

DLR-IB-SY-BS-2023-141

**Methodenvergleich für die
Approximation von Gradienten
eines Strukturlösers**

Bachelorarbeit

Janine Kumpf



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Institut für Systemleichtbau

DLR-IB-SY-BS-2023-141

Methodenvergleich für die Approximation von Gradienten eines Strukturlösers

Zugänglichkeit:

Stufe 2 – DLR-intern zugänglich: Der Interne Bericht wird elektronisch in ELIB abgelegt, erhält aber die Zugriffsbeschränkung „nur DLR-intern zugänglich“. Die bibliographische Beschreibung ist, wie bei allen ELIB-Einträgen, weltweit sichtbar.

Braunschweig, *September, 2023*

Der Bericht umfasst: 60 Seiten

Abteilungsleiter:

Prof. Dr.-Ing. Christian Hühne

Autor:

Janine Kumpf

Autor 2 / Betreuer:

Edgar Werthen

Lennart Tönjes



**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Institut für Mathematik



TU Clausthal

Sommersemester 2023

Bachelorarbeit

Methodenvergleich für die Approximation von Gradienten eines Strukturlösers

Janine Kumpf (513122)

Erstgutachter: Herr Prof. Dr. A. Potschka

Zweitgutachter: Herr Prof. Dr. O. Ippisch

Betreuer (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR)):
Edgar Werthen

Abgabetermin: 29. September 2023



Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt

Kurzreferat

In dieser Bachelorarbeit erfolgt ein Methodenvergleich von der Finite Differenzen (FD) und Komplexe Schritte (CS) Methode zur Approximation von Gradienten. Das Ziel ist die Verbesserung der Gradientenberechnung des Löfers hinsichtlich Laufzeit und Genauigkeit. Diese werden für die Optimierung eines Strukturmodells zur Auslegung einer Flügelstruktur für Windenergieanlagen verwendet.

Die Berechnung der Gradienten ist zeitaufwändig und ungenau mit FD. Daher wird eine Verbesserung in der Zeit und der Genauigkeit angestrebt.

Das Vorgehen des Vergleichs erfolgt ausgehend von einer skalaren Funktion, wobei die Gradienten bekannt sind, über ein lineares Gleichungssystem, zu der eigentlichen Berechnung der Gradienten des Löfers. Abschließend werden die beiden Methoden gegenübergestellt und die Ergebnisse ausgewertet. Dies erfolgt anhand der Implementierung der Versuche.

Im Rahmen dieser Arbeit wird gezeigt, dass für die Exponentialfunktion und das lineare Gleichungssystem die CS Methode genauer ist. In dem Versuch der Berechnung der Lösergradienten von Preliminare Design of Composite Structures (PreDoCS) ist in der zweiten Variante eine Verbesserung bezüglich der Genauigkeit erkennbar. Variante eins beinhaltet verschiedene Fehlergrößen, sodass einige Teile der Berechnung genauer mit der CS Methode und andere mit der FD Methode genauer sind. Die Performance ist bei beiden Methoden ungefähr gleich, jedoch ist die CS Methode bei kleineren Problemen schneller.

Daher ist das Ziel einer Verbesserung hinsichtlich Schnelligkeit und Genauigkeit zum Teil erreicht. Im Rahmen einer weiteren wissenschaftlichen Arbeit sollte die Automatische Differenzierung (AD) Methode untersucht werden, ob diese die Anforderungen in beiden Punkten erfüllt.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und dass alle Stellen dieser Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht wurden und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsstelle vorgelegt wurde. Des Weiteren erkläre ich, dass ich mit der öffentlichen Bereitstellung meiner Abschlussarbeit in der Instituts- und Universitätsbibliothek nicht einverstanden bin.

BS, 29.09.2023

Ort, Datum

Janine Kumpf

Janine Kumpf

Geheimhaltung

Die vorliegende Arbeit unterliegt der Geheimhaltung. Sie darf weder vollständig noch auszugsweise ohne schriftliche Genehmigung des DLR vervielfältigt, veröffentlicht oder Dritten zugänglich gemacht werden.

Inhaltsverzeichnis

Kurzreferat	II
Eigenständigkeitserklärung	III
Geheimhaltung	IV
Abbildungsverzeichnis	VII
Abkürzungsverzeichnis	VIII
Symbolverzeichnis	IX
1 Einleitung	1
1.1 Zielsetzung	1
1.2 Motivation	1
1.3 Aufbau der Arbeit	1
2 Stand der Technik	2
2.1 Einführung in PreDoCS	3
2.2 Einführung in Lightworks	4
3 Theoretische Hintergründe	6
3.1 Die betrachteten Methoden	6
3.1.1 Finite Differenzen Methode	6
3.1.2 Komplexe Schritte Methode	7
3.2 Untersuchung eines Gleichungssystems	8
3.3 Theorie des Flügelaufbaus	9
3.3.1 Klassische Laminat Theorie	11
3.3.2 Kräfte und Momente	12
4 Anwendung	15
4.1 Exponentialfunktion	15
4.2 Mehrdimensionale Funktion	16
4.3 Anwendung auf PreDoCS	21
4.4 Implementierung	22
4.4.1 ABD-Matrix	22
4.4.2 Implementierung der Methoden	23

5	Versuche	24
5.1	Schritt 1 - Exponentialfunktion	24
5.1.1	Relativer Fehler bezüglich der Exponentialfunktion	24
5.1.2	Vergleich der Berechnungsdauer	26
5.2	Schritt 2 - mehrdimensionale Funktion	27
5.2.1	Konditionsanalyse der Vandermonde-Matrix	27
5.2.2	Ableitung nach den Stützwerten	29
5.2.3	Ableitung nach den Stützstellen	31
5.3	Versuche PreDoCS	35
5.3.1	Konditionsanalyse der ABD - und C -Matrix	35
5.4	Gradientenbestimmung in PreDoCS	36
5.4.1	Gradienten nach der ABD -Matrix	37
5.4.2	Gradienten nach den globalen Parametern	39
6	Fazit	43
6.1	Ausblick	43
7	Literaturverzeichnis	45
8	Anhang	46

Abbildungsverzeichnis

1	Aufbau und Verbindung der Programme [5]	2
2	PreDoCS Ebenen [5]	3
3	Flügelaufbau in PreDoCS [5]	4
4	Testflügel in Gemeinsame Sprache für die Konstruktion von Flugzeugen (Common language for aircraft design) (CPACS)	9
5	Balken-Koordinatensystem des Testflügels [5]	10
6	Balken- und Kontur-Koordinatensystem [5]	11
7	Kräfte und Momente in einem Schalenelement [8]	13
8	Relativer Fehler in den Methoden anhand verschiedener Schrittweiten h	25
9	Zeit z in den Methoden FD und CS anhand der Schrittweiten h	26
10	Zeitvergleich der Methoden FD und CS	27
11	Konditionen der Vandermonde-Matrizen	29
12	Ableitung von a_3 nach f_4 mit $n = 4$	30
13	Ableitung a_2 nach x_4 , $n = 4$	33
14	Ableitung a_6 nach x_{10} , $n = 11$	34
15	Zeitvergleich mit $n = 4$	35
16	Zeitvergleich der Methoden von der Ableitung nach ABD	39
17	Schrittweitenuntersuchung der FD Methode	41
18	Zeitvergleich der Methoden	42

Abkürzungsverzeichnis

AD Automatische Differenzierung

CPACS Gemeinsame Sprache für die Konstruktion von Flugzeugen (Common language for aircraft design)

CS Komplexe Schritte

DLR Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

FD Finite Differenzen

FE Finite Elemente

KLT Klassische Laminat Theorie

PreDoCS Preliminare Design of Composite Structures

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge aller natürlichen Zahlen ohne die Null
$\mathbb{N}_0$	Menge aller natürlichen Zahlen einschließlich Null
$\mathbb{R}$	Menge aller reellen Zahlen
A	Scheiben-Steifigkeitsmatrix A
B	Koppel-Steifigkeitsmatrix B
C	C-Matrix
D	Platten-Steifigkeitsmatrix D
J	Jacobi-Matrix
L	Lagrange-Matrix
V	Vandermonde-Matrix
(x, y, z)	globales rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem
(n, s, z)	rechtshändiges orthogonales Koordinatensystem
R	Restglied
$\Im$	Imaginärteil
γ	Verzerrung
ϵ	Verzerrung
Θ	Krümmung
κ	Wölbungen
ϕ	Verdrillung um die z-Ache
w	Längsdehnung in z-Richtung
s	Konturkoordinate

1 Einleitung

Die nachfolgende Bachelorarbeit erfolgt im Rahmen des Studiengangs Technomathematik an der technischen Universität Clausthal-Zellerfeld. Die praktische Anwendung erfolgt am Institut für Systemleichtbau des DLR.

1.1 Zielsetzung

Das Ziel der Arbeit ist die Bestimmung der optimalen Methode zur Gradientenberechnung für die bestehende Architektur vom DLR. Hierfür werden im Rahmen dieser Arbeit die Methode der FD und die Methode der CS hinsichtlich ihrer Genauigkeit und Rechenzeit miteinander verglichen und bewertet.

1.2 Motivation

Die Programmierung am DLR erfolgt in zwei Programmen. Das Programm Lightworks erstellt den optimalen Entwurf eines Flügels. Hierfür werden Gradienten der Zielfunktion und Nebenbedingungsfunktionen nach Entwurfsparametern benötigt. Aktuell werden die Gradienten von PreDoCS innerhalb von Lightworks mit der FD Methode berechnet. Die Berechnung der Gradienten auf diese Art ist zeitaufwändig. Daher liegt die Motivation für diese Arbeit in der Verbesserung der Rechenzeit und der Genauigkeit der Ergebnisse.

1.3 Aufbau der Arbeit

Zunächst werden die beiden Methoden vorgestellt. Anschließend erfolgt ein Vergleich der Methoden in drei Schritten. Dieser beginnt mit der Anwendung auf eine skalare Funktion, die Exponentialfunktion. Im zweiten Schritt erfolgt die Anwendung auf die Komponenten einer mehrdimensionalen Funktion. Die Methoden werden im letzten Schritt auf einem Benchmarkproblem mit dem Strukturlöser PreDoCS untersucht.

Die Gradientenberechnung des Löser wird in dem Strukturlöser PreDoCS durchgeführt. Zur Verbesserung wird eine zweite numerische Methode, die CS Methode, eingesetzt. In PreDoCS liegen die Nebenbedingungen in einem Strukturproblem vor. Die Herausforderung dabei ist die Verknüpfung der Programme Lightworks und PreDoCS.

2 Stand der Technik

In diesem Kapitel wird der aktuelle Stand der Programme beim DLR dargestellt. Der Ablauf des Programms beginnt mit der Übergabe von der parametrischen Darstellung von CPACS. [5] Mit den parametrischen Werten erfolgt die Erstellung eines "Panel-Meta-Models", wie in der Abbildung 1 dargestellt. In diesem Modell stellen die Pfeile die Belastungen auf das Panel dar. [5] Daraufhin entsteht aus dem "Panel-Meta-Model" ein "Constraints-Model". Dieses Modell beinhaltet die Nebenbedingungen. Außerdem geschieht die Erstellung des "Optimisation Models". Das Optimierungsmodell beinhaltet die Optimierungsregionen. [4] Das Programm PreDoCS stellt den Baustein "Solver" in der Abbildung 1 dar. Als Ergebnis der Optimierung liegt ein optimales Flügeldesign vor.

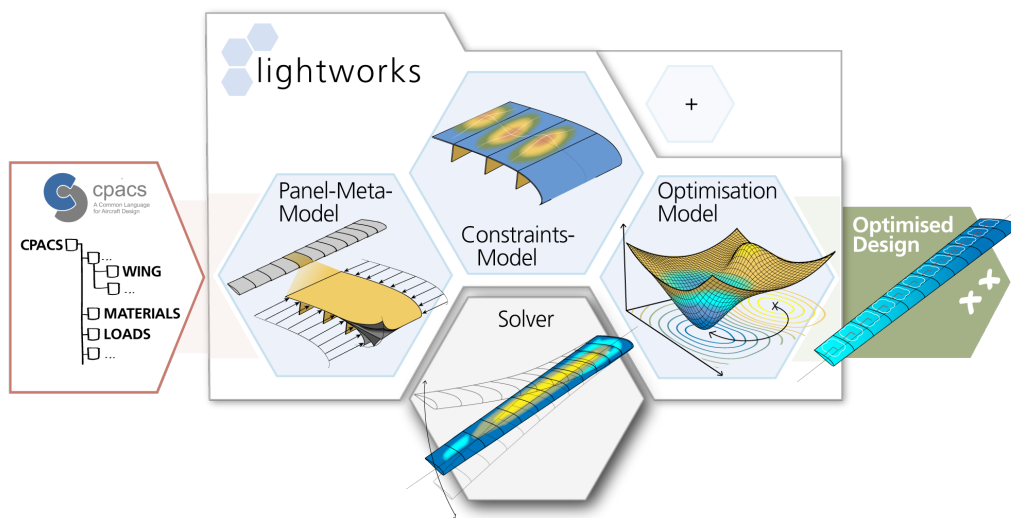


Abbildung 1: Aufbau und Verbindung der Programme [5]

2.1 Einführung in PreDoCS

PreDoCS ist ein Werkzeug, mit welchem schnell Flügel Struktur Konzepte von Verbundwerkstoffstrukturen evaluiert werden. [5] Das Werkzeug gliedert sich in drei Ebenen auf.

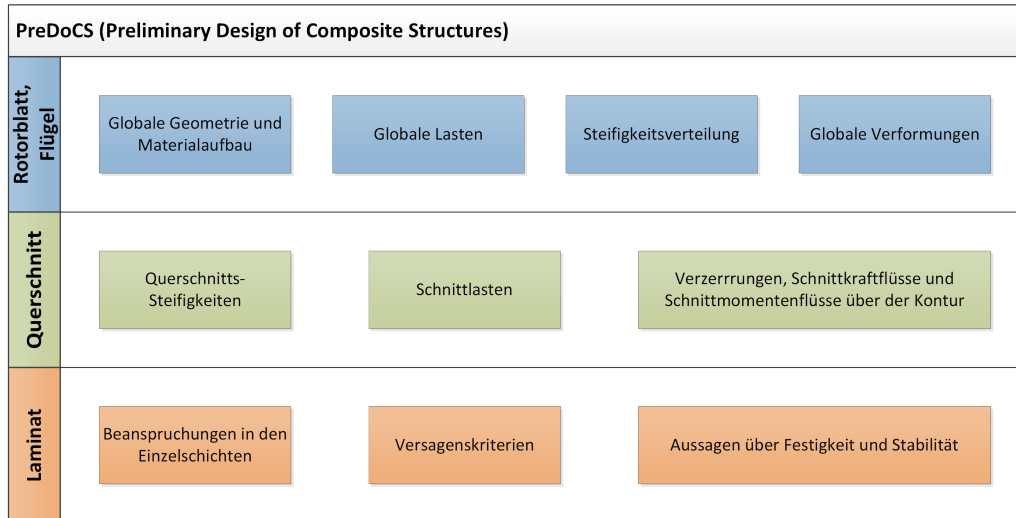


Abbildung 2: PreDoCS Ebenen [5]

Die drei Ebenen, welche in Abbildung 2 dargestellt sind, beinhalten den Flügel, den Querschnitt und das Laminat. Die erste Ebene definiert die innere und äußere Geometrie des Flügels einer Windenergieanlage, sowie das Materialverhalten. Die Steifigkeiten der einzelnen Querschnitte, sowie die Querschnitts-Kontur für Verformungen, Schnittkraftflüsse und Schnittmomentenflüsse sind in der zweiten Ebene und werden in Kapitel 3.3.2 thematisiert. Laminat-Dehnungen und -Spannungen werden für die Festigkeit und Stabilität des Flügels in der dritten Ebene berechnet.

