

Untersuchungen zur modalen Superposition für die *a priori* Detektion versagenskritischer Regionen dynamisch beanspruchter Strukturen

vorgelegt von
Dipl.-Ing.
Carsten Strzalka

von der Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

– Dr.-Ing. –

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Andreas Bardenhagen

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Zehn

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 17.03.2023

Berlin 2023

Danksagung

Vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet für Strukturmechanik und Strukturberechnung des Instituts für Mechanik der Technischen Universität Berlin. Besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Manfred Zehn, für das mir entgegengebrachte Vertrauen, die stete Förderung und die wohlwollende Begleitung dieser Arbeit bis zum Abschluss.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne danke ich herzlich für die Übernahme des Korreferats. Weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Bardenhagen für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsausschusses.

Herzlichen Dank allen Mitarbeitern des Instituts, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere Herrn Dr.-Ing. Lars Voll und Herrn Dr.-Ing. Dragan Marinkovic für die tatkräftige Unterstützung in Werkstatt und Labor sowie die zahlreichen fachlichen und persönlichen Diskussionen.

Ich danke besonders meiner Familie für anhaltende Unterstützung und Rückhalt. Außerordentlichen Dank möchte ich an dieser Stelle Mario Strzalka für die gewissenhafte Durchsicht und die kritische Betrachtung meiner Arbeit aussprechen. Mein größter Dank gilt nicht zuletzt Conny Schätzer für die Kraft, die Motivation und die liebevolle Unterstützung in allen Phasen der Entstehung dieser Arbeit.

Berlin, im April 2023

Carsten Strzalka

Abstract

The reliable design of structures and components under dynamic loading is increasingly becoming the focus of daily industrial application. The often thin-walled structures of modern lightweight design, resulting from optimisation processes, tend to be more sensitive to dynamic stress and failure. As the fatigue failure of dynamically loaded structures is mostly a localised phenomenon, the structural regions relevant for detailed stress analysis and experimental validation are often unknown in advance and need to be estimated by expensive numerical investigations. Great potential for reducing the numerical effort emerges, if the classical strength verification process is extended not to the evaluation of whether a structure can withstand the applied loading but to the evaluation of which structural regions require a more detailed consideration and if these statements can be made qualitatively, but in advance, i.e., *a priori*. The *a priori* identification of these structural areas thus represents the main objective of the present work.

The basis of the presented investigations is the approximation of the dynamic stress state of discretised structures using mode superposition techniques. As fundamental dynamic properties, the elastic eigenmodes of a structure are determined in the early stages of product development. Based on the modal stress derived from the system's eigenvectors and the frequency domain solution of the equations of motion in modal space, the present work documents comprehensive investigations on the approximation of the modal contributions to dynamic stress fields. By detailed consideration of the influences of load configuration and frequency content as well as the normalisation of eigenvectors and modal stress quantities, weighting coefficients for the *a priori* superposition of modal stress fields are developed for force- and base-excited systems. Parameters from classical fatigue analysis are applied for automated detection of failure-critical structural regions. Validation is performed on complex industrial models as well as by extensive experimental investigations. Both the dynamic stress field and potential failure locations are estimated reliably and conservatively. The required input is limited to the system's eigenvectors and basic loading information, that is, statements about failure-critical structural regions can be made before complex numerical calculations are performed. The detailed analysis of the dynamic strength as well as possible experimental validations can thus be reduced to only fractions of the global system.

Zusammenfassung

Die zuverlässige Auslegung von Strukturen und Bauteilen vor dem Hintergrund dynamischer Beanspruchungen rückt zunehmend in den Fokus der täglichen industriellen Anwendung. Die aus Optimierungsprozessen resultierenden, häufig dünnwandigen Strukturen des modernen Leichtbaus zeigen dabei oft eine höhere Empfindlichkeit gegenüber dynamischer Belastung und Versagen. Stellt das Ermüdungsversagen dynamisch beanspruchter Strukturen i. d. R. ein lokal begrenztes Phänomen dar, sind die für detailliertere Analysen und experimentelle Validierung relevanten Strukturbereiche im Voraus oft unbekannt und müssen durch aufwendige numerische Untersuchungen abgeschätzt werden. Es zeigt sich hierbei ein großes Potenzial zur Reduktion des numerischen Aufwandes, wenn die klassische Problemstellung, ob eine Struktur den vorgesehenen Belastungen standhält, um die Fragestellung erweitert wird, welche Strukturbereiche einer detaillierteren Betrachtung bedürfen und Aussagen hierzu zwar qualitativ, jedoch im Vorfeld, d. h. *a priori* getroffen werden können. Die *a priori* Detektion dieser, im Folgenden als versagenskritisch bezeichneten Strukturregionen, stellt damit das Kernziel der vorliegenden Arbeit dar.

Ausgangspunkt der Untersuchungen bildet die Approximation des dynamischen Beanspruchungszustandes diskretisierter Strukturen auf Basis modaler Superpositionsprinzipien. Als grundlegende dynamische Eigenschaften werden die elastischen Eigenformen einer Struktur bereits in frühen Phasen der Produktentwicklung bestimmt. Auf Grundlage der aus den Eigenvektoren abgeleiteten modalen Beanspruchungsgrößen sowie der Frequenzbereichslösung der Bewegungsgleichung im Modalraum dokumentiert die vorliegende Arbeit umfassende Untersuchungen zur Approximation der modalen Anteile dynamischer Beanspruchungsfelder. Durch die detaillierte Betrachtung der Einflüsse von Lastkonfiguration und Anregungsspektrum sowie der Normierung von Eigenvektoren und modalen Beanspruchungsgrößen erfolgt die Entwicklung von Wichtungskoeffizienten für die *a priori* Überlagerung modaler Beanspruchungsfelder für kraft- und fußpunkterregte Systeme. Zur automatisierten Detektion versagenskritischer Strukturregionen werden Kenngrößen der klassischen Lebensdaueranalyse herangezogen. Die Validierung der getroffenen Annahmen erfolgt an komplexen Simulationsmodellen aus dem industriellen Umfeld sowie durch ausführliche experimentelle Untersuchungen. Sowohl dynamisches Beanspruchungsfeld als auch potenzielle Versagensorte werden dabei zuverlässig und konservativ abgeschätzt. Die erforderlichen Eingangsgrößen beschränken sich auf die Eigenformen des Systems und grundlegende Lastinformationen, was Aussagen zu versagenskritischen Strukturregionen vor der Durchführung aufwendiger numerischer Berechnungen, d. h. *a priori*, ermöglicht. Die detaillierte Analyse der dynamischen Festigkeit sowie etwaige experimentelle Validierungen können damit auf wenige Teilbereiche des Gesamtsystems reduziert werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	20
1.1	Stand der Technik.....	23
1.1.1	<i>A Priori</i> -Methoden.....	24
1.2	Ziele und Aufbau der Arbeit	26
2	Strukturdynamische Grundlagen	28
2.1	Das dynamische System mit einem Freiheitsgrad.....	28
2.1.1	Krafterregung	29
2.1.2	Fußpunkterregung	30
2.2	Mehrfreiheitsgradsysteme	33
2.2.1	Finite-Elemente-Methode	33
2.3	Modale Methoden in der Strukturdynamik	36
2.3.1	Orthogonalitätsbeziehungen.....	37
2.3.2	Modaler Verschiebungsansatz	38
2.3.3	Frequenzbereichslösung für beliebige Krafterregung	39
2.3.4	Starrkörpermoden und fußpunkterregte Systeme	41
2.3.5	Methode der Antwortspektren	43
2.3.6	Dämpfung.....	44
2.4	Superposition modaler Beanspruchungsgrößen	45
3	Ermüdungsfestigkeit.....	47
4	<i>A priori</i> Detektion versagenskritischer Strukturregionen	52
4.1	Modale Feldgrößen.....	55
4.2	Krafterregte Systeme	56
4.2.1	Modale Last.....	57
4.2.2	Modale Steifigkeit und Normierung der Eigenvektoren.....	60
4.2.3	Einfluss des Anregungsspektrums	63
4.3	Proportional gedämpfte Systeme.....	79
4.4	Fußpunkterregte Systeme und Starrkörpermoden	81
4.5	Bewertung	82
4.5.1	Numerische Umsetzung	83
4.5.2	Anmerkung zu Schwingfrequenz und Lastwechseln	85
4.5.3	Berücksichtigung von Spannungsüberhöhungen und Singularitäten.....	87
4.6	Zusammenfassung	88
5	Numerische Anwendung und Validierung	89
5.1	PKW-Verbundlenkerachse	89
5.1.1	Numerische Umsetzung der Randbedingungen	91
5.1.2	Lastfälle und Simulationsmethoden	93
5.1.3	Frequenzbereichsanalysen	94

5.1.4	Zeitbereichs- und Lebensdaueranalysen	100
5.2	PKW-Motorträger.....	105
5.2.1	Rand- und Lastbedingungen.....	106
5.2.2	Frequenzbereichsanalyse.....	108
5.2.3	Zeitbereichs- und Lebensdaueranalysen	114
5.3	Numerischer Aufwand und Effizienz	116
5.4	Zusammenfassung	118
6	Experimentelle Untersuchungen am Biegebalken	119
6.1	Experimentelle Modalanalyse	119
6.2	Untersuchtes System.....	121
6.2.1	Festlager	122
6.2.2	Anbindung.....	122
6.2.3	Versuchsaufbau und -durchführung	123
6.3	Modale Systemgrößen	124
6.3.1	Eigenfrequenzen und Eigenformen	124
6.3.2	Modale Dämpfung.....	125
6.3.3	Ergebnisse	127
6.4	Abgleich von Simulation und Experiment	128
6.4.1	Zielgrößen und Methodik.....	129
6.4.2	Modellabgleich.....	131
6.5	Experimentelle Validierung.....	136
6.6	Zusammenfassung	139
7	Experimentelle Untersuchungen: Verbundlenkerachse	140
7.1	Versuchsplanung und Lastfall	140
7.2	Versuchsaufbau	141
7.3	Rand- und Lastbedingungen.....	141
7.3.1	Lastamplitude	142
7.4	Dehnungsmessung	143
7.5	Statische Untersuchung	145
7.5.1	Ergebnisse	146
7.6	Experimentelle Lebensdaueranalyse	148
7.6.1	Vorbetrachtungen.....	148
7.6.2	Durchführung	150
7.6.3	Ergebnisse	150
7.6.4	Numerischer Abgleich.....	160
7.7	Zusammenfassung	162
8	Fazit und Ausblick	163
Anhang A	166

Berücksichtigung von Schwingfrequenz und Lastwechseln	166
Anhang B	174
Eigenformen und modale v. Mises-Spannungen, Konfiguration 1	174
Eigenformen und modale v. Mises-Spannungen, Konfiguration 2	175
Anhang C	176
Gummi-Metall-Lager und numerische Implementierung	176
Anhang D	180
Ermittlung von Belastungsdaten der PKW-Verbundlenkerachse	180
Anhang E	188
Eigenformen und modale v. Mises-Spannungen, Motorträger	188
Anhang F.....	189
Anmerkungen zu gemessenen modalen Beanspruchungen.....	189
Anhang G.....	191
Datenblatt Dehnungsmessstreifen	191
Literaturverzeichnis.....	192

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1: Vorgehensweise für den Festigkeitsnachweis nach [6]	20
Abb. 2.1: Einmassenschwinger, krafteerregt	29
Abb. 2.2: Vergrößerungsfunktion des krafteerregten Einmassenschwingers	30
Abb. 2.3: Einmassenschwinger, fußpunkterregt	31
Abb. 2.4: Vergrößerungsfunktion des fußpunkterregten Einmassenschwingers	31
Abb. 2.5: Phasengang des Einmassenschwingers	32
Abb. 2.6: Verschiebungs-Antwortspektrum des El-Centro Erdbebens 1940 nach [64]	44
Abb. 3.1: Lebensdauer und Phasen des Versagenshergangs	47
Abb. 3.2: Approximation der dehnungsbasierten Wöhlerlinie durch Basquin- bzw. Coffin- Manson-Gleichung nach [73] (schematisch)	48
Abb. 4.1: Dynamisches System	52
Abb. 4.2: Eingangsgrößen	53
Abb. 4.3: Systemgrößen	53
Abb. 4.4: Ausgangsgrößen	54
Abb. 4.5: Bewertungsgrößen	54
Abb. 4.6: Balken auf zwei Stützen	56
Abb. 4.7: Modale Last über der Lastposition bei massennormierten Eigenvektoren ($0 \leq x \leq$ 500 mm)	58
Abb. 4.8: Modale Lasten bei Lastposition $x = 334$ mm (Knoten 335)	58
Abb. 4.9: Maxima der modalen Koordinaten bei Lastposition $x = 334$ mm (logarithmische Darstellung)	59
Abb. 4.10: Modale Lasten über der Lastposition bei steifigkeitsnormierten Eigenvektoren	59
Abb. 4.11: a) Vertikale Knotenverschiebung Mode 1, b) Vertikale Knotenverschiebung Mode 10, c) Modale v. Mises-Spannung Mode 1, d) Modale v. Mises-Spannung Mode 10... 61	61
Abb. 4.12: a) Modale v. Mises-Spannung Mode 10, massennormiert, b) Maxima der modalen v. Mises-Spannung, massennormiert	61
Abb. 4.13: a) Maxima der modalen v. Mises-Spannung, verschiebungsnormiert, b) Maxima der modalen v. Mises-Spannung, steifigkeitsnormiert	62
Abb. 4.14: Maxima der modalen Koordinaten aus Referenzlösung und entwickelter Methodik, Lastposition $x = 250$ mm (logarithmische Darstellung)	65
Abb. 4.15: Modale Lasten in Lastposition $x = 250$ mm	66
Abb. 4.16: Gewichtet überlagertes v. Mises-Spannungsfeld für Lastposition $x = 250$ mm	66
Abb. 4.17: Untersuchte Lastfälle für schmalbandige Anregung: a) einzeln resonante Anregung, b) einzeln resonanzferne Anregung, c) mehrfach resonante und resonanzferne Anregung, d) gemischt resonante und resonanzferne Anregung	69
Abb. 4.18: Relative Abweichung der Maxima der modalen Koordinaten zur Referenzlösung aller untersuchten Lastfälle, $\vartheta = 0.1$ %	71
Abb. 4.19: Vergrößerungsfunktion des krafteerregten Einmassenschwingers	73
Abb. 4.20: Maxima der modalen Koordinaten im Lastfall L35: a) Vergleich von Referenzlösung mit entwickelter Methodik, b) relative Abweichung, $\vartheta = 0.1$ %	73
Abb. 4.21: Superponiertes v. Mises-Spannungsfeld der Lastfälle L22 und L35: Referenz und entwickelter Wichtungskoeffizient, $\vartheta = 0.1$ %	74
Abb. 4.22: Relative Abweichung der superponierten v. Mises-Spannungen für alle untersuchten Lastfälle, $\vartheta = 0.1$ %	74
Abb. 4.23: a) Amplituden der m überlagerten Frequenzanteile, b) Fourier-Spektrum des Signals 75	75
Abb. 4.24: Relative Abweichungen der Maxima der modalen Koordinaten zur Referenzlösung aller untersuchter Lastfälle, $\vartheta = 20$ %	76
Abb. 4.25: Relative Abweichung der superponierten v. Mises-Spannungen für alle untersuchten Lastfälle, $\vartheta = 20$ %	76
Abb. 4.26: Superponiertes v. Mises-Spannungsfeld der Lastfälle L22 und L35: Referenz und entwickelter Wichtungskoeffizient, $\vartheta = 20$ %	77
Abb. 4.27: Superponiertes v. Mises Spannungsfeld, Lastfall L35, links: $\vartheta = 0.1$ %, rechts: $\vartheta =$ 20 %	77

Abb. 4.28: Modale Vergrößerungsfunktionen bei modaler Dämpfung $\vartheta = 20\%$	78
Abb. 4.29: Relative Abweichung der superponierten Beanspruchung von Referenzlösung und Wichtungskoeffizient für breitbandig angeregte Systeme, $\vartheta = 0.1\%$ (logarithmische Darstellung).....	78
Abb. 4.30: Modale Dämpfung bei Rayleigh-Koeffizienten $\alpha = 0.96$ und $\beta = 1 \cdot 10^{-6}$	79
Abb. 4.31: Maxima der modalen Koordinaten aus Referenzlösung und entwickelter Methodik, Lastposition $x = 500$ mm, Rayleigh-Dämpfung (logarithmische Darstellung).....	79
Abb. 4.32: Relative Abweichung der Maxima der modalen Koordinaten zur Referenzlösung aller untersuchten Lastfälle, Rayleigh-Dämpfung	80
Abb. 4.33: Relative Abweichung der superponierten v. Mises-Spannungen für alle untersuchten Lastfälle, Rayleigh-Dämpfung	80
Abb. 4.34: Berechnungsablauf zur Approximation des maximalen Beanspruchungsfeldes.....	83
Abb. 4.35: Elementtypen und Integrationspunkte: a) C3D8R, b) C3D8, c) S4R, d) Querschnitts-Integrationspunkte, S4R	84
Abb. 4.36: Bewertungsablauf und Detektion	85
Abb. 4.37: Einfluss der Frequenzkorrektur auf die Schädigung, a) breitbandige Anregung, b) schmalbandige Anregung.....	86
Abb. 5.1: Modell der untersuchten Verbundlenkerachse	90
Abb. 5.2: Gummi-Metall-Hinterachslager	91
Abb. 5.3: Schematische Darstellung der Lagersteifigkeiten	92
Abb. 5.4: Randbedingungen der Lagerachse	92
Abb. 5.5: Master (RP) und Slave Knoten (rot) der Zwangsbedingung MPC	93
Abb. 5.6: Untersuchte Systemkonfigurationen. a) Konfiguration 1, b) Konfiguration 2.....	94
Abb. 5.7: Untersuchte Lastfälle, a) und b) einseitiges Einfedern, c) wechselseitiges Einfedern, d) beidseitiges Einfedern.....	95
Abb. 5.8: Modale Dämpfung der proportional gedämpften Systeme a) Konfiguration 1, b) Konfiguration 2.....	95
Abb. 5.9: Maxima der modalen Koordinaten und Wichtungskoeffizienten für $\vartheta_i = 0.2\%$, a) einseitiges Einfedern, Konfiguration 1, b) einseitiges Einfedern, Konfiguration 2, c) beidseitiges Einfedern, Konfiguration 2, d) wechselseitiges Einfedern, Konfiguration 2.....	96
Abb. 5.10: Maxima der modalen Koordinaten und Wichtungskoeffizienten bei Rayleigh-Dämpfung a) einseitiges Einfedern, Konfiguration 1, b) einseitiges Einfedern, Konfiguration 2, c) beidseitiges Einfedern, Konfiguration 2, d) wechselseitiges Einfedern.....	97
Abb. 5.11: Überlagertes von Mises-Spannungsfeld in Konfiguration 1, $\vartheta = 0.2\%$, Frequenzbereichslösung.....	97
Abb. 5.12: Überlagerte v. Mises-Elementspannungen, normierte Darstellung.....	98
Abb. 5.13: Detektierte versagenskritische Strukturbereiche (rot), Grenzwert $\sigma_{th} = 0.87 \cdot \sigma_{max}$	98
Abb. 5.14: Detektierte versagenskritische Strukturbereiche, Grenzwert $\sigma_{th} = 0.55 \cdot \sigma_{max}$	99
Abb. 5.15: Einseitiges Einfedern, Konfiguration 1 a) Modale Lasten, b) Wichtungskoeffizienten	99
Abb. 5.16: Wichtungskoeffizienten für wechselseitiges Einfedern, Konfiguration 2, a) konstante modale Dämpfung $\vartheta = 0.2\%$, b) Rayleigh-Dämpfung	100
Abb. 5.17: Maxima der modalen Koordinaten (Referenz) und Wichtungskoeffizienten (a priori), Einseitiges Einfedern, Konfiguration 1, transient, a) $\vartheta = 0.2\%$ b) Rayleigh-Dämpfung (logarithmisch).....	101
Abb. 5.18: Relative Abweichung zur Referenzlösung a) $\vartheta = 0.2\%$, b) Rayleigh-Dämpfung....	102
Abb. 5.19: Maximum des dynamischen v. Mises-Spannungsfeldes	102
Abb. 5.20: Wöhlerlinie der durchgeführten Lebensdaueranalysen.....	103
Abb. 5.21: Logarithmische Darstellung der Lebensdauer (Lastzyklen), einseitiges Einfedern, $\vartheta = 0.2\%$	104
Abb. 5.22: Tatsächlich versagenskritische Elemente (rot) und Ergebnis der entwickelten Methodik (blau), Verbundlenkerachse.....	105
Abb. 5.23: Numerisches Simulationsmodell des untersuchten PKW-Motorträgers.....	106

Abb. 5.24: Geometrische Randbedingungen am Motorträger, rot markierte Bereiche fixiert.....	106
Abb. 5.25: Lastbedingungen am Motorträger a) Knoten der Motorlager-Anbindung, b) Aufgebrachtes Kräftepaar	107
Abb. 5.26: Modale Dämpfung, Motorträger	108
Abb. 5.27: Links: Maxima der modalen Koordinaten (Referenz) und Wichtungskoeffizienten (a priori), rechts: Relative Abweichung zur Referenzlösung für alle untersuchten Motordrehzahlen	109
Abb. 5.28: Modale Lasten, Motorträger	111
Abb. 5.29: Resultierende Anregungsspektren der untersuchten Motordrehzahlen (blau) und Eigenfrequenzen des Systems (schwarz)	112
Abb. 5.30: Überlagertes v. Mises-Spannungsfeld, Drehzahl $n = 1000 \text{ min}^{-1}$, a) Referenzlösung, b) Entwickelte Methodik	113
Abb. 5.31: Überlagertes v. Mises-Spannungsfeld, Drehzahl $n = 6000 \text{ min}^{-1}$, a) Referenzlösung, b) Entwickelte Methodik	113
Abb. 5.32: Relative Abweichungen der v. Mises-Spannungen auf Element-Ebene, (links) Drehzahl $n = 1000 \text{ min}^{-1}$, (rechts) Drehzahl $n = 6000 \text{ min}^{-1}$	114
Abb. 5.33: Ergebnisse der transient-dynamischen Untersuchungen, Drehzahl $n = 6000 \text{ min}^{-1}$, a) Maximale v. Mises-Spannung, b) Lebensdauer in Lastzyklen (logarithmisch)	115
Abb. 5.34: Tatsächlich versagenskritische Elemente (rot) und Ergebnis der entwickelten Methodik (blau)	116
Abb. 6.1: Untersuchtes System	121
Abb. 6.2: Lagerungskonzept Festlager, a) konstruktive Umsetzung, b) schematische Schnittansicht	122
Abb. 6.3: Konstruktive Umsetzung der Lasteinleitung	122
Abb. 6.4: Versuchsaufbau	123
Abb. 6.5: Vergrößerungsfunktion für die Wegantwort bei Kraftanregung	125
Abb. 6.6: Frequenzgang-Abschnitt, Mode 9	126
Abb. 6.7: Modale Dämpfung durch Curve-Fit, Mode 9 mit Halbwertsbreite	127
Abb. 6.8: Experimentell ermittelte Eigenformen (Balkenlängsachse vertikal)	128
Abb. 6.9: Ersatzmodell des Versuchsaufbaus	129
Abb. 6.10: Grafischer Vergleich numerischer und analytischer Lösung, Mode 10	131
Abb. 6.11: MAC-Matrix: FEM-Experimentell, Startmodell	131
Abb. 6.12: Grafischer Vergleich der Eigenformen, Startmodell	132
Abb. 6.13: Modifiziertes Simulationsmodell	133
Abb. 6.14: MAC-Matrix FEM-Experiment, modifiziertes Modell	134
Abb. 6.15: Grafischer Vergleich der Eigenformen, modifiziertes Modell	135
Abb. 6.16: Vergleich der Übertragungsfunktion, FEM-Experiment (logarithmisch)	136
Abb. 6.17: Experimentell untersuchte Lastfälle (Auswahl)	137
Abb. 6.18: Vergleich von Experiment und numerischer Vorhersage, Lastfälle L1 und L2, a) und b) Verschiebungen, c) und d) ermittelte modale Wichtungskoeffizienten	137
Abb. 6.19: Vergleich von Experiment und numerischer Vorhersage, Lastfälle L3 und L4, a) und b) Verschiebungen, c) und d) ermittelte modale Wichtungskoeffizienten	138
Abb. 6.20: Vergleich von Experiment und numerischer Vorhersage, Lastfälle L7 und L8, a) und b) Verschiebungen, c) und d) ermittelte modale Wichtungskoeffizienten	138
Abb. 6.21: Überlagertes v. Mises-Spannungsfeld, a) Lastfall L2, b) Lastfall L3	139
Abb. 7.1: Versuchsaufbau	141
Abb. 7.2: Hinterachslager a) Draufsicht b) Frontansicht	141
Abb. 7.3: Randbedingungen a) Einspannung Draufsicht, b) Einspannung Seitenansicht, c) Lasteinleitung	142
Abb. 7.4: a) Numerische Vorhersage festigkeitsrelevanter Regionen b) Ausgewählte Messpositionen	143
Abb. 7.5: Dehnungsmessrosette in Messposition 5	144
Abb. 7.6: Dehnungsmessrosette mit Bezugskordinatensystem	144
Abb. 7.7: Belastungszyklus	145
Abb. 7.8: von Mises-Spannungsfeld bei statischer Auslenkung um $u = 30 \text{ mm}$	146

Abb. 7.9: von Mises-Spannungsfeld und Messpositionen	147
Abb. 7.10: Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Hauptdehnungen, Messpositionen 1-4	147
Abb. 7.11 Links: Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Hauptdehnungen in Messpositionen 5, rechts: Vergleich numerisch und experimentell ermittelter v. Mises-Spannung aller Messpositionen	148
Abb. 7.12: Modale Lasten im Lastfall einseitiges Einfedern	149
Abb. 7.13: Wichtungskoeffizienten Γ_b, i , Lastfall einseitiges Einfedern	149
Abb. 7.14: Ausgebildeter Riss bei Versuchsende, Vorderansicht außen	151
Abb. 7.15: Ausgebildeter Riss bei Versuchsende, Unteransicht außen	151
Abb. 7.16: Ausgebildeter Riss bei Versuchsende, Innenansicht	151
Abb. 7.17: Freigelegte Bruchflächen	152
Abb. 7.18: Bereicheinteilung der freigelegten Bruchflächen	153
Abb. 7.19: Detailansicht Bereich 1, hervorgehobene Chevronlinien	153
Abb. 7.20: Detailansicht Bereich 1, Stufen ausgehend von Schweißnahtoberfläche	154
Abb. 7.21: Detailansicht Übergang Bereich 1 und 2, Bruchbahnen und Stufen	154
Abb. 7.22: Detailansicht Schädigung im Bereich der Nahtwurzel	154
Abb. 7.23: Detailaufnahme Scherlippe im Bereich 2	155
Abb. 7.24: Höhenprofil und Winkelmessung der Scherlippe, Bereich 2	155
Abb. 7.25: Detailaufnahme Bereich 3, Merkmale für Sprödbbruch	156
Abb. 7.26: Hauptspannungen aller Messpositionen über den Versuchsverlauf	157
Abb. 7.27: Hauptspannungsrichtungen aller Messpositionen über den Versuchsverlauf	157
Abb. 7.28: Reaktionskraft am Lastangriff über den Versuchsverlauf	158
Abb. 7.29: Spannungszustand Pos. 5, rissfrei	158
Abb. 7.30: Spannungszustand Pos. 5, maximale Hauptspannung	159
Abb. 7.31: Spannungszustand Pos. 5, maximaler Hauptspannungswinkel	159
Abb. 7.32: Spannungszustand Pos. 5, Versuchsende	160
Abb. 7.33: Hypothese zum Schädigungsverlauf	160
Abb. 7.34: von Mises-Beanspruchungsfeld aus entwickelter Methodik	161
Abb. 7.35: Vergleich des Schadensbildes mit numerisch detektierten versagenskritischen Regionen	161
Abb. 7.36: Asymmetrische Gewindebohrungen	161
Abb. 7.37: Detektierte versagenskritische Strukturbereiche	162

Tabellenverzeichnis

Tab. 4.1: Anregungsfrequenzen.....	70
Tab. 5.1: Elementtypen und Elementanzahl der einzelnen Baugruppen	90
Tab. 5.2: Elastische Eigenschaften der Hinterachslager	92
Tab. 5.3: Eigenfrequenzen beider Systemkonfigurationen in Hz	94
Tab. 5.4: Vergleich versagenskritischer und detektierter Elemente, Verbundlenkerachse.....	105
Tab. 5.5: Motorparameter des Belastungsmodells.....	107
Tab. 5.6: Eigenfrequenzen des Motorträgers in Hz (ohne Motor).....	107
Tab. 5.7: Vergleich versagenskritischer und detektierter Elemente, Motorträger	116
Tab. 5.8: Eckdaten des verwendeten Rechners.....	116
Tab. 5.9: CPU-Zeiten der durchgeführten Referenzanalysen.....	117
Tab. 5.10: Dateigrößen der durchgeführten Referenzanalysen	117
Tab. 5.11: CPU-Zeiten der entwickelten Methodik.....	117
Tab. 5.12: Dateigrößen der entwickelten Methodik	118
Tab. 5.13: Verhältnis des numerischen Aufwandes: Entwickelte Methodik zu Referenzlösung .	118
Tab. 6.1: Systemgrößen des untersuchten Biegebalkens	121
Tab. 6.2: Verwendete Messtechnik	123
Tab. 6.3: Experimentell ermittelte Eigenfrequenzen und modale Dämpfung	127
Tab. 6.4: Systemgrößen des realen Versuchsaufbaus.....	130
Tab. 6.5: Vergleich von numerischer und analytischer Lösung: Eigenfrequenzen und MAC	130
Tab. 6.6: Gegenüberstellung numerischer Ergebnisse mit Messergebnissen, Startmodell	131
Tab. 6.7: Untersuchte Einflussgrößen am Balkenmodell	133
Tab. 6.8: Ergebnis der durchgeführten Parameterstudien.....	134
Tab. 6.9: Gegenüberstellung numerischer Ergebnisse mit Messergebnissen, Modifiziertes Modell.....	134
Tab. 7.1: Standardabweichung, Wahrscheinlichkeiten und zugehörige Lastamplituden	143
Tab. 7.2: Materialkennwerte der untersuchten Struktur	145

Symbolverzeichnis

a_m	Amplitude
$A_1(\eta)$	Amplitudengang, Krafterregt
$A_i(\eta_i)$	modaler Amplitudengang
\mathbf{B}_e	Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix
b	Ermüdungsfestigkeitsexponent
c	Dämpfungskonstante
c_i	modale Dämpfungskonstante
c	Ermüdungsduktilitätsexponent
\mathbf{C}	Dämpfungsmatrix
$\text{diag}(c_i)$	diagonalisierte Dämpfungsmatrix
$\text{diag}(k_i)$	diagonalisierte Steifigkeitsmatrix
$\text{diag}(m_i)$	diagonalisierte Massenmatrix
$\mathbf{d}(t)$	Knotenverschiebungen
$\dot{\mathbf{d}}(t)$	Knotengeschwindigkeiten
$\ddot{\mathbf{d}}(t)$	Knotenbeschleunigungen
\mathbf{d}_e	Elementknotenverschiebungsvektor
$\delta \mathbf{d}_e$	virtuelle Elementknotenverschiebung
$\ddot{\mathbf{d}}_e$	Elementknotenbeschleunigung
$\hat{\mathbf{d}}(\Omega)$	komplexe Amplituden der Knotenverschiebungen
\mathbf{D}	Differentialoperatormatrix
$e_{\text{rel},i}$	relative Abweichung
E	E-Modul
E_i	relativer Fehler
\mathbf{E}	Einheitsmatrix
\hat{f}_i	modale Lastamplitude
\check{f}_i	Beteiligungsfaktor
$f(t)$	Lastverlauf
f	Frequenz
Δf	Frequenzauflösung
f_{exp}	experimentell ermittelte Eigenfrequenz
f_{FEM}	numerisch ermittelte Eigenfrequenz
f_{max}	maximale Anregungsfrequenz
$f_{0,m}$	Erregerfrequenz in Eigenfrequenz
$f_{z,m}$	Erregerfrequenz zwischen Eigenfrequenzen
\mathbf{f}	Vektor äußerer Einzellasten
$\hat{\mathbf{F}}$	komplexe Lastamplitude
$\hat{\mathbf{F}}$	Lastrichtungsvektor / Lastvektor
$\hat{\mathbf{F}}_e$	Vektor der äquivalenten Elementknotenkräfte
$\hat{\mathbf{F}}_R$	komplexe Anregung der Starrkörperfreiheitsgrade
$F(t)$	Lastfunktion
$\mathbf{F}(\Omega)$	Lastvektor im Frequenzbereich
F_{max}	maximale Lastamplitude
\mathbf{F}_R	Anregung der Starrkörperfreiheitsgrade
F_z	Lastamplitude
\mathbf{G}_i	dyadisches Produkt der Eigenvektoren
\mathbf{H}	Hookesche Matrix
$H_1(j\eta)$	Frequenzgang, krafterregtes System

$H_2(j\eta)$	Frequenzgang, Weganregung
$H_i(j\eta_i)$	modaler Frequenzgang
$H_{ij,u}(j\eta)$	Rezeptanz
$H_{ij,v}(j\eta)$	Mobilität
$H_{ij,a}(j\eta)$	Akzeleranz
$\mathbf{H}(j\eta)$	Frequenzgangmatrix
$\mathbf{H}^\xi(j\eta)$	Frequenzgangmatrix der Beanspruchungsgrößen
\mathbf{I}_3	Einheitsmatrix, 3x3
k	Federsteifigkeit
k	Neigungszahl Wöhlerlinie
k_i	modale Steifigkeit
k_i^e	modale Steifigkeit eines Elementes
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_e	Elementsteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_{BB}	Steifigkeitsmatrix Basis-Basis
\mathbf{K}_{BE}	Steifigkeitsmatrix Basis-Elastisch
\mathbf{K}_{EB}	Steifigkeitsmatrix Elastisch-Basis
\mathbf{K}_{EE}	Steifigkeitsmatrix Elastisch-Elastisch
\mathbf{L}	modaler Partizipationsfaktor
L	Balkenlänge
L_a	Anregungsposition
m	Masse
m_i	modale Masse
m_s	bewegte Masse
M	Massenmoment
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{M}_e	Elementmassenmatrix
\mathbf{M}_0	Starrkörpermassenmatrix
n	Drehzahl
N_i	Ansatzfunktion
\mathbf{N}_e	Matrix der Ansatzfunktionen
N_{krit}	Grenzwahrscheinlichkeit versagenskritischer Elemente
N_{min}	minimale Wahrscheinlichkeit
N	Wahrscheinlichkeit
N	Stützstellen der FFT
N_f	Bruchlastwechsel
N_D	Grenzwahrscheinlichkeit
\mathbf{p}	Vektor der Volumenlasten
$\mathbf{p}(t, \Omega)$	Matrix der Lastfunktionen
$p(t)$	Lastfunktion
P	Wahrscheinlichkeit
$P(\Omega, \Omega_n)$	Fourier-Transformierte des Anregungssignals
$\hat{q}_i(\Omega, \eta)$	komplexe Amplitude modaler Koordinaten, Frequenzbereich
$q_i(t)$	modale Koordinate
$q_{max,i}$	Maximum modaler Koordinaten
$\mathbf{q}_{max,i}$	Vektor der Maxima modaler Koordinaten in allen Lastpositionen
$\dot{q}_i(t)$	modale Geschwindigkeit
$\ddot{q}_i(t)$	modale Beschleunigung
$\hat{\mathbf{q}}(\Omega)$	komplexe Amplituden modaler Koordinaten
$\mathbf{q}(t)$	modale Koordinaten

$\dot{\mathbf{q}}(t)$	modale Geschwindigkeiten
$\ddot{\mathbf{q}}(t)$	modale Beschleunigungen
$\mathbf{q}(\Omega)$	modale Koordinaten, Frequenzbereich
$q_{E,i}(t)$	modale Koordinate, elastisch
$q_{R,j}(t)$	modale Starrkörperverschiebung
$\hat{\mathbf{q}}_E$	komplexe Amplituden der modalen Koordinaten, elastisch
\hat{q}_E	komplexe Amplituden der modalen Koordinate, elastisch
$\hat{\mathbf{q}}_R$	komplexe Amplituden modaler Starrkörperverschiebungen
\mathbf{q}_E	modale Koordinaten, elastisch
$\dot{\mathbf{q}}_E$	modale Geschwindigkeiten, elastisch
$\ddot{\mathbf{q}}_E$	modale Beschleunigungen, elastisch
\mathbf{q}_R	modale Starrkörperverschiebungen
$\dot{\mathbf{q}}_R$	modale Starrkörpergeschwindigkeiten
$\ddot{\mathbf{q}}_R$	modale Starrkörperbeschleunigungen
$Q_i(t)$	normierte modale Koordinate
$\hat{\mathbf{R}}$	Richtungsvektor, Weganregung
r	Kurbelradius
$\hat{\mathbf{S}}(\Omega, \eta)$	allgemeine komplexe Beanspruchungsgröße, Frequenzbereich
$\mathbf{S}(t)$	allgemeine Beanspruchungsgröße im Zeitbereich
\mathbf{S}_{\max}	approximiertes maximales Beanspruchungsfeld
t	Zeit
Δt	Zeitauflösung
T_h	Faktor der Bruchlastwechsel
\hat{U}	komplexe Amplitude, Weganregung
$u(t)$	Weganregung
u	Verschiebungsamplitude
$\ddot{u}(t)$	Fußpunktbeschleunigung
\mathbf{u}	Verschiebungsfeld
$\dot{\mathbf{u}}$	Geschwindigkeitsfeld
$\ddot{\mathbf{u}}$	Beschleunigungsfeld
\mathbf{u}_{\max}	obere Schranke der Verschiebungen
u_{\max}	maximale Verschiebung
u_{\min}	minimale Verschiebung
\mathbf{u}_e	Element-Verschiebungsfeld
$\delta \mathbf{u}_e$	virtuelle Verschiebung (Element)
$\delta \mathbf{u}$	virtuelle Verschiebung
Δu	Verschiebungsinkrement
\mathbf{v}	Vektor der Oberflächenlasten
$V_i(\eta_i)$	modale Vergrößerungsfunktion
$V_1(\eta)$	Vergrößerungsfunktion, kraftherregt
$V_2(\eta)$	Vergrößerungsfunktion, Weganregung
$V_{i,\max}$	Maximum der Vergrößerungsfunktion
w_i^e	spezifische Formänderungsenergie im Element
W_i^e	Formänderungsenergie im Element
δW_a	äußere virtuelle Arbeit
δW_i	innere virtuelle Arbeit
\hat{x}	Verschiebungsamplitude
\hat{X}	komplexe Verschiebungsamplitude
x	Verschiebung
\dot{x}	Geschwindigkeit

\ddot{x}	Beschleunigung
$x(t)$	stationäre Systemantwort, Absolutbewegung
$x(\Omega)$	stationäre Systemantwort
x_0	statische Auslenkung
x_r	relative Verschiebung
\dot{x}_r	relative Geschwindigkeit
\ddot{x}_r	relative Beschleunigung
\mathbf{X}	Modalmatrix
$\mathbf{X}(j\Omega)$	Fourier-Transformierte des Systemausgangs
α, β	Parameter der Rayleigh-Dämpfung
α, β, γ	Messrichtungen Dehnungsmessrosette
$\alpha_i(\eta_i)$	modaler Phasengang
α_k	Formzahl
α_m	Phasenverschiebung
α_h	Phasenwinkel, Frequenzgang
α_p	Phasenwinkel, Anregung
β_k	Kerbwirkungszahl
$\Gamma_{b,i}$	modaler Wichtungskoeffizient, breitbandige Krafterregung
$\Gamma_{fb,i}$	modaler Wichtungskoeffizient, breitbandige Fußpunkterregung
$\Gamma_{s,i}$	modaler Wichtungskoeffizient, schmalbandige Krafterregung
$\mathbf{\Gamma}_{s,i}$	Vektor modaler Wichtungskoeffizienten, aller Lastpositionen
$\Gamma_{fs,i}$	modaler Wichtungskoeffizient, schmalbandige Fußpunkterregung
δ_i	modale Abklingkonstante
δ_{ij}	Kronecker-Delta
$\Delta\varepsilon_e/2$	elastische Dehnungsamplitude
$\Delta\varepsilon_p/2$	plastische Dehnungsamplitude
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungstensor
$\varepsilon_{1,2}$	Hauptdehnungen
ε_α	Dehnung in Messrichtung α
ε_β	Dehnung in Messrichtung β
ε_γ	Dehnung in Messrichtung γ
$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$	virtuelle Verzerrungen
$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	Element-Verzerrungen
$\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$	modale Verzerrungen im Element
ε'_f	Ermüdungsduktilitätskoeffizient
η	Abstimmung, Frequenzverhältnis
η_i	modale Abstimmung, modales Frequenzverhältnis
$\eta_{res,i}$	Abstimmung in Resonanz
θ	Hauptspannungsrichtung
ϑ	Dämpfungsgrad
ϑ_i	modale Dämpfung
λ	Pleuelstangenverhältnis
$\mathbf{\Lambda}$	Spektralmatrix
ν	Querkontraktionszahl
ξ_i	allgemeine modale Beanspruchungsgröße
ρ	Dichte
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor
$\sigma_{1,2}$	Hauptspannungen
$\Delta\sigma/2$	wahre Spannungsamplitude
$\Delta\sigma_V/2$	Vergleichsspannungsamplitude

σ_a	Vergleichsspannungsamplitude
$\sigma_{a,\max}$	maximale Vergleichsspannungsamplitude
$\Delta\sigma_{\max}/2$	maximale Vergleichsspannungsamplitude
σ_{\max}	maximale Vergleichsspannung
σ_n	Nennspannung
σ_{peak}	maximale Spannung im Kerbgrund
σ_{th}	Grenzspannungsamplitude versagenskritischer Elemente
σ_i^e	Modale Spannung im Element
σ'_f	Ermüdungsfestigkeitskoeffizient
σ_D	Dauerfestigkeit, ungekerbte Probe
σ_{DK}	Dauerfestigkeit, gekerbte Probe
φ	Phasenwinkel
$\varphi(\eta)$	Phasengang
Φ_i	Eigenvektor, elastische Mode
$\bar{\Phi}_i$	steifigkeitsnormierter Eigenvektor
$\Phi_{E,i}$	elastische Mode
Φ_i^e	modale Elementknotenverschiebung
$\Phi_{E,E}$	elastische Mode, elastische Freiheitsgrade
$\Phi_{R,E}$	Starrkörpermode, elastische Freiheitsgrade
$\Phi_{R,B}$	Starrkörpermode, starrkörperfreiheitsgrade
$\Phi_{R,j}$	Starrkörpermode
Φ_{stat}	statisches Verschiebungsfeld
Φ	Modalmatrix der Starrkörpermoden
Φ_i	modales Verschiebungsfeld
Φ_i^e	modales Verschiebungsfeld im Element
χ_i	modales Spannungsfeld
$\bar{\chi}_i$	steifigkeitsnormiertes modales Spannungsfeld
Ψ_i	modales Verzerrungsfeld
$\bar{\Psi}_i$	steifigkeitsnormiertes modales Verzerrungsfeld
ω	Winkelgeschwindigkeit
ω_0	Eigenkreisfrequenz
$\omega_{0,i}$	i-te Eigenkreisfrequenz
ω_i^2	Eigenwert
Ω	Erregerkreisfrequenz
Ω_n	Frequenzschritt
Ω_m	diskrete Erregerkreisfrequenz

Abkürzungen

CMS	Component Mode Synthese
CPU	Central Processing Unit
DIC	Digital Image Correlation
DMS	Dehnungsmessstreifen
E-N	Strain-Life
ESPI	Electric Speckle Pattern Interferometry
EWP	Eigenwertproblem
FE	Finite Elemente
FEM	Finite Elemente Methode
FFT	Fast Fourier Transformation
FHG	Freiheitsgrad
FKM	Forschungskuratorium Maschinenbau
HCF	High Cycle Fatigue
I/O	Input/Output
LCF	Low Cycle Fatigue
MAC	Modal Assurance Criterion
MAM	Mode Acceleration Method
MKS	Mehrkörpersimulation
MPC	Multipoint Constraint
MPF	Modal Participation Factor
NVH	Noise Vibration Harshness
PKW	Personenkraftwagen
RSA	Response Spectrum Analysis
SDOF	Single Degree Of Freedom
SIMO	Single Input Multiple Output
S-N	Stress-Life
TU	Technische Universität
ULCF	Ultra Low Cycle Fatigue
VHCF	Very High Cycle Fatigue
XFEM	Extended FEM

1 Einleitung

Der Einsatz computergestützter Werkzeuge hat im modernen Produktentwicklungsprozess in den vergangenen Jahrzehnten einen hohen Stellenwert erlangt. Waren numerische Simulationen in der Vergangenheit oft auf kosten- und zeitintensive Einzeluntersuchungen begrenzt, ist die Simulation heute dank flächendeckender Verfügbarkeit hoher Rechenleistung und leistungsstarker Datenspeicher ein fester Bestandteil des virtuellen Entwicklungsprozesses. Der Einsatz der Finiten-Elemente-Methode (FEM) stellt hier vor allem im Bereich der Festkörpermechanik eines der wichtigsten Werkzeuge des modernen Ingenieurs dar. Mit ihrer Hilfe können vormals aufwendige Untersuchungen bereits in frühen Entwicklungsstadien durchgeführt und kostenintensive experimentelle Untersuchungen auf ein Minimum reduziert werden [1]. Abseits ökonomischer Aspekte bietet dabei die frühe Einbindung von numerischen Verfahren in den Entwicklungsprozess ein hohes Potenzial zur Gestaltung von masse- und topologieoptimierten Strukturen [2]. Stellten in der Vergangenheit noch die klassischen Fertigungsverfahren eine technologische sowie wirtschaftliche „natürliche“ Grenze dar, können heute mit den verfügbaren modernen Verfahren der additiven Fertigung nahezu beliebige Geometrien wirtschaftlich rentabel erzeugt werden [3]. Die mit der fortschreitenden Strukturoptimierung einhergehende Massenreduktion sowie die weitgehende Ausnutzung von Tragfähigkeitsreserven stellt damit neue Herausforderungen an die festigkeitgerechte und bruchssichere Auslegung von Bauteilen, Maschinen und Anlagen. Die aus dem Optimierungsprozess resultierenden, häufig dünnwandigen Strukturen des modernen Leichtbaus beispielsweise aus der Luft- und Raumfahrt sowie der Automobilindustrie zeigen oft eine höhere Empfindlichkeit gegenüber dynamischer Belastung und Versagen [4]. Die zuverlässige Auslegung von Strukturen und Bauteilen vor dem Hintergrund dynamischer Beanspruchungen rückt damit zunehmend in den Fokus der täglichen industriellen Anwendung.

Eine der Kernaufgaben der festigkeitgerechten Auslegung dynamisch belasteter Strukturen ist die Ermittlung vorliegender Beanspruchungen für den Abgleich mit zulässigen Werten aus den jeweils anzuwendenden Richtlinien und Normen [5]. Die grundlegende Vorgehensweise für den allgemeinen Festigkeitsnachweis ist in Abb. 1.1 dargestellt.

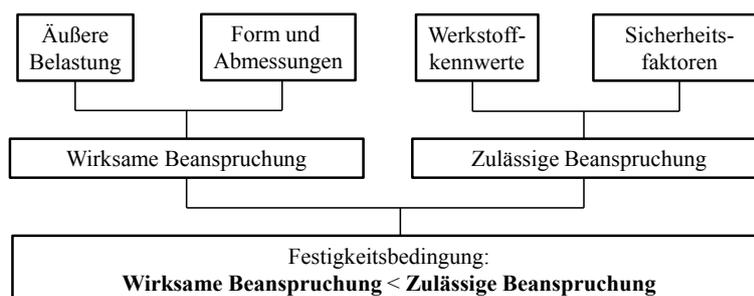


Abb. 1.1: Vorgehensweise für den Festigkeitsnachweis nach [6]

Die Definition, welche Bereiche für einen Festigkeitsnachweis von Interesse sind, ist dabei beispielsweise in der Richtlinie "Rechnerischer Festigkeitsnachweis von Maschinenbauteilen" des Forschungskuratoriums Maschinenbau (FKM) wie folgt formuliert:

„Nachweispunkte sind die Punkte im Bauteil mit den höchsten Auslastungsgraden, d. h. mit dem höchsten Quotienten aus Beanspruchung und Festigkeit. Unter Umständen sind mehrere versagenskritische Punkte zu bewerten, um die höchste Auslastung des Bauteils zu ermitteln.“ [7]

Dies setzt im Allgemeinen die Kenntnis der Beanspruchung zu jeder Zeit und in jedem Punkt voraus und resultiert für dynamisch belastete Strukturen i. d. R. in der Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung des zu untersuchenden Systems. Um das dynamische Beanspruchungsfeld komplexer Strukturen detailliert abzubilden, kommen hierzu fein vernetzte FE-Modelle zum Einsatz, wodurch die Anzahl der Freiheitsgrade in industrieller Anwendung weit über 10^7 steigen kann. Mit steigender geometrischer Komplexität und immer größeren Systemen steigen dabei gleichzeitig die Anforderungen an die Effizienz numerischer Berechnungsverfahren sowie an die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Simulation. Der entstehende numerische Aufwand und die damit verbundenen Kosten zeigen hierbei einen überproportionalen Anstieg [8]. Der allgegenwärtige Konflikt zwischen Reduktion von Kosten und gleichzeitiger Erhöhung von Genauigkeit und Zuverlässigkeit immer komplexer werdender Modelle ist dabei der Treiber anhaltender Innovationen bei der Entwicklung strukturdynamischer Berechnungsverfahren [9].

Gängige Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichung strukturdynamischer Systeme können allgemein in die Kategorien der direkten und der modalen Methoden eingeordnet werden. Finden direkte Integrationsverfahren hauptsächlich Anwendung für nichtlineare oder stark gedämpfte Systeme, kann der numerische Aufwand linearer Berechnungen durch modale Lösungsansätze auf nur einen Bruchteil der direkten Lösung des Gesamtsystems reduziert werden [10]. Die ersten Überlegungen zur modalen Superposition können hierbei den Werken von Daniel Bernoulli und Leonhard Euler zu Saitenschwingungen in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts zugeordnet werden. Der historisch interessierte Leser sei an dieser Stelle auf eine Zusammenfassung des kontroversen Briefwechsels zwischen Bernoulli und seinen Zeitgenossen Euler und D'Alembert in [11] verwiesen.

Basierend auf der modalen Entkopplung des Bewegungsgleichungssystems erfolgt die Lösung z. B. für schwach proportional gedämpfte Systeme durch die unabhängige Lösung von Einfreiheitsgradsystemen in den modalen Koordinaten. Die Erzeugung der Gesamtlösung erfolgt durch Superposition der ermittelten modalen Anteile [12]. Allgemein kann die Methode der modalen Superposition damit als Ritz-Ansatz zur Lösung des Bewegungsgleichungssystems auf Basis von Ansatzfunktionen und freien Koeffizienten interpretiert werden. Mit den Eigenvektoren als Ansatzfunktionen findet sich dabei ein Set optimaler Lösungsansätze, die sowohl alle kinematischen Randbedingungen erfüllen als auch per se die innere Dynamik des Systems widerspiegeln [13]. Die primäre Unbekannte des Systems stellt dabei in der Formulierung über die Eigenvektoren die Verschiebung dar.

Die für die dynamische Auslegung häufig relevanteren Beanspruchungen werden anschließend aus den überlagerten Verschiebungsverläufen abgeleitet, was besonders bei großen Systemen zu einem erheblichen numerischen Aufwand führt. Untersuchungen der Automobilindustrie zeigen, dass dieser bei entsprechend langen Simulationsereignissen auf bis zu 99 % der Rechenzeit beziffert werden kann [14].

Zur Steigerung der Effizienz haben daher in den vergangenen Jahrzehnten Methoden unter Verwendung modaler Beanspruchungsfelder in der Analyse dynamisch beanspruchter Strukturen hohe Bedeutung erlangt. Diese gehen ursprünglich auf Verfahren der dehnungsbasierten experimentellen Modalanalyse und die damit verbundenen Themengebiete der Strukturüberwachung und Schädigungsdetektion zurück [15]. Da die Ableitung von Dehnungsgrößen aus gemessenen Verschiebungsfeldern erfahrungsgemäß eine anspruchsvolle Aufgabe darstellt, erfolgt die Ermittlung der Strukturantwort und die Bestimmung modaler Systemgrößen hier direkt aus Dehnungsmessungen [16]. Die Beschreibung des Systemverhaltens kann demnach durch die Überlagerung modaler Dehnungsfelder erfolgen [17]. Die Adaption für die numerische Simulation erfolgt über die aus den Eigenvektoren abgeleiteten Dehnungs- und Beanspruchungsgrößen und findet seither ebenfalls ein breites Anwendungsgebiet, vor allem in der Betriebsfestigkeits- und Lebensdaueranalyse großer Strukturen [18].

Modale Superpositionsmethoden sind in nahezu allen Themenfeldern der technisch-physikalischen Beschreibung dynamischer Vorgänge vertreten und finden insbesondere Anwendung bei der dynamischen Spannungsanalyse großer struktureller Systeme im Automobilbau [19] sowie in der Luft- und Raumfahrt und im Bauwesen [20]. Für die Berechnung linearer Systeme ist die modale Superposition heute fester Bestandteil kommerzieller Softwarelösungen und kann auf dem Gebiet der dynamischen Analyse von Festkörpern als etablierte Standardmethode betrachtet werden.

Die Frage, ob eine Struktur den gegebenen Belastungen standhält, kann damit zweifelsohne beantwortet werden. Durch die Kombination von langen Belastungsverläufen und detaillierten Berechnungsmodellen stößt hierbei jedoch insbesondere die numerische Spannungs- und Lebensdaueranalyse noch heute an die Grenzen wirtschaftlich vertretbarer Berechnungen [21]. Dies kann vor allem auf die aus der Modellgröße resultierenden hohen Datenmengen zurückgeführt werden. Diese ergeben sich zum einen direkt aus den Beanspruchungs-Zeit-Verläufen der dynamischen Spannungsberechnung, zum anderen erhöht sich der numerische Aufwand durch die Bewertung der Beanspruchungsfelder auf Basis des dynamischen Festigkeitsnachweises, abhängig von der anzuwendenden Methode, um ein Vielfaches [22].

Eine Auswertung der Ergebnisse industrieller Spannungsanalysen zeigt dabei, dass die Bereiche hoher Beanspruchung typischerweise auf lokale Regionen des Gesamtsystems begrenzt sind. Der Anteil eines Modells, das von tatsächlich festigkeitsrelevantem Interesse ist, kann Untersuchungen der Automobilindustrie zufolge auf etwa 1 % des Gesamtmodells beziffert werden [12]. Insbesondere bei dynamisch belasteten Strukturen sind Bereiche, die für detailliertere Analysen und experimentelle Validierung relevant sind, im Voraus oft unbekannt und müssen durch aufwendige numerische Untersuchungen abgeschätzt werden. Speziell in der numerischen

Lebensdaueranalyse spielt dabei die Filterung sogenannter Hot-Spot-Bereiche bereits heute eine wichtige Rolle, um aufwendige Analysemethoden lediglich auf versagenskritische Strukturregionen zu begrenzen [23].

Es zeigt sich demnach ein großes Potenzial zur Reduktion des numerischen Aufwandes, wenn die Problemstellung, ob eine Struktur den vorgesehenen Belastungen standhält, um die Fragestellung erweitert wird, welche Strukturbereiche einer detaillierteren Betrachtung bedürfen und Aussagen hierzu zwar qualitativ, jedoch im Vorfeld, d. h. *a priori* getroffen werden können. Die *a priori* Detektion dieser, im Folgenden als versagenskritisch bezeichneten Strukturregionen, stellt damit das Kernziel der vorliegenden Arbeit dar.

1.1 Stand der Technik

Folgender Abschnitt gibt eine zusammenfassende Übersicht der Forschungsaktivitäten auf den mit den Betrachtungen dieser Arbeit verbundenen Themengebieten. Diese lassen sich zum einen allgemein in die Superposition modaler Beanspruchungsgrößen zur Ermittlung und Bewertung dynamischer Beanspruchungsfelder einordnen, zum anderen liegt der Fokus auf Methoden zur Detektion versagenskritischer Strukturregionen. Als Kernaufgabe der vorliegenden Arbeit stehen dabei Methoden im Vordergrund, welche darauf abzielen, *a priori* Aussagen zu strukturellen Beanspruchungszuständen zu treffen. Während der erstgenannte Forschungsbereich durch die Fülle an Veröffentlichungen der vergangenen Jahrzehnte lediglich eine Zusammenstellung ausgewählter Beispiele erlaubt, können die in der Literatur beschriebenen Methoden zu *a priori* Betrachtungen hingegen auf wenige Autoren eingegrenzt werden.

Das grundlegende Konzept der Superposition modaler Beanspruchungsgrößen lässt sich auf Untersuchungen aus der experimentellen Modalanalyse um die 1990er Jahre zurückführen [15,16] und ist durch anhaltende Weiterentwicklung von Sensorik und Messtechnik Gegenstand aktueller Forschung beispielsweise zur Strukturüberwachung und Schadensdetektion realer Strukturen [24], [25], [26]. Auf Grund der hohen Sensitivität der aus den modalen Verschiebungen abgeleiteten Beanspruchungsgrößen gegenüber lokalen Änderungen [17] bilden modale Dehnungsansätze darüber hinaus die Grundlage für effiziente Verfahren auf den Gebieten der Topologieoptimierung [27],[28] und des Model-Updateings [29,30]. Auf Grund der hohen Effizienz haben modale Methoden in den letzten Jahrzehnten insbesondere in der numerischen Spannungs- und Lebensdaueranalyse für alle Arten von technisch relevanten Strukturen und Belastungen eine hohe Bedeutung erlangt [31]. Darunter fallen hybride numerisch-experimentelle Verfahren [32], flexible Mehrkörperdynamik [33], Submodellierungsansätze [34] und erweiterte finite Elemente Methoden (XFEM) [35] zur Berücksichtigung lokaler Plastizität sowie Erweiterungen modaler Beanspruchungsgrößen auf spezifischere modale Felder, wie modale Spannungsintensitätsfaktoren [35,36].

Untersuchungen zur Ermittlung der dynamischen Beanspruchung komplexer Strukturen zeigen vor allem hohes Potenzial zur Steigerung der Effizienz durch Betrachtungen im Frequenzbereich [37]. Hervorzuheben sind hierbei die Arbeiten von Braccisi et. al [38–44] zur

Lebensdaueranalyse stochastisch angeregter Strukturen auf Basis der Frequenzbereichslösung des modal entkoppelten Systems und Überlagerung modaler Spannungen. Mršnik et. al [45], [46] erweitern die Betrachtungen auf ein Verfahren zur Zerlegung der Strukturantwort in modale Schädigungsanteile über das Verhältnis der Schädigung einer Mode zur Gesamtschädigung, auf deren Basis ebenfalls Überlegungen zu versagenskritischen Strukturregionen angestellt werden.

Da typischerweise hohe Spannungskonzentrationen in großen Systemen lokal auf nur kleine Bereiche des globalen Modells begrenzt sind, wurden in den vergangenen Jahrzehnten zahlreiche Ansätze verfolgt, den Berechnungsaufwand auf diese Bereiche zu beschränken. Huang et al. [12,14] beschreiben die Anwendung transient-modaler Berechnungen für die Lebensdaueranalyse einer PKW-Karosserie. Es erfolgt dazu zunächst eine dynamische Analyse mit kurzer Belastungsdauer zur Ermittlung von Elementen, die einen Schwellenwert der von Mises-Spannung überschreiten. Zur Reduktion des numerischen Aufwandes kommt dabei die Superposition modaler Spannungen zum Einsatz. Die Analyse des gesamten Beanspruchungs-Zeit-Verlaufs sowie die nachgelagerte Lebensdaueranalyse erfolgt am Craig-Bampton-reduzierten Modell, beschränkt auf die höchstbeanspruchten Elemente. Eine weitere, durch Huang et. al patentierte Methode zur Identifizierung versagenskritischer Elemente beruht auf der Berechnung der modalen Normal- und Schubspannung in jedem Element sowie der modalen Koordinaten jeder Mode über die gesamte Beanspruchungshistorie in einer transient-modalen Analyse. Auf dieser Basis werden für jede Mode und für jedes Element die Extremwerte der modalen Koordinaten für die Superposition herangezogen [47]. Verfahren zur automatisierten Detektion versagenskritischer Strukturregionen auf Basis vorliegender Beanspruchungsverläufe, sog. Hot-Spot-Filter, sind seither fester Bestandteil gängiger Software zur numerischen Untersuchung der Ermüdungsfestigkeit, wie z. B. MSC.Fatigue, nCode DesignLife oder fe-safe.

1.1.1 *A Priori-Methoden*

Wie eingangs beschrieben, lassen sich Untersuchungen zu *a priori*-Methoden für Aussagen zu strukturellen Beanspruchungszuständen nur wenigen Autoren zuordnen. Rantalainen et al. [48] beschreiben eine Kombination von flexibler Mehrkörpersimulation (MKS) und Submodellierung für die Lebensdaueranalyse einer Kranstruktur. Die aus der MKS resultierenden Verschiebungen dienen dabei als Randbedingungen für detaillierte Submodelle versagenskritischer Strukturdetails. Eine Definition dieser versagenskritischen Strukturbereiche erfolgt dabei durch manuelle Bewertung von Geometrie und Schweißnahtbereichen. Einen ähnlichen Ansatz verfolgen Dietz et. al. [49] zur Lebensdaueranalyse eines Drehgestell-Rahmens. Auf Basis ausgewählter Zeitschritte einer flexiblen MKS-Analyse erfolgt hier zunächst die Definition von Lasten für eine quasi-statische FE-Analyse zur Definition versagenskritischer Strukturbereiche. Die Erzeugung von Beanspruchungs-Zeit-Verläufen in der nachgelagerten flexiblen MKS-Berechnung wird auf diese kritischen Bereiche begrenzt. Beide Methoden lassen sich damit im weitesten Sinne als *a priori*-Ansätze auffassen.

Die Eigenvektoren stellen eine grundlegende dynamische Eigenschaft und eine der wichtigsten modalen Größen schwingfähiger Systeme dar. Ergänzend zu den zuvor beschriebenen Methoden ermöglichen die in den Eigenvektoren und insbesondere in den daraus resultierenden Spannungseigenformen enthaltenen Systeminformationen die Entwicklung leistungsfähiger Methoden zur *a priori* Erkennung versagenskritischer Strukturregionen. Veltri [23] beschreibt eine Methodik zur Identifikation versagenskritischer Strukturbereiche auf Grundlage von Component-Mode-Synthese Verfahren (CMS), sowie deren Anwendung in der flexiblen Mehrkörperdynamik für die Lebensdaueranalyse einer Fahrzeugstruktur. Grundlage der Betrachtungen stellt die Annahme dar, dass unter bestimmten Bedingungen eine Filterung von für die Lebensdauer unkritischen Regionen eines FE-Modells durch die Auswertung eines erweiterten modalen Basisraums erfolgen kann. Als modale Basis wird hierfür eine Kombination von statischen und dynamischen Moden vorgeschlagen. Als Set statischer Moden wird die Beanspruchung des Systems bei Aufbringen von Einheitslasten an verschiedenen Lastpositionen am einfachen Balkenbeispiel untersucht. Die beschriebenen dynamischen Moden entsprechen den modalen Beanspruchungen des Systems bei festgehaltenen Randbedingungen. Als relevante Beanspruchungsgrößen werden dabei sowohl die von Mises-Vergleichsspannung als auch die spezifische Formänderungsenergie angegeben. Die Ermittlung von Beanspruchungs-Maxima erfolgt dabei auf Element-Ebene und separat für jede betrachtete Mode mit anschließender Zusammenfassung aller versagenskritischen Elemente. Als Grenzwerte für die Detektion versagenskritischer Elemente werden 65 % bis 80 % der maximal auftretenden Beanspruchung angeführt, wodurch im Vergleich zur beschriebenen Referenzlösung zwar viele festigkeitsrelevante Regionen detektiert, jedoch auch einige nicht erkannt werden. Eine Superposition von Beanspruchungsfeldern wird in diesem Zuge lediglich für quasi-statische Lastfälle als zielführend beschrieben, da die modalen Beanspruchungen unterschiedlicher dynamischer Moden nach den Autoren in keiner vergleichbaren Größenordnung zueinander stehen. Eine Betrachtung des Einflusses der Normierung der Eigenvektoren sowie eine Bewertung dominanter Moden erfolgt nicht.

Zhou et al. [50] beschreiben die Untersuchung modaler Beanspruchungsgrößen für die Anwendung in der Topologieoptimierung zur Versteifung plattenartiger Strukturen. Auf Grundlage modaler Dehnungen wird der Zusammenhang der Sensitivität der Eigenwerte gegenüber der Änderung der Plattendicke dargestellt. Elemente hoher modaler Dehnung haben demnach einen größeren Einfluss auf die Änderung der zu beeinflussenden Eigenwerte. Als Indikator für die Optimierung der Materialverteilung werden die modalen Hauptdehnungen angeführt und eine Änderung der Dicke von Elementen vorgeschlagen, die einen Grenzwert überschreiten, um gezielt die Eigenfrequenzen zu erhöhen. Auf Basis modaler Hauptdehnungen erfolgt ebenfalls eine Betrachtung von Versteifungsrippen an topologieoptimierten Plattenstrukturen zur Reduktion lokaler Moden sowie zur Bewertung potenziell versagenskritischer Strukturregionen. Die Auswertung der modalen Dehnungen erfolgt dabei separat für jede betrachtete Mode, wobei diese auf die Verschiebung normiert sind.

In späteren Untersuchungen zur Lebensdaueranalyse plattenartiger Strukturen unter stochastischer Fußpunkterregung beschreiben Zhou et. al [51,52] ein Verfahren zur Detektion versagenskritischer Elemente auf Grundlage modaler Spannungen. Hierfür wird die modale von Mises-Vergleichsspannung jeder Mode bei verschiebungsnormierten Eigenvektoren betrachtet. Eine Interpretation dominanter modaler Beiträge zur Gesamtschwingung erfolgt dabei für das fußpunkterregte System über die modalen Partizipationsfaktoren (*engl. modal participation factors*, MPF). Die Definition, welche Regionen als versagenskritisch eingestuft werden, erfolgt über eine manuelle Bewertung der Kontur-Plots der modalen Beanspruchungen lediglich der zwei Moden mit höchstem MPF. Die anschließende Lebensdaueranalyse wird im Frequenzbereich durchgeführt und zur Reduktion des numerischen Aufwands auf die detektierten Elemente beschränkt. Neuere Untersuchungen durch Zhou [53] beschreiben ferner einen Ansatz zur FE-Netzverfeinerung auf Grundlage der in früheren Arbeiten des Autors beschriebenen Methodik zur *a priori* Detektion versagenskritischer Strukturregionen [52].

Die aufgeführten Verfahren zur *a priori* Detektion versagenskritischer Strukturregionen basieren dabei ausschließlich auf einer separaten Betrachtung jeder Eigenform und der daraus resultierenden Beanspruchung. Die Ableitung daraus resultierender versagenskritischer Strukturregionen folgt keinem Algorithmus, vielmehr werden durch Veltri alle betrachteten Moden in gleicherweise bewertet, wohingegen durch Zhou Informationen aus den modalen Partizipationsfaktoren verwendet werden, um weniger dominante Moden aus den Betrachtungen auszuschließen. Eine explizite Berücksichtigung weiterer Lasteinflüsse, wie beispielsweise der Lastfrequenz, erfolgt nicht. Beide Autoren führen ferner einen Einfluss der Normierung der Eigenvektoren an. Durch Veltri wird eine Superposition dynamischer Beanspruchungsfelder auf Grund der unterschiedlichen Skalierung bzw. Größenordnungen der modalen Beanspruchungen ausgeschlossen. Zhou beschreibt zwar den Einfluss von Massennormierung und Verschiebungsnormierung [54], eine Auswertung hinsichtlich der Auswirkungen auf eine mögliche Superposition erfolgt dabei jedoch nicht.

1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit

Der dargelegte Stand der Forschungsaktivitäten belegt das hohe Potenzial, welches mit einer *a priori* Detektion versagenskritischer Strukturregionen einhergeht. Aufbauend auf den beschriebenen Erkenntnissen auf dem Gebiet der Superposition modaler Beanspruchungsgrößen lassen sich aussagekräftige Verfahren entwickeln, um modale Beiträge zur strukturellen Beanspruchung *a priori* abzuschätzen und zu bewerten. Nach Erkenntnis des Autors findet sich in der Literatur keine integrale Methode zur zuverlässigen und automatisierten Detektion und Bewertung versagenskritischer Strukturregionen auf dieser Basis. Das Kernziel der vorliegenden Arbeit stellt somit die Entwicklung und Validierung einer Methodik zur *a priori* Detektion versagenskritischer Strukturregionen auf der Grundlage modaler Superpositionsprinzipien dar. Die Innovation des entwickelten Ansatzes besteht darin, dass sich die erforderlichen Systeminformationen auf die Eigenformen des Systems und grundlegende Lastinformationen

beschränken, was Aussagen zu versagenskritischen Strukturregionen vor der Durchführung aufwendiger numerischer Berechnungen, d. h. *a priori* ermöglicht.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 werden die strukturdynamischen Grundlagen zusammengefasst, die zur Entwicklung der in dieser Arbeit aufgestellten Hypothesen Anwendung finden. Für die Ermittlung versagenskritischer Strukturregionen beschreibt Kapitel 3 dazu die allgemeinen Grundlagen zur Festigkeitsbewertung dynamisch beanspruchter Strukturen vor dem Hintergrund der Ermüdungsfestigkeit.

Kapitel 4 dokumentiert die Entwicklung und Validierung einer Methodik zur Detektion versagenskritischer Strukturregionen am akademischen Beispiel des Biegebalkens. Dabei werden ausführliche Betrachtungen zur Approximation modaler Beiträge zur Gesamtschwingung angestellt. Diese beinhalten die auszuwertenden modalen Feldgrößen, den Einfluss der räumlichen Lastkonfiguration, die Normierung von Eigenvektoren sowie den Einfluss der Dämpfung. Zur Berücksichtigung des Anregungsspektrums erfolgt dabei eine separate Betrachtung breitbandig und schmalbandig angeregter Systeme. Mit dem Ziel der Approximation einer oberen Schranke des dynamischen Beanspruchungsfeldes werden modale Wichtungskoeffizienten zur Vorhersage der maximalen Beiträge einzelner Schwingformen zur Gesamtschwingung auf Basis der Frequenzbereichslösung der Bewegungsgleichung im Modalraum hergeleitet. Der Fokus liegt dabei auf dem krafterregten System, mit anschließender Erweiterung auf fußpunkterregte Systeme. Zur Bewertung potenziell versagenskritischer Strukturregionen erfolgt eine Verbindung der Betrachtungen mit Materialparametern aus der Lebensdaueranalyse sowie abschließend eine Beschreibung der numerischen Umsetzung.

Zur Validierung der entwickelten Methodik erfolgt in Kapitel 5 die numerische Anwendung auf komplexe Beispiele aus industriellem Umfeld. Diese umfassen ausführliche Referenzlösungen zur Ermittlung dynamischer Beanspruchungen auf Basis transienter und stationärer Schwingungen sowie numerische Lebensdaueranalysen mit kommerziellen Softwarepaketen. Auf Grundlage der erzielten Ergebnisse erfolgt anschließend eine Bewertung des numerischen Aufwandes sowie der Effizienz der entwickelten Methodik.

In Kapitel 6 erfolgt die experimentelle Validierung der aufgestellten Hypothesen für schmalbandig angeregte Systeme anhand des akademischen Beispiels eines elastischen Pendels. Darin inbegriffen ist die experimentelle Modalanalyse mit anschließendem Modellabgleich sowie die Erweiterung der entwickelten Methodik auf die Einbindung gemessener modaler Dämpfungen und gemessener Lastsignale.

Daran anschließend beschreibt Kapitel 7 experimentelle Untersuchungen zur Validierung der getroffenen Vorhersagen zum Versagensort des in der numerischen Anwendung beschriebenen Modells einer PKW-Verbundlenkerachse. Diese beinhalten experimentelle Dehnungsmessungen während der zyklischen Belastung zum Versagen sowie eine abschließende Schadensanalyse. Die Arbeit schließt mit Fazit und Ausblick in Kapitel 8. Teile der vorliegenden Arbeit wurden in [55–57] veröffentlicht.

2 Strukturdynamische Grundlagen

Grundlage der in dieser Arbeit beschriebenen Untersuchungen bildet die modale Superposition und die damit verbundene Rückführung gekoppelter großdimensionierter algebraischer Gleichungssysteme auf eine reduzierte Anzahl von Bewegungsgleichungen mit einem Freiheitsgrad. Das folgende Kapitel beschreibt die strukturdynamischen Grundlagen, die neben dem Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen komplexer technischer Strukturen ebenfalls als Fundament für die in dieser Arbeit aufgestellten Hypothesen dienen. Als essenzielle Grundlage wird dazu zunächst die mathematische Beschreibung schwingfähiger Systeme mit einem Freiheitsgrad zusammengefasst. Die Betrachtungen beschränken sich dabei auf die für die Entwicklungen dieser Arbeit herangezogene Frequenzbereichslösung der Bewegungsgleichung. In den allermeisten Fällen stellt dabei die Annahme linearen, zeitinvarianten Systemverhaltens eine gute Näherung der Realität dar [8]. Aufbauend darauf folgt die Betrachtung der Dynamik allgemeiner schwingfähiger Systeme bzw. die Herleitung der diskreten Bewegungsgleichung linear-elastischer Strukturen mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode. Über die Orthogonalitätsbeziehungen sowie einen modalen Verschiebungsansatz erfolgt die modale Entkopplung der Systemgleichung sowie abschließend eine Betrachtung modaler Beanspruchungsgrößen.

2.1 Das dynamische System mit einem Freiheitsgrad

Das einfachste System zur mathematischen Beschreibung physikalischer Schwingungsvorgänge stellt der Einmassenschwinger dar. Zur Untersuchung von Schwingungsvorgängen werden dabei freie und erzwungene Schwingungen von gedämpften und ungedämpften Systemen unterschieden. Abhängig von der Art der Anregung erzwungener Schwingungen erfolgt eine weitere Kategorisierung in kraftherregte, unwuchterregte und fußpunkterregte Systeme [58]. Lässt sich eine Anregungsfunktion zu jedem Zeitpunkt genau angeben, wird die Anregung als deterministisch bezeichnet, wohingegen der Zeitverlauf stochastischer Anregungsfunktionen zufälliger Natur ist und lediglich auf der Basis von Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden kann. Es werden periodische und nichtperiodische Schwingungen unterschieden; zudem lassen sich periodische Schwingungen vollständig durch Sinus- bzw. Kosinusfunktionen beschreiben. Abhängig vom Frequenzinhalt der Anregung lässt sich ferner eine Kategorisierung in schmalbandige und breitbandige Anregung vornehmen. Als stationär wird ein Vorgang beschrieben, dessen Eigenschaften zeitlich unveränderlich sind; entsprechend werden zeitlich veränderliche Vorgänge als instationär bzw. transient bezeichnet. Allgemein kann die Beschreibung von Schwingungsvorgängen im Zeit- oder Frequenzbereich erfolgen, wobei beide Bereiche über die Fourier-Transformation verknüpft sind [13]. Der folgende Abschnitt fasst die Grundlagen erzwungener Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad unter harmonischer Anregung zusammen. Der Fokus liegt dabei auf stationären Schwingungen kraft- und fußpunkterregter Systeme, beschrieben im Frequenzbereich.

2.1.1 Krafterregung

Das krafterregte System in Abb. 2.1 besteht aus einer Punktmasse m , die über eine Feder der Steifigkeit k sowie einen Dämpfer mit der Dämpfungskonstante c an die Umgebung gekoppelt ist. Die Anregung erfolgt über eine Kraft $F(t)$, deren Zeitverlauf an dieser Stelle durch die harmonische Funktion mit der komplexen Amplitude \hat{F} sowie der Erregerkreisfrequenz Ω beschrieben wird.

$$F(t) = \hat{F}e^{j\Omega t} \quad (1)$$

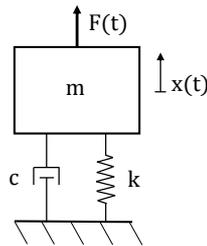


Abb. 2.1: Einmassenschwinger, krafterregt

Aus dem dynamischen Kräftegleichgewicht folgt die Bewegungsgleichung des krafterregten Systems:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2)$$

Mit dem komplexen Lösungsansatz:

$$x = \hat{X}e^{j(\Omega t)} \quad \text{mit} \quad \hat{X} = \hat{x}e^{j\varphi} \quad (3)$$

folgt mit der komplexen Verschiebungsamplitude \hat{X} :

$$(-m\Omega^2 + j\Omega c + k)\hat{X} = \hat{F} \quad (4)$$

Mit der Abstimmung $\eta = \Omega/\omega_0$ ist damit der komplexe Frequenzgang des krafterregten Systems bestimmt:

$$H_1(j\eta) = \frac{\hat{F}}{\hat{X}} = \frac{1}{k(1 - \eta^2 + j2\vartheta\eta)} \quad (5)$$

Darin bezeichnet ω_0 die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung und ϑ den Dämpfungsgrad:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \frac{c}{m} = 2\vartheta\omega_0 \quad (6)$$

Aus der Darstellung der komplexen Größe $H_1(j\eta)$ über Betrag und Phase folgen Amplitudenfrequenzgang $A_1(\eta)$ und Phasenfrequenzgang $\varphi(\eta)$:

$$A_1(\eta) = \frac{1}{k\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}} \quad ; \quad \varphi(\eta) = \arctan\left(\frac{2\vartheta\eta}{1-\eta^2}\right) \quad (7)$$

Durch Normierung des Amplitudenfrequenzgangs kann ferner die dimensionslose Vergrößerungsfunktion $V_1(\eta)$ aufgestellt werden (siehe Abb. 2.2), welche auch als Verhältnis der reellen Schwingungsantwort zur statischen Auslenkung x_0 interpretiert werden kann [59].

$$V_1(\eta) = \frac{\hat{x}}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}} \quad \text{mit} \quad x_0 = \frac{\hat{F}}{k} \quad (8)$$

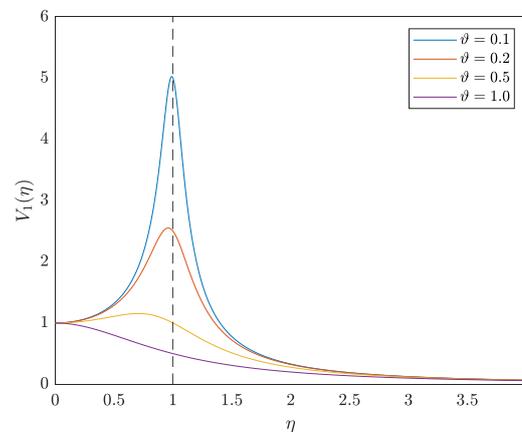


Abb. 2.2: Vergrößerungsfunktion des krafterregten Einmassenschwingers

Die stationäre Lösung der Schwingungsantwort des krafterregten Systems lässt sich damit wie folgt angeben:

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{k\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}} e^{j(\Omega t + \varphi(\eta))} \quad (9)$$

$$x(\Omega) = \frac{\hat{F}}{k\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}} e^{j\varphi(\eta)} \quad (10)$$

2.1.2 Fußpunkterregung

Vor allem in der dynamischen Untersuchung von Bauwerken ist die Fußpunkterregung (auch Weganregung) von hoher technischer Relevanz. Da die Starrkörperbewegung keinen Einfluss auf die Beanspruchung hat, ist die Betrachtung der relativen Verschiebung üblich [59]. Die absolute Bewegung der Masse m ist durch die Koordinate $x(t)$ beschrieben. Die Anregung erfolgt durch Bewegung des Fußpunktes, dessen Zeitverlauf durch die harmonische Funktion $u(t)$ mit der

komplexen Amplitude \hat{U} und der Erregerkreisfrequenz Ω beschrieben ist. Die relative Verschiebung x_r ist nach Gl. (12) durch die Differenz von Absolutbewegung $x(t)$ und Anregung $u(t)$ gegeben.

