener Wand:



$$\Phi = 2\pi$$

$$\Rightarrow \hat{p}(\mathbf{x}_S) = 2\hat{p}_i$$

$$\Delta L_p = 6\text{dB}$$

$$\hat{p}(\mathbf{x}_S) = \frac{\hat{p}_i}{1 - \frac{\Phi}{4\pi}}$$

Innenkante:

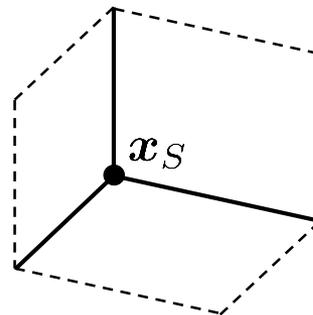


$$\Phi = 3\pi$$

$$\Rightarrow \hat{p}(\mathbf{x}_S) = 4\hat{p}_i$$

$$\Delta L_p = 12\text{dB}$$

Innenecke:



$$\Phi = \frac{7}{2}\pi$$

$$\Rightarrow \hat{p}(\mathbf{x}_S) = 8\hat{p}_i$$

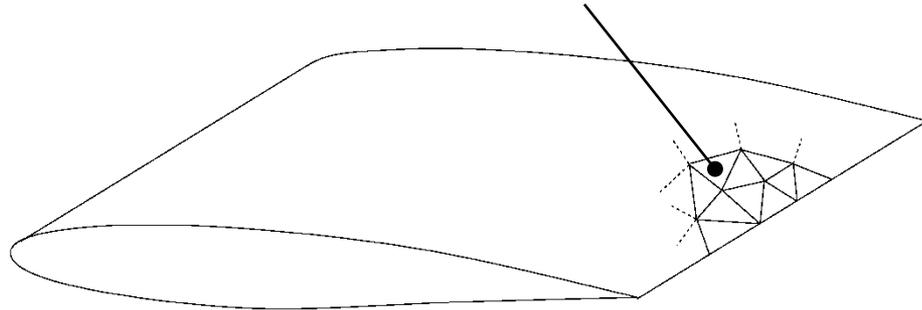
$$\Delta L_p = 24\text{dB}$$

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

4 Verfahrensschritte BEM:

(i) teile Oberfläche ∂V_B in finite Oberflächenelemente $\Delta S_j, j = 1, \dots, N$ auf,

so dass
$$\sum_{j=1}^N \Delta S_j = \partial V_B$$



(ii) führe Integration über jedem Randelement ΔS_j für Punkt x aus:

(a) p -Integral

$$:= c^p(\xi)$$

$$I_j^p(x) := - \int_{\Delta S_j} \overbrace{\frac{\exp(-ik|\mathbf{x} - \xi|)}{|\mathbf{x} - \xi|} \left[(ik + |\mathbf{x} - \xi|^{-1}) \frac{(\mathbf{x} - \xi) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \xi|} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} \right]}^{c^p(\xi)} \hat{p}(\xi) dS(\xi)$$

Mittelwertsatz: $\int_{\Delta S_j} c^p(\xi) \hat{p}(\xi) dS(\xi) = \hat{p}(\xi_c) \int_{\Delta S_j} c^p(\xi) dS(\xi)$ für einen Punkt ξ_c in ΔS_j

Näherung: $\xi_c \approx \xi_j$ (Schwerpkt des Elements) und berechne Restintegral* für jeden Punkt $x = \xi_m, m = 1, \dots, N$

*) numerisch über Quadraturformeln, z.B. 2ter, 4ter Ordnung

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Verfahrensschritte BEM:

(ii) ... mit $\mathbf{r}_m := \boldsymbol{\xi}_m - \boldsymbol{\xi}$ ist $I_j^p(\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}_m) \simeq: I_{jm}^p$ mit

$$I_{jm}^p = \underbrace{-\int_{\Delta S_j} \frac{\exp(-ik|\mathbf{r}_m|)}{|\mathbf{r}_m|} \left[(ik + |\mathbf{r}_m|^{-1}) \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}_m|} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} \right] dS(\boldsymbol{\xi})}_{=: C_{jm}^p} \hat{p}_j$$

(b) v -Integral

$$I_{jm}^v = \underbrace{\int_{\Delta S_j} \frac{\exp(-ik|\mathbf{r}_m|)}{|\mathbf{r}_m|} ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} dS}_{=: C_{jm}^v} (\hat{v}_n^{vib})_j$$

(c) Quellintegral:

$$q_m^p := \int_{V_s} \frac{\hat{Q}_p(\boldsymbol{\xi}) \exp(-ik|\mathbf{r}_m|)}{|\mathbf{r}_m|} dV(\boldsymbol{\xi})$$

} bekannt
(einfach auswerten)

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Verfahrensschritte BEM:

(ii) einsetzen in (291) gibt:

$$2\pi\hat{p}_m = q_m^p + \sum_{j=1}^N [-C_{jm}^p \hat{p}_j + C_{jm}^v (\hat{v}_n^{vib})_j] \quad \text{bzw. mit} \quad (292)$$

$$\underline{\underline{A}} := (4\pi - \Phi)\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{C}}^p \quad ; \quad \underline{\underline{R}} := \underline{\underline{q}}^p + \underline{\underline{C}}^v \underline{\underline{\hat{v}}}_n^{vib}$$

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\hat{p}}} = \underline{\underline{R}} \quad \text{lineares Gleichungssystem für Oberflächendrücke } \underline{\underline{\hat{p}}}$$

(iii) Lösung des (vollbesetzten, komplexen) linearen Gleichungssystems für $\underline{\underline{\hat{p}}}$

(iv) Nachlaufrechnung (explizit) zur Berechnung des Schalldrucks an jedem \hat{p}_n beliebigen Punkt des Außenraums :

$$\mathbf{x} \notin \partial V_B$$

$$4\pi \hat{p}(\mathbf{x}) = q^p(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N -C_j^p(\mathbf{x})\hat{p}_j + C_j^v(\mathbf{x})(\hat{v}_n^{vib})_j \quad (293)$$

$$C_j^p(\mathbf{x}) = -\int_{\Delta S_j} \frac{\exp(-ik|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} \left[(ik + |\mathbf{r}|^{-1}) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} \right] dS(\xi) \quad \text{etc.}$$

$$\mathbf{r} := \mathbf{x} - \xi$$

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Bemerkungen:

$$I_{jm}^p = - \int_{\Delta S_j} \frac{\exp(-ik|\mathbf{r}_m|)}{|\mathbf{r}_m|} \left[(ik + |\mathbf{r}_m|^{-1}) \frac{\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}_m|} + ik\rho_\infty a_\infty \hat{a} \right] dS(\xi) \hat{p}_j$$

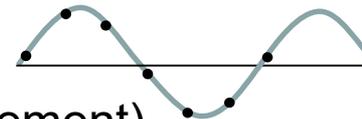
- Wahl der Größe von Elementen: Fehler der Darstellung des Felds $\hat{p}(\xi_c, \omega)$ in (291) durch Werte $\hat{p}_j = \hat{p}(\xi_j)$ am Schwerpunkt ξ_j des Elements, ergibt sich aus Betrachtung des Verlaufs von \hat{p} im Element nahe ξ_j , also $\hat{p} \sim \exp(-ike_k \cdot (\xi - \xi_j))$ wobei $e_k := \mathbf{k}/k$. Maximale Variation entlang Ausdehnung $\max(e_k \cdot (\xi - \xi_j)) \simeq l_e$. Maximale Abweichung von Schwerpunktwert über Element $\Delta \hat{p} = \hat{p}(\xi) - \hat{p}(\xi_j) \simeq [1 - \exp(ikl_e)]$ kann durch Potenzreihe von $\exp(ikl_e)$ abgeschätzt werden

$$1 - \exp(ikl_e) = \frac{(kl_e)^2}{2!} - \frac{(kl_e)^4}{4!} + \dots + i \left\{ -\frac{(kl_e)}{1!} + \frac{(kl_e)^3}{3!} - \frac{(kl_e)^5}{5!} \dots \right\}$$

schnelle Konvergenz der Reihe nur für $kl_e < 1 \Rightarrow l_e < \lambda/2\pi \simeq \lambda/6$

\Rightarrow **Elementgröße kleiner als ein Sechstel der Wellenlänge!**

(Phasenvariation über Element gering: „akustisch kompaktes“ Element)



1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Bemerkungen:

- BEM erlaubt numerische Berechnung der exakten Green'schen Fktn, wenn $\hat{Q}_p = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ gesetzt wird.
- Für Außenraumprobleme ergibt sich Problem, wenn interessierende Frequenz mit Resonanzfrequenz des Innenraums V_B für $\hat{p} = 0$ auf ∂V_B übereinstimmt. Die dazugehörige Eigenform erscheint zusätzlich in der Lösung (für das Außenproblem) und ist unphysikalisch. Damit werden die spezifizierten Randbedingungen für $\frac{\partial \hat{p}}{\partial n}$ verletzt!

Abhilfe : „Burton-Miller Korrektur“*: punktwises Erzwingen der Randbedingung für $\frac{\partial \hat{p}}{\partial n}$ auf dem Rand \Rightarrow spezielle Behandlung neu auftretender Singularitäten in Integralen notwendig.

*) A. J. Burton and G. F. Miller, *Proc. R. Soc. Lond. A* 1971 **323**, 201-210

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Vorteile BEM:

- Diskretisierung nur auf Oberfläche, obwohl 3D Problem! (3D Diskretisierung nur im Quellgebiet V_S)
- Lösung wird nur dort produziert, wo nötig
- Abstrahlungsbedingung inhärent erfüllt!

Nachteile BEM:

- Freifeld Green'sche Fktn \hat{G}_0 für Problem wird benötigt, aber evt. nicht vorhanden (konstante Strömung kann noch berücksichtigt werden)
- Gleichungssystem teuer zu lösen, da voll besetzt
- Anzahl der Elemente steigt quadratisch mit Frequenz! $N \simeq (6/\lambda)^2 A = (6f^2/a_\infty^2)A$

z.B. A340: $A = 2250 \text{ m}^2 @ 4,5\text{kHz} \Rightarrow N=1,4 \cdot 10^7 \Rightarrow 2 \cdot 10^{14}$ Matrixelemente
 single precision $\Rightarrow 8N^2 = 1.41\text{PByte}$, derzeit größter Rechner:
 „Summit“ (No.1 2019)* = 2.74 PByte!

- Alternativen:

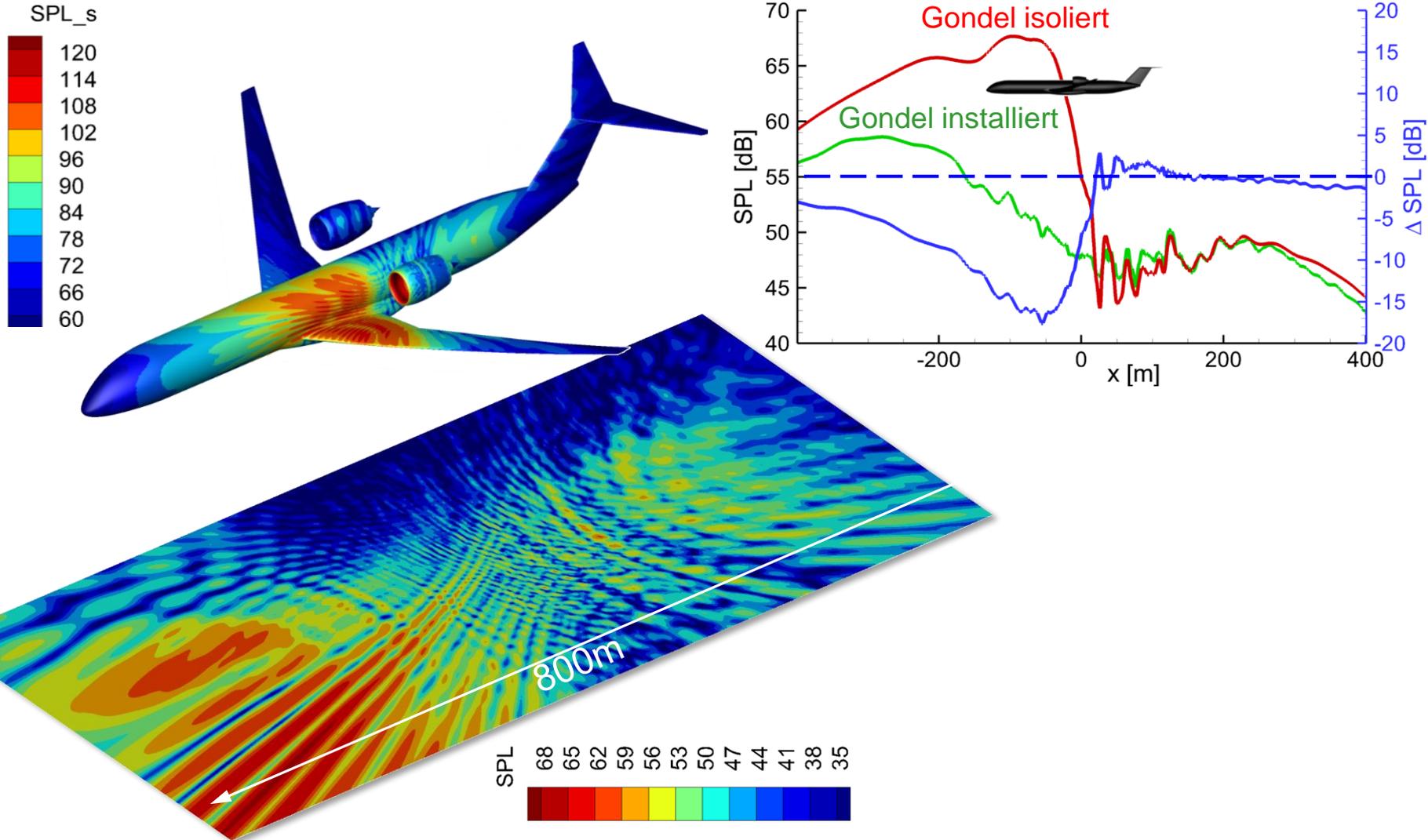
„Fast Multipole Boundary Element Method“

- Löse $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{R}}$ iterativ
 - Clustering $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{\text{nah}} + \underline{\underline{A}}^{\text{fern}}$: $N^2 \rightarrow N^{3/2}$
 - multi level octree/interpol. : $N^{3/2} \rightarrow N \log N$
- approx. ↙

*) top500: <https://www.top500.org/lists/2019/06> , 23.09.2019

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Abschattung an Flugzeugkonfiguration (vollskalig wellenauflösend)



1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Beispiele:

Hinterkantenschall:

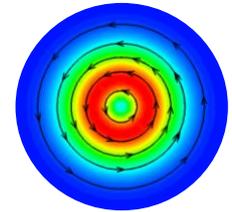
Betrachte Wirbelpassage über Hinterkante,

Annahme Parallelströmung $\mathbf{v} = u^0(y)\mathbf{e}_x + \mathbf{v}'$. Dann ist $\nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = 2\rho_\infty \frac{du^0}{dy} \frac{\partial v'}{\partial x}$

Modelliere \mathbf{v}' bzw. v' als Komponente eines Störwirbels mit Stromfunktion

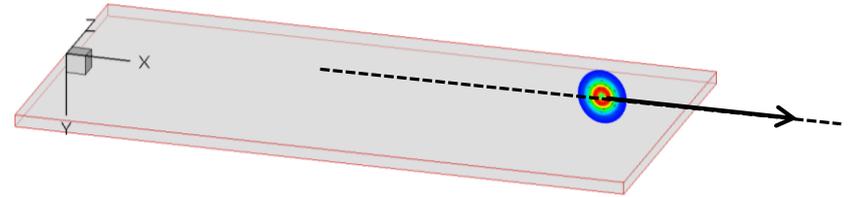
$$\psi = \frac{\sqrt{e}h_w}{\ln 4} v_{max} \mathbf{e}_z \exp\left(-\frac{\ln 2}{h_w^2} [(x - u^0(y)t)^2 + (y - d)^2 + z^2]\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}' = \nabla \times \psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = 2\frac{\ln 2}{h_w^2} \psi_z \begin{pmatrix} (x - u^0 t) \frac{du^0}{dy} t - (y - d) \\ (x - u^0 t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{T} = -2\rho_\infty \frac{1}{u} \frac{du^0}{dy} \frac{\partial v'}{\partial t} \quad \dots \text{ und Fourier-transf.: } \nabla \cdot \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} = -2\rho_\infty \frac{i\omega}{u^0} \frac{du^0}{dy} \hat{v}$$

$$\hat{v} = i \frac{\sqrt{2\pi e}}{\ln 4} \left(\frac{h_w \omega}{u^0}\right)^2 \frac{v_{max}}{\omega} \exp\left(-\frac{\ln 2}{h_w^2} [(y - d)^2 + z^2] - \frac{1}{4 \ln 2} \left(\frac{h_w \omega}{u^0}\right)^2\right) \exp[i\omega(-x/u^0)]$$

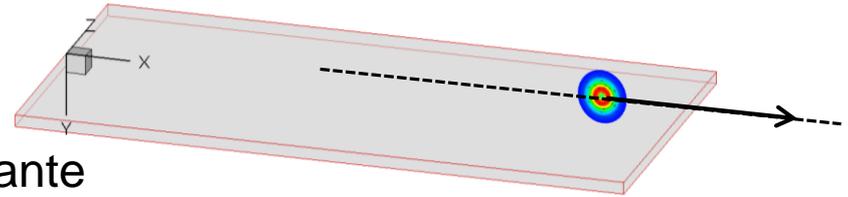


1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Beispiele:

Hinterkantenschall:

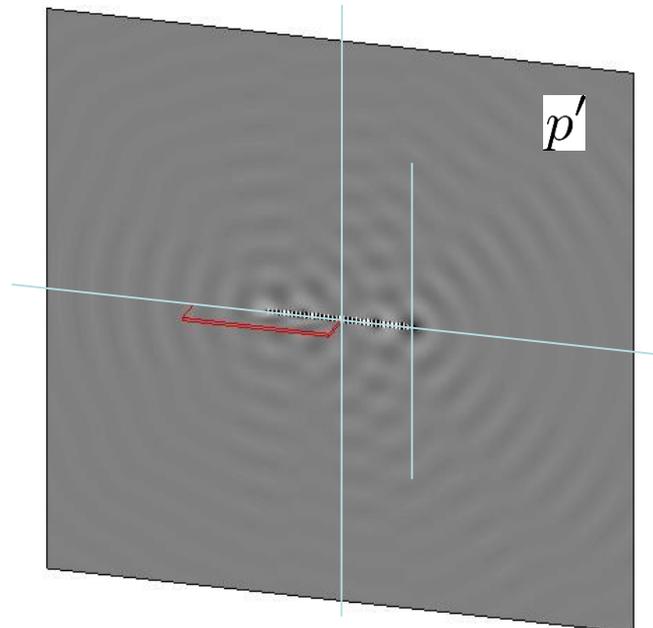
Wirbelpassage = spektral: Wirbelzug über Kante



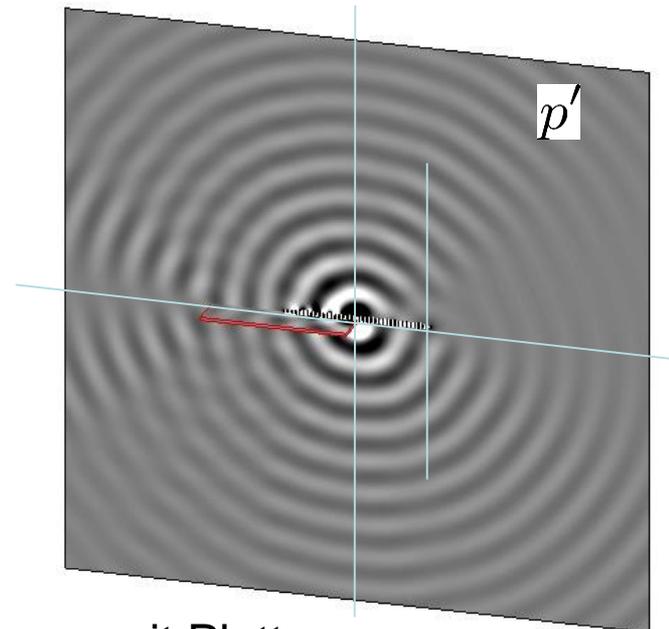
$$\hat{v} = i \frac{\sqrt{2\pi e}}{\ln 4} \left(\frac{h_w \omega}{u^0} \right)^2 \frac{v_{max}}{\omega} \exp \left(-\frac{\ln 2}{h_w^2} [(y-d)^2 + z^2] - \frac{1}{4 \ln 2} \left(\frac{h_w \omega}{u^0} \right)^2 \right) \exp [i\omega(-x/u^0)]$$

Wähle Wirbelzentrum in Schicht $d = -0.01\text{m}$ mit $u(d) = 0.7U_\infty$

Platte mit Länge 1m, Spannweite 0.5m, Dicke 0.02m, $M = \frac{U_\infty}{a_\infty} = 0.1$



1500Hz

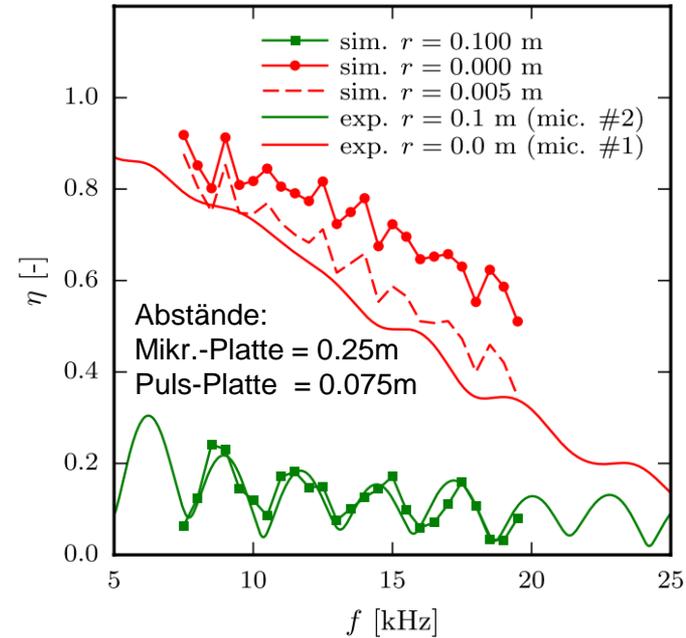
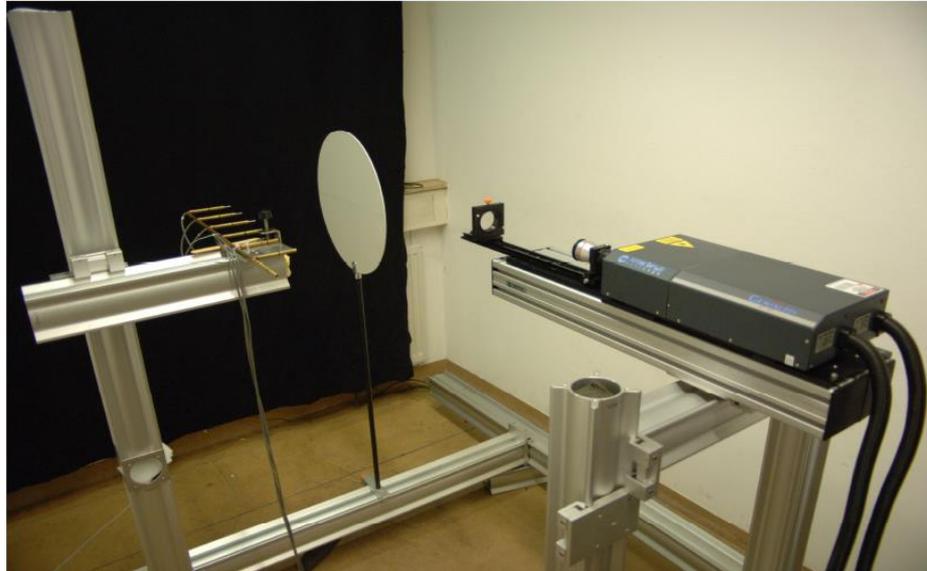


Wirbelstörung ohne Platte

Wirbelstörung mit Platte

1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Validierung an Kreisplatte



Schallquelle: Knall infolge punktfokussierten Laserpulses

(lok. Wärmeeintrag)

$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{c_p T_\infty} \left. \frac{\partial \dot{V}'}{\partial t} \right|_\tau$$

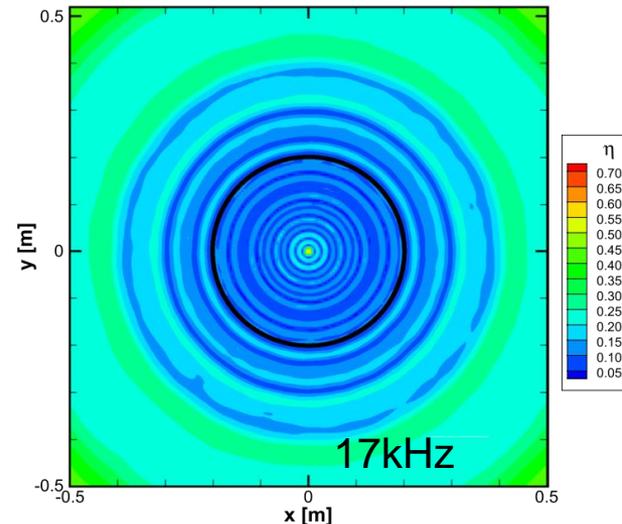
$$\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \delta(t) dt \exp(0) = 1$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(i\omega t) d\omega$$

Puls enthält alle Frequenzen!

$$\eta(f) = \frac{\langle p_S(f) \rangle}{\langle p_I(f) \rangle}$$

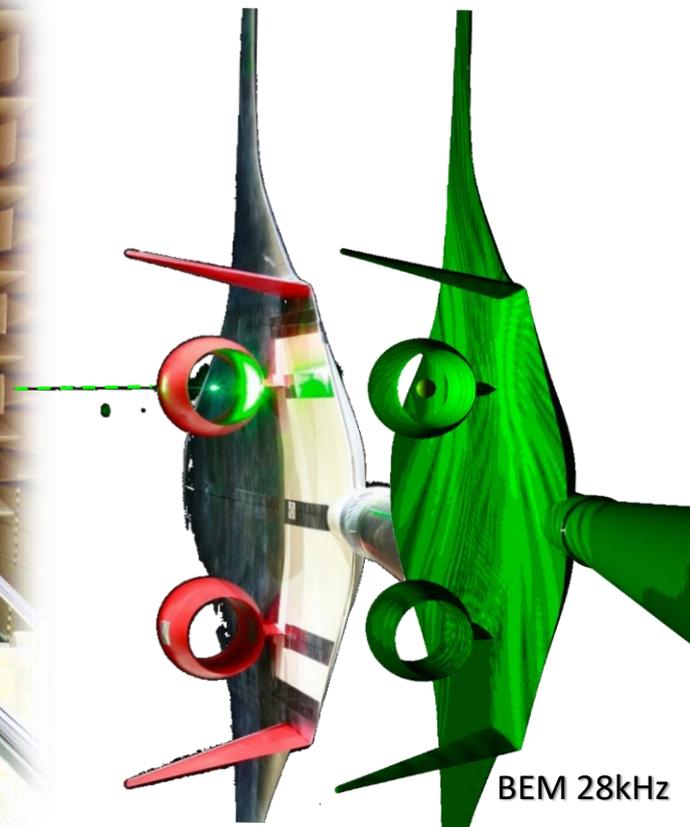
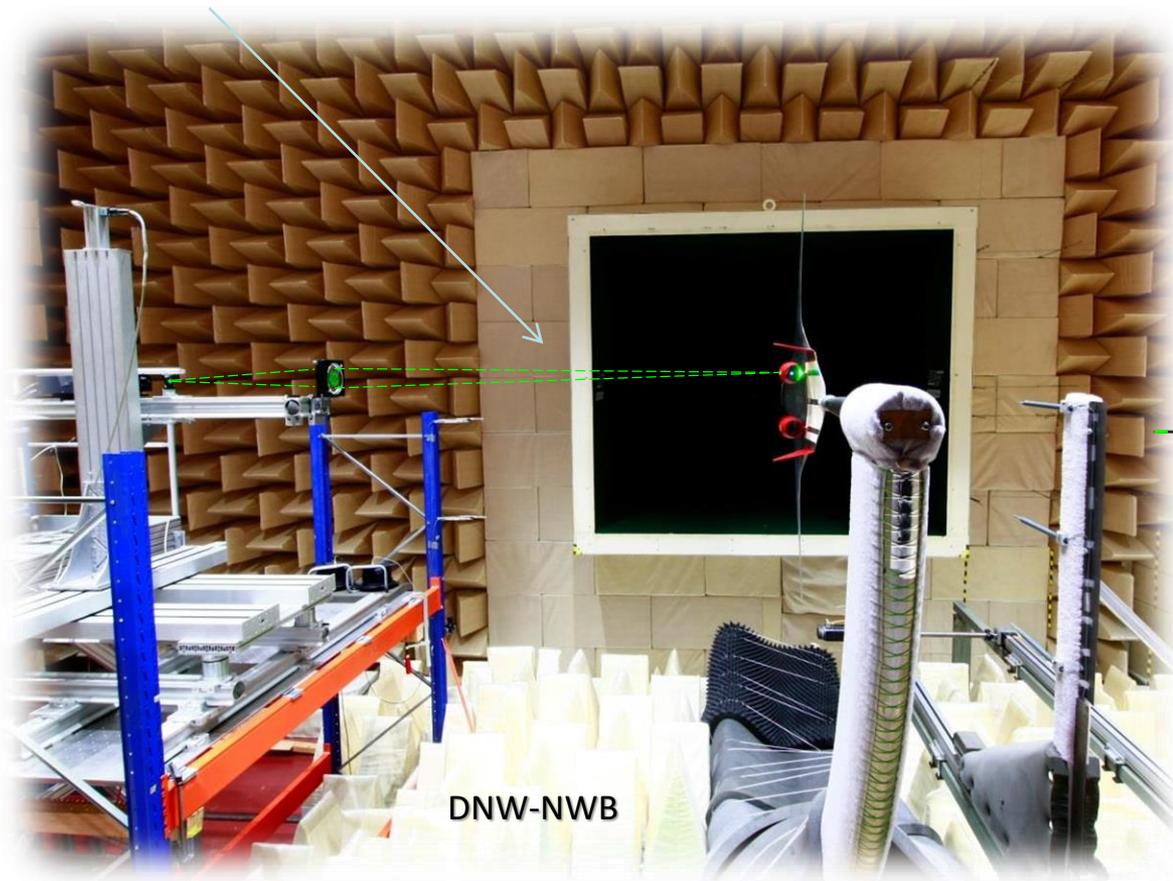
Abschattungsfaktor =
Schalldruck mit Platte/
Schalldruck ohne Platte



1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Validierung an Flugzeugkonfiguration (Schallabschattung)

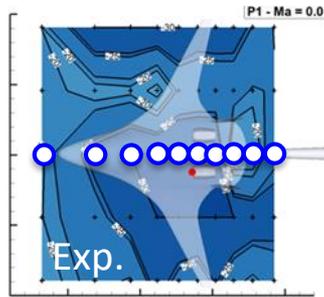
Laserpuls



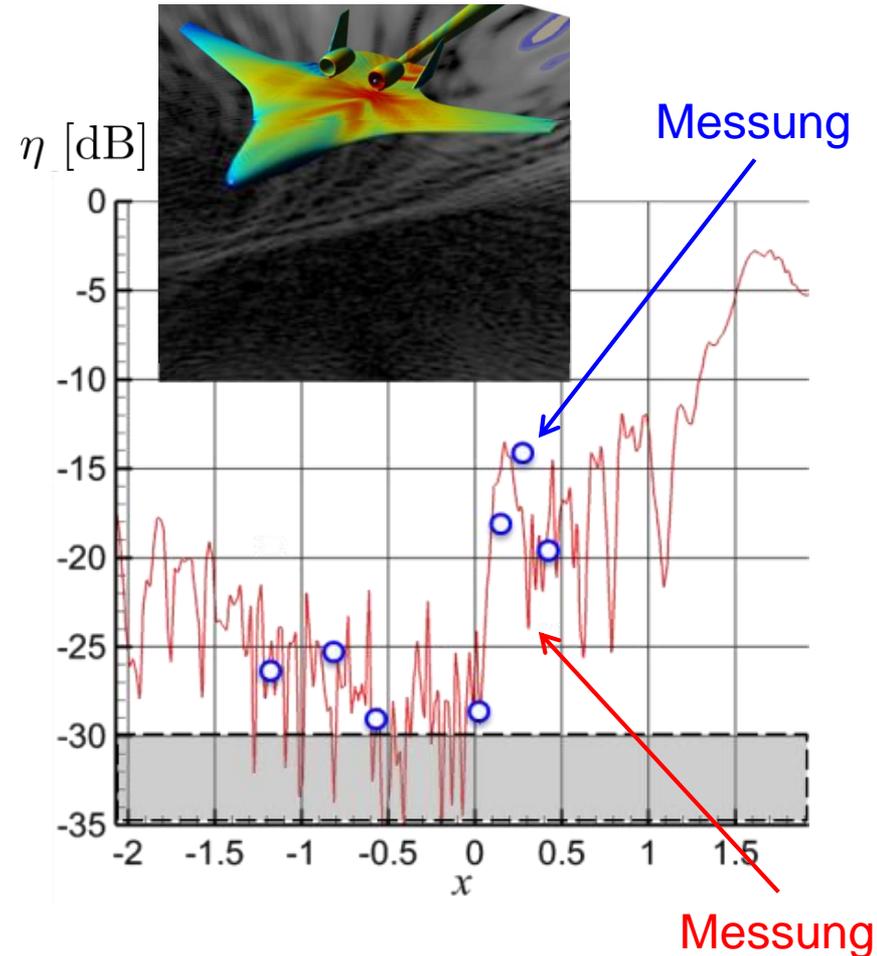
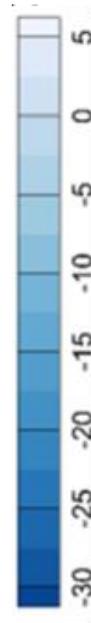
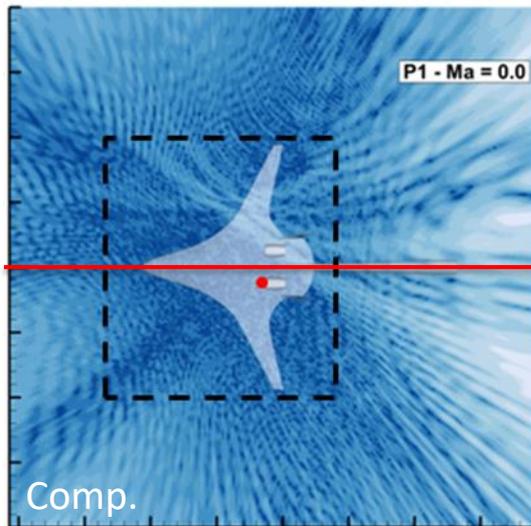
1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Validierung an Flugzeugkonfiguration (Schallabschattung)

Messung

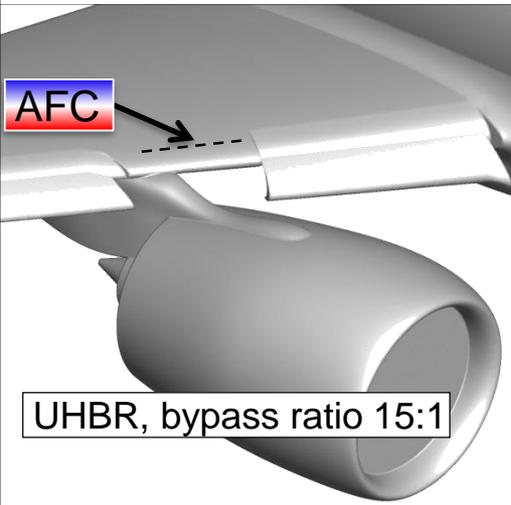
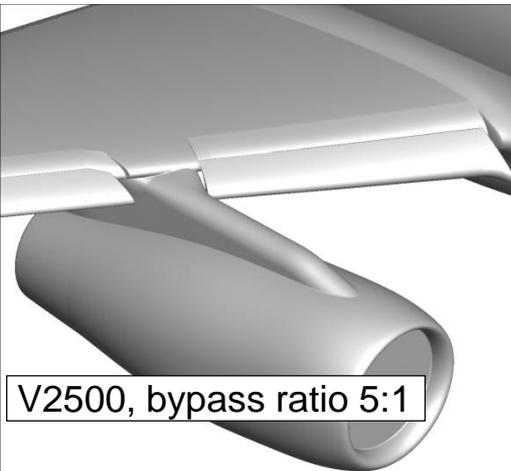


Simulation



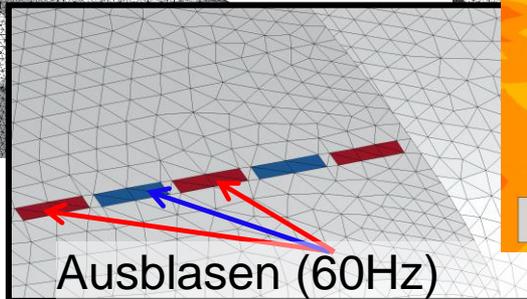
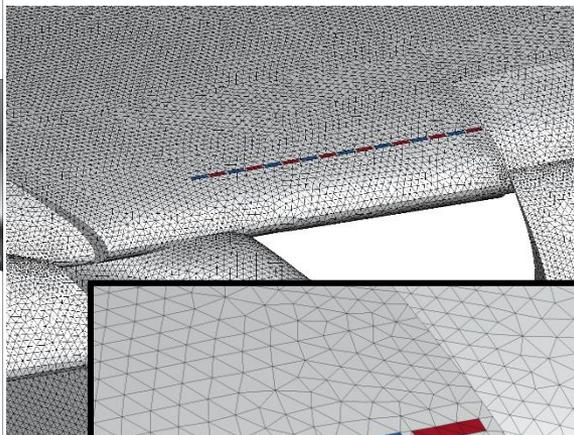
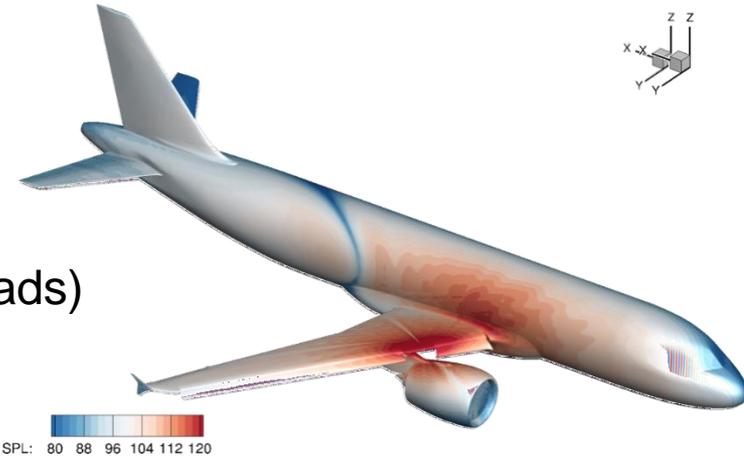
1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

Schallerzeugung infolge aktiver Strömungskontrolle

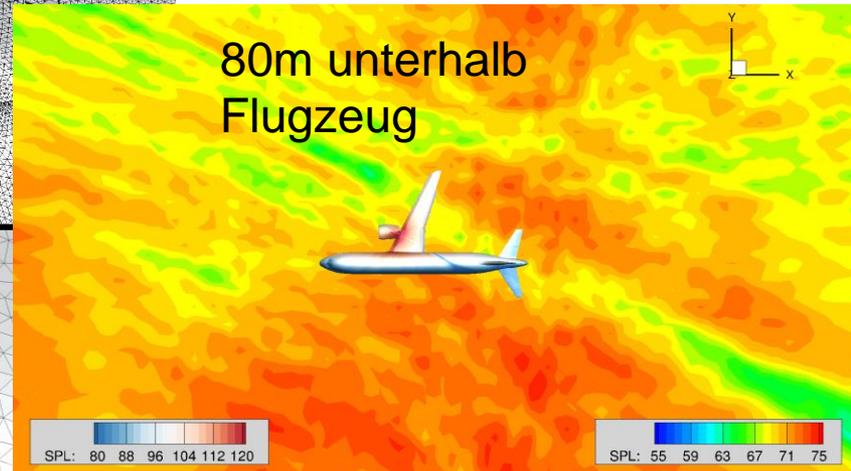


DLR Code FMCAS

- 2.5M Elemente
- Auflösung 2kHz
- 3-4h pro Frequenz (24 threads)



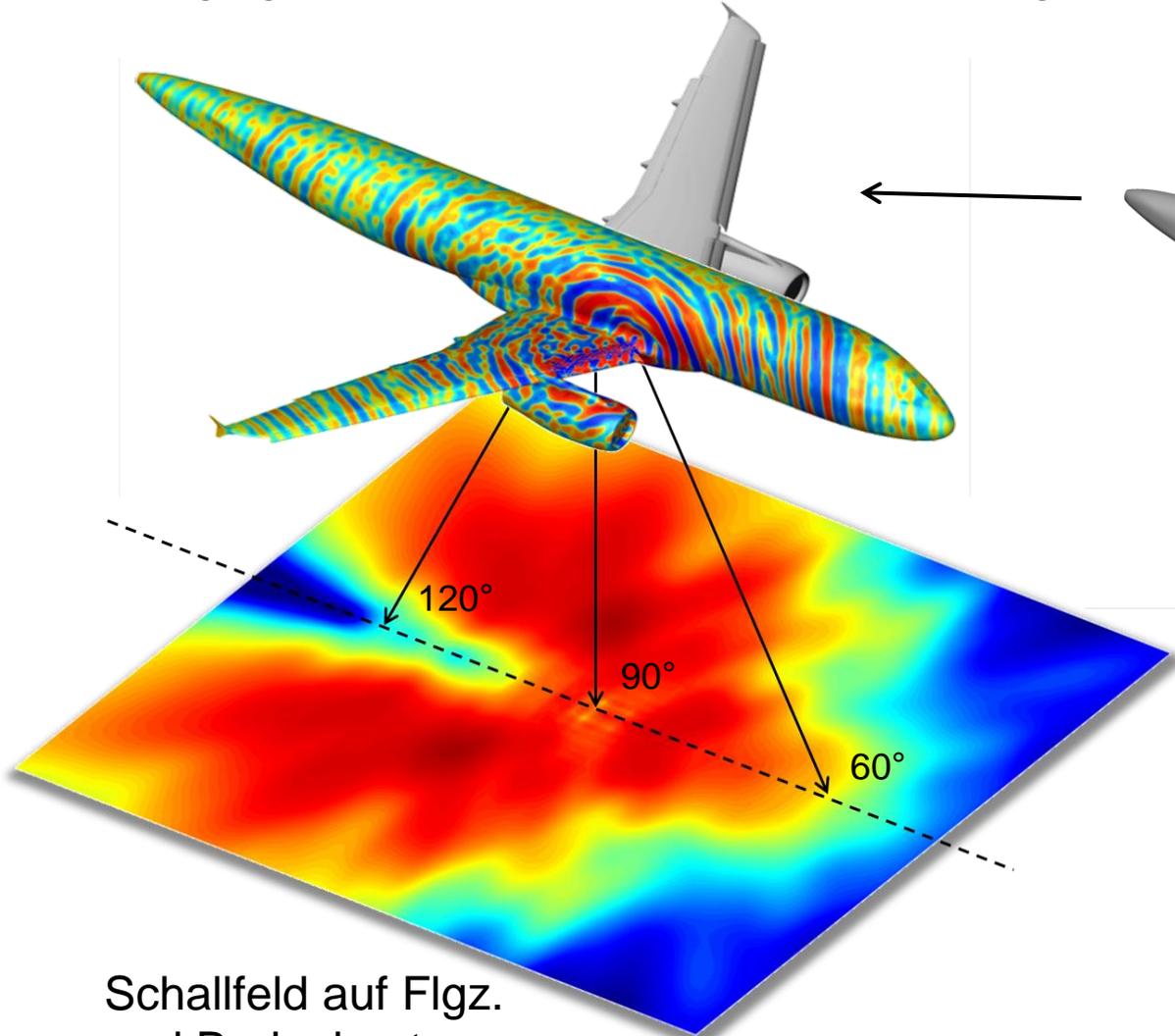
paarweise gegenphasig (Rechteckpuls)



1.1.2.1 Randelementeverfahren (Boundary Element Method - BEM)

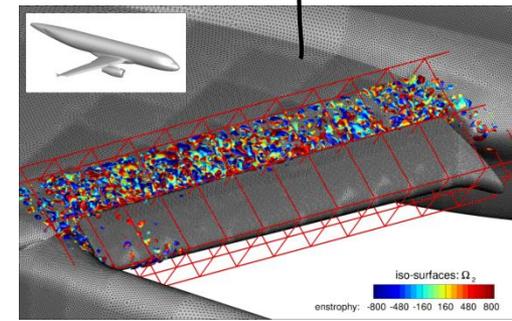
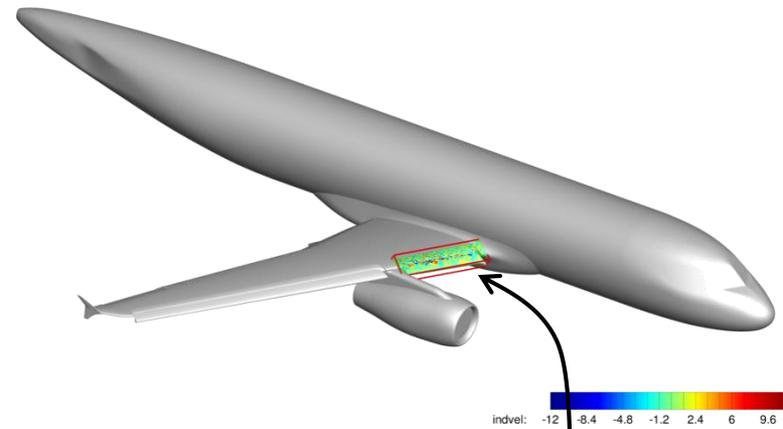
Vorflügelgeräusch: DLR A320-ATRA, vollskalig

- 3.1 mio. Dreiecke, 6.5 ppw
- Auflösung $f_{max} \approx 1kHz$
- Burton-Miller coeff. $\alpha = 10^{-3} \frac{i}{k}$
- ~26h auf 24 CPUs (1 Frequenz)



Schallfeld auf Flg.
und Bodenkontur

DLR-code FMCAS



Quelle: stochastische
Turbulenzmodellierung
in-board slat

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Aufgabe: Berechnung der Schallfortpflanzung bei inhomogenem und/oder bewegtem Medium bei hohen Frequenzen

Problem: sehr hoher Rechenaufwand bei numerischer Lösung der Wellengleichung mit BEM (oder FEM): 6 Elemente/Wellenlänge λ , wobei $\lambda = a_\infty / f$

Ansatz: beschreibe Wellenausbreitung durch Kinematik der Senkrechten auf Wellenfronten (Strahlen)

Zu lösen: (61) ohne Quellen: $\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^0} \nabla p' \right) = 0$ bzw. mit $p' = \hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \cdot e^{i\omega t}$

$$\frac{\omega^2}{a_0^2} \hat{p} + \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^0} \nabla \hat{p} \right) = 0 \quad \text{wobei} \quad \rho^0 = \rho^0(\mathbf{x}), \quad a_0 = a_0(\mathbf{x})$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

$$\frac{\omega^2}{a_0^2} \hat{p} + \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho^0} \nabla \hat{p} \right) = 0$$

Betrachtung hoher Frequenzen ω

Strahlenreihe, bzw. Debye-Reihe (asymptotische Entwicklung für $\omega \rightarrow \infty$):

$$\hat{p}(\mathbf{x}, \omega) \approx e^{-i\omega\Psi(\mathbf{x})/a_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k(\mathbf{x})}{(i\omega)^k} \quad (294) \quad \begin{array}{l} a_\infty - \text{konst.} \quad k_\infty = \omega/a_\infty \\ \text{Referenzschallgeschwindigkeit} \end{array}$$

$k_\infty \Psi(\mathbf{x})$ - Phasenfunktion (ebene Welle u. homog. Medium: $\Psi = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{k}_\infty}{k_\infty}$)
 Kugelwelle u. homog. Medium: $\Psi = r$)

$A_k(\mathbf{x})$ - Amplitudenfunktion (ebene Welle u. homog. Med.: $A_0 = C$, $A_{k \neq 0} = 0$)
 Kugelwelle u. homog. Med.: $A_0 = C/r$, $A_{k \neq 0} = 0$)

Setze (294) in (61) ein und sortiere nach Potenzen in $\omega^{-1} \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^k} \left\{ \left(\frac{i\omega}{a_\infty} \right)^2 \left[- \left(\frac{a_\infty}{a_0} \right)^2 + (\nabla \Psi)^2 \right] A_k - \frac{i\omega}{a_\infty} \left[\nabla A_k \cdot \nabla \Psi + \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi A_k}{\rho^0} \right) \right] + \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla A_k}{\rho^0} \right) \right\} = 0$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^k} \left\{ \left(\frac{i\omega}{a_{\infty}} \right)^2 \left[- \left(\frac{a_{\infty}}{a_0} \right)^2 + (\nabla \Psi)^2 \right] A_k - \frac{i\omega}{a_{\infty}} \left[\nabla A_k \cdot \nabla \Psi + \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi A_k}{\rho^0} \right) \right] + \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla A_k}{\rho^0} \right) \right\} = 0$$

$(i\omega/a_{\infty})^2$ – Term für $\omega \rightarrow \infty$ dominant → Klammer Null setzen ⇒

$$\boxed{(\nabla \Psi)^2 - \frac{a_{\infty}^2}{a_0^2} = 0} \quad \text{„Eikonalgleichung*“} \quad (295)$$

$(i\omega/a_{\infty})$ – nächst-dominanter Term für $k = 0$ → Klammer Null setzen ⇒

$$\boxed{\nabla A_0 \cdot \nabla \Psi + \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi A_0}{\rho^0} \right) = 0} \quad (296)$$

weitere Potenzen $k \geq 1$:

$$\boxed{\nabla A_k \cdot \nabla \Psi + \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi A_k}{\rho^0} \right) = a_{\infty} \rho^0 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla A_{k-1}}{\rho^0} \right)} \quad (297)$$

*) mit Strömung: $(\nabla \Psi)^2 - \left(\frac{a_{\infty}}{a_0} - M^0 \cdot \nabla \Psi \right)^2 = 0$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Praktische Lösung von (295)-(297):

(a) Bilde Ortskurven $\mathbf{R}(s)$, entlang derer Eikonalgleichung (295) erfüllt ist: auch „Strahlen“ wobei s Ortsparameter ist. Zur Definition der Strahlen

bilde Hilfsfunktion $H(s) := (\nabla\Psi)^2 - \frac{a_\infty^2}{a_0^2} = 0$

Entlang $s(x)$ soll keine Abweichung von $H = 0$ erfolgen, d.h.

$$\frac{dH}{ds} = \frac{\partial H}{\partial(\nabla\Psi)} \cdot \frac{d\nabla\Psi}{ds} + \frac{\partial H}{\partial a_0^2} \frac{da_0^2}{ds} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial(\nabla\Psi)} \\ \frac{\partial H}{\partial a_0^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d(\nabla\Psi)}{ds} \\ \frac{d\mathbf{R}}{ds} \end{pmatrix} = 0$$

Vektoren müssen \perp aufeinander stehen:

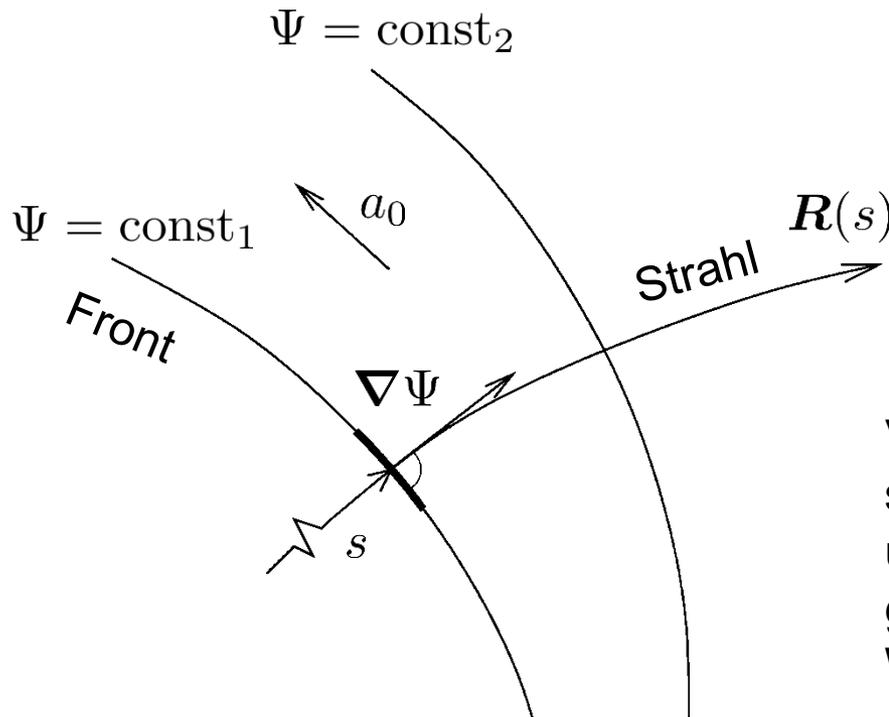
$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial(\nabla\Psi)} = \nabla\Psi \quad (298)$$

$$\frac{d(\nabla\Psi)}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial a_0^2} \frac{da_0^2}{d\mathbf{R}} = \frac{a_\infty^2}{2} \nabla \frac{1}{a_0^2}$$

Anfangswertproblem, gewöhnl. Differenzialgleichung für \mathbf{R} und $\nabla\Psi$ in s : explizite num. Integration. Anfangswerte für $\mathbf{R}, \nabla\Psi$
 \mathbf{R} heißen auch „Charakteristiken“

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beachte: $k_\infty \nabla \Psi(s)$ hat die Bedeutung eines lokalen Wellenzahlvektors bei s und Tangente an Strahl $\mathbf{R}(s)$ zeigt nach (298) in selbe Richtung für homogenes Medium ($a_0 = a_\infty$) ist nach (298) $\nabla \Psi = \text{const}$, d.h. Wellenfront bewegt sich entlang einer Geraden



$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \nabla \Psi \quad (289)$$

$$\frac{d(\nabla \Psi)}{ds} = \frac{a_\infty^2}{2} \nabla \frac{1}{a_0^2}$$

Vorstellung nur korrekt, wenn signifikante Variationen in $\rho^0 a_0$ über Bereiche stattfinden, die groß gegenüber der betrachteten Wellenlänge sind.

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Praktische Lösung von (295)-(297):

(b) Lösung der Amplitudengleichung (296):

umgeschrieben ist (296) $2 \cdot \nabla \Psi \cdot \nabla A_0 + A_0 [\Delta \Psi + \rho^0 \nabla \Psi \cdot \nabla (\rho^0)^{-1}] = 0$

oder mit $\nabla \Psi \cdot \nabla (\dots) = \underbrace{|\nabla \Psi|}_{\frac{a_\infty}{a_0}} \underbrace{\frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|}}_{e_s} \cdot \nabla (\dots) = \frac{a_\infty}{a_0} \underbrace{e_s \nabla (\dots)}_{\text{Richtungsableitung entlang Strahl}} = \frac{a_\infty}{a_0} \frac{d(\dots)}{ds}$

↘
Einheitsvektor tangential an Strahl

$$\Rightarrow 2 \frac{dA_0}{ds} + A_0 \left[\frac{a_0}{a_\infty} \Delta \Psi + \underbrace{\rho^0 \frac{d}{ds} (\rho^0)^{-1}}_{= -\frac{d \ln(\rho^0)}{ds}} \right] = 0$$

Lösung mittels „Trennung der Variablen“:

$$\Rightarrow A_0(s) = A_0(s_0) \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{s_0}^s \frac{a_0}{a_\infty} \Delta \Psi ds + \frac{1}{2} \ln \frac{\rho^0(s_0)}{\rho^0(s)} \right\}$$

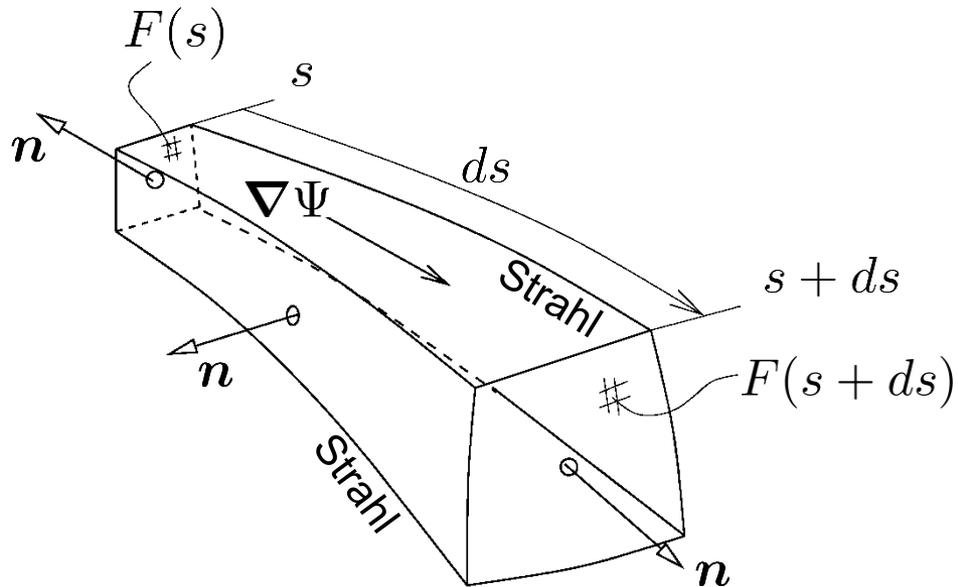
1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Betrachte zur Lösung des Integrals $\int_{s_0}^s \frac{a_0}{a_\infty} \Delta \Psi ds$ zunächst das Integral

$$\int_V \Delta \Psi dV = \int_{\partial V} \nabla \Psi \cdot \mathbf{n} dF$$

↑
Gauss

wobei V das von einem Abschnitt einer „Strahlröhre“ eingeschlossene Volumen ist. Eine Strahlröhre ist eine Röhre, deren Mantelfläche aus Schallstrahlen gebildet wird (vgl. Bild), vgl. auch Analogie zu „Stromröhren“



$\mathbf{n} \perp \nabla \Psi$ an Mantelfläche, allerdings

$\mathbf{n} \parallel \nabla \Psi$ auf Stirnflächen $F(s + ds)$
und $F(s)$

$$\Rightarrow \int_V \Delta \Psi dV = \int_{F(s+ds)} \overbrace{|\nabla \Psi|}^{\frac{a_\infty}{a_0}} dF - \int_{F(s)} \overbrace{|\nabla \Psi|}^{\frac{a_\infty}{a_0}} dF$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Bei differenziell kleinem Volumen $dV = dF \cdot ds$ wird hieraus:

$$\Delta\Psi dF \cdot ds = \left(\frac{a_\infty}{a_0} dF \right)_{s+ds} - \left(\frac{a_\infty}{a_0} dF \right)_s \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_0}{a_\infty} \Delta\Psi = \frac{a_0}{dF} \frac{d(dF/a_0)}{ds} = \frac{d}{ds} \ln(dF/a_0)$$

und daher $\int_{s_0}^s \frac{a_0}{a_\infty} \Delta\Psi ds = \ln \left[\frac{(a_0^{-1} dF)_s}{(a_0^{-1} dF)_{s_0}} \right]$, so dass

$$A_0(s) = A_0(s_0) \left(\frac{[(\rho^0 a_0)^{-1} dF]_{s_0}}{[(\rho^0 a_0)^{-1} dF]_s} \right)^{1/2} \Rightarrow \boxed{\frac{A_0(dF)^{1/2}}{(\rho^0 a_0)^{1/2}} = const} \quad (299)$$

→ Amplitude wächst mit zunehmender Freifeldimpedanz (Wellenwiderstand) $\rho^0 a_0$ und fällt mit in Strahlrichtung s divergenten Strahlen $dF \uparrow$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

(298) und (299) bilden Gleichungen zur numerischen Berechnung des Schalldrucks entlang von Strahlen

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \nabla \Psi$$

$$\frac{d(\nabla \Psi)}{ds} = \frac{a_\infty^2}{2} \nabla \frac{1}{a_0^2}$$

$$\frac{A_0 (dF)^{1/2}}{(\rho^0 a_0)^{1/2}} = \text{const}$$

Vorteile:

- * sehr schnell, für sehr hohe Frequenzen,
- * Berücksichtigung von inhomogenem (und strömendem*) Medium

Nachteile:

- * Beugungsphänomene vernachlässigt (Beugungskorrektur kompliziert)**
- * Fehler durch Vernachlässigung des Reflexionsanteils bei Brechung im Medium: Entartung bei Totalreflexion (s. folgendes Beispiel)

Anwendungsbeispiel ohne Strömung und konstanter Temperatur S.92 im Vergleich zu exakter Lösung Wellengleichung mit BEM

*) hier nicht gezeigt (Basis dann Linearisierte Eulergleichungen anstatt Wellengleichung (61))

***) z.B.: Rubinowicz, A., "Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen," Annalen der Physik, Vol. 53, 1917, pp. 257–278.