In der zweiten Ebene von PreDoCS erfolgt die Unterteilung des Flügels in 2D-Querschnitte. [5] Die Querschnitte sind in der Abbildung 3 zwischen zwei Balkenpunkten und in der Mitte eines Balkenelements dargestellt. Der Ausschnitt eines Querschnittselements zeigt die Spannungsrechnung in jedem Querschnitt.

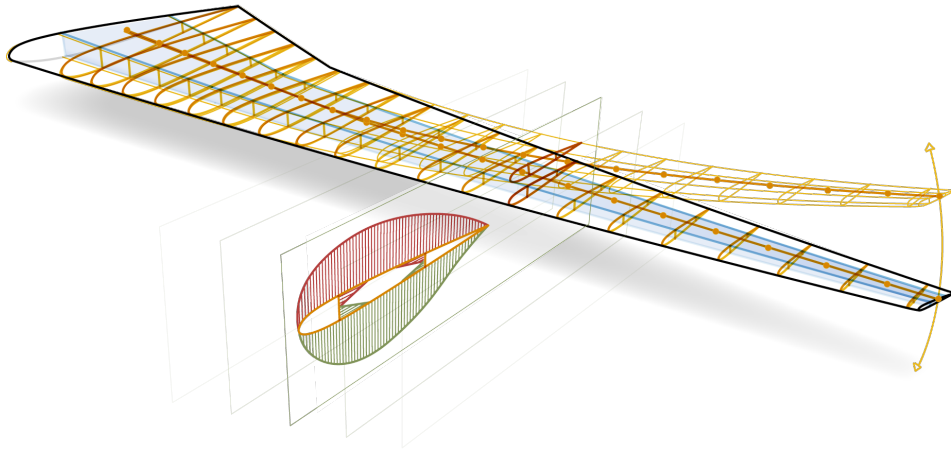


Abbildung 3: Flügelaufbau in PreDoCS [5]

Der Flügel ist in dem Modell für die mechanische Betrachtung als ein Balken idealisiert. [5] Dadurch können verschiedene Berechnungen durchgeführt werden. Diese lassen sich in die Querschnittsberechnung und die Balkenberechnung aufteilen. Außerdem ist in der Abbildung 3 die Verbiegung des Flügels anhand eines gelben Pfeils dargestellt.

2.2 Einführung in Lightworks

Neben dem Programm PreDoCS wird beim DLR das Programm Lightworks entwickelt. Mit Lightworks erfolgt die Optimierung von Flügelstrukturen. [4] Die Gradienten des Löses werden von PreDoCS berechnet und an Lightworks übergeben. Die modulare Darstellung in Lightworks

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial ABD} \frac{\partial ABD}{\partial t} \quad (1)$$

stellt die modulare Berechnung der Ableitung der Spannung σ nach der Dicke t des Flügels dar. Der rechte Teil der Gleichung bildet sich mit der Kettenregel, wobei jeder Eintrag von σ nach jedem Eintrag von der **ABD**-Matrix abgeleitet wird und die Jacobi-Matrizen werden miteinander multipliziert. [10, S. 141] Die Berechnung und Untersuchung erfolgt im Kapitel 4.3. In dem Finite Elemente (FE)-Löser werden die Gradienten mit der FD Methode berechnet. Ein anderer Löser PreDoCS wird anschließend verwendet. Die FD Methode und die CS Methode werden in diesem benutzt.

Zum Beispiel wird die gradientenbasierte Optimierung mit der Methode von beweglichen Asymptoten in Lightworks durchgeführt. [4] Die Methode benötigt die Gradienten so genau wie möglich. Die Berechnung und nicht die Optimierung der Lösergradienten ist zeitaufwändig und ungenau. Daher wird eine Verbesserung angestrebt.

Ein Optimierungssystem liegt vor. Dieses besteht aus einer Zielfunktion und Nebenbedingungen. Die Zielfunktion beinhaltet die Minimierung der Masse. Die Nebenbedingungen umfassen die zulässigen Spannungen, Verformungen und Restriktionen. Die Restriktionen definieren den zulässigen Bereich. Die Gradienten der Restriktionen werden anhand von verschiedenen Methoden bestimmt. [4]

3 Theoretische Hintergründe

Die theoretischen Hintergründe, welche Rückschlüsse auf die Verwendung und die Bewertung der Methoden geben, werden in diesem Kapitel dargelegt. Die Definitionen und die Grenzen der Methoden werden anhand von Untersuchungen der Funktionen im Kapitel 5 beleuchtet. Neben den mathematischen Grundlagen werden die Grundlagen für das Design der Flügelstruktur erläutert.

3.1 Die betrachteten Methoden

Es erfolgt die Definition und der Vergleich der Methoden zur Näherung der Gradienten, welche im Gradientenbasierten Optimierungsverfahren genutzt werden.

3.1.1 Finite Differenzen Methode

Die FD Methode wird zur Approximation verwendet. In der Methode wird eine Differenz zwischen dem Funktionswert an der Stelle $x + h$ und dem Funktionswert an der Stelle x gebildet. Die Ableitung erster Ordnung wird durch die Differenz und der anschließenden Division durch den Schritt h bestimmt. Nach der beschriebenen Vorgehensweise wird die Ableitung für kleine Schrittweiten h angenähert werden.

Graphisch stellt eine Tangente die Steigung am Punkt x dar. Die Tangente wird erreicht, wenn der Abstand zwischen den zwei Punkten klein genug ist, folglich die Schrittweite h klein ist. Daher erfolgt eine Schrittweitenuntersuchung im Kapitel 5 und es wird untersucht wie gut diese Näherung für verschiedene Schrittweiten ist.

Die Taylorreihe einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kann anhand von

Satz 3.1 (Satz von Taylor)

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \mathbf{R}_1(x) \quad (2)$$

beschrieben werden. Das Restglied wird mit $\mathbf{R}_1$ beschrieben. Der Satz von Taylor (2) liefert

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + O(h). \quad (3)$$

Dabei gibt das Restglied den Fehler $O(h)$, beziehungsweise den Abschneidefehler, der Gradientenberechnung an. Für die Approximierung des Gradientens erster Ordnung anhand der FD Methode erfolgt die Definition 3.1

Definition 3.1 (Vorwärtsdifferenz der FD Methode)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (4)$$

Mit der Methode ist es möglich den Gradienten für Funktionen, die vom $\mathbb{R}^n$ abbilden, zu beschreiben, wenn kein analytischer Wert berechnet werden kann. Für die Verwendungsgrenzen der Methode werden Funktionsuntersuchungen im Kapitel 5 durchgeführt.

3.1.2 Komplexe Schritte Methode

Eine weitere Möglichkeit die Ableitung anzunähern erfolgt mit der CS Methode. Die Schwierigkeit dieser Methode besteht in der Verwendung von komplexen Zahlen. Daher muss das Programm die Verwendung von komplexen Zahlen unterstützen. Aus diesem Grund liegt hier ein besonderer Fokus. Außerdem muss die Funktion f analytisch sein, also die Differenzierbarkeit muss sichergestellt sein.

Die Herleitung für die CS Methode mit einem imaginären Wert erfolgt nach [9, S. 247]. Hierfür wird die folgende Funktion $f(x) = u(x) + i v(x)$; $u, v \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ und eine komplexe Variable $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ genutzt. Mit der Voraussetzung einer analytischen Funktion f folgt nach Cauchy-Riemann [9, S. 247]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Nach den Cauchy-Riemann Gleichungen (5) ist die Ableitung des reellen Teils der Funktion f nach dem reellen Teil der Variablen z gleich der Ableitung des imaginären Teils der Funktion f nach dem imaginären Teil der Variablen z . Mit der ersten Gleichung in (5) erfolgt die Grenzwertbildung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + i(y+h)) - v(x + iy)}{h}, h \in \mathbb{R}.$$

Die reelle Ableitung der Funktion f stellt sich mit dem imaginären Grenzwert dar. In dieser Arbeit erfolgt die Betrachtung von reellwertigen Funktionen. Daher gilt $u(x) = f(x)$ und $v(x) = 0$ und damit folgt der Grenzwert für die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Im[f(x + ih)]}{h}, \quad (6)$$

wobei $\Im$ der Imaginärteil der Funktion ist.

Mit der Wahl von einer kleinen Schrittweite h kann die Gleichung (6) wie folgt approximiert werden:

Definition 3.2 (CS Methode)

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{\Im[f(x + ih)]}{h}. \quad (7)$$

Die Wahl der Schrittweite h wird im Kapitel 5 untersucht. Mit der Taylor Reihe

$$f(x + ih) = f(x) + ihf'(x) - h^2 \frac{f''(x)}{2!} - ih^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots \quad (8)$$

kann der Fehler der Methode ermittelt werden.[9] Die Umformulierung der Taylor Reihe (8) nach der ersten Ableitung

$$f'(x) = \frac{\Im[f(x + ih)]}{h} + h^2 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots \quad (9)$$

zeigt einen Fehler von $O(h^2)$.

3.2 Untersuchung eines Gleichungssystems

Für die Untersuchung eines Gleichungssystems wird die Genauigkeit des Ergebnisses in Abhängigkeit von der Kondition dargelegt.

Die Kondition einer Matrix ist wie folgt definiert

Definition 3.3 *Konditionszahl einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit einer Norm $\|\cdot\|$ [3, S. 12]*

$$\text{cond}_{\|\cdot\|}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1. \quad (10)$$

Mit der Konditionszahl der Matrix A kann der relative Fehler in x mit der allgemeinen Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\|A^{-1}\| \cdot \|A\|) \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \quad x, \tilde{x}, \Delta x, b, \tilde{b}, \Delta x \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

mit $\Delta x = x - \tilde{x}$ und $\Delta b = b - \tilde{b}$ begrenzt werden. Die Störungen in dem Gleichungssystem $Ax = b$ beschreiben $\tilde{b}$, sodass $A\tilde{x} = \tilde{b}$ ein zweites Gleichungssystem bildet. Die Konditionszahl einer Matrix verstärkt den relativen Fehler bei der Lösung des Gleichungssystems. Aus diesem Grund wirkt sich eine hohe Konditionszahl auf die Lösung des Gleichungssystems bei Änderungen in $\tilde{b}$ aus. Das Gleichungssystem ist also stabil, wenn der Fehler innerhalb der Maschinengenauigkeit ist.

Die Kondition kann mit verschiedenen Normen berechnet werden. Aus diesem Grund wird die Kondition

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq (\|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2) \cdot \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (12)$$

mit der 2-Norm und die Kondition

$$\frac{\|\Delta x\|_F}{\|x\|_F} \leq (\|A^{-1}\|_F \cdot \|A\|_F) \cdot \frac{\|\Delta b\|_F}{\|b\|_F} \quad (13)$$

mit der Frobenius-Norm (57) durchgeführt. Die Berechnungen der Konditionen für eine Abschätzung des relativen Fehlers werden in Kapitel 5 angewendet.

3.3 Theorie des Flügelaufbaus

Dieses Unterkapitel thematisiert die Theorie des Flügelaufbaus.

Ein Flügel besteht aus einer Ober- und Unterschale.

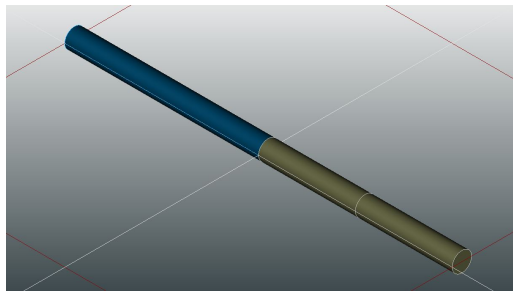


Abbildung 4: Testflügel in CPACS

Der Testflügel dient als Testmodell für Rotorblätter einer Windkraftanlage. Die Darstellung 4 ist eine graphische Darstellung von CPACS und hat die Länge 10 Meter. Das Datenmodell besteht aus einem Rundholm und zwei Elementen, diese sind in der Abbildung 4 farblich unterschiedlich dargestellt. Die Elemente bestehen aus jeweils acht Knoten. Außerdem liegt ein externer Lastfall, die Biegung, vor. Die Schale, die äußere Haut, eines Flügels besteht aus Schichten. Die Schichten sind aus zwei Materialien mit den Dicken $t = 0,001$ Meter und somit beträgt die Gesamtdicke $t = 0,002$ Meter. CPACS konstruiert ein Strukturmodell, welches in PreDoCS verwendet wird. [6]

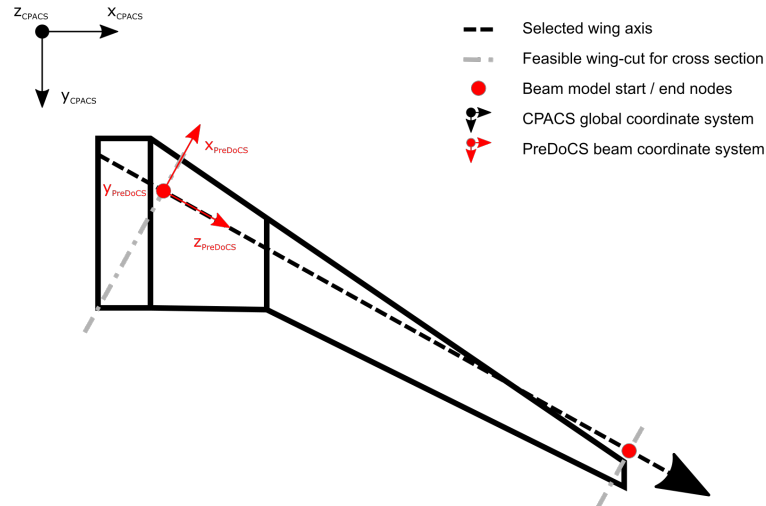


Abbildung 5: Balken-Koordinatensystem des Testflügels [5]

Das rote Koordinatensystem in der Abbildung 5 ist ein globales rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) . Das Hauptachsensystem ist der Balken aus der Abbildung 3 und nennt sich Balken-Koordinatensystem. [5] Das Balken-Koordinatensystem des Flügelmodells gliedert sich in die z -Achse, welche die Balkenlängsachse ist und verläuft durch den ersten und letzten Knoten im Balkenmodell. Eine weitere Achse ist die x -Achse, welche orthogonal zur z -Achse ist und die y -Achse verläuft senkrecht von der Balkenachse. Die x - y Ebene ist die Ebene des Querschnitts. Auf der z -Achse befinden sich die Balkenknoten und zwischen zwei Balkenknoten ist ein Balkenelement. Nach der vorangegangenen Art erfolgt die Diskretisierung des Balkens. Anschließend erfolgt die Darstellung eines Flügels in der Graphik 6. Das 3D Modell des Flügels besteht aus dem Balken-Koordinatensystem der Abbildung 5 und einem Kontur-Koordinatensystem an der Flügeloberfläche. Außerdem ist der Querschnitt die Vorderseite der Abbildung 6.