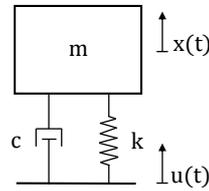


Abb. 2.3: Einmassenschwinger, fußpunkterregt

$$u(t) = \hat{U}e^{j\Omega t} \tag{11}$$

Die Bewegungsgleichung für die relative Verschiebung x_r des fußpunkterregten Systems kann damit wie folgt aufgestellt werden:

$$m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{u}(t) \quad ; \quad \text{mit } x_r = x(t) - u(t) \tag{12}$$

Komplexer Frequenzgang $H_2(j\eta)$ und Phasengang $\varphi(\eta)$ für das fußpunkterregte System ergeben sich äquivalent zum vorigen Abschnitt:

$$H_2(j\eta) = \frac{\eta^2}{(1 - \eta^2 + j2\vartheta\eta)} \quad ; \quad \varphi(\eta) = \arctan\left(\frac{2\vartheta\eta}{1 - \eta^2}\right) \tag{13}$$

Die Vergrößerungsfunktion $V_2(\eta)$ ist wie folgt definiert (siehe Abb. 2.4):

$$V_2(\eta) = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}} \tag{14}$$

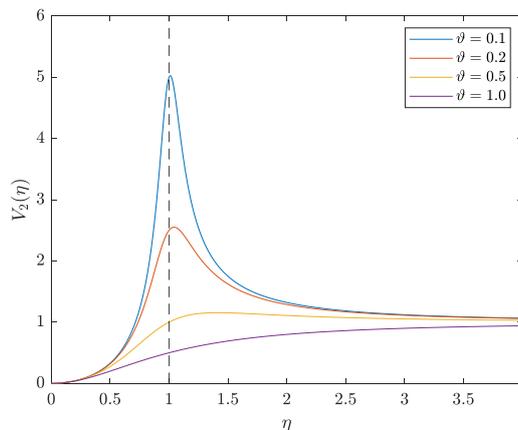


Abb. 2.4: Vergrößerungsfunktion des fußpunkterregten Einmassenschwingers

Die stationäre Lösung der Schwingungsantwort des fußpunkterregten Systems lässt sich damit wie folgt angeben:

$$x(t) = \hat{U} \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}} e^{j(\Omega t + \varphi(\eta))} \quad (15)$$

$$x(\Omega) = \hat{U} \cdot \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\vartheta^2\eta^2}} e^{j\varphi(\eta)} \quad (16)$$

Phasenverschiebung

Aus den Gleichungen (7) und (13) wird ersichtlich, dass der Verlauf der Phasenverschiebung für die betrachteten Systeme gleich ist. Der Phasengang ist in Abb. 2.5 dargestellt.

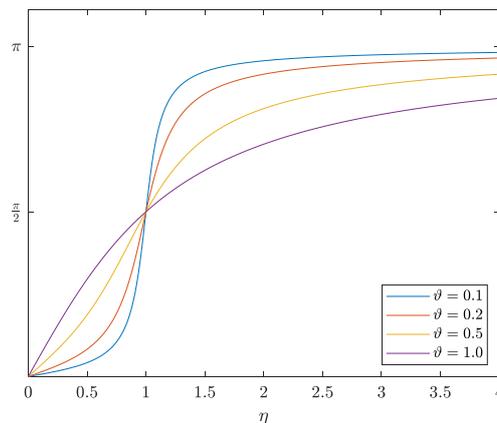


Abb. 2.5: Phasengang des Einmassenschwingers

Resonanz und maximale Amplitude

Aus der Ableitung der Vergrößerungsfunktionen lassen sich die Resonanzstellen und die daraus resultierenden Maxima bestimmen, welche für die Betrachtungen dieser Arbeit von besonderem Interesse sind.

Aus $\frac{\partial V_i}{\partial \eta} = 0$ folgt:

$$\eta_{\text{res},1} = \sqrt{1 - \vartheta^2} \quad ; \quad \eta_{\text{res},2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \quad (17)$$

Die resultierenden Maxima der Vergrößerungsfunktionen sind dabei für die betrachteten Systeme gleich¹.

$$V_{i,\text{max}} = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{1 - \vartheta^2}} \quad , \quad i = 1,2 \quad (18)$$

¹ Für die Relativbewegung fußpunkterregter Systeme

2.2 Mehrfreiheitsgradsysteme

2.2.1 Finite-Elemente-Methode

Für die Untersuchung des Verformungs- und Beanspruchungszustandes komplexer Strukturen stellt die Methode der finiten Elemente eines der am häufigsten angewandten Verfahren dar. Dieses numerische Approximationsverfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen beruht auf der Diskretisierung des Lösungsgebiets in Teilgebiete, den finiten Elementen. Die Approximation des Lösungsgebietes jedes Elements erfolgt über die Lösung an diskreten Stützstellen (Knoten) und einen lokalen Ritz-Ansatz mit freien Parametern. Benachbarte Elemente sind in der Regel an den Knoten verbunden. Die Kompatibilität der Lösungen über mehrere Elemente hinaus wird durch geeignete Assemblierung des Gleichungssystems zur Bestimmung dieser freien Parameter realisiert. Durch Superposition der Teillösungen erfolgt die Approximation des gesamten Lösungsgebiets. Die zu lösenden partiellen Differentialgleichungen werden somit in ein algebraisches Gleichungssystem überführt. Die Größe des zu lösenden Gleichungssystems ergibt sich aus der Anzahl der freien Parameter der Approximationsansätze, den Freiheitsgraden (FHG), welchen beispielsweise in der Festkörpermechanik meist die physikalische Bedeutung der Verschiebungen oder Verdrehungen zugeordnet wird [60].

Für die Beschreibung des Gleichgewichtszustandes mechanischer Systeme unter äußeren Lasten stehen verschiedene Prinzipien der Mechanik zur Verfügung [13]. Im Folgenden werden die Grundgleichungen der Finiten-Elemente-Methode aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit entsprechend [61] hergeleitet. Ein mechanisches System unter äußeren eingepägten Lasten befindet sich demnach im Gleichgewicht, wenn die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte gleich der virtuellen Arbeit der äußeren Lasten ist.

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (19)$$

Die virtuelle Arbeit der äußeren Lasten entspricht der Arbeit, die die äußeren Lasten mit den virtuellen Verschiebungen verrichten. Die virtuellen Verschiebungen sind infinitesimal kleine, gedachte Verschiebungen, die kinematisch zulässig und mit den Zwangsbedingungen verträglich sind. Die äußeren Lasten werden in Einzellasten \mathbf{f} , Oberflächenlasten \mathbf{v} und Volumenlasten \mathbf{p} aufgeteilt. Für dynamische Systeme werden die Volumenkräfte nach dem Prinzip von D'Alembert um beschleunigungsproportionale Trägheitskräfte ($-\rho \cdot \ddot{\mathbf{u}}$) erweitert [61].

$$\delta W_a = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} + \int_0 \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} \, dO + \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \, dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, dV \quad (20)$$

Die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte entspricht für den linear-elastischen Körper der Formänderungsarbeit:

$$\delta W_i = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (21)$$

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit folgt damit:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} + \int_0 \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} \, dO + \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \, dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, dV \quad (22)$$

Mit der Differentialoperatormatrix² \mathbf{D}

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (23)$$

ergeben sich die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehung sowie die virtuellen Verzerrungen:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (24)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \quad (25)$$

Für isotropes, homogenes, lineares Materialverhalten (Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν) lässt sich die Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen über das Hookesche Gesetz formulieren und in Voigtscher Notation wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Mit der Hookeschen Matrix \mathbf{H} ergibt sich:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (27)$$

² Für eine Spannungstheorie 1. Ordnung

Damit kann das Prinzip der virtuellen Arbeit wie folgt beschrieben werden:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{D} \mathbf{u} \, dV = \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} + \int_0 \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{v} \, dO + \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \, dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \rho \cdot \ddot{\mathbf{u}} \, dV \quad (28)$$

Für die kontinuumsmechanische Beschreibung des Gleichgewichtszustandes ist diese Beziehung exakt. Über den Näherungsansatz der FEM folgt die Approximation des Verschiebungszustandes über die Elemente.

Der Verschiebungsansatz, z. B. für ein dreidimensionales Kontinuumselement, lässt sich hierzu mit dem Elementknotenverschiebungsvektor \mathbf{d}_e , der 3×3 Einheitsmatrix \mathbf{I}_3 und der Matrix der Ansatzfunktionen \mathbf{N}_e im Element darstellen, die die N_i Ansatzfunktionen des Ritz-Ansatzes für die $i = 1 \dots k$ Elementknoten enthält:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{d}_e = [\mathbf{N}_1 \mathbf{I}_3 \quad \dots \quad \mathbf{N}_k \mathbf{I}_3] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \quad (29)$$

Die Anwendung des Differentialoperators auf den FE-Verschiebungsansatz liefert die Elementverzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}_e$. Dabei stellt die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B}_e die Ableitung der Ansatzfunktionen dar.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{D} \mathbf{u}_e = \mathbf{D} \mathbf{N}_e \cdot \mathbf{d}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e \quad (30)$$

Die virtuelle Verschiebung im Element $\delta \mathbf{u}_e$ ergibt sich wie folgt:

$$\delta \mathbf{u}_e^T = \delta \mathbf{d}_e^T \cdot \mathbf{N}_e^T \quad (31)$$

Einsetzen des FE-Verschiebungsansatzes in das Prinzip der virtuellen Arbeit liefert die folgende Beziehung:

$$\int_V \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{H} \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e \, dV = \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{N}_e^T \mathbf{f} + \int_0 \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{N}_e^T \mathbf{v} \, dO + \int_V \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{N}_e^T \mathbf{p} \, dV - \int_V \delta \mathbf{d}_e^T \mathbf{N}_e^T \rho \mathbf{N}_e \ddot{\mathbf{d}}_e \, dV \quad (32)$$

Da diese Beziehung für beliebige virtuelle Verschiebungen gültig ist, gilt auch:

$$\int_V \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e \, dV \ddot{\mathbf{d}}_e + \int_V \mathbf{B}_e^T \mathbf{H} \mathbf{B}_e \, dV \mathbf{d}_e = \mathbf{N}_e^T \mathbf{f} + \int_0 \mathbf{N}_e^T \mathbf{v} \, dO + \int_V \mathbf{N}_e^T \mathbf{p} \, dV \quad (33)$$

Darin können die Terme der rechten Seite zum Vektor der äquivalenten Elementknotenkräfte $\hat{\mathbf{F}}_e$ zusammengefasst werden. Die Integrale auf der linken Seite stellen die

Bildungsvorschrift für Elementmassen- und Elementsteifigkeitsmatrix dar. Es ergibt sich unter Vernachlässigung der Dämpfung die finite Grundgleichung der Dynamik für jedes Element:

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{d}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = \hat{\mathbf{F}}_e \quad (34)$$

mit der Elementmassenmatrix \mathbf{M}_e :

$$\mathbf{M}_e = \int_V \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{N}_e dV \quad (35)$$

und der Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e :

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}_e^T \mathbf{H} \mathbf{B}_e dV \quad (36)$$

Unter Berücksichtigung der Verbindung benachbarter Elemente an den Knoten werden die Elementmatrizen zum Gesamtsystem assembliert. Dabei stehen die Elementknotenkräfte verbundener Elemente im Gleichgewicht. Zur Berücksichtigung dissipativer Kräfte ist die Annahme geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung für das Gesamtsystem über die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} üblich. Mit der assemblierten Systemsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} , der Systemmassenmatrix \mathbf{M} und dem Vektor der externen Kräfte $\mathbf{F}(t)$ ergibt sich die diskrete Grundgleichung der linearen Dynamik:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (37)$$

Zur Ermittlung der dynamischen Beanspruchung des Systems kann Gl. (37) nach den Knotenverschiebungen $\mathbf{d}(t)$ gelöst werden. Das dynamische Beanspruchungsfeld der Struktur ergibt sich dann aus dem FE-Ansatz auf Element-Ebene in den Gleichungen (29) und (30). Neben der direkten Lösung, die vor allem bei nichtlinearen und stark gedämpften Systemen Anwendung findet, existieren für lineare Systeme Lösungsverfahren auf Basis der Modaltransformation, die auch die Grundlage der in dieser Arbeit entwickelten Methodik darstellen und in den folgenden Abschnitten näher beschrieben werden.

2.3 Modale Methoden in der Strukturdynamik

Die im vorigen Abschnitt hergeleitete diskrete Grundgleichung der Dynamik stellt eine gekoppelte lineare, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. Zur effizienten Lösung lässt sich diese entkoppeln. Grundlage der modalen Entkopplung stellen dabei die Orthogonalitätsbeziehungen dar, welche im Folgenden für diskrete Systeme nach [8] zusammengefasst werden. Es wird dabei von proportionaler Dämpfung ausgegangen³, wodurch die Entkopplung mit den Eigenvektoren des ungedämpften Systems erfolgt.

³ Für die Orthogonalitätsbeziehungen bei nichtmodaler Dämpfung siehe z. B. [8]

2.3.1 Orthogonalitätsbeziehungen

Als Grundlage zur Herleitung der Orthogonalitätsbeziehungen dient die Bewegungsgleichung des diskreten Mehrfreiheitsgradsystems.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (38)$$

Für die freie Schwingung des ungedämpften Systems gilt:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{0} \quad (39)$$

Woraus folgendes Eigenwertproblem formuliert werden kann:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_i \quad (40)$$

Darin ist $\boldsymbol{\varphi}_i$ der zum Eigenwert ω_i^2 gehörende Eigenvektor. Die elastischen Rückstellkräfte $\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i$ stehen somit zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht mit den Trägheitskräften $\omega_i^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_i$, wenn $\boldsymbol{\varphi}_i$ die momentane Deformation des Systems beschreibt. Auf dieser Basis kann nun ein System betrachtet werden, das in zwei Konfigurationen i und j in seiner i -ten bzw. j -ten Eigenform schwingt. Nach dem Satz von Betti und Maxwell ist für diese zwei gleichen, linear elastischen Systeme die Arbeit, die die Kräfte eines Systems mit den Verformungen des zweiten Systems leisten, gleich der Arbeit, die die Kräfte des zweiten Systems mit den Verformungen des ersten Systems leisten [8]. Formuliert für die Trägheitskräfte resultiert daraus:

$$\omega_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j = \omega_j^2 \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_i \quad (41)$$

Mit der symmetrischen Massenmatrix folgt

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j = 0 \quad (42)$$

Unter der Voraussetzung, dass die zwei betrachteten Eigenformen in verschiedenen Frequenzen schwingen, muss also gelten:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (43)$$

Dieser Zusammenhang gilt ebenfalls, wenn im System gleiche Eigenfrequenzen mit unterschiedlichen Eigenvektoren vorhanden sind, bzw. wenn die Eigenvektoren der auftretenden Mehrfacheigenwerte orthogonal sind [8].

Aus der Linksmultiplikation von Gl. (40) mit $\boldsymbol{\varphi}_j^T$ und unter Berücksichtigung von Gl. (43) kann damit eine weitere Beziehung abgeleitet werden:

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i = 0 \quad ; \quad i \neq j \quad (44)$$

Aus den mathematischen Eigenschaften des Eigenwertproblems ergeben sich damit mit dem Kronecker-Delta δ_{ij} die folgenden Orthogonalitätsbeziehungen der Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j &= \delta_{ij} m_i \\ \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j &= \delta_{ij} k_i\end{aligned}\quad (45)$$

Hierin bezeichnen m_i und k_i die modalen Massen bzw. die modalen Steifigkeiten, die den Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i$ zugeordnet sind. Die Eigenvektoren sind demnach orthogonal bezüglich der Systemmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} . Für lineare Systeme ergeben sich damit die im folgenden Abschnitt näher betrachteten Lösungsmethoden.

2.3.2 Modaler Verschiebungsansatz

Zur Approximation der Lösung großdimensionierter Schwingungsdifferentialgleichungssysteme wird im Folgenden ein modaler Verschiebungsansatz beschrieben. Für lineare Systeme kann oftmals von sogenannter modaler Dämpfung ausgegangen werden, bei der jede Eigenform (Mode) für sich gedämpft ist bzw. die Kopplung der Eigenformen über die Dämpfung vernachlässigt werden kann. Die modale Dämpfung lässt sich beispielsweise aus Messungen bestimmen. Unter der Voraussetzung modaler Dämpfung kann dabei das Gleichungssystem mit den Eigenvektoren des ungedämpften Systems entkoppelt werden⁴. Die Gesamtlösung ergibt sich dann aus der Superposition der Eigenformen $\boldsymbol{\varphi}_i$ des Systems mit zugehörigen modalen Koordinaten $q_i(t)$. Die Eigenvektoren werden dabei als Spalten der Modalmatrix \mathbf{X} angeordnet. Für das großdimensionierte System mit N Freiheitsgraden ist die Anzahl r der berücksichtigten Eigenvektoren dabei auf den unteren Frequenzbereich beschränkt [10].

$$\mathbf{d}(t) = \sum_i^r \boldsymbol{\varphi}_i q_i(t) = \mathbf{X} \mathbf{q}(t) \quad ; \quad r < N \quad (46)$$

Die Schwingungsdifferentialgleichung wird im Weiteren von links mit der transponierten Modalmatrix multipliziert.

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{X}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \mathbf{q}(t) = \mathbf{X}^T \mathbf{F}(t) \quad (47)$$

Nach den Orthogonalitätsbeziehungen in Gl. (45) ergibt sich für das betrachtete System die Orthogonalität der Eigenvektoren bezüglich der Systemmatrizen, woraus die modalen Massen m_i , Steifigkeiten k_i und Dämpfungskonstanten c_i resultieren. Bei Projektion des Systems in den Modalraum ergeben sich damit die folgenden Diagonalmatrizen:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \text{diag}(m_i) \quad \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X} = \text{diag}(c_i) \quad \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \text{diag}(k_i) \quad (48)$$

⁴ Alternativ kann immer eine Entkopplung mit den komplexen Eigenvektoren im Zustandsraum erfolgen [8]

Die Projektion des Systems in den Modalraum führt damit, unter Voraussetzung modaler Dämpfung, zur Diagonalisierung der Systemmatrizen, was der Entkopplung der Differentialgleichung entspricht.

$$\begin{bmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_r(t) \end{bmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{F}(t) \quad (49)$$

Die Eigenvektoren, als skalierbare Größen, können ferner bezüglich der Systemmatrizen normiert werden. Diese Normierung wird üblicherweise bezüglich der Massenmatrix oder bezüglich der Steifigkeitsmatrix durchgeführt. Es ergibt sich mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} bei Normierung bezüglich der Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \text{diag}(\omega_i^{-2}) \quad (50)$$

Mit der Spektralmatrix $\mathbf{\Lambda}$ folgt für die Normierung der Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} = \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = \text{diag}(\omega_i^2) = \mathbf{\Lambda} \quad (51)$$

Für die Lösung der Systemgleichung kann nun jede Zeile unabhängig als Gleichung mit einem Freiheitsgrad betrachtet werden. Für beliebige Normierung der Eigenvektoren gilt allgemein:

$$m_i \ddot{q}_i(t) + c_i \dot{q}_i(t) + k_i q_i(t) = \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{F}(t) \quad (52)$$

Es wird damit der Zusammenhang der modalen Größen zu mechanischen Systemen mit einem Freiheitsgrad deutlich:

$$\omega_{0,i} = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}} \quad \frac{c_i}{m_i} = 2\vartheta_i \omega_{0,i} \quad (53)$$

Es ergibt sich damit mit der modalen Dämpfung ϑ_i die Schwingungsdifferentialgleichung für den i -ten Freiheitsgrad:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\vartheta_i \omega_{0,i} \dot{q}_i(t) + \omega_{0,i}^2 q_i(t) = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T}{m_i} \mathbf{F}(t) \quad (54)$$

2.3.3 Frequenzbereichslösung für beliebige Kraftanregung

Die im vorigen Abschnitt auf Basis des modalen Verschiebungsansatzes entwickelte Bewegungsgleichung kann im Folgenden in den Frequenzbereich transformiert werden. Für den Freiheitsgrad i ergibt sich mit Gl. (54) für eine harmonische Kraftanregung der Frequenz Ω mit komplexem Exponentialansatz folgender Zusammenhang:

$$(-\Omega^2 + 2\vartheta_i \omega_{0,i} j\Omega + \omega_{0,i}^2) \hat{q}_i e^{j\Omega t} = \frac{\hat{f}_i}{m_i} e^{j\Omega t} \quad (55)$$

Darin stellt \hat{q}_i die komplexe modale Amplitude der Systemantwort und \hat{f}_i die zugehörige modale Lastamplitude dar. Nichtharmonische Eingangs- bzw. Ausgangssignale werden hierbei über das Fourierintegral in den Frequenzbereich überführt [10].

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t) e^{-j\Omega t} dt \\ \mathbf{q}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}(t) e^{-j\Omega t} dt\end{aligned}\quad (56)$$

Die rechte Seite aus Gl. (55) kann mit Gl. (53) wie folgt umgeformt werden:

$$\frac{\hat{f}_i}{m_i} e^{j\Omega t} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T}{m_i} \mathbf{F}(\Omega) = \omega_{0,i}^2 \frac{\hat{f}_i(\Omega)}{k_i} e^{j\Omega t} \quad (57)$$

Die komplexe modale Amplitude der Systemantwort \hat{q}_i ergibt sich damit zu:

$$\hat{q}_i(\Omega) = \frac{1}{(-\Omega^2 + 2\vartheta_i \omega_{0,i} j\Omega + \omega_{0,i}^2)} \omega_{0,i}^2 \frac{\hat{f}_i(\Omega)}{k_i} \quad (58)$$

Mit der Abstimmung $\eta_i = \Omega/\omega_{0,i}$ ergibt sich hieraus der komplexe Frequenzgang $H_i(j\eta_i)$ für die i -te modale Koordinate bei Kraftanregung:

$$H_i(j\eta_i) = \frac{1}{k_i(1 - \eta_i^2 + j2\vartheta_i\eta_i)} \quad (59)$$

Die komplexe modale Amplitude der Systemantwort lässt sich damit wie folgt bestimmen:

$$\hat{q}_i(\Omega) = H_i(j\eta_i) \hat{f}_i(\Omega) \quad (60)$$

Die Rücktransformation aus dem Modalraum in physikalische Koordinaten erfolgt über den modalen Verschiebungsansatz aus Gl. (46):

$$\hat{\mathbf{d}}(\Omega) = \sum_i^r \boldsymbol{\varphi}_i \hat{q}_i(\Omega) = \mathbf{X} \hat{\mathbf{q}}(\Omega) \quad (61)$$

Damit ergibt sich die komplexe Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(j\eta)$ in physikalischen Koordinaten:

$$\mathbf{H}(j\eta) = \sum_{i=1}^r \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i} \frac{1}{(1 - \eta_i^2 + j2\vartheta_i\eta_i)} \quad (62)$$

Diese beschreibt das Übertragungsverhalten des Systems in modaler Darstellung.

2.3.4 Starrkörpermoden und fußpunkterregte Systeme

Bei der Betrachtung ungebundener Systeme treten Starrkörperverschiebungen auf, die keine elastischen Kräfte hervorrufen. Die Steifigkeitsmatrix ist in diesem Fall singular und positiv semidefinit. Es treten bei der Lösung des Eigenwertproblems aus Gl. (40) im Allgemeinen bis zu sechs Starrkörpermoden $\boldsymbol{\varphi}_{R,j}$ mit Eigenwert Null auf. Die Starrkörpermoden verursachen dabei weder elastische Deformationen noch innere Kräfte [62]. Es gilt daher:

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{R,j} = \mathbf{0} \quad , \quad j = 1..6 \quad (63)$$

Die Gesamtverschiebung des Systems lässt sich damit, mit den modalen Koordinaten der Starrkörpermoden $q_{R,j}(t)$ und den den elastischen Moden $\boldsymbol{\varphi}_{E,i}$ zugeordneten modalen Koordinaten $q_{E,i}(t)$, über einen um die n Starrkörpermoden erweiterten modalen Verschiebungsansatz beschreiben [62]:

$$\mathbf{d}(t) = \sum_j^n \boldsymbol{\varphi}_{R,j} q_{R,j}(t) + \sum_i^r \boldsymbol{\varphi}_{E,i} q_{E,i}(t) = [\boldsymbol{\Phi} \quad \mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_E \end{bmatrix} \quad (64)$$

Die Starrkörpermoden lassen sich hierzu beispielsweise aus Gl. (63) ermitteln. Erfolgt eine Aufteilung des Systems in elastische Freiheitsgrade mit dem Index E sowie Starrkörperfreiheitsgrade mit dem Index B, lassen sich die Starrkörpermoden sowie die elastischen Moden wie folgt darstellen:

$$\boldsymbol{\varphi}_{R,j} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{R,B} \\ \boldsymbol{\varphi}_{R,E} \end{bmatrix}_j \quad , \quad \boldsymbol{\varphi}_{E,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varphi}_{E,E} \end{bmatrix}_i \quad (65)$$

Die Starrkörperfreiheitsgrade sind darin durch bis zu 6 Freiheitsgrade beschrieben, deren Fixierung die möglichen Starrkörperbewegungen verhindert⁵. Die elastischen Moden sind durch das Eigenwertproblem der an den Starrkörperfreiheitsgraden fixierten Struktur definiert. Aus Gl. (63) folgt damit bei Umsortierung der Systemmatrizen entsprechend der elastischen sowie der Starrkörperfreiheitsgrade:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BB} & \mathbf{K}_{BE} \\ \mathbf{K}_{EB} & \mathbf{K}_{EE} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{R,B} \\ \boldsymbol{\varphi}_{R,E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Der Zusammenhang zwischen den elastischen Freiheitsgraden und den Starrkörperfreiheitsgraden der Starrkörpermoden lässt sich damit wie folgt angeben:

$$\boldsymbol{\varphi}_{R,E} = -\mathbf{K}_{EE}^{-1} \mathbf{K}_{EB} \boldsymbol{\varphi}_{R,B} \quad (67)$$

Es kann dabei eine Einheitsverschiebung der Starrkörperfreiheitsgrade angenommen werden, wodurch sich die Matrix der Starrkörpermoden wie folgt darstellt:

⁵ Bei Fußpunkterregung i. d. R. Freiheitsgrade in Verbindung mit dem angeregten Boden

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{K}_{EE}^{-1}\mathbf{K}_{EB} \end{bmatrix} \quad (68)$$

Es gilt mit dem modalen Verschiebungsansatz⁶, äquivalent zu Gl. (47):

$$[\Phi \ \mathbf{X}]^T \mathbf{M} [\Phi \ \mathbf{X}] \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_R \\ \ddot{\mathbf{q}}_E \end{bmatrix} + [\Phi \ \mathbf{X}]^T \mathbf{C} [\Phi \ \mathbf{X}] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_R \\ \dot{\mathbf{q}}_E \end{bmatrix} + [\Phi \ \mathbf{X}]^T \mathbf{K} [\Phi \ \mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_E \end{bmatrix} = [\Phi \ \mathbf{X}]^T \mathbf{F}(t) \quad (69)$$

Und damit

$$\begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{M} \Phi & \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{M} \Phi & \mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_R \\ \ddot{\mathbf{q}}_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{C} \Phi & \Phi^T \mathbf{C} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{C} \Phi & \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_R \\ \dot{\mathbf{q}}_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{K} \Phi & \Phi^T \mathbf{K} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{K} \Phi & \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{F} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (70)$$

Daraus lässt sich mit der Starrkörpermassenmatrix \mathbf{M}_0 :

$$\mathbf{M}_0 = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (71)$$

sowie der Voraussetzung, dass aus der Starrkörperverschiebung weder Deformationen noch relative Geschwindigkeiten zwischen den elastischen Freiheitsgraden resultieren, bei Annahme modaler Dämpfung folgende Gleichung aufstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \text{diag}(m_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_R \\ \ddot{\mathbf{q}}_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(c_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_R \\ \dot{\mathbf{q}}_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(k_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ \mathbf{q}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (72)$$

Es wird hierbei davon ausgegangen, dass die Anregung des Systems ausschließlich über die Starrkörperfreiheitsgrade erfolgt. Die Submatrizen \mathbf{L} bzw. \mathbf{L}^T der Nebendiagonalen der Massenmatrix beschreiben dabei den sogenannten modalen Partizipationsfaktor (*engl. modal participation factor*), dieser beschreibt die Kopplung von elastischen Moden und Starrkörpermoden [62].

$$\mathbf{L} = \mathbf{X}^T \mathbf{M} \Phi \quad (73)$$

Gleichung (72) lässt sich ferner in den Frequenzbereich transformieren:

$$\left(-\Omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \text{diag}(m_i) \end{bmatrix} + j\Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(c_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}(k_i) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_R \\ \hat{\mathbf{q}}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (74)$$

Aus der zweiten Zeile von Gl. (74) lässt sich der Zusammenhang des Mehrfreiheitsgradsystems zur Lösung der Bewegungsgleichung der fußpunkterregten Schwingung des Systems mit einem Freiheitsgrad aus Abschnitt 2.1.2 herstellen:

$$\hat{q}_{E,i} = \frac{\mathbf{L}_i}{m_i} \frac{1}{(-1 + 2j\vartheta_i\eta_i + \eta^2)} \hat{\mathbf{q}}_R \quad ; \quad \mathbf{L}_i = \boldsymbol{\varphi}_{E,i}^T \mathbf{M} \Phi \quad (75)$$

⁶ Dieser entspricht der Craig-Bampton Transformationsmatrix

2.3.5 Methode der Antwortspektren

Eine eng mit den Betrachtungen dieser Arbeit verbundene Methode stellt die Antwortspektren-Methode dar (*engl. response spectrum analysis, RSA*), welche im Folgenden kurz zusammengefasst wird. Der Grundgedanke dieser, auf Benioff [63] zurückzuführenden Methode beruht auf der Abschätzung der maximal während transientser Schwingungsvorgänge auftretenden Systemantwort durch Aufsummieren der Maxima der modalen Koordinaten. Es lässt sich damit eine obere Schranke \mathbf{u}_{\max} beispielsweise der Verschiebungen wie folgt ermitteln [8]:

$$\mathbf{u}_{\max} \leq |\boldsymbol{\varphi}_1| \max|q_1| + |\boldsymbol{\varphi}_2| \max|q_2| + \dots \quad (76)$$

Die Maxima der modalen Koordinaten müssen hierbei durch Integration der Einfreiheitsgradsysteme in Gl. (77) mit gegebenem Erregungsverlauf für alle betrachteten Eigenfrequenzen und Dämpfungsgrade ermittelt werden.

$$\ddot{q}_i(t) + 2\delta_i \dot{q}_i(t) + \omega_{0,i}^2 q_i(t) = \frac{\hat{f}_i(t)}{m_i} \quad (77)$$

Zur Betrachtung eines für alle Eigenformen gleichen Erregungsverlaufs $f(t)$ erfolgt dazu nach [8] die Einführung sogenannter Beteiligungsfaktoren \check{f}_i/m_i , die wie folgt definiert sind :

$$\frac{\hat{f}_i}{m_i} = \frac{\check{f}_i}{m_i} f(t) \quad (78)$$

sowie eine Normierung der modalen Koordinaten:

$$q_i(t) = \frac{\check{f}_i}{m_i} Q_i(t) \quad (79)$$

Die zu lösende Bewegungsdifferentialgleichung kann somit wie folgt angegeben werden:

$$\ddot{Q}_i(t) + 2\delta_i \dot{Q}_i(t) + \omega_{0,i}^2 Q_i(t) = f(t) \quad (80)$$

Die Integration wird dabei üblicherweise durch das Lösen der Duhamelschen Integrale durchgeführt [13]. Mit der Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung ω_i und der modalen Abklingkonstante δ_i :

$$\omega_i = \omega_{0,i} \sqrt{1 - \vartheta_i^2} \quad ; \quad \delta_i = \frac{c_i}{2m_i} \quad (81)$$

folgt für einen allgemeinen, für alle Eigenformen gleichen Erregungsverlauf [8]:

$$Q_i(t) = \frac{1}{m_i \omega_i} \int_0^t f(\tau) e^{-\delta_i(t-\tau)} \sin(\omega_i(t-\tau)) d\tau \quad (82)$$

Durch Auftragen der so ermittelten Maxima der modalen Koordinaten über allen Eigenfrequenzen in einem betrachteten Frequenzbereich werden damit die sogenannten Antwortspektren erzeugt, siehe Abb. 2.6.

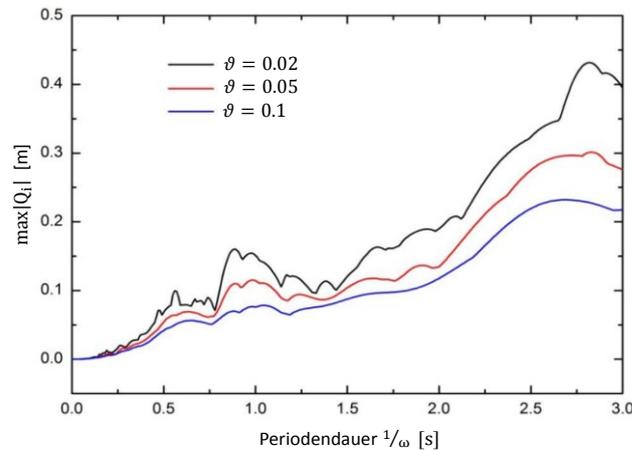


Abb. 2.6: Verschiebungs-Antwortspektrum des El-Centro Erdbebens 1940 nach [64]

Für ein konkretes System lassen sich hieraus die zeitlichen Maxima $\max|Q_i|$ an den entsprechenden Eigenfrequenzen ablesen und durch Wichtung mit den eingeführten Beteiligungsfaktoren die Maxima der modalen Koordinaten bestimmen:

$$\max|q_i| = \frac{|\check{f}_i|}{m_i} \max|Q_i| \quad (83)$$

Es lässt sich somit ermitteln, wie stark jede Eigenform an der Gesamtschwingung beteiligt sein kann. Üblicherweise findet die Antwortspektrenmethode Anwendung bei der Auslegung seismisch angeregter Strukturen, speziell bei der Berechnung von Erdbebenbeanspruchungen. Für die Superposition der Beiträge zur Gesamtlösung kommen, abhängig von der Systemkonfiguration, verschiedene Methoden zum Einsatz [64,65], auf deren Zusammenfassung an dieser Stelle verzichtet werden kann.

2.3.6 Dämpfung

Die Betrachtungen dieser Arbeit beschränken sich auf viskos gedämpfte Systeme. In der Realität sind die dem System inhärenten Eigenformen i. d. R. unterschiedlich stark gedämpft. Abhängig von Werkstoff und Struktur lässt sich die Dämpfung hierzu über steifigkeits- und massenproportionale Anteile beschreiben. Ein Ansatz zur Beschreibung der Dämpfung in viskos gedämpften Systemen ist die Konstruktion einer Dämpfungsmatrix durch eine Linearkombination von Massen- und Steifigkeitsmatrix. Die Diagonalisierbarkeit der Dämpfungsmatrix bleibt damit durch die Eigenschaften der beteiligten Matrizen erhalten. Die Dämpfungsmatrix bei dieser sogenannten Rayleigh Dämpfung ist mit den beiden Koeffizienten α und β dann wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (84)$$

Der steifigkeitsproportionale Term lässt sich darin physikalisch als innere Dämpfung, der massenproportionale Term als äußere Dämpfung interpretieren. Rayleigh Dämpfung und modale Dämpfung lassen sich dabei über die modale Entkopplung der Dämpfungsmatrix wie folgt ineinander umrechnen:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X} = \text{diag}(c_i) = \text{diag}(\alpha + \beta \omega_{0,i}^2) m_i = \text{diag}(2\vartheta_i \omega_{0,i} m_i) \quad (85)$$

Daraus folgt für die modale Dämpfung ϑ_i

$$\vartheta_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_{0,i}} + \beta \omega_{0,i} \right) \quad (86)$$

Die Koeffizienten α und β lassen sich somit ebenfalls über die Messung der modalen Dämpfung zweier Moden ermitteln [10]. Der Rayleigh-Ansatz lässt sich ferner auf Ansätze mit mehreren Koeffizienten verallgemeinern [66].

2.4 Superposition modaler Beanspruchungsgrößen

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen modalen Ansätze zur Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung dienen der Approximation des Verschiebungsfeldes. Zur Auslegung und Bewertung dynamisch beanspruchter Strukturen sind jedoch oftmals die inneren Beanspruchungen in Form von Spannungs- und Dehnungsgrößen die primären Größen von Interesse. Diese lassen sich nach Gl. (27) und Gl. (30) aus den Knotenverschiebungen des diskreten Systems bestimmen. Auf Basis eines modalen Verschiebungsansatzes wird im Folgenden das Konzept modaler Beanspruchungsgrößen und deren Superposition zur Approximation dynamischer Beanspruchungsfelder FE-diskretisierter Strukturen nach [17] beschrieben. Das modale Verzerrungsfeld $\boldsymbol{\psi}_i$ der i -ten Eigenform ergibt sich dabei symbolisch aus der Ableitung des modalen Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{\phi}_i$ durch Anwenden des Differentialoperators \mathbf{D} :

$$\boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{D} \boldsymbol{\phi}_i \quad (87)$$

Unter der Annahme von einem linear elastischen, isotropen und homogenen Materialverhalten kann hieraus das modale Spannungsfeld $\boldsymbol{\chi}_i$ über das Hookesche Gesetz bestimmt werden:

$$\boldsymbol{\chi}_i = \mathbf{H} \boldsymbol{\psi}_i \quad (88)$$

Für die diskretisierte Struktur kann unter Anwendung des FE-Verschiebungsansatzes das aus dem i -ten Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}_i$ resultierende Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\phi}_i$ ausgewertet werden. Für die weiteren Untersuchungen ist es zweckmäßig, das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\phi}_i^e$ wie folgt auf Element-Ebene zu bestimmen:

$$\boldsymbol{\phi}_i^e = \mathbf{N}_e \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^e \quad (89)$$

Darin beschreibt $\boldsymbol{\varphi}_i^e$ die aus der i -ten Eigenform resultierenden Elementknotenverschiebungen. Über die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix \mathbf{B}_e kann mit den diskreten Knotenverschiebungen die daraus resultierende modale Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}_i^e$ im Element bestimmt werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i^e = \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_i^e = \mathbf{B}_e \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^e \quad (90)$$

Die aus der i -ten Eigenform resultierende modale Spannung $\boldsymbol{\sigma}_i^e$ im Element ist über das Hookesche Gesetz definiert:

$$\boldsymbol{\sigma}_i^e = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}_i^e \quad (91)$$

Aus modaler Spannung und Dehnung ist ferner auch die spezifische Formänderungsenergie w_i^e für ein Element wie folgt bestimmt:

$$w_i^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_i^e \boldsymbol{\varepsilon}_i^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_i^{eT} \mathbf{B}_e^T \mathbf{H} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\varphi}_i^e \quad (92)$$

Die Formänderungsenergie ergibt sich aus der Integration über das Elementvolumen:

$$W_i^e = \int_V w_i^e dV \quad (93)$$

Mit der Definition der Elementsteifigkeitsmatrix in Gl. (36) folgt:

$$W_i^e = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varphi}_i^{eT} \mathbf{B}_e^T \mathbf{H} \mathbf{B}_e \boldsymbol{\varphi}_i^e dV = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_i^{eT} \mathbf{K}_e \boldsymbol{\varphi}_i^e = \frac{1}{2} k_i^e \quad (94)$$

Die Größe k_i^e kann dabei auch als modale Steifigkeit eines Elementes interpretiert werden. Nach dem Grundprinzip der FEM werden die Elementenergien zur Gesamtenergie superponiert. Auf das Gesamtsystem bezogen stellt damit der Ausdruck $\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}$ als Multiplikation der Steifigkeitsmatrix mit dem Quadrat der aus den Eigenformen resultierenden Verschiebungen die Berechnungsvorschrift für die (doppelte) modale Formänderungsenergie jeder Eigenform dar. Es kann somit ein Bezug der modalen Steifigkeit zu der aus der Eigenform resultierenden Formänderungsarbeit hergestellt werden.

Die Superposition der in diesem Abschnitt beschriebenen modalen Beanspruchungsgrößen zur Gesamtlösung erfolgt für lineare Systeme in Anlehnung an die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Methoden. Modale Koordinaten und überlagerte modale Feldgrößen sind dabei unabhängig voneinander. Die zeitlich veränderliche Beanspruchung wird im Folgenden unabhängig von der Beanspruchungsgröße allgemein mit $\mathbf{S}(t)$ und die frequenzabhängige Beanspruchung mit $\hat{\mathbf{S}}(\Omega, \eta)$ bezeichnet. Es ergeben sich für das lineare System durch Superposition der allgemeinen modalen Beanspruchungsgrößen $\boldsymbol{\xi}_i$ mit den modalen Koordinaten $q_i(t)$ im Zeitbereich und $\hat{q}_i(\Omega)$ im Frequenzbereich die folgenden Ansätze:

$$\mathbf{S}(t) = \sum_i^r \boldsymbol{\xi}_i q_i(t) \quad ; \quad \hat{\mathbf{S}}(\Omega, \eta) = \sum_i^r \boldsymbol{\xi}_i \hat{q}_i(\Omega, \eta) \quad (95)$$

Es kann damit ferner nach Gl. (62) die komplexe Frequenzgangmatrix in Beanspruchungsgrößen $\mathbf{H}^\xi(j\eta)$ formuliert werden⁷:

$$\mathbf{H}^\xi(j\eta) = \sum_{i=1}^r \frac{\xi_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i} \frac{1}{(1 - \eta_i^2 + j2\vartheta_i\eta_i)} \quad (96)$$

3 Ermüdungsfestigkeit

Ebenso wie die statische Festigkeit stellt auch die Festigkeit unter dynamischer Beanspruchung, die sog. Ermüdungsfestigkeit, eine essenzielle Eigenschaft von technischen Strukturen dar. Der Zusammenhang zwischen zyklischer Belastung und Versagen wurde dabei bereits gegen Mitte des 19. Jahrhunderts durch August Wöhler beschrieben [67,68] und ist seither Gegenstand kontinuierlicher Forschung. Als Ermüdung wird das Versagen bei dynamischer Beanspruchung bezeichnet, deren Amplitude weit unter der Beanspruchung liegt, die bei einmaliger statischer Aufbringung zum Versagen führen würde. Ermüdung tritt demnach auf, wenn eine Struktur wiederholten Belastungs- und Entlastungszyklen ausgesetzt ist [69]. Der Versagenshergang lässt sich dabei, abhängig von der Betrachtungstiefe, makroskopisch in drei Phasen einteilen, siehe Abb. 3.1. Die Gesamtlebensdauer einer Struktur ist damit beschrieben durch eine Phase der Rissinitiierung, die Phase des stabilen Risswachstums sowie die Phase des instabilen Risswachstums bzw. des Versagens. Als Kriterium für Ermüdungsversagen kann aus technischer Sicht zum einen die Entstehung eines makroskopischen Risses⁸, zum anderen dessen instabile Ausbreitung definiert werden [70].

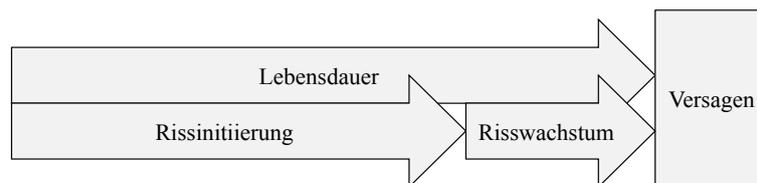


Abb. 3.1: Lebensdauer und Phasen des Versagenshergangs

Während die Phase der Rissinitiierung vorrangig durch phänomenologische Ansätze beschrieben wird, basieren moderne bruchmechanische Verfahren auf werkstofftechnischen Betrachtungen zur Rissausbreitung auf Gefüge-Ebene [69]. Zur allgemeinen Bewertung dynamischer Beanspruchungsfelder hinsichtlich potenziell ermüdungsgefährdeter Strukturregionen beschränken sich die Betrachtungen dieser Arbeit auf die Phase der Rissinitiierung. Die Ermüdungsfestigkeit lässt sich dabei allgemein auf Grundlage der ertragbaren Belastungszyklen in Kurzzeitfestigkeit (*engl. low cycle fatigue*, LCF) mit Zyklenzahlen bis ca. 10^4 Lastwechsel, in Zeitfestigkeit (*engl. high cycle fatigue*, HCF) mit Zyklenzahlen zwischen 10^4 und 10^6 sowie

⁷ Hier exemplarisch für das krafterregte System

⁸ Abhängig von Einsatzgebiet und Gefahrenpotenzial bei Versagen definiert durch eine bestimmte Risslänge

Dauerfestigkeit mit Zyklenzahlen ab ca. 10^6 Lastwechsel kategorisieren [69]. In der Literatur finden sich ferner Erweiterungen dieser Kategorien zur Betrachtung sehr geringer Lastwechselzahlen (*engl. ultra low cycle fatigue*, ULCF) [71] sowie zur Betrachtung von Ermüdung bei Lastwechselzahlen über die klassische Annahme der Dauerfestigkeit hinaus (*engl. very high cycle fatigue*, VHCF) [72]. Eine Abgrenzung dieser Kategorien auf Grundlage der Zyklenzahlen lässt sich dabei nicht klar definieren. Vielmehr stellen die an der Schädigung beteiligten makroskopischen Verformungsmechanismen im Material ein geeignetes Unterscheidungskriterium dar. Im HCF-Bereich liegen die Ermüdungslasten deutlich unterhalb der Streckgrenze des Materials. Das makroskopische Verformungsverhalten ist demnach vorrangig durch rein elastische Anteile charakterisiert. Der LCF-Bereich hingegen ist mit deutlich höheren Ermüdungslasten charakterisiert durch vorrangig makroplastisches Materialverhalten [69].

Die empirische Ermittlung der Ermüdungsfestigkeit und der damit verbundenen Materialkennwerte erfolgt i. d. R. über die wiederholte zyklische Belastung von Materialproben mit unterschiedlichen Belastungsamplituden, z. B. im Zugversuch oder im Umlaufbiegeversuch [73]. Durch Antragen der Ermüdungslasten über die zugehörigen Bruchzyklenzahlen lässt sich damit aus einer Vielzahl von Versuchen die sogenannte Wöhlerlinie erzeugen. Zur mathematischen Beschreibung lässt sich diese beispielsweise in den Dehnungen formulieren und in doppelt logarithmischer Darstellung zum einen durch die Basquin-Gleichung [74] im HCF-Bereich sowie durch die Coffin-Manson-Gleichung [75,76] im LCF-Bereich annähern, siehe Abb. 3.2.

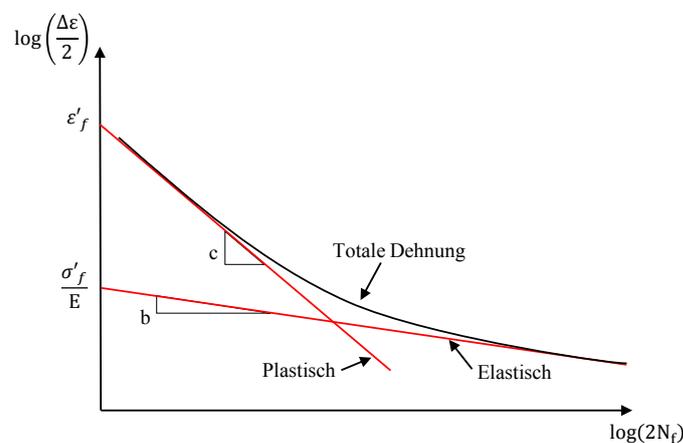


Abb. 3.2: Approximation der dehnungsbasierten Wöhlerlinie durch Basquin- bzw. Coffin-Manson-Gleichung nach [73] (schematisch)

Mit der Basquin-Gleichung:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f (2N_f)^b \quad ; \quad \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b \quad (97)$$

sowie der Coffin-Manson-Gleichung:

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (98)$$

lässt sich die totale Dehnung nach [73] damit wie folgt angeben:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\Delta\varepsilon_e}{2} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_f)^b + \varepsilon'_f (2N_f)^c \quad (99)$$

Die Terme in Gl. (97) bis (99) sind dabei wie folgt bezeichnet:

$\frac{\Delta\sigma}{2}$	– wahre Spannungsamplitude
σ'_f	– Ermüdungsfestigkeitskoeffizient
$2N_f$	– Bruchlastwechsel (1 Lastwechsel = 0.5 Zyklen)
b	– Ermüdungsfestigkeitsexponent
$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2}$	– elastische Dehnungsamplitude
E	– E-Modul
$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2}$	– plastische Dehnungsamplitude
ε'_f	– Ermüdungsduktilitätskoeffizient
c	– Ermüdungsduktilitätsexponent

Eine alternative Formulierung der Basquin-Gleichung lässt sich für den Zeitfestigkeitsbereich über die (technische) Dauerfestigkeit σ_D und die zugehörige Grenzwahrschwingspielzahl N_D formulieren [70]. Als technische Grenzwahrschwingspielzahl gilt dabei i. d. R. $N_D = 1 \cdot 10^6$ bis $N_D = 1 \cdot 10^7$. Mit der Neigungszahl k (Kehrwert des Ermüdungsfestigkeitsexponenten) ergibt sich damit folgender Zusammenhang:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma_D \left(\frac{N_D}{N} \right)^{1/k} \quad (100)$$

Die damit beschriebene Wöhlerlinie erfasst lediglich den Zeitfestigkeitsbereich und ist nach oben durch die Fließgrenze sowie nach unten durch die Dauerfestigkeit begrenzt [70]. Auf Basis der Gleichungen (97) bis (100) lassen sich damit bei vorliegenden Beanspruchungsamplituden, beispielsweise aus Finite-Elemente-Analysen, die zu erwartenden Bruchlastwechsel bestimmen. Je nach Ansatz wird dabei zwischen spannungsbasierten Verfahren (*engl. stress-life*, S-N) und dehnungsbasierten Verfahren (*engl. strain-life*, E-N) und ferner zwischen Nennspannungs-, Strukturspannungs- und örtlichen Konzepten unterschieden [7].

Für variable Beanspruchungsamplituden erfolgt zunächst die Ermittlung von sogenannten Lastkollektiven aus dem Beanspruchungs-Zeit-Verlauf. Über geeignete Zählverfahren (z. B. Rainflow-Zählung) wird damit die zeitlich veränderliche Beanspruchung durch Größe und Häufigkeit der auftretenden Amplituden beschrieben [70]. Für die Abschätzung der Lebensdauer wird anschließend eine Schadensakkumulationshypothese herangezogen, die jedem Schwingspiel eine Teilschädigung zuordnet. Durch Aufsummieren der Teilschädigungen erfolgt die Ermittlung der Gesamtschädigung (z. B. durch lineare Schadensakkumulation nach Miner [77]); ein mögliches Versagen ist durch das Erreichen einer bestimmten Schädigungssumme definiert.

Die empirisch ermittelten Kennwerte für den einachsigen Spannungszustand basieren dabei i. d. R. auf Materialversuchen an ungekerbten, polierten Proben unter rein wechselnder Einstufenbelastung, d. h. konstanter Spannungsamplitude um den Mittelwert Null [69]. In der praktischen Anwendung sind diese daher in den seltensten Fällen direkt anwendbar und von zahlreichen Faktoren beeinflusst. Diese sind nach [70] unter anderem:

- Werkstoff (Art, Legierung, Mikrostruktur)
- Bauteilgeometrie (Form, Größe, Kerbwirkung)
- Bauteiloberfläche (Rauheit, Härte, Eigenspannungen)
- Umgebungsbedingungen (Temperatur, Korrosion)
- Beanspruchungsart (Mittelspannung, Mehrachsigkeit)
- Beanspruchungsablauf (variable Amplituden und Mittelspannung, Reihenfolge)

Die der Bewertung zugrundeliegenden Wöhlerlinien werden damit i. d. R. an die vorliegende (örtliche) Beanspruchungssituation so angepasst, dass die ermittelten Bruchlasten mit empirischen Beobachtungen korrelieren. Für den tatsächlichen quantitativen Festigkeitsnachweis realer Strukturen sind diese Einflussfaktoren damit von großer Bedeutung. Da sich die Untersuchungen dieser Arbeit jedoch auf qualitative und vergleichende Aussagen beschränken, lässt sich die Betrachtung an dieser Stelle auf wenige grundlegende Einflussfaktoren beschränken. Es wird hierzu im Folgenden zum einen zwischen spröden und duktilen Werkstoffen unterschieden, zum anderen wird insbesondere die mehrachsige Beanspruchung näher betrachtet.

Mehrachsige Beanspruchung

Bei der Betrachtung der Ermüdungsfestigkeit komplexer Strukturen ist i. d. R. von mehrachsigen Beanspruchungszuständen auszugehen. Zur Bewertung dynamischer Spannungszustände ist hierbei, äquivalent zur statischen Festigkeitsberechnung, eine repräsentative Vergleichsgröße heranzuziehen, um die Beanspruchung des Werkstoffs auf den einachsigen Fall zurückzuführen. In der Lebensdaueranalyse kann diese Vergleichsgröße allgemein als Schädigungsparameter (*engl. fatigue damage parameter*) bezeichnet werden. Abhängig von der zugrundeliegenden Hypothese, welche Beanspruchungsgrößen die Ermüdungsschädigung bedingen, lassen sich Schädigungsparameter in Form von Spannungen, Dehnungen oder Formänderungsenergie-dichten formulieren [70]. Zahlreiche Veröffentlichungen zur Beschreibung und Quantifizierung der aus der mehrachsigen Beanspruchung resultierenden komplexen Schädigungsmechanismen verdeutlichen hierbei den aktuellen und anhaltenden Forschungsbedarf, siehe z. B. [78], [79], [80], [81]. Zur Klassifizierung mehrachsiger Beanspruchungszustände wird dabei zwischen proportionaler und nichtproportionaler mehrachsiger Beanspruchung unterschieden. Während bei proportionaler mehrachsiger Beanspruchung von körperfesten, d. h. konstanten Hauptspannungsrichtungen und damit proportionalen Hauptspannungen ausgegangen wird, sind nichtproportionale Beanspruchungs-Zeit-Abläufe durch variable Hauptspannungsrichtungen charakterisiert. Die Hauptspannungen stehen damit in keinem festen Verhältnis zueinander [82].

Die Einleitung eines Ermüdungsrisses lässt sich dabei auf mikrostrukturelle Vorgänge zurückführen, bei denen z. B. durch zyklische Hauptschubspannungen Gleitbänder erzeugt

werden, welche durch die zyklischen Hauptnormalspannungen geöffnet und vergrößert werden. Als Folge hiervon lässt sich bei proportionaler Beanspruchung von einer Aktivierung der gleichen Gleitebenen in jedem Schwingenspiel ausgehen, wohingegen nichtproportionale Beanspruchung zur Aktivierung wechselnder Gleitebenen führt [70]. Hierdurch begründet, bilden Versagenshypothesen der Kategorie der kritischen Schnittebenen (*engl. critical plane approach*) die größte Gruppe der in der Literatur beschriebenen Verfahren, welche vorrangig in den Dehnungen formuliert im Zeit- und Kurzzeitfestigkeitsbereich Anwendung finden [70]. Kritische Schnittebenen bilden demnach beispielsweise Ebenen größter Scherdehnung, wobei als Schädigungsparameter zum einen Kombinationen von Scherdehnungs- und Normaldehnungsamplituden, zum anderen aus Spannungen und Dehnungen kombinierte Formänderungsenergieausdrücke definiert werden [70]. Die Ermittlung kritischer Ebenen kann hierbei, abhängig von Verfahren und Beanspruchungs-Zeit-Ablauf, mit erheblichem numerischem Aufwand verbunden sein, sodass die Anwendung i. d. R. auf hochbeanspruchte Strukturbereiche begrenzt wird, deren zuverlässige Identifikation eines der Kernziele der vorliegenden Arbeit darstellt.

Für die grundlegende Bewertung versagenskritischer Strukturregionen werden die Betrachtungen dazu im Folgenden auf proportional mehrachsige Beanspruchungsverläufe beschränkt. In diesem Fall lassen sich die klassischen Festigkeitshypothesen der Statik auf dynamische Beanspruchungen übertragen, wobei die Gestaltänderungshypothese nach von Mises für duktile Werkstoffe sowie die Normalspannungshypothese nach Rankine für spröde Werkstoffe im Bereich um die Dauerfestigkeit gute Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen zeigen [70]. Der entsprechende Schädigungsparameter ist damit durch die, der anzuwendenden Festigkeitshypothese zugeordneten, Vergleichsspannung beschrieben.

Die Bewertung dynamischer Beanspruchungsfelder erfolgt in dieser Arbeit auf Basis der grundlegenden Beschreibung der Ermüdungsfestigkeit über Wöhlerlinien, welche im Folgenden über Gl. (101) beschrieben und über die Kennwerte der Vergleichsspannungsamplitude $\frac{\Delta\sigma_V}{2}$, des Ermüdungsfestigkeitskoeffizienten σ'_f sowie über den Ermüdungsfestigkeitsexponenten b definiert sind.

$$\frac{\Delta\sigma_V}{2} = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (101)$$

Mittelspannungen und weitere Einflussfaktoren

Bei Überlagerung des dynamischen Beanspruchungsfeldes mit statischen Anteilen lässt sich in der Realität eine Erhöhung der ertragbaren Spannungsamplituden durch Mittelspannungen im Druckbereich bzw. Minderung durch Mittelspannungen im Zugbereich beobachten [70]. Der Einfluss von Mittelspannungen und weiteren Faktoren wie Werkstoff, Bauteilgeometrie, Oberfläche und Umgebungsbedingungen wird für die qualitativen Betrachtungen dieser Arbeit als konstant angenommen. Eine Bewertung erfolgt demnach auf Basis der Wöhlerlinien für reine Wechselbeanspruchung.

4 *A priori* Detektion versagenskritischer Strukturregionen

Das folgende Kapitel beschreibt die Entwicklung einer Methodik zur *a priori* Detektion versagenskritischer Strukturregionen auf Basis modaler Beanspruchungsfelder. Grundlage hierfür bildet die in Kapitel 2.3 beschriebene Darstellung der Bewegungsgleichung im Modalraum sowie die Überlagerung modaler Beanspruchungsfelder zur Gesamtlösung aus Kapitel 2.4. Neben der Annahme linearer und zeitinvarianter Systeme wird dabei von schwach (proportional) gedämpften Systemen mit viskoser Dämpfung ausgegangen. Die modale Entkopplung erfolgt demnach mit den Eigenvektoren des ungedämpften Systems und es wird von einer diagonalisierbaren Dämpfungsmatrix ausgegangen.

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist zunächst eine Identifikation maßgeblicher Einflussfaktoren auf die Systemantwort sowohl in den modalen Koordinaten als auch in den resultierenden Beanspruchungen, um auf dieser Basis Rückschlüsse auf die Wichtung der einzelnen Moden bei Superposition zur Gesamtlösung zu ziehen. Mit den gewonnenen Erkenntnissen erfolgt die Entwicklung eines modalen Wichtungskoeffizienten, um die modalen Anteile im Vorfeld – d.h. *a priori* – konservativ abzuschätzen und auf dieser Basis qualitative Aussagen über potenziell höher beanspruchte, schadigungsrelevante Strukturregionen zu treffen.

Eine der fundamentalen Annahmen des entwickelten Ansatzes stellt dabei die Hypothese dar, dass die maximale dynamische Beanspruchung direkt aus der maximalen Schwingungsantwort in den modalen Koordinaten des Systems resultiert und diese bei phasengleichem Auftreten aller modalen Maxima zu erwarten ist. In diesem Fall lässt sich die Berechnung der spezifischen Verläufe der modalen Koordinaten auf eine Betrachtung der jeweiligen Maxima reduzieren. Das resultierende Beanspruchungsfeld stellt somit – in Anlehnung an die etablierte Methode der Antwortspektren, beschrieben in Abschnitt 2.3.5 – eine konservative Approximation dar und kann als obere Schranke für die auftretenden dynamischen Beanspruchungen erachtet werden.

Eine dynamisch belastete Struktur wird dazu zunächst als dynamisches System betrachtet. Zur systematischen Untersuchung erfolgt dabei eine Einteilung in Eingangsgrößen, Systemgrößen, Ausgangsgrößen und Bewertungsgrößen, siehe Abb. 4.1.

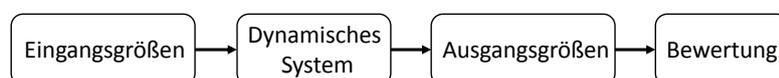


Abb. 4.1: Dynamisches System

Eingangsgrößen

Die in dieser Arbeit betrachteten Eingangsgrößen sind durch mechanische Belastungsgrößen beschrieben, die von außen auf das System einwirken. Die untersuchten, technisch relevanten Belastungsgrößen stellen die Anregung durch diskrete oder verteilte Kräfte sowie die Weg- bzw. Fußpunktanregung dar, welche im Folgenden allgemein als Lasten zusammengefasst werden, siehe Abb. 4.2.

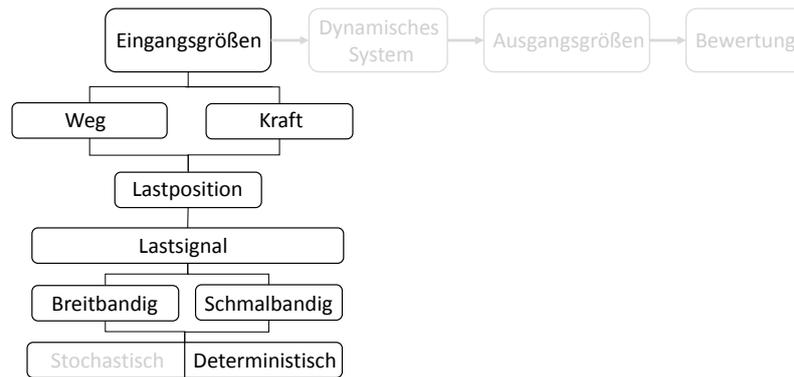


Abb. 4.2: Eingangsgrößen

Die Lasten lassen sich dabei weiter unterteilen in einen Anteil der räumlichen Lastkonfiguration (Lastposition) sowie einen Signalanteil, der den zeitlichen Lastverlauf bzw. den Frequenzinhalt der Belastung beschreibt. Für die systematische Untersuchung der Eingangsgrößen werden beide Anteile separat betrachtet. Dabei wird zwischen breitbandigen und schmalbandigen sowie zwischen deterministischen und stochastischen Anregungssignalen unterschieden. Die Untersuchungen dieser Arbeit beschränken sich hierbei auf deterministische Anregungssignale; eine Erweiterung der Betrachtungen auf stochastische Anregung ist jedoch möglich und wird im abschließenden Ausblick dieser Arbeit diskutiert.

Systemgrößen

Das allgemeine dynamische System in Abb. 4.3 ist durch die FE-diskretisierte Struktur in Form der Bewegungsgleichung beschrieben. Für die durchgeführten Untersuchungen wird das nach Abschnitt 2.3.2 in den Modalraum transformierte System betrachtet, welches bei einer ausreichenden Anzahl von berücksichtigten Moden als hinreichend genaue Approximation angesehen werden kann [83]. Abhängig von der Art der Systemanregung ist das Übertragungsverhalten damit über die Superposition der entsprechenden Frequenzgänge der modalen Koordinaten definiert.

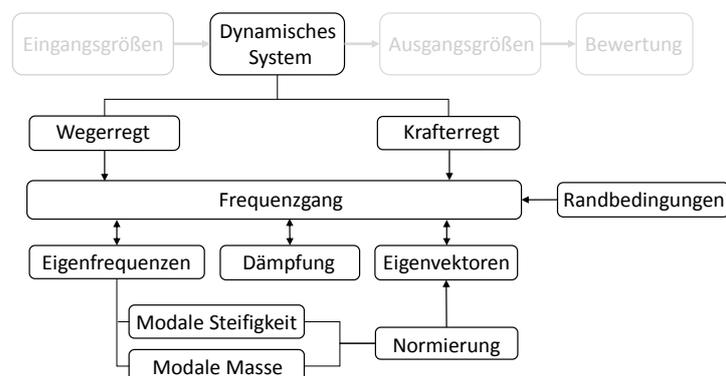


Abb. 4.3: Systemgrößen

Die Frequenzgänge beinhalten die Eigenfrequenzen, die modalen Dämpfungen sowie die Eigenvektoren. Weitere relevante Systemgrößen stellen die modalen Massen sowie die modalen Steifigkeiten dar, die sowohl für die Normierung der Eigenvektoren als auch für Untersuchungen

zur Sensitivität der Moden gegenüber der Anregung von Interesse sind. Die Systemgrößen sind hierbei direkt von den spezifischen Randbedingungen beeinflusst, welche durch die Lagerung der untersuchten Struktur gegeben sind.

Ausgangsgrößen

Die untersuchten Ausgangsgrößen sind durch die Strukturantwort auf die äußeren Lasten gegeben und stellen die Zielgrößen der entwickelten Methodik dar. In den folgenden Betrachtungen sind diese allgemein durch modale Feldgrößen und die zugehörigen modalen Koordinaten definiert, welche zur Gesamtlösung superponiert werden, siehe Abb. 4.4.

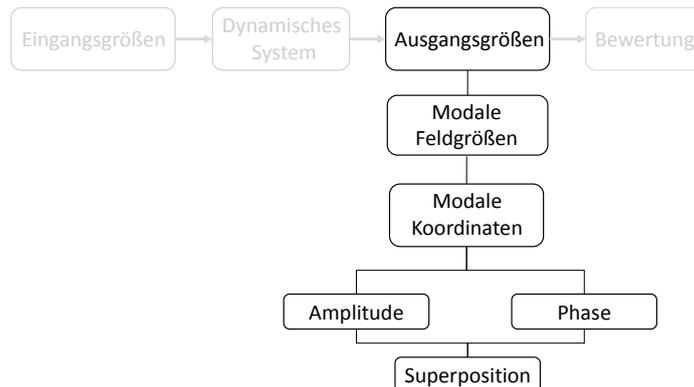


Abb. 4.4: Ausgangsgrößen

Für die entwickelte Methodik spielt dabei einerseits die Auswahl geeigneter modaler Feldgrößen und andererseits die geeignete Approximation der modalen Koordinaten eine entscheidende Rolle. Da beide Größen unabhängig voneinander in die Superposition zur Gesamtlösung eingehen, kann die Betrachtung getrennt erfolgen. Im Frequenzbereich sind die modalen Koordinaten als allgemeine komplexe Größen durch Betrag und Phasenwinkel beschrieben, die modalen Feldgrößen werden allgemein aus den diskreten Eigenvektoren des ungedämpften Systems abgeleitet.

Bewertungsgrößen

Zur Bewertung der resultierenden Beanspruchungsgrößen wird die in Kapitel 3 beschriebene Ermüdungsfestigkeit herangezogen. Neben den resultierenden Amplituden stellen dabei ebenfalls die Lastwechsel eine Größe von Interesse dar, siehe Abb. 4.5.

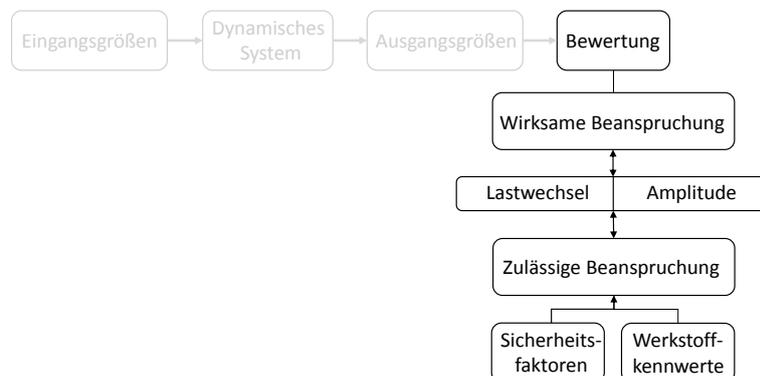


Abb. 4.5: Bewertungsgrößen

Aus der Kombination von Lastwechseln und zugehöriger Amplitude lassen sich – nach den entsprechenden Bewertungskriterien aus Kapitel 3 – mit gegebenen Werkstoffkennwerten und definierten Sicherheitsfaktoren allgemein die zulässigen Beanspruchungen ermitteln. Für die entwickelte Methodik ist hierbei vor allem die Definition der zulässigen Beanspruchung von besonderem Interesse, um versagenskritische Strukturregionen zuverlässig zu detektieren.

Vorgehen

Die Systematik der beschriebenen Entwicklung kann damit wie folgt zusammengefasst werden: In Abschnitt 4.1 erfolgt zunächst eine grundlegende Diskussion geeigneter modaler Feldgrößen auf Basis der in Kapitel 3 beschriebenen Festigkeitskenngrößen und den mit der *a priori* Anwendung verbundenen Besonderheiten. Im darauffolgenden Abschnitt 4.2 erfolgen detaillierte Untersuchungen zur Approximation der Maxima der modalen Koordinaten für die Entwicklung eines modalen Wichtungskoeffizienten für krafterregte Systeme. Darin inbegriffen ist die Betrachtung von räumlicher Lastkonfiguration und Anregungsspektrum für breitbandig und schmalbandig angeregte Systeme sowie die Untersuchung des Einflusses der Normierung der Eigenvektoren. In Abschnitt 4.3 erfolgt eine Erweiterung auf proportional gedämpfte Systeme und in Abschnitt 4.4 die Übertragung der für krafterregte Systeme hergeleiteten Zusammenhänge auf fußpunkterregte Systeme. Die Bewertung der mittels der entwickelten Methodik ermittelten Beanspruchungsfelder ist Gegenstand des Abschnitts 4.5, welcher ebenfalls die numerische Umsetzung thematisiert.

4.1 Modale Feldgrößen

Auf Grundlage der in Kapitel 3 beschriebenen Festigkeitskenngrößen können verschiedene modale Feldgrößen für die Detektion versagenskritischer Strukturregionen herangezogen werden. Von essenzieller Bedeutung für die Aussagefähigkeit der in dieser Arbeit entwickelten Methodik ist hierbei die Skalierbarkeit der Eigenvektoren. Ein Vorzeichenwechsel bei der Skalierung der Eigenvektoren führt allgemein auch zu einem Vorzeichenwechsel der aus den Eigenvektoren abgeleiteten Feldgrößen. Durch die Reduktion der Betrachtungen auf die Maxima der modalen Koordinaten der Schwingungsantwort steht die konkrete Phaseninformation – und damit im weiteren Sinne das Vorzeichen der an der Superposition zur Gesamtlösung beteiligten modalen Anteile – nicht zur Verfügung. Qualitativ korrekte und konservative Aussagen lassen sich daher nur dann treffen, wenn die betrachteten Feldgrößen unabhängig vom Vorzeichen des Skalierungsfaktors der zugrundeliegenden Eigenvektoren sind.

Letzteres trifft beispielsweise auf die klassischen Vergleichsspannungen der Gestaltänderungshypothese sowie der Schubspannungshypothese zu und lässt sich bei Annahme gleicher Tragfähigkeit für Zug- und Druckbeanspruchung bei isotropem Material auf den Betrag der Hauptspannungen übertragen [84]. Die Anwendung von Vergleichsspannungshypothesen hat dabei den Vorteil, dass der mehrachsige Spannungszustand komplexer Bauteile implizit berücksichtigt wird. Darüber hinaus lassen sich Theorien auf Basis der Formänderungsenergie bzw. der auf das Volumen bezogenen Formänderungsenergiegedichte heranziehen.

Für die folgenden Untersuchungen wird exemplarisch die Gestaltänderungshypothese nach von Mises zur Beschreibung modaler Beanspruchungsfelder herangezogen. Diese gilt für duktile Metalle im HCF-Bereich um die Dauerfestigkeit als bewährte Festigkeitshypothese [70].

4.2 Krafterregte Systeme

Die Beanspruchung einer dynamisch belasteten Struktur kann nach Kapitel 2.4 durch die Überlagerung der an der Schwingung beteiligten Moden und der zeit- bzw. frequenzabhängigen Verläufe der zugehörigen modalen Koordinaten beschrieben werden. Zur Entwicklung der folgenden Methodik wird zunächst die Frequenzbereichslösung des harmonisch krafterregten Systems betrachtet und im Abschnitt 4.4 auf fußpunkterregte Systeme erweitert. In der modalen Darstellung können dabei gezielt die spezifischen Anteile der einzelnen Schwingformen zur Gesamtschwingung dargestellt und interpretiert werden. Zur Veranschaulichung wird das akademische Beispiel des ebenen Biegebalkens auf zwei Stützen herangezogen. Der untersuchte Balken hat eine Länge von $L = 1000$ mm und einen rechteckigen Querschnitt mit $b = 20$ mm und $h = 6$ mm, siehe Abb. 4.6. Die durchgeführten Untersuchungen erfolgen mit dem Programm ABAQUS, Version 6.14. Das System wird dazu mit linearen Balkenelementen vom Typ B31 mit einer Elementlänge von 1 mm diskretisiert. Die linear-elastischen Materialkennwerte sind mit $E = 210\,000$ MPa und $\nu = 0.3$ gegeben.

Die Lastaufbringung erfolgt in der in Abb. 4.6 gezeigten y -Richtung durch diskrete Knotenkräfte. Es ergeben sich damit für die beschriebene Diskretisierung des ebenen Systems 999 mögliche Lastpositionen (Knoten mit Randbedingungen ausgenommen).

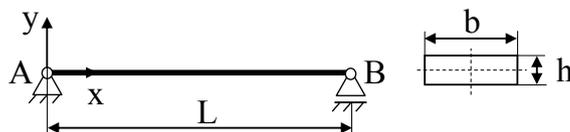


Abb. 4.6: Balken auf zwei Stützen

Für die Knotenverschiebung des krafterregten Systems gilt nach Abschnitt 2.3.3:

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{i=1}^r \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \frac{1}{k_i [1 - \eta_i^2 + 2j\vartheta_i \eta_i^2]} \hat{\mathbf{F}} e^{j\Omega t} \quad (102)$$

Ausgehend von Gl. (102) können damit die folgenden Faktoren als maßgebliche Einflussfaktoren auf die Systemantwort identifiziert und in den kommenden Abschnitten detailliert erörtert werden:

- Modale Last
- Modale Steifigkeit
- Modale Dämpfung
- Anregungsspektrum

4.2.1 Modale Last

Zur Betrachtung des Lasteinflusses erfolgt in Gl. (103) zunächst eine Aufteilung des allgemeinen, im Zeit- oder Frequenzbereich beschriebenen Lastvektors $\mathbf{F}(t, \Omega)$ in einen konstanten Vektor der Lastrichtungen $\hat{\mathbf{F}}$ sowie eine Matrix der Lastfunktionen $\mathbf{p}(t, \Omega)$.

$$\mathbf{F}(t, \Omega) = \hat{\mathbf{F}}\mathbf{p}(t, \Omega) \quad (103)$$

Auf dieser Basis lässt sich der Einfluss von räumlicher Lastkonfiguration und zeitlicher Veränderlichkeit der Lastfunktionen separat betrachten⁹. Aus dem dyadischen Produkt der Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T$ in Gl. (102) ergibt sich eine, für jede Eigenform spezifische Matrix \mathbf{G}_i . Allgemein kann die Dyade \mathbf{G}_i als lineare Abbildung zwischen zwei Vektoren interpretiert werden (Tensor 2. Stufe), eine komponentenweise Auswertung von \mathbf{G}_i ist dabei i. d. R. nicht nötig [8]. Für den vorliegenden Fall ergibt sich:

$$\mathbf{G}_i \cdot \hat{\mathbf{F}} = (\boldsymbol{\varphi}_i \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) \cdot \hat{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\varphi}_i \cdot (\boldsymbol{\varphi}_i^T \cdot \hat{\mathbf{F}}) \quad (104)$$

Demnach wird der Vektor der Lastrichtungen $\hat{\mathbf{F}}$ (kurz Lastvektor) in Gl. (104) auf den um $(\boldsymbol{\varphi}_i^T \cdot \hat{\mathbf{F}})$ gestreckten Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}_i$ abgebildet. Das Skalarprodukt von Eigenvektor und Lastvektor wird hierin allgemein als modale Last bezeichnet und beschreibt direkt die Beteiligung der jeweiligen Eigenform an der Erregung [8]. Bei Betrachtung allgemeiner modaler Beanspruchungsgrößen ξ_i in Gl. (105) erfolgt äquivalent eine Streckung des modalen Beanspruchungsfeldes um die modale Last:

$$\mathbf{s}(t) = \sum_{i=1}^r \xi_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{F}} \frac{1}{k_i [1 - \eta_i^2 + 2j\theta_i \eta_i^2]} e^{j\Omega t} \quad (105)$$

Die modale Last $\boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{F}}$ kann damit als Wichtung der einzelnen Moden bezüglich der räumlichen Konfiguration der Lastaufbringung interpretiert werden. Diese Wichtung kann am ebenen Balken auf zwei Stützen anschaulich dargestellt werden, wenn die modale Last über den Lastangriffspunkt für alle möglichen Lastpositionen angetragen wird. In Abb. 4.7 sind hierfür die, mit den ersten 10 Eigenformen des ebenen Systems gebildeten, modalen Lasten (massennormierte Eigenvektoren) bei Aufbringen einer Einheitslast an den jeweiligen Knoten dargestellt. Die Darstellung beschränkt sich aus Symmetriegründen auf die halbe Länge des betrachteten Balkens. Auf Grund der Skalierbarkeit der Eigenvektoren ist der Betrag der modalen Lasten dargestellt.