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beispiel: Amplitudenänderung bei (2D)Schalldurchgang durch Temperaturschichtung bei $z=0$

Lösung der Eikonalgleichung

$$\frac{d(\nabla\Psi)}{ds} = \frac{1}{2}\nabla(a_\infty/a_0)^2; \quad \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \nabla\Psi$$

$$a_0^{-2} = a_i^{-2} + (a_t^{-2} - a_i^{-2})H(z)$$

$z < -\varepsilon$:

$$\nabla\Psi_i = \mathbf{C}_i; \quad |\nabla\Psi_i| = (a_\infty/a_i) \Rightarrow \nabla\Psi_i = (a_\infty/a_i)\mathbf{e}_i$$

$$\frac{d\mathbf{R}_i}{ds} = (a_\infty/a_i)\mathbf{e}_i \Rightarrow \mathbf{R}_i(s) = \mathbf{R}_i^0 + (a_\infty/a_i)\mathbf{e}_i s$$

$z > \varepsilon$:

$$\nabla\Psi_t = (a_\infty/a_t)\mathbf{e}_t \Rightarrow \mathbf{R}_t(s) = \mathbf{R}_t^0 + (a_\infty/a_t)\mathbf{e}_t(s - s_0)$$

$$\mathbf{R}_t^0 \stackrel{!}{=} \mathbf{R}_i(s_0) = \mathbf{R}_i^0 + (a_\infty/a_i)\mathbf{e}_i s_0$$

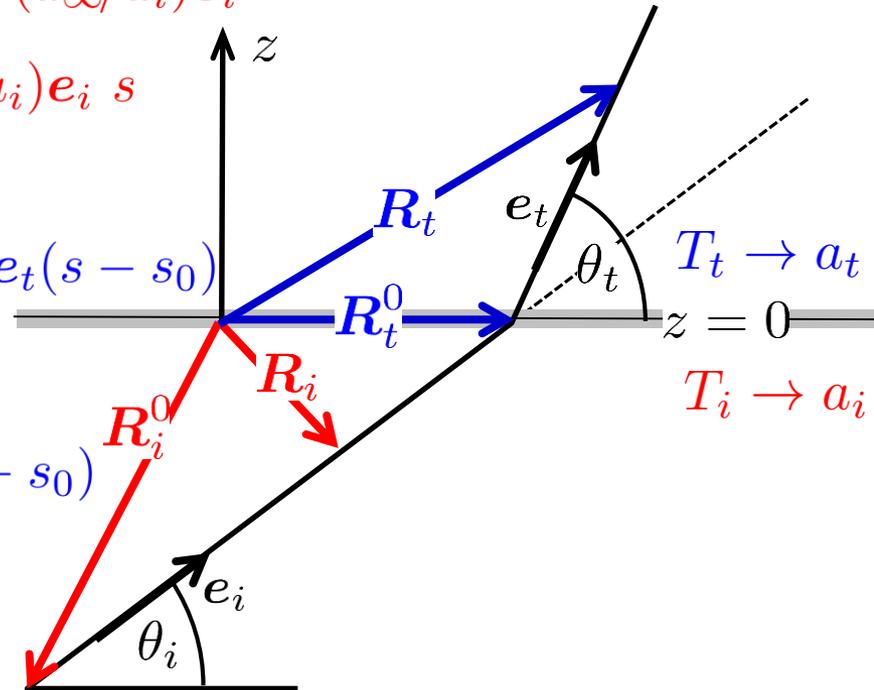
$$\Rightarrow \mathbf{R}_t = \mathbf{R}_i^0 + (a_\infty/a_i)\mathbf{e}_i s_0 + (a_\infty/a_t)\mathbf{e}_t(s - s_0)$$

$|z| < \varepsilon$:

unbekannt! ↑

$$\nabla a_0^{-2} = (a_t^{-2} - a_i^{-2})\delta(z)\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\Psi_t - \nabla\Psi_i = \frac{a_\infty^2}{2}(a_t^{-2} - a_i^{-2})\mathbf{e}_z \int_{s(-\varepsilon)}^{s(\varepsilon)} \delta(z) ds$$



1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beispiel zur Lösung der Eikonalgleichung

$$\nabla \Psi_t - \nabla \Psi_i = \frac{a_\infty^2}{2} (a_t^{-2} - a_i^{-2}) \mathbf{e}_z \int_{s(-\varepsilon)}^{s(\varepsilon)} \delta(z) ds \xrightarrow{(114)} \left. \frac{dz}{ds} \right|_{z=0}^{-1} =: \sigma$$

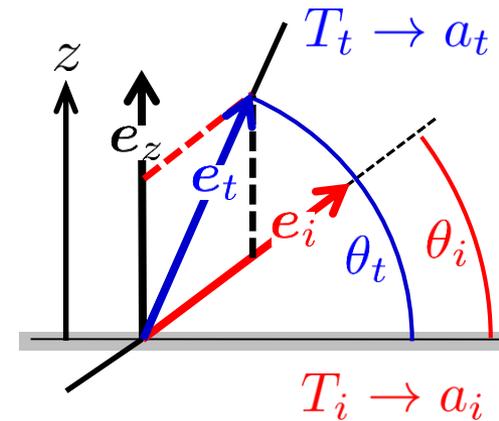
$$\Rightarrow (\nabla \Psi_t)^2 = \left[\nabla \Psi_i + \frac{a_\infty^2}{2} (a_t^{-2} - a_i^{-2}) \mathbf{e}_z \sigma \right]^2$$

$$\Leftrightarrow a_t^{-2} = a_i^{-2} + \frac{a_\infty^2}{4} (a_t^{-2} - a_i^{-2})^2 \sigma^2 + (a_t^{-2} - a_i^{-2}) (a_\infty / a_i) \overbrace{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_z)}^{\sin \theta_i} \sigma$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{2(a_\infty a_i)^{-1}}{a_t^{-2} - a_i^{-2}} \left(-\sin \theta_i \pm \operatorname{sgn}\left(1^+ - \frac{a_t}{a_i}\right) \sqrt{\left(\frac{a_i}{a_t}\right)^2 - \cos^2 \theta_i} \right)$$

$a_t < a_i$: + : Durchgangsanteil, - : Reflexionsanteil

$a_t > a_i$: beide Lösungen, aber einzeln reell nur für $|\cos \theta_i| < a_i / a_t$ (ansonsten Totalreflexion und Summe beider Lösungen = reelle reflekt. Welle!)



$$\nabla \Psi_t = \frac{a_\infty}{a_i} \left(\mathbf{e}_i + \left[-\sin \theta_i + \operatorname{sgn}\left(1^+ - \frac{a_t}{a_i}\right) \sqrt{\left(\frac{a_i}{a_t}\right)^2 - \cos^2 \theta_i} \right] \mathbf{e}_z \right) = \frac{a_\infty}{a_t} \mathbf{e}_t$$

$$\Rightarrow \sin \theta_t = \frac{a_t}{a_\infty} \mathbf{e}_z \cdot \nabla \Psi_t = \operatorname{sgn}\left(1^+ - \frac{a_t}{a_i}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{a_t}{a_i}\right)^2 \cos^2 \theta_i} \Rightarrow \boxed{\cos \theta_t = \frac{a_t}{a_i} \cos \theta_i} \quad \text{Brechungsgesetz (208)!}$$

1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beispiel: Amplitudenänderung bei (2D)Schalldurchgang durch Temperaturschichtung

Lösung der nullten Amplitudengleichung

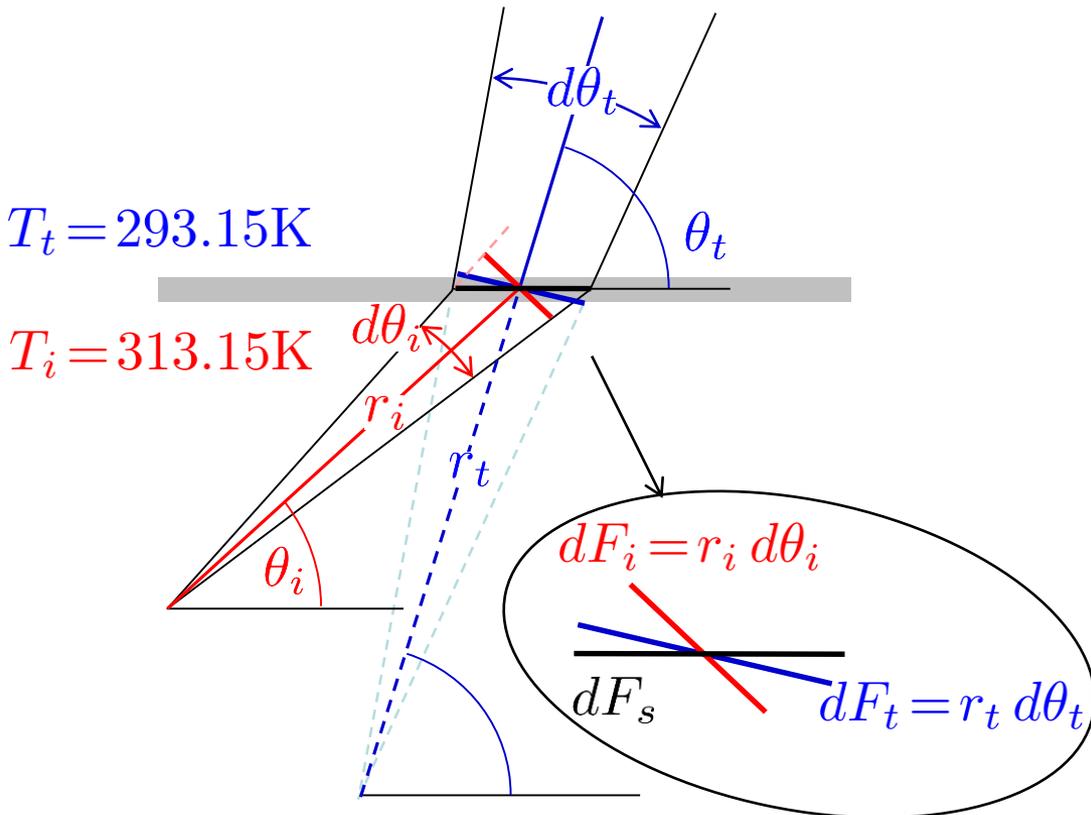
$$\frac{A_0(dF)^{1/2}}{(\rho^0 a_0)^{1/2}} = const \Rightarrow \frac{A_{0t}^2}{A_{0i}^2} = \frac{(\rho^0 a_0)_t}{(\rho^0 a_0)_i} \left(\frac{dF_i}{dF_t} \right) \leftarrow dF_s = \frac{dF_i}{\sin \theta_i} = \frac{dF_t}{\sin \theta_t}$$

$$\Rightarrow \frac{dF_i}{dF_t} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta_i}{1 - \cos^2 \theta_t}}$$

$$1 = p_t/p_i = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta_i}{1 - \left(\frac{a_t}{a_i} \cos \theta_i\right)^2}}$$

$$\frac{A_{0t}^2}{A_{0i}^2} = \frac{\rho_t a_t^2}{\rho_i a_i^2} \frac{a_i}{a_t} \frac{dF_i}{dF_t}$$

$$\frac{A_{0t}}{A_{0i}} = \sqrt[4]{\frac{T_i}{T_t}} \sqrt[4]{\frac{1 - \cos^2 \theta_i}{1 - \frac{T_t}{T_i} \cos^2 \theta_i}}$$



1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

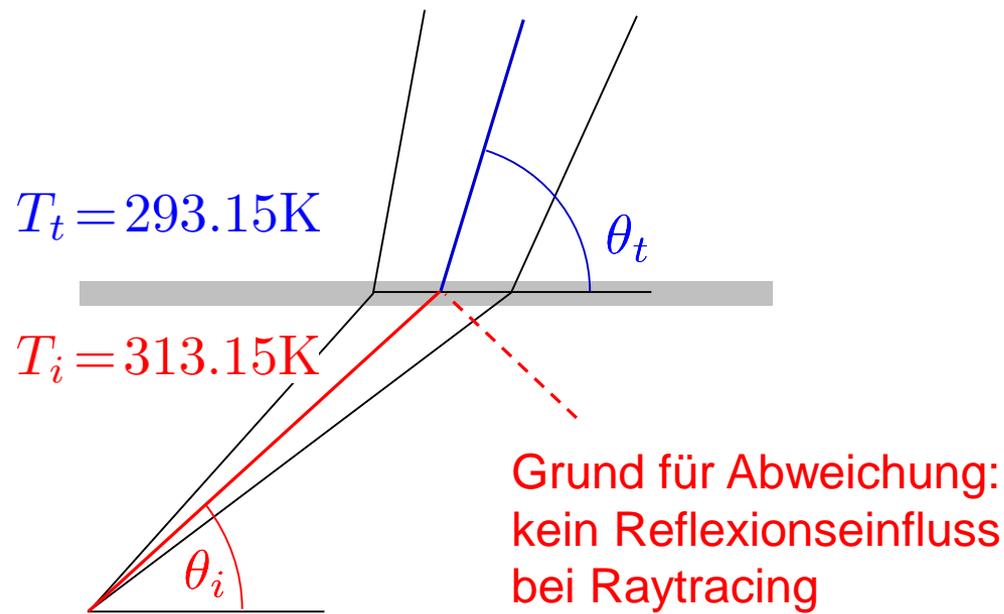
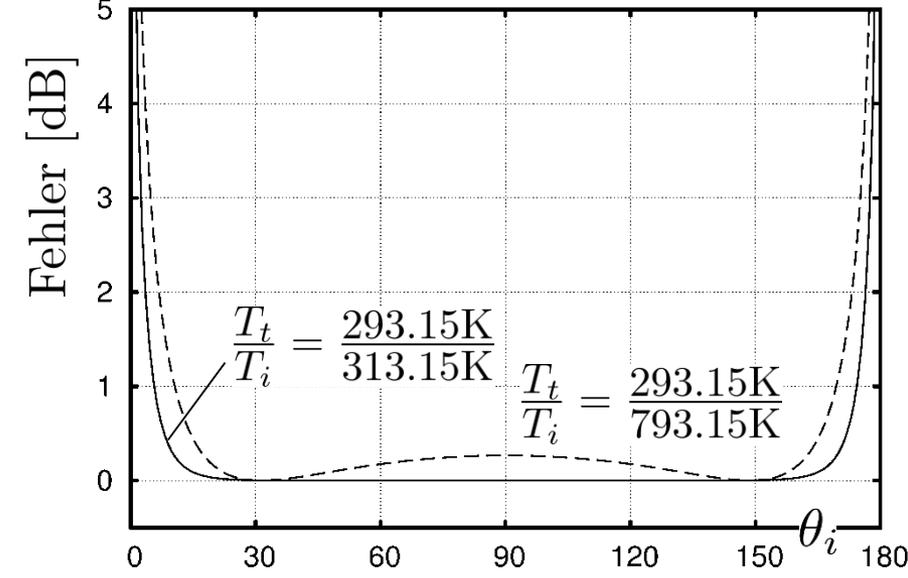
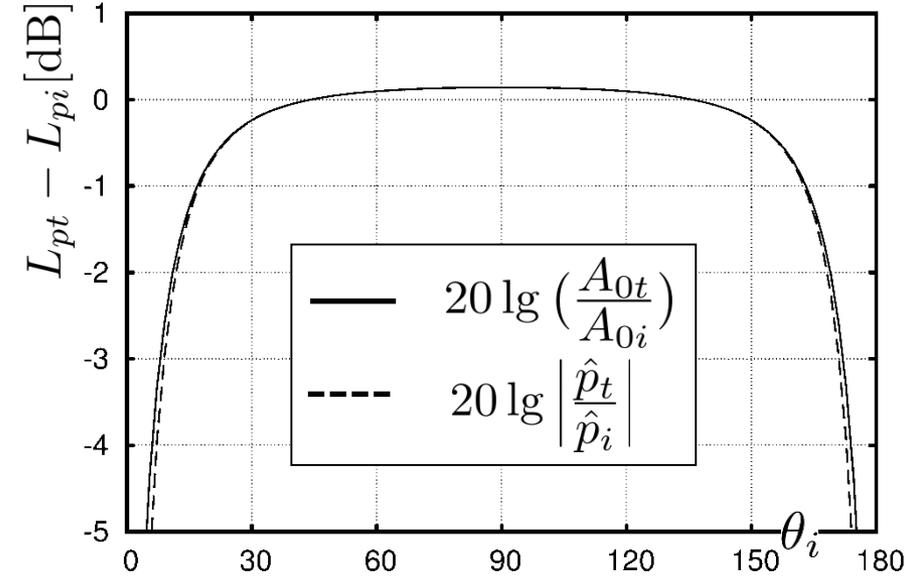
Beispiel: Amplitudenänderung bei (2D)Schalldurchgang durch Temperaturschichtung

$$\frac{A_{0t}}{A_{0i}} = \sqrt[4]{\frac{T_i}{T_t}} \sqrt[4]{\frac{1 - \cos^2 \theta_i}{1 - \frac{T_t}{T_i} \cos^2 \theta_i}}$$

Strahlen

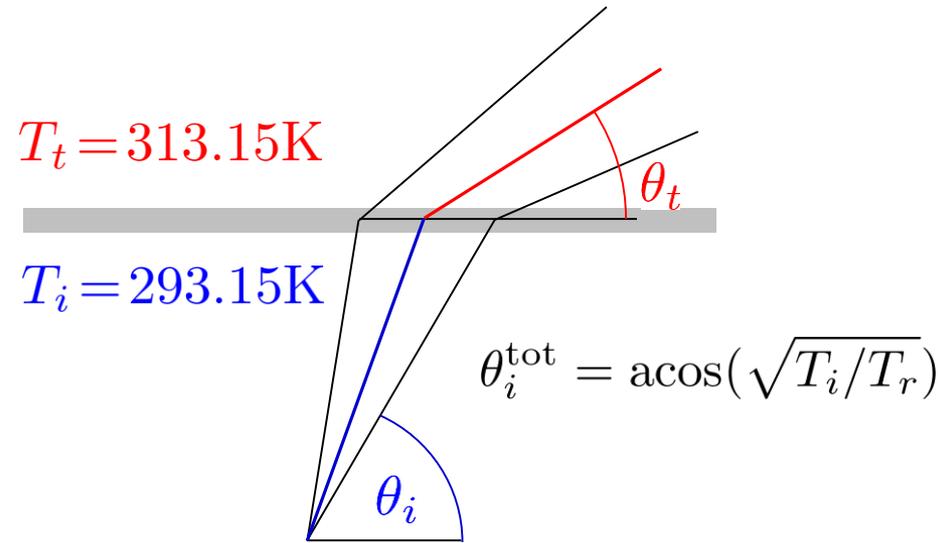
$$\left| \frac{\hat{p}_t}{\hat{p}_i} \right| = \frac{2 \sin \theta_i}{\sin \theta_i + \sqrt{\frac{T_t}{T_i} \left(1 - \frac{T_t}{T_i} \cos^2 \theta_i \right)}}$$

„exakt“
(215)



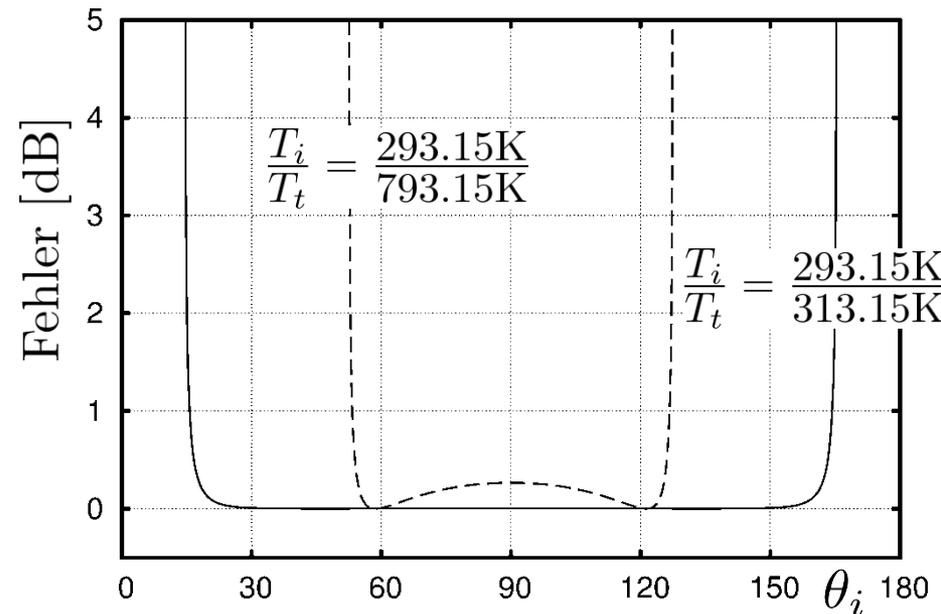
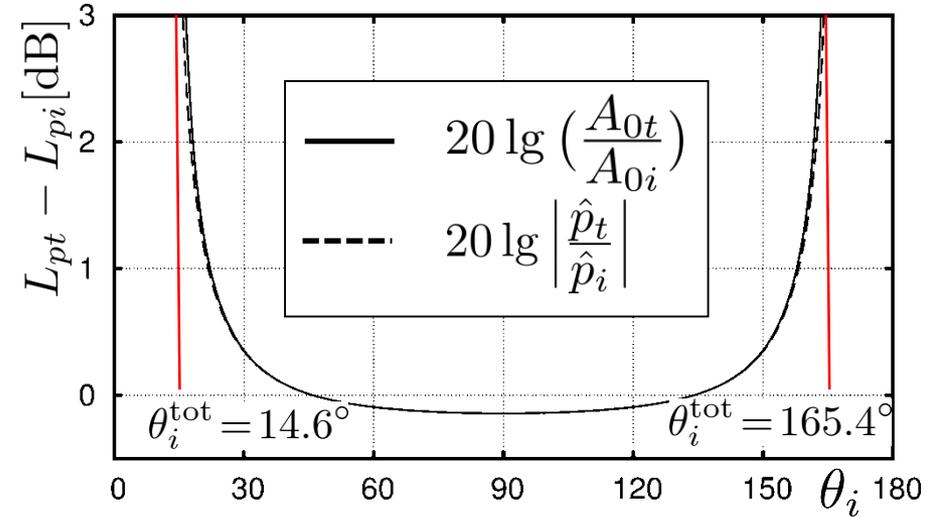
1.1.2.2 Schallstrahlenverfahren (ray tracing)

Beispiel: Amplitudenänderung bei (2D)Schalldurchgang durch Temperaturschichtung



Ray tracing zeigt unendliche Amplitudenerhöhung bei Totalreflexion.
Exakt: Erhöhung um 6dB

Alle Abweichung amplitudenbezogen,
Strahlkinematik (Brechungsgesetz)
wird exakt wiedergegeben.



1.2.2 Numerische Aeroakustik (CAA)

Verfahren der Computational Aeroacoustics (CAA) werden zur numerischen Lösung des allgemeinsten Gleichungssystems für die Dynamik von Störungen um beliebige stationäre Strömungsfelder (54,55,56) entwickelt. Dieses Gleichungssystem wird auch „Linearisierte Eulergleichungen“ (engl.: „Linearized Euler Equations (LEE)“) genannt:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \rho' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho^0 + \rho^0 \nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 0 \quad (54)$$

$$\rho^0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}' \right) + \nabla p' + \rho^0 \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}^0 + \rho' \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}^0 = \mathbf{0} \quad (55)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{v}^0 \cdot \nabla p' + \mathbf{v}' \cdot \nabla p^0 + \gamma (p^0 \nabla \cdot \mathbf{v}' + p' \nabla \cdot \mathbf{v}^0) = 0 \quad (56)$$

1.2.2 Numerische Aeroakustik (CAA)

Anforderungen an numerische Lösungsverfahren für LEE

Es gelten besondere Anforderungen bei der numerischen Lösung der Gleichungen:

- Akustische, entropische und Wirbelfreiheitsgrade sind enthalten. Für kleine Strömungsmachzahlen müssen Wirbel der Größenordnung l_ω , Schallwellen der Größenordnung λ aufgelöst werden, wobei $l_\omega \sim \lambda M$ (M -Machzahl); für kleine $M \rightarrow$ **Multiskalenproblem** !
- Hohe **Genauigkeit** in der numerischen Darstellung der Signalamplituden gefragt, wobei die Größenordnungen der akustischen Störungen im Vergleich zu den Strömungsgrößen sehr klein sind, z.B. 10^{-6} -fach kleiner.
- Es dürfen keine künstlichen Interferenzen entstehen („**Dispersionsfehler**“!)
- Interaktion von Schall mit **Strömungsgradienten** (Brechung etc.)
- Schall darf an künstlichen Außenrändern des Rechengebiet **nicht reflektiert** werden.
- **Genauigkeit** wird nicht nur auf Geometrien benötigt (CFD: lokal, z.B. Reibung/ Druck auf Oberflächen), sondern auch an den Fernfeldrändern (also **global**)

1.2.2.1 Diskretisierung des Gebiets

$$u^0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v^0 \frac{\partial \rho'}{\partial y} + w^0 \frac{\partial \rho'}{\partial z}$$

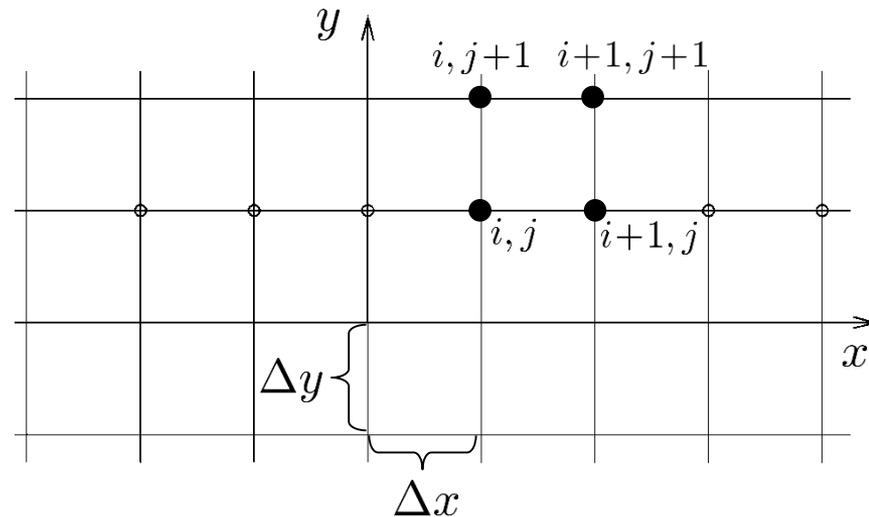
$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \rho' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \rho^0 + \rho^0 \nabla \cdot \mathbf{v}^0 = 0$$

Approximation der **räumlichen Gradienten** durch Finite Differenzen Repräsentation der Funktionen $f(x)$ an den Kreuzungspunkten x_{ij} eines Gitters, das das Fluid abdeckt. Approximation der Gradienten an den Knoten x_{ij} mit Hilfe der Funktionswerte an Nachbarknoten.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_{i,j}} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^N c_k \underbrace{f(x_{i,j} + k\Delta x, y_{i,j})}_{=: f_{i+k,j}} \quad (300)$$

Frage: Wie groß ist numerischer Fehler und von welcher Art ist er?

(300) für beliebigen Punkt $x_{i,j} = \mathbf{x}$:



$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^N c_k f(x + k\Delta x, y) \quad (301)$$

1.2.2.2 Konsistenzordnung der Finiten Differenzen

Entwicklung von f in Taylorreihe

$$f(x+k\Delta x) \approx f(x) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x (k\Delta x) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_x (k\Delta x)^2 + \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_x (k\Delta x)^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_x (k\Delta x)^4 + \dots$$

↓

...einsetzen in (301) ⇒

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x = \frac{f(x)}{\Delta x} \sum_{k=-N}^N c_k + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x \sum_{k=-N}^N k c_k + \frac{\Delta x}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_x \sum_{k=-N}^N k^2 c_k + \frac{\Delta x^2}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_x \sum_{k=-N}^N k^3 c_k + \dots + R(\Delta x^m)$$

Bestimmungsgleichungen für die FD-Koeffizienten c_k

$$\boxed{\sum_{k=-N}^N k^n c_k = 0, \quad n = 0, 2, 3, 4, 5, \dots \quad \sum_{k=-N}^N k c_k = 1} \quad (302)$$

Wenn Restglied R von Ordnung m , d.h. $\sim \Delta x^m \Rightarrow$ **Approximation m 'ter Ordnung:**

beliebiges Polynom m 'ten Grades lässt sich noch exakt ableiten oder: Fehler

skaliert mit Δx^m (z.B. bei $m=4$ sinkt Fehler um Faktor 1/16 bei Halbierung der

Gitterschrittweite Δx).

1.2.2.2 Konsistenzordnung der Finiten Differenzen

$$\sum_{k=-N}^N k^n c_k = \delta_{n1}$$

$$n = 0 : \quad c_{-3} + c_{-2} + c_{-1} + c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$n = 1 : \quad -3c_{-3} - 2c_{-2} - c_{-1} + c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1$$

$$n = 2 : \quad 9c_{-3} + 4c_{-2} + c_{-1} + c_1 + 4c_2 + 9c_3 = 0$$

$$n = 3 : \quad -27c_{-3} - 8c_{-2} - c_{-1} + c_1 + 8c_2 + 27c_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$n = 2N = 6 :$$

Beachte: $c_{-k} = -c_k$ löst bereits alle Bestimmungsgleichungen mit n gerade
 \Rightarrow noch 3 „echte“ Gleichungen für ungerade n : (speziell $c_0 = 0$):

$$(303) \quad n = 1 : \quad 3^1 c_3 + 2^1 c_2 + 1^1 c_1 = \frac{1}{2} \leftarrow \text{bei Erfüllung: Ordnung 2}$$

$$(304) \quad n = 3 : \quad 3^3 c_3 + 2^3 c_2 + 1^3 c_1 = 0 \leftarrow \text{zusätzl. Erfüllung: Ordnung 4}$$

$$(305) \quad n = 5 : \quad 3^5 c_3 + 2^5 c_2 + 1^5 c_1 = 0 \leftarrow \text{zusätzl. Erfüllung: Ordnung 6}$$

1.2.2.2 Konsistenzordnung der Finiten Differenzen

⇒ mit $N = 3$ („Differenzenstern“, bzw. „stencil“ der Breite 7) lässt sich ein Verfahren der maximalen Ordnung 6 zusammensetzen:

$$c_0 = 0; \quad c_{\pm 1} = \pm \frac{3}{4}; \quad c_{\pm 2} = \mp \frac{3}{20}; \quad c_{\pm 3} = \pm \frac{1}{60}; \quad R = \frac{\Delta x^6}{7!} \sum_{k=-3}^3 k^7 c_k \frac{\partial^7 f}{\partial x^7} + \dots = \frac{\Delta x^6}{140} \frac{\partial^7 f}{\partial x^7} \dots$$

auch „zentrales Differenzenverfahren sechster Ordnung“ CDS6

⇒ mit $N = 2$ lässt sich ein Verfahren der maximalen Ordnung 4 zusammensetzen:

$$c_0 = 0; \quad c_{\pm 1} = \pm \frac{2}{3}; \quad c_{\pm 2} = \mp \frac{1}{12}; \quad R = \frac{\Delta x^4}{5!} \sum_{k=-2}^2 k^5 c_k \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} + \dots = \frac{\Delta x^4}{30} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \dots$$

auch „zentrales Differenzenverfahren vierter Ordnung“ CDS4

⇒ mit $N = 1$ lässt sich ein Verfahren der maximalen Ordnung 2 zusammensetzen:

$$c_0 = 0; \quad c_{\pm 1} = \pm \frac{1}{2}; \quad R = \frac{\Delta x^2}{3!} \sum_{k=-1}^1 k^3 c_k \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots = \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \dots$$

auch „zentrales Differenzenverfahren zweiter Ordnung“ CDS2

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

1.2.2.3 Spektralanalyse der Finiten Differenzen

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_x \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^N c_k f(x + k\Delta x, y) \quad \text{Fourier-transformieren in } x :$$

$$i\alpha \hat{f} \approx \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=-N}^N c_k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x + k\Delta x) \exp(-i\alpha x) dx}_{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \exp[-i\alpha(\tilde{x} - k\Delta x)] d\tilde{x}} = \exp(i\alpha k\Delta x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x}) \exp(-i\alpha \tilde{x}) d\tilde{x}}_{= \hat{f}}$$

$$\Leftrightarrow i\alpha \hat{f} \approx \frac{1}{\Delta x} \underbrace{\left(\sum_{k=-N}^N c_k \exp(i\alpha k\Delta x) \right)}_{=: i\bar{\alpha}} \hat{f}$$

Hierbei ist $\bar{\alpha}$ die mittels des Finite Differenzenverfahrens interpretierte (also approximierte) Wellenzahl

Dimensionslos geschrieben:

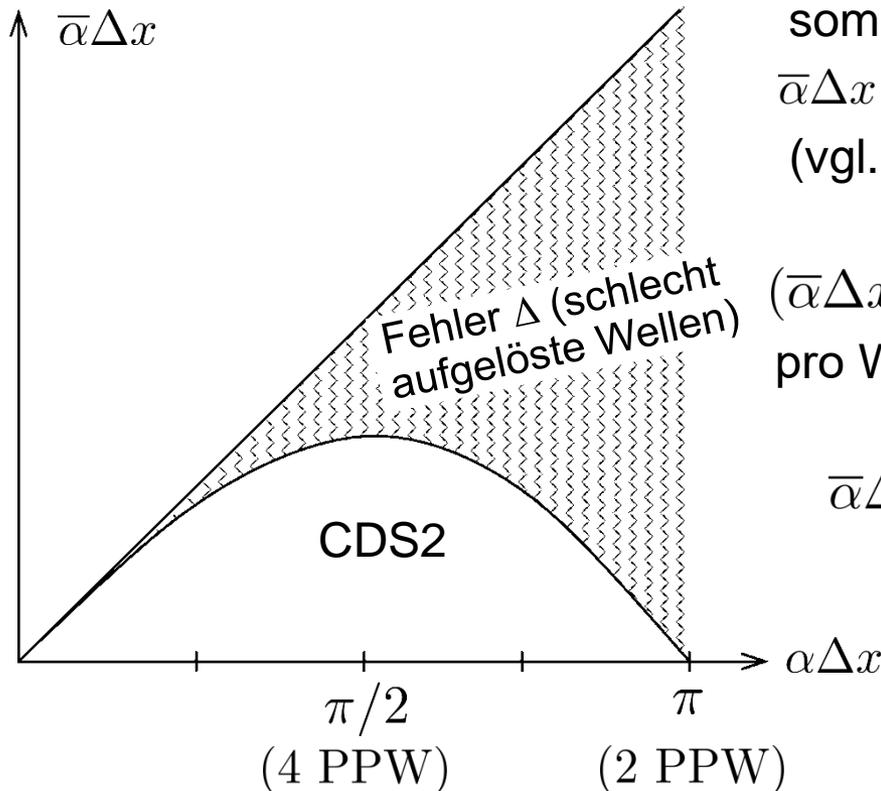
$$\boxed{\bar{\alpha}\Delta x = -i \sum_{k=-N}^N c_k \exp(ik(\alpha\Delta x))} \quad (306)$$

1.2.2.3 Spektralanalyse der Finiten Differenzen

Hieraus wird der spektrale Fehler Δ definiert als: $\Delta := \alpha\Delta x - \bar{\alpha}\Delta x$

Dessen Realteil Δ_r heisst auch „Dispersions-“ oder „Phasenfehler“ und sein Imaginärteil Δ_i heisst „Dissipationsfehler“

Beachte: für $c_k = -c_{-k}$ ist $\bar{\alpha}$ reell, z.B. beim CDS2-Verfahren ($N = 1$) ist $c_{\pm 1} = \pm \frac{1}{2}$



somit (302)

$$\bar{\alpha}\Delta x = \frac{i}{2}(-\exp(i\alpha\Delta x) + \exp(-i\alpha\Delta x)) = \sin(\alpha\Delta x)$$

(vgl. Diagramm)

$(\bar{\alpha}\Delta x)^{-1}$ ist Maß für die relative Auflösung pro Wellenlänge PPW“:

$$\bar{\alpha}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta x}{\lambda} =: \text{PPW} = \frac{2\pi}{\alpha\Delta x}$$

(weniger als 2PPW nach „Abtasttheorem“ nicht möglich: untere Grenze)

1.2.2.3 Spektralanalyse der Finiten Differenzen

Finite Differenzenverfahren für die numerische Aeroakustik (CAA-Verfahren) haben insbesondere Anforderungen (iii) und (iv) (vgl. Einleitung zu 1.2.2) bei gegebenem N bestmöglich zu erfüllen, d.h. möglichst hohe Ordnung (iv) bei gleichzeitig hoher Spektralgröße:

DRP-Verfahren von Tam & Webb (DRP=„Dispersion Relation Preserving“)

Für $\frac{\partial f}{\partial x}$ wird ein Verfahren 4. Ordnung angesetzt, d.h. Koeffizienten haben (302) und (303) zu erfüllen $\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} - 4c_3, \quad c_1 = \frac{2}{3} + 5c_3$

Dann wird c_3 so bestimmt, dass $\bar{\alpha}\Delta x$ über einen möglichst großen Auflösungsbereich $-\eta \leq \alpha\Delta x \leq \eta$ nahe an $\alpha\Delta x$ bleibt:

$$E := \int_{-\eta}^{\eta} (\bar{\alpha}\Delta x - \alpha\Delta x)^2 d(\alpha\Delta x) \stackrel{!}{=} \min$$

$$\frac{dE}{dc_3} = 0 = \int_{-\eta}^{\eta} 2(\bar{\alpha}\Delta x - \alpha\Delta x) \frac{d(\bar{\alpha}\Delta x)}{dc_3} d(\alpha\Delta x)$$

$$\bar{\alpha}\Delta x = -i \sum_{k=-N}^N c_k \exp(ik(\alpha\Delta x))$$

1.2.2.4 Beispiel: DRP-Verfahren

Nach Einsetzen von $\bar{\alpha}\Delta x$ aus (306) ergeben sich die Koeffizienten des DRP Verfahrens zu

$$c_1 = 0.02084314277 \dots$$

$$c_2 = -0.166705904415 \quad (307)$$

$$c_3 = 0.770882380518$$

Für die Verwendung auf gekrümmten Rechennetzen, Randbehandlung etc.

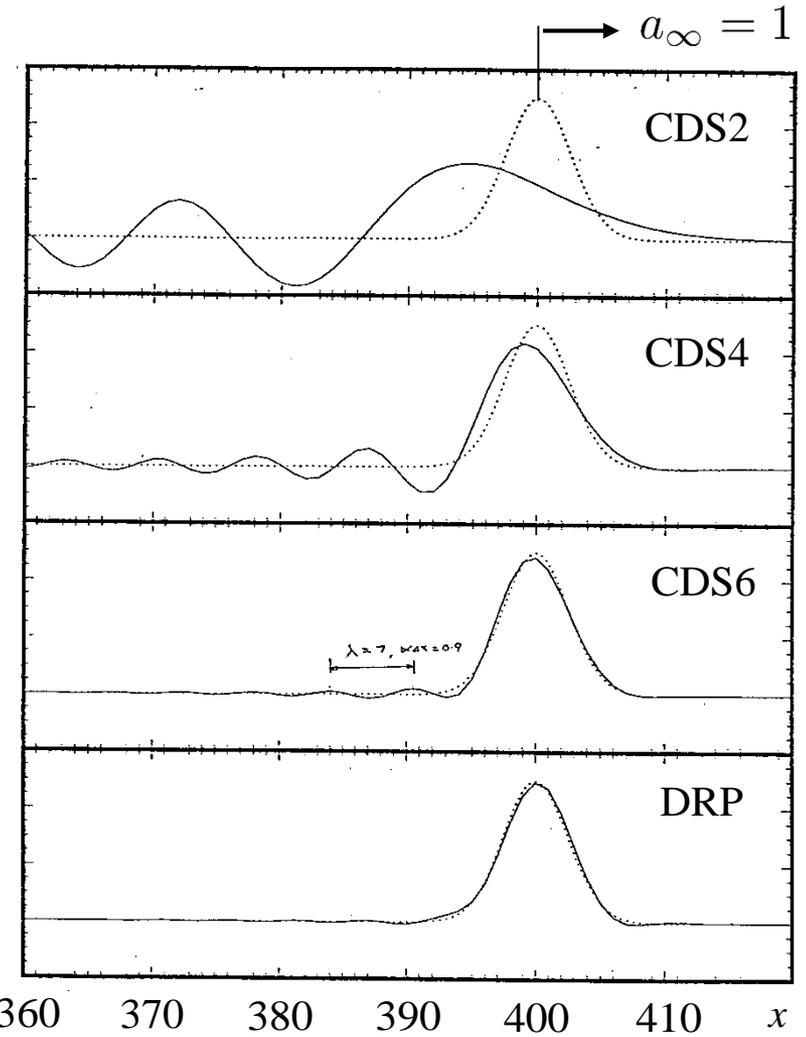
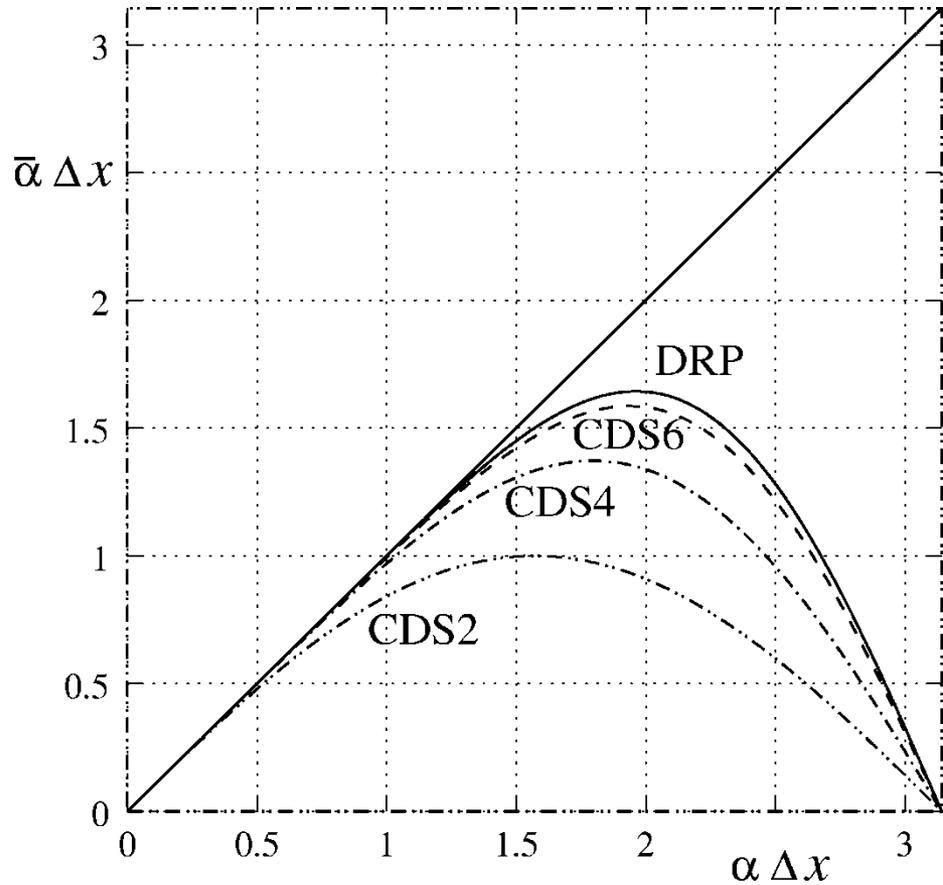
vgl. S. 290-303

Neuere Entwicklungen:

- Unstrukturierte Netze bei hoher Ordnung mittels „Diskontinuierlichen Galerkin“ Verfahren (Variante von Finite Element Methoden)
- Rein (hierarchisch) kartesische Gitter mit sog. „immersed boundary conditions“ zur Erfüllung der Randbedingungen

1.2.2.4 Beispiel: DRP-Verfahren

Auflösungsvermögen von Finite Differenzenverfahren

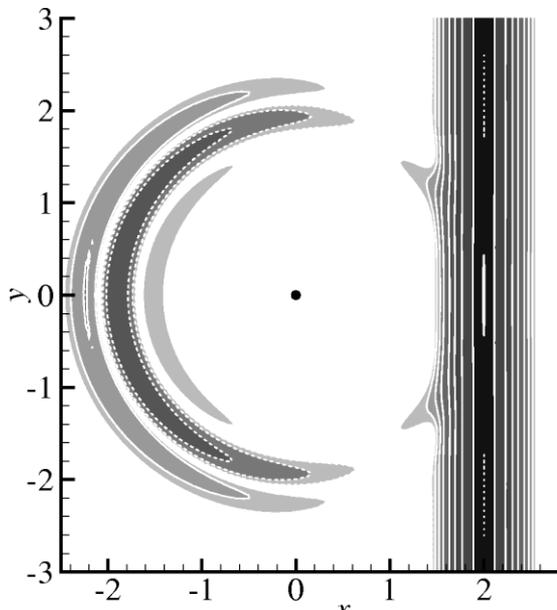
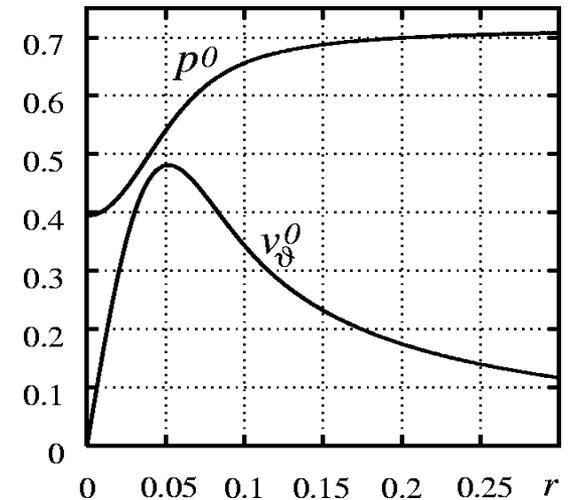
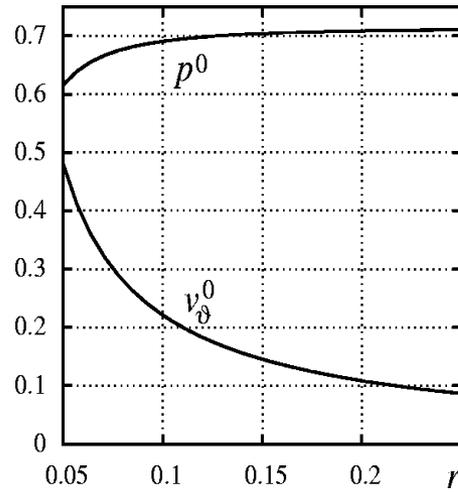
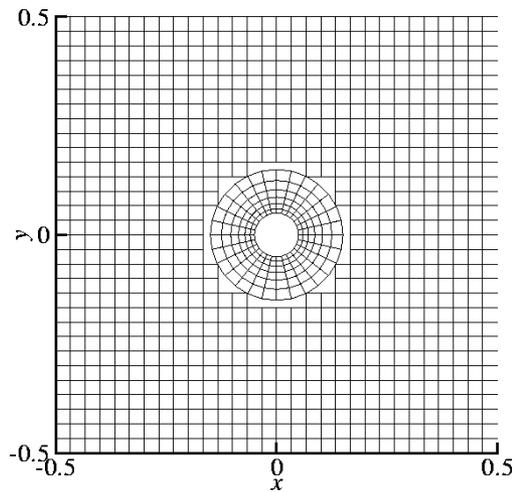


$$p'(x, t = 0) = \exp(-\ln 2(x/3\Delta x)^2); \quad \Delta x = 1$$

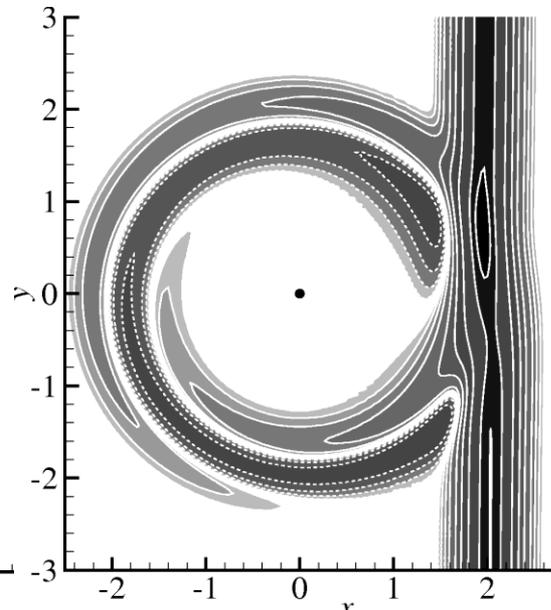
$$\frac{\partial p'}{\partial t} + a_\infty \frac{\partial p'}{\partial x} = 0$$

CDS N = Central Differencing Scheme of order N

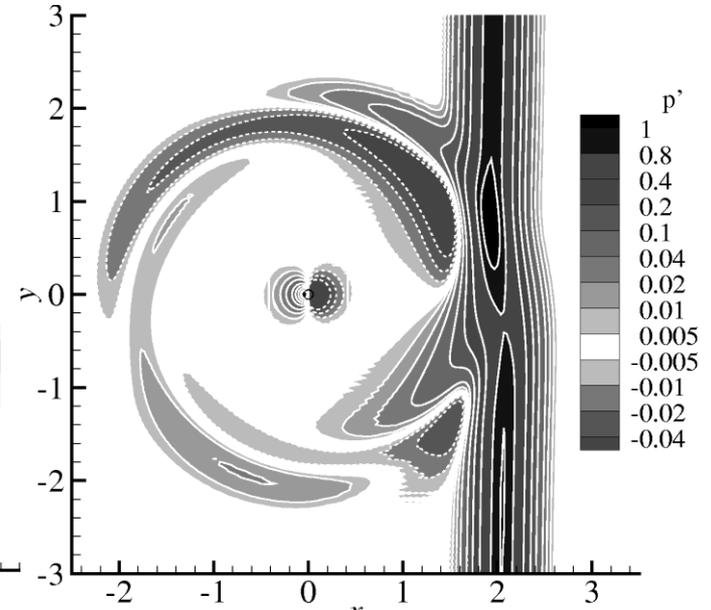
CAA Simulation Konvektions- und Beugungseffekten



keine Strömung

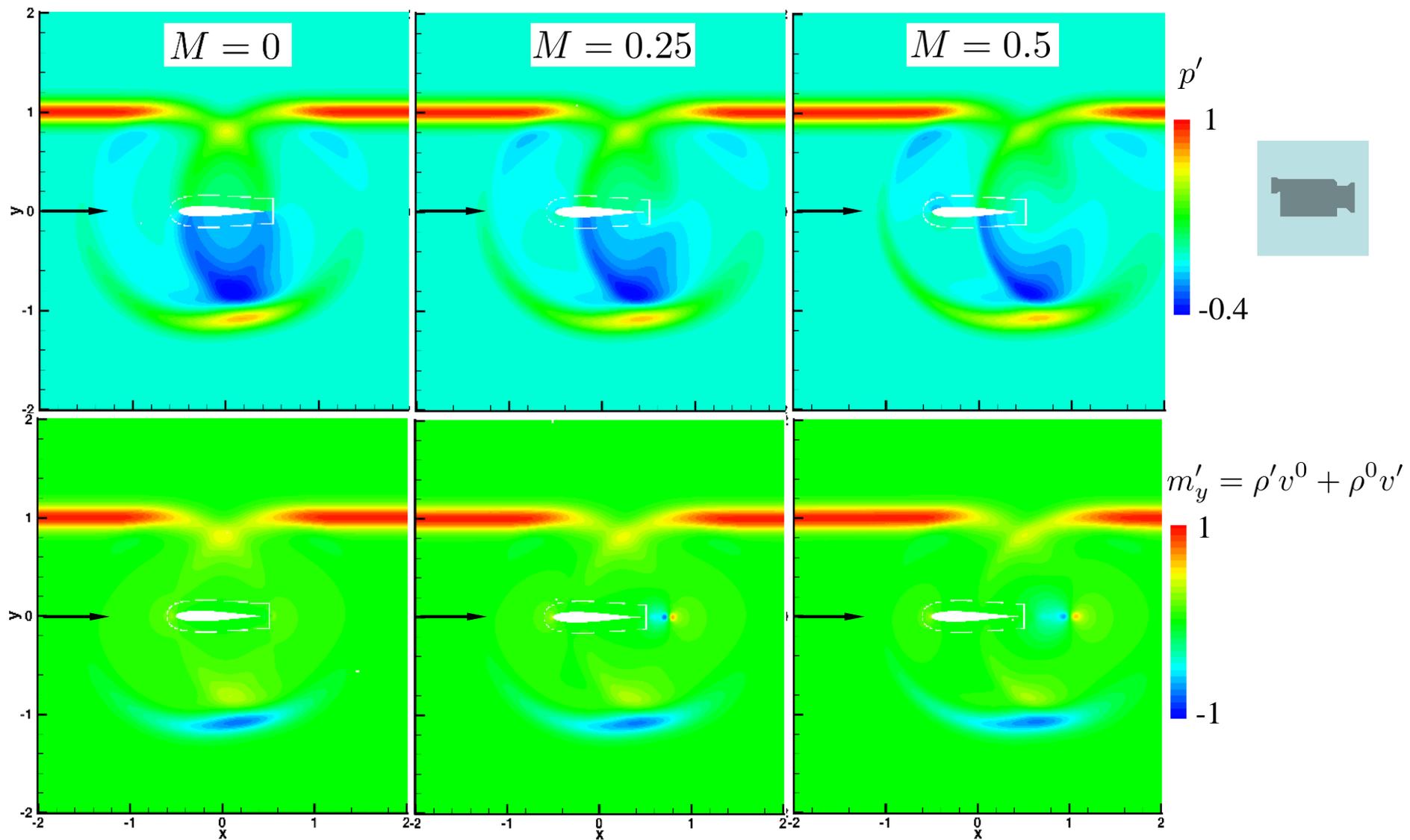


Potentialwirbel



Wirbel mit Kern (kein Zylinder)

Simulation Wechselwirkung Schall → Wirbel

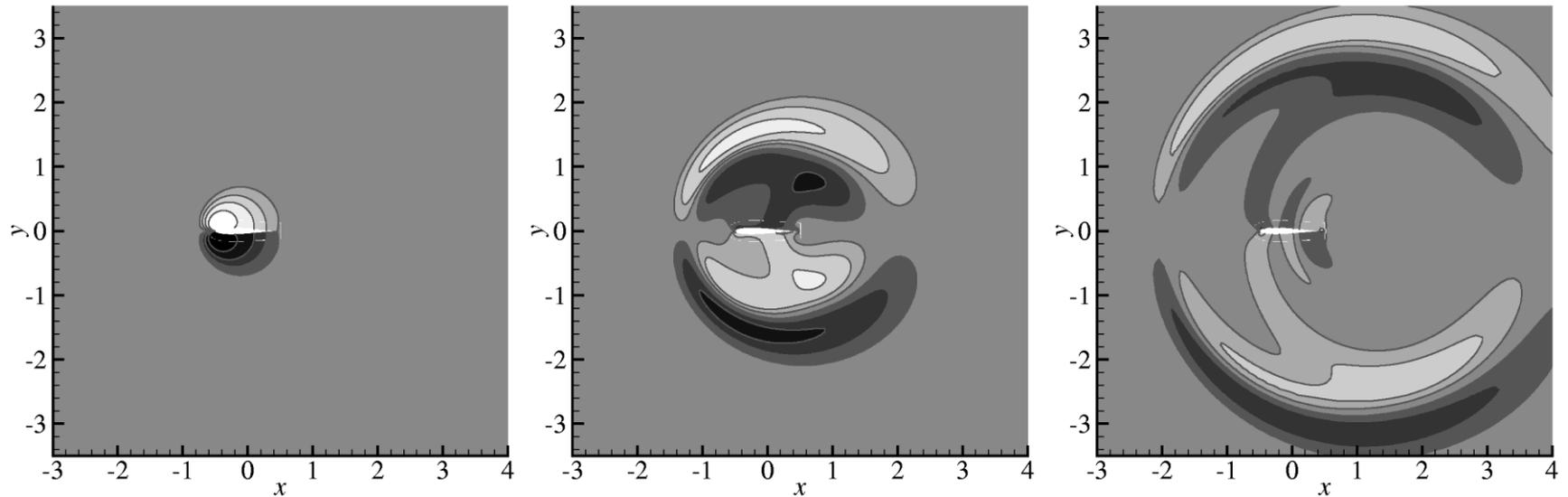
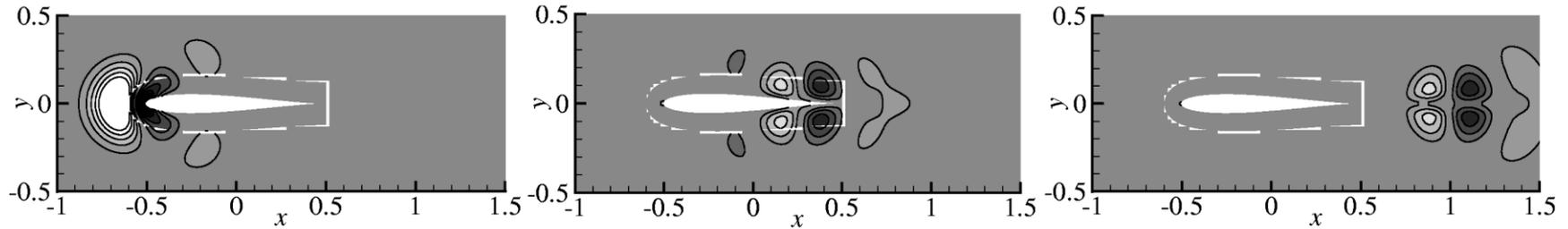


Aerodynamische Erzeugung von Schall (Wirbel → Schall)

Anströmende Wirbelstörung auf Profil (Joukowski)

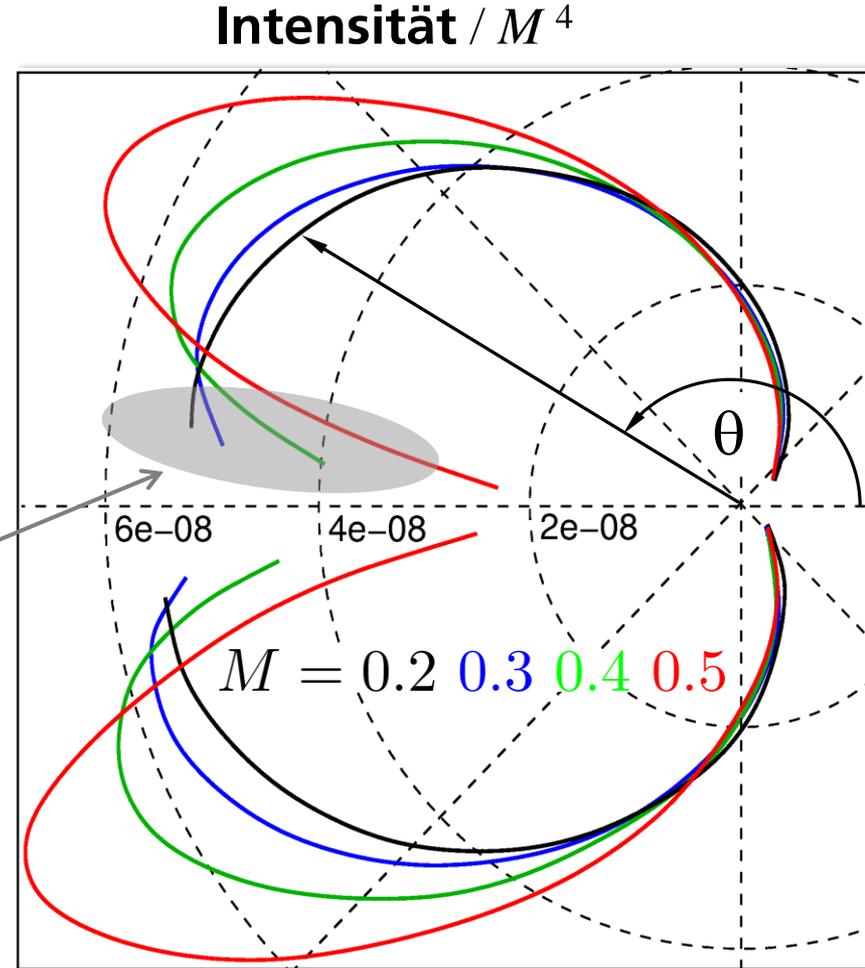
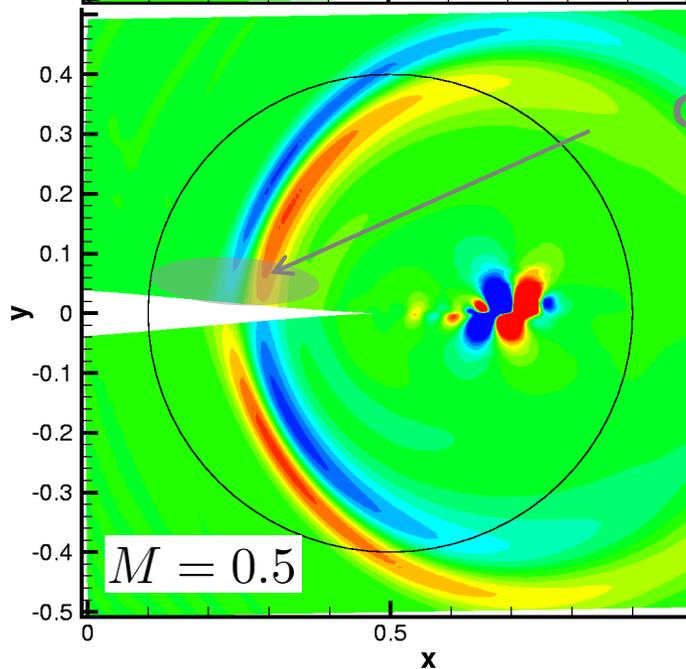
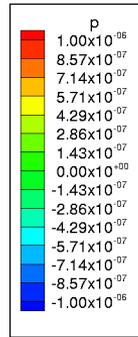
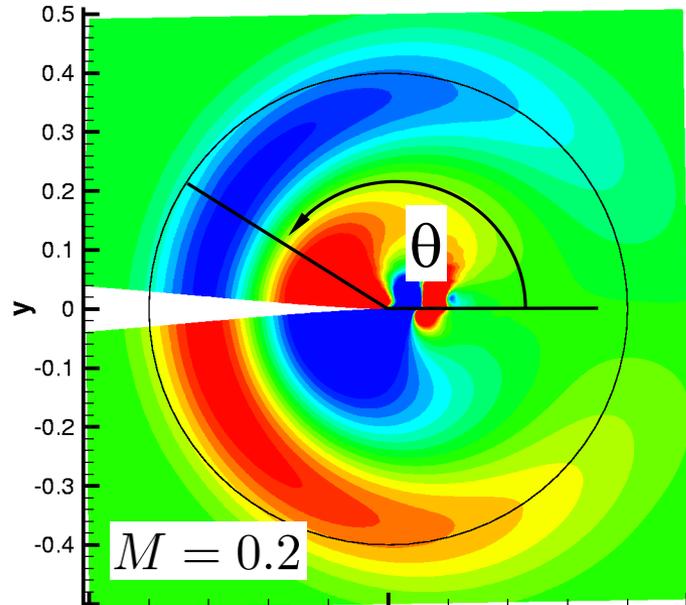


v' : -0.5 -0.4 -0.3 -0.2 -0.1 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5



p' : -0.1 -0.05 -0.025 -0.01 0.01 0.025 0.05 0.1

Effekt der Strömungsgeschwindigkeit auf Kantengeräusch

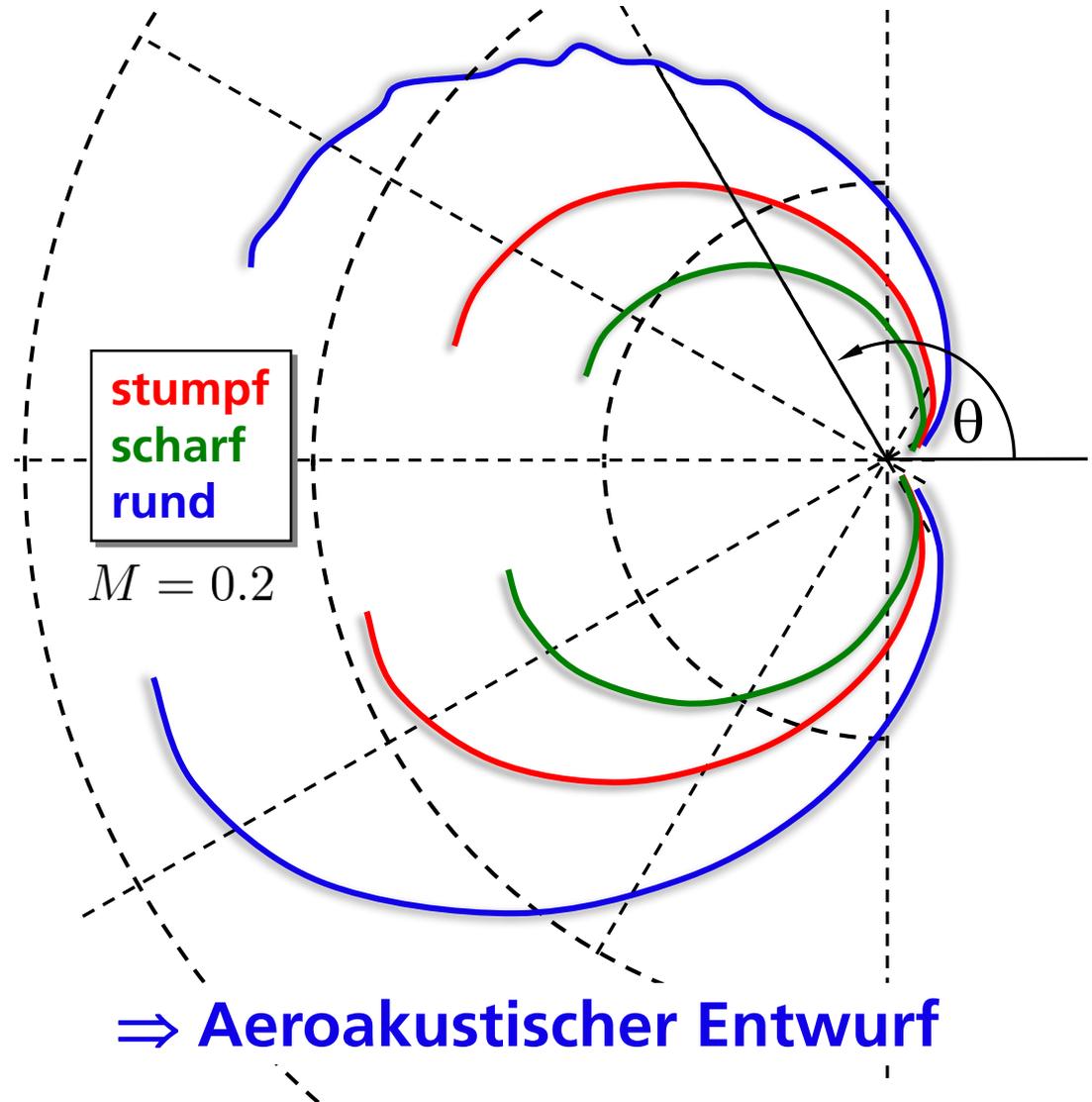
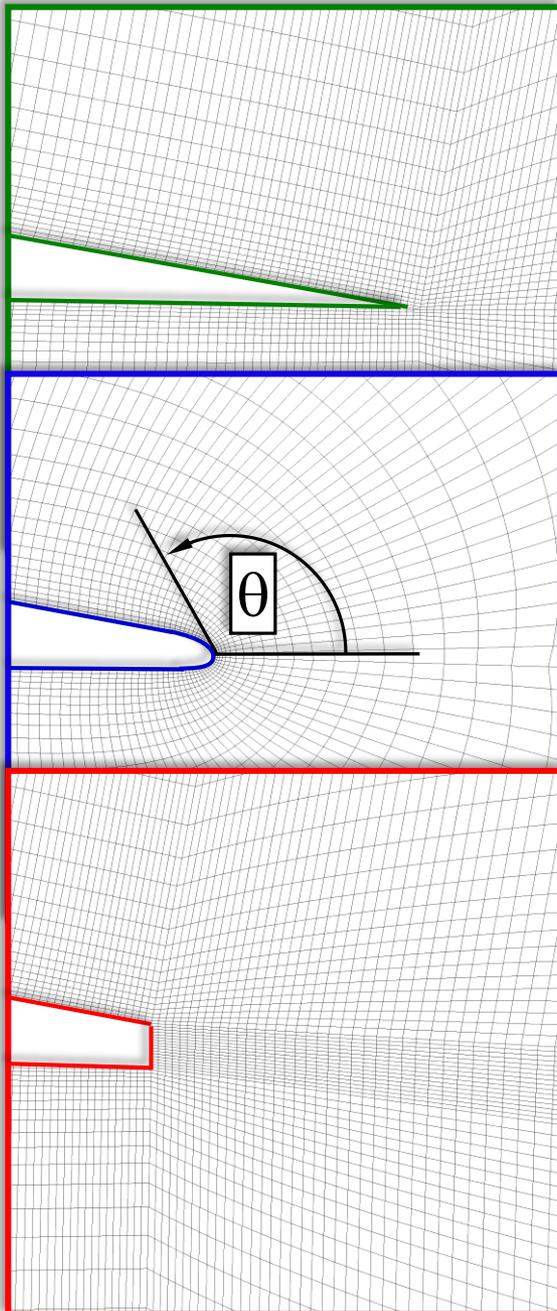


⇒ Richtwirkung Quelle

⇒ Geschwindigkeitsgesetz $I \sim U^4$ (2-dim)

Entwurfstudie zu Kantenform

Intensität / M^4



Einfluss Strebendicke in gestörter Zuströmung (1)

Aufgabe:

Entwurfsstudie (Vergleich von Varianten)

Ansatz:

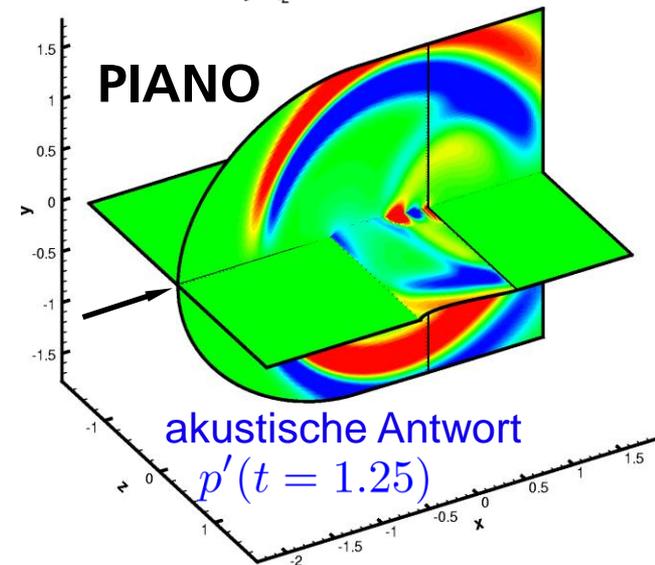
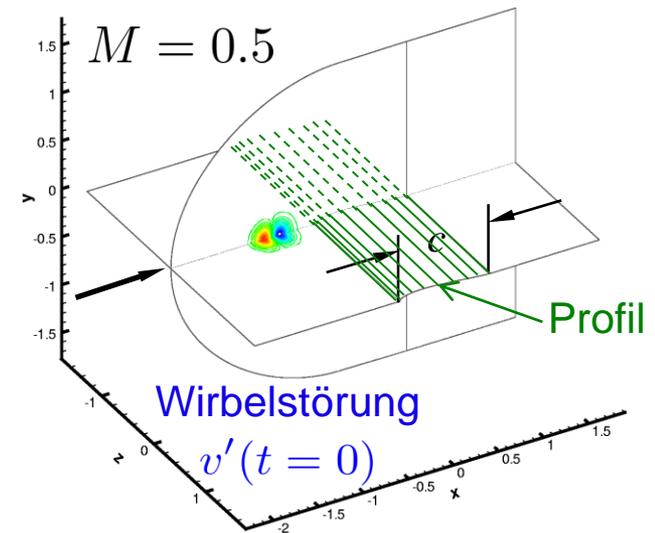
Quellursache: Teststörwirbel