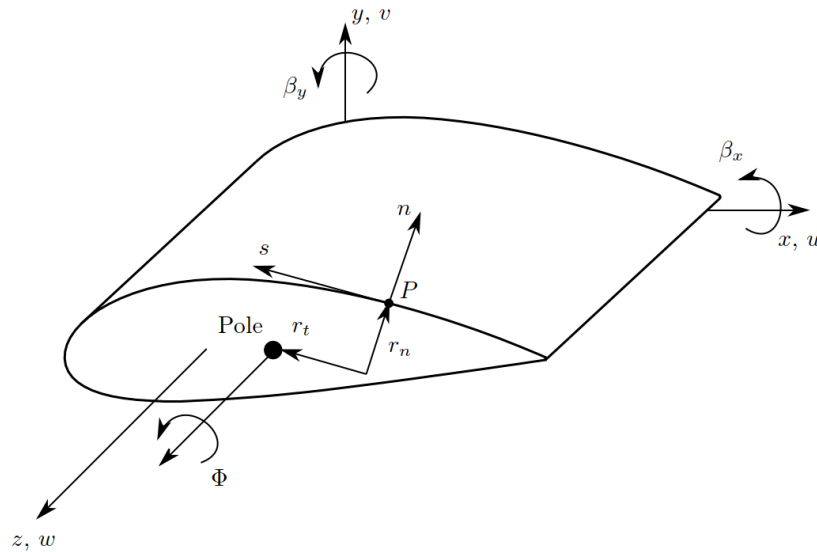


Abbildung 6: Balken- und Kontur-Koordinatensystem [5]

Das Kontur-Koordinatensystem ist ein rechtshändiges orthogonales Koordinatensystem (n, s, z) , wobei s die Konturkoordinate ist.

Die Berechnungen des Querschnitts erfolgen in Bezug zu dem Balkenmodell. Die sieben Freiheitsgrade des Querschnitts sind mit Betrachtung des Ansatzes von Jung [8] die Längsdehnung in z -Richtung (w'_0), die Scherung in der x - z und y - z Ebene (γ_{zz} und γ_{yz}), die Krümmung um die x - und y - Achse (Θ_x und Θ_y) und die Verdrillung um die z -Ache (ϕ'). Der Querschnitt in der zweiten Ebene von PreDoCS besteht aus zwei Materialien. Daher erfolgt anschließend die Betrachtung der Klassische Laminat Theorie (KLT).

3.3.1 Klassische Laminat Theorie

In der dritten Ebene von PreDoCS befindet sich die Umsetzung der KLT. [5] Diese bildet die Grundlage für das Design der Flügelstruktur. Die KLT beschreibt die Spannungsberechnung und die Scheiben- und Plattensteifigkeiten eines Mehrschichtverbunds aus Scheiben- und Plattenelementen. Zusammengefasst drückt die KLT das Materialverhalten aus. Die Scheiben sind parallel und symmetrisch zur Mittelebene. In einem Scheibenelement können Verzerrungen ϵ und γ auftreten. [11] Die zweiten Elemente in den Platten sind senkrecht zu den Mittelkräften durch Querkraften und Momente. In den Elementen können Wölbungen κ in Erscheinung treten. [11]

Aufgrund der KLT wird die **ABD**-Matrix

$$\mathbf{ABD} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \quad (14)$$

zur Berechnung der Steifigkeit von einem Scheiben-Plattenelement verwendet. Das Elastizitätsgesetz des Scheiben-Platten-Elements [10, S. 302] lautet:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Es erfolgt eine Erweiterung der KLT.

3.3.2 Kräfte und Momente

Nach der Steifigkeitsberechnung erfolgt die Berechnung der Schnittkraftflüsse und der Schnittmomentenflüsse in einem Schalensegment. Die Kräfte und Momente in einem Schalensegment, welches aus zwei Schichten besteht, sind basierend auf der Theorie von Jung[8]. Die Schnittkraftflüsse (N) und die Schnittmomentenflüsse (M) sind in der Abbildung 7 abgebildet.

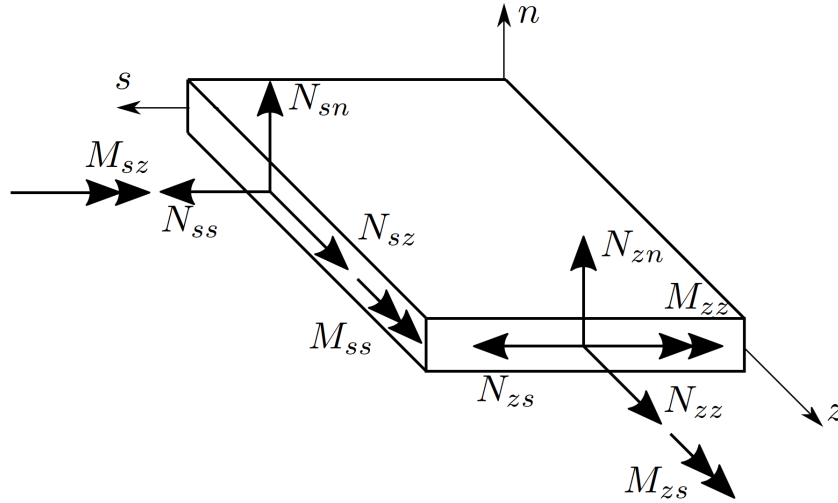


Abbildung 7: Kräfte und Momente in einem Schalelement [8]

Die Richtungen des Koordinatensystems sind wie in der Abbildung 6 (n, s, z). Der Kraftfluss ist in Umfangsrichtung vernachlässigbar klein ($N_{ss} = 0$), sowie $N_{sn} = 0$.

Für den Zusammenhang der Steifigkeit des Laminats nach der Theorie von Jung [8] gilt

$$\begin{pmatrix} N_{zz} \\ M_{zz} \\ M_{zs} \\ \gamma_{zs} \\ \kappa_{ss} \\ N_{zn} \\ \epsilon_{ss} \\ \gamma_{sn} \end{pmatrix} = K_{semiinvers} \begin{pmatrix} \epsilon_{zz} \\ \kappa_{zz} \\ \kappa_{zs} \\ N_{zs} \\ M_{ss} \\ \gamma_{zn} \end{pmatrix}, K_{semiinvers} \in \mathbb{R}^{6 \times 8}$$

Nach der Theorie von Jung [8] ohne $\epsilon_{ss}, \gamma_{sn}, N_{zn}$ und γ_{zn} und mit der **C**-Matrix, die obere linke 5×5 Matrix der $K_{semiinvers}$ ergibt sich das folgende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} N_{zz}(s) \\ M_{zz}(s) \\ M_{zs}(s) \\ \gamma_{zs}(s) \\ \kappa_{ss}(s) \end{pmatrix} = [C] \begin{pmatrix} \epsilon_{zz}(s) \\ \kappa_{zz}(s) \\ \kappa_{zs}(s) \\ N_{zs}(s) \\ M_{ss}(s) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$C \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

als die Beziehung zwischen den Kräften und Momenten zur Berechnung der Schnittkraft- und

Schnittmomentenflüssen in einem Querschnittselement. Die Definition der **C**-Matrix befindet sich im Anhang 8. Die Konturkoordinate s beschreibt die Koordinate innerhalb der Konturlinie. Das Gleichungssystem ist für die Berechnung der externen Lasten zuständig. Die Berechnungsabfolge des Vektors in PreDoCS wird im Kapitel 4.3 untersucht.

4 Anwendung

In diesem Kapitel werden die Funktionen und Systeme dargelegt, welche in dem Kapitel 5 verwendet werden. Es werden die Exponentialfunktion, eine mehrdimensionale Funktion, sowie das Gleichungssystem und die enthaltenen Funktionen und Matrizen in PreDoCS untersucht. Außerdem wird die Implementierung der zwei Methoden dargelegt.

4.1 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion mit der Basis e ist eine skalare Funktion. Die Exponentialfunktion

$$\exp(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

kann über die Reihendarstellung

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (17)$$

definiert werden. Die Exponentialreihe (17) wird mit der Taylorentwicklung dargestellt. Anhand der Taylorentwicklung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (18)$$

werden die Eigenschaften der Exponentialfunktion untersucht.

Das Restglied der Taylorentwicklung

$$\mathbf{R}_n(x; 0) = \frac{\exp \zeta}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (19)$$

wird für die Abschätzung des Fehlers mit $n \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{R}_n(x; 0)\| = \frac{\exp \zeta}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} \quad (20)$$

benutzt. Es ergibt sich ein Fehler der gegen 0 konvergiert. Aufgrund der Abschätzung ist kein Fehler zu erwarten. Daher hat ein auftretender Fehler seinen Ursprung in den Methoden. Die Vergleichbarkeit ist damit sichergestellt.

Für die Betrachtung der CS Methode werden komplexe Zahlen verwendet. Aus diesem Grund

wird zusätzlich die komplexe e-Funktion

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ \exp z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned} \quad (21)$$

mit $z = x + iy$ definiert. Die komplexe e -Funktion ist wie die Exponentialreihe (17) aufgebaut, jedoch bildet diese die komplexen Zahlen auf die komplexen Zahlen ab. Die Eigenschaft der Konvergenz des Fehlers gegen 0 ist weiterhin für die komplexe Funktion gültig.

4.2 Mehrdimensionale Funktion

In diesem Kapitel wird eine mehrdimensionale Funktion betrachtet, die implizit durch Lösung eines linearen Gleichungssystems gegeben ist, betrachtet. Eine solche Funktion ist die Lösung einer Lagrange-Interpolationsaufgabe mittels Vandermonde-Matrix. Diese Funktion wird nach den Stützstellen und Stützwerten abgeleitet. Außerdem wird der Einfluss der Konditionszahl des linearen Gleichungssystems auf die resultierende Approximationen der Gradienten wird untersucht. Daher wird im zweiten Schritt ein System von linearen Gleichungen betrachtet. Das lineare Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n &= f_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n &= f_1, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n &= f_n, \end{aligned} \quad (22)$$

wobei a_i, x_i und $f_i \in \mathbb{R}$ sind.

Der Raum der Polynome vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ wird mit

$$\mathcal{P}^{(n)} = \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in \mathbb{R} \quad (23)$$

definiert. Die Monombasis $(x^0, x^1, \dots, x^n)$ ist eine Basis von $\mathcal{P}^{(n)}$.

Definition 4.1 (Vandermonde-Matrix)

$$\mathbf{V}_n(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \quad (24)$$

Daher ist die Monombasis die Basis der Vandermonde-Matrix (24) und die Bildung erfolgt mit den Monomen $x^0, x^1, \dots, x^n$. Das Gleichungssystem (22) wird mit der Vandermonde-Matrix (24) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

überführt. Anschließend erfolgt die Auflösung der Gleichung (25)

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad (26)$$

nach $\mathbf{a}$. Die Determinante der Vandermonde-Matrix berechnet sich mit

$$\det(\mathbf{V}_n(x_0, x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (27)$$

Die Determinante ist ungleich null, wenn alle Stützstellen paarweise verschieden sind. Die inverse Matrix von $\mathbf{V}$ existiert also demnach, wenn die Stützstellen $(x_0, x_1, \dots, x_n) = (0, 1, \dots, n)$ gewählt werden. Es erfolgt die Verwendung von äquidistanten Stützstellen $(x_0, x_1, \dots, x_n) = (0, 1, \dots, n)$ für die Vandermonde-Matrix (24).

Für die nachgehenden Versuche findet eine Betrachtung des Gleichungssystem mit verschiedener Größen von n statt und ist nachfolgend für $n = 4$ dargestellt. Das Gleichungssystem in

Matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad (28)$$

mit dem Polynom

$$\mathbf{p}_{(n)}(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (29)$$

vom Grad $n = 4$ mit äquidistanten Stützstellen $x = (0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)^T$ und $a = (6 \quad 11 \quad 16 \quad 21 \quad 26)^T$ führt zu dem Polynom

$$\mathbf{p}_{(4)}(x) = 6 + 11x + 16x^2 + 21x^3 + 26x^4 \quad (30)$$

und dem Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 16 \\ 21 \\ 26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 80 \\ 676 \\ 2856 \\ 8306 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Die Ableitung erster Ordnung

$$\mathbf{p}'_{(4)}(x) = 11 + 32x + 63x^2 + 104x^3 \quad (32)$$

des Polynoms (30) erfolgt mit bekannten Ableitungsregeln.

Zusätzlich erfolgt die Ableitung von den Koeffizienten $a : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ nach den Stützstellen und den Stützwerten. Die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_a$

$$\mathbf{J}_a(x, f) = \left(\frac{\partial a_i}{\partial f_j} \quad \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial f_0} & \frac{\partial a_0}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial a_0}{\partial f_n} & \frac{\partial a_0}{\partial x_0} & \frac{\partial a_0}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_0}{\partial x_n} \\ \frac{\partial a_1}{\partial f_0} & \frac{\partial a_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial f_n} & \frac{\partial a_1}{\partial x_0} & \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial f_0} & \frac{\partial a_n}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial f_n} & \frac{\partial a_n}{\partial x_0} & \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (2n+2)}, \quad (33)$$

$i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n; k = 0, \dots, n$

hat die Größe $(n+1) \times (2n+2)$.

Im ersten Schritt wird die Ableitung nach den Stützwerten f betrachtet. Daher erfolgt die Betrachtung des 1. Teils der Jacobi-Matrix (33). Die Jacobi-Matrix von a bezüglich der Stützwerte hat die Größe $(n+1) \times (n+1)$.

Die Betrachtung der partiellen Ableitung von a_0 nach f_0

$$\frac{\partial a_0}{\partial f_0} = \frac{\partial(V_{0,:}^{-1} \cdot f)}{\partial f_0} = V_{0,:}^{-1} \frac{\partial f}{\partial f_0} = V_{0,:}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial f_0} \\ \frac{\partial f_1}{\partial f_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial f_0} \end{pmatrix} = V_{0,:}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = V_{0,:}^{-1} \cdot e_0 = V_{0,0}^{-1} \quad (34)$$

dient zur Herleitung für die partielle Ableitung von a nach f . Zunächst erfolgt die Ersetzung von a_0 durch $V_{0,:}^{-1} \cdot f$. Wobei $V_{0,:}$ die 0-te Zeile von $\mathbf{V}$ und $e_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ der Einheitsvektor ist. Schlussendlich ergibt sich mit der Produktregel die partielle Ableitung zu dem Eintrag $(0,0)$ der invertierten Vandermonde-Matrix. Analog zu der Gleichung (34) entsteht der allgemeine Fall

$$\frac{\partial a_i}{\partial f_j} = V_{i,:}^{-1} e_j = V_{i,j}^{-1}, \quad (35)$$

wobei i die i -te Zeile von a und j die j -te Zeile von f ist. Die partielle Ableitung an einer Stelle i von a nach einer Stelle j in f ist der i -te Eintrag von der Inversen der j -ten Monombasis.