⁹ Zur Betrachtung mehrerer Lastfunktionen kann $\mathbf{p}(t, \Omega)$ als Diagonalmatrix formuliert werden.

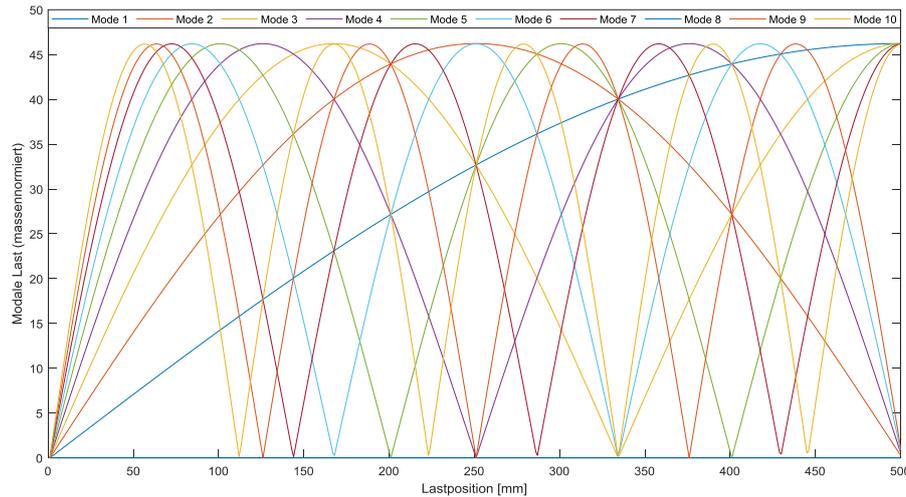


Abb. 4.7: Modale Last über der Lastposition bei massennormierten Eigenvektoren ($0 \leq x \leq 500$ mm)

Die modalen Lasten stellen in diesem Fall Kurven dar, die in ihrer Form den einzelnen Eigenformen gleichen. Demnach resultiert die maximale modale Last für jede Eigenform bei Anregung in ihrem jeweiligen Maximum. Bei Anregung in den Schwingungsknoten reagieren die Eigenformen – im ungedämpften Fall – auch bei Anregung in Resonanzfrequenz nicht (sog. Pseudoresonanz). In Abb. 4.7 können für das einfache Balkenbeispiel weiterhin Schnittpunkte einzelner Kurven identifiziert werden, welche an Lastpositionen mit gleichen modalen Lasten der beteiligten Eigenformen vorliegen.

Ein Bereich, an dem mehrere Moden mit nahezu gleicher modaler Last angeregt werden, findet sich beispielsweise bei Lastposition $x = 334$ mm, im Knoten 335. Hier stimmen sechs modale Lasten nahezu überein, während vier Eigenformen (Moden 2, 6, 8 und 10) auf Grund der Lastaufbringung im Schwingungsknoten nicht angeregt werden, siehe Abb. 4.8.

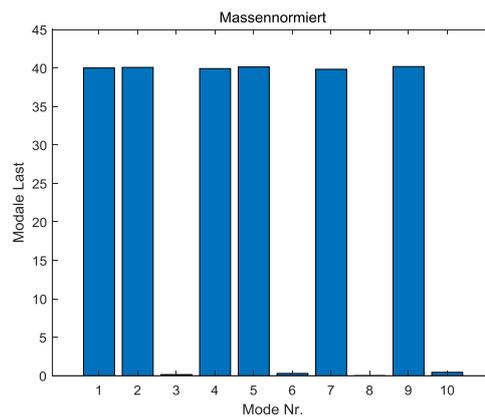


Abb. 4.8: Modale Lasten bei Lastposition $x = 334$ mm (Knoten 335)

Eine Frequenzbereichsanalyse ($f = 0$ bis $f = 1.2$ kHz) mit konstanter Lastamplitude in dieser Lastposition (Knoten 335) zeigt, dass die entsprechenden Eigenformen eine signifikante Anregung erfahren. Die Ausprägung der maximalen Amplituden der modalen Koordinaten der einzelnen Eigenformen weist dabei jedoch Unterschiede über mehrere Größenordnungen auf, siehe Abb. 4.9.

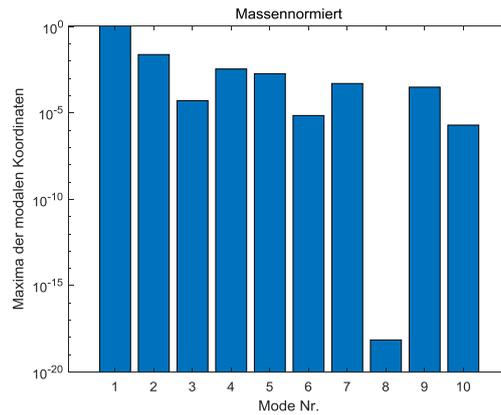


Abb. 4.9: Maxima der modalen Koordinaten bei Lastposition $x = 334$ mm (logarithmische Darstellung)

Als Grund hierfür lässt sich die Normierung der Eigenvektoren identifizieren, welche zwar bei Rücktransformation in physikalische Koordinaten keinen Einfluss auf die Strukturantwort hat, die Wichtung der modalen Anteile über die modale Last bei Superposition zur Gesamtlösung jedoch erheblich beeinflusst. Dieser Einfluss lässt sich in Abb. 4.10 durch Antragen der modalen Lasten über der Lastposition bei auf die modale Steifigkeit normierten Eigenvektoren anschaulich darstellen.

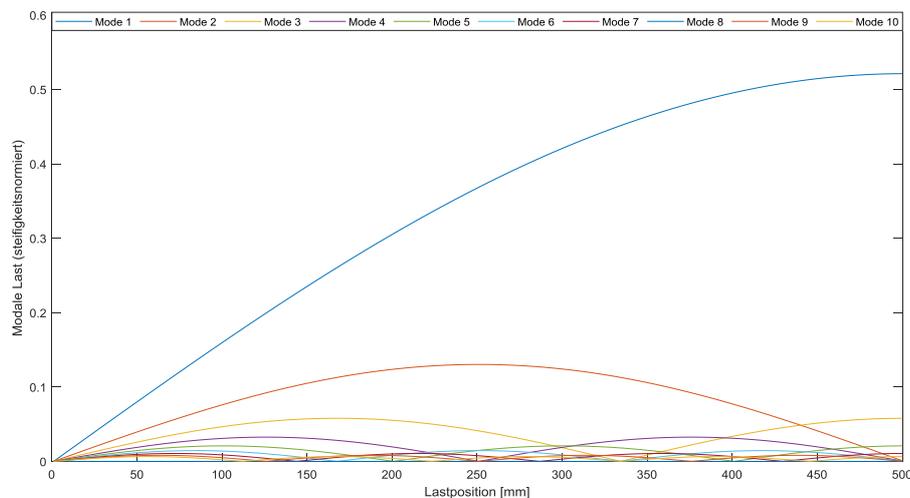


Abb. 4.10: Modale Lasten über der Lastposition bei steifigkeitsnormierten Eigenvektoren

Durch die Normierung ist dabei die modale Last der niederfrequenten Eigenformen im gesamten Anregungsbereich erhöht dargestellt. Abseits der modalen Last kann damit in Gl. (102) sowohl die Normierung der Eigenvektoren als auch die modale Steifigkeit k_i als maßgebender Einflussfaktor auf die Wichtung der jeweiligen Anteile der spezifischen Eigenformen bei Superposition zur Gesamtschwingung identifiziert werden.

4.2.2 Modale Steifigkeit und Normierung der Eigenvektoren

Die modale Steifigkeit stellt eine dynamische Eigenschaft des Systems dar und ist zwar unabhängig von der äußeren Belastung, wird jedoch von der Normierung der Eigenvektoren beeinflusst. Sie kann nach Gl. (106) ferner als qualitatives Maß für den Inhalt der Formänderungsenergie in jeder Eigenform gedeutet werden und steigt (bei normierter modaler Masse) quadratisch mit steigender Eigenfrequenz.

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_i = k_i = \omega_{0,i}^2 m_i \quad (106)$$

Eigenformen mit geringer modaler Steifigkeit (und damit geringer Formänderungsenergie) können mit geringerem Energieaufwand angeregt werden, wohingegen die Anregung höherer Moden mehr Energie erfordert. Dies entspricht den Beobachtungen aus der Realität, bei denen Strukturen bei breitbandiger Anregung gleicher Amplitude vorrangig im unteren Frequenzbereich mit hohen Amplituden reagieren¹⁰. Werden die Eigenvektoren nach Gl. (107) auf die Formänderungsenergie der Eigenformen normiert, lässt sich Abb. 4.10 dahingehend so interpretieren, dass die modale Last unter Berücksichtigung der höheren Sensitivität gegenüber Anregung der Moden des unteren Frequenzbereichs gebildet wird.

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}_i^T \mathbf{K} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_i = 1 \quad (107)$$

Ein deutlich signifikanterer Einfluss der Normierung der Eigenvektoren lässt sich ferner bei Betrachtung der aus den Eigenvektoren abgeleiteten Beanspruchungsgrößen beobachten, siehe auch [54]. Die Berechnung der in Abschnitt 2.4 beschriebenen modalen Beanspruchungsgrößen erfolgt für das FE-diskretisierte System auf Grundlage der aus dem allgemeinen Matrizeigenwertproblem ermittelten Eigenvektoren, d. h. aus dem modalen Verschiebungsfeld jeder Eigenform.

Bei Betrachtung der aus dem modalen Verschiebungsfeld resultierenden Dehnungen wird deutlich, dass die Normierung der Eigenvektoren einen erheblichen Einfluss auf alle daraus abgeleiteten Größen hat. In gängigen FE-Systemen sind die Eigenvektoren so skaliert, dass die maximal auftretende Verschiebung jeder Eigenform durch +1 gegeben ist. In Anbetracht dessen, dass im diskreten System die höchste Eigenform ein Gegeneinanderschwingen jedes Freiheitsgrades darstellt, resultiert diese Normierung in steigenden modalen Beanspruchungen in höheren Moden.

Dies kann in Abb. 4.11 durch Darstellung der modalen Verschiebungen und den daraus resultierenden modalen Spannungen für die erste sowie die zehnte Eigenform des betrachteten Balkenbeispiels verdeutlicht werden. Die Auswertung der modalen Spannungen erfolgt in Anlehnung an Kapitel 3 über die von Mises-Vergleichsspannung jedes Elementes.

¹⁰ Interpretationen zu höherer Dämpfung im oberen Frequenzbereich außer Acht gelassen

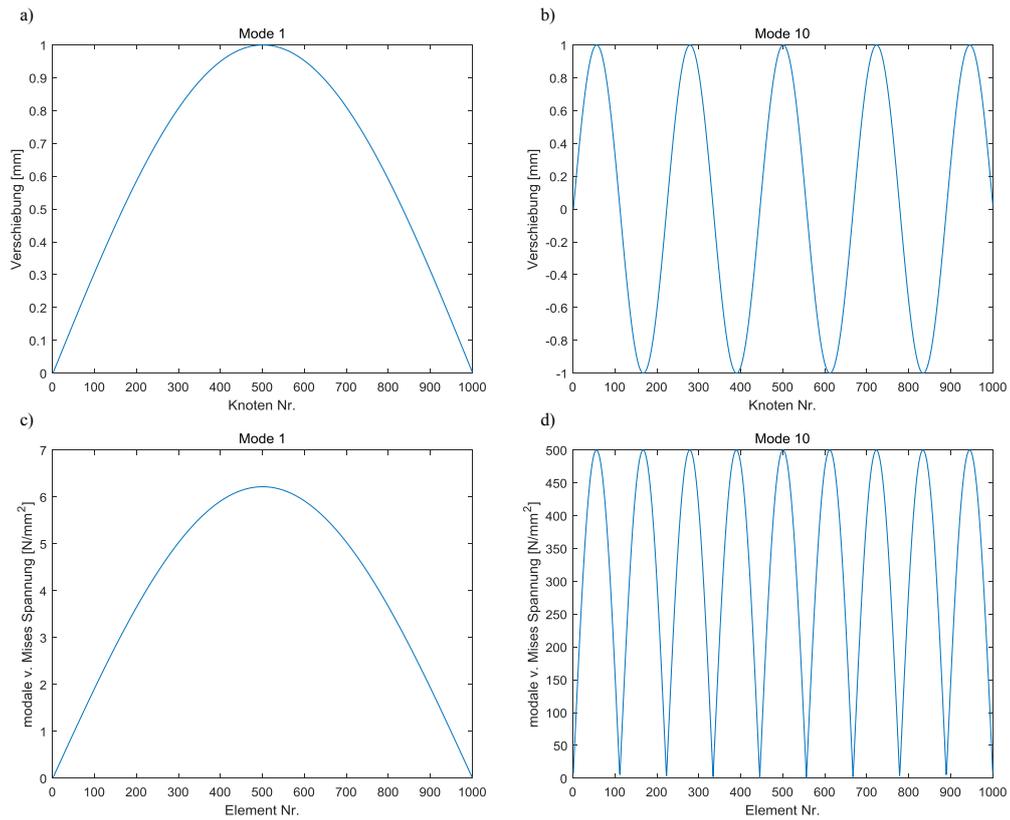


Abb. 4.11: a) Vertikale Knotenverschiebung Mode 1, b) Vertikale Knotenverschiebung Mode 10, c) Modale v. Mises-Spannung Mode 1, d) Modale v. Mises-Spannung Mode 10

Werden die Eigenvektoren hingegen bezüglich der modalen Masse normiert, zeigt sich, dass hierdurch im linearen System der qualitative Verlauf der modalen Spannungen zwar erhalten bleibt (siehe Abb. 4.12 a für Mode 10), die Amplitude jedoch sowohl im Vergleich zur Verschiebungsnormierung als auch zwischen verschiedenen Moden Veränderungen über mehrere Größenordnungen aufweist. Dieser Zusammenhang lässt sich durch Darstellung der auftretenden Maxima der modalen Spannungen für die ersten zehn Moden des Systems verdeutlichen, siehe Abb. 4.12 b.

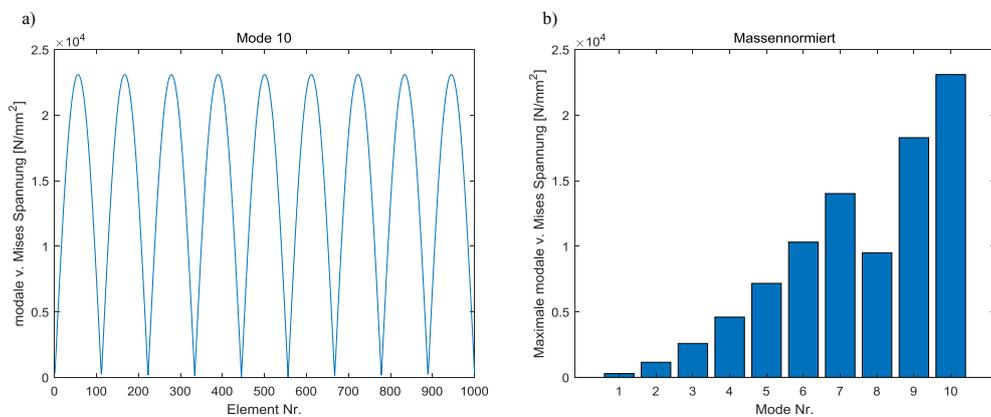


Abb. 4.12: a) Modale v. Mises-Spannung Mode 10, massennormiert, b) Maxima der modalen v. Mises-Spannung, massennormiert

Zum Vergleich des Einflusses der verschiedenen Normierungen der Eigenvektoren auf die modale Beanspruchung erfolgt eine Darstellung der auftretenden Maxima der modalen von Mises-Elementspannungen bei Normierung der Eigenvektoren auf die Verschiebung (Abb. 4.13 a) sowie bezüglich der modalen Steifigkeit (Abb. 4.13 b).

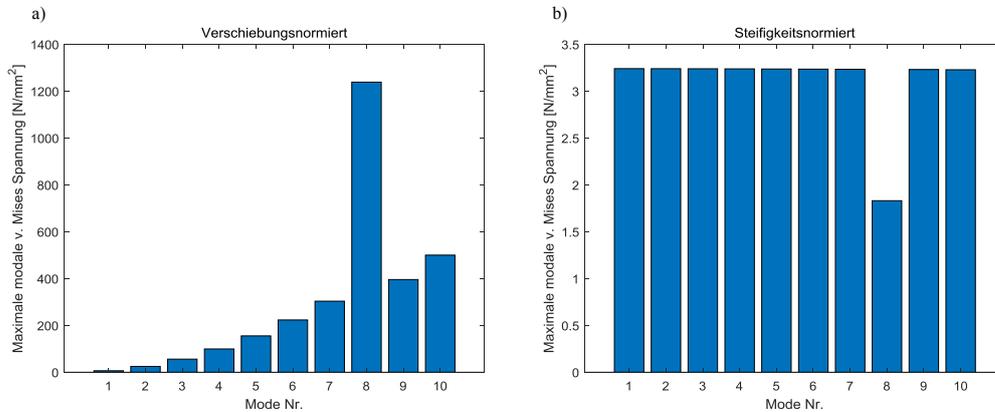


Abb. 4.13: a) Maxima der modalen v. Mises-Spannung, verschiebungsnormiert, b) Maxima der modalen v. Mises-Spannung, steifigkeitsnormiert

Deutlich erkennbar in Abb. 4.13 b ist, dass die Maxima der modalen Beanspruchungen bei steifigkeitsnormierten Eigenvektoren über den gesamten betrachteten Frequenzbereich die gleiche Größenordnung aufweisen. Für die *a priori* Superposition modaler Beanspruchungsgrößen stellt dies eine wichtige Voraussetzung dar, da anderenfalls niederfrequente – oft dominante – Beanspruchungen durch steigende modale Beanspruchungen im höheren Frequenzbereich überdeckt werden.

Es kann damit gezeigt werden, dass zur konsistenten *a priori* Überlagerung modaler Beanspruchungsgrößen bei krafterregten Systemen eine Normierung der Eigenvektoren bezüglich der Steifigkeitsmatrix zielführend ist, siehe Abschnitt 4.2.3. Es folgt für die steifigkeitsnormierten Eigenvektoren $\bar{\varphi}_i$ sowie für die steifigkeitsnormierten Dehnungsmoden $\bar{\Psi}_i$ und Spannungsmoden $\bar{\chi}_i$:

$$\bar{\varphi}_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \varphi_i \quad ; \quad \bar{\Psi}_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \Psi_i \quad ; \quad \bar{\chi}_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \chi_i \quad (108)$$

Es lässt sich damit ferner der Einfluss der Normierung der Eigenvektoren ausklammern, was den Fokus der folgenden Betrachtungen auf die Untersuchung geeigneter Wichtungskoeffizienten für die *a priori* Superposition modaler Feldgrößen richtet.

4.2.3 Einfluss des Anregungsspektrums

Das frequenzabhängige Übertragungsverhalten einer dynamisch belasteten (diskretisierten) Struktur ist allgemein durch die komplexe Frequenzgangmatrix in Gl. (109) beschrieben (vgl. Abschnitt 2.3.3).

$$\mathbf{H}(j\eta) = \sum_{i=1}^r \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{k_i} \frac{1}{(1 - \eta_i^2 + j2\vartheta_i \eta_i)} \quad (109)$$

In der modalen Darstellung lässt sich die Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(j\eta)$ dabei in eine ortsabhängige Matrix \mathbf{G}_i für die räumliche Verknüpfung der Systemantwort mit der spezifischen Lastkonfiguration (vgl. Abschnitt 4.2.1) sowie den modalen Frequenzgang $H_i(j\eta_i)$ aufspalten:

$$H_i(j\eta_i) = \frac{1}{k_i(1 - \eta_i^2 + j2\vartheta_i \eta_i)} \quad (110)$$

Der jeder Eigenform zugeordnete modale Frequenzgang ist hierbei für die folgenden Betrachtungen von besonderem Interesse. Dieser lässt sich weiter in modalen Amplitudenfrequenzgang $A_i(\eta_i)$ sowie modalen Phasenfrequenzgang $\alpha_i(\eta_i)$ zerlegen:

$$H_i(j\eta_i) = |H_i(j\eta_i)| e^{j\alpha_i(\eta_i)} = A_i(\eta_i) e^{j\alpha_i(\eta_i)} \quad ; \quad \alpha_i(\eta_i) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(H_i(j\eta_i))}{\text{Re}(H_i(j\eta_i))}\right) \quad (111)$$

In Anlehnung an den Einmassenschwinger (vgl. Kapitel 2.1) lässt sich hierbei eine für jede Eigenform spezifische, dimensionslose modale Vergrößerungsfunktion $V_i(\eta_i)$ definieren:

$$V_i(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta_i^2)^2 + 4\vartheta_i^2 \eta_i^2}} \quad (112)$$

Auf Basis der modalen Frequenzgänge lassen sich damit Annahmen treffen, um die jeweiligen modalen Anteile an der Gesamtschwingung im Vorfeld abzuschätzen. Mit dem Ziel, qualitative Aussagen über potenziell höherbeanspruchte und damit versagenskritische Strukturregionen zu treffen, wird im Folgenden davon ausgegangen, dass ein Maximum der dynamischen Beanspruchungen zu erwarten ist, wenn die jeweiligen, an der Superposition zur Gesamtlösung beteiligten modalen Koordinaten ihr Maximum erreichen. Als obere Schranke der maximalen Beanspruchung wird dabei ferner angenommen, dass diese Maxima – unabhängig vom jeweiligen Zeitverlauf – phasengleich auftreten. Für die weiteren Betrachtungen wird dazu zwischen breitbandiger und schmalbandiger Anregung unterschieden.

Breitbandige Anregung

Namensgebend für die breitbandige Anregung ist das durch das Anregungssignal angeregte breite Frequenzspektrum. Es kann bei breitbandiger Anregung demnach davon ausgegangen werden, dass durch die im Anregungssignal enthaltenen Frequenzen potenziell jede Eigenform im betrachteten Frequenzbereich in gleicher Weise zum Schwingen angeregt wird. Bezogen auf die stationäre Systemantwort kann damit die Annahme getroffen werden, dass im für die dynamisch belastete Struktur ungünstigsten Fall jede Eigenform in Resonanz angeregt wird. Unter Verwendung der Frequenzbereichslösung des modal entkoppelten Systems lässt sich dies nach den Abschnitten 2.1 und 2.3.3 durch das jeweilige Maximum der modalen Vergrößerungsfunktionen beschreiben (siehe Gl. (113)), woraus sich ein Faktor zur Wichtung der modalen Anteile an der Gesamtschwingung auf Grundlage der Annahmen zum Frequenzinhalt des Anregungsspektrums definieren lässt.

$$V_{i,\max} = \frac{1}{2\vartheta_i\sqrt{1-\vartheta_i^2}} \quad (113)$$

Es kann somit – zusammen mit den im vorigen Abschnitt erörterten Betrachtungen zum Einfluss von Lastposition und Normierung der Eigenvektoren – folgender Wichtungskoeffizient $\Gamma_{b,i}$ zur Abschätzung der maximalen Beanspruchung für breitbandig angeregte Strukturen hergeleitet werden:

$$\Gamma_{b,i} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{F}}}{k_i 2\vartheta_i \sqrt{1-\vartheta_i^2}} \quad (114)$$

Die Superposition der so gewichteten allgemeinen modalen Beanspruchungsfelder $\boldsymbol{\xi}_i$ zu einer approximativen oberen Schranke der Beanspruchung \mathbf{S}_{\max} stellt sich mit damit nach Abschnitt 2.4 wie folgt dar:

$$\mathbf{S}_{\max} = \sum_{i=1}^r \Gamma_{b,i} \boldsymbol{\xi}_i \quad (115)$$

Es kann dabei gezeigt werden, dass die getroffenen Annahmen zu einer konsistenten Wichtung der modalen Anteile führen. Es wird hierzu in Gl. (116) zunächst die in physikalische Koordinaten rücktransformierte stationäre Systemantwort in den Beanspruchungsgrößen als Referenz betrachtet, welche unabhängig von der Normierung der Eigenvektoren ist:

$$\mathbf{S}(j\eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\xi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{F}}}{k_i} \frac{1}{(1-\eta_i^2 + j2\vartheta_i\eta_i)} \quad (116)$$

Der entwickelte Wichtungskoeffizient kann dabei in drei Faktoren aufgespalten werden. Zum einen wird ein beliebiges modales Feld $\boldsymbol{\xi}_i$ sowie der an der Bildung der modalen Last beteiligte Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}_i$ bezüglich der Steifigkeitsmatrix normiert:

$$\bar{\varphi}_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \varphi_i \quad ; \quad \bar{\xi}_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \xi_i \quad (117)$$

Es folgt eine Wichtung der räumlichen Lastkonfiguration über die modale Last sowie die Wichtung der modalen Anteile aus der breitbandigen Anregung über die Maxima der modalen Vergrößerungsfunktionen:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{k_i}} \bar{\xi}_i \frac{1}{\sqrt{k_i}} \varphi_i^T \hat{\mathbf{F}} \frac{1}{2\vartheta_i \sqrt{1 - \vartheta_i^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\xi}_i \varphi_i^T \hat{\mathbf{F}}}{k_i} \frac{1}{2\vartheta_i \sqrt{1 - \vartheta_i^2}} = \mathbf{S}_{\max} \quad (118)$$

Es ist dabei ersichtlich, dass Gl. (116) und Gl. (118) sich lediglich in der Annahme unterscheiden, dass zur Superposition die phasengleich auftretenden Maxima der modalen Koordinaten herangezogen werden, welche analytisch konsistent aus dem jeweiligen Maximum der modalen Vergrößerungsfunktion abgeleitet sind.

Am beschriebenen Balkenbeispiel lässt sich damit zeigen, dass die Maxima der modalen Koordinaten für alle Lastpositionen exakt mit den entwickelten Wichtungskoeffizienten übereinstimmen. Bei Superposition der für das Beispiel ausgewählten modalen von Mises-Spannungsfelder resultieren somit ebenfalls übereinstimmende Ergebnisse in den Beanspruchungen. Exemplarisch zeigt Abb. 4.14 hierzu die Gegenüberstellung des entwickelten Wichtungskoeffizienten mit den Maxima der modalen Koordinaten aus der als Referenzlösung herangezogenen Frequenzbereichsanalyse des Systems für die Lastposition $x = 250 \text{ mm}$ in logarithmischer Darstellung.

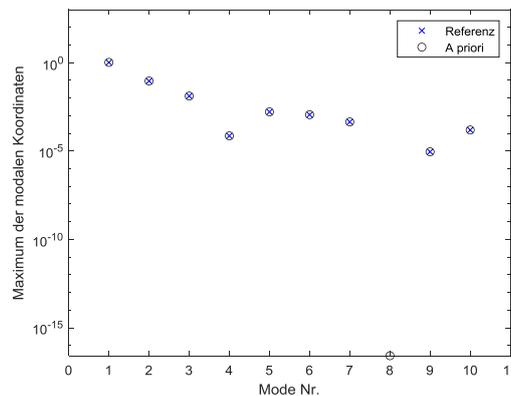


Abb. 4.14: Maxima der modalen Koordinaten aus Referenzlösung und entwickelter Methodik, Lastposition $x = 250 \text{ mm}$ (logarithmische Darstellung)

Aus den in Abb. 4.15 gezeigten modalen Lasten geht hierbei zunächst eine signifikante Anregung der Moden zwei und sechs hervor, deren Ausprägung im Anregungspunkt jeweils ein Maximum aufweist. Bei Betrachtung der achten Eigenform, welche durch eine Longitudinalschwingung des Balkens beschrieben ist, wird ferner deutlich, dass diese durch die gewählte Lastkonfiguration keine Anregung erfährt.

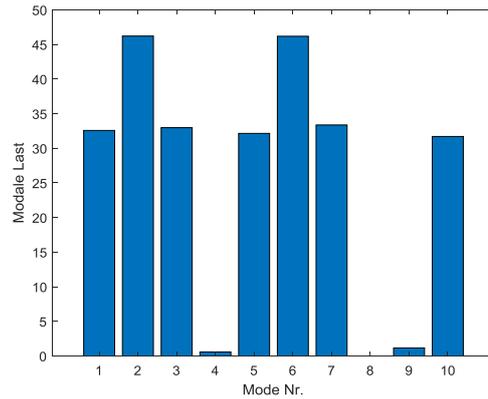


Abb. 4.15: Modale Lasten in Lastposition $x = 250$ mm

Das durch die modalen Maxima gewichtet superponierte von Mises-Spannungsfeld in Abb. 4.16 zeigt, dass dabei vor allem die ersten beiden Eigenformen einen dominanten Anteil zur dynamischen Beanspruchung des Systems beitragen.

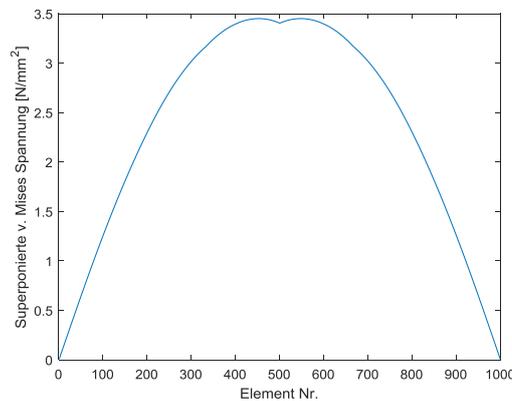


Abb. 4.16: Gewichtet überlagertes v. Mises-Spannungsfeld für Lastposition $x = 250$ mm

Durch die Annahme, dass die einzelnen Eigenformen bei breitbandiger Anregung in Resonanz angeregt werden, wird die explizite Frequenzabhängigkeit der Systemantwort eliminiert. Es lassen sich damit qualitative Aussagen über potenziell versagenskritische Strukturregionen einzig auf Grundlage von Systemeigenschaften und Informationen zur Lastkonfiguration treffen.

Schmalbandige Anregung

Die Annahme, dass ein System auf eine dynamische äußere Last so reagiert, als würden alle dem System inhärenten Eigenformen in Resonanz (und gleichphasig) angeregt, stellt eine obere Schranke der maximal annehmbaren Beanspruchung dar. Es konnte dabei im vorangegangenen Abschnitt gezeigt werden, dass diese obere Schranke unter der Voraussetzung breitbandiger Anregung mit einem modalen Wichtungskoeffizienten zuverlässig abgebildet werden kann.

Aus Abb. 4.14 geht dabei hervor, dass unter den getroffenen Annahmen vorrangig die Eigenformen im niedrigen Frequenzbereich mit hohen Amplituden reagieren. Der Anteil höherer Moden an dem auf dieser Basis ermittelten Beanspruchungsfeld ist dabei gering, siehe Abb. 4.16.

Es ist ferner naheliegend, dass die getroffenen Annahmen bei Anregung der Struktur ausschließlich im höheren Frequenzbereich zu einer nichtkonservativen Abschätzung des Beanspruchungsfeldes führen können. Eine der Kernfragen, die sich daher bei der Betrachtung weiterer technisch relevanter Anregungssignale stellt, ist, wie sich die einzelnen modalen Anteile bei schmalbandiger Anregung bzw. bei allgemeiner transientser Belastung verhalten. Als schmalbandiges Signal wird hierzu im Folgenden ein Signal mit diskretem, auf eine definierte Bandbreite begrenzten Frequenzinhalt betrachtet [85].

Grundlegend kann eine konservative Approximation der maximalen Beanspruchung für beliebige Belastungssignale auf Grundlage der Antwortspektrenmethode erfolgen, siehe Abschnitt 2.3.5. Bei bestehenden Antwortspektren können die aus der Anregung resultierenden modalen Maxima dazu direkt aus dem vorliegenden Antwortspektrum abgelesen werden. Liegen Antwortspektren üblicherweise in den entsprechenden Regelwerken zur Auslegung seismisch angeregter Bauwerke vor (z. B. Eurocode 8 [86]), sind diese jedoch für allgemeine krafterregte Systeme i. d. R. nicht verfügbar und müssen aufwendig erzeugt werden. Als Alternative wird daher im Folgenden eine effizientere Vorgehensweise betrachtet.

Ziel der folgenden Untersuchungen ist die Anpassung der zuvor beschriebenen modalen Wichtung auf Basis des expliziten Frequenzinhalts der Systemanregung. Dies lässt sich über die Anwendung effizienter Verfahren der Signalanalyse (schnelle Fourier-Transformation) in Kombination mit der bereits beschriebenen Frequenzbereichslösungen der entkoppelten Bewegungsgleichung realisieren.

Als Ausgangspunkt der Untersuchungen soll zunächst die Analyse des Frequenzinhaltes der Systemanregung auf Basis der Fourier-Transformation dienen, welche die Zerlegung beliebiger Funktionen in harmonische Schwingungen ermöglicht und die Verknüpfung zwischen der allgemeinen Betrachtung von Zeitbereich und Frequenzbereich darstellt [87]. Die Theorie der Fourier-Analyse ist in der Literatur ausführlich beschrieben [88], so dass sich die Ausführungen an dieser Stelle lediglich auf die für diese Arbeit relevanten Ergebnisse beschränken.

Grundlage der folgenden Betrachtungen ist zunächst die komplexe Frequenzbereichslösung der i -ten modalen Koordinate des krafterregten Systems (vgl. Abschnitt 2.3.3), die sich wie folgt darstellen lässt:

$$\hat{q}_i(\Omega) = H_i(j\eta_i)\hat{f}_i(\Omega) \quad \text{mit} \quad \hat{f}_i(\Omega) = \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{F}}P(\Omega) \quad (119)$$

Zu der in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen separaten Betrachtung von Lastrichtung $\hat{\mathbf{F}}$ und Lastfunktionen $\mathbf{p}(t, \Omega)$ wird an dieser Stelle die Annahme getroffen, dass der Zeitverlauf der Lastfunktionen für jeden Freiheitsgrad des betrachteten Lastrichtungsvektors gleich ist¹¹, womit die vektorielle Betrachtung des Lastsignals entfällt. Für allgemeine Anregungssignale lässt sich die Lastfunktion damit über die Fourier-Transformierte $P(\Omega)$ wie folgt ausdrücken [13]:

¹¹ Realisierbar durch Aufteilung in separate Lastvektoren, die diese Annahme erfüllen; es gilt das Superpositionsprinzip

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (120)$$

Mit Gl. (121) erfolgt die Rücktransformation der Systemantwort der modalen Koordinaten in den Zeitbereich:

$$q_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{q}_i(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (121)$$

Die komplexe Fourier-Transformierte $\hat{q}_i(\Omega)$ der modalen Koordinaten beschreibt dabei direkt das aus der Anregung resultierende Frequenzspektrum der i -ten modalen Koordinate [8]. Mit dem Ziel der Entwicklung eines Faktors zur Berücksichtigung des Frequenzinhaltes der Anregung lassen sich die in Gl. (119) enthaltenen komplexen Größen zunächst über Betrag und Phasenlage darstellen, wobei der Index h die Phasenlage aus dem Frequenzgang und der Index p die Phasenlage der Anregung bezeichnet.

$$\hat{q}_i(\Omega) = |H_i(j\eta_i)| \boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{F}} |P(\Omega)| e^{j(\alpha_h + \alpha_p)} \quad (122)$$

Bei Vernachlässigung der Phasenlage lassen sich damit die Maxima der jeweiligen modalen Anteile $q_{\max,i}$ unter Berücksichtigung des Frequenzinhalts des Anregungssignals mit den modalen Vergrößerungsfunktionen $V_i(\eta_i)$ wie folgt abschätzen:

$$q_{\max,i} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{F}}}{2\pi k_i} \int_{-\infty}^{\infty} V_i(\eta_i) |P(\Omega)| d\Omega \quad (123)$$

Die praktische Umsetzung erfolgt hierbei effizient über die schnelle Fourier-Transformation (*engl. fast fourier transformation*, FFT). In der numerischen Umsetzung der FFT werden dabei die Integralausdrücke aus Gl (120) bis Gl. (123) durch Summenausdrücke ersetzt, wobei lediglich über eine endliche, hinreichend groß gewählte Anzahl an Stützstellen N summiert werden kann [8]. Es lässt sich damit, unter Verwendung der für die diskreten Frequenzschritte Ω_n gebildeten Fourier-Transformierten $P(\Omega_n)$ des Anregungssignals in Anlehnung an [10], folgender Wichtungskoeffizient $\Gamma_{s,i}$ der jeweiligen modalen Anteile für schmalbandige Anregungssignale herleiten:

$$\Gamma_{s,i} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \hat{\mathbf{F}}}{k_i} \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V_i(\eta_{i,n}) |P(\Omega_n)| \quad (124)$$

Äquivalent zu den im vorigen Abschnitt zu breitbandig angeregten Systemen beschriebenen Ausführungen lässt sich dieser Wichtungskoeffizient erneut in die drei Faktoren zur Normierung beliebiger Eigenvektoren bezüglich der Steifigkeitsmatrix, der Wichtung mit der modalen Last, sowie dem mit der jeweiligen modalen Vergrößerungsfunktion gewichteten Frequenzspektrum der Anregung zerlegen. Der Faktor $2/N$ in Gl. (124) resultiert dabei aus der Betrachtung der Amplitude des einseitigen Fourier-Spektrums sowie der Umsetzung über die schnelle Fourier-

Transformation [8,10]. Zur Validierung des Wichtungskoeffizienten für schmalbandig angeregte Systeme wird das in Abschnitt 4.2 beschriebene Balkenbeispiel herangezogen. Die untersuchten Lastsignale werden dafür durch die Superposition m harmonischer Funktionen diskreter Frequenzen Ω_m und Amplituden a_m erzeugt, siehe Gl. (125).

$$p(t) = \sum_m a_m \sin(\Omega_m t) \quad (125)$$

Der Frequenzinhalt des Lastsignals wird dabei gezielt angepasst, um die folgenden definierten Lastkonfigurationen zu erzeugen:

- Anregung einzelner Eigenfrequenzen
- Anregung zwischen Eigenfrequenzen
- Gemischt resonante und resonanzferne Anregung

Die untersuchten Lastfälle lassen sich übersichtlich in einer Matrix darstellen, siehe Abb. 4.17. Die Zeilen stellen die untersuchten Lastfälle dar und beinhalten die im Anregungssignal enthaltenen Frequenzen. Ein schwarzes Feld kennzeichnet dabei die Anregung in Eigenfrequenz $\Omega_m = \omega_{0,i}$, ein graues Feld die Anregung zwischen zwei Eigenfrequenzen $\Omega_m = \frac{\omega_{0,i} + \omega_{0,i+1}}{2}$. Die so definierten Anregungsfrequenzen $f_{0,m}$ für Eigenfrequenzen sowie $f_{z,m}$ für Frequenzen zwischen den Eigenfrequenzen sind in Tab. 4.1 in Hz zusammengefasst.

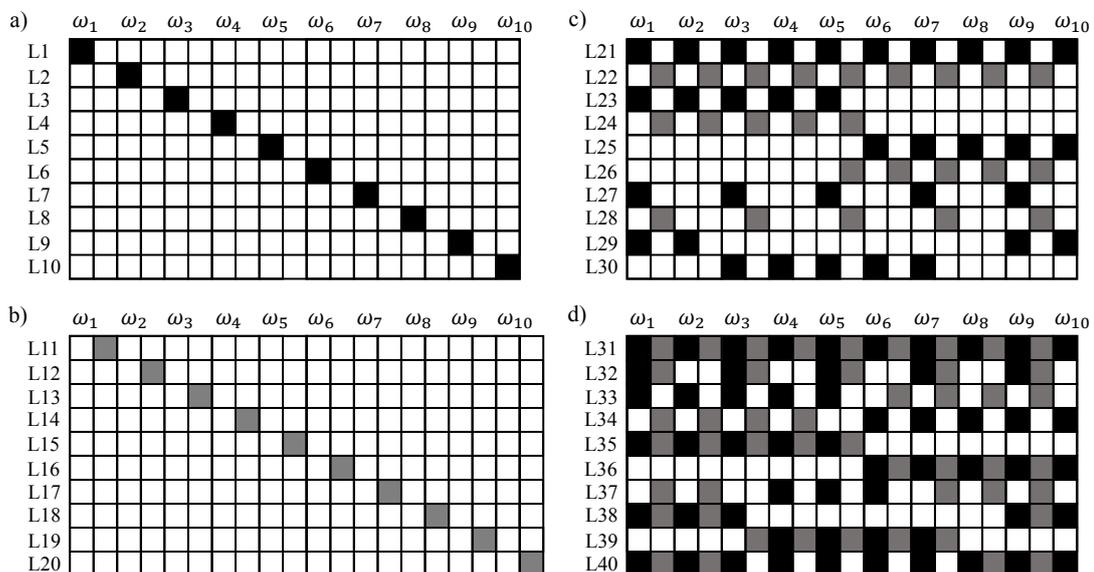


Abb. 4.17: Untersuchte Lastfälle für schmalbandige Anregung: a) einzeln resonante Anregung, b) einzeln resonanzferne Anregung, c) mehrfach resonante und resonanzferne Anregung, d) gemischt resonante und resonanzferne Anregung

Im Lastfall L21 werden demnach zehn harmonische Funktionen überlagert, deren Frequenzen den jeweiligen Eigenfrequenzen des Systems entsprechen; im Lastfall L24 werden fünf harmonische Funktionen mit Frequenzen zwischen den jeweiligen Eigenfrequenzen des Systems überlagert.

Tab. 4.1: Anregungsfrequenzen

$f_{0,m}$ [Hz]	$f_{z,m}$ [Hz]
14.12	35.29
56.45	91.72
126.98	176.32
225.66	289.03
352.40	429.76
507.12	598.42
689.71	757.67
825.62	862.83
900.04	1019.01
1137.97	

Das Anregungssignal hat dabei eine Länge von $t = 100$ s und wird mit einer Samplingfrequenz von ca. 9.1 kHz erzeugt¹². Die Samplingfrequenz entspricht damit dem Vierfachen der nach dem Nyquist-Shannon-Abtasttheorem erforderlichen Abtastrate [88], wenn als höchste Frequenz von Interesse die zehnte Eigenfrequenz des Systems mit $f_{10} = 1138$ Hz betrachtet wird. Es ergibt sich damit eine Zeitaufösung von $\Delta t \approx 1.1 \cdot 10^{-4}$ s und eine Frequenzaufösung von $\Delta f = 0.01$ Hz. Das Signal hat damit $N = 910\,400$ Stützstellen.

Die Untersuchung ist in vier Blöcke unterteilt. Im ersten Block (siehe Abb. 4.17 a) mit den Lastfällen L1 bis L10 wird zunächst jede Eigenform separat in Resonanz angeregt. Die Lastfälle L11 bis L20 im zweiten Block (Abb. 4.17 b) beschreiben eine Anregung mit einzelnen Frequenzen, die jeweils zwischen zwei Resonanzfrequenzen liegen. Der dritte Block (Abb. 4.17 c) mit den Lastfällen L21 bis L30 beschreibt Lastsignale, die mehrere Eigenfrequenzen oder mehrere resonanzferne Frequenzen enthalten. Im vierten Block (Abb. 4.17 d) mit den Lastfällen L31 bis L40 werden verschiedene Kombinationen von resonanter und resonanzferner Anregung untersucht. Die einzelnen Frequenzanteile werden dabei zunächst mit konstanter Amplitude $a_m = 1$ überlagert. Die Dämpfung beträgt für alle Moden $\vartheta = 0.1$ %. Die Untersuchung des Einflusses von Amplitude und Dämpfung erfolgt im darauffolgenden Abschnitt.

Als Referenzlösung dienen die Maxima der stationären Lösung der jeweiligen modalen Koordinaten $q_{\max,i}$, welche durch die Frequenzbereichslösung auf Basis der komplexen Fourier-Transformation des Anregungssignals und den komplexen Frequenzgängen nach Gl. (119) sowie Rücktransformation in den Zeitbereich nach Gl. (121) erzeugt werden.

¹² Ein langes Anregungssignal gewährleistet u. a. das Erreichen des stationären Zustandes auch bei Zeitbereichsbetrachtungen.

Ein Abgleich der so erzeugten Referenzlösungen mit transient-dynamischen Analysen am modal entkoppelten System in ABAQUS zeigt dabei eine sehr gute Übereinstimmung bei geringerer Rechenzeit.

Die Bewertung der Ergebnisse erfolgt über die relative Abweichung von Referenzlösung und entwickelter Methodik nach Gl. (126). Als Bewertungskriterium wird das Maximum der Abweichung bei Betrachtung aller Lastpositionen zugrunde gelegt. Die Maxima der modalen Koordinaten werden hierzu in jeder Lastposition in einem Vektor $\mathbf{q}_{\max,i}$ zusammengefasst. Auf gleiche Weise ist der Vektor der modalen Wichtungskoeffizienten $\Gamma_{s,i}$ für alle Lastpositionen definiert. Die Bewertung erfolgt damit konservativ, da für jede modale Koordinate das Ergebnis der ungünstigsten Lastposition als Bewertungskriterium herangezogen wird.

$$e_{\text{rel},i} = \frac{\|\mathbf{q}_{\max,i} - \Gamma_{s,i}\|_{\infty}}{\|\mathbf{q}_{\max,i}\|_{\infty}} \quad (126)$$

Die Ergebnisse der Untersuchungen sind in Abb. 4.18 dargestellt. Deutlich erkennbar ist, dass durch den entwickelten Wichtungskoeffizienten die Maxima der modalen Koordinaten bei Anregung einzelner Frequenzen – unabhängig von resonanter oder resonanzferner Anregung – für die gewählten Parameter nahezu exakt approximiert werden können, siehe Abb. 4.18 a und Abb. 4.18 b. Die maximale relative Abweichung beträgt in diesem Fall unter den betrachteten Lastfällen L1 bis L20 ca. $7 \cdot 10^{-5} \%$.

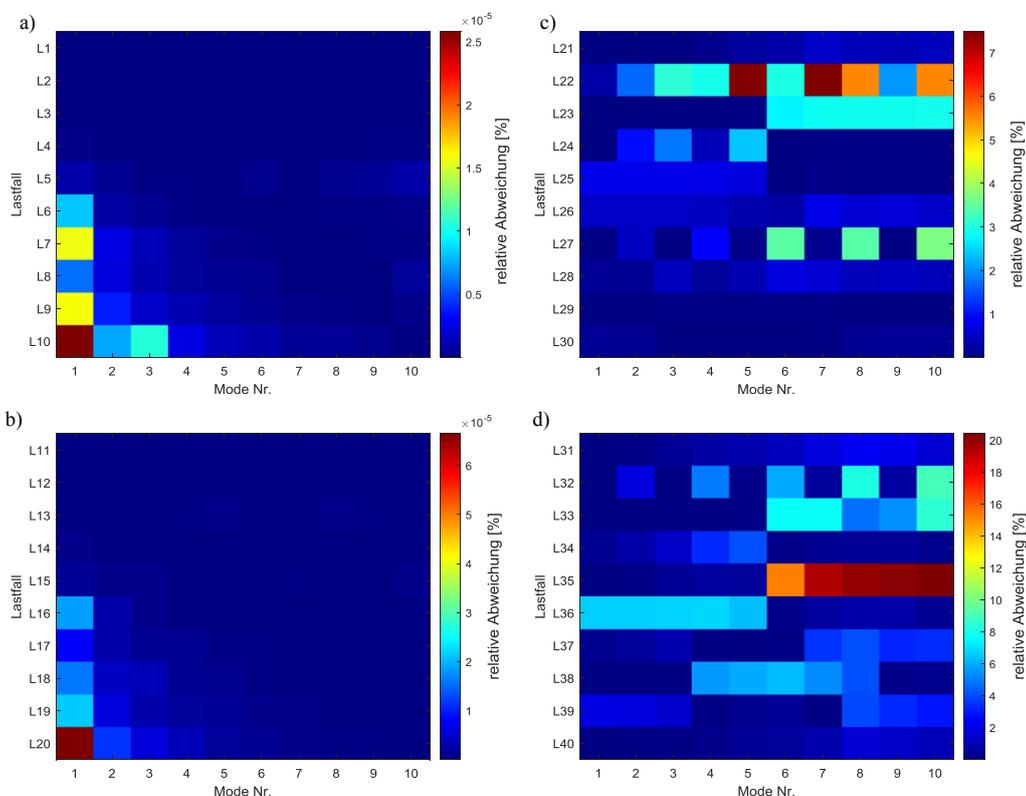


Abb. 4.18: Relative Abweichung der Maxima der modalen Koordinaten zur Referenzlösung aller untersuchten Lastfälle, $\vartheta = 0.1 \%$

Bei Betrachtung von Abb. 4.18 c zeigt sich, dass vor allem bei direkter Anregung in den Eigenfrequenzen – unabhängig von der Anzahl der überlagerten Frequenzen – die geringsten relativen Abweichungen auftreten (vgl. Lastfälle L21, L23, L25, L27, L29 und L30).

Zur weiteren Interpretation der Ergebnisse wird im Folgenden zwischen direkt angeregten (d. h. in Eigenfrequenz), indirekt angeregten Moden (Anregungsfrequenz zwischen zwei Eigenfrequenzen) und nicht direkt angeregten Moden unterschieden. Als nicht direkt angeregt wird in diesem Zusammenhang die Anregung mit Frequenzen betrachtet, deren Abstand zur jeweiligen Eigenfrequenz mindestens dem Abstand zur vorigen bzw. nächsten Eigenfrequenz entspricht.

Die maximale Abweichung bei direkt angeregten Moden beträgt dabei 0.5 % im Lastfall L21, während die maximale relative Abweichung der nicht direkt angeregten Moden unter 4 % liegt (Lastfall L27). Die größten relativen Abweichungen im dritten Untersuchungsblock sind indes bei ausschließlicher indirekter Anregung der Moden zu beobachten. Die maximale Abweichung von ca. 7.5 % tritt im Lastfall L22 auf, bei dem jede Eigenform jeweils indirekt angeregt wird. Die Auswertung des vierten Untersuchungsblockes (siehe Abb. 4.18 d) zeigt, dass die größten Abweichungen zur Referenzlösung aus gemischt resonanter und resonanzferner Anregung resultieren, wobei eine maximale relative Abweichung von ca. 21 % im Lastfall L35 auftritt.

Die ermittelten Abweichungen lassen sich dabei auf mehrere Faktoren zurückführen, deren Einflüsse nicht eindeutig separiert werden können. Grundsätzlich steht die relative Abweichung mit der gewählten Frequenzauflösung im Zusammenhang und kann durch eine sehr hohe Samplingfrequenz, vor allem im hohen Frequenzbereich, positiv beeinflusst werden. Die Haupteinflüsse lassen sich jedoch vor allem auf systematische Ursachen zurückführen. Zum einen wirkt die an der Bildung des Wichtungskoeffizienten beteiligte Vergrößerungsfunktion (vgl. Abb. 4.19) als Tiefpassfilter. Hierdurch werden niederfrequente Signalanteile weit unterhalb der Resonanzfrequenz zwar nicht verstärkt, leisten jedoch bei der Integration über den betrachteten Frequenzbereich einen geringen Beitrag. Hochfrequente Signalanteile werden hingegen deutlich abgeschwächt. Bei betragsmäßig gleichem Abstand der Anregungsfrequenzen zu den jeweiligen Eigenfrequenzen zeigt sich damit eine asymmetrische Ausprägung der Abweichungen. Deutlich wird dieser Zusammenhang beim Vergleich der Lastfälle L23 und L25 sowie L35 und L36, die jeweils höhere relative Abweichungen der nicht direkt angeregten höheren Moden zeigen, siehe Abb. 4.18 c und Abb. 4.18 d. Der direkte Vergleich der Lastfälle L23 und L35 zeigt zudem, dass dieser Effekt mit steigender Anzahl an Frequenzen unterhalb der Resonanzfrequenz steigt.

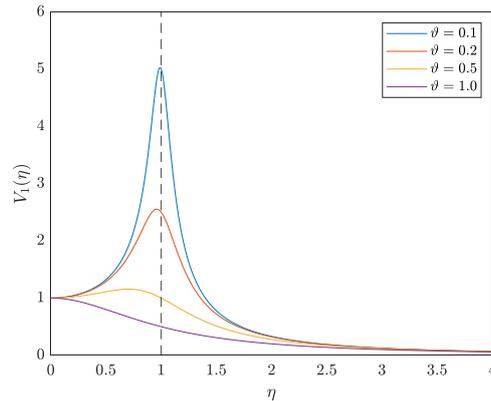


Abb. 4.19: Vergrößerungsfunktion des kräfteerregten Einmassenschwingers

Die relative Abweichung steigt dabei mit sinkendem Anteil der Moden an der Gesamtschwingung. Abweichungen um 20 % erscheinen in diesem Zusammenhang zwar zunächst kritisch, treten jedoch ausschließlich bei Moden auf, deren Eigenfrequenzen weit oberhalb des Anregungsspektrums liegen. Der Unterschied der Maxima der modalen Koordinaten direkt angeregter Moden und der Moden außerhalb des angeregten Frequenzspektrums beträgt dabei mehrere Größenordnungen (siehe Abb. 4.20 exemplarisch für Lastfall L35), wodurch in der praktischen Anwendung kein relevanter Einfluss erkennbar ist.

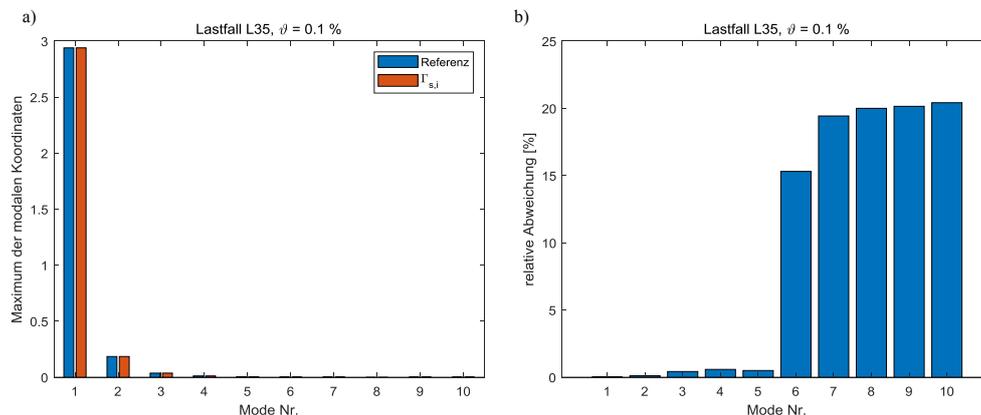


Abb. 4.20: Maxima der modalen Koordinaten im Lastfall L35: a) Vergleich von Referenzlösung mit entwickelter Methodik, b) relative Abweichung, $\vartheta = 0.1 \%$

Deutlicher wird dies bei Betrachtung der aus der modalen Superposition resultierenden Beanspruchungen, welche in Abb. 4.21 exemplarisch für die Lastfälle L22 und L35 dargestellt sind.

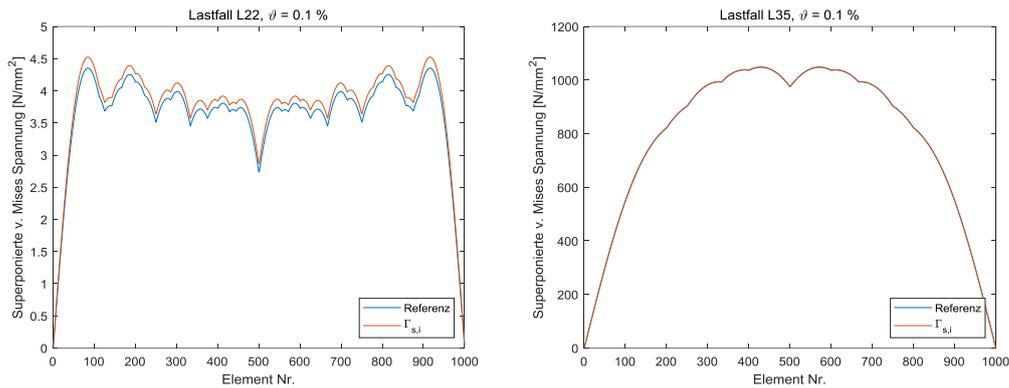


Abb. 4.21: Superponiertes v. Mises-Spannungsfeld der Lastfälle L22 und L35: Referenz und entwickelter Wichtungskoeffizient, $\vartheta = 0.1 \%$

Es zeigt sich hier besonders im Lastfall L35, welcher die höchsten beobachteten Abweichungen in den modalen Koordinaten aufweist, eine sehr gute Übereinstimmung in den resultierenden Beanspruchungen. Das resultierende Beanspruchungsfeld in Abb. 4.21 ist dabei keiner konkreten Lastposition zugeordnet, es beschreibt vielmehr den ungünstigsten Fall der Kombination der für die jeweiligen angeregten Moden ungünstigsten Lastpositionen und kann damit als konservative obere Schranke angesehen werden. Es zeigt sich hierbei, dass das qualitative Beanspruchungsfeld aller untersuchten Lastfälle durch den entwickelten Wichtungskoeffizienten zuverlässig approximiert werden kann, wobei die Beanspruchungen für die gewählten Parameter grundsätzlich konservativ über denen der Referenzlösung liegen. Die vergleichsweise hohen Abweichungen in den Maxima der modalen Koordinaten nicht direkt angeregter Moden lassen sich damit zu einem großen Teil auf das Bewertungskriterium der relativen Abweichung zurückführen, welches beim Vergleich sehr kleiner Größen kritisch zu bewerten ist. Die relative Abweichung der aus der Superposition resultierenden Beanspruchungen in Abb. 4.22 stellt daher eine deutlich besser interpretierbare Größe dar. Bei den untersuchten Lastfällen zeigen sich Abweichungen von maximal 3.8 %, wobei die größten Abweichungen bei indirekter Anregung jeder Eigenform (Lastfall L22) auszumachen sind. Die indirekte Anregung aller Eigenformen stellt damit die ungünstigste Belastungskonfiguration dar.

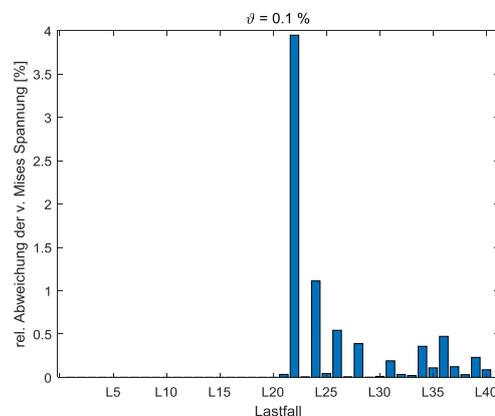


Abb. 4.22: Relative Abweichung der superponierten v. Mises-Spannungen für alle untersuchten Lastfälle, $\vartheta = 0.1 \%$

Die bei Anwendung der entwickelten Methodik resultierenden Abweichungen lassen sich damit vorrangig auf die Vernachlässigung der Phaseninformationen und der damit einhergehenden phasengleichen Bestimmung und Überlagerung der modalen Anteile zurückführen, welche per se zu einer konservativen Überschätzung der realen Beanspruchung führt.

Die Amplituden der überlagerten Frequenzanteile des Anregungssignals wurden für eine einfache Interpretation der Ergebnisse zunächst konstant gehalten. Bei Betrachtung von Gl. (124) wird jedoch ersichtlich, dass die Amplituden der einzelnen Frequenzanteile direkt über den Betrag der Fourier-Transformierten in den beschriebenen Wichtungskoeffizienten einfließen und somit bei hinreichend genauer Frequenzauflösung implizit berücksichtigt werden. Verdeutlichen lässt sich dies durch die beispielhafte Betrachtung des Lastfalls L21 mit variablen Amplituden. Die Amplituden der Frequenzanteile sind für die Überlagerung von zehn harmonischen Funktionen mit linear ansteigender Amplitude in Abb. 4.23 a dargestellt. Das daraus resultierende Fourier-Spektrum in Abb. 4.23 b zeigt, dass die Amplituden der einzelnen Frequenzanteile in ihrem Betrag zuverlässig erfasst werden.

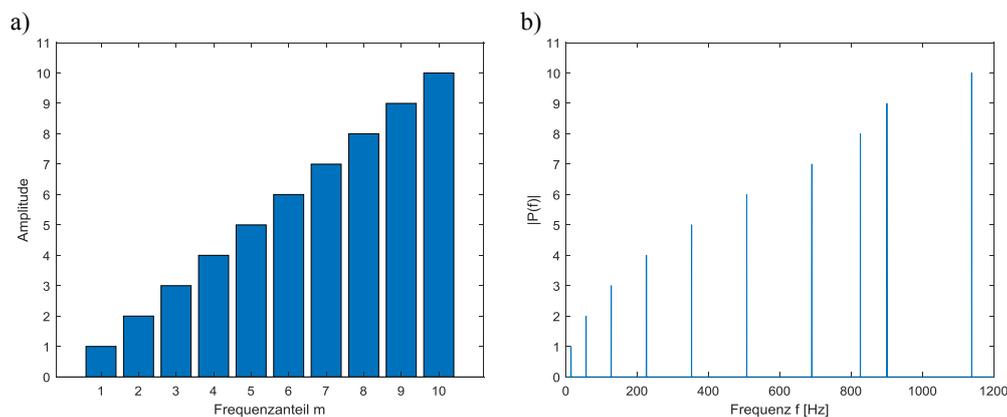


Abb. 4.23: a) Amplituden der m überlagerten Frequenzanteile, b) Fourier-Spektrum des Signals

Zur Untersuchung des Dämpfungseinflusses wird die gleiche Untersuchung mit schrittweise erhöhter konstanter modaler Dämpfung wiederholt. Die Ergebnisse für die höchste untersuchte modale Dämpfung von $\vartheta = 20\%$ sind in Abb. 4.24 für die modalen Koordinaten sowie in Abb. 4.25 für die superponierte von Mises-Spannung dargestellt.

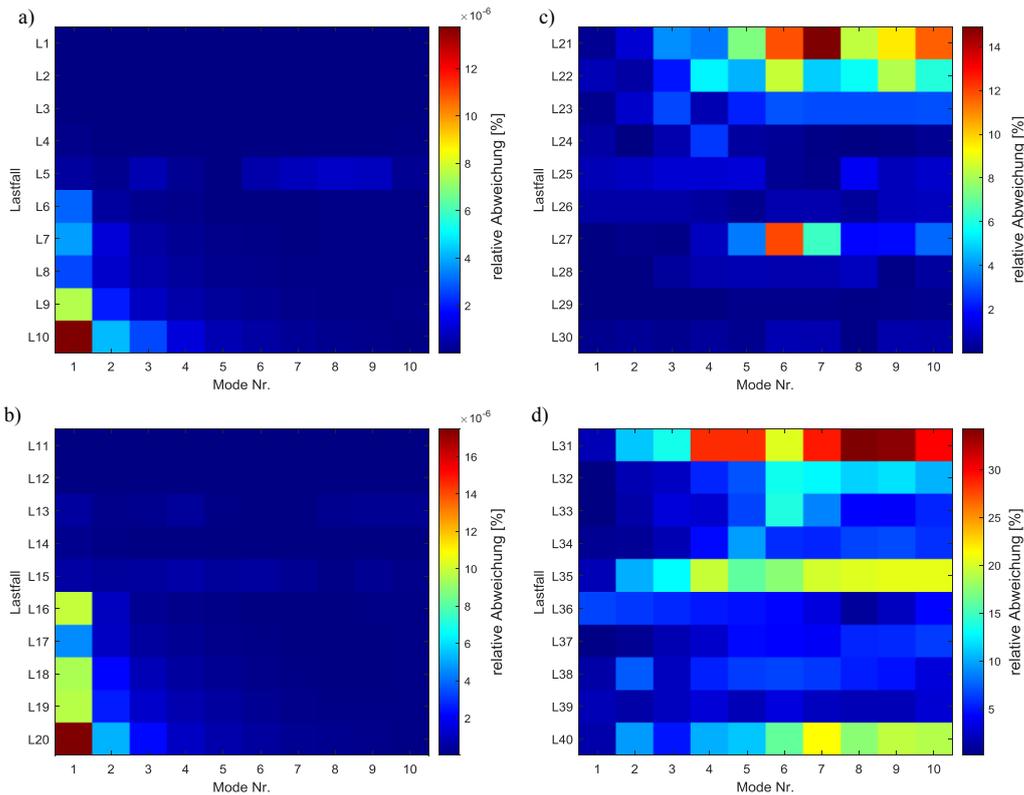


Abb. 4.24: Relative Abweichungen der Maxima der modalen Koordinaten zur Referenzlösung aller untersuchter Lastfälle, $\vartheta = 20\%$

Bei Anregung einzelner Frequenzen zeigt sich mit einer maximalen relativen Abweichung von ca. $2 \cdot 10^{-5}\%$ weiterhin eine nahezu exakte Approximation der Maxima der modalen Koordinaten, siehe Abb. 4.24 a und Abb. 4.24 b. Deutlich erkennbar sind jedoch die im Vergleich zum schwach gedämpften System insgesamt erhöhten relativen Abweichungen der Maxima der modalen Koordinaten in den Lastfällen L21 bis L40 in Abb. 4.24 c und Abb. 4.24 d.

Wie Abb. 4.25 verdeutlicht, treten die höchsten relativen Abweichungen in den Beanspruchungen dabei ebenfalls bei gemischt resonanter und resonanzferner Anregung auf (vgl. Abb. 4.17 d). Die maximale relative Abweichung in den Beanspruchungen mit ca. 14.6 % ist dabei im Lastfall L31 zu beobachten, bei dem alle Moden sowohl direkt als auch indirekt angeregt werden.

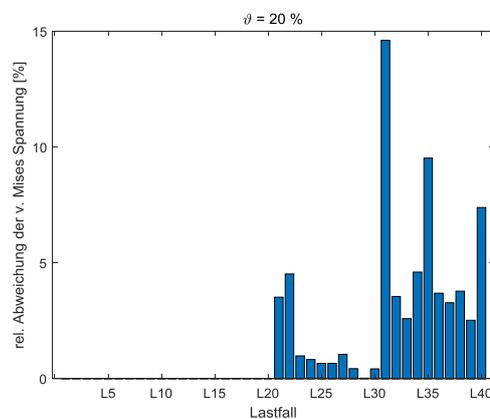


Abb. 4.25: Relative Abweichung der superponierten v. Mises-Spannungen für alle untersuchten Lastfälle, $\vartheta = 20\%$

Es ist dabei zum einen davon auszugehen, dass die zuvor beschriebenen Effekte bei steigender Dämpfung durch Verbreiterung der Peaks der Vergrößerungsfunktionen hervorgerufen werden, zum anderen können die größeren Abweichungen auf einen größeren Einfluss der vernachlässigten Phasenlage bei höherer Dämpfung zurückgeführt werden. Wie Abb. 4.24 und Abb. 4.25 zeigen, werden dabei unabhängig vom Lastfall sowohl die Maxima der modalen Koordinaten als auch das resultierende superponierte Beanspruchungsfeld stets konservativ approximiert. Eine Gegenüberstellung des superponierten Beanspruchungsfeldes von Referenzlösung und entwickelter Methodik ist dazu für die Lastfälle L31 und L35 in Abb. 4.26 dargestellt.

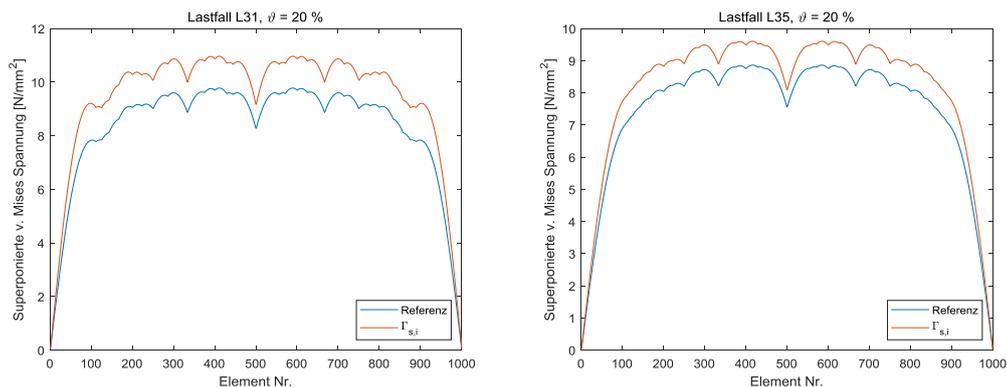


Abb. 4.26: Superponiertes v. Mises-Spannungsfeld der Lastfälle L22 und L35: Referenz und entwickelter Wichtungskoeffizient, $\vartheta = 20\%$

Ein Vergleich der resultierenden Beanspruchungen von Lastfall L35 im stark gedämpften Fall mit dem schwach gedämpften Fall in Abb. 4.27 zeigt dabei einen generellen Einfluss der Dämpfung auf das Beanspruchungsfeld, welcher durch den entwickelten Wichtungskoeffizienten zuverlässig erfasst wird.

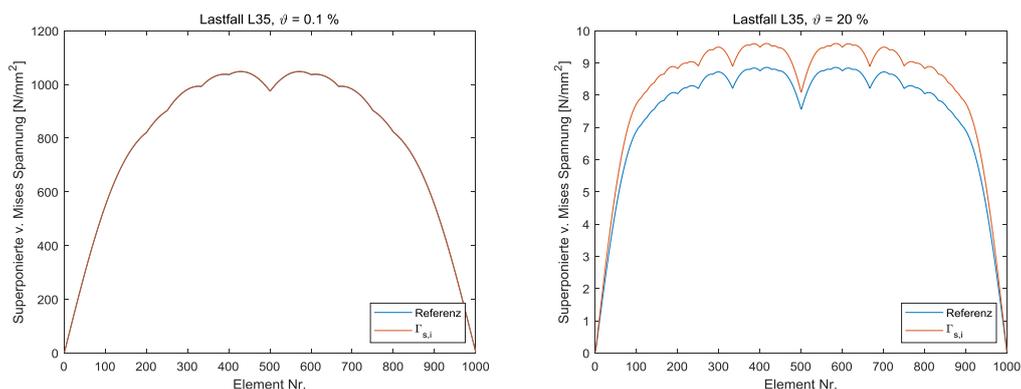


Abb. 4.27: Superponiertes v. Mises Spannungsfeld, Lastfall L35, links: $\vartheta = 0.1\%$, rechts: $\vartheta = 20\%$

Bei Betrachtung der modalen Vergrößerungsfunktionen in Abb. 4.28 wird zudem deutlich, dass die einzelnen Moden für das stark gedämpfte System mit $\vartheta = 20\%$ nur bedingt als unabhängige Einfreiheitsgradsysteme betrachtet werden können¹³. Auf eine Betrachtung höherer Dämpfung wird daher im Folgenden verzichtet.

¹³ Bei noch höherer Dämpfung muss ebenfalls die Annahme der Linearität in Frage gestellt werden.

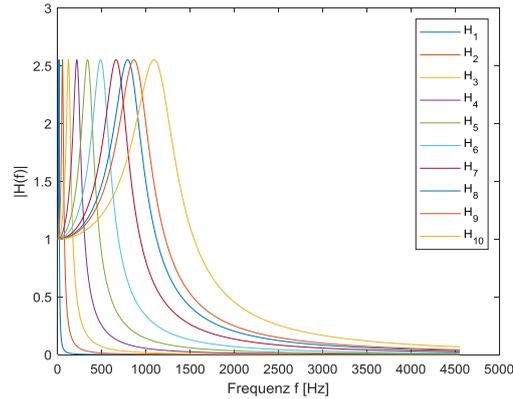


Abb. 4.28: Modale Vergrößerungsfunktionen bei modaler Dämpfung $\vartheta = 20 \%$

Ein abschließender Vergleich der Ergebnisse bei Anwendung des im vorigen Abschnitt für breitbandig angeregte Systeme entwickelten Wichtungskoeffizienten $\Gamma_{b,i}$ zeigt, dass dieser vor allem bei schmalbandiger Erregung nichtkonservative Ergebnisse liefert, siehe exemplarisch für das schwach gedämpfte System in Abb. 4.29. Bei Anregung einzelner Frequenzen sowie schmalen Frequenzbändern steigt die relative Abweichung stark an, wobei das qualitative Beanspruchungsfeld stark von der Referenzlösung abweicht und konservative Aussagen zu potenziell höher beanspruchten Strukturregionen nicht möglich sind. Die maximalen relativen Abweichungen in den Beanspruchungen liegen dabei in einem Bereich um $10^5 \%$, zurückzuführen auf die sehr kleinen Zahlenwerte der Referenzlösung im Nenner der relativen Abweichung. Es zeigt sich hingegen eine sehr gute Übereinstimmung bei den Lastfällen L21, L31 sowie L40 mit unter 0.5% relativer Abweichung. Diese können im Grundsatz als breitbandige Anregung aufgefasst werden. Es zeigen somit lediglich die Lastfälle, die den bei der Entwicklung getroffenen Annahmen entsprechen, hinreichend geringe Abweichungen zur Referenzlösung. Es wird damit deutlich, dass der für schmalbandig angeregte Systeme entwickelte Wichtungskoeffizient zwar ebenfalls auf breitbandig angeregte Systeme anwendbar ist, dies jedoch gegenläufig keine Gültigkeit besitzt.

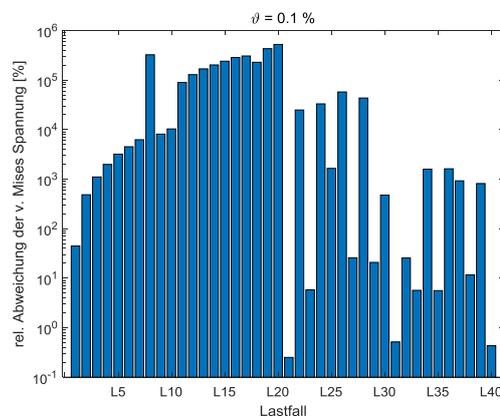


Abb. 4.29: Relative Abweichung der superponierten Beanspruchung von Referenzlösung und Wichtungskoeffizient für breitbandig angeregte Systeme, $\vartheta = 0.1 \%$ (logarithmische Darstellung)

4.3 Proportional gedämpfte Systeme

In den vorangegangenen Abschnitten wurde zunächst von modaler viskoser Dämpfung ausgegangen, wobei diese als für alle Moden konstant angenommen wurde. Im folgenden Abschnitt wird der Einfluss variabler modaler Dämpfung in Form der in Abschnitt 2.3.6 beschriebenen Rayleigh-Dämpfung auf die zuvor entwickelten Wichtungskoeffizienten für breitbandig sowie schmalbandig angeregte Systeme untersucht. Für die folgenden Untersuchungen werden in Anlehnung an [89] die Rayleigh-Koeffizienten $\alpha = 0.96$ sowie $\beta = 1 \cdot 10^{-6}$ gewählt. Es wird demnach hohe äußere Dämpfung und geringe Werkstoffdämpfung angenommen (vgl. Abschnitt 2.3.6). Für das untersuchte krafterregte Balkenbeispiel ergeben sich damit die in Abb. 4.30 dargestellten modalen Dämpfungen.

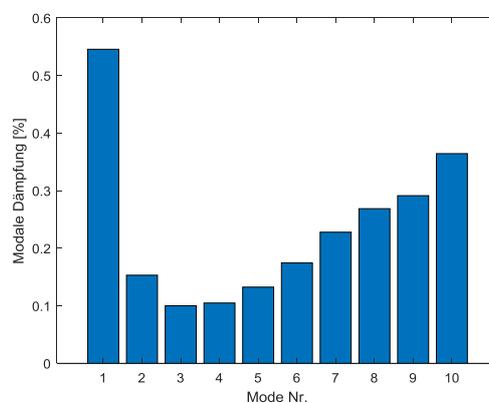


Abb. 4.30: Modale Dämpfung bei Rayleigh-Koeffizienten $\alpha = 0.96$ und $\beta = 1 \cdot 10^{-6}$

Bei breitbandiger Anregung zeigt sich äquivalent zu Abschnitt 4.2.3 eine exakte Übereinstimmung des entwickelten Wichtungskoeffizienten mit den Maxima der modalen Koordinaten der Referenzlösung, siehe Abb. 4.31 exemplarisch für Lastposition $x = 500$ mm.

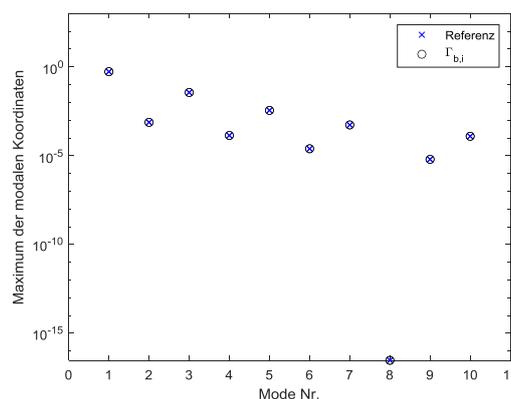


Abb. 4.31: Maxima der modalen Koordinaten aus Referenzlösung und entwickelter Methodik, Lastposition $x = 500$ mm, Rayleigh-Dämpfung (logarithmische Darstellung)

Die resultierenden relativen Abweichungen der modalen Koordinaten für schmalbandige Anregung sind in Abb. 4.32 sowie die der superponierten von Mises-Spannung in Abb. 4.33 dargestellt. Beide zeigen im Vergleich zum konstant modal gedämpften System lediglich sehr geringe Veränderungen.