Quellprozess: Störung RANS mit LEE

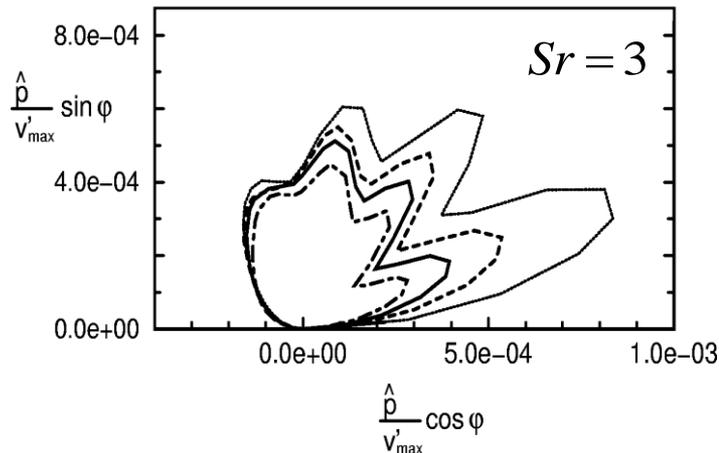
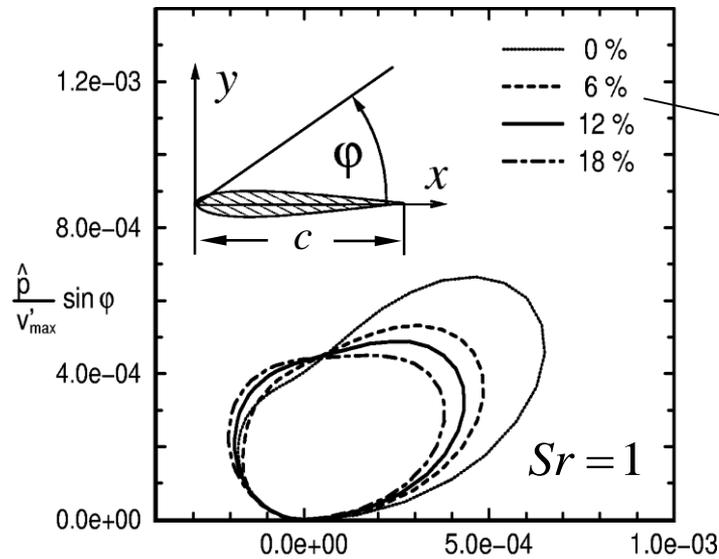
Abstrahlung: LEE

Realisierung:

CAA Code PIANO



Einfluss Strebendicke in gestörter Zuströmung (2)



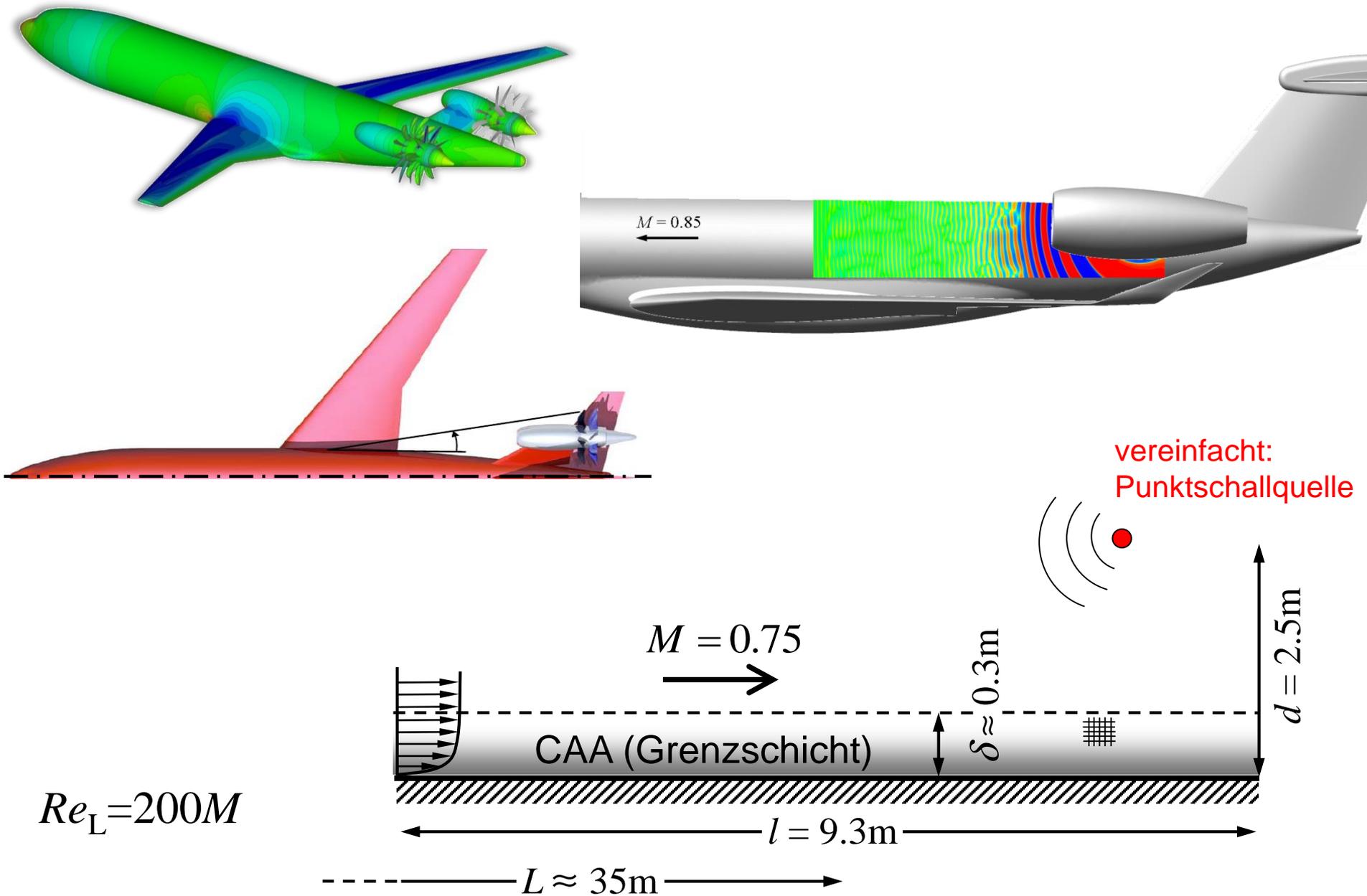
**Quantifizierung
Schallminderung
mit Dicke**



**Computer- gestützer
aeroakustischer
Entwurf**

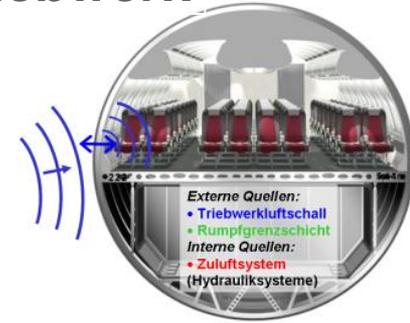
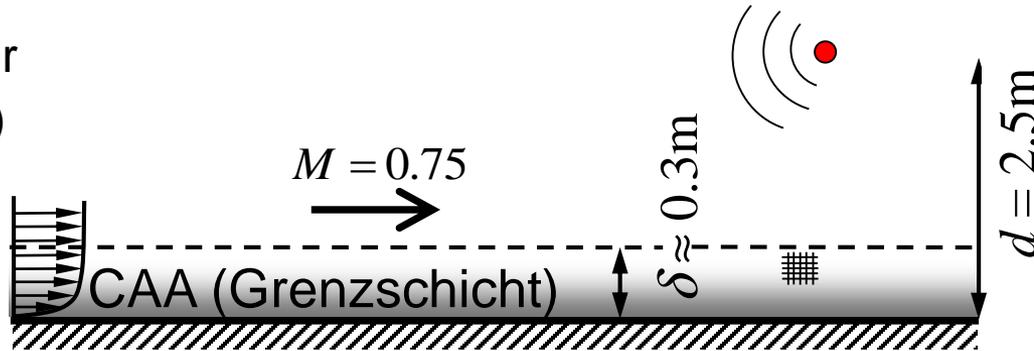
$$(Sr = f \cdot c / U_{\infty}, \Delta Sr = 0.2)$$

Rumpfoberflächenschalldruck aus Tonsignalen vom Triebwerk

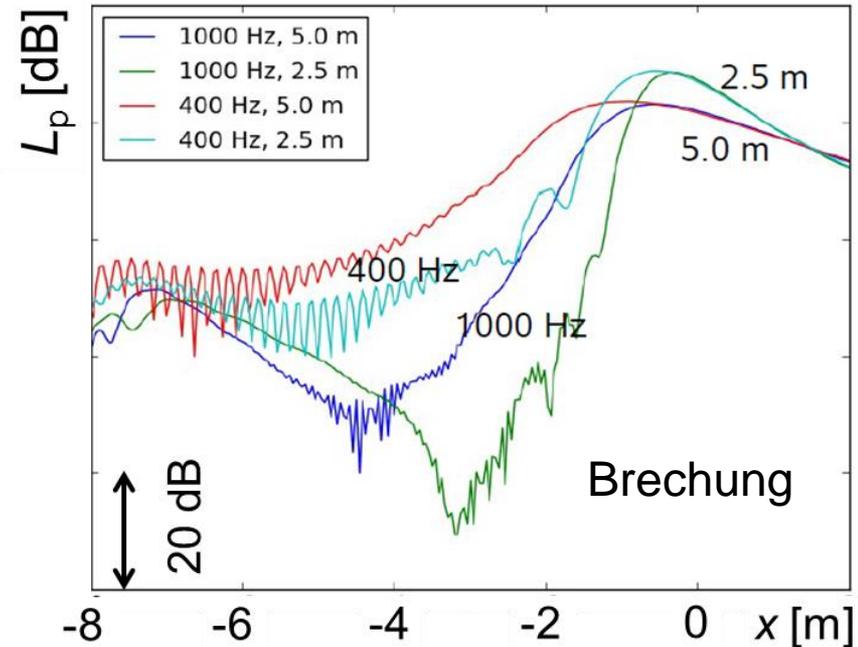
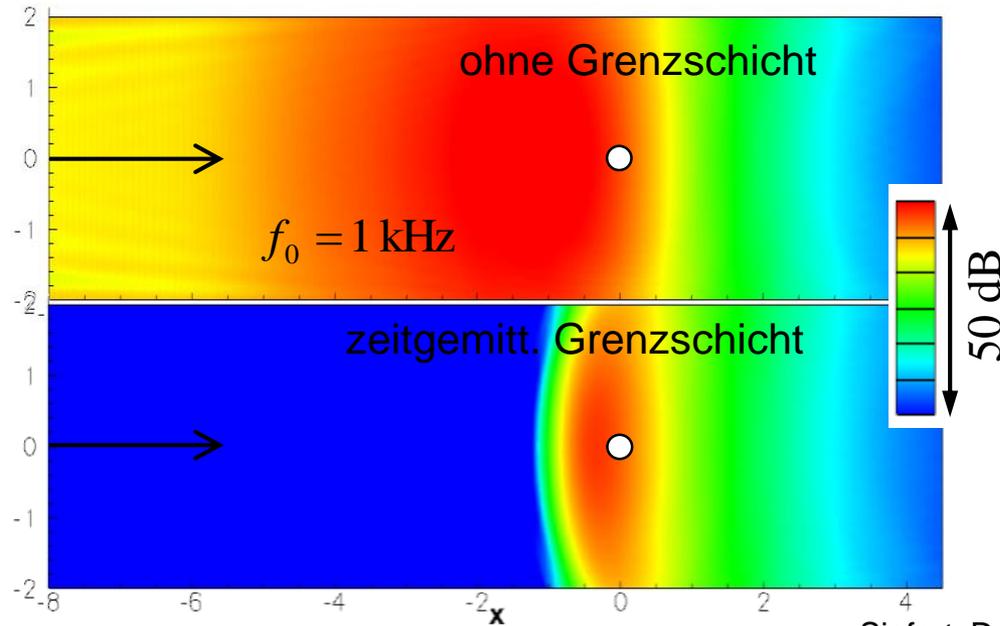


Rumpfoberflächenschalldruck aus Tonsignalen vom Triebwerk

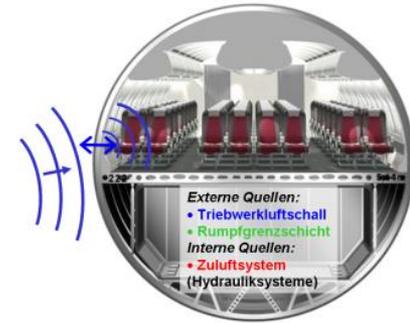
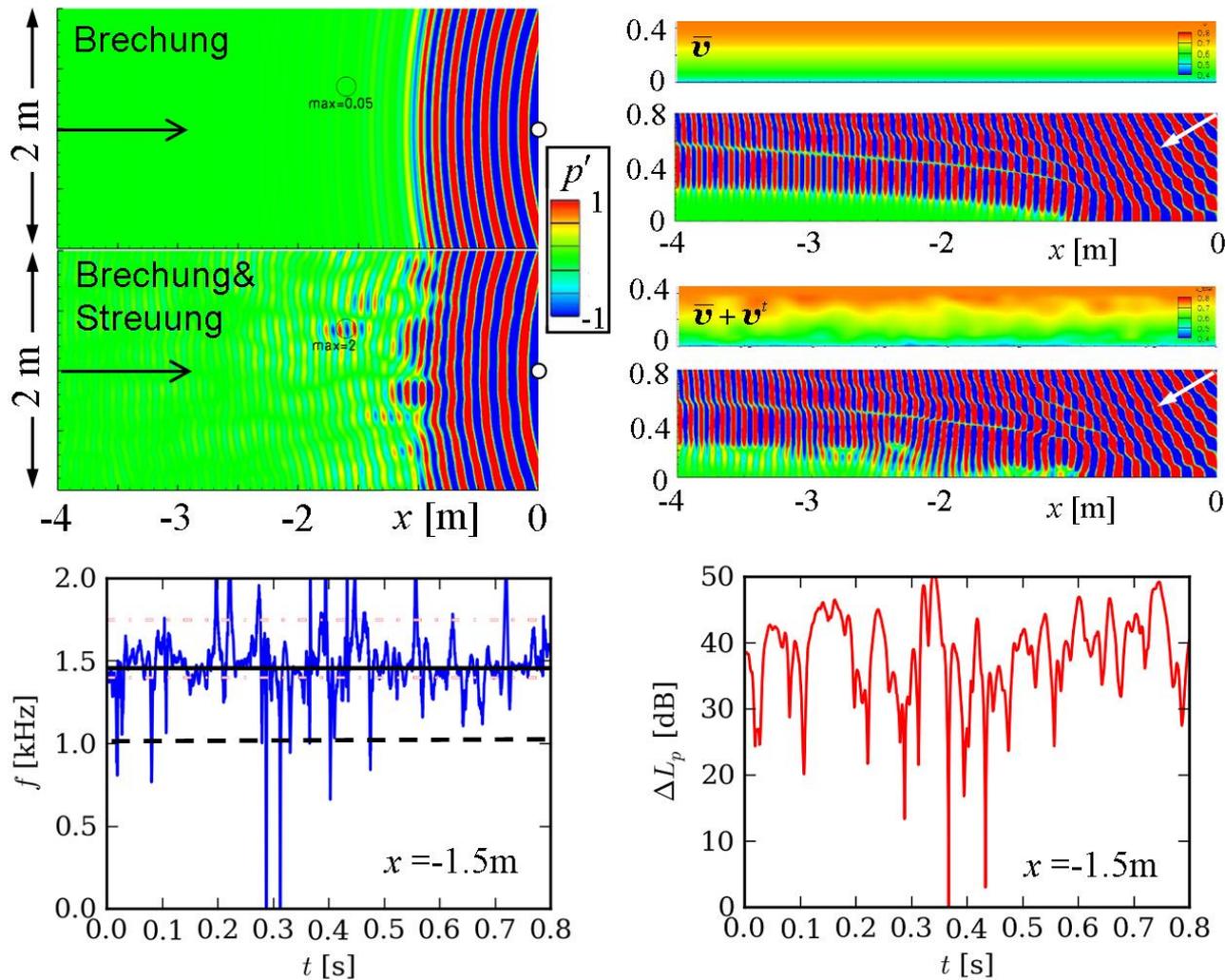
- Realreynoldszahl
- RANS + LEE
(Turbulenz über stoch. Modell)



Oberflächendruckpegel von Punktquelle

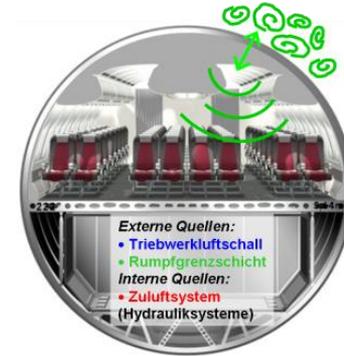
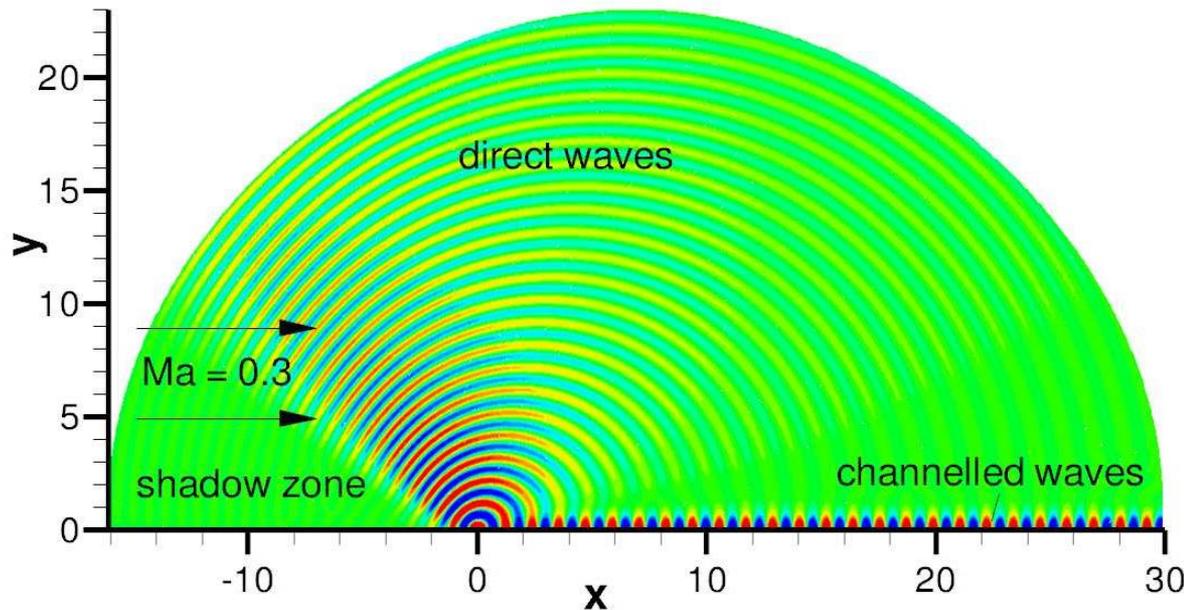
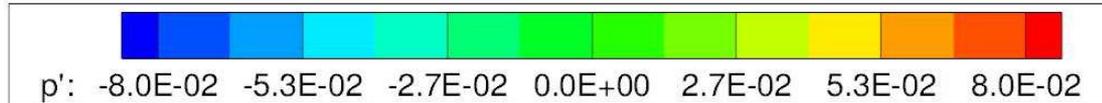


Rumpfoberflächenschalldruck aus Tonsignalen vom Triebwerk



Brechung + Streuung an bewegten turbulenten Wirbeln
 ⇒ Dopplerverschiebung (positionsabhängig) !

Brechung von Schallquellen in Grenzschicht



⇒ Schallschatten und Wellenleiterphänomene

Einfluss der Form einer Wasserfangleiste auf Schallerzeugung

Aufgabe:

Entwurfsstudie (Vergleich von Variationen)

Ansatz:

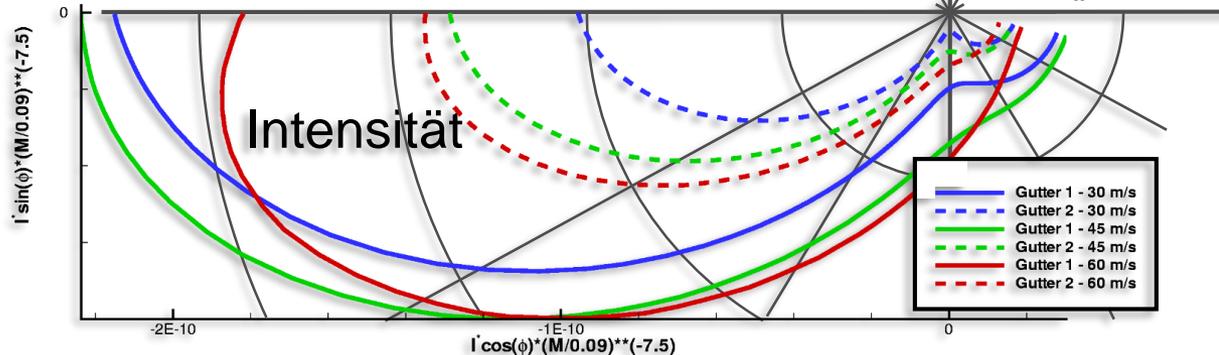
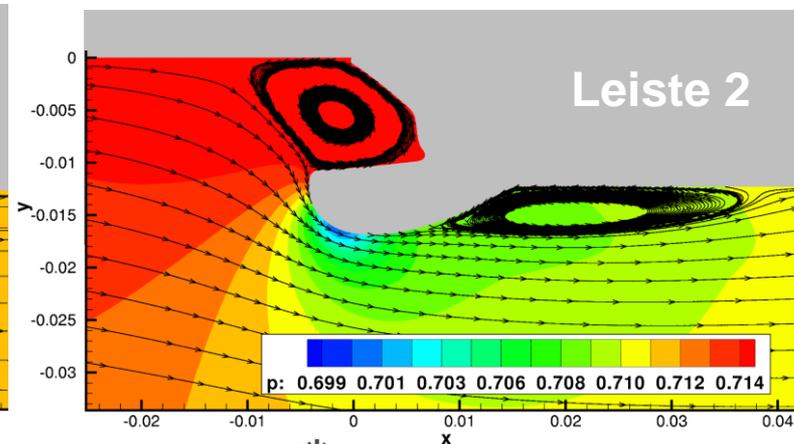
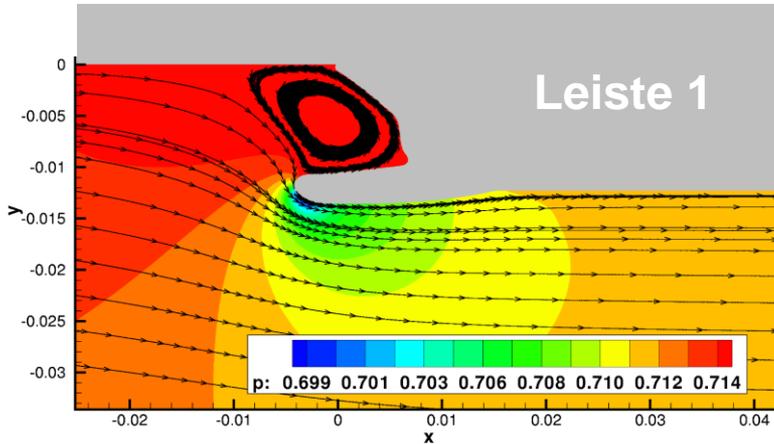
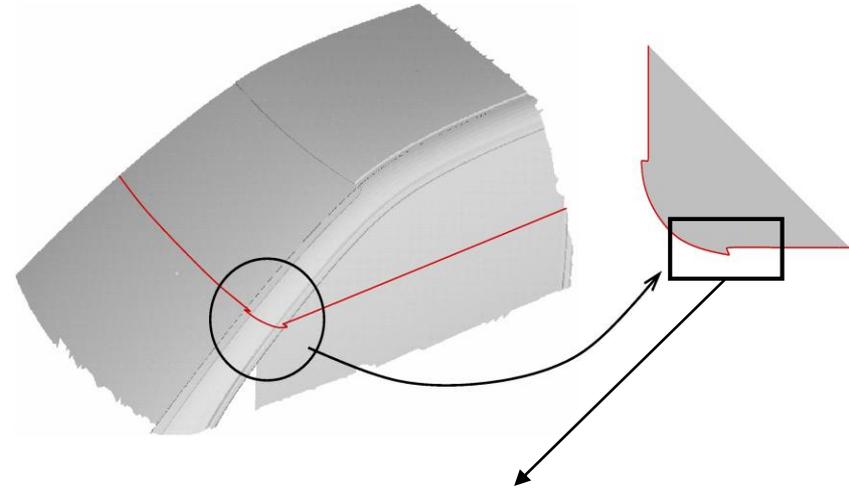
Quellursache: Testwirbelstörung

Quellprozess: Störung RANS mit LEE

Abstrahlung: LEE

Realisierung:

RANS-Löser OpenFoam & CAA Code PIANO

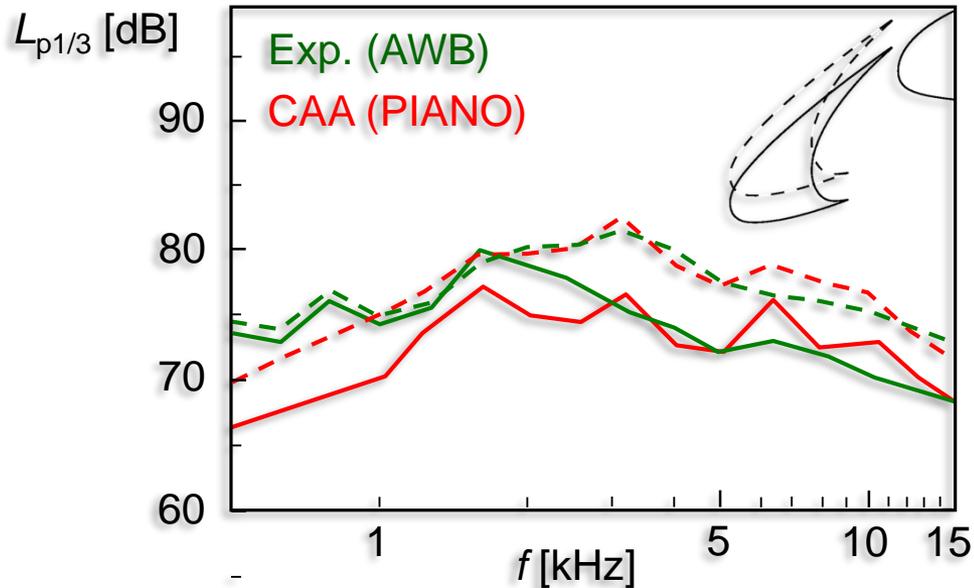
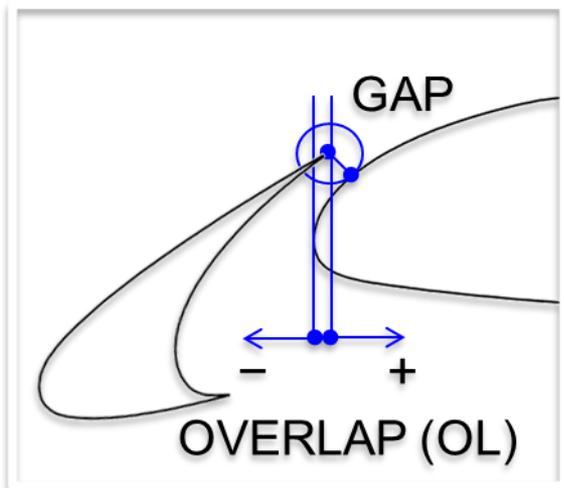
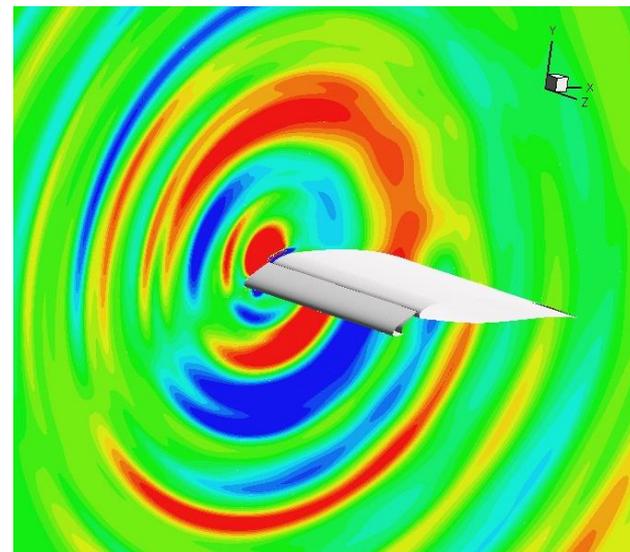




Geräuschminderung Vorflügel

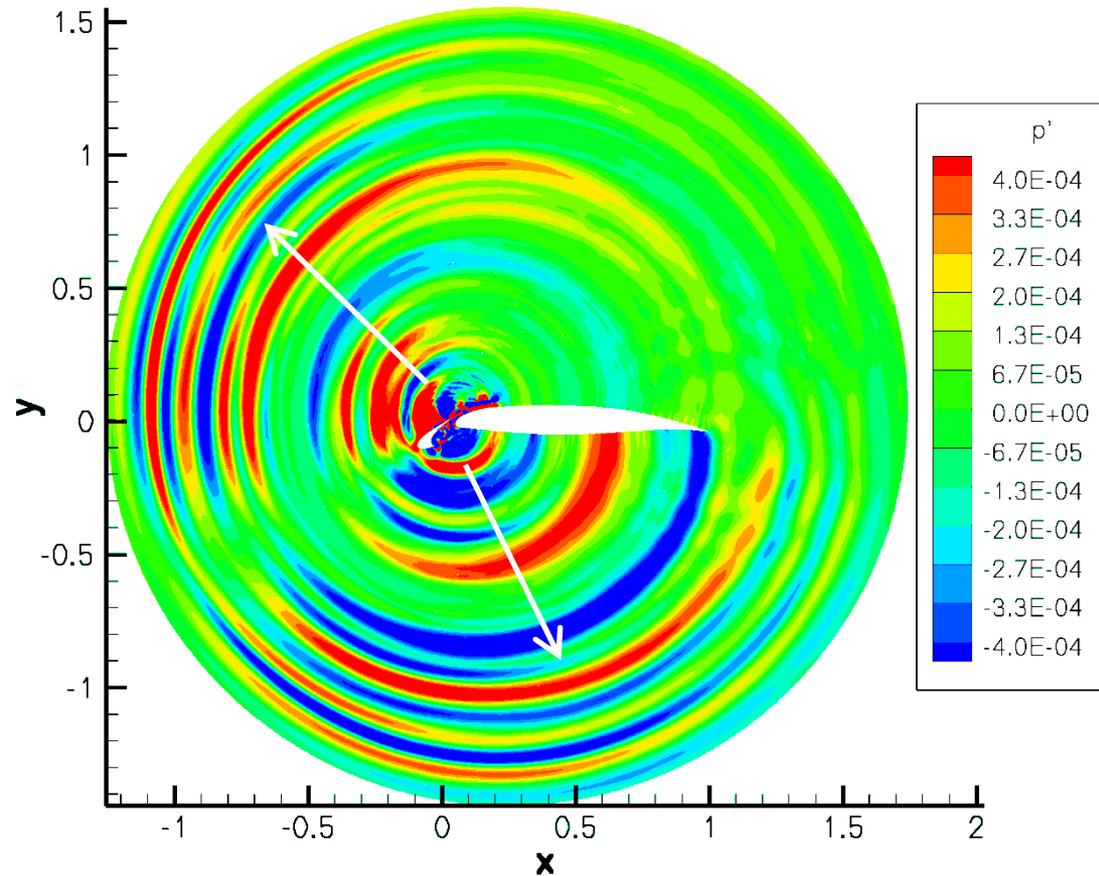
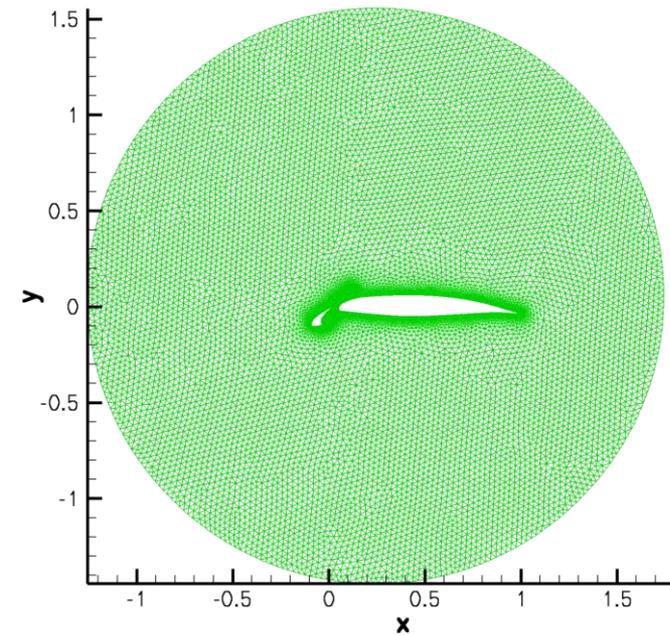
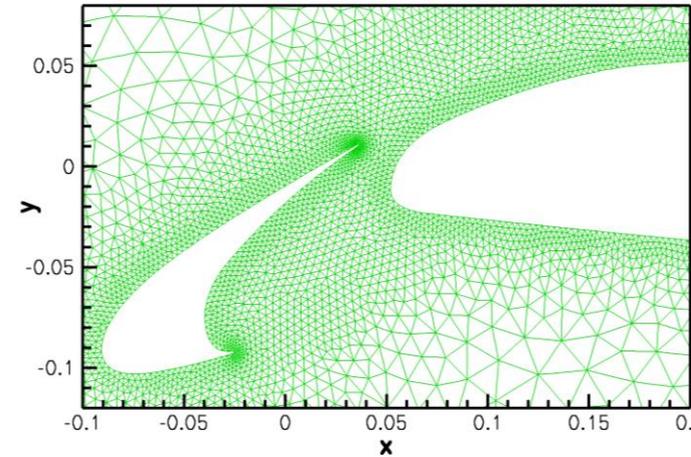


„Silent by design“
Klappensetzung: - 4 dB

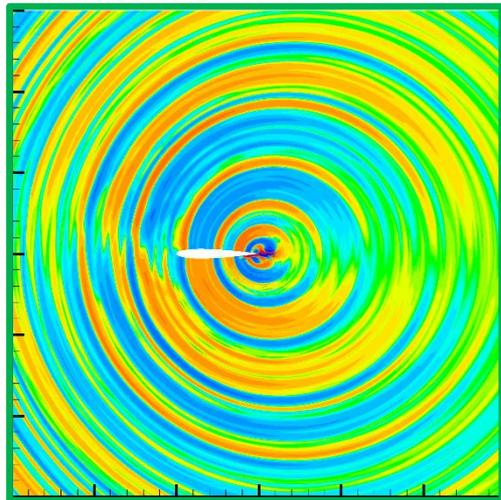
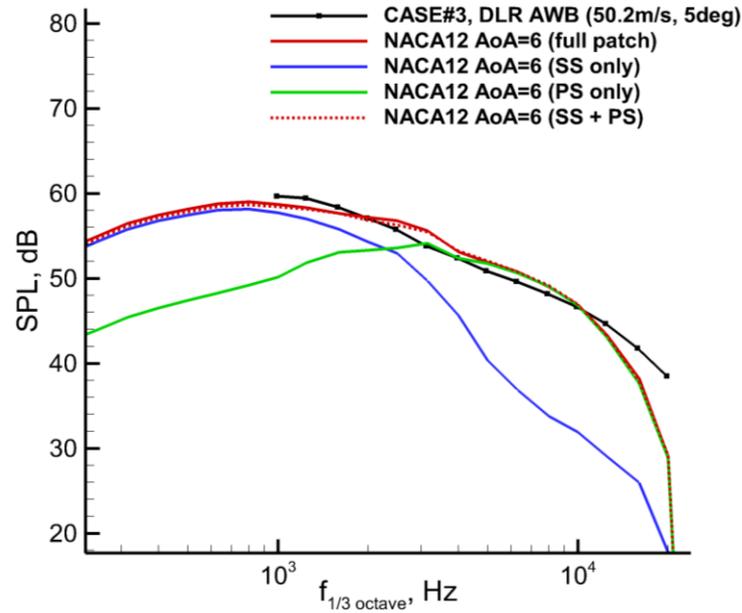


CAA auf unstrukturierten Gittern

- basierend auf Discontinuous Galerkin Finite-Elemente Ansatz
- 4th Ordnung, knotenbasierte Formulierung (Lagrange Polynome)
- Stochastisches Quellenmodell

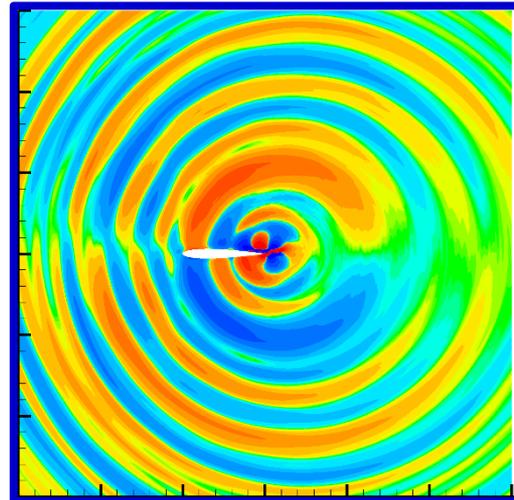


CAA Simulation NACA0012 Hinterkantengeräusch bei AoA=6deg



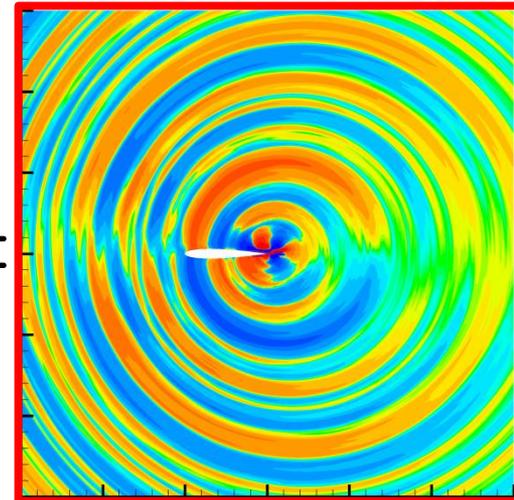
Turbulenz nur Druckseite

+

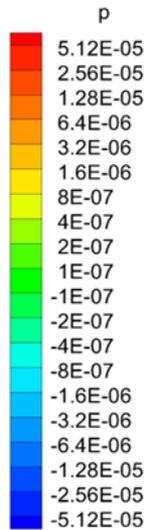


Turbulenz nur Saugseite

=

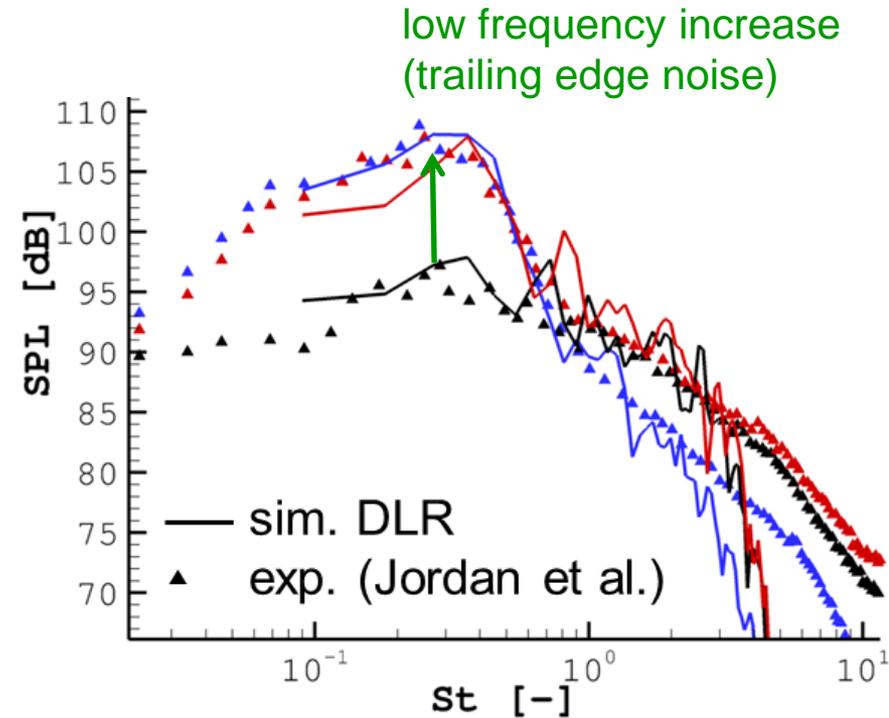
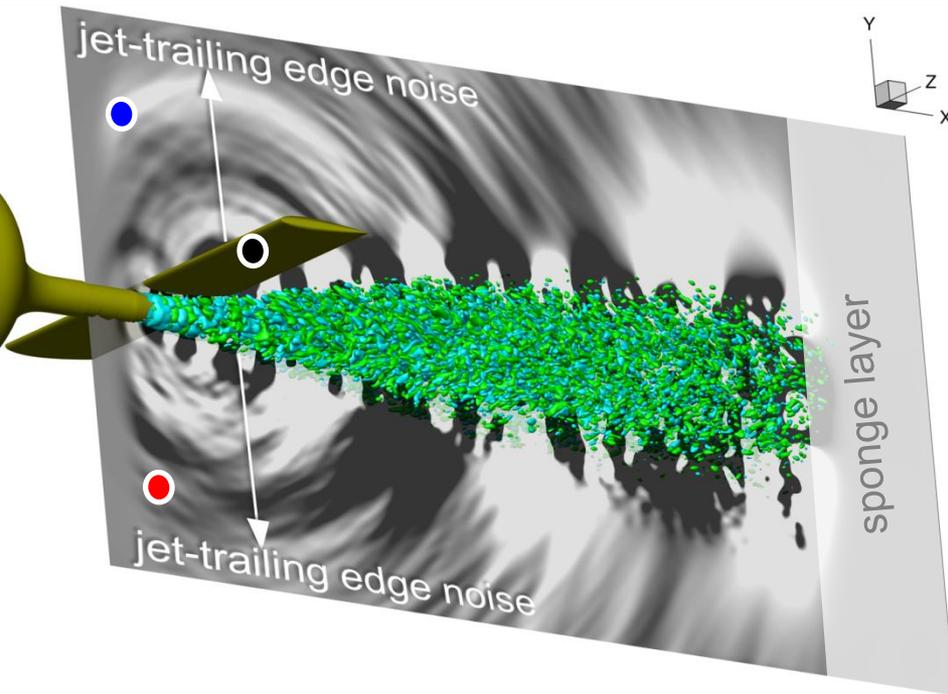


Turbulenz beidseitig



Strahl-Profil Interferenzgeräusch

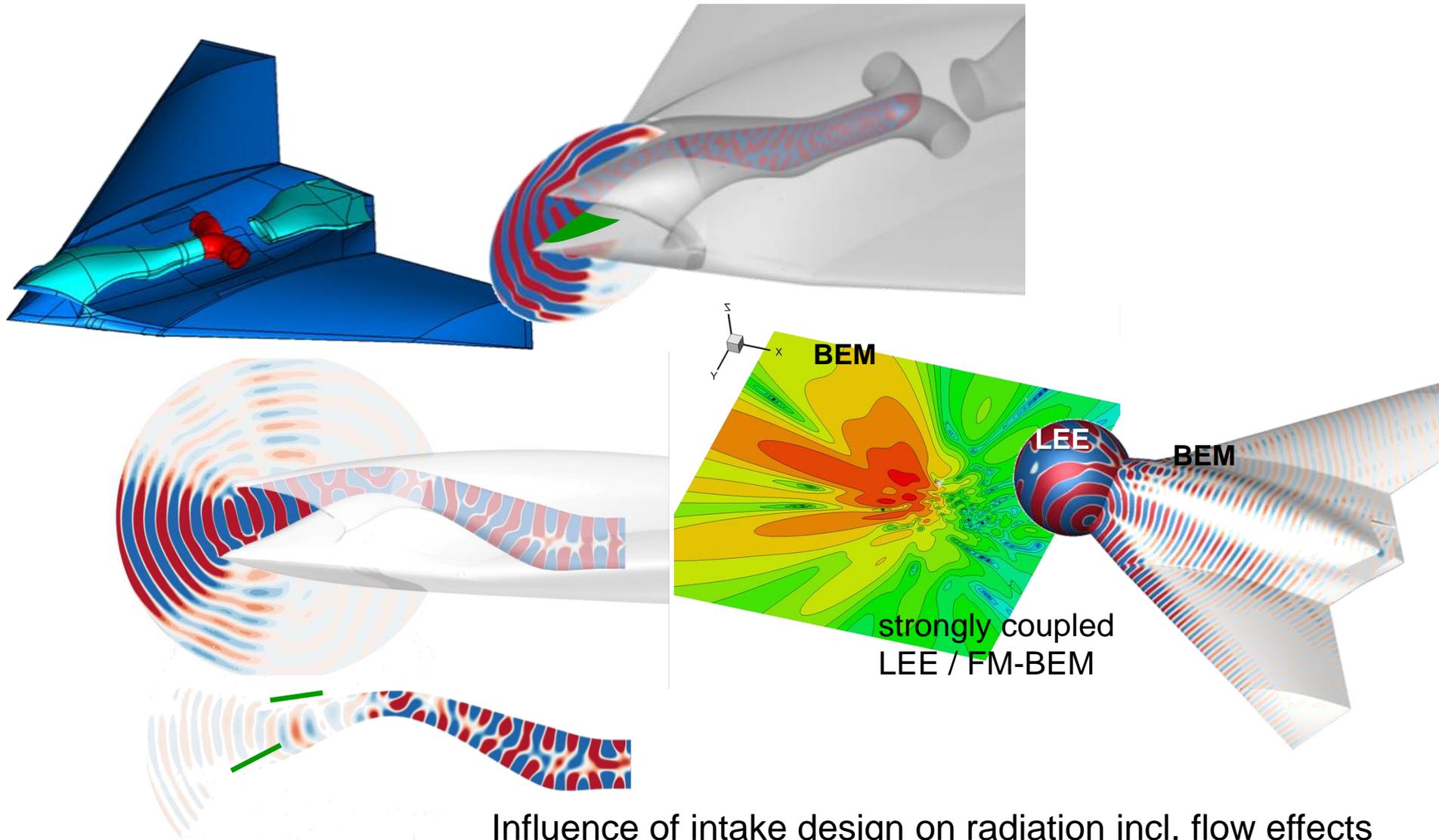
CAA Simulation M=0.6 Strahlinterferenz mit NACA0012



FES=„Forced Eddy Simulation“

- uRANS: CFD solver **TAU**
- subscale forcing: Eddy Relaxation model*
- stochastic turbulence: **FRPM**
- nonl. perturb: CAA solver **PIANO**

Abstrahlungssimulation Einlauf – Kopplung CAA-BEM



Influence of intake design on radiation incl. flow effects
Inclusion of arbitrary liner surfaces (CAA code DISCO++)

2.1 Akustische Sensoren und Messtechnik

2.1.1 Mikrophone

Mikrophone sind sog. „**elektroakustische Wandler**“, die eine akustische Eingangsgröße (Druck oder Schnelle) in eine elektrische Ausgangsgröße (Spannung oder Strom) umsetzen.

Es wird zwischen elektrostatischen, **(elektro-)dynamischen** und **piezoelektrischen Wandlern** unterschieden. Entsprechend der gemessenen Größe gibt es **Schalldruck-** und **Schnellemikrophone**. In der Mehrzahl der aeroakustischen Anwendungen interessiert die Schalldruckmessung. Hierbei hat sich das sog. „**Kondensatormikrophon**“ als Vertreter der elektrostatischen Wandler durchgesetzt (s.u.).

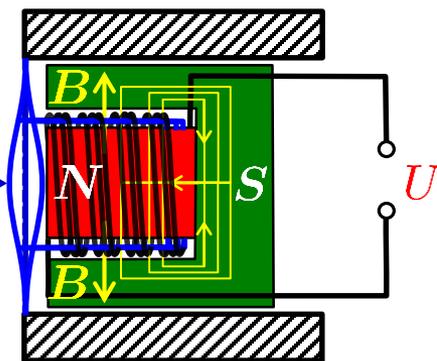
2.1.1.1 **elektrodynamisches Mikrophon**, auch „dynam. **Tauchspulenmikrophon**“:

freitragende Spule (Leiterlänge l) ist an Membran befestigt und taucht bei schalldruckinduzierter Bewegung der Membran in Ringspalt eines Permanentmagneten (Feldstärke B) ein

⇒ Leiter wird mit Geschw. $v' \perp$ zu B -Feldlinien bewegt und $v' \leftrightarrow$ induziert elektr. Spannung $U \sim l |v' \times B|$: Schnellmessung

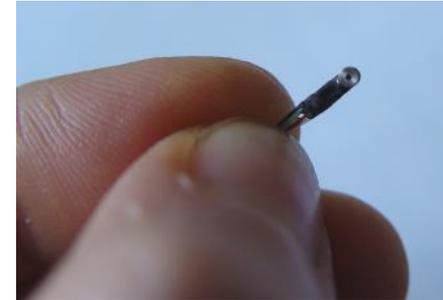
Vorteil: robust, keine externe Spannung

Nachteil: träge (wg. Spulenmasse), empfindl. gg. Erschütterung



2.1.1 Freifeldmikrophone, Frequenzgang und Immissionsrichtwirkung

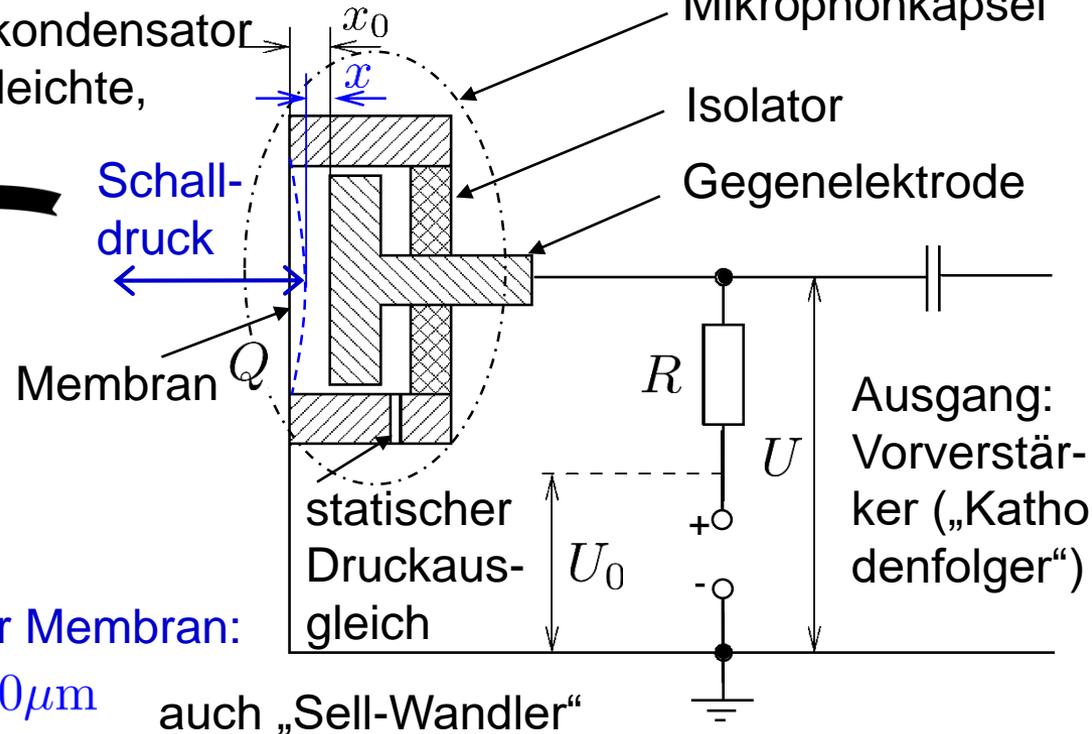
2.1.1.2 **piezoelektrisches Mikrophon**: auch piezoresistiver Druckwandler. Wandeln druckinduzierte Verformung von Piezo-Kristallen in elektrische Spannung um. Häufige Anwendung: Messung instationärer Oberflächendrücke bei überströmten Flächen, (bekannter Hersteller Ku-lite Semiconductors Inc., „Ku-lite-Sensoren“)



Vorteil: klein, **Nachteil:** unempfindlich

2.1.1.3 **elektrostatishes Mikrophon**, auch „**Kondensatormikrophon**“

Stellt im wesentlichen einen Plattenkondensator dar, dessen eine Elektrode als sehr leichte, leitfähige Membran ausgeführt ist.



Q – Ladung

C – Kapazität d. Kondensators

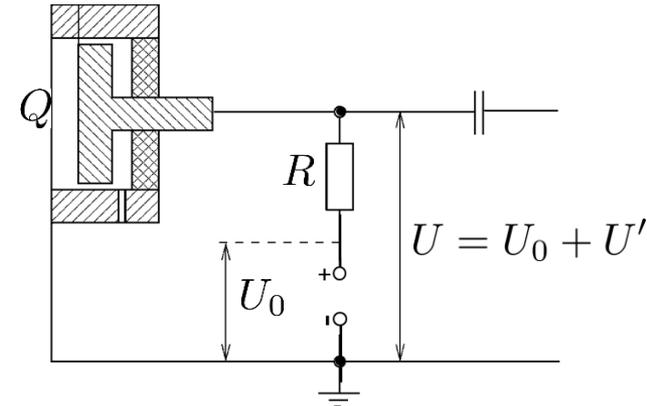
R – Widerstand (hochohmig)

U_0 – Polarisationsspannung
(200V Gleichspannung)

Schalldruckinduzierte Bewegung der Membran:

$$x(t) = x_0 + \hat{x} \sin(\omega t), \quad x_0 \sim 5 - 20 \mu\text{m}$$

2.1.1.3 elektrostatisches Mikrophon



Schalldruckinduzierte Bewegung der Membran:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{x}, \quad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} - \text{elektrische Feldkonstante für Vakuum}$$

$$A - \text{wirksame Kondensatorfläche}$$

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} (x_0 + \hat{x} \sin(\omega t))$$

R wird hochohmig gewählt, um den Strom zu begrenzen und damit die Ladung Q konstant zu halten, d.h. $Q \simeq Q_0 \Rightarrow$

$$U = \underbrace{\frac{Q_0}{\varepsilon_0 A}}_{U_0} (x_0 + \hat{x} \sin(\omega t)) \quad \Rightarrow \quad U'(t) = U(t) - U_0 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A} \hat{x} \sin(\omega t) \sim p'(t)$$

Es gibt Ausführungen, bei denen ein permanent elektrisch vorpolarisiertes Dielektrikum verwendet wird (permanentes elektrisches Gleichfeld), sog. „Elektrete“. Solche Mikrophone heißen auch „Elektretmikrophone“.

2.1.1.3 elektrostatisches Mikrophon

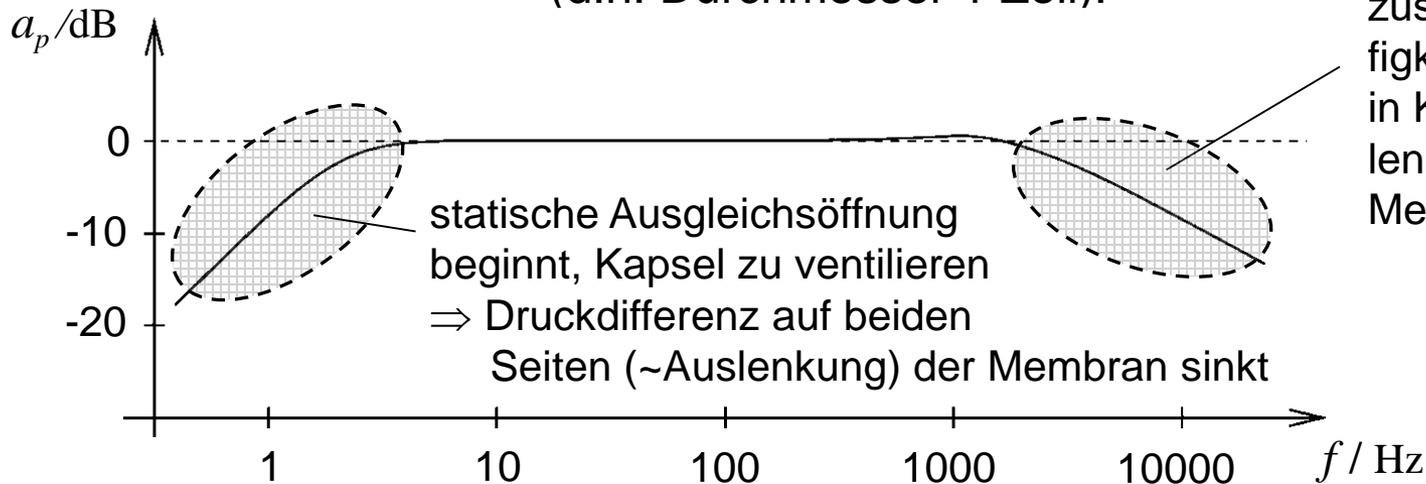
Frequenzgang:

$$M_p = \frac{U}{p_1} \quad (324) \quad \text{Druckübertragungsfaktor, } p_1 \text{ Effektivwert des an Membran tatsächlich anliegenden Drucks}$$

$$a_p := 20 \lg(M_p/M_{\text{ref}}) \quad \text{Druckübertragungsmaß, } M_{\text{ref}} = 1 \text{ V/Pa}$$

Typischer Verlauf für ein 1“ Mikrophon

(d.h. Durchmesser 1 Zoll):



a_p beschreibt „innere Charakteristik des Mikrophons“

2.1.1.3 elektrostatisches Mikrophon

Frequenzgang:

$$M_F = \frac{U}{p_0} \quad (325) \quad \text{Feldübertragungsfaktor, } p_0 \text{ Druck im Messpunkt ohne Störwirkung des Mikrophons}$$

(free field response)

$$a_F := 20 \lg(M_F / M_{\text{ref}}) \quad \text{Feldübertragungsmaß}$$

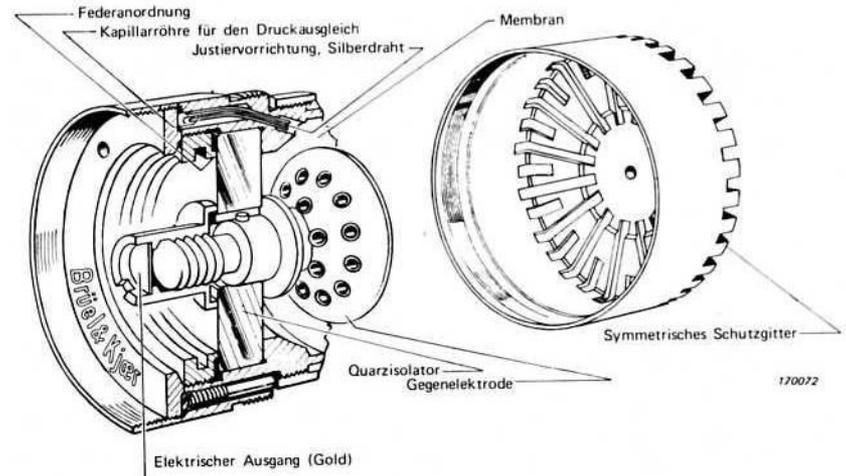
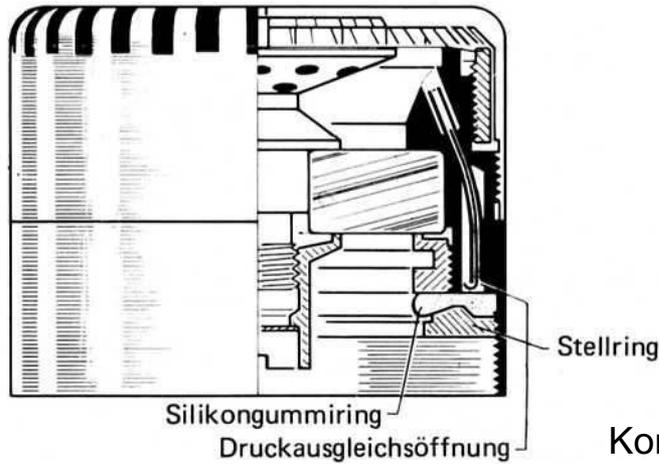
Für Messung benötigt: Freifeldkorrektur

$$K = a_F - a_p = 20 \lg \frac{p_1}{p_0} \quad (326)$$

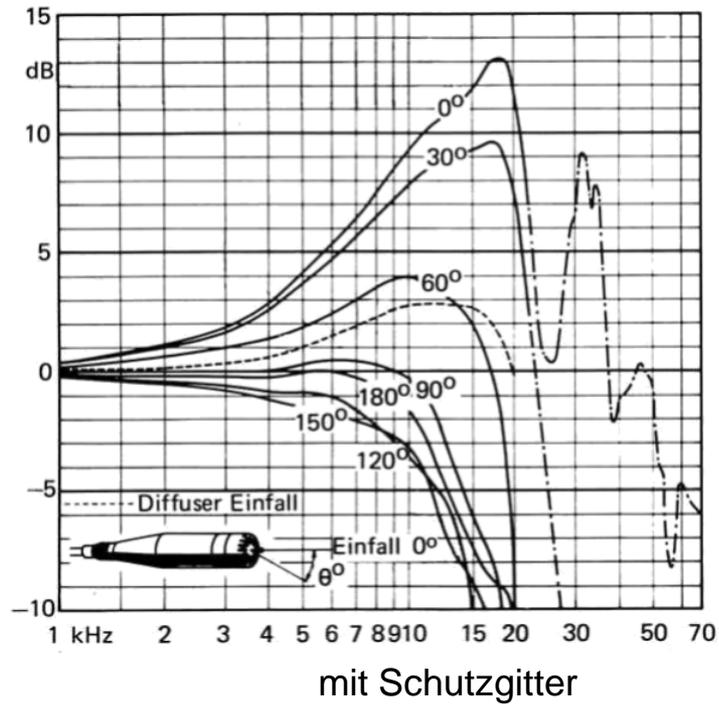
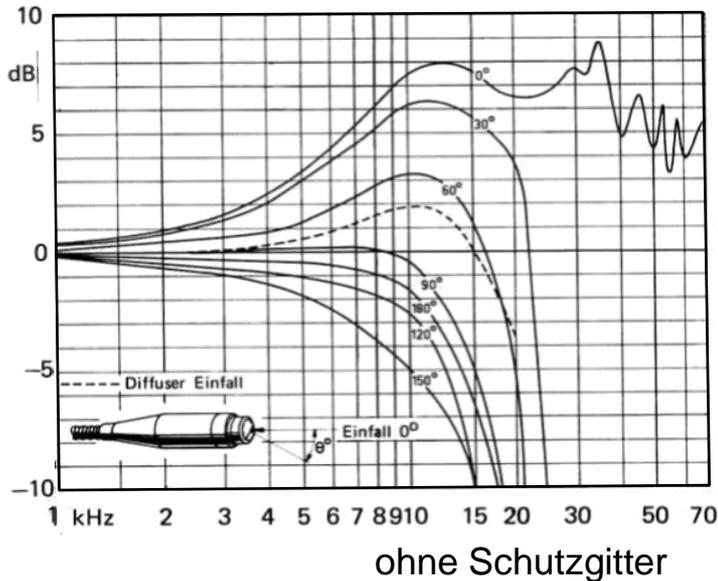
K beschreibt die „äußere Charakteristik“ des Mikrophonkörpers inkl. Einbauanordnung (z.B. Beugungsphänomene), vgl. Diagramme von B&K 2.9, 2.10., 2.13.
Beachte: K ist stark einfallswinkelabhängig!