Bei der Ableitung von der Funktion a nach den Stützstellen erfolgt die Betrachtung des zweiten Teils der Jacobi Matrix (33), welche den Vektor a elementweise nach den Stützstellen ableitet. Die Matrix hat die Größe $(n+1) \times (n+1)$. Beispielhaft wird die partielle Ableitung

$$\frac{\partial a_0}{\partial x_0} = \frac{\partial(V_{0,:}^{-1} \cdot f)}{\partial x_0} \quad (36)$$

betrachtet. Die analytische Ableitung von der Gleichung (36) kann nicht berechnet werden.

Daher erfolgt ein Basiswechsel, sodass die inverse Vandermonde-Matrix von den Stützstellen abhängt. Eine andere Darstellung der Polynome, in diesem Fall die Lagrange-Polynome, werden betrachtet. Dafür wird die Vermutung $\mathbf{V} \cdot \mathbf{L} = I$ gestellt.

Die Lagrange-Interpolationsaufgabe sucht Polynome $p_n(x_i) = f_i$ für $i = 0, \dots, n$, daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_n(x) &= a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ &= L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \dots + L_{n-1}(x) f_{n-1} + L_n(x) f_n \\ &= f_i. \end{aligned} \quad (37)$$

Die Lagrange-Basis Polynome definieren sich durch [3, S. 83]

Definition 4.2 Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, Lagrange Polynome $L_0^{(n)}, L_1^{(n)}, \dots, L_n^{(n)} \in P_L^{(n)}$

$$L_i^{(n)}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = l_{0,i} + l_{1,i}x^1 + \dots + l_{n,i}x^n, i = 0, \dots, n \quad (38)$$

und ergeben als Linearkombination das Interpolationspolynom

$$p_L^{(n)}(x) = L_0^{(n)}(x)f_0 + \dots + L_n^{(n)}(x)f_n \quad (39)$$

$$= \sum_{i=0}^n L_i^{(n)}(x)f_i \quad (40)$$

und lösen die Interpolationsaufgabe (40).

Die Koeffizienten $l_{k,i}; k = 0, \dots, n$ des i -ten Basis Polynoms aus der Definition (4.2) bilden die Einträge der i -ten Spalte in der Matrix $\mathbf{L}^{(n)}(x)$ und sind von x abhängig. Die Lagrange-Matrix lautet:

$$\mathbf{L}^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} l_{0,0} & l_{0,1} & \dots & l_{0,n} \\ l_{1,0} & l_{1,1} & \dots & l_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n,0} & l_{n,1} & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}. \quad (41)$$

Mit der Definition

Definition 4.3 (Lagrange-Matrix von x_k)

$$L_i^{(n)}(x_k) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{cases} \quad (42)$$

$$, i = 0, \dots, n; k = 0, \dots, n$$

ist die Lagrange-Matrix von x_k die Identitätsmatrix

$$L^{(n)}(x_k) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (43)$$

Die Inverse einer Matrix ergibt in Multiplikation mit der Matrix die Einheitsmatrix. Für die Behauptung, dass die Langrange-Basis die Inverse der Vandermonde-Matrix ist, erfolgt im

folgenden ein Beweis

$$\mathbf{V}\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{0,0} & l_{0,1} & \dots & l_{0,n} \\ l_{1,0} & l_{1,1} & \dots & l_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n,0} & l_{n,1} & \dots & l_{n,n} \end{bmatrix} = [L_i^{(n)}(x_k)]_{i,k=0,\dots,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I_n. \quad (44)$$

Die Multiplikation von der Vandermonde-Matrix mit der Lagrange-Matrix ergibt die Berechnung der Lagrange-Basis Polynome (4.2) mit x_k . Nach der Festlegung von der Definition (42) ist das Ergebnis die Identitätsmatrix. Daher ist die Inverse der Vandermonde-Matrix die Lagrange-Matrix. Daraus folgt die Gleichheit in Matrixform

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{V}_n^{-1} \cdot f = \mathbf{L}^{(n)}(x) \cdot f \\ &= \begin{pmatrix} l_{0,0} & l_{0,1} & \dots & l_{0,n} \\ l_{1,0} & l_{1,1} & \dots & l_{1,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n,0} & l_{n,1} & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \cdot f. \end{aligned}$$

Anhand der Berechnung in der Definition (4.2) von der Inversen der Vandermonde-Matrix mit der Lagrange-Basis, geschieht die Verwendung der Lagrange-Basis.

4.3 Anwendung auf PreDoCS

Abschließend werden die Lösergradienten für die modular aufgebauten Gradienten (1) in Lightworks berechnet. Der Lastvektor $\sigma = (n_x \ n_y \ n_{xy} \ m_x \ m_y \ m_{xy})^T$ berechnet sich mit dem Gleichungssystem (16) wie folgt

$$\sigma = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{pmatrix} = \max \begin{pmatrix} N_{zz}(s) \\ N_{ss}(s) \\ N_{zs}(s) \\ M_{zz}(s) \\ M_{ss}(s) \\ M_{zs}(s) \end{pmatrix} \quad (45)$$

, wobei $s = 0$, halbe Elementlänge und der Elementlänge ist.

Daher ist σ der maximale Wert der jeweiligen Funktion von den drei Stellen der Konturlinie. In dem Gleichungssystem (45) ist die Umformungen der Deklaration von Lightworks n_x zu

PreDoCS N_{zz} enthalten.

Der Gradient (1) wird anhand von

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial t} \\ \frac{\partial n_y}{\partial t} \\ \frac{\partial n_{xy}}{\partial t} \\ \frac{\partial m_x}{\partial t} \\ \frac{\partial m_y}{\partial t} \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{ABD}}{\partial t} \\ \frac{\partial n_y}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{ABD}}{\partial t} \\ \frac{\partial n_{xy}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{ABD}}{\partial t} \\ \frac{\partial m_x}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{ABD}}{\partial t} \\ \frac{\partial m_y}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{ABD}}{\partial t} \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial t} & \frac{\partial \mathbf{ABD}}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{ABD} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \quad (46)$$

genauer beschrieben.

4.4 Implementierung

In diesem Kapitel erfolgt die Darlegung von der Implementierung der **ABD**-Matrix und der Methoden.

4.4.1 ABD-Matrix

Die **ABD**-Matrix kann auf weniger Einträge minimiert werden. Für die Verwendung der Gradientenbestimmung nach der **ABD**-Matrix wird die **ABD**-Matrix verkleinert. Zunächst ist die Koppel-Steifigkeitsmatrix **B** doppelt vorhanden, sodass die eine **B**-Matrix

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & & & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ & & & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}$$

entfernt wird. In dem vorliegenden Testfall in PreDoCS sind für jedes Paar $ij, ji \forall i, j \in \mathbb{N}$ die Einträge in den **A**, **B** und **D** Matrizen gleich. Daher werden die doppelten Werte gelöscht, sodass hier noch die folgenden Einträge

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & & \\ & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & \\ & & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix}$$

in der Matrix vorhanden sind. Die Lösergradienten benötigen keine Dopplung der Gradientenberechnung. Die Umformung bringt eine Verringerung von 36 auf 18 Einträgen, wodurch die Hälfte der initialen Einträge betrachtet werden muss.

4.4.2 Implementierung der Methoden

In diesem Abschnitt erfolgt die Darlegung der Implementierung von der FD Methode und der CS Methode.

Die Implementierung der FD Methode erfolgt analog zu der Definition (3.1). Daher wird einer Funktion f die Variablen, nach denen abgeleitet wird, übergeben. Das Gleiche wird mit den Variablen in Addition mit der Schrittweite h durchgeführt. Anschließend erfolgt die Differenz von $f(x + h)$ und $f(x)$. Das Ergebnis wird durch die ausgewählte optimale Schrittweite beziehungsweise die vorgegebene optimale Schrittweite h dividiert.

Die Implementierung der CS Methode 3.1.2 erfolgt anhand von drei Schritten. [9, S. 253] Der erste Schritt ist die Deklaration aller reellen Variablen zu komplexen Werten. Daher werden in dem Programm verschiedene Anpassungen durchgeführt. Die Datentypen der reellen und komplexen Zahlen werden mit "numpy_dtype", worin der Datentyp gespeichert ist, übergeben. Anschließend werden alle Funktionen und Operatoren für komplexe Argumente definiert. Aus diesem Grund wird beispielsweise die Betragsfunktion für komplexe Zahlen angepasst. Weitere Operationen sind mit komplexen Zahlen nicht kompatibel, sodass dafür weitere Anpassungen durchgeführt werden müssen. Daraus lässt sich eine Fehleranfälligkeit von komplexen Zahlen gegenüber Operationen in Python schließen. Der zweite Datentyp "float" stellt Zahlen mit der IEEE-754 Fließkommaarithmetik dar. Anschließend wird ein kleiner komplexer Schritt ($hi = 10^{-20}i$) zu x hinzugefügt und der Algorithmus zur Berechnung der Funktion $f(x + hi)$ aufgerufen. Als Letztes erfolgt die Berechnung von df/dx analog zu der Definition (7) mit der vorher berechneten Funktion $f(x + hi)$.

5 Versuche

In diesem Kapitel erfolgt die Darlegung der Versuche. Die Versuche stützen sich auf die vorhergehenden Kapitel und dienen dem Vergleich der Methoden.

5.1 Schritt 1 - Exponentialfunktion

Im Hinblick auf die Anwendung der Gradientenerstellung mit PreDoCS werden die beiden Methoden anhand von Beispielfunktionen mit bekannten Gradienten getestet. Der erste Versuch erfolgt mit der Exponentialfunktion. Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion selbst. Zur Beleuchtung der beiden Methoden wird die Exponentialfunktion an der Stelle 1 ausgewertet. Der Funktionswert an der Stelle 1 stellt die eulersche Zahl e dar. Der Zahlenwert für die eulersche Zahl $e = 2.718281828459 \dots$ lässt sich auf exakt 64 Nachkommastellen berechnen und dient als Referenzwert.

5.1.1 Relativer Fehler bezüglich der Exponentialfunktion

Die Berechnung des relativen Fehlers erfolgt mit

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{relativ}} &= \frac{|f'(1) - \exp 1|}{|\exp 1|} \\ &= \frac{|f'(1) - e|}{|e|}.\end{aligned}\tag{47}$$

Der jeweilige relative Fehler von den beiden Methoden wird in der Abbildung 8 gezeigt.

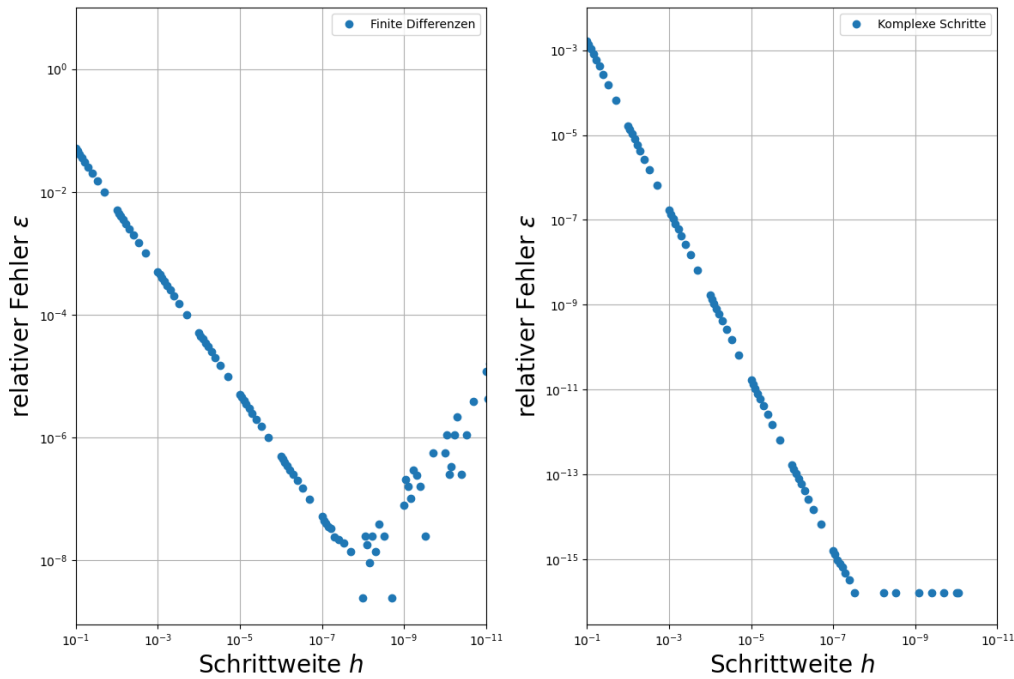


Abbildung 8: Relativer Fehler in den Methoden anhand verschiedener Schrittweiten h

In den beiden Abbildungen 8 wird für verschiedene Schrittweiten h die Genauigkeit der Methoden im Bezug zu dem Referenzwert, die eulersche Zahl, betrachtet.

Die erste Abbildung in 8 zeigt ein Minimum in der Schrittweite $h \approx 10^{-8}$ für den relativen Fehler der FD Methode. Danach und davor ist ein deutlicher Anstieg des relativen Fehlers zu erkennen. Der Anstieg vor 10^{-8} bis 10^{-1} ist der Abschneidefehler. Der Abschneidefehler entsteht durch das Abschneiden in der Taylorentwicklung. Nach der Maschinengenauigkeit $\epsilon = 2^{-24} \approx 6 \cdot 10^{-8}$, welche die genaue Darstellung einer Zahl auf einem Rechner angibt, folgt der Anstieg nach dem Minimum. Ab 10^{-8} ist der Auslöschungsfehler zu erkennen, weil die Differenz bei einer kleinen Schrittweite h auf 0 gerundet wird. Für eine bestmögliche Genauigkeit wird für die Methode der FD die optimale Schrittweite $h = 10^{-8}$ verwendet.

Bei der CS Methode ist ein linearer Abstieg des Fehlers erkennbar. Ab der Schrittweite 10^{-8} ist keine Verbesserung zu erkennen. Daher wird eine Schrittweite $h < 10^{-8}$ gewählt. Ab diesem Punkt ist der Fehler unverändert. Die Punkte der CS Methode werden nicht bis 10^{-11} abgebildet, weil der relative Fehler nicht vorhanden ist. Das Ergebnis ist exakt. Der Auslöschungsfehler tritt im Gegensatz zu der FD Methode bei der CS Methode nicht auf. Die Ergebnisse der FD und CS Methode gleicht sich mit den Ergebnissen aus [1], wobei nach der Maschinengenauigkeit der Auslöschungsfehler bei der FD Methode auftritt.

Im Vergleich zu der FD Methode ist der relative Fehler in der CS Methode mit ungefähr 10^{-16} um einen Faktor von 10^{-8} geringer. Daher ist beim ersten Versuch eine Verbesserung mit der CS Methode zu erkennen.

5.1.2 Vergleich der Berechnungsdauer

Im zweiten Versuch wird die Berechnungsdauer anhand der Exponentialfunktion der beiden Methoden betrachtet.