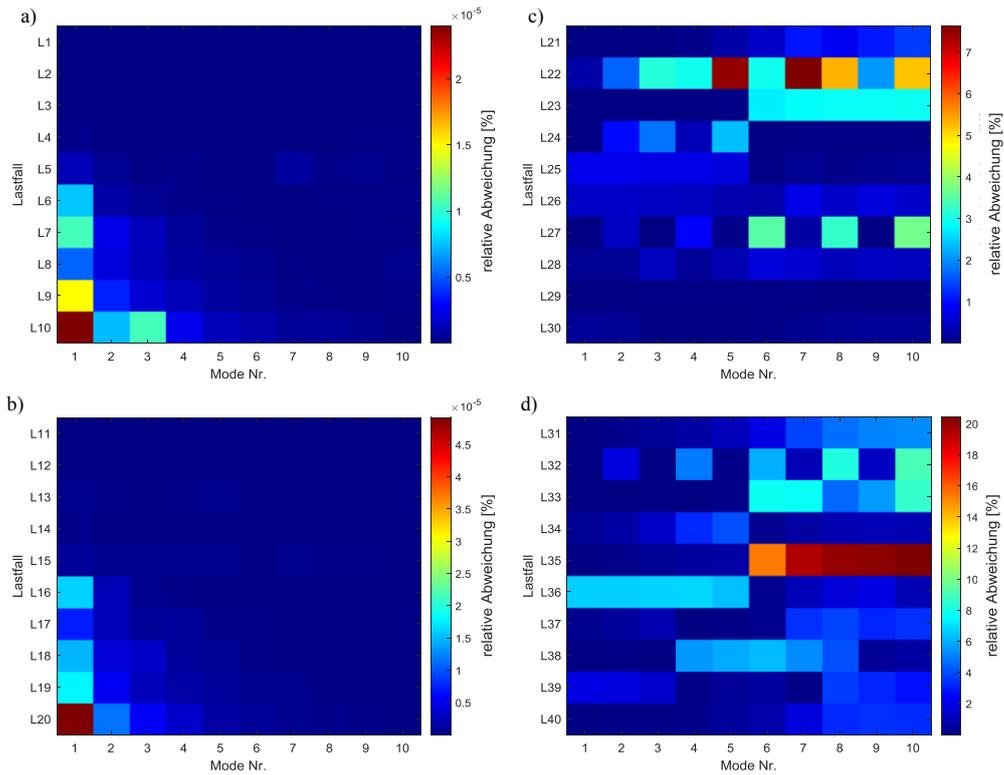


Abb. 4.32: Relative Abweichung der Maxima der modalen Koordinaten zur Referenzlösung aller untersuchten Lastfälle, Rayleigh-Dämpfung

Ein Vergleich der Ergebnisse des proportional gedämpften Systems mit den Ergebnissen des vorigen Abschnitts verdeutlicht damit, dass durch die entwickelten Wichtungskoeffizienten ebenfalls variable Dämpfungswerte zuverlässig erfasst werden. Korrelierend mit den Ergebnissen des konstant modal gedämpften Systems ($\vartheta = 0.2\%$) stellt die indirekte Anregung aller Moden (L22) mit relativen Abweichungen der Spannungen um 4% die ungünstigste Belastungssituation dar.

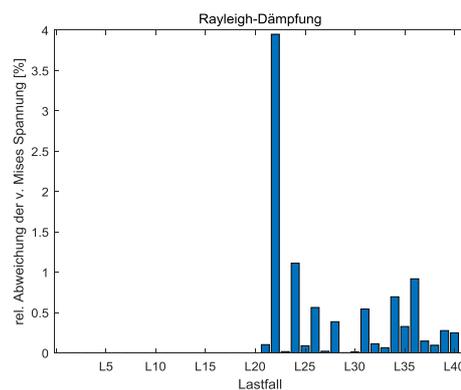


Abb. 4.33: Relative Abweichung der superponierten v. Mises-Spannungen für alle untersuchten Lastfälle, Rayleigh-Dämpfung

4.4 Fußpunkterregte Systeme und Starrkörpermoden

Die im vorigen Abschnitt für krafteerregte Systeme entwickelten Wichtungskoeffizienten lassen sich ebenfalls auf fußpunkterregte Systeme und Systeme mit Starrkörpermoden übertragen. Die allgemeinen Grundlagen zur Analyse fußpunkterregter Mehrfreiheitsgradsysteme sind in Abschnitt 2.3.4 dargelegt. Die komplexe Frequenzbereichslösung der i -ten modalen Koordinate des fußpunkterregten Systems lässt sich demnach wie folgt darstellen:

$$\hat{q}_{E,i}(\Omega) = \frac{\mathbf{L}_i}{m_i} \frac{1}{(-1 + 2j\vartheta_i\eta_i + \eta^2)} \hat{\mathbf{q}}_R(\Omega) \quad (127)$$

Darin stellt $\hat{\mathbf{q}}_R(\Omega)$ die Wegerregung der Starrkörperbasis dar, die jeder Starrkörpermode eine Lastfunktion zuordnet¹⁴ [62]. Es erfolgt äquivalent zu Abschnitt 4.2.1 eine Aufteilung der Wegerregung in Anregungsrichtung $\hat{\mathbf{R}}$ und Lastfunktion $p(\Omega)$:

$$\hat{\mathbf{q}}_R(\Omega) = \hat{\mathbf{R}}p(\Omega) \quad (128)$$

Unter der Annahme, dass jede Eigenform in Resonanz angeregt wird, lässt sich – äquivalent zum vorigen Abschnitt – ein Wichtungskoeffizient für breitbandig fußpunkterregte Systeme herleiten:

$$\Gamma_{fb,i} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}}}{m_i} \frac{1}{2\vartheta_i \sqrt{1 - \vartheta_i^2}} \quad (129)$$

Es wird darin von einer Einheitsverschiebung der Starrkörperbasis ausgegangen. Für die Untersuchung schmalbandig fußpunkterregter Systeme folgt damit in gleicher Weise:

$$\Gamma_{fs,i} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}}}{m_i} \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V_i(\eta_{i,n}) |P(\Omega_n)| \quad (130)$$

Der Vergleich von Gl. (130) mit den Gleichungen (114) und (124) zeigt, dass anstelle der modalen Lasten bei krafteerregten Systemen die Wichtung der Anregungskonfiguration fußpunkterregter Systeme über den modalen Partizipationsfaktor erfolgt (vgl. Abschnitt 2.3.4). Bei Betrachtung der stationären Lösung der Beanspruchungsgrößen in physikalischen Koordinaten in Gl. (131) zeigt sich äquivalent zum vorigen Abschnitt, dass die Wichtungskoeffizienten für fußpunkterregte Systeme ebenfalls in drei Faktoren aufgespalten werden können.

$$\mathbf{s}(j\eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}}}{m_i} \frac{1}{(1 - \eta_i^2 + j2\vartheta_i\eta_i)} p(\Omega) \quad (131)$$

Ein beliebiges modales Feld ξ_i sowie der an der Bildung des modalen Partizipationsfaktors beteiligte Eigenvektor $\boldsymbol{\varphi}_i$ werden bezüglich der Massenmatrix normiert:

¹⁴ Unter der Annahme, dass alle Starrkörperfreiheitsgrade die gleiche Anregung erfahren

$$\bar{\varphi}_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \varphi_i \quad ; \quad \bar{\xi}_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \xi_i \quad (132)$$

Es folgt eine Wichtung der räumlichen Anregungskonfiguration über den modalen Partizipationsfaktor sowie die Wichtung der modalen Anteile aus der Anregung über die Maxima der modalen Vergrößerungsfunktionen bzw. das mit den modalen Vergrößerungsfunktionen gewichtete Anregungsspektrum. In Gl. (133) ist dies beispielhaft für breitbandig angeregte Systeme gezeigt:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{m_i}} \xi_i \frac{1}{\sqrt{m_i}} \varphi_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}} \frac{1}{2\vartheta_i \sqrt{1 - \vartheta_i^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i \varphi_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{R}}}{m_i} \frac{1}{2\vartheta_i \sqrt{1 - \vartheta_i^2}} = \mathbf{S}_{\max} \quad (133)$$

Die Normierung der Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix lässt sich in diesem Fall so interpretieren, dass hierdurch die Sensitivität der einzelnen Moden gegenüber der Weganregung berücksichtigt wird.

Die am fußpunkterregten Balkensystem durchgeführten Untersuchungen erfolgten äquivalent zu den Untersuchungen krafterregter Systeme für breitbandige und schmalbandige Erregung. Die erzielten Ergebnisse stehen dabei in guter Übereinstimmung mit den im vorigen Abschnitt gezeigten Untersuchungsergebnissen. Um den Umfang der vorliegenden Arbeit zu begrenzen, wird an dieser Stelle auf die detaillierte Darstellung von numerischen Untersuchungsergebnissen zu fußpunkterregten Systemen verzichtet. Eine weitere Betrachtung erfolgt jedoch im experimentellen Teil dieser Arbeit in Kapitel 6.

4.5 Bewertung

Die vorangestellten Untersuchungen zeigen, dass sich mit den entwickelten modalen Wichtungskoeffizienten zuverlässige Aussagen über die an der Gesamtschwingung beteiligten modalen Anteile treffen lassen. Mit dem Ziel der Detektion versagenskritischer Strukturregionen erfolgt im kommenden Abschnitt eine Bewertung der aus der entwickelten Methodik resultierenden überlagerten Beanspruchungsfelder, um die gewonnenen Erkenntnisse darauffolgend in einem automatisierten Algorithmus umzusetzen. Als Bewertungskriterium wird hierzu die in Kapitel 3 beschriebene Ermüdungsfestigkeit herangezogen, auf deren Basis sich über die Aussagen des qualitativen Beanspruchungsniveaus hinaus Bereiche mit erhöhtem Risiko des Ermüdungsversagens identifizieren lassen. Grundlage der Bewertung bildet somit die Basquin-Gleichung, wobei sich die Betrachtungen im Folgenden auf die aus der angewandten Festigkeitshypothese resultierende Vergleichsspannung beschränken. Eine Betrachtung weiterer Schädigungsparameter ist dabei unter Beachtung der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Voraussetzungen problemlos umsetzbar.

$$\sigma_a = \frac{\Delta \sigma_V}{2} = \sigma'_f 2N_f^b \quad (134)$$

Mit Gl. (135) lässt sich nach [84] das Verhältnis der Bruchlastwechsel $N_{f,1}$ und $N_{f,2}$ zweier Spannungsamplituden $\sigma_{a,1}$ und $\sigma_{a,2}$ wie folgt darstellen:

$$\frac{N_{f,1}}{N_{f,2}} = \left(\frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{a,2}} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (135)$$

Mit der Steigung der Wöhlerlinie geht damit ein einziger Materialparameter in die Betrachtungen ein. Dieser ist im Zeitfestigkeitsbereich beschrieben durch den Ermüdungsfestigkeitsexponenten b , welcher nach [73] für die meisten Metalle im Wertebereich zwischen -0.05 und -0.12 liegt und in der FKM-Richtlinie [7] allgemein für Stahl mit $b = -0.2$ angegeben wird. Zur qualitativen Bewertung des Beanspruchungsfeldes lässt sich damit auf Basis von Gl. (135) ein Grenzwert der Spannung definieren, welcher eine automatisierte Detektion versagenskritischer Regionen auf Grundlage der Bruchlastwechsel ermöglicht. Im Folgenden werden hierfür Regionen als versagenskritisch bewertet, deren Bruchlastwechsel relativ zur minimalen Bruchlastwechselzahl um den Faktor T_h erhöht sind. Damit lässt sich auf Basis der maximal auftretenden Spannungsamplitude $\sigma_{a,max}$ ein Grenzwert σ_{th} der Spannungen definieren, bei denen Regionen noch als versagenskritisch betrachtet werden. Mit $N_{f,2} = T_h \cdot N_{f,1}$ folgt aus Gl. (135):

$$\sigma_{th} = T_h^b \cdot \sigma_{a,max} \quad (136)$$

4.5.1 Numerische Umsetzung

Der folgende Abschnitt beschreibt die numerische Umsetzung der entwickelten Methodik sowie eine Betrachtung der Effizienz. Die grundlegenden Schritte zur Ermittlung des approximierten maximalen Beanspruchungsfeldes, ausgehend von der Lösung des allgemeinen (ungedämpften) Matrizen-Eigenwertproblems (EWP), sind in Abb. 4.34 zusammengefasst.

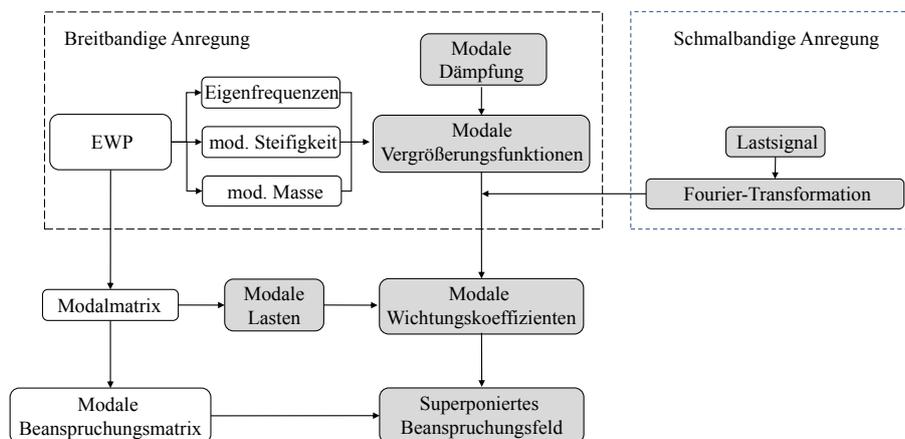


Abb. 4.34: Berechnungsablauf zur Approximation des maximalen Beanspruchungsfeldes

Darin stellen die grau hinterlegten Felder von der verwendeten FE-Umgebung unabhängige Berechnungspfade dar, welche in der vorliegenden Arbeit effizient in der Programmierumgebung MATLAB beschriftet werden. Es erfolgt hierzu zunächst ein Export der modalen Größen aus der FE-Umgebung ABAQUS via PYTHON-Scripting. Die modalen Beanspruchungen stehen dabei, ebenso wie die verschiebungs- oder massennormierten Eigenvektoren, als Standard-Output zur Verfügung. Auf Grund der in Abschnitt 4.1 beschriebenen, mit der Skalierung der Eigenvektoren einhergehenden Besonderheiten wird der Aufbau der modalen Beanspruchungsmatrix im Folgenden gesondert betrachtet.

Modale Beanspruchungsmatrix

Die modalen Beanspruchungen werden formal über die aus den diskreten Knotenverschiebungen resultierenden Dehnungen abgeleitet, siehe Kapitel 2.4. Programmintern erfolgt dies auf Element-Ebene, wodurch in jedem Integrationspunkt jedes Elements Beanspruchungsgrößen in Matrixform vorliegen. Es ist dabei zu beachten, dass durch das Vorzeichen der Skalierung des Eigenvektors ebenfalls die Einträge der jeweiligen Beanspruchungsmatrizen in ihrem Vorzeichen beeinflusst sind. Eine direkte Superposition modaler Beanspruchungsfelder in Form der jeweiligen Beanspruchungsmatrizen ist somit nicht zielführend. Mit den in Abschnitt 4.1 beschriebenen Vergleichsgrößen erfolgt daher eine skalare Auswertung der Beanspruchungsgrößen, wobei ferner, abhängig von den eingesetzten Elementtypen, eine Betrachtung der auszuwertenden Positionen im Element erforderlich ist.

Zur Veranschaulichung sind in Abb. 4.35 Elemente vom Typ C3D8R (3D Kontinuumselement mit 8 Knoten, reduzierte Integration), C3D8 sowie S4R (Schalenelement mit 4 Knoten, reduzierte Integration) schematisch dargestellt.

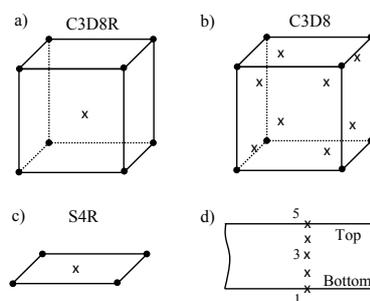


Abb. 4.35: Elementtypen und Integrationspunkte: a) C3D8R, b) C3D8, c) S4R, d) Querschnitts-Integrationspunkte, S4R

Die Integrationspunkte sind darin jeweils als Kreuze schematisch gekennzeichnet. Das gezeigte Schalenelement S4R ist als Strukturelement durch einen Integrationspunkt sowie weitere fünf Querschnitts-Integrationspunkte (*engl. section points*) charakterisiert. Die Bewertung der Ermüdungsfestigkeit erfolgt dabei üblicherweise an der Bauteiloberfläche [70], wobei zum einen auf extrapolierte Beanspruchungen, zum anderen direkt auf die Spannungen in den Integrationspunkten zurückgegriffen werden kann. Speziell bei gekrümmten Schalenelementen, welche häufig bei der Modellierung komplexer dünnwandiger Strukturen Verwendung finden [90], ist auch bei Betrachtung skalarer, vorzeichenunabhängiger Beanspruchungsgrößen von

Differenzen zwischen der Beanspruchung von Element-Oberseite und Element-Unterseite auszugehen (vgl. Abb. 4.35 d). Für eine konservative und von der Skalierung der Eigenvektoren unabhängige Betrachtung der Beanspruchungen im Element ist daher die Bewertung des maximalen Betrags der Beanspruchung aus allen Integrationspunkten heranzuziehen. Dies hat ferner den Vorteil, dass jedem Element exakt ein Beanspruchungswert zugeordnet wird, was abhängig vom Elementtypen zu einer erheblichen Reduktion des Speicherbedarfs führt. Die Größe der modalen Beanspruchungsmatrix ist damit unabhängig von den verwendeten Elementtypen durch die Elementanzahl sowie die Anzahl der berücksichtigten Eigenvektoren definiert.

Detektion

Das auf Grundlage der modalen Beanspruchungsmatrix superponierte Beanspruchungsfeld liegt nach der beschriebenen Vorgehensweise als skalare Matrix vor, welche jedem Element-Index einen Spannungswert zuordnet. Eine Bewertung der Festigkeitsrelevanz kann damit durch einfaches Prüfen der in Abschnitt 4.5 definierten Bedingung erfolgen, ob der vorliegende Spannungswert den definierten Grenzwert überschreitet, siehe Abb. 4.36.

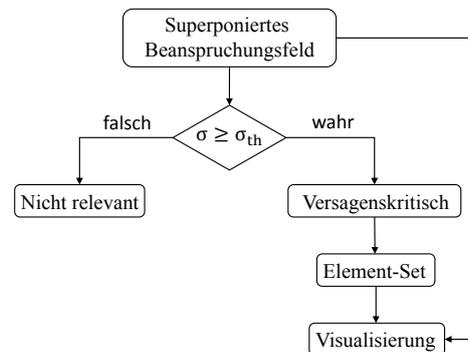


Abb. 4.36: Bewertungsablauf und Detektion

Die als versagenskritisch bewerteten Elemente werden im Folgenden in einem Element-Set zusammengefasst, wobei Beanspruchungsfeld und Set der versagenskritischen Elemente zur Visualisierung mittels PYTHON-Scripting in die Ergebnis-Datei der FE-Umgebung übergeben werden können.

4.5.2 Anmerkung zu Schwingfrequenz und Lastwechseln

Die aus den modalen Wichtungskoeffizienten resultierenden überlagerten Beanspruchungsfelder stellen grundsätzlich eine quasistatische Momentaufnahme des maximalen Beanspruchungszustandes dar, wobei der zeitliche Verlauf der Beanspruchung außer Acht gelassen wird. Für eine qualitative Bewertung hinsichtlich der Bereiche maximaler Spannungen ist dies zwar zielführend, muss jedoch im Hinblick auf die gesamte Einsatzdauer dynamisch beanspruchter Strukturen kritisch hinterfragt werden. In diesem Fall stellt die Betrachtung von Bereichen mit potenziell höherem Ermüdungsrisiko ein aussagekräftigeres Bewertungskriterium dar. Bei der Bewertung der Ermüdungsfestigkeit haben hierbei neben der Beanspruchungsamplitude auch die aufgebrauchten Lastwechsel einen Einfluss auf das mögliche

Versagen [84]. Wie bereits in Kapitel 3 beschrieben, ist dabei der Bereich der Zeitfestigkeit (HCF) für die Untersuchungen dieser Arbeit von besonderem Interesse.

In Anhang A wird daher der Einfluss der zur Ermüdung führenden Lastwechsel betrachtet, um eine mögliche Frequenzkorrektur bei der Wichtung der modalen Anteile zu untersuchen. Grundlage der Untersuchungen bildet die Berücksichtigung einer höheren Teilschädigung höherer Moden bei gleicher Belastungszeit auf Basis linearer Schadensakkumulation nach Palmgren [91] und Miner [77] über die Anpassung der modalen Beanspruchungsanteile. Diese werden dazu so gewichtet, dass die daraus resultierenden Bruchlastwechsel entsprechend der jeweiligen zeitbezogenen Schädigung reduziert bzw. erhöht werden. Durch Abgleich der erzielten Ergebnisse mit numerischen Lebensdaueranalysen kann dabei gezeigt werden, dass eine ergänzende Berücksichtigung der Lastfrequenz bei der Wichtung der modalen Beanspruchungsanteile – abhängig vom Lastfall – zur nichtkonservativen Approximation globaler Maxima führen kann. Ferner zeigen die auf Basis der entwickelten Wichtungskoeffizienten erzielten Ergebnisse sehr gute Übereinstimmung mit den durchgeführten Lebensdaueranalysen, weshalb der Einfluss von Schwingfrequenz und Lastwechseln als vernachlässigbar eingestuft wird. Die Ergebnisse sind exemplarisch für breitbandige Anregung in Lastposition $x = 100$ mm in Abb. 4.37 a sowie für schmalbandige Anregung in Abb. 4.37 b zusammengefasst.

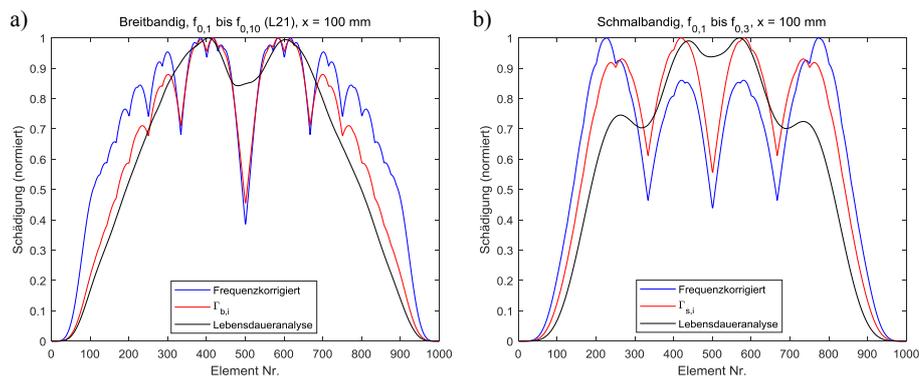


Abb. 4.37: Einfluss der Frequenzkorrektur auf die Schädigung, a) breitbandige Anregung, b) schmalbandige Anregung

Während die globalen Maxima der Schädigung für breitbandige Anregung sowohl mit als auch ohne Frequenzkorrektur zuverlässig approximiert werden, zeigt sich für schmalbandige Anregung durch die Frequenzkorrektur eine Verlagerung der globalen Maxima, welche zu Abweichungen zu den Ergebnissen der durchgeführten Lebensdaueranalysen führt. Die durch die beschriebene Frequenzkorrektur resultierenden, nichtkonservativen Ergebnisse lassen sich einerseits auf die generelle Überschätzung der Beanspruchungen durch die entwickelte Methodik, vor allem im höheren Frequenzbereich zurückführen. Andererseits liegt der ermittelten Referenzlösung der Lebensdauer mit der Rainflow-Zählung ein abweichendes Verfahren zur Ermittlung der vorliegenden Lastkollektive zugrunde (vgl. Kapitel 3). Vor allem bei der Überlagerung niederfrequenter Grundschwingungen mit hochfrequenten Anteilen resultiert dieses nach [70] in einer weniger „harten“ Bewertung der hochfrequenten Amplituden.

4.5.3 Berücksichtigung von Spannungsüberhöhungen und Singularitäten

Nahezu alle technisch relevanten Strukturen weisen geometrische Kerben, wie Bohrungen, Querschnittsänderungen, Schweißnähte oder Freistiche auf [69]. Diese Kerben resultieren zum einen in einer inhomogenen Spannungsverteilung im Bauteil, zum anderen führen sie zu Spannungsüberhöhungen und in der numerischen Simulation oft zu Singularitäten. Allgemein werden diese Einflüsse als Kerbwirkung zusammengefasst.

Die Berücksichtigung der Spannungskonzentration durch eine vorhandene Kerbe kann für das statisch beanspruchte Bauteil grundlegend über die Formzahl α_k erfolgen. Diese ist definiert über das Verhältnis der maximalen elastischen Spannung im Kerbgrund σ_{peak} und der Nennspannung σ_n , die im ungekerbten Bauteil vorhanden wäre [92].

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\text{peak}}}{\sigma_n} \quad (137)$$

In gleicher Weise ist für dynamisch beanspruchte Bauteile das Verhältnis der ertragbaren Spannung im ungekerbten Fall, σ_D , zur Nennspannung im gekerbten Fall, σ_{DK} , als Kerbwirkungszahl β_k definiert, mit dem Unterschied, dass die jeweiligen Spannungen auf Basis von Dauerfestigkeitsversuchen an gekerbten und ungekerbten Proben ermittelt werden.

$$\beta_k = \frac{\sigma_D}{\sigma_{DK}} \quad (138)$$

Während die Formzahl α_k hierbei eine rein geometrische Größe darstellt, ist für die Kerbwirkungszahl β_k ein Werkstoffeinfluss zu beobachten, welcher in der Literatur als werkstoffabhängige Kerbempfindlichkeit beschrieben ist [93].

Eine Berücksichtigung der Kerbwirkung muss ebenfalls in der numerischen Umsetzung der entwickelten Methodik erfolgen, da aus lokalen Spannungsüberhöhungen und Singularitäten nichtkonservative Ergebnisse bei der Detektion versagenskritischer Strukturregionen resultieren können. Anzumerken ist hierbei, dass sowohl Formzahl als auch Kerbwirkungszahl technisch relevanter Kerben mit Werten zwischen 1.2 und 6 die gleiche Größenordnung aufweisen. Im Grenzfall des verschwindenden Kerbradius ist die Formzahl dabei unendlich groß, während die Kerbwirkungszahl endlich bleibt [70]. Für qualitative Aussagen wird im Rahmen dieser Arbeit daher die Formzahl α_k herangezogen, welche als rein geometrische Größe eine allgemeinere Möglichkeit darstellt, das Vorhandensein von Spannungsüberhöhungen und numerischen Singularitäten zu berücksichtigen. Über die Formzahl lässt sich damit vor der Bewertung der Festigkeitsrelevanz einzelner Strukturbereiche eine Filterung von Spannungsüberhöhungen durchführen und die maximale Kerbspannung auf die globale maximale Nennspannung zurückrechnen. Der Grenzwert der Spannungen wird hierzu entsprechend der ermittelten Formzahl angepasst, um eine grundlegend konservativere Bewertung der Beanspruchungen zu erzielen:

$$\sigma_{\text{th}} = \frac{T_h^b}{\alpha_k} \cdot \sigma_{\text{a,max}} \quad (139)$$

4.6 Zusammenfassung

Das vorangestellte Kapitel beschreibt die Entwicklung modaler Wichtungskoeffizienten zur *a priori* Approximation modaler Beanspruchungsfelder sowie deren Bewertung zur Detektion versagenskritischer Strukturregionen. Die grundlegenden Erkenntnisse der durchgeführten Untersuchungen können wie folgt zusammengefasst werden: Auf Grundlage der Frequenzbereichslösung der Bewegungsgleichung diskretisierter Strukturen im Modalraum lässt sich der Anteil dominanter Moden an der Gesamtschwingung mit den entwickelten Wichtungskoeffizienten zuverlässig und konservativ approximieren.

Für breitbandig angeregte Systeme erfolgt dies konsistent über die mit den modalen Lasten gewichteten Maxima der modalen Vergrößerungsfunktionen, wodurch die Maxima der modalen Koordinaten für alle untersuchten Parameter exakt abgebildet werden können. Die detaillierte Untersuchung des Einflusses der Normierung der Eigenvektoren zeigt, dass diese abhängig von der Anregungsart für krafterreichte und fußpunkterregte Systeme implizit durch die entwickelten Wichtungskoeffizienten berücksichtigt wird. Durch die konsistente Herleitung der Wichtungskoeffizienten über die modalen Vergrößerungsfunktionen wird dabei ebenfalls der Dämpfungseinfluss zuverlässig erfasst.

Die Betrachtung schmalbandig angeregter Systeme erfordert darüber hinaus eine Anpassung des modalen Wichtungskoeffizienten an den spezifischen Frequenzinhalt des Anregungsspektrums. Dies lässt sich nach den gewonnenen Erkenntnissen mit geringem numerischem Aufwand über die schnelle Fourier-Transformation des Lastsignals mit anschließender Wichtung des Anregungsspektrums mit den modalen Vergrößerungsfunktionen realisieren. Durch die rein reelle Betrachtung der beteiligten Größen zeigen sich in den durchgeführten Untersuchungen Abweichungen zur Referenzlösung vor allem in den modalen Koordinaten, welche mit zunehmender modaler Dämpfung steigen. Die Untersuchungen zeigen dabei, dass hohe Abweichungen in den modalen Koordinaten vor allem auf das Bewertungskriterium der relativen Abweichung sehr kleiner Größen zurückzuführen sind.

Die beobachteten Abweichungen können damit vorrangig auf die Vernachlässigung der Phaseninformationen zurückgeführt werden. Die auf Basis der modalen Wichtungskoeffizienten superponierten Beanspruchungsfelder werden in allen durchgeführten Untersuchungen stets qualitativ korrekt und konservativ, mit einer maximalen Abweichung von 14.6 % abgebildet. Entsprechend des betrachteten Frequenzbereichs lässt sich der für schmalbandig angeregte Systeme entwickelte Wichtungskoeffizient dabei ebenfalls auf breitbandig angeregte Systeme anwenden, zeigt dabei jedoch Nachteile hinsichtlich effizient und Ergebnishüte. Kritisch zu hinterfragen ist im Allgemeinen die Wahl der Parameter zur Ermittlung des Anregungsspektrums über die FFT-Analyse des Lastsignals. Durch unzureichende Samplingfrequenz sowie Aliasing und Leakage-Effekte etc. können hierbei erhebliche Abweichungen auftreten.

Zur Bewertung versagenskritischer Strukturregionen wird das über die modalen Wichtungskoeffizienten ermittelte Beanspruchungsfeld sowie die daraus über Wöhlerlinien abgeleiteten Bruchlastwechsel herangezogen. Das resultierende Beanspruchungsfeld kann dabei als quasi-statische Momentaufnahme des maximalen Beanspruchungszustandes interpretiert werden. Nach den Erkenntnissen der vorangestellten Untersuchungen ist eine zusätzliche Wichtung der zeitbezogenen modalen Lastwechsel nicht erforderlich und kann zu nichtkonservativen Vorhersagen zum potenziellen Schadensort führen. Für konservative Ergebnisse bei der automatisierten Detektion versagenskritischer Strukturregionen ist darüber hinaus eine Bewertung und Berücksichtigung von Spannungsüberhöhungen und Singularitäten erforderlich. Die ausführliche Validierung der in diesem Kapitel beschriebenen Bewertungskriterien sowie der beschriebenen numerischen Umsetzung erfolgt am komplexen numerischen Modell und ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

5 Numerische Anwendung und Validierung

Das folgende Kapitel beschreibt die Anwendung der in dieser Arbeit entwickelten Methodik anhand komplexer Systeme aus dem industriellen Umfeld. Die durchgeführten numerischen Untersuchungen gliedern sich auf Basis des Frequenzinhalts der Anregung in folgende Systeme:

- Breitbandige Anregung: PKW-Verbundlenkerachse
- Schmalbandige Anregung: PKW-Motorträger

Nach einer Beschreibung der untersuchten Simulationsmodelle sowie der aufgetragenen Rand- und Lastbedingungen werden zur Validierung der entwickelten Methodik zunächst Frequenzbereichsanalysen am modal entkoppelten System durchgeführt und die Betrachtungen auf transient-dynamische Untersuchungen erweitert. Auf Basis der transient-dynamischen Analysen erfolgen Lebensdaueranalysen zur Erzeugung von Referenzlösungen für versagenskritische Strukturregionen, welche den Ergebnissen der *a priori* Detektion gegenübergestellt werden. Abschließend erfolgt eine Betrachtung von numerischem Aufwand und Effizienz.

5.1 PKW-Verbundlenkerachse

Die in Kapitel 4 beschriebene obere Schranke der maximalen Beanspruchung breitbandig angeregter Systeme resultiert aus der Annahme, dass zunächst unabhängig vom Frequenzinhalt des Lastsignals jede Eigenform in Resonanz angeregt wird. Es ergibt sich hieraus der in Abschnitt 4.2 für das einfache Balkenmodell validierte Wichtungskoeffizient der modalen Anteile an der Gesamtschwingung. Zur Erweiterung der Betrachtungen auf allgemeine Strukturen erfolgt

im Folgenden eine Übertragung der Methodik auf das Simulationsmodell einer PKW-Verbundlenkerachse.

Das numerische Modell der untersuchten Verbundlenkerachse ist in Abb. 5.1 dargestellt. Es besteht aus zwei biege- und torsionssteifen Längslenkern sowie einem biegesteifen, jedoch torsionsweichen Querlenker (auch Torsionsrohr). Die Längslenker sind mit dem Querlenker verschweißt. An den oberen Längslenkerenden sind Lagerbuchsen für die Aufnahme der Gummi-Metall-Hinterachslager angeschweißt. An den unteren Enden der Längslenker sind sogenannte Achszapfenaufnahmen angebracht, die der Kopplung mit dem Radträger dienen. Über Federteller und Dämpfersitz wird der Achsträger mit den Fahrwerksfedern sowie den Stoßdämpfern verbunden.

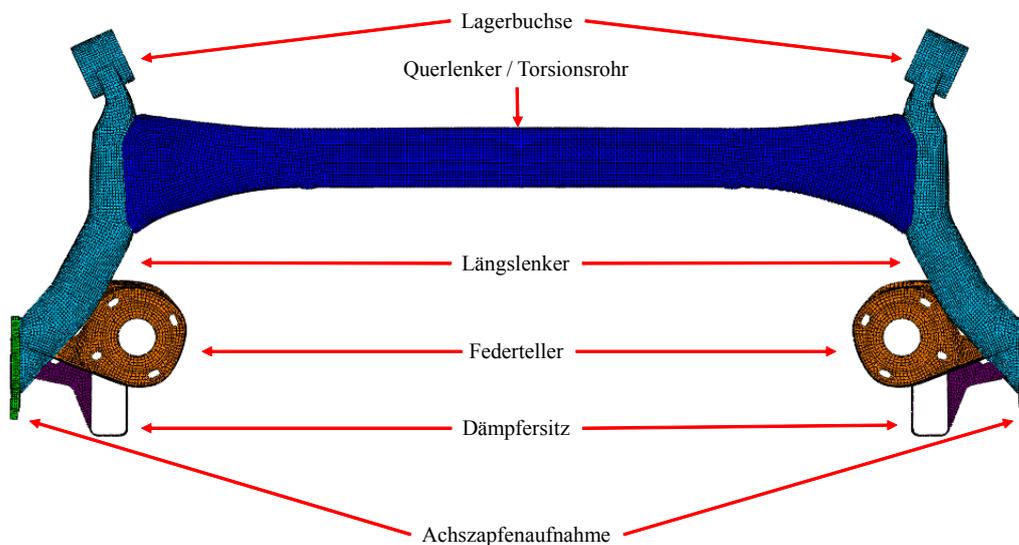


Abb. 5.1: Modell der untersuchten Verbundlenkerachse

Die numerischen Untersuchungen werden im FE-System ABAQUS durchgeführt. Das vollständige FE-Modell besteht aus ca. 44 000 linearen Schalenelementen und ca. 5 000 Kontinuumselementen mit insgesamt über 300 000 Freiheitsgraden. Die Eigenschaften der Diskretisierung sind in Tab. 5.1 zusammengefasst. Für die Analysen wird homogenes, isotropes Material angenommen. Das Torsionsrohr hat einen E-Modul von $E = 220\,000$ MPa, für alle weiteren Komponenten gilt $E = 210\,000$ MPa. Die Querkontraktionszahl ist $\nu = 0.3$.

Tab. 5.1: Elementtypen und Elementanzahl der einzelnen Baugruppen

	Elementtypen	Anzahl
Querlenker	S3R, S4R	23 768
Längslenker	S3R, S4R	12 784
Lagerbuchsen	S3R, S4R, CONN3D2	1 608
Federteller	S3R, S4R	5 444
Dämpfersitz	S3R, S4R	1 700
Achszapfenaufnahme	C3D6, C3D8	4 832

5.1.1 Numerische Umsetzung der Randbedingungen

Die numerische Umsetzung realer Randbedingungen zählt zu den größten Fehlerquellen der numerischen Simulation [61]. Besonders die elastische Lagerung hat, gegenüber der in der FEM oftmals angewandten idealisiert steifen Lagerung durch verhinderte Verschiebung, einen erheblichen Einfluss auf das globale Beanspruchungsfeld. Die Randbedingungen des Simulationsmodells sind daher im Hinblick auf die in Kapitel 7 beschriebenen experimentellen Untersuchungen hinsichtlich Einbausituation und Belastungsart weitgehend der realen Konfiguration im PKW nachempfunden. Die untersuchte Struktur ist dazu, wie auch im PKW, über Metall-Gummi-Lager (sog. Bushings) gelagert. Die Gummilager bestehen aus zwei koaxialen Stahlzylindern, die über einen einvulkanisierten oder eingepressten Zylinder aus Naturkautschuk miteinander verbunden sind, siehe Abb. 5.2. Während der äußere Zylinder über eine entsprechende Pressverbindung mit den Lagerbuchsen der Hinterachse verbunden ist, ist der innere Zylinder über eine feste Achse mit der Karosserie verschraubt.



Abb. 5.2: Gummi-Metall-Hinterachslager

Die schwingungs- und schalldämpfenden Eigenschaften von Gummilagern zählen zwar zu den großen Vorteilen beispielsweise zur Verbesserung des NVH-Verhaltens (*engl. noise, vibration, harshness*) von Fahrzeugen; durch die Materialeigenschaften des Gummis ergeben sich jedoch neben nichtlinearem Kraft-Verformungs-Verhalten auch viskoelastische Eigenschaften und hysteretische Effekte, die sowohl die experimentelle Charakterisierung als auch die Modellierung erschweren [94]. Die vollständige Charakterisierung des nichtlinearen Materialverhaltens der Gummilager sowie dessen Implementierung in ein allgemeingültiges numerisches Rechenmodell liegt dabei außerhalb der Ziele dieser Arbeit. Vielmehr wird eine für die Untersuchungen dieser Arbeit zielführende lineare Approximation des nichtlinearen Materialverhaltens bei festen Parametern vorgenommen. Die numerische Umsetzung der elastischen Lagerung erfolgt dazu über die in ABAQUS implementierten Verbindungselemente CONN3D2. Diese ermöglichen die elastische Kopplung zweier Knoten, wobei für die Relativbewegung der Verbindungspartner beliebige konstitutive Beziehungen in alle Raumrichtungen implementiert werden können. Das eingesetzte Verbindungselement hat zwei Knoten, welche im Mittelpunkt der Lagerachse positioniert sind, siehe Abb. 5.3. Während ein Knoten über die Zwangsbedingung „distributing coupling“ mit den Knoten der Lagerachse so gekoppelt ist, dass die Knotenkraft des Verbindungselementes konstant auf die Knoten der Lagerachse verteilt wird, ist der zweite Knoten in gleicher Weise mit den Knoten der Lagerbuchse gekoppelt. Damit lässt sich die Relativbewegung von Lagerachse und Lagerbuchse über die elastischen Eigenschaften des Verbindungselements in alle Raumrichtungen für beliebige Randbedingungen einstellen.

Die Ermittlung der linearisierten elastischen Eigenschaften der eingesetzten Gummilager erfolgt mit Hilfe experimenteller Untersuchungen und durch einen iterativen Modellabgleich an einem vereinfachten Ersatzmodell. Das detaillierte Vorgehen hierzu ist in Anhang C beschrieben. Die durchgeführten experimentellen Untersuchungen zeigen, dass die eingesetzten Hinterachslager ein im untersuchten Belastungsbereich mäßig nichtlineares Verformungsverhalten sowie eine vernachlässigbare Geschwindigkeitsabhängigkeit aufweisen. Die am vereinfachten Ersatzmodell validierte Konfiguration von Lagerachse, Verbindungselement und Lagerbuchse wird mit den entsprechenden Zwangsbedingungen aus Anhang C in das lineare Simulationsmodell der Verbundlenkerachse übertragen. Die ermittelten elastischen Eigenschaften der Hinterachslager sind nach Abb. 5.3 bezeichnet und in Tab. 5.2 zusammengefasst.

Tab. 5.2: Elastische Eigenschaften der Hinterachslager

k_x	352 N/mm
k_y	1144 N/mm
k_z	1144 N/mm
k_{xx}	10 Nmm/rad
k_{yy}	513 Nm/rad
k_{zz}	513 Nm/rad

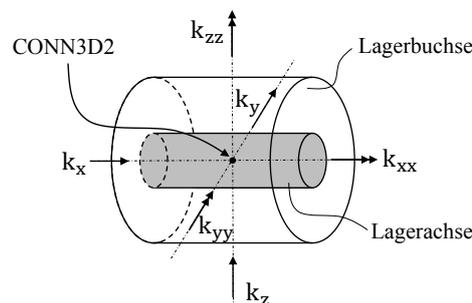


Abb. 5.3: Schematische Darstellung der Lagersteifigkeiten

In Anlehnung an die Anbindung des Hinterachslagers an die Karosserie ist die Verschiebung der Endpunkte der Lagerachse im Simulationsmodell in alle Raumrichtungen verhindert, bei freier Drehung um die Lagerlängsachse, siehe Abb. 5.4.

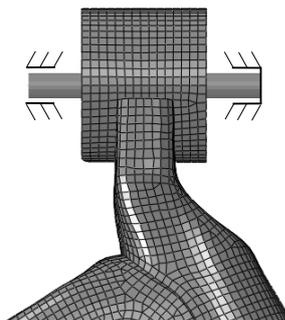


Abb. 5.4: Randbedingungen der Lagerachse

Die weiteren Randbedingungen der realen Struktur resultieren aus den vom Radträger auf die Achszapfenanbindung übertragenen Kräfte. Die Lasteinleitung sowie das Aufbringen von Randbedingungen im numerischen Modell erfolgt über einen Referenzknoten im Mittelpunkt der Achszapfenanbindung. Über Multipoint-Constraints (MPC) ist dieser Referenzknoten (Master) mit den Knoten der Verbindungsfläche der Achszapfenanbindung (Slave) gekoppelt, um die Verschraubung mit dem Radträger nachzuempfinden. Die auf den Referenzknoten aufgebrauchten Randbedingungen werden dadurch auf die Fläche der Achszapfenanbindung verteilt, siehe Abb. 5.5.

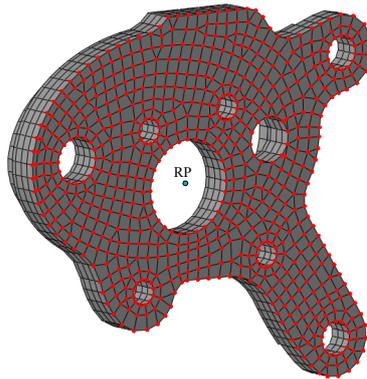


Abb. 5.5: Master (RP) und Slave Knoten (rot) der Zwangsbedingung MPC

5.1.2 Lastfälle und Simulationsmethoden

Zur Validierung der entwickelten Methodik wird das beschriebene numerische Modell in verschiedenen Last- und Randbedingungskonfigurationen untersucht. Basis der Untersuchungen bildet die modale Entkopplung der Systemgleichung und die damit einhergehende numerische Modalanalyse zur Bestimmung der Eigenformen des Systems. Die auf das System aufgebrauchten Randbedingungen sind dabei implizit in den Eigenformen enthalten, so dass die Eigenformen unabhängig von der Lastkonfiguration für jedes untersuchte Set von Randbedingungen bestimmt werden müssen. Mit dem Ziel, aussagekräftige Referenzlösungen zu erzeugen, werden im Folgenden dem realen Einsatz nachempfundene Systemkonfigurationen untersucht. Die Untersuchungen erfolgen an zwei Sets von Randbedingungen, die sich in der Lagerung der beiden Achszapfenanbindungen unterscheiden.

In Konfiguration 1 (Abb. 5.6 a) sind die Knoten einer Achszapfenanbindung in drei Raumrichtungen fixiert, während die gegenüberliegende Achszapfenanbindung frei ist. In Konfiguration 2 (Abb. 5.6 b) sind beide Achszapfenanbindungen frei. Die Hinterachslager sind in beiden Konfigurationen, wie im vorigen Abschnitt beschrieben, elastisch gelagert (vgl. Abb. 5.3 und Abb. 5.4).

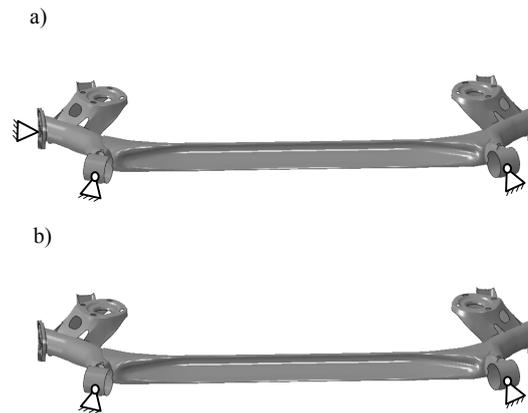


Abb. 5.6: Untersuchte Systemkonfigurationen. a) Konfiguration 1, b) Konfiguration 2

Für die beiden Systemkonfigurationen werden verschiedene, den realen Einsatzbedingungen nachempfundene Lastfälle untersucht. Die Analysen erfolgen zunächst im Frequenzbereich und werden in einem weiteren Schritt durch transient-dynamische Zeitbereichsanalysen sowie numerische Lebensdaueranalysen ergänzt.

Für die modale Entkopplung der untersuchten Systeme erfolgt zunächst eine numerische Modalanalyse zur Ermittlung der modalen Systemgrößen. Diese erfolgt in ABAQUS mittels Lanczos-Algorithmus für die ersten 50 Eigenwerte. Die resultierenden Eigenfrequenzen beider Systemkonfigurationen sind in Tab. 5.3 zusammengefasst. Zur nachvollziehbaren Interpretation der folgenden Untersuchungen sind die ersten zehn Eigenformen sowie die resultierenden modalen von Mises-Spannungen bei massennormierten Eigenvektoren in Anhang B dargestellt.

Tab. 5.3: Eigenfrequenzen beider Systemkonfigurationen in Hz

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	...	50
Konf. 1	18.0	61.8	104.9	115.3	169.5	268.1	278.8	356.1	...	1724.5
Konf. 2	2.2	15.9	36.4	56.8	60.1	93.0	126.8	136.1	...	1654.4

5.1.3 Frequenzbereichsanalysen

Für die Untersuchung der stationären Systemantwort im Frequenzbereich werden vier Lastfälle ausgewählt. Diese beschreiben zum einen das einseitige Einfedern eines Rades, während das gegenüberliegende Rad fixiert ist (Abb. 5.7 a) sowie das Einfedern eines Rades mit freiem gegenüberliegendem Rad (Abb. 5.7 b). Zum anderen wird das wechselseitige Einfedern (Abb. 5.7 c) sowie das beidseitige Einfedern der Räder untersucht (Abb. 5.7 d).

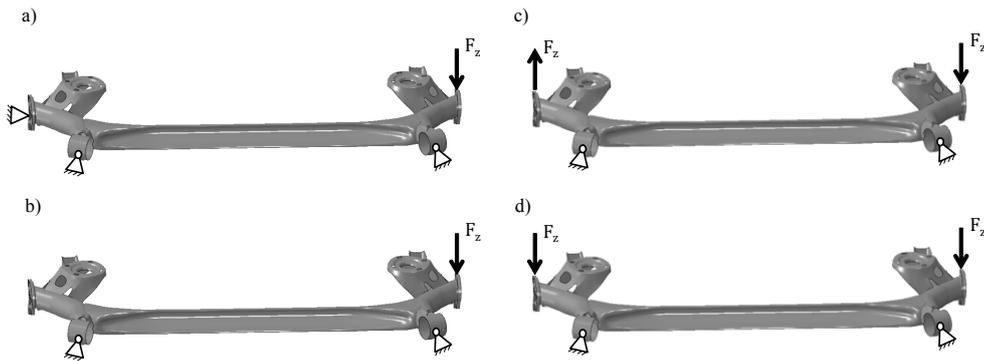


Abb. 5.7: Untersuchte Lastfälle, a) und b) einseitiges Einfedern, c) wechselseitiges Einfedern, d) beidseitiges Einfedern

Für die Validierung der getroffenen Annahmen wird anfangs von konstanter modaler Dämpfung $\vartheta_i = 0.2\%$ für alle Moden ausgegangen, um die Untersuchungen anschließend auf proportional gedämpfte Systeme mit den Rayleigh-Koeffizienten $\alpha = 0.96$ und $\beta = 1.2 \cdot 10^{-6}$ zu erweitern [89]. Die aus der Rayleigh-Dämpfung resultierenden modalen Dämpfungen der ersten 50 Moden für die untersuchten Systemkonfigurationen sind in Abb. 5.8 dargestellt.

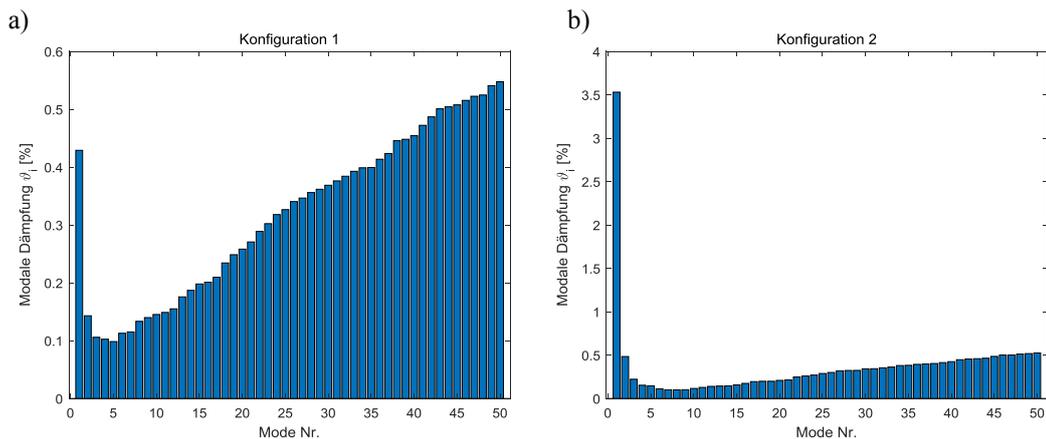


Abb. 5.8: Modale Dämpfung der proportional gedämpften Systeme a) Konfiguration 1, b) Konfiguration 2

Als Referenzlösung werden in Anlehnung an Abschnitt 4.2.3 die Maxima der modalen Koordinaten herangezogen. Diese werden über eine Frequenzbereichsanalyse der stationären Systemantwort ermittelt und den entwickelten modalen Wichtungskoeffizienten gegenübergestellt. Die Frequenzbereichsanalyse der jeweiligen Systeme erfolgt im Modalraum und in einem Frequenzbereich bis 1.5 kHz mit einer Last von $F_z = 1\text{ kN}$, wobei das System mit den ersten 50 Eigenvektoren entkoppelt wird. Die Ermittlung der Strukturantwort erfolgt mit einem Frequenzschritt von $\Delta f = 0.1\text{ Hz}$. Für die Auswertung der Beanspruchungen erfolgt eine Superposition der jeweiligen Maxima der modalen Koordinaten mit den zugehörigen von Mises-Spannungsmoden zur Gesamtlösung.

Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der im vorigen Abschnitt beschriebenen Frequenzbereichsanalysen zusammengefasst und den aus der entwickelten Methodik resultierenden Ergebnissen gegenübergestellt. Die Auswertung erfolgt zunächst in den modalen Koordinaten, anschließend erfolgt eine Betrachtung der resultierenden Beanspruchungen.

In Abb. 5.9 sind die ermittelten Maxima der modalen Koordinaten den entwickelten Wichtungskoeffizienten für konstante modale Dämpfung gegenübergestellt (logarithmische Darstellung). Unabhängig von Systemkonfiguration und Lastfall lässt sich dabei eine exakte Übereinstimmung feststellen. Die Erweiterung der Betrachtungen auf proportional gedämpfte Systeme zeigt, dass diese Übereinstimmung ebenfalls für variable modale Dämpfung erzielt wird, siehe Abb. 5.10.

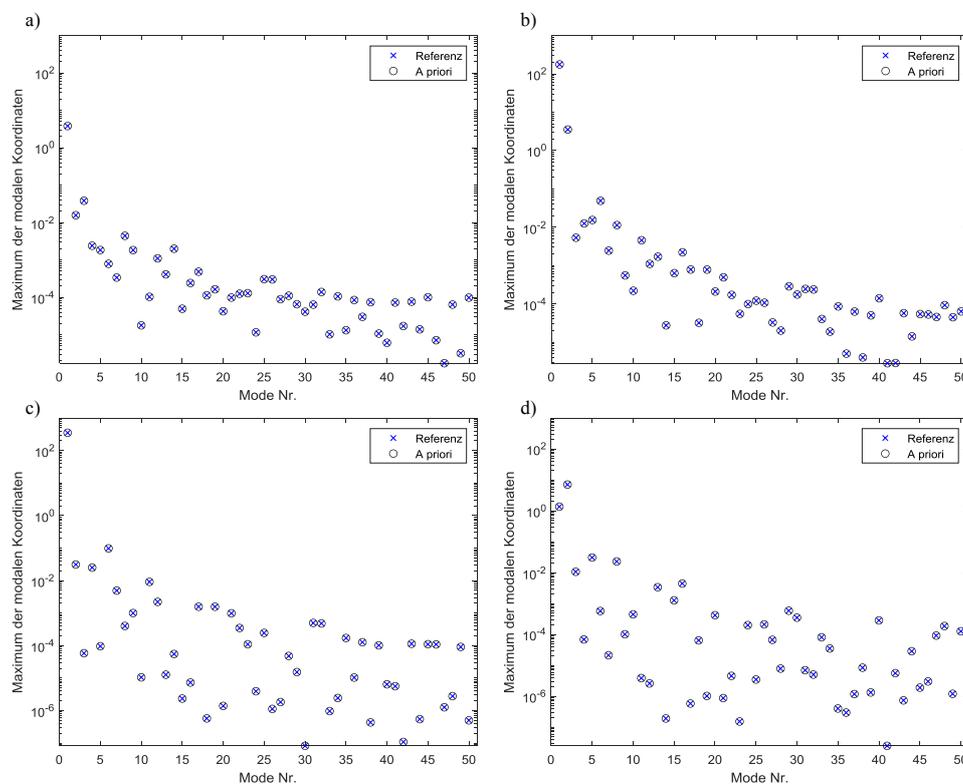


Abb. 5.9: Maxima der modalen Koordinaten und Wichtungskoeffizienten für $\vartheta_i = 0.2\%$,
a) einseitiges Einfeldern, Konfiguration 1, b) einseitiges Einfeldern, Konfiguration 2, c) beidseitiges Einfeldern,
Konfiguration 2, d) wechselseitiges Einfeldern, Konfiguration 2

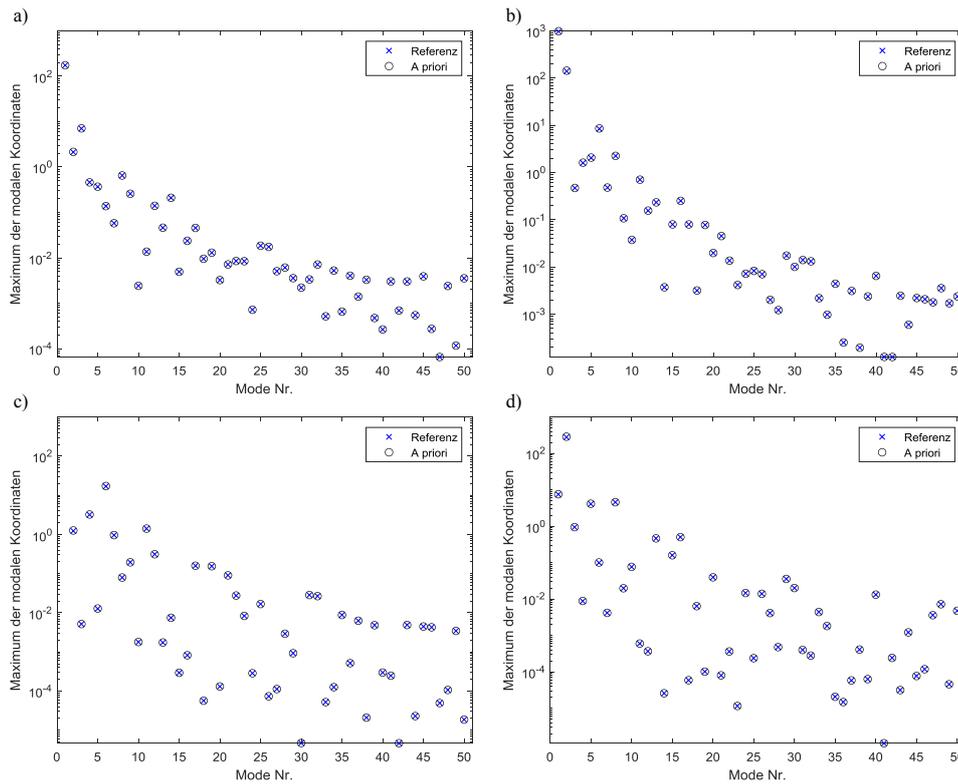


Abb. 5.10: Maxima der modalen Koordinaten und Wichtungskoeffizienten bei Rayleigh-Dämpfung a) einseitiges Einfedern, Konfiguration 1, b) einseitiges Einfedern, Konfiguration 2, c) beidseitiges Einfedern, Konfiguration 2, d) wechselseitiges Einfedern,

Es lässt sich damit schlussfolgern, dass bei Anwendung der entwickelten Methodik ebenfalls eine exakte Übereinstimmung in den Beanspruchungen erzielt wird, wenn von phasengleichem Auftreten der jeweiligen Maxima ausgegangen wird. Das aus der Superposition der Maxima der modalen Koordinaten mit den zugehörigen modalen Beanspruchungen resultierende von Mises-Spannungsfeld ist beispielhaft für den Lastfall des einseitigen Einfederns (Konfiguration 1) in Abb. 5.11 dargestellt.

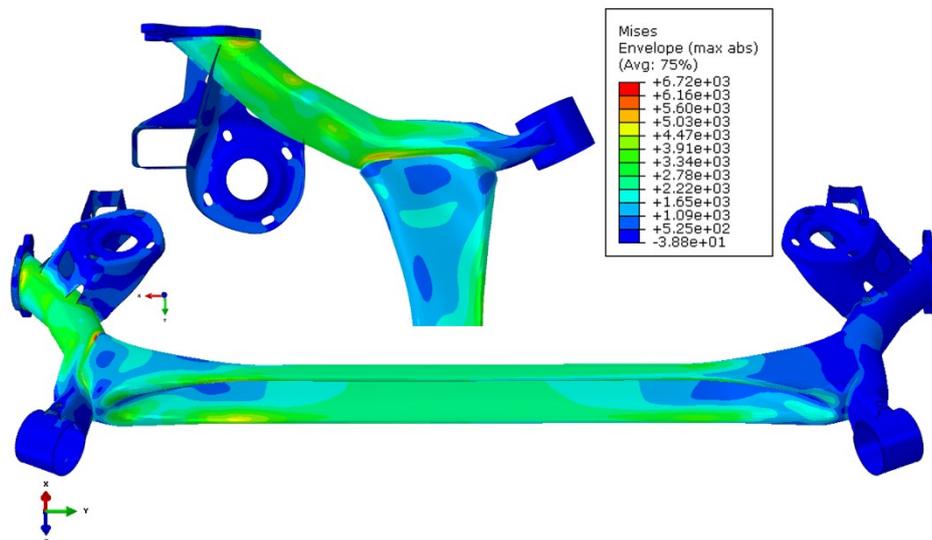


Abb. 5.11: Überlagertes von Mises-Spannungsfeld in Konfiguration 1, $\vartheta = 0.2\%$, Frequenzbereichslösung

Aus den Ergebnissen der beschriebenen Methodik können damit potenziell versagenskritische Bereiche mit geringem Rechenaufwand für ein Set von gegebenen Rand- und Lastbedingungen detektiert werden. Das superponierte Beanspruchungsfeld wird hierfür auf die maximale Spannung normiert und für die Filterung versagenskritischer Strukturbereiche auf Element-Ebene ausgewertet, siehe Abb. 5.12.

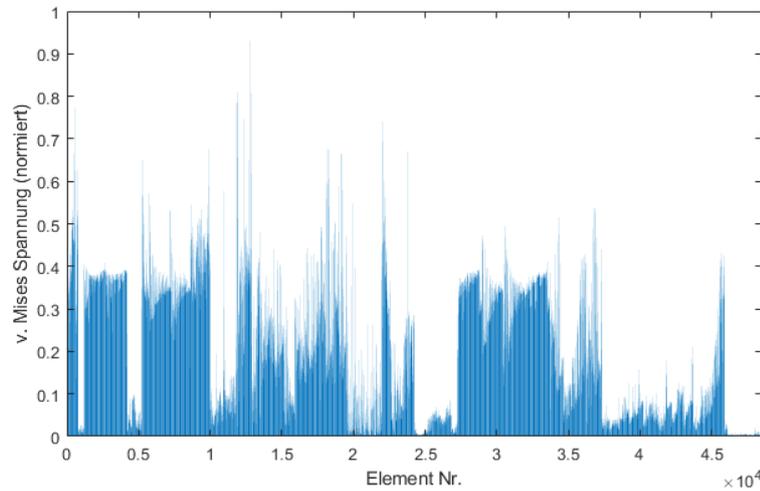


Abb. 5.12: Überlagerte v. Mises-Elementspannungen, normierte Darstellung

In der normierten Darstellung der Elementspannungen werden dazu über den in Abschnitt 4.5 eingeführten Grenzwert der maximal auftretenden Spannung die hochbeanspruchten Elemente gefiltert und als Element-Set auf der Struktur hervorgehoben. Als Grenzwert versagenskritischer Elemente wird dazu eine Erhöhung der minimalen Lebensdauer um den Faktor 2 festgelegt¹⁵. Nach Abschnitt 4.5 ergibt sich damit der Grenzwert in den Spannungen mit $b = -0.2$ nach [7] zu:

$$\sigma_{th} = 2^b \cdot \sigma_{max} = 0.87 \cdot \sigma_{max} \quad (140)$$

Angewandt auf das vorliegende Beispiel lässt sich damit zwar der Bereich maximal auftretender Beanspruchungen identifizieren, es ergibt sich jedoch, wie Abb. 5.13 zeigt, eine wenig konservative Vorhersage potenziell versagenskritischer Bereiche.

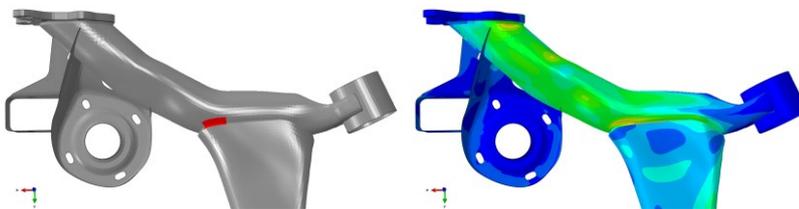


Abb. 5.13: Detektierte versagenskritische Strukturbereiche (rot), Grenzwert $\sigma_{th} = 0.87 \cdot \sigma_{max}$.

Für die Definition eines konservativen und aussagekräftigen Grenzwertes ist daher die Berücksichtigung von Spannungsüberhöhungen aus der numerischen Modellierung zwingend erforderlich. Nach Abschnitt 4.5.3 lässt sich dies bei vorliegenden Formzahlen zu den im Modell

¹⁵ Durch die hohe Streuung experimenteller Daten gelten in der Praxis Abweichungen der berechneten Lebensdauer um den Faktor 2 als gute Übereinstimmung [73].

befindlichen Kerben direkt umsetzen. Im vorliegenden Beispiel erfolgt die Ermittlung einer Formzahl in Anlehnung an [95] überschlägig aus der Betrachtung der maximal auftretenden Kerbspannung sowie der Spannung in unmittelbarer Nähe zur Kerbe¹⁶. Es ergibt sich damit für das vorliegende Beispiel:

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n} \approx 1.6 \quad (141)$$

Mit dem nach Abschnitt 4.5.3 angepassten Grenzwert in Gl. (142) lassen sich die versagenskritischen Elemente folgend konservativ, zuverlässig und automatisiert identifizieren, siehe Abb. 5.14.

$$\sigma_{\text{th}} = \frac{2^b}{\alpha_k} \cdot \sigma_{\max} = 0.55 \cdot \sigma_{\max} \quad (142)$$

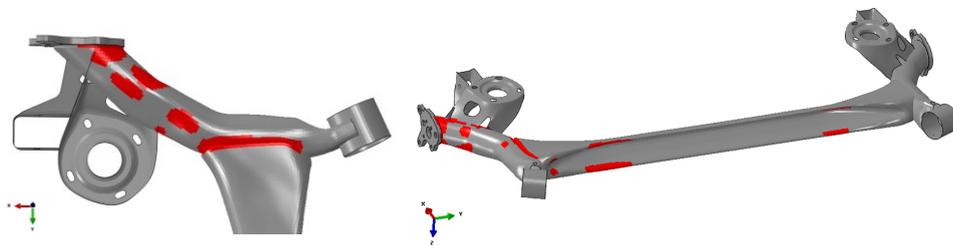


Abb. 5.14: Detektierte versagenskritische Strukturbereiche, Grenzwert $\sigma_{\text{th}} = 0.55 \cdot \sigma_{\max}$.

Aus dem ermittelten Wichtungskoeffizienten lassen sich dabei ferner, über die Informationen der modalen Lasten hinaus, Rückschlüsse auf die dominant an der Schwingung beteiligten Moden ziehen. Modale Lasten und Wichtungskoeffizienten sind hierzu beispielhaft für das einseitige Einfedern des Systems in Konfiguration 1 dargestellt, woraus sich eine deutliche Dominanz der ersten Eigenform für diesen Lastfall ableiten lässt, siehe Abb. 5.15 b.

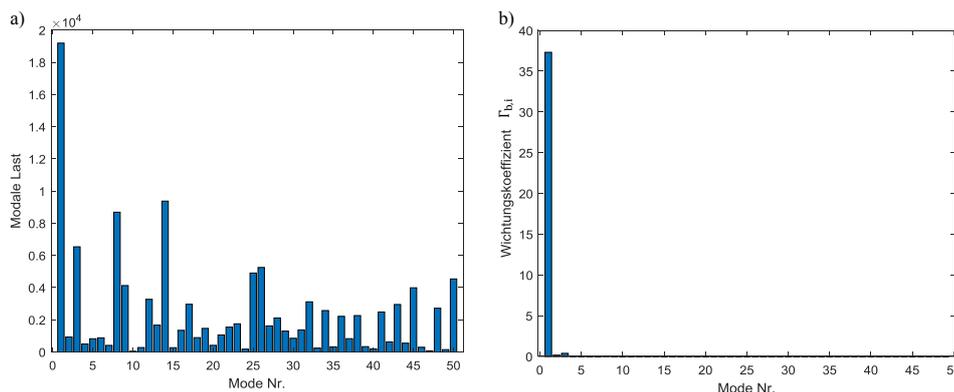


Abb. 5.15: Einseitiges Einfedern, Konfiguration 1 a) Modale Lasten, b) Wichtungskoeffizienten

Es zeigt sich bei Betrachtung der unterschiedlich gedämpften Systeme in gleicher Lastkonfiguration, dass die Dämpfung der einzelnen Moden – wie auch im beschriebenen akademischen Balkenbeispiel – einen deutlichen Einfluss auf die an der Schwingung beteiligten

¹⁶ Eine detailliertere Auswertung auf Basis von Strukturspannungskonzepten ist bei bekannter Nahtgeometrie ohne weiteres möglich, vgl. [7]

modalen Anteile hat. Dieser Dämpfungseinfluss kann ebenfalls am komplexen Modell durch den entwickelten Wichtungskoeffizienten erfasst und anschaulich dargestellt werden, wie beispielhaft in Abb. 5.16 für das wechselseitige Einfedern des Systems in Konfiguration 2 gezeigt. Wie sich deutlich in den ermittelten Wichtungskoeffizienten zeigt, wird für diese Konfiguration im Wesentlichen die zweite Mode angeregt.

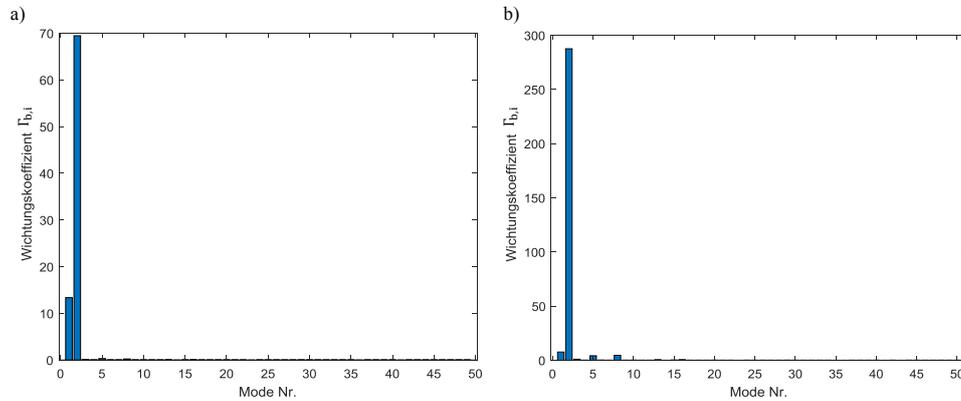


Abb. 5.16: Wichtungskoeffizienten für wechselseitiges Einfedern, Konfiguration 2, a) konstante modale Dämpfung $\vartheta = 0.2\%$, b) Rayleigh-Dämpfung

5.1.4 Zeitbereichs- und Lebensdaueranalysen

Zur Validierung der entwickelten Methodik werden im Folgenden transient-dynamische Zeitbereichsanalysen durchgeführt, welche als Grundlage numerischer Lebensdaueranalysen dienen. Die Analysen erfolgen äquivalent zum vorigen Abschnitt am modal entkoppelten System und für konstante modale Dämpfung mit $\vartheta = 0.2\%$ sowie für Rayleigh-Dämpfung mit $\alpha = 0.96$ und $\beta = 1.2 \cdot 10^{-6}$. Als Lastfall wird im Hinblick auf experimentelle Untersuchungen in Kapitel 7 das einseitige Einfedern in Konfiguration 1 gewählt. Das Lastsignal wird für die resonante Anregung der ersten 50 Eigenformen nach Gl. (143) durch Superposition harmonischer Funktionen erzeugt, deren Frequenzen den ersten 50 Eigenfrequenzen des Systems entsprechen; die Amplitude der einzelnen Frequenzanteile ist konstant. Die Analysen erfolgen in ABAQUS¹⁷ mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ s für eine Belastungszeit von $t = 5$ s.

$$F(t) = \sum_{m=1}^{50} \sin(\omega_{0,m}t) \quad (143)$$

Das erzeugte Lastsignal wird dazu zunächst auf sein Maximum normiert und in den durchgeführten Analysen über einen Amplitudenfaktor skaliert. Für realistische Beanspruchungsamplituden wird dazu eine maximale Lastamplitude von $F_{\max} = 100$ N gewählt.

¹⁷ Auf Basis der Auswertung der Duhamelschen Integrale für im Zeitschritt linear veränderlichen Lastverlauf [10]

Ergebnisse

Die Auswertung der Zeitbereichsanalysen erfolgt zunächst äquivalent zum vorigen Abschnitt durch die Gegenüberstellung der Maxima der zeitlichen Verläufe der modalen Koordinaten und den ermittelten modalen Wichtungskoeffizienten für breitbandig angeregte Systeme. Die Ergebnisse sind für $\vartheta = 0.2\%$ in Abb. 5.17 a sowie für Rayleigh-Dämpfung in Abb. 5.17 b dargestellt. Eine Betrachtung der resultierenden Beanspruchungen erfolgt im darauffolgenden Abschnitt.

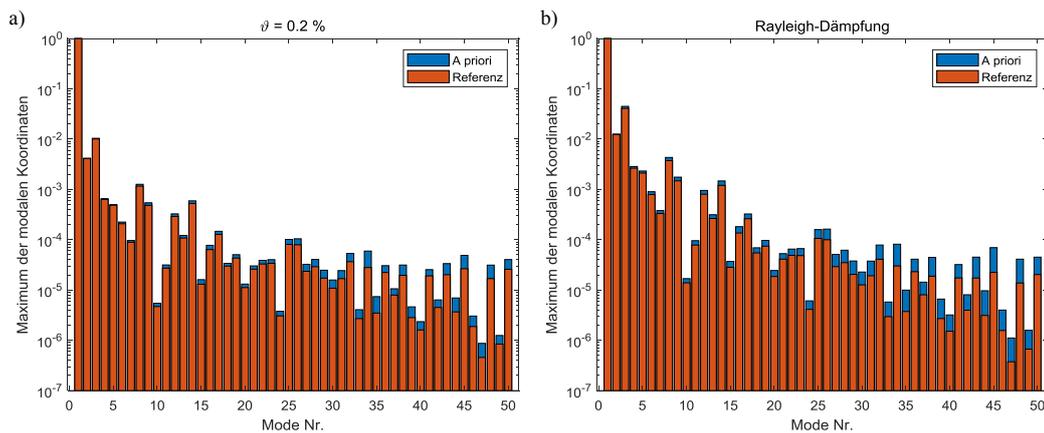


Abb. 5.17: Maxima der modalen Koordinaten (Referenz) und Wichtungskoeffizienten (a priori), Einseitiges Einfedern, Konfiguration 1, transient, a) $\vartheta = 0.2\%$ b) Rayleigh-Dämpfung (logarithmisch)

Abweichend zu den durchgeführten Frequenzbereichsanalysen lässt sich hierbei die vormals exakte Übereinstimmung – vor allem im höheren Frequenzbereich – nicht feststellen. Es zeigt sich, dass die maximalen modalen Anteile an der Gesamtschwingung im Vergleich zur transienten Analyse durch den entwickelten Wichtungskoeffizienten qualitativ zwar gut und konservativ erfasst werden, die Amplituden jedoch vor allem im hohen Frequenzbereich deutlich über den im Zeitbereich ermittelten Maxima liegen.

Die resultierende relative Abweichung zur Referenzlösung ist in Abb. 5.18 dargestellt. Beträgt diese bei Mode 1 noch ca. 0.1 %, zeigt sich im Frequenzbereich bis ca. 1 kHz (Mode 25) eine Erhöhung der maximalen relativen Abweichung auf ca. 20 %. Die modalen Anteile zur Gesamtschwingung werden dabei durch den entwickelten Wichtungskoeffizienten generell konservativ überschätzt. Wie auch bei den zuvor durchgeführten Frequenzbereichsanalysen ist dabei in Abb. 5.17 ersichtlich, dass der Anteil höherer Moden an der Gesamtschwingung auch bei direkter Anregung in Eigenfrequenz mit Amplituden unter 10^{-5} als gering einzustufen ist. Die deutliche Dominanz der ersten Eigenform wird dabei für den gewählten Lastfall durch die transient-dynamischen Analysen bestätigt. Die im hohen Frequenzbereich resultierenden Abweichungen um 50 % sind daher, wie in Abschnitt 4.2.3 beschreiben, vorrangig auf das Bewertungskriterium der relativen Abweichung sehr kleiner Größen zurückzuführen.

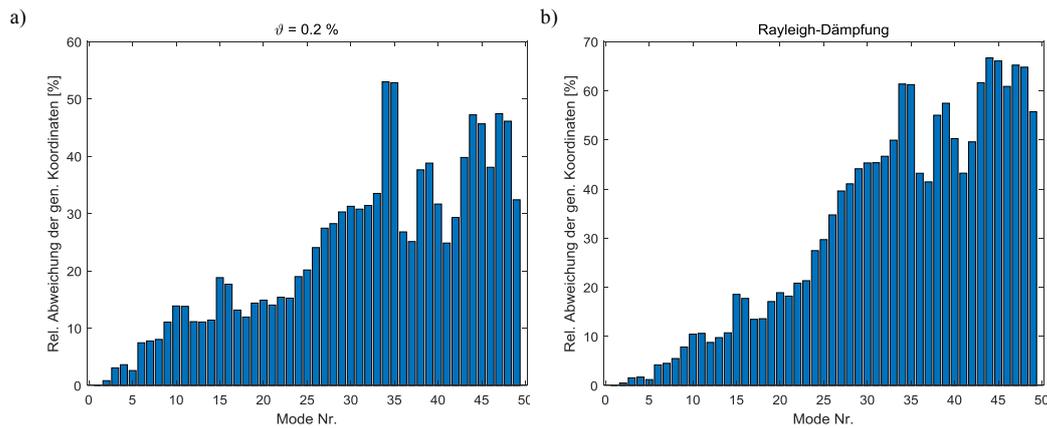


Abb. 5.18: Relative Abweichung zur Referenzlösung a) $\vartheta = 0.2\%$, b) Rayleigh-Dämpfung

Lebensdaueranalysen

Basierend auf den Ergebnissen der transient-dynamischen Zeitbereichsanalysen erfolgt im folgenden Abschnitt die Erzeugung einer Referenzlösung versagenskritischer Regionen auf Grundlage numerischer Lebensdaueranalysen. Das Maximum des dynamischen Beanspruchungsfeldes ist hierzu für das konstant modal gedämpfte System in Abb. 5.19 dargestellt. Das gezeigte Beanspruchungsfeld beschreibt die maximal auftretenden von Mises-Spannungen bei Betrachtung des gesamten transienten Beanspruchungsverlaufs. Mit der gewählten Lastamplitude von $F_{\max} = 100\text{ N}$ beträgt die maximale Amplitude der resultierenden dynamischen von Mises-Vergleichsspannung $\frac{\Delta\sigma_{\max}}{2} = 330\text{ MPa}$. Durch die deutliche Dominanz der ersten Eigenform zeigt sich für das Rayleigh-gedämpfte System qualitativ kein Unterschied in den Beanspruchungen, weshalb auf eine Darstellung an dieser Stelle verzichtet wird.

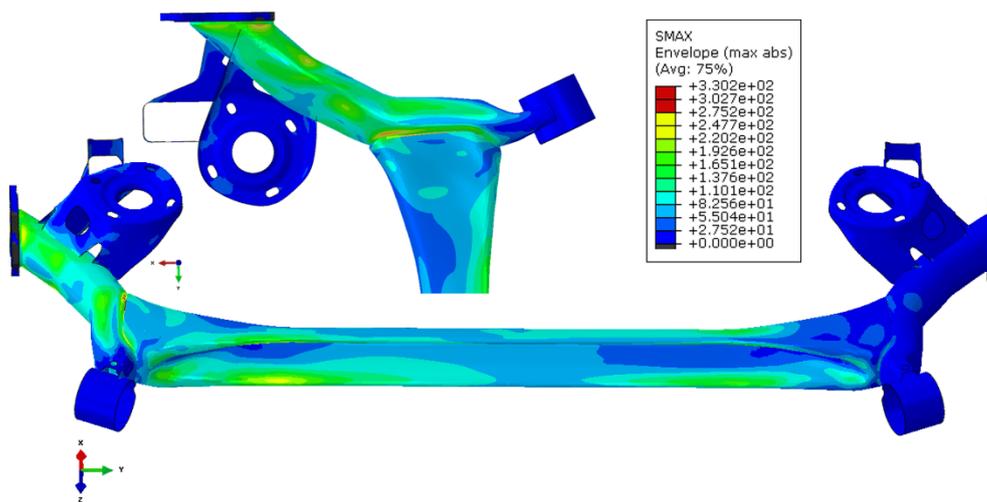


Abb. 5.19: Maximum des dynamischen v. Mises-Spannungsfeldes

Die Bewertung der Lebensdauer erfolgt, wie in Abschnitt 4.5 dargelegt, auf Basis der Wöhlerlinie. Um qualitative Aussagen über versagenskritische Strukturregionen ohne konkrete Werkstoffinformationen zu treffen, erfolgt die Ermittlung der aus der Beanspruchung resultierenden Lebensdauer dabei über eine den Beanspruchungen der Struktur angepasste

Wöhlerlinie. Während in Gl. (144) die Neigungskennzahl nach der FKM-Richtlinie [7] für Stahl generell mit $k = 5$ angenommen wird¹⁸, muss der Ermüdungsfestigkeitskoeffizient σ'_f an die vorliegende Beanspruchungsamplitude angepasst werden, um plausible Ergebnisse zu erhalten.