Folgerung für z.B. Überflugmessungen: lege Mikrophon so auf Betonboden, dass Membranebene in Überflugebene $\Rightarrow K = \text{const.}$ für alle Überflugwinkel

2.1.1.3 elektrostatisches Mikrophon



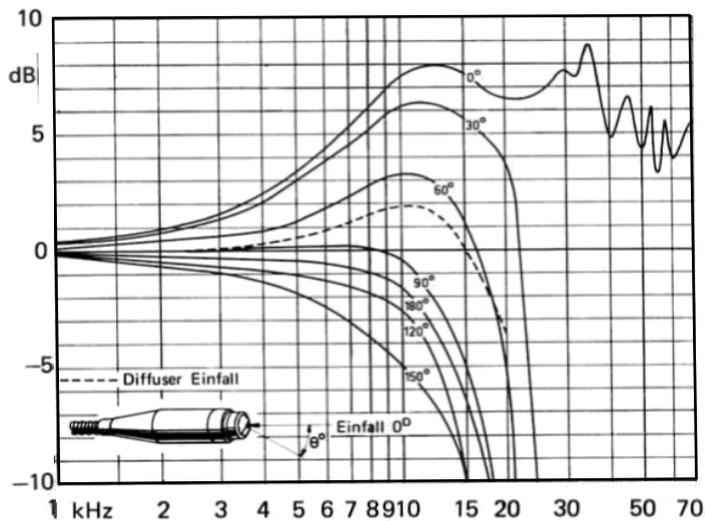
Kondensatormikrophonkapsel



Freifeld-Korrekturen für 1" Mikrophonkapseln (zu Druckfrequenzgang zu addieren)

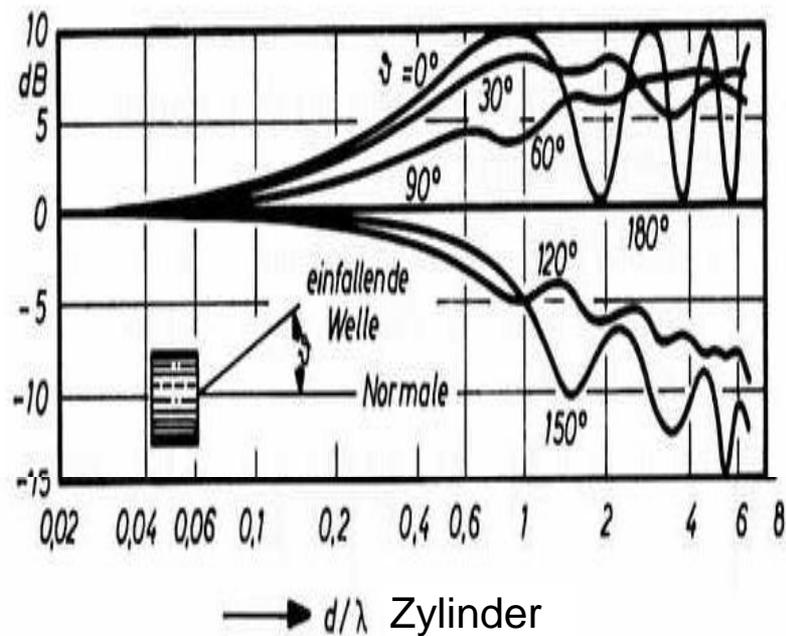
2.1.1.3 elektrostatisches Mikrophon

vgl. Charakteristik Mikrophon mit berechnetem Schallfeld am Zylinder (Beugung)



ohne Schutzgitter

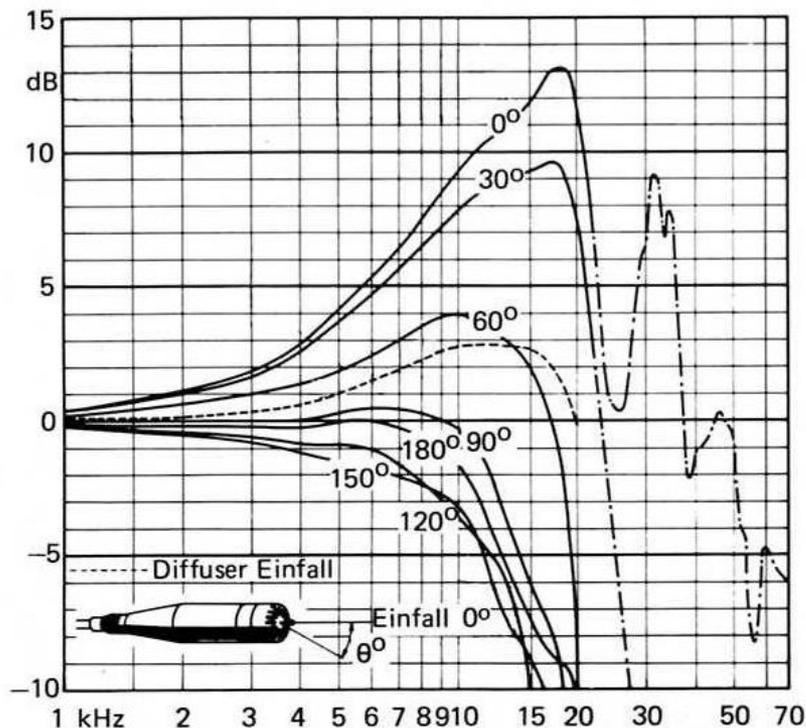
Quelle: Brüel & Kjaer 1973



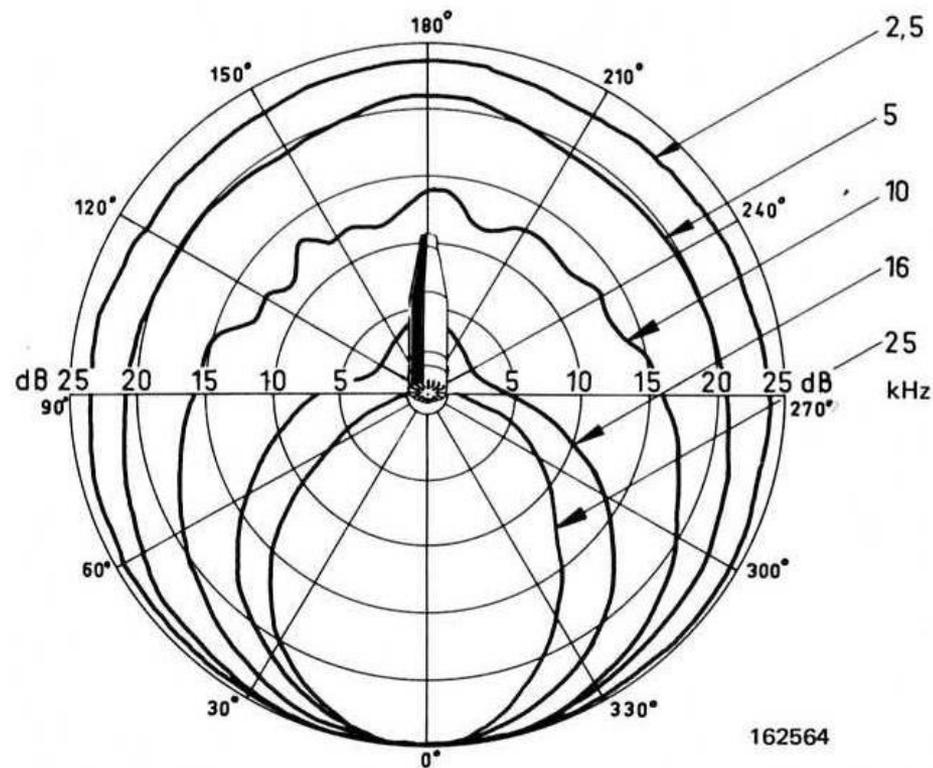
→ d/λ Zylinder

Quelle: E.Meyer, E.G. Neumann „Physikalische und Technische Akustik“, Vieweg 1974

2.1.1.3 elektrostatisches Mikrophon

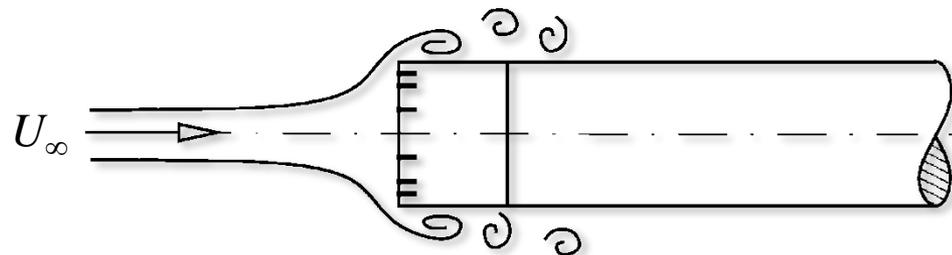


Freifeld-Korrekturen für 1" Mikrofonkapsel mit Schutzgitter
(zu Druckfrequenzgang zu addieren)



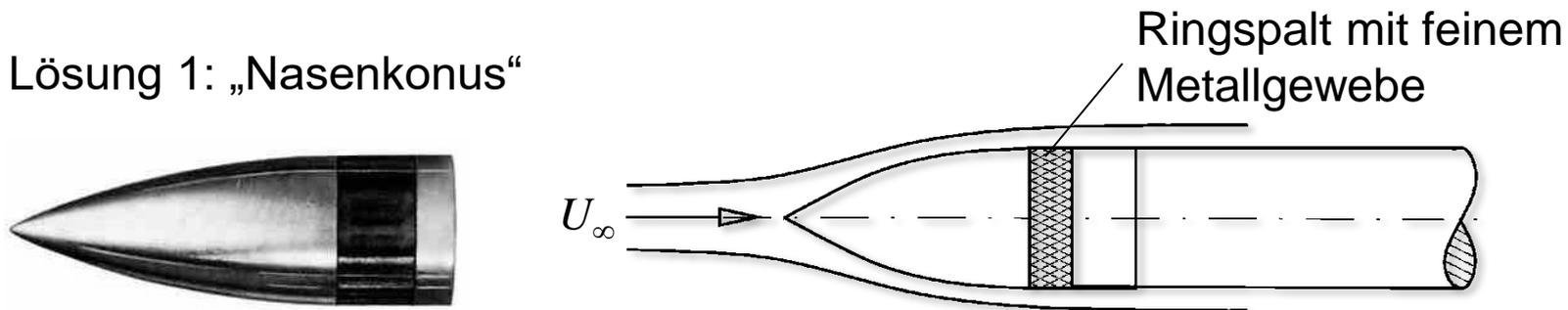
Typische Richtcharakteristiken für 1" Mikrofonkapseln mit Schutzgitter

2.1.2 Mikrophone in Strömungen



Betrieb von Mikrophenen in Strömungen würde hohe (turbulenz- und ablösungsbedingte) hydrodynamische Druckschwankungen ergeben. Akustische Drücke würden davon verdeckt.

(a) Lösung 1: „Nasenkonus“

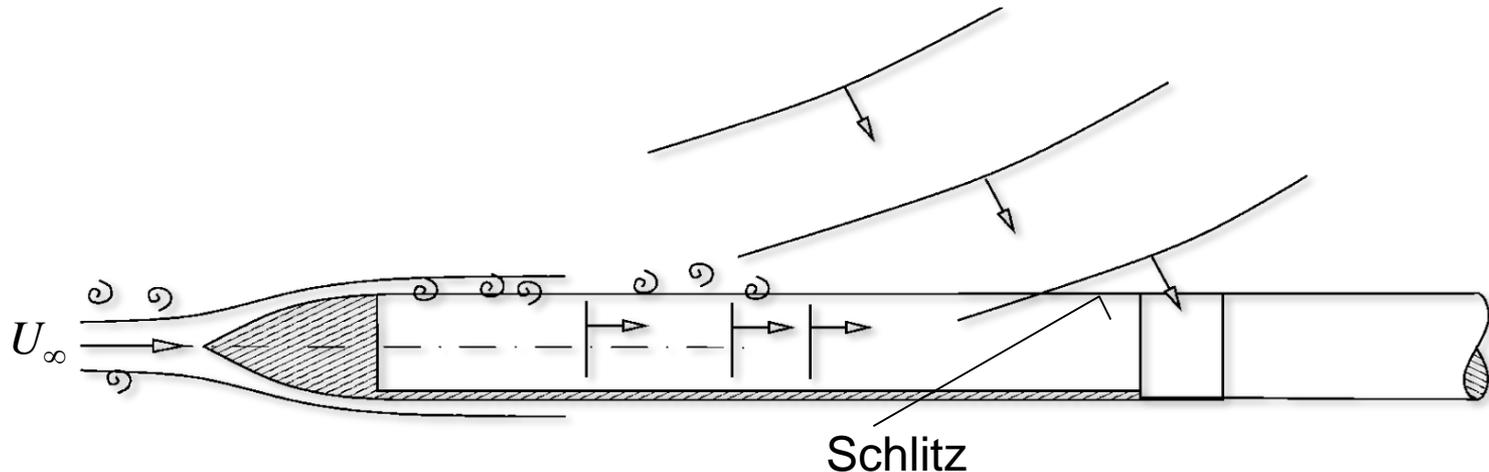


Ablösungen werden vermieden, nur Schwankungen des statischen Drucks werden gemessen, außerdem Verbesserung der Richtwirkung.

Probleme: Konus muss genau in Strömung ausgerichtet sein, anderenfalls entstehen wieder schädliche Ablösungen, auch am Konus. Zuströmturbulenz führt zu Stördruckschwankungen.

2.1.2 Mikrophone in Strömungen

(b) Lösung 2: „Schlitzrohrsonde“ (engl. „turbulence screen“), auch „Neise-Sonde“



Ablösungen werden vermieden, turbulente Störungen existieren an jeder axialen Position des Schlitzes; die damit verbundenen lokalen Druckfelder werden durch den Schlitz ventiliert (Auslöschungen). Das gilt auch für Störungen aus bereits turbulenter Zuströmung(!). Externe akustische Wellen werden nur leicht durch Brechung beeinflusst und erreichen die Membran.

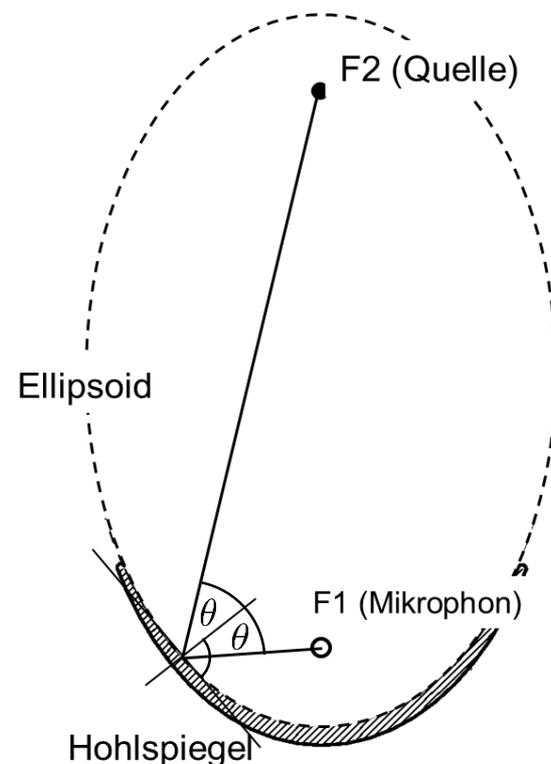
Problem: Rohr muss mit Strömung genau ausgerichtet sein.
Günstige Anwendung: Schallmessung in hochturbulenten Rohrströmungen.

2.3 Quellortungsmethoden

2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

Der elliptische Hohlspiegel besteht aus einer Schale, die aus einem achsensymmetrischen Abschnitt eines Ellipsoids entsteht. Ein Ellipsoid besitzt zwei Brennpunkte (F1 und F2). In dem der Schale nahen Brennpunkt F1 wird ein Mikrophon platziert, in dem zweiten Brennpunkt F2 wird die Schallquelle vermutet. Die Summe aus den Abständen eines Punktes auf der Hohlspiegelschale zu F1 und F2 ist (konstruktionsgemäß) konstant. D.h. dass alle Schallstrahlen, die aus dem Quellenbrennpunkt F2 austreten und an der Hohlspiegelfläche reflektiert werden, die selbe Laufstrecke/Laufzeit zum Mikrophon in F1 haben. Das Signal der Quelle wird damit an F1 hoch verstärkt. Für andere Quellpositionen ist dies nicht der Fall. Durch Verfahren des Spiegels können Quellpositionen lokalisiert werden.

(beachte: Normale an Wandpunkt ist Winkelhalbierende des Winkels zwischen Strecken zu F1, F2)



2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

Wie groß ist Schalldruck bei Mikrophon? (129):

$$\hat{p}(\mathbf{x}_M, \omega) = \underbrace{\int_{V_S} \hat{Q}_p \hat{G}_0 dV(\xi)}_{\text{einfallendes Feld } \hat{p}_i} + \int_A \hat{p} \frac{\partial \hat{G}_0}{\partial n} - \hat{G}_0 \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} dS(\xi)$$

$= 0$
(schallhart)

Annahmen:

Druck auf Sichtseite A_+ lokal wie bei ebener Wand

$$\hat{p}(\xi \in A_+) \approx 2\hat{p}_i$$

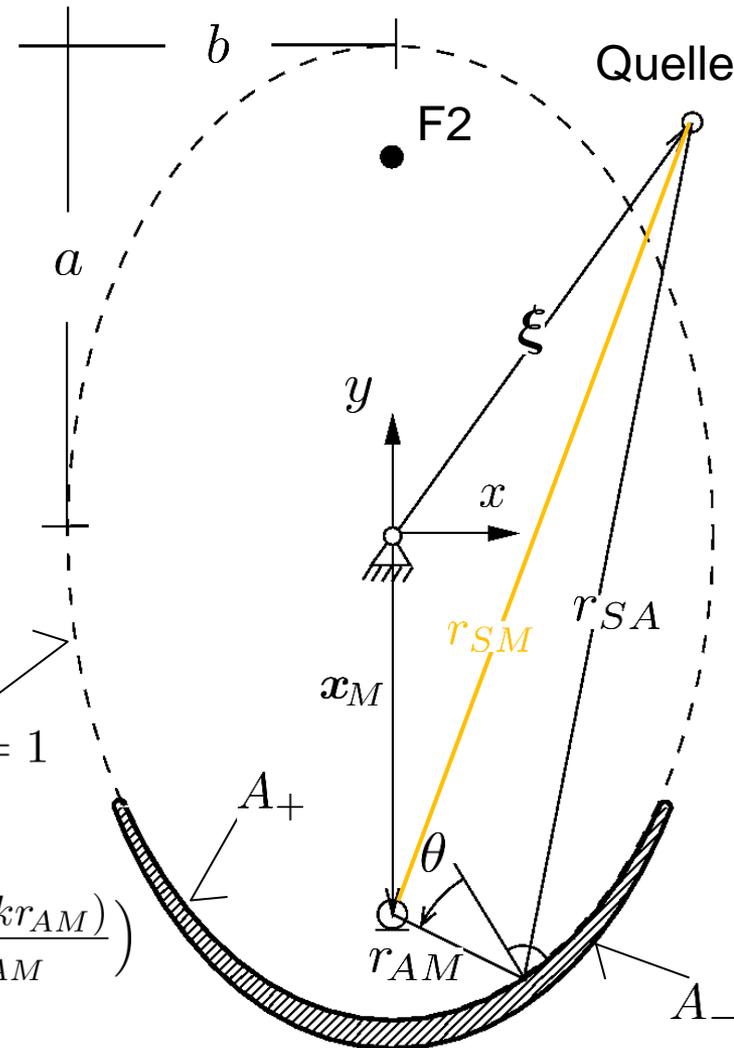
Druck auf Schattenseite A_- Null

$$\hat{p}(\xi \in A_-) \approx 0$$

$$\frac{x^2 + z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{\partial \hat{G}_0}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\xi} \left(\frac{\exp(-ikr_{AM})}{4\pi r_{AM}} \right) = -\overbrace{\mathbf{n} \cdot \nabla_x r_{AM}}^{\cos \theta} \frac{d}{dr_{AM}} \left(\frac{\exp(-ikr_{AM})}{4\pi r_{AM}} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{p}(\mathbf{x}_M, \omega) \approx \hat{p}_i + \frac{1}{2\pi} \int_{A_+} \hat{p}_i \frac{\exp(-ikr_{AM})}{r_{AM}} (ik + r_{AM}^{-1}) \cos \theta dS(\xi)$$



2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

... Wie groß ist Schalldruck bei Mikrofon?

Quelle sei Monopol bei $\xi = \xi_S$ mit Quellstärke $\sigma(\omega)$:

$$\hat{p}_i(\xi) = \sigma \frac{\exp(-ikr_{SA})}{4\pi r_{SA}} ; r_{SA} = |\xi - \xi_S|$$

$$\Rightarrow \hat{p}(\mathbf{x}_M, \omega) \approx \frac{\sigma}{8\pi^2} \int_{A_+} \frac{e^{-ik(r_{AM}+r_{SA})}}{r_{AM} r_{SA}} (ik + r_{AM}^{-1}) \cos \theta dS(\xi)$$

(Direkteinfluss vernachlässigt)

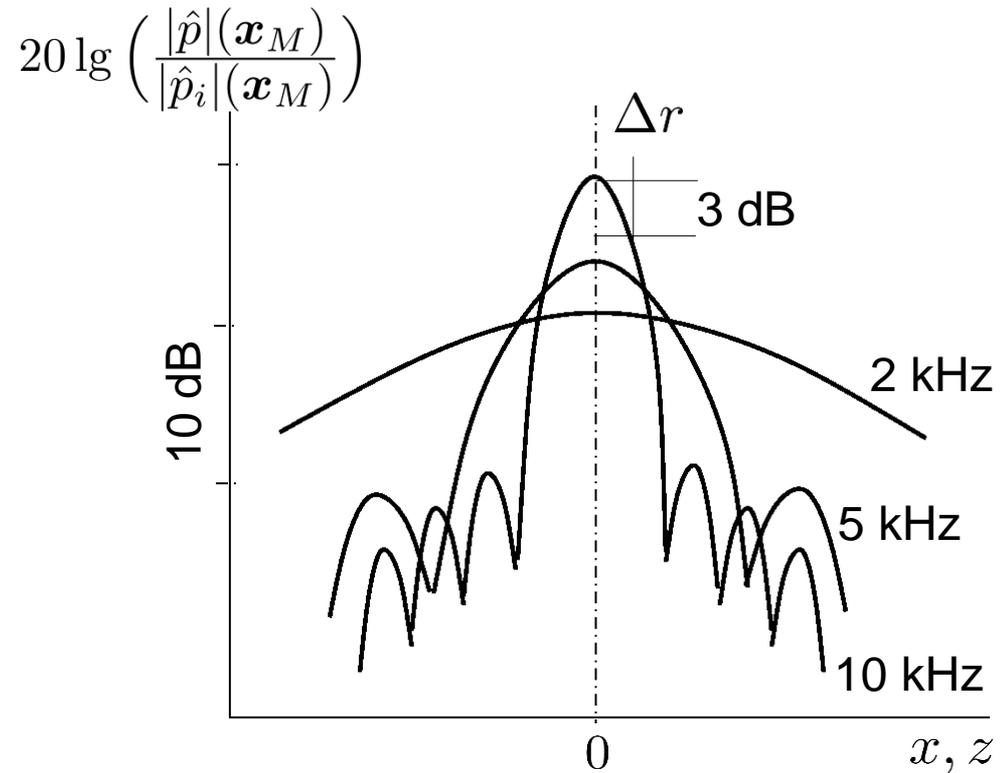
Beachte:

- Ist Quellpunkt in Brennpunkt F2, so ist $r_{AM} + r_{SA} = \text{const}$ und damit die Phase für alle Spiegelpunkte: konstruktive Verstärkung des Signals
- Ist Quellpunkt außerhalb F2, so erzeugt $e^{-ik(r_{AM}+r_{SA})}$ Auslöschungen
- Je höher die Wellenzahl k (Frequenz), desto stärker das Signal !

2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

Typisches Messsignal bei
Spiegeltraverse entlang x oder
(Quelle an $x = z = 0$):

z



Spiegelcharakteristika:

Verstärkung:

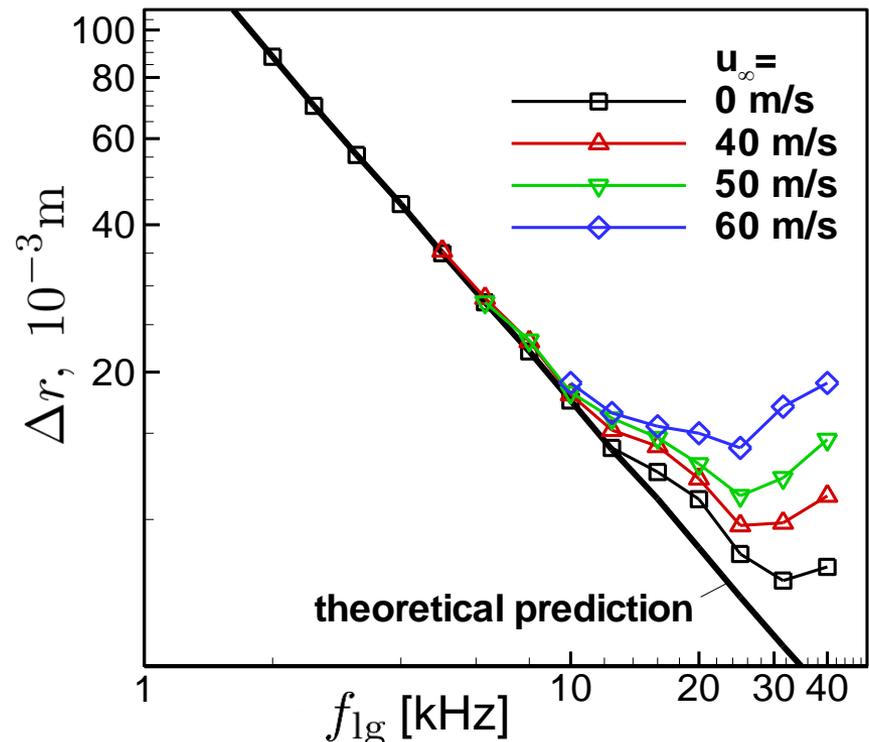
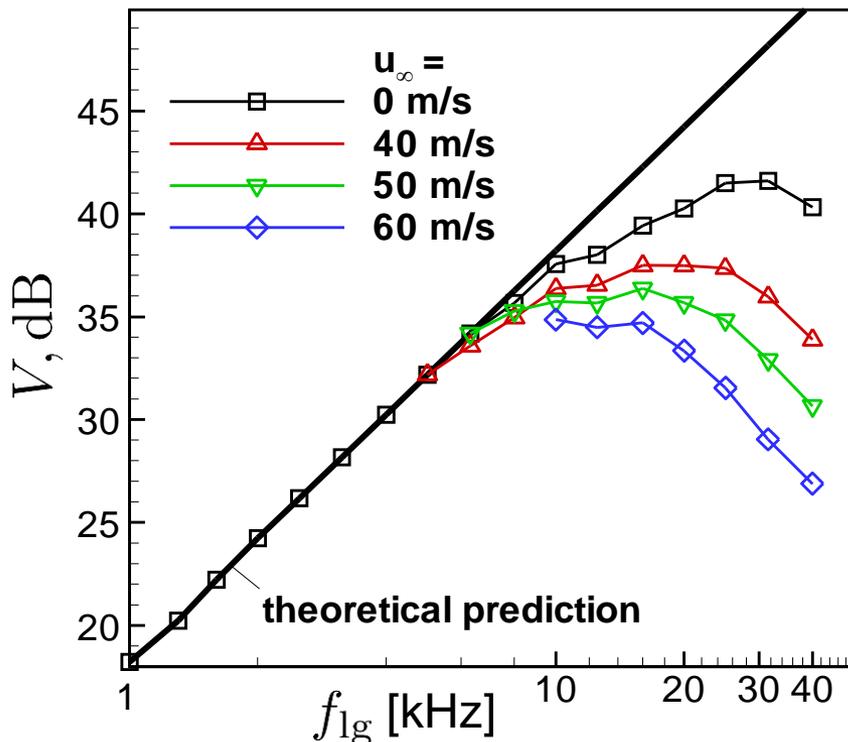
$$V(\omega) = \frac{|\hat{p}|(\mathbf{x}_M)}{|\hat{p}_i|(\mathbf{x}_M)} \simeq k \frac{r_{SM}}{4\pi} \left| \int_{A_+} \frac{e^{-ik(r_{AM}+r_{SA})}}{r_{AM} r_{SA}} \cos \theta dS(\xi) \right|$$

(räumliche) Auflösung: $\Delta r(\omega) = \left| x(|\hat{p}|_{max}^2) - x\left(\frac{1}{2}|\hat{p}|_{max}^2\right) \right|$ (3dB-down range)

2.3.1 Elliptischer Hohlspiegel

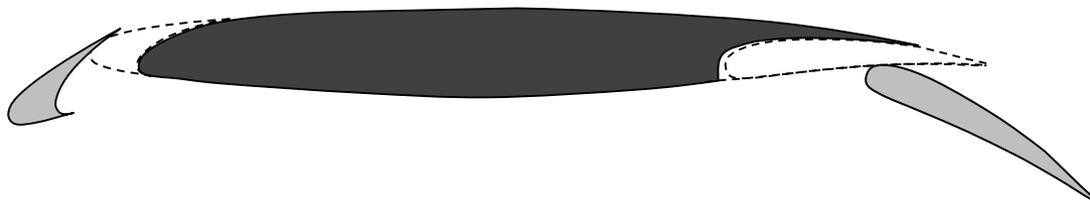
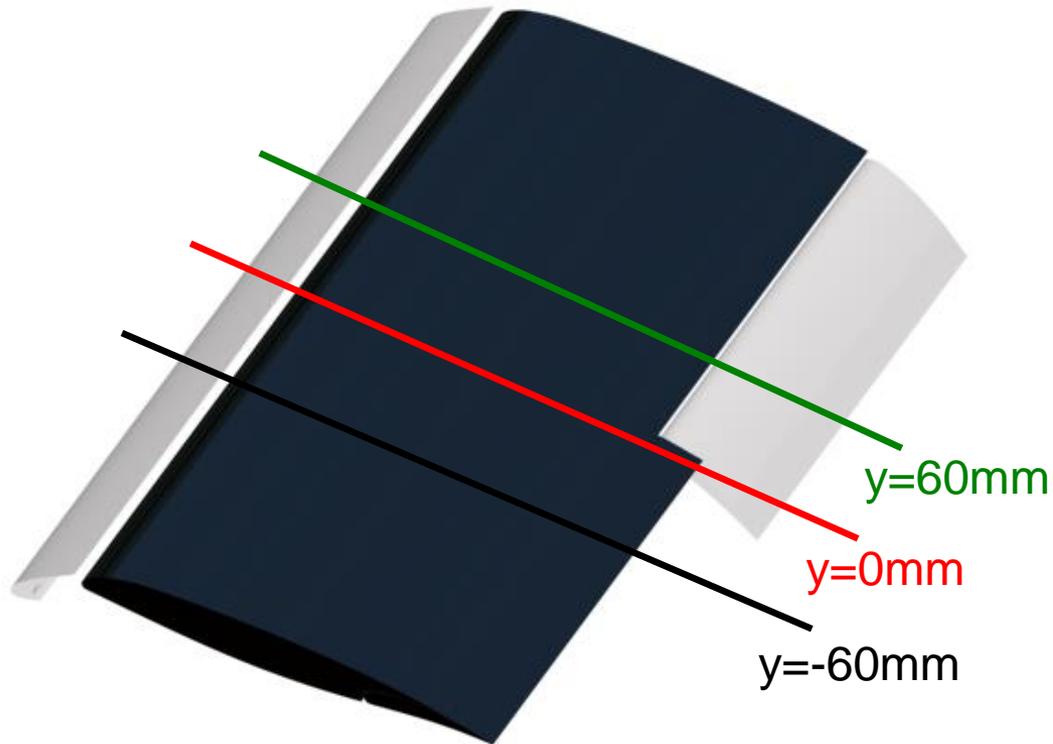
Spiegelcharakteristika (Terzen) des DLR-Hohlspiegels im Akustischen Windkanal Braunschweig AWB

→ real ist Verstärkung zu hohen Frequenzen hin begrenzt durch a) atmosphärische Absorptionsdämpfung und (bei Messung im Windkanal) durch Turbulenzstreuung:

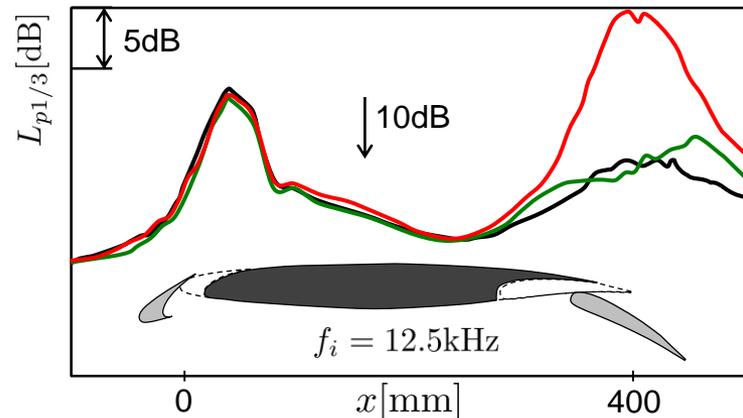
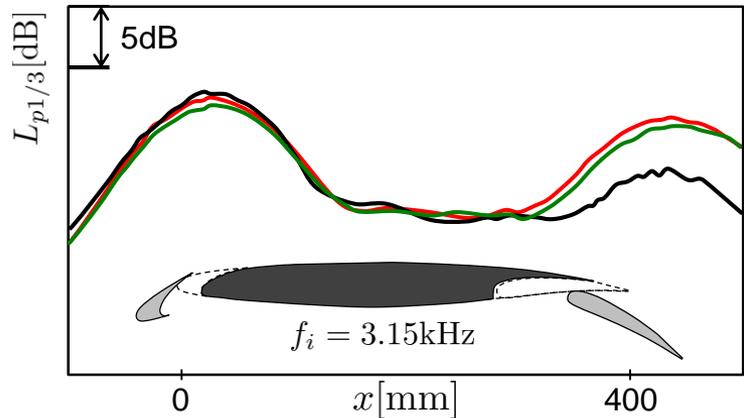
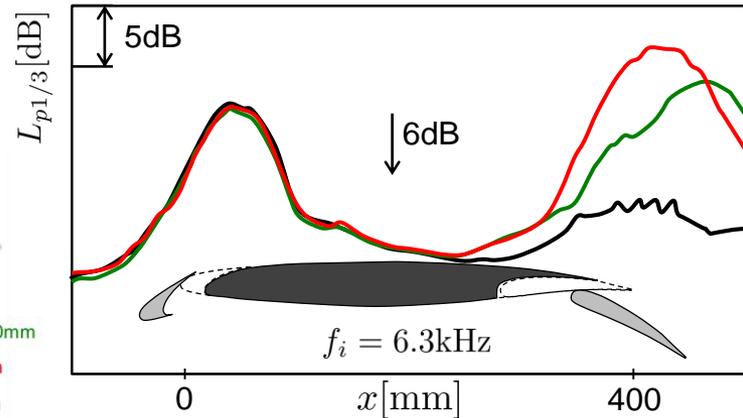
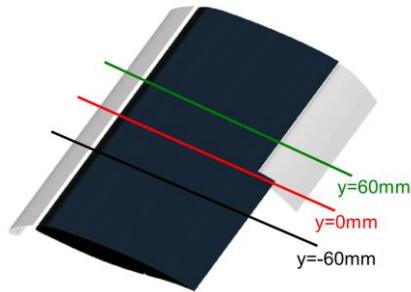
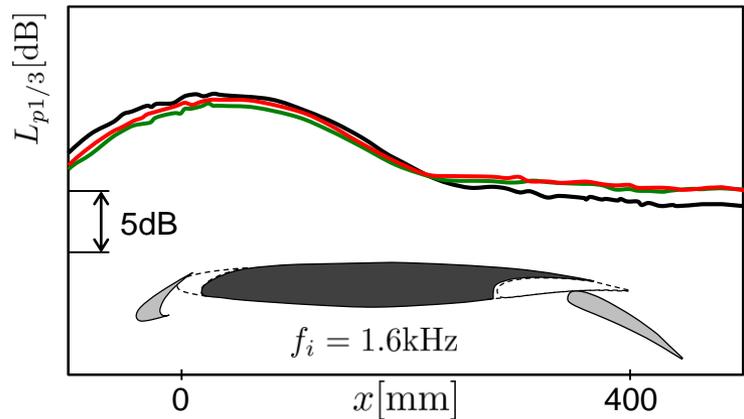


Beispiel: Quelllokalisierung an Hochauftriebsflügel

Profilschnitte im AWB in Landekonfiguration



Beispiel: Quellokalisierung an Hochauftriebsflügel



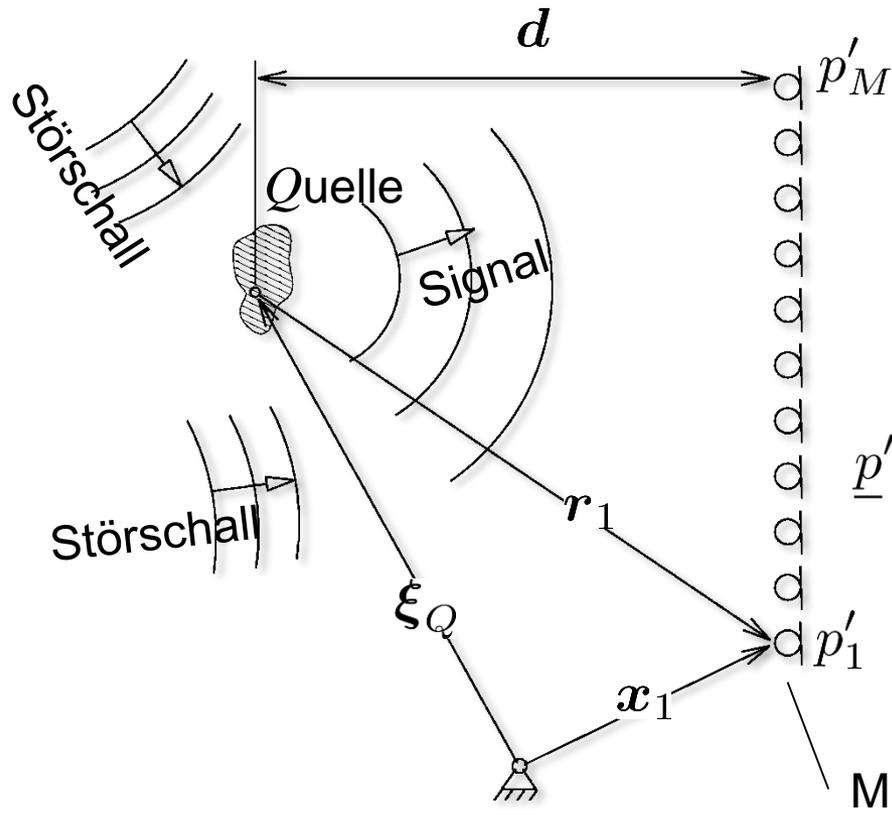
⇒ tieffrequenter Schall kommt von Vorflügel

⇒ ab 6.3kHz trennt Hohlspiegel spannweitig **Seitenkanten-** **Klappenhinterkanten-** und Flügelhinterkantengeräusch (beachte: Wellenlänge bei 6.3kHz $\sim 50\text{mm} < 60\text{mm}$)

2.3.2 Multimikrofonanordnung (Mikrofonarray)

Aufgabe: Lokalisierung von akustischen Quell(bereich)en

Ansatz: Anordnung von M Mikrofonen auf einer Linie oder Ebene („Array“) & „Nachbearbeitung“ der Messdaten.



Arraybreite $w = |\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_1|$

Schritt (a): Bildung des „Messvektors“

$$\underline{p}'(t) := \begin{bmatrix} p'(\mathbf{x}_1, t) \\ p'(\mathbf{x}_2, t) \\ \vdots \\ p'(\mathbf{x}_M, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ \vdots \\ p'_M \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\hat{p}} := \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_M \end{bmatrix}$$

(327)

2.3.2 Multimikrophananordnung (Mikrophonarray)

Forme aus \hat{p} und seinem konjugiert Komplexen äußeres Produkt und mittlere über gleiche Versuche:

$$(328) \quad \underline{\underline{A}} := \frac{1}{V} \sum_{i=1}^V \hat{p} \hat{p}^* \quad \text{heisst „Kreuzkorrelationsmatrix (} M \times M \text{)“}$$

„konjugiert Komplexes“ von \hat{p}

Schritt (b): Simulation einer Messung für eine fiktive Monopoleinheitsquelle bei ξ mit Stärke 1:

$$\hat{p}_S(\xi, \mathbf{x}_j) = G(\xi, \mathbf{x}_j), \quad G = \frac{\exp(-ikr_j)}{4\pi r_j}, \quad r_j := |\mathbf{x}_j - \xi|$$

Simulierter Messvektor (auch „steering vector“):

$$(329) \quad \underline{\hat{p}}_S := \begin{bmatrix} G(\xi, \mathbf{x}_1) \\ G(\xi, \mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ G(\xi, \mathbf{x}_M) \end{bmatrix} =: \underline{G}(\xi) \quad \text{„steering vector“}$$



2.3.2 Multimikrophonanordnung (Mikrophonarray)

Schritt (c): Bilde Lokalisationsgröße (engl. „beamformer“):

$$(330) \quad b := \frac{\hat{p}_S^* \underline{A} \hat{p}_S}{|\hat{p}_S|^4} = \frac{\underline{G}^* \underline{A} \underline{G}}{|\underline{G}|^4}; \quad |\underline{G}(\xi)|^2 := \underline{G}(\xi) \cdot \underline{G}^*(\xi)$$

Diese Gleichung heißt „beamforming“ Gleichung.

Die Bedeutung von b wird für den Fall deutlich, wo das gemessene Feld \hat{p} aus (327) bzw. \underline{A} aus einer Monopolquelle bei ξ_Q entstanden gedacht wird; dann ist:

$$b(\xi) = \frac{\underline{G}^*(\xi) [\sigma \underline{G}(\xi_Q) \sigma^* \underline{G}^*(\xi_Q)] \underline{G}(\xi)}{|\underline{G}(\xi)|^4} \quad b(\sigma=1) \text{ heißt „Punktspreizfunktion“ PSF (point spread function) und charakterisiert Arrayeigenschaft}$$

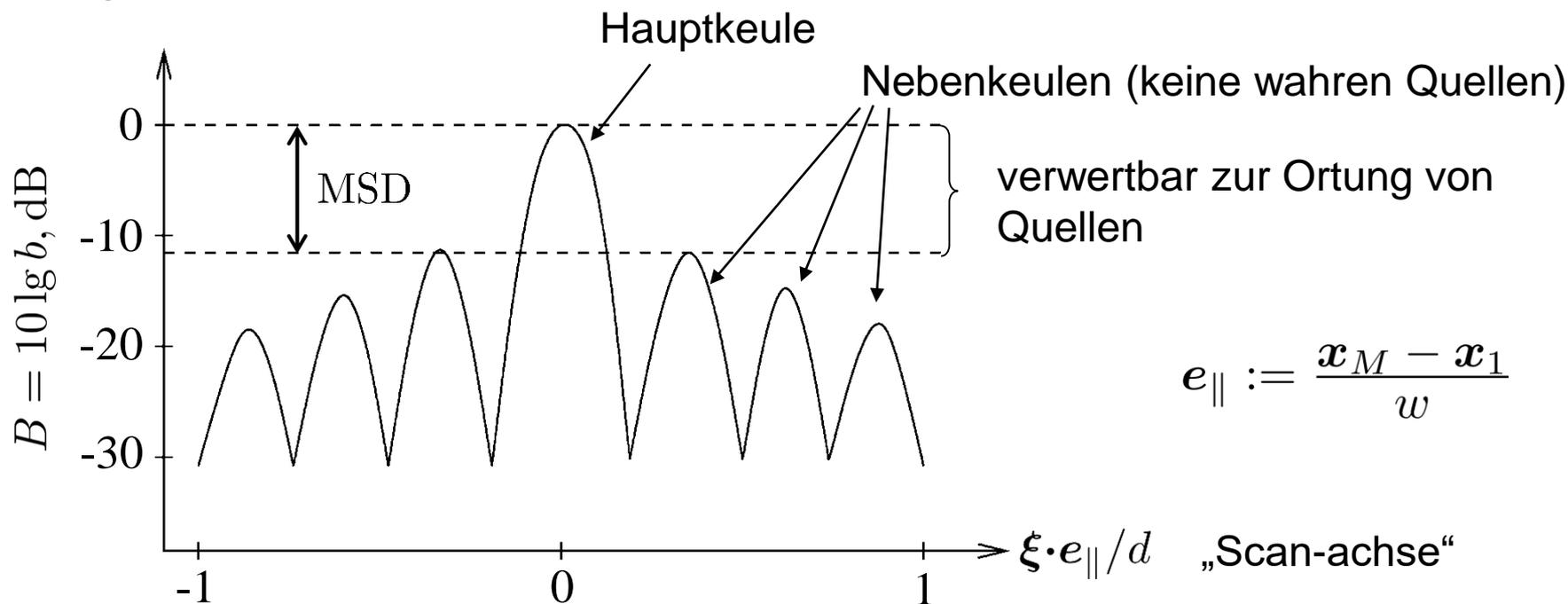
b kann als Funktion von ξ (Abscannen des Raumes) dargestellt werden. Speziell dort, wo ξ auf den Quellort ξ_Q trifft, gilt

$$b(\xi_Q) = \frac{\underline{G}^*(\xi_Q) [\sigma \underline{G}(\xi_Q) \sigma^* \underline{G}^*(\xi_Q)] \underline{G}(\xi_Q)}{|\underline{G}(\xi_Q)|^4} = |\sigma|^2$$

2.3.2 Multimikrophanordnung (Mikrophonarray)

D.h. für eine Monopolquelle ergibt die Auswertung der Größe b für den Ort Der Quelle das Quadrat der Quellstärke des Monopols. Die Funktion $B(\xi) = 10 \lg b$ heißt „Acoustic Image“ (bzw. Quellkarte oder „source map“).

Eine gleichmäßige Anordnung von M Mikrofonen auf einer Linie („Linienarray“) ergibt für eine Monopolquelle bei $\xi_Q = \mathbf{0}$ typischerweise eine Quellkarte mit folgendem Aussehen:



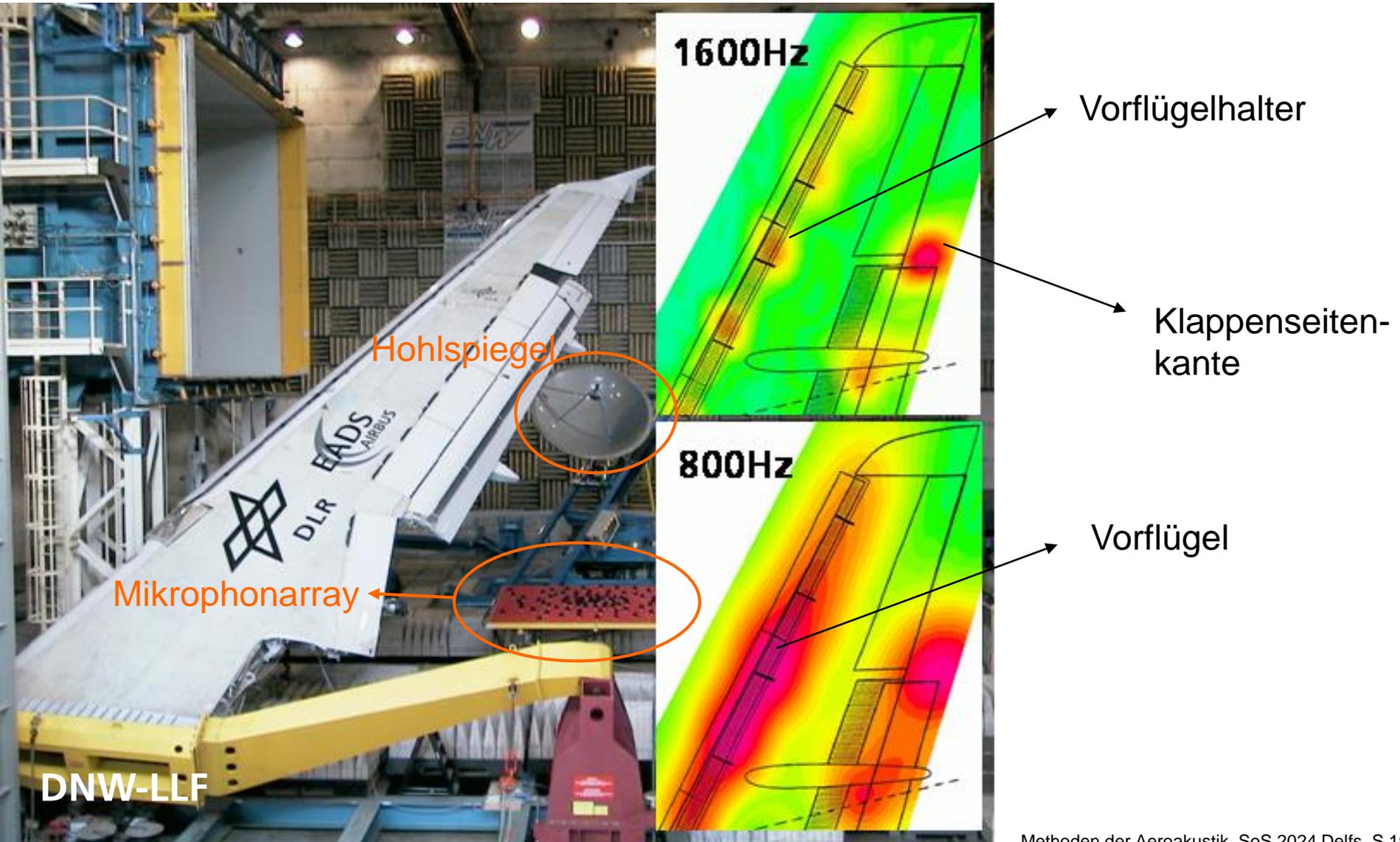


2.3.2 Multimikrophananordnung (Mikrophonarray)

- Die Quellkarte zeigt die Position der Quelle an (höchstes Maximum oder Hauptkeule (engl. main lobe)), aber auch unphysikalische Quellen bei den Nebenmaxima oder Nebenkeulen (engl. side lobes)!
- Die dynamische Auflösung des Arrays ist definiert als der Höhenunterschied zwischen Hauptkeule und höchster Nebenkeule heißt „Main-Side-lobe Distance“ MSD .
- Das MSD eines Linienarrays für äquidistant verteilte Mikrophone ist ca. 12 dB
- Die Breite und Anzahl der Keulen hängt von Frequenz, Abstand von Quelle zu Linienarray d und Breite des Array (Apertur $W = w/d$) ab: $W \uparrow$ oder $M \uparrow \Rightarrow$ Keulenbreite \downarrow (d.h. Auflösung \uparrow)
- $b(\xi)$ gibt das Quadrat des Monopolmoments einer Monopolquelle im Scanpunkt korrekt wieder; ist die tatsächliche Quelle kein Monopol, darf $b(\xi)$ nicht direkt als physikalisch interpretierbare Quellgröße angesehen werden.
- Die PSF hängt von der Anordnung und Anzahl der Mikrophone ab.

2.3.2 Multimikrophananordnung (Mikrophonarray)

Schallquellortung mit Mikrophonarray am Flügel in Hochauftriebskonfiguration



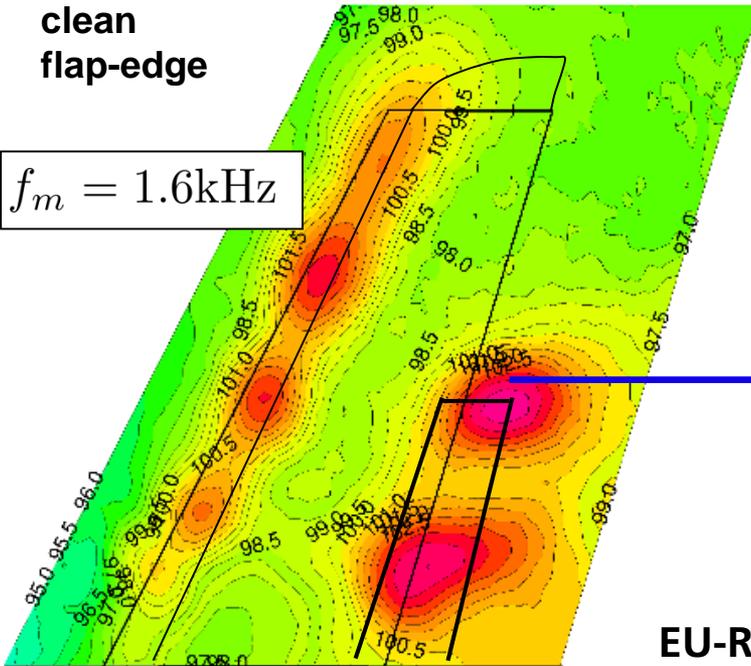
2.3.2 Multimikrophanordnung (Mikrophonarray)

Lärminderungspotential an Vorflügeln und Klappen



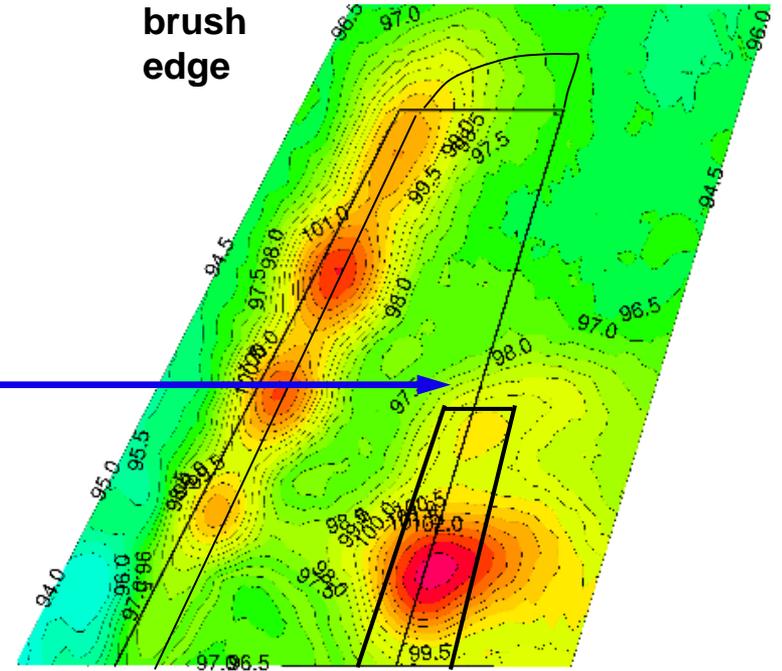
clean
flap-edge

$$f_m = 1.6\text{kHz}$$



EU-RAIN

brush
edge



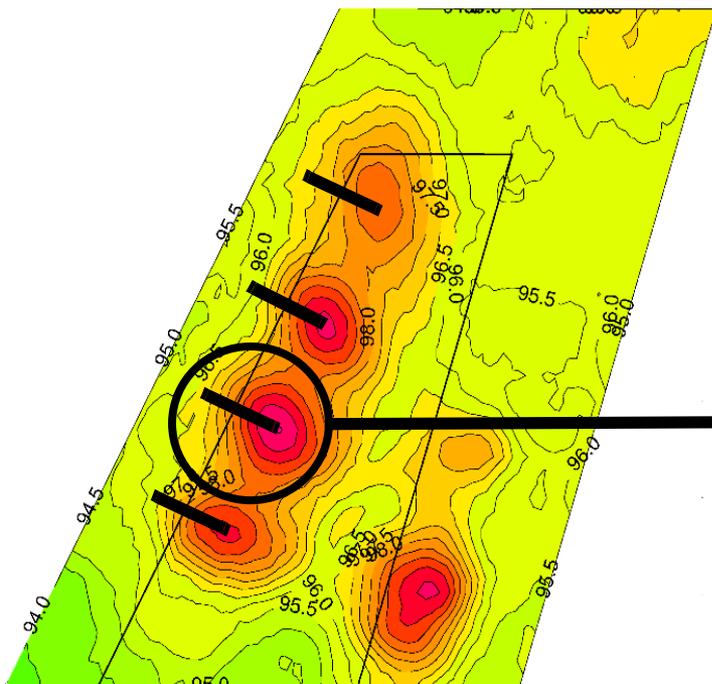
2.3.2 Multimikrophanordnung (Mikrophonarray)

Lärminderungspotential an Vorflügeln und Klappen

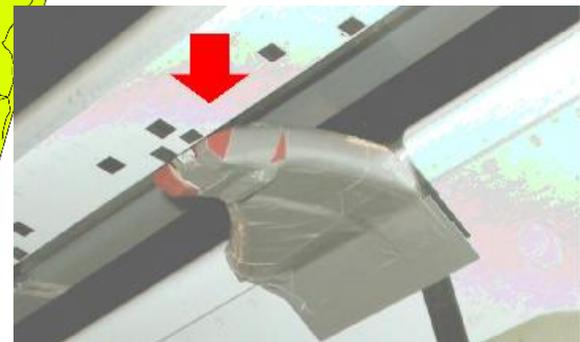
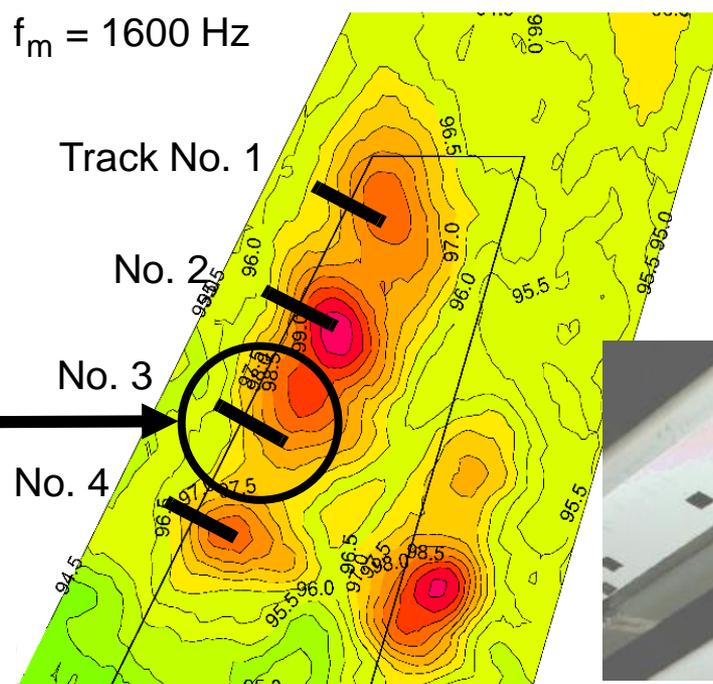
Quelllärmminderung durch Verkleidung slat-track 3

Standard slat track 3

mit aerodyn. verkleidetem slat track 3



$f_m = 1600 \text{ Hz}$



⇒ Welche Bedeutung hat dieses bei Überflug im Vergleich zu Vorflügellärm?

W. Dobrzynski, 2002

2.3.2 Multimikrophananordnung (Mikrophonarray)

Nutzung von MEMS Arraytechnologie

Prinzip Kondensatormikrophone auf Platinen geätzt

→ Ermöglichung sehr hoher Sensorzahl, geringer Preis



Halbmodell in DNW-NWB
7200-MEMS Mikrophonarray
DLR-2024

2.4 Messanordnungen in der Aeroakustik

2.4.1 Aeroakustische Ähnlichkeit

Wie in der Aerodynamik besteht großes Interesse daran, Bauteile im Modell in einer gegenüber dem Original verkleinerten Größe zu untersuchen. Um die Ähnlichkeit im Verhalten von Original und Modell sicherzustellen, sind Ähnlichkeitskennzahlen zu beachten. Diese entstehen z.B. wenn die Grundgleichungen (linearisierte Eulergleichungen) mit den das Problem beschreibenden Größen entdimensioniert werden, diese Referenzgrößen seien für die Zeit $T = 1/\omega$, den Ort L , die Dichte ρ_∞ , die Geschwindigkeit a_∞ und den Druck $\rho_\infty a_\infty^2$ (Stern bedeutet entdimensioniert):

$$t = T t^*, \quad \mathbf{x} = L \mathbf{x}^*, \quad p' = \rho_\infty a_\infty^2 p'^*, \quad \rho' = \rho_\infty \rho'^*, \quad \mathbf{v}' = a_\infty \mathbf{v}'^*$$

eingesetzt in die linear. Eulergleichungen im Frequenzbereich (Fourier-Trafo):

$$i \frac{\omega L}{a_\infty} \hat{\rho}^* + \nabla^* \cdot (\hat{\rho}^* \mathbf{v}^{0*} + \hat{\mathbf{v}}^* \rho^{0*}) = 0$$

$$i \frac{\omega L}{a_\infty} \rho^{0*} \hat{\mathbf{v}}^* + \rho^{0*} (\mathbf{v}^{0*} \cdot \nabla^* \hat{\mathbf{v}}^* + \hat{\mathbf{v}}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^{0*}) + \hat{\rho}^* \mathbf{v}^{0*} \cdot \nabla^* \mathbf{v}^{0*} + \nabla^* \hat{p}^* = \mathbf{0}$$

$$i \frac{\omega L}{a_\infty} \hat{p}^* + \mathbf{v}^{0*} \cdot \nabla^* \hat{p}^* + \hat{\mathbf{v}}^* \cdot \nabla^* p^{0*} + \gamma (\hat{p}^* \nabla^* \cdot \mathbf{v}^{0*} + p^{0*} \nabla^* \cdot \hat{\mathbf{v}}^*) = 0$$

2.4.1 Aeroakustische Ähnlichkeit

Die einzige Kombination der Problem beschreibenden Größen, die in diesen Gleichungen auftaucht, und damit die wesentliche Ähnlichkeitskennzahl ist

$$\frac{\omega L}{a_\infty} = 2\pi \frac{fL}{a_\infty} \quad \text{mit dem Anteil} \quad He := \frac{fL}{a_\infty} = \frac{L}{\lambda} \quad (330),$$

die auch „Helmholtzzahl“ genannt wird (vgl. Kapitel 5.3 Grundlagen VL). Sie beschreibt das Verhältnis der problemcharakteristischen Länge L und der Wellenlänge des Schalls λ . Für ein strömungsaustisches Problem stecken zusätzlich implizit zwei weitere Ähnlichkeitskennzahlen in dem gemittelten Strömungsfeld ρ^{0*} , v^{0*} , p^{0*} , das durch die Reynoldszahl $Re = \frac{U_\infty L}{\nu_\infty}$ und die Machzahl $M = \frac{U_\infty}{a_\infty}$ eindeutig bestimmt ist.

Aeroakustische Ähnlichkeit besteht demnach, wenn M , Re und He bei Original und Modell übereinstimmen. Insbesondere:

$$He^{Modell} = He^{Original} \Rightarrow f^{Modell} = \frac{L^{Original}}{L^{Modell}} f^{Original} \quad (331)$$

Beim um z.B. Faktor 10 verkleinerten Modell muss die 10-fach höhere Frequenz gemessen werden (Reynolds- und Machzahlähnlichkeit vorausgesetzt) !

2.4.1 Aeroakustische Ähnlichkeit

Die Helmholtz- und Machzahl lassen sich alternativ zu einer der anderen Kennzahl folgendermaßen kombinieren:

$$Sr := \frac{fL}{U_\infty} = \frac{He}{M} \quad (332),$$

die „Strouhalzahl“ genannt wird.

Ähnlichkeit ist also auch erreicht, wenn Sr, He, Re von Original und Modell gleich sind.

Die Helmholtzzahl charakterisiert dabei die rein akustischen Bedingungen

Die Strouhalzahl charakterisiert die aeroakustische Quelle

Die Reynoldszahl charakterisiert die Kraftverhältnisse in der Strömung

Beachte: $He = Sr \cdot M$



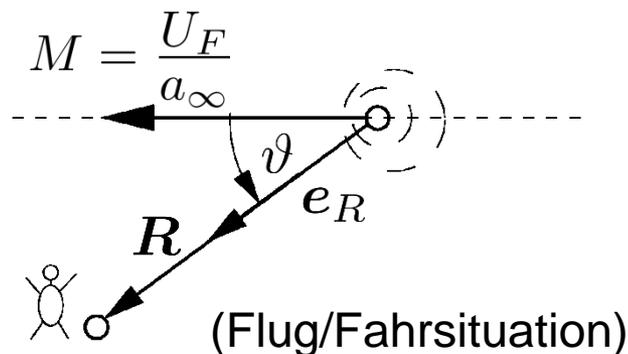
2.4.2 Akustische Überflugmessungen/ Windkanalmessungen

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle im ruhendem Medium

Aufgabe : Übertragung von Messdaten aus Windkanal auf Flugzustand.

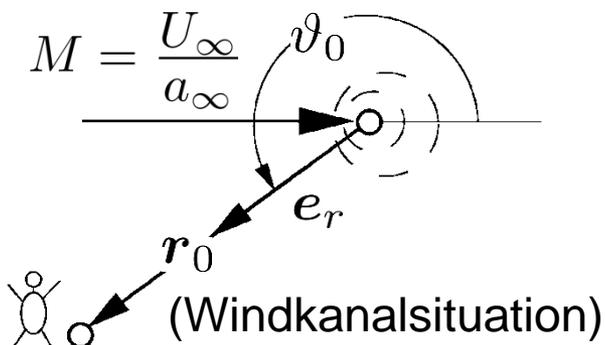
gegeben: Anströmgeschwindigkeit WK U_∞ Flug/Fahrgeschwindigkeit: $U_F = U_\infty$

Elementarlösung ruhende Pktmassenquelle mit Quellstärke θ_p (Fernfeldlsg.):



$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{D_F}{4\pi R} \frac{\partial \theta_p}{\partial \tau} \Big|_{t-R/a_\infty}; \quad D_F := \frac{1}{(1 - M \cos \vartheta)^2}$$

$D_F \neq D_C ?$



$$p'(\mathbf{x}, t) = \frac{D_C}{4\pi r_0} \frac{\partial \theta_p}{\partial \tau} \Big|_{t-r_0^+/a_\infty};$$

$$D_C = \frac{1}{(1 - M^2) \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0}} \left[1 - \frac{M \cos \vartheta_0}{\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0}} \right]$$

$$= \frac{1}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0) \left(\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0} + M \cos \vartheta_0 \right)}$$



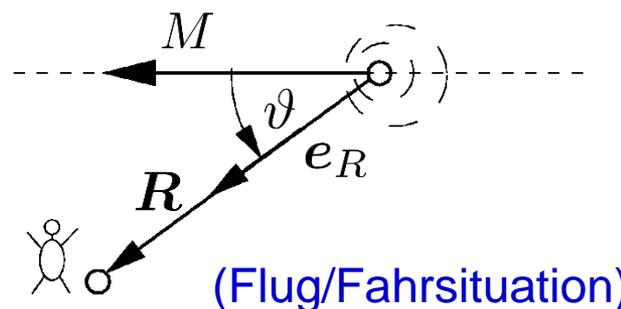
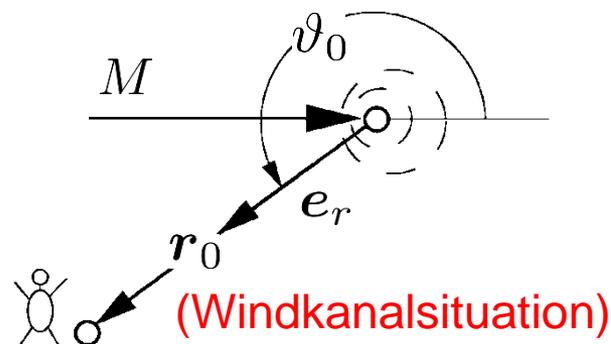
2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle in ruhendem Medium

für $\vartheta_0 = 0 \Rightarrow D_C = (1 + M)^{-1}$
 d.h. $\vartheta = \pi \Rightarrow D_F = (1 + M)^{-2}$

konvektive Minderung stromab

für $\vartheta_0 = \pi \Rightarrow D_C = (1 - M)^{-1}$
 d.h. $\vartheta = 0 \Rightarrow D_F = (1 - M)^{-2}$

konvektive Verstärkung stromauf



Windkanalmessdaten nicht direkt übertragbar auf Flugsituation, obwohl gleiche Quelle?

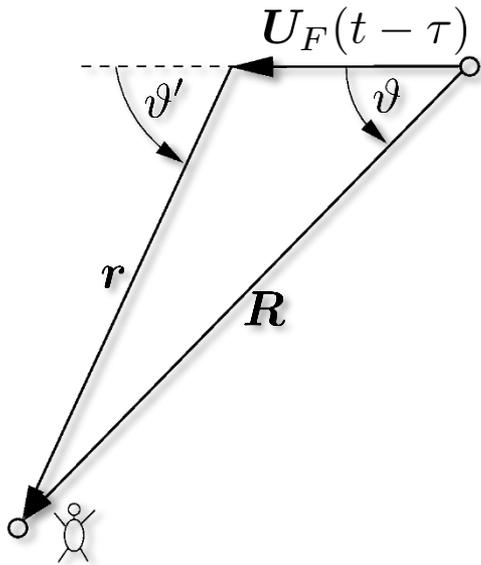
Doch!

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle in ruhendem Medium

beachte: in (241) werden ϑ und R zum Sendezeitpunkt ausgewertet;
 Vergleichbarkeit aber nur, wenn ϑ und R zum Empfangszeitpunkt ausgewertet werden!

$$r = \mathbf{R} - \mathbf{U}_F(t - \tau) \Rightarrow r^2 = R^2 - 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}_F(t - \tau) + U_F^2(t - \tau)^2$$

$$R = a_\infty(t - \tau) \Rightarrow R = \frac{r}{\sqrt{1 + M^2 - 2M \cos \vartheta}} \quad (333)$$



$$R^2 = [\mathbf{r} + \mathbf{U}_F(t - \tau)]^2 = r^2 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{U}_F(t - \tau) + U_F^2(t - \tau)^2$$

$$R = a_\infty(t - \tau) \Rightarrow r^2 + 2 \underbrace{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{M}}_{M \cos \vartheta'} rR + M^2 R^2 = R^2$$

R aus (333):

$$\cos \vartheta = M \sin^2 \vartheta' + \cos \vartheta' \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta'} \quad (334)$$

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle in ruhendem Medium

Werden (333) und (334) in (241) eingesetzt, so folgt nach Umformungen:

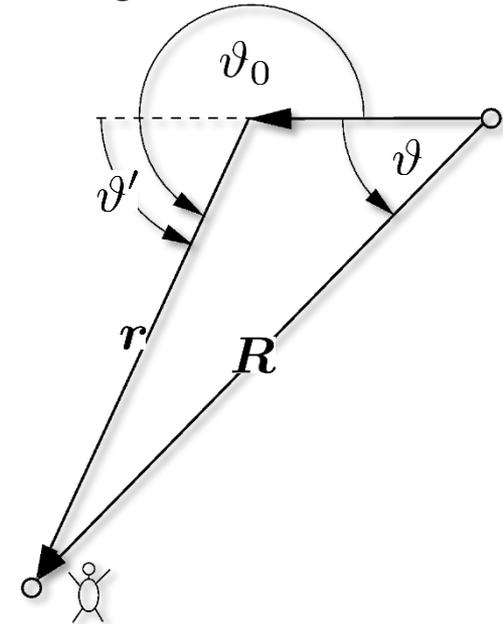
$$p' = \frac{1}{4\pi r} \underbrace{\frac{1}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta') (\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta'} - M \cos \vartheta')}}_{=: D'_F} \frac{\partial \theta_p}{\partial \tau}$$

Wird jetzt berücksichtigt, dass $\vartheta' = \vartheta_0 - \pi$:

$$\sin \vartheta' = \sin(\vartheta_0 - \pi) = -\sin \vartheta_0$$

$$\cos \vartheta' = \cos(\vartheta_0 - \pi) = -\cos \vartheta_0$$

$$D'_F = \frac{1}{(1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0) (\sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0} + M \cos \vartheta_0)} = \checkmark D_C(\vartheta_0)$$



⇒ bei Auswertung zu Empfängerzeitpunkt gehen beide Lösungen ineinander über!