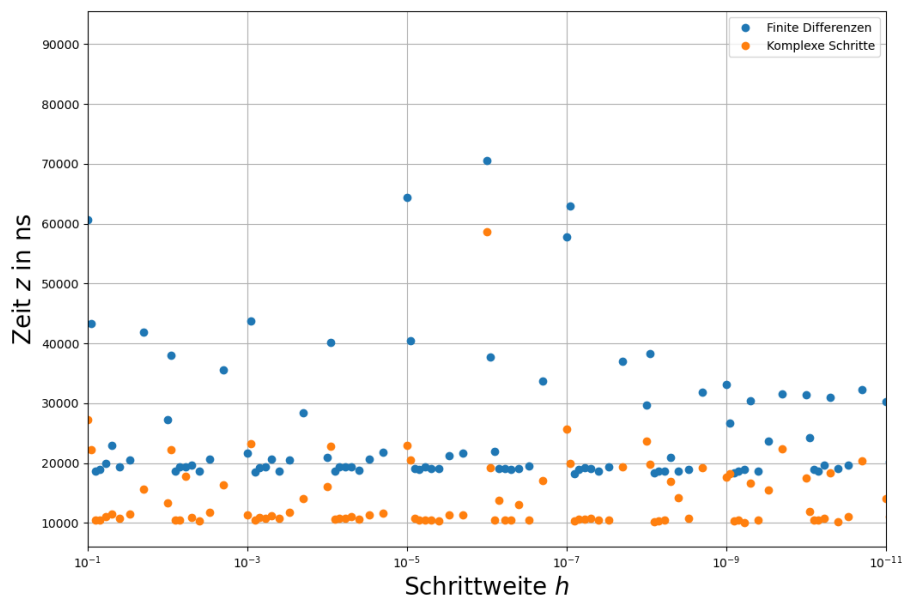


Abbildung 9: Zeit z in den Methoden FD und CS anhand der Schrittweiten h

Die Abbildung 9 stellt für die gewählten Schrittweiten h die Zeit z in Nanosekunden (ns), welche die jeweilige Methode zur Berechnung der Gradienten benötigt, dar. Einige abweichende Punkte sind zu erkennen, diese werden vernachlässigt. Die Vernachlässigung erfolgt aufgrund von zu erwartenden anderen Fehlern, sodass die Betrachtung auf dem Durchschnitt der Zeiten liegt. Die Abbildung 9 stellt keine Abhängigkeit zwischen der Dauer und der gewählten Schrittweite h dar. Außerdem ist eine zeitliche Verbesserung mit der CS Methode deutliche. Eine Verdeutlichung dieser Aussage erfolgt anhand der Darstellung 10.

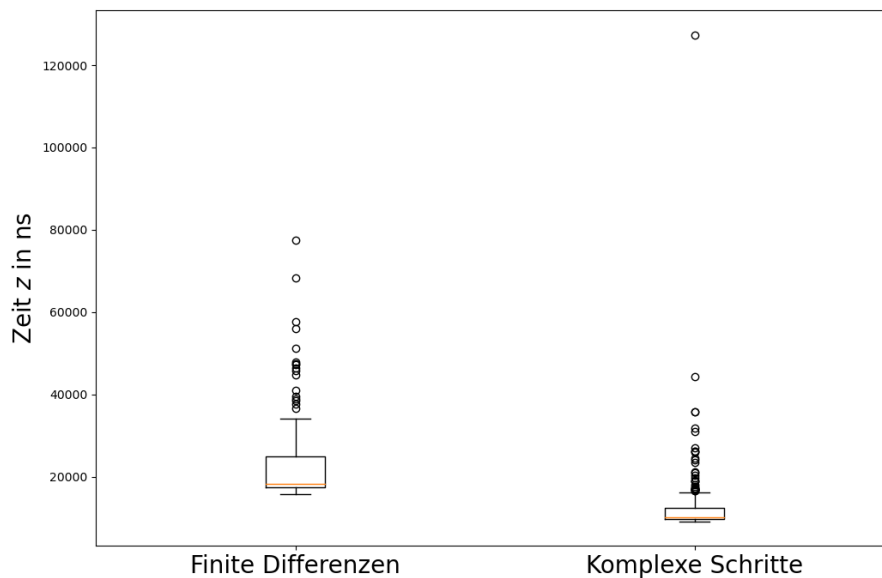


Abbildung 10: Zeitvergleich der Methoden FD und CS

Die Abbildung 10 zeigt die Berechnungsdauer in ns unabhängig von der Schrittweite h an. Es ist ein Unterschied zwischen den Methoden erkennbar, da die FD Methode mehr Zeit benötigt als die CS Methode. Die FD Methode benötigt für die Berechnung circa $(1,8 - 2,2) \cdot 10^{-5}$ Sekunden. Im Gegensatz dazu beträgt die Dauer bei der CS Methode circa $9,7 \cdot 10^{-6}$ Sekunden. Im Vergleich wird eine schnellere Laufzeit der CS Methode deutlich, welcher bei mehrfacher Ausführung der Berechnung stärker ausfällt. Anhand der Betrachtung erfolgt die Vermutung einer Verbesserung der Berechnungsdauer anhand der CS Methode.

5.2 Schritt 2 - mehrdimensionale Funktion

Im nächsten Schritt wird eine mehrdimensionale Funktion verwendet, um zu überprüfen, ob die vorangegangenen Ergebnisse sich auf diesen Fall übertragen. Die Jacobi-Matrix (33) eines schlecht konditionierten Problems wird berechnet.

5.2.1 Konditionsanalyse der Vandermonde-Matrix

Aus dem Grund geschieht eine Berechnung von Konditionen (10) der Vandermonde-Matrix, welche im Anhang 8 sind, bezüglich der 2-Norm und der Frobenius-Norm mit äquidistanten

Stützstellen $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zunächst erfolgt die Berechnung der Konditionszahlen

$$\begin{aligned} \text{cond}(\mathbf{V}_3(0, 1, 2, 3))_2 &= \|\mathbf{V}_3(0, 1, 2, 3)\|_2 \cdot \|\mathbf{V}_3(0, 1, 2, 3)^{-1}\|_2 \\ &= 154.45646028651436 \\ \text{cond}(\mathbf{V}_3(0, 1, 2, 3))_F &= \|\mathbf{V}_3(0, 1, 2, 3)\|_F \cdot \|\mathbf{V}_3(0, 1, 2, 3)^{-1}\|_F \\ &= 158.98986690282428 \end{aligned}$$

mit $n = 3$ und äquidistanten Stützstellen $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$. Anschließend erfolgt eine Erhöhung des n und es werden weitere Konditionszahlen untersucht. Für $n = 4$ mit $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$ folgen die Konditionen

$$\begin{aligned} \text{cond}(\mathbf{V}_4(0, 1, 2, 3, 4))_2 &= \|\mathbf{V}_4(0, 1, 2, 3, 4)\|_2 \cdot \|\mathbf{V}_4(0, 1, 2, 3, 4)^{-1}\|_2 \\ &= 2592.886055334179 \\ \text{cond}(\mathbf{V}_4(0, 1, 2, 3, 4))_F &= \|\mathbf{V}_4(0, 1, 2, 3, 4)\|_F \cdot \|\mathbf{V}_4(0, 1, 2, 3, 4)^{-1}\|_F \\ &= 2632.5581862831955. \end{aligned}$$

Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix weist eine Erhöhung auf. Daher findet die Berechnung der Konditionszahlen

$$\begin{aligned} \text{cond}(\mathbf{V}_6(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6))_2 &= \|\mathbf{V}_6(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)\|_2 \cdot \|\mathbf{V}_6(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)^{-1}\|_2 \\ &= 1597316.1590215832 \\ \text{cond}(\mathbf{V}_6(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6))_F &= \|\mathbf{V}_6(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)\|_F \cdot \|\mathbf{V}_6(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)^{-1}\|_F \\ &= 1604548.6543867881 \end{aligned}$$

der Matrix mit $n = 6$ statt. Aufgrund des Anstiegs der Konditionszahl von $n = 3$ nach $n = 4$ und $n = 6$ geschieht eine Analyse der Konditionszahl mit größer werdendem n . Die Berechnung der Konditionszahlen erfolgt anhand der Definition der Kondition (10).

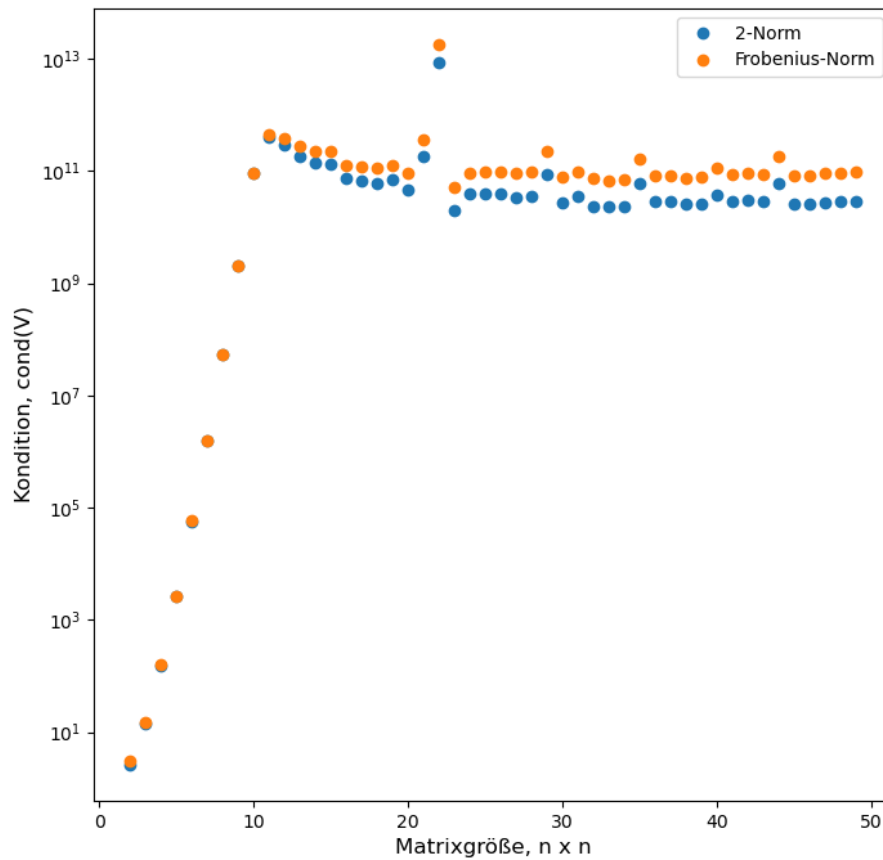


Abbildung 11: Konditionen der Vandermonde-Matrizen

In der Abbildung 11 ist ein exponentieller Anstieg der Konditionszahl mit größer werdendem n bis zu der Vandermonde-Matrix der Größe 11×11 mit dem Wert $5 \cdot 10^{11}$ zu erkennen. Ab dieser Matrixgröße pendelt sich die Konditionszahl bei ungefähr 10^{11} ein. Da die Konditionszahl groß ist, wird ein großer relativer Fehler erwartet.

Im Anschluss erfolgt die Gradientenberechnung der Jacobi-Matrix (33). Die Ableitung erfolgt nach den Stützwerten f und den Stützstellen x . Als Referenzwert für die Gradientenberechnung eines schlecht konditionierten Problems wird die Lagrange-Matrix verwendet. Der relative Fehler wird anhand von der Abschätzung (11) eingegrenzt.

5.2.2 Ableitung nach den Stützwerten

Bei der Ableitung nach den Stützwerten wird mit der Schrittweite h gestört.

Die Ableitung von a nach f ist mit der Lagrange-Basis

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial f_j} &= l_{i,j}; i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n \\ \frac{\partial a}{\partial f} &= \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (48)$$

Somit ist der exakte Wert der Gradienten (48) die Lagrange-Matrix und dient dem Vergleich der zwei Methoden.

Anhand des Polynoms und der äquidistanten Stützstellen x werden die Stützwerte f berechnet. Anschließend werden die Stützstellen an die Methoden übergeben. Zudem f_j wird jeweils ein Schritt $h \in \mathbb{R}$ oder $ih, i \in \mathbb{C}, h \in \mathbb{R}$ hinzugefügt. Danach erfolgt die Berechnung der Stelle a_i nach f_j . Abschließend erfolgen zwei Vergleiche der Ergebnisse. Zunächst wird die Genauigkeit der Ergebnisse der Gradientenberechnung anhand der beiden Methoden mit dem exakten Wert der Lagrange-Basis evaluiert. Außerdem erfolgt ein Vergleich der Laufzeit der Methoden.

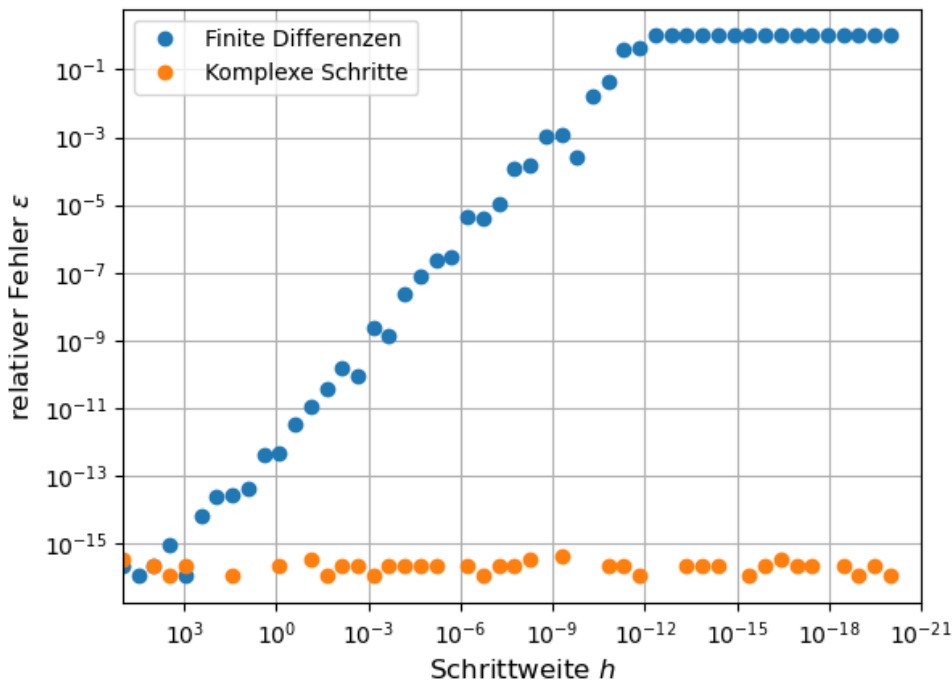


Abbildung 12: Ableitung von a_3 nach f_4 mit $n = 4$

Anhand der Abbildung 12 ist bei beiden Methoden ein geringer Fehler bei hohen Schrittweiten h zu erkennen. Der Verlauf der Abbildung stellt nicht den Auslöschungs- und Abschneidefehler dar. Die Störungen in f führen nicht zu dem Ergebnis einer guten Darstellung für eine optimale

Schrittweite h , weil die Gradientenberechnung $\frac{\partial a}{\partial f}$ eine lineare Abbildung darstellt. Aus diesem Grund wird im folgenden die Ableitung von a nach den Stützstellen x untersucht.

5.2.3 Ableitung nach den Stützstellen

Im nächsten Schritt wird die Ableitung nach den Stützstellen betrachtet. Die Herleitungen für die Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{L}^{(n)}(x) \cdot f}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \mathbf{L}^{(n)}(x)}{\partial x} \cdot f\end{aligned}\tag{49}$$

folgt.