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma_V}{2} = \sigma'_f(N)^{-1/k} \quad (144)$$

Für qualitative Aussagen wird dazu ein Ermüdungsfestigkeitskoeffizient entsprechend der doppelten maximal auftretenden Beanspruchungsamplitude gewählt. Es ergibt sich damit für $\sigma'_f = \Delta\sigma_{\max} = 660 \text{ MPa}$ folgende, den Berechnungen zugrundeliegende Wöhlerlinie, siehe Abb. 5.20. Die Grenzspannung für die Dauerfestigkeit wird dabei nach FKM-Richtlinie mit $N_D = 10^6$ angenommen.

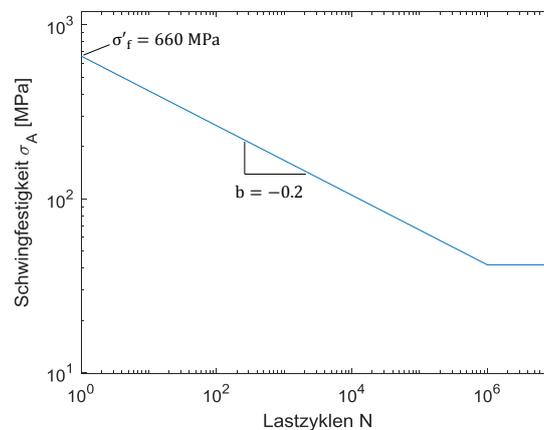


Abb. 5.20: Wöhlerlinie der durchgeführten Lebensdaueranalysen

Die Lebensdaueranalysen erfolgen ferner auf Basis der von Mises-Vergleichsspannung, wie in Kapitel 3 dargelegt, im kommerziellen Software-Paket fe-safe 2017 der Fa. Dassault Systèmes. Die Lebensdaueranalyse basiert dabei auf der Ermittlung von Lastkollektiven aus dem transienten Beanspruchungs-Zeit-Verlauf über ein Rainflow-Zählverfahren (siehe z. B. [69]) und linearer Schadensakkumulation. Die Beanspruchungs-Zeit-Verläufe werden dazu für jeden Zeitschritt aus den modalen Koordinaten und den zugehörigen Beanspruchungsmoden rekonstruiert. Unabhängig von der Beanspruchungsamplitude wird im Folgenden von rein elastischen Verformungsmechanismen, also der Gültigkeit der Basquin-Gleichung auch im Bereich weniger Lastwechsel, ausgegangen. Zusammen mit den hypothetischen Annahmen zu den gewählten Materialparametern steht die Ermittlung quantitativ belastbarer Lebensdauer vorhersagen damit außerhalb der Ziele dieser Arbeit. Als Ergebnis der durchgeführten Analysen ist in Abb. 5.21 das skalare Feld der ermittelten Lebensdauer in Form von Lastzyklen logarithmisch dargestellt.

¹⁸ entspricht Ermüdungsfestigkeitsexponenten $b = 1/k = -0.2$

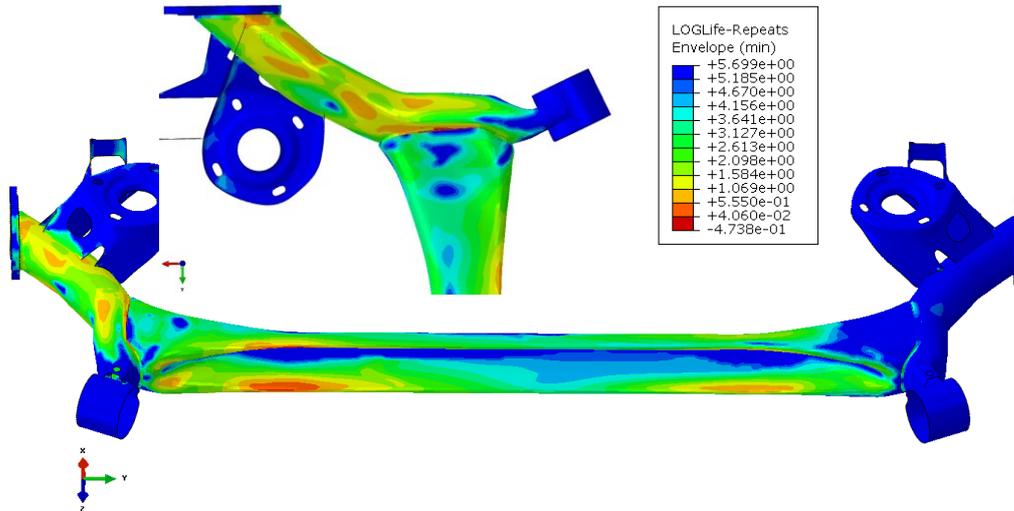


Abb. 5.21: Logarithmische Darstellung der Lebensdauer (Lastzyklen), einseitiges Einfedern, $\theta = 0.2 \%$

Aufbauend darauf erfolgt ein Abgleich der erzielten Lebensdauervorhersagen mit den Ergebnissen der entwickelten Methodik. Mit der erzeugten Referenzlösung werden dazu zunächst die tatsächlich als versagenskritisch zu bewertenden Elemente nach dem in Abschnitt 4.5 dargelegten Grenzwert ermittelt. Nach diesem werden Elemente, deren Lebensdauer geringer ist als das Doppelte der minimal auftretenden Lastzyklen N_{\min} , als versagenskritisch bewertet (siehe S. 98). Eine Grenzschwingspielzahl N_{krit} lässt sich damit wie folgt definieren:

$$N_{\text{krit}} = 2 \cdot N_{\min} \quad (145)$$

Äquivalent zu den Betrachtungen zu Spannungsüberhöhungen in Abschnitt 4.5.3 erfolgt für konservative Ergebnisse ebenfalls eine Anpassung der Grenzschwingspielzahl über die zuvor ermittelte Formzahl, vgl. Gl. (141):

$$N_{\text{krit}} = 2 \cdot N_{\min} \cdot \alpha_k^{-(1/b)} \approx 21 \cdot N_{\min} \quad (146)$$

Für die Validierung der entwickelten Methodik stehen damit zwei Sets von Elementen zur Verfügung: Die abhängig von der definierten Grenzschwingspielzahl ermittelten, tatsächlich versagenskritischen Elemente der Referenzlösung sowie die durch die entwickelte Methodik detektierten, potenziell versagenskritischen Elemente. Über einen direkten Vergleich beider Element-Sets lässt sich damit zum einen beurteilen, inwiefern alle tatsächlich versagenskritischen Elemente durch die entwickelte Methodik detektiert werden, zum anderen lässt sich die Anzahl der über die tatsächlich versagenskritischen Elemente hinaus detektierten Elemente bestimmen. Zur Veranschaulichung sind beide ermittelten Element-Sets hierfür in Abb. 5.22 dargestellt. Die tatsächlich als versagenskritisch bewerteten Elemente sind rot hervorgehoben, die Ergebnisse der entwickelten Methodik blau.

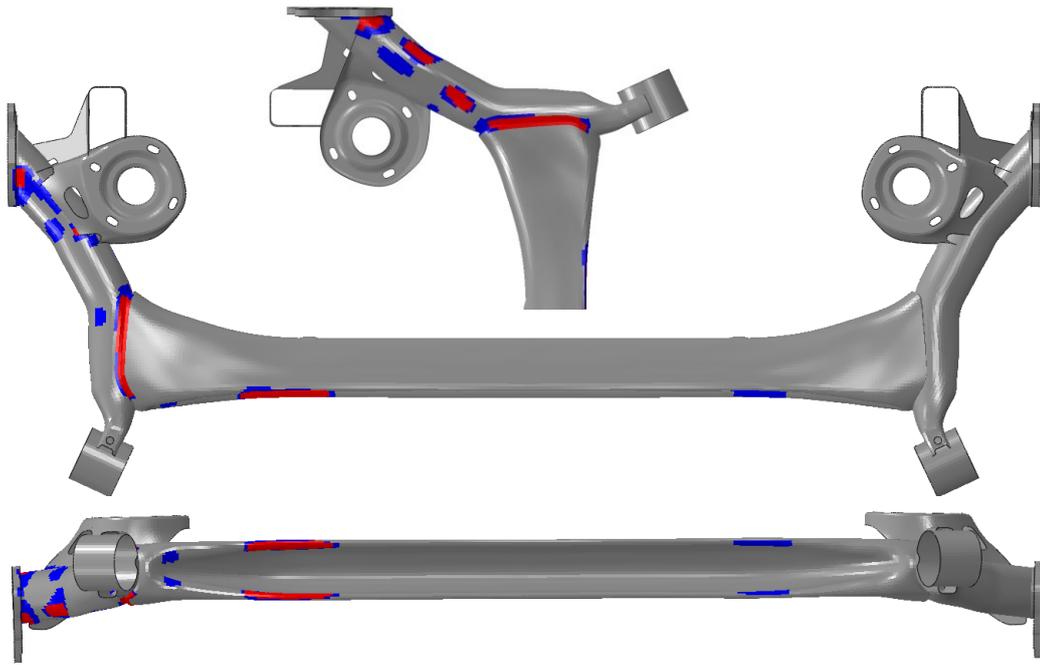


Abb. 5.22: Tatsächlich versagenskritische Elemente (rot) und Ergebnis der entwickelten Methodik (blau), Verbundlenkerachse

Auch die quantitative Auswertung zeigt dabei, dass alle tatsächlich als versagenskritisch bewerteten Elemente durch die entwickelte Methodik detektiert werden können, mit einer geringen Anzahl darüber hinaus detektierter Elemente, siehe Tab. 5.4. Die in Abb. 5.22 rot hervorgehobenen Elemente sind dabei eine Teilmenge der blau gekennzeichneten *a priori* Lösung.

Tab. 5.4: Vergleich versagenskritischer und detektierter Elemente, Verbundlenkerachse

	Anzahl	Anteil am Gesamtmodell
Versagenskritische Elemente	358	0.74 %
Detektierte Elemente	836	1.72 %
Differenz	478	0.99 %

Die Ergebnisse zeigen damit, dass durch die entwickelte Methodik für breitbandig angeregte Systeme versagenskritische Strukturregionen auch für das gezeigte komplexe numerische Beispiel zuverlässig und konservativ *a priori* detektiert werden können.

5.2 PKW-Motorträger

Die Anwendung des in Abschnitt 4.2.3 entwickelten modalen Wichtungskoeffizienten für schmalbandig angeregte Systeme erfolgt am numerischen Modell eines PKW-Motorträgers. Motorerregte Fahrzeugschwingungen sind ein klassisches Beispiel für eine schmalbandige Anregung durch Überlagerung einzelner harmonischer Frequenzen, welche als Vielfache der Motordrehzahl (sog. Ordnungen) auftreten [96].

Das numerische Modell des untersuchten Motorträgers ist in Abb. 5.23 dargestellt. Das vollständige FE-Modell besteht aus ca. 66 000 linearen Schalenelementen vom Typ S4R bzw. S3R und hat insgesamt über 400 000 Freiheitsgrade. Für die durchgeführten Analysen wird mit $E = 210\,000\text{ MPa}$ und $\nu = 0.3$ homogenes, isotropes Material angenommen.

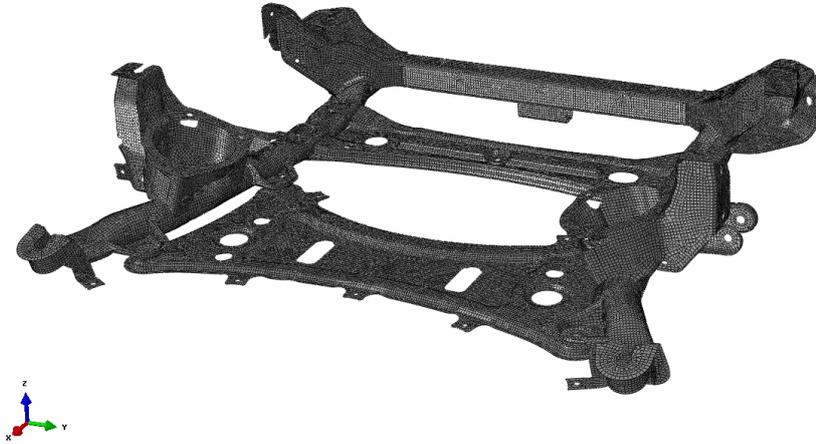


Abb. 5.23: Numerisches Simulationsmodell des untersuchten PKW-Motorträgers

5.2.1 Rand- und Lastbedingungen

Die geometrischen Randbedingungen der durchgeführten Untersuchungen sind der Anbindung der Struktur an die Karosserie nachempfunden. Demnach sind alle Strukturbereiche, die mit der Karosserie verschraubt oder verschweißt sind, durch verhinderte Verschiebungen bzw. Verdrehungen in alle Raumrichtungen fixiert, siehe Abb. 5.24.

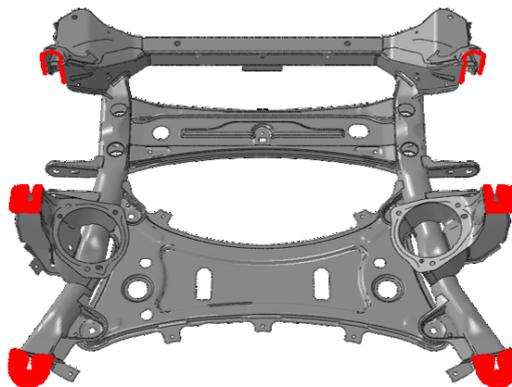


Abb. 5.24: Geometrische Randbedingungen am Motorträger, rot markierte Bereiche fixiert

Die Belastung der Struktur erfolgt über die vom Motor auf die Motorlager übertragenen Lasten. Eine vollständige Betrachtung aller durch den Motor hervorgerufenen Belastungen liegt dabei außerhalb der Ziele dieser Arbeit. Beispielhaft wird lediglich die Belastung des Motorträgers durch ein ersatzweise gewähltes Belastungsmodell beschrieben. Hierfür wird das aus dem Betrieb resultierende Massenmoment eines Einzylinder-Motors nach [96] herangezogen. Anschaulich bewirkt dieses Massenmoment ein Kippen des Motors entgegen seiner Drehrichtung, welches von den Motorlagern (siehe Abb. 5.25 a) aufgenommen wird. In der numerischen Simulation erfolgt

die aus dem Massenmoment resultierende Belastung der Motorlager über ein Kräftepaar $F_z(t)$, siehe Abb. 5.25 b. Die Kräfte werden hierzu über Multipoint-Constraints auf die Knoten der Anbindung der Motorlager verteilt.

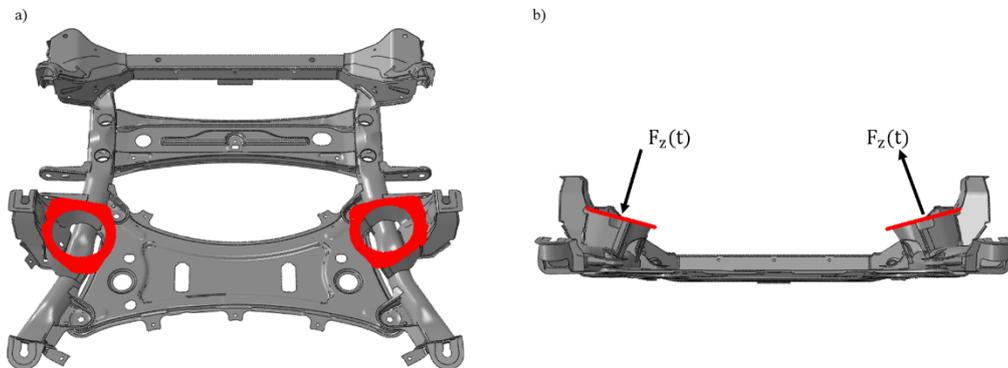


Abb. 5.25: Lastbedingungen am Motorträger a) Knoten der Motorlager-Anbindung, b) Aufgebrachtes Kräftepaar

Das Massenmoment M ist nach [96] beeinflusst von der Größe der bewegten Masse m_s , dem Kurbelradius r , dem Pleuelstangenverhältnis λ sowie dem Quadrat der aus der Motordrehzahl resultierenden Winkelgeschwindigkeit ω :

$$M = m_s r^2 \omega^2 \left[\frac{\lambda}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) - \frac{3\lambda}{4} \sin(3\omega t) - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \sin(4\omega t) \right] \quad (147)$$

Die für das Beispiel gewählten Parameter sind nach [96] in Tab. 5.5 zusammengefasst. Aus Gl. (147) geht hervor, dass das Massenmoment Frequenzanteile unterschiedlicher Amplituden bis zur vierten Ordnung enthält.

Tab. 5.5: Motorparameter des Belastungsmodells

Kolbenmasse m_s	0.65 kg
Kurbelradius r	0.039 m
Pleuelstangenverhältnis λ	0.25

Für die modale Entkopplung des untersuchten Systems erfolgt äquivalent zum vorigen Abschnitt eine numerische Modalanalyse zur Ermittlung der modalen Systemgrößen für die ersten 50 Eigenwerte. Der Einfluss des Motors wird dabei nicht berücksichtigt. Die resultierenden Eigenfrequenzen sind in Tab. 5.3 zusammengefasst. Zur nachvollziehbaren Interpretation der folgenden Untersuchungen sind die ersten zehn Eigenformen sowie die resultierenden modalen von Mises-Spannungen bei massennormierten Eigenvektoren in Anhang E dargestellt.

Tab. 5.6: Eigenfrequenzen des Motorträgers in Hz (ohne Motor)

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	...	50
f_0	114.9	195.4	212.7	221.9	334.7	342.0	346.9	357.8	...	1218.0

5.2.2 Frequenzbereichsanalyse

Zur Validierung des entwickelten Wichtungskoeffizienten für schmalbandig angeregte Systeme wird im Folgenden die Anregung bei Motordrehzahlen von $n = 1000 \text{ min}^{-1}$ bis $n = 6000 \text{ min}^{-1}$ untersucht. Die Ergebnisse von Wichtungskoeffizienten und Referenzlösung werden anschließend gegenübergestellt. Die Referenzlösung ist äquivalent zu Abschnitt 4.2.3 durch die Maxima der modalen Koordinaten sowie das resultierende superponierte von Mises-Beanspruchungsfeld gegeben. Die Ermittlung der Referenzlösungen erfolgt im Modalraum, in einem Frequenzbereich bis 1.5 kHz, einem Frequenzschritt von $\Delta f = 0.1 \text{ Hz}$ und einer Last von $F_z = 1 \text{ kN}$, wobei das System mit den ersten 50 Eigenvektoren entkoppelt wird. Die Untersuchungen beschränken sich auf das Rayleigh-gedämpfte System mit den Rayleigh-Koeffizienten $\alpha = 0.96$ und $\beta = 1.2 \cdot 10^{-6}$. Die resultierende modale Dämpfung ist in Abb. 5.26 dargestellt.

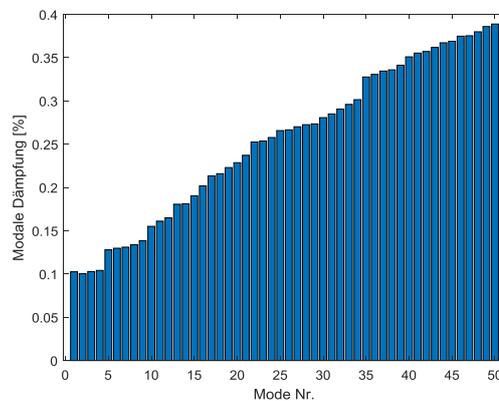


Abb. 5.26: Modale Dämpfung, Motorträger

Ergebnisse

Die Auswertung der Ergebnisse erfolgt zunächst in den modalen Koordinaten, anschließend erfolgt eine Betrachtung der resultierenden Beanspruchungen. In Abb. 5.27 (links) sind die Ergebnisse der durchgeführten Frequenzbereichsanalysen zusammengefasst und den aus der entwickelten Methodik resultierenden Wichtungskoeffizienten für schmalbandig angeregte Systeme gegenübergestellt. Die daraus ermittelten relativen Abweichungen zur Referenzlösung sind in Abb. 5.27 (rechts) dargestellt.

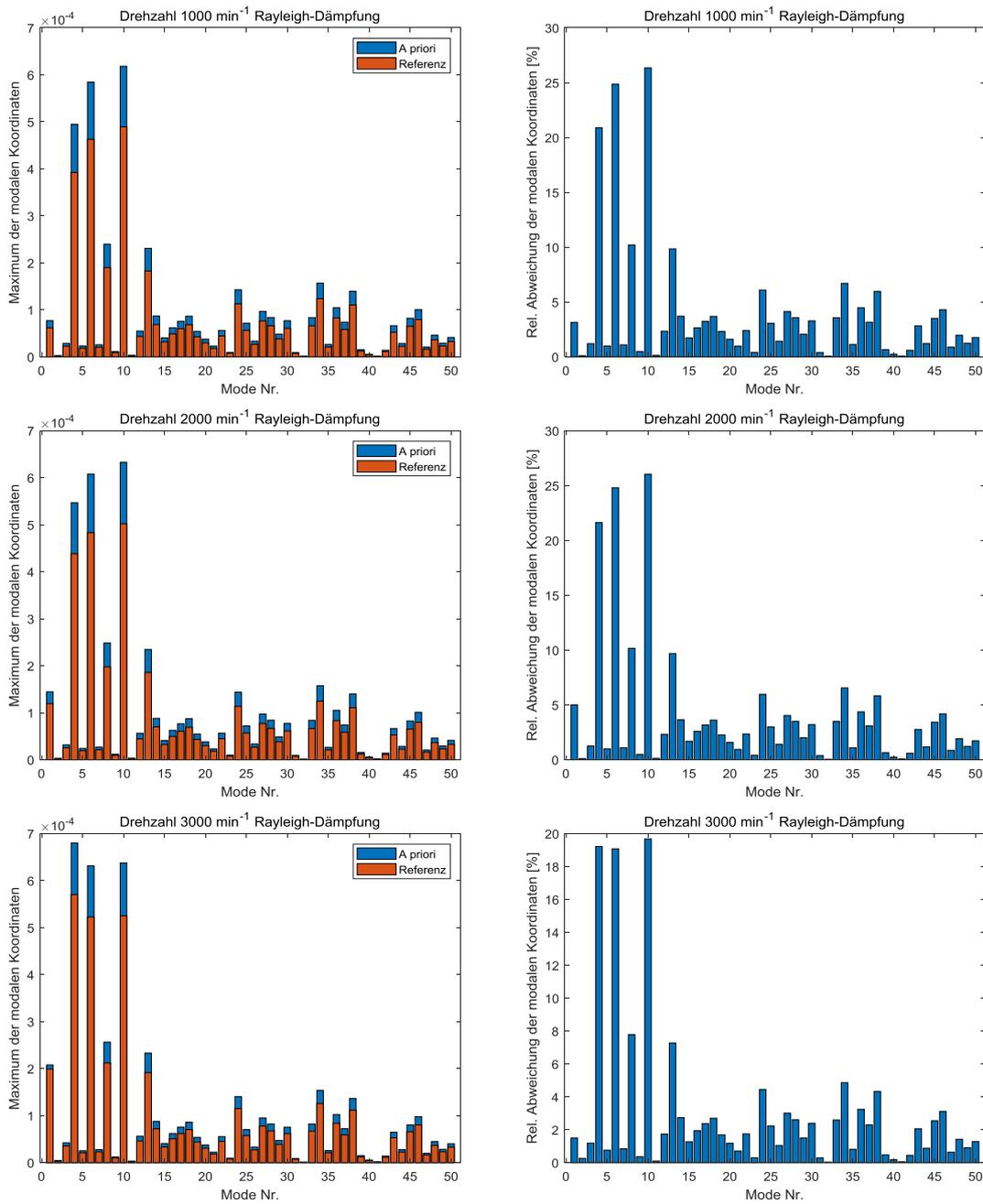


Abb. 5.27: Links: Maxima der modalen Koordinaten (Referenz) und Wichtungskoeffizienten (a priori), rechts: Relative Abweichung zur Referenzlösung für alle untersuchten Motordrehzahlen

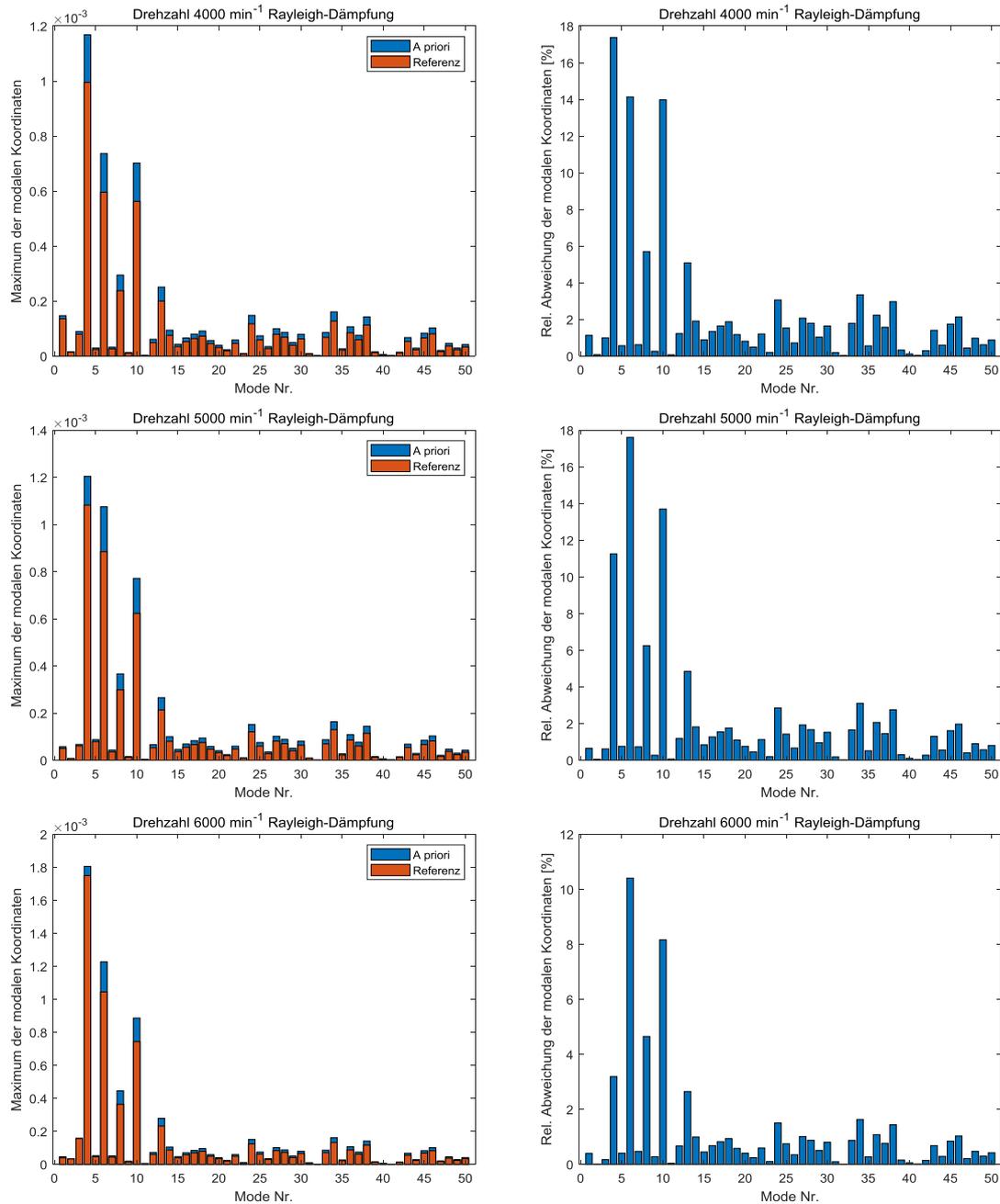


Abb. 5.27 (Fortsetzung): Links: Maxima der modalen Koordinaten (Referenz) und Wichtungskoeffizienten (a priori), rechts: Relative Abweichung zur Referenzlösung für alle untersuchten Motordrehzahlen

Zur Interpretation der Einflüsse von Lastkonfiguration und Anregungsspektrum zeigt Abb. 5.28 die aus der Anregung resultierenden modalen Lasten. Die Frequenzspektren der den untersuchten Drehzahlen zugeordneten Lastsignale sind zusammen mit den Eigenfrequenzen des Systems in Abb. 5.29 zusammengefasst. Die maximale Anregungsfrequenz bei einer Drehzahl von $n = 6000 \text{ min}^{-1}$ liegt dabei bei $f_{\text{max}} = 400 \text{ Hz}$. Bei Betrachtung der aus der Anregung resultierenden modalen Lasten wird deutlich, dass durch die räumliche Lastkonfiguration vor allem höherfrequente Eigenformen zu Schwingungen angeregt werden können.

Im relevanten Frequenzbereich, in dem das System durch die im Lastsignal enthaltenen Frequenzen angeregt wird, zeichnen sich die Moden 4, 6, 8 und 10 durch erhöhte modale Lasten ab. Dem entsprechend zeigen sich die dominanten Anteile der Maxima der modalen Koordinaten in Abb. 5.27.

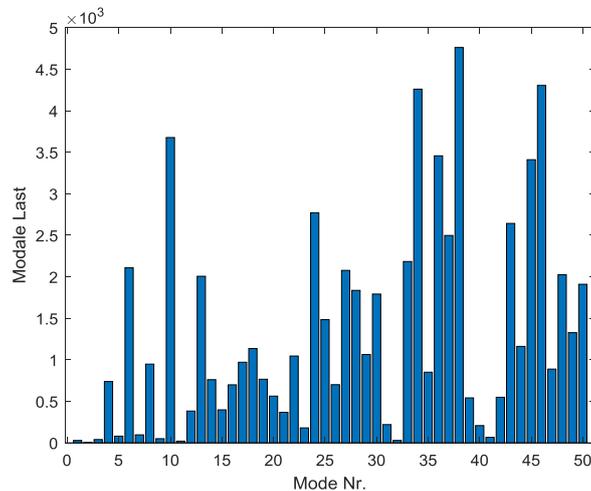


Abb. 5.28: Modale Lasten, Motorträger

Ein Vergleich der Anregungsspektren mit den Eigenfrequenzen des Systems in Abb. 5.29 zeigt, dass eine signifikante Überhöhung der Amplituden der modalen Koordinaten durch den Abstand der Anregungsfrequenzen zu den ersten Eigenfrequenzen erst ab einer Motordrehzahl von $n = 3000 \text{ min}^{-1}$ erfolgen kann. Zusammen mit der Betrachtung der modalen Lasten ergibt sich eine wesentliche Anregung erst ab Mode 4, also ab einer Frequenz von ca. 220 Hz. Für die Bewertung der beobachteten Abweichungen wird im Folgenden die Kategorisierung der Anregung der jeweiligen Moden aus Abschnitt 4.2.3 aufgegriffen. Dabei wird unterschieden zwischen direkt angeregten Moden (in Eigenfrequenz) indirekt angeregten Moden (in der Nähe der Eigenfrequenz) und nicht direkt angeregten Moden, d. h. mit größerem Abstand zur jeweiligen Eigenfrequenz. Die vorliegenden Lastkonfigurationen lassen sich hierbei ausschließlich der indirekten und nicht direkten Anregung, vorrangig der Moden 4, 6, 8 und 10 zuordnen, welche bereits im akademischen Balkenbeispiel zu erhöhten relativen Abweichungen im Vergleich mit der Referenzlösung führten.

Die größten Abweichungen um 25 % zeigen sich im unteren Drehzahlbereich bei $n = 1000 \text{ min}^{-1}$ und $n = 2000 \text{ min}^{-1}$ (vgl. Abb. 5.27), da hier die Anregungsfrequenzen weit unterhalb von 220 Hz liegen. Mit steigender Drehzahl sind dabei sinkende relative Abweichungen zur Referenzlösung zu beobachten, mit Werten um maximal 10 % bei $n = 6000 \text{ min}^{-1}$. Die am komplexen numerischen Modell gemachten Beobachtungen decken sich damit sehr gut mit den Ergebnissen des akademischen Balkenbeispiels aus Abschnitt 4.2.3, wonach vorrangig die modalen Anteile außerhalb des Anregungsspektrums erhöhte Abweichungen zur Referenzlösung zeigen.

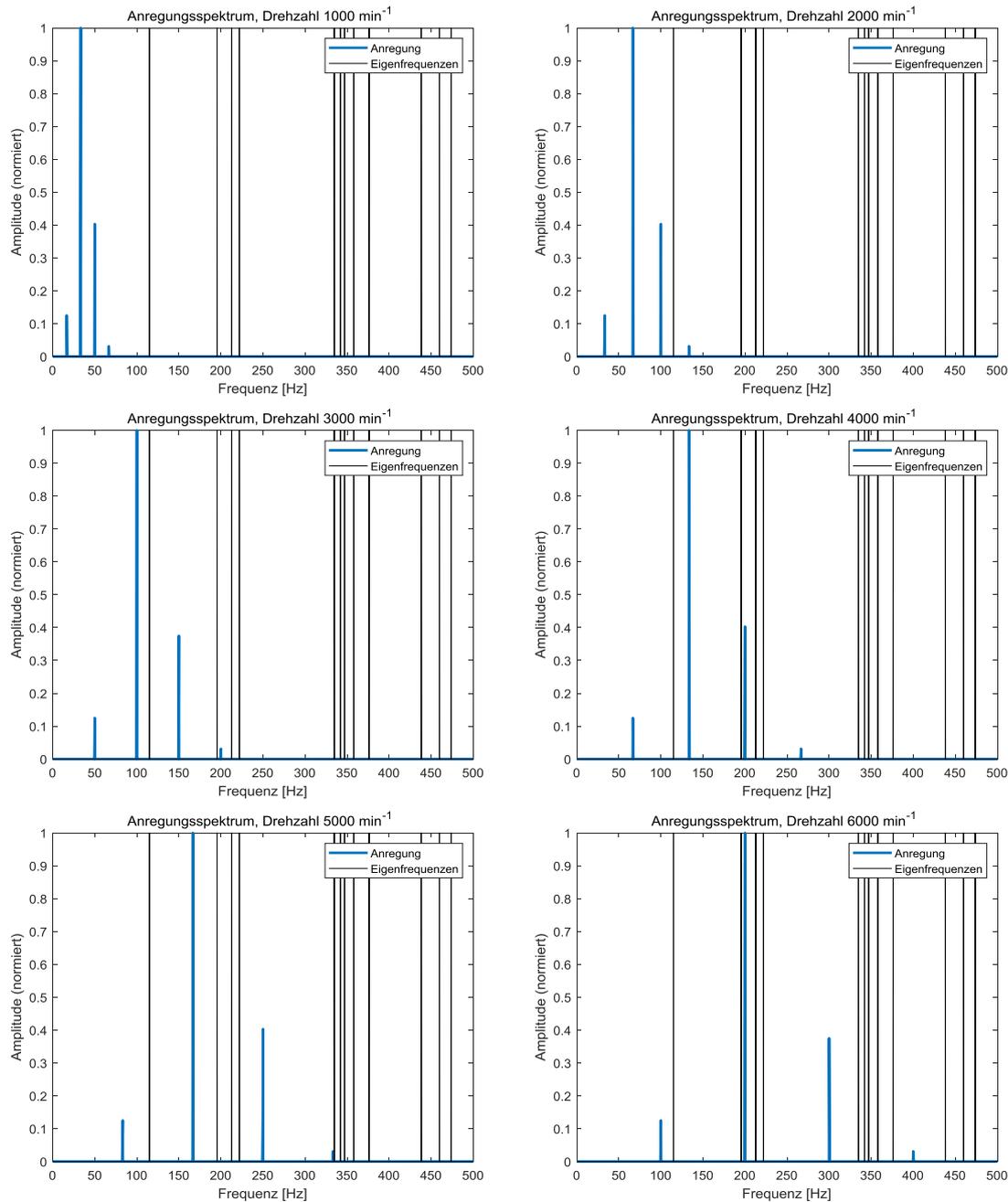


Abb. 5.29: Resultierende Anregungsspektren der untersuchten Motordrehzahlen (blau) und Eigenfrequenzen des Systems (schwarz)

Zur Auswertung der resultierenden Beanspruchungsfelder erfolgt eine Gegenüberstellung der überlagerten von Mises-Spannung von Referenzlösung und entwickelter Methodik, beispielhaft für die Drehzahlen $n = 1000 \text{ min}^{-1}$ in Abb. 5.30 sowie für $n = 6000 \text{ min}^{-1}$ in Abb. 5.31. Es zeigt sich qualitativ eine sehr gute Übereinstimmung für beide Drehzahlen, wobei die Beanspruchungsfelder der entwickelten Methodik durch die Abweichungen zur Referenzlösung der modalen Koordinaten ein generell höheres Niveau zeigen.

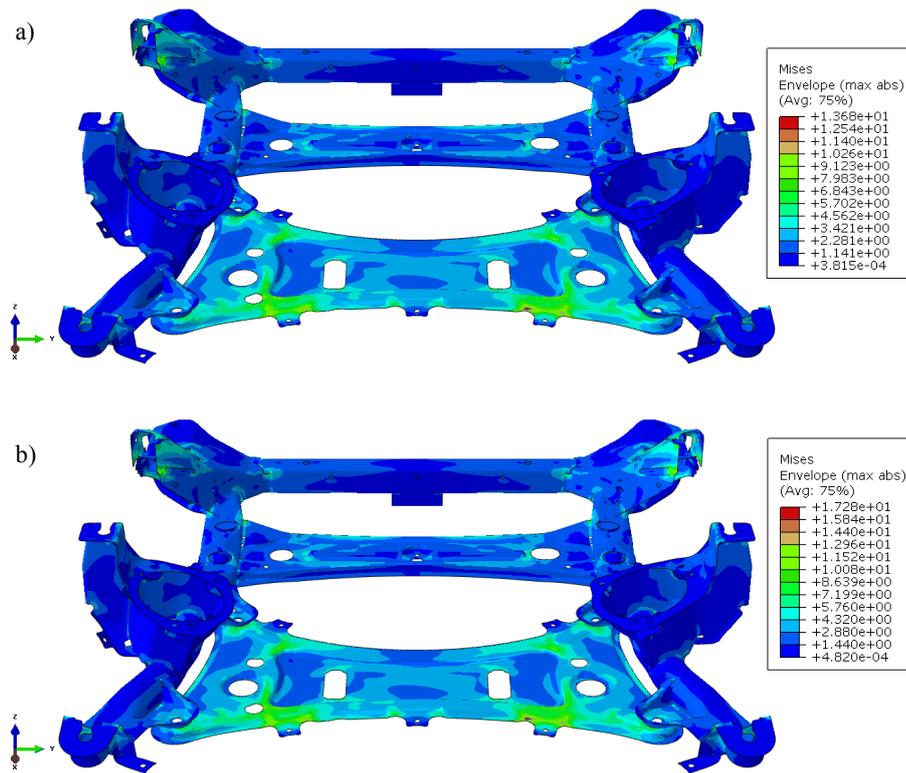


Abb. 5.30: Überlagertes v. Mises-Spannungsfeld, Drehzahl $n = 1000 \text{ min}^{-1}$, a) Referenzlösung, b) Entwickelte Methodik

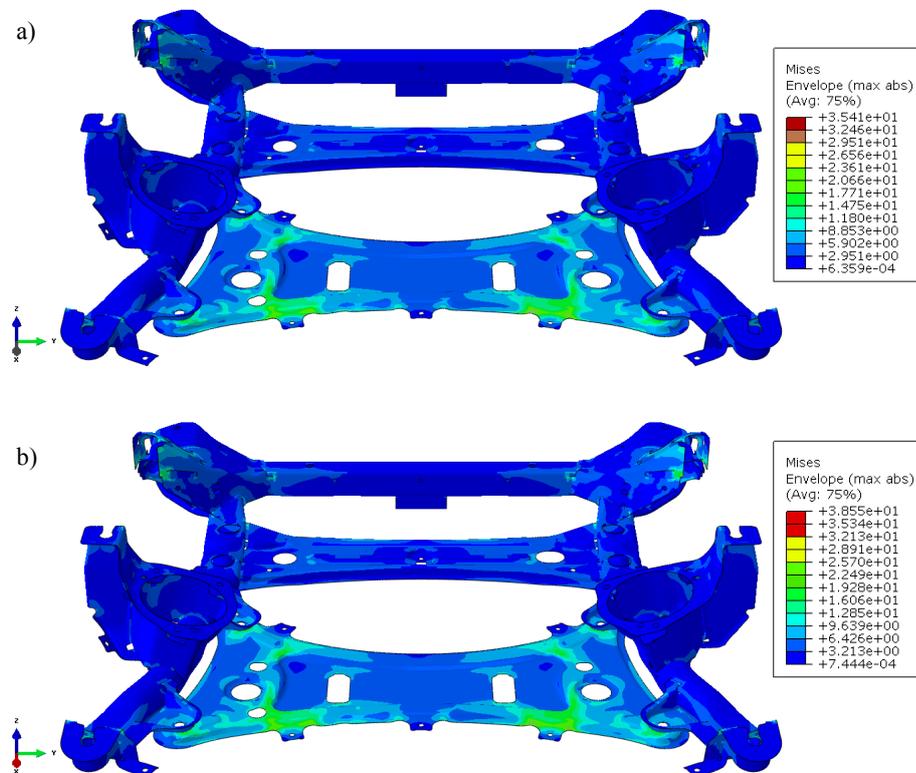


Abb. 5.31: Überlagertes v. Mises-Spannungsfeld, Drehzahl $n = 6000 \text{ min}^{-1}$, a) Referenzlösung, b) Entwickelte Methodik

Eine detaillierte Betrachtung der Beanspruchungen auf Element-Ebene in Abb. 5.32 zeigt ferner, dass die höchsten Abweichungen der Spannungen einzelnen Elementen in Bereichen von Spannungsüberhöhungen durch die aufgebrachten Randbedingungen zuzuordnen sind. Die relativen Abweichungen in den Beanspruchungen korrelieren dabei in ihrer Größenordnung mit den Abweichungen der modalen Koordinaten.

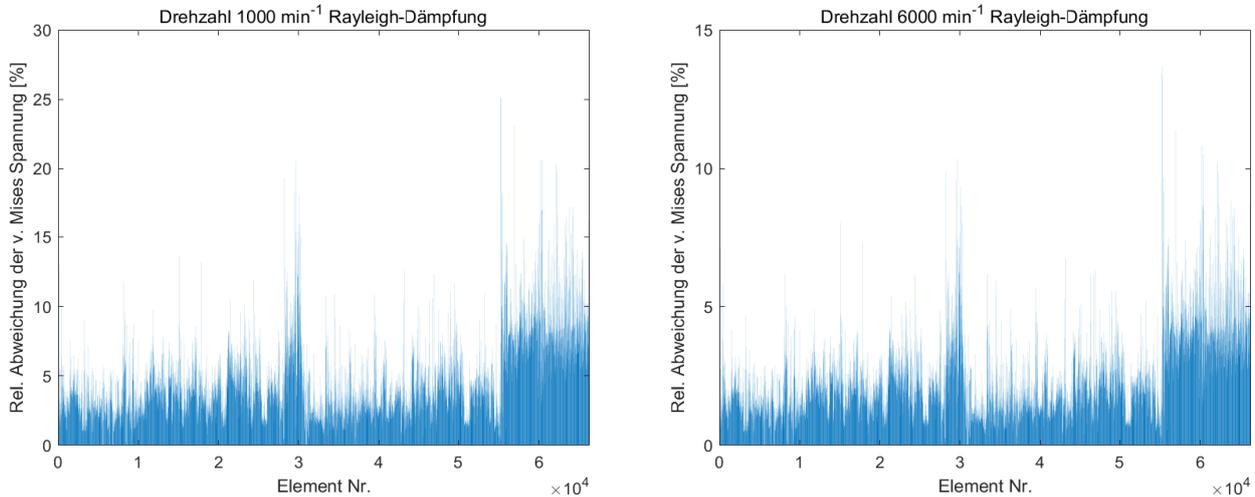


Abb. 5.32: Relative Abweichungen der v. Mises-Spannungen auf Element-Ebene, (links) Drehzahl $n = 1000 \text{ min}^{-1}$, (rechts) Drehzahl $n = 6000 \text{ min}^{-1}$

5.2.3 Zeitbereichs- und Lebensdaueranalysen

Äquivalent zum zuvor beschriebenen Beispiel der Verbundlenkerachse werden im folgenden Abschnitt transient-dynamische Zeitbereichsanalysen als Grundlage für die Ermittlung einer Referenzlösung für die Lebensdauer herangezogen. Die Analysen erfolgen in ABAQUS mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ für eine Belastungszeit von $t = 5 \text{ s}$. Als Lastsignal wird das nach Gl. (147) definierte Motormoment herangezogen, welches auf sein Maximum normiert und über einen Amplitudenfaktor skaliert wird. Die Skalierung der Last erfolgt entsprechend dem zuvor gezeigten Beispiel so, dass hieraus eine maximale Beanspruchungsamplitude von $\frac{\Delta\sigma_{\max}}{2} = 330 \text{ MPa}$ resultiert. Um den Umfang der vorliegenden Arbeit zu begrenzen, beschränken sich die folgenden Ausführungen auf die Ergebnisse der ermittelten Beanspruchungen sowie der daraus resultierenden Lebensdauer für die untersuchte Drehzahl $n = 6000 \text{ min}^{-1}$. Das Maximale aus der transienten Analyse resultierende von Mises-Beanspruchungsfeld ist in Abb. 5.33 a dargestellt. Ein Vergleich mit dem Ergebnis der Frequenzbereichsanalyse des vorigen Abschnitts in Abb. 5.31 a zeigt qualitativ eine gute Übereinstimmung. Die aus der dynamischen Beanspruchung resultierende Lebensdauer wird äquivalent zum vorigen Abschnitt über die an die Beanspruchung angepasste Wöhlerlinie aus Abb. 5.20 ermittelt und ist in Abb. 5.33 b dargestellt (Lastzyklen).

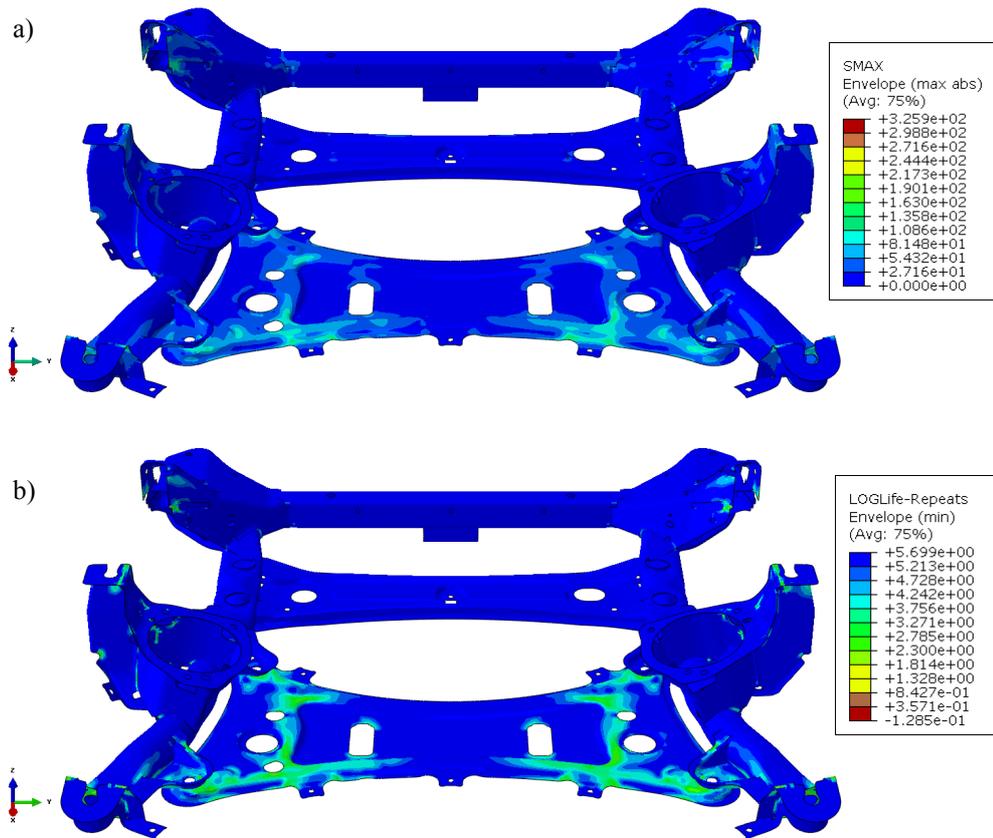


Abb. 5.33: Ergebnisse der transient-dynamischen Untersuchungen, Drehzahl $n = 6000 \text{ min}^{-1}$,
a) Maximale v. Mises-Spannung, b) Lebensdauer in Lastzyklen (logarithmisch)

Zur konservativen Ermittlung versagenskritischer Strukturregionen erfolgt ferner die überschlägige Ermittlung einer Formzahl zur Berücksichtigung von Spannungsüberhöhungen durch Rand- und Zwangsbedingungen. Für das vorliegende Beispiel lässt sich diese auf $\alpha_k = 1.9$ beziffern. Im Vergleich zum vorigen Beispiel ist diese damit höher, was durch die ideal starren Randbedingungen sowie im Modell vorhandene Zwangsbedingungen begründet werden kann. Es lassen sich damit für das vorliegende Beispiel folgende Grenzwerte für versagenskritische Elementspannungen σ_{th} sowie versagenskritische Lastwechsel N_{krit} definieren:

$$\sigma_{th} = \frac{2^b}{\alpha_k} \cdot \sigma_{max} = 0.45 \cdot \sigma_{max} \quad (148)$$

$$N_{krit} = 2 \cdot N_{min} \cdot \alpha_k^{-(1/b)} \approx 50 \cdot N_{min}$$

Auf Basis der definierten Grenzwerte erfolgt die Ermittlung versagenskritischer Elemente für Referenzlösung und Ergebnisse der entwickelten Methodik. Äquivalent zum vorigen Beispiel liegen damit zwei Element-Sets vor, welche in Abb. 5.34 auf der Struktur hervorgehoben sind. Die Ergebnisse der entwickelten Methodik sind blau, die tatsächlich als versagenskritisch bewerteten Elemente sind rot markiert.

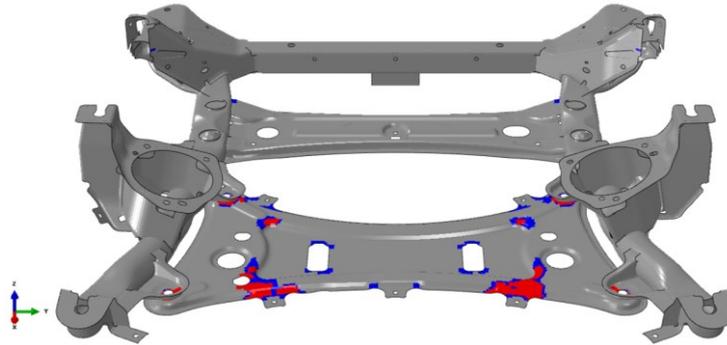


Abb. 5.34: Tatsächlich versagenskritische Elemente (rot) und Ergebnis der entwickelten Methodik (blau)

Sowohl der optische Vergleich als auch die quantitative Auswertung der ermittelten Element-Sets zeigen hierbei, dass alle als tatsächlich versagenskritisch bewerteten Elemente durch die entwickelte Methodik detektiert werden können, mit einer geringen Anzahl darüber hinaus detektierter Elemente, siehe Tab. 5.7. Entsprechend dem vorigen Beispiel stellen die rot markierten Elemente eine Teilmenge der blau markierten *a priori* Lösung dar.

Tab. 5.7: Vergleich versagenskritischer und detektierter Elemente, Motorträger

	Anzahl	Anteil am Gesamtmodell
Versagenskritische Elemente	496	0.75 %
Detektierte Elemente	698	1.05 %
Differenz	202	0.30 %

Die Ergebnisse zeigen damit, dass durch die entwickelte Methodik auch für schmalbandig angeregte Systeme versagenskritische Strukturregionen für das gezeigte komplexe numerische Beispiel zuverlässig und konservativ *a priori* detektiert werden können.

5.3 Numerischer Aufwand und Effizienz

Im folgenden Abschnitt erfolgt eine Betrachtung der Effizienz der entwickelten Methodik durch eine Gegenüberstellung von Rechenzeiten und Datenmengen. Als Maß für die Rechenzeit wird die CPU-Zeit der durchgeführten Analysen herangezogen und den, über die interne Timer-Funktion in MATLAB ermittelten, Laufzeiten der erzeugten Programmerroutinen gegenübergestellt. Für eine verlässliche Bewertung der Effizienz der entwickelten Methodik wird dabei ebenfalls die Zeit für Datenimport und -export (kurz I/O) der erforderlichen Matrizen ermittelt. Die Bewertung der Datenmengen erfolgt über die Dateigrößen der ABAQUS-Ergebnisdateien sowie der während der Lebensdaueranalyse in fe-safe erzeugten Beanspruchungsdaten. Ihnen wird die Größe aller zur Erzeugung der Ergebnisse der entwickelten Methodik erforderlichen Dateien gegenübergestellt. Die Eckdaten des für die Analysen zum Einsatz kommenden Systems sind in Tab. 5.8 zusammengefasst.

Tab. 5.8: Eckdaten des verwendeten Rechners

Betriebssystem	64 Bit Windows 7 Professional
Prozessor	Intel Core i5 4460, 4 Kerne à 3.2 GHz
Arbeitsspeicher	16 GB, DDR3

Die Erzeugung der Referenzlösung beschränkt sich für das modal entkoppelte System auf die Ermittlung der modalen Koordinaten in jedem Zeit- bzw. Frequenzschritt. Die durchgeführten Frequenzbereichsanalysen beinhalten dabei 10^3 Frequenzschritte, die transienten Analysen erfolgen für 10^5 Zeitschritte. Eine Berechnung bzw. Ausgabe der Beanspruchungen erfolgt nicht, da diese während der durchgeführten Lebensdaueranalysen rekonstruiert werden und Vergleichsrechnungen einen damit verbundenen erheblichen Anstieg von Rechenzeit und Datenmengen zeigen¹⁹. Die Analysezeiten der erzeugten Referenzlösungen sind in Tab. 5.9 zusammengefasst.

Tab. 5.9: CPU-Zeiten der durchgeführten Referenzanalysen

CPU-Zeit	Modalanalyse	Frequenzbereich	Transient	Lebensdauer
Verbundlenkerachse	47 s	106 s	260 s	38 min
Motorträger	52 s	103 s	314 s	54 min

Es zeigt sich, dass vor allem die Lebensdaueranalyse mit hohem numerischem Aufwand verbunden ist, welcher sowohl der Rekonstruktion des Beanspruchungs-Zeit-Verlaufs aus den modalen Koordinaten und zugehörigen Beanspruchungsmoden als auch aus der Analyse der dabei entstehenden großen Datenmenge zuzuordnen ist, vgl. Tab. 5.10.

Tab. 5.10: Dateigrößen der durchgeführten Referenzanalysen

Daten	Modalanalyse	Frequenzbereich	Transient	Lebensdauer
Verbundlenkerachse	247 MB	264 MB	295 MB	1.2 GB
Motorträger	297 MB	316 MB	366 MB	1.8 GB

Dem gegenübergestellt finden sich die Analysezeiten der entwickelten Methodik in Tab. 5.11. Es zeigt sich hierbei eine erhebliche Reduktion des numerischen Aufwandes, wenn die Analyse, wie in Kapitel 4 dargelegt, auf die Approximation der Maxima der modalen Koordinaten beschränkt wird. Während die Ermittlung der modalen Wichtungskoeffizienten für breitbandig angeregte Systeme mit wenigen Rechenoperationen erfolgt (vgl. Beispiel Verbundlenkerachse), erhöht sich der numerische Aufwand für schmalbandig angeregte Systeme (vgl. Beispiel Motorträger) vor allem durch die Erzeugung der modalen Vergrößerungsfunktionen sowie Multiplikation mit dem Anregungsspektrum und die numerische Integration. Ein Vergleich der Rechenzeit mit der in Kapitel 4 herangezogenen Frequenzbereichslösung über die komplexe Vergrößerungsfunktion und die komplexe Fouriertransformation des Lastsignals zeigt eine Verringerung der Rechenzeit bei Anwendung der entwickelten Methodik um den Faktor 10. Der Großteil des numerischen Aufwandes ist hierbei jedoch dem Datenimport- und -export zuzuschreiben, siehe Tab. 5.11.

Tab. 5.11: CPU-Zeiten der entwickelten Methodik

CPU-Zeit	Modalmatrizen I/O	Detektion	Ergebnis	Gesamt
Verbundlenkerachse	46 s	0.98 s	2.9 s	49.9 s
Motorträger	58 s	2.7 s	3.8 s	64.5 s

¹⁹ Faktor 10 bei der Rechenzeit und Faktor 100 bei der Datenmenge für die Frequenzbereichsanalyse der Verbundlenkerachse

Eine Betrachtung von Tab. 5.12 verdeutlicht ferner die erhebliche Verringerung der zu verarbeitenden Datenmengen. Diese lässt sich zum einen auf die Eliminierung sämtlicher Modelldaten zurückführen, zum anderen profitiert die beschriebene Methodik von der effizienten Speicherung der verwendeten Matrizen im binären Dateiformat in MATLAB. Hervorzuheben ist dabei vor allem die Größe der modalen Beanspruchungsmatrix, welche durch die in Abschnitt 4.5.1 beschriebene Reduktion des Beanspruchungsfeldes auf einen skalaren Wert je Element erheblich verringert wird.

Tab. 5.12: Dateigrößen der entwickelten Methodik

Daten	Modalmatrix	Modale Beanspruchungsmatrix	Gesamt
Verbundlenkerachse	62 MB	16 MB	78 MB
Motorträger	88 MB	13 MB	101 MB

Ein direkter Vergleich über das Verhältnis des numerischen Aufwandes der entwickelten Methodik (gesamt) zu den mit konventionellen Berechnungsmethoden erzeugten Referenzlösungen ist in Tab. 5.13 zusammengefasst. Dieser verdeutlicht das erhebliche Potenzial zur Reduktion von Rechenzeit und Datenmengen durch die entwickelte Methodik.

Tab. 5.13: Verhältnis des numerischen Aufwandes: Entwickelte Methodik zu Referenzlösung

	Frequenzbereich	Transient	Lebensdauer
	Verbundlenkerachse		
CPU-Zeit	47 %	19 %	2 %
Daten	30 %	26 %	7 %
	Motorträger		
CPU-Zeit	63 %	21 %	2 %
Daten	32 %	28 %	6 %

5.4 Zusammenfassung

Zusammenfassend können alle am akademischen Beispiel aufgestellten Hypothesen sowohl für breitbandig als auch für schmalbandig angeregte Systeme bei der Anwendung auf komplexe Simulationsmodelle bestätigt werden. Für eine zuverlässige Übertragung der Erkenntnisse in die industrielle Anwendungspraxis müssen die ermittelten versagenskritischen Strukturregionen zwingend konservativ abgeschätzt werden, sodass kein potenziell kritischer Bereich verloren geht. Die automatisierte Detektion versagenskritischer Strukturregionen erfordert hierzu eine Berücksichtigung von Spannungsüberhöhungen, was durch die beschriebene Formzahl auf einfache Weise umsetzbar ist. Zusammen mit den eingeführten Grenzwerten für versagenskritische Elemente ergeben sich damit zwei Parameter zur Anpassung von Sensitivität und Effizienz des beschriebenen Algorithmus'. Der direkte Vergleich des numerischen Aufwandes von Referenzlösungen und entwickelter Methodik zeigt eine erhebliche Reduktion von Rechenzeit und verarbeiteten Datenmengen.

6 Experimentelle Untersuchungen am Biegebalken

Das folgende Kapitel beschreibt die zur Validierung der entwickelten Hypothesen durchgeführten experimentellen dynamischen Untersuchungen für schmalbandig angeregte Systeme. Grundlage der folgenden Betrachtungen bildet die Untersuchung der transversalen Schwingungen am Biegebalken. Dies hat zum einen den Vorteil einfach interpretierbarer Versuchsergebnisse, zum anderen sind Versuchsaufbau und Messtechnik mit geringem Aufwand umsetzbar. Ziel der Untersuchungen ist die Validierung der getroffenen Annahmen zur gewichteten Superposition modaler Feldgrößen. Außerdem soll die modale Dämpfung experimentell quantifiziert werden. Es wird dabei ferner gezeigt, dass die entwickelte Methodik ebenfalls auf Grundlage gemessener Anregungssignale anwendbar ist. Die Ermittlung der modalen Systemgrößen erfolgt anhand einer experimentellen Modalanalyse, deren theoretische Grundlagen im folgenden Abschnitt kurz zusammengefasst sind. Abschnitt 6.2 beschreibt den für die Untersuchungen entwickelten Versuchsaufbau und die Versuchsdurchführung. Auf Basis der ermittelten Versuchsdaten werden in Abschnitt 6.3 Eigenfrequenzen, Eigenformen sowie die modalen Dämpfungen ermittelt. Für die Erzeugung belastbarer Ergebnisse erfolgt in Abschnitt 6.4 ein iterativer Modellabgleich von numerischer Simulation und Experiment. Der Versuchsaufbau wird darauffolgend in Abschnitt 6.5 durch verschiedene Lastsignale zum Schwingen angeregt und die Systemantwort ermittelt. Für die Validierung der entwickelten Methodik werden darauffolgend die Maxima der Systemantwort mit den Ergebnissen der numerischen Vorhersagen verglichen.

6.1 Experimentelle Modalanalyse

Die Ermittlung der dynamischen Eigenschaften realer Strukturen mittels experimenteller Modalanalyse kann in die folgenden grundlegenden Teilaufgaben untergliedert werden [88].

- Entwicklung eines geeigneten Versuchsaufbaus
- Messtechnische Erfassung der dynamischen Systemgrößen
- Mathematische Modellierung zur Ableitung modaler Größen

Zur Ermittlung der modalen Eigenschaften der untersuchten Struktur wird der gemessene Frequenzgang $\mathbf{H}(j\Omega)$ herangezogen. Dieser ist abhängig von der Anregungsfrequenz Ω definiert über das Verhältnis der Fourier-Transformierten von Systemausgang $\mathbf{X}(j\Omega)$ und Systemeingang $\mathbf{F}(j\Omega)$.

$$\mathbf{H}(j\Omega) = \frac{\mathbf{X}(j\Omega)}{\mathbf{F}(j\Omega)} \quad (149)$$

Für das modal gedämpfte Mehrfreiheitsgradsystem kann der Frequenzgang durch eine Matrix beschrieben werden, welche sich mit dem Frequenzverhältnis $\eta_r = \Omega/\omega_{0,r}$ wie folgt in modaler Darstellung aufstellen lässt (vgl. Abschnitt 2.3.3):

$$H_{ij,u}(j\eta) = \sum_{r=1}^m \frac{\varphi_{ir}\varphi_{jr}}{k_r} \frac{1}{(1 - \eta_r^2) + j(2\vartheta_r\eta_r)} \quad (150)$$

Hierin ist $H_{ij,u}(j\eta)$ die Rezeptanz, die die stationäre Systemantwort als Verschiebung der Koordinate i bei Aufbringen einer Einheitskraft an der Koordinate j beschreibt. Formuliert in den Geschwindigkeiten folgt die Mobilität $H_{ij,v}(j\eta)$ sowie für die Beschleunigungen die Akzeleranz $H_{ij,a}(j\eta)$.

$$H_{ij,v}(j\eta) = j\Omega \sum_{r=1}^m \frac{\varphi_{ir}\varphi_{jr}}{k_r} \frac{1}{(1 - \eta_r^2) + j(2\vartheta_r\eta_r)} \quad (151)$$

$$H_{ij,a}(j\eta) = -\Omega^2 \sum_{r=1}^m \frac{\varphi_{ir}\varphi_{jr}}{k_r} \frac{1}{(1 - \eta_r^2) + j(2\vartheta_r\eta_r)} \quad (152)$$

Über die Signalanalyse mittels eines FFT-Analysators lässt sich der Frequenzgang durch die Messung von Eingangs- und Ausgangsgrößen experimentell erfassen. Dazu wird eine Struktur über einen breiten Frequenzbereich in einem Punkt j angeregt und die Systemantwort in den Punkten i gemessen (*engl. single input, multiple output, SIMO*). Durch die Annahme, dass jede Schwingform durch Anregung eines beliebigen Punktes der Struktur angeregt werden kann, sofern dieser außerhalb eines spezifischen Schwingungsknotens liegt, ist zur Ermittlung von Eigenfrequenzen und Eigenformen die Messung einer Zeile, bzw. einer Spalte der Frequenzgangmatrix ausreichend [10]; die Frequenzgangmatrix ist symmetrisch:

$$H_{ij}(j\eta) = H_{ji}(j\eta) \quad (153)$$

Zur Ermittlung modaler Parameter aus gemessenen Frequenzgängen sind in der Literatur zahlreiche Methoden beschrieben, mit denen abhängig von den Systemeigenschaften und Messmethoden unterschiedliche Ergebnisgüten erzielbar sind. Für eine umfassende Beschreibung der experimentellen Modalanalyse und der damit verbundenen Signalauswertung zur Ermittlung modaler Größen sei an dieser Stelle auf die einschlägige Literatur verwiesen [88,97,98]. Bei dem in dieser Arbeit untersuchten System handelt es sich um ein einfaches, schwach gedämpftes Balkensystem. Die modale Dichte ist im betrachteten Frequenzbereich gering und die Eigenfrequenzen sind wohl separiert. Der Fokus dieser Arbeit kann somit auf die Anwendung einfacher Verfahren beschränkt werden [88].

6.2 Untersuchtes System

Die dynamischen Untersuchungen dieser Arbeit erfolgen am Biegebalken. Als zielführende Systemkonfiguration konnte in Vorversuchen eine fest-freie Lagerung identifiziert werden, welche im Folgenden als pendelnde Lagerung bezeichnet wird (vgl. physikalisches Pendel). Das untersuchte System ist in Abb. 6.1 dargestellt. Die Anregung erfolgt über einen elektrodynamischen Shaker in der gezeigten y -Richtung.

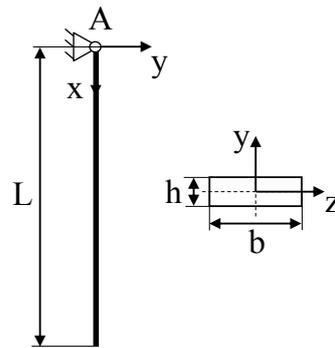


Abb. 6.1: Untersuchtes System

Die konstruktiven Konzepte für Lagerung und Anbindung der Anregung werden im Folgenden kurz erläutert. Die relevanten Systemgrößen sind in Tab. 6.1 zusammengefasst.

Tab. 6.1: Systemgrößen des untersuchten Biegebalkens

Länge	$L = 1010 \text{ mm}$
Breite	$b = 19.8 \text{ mm}$
Höhe	$h = 5.9 \text{ mm}$
Masse	$m = 0.9356 \text{ kg}$
Material	S235 JR G2C

6.2.1 Festlager

Das konzipierte Festlager verhindert bei freier Drehung um eine Achse die Verschiebung in alle Raumrichtungen. Die konstruktive Umsetzung erfolgt durch einen in ein Rillenkugellager gepressten Drehzapfen. Das Kugellager selbst ist für die Anbindung an die Umgebung in ein mit Durchgangsbohrungen versehenes Stahlblech gepresst. Der Biegebalken ist mit dem Drehzapfen verschraubt, so dass sich eine freie Drehung um den Mittelpunkt des Drehzapfens einstellen kann. Das konzipierte Festlager sowie eine schematische Schnittansicht sind in Abb. 6.2 a bzw. in Abb. 6.2 b dargestellt.

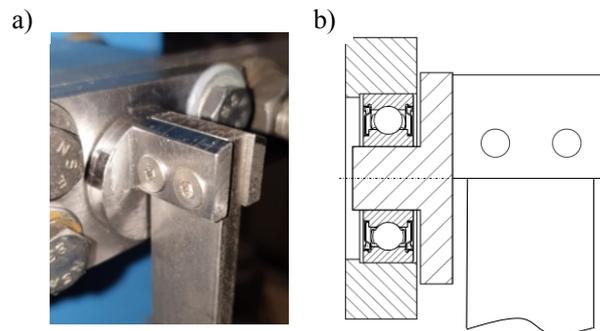


Abb. 6.2: Lagerungskonzept Festlager, a) konstruktive Umsetzung, b) schematische Schnittansicht

6.2.2 Anbindung

Die Anbindung zur Lasteinleitung hat zum einen die Aufgabe, die vom verwendeten Shaker erzeugten Kräfte auf das Messobjekt zu übertragen, zum anderen sollen weitere Einflüsse, wie Zwänge durch verhinderte Verschiebungen bzw. Verdrehungen minimal gehalten werden. Für die Anbindung der Lasteinleitung wird der untersuchte Biegebalken mit geringer Klemmkraft zwischen zwei Zylinder geklemmt, welche für die Umsetzung der Verschraubung in zwei Blöcken fixiert sind. Zur Reduktion der Masse sind diese aus Aluminium gefertigt. Die Messung des Systemeingangs erfolgt über eine Kraftmessdose, die zwischen Anbindung und Shaker montiert ist, siehe Abb. 6.3.



Abb. 6.3: Konstruktive Umsetzung der Lasteinleitung

6.2.3 Versuchsaufbau und -durchführung

Für die dynamischen Untersuchungen wird das Messobjekt über das zuvor beschriebene Lagermodul an einem Stahlträger fixiert (siehe Abb. 6.4). Die vertikale Anordnung ermöglicht dabei die Untersuchung des pendelnd gelagerten Versuchsaufbaus um die statische Ruhelage. Die Position der Anregung wird auf Basis numerischer Voruntersuchungen auf $L_a = 880$ mm festgelegt, da hier ein hinreichend großer Abstand zu den Schwingungsknoten aller Eigenformen im betrachteten Frequenzbereich besteht.

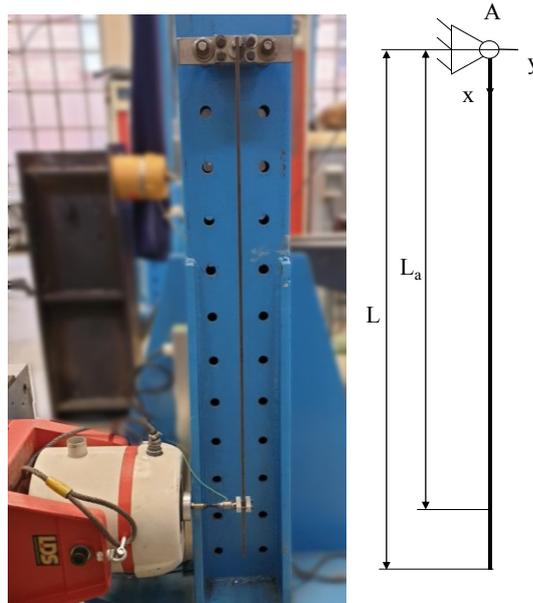


Abb. 6.4: Versuchsaufbau

Die Schwingungsmessung am Systemausgang erfolgt berührungslos mittels Laser-Doppler-Vibrometrie, der Systemeingang wird über eine Kraftmessdose erfasst. Die verwendete Messtechnik ist in Tab. 6.2 zusammengefasst.

Tab. 6.2: Verwendete Messtechnik

Systemausgang	Systemeingang
Scankopf Polytec PSV-I- 400	Kraftmessdose Dytran 1051V3
Controller Polytec OFV-5000	Elektrodynamischer Shaker LDS V455
Signalgenerator/Messverstärker PSV-E-401	Verstärker LDS LPA 1000
Messrechner PSV-W-401	

Die Anregung des Systems erfolgt in einem Frequenzbereich von $f_{\min} = 1$ Hz bis $f_{\max} = 1$ kHz über einen periodischen Gleitsinus, um eine Anregung aller Eigenformen zu gewährleisten. Die Messung der Systemantwort erfolgt mit einem Messabstand von $\Delta x = 5$ mm. Die Fourier-Transformation der Messsignale von Systemeingang und -ausgang erfolgt mit $N = 6400$ Linien, was einer Frequenzauflösung von $\Delta f \approx 0.16$ Hz entspricht.

6.3 Modale Systemgrößen

6.3.1 Eigenfrequenzen und Eigenformen

Allgemein ergibt sich der Frequenzgang des Mehrfreiheitsgradsystems nach Gl. (150) bis Gl. (152) aus der Superposition aller für die jeweilige Anregungsfrequenz resultierenden modalen Anteile. Für schwach gedämpfte Systeme mit geringer modaler Dichte können die modalen Größen nach [88] aus der separaten Betrachtung der einzelnen Moden als Einfreiheitsgradsysteme bestimmt werden²⁰ (*engl. single degree of freedom, SDOF*).

Die grundlegende Annahme der in dieser Arbeit zur Ermittlung von Eigenfrequenzen und Eigenformen angewandten Methode des *Peak-Pickings* [88] besteht darin, dass die Kopplung der einzelnen Moden über die Dämpfung vernachlässigbar ist. Bei Anregung des Systems in einer seiner (ungedämpften) Eigenfrequenzen $\omega_{0,r}$ wird der Frequenzgang mit dem Frequenzverhältnis $\eta_r = 1$ dann durch die zugehörige Mode r dominiert. Liegen die benachbarten Eigenfrequenzen ausreichend weit entfernt, kann der Anteil benachbarter modaler Anteile am Frequenzgang vernachlässigt werden. Für die Anregung in der Resonanzfrequenz $\Omega = \omega_{0,r}$ ergibt sich damit beispielsweise die zugehörige Rezeptanz als rein imaginäre Größe. Der Imaginärteil des Frequenzgangs nimmt demnach sein Maximum an, während der Realteil verschwindet.

In diesem Fall liegt ein Phasensprung vor und die Systemantwort ist der Anregung um 90° phasenverschoben [10].

$$H_{ij,u}(\Omega = \omega_{0,r}) \approx i \frac{\varphi_{ir} \varphi_{jr}}{2k_r \vartheta_r} \quad (154)$$

Bei breitbandiger Anregung sind die Eigenfrequenzen des Systems damit direkt aus den lokalen Maxima (*engl. peaks*) des Frequenzgangs abzulesen. Zur Bestimmung der r -ten Eigenform wird der Imaginärteil des Frequenzgangs bei $\Omega = \omega_{0,r}$ für jeden Freiheitsgrad betrachtet, was für die SIMO-Messung der Auswertung einer Spalte der Frequenzgangmatrix entspricht. Der Imaginärteil des Frequenzgangs ist hierbei sowohl in Amplitude als auch im Vorzeichen proportional zur modalen Verschiebung²¹, woraus sich durch Auswertung an jedem Freiheitsgrad direkt die relativen Einträge der jeweiligen Eigenvektoren ermitteln lassen.

²⁰ was in den Grundsätzen den Annahmen der modalen Entkopplung des Systems aus Kapitel 2 entspricht und den gleichen Voraussetzungen unterliegt.

²¹ Unabhängig von der betrachteten Ausgangsgröße für Rezeptanz, Mobilität oder Akzeleranz

6.3.2 Modale Dämpfung

Unter den oben genannten Voraussetzungen lässt sich ferner auch die modale Dämpfung nach einem SDOF-Ansatz bestimmen. Die Dämpfung, wobei im Folgenden von viskoser Dämpfung ausgegangen wird, hat einen direkten Einfluss auf Amplitude und Form des Frequenzgangs bzw. der (modalen) Vergrößerungsfunktion, siehe Abb. 6.5.

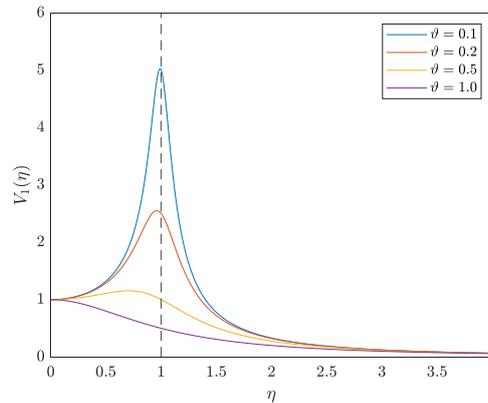


Abb. 6.5: Vergrößerungsfunktion für die Wegantwort bei Kraftanregung

Nach Abschnitt 2.3.3 ergibt sich die modale Vergrößerungsfunktion aus Gl.(155)

$$V_r(\eta_r) = \frac{1}{k_r \sqrt{(1 - \eta_r^2)^2 + 4\vartheta_r^2 \eta_r^2}} \quad (155)$$

Ein rechnerisch einfach umzusetzender Ansatz zur Ermittlung der Dämpfung auf Basis der Vergrößerungsfunktion ist durch die sogenannte Halbwertsbreiten-Methode (*engl. half power method*) beschrieben. Allgemein beschreibt die Halbwertsbreite einer spektralen Größe die Bandbreite, bei der eine Amplitudenabsenkung um den Faktor 2 vorliegt. Für die Dämpfungsmessung wird eine Amplitudenabsenkung von ca. 3dB angesetzt, was der halben Leistung (vgl. *half power*) der maximalen Amplitude entspricht [88]. Aus dem Verhältnis der (normierten) Vergrößerungsfunktionen $V_{\max} = V(\eta = 1) = 1$ sowie $V_2 = V(\eta) = 1/\sqrt{2}$ kann die Halbwertsbreite wie folgt bestimmt werden:

$$\frac{V_{\max}}{V_2} = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\vartheta^2 \eta^2}}{2\vartheta} \quad (156)$$

Daraus ergibt sich die quadratische Bestimmungsgleichung für η :

$$\eta^2 = 1 - 2\vartheta^2 \pm 2\vartheta\sqrt{1 + \vartheta^2} \quad (157)$$

Damit folgt für $\vartheta < 0.3$:

$$\vartheta \approx \frac{1}{2}(\eta_2 - \eta_1) \quad (158)$$

Abhängig von der Qualität der Messdaten, insbesondere der Frequenzauflösung, kann die Bestimmung der Halbwertsbreite direkt aus dem gemessenen Frequenzgang erfolgen. Hinreichend genaue Ergebnisse erfordern jedoch eine sehr hohe Frequenzauflösung und lassen sich – insbesondere bei steilen Flanken der lokalen Maxima des Frequenzgangs – in der Praxis nur schwer erzielen [88].