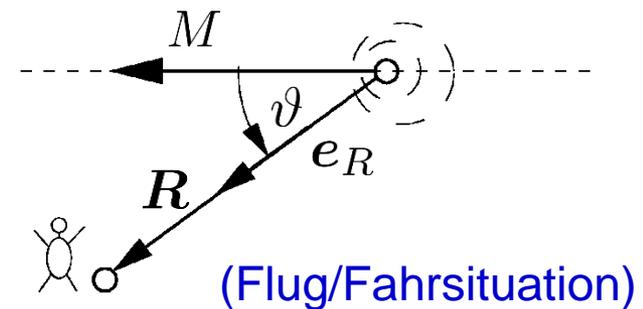
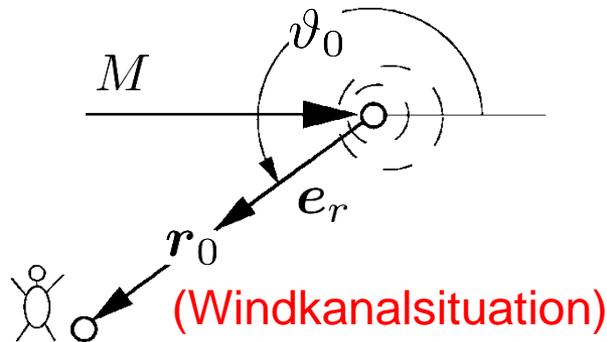
Gilt ebenfalls für Punktkraftquelle und sogar beliebige Quellen!

2.4.2.1 ruhende, angeströmte Quelle vs. bewegte Quelle in ruhendem Medium

Bei gleicher Strömungsmachzahl und gleicher Quellverteilung können **Windkanaldaten** direkt (ohne Kenntnis der Quellart) auf **Überflugsituation** übertragen werden, sofern der Abstrahlungswinkel nach (334) und Abstände nach (333) umgerechnet werden (Werte zum Empfangszeitpunkt).

Beachte:

Zur Berechnung der Frequenzkorrektur (Dopplereffekt) ist der Ort der Sendezeit zu nehmen! $\omega_{\text{Windkanal}} = \omega_{\text{Flug}}(1 - M \cos \vartheta)$ (vgl. WS)



$$R = r / \sqrt{1 + M^2 - 2M \cos \vartheta} \quad (333)$$

$$\cos \vartheta = M \sin^2 \vartheta_0 - \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - M^2 \sin^2 \vartheta_0} \quad (334)$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahlschicht (nach Amiet)

Aufgabe : Übertragung von Messdaten aus Windkanal auf Flugzustand.

gegeben: Anströmgeschwindigkeit WK: U_∞ Fluggeschwindigkeit: $U_F = U_\infty$

Im Windkanalfreistrahlschicht abgestrahlter Schall wird an Freistrahlschicht verändert, bevor er auf Mikrofon in Messkammer trifft (vgl. folgendes Bild)

Gegeben: Punktschallquelle in Freistrahlschicht, Mikrofon an Position M im Abstand r_M unter Winkel ϑ_M jenseits Strahlrand, dort gemessener Schalldruck p'_M

Frage: Welcher Stelle A mit selbem Abstand zur Strahlachse entspricht M , wenn der Strahl unendlich breit wäre und welchen Wert hätte dort der Schalldruck p'_A (entsprechend idealer Schallmessung in konstanter Strömung über gesamtes Gebiet ohne Strahlschicht)?

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

Iterative Bestimmung des wahren Abstrahlwinkels ϑ_0 und des Ausfallwinkels ϑ_t aus folgenden beiden Gleichungen

$$\tan \vartheta_0 = \frac{a \sin \vartheta_i}{a \cos \vartheta_i + U_\infty} = \frac{\sqrt{(1 - M \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}}{(1 - M^2) \cos \vartheta_t + M}$$

$$z_M \cot \vartheta_M = h \cot \vartheta_0 + (z_M - h) \cot \vartheta_t$$

$$\cos \vartheta_i = \frac{\cos \vartheta_t}{1 - M \cos \vartheta_t}$$

Refraktionsgleichung (212)

← Strahlengometrie

$$\zeta := \sqrt{(1 - M \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}$$

Danach Bestimmung der Schalldruckumrechnung von Punkt M zu Punkt A :

$$\frac{\overline{p'_A{}^2}}{\overline{p'_M{}^2}} = \frac{h^2}{z_M^2} \frac{[\sin \vartheta_t + (z_M/h - 1)\zeta]}{\sin \vartheta_t} \frac{[\sin^3 \vartheta_t + (z_M/h - 1)\zeta^3]}{\sin^3 \vartheta_t} \frac{[\zeta + \sin \vartheta_t(1 - M \cos \vartheta_t)]^2}{4\zeta^2}$$

Laufstreckenunterschied Punkt C zu A

geometr. Dämpfung (Strahlröhrenaufspreizung in $x-z$ Ebene)

geometr. Dämpfung (Strahlröhrenaufspreizung in y)

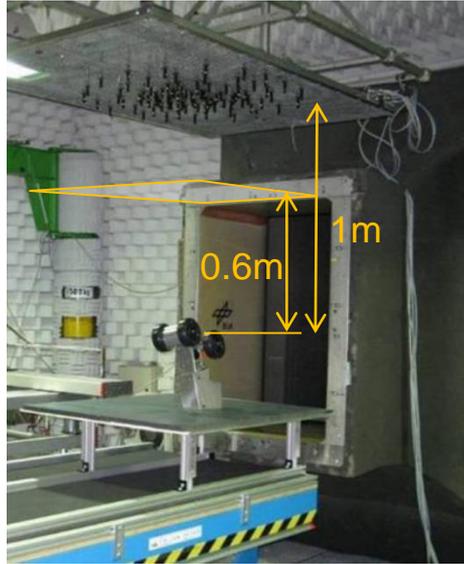
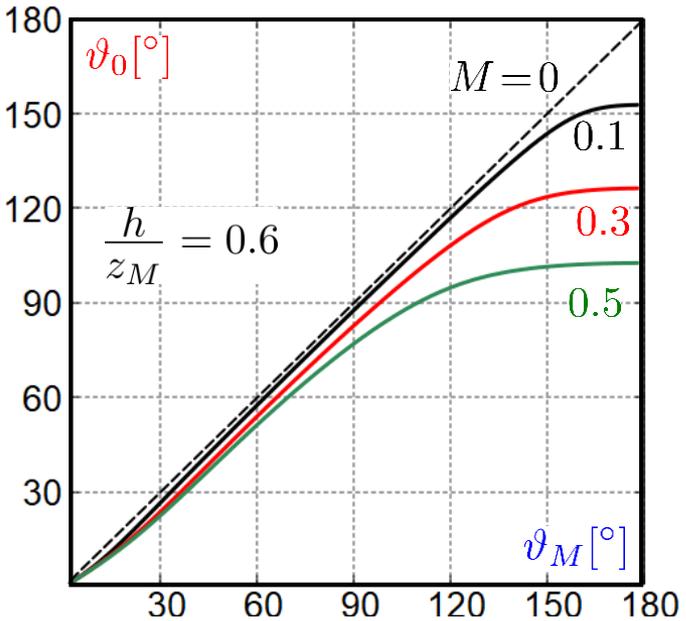
Intensitätssprung über Scherschicht an Pkt. C (335)

$$\frac{\overline{p'_A{}^2}}{\overline{p'_{C-}{}^2}} \times \frac{\overline{p'_{C+}{}^2}}{\overline{p'_M{}^2}} \times \frac{\overline{p'_{C-}{}^2}}{\overline{p'_{C+}{}^2}}$$

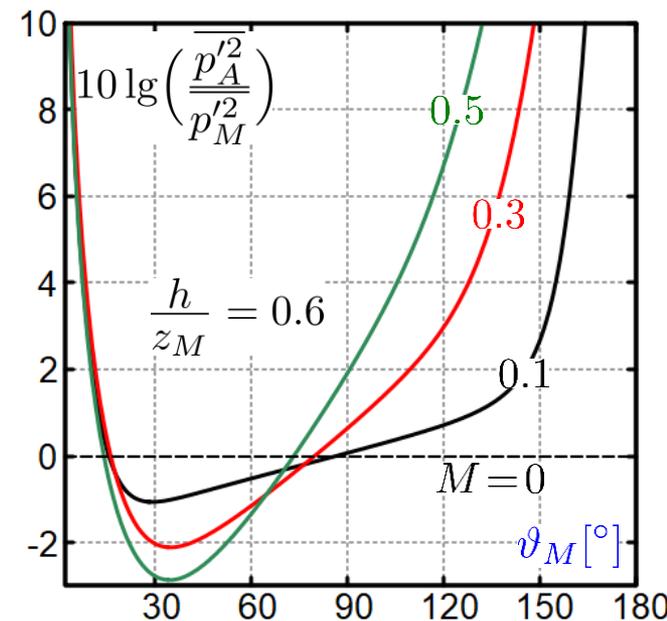


2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

Winkelkorrektur



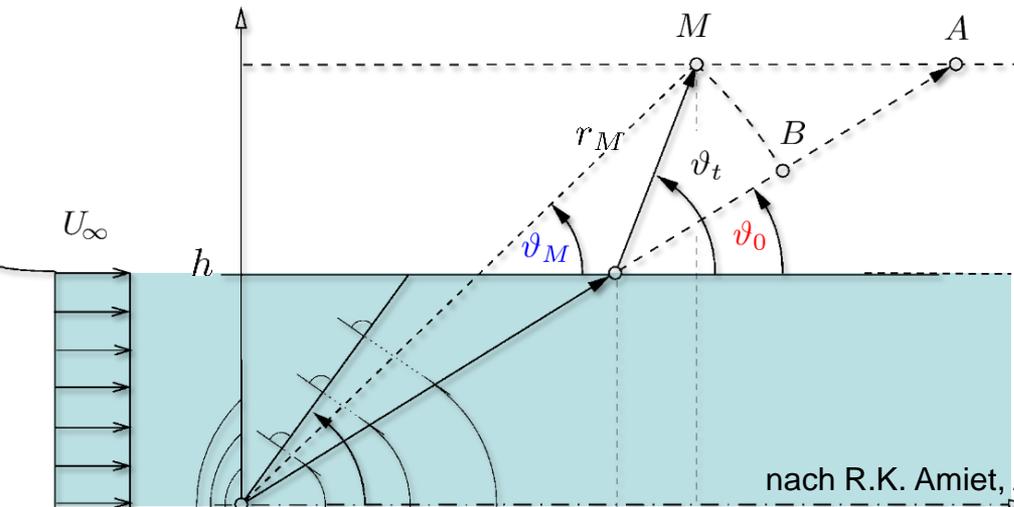
Amplitudenkorrektur bei A



↑ Verstärkung weil: ↑

$\overline{p'_M} \rightarrow 0$ nahe Schattengrenze

Laufstrecke zu A kürzer als M und Reduzierung Strahlaufweitung nahe Totalreflex.



nach R.K. Amiet, AIAA 75-532



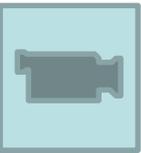
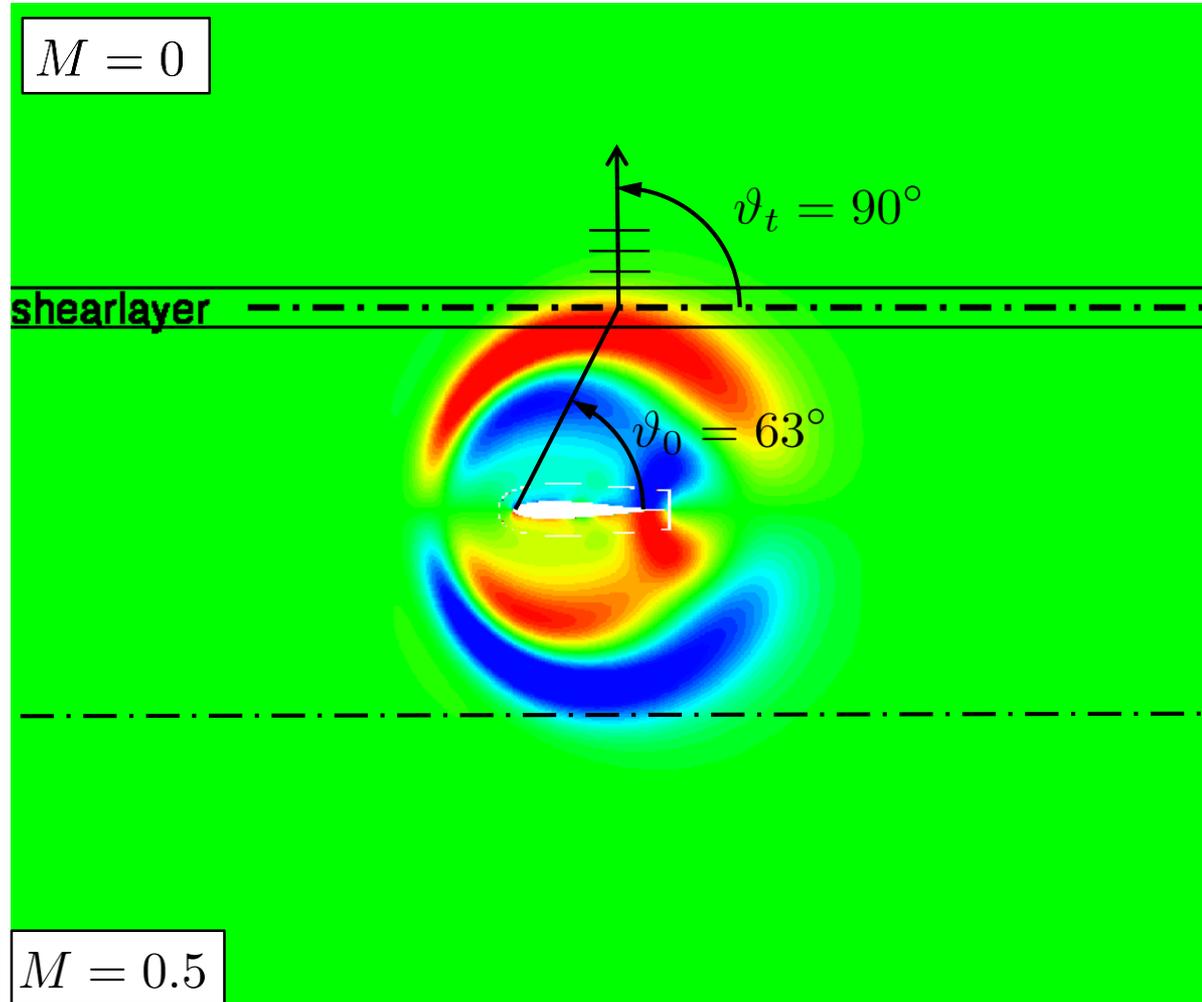
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

$$\vartheta_0 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - M \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}}{(1 - M^2) \cos \vartheta_t + M}$$

Beispiel: Auftreffen eines Einzelwirbels auf Profilvorderkante (CAA-Sim.). Momentandruckfeld.

Im Strömungsfeld werden nach oben und unten antiphasisch gleiche Signale abgestrahlt.

Vergleich CAA Simulation mit obiger Winkelbeziehung für Ausfallswinkel 90°





2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

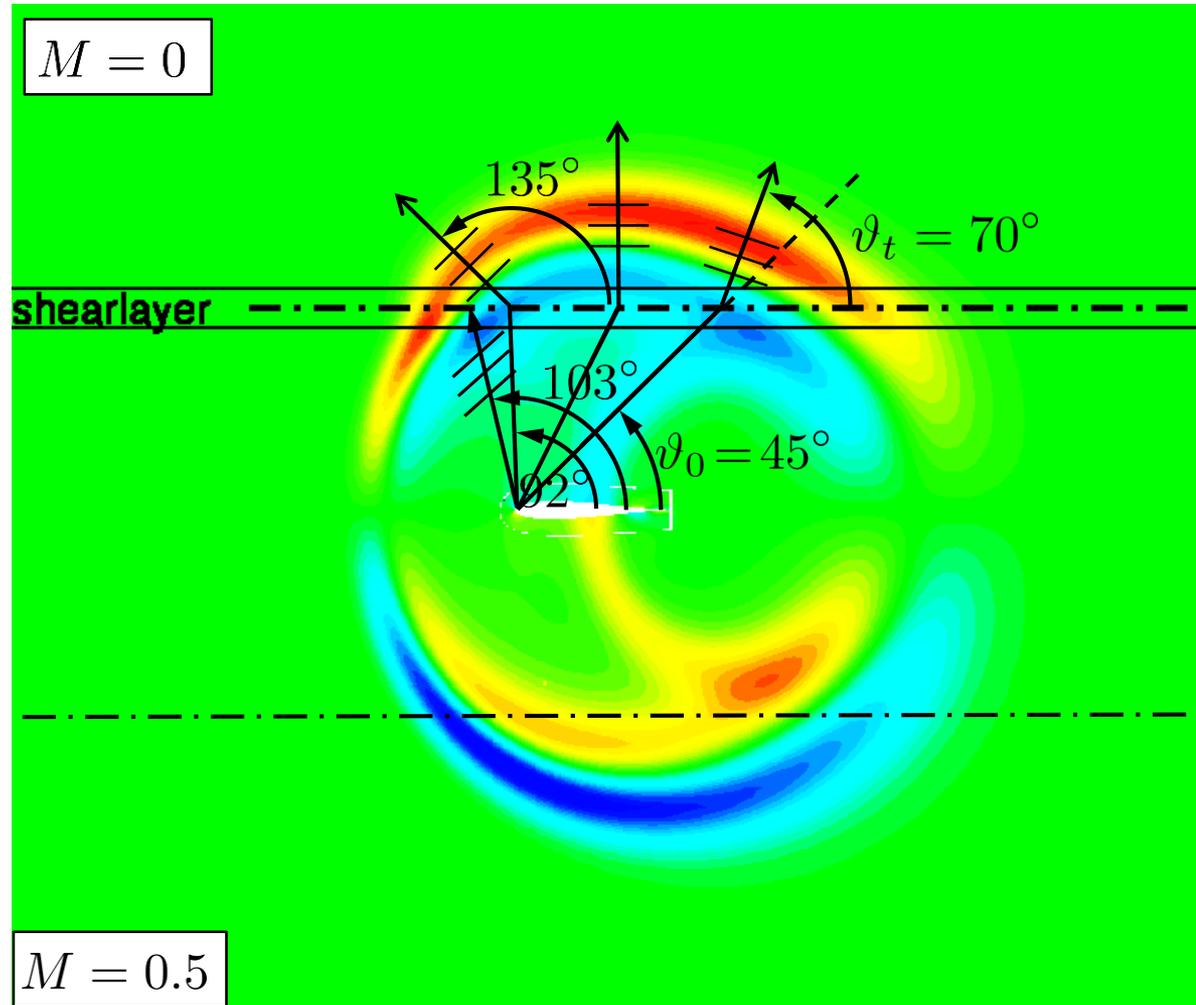
$$\vartheta_0 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - M \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}}{(1 - M^2) \cos \vartheta_t + M}$$

Beispiel: Auftreffen eines Einzelwirbels auf Profilvorderkante (CAA-Sim.). Momentandruckfeld.

Beim Scherschichtdurchtritt wird Druckfeld unsymmetrisch.

Vergleich CAA Simulation mit obiger Winkelbeziehung für Ausfallswinkel 70° , 135°

Grenzwinkel für Totalreflexion $\vartheta_0(\vartheta_t = 180^\circ) = 103^\circ$





2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

$$\vartheta_0 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{(1 - M \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}}{(1 - M^2) \cos \vartheta_t + M}$$

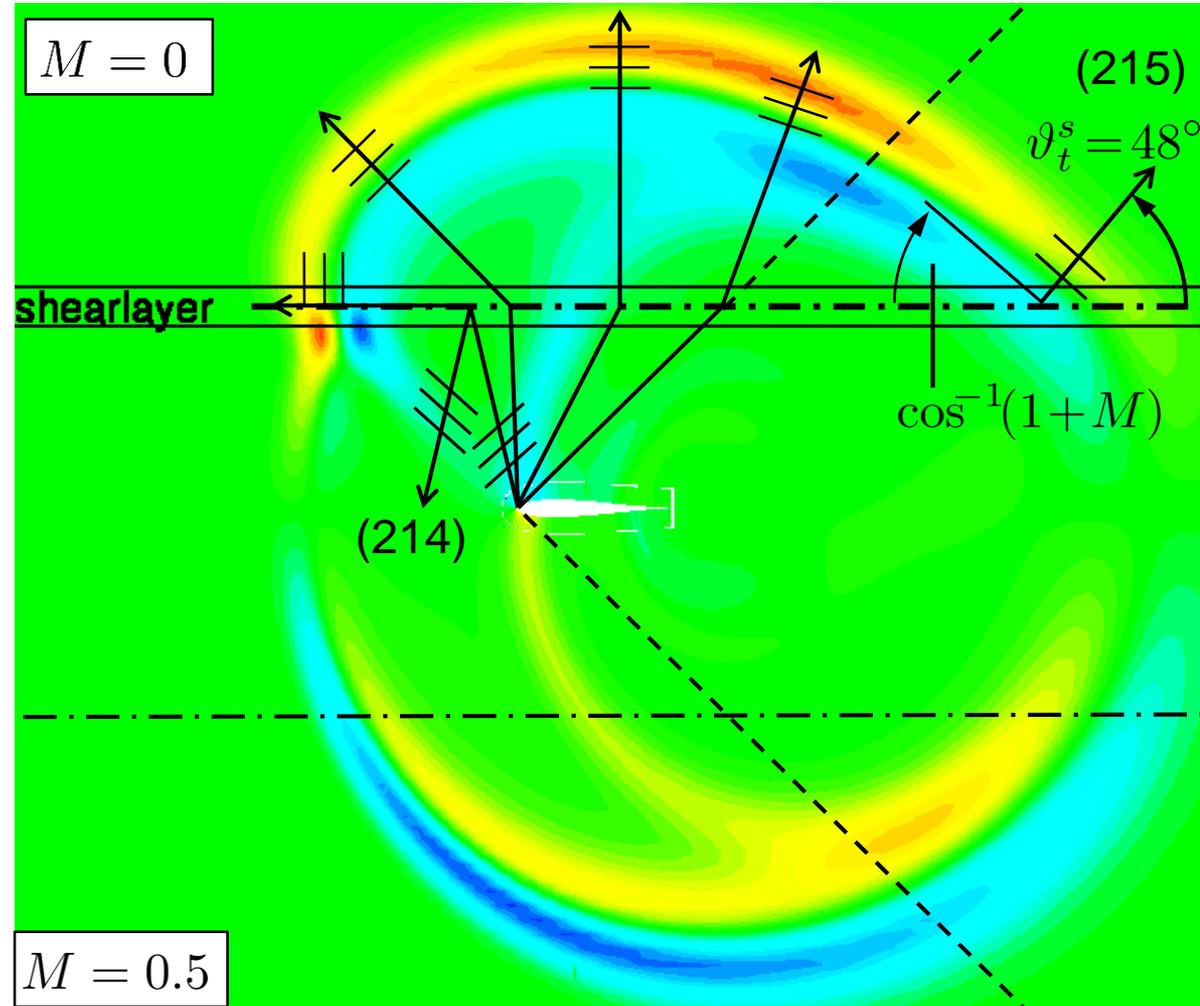
Beispiel: Auftreffen eines Einzelwirbels auf Profilvorderkante (CAA-Sim.). Momentandruckfeld.

Im Strömungsfeld werden nach oben und unten antiphasisch gleiche Signale abgestrahlt.

Beachte:

* Orientierung des reflektierten Schallsignals entspr. Theorie (ist Machwelle für $M = 1.5$!)

* Wellenfront stromab asympt. ebenfalls nach Machwelle für $M = 1.5$ orientiert (Schallschatten!)



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

Übersicht zur Herleitung der Windkanalkorrektur nach Amiet:

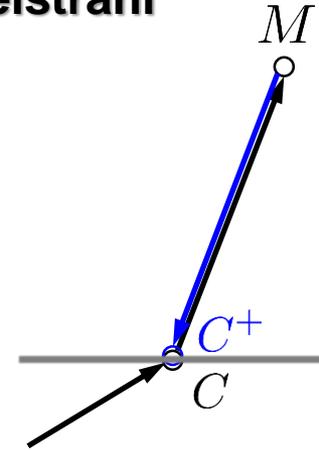
a) Rückrechnung der Intensität von Messpunkt auf Punkt

$C^+ := (x_0, h(1 + \epsilon))$ infinitesimal oberhalb Scherschichtpunkt C :

dazu: Erhaltung der Schalleistung entlang Strahlröhre :

dF aus Strahlröhrenaufweitung in x - z -Ebene
mal Strahlröhrenaufweitung in y -Richtung

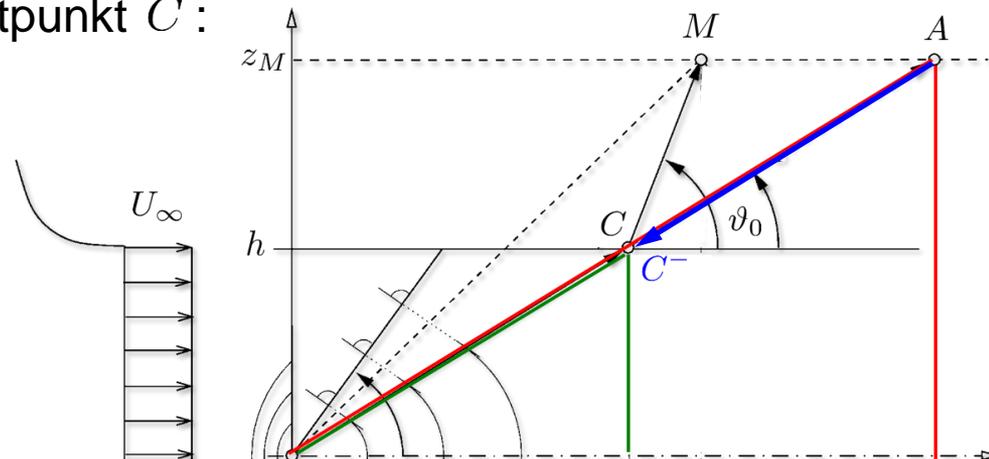
$$\frac{\overline{p_M'^2}}{p_{C^+}'^2} = \frac{dF_{C^+}}{dF_M}$$



b) Rückrechnung der Intensität von Punkt A auf Punkt $C^- := (x_0, h(1 - \epsilon))$

infinitesimal unterhalb Scherschichtpunkt C :

$$\frac{\overline{p_A'^2}}{p_{C^-}'^2} = \frac{h^2}{z_M^2}$$



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

- c) Sprungbedingung für Druck von $C^- \rightarrow C^+$
 (für Amplitude vgl. (219) hier mit $u_{+\infty} = 0$, $a_{+\infty} = a_{-\infty}$):

$$\frac{p^t}{p^i} = \frac{2 \sin \vartheta_i (1 + M \cos \vartheta_i)^2}{\sin \vartheta_i (1 + M \cos \vartheta_i)^2 + [H(\sigma) - i(1 - H(\sigma))] \sqrt{|\sigma|}}$$

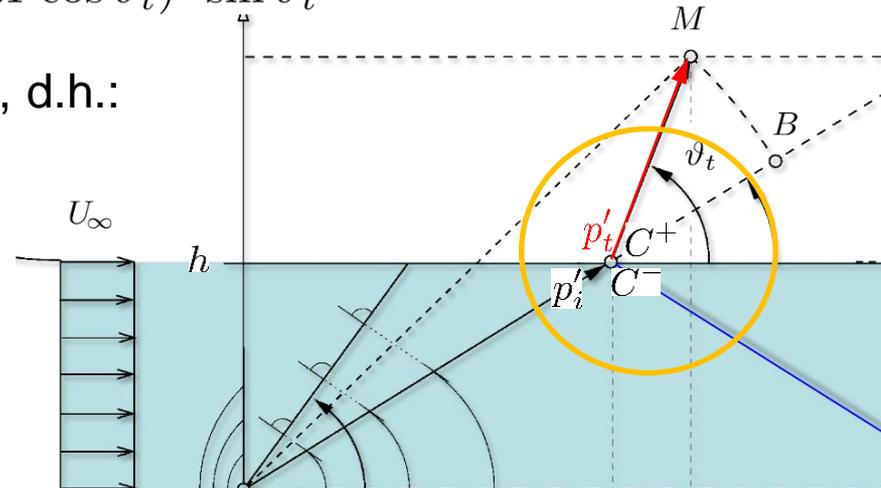
außerhalb Totalreflexion ist $\sigma > 0$ $\sigma = (1 + M \cos \vartheta_i)^2 - \cos^2 \vartheta_i$

außerdem sagt Brechungsgesetz (212) $\cos \vartheta_i = \frac{\cos \vartheta_t}{1 - M \cos \vartheta_t}$

$$\Rightarrow \frac{p^t}{p^i} = \frac{2 \sqrt{(1 - M \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}}{\sqrt{(1 - M \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t} + (1 - M \cos \vartheta_t)^2 \sin \vartheta_t}$$

Effektivwertverhältnis=Amplitudenverhältnis, d.h.:

$$\frac{\overline{p_t'^2}}{\overline{p_i'^2}} = \frac{\overline{p_{C^+}'^2}}{\overline{p_{C^-}'^2}} = \frac{4\zeta^2}{[(1 - M \cos \vartheta_t)^2 \sin \vartheta_t + \zeta]^2}$$

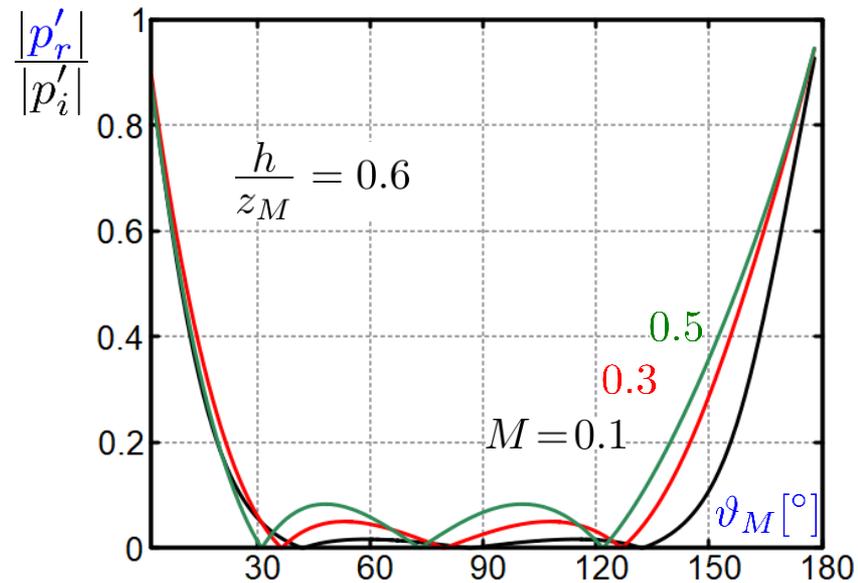
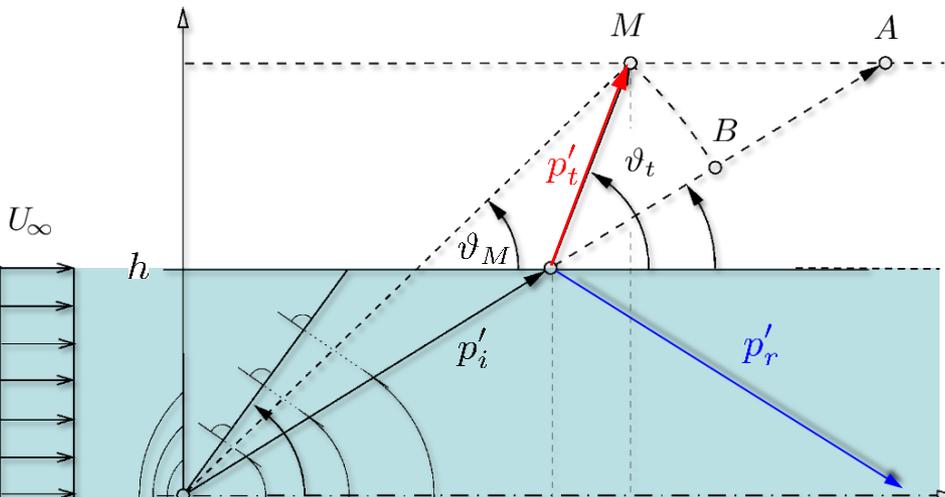


2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

Nicht berücksichtigt bei der Formel von Amiet ist der Fehler aufgrund der von der gegenüber liegenden Scherschicht zurückgeworfenen Schallstrahlen, die ebenfalls das Mikrophon bei M treffen.

Die Intensität der reflektierten Strahlen ist mit (220): $\frac{p'_r}{p'_i} = \frac{p'_t}{p'_i} - 1$

$$\frac{p'_r}{p'_i} = \frac{\zeta - (1 - M \cos \vartheta_t)^2 \sin \vartheta_t}{\zeta + (1 - M \cos \vartheta_t)^2 \sin \vartheta_t} \quad (336)$$



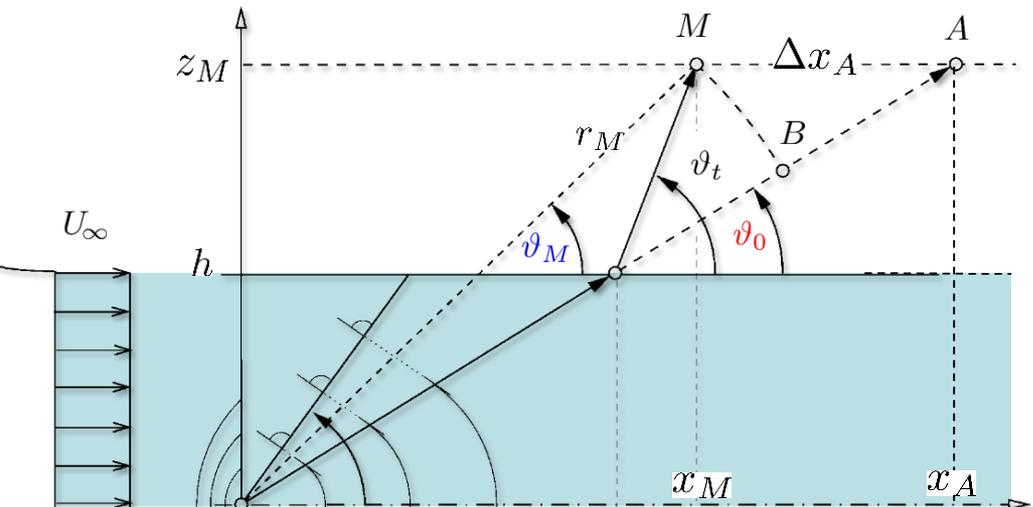
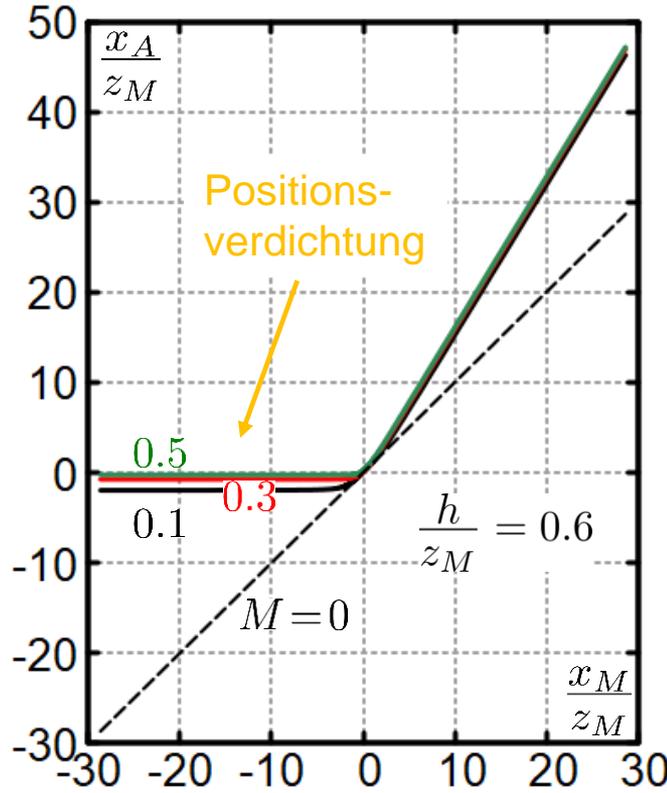
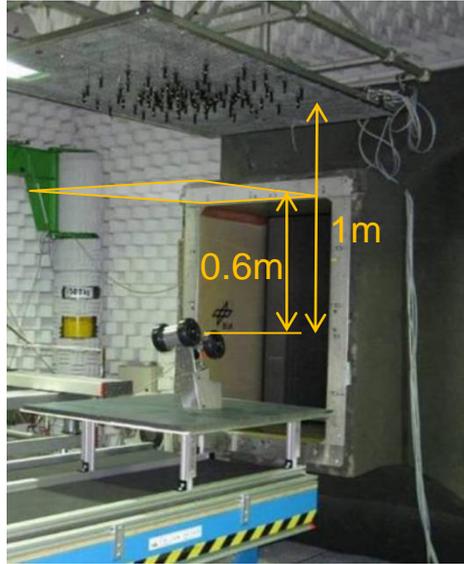
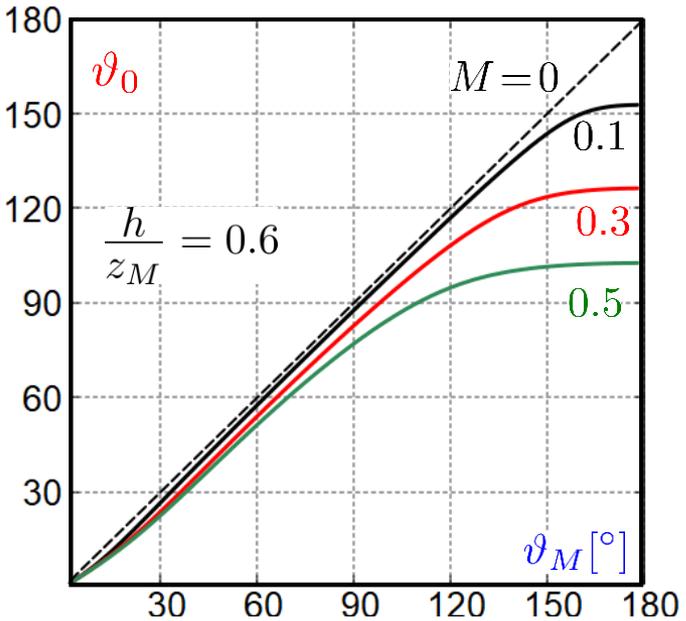
Reflektion an Windkanalscherschicht

nach R.K. Amiet, AIAA 75-532



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

Virtuelle Mikrofonverschiebung



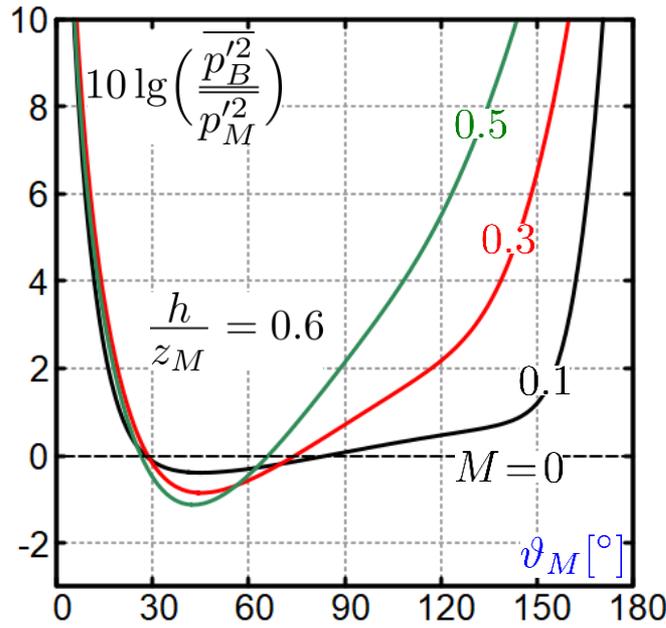
$$\frac{x_A}{z_M} = \cot \vartheta_0 \quad \frac{x_M}{z_M} = \cot \vartheta_M$$

$$\frac{\Delta x_A}{z_M} = \frac{x_A - x_M}{z_M}$$



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

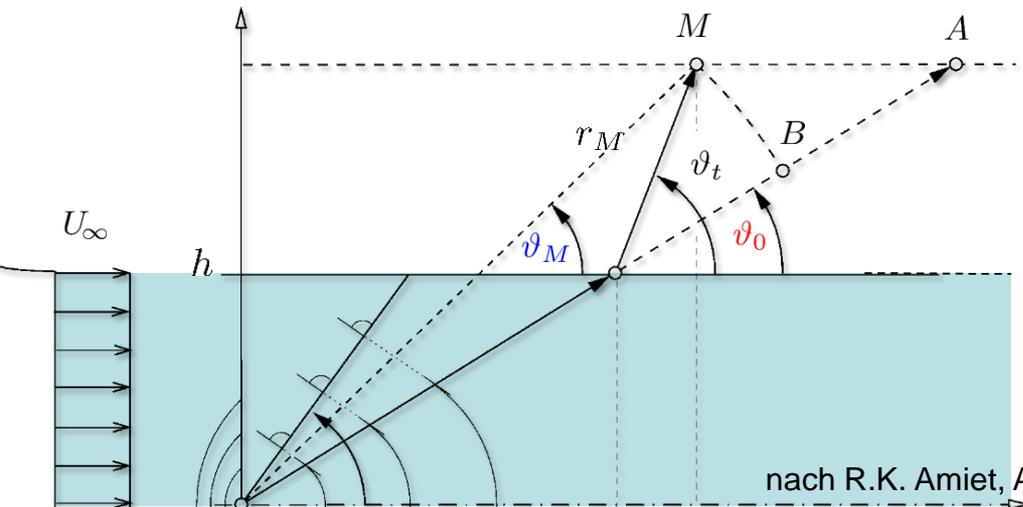
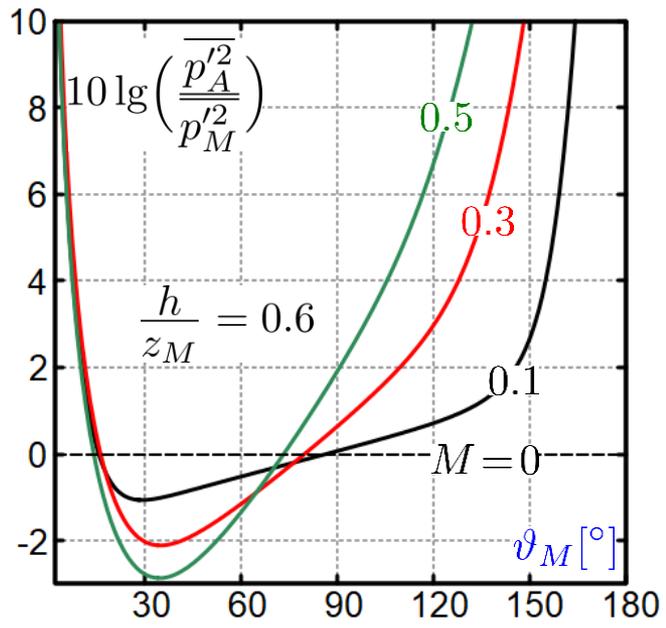
Amplitudenkorrektur bei B



←
Umrechnung auf Pos. B mit gleicher Orientierung wie Pos. A, und Abstand r_M :

$$\frac{\overline{p_B'^2}}{p_A'^2} = \frac{\sin^2 \vartheta_M}{\sin^2 \vartheta_0}$$

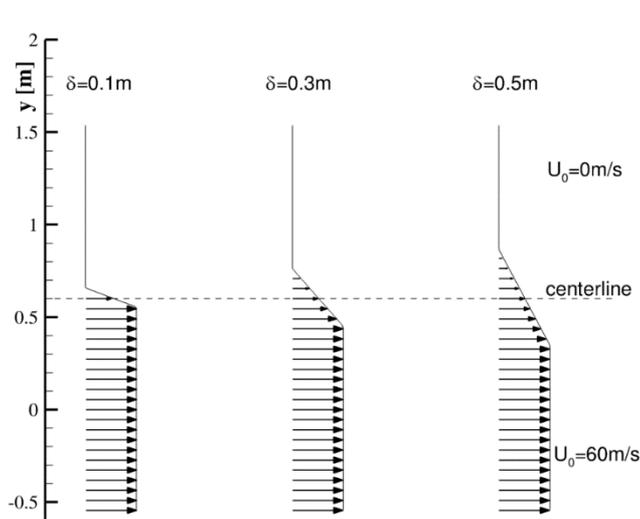
Amplitudenkorrektur bei A



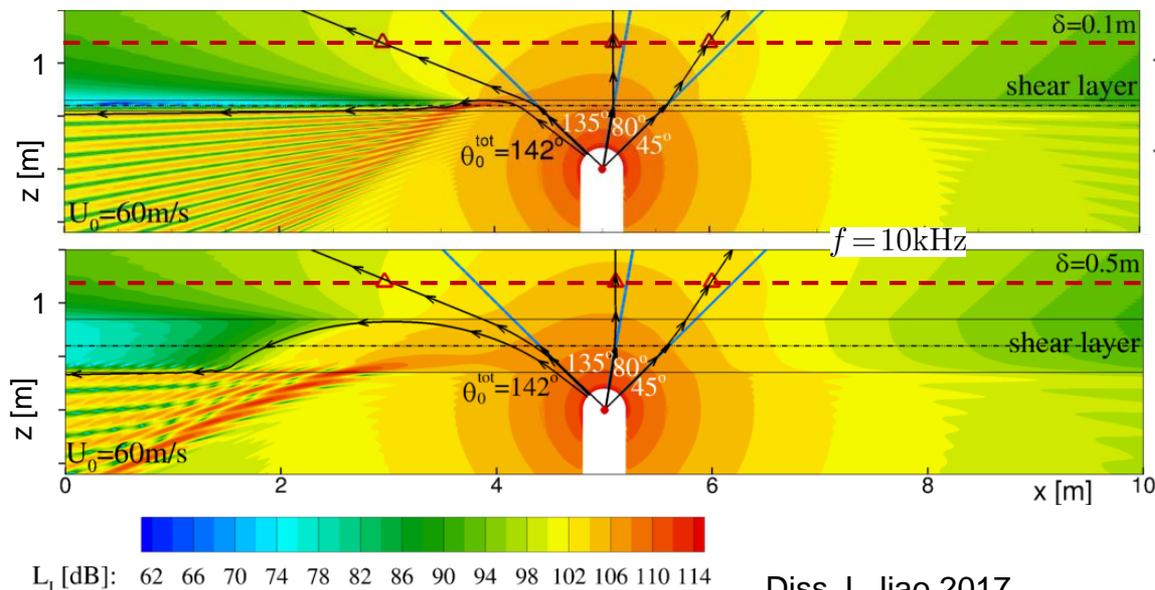
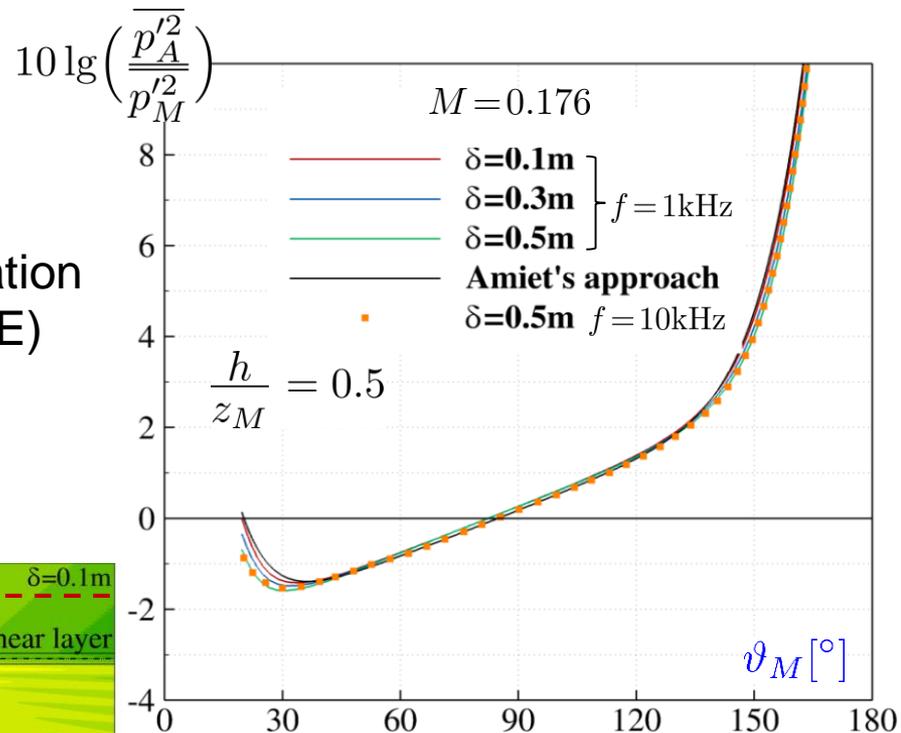
nach R.K. Amiet, AIAA 75-532

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

Wie gut ist die Annahme einer ebenen, unendlich dünnen Scherschicht?



CAA Simulation
(Lösung LEE)

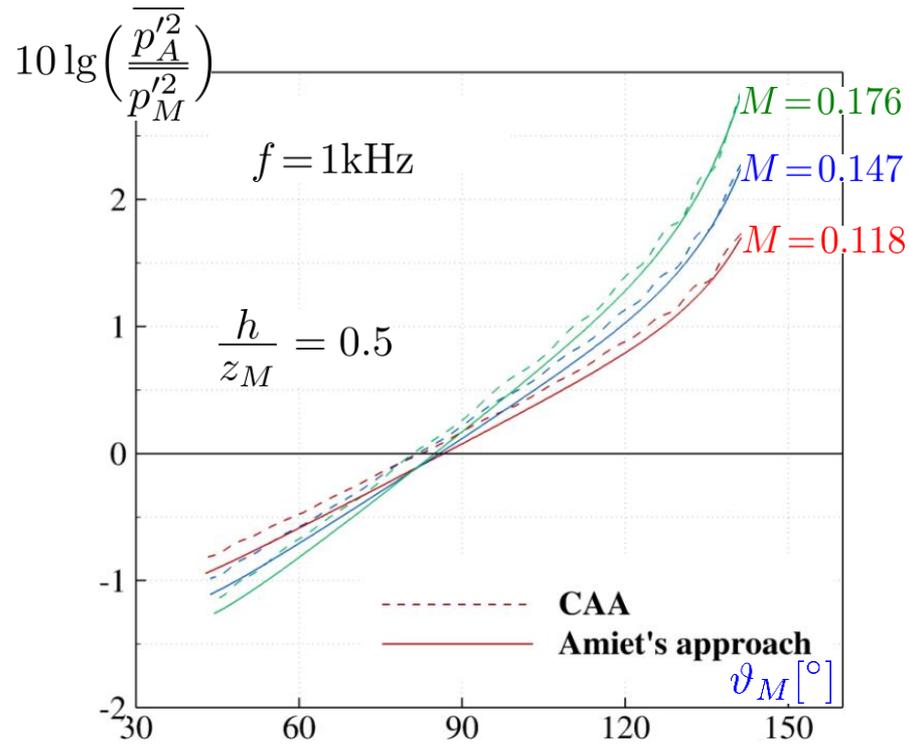
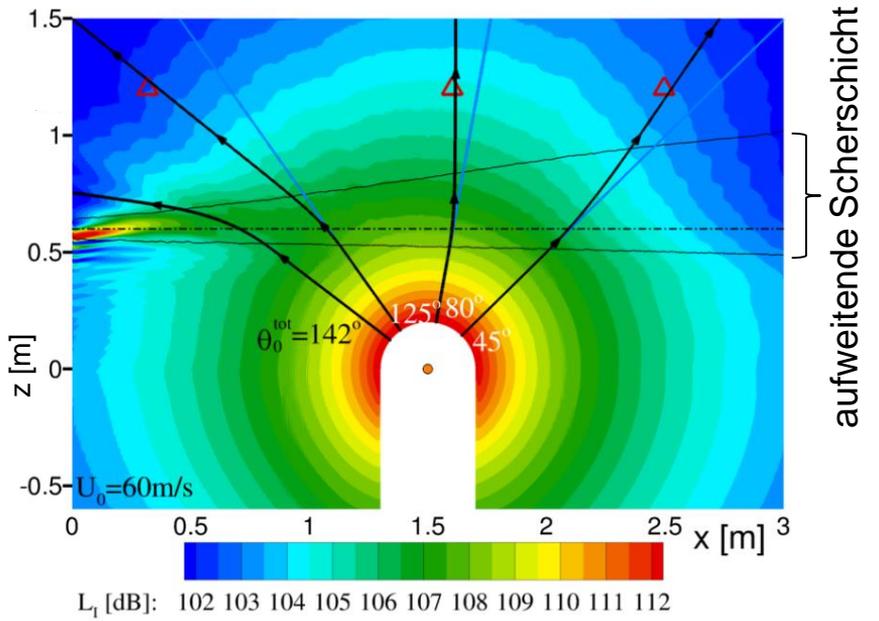


- geringer Einfluss durch Scherschichtdicke
- weitgehend frequenz-unabhängig



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

Wie gut ist die Annahme einer ebenen, unendlich dünnen Scherschicht?

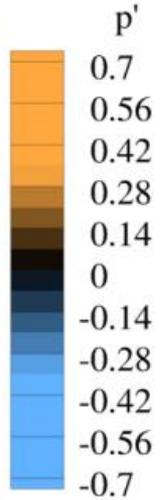
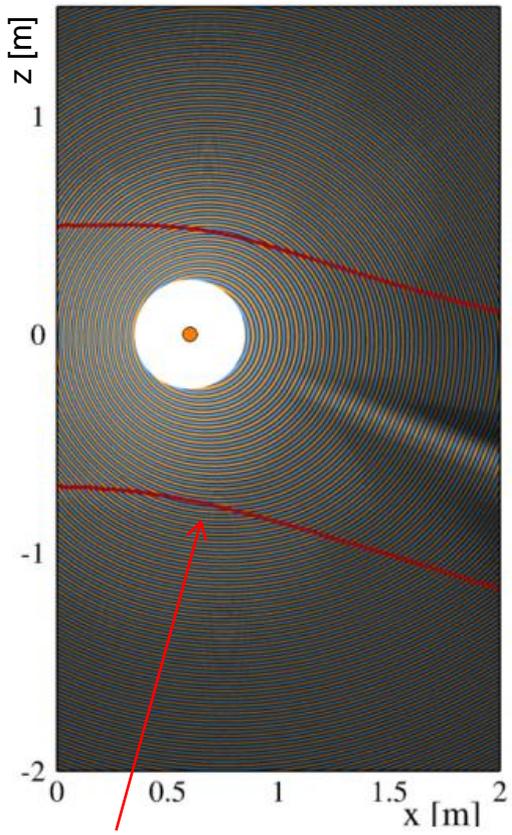


- geringer Einfluss durch aufweitende Scherschicht
- weitgehend geschwindigkeitsunabhängig



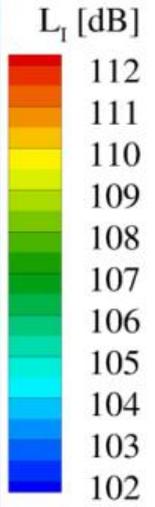
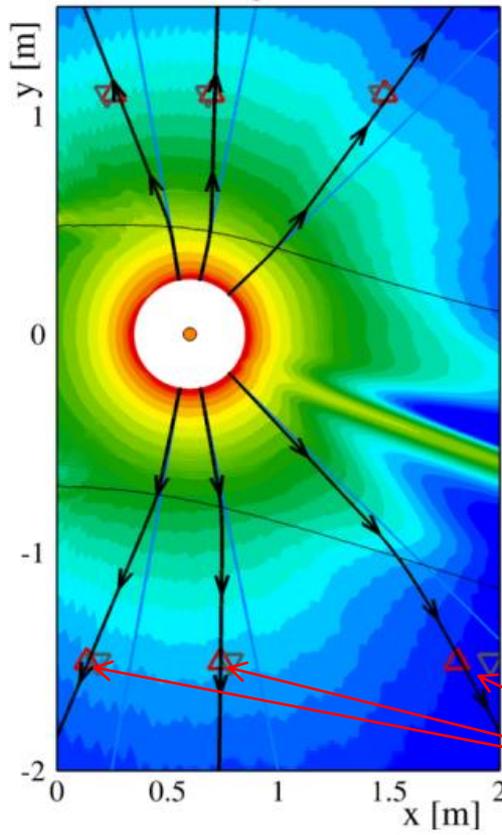
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl

Wie gut ist die Annahme einer ebenen, unendlich dünnen Scherschicht?



$M = 0.176$
 $f = 10\text{kHz}$

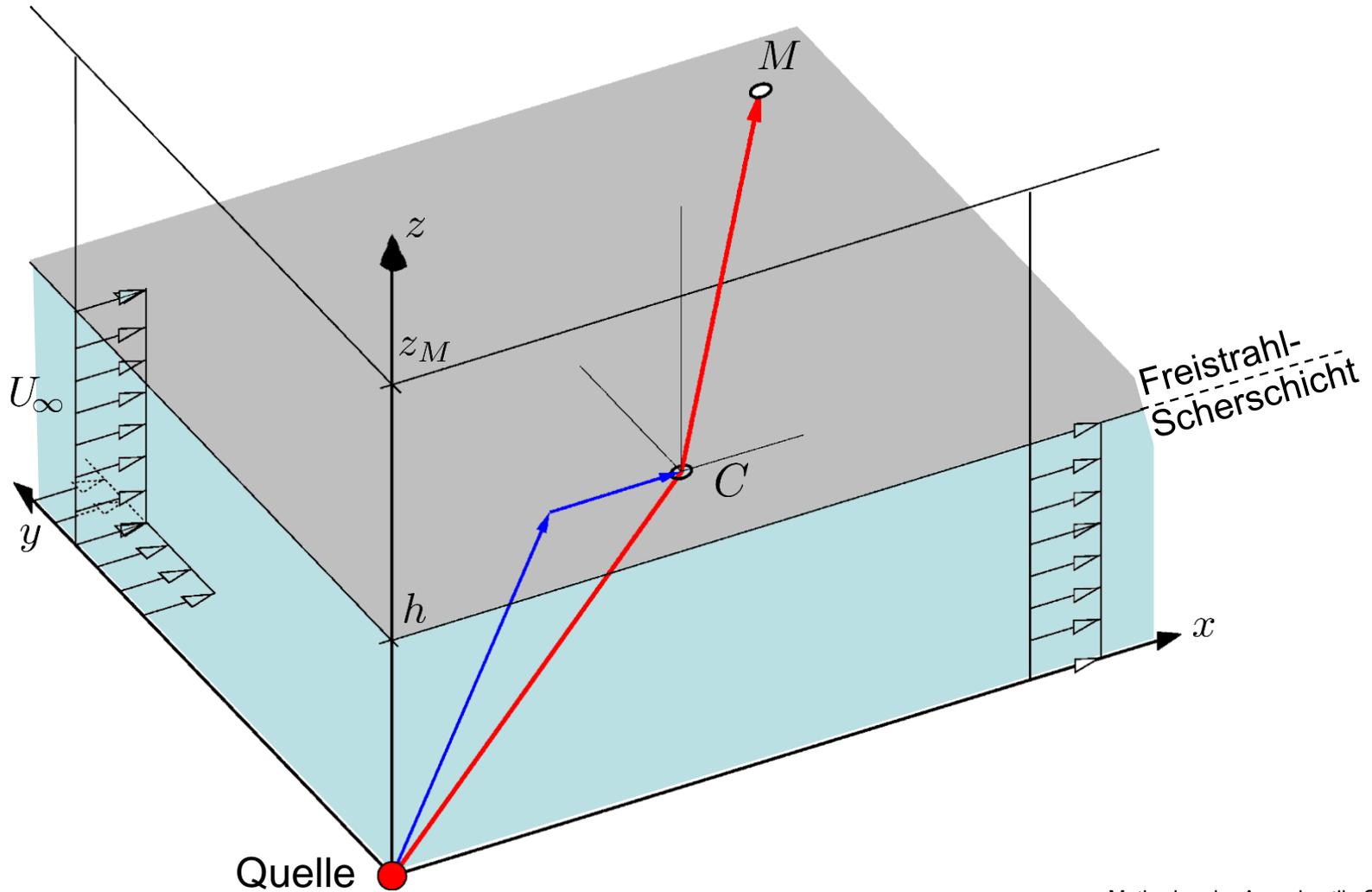
aufweitende, gekrümmte Scherschicht $\delta(x, z)$



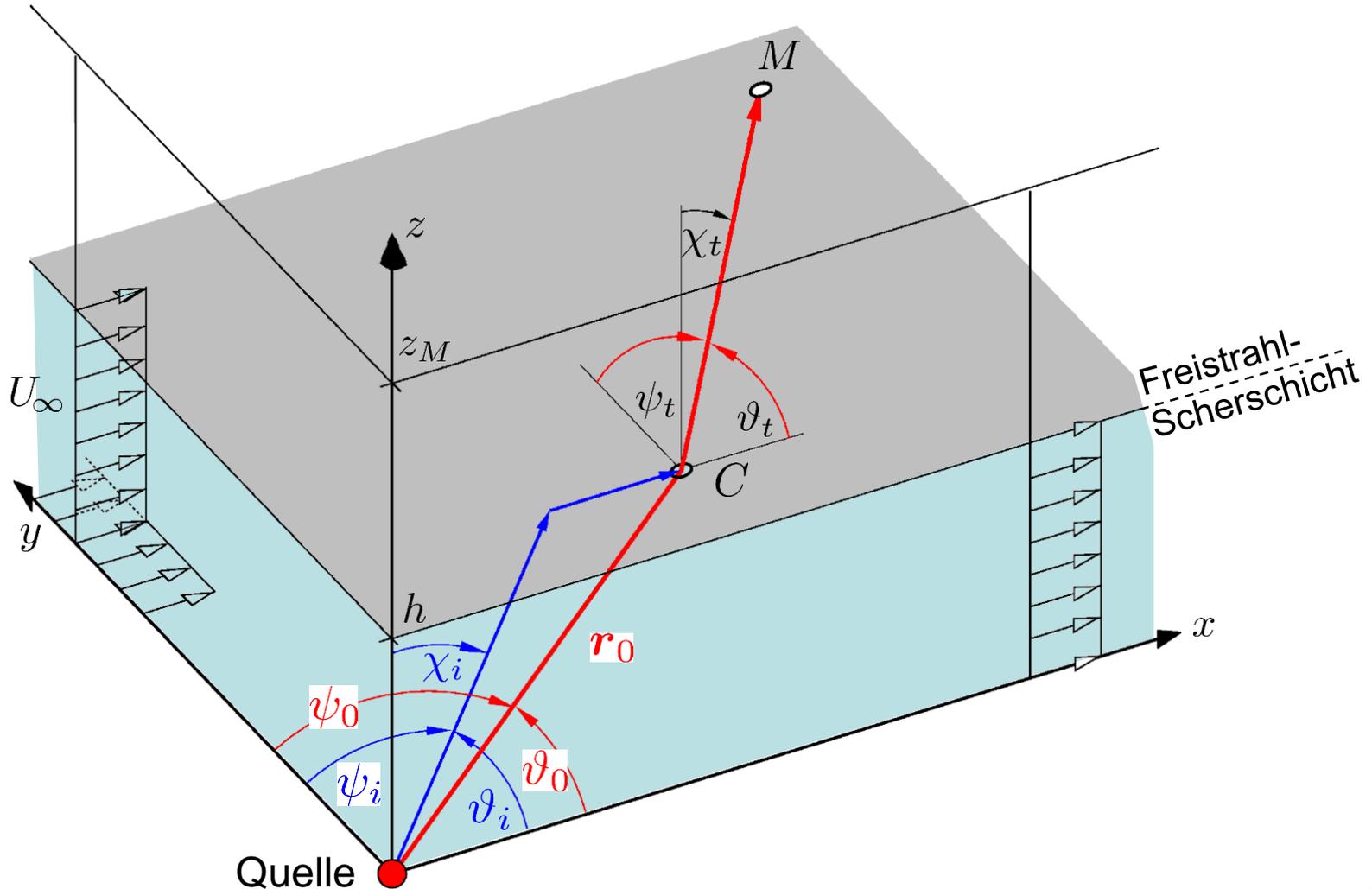
Positionen A
nach Amiet

- rel. gute Wiedergabe des Strahlenverlaufs auch bei komplexen Scherschichten.