Dafür wird das Beispielproblem mit $n = 4$ verwendet. Für das Problem mit $n = 4$ werden die $L_i^{(4)}(x)$ anhand der Definition (4.2) gebildet. Anhand der Lagrange-Basis Polynome

$$\begin{aligned}L_0^{(4)} &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \\ L_1^{(4)} &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\ L_2^{(4)} &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ L_3^{(4)} &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \\ L_4^{(4)} &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\end{aligned}$$

können die Einträge $l_{j,k}$; $j, k = 0, \dots, n$ berechnet werden. Die Ableitung der Lagrange-Polynome für den Fall $\frac{\partial a_0}{\partial x_0}$ werden betrachtet. Dazu wird beispielhaft die Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0} L_0^{(4)} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \right) \\ &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \right)\end{aligned}\tag{50}$$

betrachtet. Anschließend folgt mit der Produktregel für Ableitungen und Erweiterungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} L_0^{(4)} &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \\ &\cdot \frac{(-(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) - (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_4))}{(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)^2(x_0 - x_3)^2(x_0 - x_4)^2} \\ &\quad - \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4) - (x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4))}{(x_0 - x_1)^2(x_0 - x_2)^2(x_0 - x_3)^2(x_0 - x_4)^2} \end{aligned}$$

das Ergebnis der Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_0} L_0^{(4)}$. Weitere Ableitungen von $L_i, i = 0, \dots, n$ nach x_0 sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} L_i^{(4)} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0} L_0^{(4)} \quad \frac{\partial}{\partial x_0} L_1^{(4)} \quad \frac{\partial}{\partial x_0} L_2^{(4)} \quad \frac{\partial}{\partial x_0} L_3^{(4)} \quad \frac{\partial}{\partial x_0} L_4^{(4)} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 2.083 & -4.0 & 3.0 & -1.333 & 0.25 \\ -4.340 & 8.333 & -6.25 & 2.777 & -0.520 \\ 3.0381 & -5.833 & 4.375 & -1.944 & 0.364 \\ -0.868 & 1.666 & -1.25 & 0.555 & -0.104 \\ 0.086 & -0.166 & 0.125 & -0.055 & 0.010 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach der Einfügung in (49) ergibt sich die partielle Ableitung

$$\frac{\partial a}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} L_i^{(4)} \cdot f = [-11.0 \quad 22.9166 \quad -16.0416 \quad 4.5833 \quad -0.4583]^T \quad (51)$$

von a nach x_0 . Anhand des Beispiels wird die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} L_i^{(n)} &= \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^n x - x_j}{(x_i - x_k) \prod_{j=0, j \neq i}^n x_i - x_j}, i \neq k \\ &= \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n x - x_j \cdot \left(- \sum_{l=0, l \neq i}^n \prod_{j=0, j \neq l, j \neq i}^n x_i - x_j \right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)^2}, i = k \end{aligned}$$

hergeleitet und zur Berechnung mit der anschließenden Matrix-Vektor Multiplikation (51) für

den zweiten Teil der Jacobi-Matrix (33) verwendet. Der zweite Teil der Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \begin{pmatrix} -11.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 22.916 & -840.0 & 3477.0 & -4642.666 & 1950.749 \\ -16.041 & 910.0 & -5505.25 & 8124.666 & -3576.375 \\ 4.583 & -315.0 & 2318.0 & -4062.333 & 1950.749 \\ -0.458 & 34.999 & -289.75 & 580.333 & -325.125 \end{pmatrix}$$

ist im folgenden der Referenzwert für den Vergleich der beiden Methoden.

Der Vergleich der Methoden ist in der Abbildung 13 dargestellt.

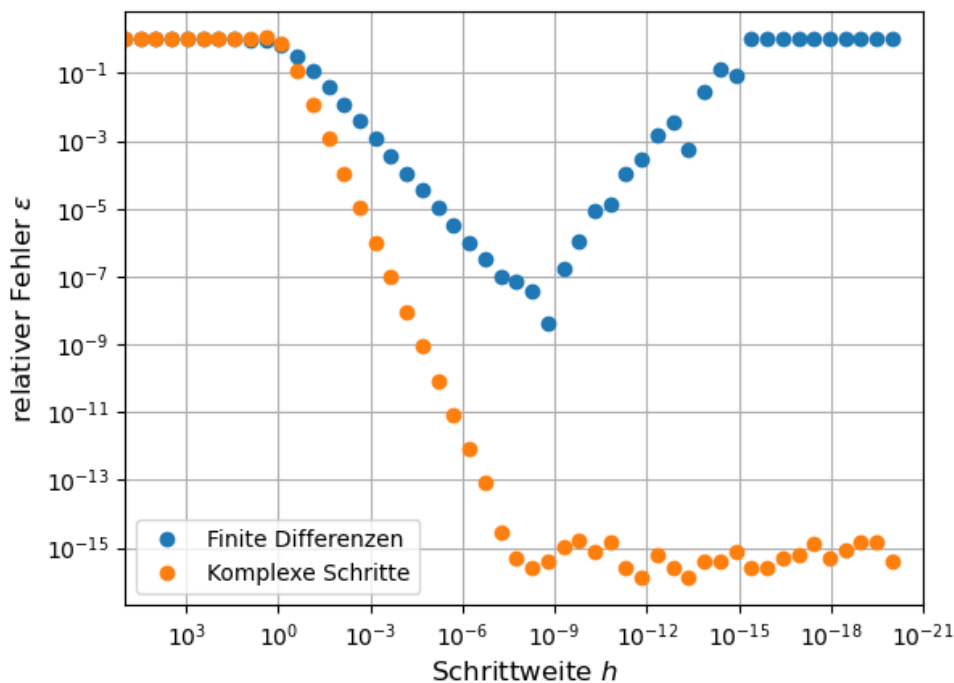
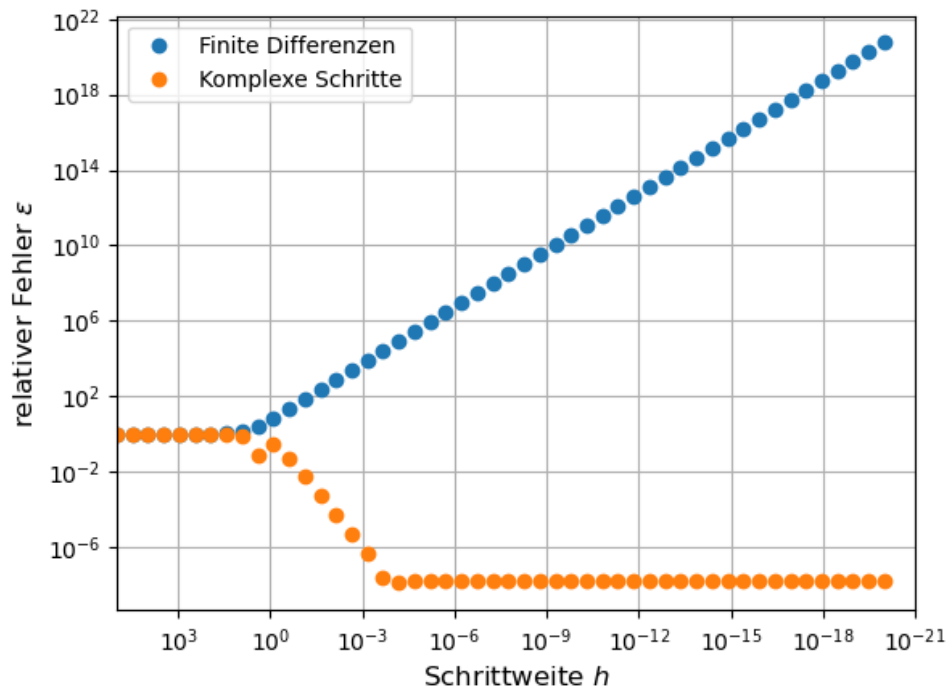


Abbildung 13: Ableitung a_2 nach x_4 , $n = 4$

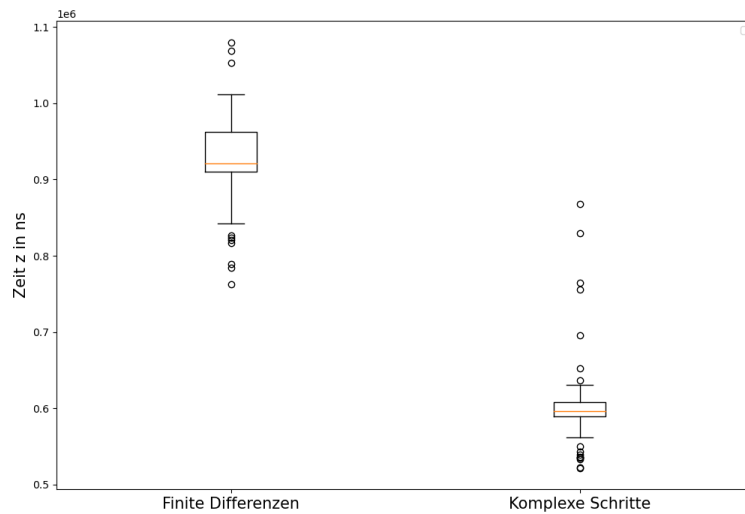
Der relative Fehler in der Abbildung 13 gleicht dem Verlauf wie in der Abbildung 8. In dem Beispiel mit $n = 4$ ist die CS Methode genauer. Daher ist $h \approx 10^{-9}$ für die FD Methode und $h < 10^{-8}$ für die CS Methode die optimale Schrittweite.

Weitergehend wird der Zusammenhang zwischen der Konditionszahl und dem relativen Fehler betrachtet. Anhand vorheriger Untersuchungen ist die Kondition der Vandermonde-Matrix mit einer Größe von 11×11 sehr groß. Aus diesem Grund erfolgt die Ableitung (49) mit $n = 11$.

Abbildung 14: Ableitung a_6 nach x_{10} , $n = 11$

Anhand der Grafik 14 ist nicht der Verlauf wie in der Abbildung 13 zu erkennen. Der Verlauf des relativen Fehlers der FD Methode steigt linear an. Daher bewirkt die schlechte Konditionszahl der Vandermonde-Matrix einen großen Fehler in der Ableitung mit der FD Methode. Im Gegensatz dazu verringert sich der relative Fehler in der CS Methode bis zu dem Wert 10^{-8} . Es herrscht nicht die Genauigkeit wie in der Abbildung 13, jedoch erzielt die CS Methode deutlich bessere Werte als die FD Methode.

Daher wird im nächsten Schritt überprüft, welche Zeit für die optimalen Schrittweiten h benötigt wird.

Abbildung 15: Zeitvergleich mit $n = 4$

Die Abbildung 15 stellt die Berechnungsdauer der Methoden mit optimalen Schrittweiten h in Nanosekunden dar. Eine Verbesserung mit der CS Methode ist in der Abbildung 15 mit $n = 4$ deutlich. Die Abweichung beträgt ungefähr $0,3 \cdot 10^6$ Nanosekunden.

5.3 Versuche PreDoCS

Die Methoden werden auf das Benchmarkproblem von PreDoCS angewendet. Da in der CS Methode komplexe Zahlen verwendet werden, dürfen innerhalb des Programmablaufs von PreDoCS keine komplexen Werte durch reelle Werte ersetzt werden, ansonsten werden die Werte manipuliert.

Die Berechnung erfolgt anhand von Operationen, welche für komplexe Zahlen geeignet sind. Außerdem wird bei der Erstellung einer Matrix ein Datentyp mit übergeben, damit bei der Aktualisierung einzelner Werte in einer Matrix der Datentyp übereinstimmt.

Für den Testfall, welcher sich in Kapitel 3.3 vorstellt, erfolgt ein Vergleich mit den Methoden FD und CS.

5.3.1 Konditionsanalyse der ABD- und C-Matrix

Die **ABD**-Matrix ist in dem Gradienten (1). Daher erfolgt die Untersuchung der **ABD**-Matrix. Im Bezug zu der Analyse wird zunächst die Konditionszahl der **ABD**-Matrix berechnet. Dadurch erfolgt die Überprüfung, ob diese einen Einfluss auf den Fehler in der Berechnung hat.

Die Berechnung der Konditionszahl wird anhand der Frobenius-Norm 57 und der 2-Norm analysiert. Für die FD Methode sind die Konditionszahlen

$$\text{cond}(\mathbf{ABD})_2 = 16109911,019$$

$$\text{cond}(\mathbf{ABD})_F = 20623513,625$$

gleich wie in der CS Methode, weil die **ABD**-Matrix vor dem Hinzufügen eines Schrittes h keine komplexen Zahlen enthält. Die Konditionszahl der **ABD**-Matrix ist sehr hoch. Daher folgt die Vermutung aufgrund der Abschätzung (11) und des Versuchs in Kapitel 5.2.3, dass die Berechnung des Gleichungssystems numerische Fehler enthält.

Für eine weitere Konditionsanalyse wird die **C**-Matrix verwendet. Die Einträge der **C**-Matrix vor dem Hinzufügen eines Schrittes h befinden sich im Anhang 8. Daher geschieht die Berechnung der Konditionszahlen

$$\text{cond}(\mathbf{C})_2 = 675380389629579,4$$

$$\text{cond}(\mathbf{C})_F = 675380389630033,1$$

der **C**-Matrix. Die Berechnung der Konditionszahlen weist auf die Vermutung einer großen Abweichung des Fehlers bei beiden Methoden.

Zusammenfassend weisen beide Konditionsanalysen eine große Konditionszahl vor. Daher ist davon auszugehen, dass aufgrund der Matrizen Fehler entstehen. Diese Fehler können sich im Laufe des Programms fortpflanzen, wodurch sich der Fehler vergrößert.

5.4 Gradientenbestimmung in PreDoCS

Die Gradientenbestimmung in PreDoCS erfolgt anhand von zwei Varianten. Diese werden in der Gradientendarstellung (46) eingeführt. Die Gradienten werden von den Spannungen nach den globalen Parametern $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und der **ABD**-Matrix abgeleitet.

Aus der Erkenntnis $N_{ss} = 0$ folgt, dass die Gradienten an der Stelle n_y jeweils Null sind. Die Gradienten werden nach den Lastfällen separiert. Die Lasten von einem Panel mit Lastfällen sind $\sigma = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_{xy} & m_x & m_y & m_{xy} \end{bmatrix}$. Wenn mehrere Panele vorliegen, werden diese Vektoren unter der vertikalen Achse zusammengefügt und in einem Array zusammengefasst. In dem Testfall liegt ein Panel mit zwei Segmenten vor, weil ein Segment ein Material und die dazugehörigen Materialeigenschaften umfasst, sodass die Matrixgröße in Abhängigkeit von dem jeweiligen Ableitungsparameter steht.

5.4.1 Gradienten nach der ABD-Matrix

Zunächst erfolgt die Betrachtung der Ableitung der Spannungen nach der **ABD**-Matrix. Die Ableitung nach der **ABD**-Matrix stellt eine Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}(\mathbf{ABD}) = \frac{d\sigma}{d\mathbf{ABD}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial A_{11}} & \frac{\partial n_y}{\partial A_{11}} & \frac{\partial n_{xy}}{\partial A_{11}} & \frac{\partial m_x}{\partial A_{11}} & \frac{\partial m_y}{\partial A_{11}} & \frac{\partial m_{xy}}{\partial A_{11}} & \frac{\partial n_x}{\partial A_{11}} & \cdots & \frac{\partial m_{xy}}{\partial A_{11}} \\ & & & & \vdots & & & & \\ \frac{\partial n_x}{\partial A_{66}} & \frac{\partial n_y}{\partial A_{66}} & \frac{\partial n_{xy}}{\partial A_{66}} & \frac{\partial m_x}{\partial A_{66}} & \frac{\partial m_y}{\partial A_{66}} & \frac{\partial m_{xy}}{\partial A_{66}} & \frac{\partial n_x}{\partial A_{66}} & \cdots & \frac{\partial m_{xy}}{\partial A_{66}} \\ \frac{\partial n_x}{\partial B_{11}} & \frac{\partial n_y}{\partial B_{11}} & \frac{\partial n_{xy}}{\partial B_{11}} & \frac{\partial m_x}{\partial B_{11}} & \frac{\partial m_y}{\partial B_{11}} & \frac{\partial m_{xy}}{\partial B_{11}} & \frac{\partial n_x}{\partial B_{11}} & \cdots & \frac{\partial m_{xy}}{\partial B_{11}} \\ & & & & \vdots & & & & \\ \frac{\partial n_x}{\partial B_{66}} & \frac{\partial n_y}{\partial B_{66}} & \frac{\partial n_{xy}}{\partial B_{66}} & \frac{\partial m_x}{\partial B_{66}} & \frac{\partial m_y}{\partial B_{66}} & \frac{\partial m_{xy}}{\partial B_{66}} & \frac{\partial n_x}{\partial B_{66}} & \cdots & \frac{\partial m_{xy}}{\partial B_{66}} \\ \frac{\partial n_x}{\partial D_{11}} & \frac{\partial n_y}{\partial D_{11}} & \frac{\partial n_{xy}}{\partial D_{11}} & \frac{\partial m_x}{\partial D_{11}} & \frac{\partial m_y}{\partial D_{11}} & \frac{\partial m_{xy}}{\partial D_{11}} & \frac{\partial n_x}{\partial D_{11}} & \cdots & \frac{\partial m_{xy}}{\partial D_{11}} \\ & & & & \vdots & & & & \\ \frac{\partial n_x}{\partial D_{66}} & \frac{\partial n_y}{\partial D_{66}} & \frac{\partial n_{xy}}{\partial D_{66}} & \frac{\partial m_x}{\partial D_{66}} & \frac{\partial m_y}{\partial D_{66}} & \frac{\partial m_{xy}}{\partial D_{66}} & \frac{\partial n_x}{\partial D_{66}} & \cdots & \frac{\partial m_{xy}}{\partial D_{66}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{27,12} \quad (52)$$

dar. Die Berechnung der Gradienten erfolgt nach den Einträgen $A_{11}, A_{12}, A_{16}, A_{22}, A_{26}, A_{66}, B_{11}, B_{12}, B_{16}, B_{22}, B_{26}, B_{66}$ und $D_{11}, D_{12}, D_{16}, D_{22}, D_{26}, D_{66}$, da die anderen Einträgen lediglich eine Dopplung darstellen wie in Kapitel 4.4.1.

Die Veränderung der **ABD**-Matrix hat Auswirkungen auf die **C**-Matrix, welche im Gleichungssystem enthalten ist. Verschiedene Stellen in der **ABD**-Matrix haben einen unterschiedlichen Einfluss auf die **C**-Matrix. Die **C**-Matrix nach Jung [8] enthält die **ABD**-Einträge dividiert durch ein Delta (siehe 8).

Der relative Fehler von der FD mit $h = \sqrt{\epsilon} \cdot (1 + |x_k|)$ und CS mit $h = 10^{-20}$ wird berechnet. Es wird ein Ausschnitt der Berechnung betrachtet, weil die Jacobi-Matrix zu groß ist.

Die Betrachtung von

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A_{11}} = \begin{pmatrix} 4.119 \cdot 10^{-6} \\ nan \\ 0.049 \\ 3.820 \cdot 10^{-5} \\ 3.790 \cdot 10^{-5} \\ 0.049 \\ 4.100 \cdot 10^{-6} \\ nan \\ 0.017 \\ 3.823 \cdot 10^{-5} \\ 3.809 \cdot 10^{-5} \\ 0.017 \end{pmatrix}^T \quad (53)$$

erfolgt, weil der relative Fehler in der Größenordnung 10^{-5} liegt. Eine signifikante Stelle liegt bei der Berechnung der Ergebnisse, welche einen kleinen relativen Fehler besitzen. An dieser Stelle ist das Ergebnis der beiden Methoden ähnlich, daher kann aus den vorangegangenen Ergebnissen die Methode der CS als genauer angenommen werden. Da keine Referenzwerte vorliegen, erfolgt die Entscheidung aus vorangegangenen Ergebnissen.

Weitere Stellen, wie zum Beispiel sehr große Abweichungen in der Jacobi-Matrix, sind vorhanden. Die Stellen

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A_{16}} = \begin{pmatrix} 10490.996939864735 \\ nan \\ 3105.844005669582 \\ 53055.59881349309 \\ 52809.80142611416 \\ 15.832835884766354 \\ 11155.208328698756 \\ nan \\ 1626.156931309602 \\ 53195.31314444338 \\ 53065.061746096624 \\ 7.76500755012375 \end{pmatrix} \quad (54)$$

weichen ab, jedoch ist die **ABD**-Matrix an den Stellen 0. Daher haben diese Stellen keinen

Einfluss auf die Bewertung der Methoden.

Es wird die Berechnung der Methoden mit den Schrittweiten $h = \sqrt{\epsilon} \cdot (1 + |x_k|)$ für die FD Methode und mit $h = 10^{-20}$ für die CS Methode untersucht.

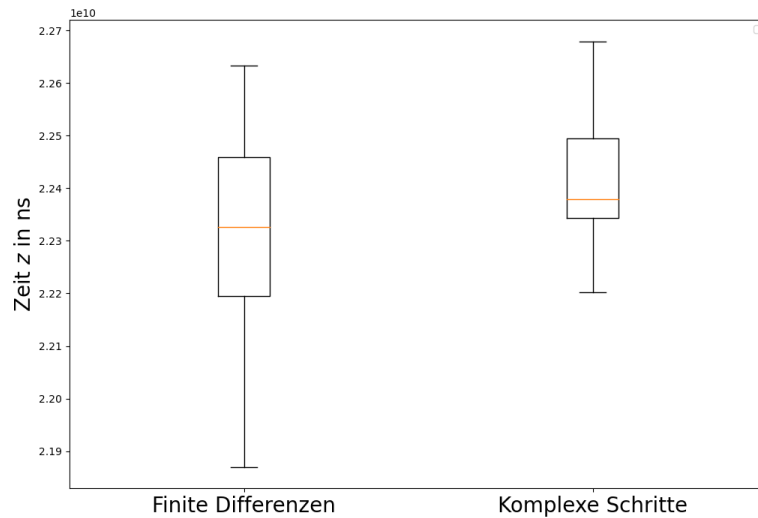


Abbildung 16: Zeitvergleich der Methoden von der Ableitung nach ABD

Die Abbildung 16 zeigt den Vergleich der Dauer von den Methoden. Die Berechnungsdauer ist in der Größenordnung von 10^{10} Nanosekunden dargestellt. Im direkten Vergleich ist eine ähnliche Berechnungsdauer erkennbar.

5.4.2 Gradienten nach den globalen Parametern

Die zweite Variante für die Gradientenbestimmung beinhaltet die Ableitung nach den globalen Parametern. Die globalen Parameter $x_1 = 0,001$ und $x_2 = 0,001$ sind die individuellen Dicken von den jeweiligen Materialien. Ein Panel mit zwei Schichten, zwei globalen Parameter und

einem Lastfall ergibt die folgende Matrix

$$\frac{d\sigma}{dx_1, x_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial x_1} & \frac{\partial n_x}{\partial x_2} \\ \frac{\partial n_y}{\partial x_1} & \frac{\partial n_y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial n_{xy}}{\partial x_1} & \frac{\partial n_{xy}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial m_x}{\partial x_1} & \frac{\partial m_x}{\partial x_2} \\ \frac{\partial m_y}{\partial x_1} & \frac{\partial m_y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x_1} & \frac{\partial m_{xy}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial n_x}{\partial x_1} & \frac{\partial n_x}{\partial x_2} \\ \frac{\partial n_y}{\partial x_1} & \frac{\partial n_y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial n_{xy}}{\partial x_1} & \frac{\partial n_{xy}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial m_x}{\partial x_1} & \frac{\partial m_x}{\partial x_2} \\ \frac{\partial m_y}{\partial x_1} & \frac{\partial m_y}{\partial x_2} \\ \frac{\partial m_{xy}}{\partial x_1} & \frac{\partial m_{xy}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{12,2} \quad (55)$$

zur Gradientenbestimmung.

Anhand der vorangegangenen Versuche ist die optimale Schrittweite ausschlaggebend für die Genauigkeit der Methoden. Aus diesem Grund wird zunächst eine Untersuchung für die optimale Schrittweite h für die Berechnung der Lösergradienten durchgeführt.

Die Schrittweitenuntersuchung der FD Methode wird im Bezug zu der CS Methode mit der Schrittweite $h = 10^{-20}$ durchgeführt, da dieser Wert als genau festgelegt wird. Der Relative Fehler (11) für den $\frac{\partial n_x}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial n_x}{\partial x_2}$ wird betrachtet.

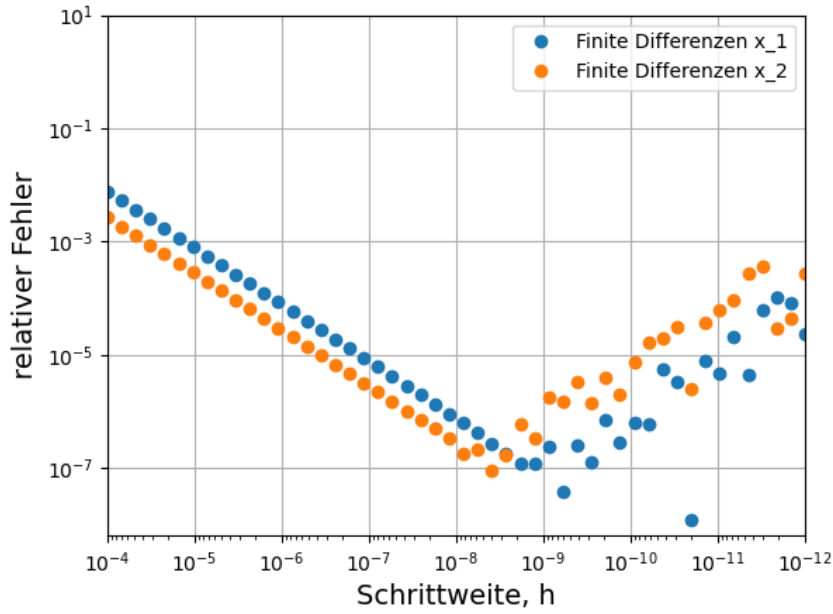


Abbildung 17: Schrittweitenuntersuchung der FD Methode

Die Abbildung 17 stellt die Schrittweitenuntersuchung der FD Methode dar. Im Bezug zu der CS Methode ist das Minimum bei ungefähr $1,49 \cdot 10^{-8}$. Daher ist $h \approx 10^{-8}$ die optimale Schrittweite für die FD Methode.

Der relative Fehler mit den Schrittweite $h = \sqrt{\epsilon} \cdot (1 + |x_k|) \approx 1,49 \cdot 10^{-8}$ bei der FD Methode und der Schrittweite $h = 10^{-20}$ bei der CS Methode ergibt

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1.133 \cdot 10^{-6} & 4.583 \cdot 10^{-7} \\ nan & nan \\ 0.000661 & 0.00253 \\ 1.0793 \cdot 10^{-6} & 1.607 \cdot 10^{-7} \\ 0.000131 & 2.522 \cdot 10^{-5} \\ 0.000635 & 0.00252 \\ 1.130 \cdot 10^{-6} & 4.726 \cdot 10^{-7} \\ nan & nan \\ 0.00103 & 0.00386 \\ 1.0760 \cdot 10^{-6} & 1.623 \cdot 10^{-7} \\ 0.000131 & 2.523 \cdot 10^{-5} \\ 0.00100 & 0.00386 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{12,2}. \quad (56)$$

Der relative Fehler in der Matrix (56) ist nicht an jeder Stelle gleich. Die Ursachen für die

Unterschiede sind nicht klar. Der Fehler der Ableitungen von n_x, m_x und m_y sind sehr gering. Daher ist in den Fällen die CS Methode genauer. In den anderen Fällen muss eine weitere Untersuchung des Programms durchgeführt werden, damit die Entscheidung quantitativ zu treffen ist.

Ein weiterer Vergleich geschieht anhand der Performance. Dafür werden die ermittelten optimalen Schrittweiten h verwendet.

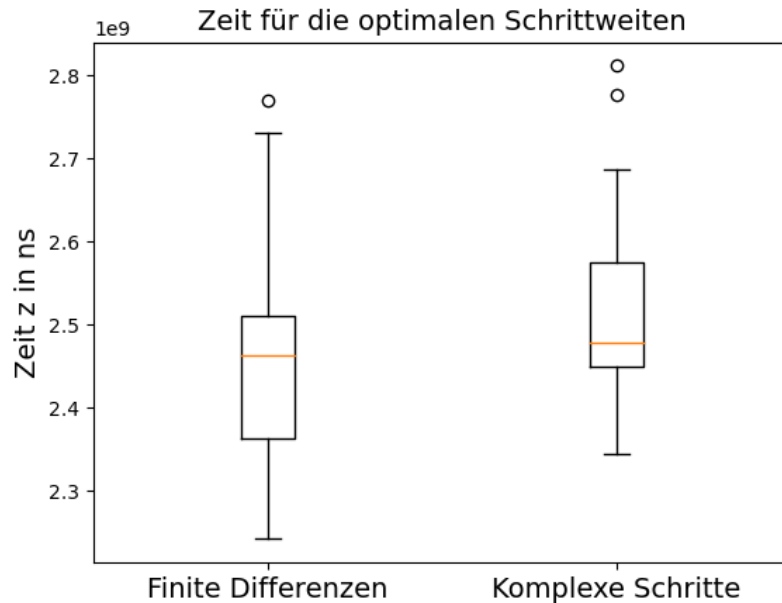


Abbildung 18: Zeitvergleich der Methoden

In der Abbildung 18 sind mehrere Durchführungen der Methoden anhand der optimalen Schrittweite dargestellt. Die Zeit wird in der Abbildung 18 in 10^9 Nanosekunden angegeben. Der zeitliche Vergleich ergibt eine vernachlässigbar kleine Verschlechterung mit der CS Methode.

6 Fazit

Das Fazit des Methodenvergleichs erfolgt anhand der Betrachtung der Genauigkeit und Geschwindigkeit der Versuche. Für kleine Funktionen, wie die e -Funktion, ist die Berechnung des Gradients 1. Ordnung mit der CS Methode genauer und schneller. Im Vergleich zu [2] wird anhand der Versuche eine deutliche Verbesserung anhand der CS Methode für die Exponentialfunktion an der Stelle 1 deutlich.

In dem zweiten Schritt erfolgt für das Gleichungssystem eine zweiteilige Untersuchung. Der Zusatz des Gleichungssystems geschieht aufgrund des Vorliegens eines Gleichungssystems in PreDoCS, aber es erfolgt keine Auflösung des Gleichungssystems wie in dem Beispiel des zweiten Schrittes. Die Lösung des Gleichungssystems und Ableitung nach den Stützwerten weist einen großen Fehler der Genauigkeit bei der FD Methode auf. Im weiteren Teil entsteht ein großer Fehler bei der FD Methode bei der Lösung des Gleichungssystem mit großer Konditionszahl und Ableitung nach den Stützstellen.

Es erfolgt zunächst das Fazit von der Berechnung der Lösergradienten mit der ersten Variante. In der Ableitung der Gradienten nach der **ABD**-Matrix werden deutliche Abweichungen zwischen der FD und der CS Methode deutlich. Es existieren Stellen, wo der relative Fehler gering ist, dort ist die CS Methode besser, ansonsten ist die FD Methode genauer. Es liegen keine Referenzwerte vor. Daher geschieht im Ausblick die weitere Untersuchung.

In der zweiten Variante von PreDoCS führt die CS Methode zu einer Verbesserung bezüglich der Genauigkeit. Die Rechendauer beider Methoden ist in PreDoCS ähnlich.

Die Schwierigkeit für umfangreichere Programme ist die Verwendung der komplexen Zahlen zu garantieren. Verschiedene Einstellungen von Arrays mit vorgegebenen Datentypen lassen keine Veränderungen zu, sodass die komplexen Zahlen nicht berücksichtigt werden.

6.1 Ausblick

Für den Fall des linearen Gleichungssystems sollten ausblickend Tschebyschhoff Stützwerte und Tschebyschhoff Polynome untersucht werden, sodass eine weitere mögliche Genauigkeit der Gradienten erzielt wird. Da die Stützwerte in dem Fehler

$$\mathbf{R}_1(x) = \frac{f'}{n!}(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

[7, S. 127] ausschlaggebend sind, werden die Stützwerte optimiert und dadurch der Fehler reduziert.

Weitere Funktionsabläufe in dem Programm PreDoCS werden zukünftig untersucht, damit eine Abschätzung der Genauigkeit der relativen Fehler getroffen werden kann.

Die Auswirkungen von der Berechnung der Lösergradienten werden in dem Optimierungsverfahren lightworks untersucht. Die eingehende Frage, ob die verbesserte Gradientenberechnung Verbesserungen in der Laufzeit des Optimierungsverfahren bringt, kann damit beantwortet werden.

Zukünftig sollte die Approximation von Gradienten mit AD durchgeführt werden. Weitergehend von der CS Methode ist dies der nächste Schritt für eine Verbesserung der Genauigkeit und der Schnelligkeit der Gradientenbestimmung, wodurch sich die Gradientenberechnung weiter an die analytische Berechnung, welche exakt ist, annähern lässt.

7 Literaturverzeichnis

Literatur

- [1] Rafael Abreu, Zeming Su, Jochen Kamm und Jinghuai Gao. On the accuracy of the Complex-Step-Finite-Difference method. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 340 (2018), S. 390–403. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042718301316>.
- [2] W. Kyle Anderson und Eric J. Nielsen. Sensitivity Analysis for Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes Using Complex Variables. In: *AIAA Journal Vol.39, No.1* (2001).
- [3] Sören Bartels. Numerik 3x9. Springer Spektrum, 2016.
- [7] Joachim Engel. Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Springer Berlin, Heidelberg, 2010.
- [8] Sung Nam Jung, V.T. Nagaraj und Inderjit Chopra. Refined Structural Model for Thin- and Thick-Walled Composite Rotor Blades. In: *AIAA Journal Vol.40* (2002).
- [9] Joaquim R. R. A. Martins, Peter Sturdza und Juan J. Alonso. The Complex-Step Derivative Approximation. In: *ACM Transactions on Mathematical Software Vol. 29* (2003).
- [10] Axel Schumacher. Optimierung mechanischer Strukturen: Grundlagen und industrielle Anwendungen. Springer Vieweg, 2020.
- [11] Helmut Schürmann. Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden. Springer Berlin, Heidelberg, 2007.

Onlinequellen

- [4] DLR. Welcome to lightWORKS’s documentation. 2019. URL: <https://vcp.pages.gitlab.dlr.de/lightworks/> (besucht am 26.09.2023).
- [5] DLR. Welcome to PreDoCS’s documentation. 2018. URL: <https://vcp.pages.gitlab.dlr.de/predocs/> (besucht am 26.09.2023).
- [6] Pascale Ehrenfreund und Klaus Hamacher. CPACS. 2018. URL: <https://cpacs.de/> (besucht am 20.09.2023).

8 Anhang

Die Normen definieren sich durch [3, S. 11]

Definition 8.1 (Normen) 2 Norm definiert sich als größter Singulärwert.

Die Frobenius Norm definiert sich durch

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (57)$$

Für die Scheiben- und Plattenelemente gelten die folgenden Definitionen der Matrizen **A**, **B** und **D**.

Scheiben-Steifigkeitsmatrix **A**:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{n_{k-1}}^{n_k} ((\bar{Q})_{ij})_k \mathbf{d}n$$

Koppel-Steifigkeitsmatrix **B**:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{n_{k-1}}^{n_k} ((\bar{Q})_{ij})_k n^2 \mathbf{d}n$$

Platten-Steifigkeitsmatrix **D**:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{n_{k-1}}^{n_k} ((\bar{Q})_{ij})_k n \mathbf{d}n$$

C-Matrix:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 55814002.307 & -16745.305 & 0.0 & 0.0 & 178.195 \\ -16745.305 & 18.604 & 0.0 & 0.0 & 0.378 \\ 0.0 & 0.0 & 4.033 & 0.000305 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.000305 & 5.952 \cdot 10^{-8} & 0.0 \\ -178.195 & -0.378 & 0.0 & 0.0 & 0.093 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = A_{22} \cdot A_{66} \cdot D_{22} - A_{22} \cdot B_{26}^2 - A_{26}^2 \cdot D_{22} + 2 \cdot A_{26} \cdot B_{22} \cdot B_{26} - A_{66} \cdot B_{22}^2$$

Strains: Implementierung $\epsilon_{zz}, \kappa_{zz}, \kappa_{zs}$

$$\begin{aligned}\epsilon_{zz}(s) &= (\Theta_{xd} * (l * y1 - s * (y1 - y2)) - \Theta_{yd} * (l * x1 - s * (x1 - x2))) \\ &\quad + l * w_{pd} - \phi_d d * (l\omega1 - s * (\omega1 - \omega2))) / l \\ \kappa_{zz}(s) &= (l * (\Theta_{xd} * (x1 - x2) + \Theta_{yd} * (y1 - y2)) + \phi_d d * ((x1 - x2) * (l * x1 - s * (x1 - x2)) \\ &\quad + (y1 - y2) * (l * y1 + s * (-y1 + y2)))) / l^2 \\ \kappa_{zs}(s) &= 2 * \phi_d\end{aligned}$$

Nachfolgend die Berechnung von $N_{zs}(s)$ und $M_{ss}(s)$

$$\begin{aligned}N_{zs}(s) &= (V_{additional} * (f_{rconst_{111}} * l^2 - l * s * (3 * f_{rconst_{111}} + f_{rconst_{112}} - 4 * f_{rconst_{113}})) \\ &\quad + 2 * s^2 * (f_{rconst_{111}} + f_{rconst_{112}} - 2 * f_{rconst_{113}})) \\ &\quad + V_{yadditional} * (f_{rconst_{121}} * l^2 - l * s * (3 * f_{rconst_{121}} + f_{rconst_{122}} - 4 * f_{rconst_{123}})) \\ &\quad + 2 * s^2 * (f_{rconst_{121}} + f_{rconst_{122}} - 2 * f_{rconst_{123}})) \\ &\quad + l^2 * (\Theta_{xd} * b_{element}[0, 1] + \Theta_{yd} * b_{element}[0, 2] + b_{element}[0, 0] * w_{pd} \\ &\quad + b_{element}[0, 3] * \phi_d + b_{element}[0, 4] * \phi_{dd})) / l^2 \\ M_{ss}(s) &= (V_{additional} * (f_{rconst_{211}} * l^2 - l * s * (3 * f_{rconst_{211}} + f_{rconst_{212}} - 4 * f_{rconst_{213}})) \\ &\quad + 2 * s^2 * (f_{rconst_{211}} + f_{rconst_{212}} - 2 * f_{rconst_{213}})) \\ &\quad + V_{yadditional} * (f_{rconst_{221}} * l^2 - l * s * (3 * f_{rconst_{221}} + f_{rconst_{222}} - 4 * f_{rconst_{223}})) \\ &\quad + 2 * s^2 * (f_{rconst_{221}} + f_{rconst_{222}} - 2 * f_{rconst_{223}})) \\ &\quad + l * (\Theta_{xd} * (b_{element}[1, 1] * l + b_{element}[2, 1] * (l * x1 - s * (x1 - x2))) \\ &\quad + b_{element}[3, 1] * (l * y1 - s * (y1 - y2))) + \Theta_{yd} * (b_{element}[1, 2] * l \\ &\quad + b_{element}[2, 2] * (l * x1 - s * (x1 - x2)) + b_{element}[3, 2] * (l * y1 - s * (y1 - y2))) \\ &\quad + \phi_d * (b_{element}[1, 3] * l + b_{element}[2, 3] * (l * x1 - s * (x1 - x2))) \\ &\quad + b_{element}[3, 3] * (l * y1 - s * (y1 - y2))) + \phi_{dd} * (b_{element}[1, 4] * l \\ &\quad + b_{element}[2, 4] * (l * x1 - s * (x1 - x2)) + b_{element}[3, 4] * (l * y1 - s * (y1 - y2))) \\ &\quad + w_{pd} * (b_{element}[1, 0] * l + b_{element}[2, 0] * (l * x1 - s * (x1 - x2)) \\ &\quad + b_{element}[3, 0] * (l * y1 - s * (y1 - y2)))) / l^2\end{aligned}$$

Der relative Fehler einer Funktion $\tilde{\phi}$ zu dem exakten Wert der Funktion ϕ wird anhand von

$$\epsilon = \frac{|\tilde{\phi} - \phi|}{|\phi|} \quad (58)$$

berechnet.

Das Aussehen der Vandermonde-Matrix mit $n = 3, 6$ ist

$$\mathbf{V}_3(0, 1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \quad (59)$$

und

$$\mathbf{V}_6(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 4096 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 15625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 46656 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Die Betrachtung des Fehlers der Ableitung von den Spannungen nach der **ABD**-Matrix erfolgt ausschnittsweise für die **A**-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4.119669346550992e-06 \\ nan \\ 0.049719964632147104 \\ 3.8204139841927435e-05 \\ 3.790352202678778e-05 \\ 0.04971894494178321 \\ 4.100038055457897e-06 \\ nan \\ 0.01748369520869505 \\ 3.823851024524274e-05 \\ 3.809823505425203e-05 \\ 0.017483289535487834 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0.00012274865963710104 \\ nan \\ 0.06047220864304504 \\ 0.00030263867359718566 \\ 0.00043542075796691325 \\ 0.06047116638163834 \\ 0.00012276130169435766 \\ nan \\ 0.021377113947200186 \\ 0.0003031153351580407 \\ 0.00043650535596440504 \\ 0.021376642247723777 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 10490.996939864735 \\ nan \\ 3105.844005669582 \\ 53055.59881349309 \\ 52809.80142611416 \\ 15.832835884766354 \\ 11155.208328698756 \\ nan \\ 1626.156931309602 \\ 53195.31314444338 \\ 53065.061746096624 \\ 7.76500755012375 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1.981653186997742e - 05 \\ nan \\ 0.039467842200289434 \\ 2.8115281288961922e - 05 \\ 4.382076768564556e - 05 \\ 0.039465753648308344 \\ 2.000174021931755e - 05 \\ nan \\ 0.013971873177882491 \\ 2.8239033277561295e - 05 \\ 4.3365316774446486e - 05 \\ 0.013971331817814148 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 27696.04099680687 \\ nan \\ 8352.328760111224 \\ 33549.9446708771 \\ 36977.08262374408 \\ 42.53358368775206 \\ 29448.83220780585 \\ nan \\ 4390.665315635146 \\ 34955.95905333458 \\ 37154.36930096118 \\ 20.99371162711268 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \\ nan \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2.3017328229168865 \\ nan \\ 0.0002513931084127034 \\ 1.0415336457946114 \\ 248.67785500764603 \\ 0.00025191297409762924 \\ 2.4341908169593567 \\ nan \\ 0.00030544321848842643 \\ 2.3667848185122815 \\ 248.99509360277438 \\ 0.0003055032723946605 \end{pmatrix}^T$$

Weitere Ergebnisse für Spannungen nach der Dicke:

entsprechend der FD Methode mit $h = \sqrt{\epsilon} \cdot (1 + |x_k|)$

$$\begin{bmatrix} -2157886192.3076925 & -531411789.1795705 \\ 0.0 & 0.0 \\ 4995779585.299467 & 20654373977.607357 \\ 1551126.9138249962 & 6313168.824886347 \\ -1480.2550697898296 & -8229.084882821951 \\ 1551127.6147713314 & 6313172.0508181015 \\ -2162829596.8094406 & -532570065.96528476 \\ 0.0 & 0.0 \\ 4086876298.959342 & 17007013009.489536 \\ 1261431.8910757385 & 5196481.038034023 \\ -1476.1095437612926 & -8220.074162021147 \\ 1261432.5920220737 & 5196484.263965777 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12,2}$$

und $h = 10^{-8}$

$$\begin{bmatrix} -2157887013.7687774 & -531411836.8551135 \\ 0.0 & 0.0 \\ 4996355712.284276 & 20664433196.502796 \\ 1551296.8245410263 & 6316234.474851256 \\ -1480.3196165757981 & -8229.152139449525 \\ 1551297.5251319006 & 6316237.694731441 \\ -2162830418.25518 & -532570116.22190475 \\ 0.0 & 0.0 \\ 4087768718.015286 & 17022468362.955988 \\ 1261699.4718133155 & 5201195.493512145 \\ -1476.1740445123905 & -8220.141370429701 \\ 1261700.1724041898 & 5201198.713392329 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12,2}$$

Im Vergleich die CS Methode mit $h = 10^{-20}$

$$\begin{bmatrix} -2157888682.4977565 & -531412041.0302222 \\ 0.0 & 0.0 \\ 4997832919.710195 & 20688551918.420376 \\ 1551735.6631401917 & 6323587.066788475 \\ -1480.4508578623531 & -8229.292566192658 \\ 1551735.4232256992 & 6323586.358143132 \\ -2162832086.5647645 & -532570326.4396532 \\ 0.0 & 0.0 \\ 4090005349.18125 & 17057578484.028093 \\ 1262372.4166302318 & 5211906.528644484 \\ -1476.3051943094956 & -8220.281701669663 \\ 1262372.176715739 & 5211905.819999141 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12,2}$$