Die Untersuchungen dieser Arbeit zeigen, dass mit den vorhandenen Messmitteln die direkte Ermittlung der Dämpfung aus den Messdaten durch eine unzureichende Frequenzauflösung mit großen Abweichungen behaftet ist. Zur genaueren Ermittlung der Dämpfung wird daher auf das Anpassen einer mathematischen Funktion an die Messdaten (*engl. curve fitting*) zurückgegriffen [99]. Zu diesem Zweck werden Frequenzbänder definiert, um die lokalen Maxima des Frequenzgangs zu separieren und nach einem SDOF-Ansatz als Frequenzgang eines entsprechenden Einmassenschwingers zu betrachten, siehe Abb. 6.6.

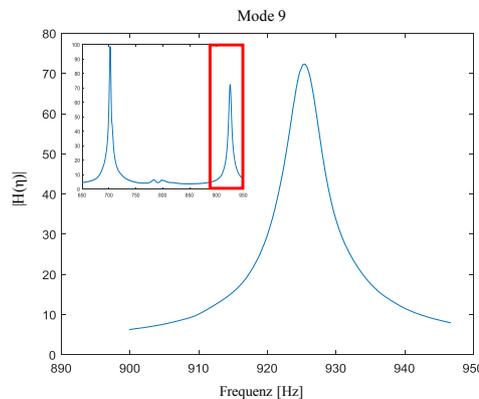


Abb. 6.6: Frequenzgang-Abschnitt, Mode 9

An die so ermittelten Abschnitte des Frequenzgangs wird im Folgenden die Gleichung der (modalen) Vergrößerungsfunktion für den Einmassenschwinger über die zwei freien Parameter a_r und b_r angepasst, siehe Gl. (159). Das jeweilige Frequenzverhältnis η_r beschreibt dabei das Verhältnis von Anregungsfrequenz in den ermittelten Abschnitten und zugehöriger Eigenfrequenz.

$$H_r(\eta_r) = \frac{a_r}{\sqrt{(1 - \eta_r^2)^2 + 4b_r^2\eta_r^2}} \quad (159)$$

Das Ergebnis der beschriebenen Vorgehensweise ist in Abb. 6.7 exemplarisch für Mode 9 des untersuchten Systems (normiert) dargestellt, wobei auch die charakteristischen Werte der Halbwertsbreiten-Methode gekennzeichnet sind. Generell können die Messwerte im Bereich von Maximum und Halbwertsbreite sehr gut durch die analytische Beschreibung des Frequenzgangs abgebildet werden, wobei sich lediglich geringe Abweichungen außerhalb des für die Ermittlung der Dämpfung relevanten Bereichs um η_1 und η_2 zeigen.

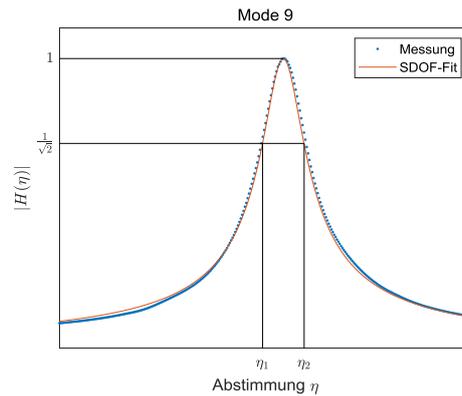


Abb. 6.7: Modale Dämpfung durch Curve-Fit, Mode 9 mit Halbwertsbreite

Ferner liegt eine physikalische Interpretation der Parameter a_r und b_r in Gl. (159) nahe. Der Parameter a_r (auch modale Konstante) beschreibt dabei die Amplitude, die sich aus den Einträgen der Eigenvektoren und der modalen Steifigkeit ergibt.

$$a_r = \frac{\varphi_{ir}\varphi_{jr}}{k_r} \quad (160)$$

Aus dem Parameter b_r kann direkt die modale Dämpfung abgelesen werden, was ein Vergleich mit der aus der Halbwertsbreiten-Methode bestimmten Dämpfung ausgewählter Messungen bestätigt.

6.3.3 Ergebnisse

Die auf Basis der experimentellen Untersuchungen ermittelten Eigenfrequenzen sowie die zugehörigen modalen Dämpfungen sind in Tab. 6.3 zusammengefasst, die resultierenden Eigenformen des Systems sind in Abb. 6.8 dargestellt. Da die gemessene Dämpfung stark von den Umgebungseinflüssen der durchgeführten Messungen beeinflusst ist, wird diese im Mittel über alle durchgeführten Versuchsreihen ausgewertet.

Tab. 6.3: Experimentell ermittelte Eigenfrequenzen und modale Dämpfung

Mode Nr.	Eigenfrequenz [Hz]	Modale Dämpfung [%]
1	23.95	1.27
2	71.45	0.73
3	143.13	0.23
4	230.85	0.74
5	332.51	0.70
6	407.96	1.36
7	530.76	0.44
8	701.10	0.25
9	923.96	0.23

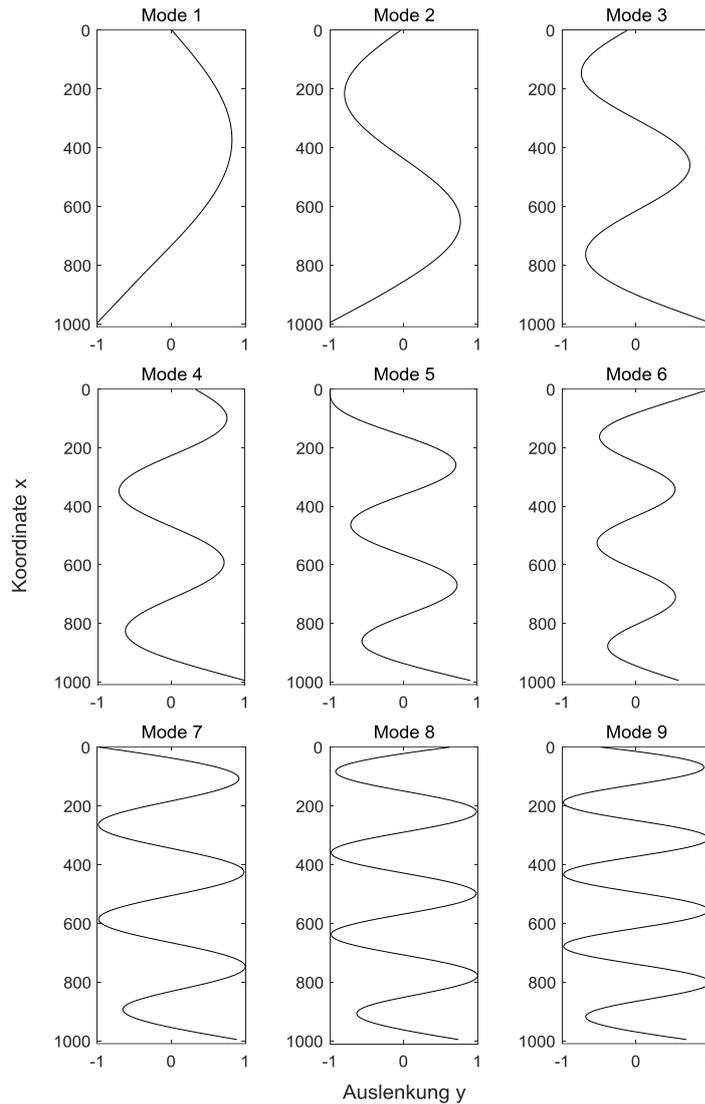


Abb. 6.8: Experimentell ermittelte Eigenformen (Balkenlängsachse vertikal)

Die in Tab. 6.3 gezeigten Dämpfungswerte weisen teilweise große Unterschiede zwischen den einzelnen Moden auf, welche in den durchgeführten Messreihen qualitativ reproduzierbar abgebildet wurden. Die Dämpfung ist dabei vor allem von der Ausprägung und der Amplitude der Schwingformen im Bereich der Randbedingungen beeinflusst, vgl. Abb. 6.8.

6.4 Abgleich von Simulation und Experiment

Im Folgenden wird der Abgleich des numerischen Simulationsmodells mit den experimentell ermittelten dynamischen Eigenschaften des untersuchten Systems beschrieben. Dieser Modellabgleich (*engl. model updating*) ist erforderlich, um sowohl validierte und belastbare numerische Ergebnisse zu erzielen, als auch am validierten Simulationsmodell physikalische Größen ableiten zu können, die in der Messung nur schwer bzw. mit erheblichem Aufwand zu erfassen sind. Dies betrifft im vorliegenden Fall die aus den elastischen Schwingungen resultierenden Beanspruchungsgrößen sowie die gezielte Untersuchung der modalen Beiträge zur Gesamtschwingung.

6.4.1 Zielgrößen und Methodik

Für den Modellabgleich werden zunächst Eigenfrequenzen und Eigenformen des ungedämpften Systems als Zielgrößen definiert. Der Modellabgleich erfolgt auf Basis der Ergebnisse der im vorigen Abschnitt beschriebenen experimentellen Modalanalyse. Ihnen werden die Ergebnisse einer numerischen Modalanalyse des im folgenden Abschnitt beschriebenen Simulationsmodells des experimentellen Versuchsaufbaus gegenübergestellt. Die Bewertung der Übereinstimmung der Eigenfrequenzen erfolgt über den relativen Fehler E_i aus Gl. (161), der im Folgenden in Prozent angegeben wird.

$$E_i = \frac{|f_{\text{exp},i} - f_{\text{FEM},i}|}{f_{\text{exp},i}} \cdot 100 \% \quad (161)$$

Darin sind $f_{\text{exp},i}$ die im Experiment bzw. $f_{\text{FEM},i}$ die numerisch ermittelten Eigenfrequenzen. Die Bewertung der Übereinstimmung der Eigenformen erfolgt für das einfache Balkenmodell über den direkten grafischen Vergleich. Zur quantitativen Bewertung wird ebenfalls auf das Modal Assurance Criterion (MAC) zurückgegriffen. Der Vergleich zweier Eigenvektoren $\boldsymbol{\varphi}_a$ und $\boldsymbol{\varphi}_b$ erfolgt dabei nach [62] über Gl. (162).

$$\text{MAC}_{ab} = \frac{|\boldsymbol{\varphi}_a^T \boldsymbol{\varphi}_b|^2}{(\boldsymbol{\varphi}_a^T \boldsymbol{\varphi}_a)(\boldsymbol{\varphi}_b^T \boldsymbol{\varphi}_b)} \quad (162)$$

Ausgangspunkt des Modellabgleichs ist ein Simulationsmodell des untersuchten Versuchsaufbaus mit idealisierten Randbedingungen (siehe Abb. 6.9). Der im Punkt A einseitig fest gelagerte Balken wird mit $n = 1010$ linearen Balkenelementen (Typ B31) mit einer Elementlänge von 1 mm diskretisiert. Korrelierend mit dem Versuchsaufbau wird das System in der Ebene betrachtet und die Rotation um die Balken-Längsachse verhindert.

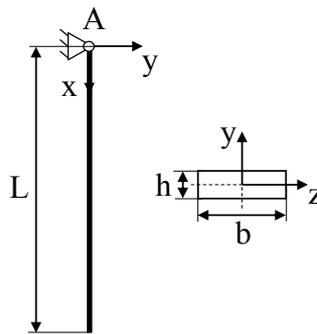


Abb. 6.9: Ersatzmodell des Versuchsaufbaus

Für eine hinreichend genaue Abbildung des realen Systems werden zunächst die konstanten geometrischen und physikalischen Systemgrößen messtechnisch ermittelt bzw. aus Literaturwerten (Angabe kursiv) abgeschätzt und in Tab. 6.4 zusammengefasst.

Tab. 6.4: Systemgrößen des realen Versuchsaufbaus

Länge	$L = 1010 \text{ mm}$
Breite	$b = 19.8 \text{ mm}$
Höhe	$h = 5.9 \text{ mm}$
Masse	$m = 0.9356 \text{ kg}$
Volumen	$V = 117988.2 \text{ mm}^3$
<i>E-Modul</i>	$E = 210\,000 \text{ MPa}$
Dichte	$\rho = 7.93 \text{ g/cm}^3$
<i>Poissonzahl</i>	$\nu = 0.3$

Die numerische Modalanalyse erfolgt in ABAQUS mittels Lanczos-Algorithmus für die ersten zehn elastischen Moden ohne Berücksichtigung von Starrkörpermoden und Longitudinalschwingungen. Die numerisch ermittelten Eigenfrequenzen liegen hier in einem Bereich bis ca. 1.4 kHz, womit auch die höchsten experimentell ermittelten Moden abgebildet werden. Zur Verifizierung der Bewertungskriterien für Eigenfrequenzen und Eigenformen, sowie zur Bewertung der Konvergenz der FE-Diskretisierung werden zunächst die numerischen Ergebnisse mit der analytischen Lösung der Kontinuumsschwingung des Euler-Bernoulli-Balkens nach [8] verglichen. Die Gegenüberstellung der Eigenfrequenzen sowie die resultierenden relativen Fehler E_i und die resultierenden MAC-Werte sind in Tab. 6.5 zusammengefasst. Die angegebenen Werte sind von Starrkörpermoden und Longitudinalschwingungen bereinigt und in ihrer Reihenfolge entsprechend neu zugeordnet. Die gezeigten Eigenfrequenzen sind auf drei Nachkommastellen gerundet, die Ermittlung des relativen Fehlers erfolgt ohne Rundung.

Tab. 6.5: Vergleich von numerischer und analytischer Lösung: Eigenfrequenzen und MAC

Mode	$f_{\text{FEM}} [\text{Hz}]$	$f_{\text{Analyt.}} [\text{Hz}]$	rel. Fehler E_i [%]	MAC
1	21.084	21.088	$1.95 \cdot 10^{-2}$	1.0
2	68.325	68.325	$3.36 \cdot 10^{-5}$	1.0
3	142.554	142.554	$2.57 \cdot 10^{-4}$	1.0
4	243.775	243.775	$6.14 \cdot 10^{-5}$	1.0
5	371.989	371.989	$1.86 \cdot 10^{-5}$	1.0
6	527.195	527.195	$7.46 \cdot 10^{-5}$	1.0
7	709.394	709.394	$1.70 \cdot 10^{-5}$	1.0
8	918.585	918.585	$2.75 \cdot 10^{-5}$	1.0
9	1154.770	1154.769	$1.05 \cdot 10^{-4}$	1.0
10	1417.940	1417.945	$3.34 \cdot 10^{-4}$	1.0

Ein grafischer Vergleich der Eigenformen – in Abb. 6.10 exemplarisch für die höchste ermittelte Eigenform dargestellt – zeigt eine exakte Übereinstimmung in allen Moden. Simulationsmodell und Bewertungskriterien erfüllen damit die grundlegenden Anforderungen für den folgenden Modellabgleich.

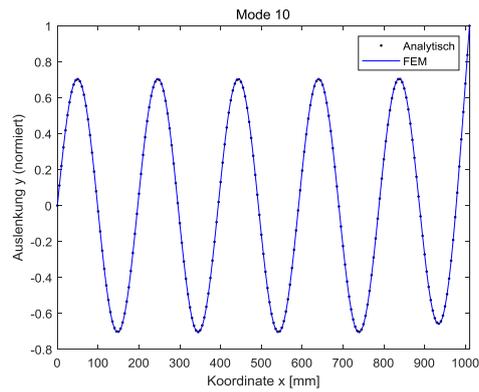


Abb. 6.10: Grafischer Vergleich numerischer und analytischer Lösung, Mode 10

6.4.2 Modellabgleich

Zunächst erfolgt ein Vergleich der Eigenfrequenzen des Ausgangsmodells (Abb. 6.9) mit den experimentell ermittelten Eigenfrequenzen in Tab. 6.6.

Tab. 6.6: Gegenüberstellung numerischer Ergebnisse mit Messergebnissen, Startmodell

Mode Nr.	f_{exp} [Hz]	f_{FEM} [Hz]	rel. Fehler E_i [%]
1	23.95	21.08	-11.97
2	71.45	68.33	-4.37
3	143.13	142.55	-0.40
4	230.85	243.78	5.60
5	332.51	371.99	11.87
6	407.96	527.20	29.23
7	530.76	709.39	33.66
8	701.10	918.59	31.02
9	923.96	1154.77	24.98

Die Gegenüberstellung zeigt große Abweichungen ab der fünften Eigenfrequenz, welche ebenfalls in der resultierenden MAC-Matrix in Abb. 6.11 ausgemacht werden können.

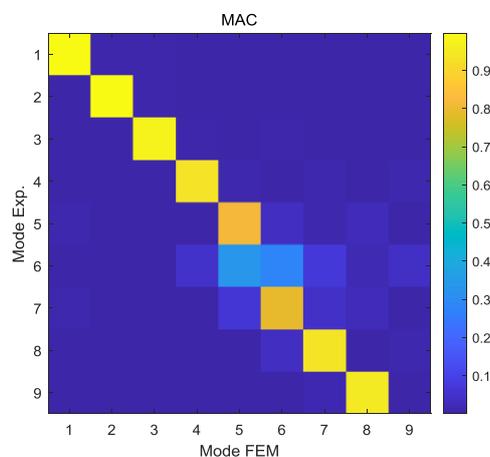


Abb. 6.11: MAC-Matrix: FEM-Experimentell, Startmodell

Dies lässt zunächst auf eine falsche Zuordnung der Moden schließen und wird durch einen grafischen Vergleich der Eigenformen in Abb. 6.12 näher untersucht.

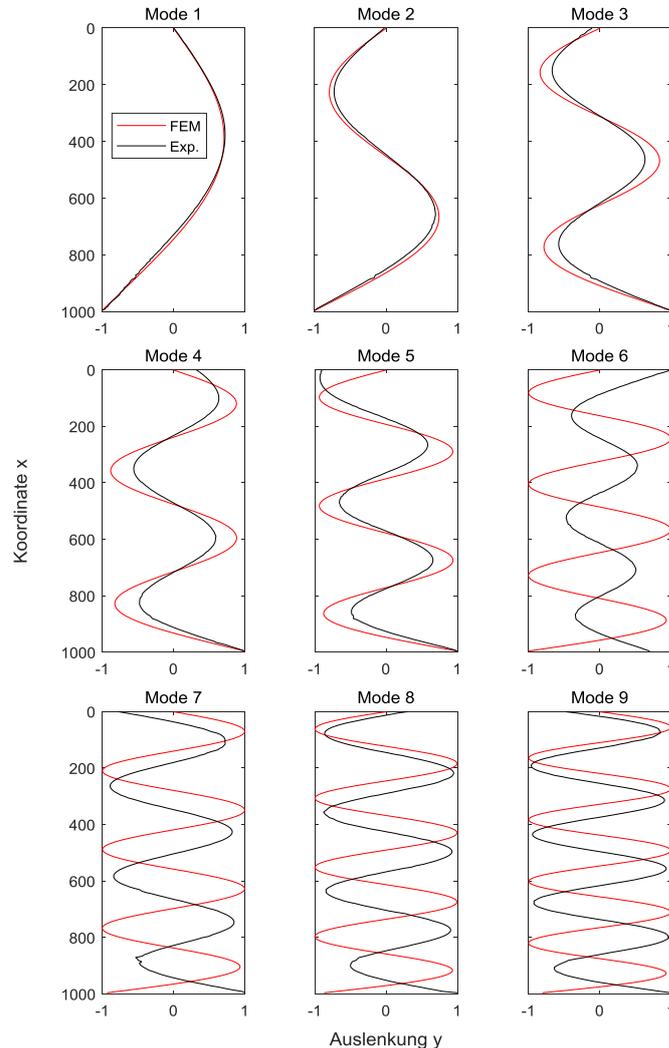


Abb. 6.12: Grafischer Vergleich der Eigenformen, Startmodell

Es zeigt sich dabei vor allem ein großer Einfluss der Randbedingung der verhinderten Verschiebung in der Simulation als idealisierte Abbildung der Lagerung des untersuchten Balkens, welche auf einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss der Lagernachgiebigkeit schließen lässt. Dies betrifft vor allem die Moden 5 bis 7, die die niedrigsten MAC-Werte aufweisen. Die gemessenen Eigenformen zeigen im Bereich des Lagers eine teils signifikante Verschiebung, die modellbedingt nicht abgebildet werden kann.

Lediglich Eigenformen, die Schwingungsknoten in den Bereich der Lagerung aufweisen, können damit durch das Simulationsmodell erfasst werden. Des Weiteren weisen die numerisch ermittelten Eigenformen im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen vor allem in den höheren Moden Abweichungen in Phase und Wellenlänge auf. Dies lässt darauf schließen, dass das Simulationsmodell in dieser Konfiguration nicht geeignet ist, um die realen Versuchsergebnisse hinreichend genau abzubilden.

Die beobachteten Abweichungen werden sowohl auf abweichende Massengeometrie als auch auf lokale Effekte durch Zwänge und Reibung in den Bereichen der Lagerung und Lasteinleitung zurückgeführt. Mittels Parameterstudien werden diese daher näher untersucht. Als mögliche Einflussgrößen werden dazu die in Tab. 6.7 zusammengefassten Parameter identifiziert und Simulationen am modifizierten Modell durchgeführt.

Tab. 6.7: Untersuchte Einflussgrößen am Balkenmodell

Lagersteifigkeit	k_y
Lagermasse	m_1
Massenträgheit Lager	J_z
Masse Anbindung	m_2
Verdrehsteifigkeit Anbindung	c_1

Die idealisierte Lagerung im Punkt A wird durch eine linear-elastische Kopplung mit der Umgebung ersetzt (Steifigkeit k_y), wobei die Lagernachgiebigkeit in Richtung der Balkenlängsachse vernachlässigt werden kann, da diese lediglich zu einer weiteren Starrkörpermode führt. Die verhinderte Verschiebung in x-Richtung ist in Abb. 6.13 aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht gezeigt. Eine mögliche Behinderung der Verdrehung im Bereich der Anbindung bei $L_a = 880$ mm wird über eine mit der Umgebung gekoppelte Drehfeder (Steifigkeit c_1) im Punkt B modelliert.

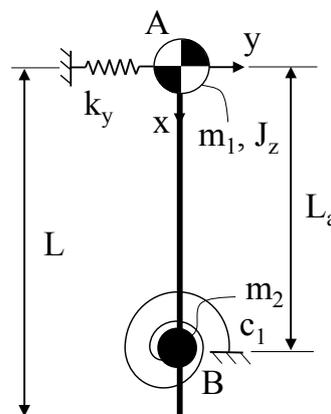


Abb. 6.13: Modifiziertes Simulationsmodell

Die massengeometrischen Größen des Lagers (Masse m_1 , Massenträgheitsmoment J_z) und der Anbindung (Masse m_2) werden zunächst messtechnisch erfasst bzw. aus der Geometrie abgeleitet (siehe Tab. 6.8). Diese werden über zusätzliche Punktmassen und Trägheitsmomente in den Punkten A und B im Simulationsmodell implementiert. Die Anpassung des Modells über die verbleibenden Parameter k_y und c_1 erfolgt iterativ. Als Ergebnis der Parameterstudien können zusammenfassend folgende Parameter angegeben werden, mit denen die größte Übereinstimmung zum realen Modell erzielt wird.

Tab. 6.8: Ergebnis der durchgeführten Parameterstudien

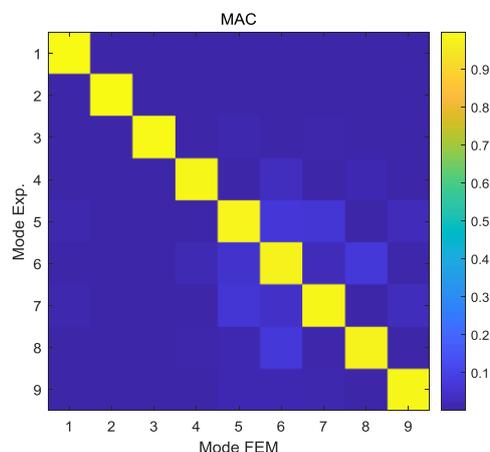
Lagersteifigkeit	$k_y = 530 \text{ N/mm}$
Steifigkeit Drehfeder	$c_1 = 125 \text{ Nm/rad}$
Lagermasse	$m_1 = 64.6 \text{ g}$
Massenträgheit Lager	$J_z = 0.0097 \text{ t} \cdot \text{mm}^2$
Masse Anbindung	$m_2 = 53.3 \text{ g}$

Dabei zeigt vor allem der Parameter k_y einen signifikanten Einfluss auf das globale Systemverhalten, wohingegen über c_1 vorrangig die ersten drei Eigenfrequenzen beeinflusst werden. In Tab. 6.9 ist eine Gegenüberstellung der Eigenfrequenzen des angepassten Modells und der experimentellen Ergebnisse mit den zugehörigen relativen Abweichungen zusammengefasst, wobei ebenfalls die Diagonaleinträge der MAC-Matrix aus Abb. 6.14 angegeben sind.

Tab. 6.9: Gegenüberstellung numerischer Ergebnisse mit Messergebnissen, Modifiziertes Modell

Mode Nr.	f_{exp} [Hz]	f_{FEM} [Hz]	rel. Fehler E_i [%]	MAC
1	23.95	23.93	-0.08	0.997
2	71.45	71.27	-0.25	0.995
3	143.13	142.33	-0.56	0.993
4	230.85	231.44	0.26	0.985
5	332.51	326.88	-1.69	0.979
6	407.96	409.27	0.32	0.977
7	530.76	533.43	0.50	0.983
8	701.10	708.88	1.11	0.976
9	923.96	919.62	-0.47	0.983

Die Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung der Eigenfrequenzen mit einem maximalen relativen Fehler von 1.7 %. Dabei zeigen sowohl die zur Bewertung herangezogene MAC-Matrix aus Abb. 6.14 als auch der direkte grafische Vergleich in Abb. 6.15 eine sehr gute Übereinstimmung in den resultierenden Eigenformen über den gesamten betrachteten Frequenzbereich.

**Abb. 6.14:** MAC-Matrix FEM-Experiment, modifiziertes Modell

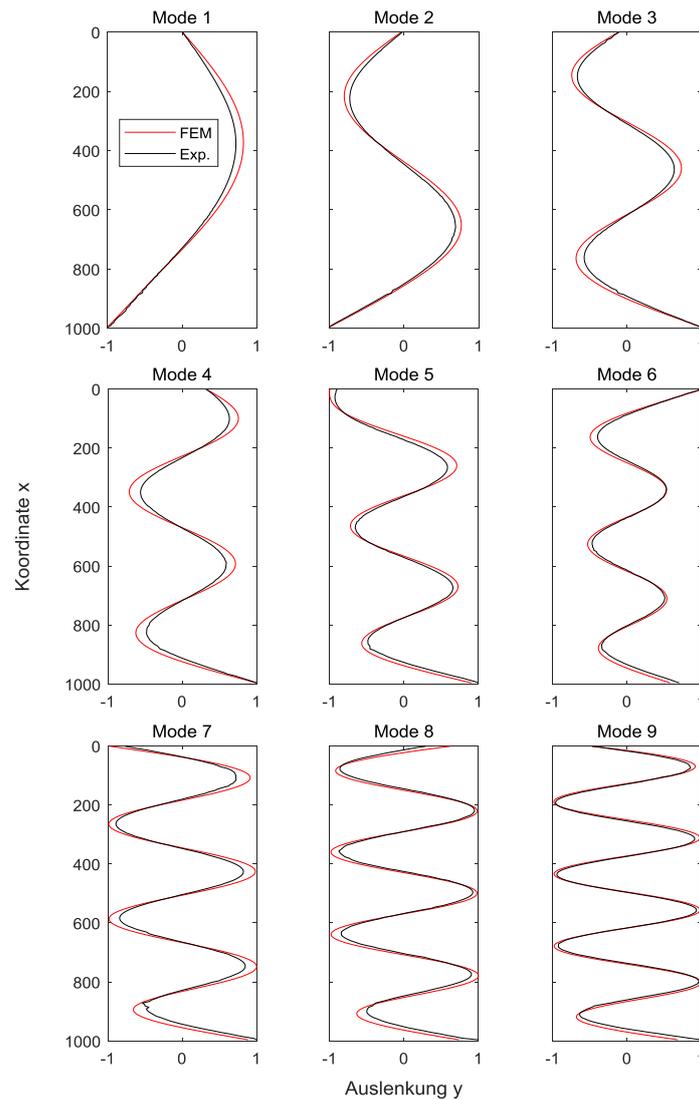


Abb. 6.15: Grafischer Vergleich der Eigenformen, modifiziertes Modell

Zur abschließenden Validierung des entwickelten numerischen Modells erfolgt ein Abgleich der gemessenen Frequenzgänge (Rezeptanz) mit den numerisch erzeugten Frequenzgängen für jeden Freiheitsgrad. Dazu werden die experimentell ermittelten modalen Dämpfungen in das numerische Modell implementiert und eine Frequenzbereichsanalyse durchgeführt. Diese erfolgt am mit den ersten zehn Eigenformen modal entkoppelten System und in Anlehnung an die experimentellen Untersuchungen in einem Frequenzbereich von $f_{\min} = 1 \text{ Hz}$ bis $f_{\max} = 1 \text{ kHz}$. Für einen direkten Vergleich zeigt Abb. 6.16 den über alle Freiheitsgrade gemittelten Frequenzgang (Amplitude) aus Experiment und Simulation.

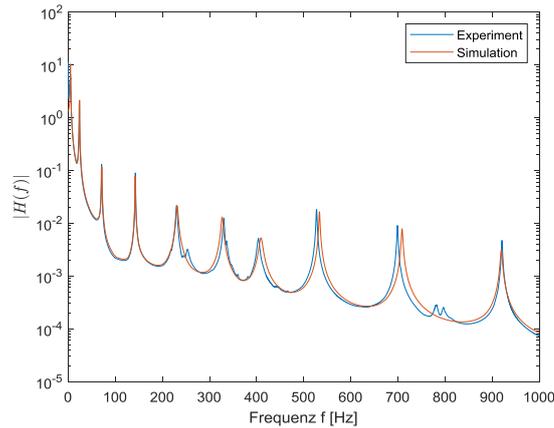


Abb. 6.16: Vergleich der Übertragungsfunktion, FEM-Experiment (logarithmisch)

Es kann dabei generell eine sehr gute Übereinstimmung festgestellt werden, wobei zusätzliche Peaks der experimentellen Ergebnisse um 250 Hz sowie 800 Hz auf lokale Effekte aus Lagerung und Anbindung schließen lassen, welche im Simulationsmodell zwar nicht hinreichend gut erfasst, jedoch global betrachtet vernachlässigbar sind. Die beobachteten Abweichungen in den Eigenfrequenzen korrelieren mit den in Tab. 6.9 ermittelten relativen Fehlern, wobei Amplitude und Breite der Peaks auf gute Übereinstimmung der ermittelten modalen Dämpfungswerte schließen lassen.

6.5 Experimentelle Validierung

Mit dem im vorigen Abschnitt validierten Simulationsmodell werden im Folgenden Untersuchungen zur Validierung der in Kapitel 4 entwickelten Methodik zur gewichteten Superposition modaler Feldgrößen durchgeführt. In experimentellen Untersuchungen wird das betrachtete Balkensystem dazu in Anlehnung an Abschnitt 4.2.3 gezielt durch schmalbandige Lastsignale zum Schwingen angeregt und die Maxima der Systemantwort in jedem Freiheitsgrad ermittelt. Mit dem Ziel der Validierung des entwickelten modalen Wichtungskoeffizienten wird dabei das Verschiebungsfeld als Feldgröße für die gewichtete modale Superposition gewählt, da dieses direkt mit den Messergebnissen verglichen werden kann²².

Bei hinreichend guter Übereinstimmung in den Verschiebungen kann dabei ebenfalls qualitativ von guter Übereinstimmung in den Beanspruchungen ausgegangen und für die Bewertung der resultierenden Beanspruchungen auf das validierte numerische Simulationsmodell zurückgegriffen werden. Durch die gewählte Systemkonfiguration der pendelnden Lagerung besitzt das System eine Starrkörpermode. Die Wichtung der modalen Anteile zur Gesamtschwingung erfolgt demnach über den in Abschnitt 4.4 beschriebenen Wichtungskoeffizienten $\Gamma_{fs,i}$ für Systeme mit Starrkörpermoden.

²² Für erweiterte Anmerkungen zur Messung modaler Dehnungsfelder siehe Anhang F.

Als Lastsignal wird neben der gezielten Anregung einzelner Eigenformen eine Kombination harmonischer Funktionen verschiedener Frequenzen gewählt, welche nahe den experimentell ermittelten Eigenfrequenzen f_i liegen (vgl. Abschnitt 4.2.3). Eine Auswahl der untersuchten Lastfälle ist in Abb. 6.17 zusammengefasst.

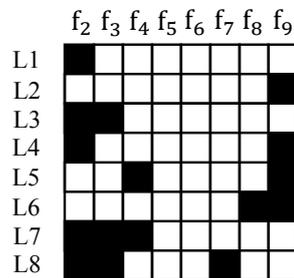


Abb. 6.17: Experimentell untersuchte Lastfälle (Auswahl)

Die verschiedenen Schwingformen des Systems lassen sich unterschiedlich gut messtechnisch erfassen. Die gezeigten Lastfälle in Abb. 6.17 sind daher auf gut reproduzierbare Messungen begrenzt. Die modalen Wichtungskoeffizienten werden direkt über die Fourier-Transformierte des gemessenen Systemeingangs bestimmt, um die Anwendbarkeit der Methodik bei Verwendung von Messdaten hervorzuheben. Die Ergebnisse der Untersuchungen bei Anregung einzelner Frequenzen sind exemplarisch für die Lastfälle L1 und L2 für niederfrequente bzw. höherfrequente Anregung in Abb. 6.18 zusammengefasst. Für einen direkten qualitativen Vergleich erfolgt die Darstellung normiert.

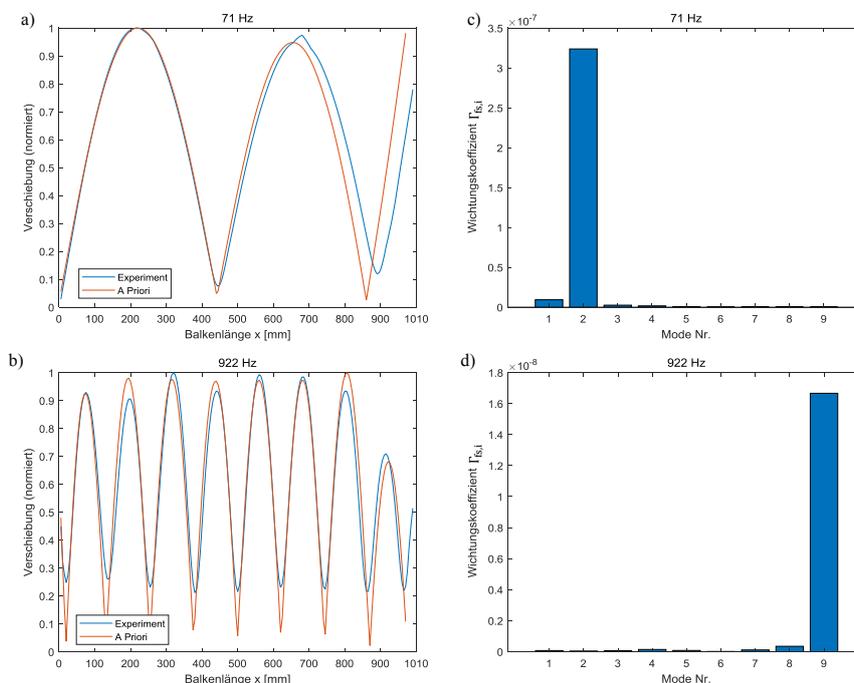


Abb. 6.18: Vergleich von Experiment und numerischer Vorhersage, Lastfälle L1 und L2, a) und b) Verschiebungen, c) und d) ermittelte modale Wichtungskoeffizienten

Die experimentell ermittelten Verschiebungen korrelieren bei Anregung einzelner Frequenzen im niedrigen sowie im hohen Frequenzbereich sehr gut mit dem qualitativen Verschiebungsfeld der entwickelten Methodik, siehe Abb. 6.18 a und Abb. 6.18 b. Die aus dem experimentell ermittelten

Eingangssignal resultierenden modalen Wichtungskoeffizienten sind in Abb. 6.18 c und Abb. 6.18 d dargestellt. Diese zeigen eine klare Dominanz der gezielt angeregten Moden, wobei geringe Anteile weiterer Moden zum einen auf Messrauschen, zum anderen auf die in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Effekte zurückzuführen sind. Die Ergebnisse der Untersuchungen kombinierter Anregung sind in Abb. 6.19 für die Lastfälle L3 und L4, bzw. in Abb. 6.20 für die Lastfälle L7 und L8 dargestellt. Auch hier zeigt sich eine gute Korrelation der experimentell ermittelten Maxima mit den Ergebnissen der entwickelten Methodik.

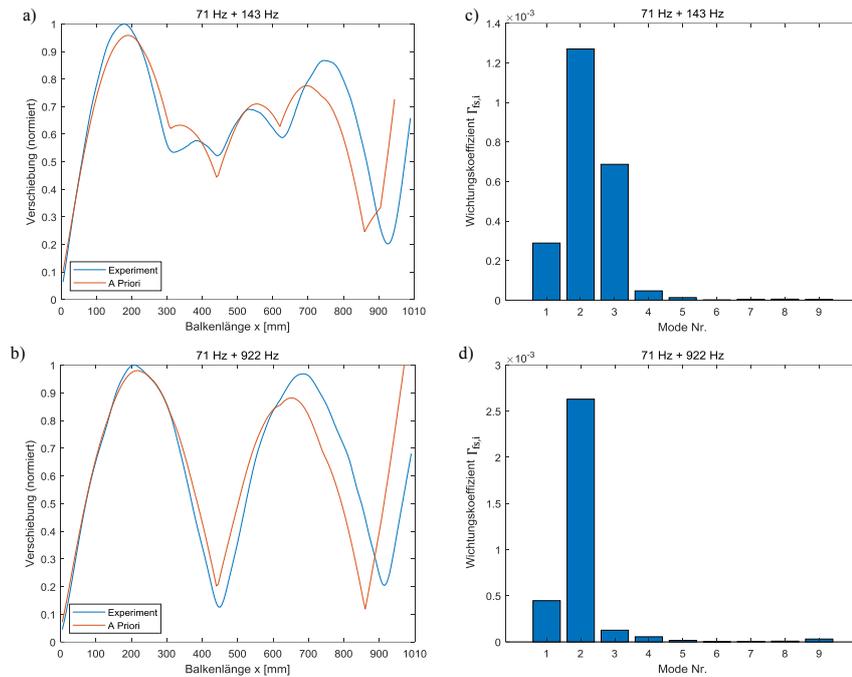


Abb. 6.19: Vergleich von Experiment und numerischer Vorhersage, Lastfälle L3 und L4, a) und b) Verschiebungen, c) und d) ermittelte modale Wichtungskoeffizienten

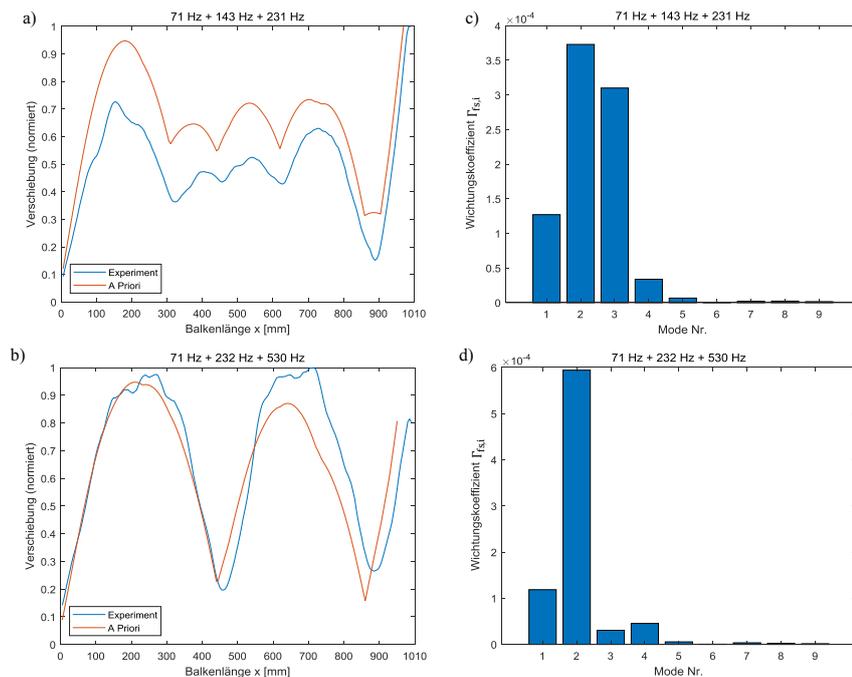


Abb. 6.20: Vergleich von Experiment und numerischer Vorhersage, Lastfälle L7 und L8, a) und b) Verschiebungen, c) und d) ermittelte modale Wichtungskoeffizienten

Deutlich lassen sich auch die modalen Anteile an der Gesamtschwingung über den modalen Wichtungskoeffizienten identifizieren, wobei die dominanten Moden zuverlässig erfasst werden. Auf Grundlage des validierten numerischen Ersatzmodells lassen sich im Weiteren die ermittelten modalen Wichtungskoeffizienten für die Superposition der aus dem Verschiebungsfeld abgeleiteten modalen Beanspruchungsgrößen heranziehen, um Aussagen über potenziell höherbeanspruchte Strukturregionen zu treffen. Exemplarisch zeigt hierzu Abb. 6.21 das für die Lastfälle L2 und L3 resultierende von Mises-Beanspruchungsfeld. Eine experimentelle Ermittlung von Beanspruchungsgrößen konnte mit den zur Verfügung stehenden Messmitteln nicht umgesetzt werden, siehe Anhang F.

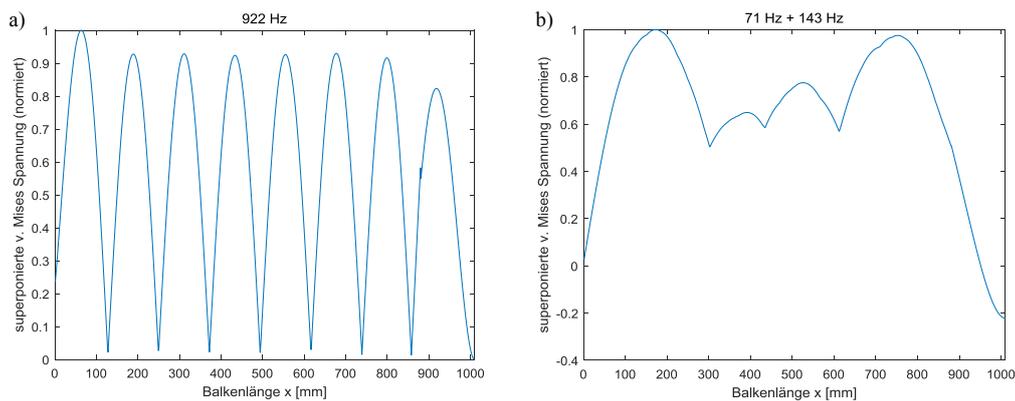


Abb. 6.21: Überlagertes v. Mises-Spannungsfeld, a) Lastfall L2, b) Lastfall L3

6.6 Zusammenfassung

Das vergangene Kapitel beschreibt die zur Validierung des entwickelten Wichtungskoeffizienten für schmalbandig angeregte Systeme durchgeführten experimentellen Untersuchungen am Biegebalken. An einem hierfür entwickelten Versuchsaufbau erfolgte die Bestimmung modalen Systemgrößen über eine experimentelle Modalanalyse, gefolgt von einem Modellabgleich zur Entwicklung eines validierten numerischen Ersatzmodells. Das untersuchte Modell ist dabei durch ein System mit einer Starrkörpermode beschrieben. Die in Abschnitt 4.4 verkürzt dargestellte Betrachtung derartiger Systeme wurde damit um ausführlichere Untersuchungen ergänzt. Die durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass sich durch die entwickelte Methodik zuverlässig die qualitativen Maxima der betrachteten modalen Feldgrößen erfassen lassen. Zum anderen lässt sich die Gesamtschwingung qualitativ in ihre modalen Beiträge auflösen, was zu einem erhöhten Verständnis der strukturellen Beanspruchung beiträgt. Es konnte ferner gezeigt werden, dass sich die entwickelte Methodik ebenfalls auf Basis gemessener Versuchsdaten anwenden lässt, was große Vorteile für die praktische Anwendung (z.B. bei der Verwendung von Fahrversuchsdaten) mit sich bringt. Die erreichbare Ergebnisgüte ist dabei zu einem großen Teil von der Qualität der modalen Wichtungskoeffizienten zugrundeliegenden Fourier-Transformation des Lastsignals beeinflusst. Eine kritische Bewertung von Fehlerquellen, wie z.B. Aliasing- und Leakage-Effekte, ist damit für belastbare Aussagen unumgänglich. Die Erweiterung der experimentellen Untersuchungen auf breitbandig angeregte Systeme ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

7 Experimentelle Untersuchungen: Verbundlenkerachse

Zur Validierung der in Abschnitt 5.1 erzielten numerischen Ergebnisse erfolgten experimentelle Untersuchungen an der realen Struktur. Das untersuchte Versuchsteil stammt aus der Serienfertigung des Volkswagen Polo 9N, Baujahr 2005-2009, und entspricht in den geometrischen und physikalischen Eigenschaften dem im Abschnitt 5.1 beschriebenen numerischen Berechnungsmodell. Abweichungen stellen im FE-Modell nicht abgebildete Haltebleche am Querträger sowie die nicht modellierte Schweißnahtgeometrie dar. Ziel der Untersuchungen ist zum einen die Validierung des numerisch ermittelten Beanspruchungsfeldes durch experimentelle Spannungsanalysen, zum anderen erfolgt die zyklische Belastung der Struktur bis zum Versagen zur Validierung der im Zuge der entwickelten Methodik ermittelten potenziellen Versagensorte.

7.1 Versuchsplanung und Lastfall

Versuchsplanung und Durchführung erfolgen in Anlehnung an in der Literatur verfügbare, vergleichbare Untersuchungen zur experimentellen Lebensdaueranalyse an Verbundlenkerachsen [100–104]. Zur Abbildung realer Beanspruchungszyklen während der Produktlebensdauer sind in der Literatur größtenteils die Lastfälle des beidseitigen bzw. wechselseitigen Einfedern beschrieben. Dabei werden sowohl auf Teststrecken gemessene Lastsignale im Versuchsaufbau umgesetzt als auch quasi-statische bzw. niederfrequente Belastungsszenarien untersucht. Quasi-statische Versuche mit schädigungsäquivalenten Lastamplituden werden hierbei häufig zur Untersuchung stochastisch angeregter Strukturen, wie sie beispielsweise durch die untersuchte Fahrzeugachse gegeben ist, durchgeführt [105].

Die Ziele der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen erheben dabei keinen Anspruch auf tatsächlich auf das Produkt und dessen vorgesehenen Einsatz übertragbare Ergebnisse. Vielmehr steht die Validierung der aufgestellten Hypothesen für allgemeine und beliebig belastete Strukturen im Vordergrund. Die Umsetzung realer Belastungszyklen spielt demnach eine untergeordnete Rolle, so dass für die Untersuchungen aus praktischer Sicht zwar eine dem Verwendungszweck ähnliche Belastung aufgebracht wird, der Versuchsaufbau jedoch möglichst einfach gehalten werden kann. Der Lastfall des einseitigen Einfedern stellt damit ein dem Verwendungszweck der untersuchten Struktur nahekommendes Belastungsereignis dar, welches jedoch mit reduziertem Aufwand versuchstechnisch umsetzbar ist.

7.2 Versuchsaufbau

Die Konzeption des experimentellen Versuchsaufbaus erfolgt in Anlehnung an die in Abschnitt 5.1 durchgeführten numerischen Simulationen für das einseitige Einfedern. Die Belastung der Struktur erfolgt über den in Abb. 7.1 gezeigten Versuchsaufbau auf der Hydropulsanlage des Fachgebiets für Strukturmechanik und Strukturberechnung am Institut für Mechanik der TU Berlin.

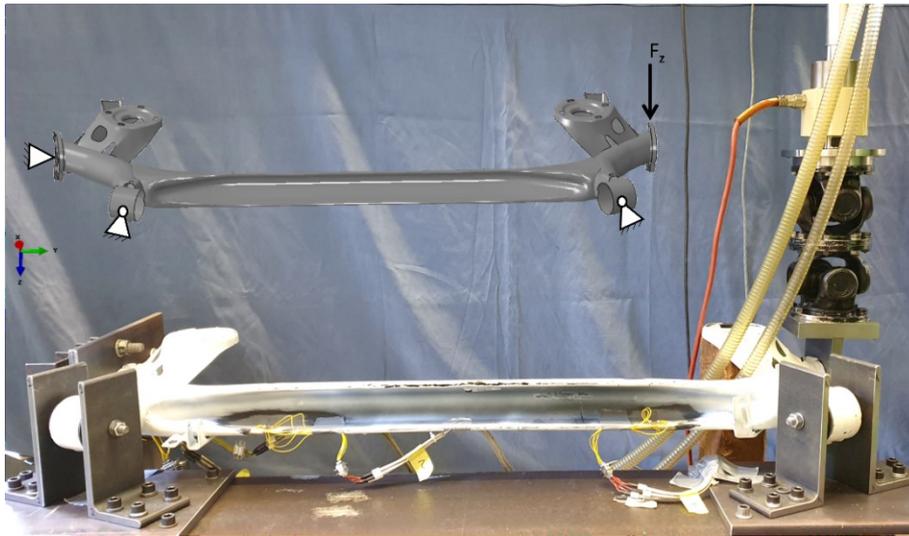


Abb. 7.1: Versuchsaufbau

7.3 Rand- und Lastbedingungen

Die Lagerung der untersuchten Struktur ist der im realen Fahrzeug konzipierten Anbindung an die Karosserie nachempfunden. Sie erfolgt im Bereich der Hinterachslager über zwei Winkel, die eine feste Achse aufnehmen. Auf dieser Achse sind die in die Lagerbuchsen gepressten Gummi-Metall-Hinterachslager bei verhinderter Verschiebung in alle Raumrichtungen, um die jeweilige Lager-Längsachse frei drehbar gelagert (siehe Abb. 7.2).

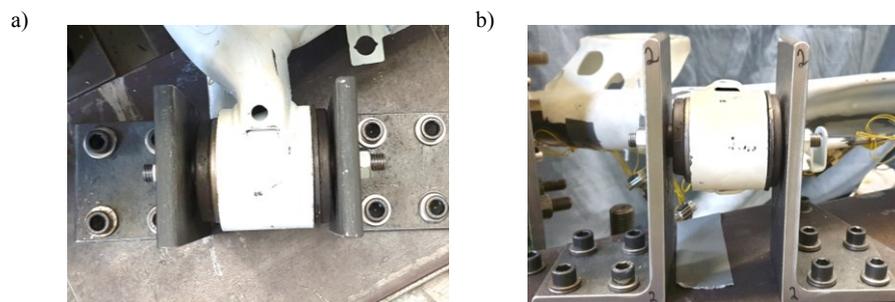


Abb. 7.2: Hinterachslager a) Draufsicht b) Frontansicht

Die konstruktive Umsetzung der festen Einspannung der unbelasteten Achszapfenanbindung ist in Abb. 7.3 a und Abb. 7.3 b dargestellt.

Die Achszapfenanbindung ist über die für die Anbringung des Radträgers vorgesehene Gewindebohrungen mit einem Stahlblech verschraubt, welches über zusätzliche Stahlprofile versteift ist. Über einen starren Winkel erfolgt die Anbindung an das Maschinenbett.

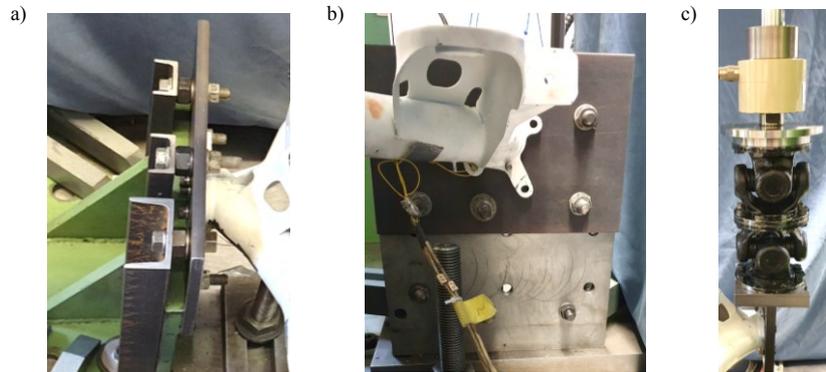


Abb. 7.3: Randbedingungen a) Einspannung Draufsicht, b) Einspannung Seitenansicht, c) Lasteinleitung

Die Lasteinleitung erfolgt über einen vertikal angeordneten Hydraulikzylinder der Fa. Schenck mit einer Nennlast von $F_{\text{nenn}} = 25 \text{ kN}$ und einem maximalen Hub von $u_{\text{nenn}} = 100 \text{ mm}$. Zur Vermeidung von Querkräften am Zylinder erfolgt die Lasteinleitung über zwei Kreuzgelenke, welche die rein vertikale Lasteinleitung auch bei großen Verschiebungen des Lastangriffspunktes gewährleisten (siehe Abb. 7.3 c).

7.3.1 Lastamplitude

Die Ermittlung einer für die geplanten Untersuchungen geeigneten und zielführenden Lastamplitude bedarf aufgrund teilweise unbekannter Eigenschaften der vorliegenden Struktur einer detaillierteren Betrachtung. Es werden hierzu zwei Anforderungen an eine zweckmäßige Lastamplitude gestellt: Für die experimentelle Lebensdaueranalyse muss zum einen statisches Versagen durch Überschreiten zulässiger Spannungen ausgeschlossen werden, zum anderen muss die Lastamplitude Beanspruchungen hervorrufen, die oberhalb der Grenze zur Dauerfestigkeit des Bauteils liegen. Die Abschätzung geeigneter Lastamplituden kann dazu beispielsweise auf Basis materialspezifischer Wöhlerlinien erfolgen. In der Literatur verfügbare Daten zu Materialkennwerten vergleichbarer Bauteile zeigen dabei jedoch teilweise erhebliche Unterschiede [102,103]. Da detaillierte und vor allem verlässliche Materialdaten nicht vorliegen, erfolgt die Abschätzung einer geeigneten Lastamplitude auf Grundlage von Annahmen bezüglich der während der Produktlebensdauer zu erwartenden dynamischen Radlastschwankungen. Diese werden basierend auf der stochastischen Weganregung durch Fahrbahnebenheiten am vereinfachten Berechnungsmodell (sog. Viertelfahrzeug) abgeschätzt. Eine detaillierte Beschreibung des Vorgehens zur Ermittlung der gewählten Lastamplitude ist in Anhang D dargelegt. Die Abschätzung einer plausiblen Lastamplitude erfolgt damit unter der Annahme, dass die ursprüngliche Auslegung der vorliegenden Struktur während der Fahrzeugentwicklung auf Basis der einschlägigen Literatur zur Auslegung von Fahrwerkskomponenten erfolgte. Damit kann die Belastungsamplitude auf Literaturwerte zur stochastischen Weganregung und die

Fahrzeugmasse zurückgeführt werden, während Unsicherheiten durch unbekanntes Materialdaten ausgeklammert werden. Die Wahrscheinlichkeiten für das Überschreiten P bzw. das Unterschreiten $(1 - P)$ von Lastamplituden ergeben sich damit als Vielfache der in Anhang D ermittelten Standardabweichung σ_F der normalverteilten Radlastschwankung, siehe Tab. 7.1.

Tab. 7.1: Standardabweichung, Wahrscheinlichkeiten und zugehörige Lastamplituden

	P	1 - P	Lastamplitude [N]
$1\sigma_F$	37.7 %	68.3 %	597.2
$2\sigma_F$	4.6 %	95.4 %	1194.3
$3\sigma_F$	0.3 %	99.7 %	1791.5

Zur Verkürzung der Versuchsdauer wird eine Lastamplitude entsprechend des 3σ -Levels in Tab. 7.1 gewählt. Dies schließt einerseits statisches Versagen aus, andererseits ist eine dauerfeste Auslegung für diese Lastamplitude aus ökonomischer Sicht für die kommerzielle Serienfertigung unwahrscheinlich. Auf Basis der ermittelten Amplitude der dynamischen Radlastschwankung wird die resultierende Verschiebung des Lastangriffspunkts durch eine statische Analyse am numerischen Berechnungsmodell ermittelt. Sie beträgt $u_{\max} \approx 30$ mm.

7.4 Dehnungsmessung

Zur messtechnischen Erfassung der strukturellen Beanspruchungen wird das Versuchsteil mit Dehnungsmessstreifen bestückt (Typ 3/120 RY41 der Fa. HBM, siehe Anhang G). Basierend auf der numerischen Vorhersage aus Abschnitt 5.1 (siehe Abb. 7.4 a) werden fünf potenziell versagenskritische Strukturregionen zur experimentellen Validierung ausgewählt. Zwei im Bereich des Torsionsrohres (Pos. 1 und Pos. 2) sowie zwei weitere auf dem Längslenker (Pos. 3 und Pos. 4) und eine am Übergang von Längslenker und Achszapfenanbindung (Pos. 5). Die Messpositionen sind in Abb. 7.4 b dargestellt.

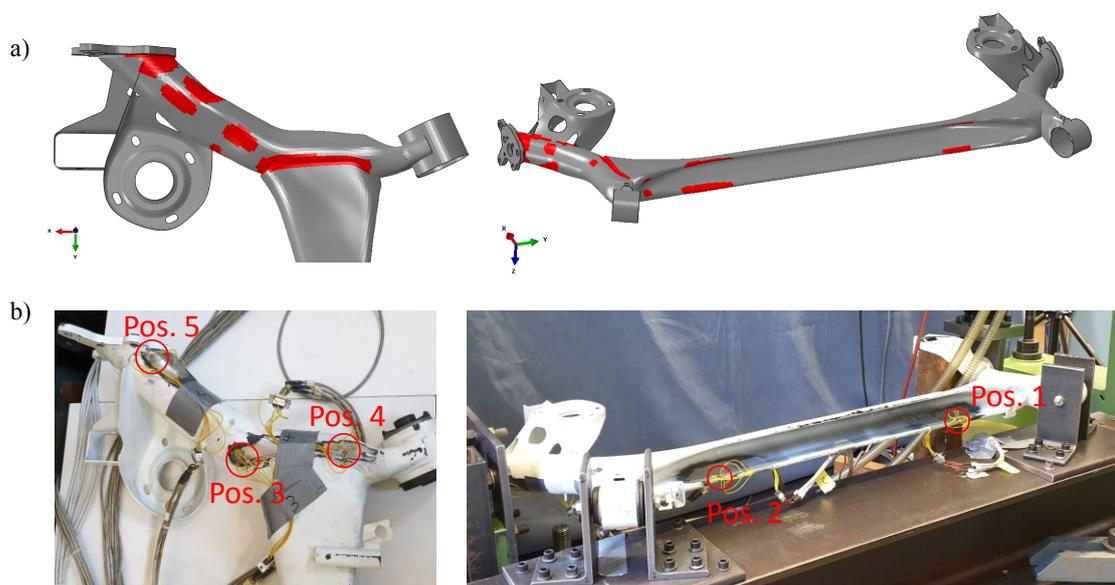


Abb. 7.4: a) Numerische Vorhersage festigkeitsrelevanter Regionen b) Ausgewählte Messpositionen

Die Ermittlung der Beanspruchungen erfolgt über die Hauptdehnungen. Diese werden über Dehnungsmessungen mittels Messrosetten in jeweils drei Richtungen unter einem Winkel von jeweils 60° zueinander bestimmt, siehe Abb. 7.5 exemplarisch für Messposition 5.

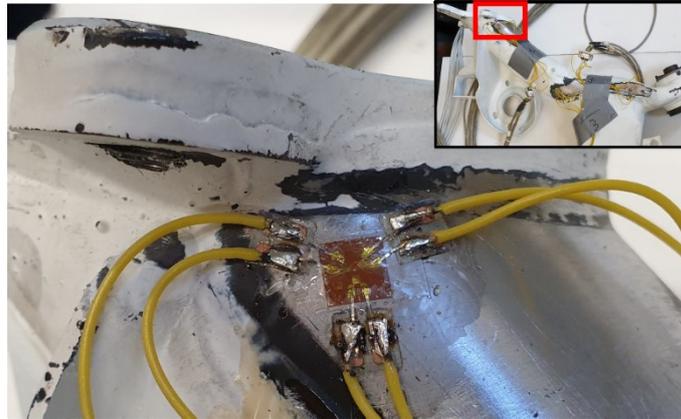


Abb. 7.5: Dehnungsmessrosette in Messposition 5

Die Dehnungsmessung erfolgt über eine Viertelbrückenschaltung mit dem Messsystem Solartron 3530D Orion Delta der Fa. Schlumberger Messgeräte GmbH, welches über ein USB-Interface mit einem Messrechner für Datenerfassung und Auswertung verbunden ist. Aus den gemessenen Dehnungswerten der drei Messrichtungen werden die Hauptdehnungen nach Gl. (163) berechnet.

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma)^2 + (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)^2} \quad (163)$$

Die Winkel α , β und γ beschreiben die Drehung der Messrichtungen gegenüber einem gewählten Bezugskoordinatensystem, wobei im vorliegenden Fall folgende Orientierung angenommen wird: $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und $\gamma = 120^\circ$ (siehe Abb. 7.6).

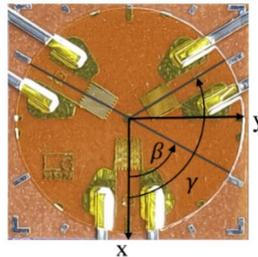


Abb. 7.6: Dehnungsmessrosette mit Bezugskoordinatensystem

Die resultierenden Hauptspannungen werden mit den in Tab. 7.2 gegebenen Materialparametern über das Hookesche Gesetz für den ebenen Spannungszustand wie folgt bestimmt [106]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{(1-\nu)} \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma}{3} \pm \frac{E}{(1+\nu)} \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\gamma)^2 + (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)^2} \quad (164)$$

Tab. 7.2: Materialkennwerte der untersuchten Struktur

E-Modul Torsionsrohr (Pos. 1 und Pos. 2)	220 000 MPa
E-Modul Längslenker (Pos. 3 bis Pos. 5)	210 000 MPa
Querkontraktionszahl ν	0.3

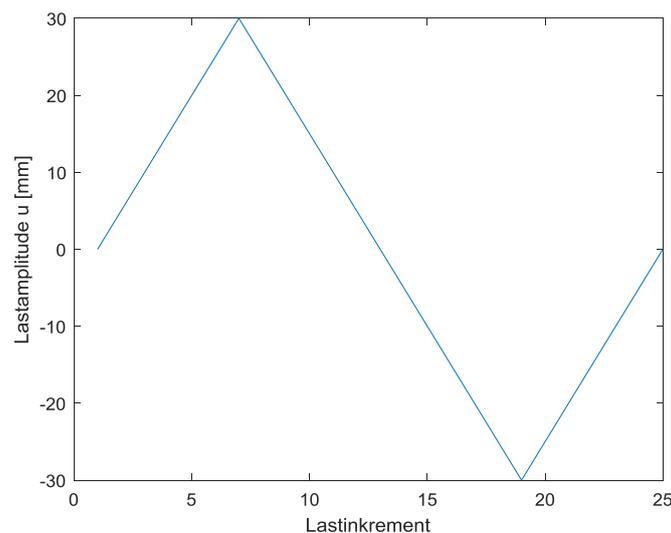
Es kann ferner die erste Hauptspannungsrichtung θ über folgende Beziehung ermittelt werden [106]:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma})}{(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\gamma})} \right] \quad (165)$$

Darin beschreibt θ den Winkel zwischen der Richtung der größten Hauptspannung σ_1 und der x-Achse des gewählten Bezugskoordinatensystems (siehe Abb. 7.6). Die zweite Hauptspannungsrichtung ist durch $\theta + 90^\circ$ im mathematisch positiven Richtungssinn gegeben.

7.5 Statische Untersuchung

Zur Validierung des numerisch ermittelten Beanspruchungsfeldes erfolgen zunächst Dehnungsmessungen bei statischer Auslenkung des Lastangriffspunktes. Die Auslenkung erfolgt weggesteuert und mit einem Verschiebungskrement von $\Delta u = 5$ mm über einen Belastungszyklus mit der Amplitude $u = \pm 30$ mm. Ein voller Belastungszyklus entspricht damit der Zugbelastung aus der Ruhelage auf $u_{\max} = 30$ mm mit anschließender Entlastung, Druckbelastung auf $u_{\min} = -30$ mm sowie abschließender Entlastung in die Ruhelage, siehe Abb. 7.7.

**Abb. 7.7:** Belastungszyklus

7.5.1 Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt werden die Ergebnisse der numerischen Analyse zusammengefasst und den Ergebnissen der experimentellen Dehnungsmessungen gegenübergestellt. Die Auswertung erfolgt zunächst für die über den gesamten Belastungszyklus ermittelten Hauptdehnungen. Für einen einfachen Vergleich der Beanspruchungen aller Messpunkte wird die von Mises-Vergleichsspannung aus den gemessenen Hauptspannungen gebildet und lediglich die auftretenden Maxima herangezogen. Das globale von Mises-Beanspruchungsfeld der numerischen Simulation bei Auslenkung des Lastangriffspunkts um $u = 30$ mm ist in Abb. 7.8 dargestellt.

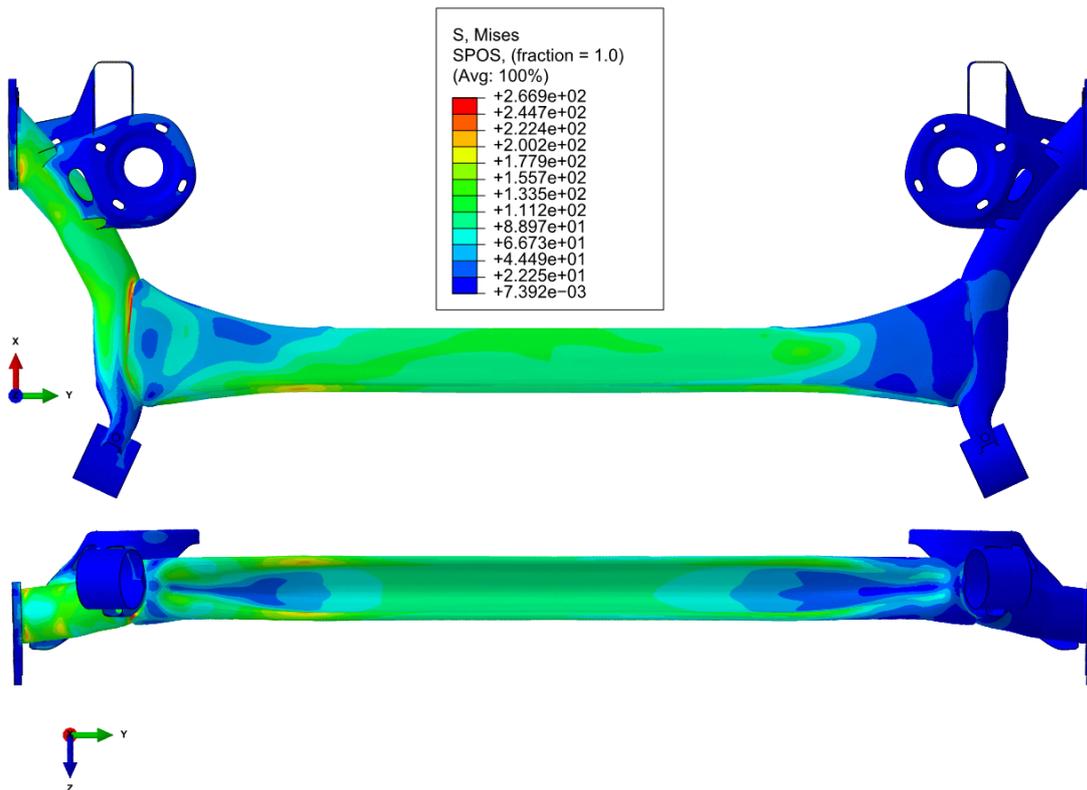


Abb. 7.8: von Mises-Spannungsfeld bei statischer Auslenkung um $u = 30$ mm

Eine detaillierte Darstellung des von Mises-Spannungsfeldes zeigt Abb. 7.9. Die Auswertung der Beanspruchungen zum Abgleich mit den experimentellen Ergebnissen erfolgt hierbei durch die gemittelten Oberflächenwerte der verwendeten S4R Schalenelemente in den den Messpunkten nächstgelegenen Knoten (die entsprechenden Messpositionen sind gekennzeichnet).

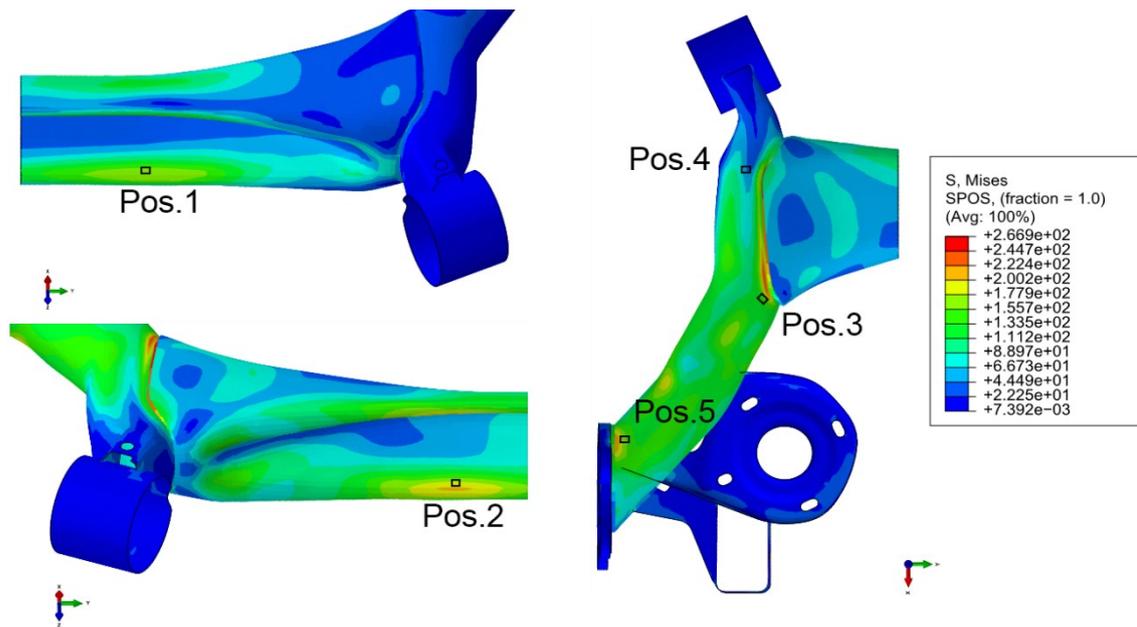


Abb. 7.9: von Mises-Spannungsfeld und Messpositionen

Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse der Dehnungsmessungen sowie der numerisch ermittelten Dehnungen ist in Abb. 7.10 für die Messpositionen 1 bis 4 dargestellt.

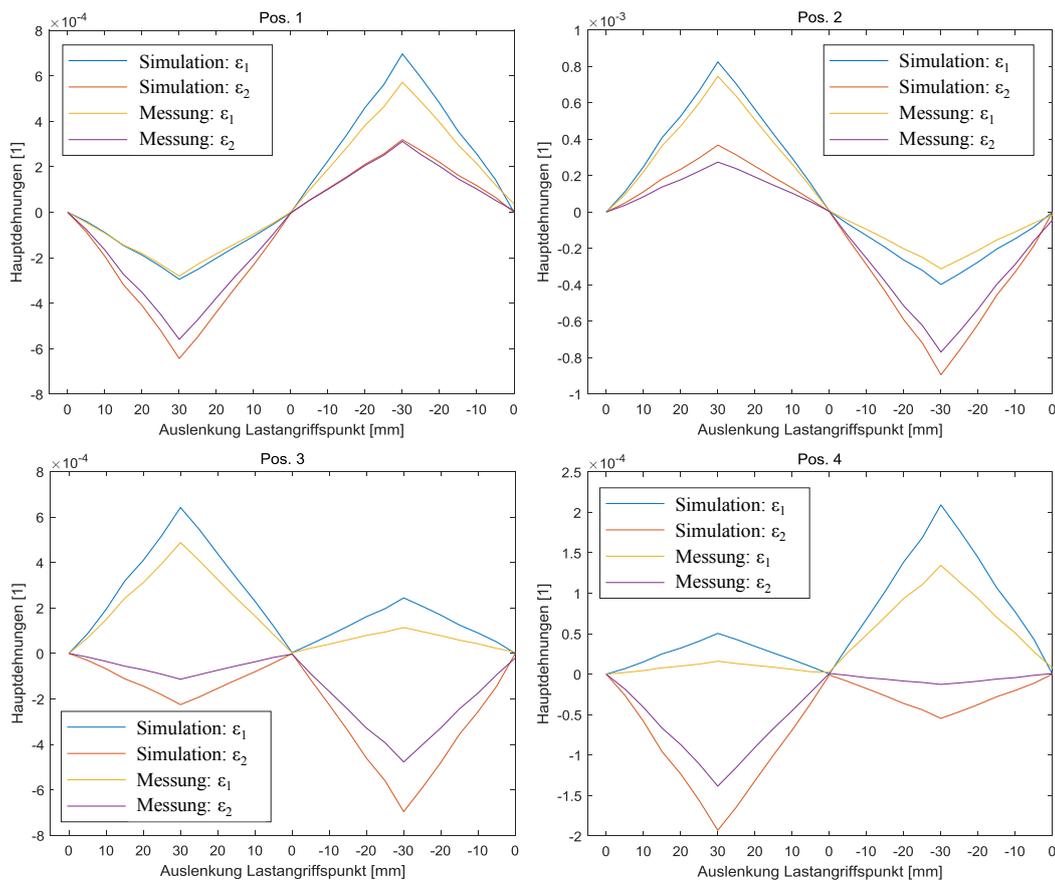


Abb. 7.10: Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Hauptdehnungen, Messpositionen 1-4

Den Vergleich der Hauptdehnungen für Messposition 5 zeigt Abb. 7.11 links sowie rechts die Gegenüberstellung der resultierenden von Mises-Vergleichsspannungen für alle Messpositionen.

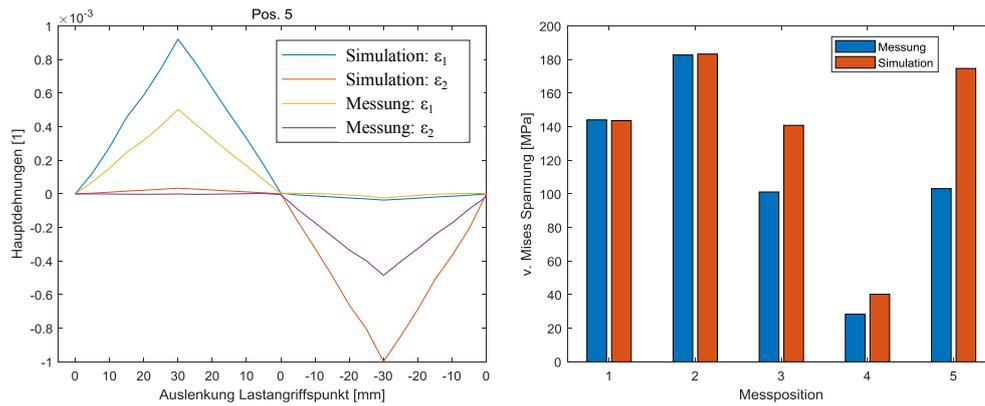


Abb. 7.11 Links: Vergleich numerisch und experimentell ermittelter Hauptdehnungen in Messpositionen 5, rechts: Vergleich numerisch und experimentell ermittelter v. Mises-Spannung aller Messpositionen

Wie in Abb. 7.10 und Abb. 7.11 ersichtlich ist, zeigen die Ergebnisse an den Positionen 1 und 2 eine gute Korrelation zwischen numerischer Simulation und Messung, während an den Positionen 3-5 Spannungsüberhöhungen aus der numerischen Modellierung der Schweißnahtbereiche sowie Steifigkeitsunterschiede der festen Einspannung (Randbedingungen) zu Abweichungen zu den experimentellen Ergebnissen führen.

7.6 Experimentelle Lebensdaueranalyse

Der folgende Abschnitt beschreibt Planung und Durchführung der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten experimentellen Lebensdaueranalyse an dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Versuchsaufbau. Ziel der Untersuchungen ist die zyklische Belastung der Struktur bis zum Versagen, um die numerisch erzielten Vorhersagen zu potenziellen Versagensorten zu validieren.

7.6.1 Vorbetrachtungen

Für die Planung der experimentellen Lebensdaueranalyse erfolgt zunächst eine Betrachtung des Einflusses der inneren Systemdynamik auf das globale Beanspruchungsfeld der untersuchten Struktur. Ziel der Betrachtungen ist die Abschätzung, inwiefern dynamische Lasten mit den zur Verfügung stehenden Versuchseinrichtungen auch im höheren Frequenzbereich aufgebracht und messtechnisch erfasst werden können.

Die Numerischen Untersuchungen in Abschnitt 5.1 zeigen, dass die Struktur bei einseitigem Einfedern in seiner ersten Eigenform mit einer Eigenfrequenz von $f_1 \approx 18$ Hz schwingt. Aus den numerisch ermittelten modalen Lasten (siehe Abb. 7.12) geht zudem hervor, dass die zweite Eigenform ($f_2 \approx 62$ Hz) durch die räumliche Konfiguration des untersuchten Lastfalls eine vernachlässigbare Anregung erfährt. Dies ist auf die globale Ausprägung der Schwingform zurückzuführen, bei der eine horizontale Bewegung des Lastangriffspunkts dominiert. Erst die dritte Eigenform mit einer Eigenfrequenz von $f_3 \approx 105$ Hz zeigt eine nennenswerte modale Last und kann demnach im betrachteten Lastfall hinreichend gut angeregt werden.