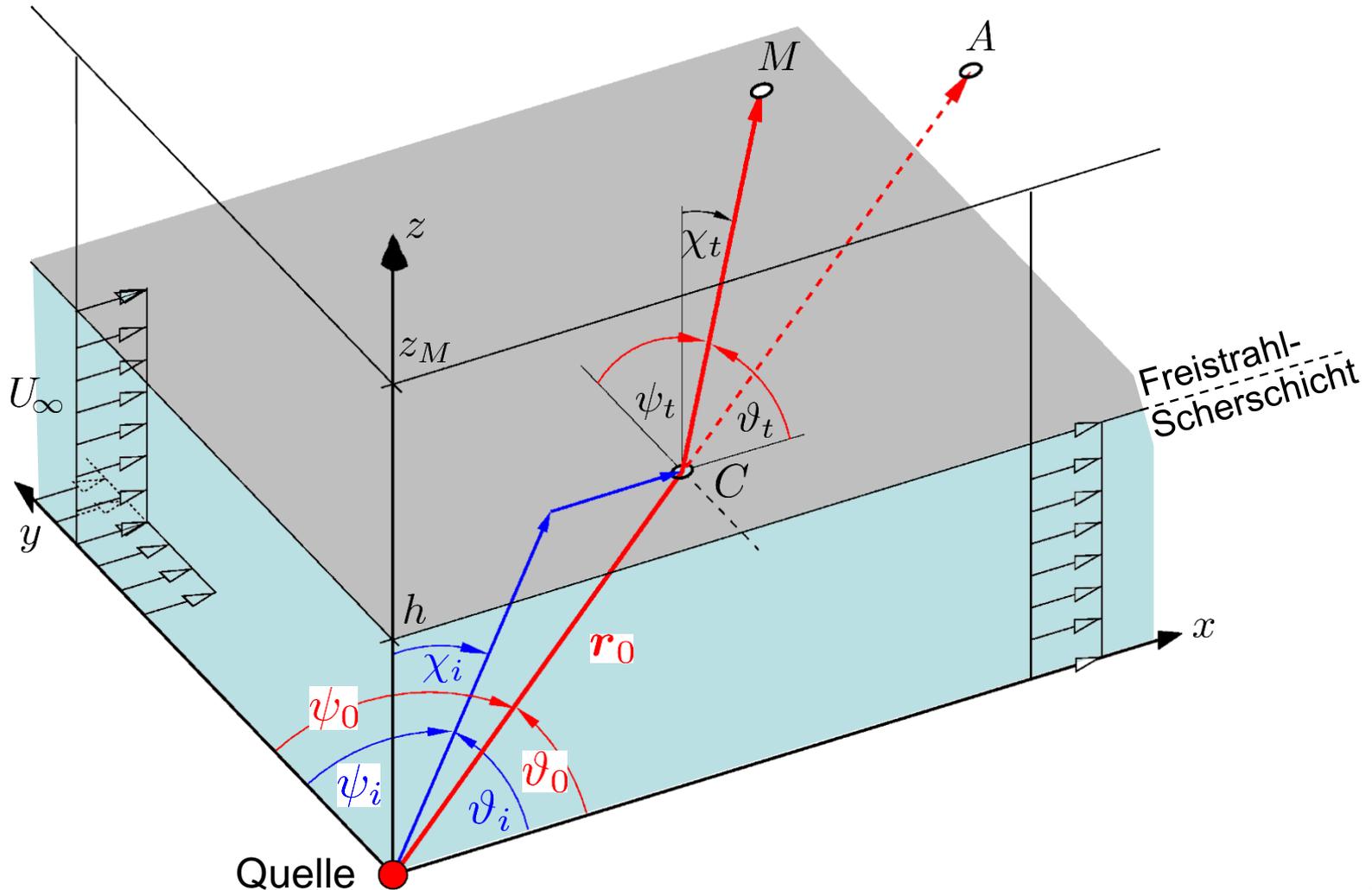
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah



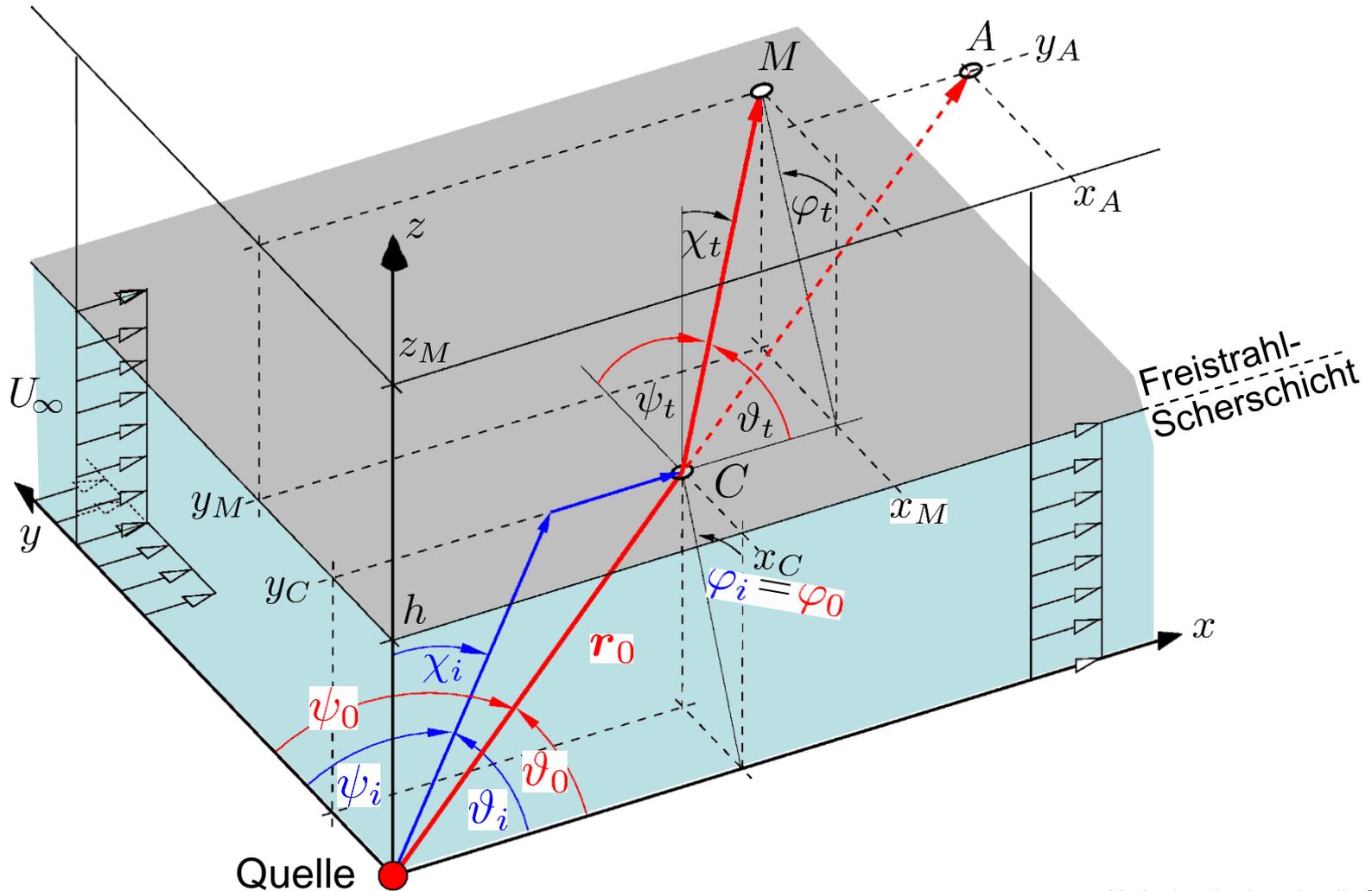
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

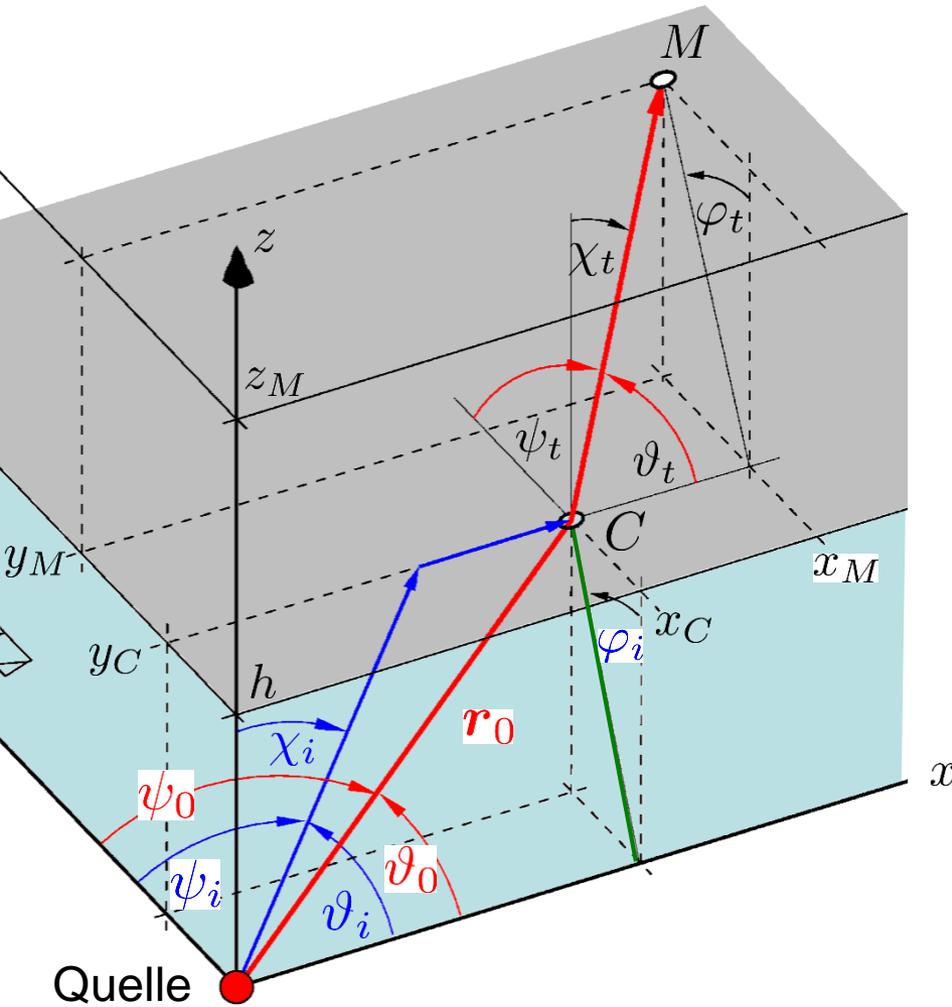


2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

1. Winkelberechnung : geg.: $(x_M, y_M, z_M), h, U_\infty$
 ges.: ϑ_t, ψ_t



$$\tan \vartheta_0 = \frac{a \sin \vartheta_i}{a \cos \vartheta_i + U_\infty} = \frac{\sin \vartheta_i}{\cos \vartheta_i + M_\infty}$$

Brechungsgesetz über Schicht:
 Konstanz von ω sowie x - und y -
 Wellenzahlkomponenten α und β

$$\omega = (a + U_\infty \cos \vartheta_i) k_{-\infty} = a k_{+\infty}$$

$$\alpha = k_{-\infty} \cos \vartheta_i = k_{+\infty} \cos \vartheta_t$$

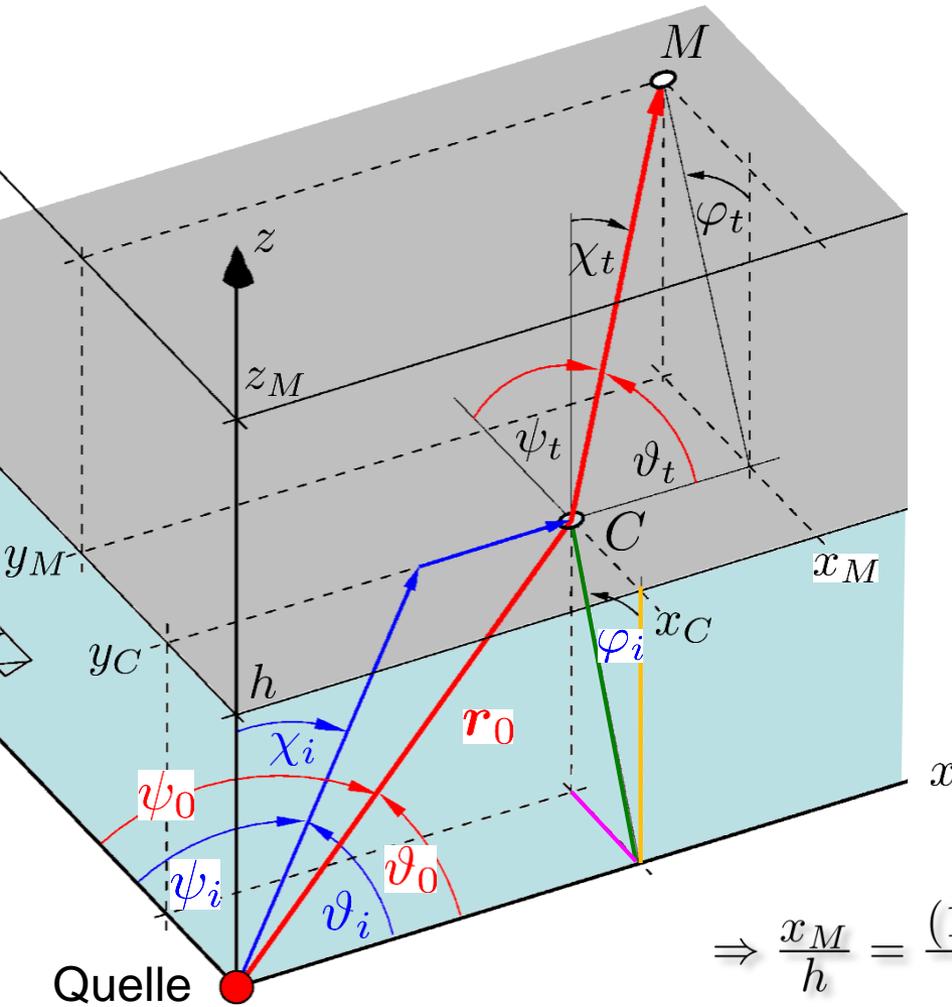
$$\beta = k_{-\infty} \cos \psi_i = k_{+\infty} \cos \psi_t$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{(1 - M_\infty \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}}{(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

1. Winkelberechnung : geg.: $(x_M, y_M, z_M), h, U_\infty$

ges.: ϑ_t, ψ_t



$$x_C \tan \vartheta_0 = h / \cos \varphi_i$$

$$\sin^2 \vartheta_i = \cos^2 \psi_i + (\sin \vartheta_i \cos \varphi_i)^2$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \psi_i}{\sin^2 \vartheta_i}} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \psi_t}{\zeta^2}}$$

? (S.250)

analog:

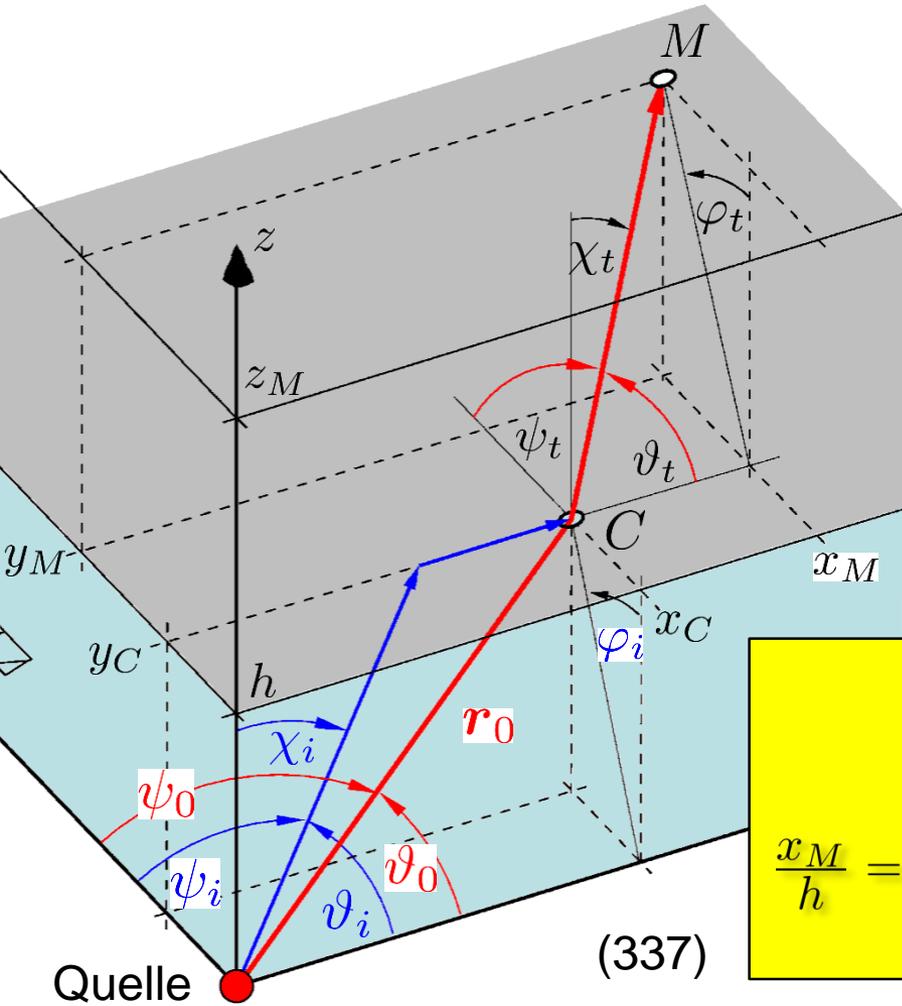
$$(x_M - x_C) \tan \vartheta_t = (z_M - h) / \cos \varphi_t$$

$$\cos \varphi_t = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \psi_t}{\sin^2 \vartheta_t}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_M}{h} = \frac{(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t}} + \frac{(z_M/h - 1) \cos \vartheta_t}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t}}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

1. Winkelberechnung : geg.: $(x_M, y_M, z_M), h, U_\infty$
 ges.: ϑ_t, ψ_t



analog:

$$\frac{y_C}{h} = \tan \varphi_i = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_i}}{\cos \varphi_i} = \frac{\cos \psi_t}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t}}$$

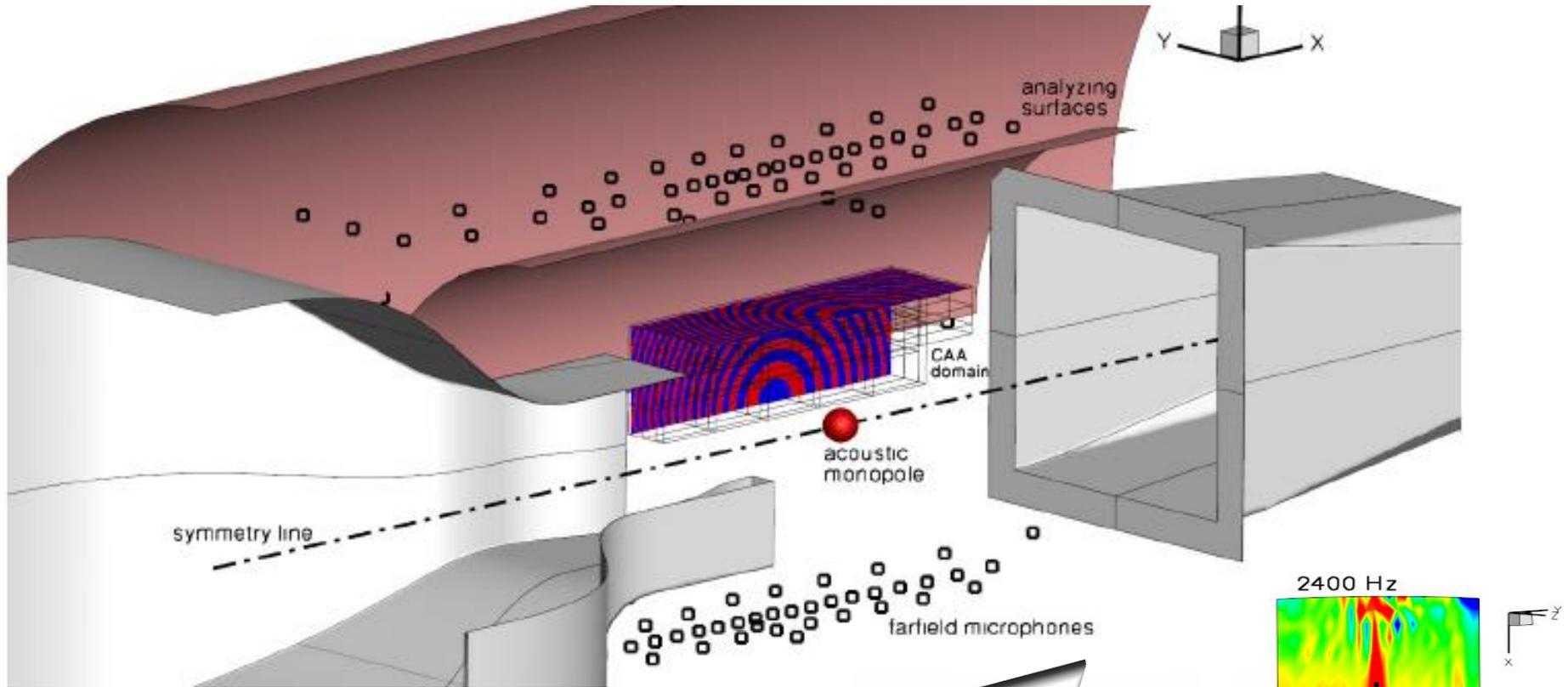
$$\frac{y_M - y_C}{z_M - h} = \tan \varphi_t = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_t}}{\cos \varphi_t} = \frac{\cos \psi_t}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t}}$$

$$\frac{y_M}{h} = \frac{\cos \psi_t}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t}} + \frac{(z_M/h - 1) \cos \psi_t}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t}}$$

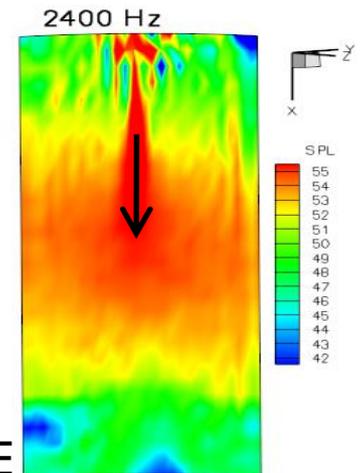
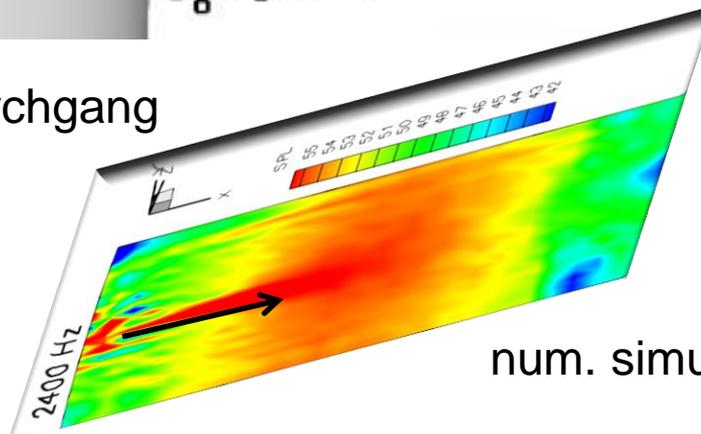
$$\frac{x_M}{h} = \frac{(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t}} + \frac{(z_M/h - 1) \cos \vartheta_t}{\sqrt{\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t}}$$

Löse iterativ nach ϑ_t, ψ_t

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

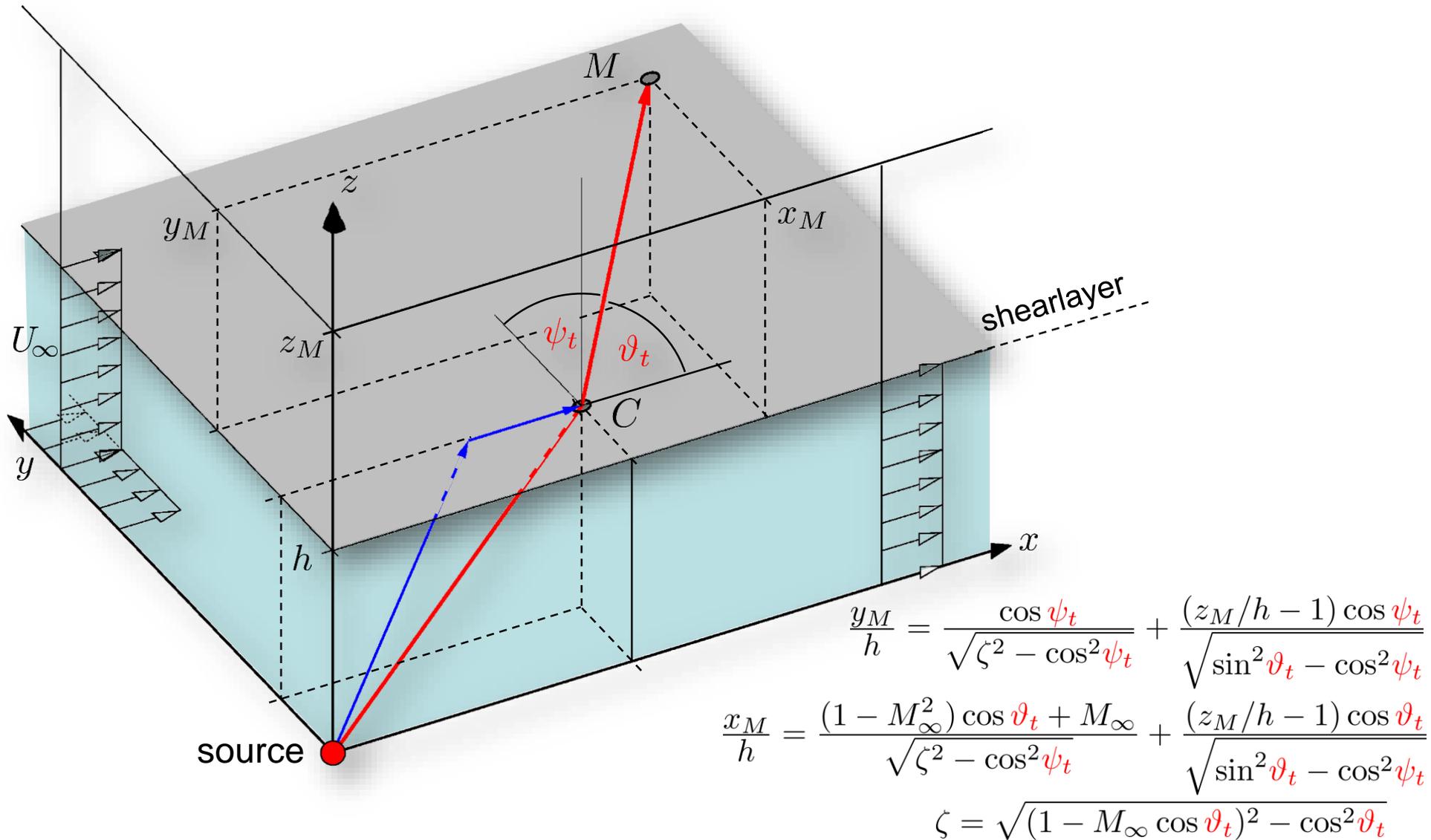


CAA Ergebnisse Schalldurchgang durch Eckenscherschicht bei Windkanal mit rechteckigem Strahlquerschnitt

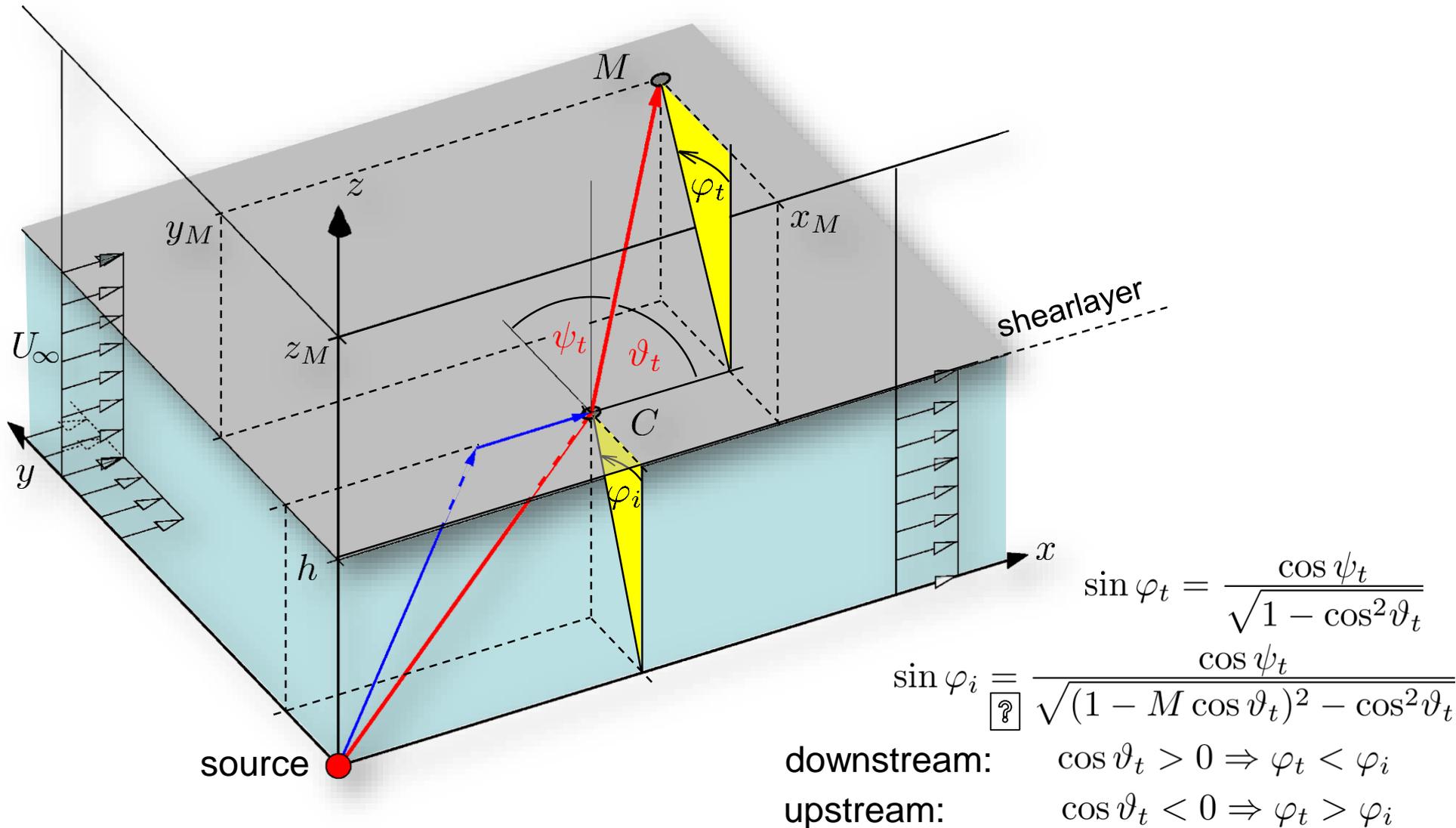


num. simulation LEE

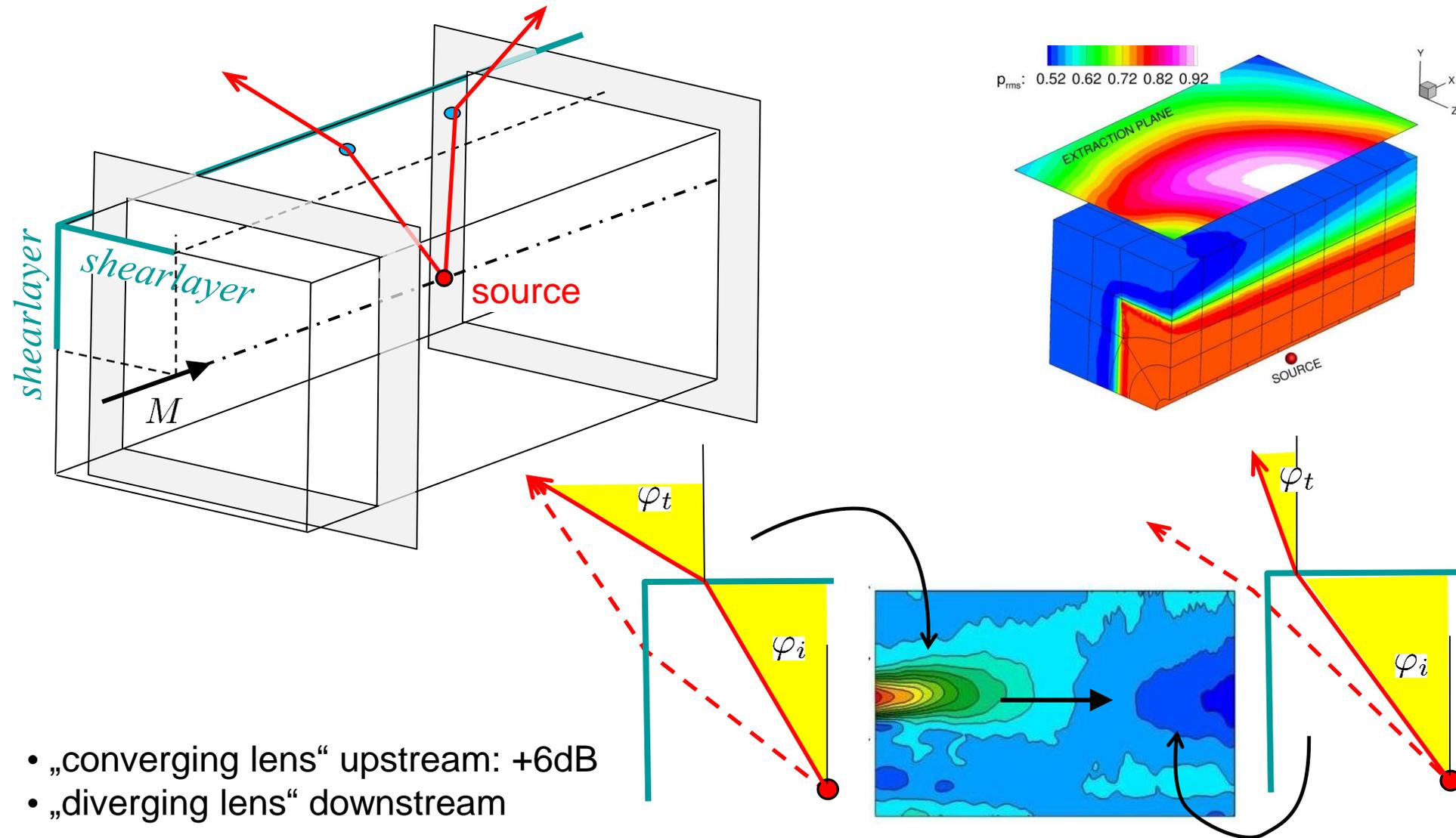
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah



- „converging lens“ upstream: +6dB
- „diverging lens“ downstream

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

2. Strahlaufweitung $C \rightarrow M$: geg.: ϑ_t, ψ_t

$$\text{ges.: } \frac{\overline{p'^2}(C)}{\overline{p'^2}(M)} = \frac{dF(M)}{dF(C)} = \frac{dF_M}{dF_C}$$

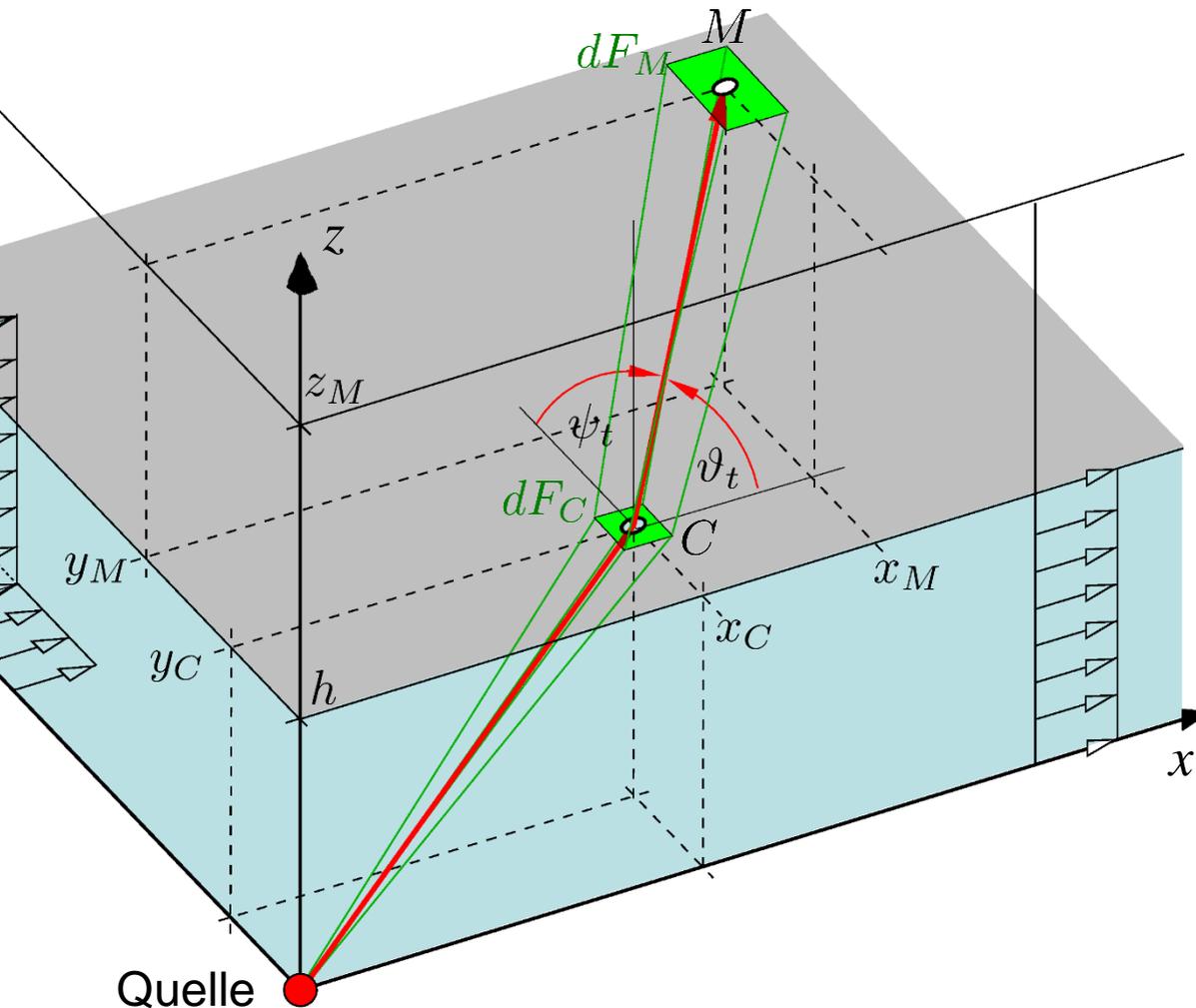
$$dF_M = dx_M dy_M$$

$$dF_C = dx_C dy_C$$

$$\frac{dx_M dy_M}{d\vartheta_t d\psi_t} = J_M = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_M}{\partial \vartheta_t} & \frac{\partial x_M}{\partial \psi_t} \\ \frac{\partial y_M}{\partial \vartheta_t} & \frac{\partial y_M}{\partial \psi_t} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dx_C dy_C}{d\vartheta_t d\psi_t} = J_C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_C}{\partial \vartheta_t} & \frac{\partial x_C}{\partial \psi_t} \\ \frac{\partial y_C}{\partial \vartheta_t} & \frac{\partial y_C}{\partial \psi_t} \end{vmatrix}$$

$$\frac{dF_M}{dF_C} = \frac{J_M}{J_C}$$



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

2. Strahlaufweitung:

$$x_C(\vartheta_t, \psi_t) = h \frac{(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t}}$$

$$y_C(\vartheta_t, \psi_t) = h \frac{\cos \psi_t}{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t}}$$

⋮

$$\zeta = \sqrt{(1 - M_\infty \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}$$

$$J_C = \frac{h^2 \sin \vartheta_t \sin \psi_t}{(\zeta^2 - \cos^2 \psi_t)^3} \{ [1 - (1 - M_\infty^2) \cos^2 \psi_t] \zeta^2 - [(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty]^2 \cos^2 \psi_t \}$$

$$J_M = h^2 \sin \vartheta_t \sin \psi_t \left\{ \left[\frac{1 - (1 - M_\infty^2) \cos^2 \psi_t}{(\zeta^2 - \cos^2 \psi_t)^{3/2}} + \frac{(z_M^* - 1) \sin^2 \psi_t}{(\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t)^{3/2}} \right] \left[\frac{\zeta^2}{(\zeta^2 - \cos^2 \psi_t)^{3/2}} + \frac{(z_M^* - 1) \sin^2 \vartheta_t}{(\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t)^{3/2}} \right] - \cos \psi_t \left[\frac{[(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty] \cos \psi_t}{(\zeta^2 - \cos^2 \psi_t)^{3/2}} + \frac{(z_M^* - 1) \cos \vartheta_t \cos \psi_t}{(\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t)^{3/2}} \right] \left[\frac{(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty}{(\zeta^2 - \cos^2 \psi_t)^{3/2}} + \frac{(z_M^* - 1) \cos \vartheta_t}{(\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t)^{3/2}} \right] \right\}$$

$$\frac{dF_M}{dF_C} = \frac{[1 - (1 - M_\infty^2) \cos^2 \psi_t + \eta^3 (z_M^* - 1) \sin^2 \psi_t] [\zeta^2 + \eta^3 (z_M^* - 1) \sin^2 \vartheta_t]}{[1 - (1 - M_\infty^2) \cos^2 \psi_t] \zeta^2 - [(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty]^2 \cos^2 \psi_t} - \cos^2 \psi_t \frac{[(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty + \eta (z_M^* - 1) \cos \vartheta_t]^2}{[1 - (1 - M_\infty^2) \cos^2 \psi_t] \zeta^2 + [(1 - M_\infty^2) \cos \vartheta_t + M_\infty]^2 \cos^2 \psi_t} \quad (338)$$

$$z_M^* := \frac{z_M}{h} \quad \eta := \sqrt{\frac{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t}{\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t}}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

2. Strahlaufweitung $C \rightarrow M$ Sonderfall: ebener Durchtritt (Standard Amiet):

$$\psi_t = \pi/2$$

$$\frac{dF_M}{dF_C} = \frac{[1 + (z_M^* - 1)\zeta^3]}{\sin^3 \vartheta_t} \frac{[1 + (z_M^* - 1)\zeta]}{\sin \vartheta_t}$$

3. Sprungbedingung $C^- \rightarrow C^+$ (analog (204), (205), (207), (208))

unterhalb Scherschicht:

$$\hat{p}^- = p^i \exp\left(-ik_{-\infty} \sqrt{\sin^2 \vartheta_i - \cos^2 \psi_i} (z-h)\right) + p^r \exp\left(ik_{-\infty} \sqrt{\sin^2 \vartheta_i - \cos^2 \psi_i} (z-h)\right)$$

oberhalb Scherschicht, analog (210):

$$\hat{p}^+ = p^t \exp\left(-k_{-\infty} \sqrt{-\sigma} (z-h)\right) \quad \text{mit} \quad \sigma = (1 + M_\infty \cos \vartheta_i)^2 - \cos^2 \vartheta_i - \cos^2 \psi_i$$

$$\text{i) } \hat{p}^-(z=h) = \hat{p}^+(z=h) \Rightarrow p^i + p^r = p^t$$

$$\text{ii) } \frac{-ik_{-\infty} \sqrt{\sin^2 \vartheta_i - \cos^2 \psi_i}}{(\omega - \alpha a M_\infty)^2} (p^i - p^r) = \frac{-k_{-\infty} \sqrt{-\sigma}}{\omega^2} p^t \quad \text{analog (218)}$$

$$\Rightarrow \frac{p^i}{p^t} = \frac{\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t} + \sqrt{\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t} (1 - M_\infty \cos \vartheta_t)^2}{2\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t}}$$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

4. Laufstreckenunterschied zu Punkt C^- bzw. A :

$$\frac{\overline{p'_A{}^2}}{\overline{p'_{C^-}{}^2}} = \frac{(h / \cos \chi_i)^2}{(z_M / \cos \chi_i)^2} = \frac{h^2}{z_M^2}$$

Gesamtkorrektur 3D:

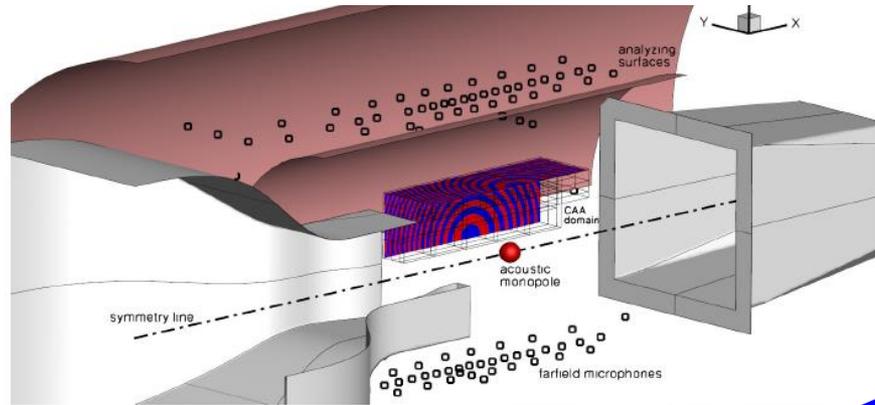
$$\frac{\overline{p'_A{}^2}}{\overline{p'_M{}^2}} = \frac{h^2}{z_M^2} \frac{J_M}{J_C} \frac{[\sqrt{\zeta^2 - \cos^2 \psi_t} + \sqrt{\sin^2 \vartheta_t - \cos^2 \psi_t} (1 - M_\infty \cos \vartheta_t)^2]^2}{4(\zeta^2 - \cos^2 \psi_t)} \quad (339)$$

$$\zeta = \sqrt{(1 - M_\infty \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t}$$

vgl. mit (335) für $\psi_t = \pi/2$

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah

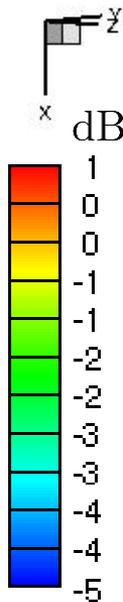
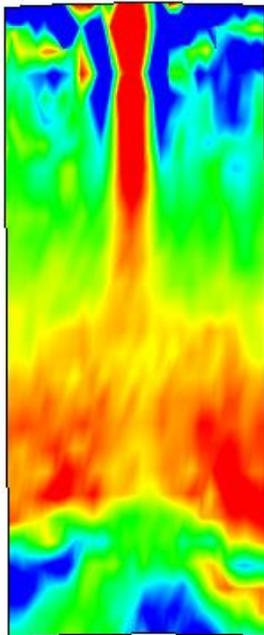
3D Scherschichtkorrektur für rechteckigen Strahlquerschnitt



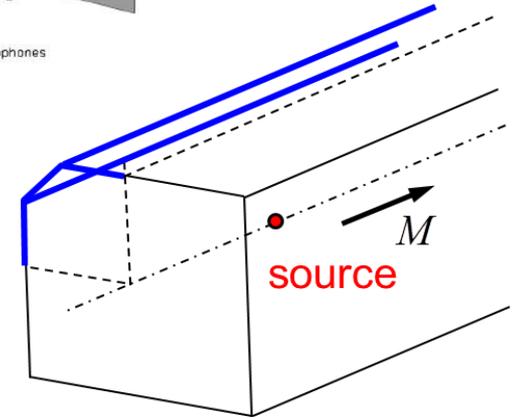
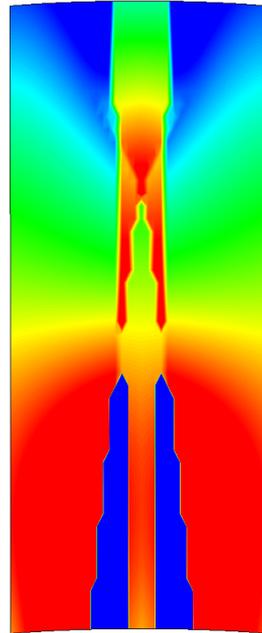
CAA Lösung

LEE

1000 Hz

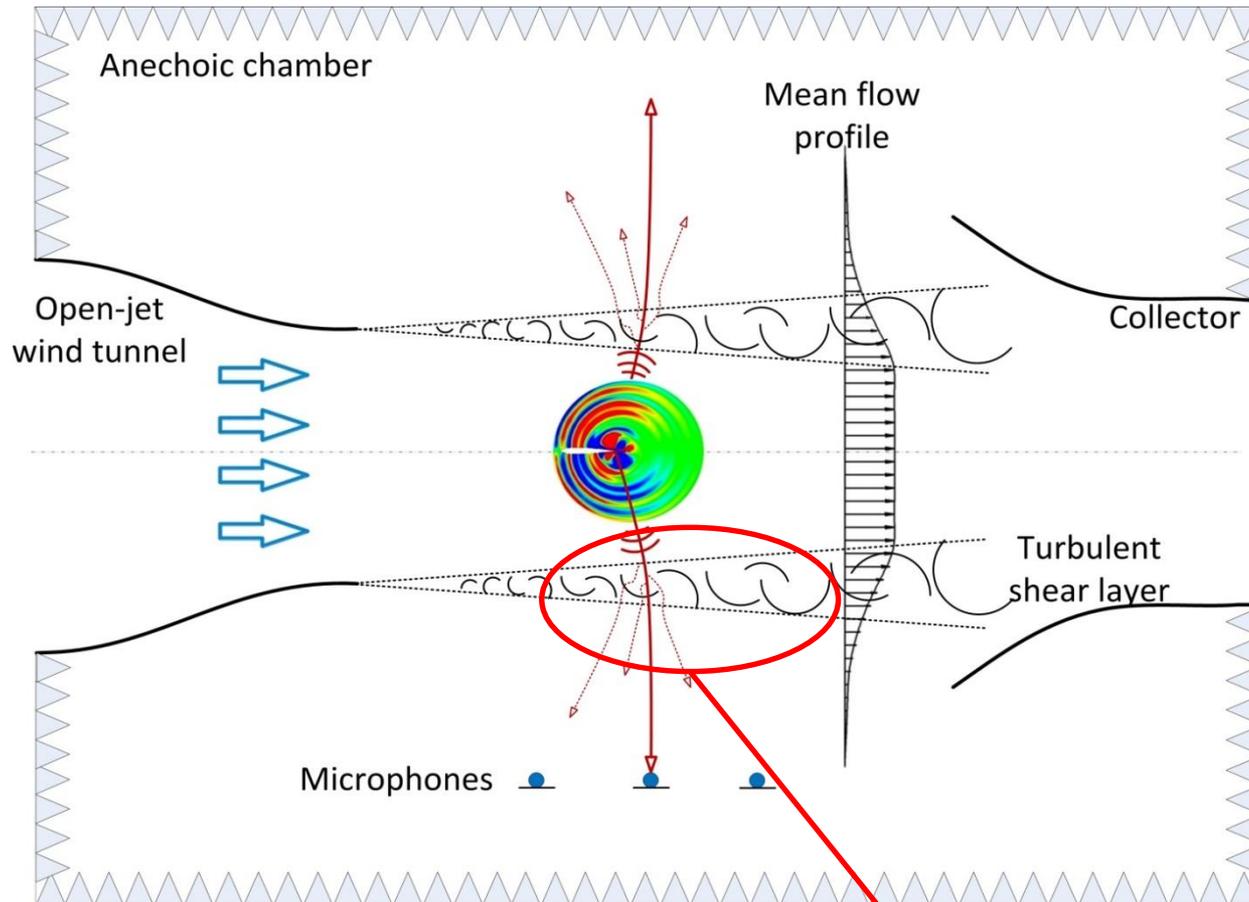


(339)



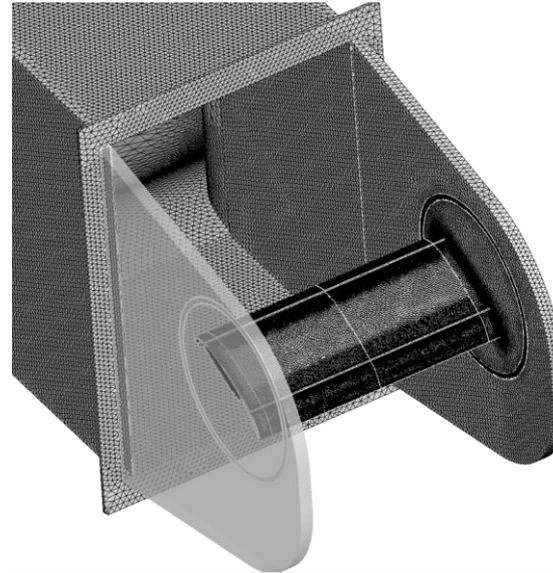
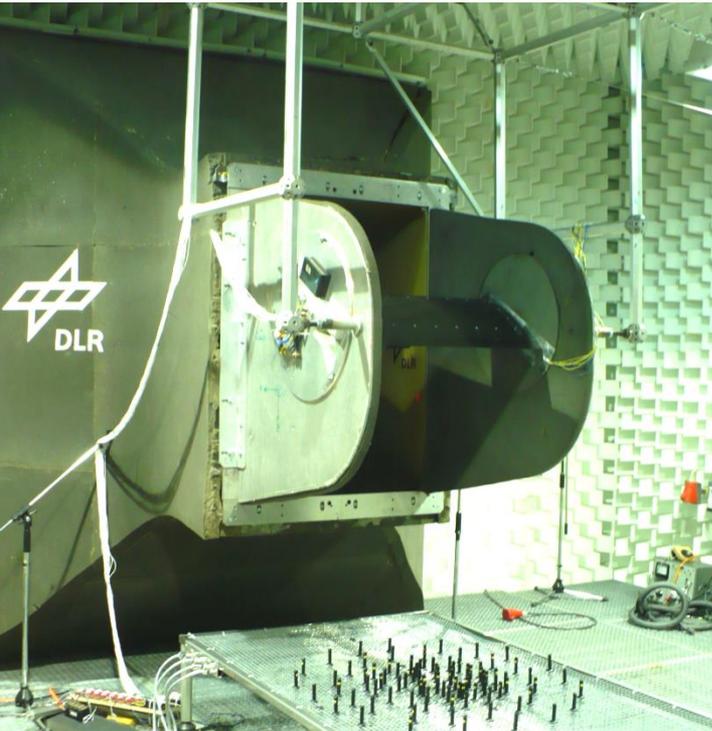
Modellierung der „Kante“ in Scherschicht (3 Brechungsebenen)

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahls Streuung durch Turbulenz

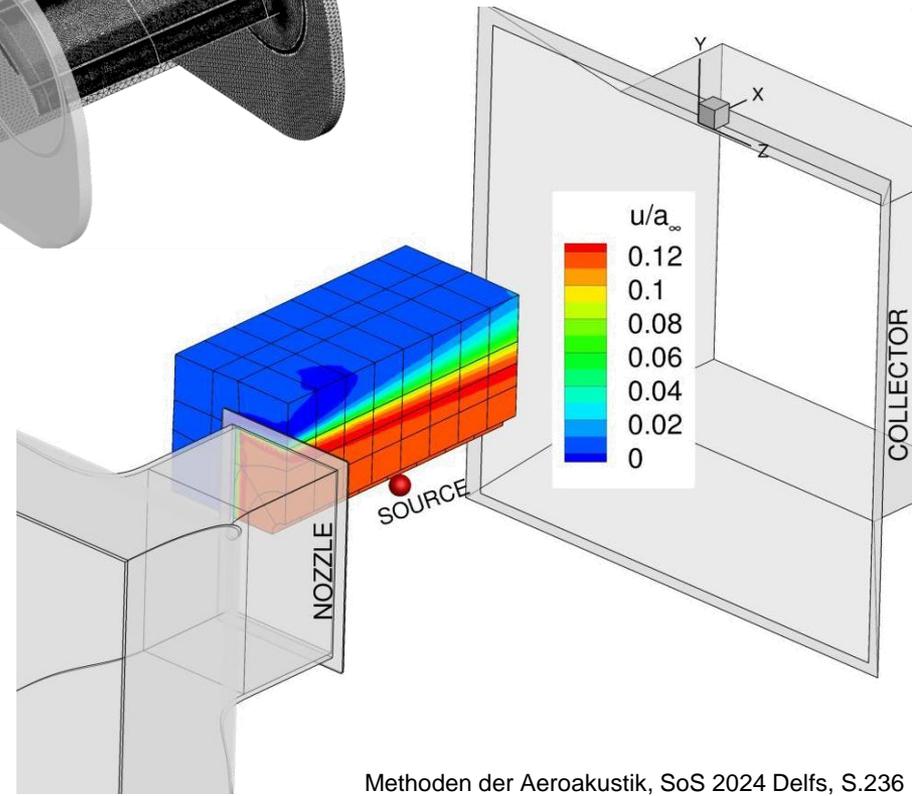


Beeinflussung durch Scherung und Turbulenz

2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl Streuung durch Turbulenz

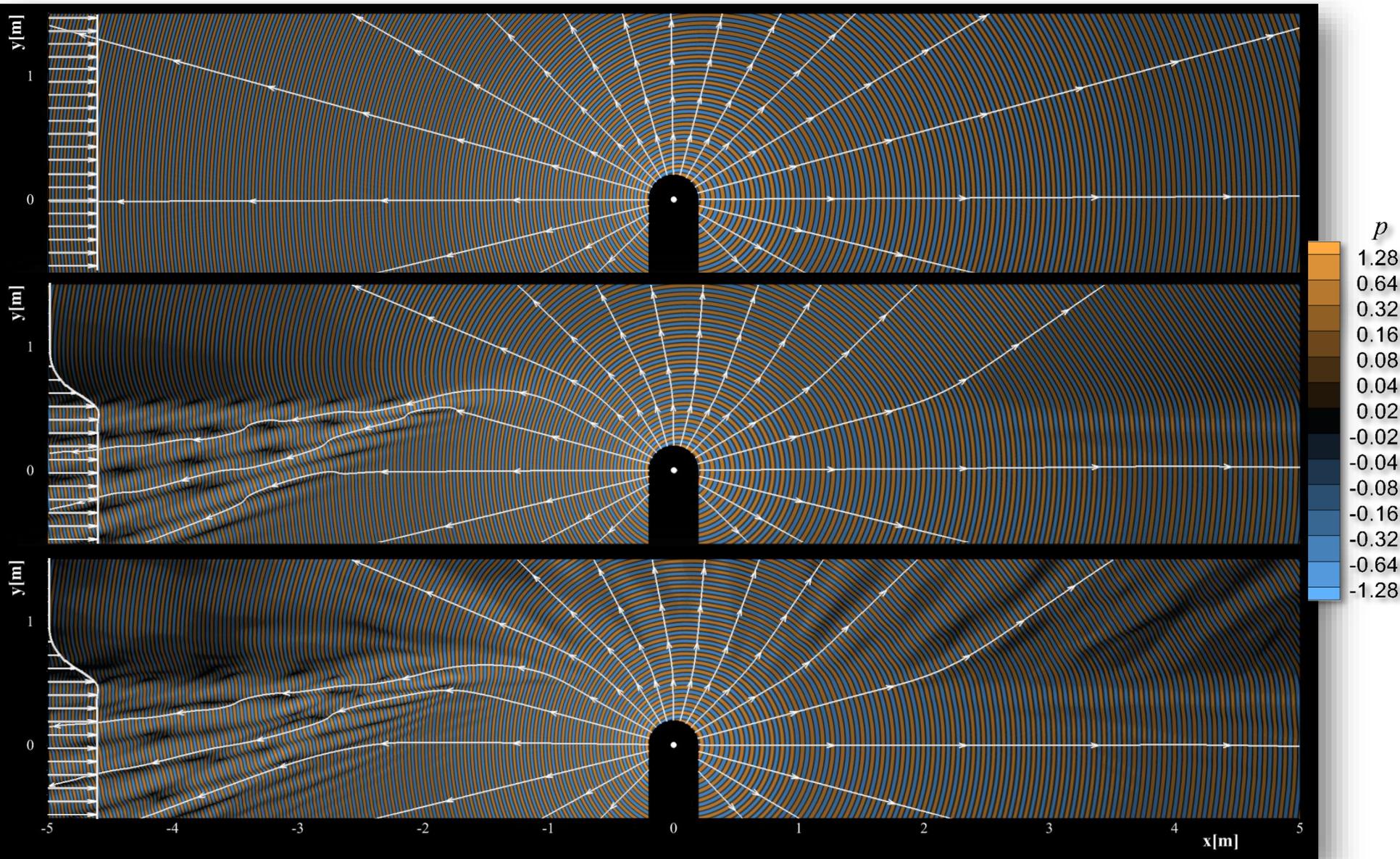


3D RANS Strömung

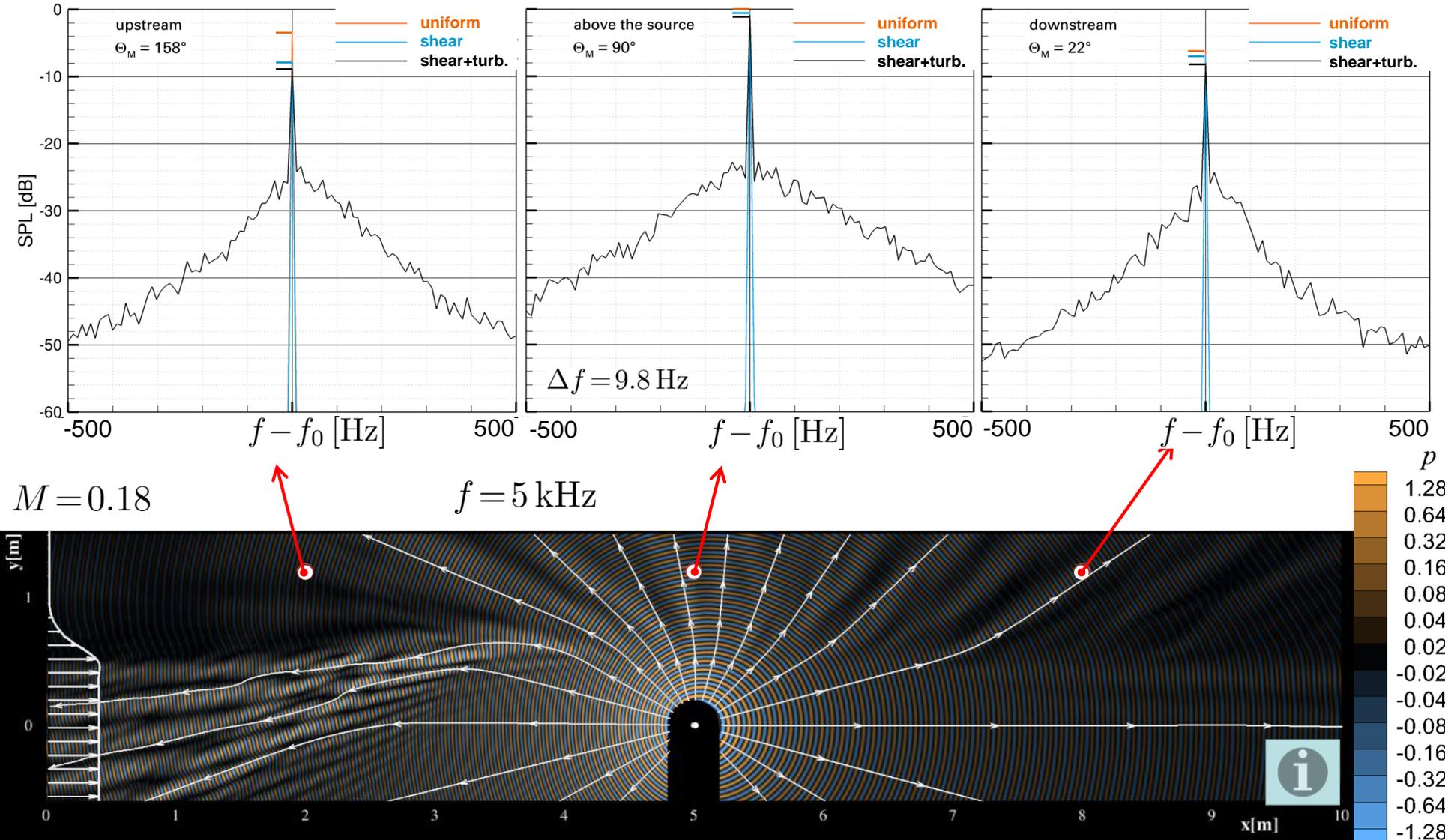


2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl Streuung durch Turbulenz

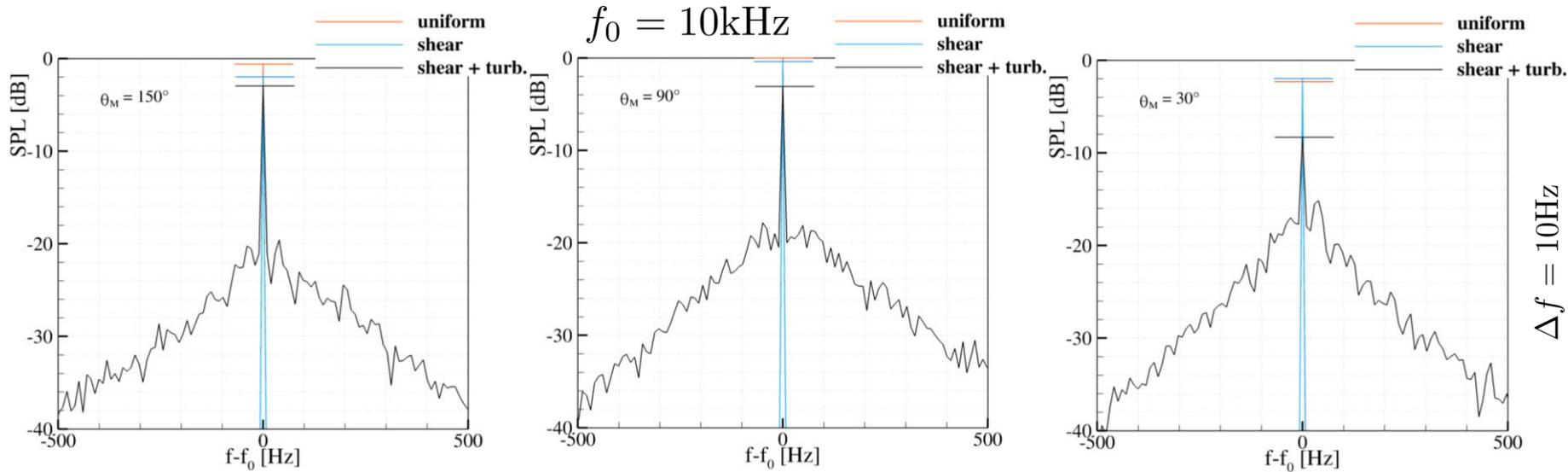
$M = 0.18$ $f = 5$ kHz



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahl Streuung durch Turbulenz



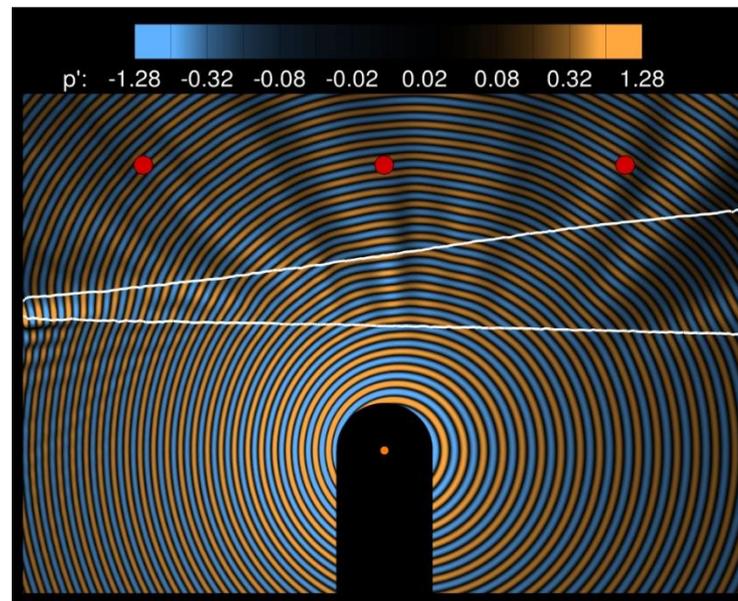
2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrahls Streuung durch Turbulenz



CAA Simulation:

DLR - PIANO Code:

- DRP Verfahren
- LEE (linearisiert um turbulent flukt. Grundströmung!)
- 4D Turbulenzmodell in Scherschicht (FRPM)

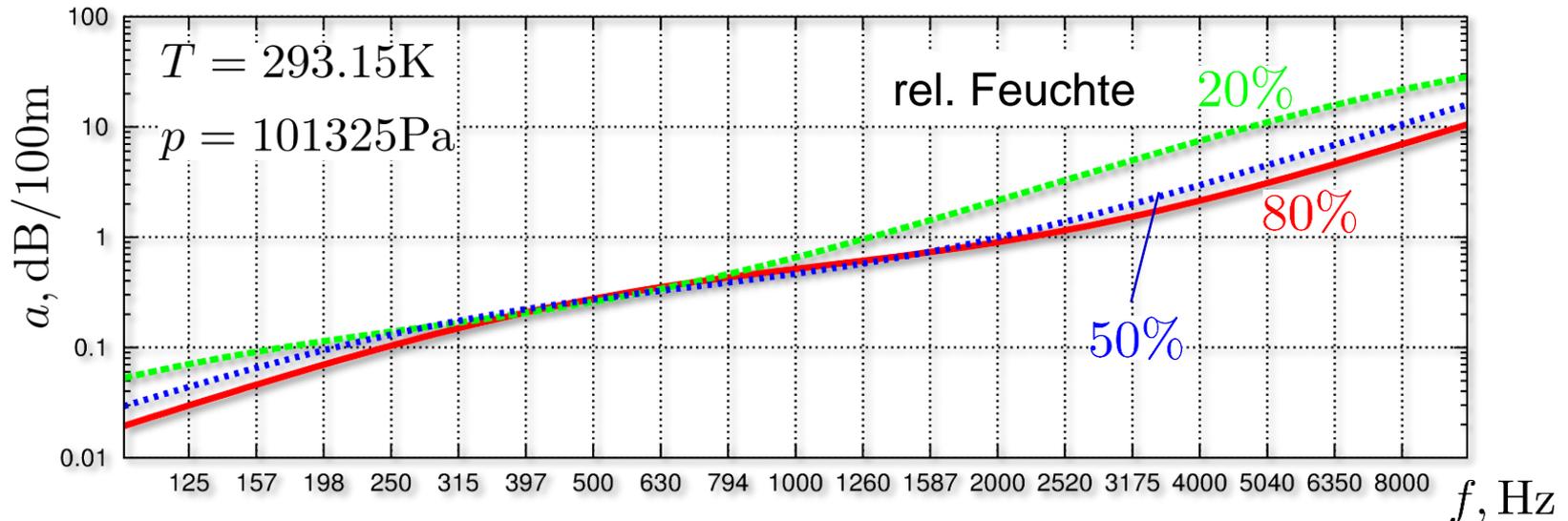


Tonstreuung durch Turbulenz:

- Amplitudenverlust
- Umverteilung von Schalleistung in Seitenbänder (breitbandig)
- frequenzabhängig!

2.4.2.3 Weitere Korrekturen bei Akustischen Messungen

- Korrektur der atmosphärischen Absorption (Dämpfung) a von Schall (stark frequenzabhängig und stark beeinflusst von Luftfeuchte). Hochfrequente Signale werden stärker gedämpft als niedrigfrequente Signale (ISO 9613-1:1993, Berechnung z.B. <http://sengpielaudio.com/Rechner-luft.htm>)



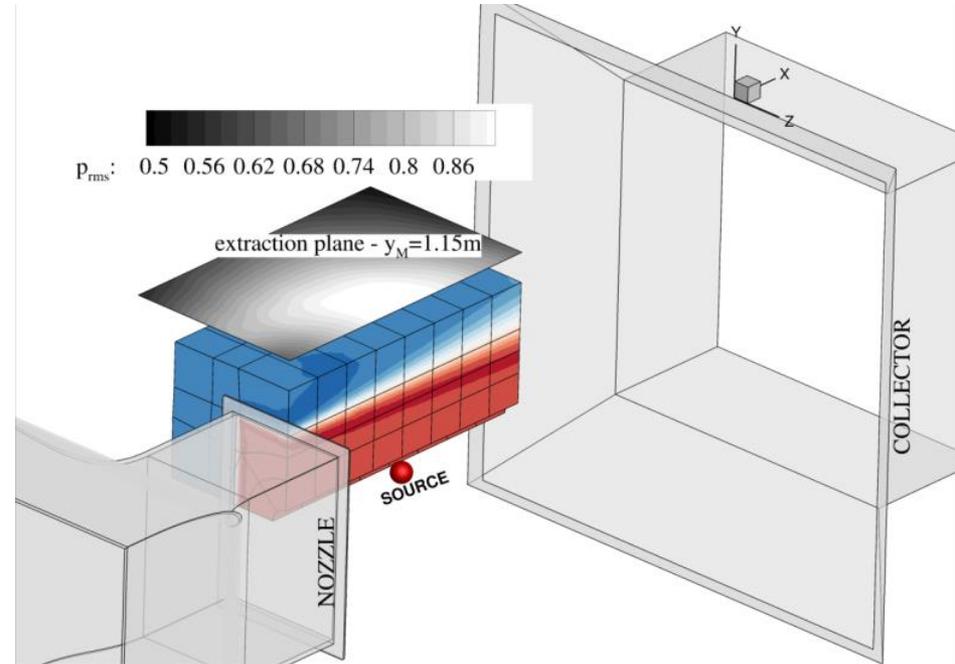
- Korrektur der Bodenabsorption von Schall bei Überflugmessungen (stark abhängig von Frequenz, Einfallswinkel, Temperatur, Luftfeuchte, Bewuchs). Signale mit flachem Einfallswinkel erfahren stärkere Dämpfung als solche mit steilem Einfallswinkel
- Freifeldkorrekturen entsprechend (326)

2.5 Ausblick: Verschmelzung von Experiment und num. Simulation

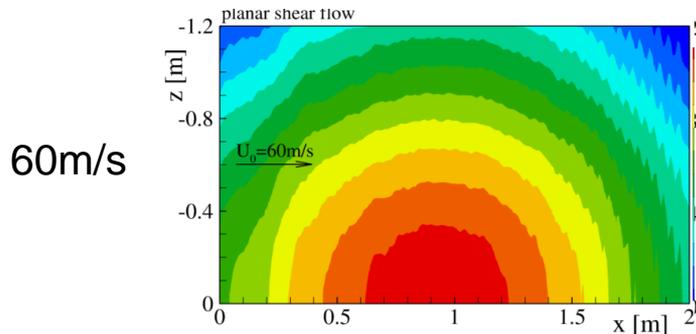
2.5.1 Nutzung von numerischer Simulation für akustische Windkanalkorrekturen

Nutzung numerischer Simulation + HPC zur Korrektur (in)stationärer Windkanalscherschichteffekte

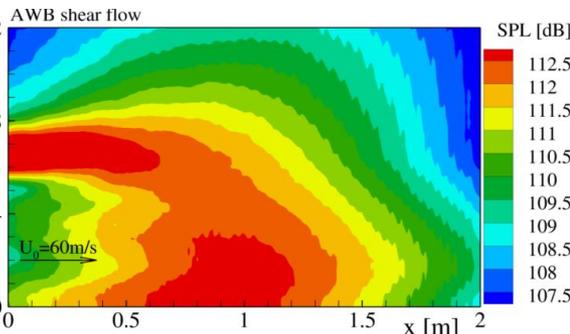
Ausweitung des Bereichs von Empfangspositionen durch Verwendung numerischer Simulation



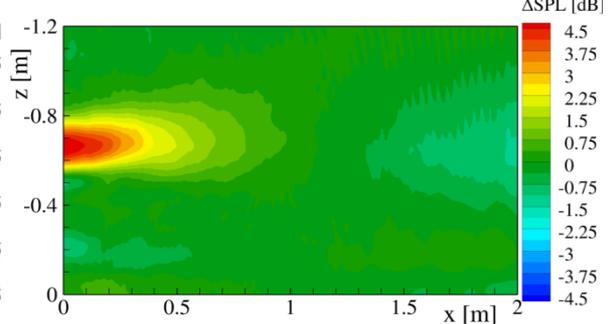
ebene Scherschicht



AWB Scherschicht



Differenz (Korrektur)



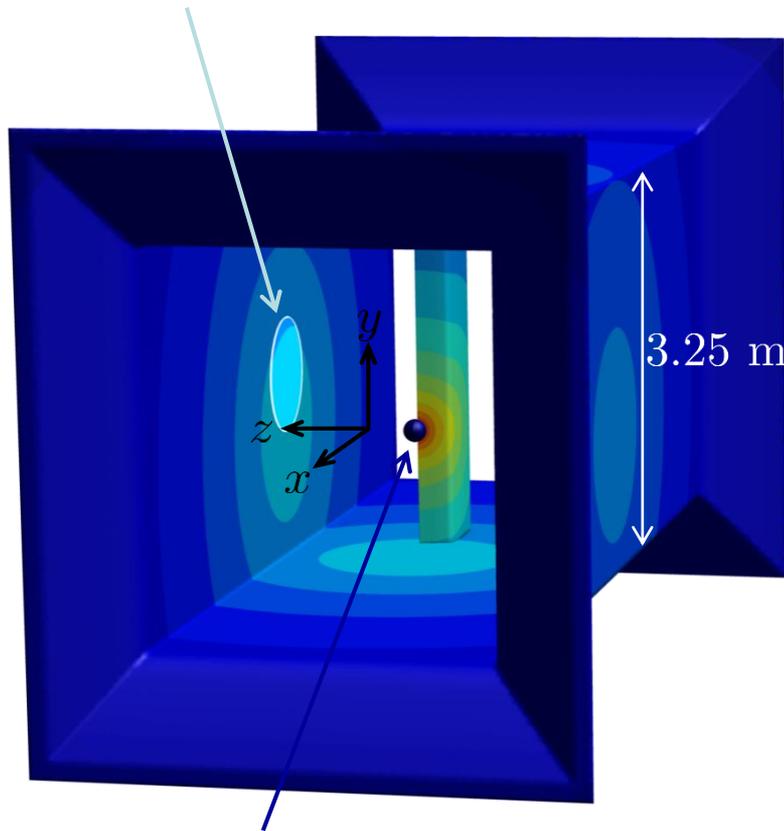
$$f_0 = 10\text{kHz}$$

+ Streuung: ? (S.252)

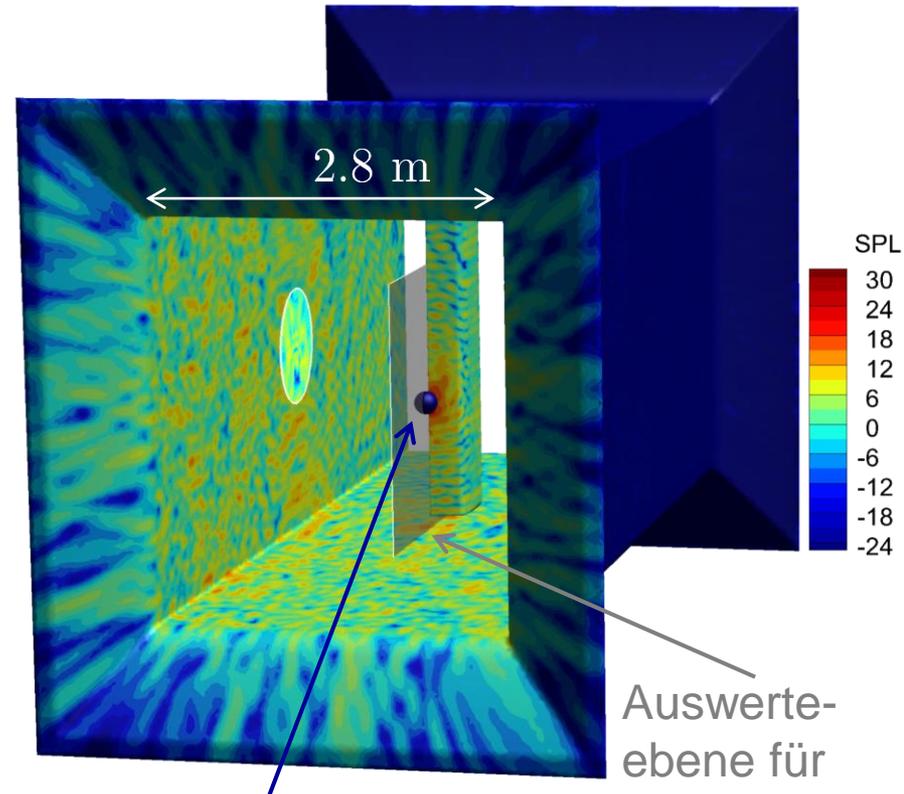
Simulation von Wandarray Messungen in geschlossenen Messstrecken

Einfallender Oberflächendruck
einer Monopolquelle
(Annahme für beamforming mit
kreisförmigen Seitenwandarray)

Tatsächlicher Oberflächendruck
in geschlossener Messstrecke



Monopol 1000 Hz



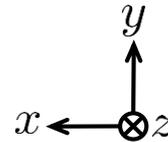
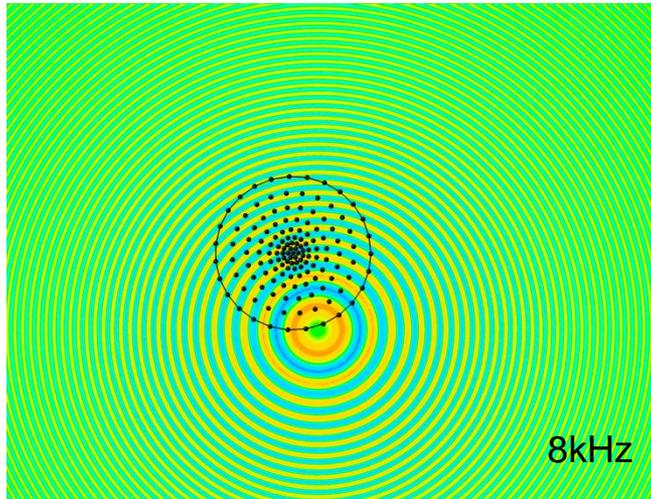
Monopol 1000 Hz

Auswertebene für
beamforming

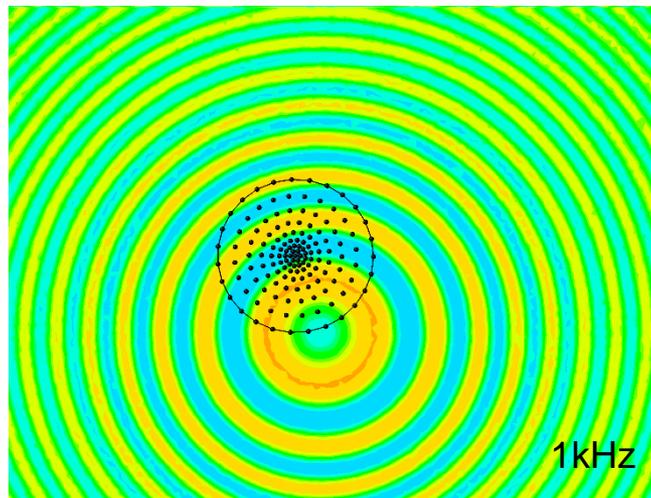
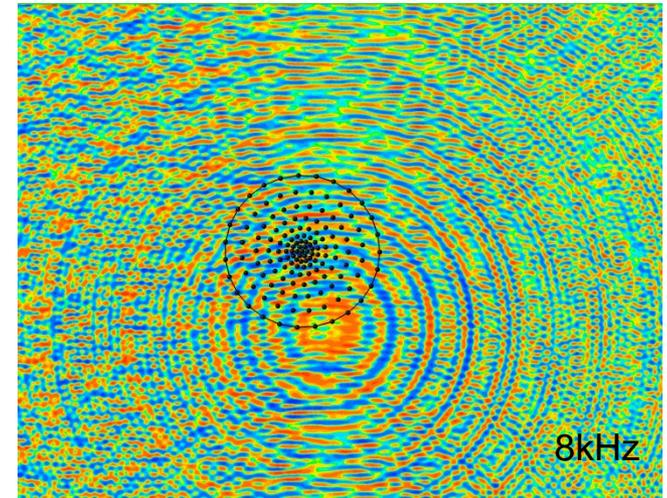
Simulation von Wandarray Messungen in geschlossenen Messstrecken

Einfallendes Monopoldruckfeld
(was Arrayalgorithmus erwartet)

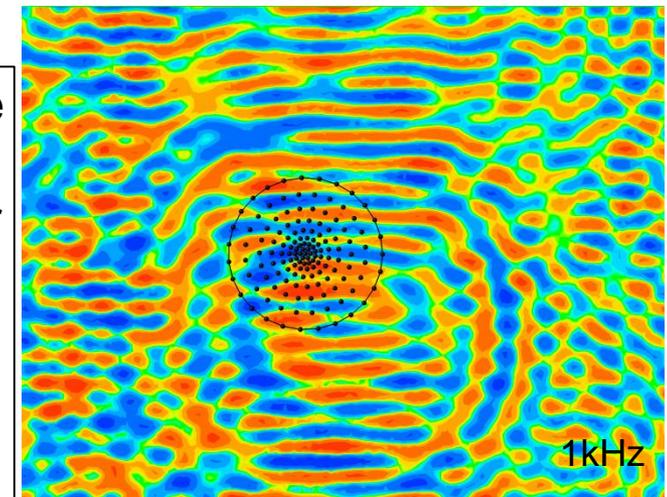
tatsächliches Monopoldruckfeld



Fast Multipole
BEM (FMCAS)

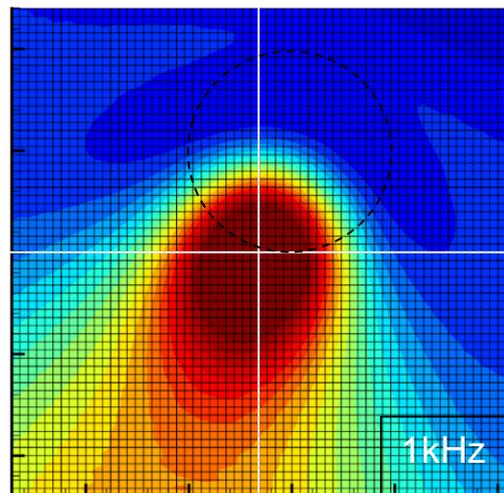
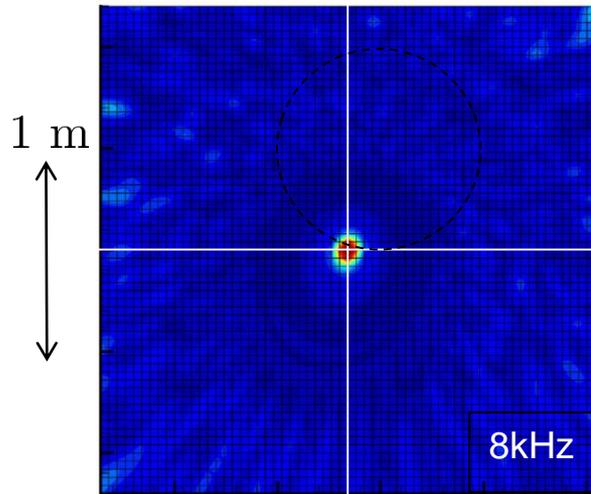


Künftig: numerische
Simulation+HPC
zur Berechnung der
exakten Green's
Funktion inkl. aller
Reflexionen:
**Säuberung
von WK-Effekten**

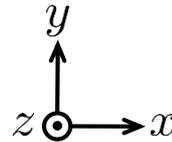


Simulation von Wandarray Messungen in geschlossenen Messstrecken

Einfallendes Monopoldruckfeld
(was Arrayalgorithmus erwartet)



Acoustic Image

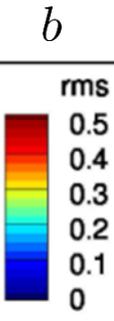
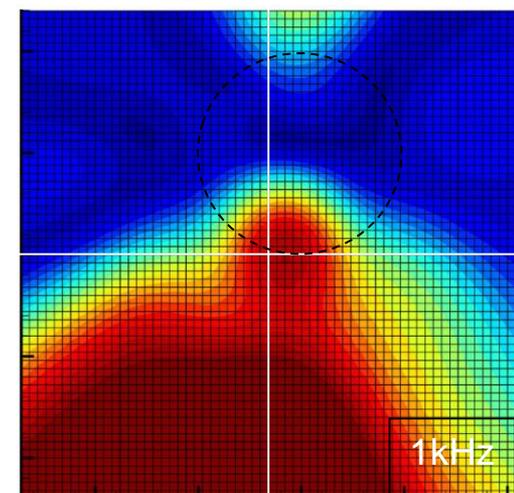
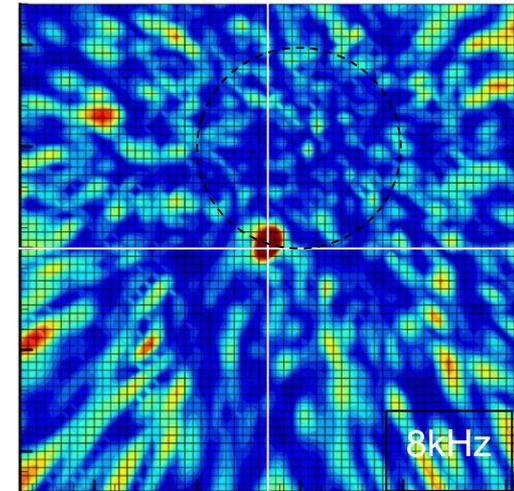


Fast Multipole
BEM (FMCAS)



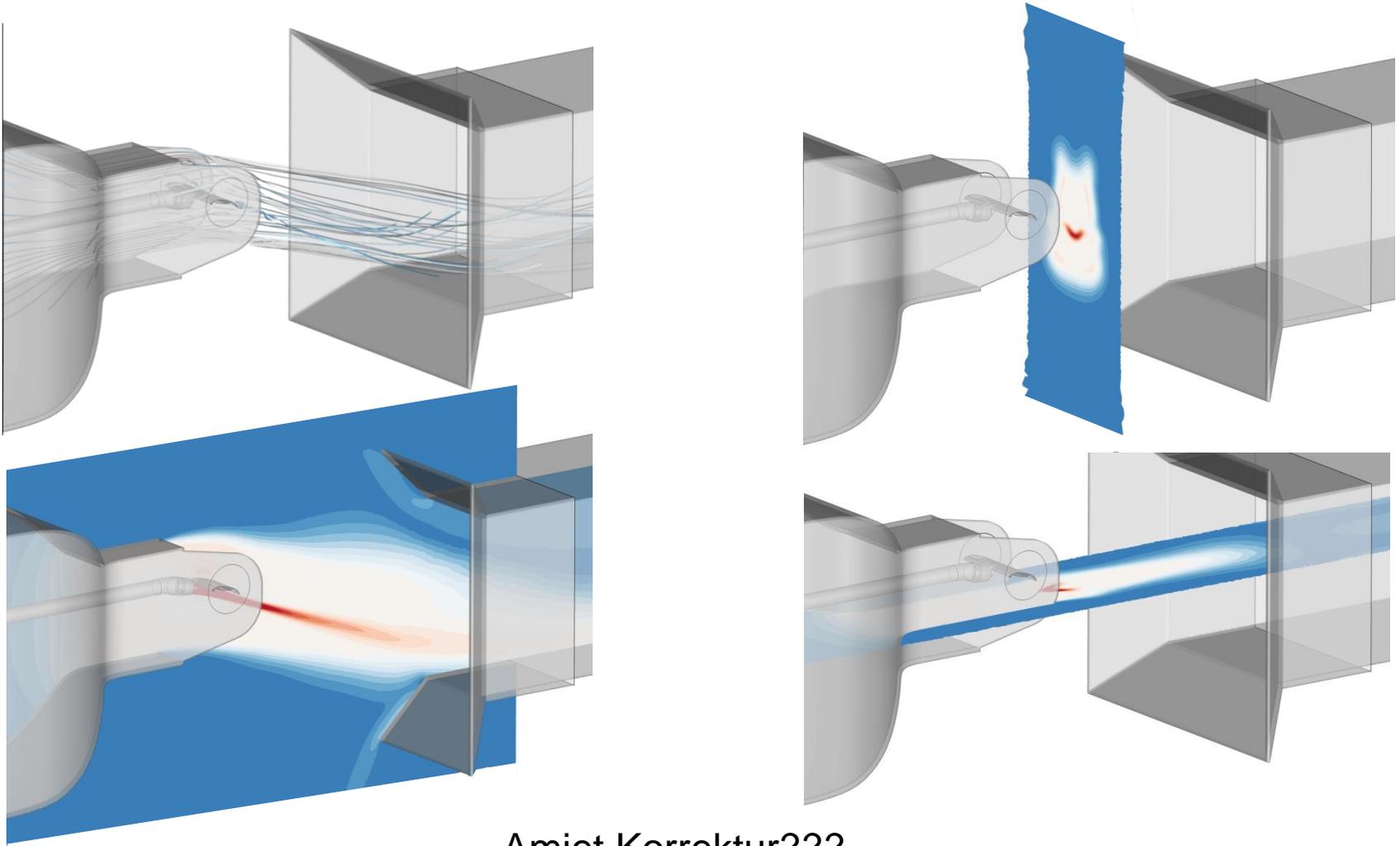
Künftig: numerische
Simulation+HPC
zur Berechnung der
exakten Green's
Funktion inkl. aller
Reflexionen:
**Säuberung
von WK-Effekten**

tatsächliches Monopoldruckfeld



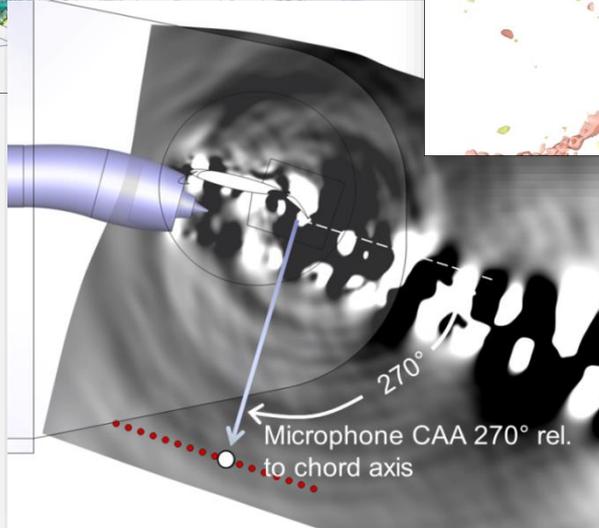
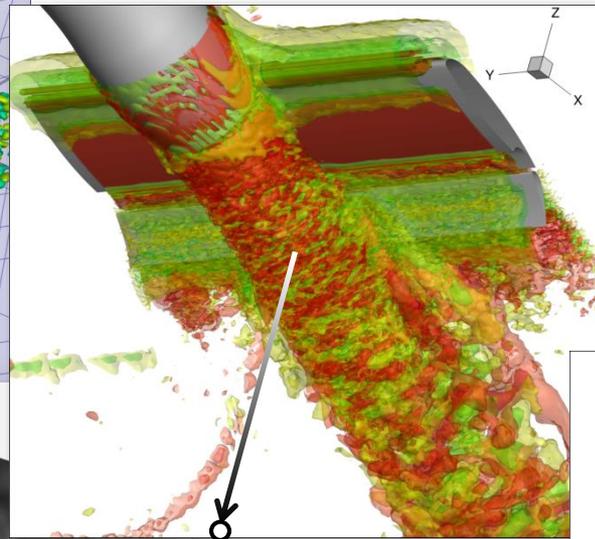
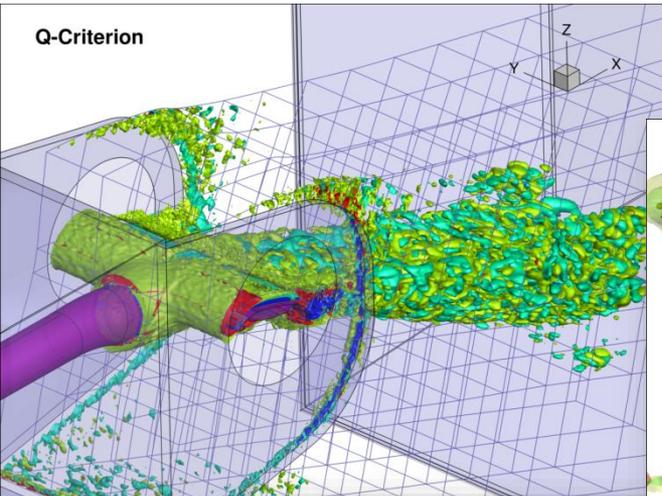
2.5.2 Simulation des gesamten Windkanalexperiments

Test relativ großer Modelle in offenen Windkanälen
(Ziel realisierung hoher Re-Zahlen)



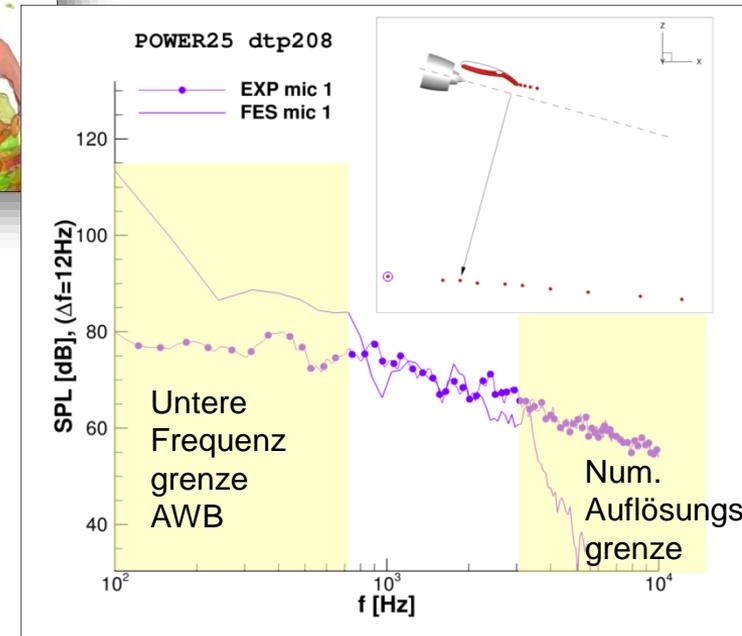
Amiet Korrektur???

CAA eines UHBR Zweistromstrahls in Kombination mit 2D Hochauftriebsflügel in AWB

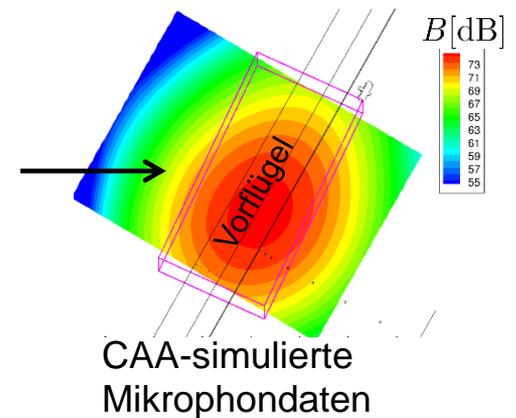
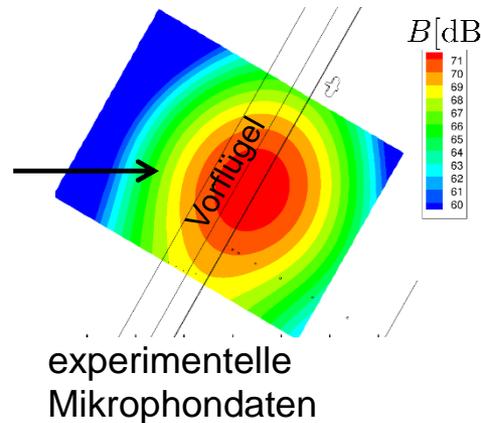
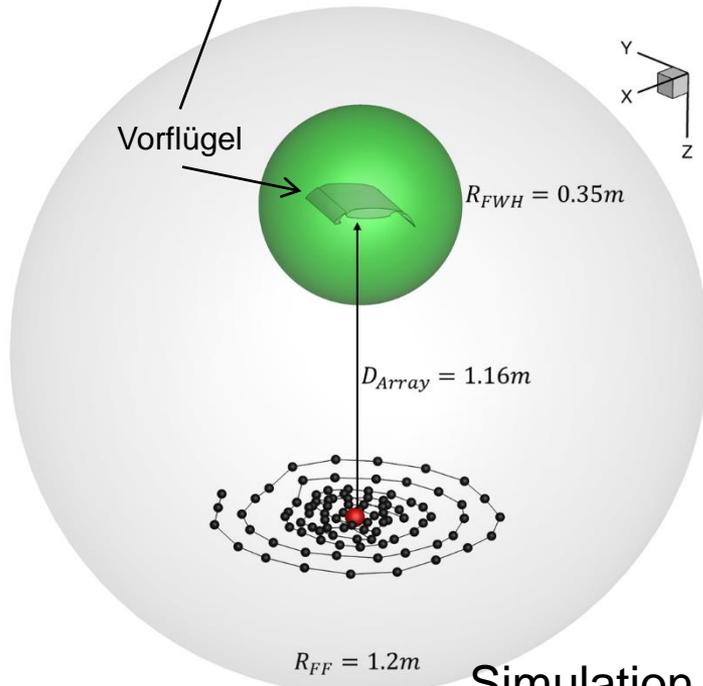
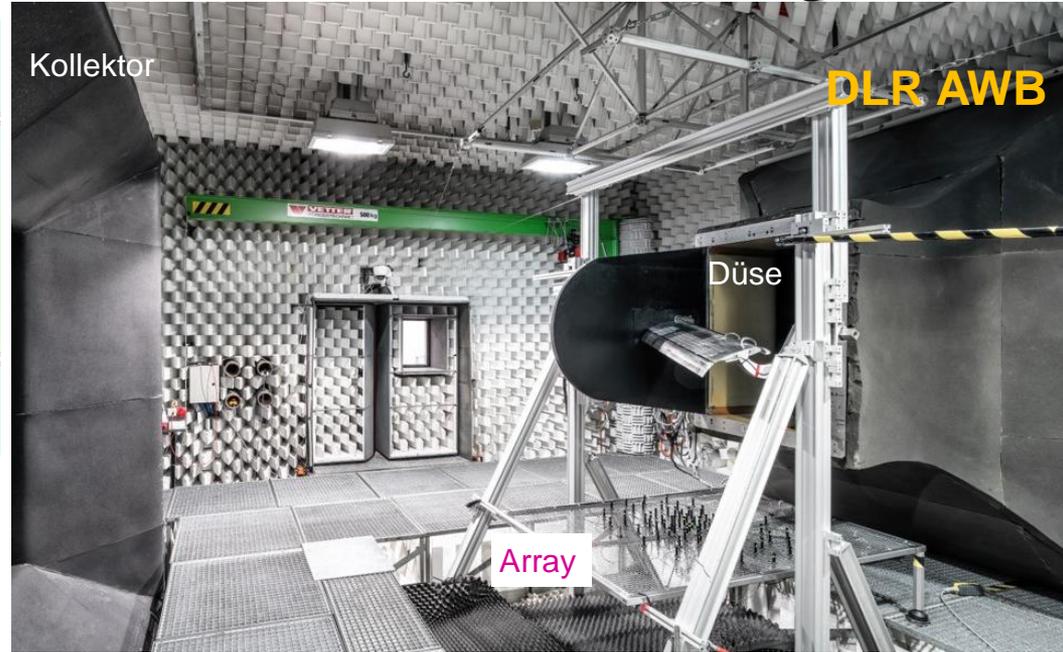
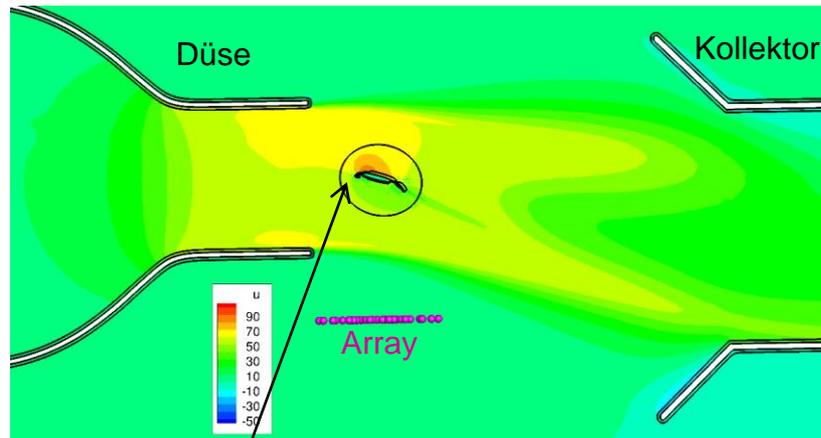


PIANO: FES=„Forced Eddy Simulation“

Simulation Modell +
Testumgebung
Validierung an Rohdaten
„do the whole thing“



CAA von Vorflügelhaltergeräusch an schiebendem Hochauftriebsflügel in AWB



Simulation Modell + Testumgebung + numerisches beamforming
 „do the whole thing“

The End

Anhang

Einfache Vorhersage Propellerschall auf Basis (276)

Input:

- diameter [m] $D = 2R_t$
- blade count B
- blade rel. thickn. \bar{t}^*
- thrust coefficient c_T
- power coefficient c_P
- rpm [1/s] N
- receiver distance x
- polar angle φ
- tip Mach no. M_t
- prop thrust T_B
- power [W] P

$$c_T = \frac{T_B}{\rho_\infty N^2 D^4}$$

$$c_P = \frac{P}{\rho_\infty N^3 D^5}$$

Output: $|\hat{p}_{nB}|^2 \simeq \left[\frac{R_t}{x} \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\pi} nB M_t^2 \right]^2 \left\{ \frac{1}{\pi^4} \left[3M_t \tilde{c}_T \cos \varphi R_T^{*2} J_{nB}(nB M_t R_T^* \sin \varphi) - \frac{4}{\pi} \tilde{c}_P R_P^* J_{nB}(nB M_t R_P^* \sin \varphi) \right]^2 + \left[\frac{nB}{4} B \bar{t}^* \left(\frac{\bar{l}}{R_t} \right)^2 J_{nB}(nB M_t R_h^* \sin \varphi) \right]^2 \right\}$

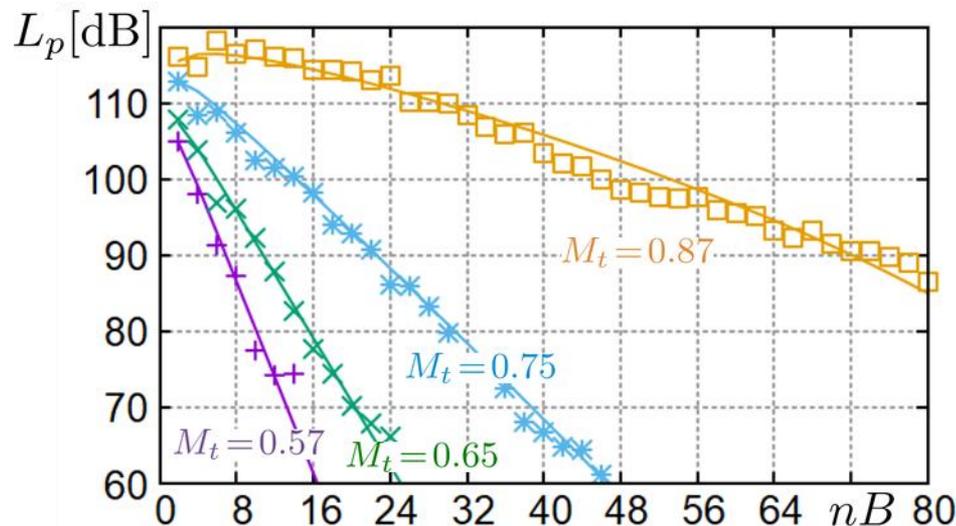
$$R_T^* = (nB + 3)^{-\frac{1}{nB+2}}$$

$$R_P^* = (nB + 2)^{-\frac{1}{nB+1}}$$

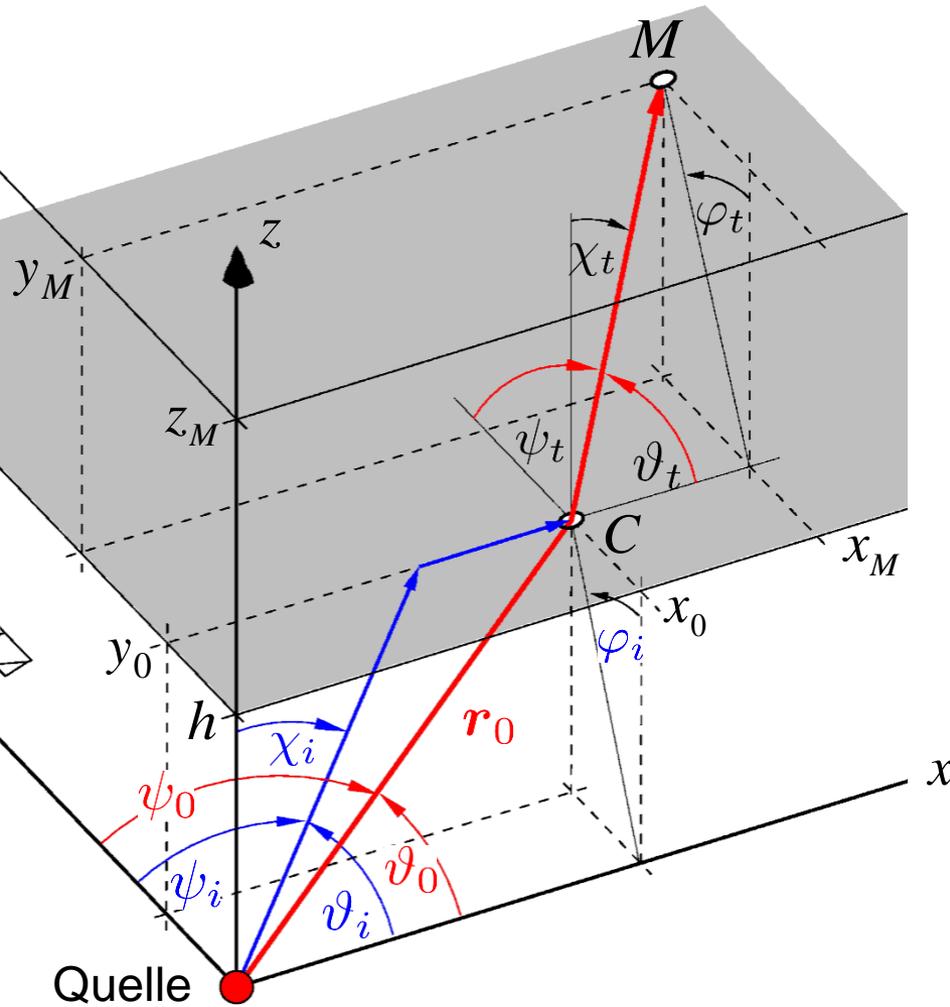
$$R_h^* = (nB + 1)^{-\frac{1}{nB}}$$

$$\tilde{c}_P = 1.3 c_P$$

$$\tilde{c}_T = 0.9 c_T$$



2.4.2.2 Scherschichtkorrektur bei akustischen Windkanälen mit Freistrah



$$\cos \varphi_i = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \psi_i}{\sin^2 \vartheta_i}} \stackrel{?}{=} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \psi_t}{\zeta^2}}$$

$$\cos \vartheta_i = \frac{\cos \vartheta_t}{1 - M \cos \vartheta_t}, \quad \frac{\cos \vartheta_i}{\cos \psi_i} = \frac{\cos \vartheta_t}{\cos \psi_t}$$

$$\Rightarrow \cos \psi_i = \frac{\cos \psi_t}{1 - M \cos \vartheta_t}$$

$$\sin^2 \vartheta_i = 1 - \cos^2 \vartheta_i = 1 - \frac{\cos^2 \vartheta_t}{(1 - M \cos \vartheta_t)^2}$$

$$\frac{\cos^2 \psi_i}{\sin^2 \vartheta_i} = \frac{\cos^2 \psi_t}{(1 - M \cos \vartheta_t)^2 - \cos^2 \vartheta_t} = \zeta^2$$

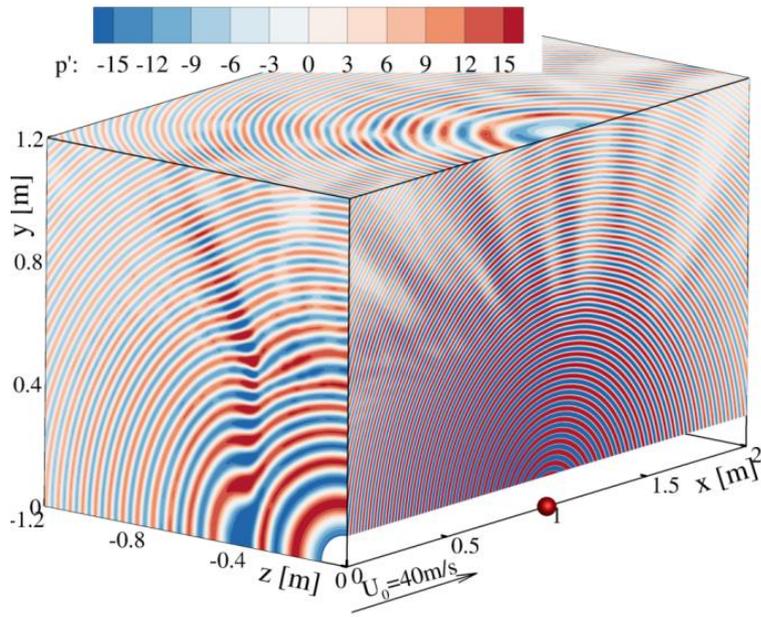
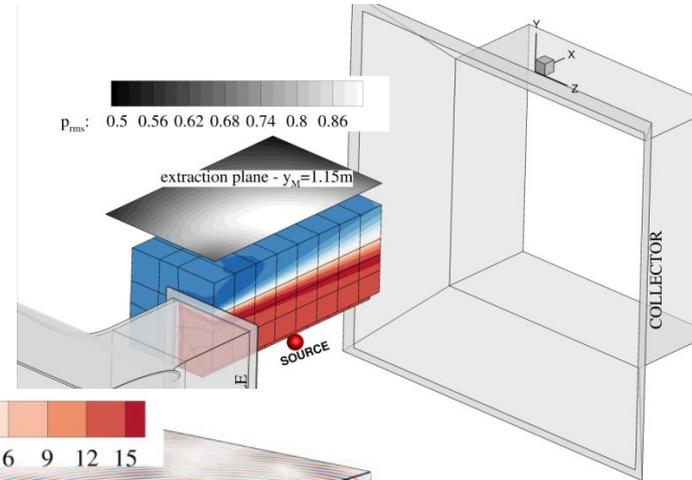
$$\Rightarrow \sin \varphi_i = \frac{\cos \psi_t}{\zeta}$$



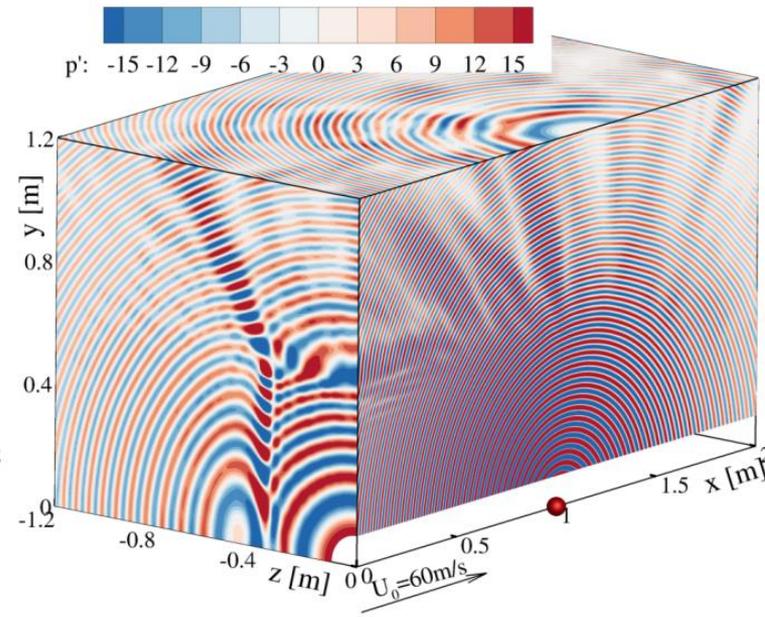
2.5 Ausblick: Verschmelzung von Experiment und num. Simulation

2.5.1 Nutzung von numerischer Simulation für akustische Windkanalkorrekturen

...und so strahlt eine Massenpunktquelle bei Berücksichtigung von Brechung + Streuung 3D...



(a) $U_0 = 40\text{m/s}$ ($t = 0.625\text{s}$)



(b) $U_0 = 60\text{m/s}$ ($t = 0.625\text{s}$)



Acoustic Mode Generation

The following presentation shows how acoustic modes are generated by a blade/vane system and then propagate.

The presentation covers :-

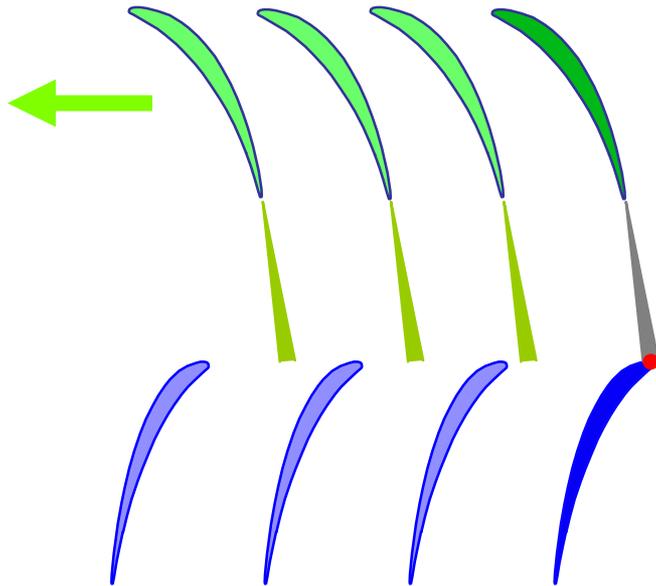
- **Co-rotating modes**
- **Contra-rotating modes**
- **Cut-off**

To view the presentation click on the screen symbol and then use the left mouse button to move forward or the right to move backwards when red dot present.

Co-rotating Mode Generation
Vane Nos. lower than Blade Nos.

Co-rotating Mode Generation - 1

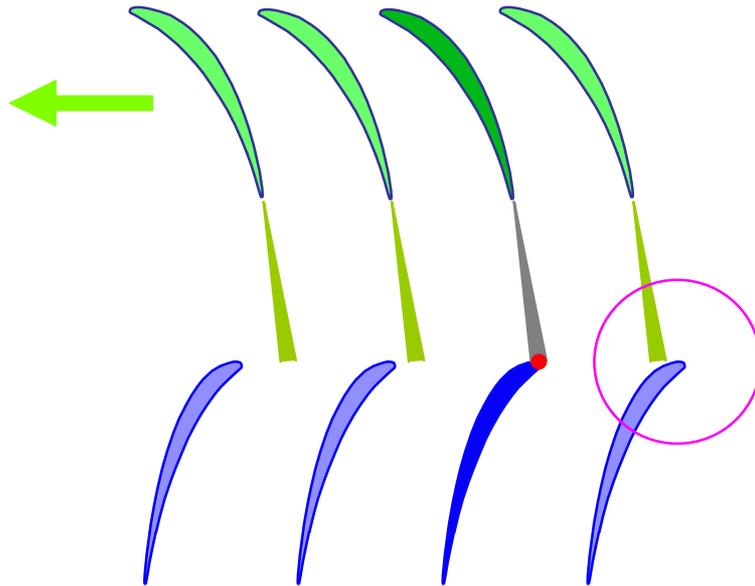
Time $t = 0$



At time $t = 0$ the first wake strike the leading edge of the downstream blade row causing a pressure pulse.

Co-rotating Mode Generation - 2

Time $t = 0 + \delta t$

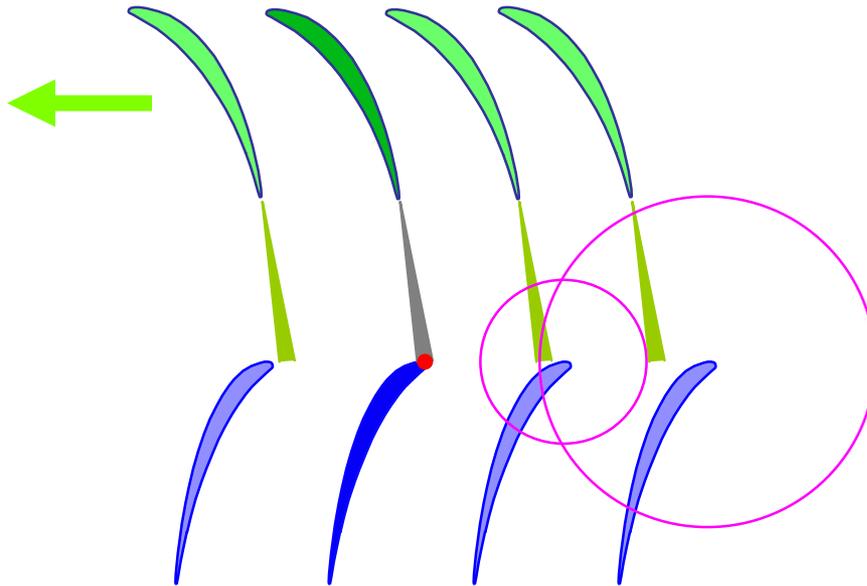


At time $t = 0 + \delta t$ the rotor row has moved so that the wake from the previous blade strikes the downstream vane.

The pressure pulse from the first interaction has now propagated in all directions.

Co-rotating Mode Generation - 3

Time $t = 0 + 2\delta t$

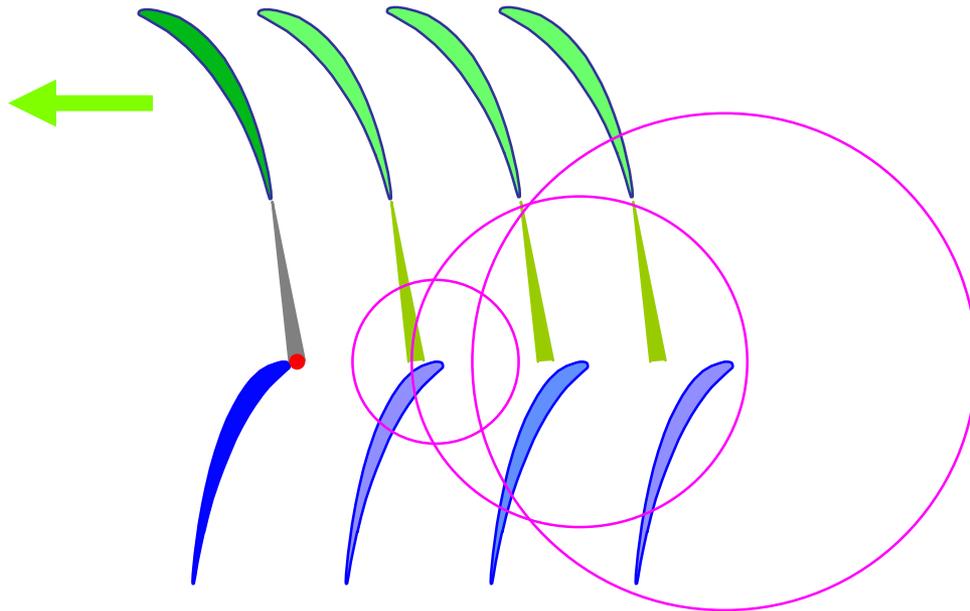


At time $t = 0 + 2\delta t$ the rotor row has moved again so that the wake from the previous blade strikes the downstream vane.

The pressure pulse from the first two interactions have now propagated in all directions.

Co-rotating Mode Generation - 4

Time $t = 0 + 3\delta t$

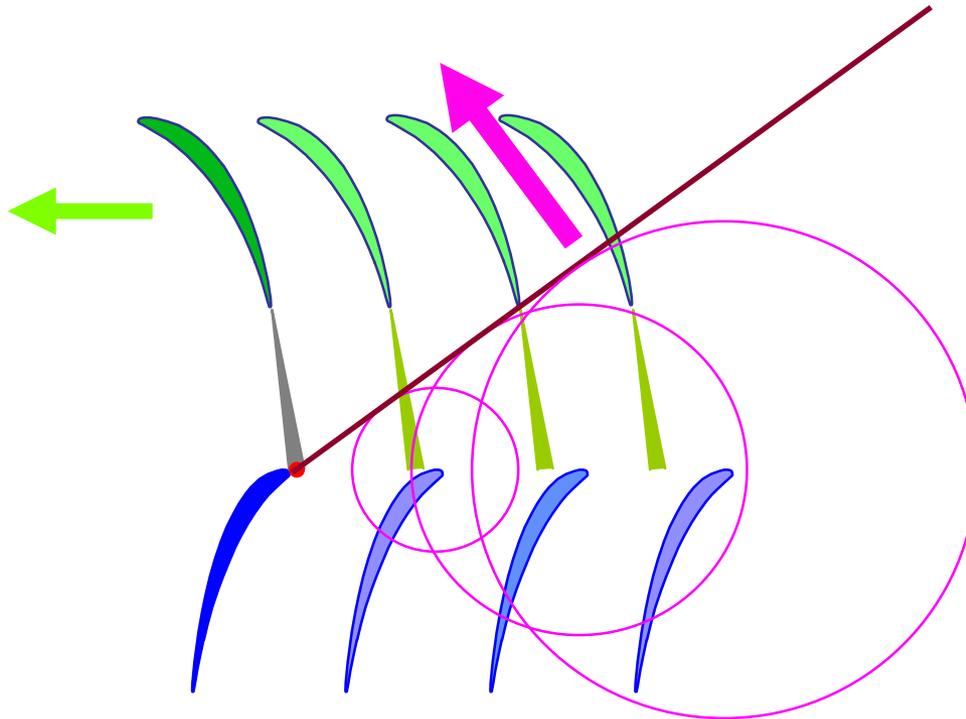


At time $t = 0 + 3\delta t$ the rotor row has moved again so that the wake from the previous blade strikes the downstream vane.

The pressure pulse from the first three interactions have now propagated in all directions.

Co-rotating Mode Generation - 5

Time $t = 0 + 3\delta t$

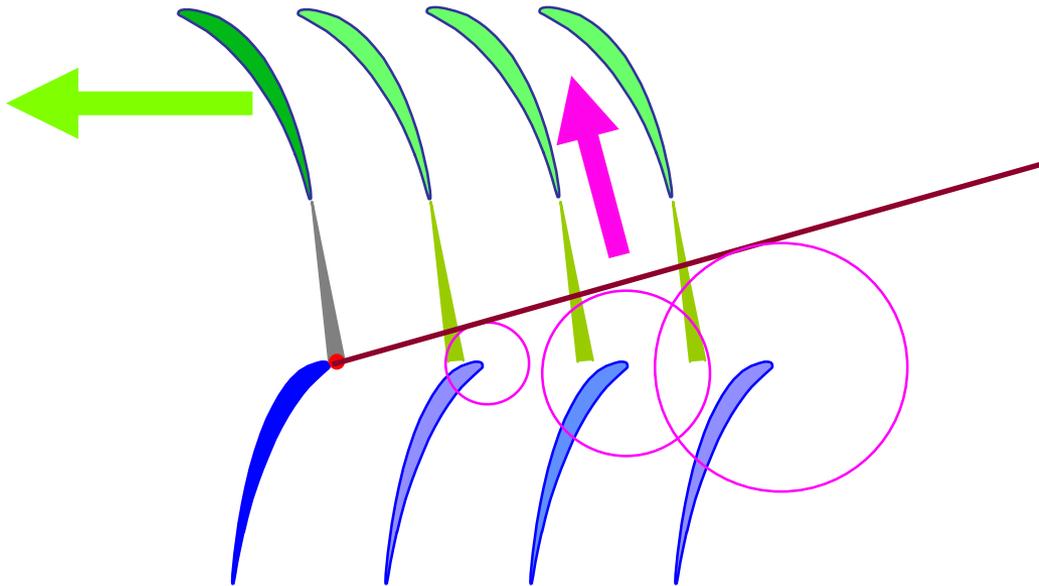


At all point destructive interference produces no overall pressure pulse except along the line shown.

The result is a pressure wave which propagates in the direction shown spiraling forward, rotating in the same direction as the rotor and passing relatively easily through the blade row.

Effect of rotor rotational speed

Time $t = 0 + 3\delta t$



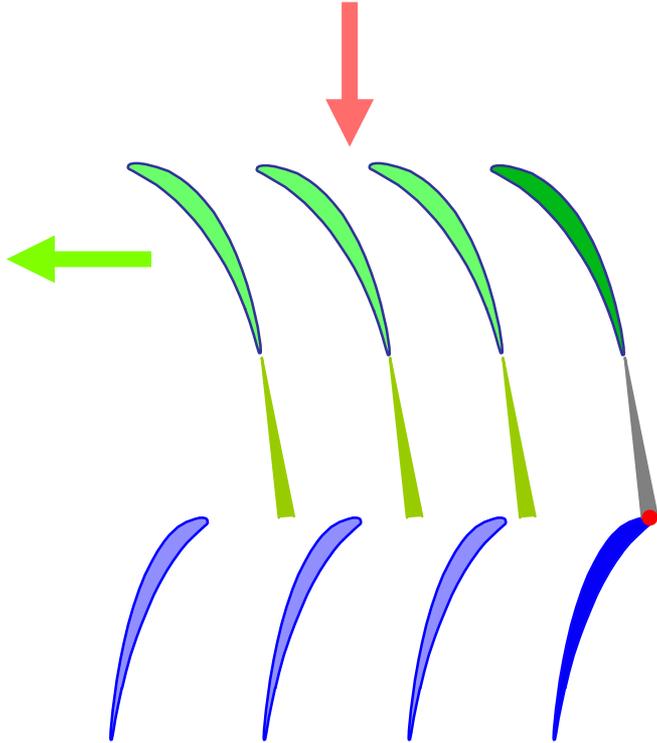
e.g. Doubling the blade Mach No. reduces the propagation radius from each vane by half

Increasing blade Mach No. (ie. increasing shaft speed) - this has the effect of reducing the time gap between wake interaction events and therefore reducing the propagation radius of the resulting waves. This reduces the angle of the propagating wavefront - hence, increasing speed makes the mode more cut-on

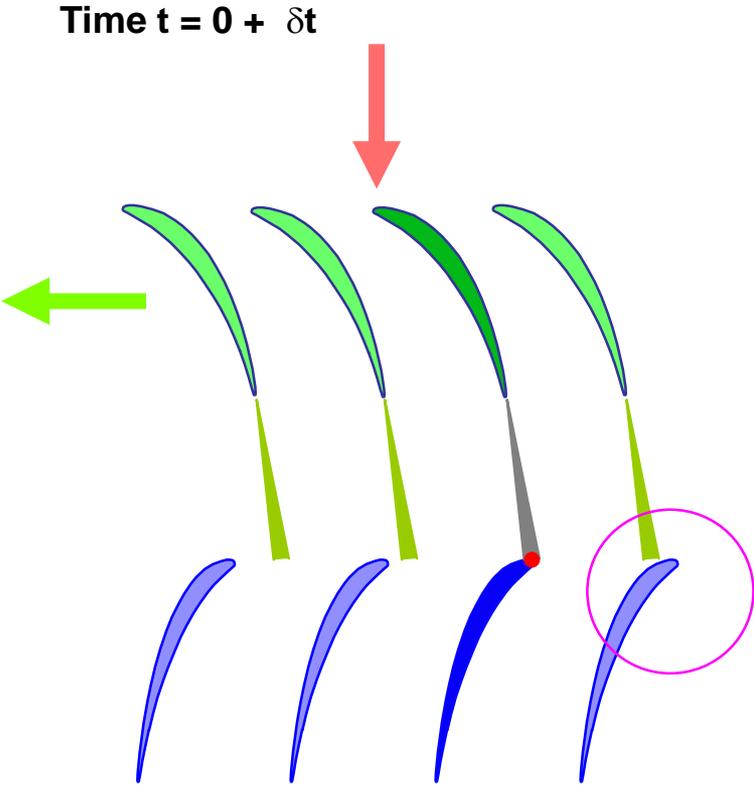
Effect of Axial Flow

Axial Flow Effects - 1

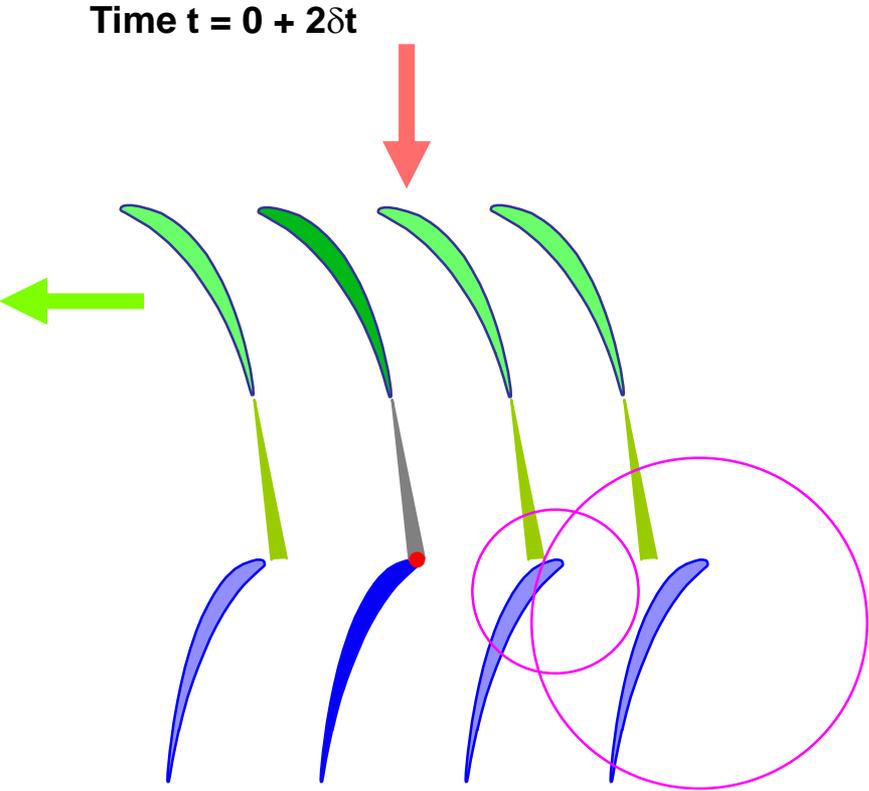
Time $t = 0$



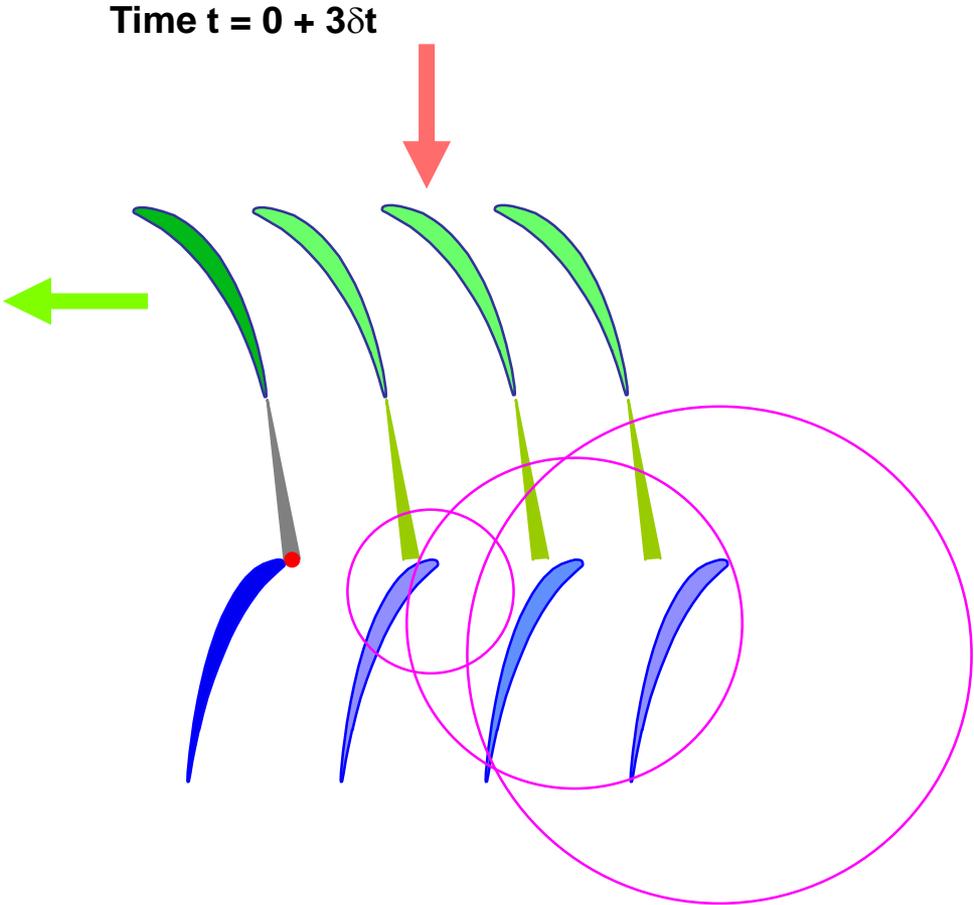
Axial Flow Effects - 2



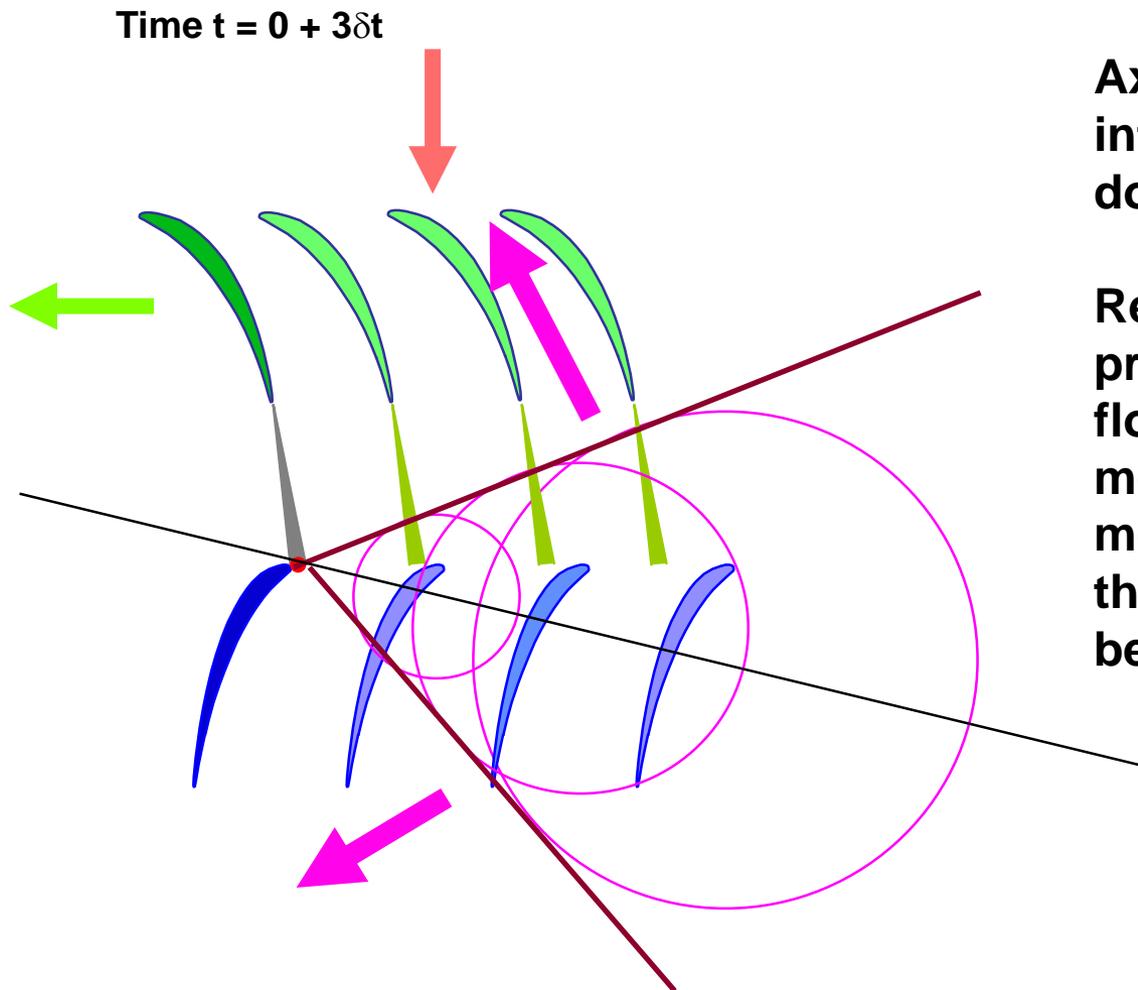
Axial Flow Effects - 3



Axial Flow Effects - 4



Axial Flow Effects - 5



Axial flow convects the interaction wave fronts downstream.