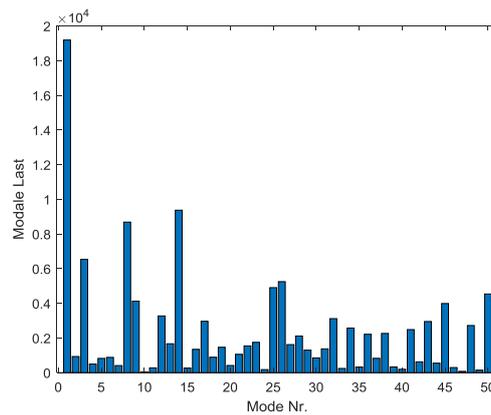


Abb. 7.12: Modale Lasten im Lastfall einseitiges Einfedern

Eine Auswertung des Leistungsdiagramms des eingesetzten Hydropulszylinders zeigt, dass die realisierbare Lastfrequenz für die in Abschnitt 7.3.1 ermittelte Lastamplitude weit unterhalb der ersten Eigenfrequenz der untersuchten Struktur liegt. Eine Anregung höherer Eigenformen ist somit mit dem zur Verfügung stehenden Versuchsaufbau nicht umsetzbar. Aus den ermittelten modalen Lasten sowie aus dem entwickelten Wichtungskoeffizienten für breitbandig angeregte Systeme aus Abschnitt 5.1 geht ferner eine klare Dominanz der ersten Eigenform hervor (siehe Abb. 7.13).

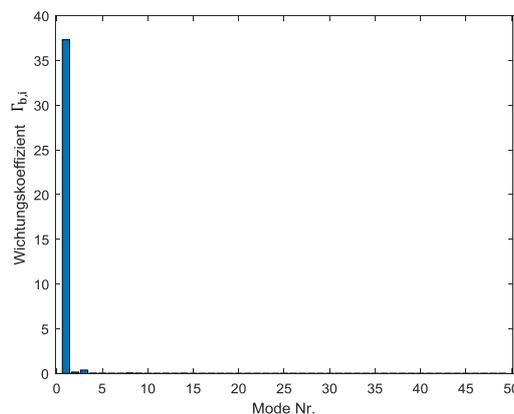


Abb. 7.13: Wichtungskoeffizienten $\Gamma_{b,i}$, Lastfall einseitiges Einfedern

Für die Bewertung der Anwendbarkeit der entwickelten Methodik für die in der Versuchsanordnung aufgebrauchten niederfrequenten Lastsignale erfolgt zunächst ein Vergleich der ersten Eigenform des dynamischen Systems mit der statischen Auslenkung im untersuchten Lastfall. Hierzu wird das Modal Assurance Criterion (MAC) herangezogen [62], wobei die zu vergleichenden Vektoren einerseits durch den ersten Eigenvektor des Systems $\boldsymbol{\varphi}_1$ und andererseits durch das aus der statischen Auslenkung des Lastangriffspunkts resultierende Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\varphi}_{\text{stat}}$ beschrieben sind:

$$\text{MAC}_{1\text{-stat}} = \frac{|\boldsymbol{\varphi}_1^T \boldsymbol{\varphi}_{\text{stat}}|^2}{(\boldsymbol{\varphi}_1^T \boldsymbol{\varphi}_1)(\boldsymbol{\varphi}_{\text{stat}}^T \boldsymbol{\varphi}_{\text{stat}})} = 0.99 \quad (166)$$

Die Auswertung des MAC-Wertes gibt dabei Auskunft über die lineare Abhängigkeit und damit über die Ähnlichkeit zweier Vektoren [62]. Bezogen auf die untersuchten Verformungsfelder kann damit mit $MAC_{1_stat} \approx 1$ eine nahezu exakte Übereinstimmung von statischer Auslenkung im untersuchten Lastfall und erster Eigenform des Systems nachgewiesen werden. Eine Übertragung der Annahmen vom quasi-statischen Lastfall zur dynamischen Belastung ist in diesem Fall für die erste Eigenform zulässig. Die quasi-statische Belastung kann somit im vorliegenden Fall in guter Näherung der dynamischen Belastung bis zur ersten Eigenfrequenz gleichgesetzt werden, wenn der Einfluss höherfrequenter Anteile vernachlässigt wird.

7.6.2 Durchführung

Zur Lokalisierung versagenskritischer Regionen wird die Struktur zyklisch mit einer Amplitude von $u = \pm 30$ mm bis zum Versagen belastet. Für den vorliegenden Versuch wird der Begriff des Versagens durch die Entstehung eines deutlich erkennbaren Ermüdungsrisses definiert. Die Lastfrequenz der sinusförmig aufgebrachten Amplitude beträgt $f = 2$ Hz. Die Dehnungsmessung an den in Abschnitt 7.4 beschriebenen Messpositionen erfolgt in einem Intervall von jeweils 600 Zyklen in der Position maximaler Zugbelastung²³ bei $u_{max} = 30$ mm. Während der weggesteuerten Lastaufbringung erfolgt eine zusätzliche Kraftmessung über einen Kraftaufnehmer (Fa. Schenk, Typ PM 10), der zwischen Hydraulikzylinder und Anbindung an die Struktur angebracht ist (siehe Abb. 7.3 c), um aus dem anregungsseitigen Verlauf der Reaktionskraft Rückschlüsse auf mögliche Rissbildung zu ziehen.

7.6.3 Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der durchgeführten experimentellen Lebensdaueranalyse zusammengefasst und den Ergebnissen der durch die entwickelte Methodik erzielten Vorhersagen zu potenziell ermüdungsgefährdeten Strukturregionen gegenübergestellt. Dazu erfolgen zunächst makroskopische Untersuchung und Interpretation des bei Versuchsende vorliegenden Schadensbildes, gefolgt von der Auswertung der messtechnisch erfassten Dehnungen. Abschließend erfolgt ein Abgleich mit den numerisch ermittelten Ergebnissen.

Schadensbild

Die folgenden Ausführungen sind angelehnt an die VDI-Richtlinie zu Grundlagen und Durchführung einer Schadensanalyse [107] sowie die einschlägige Literatur zur fraktografischen Untersuchung von Bruchflächen. Der Versuch wurde nach ca. 280 000 Belastungszyklen beendet. Die untersuchte Struktur zeigt bei Versuchsende einen ausgeprägten Riss im Bereich der festen Einspannung an der Schweißnaht zwischen Längslenker und Achszapfenanbindung (siehe Abb. 7.14).

²³ Eine kontinuierliche Aufnahme der Messdaten ist mit den gegebenen Messmitteln nicht möglich

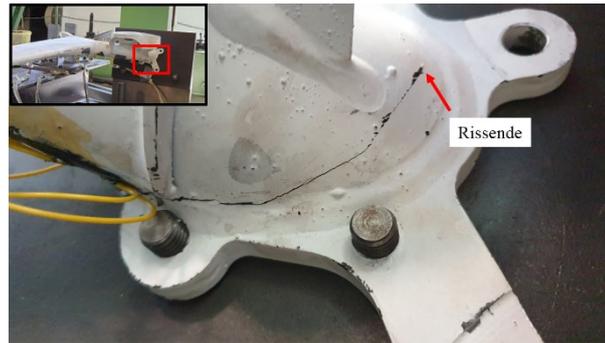


Abb. 7.14: Ausgebildeter Riss bei Versuchsende, Vorderansicht außen

Die von außen erkennbare Risslänge beträgt ca. 145 mm. Ein Rissende befindet sich deutlich außerhalb der Schweißverbindung im Bereich des Längslenkerrohres (Abb. 7.14), ein weiteres Rissende befindet sich in der Schweißnaht (Abb. 7.15). Der Riss verläuft in Umfangsrichtung des Längslenkerrohres, in weiten Teilen entlang des Nahtübergangs und in der Schweißnaht. In Umfangsrichtung des Längslenkerrohres überschreitet der Riss zwischen beiden Rissenden einen Winkel von ca. 200°.

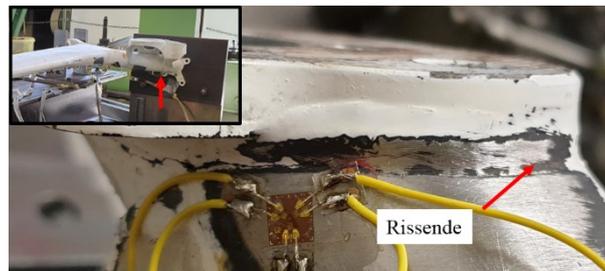


Abb. 7.15: Ausgebildeter Riss bei Versuchsende, Unteransicht außen

Zur weiteren Interpretation der Versuchsergebnisse wird der entstandene Riss freigelegt. Das Schadensbild auf der Innenseite der Struktur ist in Abb. 7.16 dargestellt; die auf der Oberfläche erkennbare Risslänge beträgt ca. 105 mm. Der innenseitig erkennbare Riss verläuft von der Nahtwurzel zwischen Längslenkerrohr und Achszapfenaufnahme im gekennzeichneten Punkt A in den Grundwerkstoff des Längslenkerrohres und endet im gekennzeichneten Punkt B im Längslenkerrohr. Abplatzungen der Innenlackierung des Längslenkerrohres lassen auf erhöhte lokale Verformungen im Punkt A schließen.



Abb. 7.16: Ausgebildeter Riss bei Versuchsende, Innenansicht

Abweichend zum innenseitig erkennbaren Riss zeigt sich anhand der freigelegten Bruchflächen (siehe Abb. 7.17) ein Fortschreiten des Risswachstums über den in Abb. 7.16 gekennzeichneten Punkt A hinaus durch die Nahtwurzel der Schweißverbindung.

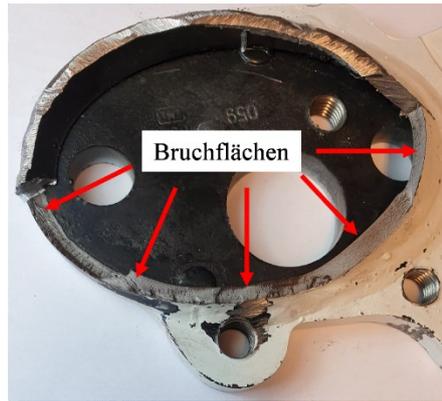


Abb. 7.17: Freigelegte Bruchflächen

Auf Grund der komplexen Beanspruchungssituation und Risstopografie lässt sich der detaillierte Schädigungsprozess mit den zur Verfügung stehenden Messmitteln nicht eindeutig und zweifelsfrei feststellen. Die Beanspruchung der Struktur ist charakterisiert durch mehrachsige Biegung und Torsion. Die durch die Schweißnaht hervorgerufene Kerbwirkung sowie potenzielle Eigenspannungen und Gefügeänderungen im Bereich der Wärmeeinflusszone erschweren den Vergleich mit klassischen Schadensbildern aus der Literatur. Eine vollständige fraktografische Untersuchung und detaillierte Rekonstruktion des Rissvorgangs liegt daher außerhalb der Ziele dieser Arbeit. Zum Nachweis der Plausibilität der numerisch ermittelten potenziellen Versagensorte werden im Folgenden jedoch makroskopische und lichtmikroskopische Betrachtungen zusammengefasst und Hypothesen zu möglichen Regionen des Schädigungsbeginns aufgestellt.

Auf Basis des Erscheinungsbildes der Bruchflächen lassen sich hierzu Anhaltspunkte für verschiedene Arten des Versagens identifizieren, wobei einzelne Bereiche als mögliche Ausgangspunkte von Ermüdungsrissen interpretiert werden können. Das globale Schadensbild in Abb. 7.17 lässt auf einen stufenweisen Fortschritt des Risswachstums schließen. Es zeigen sich dabei nach [107] Bereiche, die einem Gewaltbruch zugeordnet werden können, sowie Bereiche, die auf Ermüdung hindeuten. Zur detaillierteren Beschreibung der Bruchflächen wird der globale Versagensbereich in drei Teilbereiche untergliedert, die sich sowohl im makroskopischen Erscheinungsbild der Bruchflächen als auch in der räumlichen Lage des Risses im Bauteil unterscheiden (siehe Abb. 7.18).

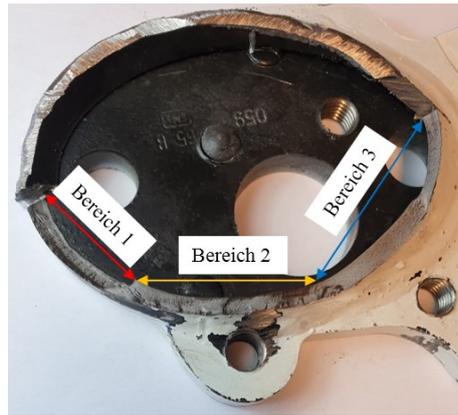


Abb. 7.18: Bereichseinteilung der freigelegten Bruchflächen

Im gekennzeichneten Bereich 1 verläuft der Riss vollständig innerhalb der Schweißnaht. Die Bruchfläche reicht von der Nahtoberfläche bis zur Nahtwurzel und ist mehrfach abgewinkelt. Die Oberfläche wirkt matt mit dunklen Bereichen. Ausgehend von der Nahtoberfläche sind Stufen erkennbar. Die makroskopisch erkennbaren Bruchbahnen weisen ein pfeilartiges Muster auf.

Der Rissverlauf in Bereich 2 ist auf den Nahtübergangsbereich beschränkt, wobei die Bruchfläche nahezu senkrecht zur Bauteiloberfläche steht. Deutliche Ausbrüche und Stufen sind erkennbar, die Oberfläche zeigt teilweise glatte, dunkle Bereiche, teilweise raue, glitzernde Bereiche. Entlang der Innenkante des Risses ist ein Grat ausgebildet. In Bereich 3 zeigt sich ein Rissverlauf vollständig außerhalb der Schweißnaht, im Längslenkerrohr. Die Bruchfläche verläuft in einem Winkel zur Bauteiloberfläche mit deutlich erkennbarer Änderung der Richtung der Bruchebene im letzten Drittel des Rissbereichs. Die Oberfläche ist glitzernd und rau.

Durch die im Rissbildungsprozess entstehenden makroskopisch erkennbaren Bruchbahnen ergeben sich Anhaltspunkte für den Verlauf der Rissfront. In der Literatur werden hierbei u. a. pfeilförmige Merkmale (*engl. chevron marks*, auch Chevronlinien) als Indiz für Startpunkt und Ausbreitungsrichtung von Ermüdungsrissen bei duktilen bis spröden metallischen Werkstoffen beschrieben [108], [109]. Diese pfeilförmige Ausprägung der Bruchbahnen ist ein charakteristisches Merkmal des in Abb. 7.18 definierten Bereichs 1, woraus sich in Abb. 7.19 mit den schematisch hervorgehobenen Merkmalen nach [108] ein Bereich möglicher Rissinitiierung interpretieren lässt.

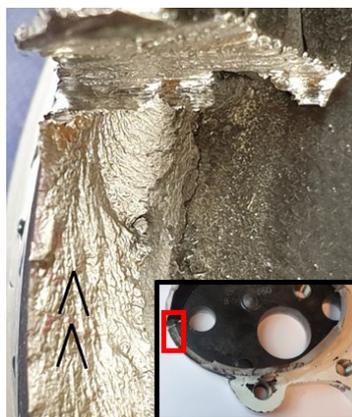


Abb. 7.19: Detailansicht Bereich 1, hervorgehobene Chevronlinien

Von der Schweißnahtoberfläche ausgehende Stufen (sog. Schießscharten) weisen dabei nach [110–112] auf mehrere Rissausgänge mit zusammentreffenden Bruchbahnen hin (siehe Abb. 7.20). Glatte, glänzende Bereiche in Abb. 7.20 lassen auf ein Aufeinanderreiben der Rissflanken schließen. Ein Versagen durch Ermüdung im beschriebenen Bereich erscheint damit plausibel.



Abb. 7.20: Detailansicht Bereich 1, Stufen ausgehend von Schweißnahtoberfläche

Der Übergang der Bereiche 1 und 2 ist durch eine komplexe Bruchfläche charakterisiert (siehe Abb. 7.21), wobei das globale Erscheinungsbild der Bruchfläche durch die ausgeprägten Bruchbahnen auf Gewaltbruch hindeutet. Es sind ferner von der Bauteiloberfläche ausgehende, stark korrodierte Stufen zu erkennen (rote Pfeile), die auch in Bereich 2 auf mehrere Rissausgänge von der Oberfläche hindeuten.

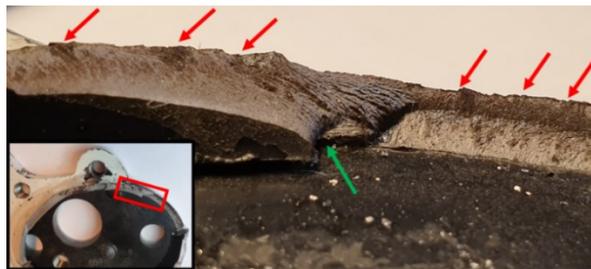


Abb. 7.21: Detailansicht Übergang Bereich 1 und 2, Bruchbahnen und Stufen

Eine mittels digitaler Lichtmikroskopie (Keyence VHX 400) erstellte Detailaufnahme der Bruchfläche im Bereich der Nahtwurzel (vgl. Abb. 7.21, grüner Pfeil) ist in Abb. 7.22 dargestellt. Durch erhöhte Kerbwirkung im Bereich der nicht durchgeschweißten Nahtwurzel stellt ein Versagen in diesem Bereich ein plausibles Szenario dar.

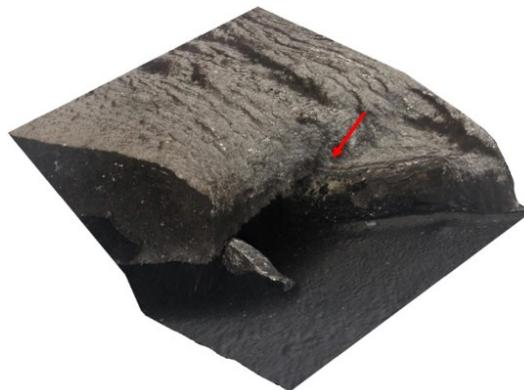


Abb. 7.22: Detailansicht Schädigung im Bereich der Nahtwurzel

Der in der zweiten Hälfte des Bereichs 2 ausgebildete Grat ist in Abb. 7.23 dargestellt. In der Literatur werden scharfe Grate an den Außenkanten von Bruchflächen als charakteristische Merkmale für duktile Gewaltbrüche beschrieben. Diese sogenannten Scherlippen entstehen durch hohe Schubspannungen in Kombination mit der abrupten Änderung des Spannungszustandes und sind dem instabilen Risswachstum zuzuordnen [108].

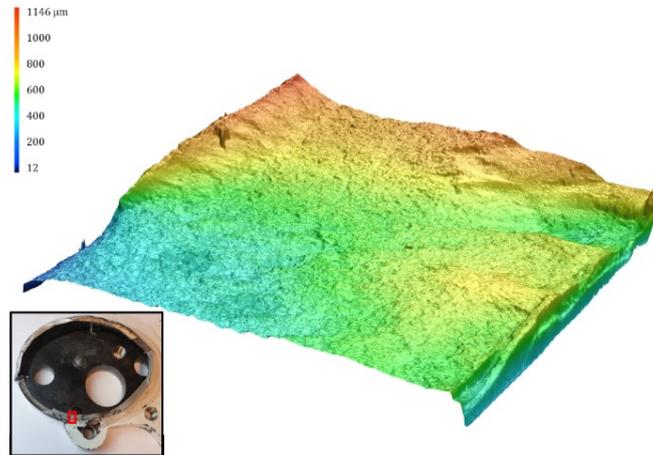


Abb. 7.23: Detailaufnahme Scherlippe im Bereich 2

Die Ausprägung der entstehenden Scherlippen ist vom Spannungszustand beeinflusst und lässt auf die Richtung der Rissausbreitung schließen. Für den ebenen Spannungszustand liegt die maximale Schubspannung in einer Ebene von 45° zur ersten Hauptspannung. In diesem Fall liegt die Bruchfläche senkrecht zur ersten Hauptspannungsrichtung und der Riss wächst entlang der zweiten Hauptspannungsrichtung. Die ausgebildete Scherlippe verläuft dann parallel zur Rissausbreitungsrichtung und weist einen Winkel von 45° zur Bruchfläche auf [108]. Eine Analyse des Höhenprofils der Bruchfläche in Abb. 7.24 bestätigt diesen charakteristischen Winkel. Ausprägung und Winkel des vorliegenden Grates weisen demnach deutliche Merkmale der beschriebenen Scherlippen auf, so dass in diesem Bereich mit großer Wahrscheinlichkeit von einem duktilen Gewaltbruch ausgegangen werden kann.

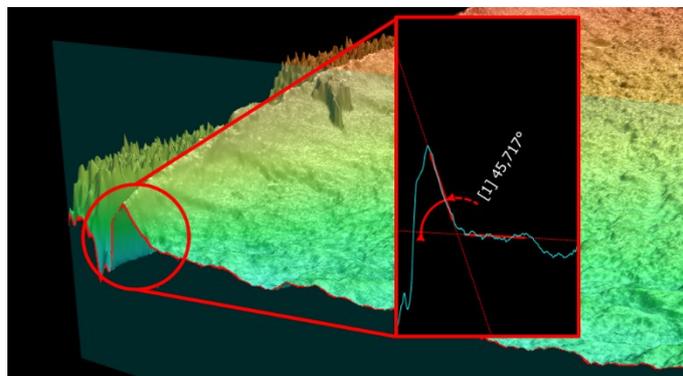


Abb. 7.24: Höhenprofil und Winkelmessung der Scherlippe, Bereich 2

Bei Betrachtung des dritten Bereichs zeigen sich verformungsarme Bruchflächen mit glitzernd rauer Oberfläche (siehe Abb. 7.25). Diese deuten nach [107] auf spröden Gewaltbruch hin. Es treten dabei Bruchflächen auf, die abgewinkelt zur Oberfläche verlaufen und die Richtung der Bruchebene weist eine markante Änderung auf. Dies kann als Anhaltspunkt für spröden Gewaltbruch durch überlagerte und während des Risshergangs veränderliche Anteile von Biege- und Torsionsbeanspruchung interpretiert werden.



Abb. 7.25: Detailaufnahme Bereich 3, Merkmale für Sprödbbruch

Dehnungsmessung

Zur weiteren Interpretation der zum beobachteten Versagen führenden Ereignisse, werden im Folgenden die Ergebnisse der Dehnungsmessung über den Versuchsverlauf zusammengefasst. Die Auswertung erfolgt auf Basis der Hauptspannungen sowie der Hauptspannungsrichtungen der fünf Messpositionen, anhand derer aussagekräftige Rückschlüsse auf beginnende Rissbildung, stabile sowie instabile Rissausbreitung gezogen werden können. Aufgrund der Lage des Schadensortes im Bereich der Achszapfenanbindung sind hierbei die in Messposition 5 aufgenommenen Beanspruchungsgrößen von besonderem Interesse, da die Dehnungsmessung hier unmittelbar in Nähe des entstandenen Risses erfolgte. Messposition 5 kann dabei dem Übergang zwischen den zuvor definierten Bereichen 1 und 2 zugeordnet werden. Bedingt durch den Abstand von Messposition und Schädigung wird von einem vernachlässigbaren Einfluss plastischer Deformationen in den Messwerten ausgegangen, so dass die Annahme linear-elastischen Materialverhaltens in den Messpositionen Gültigkeit behält. Nach einem zunächst nahezu konstanten Verlauf zeigt Abb. 7.26 eine deutliche Erhöhung der Hauptspannung σ_1 in Messposition 5 ab einer Zyklenzahl von ca. 140 000. Die Hauptspannungen in den Messpositionen 1-4 zeigen im Versuchsverlauf hingegen einen konstanten Verlauf bis zu einer Zyklenzahl von ca. 260 000, was auf zunächst lokal begrenzte Ereignisse im Bereich der Messposition 5 deutet.

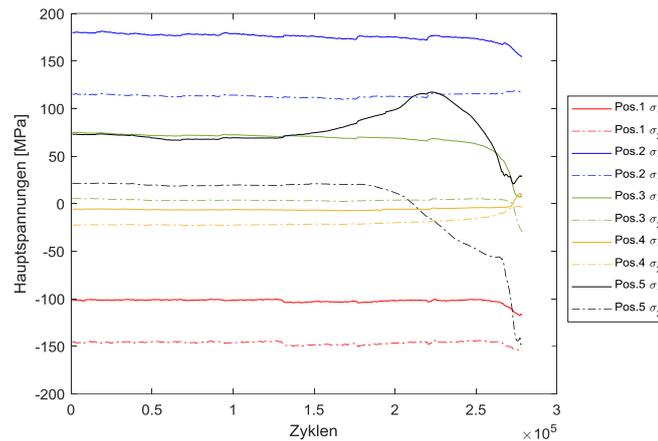


Abb. 7.26: Hauptspannungen aller Messpositionen über den Versuchsverlauf

Ebenfalls zeigt sich in Abb. 7.27 eine Veränderung der Hauptspannungsrichtung in Messposition 5, welche auf eine Änderung des lokalen Beanspruchungsfeldes durch beginnende Rissbildung ab ca. 140 000 Zyklen schließen lässt.

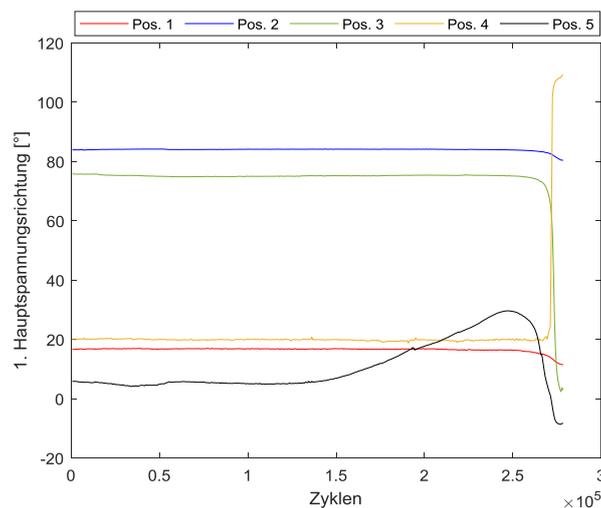


Abb. 7.27: Hauptspannungsrichtungen aller Messpositionen über den Versuchsverlauf

Die darauffolgende rapide Veränderung des Beanspruchungsfeldes zeigt sich im weiteren Versuchsverlauf ab einer Zyklenzahl von ca. 260 000 am deutlichsten in den Hauptspannungsrichtungen in den Messpositionen 3 und 4. Dies deutet auf instabiles Risswachstum bzw. Restbruch mit globalem Einfluss auf die Steifigkeit der Struktur hin. Die Hauptspannungen in den Messpositionen 3 und 4 zeigen dabei eine deutliche Entlastung des entsprechenden Strukturbereichs des Längslenkers, zurückzuführen auf den rissbedingten Verlust der Steifigkeit an der Einspannstelle. Dieser Einfluss lässt sich ebenfalls im Verlauf der Reaktionskraft am Lastangriff erkennen (siehe Abb. 7.28).

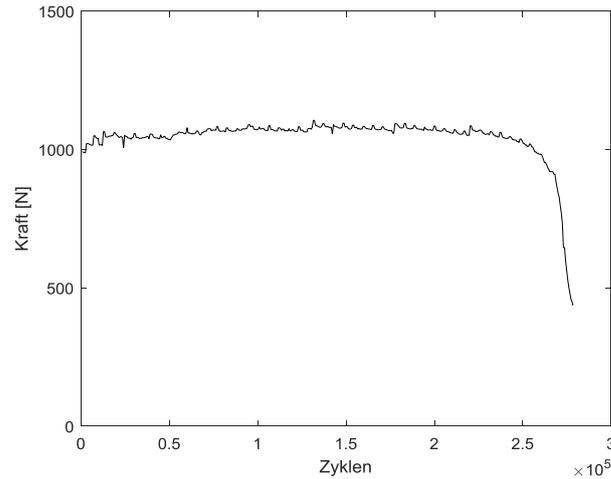


Abb. 7.28: Reaktionskraft am Lastangriff über den Versuchsverlauf

Für eine anschauliche Interpretation lassen sich ferner die Hauptspannungen in Messposition 5 mit den zugehörigen Richtungen im gewählten Bezugskoordinatensystem darstellen. Der Spannungszustand wird hierzu in vier charakteristischen Zeitpunkten betrachtet. Der rissfreie Versuchsbeginn mit konstantem Spannungsverlauf bis ca. 140 000 Zyklen dient als Referenzzustand, gefolgt von den Zuständen maximaler erster Hauptspannung bei ca. 220 000 Zyklen sowie bei maximalem Winkel der ersten Hauptspannungsrichtung bei ca. 250 000 Zyklen und dem Spannungszustand bei Versuchsende. Der in Messposition 5 zum rissfreien Versuchsbeginn herrschende Spannungszustand ist in Abb. 7.29 schematisch dargestellt. Die Beanspruchung lässt sich auf eine überlagerte Biege- und Torsionsbelastung zurückführen, die vorrangig zu einer Zugbelastung des Schweißnahtbereichs mit geringen Schubanteilen parallel zur Naht führt.

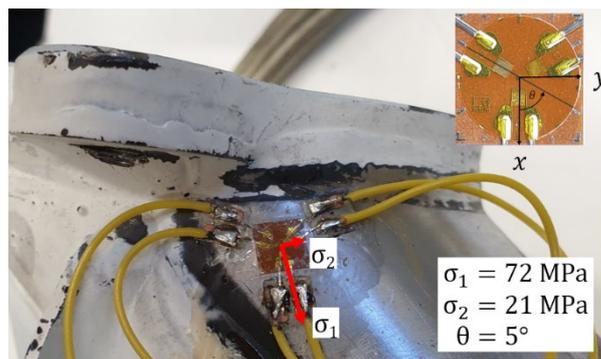


Abb. 7.29: Spannungszustand Pos. 5, rissfrei

Die Entwicklung von Betrag und Richtung der Hauptspannungen während der Schädigung ist im Folgenden von besonderem Interesse für die Deutung des Schädigungsverlaufs. Der Anstieg der ersten Hauptspannung lässt sich dabei mit einem voranschreitenden Riss und der damit verbundenen Spannungsüberhöhung um die Rissfront in Verbindung bringen, welche ebenfalls das Spannungsfeld um den Messbereich beeinflusst. Der Scheitelpunkt der Beanspruchung ist demnach zu erwarten, wenn die Rissfront den Messbereich passiert. Der Spannungszustand bei maximaler erster Hauptspannung ist schematisch in Abb. 7.30 dargestellt.

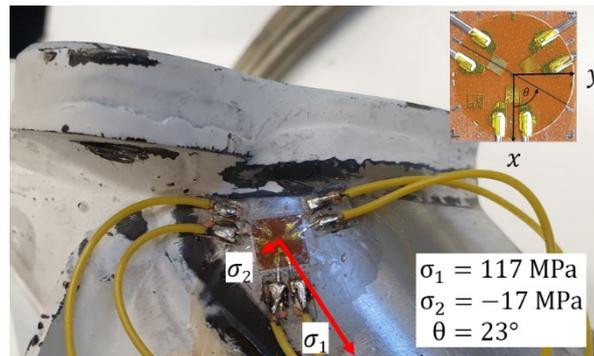


Abb. 7.30: Spannungszustand Pos. 5, maximale Hauptspannung

Es zeigt sich in Abb. 7.30 gegenüber dem Referenzzustand eine deutliche Änderung der Hauptspannungsrichtung, welche zur Interpretation der Rissausbreitungsrichtung herangezogen werden kann. Ausgehend davon, dass beim Vorüberschreiten der Rissfront an der Messposition intakte Strukturbereiche und Materialtrennungen den Messbereich beeinflussen, ist von einer Änderung des Kraftflusses und der damit verbundenen Ausrichtung des Beanspruchungsfeldes in Richtung intakter Strukturbereiche auszugehen.

Durch den Riss induzierte Materialtrennungen führen bei weiterem Voranschreiten der Rissfront zudem zu einer Entlastung des Messbereichs, welche sich deutlich in den Messwerten im Zustand des maximalen Hauptspannungswinkels abzeichnet, vgl. Abb. 7.26 bis Abb. 7.31.

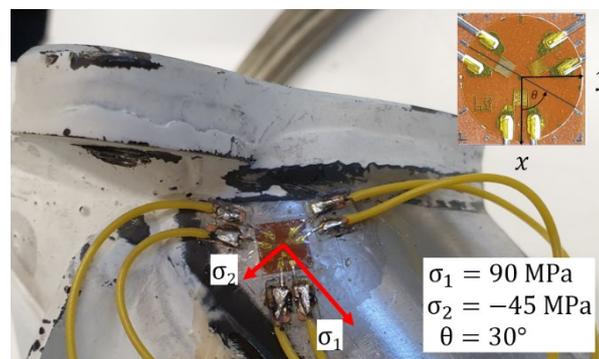


Abb. 7.31: Spannungszustand Pos. 5, maximaler Hauptspannungswinkel

Der bei Versuchsende vorliegende Riss umspannt den halben Umfang des Längslenkerrohres (siehe Abb. 7.32, grüne Pfeile). Der damit einhergehende Verlust der Tragfähigkeit der geschädigten Bereiche ist zum einen in der Änderung der Reaktionskraft am Lastangriff erkennbar, zum anderen ist der Kraftfluss senkrecht zum Rissverlauf unterbrochen, wodurch im geschädigten Bereich der Einspannung keine Zugbelastungen aufgenommen werden können. Der sich zum Versuchsende in Messposition 5 einstellende Spannungszustand ist damit dominiert durch eine parallel zur Schweißnaht wirkende Beanspruchung aus der Torsion des Längslenkerrohres, siehe Abb. 7.32.

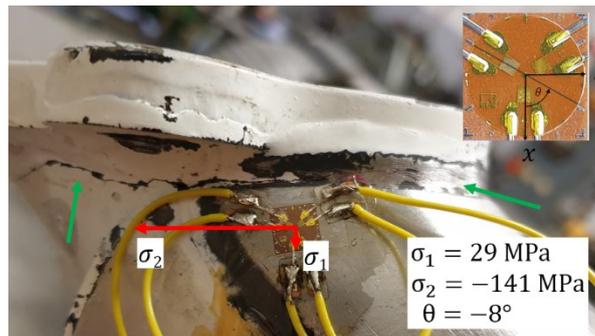


Abb. 7.32: Spannungszustand Pos. 5, Versuchsende

Mit den zuvor beschriebenen charakteristischen Merkmalen der Bruchflächen, gestützt durch die Auswertung der Dehnungsmessungen, lässt sich damit eine plausible Hypothese zu den Bereichen von Versagensbeginn, Rissfortschritt und Restbruch aufstellen und mit den zur Verfügung stehenden Mitteln hinreichend genau eingrenzen (siehe Abb. 7.33). Der Rissbeginn lässt sich demnach der Schweißnaht in Bereich 1 zuordnen, mit anschließendem Risswachstum und duktilem Gewaltbruch im zweiten Bereich. Der bei Versuchsende herrschende Spannungszustand mit dominanter Beanspruchung in Umfangsrichtung des Längslenkerrohres steht in guter Übereinstimmung mit den winklig zur Oberfläche stehenden Bruchflächen sowie der Änderung der Bruchebene im folgenden Restbruch entlang der Umfangsrichtung des Längslenkerrohres.

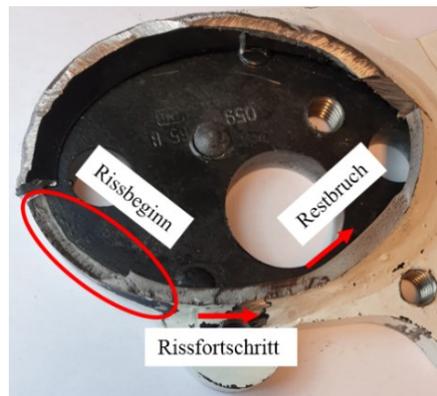


Abb. 7.33: Hypothese zum Schädigungsverlauf

7.6.4 Numerischer Abgleich

Zur Validierung der numerisch gemachten Vorhersagen zu potenziell versagenskritischen Strukturregionen erfolgt eine Gegenüberstellung des realen Schadensbildes mit dem Ergebnis der entwickelten Methodik. Das aus der entwickelten Methodik resultierende qualitative von Mises-Spannungsfeld im Versagensbereich der realen Struktur ist hierzu in Abb. 7.34 dargestellt.

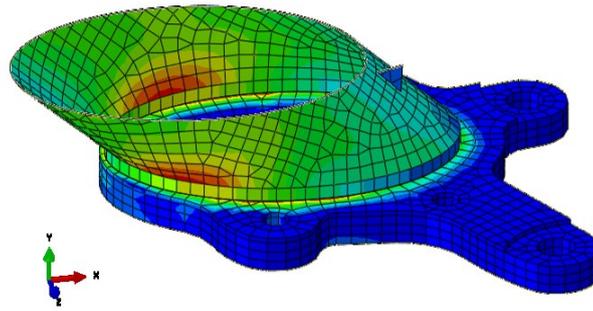


Abb. 7.34: von Mises-Beanspruchungsfeld aus entwickelter Methodik

Ein direkter Vergleich des Schadensbildes mit den durch den angewandten Algorithmus detektierten versagenskritischen Regionen in Abb. 7.35 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den im vorigen Abschnitt dargelegten Hypothesen zum Schadensursprung.

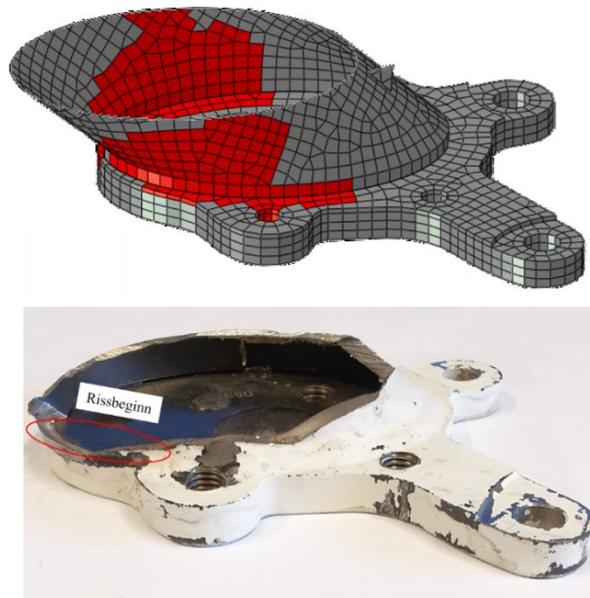


Abb. 7.35: Vergleich des Schadensbildes mit numerisch detektierten versagenskritischen Regionen

Abweichend zur realen Struktur zeigt die numerische Vorhersage in Abb. 7.35 eine symmetrische Ausprägung der Regionen mit potenziellem Schädigungsbeginn. Die Beschränkung der real auftretenden Schädigung auf einen der Bereiche lässt sich auf die asymmetrische Konfiguration der Gewindebohrungen zur Verschraubung der Achszapfenanbindung zurückführen, siehe Abb. 7.36.

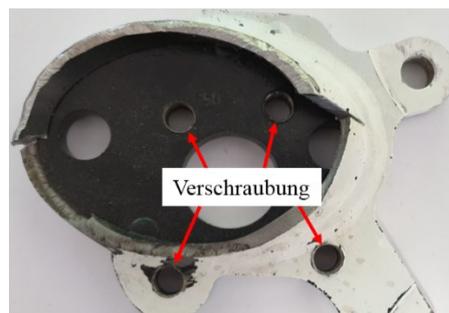


Abb. 7.36: Asymmetrische Gewindebohrungen

Bedingt durch die Verschraubung in unmittelbarer Nähe zur Schweißnaht stellt sich hier, im Gegensatz zu den homogen aufgetragenen Randbedingungen des Simulationsmodells, eine ungünstigere Beanspruchungssituation ein. Ferner zeigt Abb. 7.37, dass durch den angewandten Algorithmus weitere, im Experiment ungeschädigte Bereiche als potenziell versagenskritische Regionen detektiert werden. Dies kann größtenteils – wie in Abschnitt 7.5.1 dargelegt – auf Abweichungen vom numerischen Simulationsmodell zur realen Struktur, speziell durch die fehlende detaillierte Modellierung der Schweißnahtgeometrie und damit verbundene Spannungsüberhöhungen zurückgeführt werden. Die Genauigkeit der Vorhersage ist damit – wie bei allen Modellen – durch die Qualität des verwendeten Modells begrenzt, wobei sich die Sensitivität über die in Abschnitt 4.5 eingeführten Parameter der Formzahl sowie dem Faktor für die Grenzspannung versagenskritischer Elemente gegenüber modellierungsbedingter Spannungsüberhöhungen anpassen lässt.

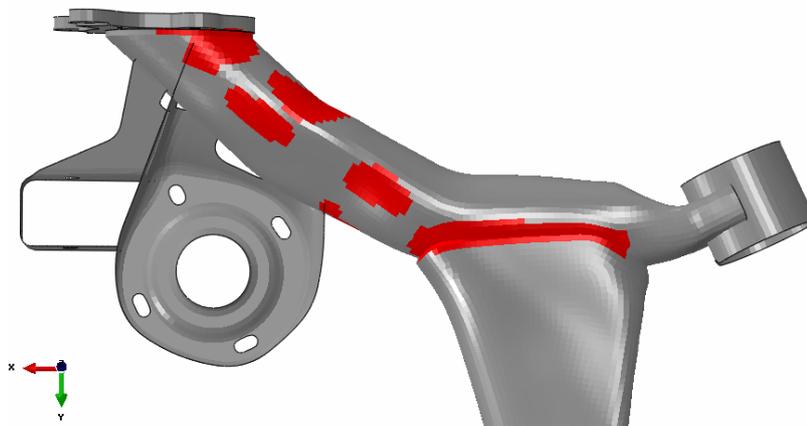


Abb. 7.37: Detektierte versagenskritische Strukturbereiche

7.7 Zusammenfassung

Das vergangene Kapitel beschreibt die zur Validierung des für breitbandig angeregte Systeme entwickelten Wichtungskoeffizienten durchgeführten experimentellen Untersuchungen. Die gewonnenen Erkenntnisse lassen sich an dieser Stelle wie folgt zusammenfassen: Grundsätzlich bestätigen die durchgeführten Untersuchungen die auf Basis des entwickelten Wichtungskoeffizienten getroffenen numerischen Vorhersagen zu maximalem Beanspruchungsfeld und Versagensort. Aus den ermittelten versagenskritischen Strukturregionen lassen sich ferner wertvolle Informationen zu sinnvollen Messpositionen für die experimentelle Spannungs- und Lebensdaueranalyse ziehen. Darüber hinaus können durch Auflösen der an der Gesamtschwingung beteiligten Schwingformen wichtige Rückschlüsse zu dominanten Moden gezogen werden, wodurch Versuchsplanung und Durchführung erleichtert werden. Wie auch in der numerischen Simulation ist dabei ebenfalls das reale Beanspruchungsfeld stark von den aufgetragenen Randbedingungen beeinflusst. Auf einen quantitativen Abgleich der im Experiment erreichten Zyklenzahl mit einer numerischen Lebensdaueranalyse des vorliegenden Simulationsmodells wird im Folgenden verzichtet:

Einerseits zeigen die Ergebnisse der statischen Dehnungsmessung, dass zwar das Beanspruchungsfeld in einigen Messpositionen mit dem vorliegenden Modellierungsgrad hinreichend genau abgebildet werden kann; lokal zeigen sich jedoch besonders im Bereich der Rissinitiierung an der realen Struktur große Abweichungen zur Simulation. Andererseits stehen für eine zuverlässige numerische Vorhersage für die vorliegende Struktur unzureichende Materialdaten und fertigungstechnologische Informationen zur Verfügung, sodass die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen sich auf qualitative Vergleiche beschränken.

8 Fazit und Ausblick

Die vorliegende Arbeit greift den etablierten Ansatz der modalen Superposition zur Lösung von Bewegungsgleichungen linearer Systeme auf und erweitert dessen konventionelle Anwendung auf qualitative Betrachtungen zu potenziellen Versagensorten. Die nach gängiger Festigkeitsbewertung klassische Herangehensweise der Ermittlung orts- und zeitabhängiger Beanspruchungsfelder wird damit auf die Betrachtung einer qualitativen oberen Schranke der dynamischen Beanspruchung reduziert, welche *a priori* – d. h. ohne aufwendige numerische Analysen – ermittelt werden kann. Bisherige Ansätze zur Detektion versagenskritischer Strukturregionen basieren im Grundsatz auf der automatisierten Analyse vorliegender Beanspruchungs-Zeit-Verläufe (sog. Hot-Spot Filter) oder auf einer separaten Betrachtung einzelner modaler Beanspruchungsfelder mit anschließender manueller Interpretation.

Durch die Entwicklung und Validierung einer integralen Methodik zur automatisierten Detektion versagenskritischer Regionen dynamisch beanspruchter Strukturen leistet die vorliegende Arbeit damit einen wichtigen Beitrag zur Weiterentwicklung numerischer Verfahren der Strukturanalyse.

Nach Recherche und besten Wissens des Autors wird dabei erstmals explizit der Beitrag spezifischer modaler Anteile zur dynamischen Beanspruchung berücksichtigt. Die Superposition erfolgt konsistent auf Grundlage der Frequenzbereichslösung der Bewegungsgleichung im Modalraum, wodurch sowohl die Normierung der Eigenvektoren als auch Last- und Dämpfungseinflüsse implizit erfasst werden. Die Grundannahme der entwickelten Methodik besteht dabei in der Hypothese, dass die maximale strukturelle Beanspruchung direkt aus der maximalen Schwingungsantwort der modalen Koordinaten des Systems resultiert und diese bei phasengleichem Auftreten aller modalen Maxima zu erwarten ist. Grundlegend stimmen die getroffenen Annahmen somit mit denen der etablierten Antwortspektrenmethode überein. Als klare Abgrenzung zu dieser bestehenden Methode, welche auf der Ermittlung der jeweiligen modalen Maxima auf Basis transienter Analysen bei gegebenen Last-Zeit-Verläufen beruht, ermöglicht die entwickelte Methodik hingegen *a priori* Aussagen, welche abgesehen von der Modalanalyse ohne weitere dynamische Rechnungen getroffen werden. Die Bewertung potenziell versagenskritischer Strukturregionen erfolgt dabei ausschließlich auf Grundlage normierter Beanspruchungsniveaus sowie der Steigung der zugrunde gelegten Wöhlerlinie, was den

entwickelten Ansatz vor dem Hintergrund normierter Wöhlerlinien für metallische Werkstoffe universell einsetzbar macht.

Die so approximierten Beanspruchungsfelder liefern mit geringem Rechenaufwand wertvolle Informationen über hochbeanspruchte Strukturbereiche. In frühen Entwicklungsstadien, in denen Lastfälle zwar überschlägig bekannt aber oftmals noch nicht abschließend quantifiziert sind, bieten sich damit zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten. Einerseits lässt sich mit der beschriebenen Methodik effizient eine Vielzahl von Lastkonfigurationen untersuchen, andererseits zeigen die experimentellen Untersuchungen dieser Arbeit hohes Potenzial zur effektiven Platzierung von Dehnungsmessstreifen und zur Reduktion redundanter Messpunkte in der experimentellen Validierung.

Im Hinblick auf zukünftige Untersuchungen lassen sich folgende offene Fragestellungen angeben:

Die Untersuchungen dieser Arbeit beschränken sich zunächst auf deterministisch angeregte Strukturen. Offen bleibt hierbei die Weiterentwicklung der aufgestellten Hypothesen für stochastisch angeregte Strukturen. Die Beschreibung stochastischer Systemgrößen erfolgt dabei im Grundsatz auf Basis von Leistungsdichtespektren. Durch die Wichtung dieser mit den modalen Vergrößerungsfunktionen lassen sich grundsätzlich zu den in dieser Arbeit entwickelten Wichtungskoeffizienten äquivalente Ansätze herleiten. Modale Beiträge können auf dieser Basis in Form von Wahrscheinlichkeiten beispielsweise über die Standardabweichung und den damit verbundenen Effektivwert angegeben werden. Weitere Untersuchungen sind besonders hinsichtlich der zu überlagernden modalen Beanspruchungsgrößen notwendig, beispielsweise eine stochastische Betrachtung modaler Spannungskomponenten oder Untersuchungen zur für den stochastischen Prozess formulierten äquivalenten von Mises-Vergleichsspannung.

Eine Erweiterung der Untersuchungen ist ferner hinsichtlich des betrachteten Dämpfungsmodells vorzunehmen. Während beispielsweise die Umsetzung von Struktur- oder Hysteresedämpfung wenig problematisch erscheint, bedarf die Behandlung nichtmodaler Dämpfung detaillierterer Betrachtungen. Aus der modalen Entkopplung des allgemein gedämpften Systems im Zustandsraum resultieren sowohl komplexe modale Koordinaten als auch komplexe Eigenvektoren. Es ist hierbei zu prüfen, inwiefern sich modale Wichtungskoeffizienten auf Basis komplexer modaler Koordinaten entwickeln lassen sowie ferner, welche Informationen zu modalen Beanspruchungsgrößen aus den komplexen Eigenvektoren abgeleitet werden können. Von weiterem Interesse erscheint dabei der Umgang mit der Phasenlage der Eigenvektoren bei der Superposition.

Die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Methodik konnte im Grundsatz mit positivem Ergebnis auch auf komplexe Simulationsmodelle angewandt werden. Die gezeigten Beispiele zeichnen sich hierbei durch einfache Lastfälle aus, sodass die Anwendbarkeit durch weitere Untersuchungen unter realen Lastbedingungen zu bestätigen ist. Vor allem die mit der Ermittlung der Wichtungskoeffizienten für schmalbandig angeregte Systeme in Verbindung stehende Fourier-Transformation realer Lastsignale ist hierbei kritisch zu bewerten. Die durchgeführten experimentellen Untersuchungen bestätigen zwar die grundsätzliche Anwendbarkeit unter

Verwendung von Messdaten, diese müssen jedoch für zuverlässige Aussagen allgemein von hoher Qualität sein.

Unter Anwendung fortgeschrittener Verfahren der optischen Dehnungsmessung ist dabei ferner die Implementierung von gemessenen modalen Beanspruchungsdaten anzudenken und auf Umsetzbarkeit zu untersuchen.

Sowohl für die Bewertung der ermittelten Beanspruchungen als auch für die Erzeugung von Referenzlösungen wurden vereinfachte Verfahren der Lebensdaueranalyse herangezogen. Dabei wurde der Mittelspannungseinfluss vernachlässigt. Abhängig vom Lastfall ist dessen Einfluss auf die Zuverlässigkeit der getroffenen Vorhersagen in weiteren Untersuchungen zu überprüfen. Im Zuge dessen ist eine Erweiterung des modalen Superpositionsansatzes um die Überlagerung statischer Beanspruchungsfelder vorzunehmen. Nach den Erkenntnissen der durchgeführten Untersuchungen ist hierfür eine Normierung der entsprechenden statischen Beanspruchungsgrößen notwendig. Zur abschließenden Validierung sollten die durchgeführten Untersuchungen auf die Verwendung weiterer modaler Felder erweitert und hinsichtlich der Anwendung moderner Schädigungsparameter überprüft werden. Für diese sollte erneut eine mögliche Frequenzkorrektur zur Berücksichtigung von Schwingfrequenz und Lastwechseln höherer Moden untersucht werden.

Die Anzahl der zu überlagernden Eigenformen wurde in den durchgeführten Untersuchungen zunächst ausgeklammert. Durch einen verkürzten Modalraum wird jedoch der Einfluss höherer Moden vernachlässigt. Die Wirkung höherer Moden lässt sich dabei beispielsweise durch eine statische Näherung approximieren (*engl. mode acceleration method*, MAM). Im Zuge weiterer Untersuchungen sollte geprüft werden, inwiefern dieser Ansatz ebenfalls zur Verbesserung der entwickelten modalen Wichtungskoeffizienten beitragen kann.

Zu Entwicklungszwecken erfolgten die Berechnungen in einer von der FE-Umgebung separierten Programmierumgebung durch Export aller erforderlichen Daten. Ein Großteil des numerischen Aufwands ist hierbei dem Dateiimport und -export zuzuschreiben. Dieser erfolgte für die durchgeführten Untersuchungen zwar lediglich einmal für jedes Set von Randbedingungen; es zeigt sich hier jedoch großes Potenzial zur Steigerung der Effizienz der beschriebenen Methodik. Die in ABAQUS integrierte PYTHON-Schnittstelle, welche vorrangig für Export und Visualisierung der Untersuchungsergebnisse Anwendung fand, bietet ferner leistungsfähige Möglichkeiten der Programmierung, wodurch der Ansatz wesentlich effizienter und damit leicht in automatisierte Berechnungen, Parameterstudien und Optimierungsalgorithmen implementierbar ist. Weitere Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich damit beispielsweise für die Entwicklung von Verfahren der Modellreduktion sowie automatisierter Substrukturierung und Submodellierung.

Anhang A

Berücksichtigung von Schwingfrequenz und Lastwechseln

Als Grundlage für die Untersuchung von Frequenzeinfluss und damit verbundenen Lastwechseln dient die Basquin-Gleichung aus Kapitel 3 zur mathematischen Beschreibung der Wöhlerlinie im Zeitfestigkeitsbereich:

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \sigma'_f 2N_f^b \quad (167)$$

Das Verhältnis der resultierenden Bruchlastwechsel $N_{f,1}$ und $N_{f,2}$ für zwei Spannungsamplituden $\sigma_{a,1}$ und $\sigma_{a,2}$ stellt sich damit wie folgt dar [84]:

$$\frac{N_{f,1}}{N_{f,2}} = \left(\frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{a,2}} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (168)$$

Bei Anwendung des modalen Superpositionsansatzes auf die Beanspruchungen lässt sich das aus der Belastung resultierende Beanspruchungsfeld $\mathbf{S}(t)$ über die Superposition der an der Schwingung beteiligten modalen Beanspruchungsanteile $\mathbf{S}_i(t)$ darstellen:

$$\mathbf{S}(t) = \sum_i^r \mathbf{S}_i(t) = \sum_i^r \xi_i q_i(t) \quad (169)$$

Zur Untersuchung einer möglichen Frequenzkorrektur zur Berücksichtigung höherer Lastwechsel in den höheren Schwingformen lassen sich die Spannungsamplituden $\sigma_{a,i}$ aus Gl. (168) über die Maxima jedes modalen Beanspruchungsanteils approximieren. Die Maxima der modalen Beanspruchungsgrößen $S_{\max,i}$ stellen sich dabei mit den in Kapitel 4 entwickelten Wichtungskoeffizienten²⁴ wie folgt dar:

$$S_{\max,i} = \|\Gamma_i \xi_i\|_{\infty} \quad (170)$$

Es kann damit eine Bewertung der modalen Beanspruchungsanteile hinsichtlich der ertragbaren Bruchlastwechsel erfolgen:

$$2N_{f,i} = (\sigma'_f)^{\frac{1}{b}} (S_{\max,i})^{\frac{1}{b}} \quad (171)$$

²⁴ hier unabhängig von der Art der Erregung als Γ_i bezeichnet

Zur Berücksichtigung der zur Ermüdung führenden Lastwechsel wird im Folgenden die Hypothese der linearen Schadensakkumulation herangezogen. Bei Annahme linearer Schadensakkumulation nach Palmgren [91] und Miner [77] steht der Anteil der Schädigung D_i , den eine Struktur bei Beanspruchung mit der Spannungsamplitude $\sigma_{a,i}$ erfährt, im direkten Zusammenhang zum Verhältnis der Anzahl von Lastzyklen n_i und der aus der zugehörigen Spannungsamplitude resultierenden ertragbaren Zyklenzahl²⁵ N_i (auch Bruchschwingspielzahl):

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (172)$$

In diesem Sinne wird für die folgenden Betrachtungen jeder modale Beanspruchungsanteil als unabhängiges Beanspruchungskollektiv aufgefasst und von einer unabhängigen Aufsummierung der modalen Teilschädigungen ausgegangen. Unter der Voraussetzung, dass alle Moden über den gleichen Zeitraum angeregt werden, ist hierbei die Zahl der Lastwechsel direkt proportional zur jeweiligen Eigenfrequenz $f_{0,i}$ der an der Schwingung beteiligten Eigenformen [105]. Es kann damit eine auf die Belastungszeit bezogene Schädigung $D_{z,i}$ jeder Eigenform aufgestellt werden:

$$D_{z,i} = \frac{f_{0,i}}{N_i} \quad (173)$$

Wie in Kapitel 4 beschrieben, stellen die aus der entwickelten Methodik resultierenden Beanspruchungsfelder eine Momentaufnahme des maximalen Beanspruchungszustandes dar. Eine Bewertung der daraus resultierenden Ermüdungsfestigkeit kann daher ausschließlich ohne Informationen zum zeitlichen Verlauf der Beanspruchung erfolgen. Die Berücksichtigung einer höheren Teilschädigung durch höhere Moden bei gleicher Belastungszeit wird daher im Folgenden über die Anpassung der modalen Beanspruchungsanteile umgesetzt. Diese werden dazu so gewichtet, dass die resultierenden Bruchlastwechsel entsprechend der jeweiligen zeitbezogenen Schädigung reduziert bzw. erhöht werden. Die Bruchschwingspielzahl wird dazu aus der zeitbezogenen Schädigung $D_{z,i}$ ermittelt:

$$N_{z,i} = \frac{1}{D_{z,i}} = \frac{N_i}{f_{0,i}} \quad (174)$$

Die den Bruchschwingspielzahlen zugeordneten Spannungsamplituden ergeben sich nach Gl. (171) wie folgt:

$$S_{\max,z,i} = \sigma'_f N_{z,i}^b \quad (175)$$

Aus dem Verhältnis der ursprünglichen Spannungsamplitude $S_{\max,i}$ zur angepassten Spannungsamplitude $S_{\max,z,i}$ lässt sich damit eine Frequenzkorrektur zur Wichtung des Frequenzeinflusses auf die Schädigung bestimmen:

²⁵ $N_i = 2N_{f,i}$

$$\frac{S_{\max,z,i}}{S_{\max,i}} = \frac{N_{z,i}^b}{N_i^b} = \left(\frac{1}{f_{0,i}}\right)^b \rightarrow S_{\max,z,i} = S_{\max,i} (f_{0,i})^{-b} \quad (176)$$

Die resultierenden Frequenzkorrekturfaktoren $(f_{0,i})^{-b}$ sind für die ersten zehn Moden des beschriebenen Balkenbeispiels in Abb. A.1 dargestellt.

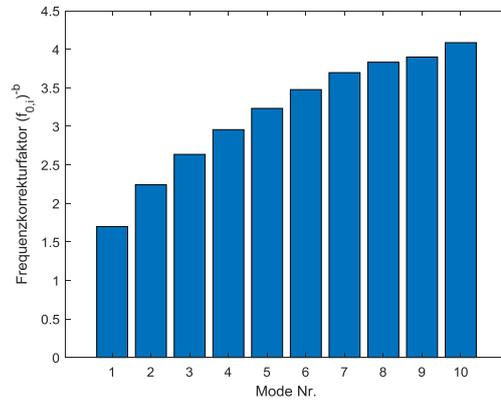


Abb. A.1: Frequenzkorrekturfaktoren der ersten zehn Moden

Zur Untersuchung des Einflusses der beschriebenen Frequenzkorrektur wird diese zunächst auf die entwickelte Methodik für breitbandig erregte Systeme angewendet. Das superponierte von Mises-Beanspruchungsfeld der über die Wichtungskoeffizienten $\Gamma_{b,i}$ gewichteten modalen Beanspruchungen ist dazu dem frequenzkorrigierten Beanspruchungsfeld in Abb. A.2 exemplarisch für Lastposition $x = 100$ mm und modaler Dämpfung $\vartheta = 5\%$ gegenübergestellt.

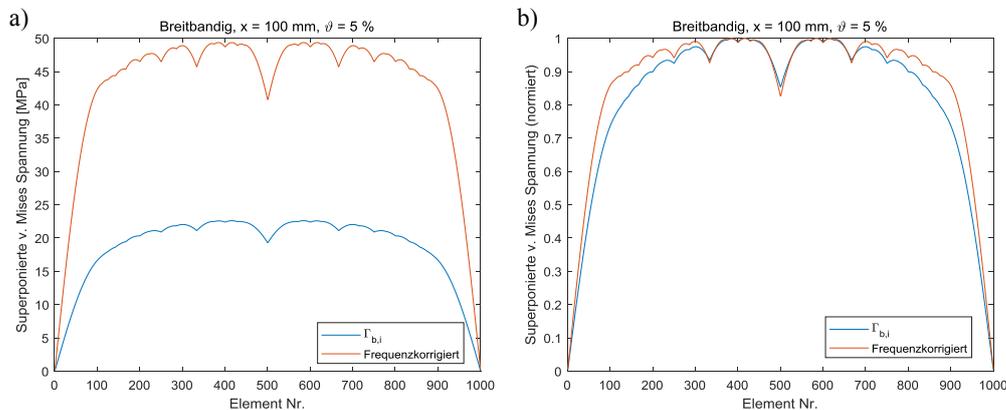


Abb. A.2: Superponierte v. Mises Spannung, breitbandige Anregung a) Vergleich ursprünglicher Wichtung und Frequenzkorrektur b) Normierte Darstellung

Es zeigt sich durch die Frequenzkorrektur in Abb. A.2 a eine generelle Erhöhung des globalen Beanspruchungsniveaus. Zur qualitativen Beurteilung erfolgt daher eine normierte Darstellung der Ergebnisse in Abb. A.2 b. Diese zeigt zunächst eine leichte Erhöhung der Beanspruchung in den äußeren Strukturregionen, während das qualitative Beanspruchungsfeld im Bereich der Balkenmitte nahezu unverändert bleibt. Zurückzuführen ist dies auf die durch die Frequenzkorrektur höher gewichteten modalen Anteile des höheren Frequenzbereichs, die durch die räumliche Ausprägung der höheren Moden ebenfalls lokale Maxima in den Randregionen

aufweisen. Deutlicher lässt sich dieser Effekt durch die Betrachtung der aus der Beanspruchung resultierenden Ermüdung darstellen. Die Bruchschwingspielzahl jedes Elements lässt sich hierzu für das superponierte Beanspruchungsfeld aus der Basquin-Gleichung ermitteln. Für einen direkten qualitativen Vergleich erfolgt die Bewertung ebenfalls normiert. Die Superponierten von Mises-Spannungsfelder werden hierzu auf ihr Maximum normiert. Ferner wird der Ermüdungsfestigkeitskoeffizient $\sigma'_f = 1$ gewählt. Es lässt sich damit ein qualitativer Vergleich lediglich auf Basis der Steigung der Wöhlerlinie durchführen, wobei die Bruchschwingspielzahl für die maximale Beanspruchung bei $N = 1$ liegt. Da die Bruchschwingspielzahlen Unterschiede über mehrere Größenordnungen aufweisen, erfolgt die Darstellung über die Schädigung, welche als Kehrwert der Bruchschwingspielzahl definiert ist. Die Gegenüberstellung der normierten Schädigung der über die Wichtungskoeffizienten $\Gamma_{b,i}$ gewichteten modalen Beanspruchungen ist in Abb. A.3 a der frequenzkorrigierten Schädigung exemplarisch für Lastposition $x = 100$ mm und modaler Dämpfung $\vartheta = 5\%$ gegenübergestellt. Die relative Abweichung der Schädigung in Abb. A.3 b zeigt dabei einen deutlichen Einfluss der Frequenzkorrektur in den durch die höheren Moden beeinflussten Randbereichen der Struktur von ca. 25%.

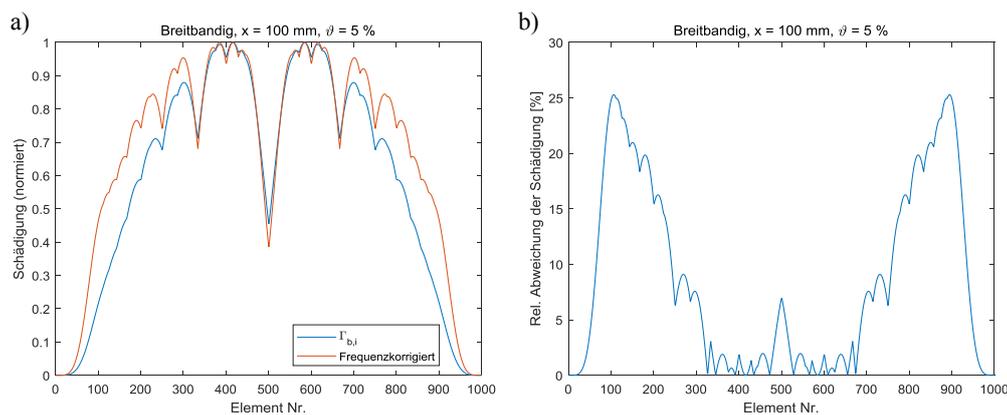


Abb. A.3: a) Normierte Schädigung ursprünglicher Wichtung und Frequenzkorrektur, breitbandige Anregung, b) relative Abweichung

Das beschriebene Beispiel zeigt, dass eine Berücksichtigung der Lastspiele bei der Wichtung modaler Beanspruchungsfelder – neben der generellen Erhöhung der globalen Beanspruchung – vor allem einen Einfluss auf die räumliche Ausprägung der lokalen Maxima hat. Deutlicher lässt sich dies bei der Betrachtung schmalbandig angeregter Systeme beobachten. Exemplarisch wird dazu für das schmalbandig angeregte System eine resonante Anregung der ersten drei Eigenformen in Lastposition $x = 100$ mm gewählt; die modale Dämpfung beträgt $\vartheta = 5\%$. Das superponierte von Mises-Beanspruchungsfeld der über die Wichtungskoeffizienten $\Gamma_{s,i}$ gewichteten modalen Beanspruchungen ist dem frequenzkorrigierten Beanspruchungsfeld in Abb. A.4 gegenübergestellt.

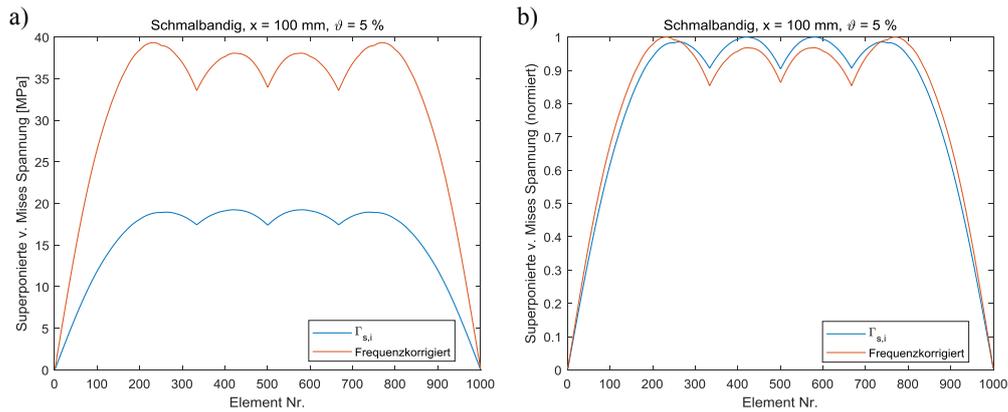


Abb. A.4: Superponierte v. Mises Spannung, schmalbandige Anregung a) Vergleich ursprünglicher Wichtung und Frequenzkorrektur b) Normierte Darstellung

Abseits der bereits beschriebenen Erhöhung des globalen Beanspruchungslevels zeigt sich in der normierten Darstellung in Abb. A.4 b eine Verschiebung der globalen Maxima. Deutlicher wird dies bei Betrachtung der aus den Beanspruchungen resultierenden normierten Schädigung in Abb. A.5. Es kann dabei eine deutliche Verlagerung der Bereiche maximaler Schädigung aus der Strukturmitte in Richtung der Randbereiche festgestellt werden.

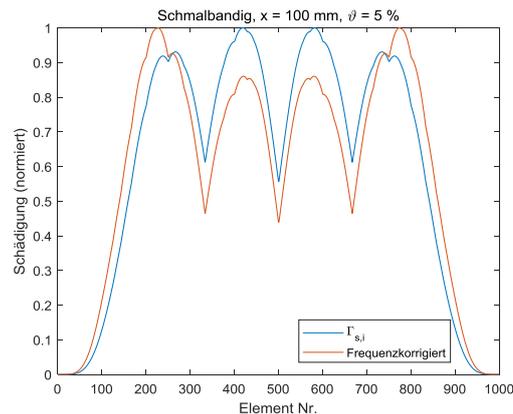


Abb. A.5: Normierte Schädigung ursprünglicher Wichtung und Frequenzkorrektur, schmalbandige Anregung

Die beschriebenen Untersuchungen erfolgten durch vereinfachte Ansätze zur Bestimmung der Bruchlastspielzahl auf Basis der Basquin-Gleichung und unabhängiger linearer Schadensakkumulation der jeweiligen modalen Beanspruchungsanteile. Der tatsächliche Beanspruchungs-Zeit-Verlauf wurde dabei vernachlässigt. Zur Bewertung der beobachteten Effekte wird daher im Folgenden eine numerische Lebensdaueranalyse in der kommerziellen Software fe-safe durchgeführt. Basis der Lebensdauerberechnung ist eine transient-dynamische Zeitbereichsanalyse des modal entkoppelten Systems. Das untersuchte System wird hierzu mit den ersten zehn Eigenvektoren entkoppelt und mit einer Einzellast in der Position $x = 100$ mm belastet. Die Belastung erfolgt über einen Zeitraum von $t = 20$ s bei konstanter modaler Dämpfung von $\vartheta = 5\%$ und mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$ s. Als Lastsignal wird zum einen die direkte Anregung aller zehn betrachteten Moden gewählt (vgl. Lastfall L21 in Abschnitt 4.2.3), zum anderen erfolgt eine schmalbandige

Anregung der ersten drei Eigenformen des Systems. Die jeweiligen Amplituden der Frequenzanteile sind hierbei mit $a_m = 1$ konstant gehalten:

$$p(t) = \sum_m a_m \sin(\Omega_m t) \quad (177)$$

Auf Basis der Ergebnisse der Zeitbereichsanalysen im Modalraum erfolgt die Ermittlung des Beanspruchungs-Zeit-Verlaufs in jedem Knoten durch Kombination der modalen Spannungen mit den zugehörigen modalen Koordinaten in jedem Zeitschritt. Die Ermittlung der Lastzyklen und den zugehörigen Amplituden erfolgt über ein Rainflow-Zählverfahren [70], angewendet auf den physikalischen Beanspruchungs-Zeit-Verlauf in jedem Knoten. Die Auswertung der Bruchschwingenspielzahlen erfolgt über die vorzeichenbehaftete²⁶ von Mises-Vergleichsspannung und einer auf das Maximum der Beanspruchung angepassten Wöhlerlinie mit $\sigma'_f = 100$ MPa und $b = -0.2$. Als Grenzwert für die Dauerfestigkeit wird dabei eine Zyklenzahl von $N_D = 1 \cdot 10^6$ gewählt. Als anschauliches Bewertungskriterium wird die aus dem Kehrwert der Bruchspielzahlen gebildete Schädigung in jedem Knoten betrachtet und den aus der entwickelten Methodik resultierenden Schädigungen gegenübergestellt, siehe Abb. A.6. Für den direkten qualitativen Vergleich erfolgt die Auswertung normiert.

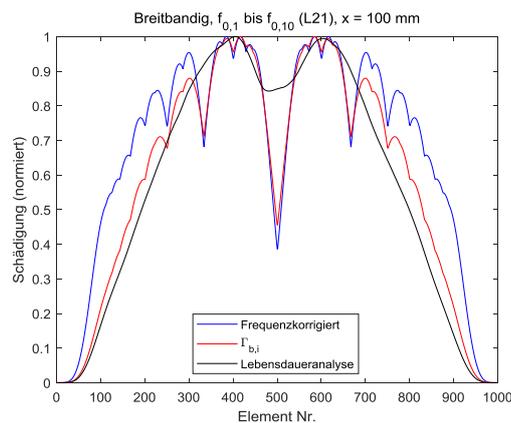


Abb. A.6: Gegenüberstellung der normierten Schädigung aus numerischer Lebensdaueranalyse und entwickelter Methodik, breitbandige Anregung

Trotz breitbandiger Anregung zeigen sich vor allem dominante Anteile der ersten drei Eigenformen an der Gesamtschädigung, was eine Auswertung der Schädigung auf Basis der Maxima der modalen Beanspruchungsanteile nach Gl. (171) in Abb. A.7 bestätigt. Es wird dabei deutlich, dass sowohl durch die ursprüngliche Methodik als auch bei Anwendung der beschriebenen Frequenzkorrektur die globalen Maxima der Schädigung zuverlässig approximiert werden, jedoch teilweise große Abweichungen in den lokalen Minima auszumachen sind. Diese Abweichungen sind direkt auf die mit der entwickelten Methodik verbundenen Annahmen der phasengleichen Überlagerung sowie der Betrachtung der Beanspruchungs-Beträge zurückzuführen.

²⁶ Vorzeichen aus dem Vorzeichen der hydrostatischen Spannung

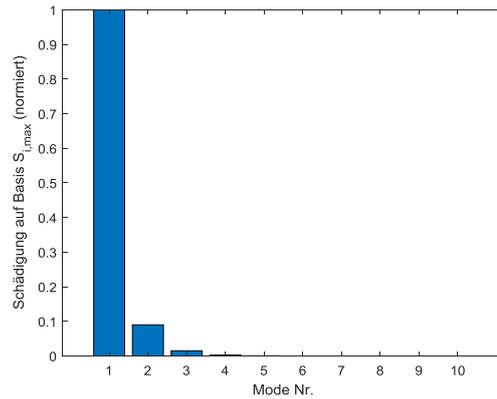


Abb. A.7: Modale Schädigungsanteile, breitbandige Anregung (normiert)

Es zeigt sich außerdem eine generelle Überschätzung des Einflusses höherfrequenter modaler Anteile an der Gesamtschädigung durch die entwickelte Methodik. Dieser Effekt wird durch die beschriebene Frequenzkorrektur weiter verstärkt, was zu konservativeren Ergebnissen hinsichtlich potenziell höherbeanspruchter Strukturregionen, vor allem in den Randbereichen der untersuchten Struktur führt. Zurückzuführen ist dieser Effekt zum einen auf die phasengleiche Überlagerung aller Moden, zum anderen erfolgt in der entwickelten Methodik keine direkte Bewertung der Auftretenden Lastzyklen hinsichtlich ihrer Amplitude. Diese erfolgt in der durchgeführten Lebensdaueranalyse auf Basis des Grenzwertes zur Dauerfestigkeit, wohingegen in der entwickelten Methodik lediglich eine Wichtung auf Basis der Verhältnisse zur maximal auftretenden Schädigung erfolgt. Höherfrequente Beanspruchungsanteile, deren Amplitude theoretisch keine Schädigung zur Folge hat, werden somit in die Superposition miteinbezogen, was zu einer konservativeren Abschätzung führt.

Bei Betrachtung der Ergebnisse des in den ersten drei Eigenformen schmalbandig angeregten Systems zeigt sich ferner ein deutlicher Einfluss der beschriebenen Frequenzkorrektur, welcher – wie bereits beschrieben – eine Verlagerung der globalen Maxima in den Randbereich der Struktur zur Folge hat. Ein Vergleich mit der durchgeführten Lebensdaueranalyse in Abb. A.8 zeigt, dass diese Verlagerung nicht den tatsächlich auftretenden globalen Maxima der Schädigung der Referenzlösung entspricht, sondern zu nichtkonservativen Rückschlüssen führen kann. Dem entgegengesetzt zeigt die durch die ursprünglichen modalen Wichtungskoeffizienten ermittelte Schädigung gute Übereinstimmung der globalen Maxima, mit einer konservativeren Abschätzung der Maxima der Randbereiche.

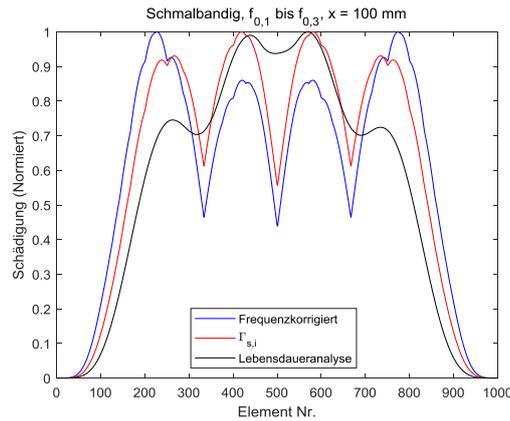


Abb. A.8: Gegenüberstellung der normierten Schädigung aus numerischer Lebensdaueranalyse und entwickelter Methodik, schmalbandige Anregung

Eine Betrachtung der auf Basis der modalen Maxima ermittelten modalen Anteile an der Schädigung in Abb. A.9 zeigt vorrangig Schädigungsanteile der Moden 2 bis 6, wobei Mode 3 den größten Beitrag zur Schädigung leistet.

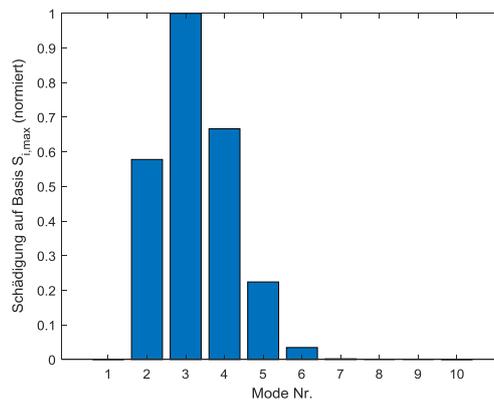
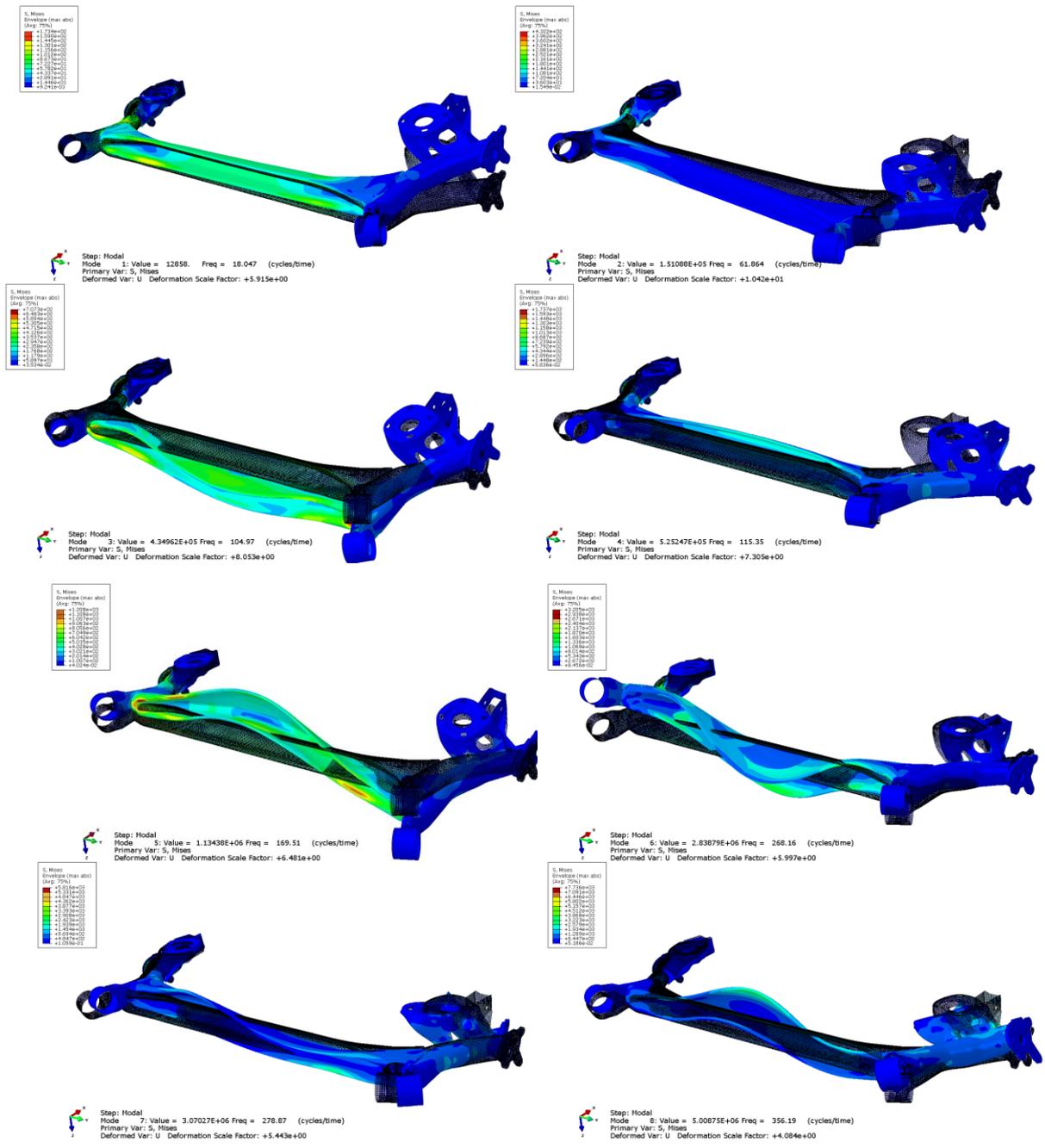


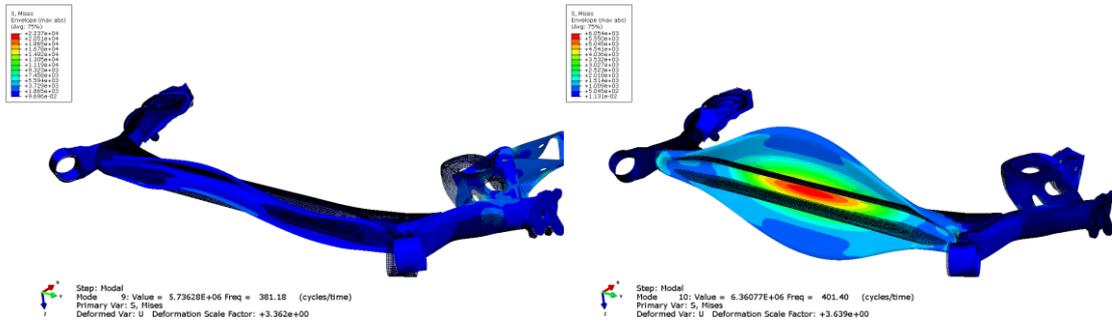
Abb. A.9: Modale Schädigungsanteile, schmalbandige Anregung (normiert)

Durch Abgleich der durch die entwickelte Methodik erzielten Ergebnisse mit numerischen Lebensdaueranalysen kann damit gezeigt werden, dass eine ergänzende Berücksichtigung der Lastfrequenz bei der Wichtung der modalen Beanspruchungsanteile, abhängig vom Lastfall, zur nichtkonservativen Approximation globaler Maxima führen kann. Ferner zeigen die auf Basis der entwickelten Wichtungskoeffizienten erzielten Ergebnisse sehr gute Übereinstimmung mit den durchgeführten Lebensdaueranalysen, weshalb der Einfluss von Schwingfrequenz und Lastwechseln als vernachlässigbar eingestuft wird.

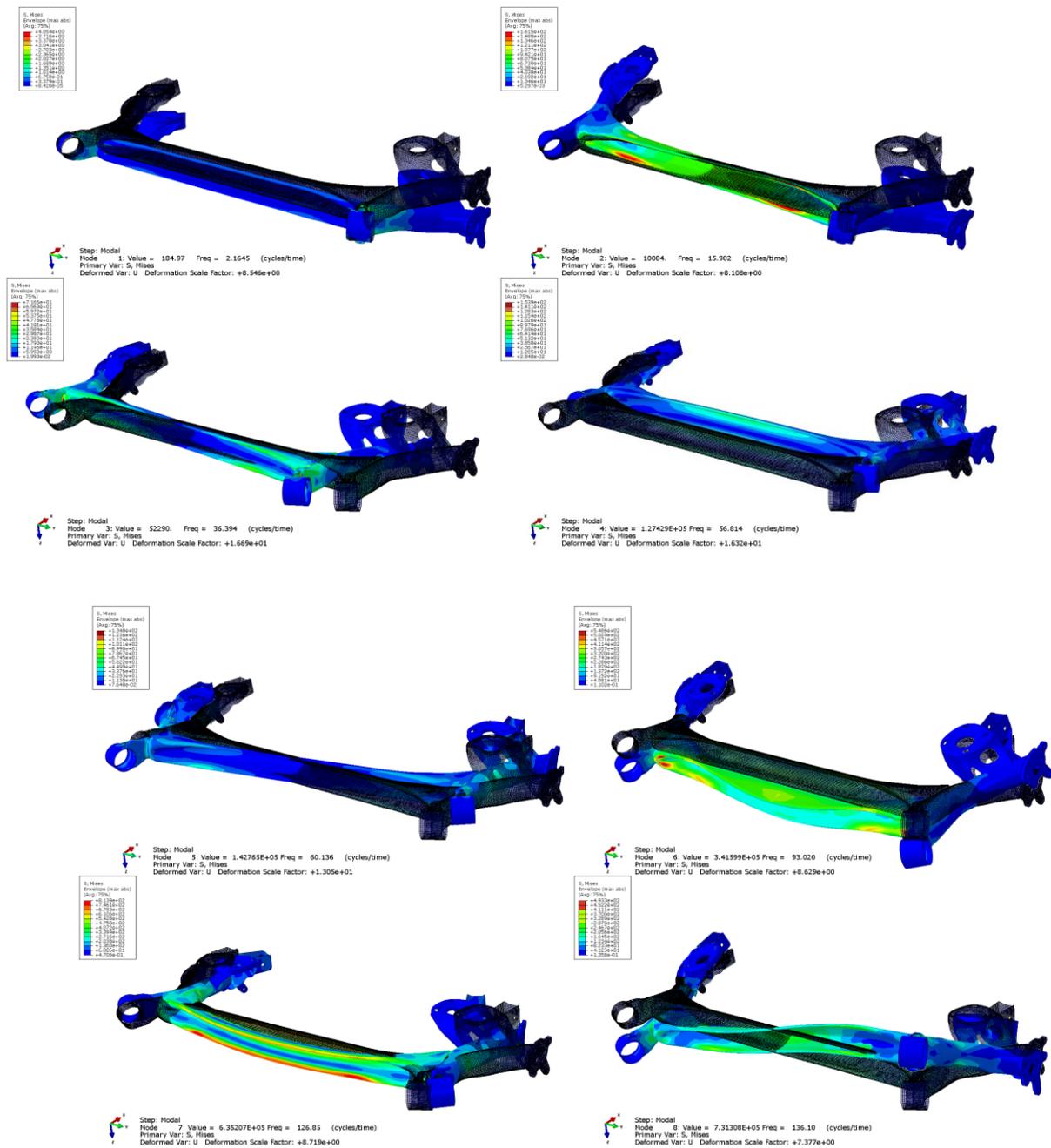
Anhang B

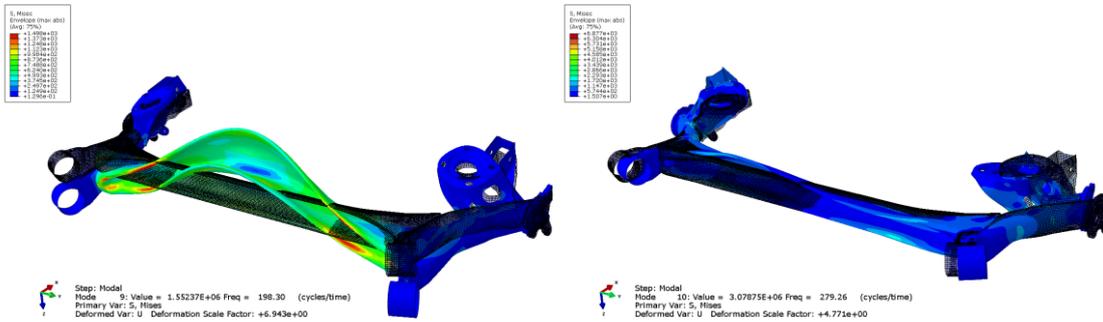
Eigenformen und modale v. Mises-Spannungen, Konfiguration 1





Eigenformen und modale v. Mises-Spannungen, Konfiguration 2





Anhang C

Gummi-Metall-Lager und numerische Implementierung

Die Ermittlung der Lagersteifigkeiten der eingesetzten Gummi-Metall-Hinterachslager erfolgt mit der in Abb. C.1 gezeigten Versuchsanordnung auf der Material-Prüfmaschine Zwick/Roell, Typ zwickiLine Z 1.0 des Instituts für Mechanik der TU Berlin.

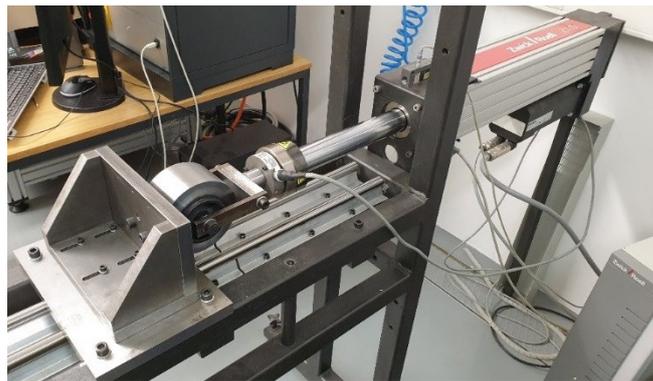


Abb. C.1: Versuchsaufbau zur Ermittlung der Lagersteifigkeiten

Ein Gummilager wird dazu in eine Stahlhülse gepresst und die Lagerachse mit einer steifen Gabel, wie in Abb. C.2 gezeigt, verschraubt. Die Belastung des Versuchsaufbaus erfolgt über einen elektromechanischen Linearzylinder, mit dem die Prüfkraft direkt auf die mit dem Gummilager verbundene Gabel aufgebracht werden. Zur Ermittlung der Lagersteifigkeit in verschiedene Raumrichtungen wird der Versuch mit verschiedenen Lastangriffspunkten durchgeführt, wobei die Lasteinleitung über die Gabel sowohl reine Druckbelastungen²⁷ als auch das Aufbringen von Momenten ermöglicht.

²⁷ Für einen einfachen Versuchsaufbau erfolgt – unter Annahme gleichen Materialverhaltens im Zug- und Druckbereich – keine Zugbelastung.

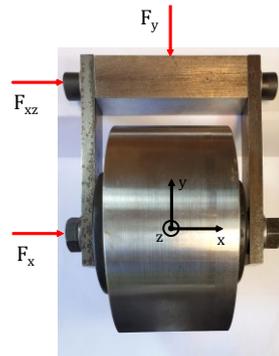


Abb. C.2: Versuchsvorrichtung und Lastangriffspunkte

Zur Ermittlung der Lagersteifigkeit in axiale Richtung (x-Achse) wird der Versuchsaufbau mit der in Abb. C.2 dargestellten Last $F_x = 1 \text{ kN}$ belastet und die resultierende Verschiebung des Lastangriffspunkts während der linearen Lastaufbringung gemessen. Äquivalent erfolgt die Ermittlung der Steifigkeit in radiale Richtung (y-Achse) mit der in Abb. C.2 dargestellten Last $F_y = 1 \text{ kN}$. Zur Ermittlung der Steifigkeit gegenüber Verdrehung des Lagers um die in Abb. C.2 gezeigte z-Achse wird die Last $F_{xz} = 300 \text{ N}$ in einem Abstand von 95 mm zur Lagerachse aufgebracht. Zur Untersuchung einer möglichen Abhängigkeit der Steifigkeit von der Belastungsgeschwindigkeit werden die Versuche mit drei Belastungsgeschwindigkeiten wiederholt:

$$v_1 = 1 \frac{\text{mm}}{\text{min}} \quad ; \quad v_2 = 10 \frac{\text{mm}}{\text{min}} \quad ; \quad v_3 = 100 \frac{\text{mm}}{\text{min}} \quad (178)$$

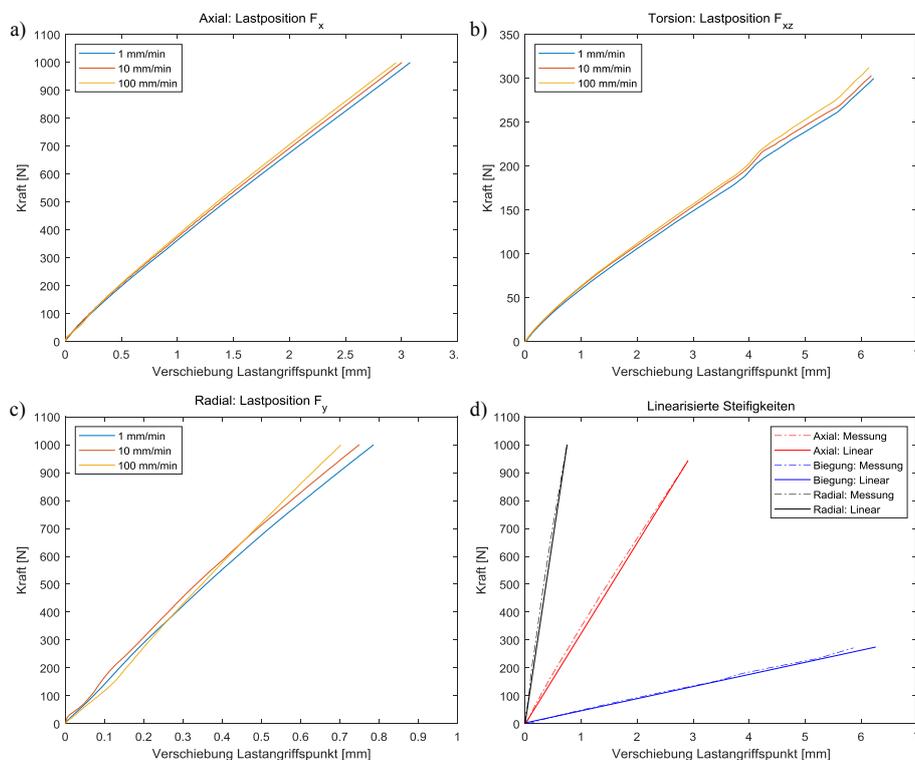


Abb. C.3: Last-Verformungs-Kurven a) Lastangriffspunkt F_x , b) Lastangriffspunkt F_{xz} , c) Lastangriffspunkt F_y , d) Linearisierung

In jeder Last- und Geschwindigkeitskonfiguration wird zur Auswertung das Mittel aus sechs Versuchen mit gleichen Parametern gebildet. Die gemittelten Messwerte sind in Abb. C.3 a-c für die drei Belastungsrichtungen und Belastungsgeschwindigkeiten dargestellt. Die Verläufe der Kurven zeigen allgemein einen leicht degressiven Verlauf; eine geringe Erhöhung der Steifigkeit mit steigender Belastungsgeschwindigkeit ist erkennbar. Der Steifigkeitsunterschied von quasistatischem Fall bei v_1 zu maximaler Versuchsgeschwindigkeit v_3 kann hierbei auf unter 10% beziffert werden; der Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit wird daher im Folgenden vernachlässigt und die Versuche mit mittlerer Belastungsgeschwindigkeit v_2 (siehe Gl. (178)) zur Auswertung herangezogen. Zur Ermittlung der Steifigkeit in den drei Belastungsrichtungen werden die gemittelten Messwerte durch je eine Gerade approximiert, siehe Abb. C.3 d.

Da aufgrund der Versuchsanordnung kein freies Moment aufgebracht werden kann, werden axiale Lagerverschiebung und Verdrehung bei der Bestimmung der entsprechenden Verdrehsteifigkeit getrennt betrachtet. Die Annahme, dass die einzelnen Verschiebungskomponenten linear superponiert werden können, stellt dabei eine lineare Approximation des nichtlinearen Verformungsverhaltens dar. Bei Annahme, dass sich die Lagerachse bei Belastung durch F_{xz} um ihren Mittelpunkt verdreht und ebenfalls horizontal verschoben wird, lässt sich aus der entsprechenden Verschiebungskinetik und den geometrischen Größen der Gabel die Verdrehsteifigkeit bestimmen. Es ergeben sich ferner aus den Steigungen der Geraden für die axiale und radiale Belastung die in Tab. C.1 zusammengefassten Lagersteifigkeiten. Im Folgenden wird zum einen von gleichen Steifigkeiten für Zug- und Druckbelastung ausgegangen, zum anderen werden durch die Symmetrie des Lagers die Steifigkeiten für die entsprechenden nicht messtechnisch erfassten Lastrichtungen übernommen. Dabei ist die axiale Torsionssteifigkeit des Lagers (um die x-Achse) durch die in den durchgeführten experimentellen Untersuchungen an der Verbundlenkerachse (siehe Kapitel 7) frei drehbare Konfiguration um die Lagerachse nicht von Relevanz.

Tab. C.1: Experimentell ermittelte Lagersteifigkeiten

Axial, Lastposition F_x	324 N/mm
Radial, Lastposition F_y	1334 N/mm
Torsion um z, Lastposition F_{xz}	504 Nm/rad

Zur Umsetzung und Validierung der experimentell ermittelten Lagersteifigkeiten wird ein numerisches Ersatzmodell des Versuchsaufbaus erstellt. Die numerische Umsetzung der elastischen Lagerung erfolgt über die in ABAQUS implementierten Verbindungselemente CONN3D2. Lagerachse und Gabel werden durch lineare B31 Balkenelemente abgebildet, die Hülse wird mittels linearen S4R Schalenelementen modelliert. Die Geometrie der Hülse entspricht dabei den Lagerbuchsen des Simulationsmodells der untersuchten Verbundlenkerachse, um eine einfache und direkte Übertragung des Ersatzmodells auf das Zielmodell der Verbundlenkerachse zu gewährleisten, siehe Abb. C.4.

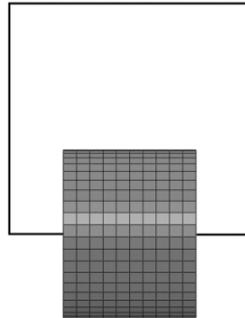


Abb. C.4: Numerisches Ersatzmodell des Versuchsaufbaus

Im Mittelpunkt der Lagerachse liegen die Knoten des CONN3D2 Verbindungselementes, welches Lagerachse und Lagerbuchse miteinander verbindet. Das Verbindungselement hat zwei Knoten, von denen ein Knoten über die Zwangsbedingung „distributing coupling“ mit den Knoten der Lagerachse so gekoppelt ist, dass die Knotenkraft des Verbindungselementes gleichmäßig auf die Knoten der Lagerachse verteilt wird. In gleicher Weise ist der zweite Knoten des Verbindungselements mit den Knoten der Lagerbuchse gekoppelt. Damit lässt sich die Relativbewegung von Lagerachse und Lagerbuchse über die elastischen Eigenschaften des Verbindungselements in alle Raumrichtungen für beliebige Randbedingungen einstellen. Die Knoten der Lagerbuchse sind für den gegebenen Versuchsaufbau durch eine verhinderte Verschiebung in alle Raumrichtungen fixiert, im Zielmodell der Verbundlenkerachse jedoch frei. Auf Basis der gemessenen Lagersteifigkeiten werden die linearisierten elastischen Eigenschaften des Verbindungselements in die sechs in Abb. C.5 dargestellten Raumrichtungen definiert. Um Abweichungen des numerischen Modells durch die eingeführten Zwangsbedingungen zu minimieren, werden statische Vergleichsrechnungen durchgeführt und die Lagersteifigkeiten iterativ so angepasst, dass die Auslenkung des Lastangriffspunkts für die verschiedenen Lastpositionen mit den experimentell ermittelten Verschiebungen bei gleicher Last übereinstimmen. Die Ergebnisse sind in Tab. C.2 zusammengefasst. Die entsprechenden Bezeichnungen der Lagersteifigkeiten sind Abb. C.5 zu entnehmen. Für die numerische Stabilität wird der axialen Torsionssteifigkeit k_{xx} ein kleiner, von Null verschiedener Wert zugewiesen.

Tab. C.2: Numerisch implementierte Lagersteifigkeiten

k_x	352 N/mm
k_y	1144 N/mm
k_z	1144 N/mm
k_{xx}	10 Nmm/rad
k_{yy}	513 Nm/rad
k_{zz}	513 Nm/rad

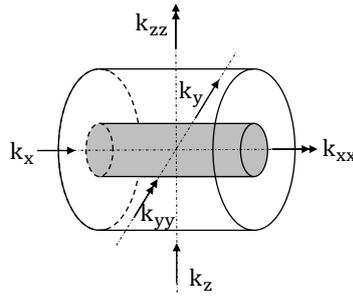


Abb. C.5: Schematische Darstellung der Lagersteifigkeiten

Anhang D

Ermittlung von Belastungsdaten der PKW-Verbundlenkerachse

Da für das zur Verfügung stehende Versuchsteil weder verlässliche Materialdaten noch reale Belastungsdaten vorliegen, werden im folgenden Abschnitt Belastungsdaten aus verfügbaren Fahrzeuginformationen sowie analytischen Modellannahmen und Literaturwerten abgeleitet. Als Bemessungskriterium für die Abschätzung der real auftretenden Lasten wird hierzu die dynamische Radlastschwankung aus der Anregung des Fahrzeugs durch Fahrbahnunebenheiten herangezogen. Fahrbahnunebenheiten werden in der Literatur im Frequenzbereich bis etwa 30 Hz als intensivste Erregerquelle für das dynamische System Kraftfahrzeug angegeben. Auf Grund der stochastischen Natur von Fahrbahnunebenheiten (i. d. R. regellose Verteilung von Amplituden, Wellenlängen und Abständen der Unebenheiten), werden diese im Allgemeinen über Leistungsdichtespektren charakterisiert [94].

Messungen der Leistungsdichtespektren verschiedener Straßen zeigen dabei, dass sich diese zum einen für alle Fahrbahnen ähneln und zum anderen im doppellogarithmischen Maßstab, bei Vernachlässigung periodischer Anteile im höheren Frequenzbereich, als Gerade angenähert werden können [113]. Das Leistungsdichtespektrum der Fahrbahnunebenheit $\Phi_h(\Omega)$, in Abhängigkeit der Wellenlänge der Unebenheiten und daraus abgeleiteter Wegkreisfrequenz Ω , lässt sich dann über zwei Kenngrößen charakterisieren: Den Unebenheitsgrad $\Phi_h(\Omega_0)$, der die spektrale Leistungsdichte bei einer Bezugswellenlänge bzw. der daraus abgeleiteten Bezugswegfrequenz Ω_0 beschreibt, sowie die Welligkeit w , die die Steigung der Geraden beschreibt, siehe Gl. (179). Beide Größen gelten dabei als Beurteilungskriterium für die Beschaffenheit einer Fahrbahn und sind in der Literatur für verschiedene Straßentypen angegeben (siehe Tab. D.1).

$$\Phi_h(\Omega) = \Phi_h(\Omega_0) \left[\frac{\Omega}{\Omega_0} \right]^{-w} \quad (179)$$

Für die Ermittlung der aus der Weganregung resultierenden Radlasten ist weiterhin die Fahrgeschwindigkeit v und die daraus resultierende Anregungsfrequenz (sog. Zeitkreisfrequenz)

zu berücksichtigen. Die zeitkreisfrequenzabhängige spektrale Leistungsdichte der Fahrbahnebenheiten ergibt sich über den Zusammenhang von Wegkreisfrequenz und Zeitkreisfrequenz:

$$\omega = v\Omega \quad (180)$$

$$\Phi_h(\omega) = \frac{1}{v} \Phi_h(\Omega) \quad (181)$$

Tab. D.1: Unebenheitsmaß und Welligkeiten div. Straßenbeläge nach [96]

		Min	Mittel	Max
Unebenheitsmaß $\Phi_h(\Omega_0)$ [cm ³] bei $\Omega_0 = 1 \text{ m}^{-1}$	Bundesautobahn	0.3	1.0	7.8
	Bundesstraßen	0.4	2.1	9.5
	Landesstraßen	0.4	5.3	29.0
	Kreisstraßen	0.7	12.2	62.0
Welligkeit w	Bundesautobahn	1.5	2.0	2.6
	Bundesstraßen	1.7	2.3	2.9
	Landesstraßen	1.9	2.4	2.9
	Kreisstraßen	1.8	2.3	2.9

Zur Abschätzung von Radlasten für die durchgeführte experimentelle Lebensdaueranalyse werden hierbei jeweils ungünstige Werte bei hoher Fahrgeschwindigkeit gewählt, um plausible Belastungswerte bei reduzierter Versuchsdauer zu ermitteln. Für die in Tab. D.1 hervorgehobenen Werte für Unebenheit und Welligkeit und einer Fahrgeschwindigkeit von $v = 150 \text{ km/h}$ ergibt sich damit das in Abb. D.1 dargestellte Unebenheitsspektrum. Dieses wird für die folgenden Betrachtungen als Anregungsspektrum herangezogen.

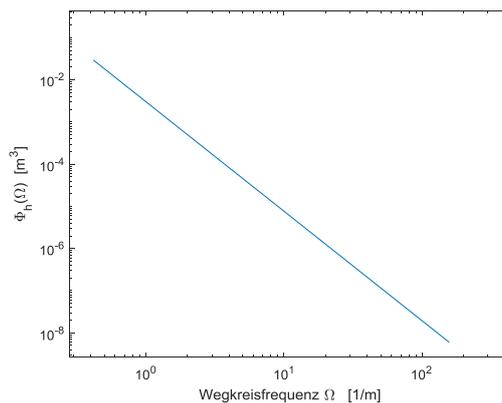


Abb. D.1: Angewandtes Unebenheitsspektrum

Aus dem Anregungsspektrum lässt sich nach [65] allgemein das resultierende Spektrum der Systemantwort $\Phi_z(\omega)$ über das Quadrat der Vergrößerungsfunktion $V(\omega)$ ermitteln:

$$\Phi_z(\omega) = V(\omega)^2 \Phi_h(\omega) \quad (182)$$

Zur Ermittlung der Vergrößerungsfunktion des Systems wird als vereinfachende Modellannahme die Betrachtung des Fahrzeugs als Dreimassensystem (auch Viertelfahrzeug) nach [96] getroffen. Unter folgenden Annahmen kann dieses Modell als einfaches Berechnungsmodell für die Abschätzung von Vertikalschwingungen eines Fahrzeugs verwendet werden:

- Das Fahrzeug ist um seine Längsachse symmetrisch aufgebaut und die Unebenheiten am linken und rechten Rad einer Achse sind gleich.
- Die Anregung erfolgt durch reine Hubanregung, Wank- und Seitenschwingungen werden vernachlässigt.
- Schwingungen von Vorderachse und Hinterachse sind entkoppelt und es treten keine Nickschwingungen auf.
- Es wird lediglich ein Rad durch Unebenheiten angeregt (sog. Einpunktanregung)

Das mechanische Ersatzmodell für die Untersuchung der wegerregten Vertikalschwingungen für eine Fahrzeugachse ist nach [96] in Abb. D.2 a dargestellt, das daraus abgeleitete Viertelmodell mit Einpunktanregung in Abb. D.2 b.

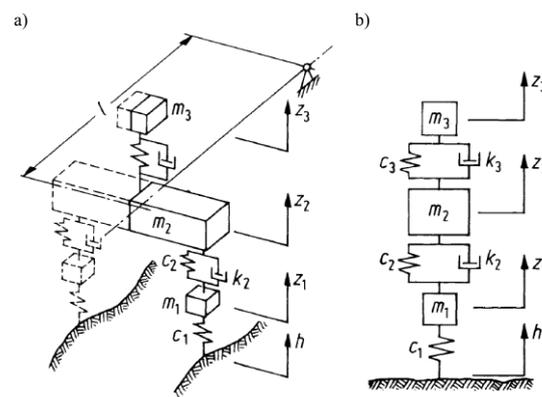


Abb. D.2: Mechanisches Ersatzmodell wegenerregter Vertikalschwingungen [96]

Die Masse m_3 beschreibt hierin die auf das Viertelmodell bezogenen Massenanteile von Fahrer und Sitz, sowie die zugehörigen Feder- und Dämpferkonstanten c_3 und k_3 , die den Sitz mit dem Aufbau koppeln. Der Fahrer sitzt mittig über der Achse, die nicht an der Sitzschwingung beteiligte Beinmasse des Fahrers wird anteilig zur Aufbaumasse m_2 des Fahrzeugs gezählt, welche über Aufbaufeder und Stoßdämpfer (Federsteifigkeit c_2 , Dämpferkonstante k_2) mit der Radmasse m_1 gekoppelt ist. Über die Reifensteifigkeit c_1 erfolgt die Weganregung h des Systems. Die Bewegungsgleichung des Systems kann damit wie folgt angegeben werden:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (183)$$

Zur Bestimmung der dynamischen Radlastschwankung ist nach Gl. (182) die Vergrößerungsfunktion des dynamischen Systems zu bestimmen. Diese lässt sich aus dem komplexen Frequenzgang ermitteln und wird für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden i. d. R.

numerisch ausgewertet. Ausgehend von der stationären Systemantwort $\hat{\mathbf{z}}$ auf eine Lastamplitude $\hat{\mathbf{F}}$ kann der komplexe Frequenzgang in den Beschleunigungen $\mathbf{H}_a(j\omega)$ aufgestellt werden:

$$\hat{\mathbf{z}} = (\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1}\hat{\mathbf{F}} \quad (184)$$

$$\mathbf{H}_a(j\omega) = -\omega^2(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \quad (185)$$

Da im vorliegenden Fall ausschließlich die Ermittlung der aus der Weganregung resultierenden Radlastschwankung von Interesse ist, wird durch Multiplikation mit der Massenmatrix der Frequenzgang der Reaktionskräfte $\mathbf{H}_F(j\omega)$ erzeugt.

$$\mathbf{H}_F(j\omega) = -\mathbf{M}\omega^2(\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \quad (186)$$

Damit folgt aus Gl. (187) für die Weganregung h über c_1 aus der ersten Spalte von Gleichung (186) die reelle Vergrößerungsfunktion $V_F(\omega)$ für die dynamische Radlastschwankung.

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} c_1 h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (187)$$

$$V_F(\omega) = \left| \sum_{i=1}^3 c_i H_{F_{i,1}}(j\omega) \right| \quad (188)$$

Die Anpassung des Modells an die realen Fahrzeugdaten erfolgt über verfügbare Fahrzeuginformationen (siehe Tab. D.2), wobei fehlende Daten für die überschlägige Abschätzung durch Literaturwerte nach [96] ergänzt wurden.

Tab. D.2: Fahrzeugdaten

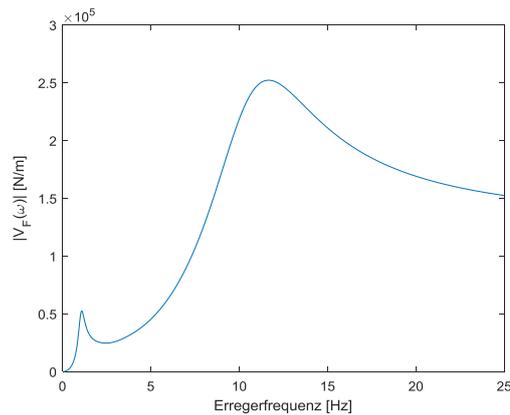
Fahrzeugdaten	VW Polo 9N (Plattform PQ24)
Zulässige Achslast Hinterachse	760 kg
Steifigkeit Aufbaufeder	18.5 kN/m
Federübersetzung	0.91
Masse Fahrer (abzgl. Beine)	56 kg
Beinmasse	18 kg
Radmasse	31 kg
Dämpfungskonstante Sitz	0.26 kNs/m
Dämpfungskonstante Aufbau	1.14 kNs/m
Steifigkeit Sitz	9.9 kN/m
Steifigkeit Reifen	128 kN/m

Daraus ergeben sich in Tab. D.3 folgende Parameter für die Modellierung. Die Angaben erfolgen dabei für das bis zur zulässigen Achslast beladene Fahrzeug (inkl. Fahrer) und jeweils auf ein Rad bezogen (halbe Achswerte).

Tab. D.3: Systemparameter Viertelfahrzeug

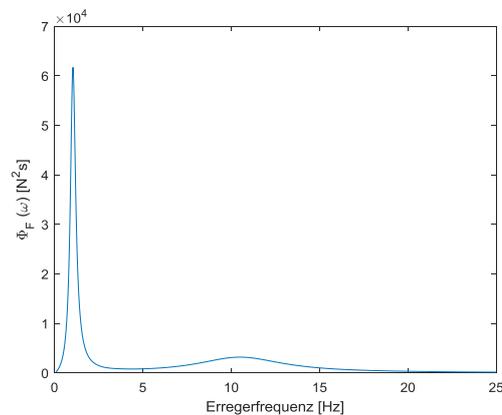
m_1	m_2	m_3	k_2	k_3	c_1	c_2	c_3
31 kg	352 kg	28 kg	1.14 kNs/m	0.26 kNs/m	128 kN/m	18.5 kN/m	9.9 kN/m

Die aus den gewählten Systemparametern resultierende Vergrößerungsfunktion für die dynamische Radlastschwankung nach Gl. (188) ist in Abb. D.3 im relevanten Frequenzbereich bis 25 Hz dargestellt. Der Frequenzbereich resultiert aus der Annahme einer starren Aufbaumasse in der Modellierung. Oberhalb von 25 Hz ist nach [96] die Aufbaumasse nicht mehr als starr anzusehen, was die Anwendbarkeit des Viertelmodells begrenzt.

**Abb. D.3:** Vergrößerungsfunktion des betrachteten Ersatzmodells

Erkennbar sind zwei lokale Maxima, die durch Resonanz um die jeweiligen Eigenfrequenzen von Rad und Aufbau entstehen, während die Dynamik von Sitz und Fahrer keinen relevanten Einfluss auf die Radlastschwankung zeigt. Das Leistungsdichtespektrum der dynamischen Radlastschwankung $\Phi_F(\omega)$ ergibt sich mit dem Leistungsdichtespektrum für die Weganregung durch Fahrbahnunebenheiten $\Phi_h(\omega)$ nach Gleichung (189) und ist in Abb. D.4 dargestellt.

$$\Phi_F(\omega) = V_F(\omega)^2 \Phi_h(\omega) \quad (189)$$

**Abb. D.4:** Leistungsspektrum der dynamischen Radlastschwankung

Deutlich ist hier das Maximum der Amplitude um die Resonanzfrequenz des Aufbaus erkennbar. Die vertikale Aufbauschiwingung wird demnach am stärksten durch die Fahrbahnunebenheiten angeregt. Zur quantitativen Bewertung der dynamischen Radlastschwankungen kann der

quadratische Mittelwert (auch RMS oder Effektivwert) des ermittelten Leistungsdichtespektrums herangezogen werden. Dieser entspricht für normalverteilte stochastische Prozesse um den Mittelwert Null genau einer Standardabweichung [65]. Die Standardabweichung σ_F ist für den vorliegenden Fall aus der Varianz σ_F^2 (auch Streuung) abgeleitet, welche nach Gl. (190) durch die Fläche unter dem Spektrum gegeben ist.

$$\sigma_F^2 = \int_0^{50\pi} \Phi_F(\omega) d\omega \quad (190)$$

Aus der Standardabweichung ist damit für den normalverteilten Prozess eine direkte Verbindung zur Wahrscheinlichkeit des Überschreitens konkreter Lastamplituden zu ziehen. Die resultierende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(F)$ der auftretenden dynamischen Radlastamplituden ist durch Gl. (191) gegeben und in Abb. D.5 dargestellt [65].

$$p(F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_F} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{F}{\sigma_F}\right)^2} \quad (191)$$

Allgemein ergibt sich hiermit in Gl. (192) die Wahrscheinlichkeit P , dass eine stochastische Größe X im Wertebereich zwischen a und b liegt, aus der Integration der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in den Grenzen a und b :

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b p(F) dF \quad (192)$$

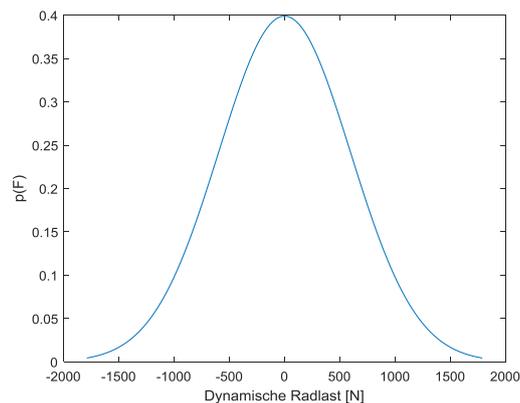


Abb. D.5: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der dynamischen Radlastamplituden

Damit ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für das Überschreiten P bzw. Unterschreiten $(1-P)$ von Lastamplituden als Vielfache der Standardabweichung $1\sigma_F$ in Tab. D.4.

Tab. D.4: Wahrscheinlichkeiten für das Überschreiten bzw. Unterschreiten von Lastamplituden

	P	1-P	Lastamplitude [N]
1σ	37.7 %	68.3 %	597.2
2σ	4.6 %	95.4 %	1194.3
3σ	0.3 %	99.7 %	1791.5

Zur Abschätzung von plausiblen Lastamplituden für die experimentelle Lebensdaueranalyse der betrachteten PKW-Hinterachse wird im Folgenden ein vereinfachter Ansatz aus der Lebensdauerberechnung stochastisch belasteter Bauteile verfolgt. Dieser dient der überschlägigen Überführung der stochastisch verteilten Lasten in äquivalente Lasten konstanter Amplitude mit näherungsweise gleicher Schädigungswirkung. Bei der sogenannten Drei-Band-Methode nach Steinberg [105] wird die Schädigungswirkung der kontinuierlich verteilten Lastamplituden auf Basis drei diskreter Werte approximiert.

Es gilt die Annahme:

- 68.3 % der Lastwechsel wirken mit der Amplitude $1\sigma_F$
- 27.1 % der Lastwechsel wirken mit der Amplitude $2\sigma_F$
- 4.3 % der Lastwechsel wirken mit der Amplitude $3\sigma_F$

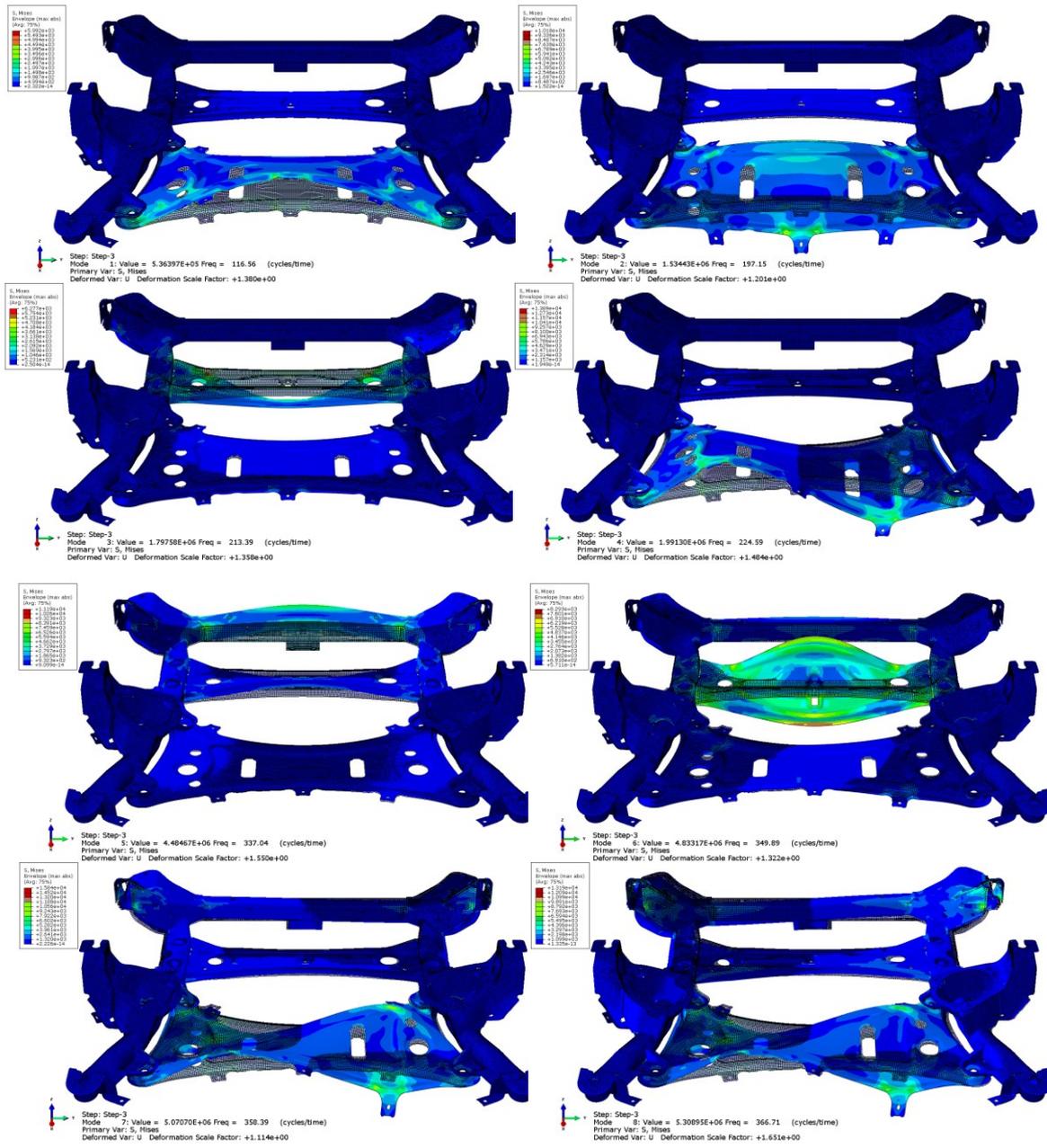
Auf Basis gegebener Materialdaten in Form von Wöhlerlinien kann damit die resultierende Schädigung der drei Bänder abgeschätzt werden. Ausgehend von linearer Schadensakkumulation nach Miner [77], werden die Teilschädigungen der einzelnen o.g. Bänder berechnet und zur Gesamtschädigung akkumuliert. Dabei werden die Teilschädigungen mit den jeweiligen Anteilen an der Gesamtlastwechselzahl gewichtet. Die Wichtung ergibt sich dabei nach Gl. (192) aus der Wahrscheinlichkeit, mit der die Amplituden zwischen 0 und $\pm 1\sigma_F$ für Band 1, zwischen $\pm 1\sigma_F$ und $\pm 2\sigma_F$ für Band 2 oder zwischen $\pm 2\sigma_F$ und $\pm 3\sigma_F$ für Band 3 liegen. Steinberg formuliert weiterhin eine darauf basierende vereinfachte Methode zur Abschätzung der Lebensdauer durch die Annahme einer einzelnen Ersatzlast, die über 100 % der Lastwechsel wirkt und dabei die gleiche Schädigung zur Folge hat, wie die in der Drei-Band-Methode beschrieben gewichteten Anteile [105].

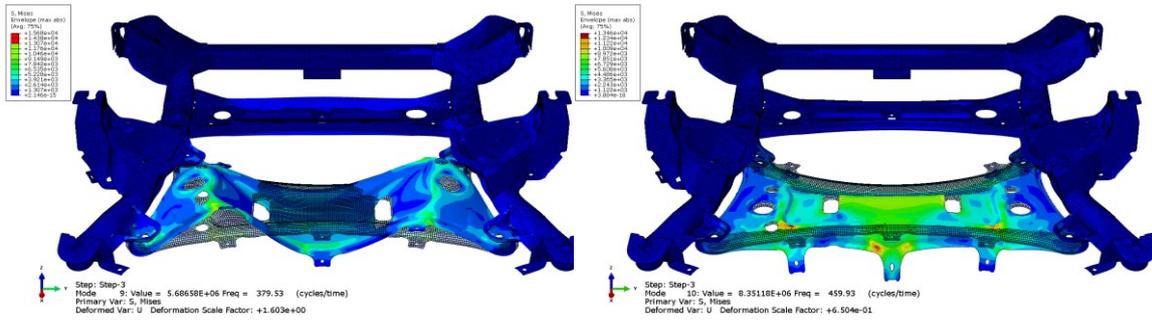
Da die genaue Werkstoffzusammensetzung sowie etwaige Wärmebehandlungen zur Zeit der Versuchsdurchführung nicht bekannt sind und demnach essenzielle Materialdaten nicht zur Verfügung stehen, ist eine rechnerische Ermittlung der ertragbaren Lastwechsel nicht möglich. Ziel des in Kapitel 7 durchgeführten Versuchs ist vielmehr die Validierung der durch die entwickelte Methodik gemachten Vorhersagen zu potenziell versagenskritischen Strukturbereichen, welche bei Betrachtung des linearen Systems, in ihrer räumlichen Konfiguration unabhängig von der Lastamplitude sind. Auf dieser Basis ist eine Versuchslast abzuschätzen, die zum einen nicht zum statischen Versagen der Struktur durch lokales überschreiten der zulässigen Streckgrenze führt, zum anderen muss die durch die Beanspruchung hervorgerufene Schädigung ein Versagen unterhalb der als Dauerfestigkeit definierten Lastwechselzahl von 10^6 hervorrufen, um die Versuchsdauer zu begrenzen. Die Abschätzung einer in diesem Bereich liegenden, plausiblen Lastamplitude erfolgt unter der Annahme, dass die ursprüngliche Auslegung der vorliegenden Struktur während der Fahrzeugentwicklung auf Basis

der einschlägigen Literatur zur Auslegung von Fahrwerkskomponenten erfolgte. Damit kann die Belastungsamplitude auf Literaturwerte zur stochastischen Weganregung und die Fahrzeugmasse (siehe Tab. D.3) zurückgeführt werden, während die Unsicherheit fehlender Materialdaten ausgeklammert wird. In Anlehnung an die vereinfachte Drei-Band-Methode nach Steinberg wird zur Verkürzung der Versuchsdauer eine Last entsprechend der dreifachen Standardabweichung aus Tab. D.4 gewählt. Dies schließt zum einen statisches Versagen aus, zum anderen ist eine dauerfeste Auslegung für diese Lastamplitude aus ökonomischer Sicht für die kommerzielle Serienfertigung unwahrscheinlich. Mit der aus der stochastischen Weganregung am vereinfachten Viertelmodell ermittelten Lastamplitude wird die resultierende Verschiebung des Lastangriffspunkts am numerischen Berechnungsmodell der untersuchten Struktur ermittelt, um auch die Einflüsse der elastischen Lagerung zu erfassen (siehe Kapitel 5.1 für Randbedingungen und Lastkonfiguration). Die numerisch abgeschätzte Verschiebung des Lastangriffspunktes bei statischer Lastaufbringung mit $F = 1791.5 \text{ N}$ beträgt $u_{\max} \approx 30 \text{ mm}$. Diese dient als Ausgangspunkt für die weggesteuerte Lastaufbringung der durchgeführten experimentellen Lebensdaueranalyse.

Anhang E

Eigenformen und modale v. Mises-Spannungen, Motorträger





Anhang F

Anmerkungen zu gemessenen modalen Beanspruchungen

Das Kernziel der vorliegenden Arbeit ist die Detektion versagenskritischer Strukturregionen auf Basis modaler Beanspruchungsfelder. Dies setzt für die messtechnische Validierung eine hinreichend genaue messtechnische Erfassung der (modalen) Dehnungen voraus. In der Literatur sind hierzu zahlreiche Ansätze gegeben, die auf verschiedenen Messprinzipien beruhen. Eine optische Dehnungsmessung beispielsweise über die Speckelmuster-Interferometrie (*engl. electronic speckle pattern interferometry, ESPI*) oder digitale Bildkorrelation (*engl. digital image correlation, DIC*) [106] steht zum Zeitpunkt der Versuchsdurchführung nicht zur Verfügung.

Eine Messung des Dehnungsfeldes mittels Dehnungsmesstreifen ist für den vorliegenden Versuchsaufbau mit erheblichem Messaufwand verbunden. Auf Grund von Größe und benötigtem Raum für Messleitungen etc. verfügbarer Dehnungsmesstreifen ist lediglich eine punktuelle Messung an ausgewählten Messpunkten möglich, wobei der minimale Messabstand ca. 10 mm beträgt (vgl. Messaufnehmer aus Abschnitt 7.4). Dies begrenzt die Messung auf ein limitiertes Set von Moden.

Es wird daher auf eine indirekte Ermittlung der resultierenden Dehnungsfelder zurückgegriffen. Ein möglicher Ansatz hierzu kann für kleine Verformungen aus den kinematischen Beziehungen des Euler-Bernoulli-Balkens unter reiner Biegung gewonnen werden. Demnach besteht zwischen dem über den Querschnitt linearen Dehnungsverlauf $\varepsilon_x(x, y)$ und der Krümmung $\kappa(x)$ mit dem Randfaserabstand y ein direkter Proportionaler Zusammenhang [114]:

$$\varepsilon_x(x, y) = \kappa(x) \cdot y \quad (193)$$

Für kleine Verformungen lässt sich die Krümmung dabei über die zweite Ableitung der Durchbiegung $w''(x)$ approximieren.

$$\varepsilon_x(x, y) \approx w''(x) \cdot y \quad (194)$$

Damit steht für fein aufgelöste Messwerte über die Balkenlängsachse eine Methode zur Verfügung, um indirekt die Dehnungen aus den gemessenen Verschiebungen zu ermitteln, womit ferner für das in dieser Arbeit untersuchte Beispiel theoretisch eine Matrix der modalen Beanspruchungen auf Basis der gemessenen Eigenformen abgeleitet werden kann.

In der Anwendungspraxis erweist sich diese Methode jedoch als schwierig, da das im realen Signal vorhandene Messrauschen bei der zweifachen Ableitung des Messsignals zu großen Abweichungen führt. In der Literatur wird daher i. d. R. auf eine Annäherung der Messdaten durch mathematische Funktionen zurückgegriffen (z.B. Splines, Polynome) [15,98]. Diese Methodik ist jedoch sehr sensitiv gegenüber dem zur Interpolation der Messdaten verwendeten Algorithmus und erweist sich besonders im Bereich der Randbedingungen als fehlerbehaftet. Die Anwendung der verschiedenen, in der Literatur beschriebenen Interpolationsverfahren (Spline und kubisches Polynom) zeigt auch in dieser Arbeit deutliche Unterschiede in den resultierenden Ergebnissen. Diese sind in Abb. F. 1 einer analytischen Lösung der Kontinuumschwingung des Euler-Bernoulli-Balkens nach [8] für die erste elastische Eigenform gegenübergestellt²⁸. Obwohl die interpolierten Kurven in den Verschiebungen im grafischen Vergleich für alle Verfahren sehr gut korrelieren, können bereits für die erste Eigenform große Abweichungen in den resultierenden Dehnungen ausgemacht werden.

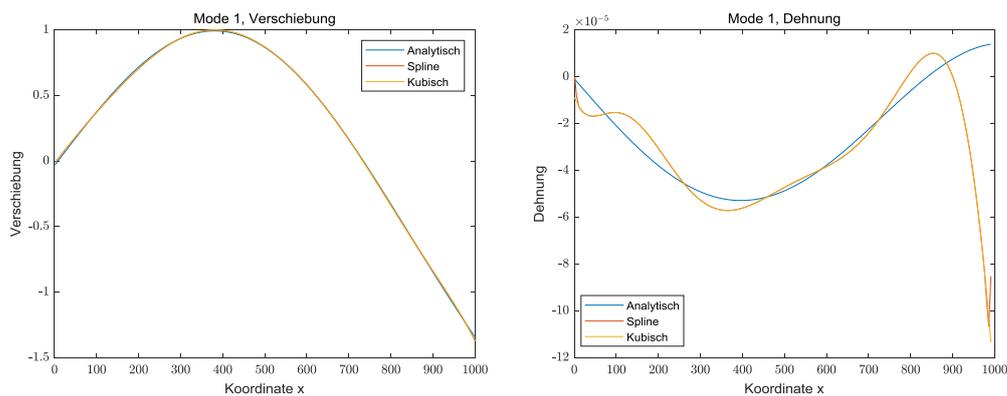


Abb. F. 1: Curve Fit links: modale Verschiebung, rechts: modale Dehnung

Da mit den beschriebenen Verfahren keine belastbaren Ergebnisse erzielt werden können, wird in der vorliegenden Arbeit auf die Ermittlung der modalen Beanspruchungen auf Basis eines hinreichend validierten numerischen Ersatzmodells zurückgegriffen.

²⁸ Die erste Eigenform des untersuchten Systems korreliert sehr gut mit der analytischen Lösung, höhere Moden zeigen jedoch große Abweichungen, vor allem im Bereich der Randbedingungen (vgl. Abschnitt 6.3.3).

Anhang G

Datenblatt Dehnungsmessstreifen



Dehnungsmessstreifen
Strain gages
Jauges d'extensométrie

Widerstand
Resistance
Résistance

120 Ω ±0.35 %

k-Faktor
Gage factor
Facteur k

a: 1.82 ±1.0 %
b: 1.82 ±1.0 %
c: 1.82 ±1.0 %

Querempfindlichkeit
Transverse sensitivity
Sensibilité transverse

a: 1.1 %
b: 1.1 %
c: 1.1 %



Bestellnummer
Order No.
No. de référence

1-RY41-3/120

Typ
Type
Type

3/120 RY41

Stückzahl
Contents
Quantité

5

Temperaturkoeffizient
des k-Faktors
Temperature coefficient
of gage factor
Coefficient de température
du facteur k

93 ±10 [10⁻⁶ / K]
(-10°C ... +45°C)

Folienlos
Foil lot
Lot de la feuille

A907/11

Herstellungslot
Production batch
Lot de fabrication

812085004

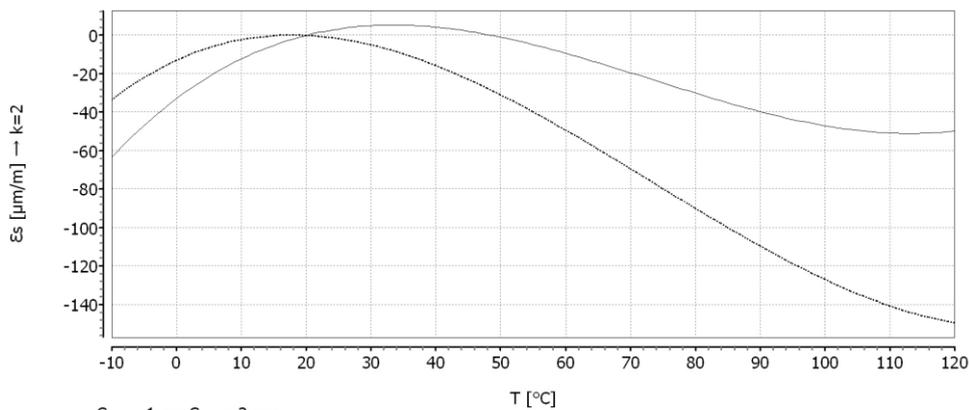


Temperaturkompensation: Ferritischer Stahl mit
Temperature compensation: steel with
Compensation de température: acier avec

α = 10.8 [10⁻⁶ / K]

Max. effekt. Brückenspeisespannung
max. rms excitation voltage
tension d'alim. de pont maxi eff.

1.5 V



$$\epsilon_s(T) = -13.10 + 1.54 * T - 4.92E-02 * T^2 + 2.24E-04 * T^3 \pm (T-20) * 0.30 [\mu\text{m/m}] + 0.03330 * L * (T-20) [\mu\text{m/m}]$$

Alle technischen Daten nach VDI/VDE 2635. Geben Sie bei Rückfragen bitte Bestellnummer und Herstellungslos an.

All specifications in accordance with VDI/VDE 2635. In case of further inquiries please indicate order no. and production batch number.

Toutes les caractéristiques techniques selon la norme VDI/VDE 2635. Dans toutes communications, prière d'indiquer le numéro de commande et le numéro du lot de production.

Réponse en température des jauges d'extensométrie appliquées sur des matériaux dont des coefficients de dilatation thermique α sont indiqués. Mesurée à variation continue de la température.

Curve 1: Jauges sans pattes de raccordement.

Curve 2: Jauges avec pattes de raccordement (longueur unitaire de la patte de 30 mm). Lorsque les pattes sont plus courtes, la réponse en température se trouvera entre les deux courbes 1 et 2. La représentation numérique permet de calculer exactement la réponse en température pour chaque longueur de patte. T = température en °C L = longueur unitaire de la patte en mm (sans dimension)

Temperaturgang der Dehnungsmessstreifen bei Applikationen mit oben angegebenen Wärmeausdehnungskoeffizienten α. Gemessen bei kontinuierlicher Temperaturänderung.

Kennlinie 1: DMS ohne Anschlussbändchen.

Kennlinie 2: DMS mit Anschlussbändchen (30mm einfache Bändchenlänge). Bei gekürzten Bändchen liegt der Temperaturgang zwischen Kennlinie 1 und 2. Die numerische Darstellung erlaubt, den Temperaturgang für jede Bändchenlänge exakt zu errechnen. T = Temperatur in °C L = einfache Bändchenlänge in mm (dimensionslos)

The **temperature response** refers to strain gages bonded to materials with specified coefficients of thermal expansion α. Values are measured with continuous temperature variation.

Curve 1: Strain gages without leads.

Curve 2: Strain gages with leads (simple lead length of 30 mm). If the leads are shorter, the temperature response lies between curve 1 and 2. The numeric representation allows exact calculation of the temperature response for any lead length. T = temperature in °C L = simple lead length in mm (dimensionless)

Kopfdaten / Header / Titre



A point (".") is used as decimal separator in data, the separator needs to be configured accordingly for import into Excel.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Steinke, Finite Elemente Methode, Springer, Berlin Heidelberg, 2015.
- [2] E. Holmberg, B. Torstenfelt, A. Klarbring, Stress Constrained Topology Optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 48 (2013) 33–47.
- [3] H.A. Richard, B. Schramm, T. Zipsner, Additive Fertigung von Bauteilen und Strukturen: Neue Erkenntnisse und Praxisbeispiele, Springer-Verlag, 2019.
- [4] G. Rama, D. Marinkovic, M. Zehn, High performance 3-node shell element for linear and geometrically nonlinear analysis of composite laminates, *Composites Part B: Engineering*. 151 (2018) 118–126.
- [5] M. Sander, Sicherheit und Betriebsfestigkeit von Maschinen und Anlagen, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.
- [6] H.A. Richard, M. Sander, Ermüdungsrisse, Vieweg+ Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [7] FKM Forschungskuratorium Maschinenbau e.V., FKM-Richtlinie; Rechnerischer Festigkeitsnachweis für Maschinenbauteile, 6. Auflage, VDMA-Verlag, Frankfurt am Main, 2012.
- [8] R. Gasch, K. Knothe, R. Liebich, Strukturdynamik, Springer, 2012.
- [9] V.A. Nguyen, M. Zehn, D. Marinković, An efficient co-rotational FEM formulation using a projector matrix, *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*. 14 (2016) 227–240.
- [10] R. Craig, A.J. Kurdila, Fundamentals of Structural Dynamics, 2nd Edition, Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.
- [11] O. Darrigol, The acoustic origins of harmonic analysis, *Archive for History of Exact Sciences*. 61 (2007) 343–424.
- [12] L. Huang, H. Agrawal, V. Borowski, Durability Analysis of a Vehicle Body Structure Using Modal Transient Methods, *Proc. SPIE Vol. 3089, Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference*. (1997) 407–414.
- [13] R.W. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 1975.
- [14] L. Huang, H. Agrawal, P. Kurudiyara, Dynamic Durability Analysis of Automotive Structures, *SAE Technical Paper Series*. 1 (1998) 1–7.
- [15] O. Bernasconi, D.J. Ewins, Application of strain modal testing to real structures, *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*. 2 (1989) 1453–1464.
- [16] O. Bernasconi, D.J. Ewins, Modal strain/stress fields, *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*. 4 (1989) 68–76.
- [17] L.H. Yam, T.P. Leung, D.B. Li, K.Z. Xue, Theoretical and experimental study of modal strain analysis, *Journal of Sound and Vibration*. 191 (1996) 251–260.

- [18] C. Braccesi, F. Cianetti, L. Tomassini, An innovative modal approach for frequency domain stress recovery and fatigue damage evaluation, *International Journal of Fatigue*. 91 (2016) 382–396.
- [19] C. Fragassa, A. Pavlovic, G. Minak, On the Structural Behaviour of a CFRP Safety Cage in a Solar Powered Electric Vehicle, *Composite Structures*. 252 (2020) 112698.
- [20] A. Pavlovic, C. Fragassa, Investigating the resistance of concrete reinforced walls to high velocity projectiles, *Engineering Structures*. 174 (2018) 84–395.
- [21] E. Habbour, W.S. Connon, M.F. Pohland, S.C. Stanton, M. Paulus, A. Dasgupta, Review of Response and Damage of Linear and Nonlinear Systems Under Multiaxial Vibration, *Shock and Vibration*. 2014 (2014) 294271.
- [22] G. Lesiuk, M. Smolnicki, R. Mech, A. Ziety, C. Fragassa, Analysis of fatigue crack growth under mixed mode (I + II) loading conditions in rail steel using CTS specimen, *Engineering Failure Analysis*. 109 (2020) 104354.
- [23] M. Veltri, FEM Techniques for High Stress Detection in Accelerated Fatigue Simulation, *Journal of Physics: Conference Series*. 744 (2016).
- [24] T.H. Loutas, A. Bourikas, Strain sensors optimal placement for vibration-based structural health monitoring. The effect of damage on the initially optimal configuration, *Journal of Sound and Vibration*. 410 (2017) 217–230.
- [25] N. Baghiee, M.R. Esfahani, K. Moslem, Damage detection of multi-girder bridge superstructure based on the modal strain approaches, *Journal of Theoretical and Applied Vibration and Acoustics*. 5 (2019) 21–42.
- [26] L. Capponi, J. Slavič, G. Rossi, M. Boltežar, Thermoelasticity-based modal damage identification, *International Journal of Fatigue*. 137 (2020) 105661.
- [27] A. Martin, G. Deierlein, Structural topology optimization of tall buildings for dynamic seismic excitation using modal decomposition. *Engineering Structures*, *Engineering Structures*. 216 (2020) 110717.
- [28] M. Haiba, D.C. Barton, P.C. Brooks, M.C. Levesley, The development of an optimisation algorithm based on fatigue life, *International Journal of Fatigue*. 25 (2003) 299–310.
- [29] H.S. Park, Y. Kim, B.K. Oh, A model updating method with strain measurement from impact test for the safety of steel frame structures, *Measurement*. 102 (2017) 220–229.
- [30] N. Guo, Z. Yang, L. Wang, X. Bian, A updating method using strain frequency response function with emphasis on local structure, *Mechanical Systems and Signal Processing*. 115 (2019) 637–656.
- [31] J. Wannenburg, P.S. Heyns, An overview of numerical methodologies for durability assessment of vehicle and transport structures, *International Journal of Vehicle Systems Modelling and Testing*. 5 (2010) 72–101.
- [32] P. Fernández Fernández, M. López Aenlle, R. Brincker, A.C. Fernández Canteli, Stress estimation in structures using operational modal analysis, *Proceedings of the 3rd International Operational Modal Analysis Conference-IOMAC*. (2009).
- [33] Z. Gu, C. Mi, Y. Wang, J. Jiang, A-type frame fatigue life estimation of a mining dump truck based on modal stress recovery method, *Engineering Failure Analysis*. 26 (2012) 89–99.

- [34] C.S. Horas, J.A.F.O. Correia, A.M.P. De Jesus, R. Calçada, M.L. Aenlle, P. Kripakaran, F. Pelayo, A. Fernandez-Canteli, Application of Modal Superposition Technique in the Fatigue Analysis Using Local Approaches, *Procedia Engineering*. 160 (2016) 45–52.
- [35] V.-X. Tran, S. Geniaut, E. Galenne, I. Nistor, A modal analysis for computation of stress intensity factors under dynamic loading conditions at low frequency using extended finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*. 98 (2013) 122–136.
- [36] C. Albuquerque, A.L.L. Silva, A.M.P. De Jesus, R. Calçada, An efficient methodology for fatigue damage assessment of bridge details using modal superposition of stress intensity factors, *International Journal of Fatigue*. 81 (2015) 61–77.
- [37] W. Ferreira, T. Meehan, N. Bishop, A Comparative Study of Automotive System Fatigue Models, *SAE Technical Papers*. (2016) No. 2016-01-0377.
- [38] C. Braccesi, F. Cianetti, Development of selection methodologies and procedures of the modal set for the generation of flexible body models for multibody simulation, *Proc. of The Institution of Mechanical Engineers Part K- Journal of Multi-Body Dynamics*. 218 (2004) 19–30.
- [39] C. Braccesi, F. Cianetti, G. Lori, D. Pioli, A frequency method for fatigue life estimation of mechanical components under bimodal random stress process, *Structural Integrity Durability*. 1 (2005) 277–290.
- [40] C. Braccesi, F. Cianetti, G. Lori, D. Pioli, Fatigue behaviour analysis of mechanical components subject to random bimodal stress process: frequency domain approach, *International Journal of Fatigue*. 24 (2005) 335–345.
- [41] C. Braccesi, F. Cianetti, G. Lori, D. Pioli, The frequency domain approach in virtual fatigue estimation of non-linear systems: The problem of non-Gaussian states of stress, *International Journal of Fatigue*. 31 (2009) 766–775.
- [42] C. Braccesi, F. Cianetti, Random loads fatigue and dynamic simulation: A new procedure to evaluate the behaviour of non-linear systems, *SDHM Structural Durability and Health Monitoring*. 7 (2011) 83–116.
- [43] F. Cianetti, M. Palmieri, J. Slavič, C. Braccesi, G. Morettini, The effort of the dynamic simulation on the fatigue damage evaluation of flexible mechanical systems loaded by non-Gaussian and non stationary loads, *International Journal of Fatigue*. 103 (2017) 60–72.
- [44] C. Braccesi, F. Cianetti, L. Tomassini, Validation of a new method for frequency domain dynamic simulation and damage evaluation of mechanical components modelled with modal approach, *Procedia Engineering*. 101 (2015) 493–500.
- [45] M. Mršnik, J. Slavič, M. Boltežar, Vibration fatigue using modal decomposition, *Mechanical Systems and Signal Processing*. 98 (2018) 548–556.
- [46] M. Mršnik, J. Slavič, M. Boltežar, Multiaxial vibration fatigue - A theoretical and experimental comparison, *Mechanical Systems and Signal Processing*. 76–77 (2016) 409–423.
- [47] L. Huang, H. Agrawal, Method for identifying critical elements in fatigue analysis with von mises stress bounding and filtering modal displacement history using dynamic windowing, U.S. Patent No. 6,212,486, 2001.

- [48] T.T. Rantalainen, A.M. Mikkola, T.J. Björk, Sub-modeling approach for obtaining structural stress histories during dynamic analysis, *Mechanical Sciences*. 4 (2013) 21–31.
- [49] S. Dietz, H. Netter, D. Sachau, Fatigue life predictions by coupling finite element and multibody systems calculations, *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. 80401 (1997) V01AT06A039.
- [50] Y. Zhou, S. Wu, N. Trisovic, Q. Fei, Z. Tan, Modal Strain Based Method for Dynamic Design of Plate-Like Structures, *Shock and Vibration*. 2016 (2016).
- [51] Y. Zhou, Q. Fei, S. Wu, Utilization of modal stress approach in random-vibration fatigue evaluation, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 231 (2017) 2603–2615.
- [52] Y. Zhou, J. Tao, Theoretical and numerical investigation of stress mode shapes in multi-axial random fatigue, *Mechanical Systems and Signal Processing*. 127 (2019) 499–512.
- [53] Y. Zhou, Local finite element refinement for accurate dynamic stress via modal Information, *AIAA Journal*. 58 (2020) 3593–3606.
- [54] Y. Zhou, A revisit to normalization methods for purpose of stress mode shapes, *FME Transactions*. 48 (2020) 516–521.
- [55] C. Strzalka, M. Zehn, D. Marinkovic, Mode Superposition Techniques for a Priori High Stress Detection and Fatigue Hotspot Identification, *Structural Integrity and Fatigue Failure Analysis: Experimental, Theoretical and Numerical Approaches*. (2022) 247–257.
- [56] C. Strzalka, D. Marinkovic, M.W. Zehn, Stress Mode Superposition for a Priori Detection of Highly Stressed Areas: Mode Normalisation and Loading Influence, *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 7 (2021) 1698–1709.
- [57] C. Strzalka, M. Zehn, The influence of loading position in a priori high stress detection using mode superposition, *Reports in Mechanical Engineering*. 1 (2020) 93–102.
- [58] P. Wriggers, U. Nackenhorst, S. Baumann, H. Spiess, S. Löhnert, Technische Mechanik kompakt, Vieweg+ Teubner Verlag, 2006.
- [59] M. Schulz, Maschinendynamik, De Gruyter Oldenbourg, 2017.
- [60] K. Knothe, H. Wessels, Finite Elemente, Springer, Berlin, 1991.
- [61] B. Klein, FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau, Springer-Verlag, 2007.
- [62] J. Wijker, Mechanical Vibrations in Spacecraft Design, Springer Science & Business Media, 2013.
- [63] H. Benioff, The physical evaluation of seismic destructiveness, *Bulletin of the Seismological Society of America*. 24 (1934) 398–403.
- [64] A. Naess, M. Torgeir, Stochastic Dynamics of Marine Structures, Cambridge University Press, 2012.
- [65] P.H. Wirsching, T.L. Paez, K. Ortiz, Random Vibrations: Theory and Practice, Courier Corporation, 2006.
- [66] K. Großmann, H. Rudolph, Dämpfungsbeschreibung für die modellgestützte dynamische Strukturanalyse, *Zeitschrift Für Wirtschaftlichen Fabrikbetrieb*. 103 (2008) 767–773.

- [67] A. Wöhler, Bericht über die Versuche, welche auf der Königl. Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn mit Apparaten zum Messen der Biegung und Verdrehung von Eisenbahnwagen- Achsen während der Fahrt, angestellt wurden, *Zeitschrift Für Bauwesen*. 8 (1858) 641–652.
- [68] A. Wöhler, Versuche zur Ermittlung der auf die Eisenbahn-Wagenachsen einwirkenden Kräfte und die Widerstandsfähigkeit der Wagen-Achsen, *Zeitschrift Für Bauwesen*. 10 (1860) 583–616.
- [69] J. Schijve, *Fatigue of structures and materials*, Springer Science & Business Media, 2001.
- [70] D. Radaj, M. Vormwald, *Ermüdungsfestigkeit*, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [71] J.C.R. Pereira, A.M.P. De Jesus, J. Xavier, A.A. Fernandes, Ultra low-cycle fatigue behaviour of a structural steel, *Engineering Structures*. 60 (2014) 214–222.
- [72] B. Pyttel, D. Schwerdt, C. Berger, Very high cycle fatigue—Is there a fatigue limit?, *International Journal of Fatigue*. 33 (2011) 49–58.
- [73] J. Bannantine, J. Comer, J. Handrock, *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1990.
- [74] O.H. Basquin, The exponential law of endurance tests, *Proc Am Soc Test Mater*. 10 (1910) 625–630.
- [75] L.F. Coffin, A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. 76 (1954) 931–949.
- [76] S.S. Manson, Behavior of materials under conditions of thermal stress, *National Advisory Committee for Aeronautics*. 2933 (1953).
- [77] M.A. Miner, Cumulative damage in fatigue, *Journal of Applied Mechanics*. 12 (1945) 159–164.
- [78] S. McKelvey, S. Zhang, E. Subramanian, Y.L. Lee, Review and Assessment of Multiaxial Fatigue Limit Models, *SAE Technical Paper*. (2020) No. 2020-01-0192.
- [79] A. Karolczuk, E. Macha, A review of critical plane orientations in multiaxial fatigue failure criteria of metallic materials, *International Journal of Fracture*. 134 (2005) 267–304.
- [80] N. Gates, A. Fatemi, Notched fatigue behavior and stress analysis under multiaxial states of stress, *International Journal of Fatigue*. 67 (2014) 2–14.
- [81] M. Mršnik, J. Slavič, M. Boltežar, Multiaxial fatigue criteria for random stress response - Theoretical and experimental comparison, *Procedia Engineering*. 101 (2015) 459–466.
- [82] A. Fatemi, N. Shamsaei, Multiaxial fatigue: An overview and some approximation models for life estimation, *International Journal of Fatigue*. 33 (2011) 948–958.
- [83] J.F. Mercer, G.S. Aglietti, M. Remedios, A. Kiley, An assessment of spacecraft target mode selection methods, *Acta Astronautica*. 140 (2017) 537–553.
- [84] R.I. Stephens, A. Fatemi, R.R. Stephens, H.O. Fuchs, *Metal Fatigue in Engineering*, 2nd ed., Wiley & Sons, 2001.
- [85] C. Keller, K. Feser, Schnelle Emissionsmessung im Zeitbereich, in: A. Schwab (Ed.), *Elektromagnetische Verträglichkeit, EMV*, Berlin, 2002: pp. 347–354.

- [86] DIN EN 1998-1:2010-12, Eurocode 8: Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben - Teil 1: Grundlagen, Erdbebeneinwirkungen und Regeln für Hochbauten, (2010).
- [87] T. Kuttner, Praxiswissen Schwingungsmesstechnik, Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015.
- [88] D.J. Ewins, Modal Testing: Theory, Practice and Application, John Wiley & Sons, 2009.
- [89] F. Wesolowski, Untersuchungen zur Anwendung der Krylov-Unterraum Reduktionsverfahren in der Component-Mode Synthesis und Frequenzgang basierten Substrukturtechnik, (Dissertation) Technische Universität Berlin, 2018.
- [90] D. Marinković, G. Rama, Co-rotational shell element for numerical analysis of laminated piezoelectric composite structures, *Composites Part B: Engineering*. 125 (2017) 144–156.
- [91] A. Palmgren, Die Lebensdauer von Kugellagern, *Zeitschrift Des Vereins Deutscher Ingenieure*. 68 (1924) 339–341.
- [92] H. Neuber, Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration, Genaue Berechnung der Festigkeit, Springer-Verlag, 2013.
- [93] W. Buchmann, Die Kerbempfindlichkeit der Werkstoffe, *Forschung Auf Dem Gebiet Des Ingenieurwesens*. 5 (1934) 36–48.
- [94] B. Heißing, M. Ersoy, Fahrwerkhandbuch: Grundlagen, Fahrdynamik, Komponenten, Systeme, Mechatronik, Perspektiven, Vieweg, Wiesbaden, 2007.
- [95] E. Haibach, Betriebsfestigkeit: Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung, 2. Edition, Springer, 2002.
- [96] M. Mitschke, H. Wallentowitz, Dynamik der Kraftfahrzeuge, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [97] K.G. McConnell, Vibration Testing: Theory and Practice, Wiley, New York, 1995.
- [98] N.M.M. Maia, J.M.M. Silva, Theoretical and Experimental Modal Analysis, Wiley, New York, 1997.
- [99] P. Avitabile, Modal Testing: A Practitioner's Guide, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2018.
- [100] D. Lee, C. Yang, An analytical approach for design and performance evaluation of torsion beam rear suspension, *Finite Elements in Analysis and Design*. 63 (2013) 98–106.
- [101] L.H. Zhao, S.L. Zheng, J.Z. Feng, H.F. Zhou, Y.F. Xing, Fatigue assessment of rear axle under service loading histories considering the strengthening and damaging effects of loads below fatigue limit, *International Journal of Automotive Technology*. 15 (2014) 843–852.
- [102] L.H. Zhao, S.L. Zheng, J.Z. Feng, Failure mode analysis of torsion beam rear suspension under service conditions, *Engineering Failure Analysis*. 36 (2014) 39–48.
- [103] L.H. Zhao, H.C. Cai, T. Wang, S.L. Zheng, Durability assessment of automotive structures under random variable amplitude loading, *Advances in Mechanical Engineering*. 10 (2018) 1687814018771766.
- [104] T. Chen, S. Zheng, J. Feng, A General Method on Establishing Fatigue Test Specification of Torsion Beam Rear Axle, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*. 24 (2017) 1750012.

-
- [105] D.S. Steinberg, *Vibration analysis for electronic equipment*, 3rd Ed., Wiley-Interscience, 2000.
- [106] A. Freddi, G. Olmi, L. Cristofolini, *Experimental Stress Analysis for Materials and Structures: Stress Analysis Models for Developing Design Methodologies*, Springer, 2015.
- [107] Verband Deutscher Ingenieure e. V., VDI - 3822 - Grundlagen und Durchführung einer Schadensanalyse, Beuth Verlag, 2011.
- [108] J.L. González-Velázquez, *Fractography and Failure Analysis*, Springer, 2018.
- [109] D.J. Benac, N. Cherolis, D. Wood, Managing Cold Temperature and Brittle Fracture Hazards in Pressure Vessels, *Journal of Failure Analysis and Prevention*. 16 (2016) 55–66.
- [110] R. Bürgel, H.A. Richard, A. Riemer, *Werkstoffmechanik*, 2. Auflage, Springer Vieweg, 2014.
- [111] G. Lange, M. Pohl, *Systematische Beurteilung technischer Schadensfälle*, 6. Auflage, Wiley-VCH, 2014.
- [112] J. Woodtli, *Praktische Fraktographie*, EMPA-Akademie, Dübendorf, 2003.
- [113] H. Wallentowitz, *Vertikal-/Querdynamik von Kraftfahrzeugen*, 4. Auflage, Schriftenreihe Automobiltechnik, Aachen, 2000.
- [114] A. Öchsner, *Theorie der Balkenbiegung*, Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2016.