Result is that modes propagating against the flow are rotated to be more axial whereas modes propagating with the flow are rotated to be more circumferential

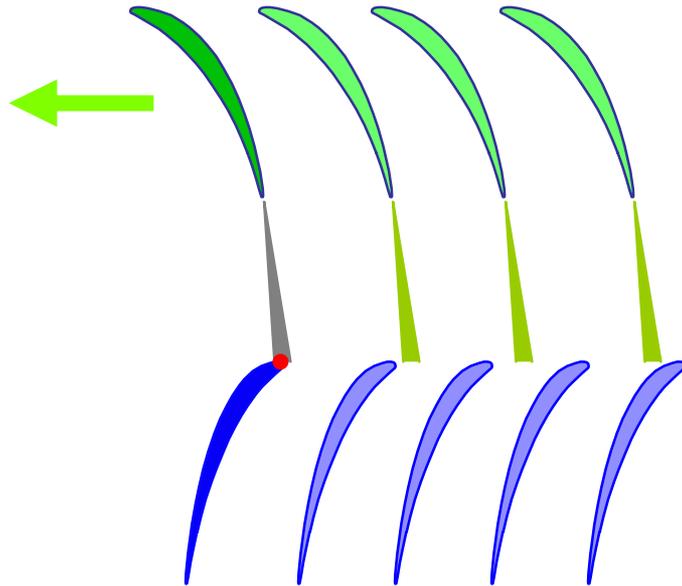


Contra-rotating Mode Generation

Vanes > Blades

Contra-rotating Mode Generation - 1

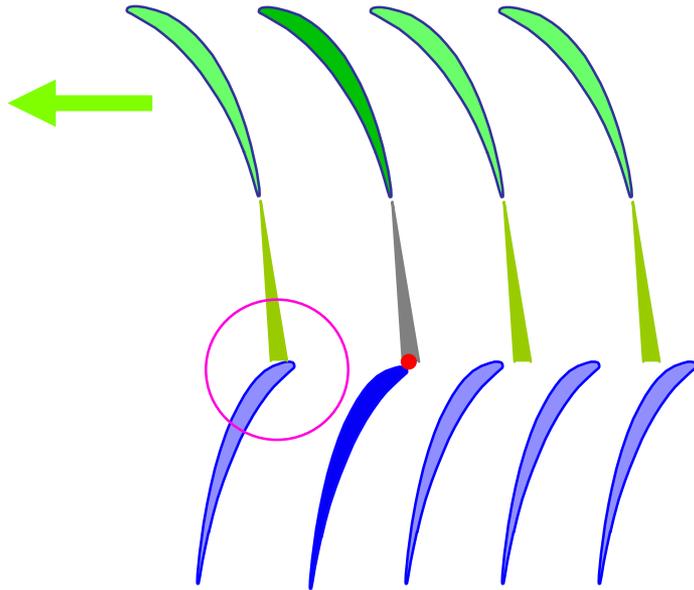
Time $t = 0$



At time $t = 0$ the first wake strike the leading edge of the downstream vane row causing a pressure pulse.

Contra-rotating Mode Generation - 2

Time $t = 0 + \delta t$

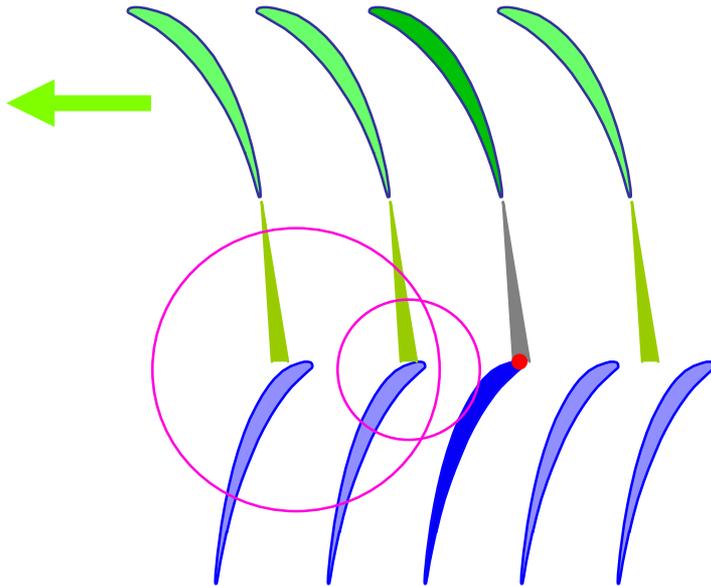


At time $t = 0 + \delta t$ the rotor row has moved so that the wake from the next blade strike the downstream vane.

The pressure pulse from the first interaction has now propagated in all directions.

Contra-rotating Mode Generation - 3

Time $t = 0 + 2\delta t$

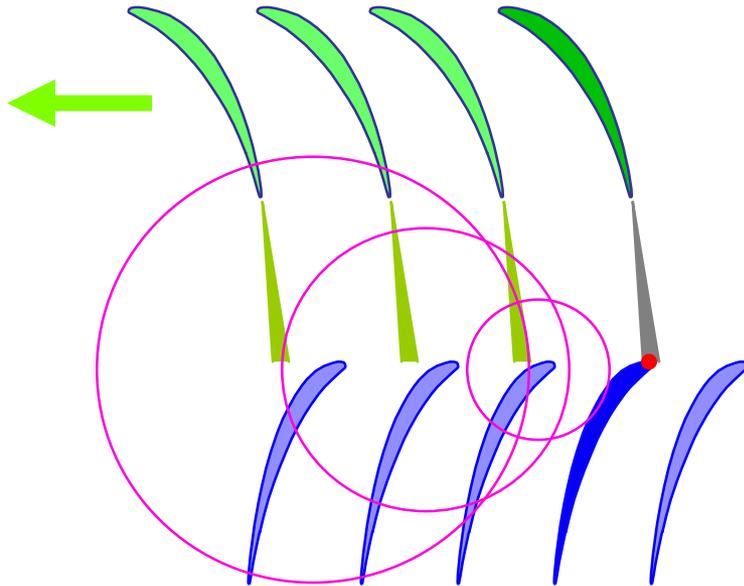


At time $t = 0 + 2\delta t$ the rotor row has moved so that the wake from the next blade strike the downstream vane.

The pressure pulse from the first two interactions have now propagated in all directions.

Contra-rotating Mode Generation - 4

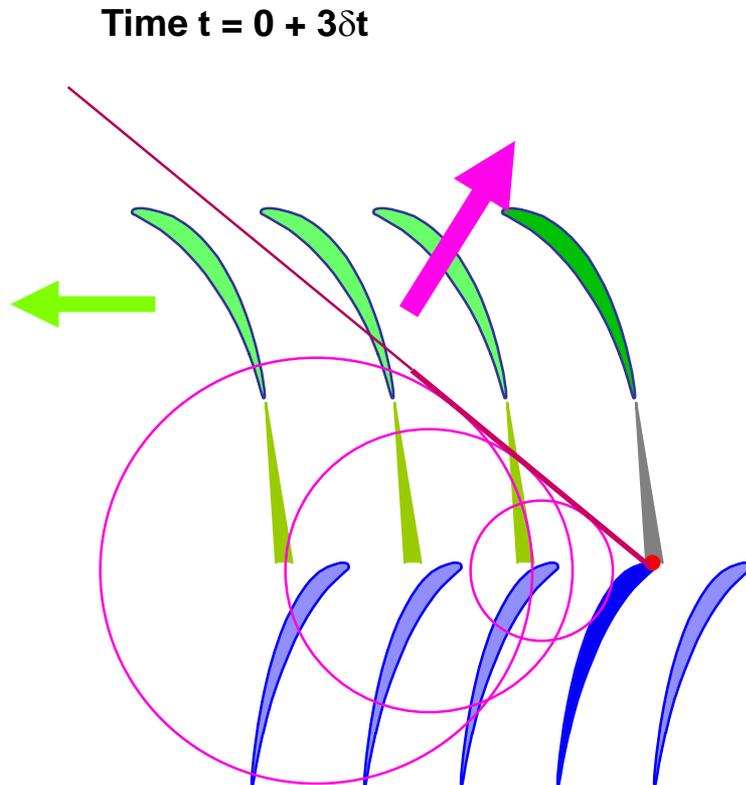
Time $t = 0 + 3\delta t$



At time $t = 0 + 3\delta t$ the rotor row has moved so that the wake from the next blade strike the downstream vane.

The pressure pulse from the first three interactions have now propagated in all directions.

Contra-rotating Mode Generation - 5



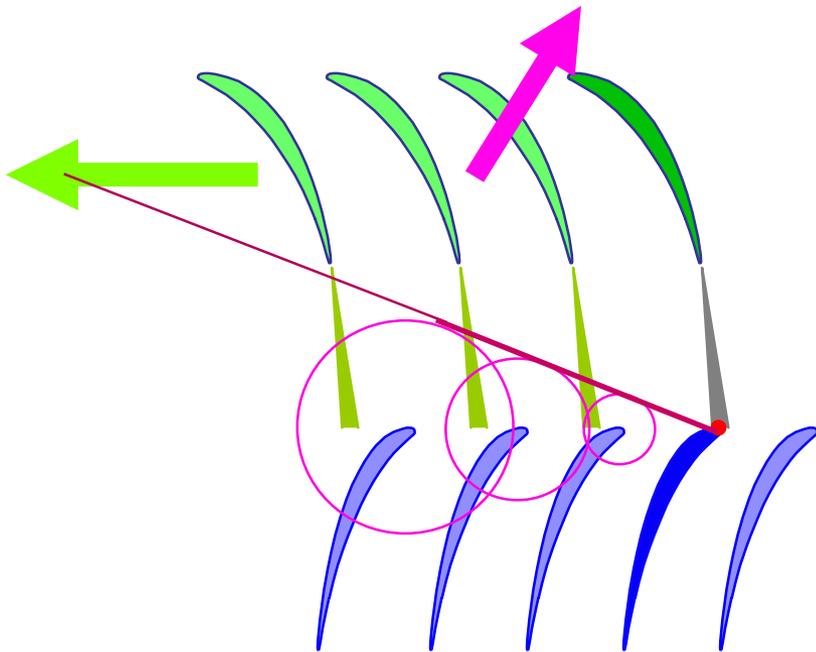
At all point destructive interference produces no overall pressure pulse except along the line shown.

The result is a pressure wave which propagates in the direction shown spiraling forward, rotating in the opposite direction to the rotor and being partially blocked by the blade row, resulting in lower levels being produced.

Contra-rotating Mode Generation - 6

Effect of rotor rotational speed

Time $t = 0 + 3\delta t$



Increasing the blade Mach No. makes the mode more cut-on - contra-rotating example

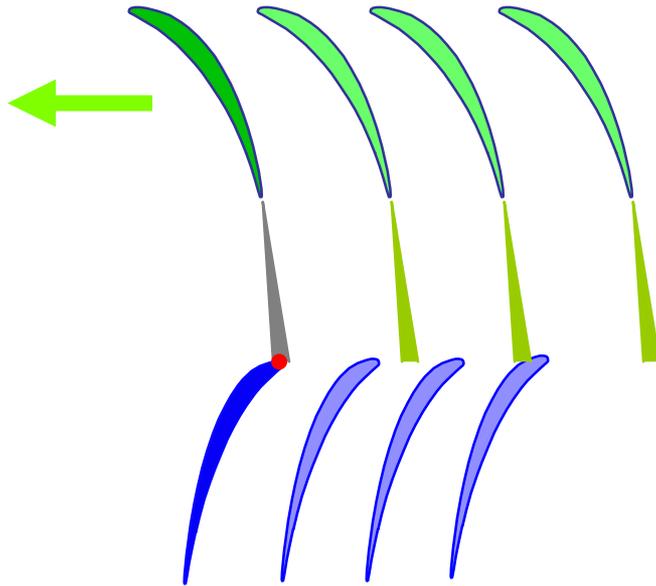
e.g. Doubling the blade Mach No. reduces the propagation radius from each vane by half



Contra-rotating Mode Generation with higher number of vanes

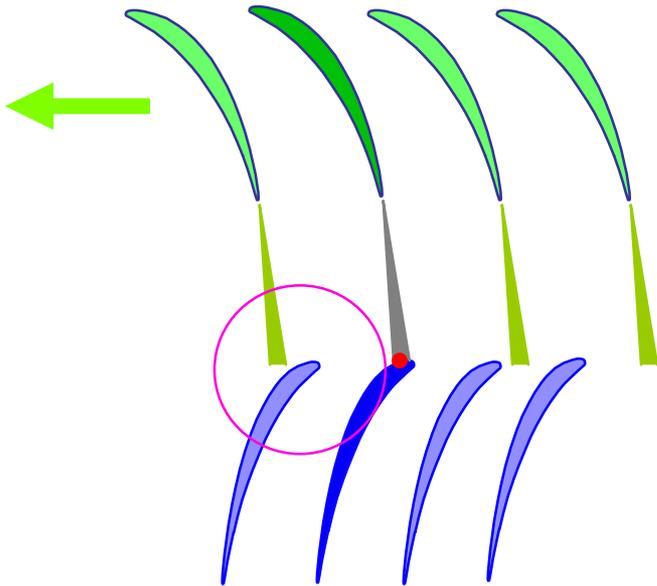
Increased Vane Number Effect - 1

Time $t = 0$



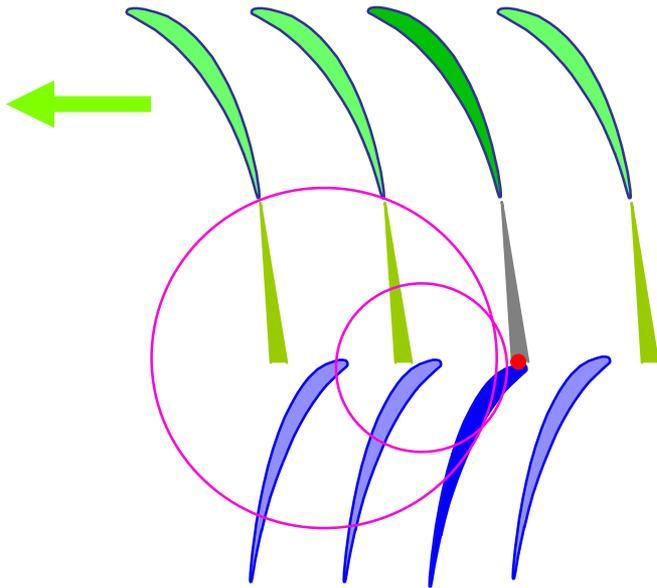
Increased Vane Number Effect - 2

Time $t = 0 + \delta t$



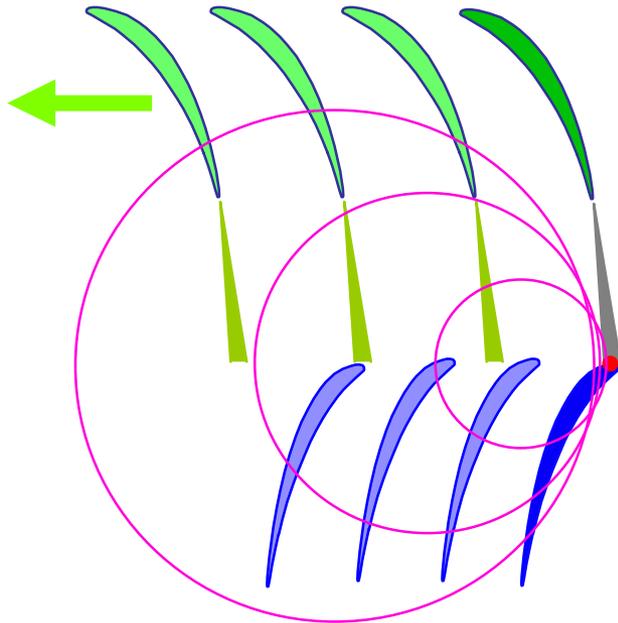
Increased Vane Number Effect - 3

Time $t = 0 + 2\delta t$



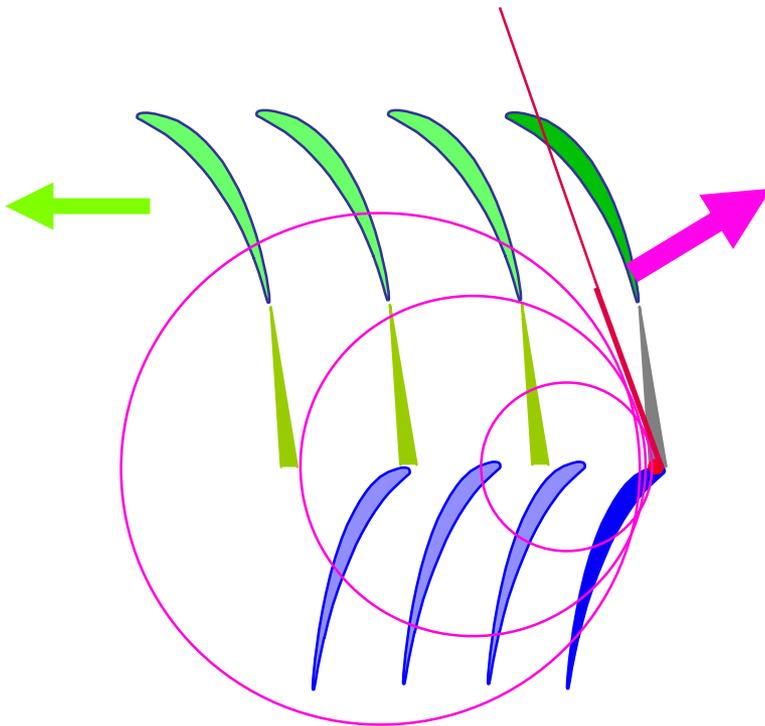
Increased Vane Number Effect - 4

Time $t = 0 + 3\delta t$



Increased Vane Number Effect - 5

Time $t = 0 + 3\delta t$



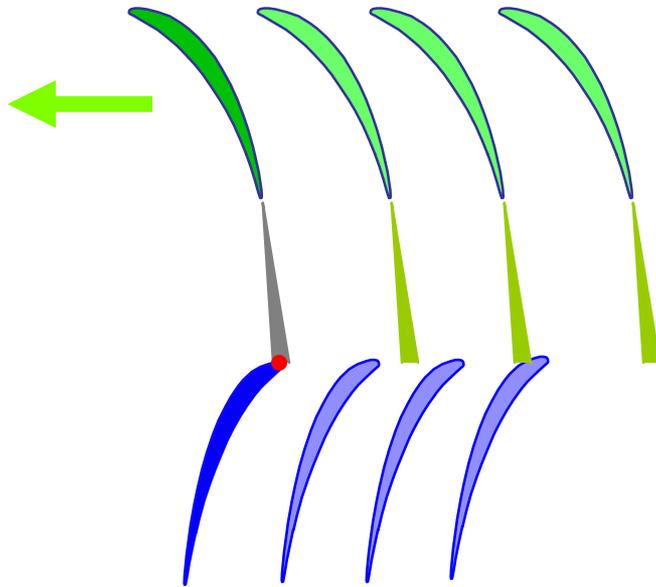
Due to the closer vane spacing each pressure pulse has propagated further before the next interaction occurs with the result being that the wave front angle is steepened.

Cut-off

Vanes > ~ 1.5 x Blades

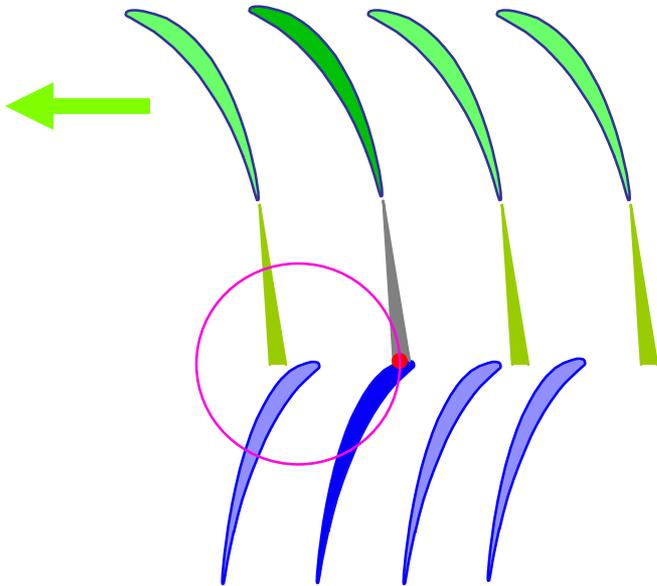
Cut-off Effect - 1

Time $t = 0$



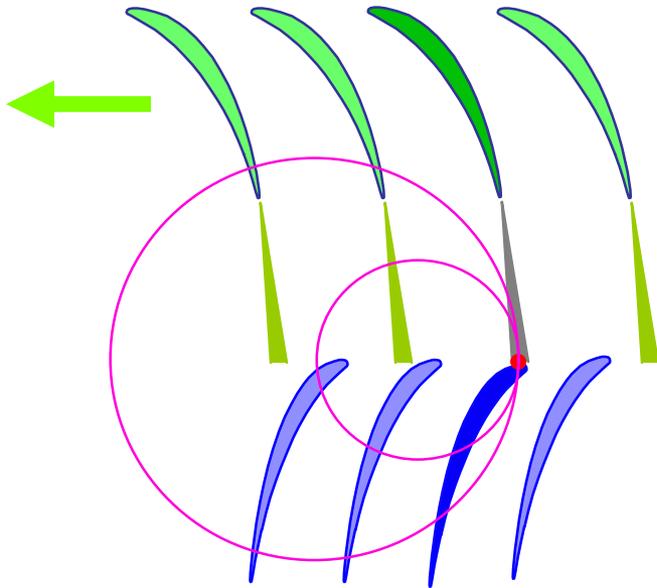
Cut-off Effect - 2

Time $t = 0 + \delta t$



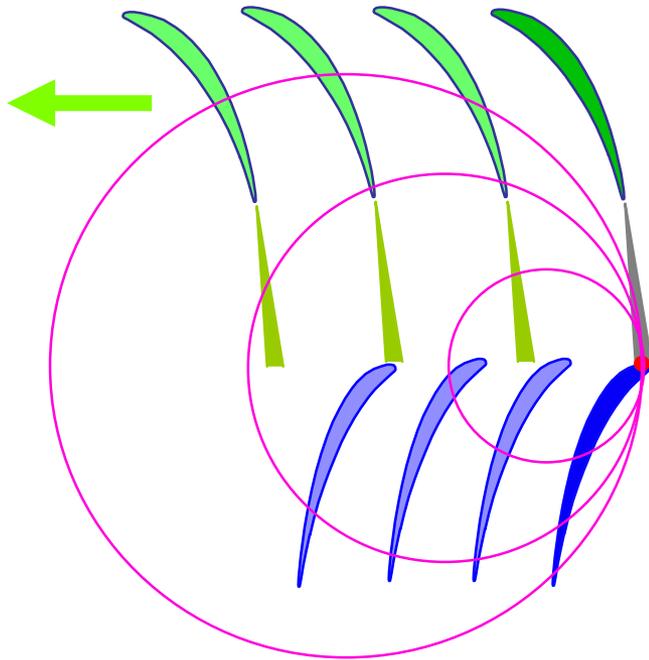
Cut-off Effect - 3

Time $t = 0 + 2\delta t$



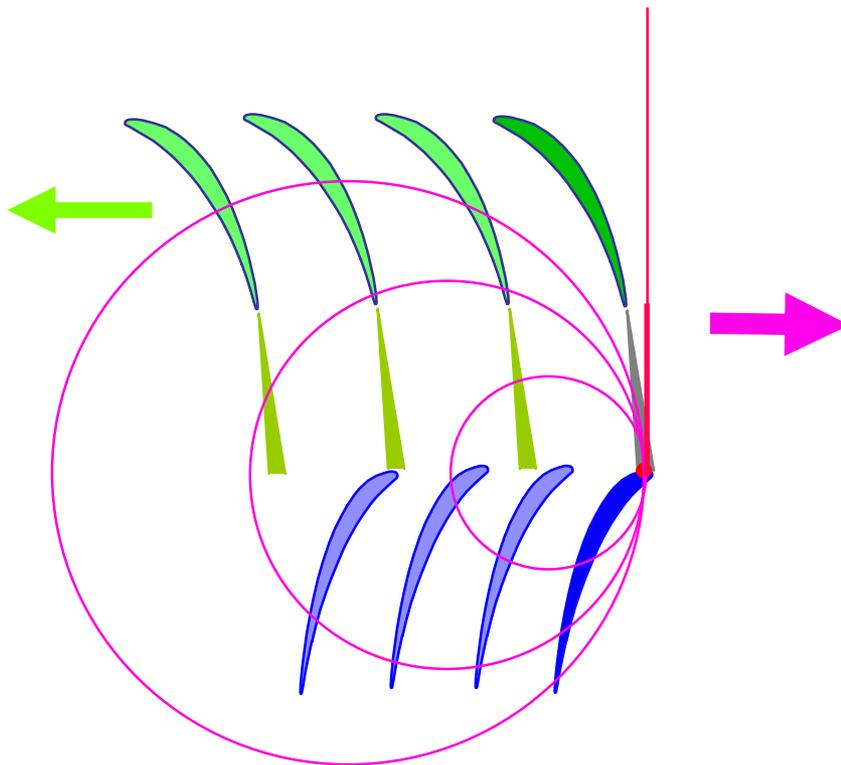
Cut-off Effect - 4

Time $t = 0 + 3\delta t$



Cut-off Effect - 5

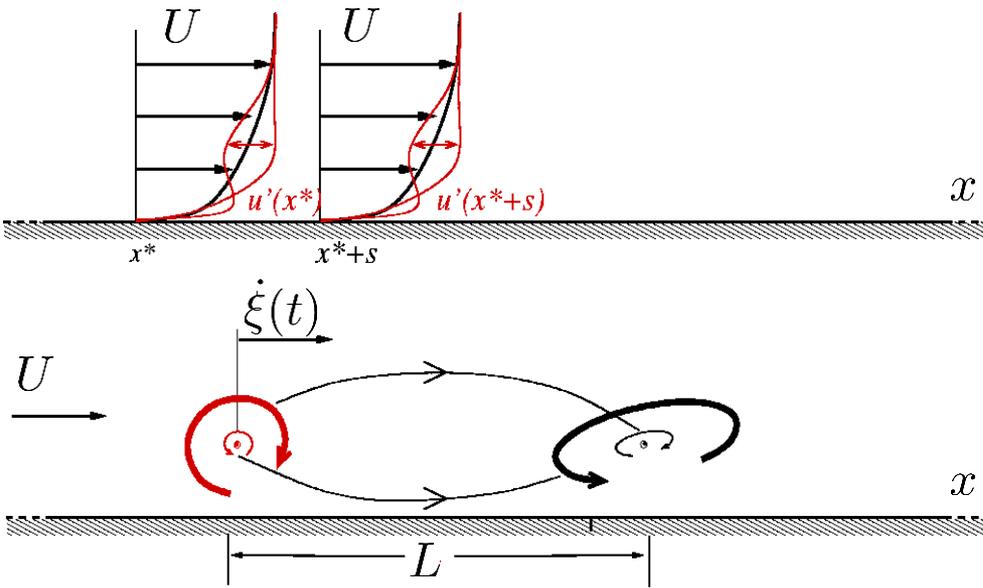
Time $t = 0 + 3\delta t$



With a sufficiently high number of vanes the wave front will propagate at 90° to the engine axis and will effectively be trapped inside the duct producing a **Cut-off mode**.



Significance of edges on sound generation (1/3)



turbulence eddy:

- convection
 - deformation
 - production
 - dissipation
 - diffusion
- transport
- structural change

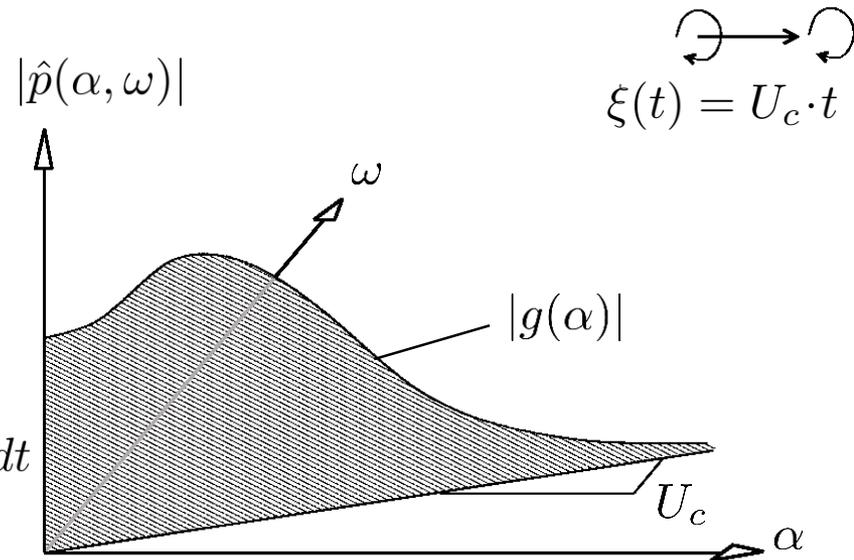
structural change

measure : $p'(x, t) = f(x, t) \cdot g(x - \xi(t))$

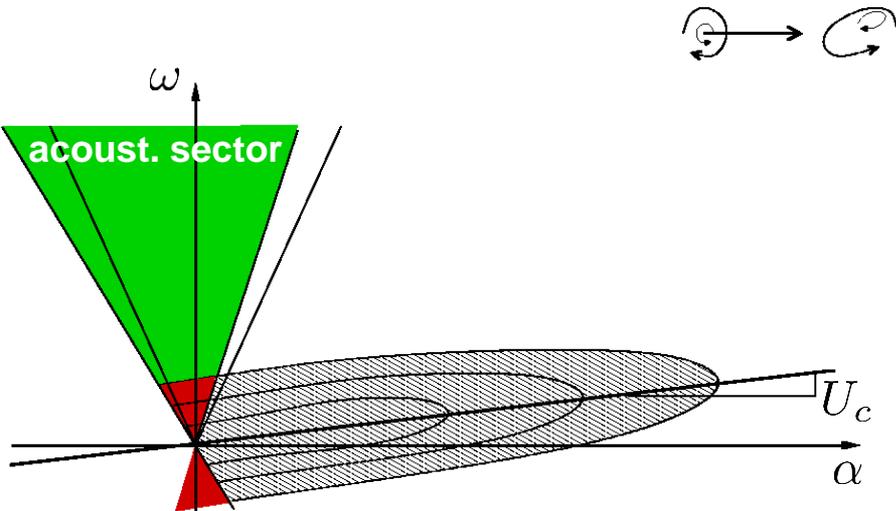
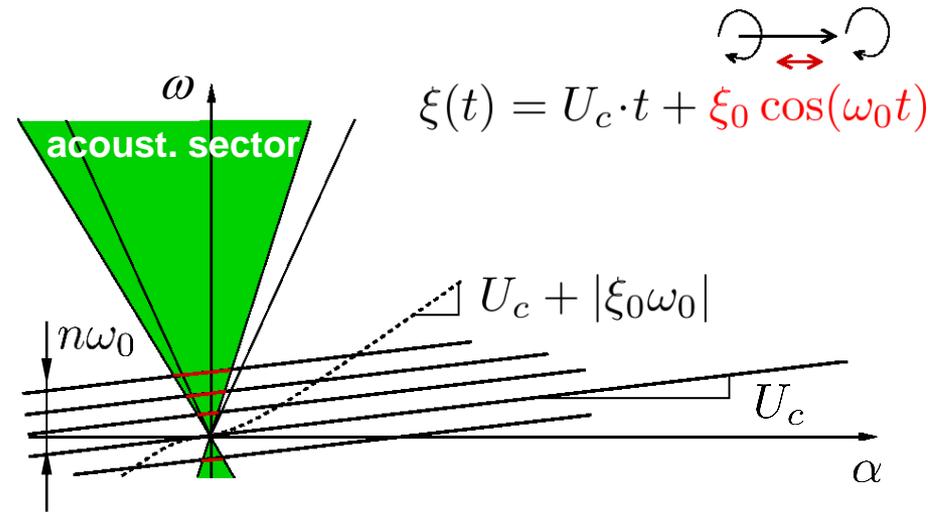
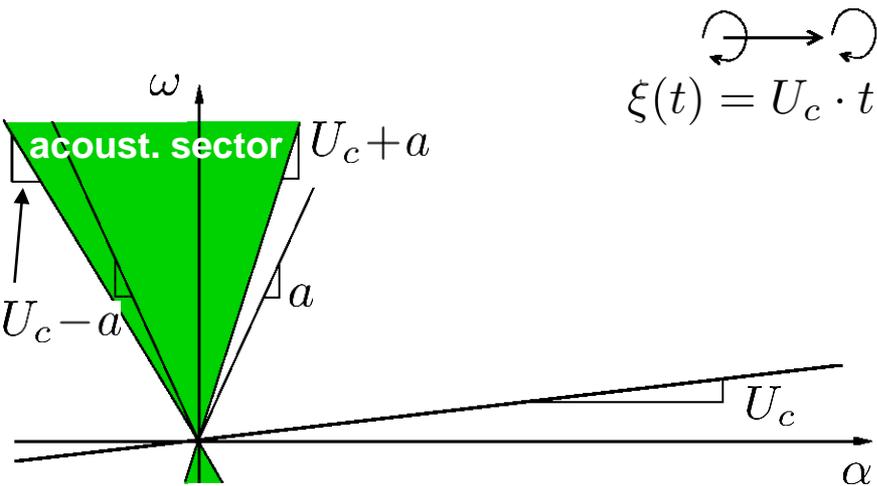
transport

acoustic part ?

Fourier: $\hat{p}(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p'(x, t) \cdot e^{i(\omega t - \alpha x)} dx dt$



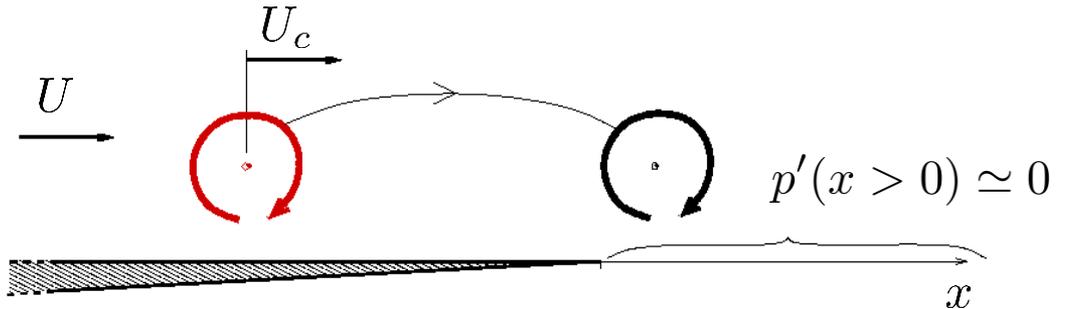
Significance of edges on sound generation (2/3)



- **zero** sound for uniform motion
- appreciable sound only for $U_c + |\xi_0 \omega_0| > a$
- turbulence „eigensound“ small in subsonic flow (one of most difficult problems)

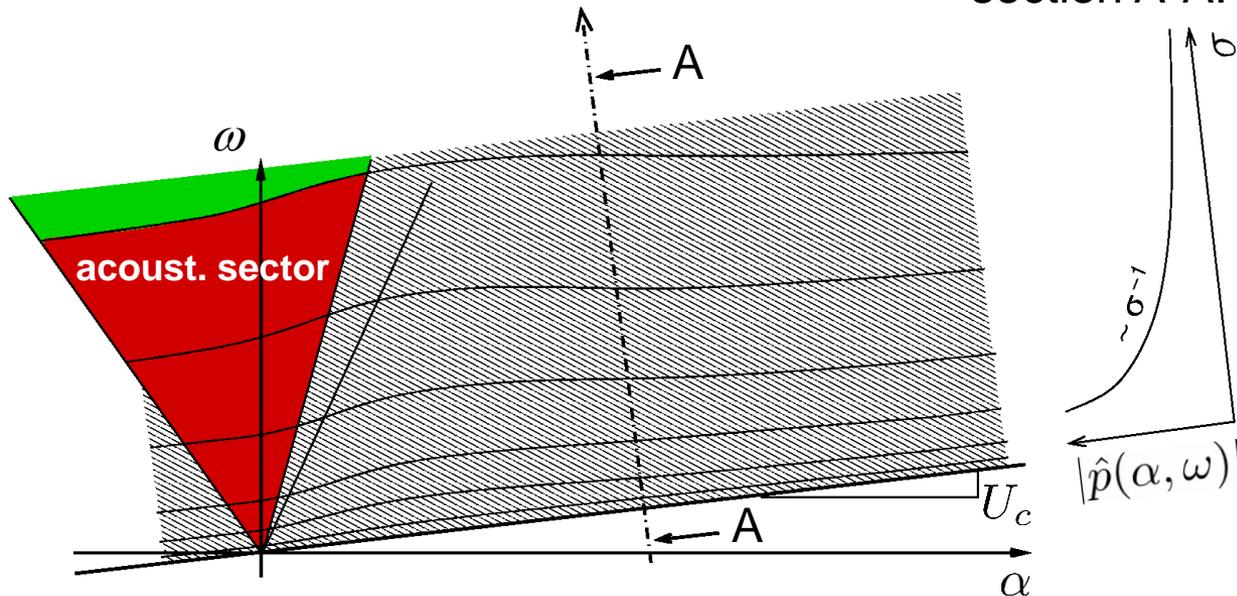
Significance of edges on sound generation (3/3)

trailing edge:



Fourier :
$$\hat{p}(\alpha, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(-x) \cdot g(x - U_c t) \cdot e^{i(\omega t - \alpha x)} dx dt$$

section A-A:



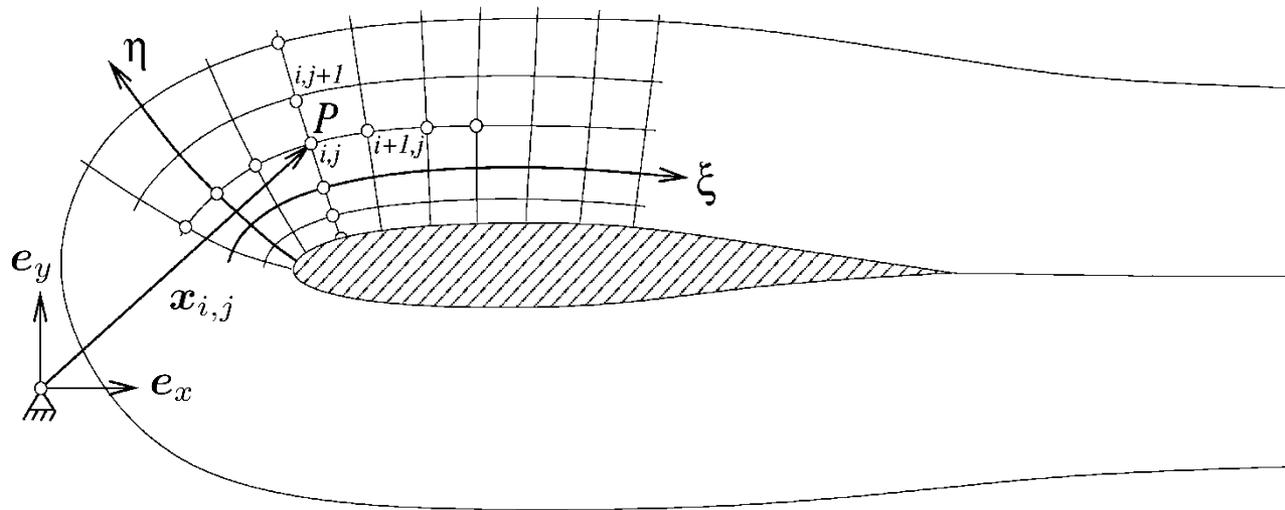
- sound generation even for uniform motion
- reason: inhomogeneity of boundary conditions



Ergänzungen zu Kap. 1.2.2 Numerische Aeroakustik (CAA)

Finite Differenzen auf nicht-cartesischen Gittern

Meistens wird auf gekrümmten, sog. „körperangepassten“ (engl. „body-fitted“) Rechengittern gearbeitet, siehe Skizze:



Die Punkte P des Rechengitters werden durch die Koordinaten $x_{i,j}, y_{i,j}$ beschrieben. Das zugeordnete ξ, η – System ist so definiert, dass seine Koordinatenlinien mit den Gitterlinien (Verbindungslien zwischen den Punkten) zusammen fallen. Hierin sind die Punkte P mit $\xi=i, \eta=j$ beschrieben; damit ist die Schrittweite im ξ, η – System normiert: $\Delta\xi = \Delta\eta = .1$

Das Differenzenschema (300) wird dann in ξ und η verwendet, d.h. es wird numerisch nach ξ bzw. η abgeleitet. Zum eigentlich benötigten Gradienten gelangt man über die Metrik \mathbf{M} der Koordinatentransformation zwischen (x, y) und (ξ, η) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}}_{=: M \text{ (Metrik, d.h. K.O.-Trafo } x \rightarrow \eta)} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (308)$$

Die Bestimmung der Metrik muss in der Regel ebenfalls numerisch vorgenommen werden, und zwar mit einem Verfahren von mindestens gleicher Ordnung wie die des Verfahrens, mit dem die Ableitungen nach ξ und η erfolgen. Eine sinnvolle Wahl ist es, hierfür das selbe Verfahren einzusetzen.

Beachte zunächst:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{=: N} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (309)$$

Der Vergleich mit (304) ergibt

$$N = M^{-1} \quad (310)$$

d.h. zuerst wird numerisch an jedem Punkt P die Matrix N gebildet und dann zu M invertiert, z.B.

$$(N_{12})_{i,j} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_{i,j} \underset{\uparrow}{\simeq} \sum_{k=-N}^N c_k y_{i+k,j} \quad (300)$$

Für die Dichtegleichung (54) ergibt sich damit nach Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho'_{i,j}}{dt} = & - \sum_{k=-N}^N c_k \left\{ (u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) \rho'_{i+k,j} + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) \rho'_{i,j+k} + \right. \\ & + (u_{i+k,j}^0 M_{11} + v_{i+k,j}^0 M_{21} + u_{i,j+k}^0 M_{12} + v_{i,j+k}^0 M_{22}) \rho'_{i,j} + \\ & + \rho_{i,j}^0 (M_{11} u'_{i+k,j} + M_{12} u'_{i,j+k}) + (\rho_{i+k,j}^0 M_{11} + \rho_{i,j+k}^0 M_{12}) u'_{i,j} + \\ & \left. + \rho_{i,j}^0 (M_{21} v'_{i+k,j} + M_{22} v'_{i,j+k}) + (\rho_{i+k,j}^0 M_{21} + \rho_{i,j+k}^0 M_{22}) v'_{i,j} \right\} \end{aligned} \quad (311)$$

wobei $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$ jeweils an der Stelle (i, j) genommen werden.

Für die Impulsgleichung (55) analog:

$$\begin{aligned} \frac{du'_{i,j}}{dt} = & - \sum_{k=-N}^N c_k \left\{ \left((u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) u_{i+k,j}^0 + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) u_{i,j+k}^0 \right) \frac{\rho'_{i,j}}{\rho_{i,j}^0} + \right. \\ & + (u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) u'_{i+k,j} + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) u'_{i,j+k} + \\ & + (u_{i+k,j}^0 M_{11} + u_{i,j+k}^0 M_{12}) u'_{i,j} + (u_{i+k,j}^0 M_{21} + u_{i,j+k}^0 M_{22}) v'_{i,j} + \left. + (\rho_{i,j}^0)^{-1} (M_{11} p'_{i+k,j} + M_{12} p'_{i,j+k}) \right\} \end{aligned} \quad (312)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv'_{i,j}}{dt} = & - \sum_{k=-N}^N c_k \left\{ \left((u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) v_{i+k,j}^0 + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) v_{i,j+k}^0 \right) \frac{\rho'_{i,j}}{\rho_{i,j}^0} + \right. \\ & + (u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) v'_{i+k,j} + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) v'_{i,j+k} + \\ & + (v_{i+k,j}^0 M_{11} + v_{i,j+k}^0 M_{12}) u'_{i,j} + (v_{i+k,j}^0 M_{21} + v_{i,j+k}^0 M_{22}) v'_{i,j} + \left. + (\rho_{i,j}^0)^{-1} (M_{21} p'_{i+k,j} + M_{22} p'_{i,j+k}) \right\} \end{aligned}$$

und für die Druckgleichung (57) entsprechend:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp'_{i,j}}{dt} = & - \sum_{k=-N}^N c_k \left\{ (u_{i,j}^0 M_{11} + v_{i,j}^0 M_{21}) p'_{i+k,j} + (u_{i,j}^0 M_{12} + v_{i,j}^0 M_{22}) p'_{i,j+k} + \right. \\
 & + \gamma (u_{i+k,j}^0 M_{11} + v_{i+k,j}^0 M_{21} + u_{i,j+k}^0 M_{12} + v_{i,j+k}^0 M_{22}) p'_{i,j} + \\
 & + \gamma p_{i,j}^0 (M_{11} u'_{i+k,j} + M_{12} u'_{i,j+k}) + (p_{i+k,j}^0 M_{11} + p_{i,j+k}^0 M_{12}) u'_{i,j} + \\
 & \left. + \gamma p_{i,j}^0 (M_{21} v'_{i+k,j} + M_{22} v'_{i,j+k}) + (p_{i+k,j}^0 M_{21} + p_{i,j+k}^0 M_{22}) v'_{i,j} \right\}
 \end{aligned} \tag{313}$$

Gleichungen (311), (312), (313) stellen ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem in t dar. Es kann für alle inneren Punkte des Gebiets angeschrieben werden. Das sind die Punkte, an denen sich der vollständige Differenzenstern bilden lässt, d.h. dort, wo mindestens noch 3 Nachbarpunkte (DRP Verfahren) zu allen Seiten vorhanden sind. Ist die Gesamtzahl der Punkte bestimmt durch $0 \leq i \leq N_\xi$ und $0 \leq j \leq N_\eta$ dann ist das System also für den Bereich von Punkten i, j mit $3 \leq i \leq N_\xi - 3$ und $3 \leq j \leq N_\eta - 3$ gültig. Punkte in Randnähe erfordern eine Sonderbehandlung (siehe 1.2.2.2, 1.2.2.3).

Zur Bildung der Ableitungen nach η auf den Gitterlinien $\eta = j = 0$ (Wand), $\eta = j = 1$ (Wandnachbarlinie) und $\eta = j = 2$ stehen keine Funktionswerte für den vollständigen Differenzenstern nach (300) $\sum_{j=-3}^3 c_k f_{i,j+k}$ zur Verfügung. Daher werden hier unsymmetrische Differenzensterne eingesetzt:

$$j = 0 : \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{i,j=0} \simeq \sum_{k=0}^6 c_k^0 f_k \quad (314)$$

$$j = 1 : \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{i,j=1} \simeq \sum_{k=-1}^5 c_k^1 f_k \quad (315)$$

$$j = 2 : \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{i,j=2} \simeq \sum_{k=-2}^4 c_k^2 f_k \quad (316)$$

Der Taylorabgleich bis Ordnung 4 und spektrale Optimierung liefert nach Tam und Dong analog wie bei der Herleitung von (307) die folgenden Koeffizienten:

$c_0^0 = -2.192280339$	$c_{-1}^1 = -0.209337622$	$c_{-2}^2 = 0.049041958$
$c_1^0 = 4.748611401$	$c_0^1 = -1.084875676$	$c_{-1}^2 = -0.46884037$
$c_2^0 = -5.108851915$	$c_1^1 = 2.147776050$	$c_0^2 = -0.474760914$
$c_3^0 = 4.461567104$	$c_2^1 = -1.388928322$	$c_1^2 = 1.273274737$
$c_4^0 = -2.833498741$	$c_3^1 = 0.768949766$	$c_2^2 = -0.518484526$
$c_5^0 = 1.128328861$	$c_4^1 = -0.281814650$	$c_3^2 = 0.166138533$
$c_6^0 = -0.203876371$	$c_5^1 = 0.048230454$	$c_4^2 = -0.026369431$

Gleichungssystem (311), (312), (313) wird mit einem numerischen Verfahren in der Zeit integriert, typischerweise mit einem Runge-Kutta Verfahren (besser dispersionsarmen Varianten vgl. F.Q. Hu et al. 1996, Journal of Computational Physics) mindestens 4. Ordnung (angepasst an räumliche Ordnung).

1.2.2.5 Randbedingungen an Objektoberflächen

An harten Wandoberflächen ist die kinematische Strömungsbedingung zu erfüllen, d.h. an allen Punkten i,j auf der Wand hat zu jedem Zeitpunkt

$$\mathbf{n}_{i,j} \cdot \mathbf{v}'_{i,j} = (v'_n)_{i,j} = 0 \quad (317)$$

zu gelten, wobei $\mathbf{n}_{i,j}$ den Normalenvektor auf dem betrachteten Wandpunkt bezeichnet. Für einen Rand $\eta = \text{const}$ ist $\mathbf{n} = \nabla \eta = {}^t(M_{12}, M_{22})$, während für einen Rand $\xi = \text{const}$ $\mathbf{n} = \nabla \xi = {}^t(M_{11}, M_{21})$

Beachte:

Auf den Wandpunkten werden jetzt insgesamt 3 Gleichungen für $u'_{i,j}$ und $v'_{i,j}$ gefordert, nämlich (312) und (317), d.h. die Differentialgleichung und die Randbedingung. Dieses unterscheidet die diskretisierte (finite Differenzen-) Formulierung des Problems von der ursprünglichen.

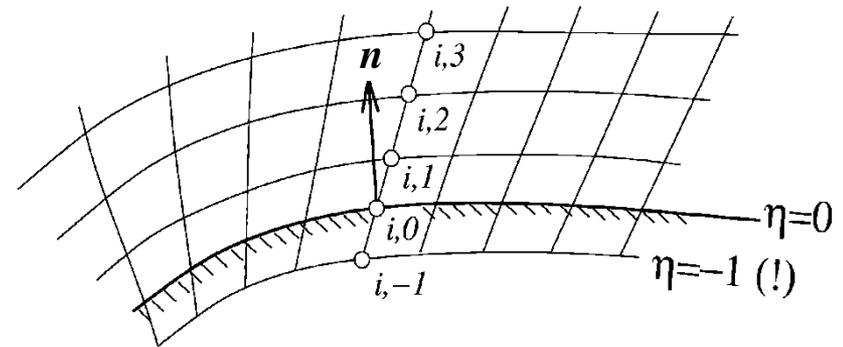
Daher:

Zur Behebung der Mehrdeutigkeit des diskreten Systems wird zunächst (a) die Bedingung (317) in eine Randbedingung für die Normalenableitung des Drucks an der Wand übersetzt. Skalar-Multiplikation von (312) mit $\mathbf{n}_{i,j}$ ergibt

$$\rho^0 \underbrace{\left(\frac{\partial v'_n}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}^0] \right)}_{=0} + \rho' \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}^0) + \frac{\partial p'}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{i,j} = -\mathbf{n}_{i,j} \cdot [\rho^0 (\mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}^0) + \rho' \mathbf{v}^0 \cdot \nabla \mathbf{v}^0]_{i,j} \quad (318)$$

Danach wird (b) eine Schicht von „Geisterknoten“ unterhalb der Wand eingeführt (siehe Bild) auf denen der „Geisterwert“ des Drucks $p'_{i,j=-1}$ so spezifiziert wird, dass (316) erfüllt ist. Dieses ist so vorstellbar, dass die Drücke in der Geisterschicht Kräfte so aufbringen, dass die Normalengeschwindigkeit an der Wand auf Null abgebremst wird.



Diese Spezifikation erfolgt numerisch aus der Darstellung der Normalenableitung an der Wand:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{i,j=0} &= \left(n_x \frac{\partial p'}{\partial x} \right)_{i,j=0} + \left(n_y \frac{\partial p'}{\partial y} \right)_{i,j=0} = (n_x M_{11} + n_y M_{21})_{i,j=0} \sum_{k=-3}^3 c_k p'_{i+k,0} \\ &+ (n_x M_{12} + n_y M_{22})_{i,j=0} \sum_{k=-1}^5 c_k^1 p'_{i,k} \end{aligned}$$

Hieraus lässt sich der Wert für $p'_{i,j=-1}$ bestimmen:

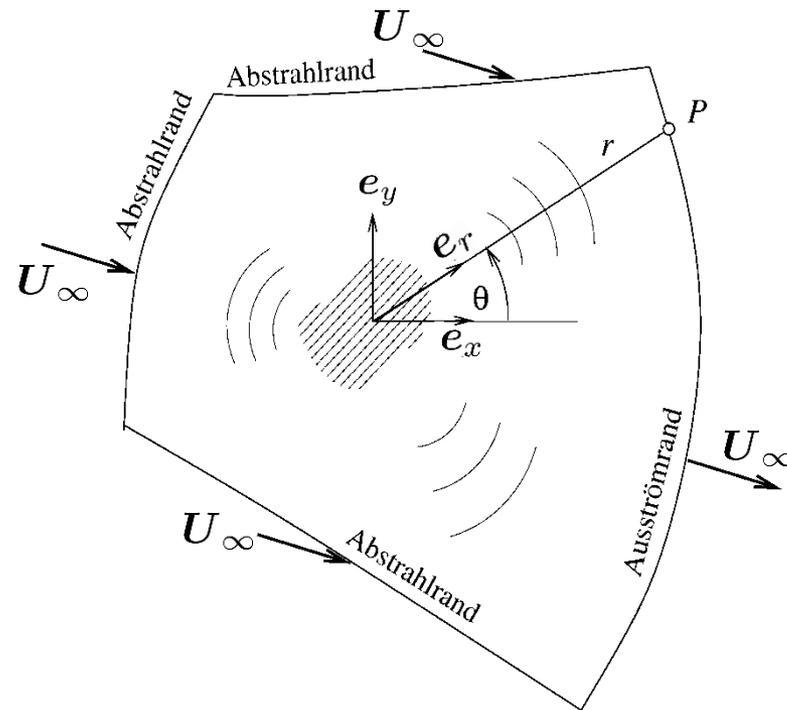
$$p'_{i,-1} = \frac{1}{(n_x M_{12} + n_y M_{22})_{i,0}} \left[\frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{i,j=0} - (n_x M_{11} + n_y M_{21})_{i,j=0} \sum_{k=-3}^3 c_k p'_{i+k,0} \right] - \sum_{k=0}^5 c_k^1 p'_{i,k} \quad (319)$$

↑
(318)

Die Bildung der η -Ableitung von p' an $(i, j = 0)$ und $(i, j = 1)$ erfolgt unter Verwendung des Geisterwertes an $(i, j = -1)$. Für $j \geq 2$ wird wieder der zentrale Differenzenstern mit Koeffizienten c_k verwendet. Damit ist die Randbedingung an der Wand erfüllt.

1.2.2.6 Abstrahl- und Ausströmrandbedingungen

Am künstlichen Freifeldrand (Außenrand des vernetzten Rechengebiets) sollen Schallwellen, die im Inneren des Gebiets generiert werden, möglichst reflexionsfrei aus dem Rechengebiet austreten können. Andererseits sollen aber auch konvektierende Störungen wie Entropie- und Wirbelstörungen so aus dem Gebiet austreten, dass keine künstlichen, in das Gebiet zurücklaufenden Störungen entstehen (Skizze).



1.2.2.6 Abstrahl- und Ausströmrandbedingungen

Freifeldbedingungen nach Tam et al.:

Zunächst eine Vorüberlegung zum Aussehen der Lösung weit weg vom Quellgebiet: Am Außenrand sei das Strömungsfeld nahezu gleichförmig $\mathbf{v}^0 \simeq \mathbf{U}_\infty = {}^t(u_\infty, v_\infty)$. Dort seien auch Dichte $\rho^0 \simeq \rho_\infty$ und Druck $p^0 \simeq p_\infty$ konstant. Wird diese Grundströmung in (55), (56), (57) eingesetzt, so entsteht ein lineares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, das durch Exponentialansatz gelöst werden kann:

$$\begin{bmatrix} \rho' \\ \mathbf{v}' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} \exp(\underbrace{i\omega t - i\alpha x - i\beta y}_{=: -i\psi})$$

Einsetzen ergibt das Eigenwertproblem

$$\left\{ \omega \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \alpha u_\infty + \beta v_\infty & \alpha \rho_\infty & \beta \rho_\infty & 0 \\ 0 & \alpha u_\infty + \beta v_\infty & 0 & \alpha \rho_\infty^{-1} \\ 0 & 0 & \alpha u_\infty + \beta v_\infty & \beta \rho_\infty^{-1} \\ 0 & \alpha \gamma p_\infty & \beta \gamma p_\infty & \alpha u_\infty + \beta v_\infty \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren dieses Systems sind

$$\omega_e = \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \omega_\Omega = \begin{pmatrix} u_\infty \\ v_\infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \omega_{a\pm} = \begin{pmatrix} u_\infty \pm a_\infty (\mathbf{e}_\psi)_x \\ v_\infty \pm a_\infty (\mathbf{e}_\psi)_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$V_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathbf{e}_\psi)_y \\ -(\mathbf{e}_\psi)_x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_{a\pm} = \begin{pmatrix} \pm a_\infty \\ \rho_\infty (\mathbf{e}_\psi)_x \\ \rho_\infty (\mathbf{e}_\psi)_y \\ \pm a_\infty \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{e}_\psi = \nabla\psi/|\nabla\psi| = {}^t(\alpha, \beta)/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ die räumliche Orientierung der Phase der Störung beschreibt. Es gibt also in gleichförmiger Strömung genau 3 unabhängige Bewegungsformen:

- (e) Entropiestörung bestehend nur aus einer Dichtekomponente, bewegt mit U_∞
- (Ω) Wirbel- oder Scherstörung bestehend nur aus Geschwindigkeitskomponenten, bewegt mit U_∞
- (a) akustische Störung bestehend aus Dichte, Druck und Geschwindigkeit, bewegt mit $U_\infty \pm a_\infty \mathbf{e}_\psi$

Ausströmrind

Der Ausströmrind ist ein Rand, bei dem die Strömungsgeschwindigkeit nach außerhalb des Gebiets weist. Am Ausströmrind können alle 3 Störungsformen auftreten, d.h. die Störungsvariablen setzen sich folgendermaßen aus Anteilen überlagert zusammen:

$$\begin{array}{ll}
 \rho' = \rho_a + \rho_e & \text{mit den Bezeichnungen} \\
 u' = u_a + u_\Omega & a - \text{„akustisch“} \\
 v' = v_a + v_\Omega & e - \text{„entropisch“} \\
 p' = p_a & \Omega - \text{„Wirbel-“}
 \end{array}$$

Bestimmung der substantiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla$ der Dichtebeziehung:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \rho' = \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \rho_a + \underbrace{\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \rho_e}_0$$

Hierbei fällt der entropiebedingte Dichteanteil weg, weil dieser Schwankungsanteil passiv mit der Strömung konvektiert wird. Der verbleibende Ausdruck besteht dann nur noch aus akustischen Dichteanteilen, die über die Isentropiebeziehung mit Hilfe des Drucks, der (s.o.) rein akustischer Art ist, ausgedrückt werden kann

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \rho' = \frac{1}{a_\infty^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla p' \right) \quad (320)$$

...analog für die Geschwindigkeitskomponenten:

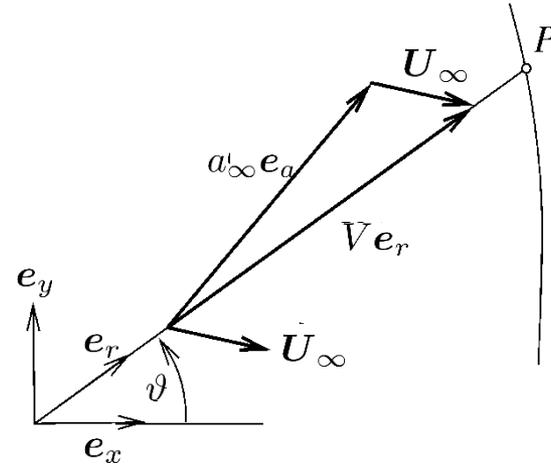
$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho_\infty} \nabla p' \quad (321)$$

Im Fernfeld haben akustische 2D-Lösungen in gleichförmigen Strömungsfeldern die folgende Form (vgl. Abschnitt 2.4.3.3 Vorlesung WS):

$$\begin{bmatrix} \rho_a \\ \mathbf{v}_a \\ p_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\tau, \vartheta)/a_\infty^2 \\ \mathbf{G}(\tau, \vartheta) \\ F(\tau, \vartheta) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}}; \quad \tau = t - r/V$$

$$V \mathbf{e}_r = a_\infty \mathbf{e}_a + \mathbf{U}_\infty$$

$$\Rightarrow V = \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{a_\infty^2 - U_\infty^2 + (\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{e}_r)^2}$$



V beschreibt hierin (vgl. Skizze) die Geschwindigkeit, mit der alle Schallsignale vom Quellzentrum bei $r \approx 0$ in Richtung auf einen Randpunkt P bei der Position (r, ϑ) in Zylinderkoordinaten laufen. Differentiation von p_a nach der Zeit t und r ergibt:

$$\frac{\partial p_a}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial r} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} - \frac{F}{2r\sqrt{r}}; \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{1}{V}; \quad F = p_a \sqrt{r}$$

Wird hieraus $\frac{\partial F}{\partial \tau}$ eliminiert, erhält man mit $p_a = p'$ schließlich

$$\frac{1}{V} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{p'}{2r} = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial r} = \mathbf{e}_r \cdot \nabla \quad (322)$$

Einström- und Tangentialströmrand

Nicht-Ausströmränder können nur solche Störungen überqueren, die sich mit einer anderen Geschwindigkeit als U_∞ bewegen, d.h. ausschließlich akustische:

$$\rho' = \rho_a, \quad u' = u_a, \quad v' = v_a, \quad p' = p_a$$

Die identische Ableitung wie für (322) bei allen anderen Variablen führt dann auf:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} + \frac{1}{2r} \begin{bmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Knotenpunkte für (320)-(322) oder (323):

Es stellt sich die Frage, an welchen Knotenpunkten des Rechengitters die Ausström- bzw. Abstrahlungsbedingungen gefordert werden. Dieses hat numerische Stabilitätsgründe und ist der Skizze zu entnehmen:

