Forschungsbericht 2023-17

Satellitenbewegung Band IV-B:
Synodische Bewegungen

Ernst Friedrich Maria Jochim

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme
Oberpfaffenhofen

Deutsches Zentrum
DLR für Luft- und Raumfahrt

Forschungsbericht 2023-17

Satellitenbewegung Band IV-B:
Synodische Bewegungen

Ernst Friedrich Maria Jochim

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Hochfrequenztechnik und
Radarsysteme
Oberpfaffenhofen

621 Seiten
239 Bilder
105 Tabellen
317 Literaturstellen

Deutsches Zentrum
DLR für Luft- und Raumfahrt

Herausgeber:

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e. V.
Wissenschaftliche Information
Linder Höhe
D-51147 Köln

ISSN 1434-8454
ISRN DLR-FB-2023-17
Erscheinungsjahr 2023

DOI: 10.57676/6wav-xg45

Sonnensynodische Bewegung, synodische Bewegung bei Bezug auf Mond, Planeten, andere Satelliten, Reproduzierbare Bewegungen, Sonnensynchrone Bewegungen von Satelliten und Orbitern, Äquivalenzbahnen unter Einschluss von synodischen Bewegungen

Ernst Friedrich Maria JOCHIM
DLR, Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme, Oberpfaffenhofen

Satellitenbewegung Band IV-B: Synodische Bewegung

Im zweiten Teil des vierten Bandes der Satellitenbewegung werden basierend auf einer allgemeinen Hansen-Bewegung die Bezüge einer Satellitenbewegung in unterschiedlichen Relationen zusammengestellt, wie sie zur Erfüllung spezieller Missionsanforderungen benötigt werden. Synodische Bewegungen stellen die Bezüge zu anderen Körpern dar, zur Sonne, zum Mond, zu Planeten und anderen interplanetaren sowie interstellaren Objekten, zu anderen Satelliten etwa bei Formationsflügen. Spezielle insbesondere für die Erdbeobachtung interessante Bewegungsarten sind reproduzierbare, sonnensynchrone Bewegungen. Eine Erweiterung des Begriffes der reproduzierbaren sonnenbezogenen Bewegung wird vorgestellt. Äquivalenzbahnen durch Kopplung mit synodischen Bewegungen werden neu behandelt.

Sun synodical motion, synodical motion related to Moon, planets or other satellites, repetitive motion, Sun-synchronous motion of satellites und orbiters, equivalence orbits by coupling with synodical motions

(Published in German)

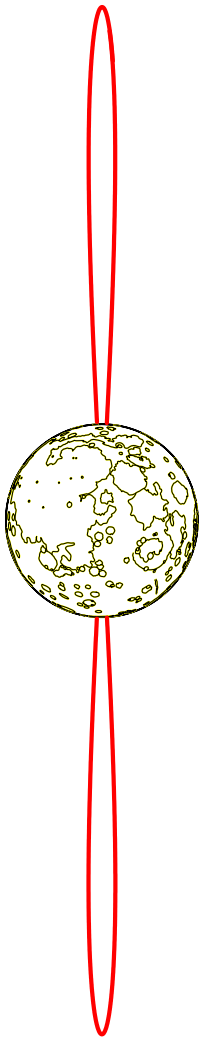
Ernst Friedrich Maria JOCHIM
German Aerospace Center (DLR), Microwaves and Radar Institute, Oberpfaffenhofen

Satellite Motion, volume IV-B: Synodical Motions

The second part of the fourth volume is dedicated to synodical motions with respect to Sun, Moon, Planets and other interplanetary and interstellar objects. Included are special orbits as repetitive, Sun-synchronous motions. An extension of a repetitive-sun-synchronous motion will be included. A special focus is directed to the analysis of remote sensing orbits of satellites and orbiters. All of the types of motion discussed here can be coupled into equivalence orbits.

Ernst Friedrich Maria Jochim

Satellitenbewegung



Band IV-B: Synodische Bewegungen

Herausgeber: Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.
Wissenschaftliche Information
Linder Höhe
D-51147 Köln

ISSN 1434-8454
ISRN: DLR-FB-2023-17

Stand der Arbeit: Sonntag, 24. September 2023

Titelbild:

Kreisförmige mondsynchrone Mondorbiterbahn mit Inklination i = 6° bezüglich des Mondäquators in wahren Größenverhältnissen gesehen von der Erde aus. Der Knoten der Orbiterbahn liegt über der Rückseite des Mondes (siehe Bild 28-1).

Vorwort zu Band IV-B

Im vorliegenden zweiten Teil des vierten Bandes der Satellitenbewegung wird die auf einen dritten Körper bezogene synodische Satellitenbewegung behandelt. Dies betrifft den Bezug auf die Sonne mit den wichtigen Anwendungen der sonnensynchronen Bahnen. Eine weiterführende Erweiterung des Begriffs der sonnensynchronen synodischen Bewegung wird eingeschlossen. Auch andere Bezugskörper wie Mond, Planeten, interplanetare Sonden und andere Satelliten sowie stellare Objekte können für eine Bahnanalyse zur Berücksichtigung der Aufgabenstellung einer Satellitenmission von Wichtigkeit sein. Ausgehend von der grundlegenden *Hansen*bewegung konzentriert sich auch der vorliegende Band als Bahnmodell auf die allgemeine *Kepler*bewegung. In Ergänzung zu den im ursprünglichen Band IV dargestellten Beziehungen ist im vorliegenden Band die neu entwickelte Theorie der Äquivalenzbahnen mit aufgenommen. Die ergänzende Theorie des σ_i – Faktors zur umfassenden Einbeziehung rückläufiger Satellitenbahnen wurde wegen des besseren Verständnisses bei der Untersuchung des Geschwindigkeitsvektors wieder mit einbezogen[1].

Eine erschöpfende Bearbeitung der einzelnen Themenkreise darf nicht erwartet werden. Jeder Punkt könnte beliebig vertieft und ergänzt werden. Damit kann auf ergänzendes Studium anderer Bücher und Darstellungen sowie eigener weiterführender Studien nicht verzichtet werden.

Die Liste der verwendeten Symbole und die für Band IV-B relevante Literatur sind in diesen Band der Satelliten-Bahnbewegung mit aufgenommen.

Der vorliegende Band IV-B ersetzt zusammen mit Band IV-A den früheren Band IV mit wesentlichen Erweiterungen und Überarbeitungen.

Einige mit dem Kollegen *Dr. Herbert Porsche* (vormals DLR-HF) (1929-2021) durchgeführten Untersuchungen sind im vorliegenden Band berücksichtigt. Die angenehme, kollegiale und kompetente Zusammenarbeit mit *Dr. Porsche* darf dankbar erwähnt werden.

In gleicher Weise sei die wesentliche Unterstützung durch den hochgeschätzten Kollegen *Dipl. Ing. Alfred E. Pietraß* (vormals DFVLR-FM, DFVLR -DF, DLR-RM) (1936-2022) gewürdigt. Im leider zu frühen Vor-Ruhestand (1994) hat er die aufwendige Darstellung vieler der mathematischen Formeln für diesen Forschungsbericht mit MathType insbesondere im Mond- und Planetenkapitel äußerst kompetent und sorgfältig erarbeitet.

Herzlicher Dank gebührt Herrn *Dr. Thomas Neff* (DLR-HR) für die kritische Unterstützung des gesamten Werkes, Herrn *Dr. Jan Eilers* (DLR-HR) für die kritische Durchsicht des vorliegenden Bandes, sowie dem Raumfahrtingenieur *Sebastien Tailhades*, Herrn *Sebastian Calaminus*, M. Sc., sowie Herrn Dipl. Ing. *Simon Krebietke*, für die Unterstützung bei den Programmierarbeiten, sowie Herrn Dipl. Ing. *Manfred Hager* für die Betreuung des Rechners. Für die Veröffentlichung des Bandes in der Reihe der DLR Forschungsberichte geht besonderer Dank an die Herren Professor *Dr. Alberto Moreira* und *Dr. Thomas Neff* (beide DLR-HR).

[1] Usprünglich eingeführt in JOCHIM, E. F. [1983]

Inhaltsverzeichnis

SYNODISCHE BEWEGUNGEN BEZOGEN AUF DRITTE KÖRPER 1

28 SONNENBEZOGENE SYNODISCHE BEWEGUNG 1

28.1 DIE SCHEINBARE BEWEGUNG DER SONNE UM DIE ERDE 2
28.1.1 Die Sonnenephemeride 3
28.1.2 Die mittlere Sonne 5
28.1.3 Wahre geozentrische Sonnenbewegung nach Newcomb 10
28.1.4 Jahreslängen 18
28.1.4.1 Tropisches Jahr 18
28.1.4.2 Sternjahr 19
28.1.4.3 Siderisches Jahr 20
28.1.4.4 Anomalistisches Jahr 20
28.1.4.5 Finsternis Jahr 20
28.1.4.6 Das Besselsche Jahr 21
28.2 DIE NÄHERUNGSWEISE SONNENBEWEGUNG BEZOGEN AUF DEN ERDÄQUATOR 21
28.2.1 Die fiktive mittlere Sonne 22
28.2.2 Übersicht über die Bewegung der Sonne in der Ekliptik 22
28.2.3 Die Reduktion der wahren Sonne auf den Äquator 24
28.2.4 Die Bewegung der wahren Sonne bezogen auf den Äquator 25
28.3 DIE SONNENZEIT 26
28.3.1 Wahre Sonnenzeit 28
28.3.2 Mittlere lokale Sonnenzeit 28
28.3.3 Die Zeitgleichung 29
28.3.4 Länge des wahren Sonnentages 31
28.3.4.1 Der wahre Sonnentag als Bogen der Sonnenbahn 31
28.3.4.2 Der Rotationssonnentag 32
28.4 DIE TOPOZENTRISCHE BEOBACHTUNG DER WAHREN SONNE 33
28.4.1 Die horizontalen Koordinaten der Sonne 33
28.4.2 Der Polarkreis 35
28.4.3 Sonnenkontaktzeiten 36
28.5 SONNEN-SYNODISCHE SATELLITEN -BEWEGUNG 38
28.5.1 Die Sonnen-synodische Bewegung in Bezug auf den Erdäquator 38
28.5.1.1 Terminologie von Sonnenwinkel und Sonnendrift 38
28.5.1.2 Der wahre Sonnen-synodische Umlauf in Bezug auf den Erdäquator 42
28.5.1.3 Der mittlere Sonnen-synodische Umlauf längs des Erdäquators 43
28.5.1.4 Mittlere, gemittelte und wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit 46
28.5.1.5 Berechnung einer Referenz-Konjunktion Erdsatellit-Sonne 48
28.5.1.6 Zeit aus Sonnenwinkel 50
28.5.1.7 Konjunktionen und Oppositionen 51
28.5.1.8 Bahndefinition aus mittlerem Äquator-bezogenem Sonnen-synodischem Umlauf 52
28.5.2 Die Sonnen-synodische Bewegung in Bezug auf die Ekliptik 55
28.5.3 Die Sonnen-synodische Bewegung bezogen auf Satellitenbahnebene 57
28.5.4 Uunterschiedliche Definitionen der Sonnen-synodischen Bewegung 59
28.6 SATELLITENBEWEGUNG IN BEZUG AUF DIE FIKTIVE MITTLERE SONNE 60
28.6.1 Satellitenbewegung in mittlerer Sonnenzeit 60
28.6.2 Sonnen-synodische Satelliten-Bewegung in geographischen Koordinaten 62
28.6.3 Bahnauslegung aus mittlerem Sonnenwinkel und mittlerer Sonnendrift 64
28.6.3.1 Knoten und mittlere Anomalie bei Knotendurchgang 64
28.6.3.2 Startpunkt in beliebigen geographischen Koordinaten 66
28.6.3.3 Startpunkt für Bahn aus Sonnenwinkel und Breitenkreis 70
28.7 DIE SONNEN-SYNODISCHE BEWEGUNG DER SATELLITENBAHNEBENE 71
28.7.1 Der Knotensonnenwinkel, die Knotensonnendrift 71
28.7.2 Die Knoten-Sonnenverschiebung 79
28.7.2.1 Die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung 79
28.7.2.2 Die wahre Knoten-Sonnenverschiebung 82

28.7.3 Die Sonnen-bezogene Bewegung einer Bahnebene 84
28.7.4 Bahnauslegung aus Knotensonnendrift und Verschiebung 89
28.7.4.1 Bahnparameter aus Knotensonnendrift....89
28.7.4.2 Bahnparameter aus Knoten-Sonnenverschiebung 90
28.7.4.3 Bahnparameter aus gleichartiger Sonnenstellung der Bahnebene 95
28.8 ÄQUIVALENZ-BAHNEN MIT SONNEN-SYNODISCHEN BEWEGUNGEN 98
28.8.1 Äquivalenz-Bahnen aus der Kopplung Sonnen-synodischer mit meridionaler Bewegungen 98
28.8.1.1 Basiseigenschaften 98
28.8.1.2 Weitere generelle Eigenschaften 99
28.8.1.3 Berechnung der großen Bahnhalbachse....103
28.8.1.4 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung Sonnen-synodischer mit meridionaler Bewegung 104
28.8.1.5 Berechnung der Inklination 106
28.8.1.6 Berechnung der Exzentrizität 107
28.8.1.7 Beispiele und Interpretation....107
28.8.2 Äquivalenz von anomalistischer mit Sonnen-synodischer Bewegung....112
28.8.2.1 Die Bedingungsgleichungen....113
28.8.2.2 Große Bahnhalbachse bei Äquivalenz zwischen anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung115
28.8.2.3 Der erlaubte Bereich möglicher Inklinationen bei Kopplung von anomalistischer mit Sonnen-synodischer Bewegung 117
28.8.2.4 Inklination bei Äquivalenz zwischen anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung 119
28.8.2.5 Exzentrizität bei Äquivalenz zwischen anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung 120
28.8.2.6 Das Verhalten des Perigäums bei der Kopplung von anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung 121
28.8.3 Äquivalenz zwischen drakonitischer und Sonnen-synodischer Bewegung 125
28.8.3.1 Drakonitische mit Sonnen-synodischen Äquivalenz-Bahnen....125
28.8.3.2 Die Stabilisierung von mittleren PD-PS-Äquivalenz-Bahnen 126
28.8.3.3 Wahre PD-PS- Äquivalenz-Bahnen 130
28.8.4 Äquivalenz zwischen tropischer und Sonnen-synodischer Bewegung 132
28.8.5 Äquivalenz von Hansen- mit Sonnen-synodischer Bewegung 133
28.8.5.1 Basiseigenschaften 133
28.8.5.2 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung mittlerer Sonnen-synodischer mit Hansen Bewegung 136
28.8.5.3 Berechnung der großen Bahnhalbachse....137
28.8.5.4 Berechnung der Inklination bei PH-PS-Äquivalenz 140
28.8.5.5 Berechnung der Exzentrizität von Hansen- mit Sonnensynodischen Bewegungen 142
28.8.6 Äquivalenz zwischen Kepler- und Sonnen-synodischer Bewegung 145
28.8.6.1 Basiseigenschaften 145
28.8.6.2 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung mittlerer Sonnen-synodischer mit Kepler Bewegung 146
28.8.6.3 Berechnung der großen Bahnhalbachse....148
28.8.6.4 Berechnung der Inklination 151
28.8.6.5 Berechnung der Exzentrizität von PK-PS-Äquivalenzbahn....154
28.8.7 Äquivalenz zwischen Sonnen-synodischer Bewegung und Erdrotation....157
28.8.7.1 Basiseigenschaften der Äquivalenz zwischen Sonnen-synodischer Bewegung und Erdrotation....157
28.8.7.2 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen zwischen Sonnen-synodischer Bewegung und Erdrotation158
28.8.7.3 Rechtläufige Äquivalenzbahnen aus Sonnen-synodischer Bewegung mit Erdrotation....160
28.8.7.4 Rückläufige Äquivalenzbahnen aus Sonnen-synodischer Bewegung mit Erdrotation 162
28.8.8 Einige Eigenschaften der Sonnen-bezogenen Äquivalenz-Bahnen....164
28.9 SONNENSYNCHRONE BAHNEN 165
28.9.1 Charakteristika für Sonnensynchronität....165
28.9.1.1 Bezug auf die fiktive mittlere Sonne 165
28.9.1.2 Anmerkungen zum Bezug auf die wahre Sonne....167
28.9.2 Bahndefinition aus Bedingung für sonnensynchrone Bahnen 167
28.9.2.1 Berechnung der großen Bahnhalbachse einer sonnensynchronen Bahn 167
28.9.2.2 Berechnung der Exzentrizität einer sonnensynchronen Bahn....168
28.9.2.3 Berechnung der Inklination einer sonnensynchronen Bahn....168
28.9.3 Übersicht über sonnensynchrone Bahnen 168
28.9.4 Spur-reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen 172
28.9.5 Bahndefinition bei reproduzierbaren sonnensynchronen Bahnen....175
28.9.6 Manöver zwischen sonnensynchronen Bahnen....178

28.9.7 Radiale Geschwindigkeit einer sonnensynchronen Bahn ... 180
28.10 REPRODUZIERBARKEIT IN DER ZEIT ... 181
28.10.1 Beliebige Äquivalenz drakon. und Sonnen-synodischer Bewegung ... 181
28.10.2 Bahnauswahl mit beliebigem PD:PS Äquivalenz-Zyklus ... 184
28.10.3 Vorgabe einer Zeitdrift ... 186
28.10.4 Reproduzierbarkeit in Zeit und Subsatellitenbahn ... 189
28.11 SCHATTEN ... 190
28.11.1 Die Schattenmodelle ... 191
28.11.1.1 Das Kegelmodell für Zentralschatten ... 191
28.11.1.2 Das Kegelmodell für Halbschatten ... 194
28.11.1.3 Das Zylindermodell ... 195
28.11.2 Die allgemeine Schattengleichung ... 196
28.11.3 Schattenkontakte ... 199
28.11.3.1 Näherungsweise Berechnung der Schattenkontaktzeiten ... 199
28.11.3.2 Näherungsweise Schattenkontaktzeiten auf kreisnahen Bahnen ... 203
28.11.3.3 Näherungsweise Schattenkontaktzeiten auf elliptischen Bahnen ... 203
28.11.3.4 Exakte Berechnung der Schattenkontaktzeiten ... 205
28.11.3.5 Würdigung des Verfahrens ... 206
28.11.4 Schattenfaktor und Schattendauer ... 207
28.11.4.1 Schattenzeiten auf einer kreisnahen erdnahen Bahn ... 207
28.11.4.2 Schattenzeiten auf einer elliptischen Bahn ... 209
28.11.4.3 Schattenzeiten auf einer geostationären Bahn ... 212
28.11.5 Schattengrenze (Terminator) und Sonnenelevationskurven ... 213
28.11.6 Sonnenelevationskurven ... 216
28.11.7 Okkultationsmessungen (Limb Sounding) ... 217
28.11.8 Abschätzungen zur Genauigkeit bei Schattenberechnungen ... 222
28.11.8.1 Abschätzung des Einflusses der Erdabplattung ... 222
28.11.8.2 Kernschatten bei Erdabplattung und Exzentrizität der Erdbahn ... 224
28.11.8.3 Abschätzung des Einflusses der Zylindermodells ... 225
28.12 BEWEGUNG EINES ERDSATELLITEN IN BEZUG AUF DIE SONNE ... 226
28.12.1 Sonnenaspektwinkel ... 226
28.12.2 Sonne in der Subsatellitenbahn ... 230
28.12.3 Sonnenelevation in Sensor Aufsichtspunkt ... 235
28.12.4 Sonnenspiegelung pro Satellitenumlauf ... 237
28.13 SATELLITENLAGE UND SONNENEINSTRAHLUNG ... 239
28.13.1 Satellitenzentrierte Systeme ... 239
28.13.2 Sonnenbeobachtung bei Nadir ausgerichteter Satellitenlage ... 241
28.13.3 Sonneninertiale Satellitenlage ... 243
28.14 UNTERSCHIEDLICHE ENTWICKLUNGEN DES SONNENBEZUGS ... 246
28.14.1 Einfluss von Einschussfehlern auf Sonnen-synod. Bewegungen ... 247
28.14.2 Sonnendrift einer Bahn ohne Bahnkorrektur ... 249
28.15 VARIATIONEN DER SONNEN-SYNODISCHEN BEWEGUNG DURCH BEWEGUNGSEINFLÜSSE ... 253
28.15.1 Zeitstabilität bei der Variation natürlicher Bewegungseinflüsse ... 254
28.15.2 Die Drift der Knotensonnenzeit ... 255
28.15.3 Die Variation des Knotensonnenintervalls ... 256
28.15.4 Korrekturzyklus für Zeitstabilität ... 260
28.16 DAS BAHNMODELL VON *ECKSTEIN* ... 267
28.16.1 Definition der regulären Elemente ... 268
28.16.2 Zur Anwendung von Ecksteins Theorie ... 269
28.16.3 Der Zustandsvektor aus den regulären Elementen ... 272

29 SATELLITEN-BEWEGUNG BEZOGEN AUF MOND UND MOND-ORBITER ... 275

29.1 DIE SCHEINBARE BEWEGUNG DES MONDES UM DIE ERDE ... 275
29.1.1 Die Entwicklung der Mondtheorie ... 275
29.1.2 Die Gesetze von Cassini ... 279
29.1.3 Bahnelemente und physikalische Parameter des Mondes ... 279
29.1.3.1 Physikalische Parameter des Mondes ... 279
29.1.3.2 Mittlere Bahnelemente des Mondes auf seiner Bahn bezüglich der Erde ... 281
29.1.4 Die Monate ... 286

29.1.4.1 Zahlenwerte in der Antike 286
29.1.4.2 Aktuelle Zahlenwerte 288
29.1.5 Darstellung der geozentrischen Bewegung des Mondes 292
29.1.5.1 Hauptproblem der Mondtheorie 292
29.1.5.2 Einfluss der Planeten auf die Mondbewegung....293
29.1.6 Der genäherte geozentrische Ortsvektor der Mondbewegung 294
29.1.6.1 Die Entwicklung der geozentrischen ekliptikalen Länge des Mondes....294
29.1.6.2 Die Entwicklung der geozentrischen ekliptikalen Breite des Mondes....296
29.1.6.3 Die geozentrische Parallaxe des Mondes....297
29.1.6.4 Der geozentrische ekliptikale Ortsvektor des Mondes....298
29.1.7 Der geozentrische Geschwindigkeitsvektor des Mondes 298
29.1.7.1 Die Variation der ekliptikalen Länge des Mondes....301
29.1.7.2 Die Variation der ekliptikalen Breite des Mondes....304
29.1.7.3 Die Variation der Parallaxe des Mondes 306
29.2 DIE BEWEGUNG DES MONDES UM DIE SONNE....307
29.3 DAS KOORDINATENSYSTEM DER MONDBAHN 312
29.3.1 Das geozentrische Bahnsystem des Mondes....312
29.3.2 Transformation zwischen Mondbahnsystem und Ekliptiksystem 315
29.3.3 Transformation zwischen Mondbahn- und Erdäquatorsystem 319
29.4 DAS ÄQUATORSYSTEM DES MONDES 323
29.4.1 Ausrichtung des Äquatorsystems 323
29.4.2 Das selenographische System....326
29.4.3 Äquatorsystem des Mondes und Ekliptik 327
29.4.4 Bahnsystems des Mondes und Äquatorsystem 333
29.4.5 Bezug des Äquatorsystems des Mondes auf das Äquatorsystem der Erde....337
29.5 DIE LIBRATIONEN....339
29.5.1 Geozentrische geometrische Librationen 339
29.5.2 Die physikalischen Librationen des Mondes 341
29.5.3 Der Verlauf des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche....345
29.5.4 Topozentrische geometrische Librationen....346
29.6 DIE BEOBACHTUNG DES MONDES VON DER ERDOBERFLÄCHE AUS 349
29.6.1 Die Mondphase....349
29.6.2 Der subsolare Punkt auf der Mondoberfläche 350
29.6.3 Der Phasenwinkel bezogen auf einen Erdsatelliten....351
29.6.4 Beobachtung eines Ortes auf der Mondoberfläche von der Erde aus 353
29.7 DER MONDORBITER....355
29.7.1 Selenozentrische Bewegung eines Mondorbiters....356
29.7.2 Synchrone und stationäre Bewegung eines Mondorbiters....362
29.7.3 Sonnensynchrone Mondorbiter....362
29.8 BEOBACHTUNG EINES MONDORBITERS VON DER ERDE AUS 363
29.9 MOND-SYNODISCHE ERDSATELLITENBAHNEN....365
29.9.1 Der synodische Bezug von Erdsatelliten auf den Mond 365
29.9.2 Bezug von Erdsatellitenbahnen auf tropische Bewegung des Mondes 367
29.9.2.1 Der mittlere Mond-Winkel eines Erdsatelliten 367
29.9.2.2 Mittlere Mond-synodische Umlaufzeit eines Erdsatelliten....368
29.9.2.3 Wahre Mond-synodische Umlaufzeit eines Erdsatelliten 369
29.10 ÄQUIVALENZBAHNEN MIT MOND-SYNODISCHER SATELLITENBEWEGUNG 369
29.10.1 Kopplung Mond-synodischer mit meridionaler Sat. Bewegung 369
29.10.1.1 Basiseigenschaften 369
29.10.1.2 Berechnung der großen Bahnhalbachse....371
29.10.1.3 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung mittlerer Mond-synodischer mit mittlerer meridionaler Bewegung....376
29.10.1.4 Berechnung der Inklination 380
29.10.1.5 Berechnung der Exzentrizität 382
29.10.2 Kopplung anomalistischer mit Mond-synodischer Sat.bewegung 384
29.10.3 Drakonitischer mit Mond-synodischer Satellitenbewegung 385
29.10.4 Kopplung tropischer mit Mond-synodischer Satellitenbewegung 386
29.10.5 Kopplung Hansen- mit Mond-synodischer Satellitenbewegung 387
29.10.6 Kopplung Kepler- mit Mond-synodischer Satellitenbewegung 389

29.10.6.1 Basiseigenschaften 389
29.10.6.2 Berechnung der großen Bahnhalbachse....391
29.10.6.3 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung Keplerscher mit Mond-synodischer Bewegung 394
29.10.6.4 Berechnung der Inklination 395
29.10.6.5 Berechnung der Exzentrizität 397
29.10.7 Kopplung Sonnen-synodischer mit Mond-synodischer Satellitenbewegung....400
29.10.8 Mond-synodische Satellitenbewegung gekoppelt mit Erdrotation....400
29.10.8.1 Basiseigenschaften der Mond-synodischen Bewegung mit der Erdrotation 400
29.10.8.2 Das mögliche Gebiet von Mond-synodischen Bewegungen mit der Erdrotation 401
29.10.8.3 Rechtläufige Äquivalenzbahnen von Mond-synodischen Bewegungen mit der Erdrotation....403
29.10.8.4 Rückläufige Äquivalenzbahnen von Mond-synodischen Bewegungen mit der Erdrotation....405
29.10.9 Kopplung der Mond-synodischen Bewegung in 2 Sterntagen 407
29.10.9.1 Elementares Verhalten von Mond-synodischen Bewegungen mit der Dauer von 2 Sterntagen 407
29.10.9.2 Der zulässige Bereich von Mond-synodischen Äquivalenzbahnen in 2 siderischen Tagen....409
29.10.9.3 Rechtläufige Äquivalenzbahnen von Mond-synodischen Satellitenbewegungen mit 2 Sterntagen Umlaufzeit 410
29.10.9.4 Rückläufige Äquivalenzbahnen der Mond-synodischen Satelliten-Bewegungen in 2 Sterntagen....413
29.10.10 Übersicht der Äquivalenzbahnen mit Mond-synodischen Satelliten-Bahnbewegungen 416

30 SYNODISCHE BEWEGUNG BEZOGEN AUF INTERPLANETARES ODER INTERSTELLARES OBJEKT 417

30.1 EINIGE BEZIEHUNGEN ZUR BESCHREIBUNG DER PLANETENBEWEGUNG....417
30.1.1 Häufig gebrauchte Bahnparameter der Planeten....418
30.1.2 Bahnparameter der kleinen Planeten 418
30.2 GENÄHERTE BEWEGUNG DER PLANETEN 419
30.2.1 Wahre Bewegung der Planeten 419
30.2.2 Mittlere Bewegung der Planeten 420
30.3 DAS KOORDINATENSYSTEM EINER PLANETENBAHN....424
30.3.1 Das Bahnsystem eines Planeten 424
30.3.2 Transformation zwischen Planetenbahnsystem und Ekliptiksystem 426
30.4 DAS PLANETENÄQUATORSYSTEM (BEZOGEN AUF IAU-VEKTOR)....430
30.4.1 Transformationen des Planetenäquatorsystems 432
30.4.1.1 Planetenäquatorsystem und Erdäquatorsystem....432
30.4.1.2 Planetenäquatorsystem und Ekliptiksystem....435
30.4.1.3 Planetenäquatorsystem und Planetenbahnsystem 442
30.4.2 Das planetographische System....448
30.4.3 Der subterrestrische Punkt auf einer Planetenoberfläche....451
30.5 PHYSIKALISCHE EPHEMERIDEN DER PLANETEN....452
30.6 DIE ERDBEZOGENE SYNODISCHE BEWEGUNG DER PLANETEN 452
30.7 BEISPIELE ZUR DARSTELLUNG DER BEWEGUNG INTERPLANETARER OBJEKTE 455
30.7.1 Heliozentrischen Bewegung 455
30.7.2 Erdbezogene Bewegung....460
30.8 DIE BEOBACHTUNG INTERPLANETARER BEWEGUNGEN....467
30.8.1 Geozentrische Distanzen und Lichtzeit interplanetarer Objekte 467
30.8.2 Interplanetare Missionen von einer irdischen Station beobachtet 469
30.8.3 Der Phasenwinkel interplanetarer Objekte 469
30.8.4 Die Elongation interplanetarer Objekte 472
30.9 ANMERKUNGEN ZUR BEWEGUNG VON RAUMSONDEN....474
30.9.1 Die Bewegung von Raumsonden 474
30.9.2 Natürliche und gesteuerte Beeinflussung der Bewegungen von Raumsonden....475
30.10 DISTANZ-VARIATIONEN INTERPLANETARER OBJEKTE....475
30.10.1 Das Beobachter-System....475
30.10.2 Beobachtung einer „gestörten“ Bewegung 482
30.10.3 Geom. Interpretation der modifizierten Einweg-Doppler-Formel 486
30.10.4 Zweiweg-Dopplermessungen in der modifizierten Theorie 488
30.10.5 Anwendung auf interplanetare Beobachtungen....492
30.10.6 1. BEISPIEL: Die Raumsonde GIOTTO beim Kometen P/Halley....493
30.10.7 2. BEISPIEL: GIOTTO beim Kometen P/Grigg-Skjellerup 1992....496

30.10.8 Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchungen in 30.10 ..... *498*
30.11 BEWEGUNG EINES PLANETENORBITERS 499
30.11.1 Die Bewegungsparameter eines Planetenorbiters *499*
30.11.2 Sonnensynchrone Bewegung eines Planetenorbiters *504*
30.12 ERGÄNZENDE LITERATUR ZU MARS-ORBITERN 512

31 SYNODISCHE BEWEGUNG ZWEIER SATELLITEN 513

31.1 SICHT SATELLIT-SATELLIT 513
31.2 DIE SYNODISCHE BEWEGUNG ZWEIER KOPLANARER SATELLITEN 519
31.2.1 Mittlere synodische Bewegung koplanarer Satelliten *519*
31.2.2 Säkular gestörte synodische Bewegung koplanarer Satelliten *520*
31.3 SYNODISCHE BEWEGUNG VON SATELLITEN AUF KREISNAHEN BAHNEN 522
31.4 STATIONÄRE PUNKTE UND RÜCKLÄUFIGKEIT BEI SICHT SATELLIT-SATELLIT 525
31.4.1 Bewegung auf koplanaren Bahnen *525*
31.4.2 Der Fall koplanarer Kreisbahnen *529*
31.4.3 Diskussion beliebiger relativer Bewegungen zweier Satelliten *532*

SCHRIFTTUM ZU BAND IV-B 545

LISTE DER VERWENDETEN SYMBOLE 559

INDEX 595

INHALT VON BAND I

DER BEWEGUNGSBEGRIFF

BEGRIFFLICHE DIMENSIONIERUNG DER BEWEGUNG

1. Die Antike Bewegungslehre

2. Die Klassische Bewegungslehre

3. Ansätze einer Nachklassischen Bewegungslehre

Schrifttum zu Band I

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND II

BEWEGUNG IN RAUM UND ZEIT

4. Bezugssysteme zur Beschreibung von Bewegungen

5. Die mathematische Anpassung beliebiger Bewegungen

6. Bewegungen in geradlinigen Systemen

7. Bewegungen in krummlinigen Systemen

8. Einige spezielle Koordinatensysteme

9. Bewegungen in Zeit

Schrifttum zu Band II

Liste der verwendeten Symbole
Abbildungsverzeichnis
Tabellenverzeichnis
Index

INHALT VON BAND III

NATÜRLICHE UND GESTEUERTE BEWEGUNG

10. Die spezielle Keplerbewegung
11. Bewegungsparameter
12. Natürliche und gesteuerte Bewegungsänderungen
13. *Kepler*bewegung in uniformisierter Darstellung
14. Parameterräume
15. Partialausdrücke
16. Bahnbestimmung und Bahnverbesserung
17. Bewegungseinflüsse
18. Anmerkungen zur Integration der Bewegungsgleichungen
19. Überblick Analytische Störungstheorie periodischer Bewegungen
20. Ergebnisse analytischer Satellitenbahntheorien
Schrifttum zu Band III
Liste der verwendeten Symbole
Abbildungsverzeichnis
Tabellenverzeichnis
Index

INHALT VON BAND IV-A

BEWEGUNGSANALYSE

21. Keplerbewegung auf der Grundlage von Hansen-Systemen
22. Anomalistische Bewegung
23. Drakonitische Bewegung
24. Tropische Bewegung
25. Siderische Bewegung
26. Die Meridian-bezogene Bewegung
27. Topozentrische Bewegung
Schrifttum zu Band IV-A
Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND V [in 1. Auflage Band IV]

BEWEGUNG IN BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

BEWEGUNG IN SPHÄRISCHER BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

32. Sphärische Beobachtungsgeometrie

33. Trigonometrie des sphärischen Breitenkreises

34. Überdeckung eines sphärischen Breitenkreises

35. Lokale Überdeckung

36 Sichtbarkeitsuntersuchungen

BEWEGUNG ÜBER REFERENZELLIPSOID

37. Allgemeine Beziehungen auf einem Rotationsellipsoid

38. Satellitenbewegung über Rotationsellipsoid

ANHANG

A. Grundformeln der sphärischen Trigonometrie
B. Näherungsausdrücke
C. Tschebyscheff-Approximationen
D. Integraltafel
E. Astronomische Konstante
F. Das julianische Datum
G. Tabellen reproduzierbarer Bahnen
H. Hohmann Übergänge im Interplanetaren Raum
I. Parameter der Attraktionssphären und kollinearen Librationspunkte im Sonnensystem
J. Sichtbarkeitsgrenzen geostationärer Satelliten
K. MSIS Luftwiderstandsmodell

Schrifttum zu Band V

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

Synodische Bewegungen bezogen auf dritte Körper

Die systematische Beobachtung der Bewegungen von Sonne und Mond führte auf die Messung eines Umlaufs des Mondes um die Erde bei Bezug auf die Sonne. Die beobachtete Größe wurde als synodischer Monat bezeichnet. Die Kombination mit der Beobachtung des Mondumlaufs bei Bezug auf den Schnittpunkt der Mondbahn mit der Sonnenbahn, der Ekliptik, den drakonitischen Monat, ließ den 18-jährigen Finsterniszyklus finden. Damit kann der Beginn der wissenschaftlichen Astronomie auf den Zeitraum vor etwa 5500 Jahren datiert werden, in den seinerzeit am weitesten geistig fortgeschrittenen Kulturkreis in Mesopotamien.

Im Rahmen der Satelllitenbahnanalyse wird die Bewegung von Satelliten auf Bezugspunkte untersucht. Ein solcher Bezug kann die Sonne sein. Aber auch andere Bezüge sind denkbar. Daher ist es nötig den Bezug einer Satellitenbewegung auf die Sonne als Sonnen-synodische herzustellen (Kapitel 28). Den Begriff der synodischen Bewegung müssen wir in diesem Zusammenhang erweitern: bei Bezug der Satellitenbewegung auf den Mond sprechen wir von einer Mond-synodischen Bewegung (Kapitel 29). Entsprechende synodische Bewegungen können auf Planeten bezogen werden (Kapitel 30), auf andere Satelliten (Kapitel 31). Vielleicht können auch interessante Bezüge auf interstellare Objekte untersucht werden. Das kann im Zusammenhang mit der Beobachtung eines Objektes über mehrere Stunden oder Tage von Interesse sein. Dies war etwa im Projekt ROSAT und in neueren Missionen von großem Interesse.

28 Sonnenbezogene synodische Bewegung

Nach einem zusammenfassenden Überblick über die Beschreibung der Bewegung der scheinbar die Erde umlaufende Sonne in den Abschnitten 28.1 und 28.2, sowie ihres Bezuges zur Sonnenzeit in Abschnitt 28.4 und des topozentrischen Bezugs der Sonne zu einem Ort auf der Erdoberfläche oder einem bewegten Objekt auf oder über der Erde in Abschnitt 28.4, wird als zentraler Begriff die synodische Bewegung eines Satelliten bei Bezug auf die Sonne ausführlich ab Abschnitt 28.5 auf Seite 38 diskutiert. In Ergänzung zur früheren Ausgabe von Band IV[1] wurde die Theorie der 2019 gefundenen Satelliten Äquivalenzbahnen[2] in diesem Kapitel integriert (Abschnitt 28.8 ab Seite 98). Die Sonnensynchronen können in diesem Zusammenhang als ein spezieller Fall von Äquivalenzbahnen eingeordnet werden (Abschnitt 28.8.3 ab Seite 125). Weitere Details von Sonnensynchronen Bahnen im Zusammenhang mit einer Satellitenbahnanalyse sind in Abschnitt 28.9 ab Seite 165) zusammengestellt. Mit Kenntnis der Sonnen-synodischen Bewegung können des Weiteren spezielle Typen der Satellitenbahnauswahl gefunden werden, verschiedene Arten von Aspektwinkeln im System Satellit – Bezugskörper (Erde) – Sonne definiert (Abschnitte 28.12 und 28.13) und insbesondere die Schattenverhältnisse untersucht werden (Abschnitt 28.11 auf Seite 190). Eine Verallgemeinerung des Begriffs der reproduzierbaren sonnensynchronen Bewegung wird in Abschnitt 28.10.4 (auf Seite 189) hergeleitet. Bahnkorrekturen, die im Zusammenhang mit der Sonnen-synodischen

---

[1] JOCHIM, E. F. M. [2018-B]

[2] JOCHIM, E. F. M. [2020]

Satellitenbahnbewegung stehen, werden in den Abschnitten 28.14 und 28.15 behandelt. Angeregt durch Kritik von Lektoren wird in diesem Kapitel das *Eckstein*sche Bahnmodell behandelt. Dieses Modell wurde ausgehend vom *Kozai*schen Bahnmodell der zweiten Ordnung[1], basierend auf der Methodik von *Dirk Brouwer*[2], mit Hilfe eines analytischen Formel-Manipulators entwickelt. Mit diesem *Eckstein*schen Bahnmodell werden alle Ephemeriden, die zur Erstellung der Berechnungen, Tabellen, Figuren in allen sechs Bänden der Satelliten-Bahnbewegung benötigt werden, analytisch berechnet (Abschnitt 28.16 ab Seite 267).

28.1 Die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde

Die Bewegung der Erde um die Sonne kann wie jede Planetenbewegung als allgemeine („gestörte“) *Kepler*bewegung dargestellt werden. Zu ihrer Beschreibung werden die Bahnelemente in Tabelle 28-1 verwendet.

Große Bahnhalbachse (= mittlere Distanz)	$a_{♁}$
Exzentrizität	$e_{♁}$
Inklination bezüglich Ekliptik	$i_{♁}$
Ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	$\Omega_{♁}$
Länge des Perihels	$\Gamma_{♁} = \Omega_{♁} + \omega_{♁}$
Mittlere Länge in der Bahn	$L_{♁}$
Mittlere Anomalie	$M_{♁} = L_{♁} - \Gamma_{♁}$

Tabelle 28-1: Die *Kepler*schen Elemente der Erdbahn bezogen auf das Baryzentrum des Sonnensystems

Um die scheinbare Bewegung der Sonne um die Erde (genauer des Baryzentrums des Sonnensystems um das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems) darzustellen, wird die Bewegung der Erde um die Sonne linear in das Erdzentrum transformiert. Der absteigende Knoten der heliozentrischen Erdbahn wird zum aufsteigenden Knoten der geozentrischen Sonnenbahn, dem *Frühlingspunkt*. Die Länge des Perihels der Erdbahn unterscheidet sich demnach von der Länge des Perigäums der Sonnenbahn um 180°. Die übrigen Bahnelemente stimmen identisch überein. Sie sind in Tabelle 28-2 gelistet.
Entsprechend unterscheiden sich auch die Zustandsvektoren dieser beiden Bewegungen nur durch das Vorzeichen. Die ekliptikalen Polarkoordinaten von Sonne und Erde unterscheiden sich in der ekliptikalen Länge um 180°, in der ekliptikalen Breite um das Vorzeichen.

Die **mittlere** Bahnebene der Erdbewegung um die Sonne wird als *Ekliptik* bezeichnet. Die **wahre** Bahnebene weicht von der Ekliptik etwas ab, was eine Folge der beschleunigenden Einwirkungen („Störungen“) der übrigen Planeten auf die Bewegung der Erde ist. Für die Beobachtung der scheinbaren Sonne von der Erde aus bleibt der Betrag dieser Abweichung, also der ekliptikalen Breite der Sonne, stets unter 1”. Er kann also für fast alle Anwendungen insbesondere im Rahmen einer

[1] KOZAI, Y. [1962]

[2] BROUWER, D. [1959]

Satellitenbahnanalyse vernachlässigt werden. Im Folgenden werden einige Berechnungsarten unterschiedlicher Genauigkeit der Bewegung der scheinbaren Sonne zusammengestellt.

Große Bahnhalbachse (= mittlere Distanz)	$a_\odot = a_{♁}$
Exzentrizität	$e_\odot = e_{♁}$
Inklination bezüglich Ekliptik	$i_\odot = i_{♁}$
Ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	$\Omega_\odot = \Omega_{♁} + 180°$
Länge des Perigäums	$\Gamma_\odot = \Gamma_{♁}$
Mittlere Länge in der Bahn	$L_\odot = L_{♁}$
Mittlere Anomalie	$M_\odot = L_\odot - \Gamma_\odot = M_{♁}$

Tabelle 28-2: Die *Kepler*schen Elemente der scheinbaren Sonnenbahn bezogen auf das Baryzentrum des Erde-Mond Systems

28.1.1 Die Sonnenephemeride

Sei $\mathbf{x}_{♁}$ der Sonnensystem-baryzentrische Ortsvektor der Erde, so lautet die Bewegungsgleichung[1] der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne in der Formulierung als allgemeine („gestörte“) *Kepler*bewegung

$$\ddot{\mathbf{x}}_{♁} = -\mu_\odot \frac{\mathbf{x}_{♁}}{r_{♁}^3} + \mathbf{R}_{♁} \quad . \tag{28.1}$$

Hier ist $\mu_\odot$ die heliozentrische Gravitationskonstante und $\mathbf{R}_{♁}$ der „Stör-„ Vektor, in dem alle weiteren beschleunigenden Einflüsse auf die Erdbahn durch die Attraktionen von den anderen Planeten und weiterer Einflüsse, wie etwa den Solardruck und den Sonnenwind, zusammengefasst sind. Die Integration wird in baryzentrischer dynamischer Zeit (TDB) als gleichförmiger auf das Baryzentrum des Sonnensystems bezogener Zeit durchgeführt[2]. In der astronomischen Beobachtung wird derzeit als beste Ephemeride die numerisch vom JPL integrierte und abgespeicherte Ephemeride DE200/LE200 (bzw. eine neue verbesserte Version) verwendet, die seit 1984 auch dem *astronomischen Almanach* zugrunde liegt[3]. Hier wird als Zustandsvektor der baryzentrische Zustandsvektor $\left(\mathbf{x}_{♁}, \dot{\mathbf{x}}_{♁}\right)$ der Erde bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoktium J2000.0 in TDB angeboten.

Für die Beobachtung der Sonne wird der geozentrische Ortsvektor des Sonnenmittelpunktes bezogen auf den mittleren Äquator und das Äquinoktium der Fundamentalepoche J2000.0 mit den $\mathbf{p}_i$ –

[1] Siehe dazu die allgemeinen Aussagen etwa in Kapitel 17 (Band III), insbesondere ab Abschnitt 17.4

[2] Beschreibung der Zeiten in Abschnitt 9.1 (Band II)

[3] AA 1984, pp. C1–C24

Basisvektoren aufgelistet[1]. Daraus können wahre geozentrische geometrische Distanz $r_{\odot g}$, Rektaszension $\alpha_{\odot g}$ und Deklination $\delta_{\odot g}$ der scheinbaren Sonne berechnet werden:

$$\mathbf{x}_{\odot g} = x^i_{\odot g}\,\mathbf{p}_i = r_{\odot g}\left(\mathbf{p}_1 \cos\delta_{\odot g}\cos\alpha_{\odot g} + \mathbf{p}_2 \cos\delta_{\odot g}\sin\alpha_{\odot g} + \mathbf{p}_3 \sin\delta_{\odot g}\right) \quad . \tag{28.2}$$

Insbesondere ist

$$r_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} = \sqrt{x^2_{\odot g1} + x^2_{\odot g2}} \quad . \tag{28.3}$$

Falls auch der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}}_{\odot g}$ bekannt ist mit

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{\odot g1} &= \dot{r}_{\odot g}\cos\alpha_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} - \dot{\alpha}_{\odot g}\, r_{\odot g}\sin\alpha_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} - \dot{\delta}_{\odot g}\; r_{\odot g}\cos\alpha_{\odot g}\sin\delta_{\odot g} \\
\dot{x}_{\odot g2} &= \dot{r}_{\odot g}\sin\alpha_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} + \dot{\alpha}_{\odot g}\, r_{\odot g}\cos\alpha_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} - \dot{\delta}_{\odot g}\; r_{\odot g}\sin\alpha_{\odot g}\sin\delta_{\odot g} \\
\dot{x}_{\odot g3} &= \dot{r}_{\odot g}\sin\delta_{\odot g} + \dot{\delta}_{\odot g}\; r_{\odot g}\cos\delta_{\odot g} \quad ,
\end{aligned} \tag{28.4}$$

bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\odot g}\cdot\dot{\mathbf{x}}_{\odot g} &= r_{\odot g}\,\dot{r}_{\odot g} \\
\dot{\alpha}_{\odot g} &= \frac{-\dot{x}_{\odot g1}\sin\alpha_{\odot g} + \dot{x}_{\odot g2}\cos\alpha_{\odot g}}{r_{\odot g}\cos\delta_{\odot g}} \\
\dot{\delta}_{\odot g} &= \frac{\dot{x}_{\odot g3} - \dot{r}_{\odot g2}\sin\delta_{\odot g}}{r_{\odot g}\cos\delta_{\odot g}} \quad .
\end{aligned} \tag{28.5}$$

Da die scheinbare Bewegung der Sonne geozentrisch aufgefasst wird, muss als Zeiteinheit für diese Ephemeride die terrestrische dynamische Zeit TDT gewählt werden. Die hier berechneten Koordinaten sind „geometrische“ Daten, d. h. aus der Rechnung folgende, die zwar die wahren geometrischen Verhältnisse wiedergeben, aber für die geozentrische Beobachtung noch korrigiert werden müssen:

1. auf den Zeitpunkt der Beobachtung durch Korrektur der Zeit und um die Präzession[2]
2. auf die geozentrische scheinbare Rektaszension und Deklination durch Korrektur um Nutation, die jährliche Aberration und die Lichtzeit[3].

Im astronomischen Jahrbuch werden als weitere Ephemeride die *geometrische geozentrische ekliptikale Länge* $l_\odot$ (mit einer Genauigkeit von etwa $|\Delta l_\odot| < 0''.001$) und die *geometrische geozentrische ekliptikale Breite* $b_\odot$ (mit einer Genauigkeit von $|\Delta b_\odot| < 0''.01$) angeboten bezogen auf das mittlere Äquinoktium und die mittlere Ekliptik[4]. Die *scheinbare* geozentrische ekliptikale Länge $l_{\odot a}$ wird daraus durch Korrektur um die Nutation in Länge $\Delta\psi$ und die Aberration errechnet:

$$l_{\odot a} \;=\; l_\odot + \Delta\psi - \frac{\kappa}{r_\odot} \quad , \tag{28.6}$$

[1] Abschnitt 8.1 (Band II)

[2] Abschnitt 9.3 (Band II)

[3] Abschnitte 9.4 bis 9.9 (Band II)

[4] „mean of date ecliptic system“

wobei κ die Aberrationskonstante[1] und $r_\odot$ die wahre geozentrische Distanz des Sonnenmittelpunktes ist. Die *scheinbare geozentrische ekliptikale Breite* der Sonne ist der geometrischen im Rahmen der Genauigkeit dieser Ephemeride gleich[2].

Schließlich werden die *scheinbare geozentrische Rektaszension* $\alpha_\odot$ und *Deklination* $\delta_\odot$ der Sonne in einer weiteren Ephemeride bezogen auf den wahren Äquator und das wahre wahres des Beobachtungszeitpunktes in TDT angeboten, in der also die obigen Korrekturen bereits berücksichtigt sind[3].

Anmerkung: Das Wort „scheinbar“ wird in diesem Abschnitt in zweierlei Sinn verwendet:

1. zur Beschreibung der „scheinbaren“ Bewegung der Sonne um die Erde,
2. im üblichen Sinn der sphärisch-trigonometrischen Bezeichnung des geozentrischen Ortes eines Objektes, in dem die Korrekturen durch Präzession, Nutation, jährliche Aberration und Lichtzeit berücksichtigt sind. ◀

Für die Zwecke einer Satellitenbahnanalyse ist die hochgenaue JPL-Ephemeride oft nicht geeignet, sei es, dass das JPL-Band auf einem vorhandenen Rechner nicht verfügbar ist, sei es, dass die hier angebotene Genauigkeit für missionsanalytische Überlegungen überdimensioniert ist oder eine handlichere und durchsichtigere Aufarbeitung der Sonnenephemeride wünschenswert ist. Dazu können die in den folgenden beiden Unterabschnitten behandelten Formeln für die mittlere Sonne sowie die Entwicklung nach *Newcomb* für die wahre Sonne von Nutzen sein.

28.1.2 Die mittlere Sonne

Der Begriff „mittlere Sonne“ wird in unterschiedlichem Sinne verwendet, was zu Verwirrung und Fehlern führen kann. In der sphärischen Astronomie wird unter mittlerer Sonne eine *„fiktive mittlere Sonne“* verstanden, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit in der Erdäquatorebene mit der Umlaufzeit ein tropisches Jahr scheinbar die Erde umläuft. Diese fiktive mittlere Sonne dient als Grundlage zur Berechnung der Sonnenzeit und ist daher auch in der Satellitenbahnmechanik von fundamentaler Bedeutung.

In himmelsmechanischem Sinne wird unter der mittleren Sonne jedoch die in ihrer (mittleren) Bahnebene also der Ekliptik umlaufende *gemittelte* scheinbare Sonne verstanden, deren periodische Bewegungsanteile durch Mittelung vernachlässigt werden und die als Umlaufzeit auch genau ein (mittleres) tropisches Jahr hat. Die mittlere scheinbare Sonne wird somit (wie auch in der Satellitenbahntheorie) durch Berücksichtigung aller säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“) in den Elementen berechnet. Die säkular variierten („gestörten“) Elemente bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0 TDB[4] sind in Tabelle 28-3 zusammengestellt.

Hier ist T die Zeit in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche J2000.0 in TDT:

$$T = \frac{(JD - 2451545.0)}{36525} \quad , \tag{28.7}$$

[1] siehe Anhang E1 (Band V)

[2] Z. B. in AA 1984, p. C2

[3] „true of date equatorial system“

[4] Anhang E6 (Band V)

wenn JD das julianische Datum zum Beobachtungszeitpunkt in TDT bedeutet[1].

Die Berechnung des Beobachtungsortes der mittleren scheinbaren Sonne wird dadurch erleichtert, dass wegen $\overline{i_\odot} \equiv 0$ und $\overline{\Omega_\odot} \equiv 0$ die Bahnebene der mittleren scheinbaren Sonne für jeden Zeitpunkt in der momentanen Ekliptik verläuft, also die *ekliptikale Breite* der mittleren Sonne identisch verschwindet, also

$$\overline{b_\odot} \equiv 0 \quad . \tag{28.8}$$

Für die geometrische mittlere Länge der Sonne gilt nach Tabelle 28-3 die Beziehung

$$L_\odot = \overline{\Gamma_\odot} + \overline{M_\odot} \quad . \tag{28.9}$$

Entsprechend ergibt sich die *ekliptikale Länge* der mittleren scheinbaren Sonne aus

$$\overline{l_\odot} = \overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot} \quad . \tag{28.10}$$

Mittlere große Bahnhalbachse	$\overline{a_\odot} = 1.000000979 + 12.5 \times 10^{-13} T \; [AU]$
Mittlere Exzentrizität	$\overline{e_\odot} = 0.0167092449 - 4.180 \times 10^{-5} T - 1.26 \times 10^{-7} T^2$
Mittlere Inklination	$\overline{i_\odot} \equiv 0°.0$
Mittlere ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	$\overline{\Omega_\odot} \equiv 0°.0$
Mittlere ekliptikale Länge des Perigäums	$\overline{\Gamma_\odot} = 282°.9383461 + 1°.719457222 T - 0°.03350556 T^2 - 3°.333 \times 10^{-6} T^3$
Mittlere mittlere Anomalie	$\overline{M_\odot} = 357°.5277233 + 35999°.05034 T - 1°.60277777 \times 10^{-4} T^2 - 3°.33333 \times 10^{-6} T^3$
Geometrische mittlere Länge	$L_\odot = 280°.4660694 + 36000°.769797222 T - 3°.5108333 \times 10^{-3} T^2 + 0°.0 T^3$

Tabelle 28-3: Mittlere Bahnelemente der scheinbaren Sonne bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0

Die wahre Anomalie der mittleren Sonne $\overline{\upsilon_\odot}$ kann mit Hilfe der exzentrischen Anomalie $\overline{E_\odot}$ unter Anwendung des üblichen Systems[2]

$$\begin{aligned} \overline{M_\odot} &= \overline{E_\odot} - \overline{e_\odot} \sin \overline{E_\odot} \\ \tan \frac{\overline{\upsilon_\odot}}{2} &= \sqrt{\frac{1+\overline{e_\odot}}{1-\overline{e_\odot}}} \tan \frac{\overline{E_\odot}}{2} \end{aligned} \tag{28.11}$$

oder

$$\cos \overline{\upsilon_\odot} = \frac{\cos \overline{E_\odot} - \overline{e_\odot}}{1 - \overline{e_\odot} \cos \overline{E_\odot}} \quad , \quad \sin \overline{\upsilon_\odot} = \frac{\sin \overline{E_\odot} \sqrt{1 - \overline{e_\odot}^2}}{1 - \overline{e_\odot} \cos \overline{E_\odot}} \tag{28.12}$$

---

[1] Anhang F (Band V)

[2] siehe etwa in Abschnitt 10.1.3, Band III

berechnet werden.

Falls nicht allzu große Forderungen an die Genauigkeit gestellt werden, kann die Lösung der *Kepler*-gleichung in diesen beiden Ausdrücken durch die *Mittelpunktsgleichung*[1]

$$\overline{\upsilon_\odot} = \overline{M_\odot} + 2\overline{e_\odot}\sin\overline{M_\odot} + \frac{5}{4}\overline{e_\odot}^2\sin 2\overline{M_\odot} + O\left(\overline{e_\odot}^3\right) \tag{28.13}$$

angenähert werden. Der Fehler beträgt dann größenordnungsmäßig maximal 1”.

Die *geozentrische Distanz* der mittleren scheinbaren Sonne beträgt mit Formel (10.4) und wegen der angenommenen elliptischen Bewegung (mit dem elliptischen Kegelschnittparameter $p = a\left(1-e^2\right)$)

$$\overline{r_\odot} = \frac{\overline{a_\odot}\left(1-\overline{e_\odot}^2\right)}{1+\overline{e_\odot}\cos\overline{\upsilon_\odot}} \quad . \tag{28.14}$$

Bevor die scheinbaren geozentrischen Koordinaten der mittleren scheinbaren Sonne berechnet werden können, muss die Lichtzeit zur Berechnung der scheinbaren, also im Moment der Beobachtung gültigen Richtung berücksichtigt werden, da ja die Erde in der Lichtzeit ein Stück auf ihrer Bahn weitergewandert ist. Dies muss iterativ geschehen. Die Lichtzeit errechnet sich aus

$$\overline{\Delta t_\odot} = c\,\overline{r_\odot} \quad . \tag{28.15}$$

Mit diesem Wert werden $\overline{l_\odot}$ und $\overline{r_\odot}$ mit $\overline{b_\odot}$ = 0 für den jeweils neuen Zeitpunkt $JD - \overline{\Delta t_\odot} \to JD$ so lange berechnet, bis sich diese Werte in einem vorgegeben Genauigkeitsrahmen nicht mehr ändern.

Der Iterationsprozess kann folgendermaßen ablaufen:

Gegeben sei der Beobachtungszeitpunkt t_B. Der Zeitpunkt für die reale Position der Sonne sei im n-ten Iterationsschritt $t^{(n)} = t_B - \overline{\Delta t_\odot}^{(n)}$. Der Anfangswert für die Zeitdifferenz aus (28.15) wurde mit $\overline{r_\odot} = \overline{r_\odot}\left(t_B\right)$ aus einer Sonnenephemeride berechnet. Zum neuen Zeitpunkt werden aus (28.10) die ekliptikale Länge $\overline{l_\odot}\left(t^{(n)}\right)$ berechnet, über die Formeln (28.11) bis (28.14) die neue Entfernung $\overline{r_\odot}\left(t^{(n)}\right)$ und damit die Zeitkorrektur $\overline{\Delta t_\odot}^{(n+1)} = c\,\overline{r_\odot}\left(t^{(n)}\right)$. Der nächste Iterationsschritt geht von der korrigierten Zeit $t^{(n+1)} = t_B - \overline{\Delta t_\odot}^{(n+1)}$ aus. Der Iterationsprozess endet, wenn für einen vorgegeben Schranke Δ die Bedingung $\left|\overline{r_\odot}\left(t^{(n+1)}\right) - \overline{r_\odot}\left(t^{(n)}\right)\right| < \Delta$ erfüllt ist.

Die erhaltene korrigierte geometrische ekliptikale Länge der mittleren scheinbaren Sonne $\overline{l_{\odot c}} := \overline{l_\odot}\left(t^{(n+1)}\right)$ mit der korrigierten Distanz $\overline{r_{\odot c}} := \overline{r_\odot}\left(t^{(n+1)}\right)$ wird entsprechend Formel (28.6) mit der Nutation in Länge $\Delta\psi$ und der jährlichen Aberration $\kappa / \overline{r_{\odot c}}$ auf den scheinbaren Wert korrigiert

$$\overline{l_{\odot a}} = \overline{l_{\odot c}} + \Delta\psi - \frac{\kappa}{\overline{r_{\odot c}}} \quad . \tag{28.16}$$

Die *scheinbare (geozentrische) Deklination* der mittleren scheinbaren Sonne beträgt dann[2] mit der Näherung (28.8)

---

[1] Formel (10.86) in Abschnitt 10.2.3 (Band III)

[2] Siehe etwa Formel (8.72) in Abschnitt 8.2.2 (Band II)

$$\sin\overline{\delta_\odot} \;=\; \sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon \quad , \tag{28.17}$$

wobei $\varepsilon=\overline{\varepsilon}+\Delta\varepsilon$ die wahre Schiefe der Ekliptik ist, die sich aus der mittleren Schiefe $\overline{\varepsilon}$ und der Nutation in Schiefe[1] $\Delta\varepsilon$ ergibt. Nach Anhang E.3 (Band V) ist bezogen auf J2000.0 TDT

$$\overline{\varepsilon}=23°.439291111-0°.013004417T-1°.63889\times10^{-6}T^2-5°.036\times10^{-7}T^3+\cdots . \tag{28.18}$$

Die *scheinbare (geozentrische) Rektaszension* der mittleren scheinbaren Sonne folgt aus

$$\begin{aligned}
\cos\overline{\delta_\odot} &= \sqrt{1-\sin^2\overline{\delta_\odot}} \\
\sin\overline{\alpha_\odot}\cos\overline{\delta_\odot} &= \sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon \\
\cos\overline{\alpha_\odot}\cos\overline{\delta_\odot} &= \cos\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{28.19}$$

Diese Koordinaten beziehen sich auf das wahre $\mathbf{p}_i$ − Äquatorsystem, d.h. das Koordinatensystem mit wahrem Äquator und wahrem Äquinoktium zum Beobachtungszeitpunkt[2]. In diesem System lautet der geozentrische Ortsvektor der mittleren scheinbaren Sonne

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{x}_{\odot a}} &= \overline{r_\odot}\left[\overline{\alpha_\odot},\overline{\delta_\odot}\right]=x^i\,\mathbf{p}_i= \\
&= \overline{r_\odot}\left\{\cos\overline{\delta_\odot}\cos\overline{\alpha_\odot}\,\mathbf{p}_1+\cos\overline{\delta_\odot}\sin\overline{\alpha_\odot}\,\mathbf{p}_2+\sin\overline{\delta_\odot}\,\mathbf{p}_3\right\}= \\
&= \overline{r_\odot}\left\{\cos\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\mathbf{p}_1+\sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon\,\mathbf{p}_2+\sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon\,\mathbf{p}_3\right\} \quad .
\end{aligned} \tag{28.20}$$

Die mit den Daten der mittleren Sonne erreichbare Genauigkeit beträgt[3]

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha_\odot &= 20'' \quad (\Leftrightarrow 15000\text{ km}) \\
\Delta\delta_\odot &= 5'' \quad (\Leftrightarrow 4000\text{ km}) \\
\Delta r_\odot &= 20'' \quad (\Leftrightarrow 15000\text{ km}) \quad .
\end{aligned} \tag{28.21}$$

Die *Keplersche mittlere Bewegung* der mittleren scheinbaren Sonne ergibt mit dem obigen Wert für $\overline{a_\odot}$ den Wert

$$\overline{n_{\odot,Kep}}=\sqrt{\frac{\mu_\odot}{\overline{a_\odot}^3}}=1.990983\times10^{-7}\,/\,s=0°.985607335\,/\,d \quad . \tag{28.22}$$

Falls das Geschwindigkeitsverhalten der Sonne benötigt wird, können die Ableitungen $\dot{l},\dot{\alpha},\dot{\delta},\dot{x}_\odot$ mit den vorstehenden Ausdrücken abgeleitet werden. Zunächst wird der Geschwindigkeitsvektor gebildet

$$\overline{\dot{\mathbf{r}}_{\odot a}}=\dot{x}^i\,\mathbf{p}_i+x^i\,\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{28.23}$$

Die Komponenten des relativen Geschwindigkeitsvektors sind

---

[1] siehe in Abschnitt 9.4.1 (Band II)

[2] „true of date system“

[3] Nach SEIDELMANN, ed. [1992], p. 316

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (r_\odot)^{\bullet}_s \cos\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) - \overline{r_\odot}\left[(\Gamma_\odot)^{\bullet}_s + (\upsilon_\odot)^{\bullet}_s\right] \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) \\
\dot{x}_2 &= (r_\odot)^{\bullet}_s \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) \cos\varepsilon - \overline{r_\odot}\,\dot{\varepsilon}_s \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon + \\
&\qquad + \overline{r_\odot}\left[(\Gamma_\odot)^{\bullet}_s + (\upsilon_\odot)^{\bullet}_s\right] \cos\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) \cos\varepsilon \qquad (28.24) \\
\dot{x}_3 &= (r_\odot)^{\bullet}_s \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) \cos\varepsilon + \overline{r_\odot}\,\dot{\varepsilon}_s \sin\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right) \cos\varepsilon + \\
&\qquad + \overline{r_\odot}\left[(\Gamma_\odot)^{\bullet}_s + (\upsilon_\odot)^{\bullet}_s\right] \cos\left(\overline{\Gamma_\odot} + \overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon \ .
\end{aligned}
$$

Die hier benötigten säkularen Variationen der *Kepler*elemente der scheinbaren Sonnenbewegung sind nach Tabelle 28-3 (auf Seite 6)

$$
\begin{aligned}
(a_\odot)^{\bullet}_s &= 12.5\times10^{-13}\,[AU\,/\,\text{Jahrh.}] \\
(e_\odot)^{\bullet}_s &= -\,4.180\times10^{-5} - 2.52\times10^{-7}\,T + \cdots\ [1/\,\text{Jahrh.}] \\
(\Gamma_\odot)^{\bullet}_s &= 1°.719457222 - 0°.06701112\,T^2 - 9°.999\times10^{-6}\,T^2 + \cdots\ [1/\,\text{Jahrh.}] \qquad (28.25) \\
(M_\odot)^{\bullet}_s &= 35999°.05034 - 3°.20355554\times10^{-3}\,T - 9°.99999\times10^{-6}\,T^2 + \cdots\ [1/\,\text{Jahrh.}] \\
(L_\odot)^{\bullet}_s &= 36000°.769797222 - 7°.016666\times10^{-3}\,T + 0°.0\,T^2 + \cdots\ [1/\,\text{Jahrh.}] \quad .
\end{aligned}
$$

Aus der Mittelpunktsgleichung (28.13) folgt die säkulare Variation der wahren Anomalie auf Grund der Variation der Bahnparameter

$$
\begin{aligned}
(\upsilon_\odot)^{\bullet}_s \ &= \ (M_\odot)^{\bullet}_s \left[1 + 2\,\overline{e_\odot}\cos\overline{M_\odot} + \frac{5}{2}\,\overline{e_\odot}^{\,2}\cos 2\,\overline{M_\odot} + O\left(\overline{e_\odot}^{\,3}\right)\right] + \\
&\quad + (e_\odot)^{\bullet}_s \left[2\sin\overline{M_\odot} + \frac{5}{2}\,\overline{e_\odot}\sin 2\,\overline{M_\odot} + O\left(\overline{e_\odot}^{\,2}\right)\right] \quad .
\end{aligned}
\qquad (28.26)
$$

Die entsprechende säkulare Variation des Bahnradius lautet

$$
\begin{aligned}
(r_\odot)^{\bullet}_s = \frac{1}{1+\overline{e_\odot}\cos\overline{\upsilon_\odot}} \Bigg\{ & (a_\odot)^{\bullet}_s\left(1-\overline{e_\odot}^{\,2}\right) - (e_\odot)^{\bullet}_s \left[2\,\overline{a_\odot}\,\overline{e_\odot} + \frac{\overline{a_\odot}\left(1-\overline{e_\odot}^{\,2}\right)\cos\overline{\upsilon_\odot}}{1+\overline{e_\odot}\cos\overline{\upsilon_\odot}}\right] + \\
& + (\upsilon_\odot)^{\bullet}_s \frac{\overline{a_\odot}\,\overline{e_\odot}\left(1-\overline{e_\odot}^{\,2}\right)\sin\overline{\upsilon_\odot}}{1+\overline{e_\odot}\cos\overline{\upsilon_\odot}} \Bigg\} \ .
\end{aligned}
\qquad (28.27)
$$

Die säkularen Variationen der Schiefe der Ekliptik folgen aus der Entwicklung (28.18)

$$
\dot{\varepsilon}_s = -0°.013004417 - 3°.27778\times10^{-6}\,T - 1°.4108\times10^{-6}\,T^2 + \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right]. \qquad (28.28)
$$

Damit sind alle Variationen bekannt, die benötigt werden um den mittleren Geschwindigkeitsvektor der Sonne (28.23) mit den relativen Koeffizienten (28.24) berechnen zu können. Die säkulare Variation der (geometrischen) ekliptikalen Länge der Sonne ist aus $(L_\odot)^{\bullet}_s$ in (28.25) gegeben. Die säkularen Variationen der äquatorialen Winkelkoordinaten können mit den Ausdrücken (28.17) und (28.19) gebildet werden:

$$\left(\overline{\alpha_\odot}\right)_s^{\bullet} \cos\overline{\delta_\odot} = \left[\left(\Gamma_\odot\right)_s^{\bullet} + \left(\upsilon_\odot\right)_s^{\bullet}\right]\left\{\cos\varepsilon\cos\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\overline{\alpha_\odot} + \sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\overline{\alpha_\odot}\right\} -$$
$$-\dot{\varepsilon}_s \sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon \qquad (28.29)$$
$$\left(\overline{\delta_\odot}\right)_s^{\bullet} \cos\overline{\delta_\odot} = \left[\left(\Gamma_\odot\right)_s^{\bullet} + \left(\upsilon_\odot\right)_s^{\bullet}\right]\cos\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon + \dot{\varepsilon}_s \sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon \quad .$$

28.1.3 Wahre geozentrische Sonnenbewegung nach Newcomb

S. Newcomb [1898] veröffentlichte eine analytische Beschreibung der Sonnenbewegung durch Reihen, welche auch periodische Terme der Erdbewegung (Zweikörperbewegung) sowie periodische Einflüsse durch die Planeten enthält. Diese Theorie war lange Zeit die Basis für die Berechnung der Sonnenephemeriden in den *Astronomical Ephemeris*[1].

Mit modernen Rechnermethoden wurde die originale *Newcomb*sche Theorie auf die neue Fundamentalepoche J2000.0 umgerechnet, auf die baryzentrische dynamische Zeit TDB bezogen und an die entsprechende JPL-Ephemeride (DE200) bzw. die VSOP87-Theorie angepasst[2]. Die Ergebnisse der neuen Theorie werden aus Referenzgründen in diesem Abschnitt ohne eigene Herleitung wiedergegeben. Alle Größen der Theorie bilden wie bei der Originalarbeit ein in sich abgeschlossenes System, sie dürfen daher nicht durch andere (vielleicht „verbesserte“) Einzelwerte ersetzt werden. Gibt es neuere analytische Werte für die Erd- und Planetenbewegung sowie einen verbesserten Bezug auf ein Fundamentalsystem, muss die gesamte Theorie geschlossen angepasst werden.

Die Entwicklungen lauten für die geozentrische ekliptikale Länge $l_\odot$, die geozentrische ekliptikale Breite $b_\odot$ und die geozentrische Distanz $r_\odot$ [*AU*] bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium zum gegebenen Datum

$$\begin{aligned} l_\odot &= M_3 + \overline{\Gamma_\odot} + \Delta l_P + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l_5 + \Delta l_6 + \Delta l_M + \Delta l_{\mathrm{VSOP87}} \\ b_\odot &= \Delta b_2 + \Delta b_3 + \Delta b_4 + \Delta b_5 + \Delta b_6 + \Delta b_M \qquad (28.30) \\ r_\odot &= 1.0001398 - 0.0000007 \times T + \Delta r_2 + \Delta r_3 + \Delta r_4 + \Delta r_5 + \Delta r_6 + \Delta r_M \quad . \end{aligned}$$

In der hier verwendeten (modifizierten) *Newcomb*schen Sonnentheorie wird die geozentrische Position der Sonne mit folgender Genauigkeit garantiert:

im Mittel (RMS)	$\overline{\Delta l_\odot} = \pm 0''.4$,	$\overline{\Delta b_\odot} = \pm 0''.1$,	$\overline{\Delta r_\odot} = \pm 1\times 10^{-16}\ AU$
maximal	$\lvert\Delta l_\odot\rvert < 1''$,	$\lvert\Delta b_\odot\rvert < 0''.2$,	$\lvert\Delta r_\odot\rvert < 2\times 10^{-6}\ AU$.

Die einzelnen Terme werden wie folgt berechnet:

Die Zeiteinheit T wird in julianischen Jahrhunderten (TDB) in Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0 gegeben. Wenn Jd die julianische Tagesnummer und t die Tageszeit in Sekunden sind, ist

---

[1] ausführlicher Titel bis 1980: *The American Ephemeris and Nautical Almanac* sowie: *The Astronomical Ephemeris*, ab 1981: *The Astronomical Almanac*

[2] siehe hierzu in: P. STUMPFF [1981], P. STUMPFF und J. H. LIESKE [1984] , P. BRETAGNON and G. FRANCOU [1988]. Die hier verwendete Umrechnung der *Newcomb*schen Daten auf die Epoche J2000.0 wurde von *O. Montenbruck* (1995) errechnet ohne eine erneuerte Theorie zu erarbeiten.

$$T \;:=\; \left(Jd - J_{2000} + \frac{t - t_{2000}}{86400} \right) \frac{1}{36525} \quad , \tag{28.31}$$

wobei die Fundamentalepoche gegeben ist zu

$$J_{2000} \;=\; 2451545 \quad , \quad t_{2000} \;=\; 43200 \quad . \tag{28.32}$$

Die **mittlere Anomalie der Erde** (= mittlere Anomalie der Sonne; mit $1^r \mathrel{\hat{=}} 360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$) beträgt[1]

$$\begin{aligned} M_3 \;&=\; \overline{M_\odot} = \; 0^r.9931266 + 99^r.9973604 \times T + \cdots \;= \\ &= 357°.5277233 + 35999°.05034\,T - 1°.60277777 \times 10^{-4}\,T^2 - 3°.33333 \times 10^{-6}\,T^3 \quad . \end{aligned} \tag{28.33}$$

Die **geometrische mittlere Länge des Perigäums der Sonne** lautet in der *Newcomb*schen Theorie[2]

$$\overline{\Gamma_\odot} \;=\; 282°.94031 + 6191''.2 \times T + 1''.1 \times T^2 \quad . \tag{28.34}$$

Im Korrekturglied Δl_P ist eine **langperiodische Korrektur** der ekliptikalen Länge der Sonne durch wechselseitige Einflüsse der Planeten enthalten:

$$\begin{aligned} \Delta l_P \;=\; & 6''.40 \sin\left(0^r.6983 + 0^r.0561 \times T\right) + 1''.87 \sin\left(0^r.5764 + 0^r.4174 \times T\right) + \\ & + 0''.27 \sin\left(0^r.4189 + 0^r.3306 \times T\right) + 0''.20 \sin\left(0^r.3581 + 2^r.4814 \times T\right) \quad . \end{aligned} \tag{28.35}$$

Die Terme $\Delta l_j, \Delta b_j, \Delta r_j \; (j = 2, 3, 4, 5, 6)$ enthalten die kurzperiodischen Einflüsse der Erdbahn (die sogenannten *Kepler*-Terme, die aus der Mittelpunktsgleichung stammen) und der Planeten.

Die Erdterme sind

$$\begin{aligned} \Delta l_3 \;&=\; -\left(0''.22 + 0''.06 \times T + 0''.01 \times T^2\right) \cos M_3 + \\ &\quad + \left(6892''.76 - 17''.35 \times T - 0''.05 \times T^2\right) \sin M_3 + \\ &\quad + \left(71''.98 - 0''.36 \times T\right) \sin 2M_3 + \\ &\quad + 1''.04 \sin 3M_3 \\ \Delta b_3 \;&=\; 0''.00 \\ \Delta r_3 \frac{10^6}{AU} \;&=\; \left(-16707.37 + 42.04 \times T + 0.13 \times T^2\right) \cos M_3 - \\ &\quad - \left(0.54 + 0.15 \times T + 0.02 \times T^2\right) \sin M_3 + \\ &\quad + \left(-139.57 + 0.70 \times T\right) \cos 2M_3 - \\ &\quad - 1.75 \cos 3M_3 \quad . \end{aligned} \tag{28.36}$$

Für die **Planetenterme** wird jeweils die auf J2000.0 bezogene mittlere Anomalie $M_j \; (j = 2, 4, 5, 6)$ benötigt. Damit können die Korrekturterme durch die Planeten berechnet werden.

---

[1] Der Index 3 bezieht sich auf den dritten Planeten des Sonnensystems

[2] Die in der *Newcomb*schen Theorien verwendeten Zahlenwerte haben geringfügige Abweichungen zu moderneren Werten, die in Tabelle 28-3 auf Seite 6 gelistet sind

Venus

Mittlere Anomalie:

$$M_2 = 0^r.1387306 - 162^r.5485917 \times T = 49°.943016 - 58517°.49301 \times T \quad (28.37)$$

Korrektur in Länge:

$$\begin{aligned}
\Delta l_2 = {} & +0''.03\cos M_2 && -0''.07\sin M_2 + \\
& +2''.35\cos(M_3 - M_2) && -4''.23\sin(M_3 - M_2) - \\
& -0''.10\cos(M_3 - 2M_2) && +0''.06\sin(M_3 - 2M_2) - \\
& -0''.06\cos(2M_3 - M_2) && -0''.03\sin(2M_3 - M_2) - \\
& -4''.70\cos(2M_3 - 2M_2) && +2''.90\sin(2M_3 - 2M_2) + \\
& +1''.80\cos(3M_3 - 2M_2) && -1''.74\sin(3M_3 - 2M_2) - \\
& -0''.67\cos(3M_3 - 3M_2) && +0''.03\sin(3M_3 - 3M_2) + \\
& +0''.03\cos(4M_3 - 2M_2) && -0''.03\sin(4M_3 - 2M_2) + \\
& +1''.51\cos(4M_3 - 3M_2) && -0''.40\sin(4M_3 - 3M_2) - \\
& -0''.19\cos(4M_3 - 4M_2) && -0''.09\sin(4M_3 - 4M_2) + \\
& +0''.76\cos(5M_3 - 3M_2) && -0''.68\sin(5M_3 - 3M_2) - \\
& -0''.14\cos(5M_3 - 4M_2) && -0''.04\sin(5M_3 - 4M_2) - \\
& -0''.05\cos(5M_3 - 5M_2) && -0''.07\sin(5M_3 - 5M_2) + \\
& +0''.15\cos(6M_3 - 4M_2) && -0''.04\sin(6M_3 - 4M_2) - \\
& -0''.03\cos(6M_3 - 5M_2) && -0''.03\sin(6M_3 - 5M_2) - \\
& && -0''.04\sin(6M_3 - 6M_2) - \\
& -0''.12\cos(7M_3 - 5M_2) && -0''.03\sin(7M_3 - 5M_2)
\end{aligned} \quad (28.38)$$

Korrektur in Breite:

$$\begin{aligned}
\Delta b_2 = {} & +0''.02\cos M_2 && +0''.02\sin M_2 + \\
& +0''.02\cos(M_3 - 2M_2) && + \\
& +0''.01\cos(2M_3 - M_2) && -0''.09\sin(2M_3 - M_2) + \\
& +0''.01\cos(2M_3 - M_2) && -0''.01\sin(2M_3 - 2M_2) + \\
& +0''.04\cos(3M_3 - 2M_2) && -0''.06\sin(3M_3 - 2M_2) + \\
& +0''.01\cos(3M_3 - 3M_2) && + \\
& +0''.01\cos(4M_3 - 2M_2) && -0''.01\sin(4M_3 - 2M_2) + \\
& +0''.18\cos(4M_3 - 3M_2) && -0''.10\sin(4M_3 - 3M_2) + \\
& +0''.01\cos(5M_3 - 3M_2) && - \\
& -0''.03\cos(5M_3 - 4M_2) && + \\
& +0''.01\cos(6M_3 - 4M_2) && - \\
& -0''.01\cos(6M_3 - 5M_2) && - \\
& -0''.02\cos(7M_3 - 5M_2) && -0''.01\sin(7M_3 - 5M_2)
\end{aligned} \quad (28.39)$$

Korrektur in Entfernung:

$$
\begin{aligned}
\Delta r_2 \frac{10^6}{AU} \;=\; & -0.16\cos M_2 && +0.07\sin M_2 - \\
& -4.75\cos\left(M_3-M_2\right) && -2.64\sin\left(M_3-M_2\right)+ \\
& +0.12\cos\left(M_3-2M_2\right) && +0.20\sin\left(M_3-2M_2\right)+ \\
& +0.20\cos\left(2M_3-M_2\right) && -0.01\sin\left(2M_3-M_2\right)+ \\
& +8.28\cos\left(2M_3-2M_2\right) && +13.42\sin\left(2M_3-2M_2\right)- \\
& -1.44\cos\left(3M_3-2M_2\right) && -1.57\sin\left(3M_3-2M_2\right)+ \\
& +0.11\cos\left(3M_3-3M_2\right) && +2.43\sin\left(3M_3-3M_2\right)+ \\
& +0.10\cos\left(4M_3-2M_2\right) && +0.09\sin\left(4M_3-2M_2\right)- \\
& -0.88\cos\left(4M_3-3M_2\right) && -3.36\sin\left(4M_3-3M_2\right)- \\
& -0.38\cos\left(4M_3-4M_2\right) && +0.77\sin\left(4M_3-4M_2\right)+ \\
& +0.30\cos\left(5M_3-3M_2\right) && +0.37\sin\left(5M_3-3M_2\right)- \\
& -0.11\cos\left(5M_3-4M_2\right) && +0.43\sin\left(5M_3-4M_2\right)- \\
& -0.31\cos\left(5M_3-5M_2\right) && +0.21\sin\left(5M_3-5M_2\right)- \\
& -0.06\cos\left(6M_3-4M_2\right) && -0.21\sin\left(6M_3-4M_2\right)- \\
& -0.09\cos\left(6M_3-5M_2\right) && +0.09\sin\left(6M_3-5M_2\right)- \\
& -0.18\cos\left(6M_3-6M_2\right) && +0.02\sin\left(6M_3-6M_2\right)- \\
& -0.08\cos\left(7M_3-5M_2\right) && +0.31\sin\left(7M_3-5M_2\right)
\end{aligned}
\tag{28.40}
$$

Mars: Mittlere Anomalie:

$$
M_4 \;=\; 0^r.0543250 + 53^r.1666028 \times T \;=\; 19°.557000 - 19139°.97701 \times T \tag{28.41}
$$

Korrektur in Länge:

$$
\begin{aligned}
\Delta l_4 \;=\; & -0''.22\cos\left(M_3-M_4\right) && +0''.17\sin\left(M_3-M_4\right)- \\
& -1''.66\cos\left(M_3-2M_4\right) && +0''.62\sin\left(M_3-2M_4\right)+ \\
& +1''.96\cos\left(2M_3-2M_4\right) && +0''.57\sin\left(2M_3-2M_4\right)+ \\
& +0''.40\cos\left(2M_3-3M_4\right) && +0''.15\sin\left(2M_3-3M_4\right)+ \\
& +0''.53\cos\left(2M_3-4M_4\right) && +0''.26\sin\left(2M_3-4M_4\right)+ \\
& +0''.05\cos\left(3M_3-3M_4\right) && +0''.12\sin\left(3M_3-3M_4\right)- \\
& -0''.13\cos\left(3M_3-4M_4\right) && -0''.48\sin\left(3M_3-4M_4\right)-
\end{aligned}
\tag{28.42}
$$

$$
\begin{aligned}
& -0''.04\cos\left(3M_3-5M_4\right) && -0''.20\sin\left(3M_3-5M_4\right)- \\
& && -0''.03\sin\left(4M_3-4M_4\right)+ \\
& +0''.05\cos\left(4M_3-5M_4\right) && -0''.07\sin\left(4M_3-5M_4\right)- \\
& -0''.10\cos\left(4M_3-6M_4\right) && +0''.11\sin\left(4M_3-6M_4\right)- \\
& -0''.05\cos\left(5M_3-7M_4\right) && + \\
& +0''.05\cos\left(5M_3-8M_4\right) && +0''.01\sin\left(5M_3-8M_4\right)
\end{aligned}
$$

Korrektur in Breite:

$$
\begin{aligned}
\Delta b_4 \quad = \quad & && +0''.01\sin\left(2M_3-2M_4\right)+ \\
& +0''.01\cos\left(3M_3-4M_4\right) &&
\end{aligned}
\tag{28.43}
$$

Korrektur in Entfernung:

$$
\begin{aligned}
\Delta r_4 \frac{10^6}{AU} \quad = \quad & -0.21\cos\left(M_3-M_4\right) && -0.27\left(M_3-M_4\right)+ \\
& +0.16\cos\left(M_3-2M_4\right) && +0.28\sin\left(M_3-2M_4\right)- \\
& -1.32\cos\left(2M_3-2M_4\right) && +4.55\sin\left(2M_3-2M_4\right)- \\
& -0.17\cos\left(2M_3-3M_4\right) && +0.46\sin\left(2M_3-3M_4\right)+ \\
& +0.09\cos\left(2M_3-4M_4\right) && -0.22\sin\left(2M_3-4M_4\right)- \\
& -0.35\cos\left(3M_3-3M_4\right) && +0.15\sin\left(3M_3-3M_4\right)+ \\
& +1.06\cos\left(3M_3-4M_4\right) && -0.29\sin\left(3M_3-4M_4\right)+ \\
& +0.20\cos\left(3M_3-5M_4\right) && -0.04\sin\left(3M_3-5M_4\right)+ \\
& +0.10\cos\left(4M_3-4M_4\right) && +0.04\sin\left(4M_3-4M_4\right)+ \\
& +0.20\cos\left(4M_3-5M_4\right) && +0.14\sin\left(4M_3-5M_4\right)- \\
& -0.23\cos\left(4M_3-6M_4\right) && -0.22\sin\left(4M_3-6M_4\right)+ \\
& +0.01\cos\left(5M_3-7M_4\right) && -0.14\sin\left(5M_3-7M_4\right)- \\
& -0.02\cos\left(7M_3-8M_4\right) && +0.10\sin\left(7M_3-8M_4\right)
\end{aligned}
\tag{28.44}
$$

Jupiter

Mittlere Anomalie:

$$
M_5 \quad = \quad 0^r.0551750+8^r.4293972\times T \quad = \quad 19°.863000-3034°.582992\times T \tag{28.45}
$$

Korrektur in Länge:

$$
\begin{aligned}
\Delta l_5 \quad = \quad & +0''.01\cos\left(M_3+M_5\right) && -0''.07\sin\left(M_3+M_5\right)- \\
& -0''.31\cos M_5 && -2''.58\sin M_5- \\
& -7''.21\cos\left(M_3-M_5\right) && -0''.06\sin\left(M_3-M_5\right)- \\
& -0''.54\cos\left(M_3-2M_5\right) && -1''.52\sin\left(M_3-2M_5\right)- \\
& -0''.03\cos\left(M_3-3M_5\right) && -0''.21\sin\left(M_3-3M_5\right)- \\
& -0''.16\cos\left(2M_3-M_5\right) && +0''.05\sin\left(2M_3-M_5\right)+ \\
& +0''.14\cos\left(2M_3-2M_5\right) && -2''.73\sin\left(2M_3-2M_5\right)+
\end{aligned}
\tag{28.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&+0''.07\cos\left(2M_3-3M_5\right) && -0''.55\sin\left(2M_3-3M_5\right)+\\
&+0''.02\cos\left(2M_3-4M_5\right) && -0''.08\sin\left(2M_3-4M_5\right)+\\
&+0''.01\cos\left(3M_3-2M_5\right) && -0''.07\sin\left(3M_3-2M_5\right)-\\
&-0''.16\cos\left(3M_3-3M_5\right) && -0''.03\sin\left(3M_3-3M_5\right)-\\
&-0''.04\cos\left(3M_3-4M_5\right) && -0''.01\sin\left(3M_3-4M_5\right)
\end{aligned}
$$

Korrektur in Breite:

$$
\begin{aligned}
\Delta b_5 \;=\; & && +0''.02\sin\left(M_3+M_5\right)+\\
& +0''.02\cos M_5 && -\\
& && -0''.02\sin\left(M_3-M_5\right)+\\
& +0''.01\cos\left(M_3-2M_5\right) && -0''.17\sin\left(M_3-2M_5\right)-\\
& && -0''.02\sin\left(M_3-3M_5\right)+\\
& +0''.01\cos\left(2M_3-M_5\right)+ && \\
& +0''.01\cos\left(2M_3-3M_5\right) &&
\end{aligned}
\tag{28.47}
$$

Korrektur in Entfernung:

$$
\begin{aligned}
\Delta r_5\,\frac{10^6}{AU} \;=\; & +0.18\cos\left(M_3+M_5\right) && +0.02\sin\left(M_3+M_5\right)+\\
& +0.52\cos M_5 && -0.34\sin M_5+\\
& +0.13\cos\left(M_3-M_5\right) && -16.27\sin\left(M_3-M_5\right)+\\
& +3.09\cos\left(M_3-2M_5\right) && -1.12\sin\left(M_3-2M_5\right)+\\
& +0.38\cos\left(M_3-3M_5\right) && -0.06\sin\left(M_3-3M_5\right)-\\
& -0.18\cos\left(2M_3-M_5\right) && -0.31\sin\left(2M_3-M_5\right)+\\
& +9.23\cos\left(2M_3-2M_5\right) && +0.48\sin\left(2M_3-2M_5\right)+\\
& +1.83\cos\left(2M_3-3M_5\right) && +0.25\sin\left(2M_3-3M_5\right)+\\
& +0.25\cos\left(2M_3-4M_5\right) && +0.06\sin\left(2M_3-4M_5\right)+\\
& +0.16\cos\left(3M_3-2M_5\right) && +0.04\sin\left(3M_3-2M_5\right)+\\
& +0.08\cos\left(3M_3-3M_5\right) && -0.64\sin\left(3M_3-3M_5\right)+\\
& +0.03\cos\left(3M_3-4M_5\right) && -0.17\sin\left(3M_3-4M_5\right)
\end{aligned}
\tag{28.48}
$$

Saturn

Mittlere Anomalie:

$$
M_6 \;=\; 0^r.8816500+3^r.3938722\times T \;=\; 317°.394000-1221°.793992\times T \tag{28.49}
$$

Korrektur in Länge:

$$
\begin{aligned}
\Delta l_6 \;=\; & && -0''.32\sin M_6-\\
& -0''.08\cos\left(M_3-M_6\right) && -0''.41\sin\left(M_3-M_6\right)+\\
& +0''.04\cos\left(M_3-2M_6\right) && +0''.10\sin\left(M_3-2M_6\right)+\\
& +0''.04\cos\left(2M_3-2M_6\right) && +0''.10\sin\left(2M_3-3M_6\right)
\end{aligned}
\tag{28.50}
$$

Korrektur in Breite:

$$\Delta b_6 = -0''.01 \sin\left(M_3 - M_6\right) \tag{28.51}$$

Korrektur in Entfernung:

$$\begin{aligned} \Delta r_6 \frac{10^6}{AU} = & +0.01 \cos M_6 + \\ & +0.97 \cos\left(M_3 - M_6\right) \quad -0.18 \sin\left(M_3 - M_6\right) - \\ & -0.23 \cos\left(M_3 - 2M_6\right) \quad +0.10 \sin\left(M_3 - 2M_6\right) - \\ & -0.35 \cos\left(2M_3 - 2M_6\right) \quad +0.13 \sin\left(2M_3 - 2M_6\right) \end{aligned} \tag{28.52}$$

Die bisher zusammengestellten Terme beziehen sich auf das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems. Um auf den Erdmittelpunkt zu reduzieren, werden die folgenden Terme benutzt:

$$\begin{aligned} \Delta l_M = & +6''.45 \sin D_☾ - 0''.42 \sin\left(D_☾ - M_☾\right) + 0''.18 \sin\left(D_☾ + M_☾\right) + \\ & +0''.17 \sin\left(D_☾ - M_3\right) - 0''.06 \sin\left(D_☾ + M_3\right) \end{aligned} \tag{28.53}$$

$$\Delta b_M = 0''.576 \sin F_☾ \tag{28.54}$$

$$\begin{aligned} \Delta r_M \frac{10^6}{AU} = & \; 30.76 \cos D_☾ - 3.06 \cos\left(D_☾ - M_☾\right) + 0.85 \cos\left(D_☾ + M_☾\right) - \\ & -0.58 \cos\left(D_☾ + M_3\right) + 0.57\left(D_☾ - M_3\right) \quad . \end{aligned} \tag{28.55}$$

Hier bedeuten[1] $D_☾$ die mittlere Elongation des Mondes von der Sonne (das „Mondalter“), $M_☾$ die mittlere Anomalie des Mondes und $F_☾$ das mittlere Argument der Breite des Mondes

$$\begin{aligned} D_☾ &= 0^r.8274 + 1236^r.8531 \times T &&= 297°.864 + 445267°.1160 \times T \\ M_☾ &= 0^r.3749 + 1325^r.5524 \times T &&= 134°.964 + 477198°.8640 \times T \\ F_☾ &= 0^r.2591 + 1342^r.2278 \times T &&= 93°.276 + 483202°.0080 \times T \quad . \end{aligned} \tag{28.56}$$

Schließlich wird noch eine Korrektur in Länge benötigt, um die Sonnenephemeride auf die DE200-Ephemeride bzw. die VSOP87-Theorie beziehen zu können:

$$\Delta l_{\mathrm{VSOP87}} = 0''.87 + 1''.26 \times T \quad . \tag{28.57}$$

Um die trigonometrischen Funktionen jeweils nur einmal auswerten zu müssen, werden die Additionstheoreme benutzt:

[1] vgl. die Bezeichnungen in Anhang E.3 (Band V)

$$
\begin{aligned}
\sin 2M_j &= 2\sin M_j \cos M_j \qquad (j = 2, 3, 4, 5, 6) \\
\cos 2M_j &= 2\cos^2 M_j - 1 \\
\sin 3M_j &= \sin M_j \left(3 - 4\sin^2 M_j\right) \\
\cos 3M_j &= \cos M_j \left(4\cos^2 M_j - 3\right) \\
\sin 4M_j &= 4\sin M_j \cos M_j \left(2\cos^2 M_j - 1\right) = 2\sin 2M_j \cos 2M_j \\
\cos 4M_j &= 8\cos^4 M_j - 8\cos^2 M_j + 1 = 2\cos^2 2M_j - 1 \\
\sin 5M_j &= \sin 3M_j \cos 2M_j + \cos 3M_j \sin 2M_j \\
\cos 5M_j &= \cos 3M_j \cos 2M_j - \sin 3M_j \sin 2M_j \\
\sin 6M_j &= \sin 3M_j \cos 3M_j + \cos 3M_j \sin 3M_j \\
\cos 6M_j &= \cos 3M_j \cos 3M_j - \sin 3M_j \sin 3M_j \\
\sin 7M_j &= \sin 4M_j \cos 3M_j + \cos 4M_j \sin 3M_j \\
\cos 7M_j &= \cos 4M_j \cos 3M_j - \sin 4M_j \sin 3M_j \quad .
\end{aligned}
\tag{28.58}
$$

Entsprechend können Ausdrücke der Art verwendet werden:

$$
\begin{aligned}
\sin\left(k_3 M_3 - k_j M_j\right) &= \sin\left(k_3 M_3\right)\cos\left(k_j M_j\right) - \cos\left(k_3 M_3\right)\sin\left(k_j M_j\right) \\
\cos\left(k_3 M_3 - k_j M_j\right) &= \cos\left(k_3 M_3\right)\cos\left(k_j M_j\right) + \sin\left(k_3 M_3\right)\sin\left(k_j M_j\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{28.59}
$$

Werden die in diesem Abschnitt zusammengestellten Korrekturterme zur Berechnung der (scheinbaren) Sonnenbewegung näher betrachtet, zeigt sich unmittelbar, dass sich die Erde nicht in der Ekliptik bewegt, sondern von dieser durch Werte (in Breite $b_\odot$) abweicht, die durch die periodischen Einflüsse der Planeten stammen. Um die Ekliptik als Bezugsebene zu erhalten, muss also die wahre Bewegung der Erde relativ zur Sonne um die periodischen Einflüsse in Breite durch die Planeten reduziert werden.

Die hier wiedergegebenen Entwicklungen der *Newcomb*schen Theorie gestatten nur den Ort, nicht die Geschwindigkeit der Sonne, also nicht den aktuellen Zustand der Sonnenbewegung zu berechnen. Dazu können aber nach den Formeln (28.30) durch Differentiation die Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
\dot{l}_\odot &= \dot{M}_3 + \dot{\Gamma}_\odot + \left(\Delta l_P\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_2\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_3\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_4\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_5\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_6\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_M\right)^{\cdot} + \left(\Delta l_{\mathrm{VSOP87}}\right)^{\cdot} \\
\dot{b}_\odot &= \left(\Delta b_2\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_3\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_4\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_5\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_6\right)^{\cdot} + \left(\Delta b_M\right)^{\cdot} \\
\dot{r}_\odot &= -0.0000007 \times \dot{T} + \left(\Delta r_2\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_3\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_4\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_5\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_6\right)^{\cdot} + \left(\Delta r_M\right)^{\cdot}
\end{aligned}
\tag{28.60}
$$

gebildet werden, in denen die entsprechenden Variationsausdrücke aus den Beziehungen (28.31) bis (28.59) erhalten werden können. Für die Variation des Zeitintervalls ist

$$
\dot{T} = \frac{dT}{dt} = \frac{1}{86400 \times 36525} \quad , \tag{28.61}
$$

die Variation der mittleren Anomalie der Erde nach Formel (28.33)

$$
\dot{M}_3 = 99^r.9973604 \times \dot{T} = 35999°.04974 \times \dot{T} \quad , \tag{28.62}
$$

die Variation der mittleren Länge des Sonnenperigäums[1] nach (28.34)

$$
\dot{\Gamma}_\odot = \left(6191''.2 + 2''.2 \times T\right)\dot{T} \tag{28.63}
$$

[1] Vgl. die leichte Abweichung dieses Wertes in den Werten (28.25)

usw.

Die Ergebnisse, die mit den bisher vorgestellten Ausdrücken erhalten werden, beziehen sich auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium zum gegebenen Zeitpunkt t (TDB). Für einen einheitlichen Vergleich mit anderen im Rahmen der sphärischen Astronomie erhaltenen Größen sowie zur Weiterverarbeitung werden die Ergebnisse in Bezug auf die Fundamentalepoche bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoktium benötigt. Dazu müssen die Ergebnisse mit Hilfe der Präzession auf die Fundamentalepoche und mit Hilfe einer geeigneten Drehung in das äquatoriale System transformiert werden. Dies wird in zwei Schritten durchgeführt: Drehung in das VSOP87-System und Drehung in das FK5-Referenzsystem.

Falls eine häufige Auswertung der gesamten *Newcomb*schen Sonnentheorie erforderlich ist, kann dies vorzugsweise mit Hilfe von *Tschebyscheff*-Approximationen (siehe in Anhang C (Band V)) durchgeführt werden. Es werden dazu in einem gewissen Zeitintervall, für die Sonne genügt erfahrungsgemäß etwa ein Monat (32 Tage), die *Tschebyscheff*-Koeffizienten c_k (siehe die Formeln (C.24) – (C.26)) berechnet, mit deren Hilfe zu jedem Zeitpunkt t (TDB) innerhalb des vorgegebenen Zeitintervalls der Funktionswert sowie die Ableitung mit den Koeffizienten c'_k aus Formel (C.35) und der Approximation in Formel (C.40) erhalten werden können. Damit kann die direkte Berechnung der Geschwindigkeitsanteile nach den Ausdrücken (28.60) vermieden werden.

28.1.4 Jahreslängen

Der Umlauf der wahren bzw. mittleren scheinbaren Sonne um die Erde wird als Jahr bezeichnet. Je nach Bezug sind unterschiedliche Jahresdefinitionen in Gebrauch.

28.1.4.1 Tropisches Jahr

Das tropische Jahr ist auf den Frühlingspunkt bezogen. Der Frühlingspunkt ist zugleich der aufsteigende Knoten der Sonnenbahn bezüglich des Erdäquators. Die Zeitdauer, welche die Sonne auf ihrer jährlichen Wanderung von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt benötigt, ist somit ein tropisches Jahr. Dieses ist zugleich die Zeitdauer, welche die in der Erdäquatorebene sich bewegende fiktive mittlere Sonne für einen Umlauf benötigt.

Wenn mit der wahren geometrischen Länge der Sonne $l_\odot$ etwa nach Abschnitt 28.1.3 auch deren Variation $dl_\odot / dt =: (l_\odot)^\bullet$ gegeben ist, kann die Länge des wahren tropischen Jahres berechnet werden aus

$$P_{\odot,t} = \int_0^{2\pi} \frac{dl_\odot}{(l_\odot)^\bullet} \quad . \tag{28.64}$$

Die Herleitung in Abschnitt 28.1.3 lässt vermuten, dass diese Jahreslänge nicht konstant ist, sondern säkularen und periodischen Variationen unterworfen ist.

Das mittlere tropische Jahr wird aus der säkularen mittleren Änderung der geometrischen mittleren Länge $L_\odot$ berechnet. Nach Tabelle 28-3 (auf Seite 6) hat die mittlere tropische Bewegung der Sonne (mit der Zeitdauer T in julianischen Jahrhunderten)

$$n_\odot = n_{\odot s} - \frac{3^\circ.5108 \times 10^{-3}}{T} T^2 + \cdots = 0.017202792 - 1.6776186 \times 10^{-9}\, T + \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] \tag{28.65}$$

Damit ergibt sich die Dauer des mittleren tropischen Jahres in mittleren Sonnentagen zu

$$\overline{P_{\odot,T}} = \frac{2\pi}{n_\odot} = 365.242189933\left[1 + 4.2187725\times10^{-15}\,T + \cdots\right]d \quad . \tag{28.66}$$

Der Zahlenwert zeigt eine allmähliche Vergrößerung des tropischen Jahres als Folge einer Vergrößerung des mittleren Abstandes der Erde zur Sonne[1] (vgl. den Wert für die große Bahnhalbachse $\overline{a_\odot}$ in Tabelle 28-3).

28.1.4.2 Sternjahr

Im astronomischen Sinn bedeutend ist der Begriff des *Sternjahres*[2]. Hierbei handelt es sich um die Anzahl der Rotationen der Erde im Verlauf eines tropischen Jahres. Der mittlere Sonnentag ist auf den Frühlingspunkt bezogen. Da die Erde sich in einem tropischen Jahr einmal um die Sonne bewegt kommt noch eine Rotation dazu. Das Sternjahr umfasst somit eine Rotation mehr. Die Dimension sind mittlere Sterntage[3]. Bei Vernachlässigung der säkularen Veränderung in Ausdruck (28.66) hat das Sternjahr den Betrag

$$\overline{P_{St}} = 1 + \overline{P_{\odot,t}} = 366.242189933 \quad . \tag{28.67}$$

Die Anzahl der Rotationen der Erde in Bezug auf den mittleren Frühlingspunkt während eines tropischen Jahres lässt die tropische Rotationsgeschwindigkeit der Erde berechnen aus

$$\dot{\Theta} = \frac{\overline{P_{st}}}{\overline{P_{\odot,t}}} = 1 + \frac{1}{\overline{P_{\odot,t}}} = 1.0027379092649 \quad \left[\text{Erdrotationen/d}\right]. \tag{28.68}$$

Da eine vollständige Rotation den Winkel 360° umfasst, kann man auch setzen[4]

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= 360°\left(1 + \frac{1}{\overline{P_{\odot,t}}}\right) = 360°.9856473354 \quad \left[1/\text{d}\right] = 4°.17807461937\times10^{-3}\left[1/s\right] = \\ &= 7.29211585468\times10^{-5}\left[1/s\right] \quad .\end{aligned} \tag{28.69}$$

Da die mittlere tropische Bewegung der Sonne nach Beziehung (28.66) auch in der Form $n_\odot = 360° / \overline{P_{\odot.t}}$ geschrieben werden kann, gilt auch

$$\dot{\Theta} = 1 + n_\odot\left[\text{Erdrotationen/Zeit}\right] = \frac{360°}{86400\,\text{s}} + n_\odot\left[\text{Grad/s}\right] \quad . \tag{28.70}$$

Diese Beziehung ist bei Untersuchungen der Sonnen-sysnodischen Bewegung von Erdsatelliten von zentraler Bedeutung.

---

[1] Achtung: Diese Aussage ist in der Literatur umstritten. Etwa nach SEIDELMANN P. K. et al. [1992], p. 576 vergrößert sich die Länge im julianischen Jahrhundert um 0.00000615359 d.

[2] mehr dazu in Abschnitt 9.1.2 (Band II)

[3] Achtung: im englischen Sprachgebrauch wird der Begriff „sidereal“ in leicht zu verwechselnden unterschiedlichen Bezügen verwendet: „sidereal time“ ist die Sternzeit, welche die Rotation der Erde bei Bezug auf den Frühlingspunkt beschreibt. „sidereal year, sidereal month, sidereal motion“ stellt dagegen die Bewegung eines Objektes bei Bezug auf den Fixsternhimmel dar. Der Unterschied zwischen den Bezügen muss sorgfältig beachtet werden.

[4] Weitere Zahlenwerte in unterschiedlichen Dimensionen in Anhang E2, Tabelle 7 (Band V)

28.1.4.3 Siderisches Jahr

Da sich der Frühlingspunkt auf Grund der Präzession längs der Ekliptik in westlicher Richtung verschiebt, also der Sonnenbewegung entgegenkommt, dauert ein siderischer auf den Fixsternhimmel bezogener Umlauf länger als ein tropischer. Entsprechend ist die siderische Bewegung der Sonne langsamer als die tropische. Mit den Beziehungen in Kapitel 25 lautet die siderische Bewegung der Sonne mit der (allgemeinen) Präzession $p_a = p_L + \cdots$

$$l_{\odot,sid} = (l_\odot)^{\bullet} - p_a \quad . \tag{28.71}$$

Die Präzessionskonstante pro julianischem Jahrhundert beträgt[1]

$$p_L = 5029''.0966 + 2''.22226T - 0''.000042T^2 + \cdots = 6.67531828 \times 10^{-7} / d + \cdots \quad . \tag{28.72}$$

Die mittlere siderische Bewegung der Sonne beträgt dann mit Formel (28.65)

$$\overline{n_{\odot,sid}} = n_\odot - p_L = 0.0172021245 / d + \cdots \ . \tag{28.73}$$

Das mittlere siderische Jahr beträgt dann

$$\overline{P_{\odot,sid}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{\odot,sid}}} = 365.256356492\, d + \cdots \quad . \tag{28.74}$$

28.1.4.4 Anomalistisches Jahr

Das anomalistische Jahr ist die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der (scheinbaren) Sonne durch das Perigäum. Der Bezug auf das Perigäum wird durch die mittlere Anomalie $M_\odot$ erfasst. Um das mittlere anomalistische Jahr zu berechnen, wird nach Tabelle 28-3 (auf Seite 5) von der säkularen Variation der mittleren mittleren Anomalie ausgegangen

$$\overline{n_{\odot,anom}} = (M_\odot)^{\bullet}_s = 35999°.05034 / T + \cdots = 0.017201970 / d \ + \cdots \ . \tag{28.75}$$

Das mittlere anomalistische Jahr hat somit den Betrag

$$\overline{P_{\odot,anom}} = \frac{2\pi}{(M_\odot)^{\bullet}_s} = 365.259635344 + \cdots \quad . \tag{28.76}$$

Das anomalistische Jahr ist länger als das mittlere tropische Jahr. Grund dafür ist, dass das Perigäum sich, wie aus der Formel für $\overline{M_\odot}$ in Tabelle 28-3 (auf Seite 6) abzulesen ist, in positiver Richtung längs der Sonnenbahn bewegt, also der Sonne vorausläuft. Dieser Effekt wird auf planetare Einflüsse („Störungen“) zurückgeführt[2].

28.1.4.5 Finsternis Jahr

In der Berechnung der Sonnen und Mondfinsternisse spielt das Finsternisjahr[3] eine besondere Rolle: Es ist der Zeitraum, wann die Sonne zweimal nacheinander den Bahnknoten des Mondes durchläuft. Nur wenn sich die Sonne in der Nähe eines Mondknotens befindet, kann eine Finsternis stattfinden.

---

[1] P. K. SEIDELMANN et al. [1992], p.104

[2] siehe etwa GREEN, R. M. [1985], p.241

[3] Englisch: „Eclipse year“

Pro Tag bewegt sich die Sonne[1] im Mittel um $n_{\odot} = 0°.985647240/d + \cdots$. Der Mondknoten[2] bewegt sich pro Tag um $\dot{\Omega}_{☾s} = 0°.052953765/d + \cdots$. Die relative Bewegung zwischen Sonne und Mondknoten beträgt dann, da sich beide in derselben Richtung bewegen,

$$n_{\odot/☾_{\Omega}} := n_{\odot} + \dot{\Omega}_{☾\mathrm{s}} = 1°.038600965/d + \cdots \quad . \tag{28.77}$$

Das Finsternisjahr hat dauert daher

$$P_{eclipse} = \frac{2\pi}{n_{\odot/☾_{\Omega}}} = 364.620128551\,d + \cdots \quad . \tag{28.78}$$

28.1.4.6 Das Besselsche Jahr

Aus historischen Gründen sei auf das *Bessel*sche Jahr (auch genannt „annus fictus“, bisweilen auch „astronomisches Jahr“) hingewiesen, das in der Astronomie bis zum Ende des 20. Jahrhunderts als grundlegender Bezug verwendet wurde. Als Beginn des *Bessel*schen Jahres wurde der Zeitpunkt gewählt, wenn die fiktive mittlere Sonne[3] die Rektaszension

$$\alpha_{\bar{\odot}B} = 280° \mathrel{\hat{=}} 18^h\,40^m\,0^s.0 \tag{28.79}$$

durchläuft. Dieser exakt definierte Zeitpunkt ist von allen Unregelmäßigkeiten eines gewählten Zeitmaßes unabhängig. Da dieser Zeitpunkt stets in der Nähe des Beginns des bürgerlichen Jahres liegt, wurde er durch die Schreibweise[4] B1975.0, B1976.0, usw. bezeichnet.[5]

Die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen der Sonne durch die Rektaszension $\alpha_{\bar{\odot}B}$ wird als *Bessel*sches Jahr bezeichnet. Der Unterschied zu einem tropischen Jahr ist quantitativ sehr klein.

BEISPIEL: Der Beginn des *Bessel*schen Jahres B1975.0 hat das Datum 1974-12-32/23:20:37.9.

Anmerkung: weitere Definitionen eines Jahres:

- Weitere Begriffe spielen in der sphärischen Astronomie und damit auch der Satellitenbahnanalyse keine Rolle (siehe hierzu in Band I: ägyptisches Jahr, bürgerliches Jahr, julianisches Jahr, Mondjahr (12 Monate zu 30 Tagen), Schaltjahr, Kalenderjahr, usw.).◀

28.2 Die näherungsweise Sonnenbewegung bezogen auf den Erdäquator

Die Kenntnis der Bewegung der Sonne ist essentiell für das Leben auf der Erde, insbesondere für die Zeiteinteilung (Abschnitt 28.3) sowie bei Untersuchungen der Sonnen-synodischen Bewegung von Erdsatelliten (Abschnitt 28.5). Die Bezugsebene ist in diesen Fällen die Erdäquatorebene. Wie für Erdsatelliten, deren Bezug zur Äquator durch den aufsteigenden Knoten festgelegt wird, ist auch für

---

[1] Zahlenwert aus Tabelle 9-1 in Abschnitt 9.1.1.1 (Band II)

[2] Zahlenwert aus Formel (29.19) in Abschnitt 29.1.3.2

[3] siehe in Abschnitt 28.2.1 auf Seite 22

[4] wenn keine Verwechslungen zu befürchten waren, wurde meist der Buchstabe „B“ zur Kennzeichnung der *Bessel*schen Epoche weggelassen. Man muss dies berücksichtigen, wenn heutige auf die julianische Epoche J2000.0 bezogene Zahlenwerte mit früheren Zahlenwerten verglichen werden sollen.

[5] Weiteres zur *Bessel*schen Epoche in Anhang F.2 (Band V)

die scheinbare Bewegung der Sonne deren aufsteigender Knoten der Bezugspunkt, nämlich der Frühlingspunkt. Die Projektion der Sonnenbewegung auf den Äquator liefert das Kriterium für eine Relation zur Satellitenbewegung wie auch der Bezug der Satellitenbewegung zum Äquator ein fundamentaler Bezug für eine Bahnanalyse ist. Allgemeiner Bezug ist eine fiktive gleichförmig im Äquator um die Erde umlaufende Pseudosonne, die im Folgenden beschrieben wird. Anschließend wird der Bezug der wahren Sonne zu dieser fiktiven unter verschiedenen Genauigkeitsaspekten untersucht.

28.2.1 Die fiktive mittlere Sonne

Die fiktive mittlere Sonne ist ein gedachter Punkt, der sich längs des Äquators völlig gleichförmig mit der mittleren tropischen Geschwindigkeit $n_{\odot}$ der mittleren Sonne bewegt (siehe in Tabelle 28-3 auf Seite 6). Die fiktive mittlere Sonne vollendet einen Umlauf um die Erde in genau einem mittleren tropischen Jahr wie die mittlere Sonne auf ihrer Bahn längs der Ekliptik.

Die fiktive mittlere Sonne hat die Rektaszension

$$\alpha_{\bar{\odot}} = \alpha_{\bar{\odot},0} + n_{\odot}\left(t - t_0\right) \quad , \tag{28.80}$$

wenn $\alpha_{\bar{\odot},0}$ ein bekannter Anfangswert zu einer Epoche t_0 ist. Die Berechnung kann etwa nach Tabelle 28-3 (auf Seite 6) mit Hilfe der geometrischen mittleren Länge erfolgen:

$$\alpha_{\bar{\odot}} = L_{\odot} = \overline{\Gamma_{\odot}} + \overline{M_{\odot}} \quad . \tag{28.81}$$

Bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0 ist, wenn T die Zeit in julianischen Jahrhunderten[1] ist:

$$\begin{aligned} \alpha_{\bar{\odot}} &= 18^h 41^m 51^s.856656 + 8640184^s.75135\,T - 0^s.014706\,T^2 = \\ &= 280°.4660694 + 36000°.769797222\,T - 3°.5108333 \times 10^{-3}\,T^2 = \\ &= 4.895056351 + 628.331966214\,T - 0.000061276\,T^2 \quad . \end{aligned} \tag{28.82}$$

BEISPIEL 1: Am 21. März 1998, um $5^h 31^m 0^s.0$ U.T. lautet bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0 die Zeitdifferenz T = -0.037817115 julianische Jahrhunderte. Die Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne beträgt $\alpha_{\bar{\odot}} = 359°.015069$.◀

BEISPIEL 2: Frühlingsanfang findet definitionsgemäß statt, wenn die Sonne den Frühlingspunkt (aufsteigend) durchläuft. Ihre Rektaszension hat dann den Wert $\alpha_{\odot} = 0°.0$. Im Jahr 1967 findet dieses Ereignis nach den Zahlenangaben im astronomischen Jahrbuch zu dem Zeitpunkt 1967-03-21/07:37:42.89 U.T. statt. ◀

28.2.2 Übersicht über die Bewegung der Sonne in der Ekliptik

Die geozentrischen ekliptikalen Koordinaten Länge $l_{\odot}$, Breite $b_{\odot}$ und Radius $r_{\odot}$ seien nach einer der Methoden in Abschnitt 28.1.1 oder 28.1.3 oder aus der JPL-Ephemeride bekannt. Mit der Nutation

[1] Siehe in Formel (28.7)

in Länge[1] $\Delta\psi$ und der jährlichen Aberration $-\kappa / r_\odot$ ($\kappa = 20''.49552$ ist die Aberrationskonstante[2]) haben ekliptikale Länge und Breite die Werte

$$l_{\odot,a} = l_\odot + \Delta\psi - \frac{K}{r_\odot} \quad , \quad b_{\odot,a} = b_\odot \quad . \tag{28.83}$$

Um einen Überblick über das Bewegungsverhalten der ekliptikalen Sonne zu bekommen, wird die Bewegung auf die mittlere durch die mittlere Anomalie $M_\odot$ geprägte Bewegung bezogen. Dazu wird die wahre Anomalie der Sonne benötigt, die auf das Perigäum der Sonne mit dem Argument des Perigäums $\Gamma_\odot$ bezogen ist. Die wahre Anomalie kann berechnet werden aus

$$\upsilon_\odot = l_{\odot,a} - \Gamma_\odot = M_\odot + 2\,e_\odot \sin M_\odot + \frac{5}{4} e_\odot^2 \sin 2M_\odot + O\left(e_\odot^3\right) \quad . \tag{28.84}$$

Als Mittelpunktsgleichung[3] wird der Ausdruck

$$M_g := \upsilon_\odot - M_\odot \tag{28.85}$$

bezeichnet. Im Fall der Sonnenbewegung mit der Exzentrizität der Sonnenbahn[4] $e_\odot = 0.0167092 + \cdots$ folgt der Näherungswert

$$M_g = \upsilon_\odot - M_\odot \approx 114'.8840 \sin M_\odot + \cdots \quad . \tag{28.86}$$

Die wahre Sonne kann also maximal um 2 Grad der mittleren Sonne in der Ekliptik vorauseilen bzw. hinter dieser zurückbleiben.

Anmerkung:

Vergleichswerte[5]: *Ptolemäus:* $\left(\upsilon_\odot - M_\odot\right)_{\max} = 143'$, *Kopernikus:* $\left(\upsilon_\odot - M_\odot\right)_{\max} = 111'$.◀

Einen Überblick über die Bewegung der wahren Sonne vermittelt die scheinbare Winkelgeschwindigkeit der wahren Sonne. Die Entwicklung (28.84) liefert

$$\frac{dl_{\odot,a}}{dt} \approx \frac{dl_\odot}{dt} = n_\odot \left(1 + 2\,e_\odot \cos M_\odot + \frac{5}{2} e_\odot^2 \cos 2M_\odot + \cdots\right) \quad . \tag{28.87}$$

Mit dem Zahlenwert der mittleren tropischen Sonnenbewegung[6] und der Exzentrizität der Sonnenbahn wird näherungsweise

$$\frac{dl_\odot}{dt} = 3548''.330065 + 118''.509880 \cos M_\odot + \cdots \quad . \tag{28.88}$$

---

[1] Abschnitt 9.4.1 (Band II)

[2] Abschnitt 9.8.4 (Band II)

[3] siehe im Fall der mittleren Bewegung in Formel (28.13) auf Seite 7, sowie allgemein Formel (10.87) in Abschnitt 10.2.3 (Band III)

[4] die genauen Zahlenwerte in Anhang E.6 (Band V)

[5] aus A. DANJON [1980], p. 63

[6] etwa nach Tabelle 9-1 (Abschnitt 9.1.1.1, Band II)

Tabelle 28-4 gibt einen Überblick über den in einem (mittleren Sonnen) Tag zurückgelegten Bahnbogen der Sonne längs der Ekliptik. Man sieht: Im Nordwinter hat die Sonne es am eiligsten, was dadurch begründet ist, dass sie sich dann in der Nähe des Perigäums befindet.

	Perigäum		Apogäum	
$M_\odot$	0°	90°	180°	270°
Datum	2. Januar	3. April	3. Juli	2. Oktober
$\upsilon_\odot$	0°	91°55′	180°	268°5′
$dl_\odot / dt$	61°7″	59°8″	57°9″	59°8″

Tabelle 28-4: der tägliche Bahnbogen der Sonne längs der Ekliptik

28.2.3 Die Reduktion der wahren Sonne auf den Äquator

Den scheinbaren ekliptikalen Koordinaten $\left(l_{\odot a}, b_{\odot \mathrm{a}}\right)$ sind die äquatorialen Winkelkoordinaten $\left(\alpha_{\odot a}, \delta_{\odot a}\right)$ nach Drehung um die wahre Schiefe der Ekliptik ε mit Transformation (8.72) zugeordnet[1]

$$\begin{aligned} \cos\alpha_{\odot a}\cos\delta_{\odot a} &= \cos l_{\odot a}\cos b_{\odot a} \\ \sin\alpha_{\odot a}\cos\delta_{\odot a} &= \sin l_{\odot a}\cos b_{\odot a}\cos\varepsilon - \sin b_{\odot a}\sin\varepsilon \\ \sin\delta_{\odot a} &= \sin l_{\odot a}\cos b_{\odot a}\sin\varepsilon + \sin b_{\odot a}\cos\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{28.89}$$

Da die ekliptikale Breite der Sonne im Bogensekundenbereich ist, kann diese Transformation durch folgenden Ausdruck ersetzt werden, wenn die Breite der Sonne in Bogensekunden gegeben ist:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_{\odot a}\cos\delta_{\odot a} &= \cos l_{\odot a} \\ \sin\alpha_{\odot a}\cos\delta_{\odot a} &= \sin l_{\odot a}\cos b_{\odot a}\cos\varepsilon - 19.29\, b''_\odot 10^{-7} \\ \sin\delta_{\odot a} &= \sin l_{\odot a}\cos b_{\odot a}\sin\varepsilon + 44.48\, b''_\odot 10^{-7} \quad . \end{aligned} \tag{28.90}$$

Um einen anschaulichen Eindruck von der Bewegung der Sonne und ihrer Deutung im alltäglichen Leben zu bekommen, wird die Bewegung der Sonne mit Hilfe der Reduktion auf den Äquator auf den Erdäquator bezogen. Dazu wird die ekliptikale Breite der Sonne vernachlässigt und statt der vorstehenden Transformation der Ausdruck

$$\tan\alpha_\odot = \cos\varepsilon \ \tan l_\odot \tag{28.91}$$

verwendet. Dieser wird wie in Abschnitt 24.2.5 nach dem Argument der Breite der Sonne in ihrer Bahn entwickelt. Da das Argument der Breite im Fall der Sonne der ekliptikalen Länge der Sonne gleich ist, ergibt der Ausdruck (24.45)

$$\alpha_\odot = l_\odot - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2l_\odot + \frac{1}{2}\tan^4\frac{\varepsilon}{2}\sin 4l_\odot - \frac{1}{3}\tan^6\frac{\varepsilon}{2}\sin 6l_\odot + \cdots \quad . \tag{28.92}$$

[1] Abschnitt 8.2.2 (Band II)

Setzt man hier um einen größenordnungsmäßigen Näherungsausdruck zu erhalten den Wert der mittleren Schiefe der Ekliptik ein, wird

$$\alpha_\odot \approx l_\odot - 147'.9114 \sin 2l_\odot + 3'.2 \sin 4l_\odot - 5''.0 \sin 6l_\odot + \cdots \quad . \tag{28.93}$$

Als Reduktion auf den Äquator wird der Ausdruck bezeichnet

$$R_{red} := \alpha_\odot - l_\odot \quad . \tag{28.94}$$

28.2.4 Die Bewegung der wahren Sonne bezogen auf den Äquator

Die Kombination aus Mittelpunktsgleichung und Reduktion auf den Äquator führt auf den direkten (allerdings näherungsweisen) Bezug der Rektaszension $\alpha_\odot$ der Sonne und über die mittlere Anomalie $M_\odot = M_{\odot 0} + n_\odot (t - t_0) + \cdots$ zur Zeit *t*. Dazu wird die ekliptikale Länge mit Hilfe der Mittelpunktsgleichung (28.84) in die Reduktion auf den Äquator (28.92) eingesetzt.

Um einen übersichtlichen Näherungsausdruck zu erhalten werden in der Entwicklung (28.93) die Ausdrücke $\sin 2l_\odot$, $\sin 4l_\odot$ nach Potenzen der Exzentrizität $e_\odot$ entwickelt, wobei alle Glieder mit Potenzen $e_\odot^2$ und höher vernachlässigt werden. Es werde $\Gamma_\odot \approx \overline{\Gamma_\odot}$ und $M_\odot \approx \overline{M_\odot}$ angenommen. Dann ergibt sich etwa

$$\begin{aligned}
\sin 2l_\odot &= \sin\left[2(\Gamma_\odot + M_\odot) + 4e_\odot \sin M_\odot + \cdots\right] = \\
&= \sin\left[2(\Gamma_\odot + M_\odot)\right]\cos\left[4e_\odot \sin M_\odot\right] + \cos\left[2(\Gamma_\odot + M_\odot)\right]\sin\left[4e_\odot \sin M_\odot\right] + \cdots = \\
&= \sin\left[2(\Gamma_\odot + M_\odot)\right] + 4e_\odot \cos\left[2(\Gamma_\odot + M_\odot)\right]\sin M_\odot + \cdots = \\
&= \sin\left[2(\Gamma_\odot + M_\odot)\right] + \\
&+ 2e_\odot 2\cos\left[\frac{1}{2}(2\Gamma_\odot + 3M_\odot + 2\Gamma_\odot + M_\odot)\right]\sin\left[\frac{1}{2}(2\Gamma_\odot + 3M_\odot - 2\Gamma_\odot - M_\odot)\right] + \cdots = \\
&= \sin\left[2(\Gamma_\odot + M_\odot)\right] + 2e_\odot \sin(2\Gamma_\odot + 3M_\odot) - 2e_\odot \sin(2\Gamma_\odot + M_\odot) + \cdots \quad .
\end{aligned} \tag{28.95}$$

Damit ist es nun möglich, die Rektaszension der Sonne näherungsweise nach der mittleren Anomalie der Sonne zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
\alpha_\odot = \Gamma_\odot + M_\odot + 2e_\odot \sin M_\odot - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(2\Gamma_\odot + 2M_\odot) - \\
- 2e_\odot \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(2\Gamma_\odot + 3M_\odot) + 2e_\odot \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin(2\Gamma_\odot + M_\odot) + \cdots \quad .
\end{aligned} \tag{28.96}$$

Dieser Ausdruck erlaubt die Interpretation, dass die Unregelmäßigkeiten in der Bewegung der Sonne bei Bezug auf den Äquator in erster Näherung Amplituden von 4 Monaten, einem halben Jahr und einem ganzen Jahr haben. Werden noch die letzten beiden Glieder wegen ihrer sehr kleinen Koeffizienten vernachlässigt, bleibt der Näherungsausdruck

$$\alpha_\odot = \Gamma_\odot + M_\odot + 114'.3569 \sin M_\odot - 147'.9114 \sin 2(\Gamma_\odot + M_\odot) + \cdots \quad . \tag{28.97}$$

$M_\odot$	$82°16'21''.5$	$165°21'04''.248$	$251°28'18''.552$	$347°54'44''.820$
Tage nach Perigäum	83.47066 d	167.75896 d	255.13366 d	352.97863 d
Datum	26. März	18. Juni	14. Sep.	20. Dez.
$\alpha_\odot$	$0^h\,27^m\,6^s.62$	$5^h\,56^m\,00^s.49$	$11^h\,34^m\,04^s.145$	$18^h\,03^m\,18^s.426$
Tage nach Frühlingspunkt	6.87628 d	90.29806 d	176.04397 d	274.77046 d
$d\alpha_\odot / dt$	$217^s.6343/d$	$249^s.27371$/d	$214^s.04369$/d	$264^s.58915$
$\frac{d\alpha_\odot}{dt} - n_\odot$	$-18^s.9211/d$	$12^s.71834$/d	$-22^s.51168$/d	$28^s.03379$
wahre Sonne	langsam (rel. Min.)	schnell (rel. Max.)	am langsamsten (abs. Min.)	am schnellsten (abs. Max.)
Wahrer Sonnentag	$23^h\,59^m\,41^s.08$	$24^h\,0^m\,12^s.72$	$23^h\,59^m\,37^s.49$	$24^h\,0^m\,28^s.03$

Tabelle 28-5: Die Extremalwerte des täglichen Bahnbogens der Sonne längs des Äquators[1] und die extremale Dauer des Rotationssonnentages

Einen Überblick über das Bewegungsverhalten der in den Äquator projizierten wahren Sonne vermittelt ihre scheinbare Winkelgeschwindigkeit längs des Äquators:

$$\frac{d\alpha_\odot}{dt} = n_\odot\left(1 + 2e_\odot \cos M_\odot + \frac{5}{2}e_\odot^2 \cos 2M_\odot - 2\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\cos 2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right) + \cdots\right) \quad . \qquad (28.98)$$

Um die Extrema dieser Bewegung zu finden, wird der Differentialquotient des vorstehenden Bewegungsausdrucks gleich Null gesetzt:

$$fct\left(M_\odot\right) \equiv -e_\odot \sin M_\odot + 2\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin 2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right) = 0 \quad . \qquad (28.99)$$

Im Fall der Sonne gelten folgende Zahlenwerte, wobei ($e_\odot$, ε , $\Gamma_\odot$) als Konstante angenähert werden:

$$fct\left(M_\odot\right) \equiv -57'.2 \sin M_\odot + 295'.8 \sin 2\left(\Gamma_\odot + M_\odot\right) = 0 \quad . \qquad (28.100)$$

28.3 Die Sonnenzeit

Das tägliche Leben wird von der Bewegung der Sonne bestimmt. Entsprechend hängt von dieser auch die Sonnenzeit ab, die das tägliche Leben einteilt. Die wahre Sonnenzeit wird durch die Sonnenuhr angezeigt. Sie hängt von der täglichen Bewegung der scheinbaren Sonne ab[2] und

[1] die Zahlenwerte können sich von Jahr zu Jahr etwas verändern. Aktuelle Zahlenwerte hier für 2018

[2] der Begriff leitet sich von der Beobachtung ab, nach der die Sonne sich „scheinbar“ um die Erde bewegt. In diesem Sinne ist stets der Begriff „scheinbare Sonne“ zu verstehen: mathematisch gesehen kann die Sonne als Erdsatellit aufgefasst werden. Der Begriff „scheinbar“ wird in der astronomischen Zeitbestimmung seit 1965 nicht mehr benutzt

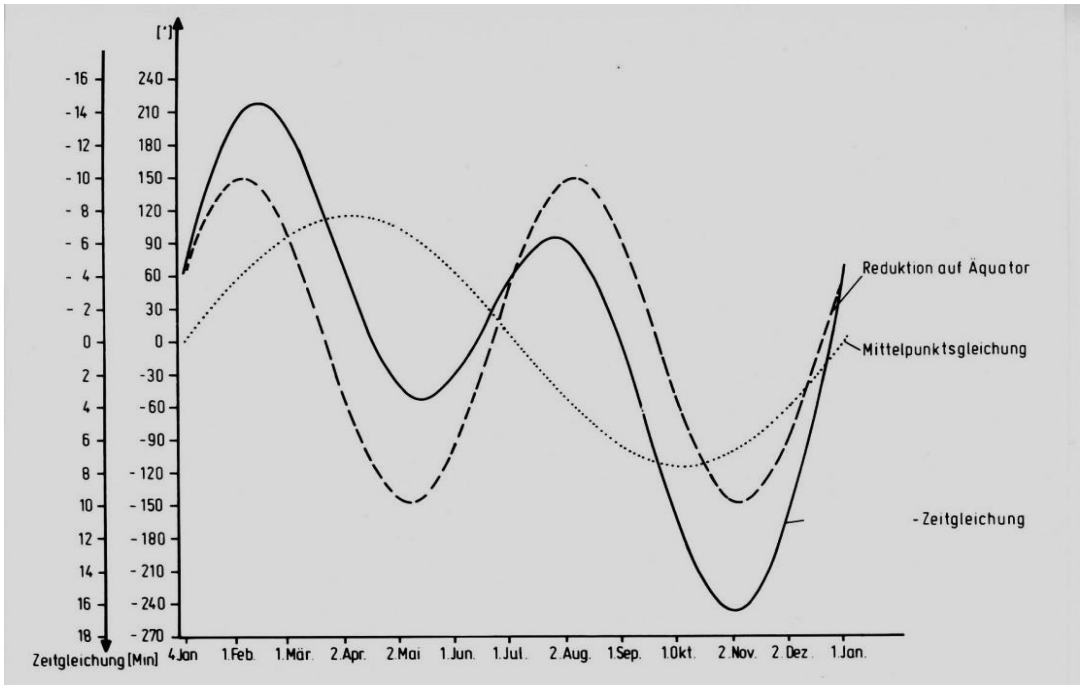


Bild 28-1: Die überlagerte jährliche Variation der Rektaszension der wahren Sonne bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\odot} - \alpha_{\bar{\odot}}$ im Verlauf eines Jahres. Der negative Wert dieser Differenz entspricht zugleich dem Unterschied aus wahrer und mittlerer Sonnenzeit, somit der Zeitgleichung.

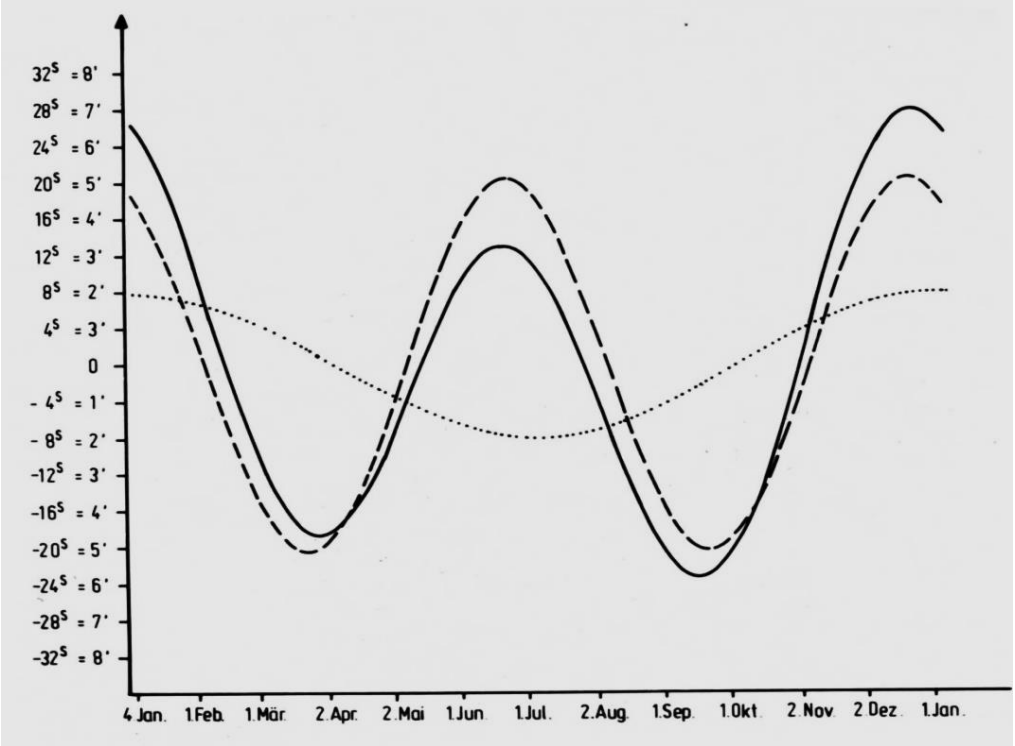


Bild 28-2: Die überlagerte jährliche Variation der wahren Sonnenbewegung gegenüber der mittlere Sonnenbewegung $\dot{\alpha}_{\odot} - n_{\odot}$, punktiert: Mittelpunktsgleichung, gestrichelt: Reduktion auf den Äquator, durchgezogene Linie: Gesamtvariation

(siehe etwa E. W. WOOLARD and G. M. CLEMENCE [1966], p. 360), bringt jedoch im Zusammenhang mit dem täglichen Leben und vor allem auch mit einer Satellitenbahnanalyse vorstellungsmäßig Vorteile

wird deshalb auf die Rotation der Erde bezogen. Man spricht daher von *Rotationssonnenzeit*. Da die - scheinbare - Sonne sich auf der Ekliptik bewegt, also „schräg“ zur täglichen Rotation der Erde und im Jahresverlauf ungleichmäßig lange Tage verursacht, wurde zur Einteilung einer gleichförmigen Zeit ein künstlicher Körper als Bezugspunkt zur Definition einer Sonnenzeit eingeführt. Die Beschreibung der Sonnenbewegung bezieht sich auf den Frühlingspunkt. Je nach Anforderung muss der Unterschied zwischen wahrem und mittlerem Frühlingspunkt beachtet werden. Der Unterschied wird durch die Nutation in Länge $\Delta\psi$ geprägt[1].

28.3.1 Wahre Sonnenzeit

Die Sonnenzeit an einem bestimmten Ort wird auf den Ortsmeridian bezogen. Dazu wird die wahre scheinbare Sonne, die sich auf der (wahren) Ekliptik mit der ekliptikalen Länge $l_\odot$ bewegt, auf den Äquator projiziert. Nach Bild 28-3 ist

$$\begin{aligned} \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot &= \cos l_\odot \\ \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot &= \sin l_\odot \cos\varepsilon \\ \sin\delta_\odot &= \sin l_\odot \sin\varepsilon \ . \end{aligned} \tag{28.101}$$

Sei Θ_G die Sternzeit des Greenwich Meridians und habe der Ortsmeridian die östliche geographische Länge λ, wird

$$\Theta = \Theta_G + \lambda \ . \tag{28.102}$$

Die Sonnenzeit wird im bürgerlichen Leben auf die untere Kulmination der Sonne bezogen. Die wahre Sonnenzeit beträgt daher

$$T_w = \vartheta_w + 12^h = \Theta - \alpha_\odot + 12^h = \Theta_G + \lambda - \alpha_\odot + 12^h \quad . \tag{28.103}$$

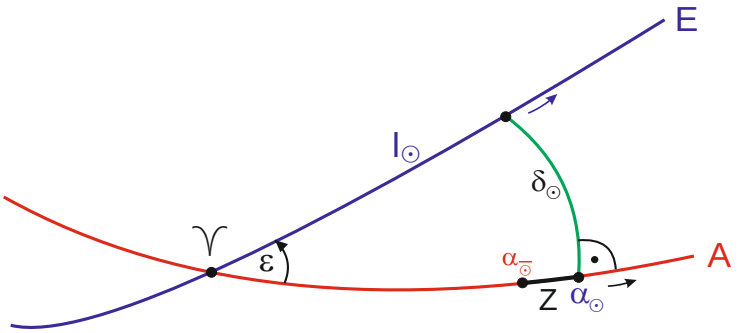


Bild 28-3: Die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$ auf dem Erdäquator A und die Rektaszension $\alpha_\odot$ der wahren scheinbaren Sonne, die sich mit der ekliptikalen Länge $l_\odot$ längs der Ekliptik bewegt

28.3.2 Mittlere lokale Sonnenzeit

Die mittlere Sonnenzeit wird auf die mittlere fiktive Sonne mit der Rektaszension $\alpha_{\bar{\odot}}$ aus Entwicklung (28.82) bezogen. Sei ϑ_m der Stundenwinkel der mittleren fiktiven Sonne, beträgt die mittlere lokale Sonnenzeit („Ortssonnenzeit“)

$$T_m = \vartheta_m + 12^h = \Theta - \alpha_{\bar{\odot}} + 12^h = \Theta_G + \lambda - \alpha_{\bar{\odot}} + 12^h \quad . \tag{28.104}$$

[1] Abschnitt 9.4.1 (Band II).

Die mittlere lokale Sonnenzeit des Greenwich Meridians wird als Weltzeit („Universal Time, U.T.“) oder etwas ungenau allgemein als Sonnenzeit bezeichnet[1].

28.3.3 Die Zeitgleichung

Als Zeitgleichung wird in der klassischen Himmelsmechanik der Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Sonne bezeichnet. Die wahre Sonnenzeit an einem bestimmten Ort wird dort durch die Sonnenuhr angezeigt. Aus den Beziehungen (28.103) und (28.104) folgt

$$Z = T_W - T_M = \vartheta_W - \vartheta_M = -\alpha_\odot + \alpha_{\overline{\odot}} \quad . \tag{28.105}$$

Die Zeitgleichung ist gleich dem negativen Ausdruck (28.96). Werden hier die periodischen Anteile der mittleren Anomalie $M_\odot$ der Sonne und des Argumentes des Perigäums $\Gamma_\odot$ vernachlässigt, kann mit Beziehung (28.81) $\alpha_{\overline{\odot}} = \overline{M_\odot} + \overline{\Gamma_\odot} \approx M_\odot + \Gamma_\odot$ die Zeitgleichung näherungsweise berechnet werden aus

$$Z = -\Big[2e_\odot \sin M_\odot - \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + 2M_\odot\right) - \\ -2e_\odot \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + 3M_\odot\right) + 2e_\odot \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(2\Gamma_\odot + M_\odot\right) + \cdots \Big] \quad . \tag{28.106}$$

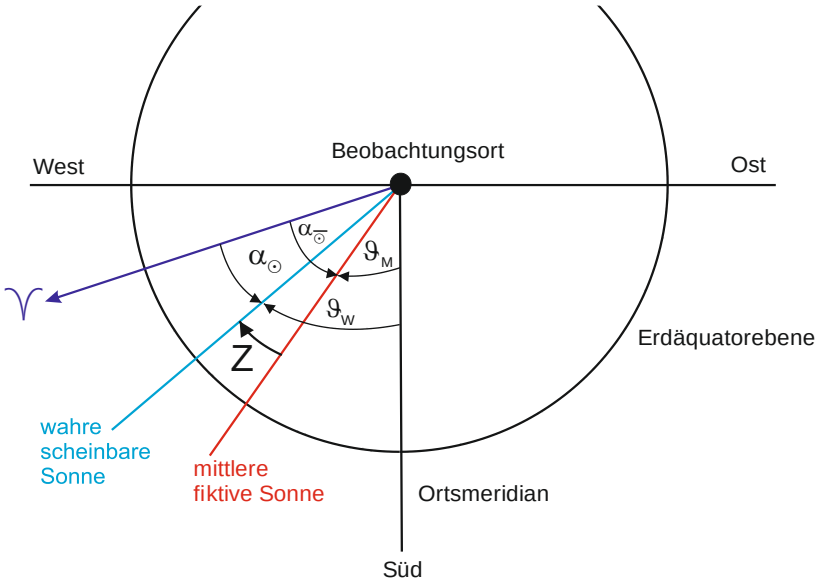


Bild 28-4: Der Unterschied von wahrer scheinbarer und mittlerer fiktiver Sonne bezogen auf die Erdäquatorebene und die Zeitgleichung

Der Verlauf der Zeitgleichung kann aus Bild 28-1 (auf Seite 27) abgelesen werden, wobei wegen Beziehung (28.105) die Funktionswerte für Z nach unten aufgetragen sind. Die wahre Sonnenuhr „geht nach“ vor dem 18. April, zwischen dem 15. Juni und 1. September und nach dem 27. Dezember[2]. Sie geht „am meisten nach“ am 15. Februar um 14.5 Minuten (mittlerer Sonnenzeit), „am meisten vor“ am 2. November um 16.5 Minuten. Tabelle 28-6 enthält die entsprechenden Näherungswerte.

---

[1] Vertiefendes zu den Zeitdefinitionen in Abschnitt 9.1 (Band II)

[2] Diese Daten können sich von Jahr zu Jahr etwas verändern.

Der Verlauf der Zeitgleichung über ein tropisches Jahr kann somit ebenfalls aus Bild 28-1 auf Seite 27 abgelesen werden.

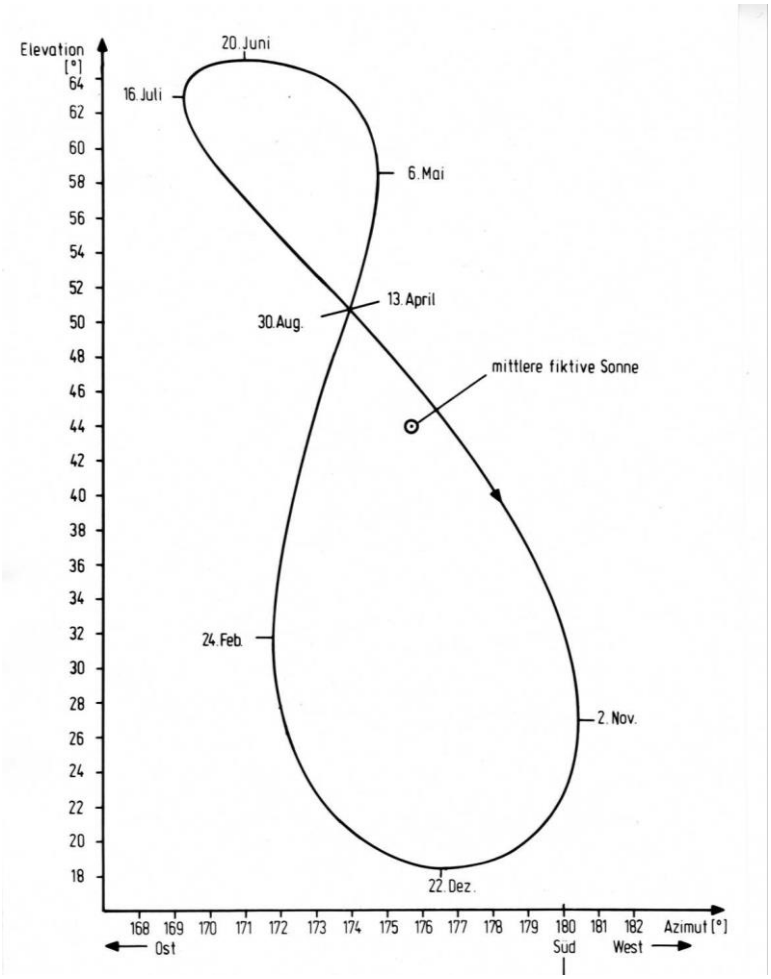


Bild 28-5: Die Analemma der Sonne im Verlauf eines tropischen Jahres: die wahre Sonnenzeit jeweils um 12 Uhr MEZ gesehen von der DLR Bodenstation in Weilheim-Lichtenau

Datum	15. Feb.	16. Mai	28. Juli	2. Nov
$M_\odot$	41°.4	130°.1	202°.1	269°.7
$\alpha_\odot$	$21^h.84$	$3^h.45$	$8^h.41$	$14^h.34$
$\alpha_\odot - \alpha_{\overline{\odot}}$	$14^m.84$	$-3^m.8$	$6^m.4$	$-16^m.5$
Z	$-14^m.84$	$3^m.8$	$-6^m.4$	$16^m.5$
wahre Sonne	geht vor (abs. Max)	geht nach (rel. Min)	geht vor (rel. Max)	geht nach (abs. Min)
Wahre Sonnenzeit	geht nach (abs. Min)	geht vor (rel. Max)	geht nach (rel. Min)	geht vor (abs. Max)

Tabelle 28-6: Die Extrema im Jahresverlauf und die Auswirkung auf die wahre Sonnenzeit

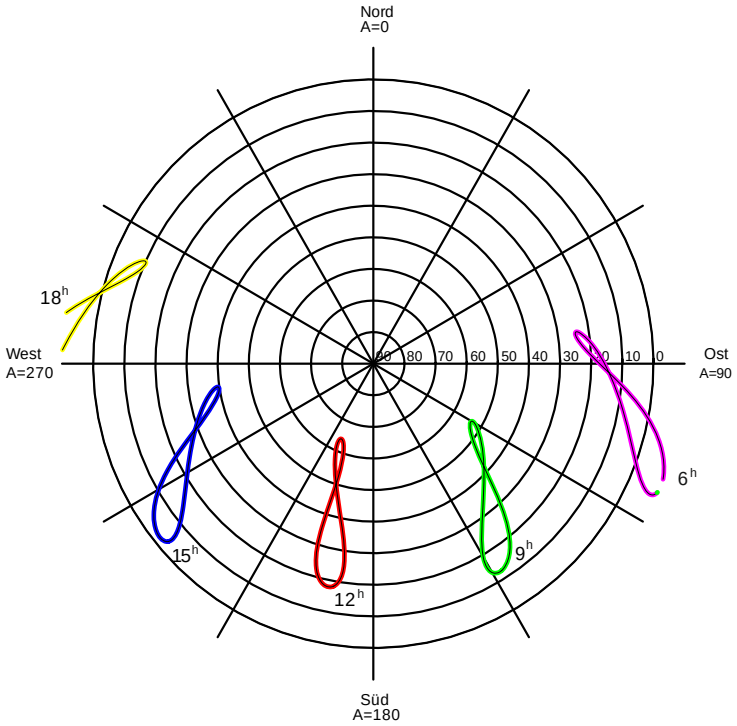


Bild 28-6: Analemma in horizontalen Koordinaten: die Beobachtungswinkel Azimut und Elevation der wahren Sonne jeweils um 6, 9, 12, 15, 18 Uhr UT gesehen von der Beobachtungsstation Weilheim aus jeweils im Verlauf eines tropischen Jahres. Die Elevation ist bis zu 10° unter den Horizont eingezeichnet.

Von besonderem Interesse ist der Verlauf des Standes der wahren Sonne zu einer gewissen mittleren täglichen Sonnenzeit im Verlauf eines tropischen Jahres. Dies führt zur Darstellung eines Analemma, einer Kurve welche die doppelte Periodizität der jährlichen Bewegung der Sonne in Bezug auf einen bestimmten Beobachtungsort auf der Erdoberfläche wiederspiegelt. In Bild 28-5 (auf Seite 30) ist das Analemma der Sonne für den mittleren Zeitpunkt 12^h (MEZ = UT-1) für einen bestimmten Beobachtungsort aufgetragen. Zur zeitlichen Orientierung sind bestimmte Daten markiert. In Ergänzung zeigt Bild 28-6 die Analemmata für denselben Beobachtungsort zu verschiedenen Tageszeiten.

28.3.4 Länge des wahren Sonnentages

Die Länge des wahren Sonnentages kann unterschiedlich definiert werden, je nachdem ob die Bewegung der Sonne in ihrer Bahn oder die Rotation der Erde zum Bezug gewählt wird.

28.3.4.1 Der wahre Sonnentag als Bogen der Sonnenbahn

Um von den Störungen der ungleichförmigen Erdrotation unabhängig bei der Zeitbestimmung zu sein, kann man von der Erdrotation abstrahieren und als Sonnentag den Bogen definieren, den die in den Äquator projizierte scheinbare Sonne an einem Tag zurücklegt. Bezugssystem ist nach Formel (28.66) als mittlerer Sonnentag der $\left(1/\overline{P_{\odot,t}}\right)$-te Teil eines tropischen Jahres bei Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0. Mit diesem abstrakten und absolut gleichförmigen Zeitbegriff wird die mittlere Zeit TDT gerechnet. In Bezug auf diese Zeit wird die tägliche mittlere Bewegung[1] $n_\odot = 236^s.555/d$ als Vergleichswert gewählt. Mit der täglichen Variation $d\alpha_\odot/dt$ (etwa aus dem

[1] aus Tabelle 9-3 in Abschnitt 9.1.1.1 (Band II)

Näherungsausdruck 28.98) kann der tägliche Bahnbogen der scheinbaren Sonne errechnet werden. Die Abweichung von der mittleren Sonne beträgt

$$\Delta t = \frac{\frac{d\alpha_\odot}{dt} - n_\odot}{n_\odot} 86400\,s \quad , \qquad (28.107)$$

wenn $d\alpha_\odot / dt$ wie in Tabelle 28-5 auf Seite 26 in Sekunden pro Tag berechnet ist.

$\alpha_\odot$	$0^h\,27^m\,6^s.62$	$5^h\,56^m\,00^s.49$	$11^h\,34^m\,04^s.145$	$18^h\,03^m\,18^s.426$
$\frac{d\alpha_\odot}{dt} - n_\odot$	$-18^s.9211/d$	$12^s.71834/\mathrm{d}$	$-22^s.51168/\mathrm{d}$	$28^s.03379$
Unterschied wahrer zu mittlerem Sonnentag	$-1^h\,52^m\,0^s.5$	$1^h\,17^m\,25^s.3$	$-2^h\,17^m\,2^2.3$	$2^h\,50^m\,39^2.1$

Tabelle 28-7: Die Extremalwerte der Abweichung in der Tageslänge der wahren Sonne von der mittleren Sonnen bezogen auf den täglichen Bahnbogen der Sonne längs des Äquators[1].

Für die Extremalwerte in dieser Tabelle ergeben sich für die Abweichung in der Tageslänge nach der hier gegebenen Definition die angegebenen Zahlenwerte. Sie geben den Zeitbedarf an, den die wahre Sonne benötigt um die Differenz aus mittlerem und wahrem Bahnbogen zu durchlaufen.

28.3.4.2 Der Rotationssonnentag

Im täglichen Leben wird die Rotation der Erde der Definition eines wahren Sonnentages zugrunde gelegt. Die Länge eines wahren (Rotations-) Sonnentages wird bezogen auf zwei aufeinanderfolgende untere Kulminationen der wahren Äquatorsonne[2]. Sie ist vom Bezugsort auf der Erdoberfläche abhängig, also keine globale Größe wie der mittlere Sonnentag.

Zur Bestimmung der Dauer des wahren Sonnentages müssen auch die ungleichförmige Bewegung der Erdrotation und eventuell auch die des Frühlingspunktes als Bezugspunkt der Sternzeit berücksichtigt werden. Die so definierte „Rotationssonnenzeit“ ergibt eine andere Länge des wahren Sonnentages als die auf den zurückgelegten Bahnbogen der Sonne bezogene wie im vorhergehenden Abschnitt besprochen.

Die wahre Sonnenzeit unterscheidet sich nach Definition (28.105) um die Zeitgleichung Z. Einem mittleren Zeitintervall ΔT_M entspricht das wahre Zeitintervall

$$\Delta T_W = \Delta T_M + \Delta Z \approx \Delta T_M + \frac{dZ}{dt} = \Delta T_M - \left(\frac{d\alpha_\odot}{dt} - n_\odot \right) \quad . \qquad (28.108)$$

Unter Vernachlässigung der Variationen in $e_\odot, \varepsilon, \Gamma_\odot$, d.h. bei Bezug der Zahlenwerte auf die Fundamentalepoche J2000.0, lautet die Variation der Zeitgleichung

[1] die Zahlenwerte können sich von Jahr zu Jahr etwas verändern. Aktuell in dieser Tabelle für 2018

[2] bis 1925 wurde der wahre Sonnentag wie in der Astronomie üblich auf die obere Kulmination der Sonne bezogen, d.h. auf den wahren Mittag. (siehe etwa STRÖMGREN, E. und STRÖMGREN, B. [1933])

$$\frac{dZ}{dt} = -n_\odot \Bigg[2\,e_\odot \cos M_\odot - 2\tan^2\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(2\Gamma_\odot + 2M_\odot\right) - \\ -6\,e_\odot \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(2\Gamma_\odot + 3M_\odot\right) + 2\,e_\odot \tan^2\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(2\Gamma_\odot + M_\odot\right) + \cdots \Bigg] \quad . \tag{28.109}$$

Für Überschlagsrechnungen kann die Näherung verwendet werden

$$\frac{dZ}{dt} = -7^s.854 \cos M_\odot + 20^s.360 \cos\left(2\Gamma_\odot + 2M_\odot\right) + \cdots \quad . \tag{28.110}$$

Die entsprechenden Zahlenwerte sind in der Graphik Bild 28-2 auf Seite 27, die Extremwerte in Tabelle 28-5 auf Seite 26 bzw. in Tabelle 28-7 enthalten.

Zur Deutung von Beziehung (28.108): wenn für ΔT_M die Dauer eines mittleren Sonnentages angenommen ist und wenn dZ/dt negativ ist, bedeutet das, dass der wahre Sonnentag noch nicht vollendet ist, somit länger als der mittlere Sonnentag dauert. Die Zahlenwerte für $d\alpha_\odot/dt - n_\odot$ geben somit genau den Betrag an, um den ein wahrer Rotationssonnentag länger bzw. kürzer als ein mittlerer Rotationssonnentag ist.

Anmerkungen: Die in den vorstehenden Abschnitten besprochenen Bewegungen der Sonne sind veranschaulichende Näherungen, wie sie für die Beobachtung im täglichen Leben aber auch in den meisten Anwendungen einer Satellitenbahnanalyse ausreichend sind. Für hochgenaue Untersuchungen, insbesondere im Rahmen der astronomischen Zeitbestimmung, müssen die seit etwa 1965 erfolgenden Verfeinerungen und Umdefinitionen berücksichtigt werden. An Stelle der Zeitgleichung wird in diesem Zusammenhang der Bezug der wahren Sonnenzeit auf den Transit der wahren Sonne durch den Meridian eines Beobachtungsortes zu einem bestimmten Zeitpunkt in TDT gewählt[1].

28.4 Die topozentrische Beobachtung der wahren Sonne

Die ungleichförmige Bewegung der wahren Sonne hat für die Bahnanalyse von Erdbeobachtungssatelliten weitreichende Folgen. Die variable Rektaszension und vor allem die von Tag zu Tag sich verändernde Deklination der Sonne schließen völlig gleichartige Beobachtungsbedingungen eines bestimmten Beobachtungsgebietes auf der Erdoberfläche im Jahresverlauf aus. Einen Eindruck von diesen veränderlichen Stellungen der Sonne bezüglich dieses Beobachtungsgebietes wird erhalten, wenn der Verlauf der Sonnenbewegung von einem Referenzpunkt dieses Gebietes mit den geographischen Koordinaten (λ, φ) aus betrachtet wird.

28.4.1 Die horizontalen Koordinaten der Sonne

Dazu werden die horizontalen Koordinaten Azimut $A_\odot$ und Elevation $h_\odot$ benötigt, die aus den scheinbaren geozentrischen Örtern der Sonne $\left(r_{\odot g}, \alpha_{\odot g}, \delta_{\odot g}\right)$ berechnet werden können. Bevor die Umrechnung erfolgen kann, müssen an die Örter der Sonne Korrekturen angebracht werden[2]:

---

[1] weitere Details siehe etwa in WOOLARD, E. W. and CLEMENCE, G. M. [1966], p.360; GREEN, R. M. [1985], p.251; SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992], pp.308-310

[2] siehe dazu in den Abschnitten 9.6 und 9.8 in Band II

1. *Korrektur um die tägliche Parallaxe*: Wenn zum Beobachtungszeitpunkt der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{R}_T$ des Beobachtungsortes bekannt ist, kann der topozentrische Ortsvektor der Sonne aus $\mathbf{r}_{\odot T} = \mathbf{r}_{\odot \mathrm{g}} + \mathbf{R}_T$ erhalten werden. Damit ist die tägliche Parallaxe exakt erfasst. Dieser Vorgang ist im Fall von Erdsatelliten unentbehrlich. Da jedoch die Sonne im Vergleich mit Erdsatelliten relativ weit entfernt ist, wird der Fehler sehr klein sein, wenn die Winkelkoordinaten der Sonne mit den Methoden der sphärischen Astronomie modifiziert werden. Dazu wird die geozentrische Breite φ' des Beobachtungsortes aus Formel[1] (8.265) $\tan\varphi' = (1-f)^2 \tan\varphi$ benötigt. Die momentane Horizontalparallaxe der Sonne errechnet sich aus

$$P_{\odot \mathrm{g}} = \frac{R_E}{r_{\odot g}} \frac{180}{\pi} \frac{1}{3600} [\text{Bogensekunden}] \quad . \tag{28.111}$$

Wird hier statt der momentanen geozentrischen Sonnenentfernung $r_{\odot g}$ die Astronomische Einheit 1AU eingesetzt, erhält man die Sonnenparallaxe $\pi_\odot$ als einer der astronomischen Fundamentalkonstanten[2]. Der topozentrische Sonnenort hat bezogen auf den Beobachtungsort den Stundewinkel

$$\vartheta = \Theta_G + \lambda - \alpha_{\odot g} = \Theta - \alpha_{\odot g} \quad , \tag{28.112}$$

wenn Θ_G die Sternzeit für den Greenwich-Meridian und Θ die für den Beobachtungsort ist. Die Korrektur der Winkelkoordinaten der Sonne infolge der täglichen Parallaxe lautet dann (näherungsweise)

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{\odot \mathrm{P}} &= P_{\odot g}\, r_{\odot g} \sin\vartheta \frac{\cos\varphi'}{\cos\delta_{\odot g}} \\ \Delta\delta_{\odot P} &= P_{\odot g}\, r_{\odot g} \left[\sin\varphi' \cos\delta_{\odot g} - \cos\varphi' \cos\vartheta \sin\delta_{\odot g} \right] \quad . \end{aligned} \tag{28.113}$$

Die um die tägliche Parallaxe korrigierten topozentrischen Winkelkoordinaten der Sonne sind

$$\alpha_{\odot TP} = \alpha_{\odot g} - \Delta\alpha_{\odot P} \quad , \quad \delta_{\odot TP} = \delta_{\odot g} - \Delta\delta_{\odot P} \quad . \tag{28.114}$$

2. *Korrektur um die tägliche Aberration:* Der um die tägliche Parallaxe modifizierte Stundenwinkel ist $\vartheta_P = \Theta - \alpha_{\odot TP}$. Die tägliche Aberrationskonstante der Erde lautet $K = V_0 / c = 0''.320$, wenn V_0 die Rotationsgeschwindigkeit des Erdäquators ist. Die Korrektur der Sonnenkoordinaten auf Grund der täglichen Aberration bezogen auf einen Ort der geozentrischen Breite φ' lautet

$$\Delta\alpha_{\odot A} = K\, r_{\odot g} \cos\vartheta_P \frac{\cos\varphi'}{\cos\delta_{\odot TP}} \quad , \quad \Delta\delta_{\odot A} = K\, r_{\odot g} \sin\vartheta_P \cos\varphi' \sin\delta_{\odot TP} \quad . \tag{28.115}$$

Die äquatorialen Winkelkoordinaten der Sonne lauten mit den sphärischen Korrekturen

$$\alpha_{\odot T} = \alpha_{\odot TP} + \Delta\alpha_{\odot A} \quad , \quad \delta_{\odot T} = \delta_{\odot TP} + \Delta\delta_{\odot A} \quad . \tag{28.116}$$

---

[1] Abschnitt 8.9.2 (Band II)

[2] Anhang E1 (Band V)

Die scheinbaren horizontalen Koordinaten der Sonne werden berechnet aus[1]

$$\begin{aligned} \cos A_\odot \cosh_\odot &= -\cos\vartheta_P \cos\delta_{\odot T} \sin\varphi + \sin\delta_{\odot T} \cos\varphi \\ \sin A_\odot \cosh_\odot &= -\sin\vartheta_P \cos\delta_T \\ \sinh_\odot &= \cos\vartheta_P \cos\delta_{\odot T} \cos\varphi + \sin\delta_{\odot T} \sin\varphi \quad . \end{aligned} \tag{28.117}$$

BEISPIELE zur topozentrischen Bewegung der Sonne sind in Bild 28-5 (auf Seite 30) und Bild 28-6 enthalten. In ihnen ist der Verlauf des Sonnenstandes zu je einer mittleren täglichen Sonnenzeit im Verlauf eines Jahres in Form eines Analemma dargestellt. Dies spiegelt für einen beliebigen Beobachtungsort auf der Erde den Verlauf der Zeitgleichung wieder. ◀

28.4.2 Der Polarkreis

Aus den Transformationsformeln (8.293) kann für die obere Kulmination eines Sternes mit $\vartheta_T = 0°$, sowie die untere Kulmination mit $\vartheta_T = 180°$ unmittelbar auf die extremale Höhe („Elevation“) dieses Objektes gesehen von einem Ort mit der geodätischen Breite φ geschlossen werden:

$$h_{\max} = 90° - \varphi + \delta \quad , \quad h_{\min} = 90° - \varphi - \delta \quad . \tag{28.118}$$

Diese Beziehungen sind näherungsweise auch für Sonne und Mond gültig, jedoch nicht für Erdsatelliten wegen deren rascher relativer Bewegung, wodurch die maximale bzw. minimale Elevation gewöhnlich außerhalb eines Ortsmeridians stattfindet.

Die geographische Breite des Polarkreises ist eine Funktion der Schiefe der Ekliptik. Die Sonne erreicht ihre maximale Deklination, wenn diese der Schiefe der Ekliptik gleich ist. Gesehen vom Polarkreis aus befindet sich die Sonne dann genau im Horizont. Nach Formel (28.118) hat der Polarkreis die geodätische Breite

$$\varphi_P = 90° - \varepsilon = 90° - \left(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon\right) \quad . \tag{28.119}$$

Da die Schiefe der Ekliptik keine konstante Größe ist, variiert auch die geodätische Breite des Polarkreises im Laufe der Jahre[2].

BEISPIEL: Schiefe der Ekliptik und geodätische Breite des Polarkreises für einige Zeitpunkte

Zeitpunkt	wahre Schiefe der Ekliptik	Geodätische Breite des Polarkreises
1950-01-01	23°26′53″.2	66°33′06″.8
2000-01-01	23°26′15″.7	66°33′44″.3
2050-01-01	23°25′52″.7	66°34′07″.3

◀

[1] Mit den Formeln (8.293) in Abschnitt 8.9.3.2 (Band II)

[2] Zahlenwert der mittleren Schiefe $\bar{\varepsilon}$ in Anhang E.3 (Band V), der Nutation in Schiefe $\Delta\varepsilon$ in Formel (9.123), Abschnitt 9.4.1 (Band II)

28.4.3 Sonnenkontaktzeiten

Aus einer Ephemeride der topozentrischen Sonnenbewegung können besondere Stellungen der Sonne, maximale und minimale Elevation, wie Auf- und Untergangszeiten berechnet werden. Diese Zahlenwerte können im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse von besonderem Interesse sein: wann, wie und wie lange wird das zu beobachtende Gebiet von der Sonne beschienen. Da die Ephemeride auch das Azimut der Sonne liefert, kann die Einfallsrichtung der Sonnenstrahlung unentbehrliche Aussagen für bestimmte Untersuchungen liefern[1].

Die Sonnenephemeride ist auf den Mittelpunkt der Sonne bezogen. Da die Sonne jedoch ein flächenhaftes Objekt mit scheinbarem Durchmesser von durchschnittlich $30'$ ist, und um den Einfluss der Refraktion größenordnungsmäßig mit einzubeziehen[2], ist es sinnvoll, bei der Berechnung von Auf- und Untergangszeiten etwa eine Toleranz von $-50'$ unter dem Horizont zuzulassen. Damit kann auch eine Dämmerung erfasst werden, was vor allem in polnahen Gegenden von Interesse ist. Hier kann im Gegensatz zu äquatornahen Gebieten die Bewegung der Sonne auf einer relativ schleifenden Bahn erfolgen. Es kann passieren, dass die Sonne gar nicht über den Horizont aufsteigt, jedoch stundenlang unterhalb des Horizontes entlang schleift. Eine Aussage über die dadurch verursachten Dämmerungen kann in den nördlichen bzw. südlichen Gegenden von Interesse sein.

BEISPIEL 1: Die Esrange bei Kiruna hat die geographischen Koordinaten $\lambda = 21°.0463$, $\varphi = 67°.8776$, $H = 480\text{m}$. Sie liegt also nördlich des Polarkreises. Der Polarkreis hat die geodätische Breite[3] $\varphi_P = 66°.563044$. Am 7. Dezember 1981 hatte die Sonne dort folgende Kontaktdaten:

Zeitpunkt (U.T.)	Azimut	Elevation	Ereignis
1981-12-07/09;42:26.8	169°.908	-0°.8333	Sonnenaufgang
1981-12-07/10:25:58.8	179°.950	-0°.4748	Maximale Elevation
1981-12-07/11:09:33.1	189°.995	-0°.8333	Sonnenuntergang
1981-12-07/22:26:32.4	0°.041	-44°.7747	Minimale Elevation

Der Sonnenmittelpunkt befindet sich etwa $28'.5$ unter dem Horizont, ein Segment des Sonnenrandes könnte also etwas über den Horizont scheinen. Das Azimut zeigt, dass die maximale Sonnenelevation genau im Süden zu erwarten ist, die Richtungen zu den berechneten Kontaktzeiten sind nur etwa 10° davon entfernt. Die minimale Sonnenelevation findet, wie zu erwarten ist, genau in nördlicher Richtung statt. Bereits am 11. Dezember beträgt die maximale Sonnenelevation $-52'.1$, es ist nur noch mit einer kurzen Dämmerung zu rechnen, die Polarnacht hat begonnen. ◀

BEISPIEL 2: Von besonderem Interesse ist es, die Bewegung der Sonne von den Polen aus zu beobachten. Nach (28.118) ist dann die maximale bzw. die minimale Elevation eines Objektes gleich dessen Deklination. Insbesondere im Fall der extremalen Sonnendeklination mit $\delta_\odot = \pm\varepsilon$ wird daher die maximale Sonnenelevation $h_{\odot,\max} = \varepsilon$, die minimale Sonnenelevation $h_{\odot,\min} = -\varepsilon$ betragen. Vom

[1] Weitere Aussagen zu Beobachtungsbedingungen insbesondere auch im Zusammenhang mit der Sonnenbewegung finden sich in Band V (etwa in Abschnitt 38.4.9)

[2] Eine allgemeingültige Abschätzung der Refraktion ist nicht möglich, da sie vom Luftdruck, der Temperatur und weiteren klimatischen und atmosphärischen Einflüssen abhängig ist (vgl. Abschnitt 9.9, Band II)

[3] Etwa mit Formel (8.193) in Abschnitt 8.6.1 (Band II)

Nordpol aus gesehen ist die Südrichtung (vom Südpol aus gesehen die Nordrichtung) unbestimmt, da es in jede Richtung nach Süden geht. Um den Verlauf der Sonnenelevation zu verfolgen, wird man eine Referenzrichtung und damit auch eine Bezugsrichtung für das Azimut willkürlich festlegen. An den Polen ist ein halbes Jahr Tag, ein halbes Jahr Nacht. Für den Nordpol gelten etwa folgende Zahlenwerte:

Nahe der Wintersonnenwende: der geringe Unterschied in der Elevation der Sonne ist der Bewegung der Sonne längs ihrer Bahn geschuldet. Sonst dürfte sich die Elevation nicht ändern.

Zeitpunkt	Azimut	Elevation	Anmerkung
2017-12-21/00:01:15.300	0°.550924	-23°.436522	Minimum
2017-12-21/11:59:17.349	179°.997557	-23°.437049	Maximum

Tabelle 28-8: Wintersonnenwende

Analog der Wintersonnenwende verhält sich die Sonnenelevation zur Sommersonnenwende:

Zeitpunkt	Azimut	Elevation	Anmerkung
2018-06-21/00:04:52.568	0°.513108	23°.432828	„Minimum“
2018-06-21/12:02:54.617	179°.994400	23°.432662	„Maximum“

Tabelle 28-9: Sommersonnenwende

Zeitpunkt	Azimut	Elevation	Anmerkung
2018-03-16/00:11:29.739	0°.446872	-1°.747693	Minimum
2018-03-16/12:09:31.788	179°.990795	-1°.550402	Maximum
2018-03-17/00:11:12.591	0°.446614	-1°.352467	Minimum
2018-03-17/12:09:14.640	179°.990946	-1°.155102	Maximum
2018-03-18/00:10:55.260	0°.446396	-0°.957117	Minimum
2018-03-18/07:41:09.306	113°.027577	-0°.833333	Kontakt Beginn
2018-03-18/07:41:09.306	113°.027577	-0°.833333	Kontakt Ende
2018-03-18/12:08:57.309	179°.991096	-0°.759728	Maximum
2018-03-19/00:10:37.769	0°.446224	-0°.561745	Minimum
2018-03-19/12:08:39.818	179°.991248	-0°.364381	Maximum
2018-03:20/00:10:20.138	0°.446102	-0°.166449	Minimum
2018-03-20/12:08:22.188	179°.991408	0°.030841	Maximum
2018-03-21/00:10:02.390	0°.446033	0°.228672	Minimum
2018-03-21/12:08:04.440	179°.991580	0°.425837	Maximum

Tabelle 28-10: Tag und Nachtgleiche bei Frühlingsanfang ◀

Nahe der Frühlings-Tag und Nachtgleiche: Als Kriterium für Kontakt der Sonne mit dem Horizont wird der Moment gewählt, in dem der Sonnenmittelpunkt $50'$ unter dem Horizont liegt. Je nach

Wirkung der Refraktion kann dann der Sonnenrand bereits über den Horizont hochkommen. Dieser Zeitpunkt findet daher einige Tage vor der Tag- und Nachtgleiche statt. Die Zahlenwerte für Azimut und Elevation beziehen sich auf den Sonnenmittelpunkt.

Ein Unterschied zwischen den „extremalen“ Sonnenelevationen lässt sich hier nicht ausmachen. Das Minimum wird definiert für die im „nördlichen“ Azimut stattfindende Elevation, das Maximum für das „südliche“ Azimut.

28.5 Sonnen-synodische Satelliten -Bewegung

Der Begriff des (Sonnen) synodischen Umlaufs ist aus der Mondtheorie bekannt und bedeutet hier die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichartigen geozentrischen Stellungen (etwa „Konjunktionen“) des Mondes zur Sonne. Ein Beispiel ist die Zeitdauer von Neumond zu Neumond, die auch als „Lunation“ bezeichnet wird. Dabei wird die Bewegung der beiden Himmelskörper auf die Ekliptik bezogen.

Bei Erdsatelliten erfolgt der Bezug zwischen Satelliten- und Sonnenbewegung prinzipiell auf die Ebene des Erdäquators. Die Differenz in Rektaszension von Sonne $\alpha_\odot$ und Satellit α ändert sich normalerweise ständig. Alternativ zum synodischen Bezug der beiden Körper auf den Äquator könnte der Bezug auch auf die Ekliptik oder die momentane Bahnebene des Satelliten erfolgen. Die unterschiedlichen Auswirkungen dieser Beziehungen werden in den späteren Unterabschnitten des vorliegenden Abschnittes angedeutet um eine Beurteilung für andersartige Aussagen zu ermöglichen.

In der Astronautik ist es üblich, die Umlaufzeit eines Erdsatelliten in Bezug auf die Sonne als „synodischen Umlauf“ zu bezeichnen. Im vorliegenden Bericht werden jedoch auch andere synodische Bezüge zu anderen Himmelskörpern diskutiert. Um keine Verwirrung aufkommen zu lassen, wird in diesem Kapitel der Bezug auf die Sonne stets berücksichtigt.

28.5.1 Die Sonnen-synodische Bewegung in Bezug auf den Erdäquator

Die Sonnen-synodische Bewegung eines Erdsatelliten wird grundsätzlich auf den Erdäquator bezogen. Dazu werden zunächst die grundlegenden allgemeingültigen Begriffe erläutert und dann die zur Durchführung einer Satellitenbahnanalyse empfehlenswerten Einschränkungen und Näherungen behandelt.

28.5.1.1 Terminologie von Sonnenwinkel und Sonnendrift

Je nach Aufgabenstellung werden unterschiedliche Bezüge zur Sonne untersucht. Diese müssen sorgfältig unterschieden werden.

1. <u>Bezug auf die wahre Sonne</u>

Um eine wohldefinierte Stellung von Sonne und Erdsatellit zueinander untersuchen zu können, wird der *wahre Sonnenwinkel*

$$\tau := \alpha - \alpha_\odot \tag{28.120}$$

eingeführt. Dieser Winkel wird entgegen dem Stundenwinkel ϑ im festen Äquatorsystem positiv nach Osten gezählt und stets auf die Rektaszension der Sonne bezogen.

Die *wahre Sonnendrift* eines Satelliten hat die Beziehung

$$\dot{\tau} = \dot{\alpha} - \dot{\alpha}_\odot \quad . \tag{28.121}$$

Der *mittlere Sonnenwinkel und die mittlere Sonnendrift bei Bezug auf die wahre Sonne* werden erhalten, wenn für die Ephemeride der Satellitenbewegung nur der säkulare Anteil des Bahnmodells berücksichtigt wird:

$$\tau_s = \bar{\alpha} - \alpha_\odot = \alpha_s - \alpha_\odot \quad , \quad \dot{\tau}_s = \dot{\alpha}_s - \dot{\alpha}_\odot \quad . \tag{28.122}$$

Die hier benötigten Winkel werden folgendermaßen berechnet:

Als Ergebnis der Ephemeridenrechnung einer Satellitenbewegung sei der Zustandsvektor $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ erhalten. Im Frühlingspunkt-bezogenen $\mathbf{p}_i -$Äquatorsystem[1] habe der Ortsvektor die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i \, \mathbf{p}_i = r\left(\mathbf{p}_1 \cos\delta \cos\alpha + \mathbf{p}_2 \cos\delta \sin\alpha + \mathbf{p}_3 \sin\delta\right) \quad . \tag{28.123}$$

Die Rektaszension α kann eindeutig berechnet werden aus

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r\cos\delta} \; , \; \sin\alpha = \frac{x_2}{r\cos\delta} \quad , \quad r = \sqrt{x^i \, x_i} \quad , \quad \sin\delta = \frac{x_3}{r} \; , \; \cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2\delta} \; . \tag{28.124}$$

Der Geschwindigkeitsvektor benötigt die Kenntnis der Eigenbewegung des $\mathbf{p}_i -$Basissystems. Mit Formel (8.10) ist

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \, \mathbf{p}_i + x^i \, \dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{28.125}$$

Um die Berechnung zu ermöglichen muss ein Fundamentalsystem angenommen, für das zu einem bestimmten Zeitpunkt, zur Zeit üblicherweise die Fundamentalepoche J2000.0, die Eigenbewegung $\dot{\mathbf{p}}_i$ (J2000.0) = 0.0 identisch gesetzt wird. In diesem System erfolgt üblicherweise eine Ephemeridenrechnung. Das Ergebnis muss anschließend auf den gewünschten Zeitpunkt umgerechnet werden. Alternativ zum Zustandsvektor kann auch die Ephemeride einer Bahn mit den Bahnparametern Flächenparameter *G*, Inklination *i*, Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω, Argument der Breite *u* gegeben sein. Die Variation der Rektaszension kann mit den Formeln (8.9), bzw. (24.20) und (24.21) aus einer der folgenden Formeln erhalten werden:

$$\dot{\alpha} = \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{x_1^2 + x_2^2} = \dot{\zeta} \, \frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{G \cos i}{r^2 \cos^2\delta} = \dot{\Omega} + \frac{\dot{u} \cos i - (i)^{\bullet} \sin i \sin u \cos u}{1 - \sin^2 i \sin^2 u} \quad . \tag{28.126}$$

Die geozentrische geometrische Rektaszension der Sonne $\alpha_\odot$ kann aus dem geozentrischen Ortsvektor (28.2) (auf Seite 4) berechnet werden[2]

$$\begin{aligned} & r_\odot = \sqrt{x_\odot^i \, x_{\odot i}} \quad , \quad \sin\delta_\odot = \frac{x_{\odot 3}}{r_\odot} \; , \; \cos\delta_\odot = \sqrt{1 - \sin^2\delta_\odot} \quad , \\ & \cos\alpha_\odot = \frac{x_{\odot 1}}{r_\odot \cos\delta_\odot} \; , \; \sin\alpha_\odot = \frac{x_{\odot 2}}{r_\odot \cos\delta_\odot} \quad . \end{aligned} \tag{28.127}$$

Ist der Ortsvektor der wahren Sonne nicht bekannt, kann die Rektaszension $\alpha_\odot$ der Sonne näherungsweise mit den Entwicklungen (28.96) bzw. (28.97) berechnet werden[3]. Die benötigten mittlere ekliptikale Länge des Perigäums $\overline{\Gamma_\odot}$ der Sonne sowie ihre mittlere mittlere Anomalie $\overline{M_\odot}$ sind aus

---

[1] Abschnitt 8.1, Band II

[2] Im Zusammenhang mit der Satellitenbahnanalyse wird der Index *g* zur Angabe des Bezugs des Sonnenvektors auf den Erdmittelpunkt weggelassen, da auf diesen alle weiteren Aussagen bezogen sind. Die derzeit größtmögliche genaue Sonnenephemeride kann aus dem derzeit aktuellen JPL-Tape bezogen werden.

[3] in Abschnitt 28.2.4 auf Seite 25

Tabelle 28-3 (auf Seite 6) bekannt. Die mittlere Schiefe der Ekliptik $\bar{\varepsilon}$ kann aus Formel (28.18) ersehen werden[1], die wahre aus der Beziehung[2] $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$.

Ist der geozentrische Geschwindigkeitsvektor der Sonne bekannt, kann die Variation $\dot{\alpha}_\odot$ der Rektaszension der Sonne etwa mit Formel (28.5) (auf Seite 4) berechnet werden:

$$\dot{\alpha}_\odot = \frac{\dot{x}_{\odot 2}\cos\alpha_\odot - \dot{x}_{\odot 1}\sin\alpha_\odot}{r_\odot \cos\delta_\odot} \quad . \tag{28.128}$$

Die Rektaszension der wahren Sonne kann auch mit der adaptierten allerdings den modernen Genauigkeitsansprüchen nicht mehr genügenden *Newcomb*-Theorie berechnet werden (Abschnitt 28.1.3 ab Seite 10) . Diese Theorie ist für die meisten Anwendungen einer Satellitenbahnanalyse jedoch völlig ausreichend.

Sonnenwinkel und Sonnendrift des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf die wahre Sonne lauten

$$\tau_\Omega := \Omega - \alpha_\odot \quad , \quad \dot{\tau}_\Omega = \dot{\Omega} - \dot{\alpha}_\odot \quad . \tag{28.129}$$

Der *mittlere Sonnenwinkel und die zugehörende mittlere Sonnendrift des aufsteigenden Knotens werden bei Bezug auf die wahre Sonne* definiert durch

$$\tau_{\Omega s} := \bar{\Omega} - \alpha_\odot \quad , \quad \dot{\tau}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_\odot \quad . \tag{28.130}$$

Der Bezug auf das Perigäum einer Satellitenbahn (analoges für das Apogäum) muss auf den Äquator reduziert werden (was im Fall des Knotens ohnehin der Fall ist). Hat das Perigäum die äquatorialen Koordinaten $\left(\alpha_{P,}\, \delta_P\right)$, wird der *mittlere Sonnenwinkel und die zugehörende mittlere Sonnendrift des Perigäums bei Bezug auf die wahre Sonne* definiert durch

$$\tau_P := \alpha_P - \alpha_\odot \quad , \quad \dot{\tau}_P = \dot{\alpha}_P - \dot{\alpha}_\odot \quad . \tag{28.131}$$

Der *mittlere Sonnenwinkel und die zugehörende mittlere Sonnendrift des Perigäums werden bei Bezug auf die wahre Sonne* definiert durch

$$\tau_{Ps} := \overline{\alpha_P} - \alpha_\odot \quad , \quad \dot{\tau}_{Ps} = \left(\overline{\alpha_P}\right)^{\bullet}_s - \dot{\alpha}_\odot \quad . \tag{28.132}$$

2. <u>Bezug auf die mittlere Sonne</u>: Die mittlere Bewegung der Sonne in der Ekliptik kann nach Abschnitt 28.1.2 (auf Seite 5) mit Kenntnis der mittleren Bahnelemente aus Tabelle 28-3 (auf Seite 6) berechnet werden. Die wahre Anomalie der mittleren Sonne kann mit der mittleren mittleren Anomalie $\overline{M_\odot}$ und der mittleren Exzentrizität $\overline{e_\odot}$ näherungsweise mit der Mittelpunktsgleichung (28.13)

$$\overline{\upsilon_\odot} \;=\; \overline{M_\odot} + 2\,\overline{e_\odot}\sin\overline{M_\odot} + \frac{5}{4}\,\overline{e_\odot}^{\,2}\sin 2\,\overline{M_\odot} + O\left(\overline{e_\odot}^{\,3}\right) \tag{28.133}$$

erhalten werden. Zur Berechnung der Rektaszension der mittleren Sonne wird die mittlere ekliptikale Länge $\overline{\Gamma_\odot}$ des Perigäums der geozentrischen Sonnenbahn und die mittlere Schiefe der Ekliptik $\bar{\varepsilon}$ aus Formel (28.18), sowie die wahre Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$ benötigt. Es gelten die Formeln

---

[1] Weiteres in Anhang E3 (Band V)

[2] Siehe etwa vor Formel (28.18)

$$\begin{aligned}
\cos\overline{\alpha_\odot}\cos\overline{\delta_\odot} &= \cos\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\\
\sin\overline{\alpha_\odot}\cos\overline{\delta_\odot} &= \sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\varepsilon\\
\sin\overline{\delta_\odot} &= \sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon\\
\cos\overline{\delta_\odot} &= \sqrt{1-\sin^2\overline{\delta_\odot}} \quad .
\end{aligned} \tag{28.134}$$

Als *wahren Sonnenwinkel bei Bezug auf die mittlere Sonne* werde die Größe

$$\tau_M := \alpha - \overline{\alpha_\odot} = \overline{\alpha} + \delta\alpha - \overline{\alpha_\odot} \tag{28.135}$$

bezeichnet. Der *mittlere Sonnenwinkel bei Bezug auf die mittlere* Sonne hat wegen Formel (28.120) den Ausdruck

$$\overline{\tau_M} := \overline{\alpha} - \overline{\alpha_\odot} \quad . \tag{28.136}$$

Um die *Sonnendrift bei Bezug auf die mittlere Sonne* berechnen zu können wird die säkulare Variation $\left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet}$ der Rektaszension der mittleren Sonne nach Formel (28.29) benötigt

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet}\cos\overline{\delta_\odot} = &\left[\left(\Gamma_\odot\right)^{\bullet}_s + \left(\upsilon_\odot\right)^{\bullet}_s\right]\left\{\cos\varepsilon\cos\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\cos\overline{\alpha_\odot} + \sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\overline{\alpha_\odot}\right\} - \\
&-\dot{\varepsilon}_s\sin\left(\overline{\Gamma_\odot}+\overline{\upsilon_\odot}\right)\sin\varepsilon \quad .
\end{aligned} \tag{28.137}$$

Die *wahre Sonnendrift bei Bezug auf die mittlere Sonne* lautet

$$\dot{\tau}_M = \dot{\alpha} - \left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet} \quad . \tag{28.138}$$

Die *mittlere Sonnendrift bei Bezug auf die mittlere So*nne hat den Wert

$$\left(\overline{\tau_M}\right)^{\bullet} = \dot{\alpha}_s - \left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet} \quad . \tag{28.139}$$

Der *Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf die mittlere Sonne* lautet

$$\tau_{\Omega\mathrm{M}} = \Omega - \overline{\alpha_\odot} = \overline{\Omega} + \delta\Omega - \overline{\alpha_\odot} \quad , \tag{28.140}$$

die entsprechende *wahre Sonnendrift*

$$\dot{\tau}_{\Omega\mathrm{M}} = \dot{\Omega} - \left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet} \quad . \tag{28.141}$$

Der *mittlere Sonnenwinkel und die zugehörende mittlere Sonnendrift des aufsteigenden Knotens werden bei Bezug auf die mittlere Sonne* definiert durch

$$\overline{\tau_{\Omega\mathrm{M}}} = \overline{\Omega} - \overline{\alpha_\odot} \quad , \quad \left(\tau_{\Omega\mathrm{M}}\right)^{\bullet}_s = \dot{\tau}_{\Omega M\,s} = \dot{\Omega}_s - \left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet} \quad . \tag{28.142}$$

Der *Sonnenwinkel des Perigäums bei Bezug auf die mittlere Sonne* lautet

$$\tau_{\mathrm{PM}} = \alpha_P - \overline{\alpha_\odot} = \overline{\alpha_P} + \delta\alpha_P - \overline{\alpha_\odot} \quad , \tag{28.143}$$

die entsprechende *wahre Sonnendrift*

$$\dot{\tau}_{\mathrm{PM}} = \dot{\alpha}_P - \left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet} \quad . \tag{28.144}$$

Der *mittlere Sonnenwinkel und die zugehörende mittlere Sonnendrift des Perigäums werden bei Bezug auf die mittlere Sonne* definiert durch

$$\overline{\tau_{\mathrm{PM}}} = \overline{\alpha_P} - \overline{\alpha_\odot} \quad , \quad \left(\tau_{\mathrm{PM}}\right)^{\bullet}_s = \dot{\tau}_{PM\,s} = \left(\overline{\alpha_P}\right)^{\bullet}_s - \left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet} \quad . \tag{28.145}$$

3. <u>Bezug auf die fiktive mittlere Sonne</u>: die Rektaszension $\alpha_{\overline{\odot}}$ der fiktiven mittleren Sonne ist durch die Entwicklung (28.82) gegeben. Die entsprechende Variation lautet mit Definition (28.80)

$$\dot{\alpha}_{\bar{\odot}} = n_{\odot} \quad . \tag{28.146}$$

Die tropische Variation $n_{\odot}$ der mittleren Sonne kann im Rahmen einer Satelllitenbahnanalyse nach Abschnitt 9.1.1.1 (Band V) in guter Näherung als eine Konstante aufgefasst werden.

Der *wahre Sonnenwinkel eines Satelliten bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne* lautet

$$\tau_{\bar{\odot}} := \alpha - \alpha_{\bar{\odot}} = \bar{\alpha} + \delta\alpha - \alpha_{\bar{\odot}} \quad , \tag{28.147}$$

die entsprechende *wahre Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne*

$$\dot{\tau}_{\bar{\odot}} := \dot{\alpha} - n_{\odot} \quad . \tag{28.148}$$

Hier handelt es sich um den „wahren“ Zustand des Satelliten, wie er durch das gesamte zur Verfügung stehende Bahnmodell berechnet werden kann.

Die mittlere Rektaszension $\bar{\alpha}$ einer Satellitenbewegung ist der säkulare Anteil der Rektaszension, $\delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha}$ der periodische. Entsprechend können *der mittlere Sonnenwinkel und die zugehörende mittlere Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne* definiert werden durch

$$\overline{\tau_{\bar{\odot}}} := \bar{\alpha} - \alpha_{\bar{\odot}} \quad , \quad \left(\overline{\tau_{\bar{\odot}}}\right)^{\bullet} = \left(\tau_{\bar{\odot}}\right)^{\bullet}_{s} = \dot{\bar{\alpha}} - n_{\odot} = \dot{\alpha}_{s} - n_{\odot} \quad . \tag{28.149}$$

Hier wird die Variation $\dot{\bar{\alpha}} = \dot{\alpha}_{s}$ in einer Ephemeridenrechnung dann erhalten, wenn im verwendeten Bahnmodell („Störmodell“) nur die säkularen Bewegungseinflüsse zugelassen sind.

Auch der Bezug bestimmter Bahnpunkte zur Sonne ist von besonderer Wichtigkeit.

Der *Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne* lautet

$$\tau_{\Omega\bar{\odot}} := \Omega - \alpha_{\bar{\odot}} = \bar{\Omega} + \delta\Omega - \alpha_{\bar{\odot}} \quad , \tag{28.150}$$

die entsprechende *wahre Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne*

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}} := \dot{\Omega} - n_{\odot} \quad . \tag{28.151}$$

Der *mittlere Sonnenwinkel und die zugehörende mittlere Sonnendrift des aufsteigenden Knotens werden bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne* definiert durch

$$\overline{\tau_{\Omega\bar{\odot}}} := \bar{\Omega} - \alpha_{\bar{\odot}} \quad , \quad \left(\overline{\tau_{\Omega\bar{\odot}}}\right)^{\bullet} = \left(\tau_{\Omega\bar{\odot}}\right)^{\bullet}_{s} = \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = \dot{\Omega}_{s} - n_{\odot} \quad . \tag{28.152}$$

Der *Sonnenwinkel des Perigäums bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne* lautet

$$\tau_{P\bar{\odot}} := \alpha_{P} - \alpha_{\bar{\odot}} = \overline{\alpha_{P}} + \delta\alpha_{P} - \alpha_{\bar{\odot}} \quad , \tag{28.153}$$

die entsprechende *wahre Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne*

$$\dot{\tau}_{P\bar{\odot}} := \dot{\alpha}_{P} - n_{\odot} \quad . \tag{28.154}$$

Der *mittlere Sonnenwinkel und die zugehörende mittlere Sonnendrift des Perigäums werden bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne* definiert durch

$$\overline{\tau_{P\bar{\odot}}} := \overline{\alpha_{P}} - \alpha_{\bar{\odot}} \quad , \quad \left(\overline{\tau_{P\bar{\odot}}}\right)^{\bullet} = \left(\tau_{P\bar{\odot}}\right)^{\bullet}_{s} = \dot{\tau}_{P\bar{\odot}s} = \left(\overline{\alpha_{P}}\right)^{\bullet}_{s} - n_{\odot} = \dot{\alpha}_{Ps} - n_{\odot} \quad . \tag{28.155}$$

28.5.1.2 Der wahre Sonnen-synodische Umlauf in Bezug auf den Erdäquator

Ein Satellit befindet sich in *Konjunktion* mit der Sonne, wenn $\tau = 0°$, in *Opposition* wenn $\tau = 180°$. Das Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen (analog Oppositionen) wird als

(*wahre*) *Sonnen-synodische Umlaufzeit* P_S bezeichnet. Ausgehend von einem Anfangszeitpunkt t_0 und in Bezug auf den Erdäquator lautet die Bedingungsgleichung für einen Sonnen-synodischen Umlauf

$$fct(P_S) \equiv \tau(t_0 + P_S) - \tau(t_0) = 0 \quad . \tag{28.156}$$

Um eine numerisch stabile Lösung dieser Gleichung zu ermöglichen, ist es sinnvoll die überlagerte Funktion[1]

$$fct(P_S; t_0) \equiv \sin\left[\tau(t_0 + P_S) - \tau(t_0)\right] = 0 \tag{28.157}$$

zu verwenden. Als Anfangswert für die iterative Bearbeitung kann die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit verwendet werden, oder besser die in Abschnitt 28.5.1.3 hergeleitete mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit:

$$P_S^{(0)} = \overline{P_K} \quad \text{oder} \quad P_S^{(0)} = \overline{P_S} \quad . \tag{28.158}$$

Mit bekannter Sonnendrift $\dot{\tau}$ kann die wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit eines Erdsatelliten bei Bezug auf den Erdäquator berechnet werden mit dem Integral

$$P_S = \int_{\tau_0}^{\tau_0 + 2\pi} \frac{1}{\dot{\tau}} d\tau \quad . \tag{28.159}$$

Die Formulierung des Integrals zeigt, dass die Umlaufzeit P_S eine Funktion des Anfangswertes τ_0 ist, somit keineswegs als eine konstante Zahl erwartet werden darf.

28.5.1.3 Der mittlere Sonnen-synodische Umlauf längs des Erdäquators

Für bahnanalytische Untersuchungen sind Näherungen, die einen guten Einblick in die zu bearbeitenden Aufgabenstellungen erlauben, unentbehrlich. Dazu wird die Rektaszension von Erdsatelliten durch den säkularen Anteil der Entwicklung (24.46) angenähert[2]:

$$\bar{\alpha} = \bar{M} + \bar{\omega} + \sigma_i \bar{\Omega} \quad . \tag{28.160}$$

Der Vergleich dieser Näherung mit der ursprünglichen Entwicklung zeigt, dass es sich hierbei um einen erheblichen Eingriff handelt, dessen Rechtfertigung stets im Auge behalten werden muss. Entsprechendes gilt für den Anteil der Entwicklung der Sonnenbewegung. Im Rahmen einer Satellitenbahnauslegung wird dazu die Bewegung der wahren Sonne durch die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$ ersetzt. Auch hierbei handelt es sich um einen erheblichen Eingriff, der bei der Beurteilung aller mit diesen Näherungen erzielten Aussagen berücksichtigt werden muss. Dies trifft im Besonderen auf die Beschreibung des Bewegungsvorganges mit Hilfe der Sonnendrift zu. Werden alle periodischen Einflüsse in der Variation der Rektaszension in der Entwicklung (24.47) vernachlässigt und die Bewegung der Sonne durch die gleichförmige Bewegung (28.80) der fiktiven mittleren Sonne ersetzt, wird an Stelle der Sonnendrift (28.121) die mittlere Sonnen-synodische mittlere Bewegung erhalten:

$$\overline{n_S} := \overline{n_K} + (M_0)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right) \quad . \tag{28.161}$$

Sie hat folgende Beziehungen zu anderen bisher behandelten mittleren Bewegungen:

$$\overline{n_S} = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right) \quad . \tag{28.162}$$

---

[1] Siehe in Abschnitt 21.3

[2] Abschnitt 24.2.5

$$\overline{n_S} = \overline{n_D} + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot \right) \quad . \tag{28.163}$$

$$\overline{n_S} = \overline{n_T} - \sigma_i \, n_\odot \quad . \tag{28.164}$$

Die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit wird mit Hilfe der mittleren Sonnen-synodischen mittleren Bewegung berechnet[1]:

$$\overline{P_S} = \frac{2\pi}{\overline{n_S}} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\bullet}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot \right)} \quad . \tag{28.165}$$

Die hier benötigten mittleren *Kepler*elemente[2] sind mittlere Anfangselemente $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$, d.h. mittlere Bahnparameter zur Epoche t_0.

Eine detaillierte Untersuchung der Sonnen-synodischen Umlaufzeit, wie sie beispielhaft in Bild 28-7 zu erkennen ist, zeigt, dass der Gebrauch des Begriffes „mittlerer“ stets kritisch hinterfragt werden muss. Das Bild zeigt den Verlauf eines wahren synodischen Umlaufs über einen mittleren synodischen Umlauf. Die Kurve ist für jeden Zeitpunkt durch Iteration mit der Bedingungsgleichung (28.157) im Rahmen einer angestrebten Genauigkeit (im Beispiel Δt= 0.001 sec) berechnet. Als Bahnmodell wurde das zur Verfügung stehende analytische Ephemeridenprogramm mit nur säkularen Variationen sowie nochmals mit allen periodischen Variationen gerechnet. Der Unterschied zwischen diesen beiden Ergebnissen im Bereich von $\pm 0.01 \text{sec}$ kann in der Darstellung nicht erkannt werden. Das bedeutet: die beträchtliche Variation des Verlaufs der Sonnen-synodischen Umlaufzeit ist eine Folge der unterschiedlichen wechselseitigen Stellung von Sonne und Satellit, also nicht der periodischen Variationen der Bahnparameter. Wenn also von einer „mittleren Bewegung“ gesprochen wird, die durch Vernachlässigung der periodischen Variationen erhalten, ist das etwas ganz anderes als die „mittlere Umlaufzeit“, wie sie aus der Formel (28.165) mit Anfangsparametern errechnet werden kann.

Im BEISPIEL beträgt diese $\overline{P_S} = \overline{P_S}\left(t_0\right) = 7531.072743 \text{ sec}$. Sie kann daher nur als Anhaltswert dienen. Die „säkulare Sonnen-synodische Umlaufzeit“ (sie wird ungenau gelegentlich auch als „mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit“ bezeichnet) wird bei Vernachlässigung der periodischen Parameter berechnet zu $P_S = P_{S_S} = 7539.721180 \text{ sec}$, die „wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit“ unter Einschluss der periodischen Variationen zu $P_S = P_{S_p} = 7539.712391 \text{ sec}$.

Der Vergleich der Umlaufzeit in Bild 28-7 mit den entsprechenden Kurven der anomalistischen, der drakonitischen sowie der tropischen Umlaufzeit zeigt, dass die Kurve der Umlaufzeit einen umso größeren Ausschlag haben kann, je mehr der Bezug von der Bahn entfernt ist. Im vorliegenden Fall handelt es sich um den Bezug auf den Äquator sowie die Eigenbewegung der Sonne.

---

[1] Man beachte, dass der Bezug auf die fiktive mittlere Sonne in dieser Bezeichnung nicht explizit enthalten ist, da der Begriff der mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit nur in diesem Sinn verwendet werden soll.

[2] siehe etwa in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

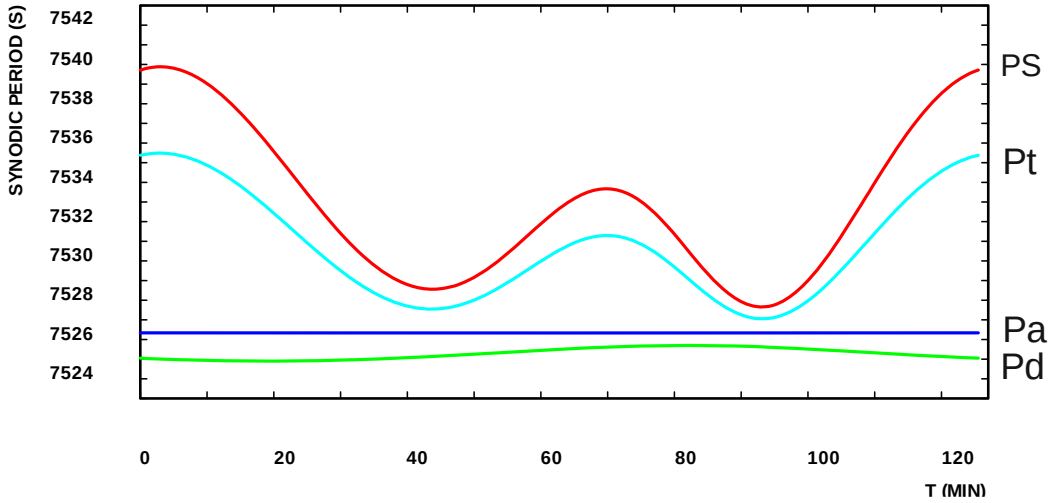


Bild 28-7: Vergleich der Äquator-bezogenen wahren Umlaufzeit P_S mit der wahren tropischen Umlaufzeit P_T, der wahren drakonitischen Umlaufzeit P_D und der wahren anomalistischen Umlaufzeit P_A der Erdsatellitenbahn a=8300 km, e=0.2, i=60° über einen mittleren Sonnens-synodischen Umlauf $\overline{P_S}$

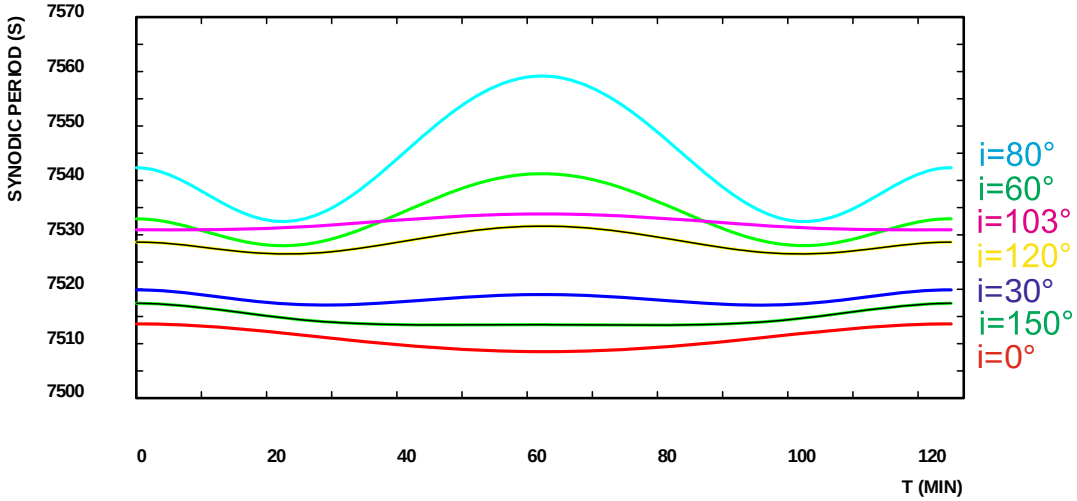


Bild 28-8: Die Äquator-bezogenen Sonnen-synodischen Umlaufzeiten P_S für die Bahnen *a*=8300 km, *e*=0.2, *i*=0°, 30°, 60°, 80°, 103°, 150° über einen mittleren Umlauf $\overline{P_S}$

Eine zweite vergleichende Untersuchung der Umlaufzeit ist ihrer Abhängigkeit von der Bahninklination gewidmet. Das entsprechende Beispiel in Bild 28-8 zeigt zunehmende Ausschläge der über einen Umlauf berechneten Umlaufzeiten für rechtläufige Bahnen, geringe Ausschläge für retrograde Bahnen. Die hier gewählte Bahninklination von etwa i=103° liegt in der Nähe einer Sonnensynchronen Bahn. Der geringe Ausschlag der entsprechenden Kurve macht bereits die Bedeutung dieses Bahntyps ersichtlich[1].

Als drittes Beispiel wird die Abhängigkeit der Sonnen-synodischen Umlaufzeit während eines Umlaufs von der Exzentrizität untersucht. Die Variation pro Umlauf nimmt mit zunehmender Exzentrizität erheblich zu. Der Unterschied zwischen „mittlerer“, d.h. nur mit säkularen Einflüssen

[1] Weiteres dazu ab Abschnitt 28.9

gerechneter, und „wahrer“, also mit allen bekannten periodischen Einflüssen gerechneter Umlaufzeit ist in dieser Darstellung nicht zu erkennen.

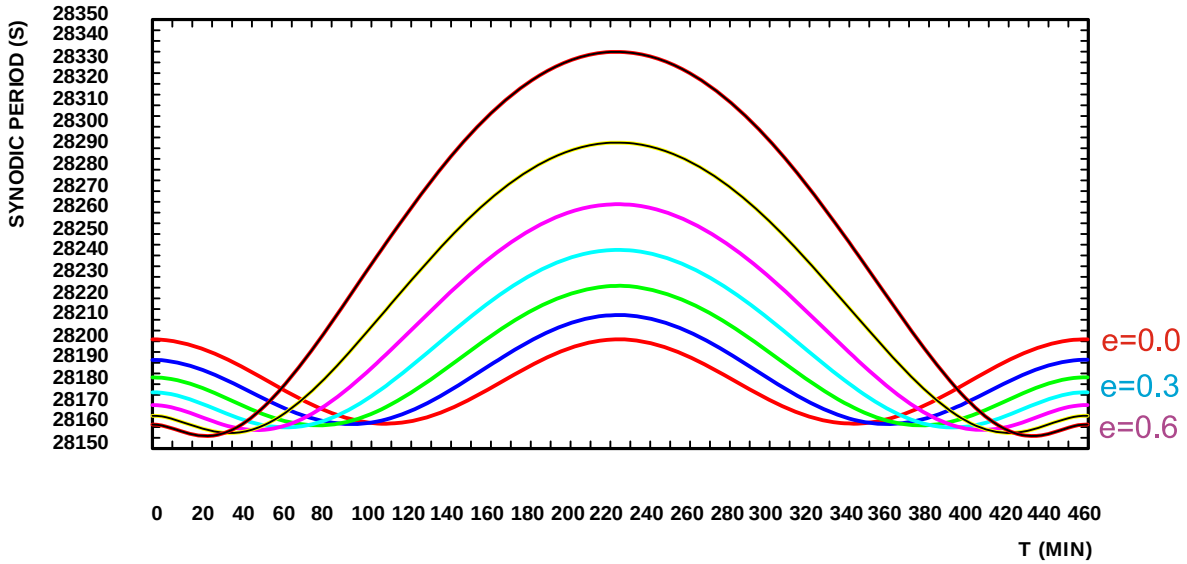


Bild 28-9: Die Äquator-bezogenen wahren Sonnen-synodischen Umlaufzeiten P_S für die Bahnen a=20000 km, i= 60°, für verschiedene Exzentrizitäten e= 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, über einen mittleren Umlauf $\overline{P_S}$.

Anmerkung: Eine Abhängigkeit vom Knoten ebenso wie von der Jahreszeit wurde nicht beobachtet. ◀

28.5.1.4 Mittlere, gemittelte und wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit

Die vorherigen Abschnitte zeigten, dass der Begriff „Umlaufzeit“ sehr unterschiedlich definiert werden kann, weshalb dieser Begriff im Gebrauch sorgfältig hinterfragt werden muss. Im speziellen Fall des Bezugs der Satellitenbewegung auf einen anderen Himmelskörper (Sonne, Mond, Planet, usw.), der eine bemerkenswerte Eigenbewegung aufweist, ist die Unterscheidung der Definitionen besonders wichtig.

Die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ ist aus Formel (28.165) mit der mittleren auf die fiktive mittlere Sonne bezogenen Sonnen-synodischen mittleren Bewegung $\overline{n_S}$ bekannt. Für einen gegebenen Satz von mittleren Bahnparametern $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ ist $\overline{P_S}$ von einer Anfangszeit unabhängig, wenn die mittlere Sonnenbewegung $n_\odot$ als zeitunabhängig akzeptiert werden kann.

Bei Bezug auf den Erdäquator sind unter Einschluss der wahren äquatorialen Bewegung $\dot{\alpha}_\odot$ der Sonne (nach Formel (28.5) oder der Näherungsformel **(28.98)**) im Prinzip zwei verschiedene Definitionen der Sonnen-synodischen Bewegung denkbar:

1. Als *gemittelte Sonnen-synodische Umlaufzeit* P_S bei Bezug auf den Erdäquator wird die Umlaufzeit dann bezeichnet, wenn zur Berechnung der Satellitenbewegung nur säkulare Variationen der Bahnparameter zugelassen sind. Sie ist vom Startzeitpunkt abhängig.
2. Die *wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit* P_S kommt zustande, wenn alle bekannten Bewegungseinflüsse („Störungen“) auf die Satellitenbewegung im Rahmen des verwendeten

Bahnmodells berücksichtig werden. Sie ist wie die gemittelte synodische Umlaufzeit vom Startzeitpunkt abhängig.

BEISPIEL 1: In Tabelle 28-11 wird der quantitative Unterschied in den verschieden definierten Sonnen-synodischen Umlaufzeiten für Satellitenbahnen mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10000\,\text{km}$ und verschiedenen Exzentrizitäten und Inklinationen berechnet. Die iterative Berechnung wird auf die Epoche 2019-03-12/12:00:0.0 bezogen. ◄

Mittlere Bahnparameter	$\overline{P_S}$	P_S	P_S
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.0,\ \bar{i}_0 = 0°$	9941.9818 s	9941.7691 s	9941.7691 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.3,\ \bar{i}_0 = 0°$	9939.6073 s	9941.8459 s	9941.8469 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.0,\ \bar{i}_0 = 50°$	9955.0915 s	9958.8571 s	9958.8542 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.3,\ \bar{i}_0 = 50°$	9955.1240 s	9955.3539 s	9955.3520 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.0,\ \bar{i}_0 = 130°$	9946.6381 s	9949.7509 s	9949.7503 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.3,\ \bar{i}_0 = 130°$	9944.9166 s	9950.6776 s	9950.6762 s

Tabelle 28-11: Vergleich der Sonnen-synodischen Umlaufzeiten mittlere $\overline{P_S}$, gemittelte P_S, wahre P_S, für den Startzeitpunkt 2019-03-12/12:00:0.0.

BEISPIEL 2: Um den Einfluss des Starzeitpunktes auf die Berechnung der Sonnen-synodischen Umlaufzeiten zu demonstrieren wird in Tabelle 28-12 die Berechnung mit denselben Bahndaten wie in Beispiel 1 durchgeführt, jedoch für den Startzeitpunkt 2019-09-12/12:00:0.0. ◄

Mittlere Bahnparameter	$\overline{P_S}$	P_S	P_S
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.0,\ \bar{i}_0 = 0°$	9941.9818 s	9941.7005 s	9941.7691 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.3,\ \bar{i}_0 = 0°$	9939.6073 s	9941.8106 s	9941.8469 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.0,\ \bar{i}_0 = 50°$	9955.0915 s	9958.7500 s	9958.7471 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.3,\ \bar{i}_0 = 50°$	9955.1240 s	9955.2989 s	9955.2970 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.0,\ \bar{i}_0 = 130°$	9946.6381 s	9949.8578 s	9949.8573 s
$\bar{a}_0 = 10000\,\text{km},\ \bar{e}_0 = 0.3,\ \bar{i}_0 = 130°$	9944.9166 s	9950.7325 s	9950.7311 s

Tabelle 28-12: Vergleich der Sonnen-synodischen Umlaufzeiten für die Bahnen wie in Tabelle 28-11, jedoch für den Startzeitpunkt 2019-09-12/12:00:0.0.

Die Beispiele erlauben die folgenden heuristischen Diskussionen:

1. Die Differenz $\overline{P_S} - P_S$ ist bemerkenswert und darf insbesondere bei Langzeituntersuchungen des Bahnverhaltens nicht vernachlässigt werden.
2. Bei einer Mittelung über ein langes Zeitintervall weicht die gemittelte P_S (bzw. wahre P_S) synodische Umlaufzeit im ersten Umlauf von einer vorgegebenen gemittelten $P_S^{(0)}$ (bzw. wahren) Umlaufzeit ab.
3. In den meisten Anwendungen weicht die gemittelte P_S von der wahren synodischen Umlaufzeit P_S nur geringfügig ab. Im Rahmen einer Bahnanalyse ist es deshalb vertretbar, die wahre

synodische Umlaufzeit durch die gemittelte zu ersetzen. Dadurch kann Rechenzeit beträchtlich eingespart werden.

4. Für wesentliche Aufgabenstellungen im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse ist die Berücksichtigung der mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit $\overline{P_S}$ an Stelle der gemittelten P_S zur Untersuchung des langfristigen Bahnverhaltens von Vorteil. Dies betrifft vor allem den Vergleich der unterschiedlichen Bezüge einer Satellitenbewegung (mit anomalistischer, drakonitischer, tropischer usw. Bewegung).

Anmerkung: Entsprechende Unterscheidungen in der Definition einer Sonnen-synodischen Bewegung können auch hergeleitet werden, wenn die synodische Bewegung anstatt auf den Erdäquator auf eine andere Basisebene (etwa die Ekliptik in Abschnitt 28.5.2 oder die Satellitenbahnebene in Abschnitt 28.5.3) bezogen werden soll. ◀

28.5.1.5 Berechnung einer Referenz-Konjunktion Erdsatellit-Sonne

Um eine Liste mit Konjunktionen und Oppositionen zwischen Erdsatellit und Sonne erstellen zu können, muss zunächst der Zeitpunkt t_{CO} der ersten Konjunktion nach einem beliebigen Anfangszeitpunkt t_0 gefunden werden. Als Bedingungsgleichung kann die überlagerte Funktion

$$fct(t_{CO}) \equiv \sin\left[\tau(t_{CO})\right] = \sin\left[\alpha(t_{CO}) - \alpha_{\odot}(t_{CO})\right] = 0 \qquad (28.166)$$

verwendet werden. Um den Iterationsprozess starten zu können, muss zunächst ein Anfangszeitpunkt $t_{CO}^{(0)}$ gesucht werden. Da sich die Rektaszension $\alpha_{\odot}$ der Sonne während eines Satellitenumlaufs nur wenig ändert, kann nach Bedingung (28.166) für die Rektaszension des Satelliten

$$\alpha\left(t_{CO}^{(0)}\right) \approx \alpha_{\odot}(t_0) \qquad (28.167)$$

angenommen werden.

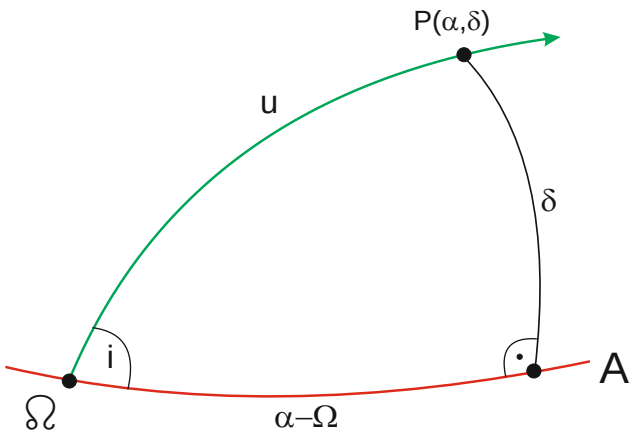


Bild 28-10: Berechnung des Argumentes der Breite aus vorgegebener Rektaszension

Mit bekannter Inklination *i* und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω der Satellitenbahn kann das zugehörige Argument der Breite *u* berechnet werden, nach Bild 28-10 mit Hilfe der Deklination aus

$$\tan\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\sin\left[\alpha\left(t_{CO}^{(0)}\right)-\Omega\left(t_0\right)\right]$$
$$\sin\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\frac{\tan\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]}{\sqrt{1+\tan^2\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]}}\quad,\quad\cos\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left[\delta\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]}}\tag{28.168}$$

und damit

$$\cos\left[u\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\cos\left[\alpha_\odot\left(t_0\right)-\Omega\left(t_0\right)\right]\cos\left[\delta_\odot\left(t_0\right)\right]$$
$$\sin\left[u\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\sin\left[\alpha_\odot\left(t_0\right)-\Omega\left(t_0\right)\right]\cos\left[\delta_\odot\left(t_0\right)\right]\cos\left[i\left(t_0\right)\right]+\sin\left[\delta_\odot\left(t_0\right)\right]\sin\left[i\left(t_0\right)\right]\ .\tag{28.169}$$

Alternativ kann ohne den Umweg über die Deklination das Argument der Breite auch direkt erhalten werden aus

$$\cos\left[u\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\frac{\cos\left[i\left(t_0\right)\right]\cos\left[\alpha_\odot\left(t_0\right)-\Omega\left(t_0\right)\right]}{\sqrt{\cos^2\left[i\left(t_0\right)\right]+\sin^2\left[\alpha_\odot\left(t_0\right)-\Omega\left(t_0\right)\right]\sin^2\left[i\left(t_0\right)\right]}}$$
$$\sin\left[u\left(t_{CO}^{(0)}\right)\right]=\frac{\sin\left[\alpha_\odot\left(t_0\right)-\Omega\left(t_0\right)\right]}{\sqrt{\cos^2\left[i\left(t_0\right)\right]+\sin^2\left[\alpha_\odot\left(t_0\right)-\Omega\left(t_0\right)\right]\sin^2\left[i\left(t_0\right)\right]}}\ .\tag{28.170}$$

Damit folgen die wahre Anomalie $\upsilon\left(t_{CO}^{(0)}\right)=u\left(t_{CO}^{(0)}\right)-\omega\left(t_0\right)$ und mit Hilfe der *Kepler*formeln[1] und der *Kepler*gleichung[2] auch die mittlere Anomalie $M\left(t_{CO}^{(0)}\right)$ des Satelliten zum gesuchten Näherungszeitpunkt $t_{CO}^{(0)}$. Die mittlere anomalistische mittlere Bewegung[3] $\overline{n_A}=\overline{n_K}+\left(M_0\right)^{\bullet}_{s}$, sowie die mittlere Anomalie $M\left(t_0\right)$ des Satelliten können als bekannt angenommen werden.

Der gesuchte Näherungszeitpunkt wird dann zum Start der Iteration (28.166) erhalten aus der Beziehung[4]

$$t_{CO}^{(0)}=t_0+\frac{M\left(t_{CO}^{(0)}\right)-M\left(t_0\right)}{\overline{n_A}}\ .\tag{28.171}$$

Die Iteration kann mit einem sicheren aber langsamen Verfahren der fortgeschrittenen Halbierung durchgeführt werden. Eine schnellere Iteration ist bei sicherem Konvergenzkreis mit Hilfe eines *Newton*-Verfahrens möglich:

$$t_{CO}^{(n+1)}=t_{CO}^{(n)}-\frac{\tan\left[\tau\left(t_{CO}^{(n)}\right)\right]}{\dot{\alpha}\left(t_{CO}^{(n)}\right)-\dot{\alpha}_\odot\left(t_{CO}^{(n)}\right)}\qquad\left\langle n=0,1,2,\cdots\right.\ .\tag{28.172}$$

BEISPIEL: Die Satellitenbahn $\overline{a}_0$ = 12000.000 km, $\overline{e}_0$ = 0.2, $\overline{i}_0$ = 60°, $\overline{\Omega}_0$ = 0°, $\overline{\omega}_0$ = 5°, $\overline{M}_{00}$ = 0° mit Epoche t_0 : 2018-04-27/00:00:00.0 hat bezogen auf den Anfangszeitpunkt $t_0=13^h$ mit Hilfe der

[1] Etwa den Formeln (10.24, Abschnitt 10.1.3, Band III)

[2] Etwa nach Formel (10.29, Abschnitt 10.1.3, Band III)

[3] aus Formel (22.35) (Abschnitt 22.2.2)

[4] vergleiche auch die Berechnung der Zeit bei vorgegebener wahrer Anomalie in Abschnitt 22.2.4

Beziehung (28.171) den Näherungszeitpunkt $t_{CO}^{(0)}$:$14^h\ 30^m\ 19^s.226$. Der zugehörige Sonnenwinkel beträgt $\tau_{CO}^{(0)}$ = 324°598183. Der Iterationsprozess (28.166) ergibt für die erste Konjunktion des Satelliten mit der Sonne nach $t_0 = 13^h$ den Zeitpunkt t_{CO} :$14^h\ 52^m\ 49^s.571$. Die Kontrolle ergibt den Sonnenwinkel τ_{CO} = 3610°.0000000. ◄

28.5.1.6 Zeit aus Sonnenwinkel

Vorgegeben seien ein Sonnenwinkel τ_0, der auf eine vorgegebene Konjunktion zum Zeitpunkt t_{CO} bezogen sei. Gesucht ist der τ_0 zugeordnete Zeitpunkt t_τ , der auf diese Konjunktion folgt.

Ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt werde mit der Rektaszension der Sonne zum Zeitpunkt der Konjunktion eine näherungsweise Rektaszension des Satelliten gebildet:

$$\alpha_\tau^{(0)} := \tau_0 + \alpha_\odot(t_{CO}) \quad . \tag{28.173}$$

Wie in den Umrechnungen (28.170) kann auf der gegebenen Satellitenbahn das der Knoten-bezogenen Rektaszension $\alpha_\tau^{(0)} - \Omega(t_{CO})$ zugeordnete Argument der Breite berechnet werden:

$$\begin{aligned} \cos\left[u\left(t_\tau^{(0)}\right)\right] &= \frac{\cos\left[i(t_{CO})\right]\cos\left[\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO})\right]}{\sqrt{\cos^2\left[i(t_{CO})\right] + \sin^2\left[\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO})\right]\sin^2\left[i(t_{CO})\right]}} \\ \sin\left[u\left(t_\tau^{(0)}\right)\right] &= \frac{\sin\left[\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO})\right]}{\sqrt{\cos^2\left[i(t_{CO})\right] + \sin^2\left[\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right) - \Omega(t_{CO})\right]\sin^2\left[i(t_{CO})\right]}} \quad . \end{aligned} \tag{28.174}$$

Mit der wahren Anomalie $\upsilon\left(t_\tau^{(0)}\right) = u\left(t_\tau^{(0)}\right) - \omega(t_{CO})$, der zugehörenden mittleren Anomalie $M\left(t_\tau^{(0)}\right)$, der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung $\overline{n_a} = \overline{n_K} + (M_0)^{\bullet}_s$ und der mittleren Anomalie $M(t_{CO})$ des Satelliten kann ein Näherungszeitpunkt erhalten werden

$$t_\tau^{(0)} = t_{CO} + \frac{M\left(t_\tau^{(0)}\right) - M(t_{CO})}{\overline{n_A}} \quad . \tag{28.175}$$

Mit diesem Näherungszeitpunkt kann der Sonnenwinkel $\tau\left(t_\tau^{(0)}\right)$ als Startwert für die iterative Berechnung des gesuchten Zeitpunktes t_τ mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct(t_\tau) \equiv \sin\left[\tau(t_\tau) - \tau_0\right] = 0 \tag{28.176}$$

gefunden werden.

BEISPIEL: Auf der Satellitenbahn des vorhergehenden Beispiels $\overline{a}_0$ = 12000.000 km, $\overline{e}_0$ = 0.2, $\overline{i}_0$ = 60°, $\overline{\Omega}_0$ = 0°, $\overline{\omega}_0$ = 5°, $\overline{M_{00}}$ = 0° mit Epoche t_0: 2018-04-27/00:00:00.0, werde nach der Bezugskonjunktion t_{CO} :$2018-04-27/14^h\ 52^m\ 49^s.571$ der Zeitpunkt gesucht, an dem der Sonnenwinkel den Wert $\tau_0 = 50°$ annimmt. Um eine Anfangsnäherung zu erhalten wird mit Beziehung (28.173) die

knotenbezogene Rektaszension $\alpha\left(t_\tau^{(0)}\right)-\Omega(t_{CO})$ = 85°553, die wahre Anomalie $\upsilon\left(t_\tau^{(0)}\right)$ = 80°.311 und die mittlere Anomalie $M\left(t_\tau^{(0)}\right)=58°.441$ gebildet. Die Beziehung (28.175) liefert mit der Näherung $t_\tau^{(0)}-t_{CO}\,890.914$ sec den Näherungszeitpunkt $t_\tau^{(0)}:2018-04-27/15^h\,07^m\;40^s.485$. An diesem Zeitpunkt lautet der Sonnenwinkel $\tau_\tau^{(0)}$ = 45°.594285. Die Iteration (28.176) ergibt schließlich den endgültigen Zeitpunkt $t_\tau:2018-04-27/15^h\,0^m\;52^s.263$. Zur Kontrolle wird für diesen Zeitpunkt der Sonnenwinkel neu ausgerechnet: $\tau_\tau^{(n)}$ = 50°.000041. Die Genauigkeit ist von der Ordnung 10^{-1} sec.◀

28.5.1.7 Konjunktionen und Oppositionen

```
                              Synodic periods

                              =================

CO            Conjunction Satellite-Sun
OP            Opposition  Satellite-Sun
N             Number of synodic period wrt epoch
M             Number of days after epoch
L             Eastern geographic longitude of sat (deg)
D             Declination (deg) of satellite
RAS           Right ascension (deg) of Sun
DES           Declination (deg) of Sun)
PS            True synodic period (s)
tau           solar angle
Time in U.T. and local time
Mean synodic period PSM =  13090.933 s  =  3 h 38 m 10.933 s
Accuracy in time            : EPST =        0.00100 s
Satellite Orbit Model including:
- Analyt. secular perturbations of second order due to J2, J3, J4
- Analyt. short periodic perturbations of first order due to J2
- Analyt. long periodic perturbations of second order due to J2, J3, J4

Time interval from 2018, 4,27,13, 0, 0.00 until 2018, 4,29,13, 0, 0.00
  |-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
  |CO|OP|     N|   M| YEAR MO DA HO MI SE    |HO MI SE    | L(deg) | D(deg) |  RAS   |  DES   |   PS(s)  |  TAU |
  |-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
  |CO|  |     4|   0| 2018  4 27 14 52 49.571|11 58 35.391| 316.441|  45.201|  35.197|  14.027| 13088.655|360.000
  |  |OP|     4|   0| 2018  4 27 17  3 14.051|23 58 34.576| 103.836| -45.290|  35.283|  14.058| 13092.422|180.000
  |CO|  |     5|   0| 2018  4 27 18 30 58.225|11 58 34.035| 261.899|  45.363|  35.341|  14.075| 13088.627|360.000
  |  |OP|     5|   0| 2018  4 27 20 41 26.474|23 58 33.234|  49.278| -45.452|  35.427|  14.106| 13092.354|180.000
  |CO|  |     6|   0| 2018  4 27 22  9  6.851|11 58 32.691| 207.358|  45.524|  35.485|  14.123| 13088.599|360.000
  |  |OP|     6|   0| 2018  4 28  0 19 38.828|23 58 31.893| 354.721| -45.613|  35.571|  14.154| 13092.285|180.000
  |CO|  |     7|   1| 2018  4 28  1 47 15.449|11 58 31.347| 152.816|  45.684|  35.629|  14.170| 13088.570|360.000
  |  |OP|     7|   1| 2018  4 28  3 57 51.113|23 58 30.566| 300.164| -45.772|  35.715|  14.201| 13092.218|180.000
  |CO|  |     8|   1| 2018  4 28  5 25 24.019|11 58 30.036|  98.275|  45.843|  35.772|  14.218| 13088.542|360.000
  |  |OP|     8|   1| 2018  4 28  7 36  3.332|23 58 29.254| 245.608| -45.929|  35.858|  14.249| 13092.152|180.000
  |CO|  |     9|   1| 2018  4 28  9  3 32.561|11 58 28.731|  43.734|  46.000|  35.916|  14.265| 13088.514|  0.000
  |  |OP|     9|   1| 2018  4 28 11 14 15.483|23 58 27.953| 191.052| -46.086|  36.002|  14.296| 13092.085|180.000
  |CO|  |    10|   1| 2018  4 28 12 41 41.074|11 58 27.429| 349.193|  46.155|  36.060|  14.313| 13088.487|360.000
  |  |OP|    10|   1| 2018  4 28 14 52 27.567|23 58 26.660| 136.496| -46.241|  36.146|  14.344| 13092.020|180.000
  |CO|  |    11|   1| 2018  4 28 16 19 49.561|11 58 26.146| 294.652|  46.310|  36.204|  14.360| 13088.459|360.000
  |  |OP|    11|   1| 2018  4 28 18 30 39.587|23 58 25.383|  81.941| -46.394|  36.290|  14.391| 13091.956|180.000
  |CO|  |    12|   1| 2018  4 28 19 57 58.020|11 58 24.881| 240.112|  46.463|  36.348|  14.407| 13088.433|  0.000
  |  |OP|    12|   1| 2018  4 28 22  8 51.542|23 58 24.119|  27.386| -46.547|  36.434|  14.438| 13091.891|180.000
  |CO|  |    13|   1| 2018  4 28 23 36  6.452|11 58 23.612| 185.572|  46.615|  36.492|  14.454| 13088.404|360.000
  |  |OP|    13|   1| 2018  4 29  1 47  3.435|23 58 22.868| 332.831| -46.698|  36.579|  14.485| 13091.827|180.000
  |CO|  |    14|   2| 2018  4 29  3 14 14.858|11 58 22.368| 131.031|  46.765|  36.636|  14.501| 13088.378|  0.000
  |  |OP|    14|   2| 2018  4 29  5 25 15.262|23 58 21.621| 278.276| -46.848|  36.723|  14.532| 13091.766|180.000
  |CO|  |    15|   2| 2018  4 29  6 52 23.236|11 58 21.124|  76.491|  46.914|  36.780|  14.548| 13088.352|360.000
  |  |OP|    15|   2| 2018  4 29  9  3 27.027|23 58 20.390| 223.722| -46.996|  36.867|  14.579| 13091.702|180.000
  |CO|  |    16|   2| 2018  4 29 10 30 31.589|11 58 19.908|  21.951|  47.062|  36.925|  14.595| 13088.325|  0.000
  |  |OP|    16|   2| 2018  4 29 12 41 38.731|23 58 19.182| 169.169| -47.144|  37.011|  14.626| 13091.641|180.000
```

Tabelle 28-13: Liste mit Konjunktionen und Oppositionen Satellit-Sonne für die Satellitenbahn $\bar{a}_0$ = 12000.000 km, $\bar{e}_0$ = 0.2, $\bar{i}_0$ = 60°, $\bar{\Omega}_0$ = 0°, $\bar{\omega}_0$ = 5°, $\overline{M}_{00}$ = 0° , Epoche 2018.04.27 00:00: 0.00

Die in den beiden vorstehenden Abschnitten hergeleiteten Verfahren erlauben die Berechnung einer Liste mit Konjunktionen und Oppositionen zwischen einem Erdsatelliten und der Sonne. Für eine vorgegebene Satellitenbahn wird nach Abschnitt 28.5.1.5 eine Referenzkonjunktion hergeleitet. Mit der Methodik in Abschnitt 28.5.1.6 werden sodann die Konjunktionen und Oppositionen hergeleitet. Dazu wird zur Berechnung einer Konjunktion der Sonnenwinkel τ_{CO} = 0°, für die Opposition der Sonnenwinkel τ_{OP} =180° als Zielmarke gesetzt. Das Verfahren ist stabil.

BEISPIEL: Gegeben sie wie in den vorhergehenden Beispielen die elliptische rechtläufige Satellitenbahn $\bar{a}_0$ = 12000.000 km, $\bar{e}_0$ = 0.2, $\bar{i}_0$ = 60°, $\bar{\Omega}_0$ = 0°, $\bar{\omega}_0$ = 5°, $\overline{M}_{00}$ = 0° zur Epoche t_0 : 2018-04-27 00:00: 0.00. Die Berechnung der Zeiten wird mit der Genauigkeit $\Delta t = \pm 10^{-3}\,\text{sec}$ durchgeführt. Die Tabelle gibt an wie viele Sonnen-synodische Satellitenumläufe seit der Epoche zurückgelegt wurden und wie viele Tage M vergangen sind. Nach dem Datum in U.T. für die Konjunktionen und Oppositionen wird die Lokalzeit im Subsatellitenpunkt angegeben. Wenn der Subsatellitenpunkt die geographische Länge λ hat, beträgt die lokale Sonnenzeit für diesen Meridian, wenn λ im Gradmaß gegeben ist,

$$T = \text{mod}\left(t + \lambda \times 240{,}86400\right) \quad . \tag{28.177}$$

Entsprechend zeigt Tabelle 28-13 bei Konjunktionen lokalen Mittag, bei Oppositionen lokale Mitternacht[1]. Die weiteren Spalten zeigen die geographischen wie die äquatorialen Koordinaten des Satelliten an. Die vorletzte Spalte enthält die zum jeweiligen Datum wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit. Zur Kontrolle wird in einer letzten Spalte der Sonnenwinkel für das jeweils erhaltene Datum berechnet. Bemerkenswert ist außerdem die Beobachtung, dass die Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen nur kaum von der berechneten mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit abweicht. Entsprechendes gilt auch für die Dauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Oppositionen. ◀

28.5.1.8 Bahndefinition aus mittlerem Äquator-bezogenem Sonnen-synodischem Umlauf

Ähnlich wie auch bei anderen Bewegungsbezügen kann bei Vorgabe der mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit eine *Kepler*bahn definiert werden. Da bei der Berechnung der säkularen Einflüsse durch das Erdfeld nur die mittleren *Kepler*elemente $\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}$ vorkommen, kann auch eines dieser Parameter bei Vorgabe der anderen beiden und der Umlaufzeit bestimmt werden. Wir wollen dies im Fall der großen Bahnhalbachse demonstrieren[2]. Die Sonnen-synodische Umlaufzeit $\overline{P}_S$ und die mittleren Elemente $\bar{e}_0, \bar{i}_0$ seien vorgegeben. Eine nullte Näherung kann durch Verzicht auf die säkularen Variationen der *Kepler*elemente aus Gleichung (28.165) (auf Seite 44) gefunden werden:

$$\overline{a}_S^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu}{\left(\frac{2\pi}{\overline{P}_S} + n_\odot\right)}} \quad . \tag{28.178}$$

Eine erste Korrektur kann genau wie in Abschnitt 24.3.4, Formel (24.61) gefunden werden:

$$\Delta\overline{a}_S^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{J_2 R_E^2}{\overline{a}_S\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\left[\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}^2}\right)\cos^2\bar{i} - \left(1+\sqrt{1-\bar{e}^2}\right) - 2\cos\bar{i}\right] + O\left(\overline{a}_S^{(0)} J_2^2\right) \quad . \tag{28.179}$$

Damit kann eine erste Näherung erhalten werden:

$$\overline{a}_S^{(1)} = \overline{a}_S^{(0)} + \Delta\overline{a}_S^{(1)} \quad . \tag{28.180}$$

---

[1] Die geringfügigen Abweichungen um etwa 2 Minuten können mit der wahren Sonnenbewegung erklärt werden. Die Ephemeride der Satellitenbewegung wurde analytisch mit Einschluss der periodischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) durch $\left(J_2, J_3, J_4\right)$ gerechnet.

[2] Die Bestimmung von Exzentrizität oder Inklination kann analog zu den Untersuchungen in Abschnitt 22.6 bzw. 23.3.5 hergeleitet werden.

Bezogen auf eine Epoche t_0 kann eine weitere Verbesserung iterativ mit Hilfe der überlagerten Funktion in Abhängigkeit vom Sonnenwinkel τ

$$fct\left(\overline{a_S}\right) \equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + \overline{P_S}; \overline{a_S}^{(\nu)}\right) - \tau\left(t_0; \overline{a_S}^{(\nu)}\right)\right] = 0 \quad \langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \qquad (28.181)$$

erhalten werden. An Stelle der mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit kann hier auch die wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit verwendet werden.

BEISPIEL: Ein Erdsatellit möge stets nach dem Zeitintervall P_S = 6000 sec in Konjunktion zur mittleren Sonne stehen. Vorgegeben seien die Exzentrizität $\overline{e}_0$ = 0.08 und die Bahninklination $\overline{i}_0$ = 60°. Die nullte Näherung nach Formel (28.178) beträgt $\overline{a_S}^{(0)}$ = 7135.75889 km, die Verbesserung mit Formel (28.179) $\Delta\overline{a_S}^{(1)}$ = -3.123377156 km lautet $\overline{a_S}^{(1)}$ = 7132.63552 km. Die Iteration (28.181) ergibt schließlich $\overline{a_S}$ = 7129.71266 km. Wird mit diesem Ergebnis die Sonnen-synodische Umlaufzeit unter Verwendung der Iteration (28.157) berechnet, ergibt sich P_S = 6000.00976562 km. Dies entspricht der vorgegebenen Rechengenauigkeit Δt= 0.001 sec. ◀

Die unterschiedlichen Definitionen der Sonnen-synodischen Umlaufzeit[1] wirken sich auch auf die Bahnauswahl etwa der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der Umlaufzeit aus. Dies wird untersucht am folgenden

BEISPIEL: Vorgegeben sei die wahre (oder gemittelte) Sonnen-synodische Umlaufzeit $P_S^{(0)}$ = 19800 sec. Mit diesem Wert ergibt Formel (28.178) für die große Bahnhalbachse die nullte Näherung $\overline{a}_0^{(0)}$ = 15812.107 km Die weiteren Verbesserungen sind in Tabelle 28-14 für die Startdaten t_1: 2019-04-24/14:00:0.0 und t_2: 2019-10-24/14:00:0.0 zusammengestellt um die Auswirkung der Zeitabhängigkeit zu demonstrieren. Für die Ephemeridenrechnung mit Hilfe des *Eckstein*schen analytischen Bahnmodells[2] werden die Modellparameter R_E = 6378.166 km, $\mu_{♁}$ = 398600.4418 km³/s² verwendet.

Es zeigt sich, dass die Korrektur $\Delta\overline{a}_0^{(2)}$ in den meisten Fällen über lange Zeiträume abnimmt. Wird die Berechnung der wahren synodischen Umlaufzeit P_S für einen Umlauf berechnet, ergibt sich mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse und dem entsprechenden Startzeitpunkt exakt (im Rahmen der zur Verfügung stehenden Rechengenauigkeit) zur Kontrolle die vorgegebene Umlaufzeit (dasselbe gilt für die wahre Umlaufzeit). Die Berechnung der großen Bahnhalbachse hängt somit in diesem Fall vom Startzeitpunkt ab. In Konsequenz muss auch die mittlere synodische Umlaufzeit vom Startzeitpunkt abhängen: Es ergeben sich mit den Ergebnissen in Zeile 1 von Tabelle 28-14: $\overline{P_S}(t_1)$ = 19800.552858 sec, $\overline{P_S}(t_2)$ = 19800.391702 sec.

Wird dagegen die Mittelung über eine großen Zeitraum (in der Tabelle über 1000 synodische Umläufe) durchgeführt, muss die in diesem Fall erhaltene große Bahnhalbachse von dem Wert abweichen, der bei Mittelung über einen einzigen Umlauf erhalten wird. Entsprechend weicht die gemittelte Sonnen-synodische Umlaufzeit im ersten Umlauf von dem vorgegebenen Wert $P_S^{(0)}$ ab, der zur

[1] siehe Abschnitt 28.5.1.4 auf Seite 46

[2] Zusammengestellt in Abschnitt 20.2 (Band III)

Mittelung über N_S Umläufe Grundlage war. Die entsprechenden abweichenden Werte sind in den Zeilen mit N_S = 1000 eingetragen. Diese Unterschiede sind auch in der roten Kurve in Bild 28-16 (auf Seite 60) zu erkennen.

N_S	$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	$\Delta\overline{a}_0^{(1)}$	$\Delta\overline{a}_0^{(2)}$	$\overline{a}_0(t_1)$[km]	$\overline{a}_0(t_2)$[km]	$P_S(t_1)$[s]	$P_S(t_2)$[s]
1	0.0	0°	5.571	-0.00075	15817.904	15817.819	19800.000	19800.000
1000	0.0	0°	5.571	-0.25341	15817.652	15817.498	19799.525	19799.398
1	0.0	60°	-1.393	-7.707	15803.235	15803.063	19800.000	19800.000
1000	0.0	60°	-1.393	-0.225	15810.644	15810.717	19814.822	19814.076
1	0.2	0°	5.983	1.142	15819.460	15819.404	19800.000	19800.000
1000	0.2	0°	5.983	0.366	15818.683	15818.501	19798.540	19798.302
1	0.2	60°	-1.503	-2.531	15808.300	15808.188	19800.000	19800.000
1000	0.2	60°	-1.503	-0.839	15809.992	15809.914	19803.181	19803.244
1	0.2	130°	0.023	-0.486	15824.512	15824.600	19800.000	19800.000
1000	0.2	130°	0.023	0.266	15825.265	15825.555	19801.412	19801.791

Tabelle 28-14: Berechnung der großen Bahnhalbachse aus einer vorgegebenen Sonnen-synodischen Umlaufzeit P_S, die Korrekturterme sind nur für den Zeitpunkt t_1 gerechnet, die endgültigen Ergebnisse für die zwei Zeiten t_1 und t_2

Es zeigt sich, dass die Korrektur $\Delta\overline{a}_0^{(2)}$ in den meisten Fällen über lange Zeiträume abnimmt.
Wird die Berechnung der wahren synodischen Umlaufzeit P_S für einen Umlauf berechnet, ergibt sich mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse und dem entsprechenden Startzeitpunkt exakt (im Rahmen der zur Verfügung stehenden Rechengenauigkeit) zur Kontrolle die vorgegebene Umlaufzeit (dasselbe gilt für die wahre Umlaufzeit). Die Berechnung der großen Bahnhalbachse hängt somit in diesem Fall vom Startzeitpunkt ab. In Konsequenz muss auch die mittlere synodische Umlaufzeit vom Startzeitpunkt abhängen: Es ergeben sich mit den Ergebnissen in Zeile 1 von Tabelle 28-14: $\overline{P_S}(t_1)$ = 19800.552858 sec, $\overline{P_S}(t_2)$ = 19800.391702 sec.

Wird dagegen die Mittelung über eine großen Zeitraum (in der Tabelle über 1000 synodische Umläufe) durchgeführt, muss die in diesem Fall erhaltene große Bahnhalbachse von dem Wert abweichen, der bei Mittelung über einen einzigen Umlauf erhalten wird. Entsprechend weicht die gemittelte Sonnen-synodische Umlaufzeit im ersten Umlauf von dem vorgegebenen Wert $P_S^{(0)}$ ab, der zur Mittelung über N_S Umläufe Grundlage war. Die entsprechenden abweichenden Werte sind in den Zeilen mit N_S = 1000 eingetragen. Diese Unterschiede sind auch in der roten Kurve in Bild 28-16 (auf Seite 60) zu erkennen.

In Tabelle 28-15 ist zusätzlich zu dem in Tabelle 28-14 verwendeten Bahnmodell eine säkulare Abnahme der großen Bahnhalbachse von 120 m pro (tropischem) Jahr angenommen. Infolge der Eigenbewegung der Sonne erhöht sich der Wert der Sonnen-synodischen Umlaufzeit während die *Hansen*sche Umlaufzeit verringert infolge der Abnahme der Bahnhalbachse. ◀

N_S	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\Delta\bar{a}_0^{(1)}$[km]	$\Delta\bar{a}_0^{(2)}$[km]	$\bar{a}_0$[km]	P_S[s]	$\dot{a}_s$[km/s]
1000	0.2	60°	-1.503	-0.801	15810.030	19803.251	-3.9×10^{-9}
1000	0.2	130°	0.023	0.305	15825.303	19801.484	-3.9×10^{-9}

Tabelle 28-15: Berechnung der großen Bahnhalbachse wie in Tabelle 28-14, jedoch unter der zusätzlichen Annahme einer säkularen Abnahme der großen Halbachse. Das Ergebnis ist nur für den Zeitpunkt t_1 berechnet.

28.5.2 Die Sonnen-synodische Bewegung in Bezug auf die Ekliptik

In der Zeitrechnung wie bei der Berechnung und Beobachtung von Satellitenbahnen ist es üblich, die Untersuchungen auf den Erdäquator zu konzentrieren. Allerdings könnte im Zusammenhang mit dem Bezug auf die Sonne auch die (mittlere) Sonnenbahn, also die Ekliptik, als Bezugsebene gewählt werden. Dies wird im vorliegenden Abschnitt andiskutiert.

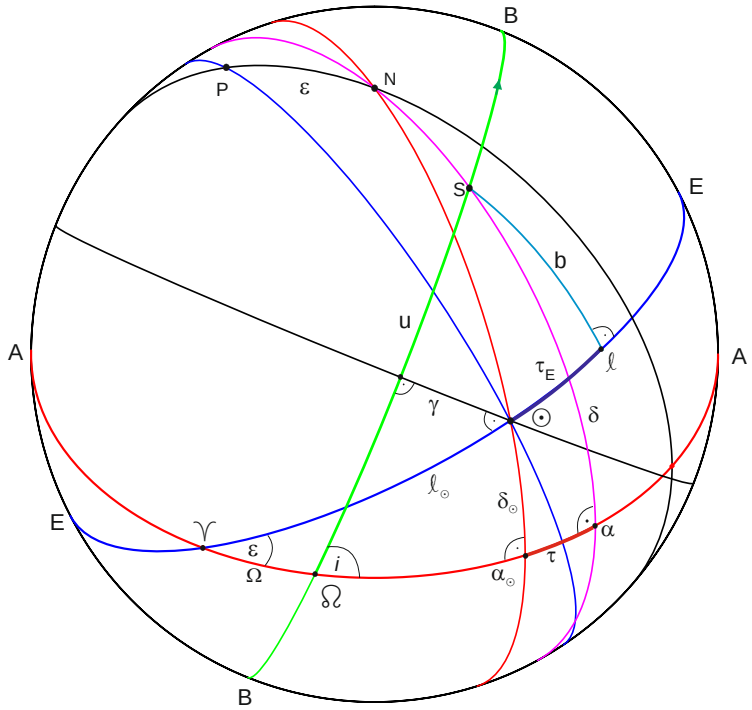


Bild 28-11: Die Sonnen-synodische Satellitenbewegung bei Bezug auf die Ekliptik, A-Äquator, E-Ekliptik, B-Bahnebene des Satelliten

Nach Bild 28-11 sei S der momentane Ort des Satelliten. Seine äquatorialen Koordinaten (α,δ) seien für einen gegebenen Zeitpunkt aus einer Ephemeridenrechnung bekannt. Seine ekliptikalen Koordinaten Länge l und Breite b können dann mit der momentanen Schiefe der Ekliptik ε berechnet werden aus[1]

$$\begin{aligned} \cos l\cos b &= \cos\alpha\cos\delta \\ \sin l\cos b &= \sin\alpha\cos\delta\cos\varepsilon+\sin\delta\sin\varepsilon \\ \sin b &= -\sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon+\sin\delta\cos\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{28.182}$$

[1] Formelsystem (8.71) in Abschnitt 8.2.2, Band II

Der momentane Ort der Sonne $\odot$ sei mit den ekliptikalen Koordinaten $(l_\odot, b_\odot)$ bekannt. Damit kann der Ekliptik-bezogene Sonnenwinkel

$$\tau_E := l - l_\odot \tag{28.183}$$

definiert werden. Mit seiner Hilfe kann die Ekliptik-bezogene Sonnen-synodische Umlaufzeit P_{SE} berechnet werden. In Analogie zu Gleichung (28.157) kann dazu die überlagerte Funktion

$$fct(P_{SE}; t_0) \equiv \sin\left(\tau_E\left[t_0 + P_{SE}\right] - \tau_E\left[t_0\right]\right) = 0 \tag{28.184}$$

verwendet werden. Der iterative Prozess kann wie in der Zuordnung (28.158) durch Vorgabe der *Kepler*schen oder der mittleren Äquator-bezogenen Umlaufzeit gestartet werden:

$$P_{SE}^{(0)} := \overline{P_K} \quad \text{oder} \quad P_{SE}^{(0)} := \overline{P_S} \quad . \tag{28.185}$$

Die Ekliptik-bezogene Sonnen-synodische Bewegung wird aus der Variation des Sonnenwinkels τ_E gebildet:

$$\dot{\tau}_E = \dot{l} - \dot{l}_\odot \quad . \tag{28.186}$$

Aus der Ephemeridenrechnung der Satellitenbahn können die Variationen der Rektaszension $\dot{\alpha}$ und der Deklination $\dot{\delta}$ als bekannt angenommen werden[1]. Die Variation der ekliptikalen Länge des Satelliten wird durch Differentiation der Transformationsformeln (28.182) gebildet[2]. Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{b}\cos b &= \dot{\alpha}\cos l\cos b\sin\varepsilon + \dot{\delta}\left[-\sin\alpha\sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\right] - \\ &\quad - \dot{\varepsilon}\left[\sin\alpha\cos\delta\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon\right] \\ \dot{l}\cos^2 b &= \dot{\alpha}\cos\delta\left[\sin\alpha\sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\right] + \dot{\delta}\cos\alpha\sin\varepsilon + \dot{\varepsilon}\cos\alpha\cos\delta\sin b \ . \end{aligned} \tag{28.187}$$

In der praktischen Anwendung wird es meistens genügen, die mittlere Schiefe der Ekliptik an Stelle der wahren zu verwenden und auch die Variation der Ekliptik $\dot{\varepsilon}$ zu vernachlässigen.

Die Variation der ekliptikalen Länge der Sonne $\dot{l}_\odot$ ist in den analytischen Ausdrücken (28.60) bekannt. Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird es genügen diesen Wert über die Variation der Mittelpunktsgleichung in der Entwicklung (28.87) (auf Seite 23) anzunähern. Falls eine exakte Ephemeride der Sonne in äquatorialen Koordinaten zur Verfügung steht, können die Variationen in Rektaszension $\dot{\alpha}_\odot$ und Deklination $\dot{\delta}_\odot$ (28.5) berechnet werden. In allen Fällen wird die Sonnenbewegung als geozentrisch aufgefasst: $\dot{\alpha}_\odot = \dot{\alpha}_{\odot g}$, $\dot{\delta}_\odot = \dot{\delta}_{\odot g}$. In diesem Fall können die Variationen der ekliptikalen Koordinaten der Sonne mit Hilfe der Gleichungen (28.187) berechnet werden.

Die Ekliptik-bezogene Sonnen-synodische Umlaufzeit wird dann berechnet aus dem Integral

$$P_{SE} = \int_{\tau_0}^{\tau_0+2\pi} \frac{1}{\dot{\tau}_E} d\tau_E \quad . \tag{28.188}$$

Einige BEISPIELE werden im Vergleich der verschiedenen Definitionen der Sonnen-synodischen Bewegungen in Abschnitt 28.5.4 zusammengestellt.

---

[1] Siehe dazu eventuell die Herleitungen in Abschnitt 24.2.1

[2] Siehe auch die Variationsformeln (8.73) in Abschnitt 8.2.2

28.5.3 Die Sonnen-synodische Bewegung bezogen auf Satellitenbahnebene

Eine dritte Möglichkeit zur Definition einer Sonnen-synodischen Satellitenbewegung und entsprechender Umlaufzeit ist der Bezug auf die Bahnebene des Satelliten. Der Satellit mit der äquatorialen Position $S(\alpha,\delta)$ hat im Bahnsystem die Position $S(u,0°)$, wenn u das Argument der Breite ist. Die Projektion der Sonne auf die Bahnebene treffe nach Bild 28-12 den Sonnenfußpunkt $S_\odot$, der vom aufsteigenden Bahnknoten die Distanz $u_\odot$ habe. Es sei wieder angenommen, dass Rektaszension $\alpha_\odot$ und Deklination $\delta_\odot$ der Sonne gegeben seien.

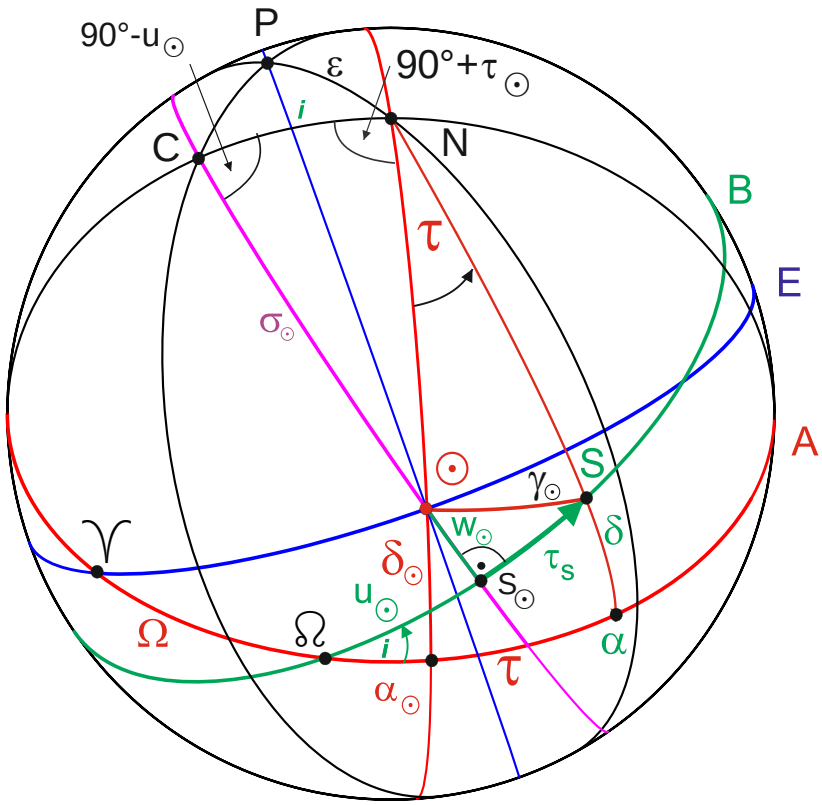


Bild 28-12: Der Sonnenwinkel auf Äquator A und längs der Satellitenbahn B, E - Ekliptik , S-Ort des Satelliten

Der Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot$ ist der Zwischenwinkel zwischen dem Pol C der Satellitenbahn B und der Sonne auf der Ekliptik E. Wenn i die Inklination der Satellitenbahn und Ω die Rektaszension des aufsteigenden Knotens der Bahnebene sind, hat der Pol der Bahn in äquatorialen Koordinaten den Richtungsvektor[1]

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{p}_1 \sin i \sin\Omega - \mathbf{p}_2 \sin i \cos\Omega + \mathbf{p}_3 \cos i \quad . \tag{28.189}$$

Mit dem geozentrischen Richtungsvektor der Sonne

$$\mathbf{r}_{\odot 0} = \mathbf{p}_1 \cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot + \mathbf{p}_1 \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot + \mathbf{p}_3 \sin\delta_\odot \tag{28.190}$$

kann $\sigma_\odot$ eindeutig berechnet werden:

$$\cos\sigma_\odot = \mathbf{c}_0 \cdot \mathbf{r}_{\odot 0} = -\sin(\alpha_\odot - \Omega)\cos\delta_\odot \sin i + \sin\delta_\odot \cos i \quad . \tag{28.191}$$

[1] Siehe etwa die Formeln (8.423) in Abschnitt 8.12.2 (Band II)

Die Projektion $S_\odot$ der Sonne auf die Satellitenbahn hat vom Ort der Sonne $\odot$ die Distanz $w_\odot = 90° - \sigma_\odot$. Die Satellitenbahn-bezogenen Koordinaten der Sonne $(u_\odot, w_\odot)$ können über das Dreieck $(C\odot N)$ berechnet werden mit den Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \cos u_\odot \cos w_\odot &= \cos(\alpha_\odot - \Omega)\cos\delta_\odot \\ \sin u_\odot \cos w_\odot &= \sin(\alpha_\odot - \Omega)\cos\delta_\odot \cos i + \sin\delta_\odot \sin i \\ \sin w_\odot &= -\sin(\alpha_\odot - \Omega)\cos\delta_\odot \sin i + \sin\delta_\odot \cos i \quad . \end{aligned} \tag{28.192}$$

Der Satellitenbahn-bezogene Solarwinkel wird dann definiert durch

$$\tau_S := u - u_\odot \quad . \tag{28.193}$$

Mit dessen Hilfe kann die Satellitenbahn-bezogene Sonnen-synodische Umlaufzeit P_{SS} wie in den vorstehenden Fällen mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct(P_{SS}; t_0) \equiv \sin\left(\tau_S[t_0 + P_{SS}] - \tau_S[t_0]\right) = 0 \tag{28.194}$$

berechnet werden. Der Start der Iteration kann wieder mit einer der folgenden Näherungen erfolgen

$$P_{SS}^{(0)} := \overline{P_K} \quad \text{oder} \quad P_{SS}^{(0)} := \overline{P_S} \quad . \tag{28.195}$$

Um diese Art der Sonnen-synodischen Bewegung näher zu untersuchen wird die Variation des Sonnenwinkels

$$\dot{\tau}_S = \dot{u} - \dot{u}_\odot \tag{28.196}$$

benötigt. Die Variation des Argumentes der Breite des Satelliten ist mit Hilfe der normalen Beschleunigung b_N aus Formel (11.79) (in Abschnitt 11.1.5, Band III) für eine gegebene Satellitenbahn bekannt:

$$\dot{u} = \dot{\zeta} - b_N \frac{r \sin u \cos i}{G \sin i} = \frac{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}}{r^2} - b_N \frac{r \sin u \cos i}{\sqrt{\mu a (1 - e^2)} \sin i} \quad . \tag{28.197}$$

Die Position der Sonne $(u_\odot, \gamma_\odot)$ hat mit den Transformationsformeln (28.192) die Variationen

$$\begin{aligned} \dot{w}_\odot \cos w_\odot = &-(\dot{\alpha}_\odot - \dot{\Omega})\cos\delta_\odot \cos(\alpha_\odot - \Omega)\sin i + \\ &+ \dot{\delta}_\odot\left[\sin(\alpha_\odot - \Omega)\sin\delta_\odot \sin i + \cos\delta_\odot \cos i\right] + \\ &-(i)^\bullet\left[\sin(\alpha_\odot - \Omega)\cos\delta_\odot \cos i + \sin\delta_\odot \sin i\right] \end{aligned} \tag{28.198}$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_\odot \cos w_\odot = &(\dot{\alpha}_\odot - \dot{\Omega})\cos\delta_\odot\left[\cos i \cos(\alpha_\odot - \Omega)\cos u_\odot + \sin(\alpha_\odot - \Omega)\sin u_\odot\right] + \\ &+ \dot{\delta}_\odot\left\{\cos(\alpha_\odot - \Omega)\sin\delta_\odot \sin u_\odot + \right. \\ &\qquad \left. + \left[-\sin(\alpha_\odot - \Omega)\sin\delta_\odot \cos i + \cos\delta_\odot \sin i\right]\cos u_\odot\right\} + \\ &+ (i)^\bullet\left[-\sin(\alpha_\odot - \Omega)\cos\delta_\odot \sin i + \sin\delta_\odot \cos i\right]\cos u_\odot \qquad \langle \sin w_\odot \neq 0 \quad . \end{aligned} \tag{28.199}$$

Wie im vorstehenden Abschnitt werden die Variationen der äquatorialen Positionswinkel der Sonne als bekannt und geozentrisch aufgefasst. Die Satellitenbahn-bezogene Sonnen-synodische Umlaufzeit wird dann berechnet aus dem Integral

$$P_{SS} = \int_{\tau_{S0}}^{\tau_{S0}+2\pi} \frac{1}{\dot{\tau}_S} d\tau_S \quad . \tag{28.200}$$

28.5.4 Uunterschiedliche Definitionen der Sonnen-synodischen Bewegung

Das Verhalten der Sonnen-synodischen Bewegung je nach Bezug ist sehr unterschiedlich. Um einen Eindruck für eventuelle Anwendungen zu vermitteln, werden einige Beispiele gerechnet. Als Bahn wird in allen Beispielen die *Kepler*bahn $\bar{a}_0 = 12000$ km, $\bar{e}_0 = 0.2$, $\bar{i}_0 = 60°$, $\bar{\Omega}_0 = 0°$, $\bar{\omega}_0 = 5°$, $\overline{M}_{00} = 0°$ verwendet. Der wechselseitige Verlauf ist abhängig vom jeweiligen Startdatum.

Bild 28-13 zeigt den Verlauf der Sonnenwinkel (τ, τ_E, τ_S) über einen synodischen Umlauf.

Bild 28-14 zeigt den Verlauf der Variationen $(\dot{\tau}, \dot{\tau}_E, \dot{\tau}_S)$ der Sonnenwinkel über einen synodischen Umlauf. Hier treten beträchtliche Unterschiede auf, die sich auch in Bild 28-15 im Verlauf der Sonnen-synodischen Umlaufzeiten über einen Umlauf, in Bild 28-16 im Verlauf von zwei Jahren zeigen.

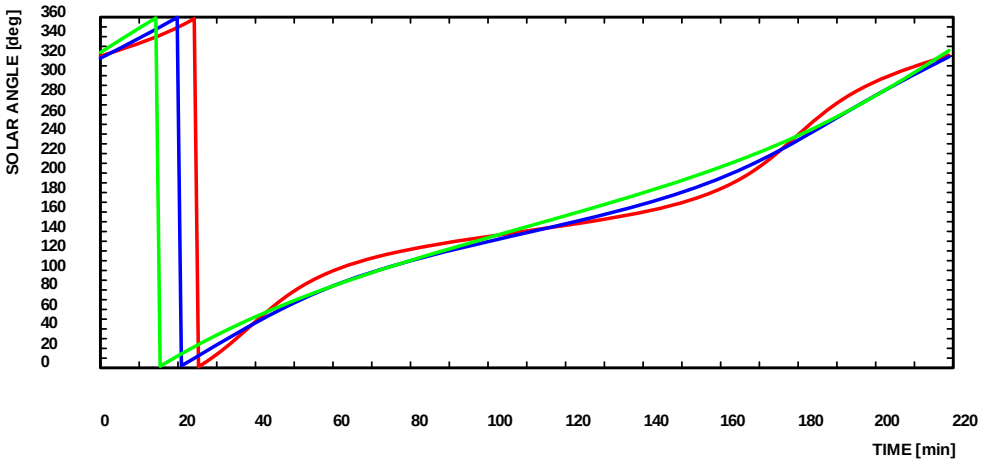


Bild 28-13: Sonnenwinkel der Bahn $\bar{a}_0 = 12000$ km, $\bar{e}_0 = 0.2$, $\bar{i}_0 = 60°$ im Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnen-synodischen Bewegung, der Ekliptik-bezogenen, sowie der auf die Satellitenbahn bezogenen Bewegung. Start Datum 2018-05-02,12h. rot: Bezug auf Äquator, blau: auf Ekliptik, grün: auf Satellitenbahn

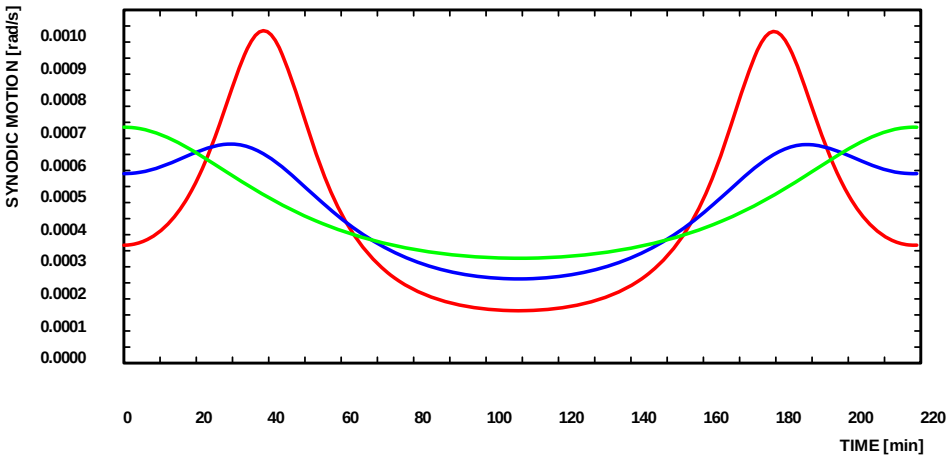


Bild 28-14: Variationen (Bewegungen) der Sonnenwinkel $\dot{\tau}, \dot{\tau}_E, \dot{\tau}_S$ der Bahn $\bar{a}_0 = 12000$ km, $\bar{e}_0 = 0.2$, $\bar{i}_0 = 60°$, im Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnen-synodischen Bewegung, der Ekliptik-bezogenen, sowie der auf die Satellitenbahn bezogenen Bewegung über einen Umlauf. Startdatum 2018-05-02/12h.

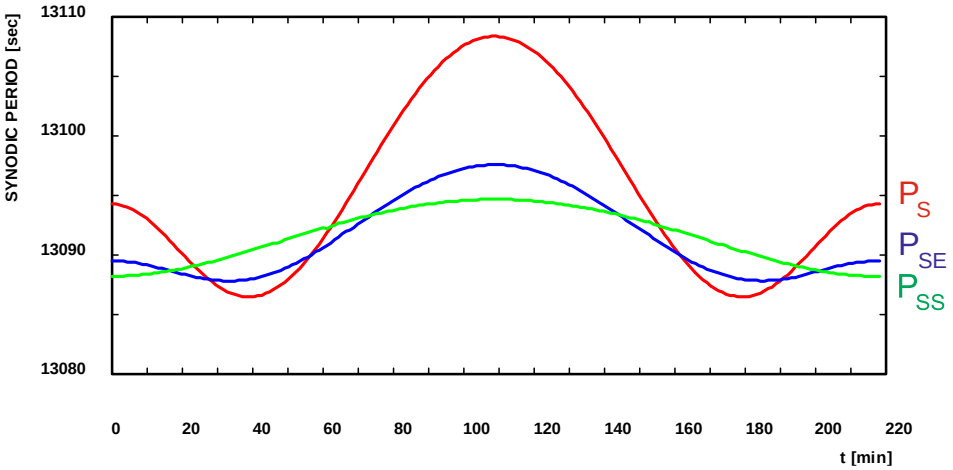


Bild 28-15: Satellitenbahn $\bar{a}_0$ = 12000 km, $\bar{e}_0$ = 0.2, $\bar{i}_0$ = 60°, Vergleich der Äquatorbezogenen Sonnen-synodischen Umlaufzeit P_S, mit der Ekliptik bezogenen P_{SE} und der Satellitenbahn-bezogenen P_{SS} über einen synodischen Umlauf. Startdatum 1983-01-25/14^h

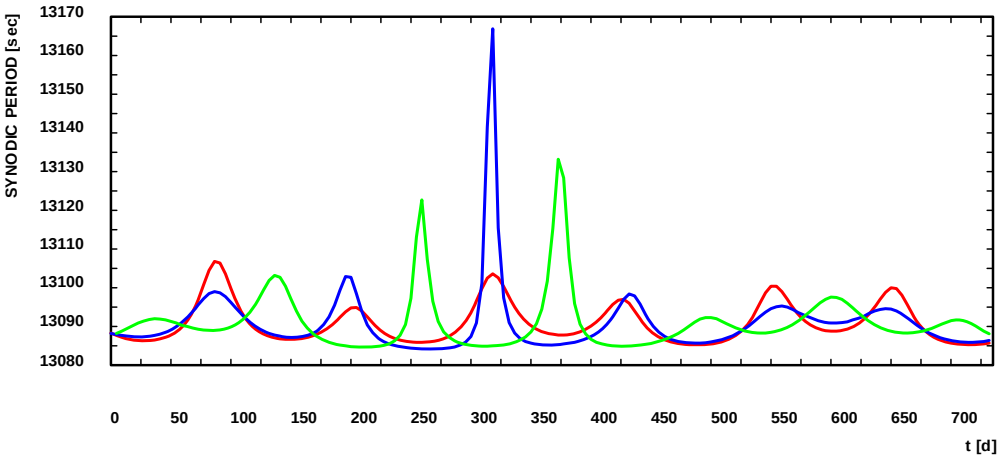


Bild 28-16: Satellitenbahn $\bar{a}_0$ = 12000 km, $\bar{e}_0$ = 0.2, $\bar{i}_0$ = 60°. Vergleich der Äquator-bezogenen Sonnen-synodischen Umlaufzeit P_S, mit der Ekliptik bezogenen P_{SE} und der Satellitenbahn-bezogenen P_{SS} über zwei Jahre, Beginn am 2018-05-02/12$^{h.}$. ◀

28.6 Satellitenbewegung in Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

Zur Durchführung einer Satellitenbahnanalyse insbesondere im Hinblick auf Erdbeobachtungssatelliten ist der Bezug auf die fiktive mittlere Sonne von erstrangiger Bedeutung. Erst darauf aufbauend wird in verfeinerten Untersuchungen der Bezug zur wahren Sonne und der wahren Sonnenbewegung hergestellt.

28.6.1 Satellitenbewegung in mittlerer Sonnenzeit

Die Einführung des Sonnenwinkels (28.120) erlaubt eine übersichtliche Aussage, welche lokale Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt auf der Erdoberfläche besteht. Dazu wird die momentane Rektaszension α des Satelliten auf die Rektaszension $\alpha_{\bar{\odot}}$ der fiktiven mittleren Sonnen bezogen. Dies führt auf den wahren Äquator-bezogenen Sonnenwinkel sowie die wahre Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne (vgl. Bild 28-17) nach Formel (28.147)

$$\tau_{\bar{\odot}} = \alpha - \alpha_{\bar{\odot}} \quad , \quad \dot{\tau}_{\bar{\odot}} = \dot{\alpha} - n_{\odot} \quad . \tag{28.201}$$

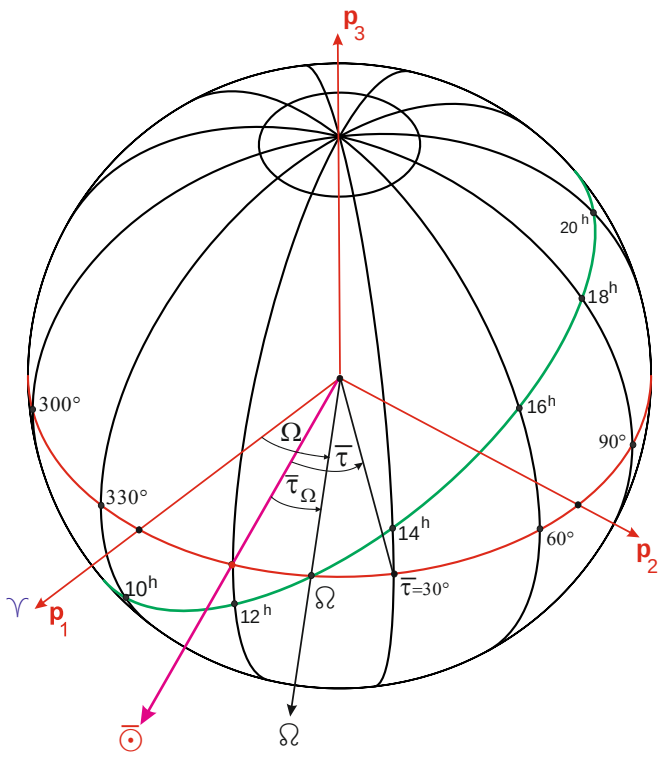


Bild 28-17: Bewegung eines Satelliten in mittlerer lokaler Sonnenzeit

Der mittlere Sonnenwinkel und die mittlere Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne haben nach Formel (28.149) die Darstellung, wenn nur der mittlere Satellitenzustand berücksichtigt werden soll,

$$\overline{\tau_{\odot}} = \bar{\alpha} - \alpha_{\odot} \quad , \quad \left(\overline{\tau_{\odot}}\right)^{\bullet} = \left(\tau_{\odot}\right)^{\bullet}_{s} = \dot{\tau}_{\odot s} = \dot{\bar{\alpha}} - n_{\odot} = \dot{\alpha}_{s} - n_{\odot} \quad . \tag{28.202}$$

α	$\bar{\tau}$	T	
$\alpha - \alpha_{\odot} = 180°$	$\bar{\tau} = \pm 180°$	$T = 0^h \mathrel{\hat{=}} 24^h$	Mitternacht
$\alpha < \alpha_{\odot}$	$\bar{\tau} < 0°$	$0^h < T < 12^h$	Nacht/Vormittag Satellit westlich der Sonne
$\alpha = \alpha_{\odot}$	$\bar{\tau} = 0°$	$T = 12^h$	Mittag
$\alpha > \alpha_{\odot}$	$\bar{\tau} > 0°$	$12^h < T < 24^h$	Nachmittag/Nacht Satellit östlich der Sonne

Tabelle 28-16: Übersicht über das zeitliche Verhalten eines Satelliten in mittlerer Sonnenzeit

Diese Größen sind für jeden Zeitpunkt t berechenbar, der wie üblich bei der Untersuchung von Erdsatelliten in Weltzeit (U.T.) gegeben ist. Bezogen auf den Meridian des Subsatellitenpunktes lautet die mittlere Ortssonnenzeit (für den wahren Satellitenort)

$$T_m := \tau_{\odot} + 12^h \quad . \tag{28.203}$$

Nach einem Sonnen-synodischen Umlauf hat der Satellit nach dieser Beziehung denselben Sonnenwinkel wie zu Beginn des Umlaufs: $\tau_{\overline{\odot}}(t_0) = \tau_{\overline{\odot}}\left(t_0 + \overline{P_S}\right)$. Der Satellit hat dann wieder dieselbe mittlere Ortssonnenzeit T_m.

Für $\tau_{\overline{\odot}} = 0^h$ befinden sich Satellit und fiktive mittlere Sonne in Konjunktion, die mittlere Ortssonnenzeit beträgt dann $T_m = 12^h$. Eine einfache Übersicht in Ergänzung zu Bild 28-17 liefert Tabelle 28-16.

28.6.2 Sonnen-synodische Satelliten-Bewegung in geographischen Koordinaten

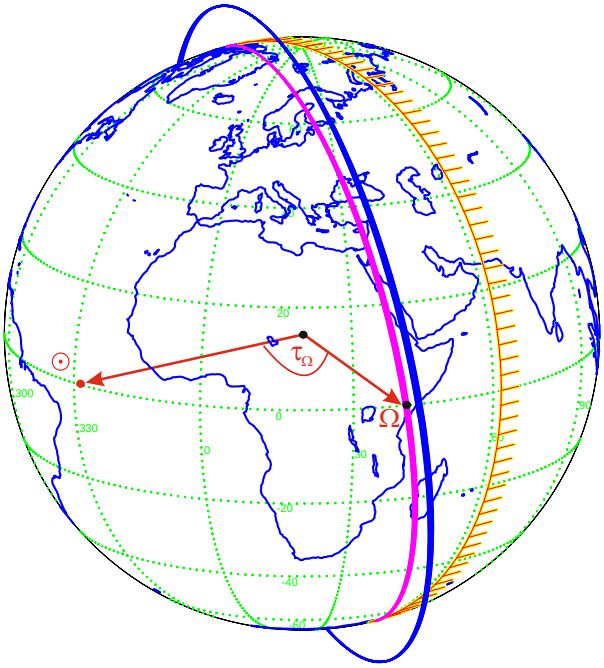


Bild 28-18: Zur Definition des Knoten-Sonnenwinkels zwischen subsolarem Punkt und dem aufsteigenden Knoten einer Satellitenbahn. Der Sonnenterminator ist eingezeichnet. Im Bild ist der Moment berücksichtigt, wenn die Sonne den Frühlingspunkt durchläuft

Der wahre Sonnenwinkel $\tau_{\overline{\odot}}$ bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne kann auf die Oberfläche der festen Erde bezogen werden. Dazu wird mit Hilfe der Sternzeit die Beziehung zwischen Rektaszension und geographischer Länge hergestellt[1]. Mit der Sternzeit Θ_G des Greenwich-Meridians bestehen unter Einschluss der geographischen Länge λ des Satelliten und $\lambda_{\overline{\odot}}$ des subsolaren Punktes der fiktiven mittleren Sonne die Relationen

$$\Theta_G = \alpha - \lambda = \alpha_{\overline{\odot}} - \lambda_{\overline{\odot}} \tag{28.204}$$

und somit den wahren Sonnenwinkel bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

$$\tau_{\overline{\odot}} = \alpha - \alpha_{\overline{\odot}} = \lambda - \lambda_{\overline{\odot}} \quad . \tag{28.205}$$

Entsprechend besteht im Ortsmeridian des Subsatellitenpunktes die mittlere Ortssonnenzeit

[1] siehe etwa die Beziehung (8.196) in Abschnitt 8.6.1, Band II

$$T_m = \lambda - \lambda_{\overline{\odot}} + 12^h \quad . \tag{28.206}$$

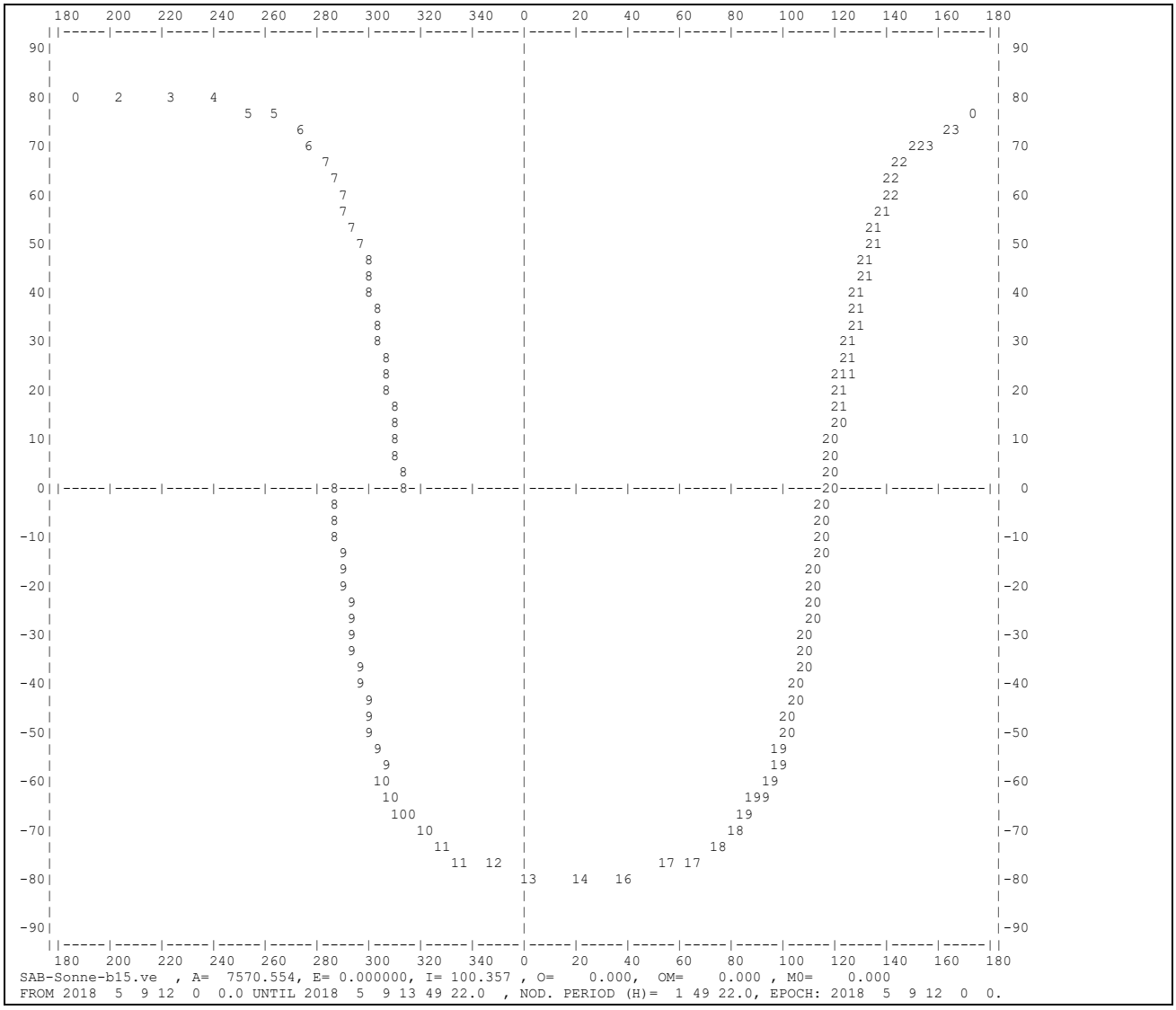


Bild 28-19: Markierung der mittleren Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt, Abszisse: geographische Länge, Ordinate: geodätische Breite, Auflösung 3°.333, Bahn: a= 7570.554 km, e= 0.0, i= 100°.35652 ◀

Hier sind die geographischen Längen wie auch gewöhnlich die Rektaszensionen im Stundenmaß gegeben. Für den 0-Meridian $\lambda = 0°$ ergibt sich aus dieser Beziehung insbesondere die mittlere Ortssonnenzeit T_G, die nichts anderes als die „Weltzeit“ (U.T.) ist:

$$T_G = t = -\lambda_{\overline{\odot}} + 12^h \quad . \tag{28.207}$$

Demnach ist die Weltzeit *t* der Stundenwinkel der fiktiven mittleren Sonne[1] $t = \vartheta$. Dies führt auf die Beziehung zwischen Weltzeit *t* und mittlerer Ortssonnenzeit eines Meridians mit der (östlichen) geographischen Länge λ

$$T_m = t + \lambda \quad . \tag{28.208}$$

BEISPIEL: Gegeben sei die Satellitenbahn $\overline{a}_0 = 7570.554$ km, $\overline{e}_0 = 0.0$, $\overline{i}_0 =$ 100°.35652, Epoche: 2018-05-09/12^h. Die mittlere Knoten-Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne (sie kann

[1] siehe etwa in Abschnitt 8.4.1, Formel (8.121), Band II

auch als *säkulare* Knoten-Sonnendrift bezeichnet werden) beträgt pro Tag $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = \dot{\Omega}_s - n_\odot = -0°.0049/d$, ein mittlerer drakonitischer Umlauf $\overline{P_d}$ = 6525.028 s, die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}\ \overline{P_d} = -0°.000372$. In Bild 28-19 ist die mittlere lokale Sonnenzeit bezogen auf den Meridian durch den Subsatellitenpunkt in geographischen Koordinaten mit einer Winkelauflösung von $3°1/3$ aufgetragen. Damit erhält man einen Überblick über die Verteilung der Lokalzeit im Verlaufe eines drakonitischen Umlaufs.

28.6.3 Bahnauslegung aus mittlerem Sonnenwinkel und mittlerer Sonnendrift

Die in den vorstehenden Abschnitten entwickelten Formelsysteme erweisen sich als fruchtbar bei der Lösung von Problemen der Bahnauslegung von Erdsatellitenbahnen, insbesondere bei Bezug auf die Erdoberfläche (Erdbeobachtungssatelliten).

In allen den im Folgenden behandelten Aufgabenstellungen seien die mittleren Epoche-Bahnparameter große Bahnhalbachse $\overline{a_0}$, Exzentrizität $\overline{e_0}$, Inklination $\overline{i_0}$, (eventuell bei elliptischen Bahnen) das Argument des Perigäums $\overline{\omega_0}$ bekannt. Die Stellung des Satelliten in Bezug auf die Sonne zu einem bestimmten (Epoche-) Zeitpunkt t_0 definiert die Orientierung der Bahn durch Auswahl der Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\overline{\Omega_0}$ sowie bei elliptischen Bahnen die mittlere mittlere Epoche-Anomalie $\overline{M_{00}}$, alternativ bei kreisförmigen Bahnen das mittlere Argument des Perigäums $\overline{\omega_0}$.

28.6.3.1 Knoten und mittlere Anomalie bei Knotendurchgang

Der Knotenüberflug durch den aufsteigenden Knoten einer Satellitenbahn erfolge zum Zeitpunkt t_Ω über dem Ort mit der geographischen Länge λ_Ω. Die mittleren Bahnelemente $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ seien vorgegeben. Die Aufgabenstellung lautet: Wie ist die Bahnebene im Raum orientiert (Bestimmung von $\bar{\Omega}_0$), welche Epochestellung hat der Satellit (Bestimmung von $\overline{M_{00}}$), zu welcher mittleren Ortssonnenzeit erfolgt der Knotenüberflug?

Die mittlere Ortssonnenzeit wird nach Formel (28.208) berechnet aus

$$T_\Omega = t_\Omega + \frac{\lambda_\Omega}{15} \quad [h] \ , \tag{28.209}$$

wenn λ_Ω im Gradmaß gegeben ist. Da zum Zeitpunkt t_Ω auch die zugehörige Sternzeit $\Theta_G\left(t_\Omega\right)$ für den Meridian durch Greenwich berechnet werden kann[1], ist auch die Rektaszension des aufsteigenden Knotens für diesen Zeitpunkt bekannt aus[2]

$$\Omega\left(t_\Omega\right) = \Theta_G\left(t_\Omega\right) + \lambda_\Omega \quad \text{[Grad]} \quad . \tag{28.210}$$

Für eine Kreisbahn $\left(\bar{e}_0 = 0.0, \overline{M_{00}} = 0°.0\right)$ kann das Argument des Perigäums zu $\bar{\omega}_0\left(t_\Omega\right) = 0°.0$ gesetzt werden. Im Fall einer elliptischen Bahn sei $\bar{\omega}_0\left(t_\Omega\right) \neq 0°.0$ vorgegeben. Da im Fall des

[1] etwa mit Formel (8.130) in Abschnitt 8.4.2 (Band II)

[2] etwa mit Formel (8.196) in Abschnitt 8.6.1 (Band II), wenn die Rektaszension α durch Ω ersetzt wird

Knotenüberflugs das Argument der Breite den Wert $u_\Omega = 0°.0$ annimmt, wird aus der Definitionsgleichung $u = \upsilon + \omega$ die wahre Anomalie bei Knotendurchgang erhalten:

$$\upsilon_\Omega = \upsilon(t_\Omega) = -\omega(t_\Omega) \quad . \tag{28.211}$$

Die zugehörige exzentrische Anomalie $E_\Omega = E(t_\Omega)$ kann etwa mit Hilfe der *Kepler*-Formeln[1] (10.24) erhalten werden:

$$\begin{aligned} r_\Omega = r(t_\Omega) &= \frac{\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)}{1+\bar{e}_0\cos\upsilon_\Omega} \\ \bar{a}_0\cos E_\Omega &= r_\Omega\cos\upsilon + \bar{a}_0\,\bar{e}_0 \\ \bar{a}_0\sin E_\Omega &= \frac{r_\Omega\sin\upsilon_\Omega}{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}} \quad . \end{aligned} \tag{28.212}$$

Die gesuchte mittlere Anomalie bei Knotenüberflug, sie ist hier gleich der Epocheanomalie, folgt mit Hilfe der *Kepler*-Gleichung aus

$$\overline{M_0}(t_\Omega) = E_\Omega - \overline{e_0}\sin E_\Omega \quad . \tag{28.213}$$

Als Zusatzaufgabe soll untersucht werden, wann der Satellit das erste Perigäum nach dem gegebenen Knotendurchgang durchfliegt. Gesucht ist die Perigäumsdurchgangszeit t_P. Da im Perigäum die mittlere Anomalie den Wert $M(t_P) = 0°.0$ hat, kann t_P in Folge der Beziehung (22.16) mit der Gleichung[2]

$$\begin{aligned} 0°.0 = \overline{M_0}(t_\Omega) + \left[(M_0)^{\bullet}_s + \overline{n_K}[t_\Omega] + \dot{n}_{Ks}[t_\Omega](t_P - t_\Omega)\right](t_P - t_\Omega) + \\ + \delta M_0[t_P, t_\Omega] + \delta n_K[t_P, t_\Omega](t_P - t_\Omega) \end{aligned} \tag{28.214}$$

berechnet werden. Bei Verwendung eines beliebigen Bahnmodells, das alle Einflüsse („Störungen“) auf $(M_0)^{\bullet}_s$, δM_0 und δn_K enthält, kann diese Gleichung nur iterativ gelöst werden. Eine Anfangslösung für die Iteration kann aus diesem Ansatz bei Vernachlässigung der Variationen infolge des Luftwiderstandes in $\dot{n}_{Ks}$ und der periodischen Variationen δM_0 und δn_K gefunden werden:

$$t_P^{(0)} := t_\Omega - \frac{\overline{M_0}(t_\Omega)}{\overline{n_a}} \quad . \tag{28.215}$$

Hier ist $\overline{n_A} = \overline{n_K} + (M_0)^{\bullet}_s$ die mittlere anomalistische mittlere Bewegung[3].

Wenn an Stelle der mittleren Anomalie $\overline{M_0}(t_\Omega)$ die Perigäumsdurchgangszeit t_P vorgegeben ist, kann die mittlere Epocheanomalie bei Knotenüberflug näherungsweise aus (28.215) oder bei Kenntnis der benötigten Variationen exakt aus (28.214) berechnet werden. Eine verbesserte Lösung kann erhalten werden mit der überlagerten Funktion

$$fct\left[t_\Omega^{(\nu)}\right] \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_\Omega^{(\nu)}\right) + \omega\left(t_\Omega^{(\nu)}\right)\right] = 0 \qquad \langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \quad . \tag{28.216}$$

---

[1] in Abschnitt 10.1.3 (Band III)

[2] in Abschnitt 22.2.2

[3] siehe in Abschnitt 22.2.2, insbesondere Formel (22.35)

Das zusammenfassende Ergebnis lautet:

- *Knotenlänge λ_Ω und Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω sind bei gegebener Knotendurchgangszeit t_Ω äquivalente Größen. Aus t_Ω können neben der mittleren Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\bar{\Omega}_0$ auch die mittlere Epocheanomalie $\overline{M_0}(t_\Omega)$ bestimmt werden, sofern die übrigen Bahnelemente $(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0])$ bekannt sind.* ◄

Ein Korollar zur vorstehenden Aufgabenstellung: Der Satellit befinde sich zum Zeitpunkt t_Ω im aufsteigenden Knoten zur Sonnenzeit T_Ω. Die Bahnparameter $(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0])$ seien vorgegeben. Wo befindet sich der Satellit im festen bzw. im beweglichen Äquatorsystem, d.h. wie lauten λ_Ω sowie Ω, welches ist die Anfangsstellung des Satelliten?

Mit der Berechnung von λ_Ω aus (28.210) ist die Aufgabenstellung sofort auf die vorstehende Aufgabe zurückgeführt, wonach auch $\bar{\Omega}_0$ und $\overline{M_{00}}$ berechenbar sind. Das Ergebnis lautet:

- *Aus Knotendurchgangszeit t_Ω und mittlerer Ortssonnenzeit T_Ω können die (mittleren) Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\overline{M_{00}}$ (bzw. t_P) umkehrbar eindeutig berechnet werden, vorausgesetzt die übrigen vier Bahnparameter $(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0])$ sind bekannt.* ◄

28.6.3.2 Startpunkt in beliebigen geographischen Koordinaten

Ein Satellit möge sich zum Zeitpunkt *t* über dem Subsatellitenpunkt mit den geographischen Koordinaten (östliche) geographische Länge λ und geodätische Breite φ befinden. Außerdem sei vorgegeben, ob dieser Punkt in Nord-Süd oder Süd-Nord-Richtung überflogen werden soll. Die Bahnparameter $(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0])$ seien bekannt. Wie ist die Bahnebene im Raum orientiert (bestimme von Ω), welches ist die Epochestellung (bestimme $\overline{M_{00}}$ oder $\bar{\omega}_0$ bzw. t_P)?

Der gegebene Zeitpunkt werde als Epochezeitpunkt angenommen: $t_0 = t$. Zur Lösung werde zunächst die Deklination δ (die in diesem Fall bei Bezug auf die Erdoberfläche gleich der geozentrischen Breite φ' ist) mit Formel (8.193) berechnet[1]

$$\tan\delta = (1-f)^2 \tan\varphi \quad . \tag{28.217}$$

Hier muss die Bedingung

$$|\delta| \le \bar{i}_0 \tag{28.218}$$

erfüllt sein, da sonst die Aufgabe nicht lösbar ist.

Im Fall $\delta = 0°$, liegt der Startpunkt im Knoten der Bahn, was im vorherigen Abschnitt untersucht wurde.

Zum gegebenen Zeitpunkt $t = t_0$ ist die Sternzeit Θ_G für den Greenwich-Meridian berechenbar und somit auch die Rektaszension

$$\alpha(t_0) = \Theta_G(t_0) + \lambda \quad . \tag{28.219}$$

[1] in Abschnitt 8.6.1 (Band II)

Im Fall einer Äquatorbahn $\left(\sin \bar{i}_0 = 0.0\right)$, kann ohne Einschränkung $\Omega(t) = \alpha(t)$ gesetzt werden und in gleicher Weise für das Argument der Breite $u = 0°$.

Wenn dagegen $\bar{i}_0 \neq 0°$, entspricht die vorgegebene Überflugrichtung der Größe[1]

$$\sigma_u := \operatorname{sgn}(\cos u) = \operatorname{sgn}\left[\cos\left(\alpha - \Omega\right)\right] \quad . \tag{28.220}$$

Damit können das Argument der Breite und die knotenbezogene Rektaszension eindeutig berechnet werden aus[2]

$$\begin{aligned}
\sin u(t) &= \frac{\sin \delta}{\sin \bar{i}_0} \\
\cos u(t) &= \operatorname{sgn}(\cos u)\sqrt{1 - \sin^2 u(t)} \\
\cos\left[\alpha(t) - \Omega(t)\right]\cos\delta &= \cos u(t) \\
\sin\left[\alpha(t) - \Omega(t)\right]\cos\delta &= \sin u(t)\cos \bar{i}_0 \quad .
\end{aligned} \tag{28.221}$$

Die gesuchte Rektaszension des aufsteigenden Knotens ist $\bar{\Omega}_0 := \Omega(t)$.

Im Fall einer Kreisbahn $\bar{e}_0 = 0.0$ kann der gegebene Überflugpunkt (λ, φ) als (Pseudo-) Perigäum aufgefasst werden. Da der gegebene Zeitpunkt t als Epoche verstanden werden kann $t_0 = t$, ist die mittlere Anomalie zur Epoche durch $\overline{M_0} = \bar{M}(t_0) = 0°$ bestimmt. Da in diesem Fall auch die wahre Anomalie $\upsilon = 0°$ ist, ist das Argument der Breite bekannt aus $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}(t_0) = u - \upsilon = u$.

Im elliptischen Fall muss dagegen $\bar{\omega}_0$ vorgegeben sein. Die wahre Anomalie kann aus $\upsilon = u - \bar{\omega}_0$ berechnet werden, die exzentrische Anomalie E entsprechend (28.212) aus

$$\begin{aligned}
r(t_0) &= \frac{\bar{a}_0\left(1 - \bar{e}_0^2\right)}{1 + \bar{e}_0 \cos \upsilon(t_0)} \\
\bar{a}_0 \cos E(t_0) &= r(t_0)\cos \upsilon(t_0) + \bar{a}_0 \bar{e}_0 \\
\bar{a}_0 \sin E(t_0) &= \frac{r(t_0)\sin \upsilon(t_0)}{\sqrt{1 - \bar{e}_0^2}} \quad .
\end{aligned} \tag{28.222}$$

Die gesuchte mittlere Anomalie zur Epoche $t_0 = t$ folgt aus der *Kepler*-Gleichung

$$\overline{M_0}(t_0) = \overline{M_{00}} = E(t_0) - \overline{e_0}\sin E(t_0) \quad . \tag{28.223}$$

Die Satellitenbahn ist aus den gegebenen Bahnparametern eindeutig bestimmt. Weitere im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse interessierende Aussagen lassen sich in diesem Fall elementar folgern:

Die Perigäumsdurchgangszeit t_P kann wegen $M(t_P) = 0°$ analog Beziehung (28.214) durch iterative Auflösung der Gleichung

[1] wie etwa aus Bild 28-1 auf Seite 27 sofort ablesbar ist

[2] siehe etwa die Beziehungen (24.18) in Abschnitt 24.2.1

$$0°.0 = \overline{M_0}(t_0) + \left[(M_0)^{\bullet}_s + \overline{n_K}[t\ ] + \dot{n}_{Ks}[t_0](t_P - t_0) \right](t_P - t_0) + \\ + \delta M_0[t_P, t_0] + \delta n_K[t_P, t_0](t_P - t_0) \tag{28.224}$$

mit der Anfangslösung

$$t_P^{(0)} := t_0 - \frac{\overline{M_0}(t_0)}{\overline{n_a}} \tag{28.225}$$

berechnet werden. Die iterative Bearbeitung wird durchgeführt mit der überlagerten Funktion

$$fct(t_P) \equiv \sin\left[M\left(t_P^{(\nu)}\right) \right] = 0 \quad \langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \quad . \tag{28.226}$$

Die Knotendurchgangszeit t_Ω wird benötigt als der Zeitpunkt, wann der „Einschuss“ des Satelliten in seine Bahn erfolgen muss, um den vorgegebenen Ort (λ, φ) zum gegebenen Zeitpunkt $(t = t_0)$ überfliegen zu können. Da bei Knotendurchgang das Argument der Breite verschwindet, erhält man als erste Bedingung zur Berechnung von t_Ω

$$\upsilon(t_\Omega) = -\omega(t_\Omega) \quad . \tag{28.227}$$

Das Argument des Perigäums bei Knotendurchgang kann bei bekanntem Bahnmodell zur noch unbekannten Knotendurchgangszeit berechnet werden aus

$$\omega(t_\Omega) = \overline{\omega}(t_0) + \dot{\omega}_s(t_\Omega - t_0) + \delta\omega[t_\Omega, t_0] \quad . \tag{28.228}$$

In analoger Weise wird die mittlere Anomalie bei Knotendurchgang erhalten aus

$$M(t_\Omega) = \overline{M_0}(t_0) + \overline{n_A}(t_\Omega - t_0) + \delta M \quad . \tag{28.229}$$

Bei Verwendung eines analytischen Bahnmodells für Erdsatelliten sind $\dot{\omega}_s$ und $(M_0)^{\bullet}_s$ aus Abschnitt 20.2.1 (Band III) bekannt, entsprechend auch die periodischen Variationen im Rahmen von Abschnitt 20.2. Die *Kepler*sche mittlere Bewegung (in der anomalistischen mittleren Bewegung nach (28.215)) ist mit den Eingabedaten bekannt: $\overline{n_K} = \sqrt{\mu / \overline{a}_0^3}$. Unter der Annahme, dass die Knotendurchgangszeit bekannt sei, kann die exzentrische Anomalie $E(t_\Omega)$ analog den Formeln (28.222) berechnet werden:

$$\begin{aligned} r(t_\Omega) &= \frac{\overline{a}_0\left(1 - \overline{e}_0^2\right)}{1 + \overline{e}_0 \cos\upsilon(t_\Omega)} \\ \overline{a}_0 \cos E(t_\Omega) &= r(t_\Omega)\cos\upsilon(t_\Omega) + \overline{a}_0\,\overline{e}_0 \\ \overline{a}_0 \sin E(t_\Omega) &= \frac{r(t_\Omega)\sin\upsilon(t_\Omega)}{\sqrt{1 - \overline{e}_0^2}} \quad . \end{aligned} \tag{28.230}$$

Dann lautet die *Kepler*gleichung entsprechend

$$M(t_\Omega) = E(t_\Omega) - \overline{e}_0 \sin\left[(t_\Omega)\right] \quad . \tag{28.231}$$

Dann kann t_Ω mit Hilfe der Beziehung (28.229) direkt berechnet werden aus

$$t_\Omega = t_0 + \frac{E(t_\Omega) - \overline{e}_0 \sin\left[E(t_\Omega)\right] - \overline{M_0}(t_0) - \delta M[t_\Omega, t_0]}{\overline{n_A}} \quad . \tag{28.232}$$

Die Bearbeitung des iterativen Prozesses kann durchgeführt werden mit der überlagerten Funktion

$$fct(t_\Omega) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_\Omega^{(\nu)}\right) + \omega\left(t_\Omega^{(\nu)}\right) \right] = 0 \quad \langle \nu = 0, 1, 2, 3, \cdots \quad . \tag{28.233}$$

Eine Anfangslösung kann gefunden werden, wenn die Variationen im Argument des Perigäums vernachlässigt werden:

$$\upsilon\left(t_\Omega^{(0)}\right) := \omega(t_0) \quad . \tag{28.234}$$

Je nach verwendetem Bahnmodell ist die Knotendurchgangszeit t_Ω auf den mittleren Knoten oder den wahren Knoten bezogen. Die Genauigkeit kann verbessert werden, wenn zur Lösung der Funktion (28.233) ein numerisches Ephemeridenprogramm eingesetzt wird.

Die Rektaszension des aufsteigenden Knotens im Moment des Knotenüberflugs errechnet sich aus

$$\Omega(t_\Omega) = \bar{\Omega}(t_0) + \dot{\Omega}_s(t_\Omega - t_0) + \delta\Omega[t_\Omega, t_0] \quad , \tag{28.235}$$

die entsprechende geographische Länge wegen der Beziehung (28.219) aus

$$\lambda_\Omega = \lambda(t_\Omega) = \Omega(t_\Omega) - \Theta_G(t_\Omega) \quad . \tag{28.236}$$

Das Verfahren lässt sich in analoger Weise auch für den absteigenden Knoten und prinzipiell für jedes gewünschte Argument der Breite einsetzen.

Als Ergebnis kann zusammengefasst werden:

- *Überfliegt ein Satellit zu gegebenem Zeitpunkt* t_0 *den Subsatellitenpunkt* (λ, φ) *in gewünschter Überflugrichtung, so sind die mittleren Bahnparameter* $\bar{\Omega}_0$ *und* $\overline{M_{00}}$*, bzw. die Perigäumsdurchgangszeit* t_P *in umkehrbar eindeutiger Weise bestimmt, sofern die anderen mittleren* Kepler*elemente* $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ *vorgegeben sind.*◀

Als Korollar werde der für die Auslegung von Erdbeobachtungssatelliten besonders interessanten Fall untersucht, bei dem der geographische Ort (λ, φ) zur mittleren lokalen Sonnenzeit *T* überflogen werden soll. Diese ist nötig um bestimmte Gebiete bei gewünschten Sonneneinstrahlungen beobachten zu können.

Die mittleren *Kepler*elemente $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ seien vorgegeben. Wie im vorhergehenden Fall sollen die mittleren Keplerelemente $\bar{\Omega}_0$ und $\overline{M_{00}}$, bzw. die Perigäumsdurchgangszeit und eventuell das mittlere Argument des Perigäums bestimmt werden.

Mit der Sonnenzeit T und der geographischen Länge λ ist wegen Beziehung (28.208) sofort die Weltzeit

$$t = t_0 = T - \lambda \tag{28.237}$$

berechenbar. Damit ist die Aufgabenstellung auf die zuvor behandelte Herleitung zurückgeführt:

- *Überfliegt ein Satellit zur Ortssonnenzeit T den Subsatellitenpunkt* (λ, φ) *in gewünschter Überflugrichtung, so sind die mittleren Bahnparameter* $\bar{\Omega}_0$ *und* $\overline{M_{00}}$*, bzw. die Perigäumsdurchgangszeit* t_P *in umkehrbar eindeutiger Weise bestimmt, sofern die anderen mittleren Keplerelemente* $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ *vorgegeben sind.*◀

BEISPIEL: Es sei die kreisförmige Bahn mit der mittleren großen Halbachse $\bar{a}_0 = 7000\,\text{km}$ vorgegeben. In Tabelle 28-17 werden für verschiedene Inklinationen und geographische Positionen sowie

verschiedene Überflugrichtungen die mittleren Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\bar{\omega}_0$ berechnet. Da die mittlere Bahn als kreisförmig angenommen wurde, hat die mittlere Epocheanomalie in allen Fällen den Wert $\overline{M_{00}} = 0°.0$. Als Epochezeit wurde das Datum 1978-09-09/00:00:0.0 gewählt.

Vorgabe				Ergebnis	
Inklination	Überflugrichtung	λ	φ	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0$
70°	S-N	10°	50°	329°.093	54°.384
70°	S-N	10°	-50°	20°.138	305°.616
70°	N-S	10°	-50°	149°.093	234°.384
70°	N-S	10°	50°	200°.138	125°.616
96°.9	S-N	10°	50°	2°.896	50°.313
96°.9	S-N	10°	-50°	346°.335	309°.687
96°.9	N-S	10°	-50°	182°.896	230°.313
96°.9	N-S	10°	50°	166°.335	129°.687

Tabelle 28-17: Beispiel zur Berechnung der Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ und $\bar{\omega}_0$ aus vorgegebenem Überflug über einer geographischen Position mit vorgegebener Überflugrichtung ◀

28.6.3.3 Startpunkt für Bahn aus Sonnenwinkel und Breitenkreis

Ein Satellit mit den vorgegebenen Bahnparametern $\left(\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]\right)$ habe an einem bestimmten Zeitpunkt $t = t_0$ den mittleren auf den Erdäquator bezogenen Sonnenwinkel $\bar{\tau}$ und befinde sich über einem Ort der geodätischen Breite φ. Außerdem sei bekannt, ob sich der Satellit im auf- oder absteigenden Bahnast seiner Bahn befinde $\left[\sigma_u = \operatorname{sgn}(\cos u) = \operatorname{sgn}(\cos(\alpha - \Omega))\right]$. Wo liegt zu diesem Zeitpunkt der aufsteigende Knoten, wie groß ist die mittlere Epocheanomalie, bzw. wie groß ist bei kreisförmigen Bahnen das mittlere Argument der Breite, das dann als Argument des Perigäums gewählt werden kann?

Zum Zeitpunkt *t* ist die Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$ bekannt[1]. Somit errechnet sich die momentane Rektaszension des Satelliten mit Formel (28.120) aus

$$\alpha(t_0) = \bar{\tau} + \alpha_{\bar{\odot}} \quad . \tag{28.238}$$

Die geodätische Breite ist mit Formel (28.217) der Deklination δ zugeordnet. Somit kann mit den Formeln (28.221) die knotenbezogene Rektaszension $\alpha_K = \alpha(t_0) - \bar{\Omega}(t_0)$ berechnet. Mit (28.238) ist unmittelbar die mittlere Rektaszension des aufsteigenden Knotens zur Epoche t_0 bekannt: $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}(t_0) = \alpha_K - \alpha(t_0)$. Die weitere Berechnung von $\overline{M_{00}}$, bzw. t_P und eventuell $\bar{\omega}_0$ erfolgt wie in Abschnitt 28.6.3.2.

[1] Abschnitt 28.2.1 auf Seite 22

BEISPIEL: Eine kreisförmige Bahn mit mittlerer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 67563.424 km und mittlerer Inklination $\bar{i}_0$ = 96°93663 sei definiert beim Süd-Nord-Überflug des Breitenkreises $\varphi = -50°$ durch den mittleren Äquator-bezogenen Sonnenwinkel $\bar{\tau} = 33°$. Dieser Vorgang finde zum Zeitpunkt t=1978-09-20/17:01:30.3 statt. Die zu bestimmenden mittleren *Kepler*elemente ergeben sich zu: $\bar{\Omega}_0 = 96°.9951$, $\bar{\omega}_0 = 309°.686879$, $\overline{M_{00}} = 0°.0$. ◄

In Ergänzung zu dieser Aufgabe wird der Bezug auf die wahre Sonne mit Hilfe des wahren Sonnenwinkels $\tau = \alpha - \alpha_\odot$ untersucht. Der Bezug zur wahren Sonne ist wegen der jährlichen Variation des Sonnenverlaufs im Rahmen von Erdbeobachtungen vielfach von besonderer Wichtigkeit. Die wahre Sonnenzeit ist nach Beziehung (28.103) gegeben durch den Ausdruck

$$T_w = \vartheta_w + 12^h = \Theta - \alpha_\odot + 12^h = \Theta_G + \lambda - \alpha_\odot + 12^h \qquad (28.239)$$

gegeben, die mittlere Sonnenzeit mit Beziehung (28.104) durch

$$T_m = \vartheta_m + 12^h = \Theta - \alpha_{\bar{\odot}} + 12^h = \Theta_G + \lambda - \alpha_{\bar{\odot}} + 12^h \quad . \qquad (28.240)$$

Die wahre Sonnenzeit kann aus der mittleren Sonnenzeit ohne Rücksicht auf den überflogenen Meridian mit Hilfe der Differenz aus wahrem zu mittlerem Sonnenwinkel berechnet werden, was nichts anderes ist als die Berücksichtigung der Zeitgleichung (28.105)

$$T_w = T_m - \alpha_\odot + \alpha_{\bar{\odot}} = T_m + \tau - \bar{\tau} = T_m + Z \quad . \qquad (28.241)$$

28.7 Die Sonnen-synodische Bewegung der Satellitenbahnebene

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse interessiert zunächst nicht die Bewegung des Satelliten in der Bahn, sondern das Verhalten der Bahn selber. Die Orientierung der Bahn im Raum wird durch die Inklination der Bahnebene in Bezug auf die Ebene des Erdäquators und den Schnittpunkt der Bahnebene bestimmt, also den auf- bzw. auch den absteigenden Knoten. Da die Bahninklination sehr stabil ist, wird die Bewegung der Bahnebene im Wesentlichen durch die Bewegung des Bahnknotens beeinflusst.

28.7.1 Der Knotensonnenwinkel, die Knotensonnendrift

Der wahre Knotensonnenwinkel bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten einer Satellitenbahn ist in der Definitionsgleichung (28.129) eingeführt werden:

$$\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot \quad . \qquad (28.242)$$

Der wechselseitige Verlauf der Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω und der Rektaszension der Sonne $\alpha_\odot$ ist exemplarisch in Bild 28-20 (auf Seite 72) über den Verlauf eines tropischen Jahres dargestellt. Der Knotensonnenwinkel (28.242) durchläuft im Laufe der Zeit alle Werte

$$0° \le \tau_\Omega < 360° \quad . \qquad (28.243)$$

In Bild 28-20 ist das wiederholte Eintreten eines bestimmten festen Knotensonnenwinkels τ_Ω^+ veranschaulicht. Im Abstand des fest vorgegebenen Sonnenwinkels ist eine zur $\alpha_\odot$ – Kurve parallele Kurve eingezeichnet. Deren Schnittpunkte mit der Ω-Kurve ergeben jeweils die Zeiten gleichartiger Stellungen zwischen Knoten und Sonne unter dem gegebenen festen Sonnenwinkel τ_Ω^+.

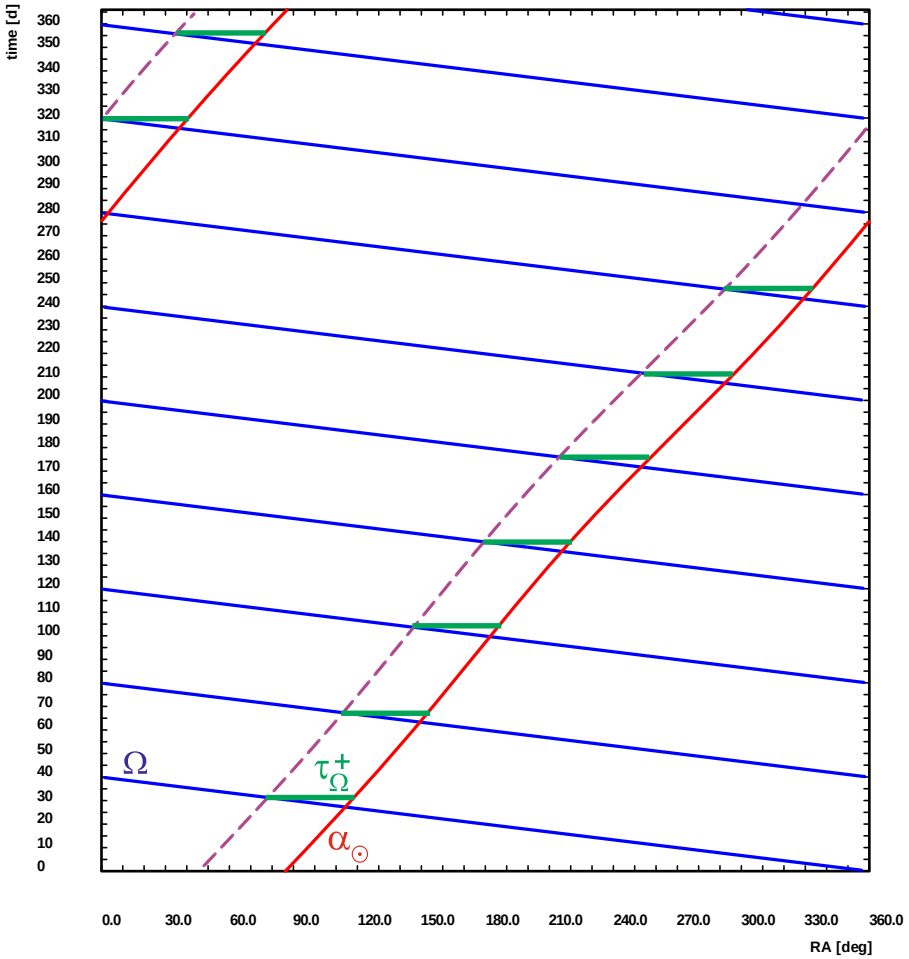


Bild 28-20: Das relative Verhalten der Rektaszension Ω des aufsteigenden Bahnknotens (blaue Kurve) und der Rektaszension $\alpha_\odot$ der Sonne (rote Kurve) im Verlauf eines Jahres (im Bild werden die Bahnparameter verwendet: a = 7128.137 km, e=0.0, i=40°). Die Einstellung eines bestimmten Knotensonnenwinkel τ_Ω^+ ist angedeutet.

Im Rahmen einer Bewegungsanalyse kann die *säkulare Knotensonnendrift bei Bezug auf die Rektaszension der wahren Sonne* durch Definitionsformel (28.130)

$$\dot{\tau}_{\Omega\,s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_\odot \tag{28.244}$$

verwendet werden. Hier ist $\dot{\Omega}_s$ die säkulare Drift des aufsteigenden Knotens. Die Variation der Rektaszension der Sonne $\dot{\alpha}_\odot$ ist näherungsweise aus der Entwicklung (28.98) bekannt. Wenn jedoch der Zustandsvektor der Sonne gegeben ist, kann die Variation mit den Formeln (8.9) (in Abschnitt 8.1.2, Band II) erhalten werden aus

$$\dot{\alpha}_\odot = \frac{x_{\odot 1}\,\dot{x}_{\odot 2} - x_{\odot 2}\,\dot{x}_{\odot 1}}{r_\odot^2 \cos^2 \delta_\odot} \quad , \quad r_\odot = \sqrt{x_\odot^{\ i}\, x_{\odot i}} \quad , \quad r_\odot \cos\delta_\odot = \sqrt{r_\odot^2 - x_{\odot 3}^{\ 2}} \quad . \tag{28.245}$$

Der wahre Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens einer Satellitenbahn bezogen längs des Äquators auf die *fiktive mittlere Sonne* lautet (nach Formel (28.150))

$$\tau_{\Omega\bar{\odot}} = \Omega - \alpha_{\bar{\odot}} \tag{28.246}$$

Es sei $\tau_{\Omega\bar{\odot}0} = \tau_{\Omega\bar{\odot}}\left(t_\Omega\right)$ der wahre Knotensonnenwinkel bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne im Moment des Knotenüberflugs. Er hat für einen Zeitpunkt *t* die Darstellung

$$\tau_{\Omega\bar{\odot}}(t) = \tau_{\Omega\bar{\odot}}(t_\Omega) + \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}(t - t_\Omega) + \delta\Omega[t, t_\Omega] + \cdots \quad . \tag{28.247}$$

Die mittlere (= säkulare) *Knotensonnendrift* (28.152) bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = \dot{\Omega}_s - n_\odot \tag{28.248}$$

ist im Zusammenhang mit der Bahnauslegung von Erdbeobachtungssatelliten von zentraler Bedeutung. Sie muss präzise als *Drift der mittleren Satellitenbahnebene bezogen auf die mittlere fiktive Sonne* bezeichnet werden.

Beschränkt man sich auf die säkularen Einflüsse durch den geodynamischen Hauptterm J_2, kann die Knotensonnendrift bei bekannter mittlerer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$, Exzentrizität $\bar{e}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ (mit Formel (20.15), Band III) dargestellt werden[1]

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1 - \bar{e}_0^2\right)^2} \cos \bar{i}_0 - n_\odot + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{28.249}$$

Wegen der numerischen Dominanz von J_2 ist dieser Ausdruck von zentraler Bedeutung in der Bahnmechanik von Erdbeobachtungsatelliten.

Der wahre Sonnenwinkel (28.147) $\tau_{\bar{\odot}} = \alpha - \alpha_{\bar{\odot}}$ eines Erdsatelliten bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne hat zum Zeitpunkt *t* in Bezug auf den Knotenüberflug zum Zeitpunkt t_Ω mit der Knotenbezogenen Rektaszension $\alpha - \Omega$ und wegen der Darstellung (28.247) die Entwicklung

$$\tau_{\bar{\odot}} = \tau_{\bar{\odot}}(t) = \alpha(t) - \Omega(t) + \tau_{\Omega\bar{\odot}}(t_\Omega) + \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}(t - t_\Omega) + \delta\Omega[t, t_\Omega] + \cdots \quad . \tag{28.250}$$

Die mittlere lokale Sonnenzeit[2] im Moment des Knotenüberfluges ist analog Beziehung (28.104)

$$T_\Omega = \tau_{\Omega\bar{\odot}}(t_\Omega) + 12^h \quad . \tag{28.251}$$

Hier ist der Knotensonnenwinkel $\tau_{\Omega\bar{\odot}}$ im Stundenmaß gegeben. Die mittlere lokale Sonnenzeit $T_m = \tau_{\bar{\odot}} + 12^h$ im Satellitenfußpunkt kann somit berechnet werden aus der Beziehung

$$T_m(t) = T_\Omega + \alpha(t) - \Omega(t) + \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)(t - t_\Omega) + \delta\Omega[t, t_\Omega] + \cdots \quad . \tag{28.252}$$

Diese Zeit wird im Stundenmaß erhalten, wenn (α, Ω) im Gradmaß und $\left(\dot{\Omega}_s, n_\odot\right)$ in Grad pro Sekunde gegeben sind. Diese Beziehung verallgemeinernd kann die mittlere Ortssonnenzeit zur Zeit t_2 ohne direkten Bezug auf den Knotenüberflug auf die mittlere Ortssonnenzeit zur Zeit t_1 bezogen werden:

$$\begin{aligned} T_m(t_2) = {} & T_m(t_1) + \alpha(t_2) - \alpha(t_1) - \Omega(t_2) + \Omega(t_1) + \\ & + \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)(t_2 - t_1) + \delta\Omega[t_2, t_\Omega] - \delta\Omega[t_1, t_\Omega] + \cdots \quad . \end{aligned} \tag{28.253}$$

Der Fehler ist gering, wenn der Einfluss der periodischen Anteile $\delta\Omega[t, t_\Omega]$ in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens vernachlässigt wird.

---

[1] Die hier benötigte tropische mittlere Bewegung $n_\odot$ der Sonne ist in unterschiedlichen Dimensionen in Tabelle 9-1 (Abschnitt 9.1.1.1, Band II) zusammengestellt.

[2] Abschnitt 28.3.2 auf Seite 28

Es folgen die Aussagen:

- *Die mittlere Ortszeit des zum Zeitpunkt* $t = T_m - \lambda$ *überflogenen Subsatellitenpunktes* (λ, φ) *ist bei gegebener Bahn und Kenntnis der Knotenüberflugzeiten* t_Ω, T_Ω *unmittelbar berechenbar.*◀

- *Auf einer rechtläufigen Bahn bewegt sich ein Satellit stets in Richtung zunehmender Ortszeit, auf einer retrograden Bahn stets in Richtung abnehmender Ortszeit*[1]. ◀

Anmerkung: $\alpha(t)$ ist die **wahre** Rektaszension des Satelliten. Sie enthält somit alle Bewegungseinflüsse. Diese können jedoch in der Praxis nicht alle vorausberechnet, sondern grundsätzlich erst a posteriori vollständig erhalten werden. Die Sonnendrift ist jedoch ein Begriff der Satellitenbahnanalyse, die somit im Voraus im Rahmen einer Bahnauslegung gegeben sein muss. Da sie in der Regel eine Bahnkonstante sein soll, kann sie daher nur aus der mittleren Bewegung mit Kenntnis der säkularen Bewegungseinflüsse definiert werden. Derartige Überlegungen müssen stets bei einer Bahnauslegung beachtet werden. ◀

Für manche Untersuchungen mag von Interesse sein, wie die säkulare Knotensonnendrift $\dot{\tau}_\Omega$ bezogen auf die wahre Sonne von der mittleren säkularen Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ bezogen auf die fiktive mittlere Sonne abweicht. Aus den entsprechenden Formeln (28.244) und (28.248) folgt unmittelbar die Beziehung

$$\dot{\tau}_{\Omega s} - \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = \dot{\alpha}_\odot - n_\odot \quad . \tag{28.254}$$

Da in beiden Ausdrücken die säkulare Drift des Bahnknotens verwendet wird, ist die Differenz der beiden Knotensonnendriften von der Bahn des Satelliten unabhängig. In diesem Fall ist die Kurve in Bild 28-21, die den Kurvenverlauf über ein Jahr zeigt, von der Bahn unabhängig. Aus Beziehung (23.224) ist die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}$ bekannt. $\dot{\Theta}$ ist die mittlere Variation der Sternzeit, welche der mittleren tropischen Erdrotation identisch gleich ist[2]. Es folgt der interessante Zusammenhang

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} - \dot{\lambda}_{\Omega s} = \dot{\Theta} - n_\odot \quad . \tag{28.255}$$

Die mittleren Knotenlängendrift und Knotensonnendrift unterscheiden sich somit genau um die tägliche Rotation der Sonne bezogen auf die fiktive mittlere Sonne[3]

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = \frac{360°}{86400s} + \dot{\lambda}_{\Omega s} \quad . \tag{28.256}$$

Als Dimension wird hier [Grad/sec] verwendet.

Ähnlich wie in Abschnitt 23.5.1 im Fall einer Abschätzung der Grenzen für die Knotenlängendrift (Abschätzung (23.229)) kann auch für die Knotensonnendrift eine Abschätzung hergeleitet werden. Die maximal möglichen Grenzen können in Abhängigkeit von der Bahninklination abgeschätzt werden, wenn eine kreisförmige Bahn in minimaler Bahnhöhe H=200 km betrachtet wird. Der unterste Wert wird für i=0° der oberste für i=180° erhalten:

---

[1] vgl. auch Bild 28-17 und Tabelle 28-16, siehe auch in Abschnitt 28.6.2

[2] Die Variation der Sternzeit ist in unterschiedlichen Maßeinheiten in Tabelle 9-2 zusammengestellt (Abschnitt 9.1.2.1, Band II)

[3] Vgl. Formel (9.23) in Abschnitt 9.1.2.1 (Band II): $\dot{\Theta} = 1 + n_\odot$

$$-9°.995/d \leq \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} \leq 8°.023/d \quad . \tag{28.257}$$

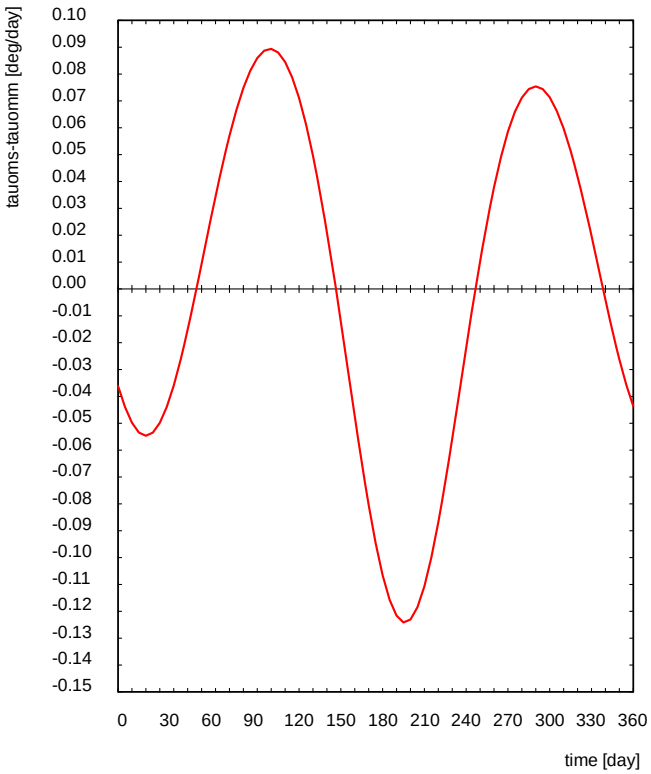


Bild 28-21: Die Variation der säkularen Drift des Knotensonnenwinkels $\dot{\tau}_{\Omega s}$ in Relation zur wahren Sonne in Bezug auf den mittleren säkularen Knotensonnenwinkels $\dot{\tau}_{\Omega\,\bar{\odot}s}$ relativ zur fiktiven mittleren Sonne $\bar{\odot}$ im Verlauf eines tropischen Jahres. Die Darstellung ist wegen Beziehung (28.254) von den Parametern einer Satellitenbahn unabhängig[1].

Eine graphische Übersicht über die Größe der mittleren Knotensonnendrift liefert Bild 28-22 für kreisförmige Satellitenbahnen. Untersucht wird die Drift für verschiedene Inklinationen über der Bahnhalbachse. Wie aus Formel (28.249) unmittelbar zu entnehmen ist, hat die Knotendrift $\dot{\Omega}_s$ keinen Einfluss auf Polarbahnen. Allerdings nimmt ihr Einfluss auch rapide für erdfernere Satellitenbahnen ab und ist für geosynchrone und höhere Bahnen kaum noch nachweisbar. Für erdferne Bahnen wird die Knotensonnendrift im Wesentlichen nur durch die tropische mittlere Bewegung der Sonne $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} \approx -n_{\bar{\odot}}$ = -0°.9856474 /d bestimmt. Die beiden Grenzkurven in Bild 28-22 werden erhalten, wenn die Inklinationen $i = 0°$ und $i = 180°$ bei variabler Bahnhalbachse in der Beziehung (28.256) eingesetzt werden. Umgekehrt kann bei Vorgabe eines Zahlenwertes für die mittlere Knotensonnendrift bei bekannter Halbachse und Exzentrizität sofort aus dieser Beziehung geschlossen werden, ob diese Vorgabe auch sinnvoll gewählt wurde.

[1] Für die Zeichnung wurde als Satellitenbahn die kreisförmige Äquatorbahn in mittlerer Bahnhöhe H=200 km verwendet.

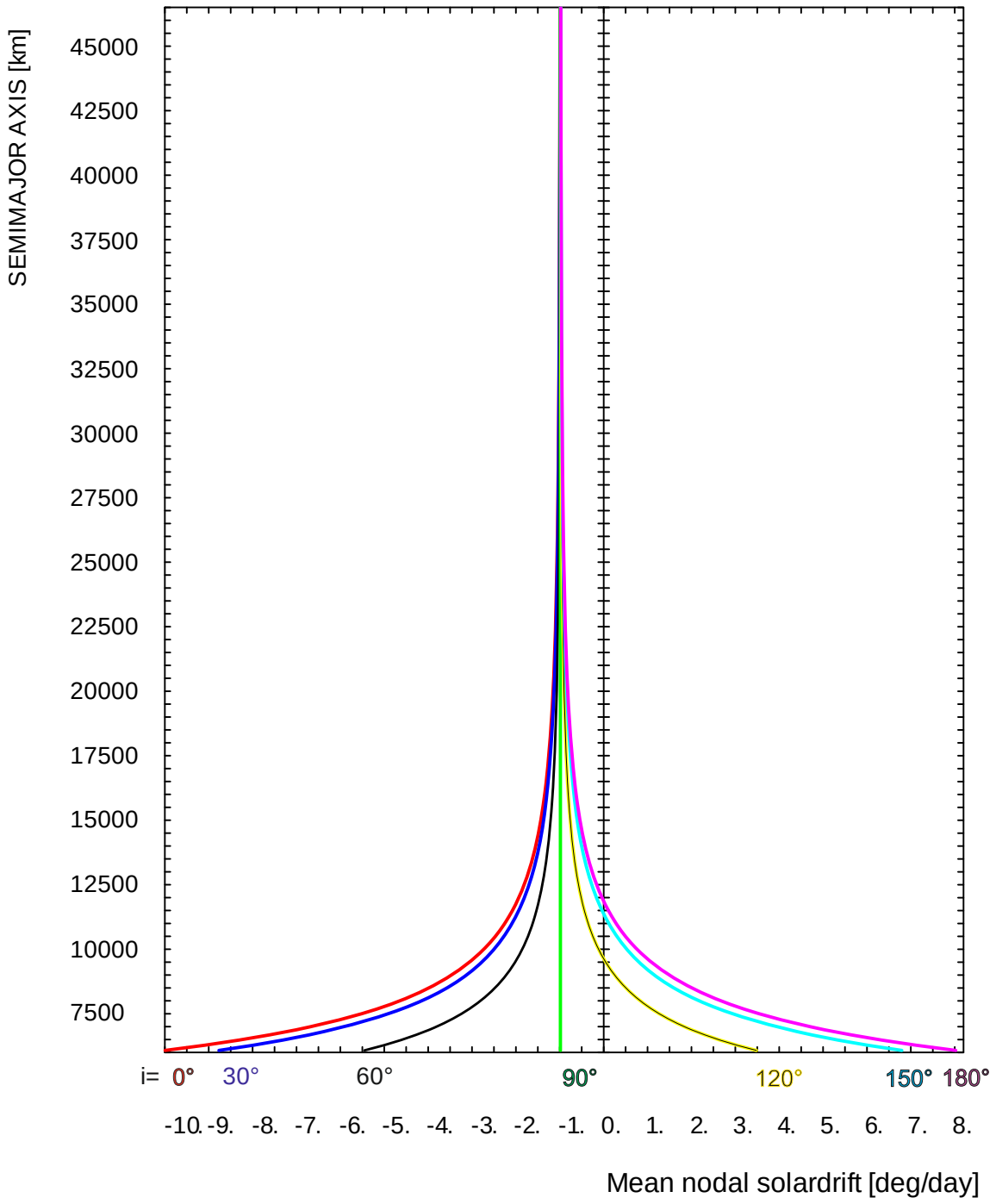


Bild 28-22: Die mittlere Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ für kreisförmige Erdsatellitenbahnen für verschiedene Inklinationen

Um auch den Einfluss der Exzentrizität auf das Verhalten der Knotensonnendrift abschätzen zu können werden in Bild 28-23 nur Äquatorbahnen untersucht, da für diese die Grenzkurven maximale Werte annehmen. Die Bahnhalbachsen werden so ausgewählt, dass abhängig von der Exzentrizität die Perigäumshöhe 200 km nicht unterschritten werden kann. Aus diesem Grund beginnen und enden die Kurven mit zunehmender Exzentrizität für entsprechende höhere Bahnhalbachsen. Es zeigt sich, dass sich auch in diesem Fall der Einfluss der Variation des Bahnknotens mit zunehmender Höhe der Bahnhalbachse immer geringer auf die Knotensonnendrift auswirkt.

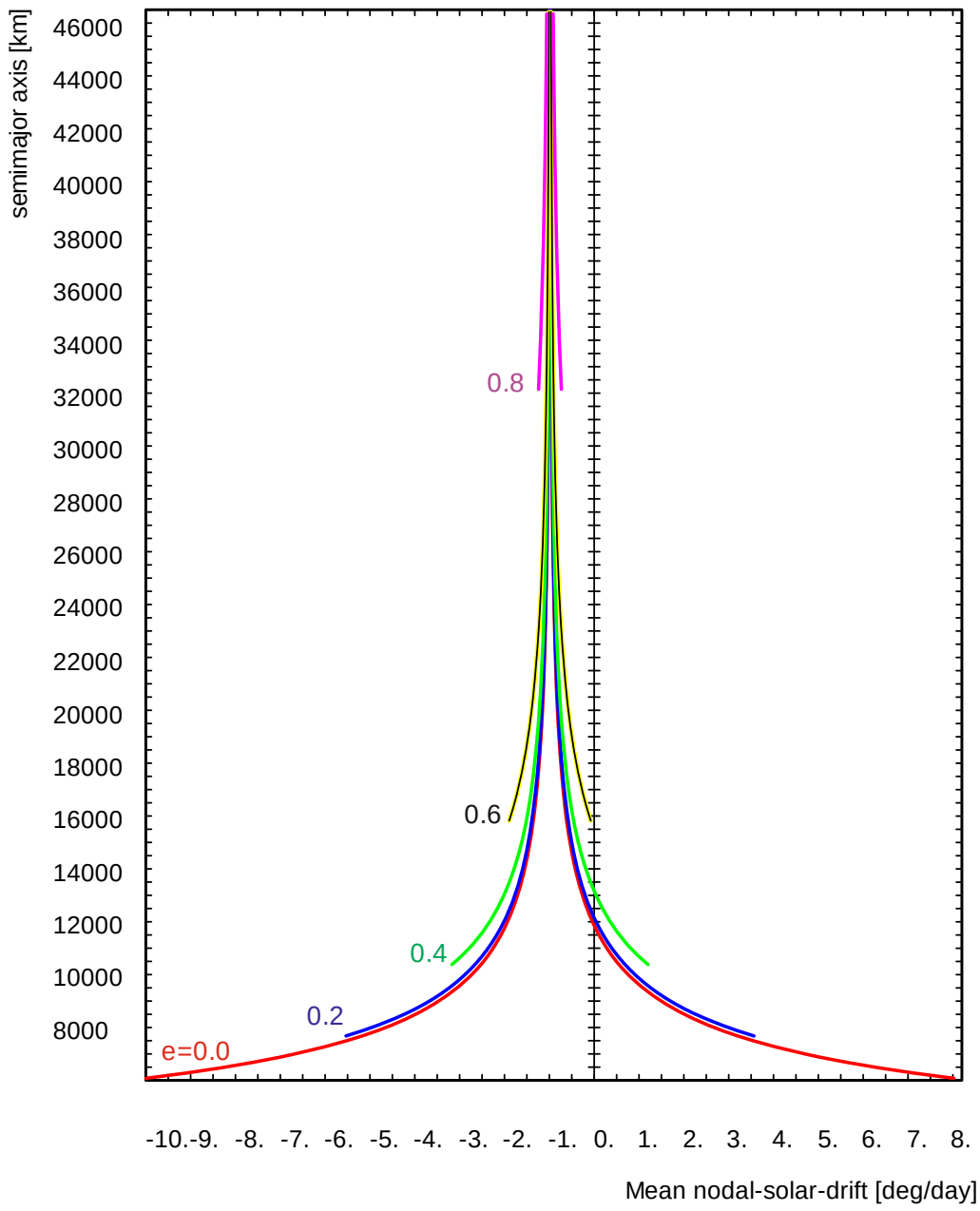


Bild 28-23: Die mittlere Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s}$ für Erdsatellitenbahnen mit verschiedenen Exzentrizitäten sowie die Grenzinklinationen i=0° (linke Kurven), i=180° (rechte Kurven)

Basierend auf der Knotensonnendrift dauert es eine bestimmte Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Konjunktionen des aufsteigenden Knotens mit der mittleren fiktiven Sonne. Diese Zeitdauer wird als die *mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit eines Bahnknotens* bezeichnet. Sie wird berechnet (wenn die Knotensonnendrift in [Grad/Sek] gegeben ist) aus:

$$\overline{P_{\Omega\overline{\odot}}} = \frac{360°}{\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s}} \quad . \tag{28.258}$$

Bild 28-24 zeigt den Verlauf der mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit der Bahnebene über der großen Bahnhalbachse für kreisförmige Erdsatellitenbahnen parametrisiert für verschiedene

Inklinationen. Die Umlaufzeit ist stets eine positive Größe. Im Bild sieht man jedoch negative Werte, die einer westlichen Drift des Bahnknotens gegenüber der mittleren fiktiven Sonne entsprechen. Ähnlich wie schon in Bild 28-22 nähert sich die Umlaufzeit mit wachsender Bahnhalbachse dem Wert für Polbahnen $\bar{i}_0 = 90°$ an.

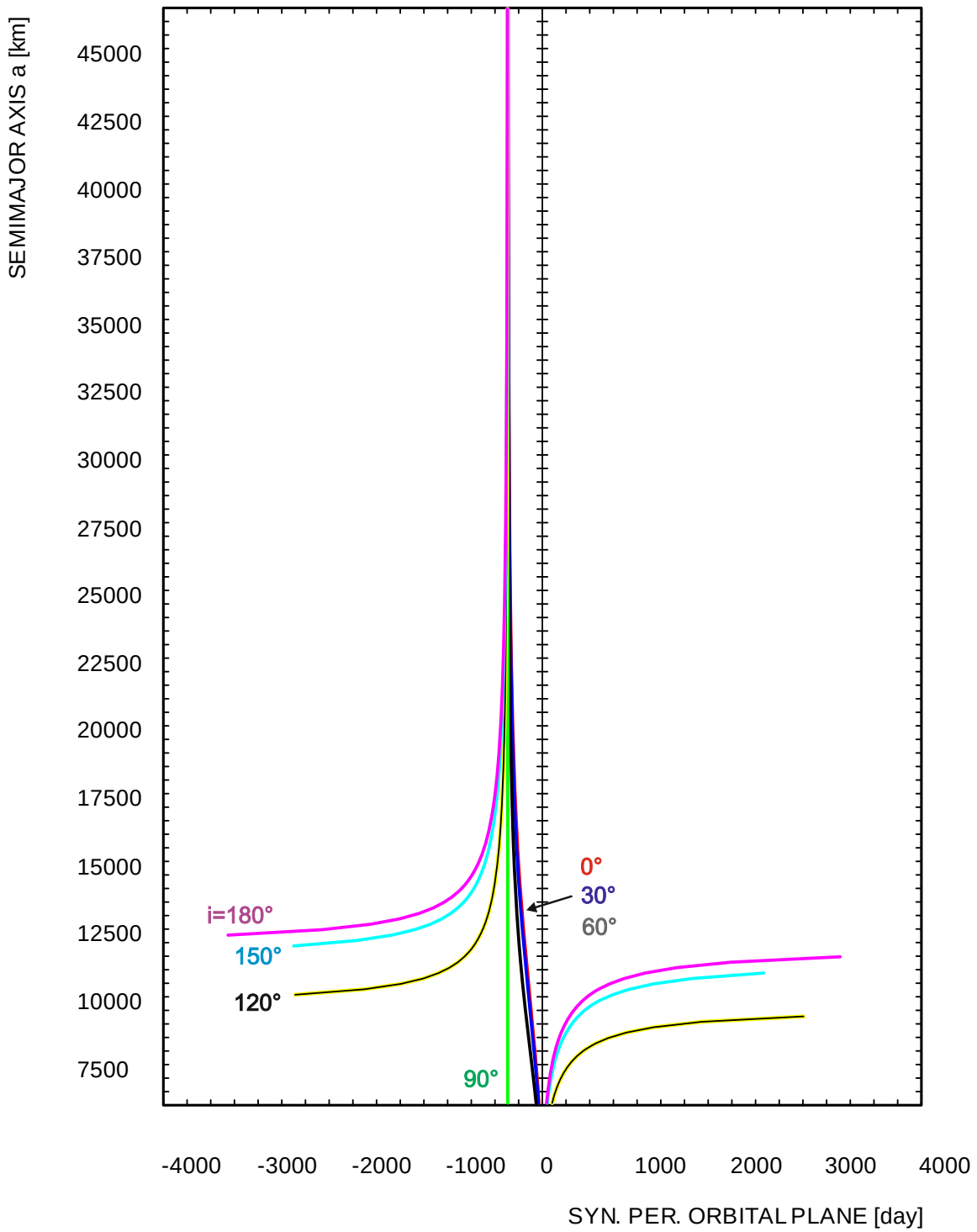


Bild 28-24: Dauer eines Sonnen-synodischen Umlaufs $\overline{P_{\Omega\,\bar{\odot}}}$ der Bahnebene eines Satelliten auf kreisförmiger Bahn für verschiedene Inklinationen. Negative Werte beziehen sich auf westliche Bewegung der Bahnebene von der Sonne weg

Die mittlere knotensonnenbezogene Umlaufzeit für Polbahnen beträgt genau ein tropisches Jahr zu 365.2422 Tagen[1]. Wird jedoch die säkulare Sonnen-synodische Umlaufzeit des Bahnknotens (mit Formel (28.130) $\dot{\tau}_\Omega = \dot{\Omega} - \dot{\alpha}_\odot$) verwendet

$$P_{\Omega\odot} = \frac{360°}{\dot{\tau}_{\Omega s}} \quad , \tag{28.259}$$

ist nach Bild 28-21 zu erwarten, dass sich erhebliche Abweichungen der entsprechenden Umlaufzeiten ergeben können. Siehe dazu folgendes

BEISPIEL 1: Es werde die Bahn $\bar{a}_0 = 6578.155$ km, $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 90°$ betrachtet. Der Bezug des Knotens zur wahren Sonne werde auf die Epoche 1982-01-25/14:00:0.0 ausgerichtet. Mit Formel (28.259) ergibt sich die säkulare sonnenbezogene Umlaufzeit des Bahnknotens zu $P_{\Omega\odot} = 344.6752$ d, also eine erhebliche Abweichung zu den obigen $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = 365.2422\,\mathrm{d}$. ◄

BEISPIEL 2: Die kreisförmige Erdsatellitenbahn in der mittleren Bahnhöhe H=750 km und der mittleren Inklination $\bar{i}_0 = 40°$ hat die säkulare Knotenlängendrift nach Formel (23.224) $\dot{\lambda}_{\Omega s} = 4°.266418 \times 10^{-3} / s = 368°.618515 / \mathrm{d}$ entsprechend nach Formel (28.256) die Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = -9°.975130 \times 10^{-5} / s = -8°.618515 / \mathrm{d}$. Der Bahnknoten befindet sich entsprechend Formel (28.258) nach jeweils $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = 41^{\mathrm{d}}\,18^{\mathrm{h}}\,29^{\mathrm{m}}\,35^{\mathrm{s}}.4$ wieder in Konjunktion mit der Sonne. Diese Bahn ist mit der Epoche 2018-06-17/12:30:0.0 in Bild 28-20 (auf Seite 72) dargestellt. ◄

Anmerkung: Der Zusammenhang zwischen der Zeit $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ der gleichartigen Stellungen zwischen Bahnknoten und fiktiver mittlerer Sonne (im Wesentlichen die Konjunktion zwischen Knoten und Sonne) mit der Bahnhalbachse über der Bahninklination wird im Rahmen der Bahnauswahl bei Vorgabe von $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ in Abschnitt 28.7.4.3 in Bild 28-31 (auf Seite96) dargestellt. ◄

28.7.2 Die Knoten-Sonnenverschiebung

28.7.2.1 Die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung

Die *mittlere Sonnenverschiebung des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne* hat mit der mittleren Knotensonnendrift (28.248) die Bezeichnung

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} := \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}\,\overline{P_D} = \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)\overline{P_D} \quad . \tag{28.260}$$

Die mittlere knotenbezogene Sonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne wird hier als eine konstante Größe der Bahnanalyse betrachtet.

[1] Eine Anwendung der sonnenbezogenen Umlaufzeit einer Bahnebene im Rahmen einer Bahnauswahl siehe in Abschnitt 28.7.4.3 auf Seite 95

Die mittlere Ortszeit im Subsatellitenpunkt verändert sich nach einem Umlauf mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ ausgehend von der Beziehung (28.252) für die mittlere Sonnenzeit um den Betrag

$$T_m\left(t+\overline{P_D}\right)-T_m\left(t\right)=\left[\alpha\left(t+\overline{P_D}\right)-\Omega\left(t+\overline{P_D}\right)\right]-\left[\alpha\left(t\right)-\Omega\left(t\right)\right]+\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} \quad . \qquad (28.261)$$

Die knotenbezogene Rektaszension $\alpha_K=\sigma_i\left(\alpha-\Omega\right)$ verschwindet im Moment des Knotenüberfluges. In diesem Fall wird aus (28.261)

$$T_m\left(t_\Omega+\overline{P_D}\right)=T_m\left(t_\Omega\right)+\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}=T_m\left(t_\Omega\right)+\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}\,\overline{P_D} \quad . \qquad (28.262)$$

Der mittleren Knoten-Sonnenverschiebung entspricht somit die Änderung der mittleren Ortssonnenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenüberflügen.

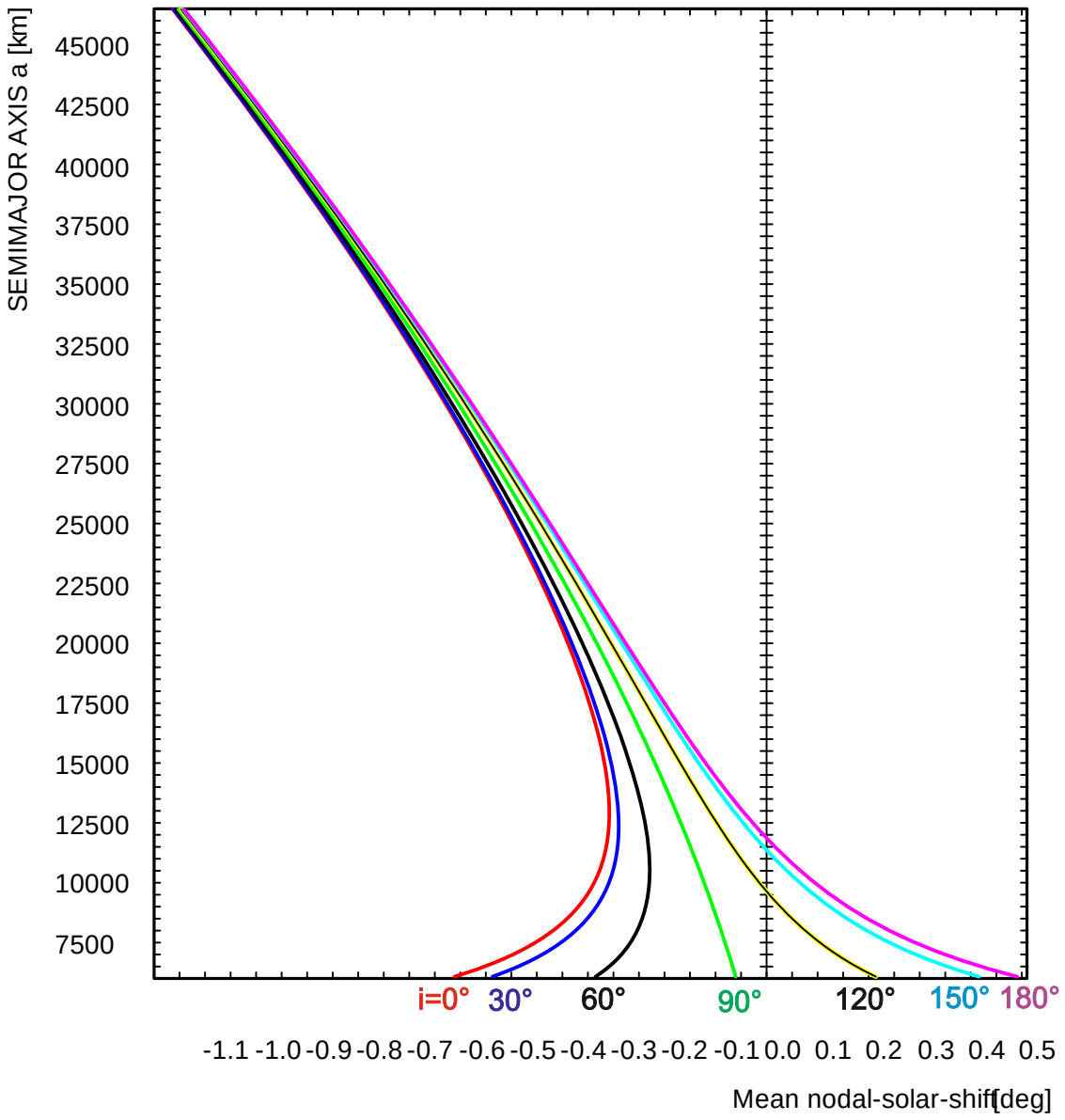


Bild 28-25: Die auf die fiktive mittlere Sonne bezogene mittlere Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ des Bahnknotens pro drakonitischem Umlauf einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn für verschiedene Inklinationen über der großen Bahnhalbachse bei Bezug

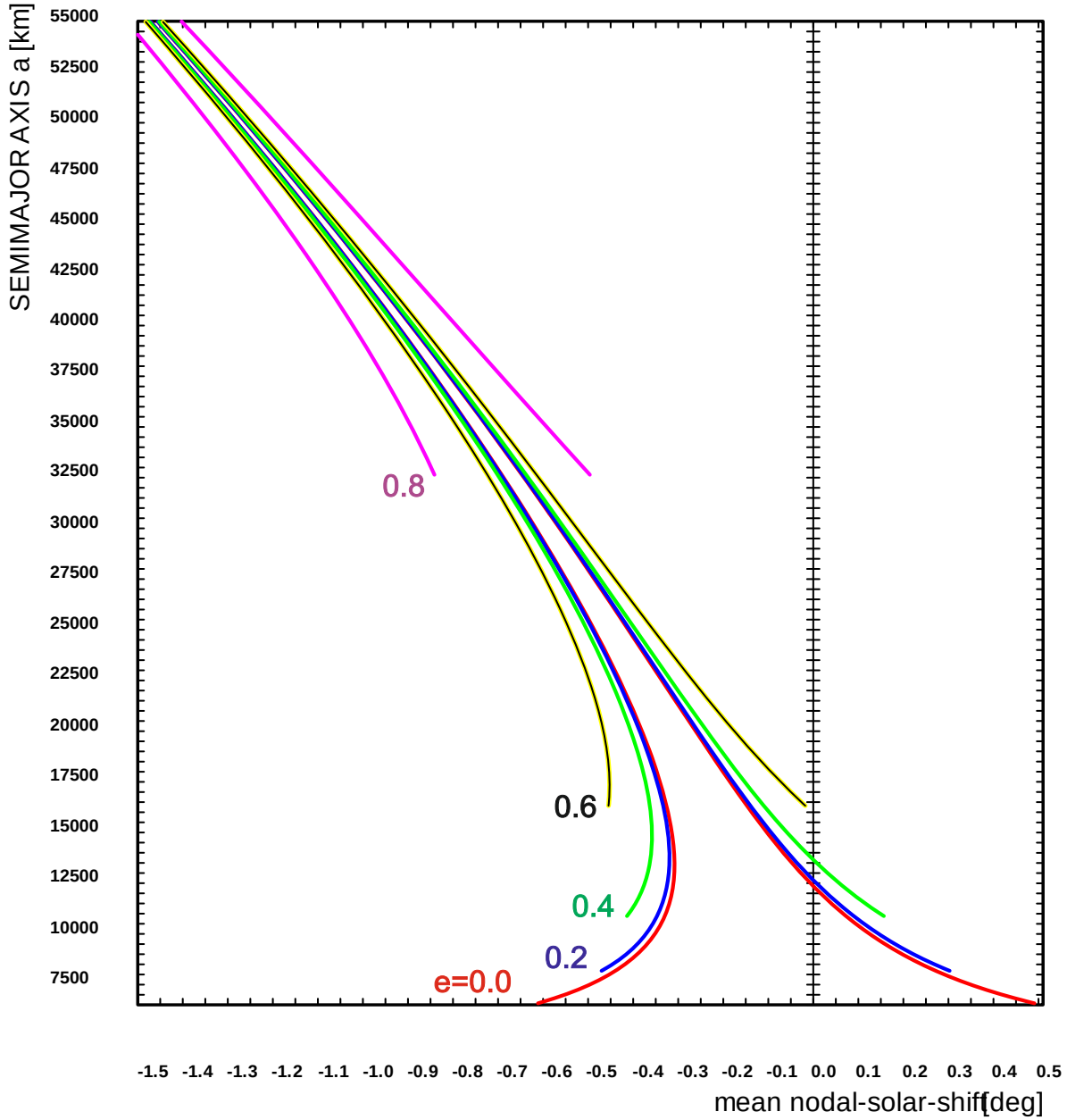


Bild 28-26: Die auf die fiktive mittlere Sonne bezogene mittlere Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}}$ des Bahnknotens pro drakonitischem Umlauf in der Äquatorebene umlaufender Erdsatellitenbahnen (i=0° linke Kurven, i = 180° rechte Kurven) für verschiedene Exzentrizitäten über der großen Bahnhalbachse

Die Beziehung zur mittleren drakonitischen und mittleren Sonnen-synodischen Bewegung kann mit Beziehung (28.163)

$$\overline{n_S} = \overline{n_D} + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right) = \overline{n_D} + \sigma_i \; \dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s} \tag{28.263}$$

erhalten werden. Damit folgt die Beziehung zwischen der mittleren Sonnen-synodischen und der mittleren drakonitischen Umlaufzeit:

$$\frac{1}{\overline{P_S}} = \frac{1}{\overline{P_D}} + \frac{\sigma_i \, \dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s}}{360°} \quad . \tag{28.264}$$

Hier sind die Umlaufzeiten in Sekunden, die Knotensonnendrift in [Grad/Sek.] gegeben. Um die mittlere Sonnenverschiebung im Gradmaß auszudrücken wird (28.260) umgeformt zu

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = \sigma_i \left(\overline{n_S} - \overline{n_D}\right) \frac{360°}{\overline{n_D}} \quad . \tag{28.265}$$

Das Verhältnis der mittleren Bewegungen hat demnach die Beziehung

$$\frac{\overline{n_S}}{\overline{n_D}} = 1 + \sigma_i \frac{\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}}{360°} \quad . \tag{28.266}$$

Die Knoten-Sonnenverschiebung ist der anschaulichere Begriff im Gegensatz zur Knotensonnendrift. Allerdings wirkt sich der Einfluss der drakonitischen Umlaufzeit erheblich aus. Dies zeigen Bild 28-25 und Bild 28-26. Infolge der Zunahme der Umlaufzeit vergrößert sich die Knoten-Sonnenverschiebung, was sich in einem „Wegkippen“ des Kurvensystems ausprägt. Bild 28-25 zeigt die Verläufe für kreisförmige Bahnen parametrisiert nach der Bahninklination. Dies ist für den Fall von Erdbeobachtungssatelliten, die normalerweise auf kreisnahen Bahnen geflogen werden, von besonderem Interesse.

Um ähnlich wie in Bild 28-23 im Fall der Knotensonnendrift, auch im Fall der Knoten-Sonnenverschiebung eine Abhängigkeit von der Exzentrizität darstellen zu können, werden die entsprechenden Kurven im Fall von Äquatorbahnen für einige Exzentrizitäten in Bild 28-26 berechnet.

Die beiden Bilder zeigen, dass auch für die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung extremale Werte für Äquatorbahnen zu erwarten sind. Während für $\bar{i}_0$ = 180° der maximale Wert für erdnahe Kreisbahnen bei einer Mindestbahnhöhe von H= 200 km etwa $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}\left[\bar{i}_0 = 180°\right] = \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}\,\overline{P_D} = 0°.5$ beträgt, ist der maximale Wert wegen des Wegkippens der Kurven für hohe Bahnen weit unter $-1°$ pro drakonitischem Umlauf. Für hohe Bahnen, mit Halbachsen im Bereich bis zu etwa 50000 km, kann die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung nach Bild 28-25 bis zu $-2°/\overline{P_D}$ annehmen. Weit höhere Bahnen, die bis zu $-40°/\overline{P_D}$ annehmen können, sind im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse uninteressant. Somit ist es sinnvoll, die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung pro drakonitischem Umlauf etwa im Bereich

$$-2°.0/\overline{P_D} \;\le\; \overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} \;\le\; 0°.5/\overline{P_D} \tag{28.267}$$

zu erwarten.

BEISPIEL: Die Erdsatellitenbahn $\bar{a}_0$ = 7500 km, $\bar{e}_0$ = 0.1, $\bar{i}_0$ = 60°, Epoche 2018-05-09/13^h hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit, $\overline{P_D}$ = 6464.025 sec die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ = 6469.223 sec, die säkulare Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\bar{\Omega}\odot s}$ = -3°.8668554 pro Tag, die mittlere Sonnenverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ -0°.2892792 pro mittlerem drakonitischem Umlauf. ◄

28.7.2.2 Die wahre Knoten-Sonnenverschiebung

Die *wahre Sonnenverschiebung bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne über die wahre drakonitische Umlaufzeit* kann mit dem wahren Sonnenwinkel (28.150) bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne bei gegebener Ephemeride berechnet werden aus

$$\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}} = \tau_{\Omega\bar{\odot}}\left(t_0 + P_D\right) - \tau_{\Omega\bar{\odot}}\left(t_0\right) = \left[\Omega\left(t_0 + P_D\right) - \alpha_{\bar{\odot}}\left(t_0 + P_D\right)\right] - \left[\Omega\left(t_0\right) - \alpha_{\bar{\odot}}\left(t_0\right)\right] \quad . \tag{28.268}$$

Für detaillierte Untersuchungen muss die *wahre Knoten-Sonnenverschiebung* bezogen auf die wahre drakonitische Umlaufzeit als Differenz des Knotensonnenwinkels zwischen zwei aufeinanderfolgenden wahren Knotendurchgängen herangezogen werden. Bei Bezug auf die wahre Sonne lautet der Knoten-Sonnenwinkel (28.129) $\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot$, somit die wahre Knoten-Sonnenverschiebung pro wahrem drakonitischen Umlauf

$$\Delta\tau_\Omega = \tau_\Omega(t_0 + P_D) - \tau_\Omega(t_0) = \left[\Omega(t_0 + P_D) - \alpha_\odot(t_0 + P_D)\right] - \left[\Omega(t_0) - \alpha_\odot(t_0)\right] \quad . \qquad (28.269)$$

Mit der säkularen Knoten-Sonnendrift (28.130) $\left(\dot{\tau}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_\odot\right)$ kann die säkulare Knoten-Sonnenverschiebung

$$\Delta\tau_{\Omega s} := \dot{\tau}_{\Omega s} P_D = \left(\dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_\odot\right) P_D \qquad (28.270)$$

eingeführt werden. *Bei Bezug auf die mittlere Sonne* kann mit dem Knotensonnenwinkel (28.135) $\tau_M = \alpha - \overline{\alpha_\odot}$ die *wahre Knoten-Sonnenverschiebung* berechnet werden

$$\Delta\tau_{\Omega M} = \tau_{\Omega M}(t_0 + P_D) - \tau_{\Omega M}(t_0) = \left[\Omega(t_0 + P_D) - \overline{\alpha_\odot}(t_0 + P_D)\right] - \left[\Omega(t_0) - \overline{\alpha_\odot}(t_0)\right] \quad . \qquad (28.271)$$

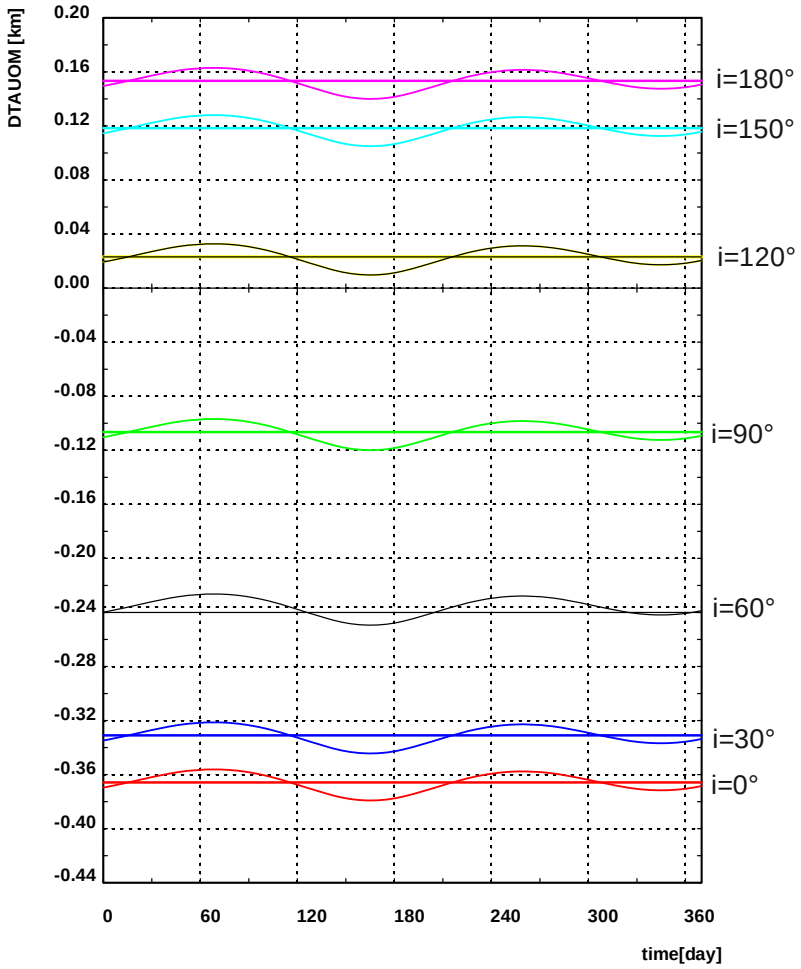


Bild 28-27: Die Schwingungen der auf die wahre Sonne bezogenen wahren Knoten-Sonnenverschiebung $\Delta\tau_\Omega$ um die mittlere $\overline{\Delta\tau_{\Omega\odot}}$ für Kreisbahnen mit großer Halbachse a = 9578.155 km parametrisiert für verschiedene Inklinationen

Es zeigt sich, dass die Schwingung der wahren Knoten-Sonnenverschiebung bei Bezug auf die wahre Sonne mit der Drift $\dot{\tau}_\Omega = \dot{\Omega} - \dot{\alpha}_\odot$ bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne um die mittlere mit der Drift

$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = \dot{\Omega}_s - n_\odot$ im Wesentlichen eine Folge der jährlichen Variation der Rektaszension der wahren Sonne ist. Diese Beobachtungen müssen im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse sorgfältig beachtet werden. Das zeigt folgendes

BEISPIEL: Für eine kreisförmige Bahn mit Halbachse $\bar{a}_0$ =6578.155 km werden für verschiedene Bahninklinationen jeweils die wahre und die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung berechnet. Die maximale Abweichung der wahren von der mittleren Knoten-Sonnenverschiebung liegt in der Größenordnung $\Delta(\Delta\tau_\Omega) = |0°.014| / P_D$. Die Darstellungen in Bild 28-27 lassen sich als ein Horizontalschnitt für die gegebene Bahnhalbachse in Bild 28-25 deuten. ◀

28.7.3 Die Sonnen-bezogene Bewegung einer Bahnebene

Ein heuristischer Überblick über das Verhalten der Knotensonnendrift in Bezug auf die Variation des Bahnknotens kann näherungsweise in übersichtlicher Weise im Folgenden erhalten werden:

Für *rechtläufige Bahnen* ist die Knotensonnendrift, wie direkt aus Beziehung (28.249) ersehen werden kann, stets negativ. Die mittlere Sonnenverschiebung (28.260) der Bahnebene erfolgt im Sinne abnehmender Rektaszension bzw. abnehmender geographischer Länge.

Das bedeutet: bei rechtläufigen Bahnen bewegt sich die Knotenlinie in westlicher Richtung von der Sonne weg. Außerdem zeigt die Beziehung (28.163), dass die mittlere Sonnen-synodische mittlere Bewegung $\overline{n_S}$ kleiner ist als die entsprechende drakonitische $\overline{n_D}$, wie es aus Bild 28-28 (auf Seite 85) deutlich wird. Entsprechend ist nach Beziehung (28.264) die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ größer als die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D}$. Treffen zum Beispiel für einen Satelliten aufsteigender Knoten und Richtung zur mittleren fiktiven Sonne zu einem bestimmten Zeitpunkt zusammen, so durchläuft der Satellit nach einem Umlauf zuerst seinen aufsteigenden Knoten vor der Konjunktion mit der mittleren Sonne.

Für *retrograde Bahnen* ist stets $\dot{\Omega}_s > 0$. Die Knotensonnendrift ist negativ, solange $\dot{\Omega}_s < n_\odot$, sie wird positiv, wenn $\dot{\Omega}_s > n_\odot$. Im ersten Fall bewegt sich die Knotenlinie wie bei rechtläufigen Bahnen westwärts von der Sonne weg, obgleich die Knotenlinie selbst ostwärts wandert. Dies erklärt sich dadurch, dass die Knotenbewegung kleiner als die Bewegung der mittleren Sonne ist wie Bild 28-29 veranschaulicht. Nach Beziehung (28.163) ist auch die drakonitische Bewegung des Satelliten kleiner als seine Sonnen-synodische Bewegung, die drakonitische Umlaufzeit daher größer als die synodische. Der Satellit hat nach einem Umlauf zuerst eine Konjunktion mit der mittleren Sonne und durchläuft erst danach seinen nächsten aufsteigenden Knoten. Der Grenzfall tritt für

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad n_\odot = \dot{\Omega}_s \tag{28.272}$$

auf. Knotenlinie und mittlere fiktive Sonne bewegen sich gleich schnell und gleichförmig. Aus Beziehung (28.256) folgt

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -\frac{360°}{86400s} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \quad . \tag{28.273}$$

Die Knotenlänge bewegt sich genauso schnell wie sich die Erde in Bezug auf die Sonne bewegt. Die Bewegung der Bahnebene wird in diesem Fall als Sonnensynchron bezeichnet[1].

[1] eine detaillierte Untersuchung der sonnensynchronen Bahnbewegung erfolgt ab Abschnitt 28.9 (Seite 165)

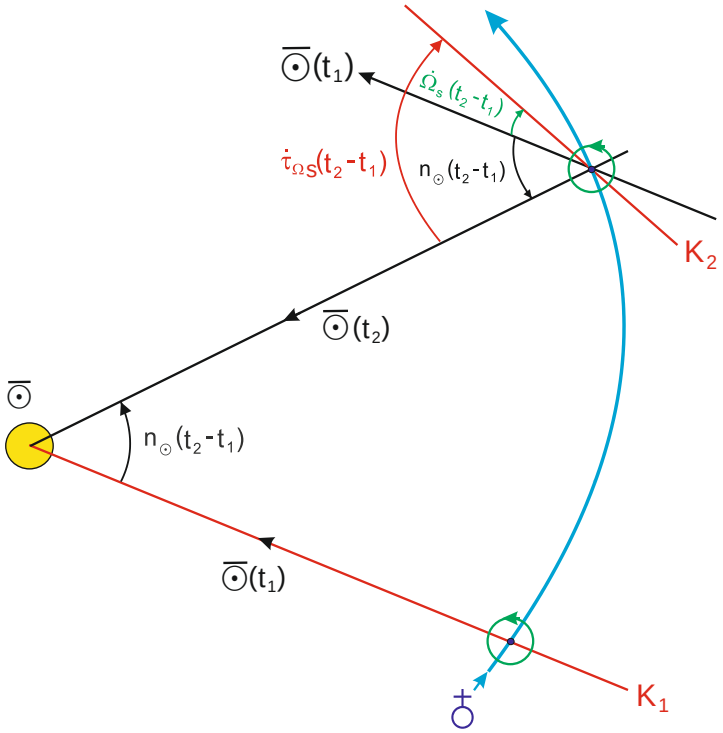


Bild 28-28: Zur Deutung der mittleren Knotendrift bei Bezug auf die Äquatorebene der Erde. Der Satellit bewegt sich auf rechtläufiger Bahn. Die Bahnebene dreht sich westwärts von der mittleren Sonne weg. K_1, K_2 bezeichnet die Knotenlinie.

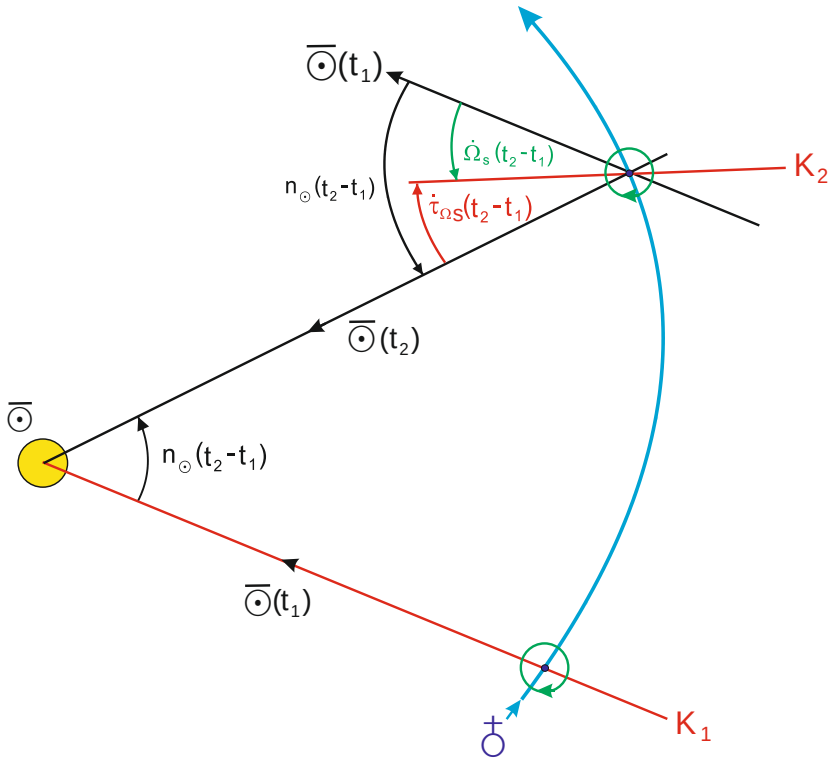


Bild 28-29: Zur Deutung der mittleren Knotendrift für Satelliten auf retrograder Bahn unter der Bedingung $n_\odot > \dot{\Omega}_s$: Die Bahnebene dreht sich westwärts von der mittleren Sonne weg[1].

[1] die Bewegung der Bahnebene wird in diesem Fall als „untersonnensynchron“ bezeichnet.

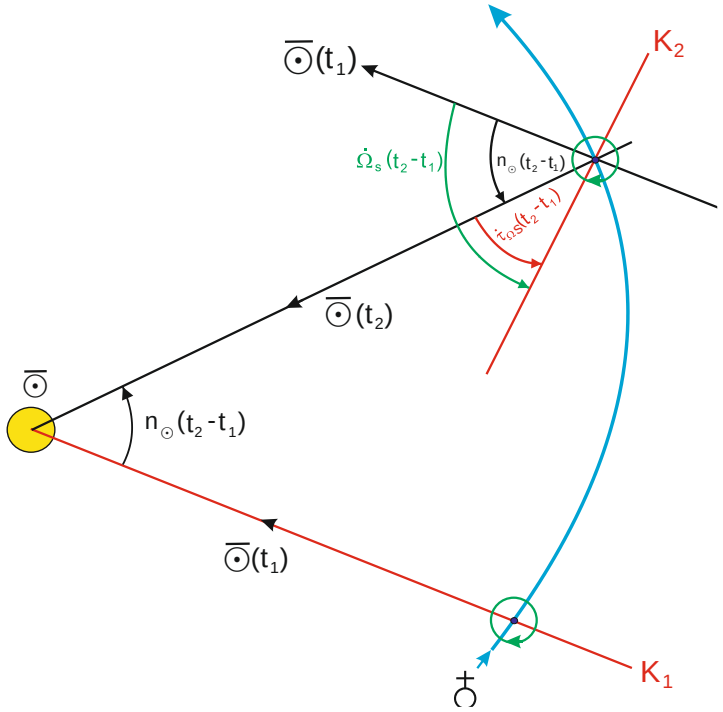


Bild 28-30: Zur Deutung der mittleren Knotendrift für Satelliten auf retrograder Bahn unter der Bedingung $n_\odot < \dot{\Omega}_s$ Die Bahnebene dreht sich ostwärts von der mittleren Sonne weg[1].

Retrograde Bahnen mit $\dot{\Omega}_s > n_\odot$ haben eine positive Knotensonnendrift. Der Knoten der Bahn wandert der mittleren Sonne voraus, bewegt sich also in östlicher Richtung von der Sonne weg. Die drakonitische Bewegung ist größer als die Sonnen-synodische, die drakonitische Umlaufzeit daher kleiner als die Sonnen-synodische. Der Satellit durchläuft daher zuerst seinen Knoten bevor er danach zur Konjunktion mit der mittleren Sonne kommt. Dieser Fall ist in Bild 28-30 veranschaulicht.

$0° \le i < 90°$	$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} < 0$	$\dot{\Omega}_s < 0 < n_\odot$	$\overline{n_D} > \overline{n_S}$	$\overline{P_D} < \overline{P_S}$	Knoten wandert westwärts von der Sonne weg	Bild 28-28
$i = 90°$	$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = -n_\odot$	$\dot{\Omega}_s = 0$				
$90° < i < i_{ss}$	$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} < 0$	$0 < \dot{\Omega}_s < n_\odot$	$\overline{n_D} < \overline{n_S}$	$\overline{P_D} > \overline{P_S}$		Bild 28-29
$i_{ss} = i$	$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = 0$	$\dot{\Omega}_s = n_\odot$	$\overline{n_D} = \overline{n_S}$	$\overline{P_D} = \overline{P_S}$	sonnensynchron	
$i_{ss} < i < 180°$	$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} > 0$	$\dot{\Omega}_s > n_\odot$	$\overline{n_D} > \overline{n_S}$	$\overline{P_D} < \overline{P_S}$	Knoten ostwärts	Bild 28-30

Tabelle 28-18: Schematische Zusammenfassung des Verhaltens der mittleren Knotensonnendrift sowie Vergleich der drakonitischen und der Sonnen-synodischen Bewegung

[1] die Bewegung der Bahnebene wird in diesem Fall als „übersonnensynchron“ bezeichnet.

Die vorstehenden Überlegungen sind in Tabelle 28-18 zusammengefasst. Die Inklination einer sonnensynchronen Bahn wird mit i_{ss} bezeichnet. Die Übersicht lässt nach Beziehung (28.163) (auf Seite 44) den grundlegenden Zusammenhang von mittlerer drakonitischer und mittlerer Sonnen-synodischer Bewegung erkennen: $\overline{n_S} = \overline{n_D} + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right) = \overline{n_D} + \sigma_i \, \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$.

BEISPIEL 1: zu Bild 28-28 (auf Seite 85)

Bahndaten	H = 705 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 50°.
die mittlere drakonitische mittlere Bewegung	$\overline{n_D}$ = 0°.0607332 / sec
die mittlere drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_D}$ = 5927.569 sec
die säkulare Knotendrift	$\dot{\Omega}_s = -5°.13915551714 \times 10^{-5} / \text{sec}$
die mittlere Knotensonnendrift	$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ = -5°.42655282/d
die mittlere Sonnen-synodische mittlere Bewegung	$\overline{n_S}$ = 0°.060705 / sec
die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit	$\overline{P_S}$ = 5933.705 sec
die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ = -0°.3722746 pro $\overline{P_D}$
Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne	$\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ = 66.340 d

$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ ist der Winkel, um dessen Betrag der Abstand von aufsteigendem Knoten der Satellitenbahn und der fiktiven mittleren Sonne pro drakonitischem Umlauf vergrößert wird. Dabei entfernt sich der Knoten in westlicher Richtung von der Sonne. Hat der Knoten beim ersten Überflug die mittlere Ortszeit $T_m\left(t_\Omega\right) = 12^h$, so nach einem drakonitischen Umlauf $T_m\left(t_\Omega + \overline{P_d}\right) = 11^h\, 58^m\, 30^s.65$, der Knoten wurde somit in Richtung des lokalen Vormittags verschoben. Das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne dauert nach Formel (28.258) $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}} = 66.340\,\text{d}$ bei westlicher Verschiebung.◀

BEISPIEL 2: zu Bild 28-29 (auf Seite 85)

Bahndaten	H = 915 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 95°.
die mittlere drakonitische mittlere Bewegung	$\overline{n_D}$ = 0°.0580093 / sec.
die mittlere drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_D}$ = 6205.904 sec
die säkulare Knotendrift	$\dot{\Omega}_s = 0°.6268746110 \times 10^{-5} / \text{sec}$
die mittlere Knotensonnendrift	$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ = -0°.444027696 /d

die mittlere Sonnen-synodische mittlere Bewegung	$\overline{n_S}$ = 0°.0580041 / sec
die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit	$\overline{P_S}$ = 6206.454 sec
die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ = -0°.318934424 pro $\overline{P_D}$
Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne	$\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ = 810.760 d

$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ ist der Winkel, um dessen Betrag der Abstand von aufsteigendem Knoten der Satellitenbahn und der fiktiven mittleren Sonne pro drakonitischem Umlauf vergrößert wird. Dabei entfernt sich auch in diesem Fall der Knoten in westlicher Richtung von der Sonne. Hat der Knoten beim ersten Überflug die mittlere Ortszeit $T_m(t_\Omega) = 12^h$, so nach einem drakonitischen Umlauf $T_m\left(t_\Omega + \overline{P_d}\right) = 11^h\,59^m\,52^s.35$, der Knoten wurde somit geringfügig in Richtung des lokalen Vormittags verschoben. Das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne dauert nach Formel (28.258) $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ = 810.760 d bei westlicher Verschiebung.◀

BEISPIEL 3: zu Bild 28-30 (auf Seite 86)85

Bahndaten	H = 915 km, $\overline{e_0}$ = 0.0, $\overline{i_0}$ = 105°.
die mittlere drakonitische mittlere Bewegung	$\overline{n_D}$ = 0°.0580263 / sec.
die mittlere drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_D}$ = 6204.079 sec
die säkulare Knotendrift	$\dot{\Omega}_s = 0°.1862567759 \times 10^{-4}$ / sec
die mittlere Knotensonnendrift	$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ = 0°.623611184 /d
die mittlere Sonnen-synodische mittlere Bewegung	$\overline{n_S}$ = 0°.05800336 / sec
die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit	$\overline{P_S}$ = 6203.307 sec
die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ = 0°.0447793156 pro $\overline{P_D}$
Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne	$\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ = 577.283 d

$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ ist der Winkel, um dessen Betrag der Abstand von aufsteigendem Knoten der Satellitenbahn und der fiktiven mittleren Sonne pro drakonitischem Umlauf vergrößert wird. Dabei entfernt sich in diesem Fall der Knoten in östlicher Richtung von der Sonne. Hat der Knoten beim ersten Überflug die mittlere Ortszeit $T_m(t_\Omega) = 12^h$, so nach einem drakonitischen Umlauf

$T_m\left(t_\Omega + \overline{P_d}\right) = 12^h\,00^m\,10^s.75$, der Knoten wurde somit geringfügig in Richtung des lokalen Nachmittags verschoben. Das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Konjunktionen des Knotens mit der fiktiven mittleren Sonne dauert nach Formel (28.258) $\overline{P_{\Omega\overline{\odot}}}$ = 577.283 d bei östlicher Verschiebung. ◄

Anmerkung: Die hier hergeleiteten Formeln gelten ohne Einschränkung auch für elliptische Bahnen, da für jeden Zeitpunkt das Argument der Breite *u* und damit auch die knotenbezogene Rektaszension $\overline{\Omega}_0$ für einen Satellitenort (λ, φ) berechnet werden können. ◄

28.7.4 Bahnauslegung aus Knotensonnendrift und Verschiebung

Die bisher entwickelten Formelsysteme erlauben weitere bahnanalytische Definitionsbereiche herzuleiten. Im Fall der Knotensonnendrift können etwa die Halbachse $\overline{a}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ bei bekannten Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Argument des Perigäums $\overline{\omega}_0$ bestimmt werden.

28.7.4.1 Bahnparameter aus Knotensonnendrift

Die Bahnebene eines Erdsatelliten habe gegenüber der fiktiven mittleren Sonne eine bestimmte Drift. Welche Bahnelemente lassen sich damit festlegen?

Die gegebene Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s}$ kann mit der Beziehung (28.256) auf die Knotenlängendrift zurückgeführt werden:

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} = -\frac{360°}{86400s} + \dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s} = -\dot{\Theta} + n_\odot + \dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s} \quad , \tag{28.274}$$

wenn die Einschränkung (28.257) erfüllt ist. Alternativ kann die Knotensonnendrift auch auf die säkulare Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens zurückgeführt werden. Beziehung (28.248) ergibt

$$\dot{\Omega}_s = \dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s} + n_\odot \quad . \tag{28.275}$$

Somit ist die Aufgabenstellung auf eine der Verfahren der Bahnauswahl bei Vorgabe der Knotenlängendrift in Abschnitt 23.5.4 zurückgeführt.

- *Bei Vorgabe der säkularen mittleren Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s}$ und zwei der mittleren Bahnelemente $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0$ kann das dritte dieser Elemente berechnet werden.*

BEISPIEL 1: Die Bahnebene einer um 50° (bzw. 130°) geneigten kreisförmigen Satellitenbahn möge sich pro mittlerem Sonnentag maximal von der fiktiven mittleren Sonne in westlicher Richtung wegbewegen. Wie ist die Bahn gerichtet, in welcher Kreisbahnhöhe muss sich der Satellit bewegen?

Nach Tabelle 28-18 auf Seite 86 bewegt sich der Satellit auf rechtläufigen Bahnen in westlicher Richtung von der Sonne weg. Die Inklination muss also $\overline{i}_0$ = 50° betragen. Wegen Formel (28.249) ist die säkulare Knotensonnendrift am größten, wenn der Satellit am tiefsten fliegt. Unter der Annahme $H_{P,\min}$ = 200 km folgt $\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s}$ -6°.73943570. ◄

BEISPIEL 2: Die Bahnebene einer kreisförmigen Satellitenbahn, auf der ein Satellit in der mittleren Bahnhöhe H = 673 km fliegen soll, bewege sich in östlicher Richtung pro Tag um den Betrag $\left|\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}\right|$ = 5°.5 von der Sonne weg. Wie muss die Bahnebene geneigt sein?

Nach Tabelle 28-18 muss die Knotensonnendrift positiv sein. Aus Formel (28.274) folgt $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -354°.5 / d. Damit ergibt sich die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ = 156°.94825244. Wegen der vorgegebenen Bahnhöhe kann die Relation[1] (28.257) nicht voll ausgeschöpft werden. ◄

BEISPIEL 3: Ein Satellit bewege sich auf einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn. Die Bahn sei um $\bar{i}_0$ = 97°.354 geneigt. In welcher mittleren Bahnhöhe fliegt der Satellit?

Nach Definition (28.273) ist $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ = 0°.0, somit $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -360° / 86400.0 / s. Somit liefert das in Abschnitt 23.5.4.1 hergeleitete Verfahren die Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 6859.207 km mit der mittleren Kreisbahnhöhe H= 481.070 km. ◄

BEISPIEL 4: Ein Satellit bewege sich auf einer Kreisbahn mit der mittleren Bahnhöhe *H* = 750 km. Der Bahnknoten bewege sich pro Tag um 8° in westlicher Richtung von der fiktiven mittleren Sonne weg. Wie muss die Bahn geneigt sein?

Als Test sei um einen Grenzwert abzuschätzen $\bar{i}_0$ = 0° gesetzt. Mit $\bar{a}_0$ = 7128.137 km und $\bar{e}_0$ = 0.0 liefert Formel (28.249) die säkulare Knotenlängendrift $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ = -7°.78003020. Der gewünschte Wert -8° liefert also keine mögliche Satellitenbahn. Wird stattdessen der Wert $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = -7°.5$ gewählt wird $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -367°.5$ und die gesuchte Inklination ist $\bar{i}_0$ = 16°.357873. ◄

BEISPIEL 5: Ein Satellit bewege sich auf einer um $\bar{i}_0$ = 50° geneigten Bahn mit großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 11000 km. Der Bahnknoten bewege sich pro Tag um 2°.25 in westlicher Richtung von der fiktiven mittleren Sonne weg. Welche Exzentrizität muss die Bahn haben?

Mit der säkularen Knotenlängendrift $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ = -2°.25/ d lautet die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -362°.25/ d. Mit dem Verfahren der Bahnauswahl aus gegebener Knotenlängendrift in Abschnitt 23.5.4.2 folgt die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.36424622. Zur Kontrolle wird die Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s<\text{contr}>}$ = -2°.25003535/d. Der Fehler liegt unter $0''.13$.◄

28.7.4.2 Bahnparameter aus Knoten-Sonnenverschiebung

Bei Vorgabe der mittleren Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}0}}$ kann eines der *Kepler*schen Bahnelemente $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{i}_0$ berechnet werden, wenn die anderen Elemente vorgegeben sind. Die Aufgabenstellung kann bei vorgegebenem Bahnmodell unterschiedlicher Genauigkeit zur Berechnung eines der drei mittleren *Kepler*elemente *El* allgemeingültig mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct(El) \equiv \sin\left[\tau_\Omega(t_0 + N_d P_d) - \tau_\Omega(t_0) - N_d \Delta\tau_{\Omega 0}\right] = 0 \qquad (28.276)$$

[1] auf Seite 75

bearbeitet werden. Dazu kann prinzipiell die zugehörige Knoten-Sonnenverschiebung auf die wahre oder die fiktive mittlere Sonne bezogen sein ($\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot$ oder $\overline{\tau_\Omega} = \Omega - \alpha_{\overline{\odot}}$), als drakonitische Umlaufzeit kann die wahre oder die mittlere eingesetzt werden. Um eines der Elemente auch im Hinblick auf möglichst große Zeiträume zu errechnen, kann die Berechnung über N_D drakonitische Umläufe durchgeführt werden. Die Iteration kann mit einer stabilen linearen Interpolation oder in weniger Iterationsschritten mit einem *Newton* Verfahren durchgeführt werden. Der Konvergenzkreis des *Newton* Verfahrens kann recht klein sein. Da nach den obigen Überlegungen ein Anfangswert willkürlich gewählt werden muss, sollte der Konvergenzkreis möglichst groß sein.

Im vorliegenden Abschnitt wird als wichtigste Anwendung nur die Bestimmung der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ ausgehend von einer Epoche t_0 bei Vorgabe der mittleren Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}0}}$ und der mittleren Epocheparameter Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ untersucht.

Vor Start einer Bearbeitung sind wesentliche Vorüberlegungen erforderlich. Zunächst muss geklärt werden, ob die vorgegebene Knoten-Sonnenverschiebung überhaupt im erlaubten Intervall (28.267) liegt[1]. Die überlagerte Funktion (28.276) zeigt, dass die zu berechnende große Bahnhalbachse abhängig von der Anfangszeit t_0 ist. Um größenordnungsmäßig zunächst eine zeitunabhängige Lösung zu erhalten, wird mit Formel (28.260) die Bedingungsgleichung

$$fct_2\left(\overline{a}_0\right) \equiv \overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}} - \overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}0}} = \frac{2\pi\left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)}{\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s} - \overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}0}} = 0 \tag{28.277}$$

verwendet. Ausgehend von einem geeigneten Anfangswert $\overline{a}_0^{(0)}$ kann diese Funktion ebenso wie die genaue Funktion (28.276) iterativ gelöst werden.

Die Beziehung (28.249) zeigt, dass $\dot{\Omega}_s$ und $n_\odot$ ungefähr von derselben Größenordnung sind. Daher kann in der vorstehenden Formel kein Hauptterm abgespalten werden, um etwa wie in früher behandelten Verfahren der Bahnauswahl die große Bahnhalbachse zunächst durch Linearisierung anzunähern. Im Rahmen des Hauptproblems der Satellitenbahnmechanik, Reduzierung der Bewegungseinflüsse auf die erste zonale Harmonische J_2 und Einsetzen der entsprechenden säkularen Ausdrücke in den Formeln (20.15) – (20.17), führt die obige Bedingungsgleichung auf einen Näherungsausdruck der Form

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}} = \frac{A - \dfrac{2\pi\, n_\odot}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a^7}}{a^2 + B} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{28.278}$$

Mit fest vorgegebenen Bahnparametern $\overline{e}_0$, $\overline{i}_0$ können die Hilfsparameter *A* und *B* als Konstante aufgefasst werden:

$$\begin{aligned} A &:= -\frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \cos\overline{i}_0 \\ B &:= \frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \left[\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\left(3\cos^2\overline{i}_0 - 1\right) + \left(5\cos^2\overline{i}_0 - 1\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{28.279}$$

[1] auf Seite 82

Quadrierung des Ausdrucks (28.278) liefert die algebraische Gleichung 7. Grades für die große Bahnhalbachse a

$$\frac{4\pi^2 n_\odot^2}{\mu} a^7 - \left(\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}\right)^2 a^4 - 2\left[B\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}\right)^2 + A\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}\right)\right] a^2 - \left[A - B\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}\right)\right]^2 = 0 \quad . \qquad (28.280)$$

Diese hat nur einen Vorzeichenwechsel, so dass nach der *Descartes*schen Vorzeichenregel genau eine reelle Wurzel zu erwarten ist. Daher genügt für eine iterative Lösung dieser Gleichung ein grober Anfangsnäherungswert.

Bevor ein sinnvoller Startwert $\overline{a}_0^{(0)}$ für die Iteration gefunden werden kann, wird die mit den gegebenen Bahnparametern extremal mögliche mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)_{ext}$ und zugehörige große Bahnhalbachse $\left(\overline{a}_0\right)_{ext}$ aus

$$\frac{d\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{d\left(\overline{a}_0\right)} = 0 \qquad (28.281)$$

berechnet. Dies führt auf die Bedingungsgleichung

$$fct\left[\left(\overline{a}_0\right)_{ext}\right] \equiv -7\left(\overline{a}_0\right)_{ext}\sqrt{\left(\overline{a}_0\right)_{ext}}\left(\left(\overline{a}_0\right)_{ext}^2 + B\right) - A + \frac{2\pi n_\odot}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(\overline{a}_0\right)_{ext}^7} = 0 \quad . \qquad (28.282)$$

Mit der hier erhaltenen Bahnhalbachse kann aus Beziehung (28.278) die zugehörige extremale Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\bar{\Omega}\odot(ext)}}$ erhalten werden. Diese von Exzentrizität und Inklination wesentlich abhängige Größe gibt einen entscheidenden Hinweis auf die Lösbarkeit der Aufgabe aus gegebener mittlerer Knoten-Sonnenverschiebung die große Bahnhalbachse zu bestimmen: wenn nämlich die extremale Knoten-Sonnenverschiebung kleiner als die vorgegebene ist, ist die Aufgabe nicht lösbar (siehe etwa die Beispiele 5 und 6).

Es werden zwei Grenzwerte für die mögliche Halbachse durch Vorgabe der Perigäumshöhe gewählt:

$$a_1 := \frac{H_{\max}}{1-\overline{e}_0} \;,\; a_2 := \frac{H_{\min}}{1-\overline{e}_0} \quad . \qquad (28.283)$$

Jeder diese beiden Werte wird als Anfangslösung zur Berechnung der großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ mit Hilfe der überlagerten Funktion (28.276) bzw. (28.277) genommen.

Bild 28-25 (auf Seite 80) (bzw. analog Bild 28-26 auf Seite 81) lässt vermuten, dass je nach Vorgabe eines willkürlichen Anfangswertes eine Iteration jenseits eines Extremalwertes $\overline{\Delta\tau_{\bar{\Omega}\odot(ext)}}$, welcher als rechter Umkehrpunkt einer der Kurven erkennbar ist, insbesondere auf Kreisbahnen mit Inklinationen unter 90° zu zwei unterschiedlichen Lösungen führen kann. Welches der beiden Ergebnisse sinnvoll ist, oder ob beide Lösungen möglich sind, muss eine Plausibilitätsüberlegung entscheiden.

Dieser Wert kann nun als Startwert für die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse bei Bezug auf eine Epoche t_0 mit Hilfe der überlagerten Funktion (28.276) und Bezug auf die wahre Sonne verwendet werden.

Als zentrale Folgerung, die im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse unabdingbar ist, schließen wir generell:

➢ *Jede Aussage in einer Satellitenbahnanalyse muss sorgfältig qualifiziert werden können.* ◄

BEISPIEL 1: Vorgegeben sei eine Kreisbahn mit der mittleren Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\bar{\Omega}\odot}} = -1°.2 / \overline{P_d}$ unter der Neigung $\bar{i}_0$ = 30° Die extremale mittlere Knoten-Sonnenverschiebung ergibt nach Formel (28.282) den Wert $\bar{a}_{0(ext)}$ = 12863.637 km mit $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(ext)}}$ = -0°.29003. Wird für die Iteration mit Formel (28.283) der Startwert a_1 = 6578.137 km verwendet, ergibt die Iteration (28.277) die Bahnhalbachse $\bar{a}_{01}$ = 4204.644 km. Dieser Wert muss somit verworfen werden. Die Iteration mit a_2 = 45000.000 km führt auf den zeitunabhängigen Wert $\bar{a}_{02}$ = 47924.001 km. Die Probe ergibt exakt $\overline{\Delta\tau_{\bar{\Omega}\odot}} = -1°.2 / \overline{P_D}$ mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D} = 104403.631 \text{ sec} \triangleq 29^h$.

Eine weitere Untersuchung zeigt in folgender Tabelle die Zeitabhängigkeit des Ergebnisses der Bahnauslegung, wenn der Bezug auf die wahre Sonne im Wesentlichen mit der säkularen Knoten-Sonnenverschiebung (28.270) (d.h. quantitativ dem Bezug auf die wahre Sonne und inklusiv die periodischen Bewegungseinflüsse des Satelliten) erfolgen soll.

Datum t_0	Bahnhalbachse	Knoten-Sonnenverschiebung
zeitunabhängig	$\bar{a}_0 = 47924.001$ km	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.2$
2018-01-30/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 46710.449$ km	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.15551 / \overline{P_D}$
2018-04-01/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 50512.695$ km	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.296907 / \overline{P_D}$
2018-07-01/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 46431.810$ km	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.1453896 / \overline{P_D}$
2018-10-01/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 50744.902$ km	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.30573 / \overline{P_D}$
2018-12-01/00:00:0.0	$\bar{a}_0 = 45045.659$ km	$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.0955 / \overline{P_D}$

BEISPIEL 2: Vorgegeben sei eine Kreisbahn unter der Neigung $\bar{i}_0$ = 30°. Wie groß muss die Bahnhalbachse sein, damit die Bahnebene pro mittlerem drakonitischem Umlauf die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}0}} = -0°.4 / \overline{P_D}$ durchläuft?

Die extremale Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(ext)}}$ wird mit der aus der Bedingungsgleichung (28.282) errechneten großen Bahnhalbachse berechnet: der extremal erreichbaren großen Halbachse $\bar{a}_{0(ext)}$ = 12863.500 km ist $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(ext)}}$ = -0°.29003 / $\overline{P_D}$ zugeordnet. Da die vorgegebene Inklination unter 90° liegt, sind zwei Ergebnisse zu erwarten.

Um einen geeigneten Anfangswert für die zu suchende große Bahnhalbachse zu finden, werden die beiden extremalen Perigäumsradien $r_{P(1)}^{(0)} = R_E + 200$ km und $r_{P(2)}^{(0)} = 45000$ km gewählt. Die Iteration mit der überlagerten Funktion (28.277) ausgehend von $r_{P(1)}^{(0)}$ ergibt die Halbachse $\bar{a}_{0(1)} = 8049.816$ km, ausgehend von $r_{P(2)}^{(0)}$ ergibt die Halbachse $\bar{a}_{0(2)} = 21385.696$ km. Die Kontrolle ergibt in beiden Fällen exakt den Eingabewert $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}0}}$.

Bezogen auf die Epoche 2018-06-13/14 lauten die Ergebnisse $\bar{a}_{0(1t)} = 8120.938$ km mit der mittleren Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}0(1)}} = -0°.39553575718 / \overline{P_D}$ bzw. $\bar{a}_{0(2)} = 20495.626$ km mit $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}0(2)}}. = -0°.3999999998308 / \overline{P_D}$. Wird endgültig die erstere Bahn gewählt, beträgt der Fehler etwa 16 Bogensekunden. ◄

BEISPIEL 3: Gegeben: $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 12°.5$, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -0°.54 / \overline{P_D}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\bar{\Omega}\odot(ext)}} = -0°.30530 / \overline{P_D}$, $\bar{a}_{0(ext)} = 13309.500$ km

Bahnen bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne: $\bar{a}_{0(1)} = 7009.362$ km, $\bar{a}_{0(2)} = 27178.326$ km.

Bei Bezug auf die Epoche 2018-06-13/14 lauten die Ergebnisse:

$\bar{a}_{0(1,t)} = 7039.171$ km mit $\overline{\Delta\tau_{\bar{\Omega}\odot(\text{contr-1t})}} = -0°.53641453311 / \overline{P_D}$, Fehler: etwa $13''$, sowie

$\bar{a}_{0(2,t)} = 26158.282$ km, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(\text{contr-1t})}} = -0°.514301598401 / \overline{P_D}$, Fehler: etwa $10''$. ◄

BEISPIEL 4: Gegeben: $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 12°.5$, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.0 / \overline{P_D}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(ext)}} = -0°30503 / \overline{P_D}$, $\bar{a}_{0(ext)} = 13310.012$ km.

Bahnen bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne: $\bar{a}_{0(1)} = 4926.052$ km, $\bar{a}_{0(2)} = 42283.011$ km.

Es kommt somit als einzige Lösung nur die höhere Bahn $\bar{a}_{0(2)}$ in Frage.

Bei Bezug auf die Epoche 2018-06-13/14 lautet das Ergebnis:

$\bar{a}_{0(2,t)} = 40799.677$ km, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(\text{contr-1t})}} = -0°.9494744267942 / \overline{P_D}$, Fehler: etwa $3'$. ◄

BEISPIEL 5: Gegeben: $\bar{e}_0 = 0.2$, $\bar{i}_0 = 120°.5$, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0°.1 / \overline{P_D}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(ext)}} = 0°.10894 / \overline{P_D}$, $\bar{a}_{0(ext)} = 8222.671$ km.

Es gibt nur eine Bahn. Bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne hat sie die mittlere Halbachse $\bar{a}_{0(1)} = 8368.424$ km.

Bei Bezug auf die Epoche 2018-06-13/14 lautet das Ergebnis:

$\bar{a}_{0(2,t)}$ = 8292.021 km, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(\text{contr-1t})}}$ = 0°.1046456691866 / $\overline{P_D}$, Fehler: etwa 17″.

Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_D}$ =7514.275 sec, die mittlere (sonnen) synodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ = 7512.092 sec. ◄

BEISPIEL 6: Gegeben: $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 30°.0$, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0°.0 / \overline{P_D}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(ext)}}$ = -0°.29003 / $\overline{P_D}$, $\bar{a}_{0(ext)}$ = 12863.500 km.

Da $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(ext)}} < \overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0°.0 / \overline{P_D}$ kann es keine Lösung geben. Dies zeigt auch ein Blick auf Bild 28-25 auf Seite 80. ◄

BEISPIEL 7: Gegeben: $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 120°.0$, $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0°.0 / \overline{P_D}$.

Ergebnisse: Extremalwerte: $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(ext)}}$ = 0°.10894 / $\overline{P_D}$, $\bar{a}_{0(ext)}$ = 8222.671 km.

In diesem Fall gibt es genau eine Lösung: $\bar{a}_0$ = 10415.666 km.

In Bezug auf die Epoche 2018-06-13/14 lautet die Lösung bei Bezug auf die wahre Sonne $\bar{a}_{0(t)}$ = 10260.296 km, die Knoten-Sonnenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}(t)}}$ = 0°.0063761407 / $\overline{P_D}$.

In diesem Fall handelt sich um eine sonnensynchrone Bahn (siehe in Abschnitt 28.9). ◄

Die vorstehenden Beispiele zeigen wiederholt, wie empfindlich das Verfahren zur Berechnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der Knoten-Sonnenverschiebung ist. Insbesondere zeigt Beispiel 4, dass der berechnete Extremalwert für mögliche Knoten-Sonnenverschiebungen auch ein Minimalwert sein kann. Es lohnt sich daher stets einen Blick auf die graphische Übersicht über die Verläufe der Knoten-Sonnenverschiebung in Bild 28-25 auf Seite 80 bzw. Bild 28-26 zu werfen. Aus diesen Bildern kann abgelesen werden, welche Vorgaben überhaupt sinnvoll sind um in diesem Fall ein Verfahren der Bahnauswahl starten zu können und welche Ergebnisse erwartet werden dürfen.

28.7.4.3 Bahnparameter aus gleichartiger Sonnenstellung der Bahnebene

Die Aufgabenstellung lautet: Eine Satellitenbahneben möge stets nach dem Zeitraum $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ wieder dieselbe Stellung zur mittleren fiktiven Sonne einnehmen. Welche Bahnparameter lassen sich damit festlegen?

Aus Beziehung (28.258) kann bei Vorgabe der Anzahl der Tage zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichartigen Stellungen des Bahnknotens in Bezug auf die fiktive mittlere Sonne die Knotensonnendrift berechnet werden:

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = \frac{360°}{\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}} \quad . \tag{28.284}$$

Hier muss wieder beachtet werden, dass $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ üblicherweise negativ angegeben wird, wenn eine relative Westdrift des Knotens bezüglich der Sonne gefordert ist. Nach Berechnung der Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ kann die Aufgabenstellung auf die Bahnauswahl in Abschnitt 28.7.4.1 (auf Seite 89) zurückgeführt werden.

- *Bei Vorgabe der Anzahl der Tage zwischen gleichartigen Stellungen von Bahnknoten und Sonne und zwei der mittleren Bahnelemente* $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ *kann das dritte dieser Elemente berechnet werden.*

Um in der vorliegenden Aufgabenstellung eine Bahnanalyse durchzuführen, können nicht beliebige Vorgaben gemacht werden. Vielmehr müssen im Fall kreisförmiger Bahnen nach Bild 28-31 geeignete Vorgaben zusammengefügt werden, die dann mit den vorgenannten mathematischen Methoden zu einer brauchbaren Lösung geführt werden. Auch im Fall elliptischer Bahnen können nach dieser Zeichnung sinnvolle Eingabepaare abgeschätzt werden.

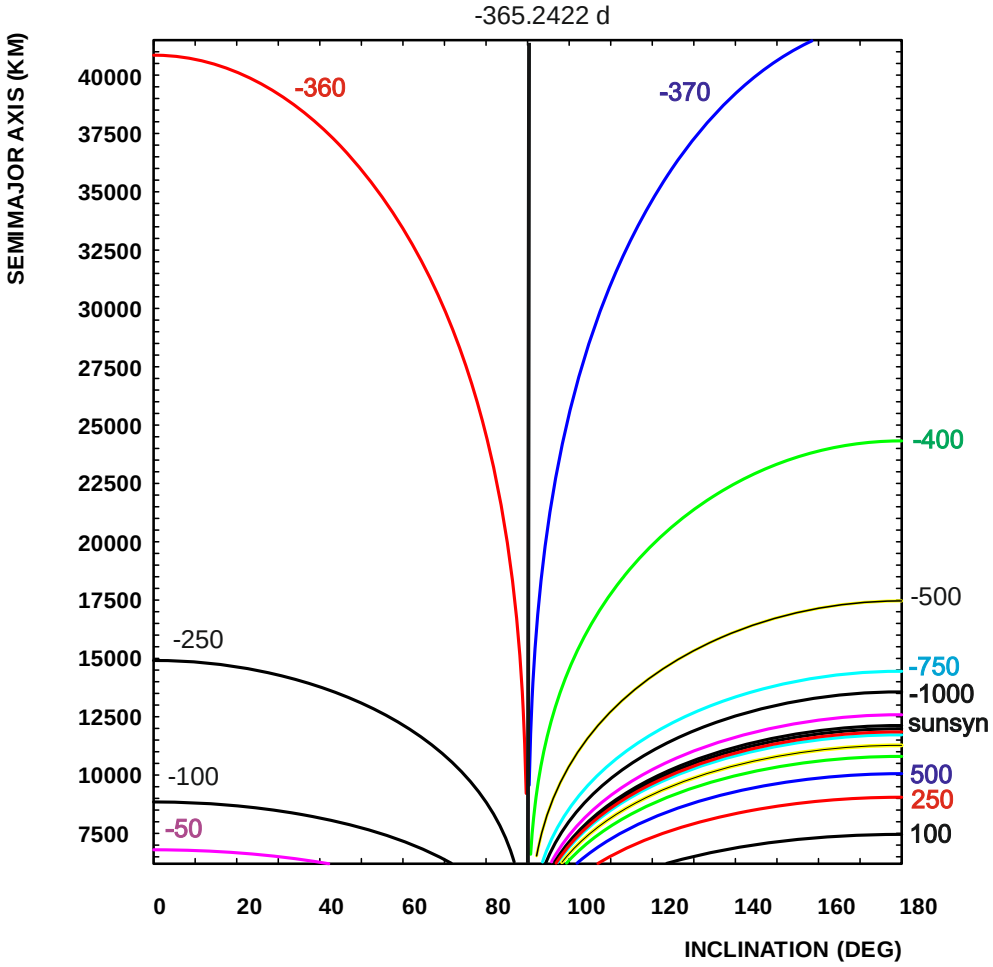


Bild 28-31: Der Zusammenhang zwischen der Reproduzierbarkeit gleichartiger (synodischer) Stellungen zwischen Bahnknoten und Sonne und der großen Bahnhalbachse und der Bahninklination für kreisförmige Satellitenbahnen. Die Zahlen im Bild bezeichnen die Anzahl der Tage zwischen den gleichartigen Stellungen

BEISPIEL 1: Eine kreisförmige Satellitenbahn in 750 km mittlerer Bahnhöhe habe bei östlicher Drift bezüglich der Sonne nach 200 Tagen eine reproduzierbare gleichartige Stellung (z.B. Konjunktion). Wie muss die Bahnebene geneigt sein?

Gegeben ist die Anzahl der Tage gleichartiger Sonnenstellung $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$. Aus Formel (28.284) wird die Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}$ = 1°.8/d, entsprechend die Knotenlängendrift nach (28.256) $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -358°.2 /d. Die Näherungsformel[1] (23.244) liefert für die Inklination den Näherungswert $\bar{i}_0^{(0)}$ = 114°.36522206, die Verbesserung mit der überlagerten Funktion (23.245) schließlich $\bar{i}_0$ = 114°.39959806. Zur Kontrolle wird die mittlere Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s<\text{contr}>}$ = 1°.79942688 /d. Der Fehler beträgt etwa $2''/\mathrm{d}$. Die Reproduzierbarkeit errechnet sich zu $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}<\text{contr}>}}$ = 200.064 d. ◄

BEISPIEL 2: Alternativ zu Beispiel 1 habe eine kreisförmige Satellitenbahn in 750 km mittlerer Bahnhöhe bei westlicher Drift bezüglich der Sonne nach 200 Tagen eine reproduzierbare gleichartige Stellung (z.B. Konjunktion). Wie muss die Bahnebene geneigt sein?

Gegeben ist die Anzahl der Tage gleichartiger Sonnenstellung $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ = -200 d. Die mittlere Knotensonnendrift beträgt $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ = -1°.8/d, entsprechend die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -361°.8 /d. Die Inklination hat den Näherungswert $\bar{i}_0^{(0)}$ = 83°.07260388, die Verbesserung ergibt $\bar{i}_0$ = 83°.05541514. Zur Kontrolle wird die Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}0s<\text{contr}>}$ = -1°.79961639 /d. Der Fehler beträgt etwa $1''.4/\mathrm{d}$. Die Reproduzierbarkeit errechnet sich zu $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}<\text{contr}>}}$ = 200.043 d. ◄

BEISPIEL 3: Eine unter 75° geneigte kreisförmige Satellitenbahn habe bei westlicher Drift bezüglich der Sonne nach 200 Tagen eine reproduzierbare gleichartige Stellung. Welche mittlere große Bahnhalbachse muss die Bahn haben?

Gegeben ist wieder die Anzahl der Tage gleichartiger Sonnenstellung $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ = -200 d. Die Knotensonnendrift beträgt $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$ = -1°.8 /d, entsprechend die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -361°8 /d. Die Bahnhalbachse hat mit der Näherungsformel (23.240) den Näherungswert $\bar{a}_0^{(0)}$ = 8865.885602 km, die Verbesserung mit der überlagerten Funktion (23.241) ergibt $\bar{a}_0$ = 8861.809 km. Zur Kontrolle wird die Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s<\text{contr}>}$ = -1°.80003497 /d. Der Fehler beträgt etwa $0''.13/\mathrm{d}$. Die Reproduzierbarkeit errechnet sich zu $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}<\text{contr}>}}$ = -199.996 d. ◄

BEISPIEL 4: Es werde eine elliptische Bahn gesucht, welche die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 12000 km habe und um 60° geneigt sei. Bei westlicher Drift bezüglich der Sonne möge auch diese Bahn nach 200 Tagen eine reproduzierbare gleichartige Stellung haben. Welche mittlere Exzentrizität muss diese Bahn haben?

Gegeben ist wieder die Anzahl der Tage gleichartiger Sonnenstellung $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}$ = -200 d. Die mittlere Knotensonnendrift beträgt $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s,0}$ = -1°.8 /d, entsprechend die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -361°.8 /d.

[1] In Abschnitt 23.5.4.3

Die Exzentrizität hat mit der Näherungsformel (23.224) und anschießender Verbesserung mit der überlagerten Funktion (23.225) ergibt $\bar{e}_0$ =0.42645342. Zur Kontrolle wird die mittlere Knotensonnendrift berechnet: $\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s<\text{contr}>}$ = -1°.80003463 /d. Der Fehler beträgt etwa $0''.13/\mathrm{d}$. Die Reproduzierbarkeit errechnet sich zu $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}<\text{contr}>}}$ = -199.996 d. ◄

Anmerkung: Die Untersuchungen in den letzten Abschnitten bezogen sich auf den Zusammenhang von Satellit, Satellitenbahn und wahrer bzw. fiktiver mittlerer Sonne bezogen auf die Erdäquatorebene. Der direkte Bezug zwischen Satellit und wahrer Sonne wird im Rahmen des Sonnenaspektwinkels behandelt (Abschnitt 28.12.1 auf Seite 226). ◄

28.8 Äquivalenz-Bahnen mit Sonnen-synodischen Bewegungen

Äquivalenzbahnen, die durch Kopplung zweier (oder mehrerer) Satellitenbewegungen gebildet werden, haben sich als ein bemerkenswerter Einblick in die Satellitenbahnanalyse herausgestellt (siehe etwa in den Kapiteln 26.9 – 26.12). Sie führen auch im Zusammenhang mit der Satellitenbewegung in Bezug auf die Bewegung der Sonne zu interessanten Einsichten[1].

28.8.1 Äquivalenz-Bahnen aus der Kopplung Sonnen-synodischer mit meridionaler Bewegungen

Die Kopplung zwischen der Sonnen-synodischen Bewegung mit der Meridian-bezogenen Bewegung hat die Eigenschaft, dass bei einem Überflug des Satelliten über einem Meridian in derselben Richtung im Subsatellitenpunkt stets dieselbe Sonnenzeit besteht: bei $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahnen dieselbe mittlere Sonnenzeit, bei $\left(P_S \triangleq P_R\right)$– Äquivalenzbahn dieselbe wahre Sonnenzeit.

28.8.1.1 Basiseigenschaften

Grundlegend für die Auswahl von Meridian-bezogenen Äquivalenzbahnen ist stets die allgemeingültige Bedingung (26.50)

$$\overline{n_R} < 0 < \overline{n_T} < \dot{\Theta} \quad , \quad \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = \sigma_i = +1 \qquad .$$

Um eine Äquivalenz zwischen der mittleren Sonnen-synodischen Satelliten-Bewegung $\overline{n_S}$ und der mittleren Meridian-bezogenen Bewegung $\overline{n_R}$ herzuleiten, werden die entsprechenden mittleren Bewegungen aus den Beziehungen (26.15) und (28.161) verglichen:

$$\left.\begin{aligned} \overline{n_S} &= \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right) = \overline{n_T} - \sigma_i\, n_\odot = \overline{n_T} - n_\odot \\ \overline{n_R} &= \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) = \overline{n_T} - \sigma_i\,\dot{\Theta} = \overline{n_T} - \dot{\Theta} \end{aligned}\right\rangle \sigma_i = +1 \ . \qquad (28.285)$$

$\overline{n_T}$ ist die mittlere tropische mittlere Bewegung[2].

---

[1] Erstveröffentlichung in E.F.M. JOCHIM [2020]

[2] Abschnitt 24.3.3 (Band IV-A)

Analog[1] Bild 26-4 und den Beziehungen (26.59) und (26.60) werden für Äquivalenz der Sonnen-synodischen mit der Meridian-bezogenen Bewegung die Bedingungen

$$\overline{n_S} = \left|\overline{n_R}\right| \quad , \quad \overline{n_R} = -\overline{n_S} \quad \Rightarrow \quad \overline{n_R} + \overline{n_S} = 0 \quad \left\langle \overline{P_S} = \overline{P_R} \right. \tag{28.286}$$

gefordert. Die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde und die Bewegung $n_{\odot}$ der fiktiven mittleren Sonne sind durch die Beziehung (28.70) verknüpft:

$$\dot{\Theta} = 1 + n_{\odot} \triangleq \frac{2\pi}{86400\,\mathrm{s}} + n_{\odot} \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] \quad . \tag{28.287}$$

Mit den allgemeingültigen Beziehungen (28.285) und wegen Bedingung (28.286) führt dies auf

$$\begin{aligned} \overline{n_R} + \overline{n_S} &= 2\,\overline{n_T} - \left(\dot{\Theta} + n_{\odot}\right) = 2\,\overline{n_T} - \left(1 + 2\,n_{\odot}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\left(\overline{n_T} - n_{\odot}\right) - \frac{2\pi}{86400\,s} = 2\,\overline{n_S} - \frac{2\pi}{86400\,s} = 0 \,. \end{aligned} \tag{28.288}$$

Die mittlere Sonnen-bezogene mittlere Bewegung einer theoretischen $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahn hat daher den Betrag

$$\overline{n_{QSR\,K}} = \frac{\pi}{86400} = 3.63610261 \times 10^{-5} \left[\frac{1}{s}\right] \quad . \tag{28.289}$$

Die zugehörige mittlere Sonnen-synodische und Meridian-bezogene Umlaufzeit einer $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahn dauert exakt zwei (Sonnen-) Tage:

$$\overline{P_{S\,K}} = \overline{P_{R\,K}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{S\,K}}} =: \overline{P_{SR\,K}} = 172800\,\mathrm{s} \quad \left\langle \overline{P_S} = \overline{P_R} \right. \quad . \tag{28.290}$$

Die mittlere Bahnhalbachse der *Kepler*schen Äquivalenz -Bahn im Fall der $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahn beträgt dann

$$\overline{a_{QSR\,K}} := \sqrt[3]{\frac{\mu\,\overline{P_{S\,K}}^{\,2}}{4\pi^2}} = 66846.4441868\,\mathrm{km} \quad . \tag{28.291}$$

Dieser Wert kann als nullte Näherung verwendet werden um iterativ die mittlere bzw. wahre Sonnen-synodische bzw. Meridian-bezogene Umlaufzeit bei Berücksichtigung beliebiger weiterer Bahnparameter zu berechnen.

28.8.1.2 Weitere generelle Eigenschaften

Für weitere Untersuchungen wird der mittlere Sonnenwinkel

$$\overline{\tau} = \overline{\alpha} - \alpha_{\overline{\odot}} \qquad \text{mit} \qquad \alpha_{\overline{\odot}} = \alpha_{\overline{\odot}0} + n_{\odot}\left(t - t_0\right) + \cdots \tag{28.292}$$

mit Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\overline{\odot}$ benötigt. Die zugehörigen Variationen von wahrem und mittlerem Sonnenwinkel sind

$$\overline{\tau} = \overline{\alpha} - \alpha_{\overline{\odot}} \quad , \quad \dot{\overline{\tau}} = \dot{\overline{\alpha}} - \dot{\alpha}_{\overline{\odot}} = \dot{\overline{\alpha}} - n_{\odot} \tag{28.293}$$

Damit ergeben sich in Anlehnung an die Beziehungen (26.21), mit Formel (26.10) und wegen (24.51) die Entwicklungen

[1] Abschnitt 26.5.1.3, Band IV-A

$$\left.\begin{aligned}\dot{\tau} &= \dot{\bar{\tau}} + \delta\dot{\tau} = \dot{\bar{\alpha}} - n_{\odot} + \delta\dot{\tau} = \overline{n_T} - n_{\odot} + \delta\dot{\tau} = \overline{n_S} + \delta\dot{\tau} \\ \dot{\lambda} &= \dot{\bar{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} = \overline{n_T} - \dot{\Theta} + \delta\dot{\lambda} = \overline{n_R} + \delta\dot{\lambda} = -\overline{n_S} + \delta\dot{\lambda}\end{aligned}\right\rangle \sigma_i = \operatorname{sgn}(\cos i) = +1,\ \overline{n_t} < \dot{\Theta} \qquad (28.294)$$

somit

$$\dot{\tau} + \dot{\lambda} = \dot{\bar{\tau}} + \dot{\bar{\lambda}} + \delta\dot{\tau} + \delta\dot{\lambda} = \delta\dot{\tau} + \delta\dot{\lambda}\ . \qquad (28.295)$$

Werden die periodischen Anteile vernachlässigt, bleibt

$$\dot{\bar{\tau}} + \dot{\bar{\lambda}} = 0 \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_S} \right. \quad . \qquad (28.296)$$

Integration ergibt auch für die auf die Sonnen-synodische Bewegung bezogenen mittleren Meridian bezogenen Äquivalenzbahnen notwendig und hinreichend charakterisierende Beziehung

$$\bar{\tau} + \bar{\lambda} = const. =: \overline{Q_S} \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_S} \right. \quad . \qquad (28.297)$$

Wenn sich der Satellit im Mittel mit Bezug auf die fiktive mittlere Sonne rechtläufig mit zunehmendem Sonnenwinkel bewegt, bewegt er sich mit abnehmender geographischer Länge scheinbar rückwärts. Die Summe der beiden Winkel ist bezogen auf den Erdäquator konstant. Die Konstante $\overline{Q_S}$ charakterisiert die auf die Sonnen-synodische Bewegung bezogene Äquivalenzbahn. Sie wird als Äquivalenzparameter einer $(P_S \mathrel{\hat{=}} P_R)$ – Äquivalenzbahn bezeichnet.

Wenn in Beziehung (28.295) das Integral gebildet wird, erhält man mit dem periodischen Anteil

$$\delta Q_S := \int \left(\delta\dot{\tau} + \delta\dot{\lambda}\right) dt \qquad (28.298)$$

den allgemeinen Ausdruck

$$\tau + \lambda = Q_S = \overline{Q_S} + \delta Q_S \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_S} \right. \quad . \qquad (28.299)$$

Besonders bemerkenswert ist demnach, dass auch im Fall einer $(P_S \mathrel{\hat{=}} P_R)$ – Äquivalenzbahn in der Summe aus Sonnenwinkel und geographischer Länge wegen Beziehung (28.299) ausschließlich periodische Variationen zum Tragen kommen. Diese setzen sich aus periodischen Bewegungseinflüssen („Störungen“), der Mittelpunktsgleichung im Fall von elliptischen Bahnen sowie der Reduktion auf den Äquator im Falle geneigter Bahnen zusammen. Dagegen sind alle säkularen Einflüsse, welche in den mittleren Bewegungen zusammengefasst sind, eliminiert.

Der Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens ist mit der Beziehung (28.292) zur Epoche t_0 gegeben durch

$$\overline{\tau_{\Omega 0}} = \bar{\Omega}_0 - \alpha_{\bar{\odot} 0} \quad , \qquad (28.300)$$

die geographische Länge des Knotens mit (26.169) durch

$$\overline{\lambda_{\Omega 0}} = \bar{\Omega}_0 - \Theta_{G0}\ . \qquad (28.301)$$

Der mittlere Äquivalenzparameter einer Bewegung hat, da er wegen Beziehung (28.297) als konstant angesehen werden darf, zur Rektaszension des aufsteigenden Knotens zur Epoche t_0 die Relation

$$\overline{Q_{S\,0}} = 2\bar{\Omega}_0 - \alpha_{\bar{\odot} 0} - \Theta_{G0} \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_S} \right. \quad . \qquad (28.302)$$

Damit kann wieder (analog Fall (26.171)) der Äquivalenzparameter einer Äquivalenzbewegung anstatt der Rektaszension des aufsteigenden Knotens als ein Bahnparameter aufgefasst werden.

Tabelle 28-19 zeigt einige Beispiele der Berechnung der großen Bahnhalbachse für Sonnenbezogene Äquivalenzbahnen.

$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\overline{a_{QSR}}\left[\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{P_S} = \overline{P_R}$	$\overline{a_{QSR}}\left[P_S \triangleq P_R\right]$	$P_{S,sec} = P_{R,sec}$
0.0	0°	66811.207620 km	172800.000 s	66819.934944 km	172765.967 s
	30°	66810.636714 km	172800.000 s	66784.493013 km	172765.967
	60°	66809.559569 km	172800.000 s	66594.172167 km	172765.967
	85°	66809.192544 km	172800.000 s	64655.861474 km	172765.967
0.3	0°	66811.444649 km	172800.000 s	66929.518905 km	172765.967
	30°	66810.768974 km	172800.000 s	66911.027770 km	172765.967
	60°	66809.495727 km	172800.000 s	66812.174895 km	172765.967
	85°	66809.065849 km	172800.000 s	65778.630164 km	172765.967
0.6	0°	66812.786298 km	172800.000 s	67000.980034 km	172765.967
	30°	66811.513056 km	172800.000 s	66993.285573 km	172765.967
	60°	66809.124653 km	172800.000 s	66953.672424 km	172765.967
	85°	66808.345692 km	172800.000 s	66540.843377 km	172765.967
0.9	0°	66836.147849 km	172800.000 s	67047.931854 km	172765.967
	30°	66824.163694 km	172800.000 s	67043.880342 km	172765.967
	60°	66802.037123 km	172800.000 s	67032.984770 km	172765.967
	85°	66795.629900 km	172800.000 s	66981.780093 km	172765.967 s

Tabelle 28-19: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer Äquivalenz -Bahn mit Äquivalenz zwischen Sonnen-synodischer und Meridian-bezogener Bewegung für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen, $\left(\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°.0\right)$, Epoche: 2019-10-16/12:00:0.00. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$,

$\mu_{♁} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340$\times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$

Die beiden linken Spalten für $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen wurden mit der Funktionsgleichung (28.303) berechnet und sind nur von den Epocheelementen $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ abhängig. Bemerkenswert ist hier, dass die Umlaufzeiten in allen Fällen identisch sind und entsprechen dem theoretischen Sollwert (28.290) mit der Genauigkeit $\Delta t < \left|10^{-3}\right|\text{sec}$. Diese Genauigkeit entspricht im Wesentlichen den astrodynamischen Parametern

$$R_E = 6378.1366\,\text{km}, \mu_{♁} = 398600.4418\,\text{km}^3/\text{s}^2,\ \dot{\Theta} = 0.7292115857334\times 10^{-4}/\text{s},$$

$$J_2 = 0.001082625379977,\ J_3 = -2.532006353926912\times 10^{-6},\ J_4 = -1.619690832030000\times 10^{-6}.$$

Epoche	$\overline{a_{QSR}}$	$P_S = P_R$
2019-01-22/12:00:0.0	66990.272916 km	172830.296884 sec
2019-02-22/12:00:0.0	66984.052204 km	172783.293330 sec
2019-03-21/12:00:0.0	66981.526079 km	172764.024923 sec
2019-04-22/12:00:0.0	66983.333797 km	172777.824098 sec
2019-05-22/12:00:0.0	66987.627117 km	172810.383461 sec
2019-06-22/12:00:0.0	66989.697356 km	172825.974883 sec
2019-07-22/12:00:0.0	66986.681975 km	172803.241776 sec
2019-08-22/12:00:0.0	66982.102444 km	172768.430324 sec
2019-09-22/12:00:0.0	66980.730198 km	172757.932888 sec
2019-10-22/12:00:0.0	66984.068585 km	172783.417938 sec
2019-11-22/12:00:0.0	66990.685725 km	172833.393350 sec
2019-12-22/12:00:0.0	66994.198912 km	172859.630224 sec

Tabelle 28-20: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer wahren $\left(P_S \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz –Bahn mit den *Kepler*elementen $\left(\overline{e}_0 = 0.9, \overline{i}_0 = 85°, \overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0} = 0°\right)$. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\overset{+}{\odot}} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}/\text{s}$, $J_2 = 0.001082625379977$

Die Rechnung mit der Genauigkeit $\Delta t < \left|10^{-6}\right|\text{sec}$ ergibt von der Basisbeziehung den geringfügig abweichenden Wert $\overline{P_S} = \overline{P_R} = 172799.999949\ \text{s}$. Dieser Zahlenwert ergibt sich völlig unabhängig von der verwendeten Epoche sowohl mit säkularen Störungen allein wie auch mit Berücksichtigung aller im analytischen Bahnmodell von *M. C. Eckstein* (bzw. *D. Brouwer*) enthaltenen periodischen Störungen[1].

In den beiden rechten Spalten wurden basierend auf $\left(P_S \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahnen die Berechnungen mit Hilfe des Iterationsprozesses (28.305) - (28.306) unter Berücksichtigung nur säkularer Bewegungseinflüsse durchgeführt. Auch in diesem Fall sind die Umlaufzeiten bezogen auf ein und dieselbe Epoche identisch gleich. Allerdings ist dies nur bei Bezug auf dieselbe Epoche der Fall. Da sich diese Äquivalenzen auf die wahre Sonne beziehen, variieren die berechneten Werte auf die Bewegung der wahren Sonne längs der Ekliptik und spiegeln deshalb den oskulierenden Stand der Sonne wieder. Tabelle 28-20 zeigt den Verlauf der wahren Umlaufzeiten im Jahresverlauf und damit auch der mittleren großen Bahnhalbachse. Bei Bezug auf die wahre Sonne darf daher kein langfristig stabiles Verhalten einer Äquivalenzbahn erwartet werden. Der jeweilige Zahlenwert ergibt sich sowohl mit säkularen Störungen allein wie auch mit Berücksichtigung aller im analytischen Bahnmodell von *M. C. Eckstein* (bzw. *D. Brouwer*) enthaltenen periodischen Störungen.

[1] Vgl. Abschnitt 128.16 auf Seite 267

28.8.1.3 Berechnung der großen Bahnhalbachse

Mit Vorgabe der mittleren Bahnparameter Exzentrizität $\bar{e}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ sowie einem angenommenen Wert für die große Bahnhalbachse können die mittleren Bewegungen $\overline{n_S}, \overline{n_R}$ mit den Ausdrücken (28.285) erhalten werden[1]. Die iterative Berechnung der Bahnhalbachse und damit die mittlere Umlaufzeit erfolgt mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QSR}}\right) \equiv \frac{2\pi}{\overline{n_S}} - \frac{2\pi}{\overline{n_R}} = \overline{P_S} - \overline{P_R} = 0 \quad . \tag{28.303}$$

Der erhaltene Zahlenwert für die große Bahnhalbachse ist für die Epoche gültig, an der die vorgegebenen Bahnparameter gegeben sind.

Zur Berechnung der wahren Umlaufzeit, also unter Einschluss eines beliebig aufwendigen analytischen oder numerischen Bahnmodells, und der zugehörigen großen Bahnhalbachse, wird der Sonnenbezogene Bahnwinkel einer Satellitenbahn benötigt, der Sonnenwinkel[2]

$$\tau = \alpha - \alpha_{\odot} \quad . \tag{28.304}$$

Hier ist $\alpha_{\odot}$ jedoch die Rektaszension der wahren Sonne[3]. Mit Hilfe einer Ephemeridenrechnung können bei vorgegebenem Bahnmodell Sonnenwinkel τ und geographische Länge λ einer Satellitenposition jederzeit berechnet werden. Entsprechend den Beziehungen (26.21) sowie (28.125) werden die wahre Sonnen-synodische und die wahre Meridian-bezogene Umlaufzeit mit den überlagerten Funktionen

$$\begin{aligned} fct\left(P_S\right) &\equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S\right) - \tau\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(P_R\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_S\right) - \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{28.305}$$

bei Vorgabe einer Anfangshalbachse und der anderen fest vorgegebenen *Kepler*elemente erhalten. Die zugehörige mittlere Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ der zugehörigen Äquivalenzbahn wird bei Vorgabe der fünf restlichen Bahnparameter anschließend aus der Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv P_S\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) - P_R\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = 0 \qquad \prec \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots \tag{28.306}$$

berechnet. Analog kann ein anderer Bahnparameter $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ auf diese Weise berechnet werden[4]. Der gesamte Prozess (28.305) - (28.306) muss iterativ durchlaufen werden.

Werden im verwendeten Bahnpropagator etwa die analytischen Lösungen des *Eckstein*modells (bzw. *Brouwer*modell) eingesetzt, müssen die mittleren Epocheelemente vorgegeben sein. Mit den Parametern $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_0}_0\right)$ kann dann etwa die mittlere Bahnhalbachse zur Epoche $\overline{a_{QSR}}_0$ iterativ berechnet werden.

Die erhaltenen Ergebnisse weichen im Fall des Bezugs auf die wahre Sonne infolge der Mittelpunktsgleichung und der Reduktion auf den Äquator von den Werten ab, die bei Bezug auf die mittlere

---

[1] Die hier benötigten säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s, \dot{\omega}_s, \left(M_0\right)_s^{\cdot}$ sind im Rahmen der *Brouwer*schen analytischen Lösung in Kapitel 20.2.1 (Band III) zusammengestellt

[2] Abschnitt 28.5.1.1 (Band IV B)

[3] Abschnitt 28.1.1, sowie die analytische Darstellung in Abschnitt 28.1.3

[4] Musterbeispiele zur Berechnung von Inklination bzw. Exzentrizität sind u.a. in den Abschnitten 26.8.2.3 und 26.8.2.4 gegeben. Diese lassen sich im Prinzip auf andere Äquivalenzbahnen übertragen.

Sonne erhalten werden. Dies gilt insbesondere auch für die Umlaufzeit, die von einer Epochezeit abhängig ist. Dies kann aus Tabelle 28-22 auf Seite 109 abgelesen werden.

28.8.1.4 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung Sonnen-synodischer mit meridionaler Bewegung

Bild 28-32 zeigt eine Übersicht aller möglichen $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität $e_B \in \left[0.9015174 - 0.9015793\right]$. Die Kurven sind für je eine Exzentrizität berechnet. Wie im Fall von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen (siehe in Abschnitt 26.8.1.6) schneiden sich alle Kurven in einem fast punktförmigen Gebiet, hier in der Nähe des Punktes $\overline{a}_{cross} \approx 66810$ km, $\overline{i}_{cross} \approx 49°$. (zum Vergleich $\overline{a_{QSR\,K}} = 66846.4441868\,\text{km}$). Um diesen Schnittpunkt (bzw. Schnittpunkte) zu berechnen, werden die Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten $\left(e_1, e_2\right)$ zum Schnitt gebracht.

Aus der Bedingungsgleichung (28.288) für $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen wird die Gleichung einer Kurve im Fall einer bei Äquivalenz mit einer meridionalen Bewegung stets rechtläufigen Bahn $\left(\sigma_i = \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1\right)$ erhalten

$$\overline{n_R} + \overline{n_S} = 2\overline{n_K} + 2\left(M_0\right)_s^{\bullet} + 2\dot{\omega}_s + 2\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} - n_{\odot} = 0 \qquad \left\langle \sigma_i = \operatorname{sgn}\left(\cos \overline{i}_0\right) = +1 \right. . \tag{28.307}$$

Mit den säkularen Anteilen der Variationsgleichungen[1] $\left(M_0\right)_s^{\bullet}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ erster Ordnung und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \tag{28.308}$$

wird eine Trennung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse

$$f_e \equiv E_i\left[1 + \sqrt{1-e^2} - \cos^2 i\left(5 + 3\sqrt{1-e^2}\right) + 2\cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta} + n_{\odot}}{2n_K} - 1\right) \tag{28.309}$$

formal erhalten. Wird hier jeweils die vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ eingesetzt und die beiden erhalten Ausdrücke subtrahiert, bleibt eine quadratische Gleichung für den Cosinus der Inklination

$$A_0 \cos^2 i + B_0 \cos i + C_0 = 0 \tag{28.310}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_2\left(5 + 3\sqrt{1-e_2^2}\right) - E_1\left(5 + 3\sqrt{1-e_1^2}\right) \\ B_0 &:= 2\left(E_1 - E_2\right) \\ C_0 &:= E_1 - E_2 + E_1\sqrt{1-e_1^2} - E_2\sqrt{1-e_2^2} \quad . \end{aligned} \tag{28.311}$$

[1] aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

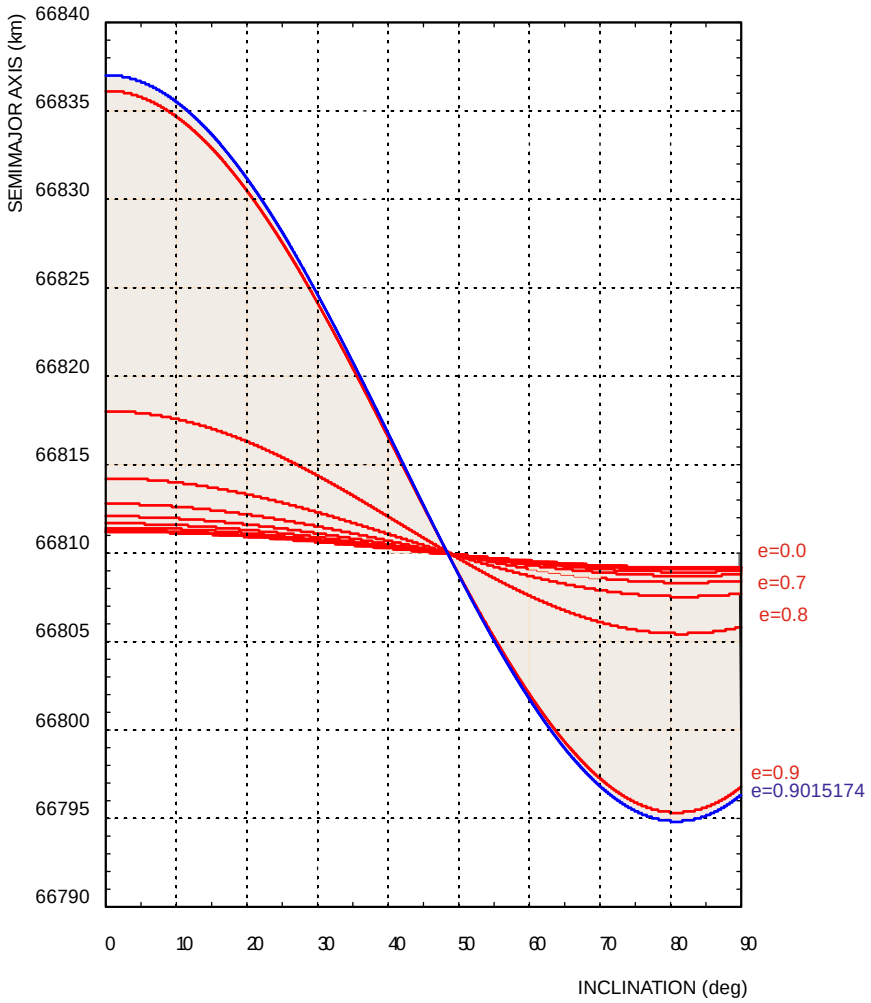


Bild 28-32: Das $(a,i)-$ Gebiet möglicher $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen in erster Ordnung, parametrisiert für einige Exzentrizitäten (e= 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.85,0.9), Grenzexzentrizität $e_B \in [0.9015174 - 0.9015793]$, geforderte Genauigkeit $|\Delta a| \le 10^{-3}$ km, $|\Delta fct| \le 10^{-6}$ sec , Schrittweiten $\Delta a = 5\,\text{km},\ \Delta e = 0.01, \Delta i = 0°.01$

Ihre Lösungen mit Hilfe der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0 + \operatorname{sgn}(B_0)\sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}\right] \quad , \quad \cos i_1 = \frac{Q_0}{A_0} \quad , \quad \cos i_2 = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \qquad (28.312)$$

Im Fall der Äquivalenz unter Einschluss der meridionalen Bewegung kann nur die positive Lösung verwendet werden.

In Tabelle 28-21 sind ergänzend zu Bild 28-32 besondere Parameter der einzelnen Kurve zusammengestellt. Als charakteristische Größen sind die Parameter der Überschneidungen (i_{cross}, a_{cross}) für Kopplungen der Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e= 0.0 gerechnet. Nach Berechnung der charakteristischen Inklination wird die Halbachsen a_{cross} mit den laufenden Exzentrizitäten nach der Methodik in Abschnitt 28.8.1.3 (auf Seite 99) gerechnet.

Im Vergleich zu den möglichen Kurven von Meridian bezogenen Äquivalenzbahnen ist das Gebiet möglicher $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen sehr umfangreich.

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	66811.21			66809.19	66809.23
e=0.1	66811,23	49°.586764	66809.910833	66809.18	66809.22
e=0.2	66811.31	49°.571270	66809.911400	66809.14	66809.18
e=0.3	66811.44	49°.543758	66809.912406	66809.06	66809.11
e=0.4	66811.68	49°.501236	66809.913960	66808.93	66808.99
e=0.5	66812.08	49°.438354	66809.916255	66808.72	66808.79
e=0.6	66812.79	49°.345395	66809.919635	66808.33	66808.44
e=0.7	66814.23	49°.203399	66809.919635	66807.54	66807.71
e=0.8	66818.03	48°.969895	66809.932699	66805.45	66805.82
e=0.85	66822.97	48°.787815	66809.937796	66802.70	66803.35
e=0.9	66836.15	48°.520089	66809.938616	66795.34	66796.78
e_B	66836.89	48.509911	66809.938296	66794.94	66796.41

Tabelle 28-21: Besondere Parameter von $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, nach der Exzentrizität parametrisiert, Grenzexzentrizität $e_B = 0.9015174$

Aufgabenstellungen:

1. Berechne den Kreuzungspunkt der (a,i)-Kurven mit Hilfe der verschwindenden Krümmung κ.
2. Wiederhole die Rechnungen unter Einschluss höherer Störungen $\left(J_3, J_4\right)$.

28.8.1.5 Berechnung der Inklination

Die Inklination einer wahren $\left(P_S \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn kann nach Vorgabe der *Kepler*-Elemente große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und Exzentrizität $\bar{e}_0$ berechnet werden. Zuvor muss jedoch das Elementepaar $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0\right)$ nach Bild 28-32 als zulässig qualifiziert werden. Die iterative Abarbeitung des Systems der Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} fct\left(P_S^{(\nu)}\left(\bar{i}_0\right)\right) &\equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S^{(\nu)}\left(\bar{i}_0\right)\right) - \tau\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(P_R^{(\nu)}\left(\bar{i}_0\right)\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R^{(\nu)}\left(\bar{i}_0\right)\right) - \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\rangle \nu = 0,1,2,3,\cdots . \qquad (28.313)$$

kann mit einer Näherungslösung $\bar{i}_{QKR}^{(0)}$ begonnen werden, die aus Bild 28-32 abgelesen werden kann. Die Iteration mit der Zustandsgleichung für die wahren Umlaufzeiten

$$fct\left(\overline{i_{QRS}}\right) \equiv P_R^{(\nu)}\left(\overline{i_{QRS}}\right) - P_S^{(\nu)}\left(\overline{i_{QRS}}\right) = 0 \tag{28.314}$$

muss iterativ durchgeführt werden, bis die vorgegebenen Genauigkeitsgrenzen

$$\left|\overline{P_R} - \overline{P_S}\right| \le \Delta\overline{P}\left[\overline{i}\right] \tag{28.315}$$

erreicht und unterschritten sind.

28.8.1.6 Berechnung der Exzentrizität

Die Exzentrizität einer wahren $\left(P_S \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn kann nach Vorgabe der *Kepler*-Elemente große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und Exzentrizität $\overline{e}_0$ berechnet werden. Zuvor muss jedoch das Elementepaar $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0\right)$ als zulässig nach Bild 28-32 qualifiziert werden. Ein Anfangswert $\overline{e}_{QRS}^{(0)}$ kann aus Bild 28-32 gewählt werden. Die Verarbeitung des Systems

$$\left.\begin{aligned} fct\left(P_S^{(\nu)}\left(\overline{e}_0\right)\right) &\equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S^{(\nu)}\left(\overline{e}_0\right)\right) - \tau\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(P_R^{(\nu)}\left(\overline{e}_0\right)\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R^{(\nu)}\left(\overline{e}_0\right)\right) - \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\rangle \nu = 0,1,2,3,\cdots . \tag{28.316}$$

mit der Zustandsgleichung für die wahren Umlaufzeiten

$$fct\left(\overline{e_{QRS}}\right) \equiv P_R^{(\nu)}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) - P_S^{(\nu)}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = 0 \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{28.317}$$

muss iterativ erfolgen, bis die vorgegebenen Genauigkeitsgrenzen $\left|P_R - P_S\right| \le \Delta P\left(\overline{e}_0\right)$ und $\Delta\left(\overline{e}_0\right)$ erreicht und unterschritten sind.

28.8.1.7 Beispiele und Interpretation

Auf Grund der Eigenbewegung der Sonne ist zu erwarten, dass die Kopplung der Bewegung mit der Meridian-bezogenen Bewegung anders verläuft, als es im Zusammenhang mit den bislang untersuchten Bewegungen der Fall ist. Es wird deshalb in den beiden folgenden Beispielen untersucht, welche Eigenschaften diese Kopplung hat und welche nicht.

BEISPIEL 1: Zum Vergleich mit Bild 26-48 (Abschnitt 26.9.1, Band IV A), Bild 26-49 (Abschnitt 26.9.2), Bild 26-51 (Abschnitt 26.9.3) und Bild 26-52 (Abschnitt 26.9.4) zeigt Bild 28-33 (auf Seite 110) den Verlauf einer $\left(P_S = P_R\right)$ – Äquivalenzbahn mit den Parametern $\overline{a_{QSR}}$ = 67043.720301, $\overline{e}_0$ = 0.9, $\overline{i}_0$ = 50°, $\overline{\Omega}_0$ = 65°, $\overline{\omega}_0$ = 90°, $\overline{M_{00}}$ = 0° berechnet für die Epoche t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0 über drei Umläufe (rote Kurve) sowie auch über drei Umläufe nach genau einem Vierteljahr (grüne Kurve). Die Bahncharakteristika sind in Tabelle 28-23 (auf Seite 111) zusammengestellt. Der subsolare Punkt zur Epoche t_0 ist über Afrika zu erkennen. Die Dämmerungslinie entsprechend dem Sonnenstand zur Epoche ist markiert.

Bild 28-34 zeigt den entsprechenden Verlauf von Sonnenwinkel τ und geographischer Länge λ des Satelliten, deren Summe τ+λ sowie den konstanten Äquivalenzfaktor $\overline{Q_S}$ = 193°.706441entsprechend der Sternzeit Θ_{G0} = 147°.552232 und der Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne $\alpha_{\overline{\odot}0}$ = 148°.741327. Wenn der Satellit den Anfangsmeridian λ= 7°.446 überfliegt, beträgt die Elongation des Subsatellitenpunktes zum wahren subsolaren Punkt $\gamma_{\odot 1}$= 37°.678, nach einem Jahr etwa $\gamma_{\odot 2}$ = 38°.157 Zur Berechnung dieser Elongation werden die äquatorialen Koordinaten des Satelliten (λ,φ)

bzw. (α, δ) sowie der wahren Sonne $\left(a_{\odot}, \delta_{\odot}\right)$ benötigt. Mit dem wahren Sonnenwinkel $\tau = \alpha - \alpha_{\odot}$ kann die Elongation $\gamma_{\odot}$ als Zwischenwinkel zwischen Subsatellitenpunkt und subsolarem Punkt berechnet werden:

$$\cos\gamma_{\odot} = \cos\tau\,\cos\alpha\,\cos\alpha_{\odot} + \sin\alpha\,\sin\alpha_{\odot} \quad . \tag{28.318}$$

Der subsolare Punkt zur Epoche ist über Afrika zu erkennen. Die Dämmerungslinie entsprechend dem Sonnenstand zur Epoche t_0 ist markiert.

Die Äquivalenzbahn, welche die Bewegung der wahren Sonne mit der meridionalen Satellitenbewegung koppelt, verknüpft den wahren Sonnenwinkel mit der geographischen Länge des Referenzmeridians. Da jedoch die Struktur der Satellitenbahn rasch wegkippt, kann die Kopplung von Sonnenwinkel und Meridian nur für einige Satellitenumläufe aufrecht erhalten werden. Einen detaillierten Einblick zeigt die folgende Tabelle 28-22 (auf Seite 109). Zum Einschuss der Bahn überfliegt der Satellit die geographische Position, den Sonnenwinkel und die lokale mittlere Sonnenzeit

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = 7°.446280,\ \varphi_0 = 50°.181157, \\ &\tau_0 = 6°.253368,\ T : 12^h 29^m 47^s.464 \quad . \end{aligned}$$

Die Kopplung zwischen geographischer Länge und Sonnenwinkel im Verlauf der Bahnentwicklung wird in der Tabelle in mittlerer Sonnenzeit (U.T.1) und mittlerer lokaler Sonnenzeit M.S.T. beschrieben im Vergleich von geographischer Länge zu Sonnenwinkel. Die mittlere lokale Sonnenzeit wird mit der geographischen Länge berechnet aus

$$M.S.T. = \text{Modulo}\left(t + \lambda \cdot 240\ , 86400\,\text{sec}\right) \quad . \tag{28.319}$$

Die Berechnungen werden im Rahmen einer Ephemeride mit der Genauigkeit $\Delta t = 1\text{sec}$ durchgeführt. Hier muss auch beachtet werden, dass der Referenzpunkt im Perigäum einer hochexzentrischen Bahn liegt, der mit maximaler Geschwindigkeit (V = 10.62531 km/s) überflogen wird, so dass geringfügige Abweichungen zwischen den Zahlenwerten zu tolerieren sind. Die charakteristischen Parameter dieser Äquivalenzbahn sind in Tabelle 28-23 zusammengestellt. Wie aus Tabelle 28-23 entnommen werden kann, driftet der aufsteigende Knoten pro Umlauf um etwa 1°.73 nach Westen, auch das Perigäum driftet bezüglich der Erdoberfläche pro Umlauf um etwa 1°.77 nach Westen. Die Bedingung der Bahnauswahl, die Kopplung zwischen geographischer Länge und wahrem Sonnenwinkel wird über den ganzen Zeitraum weitgehend eingehalten. Diese Kopplung ist allerdings nicht exakt, da infolge der Westdrift der Bahn der Schnittpunkt der Satellitenbahn mit dem Bezugsmeridian allmählich nach Süden rutscht. Infolge des Bezugs auf die wahre Sonne driftet der Bezugs-Sonnenwinkel und damit auch die mittlere Sonnenzeit.

t	λ	φ	M.S.T.	τ
2019-08-19/12:00:0.000	7°.446280	50°.181157	12:29:47.464	6°.253368
2019-08-21/11:59:31.14	7°.446409	50°.164933	12:29:18.606	6°.253389
2019-08-23/11:59:02.00	7°.404456	50°.117567	12:28:39.366	6°.217797
2019-08-25/11:58:33.00	7°.375483	50°.038245	12:28:03.379	6°.202946
2019-08-27/11:58:05.00	7°.472140	49°.918279	12:27:58.537	6°.324595
2019-08-29/11:57:36.00	7°.419945	49°.774539	12:27:16.966	6°.299486
2019-08-31/11:57:07.00	7°.352010	49°.600514	12:26:31.620	6°.264438
2019-09-02/11:56:39.00	7°.396870	49°.380740	12:26:14.352	6°.351599
2019-09-06/11:55:43.00	7°.410327	48°.842417	12:25:21.522	6°.462852
2019-09-10/11:54:48.00	7°.427413	48°.155127	12:24:30.550	6°.595467
2019-09-14/11:53:54.00	7°.415601	47°.317518	12:23:33.640	6°.712155
2019-09-18/11:53:02.00	7°.455949	46°.298943	12:22:51.264	6°.892953
2019-09-22/11:52:11.00	7°.397324	45°.129932	12:21:46.141	6°.977020
2019-09-26/11:51:23.00	7°.412668	43°.742434	12:21:01.758	7°.140249
2019-09-30/11:50:38.00	7°.441642	42°.133529	12:20:23.654	7°.317104
2019-10-02/11:50:17.00	7°.476159	41°.231512	12:20:10.917	7°.425339
2019-10-06/11:49:37.00	7°.461271	39°.279759	12:19:27.300	7°.549809
2019-10-10/11:49:02.00	7°.472904	37°.043355	12:18:55.040	7°.695520
2019 10 14 11 48 32.00	7°.435041	34°.543697	12:18:15.909	7°.781345
2019 10 18 11 48 10.00	7°.454916	31°.680203	12:17:58.646	7°.921909
2019 10 22 11 47 56.00	7°.425853	28°.504981	12:17:37.636	8°.005866
2019 10 26 11 47 54.00	7°.434712	24°.920284	12:17:37.725	8°.132760
2019 10 30 11 48 7.00	7°.459546	20°.917341	12:17:56.657	8°.289271
2019 11 1 11 48 20.00	7°.460804	18°.772639	12:18:09.946	8°.364070
2019 11 5 11 49 3.00	7°.460308	14°.174480	12:18:52.798	8°.541274
2019 11 9 11 50 15.00	7°.451123	9°.175453	12:20:02.565	8°.775486
2019 11 13 11 52 8.00	7°.446386	3°.771278	12:21:54.403	9°.128552
2019 11 17 11 55 1.00	7°.448839	-2°.029052	12:24:47.966	9°.682141
2019 11 21 11 59 27.00	7°.449729	-8°.219816	12:29:14.155	10°.566201
2019 11 25 12 6 37.00	7°.446181	-14°.897517	12:36:23.281	12°.075728
2019 11 29 12 20 19.00	7°.444683	-22°.628126	12:50:04.898	15°.170034

Tabelle 28-22: Entwicklung der wahren mit der wahren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn $\overline{a_{QSR}}$ = 67403.720301 km, $\overline{e}_0 = 0.9$, $\overline{i}_0 = 50°$, $\overline{\Omega}_0 = 65°$, $\overline{\omega}_0 = 90°$, $\overline{M_{00}} = 0°$ über 3 Monate bis zum Verschwinden der Äquivalenz

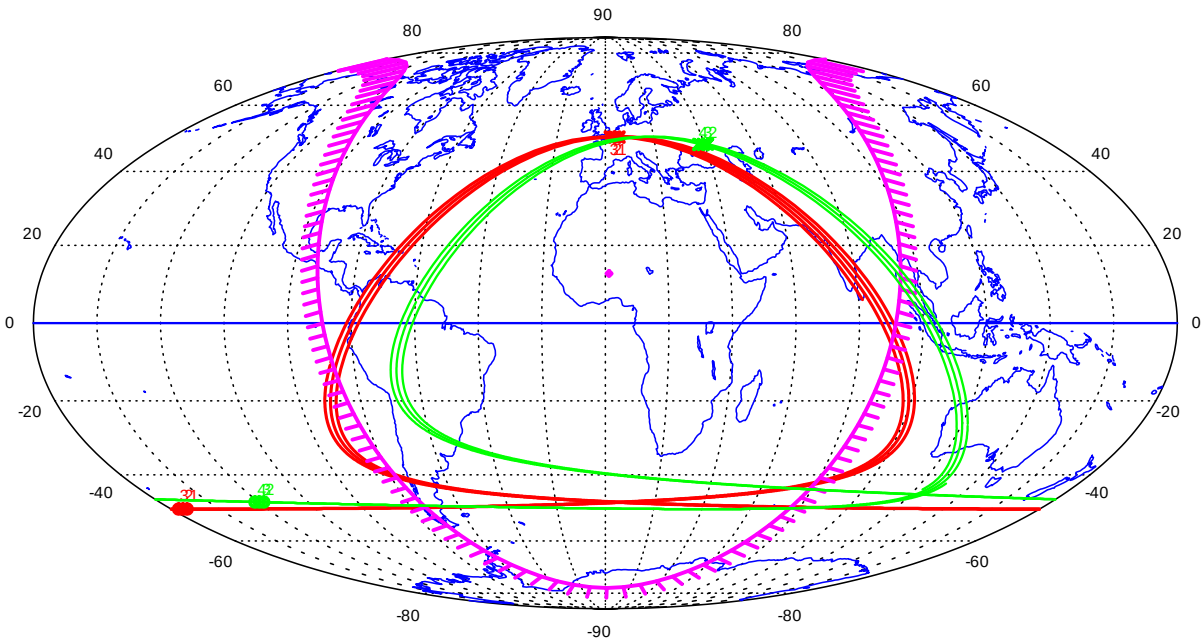


Bild 28-33: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit Äquivalenz der und der Meridian-bezogenen Bewegung. Die *Kepler*schen Bahnparameter sind $\overline{a_{QSR}}$ = 67043.720301 km, $\overline{e}_0 = 0.9$, $\overline{i}_0 = 50°$, $\overline{\Omega}_0 = 65°$, $\overline{\omega}_0 = 90°$, $\overline{M}_{00} = 0°$. Die aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten $P_S = P_R$ für die Epoche t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0 berechnete mittlere Halbachse beträgt $\overline{a_{QSR}}$ = 67043.720304 km Im Vergleich zur roten Bodenspur der Äquivalenzbahn zur Epoche t_0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02} : 2019-11-29/12:00:0.0 gerechnet. Es sind jeweils drei Umläufe (genau 6 Tage) dargestellt.

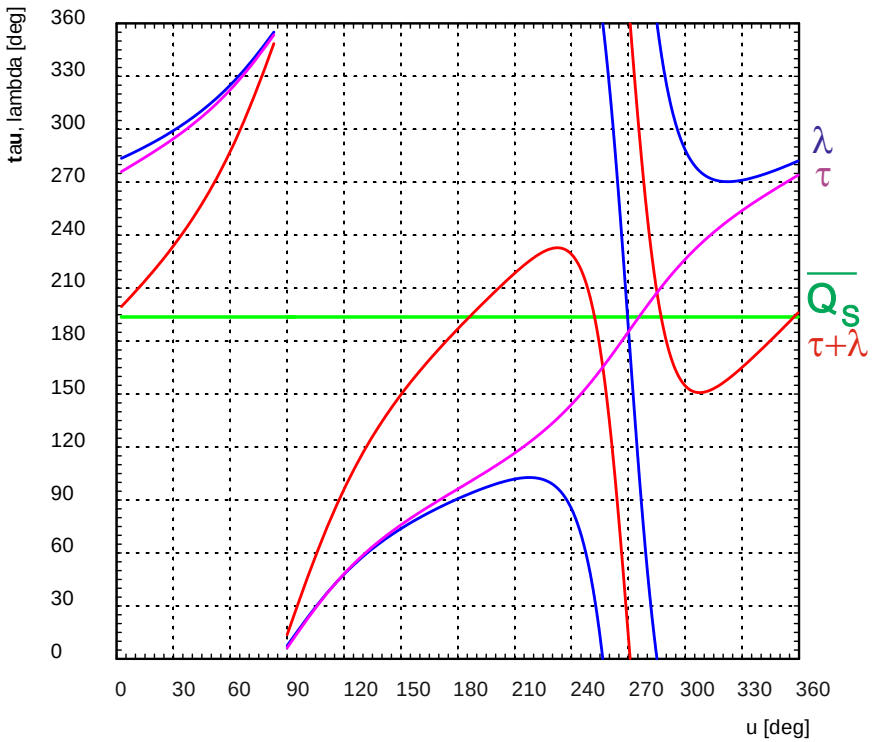


Bild 28-34: Verlauf von Sonnenwinkel und geographischer Länge sowie deren Summe über einen Umlauf (2 Tage) auf der $\left(P_S \hat{=} P_R\right)$ – Äquivalenzbahn mit den mittleren Bahnelementen sind $\overline{a_{QSR}}$ = 67043.720301 km, $\overline{e}_0 = 0.9$, $\overline{i}_0 = 50°$, $\overline{\Omega}_0 = 65°$, $\overline{\omega}_0 = 90°$, $\overline{M}_{00} = 0°$, Epoche: t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0

$\left(P_S \triangleq P_R\right)$	
$\overline{a_{QRS}}$ = 67043.720304 km $\bar{e}_0 = 0.9, \bar{i}_0 = 50°, \bar{\Omega}_0 = 65°, \bar{\omega}_0 = 90°, \overline{M}_{00} = 0°$	
$\overline{P_K}$ = 172761.966505 sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172749.929020 sec	P_H = 172758.103969 sec
$\overline{P_A}$ = 172758.300356 sec	P_A = 173758.293930 sec
$\overline{P_D}$ = 172720.851852 sec	P_D = 172757.440416 sec
$\overline{P_T}$ = 172766.066050 sec	P_T = 172758.103969 sec
$\overline{P_R}$ = 171892.510053 sec	P_R = 172771.141717 sec
$\overline{P_S}$ = 173717.122711 sec	P_S = 172771.141711 sec
$\overline{P_L}$ = 186408.930699 sec	P_L = 188692.872983 sec
H_P = 326.235430 km	H_A = 121004.931971 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -721°.769946$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -721°.734823$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -721°.769919$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -721°.887713$

Tabelle 28-23: Bahncharakteristika der wahren mit der wahren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{♁}$ = 398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 × 10^{-4} / s , J_2 = 0.001082625379977

Wenn der Bezugsmeridian nicht mehr die Spur der Satellitenbahn durchschneidet, ist die Kopplung beendet. Es wird hierbei ausschließlich der nördliche Schnittpunkt der Bahn mit dem Bezugsmeridian gezählt (siehe Bild 28-33 (auf Seite 110)). Nach etwa 184 Tagen schneidet die aus dem Osten herandriftende Bahn erstmals wieder den Bezugsmeridian auf der nördlichen Hemisphäre. ◀

BEISPIEL 2: Es wird in diesem Beispiel als Gegenstück zur Äquivalenzbahn des vorhergehenden Beispiels eine $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz untersucht. Die Umlaufzeiten betragen. $\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R} = 127800.000\,\text{sec} \triangleq 48^h$. Wenn dieselben *Kepler*elemente wie im vorhergehenden Beispiel vorgegeben werden, ergibt sich als mittlere große Bahnhalbachse. $\overline{a_{QSR}} = 66808.824769\,\text{km}$. Dieser Wert liegt unter dem theoretischen Referenzwert (28.291).

Die Bahn driftet im Lauf der aufeinanderfolgenden Umläufe nach Osten. Aus Tabelle 28-24 kann abgelesen werden, dass der Knoten bezüglich der Erdoberfläche pro Umlauf um 2°.06 ostwärts wandert, das Perigäum um 2°.02. Damit ergibt sich ein völlig anderes Bild des Bahnverlaufs als im vorhergehenden Beispiel, siehe Bild 28-35.

Im Vergleich zur über einen Umlauf gerechneten roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 : 2019-08-19/12:99:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02} : 2019-08-19/12:99:0.0 über drei Umläufe gerechnet. Die Bahn wird von Umlauf zu Umlauf nach Osten verschoben. Die Dämmerungslinie und der subsolare Punkt sind für die Epoche t_0 der Bahn dargestellt.

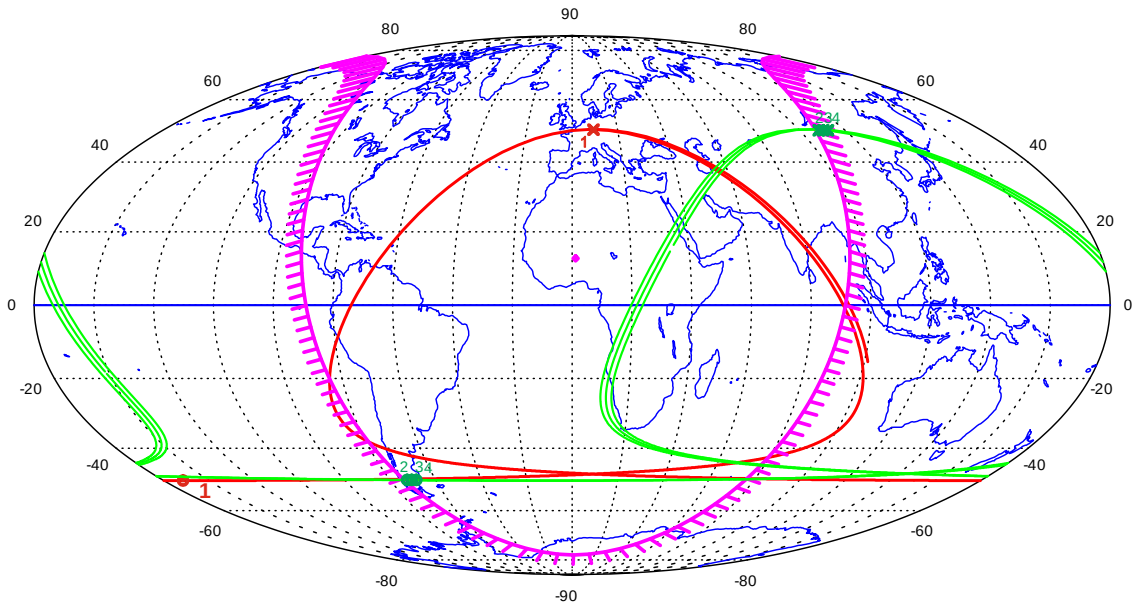


Bild 28-35: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz der mittlerer und der mittleren Meridian-bezogenen Bewegung. Die (mittleren) *Kepler*schen Bahnparameter sind $\overline{a_{QS}} = 66808.824769$ km,

$$\bar{e}_0 = 0.9, \bar{i}_0 = 50°, \ \bar{\Omega}_0 = 65°, \ \ \bar{\omega}_0 = 90°, \overline{M}_{00} = 0°\,°.$$

$\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QSR}}$ =66808.824769 km, $\bar{e}_0$ =0.9, $\bar{i}_0$ =50°, $\bar{\Omega}_0$ =65°, $\bar{\omega}_0$ =90°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 171854.82450 sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 171842.749415 sec	P_H = 171850.955239 sec
$\overline{P_A}$ = 171851.151991 sec	P_A = 171851.145515 sec
$\overline{P_D}$ = 171813.6737971 sec	P_D = 171850.290542 sec
$\overline{P_T}$ = 171858.931604 sec	P_T = 171850.955239 sec
$\overline{P_R}$ = 172799.999949 sec	P_R = 171836.560684 sec
$\overline{P_S}$ = 172799.999949 sec	P_S = 171863.856136 sec
$\overline{P_L}$ = 185353.309346 sec	P_L = 198453.904628 sec
H_P = 302.745877 km	H_A = 120558.630461 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -717°.979623$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -717°.945079$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -717°.979596$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -718°.098237$

Tabelle 28-24: Bahncharakteristika der mittleren Sonnen-synodischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km, $\mu_{♁} = 398600.4418$ km^3/s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4}/s,

$J_2 = 0.001082625379977$. ◀

28.8.2 Äquivalenz von anomalistischer mit Sonnen-synodischer Bewegung

Die Äquivalenz zwischen anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung bezieht die Bewegung der Apsidenlinie auf die Bewegung der Sonne. Infolgedessen ist die Bewegung des Perigäums

(analog des Apogäums) mit der Bewegung der Sonne gekoppelt. In diesem Fall hat der Satellit bei Durchlaufen des Perigäums stets dieselbe mittlere Ortssonnenzeit. Entsprechendes gilt für alle anderen Bahnpunkte bei Bezug auf das anomalistische Bahnsystem. Im Rahmen einer Satelliten-Bahnanalyse ist der Bezug der mittleren Sonnen-synodischen Bewegung zur mittleren anomalistischen Bewegung von großem Interesse.

28.8.2.1 Die Bedingungsgleichungen

Die mittlere Sonnen-synodische mittlere Satellitenbewegung (28.161) ist gegeben durch

$$\overline{n_S} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\bullet}_{s} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_{\odot}\right) = \overline{n_T} - \sigma_i \, n_{\odot} \tag{28.320}$$

die mittlere anomalistische mittlere Bewegung (22.38) (aus Abschnitt 22.2.3) durch

$$\overline{n_A} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\bullet}_{s} \quad . \tag{28.321}$$

Die Kopplung der beiden Bewegungen wird daher durch die Bedingungsgleichung

$$\overline{n_A} = \overline{n_S} \quad \Rightarrow \quad \sigma_i \, \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s = n_{\odot} \quad . \tag{28.322}$$

hergestellt. $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)-$ Äquivalenzbahnen müssen daher zur Berechnung der Bahnparameter *El* mit mittleren Bahnparametern die Bedingung

$$fct\left(El\right) \equiv \sigma_i \, \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - n_{\overline{\odot}} = 0 \tag{28.323}$$

alternativ

$$fct\left(El\right) \equiv \overline{P_A} - \overline{P_S} = 0 \tag{28.324}$$

erfüllen.

Wird wahre $\left(P_A \triangleq P_S\right)-$Äquivalenz für die wahren Umlaufzeiten gewünscht, müssen die wahren Umlaufzeiten berechnet werden. Im Fall der anomalistischen Bewegung kann die wahre anomalistische Umlaufzeit P_A mit der wahren Anomalie υ als Bahnwinkel mit der Funktionsgleichung (22.60)

$$fct\left(P_A\right) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0 + P_A\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{28.325}$$

berechnet werden. Die Sonnen-synodische Umlaufzeit P_S folgt mit dem wahren Sonnenwinkel $\tau = \alpha - \alpha_{\odot}$ aus der Funktionsgleichung (28.157)

$$fct\left(P_S\right) \equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_A\right) - \tau\left(t_0\right)\right] = 0 \quad . \tag{28.326}$$

Die Funktionsgleichung zur Berechnung der Bahnparameter einer $\left(P_A \triangleq P_S\right)-$ Äquivalenzbahn lautet

$$fct\left(El\right) \equiv P_A - P_S = 0 \tag{28.327}$$

alternativ (28.323) mit wahren (also oskulierenden) Bahnparametern.

Beide Bedingungsfunktionen für mittlere oder wahre Umlaufzeiten müssen iterativ bearbeitet werden. Je nachdem welcher Bahnparameter berechnet werden soll, muss ein geeigneter Anfangswert vorgegeben werden. Beispiele dazu werden im Folgenden gegeben.

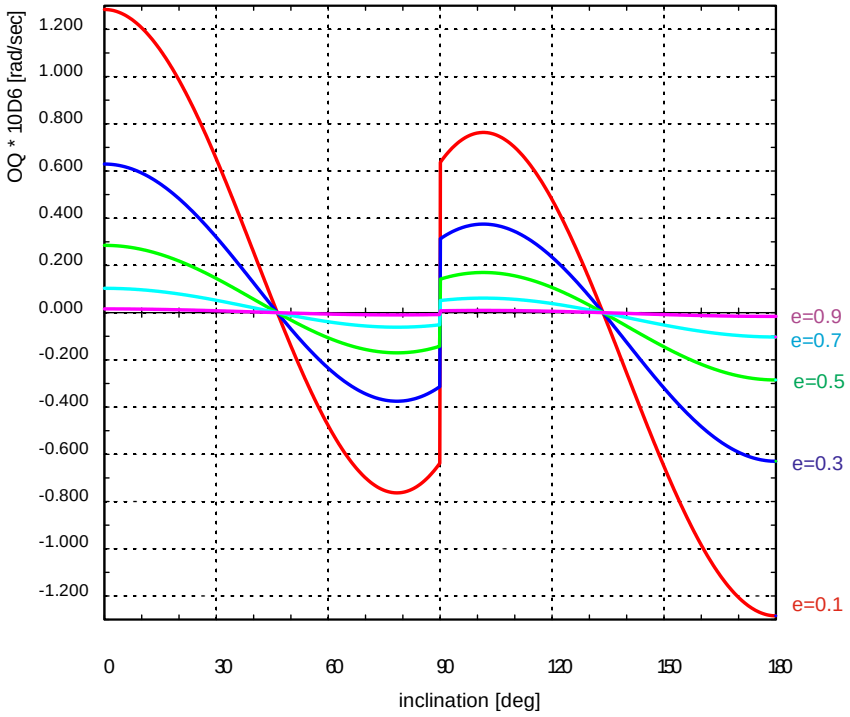


Bild 28-36: Verlauf des Ausdrucks $\sigma_i \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s$ über der Inklination für a=7000 km und einige Exzentrizitäten

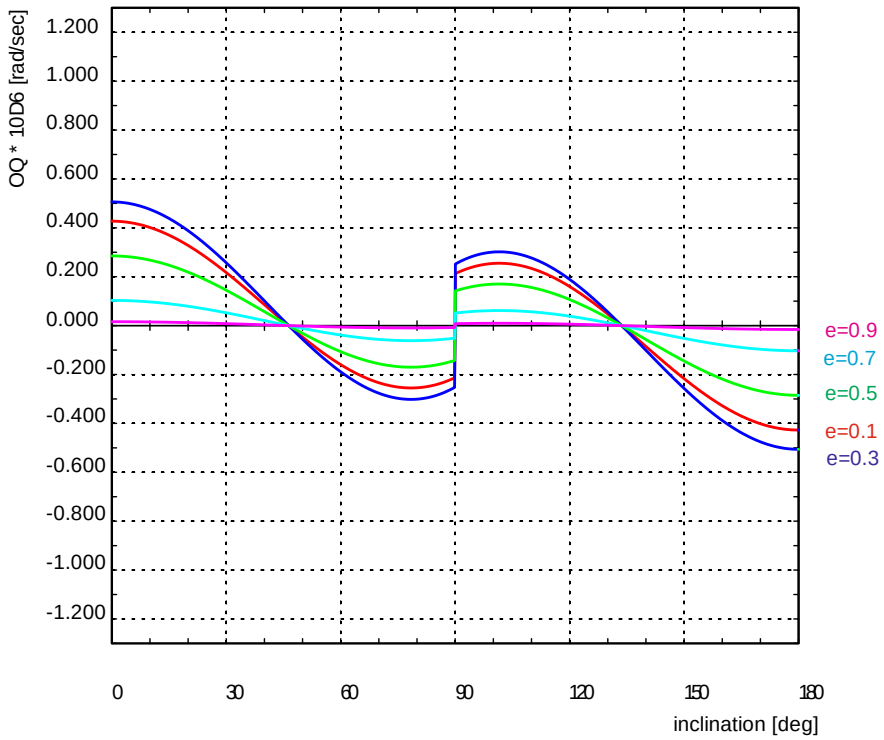


Bild 28-37: Verlauf des Ausdrucks $\sigma_i \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s$ über der Inklination für die große Bahnhalbachse a=10000 km und einige Exzentrizitäten (0.1 – 0.9)

Um einen Überblick über das Vorkommen von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – und $\left(P_A \triangleq P_S\right)$ – Äquivalenzbahnen zu erhalten, wird der Verlauf des Ausdrucks

$$O_Q := \sigma_i \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \tag{28.328}$$

in Bild 28-36 für die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 7000 km und Bild 28-37 für die große Bahnhalbachse a=10000 km über der Inklination mit einigen Exzentrizitäten dargestellt. Wegen Bedingung (28.322) sind Äquivalenzbahnen nur dann zu erwarten, wenn $OQ > 0$. Nach den beiden Bildern sind Äquivalenzbahnen sowohl für rechtläufige wie auch für rückläufige Bahnen möglich. Alle gezeigten Kurven schneiden sich unabhängig von der Exzentrizität und unabhängig von der vorgewählten großen Bahnhalbachse je in genau einem Punkt auf der Null-Achse. Die Kurven sind punktsymmetrisch zu dem Punkt (90°, 0.0).

Dieses Kurvenverhalten soll näher beleuchtet und die Schnittpunkte berechnet werden. Im Rahmen des *Brouwer*schen Bahnmodells lautet mit den Ausdrücken[1] erster Ordnung für die säkularen Variationen $\dot{\omega}_s$ und $\dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$B_2 := -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \quad , \quad D_2 := B_2\left[\sigma_i\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right)+2\cos\bar{i}_0\right] \tag{28.329}$$

die Bedingungsgleichung (28.322)

$$\frac{B_2\left[\sigma_i\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right)+2\cos\bar{i}_0\right]}{\sqrt{\bar{a}_0^3}\,\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} = \frac{D_2}{\sqrt{\bar{a}_0}\,\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} = n_{\odot} \quad . \tag{28.330}$$

O_Q in (28.328) kann nur dann verschwinden, wenn in ihm der Ausdruck verschwindet, welcher die Inklination enthält:

$$\sigma_i\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right)+2\cos\bar{i} = 0. \tag{28.331}$$

Zur Berechnung werde dieser Ausdruck umgeformt:

$$5\left|\cos\bar{i}_0\right|^2 - 2\left|\cos\bar{i}_0\right| - 1 = 0 \quad . \tag{28.332}$$

Die Auflösung erlaubt nur genau ein Ergebnis, da $\left|\cos\bar{i}_0\right| \geq 0$:

$$\left|\cos\bar{i}_0\right| = \frac{1}{5}\left(1+\sqrt{6}\right) = 0.689897949 \ . \tag{28.333}$$

Die Lösungen erster Ordnung lauten

$$\bar{i}_{0,1} = 46°.377968845 \quad , \quad \bar{i}_{0,2} = 133°.622031155 \quad . \tag{28.334}$$

Diese sind die Schnittpunkte mit der Nulllinie, aber keine möglichen Lösungen für Äquivalenzbahnen, da entsprechend dem Ausdruck (28.330) mit dem positiven Wert der mittleren Sonnenbewegung $n_{\odot}$ nur gewisse Inklinationen gewählt werden dürfen, die positiven Kurvenpunkten entsprechen. Sie sind weniger als die aus den obigen Kurven zu ersehenden Inklinationen. Der Bereich erlaubter Inklinationen kann berechnet werden, nachdem zunächst in den folgenden Abschnitten Formeln für die Berechnung eines der Bahnparameter $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ nach Vorgabe der anderen Parameter hergeleitet sind.

28.8.2.2 Große Bahnhalbachse bei Äquivalenz zwischen anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung

Es seien die mittleren Bahnparameter $\bar{e}_0$ und $\bar{i}_0$ vorgegeben. Mit den Abkürzungen nach dem Ausdruck (28.330)

$$D_2 := B_2\left[\sigma_i\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right)+2\cos\bar{i}_0\right] = \sqrt{\bar{a}_0^3}\,\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2 n_{\odot} \tag{28.335}$$

[1] Ausdrücke (20.15) und (20.16) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

und

$$A_2 := \frac{D_2}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2 n_{\overline{\odot}}} = \bar{a}_0^2 \sqrt{\bar{a}_0^3} \tag{28.336}$$

wird die erste Näherung erhalten

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[7]{A_2^2} \quad . \tag{28.337}$$

In Abschnitt 28.8.2.3 (auf Seite 117) wird gezeigt, in welchem Bereich Exzentrizität und Inklination gewählt werden dürfen um eine brauchbare Lösung erhalten zu können.

Werden die höheren Bewegungseinflüsse berücksichtigt, kann eine Verbesserung mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAS}}\right) \equiv \overline{P_A} - \overline{P_S} \tag{28.338}$$

erhalten werden. Sollen die wahren Umlaufzeiten berücksichtigt werden, lautet die Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAS}}\right) \equiv P_A - P_S \quad . \tag{28.339}$$

Diese Funktionsgleichungen können iterativ mit der Anfangsnäherung $\bar{a}_o^{(0)}$ gelöst werden.

BEISPIEL 1: Gegeben seien die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.1$ und die Inklination $\bar{i}_0 = 40°$. Es soll die große Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet werden. Formel (28.337) liefert die Anfangsnäherung $\bar{a}_0^{(0)} = 7855.459381$ km. Verbesserung mit der Funktionsgleichung (28.338) ergibt mit der geforderten Genauigkeit $|\Delta P| \leq 10^{-8}$ sec die Beträge

$\overline{a_{QAS}}$ = 7853.237951, $\overline{P_A}$ = 6923.1609043037612 sec, $\overline{P_S}$ = 6923.1609043079630 sec,

$\left|\overline{P_A} - \overline{P_S}\right|$ = 0.1818989403546 $\times 10^{-11}$ sec ist die zugehörige a posteriori Genauigkeit. ◄

BEISPIEL 2: Gegeben seien die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.1$ und die Inklination $\bar{i}_0 = 40°$. Es soll die große Bahnhalbachse einer $\left(P_A \triangleq P_S\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet werden. Formel (28.337) liefert wie in Beispiel 1 die Anfangsnäherung $\bar{a}_0$ = 7855.459381 km. Verbesserung mit der Funktionsgleichung (28.339) liefert keine brauchbare Lösung. ◄

BEISPIEL 3: Gegeben seien die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.5$ und die Inklination $\bar{i}_0 = 20°$. Es soll die große Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet werden. Formel (28.337) liefert die Anfangsnäherung $\bar{a}_0$ = 13501.188228 km. Verbesserung mit der Funktionsgleichung (28.338) ergibt mit der geforderten Genauigkeit $|\Delta P| \leq 10^{-8}$ sec die Beträge

$\overline{a_{QAS}}$ = 13512.885049 km, $\overline{P_A}$ = 15625.4842502650936 sec, $\overline{P_S}$ = 15625.4842502650918 sec, $\left|\overline{P_A} - \overline{P_S}\right|$ = 0.1818989403546 $\times 10^{-11}$ sec ist die zugehörige a posteriori Genauigkeit. ◄

28.8.2.3 Der erlaubte Bereich möglicher Inklinationen bei Kopplung von anomalistischer mit Sonnen-synodischer Bewegung

Nicht zulässige Inklinationen führen auf Bahnen mit Perigäumsradien unterhalb eines erlaubten Wertes $\overline{r}_P$. Bahnen mit Perigäumsradius $\overline{r}_P$ können daher als Rand-Kriterien aufgefasst werden um Bereiche mit zulässigen Inklinationen einzugrenzen.

Die Berechnung verläuft folgendermaßen: Eine Inklination $\overline{i}_0$ sei vorgegeben. Unter der Annahme einer Anfangsnäherung $\overline{e}_0^{(0)}$ werde die Halbachse mit den Formeln (28.335) - (28.337) aus $\overline{a}_0 := \sqrt[7]{A_2^2}$ berechnet. Der Perigäumsradius dieser Bahn ist $\overline{r}_{P0} = \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0\right)$. Die Exzentrizität kann mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{e}_0\right) \equiv \overline{r}_P - \overline{r}_{P0} = 0 \qquad (28.340)$$

erhalten werden. In jedem Iterationsschritt muss die zugehörige Halbachse berechnet werden. Wenn die Differenz $\left(\overline{r}_P - \overline{r}_{P0}\right)$ unter einer vorgegeben Genauigkeitsgrenze liegt, wird als Ergebnis das Parameterpaar $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0\right)$ als Funktion der vorgegebenen Inklination $\overline{i}_0$ erhalten. In Bild 28-38 ist der Verlauf dieser Grenzwerte als blaue $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)-$Kurve eingetragen. Sie grenzt den Bereich möglicher $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)-$Äquivalenzbahnen ein. Nur große Bahnhalbachsen unterhalb dieser Kurve sind möglich. Nach unten wird der erlaubte Bereich abgegrenzt durch die (untere rote) Kurve, die für die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.0$ erhalten wird. Die roten Kurven sind nach der Exzentrizität parametrisiert: in aufsteigender Folge sind die $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)-$Kurven für die Exzentrizitäten $\overline{e}_0 \in$ [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.55. 0.56, 0.57] gezeichnet. Der Verlauf der Grenzwerte der Exzentrizitäten über der Inklination ist in Bild 28-39 (auf Seite 119) dargestellt.

Es gibt zwei getrennte Bereiche für $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)-$Äquivalenzbahnen:

<u>Rechtläufige Bahnen</u> kommen im Inklinations-Bereich $\overline{i}_0 \in \left[0°, 42°.86\right)$ vor. Die Extremalwerte für Exzentrizität und große Bahnhalbachse sind

$$\overline{e}_0\left(\max, \overline{i}_0 = 0°\right) = 0.5777781, \quad \overline{a}_0\left(\overline{e}_0 \max, \overline{i}_0 = 0°\right) = 15579.81 \text{ km},$$
$$\overline{a}\left(\overline{e}_0 = 0.0, \overline{i}_0 = 0°\right) = 12361.3 \text{ km}.$$

<u>Rückläufige Bahnen</u> kommen im Bereich $\overline{i}_0 \in \left(90°, 130°.02\right)$ vor. Der Exzentrizitätsbereich rückläufiger Bahnen ist geringer als für rechtläufige Bahnen. An der unteren Grenze ergeben sich die Zahlenwerte

$$\overline{e}_0\left(\max, \overline{i}_0 = 90°.02\right) = 0.418627, \quad \overline{a}_0\left(\overline{e}_0 \max, \overline{i}_0 = 90°.02\right) = 11314.8 \text{ km},$$
$$\overline{a}_0\left(\overline{e}_0 = 0.0, \overline{i}_0 = 90°.02\right) = 10131.4 \text{ km}.$$

Bei rückläufigen Bahnen zeigt sich ein Maximum für $\overline{i}_0 = 101°.54$. Die entsprechenden Zahlenwerte sind

$$\overline{e}_0\left(\max, \overline{i}_0 = 101°.54\right) = 0.463224, \quad \overline{a}_0\left(\overline{e}_0 \max, \overline{i}_0 = 101°.54\right) = 12254.9 \text{ km},$$
$$\overline{a}_0\left(\overline{e}_0 = 0.0, \overline{i}_0 = 101°.54\right) = 10672.2 \text{ km}.$$

Man vergleiche diese Ergebnisse mit denen in den Zahlenwerten (28.334). Der Bereich für das Vorkommen von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahnen ist wie erwartet wesentlich kleiner als durch die Abschätzung in Bild 28-36 (auf Seite 114) als äußere Grenze angegeben wurde.

Bild 28-38: Die Bereiche für mögliche $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahnen für die mittleren Bahnparameter $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$. Blaue Grenzkurve bezogen auf Perigäumsradius. Rote Kurven aufsteigend für Exzentrizitäten $\overline{e}_0 \in$ [0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.55. 0.56, 0.57]. Grüne Kurve für Perigäumsradius R_E +200 km.

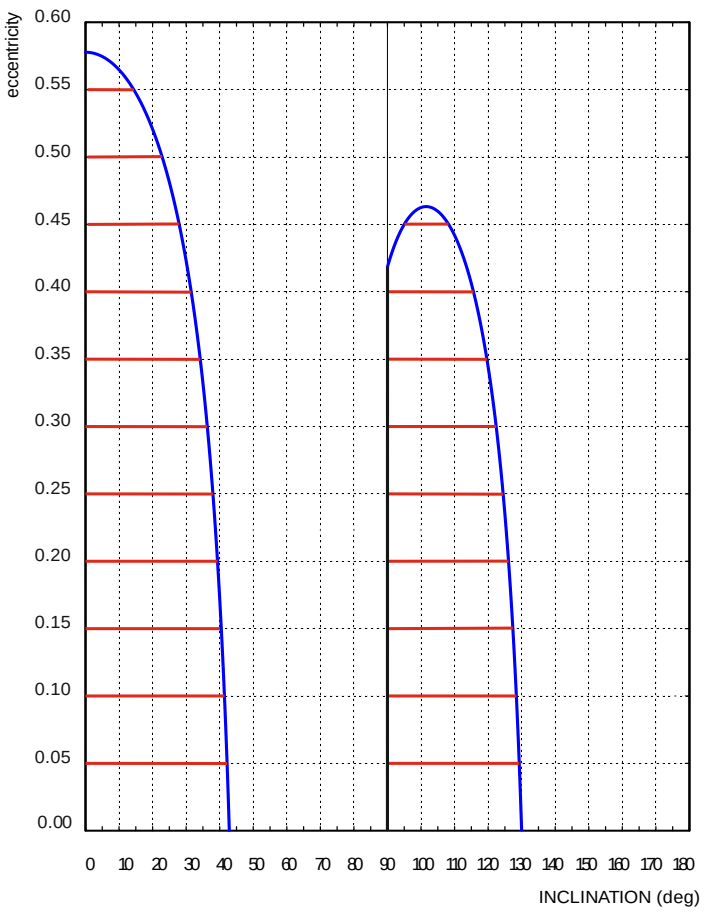


Bild 28-39: Verlauf der Exzentrizität der Grenzkurven bei Bezug auf den minimalen Perigäumsradius r_P =200 km über der Inklination

28.8.2.4 Inklination bei Äquivalenz zwischen anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung

Mit den vorgegebenen mittleren Bahnparametern $\bar{a}_0$ und $\bar{e}_0$ wird die Abkürzung

$$C_3 := \frac{\sigma_i \, n_{\odot} \sqrt{\bar{a}_0^3} \, \bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}{B_2} \tag{28.341}$$

eingeführt. Die Anfangsnäherung erster Ordnung für die Inklination kann im Fall einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$–Äquivalenzbahn berechnet werden mit Hilfe der Bedingungsgleichung

$$\left|\cos \bar{i}_0^{(0)}\right| = \frac{1}{5}\left(1+\sqrt{6-5C_3}\right) \quad . \tag{28.342}$$

Da der Ausdruck unter der Wurzel größer als 1 ist, kann vor der Wurzel kein Minuszeichen stehen, da nur eine positive Lösung erlaubt ist. Wenn der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist, gibt es keine Lösung. Es zeigt sich, dass entsprechend Abschnitt 28.8.2.3 (auf Seite 117) die vorgegebene große Bahnhalbachse und Exzentrizität angepasst werden müssen. Dazu muss noch vorgegeben werden, ob die rechtläufig $(\sigma_i = +1)$ oder rückläufig $(\sigma_i = -1)$ gewünscht wird. Falls eine Lösung gefunden werden kann, lautet die endgültige Lösung

$$\cos \bar{i}_0^{(0)} = \sigma_i \left|\cos \bar{i}_0^{(0)}\right| \quad . \tag{28.343}$$

Eine Verbesserung mit Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells kann mit den Funktionsgleichungen

$$fct\left(\bar{i}_{QAS}\right) \equiv \overline{P_A} - \overline{P_S} \quad \text{bzw.} \quad fct\left(\bar{i}_{QAS}\right) \equiv P_A - P_s \quad . \tag{28.344}$$

erhalten werden.

BEISPIEL 4: Vorgegeben seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 7853.2379 km und die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.55$. Infolge der hohen Exzentrizität liegt das Perigäum unter der Erdoberfläche. Bei Bezug auf die Perigäumshöhe $H_{P,\min}$ = 200 km muss die große Bahnhalbachse mindestens den Wert $\bar{a}_0 = (R_E +$ 200)/0.45 = 14618.081333 km haben. Im Fall einer rechtläufigen Bahn liefert Formel (28.342) die Anfangsnäherung $\bar{i}_0^{(0)}$ = 14°.3802183749750. Verbesserung mit (28.344) ergibt mit den gewünschten Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| \le 10^{-11}\,\text{sec}$, $\left|\Delta\bar{i}\right| \le 10^{-8}\,\text{deg}$ die Inklination $\overline{i_{QAS}}$ = 14°.5619631698206. Die zugehörigen mittleren Umlaufzeiten sind

$\overline{P_A}$ = 17580.7630164643160 s, $\overline{P_S}$ = 17580.7630164630682 s, $\left|\overline{P_A} - \overline{P_S}\right|$ = 0.12478 $\times 10^{-8}$ s.◀

BEISPIEL 5: Vorgegeben seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 7853.2379 km und die Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.55. Es werde eine rückläufige Bahn gewünscht. Wie im vorhergehenden Beispiel muss die große Bahnhalbachse mindestens den Wert $\bar{a}_0$ = 14618.081333 km annehmen. Allerdings ist dann die Wurzel in Formel (28.342) negativ, so dass es keine Lösung geben kann. Wird dagegen die Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.45 gewählt, muss die große Bahnhalbachse mindestens den Wert $\bar{a}_0$ = 11960.248364 km haben. Im Fall einer rückläufigen Bahn liefert Formel (28.342) die Anfangsnäherung $\bar{i}_0^{(0)}$ = 108°.23960192. Verbesserung mit (28.344) und mit den gewünschten Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| \le 10^{-11}\,\text{sec}$, $\left|\Delta\bar{i}\right| \le 10^{-8}\,\text{deg}$ ergibt $\overline{i_{QAS}}$ = 108°.19751627. Die zugehörigen mittleren Umlaufzeiten und die a posteriori Genauigkeit betragen

$\overline{P_A}$ = 13020.2966098298675 s, $\overline{P_S}$ = 13020. 2966098293309 s, $\left|\overline{P_A} - \overline{P_S}\right|$ = 0.53660$\times 10^{-9}$ s. ◀

28.8.2.5 Exzentrizität bei Äquivalenz zwischen anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung

Seien die mittleren Bahnparameter $\bar{a}_0$ und $\bar{i}_0$ vorgegeben. Ausgehend von der Bedingungsgleichung (28.323) kann nach Einsetzen der Variationsgleichungen erster Ordnung die Abkürzung

$$D_2 := B_2\left[\sigma_i\left(1 - 5\cos^2\bar{i}_0\right) + 2\cos\bar{i}_0\right] = \sqrt{\bar{a}_0^3}\,\bar{a}_0^2\left(1 - \bar{e}_0^2\right)^2 n_\odot \tag{28.345}$$

eingeführt werden. Da stets $B_2 < 0$, muss für eine Lösbarkeit die Bedingung

$$\sigma_i\left[\left(1 - 5\cos^2\bar{i}_0\right) + 2\left|\cos\bar{i}_0\right|\right] < 0 \tag{28.346}$$

erfüllt sein. Dies schließt in allen diesen Fällen die Auswahl der Inklination wesentlich ein.

Im Fall einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$– Äquivalenzbahn kann die Anfangsnäherung erster Ordnung für die Exzentrizität aus dem Ausdruck

$$\bar{e}_0^{(0)} := \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{a}_0}\sqrt{\frac{D_2}{\bar{a}_0\sqrt{\bar{a}_0}\; n_\odot}}} \tag{28.347}$$

erhalten werden. Eine Verbesserung mit Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells kann mit einer der Funktionsgleichungen

$$fct\left(\overline{e_{QAS}}\right) \equiv \overline{P_A} - \overline{P_S} \quad \text{bzw.} \quad fct\left(\overline{e_{QAS}}\right) \equiv P_A - P_s \tag{28.348}$$

erreicht werden.

BEISPIEL 6: Falls keine geeignete große Halbachse vorgegeben werden kann, kann mit einer fiktiven Exzentrizität etwa $\bar{e}_f$:= 0.45 eine große Halbachse mit Perigäumshöhe $H_P = 200\,\text{km}$ berechnet werden: $\bar{a}_0$ = 11960.2483636 km. Mit der Inklination $\bar{i}_0$ = 25° liefert Formel (28.347) für die Exzentrizität den Näherungswert $\bar{e}_0^{(0)}$ = 0.38573363018240. Eine Verbesserung mit der Funktionsgleichung (28.348) ergibt $\overline{e_{QAS}}$ = 0.3843928648254. Diese Bahn hat die Perigäumshöhe H_p = 948.677631 km. Zur Kontrolle dieser mit den a priori Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| \le 10^{-8}\,\text{sec}$, $\left|\Delta\bar{e}\right| \le 10^{-9}$ gerechneten Bahn werden die mittleren Umlaufzeiten und die a posteriori Genauigkeit wiedergegeben:
$\overline{P_A}$ = 13011.7147700493 s, $\overline{P_S}$,= 13011. 7147700467 s, $\left|\overline{P_A} - \overline{P_S}\right|$.= 0.260661×10^{-8} s.

Alternativ zu diesen Überlegungen könnte nach Vorgabe der Inklination $\bar{i}_0$ = 25° aus Bild 28-38 eine zulässige große Bahnhalbachse gewählt werden, etwa $\bar{a}_0$ = 12000 km. Damit kann aus diesem Bild auch die Anfangsabschätzung $\bar{e}_0^{(0)} = 0.4$ erhalten werden. ◄

28.8.2.6 Das Verhalten des Perigäums bei der Kopplung von anomalistischer und Sonnen-synodischer Bewegung

Mit zu einem Zeitpunkt *t* bekannten Bahnparametern $\left[i(t), \Omega(t), \omega(t)\right]$ können die äquatorialen Winkelkoordinaten $\left(\alpha_P, \delta_P\right)$ mit den Formelsystem

$$\begin{aligned} \sin\delta_P &= \sin\omega\,\sin i \\ \cos\delta_P &= \sqrt{1 - \sin^2\omega\,\sin^2 i} \\ \sin\alpha_P\,\cos\delta_P &= \cos i\,\sin\omega\cos\Omega + \cos\omega\sin\Omega \\ \cos\alpha_P\,\cos\delta_P &= -\cos i\,\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega \end{aligned} \tag{28.349}$$

berechnet werden. Bezogen auf die wahre Sonne[1] lautet der wahre Sonnenwinkel des Perigäums mit Formel (28.120)

$$\tau_P := \alpha_P - \alpha_\odot \quad . \tag{28.350}$$

Die wahre Verschiebung der äquatorialen Länge des Perigäums in Bezug auf die wahre Sonne pro wahrem anomalistischem Umlauf errechnet sich aus

[1] etwa mit der analytischen Näherungsmethode nach *Newcomb* in Abschnitt 28.1.3 ab Seite 10

$$\Delta\tau_P = \tau_P\left(t_0 + P_a\right) - \tau_P\left(t_0\right) \quad . \tag{28.351}$$

Bezogen auf die mittlere Sonne[1] lautet der wahre Sonnenwinkel des Perigäums nach Formel (28.135)

$$\tau_{PM} = \alpha_P - \overline{\alpha_\odot} \quad . \tag{28.352}$$

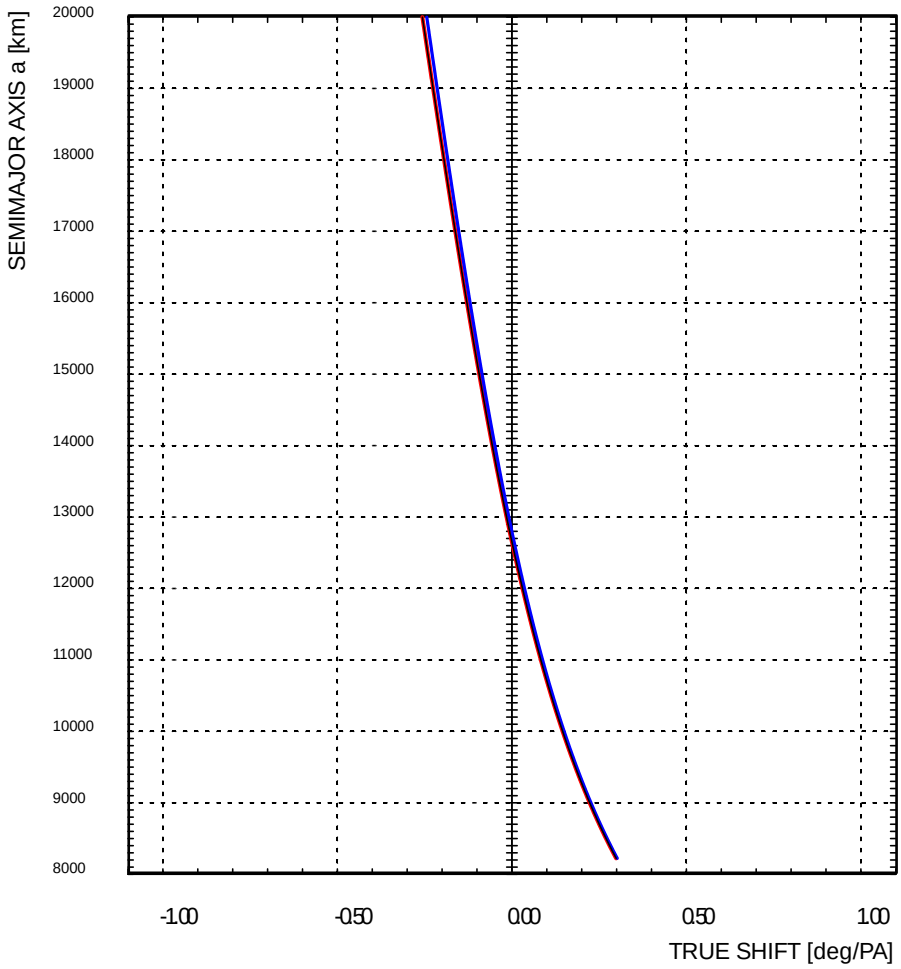


Bild 28-40: Verlauf der wahren Perigäums-Sonnendrift $\Delta\tau_P$ pro wahrem anomalistischem Umlauf P_A bezogen auf die wahre Sonne in blau, der wahren Perigäums-Sonnendrift $\Delta\tau_{P\odot}$ pro wahrem anomalistischem Umlauf P_A bezogen auf die fiktive mittlere Sonne in rot, der mittleren Perigäums-Sonnendrift $\Delta\tau_{P\overline{\odot}}$ pro mittlerem anomalistischem Umlauf $\overline{P_A}$ bezogen auf die fiktive mittlere Sonne in schwarz, für Bahnen mit der Exzentrizität $\overline{e}_0$ = 0.2 und der Inklination $\overline{i}_0$ = 25°, Schrittweite der Bahnhalbachse Δa=25 km, Epoche 27. Apr. 2021

Die wahre Verschiebung des Sonnenwinkels des Perigäums in Bezug auf die mittlere Sonne pro wahrem anomalistischem Umlauf errechnet sich aus

$$\Delta\tau_{Pm} = \tau_{Pm}\left(t_0 + P_a\right) - \tau_{Pm}\left(t_0\right) \quad . \tag{28.353}$$

[1] aus Abschnitt 28.1.2 auf Seite 5

Um die mittlere Verschiebung des Perigäumswinkels pro mittlerem anomalistischem Umlauf berechnen zu können, wird die säkulare Variation der Rektaszension des Perigäums benötigt. Sie beträgt[1] nach Formel (22.209)

$$\dot{\alpha}_{Ps} = \dot{\Omega}_s + \frac{\cos \bar{i}_0}{\cos^2 \delta_0} \dot{\omega}_s - \frac{\sin \bar{i}_0 \sin \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_0}{\cos^2 \delta_0} (i)^{\bullet}_s \qquad (28.354)$$

Damit kann die säkulare Perigäums-Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne berechnet werden

$$\dot{\tau}_{P\bar{\odot}s} = \dot{\alpha}_{Ps} - n_{\odot} \quad , \qquad (28.355)$$

sowie die mittlere Perigäums-Sonnenverschiebung pro mittlerem anomalistischem Umlauf bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

$$\overline{\Delta\tau_{P\bar{\odot}}} = \dot{\tau}_{P\bar{\odot}s} \, \overline{P_A} \; . \qquad (28.356)$$

Analog lautet die wahre Perigäums-Sonnenverschiebung pro wahrem anomalistischem Umlauf bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

$$\Delta\tau_{P\bar{\odot}} = \dot{\tau}_{P\bar{\odot}s} \, P_A \; . \qquad (28.357)$$

Abschätzungen der extremalen Werte für die mittlere Perigäums-Sonnenverschiebung werden für kreisnahe Bahnen mit Perigäumshöhe 200 km und den beiden Randinklinationen i=0° und i=179° erhalten[2]:

$$-0°.62 / \overline{P_A} \;\le\; \overline{\Delta\tau_{P\bar{\odot}}} \;\le 0°.49 / \overline{P_A} \quad . \qquad (28.358)$$

Diese Zahlenwerte stimmen im Wesentlichen für alle Definitionen der Perigäums-Sonnenverschiebung überein. Ein Beispiel ist in Bild 28-40 (auf Seite 122) dargestellt.

Wird die Perigäums-Sonnenverschiebung über die Sonnen-synodische Umlaufzeit entwickelt, verschwindet sie, wie etwa aus Formel (28.156) beispielhaft entnommen werden kann. Dies trifft insbesondere für $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – bzw. $\left(P_A \triangleq P_S\right)$ – Äquivalenzbahnen zu. Für diese gelten dann folgende charakteristische Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\tau_P = \tau_P\left(t_0 + P_a\right) - \tau_P\left(t_0\right) = 0.0 \\ &\Delta\tau_{Pm} = \tau_{Pm}\left(t_0 + P_a\right) - \tau_{Pm}\left(t_0\right) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left(P_A \triangleq P_S\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\Delta\tau_{P\bar{\odot}}}\left[\overline{P_S}\right] = 0.0 \\ &\quad \Leftrightarrow \; \dot{\tau}_{P\bar{\odot}s} = \dot{\alpha}_{Ps} - n_{\odot} = 0.0 \\ &\quad \Leftrightarrow \; \dot{\alpha}_{Ps} = n_{\odot} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right) \qquad (28.359)$$

Bild 28-41 (auf Seite 124) zeigt den Verlauf der wahren Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{P\bar{\odot}}$ des Perigäums bezogen auf die fiktive mittlere Sonne für einen wahren anomalistischen Umlauf P_A für Bahnen mit der Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.2 und parametrisiert für einige Inklinationen $i \in \left[0°, 180°\right)$. Die große Bahnhalbachse wird mit der Schrittweite jeweils Δa= 50 km vorgegeben.

---

[1] Abschnitt 22.9.3.1

[2] Der obere Wert ist gerechnet für i=0°, e=0.0, der untere Wert für i=179°, e=0.01

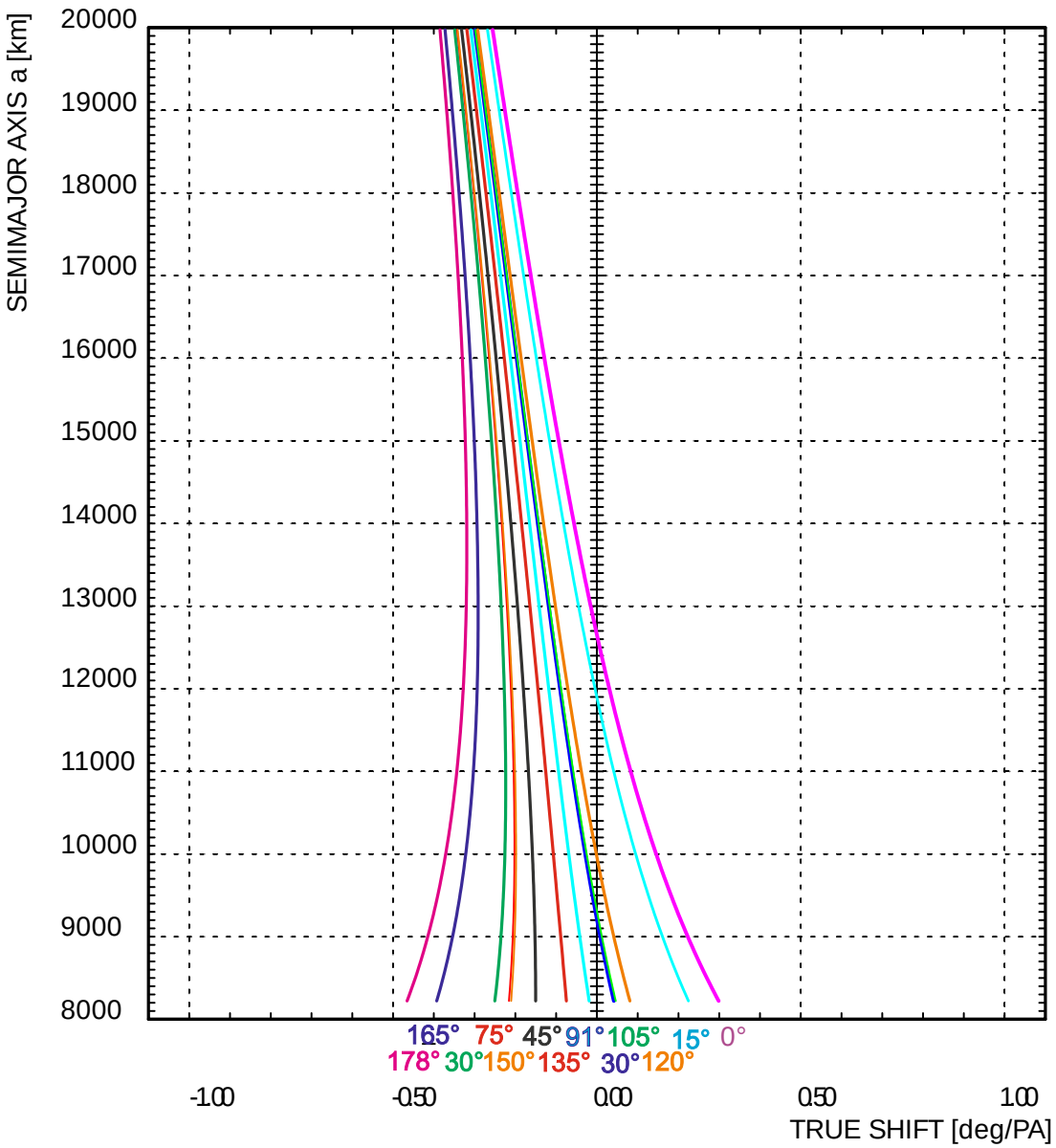


Bild 28-41: Die Verschiebung $\Delta\tau_{P\overline{\odot}}$ des wahren Sonnenwinkels des Perigäums bezüglich der fiktiven mittleren Sonne bezogen auf die wahre anomalistische Umlaufzeit P_A über der großen Bahnhalbachse für Bahnen mit der Exzentrizität e=0.2 parametrisiert für einige Inklinationen[1]. $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahnen treten für $\Delta\tau_{P\overline{\odot}} = 0°.0 / P_A$ auf.

Wird der Verlauf der wahren Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{Pm}$ bezogen auf die mittlere Sonne oder der wahren Sonnenverschiebung $\Delta\tau_P$ bezogen auf die wahre Sonne (nach *Newcomb*) dargestellt, so können in den bildnerischen Darstellungen keine sichtbaren Unterschiede im Verlauf der betreffenden Kurven erkannt werden.

[1] Oberhalb von etwa a=26000 km ergeben sich unsinnige Ergebnisse. Hier ist die Perigäums-Sonnendrift nicht mehr definierbar.

28.8.3 Äquivalenz zwischen drakonitischer und Sonnen-synodischer Bewegung

Die sonnensynchronen Bahnen sind die bislang bekanntesten Äquivalenzbahnen von Satelliten bzw. Planetenorbitern. Sie können auf die $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$– Äquivalenz zwischen der mittleren drakonitischen mit der mittleren (auf die fiktive mittlere Sonne bezogene) Sonnen-synodische Bewegung zurückgeführt werden. .

28.8.3.1 Drakonitische mit Sonnen-synodischen Äquivalenz-Bahnen

Die sonnensynchronen Bahnen sind die bislang bekanntesten Äquivalenzbahnen von Satelliten bzw. Planetenorbitern. Sie können auf die $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$– Äquivalenz zwischen der mittleren drakonitischen mit der mittleren Sonnen-synodischen Bewegung zurückgeführt werden. Mit den mittleren Bewegungen (23.48) (Abschnitt 23.2.2) und (28.133) (Abschnitt 28.5.1.2) ergibt sich die notwendige und hinreichende Beziehung

$$\overline{n_D} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s \;=\; \overline{n_S} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right) \Leftrightarrow \dot{\Omega}_s = n_\odot \;. \qquad (28.360)$$

Man muss beachten, dass diese Äquivalenz auf die fiktive mittlere Sonne zurückgeführt wird. Dies schränkt den Aussagehalt dieser Art der $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$– Äquivalenz wesentlich ein.

Im Gegensatz zu den nahen Äquivalenzbahnen in Abschnitt 26.10 (Band IV A) ist in diesem Fall keine Singularität für bestimmte Inklinationen zu erwarten. Es muss also möglich sein einen eindeutigen Schnittpunkt zwischen den Kurven der mittleren drakonitischen und der mittleren Umlaufzeit zu finden. Mit Vorgabe einer mittleren Exzentrizität $\overline{e}_0$ und einer mittleren Inklination $\overline{i}_0$ ist damit die eindeutige Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse möglich. Mit $\dot{\Omega}_s$ aus Formel (20.15) (Band III) folgt in erster Näherung

$$\overline{a_{QSR}}_0^{(0)} = \sqrt[7]{\left[\frac{3\sqrt{\mu}\; J_2\, R_E^2\, \cos \overline{i}_0}{2\, n_\odot \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\right]^2} \quad . \qquad (28.361)$$

In diesem Ausdruck geht verloren, dass wegen Bedingung (28.360) im Fall erdnaher Bahnen nur retrograde Bahnen betrachtet werden dürfen (Man beachte das Vorzeichen in Formel (20.15)). Der iterative Prozess zur Berechnung der Halbachse erfolgt mit

$$\overline{P_D}^{(\nu)} = \overline{P_D}\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi}{\overline{n_D}^{(\nu)}} \quad , \quad \overline{P_S}^{(\nu)} = \overline{P_S}\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi}{\overline{n_S}^{(\nu)}} \quad , \quad fct\left(\overline{a_{QDS}}\right) \equiv \overline{P_D} - \overline{P_S} = 0 \;. \qquad (28.362)$$

Entsprechende Formeln können aufgestellt werden, um die Exzentrizität bei Vorgabe von Halbachse und Inklination, sowie die Inklination bei Vorgabe von Halbachse und Exzentrizität zu berechnen. Als Genauigkeitsgrenze der Funktionsgleichung (28.362) kann $\left|\Delta t\right| < 10^{-9}\,\text{sec}$ gefordert werden.

BEISPIEL: Vorgegeben seien $\overline{e}_0$ =-0.222, $\overline{i}_0$ = 110°. Die entsprechende Sonnensynchrone Bahn als mittlere $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$– Äquivalenzbahn hat die in Tabelle 28-25 gelisteten Bahncharakteristika. Die zugehörigen wahren Bahnen werden mit dem vollständigen zur Verfügung stehenden Bahnmodell unter Einschluss aller periodischen Bewegungseinflüsse gerechnet.

Die Bedingung der Äquivalenz ist mit den iterativ berechneten Zahlenwerten $\overline{P_{QDS}} = 9090.1222918153362\,\text{sec}$ extrem genau erfüllt. ◀

$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$	
$\overline{a_{QDS}}$ =9411.353379 km, $\overline{e}_0$ =0.222, $\overline{i}_0$ =110°.45, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K} = 9086.342469$ sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 9091.037245$ sec	$P_H = 9090.134883$ sec
$\overline{P_A} = 9088.659154$ sec	$P_A = 9088.657074$ sec
$\overline{P_D} = 9090.122292$ sec	$P_D = 9089.568030$ sec
$\overline{P_T} = 9092.741499$ sec	$P_T = 9094.223510$ sec
$\overline{P_R} = 8224.793802$ sec	$P_R = 8043.309254$ sec
$\overline{P_S} = 9090.122292$ sec	$P_S = 9089.683449$ sec
$\overline{P_L} = 9057.851541$ s	$P_L = 9023.173196$ sec
$H_P = 943.896329$ km	$H_A = 5122.537230$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -$ -37°.849176	$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -$ 37°.875510
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -$ 37°.849176	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -$ 37°.873200

Tabelle 28-25: Bahncharakteristika der mittleren drakonitischen mit der mittleren Sonnensynchronen Äquivalenzbahn.

Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, $\mu_{♁}$ = 398600.4418 km³ / s², $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977

Weitere Eigenschaften der sonnensynchronen Bahnen werden in Abschnitt 28.9 ab Seite 165 detailliert untersucht.

28.8.3.2 Die Stabilisierung von mittleren PD-PS-Äquivalenz-Bahnen

Äquivalenzbahnen zeichnen sich durch ihr stabiles Verhalten aus. Diese Stabilisierung wird durch die Kopplung zweier oder mehrerer Bewegungsarten hervorgerufen.

Dieses Stabilisierungsverhalten wird in diesem Abschnitt beispielhaft für die Äquivalenz zwischen mittlerer drakonitischer und mittlerer Sonnen-synodischer Bewegung, d.h. für Sonnensynchrone Bahnen, untersucht. Dazu wird das Verhalten der Knoten-Sonnenverschiebung betrachtet, die in unterschiedlichen Bezügen definiert werden kann. In diesem Abschnitt werden vier verschiedene solcher Bezüge verwendet. Dazu werden zunächst zur besseren Übersicht die benötigten Formelsysteme aus den früheren Kapiteln zusammengestellt:

Die mittlere drakonitische Umlaufzeit aus[1] (23.157)

[1] Abschnitt 23.3.2 (Band IV A)

$$\overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_D}} \quad , \quad \overline{n_D} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s \quad . \tag{28.363}$$

Die wahre drakonitische Umlaufzeit aus[1] (23.155)

$$fct\left[P_D\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[u\left(t_0 + N_P\, P_D\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0 \quad . \tag{28.364}$$

1. Die wahre Knoten-Sonnenverschiebung (28.269) pro wahrem drakonitischem Umlauf verwendet den wahren Sonnenwinkel $\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot$ bei Bezug auf die wahre (ekliptikale) Sonne

$$\Delta\tau_\Omega = \tau_\Omega\left(t_0 + P_D\right) - \tau_\Omega\left(t_0\right) = \left[\Omega\left(t_0 + P_D\right) - \alpha_\odot\left(t_0 + P_D\right)\right] - \left[\Omega\left(t_0\right) - \alpha_\odot\left(t_0\right)\right] \quad . \tag{28.365}$$

2. Bei Bezug auf die mittlere (ekliptikale) Sonne kann mit dem mittleren Sonnenwinkel $\tau_M = \alpha - \overline{\alpha_\odot}$ die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung aus (28.271) berechnet werden

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{\Omega M} &= \tau_{\Omega M}\left(t_0 + P_D\right) - \tau_{\Omega M}\left(t_0\right) = \\ &= \left[\Omega\left(t_0 + P_D\right) - \overline{\alpha_\odot}\left(t_0 + P_D\right)\right] - \left[\Omega\left(t_0\right) - \overline{\alpha_\odot}\left(t_0\right)\right] \quad .\end{aligned} \tag{28.366}$$

3. Die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne (28.248) und (28.260) hat mit der säkularen knotenbezogenen Sonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s}$ bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s} = \dot{\Omega}_s - n_\odot$ den Betrag

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}} := \dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}s}\,\overline{P_D} = \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right)\overline{P_D} \quad . \tag{28.367}$$

4. Die wahre Knoten-Sonnenverschiebung (28.268) pro wahrem drakonitischem Umlauf lautet mit dem wahren Sonnenwinkel $\tau_{\Omega\overline{\odot}} = \Omega\left(t_\Omega\right) - \alpha_{\overline{\odot}}\left(t_\Omega\right)$ bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

$$\begin{aligned}\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}} &= \tau_{\Omega\overline{\odot}}\left(t_0 + P_D\right) - \tau_{\Omega\overline{\odot}}\left(t_0\right) \\ &= \left[\Omega\left(t_\Omega + P_D\right) - \alpha_{\overline{\odot}}\left(t_\Omega + P_D\right)\right] - \left[\Omega\left(t_\Omega\right) - \alpha_{\overline{\odot}}\left(t_\Omega\right)\right] \quad .\end{aligned} \tag{28.368}$$

Als Anfangszeit wird in den Beispielen üblicherweise (aber nicht unbedingt notwendig) die Durchgangszeit durch den aufsteigenden Knoten verwendet: $t_0 = t_\Omega$.

Bild 28-42 zeigt das Verhalten der wahren Knoten-Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}$ pro wahrem drakonitischem Umlauf P_D bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\overline{\odot}$ für einige Kreisbahnen mit unterschiedlichen Inklinationen zwischen 30° und 180°. Die Rechnung wurde mit der Schrittweite der Halbachse: Δa= 25 km durchgeführt. Sonnensynchrone Bahnen treten für den Wert $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}} = 0°$ auf. Sie kommen wie erwartet nur für retrograde Bahnen vor. Während außerhalb das Verhalten der Knoten-Sonnenverschiebung äußerst unruhig ist, beruhigt sich dieses Verhalten auffällig nahe den sonnensynchronen Bahnen: Das Bahnverhalten ist stabilisiert, der Verlauf der $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}$-Kurve ist in der Umgebung der sonnensynchronen Bahn geradlinig, der Schnitt mit der $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}} = 0°$ -Achse ist eindeutig.

[1] Abschnitt 23.3.1 (Band IV A)

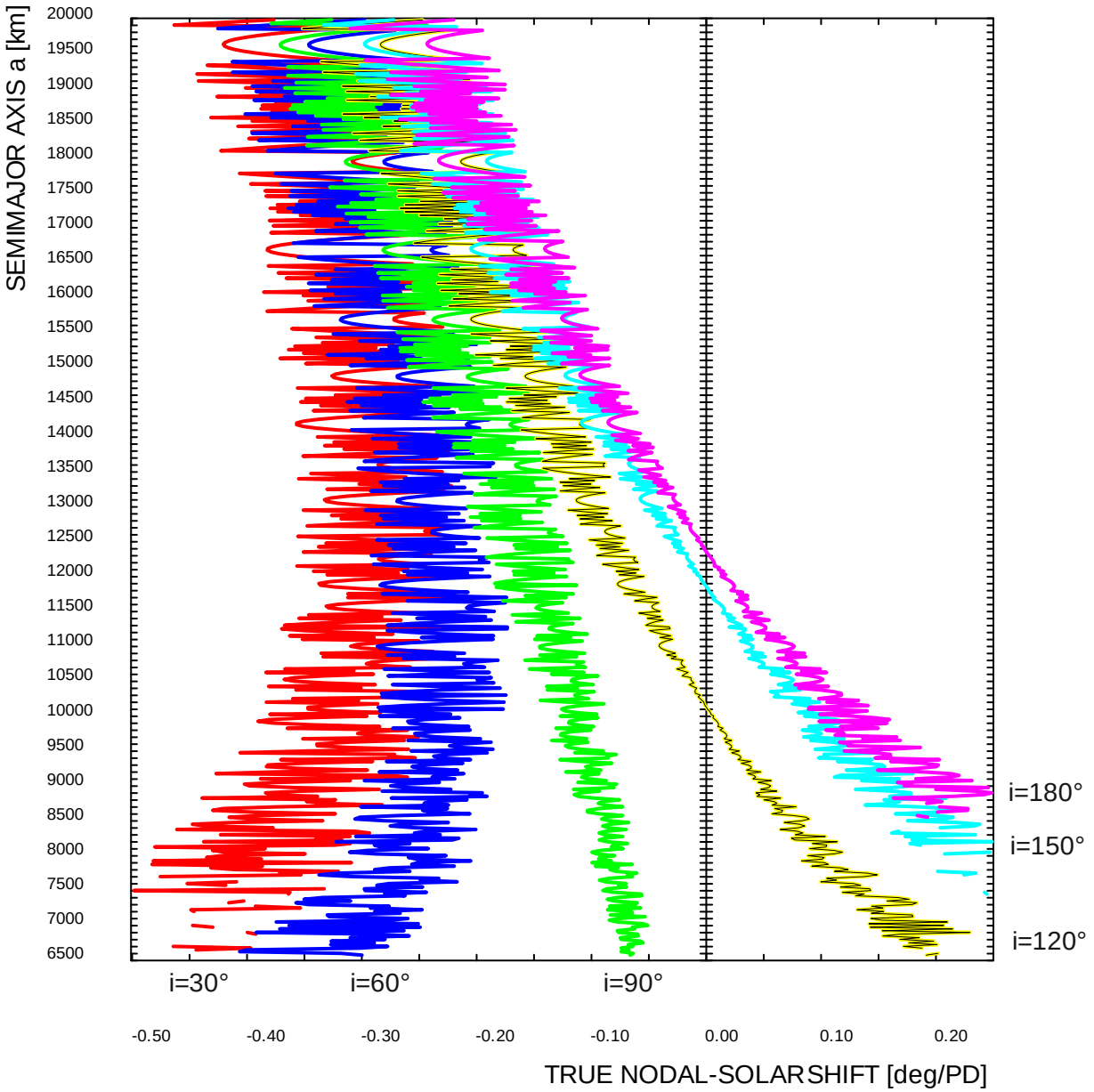


Bild 28-42: Die wahre Knoten-Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}$ bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne in der Umgebung einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn mit den Inklinationen i=30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°. Schrittweite der Halbachse: Δa= 25 km. Start Datum 27. Nov. 2020, Epoche JD2000.0. Die Satellitenbahn wird nur mit säkularen Bewegungseinflüssen gerechnet.

Bild 28-43 mit einem größeren Ausschnitt gerechnet, bestätigt die vorstehenden Aussagen für elliptische Bahnen mit der Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.2$. Die Bahnen wurden mit der Halbachsenschrittweite Δa= 10 km gerechnet.

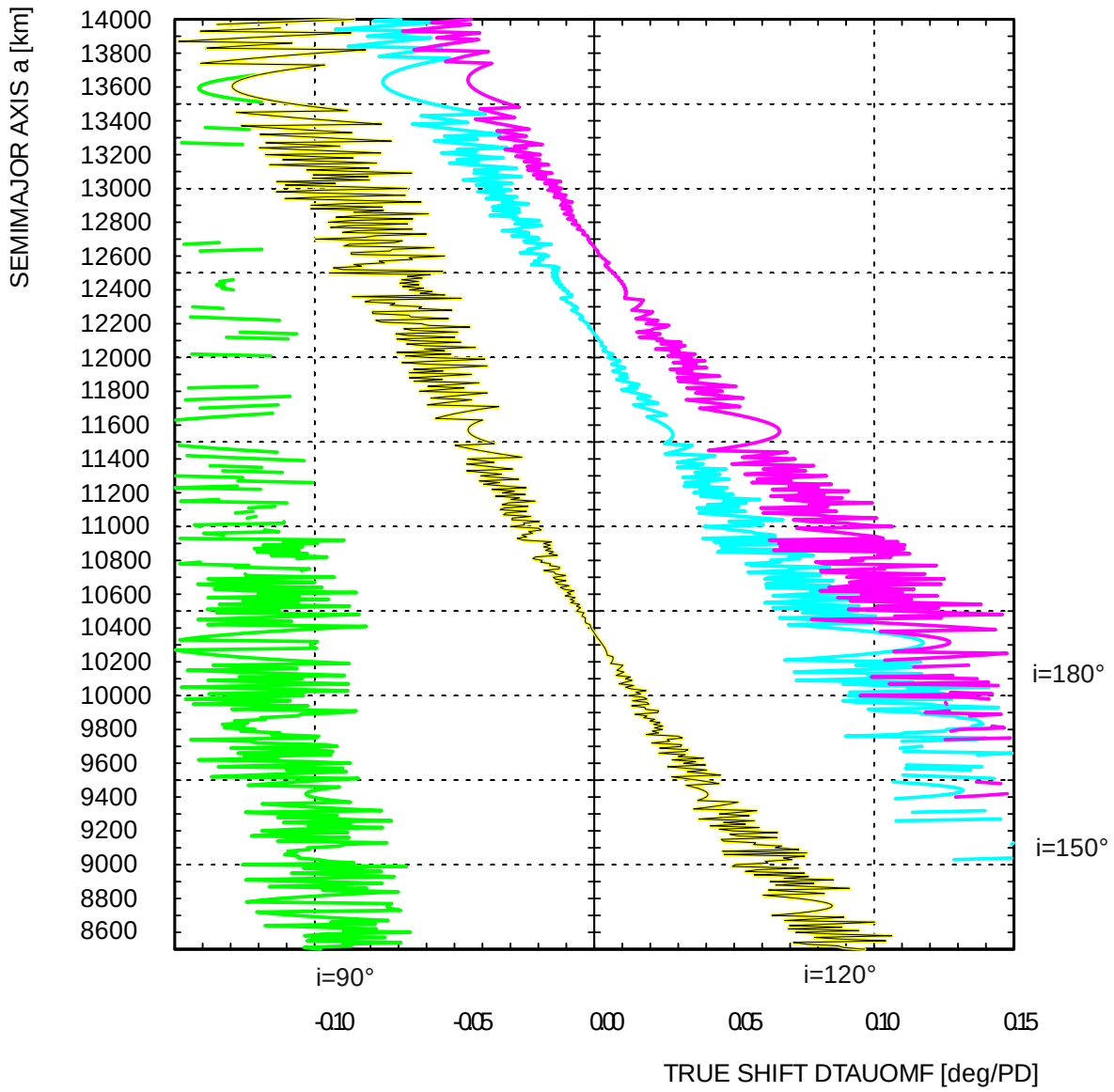


Bild 28-43: Die wahre Knoten-Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}$ bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne, in der Umgebung einer mit der Exzentrizität e=0.2 elliptischen sonnensynchronen Bahn. Schrittweite der Halbachse: Δa= 10 km. Epoche 27. Nov.2020

Bild 28-44 stellt einen Vergleich der unterschiedlichen Definitionen der Knoten-Sonnenverschiebung am Beispiel einer elliptischen Bahn mit Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.2$ und der Inklination $\overline{i}_0 = 120°$ dar. Die auf die fiktive mittlere Sonne bezogene wahre Knoten-Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}$ ist als rote Kurve gezeichnet. Ihr überlagert ist als dünne schwarze Kurve die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}}$. Der Verlauf der wahren Knoten-Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{\Omega}$ ist als blaue Kurve gezeichnet. Ihre Verschiebung gegenüber der $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}$-Kurve ist eine deutliche Folge des Bezugs auf die wahre ekliptikale Sonne. Der Verlauf der auf die mittlere (ekliptikale) Sonne bezogene die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{\Omega M}$ ist der blauen Kurve überlagert. Die Abweichung von der blauen Kurve kann vernachlässigt werden. Die Stabilisierung des Kurvenverlaufs in beiden Fällen in der Umgebung der sonnensynchronen Bahn ist evident.

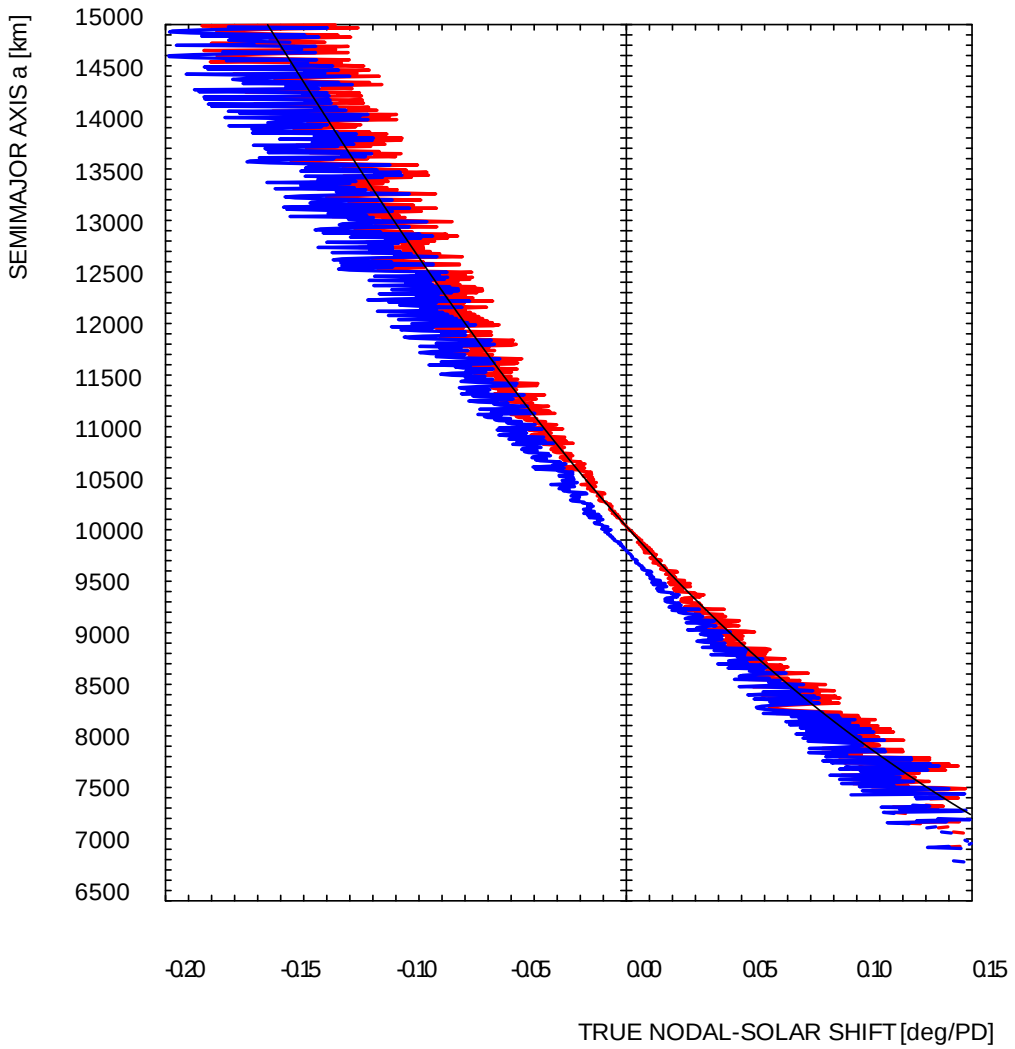


Bild 28-44: Die Knoten-Sonnenverschiebung in der Umgebung der sonnensynchronen Bahn mit Exzentrizität $\overline{e}_0$ = 0.2 und Inklination $\overline{i}_0$ = 120°, gerechnet mit der Schrittweite der Halbachse: $\Delta a = 10\,\mathrm{km}$. Start Datum 27. Nov. 2020, Epoche JD2000.0. Rote Kurve wahre Knoten-Sonnenverschiebung bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}$, überlagerte schwarze Kurve für mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}}$ bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne, blaue Kurve wahre Knoten-Sonnenverschiebung $\Delta\tau_{\Omega}$ bei Bezug auf die wahre (ekliptikale) Sonne und bei Bezug auf die mittlere (ekliptikale) Sonne $\overline{\Delta\tau_{\Omega M}}$. Die Berechnungen werden nur mit säkularen Bewegungseinflüssen durchgeführt.

28.8.3.3 Wahre PD-PS- Äquivalenz-Bahnen

Der Bezug einer drakonitischen Bewegung zu einer wahren Sonnens-synodischen Bewegung, somit in Bezug auf die Bewegung der wahren Sonne wird durch eine $\left(P_D \triangleq P_S\right)$– Äquivalenzbahn dargestellt.

Auch hier können ein Bahnparameter nach Vorgabe der anderen Parameter berechnet werden. Dies soll am Beispiel der Berechnung der großen Bahnhalbachse demonstriert werden. Die mittleren

Keplerelemente $\bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M}_{00}$ seien vorgegeben. Als Anfangswert kann wieder die große Halbachse aus (28.361) verwendet werden. Für eine generelle Anwendung genügt als erster Näherungswert stets $\bar{a}_0 = 6578$ km zu wählen. Das anschließende Iterationsverfahren ist sehr stabil.

Die wahren Umlaufzeiten werden mit den Funktionsgleichungen (23.155) und (28.125) erhalten

$$fct(P_D) \equiv \sin\left[u(t_0 + P_D) - u(t_0)\right] = 0 \quad , \quad fct(P_S) \equiv \sin\left[\tau(t_0 + P_S) - \tau(t_0)\right] = 0 \quad . \tag{28.369}$$

Die große Bahnhalbachse wird dann mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QDS}}\right) \equiv P_D - P_S = 0 \tag{28.370}$$

berechnet um die gewünschte Äquivalenz zu erzeugen. Der gesamte Prozess muss iterativ in mehreren Schritten durchlaufen werden.

In ähnlicher Weise können die anderen Bahnparameter („Keplerelemente“) berechnet werden., wenn die restlichen 5 Parameter vorgegeben sind.

BEISPIEL: einer wahren $(P_D \triangleq P_S)$ – Äquivalenzbahnmit der Genauigkeit der Funktionsgleichung: $|\Delta t| < 10^{-8}$ sec.

$(P_D \triangleq P_S)$	
$\overline{a_{QDS}}$ =8479.196013 km, $\bar{e}_0$ =0.222, $\bar{i}_0$ =110°.45, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 9184.768959 sec	t_0 : 2019-02-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 9189.446876 sec	P_H = 9188.548442 sec
$\overline{P_A}$ = 9187.077340 sec	P_A = 9187.075029 sec
$\overline{P_D}$ = 9188.535198 sec	P_D = 9187.982733 sec
$\overline{P_T}$ = 9191.145023 sec	P_T = 9192.621286 sec
$\overline{P_R}$ = 8305.224639 sec	P_R = 8124.492252 sec
$\overline{P_S}$ = 9188.468826 sec	P_S = 9187.982733 sec
$\overline{P_L}$ = 9155.497285 sec	P_L = 9120.036092 sec
H_P = 996.677898 km	H_A = 5205.440928 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -38°.262142$	$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -38°.288164$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -38°.262132$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -38°.285862$

Tabelle 28-26: Bahncharakteristika der wahren drakonitischen mit der auf die wahre Sonne bezogenen synodischen Äquivalenzbahn, . Basis Parameter: R_E= 6378.166 km, $\mu_{\overset{+}{\circ}}$ = 398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977

28.8.4 Äquivalenz zwischen tropischer und Sonnen-synodischer Bewegung

Die mittlere auf die fiktive mittlere Sonne bezogene Sonnen-synodische Satellitenbewegung ist nach Formel (28.164) auf die tropische mittlere Satellitenbewegung durch die Formel

$$\overline{n_S} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right) = \overline{n_T} - \sigma_i\, n_\odot \qquad (28.371)$$

verknüpft[1]. Um Äquivalenz zwischen diesen Bewegungen zu erreichen, muss die Differenz

$$\overline{n_S} - \overline{n_T} = -\sigma_i\, n_\odot = 0 \qquad (28.372)$$

verschwinden. Da aber die mittlere Sonnenbewegung $n_\odot$ sicher eine von Null verschiedene Zahl ist, muss σ_i = sgn(cosi)= 0 sein. Dies ist ausschließlich für polare Bahnen mit i=90° möglich.

Mittlere $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_S}\right)$– Äquivalenzbahnen müssen für eine Bestimmung der mittleren großen Bahnhalbachse einer solchen Bahn der Funktionalgleichung genügen[2]

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \overline{P_T} - \overline{P_S} = 0 \qquad (28.373)$$

BEISPIEL 1: Gegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 8000 km und die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.1 vorgegeben.

$\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_S}\right)$	
$\overline{a_{QTS}}$ =8000.0 km, $\bar{e}_0$ =0.1, $\bar{i}_0$ =90°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 7121.081578 sec	t_0: 2019-08-13/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 7128.560332 sec	P_H = 7127.863640 sec
$\overline{P_A}$ = 7124.812508 sec	P_A = 7124.783718 sec
$\overline{P_D}$ = 7128.560332 sec	P_D = 7127.863693 sec
$\overline{P_T}$ = 7128.560332 sec	P_T = 7128.560332 sec
$\overline{P_R}$ = 7128.560332 sec	P_R = 5572.652403 sec
$\overline{P_S}$ = 7128.560332 sec	P_S = 5572.652410 sec
$\overline{P_L}$ = 7128.560332 sec	P_L = 5572.652410 sec
H_P = 821.8634 km	H_A = 2421.8634 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\, \overline{P_A} = -29°.767998$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_D} = -29°.783657$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\, P_A = -29°.767878$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\, P_D = -29°.780746$

Tabelle 28-27: Die Parameter einer polaren $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenz -Bahn. Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, μ_δ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977

[1] Abschnitt 28.5.1.3 (Seite 43)

[2] analog zur Berechnung der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$

Unter Einschluss des gesamten Ausdrucks einschließlich der Faktoren mit $\left(J_2^2 \text{ und } J_4\right)$ für die säkulare Variation $\dot{\Omega}_s$ der Rektaszension des aufsteigenden Knotens[1] ergibt sich wie erwartet der extrem kleine Wert

$$\dot{\Omega}_s = -0.5675656199133 \times 10^{-22} \text{ rad/sec} \quad .$$

Eine iterative Verbesserung der vorgegebenen Halbachse kann nicht stattfinden, da in diesem Ausnahmefall die mittleren Umlaufzeiten entsprechend der Gleichung (28.372) notwendig identisch sind. Dies zeigt die Zusammenstellung der Bahnparameter in Tabelle 28-27. ◀

Aufgabenstellung: Untersuche, warum neben $\overline{P_T} = \overline{P_S}$ auch die mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_H}, \overline{P_D}, \overline{P_R}, \overline{P_L}$ denselben Betrag haben. Überprüfe und deute diese Ergebnisse. ◀

Wird $\left(P_T \triangleq P_S\right)$– Äquivalenz für die wahren Umlaufzeiten gewünscht, müssen die wahren Umlaufzeiten berechnet werden. Im Fall der tropischen Bewegung kann die wahre tropische Umlaufzeit P_T mit der Rektaszension α als Bahnwinkel mit der Funktionsgleichung (24.45)[2]

$$fct\left(P_T\right) \equiv \sin\left[\alpha\left(t_0 + P_T\right) - \alpha\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{28.374}$$

berechnet werden. Die Sonnen-synodische Umlaufzeit P_S folgt mit dem wahren Sonnenwinkel $\tau = \alpha - \alpha_\odot$ aus der Funktionsgleichung (28.157)

$$fct\left(P_S\right) \equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S\right) - \tau\left(t_0\right)\right] = 0 \quad . \tag{28.375}$$

Die Funktionsgleichung zur Berechnung der Bahnparameter, etwa der großen Bahnhalbachse, einer polaren $\left(P_T \triangleq P_S\right)$– Äquivalenzbahn lautet[3]

$$fct\left(\overline{a}\right) \equiv P_T - P_S = 0 \quad . \tag{28.376}$$

Aufgabenstellung:

1. Untersuche, warum die iterative Bearbeitung dieser Funktionsgleichung nicht konvergiert.
2. Gibt es alternative Berechnungen oder ist die Berechnung wahrer $\left(P_T \triangleq P_S\right)$– Äquivalenzbahnen grundsätzlich nicht möglich?

28.8.5 Äquivalenz von *Hansen*- mit Sonnen-synodischer Bewegung

28.8.5.1 Basiseigenschaften

Die mittlere *Hansen*sche mittlere Satellitenbewegung[4] lautet nach Formel (21.62)

---

[1] Formel (29.15) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

[2] Abschnitt 24.2, Band IV-A

[3] analog zur Berechnung der mittleren Exzentrizität $\overline{e}_0$

[4] Abschnitt 21.3

$$\overline{n_H} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\overline{i} = \overline{n_D} + \dot{\Omega}\cos\overline{i} \quad . \tag{28.377}$$

Die mittlere Sonnen-synodische Satellitenbewegung beträgt nach Formel (28.163)

$$\overline{n_S} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{\odot}\right) = \overline{n_D} + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{\odot}\right) \ . \tag{28.378}$$

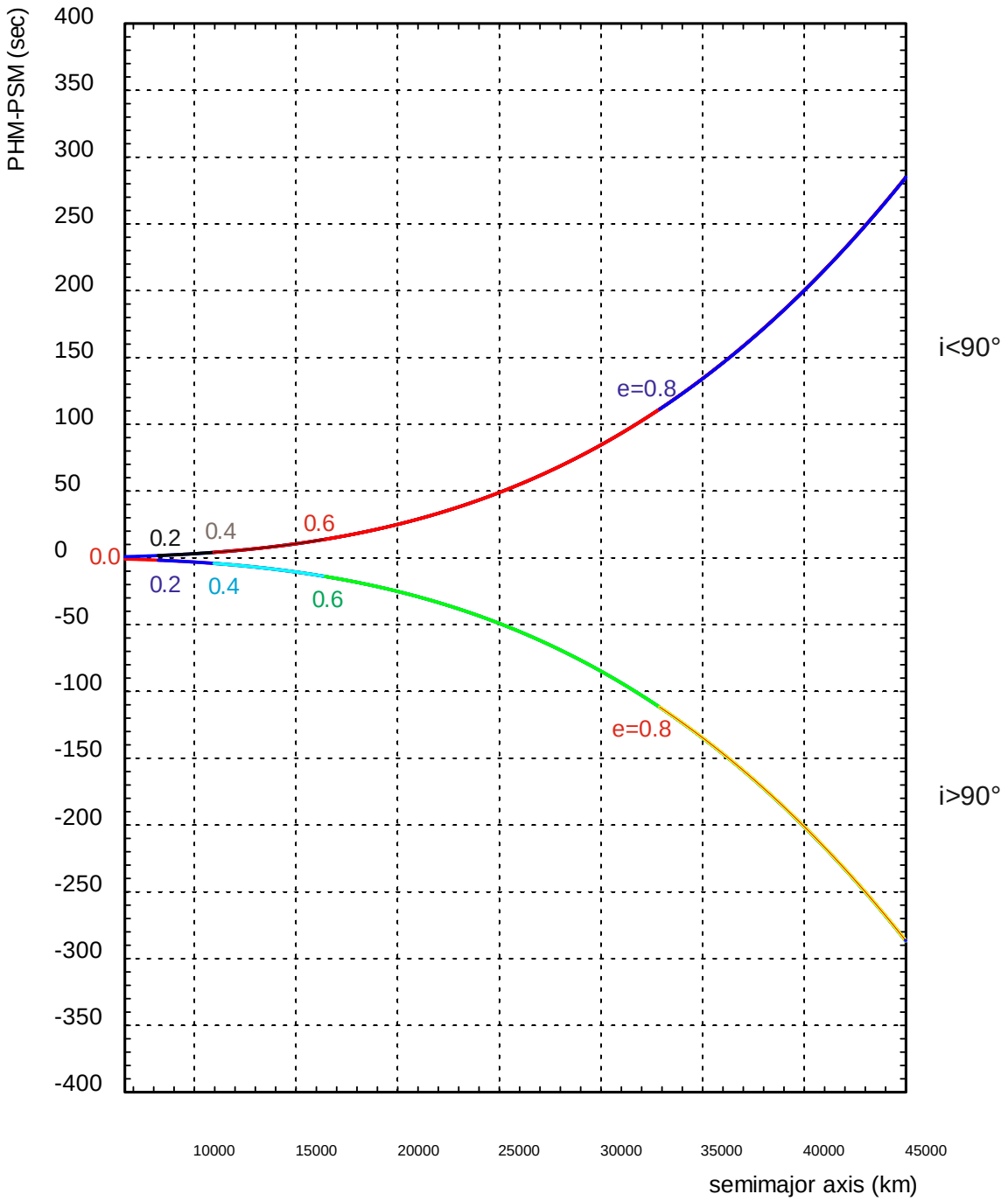


Bild 28-45: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_H} - \overline{P_S}$ der mittleren Hansenschen und mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeiten über der großen Bahnhalbachse für einige Exzentrizitäten und für Äquatornahe Bahnen, Schrittweite Δa= 10 km, Genauigkeiten $\left|\Delta fct\right| \le 10^{-9}$ sec, $\Delta a \le 10^{-3}$ km.

Zur Untersuchung, ob eine Kopplung der *Hansen*schen mit der Sonnen-synodischen Bewegung möglich ist, muss die Differenz

$$\overline{n_S} - \overline{n_H} = \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot \right) - \dot{\Omega}_s \cos \overline{i_0} \qquad (28.379)$$

identisch verschwinden. Dieser Ausdruck kann unter Anwendung aller säkularen Bewegungseinflüsse zur analytischen Detailuntersuchung verwendet werden.

Einen sofortigen Einblick über das Verhalten einer möglichen $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S} \right)$ Äquivalenz kann durch eine graphische Übersicht erhalten werden. Bild 28-45 zeigt den Verlauf der Differenz $\overline{P_H} - \overline{P_S}$ über der großen Bahnhalbachse. In der Graphik werden äquatoriale Bahnen für verschieden Exzentrizitäten untersucht. Retrograde Bahnen, in diesem Fall Bahnen mit Inklination i=180°, verlaufen positiv, rechtläufige Bahnen, mit i=0°, negativ. Mögliche $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S} \right)$ Äquivalenzen kommen nur für Bahnen mit kleiner großer Bahnhalbachse vor. Die detaillierte Darstellung in Bild 28-46 zeigt den Verlauf der Differenzen in der Nähe kleiner Halbachsen für verschiedene Inklinationen. Es zeigt sich, dass für Inklinationen etwa im Bereich 100°, 140° $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S} \right)$ – Äquivalenzbahnen zu erwarten sind.

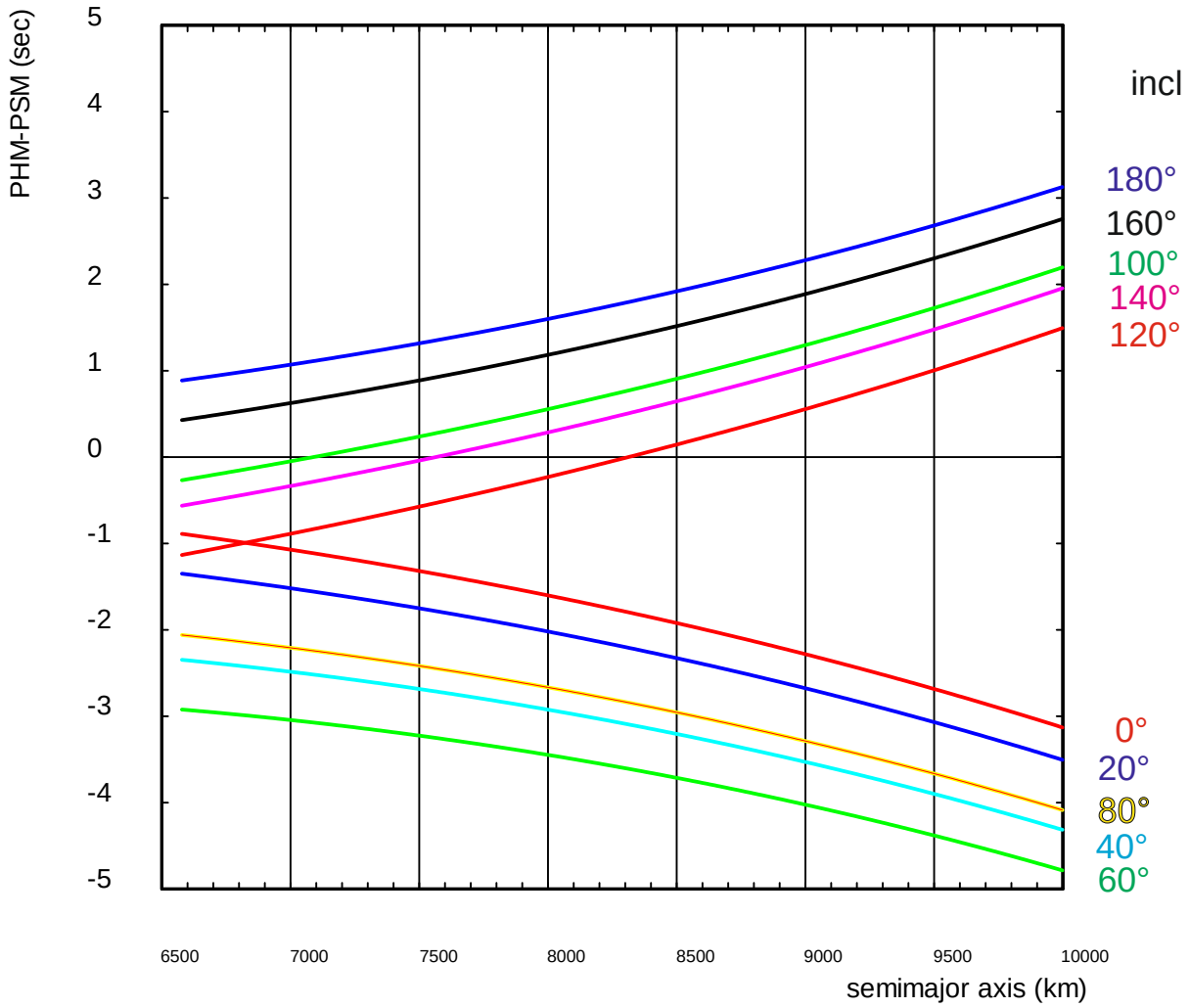


Bild 28-46: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_H} - \overline{P_S}$ der mittleren *Hansen*schen und mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeiten über der großen Bahnhalbachse für kreisförmige Bahnen, parametrisiert nach der Inklination. $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S} \right)$ – Äquivalenzbahnen können nur für retrograde Bahnen auftreten.

28.8.5.2 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung mittlerer Sonnen-synodischer mit Hansen Bewegung

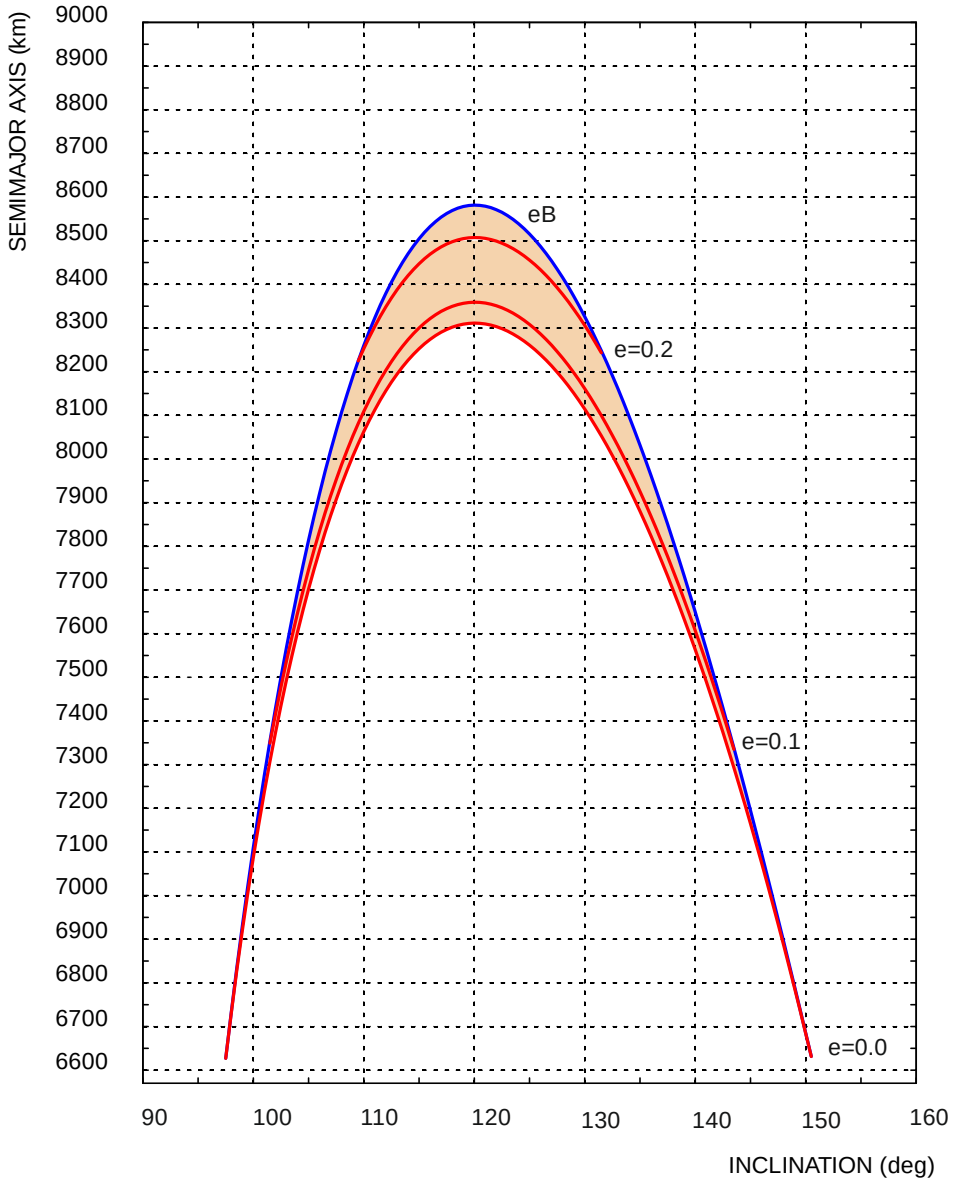


Bild 28-47: Das $(a,i)-$ Gebiet möglicher mittlerer $(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S})-$ Äquivalenzbahnen in erster Ordnung, parametrisiert für einige Exzentrizitäten (e=0.0, 0.1, 0.2), Grenzexzentrizität $e_B \in [0.00740385 - 0.233458]$, geforderte Genauigkeit $|\Delta a| \le 10^{-3}$ km, $\Delta e \le 10^{-8}$, $|\Delta fct| \le 10^{-8}$ sec, Schrittweiten $\Delta a = 10$ km, $\Delta i = 0°.5$, $\Delta e = 0.001$

Ausgehend von den vorstehenden Überlegungen zeigt Bild 28-47 eine Übersicht aller möglichen $(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S})-$ Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität $e_B \in [0.00740385 - 0.233458]$. Das Bild bestätigt die Überlegungen nach Bild 28-46. Die Grenzexzentrizität ist auf Bahnen mit der minimalen mittleren Bahnhöhe $H_p =$ 200 km bezogen. Die Inklination umfasst mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.5$ den Bereich $i \in (97°.5 - 150°.5)$. Das Maximum wird mit der Grenzexzentrizität e_B =0.233458 für genau i= 120°

erreicht. In diesem Fall bewegt sich die große Bahnhalbachse einer kreisförmigen Bahn zwischen den Werten $\overline{a_{QHS}} \in [8311.260 \text{ km} - 8581.570 \text{ km}]$.

28.8.5.3 Berechnung der großen Bahnhalbachse

Basierend auf der grafischen Darstellung Bild 28-47 können geeignete mittlere Bahnparameter Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ vorgeben werden. Zur Berechnung der großen Bahnhalbachse kann aus dieser Darstellung ein sinnvoller Näherungswert $\overline{a}_0^{(0)}$ für die große Bahnhalbachse gewählt werden. Damit können die mittleren Bewegungen $\overline{n_H}, \overline{n_S}$ mit den Ausdrücken (28.377) und (28.378) berechnet werden[1]. Die iterative Berechnung der Bahnhalbachse und damit die mittlere Umlaufzeit erfolgt dann mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QHS}}\right) \equiv \frac{2\pi}{\overline{n_H}(\overline{a})} - \frac{2\pi}{\overline{n_S}(\overline{a})} = \overline{P_H}(\overline{a}) - \overline{P_S}(\overline{a}) = 0 \quad . \tag{28.380}$$

BEISPIEL 1:

$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$	
$\overline{a_{QHS}}$ =8220.581462 km, $\overline{e}_0$ =0.15, $\overline{i}_0$ =130° $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 7417.632558 sec	t_0 : 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 7415.830358 sec	P_H = 7416.073503 sec
$\overline{P_A}$ = 7416.733514 sec	P_A = 7416.733514 sec
$\overline{P_D}$ = 7412.695757 sec	P_D = 7413.782392 sec
$\overline{P_T}$ = 7417.573476 sec	P_T = 7419.329848 sec
$\overline{P_R}$ = 6829.633554 sec	P_R = 6801.493611 sec
$\overline{P_S}$ = 7415.830358 sec	P_S = 7417.392185 sec
$\overline{P_L}$ = 7394.338534 sec	P_L = 7393.954061 sec
H_P = 609.363324 km	H_A = 3075.539768 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -$-30°.876852	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -$30°.734064
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -$30°.876852	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -$30°.738569
$\dot{\Omega}_s$ = 0.55738935904931605 $\times 10^{-6}$ rad / sec	

Tabelle 28-28: Bahncharakteristika der mittleren $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn, Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, μ_δ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977, Schrittweite Δa= 1 km, geforderte Genauigkeit $|\Delta\overline{P}| < 10^{-9}$ sec, $\Delta(a) < 10^{-9}$ km. ◀

[1] Die hier benötigten säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s, \dot{\omega}_s, (M_0)^{\cdot}_s$ sind im Rahmen der *Brouwer*schen analytischen Lösung in Kapitel 20.2.1 (Band III) zusammengestellt

Nach Bild 28-47 seien die mittlere Inklination $\overline{i}_0$ = 130° und die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.15$ vorgewählt. Als Näherungswert für die gesuchte große Bahnhalbachse kann $\overline{a}_0^{(0)} = 8000$ km angenommen werden. Für die Berechnung seien die Genauigkeitsgrenzen $|\Delta fct| \le 10^{-9}$ sec und für die Halbachse $\Delta a \le 10^{-9}$ km gewünscht. Die iterative Lösung mit Funktionsgleichung (28.380) unter Verwendung des säkularen *Brouwer*schen Bahnmodells ergibt $\overline{a_{QHS}} = 8220.5881463$ km. Die erreichte Genauigkeit für die Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $|\Delta fct| = \left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| = 3.637978807092 \times 10^{-12}$ sec. Die Bahnparameter der gefundenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-28 zusammengestellt.

Zur Berechnung der wahren Umlaufzeit, also unter Einschluss eines beliebig aufwendigen analytischen oder numerischen Bahnmodells, und der zugehörigen großen Bahnhalbachse, wird der Sonnenbezogene Bahnwinkel einer Satellitenbahn benötigt, der Sonnenwinkel[1]

$$\tau = \alpha - \alpha_\odot \quad . \tag{28.381}$$

Hier ist $\alpha_\odot$ jedoch die Rektaszension der wahren Sonne[2]. Mit Hilfe einer Ephemeridenrechnung kann bei vorgegebenem Bahnmodell der Sonnenwinkel τ einer Satellitenposition jederzeit berechnet werden. Entsprechend den Beziehungen (21.66) und (28.125) werden die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit[3] als Funktion sowie die wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit der gesuchten mittleren großen Bahnhalbachse mit den überlagerten Funktionen

$$\begin{aligned} fct\left(P_H\left(\overline{a}\right)\right) &\equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\left(\overline{a}\right)\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(P_S\left(\overline{a}\right)\right) &\equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S\left(\overline{a}\right)\right) - \tau\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{28.382}$$

bei Vorgabe einer Anfangshalbachse und der anderen fest vorgegebenen *Kepler*elemente erhalten. Die zugehörige mittlere Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ der zugehörigen $\left(P_H \mathrel{\hat{=}} P_S\right)$–Äquivalenzbahn wird bei Vorgabe der fünf restlichen Bahnparameter anschließend aus der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QHS}}\right) \equiv P_H\left(\overline{a}_0^{(\nu)}, \overline{e}_0, \overline{i}\right) - P_S\left(\overline{a}_0^{(\nu)}, \overline{e}_0, \overline{i}_0\right) = 0 \qquad \prec \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots \tag{28.383}$$

berechnet. Der gesamte Prozess (28.382) - (28.383) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden. Werden im verwendeten Bahnpropagator etwa die analytischen Lösungen des *Eckstein*-modells eingesetzt, müssen die mittleren Epocheelemente vorgegeben sein. Mit den Parametern $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\varpi}_0, \overline{M}_{0\,0}\right)$ kann dann etwa die mittlere Bahnhalbachse zur Epoche $\overline{a_{QHS}}_0$ iterativ berechnet werden. Der erhaltene Zahlenwert für die große Bahnhalbachse ist für die Epoche gültig, an der die vorgegebenen Bahnparameter gegeben sind.

BEISPIEL 2: Es seien wie in Beispiel 1 die mittlere Inklination $\overline{i}_0$ = 130° und die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0$ = 0.15 vorgewählt. Als Näherungswert für die gesuchte große Bahnhalbachse soll wieder $\overline{a}_0^{(0)}$ = 8500 km angenommen werden. Für die Berechnung seien die Genauigkeitsgrenzen $|\Delta fct| \le 10^{-9}$ sec und für die Halbachse $\Delta(a) \le 10^{-9}$ km gewünscht.

---

[1] Abschnitt 28.5.1.1 (Band IV B)

[2] Abschnitt 28.1.1, sowie die analytische Darstellung in Abschnitt 28.1.3

[3] Abschnitt 21.5

$\left(P_H \triangleq P_S\right)$	
$\overline{a_{QHS}}$ =9639.423572 km, $\overline{e}_0$ =0.15, $\overline{i}_0$ =130°, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 9418.626540 sec	t_0 : 2019-04-16/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 9416.960919 sec	P_H = 9417.185092 sec
$\overline{P_A}$ = 9417.796406 sec	P_A = 9417.803666 sec
$\overline{P_D}$ = 9414.065942 sec	P_D = 9415.070612 sec
$\overline{P_T}$ = 9418.570497 sec	P_T = 9420.190943 sec
$\overline{P_R}$ = 8490.478840 sec	P_R = 8475.381372 sec
$\overline{P_S}$ = 9415.760242 sec	P_S = 9417.185092 sec
$\overline{P_L}$ = 9381.140392 sec	P_L = 9375.208259sec
H_P = 1815.373436 km	H_A = 4707.200508 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -39°.267687$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -39°.160495$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -39°.267717$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -39°.164675$
$\dot{\Omega}_s = 0.31920485619462820 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.26437240585376031 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s = 0.58801934068790436 \times 10^{-7}$ rad / sec	

Tabelle 28-29: Bahncharakteristika der wahren $\left(P_H \triangleq P_S\right)$ – Äquivalenzbahn, Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, μ_δ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977, Schrittweite $\Delta a = 10$ km, Geforderte Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-8}$ sec, Berechnung mit dem vollständigen *Eckstein*schen Bahnmodell

Die iterative Lösung mit Funktionsgleichung (28.383) unter Verwendung des vollständigen *Eckstein*-schen Bahnmodells((säkulare, lang- und kurzperiodische Bewegungseinflüsse) ergibt $\overline{a_{QHS}}$ = 9639.423572 km. Die erreichte Genauigkeit für die Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\Delta fct\right| = \left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| = 0.1355874701403 \times 10^{-7}$ sec. Die Bahnparameter der gefundenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-29 zusammengestellt. Der hier gefundene Wert für die gesuchte Bahnhalbachse weicht erheblich von dem im ersten Beispiel bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne gerechneten Wert ab. Der erste Grund besteht in einem abweichenden (a,i) – Bereich im Fall einer als wahrer Bahn zu erhaltenden $\left(P_H \triangleq P_S\right)$ – Äquivalenzbahn. Entscheidender ist in diesem Fall jedoch der Bezug auf die wahre in der Ekliptik sich bewegende Sonne und der dadurch bedingten Abweichung von der fiktiven mittleren Sonne. Die Ergebnisse hängen entscheidend von der Epoche t_0 ab.

Werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse des *Brouwer*-Modells einbezogen, lautet das Ergebnis $\overline{a_{QHS\,\sec}}$ = 9639.648935 km, also einen total verschiedenen Wert als im Fall der mittleren Umlaufzeiten in Beispiel 1 als Folge des Bezugs auf die wahre Sonne in der Ekliptik.

28.8.5.4 Berechnung der Inklination bei PH-PS-Äquivalenz

Aus Bild 28-47 kann eine geeignete große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und eine geeignete Exzentrizität $\overline{e}_0$ zur Berechnung der Inklination $\overline{i_{QHS}}$ einer $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn vorgewählt werden. Die Berechnung der Inklination wird analog zu (28.390) mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{i}\right) \equiv \frac{2\pi}{\overline{n_H}\left(\overline{i}\right)} - \frac{2\pi}{\overline{n_S}\left(\overline{i}\right)} = \overline{P_H}\left(\overline{i}\right) - \overline{P_S}\left(\overline{i}\right) = 0 \qquad (28.384)$$

durchgeführt. Als Anfangsnäherung kann nach Bild 28-47 eine geeignete Inklination $\overline{i}_0^{(0)}$ gewählt werden.

BEISPIEL 3:

$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$	
$\overline{a}_0 = 7100.000$ km, $\overline{e}_0 = 0.15$, $\overline{i_{QHS}} = 145°.730501862$, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$	
$\overline{P_K} = 5953.858426$ sec	t_0: 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 5945.669582$ sec	$P_H = 5945.750780$ sec
$\overline{P_A} = 5949.763909$ sec	$P_A = 5949.763909$ sec
$\overline{P_D} = 5940.341725$ sec	$P_D = 5940.528448$ sec
$\overline{P_T} = 5946.790022$ sec	$P_T = 5948.178444$ sec
$\overline{P_R} = 5562.858055$ sec	$P_R = 5506.945898$ sec
$\overline{P_S} = 5945.669582$ sec	$P_S = 5946.879068$ sec
$\overline{P_L} = 5931.846502$ sec	$P_L = 5931.158944$ sec
$H_P = 650.8634$ km	$H_A = 792.8634$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -24°.939459$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -24°.428831$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -24°.939459$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -24°.429599$
$\dot{\Omega}_s = 0.11469141252414102 \times 10^{-5}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.16750210906847795 \times 10^{-5}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s = 0.72624702923201255 \times 10^{-6}$ rad / sec	

Tabelle 28-30: Bahncharakteristika der mittleren *Hansen*schen mit der mittleren Sonnen-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss der säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4, Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, $\mu_♂$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977 geforderte Genauigkeit $|\Delta\overline{P}| < 10^{-9}$ sec, $\Delta\left(\overline{i}\right) \le 10^{-9}$ [Grad], Schrittweite Δi= 0°.01.

Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 7100$, sowie die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.15$. Als Anfangsnäherung für die Inklination wird nach Bild 28-47 der Wert $\overline{i}_0^{(0)} = 130°$ gewählt. Mit Funktionsgleichung (28.384) wird die mittlere Inklination $\overline{i_{QHS}} = 145°.730501862$ errechnet.

Dazu werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse (nach dem *Brouwer*schen Bahnmodell) mit J_2, J_4 berücksichtigt. Die geforderten Genauigkeiten betragen $|\Delta P| = \left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta\left(\bar{i}\right) \le 10^{-9}$. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| =$ $6.366462912410 \times 10^{-12}$ sec . Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-30 zusammengestellt. ◀

Zur Berechnung der mittleren Inklination $\bar{i}_0$ einer wahren $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$ vorgegeben. Eine Anfangsnäherung für die gesuchte mittlere Inklination kann nach Bild 28-47 gewählt werden. Die gesuchte mittlere Inklination wird dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell berechnet mit dem System

$$\begin{aligned} fct\left(P_H\left(\bar{i}\right)\right) &\equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\left(\bar{i}\right)\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left[P_S\left(\bar{i}\right)\right] &\equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_S\left(\bar{i}\right)\right) - \tau_{☾}\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(\bar{i}\right) &\equiv P_H\left(\bar{i}\right) - P_S\left(\bar{i}\right) = 0 \end{aligned} \tag{28.385}$$

BEISPIEL 4:

$\left(P_H \triangleq P_S\right)$	
$\bar{a}_0$ =7100.000 km, $\bar{e}_0$ =0.01, $\overline{i_{QHS}}$ =157°.050101261, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 5953.858426 sec	t_0 : 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 5941.792996 sec	P_H = 5941.911795 sec
$\overline{P_A}$ = 5947.830857 sec	P_A = 5947.963245 sec
$\overline{P_D}$ = 5935.177529 sec	P_D = 5935.428884 sec
$\overline{P_T}$ = 5942.362334 sec	P_T = 5943.075730 sec
$\overline{P_R}$ = 5558.983439 sec	P_R = 5539.717167 sec
$\overline{P_S}$ = 5941.243562 sec	P_S = 5941.911795 sec
$\overline{P_L}$ = 5927.441030 sec	P_L = 5927.826101 sec
H_P = 50.8634 km	H_A = 792.8634 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -25°.121097$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -24°.362345$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -25°.121656$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -24°.363377$

Tabelle 28-31: Bahncharakteristika der mittleren *Hansen*schen mit der mittleren Sonnen-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss aller Bewegungseinflüsse nach dem Bahnmodell von *M. C. Eckstein*, Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, $\mu_☉$ = 398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977, geforderte Genauigkeit $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-9}$ sec, $\Delta\left(\bar{i}\right) \le 10^{-9}$ [Grad], Schrittweite Δi= 0°.01.◀

Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 7100 m, sowie die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.01. Als Anfangsnäherung für die zu berechnende mittlere Inklination wird nach Bild 28-47 der Wert $\bar{i}_0^{(0)} = 130°$ vorgeschlagen. Mit dem System (28.385) wird die mittlere Inklination $\overline{i_{QHL}}$ =

157°.0501012605412 errechnet. Im Bahnmodell werden die Bewegungseinflüsse („Störungen“) des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells einbezogen. Die geforderten Genauigkeiten betragen $|\Delta P| = \left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta\left(\overline{i}\right) \le 10^{-9}$ [Grad]. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| = 4.907087713946 \times 10^{-8}$ sec. Die Schrittweite ist Δi= 0°.01. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-31 zusammengestellt. Werden die kurz- und langperiodischen Bewegungseinflüsse (nach dem *Eckstein*schen Bahnmodell) einbezogen, ergibt sich die mittlere Inklination $\overline{i_{QHL}} = 157°.051249$. Man beachte die Abhängigkeit der Ergebnisse von der Epoche.

28.8.5.5 Berechnung der Exzentrizität von Hansen- mit Sonnensynodischen Bewegungen

Nach Bild 28-47 können eine geeignete große Bahnhalbachse und eine geeignete Inklination zur Berechnung der Exzentrizität einer $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn vorgewählt werden. Die Berechnung der Inklination wird analog zu (28.380) mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{e}\right) \equiv \frac{2\pi}{\overline{n_H}\left(\overline{e}\right)} - \frac{2\pi}{\overline{n_L}\left(\overline{e}\right)} = \overline{P_H}\left(\overline{e}\right) - \overline{P_S}\left(\overline{e}\right) = 0 \tag{28.386}$$

durchgeführt. Eine Anfangsnäherung $\overline{e}_0^{(0)}$ kann aus Bild 28-47 gewählt werden.

BEISPIEL 5: Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ = 8500 km sowie entsprechend Bild 28-47 die mittlere Inklination $\overline{i}_0$ = 120°. Als Anfangsnäherung für die zu berechnende Exzentrizität werde $\overline{e}_0^{(0)} = 0.1$ gewählt. Mit Funktionsgleichung (28.386) wird die mittlere Exzentrizität $\overline{e_{QHS}} = 0.196358193$ errechnet. Es werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4 berücksichtigt. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_S}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta\overline{e} \le 10^{-10}$, die Schrittweite Δe= 0.001. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| =$ $5.275069270283 \times 10^{10}$ sec. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-38 zusammengestellt. ◀

Zur Berechnung der mittleren Exzentrizität $\overline{e_{QHL}}$ einer $\left(P_H \triangleq P_L\right)$ – Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\overline{a}_0$, $\overline{i}_0$ vorgegeben. Als Anfangsnäherung für die gesuchte mittlere Exzentrizität kann aus Bild 28-47 eine Exzentrizität $\overline{e}_0^{(0)}$ gewählt werden. Die gesuchte mittlere Exzentrizität kann dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell mit dem System

$$\begin{aligned} fct\left[P_H\left(\overline{e}\right)\right] &\equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\left(\overline{e}\right)\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left[P_S\left(\overline{e}\right)\right] &\equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S\left(\overline{e}\right)\right) - \tau\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(\overline{e}\right) &\equiv P_H\left(\overline{e}_0\right) - P_S\left(\overline{e}\right) = 0 \end{aligned} \tag{28.387}$$

berechnet werden.

$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$	
$\bar{a}_0 = 8500.0$ km, $\overline{e_{QHS}} = 0.196358193$, $\bar{i}_0 = 110°$, $\bar{\Omega}_0 = 0°$, $\bar{\omega}_0 = 0°$, $\overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 7799.008058$ sec	t_0: 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 7800.923205$ sec	$P_H = 7800.592145$ sec
$\overline{P_A} = 7799.953556$ sec	$P_A = 7799.953556$ sec
$\overline{P_D} = 7798.995281$ sec	$P_D = 7799.322302$ sec
$\overline{P_T} = 7802.852083$ sec	$P_T = 7804.404195$ sec
$\overline{P_R} = 7154.916767$ sec	$P_R = 7080.552313$ sec
$\overline{P_S} = 7800.923205$ sec	$P_S = 7801.920015$ sec
$\overline{P_L} = 7777.144930$ sec	$P_L = 7771.894464$ sec
$H_P = 452.818763$ km	$H_A = 3790.908037$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -32°.432942$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -32°.406843$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -32°.432942$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -32°.408202$
$\dot{\Omega}_s = 0.39821277055268228 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.98978158046952312 \times 10^{-7}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s = -0.9765824639845967 \times 10^{-7}$ rad / sec	

Tabelle 28-32: Bahncharakteristika der mittleren *Hansen*schen mit der mittleren Sonnen-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss der säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km, $\mu_{♁} = 398600.4418$ km^3 / s^2, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$, geforderte Genauigkeiten $|\Delta\overline{P}| < 10^{-9}$ sec, $\Delta(\bar{e}) \le 10^{-10}$, Schrittweite $\Delta e = 0.001$.◀

BEISPIEL 6: Vorgegeben seien (ähnlich wie in Beispiel 2 bei Bezug auf die wahre Sonne) die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 9600$ km, sowie die mittlere Inklination $\bar{i}_0 = 130°$. Mit dem System (28.387) wird die mittlere Exzentrizität $\overline{e_{QHS}} = 0.1846126195611$ errechnet. Zur Berechnung wird das vollständige *Brouwer*sche Bahnmodell verwendet. Die geforderten Genauigkeiten betragen $|\Delta P| = \left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta\bar{e} \le 10^{-10}$. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_H} - \overline{P_S}\right| = 1.826811057981 \times 10^{-8}$ sec. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-33 zusammengestellt.

Aufgabenstellungen:

1. Wiederhole die Berechnungen mit einer numerischen Ephemeridenrechnung.
2. Untersuche die Stabilität einer $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn
3. Untersuche warum in Bild 28-47 ein Maximum im Kurvenverlauf der Halbachse einer $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn über der Inklination auftritt.

$\left(P_H \triangleq P_S\right)$	
$\bar{a}_0 = 9600.000$ km, $\overline{e_{QHS}} = 0.184612629$, $\bar{i}_0 = 130°$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0$, $\overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 9360.904833$ sec	t_0: 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 9359.200794$ sec	$P_H = 9359.477313$ sec
$\overline{P_A} = 9360.058021$ sec	$P_A = 9360.064197$ sec
$\overline{P_D} = 9356.229910$ sec	$P_D = 9357.468743$ sec
$\overline{P_t} = 9360.852600$ sec	$P_T = 9362.332813$ sec
$\overline{P_R} = 8443.547041$ sec	$P_R = 8486.808728$ sec
$\overline{P_S} = 9358.076678$ sec	$P_S = 9359.477313$ sec
$\overline{P_L} = 9323.878940$ sec	$P_L = 9324.939730$ sec
$H_P = 1449.582252$ km	$H_A = 4994.144548$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -39°.023821$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -38°.913247$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -39°.023847$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -38°.918400$
$\dot{\Omega}_s = -0.33163350393644740 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.27465341071404668 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s = 0.60725436680532597 \times 10^{-6}$ rad / sec	

Tabelle 28-33: Bahncharakteristika der mittleren *Hansen*schen mit der mittleren Sonnen-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss aller Bewegungseinflüsse nach dem Bahnmodell von *M. C. Eckstein*. Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, μ_δ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977gefor-derte Genauigkeiten $|\Delta\bar{P}| < 10^{-8}$ sec, $\Delta(\bar{e}) \leq 10^{-10}$, Schrittweite Δe= 0.001.◀

4. Erweitere die Methoden der Bahnauswahl im Hinblick auf die anderen *Kepler*elemente $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\omega}_0$, $\overline{M_{00}}$.
5. Wiederhole die Rechnungen mit anderen beliebigen Anfangswerten und mit beliebigen Anfangswerten für $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\omega}_0$, $\overline{M_{00}}$.
6. Untersuche den Einfluss unterschiedlicher Epochen auf die berechneten Bahnparameter von Äquivalenzbahnen.
7. Untersuche, unter welchen Bedingungen durch Vorgabe der Äquivalenz-Umlaufzeit $\overline{P_H} = \overline{P_S}$ eine $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$–Äquivalenzbahn gefunden werden kann.
8. Untersuche die Möglichkeit Bild 28-45 und Bild 28-47 durch entsprechende Darstellungen wahrer $\left(P_H \triangleq P_S\right)$–Äquivalenzbahn zu ersetzen.
9. Leite eine $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$– oder $\left(P_H \triangleq P_S\right)$–Äquivalenzbahn aus der Vorgabe der Perigäumslängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A}$ und Knotenlängenverschiebung $\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D$ her .◀

28.8.6 Äquivalenz zwischen *Kepler*- und Sonnen-synodischer Bewegung

28.8.6.1 Basiseigenschaften

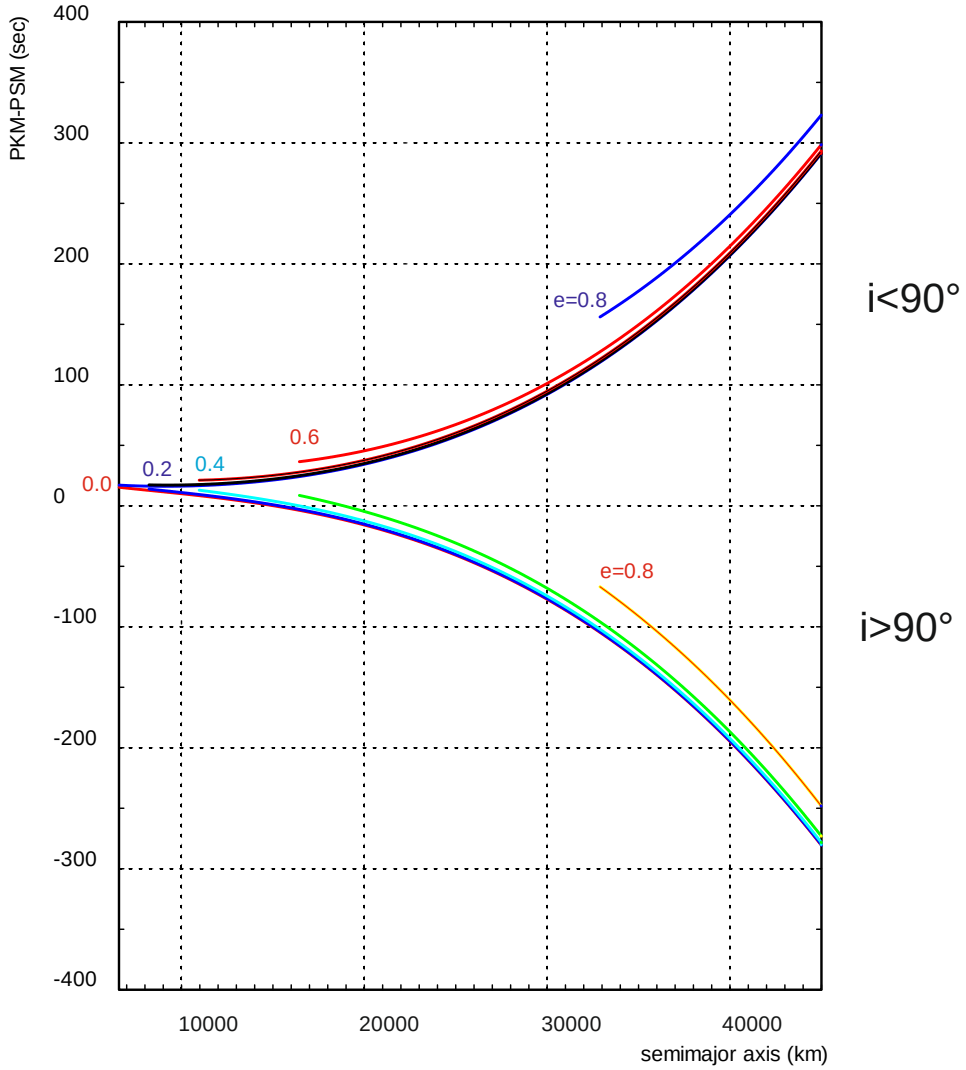


Bild 28-48: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_K} - \overline{P_S}$ der mittleren *Kepler*schen und mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeiten über der großen Bahnhalbachse für einige Exzentrizitäten, Schrittweite Δa= 10 km, Genauigkeiten $|\Delta fct| \le 10^{-9}$ sec , $\Delta(a) \le 10^{-3}$ km

Der Zusammenhang zwischen der mittleren Sonnen-synodischen und der *Kepler*-Bewegung ist nach Formel (28.161) durch die Beziehung

$$\overline{n_S} = \overline{n_K} + (M_0)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_{\odot}\right) \tag{28.388}$$

gegeben. Äquivalenz kann nur hergestellt werden, wenn der Ausdruck

$$\overline{n_S} - \overline{n_K} = (M_0)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_{\odot}\right) \tag{28.389}$$

identisch verschwindet.

Für einen ersten Überblick wird die Differenz $\overline{P_K} - \overline{P_S}$ der mittleren Umlaufzeiten über der großen Bahnhalbachse in Bild 28-48 aufgetragen. Es zeigt sich, dass eine Überquerung der Nulllinie und

somit eine mögliche Äquivalenz etwa im Bereich $a \in (6578 - 20000\,\text{km})$ und für Exzentrizitäten $e \in (0.0 - 0.4)$ möglich ist. Eine detaillierte Vergrößerung dieses Bereiches ist in Bild 28-49 dargestellt.

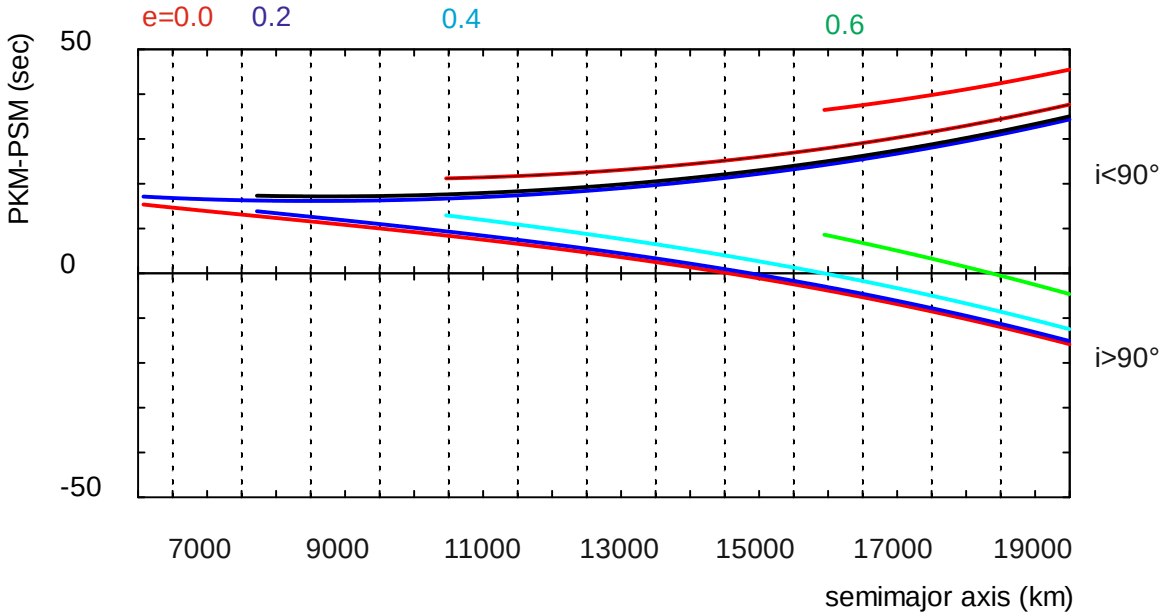


Bild 28-49: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_K} - \overline{P_S}$ der mittleren *Kepler*schen und mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeiten über der großen Bahnhalbachse für einige Exzentrizitäten, Ausschnitt aus Bild 28-48

Aufgabenstellung: Gib eine analytische Untersuchung des möglichen Bereiches von $(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S})$– Äquivalenzbahnen basierend auf der Beziehung (28.389) mit Berücksichtigung des *Brouwer*schen Bahnmodells. (Ein Muster findet sich in Abschnitt 28.8.2.1 auf Seite 113).

28.8.6.2 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung mittlerer Sonnen-synodischer mit Kepler Bewegung

Ausgehend von den vorstehenden Überlegungen zeigt Bild 28-50 eine Übersicht aller möglichen $(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S})$– Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität $e_B \in [0.003949814 - 0.6817381]$. Das Bild bestätigt die Überlegungen nach Bild 28-48 bzw. Bild 28-49. Die Grenzexzentrizität ist auf Bahnen mit der minimalen mittleren Bahnhöhe $H_P = 200$ km bezogen. Sie nimmt mit wachsender Inklination ab bis wie mit der Kurve der Exzentrizität e= 0.0 zusammenfällt. Den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B über der Inklination zeigt Bild 28-51.

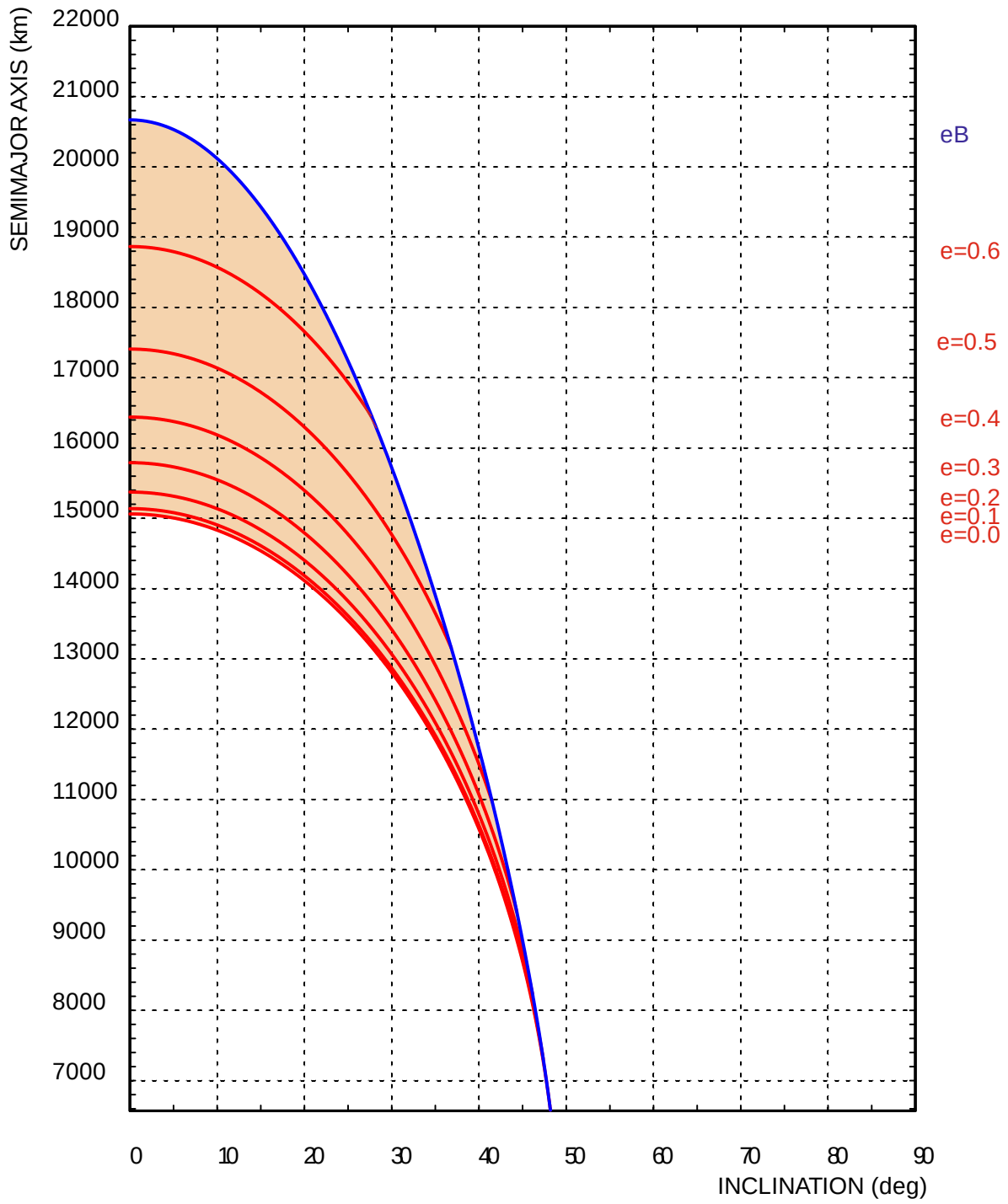


Bild 28-50: Das $(a,i)-$ Gebiet möglicher mittlerer $(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S})$ – Äquivalenzbahnen in erster Ordnung, parametrisiert für einige Exzentrizitäten (e=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6), Grenzexzentrizität $e_B \in [0.003949814 - 0.6817381]$, geforderte Genauigkeit $\Delta(a) \le 10^{-3}$ km, $\Delta(e) \le 10^{-8}$, $|\Delta fct| \le 10^{-8}$ sec, Schrittweiten $\Delta a = 5\,\text{km}, \Delta i = 0°.005, \Delta e = 0.001$

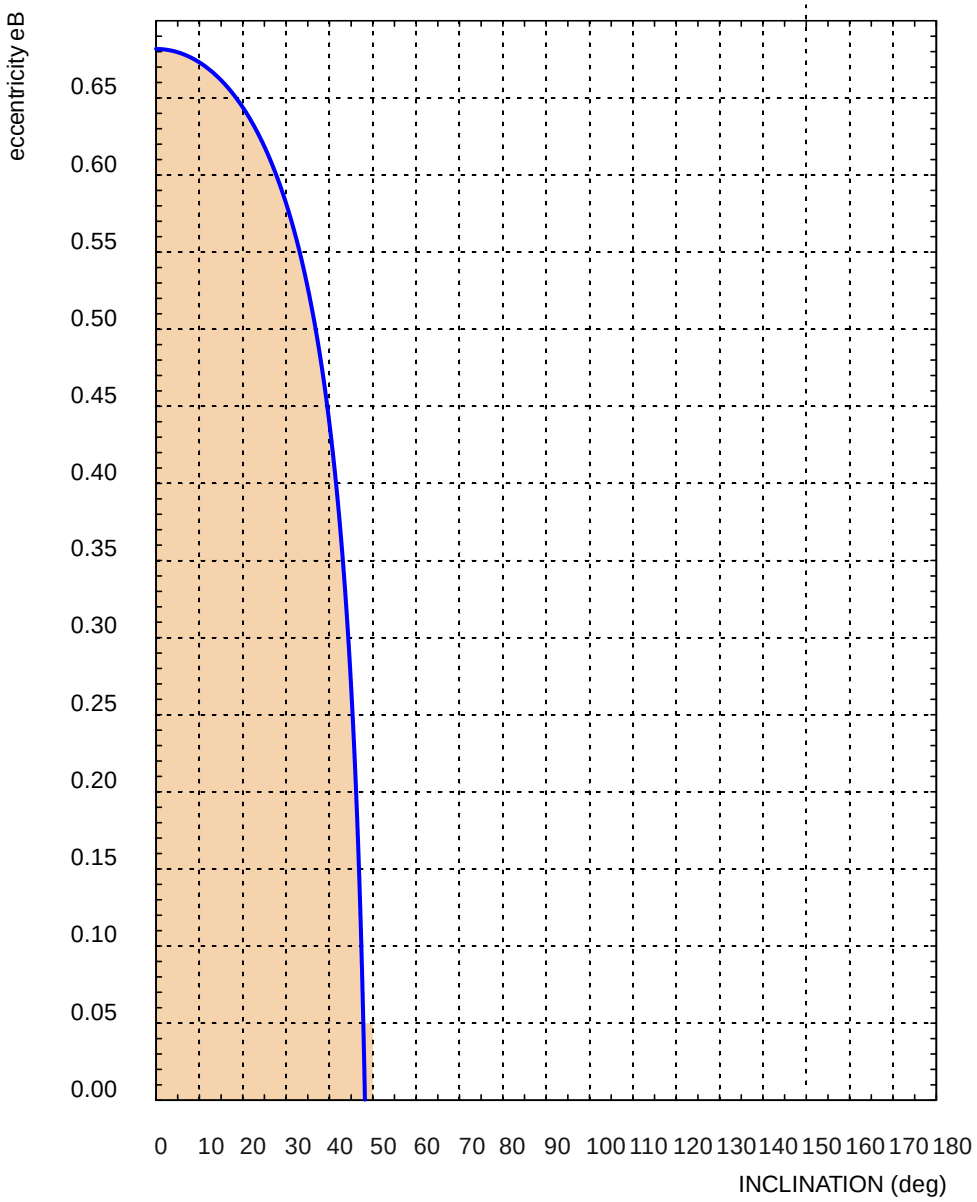


Bild 28-51: Verlauf der Exzentrizität der Grenzkurve und des (e,i)-Gebiets möglicher mittlerer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahnen bei Bezug auf den minimalen Perigäumsradius $R_E + 200\,\text{km}$ über der Inklination

28.8.6.3 Berechnung der großen Bahnhalbachse

Basierend auf den grafischen Darstellungen Bild 28-50 und Bild 28-51 können geeignete mittlere Bahnparameter Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ vorgeben werden. Zur Berechnung der großen Bahnhalbachse kann nach Bild 28-50 ein sinnvoller Näherungswert $\overline{a}_0^{(0)}$ für die große Bahnhalbachse gewählt werden. Damit können die mittleren Bewegungen $\overline{n_K}, \overline{n_S}$ mit dem Ausdruck (28.388) berechnet werden[1]. Die iterative Berechnung der Bahnhalbachse und damit die mittlere Umlaufzeit erfolgt dann mit Hilfe der Funktionsgleichung

[1] Die hier benötigten säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s, \dot{\omega}_s, \left(M_0\right)_s^{\cdot}$ sind im Rahmen der *Brouwer*schen analytischen Lösung in Kapitel 20.2.1 (Band III) zusammengestellt

$$fct\left(\overline{a_{QKS}}\right) \equiv 2\pi\left(\bar{a}\right)\sqrt{\frac{\left(\bar{a}\right)}{\mu}} - \frac{2\pi}{\overline{n_S}\left(\bar{a}\right)} = \overline{P_K}\left(\bar{a}\right) - \overline{P_S}\left(\bar{a}\right) = 0 \quad . \qquad (28.390)$$

BEISPIEL 1: Nach Bild 28-50 seien die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ = 20° und die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.4 vorgewählt.

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$	
$\overline{a_{QKS}}$ =15396.408524 km, $\bar{e}_0$ =0.4, $\bar{i}_0$ =20°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 19012.539071 sec	t_0 : 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 19000.665454 sec	P_H = 19004.427983 sec
$\overline{P_A}$ = 19006.862706 sec	P_A = 19006.862706 sec
$\overline{P_D}$ = 18994.033754 sec	P_D = 19001.821522 sec
$\overline{P_T}$ = 19001.091220 sec	P_T = 19004.773334 sec
$\overline{P_R}$ = 24376.691943 sec	P_R = 21372.672929 sec
$\overline{P_S}$ = 19012.539071 sec	P_S = 19009.449500 sec
$\overline{P_L}$ = 19155.278098 sec	P_L = 19066.599452 sec
H_P = 2859.708515 km	H_A = 15176.835334 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -79°.317406$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -79°.492203$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -79°.317406$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -79°.524796$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.12286633764069126$\times 10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.22327671646635196$\times 10^{-6}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s$ = 0.98696006456180216$\times 10^{-7}$ rad / sec	

Tabelle 28-34: Bahncharakteristika der wahren Sonnen-synodischen mit der wahren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, $\mu_{♁}$ = 398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s , J_2 = 0.001082625379977, Schrittweite Δa= 1 km, geforderte Genauigkeit $|\Delta\bar{P}| < 10^{-9}$ sec, $\Delta(a) < 10^{-9}$ km. ◀

Als Näherungswert für die gesuchte große Bahnhalbachse kann $\bar{a}_0^{(0)}$ = 16000 km angenommen werden. Für die Berechnung seien die Genauigkeitsgrenzen $|\Delta fct| \le 10^{-9}$ sec und für die Halbachse $\Delta a \le 10^{-9}$ km gewünscht. Die iterative Lösung mit Funktionsgleichung (28.390) unter Verwendung des säkularen *Brouwer*schen Bahnmodells ergibt $\overline{a_{QKS}}$ = 15396.408524 km. Die erreichte Genauigkeit für die Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $|\Delta fct| = \left|\overline{P_K} - \overline{P_S}\right| = 3.6\times 10^{-12}$ sec . Die Bahnparameter der gefundenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-34 zusammengestellt. ◀

Zur Berechnung der wahren Umlaufzeit, also unter Einschluss eines beliebig aufwendigen analytischen oder numerischen Bahnmodells, und der zugehörigen großen Bahnhalbachse, wird der Sonnenbezogene Bahnwinkel einer Satellitenbahn benötigt, der Sonnenwinkel[1]

$$\tau = \alpha - \alpha_{\odot} \quad . \tag{28.391}$$

Hier ist $\alpha_{\odot}$ jedoch die Rektaszension der wahren Sonne[2]. Mit Hilfe einer Ephemeridenrechnung kann bei vorgegebenem Bahnmodell der Sonnenwinkel τ einer Satellitenposition jederzeit berechnet werden. Entsprechend Beziehung (28.125) wird die wahre *Kepler*sche Umlaufzeit als Funktion der gesuchten mittleren großen Bahnhalbachse sowie die wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit mit der überlagerten Funktion

$$P_K(\bar{a}) = 2\pi(\bar{a})\sqrt{\frac{(\bar{a})}{\mu}} \quad , \quad fct\left(P_S(\bar{a})\right) \equiv \sin\left[\tau\left(t_0 + P_S(\bar{a})\right) - \tau(t_0)\right] = 0 \tag{28.392}$$

bei Vorgabe einer Anfangshalbachse und der anderen fest vorgegebenen *Kepler*elemente erhalten. Die zugehörige mittlere Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ der zugehörigen $\left(P_K \triangleq P_S\right)-$Äquivalenzbahn wird bei Vorgabe der fünf restlichen Bahnparameter anschließend aus der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QKS}}\right) \equiv P_K\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) - P_S\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = 0 \qquad \prec \quad \nu = 0,1,2,\cdots \tag{28.393}$$

berechnet. Der gesamte Prozess (28.392) - (28.393) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden.

Werden im verwendeten Bahnpropagator etwa die analytischen Lösungen des *Brouwer*modells eingesetzt, müssen die mittleren Epocheelemente vorgegeben sein. Mit den Parametern $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ kann dann etwa die mittlere Bahnhalbachse zur Epoche $\overline{a_{QKS\,0}}$ iterativ berechnet werden. Der erhaltene Zahlenwert für die große Bahnhalbachse ist für die Epoche gültig, an der die vorgegebenen Bahnparameter gegeben sind.

BEISPIEL 2: Es seien wie in Beispiel 1 die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ = 20° und die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.4 vorgewählt. Als Näherungswert für die gesuchte große Bahnhalbachse soll wieder $\bar{a}_0^{(0)}$ = 16000 km angenommen werden. Für die Berechnung seien die Genauigkeitsgrenzen $|\Delta fct| \le 10^{-9}$ sec und für die Halbachse $\Delta(a) \le 10^{-9}$ km gewünscht. Die iterative Lösung mit Funktionsgleichung (28.390) unter Verwendung des säkularen *Brouwer*schen Bahnmodells ergibt $\overline{a_{QKS}} = 17989.135986$ km. Die erreichte Genauigkeit für die Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $|\Delta fct| = \left|\overline{P_K} - \overline{P_S}\right| = 1.091393642128 \times 10^{-11}$ sec. Die Bahnparameter der gefundenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-35 zusammengestellt. Der hier gefundene Wert für die gesuchte Bahnhalbachse weicht erheblich von dem im ersten Beispiel bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne gerechneten Wert ab. Der erste Grund besteht in einem abweichenden $(a,i)-$Bereich im Fall einer als wahrer Bahn zu erhaltenden $\left(P_K \triangleq P_S\right)-$Äquivalenzbahn. Entscheidender ist in diesem Fall jedoch der Bezug auf die wahre in der Ekliptik sich bewegenden Sonne und der dadurch bedingten Abweichung von der fiktiven mittleren Sonne. Diese Gebiet hängt jedoch entscheidend von der Epoche t_0 ab.

---

[1] Abschnitt 28.5.1.1 (Band IV B)

[2] Abschnitt 28.1.1, sowie die analytische Darstellung in Abschnitt 28.1.3

$(P_K \triangleq P_S)$	
$\overline{a_{QKS}}$ =17989.1359859 km, $\overline{e}_0$ =0.4, $\overline{i}_0$ =20°, $\overline{\Omega}_0$ =90°, $\overline{\omega}_0$ =60°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 24011.895115 sec	t_0 : 2019-04-16/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 24000.912205 sec	P_H = 24004.392256 sec
$\overline{P_A}$ = 24006.644114 sec	P_A = 24006.644114 sec
$\overline{P_D}$ = 23994.777193 sec	P_D = 24001.981558 sec
$\overline{P_T}$ = 24001.306043 sec	P_D = 24004.711751 sec
$\overline{P_R}$ = 33268.308748 sec	P_R = 28899.201816 sec
$\overline{P_S}$ = 24019.574653 sec	P_S = 24011.895115 sec
$\overline{P_L}$ = 24247.846651 sec	P_L = 24112.957893 sec
H_P = 4415.344992 km	H_A = 18806.653780 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -100°.232221$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -100°.349897$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -100°.232221$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -100°.380027$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.71230332812818438 $\times 10^{-7}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.12944037251461055 $\times 10^{-6}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s$ = 0.57235309177475629 $\times 10^{-7}$ rad / sec	

Tabelle 28-35: Bahncharakteristika der wahren Sonnen-synodischen mit der wahren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Basis Parameter: R_E = 6378.166 km, $\mu_{♁}$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977. Schrittweite $\Delta a = 50$ km, Genauigkeitsgrenze $|\Delta\overline{P}| < 10^{-11}$ sec. Geforderte Genauigkeit $|\Delta\overline{P}| < 10^{-8}$ sec, Berechnung nur mit säkularen Bewegungseinflüssen des *Brouwer* Bahnmodells

Die in Tabelle 28-35 zusammengefassten Bahnparameter wurden mit einem analytischen Bahnpropagator unter Verwendung nur säkularer Bewegungseinflüsse gerechnet. Werden alle kurz- und langperiodischen Bewegungseinflüsse des *Eckstein*schen Bahnmodells einbezogen, lautet das Ergebnis $\overline{a_{QKS}}$ = 17991.58447466 km. ◀

28.8.6.4 Berechnung der Inklination

Aus Bild 28-50 kann eine geeignete große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und eine geeignete Exzentrizität $\overline{e}_0$ zur Berechnung der Inklination $\overline{i_{QKS}}$ einer $(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S})$– Äquivalenzbahn vorgewählt werden. Die Berechnung der Inklination wird analog zu (28.390) mit der Funktionsgleichung

$$fct(\overline{i}) \equiv 2\pi(\overline{a})\sqrt{\frac{(\overline{a})}{\mu}} - \frac{2\pi}{\overline{n_S}(\overline{i})} = \overline{P_K} - \overline{P_S}(\overline{i}) = 0 \qquad (28.394)$$

durchgeführt. Als Anfangsnäherung kann nach Bild 28-50 eine geeignete Inklination $\overline{i}_0^{(0)}$ gewählt werden.

BEISPIEL 3: Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7100$ km, sowie die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.05$.

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$	
$\bar{a}_0 = 7100.000$ km, $\bar{e}_0 = 0.05$, $\overline{i_{QKS}} = 47°.60203003$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 5953.858426$ sec	t_0: 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 5951.012210$ sec	$P_H = 5951.149099$ sec
$\overline{P_A} = 5952.432326$ sec	$P_A = 5952.432326$ sec
$\overline{P_D} = 5947.448390$ sec	$P_D = 5947.928280$ sec
$\overline{P_T} = 5952.735321$ sec	$P_T = 5955.016800$ sec
$\overline{P_R} = 6394.506411$ sec	$P_R = 6515.328905$ sec
$\overline{P_S} = 5953.858426$ sec	$P_S = 5956.489023$ sec
$\overline{P_L} = 5967.784407$ sec	$P_L = 5974.406145$ sec
$H_P = 366.863400$ km	$H_A = 1076.863400$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -24°.986294$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -25°.168618$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -24°.986294$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -25°.170649$
$\dot{\Omega}_s = -0.93828832917735165 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.88455992077705643 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s = 0.25283479366267923 \times 10^{-6}$ rad / sec	

Tabelle 28-36: Bahncharakteristika der mittleren *Kepler*schen mit der mittleren Sonnen-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss der säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4, Basis Parameter: $R_E = 6378.166$ km, $\mu_♁ = 398600.4418\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$. Geforderte Genauigkeit $|\Delta\bar{P}| < 10^{-9}$ sec, $\Delta(\bar{i}) \le 10^{-9}$ [Grad], Schrittweite $\Delta i = 0°.01$.◀

Als Anfangsnäherung für die Inklination wird nach Bild 28-50 der Wert $\bar{i}_0^{(0)} = 45°$ gewählt. Mit Funktionsgleichung (28.394) wird die mittlere Inklination $\overline{i_{QKS}} = 47°.6020300298928$ errechnet. Dazu werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse (nach dem *Brouwer*schen Bahnmodell) mit J_2, J_4 berücksichtigt. Die geforderten Genauigkeiten betragen $|\Delta P| = \left|\overline{P_K} - \overline{P_S}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta(\bar{i}) \le 10^{-9}$ [Grad]. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_K} - \overline{P_S}\right| = 1.109583536163 \times 10^{-10}$ sec. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-36 zusammengestellt

Zur Berechnung der mittleren Inklination $\bar{i}_0$ einer wahren $\left(P_K \triangleq P_L\right)$– Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$ vorgegeben. Eine Anfangsnäherung für die gesuchte mittlere Inklination kann nach Bild 28-50 gewählt werden. Die gesuchte mittlere Inklination wird dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell mit dem System

$$P_K(\bar{a}) = 2\pi(\bar{a})\sqrt{\frac{(\bar{a})}{\mu}} \quad , \quad fct\left[P_S(\bar{i})\right] \equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_S(\bar{i})\right) - \tau_{☾}(t_0)\right] = 0$$
$$fct(\bar{i}) \equiv P_K(\bar{a}_0) - P_S(\bar{i}) = 0 \tag{28.395}$$

berechnet.

BEISPIEL 4: Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7100$ km, sowie die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.09$.

$(P_K \hat{=} P_S)$	
$\bar{a}_0 = 7100.000$ km, $\bar{e}_0 = 0.07$, $\overline{i_{QKS}} = 42°.91791830$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 5953.858426$ sec	t_0: 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 5949.069778$ sec	$P_H = 5949.388060$ sec
$\overline{P_A} = 5951.463973$ sec	$P_A = 5951.463973$ sec
$\overline{P_D} = 5944.845470$ sec	$P_D = 5945.724642$ sec
$\overline{P_T} = 5950.615281$ sec	$P_T = 5952.558920$ sec
$\overline{P_R} = 6392.060089$ sec	$P_R = 6454.150094$ sec
$\overline{P_S} = 5951.737586$ sec	$P_S = 5953.858426$ sec
$\overline{P_L} = 5965.653635$ sec	$P_L = 5969.668313$ sec
$H_P = 224.863400$ km	$H_A = 1218.863400$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -24°.921597$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -25°.187070$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -24°.921597$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -25°.190795$
$\dot{\Omega}_s = -0.10247996854826315 \times 10^{-5}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.11753718147049265 \times 10^{-5}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s = 0.42458427499063055$D-06 rad/s $\times 10^{-6}$ rad / sec	

Tabelle 28-37: Bahncharakteristika der mittleren *Kepler*schen mit der mittleren Sonnen-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss aller säkularen Bewegungseinflüsse nach dem Bahnmodell von *D. Brouwer*, Basis Parameter: $R_E = 6378.166$ km, $\mu_{♁} = 398600.4418\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$.

Geforderte Genauigkeit $|\Delta\bar{P}| < 10^{-9}$ sec, $\Delta(\bar{i}) \le 10^{-9}$ [Grad], Schrittweite $\Delta i = 0°.01$.

Als Anfangsnäherung für die zu berechnende mittlere Inklination wird nach Bild 28-50 der Wert $\bar{i}_0^{(0)} = 40°$ vorgeschlagen. Mit dem System (28.395) wird die mittlere Inklination $\overline{i_{QKS}} = 42°.91791830$ errechnet. Im Bahnmodell werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“) einbezogen. Die geforderten Genauigkeiten betragen $|\Delta P| = |\overline{P_K} - \overline{P_S}| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta(\bar{i}) \le 10^{-9}$ [Grad]. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $|\overline{P_K} - \overline{P_S}| =$ 3.419700078666 $\times 10^{-10}$ sec. Die Schrittweite ist $\Delta i = 0°.01$. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-37 zusammengestellt. Werden die periodischen Bewegungseinflüsse vernachlässigt, ergeben sich Abweichungen in der Ordnung $0°.02$, in den Umlaufzeiten etwa 0.002 sec.

Werden alle kurz- und langperiodischen Bewegungseinflüsse (nach dem *Ecksteins*chen Bahnmodell) einbezogen, ergibt sich die mittlere Inklination $\overline{i_{QKS}} = 42°.925130446$.

Man beachte, dass sowohl im Fall einer mittleren $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – wie einer wahren $\left(P_K \triangleq P_S\right)$ – Äquivalenzbahn die mittlere Keplersche Umlaufzeit bei gleicher Halbachse identisch sein müssen. ◀

28.8.6.5 Berechnung der Exzentrizität von PK-PS-Äquivalenzbahn

Nach Bild 28-50 können eine geeignete große Bahnhalbachse und eine geeignete Inklination zur Berechnung der Exzentrizität einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn vorgewählt werden. Die Berechnung der Inklination wird analog zu (28.394) mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{e}\right) \equiv 2\pi\left(\overline{a}\right)\sqrt{\frac{\left(\overline{a}\right)}{\left(\overline{a}\right)}} - \frac{2\pi}{\overline{n_L}\left(\overline{e}\right)} = \overline{P_K}\left(\overline{a}\right) - \overline{P_S}\left(\overline{e}\right) = 0 \qquad (28.396)$$

durchgeführt. Eine Anfangsnäherung $\overline{e}_0^{(0)}$ kann aus Bild 28-50 gewählt werden.

BEISPIEL 5: Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000$ km sowie entsprechend Bild 28-50 die mittlere Inklination $\overline{i}_0 = 25°$. Als Anfangsnäherung für die zu berechnende Exzentrizität werde $\overline{e}_0^{(0)} = 0.4$ gewählt. Mit Funktionsgleichung (28.396) wird die mittlere Exzentrizität $\overline{e_{QKS}} = 0.253875738$ errechnet. Es werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4 berücksichtigt. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_S}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta\left(\overline{e}\right) \le 10^{-9}$, die Schrittweite $\Delta e = 0.001$. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $8.33097146824 \times 10^{-10}$ sec. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-38 zusammengestellt.◀

Zur Berechnung der mittleren Exzentrizität $\overline{e_{QKS}}$ einer $\left(P_K \triangleq P_S\right)$ – Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\overline{a}_0, \overline{i}_0$ vorgegeben. Als Anfangsnäherung für die gesuchte mittlere Exzentrizität kann aus Bild 28-50 eine Exzentrizität $\overline{e}_0^{(0)}$ gewählt werden. Die gesuchte mittlere Exzentrizität kann dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell mit dem System

$$P_K\left(\overline{a}_0\right) = 2\pi\left(\overline{a}\right)\sqrt{\frac{\left(\overline{a}\right)}{\mu}} \quad , \quad fct\left[P_S\left(\overline{e}\right)\right] \equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_S\left(\overline{e}\right)\right) - \tau_{☾}\left(t_0\right)\right] = 0 \qquad (28.397)$$

$$fct\left(\overline{e}\right) \equiv P_K\left(\overline{a}\right) - P_S\left(\overline{e}\right) = 0$$

berechnet werden.

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$	
$\overline{a_{QKS}}$ =14000.000 km, $\overline{e_{QKS}}$ =0.253875738, $\overline{i_0}$ =25°, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 16485.534555 sec	t_0 : 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 16476.387649 sec	P_H = 16478.361215 sec
$\overline{P_A}$ = 16481.038234 sec	P_A = 16481.038234 sec
$\overline{P_D}$ = 16471.173105 sec	P_D = 16475.358758 sec
$\overline{P_T}$ = 16476.926906 sec	P_D = 16479.014222 sec
$\overline{P_R}$ = 20372.753715 sec	P_R = 18878.859841 sec
$\overline{P_S}$ = 16485.534555 sec	P_S = 16484.356344 sec
$\overline{P_L}$ = 16592.744584 sec	P_L = 16549.654750 sec
H_P = 4067.603071 km	H_A = 11176.123729 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -68°.789382$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -68°.943504$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -68°.789382$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -68°.961024$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.13320910835666242$\times 10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.22833554739211089$\times 10^{-6}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s$ = 0.10397994626558378$\times 10^{-6}$ rad / sec	

Tabelle 28-38: Bahncharakteristika der mittleren *Kepler*schen mit der mittleren Mond-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss der säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4, Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km, $\mu_{\overset{+}{\circ}}$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340$\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977, geforderte Genauigkeiten $|\Delta\overline{P}| < 10^{-9}$ sec, $\Delta(\overline{e}) \le 10^{-9}$, Schrittweite $\Delta e = 0.001$.◀

BEISPIEL 6: Vorgegeben seien (wie in Beispiel 5) die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ = 14000 km, sowie die mittlere Inklination $\overline{i}_0$ = 25°. Mit dem System (28.397) wird die mittlere Exzentrizität $\overline{e_{QKS}}$ = 0.16667501 errechnet. Im Bahnmodell werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse (nach dem *Brouwer*schen Bahnmodell) einbezogen. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_S}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta\overline{e} \le 10^{-9}$. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_K} - \overline{P_S}\right| = 2.81652319245 \times 10^{-8}$ sec. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-39 zusammengestellt.

Aufgabenstellungen:

1. Wiederhole die Berechnungen mit einer numerischen Ephemeridenrechnung.
2. Untersuche die Stabilität einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn
3. Vergleiche die $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Ephemeride einer ungestörten *Kepler*bahn.

$(P_K \triangleq P_S)$	
$\bar{a}_0 = 14000.000$ km, $\overline{e_{QKS}} = 0.166675012$, $\bar{i}_0 = 25$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 16485.534555$ sec	t_0: 2019-04-16/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 16476.984267$ sec	$P_H = 16478.257390$ sec
$\overline{P_A} = 16481.290350$ sec	$P_A = 16481.290350$ sec
$\overline{P_D} = 16472.155871$ sec	$P_D = 16474.856072$ sec
$\overline{P_T} = 16477.483578$ sec	$P_T = 16478.997208$ sec
$\overline{P_R} = 20373.604756$ sec	$P_R = 19374.497398$ sec
$\overline{P_S} = 16486.091810$ sec	$P_S = 16485.534555$ sec
$\overline{P_L} = 16593.309110$ sec	$P_L = 16565.516332$ sec
$H_P = 5288.41324$ km	$H_A = 9955.31356$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -68°.795595$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -68°.938296$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -68°.795595$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -68°.949597$
$\dot{\Omega}_s = -0.12333288652092451 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.21140828420811619 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s = 0.98148114647221954 \times 10^{-7}$ rad / sec	

Tabelle 28-39: Bahncharakteristika der mittleren *Kepler*schen mit der mittleren Sonnen-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss aller säkularen Bewegungseinflüsse nach dem Bahnmodell von *D. Brouwer*, Basis Parameter: $R_E = 6378.166$ km, $\mu_{♁} = 398600.4418\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$.

Geforderte Genauigkeiten $|\Delta\bar{P}| < 10^{-8}$ sec, $\Delta(\bar{e}) \le 10^{-9}$, Schrittweite Δe= 0.001.◀

4. Erweitere die Methoden der Bahnauswahl im Hinblick auf die anderen *Kepler*elemente $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\omega}_0$, $\overline{M_{00}}$.
5. Wiederhole die Rechnungen mit anderen beliebigen Anfangswerten und mit beliebigen Anfangswerten für $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\omega}_0$, $\overline{M_{00}}$.
6. Untersuche den Einfluss unterschiedlicher Epochen auf die berechneten Bahnparameter von Äquivalenzbahnen.
7. Untersuche, unter welchen Bedingungen durch Vorgabe der Äquivalenz-Umlaufzeit $\overline{P_K} = \overline{P_S}$ eine $(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S})$ – Äquivalenzbahn gefunden werden kann.
8. Untersuche die Möglichkeit Bild 28-50 und Bild 28-51 durch entsprechende Darstellungen wahrer $(P_K \triangleq P_S)$ – Äquivalenzbahn zu ersetzen.
9. Leite eine $(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S})$ – oder $(P_K \triangleq P_S)$ – Äquivalenzbahn aus der Vorgabe der Perigäumslängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A}$ und Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D}$ her .◀

28.8.7 Äquivalenz zwischen Sonnen-synodischer Bewegung und Erdrotation

Der Bezug der Satellitenbewegung auf die (tropische) Erdrotation $\dot{\Theta}$ führt auf geosynchrone Satellitenbewegungen. Im Zusammenhang mit Äquivalenzbahnen durch Kopplung der Sonnen-synodischen Bewegung mit der Erdrotation ergeben sich interessante Einblicke in das Verhalten von Satellitenbewegungen.

Im Zusammenhang mit einer Satellitenbahnanalyse kann die tropische Erdrotation $\dot{\Theta}$ als eine Konstante angenommen werden, auch wenn sie kleinen Variationen unterliegt[1].

$$\dot{\Theta} = \dot{\Theta}_{WGS1984} = 0.72921158573340 \times 10^{-4} \text{ rad/sec} \tag{28.398}$$

Die tropische Erdrotation hat damit die Umlaufdauer[2]

$$P_E = \frac{2\pi}{\dot{\Theta}} = 86164.090507 \sec \mathrel{\hat{=}} 23^h 56^m 04^s.090507 \quad , \quad n_E = \dot{\Theta} \quad . \tag{28.399}$$

Trotz des Bezugs auf den Frühlingspunkt wird diese Umlaufzeit als Sterntag bezeichnet. Sei die Dauer eines tropischen Sonnenjahres unter Vernachlässigung der säkularen Veränderungen angenommen zu

$$P_{\odot,t} = 365^d.2421896698 \quad (+\cdots) \quad , \tag{28.400}$$

Wenn die Dauer der Erdrotation bekannt ist, kann mit einer Anwendung des dritten *Kepler*schen Gesetzes die mittlere *Kepler*sche große Bahnhalbachse einer geosynchronen Bahn berechnet werden

$$\overline{a_{QG\,K}} = \sqrt[3]{\mu / \dot{\Theta}^2} = 42164.169626 \,\text{km} \quad . \tag{28.401}$$

28.8.7.1 Basiseigenschaften der Äquivalenz zwischen Sonnen-synodischer Bewegung und Erdrotation

Mit der mittleren Sonnen-synodischen Satellitenbewegung[3] (28.161) muss eine $\left(\overline{P_S} \mathrel{\hat{=}} P_E\right)$– Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_S} - n_E = \overline{n_S} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_\odot\right) - \dot{\Theta} = 0 \tag{28.402}$$

erfüllen. Damit kann ein *Kepler*sches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa für die große Bahnhalbachse, iterativ berechnet werden. Als Anfangswert empfiehlt sich ein Wert unterhalb der mittleren geosynchronen großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKG\,0}} = 42164.169626 \,\text{km}$.

Falls eine wahre $\left(P_S \mathrel{\hat{=}} P_E\right)$– Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit dem wahren Sonnenwinkel (28.120) $\tau = \alpha - \alpha_\odot$ des Satellitenortes als Bahnwinkel die wahre Sonnen-synodische Umlaufzeit P_S mit der überlagerten Funktion (28.157)

---

[1] Näheres in Anhang E2 (Band V)

[2] siehe in Kapitel 26.9, Band IV A

[3] Abschnitt 28.5.1.3 (auf Seite 43)

$$fct\left[P_S\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\tau\left(t_0+P_T\right)-\tau\left(t_0\right)\right]=0 \qquad (28.403)$$

berechnet werden. Anschließend muss mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse $\bar{a}$ die Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv P_S\left(\bar{a}\right)-P_E=0 \qquad (28.404)$$

gelöst werden. Der gesamte Vorgang (28.403)-(28.404) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis eine vorgegebene Grenze $\left|P_S-P_E\right|<\Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Tabelle 28-40 zeigt die Berechnung der mittleren Halbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination.

	$\overline{a_{QSE}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$
$\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)-$	42089.694607	0.1	5°
$\left(P_S \triangleq P_E\right)-$	42096.635379	0.1	5°
$\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)-$	42087.059657	0.1	60°
$\left(P_S \triangleq P_E\right)-$	42025.255777	0.1	60°
$\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)-$	42086.693728	0.5	60°
$\left(P_S \triangleq P_E\right)-$	42114.418926	0.5	60°
$\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)-$	42085.748702	0.5	85°
$\left(P_S \triangleq P_E\right)-$	41885.713344	0.5	85°
$\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)-$	42243.470539	0.5	155°
$\left(P_S \triangleq P_E\right)-$	42192.782285	0.5	155°

Tabelle 28-40: Die große Bahnhalbachse einiger mittlerer und wahrer Äquivalenzbahnen bei Kopplung der Sonnensynodischen Bewegung der Sonne mit der Rotation der Erde.

28.8.7.2 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen zwischen Sonnen-synodischer Bewegung und Erdrotation

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite Δ= 0°.02 angegeben. Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 28.8.7.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zur Inklination $\bar{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)-$ Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0,1, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit der Methode in Abschnitt 28.9.3 (auf Seite 168) berechnet werden.

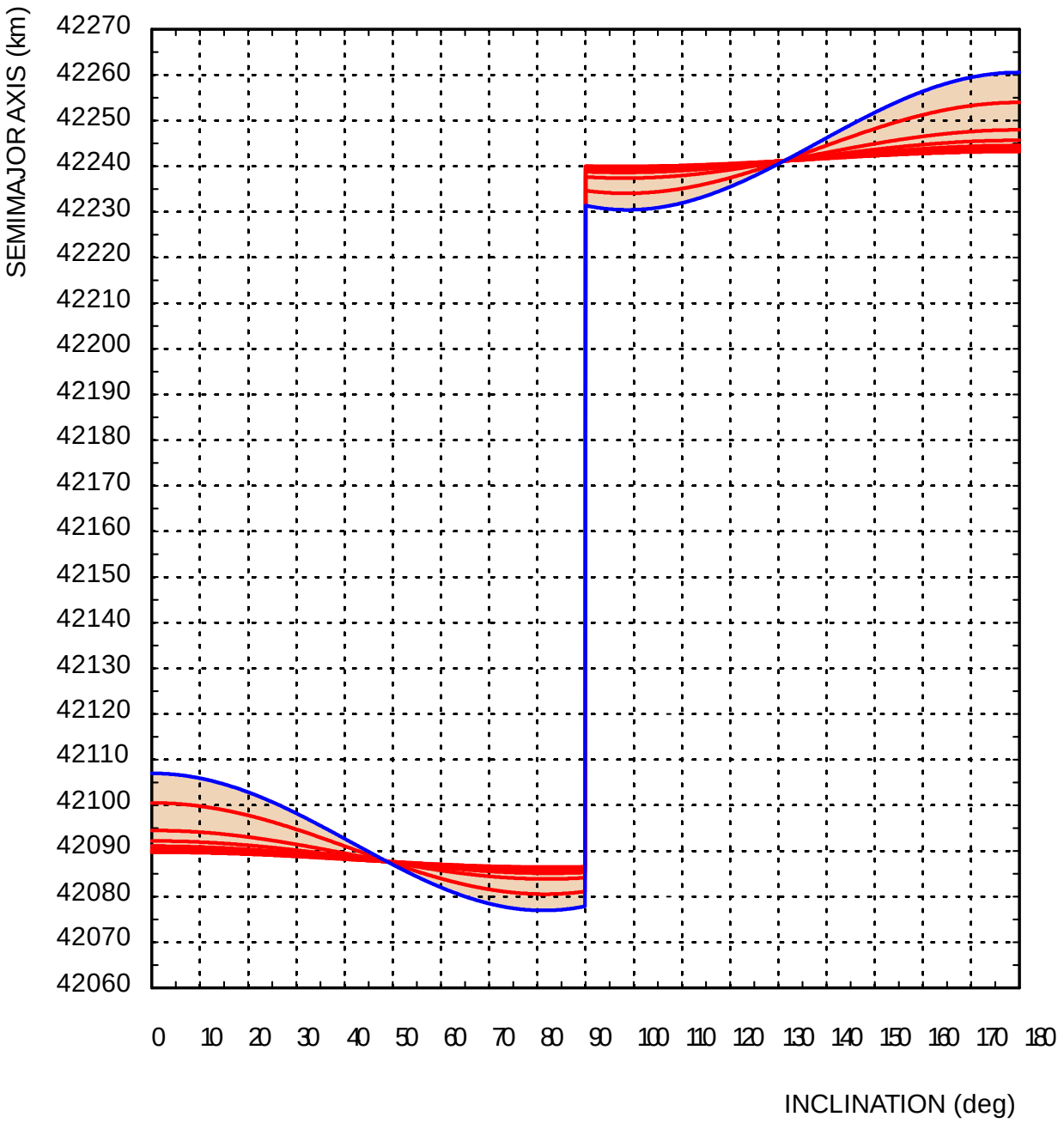


Bild 28-52: Das (a,i)-Gebiet von $\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen mit parametrisierten Exzentrizitäten e=0.1 - $e_B \in [0.8436641 - 0.8436677 / 0.8442359 - 0.8443433]$

Das Ergebnis in Bild 28-52 zeigt zwei völlig getrennte Bereiche für mögliche $\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen, je nachdem ob es sich um rechtläufige oder rückläufige Bahnen handelt. Es ist daher sinnvoll, diese beiden Bereiche getrennt zu untersuchen. Die Werte der Grenzexzentrizität $e_B \in [0.8436641 - 0.8436677 / 0.8442359 - 0.8443433]$, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe = 200 km bezieht, sind bezogen auf die beiden getrennten Bereiche sehr unterschiedlich.

28.8.7.3 Rechtläufige Äquivalenzbahnen aus Sonnen-synodischer Bewegung mit Erdrotation

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QSE}}_{cross} \approx 48°$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QSE}}_{cross} \approx 42087.8$ km. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen bezeichnet werden.

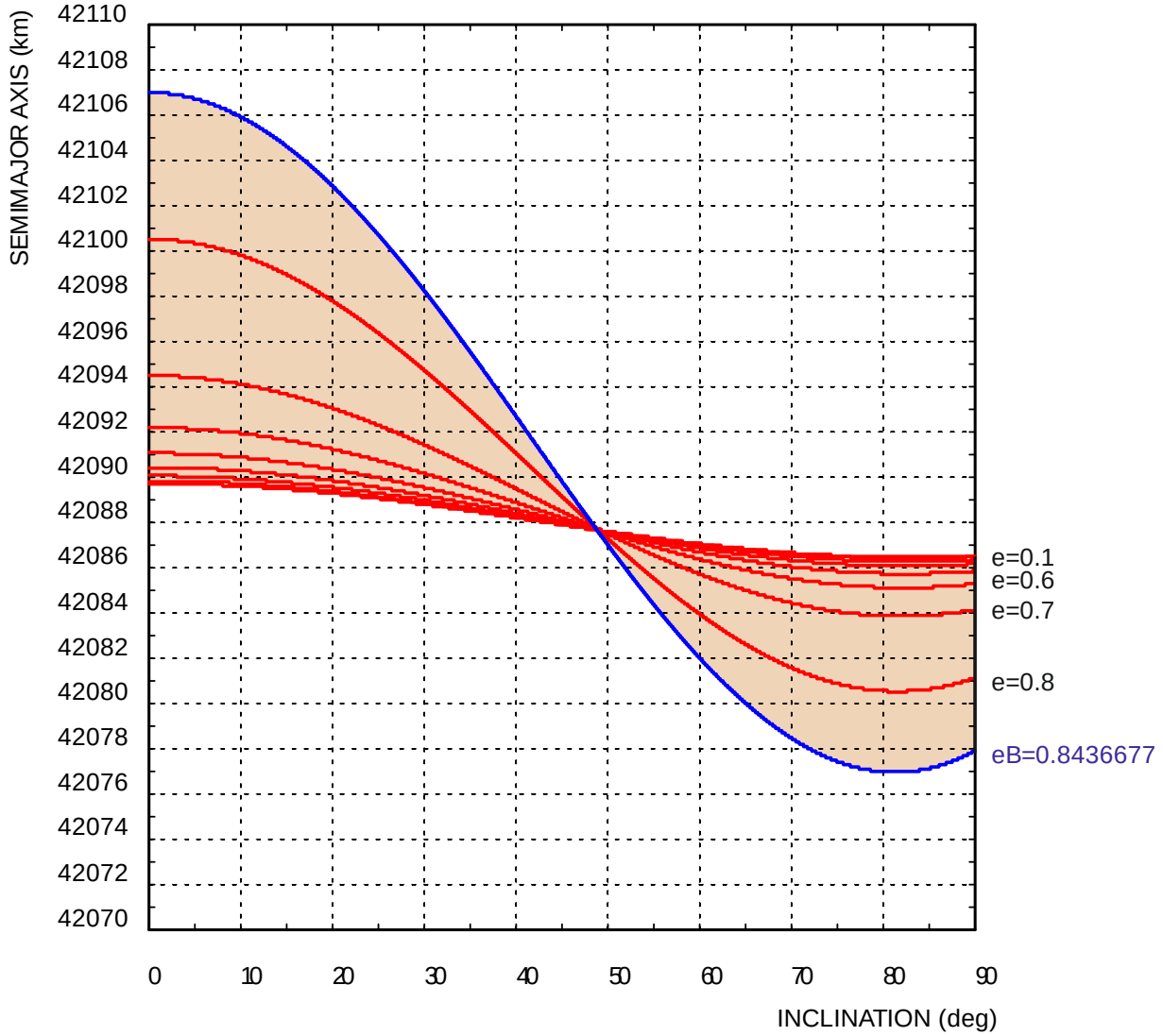


Bild 28-53: Das (a,i)-Gebiet von rechtläufigen $\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen große Bahnhalbachse gegen Inklination 0°-90°, mit parametrisierten Exzentrizitäten e= 0.1 - $e_B \in [0.8436641 - 0.8436677]$

Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (28.402) folgt im Fall rechtläufiger Bewegung die Bedingungsgleichung

$$\overline{n_S} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - n_{\odot} - \dot{\Theta} = 0 \quad , \quad \sigma_i = +1 \, . \tag{28.405}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $(M_0)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \;, \qquad (28.406)$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[1-n_\odot+\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)+2\cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K}-1\right) \qquad (28.407)$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität (e_1, e_2) ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$f_{e2} - f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + B_0 \left|\cos i\right| + C_0 = 0 \qquad (28.408)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right) - E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ B_0 &:= 2\left(E_2 - E_1\right) \\ C_0 &:= E_2\left(1-n_\odot+\sqrt{1-e_2^2}\right) - E_1\left(1-n_\odot+\sqrt{1-e_2^2}\right) \quad . \end{aligned} \qquad (28.409)$$

Ihre Lösungen unter Verwendung der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0 + \operatorname{sgn}(B_0)\sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}\right] \;,\; \left|\cos i_1\right| = \frac{Q_0}{A_0} \;,\; \left|\cos i_2\right| = \frac{C_0}{Q_0} \;. \qquad (28.410)$$

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	42089.69	---	---		---
e=0.1	42089.72	49°.586766	42087.627211	42086.46	42086.53
e=0.2	42089.84	49°.571272	42087.628107	42086.40	42086.47
e=0.3	42090.06	49°.543760	42087.629697	42086.28	42086.36
e=0.4	42090.44	49°.501238	42087.632149	42086.08	42086.17
e=0.5	42091.06	49°.438356	42087.635758	42085.74	42085.86
e=0.6	42092.19	49°.345397	42087.641037	42085.12	42085.29
e=0.7	42094.49	49°.203401	42087.648849	42083.86	42084.14
e=0.8	42100.52	48°.969897	42087.659921	42080.54	42081.13
e_B	42107.00	48°.812949	42087.663955	42076.96	42077.91

Tabelle 28-41: Ausgewählte Parameter von $\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert mit einigen Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität e_B = 0.8440594

In Tabelle 28-41 sind in Ergänzung zu Bild 28-53 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes (i_{cross}, a_{cross}) für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung werden die großen

Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 28.8.7.1 (auf Seite 157) berechnet.

28.8.7.4 Rückläufige Äquivalenzbahnen aus Sonnen-synodischer Bewegung mit Erdrotation

Aus der Bedingungsgleichung (28.402) folgt im Fall rückläufiger Bewegung die Bedingungsgleichung

$$\overline{n_S} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s - \dot{\Omega}_s + n_{\odot} - \dot{\Theta} = 0 \quad , \quad \sigma_i = -1 \, . \tag{28.411}$$

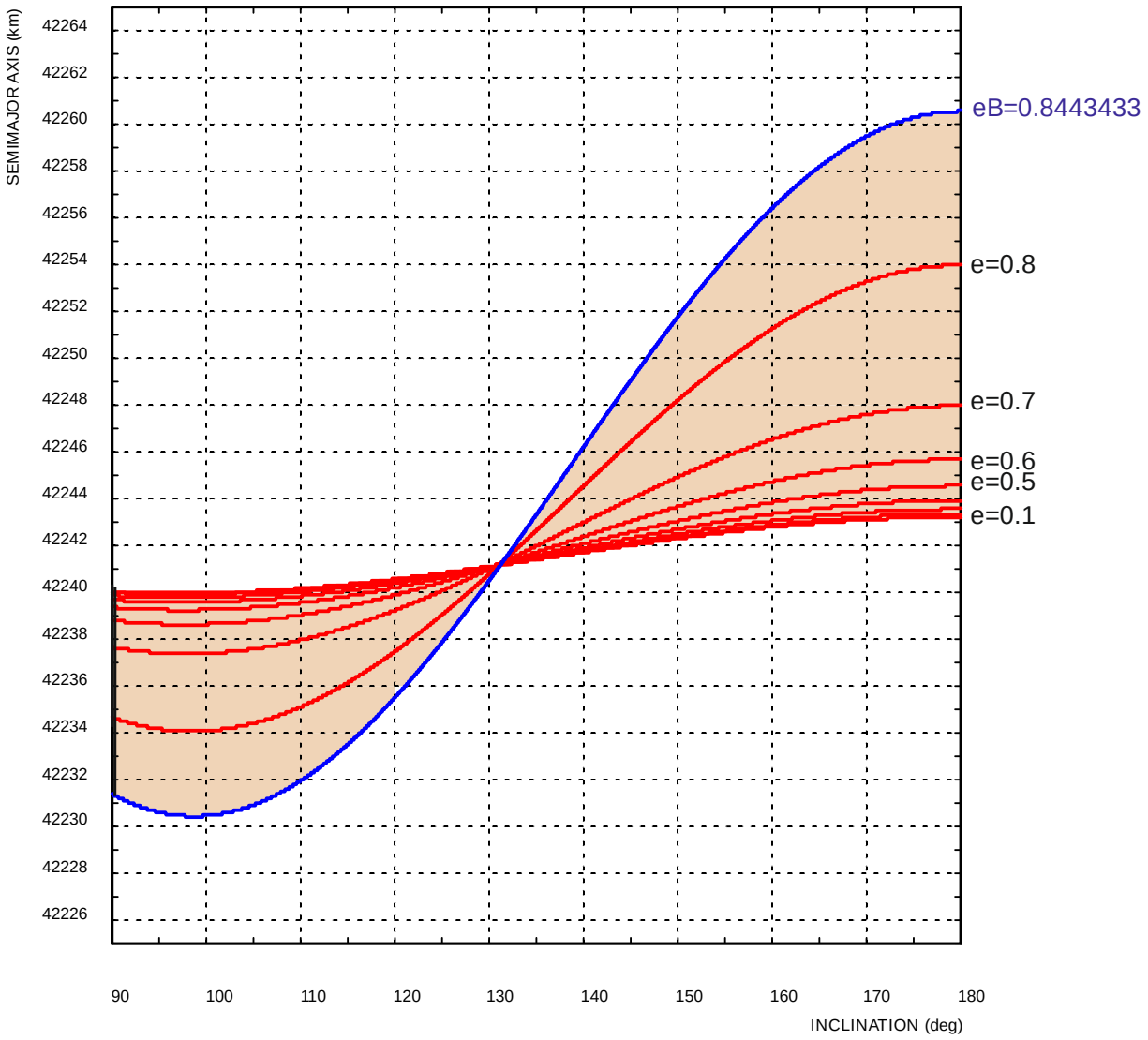


Bild 28-54: Das (a,i)-Gebiet von rechtläufigen $\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)$– Äquivalenzbahnen große Bahnhalbachse gegen Inklination 90°-180°, mit parametrisierten Exzentrizitäten e= 0.1 - $e_B \in \left[0.8442359 - 0.8443433\right]$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\bullet}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \;, \tag{28.412}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[1+n_\odot+\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)-2\cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K}-1\right) \tag{28.413}$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$f_{e2} - f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + B_0 \left|\cos i\right| + C_0 = 0 \tag{28.414}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right) - E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ B_0 &:= 2\left(E_1 - E_2\right) \\ C_0 &:= E_2\left(1+n_\odot+\sqrt{1-e_2^2}\right) - E_1\left(1+n_\odot+\sqrt{1-e_2^2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{28.415}$$

Ihre Lösungen unter Verwendung der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0 + \operatorname{sgn}\left(B_0\right)\sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}\right] \;,\; \left|\cos i_1\right| = \frac{Q_0}{A_0} \;,\; \left|\cos i_2\right| = \frac{C_0}{Q_0} \;. \tag{28.416}$$

In Tabelle 28-42 sind in Ergänzung zu Bild 28-54 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 4.1.1 berechnet.

ecc	a_{init} [km]	$a_{\min}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\max}$ [km]
e=0.0	42240.05		---	---	---
e=0.1	42239.98	42239.97	130°.413238	42241.129891	42243.22
e=0.2	42240.03	42239.90E	130°.428732	42241.130784	42243.34
e=0.3	42239.86	42239.79	130°.456244	42241.132368	42243.56
e=0.4	42239.68	42239.58	130°.498766	42241.134812	42243.93
e=0.5	42239.37	42239.24	130°.561648	42241.138408	42244.56
e=0.6	42238.80	42238.63	130°.654607	42241.143669	42245.68
e=0.7	42237.66	42237.38	130°.796603	42241.151456	42247.97
e=0.8	42234.66	42234.07	131°.030107	42241.162507	42253.98
e_B	42231.39	42230.44	131°.188232	42241.166576	42260.55

Tabelle 28-42: Ausgewählte Parameter von $\left(\overline{P_S} \mathrel{\hat{=}} P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert mit einigen Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität e_B = 0.8443433

Anmerkung: Aus Tabelle 28-40 (auf Seite 158) kann abgelesen werden, dass die Bereichsbilder Bild 28-52, Bild 28-53 und Bild 28-54 nicht notwendig die möglichen Bereiche wahrer $\left(P_S \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen abdecken.◀

28.8.8 Einige Eigenschaften der Sonnen-bezogenen Äquivalenz-Bahnen

(1) Äquivalenzbahnen, die durch Kopplung der Sonnen-synodischen mit der meridionalen Bewegungen gebildet werden

- Äquivalenzbahnen, die durch Kopplung der mittleren Sonnen-synodischen mit der mittleren meridionalen Bewegung gebildet werden haben als Umlaufzeit exakt zwei Sonnentage.
- Äquivalenzbahnen, die durch Kopplung der wahren Sonnen-synodischen mit der wahren meridionalen Bewegungen gebildet werden, haben als Umlaufzeit eine von 2 Sonnentagen abweichende Umlaufzeit als Folge des Unterschiedes zwischen wahrer und fiktiver mittlerer Sonne und der Bezugsepoche
- Die Summe aus Sonnenwinkel und geographischer Länge unterliegt nur periodischen Schwankungen, die Summe der mittleren Werte ist konstant (Äquivalenzfaktor bei Sonnen-synodischen Bahnen).
- Der Äquivalenzfaktor bei Sonnen-synodischen Bahnen ist über die Sternzeit zur Epoche mit der Rektaszension des aufsteigenden Knotens als ein Bahnelement gekoppelt.

Äquivalenzbahn Sonnen-synodisch mit	Mittlere Bewegungen	Große Bahnhalbachse [km]	Exzentrizität	Inklination
meridionaler Sat. Bewegung	$\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right)$	66795 - 66837	0.0 - 0.9015	0°-90°
anomalistischer Sat. Bewegung	$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$	6578 – 15580	0.0 – 0.5778	0°-42°
		6578 – 12255	0.0 – 0.4632	90°-130°
drakonitischer Sat. Bewegung	$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$	6578 – 18228	0.0 – 0.5778	96°.34-180°
tropischer Satelliten Bewegung	$\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_S}\right)$	beliebig	beliebig	90°
Hansen Satelliten Bewegung	$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$	6578 – 8582	0.0 – 0.233	97°.5-150°.5
Kepler Satelliten Bewegung	$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_S}\right)$	6578 - 20620	0.0 – 0.6817	0° - 48°
ein Sterntag	$\left(\overline{P_S} \triangleq P_E\right)$	42077 - 42107	0.0- 0.8437	0°-90°
		42232 - 42262	0.0-0.8443	90°-180°

Tabelle 28-43: Übersicht über Äquivalenzbahnen gekoppelt mit Sonnen-synodischer Bewegung, Minimale Bahnhöhe H_P = 200 km

Die mathematische Formulierung der Äquivalenz zwischen Sonnen-synodischer und meridionaler Bewegung kann zum Nachweis der Konsistenz der zugrunde liegenden physikalischen Parameter verwendet werden.

(2) Sonnensynchrone Bahnen können als Äquivalenzbahnen gedeutet werden, die durch Kopplung der mittleren Sonnen-synodischen mit der mittleren drakonitischen Bewegung gebildet werden. Sie sind ausschließlich rückläufig.

28.9 Sonnensynchrone Bahnen

Im Rahmen der Äquator-bezogenen Verknüpfungen zwischen Satellit und Sonne bzw. Satellitenbahnebene und Sonne kommt der sonnensynchronen Bahn als wichtigem Spezialfall eine besondere Rolle zu. Dies betrifft Beobachtungsbedingungen bei Erdbeobachtungssatelliten, die Regulierung des Energiehaushaltes eines Satelliten etwa über Solarzellen, und viele andere Anwendungen, für die eine sonnensynchrone Bahn vorteilhaft ist.

28.9.1 Charakteristika für Sonnensynchronität

In Abschnitt wurde 28.8.3 (auf Seite 125) wurde die Sonnensynchrone Bahn als Spezialfall von einer mittleren $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn vorgestellt. In diesem Zusammenhang wurde auch die Stabilität einer Sonnensynchronen untersucht. In diesem Abschnitt wird die Sonnensynchrone als eine für die Praxis von Erdsatellitenbahnen wichtiger Anwendungsfall vertieft untersucht.

28.9.1.1 Bezug auf die fiktive mittlere Sonne

- Die Definition einer sonnensynchronen Bahn ist ausschließlich auf das Verhalten des mittleren Bahnknotens in Bezug auf die fiktive mittlere Sonne ausgelegt.

Man beachte diese wesentliche Einschränkung bei einer Bahnauslegung. Die Abweichungen einer wahren Bahn in Bezug auf die wahre Sonne können erheblich sein und müssen Gegenstand einer Bahnanalyse sein.

Zusammenstellung einiger wesentlicher Eigenschaften sonnensynchroner Bahnen:

1. Notwendig und hinreichend für eine sonnensynchrone Bahn ist das Verschwinden der mittleren Knotensonnendrift, nach Beziehung (28.273)

$$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Bahn ist sonnensynchron.} \tag{28.417}$$

   Aus Bild 28-22 und Bild 28-23 (auf Seite 76) kann erkannt werden, dass sonnensynchrone Bahnen eine sehr kleine Untermenge von Sonnen-synodischen Bewegungen sind.

2. Diese Beziehung ist wegen (28.272) gleichbedeutend mit

$$\dot{\Omega}_s = n_\odot \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Bahn ist sonnensynchron.} \tag{28.418}$$

   Auf sonnensynchronen Bahnen bewegt sich der mittlere Bahnknoten gleichförmig mit der fiktiven mittleren Sonne längs des Erdäquators. Diese Eigenschaft wird häufig als die definierende Eigenschaft von sonnensynchronen Bahnen verwendet.

3. Die Knotenlängendrift einer sonnensynchronen Bahn beträgt wegen (28.273)

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} = -\frac{360°}{86400s} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn ist sonnensynchron} \quad . \tag{28.419}$$

4. Nach Formel (28.260) gibt es auf sonnensynchronen Bahnen keine mittlere Sonnenverschiebung des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf (siehe zum Vergleich Bild 28-24 auf Seite 78)

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0° / \overline{P_D} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn ist sonnensynchron} \quad . \tag{28.420}$$

5. Nach Beziehung (28.163) ist auf sonnensynchronen Bahnen die mittlere drakonitische Bewegung identisch gleich der mittleren auf den Erdäquator bezogenen Sonnen-synodischen Bewegung

$$\overline{n_S} = \overline{n_D} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn ist sonnensynchron} \quad . \tag{28.421}$$

6. Entsprechend ist mit Beziehung (28.165) die mittlere drakonitische Umlaufzeit der mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit identisch gleich (Bedingung für Äquivalenzbahn)

$$\overline{P_S} = \overline{P_D} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn ist sonnensynchron} \quad . \tag{28.422}$$

7. Der mittlere Knotensonnenwinkel ist konstant. Nach Beziehung (28.247) ist bei Vernachlässigung der periodischen Einflüsse durch die Bahneinflüsse auf den Knoten

$$\overline{\tau_{\Omega\bar{\odot}}}(t) = \overline{\tau_{\bar{\Omega}\odot 0}} = \overline{\tau_{\Omega\bar{\odot}}}(t_\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn ist sonnensynchron} \quad . \tag{28.423}$$

8. Der auf die fiktive mittlere Sonne bezogene wahre Sonnenwinkel $\tau_{\bar{\odot}} = \tau_{\bar{\odot}}(t) = \alpha(t) - \alpha_{\bar{\odot}}(t)$ wiederholt sich bei Wiederholung der knotenbezogenen Rektaszension $\alpha - \Omega$ des Satelliten. Mit (28.423) liefert die Beziehung (28.250)

$$\tau_{\bar{\odot}} = \tau_{\bar{\odot}}(t) = \alpha(t) - \Omega(t) + \tau_{\Omega\bar{\odot}}(t_\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn ist sonnensynchron} \quad . \tag{28.424}$$

9. Wenn zu zwei aufeinanderfolgenden Zeiten t_1 und t_2 die knotenbezogenen Rektaszensionen gleich sind, $\alpha(t_1) - \Omega(t_1) = \alpha(t_2) - \Omega(t_2)$ folgt aus Beziehung (28.253) die Identität der mittleren Ortssonnenzeit an den beiden Satellitenpositionen

$$T_m(t_2) = T_m(t_1) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bahn ist sonnensynchron} \quad . \tag{28.425}$$

Dies ist eine der wesentlichen und wichtigen Eigenschaften sonnensynchroner Satellitenbahnen. Etwa aus den Transformationen[1] (24.18) besteht für eine vorgegebene Inklination i ein Zusammenhang zwischen der knotenbezogenen Rektaszension und dem Argument der Breite u und Deklination δ:

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos\delta \ \cos(\alpha - \Omega) \\ \cos i \sin u &= \cos\delta \ \sin(\alpha - \Omega) \\ \sin i \sin u &= \sin\delta \quad . \end{aligned} \tag{28.426}$$

Hieraus können u und die geodätische Breite φ entsprechend der Deklination[2] δ eindeutig berechnet werden. Wiederholung der knotenbezogenen Rektaszension bedeutet somit bei

[1] Abschnitt 24.2.1

[2] Siehe etwa die genauen Transformationsformeln (38.124) in Abschnitt 38.2.1.2 (Band V)

kreisnahen Bahnen Überflug desselben Breitenkreises. Auf sonnensynchronen Bahnen wird somit ein und derselbe Breitenkreis stets zur selben mittleren Ortssonnenzeit überflogen.

28.9.1.2 Anmerkungen zum Bezug auf die wahre Sonne

Dieser Fall wurde in Abschnitt 28.8.3.3 auf Seite 130 im Rahmen der wahren $\left(P_D \triangleq P_S\right)$ – Äquivalenzbahn untersucht.

28.9.2 Bahndefinition aus Bedingung für sonnensynchrone Bahnen

Mit Hilfe der Zuordnung (28.418) kann die Bahnauslegung einer mittleren sonnensynchronen Bahn auf die Verfahren der Bahnauswahl aus gegebener Knotenlängendrift in Abschnitt 23.5.4 zurückgeführt werden. Dazu werden die beiden Beziehungen (28.417) und (28.419) in die entsprechende Formel eingesetzt. Bei Vorgabe zwei der drei mittleren Bahnparameter $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ kann der dritte berechnet werden.

Die bisherigen Untersuchungen lassen folgern, dass sonnensynchrone Bahnen nur in sehr eingeschränkten Parameterräumen vorkommen können. Mit Entwicklung (20.15) folgt etwa, dass sonnensynchrone Bahnen notwendig rückläufig sind. Auch die Bahnhalbachse und die Exzentrizität unterliegen wesentlichen Einschränkungen. Diese können aus Bild 28-55 auf Seite 169 im Fall von Erdsatelliten abgelesen werden. Um diese Kurven zu zeichnen müssen zunächst die Beziehungen zwischen den (mittleren) Bahnparametern hergeleitet werden, wie sie zur Bahnauslegung im Fall von sonnensynchronen Bahnen benötigt werden. Dies geschieht in den folgenden Abschnitten.

28.9.2.1 Berechnung der großen Bahnhalbachse einer sonnensynchronen Bahn

Die Parameter $\bar{e}_0$ und $\bar{i}_0$ seien bekannt. Mit der Näherung (23.240) und anschließender Verbesserung mit der definierenden Gleichung (28.418) kann die mittlere Bahnhalbachse einer sonnensynchronen Bahn berechnet werden:

$$\overline{a_{QDS}}_0^{(0)} = \sqrt[7]{\left[\frac{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \cos \bar{i}_0}{2\, n_\odot \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right]^2} \quad , \tag{28.427}$$

Die Verbesserung mit der Bahnhalbachse als unabhängiger Variabler verwendet etwa die säkulare Drift[1] (20.15) in der Theorie des Gravitationsfeldes der Erde

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \dot{\Omega}_s\left(\bar{a}_0\right) - n_\odot = 0 \quad . \tag{28.428}$$

BEISPIEL: Gegeben seien. $\bar{e}_0 = 0.1$, $\bar{i}_0 = 100°$. Die Näherung (28.427) ergibt $\bar{a}_0^{(0)} = 7533.757$ km die Iteration (28.428) schließlich $\bar{a}_0 = \overline{a_{QDS}}_0 = 7528.132$ km. ◄

[1] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

28.9.2.2 Berechnung der Exzentrizität einer sonnensynchronen Bahn

Vorgabe der Parameter $\bar{a}_0$ und $\bar{i}_0$ erlaubt die Berechnung der mittleren Exzentrizität der sonnensynchronen Bahn, ausgehend von der Näherung (23.242) in Abschnitt 23.5.4.2

$$\bar{e}_0^{(0)} = \sqrt{1 - \sqrt{-\frac{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \cos \bar{i}}{2\,\bar{a}_0^3 \sqrt{\bar{a}_0}\, n_\odot}}} \quad . \tag{28.429}$$

Zur Verbesserung kann wieder die Gleichung (28.418) jetzt mit der Exzentrizität als unabhängiger Variable zum Einsatz kommen:

$$fct\left(\bar{e}_0\right) \equiv \dot{\Omega}_s\left(\bar{e}_0\right) - n_\odot = 0 \quad . \tag{28.430}$$

BEISPIEL: Für die Elemente $\bar{a}_0$ = 12000 km, $\bar{i}_0$ = 140° liefert (28.429) für die Exzentrizität die Näherung $\bar{e}_0^{(0)}$ = 0.28155706445. Der verbesserte Wert lautet $\bar{e}_0 = \overline{e_{EDS\,0}}$ = 0.28068285 ◄

28.9.2.3 Berechnung der Inklination einer sonnensynchronen Bahn

Vorgabe der Parameter $\bar{a}_0$ und $\bar{e}_0$ erlaubt schließlich die Berechnung der mittleren Inklination der sonnensynchronen Bahn, ausgehend von der Näherung (23.244) in Abschnitt 23.5.4.3

$$\cos \bar{i}_0^{(0)} = -\frac{2\, n_\odot\, \bar{a}_0^3 \sqrt{\bar{a}_0}\left(1 - \bar{e}_0^2\right)^2}{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2} \quad . \tag{28.431}$$

Die Verbesserung erfolgt basierend auf Gleichung (28.418) mit der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\bar{i}_0\right) \equiv \dot{\Omega}_s\left(\bar{i}_0\right) - n_\odot = 0 \quad . \tag{28.432}$$

BEISPIEL: Gegeben seien. $\bar{a}_0$ = 7000 km, $\bar{e}_0$ = 0.06 (28.431) ergibt für die Inklination einer sonnensynchronen Bahn den Näherungswert $\bar{i}_0^{(0)}$ = 97°.81700718, der verbesserte Wert ist $\bar{i}_0 = \overline{i_{QDS\,0}}$ = 97°.83992550 ◄

Anmerkung: Auch bei sehr kleinen Fehlertoleranzen sind die vorstehenden Verfahren im Fall der Berechnung der Exzentrizität oder der Inklination nicht sehr stabil. Es können also nur Näherungswerte erwartet werden. ◄

28.9.3 Übersicht über sonnensynchrone Bahnen

Um einen Überblick über alle möglichen sonnensynchronen Bahnen werden in Bild 28-55 die sonnensynchronen Bahnen in Kurven Halbachse über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten aufgezeichnet. Dazu werden in Abhängigkeit von der vorgegebenen Exzentrizität über der Inklination als unabhängiger Variable die zugehörigen Halbachsen mit Formel (28.427) berechnet. Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Tabelle 28-18 bis Tabelle 28-52 gelistet.

Die in Bild 28-55 gezeichneten Kurven sind auf die minimale Perigäumshöhe H_P = 200 km bezogen. Die blau eingezeichnete Grenzkurve beschreibt diejenigen sonnensynchronen Bahnen, welche das Perigäum mit dem vorgegebenen Perigäumsradius

$$r_P = R_E + H_P = a(1-e) \tag{28.433}$$

haben. Um diese Bahnen zu finden wird mit vorgewählter Inklination aus Formel (28.429) die Exzentrizität mit der von i abhängigen Hilfsgröße B gebildet, falls nur die säkularen Einflüsse erster Ordnung durch J_2 berücksichtigt werden sollen,

$$e = \sqrt{1-\sqrt{\frac{B}{a^3\sqrt{a}}}} \quad , \quad B := -\frac{3}{2}\frac{J_2\sqrt{\mu}\,R_E^2\cos i}{n_\odot} \quad . \tag{28.434}$$

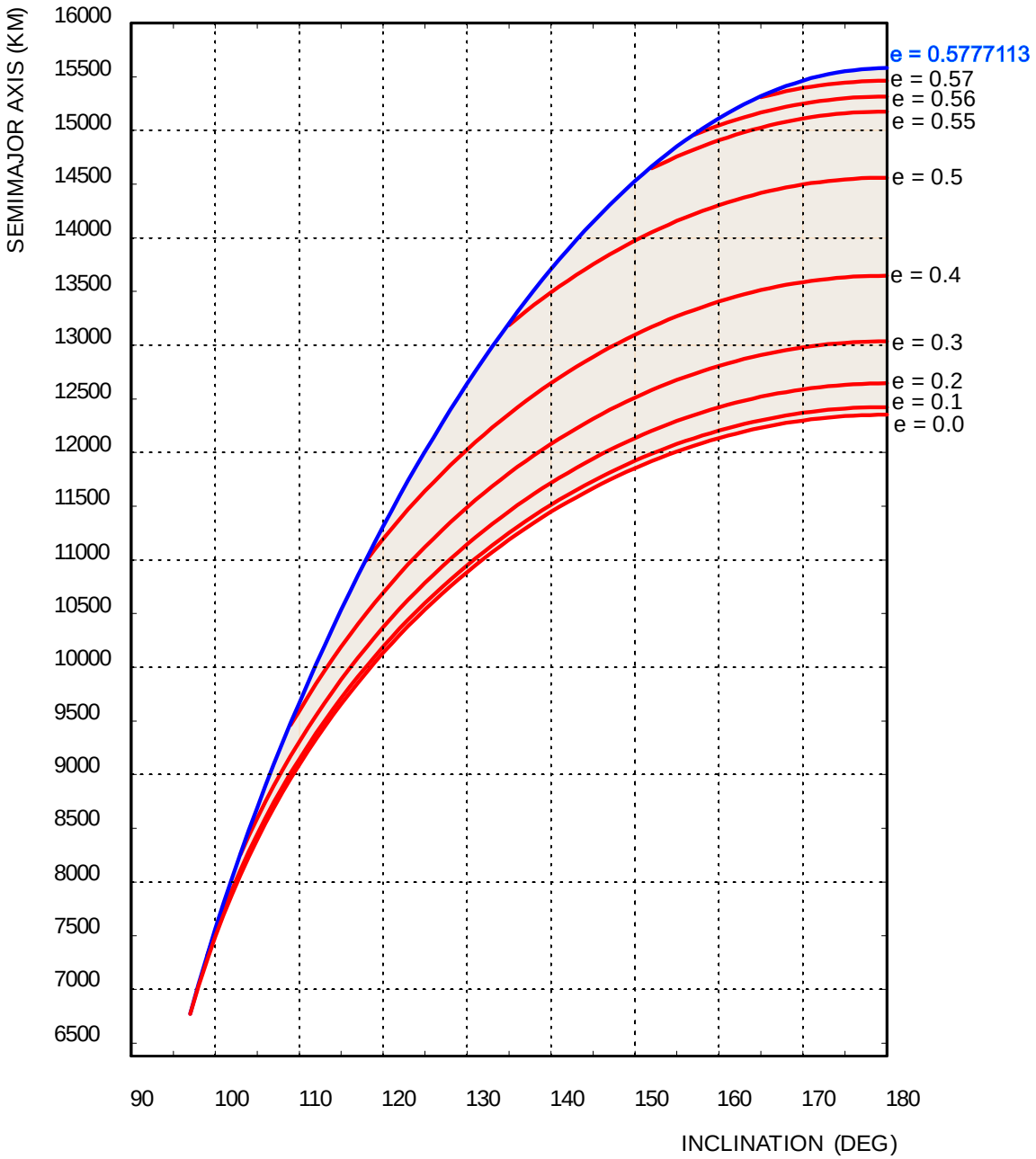


Bild 28-55: Alle sonnensynchronen Bahnfamilien von Erdsatelliten, große Bahnhalbachse über der Inklination, parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität e_B = 0.5777113 (bezogen auf Einfluss durch J_2 und J_4), Perigäumshöhe der exzentrischen Bahn H_P= 200 km. Man beachte die umkehrbar eindeutige Relation zwischen großer Bahnhalbachse und Inklination

Wird hier die Halbachse a durch den Perigäumsradius r_P ersetzt, folgt mit der Hilfsgröße $A := B^2 / r_P^7$ die Bedingungsgleichung zur Berechnung der Exzentrizität

$$fct(e) \equiv e^4 + e^3(4+A) + 3e^2(2-A) + e(4+3A) + (1-A) = 0 \quad . \qquad (28.435)$$

Mit Formel (28.433) kann schließlich die zugehörige Halbachse berechnet werden. Die numerischen Werte im Fall H_P = 200 km sind in Tabelle 28-53 (auf Seite 172) gelistet.

e = 0.0	H[km]	a[km]	$\overline{P_d}$ [min]	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$
95°.6942	0	6378.137	84.6213	-21°.1553
96°.3446	200	6578.137	88.6251	-22°.1557
100°	1107	7485.117	107.5245	-26°.8811
110°	2710	9088.083	143.7650	-35°.9412
120°	3753	10132.075	169.1638	-42°.2905
130°	4510	10888.212	188.3808	-47°.0952
140°	5072	11449.804	203.0775	-50°.7694
150°	5482	11859.902	214.0293	-53°.5073
160°	5763	12141.052	221.6414	-55°.4104
170°	5927	12305.605	226.1351	-56.5338
180°	5981.6777	12359.815	227.6217	-56.9054

Tabelle 28-44: Sonnensynchrone Bahnfamilie für Kreisbahnen

e = 0.1	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 98°.0812	0	7086.892	1417.444
99°.0085	200	7309.040	1661.807
100°	397	7528.132	1902.809
110°	1848	9140.371	3676.271
120°	2793	10190.411	4831.315
130°	3478	10950.939	5667.896
140°	3986	11515.807	6289.250
150°	4357	11928.280	6742.971
160°	4611	12211.072	7054.043
170°	4761	12376.586	7236.107
180°	4809.867	12431.116	7296.091

Tabelle 28-45: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.1

e = 0.2	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i= 101°.487	0	7086.839	1417.368
i= 102°.843	200	8222.670	3489.067
110°	1064.729	9302.333	4784.662
120°	1918.749	10371.108	6067.193
130°	2538.052	11145.236	6996.146
140°	2998.044	11720.226	7686.134
150°	3333.948	12140.106	8189.990
160°	3564.250	12427.984	8535.443
170°	3699.046	12596.479	8737.638
180°	3743.453	12651.987	8804.248

Tabelle 28-46: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.2

e = 0.3	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i=106°.572	0	9111.650	5466.990
i=108°.572	200	9397.338	5838.401
110°	335.363	9590.714	6089.792
120°	1106.866	10692.861	7522.582
130°	1665.713	11491.215	8560.443
140°	2080.830	12084.239	9331.373
150°	2383.983	12517.314	9894.371
160°	2591.839	12814.252	10280.390
170°	2713.506	12988.060	10506.342
180°	2753.587	13045.320	10580.779

Tabelle 28-47: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.3

e = 0.4	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 114°.665	0	10630.258	8504.207
117°.716	200	10963.561	8970.848
120°	337.709	11193.076	9292.170
130°	839.335	12029.121	10462.632
140°	1211.988	12650.208	11332.154
150°	1484.156	13103.822	11967.214
160°	1670.786	13414.871	12402.683
170°	1780.030	13596.944	12657.585
180°	1816.023	13656.933	12741.570

Tabelle 28-48: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.4

e = 0.5	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 129°.030	0	12756.310	12756.310
134°.488	200	13156.273	13356.272
140°	370.470	13497.213	13867.683
150°	612.671	13981.616	14594.287
160°	778.771	14313.817	15092.588
170°	876.009	14508.292	15384.301
180°	908.047	14572.367	15480.414

Tabelle 28-49: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.5

e = 0.55	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 141°.956	0	14173.678	15591.046
151°.055	200	14618.081	16279.888
160°	336.279	14920.925	16749.296
170°	427.566	15123.784	17063.728
180°	457.647	15190.631	17167.342

Tabelle 28-50: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.55

e = 0.5777781	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 180°.0	206.696	15579.81	18228.367

Tabelle 28-51: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.5777781

e = 0.599734	H_P[km]	a[km]	H_A[km]
i = 180°.0	0	15934.791	19113.271

Tabelle 28-52: Sonnensynchrone Bahnfamilie mit der Exzentrizität e = 0.599734 (Grenzfall)

Inklination *i*	Exzentrizität *e*	Große Bahnhalbachse *a*
97°	0.02878431	6769.889 km
100°	0.1303775	7564.359 km
110°	0.3196583	9668.872 km
120°	0.4184518	11311.42 km
130°	0.4796357	12641.41 km
140°	0.5201085	13707.55 km
150°	0.5472390	14528.94 km
160°	0.5647426	15113.21 km
170°	0.5745942	15463.20 km
180°	0.5777781	15579.81 km

Tabelle 28-53: Die sonnensynchrone Bahnfamilie mit Perigäumshöhe 200 km (blaue Grenzkurve in Bild 28-55)

28.9.4 Spur-reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen

Spur-reproduzierbare Satellitenbahnen sind nach Beziehung (23.305) kommensurabel zum Vollkreis: nach N_K drakonitischen Umläufen hat der Knoten genau *K*-mal den Vollkreis durchlaufen. Die mittlere Knotenlängenverschiebung erfüllt somit die Beziehung

$$N_K \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -K \cdot 360° \quad . \tag{28.436}$$

Im Fall von sonnensynchronen Bahnen kann mit der Fundamentalbeziehung (23.227) die Knotenlängenverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \overline{P_D} \tag{28.437}$$

direkt auf die mittlere drakonitische Umlaufzeit bezogen werden. Mit Hilfe der Beziehungen (28.419) und (28.422) erhält man die notwendige Beziehung für spur-reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen

$$\overline{P_S} = \overline{P_S} = \frac{K}{N_K} 86400\,\mathrm{s} \quad \Leftarrow \quad \text{sonnensynchron} \quad . \tag{28.438}$$

Auf sonnensynchronen Bahnen vollzieht sich ein Knotenumlauf exakt in einem (mittleren Sonnen) Tag.

Die geographische Länge des Knotens ist gegenüber dem ursprünglichen Knoten um die (mittlere) Knotenlängenrestverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = N_1 \overline{\Delta\lambda_\Omega} + 360° \tag{28.439}$$

gewandert, wobei N_1 die Anzahl der drakonitischen Umläufe pro Tag ist:

$$N_1 = \mathrm{int}\left(-\frac{360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1 \right) \quad . \tag{28.440}$$

Falls die Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ gleich Null ist, wird die nach einem Tag exakt reproduzierbare Bahn gemeinhin als „integer orbit“ bezeichnet. Dies ist in Bild 28-56 dargestellt. Hier ist

die Knotenlängenverschiebung über der Bahnhöhe für kreisförmige sonnensynchrone Bahnen berechnet. Die Knotenlängenrestverschiebung nach einem Tag $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nimmt zwischen den „integer orbits“, welche durch ganze Zahlen charakterisiert sind, kontinuierlich zu, um dann jeweils auf null zurückzufallen.

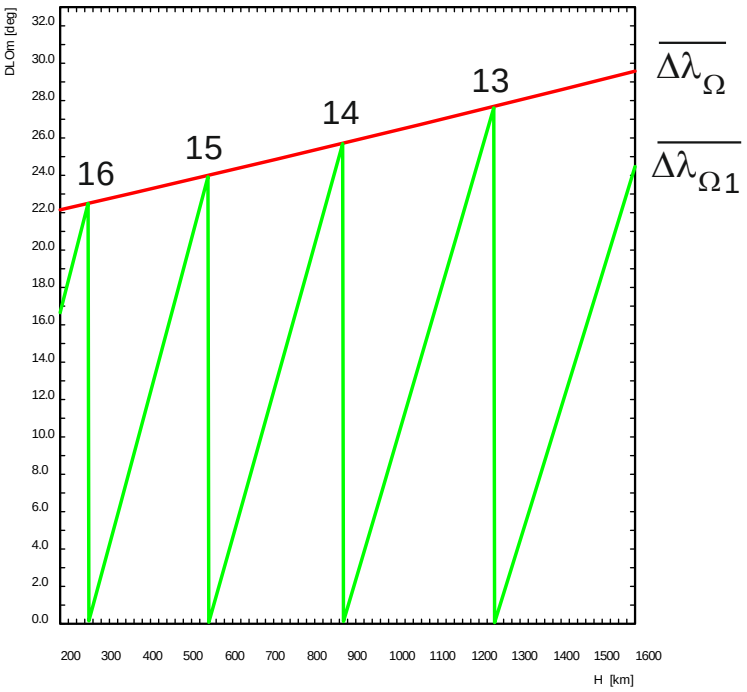


Bild 28-56: Mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Satellitenumlauf und mittlere Knotenlängenrestverschiebung pro Tag für alle kreisförmigen sonnensynchronen Bahnen im Höhenverlauf 200 km bis 1600 km

Aus Bild 28-56 kann man auch ablesen, dass die mittlere Knotenlängenverschiebung

für kreisförmige sonnensynchrone Bahnen das Intervall

$$22°.1558\ \left[H = 200\,\text{km}\right] \le \left|\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}\right| \le\ 29°.5747\ \left[H = 1600\,\text{km}\right] \tag{28.441}$$

durchläuft. In Verallgemeinerung der Definitionsgleichung (28.439) kann (analog zu Definition (23.299)) eine Knotenlängenrestverschiebung nach K Tagen und N_K drakonitischen Umläufen definiert werden

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = N_K\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} + K\cdot 360° = \text{int}\left(-\frac{K\cdot 360°}{\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}} + 1\right)\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} + K\cdot 360° \quad . \tag{28.442}$$

Diese Größe ist ein Maß für die Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn. Wenn sie verschwindet, ist die Bedingung (28.436) erfüllt mit der Reproduzierbarkeit $K : N_K$. Da stets

$$\left|\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}\right| \le \left|\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}\right| \tag{28.443}$$

erfüllt sein muss, kann die Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn auch durch ein ganzzahliges Verhältnis von Knotenlängenrestverschiebung und Knotenlängenverschiebung definiert werden. Für ganze Zahlen K_1, K_2 muss dann gelten

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = \frac{K_1}{K_2}\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} \qquad \langle K_1 < K_2 \quad . \tag{28.444}$$

Zusammen mit (28.442) und der Fundamentalbeziehung (28.437) kann im Fall von sonnensynchronen Bahnen die notwendige Bedingung für die mittlere drakonitische sowie die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit

$$\overline{P_D} = \overline{P_S} = \frac{K \cdot 86400\,\mathrm{s}}{\frac{K_1}{K_2} - N_K} \quad \Leftarrow \quad \text{Bahn Sonnensynchron} \qquad (28.445)$$

gefunden werden. Üblicherweise wird K=1 gesetzt, N_K ist ein freier Parameter.

In der folgenden Tabelle 28-54 werden alle nach 1 - 7 Tagen spurreproduzierbaren sonnensynchronen Erdsatellitenbahnen bis zur Bahnhöhe etwa 1200 km zusammengestellt (ausführliche Tabellen in Anhang G.2 (Band V)). Die entsprechende graphische Darstellung ist in Bild 28-57 (auf Seite 177) wiedergegeben

K	N_K	a [km]	H [km]	i	P/d	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)$	$\Delta\lambda_1$	Bahnfolge
1	16	6646.281	268	96°.583	16.0	–22°.500	0°.000	0°.000	1-------0
7	111	6686.229	308	96°.723	15.86	-22°.703	-3°.248	-3°.248	76543210
6	95	6692.945	315	96°.474	15.83	-22°.737	-3°.789	-3°.789	6543210
5	79	6702.376	324	96°780	15.8	-22°.785	-4°.560	-4°.560	5-4-3-2-1-0
4	63	6716.585	338	96°.831	15.75	–22°.857	–5°.712	–5°.712	4-3-2-1-0
7	110	6726.781	349	96°.867	15.71	-22°.909	-6°.544	-3°.272	73625140
3	47	6740.435	362	96°.916	15.7	–22°.979	–7°.664	–7°.664	3--2--1--0
5	78	6759.667	382	96°.986	15.6	-23°.077	-9°.232	-4°.319	5-2-4-1-3-0
7	109	6767.952	390	97°.016	15.57	-23°.119	-9°.904	-3°.301	72461350
2	31	6788.774	411	97°.092	15.5	–23°.226	–11°.613	–11°.613	2---1---0
7	108	6809.757	432	97°.169	15.43	-23°.333	-13°.328	-3°.332	75316420
5	77	6818.196	440	97°.201	15.4	-23°.377	-14.032	-4°.687	5-3-1-4-2-0
3	46	6837.988	460	97°.274	15.3	–23°.478	–15°.648	–7°.818	3--1--2—0
7	106	6895.335	517	97°.491	15.14	-23°.774	-20°.384	-3°.390	71234560
1	15	6939.140	561	97°.659	15	–24°.000	0°.000	0°.000	1-------0
7	104	6983.646	606	97°.833	14.86	-24°.231	-3°.465	-3°.465	76543210
6	89	6991.134	613	97°.863	14.83	-24°.270	-4°.045	-4°.045	6543210
5	74	7001.649	624	97°.905	14.8	-24°.324	-4°.860	-4°.860	5-4-3-2-1-0
4	59	7017.497	639	97°.968	14.75	–24°.402	–6°.030	–6°.030	4-3-2-1-0
7	103	7028.872	651	98°.013	14.71	-24°.466	-6°.990	-3°.495	73625140
3	44	7044.110	666	98°.074	14.7	–24°.545	–8°.175	–8°.175	3--2--1--0
5	73	7065.583	687	98°.161	14.6	-24°.658	-9°.870	-4°.952	5-2-4-1-3-0
7	102	7074.835	697	98°.199	14.57	-24°.706	-10°.590	-3°.350	72461350
2	29	7098.100	720	98°.294	14.5	–24°.828	–12°.414	–12°.414	2---1---0
7	101	7121.556	743	98°.391	14.43	-24°.951	-14°.265	-3°.356	75316420

K	N_K	ℓ [km]	H [km]	i	P/d	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)$	$\Delta\lambda_1$	Bahnfolge
5	72	7130.993	753	98°.430	14.4	-25°.000	-15°.000	-5°.000	5-3-1-4-2-0
3	43	7153.134	775	98°.523	14.3	–25°.116	–16°.740	–8°.376	3--2--1--0
7	100	7169.054	791	98°.589	14.29	-25°.200	-18°.000	-3°.600	74152630
4	57	7181.054	803	98°.640	14.25	–25°.263	–18°.945	–7°.318	4-1-2-3-0
5	71	7197.935	820	98°.712	14.2	-25°.352	-20°.280	-5°.064	5-1-2-3-4-0
6	85	7209.245	831	98°.760	14.17	-25°.412	-21°.176	-4°.236	6123450
7	99	7217.351	839	98°.795	14.14	-25°.455	-21°.825	-3°.630	71234560
1	14	7266.467	888	99°.008	14	–25°.714	0°.000	0°.000	1-------0
7	97	7316.427	938	99°.228	13.86	-25°.979	-3°.706	-3°.706	76543210
6	83	7324.837	947	99°.265	13.83	-26°.024	-4°.337	-4°.337	6543210
5	69	7336.652	959	99°.318	13.8	-26°.087	-5°.218	-5°.218	5-4-3-2-1-0
4	55	7354.464	976	99°.400	13.75	–26°.182	–6°.548	–6°.548	4-3-2-1-0
7	96	7367.253	989	99°.455	13.71	-26°.250	-7°.500	-3°.750	73625140
3	41	7384.391	1006	99°.553	13.7	–26°.341	–8°.774	–8°.774	3--2--1--0
5	68	7408.553	1030	99°.644	13.6	-26°.471	-10°.594	-5°.283	5-2-4-1-3-0
7	95	7418.969	1041	99°.692	13.57	-11°.364	-3°.788	-3°.788	72461350
2	27	7445.169	1067	99°.813	13.5	–26°.667	–13°.334	–13°.334	2---1---0
7	94	7471.601	1093	99°.936	13.43	-26°.809	-15°.326	-3°.832	75316420
5	67	7482.240	1104	99°.986	13.4	-26°.866	-16°.124	-5°.375	5-3-1-4-2-0
3	40	7507.211	1129	100°.104	13.3	–27°.000	–18°.000	–9°.000	3--1--2—0
7	93	7525.175	1147	100°.190	13.29	-27°.097	-19°.358	-3°.872	74152630
4	53	7538.719	1161	100°.255	13.25	–27°.170	–20°.380	–6°.790	4-3-2-1-0
6	79	7570.559	1192	100°.409	13.17	-27°.341	-22°.784	-4°.557	6123450
5	66	7557.783	1180	100°.347	13.2	-27°.273	-21°.822	-5°.451	5-1-2-3-4-0
7	92	7579.718	1202	100°.453	13.14	-27°.391	-23°.474	-3°.917	71234560
1	13	7635.259	1257	100°.726	13	–27°.692	0°.000	0°.000	1-------0

Tabelle 28-54: **Z**usammenstellung aller reproduzierbaren kreisförmigen sonnensynchronen Bahnen von Erdsatelliten bis in etwa 1200 km Höhe und Wiederholbarkeit nach 1 - 7 Tagen

28.9.5 Bahndefinition bei reproduzierbaren sonnensynchronen Bahnen

Für reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen sind zwei Parameter vorgegeben: die drakonitische bzw. Sonnen-synodische Umlaufzeit $\overline{P_D}$ aus den Formeln (28.438) bzw. (28.445), sowie die Bedingung (28.419) für die Sonnensynchronität. Im Zusammenhang mit der drakonitischen Bewegung wurde ein entsprechendes Problem bearbeitet: aus drakonitischer Umlaufzeit und Knotenlängendrift wird das Parameterpaar mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und mittlere Inklination $\overline{i}_0$ erarbeitet. Eine Näherung der großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0^{(0)}$ wird mit dem Verfahren in Abschnitt 23.6.1 berechnet. Diese Näherung wird dann in Formel (28.431) eingesetzt um eine Näherung der Inklination zu

erhalten. Die iterative Verbesserung muss dann in Kombination der beiden überlagerten Funktionen (23.259) entsprechend Abschnitt 23.6.2 durchgeführt werden.

In den folgenden beiden Beispielen wird die Iteration mit den Genauigkeitsschranken $|\Delta a| \le 0.001\,\text{km}$, $|\Delta i| \le 0''.004$ durchgeführt.

BEISPIEL 1: Eine kreisförmige sonnensynchrone Bahn sei nach 27 Tagen und 421 drakonitischen Umläufen Spur-reproduzierbar. Welche Bahnparameter („*Kepler*-Elemente“) sind dadurch bestimmt?

Als Näherung nullter Ordnung[1] liefert Formel (23.247) $\bar{a}_0^{(0)}$ = 6767.936680 km. Eine erste Verbesserung unter der Annahme $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -2\pi / 86400\,\text{s}$ liefert Formel (23.257) $\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ = -6.121641 km zu $\bar{a}_0^{(1)}$ = 6761.815039. Mit diesem Wert ergibt Formel (28.431) die Näherung erster Ordnung für die Inklination $\bar{i}_0^{(1)}$.= 96°.970431. Die iterative Verbesserung mit den überlagerten Funktionen (23.259) ergibt nach 6 Iterationsschritten schließlich

$$\bar{a}_0 = \overline{a_{QDS}} = 6761.812775\ \text{km},\ \bar{i}_0 = \overline{i_{QDS}} = 96°.99365127 \quad ◀$$

BEISPIEL 2: Eine kreisförmige sonnensynchrone Bahn habe pro Tag eine Knotenlängenrestverschiebung von einem Drittel der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf. Außerdem sei angenommen, dass pro Tag 16 drakonitische Umläufe stattfinden. Bestimme Halbachse und Inklination.

In Formel (28.445) muss $K = 1$, $K_1 : K_2 = 1 : 3$ gesetzt werden, außerdem wird N_K = 16 angenommen. Der Satellit muss auf dieser Bahn die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D}$ = 5514.893617 sec und die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -22°.978723 / \overline{P_d}$ haben. In nullter Näherung beträgt die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(0)}$ = 6746.596700 km, die Verbesserung erster Ordnung ergibt $\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ = -6.149479 km. Die Näherungswerte erster Ordnung sind. $\bar{a}_0^{(1)}$ = 6740.437221 km, $\bar{i}_0^{(1)}$ = 96°.893230. Die Iteration führt nach zwei Iterationsschritten auf das verfeinerte Ergebnis

$$\bar{a}_0 = \overline{a_{QDS\,0}} = 6740.434941\,\text{km},\ \bar{i}_0 = \overline{i_{QDS\,0}} = 96°.91636040.$$

Die resultierende Bahn vollführt nach $K = 3$ Tagen $N_K = 47$ drakonitische Umläufe. ◀

[1] in Abschnitt 23.6.1

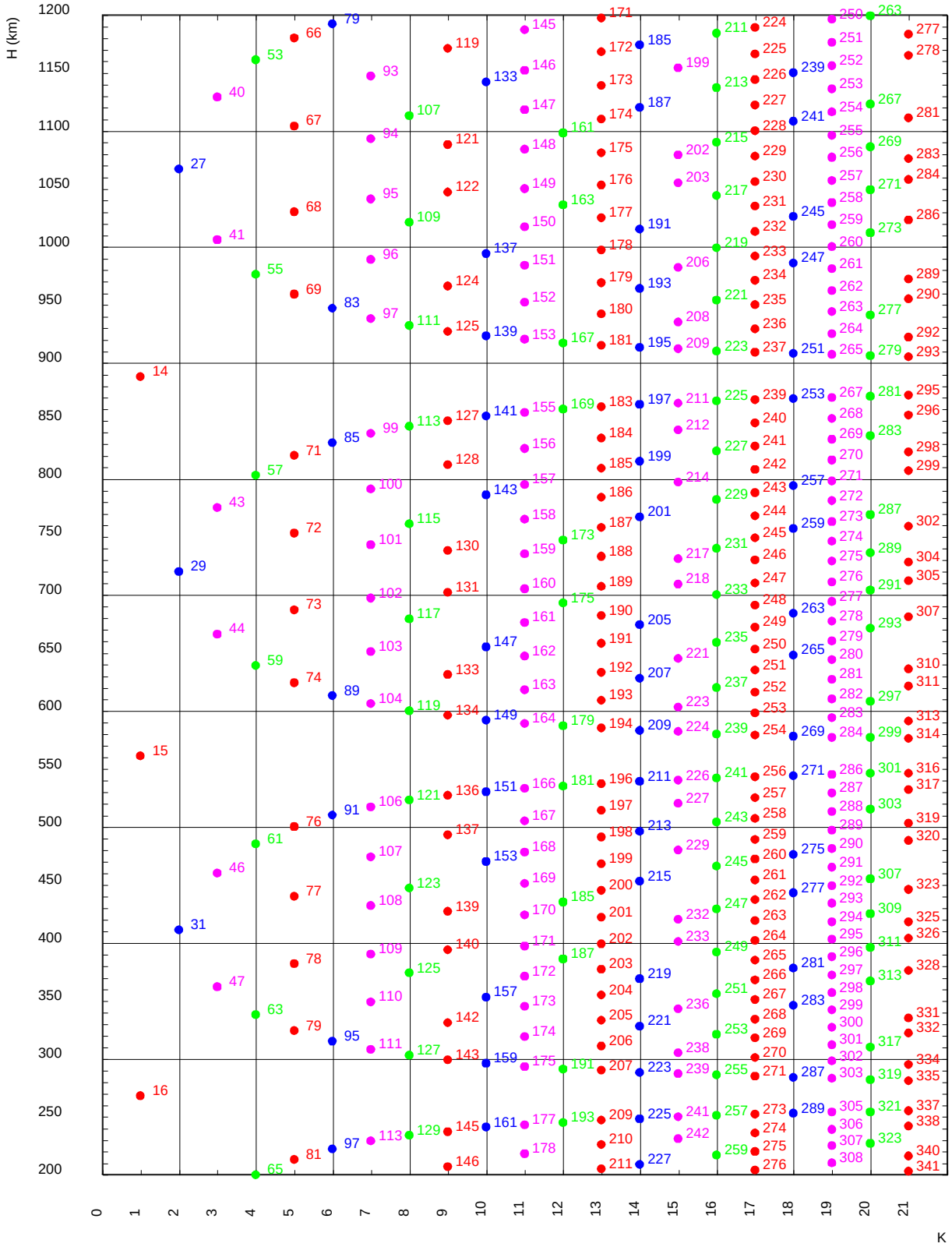


Bild 28-57: Reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen im Höhenbereich 200 km – 1200 km und für 1 – 21 Tage Reproduzierbarkeit

28.9.6 Manöver zwischen sonnensynchronen Bahnen

Anschließend an die Überlegungen in Abschnitt 23.9.5 werden in diesem Abschnitt Manöver zwischen sonnensynchronen Bahnen untersucht, die Subzyklen zu einer vorgegebenen Bahn erster Wahl sein sollen. Die Subzyklen werden in der Praxis notwendig, um für hochauflösende Sensoren eine kontinuierliche Überdeckung des Äquators und damit der ganzen Erdoberfläche ermöglichen zu können (vergleiche dazu Bild 23.33).

BEISPIEL: Es werde als Ausgangsbahn die kreisförmige sonnensynchrone Bahn mit der Reproduzierbarkeit 7:104 gewählt. Bild 28-58 stellt eine Untermenge zu Bild 28-57 dar. Eingezeichnet sind Manöver zwischen der Primärbahn zu zwei Bahnen, die Subzyklen darstellen.

Nach Tabelle Anhang G.2 (Band V) haben die Bahnen die mittleren Bahnparameter:

		7:104	39:580
Mittlere große Bahnhalbachse	$\overline{a_0}$	6983.646 km	6979.049 km
Gemittelte Bahnhöhe (bei Bezug auf den mittleren Äquatorradius der Erde)	$\overline{H}$	605.506 km	600.913 km
Inklination	$\overline{i_0}$	97°.833	97°.8153
Knotenlängenverschiebung	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	–24°.231	-24°.2069
Knotenlängenrestverschiebung nach 1 Tag	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	–3°.465	-3°.1034
Kürzeste mögliche Knotenlängenverschiebung	$\overline{\Delta\lambda_0}$	–3°.465	-0°.6207
Manöver in Halbachse	Δa	-	4.597 km
Geschwindigkeitsinkrement	ΔV_a	-	2.4865 m/s
Treibstoffbedarf [m = 520kg]	Δm_a	-	0.462 kg
Manöver in Inklination	Δi	-	0°.0177
Geschwindigkeitsinkrement	ΔV_i	-	2.334 m/s
Treibstoffbedarf [m = 520kg]	Δm_i	-	0.433 kg
Gesamttreibstoffbedarf	Δm	-	0.9 kg

Tabelle 28-55: Manöverbedarf zwischen der sonnensynchronen kreisförmigen 7:104 Bahn und der Bahn mit Subzyklus 39:580

		7:104	41:614
Mittlere große Bahnhalbachse	$\overline{a_0}$	6983.646 km	6946.689 km
Gemittelte Bahnhöhe (bei Bezug auf den mittleren Äquatorradius der Erde)	$\overline{H}$	605.506 km	568.549 km
Inklination	$\overline{i_0}$	97°.833	97°.6887
Knotenlängenverschiebung	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	–24°.231	-24°.1967
Knotenlängenrestverschiebung nach 1 Tag	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	–3°.465	-2°.9508
Kürzeste mögliche Knotenlängenverschiebung	$\overline{\Delta\lambda_0}$	–3°.465	-0°.5902
Manöver in Halbachse	Δa	-	36.957 km
Geschwindigkeitsinkrement	ΔV_a	-	19.990 m/s
Treibstoffbedarf [m = 520kg]	Δm_a	-	3.699 kg
Manöver in Inklination	Δi	-	0°.143
Geschwindigkeitsinkrement	ΔV_i	-	19.027 m/s
Treibstoffbedarf [m = 520kg]	Δm_i	-	3.522 kg
Gesamttreibstoffbedarf	Δm	-	7.2 kg

Tabelle 28-56: Manöverbedarf zwischen der sonnensynchronen kreisförmigen 7:104 Bahn und der Bahn mit Subzyklus 41:614

Berechnet sind die Geschwindigkeitsinkremente in Halbachse und Inklination, das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement und der Treibstoffbedarf für einen Satelliten mit Masse m= 520 kg.

Bei Vergleich des Treibstoffbedarfs für Halbachsen- und Inklinationsänderung in Tabelle 28-55 $\left(\Delta V_a : \Delta V_i = 2.4865 : 2.3340\right)$ und Tabelle 28-56 $\left(\Delta V_a : \Delta V_i = 19.990 : 19.027\right)$ fällt auf, dass die Werte für Halbachsenkorrektur und Inklinationskorrektur jeweils größenordnungsmäßig sehr ähnlich sind. Diese Beobachtung trifft generell auf den Manöverbedarf zwischen (kreisförmigen) reproduzierbaren sonnensynchronen Satellitenbahnen zu. ◄

Die letztere Beobachtung führt zu der sehr interessanten heuristischen Aussage:

- *Bahnmanöver zwischen verschiedenen sonnensynchronen Bahnen sind wegen der Anpassung der Inklination etwa doppelt so teuer wie Manöver zwischen beliebigen Bahnen, bei denen nur ein Bahnparameter geändert werden muss. Die Manöver für Bahnhöhenmanöver und Inklinationsmanöver sind in diesem Fall etwa gleich teuer.* ◄

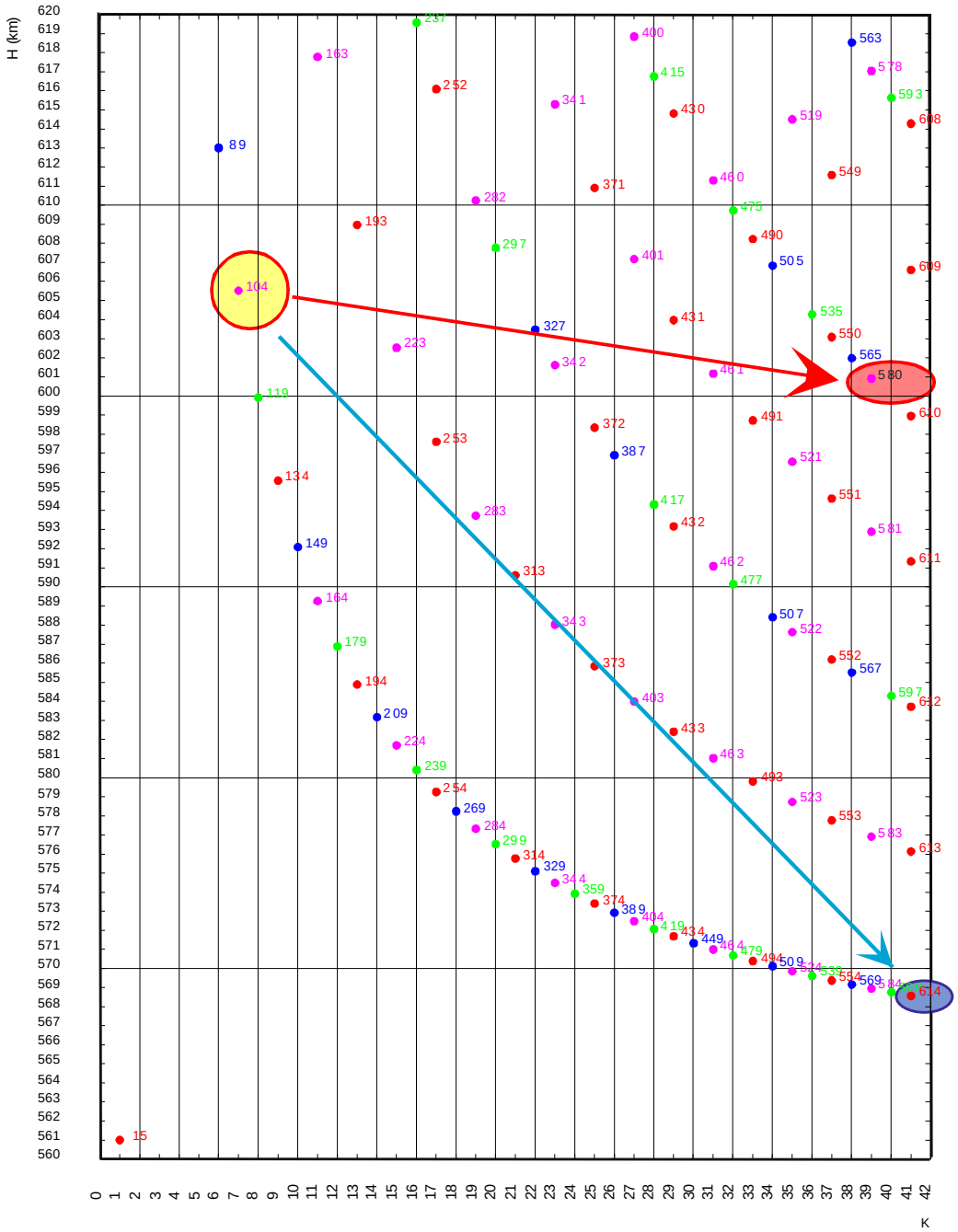


Bild 28-58: Beispiel für einen Treibstoff-geringen Übergang zwischen zwei reproduzierbaren kreisnahen sonnensynchronen Bahnen

28.9.7 Radiale Geschwindigkeit einer sonnensynchronen Bahn

Für gewisse bahnanalytische Untersuchungen ist das Geschwindigkeitsverhalten einer sonnensynchronen Bahn von Interesse. In Bild 28-59 ist der Verlauf einer formstabilen sonnensynchronen Bahn über einen drakonitischen Umlauf dargestellt.

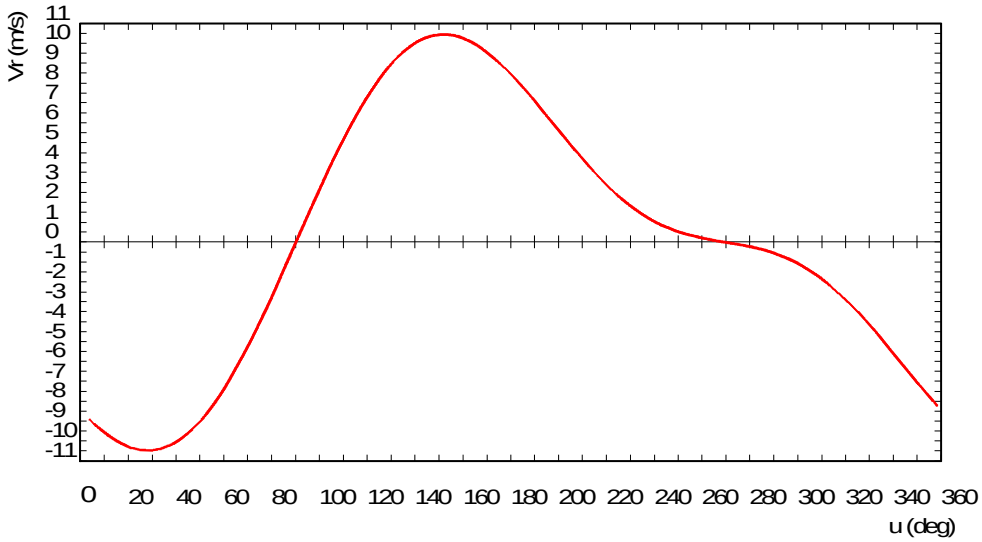


Bild 28-59: Verlauf der radialen Geschwindigkeit $V_R = \dot{r}$ für die formstabile sonnensynchrone Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a} = 6769.14\,\text{km}$ unter Berücksichtigung der Bewegungseinflüsse durch J2, J3, J4 über einen drakonitischen Umlauf

28.10 Reproduzierbarkeit in der Zeit

Die Reproduzierbarkeit einer Subsatellitenbahn konnte im Rahmen der drakonitischen Bewegung hergeleitet werden (Abschnitt 23.9). Wegen des Bezugs der Zeit zur Sonne liegt es nahe, dass eine Reproduzierbarkeit in Zeit im Rahmen der Sonnen-synodischen Bewegung definiert werden kann. Von besonderem Interesse ist eine Verknüpfung von Reproduzierbarkeit in Subsatellitenbahn und Zeit. Die hier behandelten Fälle reproduzierbarer Satellitenbahnen können als Erweiterung der in Abschnitt 28.8 insbesondere Unterabschnitt 28.8.3 (ab Seite 125) untersuchten Äquivalenzbahnen mit strenger 1:1 Zuordnung von drakonitischer und Sonnen-synodischer Bewegung.

28.10.1 Beliebige Äquivalenz drakon. und Sonnen-synodischer Bewegung

Aus der Definition der (sonnen) synodischen Umlaufzeit (28.156) und dem Zusammenhang von mittlerem Sonnenwinkel und mittlerer Ortssonnenzeit (28.251) folgt

$$\left|T\left(t_0+\overline{P_S}\right)-T\left(t_0\right)\right| = \left|\tau\left(t_0+\overline{P_S}\right)-\tau\left(t_0\right)\right|\frac{24^h}{360°} \quad . \tag{28.446}$$

Nach einem mittleren Sonnen-synodischen Umlauf wiederholt sich die mittlere Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt. Mit (28.208) $T = t + \lambda$ zeigt der Ausdruck

$$\left|\overline{P_S}+\lambda\left(t_0+\overline{P_S}\right)-\lambda\left(t_0\right)\right| = 24^h \quad , \tag{28.447}$$

dass nach einem synodischen Umlauf nicht notwendig eine Reproduzierbarkeit des Subsatellitenpunktes vorliegt, denn im Allgemeinen ist $\lambda\left(t_0+\overline{P_S}\right) \neq \lambda\left(t_0\right)$.

Interessanter ist es zu verlangen, dass sich der Satellit nach einer bestimmten Anzahl von synodischen Umläufen wieder zur selben Ortszeit T im aufsteigenden Knoten befinden soll. Dann wird die mittlere Satellitenbahn so durchlaufen, dass jeder Breitenkreis (zumindest bei exzentrischen Bahnen näherungsweise) wieder zur selben Ortszeit überflogen wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn der

Satellit eine ganzzahlige Anzahl N_d von mittleren drakonitischen und eine ganzzahlige Anzahl N_S von mittleren synodischen Umläufen durchlaufen hat. In diesem Fall muss gelten

$$N_D \overline{P_D} = N_S \overline{P_S} \quad . \tag{28.448}$$

Diese Beziehung kann als beliebiger $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$– Äquivalenz-*Zyklus von Satellitenbahnen* bezeichnet werden[1].

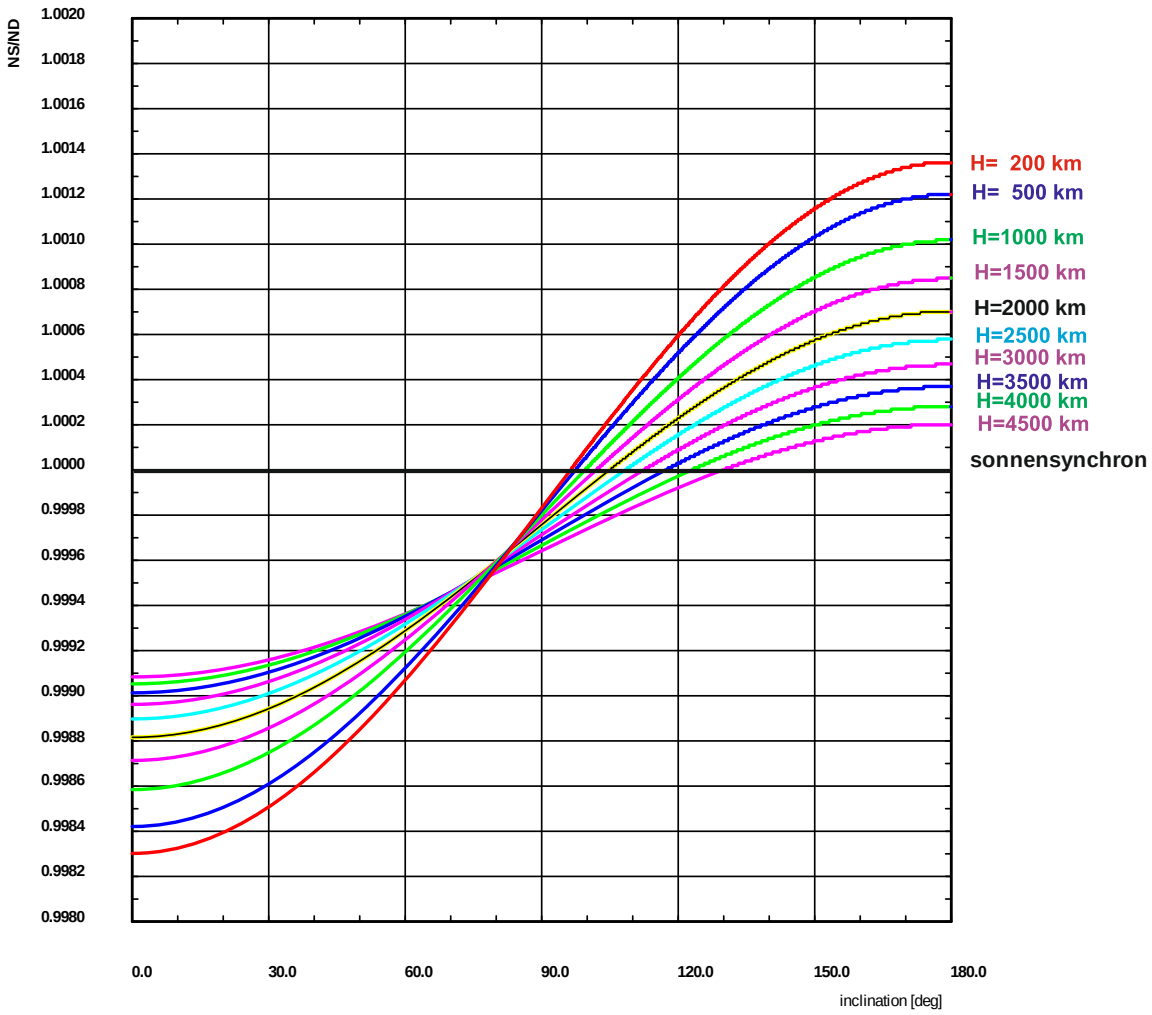


Bild 28-60: Die Relationen N_S / N_D des Zyklus (28.448) über alle Inklinationen für verschiedene Bahnhöhen für kreisförmige Satellitenbahnen. Die sonnensynchrone Bahn mit $N_D / N_S = 1$ ist markiert.

Die mittlere drakonitische und die mittlere (Sonnen) synodische Umlaufzeit sind in diesem Fall kommensurabel. Für die Sonnen-synodische Bewegung folgt aus Beziehung (28.163) für die mittlere Knotensonnendrift die allgemeingültige Zuordnung

$$\dot{\tau}_{\Omega\overline{\odot}_S} = \dot{\Omega}_s - n_\odot = \overline{n_S} - \overline{n_D} = 2\pi\left(\frac{1}{\overline{P_S}} - \frac{1}{\overline{P_D}}\right) \quad . \tag{28.449}$$

[1] Der originale auf die Chaldäer zurückgehende 18-jährige Finsterniszyklus hat die Zahlenwerte $N_S = 223, N_D = 242$. Es ist $N_s : N_D = 0.9214876$.

Die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung (28.260) kann mit der Relation (28.448) berechnet werden

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}\,\overline{P_D} = 2\pi\left(\frac{N_S}{N_D}-1\right) \quad . \tag{28.450}$$

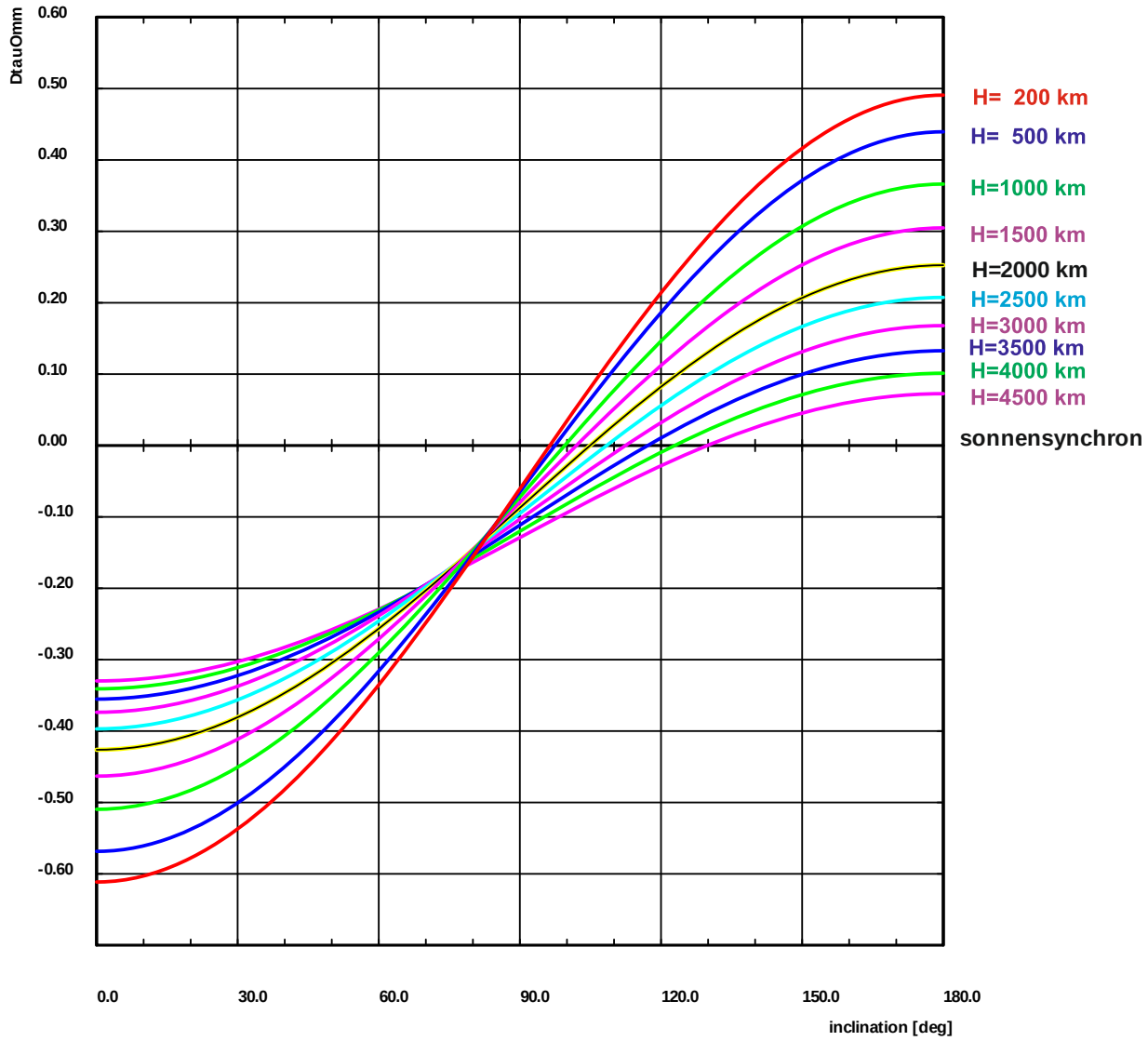


Bild 28-61: Die Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ pro drakonitischem Umlauf über alle Inklinationen für verschiedene Bahnhöhen für kreisförmige Satellitenbahnen. Die sonnensynchrone Bahn mit $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0.0$ ist markiert. (vgl. Bild 28-60 mit anderer Ordinatenleiste nach Formel (28.450) auf Seite 182. Eine dritte gleichartige Darstellung jedoch mit anderer und verlängerter Ordinate siehe in Bild 28-62 auf Seite 187.)

Die aus dieser Beziehung folgende Relation

$$\frac{N_S}{N_D} = 1 + \frac{\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}}{2\pi} = 1 + \frac{\dot{\Omega}_s - n_\odot}{\overline{n_D}} = 1 + \frac{\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}}{\overline{n_D}} = \frac{\overline{n_S}}{\overline{n_D}} \tag{28.451}$$

erlaubt entsprechend Bild 28-60 eine Übersicht über geeignete Zahlenpaare $N_S : N_D$, um sinnvolle Satellitenbahnen aussuchen zu können, welche sich mit dem beliebigen Äquivalenz-Zyklus (28.448) beschrieben werden können. Es muss beachtet werden, dass die Relation $N_S : N_D$ so gewählt werden

muss, dass die Einschränkung (28.267) beachtet werden kann[1]. Für erdnahe Satelliten bis zur Halbachse $\bar{a}_0 \approx 11000$ km (wie in Bild 28-60) lautet Einschränkung

$$0.994444 \le \frac{N_S}{N_D} \le 1.001389 \quad . \tag{28.452}$$

Wird erlaubt, dass auch der Erdmond mit $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} \approx -25°.3$ als ein Erdsatellit definiert werden kann, womit auch die geosynchronen Bahnen eingeschlossen werden, lautet die Einschränkung (hier auf $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -30°.0$ bezogen):

$$0.916667 \le \frac{N_S}{N_D} \le 1.001389 \quad . \tag{28.453}$$

Anmerkung 1: Der hier untersuchte Fall, mit der Forderung nach Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn in der Zeit, ist eine wesentliche Erweiterung des Begriffes der Sonnensynchronen Bewegung, die wegen Beziehung (28.422) ein wichtiger Spezialfall ist. Diese ist, wie die Beziehung (28.425) zeigt, stets in der Zeit reproduzierbar. ◀

Anmerkung 2: Der Äquivalenz-Zyklus (28.448) besagt nur, dass nach N_D drakonitischen Umläufen bei Knotenüberflug wieder exakt dieselbe mittlere Sonnenzeit T_m besteht. Dies besagt aber nicht, dass es sich wieder um denselben Knoten (mit derselben geographischen Knotenlänge) handeln würde. ◀

28.10.2 Bahnauswahl mit beliebigem PD:PS Äquivalenz-Zyklus

Nach einer bestimmten Anzahl von Umläufen durchlaufe ein Satellit den aufsteigenden Knoten seiner Bahn wieder zur selben mittleren Sonnenzeit. Welche Bahnelemente können dadurch festgelegt werden?

Es seien N_D drakonitische Umläufe vergangen. Nach dem Äquivalenz-Zyklus (28.448) müssen dann genau N_S Sonnen-synodische Umläufe zurückgelegt worden sein. Die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ kann daher aus Formel (28.450) berechnet werden. Somit wird die Lösung dieser Aufgabe auf die Bahnauswahl in Abschnitt 28.7.4.2 auf Seite 90 zurückgeführt. Das Verfahren ist geeignet in erster Linie die große Bahnhalbachse zu bestimmen. Die Berechnung der anderen Bahnparameter $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ wird wegen der Empfindlichkeit des Verfahrens im vorliegenden Zusammenhang nicht untersucht.

BEISPIEL 1: Eine kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung $i = 30°$ werde nach 300 drakonitischen und 299 synodischen Umläufen in der Zeit reproduziert. In welcher Bahnhöhe muss der Satellit fliegen?

Die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.2\left[1/\overline{P_D}\right] \hat{=} -4.8\left[\min/\overline{P_D}\right]$. Sie erfüllt die Einschränkung (28.267) (auf Seite 82) bzw. mit der Relation N_S / N_D = 0.9966667 die

[1] Abschnitt 28.7.1 ab Seite 71

Einschränkung (28.453). Dieser Wert ist in Bild 28-60 nicht mehr enthalten, weist also auf eine erheblich höhere Bahn hin. Eine wesentliche Aussage kann aber schon abgeleitet werden: höher geneigte Bahnen sind für den vorgegebenen Äquivalenz-Zyklus nicht möglich. Es darf angenommen werden, dass für $i = 30°$ eine Bahn gefunden werden kann.

Die Iteration mit der überlagerten Funktion (28.276) ergibt mit der vorgegebenen Genauigkeitsgrenze 10^{-6} die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 47924.0001 km und die mittlere Bahnhöhe $\bar{H}$ = 41545.864 km. Bild 28-55 (auf Seite 169) zeigt, dass es in dieser Bahnhöhe keine sonnensynchronen Bahnen geben kann. Der Sonnenbezug einer Bahn muss daher über die Reproduzierbarkeit in der Zeit hergestellt werden. Die Kontrolle der mittleren Knotenlängenverschiebung mit dem ersten Teil der Formel (28.450) ergibt $-1°.200000000005$. Der a posteriori Fehler zum Eingabewert liegt somit weit unter $\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega\odot}}\right) = \left|0''.36\times10^{-10}\right|$. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_D}$ = 104403.631 sec = 1^d.208375359, die mittlere (sonnen-) synodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ = 104752.07 sec. Zum Test des Äquivalenz-Zyklus werden die Produkte gebildet.:

$$300\times\overline{P_D} = 31321089.1929\,\text{sec} \triangleq 362.512606399\,\text{d}$$

$$299\times\overline{P_S} = 31321089.1931\,\text{sec} \triangleq 362.512606402\,\text{d}\ .$$

Bei Bezug auf die Epoche t_0 : 2018-04-01/00:00:0.0 findet der erste aufsteigende Bahnknoten zur mittleren lokalen Sonnenzeit T_{asc-1} :11:22:46.199 (mit der Knotenlänge $\lambda_{\Omega 1}$ = 170°.692), der absteigende Knoten zu T_{desc-1} :23:20:22.209statt. Nach 300 drakonitischen Umläufen hat der aufsteigende Knoten für das Datum 2019-03-29 die mittlere Sonnenzeit $T_{asc-300}$: 11:22:49.255 (mit der Knotenlänge $\lambda_{\Omega 300}$ = 346°.167), der absteigende Knoten $T_{desc-300}$:23:20:256. Die Abweichungen von ungefähr 3 Zeit-Sekunden können im Wesentlichen auf Rundungsfehler über den sehr langen Zeitraum von etwa 362 Tagen zurückgeführt werden. Pro Tag verschiebt sich die mittlere Sonnenzeit um ΔT_m = -3.9723 min/d. ◄

BEISPIEL 2: Wird die Bahn mit dem vorhergehenden Äquivalenz-Zyklus $N_S : N_D$ = 299:300 unter der Neigung $i = 94°$ gewünscht, ergibt sich $\bar{a}_0$ = 48180.643 km. Die Umlaufzeiten sind $\overline{P_D}$ = 105252.394 sec, $\overline{P_S}$ = 105604.409 sec. Pro Tag verschiebt sich die mittlere Sonnenzeit etwa um ΔT_m = -3.9402 min/d. ◄

BEISPIEL 3: Es werde wieder die Bahn $N_S : N_D$ = 299:300 vorgegeben, jedoch mit der Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.5 und der Inklination $\bar{i}_0$ = 30°. Die Bahnhalbachse beträgt $\bar{a}_0$ = 47734.594 km, die Perigäumshöhe H_P = 17489.160 km, die Apogäumshöhe H_A =65223.754 km Die Umlaufzeiten sind $\overline{P_D}$ = 103781.160 sec, $\overline{P_S}$ = 104128.114 sec, die Zeitverschiebung pro mittlerem Sonnentag ΔT_m = -3.9961 min/d. ◄

28.10.3 Vorgabe einer Zeitdrift

Die unmittelbare Anwendung eines Äquivalenz-Zyklus für Satellitenbahnen umfasst riesige Zeiträume im erdnahen Bereich oder führt auf hohe Bahnen. Letzteres beschreiben die Beispiele im vorhergehenden Abschnitt. Ein geeignetes Umlaufverhältnis kann etwa aus Bild 28-60 (auf Seite 182) abgelesen werden. Zum Beispiel entsprechen dem Wert N_S / N_D = 1.0012 die Umlaufzahlen N_S = 2503 synodische Umläufe zu N_D = 2500 drakonitischen Umläufen. Die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0°.432 / \overline{P_D}$ entsprechend der Zeitverschiebung $\Delta T_m = 1.728\,\text{min}/\overline{P_D}$. Nach Bild 28-60 sind hierfür nur retrograde Bahnen mit Inklinationen $i > 155°$ möglich. Das Verfahren in Abschnitt 28.7.4.2 (auf Seite 28.7.4.2) liefert für eine kreisförmige Bahn mit der Inklination $\bar{i}_0$ = 160° die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 6729.904 km mit der drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ = 5474.1366 sec. Das bedeutet: Die Reproduzierbarkeit im Sinne des Äquivalenz-Zyklus ereignet sich nach etwas mehr als 158 Tagen. Solche Zeiträume sind in dem meisten Fällen einer Satellitenbahnanalyse uninteressant, da sie nur mit erheblichem Bahnkorrekturaufwand zu überbrücken sind.

Wesentlich interessanter im Hinblick auf den Zusammenhang einer Satellitenbewegung mit der Zeit ist der Blick auf die Zeitverschiebung

$$\Delta T_m = 4 \times \overline{\Delta\tau_\Omega}\left[\text{min}/\overline{P_D}\right] \tag{28.454}$$

in mittlerer Sonnenzeit, die also bei jedem drakonitischem Umlauf zum Tragen kommt. Wird ΔT_m vorgegeben kann mit der Knoten-Sonnenverschiebung aus Formel (28.454) eine Bahnauswahl stattfinden, wie sie in Abschnitt 28.7.4.2 besprochen wird.

Entsprechend der Einschränkung (28.267) muss die vorzugebende Zeitverschiebung im Fall kreisförmiger erdnaher Bahnen die Bedingung

$$-8\,\text{min}/\overline{P_d} \le \Delta T_m < 2\,\text{min}/\overline{P_d} \tag{28.455}$$

erfüllen, unter Einschluss des extremalen Wertes $\overline{\Delta\tau_\Omega} = -40° / \overline{P_d}$ das Intervall etwa

$$-2.7\,h/\overline{P_d} \mathrel{\hat{=}} -160\,\text{min}/\overline{P_D} < \Delta T_m < 2\,\text{min}/\overline{P_D} \quad . \tag{28.456}$$

Bevor Start einer solchen Bahnauswahl müssen erhebliche Einschränkungen beachtet werden, wie aus Bild 28-62 abgelesen werden können. Dieses Bild ist eine wesentliche Erweiterung von Bild 28-60 bzw. Bild 28-61 unter Einschluss höherer Bahnen bis über geosynchrone Bahnen hinaus. In der Ordinate ist in diesem Fall die Zeitverschiebung ΔT_m pro drakonitischem Umlauf aufgetragen. Im Hinblick auf höhere Bahnen zeigt sich ein zunächst verwirrendes Verhalten der Zeitverschiebung über der Inklination, das auf mögliche Mehrdeutigkeiten hinweist. Dieses Verhalten kann mit Bild 28-25 auf Seite 80 gedeutet werden: Der Verlauf der Kurven für eine Inklination über der Knoten-Sonnenverschiebung kann in manchen Fällen zwei Bahnen für eine gegebene Knoten-Sonnenverschiebung, entsprechend einer Zeitverschiebung ergeben. Diese beiden Bahnen unterscheiden sich erheblich durch die Bahnhöhe, können also je nach Bedarf eindeutig ausgewählt werden. Die Kurven sind für kreisförmige Bahnen berechnet. Bild 28-26 weist darauf hin, dass dieser Sachverhalt auch für exzentrische Bahnen zutrifft.

Die Inklination einer Bahn muss bei Vorgabe der Zeitverschiebung sorgfältig ausgewählt werden, da nicht beliebige Inklinationen zum Ziel einer Bahnauswahl führen. Einschränkende Vorgaben zur Auswahl der Inklination werden im nächsten Abschnitt untersucht.

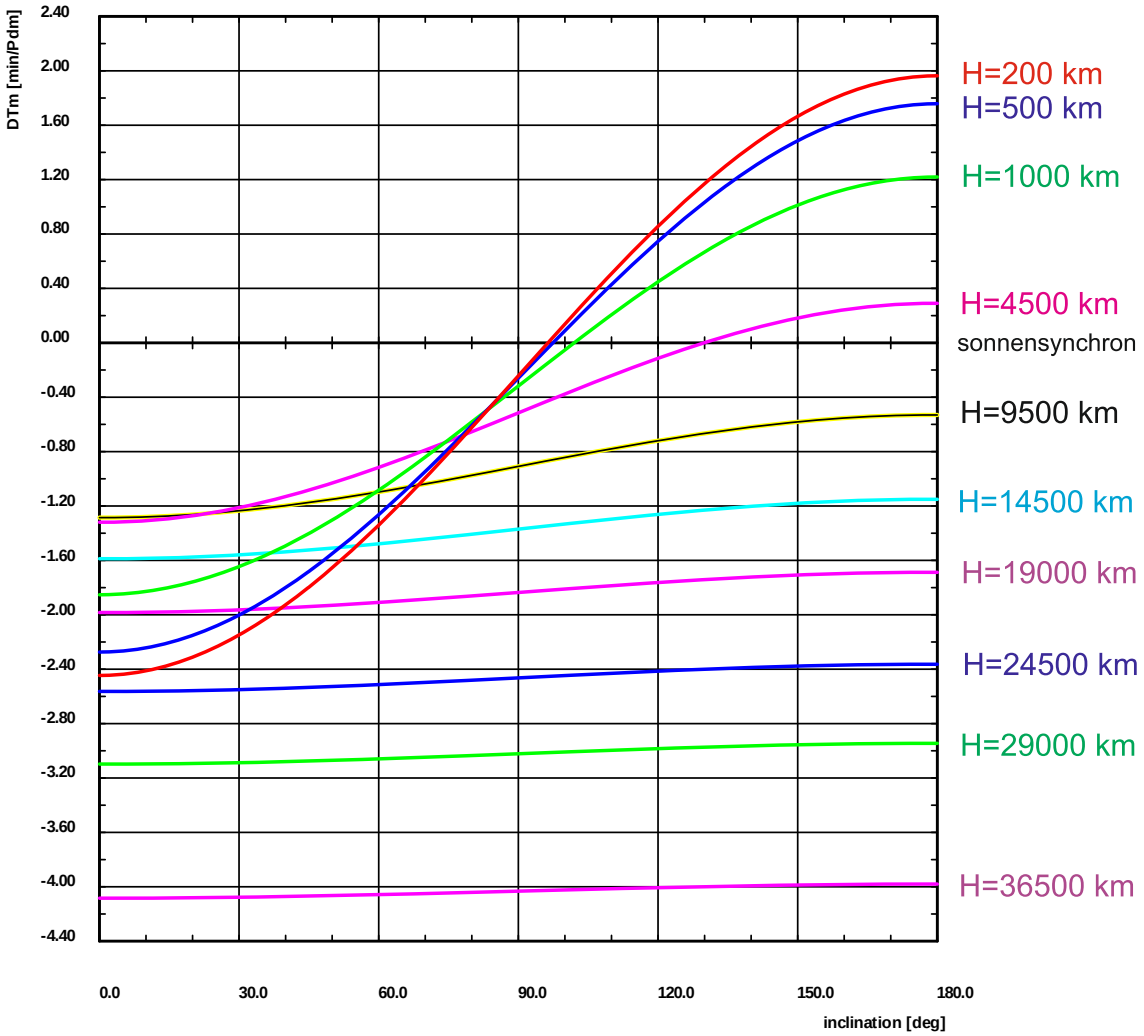


Bild 28-62: Die Zeitverschiebung ΔT_m in Minuten pro drakonitischem Umlauf über alle Inklinationen für verschiedene Bahnhöhen bei kreisförmigen Satellitenbahnen. Die sonnensynchrone Bahn mit $\Delta T_m = 0.0$ min ist markiert. (vgl. Bild 28-61 auf Seite 183)

BEISPIEL 1: Vorgegeben sei eine kreisförmige Bahn unter der Inklination $\bar{i}_0$ = 160°. Der Zeitverschiebung $\Delta T_m =$ 1.7128 min/$\overline{P_D}$ entspricht die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0°.432/\overline{P_D}$. Nach Bild 28-62 kann es nur eine Lösung geben: $\bar{a}_0$ = 6729.904 km mit der mittleren Kreisbahnhöhe $H = 352\,\text{km}$. Die Probe ergibt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}_{contr}$ = 0°.4320000006532/$\overline{P_D}$ bei der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ = 5474.136594727 sec. Die Berechnung wurde mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta a = \pm 10^{-5}\,\text{km}$, $\Delta fct = \pm 10^{-9}$ durchgeführt. ◀

BEISPIEL 2: Vorgegeben sei eine kreisförmige Bahn unter der Inklination $\bar{i}_0$ = 150°. Der Zeitverschiebung ΔT_m = 1.4 min/$\overline{P_D}$ entspricht die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 0°.35/\overline{P_D}$. Nach Bild 28-62 kann es wieder nur eine Lösung geben: $\bar{a}_0$ = 7034.267 km mit der mittleren Kreisbahnhöhe H= 656 km. Die Probe ergibt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}_{contr}$ = 0°.350000003499/$\overline{P_D}$ bei der mittleren

drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ = 5855.67227422 sec. Die Berechnung wurde mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta a = \pm 10^{-5}\,\mathrm{km}$, $\Delta fct = \pm 10^{-9}$ durchgeführt. ◄

BEISPIEL 3: Vorgegeben sei eine kreisförmige Bahn unter der Inklination $\overline{i_0}$ = 120°. Der Zeitverschiebung ΔT_m = -1.0 min/$\overline{P_D}$ entspricht die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}} = -0°.25/\overline{P_D}$. Nach Bild 28-62 kann es wieder nur eine Lösung geben: $\overline{a_0}$ = 18465.183 km mit der mittleren Kreisbahnhöhe $H = 12087\,\mathrm{km}$. Die Probe ergibt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}}_{contr}$ = -0°.2500000000114/$\overline{P_D}$ bei der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ = 24971.31422673 sec. Die Berechnung wurde mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta a = \pm 10^{-5}\,\mathrm{km}$, $\Delta fct = \pm 10^{-9}$ durchgeführt. ◄

BEISPIEL 4: Vorgegeben sei eine kreisförmige Bahn unter der Inklination $\overline{i_0}$ = 10°. Der Zeitverschiebung ΔT_m = -12.8 min/$\overline{P_D}$ entspricht die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}} = -3°.2/\overline{P_D}$. Nach Bild 28-62 kann es zwei Lösungen geben: die obere Bahn hat die Halbachse $\overline{a_0}$ = 92564.924 km mit der mittleren Kreisbahnhöhe *H*= 86186.8 km. Die Probe ergibt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}}_{contr}$ = -3°.199999999984 sec $\hat{=} 3^d\,5^h\,51^m$ bei der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ = 280266.3855981 sec. Die zweite untere Lösung ergibt die Bahnhalbachse $\overline{a_0}$ = 3730.858 km. Auch wenn diese Lösung ebenfalls die Eingabedaten befriedigt, ist sie sicherlich unbrauchbar. Die Berechnung wurde mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta a = \pm 10^{-5}\,\mathrm{km}$, $\Delta fct = \pm 10^{-9}$ durchgeführt. ◄

BEISPIEL 5: Vorgegeben sei eine kreisförmige Bahn unter der Inklination $\overline{i_0}$ = 40°. Der Zeitverschiebung ΔT_m = -1.2 min/$\overline{P_D}$ entspricht die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}} = -0°.3/\overline{P_D}$. Nach Bild 28-62 kann es zwei Lösungen geben: die obere Bahn hat die Halbachse $\overline{a_0}$ = 15930.914 km mit der mittleren Kreisbahnhöhe *H*= 9553 km. Die Probe ergibt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}}_{contr}$ = -0°.3000000001067/$\overline{P_D}$ bei der mittleren drakonitischen Umlaufzeit. $\overline{P_D}$ = 20004.13201461 sec Die zweite untere Lösung ergibt die Bahnhalbachse $\overline{a_0}$ = 9790.943 km mit der mittleren Kreisbahnhöhe *H*= 3412.8 km. Auch diese Lösung ebenfalls befriedigt die Eingabedaten mit der Kontrollprobe $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}}_{contr}$ = -0°.300000000183/$\overline{P_D}$.

Beide Lösungen ergeben sinnvolle Bahnen. Es muss also mit einem nicht zur Lösung gehörenden Kriterium entschieden werden, welche Bahn in diesem Fall verwendet werden soll. Die Berechnung wurde wieder mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta a = \pm 10^{-5}\,\mathrm{km}$, $\Delta fct = \pm 10^{-9}$ durchgeführt. ◄

BEISPIEL 6: Vorgegeben sei eine exzentrische Bahn mit der Exzentrizität $\overline{e_0}$ = 0.6 und der Inklination $\overline{i_0}$ = 80°. Der Zeitverschiebung ΔT_m = -12.9 min/$\overline{P_D}$ entspricht die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\overline{\odot}}} = -3°.2/\overline{P_D}$. Es wird nur eine Lösung gefunden: sie hat die große Bahnhalbachse

$\bar{a}_0$ = 92592.698 km mit der Apogäumshöhe H_{Apo} = 141770.2 km und der Perigäumshöhe H_{Peri} = 30658.9 km. Die Probe ergibt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}_{contr}$ = -3°.200000000312/$\overline{P_D}$ bei der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ = 280402.9176217 sec. Die Berechnung wurde wieder mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta a = \pm 10^{-5}\,\mathrm{km}$, $\Delta fct = \pm 10^{-9}$ durchgeführt. ◀

28.10.4 Reproduzierbarkeit in Zeit und Subsatellitenbahn

Eine weitere Verschärfung des Begriffs der Reproduzierbarkeit kann erreicht werden, wenn Reproduzierbarkeit in der Zeit und in der Subsatellitenbahn (Spurreproduzierbarkeit) gemeinsam gefordert werden[1]. Bahnfamilien mit dieser Eigenschaft müssen daher mit den Definitionen (28.436) und (28.448) die Bedingungen

$$\begin{aligned} N_K\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} &= -2\pi K \\ N_S\,\overline{P_S} &= N_D\,\overline{P_D} \end{aligned} \tag{28.457}$$

erfüllen (hier muss die Knoten-Sonnenverschiebung in Radian angenommen werden). Diese Bedingungen sind sicherlich für reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen (vgl. Abschnitt 28.9.4) erfüllt. Für alle sonstigen Bahnfamilien kann dagegen mit Formel (28.256) (auf Seite 74) die Beziehung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = \overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} - \frac{2\pi}{86400s}\,\overline{P_D} \tag{28.458}$$

gebildet werden. Mit $\overline{\Delta\tau_\Omega}$ aus Beziehung (28.450) ergeben sich schließlich die mittlere drakonitische Umlaufzeit und die säkulare Knotenlängendrift

$$\begin{aligned} \overline{P_D} &= 86400s\left(\frac{N_S}{N_D} - 1 + \frac{K}{N_K}\right) \\ \dot{\lambda}_{\Omega s} &= -\frac{2\pi}{86400s}\,\frac{1}{\left[1 + \frac{N_K}{K}\left(\frac{N_S}{N_D} - 1\right)\right]} = -\frac{K}{N_K}\,\frac{2\pi}{\overline{P_D}} \quad . \end{aligned} \tag{28.459}$$

Damit kann die Aufgabe einer Bahnauswahl der beiden *Kepler*schen Bahnelemente $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ bei Vorgabe der mittleren Epocheexzentrizität $\bar{e}_0$ auf die Lösung bei vorgegebener mittlerer drakonitischer Umlaufzeit und Knotenlängendrift in Abschnitt 23.6 zurückgeführt werden.

Es ist bemerkenswert, dass nicht die absoluten Wiederholungszahlen $\left(K, N_K, N_S, N_D\right)$, sondern nur die Relationen K / N_K und N_S / N_D berücksichtigt werden müssen.

Bevor eine Bahnauswahl mit dieser Methodik gestartet werden kann, sollte daher die Relation N_S / N_D entsprechend Bild 28-60 überprüft werden. Das Bild zeigt einen sehr kleinen Umfang an möglichen Zahlenwerten, der jedoch gegenüber der Darstellung für höhere Bahnen erheblich erweitert werden kann. Den Anfangswerten entspricht die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = 360°\left(N_S / N_D - 1\right)$ aus Formel (28.450). Vergleich mit den Grenzwerten (28.267) erlaubt eine Aussage, ob mit den Eingabewerten überhaupt eine Lösung erwartet werden darf. Entsprechend kann die mittlere Knotenlängenverschiebung mit der ersten der Formeln (28.457)

[1] Diese Überlegungen wurden erstmals vorgestellt in JOCHIM, E. F. [1983]

$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -360°\left(K / N_K\right)$ auf Sinnfälligkeit überprüft werden. Beide Zahlenwerte werden im Verlauf der iterativen Bestimmung der Bahnelemente $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ angepasst.

BEISPIEL 1: Eine Subsatellitenbahn werde nach 250 knotenbezogenen Umläufen und K= 16 Knotenumläufen in der Spur reproduziert. Außerdem bestehe Reproduzierbarkeit in der Zeit nach N_S = 999 synodischen und N_K = 1000 drakonitischen Umläufen. Die Satellitenbahn sei kreisförmig. Bestimme $\bar{a}_0$ und $\bar{i}_0$.

Aus den Formeln (28.459) folgen mit den Perioden K / N_K = 16/251=0.063745 entsprechend der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ = -22°.948207/$\overline{P_D}$ sowie N_S / N_D = 999/1000=0.999 entsprechend der mittleren Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -0°.36 / \overline{P_D}$. Mit den Formeln (28.459) ergeben sich die zur Anwendung des Verfahrens in Abschnitt 23.6 benötigten Ausdrücke $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -365°.73751/d, $\overline{P_D}$ = 5421.16972 sec

Zur Durchführung der Iteration werden folgende Genauigkeitsgrenzen verwendet:

Δa= 10^{-5} km, Δi= 0°.0001. Das Verfahren ergibt die Lösung $\bar{a}_0$ = 6671.553 km, $\bar{i}_0$ = 56°.05964242. Mit diesem Ergebnis wird zur Kontrolle die Knoten-Sonnenverschiebung berechnet: $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$ = -0°.359998693/$\overline{P_D}$, die a posteriori Genauigkeit beträgt 10^{-5} Bogensekunden. Die mittlere Knotenlängenverschiebung kann exakt reproduziert werden. ◄

BEISPIEL 2: Um die Empfindlichkeit des Verfahrens zu demonstrieren wird eine extrem hohe Bahn untersucht. Der Bahnknoten werde nach *K*= 2923 Knotenumläufen entsprechend N_K = 2381 drakonitischen Umläufen des Satelliten auf einer kreisförmigen Bahn wieder durchlaufen. Die mittlere Sonnenzeit werde reproduziert nach N_S = 299 synodischen Umläufen entsprechend N_K = 300 drakonitischen Umläufen.

Die mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -441°.94876102 / \overline{P_D}$ mit K / N_K = 1.227635447, die mittlere Knoten-Sonnenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = -1°.2 / \overline{P_D}$.

Die Lösung lautet $\bar{a}_0$ = 48343.009 km, $\bar{i}_0$ = 131°.34407149

Zur Kontrolle wird die Reproduktion der Bodenspur bei Vorgabe der soeben erhaltenen *Kepler*elemente berechnet. Es ergibt sich eine durch Rundungsfehler zu begründende Abweichung erst auf der 7. Nachkommastelle: K / N_K = 4309/3510 = 1.227635328. ◄

28.11 Schatten

In diesem Abschnitt werden Bedingungen aufgestellt, wann sich ein Satellit im Schatten seines Zentralkörpers befindet, Formeln zur Berechnung der Schattenkontaktzeiten für unterschiedliche Genauigkeitsanforderungen und der Schattengrenze auf dem Zentralkörper hergeleitet sowie die Gültigkeit der Schattenmodelle und Berechnungsmethoden abgeschätzt.

Während das Kegelmodell des Schattens – der Zentralschatten schließt sich von der Sonne aus gesehen „hinter“ dem Zentralkörper – das exakte Modell ist, genügt für viele Berechnungen, etwa bei kreisnahen und niedrigen Bahnen, für langfristige Aussagen z. B. Verlauf des Schattenfaktors oder

zur zeichnerischen Darstellung der Schattengrenze das Zylindermodell (Abschnitt 28.11.1.3). Der schließt den Schattenkegel ein. Schattenberechnungen mit dem Zylindermodell erfassen somit den ungünstigsten Fall. Sie sind gegenüber Berechnungen mit dem Kegelmodell etwas vereinfacht und können auch als Ausgangsnäherung für hochgenaue Schattenberechnungen verwendet werden, die nur iterativ zu behandeln sind.

Die Bedingung für Schatten kann in einer einzigen allgemeingültigen Beziehung zusammengefasst werden, der Schattengleichung (in Abschnitt 28.11.2).

Die Berechnung der Schattenkontaktzeiten wird auf die Sonnenrichtung bezogen, somit die synodische sonnenbezogene Satellitenbewegung zugrunde gelegt. In Konsequenz dieses Gedankens werden Formeln entwickelt, die übersichtlicher und leichter zu handhaben sind als sie bei anderem Bezug (auf das Perizentrum oder einen Knoten) entwickelt worden sind (in Abschnitt 28.11.3).

Bei erdfernen Bahnen, etwa geosynchronen Bahnen, beträgt der Fehler in der Berechnung der Schattenkontaktzeiten bei Verwendung des Zylindermodells an Stelle des Kernschattenmodells etwa 3 %, bei erdnahen Bahnen weniger als 0.5 %.

Auch der Einfluss der Abplattung des Zentralkörpers wird abgeschätzt. Zur exakten rechnerischen Berücksichtigung der Abplattung werden Formeln benötigt, die im Zusammenhang der Beobachtung einer abgeplatteten Oberfläche (in Kapitel 37, Band V) hergeleitet werden. Bei Vernachlässigung der Erdabplattung beträgt der Fehler in der Schattenberechnung für erdnahe Bahnen etwa 0.5 %. Er nimmt mit Distanz vom Erdmittelpunkt ab. In der Berechnung der Schattengrenze bewirkt die Vernachlässigung der Erdabplattung einen maximalen Fehler von etwa 500 m auf der Erdoberfläche.

Für missionsanalytische Zwecke ist der prozentuale Anteil von Schatten pro Umlauf, ausgedrückt im Schattenfaktor, bisweilen von Interesse (Abschnitt 28.11.4).

Im Rahmen der Erdbeobachtung sind wichtige Anwendungen der Schattenberechnungen die Beobachtung von Schattenzonen und Dämmerungsgebieten vom Satelliten aus, für die auch die Kenntnis des Terminators grundlegend ist (in den Abschnitten 28.11.5 und 28.11.7).

28.11.1 Die Schattenmodelle

Schattenein - bzw. -austrittszeiten sind nicht mit beliebiger Genauigkeit als Zeitpunkte beobachtbar. Einerseits sind Satelliten gewöhnlich unregelmäßig geformte Körper mit ungleichförmiger Albedo, die Schattengrenze durch den Zentralkörper andererseits durch eine Atmosphäre (Erde) bzw. eine unregelmäßige Oberfläche (Krater und Maria auf dem Mond) etwas verwischt. Wohl jeder hat schon den „szintillierenden“ Schatteneintritt eines visuell beobachtbaren Erdsatelliten gesehen. Somit lassen sich verschiedene Schattenmodelle zumindest für Satellitenbahnen mit kleiner Bahnhalbachse rechtfertigen. Ein einfacheres Modell hat den Vorteil eines geringeren Rechenaufwandes und genügt für Abschätzungen. In diesem Abschnitt werden die geometrischen Bedingungen für eine Satellitenposition in oder außerhalb eines Schattens durch den Zentralkörper in den am häufigsten verwendeten Schattenmodellen hergeleitet.

28.11.1.1 Das Kegelmodell für Zentralschatten

Die Sonne wird als ein Himmelskörper aufgefasst, dessen endliche Ausdehnung vom schattenspendenden Zentralkörper als endliche Fläche beobachtet werden kann. Ausgehend vom Rand der Sonne wird ein Schattenkegel gebildet, der sich „hinter“ dem Schattenspender schließt. Dieses in Bild 28-63 dargestellte Schattenmodell entspricht der Wirklichkeit am meisten. Es liegt auch der Theorie der Sonnen- und Mondfinsternis-Berechnungen zugrunde.

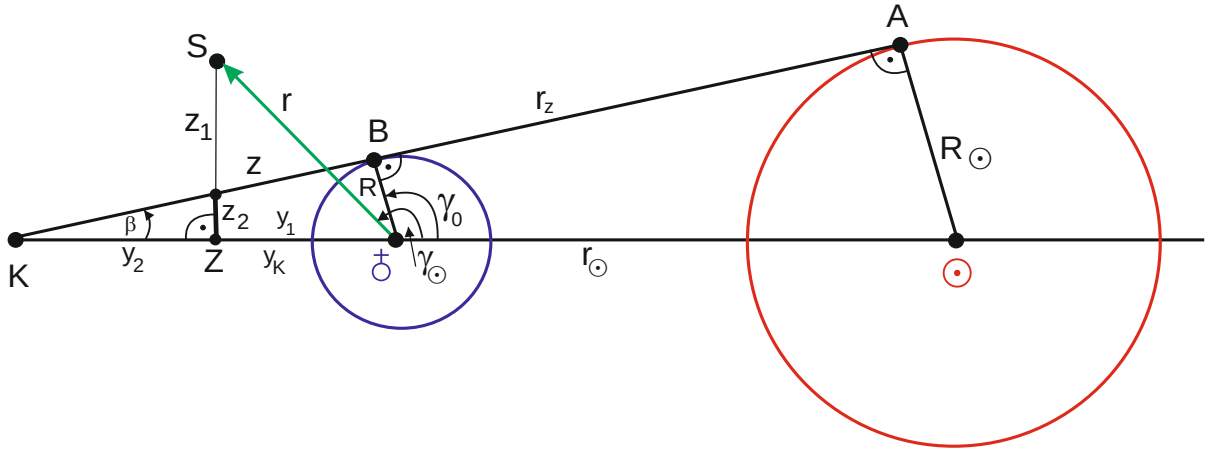


Bild 28-63: Zur Berechnung des Kernschattens auf Satellitenbahnen. Schnittebene durch Sonnen-, Erd- und Satellitenmittelpunkt.

Seien ☉ das Sonnenzentrum, ♁ das Erdzentrum (bzw. das des betreffenden Zentralkörpers), *S* der momentane Ort des Satelliten, *A* ein Randpunkt der Sonnenoberfläche, *B* der Erde, *K* der Scheitel des Sonnenkegels („Gegensonne"), $R_\odot$ der Radius der Sonne, *R* der eventuell um die Atmosphärenhöhe *H* vergrößerte und die Abplattung berücksichtigende Radius des Zentralkörpers in der Schnittebene durch ☉ ♁ K, $r_\odot$ die wahre geozentrische Distanz des Sonnenmittelpunktes, so ist $y_K = \overline{K♁}$ die geozentrische Distanz der Gegensonne K, $r_z = \overline{AB}$ der Abstand der Randpunkte auf Sonne und Erde, *z* der Abstand von *B* zu K . Der halbe Öffnungswinkel β des Schattenkegels errechnet sich in der Ebene durch Sonnen-, Erd- und Satellitenmittelpunkt aus

$$\sin\beta = \frac{R_\odot}{r_\odot + y_K} = \frac{R}{y_K} \quad . \tag{28.460}$$

Die Berechnung ist eindeutig, da offenbar stets $\beta < 90°$. Die Gegensonne K hat vom Erdmittelpunkt daher den Abstand

$$y_K = \frac{r_\odot R}{R_\odot - R} \quad , \tag{28.461}$$

somit ist

$$\sin\beta = \frac{R_\odot - R}{r_\odot} \quad . \tag{28.462}$$

Um die Relation des Satellitenortes zum Schattenkegel zu erkennen, wird mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}, \mathbf{r}_\odot$ von Satellit und Sonne bzw. mit den äquatorialen Winkelkoordinaten der Sonne $(\alpha_\odot, \delta_\odot)$ und des Satelliten (α, δ) die geozentrische Elongation γ des Satelliten zur Sonne (mit $r = |\mathbf{r}|$, $r_\odot = |\mathbf{r}_\odot|$) berechnet:

$$\cos\gamma_\odot = \cos(\alpha - \alpha_\odot)\cos\delta_\odot\cos\delta + \sin\delta_\odot\sin\delta = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_\odot}{r\,r_\odot} \quad . \tag{28.463}$$

Als erste Bedingung für Schatten muss nach Bild 28-63 (auf Seite 192) $\gamma_\odot$ größer als der Grenzwinkel γ_0, also

$$\cos\gamma_\odot \quad < \quad \cos\gamma_0 = -\sin\beta = -\frac{R}{y_K} \tag{28.464}$$

erfüllt sein. Mit dem momentanen Radius r des Satelliten hat der Satellit den Abstand z_1 zur Achse $K\overset{+}{\bigcirc}$ des Schattenkegels

$$z_1 \quad = \quad \overline{SZ} \quad = \quad r\sin\gamma_\odot \quad = \quad r\sqrt{1-\cos^2\gamma_\odot} \quad . \tag{28.465}$$

An dieser Stelle hat der Querschnitt des Schattenkegels den Radius z_2, der sich mit den Beziehungen ($y_1 = \overline{\overset{+}{\bigcirc}Z},\ y_2 = \overline{ZK},\ z = \overline{BK}$) aus

$$\begin{aligned} y_2 \quad &= \quad y_K - y_1 \quad = \quad y_K + r\cos\gamma_\odot \\ \tan\beta \quad &= \quad \frac{z_2}{y_2} \quad = \quad \frac{R}{z} \\ z \quad &= \quad \sqrt{y_K^2 - R^2} \\ z_2 \quad &= \quad \frac{\left(y_K + r\cos\gamma\right) R}{\sqrt{y_K^2 - R^2}} \end{aligned} \tag{28.466}$$

ergibt. Der Satellit befindet sich im Schatten, wenn die beiden Bedingungen

$$\cos\gamma_\odot < -\frac{R}{y_K} \quad , \quad z_1 \le z_2 \tag{28.467}$$

erfüllt sind. Er tritt in den Schatten ein oder aus, wenn

$$z_1 \quad = \quad z_2 \tag{28.468}$$

gilt. Diese Bedingung führt mit den Formeln (28.465) und (28.466) notwendig auf

$$r\sin\gamma_\odot\, S_1\sqrt{y_K^2 - R^2} \quad = \quad R\left(y_K + r\cos\gamma\right) \quad . \tag{28.469}$$

Auflösung nach $\cos\gamma$ ergibt

$$\cos\gamma_\odot \quad = \quad -\frac{R^2}{r\,y_K} - \frac{z}{r\,y_K}\sqrt{r^2 - R^2} \quad < \quad -\frac{R^2}{r\,y_K} \quad < \quad -\frac{R}{y_K} \quad ,$$

wobei wegen $R < r < y_K$ und wegen der Bedingung (28.464) vor der Wurzel nur das negative Vorzeichen stehen darf. Somit führt dieser Ausdruck unmittelbar auf die *Kernschattengleichung*

$$S_K \quad = \quad \frac{1}{R}\left[r\cos\gamma_\odot + \frac{R\left(R_\odot - R\right)}{r_\odot} + \sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{1 - \frac{\left(R_\odot - R\right)^2}{r_\odot^2}} \right] \quad . \tag{28.470}$$

Ein Satellit befindet sich

- *im Kernschatten, wenn die Kernschattengleichung negativ ist ($S_K < 0$),*
- *außerhalb des Kernschattens bei positiver Kernschattengleichung ($S_K > 0$),*
- *in der Schattengrenze (Schattenein - oder -austritt), wenn die Kernschattengleichung verschwindet ($S_K = 0$).*

28.11.1.2 Das Kegelmodell für Halbschatten

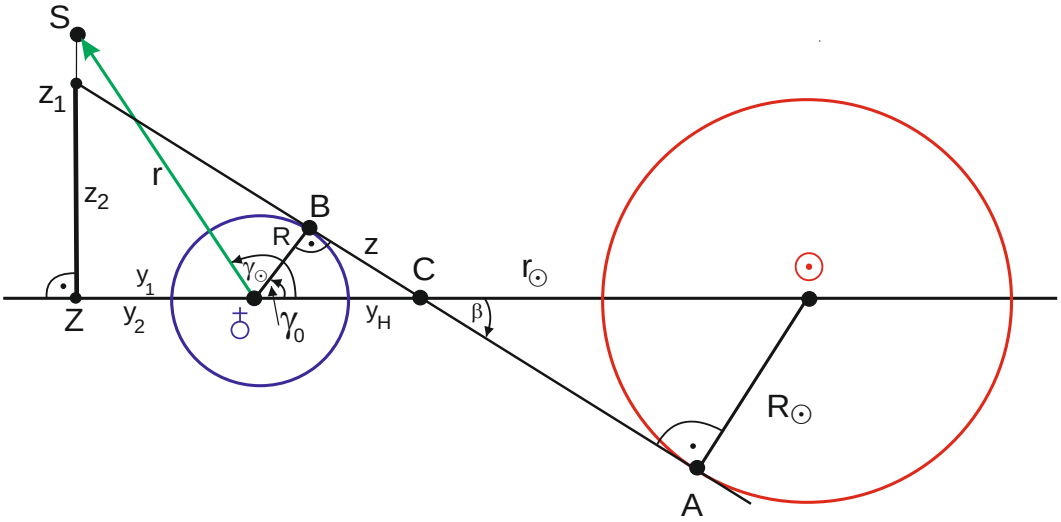


Bild 28-64: Zur Berechnung des Halbschattens auf Satellitenbahnen. Schnittebene durch Sonnen, Erd- und Satellitenmittelpunkt.

Die Bedingung für Halbschatten wird ganz ähnlich der Bedingung für den Kernschatten hergeleitet. Nach Bild 28-64 sei A ein Randpunkt der Sonne, B der Erde. Im Fall des Halbschattens schneidet eine Gerade durch A und B die Verbindungslinie Sonne- Erdmittelpunkt zwischen Erde und Sonne im Punkt C. Dieser hat vom Erdmittelpunkt die Entfernung $y_H = \overline{C\,♁}$. Ferner sei der Punkt Z die Projektion des momentanen Satellitenortes *S* auf die Gerade $\odot\,♁$. Der halbe Öffnungswinkel β des Halbschattenkegels mit Spitze in C wird aus

$$\sin\beta = \frac{R_\odot}{r_\odot - y_H} = \frac{R}{y_H} \tag{28.471}$$

berechnet. Der Abstand $y_H = \overline{C\,♁}$ kann somit aus

$$y_H = \frac{r_\odot R}{R_\odot + R} \tag{28.472}$$

berechnet werden, somit auch

$$\sin\beta = \frac{R_\odot - R}{r_\odot} \quad . \tag{28.473}$$

Die geozentrische Elongation $\gamma_\odot$ des Satelliten zur Sonne ist auch in diesem Fall mit Formel (28.463) bekannt. Mit dem Grenzwinkel $\gamma_0 = \sphericalangle(C\,♁\,\mathrm{B})$ aus

$$\cos\gamma_0 = \frac{R}{y_H} \tag{28.474}$$

folgt nach Bild 28-64 die erste Bedingung, nach der im Fall von Halbschatten $\gamma_\odot > \gamma_0$ analog der Beziehung (28.464)

$$\cos\gamma_\odot < \cos\gamma_0 = \frac{R}{y_K} \tag{28.475}$$

erfüllt sein muss. Die momentane Position des Satelliten hat von der Zentrallinie des Schattenkegels wie in Formel (28.465) die Distanz

$$z_1 = \overline{SZ} = r\sin\gamma_\odot \quad , \tag{28.476}$$

der Schattenkegel den Radius z_2, der aus den Beziehungen ($y_1 = \overline{\overset{+}{\bigcirc} Z}$, $y_2 = \overline{CZ}$, $z = \overline{CB}$)

$$\begin{aligned} y_2 &= y_H + y_1 = y_H - r\cos\gamma_\odot \\ \tan\beta &= \frac{z_2}{y_2} = \frac{R}{z} \\ z &= \sqrt{y_H^2 - R^2} \\ z_2 &= \frac{\left(y_H - r\cos\gamma_\odot\right) R}{\sqrt{y_H^2 - R^2}} \end{aligned} \tag{28.477}$$

berechnet werden kann. Der Satellit befindet sich also im Halbschatten, wenn die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} \cos\gamma_\odot &< \frac{R}{y_H} \\ z_1 &\leq z_2 \end{aligned} \tag{28.478}$$

erfüllt sind. Die Bedingung $z_1 = z_2$ liefert im Fall des Halbschattens mit den Formeln (28.472) und (28.474) notwendig die Bedingung

$$r\sin\gamma_\odot \sqrt{y_H^2 - R^2} = R\left(y_H - r\cos\gamma\right) \quad , \tag{28.479}$$

deren Auflösung nach $\cos\gamma_\odot$

$$\cos\gamma_\odot = \frac{R^2}{r\,y_H} - \frac{1}{r\,y_H}\sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{y_H^2 - R^2} < \frac{R^2}{r\,y_H} < \frac{R}{y_H}$$

ergibt. Hier darf wegen $R < r < y_H$ und wegen der Bedingung (28.475) vor der Wurzel nur das negative Vorzeichen stehen. Die *Halbschattengleichung* lautet daher

$$S_H = \frac{1}{R}\left[r\cos\gamma_\odot - \frac{R\left(R_\odot + R\right)}{r_\odot} + \sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{1 - \frac{\left(R_\odot + R\right)^2}{r_\odot^2}} \right] \quad . \tag{28.480}$$

Ein Satellit befindet sich

- *im Halbschatten, wenn die Halbschattengleichung negativ ist ($S_H < 0$),*
- *außerhalb des Halbschattens bei positiver Halbschattengleichung ($S_H > 0$),*
- *in der Schattengrenze (Schattenein - oder - austritt), wenn die Halbschattengleichung verschwindet ($S_H = 0$).*

28.11.1.3 Das Zylindermodell

Bei diesem wesentlich vereinfachten Schattenmodell wird mit Bild 28-65 angenommen, dass die Sonne denselben Durchmesser wie der Zentralkörper hat. Der Schatten ist somit ein Zylinder, dessen Querschnitt den konstanten Radius R_E hat. Somit muss die Strecke z_2 nicht wie in den genauen Modellen ständig neu berechnet werden. Vielmehr gilt stets

$$z_2 = R_E \Leftrightarrow \text{Zylindermodell} .$$

Mit bekannter Position des Satelliten $r[\alpha, \delta]$ und geozentrischer Richtung der Sonne $[\alpha_\odot, \delta_\odot]$ wird der Abstand z_1 des Satellitenortes zur Schattenachse mit Zentralwinkel $\gamma_\odot$ mit Formel (28.465) berechnet. Der Satellit befindet sich demnach im Zylinderschatten, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} \cos\gamma_\odot &< 0 \\ z_1 &\leq R_E \end{aligned} \qquad (28.481)$$

erfüllt sind. Die Bedingung für Schattenein - bzw. - austritt $z_1 = z_2$ führt im Fall des Zylindermodells somit notwendig auf

$$r \sin\gamma_\odot = R_E \quad , \qquad (28.482)$$

woraus sich

$$r \cos\gamma_\odot = -\sqrt{r^2 - R_E^2} < 0$$

ergibt.

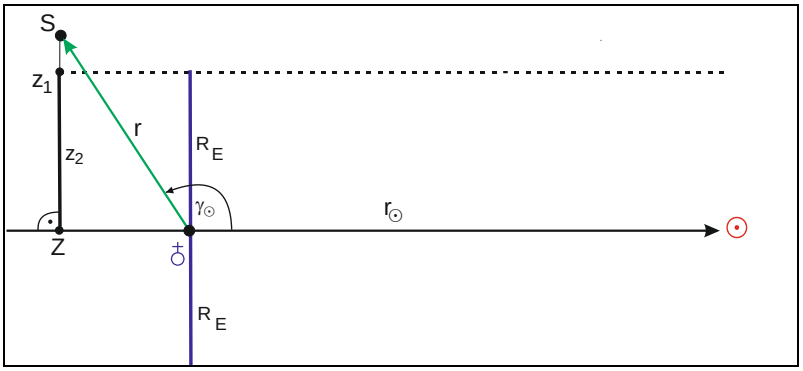


Bild 28-65: Das Zylindermodell für Schattenberechnungen

Hier kann wegen der Bedingung (28.481) vor der Wurzel nur das negative Vorzeichen stehen. Mit dieser Gleichung kann die *Zylinderschattengleichung* gebildet werden:

$$S_Z = \frac{1}{R_E}\left[r\cos\gamma_\odot + \sqrt{r^2 - R_E^2} \right] . \qquad (28.483)$$

Ein Satellit befindet sich

- *im Zylinderschatten, wenn die Zylinderschattengleichung negativ ist ($S_Z < 0$),*
- *außerhalb des Zylinderschattens bei positiver Zylinderschattengleichung ($S_Z > 0$),*
- *in der Schattengrenze (Schattenein - oder - austritt), wenn die Zylinderschattengleichung verschwindet ($S_Z = 0$).*

28.11.2 Die allgemeine Schattengleichung

Die drei Schattengleichungen (28.470), (28.480) und (28.483) wurden so gewählt, dass sie die einheitliche (für das automatische Rechnen geeignete) Darstellung (28.484) erlauben. Wegen der Division durch den Radius R an der Stelle der Beobachtung ist die Schattengleichung dimensionslos, der maximale Betrag nahe der Einheit. Der Fall des Zylinderschattens entspricht der Position der Sonne in unendlicher Entfernung ($r_\odot \to \infty$). Im Fall des Zylinderschattens wird gewöhnlich die Erdabplattung vernachlässigt.

$$S = \frac{1}{R}\left[r\cos\gamma_{\odot} + \frac{\sigma_{SH} R\left(R_{\odot} - \sigma_{SH} R\right)}{r_{\odot}} + \sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{1 - \frac{\left(R_{\odot} - \sigma_{SH} R\right)^2}{r_{\odot}^2}} \right]$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_{SH} &= 1 \quad \text{für Kernschatten} \\ \sigma_{SH} &= -1 \quad \text{für Halbschatten} \\ \sigma_{SH} &= 0 \quad \text{für Zylinderschatten} \quad . \end{aligned} \tag{28.484}$$

Auch im Fall der allgemeinen Schattengleichung gilt:

Ein Satellit befindet sich

- *im Schatten, wenn die Schattengleichung negativ ist ($S < 0$),*
- *außerhalb des Schattens bei positiver Schattengleichung ($S > 0$),*
- *in der Schattengrenze (Schattenein - oder - austritt), wenn die Schattengleichung verschwindet ($S = 0$).*

BEISPIEL 1: Bild 28-66 zeigt den Verlauf der Schattengleichungen in den drei Fällen Kernschatten (rot), Zylinderschatten (grün) und Halbschatten (blau) über einen synodischen Umlauf für einen Satelliten auf einer kreisnahen Bahn in der mittleren Bahnhöhe H=200 km.

Der Kurvenverlauf für die drei Modelle verläuft nahezu identisch, nur in den Extrema können minimale Abweichungen erkannt werden. Die Punkte für Schattenein- und –austritt können in der bildnerischen Darstellung nicht unterschieden werden. Dies lässt sich mit der relativ weiten Entfernung der Sonne von der Erde begründen. ◄

BEISPIEL 2: Bild 28-67 zeigt den Verlauf der Schattengleichung für eine hochexzentrische Transferbahn in die geostationäre Bahnhöhe über einen Sonnen-synodischen Umlauf (Daten von Symphonie A).

Die mittleren Bahnelemente sind: $\bar{a}_0 = 25646$ km, $\bar{e}_0 = 0.7357858$, $\bar{i}_0 = 13°.27$, $\bar{\Omega}_0 = 313°.3395$, $\bar{\omega}_0 = 177°.0$, $\overline{M}_{00} = 4°.2$, Epoche: 1974, Dez. 19 / 03:12:0.0

Das Bild zeigt, dass der Einschuss in die Transferbahn so gewählt wurde, dass erst am Ende des Umlaufs, nämlich in der Nähe des Perigäums, der Satellit kurzzeitig in den Schatten eintaucht. Die Darstellung lässt keinen wesentlichen Unterschied zwischen den drei Schattenmodellen erkennen. ◄

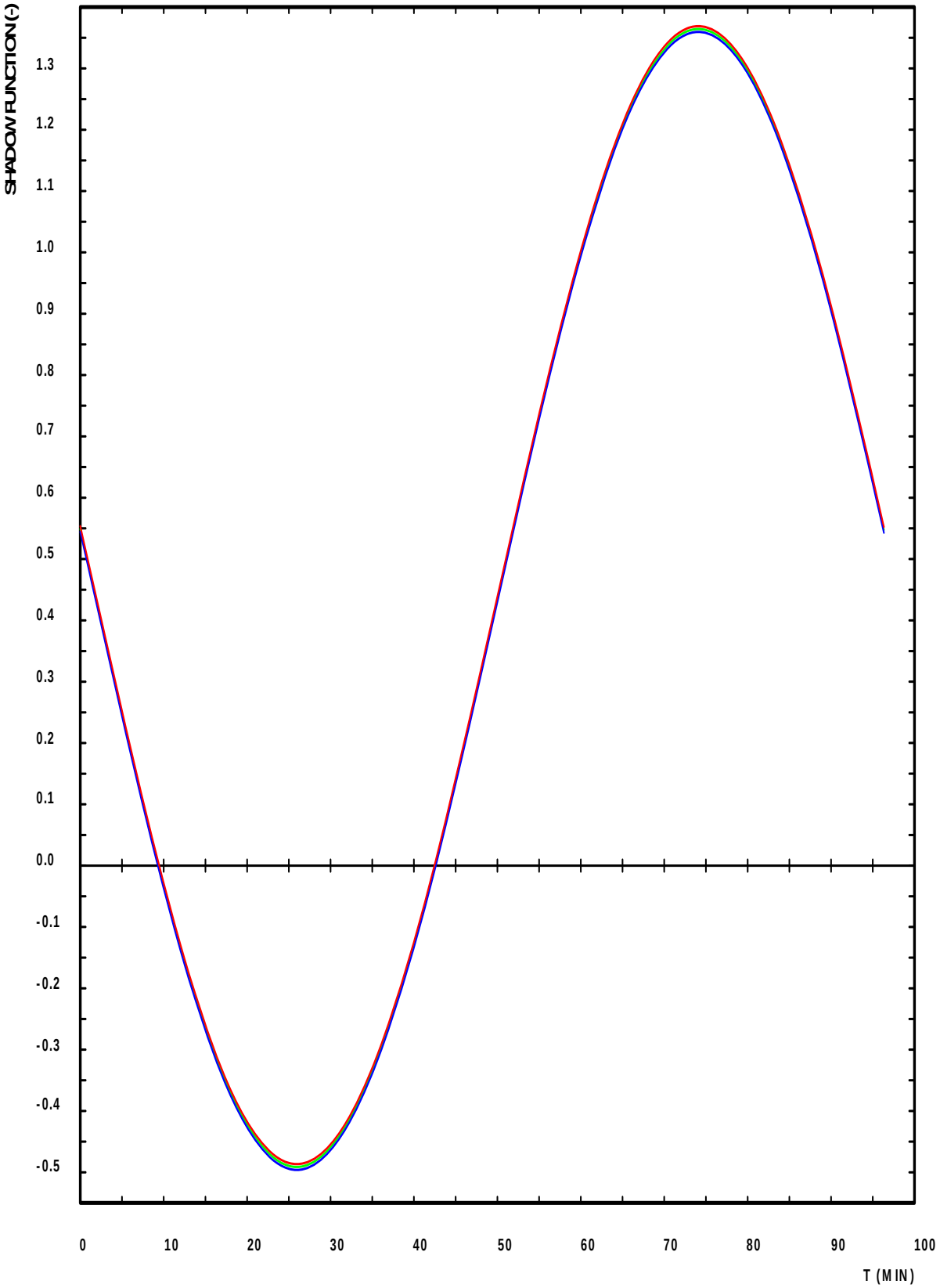


Bild 28-66: Schattenfunktion für Kern, Halb- und Zylinderschattenmodell. Bahn: $\overline{a}_0 = 6578$ km, $\overline{e}_0 = 0.0$, $\overline{i}_0 = 53°$, $\lambda_0 = 279°.31$, $\varphi_0 = 28°.5$, $M_0 = 0°.0$, t_0 :1990 – 02-22/22:46:0.0, $\dot{a}_s = -8.8572 \times 10^{-7}$ km/s.

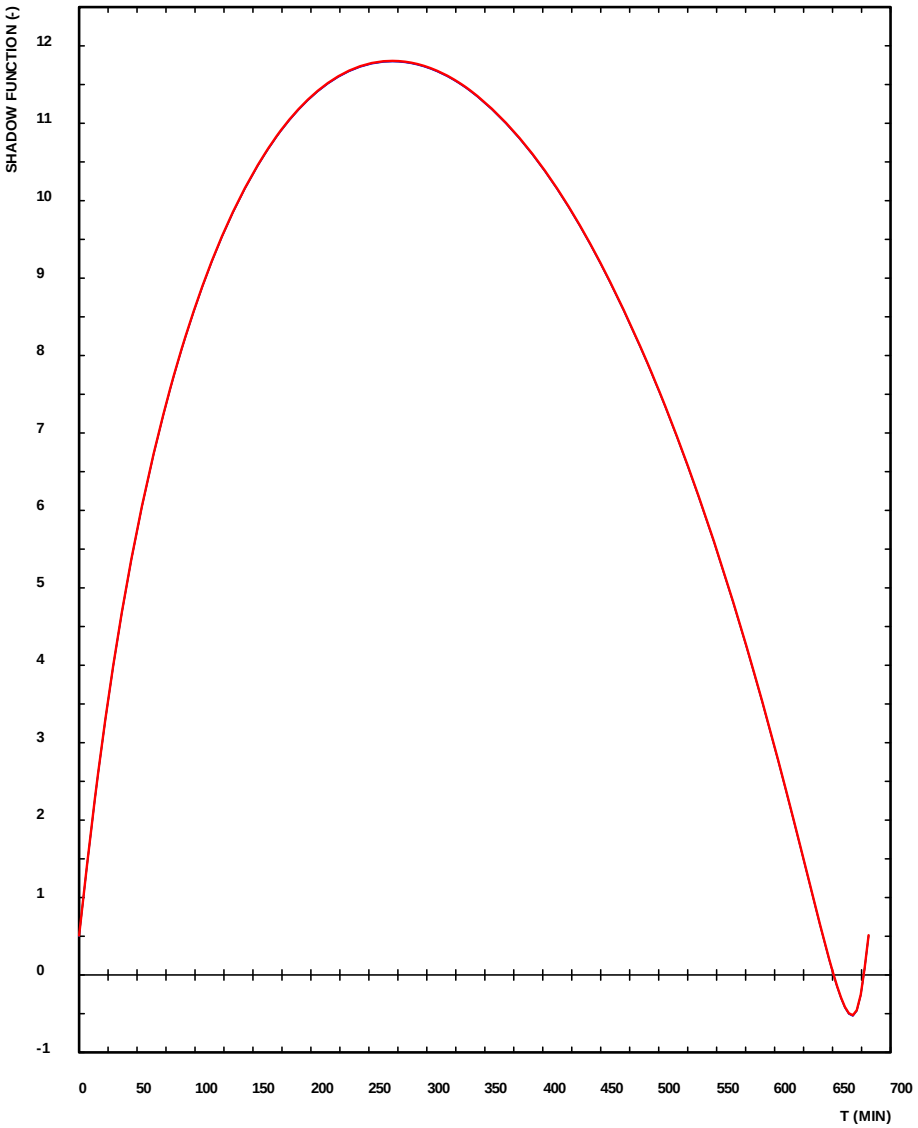


Bild 28-67: Schattenfunktion einer hochexzentrischen Bahn (Projekt SYMPONIE A) (H_A = 38138 km, H_P = 398 km, $\overline{i_0}$ = 13°.27)

28.11.3 Schattenkontakte

28.11.3.1 Näherungsweise Berechnung der Schattenkontaktzeiten

Die Schattengleichung liefert implizit die Schattenzeiten längs einer Satellitenbahn. Die zwei Schattenkontakte seien durch S_1 bei Schatteneintritt und S_2 bei Schattenaustritt gekennzeichnet. Der Zeitraum zwischen den Schattenkontakten ist die Schattendauer.

Die exakte Berechnung der Schattenkontakte ist unter Einschluss der Bewegung der (wahren) Sonne, aller Bewegungseinflüsse („Störungen“) auf die Satellitenbahn, der Erdabplattung und im Kegelmodell (Kernschattenmodell) nur iterativ möglich. Schattenkontakte bei Erdsatelliten sind jedoch infolge der Erdatmosphäre verwaschen und in den meisten Anwendungen nur näherungsweise benötigt.

Als Bahnparameter kann zur Berechnung der Schattenkontakte das Argument der Breite *u* verwendet werden. Mit ihm können die geozentrische Elongation $\gamma_\odot$ zwischen den Richtungen zum Satelliten und zum Zentrum der Sonne sowie der Bahnradius *r* ausgedrückt werden. Die Elongation $\gamma_\odot$ ist mit Formel (28.463) aus

$$\cos\gamma_\odot = \cos(\alpha - \alpha_\odot)\cos\delta_\odot\cos\delta + \sin\delta_\odot\sin\delta \tag{28.485}$$

bekannt. Die äquatorialen Koordinaten des Satelliten können mit den Formeln (24.17) auf das Argument der Breite *u* und die oskulierenden *Kepler*elemente (i,Ω) zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos\delta &= -\cos i\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega \\ \sin\alpha\cos\delta &= \cos i\sin u\cos\Omega + \cos u\sin\Omega \\ \sin\delta &= \sin i\sin u \quad . \end{aligned} \tag{28.486}$$

Für den Radius gilt mit den oskulierenden *Kepler*elementen (a,e,ω)

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1 + e\cos u\cos\omega + e\sin u\sin\omega} \quad . \tag{28.487}$$

Die äquatorialen Winkelkoordinaten $(\alpha_\odot,\delta_\odot)$ des Sonnenortes sowie die *Kepler*elemente der Satellitenbewegung sind zeitabhängig. Bei Vorgabe des Argumentes der Breite als Bahnwinkel kann die zugehörige Zeit *t* in Bezug auf eine Epoche t_0 sowie einer zugehörenden mittleren Epocheanomalie $\overline{M}_{00}$ mit dem Verfahren in Abschnitt 23.2.3 berechnet werden.

Führt man die Größen $r = r(u)$, $\cos\gamma_\odot$ in die Schattengleichung ein, erhält man ein Polynom 4. Grades[1] in cos u (bzw. in sin u), dessen Koeffizienten die Bahnelemente und die Winkelkoordinaten der Sonne enthalten, somit oskulierend sind. Vernachlässigung der Bewegungseinflüsse („Störungen“) auf die Satellitenbahn und die oskulierende Bewegung der Sonne liefert eine Ausgangsnäherung, die iterativ verbessert werden kann.

Im folgenden Abschnitt wird die Berechnung der Schattenkontakte nach einer anderen Methode durchgeführt, die den Vorteil größerer Übersichtlichkeit und leichterer Handhabung hat.

Der Schattenkegel des Zentralschattens schneidet die oskulierende Bahnebene in einer Ellipse, deren sonnenabgewandte Hälfte gemäß Bild 28-68 (auf Seite 202) die Schattenzone eingrenzt. Die große Halbachse dieser Ellipse liegt in der Richtung der Projektion der momentanen Position der Projektion der Sonne in die Bahnebene.

Eine weitere Beziehung zwischen dem Argument der Breite und der Bewegung der Sonne kann nach Abschnitt 28.5.3 (auf Seite 57) hergestellt werden. Nach Bild 28-12 kann die Position der Sonne in Bezug auf die Satellitenbahnebene durch die Koordinaten Argument der Breite $u_\odot$ und Breite $w_\odot$ hergestellt werden. Aus den Formeln (28.192) folgt mit dem knotenbezogenen Sonnenwinkel $\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot$

[1] ein vergleichbares Polynom hat P. ESCOBAL [1965] hergeleitet.

$$\begin{aligned}\cos u_\odot \cos w_\odot &= \cos(\Omega-\alpha_\odot)\cos\delta_\odot \\ \sin u_\odot \cos w_\odot &= -\sin(\Omega-\alpha_\odot)\cos\delta_\odot \cos i + \sin\delta_\odot \sin i \\ \sin w_\odot = \cos\sigma_\odot &= \sin(\Omega-\alpha_\odot)\cos\delta_\odot \sin i + \sin\delta_\odot \cos i \quad .\end{aligned} \tag{28.488}$$

Das sonnenbezogene Argument der Breite $u_\odot$ kann eindeutig berechnet werden, sofern $\cos w_\odot = \sin\sigma_\odot \neq 0$. Falls der Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot = 90° - w_\odot$ verschwindet, steht die Bahnebene senkrecht auf der Richtung zur wahren Sonne, die Bahn kann dann nicht in den Schatten eintreten. Dieser Fall braucht hier deswegen nicht weiter untersucht zu werden.

Der Satellitenbahn-bezogene Solarwinkel ist mit dem Argument der Breite über die Relation

$$\tau_S = u - u_\odot \tag{28.489}$$

verknüpft und es besteht die Beziehung zwischen dem Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot$ und der sonnenbezogenen Elongation $\gamma_\odot$

$$\cos\gamma_\odot = \cos w_\odot \cos\tau_S = \sin\sigma_\odot \cos\tau_S \quad . \tag{28.490}$$

Es sei nun R'_A der Erdhalbmesser in der Ebene durch Sonnen und Erdmittelpunkt und den Bahnnormalenvektor $\mathfrak{C}$. Gemäß Bild 28-68 kann die große Halbachse $R_A = \overline{\mathfrak{♁}K'}$ der Schattenellipse berechnet werden mit

$$R'_A = R_A \cos\beta_1 = y \sin\beta \qquad \text{und} \quad \beta_1 = \sigma_\odot - \beta \tag{28.491}$$

aus

$$R_A = \frac{R'_A}{\sqrt{1-\frac{R'^2_A}{y^2}}\cos\sigma_\odot + \frac{R'_A}{y}\sin\sigma_\odot} = \frac{y\sin\beta}{\cos(\beta-\sigma_\odot)} \quad . \tag{28.492}$$

Um in einfacher und übersichtlicher Weise eine für die meisten Anwendungen jedoch hinreichend genau Näherungslösung zu erhalten, werde die Erdabplattung vernachlässigt und das Zylindermodell gewählt. Die große Halbachse der Schattenellipse beträgt dann

$$R_A \approx \frac{R_E}{\cos\sigma_\odot} \quad . \tag{28.493}$$

Sie ist somit lediglich eine Funktion des Sonnenaspektwinkels. Die kleine Halbachse ist offenbar gleich dem Radius der kugelförmig angenommen Erdoberfläche

$$R_B = R_E \quad . \tag{28.494}$$

Die Schattenellipse ist im Erdmittelpunkt ♁ zentriert. Sei $\tau_S = u - u_\odot$ nach Definition (28.193) der Satellitenbahn-bezogene Sonnenwinkel zwischen der Richtung zur in die Bahnebene projizierten Sonne $S_\odot$ und zu einem beliebigen Punkt auf der Schattenellipse mit zentrischer Distanz

$$R' = \frac{R_A R_B}{\sqrt{R_A^2 \sin^2\tau_S + R_B^2 \cos^2\tau_S}} \approx \frac{R_E}{\sqrt{\sin^2\tau_S + \cos^2\sigma_\odot \cos^2\tau_S}} \quad . \tag{28.495}$$

Der Schattenkegel hat mit der (oskulierende) Bahnebene maximal 4 reelle Schnittpunkte. Von diesen können nur die Punkte mit

$$\cos\tau_{S/1,2} < 0 \tag{28.496}$$

die Schattenein- bzw. austrittspunkte S_1, S_2 markieren. Sei u_S das Argument der Breite des Satelliten bei Schattenkontakt

$$u_S = \tau_S + u_\odot \quad . \tag{28.497}$$

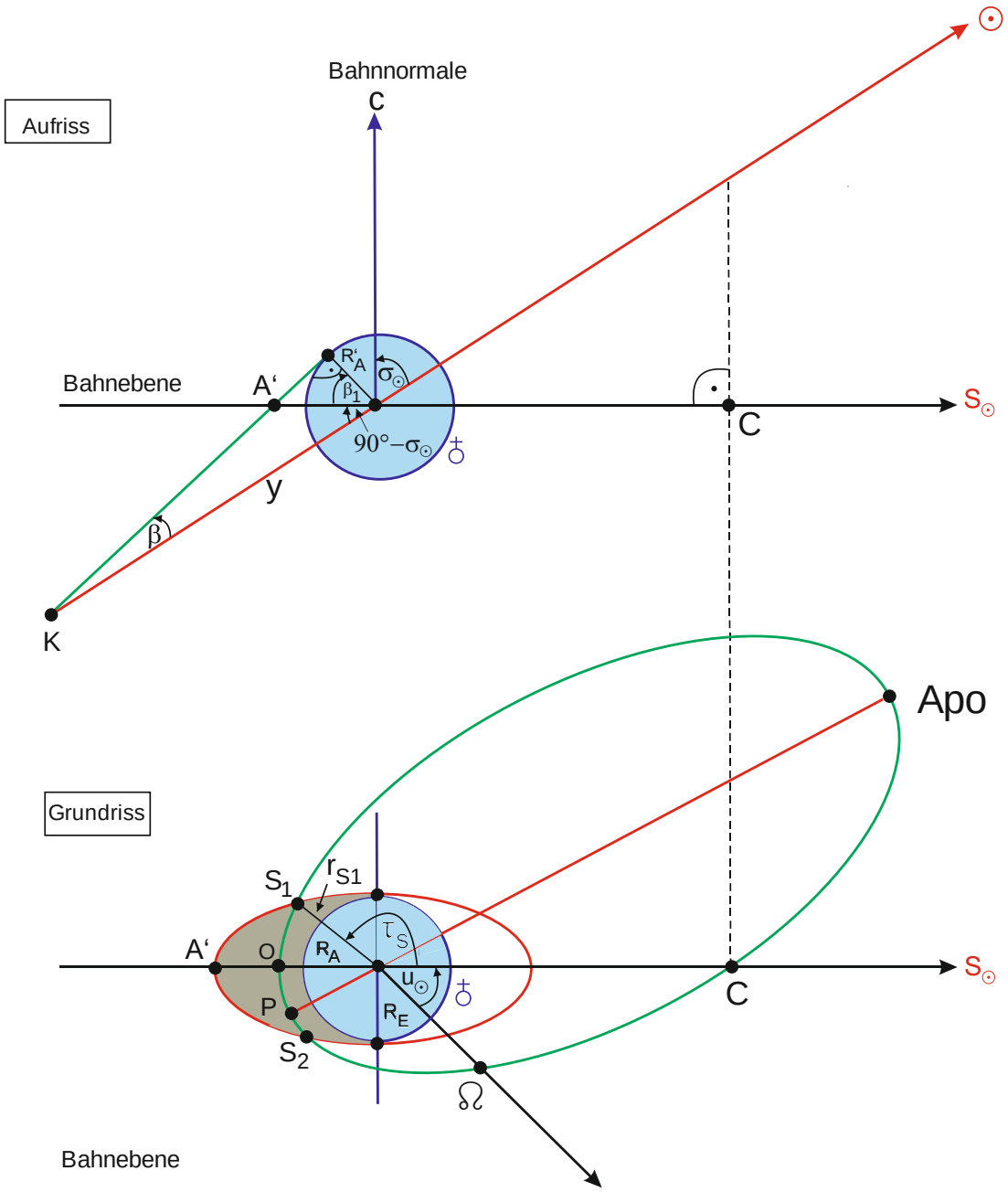


Bild 28-68: Schnitt des Kernschattenkegels mit der Bahnebene zur Berechnung er Schattenzeiten in Auf- und Grundriss ohne Erdabplattung, C – Konjunktion, O - Opposition Satellit-Sonne, Apo – Apogäum der Satellitenbahn, P - Perigäum, ☊ - der aufsteigenden Bahnknoten, ☾ - Normalenvektor der Satellitenbahn, $\sigma_\odot$ - Sonnenaspektwinkel, τ_S -Sonnenwinkel bei Schatteneintritt S_1, S_2 -Schattenaustritt, $u_\odot$ -Argument der Breite der in die Satellitenbahnebene projizierten Sonne $S_\odot$, R'_A -Radius des Erdkörpers in der Satellitenbahnebene, R_A -große Halbachse der Schnittellipse des

Schattenkegels mit der Bahnebene, r_{S1}-geozentrischer Radius des Satellitenortes bei Schatteneintritt, y-geozentrische Distanz der Gegensonne K, A' - Scheitel des Schattenkegels in der Satellitenbahnebene[1].

Zur weiteren Diskussion werde zwischen kreisnahen und elliptischen Satellitenbahnen unterschieden.

28.11.3.2 Näherungsweise Schattenkontaktzeiten auf kreisnahen Bahnen

Mit $r = \text{const.}$ muss der Sonnenwinkel τ_S aus Formel (28.495) mit der Bedingung $r = R'$ (der Satellit befindet sich bei Schattenkontakt auf der Schattenellipse) berechnet werden. Wegen (28.496) kann vor der entsprechenden Wurzel nur das negative Vorzeichen stehen:

$$\cos\tau_S = -\frac{\sqrt{r^2 - R_E^2}}{r\sin\sigma_\odot} < 0 \quad \langle e = 0.0,\ \text{Zylindermodell} \quad . \tag{28.498}$$

Als weitere Bedingung für ein Eintauchen in den Erdschatten folgt damit wegen der Relation (28.493) auch notwendig

$$|\cos\sigma_\odot| < \frac{R_E}{r} \quad . \tag{28.499}$$

Die Schattenstrecke beträgt

$$\Delta\tau_S = 360° - 2\tau_S \quad \langle e = 0.0,\ \text{Zylindermodell} \quad . \tag{28.500}$$

Die Schattendauer beträgt auf Grund der gleichförmigen Bewegung in Bezug auf einen mittleren Sonnen-synodischen Umlauf $\overline{P_S}$

$$T_S = \frac{\Delta\tau_S}{360°}\overline{P_S} \quad \langle \text{ e= 0.0, Zylindermodell} \quad . \tag{28.501}$$

Wenn der Zeitpunkt t_{S0} der Konjunktion Satellit-Sonne mit Sonnenwinkel $\tau_S(t_{CO}) = \tau_{CO} = 0°$ bekannt ist (siehe in Abschnitt 28.5.1.7 auf Seite 51), können die Schattenein- und –austrittszeiten mit der mittleren Sonnen-synodischen mittleren Bewegung $\overline{n_S}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} t_{S1} &= t_{CO} + \frac{\tau_S}{\overline{n_S}} \\ t_{S2} &= t_{CO} + \frac{360° - \tau_S}{\overline{n_S}} \quad \langle e = 0.0,\ \text{Zylindermodell} \quad . \end{aligned} \tag{28.502}$$

➢ *Die Schattenzeiten einer Kreisbahn hängen in guter Näherung nur vom Sonnenaspektwinkel und der mittleren synodischen mittleren Bewegung ab.* ◀

28.11.3.3 Näherungsweise Schattenkontaktzeiten auf elliptischen Bahnen

In den Bahnpunkten S_1 und S_2, in denen die Satellitenbahn in den Erdschatten ein- bzw. aus ihm austritt, ist die zentrische Distanz R' der Schattenellipse (nach Formel (28.495)) dem Bahnradius r

[1] Der Scheitel A' des Schattenkegels in der Satellitenbahnebene ist zur besseren Veranschaulichung im Grundriss von der Sonne weg verschoben eingezeichnet, entspricht also nicht exakt seiner Stellung im Aufriss

(mit Formel (28.487)) gleich. Dies führt zur Berechnung des zugehörigen Sonnenwinkels $\tau_{S/1,2}$ auf das Polynom

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \cos^k \tau_S = 0 \tag{28.503}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
A_4 &:= \left[\frac{p^2}{R_E^2}\sin^2\sigma_\odot - e^2\right]^2 + 4e^2\frac{p^2}{R_E^2}\sin^2\sigma_\odot\cos^2(\omega - u_\odot)\\
A_3 &:= 4e\cos(\omega - u_\odot)\left[\frac{p^2}{R_E^2}\sin^2\sigma_\odot - e^2\right]\\
A_2 &:= 2\left\{\frac{p^2}{R_E^2}\sin^2\sigma_\odot\left[1 + e^2\sin^2(\omega - u_\odot) - \frac{p^2}{R_E^2}\right] + \right.\\
&\qquad \left. + e^2\left[\cos^2(\omega - u_\odot)\left(3 - 2\frac{p^2}{R_E^2}\right) + \frac{p^2}{R_E^2} - e^2\sin^2(\omega - u_\odot)\right]\right\}\\
A_1 &:= 4e\cos(\omega - u_\odot)\left[1 - \frac{p^2}{R_E^2} - e^2\sin^2(\omega - u_\odot)\right]\\
A_0 &:= \left[1 + \frac{p^2}{R_E^2} - e^2\sin^2(\omega - u_\odot)\right]^2 - 4\frac{p^2}{R_E^2} \quad .
\end{aligned} \tag{28.504}$$

Dieses Polynom ist zunächst lösbar, wenn die Koeffizienten als konstant angenommen werden, d.h. bei Vernachlässigung der Bewegung der scheinbaren Sonne, $(u_\odot = \text{const.})$, sowie bei Vernachlässigung der Variationen der Keplerelemente der Bahn infolge der Bewegungseinflüsse („Störungen“) . Am günstigsten ist es, wenn die oskulierenden Parameter im Moment der Opposition Satellit-Sonne gewählt werden. Von den vier möglichen Lösungen scheiden die positiven Werte für $\cos\tau_S$ wegen der allgemeinen Bedingung (28.496) aus. Die möglicherweise verbleibenden zwei reellen Lösungen $\cos\tau_{S1}, \cos\tau_{S2}$ liefern vier verschiedene Winkel τ_S. Die richtigen Lösungen können durch Probe mit den Basisgleichungen (28.495) für Radius *r* und (28.487) für den Rand R' der Schattenellipse folgendermaßen gefunden werden: mit

$$\sin\tau_{S/1,2} = \pm\sqrt{1 - \cos^2\tau_{S/1,2}} \tag{28.505}$$

werden die Radien $R'_{k/1,2}$ für k=1,2 berechnet. Hier muss $R'_{k/1} = R'_{k/2} = R'_k$ sein. Mit $u_{k/1,2} = u_\odot + \tau_{S,k/1,2}$ werden bei bekanntem $u_\odot$ und Argument des Perigäums ω die Radien $r_{k/1,2}$ erhalten. Als Bedingung werden

$$\left|r_{k/1} - R'_k\right| \quad \text{mit} \quad \left|r_{k/2} - R'_k\right| \quad \langle k = 1,2 \tag{28.506}$$

verglichen. Dem kleineren Wert ist der gesuchte Sonnenwinkel τ_S zugeordnet, da $r_k \approx R'_k$ verlangt wird. Unter den beiden auf diese Weise erhaltenen Lösungen charakterisiert der Wert τ_{S1} mit $\tau_{S1} < \tau_{S2}$ den Schatteneintritt.

28.11.3.4 Exakte Berechnung der Schattenkontaktzeiten

Eine beliebig genaue Verbesserung der in den beiden vorstehenden Abschnitten erhaltenen genäherten Schattenkontaktzeiten kann mit der allgemeinen Schattengleichung (28.484) (auf Seite 197) mit der Bedingung $S = 0$ erhalten werden. Diese Bedingungsgleichung kann prinzipiell mit allen Bewegungseinflüssen („Störungen“) auf die Satellitenbahn, der Bewegung der wahren Sonne, unter Berücksichtigung der Erdabplattung und unter Verwendung eines analytischen oder eines numerischen Bahnmodells bearbeitet werden.

Für eine Verbesserung der Ergebnisse werden die Zeiten t_{S1}, t_{S2} benötigt, zu denen der Satellit die Schattenkontaktpunkte S_1, S_2 durchfliegt. Hierzu müssen die bahnbezogenen Sonnenwinkel $\tau_{S/1,2}$ in die entsprechenden Äquator-bezogenen Sonnenwinkel $\tau_{1,2} = \alpha_{1,2} - \alpha_{\odot/1,2}$ umgerechnet werden. Aus Vergleich der Formeln (28.485) und (28.490) folgt

$$\begin{aligned} \cos\tau_{1,2} &= \frac{\cos w_\odot \cos\tau_{S/1,2} - \sin\delta_{1,2}\sin\delta_{\odot/1,2}}{\cos\delta_{1,2}\cos\delta_{\odot/1,2}} \qquad \left\langle \cos\delta_{1,2}\cos\delta_{\odot/1,2} \neq 0 \right. \\ \sin\tau_{1,2} &= \operatorname{sgn}(\sin\tau_{S/1,2})\sqrt{1-\cos^2\tau_{1,2}} \qquad . \end{aligned} \tag{28.507}$$

Die Fälle $\delta_\odot = 90°$ und $\delta = 90°$ können unberücksichtigt bleiben. Eine alternative Berechnung für den Sinus des Sonnenwinkels kann nach Bild 28-12 (auf Seite 57) hergeleitet werden, wenn der Knotensonnenwinkel $\tau_\Omega = \Omega - a_\odot$ berücksichtigt wird:

$$\sin\tau_{1,2} = \frac{\cos u_{1,2} - \cos\delta_{1,2}\cos\tau_{\Omega/1,2}}{\cos\delta_{1,2}\sin\tau_{\Omega/1,2}} \quad . \tag{28.508}$$

Die zugehörigen Zeiten t_{S1}, t_{S2} können jetzt mit der Methode $\tau \to t$ in Abschnitt 28.5.1.6 (auf Seite 50) berechnet werden.

Für eine iterative Verbesserung der Schattenzeiten können die bislang gefundenen Näherungswerte als Ausgangsnäherungen $t_{S1}^{(0)} := t_{S1}, t_{S2}^{(0)} := t_{S2}$ gefunden werden. Dazu kann direkt die Schattengleichung (28.484) verwendet werden oder die Methode der sukzessiven Approximation

$$t_{S/k}^{(\nu+1)} := t_{S/k}^{(\nu)} - \frac{S\left(t_{S/k}^{(\nu)}\right)}{\dot{S}\left(t_{S/k}^{(\nu)}\right)} \qquad \left\langle k = 1,2; \quad \nu = 0,1,2,\cdots \right. \quad . \tag{28.509}$$

Zum jeweils gegebenen Zeitpunkt können der Zustandsvektor $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ des Satelliten und der Sonne $(\mathbf{x}_\odot, \dot{\mathbf{x}}_\odot)$ mit beliebiger, d.h. nur eingeschränkt durch das verwendete Bahnmodell und die Rechnergenauigkeit berechnet werden. R kann mit Formel (38.6) gegeben sein, wenn Abplattung und ein schräger Schnitt durch den als Ellipsoid angenommenen Erdkörper berücksichtigt werden sollen[1]. Wird die Erde als Kugel überhöht durch eine Atmosphäre der Höhe H angenähert, kann $R = R_E + H$ als konstante Größe gewählt werden.

Die Differentiation der Schattengleichung nach der Zeit

[1] Abschnitt 38.1.1 in Band V, dort mit R_0' bezeichnet

$$
\begin{aligned}
\dot{S} = \frac{1}{R}\Bigg\{ & \dot{r}\left[\cos\gamma_\odot + \frac{\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}}{r_\odot\sqrt{r^2 - R^2}}\right] + \\
& + \frac{\dot{r}_\odot}{r_\odot^2}\left[-\sigma_{SH}R\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right) + \frac{\sqrt{r^2 - R^2}\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}{\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}}\right] - \\
& - r\dot{\gamma}_\odot \sin\gamma_\odot + \\
& + \dot{R}\Bigg[-\frac{1}{R}\left(r\cos\gamma_\odot + \sigma_{SH}\frac{R\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)}{r_\odot} + \frac{\sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}}{r_\odot}\right) + \\
& + \sigma_{SH}\frac{\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)}{r_\odot} - \frac{R}{r_\odot} - \frac{R\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}}{r_\odot\sqrt{r^2 - R^2}} + \frac{\sigma_{SH}\left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)\sqrt{r^2 - R^2}}{r_\odot\sqrt{r_\odot^2 - \left(R_\odot - \sigma_{SH}R\right)^2}}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{28.510}
$$

kann mit den entsprechenden Differentialausdrücken

$$
\begin{aligned}
& \dot{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\, e\sin\upsilon \quad , \quad p = a\left(1 - e^2\right) \quad , \quad r = \left|\mathbf{r}\right| \\
& \dot{r}_\odot = \frac{\mathbf{r}_\odot\cdot\dot{\mathbf{r}}_\odot}{\left|\mathbf{x}_\odot\right|} \quad , \quad r_\odot = \left|\mathbf{r}_\odot\right| \\
& \dot{\gamma}_\odot \sin\gamma_\odot = -\frac{\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}_\odot + \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}_\odot}{r\, r_\odot} + \cos\gamma_\odot\left[\frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}_\odot}{r_\odot}\right]
\end{aligned}
\tag{28.511}
$$

berechnet werden. Die Variation $\dot{R}$ des erweiterten Erdradius kann bei Bedarf mit den Formeln (28.25) erhalten werden. **r** geozentrischer Ortsvektor des Satelliten, $\mathbf{r}_\odot$ geozentrischer Ortsvektor des Sonnenmittelpunktes.

28.11.3.5 Würdigung des Verfahrens

Die hier geschilderte Methode der Schattenberechnung hat gegenüber anderen Verfahren folgende Vorteile:

1. Die Koeffizienten des Polynoms zur Berechnung der Ausgangslösung lassen sich leicht berechnen.
2. Der Bezug auf die Sonne macht alle Abfragen überflüssig, die bei Bezug auf das Perigäum der Satellitenbahn, den aufsteigenden Knoten der Bahn oder anderer Bezugspunkte zur eindeutigen Bestimmung der Schattenkontaktzeiten sonst nötig sind.
3. Die Methode ist weitgehend sicher. Dies trifft auch für erdferne Bahnen zu, da die Satellitenbahn-bezogenen Sonnenwinkel τ_S große Werte annehmen und aus Lösung des Polynoms (28.503) stets sichere Ausgangslösungen erhalten werden können.
4. Eine Lösung des Polynoms (28.503) kann auch als Indikator verwendet werden, ob ein Satellit pro synodischem Umlauf in den Erdschatten eintreten kann. Da der Schattenzylinder den (Kern-) Schattenkegel einschließt, tritt mit Sicherheit kein Schatten ein, wenn das Polynom keine reellen Lösungen hat. Schattenberechnung nach dem Zylindermodell beinhaltet stets den ungünstigsten Fall.

28.11.4 Schattenfaktor und Schattendauer

Wenn die *Schattenkontaktzeiten* t_{S1}, t_{S2} nach einem der bisher vorgestellten Verfahren berechnet sind, kann mit $t_{S2} > t_{S1}$ die Schattendauer pro synodischem Umlauf berechnet werden aus

$$T_S = t_{S2} - t_{S1} \quad . \tag{28.512}$$

Der *Schattenfaktor* (gelegentlich auch mit Schattenindex bezeichnet) ist ein Maß über den Anteil der Schattenphase pro Sonnen-synodischem Umlauf:

$$k_S := \frac{T_S}{P_S} \quad . \tag{28.513}$$

Der Schattenfaktor ist beispielsweise für Untersuchungen des Thermalhaushaltes eines Satelliten bedeutsam. Er wird langfristig, etwa über ein tropisches Jahr, untersucht und daher gewöhnlich nicht mit letzter Genauigkeit benötigt. Daher genügen meist die Lösungen des Polynoms (28.503). Für kreisnahe Bahnen und ein vereinfachtes Schattenmodell (Zylindermodell, Erdoberfläche kugelförmig angenommen) wird die Schattenzeit auf die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ bezogen. In diesem vereinfachten Fall kann der Schattenfaktor näherungsweise mit der Beziehung (28.501) dargestellt werden durch

$$k_S \approx \frac{\Delta\tau_S}{360°} \qquad \langle e = 0.0, \text{ Zylindermodell} \tag{28.514}$$

bzw. wegen der Beziehungen (28.498) und (28.500) auch durch

$$k_S \approx 1 - \frac{1}{180°} \arccos\left(\frac{-\sqrt{r^2 - R_E^2}}{r \sin\sigma_\odot} \right) \qquad \langle e = 0.0, r = const., \text{Zylindermodell} \quad . \tag{28.515}$$

Im Folgenden wird der Schattenverlauf für einige Erdsatellitenbahnen an typischen Beispielen demonstriert.

28.11.4.1 Schattenzeiten auf einer kreisnahen erdnahen Bahn

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine STS-Bahn, H= 300 km, e= 0.0, i= 57°. Der Einschuss über Cape Canaveral erfolge um Mitternacht Ortszeit. Bild 28-69 zeigt den Jahresverlauf der Schattendauer pro synodischem Umlauf sowie den Schattenfaktor als Anteil pro Umlauf. Infolge der beträchtlichen Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}$ = -5°.60425226/d verändert sich die Schattendauer von Umlauf zu Umlauf, zwischen maximal möglichem Schatten und einigen Abschnitten mit Vollsonnenbahn. ◄

BEISPIEL 2: Für die Bahn des vorstehenden Beispiels 1 wird in Bild 28-70 untersucht, wie sich ein unterschiedlicher Starttermin in mittlerer Sonnenzeit (Ortszeit) auf den Verlauf der Schattenzeiten pro synodischem Umlauf auswirkt. Als Zeitraum sind 14 Tage ausgewählt, was die maximale Betriebsdauer einer STS Mission war. Je nach Startzeit können mehrere Tage Vollsonnenbahn erreicht werden. ◄

BEISPIEL 3: Das Beispiel zeigt in Bild 28-71 den Verlauf einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn mit Reproduzierbarkeit 27:421 (a= 6761.813 km, i=96°.99348227), wenn bei Einschuss in die Bahn im aufsteigenden Knoten die mittlere Sonnenzeit T=12h beträgt. Die Bahn mit der mittlerer synodischen Umlaufzeit $\overline{P_S}$ = 5541.092693 hat im Jahresverlauf die (nahezu) unveränderlich konstante Schattendauer T_S = 36 min pro synodischem Umlauf. ◄

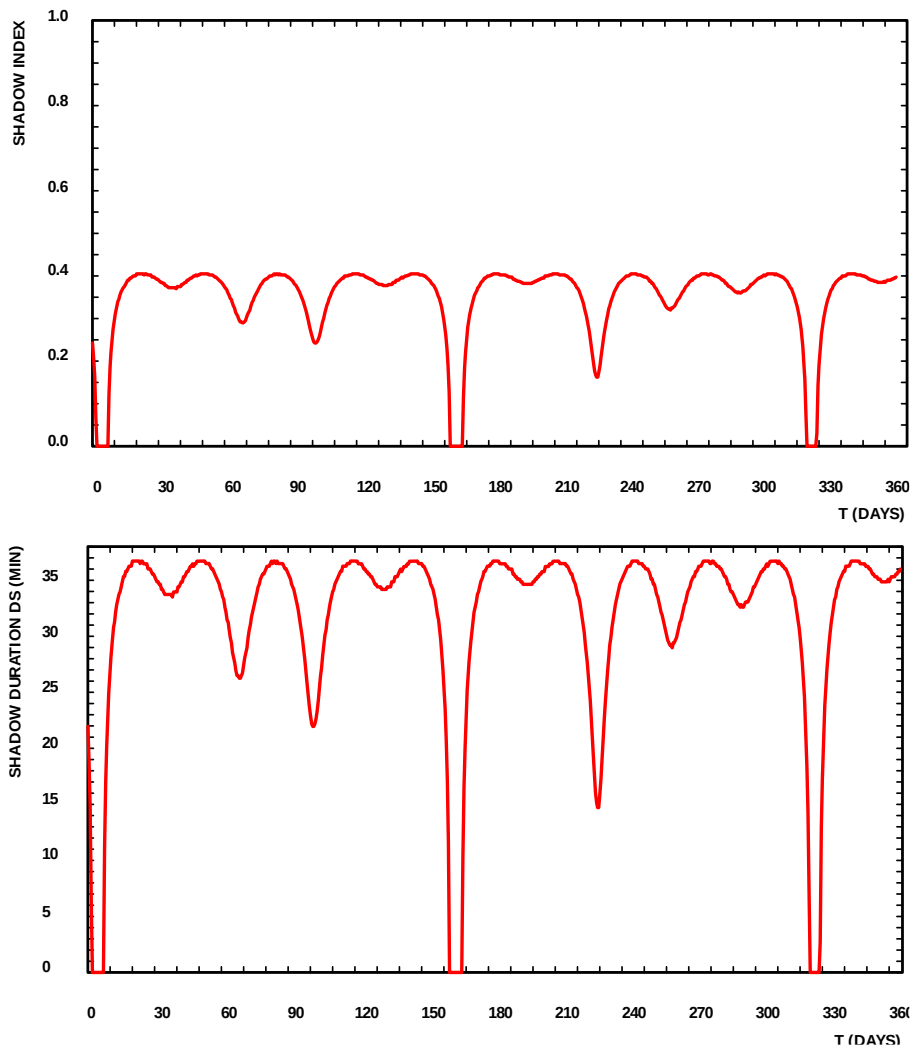


Bild 28-69: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der Bahn H=300 km, e=0.0, i=57°, Referenzort: $\lambda = -80°.69, \varphi = 28°.5$, Referenzepoche Mitternacht Ortszeit, am 6. August 2018, Verlauf der Schattenkurven über das Jahr 2018

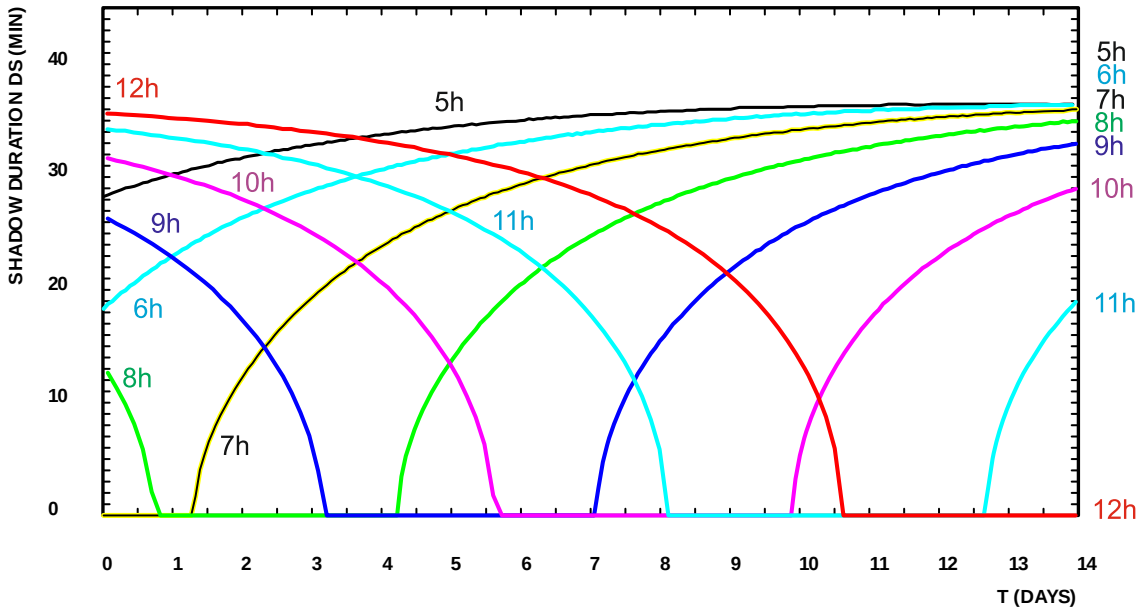


Bild 28-70: Verlauf der Schattendauer der Bahn H=300 km, e=0.0, i=57° für verschiedene Einschusszeiten in mittlerer Sonnenzeit zwischen T=5h und T=12h. Aufgetragen ist der Verlauf über 2 Wochen.

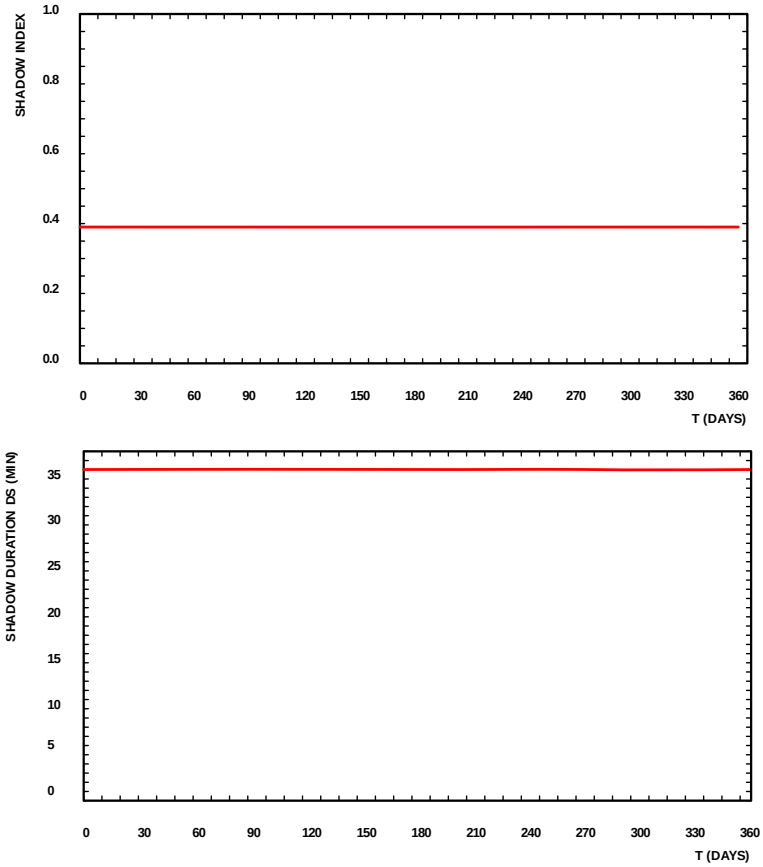


Bild 28-71: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 12h Ortszeit im aufsteigenden Knoten (Start 1.Jan. 2018)

BEISPIEL 4: Dieselbe sonnensynchrone Bahn wie im vorstehenden Beispiel 3 wird um 6h mittlerer Sonnenzeit in eine Dämmerungsbahn gestartet. Als Startdatum wurde der 1. Januar 2018 gewählt. Die Darstellung in Bild 28-72 zeigt nicht die bisweilen erwartete schattenfreie Bahn. Vielmehr muss in den Wintermonaten mit einer Schattendauer bis zu etwa 25 Minuten gerechnet werden. Dies ist eine Folge davon, dass die Sonne sich in der Ekliptik bewegt und in den Wintermonaten wesentlich südlich der Äquatorebene aufhält. Im Jahresverlauf ist auf einer solchen Dämmerungsbahn eine schattenfreie Phase nur für etwa 8.5 Monate zu erwarten. ◄

BEISPIEL 5: Wieder wird die vorstehende sonnensynchrone Bahn als Dämmerungsbahn untersucht, jetzt jedoch bei Start um 18h mittlerer Sonnenzeit im aufsteigenden Knoten. Bild 28-73 zeigt, dass es auch hier eine Schattenphase gibt, jedoch in den Sommermonaten. ◄

28.11.4.2 Schattenzeiten auf einer elliptischen Bahn

Das Schattenverhalten auf einer elliptischen Bahn ist auf Grund der Elliptizität der Bahn, der Eigenbewegungen von Apsiden- und Knotenlinien schwierig vorherzusagen und muss sorgfältig untersucht werden.

BEISPIEL: Untersucht werde das Schattenverhalten einer Transferbahn in die geostationäre Bahn. Als Bahndaten wird die Transferbahn des ersten europäischen Telekommunikationssatelliten SYMPHONIE-A gewählt:

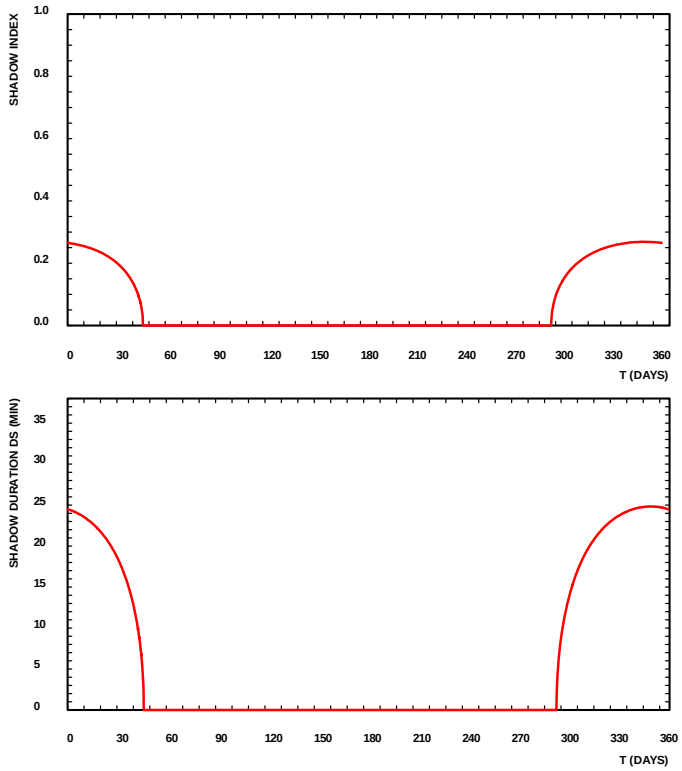


Bild 28-72: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 6h Ortszeit im aufsteigenden Knoten am 1. Jan. 2018

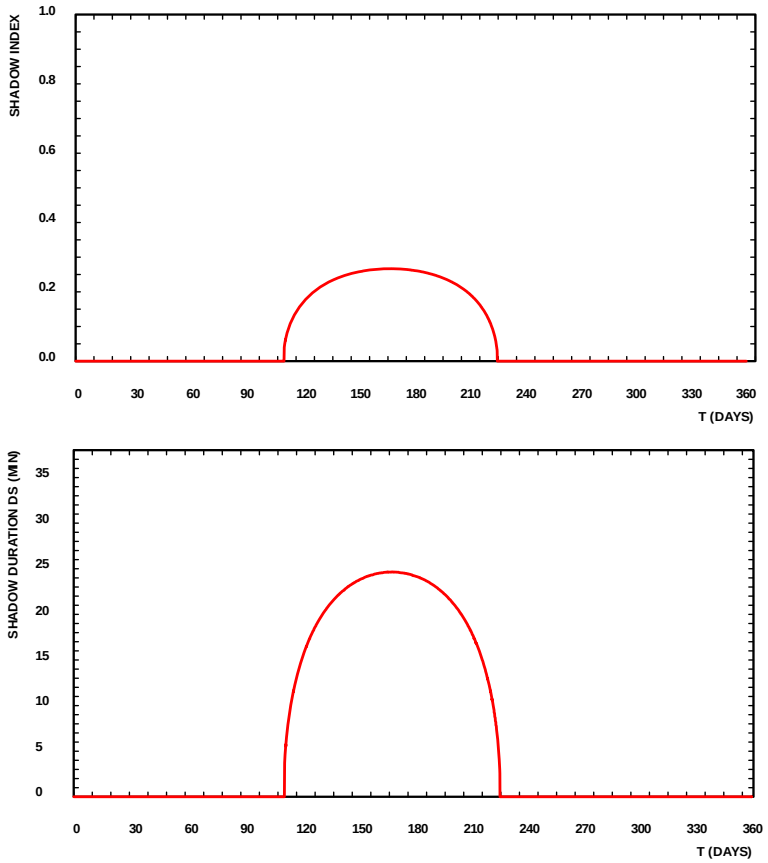


Bild 28-73: Schattenfaktor (Schattenindex) (oben) und Schattendauer (unten) der kreisförmigen sonnensynchronen 27:421 Bahn bei Start um 18h Ortszeit im aufsteigenden Knoten am 1. Jan. 2018

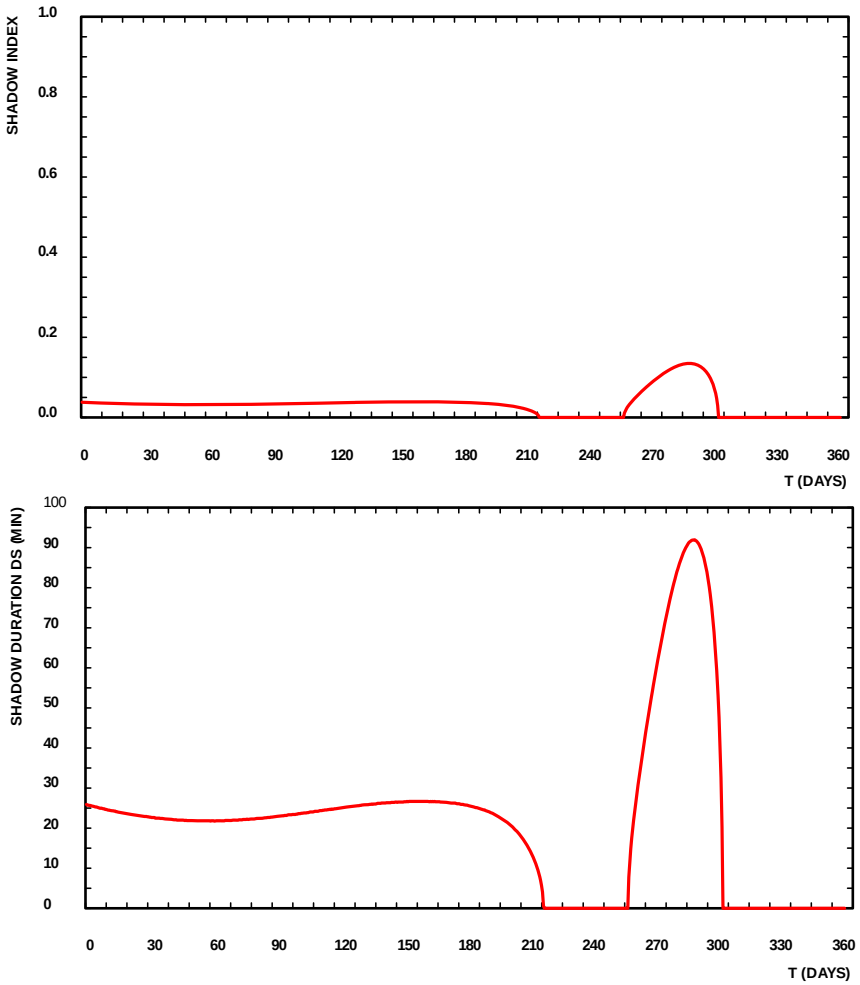


Bild 28-74: Schattenzeiten und Schattenfaktor eines Satelliten auf einer hochelliptischen Transferbahn in die geostationäre Bahn im Verlauf eines tropischen Jahres

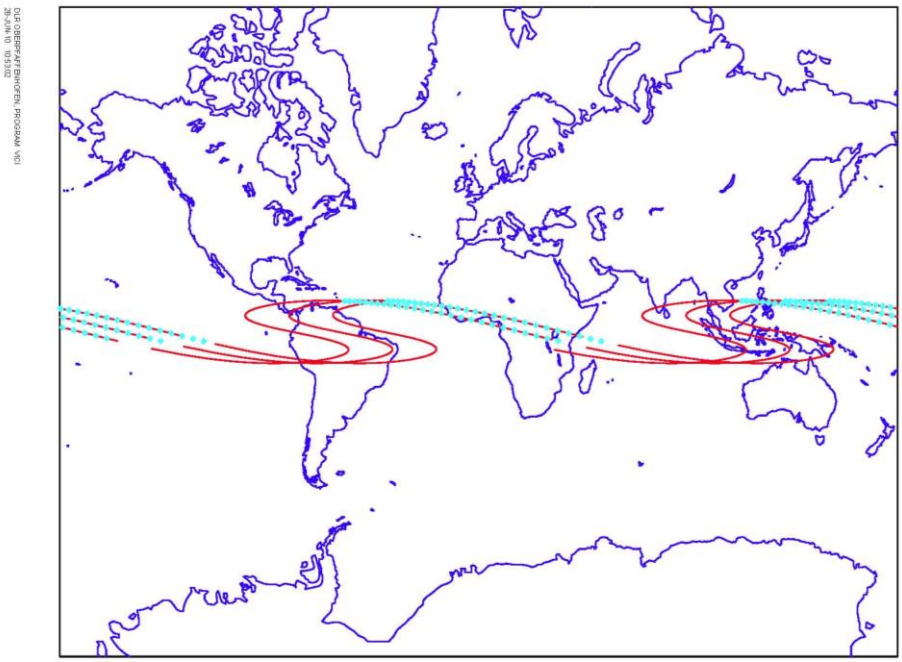


Bild 28-75: Die Schattenstrecken auf der Transferbahn von SYMPHONIE-A während der ersten sechs Umläufe nach Bahneinschuss

Apogäumshöhe H_A = 38138.138 km, Perigäumshöhe H_P = 397.932 km,
Inklination i = 13°.27, Geographische Länge des ersten absteigenden Knotens $\lambda_{☊}$ = 358°.0,

Argument der Breite $\overline{\omega}_0$ = 177°.798, Mittlere Anomalie zur Epoche, $\overline{M}_{00}$ = 4°.11

Epoche des Einschusses in die Transferbahn: t_0: 1974-12-19/03:12:0.0.

Die mittlere synodische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_S} = 11^h\,22^m$. Der Zeitpunkt des Einschusses wurde wie Bild 28-75 zeigt so gewählt, dass der Satellit nur in der Nähe des Perigäums den Erdschatten durchläuft. Der Satellit befindet sich dann etwa 26 Minuten im Erdschatten, das sind etwa 4% eines Umlaufes. ◀

28.11.4.3 Schattenzeiten auf einer geostationären Bahn

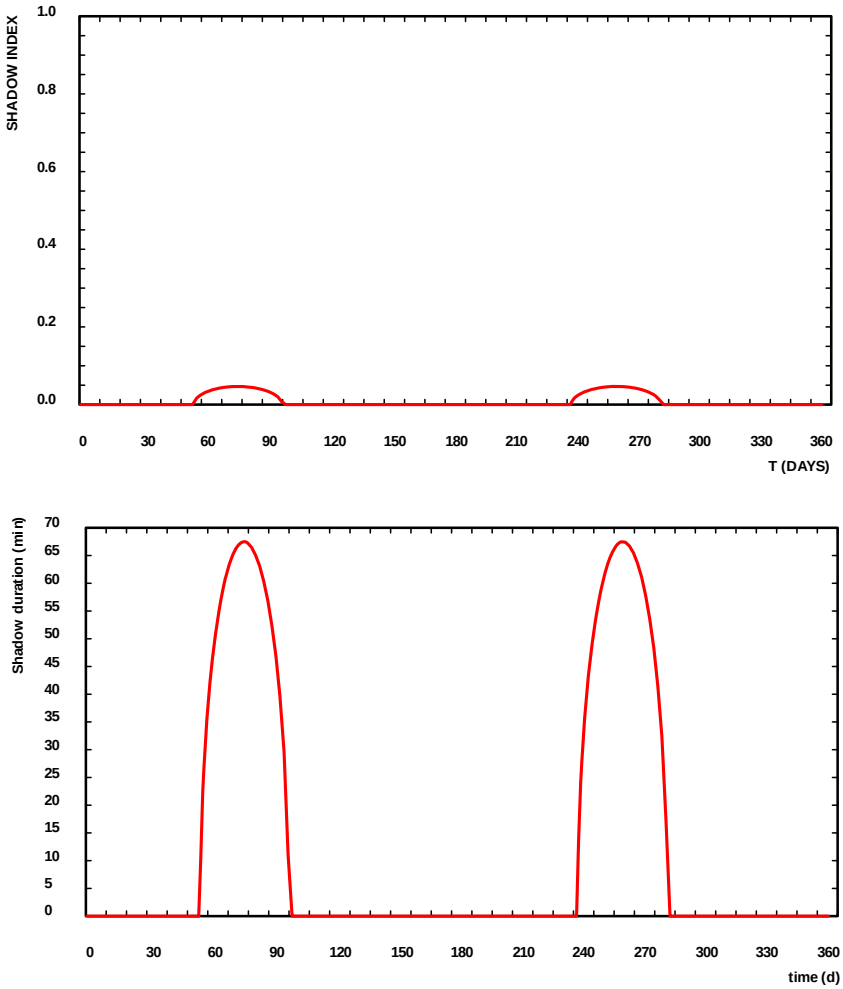


Bild 28-76: Schattenzeiten und Schattenfaktor eines Satelliten auf einer geostationären Bahn (Position λ = 350°) im Jahresverlauf (gerechnet für das Jahr 2018)

Ein geostationärer Satellit bewegt sich in der Äquatorebene der Erde, während sich die Sonne in der Ekliptikebene bewegt. Ein geostationärer Satellit kann sich deshalb nur dann im Erdschatten befinden, wenn die Sonne im Jahresverlauf in der Nähe des Erdäquators bewegt. Das findet in der Nähe der Solstitien („Tag und Nachtgleiche“) statt. Je im März und September kann die Sonne in einem Zeitraum von je etwa 33 Tagen pro synodischem Umlauf für maximal etwa 66 Minuten in den

Erdschatten eintauchen. Der Energiehaushalt eines derartigen Satelliten muss daher den Verlust der Sonneneinstrahlung für über eine Stunde verkraften können.

BEISPIEL: Bild 28-76 zeigt Schattenverlauf und Schattenfaktor über ein tropisches Jahr für einen geostationären Satelliten, der auf der geographischen Länge $\lambda = 350°$ positioniert ist. ◄

28.11.5 Schattengrenze (Terminator) und Sonnenelevationskurven

Einige der bisher behandelten Größen zur Schattenberechnung erlauben in einfacher Weise auch die Berechnung der Schattenzone auf der Erdoberfläche durch Berechnung der Schattengrenze (="Dämmerungslinie" = „Terminator").

Zu einem bestimmten Zeitpunkt habe der Subsolarpunkt auf der (kugelförmig gedachten) Erdoberfläche die (östliche) geographische Länge $\lambda_\odot$ und die Deklination $\delta_\odot$. Der geometrische Ort aller Punkte $P(\lambda_D, \delta_D)$ auf der Erdoberfläche, die vom Subsolarpunkt um den Zentralwinkel γ_0 entfernt sind, ist die Schattengrenze. γ_0 wird nach Bild 28-63 auf Seite 192 mit den Formeln (28.461) und aus der Beziehung

$$\cos\gamma_0 = -\frac{R}{y_K} = -\frac{R_\odot - R}{r_\odot} \quad , \quad \sin\gamma_0 = \sqrt{1-\cos^2\gamma_\odot} \qquad (28.516)$$

berechnet, ist somit von der momentanen geozentrischen Distanz des Sonnenmittelpunktes $r_\odot$ abhängig. λ_D, δ_D seien die (östliche) geographische Länge und die Deklination des Terminator Punktes *P*. Das Azimut A_S im Subsolarpunkt sei der Parameterwinkel.

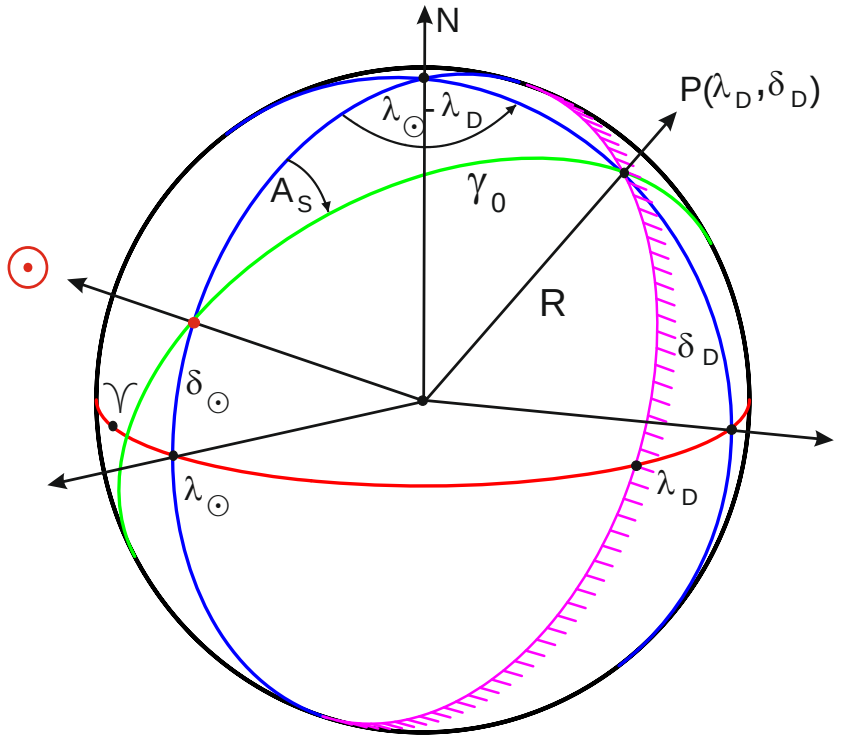


Bild 28-77: Zur Berechnung des Terminators

Damit werden nach Bild 28-77 mit dem Parameter $A_S \in [0°, 360°)$ die Punkte $P(\lambda_D, \delta_D)$ der Schattengrenze berechnet aus

$$\begin{aligned} \sin\delta_D &= \cos A_S \sin\gamma_0 \cos\delta_\odot + \cos\gamma_0 \sin\delta_\odot \\ \cos\delta_D &= \sqrt{1-\sin^2\delta_D} \\ \sin(\lambda_D-\lambda_\odot)\cos\delta_D &= \sin A_S \sin\gamma_0 \\ \cos(\lambda_D-\lambda_\odot)\cos\delta_D &= -\cos A_S \sin\gamma_0 \sin\delta_\odot + \cos\gamma_0 \cos\delta_\odot \quad . \end{aligned} \tag{28.517}$$

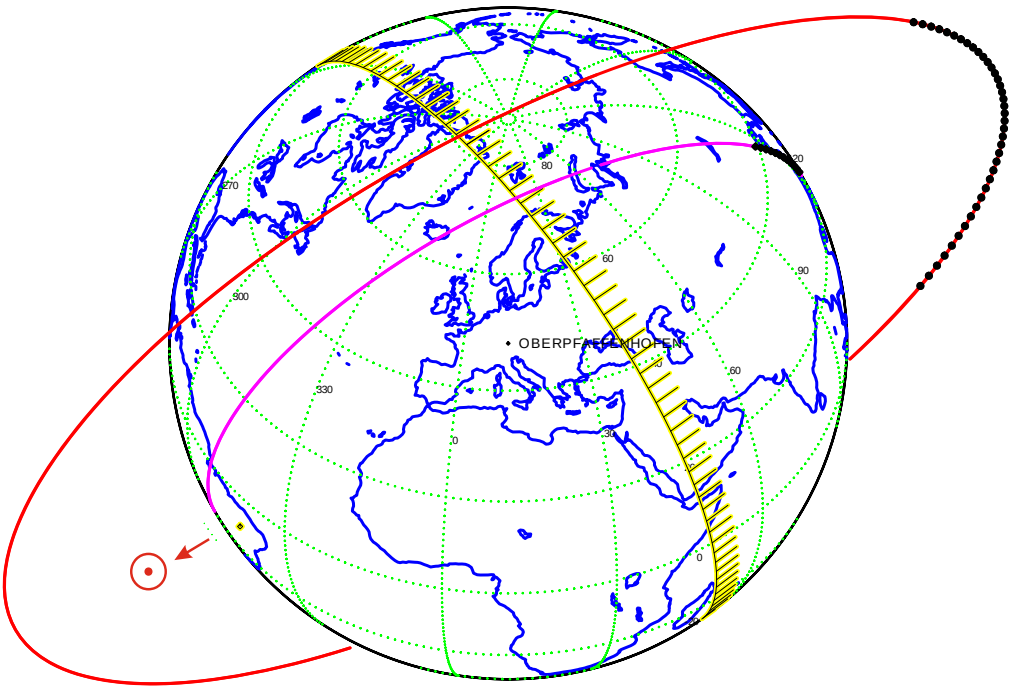


Bild 28-78: Darstellung von Terminator und Schattenabschnitt einer leicht exzentrischen Bahn.

Die Strichlierung zur Andeutung des Schattens in Bild 28-77 wird durch Variation des Zentralwinkels $\gamma_\odot$ um etwa 2° erhalten. Die geodätische Breite φ_D kann bei Bedarf mit Formel (37.36) $\tan\varphi_D = (1-f)^{-2}\tan\delta_D$ berechnet werden[1].

BEISPIEL 1: Bild 28-78 zeigt die Darstellung des Terminators am 25. Feb. 1981 um 15h U.T. Der subsolare Punkt ist im nördlichen Südamerika zu erkennen. Die Satellitenbahn mit Apogäumshöhe H_A = 4500 km, Perigäumshöhe H_P = 4000 km, Inklination i = 75°, geographische Länge des absteigenden Knotens $\lambda_{\Omega} = 130°$, Argument des Perigäums $\omega = 100°$, Mittlere Epocheanomalie $\overline{M}_{00}$ = 0° wird als wahre Bahn sowie mit ihrer Subsatellitenbahn ohne Berücksichtigung der Erdrotation dargestellt. Zu erkennen ist der Abschnitt des Erdschattens längs der wahren Bahn und der zugehörige Abschnitt auf der Subsatellitenbahn. ◀

[1] Abschnitt 37.2.3 (Band V)

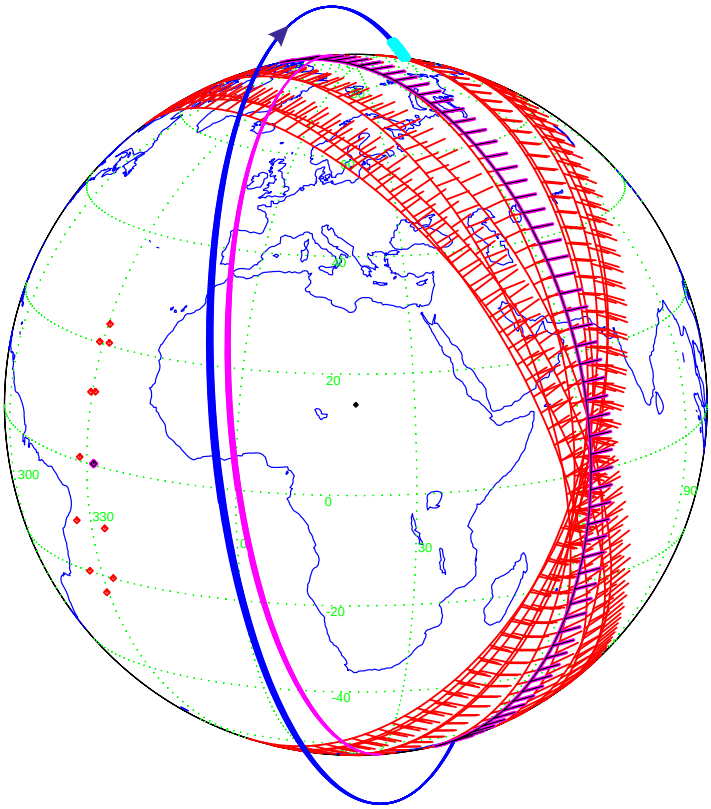


Bild 28-79: Verlauf des subsolaren Punktes auf der Erdoberfläche um 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit (Ortszeit) über ein Jahr im Abstand von je einem Monat mit jeweils zugehörigem Sonnenterminator. Eingezeichnet ist ferner die wahre Bahn und die Subsatellitenspur einer sonnensynchronen Satellitenbahn (i = 99°) mit Reproduzierbarkeit nach einem Tag (integer orbit 1:14, mittlere Bahnhöhe H = 888.33 km), deren aufsteigender Knoten um jeweils 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit stattfindet.

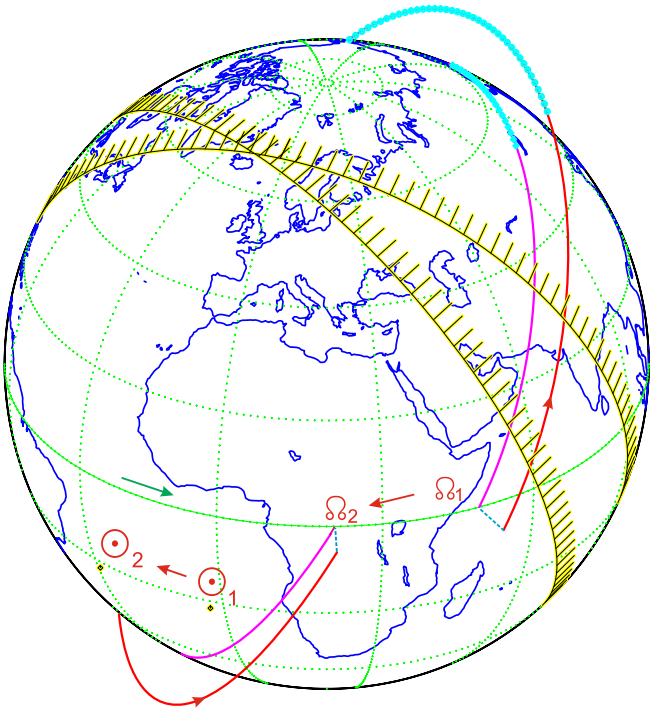


Bild 28-80: Wanderung der Sonne und des zugehörigen Terminators auf der rotierenden Erdoberfläche während eines drakonitischen Umlaufs eines Satelliten auf kreisförmiger Shuttlebahn. Die subsolaren Punkte sind als kleine Punkte unterhalb der Sonnensymbole zu erkennen. Darstellung in Parallelprojektion

BEISPIEL 2: Bild 28-79 zeigt den Verlauf des subsolaren Punktes auf der Erdoberfläche um 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit (Ortszeit) über ein Jahr im Abstand von je einem Monat mit jeweils zugehörigem Sonnenterminator. Die Folge der subsolaren Punkte lässt die Form des Analemma der Zeitgleichung erkennen[1]. Hervorgehoben ist der Terminator für den 21. März (Tag und Nachtgleiche). Eingezeichnet ist ferner die wahre Bahn und die Subsatellitenspur einer sonnensynchronen Satellitenbahn (i = 99°) mit Reproduzierbarkeit nach einem Tag (integer orbit 1:14, mittlere Bahnhöhe H = 888.33 km), deren aufsteigender Knoten um jeweils 14 Uhr mittlerer Sonnenzeit stattfindet. ◄

BEISPIEL 3: In Bild 28-80 ist die Erdrotation berücksichtigt. Während sich die Erde nach Osten dreht (grüner Pfeil), bewegt sich die Sonne während eines drakonitischen Umlaufs der Satellitenbahn (a=7400 km, e=0.0, i=57°) nach Westen, entsprechend auch der aufsteigende Knoten der Bahn sowie der Terminator. Das Bild enthält auch den Bahnabschnitt im Erdschatten. ◄

BEISPIEL 4: In der linearen Projektion in Bild 28-81 kann die Wanderung des Terminators während eines drakonitischen Satellitenumlaufs über der gesamten Erdoberfläche beurteilt werden. Inhaltlich handelt es sich um dieselbe Darstellung wie in Bild 28-80. ◄

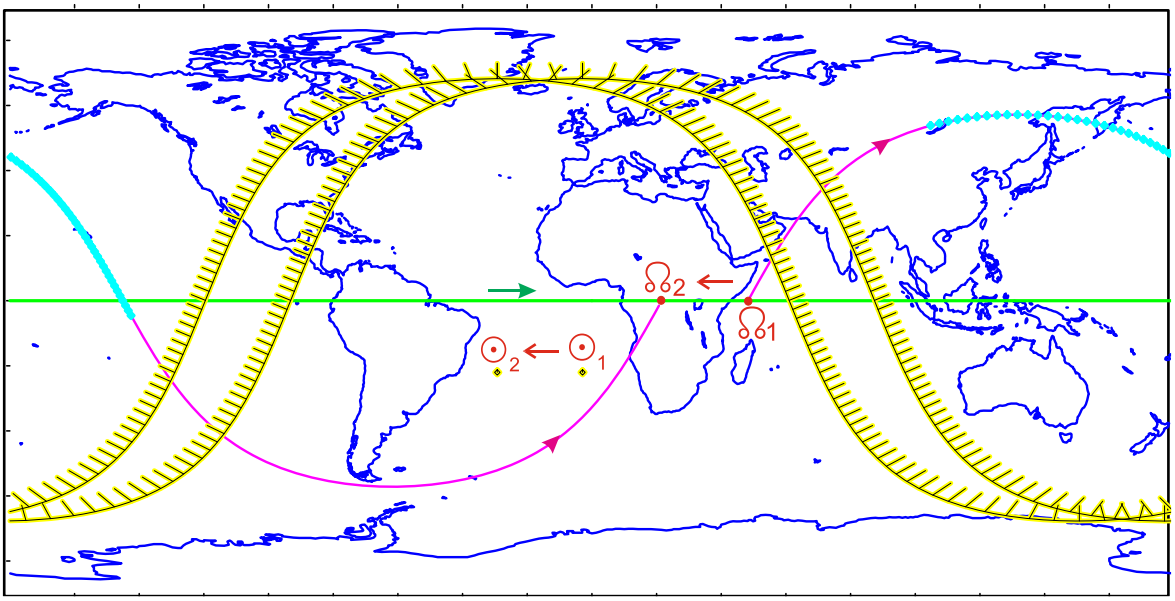


Bild 28-81: wie Bild 28-80 jedoch in linearer Projektion

28.11.6 Sonnenelevationskurven

Sonnenelevationskurven sind Kurven für eine konstante Sonnenelevation $h_\odot$. Um die geographischen Koordinaten der Kurvenpunkte $P(\lambda_D, \delta_D)$ bei vorgegebener Sonnenelevation zu berechnen, wird nach Bild 32.2 (Abschnitt 32.1, Band V) mit bekannter geozentrischer Distanz $r_\odot$ und Radius R der

[1] Abschnitt 28.3.3 auf Seite 29

in diesem Fall kugelförmig angenommenen Erde die Schrägentfernung $\rho_\odot = \overline{\odot P}$ benötigt. Formel (32.5) ergibt

$$\rho_\odot = -R\sinh_\odot + \sqrt{r_\odot^2 - R^2\cos^2 h_\odot} \quad . \tag{28.518}$$

Der Zentralwinkel γ zwischen Sonne und Kurvenpunkt P kann mit den Formeln (32.11) berechnet werden:

$$\sin\gamma = \frac{\rho_\odot}{r_\odot}\cos h_\odot \quad , \quad \cos\gamma = \frac{R}{r_\odot} + \frac{\rho_\odot}{r_\odot}\sin h_\odot \quad . \tag{28.519}$$

Damit und dem Azimut A_S als Parameterwinkel können mit den Formeln (28.517) die Randpunkte konstanter Sonnenelevation berechnet werden. BEISPIEL in Bild 28-82.

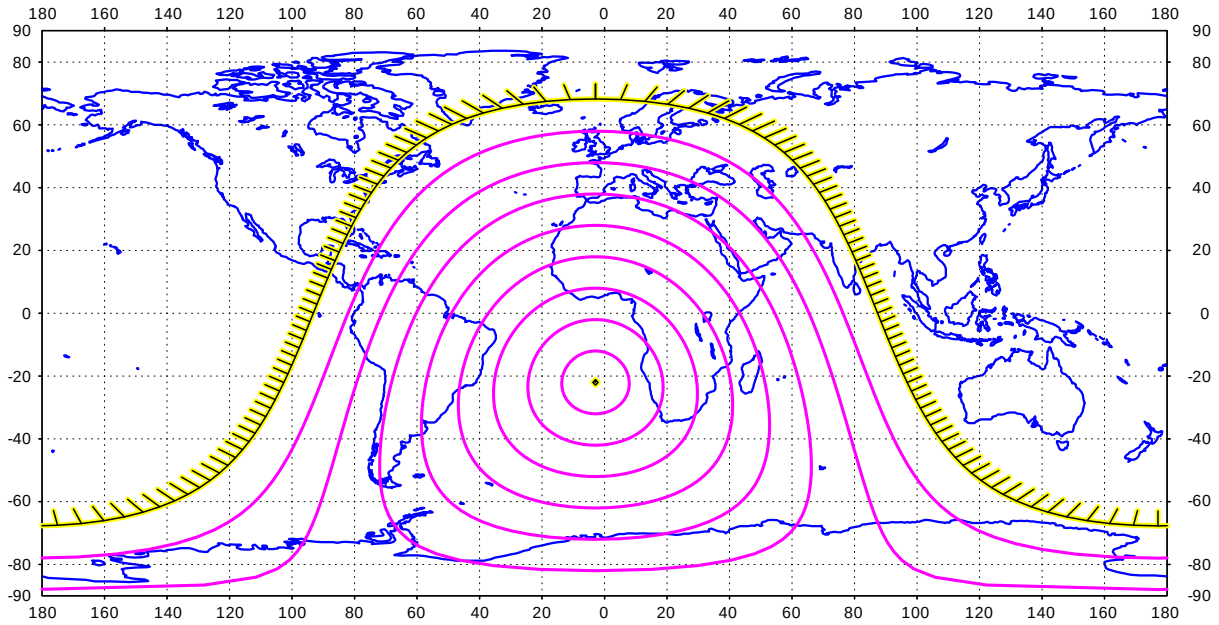


Bild 28-82: Die Kurven konstanter Sonnenelevation 0° (Terminator), 10°, 20°, 30°, 40°,50°, 60°, 70°, 80°. Ort des subpolaren Punktes für das Datum 1979-12-03/12

28.11.7 Okkultationsmessungen (Limb Sounding)

Bei Schattenein- oder austritt berührt die Sichtlinie Satellit-Sonne die Erdoberfläche bzw. einen Gebiet mit der Höhe *H* über der Erdoberfläche. In diesem Gebiet herrscht Dämmerung, die für Okkultationsmessungen genutzt werden kann. Sie dienen etwa für spektroskopische Untersuchungen der Atmosphäre, zum Nachweis von Spurengasen[1]. Wenn die Schattenein- bzw. Austrittszeiten mit einer der Methoden aus Abschnitt 28.11.3 bekannt sind, interessiert wo die Dämmerungsgebiete auf der Erdoberfläche liegen, die pro Satellitenumlauf zu Okkultationsmessungen genutzt werden können. Dazu müssen die geographischen Koordinaten dieser Gebiete bestimmt und eventuell dargestellt werden.

[1] z. B. in den geodätischen Missionen CHAMP und GRACE

Zur entsprechenden Schattenkontaktzeit t_C werden in einer Ephemeridenrechnung die geozentrischen Zustandsvektoren $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ des Satelliten und $(\mathbf{r}_\odot,\dot{\mathbf{r}}_\odot)$ der Sonne berechnet. Damit sind auch die geozentrischen äquatorialen Koordinaten (α_S,δ_S) des Satelliten und $(\alpha_\odot,\delta_\odot)$ der Sonne bekannt.

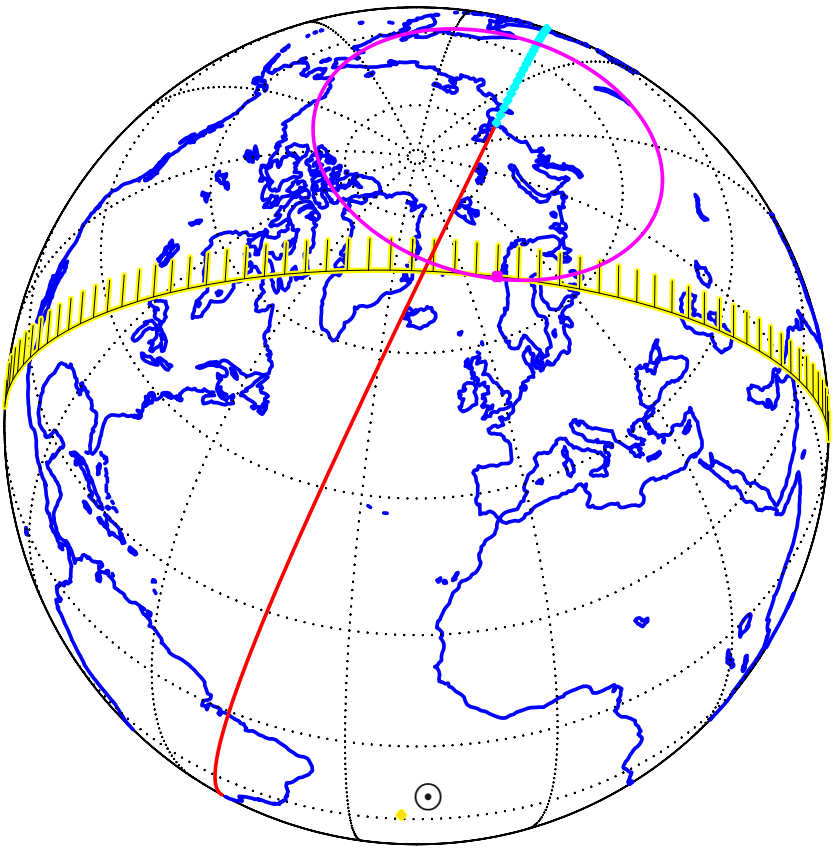


Bild 28-83: Zur Berechnung des Sonnen-Okkultationspunktes von einem Satelliten im Moment des Schattenaustritts. Der gesuchte Punkt liegt auf dem Terminator. Eingezeichnet ist der Sichtkreis, der vom Satelliten aus auf der Erdoberfläche überdeckt werden kann: Horizontkreis. Der subsolare Punkt ist am unteren Rand des Erdballes erkennbar

Vom Satelliten aus gesehen geht die Sonne über dem Horizontkreis auf (Sunrise) oder unter (Sunset). Bild 28-83 zeigt den Verlauf einer Satellitenbahn von Nord nach Süd mit Schattenaustritt. Im Moment des Schattenkontaktes ist der lokale Horizontkreis auf der (kugelförmig gedachten) Erdoberfläche eingezeichnet. Er berührt den zu diesem Zeitpunkt bestehenden Terminator im Sonnen-Okkultationspunkt. Dessen geographische Koordinaten (λ_D,φ_D) sind zu berechnen.

Entscheidend für die Berechnung ist auf der Erdkugel der Großkreis durch Schattenkontaktpunkt $S(\alpha_S,\delta_S)$, Sonnen-Okkultationspunkt $P_D(\lambda_D,\varphi_D)$ und subsolarem Punkt $\odot(\alpha_\odot,\delta_\odot)$.

Entsprechend Bild 28-77 (auf Seite 213) hat dieser Großkreis bei Bezug auf die Sonne das Azimut A_S. Zu seiner Berechnung wird die Elongation $\gamma_\odot$ zwischen den geozentrischen Richtungen zu Satellit und Sonne mit dem Sonnenwinkel $\tau = \alpha_S - \alpha_\odot$ benötigt. Sie ergibt sich aus

$$\cos\gamma_\odot = \cos\tau_S \cos\delta_S \cos\delta_\odot + \sin\delta_S \sin\delta_\odot \;,\; \sin\gamma_\odot = \sqrt{1-\cos^2\gamma_\odot} \qquad (28.520)$$

und es wird

$$\sin A_S = \frac{\cos\delta_S \sin(\alpha_S - \alpha_\odot)}{\sin\gamma_\odot} \;,\; \cos A_S = \frac{\sin\delta_S - \sin\delta_\odot \cos\gamma_\odot}{\cos\delta_\odot \sin\delta_\odot} \quad \langle \sin\gamma_\odot \neq 0 \;. \tag{28.521}$$

Im Fall $\sin\gamma_\odot = 0$ wird $\sin A_S = 0,\ \cos A_S = 1$ gesetzt. Der Fall $\cos\delta_\odot = 0$ kann wegen $|\delta_\odot| \leq \varepsilon$ nicht auftreten. Die Elongation Sonne zum Sonnen-Okkultationspunkt ist im Fall von Kernschatten aus Formel (28.462) bekannt

$$\cos\gamma_0 = -\sin\beta = -\frac{R_\odot - R}{r_\odot} \;,\; \sin\gamma_0 = \sqrt{1-\cos^2\gamma_0} \;, \tag{28.522}$$

im Fall von Halbschatten mit Formel (28.473) aus

$$\cos\gamma_0 = \frac{R_\odot + R}{r_\odot} \;,\; \sin\gamma_0 = \sqrt{1-\cos^2\gamma_0} \;. \tag{28.523}$$

Die Deklination des Sonnen-Okkultationspunktes ergibt sich damit aus

$$\sin\delta_D = \cos A_S \cos\delta_\odot \sin\gamma_0 + \sin\delta_\odot \cos\gamma_0 \;, \tag{28.524}$$

seine Rektaszension aus

$$\sin(\alpha_D - \alpha_\odot) = \frac{\sin\gamma_0 \sin A_S}{\cos\delta_D} \;,\; \cos(\alpha_D - \alpha_\odot) = \frac{\cos\gamma_0 - \sin\delta_D \sin\delta_\odot}{\cos\delta_D \cos\delta_\odot} \quad \langle \cos\delta_D \neq 0 \;. \tag{28.525}$$

Im Fall $\cos\delta_D = 0$ wird $\sin(\alpha_D - \alpha_\odot) = 0, \cos(\alpha_D - \alpha_\odot) = 1$ gesetzt.

Mit $\alpha_D = (\alpha_D - \alpha_\odot) + \alpha_\odot$ und der zum Zeitpunkt t_C gültigen mittleren Sternzeit Θ_G zu Greenwich[1] wird die gesuchte geographische Länge des Sonnen-Okkultationspunktes erhalten

$$\lambda_D = \alpha_D - \Theta_G \;. \tag{28.526}$$

Falls auch die geodätische Breite φ_D gewünscht wird, folgt sie aus Formel[2] (37.36)

$$\tan\varphi_D = \frac{\tan\delta_D}{(1-f)^2} \;. \tag{28.527}$$

BEISPIEL 1: Zahlenwerte zu Bild 28-83: gegeben sei eine kreisförmige sonnensynchrone Satellitenbahn mit Vorgabe der Halbachse $\bar{a}_0$ = 7053.155 km. Nach Abschnitt 28.9.2.3 (auf Seite 168) ergibt sich die Inklination $\bar{i}_0$ = 98°.10953005. Der absteigende Knoten soll bei Einschuss die geographische Länge $\lambda_{\varepsilon S}$ = -170° und am 27. Januar 1982 um 11^h mittlere lokale Sonnenzeit (M.S.T.) erfolgen. Damit ergibt sich nach Abschnitt 28.6.3 (ab Seite 64) die Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\bar{\Omega}_0$ = 111°.86601971 und die mittlere Epocheanomalie $\overline{M}_{00}$ = 180°. Wegen $\bar{e}_0$ = 0.0 ist das Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0$ = 0°.0. Die entsprechende Epoche ergibt sich zu t_0 : 1982-01-27/22:20:0.0. Die mittlere synodische Umlaufzeit beträgt $\overline{P}_S$ = 5902.235276 sec.

Die Bahn wird über das Intervall 1982-01-27/13: 00: 0.00 bis 1982-01-27/14:30: 0.00 berechnet.

---

[1] Abschnitt 9.1.2.1 sowie Formel (8.196) in Abschnitt 8.6.1 (Band II)

[2] Abschnitt 37.2.3 (Band V)

Die erste Schattenkontaktzeit bei Schattenbeginn (Sunset) lautet (siehe Abschnitt 28.11.3, ab Seite 199): t_{S1}:1982-01-27/13:06:24.651.

Der zughörige Sonnen-Okkultationspunkt hat die geographischen Koordinaten:

$\lambda_{D/Occ/t1} = 144°.102$, $\varphi_{D/Occ/t1} = -69.823$, der Satellite: $\lambda_{S/t1} = 156°.689$, $\varphi_{D/Occ} = -45°.343$.

Dieser Kontakt liegt auf der Rückseite des Erdballs in Bild 28-83.

Der zweite Schattenkontakt im Moment des Schattenaustritts (Sunrise) erfolgt um:

t_{S2}: 1982-01-27/13:40:43.340.

Zu diesem Zeitpunkt hat die Sonne die Koordinaten: $\lambda_{\odot} = 337°.75871, \varphi_{\odot} = -18°.51106$,

der Satellite: $\lambda_{S/t2} = 102°.212$, $\varphi_{D/Occ} = 76°.857$

und der Sonnen-Okkultationspunkt: $\lambda_{D/Occ} = 11°.927$, $\varphi_{D/Occ} = 68°.287$. ◄

BEISPIEL 2: Es werde eine STS-Bahn mit den mittleren Keplerelementen $\bar{a}_0$ = 6626.473 km, $\bar{e}_0$ = 0.00011, $\bar{i}_0$ = 57°.06434, $\bar{\Omega}_0$ = 242°.68435, $\bar{\omega}_0$ = 98°.25984, $\bar{M}_{00}$ = 90°.601160 zur Epoche t_0: 1984-01-01/00:00:0.0 vorgegeben. Für diesen Tag werden die Sonnen-Okkultationspunkte bei Schatteneintritt sowie bei Schattenaustritt in Bild 28-84 dargestellt. ◄

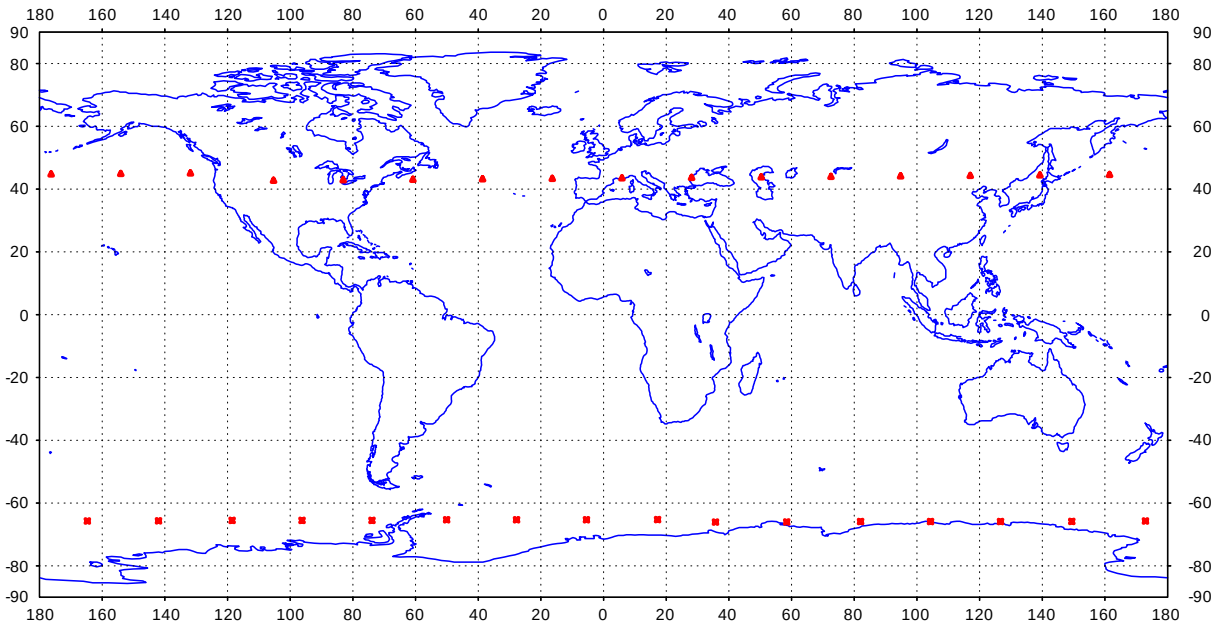


Bild 28-84: Dämmerungsgebiete über der Erdoberfläche gesehen von einem Space Shuttle im Verlauf eines Tages. Die Dämmerungsgebiete bei Schatteneintritt sind durch das Symbol X kodiert (im Süden um die Antarktis) , bei Schattenaustritt durch ▲ (über der Nordhalbkugel)

BEISPIEL3: Für dieselbe STS-Bahn wie im vorgehenden Beispiel 2 werden die Sonnen-Okkultationspunkte über den Verlauf eines Monats, in diesem Fall über den Monat Januar untersucht. ◄

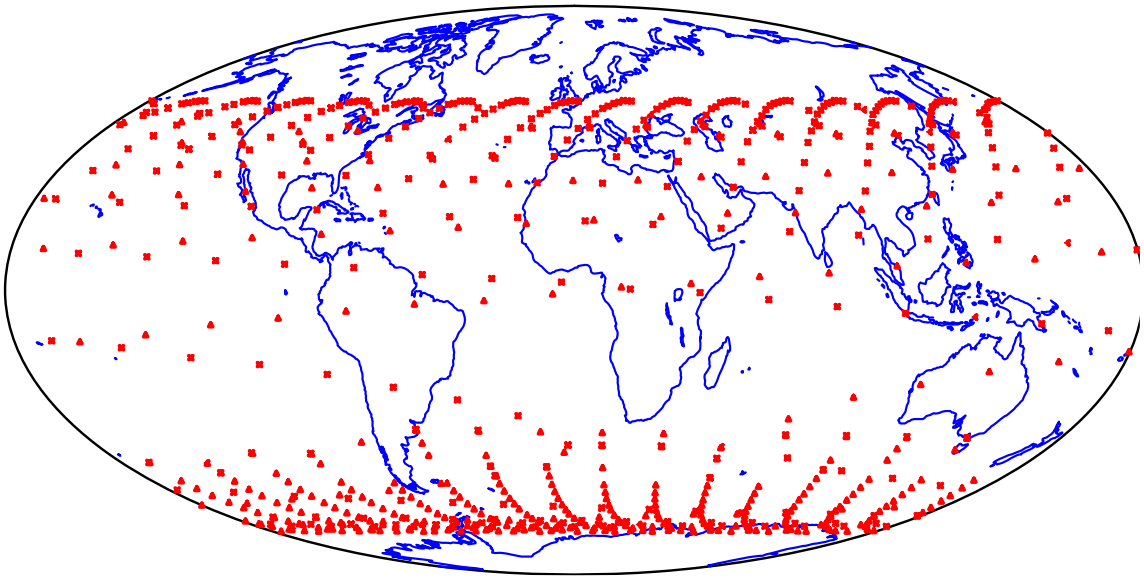


Bild 28-85: Dämmerungsgebiete über der Erdoberfläche gesehen von einem Space Shuttle im Verlauf eines Monats. Dämmerungsgebiete bei Schatteneintritt sind durch das Symbol X kodiert, bei Schattenaustritt durch ▲

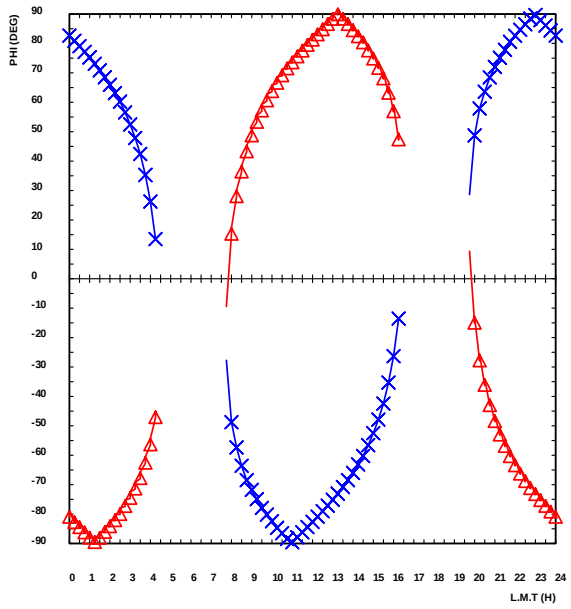


Bild 28-86: Sonnen-Okkultationsgebiete gesehen von einer sonnensynchronen Bahn am 21. März 1982 aus in Abhängigkeit von der Startzeit in mittlerer Sonnenzeit über einen mittleren Sonnentag: blau bei Schatteneintritt (X), rot bei Schattenaustritt (▲)

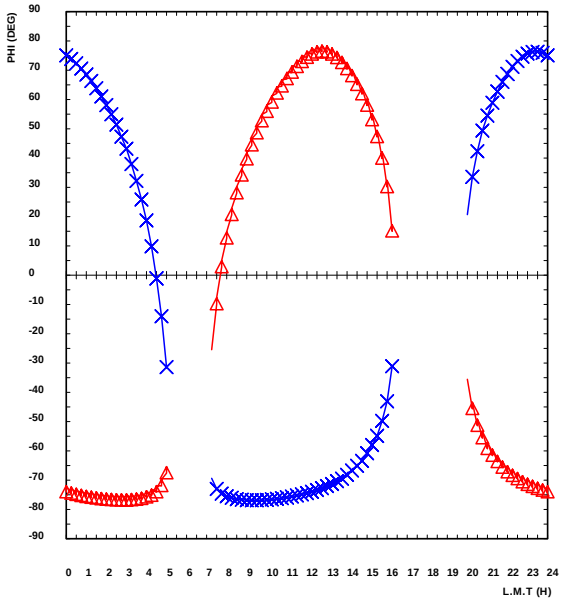


Bild 28-87: Sonnen-Okkultationsgebiete gesehen von einer sonnensynchronen Bahn am 17. August 2018 aus in Abhängigkeit von der Startzeit in mittlerer Sonnenzeit über einen mittleren Sonnentag: blau bei Schatteneintritt (X), rot bei Schattenaustritt (▲)

BEISPIEL 4: Für die kreisförmige sonnensynchrone Bahn H= 675 km (a= 7053.137 km, i= 98°.10953) wird in Bild 28-86 und Bild 28-87 untersucht, welche Art von Sonnen-Okkultationspunkten über welchem Breitenkreis auf der Erdoberfläche erreicht werden können, wenn bei Einschuss im aufsteigenden Knoten der Bahn die Startzeit in mittlerer Sonnenzeit über den ganzen Tag variiert. Die beiden Bilder zeigen, wie empfindlich die Aussage gegenüber dem untersuchten Zeitraum ist. ◀

BEISPIEL5: Für dieselbe STS-Bahn wie in den Beispielen 2 und 3 werden die Sonnen-Okkultationspunkte im Verlauf eines Jahres in Bild 28-88 berechnet: bei Start am 1. Januar, 0h, kann abgelesen werden, über welchem Breitenkreis an einem bestimmten Datum Schattenein- oder –austritt stattfindet. ◄

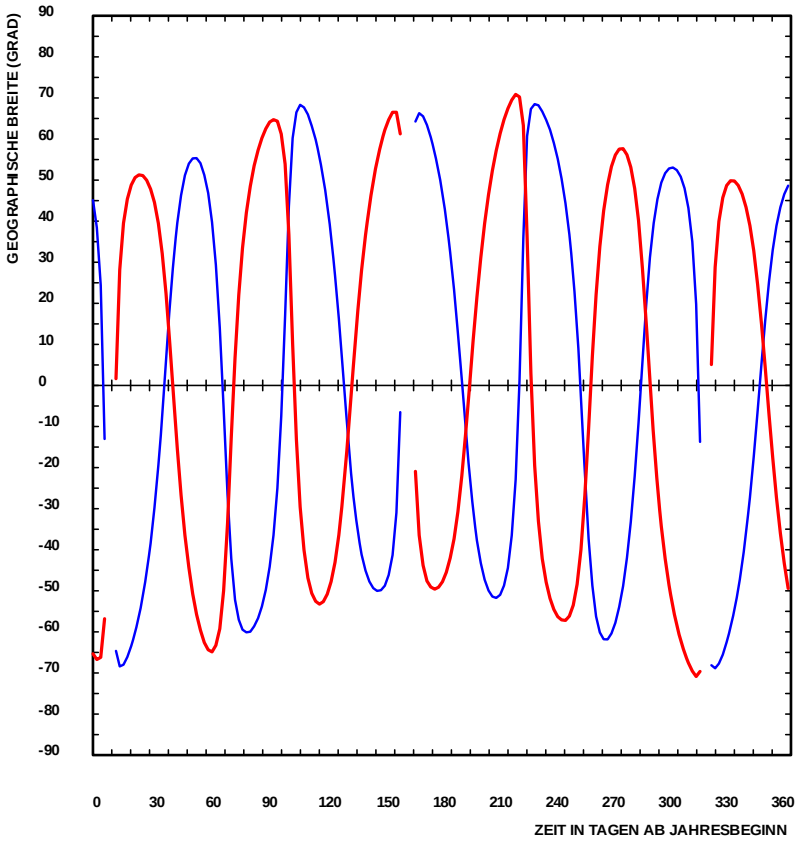


Bild 28-88: Sonnen-Okkultationsgebiete gesehen von einer Shuttlebahn aus (Daten wie in den Beispielen 2 und 3) im Verlauf eines Jahres, blaue Kurven: Schatteneintritt (Sunset), rote Kurven: Schattenaustritt (Sunrise), Startzeitpunkt 1. Jan. 1984

28.11.8 Abschätzungen zur Genauigkeit bei Schattenberechnungen

28.11.8.1 Abschätzung des Einflusses der Erdabplattung

In allen bisher abgeleiteten Formeln ist die Erdabplattung berücksichtigt. *R* ist der halbe Erddurchmesser in der Schnittebene durch Sonnen-, Erd- und Satellitenmittelpunkt. Folgende numerischen Beispiele zeigen, dass für Abschätzungen im Allgemeinen die Erdabplattung vernachlässigt werden kann, worauf auch schon der geringe Unterschied im Verlauf der Schattenfunktionen zwischen den drei Schattenmodellen in Bild 28-66 und Bild 28-67 hingewiesen hat. Es soll aber auch abgeschätzt werden, mit welchen Fehlern im ungünstigsten Fall zu rechnen sein wird. Es werde jeweils eine Kreisbahn mit konstantem Radius r= a angenommen. Diese Bahn möge in der Ekliptik liegen, so dass der Sonnenaspektwinkel $\sigma_\odot = 90°$ betrage. Sei $\gamma_\odot$ die geozentrische Elongation eines Satelliten zur Sonne. Der Satellit befindet sich dann nach Bild 28-89 im Erdschatten über dem Bogen $2\gamma_K$, wobei

$$\gamma_K := 180° - \gamma_\odot \tag{28.528}$$

definiert ist. Dieser Winkel kann aus der Kernschattengleichung (28.470) für $S_K = 0$ berechnet werden.

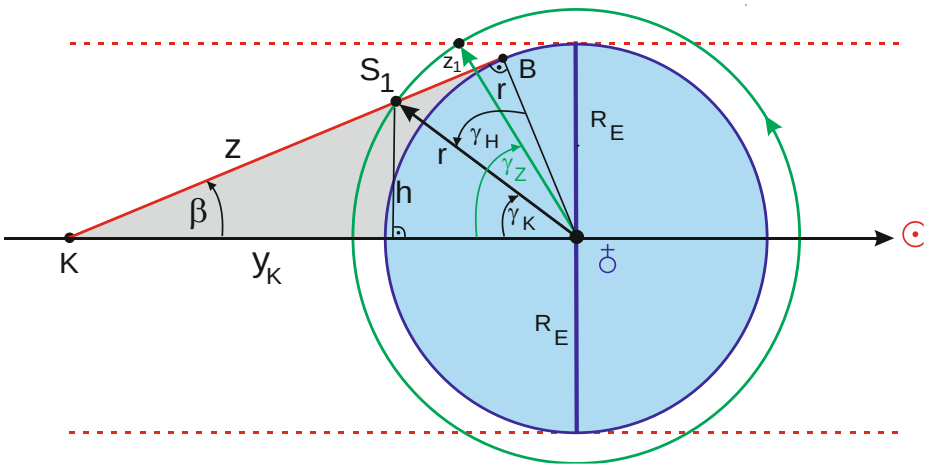


Bild 28-89: Zur Abschätzung der Schattenzeit im Kegel- und Zylindermodell am Beispiel einer kreisnahen Bahn in der Ekliptik

BEISPIEL 1: Gegeben sei die erdnahe Kreisbahn r = a= 7000 km, sowie die Daten der Sonne . $r_\odot$ = 149500 km, $R_\odot$ = 696000 km. Wenn der Erdradius zu R_E = 6378.1366 km angenommen wird, folgt aus Formel (28.461) für die geozentrische Distanz der Gegensonne y_K = 1382687.430 km und aus Formel (28.462) der Öffnungswinkel an der Gegensonne K zwischen den Richtungen zum Schatteneintritt S_1 und dem Erdmittelpunkt: β= 0°.264298. Die Distanz $z_1 = \overline{S_1 B}$ zwischen Schatteneintritt S_1 und dem Randpunkt B an der Erde beträgt $z_1 = \sqrt{r^2 - R_E^2}$ = 2884.332 km. Damit kann der geozentrische Winkel zwischen S_1 und B berechnet werden aus $\sin\gamma_H = z_1 /$ r = 0.412047363, somit γ_H = 24°333512. Der geozentrische Winkel zwischen S_1 und K beträgt im Fall des maximalen Erdradius R_E

$$\gamma_{KE} = 90° - \beta - \gamma_H = 65°.402190 .$$

Zum Vergleich wird der untere mögliche Extremfall untersucht, der für den Polradius mit der Erdabplattung[1] f = 0.00335381 den Betrag $R_P = (1-f)R_E$ = 6356.752 km erhalten wird. Es sind y_K = 1378008.741 km, , $z_1 = \sqrt{r^2 - R_E^2}$ = 2931.116 km, somit

$$\gamma_{KH} = 64°.980810 .$$

Der relative Fehler beträgt

$$\frac{|\gamma_{KE} - \gamma_{KP}|}{\gamma_{KP}} = 0.65\%$$

Für diese Bahn beträgt die mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit $\overline{P_S}$ = 5818.202438 sec. Somit beträgt die Schattendauer (infolge der Annahme der Bahn in der Ekliptik) ohne Berücksichtigung der Erdabplattung

$$T_{SE} = \frac{2\gamma_{KE}}{360°}\overline{P_S} = 2114.018\,\text{s} ,$$

[1] Tabelle E.1 (Band V)

mit Berücksichtigung (maximaler) Abplattung

$$T_{SP} = \frac{2\gamma_{KP}}{360°}\overline{P_S} = 2100.397\,\mathrm{s} \quad .$$

Der absolute Fehler beträgt in diesem Fall

$$\left|T_{SE} - T_{SP}\right| = 13.621\mathrm{s}.$$

Bei Vernachlässigung der Erdabplattung kann in diesem ungünstigsten Fall der Schatteneintritt sich um etwa 7 Sekunden verspäten, in Realität also eher erfolgen. ◄

BEISPIEL 2: Gegeben sei eine geosynchrone Kreisbahn mit Bahnradius

r = 42164.704 km.

Entsprechend den Berechnungen im ersten Beispiel ergeben sich die Werte

$$\gamma_{KE} = 8°.436072$$
$$\gamma_{KP} = 8°.406675$$

somit

$$\frac{\left|\gamma_{KE} - \gamma_{KP}\right|}{\gamma_{KP}} = 0.35\% \quad .$$

Mit der mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit $\overline{P_S}$ = 86396.988595 sec ergeben sich die Schattenzeiten

$$T_{SE} = 4049.185\,s$$
$$T_{SP} = 4035.063\,s\ .$$

der in diesem Fall unrealistische ungünstigste Fall hat den absoluten Fehler

$$\left|T_{SE} - T_{SP}\right| = 14.121\mathrm{s}. \quad ◄$$

Anmerkung: Die hier berechneten Zahlenwerte können nur als größenordnungsmäßige Anhaltswerte verstanden werden, da die Bahnebene in der Ekliptik angenommen wurde. Außerhalb der Ekliptik verändern sich demgegenüber die Winkelwerte γ_H geringfügig. ◄

28.11.8.2 Kernschatten bei Erdabplattung und Exzentrizität der Erdbahn

Als Maß wird der Zentralwinkel $\gamma_S = 180° - \gamma_0$ zwischen Scheitel *K* des Kernschattens und der Schattengrenze *B* auf der Erdoberfläche gewählt. Mit dem halben Öffnungswinkel β aus Formel (28.462) kann dieser Winkel aus der Beziehung (28.522) erhalten werden: $\cos\gamma_0 = -\sin\beta$. Änderungen dieses Winkels um etwa $\Delta\gamma_S$ bewirken eine Verschiebung der Schattengrenze auf der Erdoberfläche um die Strecke

$$\Delta x \approx \frac{R\,\pi\,\Delta\gamma_S}{180°}\ [\mathrm{km}] \quad \left\langle \Delta\gamma_S := \gamma_S - \overline{\gamma_S} \right. \quad . \qquad (28.529)$$

Bezug sind die astronomische Einheit[1]

$$\overline{r_\odot} = A = 1.49597870 \times 10^8 \text{ km} \tag{28.530}$$

sowie die kugelförmig gedachte Erde mit Radius R_E = 6378.1366 entsprechend dem Bezugswinkel $\overline{\gamma_S}$. Mit der Exzentrizität der Erdbahn[2] $e_{♁}$ = 0.0167 ergeben sich Perihel- und Apheldistanz

$$r_{♁P} = 147.1 \times 10^6 \text{ km} \quad , \quad r_{♁\odot} = 152.1 \times 10^6 \text{ km} \quad . \tag{28.531}$$

Der Polradius beträgt R_P = 6356.752 km . Damit ergeben sich folgende Zahlenwerte:

$r_\odot$	R	y_K [km]	γ_S	$\Delta\gamma_S$	Δx [km]
$\overline{r_\odot}$	R_E	1382691.358	89°.735702	---	---
$r_{\odot A}$	R_E	1406722.637	89°.740217	0°.004515 $\triangleq$ 16″.3	0.5026
$r_{\odot A}$	R_P	1401712.676	89°.740209	0°.004507 $\triangleq$ 16″.2	0.5008
$r_{\odot P}$	R_E	1360509.854	89°.731393	-0°.004515 $\triangleq$ –15″.5	-0.4797
$r_{\odot P}$	R_P	1355664.477	89°.731384	-0°.004318 $\triangleq$ –15″.5	-0.4790

➢ *Der maximale Fehler in der Berechnung der Schattengrenze beträgt bei Vernachlässigung von Erdabplattung und Exzentrizität der Erdbahn etwa einen halben Kilometer.* ◀

28.11.8.3 Abschätzung des Einflusses der Zylindermodells

Im Zylindermodell ist stets γ_S =90°. Bezogen auf die mittlere Distanz $\overline{r_\odot}$ = 1 AU der Sonne und R=R_E für den Erdradius ergibt sich der Fehler

$$\Delta\gamma_S = 90° - \overline{\gamma_S} = 0°.264298 \quad .$$

Entsprechend einer Verschiebung der Schattengrenze auf der Erdoberfläche um

$$\Delta x = 29.4216 \text{ km} \quad .$$

Dieser an sich erhebliche Fehler kann bei den zeichnerischen Darstellungen vernachlässigt werden, da einer Strichstärke von 0.2 mm bei einer Länge des Äquators von 25 cm in der Abbildung bereits etwa 35 km in der Realität entsprechen.

An weiteren einfachen Beispielen soll analog zu den vorstehenden Abschnitten mit in der Ekliptik liegenden kreisnahen Satellitenbahnen der Unterschied der Schattenzeiten zwischen Kegel- und dem Zylindermodell gemäß Bild 28-89 (auf Seite 223) abgeschätzt werden.

---

[1] Aus Tabelle E-1 in Abschnitt E.1 (Band V)

[2] Aus Abschnitt E.6

BEISPIEL 1: Für die erdnahe Kreisbahn $r = a = 7000$ km lautet nach dem vorherigen Abschnitt ohne Berücksichtigung der halbe Zentralschattenwinkel $\gamma_{KE} = 65°.402190$. Im Zylindermodell kann der entsprechende Winkel erhalten werden aus

$$\sin\gamma_Z = \frac{R_E}{r} \quad , \quad \gamma_Z = 65°.666488 \quad .$$

Der relative Fehler beträgt

$$\frac{|\gamma_{KE} - \gamma_Z|}{\gamma_Z} = 0.40\% \quad ,$$

ist somit geringer als der Einfluss der Erdabplattung im ungünstigsten Fall. ◄

BEISPIEL 2: Im Fall einer geostationären Bahn mit $r = 42164.704$ km ergibt sich aus den Berechnungen im zweiten Beispiel des vorstehenden Abschnittes der Wert $\gamma_{KE} = 8°.436072$. Bezogen auf das Zylindermodell lautet der entsprechende Winkel $\gamma_Z = 8°.700370$. Der relative Fehler

$$\frac{|\gamma_{KE} - \gamma_Z|}{\gamma_Z} = 3.04\ \% \quad ,$$

ist beträchtlich größer als der entsprechende Fehler infolge der Erdabplattung. Zu erwarten ist daher, dass mit zunehmendem Bahnabstand zum Erdmittelpunkt die Aussagen durch das Zylindermodell unzuverlässiger werden. Einfache geometrische Überlegungen zeigen darüber hinaus, dass bei elliptischen Bahnen noch ungünstigere Verhältnisse auftreten werden.

- *Schattenkontaktzeiten werden im Allgemeinen am zuverlässigsten durch das Kernschattenmodell berechnet.* ◄

28.12 Bewegung eines Erdsatelliten in Bezug auf die Sonne

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse spielen die unterschiedlichsten Beziehungen eines Satelliten, seiner Lageorientierung, der Orientierung seiner Bahn oder seines spezifischen Bewegungsverhaltens zur Sonne eine besondere Rolle. Dies ist wichtig etwa zur Auslegung der Sensorgeometrie, der Beobachtungsmöglichkeiten im optischen Bereich, für Untersuchungen des Thermalhaushaltes und des Energiehaushaltes des Satelliten und viele andere Aspekte. Im folgenden Abschnitt werden einige Beispiele vorgestellt, wie sie in der Satellitenpraxis häufig vorkommen.

28.12.1 Sonnenaspektwinkel

Der Begriff Sonnenaspektwinkel wird in der Welt der Sensortechniker mit unterschiedlichen Definitionen verwendet und muss daher mit genaueren Spezifikationen verwendet werden. Als Sonnenaspektwinkel wird der Winkel zwischen dem Richtungsvektor zur Sonne und dem Normalenvektor einer Satellitenbahnebene bezeichnet. Wenn der Normalenvektor einer Bahnebene sowie der Ortsvektor der Sonne in äquatorialen Koordinaten gegeben ist[1]

$$\mathbf{c} = G\,\mathbf{c}_0 = G\left(\sin i \sin\Omega\ \mathbf{p}_1 - \sin\cos\Omega\ \mathbf{p}_2 + \cos i\ \mathbf{p}_3\right) \quad \langle G = |\mathbf{c}| \quad ,$$

$$\mathbf{r}_\odot = r_\odot\left(\cos\alpha_\odot \cos\delta_\odot\ \mathbf{p}_1 + \sin\alpha_\odot \cos\delta_\odot\ \mathbf{p}_2 + \sin\delta_\odot\ \mathbf{p}_3\right) \quad ,$$

kann er berechnet werden aus

[1] Siehe etwa in den Beziehungen (8.423) in Abschnitt 8.12.2 (Band II)

$$\cos\sigma_{\odot} = \frac{\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}_{\odot}}{G\,r_{\odot}} = \sin\left(\Omega-\alpha_{\odot}\right)\sin i\,\cos\delta_{\odot} + \cos i\,\sin\delta_{\odot} \quad . \tag{28.532}$$

Gelegentlich wird auch der bei der NASA übliche Einfallswinkel der Sonneneinstrahlung in die Bahnebene als NASA-Betawinkel verwendet:

$$\beta_N = 90° - \sigma_{\odot} \quad . \tag{28.533}$$

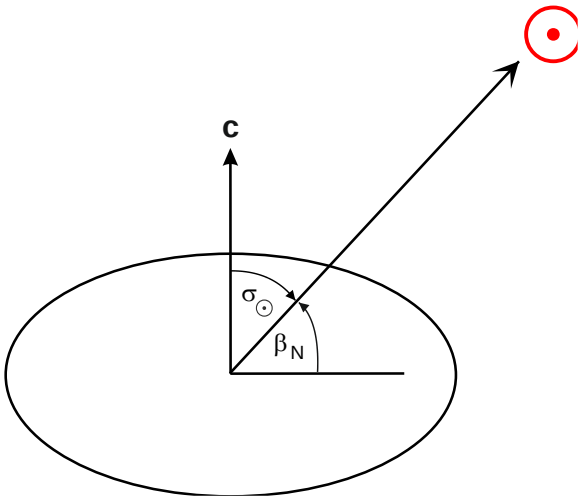


Bild 28-90: Sonnenaspektwinkel $\sigma_{\odot}$ und der Beta-Winkel in der NASA-Definition β_N

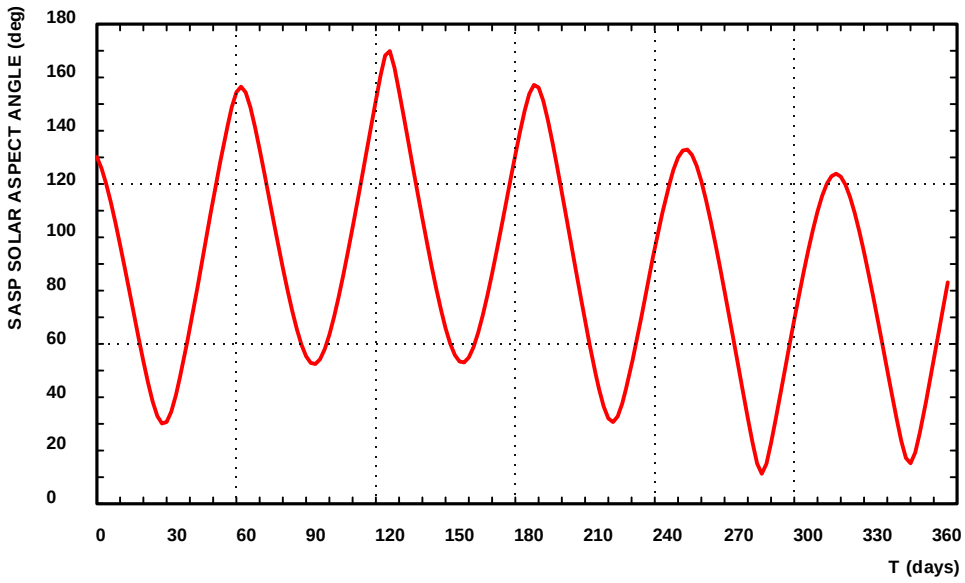


Bild 28-91: Sonnenaspektwinkel $\sigma_{\odot}$ einer kreisförmigen erdnahen Satellitenbahn über ein tropisches Jahr (Bahnparameter in BEISPIEL 1)

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine kreisförmige erdnahe Satellitenbahn mit mittlerer Bahnhöhe H= 300 km und Inklination $\bar{i}$= 57°. Der Einschuss in die Bahn erfolge über dem Ort (KSC) λ= -80°.69, φ= 28°.5 um 6^h mittlerer Ortszeit in nördlicher Richtung zum Datum 2018-08-17. In Bild 28-91 ist der Verlauf des Sonnenaspektwinkels im Verlauf eines ganzen tropischen Jahres ab Startdatum dargestellt. Die Kurve spiegelt die Wiederholrate $\overline{P_{\Omega\odot}} = 360°/\dot{\tau}_{\Omega s}$ der Stellung des Bahnknotens („mittlere Sonnen-synodische Umlaufzeit eines Bahnknotens“) bezüglich der Sonne in Formel (28.258) auf Seite 77 wieder. Sie beträgt in diesem Beispiel $\overline{P_{\Omega\odot}}$ = -64.237d.◀

BEISPIEL 2: Zur Auswahl eines geeigneten Startzeitpunktes wird der Einfall der Sonnenstrahlung in die Bahnebene untersucht. Gegeben seien die Bahnparameter $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ einer Satellitenbahn. Bezogen auf einen Startort werden mit diesen Parametern in Abhängigkeit von der Tageszeit t über einen ganzen Tag die Bahnelemente $\left(\bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ mit der in Abschnitt 28.6.3.2 (auf Seite 66) hergeleiteten Methode berechnet. Damit ist für jeden vorgegebenen Tageszeitpunkt die Orientierung der Bahnebene in Bezug auf die Sonne bekannt und es kann der Sonneneinfallswinkel β_N in die jeweilige Bahnebene im Moment des Bahneinschusses berechnet werden.

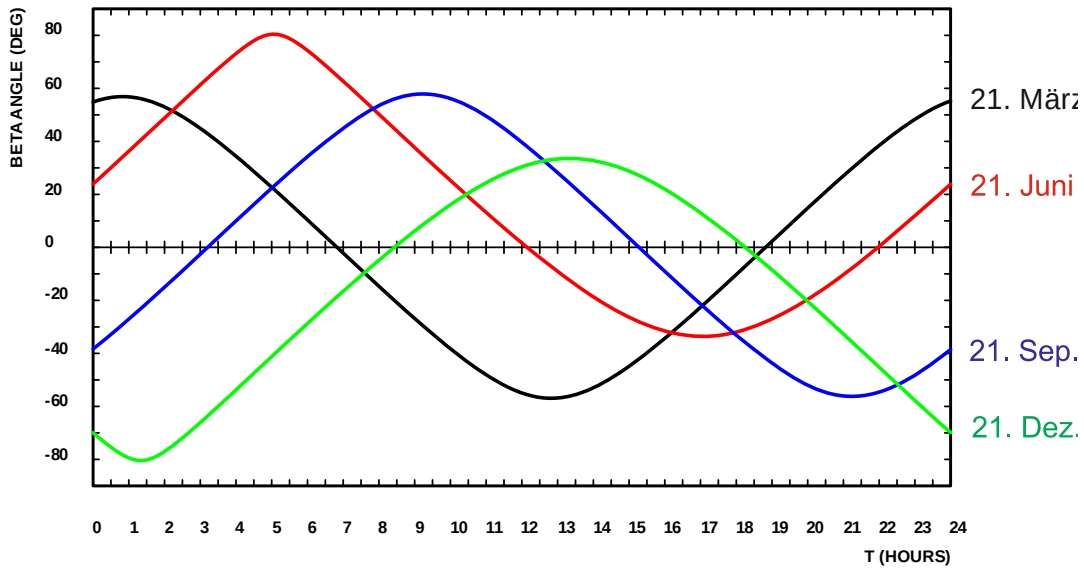


Bild 28-92: Der Beta-Winkel β_N einer kreisförmigen erdnahen Satellitenbahn bei unterschiedlichen Startzeitpunkten an 4 verschiedenen Tagen

Im Beispiel wird als Startort das KSC (λ= -80°.69, φ= 28°.5) gewählt, als Bahnparameter H= 300 km, $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 57°$. In Bild 28-92 sind die Sonneneinfallswinkel, die im Verlauf eines Tages durch Wahl eines geeigneten Startdatums der Satellitenmission erhalten werden können, für vier verschiedene Tage im Abstand von drei Monaten aufgetragen. ◀

BEISPIEL 3: Sonneneinstrahlung im Apogäum einer Bahn.

Eine spezielle Aufgabenstellung ist die Untersuchung des Verlaufs der Sonneneinstrahlung in ausgewählten Bahnpunkten. Bild 28-93 zeigt die Sonneneinstrahlung in das Apogäum einer hochexzentrischen Satellitenbahn. Dazu wir der Zwischenwinkel zwischen dem geozentrischen Ortsvektor des Apogäums der Satellitenbahn und dem geozentrischen Ortsvektor der wahren Sonne berechnet.

Im Beispiel werden die Bahndaten der EQUATOR-S Mission verwendet:
Apogäumshöhe H_A = 63781.40 km, Perigäumshöhe H_P 500 km,
große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 31518.837 km, Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.82143446,
Inklination: $\bar{i}_0$ = 1°.8, Argument des Perigäums: $\bar{\omega}_0$ = 270°.

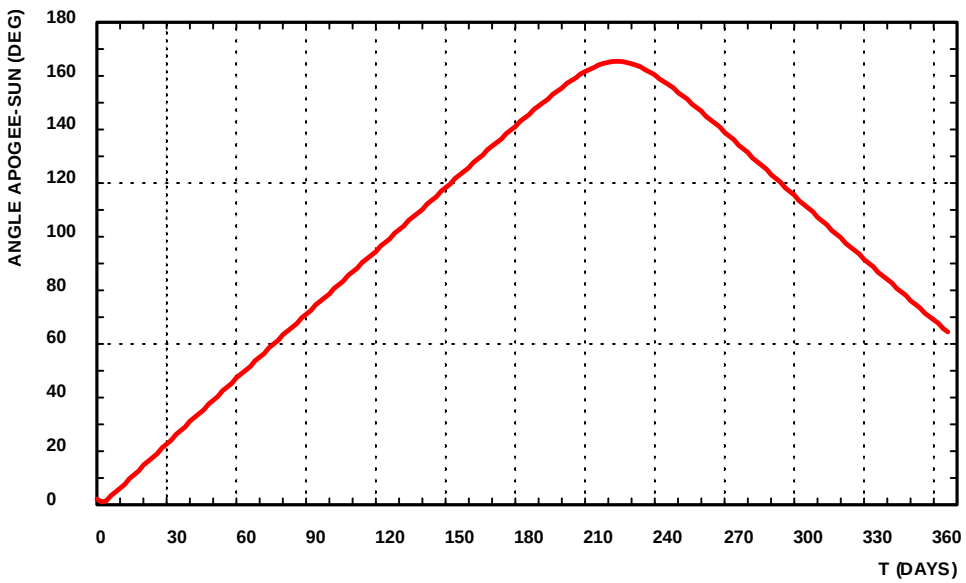


Bild 28-93: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen geozentrischer Richtung zum Apogäum einer hochexzentrischen Bahn und der geozentrischen Richtung zur Sonne (Beispiel: EQUATOR-S)

Der Einschuss in den absteigenden Bahnast erfolge am 21. März 1996 um 0^h mittlerer Sonnenzeit (lokale Mitternacht) über dem Startgelände San Marco (λ= 40°.2125, φ= -1°.8). Das Bild zeigt den Verlauf des Zwischenwinkels über ein tropisches Jahr. ◀

BEISPIEL 4: Sonneneinstrahlung im Perigäum einer Bahn.

Alternativ zum vorhergehenden Beispiel zeigt Bild 28-94 den Zwischenwinkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor des Satelliten im Perigäum und dem geozentrischen Ortsvektor der Sonne im Verlauf eines tropischen Jahres. Bahndaten EQUATOR-S wie in Beispiel 3. ◀

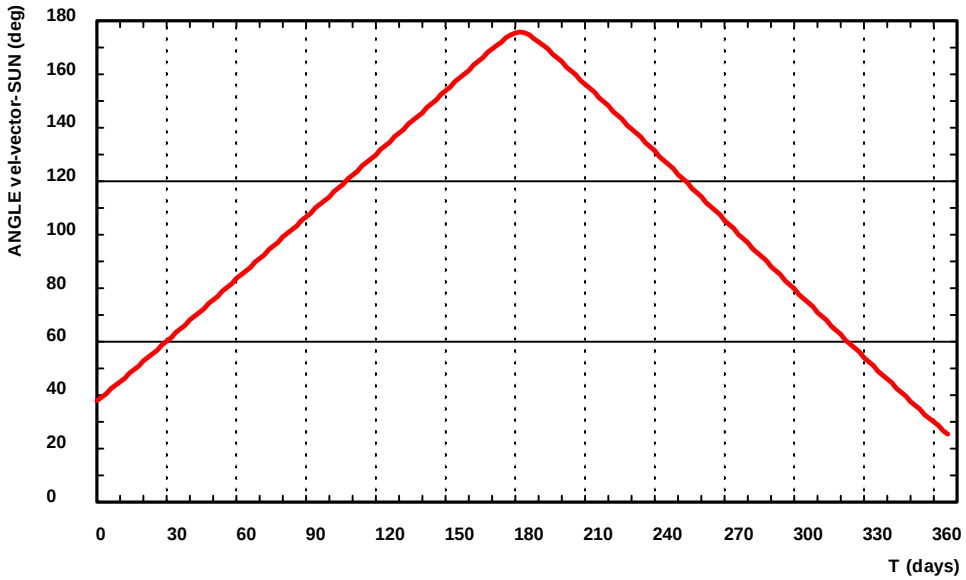


Bild 28-94: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen dem Geschwindigkeitsvektor im Perigäum einer hochexzentrischen Bahn und der geozentrischen Richtung zur Sonne (Beispiel: EQUATOR-S)

Beispiel 5: Sonneinstrahlung bei Schattenaustritt: Bild 28-95 zeigt den Verlauf des Winkels zwischen dem Geschwindigkeitsvektor eines Erdsatelliten und dem geozentrischen Ortsvektor der wahren Sonne für den Moment, in dem der Subsatellitenpunkt den Erdschatten verlässt. Als Bahndaten werden im Rahmen des Projektes OASIS die Parameter des IRS-1E Satelliten verwendet, der sich

auf einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn bewegen soll: $\bar{a}_0$ = 7195.140 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.689. Der absteigende Knoten sollte am 1. Januar 1994 um 10:30:00 mittlerer Ortssonnenzeit (M.S.T.) über dem Referenzpunkt λ= φ= 0°.0 erfolgen. Der Verlauf des Zwischenwinkels wird über ein tropisches Jahr dargestellt. ◄

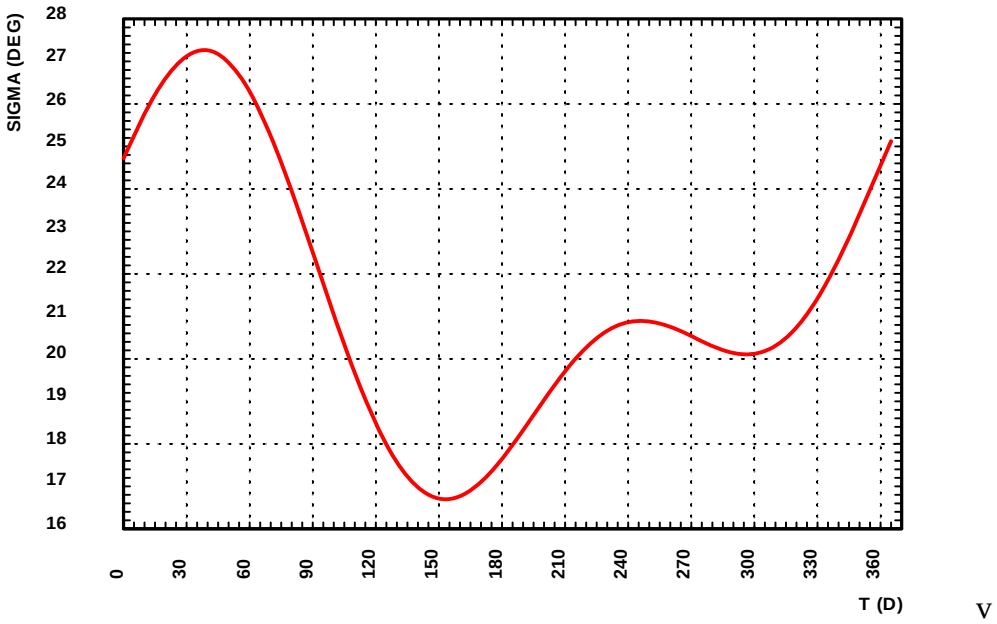


Bild 28-95: Verlauf des Zwischenwinkels zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der geozentrischen Richtung zur Sonne im Moment des Schattenaustritts des Subsatellitenpunktes (Bahndaten IRS-1E, Projekt OASIS)

28.12.2 Sonne in der Subsatellitenbahn

Für optische Sensoren ist das Beleuchtungsverhalten im beobachteten Gebiet von Bedeutung. Die Variation dieses Verhaltens wird vom Typus der Satellitenbahn und der Bewegung der wahren Sonne bestimmt.

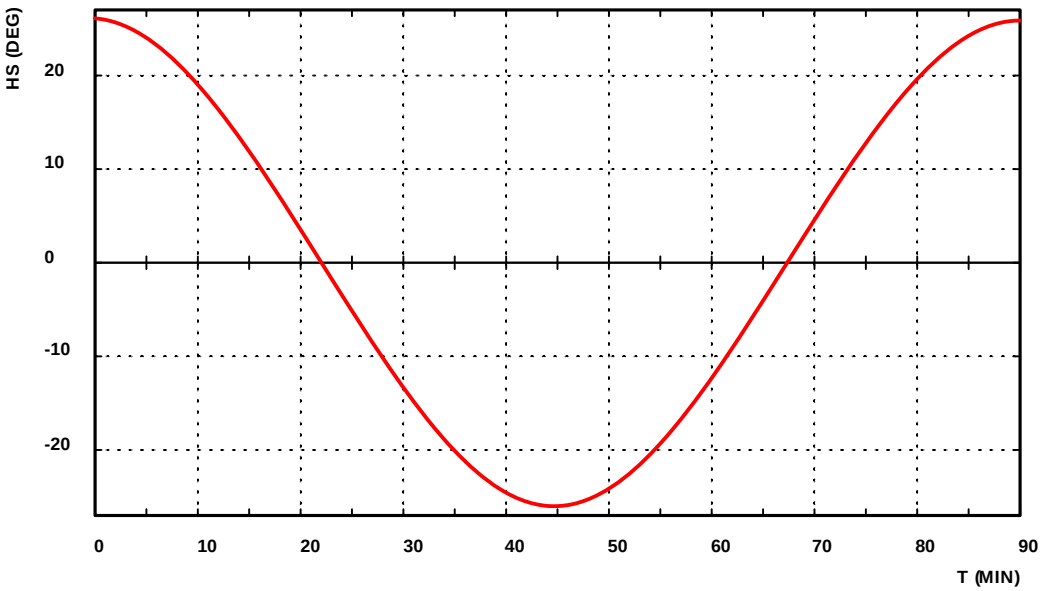


Bild 28-96: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt einer STS-Bahn über einen drakonitischen Umlauf.

BEISPIEL 1: Als Beispiel wollen wir die Einstrahlung der Sonne in die Subsatellitenbahn untersuchen. Dazu werden die geodätischen Koordinaten des Subsatellitenpunktes benötigt, die mit den Formeln in Kapitel 38.2 (Band V) berechnet werden können. Die Koordinaten des Subsatellitenpunktes dienen als Koordinaten eines Beobachtungsortes auf der Erdoberfläche, für den die topozentrischen Koordinaten der Sonne aus den Formeln in Abschnitt 28.4.1 (auf Seite 33) folgen, insbesondere das Azimut und die Elevation $h_\odot$. In Bild 28-96 ist der Verlauf der Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt einer kreisnahen STS-Bahn ($\bar{H}$ = 300 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 57°) über einen drakonitischen Umlauf dargestellt. ◄

BEISPIEL 2: Bild 28-97 zeigt den von der Sonne unter mindestens $h_\odot = 20°$ beschienenen Subsatellitenbahnbogen einer erdnahen und kreisnahen Satellitenbahn. Als Parameter wurden die Bahndaten der MIR-Station ($\bar{H}$ = 400 km, $\bar{e}_0$ = 0.001, $\bar{i}_0$ = 51°.6484) gewählt. Der aufsteigende Knoten mit der geographischen Länge λ= 350° wird um 12^h mittlerer Ortssonnenzeit überflogen. Zur Ergänzung ist der subsolare Punkt zu 12^h U.T. und der zugehörende Terminator für das Datum 2018-08-25/12:00:00.0 eingezeichnet. ◄

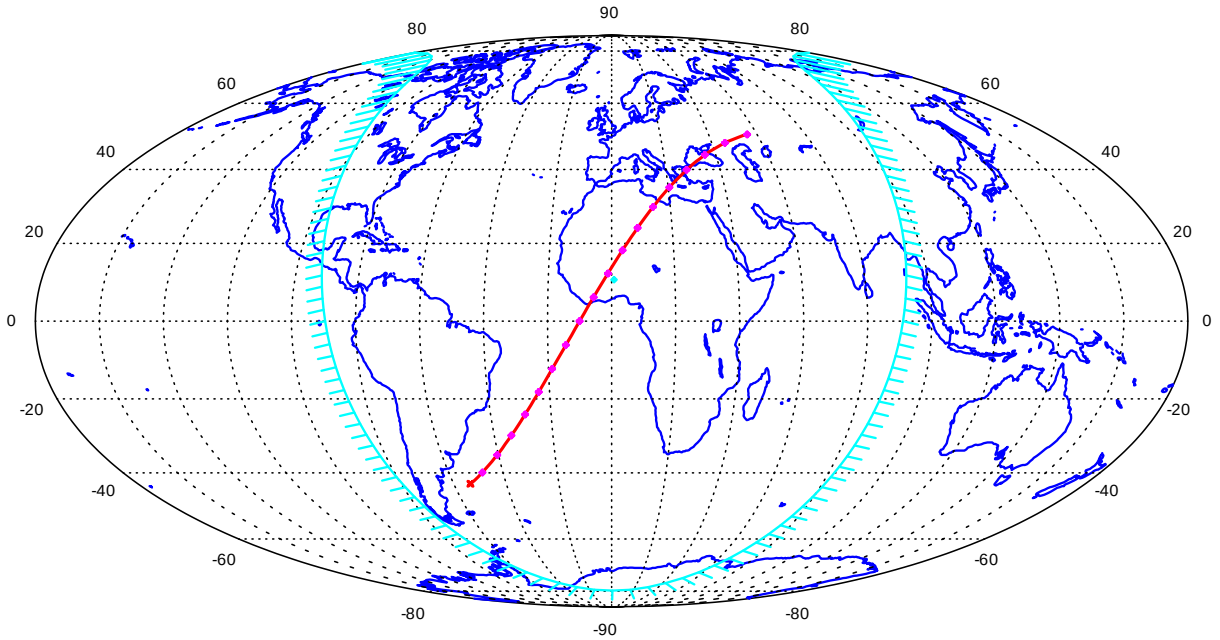


Bild 28-97: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen einer kreisnahen und erdnahen Satellitenbahn. Die Subsatellitenbahn wird unter der Mindestelevation 20° von der Sonne beschienen-

BEISPIEL 3: Je nach Bahntyp wird der mindestens unter der Höhe („Elevation“) $h_\odot$ = 20° sonnenbeschienene Bahnbogen längs der Subsatellitenbahn im Laufe der Zeit verschoben. Bild 28-98 zeigt für dieselbe Bahn wie in Bild 28-97 diese Entwicklung über ein Jahr. Die gewählte Bahn hat die säkulare Knotendrift $\dot{\Omega}_s$ = –5°.00736 /d, somit die säkulare Sonnendrift $\dot{\tau}_s = \dot{\Omega}_s - n_\odot$ = –5°.99298/d, wenn $n_\odot$ die mittlere tropische Bewegung der Sonne ist. Ein voller synodischer Umlauf der Bahnebene bezüglich der Sonne wird daher nach (siehe Formel (28.258))

$$P_\tau = \frac{360°}{\dot{\tau}_s} = 60.07052$$

vollzogen, was in Bild 28-98 in Form des alle 60 Tage sich wiederholenden Überdeckungsmusters klar zu erkennen ist. Dagegen wechselt nach 30 Tagen die Überflugrichtung: auf Süd-Nord folgt ein sonnenbeschienener Nord-Süd-Ast. Zu erkennen ist auch eine Asymmetrie bezüglich des Äquators, was eine Folge der wahren Sonnenbewegung ist. ◄

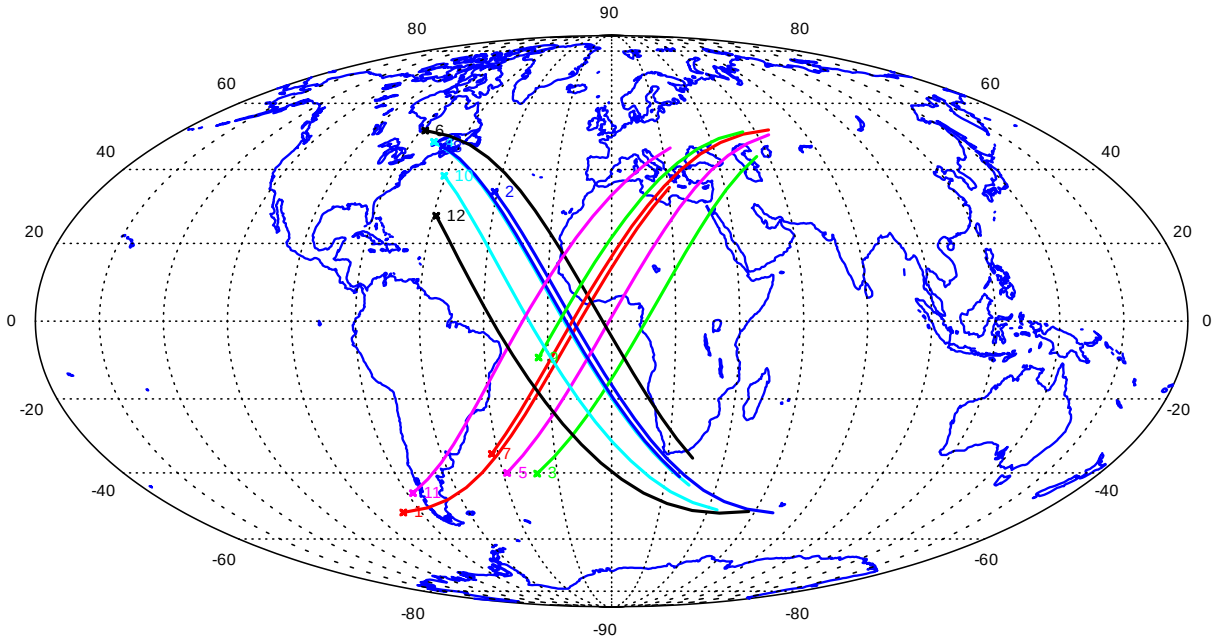


Bild 28-98: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen im Jahresverlauf im Abstand von einem Monat um die Mittagszeit in U.T.. Die Subsatellitenbahn ist nur für den Fall gezeichnet, dass die Sonne dort die Mindestelevation $h_{\odot}$ = 20° übersteigt. Als Bahn wurde wieder (wie Bild 28-98) die MIR Stationsbahn gewählt. Die Monate sind durch Nummern bezeichnet.

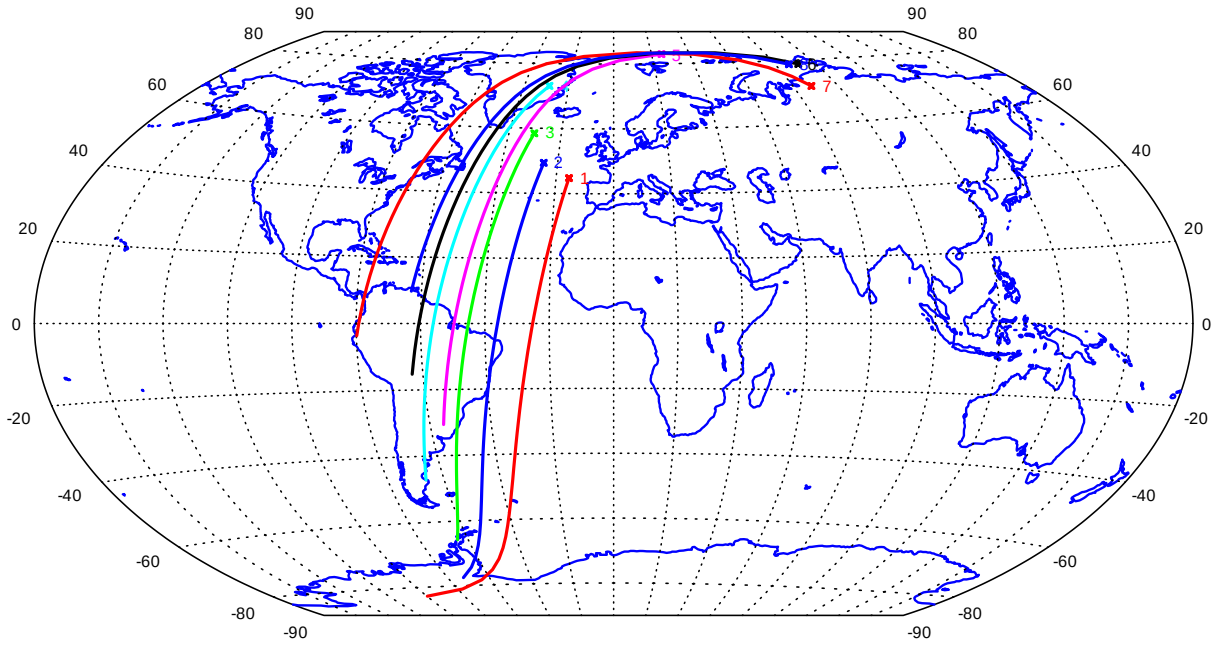


Bild 28-99: Sonnenbeschienener Subsatellitenbahnbogen einer sonnensynchronen Bahn mit Mindestelevation $h_{\odot}$ = 20°. ERS-1 Daten ($\bar{H}$ = 780 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 96°.55, mittlere Sonnenzeit im absteigenden Knoten: T_{desc} = $10^h\ 30^m$) . Bahnbogen um die Mittagszeit U.T. im Abstand von einem Monat über ein tropisches Jahr.

BEISPIEL 4: Als Alternative zu den vorhergehenden Beispielen wird das Verhalten des sonnenbeschienenen Bahnbogens für eine sonnensynchrone Bahn betrachtet. Gewählt wurde die ERS-1 Bahn mit der mittleren Bahnhöhe $\bar{H}$ = 780 km, kreisförmig, Inklination $\bar{i}_0$ = 98°.55, mittlere Sonnenzeit im absteigenden Knoten: : T_{desc} = 10^h 30^m. In Bild 28-99 wird nur der in der Mittagszeit, zwischen etwa 11^h und 13^h erfolgende sonnenbeschienene Bahnbogen dargestellt. Es wird pro Monat ein Bahnbogen dargestellt, für den die Sonne unter der Mindestelevation $h_\odot$ = 20° zu sehen ist. Die erhebliche Variation des Bahnbogens ist eine Folge der Jahreszeit infolge der Eigenbewegung der wahren Sonne, aber auch von der mittleren sich bei sonnensynchronen Bahnen nicht veränderbaren Sonnenzeit bei Knotenüberflug. Das Bild zeigt, dass der ausgewählte Bahnbogen nur in den Monaten Januar bis August die vorgegebene Bedingung der Mindestelevation der Sonne erfüllt. Es wird ausschließlich der absteigende Bahnbogen von der Sonne beschienen, der aufsteigende liegt stets auf der Nachtseite. ◀

BEISPIEL 5: Bild 28-100 zeigt die Subsatellitenbahn des ERS-1 Satelliten, die am 1. Juli 1980 in der mittleren lokalen Sonnenzeit zwischen 17^h und 19^h von der Sonne beschienen wird. Angenommene Bahndaten: $\bar{a}_0$ = 7576.554 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 100°.35621, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$, Epoche 1. Juli 1980, 0^h U.T.. Die Bahn ist sonnensynchron. Der gewählte Bahnbogen liegt ausschließlich auf dem ansteigenden Bahnast. ◀

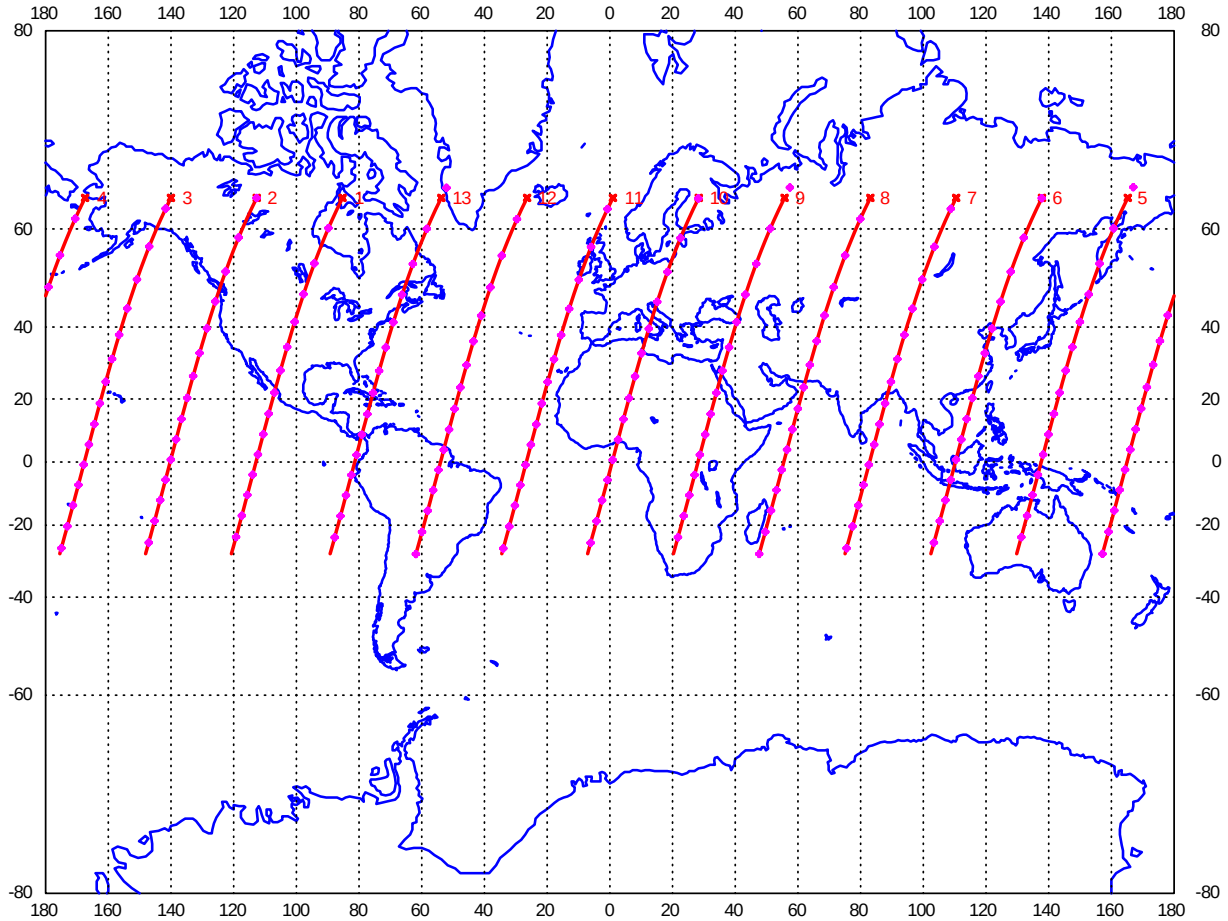


Bild 28-100: Von der Sonne beschienener Bahnbogen in der mittleren lokalen Sonnenzeit 17h – 19h (M.S.T.). Bahndaten ERS-1, alle Umläufe am 1. Juli 1980

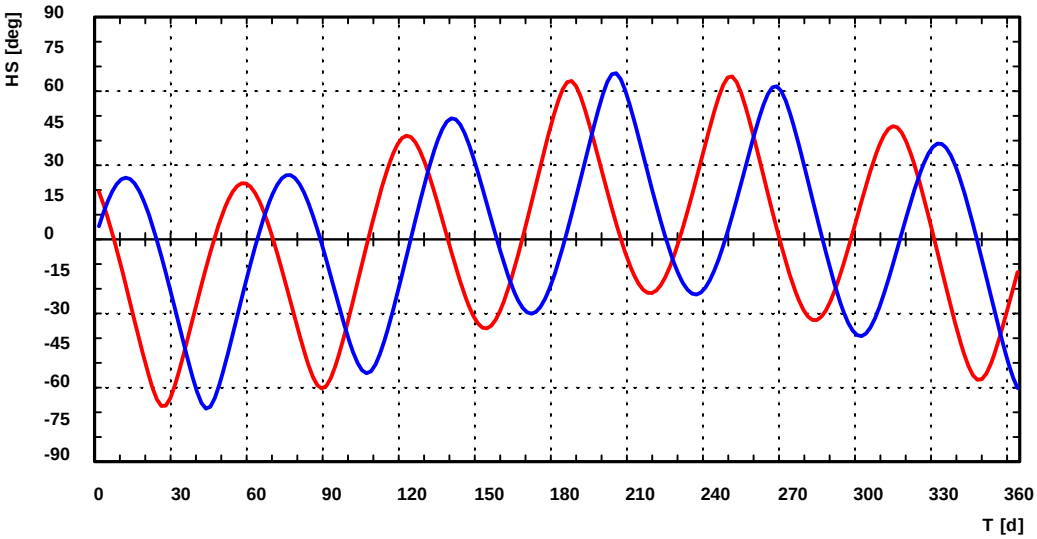


Bild 28-101: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt über dem Breitenkreis φ= 45° einer STS-Bahn im Verlauf eines Jahres, rote Kurve im aufsteigenden, blaue Kurve im absteigenden Bahnast.

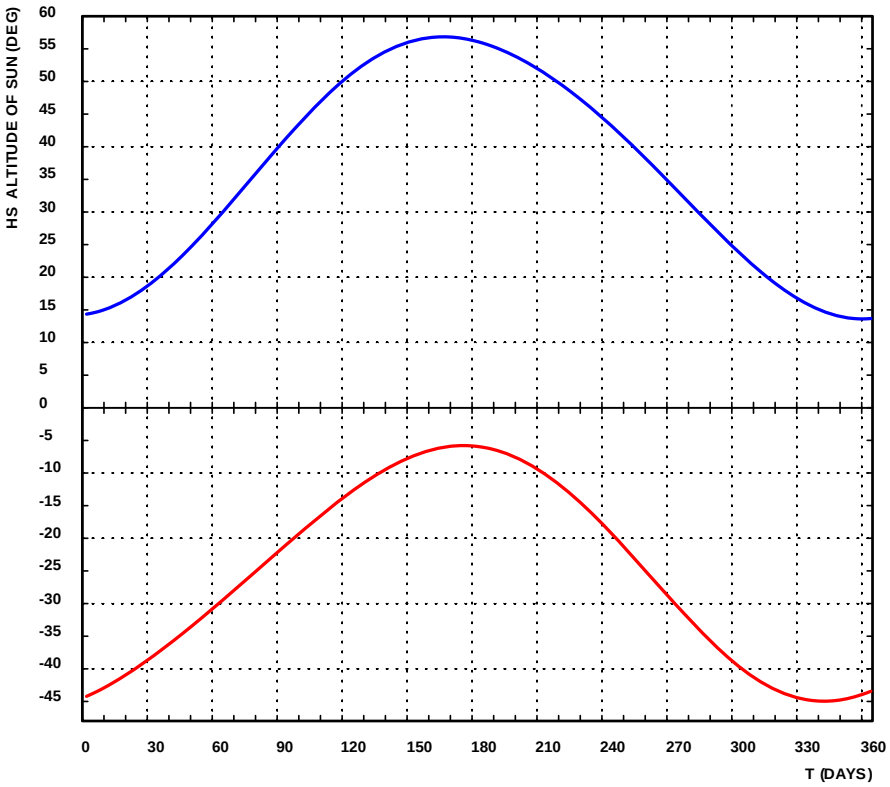


Bild 28-102: Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt über dem Breitenkreis φ=49° einer sonnensynchronen Bahn im Verlauf eines Jahres.

BEISPIEL 6: In Bild 28-101 wird der Verlauf der Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt der Bahn beim Überflug des Satelliten über den Breitenkreis φ= 45°über ein tropisches Jahr im aufsteigenden und im absteigenden Bahnast dargestellt. Als Bahndaten wurden die Parameter einer STS-Bahn gewählt: $\bar{H}$ = 300 km ($\bar{a}_0$ = 6678.1366 km), $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 57°. Der Einschuss sollte am 10. November 1987 um 14h mittlerer lokaler Sonnenzeit (M.S.T.) im aufsteigenden Bahnast vom KSC (λ= -80°.69, φ= 28°.5) aus erfolgen. ◄

BEISPIEL 7: In Bild 28-102 wird der Verlauf der Sonnenelevation im Subsatellitenpunkt einer sonnensynchronen Bahn dargestellt, wenn der Satellit den Breitenkreis $\varphi = 49°$ im aufsteigenden sowie im absteigenden Bahnast überfliegt. Als Parameter werden die Bahnelemente der ERS-1 Mission: $\bar{a}_0$ = 7298.155, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 99°.099312, $\bar{\Omega}_0$ = 199°.428896, $\bar{\omega}_0$ = 0°.0, $\overline{M}_{00}$ = 0°.0, Epoche: 1981,05,19,08,30,0.0 (U.T.). Das Bild zeigt, dass der Subsatellitenpunkt über dem gewünschten Breitenkreis ausschließlich im absteigenden Bahnast von der Sonne beschienen wird als Folge der Sonnensynchronität der Bahn. ◀

28.12.3 Sonnenelevation in Sensor Aufsichtspunkt

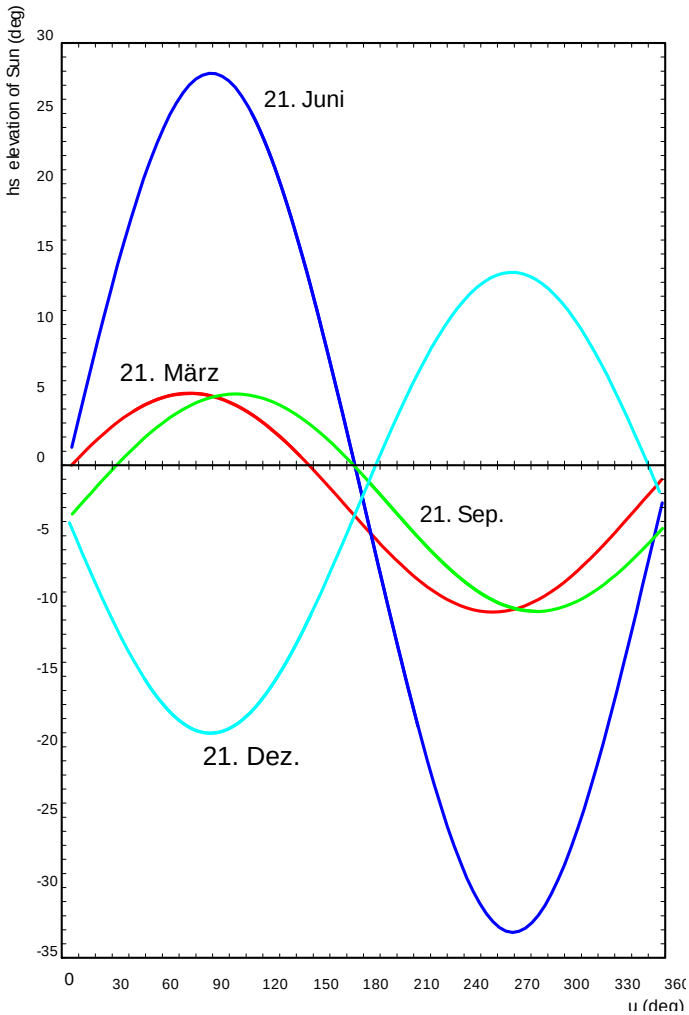


Bild 28-103: Verlauf der Sonnenelevation im Sensoraufsichtspunkt über einen drakonitischen Umlauf. Bahn: $\bar{a}_0$ = 6769.140, sonnensynchron, formstabil, aufsteigender Knoten um 18:00 Lokalzeit, Sensorgeometrie: rechts zur Bahn (Azimut = 90°), Nadirwinkel β = 35°, an den Äquinoktien und Solstitien

In Bezug auf die Sonne ändert sich eine Beobachtungsgeometrie nicht nur wegen der veränderlichen Geometrie über einem Rotationsellipsoid, also in Abhängigkeit von Breitenkreis und Bahnform, sondern als zusätzliche Parameter kommen eine Abhängigkeit vom Startzeitpunkt, von der Orientierung der Bahn im Raum und ihrer Änderung und saisonale Variationen hinzu. Dazu werde das Verhalten der Sonnenelevation im Aufsichtspunkt auf der abgeplatteten Erdoberfläche betrachtet.

Zur Darstellung der Sonnenbewegung genügen bei derartigen Untersuchungen die genäherten Daten der Sonnenbewegung nach Abschnitt 28.1. Die geographischen Koordinaten des

Sensorauftreffpunktes auf der abgeplatteten Erdoberfläche werden nach Abschnitt 38.2.1.2 (Band V) berechnet. Wie zur kurzfristigen Bahnanalyse erdnaher Satellitenbahnen üblich, wird als Bahnmodell nur eine *Kepler*bahn mit Überlagerung durch J_2, J_3, J_4 verwendet.

BEISPIEL: Gegeben sei eine formstabile sonnensynchrone Dämmerungsbahn mit der großen Halbachse $\bar{a}_0$ = 7669.14 km. Der aufsteigende Knoten werde um 18^h mittlerer Lokalzeit überflogen. Die mittlere *Brouwer*sche Exzentrizität beträgt somit $\bar{e}_0 = 0.0$, die zugehörige gemittelte „eingefrorene" Exzentrizität unter Berücksichtigung von J_3 beträgt e_F =0.001096162. Wie in Abschnitt 23.6.3 (Band IV A) hergeleitet, hat das gemittelte Argument des Perigäums den Wert ω_L = 90°. Damit folgt für die Inklination der mittlere Wert $\bar{i}_0$ = 97°.0202. Für die Epoche am 21. März um 18^h U.T. ergibt sich die Rektaszension des aufsteigenden Knotens zu $\bar{\Omega}_o$ = 89°.5896. Dass nicht exakt 90° erreicht werden, liegt am Unterschied zwischen wahrer und fiktiver mittlere Sonne. Der Sensor blickt rechts zur Bahnbewegung des Satelliten, also mit bewegungsbezogenem Azimut A_S = 90°, und unter dem Nadirwinkel β = 35°.

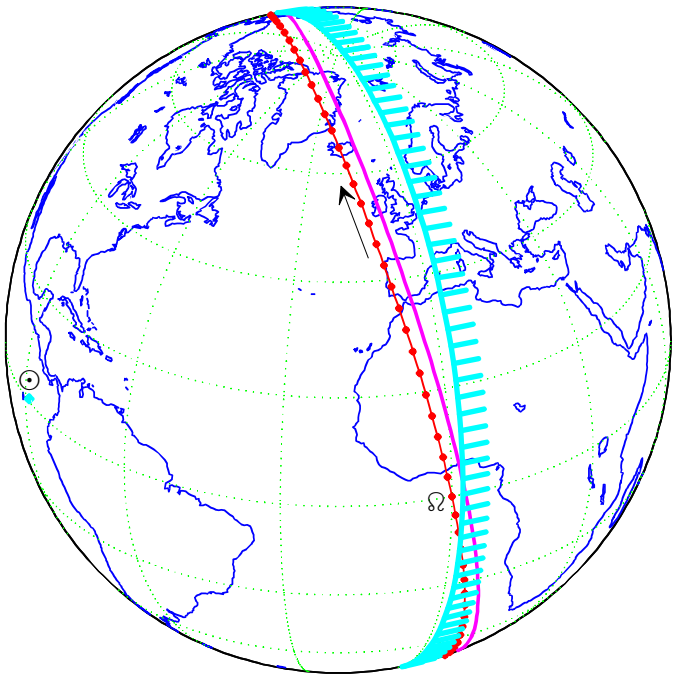


Bild 28-104: Zur Deutung des Verlaufs der Sonnenelevation aus Bild 28-103 im Fall des Verlaufs am 21. März. Die im Abstand von 1 Minute getaktete Subsatellitenbahn überquert den Äquator im aufsteigenden Knoten um 18 Uhr Ortszeit. Eingezeichnet ist die Überdeckungsspur rechts zur Bahn mit Nadirwinkel 35°. Der Sonnenterminator ist für 18 Uhr mittlerer Sonnenzeit dargestellt. Der subsolare Punkt des wahren Sonnenortes ist markiert (westlich von Mittelamerika).

In Bild 28-103 ist der Verlauf der Sonnenelevation im Sensoraufsichtspunkt zu verschiedenen Zeitpunkten im Jahreskreis, nämlich an den Äquinoktien (21. März und 21. September) und den Solstitien (21. Juni und 21. Dezember) dargestellt. Obgleich der Sensoraufsichtspunkt in Bezug auf die Subsatellitenspur stets auf der sonnenabgewandten Seite liegt, überdeckt der Sensor während eines drakonitischen Umlaufs in allen untersuchten Fällen stets auch von der Sonne beschienene Gebiete, was für bestimmte Sensorentwicklungen aber nicht gewünscht ist. Hier muss aber berücksichtigt werden, dass Sonnensynchronität stets nur auf die fiktive mittlere Sonne bezogen werden kann. Die Verhältnisse können im Fall des 21. März aus Bild 28-104 abgelesen werden. Die Subsatellitenbahn ist mit

einer Taktung von 1 Minute dargestellt, rechts daneben die Überdeckungsspur mit Nadirwinkel β = 35°, was auf der Erdoberfläche etwa dem zentrischen Winkel γ = 2°.5 entspricht. Zu sehen ist der Terminator um 18^h Ortszeit, also während der Satellit sich gerade im aufsteigenden Knoten ☊ befindet. Es fällt auf, dass sich der aufsteigende Knoten nicht genau auf dem Terminator befindet, was bei einem Knoten von 18^h zu erwarten wäre. Diese Abweichung wird jedoch durch die Abweichung der wahren von der mittleren Sonne verursacht, der am 21. März etwa $-1°.8$ beträgt. Die Bahn „neigt" sich der wahren Sonne ☉ zu, womit das Verhalten der Sonnenelevation im Aufsichtspunkt zu erklären ist. ◀

28.12.4 Sonnenspiegelung pro Satellitenumlauf

Bewegt sich ein Satellit über einem Meer, kann es vorkommen, dass sich die Sonne vom Satelliten aus gesehen auf der Meeresoberfläche spiegelt („Sun glint points"). Dies kann zu einer Blendung eines Sensors an Bord des Satelliten führen und dadurch zu fehlerhaften oder ganz unbrauchbaren Beobachtungen.

Um eine derartige Sonnenspiegelung berechnen zu können, wird zunächst die Kenntnis des bewegungsbezogenen Azimuts A_{SS} des Sensors an Bord des Satelliten benötigt[1]. Wenn dieses Azimut in die Richtung der Ebene durch Satellitenort, Erd- und Sonnenmittelpunkt weist und der geozentrische Winkel γ zwischen den geozentrischen Richtungen zum Erd- und Sonnenmittelpunkt kleiner als 90° ist, kann eine Sonnenspiegelung auftreten. Als Bedingung für Sonnenspiegelung muss das satellitenzentrierte bewegungsbezogene Azimut $A_{S\odot}$ der Sonne bekannt sein. Die geozentrischen Ortsvektoren von Sonne und Satellit seien

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\odot &= r_\odot\left(\cos\alpha_\odot\cos\delta_\odot\ \mathbf{p}_1 + \sin\alpha_\odot\cos\delta_\odot\ \mathbf{p}_2 + \sin\delta_\odot\ \mathbf{p}_3\right) \\ \mathbf{r} &= r\ \left(\cos\alpha\cos\delta\ \mathbf{p}_1 + \sin\alpha\cos\delta\ \mathbf{p}_2 + \sin\delta\ \mathbf{p}_3\right)\ . \end{aligned} \tag{28.534}$$

Der satellitenzentrierte Ortsvektor der Sonne lautet

$$\mathbf{r}_{T\odot} = \mathbf{r}_\odot - \mathbf{r} = r_{T\odot}\left(\cos\alpha_{T\odot}\cos\delta_{T\odot}\ \mathbf{p}_1 + \sin\alpha_{T\odot}\cos\delta_{T\odot}\ \mathbf{p}_2 + \sin\delta_{T\odot}\ \mathbf{p}_3\right) \tag{28.535}$$

Der heliozentrische Nadirwinkel zwischen Erdmittelpunkt und Satellitenort ergibt sich aus

$$\cos\beta = -\frac{\mathbf{r}_{T\odot}\cdot\mathbf{r}_\odot}{r_{T\odot}\cdot r_\odot}\quad . \tag{28.536}$$

Der entsprechende Zentralwinkel folgt aus

$$\cos\gamma = \cos\left(\alpha_\odot - \alpha\right)\cos\delta_\odot\cos\delta + \sin\delta_\odot\sin\delta\quad ,\ \sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma}\ . \tag{28.537}$$

Das Nordpol-bezogene Azimut der Sonne in Bezug auf den Satelliten folgt aus

$$\left.\begin{aligned} \cos A\,\sin\gamma &= -\cos\left(\alpha_\odot - \alpha\right)\cos\delta_\odot\ \sin\delta + \sin\delta_\odot\ \cos\delta \\ \sin A\,\sin\gamma &= \quad \sin\left(\alpha_\odot - \alpha\right)\cos\delta_\odot \end{aligned}\right\rangle\ \sin\gamma > 0\ . \tag{28.538}$$

Seien i die Inklination und Ω die Rektaszension des aufsteigenden Knotens der Satellitenbahn, folgt das Argument der Breite der Satellitenposition au

[1] Siehe in den Abschnitt 32.1 und 32.3.2, Band V

$$\cos u = \left(\cos\alpha\cos\Omega + \sin\alpha\sin\Omega\right)\cos\delta$$
$$\sin u = \frac{\sin\delta}{\sin i} \quad . \tag{28.539}$$

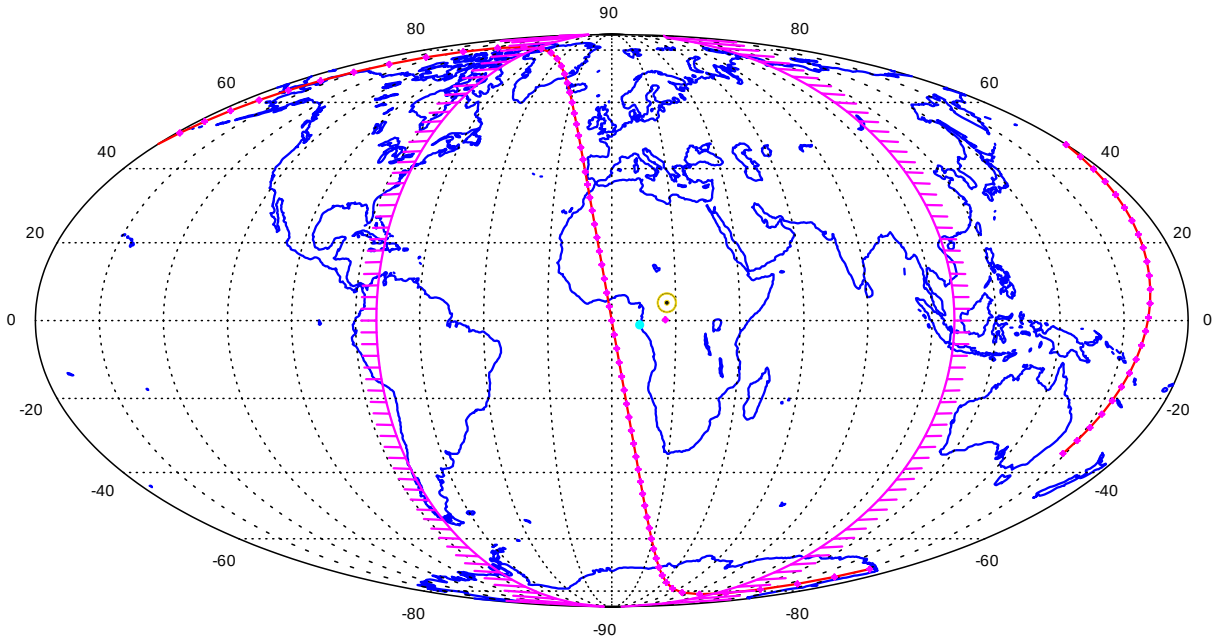


Bild 28-105: Punkt der Sonnenspiegelung (Sun glint point) bei querscannendem Sensor, Bahndaten ATMOS

Das satellitenzentrierte bewegungsbezogene Azimut der Sonne folgt damit aus[1]

$$\cos A_{S\odot}\ \cos\delta = \cos u\ \cos A\ \sin i + \sin A\ \cos u$$
$$\sin A_{S\odot}\ \cos\delta = \cos u\ \sin A\ \sin i - \cos A\ \cos u \quad . \tag{28.540}$$

Im Fall $\sin\gamma = 0$ wird $\cos A_{S\odot} = 1$, $\sin A_{S\odot} = 0$, gesetzt. Der Fall $\sin i = 0$ wirkt sich nicht aus. Die Satellitenposition, an welcher der Onboard Sensor genau in der Schnittebene zur Sonne weist, kann dann mit der überlagerten Funktion

$$fct(t) \equiv \sin\left[A_{S\odot}(t) - A_{SS}\right] = 0 \tag{28.541}$$

berechnet werden. Als Anfangswert kann der Beginn eines Rechenintervalls genommen werden, das durchlaufen wird bis ein geeignetes Suchintervall gefunden ist. Der Ort der Sonnenspiegelung ist (ungefähr) um den halben Zentralwinkel vom Subsatellitenpunkt entfernt:

$$\sin\gamma' = \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}} \quad . \tag{28.542}$$

Die geographischen Koordinaten $\left(R_1', \lambda_1', \varphi_1'\right)$ des Sonnenspiegelungspunktes auf der abgeplatteten Erdoberfläche können dann unter Anwendung der Formeln in Abschnitt 38.1.3 mit Hilfe der ersten beiden Formeln (38.15) schließlich aus dem System (38.19) berechnet werden. Die geodätische Breite φ_1 folgt aus (38.20). Da die Sonnenspiegelung erfahrungsgemäß ein diffuses Gebiet umfasst dürfte es in der Regel genügen, die Erdoberfläche als Kugel anzunähern.

[1] Formel (32.20) (Band V)

BEISPIEL: Für die kreisförmige sonnensynchrone mit dem Verhältnis 3:43 reproduzierbare Satellitenbahn ($\bar{a}_0$ = 7153.135562 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.52239585, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$, Epoche 1994-03-21 mit aufsteigendem Knoten um 11^h mittlerer Ortssonnenzeit (M.S.T.) wird der Sonnenspiegelungspunkt gesehen mit einem Querscanner an Bord des Satelliten gesucht, welcher der Epoche am nächsten liegt. Das Suchintervall beginnt am Rag der Epoche um 10:30 und endet um 12:00. Bild 28-105 zeigt die Subsatellitenbahn mit Taktung von 1 Minute, den subsolaren Punkt ⊙ und den Sonnenspiegelungspunkt. Der Terminator ist zum Zeitpunkt der Epoche gezeichnet. ◀

28.13 Satellitenlage und Sonneneinstrahlung

In den bisherigen Untersuchungen über die Relation zwischen Sonne und Satellitenbewegung konnte der Satellit punktförmig angenommen werden. Das wird anders, wenn von einem Satelliten aus mit einem Sensor in bestimmten Richtungen beobachtet werden soll. Dazu gehört etwa auch die Sonneneinstrahlung auf den Satelliten, auf die Solarpanel, in ein Teleskop und viele ähnliche Aufgaben, zu deren Bearbeitung Lage, Lageregelung und Orientierung des Satelliten benötigt werden.

28.13.1 Satellitenzentrierte Systeme

Die hier benötigten satellitenzentrierten Koordinatensysteme werden in Abschnitt 8.16 (Band II) ausführlich diskutiert. Die Verknüpfung des satellitenzentrierten Basissystems, hier als x-System bezeichnet, wird über das mitgeführte *Leibniz*-System hergestellt[1]. Seien $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ die Basisvektoren des *Leibniz*-Systems, hat das x-System die Basisvektoren[2]

$$\mathbf{q}_3^{(Sx)} = \mathbf{r}_0 \ , \ \mathbf{q}_1^{(Sx)} = \mathbf{q}_0 \ , \ \mathbf{q}_2^{(Sx)} = \mathbf{q}_1^{(Sx)} \times \mathbf{q}_3^{(Sx)} = \mathbf{q}_0 \times \mathbf{r}_0 = -\mathbf{c}_0 \ . \tag{28.543}$$

Es ist üblich den Schwerpunkt des Satellitensystems als Zentrum dieses Systems zu betrachten. Die Normale des lokalen Horizontsystems ist die Richtung des Radiusvektors $\mathbf{r}_0$, der lokale Horizont wird durch die Vektoren $\left(\mathbf{q}_1^{(Sx)}, \mathbf{q}_2^{(Sx)}\right)$ aufgespannt. Der satellitenzentrierte Radiusvektor zu einem beobachteten Objekt hat mit den Basiswinkeln lokales Azimut A_x und Elevation h_x die Darstellung

$$\mathbf{r}_x = r_x \left(\cos h_x \cos A_x \, \mathbf{q}_1^{(Sx)} + \cos h_x \sin A_x \, \mathbf{q}_2^{(Sx)} + \sin h_x \, \mathbf{q}_3^{(Sx)}\right) \ . \tag{28.544}$$

Der (Nord-) Pol dieses Systems lautet $P_x\left(A_{Px}, h_{Px}\right) = P_x\left(0°, 90°\right)$.

Gegenüber diesem x-Referenzsystem ist ein spezifisches y-Satellitensystem gedreht. Hat dieses System gegenüber dem x-System Pol und Ursprung

$$P_y\left(A_{Py}, h_{Py}\right) \ , \ O_y\left(A_{Oyx}, h_{Oyx}\right) \tag{28.545}$$

hat der Schnittpunkt der beiden Systeme den Knoten

$$K_x\left(A_{Kx}, h_{Kx}\right) \text{ bzw. } K_y\left(A_{Ky}, h_{Ky}\right) \text{ mit } h_{Kx} = h_{Ky} = 0° \tag{28.546}$$

mit Azimut und Neigung

$$A_{Kx} = A_{Pyx} - 90° \ , \ A_{Ky} = A_{Pxy} + 90° \ , \ i_{yx} = 90° - h_{Pyx} \tag{28.547}$$

sowie den Elevationen

$$h_{Pyx} = h_{pxy} \ . \tag{28.548}$$

---

[1] Abschnitt 8.11 (Band II)

[2] Abschnitt 8.16.1, Beziehungen (8.543)

Damit ist die Orientierung der beiden Systeme zueinander umkehrbar eindeutig festgelegt. Vorgabe der Winkelkoordinaten $\left(A_{Pyx}, h_{Pyx}\right)$ des Pols P_y des y-Systems im x-System und die Knotenlänge A_{Ky} zur Bestimmung des Ursprungs O_y des y-Systems erlaubt die Berechnung der Winkelkoordinaten $\left(A_{Oyx}, h_{Oyx}\right)$ in Bezug auf das x-System mit den Formeln (8.564)

$$\begin{aligned} \sin\left(A_{Pyx} - A_{Oyx}\right)\cos h_{Oyx} &= \cos A_{Ky} \\ \cos\left(A_{Pyx} - A_{Oyx}\right)\cos h_{Oyx} &= -\sin A_{Ky} \sin h_{Pyx} \\ \sin h_{Oyx} &= \cos A_{Ky} \cos h_{Pyx} \end{aligned} \tag{28.549}$$

Umgekehrt kann bei Vorgabe der Koordinaten $\left(A_{Pxy}, h_{Pxy}\right)$ des Pols P_x in Bezug auf das y-System sowie der Knotenlänge K_x des Ursprungs O_x des x-Systems mit den Formeln (8.571) (in Abschnitt 8.16.3.1) die Berechnung der Winkelkoordinaten $\left(A_{Oyx}, h_{Oyx}\right)$ des Ursprungs O_x bei Bezug auf das y-System erfolgen,

$$\begin{aligned} \sin\left(A_{Pxy} - A_{Oyx}\right)\cos h_{Oxy} &= -\cos A_{Kx} \\ \cos\left(A_{Pxy} - A_{Oyx}\right)\cos h_{Oxy} &= \sin A_{Kx} \sin h_{Pxy} \\ \sin h_{Oxy} &= \sin A_{Kx} \cos h_{Pxy} \quad . \end{aligned} \tag{28.550}$$

Damit ist es möglich, die Winkelkoordinaten $\left(A_x, h_x\right)$ einer bestimmten Richtung vom x-System in die entsprechenden Koordinaten $\left(A_y, h_y\right)$ im y-System zu übertragen (mit dem Formelsystem (8.575))

$$\begin{aligned} \cos\left(A_{Ky} - A_y\right)\cos h_y &= \sin\left(A_{Pyx} - A_x\right)\cos h_x \\ \sin\left(A_{Ky} - A_y\right)\cos h_y &= -\cos\left(A_{Pyx} - A_x\right)\cos h_x \sin h_{Pyx} + \sin h_x \cos h_{Pyx} \\ \sin h_y &= \sin\left(A_{Pyx} - A_x\right)\cos h_x \cos h_{Pyx} + \sin h_x \sin h_{Pyx} \quad . \end{aligned} \tag{28.551}$$

Sind die Koordinaten im y-System vorgegeben, errechnen sich die entsprechenden Koordinaten im x-System aus (nach (8.581))

$$\begin{aligned} \cos\left(A_x - A_{Kx}\right)\cos h_x &= \sin\left(A_y - A_{Pxy}\right)\cos h_y \\ \sin\left(A_x - A_{Kx}\right)\cos h_x &= -\cos\left(A_y - A_{Pxy}\right)\cos h_y \sin h_{Pxy} + \sin h_y \cos h_{Pxy} \\ \sin h_x &= \cos\left(A_y - A_{Pxy}\right)\cos h_y \cos h_{Pxy} + \sin h_y \sin h_{Pxy} \quad . \end{aligned} \tag{28.552}$$

Die Umrechnung der Koordinaten eines Punktes zwischen den Systemen kann mit einer entsprechenden Transformationsmatrix oder mit *Euler*winkeln P, Y, R erfolgen[1]. Der Bezug der *Euler*winkel auf die Winkelgrößen zur Transformation vom x-System in das y-System erfolgt mit den Formeln (8.595):

[1] die Umrechnungsformeln sind zusammen mit ihren Variationen in den Abschnitten 8.16.3.3 und 8.16.4 zusammengestellt

$$
\begin{aligned}
\cos A_{Pyx} \cos h_{Pyx} &= -\sin Y \sin R \cos P - \cos R \sin P \\
\sin A_{Pyx} \cos h_{Pyx} &= \cos Y \sin R \\
\sin h_{Pyx} &= -\sin Y \sin R \sin P + \cos R \cos P \\
\cos A_{Ky} \cos h_{Pyx} &= \sin Y \sin P \cos R + \cos P \sin R \\
\sin A_{Ky} \cos h_{Pyx} &= \cos Y \sin P \\
\sin h_{Pyx} &= -\sin Y \sin R \sin P + \cos R \cos P \quad .
\end{aligned}
\tag{28.553}
$$

Je nach Satellitensystem können diese Umrechnungen mit konstanten Zahlenwerten erfolgen, wenn die Satellitenstabilisierung als „inertial“ gefordert wird oder als variabel, etwa im Fall von Spinstabilisierung.

Im Folgenden werden einige typische Beispiele von Beobachtungen von einem Satelliten aus demonstriert.

28.13.2 Sonnenbeobachtung bei Nadir ausgerichteter Satellitenlage

Es wird der Verlauf der Sonneneinfallswinkel Azimut $A_{\odot y}$, Elevation $h_{\odot y}$ auf einen Satelliten im Satelliten-eigenen y-System über einen synodischen Umlauf gewünscht. Aus einer Sonnenepheme-ride seien zum gewünschten Zeitpunkt die geozentrischen äquatorialen Koordinaten $\left(r_{\odot}, \alpha_{\odot}, \delta_{\odot}\right)$ bekannt. Mit den Formeln (28.192) (auf Seite 58) werden die Winkelkoordinaten $\left(u_{\odot} - u\ ,\ w_{\odot}\right)$ der Sonne im momentanen Bahnsystem mit Inklination i(t) und aufsteigendem Knoten Ω(t) erhalten. Die Umrechnung in das Satellitenbasis –x-System, um die lokalen Beobachtungswinkel Azimut $A_{\odot x}$ und Elevation $h_{\odot x}$ zu berechnen, erfolge zunächst mit dem allgemeinen Rotationswinkel A_0:

$$
\begin{aligned}
\cos A_{\odot x} \cos h_{\odot x} &= -\sin\left(u_{\odot} - u\right) \cos w_{\odot} \cos A_0 + \sin w_{\odot} \sin A_0 \\
\sin A_{\odot x} \cos h_{\odot x} &= \sin\left(u_{\odot} - u\right) \cos w_{\odot} \sin A_0 + \sin w_{\odot} \cos A_0 \\
\sin h_{\odot x} &= \cos\left(u_{\odot} - u\right) \cos w_{\odot} \quad .
\end{aligned}
\tag{28.554}
$$

Wegen der Zuordnungen (28.543) wird der Transformationswinkel mit A_0 = 180° belegt.

Um die Drehung vom x-System in das Satelliten-eigene y-System durchzuführen, seien etwa die drei Rotationswinkel $\left(A_{Pyx}, h_{Pyx}, K_y\right)$ vorgegeben. Mit Hilfe der Transformation (28.551) können die gesuchten Beobachtungswinkel $\left(A_{\odot y}, h_{\odot y}\right)$ erhalten werden.

BEISPIEL 1: Für einen Space Shuttle (H=300 km, e=0.0, i=57°) soll der Sonnen-Strahlungseinfall in die Cargobay über einen synodischen Umlauf untersucht werden. Das y-System des Satelliten wird gegenüber dem x-Basissystem durch Rotation um die Nickachse (Pitch) um 180° gebildet. Dadurch wird die Cargobay zur Erde gedreht („bay down“), die Achse mit den Koordinaten (A_{Py} = 0°, h_{Py} = 90°) weist in die Nadirrichtung. Der Satellit wird in Nadirrichtung stabilisiert. Um das Verhalten der Sonneneinfallsrichtung diskutieren zu können, werden 7 verschiedene Einschusszeiten mit den mittleren lokalen Sonnenzeiten 6^h, 8^h, 10^h, 12^h, 14^h, 16^h, 18^h in Bezug auf einen Start in KSC (λ= -80°.69, φ= 28°.5) ausgewählt. Bild 28-106 zeigt den Verlauf in den Beobachtungswinkeln $\left(A_{\odot y}, h_{\odot y}\right)$ des Satelliten im y-System. Die Kurven werden unterbrochen, so lange sich der Satellit im Erdschatten (Kernschatten) befindet. ◀

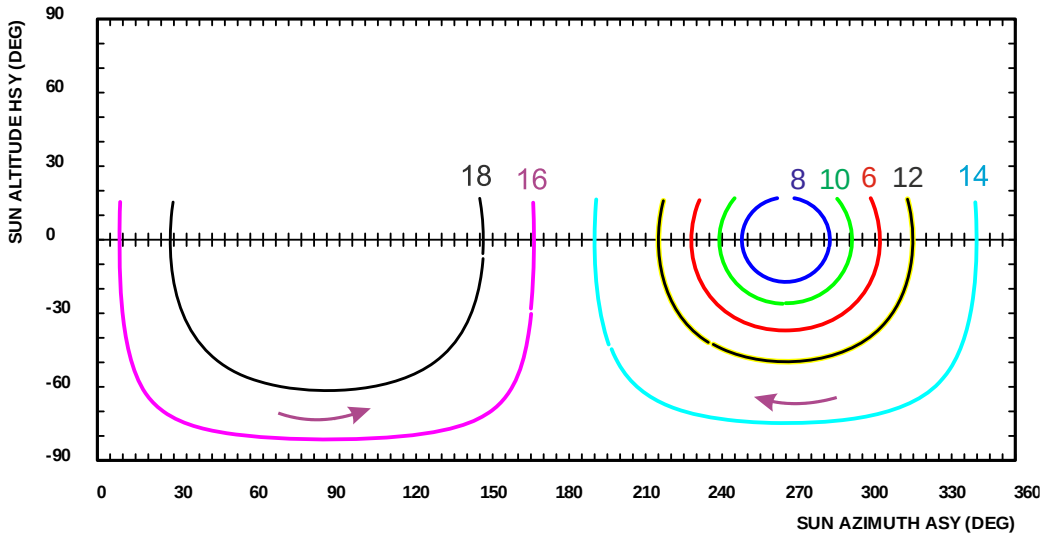


Bild 28-106: Verlauf der Sonneneinfallswinkel in einen Satelliten über einen synodischen Umlauf. Bahn: STS (H=300 km, e=0.0, i=57°). Start am 10. Nov. 1987 von KSC zu 7 verschiedenen Zeiten in mittlerer lokaler Sonnenzeit.

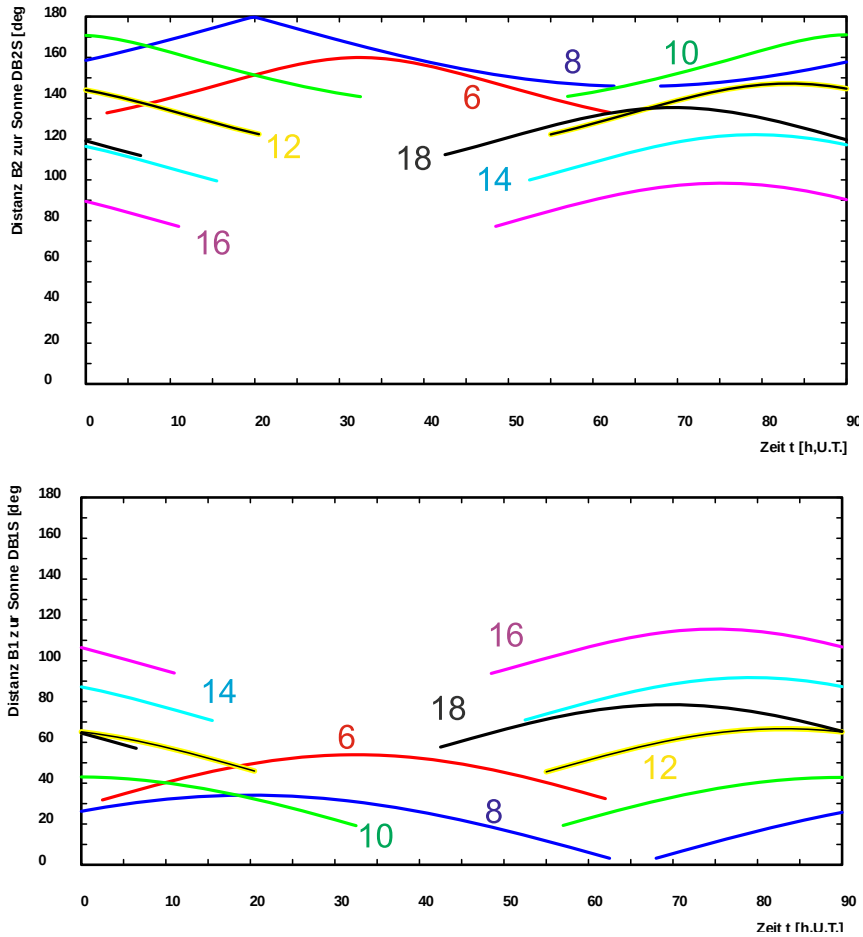


Bild 28-107: Verlauf der Winkeldistanz von Tangentialpunkten zur Sonne über einen synodischen Umlauf gesehen von einem STS aus in Nadir orientierter Satellitenlage: unten zu B_1, oben zu B_2

BEISPIEL 2: Von einem Space Shuttle (H=300 km, e=0.0, i=57°) soll ein fest montierter Scanner ($A_{Dy} = h_{Dy} = 0°$) den Erdhorizont in 10 km Höhe abtasten. Um die momentane Sonneneinstrahlung in den zwei (einander entgegengesetzten Tangentialpunkten B_1 , B_2 beurteilen zu können, soll die

satellitenzentrierte Winkeldistanz zwischen der Richtung zu den Tangentialpunkten und zur Sonne im Verlauf eines synodischen Umlaufs bestimmt werden. Für eine Bahnanalyse wird der Einschuss bezogen auf das KSC über einen Tag variiert. Bild 28-123 zeigt den Winkelverlauf für die beiden Tangentialpunkte abhängig von der Startzeit, die in Eastern Time (E.T.) (näherungsweise als mittlere lokale Sonnenzeit) gegeben ist. ◀

28.13.3 Sonneninertiale Satellitenlage

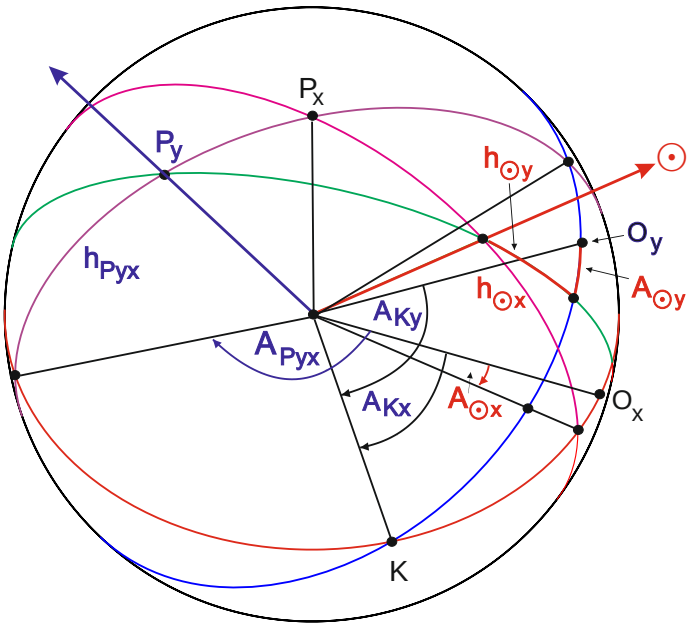


Bild 28-108: Zur Definition der Sonneninertialen Lage eines Satelliten

Der Satellit soll eine stabil kontrollierte Stellung zur Sonne annehmen, man spricht von sonneninertialer Lage („Sun inertial attitude“). Diese inertiale Lage mit Pol P_y wird in Bezug auf das Basis x-System mit den Koordinaten $\left(A_{Px}, h_{Px}\right)$ und dem Knotenwinkel A_{Ky} des auf die Sonne ausgerichteten y-Systems festgelegt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt werden die Winkelkoordinaten der Sonne aus den vorgegebenen Rektaszension und Deklination $\left(\alpha_{\odot}, \delta_{\odot}\right)$ mit den Formeln (28.554) im Satelliten x-System $\left(A_{\odot x}, h_{\odot x}\right)$ berechnet.

Mit den Formeln

$$\begin{aligned}
\cos\left(A_{Ky} - A_{\odot y}\right)\cos h_{\odot y} &= \sin\left(A_{Pyx} - A_{\odot x}\right)\cos h_{\odot x} \\
\sin\left(A_{Ky} - A_{\odot y}\right)\cos h_{\odot y} &= -\cos\left(A_{Pyx} - A_{\odot x}\right)\cos h_{\odot x}\ \sin h_{Pyx} + \sin h_{\odot x}\ \cos h_{Pyx} \qquad (28.555) \\
\sin h_{\odot y} &= \cos\left(A_{Pyx} - A_{\odot x}\right)\cos h_{\odot x}\cos h_{Pyx} + \sin h_{\odot x}\ \sin h_{Pyx}
\end{aligned}$$

wird die Drehung berechnet, welche die Ausrichtung der Satellitenlage in Bezug auf die Sonne herstellen soll. Dieser Formelweg muss für jeden Zeitpunkt mit den aktuellen geozentrischen Daten der Sonne eingehalten werden.

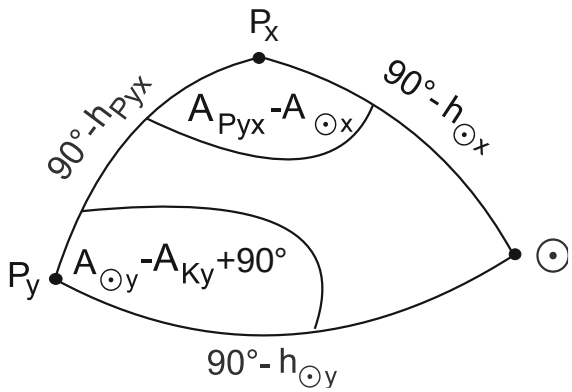


Bild 28-109: Poldreieck zur Berechnung der Drehung der gewünschten Lage P_y in die Sonnenrichtung $\odot$ realisiert in den Drehformeln (28.555).

BEISPIEL: Ein Space Shuttle ($\bar{H}$ = 300 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 57°, fiktives Startdatum über dem KSC: 1987-11-10/10:00:0.0) soll auf die Sonne mit den Rotationswinkeln $\left(A_{Pyx} = 0°, h_{Pyx} = 60°, A_{Ky} = 90°\right)$ ausgerichtet werden. Dazu wird angenommen, dass die Normallage des Satelliten im Sinne des Basissystems (28.543) ausgerichtet ist. Falls die Normallage anders festgelegt wäre, müsste eine weitere Transformation vor den weiteren Untersuchungen vorgeschaltet werden.

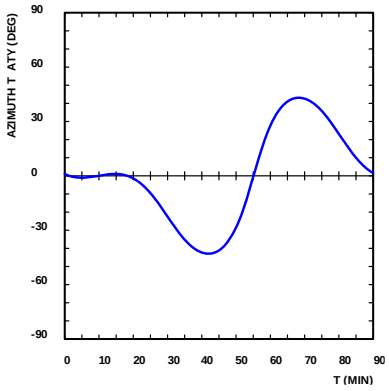


Bild 28-110: Verlauf des Azimut der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

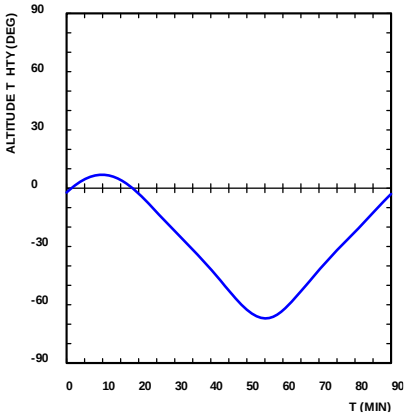


Bild 28-111: Verlauf der Elevation der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

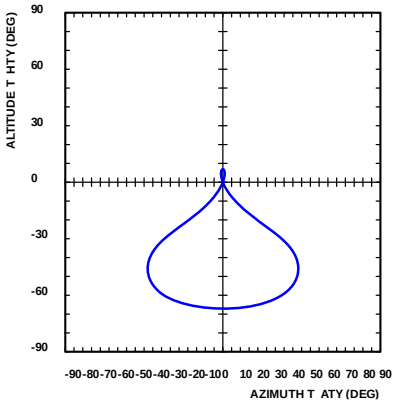


Bild 28-112: Verlauf der Elevation der transversalen Bewegungsrichtung in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

Im vorliegenden Beispiel werden einige Beobachtungen von dem Satelliten aus demonstriert, wenn seine Lage als Sonneninertiale angenommen wird. Die Beobachtungen erfolgen mit einem fest montierten Onboard Scanner mit den Richtungswinkeln $\left(A_{Dy} = h_{Dy} = 0°\right)$.

In Bild 28-110 bis Bild 28-112 wird die Bewegung der transversalen Bewegungsrichtung über einen synodischen Umlauf in Bezug auf das y-System des Satelliten in sonneninertialer Lage dargestellt.

In Bild 28-113 bis Bild 28-115 wird der Verlauf von Azimut und Elevation der Shuttle Nadirrichtung in Bezug auf das y-System des STS über einen Sonnen-synodischen Umlauf dargestellt.

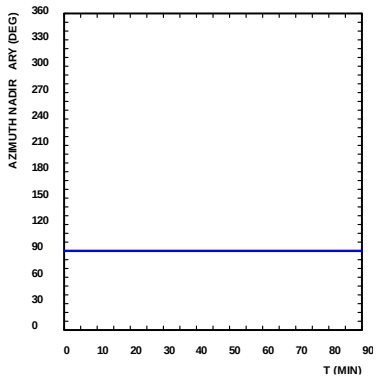


Bild 28-113: Verlauf des Azimuts der Nadirrichtung in Bezug auf die Sonneninertiale Lage

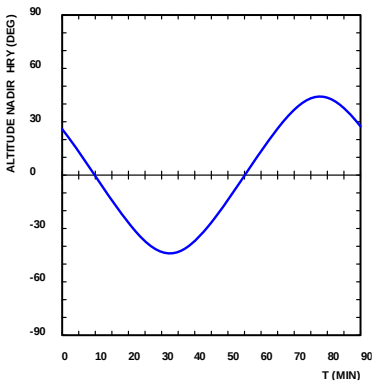


Bild 28-114: Verlauf der Elevation der Nadirrichtung in Bezug auf die Sonneninertiale Lage

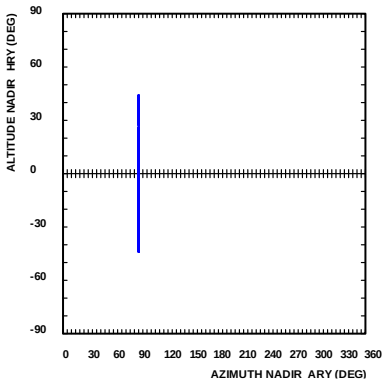


Bild 28-115: Verlauf der Elevation über dem Azimut der Nadirrichtung bei sonneninertialer Lage

Die Orientierung des Satelliten im Raum wird durch Rückgriff auf den momentanen Ort im *Leibniz*-System beschrieben. Dazu zeigt Bild 28-116 den Verlauf des Winkels zwischen der transversalen Bewegungsrichtung und der Richtung zur Spitze des Shuttle („Noser“), sowie Bild 28-117 den Winkel zwischen der Nadirrichtung (umgekehrt zur radialen Richtung) und der Satellitennormale, welche im Fall der Sonneninertialen Lage in Sonnenrichtung weist.

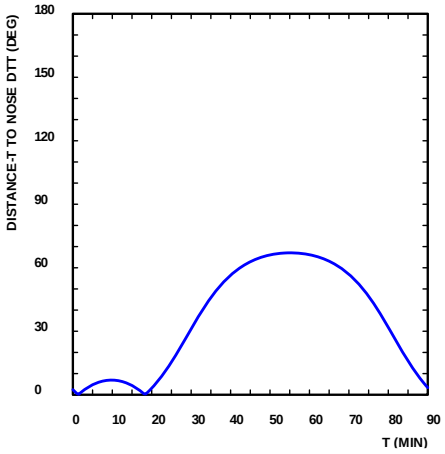


Bild 28-116: Verlauf der Winkeldistanz zwischen der transversalen Bewegungsrichtung und der STS-Spitze („Nose“)

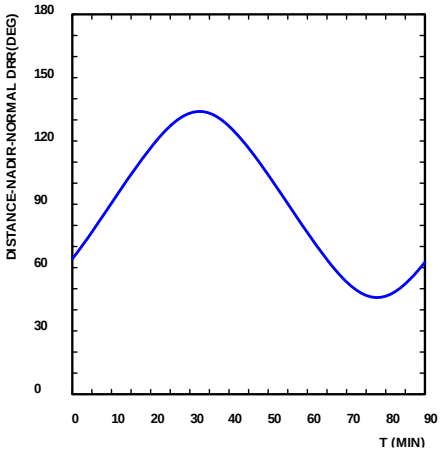


Bild 28-117: Winkel zwischen Nadirrichtung und Satellitennormale in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

Als Beispiel für die Beobachtung mit einem Onboard Sensor im Fall sonnenorientierter Satellitenlage wird die Beobachtung der Tangentialpunkte des Scanners an die Erdoberfläche untersucht. Die beiden Tangentialpunkte B_1 und B_2 befinden sich rechts bzw. links von der Bewegungsrichtung des Satelliten. Je nach Lage des Scanners kann es sein, dass nur einer der beiden Punkte beobachtet werden kann, da der andere unterhalb der möglichen durch die Anordnung des Scanners behinderter Sichtrichtung liegt.

Bild 28-118 und Bild 28-119 zeigen Azimut und Elevation des Tangentialpunktes im Sonneninertialen STS-System über einen synodischen Umlauf. Bild 28-120 zeigt die Winkeldistanz zwischen den Satelliten-zentrierten Richtungen zu B_1 und zur Sonne.

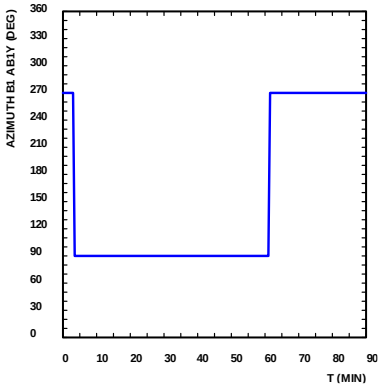


Bild 28-118: Das Azimut des Tangentialpunktes B_1 in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

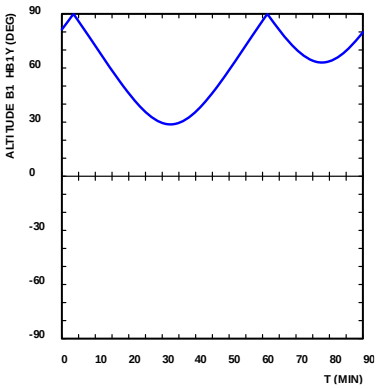


Bild 28-119: Elevation des Tangentialpunktes B_1 in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

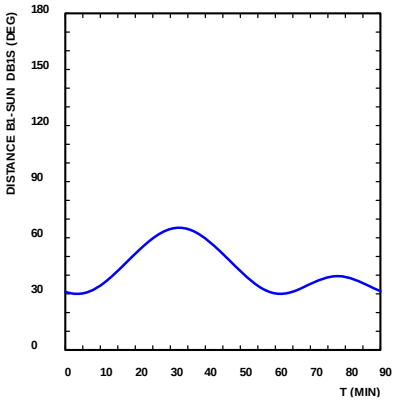


Bild 28-120: Satellitenzentrierte Winkeldistanz zwischen Tangentialpunkt B_1 und der Richtung zur Sonne in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

Der Tangentialpunkt B_1 wandert während eines synodischen Umlaufs über die Erdoberfläche wie Bild 28-121 zeigt. Dagegen ist der zweite Tangentialpunkt vom Shuttle aus gesehen stets unterhalb der durch den Rand der Cargo Bay begrenzten Sichtlinie, wie Bild 28-116 zeigt und der Zwischenwinkel zwischen der Richtung zu B_2 und der Sonnenrichtung in Bild 28-123 bestätigt. Daher kann für diesen Punkt kein sinnvoller Verlauf über der Erdoberfläche berechnet werden. ◀

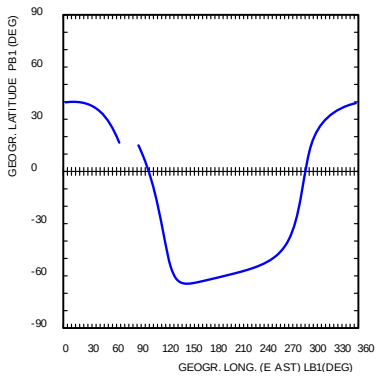


Bild 28-121: Die geographischen Koordinaten Länge λ_{B1} und Breite φ_{B1} des Tangentialpunkt B_1 in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

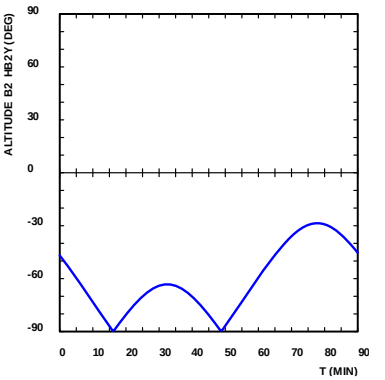


Bild 28-122: Elevation des Tangentialpunktes B_2 in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

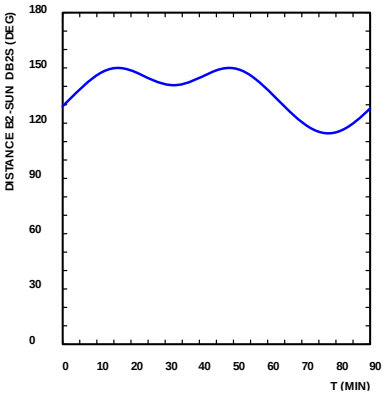


Bild 28-123: Satellitenzentrierte Winkeldistanz zwischen Tangentialpunkt B_2 und der Richtung zur Sonne in Bezug auf die Sonneninertiale Lage über einen Sonnen-synodischen Umlauf eines STS

28.14 Unterschiedliche Entwicklungen des Sonnenbezugs

Wesentliche Parameter einer Satellitenbewegung wie etwa der Sonnenbezug unterliegen langfristigen Veränderungen und Variationen, bedingt durch Einschussfehler, Ungenauigkeiten bei Bahnkorrekturen, vor allem durch die Variation der Bahnparameter auf Grund unterschiedlicher physikalischer Bewegungseinflüsse. Einige solcher Variationen wichtiger Parameter im Rahmen einer Bewegungsanalyse werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

28.14.1 Einfluss von Einschussfehlern auf Sonnen-synod. Bewegungen

Der Bezug der Bewegung eines Satelliten zur mittleren Sonnenzeit kann durch Wahl der mittleren lokalen Sonnenzeit T_Ω bei Überflug des aufsteigenden Knotens hergestellt werden. Beim Einschuss eines Satelliten in seine Umlaufbahn wird daher die Kenntnis der mittleren Sonnenzeit T_Ω als einem charakteristischen Bahnparameter angestrebt.

Es seien wie in Abschnitt 23.11 die Einschussfehler in Bahnhöhe ΔH bzw. in großer Bahnhalbachse Δa, Exzentrizität Δe, Inklination Δi, in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens bei Knotenüberflug $\Delta\Omega$ sowie der Zeitfehler beim ersten Knotenüberflug $\Delta t_{\Omega 0}$ gegeben. Die entsprechenden Bahnen haben bei Bezug auf die Nominalbahnelemente die fehlerbehafteten mittleren *Kepler*schen Parameter (n – Nominalwerte)

$$\bar{a} = \bar{a}_n \pm \Delta a \quad , \quad \bar{e} = \bar{e}_n \pm \Delta e \quad , \quad \bar{i} = \bar{i}_n + \Delta i \quad , \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_n \pm \Delta\Omega \quad , \quad \cdots$$

Die Einschussfehler sollen nicht durch ein Bahnkorrektursystem ausgeglichen werden können. Die Variation der Knotensonnenzeit kann dann durch Vergleich der mittleren Knoten-Sonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_\Omega} = \overline{\Delta\tau_\Omega}\left(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}\right)$ mit der nominalen mittleren Knoten-Sonnenverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\tau_{\Omega n}} = \overline{\Delta\tau_\Omega}\left(\bar{a}_n, \bar{e}_n, \bar{i}_n, \cdots\right)$ erhalten werden. Eine Aussage über den lokalen Zeitfehler nach N drakonitischen Umläufen, wenn T_Ω die lokale mittlere Sonnenzeit ist, zu der der aufsteigende Knoten überflogen wird, liefert die Beziehung

$$\begin{aligned} \Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_N &:= \overline{\tau_{\Omega N}} - \overline{\tau_{\Omega n,N}} = \overline{\tau_\Omega}\left(t_N\right) - \overline{\tau_\Omega}\left(t_{n,N}\right) = \\ &= T_{\Omega N} - T_{\Omega n,N} = \Delta\left(T_\Omega\right)_N \ . \end{aligned} \tag{28.556}$$

Um diesen Parameter auf die übrigen Bahnparameter zurückführen zu können, wird zunächst der lokale Zeitfehler beim ersten Knotenüberflug für die fehlerhafte Bahn in Bezug auf die Nominalbahn benötigt. Es ist mit den Beziehungen für den Knotensonnenwinkel[1] bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$

$$\overline{\tau_{\Omega 0}} = \bar{\Omega}_0 - \alpha_{\bar{\odot},0} = \bar{\Omega}\left(t_0\right) - \alpha_{\bar{\odot}}\left(t_0\right)$$

$$\overline{\tau_{\Omega n,0}} = \bar{\Omega}_{n,0} - \alpha_{\bar{\odot}n,0} = \bar{\Omega}\left(t_{n,0}\right) - \alpha_{\bar{\odot}}\left(t_{n,0}\right) \quad ,$$

somit

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_0 = \bar{\Omega}\left(t_{n,0}\right) + \dot{\Omega}_s\left(t_0 - t_{n,0}\right) - n_\odot\left(t_0 - t_{n,0}\right) - \bar{\Omega}_n\left(t_{n,0}\right) \ .$$

Da die Einschussfehler im Knoten und in Knotenüberflugzeit

$$\Delta\Omega = \bar{\Omega}\left(t_{n,0}\right) - \bar{\Omega}_n\left(t_{n,0}\right) \quad \text{und} \quad \Delta t_{\Omega 0} = t_0 - t_{n,0} \tag{28.557}$$

betragen, wird schließlich mit der säkularen Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - n_\odot$

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_0 = \Delta\Omega + \dot{\tau}_{\Omega s}\ \Delta t_{\Omega 0} \ . \tag{28.558}$$

Nach einem drakonitischem Umlauf ist

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_1 := \overline{\tau_{\Omega 1}} - \overline{\tau_{\Omega n,1}} = \overline{\tau_{\Omega 0}} + \overline{\Delta\tau_\Omega} - \overline{\tau_{\Omega n,0}} - \overline{\Delta\tau_{\Omega n}} = \Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_0 + \overline{\Delta\tau_\Omega} - \overline{\Delta\tau_{\Omega n}}$$

und somit allgemein

---

[1] Abschnitt 28.7.1 auf Seite 71

$$\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_N := \overline{\tau_{\Omega\,N}} - \overline{\tau_{\Omega\,n,N}} = \Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)_0 + N\left(\overline{\Delta\tau_\Omega} - \overline{\Delta\tau_{\Omega\,n}}\right) \quad . \tag{28.559}$$

Diese Rechenvorschrift kann durch vollständige Induktion leicht bestätigt werden.

BEISPIEL: Es wird die Entwicklung des Fehlers in der mittleren Sonnenzeit bei Knotenüberflug für die Bahn $\overline{a}_n$ = 7266.47 km, $\overline{e}_n$ = 0.0, $\overline{i}_n$ = 99°.007513, $\overline{\omega}_n$ = 90°.0 gegeben[1]. Diese Bahn ist sonnensynchron, die mittlere Verschiebung des Knotensonnenwinkels $\overline{\Delta\tau_\Omega} = \overline{\Delta\tau_{\Omega\,n}}$ pro drakonitischem Umlauf muss also verschwinden. Ein fehlerhafter Einschuss wird die Sonnensynchronität der Bahn zerstören. In Tabelle 28-57 sind die verschiedenen Knotensonnendriften für die im obigen Beispiel gegebenen fehlerhaften Bahnen zusammengestellt.

	A	**B**	**C**
$\overline{\Delta\tau_\Omega} / \overline{P_D}$	$\overline{i}_0$	$\overline{i}_0 - \Delta i$	$\overline{i}_0 + \Delta i$
1.	+0°.0	–0°.233×10–3	+0°.233×10–3
2.	–0°.169×10–3	–0°.401×10–3	+0°.632×10–4
3.	+0°.169×10–3	–0°.635×10–4	+0°.402×10–3
4.	–0°.338×10–3	–0°.570×10–3	–0°.106×10–3
5.	+0°.279×10–6	–0°.232×10–3	+0°.232×10–3
6.	+0°.339×10–3	+0°.106×10–3	+0°.572×10–3

Tabelle 28-57: Knotensonnendrift pro drakonitischem Umlauf abhängig von Einschussfehlern in Höhe H bzw. Halbachse a, Exzentrizität e sowie der Inklination i für die Bahn $\overline{a}_n$ = 7266.47 km, $\overline{e}_n$ = 0.0, $\overline{i}_n$ = 99°.007513

	A	**B**	**C**
$\overline{\Delta\tau_\Omega} / \overline{P_D}$	$\overline{i}_0$	$\overline{i}_0 - \Delta i$	$\overline{i}_0 + \Delta i$
1.	+0*m*.00	–9*m*.53	+9*m*.53
2.	–6*m*.91	–16*m*.39	+2*m*.58
3.	+6*m*.92	–2*m*.60	+16*m*.46
4.	–13*m*.80	–23*m*.27	–4*m*.33
5.	+0*m*.01	–9*m*.47	+9*m*.51
6.	–13*m*.84	+4*m*.33	+23*m*.35

Tabelle 28-58: Zeitdrift nach N = 10226 drakonitischen Umläufen (etwa 2 Jahre) abhängig von Einschussfehlern in Höhe H bzw. Halbachse a, Exzentrizität e sowie der Inklination i für die Bahn $\overline{a}_n$ = 7266.47 km, $\overline{e}_n$ = 0.0, $\overline{i}_n$ = 99°.007513.

Die säkulare Zeitdrift $\Delta\left(\overline{\tau_\Omega}\right)$ nach ungefähr 2 Jahren (≅ N = 10266 drakonitischen Umläufen) ist in Tabelle 28-58 enthalten.

[1] aus DLR GSOC 94-05 und AIAA 96-3659

Ob dieser mögliche Fehler toleriert werden kann, kann nur von den Experimentatoren geklärt werden, welche die Beobachtungsbedingungen vorgeben. ◀

28.14.2 Sonnendrift einer Bahn ohne Bahnkorrektur

In den vorstehenden Abschnitten wurden Annahmen über eine säkulare Variation in den *Kepler*schen Epocheelementen $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ gemacht, die nicht für alle Zeiten konstant sind und daher nur den ungünstigsten Fall einer Variation der Parameter der synodischen Bewegung beschreiben. Es wird daher in einem nächsten Schritt nötig, soweit bekannt alle Änderungen in diesen Parametern und im Zusammenhang der sonnenbezogenen synodischen Satellitenbewegung die Bewegung der wahren Sonne zu berücksichtigen. Dies kann Anlass für eine Modifikation der Korrekturzyklen sein, aber auch für eine Untersuchung dienen, wie sich die Satellitenbewegung ohne Bahnkorrekturen über lange Zeitintervalle auswirkt.

Im folgenden Beispiel werden die Variationen der Knotenüberflugzeit

$\tau_\Omega = \Omega - \alpha_\odot$,

des Sonnenaspektwinkels $\sigma_\odot$ nach Formel (28.532) (auf Seite 227) und der Schattendauer T_S nach Formel (28.512) (auf Seite 207 und weiter in Abschnitt 28.11.4) über ein längeres Zeitintervall unter Einschluss der natürlichen Einflüsse auf die Satellitenbewegung ohne Bahnkorrekturen aufgefächert nach unterschiedlichen Einschussbahnen (verursacht durch Einschussfehler) in einem numerischen Beispiel untersucht.

BEISPIEL: Es sei wie in den vorhergehenden Beispielen als nominale Ausgangsbahn die sonnensynchrone 3:43 Bahn zugrunde gelegt. Zwei weitere Bahnen wurden so gewählt, dass sie durch Einschussfehler verursachte maximale Abweichungen in den Knotenzeitdriften aufweisen. Alle Bahnen werden als nominell kreisförmig $\bar{e}_0$ = 0.0 angenommen. Sie unterscheiden sich zur Epoche t_0 nur in großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$. Die säkulare Knotenzeitdrift gegenüber der nominalen sonnensynchronen Bahn über 3 Jahre ist mit $\Delta\tau_\Omega / 3a$ bezeichnet und diente zur Auswahl dieser Bahnen[1]. Eine Übersicht über die verwendeten Bahnparameter gibt folgende Tabelle:

	$\bar{a}_0$ [km]	$\bar{i}_0$	$\Delta\tau_\Omega$ / 3a
Bahn 1	7153.134	98°.523	0*m*.0
Bahn 2	7162.400	98°.493	–34*m*.5
Bahn 3	7143.880	98°.553	34*m*.8

Um die Aussagen konsistent zu halten, wird für alle Bahnen dasselbe Modell physikalischer Bahneinflüsse („Störmodell bezüglicher einer *Kepler*bewegung“) verwendet. Unter Annahme minimaler Sonnenaktivität wird für die säkulare Abnahme der großen Bahnhalbachse

$$\dot{a}_s = -1.1202 \times 10^{-8}\,\text{km/s}$$

[1] DLR TN GSOC 91-06, 9. Juli 1991

gewählt, für die säkulare Variation der Inklination unter Annahme eines Starts bei Jahresanfang und 11*h* mittlerer Sonnenzeit im absteigenden Knoten

$$(i)^{\bullet}_{s} = -9°.2592593 \times 10^{-10} / \mathrm{s} \cong -8°.0 \times 10^{-5} / \mathrm{d} \quad .$$

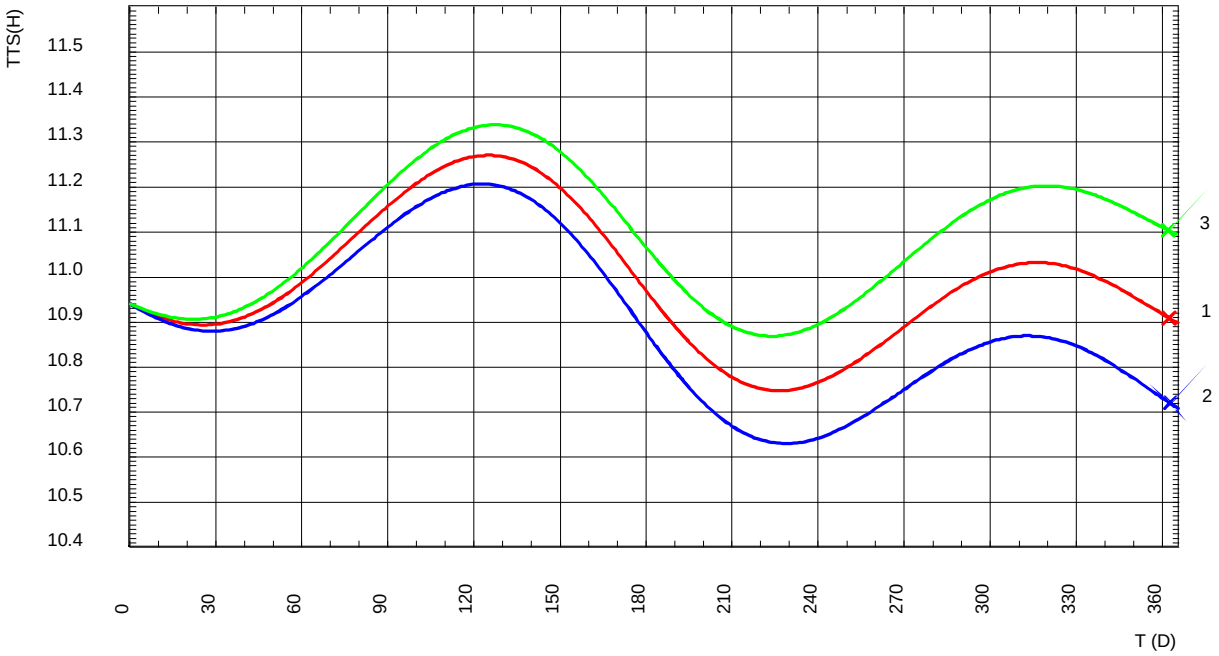


Bild 28-124 : Verlauf der wahren Sonnenzeit im Jahresverlauf im absteigenden Knoten der Bahnen (Kurve 1) $\bar{a}_0$ = 7153.133 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) $\bar{a}_0$ = 7162.4 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.49 und (Kurve 3) $\bar{a}_0$ = 7143.88 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.55

Bild 28-124 zeigt den **Verlauf der wahren Sonnenzeit** $T_{☊} = \tau_{☊} = ☊ - \alpha_{\odot}$ im absteigenden Bahnknoten im ersten Jahr. Die Kurven zeigen

1. die jährliche doppeltperiodische Schwankung infolge der Zeitgleichung. Sie bewirkt eine maximale Amplitude von etwa $\left[-14^m.3\,,\,16^m.3\right]$. Die in der obigen Bahnparameter-Tabelle mit Formel (28.559) abgeschätzten Werte werden also für die gewählten Bahnen geringfügig unterschritten.

2. das allmähliche Wegdriften der mit Einschussfehlern behafteten Bahnen 2 und 3 von der Nominalbahn 1, ausgehend von der Soll-Lage bei Start. Die maximalen Abweichungen betragen nach drei Jahren $-32^m.1$ bzw. $33^m.3$.

3. ein „Abkippen“ der Kurven von den Mittagswerten in Richtung Vormittag als Folge der säkularen Variationen der Epochewerte von großer Bahnhalbachse und Inklination. Sie bewirken nach drei Jahren ein Absinken des maximalen Ausschlags um $-18^m.8$ und des minimalen Ausschlags um $-10^m.4$.

In den Kurven nicht berücksichtigt wurde ein Einschussfehler durch die Verletzung des Startfensters und durch einen fehlerhaften Knoten. Werden hierfür noch typischerweise die Fehler

$\Delta t_0 = \pm 4^m$ und $\Delta\Omega_0 = \pm 0°.04 \cong \pm 10^s$ angenommen, beträgt nach drei Jahren die maximal mögliche Ablage gegenüber der Sollzeit $T_{☊} = 11^h$ im absteigenden Knoten

$$\Delta T_{\Omega} \in \left[-69^m.4,\ 34^m.9\right]$$

Dieses Ergebnis ist nicht für alle Zeiten gültig. Die Kurven in Bild 28-124 wurden mit Start Anfang des Jahres gerechnet. Der Verlauf der Kurven wird relativ durch Start zu einer anderen Jahreszeit modifiziert, so dass die Extremwerte des Kurvenverlaufs im Verlauf des dritten Jahres und nicht erst am Ende des dritten Jahres erreicht werden können. Wird in einem Jahr mit maximaler Sonnenaktivität gestartet, wirken sich die säkularen Variationen der Epocheelemente nur im Bereich $-4^m.5$ bis $-8^m.2$ aus. Die Variationen durch den erhöhten Luftwiderstand in der großen Bahnhalbachse dominieren somit die Variationen, die durch die Sonnenanziehung in der Bahninklination hervorgerufen werden. Das beobachtete Abkippen der $T_{\text{ß}}$ – Kurven ist somit im Wesentlichen durch die Sonnengravitation verursacht, so dass das oben berechnete Toleranzintervall $\Delta T_{\text{ß}}$ tatsächlich die ungünstigsten Werte („Worts Case“) angeben dürfte. Die im Toleranzintervall $\Delta T_{\text{ß}}$ angegebenen Werte sind geringfügig schlechter als die aus den Kurven in Bild 28-124 ablesbaren extremalen Werte. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die einzelnen Variationsanteile nur im wirklich ungünstigsten Fall addiert werden dürfen. Ferner können die Variationen in großer Bahnhalbachse und Inklination nicht über beliebig lange Zeiträume als säkular angesehen werden. Sie variieren stattdessen langperiodisch. In der Praxis ist also ein etwas engeres Toleranzintervall durchaus möglich.

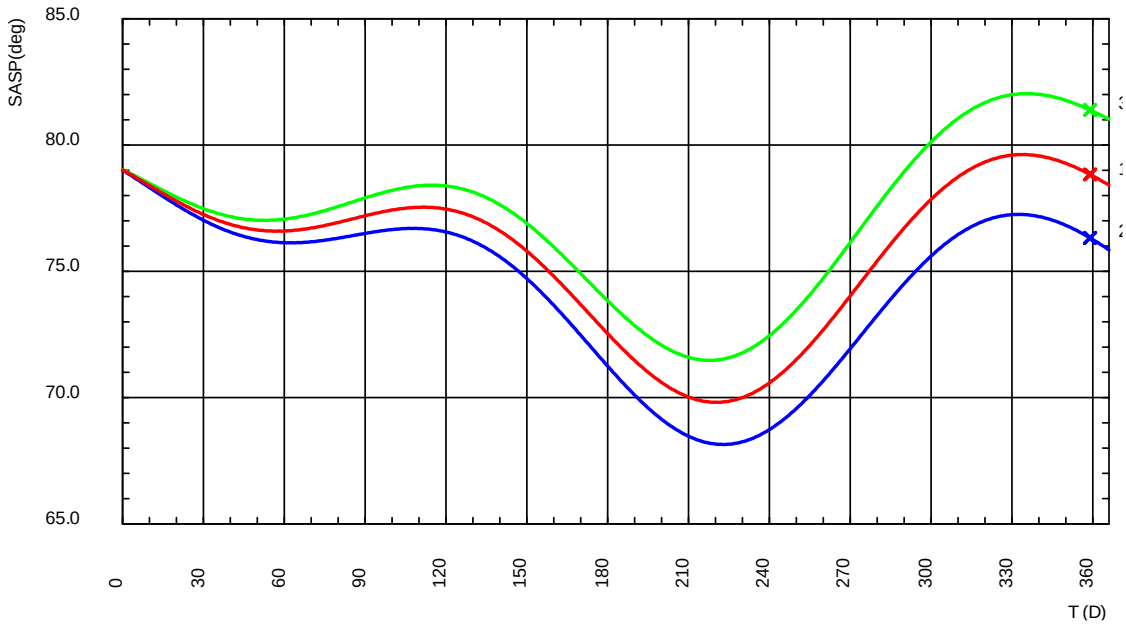


Bild 28-125: Verlauf des Sonnenaspektwinkels $\sigma_{\odot}$ (Winkel zwischen Bahnnormale und Sonnenrichtung) pro Zeile über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 11h MST im absteigenden Knoten: $\bar{a}_0$ = 7153.133 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) $\bar{a}_0$ = 7162.4 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.49 und (Kurve 3) $\bar{a}_0$ = 7143.88 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.55

Bild 28-125 zeigt den **Verlauf des Sonnenaspektwinkels** $\sigma_{\odot}$ (= Winkel zwischen Bahnnormale und geozentrischer Richtung zur Sonne[1]) über drei Jahre in gleicher Weise wie in den zuvor behandelten Kurven der wahren Knotensonnenzeit:

[1] Abschnitt 28.12.1 auf Seite 226

1. Die jährliche Variation infolge der Zeitgleichung verursacht maximale Auslenkungen gegenüber dem Wert bei Start im Bereich [-2°.0,8°.0].

2. Die Einschussfehler (Bahnen 2 und 3 in obiger Bahnparameter-Tabelle) haben nach drei Jahren maximale Abweichungen im Bereich [-6°.2, 6°.4] zur Folge.

3. Die säkularen Variationen infolge der physikalischen Einwirkungen auf die Bahn („Störungen“) in großer Bahnhalbachse und Inklination bewirken Schwankungen im Bereich [-4°.7,-2°.4].

Im Verlauf von drei Jahren muss daher mit Sonnenaspektwinkeln im Bereich

$$\Delta\sigma_{\odot} \in [-12°.9\ ,\ 12°.0]$$

gerechnet werden. Der Streubereich wird somit im Laufe der Zeit aufgefächert mit nahezu unmerklicher Tendenz zum Abkippen zu kleineren Winkelwerten. Die Allgemeingültigkeit dieser Ergebnisse muss wie im vorstehenden Fall eingeschränkt werden.

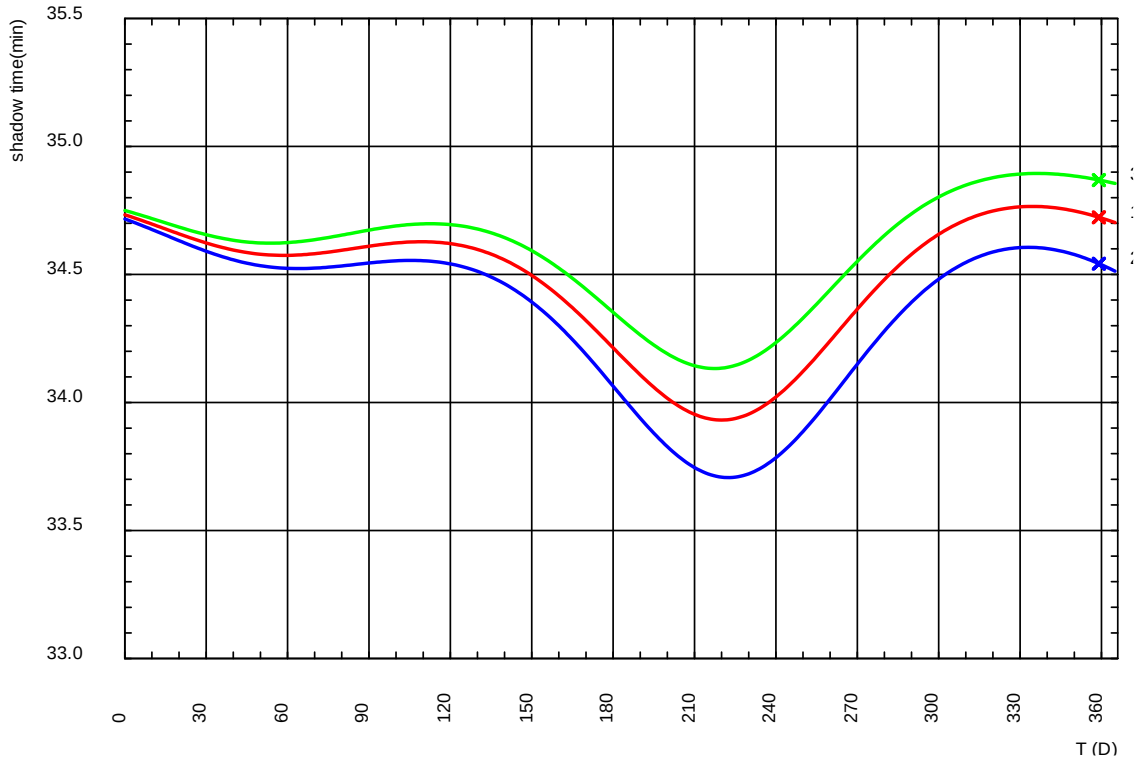


Bild 28-126: Verlauf der Schattendauer pro Zeile über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 11h MST im absteigenden Knoten: $\bar{a}_0$ = 7153.133 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) $\bar{a}_0$ = 7162.4 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.49 und (Kurve 3) $\bar{a}_0$ = 7143.88 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.55

Schließlich zeigt Bild 28-126 (auf S. 252) den **Verlauf der Schattenzeiten** über ein Jahr mit folgenden Tendenzen:

1. Die jährlichen Variationen infolge der Zeitgleichung verursachen maximale Auslenkungen gegenüber dem Wert bei Start im Bereich $\left[-0^m.20\ ,\ 0^m.66\right]$.

2. Die Einschussfehler haben im Verlauf von drei Jahren maximale Abweichungen im Bereich $\left[-1^m.29\ ,\ 0^m.24\right]$ zur Folge.

3. Die säkularen natürlichen Variationen in großer Bahnhalbachse und Inklination bewirken Schwankungen im Bereich $\left[-1^m.73\ ,\ 0^m.34\right]$.

Im Verlauf von drei Jahren muss daher mit Schattenzeiten im Streubereich

$$\Delta T_S \in \left[-3^m.27, 1^m.24\right]$$

gerechnet werden. Die Gültigkeit dieser Aussagen ist wie in den beiden vorstehenden Fällen eingeschränkt.

Ein völlig anderes Bild ergibt sich, wenn der Satellit in einen „Vollsonnenbahn“ eingeschossen werden soll. Wegen der bekannten Abweichung des Verlaufs der wahren von der fiktiven mittleren Sonne muss über einen Zeitraum für etwas mehr als 2 Monaten auch für einen solche Bahn mit Schatten gerechnet werden. In diesem Beispiel sei ein Einschuss im absteigenden Knoten um 18h mittlere Sonnenzeit angenommen. Im Verlauf des ersten Jahres muss um die Sommersonnenwende, in deren Umgebung nur Schatten auftreten kann, mit Schattenzeiten im Streubereich

$$\Delta T_S \in \left[-0^m.26, 0^m.35\right]$$

gerechnet werden. Für die nominelle Bahn 1 beträgt die maximale Schattendauer 16.975 Minuten. ◀

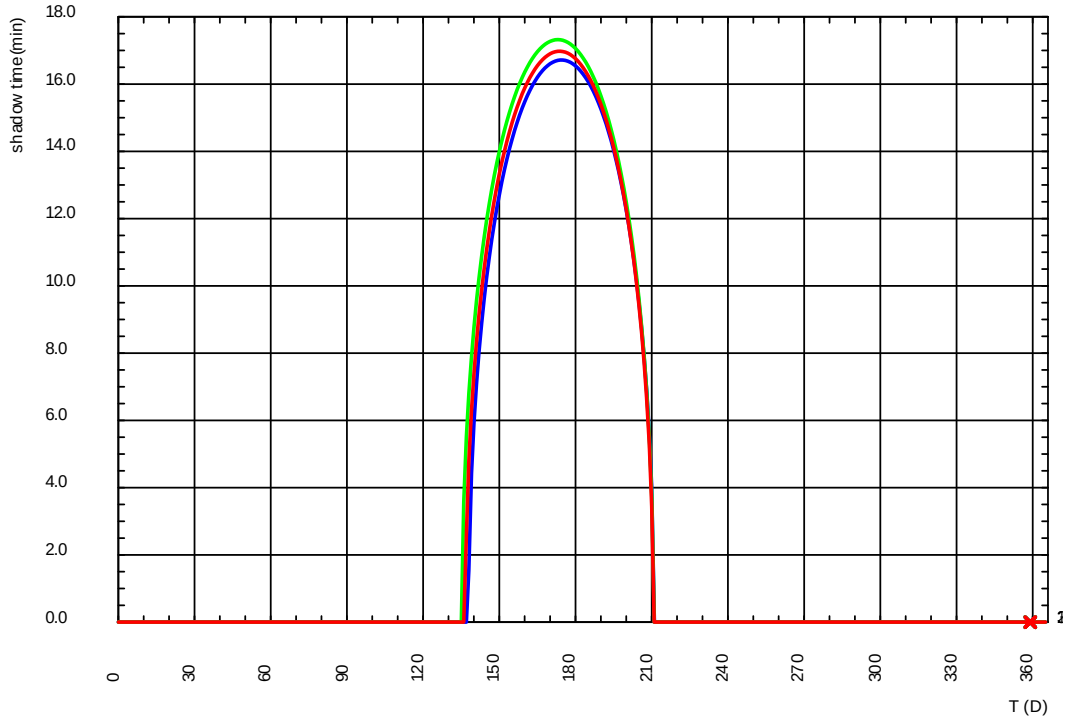


Bild 28-127: Verlauf der Schattendauer über ein Jahr für die drei untersuchten Bahnen bei Einschuss um 18h MST im absteigenden Knoten: $\bar{a}_0$ = 7153.133 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.52, sowie der leicht veränderten Bahnen (Kurve 2) $\bar{a}_0$ = 7162.4 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.49 und (Kurve 3) $\bar{a}_0$ = 7143.88 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.55

28.15 Variationen der Sonnen-synodischen Bewegung durch Bewegungseinflüsse

Ähnlich wie schon bei der Untersuchung anderer Bewegungsarten (etwa der drakonitischen Bewegung in Abschnitt 23.12) zeigt sich auch im Rahmen der Sonnen-synodischen Bewegung, dass der analytische Formalismus nicht zur Beschreibung der Bewegung für alle Zeiten ausreicht. Es gibt weitere, analytisch nicht erfassbare Einflüsse auf eine Bahn abzuschätzen, welche die Bahnparameter säkular und/oder langperiodisch so beeinflussen, dass sie bei Bedarf durch Bahnkorrekturen verändert werden müssen um eine gewünschte Sollbahn eizuhalten.

In diesem Abschnitt werden als erstes langfristige Variationen einiger fundamentaler Größen der synodischen Bewegung bei Bezug auf die mittlere scheinbare Sonne soweit möglich analytisch untersucht. Sie dienen als erste Grundlage zur Abschätzung eines eventuell benötigten Korrekturaufwandes der Bahnparameter. Eine verfeinerte Untersuchung unter Einschluss der periodischen Satellitenbewegung und bei Bezug auf die wahre Sonne interessiert vor allem bei Satellitenbewegungen ohne Bahnkorrekturen. Im operationellen Satellitenbetrieb werden die Korrekturen aus der beobachteten Bahn berechnet. Der wahre Korrekturaufwand, insbesondere der Zeitverlauf der Korrekturen, kann von den analytisch vorhergesagten abweichen.

28.15.1 Zeitstabilität bei der Variation natürlicher Bewegungseinflüsse

Ein Satellit hat auf seiner Bahn eine ständig wechselnde Stellung zur Sonne. Mit dem momentanen Sonnenwinkel

$$\tau = \alpha - \alpha_{\odot} \tag{28.560}$$

(α= Rektaszension des Satelliten, $\alpha_{\odot}$= Rektaszension der Sonne) variieren wahre

$$T_w := \tau + 12^h \tag{28.561}$$

und mittlere Sonnenzeit

$$T_m := \bar{\tau} + 12^h \quad , \quad \bar{\tau} := \alpha - \alpha_{\bar{\odot}} \quad . \tag{28.562}$$

$\alpha_{\bar{\odot}}$ ist die Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne, die wie üblich als im Äquator sich gleichförmig bewegend angenommen wird. Unter Zeit eines Satelliten wird hier also die (mittlere bzw. wahre) Sonnenzeit im Subsatellitenpunkt verstanden. Als Maß für den Zeitbezug einer Bahn kann die *mittlere Sonnenzeit* im mittleren aufsteigenden Knoten, entsprechend der *mittlere Knotensonnenwinkel* (mit der bei Abschätzungen zulässigen Vernachlässigung der kurzperiodischen Variationen)

$$\overline{\tau_{\Omega}} := \bar{\Omega} - \alpha_{\bar{\odot}} \tag{28.563}$$

genommen werden. Man beachte, dass in dieser Definition des mittleren Knotensonnenwinkels eine doppelte Mittelung verwendet wird: die mittlere Bewegung der Bahnebene ($\bar{\Omega}$) und die mittlere, also auf die (mittlere) Äquatorebene reduzierte Bewegung der scheinbaren Sonne $\alpha_{\bar{\odot}}$. Wir entwickeln den mittleren Knotensonnenwinkel um einen mittleren Anfangswert

$$\overline{\tau_{\Omega}} = \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(t - t_0\right) + \frac{1}{2}\ddot{\tau}_{\Omega s0}\left(t - t_0\right)^2 + \ldots \tag{28.564}$$

Hier wird

$$\dot{\tau}_{\Omega s0} := \dot{\Omega}_{s0} - n_{\odot} \tag{28.565}$$

als die *säkulare Knotensonnenwinkeldrift* bezeichnet, wobei stets

$$\dot{\bar{\Omega}} = \dot{\Omega}_{s0} \quad , \quad \dot{\tau}_{\bar{\Omega},s} = \dot{\tau}_{\Omega,s} \tag{28.566}$$

gesetzt werden kann. $\dot{\Omega}_{s0}$ ist die säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens zur Epoche t_0, $n_{\odot}$ die tropische mittlere Bewegung der scheinbaren Sonne.

Für eine vorgegebene Sollbahn beträgt die Variation des mittleren Sonnenwinkels pro mittlerem drakonitischem Umlauf (= „Knotensonnenintervall“) mit den Epocheelementen

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} := \dot{\tau}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}} = \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(t_{\Omega 1} - t_{\Omega 0}\right) \quad . \tag{28.567}$$

Sie ist eindeutig für alle Zeiten erklärt. Der Knotensonnenwinkel hat nach N mittleren drakonitischen Umläufen somit den Sollwert

$$\overline{\tau_{\Omega N0}} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(t_{\Omega,N} - t_{\Omega 0}\right) \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + +N\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \quad . \tag{28.568}$$

In Formel (28.564) gibt der Ausdruck

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega}}\right) \;:=\; \frac{1}{2}\,\ddot{\tau}_{\Omega s0}\left(t - t_0\right)^2 + \ldots \tag{28.569}$$

den *Zeitfehler* (= Variation der Drift des Knotensonnenwinkels) an, der nach dem Zeitintervall t-t_0 auf Grund von Variationen in den Anfangselementen zu erwarten ist:

- *Der Fehler in der Sonnenzeit bei Knotenüberflug wächst quadratisch mit der Zeit.*

Aus Formel (28.565) folgt für die Variation der

$$\ddot{\tau}_{\Omega s0} \;=\; \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial\overline{a}_0}\,\dot{a}_s + \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial\overline{e}_0}\,\dot{e}_s + \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial\overline{i}_0}\left(i\right)_s^{\cdot} \quad , \tag{28.570}$$

wobei offenbar

$$\frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial\overline{a}_0} \;=\; \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{s0}\right)}{\partial\overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial\overline{e}_0} \;=\; \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{s0}\right)}{\partial\overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial\left(\dot{\tau}_{\Omega s0}\right)}{\partial\overline{i}_0} \;=\; \frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{s0}\right)}{\partial\overline{i}_0} \quad . \tag{28.571}$$

Diese Ausdrücke sind aus den Formeln (22.146) bis (22.148) berechenbar[1].

28.15.2 Die Drift der Knotensonnenzeit

Die Anfangsepoche werde in den Moment des ersten Knotenüberflugs $t_{\Omega 0}$ gelegt. Die dann gültigen mittleren Bahnelemente definieren als Epocheelemente die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}$ sowie die säkulare Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s0}$. Nach N drakonitischem Umläufen hat der mittlere Knotensonnenwinkel nach Formel (28.564) den Wert

$$\overline{\tau_{\Omega N}} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(t_{\Omega,N} - t_{\Omega 0}\right) + \frac{1}{2}\,\ddot{\tau}_{\Omega s0}\left(t_{\Omega,N} - t_{\Omega 0}\right)^2 + \ldots \tag{28.572}$$

Mit dem Näherungsausdruck für das Zeitintervall über N drakonitische Umläufe[2] aus Formel (23.372) lautet dieser Ausdruck

$$\overline{\tau_{\Omega N}} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\,N\,\overline{P_{D0}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(N+1\right)\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right] + \frac{1}{2}\,\ddot{\tau}_{\Omega s0}\,N^2\,\overline{P_{D0}}^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(N+1\right)\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^2 + \ldots$$

Unter der Annahme

$$\begin{aligned} \ddot{\tau}_{\Omega s0}\left(P_D\right)_s^{\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \\ \left(P_D\right)_s^{\cdot 2} &= O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{28.573}$$

wird

---

[1] In Abschnitt 22.6.2.1

[2] In Abschnitt 23.12.1

$$\overline{\tau_{\Omega N}} = \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0} N \overline{P_{D0}} + \frac{1}{2} \dot{\tau}_{\Omega s0} N (N+1) \overline{P_{D0}} (P_D)_s^{\cdot} + \frac{1}{2} \ddot{\tau}_{\Omega s0} N^2 \overline{P_{D0}}^2 + \ldots \quad (28.574)$$

Die Epocheelemente definieren die Soll-Lage des Knotensonnenwinkels nach N drakonitischen Umläufen mit dem Wert

$$\overline{\tau_{\Omega N0}} := \overline{\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0} N \overline{P_{D0}} = \overline{\tau_{\Omega 0}} + N \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \quad . \quad (28.575)$$

Die säkularen Abweichungen der Bahnparameter von den Sollwerten verursachen somit die Drift

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) := \overline{\tau_{\Omega N}} - \overline{\tau_{\Omega 0}} - N \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \quad (28.576)$$

bzw.

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = \frac{1}{2} N \overline{P_{D0}} \left[\dot{\tau}_{\Omega s0} (N+1) (P_D)_s^{\cdot} + \ddot{\tau}_{\Omega s0} N \overline{P_{D0}} \right] \quad . \quad (28.577)$$

Mit der Definition der Verschiebung des Knotensonnenwinkels (= „Knotensonnenintervall“) zur Epoche durch

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} := \dot{\tau}_{\Omega s0} \overline{P_{d0}} \quad (28.578)$$

hat das N-te *Knotensonnenintervall* die Länge

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = \overline{\tau_{\Omega,N}} - \overline{\tau_{\Omega,N-1}} \quad (28.579)$$

bzw.

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0} N \overline{P_{D0}} (P_D)_s^{\cdot} + \frac{1}{2} \ddot{\tau}_{\Omega s0} (2N-1) \overline{P_{D0}}^2 + \ldots \quad (28.580)$$

Die Veränderung des Knotensonnenintervalls nach N drakonitischen Umläufen beträgt dann

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) := \overline{\Delta\tau_{\Omega N}} - \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \quad (28.581)$$

bzw.

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) = \left[\dot{\tau}_{\Omega s0} N (P_D)_s^{\cdot} + \frac{1}{2} (2N-1) \ddot{\tau}_{\Omega s0} \overline{P_{D0}} \right] \overline{P_{D0}} + \ldots \quad (28.582)$$

28.15.3 Die Variation des Knotensonnenintervalls

Die Kenntnis der Variation des Knotensonnenintervalls kann für manche Untersuchungen und zur Klärung der Zusammenhänge von Nutzen sein. Sie wird daher im Folgenden hergeleitet und zu den bisher behandelten Variationen des Knotensonnenwinkels und der drakonitischen Umlaufzeit in Relation gestellt.

Nach N drakonitischen Umläufen hat das Knotensonnenintervall nach Formel (28.579) die Variation

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right)_s^{\cdot} &= \left(\Delta\tau_{\Omega N}\right)_s^{\cdot} = \\
&= \ddot{\tau}_{\Omega s0} \overline{P_{D0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0} (P_D)_s^{\cdot} + \ddot{\tau}_{\Omega s0} N \overline{P_{d0}} (P_D)_s^{\cdot} + \\
&\quad + \dot{\tau}_{\Omega s0} N (P_D)_s^{\cdot 2} + \dot{\tau}_{\Omega s0} N (P_D)_s^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2} \dddot{\tau}_{\Omega s0} (2N-1) (P_D)_s^{\cdot 2} + \\
&\quad + \ddot{\tau}_{\Omega s0} (2N-1) \overline{P_{D0}} (P_D)_s^{\cdot\cdot} + \ldots
\end{aligned}$$

Da neben den Näherungen (28.573) auch

$$\begin{aligned}
\left(P_D\right)_s^{\cdot\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \\
\ddot{\tau}_{\Omega s0} &= O\left(J_2^2\right) \\
\dot{\tau}_{\Omega s0}\left(P_D\right)_s^{\cdot\cdot} &= O\left(J_2^2\right)
\end{aligned} \tag{28.583}$$

angenommen werden darf, bleibt

$$\left(\Delta\tau_{\Omega N}\right)_s^{\cdot} = \ddot{\tau}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}} + \dot{\tau}_{\Omega s0}\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ldots = \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.584}$$

Die säkulare Variation des Knotensonnenintervalls infolge der säkularen Variationen in den Bahnelementen ist durch

$$\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)_s^{\cdot} = \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} = \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{a}_0}\dot{a}_s + \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{e}_0}\dot{e}_s + \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{i}_0}\left(i\right)_s^{\cdot} \tag{28.585}$$

gegeben. Im Fall der Erde ist die durch das Erdschwerefeld verursachte säkulare Variation $\dot{\Omega}_{s0}$ aus Formel (20.15)[1] und die mittlere drakonitische Umlaufzeit aus Formel (23.162)[2] gegeben. Damit ergibt sich in erster Näherung der Ausdruck (es ist $\bar{p}_0 = \bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)$, $\bar{n}_0 = \sqrt{\mu/\bar{a}_0^3}$)

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} = & -3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2}\cos\bar{i}_0 - \\
& -2\pi\frac{n_\odot}{\bar{n}_0}\left\{1+\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2}\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos^2\bar{i}_0\right]\right\} + \\
& + O\left(J_2^2\right)
\end{aligned} \tag{28.586}$$

sowie für mittlere Kreisbahnen

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\left[\bar{e}_0 = 0\right] = & -2\pi\frac{n_\odot}{\bar{n}_0} - \\
& -3\pi J_2 R_E^2\left[\frac{\cos\bar{i}_0}{\bar{a}_0^2} + \frac{n_\odot}{\sqrt{\mu\,\bar{a}_0}}\left(1-4\cos^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \quad .
\end{aligned} \tag{28.587}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{a}_0} = & -3\pi n_\odot\sqrt{\frac{\bar{a}_0}{\mu}} + 6\pi J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + \\
& + \frac{3}{4}\pi J_2 n_\odot\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\bar{a}_0^3}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos^2\bar{i}_0\right] + O\left(J_2^2\right)\ \left[\frac{\text{rad}}{\text{km}}\right]
\end{aligned} \tag{28.588}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{e}_0} = -12\pi J_2\frac{\bar{e}_0 R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\cos\bar{i}_0 + \tag{28.589}$$

[1] Abschnitt 20.2.1, Band III

[2] Abschnitt 23.3.2

$$+3\pi J_2 \frac{\bar{e}_0 R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^3} \frac{n_\odot}{\bar{n}_0} \left[-\left(2+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) + \left(10+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos^2 \bar{i}_0 \right] + O\left(J_2^2\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{i}_0} &= 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2} \sin \bar{i}_0 - \\ &\quad -3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2} \frac{n_\odot}{\bar{n}_0} \left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \cos \bar{i}_0 \sin \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad , \end{aligned} \tag{28.590}$$

im Fall kreisförmiger Bahnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{a}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] &= -3\pi n_\odot \sqrt{\frac{\bar{a}_0}{\mu}} + 6\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^3} \cos \bar{i}_0 + \\ &\quad + \frac{3}{2}\pi J_2 n_\odot \frac{R_E^2}{\sqrt{\mu \bar{a}_0^3}} \left(1-4\cos^2 \bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{km}}\right] \\ \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{e}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] &= O\left(J_2^2\right) \\ \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{i}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] &= 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2} \sin \bar{i}_0 - 24\pi J_2 n_\odot \frac{R_E^2}{\sqrt{\mu \bar{a}_0}} \cos \bar{i}_0 \sin \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{28.591}$$

Mit dem jetzt bekannten $\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}$ können die Formeln (28.574) bis (28.582) zur Berechnung des Sonnenwinkels bei Überflug des Satelliten sowie des Knotensonnenintervalls und seiner Driften umformuliert werden. Man erhält

$$\overline{\tau_{\Omega N}} = \overline{\tau_{\Omega 0}} + N\,\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} + \frac{1}{2} N^2 \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} \overline{P_{D0}} + \frac{1}{2} \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.592}$$

mit dem Zeitfehler

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = \frac{1}{2} N^2 \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} \overline{P_{D0}} + \frac{1}{2} \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.593}$$

sowie das Knotensonnenintervall

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} + \left(N - \frac{1}{2}\right) \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} \overline{P_{D0}} + \frac{1}{2} \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.594}$$

mit der Variation

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) = \left(N - \frac{1}{2}\right) \left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} \overline{P_{D0}} + \frac{1}{2} \overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} \left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{28.595}$$

BEISPIEL 1: Für die Bahn

$$\bar{a}_0 = 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 98°.498$$

wird mit den Formeln (28.588) und (28.590)

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial \bar{a}}\right|_0 = -5.874273927 \times 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{km}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial \bar{i}}\right|_0 = 8.024557535 \times 10^{-3} \quad .$$

Mit den säkularen Variationen

$$\dot{a}_s = -1.28892\times10^{-7}\ \text{km/s} \quad , \quad (i)_s^{\bullet} = -9°.2365967\times10^{-5}\ 1/\text{d}$$

lautet die säkulare Variation des mittleren Knotensonnenintervalls pro drakonitischem Umlauf zur Epoche nach Formel (28.585)

$$\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\bullet} = -9^s.030399899\times10^{-5}\ 1/\text{d} \cong -7.6009119145\times10^{-12}\ \text{rad/s} \quad .$$

Von besonderem Interesse sind hier die Anteile der Knotensonnenwinkelvariation, die von der Variation in Halbachse und Inklination getrennt herrühren. Es sind

$$\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{a}}\dot{a}_s = 1''.3493117\times10^{-3}\ \frac{1}{\text{d}} \quad , \quad \frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{i}}(i)_s^{\bullet} = -2''.7038717\times10^{-3}\ \frac{1}{\text{d}} \quad ,$$

die beiden Anteile wirken also gegenläufig. Nach den Beispielen in Abschnitt 23.12 ist

$$\left(P_D\right)_s^{\bullet} = -1.62522\times10^{-7} \quad .$$

Mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit zur Epoche $\overline{P_{d\,0}}$ = 6027.9s und der säkularen Knotendrift $\dot{\tau}_{\Omega s0}$ = 0.0 (die Ausgangsbahn wurde ja als sonnensynchron angenommen) lautet der Zeitfehler nach 5235 drakonitischen Umläufen (ungefähr ein Jahr) mit Formel (28.593)

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = 86^s.330 \quad .$$

Das Knotensonnenintervall hat sich gegenüber dem Anfangswert $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}$ =0°.0 (gemäß Formel (28.566)) entsprechend Formel (28.595) um den Wert

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) = -0^s.03298$$

und mit Formel (28.594) auf den wegen der Sonnensynchronität der vorgegebenen (zur Epoche gültigen) Nominalbahn identischen Wert

$$\overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = -0^s.03298$$

geändert. Diese mittleren Größen sind in der Praxis gewöhnlich vernachlässigbar. ◄

Anmerkungen: Wie bei den Korrekturen der Spurstabilität in Abschnitt 23.12 gilt auch hier: die getrennt aufgeführten Variationsanteile infolge des Luftwiderstandes und der Sonnengravitation können entgegengesetztes Vorzeichen und unter Umständen sogar dem Betrag nach nahezu gleich groß sein, so dass auch bei starker Einzelvariation nur eine schwache Gesamtvariation resultieren kann. Die Variation in der Inklination darf nur über einige Monate als konstante somit säkulare Variation aufgefasst werden. Im Allgemeinen ist sie jedoch langperiodisch. Ähnliches gilt auch für die Variation der großen Bahnhalbachse, die wegen der mehrfach periodischen Variabilität des Solarflusses ebenfalls über Monate, allenfalls ein bis zwei Jahre als konstant aufgefasst werden darf. Diese wechselseitigen Variabilitäten wirken sich auf die Drift des Knotensonnenwinkels sehr unterschiedlich aus. Sie müssen für langfristige Analysen daher sehr sorgfältig berücksichtigt werden. ◄

BEISPIEL 2: Wir wollen daher noch ein zweites ähnliches Beispiel[1] mit einer Bahn der mittleren Äquatorbahnhöhe $\bar{H}$ = 888 km

$$\bar{a}_0 = 7266,47\ \text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 99°.007513 \quad , \quad \overline{P_{D0}} = 6171.4\text{s}$$

[1] Auswahl dieser Bahnen in AIAA 96-3659

betrachten. Hier ist wegen der Sonnensynchronität dieser vorgegebenen Nominalbahn $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} = 0°.0 / \overline{P_D}$. Mit den maximalen säkularen Variationen

$$\dot{a}_s = -2.994537\times10^{-3}\ \text{km/d} \quad , \quad (i)_s^{\bullet} = -1°.296\times10^{-4}\ /\ \text{d}$$

und den partiellen Anteilen

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{a}}\right|_0 = -5.920299\times10^{-7}\ \frac{\text{rad}}{\text{km}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{i}}\right|_0 = 7.7624186\times10^{-3}$$

lauten die Einzelanteile der Knotensonnenwinkelvariation, die von der Variation in Halbachse und Inklination getrennt herstammen,

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{a}}\right|_0 \dot{a}_s = 3''.656777\times10^{-4}\ \frac{1}{\text{d}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\tau_\Omega}\right)}{\partial\bar{i}}\right|_0 (i)_s^{\bullet} = -3''.621632\times10^{-3}\ \frac{1}{\text{d}} \quad .$$

Der Anteil durch den maximalen Einfluss der Sonnengravitation ist also um den Faktor 10 größer als der Anteil infolge der maximal möglichen Variation infolge des Luftwiderstandes. Die säkulare Variation (28.585) des Knotensonnenintervalls beträgt mit diesen Werten

$$\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\bullet} = -2^s.170636\times10^{-4}\ \frac{1}{\text{d}} \quad .$$

Da für diese Bahn mit den Formeln (23.358) und folgenden aus Abschnitt 23.12.1

$$\left(P_D\right)_s^{\bullet} = -3.814371\times10^{-8}$$

berechnet werden kann, folgt schließlich nach einer Zeitdauer von 2 Jahren entsprechend $N = 10266$ drakonitischen Umläufen der maximale Fehler in der Knotensonnenzeit (der dem Fehler im Knotensonnenwinkel identisch ist)

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = -13^m\,31^s.9 \quad \text{für} \quad (i)_{s,\max}^{\bullet} \quad .$$

Zum Vergleich lautet der Wert für minimalen Einfluss der Sonnenattraktion auf die Bahninklination

$$\Delta\left(\overline{\tau_{\Omega N}}\right) = -3^m\,15^s.6 \quad \text{für} \quad (i)_{s,\min}^{\bullet} = -4°.12\times10^5\ /\ \dot{d} \quad .$$

Das Knotensonnenintervall hat sich gegenüber dem Anfangswert $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}} = 0°.0$ um den Wert

$$\Delta\left(\overline{\Delta\tau_{\Omega N}}\right) = \overline{\Delta\tau_{\Omega N}} = -0^s.0386$$

geändert. ◄

Das letzte Beispiel erlaubt die folgende (heuristische) Aussage:

- *Für eine sonnensynchrone Bahn über etwa 850 km (mittlere) Bahnhöhe kann auf das Verhalten der lokalen Knotensonnenzeit der „Stör"-Einfluss durch die Sonnengravitation bereits erheblich größer als der größte mögliche „Stör"-Einfluss durch den Luftwiderstand sein.*

28.15.4 Korrekturzyklus für Zeitstabilität

Auf Grund von analytisch nicht erfassbaren bzw. nicht exakt vorhersagbaren Variationen in den Bahnelementen wird nach einiger Zeit (hier nach N drakonitischen Umläufen) der beobachtete Wert

$$\overline{\tau_\Omega} = \bar{\Omega} - \alpha_{\bar{\odot}} \quad ,$$

wobei $\overline{\Omega}$ durch Mittelung erhalten wird, vom Sollwert aus Formel (28.567) abweichen

$$\Delta\left(\tau_\Omega\right)_w \;:=\; \overline{\tau_\Omega} - \overline{\tau_{\Omega N0}} \quad . \tag{28.596}$$

Zur Untersuchung der Zeitstabilität wird berechnet, wie lange der Knotensonnenwinkel das vorgegebene Toleranzintervall nicht überschreitet und wann und in welchem Maße die Bahn korrigiert werden muss, um den Zeitfehler innerhalb des Toleranzintervalls zu halten.

Überschreitet der wahre Fehler im Knotensonnenwinkel $\Delta\left(\tau_\Omega\right)_W$ aus Formel (28.596) ein vorgesehenes Toleranzintervall $\Delta\tau_k$

$$\left|\Delta\left(\tau_\Omega\right)_w\right| \;>\; \left|\Delta\tau_k\right| \quad ,$$

muss die Bahn korrigiert werden. Es wird angestrebt, möglichst selten korrigieren zu müssen, so dass die gesamte Toleranzbreite $\pm\Delta\tau_k$ ausgenutzt werden kann.

Für eine Abschätzung des Zeitbedarfs, nach dem zu korrigieren ist, wird die wahre Abweichung $\Delta\left(\tau_\Omega\right)_w$ durch den vor der Mission abschätzbaren Zeitfehler (28.593) ersetzt. Da das Korrekturintervall ohne Einschränkung in der $\pm\Delta\tau_k$ angenommen werden darf und die säkularen Variationen der Elemente eine stetige Variation der Knotenlängendrift gemäß Formel (28.569) verursachen, kann man für einen Korrekturzyklus genauso wie im Fall der Spurstabilität vorgehen (in Abschnitt 23.12.5). Siehe hierzu auch die Darstellung in Bild 28-128. Es seien $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0$ und entsprechend $\overline{\tau_{\Omega 0}}$ die Sollwerte in großer Halbachse, Exzentrizität, Inklination und Knotensonnenwinkel. Die Anfangswerte für Halbachse, Exzentrizität und Inklination für einen Korrekturzyklus werden durch Änderungen der Sollwerte um gewisse noch zu berechnende Beträge $\Delta\overline{a}, \Delta\overline{e}, \Delta\overline{i}$ so gewählt, dass der Knotensonnenwinkel das eine Ende des erlaubten Intervalls erreicht (Punkt 1 in Bild 28-128):

$$\overline{a}_1 \;=\; \overline{a}_0 + \Delta\overline{a} \quad , \quad \overline{e}_1 \;=\; \overline{e}_0 + \Delta\overline{e} \quad , \quad \overline{i}_1 \;=\; \overline{i}_0 + \Delta\overline{i} \quad , \quad \overline{\tau_{\Omega 1}} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} + \Delta\tau_k \quad .$$

Für das einmalige Durchlaufen des gesamten erlaubten Toleranzintervalls $2\,\Delta\tau_k$ kann mit Formel (28.593) die dazu benötigte Anzahl von drakonitischen Umläufen berechnet werden

$$N \;=\; \frac{1}{\overline{P_{d\,0}}\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}}\left[-\frac{1}{2}\,\overline{\Delta\tau_{\Omega\,0}}\left(P_d\right)_s^{\cdot} + \sqrt{\frac{1}{4}\,\overline{\Delta\tau_{\Omega\,0}}^{\,2} + \left(P_d\right)_s^{\cdot 2} + 4\,\overline{P_{d\,0}}\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\,\Delta\tau_k}\;\right] \tag{28.597}$$

In dieser Formel kann das negative Zeichen vor der Wurzel nicht stehen, da N stets nichtnegativ angenommen werden kann. Wird N in die Zeitformel (23.372) eingesetzt, erhält man das benötigte Zeitintervall Δt_k zum einmaligen Durchlaufen des Toleranzintervalls. Somit wird das andere Ende des erlaubten Gesamtintervalls erreicht (Punkt 3)

$$\overline{a}_3 \;=\; \overline{a}_0 \quad , \quad \overline{e}_3 \;=\; \overline{e}_0 \quad , \quad \overline{i}_3 \;=\; \overline{i}_0 \quad , \quad \overline{\tau_{\Omega 3}} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 0}} - \Delta\tau_k \quad .$$

Die Elemente variieren nach weiteren $2\,\Delta t_k$, da jetzt „unterhalb“ der Sollwerte, wieder im doppelten Intervall zurück bis zu den Werten (Punkt 5)

$$\overline{a}_5 \;=\; \overline{a}_0 - \Delta\overline{a} \quad , \quad \overline{e}_5 \;=\; \overline{e}_0 - \Delta\overline{e} \quad , \quad \overline{i}_5 \;=\; \overline{i}_0 - \Delta\overline{i} \quad , \quad \overline{\tau_{\Omega 5}} \;=\; \overline{\tau_{\Omega 1}} \quad .$$

Erst jetzt werden die Bahnelemente korrigiert, und zwar die Halbachse um den Wert $2\,\Delta\overline{a}$, die Exzentrizität um $2\,\Delta\overline{e}$ und die Inklination um $2\,\Delta\overline{i}$. Da während eines Zyklus das Intervall $2\left|\Delta t_k\right|$ zweimal durchlaufen wird, beträgt der gesamte Korrekturzyklus das Doppelte des Zeitintervalls Δt_k, also

$$Z_\tau \;=\; 2\,\Delta t_k \quad . \tag{28.598}$$

Für Abschätzungen ist der Fehler nicht allzu groß, wenn in Formel (28.597) sowie in (23.372) die Faktoren mit $\left(\overline{P_D}\right)_s^{\bullet}$ vernachlässigt werden. Der Korrekturzyklus beträgt DANN in recht guter Näherung

$$Z_\tau \;=\; 4\sqrt{\frac{|\Delta\tau_k|\,\overline{P_{D0}}}{\left|\left(\Delta\tau_{\Omega 0}\right)_s^{\bullet}\right|}} \quad . \tag{28.599}$$

In der Mitte des erlaubten Längenintervalls wird der Sollwert $\overline{\tau_{\Omega 0}}$ erreicht (Punkt 2 bzw. Punkt 4). Dies ist nach dem ersten Zeitintervall $\Delta t_k / \sqrt{2} \approx 0.3\Delta t$ der Fall bzw. vor Ende des Zyklus. Diese Aussagen können in dem folgenden Satz zusammengefasst werden:

- *Für positive Fehlerdriften $\left(\Delta\tau_\Omega\right)_s^{\bullet}$ liegt der Scheitel der Korrekturparabel auf der Seite früherer Zeiten („links"), der Zyklus beginnt mit einer späteren mittleren Sonnenzeit, zum halben Zyklus beim minimalen Extrem der Sonnenzeit, am Ende wieder zur späteren Sonnenzeit. Während 70 % eines Korrekturzyklus ist die mittlere Zeit früher als die Sollzeit.*

BEISPIEL: Für die sonnensynchrone kreisförmige Satellitenbahn (siehe auch die Beispiele in Abschnitt 23.12.5), mit Reproduktion der Subsatellitenbahn nach 3 Tagen und 43 drakonitischen Umläufen mit den Soll-Bahnelementen

$$\bar{a}_0 \;=\; 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 \;=\; 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 \;=\; 98°.498$$

wird mit der Variation

$$\left(\Delta\tau_\Omega\right)_s^{\bullet} \;=\; -9^s.03039989869\times 10^{-5}\,1/\text{d und } \overline{P_{D0}} = 6028.9\text{ sec}$$

sowie für das Toleranzintervall

$$\Delta\tau_k \;=\; \pm 1\,\text{s} \;\triangleq\; 0°.0041667$$

für den Korrekturzyklus nach Formel (28.599)

$$Z_\tau \;=\; 111^d.2$$

erhalten.

In Bild 28-128 ist der Fehler in der Knotenzeit auf die Mitte des erlaubten Knotenzeitintervalls $2\Delta\overline{\tau}_k$ reduziert, entsprechend der Sollzeit $\overline{T_{\Omega 0}}$. Das Zeitintervall umfasst das doppelte Durchlaufen des Toleranzintervalls, das vollständig ausgenutzt wird. Entscheidend ist somit die Wahl der Anfangsbahnelemente $\bar{a}_1, \bar{e}_1, \bar{i}_1$ bei Beginn des Zyklus in Punkt 1. Ergänzend zeigen Bild 28-129 und Bild 28-129 die entsprechenden Variationen in großer Bahnhalbachse und Inklination über dem Toleranzintervall. Der Verlauf der Korrektur nach Beendigung eines Zyklus ist jeweils durch einen Pfeil markiert. ◀

Am Ende des Korrekturzyklus muss die Bahn korrigiert werden, die große Bahnhalbachse um den Wert

$$2\,\Delta\bar{a} \;=\; \dot{a}_s\, Z_\tau \quad , \tag{28.600}$$

die Exzentrizität um

$$2\,\Delta\bar{e} \;=\; \dot{e}_s\, Z_\tau \tag{28.601}$$

und die Inklination um

$$2\,\Delta\bar{i} \;=\; \left(i\right)_s^{\bullet}\, Z_\tau \quad . \tag{28.602}$$

Es werden die Geschwindigkeitsinkremente etwa aus den Formeln (23.421) bis (23.423) benötigt[1].

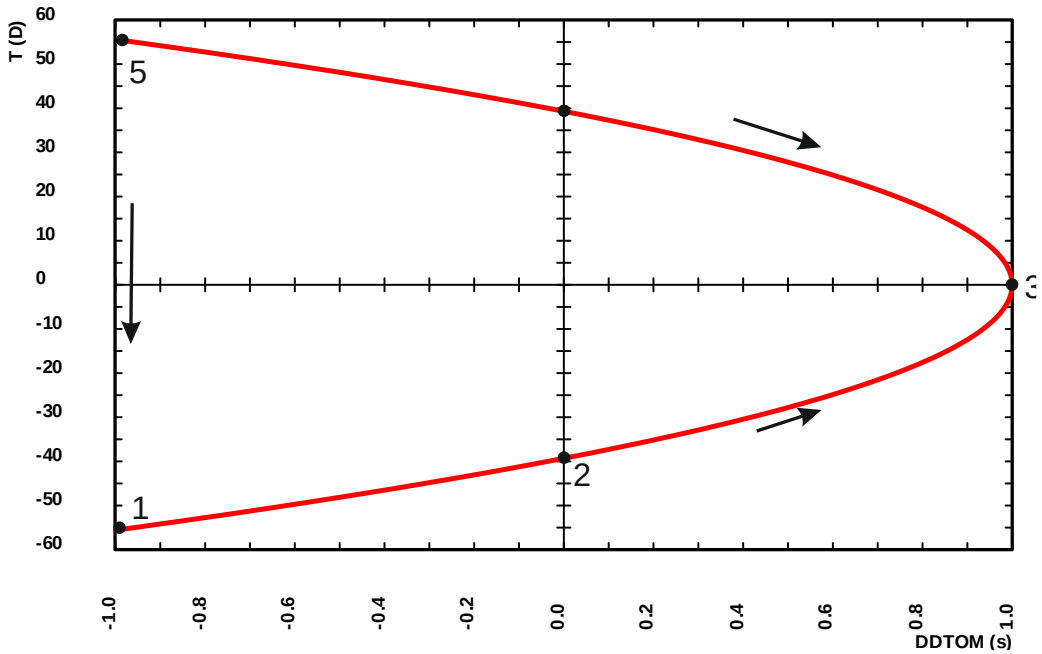


Bild 28-128: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Zeit für das Toleranz-Zeitintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43

BEISPIEL: Es werden unterschiedliche Einflüsse auf das Zeitverhalten der (schon in den vorhergehenden Beispielen behandelten) Bahn

$$\bar{a}_0 = 7153\,\mathrm{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 98°.498$$

abgeschätzt. Berücksichtigt wird maximale (ρ_{max}) und minimale (ρ_{min}) Luftdichte als Folge der Sonnenaktivität und unterschiedliche Einflüsse durch die Sonnengravitation. Entsprechend sind die säkularen Variationen in Halbachse bei

$$\rho_{min} : \quad \dot{a}_{s,I} = -1.12916 \times 10^{-8}\ \mathrm{km/s}$$

$$\rho_{max} : \quad \dot{a}_{s,II} = -1.28892 \times 10^{-7}\ \mathrm{km/s}$$

und in Inklination (berücksichtigend tages-[1,2 bzw. 3,4] und jahreszeitliche [1,3 bzw. 2,4] Schwankungen):

$$(i)^{\bullet}_{s,1} = -4°.12 \times 10^{-5}\,1/\mathrm{d} = -4°.7685185 \times 10^{-10}\,1/s$$

$$(i)^{\bullet}_{s,2} = -9°.36 \times 10^{-5}\,1/\mathrm{d} = -1°.0833333 \times 10^{-9}\,1/s$$

$$(i)^{\bullet}_{s,3} = -8°.00 \times 10^{-5}\,1/\mathrm{d} = -9°.2592593 \times 10^{-10}\,1/s$$

$$(i)^{\bullet}_{s,4} = -12°.98 \times 10^{-5}\,1/\mathrm{d} = -1°.50231481 \times 10^{-9}\,1/s \quad .$$

[1] Abschnitt 23.12.5

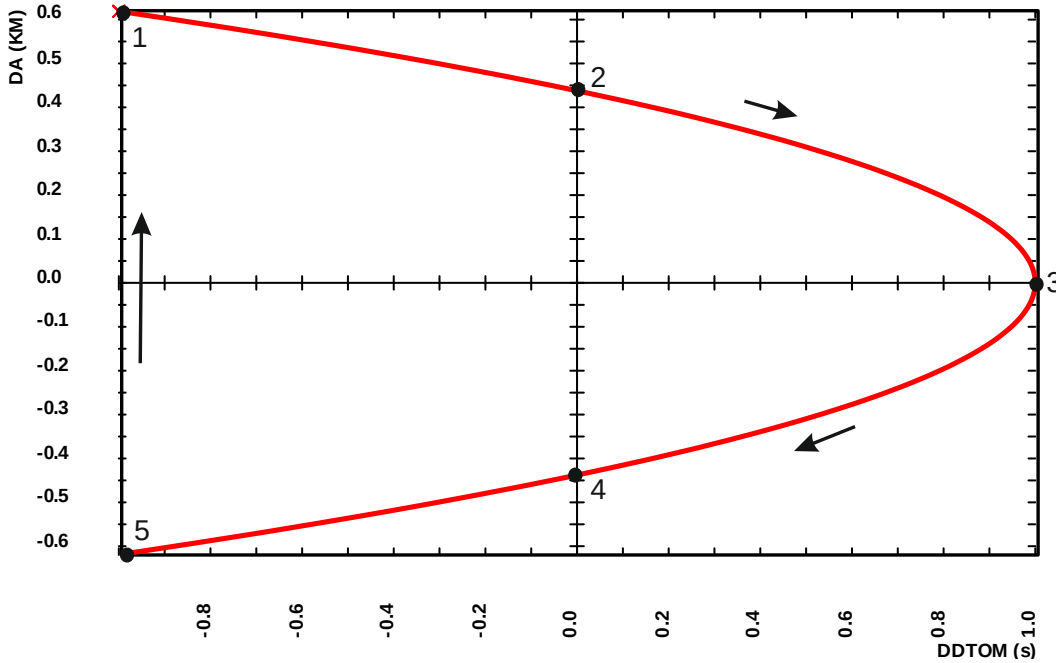


Bild 28-129: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Halbachse für das Toleranz-Zeitlängenintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43

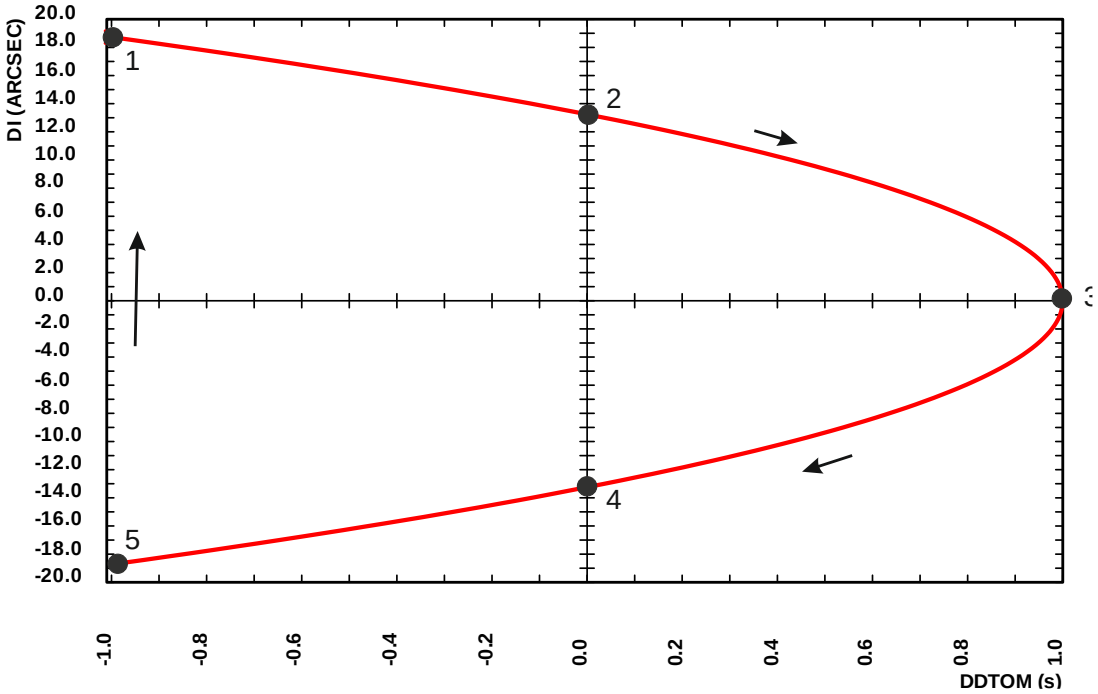


Bild 28-130: Korrekturzyklus zur Zeitstabilität über der Inklination für das Toleranz-Zeitintervall $\pm 1\,\mathrm{s}$ für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit der Reproduzierbarkeit 3:43

Dies bewirkt die säkularen Variationen in der Knotenüberflugzeit

$(\Delta\tau_\Omega)^{\bullet}_{s}$	$(i)^{\bullet}_{s,1}$	$(i)^{\bullet}_{s,2}$	$(i)^{\bullet}_{s,3}$	$(i)^{\bullet}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–7*s*.154×10–5 /d	–17*s*.240×10–5 /d	–14*s*.630×10–5 /d	–24*s*.220×10–5 /d
$\dot{a}_{s,II}$	1*s*.060×10–5 /d	–9*s*.030×10–5 /d	–6*s*.411×10–5 /d	–16*s*.002×10–5 /d

Tabelle 28-59 Säkulare Variation der Knotenüberflugzeit infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination

und somit die Korrekturzyklen

Z_τ	$(i)^{\bullet}_{s,1}$	$(i)^{\bullet}_{s,2}$	$(i)^{\bullet}_{s,3}$	$(i)^{\bullet}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	125d	80d	87d	67d
$\dot{a}_{s,II}$	324d	111d	132d	83d

Tabelle 28-60 Korrekturzyklus für Zeitstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination

Der Korrekturbedarf kann, da es sich um eine Kreisbahn handelt, näherungsweise mit den Formeln (23.421) und (23.423) aus

$$\left.\begin{aligned} \Delta V_t &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}}\,(2\,\Delta\bar{a}) \\ \Delta V_c &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}}\,(2\,\Delta\bar{i}) \end{aligned}\right\rangle \quad \bar{e} \text{ klein} \qquad (28.603)$$

abgeschätzt werden. Es ergeben sich die Werte für den Tangentialschub

ΔV_t	$(i)^{\bullet}_{s,1}$	$(i)^{\bullet}_{s,2}$	$(i)^{\bullet}_{s,3}$	$(i)^{\bullet}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.063 m/s	–0.040 m/s	–0.044 m/s	–0.034 m/s
$\dot{a}_{s,II}$	–1.883 m/s	–0.645 m/s	–0.767 m/s	–0.482 m/s

Tabelle 28-61: Halbachsenkorrektur pro Zeitkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkrement

Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für den Tangentialschub über eine erwartete Lebensdauer von 2 Jahren enthält folgende Tabelle:

ΔV_t	$(i)^{\bullet}_{s,1}$	$(i)^{\bullet}_{s,2}$	$(i)^{\bullet}_{s,3}$	$(i)^{\bullet}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.368 m/s/2a	–0.365 m/s/2a	–0.369 m/s/2a	–0.371 m/s/2a
$\dot{a}_{s,II}$	–4.245 m/s/2a	–4.245 m/s/2a	–4.245 m/s/2a	–4.242 m/s/2a

Tabelle 28-62: Geschwindigkeitsinkrement zur Halbachsenkorrektur in 2 Jahren

Für den sind folgende Werte zu erwarten:

ΔV_C	$(i)^{\bullet}_{s,1}$	$(i)^{\bullet}_{s,2}$	$(i)^{\bullet}_{s,3}$	$(i)^{\bullet}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.335 m/s	–0.488 m/s	–0.453 m/s	–0.567 m/s
$\dot{a}_{s,II}$	–0.870 m/s	–0.677 m/s	–0.688 m/s	–0.702 m/s

Tabelle 28-63 : Inklinationskorrektur pro Zeitkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkremente

Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für den Normalschub über eine Lebensdauer von 2 Jahren enthält folgende Tabelle:

ΔV_C	$(i)^{\bullet}_{s,1}$	$(i)^{\bullet}_{s,2}$	$(i)^{\bullet}_{s,3}$	$(i)^{\bullet}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	–1.958 m/s/2a	–4.456 m/s/2a	–3.804 m/s/2a	–6.182 m/s/2a
$\dot{a}_{s,II}$	–1.961 m/s/2a	–4.455 m/s/2a	–3.807 m/s/2a	–6.178 m/s/2a

Tabelle 28-64: Geschwindigkeitsinkrement zur Inklinationskorrektur in 2 Jahren

Die vorstehenden Tabellen zeigen, dass die Inklinationskorrektur mehr Schub bedarf als die Halbachsenkorrektur. Der zu erwartende Gesamtschub beträgt

im günstigsten Fall über 2 Jahre $|\Delta V| \approx 2.6\,\mathrm{m}/s/2a$

im ungünstigsten Fall $|\Delta V| \approx 10.4\,\mathrm{m}/s/2a$

Bild 28-131 zeigt die Korrekturzyklen für die in diesem Beispiel behandelten Störeinflüsse. Die Kurven zeigen keinen signifikanten Unterschied für unterschiedlichen Strahlungsfluss, wie es in der vergleichbaren Kurve für den Zyklus zur Spurstabilität in Bild 23-56 beobachtet werden konnte[1]. Allerdings zeigt die Kurve für $\dot{a}_{s,II}$ und $(i)^{\bullet}_{s,1}$ ein gegenläufiges Verhalten gegenüber allen anderen Kurven, da in diesem Fall, wie Tabelle 28-59 zeigt, nur in diesem Fall $(\Delta\tau_\Omega)^{\bullet}_{S}$ positiv ist. Dieser Sonderfall muss bei der Planung von Zeitkorrekturzyklen beachtet werden. In diesem Bild sind die roten Kurven für maximale Luftdichte $(\dot{a}_{s,II})$, die blauen Kurven für minimale Luftdichte $(\dot{a}_{s,I})$ gerechnet. Jeweils von außen nach innen wurde die säkulare Variation der Inklination in der Reihenfolge $\left((i)^{\bullet}_{s,1},(i)^{\bullet}_{s,2},(i)^{\bullet}_{s,3},(i)^{\bullet}_{s,4}\right)$ berücksichtigt. ◄

[1] Abschnitt 23.13.5

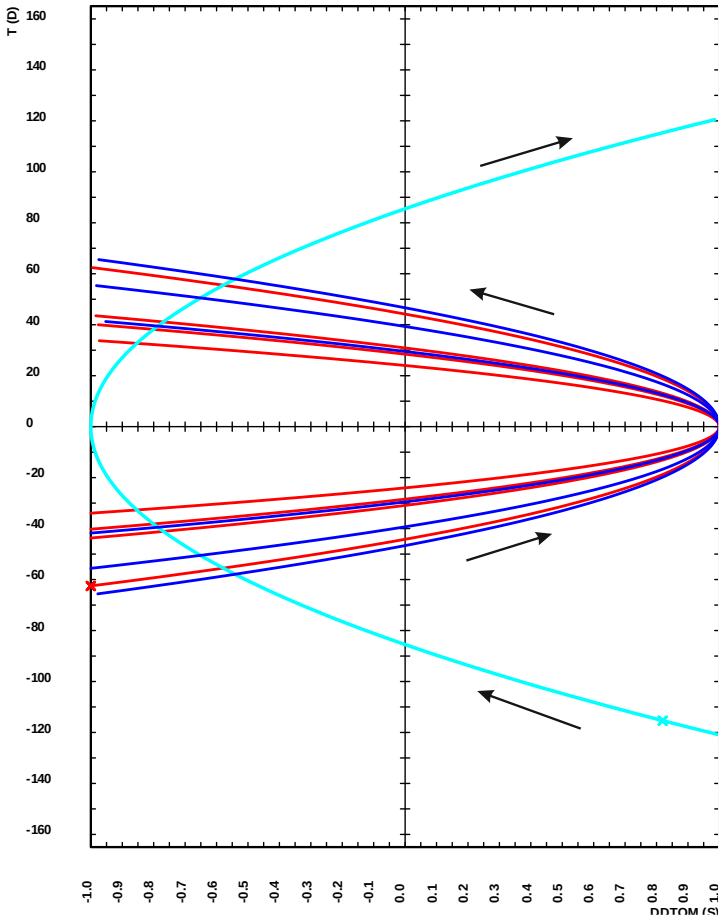


Bild 28-131: Korrekturzyklen zur Zeitstabilität für minimalen und maximalen Sonnenstrahlungsfluss und verschiedene Tages- und Jahreszeiten für die Bahn $\bar{a}_0$ = 7153 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.523

28.16 Das Bahnmodell von *Eckstein*

Alle in den sechs Bänden der Satellitenbewegung berechneten Ephemeriden, Zeichnungen, Tabellen wurden mit einem eigen entwickelten Bahnmodell berechnet. Sie beruhen auf den von *M. C. Eckstein* eingeführten regulären Elementen[1] und sind eine Variante der äquinoktialen die Elemente. Sie sind singularitätenfrei für kreisförmige Bahnen sowie für alle Bahnneigungen außer für retrograde äquatoriale Bahnen (i=180°). Sie sind nicht kanonisch.

Nach den Erstling Arbeiten von *D. Brouwer* und parallel dazu von *B. Garfinkel* und *Y. Kozai*[2] wurden von vielen Bahnmechanikern Bahnmodelle der zweiten Ordnung erarbeitet. Die weitestgehende Arbeit stammt wohl von *Y. Kozai*[3]. Diese Arbeit legte *M. C. Eckstein* seinem Bahnmodell zugrunde. *Kozai* hat die Ergebnisse, wie *Brouwer* es seinerzeit getan hatte, in *Kepler*elementen angeboten. Da diese Singularitäten aufweisen hat *Eckstein* sie in seine singularitätenfreien regulären Elemente transformiert. Um diese mühsamen und aufwendigen Transformationen durchführen zu können, hat

[1] ECKSTEIN, M. C. [1972]; ECKSTEIN, M. C. [1973/1974]

[2] BROUWER, D. [1959]; GARFINKEL, B. [1959]; KOZAI, Y. [1959]

[3] KOZAI, Y. [1962]

Eckstein den im ESOC(benutzten mathematischen Formelmanipulator FORMAC verwendet[1]. Die Ergebnisse wurden zunächst in ALGOL Programmen, dann in FORTRAN Programmen zur Verfügung gestellt. Sie werden seither in den DLR Bahnanalyse Programmen als zentrales Bahnmodell verwendet.

28.16.1 Definition der regulären Elemente

In Bezug auf die *Kepler*schen Elemente sind die regulären Elemente E_i durch die folgenden Beziehungen definiert[2]:

$$\begin{aligned} &E_1\left(:= a^*\right) := \frac{a}{R_E} \quad , \quad E_6\,(:= L_0) := M_0 + \omega + \Omega \\ &E_2\,(:= h) := e\sin\left(\omega+\Omega\right) \quad , \quad E_3\,(:= l) := e\cos\left(\omega+\Omega\right) \\ &E_4\,(:= p) := \sin\frac{i}{2}\sin\Omega \quad , \quad E_5\,(:= q) := \sin\frac{i}{2}\cos\Omega \quad . \end{aligned} \tag{28.604}$$

Die mittlere Länge längs der Bahn wird als unabhängige Variable verwendet, weil sie, wie die mittlere Anomalie $M = M_0 + n\left(t - t_0\right)$, proportional zur Zeit ist. Sie kann daher einen direkten Bezug zur Zeit herstellen:

$$L := L_0 + n\left(t - t_0\right) = M + \omega + \Omega \quad . \tag{28.605}$$

$n = \sqrt{\mu / a^3}$ ist die mittlere Bewegung (auch bei oskulierender Halbmittelachse *a*). Mit dem retrograden Faktor $\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos i\right)$ nehmen die beiden regulären Elemente die universelle Form an[3]:

$$E_4 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sigma_i \cos i\right)}\,\sin\Omega \quad , \quad E_5 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sigma_i \cos i\right)}\,\cos\Omega \quad . \tag{28.606}$$

Bei retrograden Bahnen, d.h. (nur!) in dem Fall, dass $\sigma_i = -1$ gesetzt, muss das Argument der Breite jedoch "rückwärts" berechnet werden. In Bezug auf die wahre Länge muss *l* daher allgemein gesetzt werden:

$$u = \sigma_i\left(l - \Omega\right) = \upsilon + \omega \quad . \tag{28.607}$$

υ ist die wahre Anomalie. In allen Fällen bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\cos i = \sigma_i\left[1 - 2\left(E_4^2 + E_5^2\right)\right] \quad , \quad \sin i = 2\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sigma_i \cos i\right)}\,\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \sigma_i \cos i\right)} \quad . \tag{28.608}$$

Damit ergeben sich

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sigma_i \cos i\right) = 1 - E_4^2 - E_5^2 \quad , \quad \frac{1}{2}\left(1 - \sigma_i \cos i\right) = E_4^2 + E_5^2 \quad . \tag{28.609}$$

Aufgrund der Umdefinition (28.607) und damit

$$\upsilon = \sigma_i\, l - \left(\omega + \sigma_i\,\Omega\right) \tag{28.610}$$

müssen auch das zweite und das dritte reguläre Element neu definiert werden:

---

[1] TOBEY, R., BAKER,J., CREWS,R., MARKS,P., VICTOR,K. [1967]. *Eckstein* war möglicherweise einer der ersten Bahnmechaniker, der einen mathematischen Formelmanipulator für Bahnmechanik-Aufgaben verwendete

[2] Die Größen *h, l, p, q,* die auch von *Eckstein* in Übereinstimmung mit dem ursprünglichen *Lagrange*schen Vorschlag verwendet wurden, werden in diesem Bericht nicht verwendet, um unnötige Verwirrung zu vermeiden.

[3] Die Verwendung des retrograden Faktors in diesem Zusammenhang wurde erstmals vorgestellt Oct. 1, 1997, IAE-CTA (São dos Campos, SP Brazil) und modifiziert am 24. Juni, 2013.

$$E_2 = e\sin\left(\omega + \sigma_i \Omega\right) \quad , \quad E_3 = e\cos\left(\omega + \sigma_i \Omega\right) \quad . \tag{28.611}$$

Folglich muss das sechste reguläre Element eventuell ebenfalls neu definiert werden:

$$E_6 = \sigma_i \left(M_0 + \omega + \sigma_i \Omega\right) \quad . \tag{28.612}$$

28.16.2 Zur Anwendung von *Ecksteins* Theorie

Säkulare Variationen

Die Variationsgleichungen der regulären Elemente werden direkt aus den Definitionsgleichungen (28.604) hergeleitet. Sie werden auf die Variationsgleichungen $\dot{a}, \dot{e}, (i)^{\bullet}, \dot{\Omega}, \dot{\omega}, (M_0)_s^{\bullet}$ der *Kepler*elemente zurückgeführt. Diese sind etwa in Abschnitt 11.1 (Band III) als *Gauß*'sche Variationsgleichungen in Bezug auf ein *Leibniz*-System zusammengestellt. Sie können direkt in den Variationsgleichungen der regulären Elemente verwendet werden.

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{a}}{R_E} \quad . \tag{28.613}$$

Die Variationsgleichungen für das zweite und dritte reguläre Element lauten

$$\begin{aligned} \dot{E}_2 &= \dot{e}\sin\left(\omega + \sigma_i \Omega\right) + e\left(\dot{\omega} + \sigma_i \dot{\Omega}\right)\cos\left(\omega + \sigma_i \Omega\right) \\ \dot{E}_3 &= \dot{e}\cos\left(\omega + \sigma_i \Omega\right) - e\left(\dot{\omega} + \sigma_i \dot{\Omega}\right)\sin\left(\omega + \sigma_i \Omega\right) \quad . \end{aligned} \tag{28.614}$$

Um die Allgemeingültigkeit der Formulierungen zu unterstreichen, werden die Variationsgleichungen der regulären Elemente E_4 und E_5 ausführlich untersucht. Es sei zunächst $\sigma_i = 1$ angenommen. Dann lauten die beiden Elemente

$$E_4^{(1)} = \sin\frac{i}{2}\sin\Omega \quad , \quad E_5^{(1)} = \sin\frac{i}{2}\cos\Omega \tag{28.615}$$

Die entsprechenden Variationsgleichungen unter Anwendung der Variationsgleichungen sind

$$\begin{aligned} \dot{E}_4^{(1)} &= \frac{1}{2}(i)^{\bullet}\cos\frac{i}{2}\sin\Omega + \dot{\Omega}\sin\frac{i}{2}\cos\Omega \\ \dot{E}_5^{(1)} &= \frac{1}{2}(i)^{\bullet}\cos\frac{i}{2}\cos\Omega - \dot{\Omega}\sin\frac{i}{2}\sin\Omega \quad . \end{aligned} \tag{28.616}$$

Im Fall $\sigma_i = -1$ lauten die beiden Elemente

$$E_4^{(2)} = \cos\frac{i}{2}\sin\Omega \quad , \quad E_5^{(2)} = \cos\frac{i}{2}\cos\Omega \tag{28.617}$$

Die entsprechenden Variationsgleichungen lauten unter Verwendung der hier wesentlichen Beziehung $u = -\left(l - \Omega\right)$

$$\begin{aligned} \dot{E}_4^{(2)} &= -\frac{1}{2}(i)^{\bullet}\sin\frac{i}{2}\sin\Omega + \dot{\Omega}\cos\frac{i}{2}\cos\Omega \\ \dot{E}_5^{(2)} &= -\frac{1}{2}(i)^{\bullet}\sin\frac{i}{2}\cos\Omega - \dot{\Omega}\cos\frac{i}{2}\sin\Omega \quad . \end{aligned} \tag{28.618}$$

Zur Herleitung der Variation des sechsten der regulären Elemente

$$\dot{E}_6 = \sigma_i\left[\dot{M}_0 + \left(\dot{\omega} + \sigma_i \dot{\Omega}\right)\right] \quad . \tag{28.619}$$

Eine vollständige Darstellung der *Gauß*'schen Variationsgleichungen der regulären Elemente findet sich in Abschnitt 11.4.5.

Wie in der analytischen Bahnmechanik üblich wird die Integration der Variationsgleichungen gewöhnlich nicht über der Zeit, sondern über einen Bahnwinkel erfolgen, im Fall der regulären Elemente über der wahren Länge *l*. Im Fall der (modifizierten, d.h. auch im Fall retrograder Äquatorbahnen anwendbaren) regulären Elemente hat die wahre Länge nach Formel (28.607) die Darstellung

$$l = \sigma_i u + \Omega = \sigma_i \left[\upsilon + \left(\omega + \sigma_i \Omega \right) \right] . \tag{28.620}$$

Die analytischen säkularen Störungen im Fall der Bewegungseinflüsse durch J_2 und J_4 sind in Abschnitt 20.2.1 nach *D. Brouwer* [1]zusammengestellt.

Die mittleren *Kepler*schen Elemente sind zum Zeitpunkt *t* bei Bezug auf die Epoche t_0 bekannt

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \bar{a}_0 + \dot{a}_s \, (t - t_0) + \ldots \\
\bar{e} &= \bar{e}_0 + \dot{e}_s \, (t - t_0) + \ldots \\
\bar{i} &= \bar{i}_0 + (i_s)^{\cdot} \, (t - t_0) + \ldots \\
\bar{\Omega} &= \bar{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_s \, (t - t_0) + \ldots \\
\bar{\omega} &= \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s \, (t - t_0) + \ldots \\
\overline{M_0} &= \overline{M_{00}} + \dot{M}_{0s} \, (t - t_0) + \ldots
\end{aligned} \tag{28.621}$$

Die mittleren regulären Elemente werden entsprechend den Definitionsgleichungen (28.604) erhalten aus

$$\begin{aligned}
&\overline{E_1} = \frac{\bar{a}}{R_E} \\
&\overline{E_2} = \bar{e} \sin\left(\bar{\omega} + \sigma_i \bar{\Omega} \right) \quad , \quad \overline{E_3} = \bar{e} \cos\left(\bar{\omega} + \sigma_i \bar{\Omega} \right) \\
&\overline{E_4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sigma_i \cos \bar{i}\right)} \sin \bar{\Omega} \quad , \quad \overline{E_5} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sigma_i \cos \bar{i}\right)} \cos \bar{\Omega} \\
&\overline{E_6} = \sigma_i \left(\overline{M_0} + \bar{\omega} + \sigma_i \bar{\Omega} \right) \quad .
\end{aligned} \tag{28.622}$$

Langperiodische Störgleichungen:

Die Transformationen von den langperiodischen Störtermen in den *Kepler*elementen in reguläre Elemente werden vollzogen mit den Formeln bei Bezug auf das Erdgravitationsfeld [2]

[1] BROUWER, D. [1959]

[2] Diese langperiodischen Störungen infolge der Bewegungseinflüsse durch das Gravitationsfeld der Erde (Faktoren J_2, J_3, J_4, J_5) sind in Abschnitt 20.2.2 (Band III) zusammengestellt

$$
\begin{aligned}
\delta E_{1lG} &= \frac{\delta a_{1G}}{R_E}(=0) \\
\delta E_{2lG} &= (\delta h) = \delta e_{lG}\frac{\overline{E_2}}{\overline{e}} + (\delta\Omega_{lG} + \delta\omega_{lG})\overline{E_3} \\
\delta E_{3lG} &= (\delta l) = \delta e_{lG}\frac{\overline{E_3}}{\overline{e}} - (\delta\Omega_{lG} + \delta\omega_{lG})\overline{E_2} \\
\delta E_{4lG} &= (\delta p) = \frac{1}{2}\cot\frac{\overline{i}}{2}\delta i_{lG}\,\overline{E_4} + \delta\Omega_{lG}\,\overline{E_5} \\
\delta E_{5lG} &= (\delta q) = \frac{1}{2}\cot\frac{\overline{i}}{2}\delta i_{lG}\,\overline{E_5} - \delta\Omega_{lG}\,\overline{E_4} \\
\delta E_{6lG} &= (\delta\lambda_0) = \delta M_{0lG} + \delta\Omega_{lG} + \delta\omega_{lG}
\end{aligned}
\tag{28.623}
$$

Die Parameter LP der langperiodischen Störungen, die mit dem Formelmanipulator FORMAC berechnet werden, sind eine Funktion des mittleren Erdradius R_E, der geozentrischen Gravitationskonstante $\mu = \mu_{\overset{+}{\circ}}$ und der zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4, J_5. Unter Anwendung der mittleren regulären Elemente erhält man die Parameter LP(t) zum Zeitpunkt t. Es gibt 11 solcher Parameter LP(t). Kombiniert man die mittleren regulären Elemente $\overline{E_j}$ mit den LP(t), ergeben sich die langperiodischen regulären Elemente $E_{j,LP}$.

Diese Elemente entsprechen den *Brouwer*schen einmal gestrichenen Elementen: sie enthalten die mittleren Elemente und die langperiodischen Störungen: $E_j' \triangleq E_{j,LP} = \overline{E_j} + \delta E_{j,l} \quad (j = 1, \cdots, 6)$.

Kurzperiodische Variationen:

Die Formeln zur Umrechnung der kurzperiodischen Störungen von *Kepler*elementen in reguläre Elemente lauten:

$$
\begin{aligned}
\delta E_{1kG} &= \frac{\delta a_{kG}}{R_E} \\
\delta E_{2kG} &= \delta e_{kG}\frac{E_{2,LP}}{\overline{e}} + (\delta\Omega_{kG} + \delta\omega_{kG})E_{3,LP} \\
\delta E_{3kG} &= \delta e_{kG}\frac{E_{3,LP}}{\overline{e}} - (\delta\Omega_{kG} + \delta\omega_{kG})E_{2,LP} \\
\delta E_{4kG} &= \frac{1}{2}\cot\frac{\overline{i}}{2}\delta i_{kG}\,E_{4,LP} + \delta\Omega_{kG}\,E_{5,LP} \\
\delta E_{5kG} &= \frac{1}{2}\cot\frac{\overline{i}}{2}\delta i_{kG}\,E_{5,LP} - \delta\Omega_{kG}\,E_{4,LP} \\
\delta E_{6kG} &= \delta M_{0kG} + \delta\Omega_{kG} + \delta\omega_{kG}
\end{aligned}
\tag{28.624}
$$

Für die Umrechnung der von *Kozai* in *Kepler*elementen gegebenen kurzperiodischen Variationsgleichungen in die entsprechenden regulären Elemente seien die *Kepler*elemente einheitlich dargestellt durch die Parameter A_j:

$$A_1 := a,\ A_2 := e,\ A_3 := i,\ A_4 := \Omega,\ A_5 := \omega,\ A_6 := M_0 \quad . \tag{28.625}$$

Die $\delta A_j \ (j=1,6)$ nach *Kozai* [1962] entsprechen den von *Brouwer* [1959] gefundenen Formeln[1]. Diese Ausdrücke können alle in der Form einer endlichen Summe geschrieben werden[2]:

$$\delta A_j = \sum_n \left[K_{jn}(a,e,\sin i) \times T_n(\upsilon,\omega,\Omega) \right] + K_{j6}(a,e,\sin i) \times (\upsilon - M) \ \langle j=1,2,\cdots,5 \quad (28.626)$$

Hier sind die K_{jn} algebraische und die T_n trigonometrische Funktionen. Nach Transformation in die regulären Elemente folgen die Störungen (bezogen auf die *Kepler* Bewegung) in den regulären Elementen

$$\begin{aligned} \delta E_j = \sum_{n=0}^{5} \Big[& S_{jn}(a,e,\sin i,E_2,E_3,E_4,E_5) \cdot (\sin l)^n + \\ & + C_{jn}(a,e,\sin i,E_2,E_3,E_4,E_5) \cdot \cos l (\sin l)^n \Big] + \\ & + C_{j6}(a,e,\sin i,E_2,E_3,E_4,E_5) \cdot (l-L) \qquad \langle j=1,2,\cdots,6 \quad . \end{aligned} \quad (28.627)$$

Um diese Ausdrücke ganz in regulären Elementen zu erhalten, wird

$$a = E_1 R_E, \ e = \sqrt{E_2^2 + E_3^2}, \ \sin i = 2\sqrt{E_4^2 + E_5^2}\sqrt{1 - E_4^2 - E_5^2} \quad . \quad (28.628)$$

gesetzt. Die Parameter S_{jn}, C_{jn} werden mit der Prozedur FORMAC die Größen SP (1-6,1-13) zur Verfügung gestellt. Das Ergebnis sind oskulierende reguläre Elemente

$$E_j = \overline{E_j} + \delta E_{jl} + \delta E_{jk} \quad . \quad (28.629)$$

Diese benötigten Operationen werden im Rechner in vier Unterprogrammen durchgeführt. Der Vorgang wird durch folgende Übersicht beschrieben:

$$\begin{aligned} & t \ \Rightarrow \overline{E_j}(t) \\ & \overline{E_j}(t) \cap LP \qquad \Rightarrow LP(t) \qquad \langle j=1,6 \\ & \overline{E_j}(t) \cap LP(t) \qquad \Rightarrow E_{j,LP}(t) \\ & E_{j,LP}(t) \cap SP \qquad \Rightarrow SP(t) \\ & E_{j,LP}(t), L, l \cap SP(t) \Rightarrow E_j(t) \end{aligned} \quad (28.630)$$

28.16.3 Der Zustandsvektor aus den regulären Elementen

Gegeben seien die oskulierenden regulären Elemente $E_i \ (i=1,...,5)$ und die mittlere Epoche-Länge $E_6 = L_0 = L(t_0)$ zur Epoche t_0. Zu einem Zeitpunkt *t* soll der Zustandsvektor berechnet werden. Die Exzentrizität der Umlaufbahn ist eindeutig bekannt aus

$$e = \sqrt{E_2^2 + E_3^2} \quad . \quad (28.631)$$

Der Kegelschnittparameter und der Flächenparameter lauten

---

[1] Diese kurzperiodischen Störungen infolge der Bewegungseinflüsse durch das Gravitationsfeld der Erde (Faktor J_2) sind in Abschnitt 20.2.3 (Band III) zusammengestellt

[2] ECKSTEIN, M. C. (1973), p. 23, Formel (30)

$$p = E_1 R_E \left(1 - E_2^2 - E_3^2\right) \quad , \quad G = \sqrt{\mu E_1 R_E \left(1 - E_2^2 - E_3^2\right)} \quad . \tag{28.632}$$

Die weitere Berechnung soll auf den elliptischen Fall beschränkt werden. Dann beträgt die mittlere Länge zum Zeitpunkt t

$$L = E_6 + \sqrt{\frac{\mu R_E^3}{E_1^3}} \left(t - t_0\right) \quad . \tag{28.633}$$

Damit kann die exzentrische Länge l_E mit Hilfe der modifizierten *Kepler*-Gleichung berechnet werden

$$L = \sigma_i \, l_E - \sigma_i \, E_3 \sin l_E + E_2 \cos l_E \quad . \tag{28.634}$$

The eccentric anomaly $E = \sigma_i \, l_E - \left(\omega + \sigma_i \, \Omega\right)$ follows with the definitions (28.611) from

$$\begin{aligned} e \sin E &= \sigma_i \, E_3 \, \sin l_E - E_2 \cos l_E \\ e \cos E &= E_3 \cos l_E + \sigma_i \, E_2 \sin l_E \quad . \end{aligned} \tag{28.635}$$

Die wahre Anomalie $\upsilon = \sigma_i \, l - \left(\omega + \sigma_i \, \Omega\right)$ und umgekehrt die wahre Länge l folgt mit (28.610)

$$\begin{aligned} e \sin \upsilon &= \sigma_i \, E_3 \, \sin l - E_2 \cos l \quad , \quad e \sin l = \sigma_i \left[E_3 \, \sin \upsilon + E_2 \cos \upsilon\right] \\ e \cos \upsilon &= E_3 \cos l + \sigma_i \, E_2 \sin l \quad , \quad e \cos l = \quad E_3 \cos \upsilon - E_2 \sin \upsilon \quad . \end{aligned} \tag{28.636}$$

Um den Zustandsvektor zu berechnen, wird auch die wahre Anomalie υ benötigt. Sie kann mit den *Kepler*-Formeln berechnet werden aus

$$\begin{aligned} e \, \sin \upsilon &= \frac{\sqrt{1 - E_2^2 - E_3^2} \, \left(\sigma_i \, E_3 \, \sin l_E - E_2 \cos l_E\right)}{1 - \sigma_i \, E_2 \sin l_E - E_3 \cos l_E} \\ e \, \cos \upsilon &= \frac{E_3 \, \cos l_E + \sigma_i \, E_2 \sin l_E - E_2^2 - E_3^2}{1 - \sigma_i \, E_2 \sin l_E - E_3 \cos l_E} \quad . \end{aligned} \tag{28.637}$$

Auch im Rahmen der regulären Elemente muss die wahre Länge l als Variable für die Berechnung des Zustandsvektors verwendet werden. Mit den Beziehungen (28.636) folgt

$$\begin{aligned} \sin l &= \sigma_i \left[\sigma_i \sin l_E - E_2 - E_3 \, \frac{\sigma_i \, E_3 \sin l_E - E_2 \cos l_E}{1 + \sqrt{1 - E_2^2 - E_3^2}}\right] \frac{1}{1 - \sigma_i \, E_2 \sin l_E - E_3 \cos l_E} \\ \cos l &= \left[\cos l_E - E_3 + E_2 \, \frac{\sigma_i \, E_3 \sin l_E - E_2 \cos l_E}{1 + \sqrt{1 - E_2^2 - E_3^2}}\right] \frac{1}{1 - \sigma_i \, E_2 \sin l_E - E_3 \cos l_E} \quad \langle \; e < 1 \, . \end{aligned} \tag{28.638}$$

Als Funktionen der wahren Länge l können daher dargestellt werden:

der Radius

$$r = a\left(1 - e \cos E\right) \;=\; \frac{E_1 \, R_E \left(1 - E_2^2 - E_3^2\right)}{1 + \sigma_i \, E_2 \sin l + E_3 \cos l} \quad , \tag{28.639}$$

die radiale Geschwindigkeit

$$V_R \;=\; \dot{r} \;=\; \frac{\mu}{G} \, e \sin \upsilon \;=\; \frac{\mu}{G} \left(\sigma_i \, E_3 \sin l - E_2 \cos l\right) \tag{28.640}$$

sowie die transversale Geschwindigkeit

$$V_T \;=\; \frac{G}{r} \;=\; \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(1 + \sigma_i \, E_2 \sin l + E_3 \cos l\right) \quad . \tag{28.641}$$

Um den Zustandsvektor berechnen zu können

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{r}} = V_R\,\mathbf{r}_0 + V_T\,\mathbf{q}_0 \quad , \tag{28.642}$$

müssen noch der radiale $\mathbf{r}_0$ und der transversale Richtungsvektor $\mathbf{q}_0$ berechnet werden, d. h. ihre Komponenten r_{0i}, q_{0i} in

$$\mathbf{r}_0 = r_0^i\,\mathbf{p}_i \;,\; \mathbf{q}_0 = q_0^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{28.643}$$

Mit den Formeln (28.608) ist wieder bekannt

$$\cos i = \sigma_i\left[1 - 2\left(E_4^2 + E_5^2\right)\right] \quad , \quad \sin i = \sqrt{1-\cos^2 i} \quad . \tag{28.644}$$

Die Koeffizienten r_{0i}, q_{0i} können einheitlich berechnet werden:

$$\begin{aligned}
r_{01} &= 2\,E_4\,E_5 \sin l + \left(1 - 2\,E_4^2\right)\cos l \\
r_{02} &= 2\,E_4\,E_5 \cos l + \left(1 - 2\,E_5^2\right)\sin l \\
r_{03} &= 2\left(E_5 \sin l - E_4 \cos l\right)\sqrt{1 - E_4^2 - E_5^2} \\
q_{01} &= 2\,E_4\,E_5 \cos l - \left(1 - 2\,E_4^2\right)\sin l \\
q_{02} &= -2\,E_4\,E_5 \sin l + \left(1 - 2\,E_5^2\right)\cos l \\
q_{03} &= 2\left(E_5 \cos l + E_4 \sin l\right)\sqrt{1 - E_4^2 - E_5^2} \quad .
\end{aligned} \tag{28.645}$$

Als eine Anwendung kann der normale Richtungsvektor $\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0 = c_0^i\,\mathbf{p}_i$ berechnet werden mit den Koeffizienten

$$c_{01} = r_{02}\,q_{03} - r_{03}\,q_{02} \;,\; c_{02} = r_{03}\,q_{01} - r_{01}\,q_{03} \;,\; c_{03} = r_{01}\,q_{02} - r_{02}\,q_{01} \quad . \tag{28.646}$$

Anmerkung: In ECKSTEIN, M. C. , SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1964/1966a] und ECKSTEIN, M. C. [1973] finden sich Hinweise auf die analytische Berechnung in der Nähe der kritischen Neigung, ferner auf die Berücksichtigung des säkularen Einflusses des Luftwiderstands. Sie werden im vorliegenden Buch nicht berücksichtigt.

29 Satelliten-Bewegung bezogen auf Mond und Mond-Orbiter

Der Mond bildet mit der Erde ein Doppelplanetensystem, das in seiner Relation einzigartig im Sonnensystem ist. Der Mond befindet sich stets außerhalb der Attraktionssphäre[1] der Erde aber noch innerhalb der Aktivitätssphäre. Seine Bewegung ist daher zwar an die Erde gebunden, aber es dominiert der Einfluss der Sonne. Man kann die Bewegung des Mondes als eine Bewegung um die Erde mathematisch beschreiben, während die Bewegung physikalisch jedoch primär um die Sonne verläuft. Dies zeigt sich daran, dass die Bewegung des Mondes stets konkav zur Sonne gerichtet ist. Eine zuverlässige Theorie der Bewegung des Mondes muss also stets die Sonne mit einbeziehen. Dies war erstmals *Ptolemäus* gelungen. Moderne Theorien sind eine Erweiterung der Theorie des *Ptolemäus*, bedingt durch verbesserte Beobachtungen und die Fortentwicklung der Himmelsmechanik.

Die Bewegung des Mondes als des prominentesten Körpers, der wesentlich als Erdsatellit aufgefasst werden kann, wurde modellhaft für die Theorien der Bewegung der Erdsatelliten. Viele Begriffe der Theorie der Satellitenbewegung sind aus der Theorie der Mondbewegung abgeleitet.

Im Rahmen der Satellitenbewegung ist die Mondbewegung von Bedeutung, zum Beispiel

- wenn für präzise Untersuchungen der Satellitenbewegung die Attraktion des Mondes berücksichtigt werden muss[2],
- wenn der Mond von einem Erdsatelliten aus beobachtet werden soll, zum Beispiel zur Lagebestimmung mit Hilfe eines Mondsensors oder zur Kalibration eines Sensors an Bord des Satelliten,
- wenn mit Hilfe von Sendern auf der Mondoberfläche Antennen auf der Erdoberfläche geeicht werden sollen[3].

29.1 Die scheinbare Bewegung des Mondes um die Erde

Neben der heliozentrischen Ephemeride des Mondes wird auch die geozentrische Ephemeride durch Integration mit der größtmöglichen Genauigkeit erhalten und in den JPL Ephemeriden und im astronomischen Jahrbuch zur Verfügung gestellt. Für nicht so genaue Anforderungen können die in der Antike begonnenen Reihenentwicklungen zur Berechnung des geozentrischen Mondortes bis zu einem bestimmten Genauigkeitsgrad benutzt werden. Mit diesen Entwicklungen sind auch analytische Untersuchungen etwa im Zusammenhang mit Satellitenbewegungen in durchsichtiger Weise durchführbar.

29.1.1 Die Entwicklung der Mondtheorie

Die Bewegung des Mondes[4] spielt seit alters her, da er die dritte unabhängige Zeiteinheit liefert neben dem täglichen Umlauf des Sternhimmels und dem jährlichen Umlauf der scheinbaren

---

[1] Abschnitt 12.6, *Auswahl von Einflussbereichen* (Band III)

[2] Siehe zum Beispiel MUSEN, P., A. BAILIE AND E. UPTON [1961]

[3] Siehe zum Beispiel JOCHIM, E. F.; SLIWINSKI, P. [1976]

[4] In diesem Abschnitt wird die Entwicklung der Mondtheorie nur überblickmäßig zusammengestellt. Die entsprechenden Details finden sich in Band I in den Abschnitten, die den einzelnen Forschern gewidmet sind

Sonne, eine zentrale Rolle im täglichen irdischen Leben. Dabei gab es auf Grund der täglichen irdischen Beobachtung keine Zweifel, dass sich der Mond um die Erde bewege. Systematische Beobachtungen über längere Zeiträume insbesondere bezogen auf die Finsternisse führten nicht nur bei den Babyloniern[1] auf eine Kenntnis der unterschiedlichen Monatslängen. Dies trifft insbesondere für den synodischen Monat zu, also der Bezug auf die Syzygien (d.h. von Neumond zu Neumond, bzw. Vollmond zu Vollmond) und den drakonitischen Monat, der die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Mondes durch den Schnittpunkt seiner Bahn mit der Ekliptik, d.h. der (scheinbaren) Sonnenbahn, umfasst, welche Bedingung für Sonnen- und Mondfinsternisse waren.

Die in der Antike, vor allem in Mesopotamien und bei den Griechen entwickelte Mondtheorie wurde modellhaft auch auf die Untersuchung der Planetenbewegung übertragen[2].

Die von den Babyloniern und anderen Völkern durch langfristige Beobachtungen erhaltenen numerischen Werte der Monatslängen wurden durch spätere Beobachtungen nur in geringem Maße verbessert. Sie lieferten aber keine Aussage über die Mondbewegung an sich. Die geometrisch-kinematische Hinterfragung der Mondbewegung gelang erst den Griechen. *Hipparchos* wandte das Epizykelmodell des *Apollonius von Perge* auf die Mondbewegung an und entdeckte eine erhebliche Abweichung von der zunächst vermuteten Kreisbewegung[3]. Diese Abweichung wurde die „erste Ungleichheit“ bzw. auch „große Ungleichheit“ genannt. Diese anomale Bewegung kann heute durch die Mittelpunktsgleichung beschrieben werden. *Hipparch* hatte auch eine überlagerte Abweichung von dieser Ungleichheit beobachtet, die er aber nicht deuten konnte. Dies war *Ptolemäus* gelungen, der einen bemerkenswerten Fortschritt in die Bearbeitung himmelsmechanischer Aufgabenstellungen brachte[4]. Der Fortschritt wird nämlich nicht nur durch verbesserte Mess- und Beobachtungstechniken gebracht, sondern auch durch neuartige unkonventionelle Auswertungsmethoden. Im Fall der Mondbewegung, die bislang auf Beobachtungen in den Syzygien beruhte, verglich *Ptolemäus* jetzt auch die Mondbewegung in den Quadraturen, also bei Viertel- bzw. Dreiviertelmond (dem Mondalter 90° bzw. 270°) und verglich die Beobachtungsergebnisse in den Quadranten der ungleichförmigen Mondbewegung. Dadurch konnte er die erste und die zweite Ungleichheit numerisch trennen, was dann auch den Beobachtungen genügte. Statt der zweiten Ungleichheit hatte *Ptolemäus* damit die von der Sonnenbewegung abhängige Evektion entdeckt. Die Zahlenwerte für den ersten Term der Mittelpunktsgleichung und der Evektion sind bis heute nur unwesentlich verbessert worden.

Kopernikus hatte Band IV der *de revolutionibus* der Mondtheorie gewidmet[5]. Im Gegensatz zur Planetentheorie hatte er keine Zweifel an der alten Vorstellung, dass sich der Mond geozentrisch bewege. Allerdings kritisierte er die Evektionstheorie des *Ptolemäus*, da sie die Mondentfernung falsch wiedergebe. Nach dieser Theorie müsste der Mond seinen scheinbaren Durchmesser während eines anomalistischen Umlaufs etwa im Verhältnis 1:2 verändern. Dies aber widerspreche den Beobachtungen. Da nach der Formulierung des *Ptolemäus* jedoch die wahre ekliptikale Länge des Mondes richtig wiedergegeben wird, kann geschlossen werden, dass diese Theorie als eine rein mathematische Rechenvorschrift ohne physikalischen Bezug akzeptiert

---

[1] Siehe mehr dazu in Abschnitt 1.8.1 (Band I)

[2] OTTO NEUGEBAUER [1975], p. 86

[3] Abschnitt 1.6.6 (Band I)

[4] In Abschnitt 1.7.1 (Band I), dort auch: nach Formel (1.85) muss es richtig lauten: $\left|\Delta l\left[D_{☾} = 0° \text{ oder } 180°, M_{A,☾} = 90° \text{ oder } 270°\right]\right| = 5°$, $\left|\Delta l\left[D_{☾} = 90° \text{ oder } 270°, M_{A,☾} = 90° \text{ oder } 270°\right]\right| = 7°40'$

[5] Abschnitt 1.9.2.3 (Band I)

werden muss. *Kopernikus* hatte in der Mondtheorie des *Ibn ash – Shātir* ein Modell gefunden, das bessere Werte für die Mond-Parallaxe lieferte[1]. Er hatte dieses Modell unverändert in seine Mondtheorie übernommen.
Das bekannteste Beispiel aus der Geschichte der Himmelsmechanik für eine geschickte Auswahl von Beobachtungspunkten lieferte *Johannes Kepler* bei der Auswertung der Mars Beobachtungen von *Tycho Brahe*. *Kepler* konnte an die Beobachtungen der Sonne durch *Tycho Brahe* anknüpfen, der die Sonne auch in den Oktanten beobachtet hatte, nicht nur in den Apsiden (bei der Sonne die Solstitien) und den Quadranten[2]. So hatte auch *Kepler* die Beobachtungen der Marsbewegung in den Oktanten für seine Berechnungen herangezogen, also für Bahnpunkte mit den Anomalien 45°, 135° usw.. Dies führte letztendlich zur Entdeckung der elliptischen Planetenbewegung[3]. Die Beobachtung der Mondbewegung war allerdings wegen der zunehmenden Entdeckung anomaler Bewegungsanteile von Anfang an ungeeignet die Elliptizität der Planetenbewegung zu erkennen. Die Entwicklung einer vertieften Erkenntnis der Mondbewegung hatte *Tycho Brahe* selber durch seine verfeinerte Beobachtungstechnik vorangetrieben, indem er als nächste kleinere Anomalien der Mondbewegung die vom Alter der Mondbewegung abhängige *Variation* und die von der Sonnenbewegung abhängige *jährliche Gleichung* entdeckte[4]. Da die scheinbare Mondbahn etwas (um 5°) gegen die Ekliptik geneigt ist, muss zur Berechnung der ekliptikalen Länge auch die *Reduktion auf die Ekliptik* berücksichtigt werden.

Newtons wesentlicher Beitrag zur Mondtheorie war physikalischer Natur: Er schreibt in Buch I der Principia[5]: „*Die Kraft, die den Mond in seiner Umlaufbahn hält, ist genau die Kraft, die wir gewöhnlich Schwerkraft nennen. ...*“. Damit war *Newton* zu einer „geometrisch-dynamischen“ Betrachtung der Mondbewegung gekommen, kam aber selber nicht zu einer befriedigenden Untersuchung des Mondproblems, auch wenn er sechs Anomalien gefunden hat[6]. *Newton* hatte einsehen müssen, dass mit seinem Gravitationsgesetz allein die komplizierte Mondbewegung nicht begründet werden kann. Damit war der erste Schritt zu einer Art Störungsrechnung angedeutet[7]. Als erster war *Clairaut* über *Newton* mit seinem praxisorientierten Werk „Théorie de la Lune“ hinaus gegangen. Parallel dazu hatte sich *Jean le Rond d'Alembert* in seiner „Théorie de la Lune“ auf mehr analytisch-mathematische Weise mit dem Mondproblem beschäftigt, indem er die Arbeiten hin zu einem (hier noch eingeschränkten) Dreikörperproblem Sonne-Erde-Mond voranbrachte. *L. Euler* hatte neben seinen allgemeinen grundlegenden Arbeiten zur Begründung der Störungstheorie insbesondere auch die Mondtheorie weiter entwickelt. Er sah keinen Grund, die im allgemeinen *Newton*schen Ansatz des zweiten Axioms geforderte Variation der Masse eines Himmelskörpers bei der Wirkung einer Kraft anzunehmen: $d(mV)/dt$. Im Anschluss daran wurden stets bei Berechnungen der Bewegung der Planeten und auch des Mondes (in guter Näherung) die Masse des betreffenden Körpers als

[1] Innerhalb Abschnitt 1.8.5.2

[2] Siehe im Abschnitt *Sonnen- und Mondbewegung bei Tycho Brahe* in Abschnitt 1.10.1 (Band I)

[3] ausführliche Herleitung in Abschnitt 2.2.2 (Band I)

[4] siehe insbesondere die Entwicklung (1.259) in Abschnitt 1.10.1 (Band I); siehe weiterhin in K. STUMPFF [1959], Abschnitte 4. – 7. , insbesondere p. 38

[5] zitiert aus FAUVEL, J. et al. [1993], p78

[6] COOK, A. [1988], p.63

[7] Siehe dazu Abschnitt 2.5.3 (Band I)

konstant angenommen. Dies ist jedoch im Zeitalter der Raumfahrt nicht mehr möglich: ohne Variation der Masse keine Raumfahrt[1].

Der Beitrag von *J. L. Lagrange* zur Mondtheorie bestand vor allem in Überlegungen zur Asphärizität des Mondes, d.h. seiner Triaxialität, wobei die Hauptachse stets zur Erde gerichtet sei: die Folge ist die gebundene Rotation[2]. Diese Arbeit war von *P. A. Hansen* in seiner Arbeit „*Sur la figure de la Lune*" weitergeführt worden[3]. Die Theorie der Mondbewegung war u.a. von *Tobias Mayer* (1723-1762), Professor in Göttingen, vorangetrieben worden. Er hatte Mondtafeln erstellt, die zur Längenbestimmung auf See geeignet waren, also von wertvoller praktischer Bedeutung waren. Zusammen mit *Euler* hat *Mayer* den vom englischen Parlament ausgesetzten Preis für eine Verbesserung der Navigationsmethoden erhalten[4]. Die weitere Entwicklung der Mondtheorie fand in den Beiträgen von *Ch. Delaunay* und *P. A. Hansen* einen bedeutsamen Höhepunkt. Während die von *Delaunay* entwickelte Mondtheorie als die theoretisch vollkommenste angesehen wird, gilt sie jedoch in der praktischen Anwendung der *Hansen*schen Methode (ab etwa 1838) als unterlegen. Die von *Hansen* geschaffenen Mondtafeln wurden erst 1923 durch die von *E. W. Brown* geschaffenen Mondtafeln abgelöst. *Brown* hatte die von *G. W. Hill* basierend auf den Theorien von *Delaunay, Gyldén, Poincaré* und *Hansen* erarbeiteten Mond- und Planetentheorien weiterentwickelt und damit die bis heute gültige Mondtheorie gefunden. Diese wird in neueren Arbeiten verbessert bzw. ergänzt, jedoch nicht prinzipiell erneuert[5]. Die aktuellen Mondtafeln sind unter dem Titel „Improved Lunar Ephemeris" (ILE) erhältlich[6]. Basierend auf der *Hansen*schen Mondtheorie hat *F. Hayn* (1902) eine Theorie der physikalischen Libration des Mondes entwickelt[7]. Später hat *K. Koziel* (1948) eine Librationstheorie basierend auf der Mondtheorie von *E. W. Brown* erarbeitet[8].

Vom theoretischen Standpunkt aus gibt es ausgehend von den schon in der Antike gefundenen Effekten auf die Mondbahn interessante Einblicke liefernde und vertiefende Untersuchungen zur Variation, der Evektion, der Apsidendrehung, über die parallaktische und die jährliche Gleichung und andere Terme der Mondbewegung[9], die in der vorliegenden Arbeit nicht weiter diskutiert werden sollen.

---

[1] Siehe etwa die Herleitung der Raketengleichung in Abschnitt 12.10.1 (Band III)

[2] Abschnitt 2.7.2 (Band I)

[3] P. A. HANSEN [1859], Mém. A. S. 24, zitiert aus R. WOLF [1890/1973], p. 504 (siehe auch in Abschnitt 2.7.7); MUSEN, P. [1963]; MUSEN, P. [1968 a]

[4] F. BECKER [1968], p. 95

[5] HANSEN, P.A. [1838/1]; HANSEN, P.A. [1838/2]; Cayley, A. [1857]; HILL, G. W. [1878]; HILL, G. W. [1818]; HILL, G. W. [1886]; BROWN, E. W. [1896/1960]; BROWN, E. W. [1897-1908]; BROWN, E. W. [1936]; MUSEN, P. [1969]; weitere Hinweise etwa in K. STUMPFF [1965], Abschnitt 173; KOPAL, Z. [1966], hier auch weitere bibliographische Hinweise, pp. 65-67

[6] ILE [1954]; GUTZWILLER, M. C. AND SCHMIDT D. S. [1986]; VAN FLANDERN, T. C. [1969]; GRIFFITH, J. S. [1971]; STOFFELS, K. P. [1985]

[7] HAYN, F. [1902]: 'Selenographische Koordinaten I', in: *Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften , math-phys. Klasse*, **27**, pp. 861-921

[8] KOZIEL, K. [1948], *Acta Astron.* **4**, pp.61-139; Hinweis bei KOPAL, Z. [1966] auf weitere Arbeiten von KOZIEL, K. [1949], [1949], [1957], [1962], [1964]; weitere bibliographische Hinweise in KOPAL, Z. [1966], pp. 65-67

[9] K. STUMPFF [1965], Kapitel XX; BUCERIUS, H. und M. SCHNEIDER [1968]; SCHNEIDER, M. [1993]; GACKSTÄTTER, F. [2000]

29.1.2 Die Gesetze von Cassini

Jean Dominique Cassini (1625-1712) war neben seiner wissenschaftlichen Tätigkeit als Professor in Bologna und später als Mitglied der Akademie der Pariser Sternwarte ein hervorragender Beobachter. Er entdeckte die nach ihm benannte Teilung des Ringsystems des Saturn und 4 der Saturnmonde. Er entdeckte die Rotation von Jupiter, Mars und Venus und er formulierte heuristische Regeln über die Rotation des Mondes, die als „Gesetze von *Cassini*" bekannt sind[1]:

(C1) *Der Mond rotiert rechtläufig gleichförmig um seine Rotationsachse mit der mittleren siderischen Bewegung seiner Bahn bei Bezug auf die Erde.*

(C2) *Der absteigende Knoten des Mondäquators bezüglich der Ekliptik stimmt mit dem aufsteigenden Knoten seiner Bahn bezogen auf die Ekliptik überein. Die Bewegung dieser Punkte erscheint rückläufig in Bezug auf die Richtung des Mondmittelpunktes zum Erdmittelpunkt als Folge der rechtläufigen Rotation des Mondes.*

In Ergänzung wurde im 20. Jahrhundert noch das dritte „Gesetz von Cassini" eingeführt:

(C3) *Die Neigung (I) des mittleren Mondäquators zur Ekliptik ist konstant. Sie beträgt*[2]

$$I = 1°32'32''.7 \quad . \tag{29.1}$$

Das erste dieser Gesetze beschreibt die schon im Altertum beobachtete gebundene Rotation des Mondes. Wichtig ist die zweite Beobachtung, die essentiell für die Beobachtung von Punkten auf der Mondoberfläche ist. Dies schließt auch das dritte Gesetz ein, wenn das selenographische Koordinatensystem der Mondoberfläche über die Ekliptik auf das irdische Äquatorsystem bezogen werden soll. *J. D. Cassini* selbst hatte ausgehend von seinen Gesetzen erste Folgerungen zu den physikalischen Librationen des Mondes erarbeitet[3].

29.1.3 Bahnelemente und physikalische Parameter des Mondes

Die zur Berechnung einer Mondephemeride und zur Beobachtung der Mondoberfläche benötigten Zahlenwerte soweit sie für ein Verständnis der Bewegung des Mondes in Bezug auf die Beobachtung von der Erde und für die Auslegung von Mondorbitern wesentlich erscheinen, werden in den folgenden Abschnitten zusammengestellt.

29.1.3.1 Physikalische Parameter des Mondes

Auf Grund der gebundenen Rotation (*Cassini* I) ist eine Achse des Mondes im Mittel ständig auf die Erde ausgerichtet. Dies ist die Achse um das kleinste Trägheitsmoment mit Radius $R_{☾a}$.

---

[1] CASSINI, J. C. [1721]: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences à Paris*, 108-126 ; CASSINI, J. D. [1730]: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences à Paris*, **8**, 1-50 ; zitiert nach D. H. Eckhardt [1981], p. 49 ; Anmerkung: *Jacques Cassini*, Direktor der Pariser Sternwarte, ist der Sohn des *Jean Dominique Cassini;* auch ein Enkel und ein Urenkel des Jean Dominique waren bekannte Astronomen*;* siehe auch in A. KRISCH [etwa 1901], p. 87, sowie in LEXIKON DER ASTRONOMIE, Band I [1989]

[2] SEIDELMANN, K. P. et. al. [1992], p. 700

[3] Siehe dazu in Abschnitt 29.5.2 auf Seite 341 und folgende

Die Achse in Richtung der Bahn sei $R_{☾b}$, die um das größte Trägheitsmoment um die Polarachse $R_{☾c}$. Die drei Achsen sind durch folgende Beziehungen verknüpft[1]:

$$
\begin{aligned}
&R_{☾a} = 1738.57\,\text{km}\ ,\quad R_{☾b} = 1738.21\,\text{km}\ ,\quad R_{☾c} = 1737.49\,\text{km}\ ,\\
&R_{☾} = \frac{R_{☾b} + R_{☾c}}{2} = 1738.39\,\text{km} \qquad\qquad (29.2)\\
&R_{☾a} - R_{☾c} = 1.08\,\text{km}\ ,\quad R_{☾a} - R_{☾b} = 0.36\,\text{km}\ ,\quad R_{☾b} - R_{☾c} = 0.72\,\text{km}\ .
\end{aligned}
$$

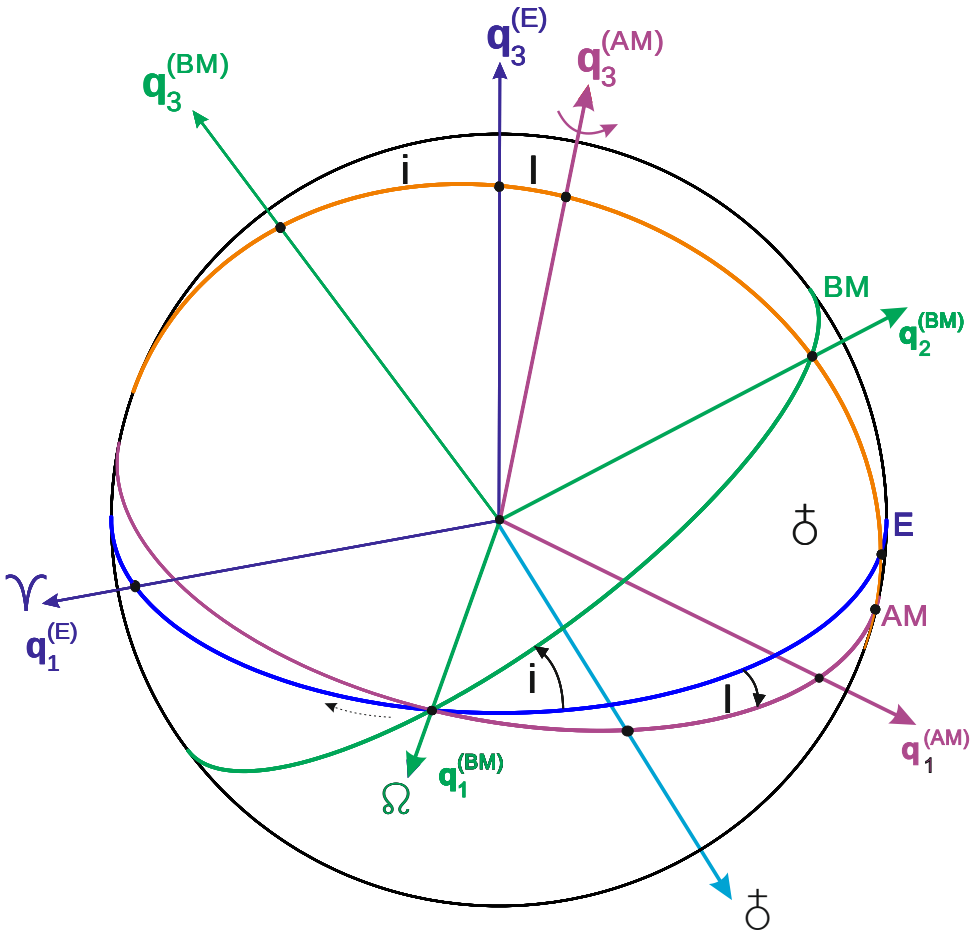


Bild 29-1: Orientierung der erdbezogenen Bahn des Mondes (BM) und des Mondäquators (AM) in Bezug auf die Ekliptik (E): Der mittlere aufsteigende Knoten der Mondbahn fällt stets mit dem mittleren absteigenden Knoten des Mondäquators zusammen. Die Orientierung des mittleren subterrestrischen Punktes ist angedeutet (♁). ebenso die scheinbare Bewegung des aufsteigenden Knotens ☊ der Mondbahn

Für die praktische Rechnung, insbesondere zur Berechnung der Beobachtung eines Punktes auf der Mondoberfläche kann die Triaxialität des Mondes vernachlässigt werden, wenn die a- und die b-Achse als nahezu gleich akzeptiert werden. Dann kann der Mondkörper (wie der Erdkörper) durch ein Rotationsellipsoid angenähert werden. Der geodynamische Formfaktor J_2 ist aus Beobachtungen des Schwerefeldes des Mondes bekannt. Die entsprechende Abplattung f kann mit den Formeln (17.15) berechnet werden[2]. Damit können die selenographischen

[1] Zahlenwerte aus SIRY, J. W. [1970]; kleinere Abweichungen bei WERTZ, JAMES R. [2001], Table E.4, p. 864; basierend auf ECKHARDT, DONALD H. [1981] und HEIKEN, GRANT H. ET AL. [1991]

[2] Vorsicht: ein noch zu klärender Widerspruch zur Berechnung der Abplattung nach Formel (37.19) (Band V) ist offen.

Koordinaten bestimmter Punkte auf der Mondoberfläche erhalten werden. Wird für nicht zu große Genauigkeitsanforderungen die Gestalt des Mondes durch eine Näherungskugel ersetzt, muss mit einem maximalen Positionsfehler von $0''.19$ für die Beobachtung eines bestimmten Ortes auf der Mondoberfläche gesehen von einer Beobachtungsstation auf der Erde aus gerechnet werden[1].

Die Parameter des Mondkörpers sind in Tabelle 29-1 zusammengestellt[2].

Mittlerer Radius[3]	$R_{☾} = 1737.4\,\text{km}$
Äquatorradius („Referenz Radius“)[4]	$R_M = 1738.0\,\text{km}$
Selenozentrische Gravitationskonstante	$\mu_{☾} = GM_{\text{Mond}} = 4902.800007\,\text{km}^3/\text{s}^2$
Gravitationsbeschleunigung an der Mondoberfläche	$g_e = 0.00162\,\text{km/s}^2$
Mittlere (siderische) Rotationsgeschwindigkeit	$n_{☾s} = \dot{\Theta} = 2.66169943\times10^{-6}\,1/s$
geodynamischer Formfaktor des Mondes	$J_2 = -C_{20} = 0.00020321568$
Abplattung	$f = 0.000308671 = 1/3239.69374219$
Newtonsche Gravitationskonstante	$f_N(=G) = 6.67428\times10^{-20}\,\text{km}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Masse des Mondes	$m_{☾}(=M_{\text{Mond}}) = GM_{\text{Mond}}/G =$ $m_{☾} = 7.34581108\times10^{22}\,\text{kg}$

Tabelle 29-1: Physikalische Parameter der Gestalt des Mondes

Anmerkung: In den aktuellen Listen der astronomischen Konstanten wird der Radius der Mondes mit einer Genauigkeit von $\pm 1\,\text{km}$ angegeben[5]. ◄

29.1.3.2 Mittlere Bahnelemente des Mondes auf seiner Bahn bezüglich der Erde

Die als konstant betrachteten Parameter der Bahnbewegung des Mondes sind in Tabelle 29-2 gelistet. Danach werden die mittleren d.h. säkular veränderlichen Bahnparameter und die

---

[1] JOCHIM, E. F. and SLIWINSKI, P. [1976], p. 104

[2] http://asa.usno.navy.mil/, die hier benötigten astronomischen Konstanten sind zusammengestellt in: IAU_1976.pdf; SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992]; WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2013]; siehe auch in Anhang E7 (Band V); *f* berechnet mit Formel (17.15) (Band III)

[3] IAU_1976.pdf

[4] Astronomical_Constants_2017.pdf; WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2008]

[5] Siehe etwa in: Astronomical_Constants_2017.pdf

zugehörigen mittleren Bewegungen dieser Parameter zusammengestellt[1]. Diese sind die Grundlage, um die ekliptikalen Polarkoordinaten der Mondephemeride berechnen zu können.

Die folgenden zeitabhängigen Parameter der mittleren Mondbewegung werden bei Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0 (gültig für dem 1. Januar 2000, 12^h TDB) in julianischen Jahrhunderten angegeben. Zur Berechnung der Zeit sei für den Moment der Beobachtung entweder das julianische Datum JD (TDB) oder die julianische Tagesnummer Jd und die Tageszeit $t[\text{sec}]$ vorgegeben[2]. Die hier benötigte Zeit T in julianischen Jahrhunderten [Jahrh.] wird erhalten aus

$$T = \frac{JD - 2451545.0}{36525}[\text{Jahrh.}] =: \frac{\Delta JD[d]}{36525\left[\frac{\text{d}}{\text{Jahrh.}}\right]} = \frac{Jd - 2451545.5 + \frac{t}{86400}[d]}{36525\left[\frac{\text{d}}{\text{Jahrh.}}\right]} \quad . \tag{29.3}$$

Parameter	Zahlenwert
Siderische mittlere Bewegung	$n_{☾s} = 2.661699489 \times 10^{-6}$ rad/s
Mittlere Entfernung Mondmittelpunkt zu Erdmittelpunkt	$\overline{r_☾} = 384400\ \text{km} \hat{=} 60.27\, R_E \quad (R_E = 6379.1366\,\text{km})$
Mittlere Entfernung Erdmittelpunkt zu Baryzentrum des Erde-Mond-Systems	$r_{B♁☾} = 4671.0\ \text{km}$
Mittlere Exzentrizität	$\overline{e_☾} = 0.05490$
Inklination der mittleren Mondbahnebene zu mittlerer Ekliptik	$\overline{i_☾} = 5°.145396$
Inklination der mittleren Mondbahnebene zu mittlerem Mondäquator	$\overline{i_☾} + I = 6°\,41'$
Inklination des mittleren Mondäquators zur mittleren Ekliptik	$I = 1°\,32'\,32''.7$
Mittlere Bahngeschwindigkeit	$\overline{V_☾} = 1.023\,\text{km/s}$

Tabelle 29-2: Als konstant betrachtete Basisparameter der Mondbewegung bezüglich der Erde

Die Mittlere geometrische Länge des Mondes (Winkel vom Frühlingspunkt zum aufsteigenden Knoten und längs der Bahn bis zum Ort des Mondes) hat bezogen auf J2000.0 den Zahlenwert:

$$\begin{aligned} L_☾ &= F_☾ + \Omega_☾ = L_{☾0} + \dot{L}_{☾s}\, T = L_{☾0} + n_{☾Ls}\, T = \\ &= 218°.3164325 + 481267°.8812772\, T\,[1/\text{Jahrh.}] - \\ &\quad - 1°.611667 \times 10^{-3}\, T^2 \left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + 5°.27778 \times 10^{-6}\, T^3 \left[1/\text{Jahrh.}^3\right] + \cdots \end{aligned} \tag{29.4}$$

[1] Die Zahlenwerte sind entnommen SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992]; AA2015 [2014], Section D. In Band V der Satellitenbewegung, Anhang E5, sind diese Parameter in verschiedenen Dimensionen zusammengestellt.

[2] vgl. Anhang F, Formel (F.2) (Band V)

Die säkulare Veränderung der mittleren Länge beträgt

$$\begin{aligned} n_{☾Ls} &= 481267°.8812772 - 1°.611667 \times 10^{-3}\, T\,[1/\text{Jahrh.}] + \\ &\quad + 5°.27778 \times 10^{-6}\, T^2 \left[1/\text{Jahrh.}^2\right] \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] \\ &= 13°.176396476 - 1°.2080799 \times 10^{-12} (\Delta JD)[1/\text{d}] + \\ &\quad + 1°.083101 \times 10^{-19} (\Delta JD)^2 \left[1/\text{d}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.5}$$

Die <u>mittlere mittlere Anomalie des Mondes</u>

$$\begin{aligned} M_☾ &= M_{☾0} + \dot{M}_{☾s}\, T = M_{☾0} + n_{☾a}\, T = \\ &= 134°.9629814 + 477198°.8674\, T\,[1/\text{Jahrh.}] + \\ &\quad + 0°.008697222\, T^2 \left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + 1°.78 \times 10^{-5}\, T^3 \left[1/\text{Jahrh.}^3\right] + \cdots \ . \end{aligned} \tag{29.6}$$

Sie ist auf das Perigäum des Mondes bezogen und definiert somit die anomalistische Bewegung des Mondes. Die mittlere anomalistische Bewegung des Mondes ist demnach nicht konstant, sondern unterliegt säkularen Änderungen

$$\begin{aligned} n_{☾a} &= 477198°.8674 + 0°.008697222\, T\,[1/\text{Jahrh.}] + \\ &\quad + 1°.78 \times 10^{-5}\, T^2 \left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] \\ &= 13°.064992947 + 6°.5192871 \times 10^{-12} (\Delta JD)[1/\text{d}] \\ &\quad + 3°.6529971 \times 10^{-19} (\Delta JD)^2 \left[1/\text{d}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.7}$$

Die mittlere Anomalie ist das Argument der Mittelpunktsgleichung[1]. Ihr erstes Glied in der Darstellung der ekliptikalen Länge der Mondbewegung war *Hipparch* bekannt, ihren Zahlenwert bestimmte *Ptolemäus*[2]. Die wahre ekliptikale Länge des Mondes beträgt bis zur zweiten Ordnung in der **Mittelpunktsgleichung**

$$l = L_☾ + 6°.288763889 \sin M_☾ + 12'.8 \sin 2M_☾ + \cdots \quad . \tag{29.8}$$

Die <u>mittlere geometrische Länge des Perigäums des Mondes</u>

$$\begin{aligned} \Gamma'_☾ &= \Gamma'_{☾0} + \dot{\Gamma}'_{☾s}\, T = \Gamma'_{☾0} + n_{☾\Gamma'}\, T = L_☾ - M_☾ = \\ &= 83°.3534511 + 4069°.013877\, T\,[1/\text{Jahrh.}] - \\ &\quad - 0°.010308889\, T^2 \left[1/\text{Jahrh.}^2\right] - 1°.25222 \times 10^{-5}\, T^3 \left[1/\text{Jahrh.}^3\right] + \cdots \ . \end{aligned} \tag{29.9}$$

Sie ist der Winkel zwischen Frühlingspunkt und aufsteigendem Knoten und dann bis zum Perigäum

---

[1] Siehe Formel (10.87) in Abschnitt 10.2.3 (Band III)

[2] Siehe Formel (1.85) in Abschnitt 1.7.1 (Band I), dort ist die mittlere Anomalie auf das Apogäum bezogen, hier auf das Perigäum, daher das andere Vorzeichen

$$\begin{aligned} n_{☾\Gamma'} = {} & 4069°.013877 - 0°.010308889\,T\left[1/\text{Jahrh.}\right] + \\ & -1°.25222\times10^{-5}\;T^2\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] \\ = {} & 0°.111403528 - 2°.82241999\times10^{-7}\left(\Delta JD\right)\left[1/\text{d}\right] \\ & -9°.3862734\times10^{-15}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\text{d}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.10}$$

Die <u>mittlere Elongation des Mondes von der Sonne</u> (Winkeldifferenz auf Ekliptik) lautet mit der mittleren geometrischen Länge der Sonne (aus Tabelle 28.3)

$$\begin{aligned} D_☾ = L_☾ - L_\odot = {} & D_{☾0} + \dot{D}_{☾s}\,T = D_{☾0} + n_{☾\text{D}}\,T = \\ = {} & 297°.8503631 + 445267°.11148\,T\left[1/\text{Jahrh.}\right] - \\ & -0°.001914166667\,T^2\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + 5°.277778\times10^{-6}\,T^3\left[1/\text{Jahrh.}^3\right] + \cdots \end{aligned} \tag{29.11}$$

Auch die säkulare Veränderung der mittleren Elongation ist nicht konstant. Sie beträgt

$$\begin{aligned} n_{☾Ds} = {} & 445267°.11148 - 0°.001914166667\,T + 5°.277778\times10^{-6}\,T^2 + \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] \\ = {} & 12°.190749117 - 1°.438262\times10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\text{d}\right] + \\ & +1°.0831297\times10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\text{d}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.12}$$

Hier zeigt sich bereits der wesentliche Einfluss der Sonne auf die Bewegung des Mondes in der bereits in der Antike bekannten **Evektion**. Diese bewirkt eine Veränderung der ekliptikalen Länge um

$$\Delta l_{eve} = 1°16'24''\,\sin\left(2D_☾ - M_☾\right) + \cdots \quad . \tag{29.13}$$

Auch die von *Tycho Brahe* entdeckte **Variation**[1] ist eine Funktion der Elongation des Mondes von der Sonne

$$\Delta l_{\text{var}} = 39'30''\sin 2D_☾ + \cdots \quad . \tag{29.14}$$

Die **parallaktische Gleichung**, ebenfalls von Tycho Brahe entdeckt, liefert zur ekliptikalen Länge des Mondes den Beitrag

$$\Delta l_{par} = -2'0''\sin D_☾ + \cdots \quad . \tag{29.15}$$

Das <u>mittlere Argument des Mondes</u> (Winkel zwischen aufsteigendem Knoten bezüglich Ekliptik und Mondort)

$$\begin{aligned} F_☾ = {} & F_{☾0} + \dot{F}_{☾s}\,T = F_{☾0} + n_{☾\text{F}}\,T = \\ = {} & 93°.27191028 + 483202°.01753806\,T\left[1/\text{Jahrh.}\right] - \\ & -0°.0036825\,T^2\left[1/\text{Jahrh.}^2\right] + 3°.05556\times10^{-6}\,T^3\left[1/\text{Jahrh.}^3\right] + \cdots \end{aligned} \tag{29.16}$$

Es hat die mittlere Bewegung

1 Nach O. NEUGEBAUER [1970], p. 85 und p. 88 findet sich ein entsprechender Term bereits in der Mondtheorie des *Ptolemäus*

$$\begin{aligned} n_{☾F} &= 483202°.01753806 - 0°.0036825T\,[1/\text{Jahrh.}] + \\ &\quad + 3°.05556\times10^{-6}\,T^2\,[1/\text{Jahrh.}^2] + \cdots + \cdots\,[1/\text{Jahrh.}] \\ &= 13°.229350241 - 2°.7603383\times10^{-12}\,(\Delta JD)[1/\text{d}] \\ &\quad + 6°.270759\times10^{-20}\,(\Delta JD)^2\,[1/\text{d}^2] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.17}$$

Die <u>ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens</u> der mittleren Mondbahn, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt errechnet sich aus:

$$\begin{aligned} \Omega_☾ &= \Omega_{☾0} + \dot{\Omega}_{☾s}\,T = \\ &= 125°.0445222 + 1934°.1362608T\,[1/\text{Jahrh.}] + \\ &\quad + 2°.0708333\times10^{-3}\,T^2\,[1/\text{Jahrh.}^2] + 2°.22222\times10^{-6}\,T^3\,[1/\text{Jahrh.}^3] + \cdots \end{aligned} \tag{29.18}$$

Sie hat die mittlere Bewegung

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{☾s} &= 1934°.1362608 + 2°.0708333\times10^{-3}\,T\,[1/\text{Jahrh.}] + \\ &\quad + 2°.22222\times10^{-6}\,T^2\,[1/\text{Jahrh.}^2] + \cdots\,[1/\text{Jahrh.}] \\ &= 0°.052953765 + 1°.5522608\times10^{-12}\,(\Delta JD)[1/\text{d}] + \\ &\quad + 4°.5605411\times10^{-20}\,(\Delta JD)^2\,[1/\text{d}^2] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.19}$$

Da die Sonne wesentlich die Bewegung des Mondes beeinflusst, wird hier die <u>mittlere geozentrische mittlere Anomalie der Sonne</u> mit aufgenommen[1]:

$$\begin{aligned} M_\odot &= M_{\odot 0} + \dot{M}_{\odot s}\,T = \\ &= 357°.52688973 + 35999°.0491762T\,[1/\text{Jahrh.}] - \\ &\quad - 1°.6027778\times10^{-4}\,T^2\,[1/\text{Jahrh.}^2] + 3°.33333\times10^{-6}\,T^3\,[1/\text{Jahrh.}^3] + \cdots \end{aligned} \tag{29.20}$$

Sie hat die mittlere Bewegung

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\odot s} &= 35999°.0491762\,[1/\text{Jahrh.}] - 1°.6027778\times10^{-4}\,T\,[1/\text{Jahrh.}^2] + \\ &\quad + 3°.33333\times10^{-6}\,T^2\,[1/\text{Jahrh.}^3] \cdots \left[\frac{1}{\text{Jahrh.}}\right] = \\ &= 0°.985600251 + 4°.38816646\times10^{-9}\,(\Delta JD)[1/\text{d}] + \\ &\quad + 2°.4986087\times10^{-15}\,(\Delta JD)^2\,[1/\text{d}^2] + \cdots \left[\frac{1}{\text{d}}\right] \quad . \end{aligned} \tag{29.21}$$

Da die Mondbahn nicht in der Ekliptik verläuft, sondern ihr gegenüber mit etwa 5° leicht geneigt ist, muss zur Berechnung der wahren ekliptikalen Länge des Mondes seine Bahn in die Ekliptik projiziert werden. Dies ist die **Reduktion auf die Ekliptik**[2]

$$\Delta l_{\text{red}} = -6'54''\sin\left(l - \Omega_☾\right) + \cdots \quad . \tag{29.22}$$

---

[1] Siehe in Kapitel 28, sowie in Anhang E.6 (Band V)

[2] Siehe in Abschnitt 24.2.5

Hier ist $l = \Omega_{☾} + u$ die wahre Länge in der Bahn, wenn u das wahre Argument der Breite ist. Wenn u unbekannt ist, wird l durch die mittlere Länge des Mondes $L_{☾}$ angenähert. Der Fehler ist bei Näherungsdarstellungen gering.

Schließlich hat es noch die von der mittleren Anomalie $M_{\odot}$ der Sonne abhängige **jährliche Variation** zu einem Eigennamen unter den Einflüssen auf die Mondbewegung gebracht

$$\Delta l_{\text{anvar}} = 11'12'' \sin\left(M_{\odot}\right) + \cdots \quad . \tag{29.23}$$

Damit hat die <u>wahre geometrische (geozentrische) Länge des Mondes</u> (bezogen auf den Mond-Mittelpunkt des Mondes) die für viele Untersuchungen ausreichende Näherungsdarstellung

$$\begin{aligned} l_{☾} = L_{☾} &+ 6°.288763889 \sin M_{☾} + 12'.8 \sin 2M_{☾} + 1°16'24'' \sin\left(2D_{☾} - M_{☾}\right) + \\ &+ 39'30'' \sin 2D_{☾} - 2'0'' \sin D_{☾} - 6'54'' \sin\left(l - \Omega_{☾}\right) - 11'8''.15 \sin\left(M_{\odot}\right) + \cdots \quad . \end{aligned} \tag{29.24}$$

Details zu diesen Entwicklungen sowie die entsprechenden Entwicklungen für die ekliptikale Breite und die Parallaxe werden in den Abschnitten 29.1.6.1, 29.1.6.2 und 29.1.7 vorgestellt.

29.1.4 Die Monate

29.1.4.1 Zahlenwerte in der Antike

Die von den Griechen von früheren Völkern übernommenen Relationen der unterschiedlichen Mondperioden dürften wegen ihrer fundamentalen Bedeutung wesentlich älteren Ursprungs sein. Es reicht offenbar über die Babylonier zurück bis zu den Tamilen, vermutlich auch zu den Chinesen und es ist möglich, dass auch in Mittelamerika diese Zahlenwerte mit großer Genauigkeit aus langfristigen Beobachtungen erhalten wurden[1].

Basierend auf dem von den Griechen als *18-Jährigem Finsternis-Zyklus* (sicherlich von *Hipparch* übernommen, wahrscheinlich schon früher auch in Griechenland bekannt) bezeichneten Relationen konnten mit der *Exeligmos* genannten Beziehung die Mondperioden mit erstaunlicher Genauigkeit errechnet werden.

$$669\, P_{☾,S} = 717\, P_{☾,a} = 726\, P_{☾,d} = 723\, P_{☾,t} + 32° = 19756^{d} \quad . \tag{29.25}$$

Da die Perioden in dieser Beziehung der Anzahl der mittleren Sonnentage zugeordnet werden können, lassen sich daraus die Perioden der synodischen, anomalistischen, drakonitischen und tropischen Mond-Bewegung berechnen. Die Ergebnisse sind mit den von *Ptolemäus* überlieferten Zahlenwerten in Tabelle 29-3 (auf Seite 292) zusammengestellt.

Anmerkung: Für den tropischen Monat ist in Formel (29.25) keine ganzzahlige Relation gegeben, sondern die zusätzliche Bewegung um 32°. Die anscheinend irreführende Schreibweise ist so zu verstehen: Der Mond bewegt sich mit der mittleren tropischen Bewegung $n_{☾,t} = 360° / P_{☾,t}$ um genau 32°, so dass die Relation $\left(723 + 32° / 360°\right) P_{☾,t} = 19756^{d}$ lauten muss, woraus der tropische Monat berechnet werden kann. ◄

[1] Siehe Näheres dazu im Abschnitt 1.6.6 (Band I)

Um den Bezug der Mondbewegung auf die Sonne herstellen zu können, konnte der *Meton Zyklus*

$$304\,P_{\odot,t} \Leftrightarrow 3760\,P_{☾,S} \Leftrightarrow 111035^d \tag{29.26}$$

verwendet werden, der die tropische Bewegung der Sonne in Relation zur synodischen Bewegung des Mondes setzte. Eine andere offenbar in der Antike verwendete Beziehung setzte die siderische Bewegung der Sonne in Relation zur siderischen Bewegung des Mondes[1]:

$$4267\,P_{☾,S} = 4573\,P_{☾,a} = 4612\,P_{☾,s} - 7°30' = 345\,P_{\odot,s} - 7°30' = 126007^d 1^h \quad . \tag{29.27}$$

Aus dieser Beziehung folgen der Zahlenwert für den siderischen Monat $P_{☾,s} = 27^d.321685$ und das siderische Jahr $P_{\odot,s} = 365^d.2598567$.

Der <u>evektive Monat</u>, also der vollständige Umlauf der Evektion des Mondes um die Erde, kann mit dem Argument $2D_☾ - M_☾$ aus der evektiven mittleren Bewegung

$$n_{☾,eve} = \frac{360°}{P_{☾,eve}} = 2n_{☾,D} - n_{☾,L} = 360°\left(\frac{2}{P_{☾,D}} - \frac{1}{P_{☾,a}}\right) = 11°.316517055\left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \tag{29.28}$$

berechnet werden. Mit den in der antiken bekannten Zahlenwerten beträgt er

$$P_{☾,eve} = 31^d.81190805 \quad . \tag{29.29}$$

Für die <u>mittlere Bewegung des Knotens der Mondbahn</u> bezogen auf die Ekliptik wurde in Formel (1.54) der Zahlenwert[2] (statt der hier verwendeten tropischen Bewegung wäre die siderische richtiger, was hier aber quantitativ unauffällig ist)

$$n_{☾,K} = \dot{\Omega}_{☾,s} = n_{☾,d} - n_{☾,t} = 360°\left(\frac{1}{P_{☾,d}} - \frac{1}{P_{☾,t}}\right) = 0°3'10''.8\left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \quad . \tag{29.30}$$

Da der drakonitische Monat kürzer als der tropische bzw. der siderische ist, trifft der Mond eher auf den nächsten Knoten als den Referenzstern. Der Knoten kommt also dem Mond (auf seiner rechtläufigen Bahn) entgegen, der Knoten bewegt sich somit rückläufig. Die Bewegung des Knotens vollendet somit bei Bezug auf den Frühlingspunkt einen vollständigen Umlauf nach

$$P_{☾,\Omega} = \frac{360°}{0°.053} = 6792^d.45283 = 18^a.596722388 \tag{29.31}$$

in julianischen Jahren.

Das <u>mittlere Perigäum des Mondes</u> bewegt sich dagegen rechtläufig längs der Mondbahnebene. Dies kann aus der anomalistischen Umlaufzeit ersehen werden, die länger als die tropische bzw. siderische Umlaufzeit ist, es dauert also länger bis der Monat das nächste Perigäum durchläuft als den Frühlingspunkt oder den Referenzstern erreicht. Mit den Formeln (1.51) sowie (1.52) hat das Perigäum die mittlere Bewegung

---

[1] O. NEUGEBAUER [1975], pp. 310, 311 ; siehe auch Formel (1.44) in Abschnitt 1.6.6 (Band I)

[2] Abschnitt 1.6.6 (Band I)

$$n_{☾,A} = \dot{\omega}_{☾,s} = n_{☾,t} - n_{☾,a} = 360°\left(\frac{1}{P_{☾,t}} - \frac{1}{P_{☾,a}}\right) = 0°6'40''.9\left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \quad . \tag{29.32}$$

Das Perigäum des Mondes umrundet die Erde somit einmal im Zeitraum

$$P_{☾,A} = \frac{360°}{0°.11136111} = 3232^d.72636568 = 8^a.850722425 \tag{29.33}$$

in julianischen Jahren.

29.1.4.2 Aktuelle Zahlenwerte

In der heutigen Entwicklung der Mondtheorie wird die wahre Umlaufzeit des Mondes um die Erde, d.h. ein Monat, durch Integration über die reziproke Variation des entsprechenden Bahnwinkels erhalten.

1. Zur Berechnung des <u>anomalistischen Monats</u>, d.h. des Zeitraums zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Mondes durch das Perigäum seiner scheinbaren Bahn um die Erde, wird wie bei Erdsatelliten üblich, die Variation $\dot{\upsilon}$ der wahren Anomalie zugrunde gelegt:

$$P_{☾,aw} = \int_{0°}^{360°} \frac{dt}{\dot{\upsilon}} \quad . \tag{29.34}$$

Um den (üblicherweise ausschließlich verwendeten) mittleren anomalistischen Monat zu berechnen, wird statt der wahren Anomalie die mittlere Anomalie als Bahnwinkel gewählt, da sie wie die wahre Anomalie von Perigäum zu Perigäum gezählt wird. Wird eine Variation der mittleren anomalistischen Bewegung für den Zeitraum eines Umlaufs vernachlässigt, kann die mittlere anomalistische Umlaufzeit mit der anomalistischen mittleren Bewegung (29.7) als einer Konstanten (bei fest vorgegebenem Zeitintervall ΔJD) berechnet werden aus

$$\begin{aligned} P_{☾,a} &= \frac{360°}{n_{☾,a}} \approx \\ &\approx \frac{360°}{13°.064992947[1/\text{d}]}\left[1 - \frac{6°.5192871\times10^{-12}(\Delta JD)[1/\text{d}]}{13°.064992947} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{3°.6529971\times10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\text{d}^2]}{13°.064992947}\right] + \cdots = \\ &= 27^d.554549892\left[1 - 4.9898895\times10^{-13}(\Delta JD)[1/\text{d}] - 2.796\times10^{-20}(\Delta JD)^2[1/\text{d}^2]\right] + \cdots \ . \end{aligned} \tag{29.35}$$

2. Der <u>mittlere drakonitische Monat</u> wird mit dem mittleren Argument $F_☾$ als Bahnwinkel berechnet. Die entsprechende mittlere Bewegung (29.17) führt auf:

$$
\begin{aligned}
P_{☾,\mathrm{d}} &= \frac{360°}{n_{☾,F}}\,[\mathrm{d}] = \frac{360°}{n_{☾,d}}\,[\mathrm{d}] \approx \\
&\approx \frac{360°}{13°.229350241[1/\mathrm{d}]}\left[1+\frac{2°.7603383\times10^{-12}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{13°.229350241}-\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\frac{6°.270759\times10^{-20}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{13°.229350241}\right]+\cdots = \\
&= 29^d.530588854\left[1+2.086526\times10^{-13}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]-4.740\times10^{-21}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]\right]+\cdots\ .
\end{aligned}
\tag{29.36}
$$

3. Der <u>mittlere synodische Monat</u> (bisweilen auch als *Lunation* bezeichnet) wird mit der mittleren Elongation $D_☾$ als Bahnwinkel berechnet. Die entsprechende mittlere Bewegung (29.12) führt auf:

$$
\begin{aligned}
P_{☾,\mathrm{D}} &= \frac{360°}{n_{☾,D}}\,[\mathrm{d}] \approx \\
&\approx \frac{360°}{12°.190749117[1/\mathrm{d}]}\left[1+\frac{1°.438262\times10^{-12}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{12°.190749117}-\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\frac{1°.0831297\times10^{-19}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{12°.190749117}\right]+\cdots = \\
&= 29^d.530588854\left[1+1.1797979\times10^{-13}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]-8.885\times10^{-21}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]\right]+\cdots\ .
\end{aligned}
\tag{29.37}
$$

Die wahre synodische Bewegung kann von der mittleren um bis zu 7 Stunden abweichen[1].

4. Der <u>mittlere tropische Monat</u> wird mit der mittleren geometrischen Länge $L_☾$ als Bahnwinkel berechnet. Die entsprechende mittlere Bewegung (29.5) führt auf:

$$
\begin{aligned}
P_{☾,\mathrm{t}} &= \frac{360°}{n_{☾,L}}\,[\mathrm{d}] = \frac{360°}{n_{☾,t}}\,[\mathrm{d}] \approx \\
&\approx \frac{360°}{13°.176396476[1/\mathrm{d}]}\left[1+\frac{1°.2080799\times10^{-12}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{13°.176396476}-\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\frac{1°.083101\times10^{-19}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{13°.176396476}\right]+\cdots = \\
&= 27^d.321582244\left[1+9.1685151\times10^{-14}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]-8.220\times10^{-21}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]\right]+\cdots\ .
\end{aligned}
\tag{29.38}
$$

[1] Hinweis etwa in STRÖMGREN, E. UND STRÖMGREN, B. [1933], p. 97

5. Der mittlere siderische Monat ist der Umlauf des Mondes um die Erde bei Bezug auf den Fixsternhimmel. Er unterscheidet sich vom tropischen Monat um die Wanderung des Frühlingspunktes längs der momentanen Ekliptik auf Grund der lunisolaren Präzession[1]

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_A &= 5038''.481507 + 0''.49263T - 0''.000124T^2 + \cdots \quad [1/\text{ julian.Jahrh.}] \\ &= 3°.83183627\times10^{-5} + 3°.74652065\times10^{-9}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}] - \\ &\qquad - 9°.4303749\times10^{-13}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2] + \cdots \quad [1/\mathrm{d}] \quad .\end{aligned} \tag{29.39}$$

Wegen der Rückläufigkeit der Präzession erreicht der Mond den Frühlingspunkt eher als den Bezugsstern am Fixsternhimmel, d.h. der tropische Monat ist kürzer als der siderische, die siderische mittlere Bewegung $n_{☾,s}$ ist kleiner als die tropische

$$\begin{aligned}n_{☾,s} &= n_{☾,t} - \dot{\omega}_A = \\ &= 13°.17635816 - 3°.74772873\times10^{-9}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}] + \\ &\qquad + 9°.4303760\times10^{-13}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2] + \cdots \quad [1/\mathrm{d}] \quad .\end{aligned} \tag{29.40}$$

Der mittlere siderische Monat hat unter Berücksichtigung der säkularen Änderungen den Zahlenwert

$$\begin{aligned}P_{☾,s} &= \frac{360°}{n_{☾,s}}[\mathrm{d}] \approx \\ &\approx \frac{360°}{13°.17635816[1/\mathrm{d}]}\left[1 + \frac{3°.74772873\times10^{-9}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{13°.17635816} - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{9°.4303760\times10^{-13}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2]}{13°.17635816}\right] + \cdots = \\ &= 27^d.32166170\left[1 + 2.8442827\times10^{-10}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}] - 7.157\times10^{-14}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2]\right] + \cdots \quad .\end{aligned} \tag{29.41}$$

6. Entsprechend dem Argument $2D_☾ - M_☾$ der Evektion (29.13) (auf Seite 284) beträgt die evektive mittlere Bewegung mit den Ausdrücken (29.12) und (29.7)

$$\begin{aligned}n_{☾,eve} &= 2n_{☾,D} - n_{☾,a} = \\ &= 11°.31650576 - 9°.3958111\times10^{-12}(\Delta JD)[1/\mathrm{d}] + \\ &\qquad - 1°.4867377\times10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\mathrm{d}^2] + \cdots \quad [1/\mathrm{d}] \quad .\end{aligned} \tag{29.42}$$

Der mittlere evektive Monat lautet daher unter Berücksichtigung der säkularen Änderungen

[1] Siehe in Abschnitt 9.3.1 (Band II), Formeln (9.46) und Zahlenwerte in (9.47). Der hier wiedergegebene verfeinerte Zahlenwert für die mittlere lunisolare Präzession ist Astronomical_Constants_2017.pdf entnommen. Entsprechend der Bezeichnung in (9.46) wird hier die lunisolare Präzession durch $\dot{\psi}_A := p_L$ verwendet.

$$P_{☾,\mathrm{eve}} = \frac{360°}{n_{☾,eve}}\,[\mathrm{d}] \approx$$
$$\approx \frac{360°}{11°.31650576[1/\mathrm{d}]}\left[1 - \frac{9°.3958111\times10^{-12}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{11°.31650576} - \right. \tag{29.43}$$
$$\left. - \frac{1°.4867377\times10^{-19}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{11°.31650576} + \cdots \right] =$$
$$= 31^d.81193979\left[1 + 8.3027494\times10^{-13}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}] + 1.3137781\times10^{-20}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots\right].$$

7. Die <u>Knoten der Mondbahn</u> und mit ihnen die Knotenlinie bewegen sich ebenfalls um die Erde mit der mittleren Knotenbewegung (29.19). Danach bewegt sich der Knoten der Mondbahn einmal um die Erde mit der Umlaufzeit

$$P_{☾,\Omega} = \frac{360°}{\dot{\Omega}_{☾s}}\,[\mathrm{d}] \approx$$
$$\approx \frac{360°}{0°.052953765[1/\mathrm{d}]}\left[1 - \frac{1°.5522608\times10^{-12}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{0°.052953765} - \right. \tag{29.44}$$
$$\left. - \frac{4°.5605411\times10^{-20}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{0°.052953765} + \cdots \right] =$$
$$= 6798^d.38345773\left[1 + 2.9313512\times10^{-11}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}] + 8.6123075\times10^{-19}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots\right].$$

Diesem Wert entspricht in julianischen Jahren die Knotenumlaufzeit $P_{☾,\Omega} = 18^a.6129595$, ein Wert der in der Berechnung des Hauptterms der Nutation eine zentrale Rolle spielt[1].

8. Die <u>Apsidenlinie</u> bewegt sich längs der Mondbahn im Mittel mit der mittleren Bewegung des Perigäums (29.10). Die wahre Bewegung der Apside und damit auch ihre wahre Umlaufzeit ist zusammen mit der wahren Bewegung des Mondknotens in den Tabellen in GUTZWILLER, M. C AND SCHMIDT, D. S. [1986], p.91 zu finden. Die mittlere Umlaufzeit der Mondapside kann mit Hilfe von (29.10) berechnet werden zu

$$P_{☾,\mathrm{A}} = \frac{360°}{n_{☾\Gamma'}}\,[\mathrm{d}] \approx$$
$$\approx \frac{360°}{0°.111403528[1/\mathrm{d}]}\left[1 + \frac{2°.82241999\times10^{-7}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}]}{0°.111403528} - \right. \tag{29.45}$$
$$\left. + \frac{9°.3862734\times10^{-15}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]}{0°.111403528} + \cdots \right] =$$
$$= 3231^d.49550524\left[1 + 2.53351042\times10^{-6}\,(\Delta JD)[1/\mathrm{d}] + 8.4254723\times10^{-14}\,(\Delta JD)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots\right].$$

[1] Siehe in Abschnitt 9.4 (Band II) und Anhang E.5 (Band V)

	Bei *Ptolemäus*	Moderne Werte
Anomalistischer Monat	$P_{☾,a} = 27^d.554568$	$P_{☾,a} = 27^d.554550$
Drakonitischer Monat	$P_{☾,d} = 27^d.212218$	$P_{☾,d} = 27^d.212221$
Synodischer Monat	$P_{☾,S} = 29^d.530585$	$P_{☾,S} = 29^d.530589$
Tropischer Monat	$P_{☾,t} = 27^d.321657$	$P_{☾,t} = 27^d.321582$
Siderischer Monat	$P_{☾,s} = 27^d.321685$	$P_{☾,s} = 27^d.321662$
Evektiver Monat (Periode der Evektion)	$P_{☾,eve} = 31^d.811908$	$P_{☾,eve} = 31^d.811940$
Umlauf des Knotens	$P_{☾,\Omega} = 18^a.596722388$	$P_{☾,\Omega} = 18^a.6129595$
Umlauf des Perigäums	$P_{☾,A} = 8^a.850722425$	$P_{☾,A} = 8^a.847352513$

Tabelle 29-3: Zusammenstellung der Zahlenwerte der mittleren Monate und Umlaufzeiten nach *Ptolemäus* und aktuelle Werte, die auf die Fundamentalepoche J2000.0 bezogen sind.

29.1.5 Darstellung der geozentrischen Bewegung des Mondes

Zur Darstellung der geozentrischen Bewegung des Mondes werden die Entwicklungen wie in der näherungsweisen Entwicklung (29.24) für die ekliptikale Länge entsprechend auch für die ekliptikale Breite und die Parallaxe bis zu einer Genauigkeit von 10^{-3} Bogensekunden vorangetrieben[1]. Die benötigten Herleitungen basieren auf einer Weiterentwicklung der Theorien von *G. W. Hill* und *E. W. Brown*[2].

29.1.5.1 Hauptproblem der Mondtheorie

Als Hauptproblem der Mondtheorie wird die Bewegung des Mondes um die Erde unter dem primären Einfluss der Sonne bezeichnet. Dies bedeutet dass die Bewegung des Mondes nur als Dreikörperproblem behandelt werden kann.

---

[1] Alle diese Korrekturglieder sind in den *Improved Lunar Ephemeris* (ILE [1954]) zusammengestellt, die für die Berechnung der Mondephemeride grundlegend sind. Die zugehörigen Methoden und Berechnungen mit verbesserten und weiterentwickelten Ergebnissen sind in GUTZWILLER, M. C. AND SCHMIDT D. S. [1986] zusammengestellt. In der Literatur finden sich weitere ständige Verbesserungen, etwa in OESTERWINTER, C. AND COHEN, C. J. [1971], GRIFFITH, J. S. [1971], VAN FLANDERN, T. C. [1969], sowie jeweils im astronomischen Jahrbuch.

[2] BROWN, E. W. [1896/1960], BROWN, E. W. [1897-1908], BROWN, E. W. [1936], BROWN, E. W. AND SHOOK, C. A. [1933]

Als Argumente der Entwicklungen dienen die folgenden vier primären mittleren Parameter[1]

- die mittlere Mittlere Anomalie $M_{☾}$ des Mondes (29.6)
- die mittlere Mittlere Anomalie $M_{\odot}$ der Sonne (29.20)
- die mittlere Elongation $D_{☾}$ des Mondes von der Sonne (29.11)
- das mittlere Argument $F_{☾}$ des Mondes (29.16).

Der Bezug der Mondbewegung auf das mittlere Äquinoktium der Ekliptik (Schnittpunkt mit dem mittleren Erdäquator) wird über

- die mittlere ekliptikale Länge $\Omega_{☾}$ des aufsteigenden Knotens der Mondbahn (29.18)

hergestellt.

Als sekundäre Parameter werden in der Mondtheorie folgende Parameter benötigt:

- die mittlere (geozentrische) geometrische Länge $L_{☾}$ des Mondes (29.4),

sie ist die Bezugsgröße, um welche die wahre Länge des Mondes entwickelt wird,

- die mittlere (geozentrische) geometrische ekliptikale Länge $L_{\odot}$ der Sonne (29.20),
- die mittlere (geozentrische) ekliptikale Länge $\Gamma'_{☾} = L_{☾} - M_{☾}$ des Perigäums der Mondbahn (29.9)

gelegentlich wird in diesem Zusammenhang noch benötigt

- die mittlere (geozentrische) ekliptikale Länge $\Gamma_{\odot} = L_{\odot} - M_{\odot}$ des Perigäums der scheinbaren Sonnenbahn.

Um die *Kepler*schen Bahnelemente der scheinbaren Bahn des Mondes um die Erde zusammenzustellen, wenn die Bewegung des Mondes näherungsweise als (allgemeine) *Kepler*bewegung beschrieben werden soll, wird noch benötigt

- das mittlere (geozentrische) Argument des Perigäums $\omega_{☾} = \Gamma'_{☾} - \Omega_{☾}$ der scheinbaren Mondbahn.

Die übrigen *Kepler*elemente (große Bahnhalbachse $a_{☾}$, Exzentrizität $e_{☾}$ und Inklination $i_{☾}$) werden für die mittlere Bewegung des Mondes als konstant betrachtet.

29.1.5.2 Einfluss der Planeten auf die Mondbewegung

Um den Einfluss der Planeten auf die Mondbewegung zu berücksichtigen genügt es (um auch hier eine Genauigkeit von 10^{-3} Bogensekunden garantieren zu können) die Hauptterme der mittleren geometrischen ekliptikalen Längen der Planeten zu berücksichtigen[2]. Die nicht genannten Planeten haben keinen merkbaren Einfluss auf die Mondbewegung im Rahmen der

---

[1] Diese Darstellung bezieht sich auf ILE [1954], der wir in der vorliegenden Arbeit aus Gründen der Anschaulichkeit folgen wollen. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass in der weiterentwickelten Theorie von GUTZWILLER, M. C. and SCHMIDT, D. S. [1986] die vier mittleren Parameter durch bestimmte Konstante (e, k, e', β) ersetzt werden, an die somit alle Koeffizienten der Entwicklungen angepasst wurden. Die in der Literatur der Mondbewegung häufig verwendete Bezeichnungsweise wird im vorliegenden Bericht im Hinblick auf eine einheitliche Bezeichnungsweise nicht verwendet: $l =: M_{☾}$, $l' =: M_{\odot}$, $D =: D_{☾}$, $F =: F_{☾}$

[2] URBAN, S. E. and P. K. SEIDELMANN [2013], p. 338. Der Wert für die Erde („Terra“) bezieht sich auf das Barycentrum des Erde-Mond-Systems. Im vorliegenden Zusammenhang dürfte eine Korrektur auf den Erdmittelpunkt keine quantitativen Auswirkungen haben

geforderten Genauigkeit $\left(10^{-3}\text{ Bogensekunden}\right)$. Berücksichtigt sind in der vollständigen Theorie der Mondbewegung:

$$\begin{aligned}
&\text{Venus} \;: L_{♀} =: VM = 181°.97909950 + 58517°.81538729\,T = 181°.97909950 + 1°.602130469\left(\Delta JD\right)\\
&\text{Erde} \;: L_{♁} =: TM = 100°.46457166 + 35999°.37244981\,T = 100°.46457166 + 0°.985609102\left(\Delta JD\right)\\
&\text{Mars} \;: L_{♂} =: MM = 355°.44656795 + 19140°.30268449\,T = 355°.44656795 + 0°.524032928\left(\Delta JD\right)\\
&\text{Jupiter} \;: L_{♃} =: JM = 34°.39644051 + 3034°.74612775\,T = 34°.39644051 + 0°.083086821\left(\Delta JD\right)\\
&\text{Saturn} \;: L_{♄} =: SM = 49°.95424423 + 1222°.49362201\,T = 49°.95424423 + 0°.033470051\left(\Delta JD\right)\;.
\end{aligned} \tag{29.46}$$

29.1.6 Der genäherte geozentrische Ortsvektor der Mondbewegung

Um einen Eindruck von der Darstellung der Mondbewegung in Polarkoordinaten zu geben, werden in den nächsten Abschnitten die Entwicklungen basierend auf den ILE [1954] bis zu einer Genauigkeit von $6''$ zusammengestellt. Damit kann eine Ortsgenauigkeit von mindestens $10''$ garantiert werden. Werden auch im Rahmen dieser Genauigkeitsanforderung die Einflüsse der Planeten berücksichtigt, wirkt sich dies auf die mittleren Parameter mit periodischen Variationen aus, welche die fundamentalen Argumente überlagern. Dazu werden die Größen benötigt[1]:

$$\begin{aligned}
\Delta l_\eta &= 14''.27\sin\left[M_☾ + 151°.1 + 16.0 * TM - 18.0 * VM - \left(T + 0.5\right)\right] +\\
&\quad + 7''.261\sin\left(\Omega_☾\right)\\
\Delta\Omega_\eta &= 95''.96\,\sin\left(\Omega_☾\right) +\\
&\quad + 15''.58\sin\left[\Omega_☾ + 276°.2 - 2°.3\left(T + 0.5\right)\right]\\
\Delta\tau_\eta &= -6''.4\sin\left[41°.1 + 20°.2\left(T + 0.5\right)\right] \quad .
\end{aligned} \tag{29.47}$$

Dies ergibt die Zuweisungen auf die modifizierten fundamentalen Argumente[2]:

$$\begin{aligned}
&\Omega_☾ \Rightarrow \Omega_☾ + \Delta\Omega_\eta \quad , \quad M_\odot \Rightarrow M_\odot + \Delta\tau_\eta \quad , \quad L_☾ \Rightarrow L_☾ + \Delta L_\eta \quad ,\\
&M_☾ = L_☾ - \Gamma'_☾ \quad , \quad F_☾ = L_☾ - \Omega_☾ \quad , \quad D_☾ \Rightarrow D_☾ + \Delta L_\eta \quad .
\end{aligned} \tag{29.48}$$

Diese Zuweisungen sind folgendermaßen zu verstehen: Vorgegeben sind die mittleren Parameter mit den Formeln aus Abschnitt 29.1.3.2 (ab Seite 281). Sollen auch periodische Variationen der Mondbewegung berücksichtigt werden, werden die Modifikationen (29.48) berücksichtigt. In dieser erweiterten Form werden die Argumente in den folgenden Entwicklungen zur Beschreibung der Mondbewegung mit Polarkoordinaten verwendet.

29.1.6.1 Die Entwicklung der geozentrischen ekliptikalen Länge des Mondes

Die wahre ekliptikale Länge des Mondmittelpunktes hat bei Bezug auf das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems die allgemeine Darstellung

---

[1] Aus ILE[1954], Tabelle I, p. 288, sowie Tabelle II, pp.290-291

[2] Die vorgegebenen mittleren fundamentalen Argumente sind in Abschnitt 29.1.3.2 auf Seite 281 zusammengestellt

$$
\begin{aligned}
l_M = L_{☾} + 22639''.550 \sin M_{☾} + P_{\odot,l}\left(M_{☾}, M_{\odot}, F_{☾}, D_{☾}\right) + \\
+ P_{Pl,l}\left(M_{☾}, M_{\odot}, F_{☾}, D_{☾}, L_{☾}, \Omega_{☾}, T_{♁}, V_{♀}, J_{♃}, M_{♂}, S_{♄}\right) + \Delta\psi \quad .
\end{aligned}
\tag{29.49}
$$

Hier ist $L_{☾}$ die gemäß den Ausdrücken (29.48) modifizierte mittlere geometrische Länge des Mondes[1]. Es folgt der Hauptterm der Mittelpunktsgleichung. $P_{\odot,l}$ fasst die periodischen Einflüsse auf die Bewegung in Länge im Rahmen des Hauptproblems der Mondbewegung zusammen. In $P_{Pl,l}$ sind die Einflüsse durch die Planeten enthalten. Der Faktor $\Delta\psi$ ist die Nutation in Länge.

Die ersten Glieder der periodischen Solarterme in Länge lauten[2]:

$$
\begin{aligned}
\Delta l_{\alpha} = \; & 13''.902 \sin\left(4D_{☾}\right) + \\
& + 2369''.912 \sin\left(2D_{☾}\right) + \\
& + 191''.953 \sin\left(M_{☾} + 2D_{☾}\right) + \\
& + 22639''.550 \sin\left(M_{☾}\right) - \\
& - 4586''.465 \sin\left(M_{☾} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 38''.428 \sin\left(M_{☾} - 4D_{☾}\right) - \\
& - 24''.420 \sin\left(M_{\odot} + 2D_{☾}\right) - \\
& - 668''.146 \sin\left(M_{\odot}\right) - \\
& - 165''.145 \sin\left(M_{\odot} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 125''.154 \sin\left(D_{☾}\right) + \\
& + 14''.387 \sin\left(2M_{☾} + 2D_{☾}\right) + \\
& + 769''.016 \sin\left(2M_{☾}\right) - \\
& - 211''.656 \sin\left(2M_{☾} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 30''.773 \sin\left(2M_{☾} - 4D_{☾}\right) - \\
& - 109''.673 \sin\left(M_{☾} + M_{\odot}\right) - \\
& - 205''.962 \sin\left(M_{☾} + M_{\odot} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 4''.391 \sin\left(M_{☾} + M_{\odot} - 4D_{☾}\right) + \\
& + 14''.577 \sin\left(M_{☾} - M_{\odot} + 2D_{☾}\right) + \\
& + 147''.687 \sin\left(M_{☾} - M_{\odot}\right) + \\
& + 28''.475 \sin\left(M_{☾} - M_{\odot} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 7''.486 \sin\left(2M_{\odot}\right) - \\
& - 8''.096 \sin\left(2M_{\odot} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 5''.741 \sin\left(2F_{☾} + 2D_{☾}\right) - \\
& - 411''.608 \sin\left(2F_{☾}\right) - \\
& - 55''.173 \sin\left(2F_{☾} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 8''.466 \sin\left(2M_{☾} + 2D_{☾}\right) + \\
& + 18''.609 \sin\left(2M_{☾} - 2D_{☾}\right) + \\
& + 18''.023 \sin\left(M_{\odot} + D_{☾}\right) + \\
& + 36''.124 \sin\left(3M_{☾}\right) - \\
& - 13''.193 \sin\left(3M_{☾} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 7''.649 \sin\left(2M_{☾} + M_{\odot}\right) - \\
& - 8''.627 \sin\left(2M_{☾} + M_{\odot} - 2D_{☾}\right) + \\
& + 9''.703 \sin\left(2M_{☾} - M_{\odot}\right) - \\
& - 7''.412 \sin\left(M_{☾} + 2M_{\odot} - 2D_{☾}\right) - \\
& - 45''.099 \sin\left(M_{☾} + 2F_{☾}\right) - \\
& - 6''.382 \sin\left(M_{☾} - 2F_{☾} + 2D_{☾}\right) + \\
& + 39''.528 \sin\left(M_{☾} - 2F_{☾}\right) + \\
& + 9''.366 \sin\left(M_{☾} - 2F_{☾} - 2D_{☾}\right) + \cdots
\end{aligned}
\tag{29.50}
$$

Zusätzlich werden im Rahmen der vorliegenden Näherung noch die folgenden additiven Korrekturen für die Effekte höherer Ordnung in den periodischen Solar-Termen benötigt[3]:

---

[1] siehe in Abschnitt 9.4.1, Formel (9.122)

[2] ILE [1954], Ialpha, Code 0

[3] ILE[1954] Tabelle IV

$$\begin{aligned}\Delta l_{\alpha dd} &= 294''.0\times10^{-9}\ \cdot T\cdot 36525\cdot\sin\left(2D_{☾}\right)+\\ &+35''.0\times10^{-9}\ \cdot T\cdot 36525\cdot\sin\left(M_{☾}+2D_{☾}\right)-\\ &-220''.0\times10^{-9}\cdot T\cdot 36525\cdot\sin\left(M_{☾}-2D_{☾}\right)-\\ &-17''.0\times10^{-9}\ \cdot T\cdot 36525\cdot\sin\left(M_{\odot}-2D_{☾}\right)-\\ &-12''.0\times10^{-9}\ \cdot T\cdot 36525\cdot\sin\left(M_{☾}-M_{\odot}\right)+\cdots\end{aligned} \tag{29.51}$$

Damit lautet die (näherungsweise) wahre ekliptikale Länge des Mondes

$$l_M = L_{☾}+\left[\Delta l_{\eta}+\Delta l_{\alpha}+\Delta l_{\alpha dd}+\Delta\psi\right]/3600.0 \quad \text{[Grad]} \quad . \tag{29.52}$$

29.1.6.2 Die Entwicklung der geozentrischen ekliptikalen Breite des Mondes

Die ekliptikale Breite des Mondes hat die allgemeine Darstellung, bezogen auf den Hauptterm des Argumentes der Breite und zerlegt in Solarterme und Terme durch die Planeten

$$\begin{aligned}b_M &= 18518''.511\sin F_{☾}+P_{\odot,l}\left(M_{☾},M_{\odot},F_{☾},D_{☾}\right)+\\ &+P_{Pl,b}\left(M_{☾},M_{\odot},F_{☾},D_{☾},L_{☾},T_{♁},V_{♀},J_{♃},M_{♂}\right) \quad .\end{aligned} \tag{29.53}$$

Die periodischen Solarterme (bis zur Größenordnung etwa $5''$) sind[1] in den Entwicklungen (29.54) zusammengefasst.

$$\begin{aligned}\Delta b_{S\beta} = &-\ 112''.79\ \sin\left(D_{☾}\right)+\\ &+\ 2373''.36\ \sin\left(2D_{☾}\right)+\\ &+\ 14''.06\ \sin\left(4D_{☾}\right)+\\ &+\ 6''.98\ \sin\left(M_{☾}+4D_{☾}\right)+\\ &+\ 192''.72\ \sin\left(M_{☾}+2D_{☾}\right)-\\ &-\ 13''.51\ \sin\left(M_{☾}+D_{☾}\right)+\\ &+22609''.07\ \sin\left(M_{☾}\right)-\\ &-\ 4578''.13\ \sin\left(M_{☾}-2D_{☾}\right)+\\ &+\ 5''.44\ \sin\left(M_{☾}-3D_{☾}\right)-\\ &-\ 38''.98\ \sin\left(M_{☾}-4D_{☾}\right)+\\ &+\ 14''.78\ \sin\left(2M_{☾}+2D_{☾}\right)+\\ &+\ 767''.96\ \sin\left(2M_{☾}\right)-\\ &-\ 152''.53\ \sin\left(2M_{☾}-2D_{☾}\right)-\\ &+\ 34''.07\ \sin\left(2M_{☾}-4D_{☾}\right)+\\ &+\ 50''.64\ \sin\left(3M_{☾}\right)-\\ &-\ 16''.40\ \sin\left(3M_{☾}-2D_{☾}\right)-\\ &-\ 25''.10\ \sin\left(M_{\odot}+2D_{☾}\right)+\\ &+\ 17''.93\ \sin\left(M_{\odot}+D_{☾}\right)-\\ &-\ 126''.98\ \sin\left(M_{\odot}\right)-\\ &-\ 165''.06\ \sin\left(M_{\odot}-2D_{☾}\right)-\\ &-\ 16''.78\ \sin\left(2M_{\odot}-2D_{☾}\right)-\\ &-\ 11''.75\ \sin\left(M_{☾}+M_{\odot}+2D_{☾}\right)-\\ &-\ 115''.18\ \sin\left(M_{☾}+M_{\odot}\right)-\\ &-\ 182''.36\ \sin\left(M_{☾}+M_{\odot}-2D_{☾}\right)+\\ &+\ 23''.59\ \sin\left(M_{☾}-M_{\odot}-2D_{☾}\right)+\\ &+\ 138''.76\ \sin\left(M_{☾}-M_{\odot}\right)+\\ &+\ 31''.70\ \sin\left(M_{☾}-M_{\odot}+2D_{☾}\right)-\\ &-\ 10''.78\ \sin\left(2M_{☾}+M_{\odot}\right)-\\ &-\ 7''.59\ \sin\left(2M_{☾}+M_{\odot}-2D_{☾}\right)+\\ &+\ 11''.67\ \sin\left(2M_{☾}+M_{\odot}\right)-\\ &-\ 52''.14\ \sin\left(2F_{☾}-2D_{☾}\right)-\\ &-\ 9''.52\ \sin\left(M_{☾}+2F_{☾}-2D_{☾}\right)+\\ &+\ 85''.78\ \sin\left(M_{☾}-2F_{☾}\right)+\cdots\end{aligned} \tag{29.54}$$

[1] ILE[1954], table S, Ibeta, code 1

Weitere Solar-Terme in Breite[1] sind

$$\begin{aligned}\Delta b_{N\beta} = &- \quad 526''.069 \sin\left(F_{☾} - 2D_{☾}\right) - \\ &- \quad 3''.352 \sin\left(F_{☾} - 4D_{☾}\right) + \\ &+ \quad 44''.297 \sin\left(M_{☾} + F_{☾} - 2D_{☾}\right) - \\ &- \quad 6''.000 \sin\left(M_{☾} + F_{☾} - 4D_{☾}\right) - \\ &- \quad 20''.599 \sin\left(M_{☾} - F_{☾}\right) + \\ &+ \quad 30''.598 \sin\left(M_{☾} - F_{☾} + 2D_{☾}\right) + \\ &+ \quad 24''.649 \sin\left(2M_{☾} - F_{☾}\right) + \\ &+ \quad 2''.000 \sin\left(2M_{☾} - F_{☾} + 2D_{☾}\right) - \\ &- \quad 22''.571 \sin\left(M_{\odot} + F_{☾} - 2D_{☾}\right) - \\ &- \quad 10''.985 \sin\left(M_{\odot} - F_{☾} + 2D_{☾}\right) + \cdots\end{aligned} \tag{29.55}$$

Die additiven Korrekturen entsprechend den Effekten höherer Ordnung sind[2]

$$\begin{aligned}\Delta b_{N\beta\beta} = &\, 15''.0 \times 10^{-9} \cdot \Delta JD \cdot \sin\left(F_{☾} + 2D_{☾}\right) - \\ &- 81''.0 \times 10^{-9} \cdot \Delta JD \cdot \sin\left(F_{☾} - 2D_{☾}\right) + \cdots \quad .\end{aligned} \tag{29.56}$$

Prinzipalterme der periodischen Solarterme in Breite[3]:

$$\begin{aligned}\gamma_{b1} &= 18518''.511 + 1''.189 \\ \gamma_{b2} &= -6''.241\end{aligned} \tag{29.57}$$

Zur Berechnung der wahren ekliptikalen Breite des Mondes[4] wird mit dem Argument

$$SB := F_{☾} + \Delta l_{\eta} - \Delta\Omega_{\eta} + \Delta b_{S\beta} \tag{29.58}$$

erhalten

$$b_M = \left[\gamma_{b1} \sin\left(SB\right) + \gamma_{b2} \sin\left(3SB\right) + \Delta b_{N\beta} + \Delta b_{N\beta\beta}\right] / 3600 \qquad \left[\text{Grad}\right] \quad . \tag{29.59}$$

29.1.6.3 Die geozentrische Parallaxe des Mondes

Der konstante Wert der Äquatorial-Horizontal-Parallaxe des Mondes[5], bezogen auf den mittleren Abstand des Mondmittelpunktes vom Erdzentrum, wird durch die periodischen Sonneneinflüsse $P_{\odot,\pi}$ und die periodischen Einflüsse $P_{\text{Pl},\pi}$ durch die Planeten überlagert. Die wahre Parallaxe des Mondes hat die allgemeine Darstellung

$$\begin{aligned}P_{☾} = &\, 3422''.608 + P_{\odot,\pi}\left(M_{☾}, M_{\odot}, F_{☾}, D_{☾}\right) + \\ &+ P_{Pl.\pi}\left(M_{☾}, M_{\odot}, F_{☾}, D_{☾}, L_{☾}, T_{♄}, V_{♀}, J_{♃}, M_{♂}\right) \quad .\end{aligned} \tag{29.60}$$

---

[1] ILE [1954], table N, Ibeta, Code 3

[2] ILE [1954], table IV

[3] ILE [1954] , Ibeta, Code 6

[4] mit den Formeln aus ILE [1954] p.344, p.350, p.358

[5] der hier verwendete Zahlenwert ist dem Supplement P. K. SEIDELMANN (ed.) [1992], Table 15.4, p. 701, entnommen

Der wahre Abstand des Mondmittelpunktes vom Erdmittelpunkt kann mit dem mittleren Äquatorradius der Erde errechnet werden aus

$$r_{☾} = \frac{R_E}{\sin\left(P_{☾}\right)} \ [\mathrm{km}]. \tag{29.61}$$

Die näherungsweisen Ausdrücke zur Berechnung der Mondparallaxe sind[1]:

$$\begin{aligned} \Delta P_{☾\mathrm{g}} &= 28''.2333\cos\left(2D_{☾}\right) + \\ &+ 3422''.7000 + \\ &+ 186''.5398\cos\left(M_{☾}\right) + \\ &+ 34''.3117\cos\left(M_{☾} - 2D_{☾}\right) + \\ &+ 10''.1657\cos\left(2M_{☾}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{29.62}$$

Die additiven Korrekturen höherer Ordnung lauten[2]

$$\begin{aligned} \Delta P_{☾p} &= 3''.5\times10^{-9}\cdot 36525\cdot\cos\left(2D_{☾}\right) + \\ &+ 1''.0\times10^{-9}\cdot 36525\cdot\cos\left(M_{☾} - 2D_{☾}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{29.63}$$

Die gesamte Korrektur (in der hier verlangten Näherung) beträgt[3]

$$\Delta P_{☾} = \left(\Delta P_{☾\mathrm{g}} + \Delta P_{☾p}\right) P_{☾N} / 3422''.7 \tag{29.64}$$

Hier bedeutet $P_{☾N}$ einen eventuell verbesserten Wert für die geozentrische Äquatorial-Horizontal Parallaxe, welche den in der ILE verwendeten Wert $3422''.700$ verwendeten Wert ersetzen soll. Die geozentrische Äquatorial-Horizontal Parallaxe des Mondes lautet schließlich (in der gewünschten Näherung)

$$P_{☾} = \Delta P_{☾} + \frac{\left(\Delta P_{☾}\right)^3}{6\cdot\left(206264.806\right)^2} \quad . \tag{29.65}$$

29.1.6.4 Der geozentrische ekliptikale Ortsvektor des Mondes

Bezogen auf das momentane Ekliptik System $\mathbf{q}_j^{(E)}$ hat der Mondmittelpunkt mit den zuvor berechneten Polarkoordinaten den geozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{♁☾} = r_{☾}\left[\cos l_M \cos b_M\, \mathbf{q}_1^{(E)} + \sin l_M \cos b_{☾}\, \mathbf{q}_2^{(E)} + \sin b_M\, \mathbf{q}_3^{(E)}\right] \quad , \ r_{☾} = \left|\mathbf{r}_{♁☾}\right| \ . \tag{29.66}$$

29.1.7 Der geozentrische Geschwindigkeitsvektor des Mondes

Der geozentrische Geschwindigkeitsvektor des Mondes kann durch Ableitung des Ortsvektors (29.66) nach der Zeit gebildet werden. Im vorliegenden Fall werde als Zeiteinheit der mittlere Sonnentag gewählt. Es ergibt sich

---

[1] ILE [1954], Table Igamma, Code 5

[2] ILE [1954], Tabelle IV

[3] ILE [1954], p. 344

$$\frac{d\mathbf{r}_{♁☾}}{d(d)} = \frac{dr_☾}{d(d)}\frac{\mathbf{r}_{♁☾}}{r_☾} + \\ + r_☾ \cos b_☾ \frac{dl_☾}{d(d)}\left[-\sin l_☾\, \mathbf{q}_1^{(E)} + \cos l_☾\, \mathbf{q}_2^{(E)}\right] + \\ + r_☾ \frac{db_☾}{d(d)}\left[-\cos l_☾ \sin b_☾\, \mathbf{q}_1^{(E)} - \sin l_☾ \sin b_☾\, \mathbf{q}_2^{(E)} + \cos b_☾\, \mathbf{q}_3^{(E)}\right] . \tag{29.67}$$

Die hier benötigten Variationen der ekliptikalen Polarkoordinaten des Mondes werden in den Ausdrücken (29.90), (29.78) und (29.83) zur Verfügung gestellt. Die dazu erforderlichen Einzelvariationen werden in den folgenden Abschnitten berechnet.

Die Polarkoordinaten des Mondortes sind Funktionen der Zeit. Um ihre Ableitungen berechnen zu können müssen die Ableitungen der vier fundamentalen Parameter $\left(M_☾, M_\odot, F_☾, D_☾\right)$ aus den Beziehungen (29.6) und (29.7), (29.20) und (29.21), (29.11) und (29.12), sowie (29.16) und (29.17) berechnet werden.

$$\frac{dM_☾}{d(d)} = n_{☾a} + \frac{dn_{☾a}}{d(d)}(\Delta Jd) \quad \left[\frac{\text{Grad}}{\text{Tag}}\right] = \\ = 13°.064992947 + 13°.0385742\times 10^{-12}(\Delta JD)[1/\text{Tag}] + \\ + 10°.9589913\times 10^{-19}(\Delta JD)^2\left[1/\text{Tag}^2\right] + \cdots \quad \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] . \tag{29.68}$$

$$\frac{dM_\odot}{d(d)} = \dot{M}_{\odot s} + \frac{d\dot{M}_{\odot s}}{d(d)}(\Delta JD)\left[\frac{\text{Grad}}{\text{Tag}}\right] = \\ = 0°.985600251 + 8°.77633292\times 10^{-9}(\Delta JD)[1/\text{Tag}] + \\ + 7°.4958261\times 10^{-15}(\Delta JD)^2\left[1/\text{Tag}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] . \tag{29.69}$$

$$\frac{dF_☾}{d(d)} = \frac{dn_{☾\mathrm{F}}}{d(d)} + n_{☾\mathrm{F}}(\Delta JD) \left[\frac{\text{Grad}}{\text{Tag}}\right] = \\ = 13°.229350241 - 5°.5206766\times 10^{-12}(\Delta JD)[1/\text{Tag}] + \\ + 1°.8812277\times 10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\text{Tag}^2] + \cdots\cdots \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] . \tag{29.70}$$

$$\frac{dD_☾}{d(d)} = \frac{dn_{☾\mathrm{D}}}{d(d)} + n_{☾\mathrm{D}}(\Delta JD)\left[\frac{\text{Grad}}{\text{Tag}}\right] = \\ = 12°.190749117 - 2°.876524\times 10^{-12}(\Delta JD)[1/\text{Tag}] + \\ + 3°.2493891\times 10^{-19}(\Delta JD)^2\left[1/\text{Tag}^2\right] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] . \tag{29.71}$$

Zusätzlich wird noch die Variation des aufsteigenden Knotens der Mondbahn bezüglich der Ekliptik benötigt. Mit den Ausdrücken (29.18) und (29.19)

$$\frac{d\Omega_{☾}}{d(d)} = \frac{d\dot{\Omega}_{☾s}}{d(d)} + \dot{\Omega}_{☾s}(\Delta JD) =$$
$$= 0°.052953765 + 3°.1045216 \times 10^{-12}(\Delta JD)[1/\text{Tag}] + \tag{29.72}$$
$$+1°.3681623 \times 10^{-19}(\Delta JD)^2[1/\text{Tag}^2] + \cdots \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] .$$

Die Variation der Länge des Perigäums wird mit den Formeln (29.9) und (29.10) erhalten:

$$\Gamma'_{☾} = \Gamma'_{☾0} + \dot{\Gamma}'_{☾s}T = \Gamma'_{☾0} + n_{☾\Gamma'}T = L_{☾} - M_{☾} =$$
$$= 83°.3534511 + 4069°.013877T[1/\text{Jahrh.}^2] - \tag{29.73}$$
$$-0°.010308889T^2[1/\text{Jahrh.}^2] - 1°.25222 \times 10^{-5}T^3[1/\text{Jahrh.}^3] + \cdots .$$

Für die näherungsweise Berechnung der geozentrischen Mondbahn werden noch die Einflüsse durch Venus (VM) und Erde (TM) benötigt. Mit den Ausdrücken (29.46) wird

$$\frac{dL_{♀}}{d(d)} =: \frac{d(VM)}{d(d)} = 1°.602130469 \quad [1/\text{Tag}]$$
$$\frac{dL_{♁}}{d(d)} =: \frac{d(TM)}{d(d)} = +0°.985609102 \quad [1/\text{Tag}] \quad . \tag{29.74}$$

Die Hilfsgrößen (29.47) führen auf die Variationen

$$\frac{d(\Delta l_\eta)}{d(d)} 3600''.0 = 14''.27 \cos[M_{☾} + 151°.1 + 16.0 * TM - 18.0 * VM - 1°.0(T + 0.5)] \times$$
$$\times \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} + 16.0\frac{d(TM)}{d(d)} - 18.0\frac{d(VM)}{d(d)} - \frac{1°.0}{36525}\right] + \tag{29.75}$$
$$+7''.261 \cos(\Omega_{☾})\frac{d(\Omega_{☾})}{d(d)} \quad \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right]$$

$$\frac{d(\Delta\Omega_\eta)}{d(d)} 3600''.0 = 95''.96 \cos(\Omega_{☾})\frac{d(\Delta\Omega_{☾})}{d(d)} +$$
$$+15''.58 \cos[\Omega_{☾} + 276°.2 - 2°.3(T + 0.5)] \times \left[\frac{d(\Delta\Omega_{☾})}{d(d)} - \frac{2°.3}{36525}\right] \quad \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \tag{29.76}$$

$$\frac{d(\Delta\tau_\eta)}{d(d)} 3600''.0 = -6''.4 \cos[41°.1 + 20°.2(T + 0.5)] \times \left[\frac{20°.2}{36525}\right] \quad \left[\frac{1}{\text{Tag}}\right] \tag{29.77}$$

Anmerkung: Für hochgenaue Berechnungen müssen auch die Variationen der Längen der anderen Planeten Mars, Jupiter, Saturn) nach der Zeit berechnet werden. Dies kann nach dem hier vorgestellten Muster erfolgen, was im vorliegenden Bericht nur angedeutet werden soll. ◄

29.1.7.1 Die Variation der ekliptikalen Länge des Mondes

Die Variation der ekliptikalen Länge lautet mit dem Ausdruck (29.52)

$$\frac{dl_{☾}}{d(d)} = \frac{dL_{☾}}{d(d)} + \left[\frac{d(\Delta l_{\eta})}{d(d)} + \frac{d(\Delta l_{\alpha})}{d(d)} + \frac{d(\Delta l_{add})}{d(d)} + \frac{d(\Delta\Psi)}{d(d)} \right] / 3600.0 \quad \text{[Grad]} \quad . \tag{29.78}$$

Im Einzelnen ergibt die Beziehung (29.4) die Variation der mittleren Länge

$$\frac{dL_{☾}}{d(d)} = \frac{dF_{☾}}{d(d)} + \frac{d\Omega_{☾}}{d(d)} \quad . \tag{29.79}$$

Die Entwicklung (29.50) führt auf

$$\begin{aligned}
\frac{d(\Delta l_{\alpha})}{d(d)} = & \left[55''.608 \cos\sin(4D_{☾}) + 4739''.824 \cos(2D_{☾}) \right] \frac{d(D_{☾})}{d(d)} + \\
& + 191''.953 \cos(M_{☾} + 2D_{☾}) \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} + 2\frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] + 22639''.550 \cos(M_{☾}) \frac{d(M_{☾})}{d(d)} - \\
& - 4586''.465 \cos(M_{☾} - 2D_{☾}) \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} - 2\frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] - \\
& - 38''.428 \cos(M_{☾} - 4D_{☾}) \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} - 4\frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] - \\
& - 24''.420 \cos(M_{\odot} + 2D_{☾}) \left[\frac{d(M_{\odot})}{d(d)} + 2\frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] - 668''.146 \cos(M_{\odot}) \frac{d(M_{\odot})}{d(d)} - \\
& - 165''.145 \cos(M_{\odot} - 2D_{☾}) \left[\frac{d(M_{\odot})}{d(d)} - 2\frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] - 125''.154 \cos(D_{☾}) \frac{d(D_{☾})}{d(d)} + \\
& + 28''.774 \cos(2M_{☾} + 2D_{☾}) \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} + \frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] + 1538''.032 \cos(2M_{☾}) \frac{d(M_{☾})}{d(d)} - \\
& - 423'''.312 \cos(2M_{☾} - 2D_{☾}) \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} - \frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] - \\
& - 61''.546 \cos(2M_{☾} - 4D_{☾}) \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} - 2\frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] - \\
& - 109''.673 \cos(M_{☾} + M_{\odot}) \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} + \frac{d(M_{\odot})}{d(d)} \right] - \\
& - 205''.962 \cos(M_{☾} + M_{\odot} - 2D_{☾}) \left[\frac{d(M_{☾})}{d(d)} + \frac{d(M_{\odot})}{d(d)} - 2\frac{d(D_{☾})}{d(d)} \right] -
\end{aligned} \tag{29.80}$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad 4''.391\cos\left(M_{☾}+M_{\odot}-4D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-4\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&+ \quad 14''.577\cos\left(M_{☾}-M_{\odot}+2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}+2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&+ \quad 147''.687\cos\left(M_{☾}-M_{\odot}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&+ \quad 28''.475\cos\left(M_{☾}-M_{\odot}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&- \quad 14''.972\cos\left(2M_{\odot}\right)\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-16''.192\cos\left(2M_{\odot}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&- \quad 11''.482\cos\left(2F_{☾}+2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]-823''.216\cos\left(2F_{☾}\right)\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-\\
&- \quad 110''.346\cos\left(2F_{☾}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&- \quad 16''.932\cos\left(2M_{☾}+2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&+ \quad 37''.218\cos\left(2M_{☾}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&+ \quad 18''.023\cos\left(M_{\odot}+D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]+108''.372\cos\left(3M_{☾}\right)\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-\\
&- \quad 13''.193\cos\left(3M_{☾}-2D_{☾}\right)\left[3\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&- \quad 7''.649\cos\left(2M_{☾}+M_{\odot}\right)\left[2\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&- \quad 8''.627\cos\left(2M_{☾}+M_{\odot}-2D_{☾}\right)\left[2\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\
&+ \quad 9''.703\cos\left(2M_{☾}-M_{\odot}\right)\left[2\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right]-\\
&- \quad 7''.412\cos\left(M_{☾}+2M_{\odot}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+2\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}-\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \ 45''.099 \ \cos\left(M_{☾} + 2F_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \ 6''.382 \ \cos\left(M_{☾} - 2F_{☾} + 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&\qquad + \ 39''.528 \ \cos\left(M_{☾} - 2F_{☾}\right) \qquad \left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&\qquad + \ 9''.366 \ \cos\left(M_{☾} - 2F_{☾} - 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

Die Entwicklung (29.51) liefert

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\Delta L_{\alpha dd}\right)}{d\left(d\right)} &= 294''.0 \times 10^{-9}\left\{\sin\left(2D_{☾}\right) + \Delta JD \cdot \cos\left(2D_{☾}\right)\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right\} + \\
&+ 35''.0 \times 10^{-9} \ \cdot\left\{\sin\left(M_{☾} + 2D_{☾}\right) + \Delta JD \cdot \cos\left(M_{☾} + 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\} - \\
&- 220''.0 \times 10^{-9} \cdot\left\{\sin\left(M_{☾} - 2D_{☾}\right) + \Delta JD \cdot \cos\left(M_{☾} - 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\} - \\
&- 17''.0 \times 10^{-9} \ \cdot\left\{\sin\left(M_{\odot} - 2D_{☾}\right) + \Delta JD \cdot \cos\left(M_{\odot} - 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\} - \\
&- 12''.0 \times 10^{-9} \ \cdot\left\{\sin\left(M_{☾} - M_{\odot}\right) + \Delta JD \cdot \cos\left(M_{☾} - M_{\odot}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\} + \cdots
\end{aligned}
\tag{29.81}
$$

Für die Nutation in Länge $\Delta\Psi$ liefert Formel[1] (9.122)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\Delta\Psi\right)}{d\left(d\right)} &= -0''.01742 \sin\Omega_{☾} / 36525 - (17''.1996 + 0''.01742\,T)\cos\Omega_{☾}\frac{d\left(\Omega_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + \\
&+ 0''.00002 \sin 2\Omega_{☾} + (0''.4124 + 0''.00004\,T)\cos 2\Omega_{☾}\frac{d\left(\Omega_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - \\
&- 0''.00016 \sin L_{\odot} - (1''.3187 + 0''.00016\,T)\cos L_{\odot}\frac{d\left(L_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} + \\
&- 0''.00034 \sin M_{\odot} + (0''.1426 - 0''.00034\,T)\cos M_{\odot}\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} -
\end{aligned}
\tag{29.82}
$$

[1] Abschnitt 9.4.1. (Band II)

$$
\begin{aligned}
&-0''.00012\sin(2L_\odot+M_\odot)+(0''.0517-0''.00012T)\cos(2L_\odot+M_\odot)\left[2\frac{d(L_\odot)}{d(d)}+\frac{d(M_\odot)}{d(d)}\right]+\\
&-0''.00005\sin(2L_\odot-M_\odot)+(0''.0217-0''.00005T)\cos(2L_\odot-M_\odot)\left[2\frac{d(L_\odot)}{d(d)}-\frac{d(M_\odot)}{d(d)}\right]+\\
&+0''.00001\sin(2L_\odot-\Omega_☾)+(0''.0129+0''.00001T)\cos(2L_\odot-\Omega_☾)\left[2\frac{d(L_\odot)}{d(d)}-\frac{d(\Omega_☾)}{d(d)}\right]-\\
&-0''.00002\sin 2L_☾-(0''.4548+0''.00004T)\cos 2L_☾\frac{d(L_☾)}{d(d)}+\\
&+0''.00001\sin M_☾+(0''.0712+0''.00001T)\cos M_☾\frac{d(M_☾)}{d(d)}-\\
&-0''.00004\sin(2F_☾+\Omega_☾)-(0''.0386+0''.00004)\cos(2F_☾+\Omega_☾)\left[2\frac{d(F_☾)}{d(d)}+\frac{d(\Omega_☾)}{d(d)}\right]-\\
&-0''.0301\cos(2L_☾+M_☾)\left[2\frac{d(L_☾)}{d(d)}+\frac{d(M_☾)}{d(d)}\right]-\\
&-0''.0158\cos(M_☾-2L_☾)\left[\frac{d(M_☾)}{d(d)}-2\frac{d(L_☾)}{d(d)}\right]+\\
&+0''.0123\cos(2F_☾-M_☾)\left[2\frac{d(F_☾)}{d(d)}-\frac{d(M_☾)}{d(d)}\right]+\ldots
\end{aligned}
$$

29.1.7.2 Die Variation der ekliptikalen Breite des Mondes

Die Variation der ekliptikalen Breite lautet mit dem Ausdruck (29.59)

$$
\begin{aligned}
\frac{d(b_☾)}{d(d)}\cdot 3600 &= \left[\gamma_{b1}\cos(SB)+3\gamma_{b2}\cos(3SB)\right]\frac{d(SB)}{d(d)}+\\
&\quad+\frac{d(\Delta b_{N\beta})}{d(d)}+\frac{d(\Delta b_{N\beta\beta})}{d(d)}\Delta b_{N\beta\beta}\quad[\text{Grad/Tag}]\ .
\end{aligned}
\tag{29.83}
$$

wobei

$$
\frac{d(SB)}{d(d)}=\frac{d(F_☾)}{d(d)}+\frac{d(\Delta l_\eta)}{d(d)}-\frac{d(\Delta\Omega_\eta)}{d(d)}+\frac{d(\Delta b_{S\beta})}{d(d)}\quad . \tag{29.84}
$$

Die Ableitungen $d(F_☾)/d(d), d(\Delta\lambda_\eta)/d(d), d(\Delta\Omega_\eta)/d(d)$ sind in den Ausdrücken (29.70) und (29.75) gegeben. Benötigt werden noch mit der Entwicklung (29.54)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\Delta b_{S\beta}\right)}{d(d)} = & \left[-112''.79\cos\left(D_{☾}\right) + 4746''.72\cos\left(2D_{☾}\right) + 56''.24\cos\left(4D_{☾}\right)\right]\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)} + \\
& + 6''.98\cos\left(M_{☾}+4D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} + 4\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] + \\
& + 192''.72\cos\left(M_{☾}+2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} + 2\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] - \\
& - 13''.51\cos\left(M_{☾}+D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} + \frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] + 22609''.07\cos\left(M_{☾}\right)\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - \\
& - 4578''.13\cos\left(M_{☾}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - 2\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] + \\
& + 5''.44\cos\left(M_{☾}-3D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - 3\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] - \\
& - 38''.98\cos\left(M_{☾}-4D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - 4\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] + \\
& + 29''.56\cos\left(2M_{☾}+2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} + \frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] + 1535''.92\cos\left(2M_{☾}\right)\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - \\
& - 305''.06\cos\left(2M_{☾}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - \frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] - \\
& + 68''.14\cos\left(2M_{☾}-4D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - 2\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] + 151''.92\cos\left(3M_{☾}\right)\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - \\
& - 16''.40\cos\left(3M_{☾}-2D_{☾}\right)\left[3\frac{d\left(\Delta M_{☾}\right)}{d(d)} - 2\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] - \\
& - 25''.10\cos\left(M_{\odot}+2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(\Delta M_{\odot}\right)}{d(d)} + 2\frac{d\left(\Delta D_{☾}\right)}{d(d)}\right] + \\
& + 17''.93\cos\left(M_{\odot}+D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d(d)} + \frac{d\left(D_{☾}\right)}{d(d)}\right] - 126''.98\cos\left(M_{\odot}\right)\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d(d)} - \\
& - 165''.06\cos\left(M_{\odot}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d(d)} + \frac{d\left(D_{☾}\right)}{d(d)}\right] - \\
& - 33''.56\cos\left(2M_{\odot}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d(d)} - \frac{d\left(D_{☾}\right)}{d(d)}\right] - \\
& - 11''.75\cos\left(M_{☾}+M_{\odot}+2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d(d)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d(d)} + 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d(d)}\right] -
\end{aligned}
\tag{29.85}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \; 182''.36 \cos\left(M_{☾} + M_{\odot} - 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 23''.59 \cos\left(M_{☾} - M_{\odot} - 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 138''.76 \cos\left(M_{☾} - M_{\odot}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 31''.70 \cos\left(M_{☾} - M_{\odot} + 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 10''.78 \cos\left(2M_{☾} + M_{\odot}\right)\left[2\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 7''.59 \cos\left(2M_{☾} + M_{\odot} - 2D_{☾}\right)\left[2\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 11''.67 \cos\left(2M_{☾} + M_{\odot}\right)\left[2\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(M_{\odot}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 104''.28 \cos\left(2F_{☾} - 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - \frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] - \\
&- \; 9''.52 \cos\left(M_{☾} + 2F_{☾} - 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \\
&+ \; 85''.78 \cos\left(M_{☾} - 2F_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right] + \cdots
\end{aligned}
$$

sowie mit (29.56)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\left(\Delta b_{N\beta\beta}\right)}{d\left(d\right)} = {} & 15''.0 \times 10^{-9} \cdot \left\{\sin\left(F_{☾} + 2D_{☾}\right) + \Delta JD \cdot \cos\left(F_{☾} + 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)} + 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\} - \\
& - 81''.0 \times 10^{-9} \cdot \left\{\sin\left(F_{☾} - 2D_{☾}\right) + \Delta JD \cdot \cos\left(F_{☾} - 2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(F_{☾}\right)}{d\left(d\right)} - 2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]\right\} + \cdots \quad .
\end{aligned}
$$

29.1.7.3 Die Variation der Parallaxe des Mondes

Aus Formel (29.64) erhält man

$$
\frac{d\left(\Delta P_{☾}\right)}{d\left(d\right)} \cdot 3422''.7 = \left(\frac{d\left(\Delta P_{☾\mathrm{g}}\right)}{d\left(d\right)} + \frac{d\left(\Delta P_{☾\mathrm{p}}\right)}{d\left(d\right)}\right) P_{☾N} \tag{29.86}
$$

und aus (29.65) für die Variation der Parallaxe

$$\frac{d\left(P_{☾}\right)}{d\left(d\right)}=\left[1+\frac{3\left(\Delta P_{☾}\right)^2}{6\cdot\left(206264.806\right)^2}\right]\frac{d\left(\Delta P_{☾}\right)}{d\left(d\right)} \quad . \tag{29.87}$$

Die Einzelanteile lauten mit (29.62)

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\Delta P_{☾\mathrm{g}}\right)}{d\left(d\right)}=&-256.4666\sin\left(2D_{☾}\right)\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+\\&-186''.5398\sin\left(M_{☾}\right)\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+\\&-34''.3117\sin\left(M_{☾}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}-2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{d\left(d\right)}\right]+\\&-20''.3314\sin\left(2M_{☾}\right)\frac{d\left(M_{☾}\right)}{d\left(d\right)}+\cdots\end{aligned} \tag{29.88}$$

sowie mit (29.63)

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\Delta P_{☾p}\right)}{dx}=&-7''.5\times10^{-9}\cdot36525\cdot\sin\left(2D_{☾}\right)\frac{d\left(D_{☾}\right)}{dx}-\\&-1''.0\times10^{-9}\cdot36525\cdot\sin\left(M_{☾}-2D_{☾}\right)\left[\frac{d\left(M_{☾}\right)}{dx}-2\frac{d\left(D_{☾}\right)}{dx}\right]+\cdots\end{aligned} \tag{29.89}$$

Der wahre Abstand des Mondes hat somit vom Erdmittelpunkt mit Beziehung (29.61) die Variation

$$\frac{dr_{☾}}{d\left(d\right)}=-\frac{R_E\cos\left(P_{☾}\right)}{\sin^2\left(P_{☾}\right)}\frac{d\left(P_{☾}\right)}{d\left(d\right)} \quad \left[\text{km/Tag}\right]. \tag{29.90}$$

29.2 Die Bewegung des Mondes um die Sonne

Für hochpräzise Berechnungen der Bewegung des Mondes wird die Bewegungsgleichung des Mondes, in der alle bekannten Einflüsse auf die Bewegung des Mondes enthalten sind, integriert. Dazu wird die Bewegung des Mondes – wie die der Erde – in Bezug auf den Mittelpunkt der Sonne durch Integration der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\odot☾}=-\mu_{\odot}\frac{\mathbf{r}_{\odot☾}}{r_{\odot☾}^3}+\mathbf{R}_{\odot☾} \tag{29.91}$$

mit der genügenden Genauigkeit erhalten, sofern der „Störvektor“ $\mathbf{R}_{\odot☾}$ aller physikalischen Einflüsse auf die Mondbewegung hinreichend genau bekannt ist. Der größte „Störfaktor“ ist die gravitative Wirkung der Erde auf die Mondbewegung, welche die Stabilität des Doppelplanetensystems garantiert. Weitere physikalische Einflüsse sind die Attraktionen der Planeten des Sonnensystems, die gravitativen Anomalien des Erdkörpers, in qualitativer Hinsicht der Strahlungsdruck durch die Sonne, der reflektierte Strahlungsdruck von der Erde auf den Mond, der Sonnenwind, weitere interplanetare und auch interstellare Effekte, sowie Effekte, welche durch

die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben werden können, wie etwa der *Lense-Thirring*-Effekt[1].

Das Ergebnis der vollständigen Integration kann etwa in den JPL Ephemeriden zusammen mit den Ephemeriden von Sonne und Planeten erhalten werden[2].

Die *Kepler*schen Bahnelemente des Baryzentrums des Erde-Mond-Systems auf seiner Bahn um die Sonne sind:

$$
\begin{aligned}
a &= 1.4959826045\times 10^{8}\ \mathrm{km} + 840.7400294\,T\ \ \mathrm{km} \\
&= 1.00000261\,\mathrm{AE}\ +0.00000562\,T\ \ \mathrm{AE} \\
e &= 0.01671123 - 0.00004392\,T \\
i &= -0°.00001531 - 0°.01294668\,T \\
\Omega &= 0°.0 + 0°.0\,T \\
\tilde{\omega} &= 102°.93768193 + 0°.3237364\,T \\
\omega &= 102°.93768193 + 0°.3237364\,T \\
M_0 &= 357.52688973 + 35999°.0487134\,T \\
L &= 100°.46457166 + 35999°.37244981\,T
\end{aligned}
$$

Tabelle 29-4: Die *Kepler*schen Bahnelemente[3] der Bewegung des Erde-Mond-Baryzentrums um die Sonne bezogen auf die mittlere Ekliptik und das mittlere Äquinoktium J2000.0

Es seien $\mathbf{r}_{♁☾}$ der geozentrische Ortsvektor des Mondes, berechnet etwa mit den Polarkoordinaten aus Abschnitt 29.1.6, sowie $\mathbf{r}_{☉♁}$ der heliozentrische Ortsvektor der Erde. Der heliozentrische Ortsvektor des Mondes ist

$$\mathbf{r}_{☉☾} = \mathbf{r}_{☉♁} + \mathbf{r}_{♁☾} \quad . \tag{29.92}$$

Üblicherweise ist nur der heliozentrische Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{\odot B}, \dot{\mathbf{r}}_{\odot B}\right)$ des Baryzentrums des Erde-Mondsystems gegeben. Um die Zustandsvektoren von Erde und Mond bezogen auf das Baryzentrum des Erde-Mondsystems zu erhalten kann (zumindest) für Überschlagsrechnungen folgendermaßen vorangegangen werden. Dazu werden als ein Beispiel die Daten verwendet, die zur Erstellung der JPL Ephemeride DE405/LE405 zugrunde gelegt wurden[4].

Der geozentrische Zustandsvektor $\mathbf{r}_{♁☾} = x^{i}_{♁☾}\,\mathbf{p}_i$ des Mondes im Frühlingspunkt-bezogenen $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem zur Fundamentalepoche J2000.0 hat zum Zeitpunkt[5] JED 2440400.5 (1969, Juni, 28, 0h) die kartesischen Koordinaten

[1] siehe dazu auch die Aufzählungen in Kapitel 17 (Band III)

[2] hierzu in: STANDISH, E. M. [1982], 'The JPL Planetary Ephemeris', *Cel. Mech.* ***26***, pp. 181–186;

[3] aus: URBAN, E. S. et al. (ed.) [2013], p.338

[4] aus URBAN, E. S. et al. (ed.) [2013], p.326

[5] Julianisches Datum Ephemeridenzeit (statt ET jetzt TT, siehe Bild 9-2, Abschnitt 9.1.3, Band II)

$$
\begin{aligned}
x_{♁☾1} &= -1.209016068\times 10^5 \text{ km} \\
x_{♁☾2} &= -2.983923997\times 10^5 \text{ km} \\
x_{♁☾3} &= -1.626526903\times 10^5 \text{ km} \\
\dot{x}_{♁☾1} &= 1.040752410 \text{ km/s} \\
\dot{x}_{♁☾2} &= -0.289924586 \text{ km/s} \\
\dot{x}_{♁☾3} &= -0.148147160 \text{ km/s} \quad .
\end{aligned}
$$

Daraus lässt sich auf die baryzentrischen Zustandsvektoren von Erde und Mond schließen, wenn nach dem Schwerpunktsatz für die baryzentrischen Ortsvektoren $\mathbf{r}_{B♁}$ der Erde sowie $\mathbf{r}_{B☾}$ des Mondes mit den jeweiligen Massen[1]

$$M_{♁} = 5.9742\times 10^{24} \text{ kg} \;,\; M_{☾} = 7.3483\times 10^{22} \text{ kg} \;,\; \frac{M_{♁}}{M_{☾}} = 81.3005691 \tag{29.93}$$

die Bedingung

$$M_{☾}\,\mathbf{r}_{B☾} + M_{♁}\,\mathbf{r}_{B♁} = 0 \;,\; M_{☾}\,\dot{\mathbf{r}}_{B☾} + M_{♁}\,\dot{\mathbf{r}}_{B♁} = 0 \tag{29.94}$$

angesetzt wird. Hier kann die Eigenbewegung des Schwerpunktes[2] vernachlässigt werden.

Der baryzentrische Ortsvektor der Erde im Erde-Mond-System lautet (analog auch der Geschwindigkeitsvektor)

$$\mathbf{r}_{B♁} = x^i_{B♁}\,\mathbf{p}_i = -\frac{\mathbf{r}_{♁☾}}{1+\dfrac{M_{♁}}{M_{☾}}} \mathrel{\hat{=}} -0.012150586\;\mathbf{r}_{♁☾}\;[\text{km}] \quad . \tag{29.95}$$

Seine äquatorialen kartesischen Koordinaten sind

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{B}♁1} &= 1469.02532405 \text{ km} \\
x_{\mathrm{B}♁2} &= 3625.64239852 \text{ km} \\
x_{\mathrm{B}♁3} &= 1976.32543851 \text{ km} \\
\dot{x}_{\mathrm{B}♁1} &= -0.012645751 \text{ km/s} \\
\dot{x}_{\mathrm{B}♁2} &= 0.0035227535 \text{ km/s} \\
\dot{x}_{\mathrm{B}♁3} &= 0.001800075 \text{ km/s} \quad .
\end{aligned}
$$

Das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems hat vom Erdmittelpunkt die mittlere Distanz 4382.828 km. Es liegt stets innerhalb des Erdkörpers.

Der baryzentrische Ortsvektor des Mondes lautet

---

[1] SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992], pp.700-701; URBAN, E. S. et al. (ed.) [2013], p.327; WILLIAMS, J. G. et al. [2013], p. 8

[2] gemäß Formeln (10.51), (10.52), in Abschnitt 10.2.1.1 (Band III)

$$\mathbf{r}_{B☾} = x^i_{B☾}\ \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{r}_{♁☾}}{1+\dfrac{M_☾}{M_♁}} = 0.987849414\ \mathbf{r}_{♁☾}\ [\mathrm{km}] \tag{29.96}$$

mit den äquatorialen kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
x_{B☾1} &= -119432.581476\,\mathrm{km}\\
x_{B☾2} &= -294766.757301\,\mathrm{km}\\
x_{B☾3} &= -160676.364861\,\mathrm{km}\\
\dot{x}_{B☾1} &= 1.028106659\,\mathrm{km/s}\\
\dot{x}_{B☾2} &= -0.286401832\,\mathrm{km/s}\\
\dot{x}_{B☾3} &= -0.146347085\,\mathrm{km/s}\quad .
\end{aligned}$$

Zum selben Zeitpunkt hat der heliozentrische Zustandsvektor des Baryzentrums des Erde-Mond-Systems die äquatorialen Koordinaten[1]

$$\begin{aligned}
x_{\odot B1} &= 1.735558329\times 10^7\ \mathrm{km}\\
x_{\odot B2} &= -1.386182172\times 10^8\ \mathrm{km}\\
x_{\odot B3} &= -6.010936328\times 10^7\ \mathrm{km}\\
\dot{x}_{\odot B1} &= 29.10859434\,\mathrm{km/s}\\
\dot{x}_{\odot B2} &= 3.018157264\,\mathrm{km/s}\\
\dot{x}_{\odot B3} &= 1.308935941\,\mathrm{km/s}\quad .
\end{aligned}$$

Damit kann schließlich der heliozentrische Zustandsvektor der Erde aus der Beziehung $\mathbf{r}_{\odot♁} = \mathbf{r}_{\odot B} + \mathbf{r}_{B♁}$, $\dot{\mathbf{r}}_{\odot♁} = \dot{\mathbf{r}}_{\odot B} + \dot{\mathbf{r}}_{B♁}$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}
x_{\odot♁1} &= 1.735705232\times 10^7\ \mathrm{km}\\
x_{\odot♁2} &= -1.386145916\times 10^8\ \mathrm{km}\\
x_{\odot♁3} &= -6.010738695\times 10^7\ \mathrm{km}\\
\dot{x}_{\odot♁1} &= 29.09594859\,\mathrm{km/s}\\
\dot{x}_{\odot♁2} &= 3.021680018\,\mathrm{km/s}\\
\dot{x}_{\odot♁3} &= 1.310736016\,\mathrm{km/s}\quad .
\end{aligned}$$

Entsprechend wird der heliozentrische Zustandsvektor des Mondes mit der Beziehung $\mathbf{r}_{\odot☾} = \mathbf{r}_{\odot B} + \mathbf{r}_{B☾}$, $\dot{\mathbf{r}}_{\odot☾} = \dot{\mathbf{r}}_{\odot B} + \dot{\mathbf{r}}_{B☾}$ erhalten:

[1] aus URBAN, E. S. et al. (ed.) [2013], p.326

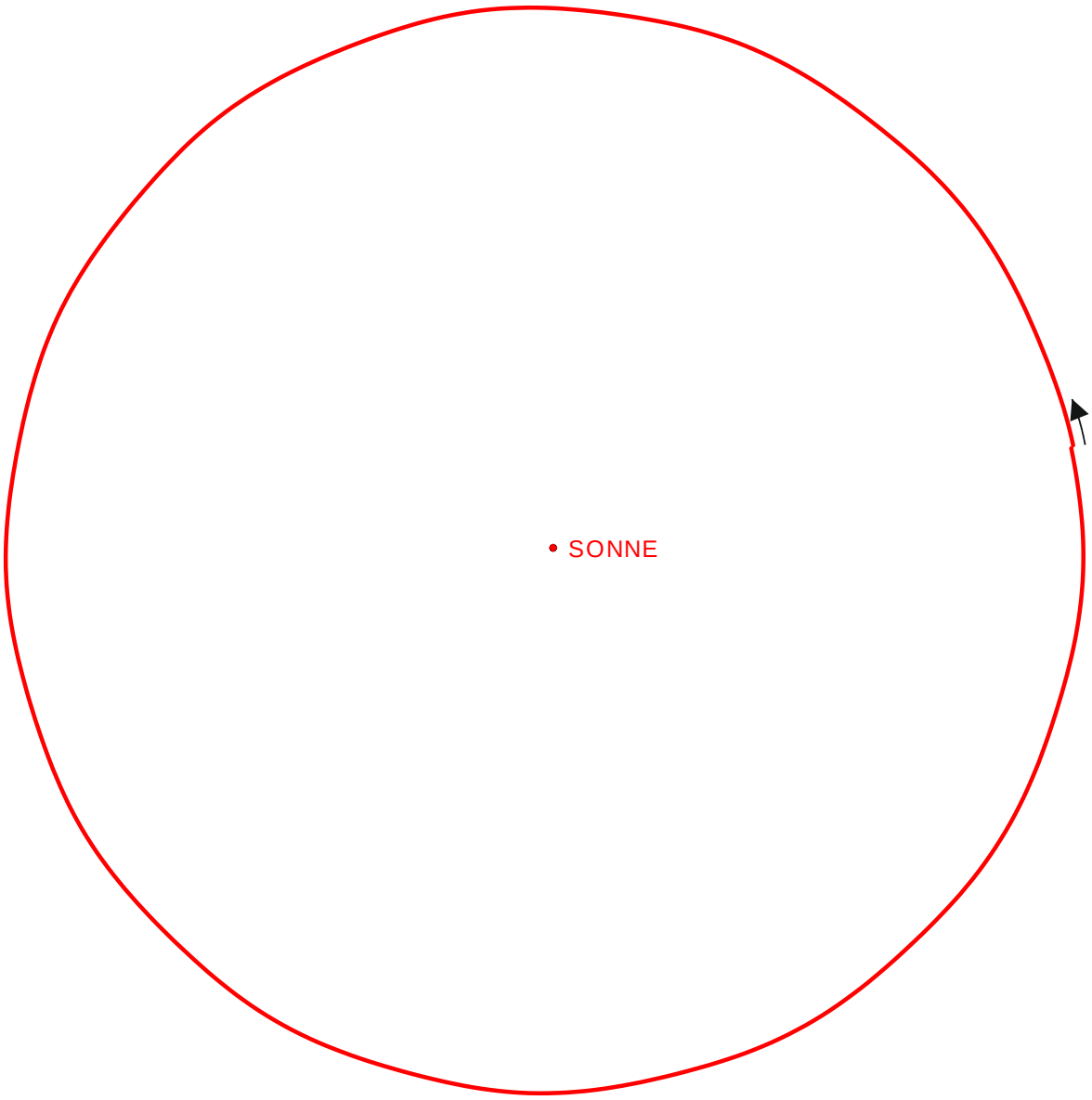


Bild 29-2: Die Bahn des Erdmondes um die Sonne im Jahr 2017 in realistischen Größenverhältnissen: man beachte die leichten Schwankungen der Mondbahn als Folge der hier nicht eingezeichneten gekoppelten Bewegung mit der Erde. Die Größe der Sonnenscheibe entspricht den realen Verhältnissen

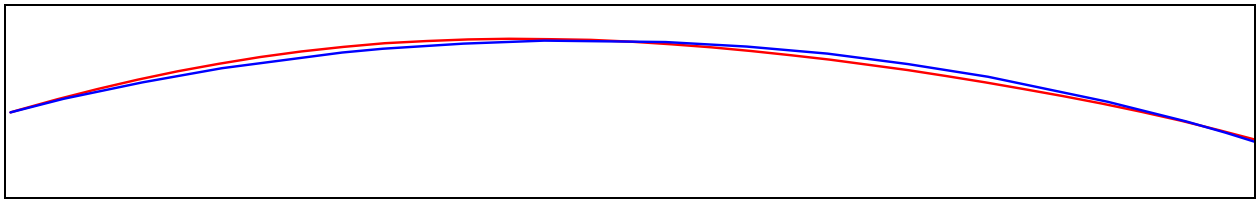


Bild 29-3: Die Bahnen von Mond (rot) und Erde (blau) um die Sonne im Verlauf eines synodischen Monats in realistischen Größenverhältnissen

$$
\begin{aligned}
x_{\odot☾1} &= 1.723615071\times 10^{7}\ \text{km}\\
x_{\odot☾2} &= -1.38912984\times 10^{8}\ \text{km}\\
x_{\odot☾3} &= -6.027003964\times 10^{7}\ \text{km}\\
\dot{x}_{\odot☾1} &= 30.136701\,\text{km/s}\\
\dot{x}_{\odot☾2} &= 2.731755432\,\text{km/s}\\
\dot{x}_{\odot☾3} &= 1.162588856\,\text{km/s}\quad .
\end{aligned}
$$

Dieser Zustandsvektor kann als Anfangswert zur Integration der Bewegungsgleichung (29.91) verwendet werden. Für eine Näherungslösung muss der „Störvektor“ $\mathbf{R}_{\odot☾}$ mindestens das Dreikörperproblem Sonne-Erde-Mond enthalten[1].

Anmerkung: Bild 29-2 auf Seite 311 zeigt die Bewegung des Mondes um die Sonne, berechnet mit dem heliozentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}_{\odot☾}$ aus Beziehung (29.92). Die Bahn der Erde ist nicht eingezeichnet, da in dieser realistischen Darstellung die beiden Bahnen nicht unterschieden werden können. Bei genauer Betrachtung kann man erkennen, dass die Bahn leichten Schwankungen unterworfen ist, welche durch die Bewegung der Erde verursacht sind. Um dies genauer darzustellen, ist in Bild 29-3 mit extremer Vergrößerung die sich umwickelnde Bewegung von Mond und Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne zu erkennen. Diese Bewegung erinnert an die Helix-Bewegung der Satelliten TerraSAR-X und TanDEM-X (siehe in Abschnitt 23.13.5). Exakt verglichen können die beiden Bewegungsvorgänge allerdings nicht, da Erde und Mond eine nicht zu vernachlässigende gravitative Anziehung aufeinander ausüben, welche Ursache für die synodische Bewegung des Mondes relativ zur Erde ist. Eine solche Anziehung kann bei den beiden Satelliten vernachlässigt werden, so dass die relative Bewegung der beiden Satelliten umeinander dem gemeinsamen drakonitischen Umlauf um die Erde entspricht. ◀

29.3 Das Koordinatensystem der Mondbahn

Die Bewegung des Mondes ist in spezieller Weise an die Bewegung der Erde gekoppelt, auch wenn die wahre Bewegung als heliozentrische Bewegung aufgefasst werden muss. Aus diesem Grund wird die Bewegung des Mondes mit den in Abschnitt 29.1 zusammengestellten Parametern berechnet. In einem zweiten Schritt kann in Kopplung mit der Bewegung der Erde die Bewegung des Mondes wie im vorhergehenden Abschnitt besprochen heliozentrisch dargestellt werden. Die benötigten Koordinatensysteme werden im Fall des Mondes geozentrisch bzw. selenozentrisch dargestellt.

29.3.1 Das geozentrische Bahnsystem des Mondes

Das Mondbahnsystem ist auf die Bahnebene des Mondes bezogen. Der Mittelpunkt des Systems ist für Untersuchungen der Bahndynamik das Baryzentrum des Erde-Mond-Systems. Üblicherweise ist allerdings die Beschreibung der Mondbewegung auf den Erdmittelpunkt

[1] Siehe in Abschnitt 17.4, sowie die allgemeine Behandlung des Dreikörperproblems in Abschnitt 10.4 (Band III)

bezogen[1]. Das $\mathbf{q}_j^{(☾)}$ – Basissystem (siehe Bild 29-4 auf S. 313) wird so gewählt, dass $\mathbf{q}_1^{(☾)}$ zum aufsteigenden Knoten ☊ der Bahnebene mit der Ekliptikebene gerichtet ist, $\mathbf{q}_2^{(☾)}$ in der Bahnebene gegenüber dem Knoten um 90° in positiver Bewegungsrichtung des betrachteten Objektes gedreht ist und $\mathbf{q}_3^{(☾)} = \mathbf{q}_1^{(☾)} \times \mathbf{q}_2^{(☾)}$ zu dem dadurch definierten (Nord-) Pol des Bahnsystems weist.

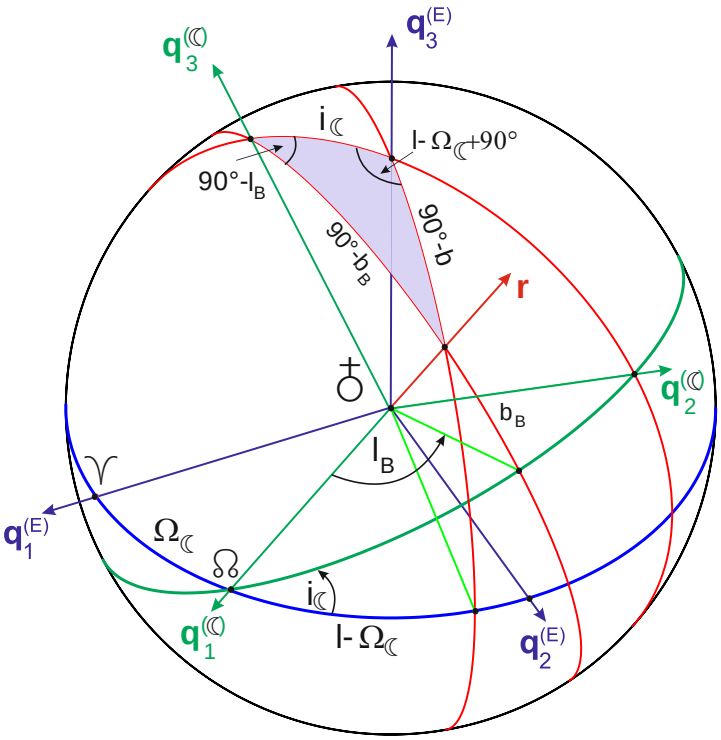


Bild 29-4: Das $\mathbf{q}_j^{(☾)}$ – Bahnsystem des Mondes und sein Bezug zum $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptik-System

Als Polarkoordinaten $r\left[l_B, b_B\right]$ werden die *Länge in der Bahn* in der Bahnebene vom Knoten rechtläufig im Sinne der Bewegung des Mondes im Gradmaß gezählt

$$0° \;\leq\; l_B \;\leq\; 360° \quad , \tag{29.97}$$

die *Breite* positiv von der Bahnebene zum Nordpol der Bahn, negativ zu ihrem Südpol

$$-90° \;\leq\; b_B \;\leq\; 90° \quad . \tag{29.98}$$

Ein Objekt hat in diesem System den geozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l_B, b_B\right] \quad , \tag{29.99}$$

mit kartesischen Koordinaten $x_{Bj}\,[\,j = 1,2,3]$ die Darstellung

$$\mathbf{r} \;=\; x_B{}^j\, \mathbf{q}_j^{(☾)} \quad . \tag{29.100}$$

Somit ist der Zusammenhang der Polarkoordinaten $r\left[l_B, b_B\right]$ mit den kartesischen Koordinaten x_{Bi} gegeben durch

[1] Vgl. etwa die Darstellung der geozentrischen ekliptikalen Polarkoordinaten in Abschnitt 29.1.6 ab Seite 294

$$
\begin{aligned}
x_{B1} &= r\cos b_B \cos l_B \\
x_{B2} &= r\cos b_B \sin l_B \\
x_{B3} &= r\sin b_B \quad .
\end{aligned}
\tag{29.101}
$$

Die Polarkoordinaten des Bahnsystems werden aus den kartesischen Koordinaten (etwa nach dem Formelsystem (4.91) (in Abschnitt 4.2.2, Band II)[1]) erhalten

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_B{}^i\, x_{Bi}} \\
\sin b_B &= \frac{x_{B3}}{r} \quad , \quad \cos b_B = \sqrt{1-\sin^2 b_B} \\
\cos l_B &= \frac{x_{B1}}{r\cos b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \\
\sin l_B &= \frac{x_{B2}}{r\cos b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.102}
$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativ auf das Mondbahnsystem bezogenen) Geschwindigkeitsvektors lautet mit dem Formelsystem (4.123)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{B1} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B1} - \dot{b}_B\, x_{B3} \cos l_B - \left(l_B\right)^{\cdot} x_{B2} \\
\dot{x}_{B2} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B2} - \dot{b}_B\, x_{B3} \sin l_B + \left(l_B\right)^{\cdot} x_{B1} \\
\dot{x}_{B3} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B3} + r\,\dot{b}_B \cos b_B
\end{aligned}
\tag{29.103}
$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{x_B{}^i\, \dot{x}_{Bi}}{r} \\
\left(l_B\right)^{\cdot} &= \frac{x_{B1}\,\dot{x}_{B2} - x_{B2}\,\dot{x}_{B1}}{r^2\cos^2 b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \\
\dot{b}_B &= \frac{1}{r^2}\left[\left(x_{B3}\,\dot{x}_{B1} - x_{B1}\,\dot{x}_{B3}\right)\cos l_B - \left(x_{B2}\,\dot{x}_{B3} - x_{B3}\,\dot{x}_{B2}\right)\sin l_B\right] \quad , \quad \left(r > 0\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.104}
$$

Um den absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}_B{}^j\, \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + x_B{}^j\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} = \dot{\mathbf{r}}_{q^{(\mathbb{C})}} + \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{r} \; . \tag{29.105}
$$

berechnen zu können, müssen zuvor die Variationen $\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})}$ bzw. der Systemeigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}}$ durch Bezug auf ein bekanntes System erhalten werden. Ein solches System ist das Ekliptiksystem.

[1] Siehe zum Vergleich auch die Anwendung auf das geozentrische Ekliptiksystem in Abschnitt 8.2.1 (Band II)

29.3.2 Transformation zwischen Mondbahnsystem und Ekliptiksystem

Der Bezug des Mondbahnsystems zu anderen Koordinatensystemen wird üblicherweise über das (auf dasselbe Zentrum, zum Beispiel das Baryzentrum des Sonnensystems, bezogene) Ekliptiksystem hergestellt. Seien die $\mathbf{q}_k^{(E)}$ die Basisvektoren des Ekliptiksystems, $\mathbf{q}_j^{(☾)}$ die Basisvektoren im Mondbahnsystem. In der Beziehung

$$\mathbf{q}_k^{(E)} \;=\; a_{Bk}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(☾)} \tag{29.106}$$

wird nach Bild 29-4 auf S. 313 das Ekliptiksystem um den Ekliptikpol mit der Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega_☾$ in den Frühlingspunkt und um den Knoten mit der Inklination $i_☾$ in die Mondbahnebene gedreht. Die Drehung lautet

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(E)} &= \cos\Omega_☾\;\mathbf{q}_1^{(☾)} - \sin\Omega_☾\cos i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} + \sin\Omega_☾\sin i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)} \\
\mathbf{q}_2^{(E)} &= \sin\Omega_☾\;\mathbf{q}_1^{(☾)} + \cos\Omega_☾\cos i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} - \cos\Omega_☾\sin i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)} \\
\mathbf{q}_3^{(E)} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \sin i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} + \qquad \cos i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)} \quad .
\end{aligned} \tag{29.107}$$

Die Basisvektoren haben die zeitlichen Variationen

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} &= \dot{\Omega}_☾\left[-\sin\Omega_☾\;\mathbf{q}_1^{(☾)} - \cos\Omega_☾\cos i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} + \cos\Omega_☾\sin i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)}\right] + \\
&\quad + (i)^{\bullet}\sin\Omega_☾\left[\sin i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} + \cos i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)}\right] + \\
&\quad + \cos\Omega_☾\;\dot{\mathbf{q}}_1^{(☾)} - \sin\Omega_☾\cos i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_2^{(☾)} + \sin\Omega_☾\sin i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_3^{(☾)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} &= \dot{\Omega}_☾\left[\cos\Omega_☾\;\mathbf{q}_1^{(☾)} - \sin\Omega_☾\cos i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} + \sin\Omega_☾\sin i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)}\right] - \\
&\quad - (i)^{\bullet}\cos\Omega_☾\left[\sin i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} + \cos i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)}\right] + \\
&\quad + \sin\Omega_☾\;\dot{\mathbf{q}}_1^{(☾)} + \cos\Omega_☾\cos i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_2^{(☾)} - \cos\Omega_☾\sin i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_3^{(☾)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} &= (i)^{\bullet}\left[\cos i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} - \sin i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)}\right] + \sin i_☾\;\mathbf{q}_2^{(☾)} + \cos i_☾\;\mathbf{q}_3^{(☾)} \quad .
\end{aligned} \tag{29.108}$$

Die Rotationsmatrix lautet

$$\left(a_{Bk}{}^{j}\right) \;=\; \begin{bmatrix} \cos\Omega_☾ & -\cos i_☾\sin\Omega_☾ & \sin i_☾\sin\Omega_☾ \\ \sin\Omega_☾ & \cos i_☾\cos\Omega_☾ & -\sin i_☾\cos\Omega_☾ \\ 0 & \sin i_☾ & \cos i_☾ \end{bmatrix} \tag{29.109}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned}
a_{B11} &= \cos\Omega_☾ \;,\; a_{B12} = -\sin\Omega_☾\cos i_☾ \;,\; a_{B13} = \sin\Omega_☾\sin i_☾ \\
a_{B21} &= \sin\Omega_☾ \;,\; a_{B22} = \cos\Omega_☾\cos i_☾ \;,\; a_{B23} = -\cos\Omega_☾\sin i_☾ \\
a_{B31} &= 0 \;,\; a_{B32} = \sin i_☾ \;,\; a_{B33} = \cos i_☾ \quad .
\end{aligned} \tag{29.110}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{B11} &= -\dot{\Omega}_☾\,a_{B21} \;,\; \dot{a}_{B12} = -\dot{\Omega}_☾\,a_{B22} + \left(i_☾\right)^{\bullet} a_{B13} \;,\; \dot{a}_{B13} = -\dot{\Omega}_☾\,a_{23} - \left(i_☾\right)^{\bullet} a_{B12} \\
\dot{a}_{B21} &= \dot{\Omega}_☾\,a_{B11} \;,\; \dot{a}_{B22} = \dot{\Omega}_☾\,a_{B12} + \left(i_☾\right)^{\bullet} a_{B23} \;,\; \dot{a}_{B23} = -\dot{\Omega}_☾\,a_{13} - \left(i_☾\right)^{\bullet} a_{B22} \\
\dot{a}_{B31} &= 0 \;,\; \dot{a}_{B32} = \left(i_☾\right)^{\bullet} a_{B33} \;,\; \dot{a}_{B33} = -\left(i_☾\right)^{\bullet} a_{B32} \quad .
\end{aligned} \tag{29.111}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(☾)} \;=\; b_{Bj}{}^{k}\,\mathbf{q}_k^{(E)} \tag{29.112}$$

ist daher nach Abschnitt 6.1.3 wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j{}^i\right)=1$ und mit Formel (6.30) $b_{Bj}{}^k = a_{Bk}{}^j$, in Matrixschreibweise[1] $\left(b_{Bjk}\right)=\left(a_{Bkj}\right)$ und es bleibt

$$\mathbf{q}_j^{(☾)} \;=\; a_B{}^k{}_j\,\mathbf{q}_k^{(E)} \quad . \tag{29.113}$$

Die Abbildung lautet dann im Einzelnen

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(☾)} &= \cos\Omega_☾\;\mathbf{q}_1^{(E)} + \sin\Omega_☾\,\mathbf{q}_2^{(E)} \\
\mathbf{q}_2^{(☾)} &= -\sin\Omega_☾\cos i_☾\;\mathbf{q}_1^{(E)} + \cos\Omega_☾\cos i_☾\;\mathbf{q}_2^{(E)} + \sin i_☾\,\mathbf{q}_3^{(E)} \\
\mathbf{q}_3^{(☾)} &= \sin\Omega_☾\sin i_☾\;\mathbf{q}_1^{(E)} - \cos\Omega_☾\sin i_☾\;\mathbf{q}_2^{(E)} + \cos i_☾\;\mathbf{q}_3^{(E)} \quad .
\end{aligned} \tag{29.114}$$

mit den Variationen

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(☾)} &= \dot{\Omega}_☾\left(-\sin\Omega_☾\;\mathbf{q}_1^{(E)} + \cos\Omega_☾\,\mathbf{q}_2^{(E)}\right) + \cos\Omega_☾\;\dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} + \sin\Omega_☾\,\dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(☾)} &= \dot{\Omega}_☾\;\cos i_☾\;\left(-\cos\Omega_☾\,\mathbf{q}_1^{(E)} - \sin\Omega_☾\,\mathbf{q}_2^{(E)}\right) + \\
&\quad + (i)^{\bullet}\left(\sin\Omega_☾\sin i_☾\,\mathbf{q}_1^{(E)} - \cos\Omega_☾\sin i_☾\,\mathbf{q}_2^{(E)} + \cos i_☾\,\mathbf{q}_3^{(E)}\right) - \\
&\quad - \sin\Omega_☾\cos i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} + \cos\Omega_☾\cos i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} + \sin i_☾\,\dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(☾)} &= \dot{\Omega}_☾\;\sin i_☾\;\left(\cos\Omega_☾\,\mathbf{q}_1^{(E)} + \sin\Omega_☾\,\mathbf{q}_2^{(E)}\right) + \\
&\quad + (i)^{\bullet}\left(\sin\Omega_☾\cos i_☾\,\mathbf{q}_1^{(E)} - \cos\Omega_☾\cos i_☾\,\mathbf{q}_2^{(E)} - \sin i_☾\,\mathbf{q}_3^{(E)}\right) + \\
&\quad + \sin\Omega_☾\sin i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_1^{(E)} - \cos\Omega_☾\sin i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_2^{(E)} + \cos i_☾\;\dot{\mathbf{q}}_3^{(E)} \quad .
\end{aligned} \tag{29.115}$$

Da die beiden Systeme orthonormiert sind können die Variationen der Basisvektoren auch in der Form der *Frenet*schen Formeln geschrieben werden. Um sie herzuleiten werden zunächst die Basisvektoren des Ekliptiksystems aus dem System (29.107) eingesetzt. Die Variationen $\dot{\mathbf{q}}_j^{(E)}$ der Basisvektoren des Ekliptiksystems haben bezüglich des $\mathbf{q}_j^{(☾)}$ – Systems mit dem relativen Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(☾)}} := \mathbf{D}_{q^{(E)}} - \mathbf{D}_{q^{(☾)}} =: D_{q^{(E)}q^{(☾)}}{}^j\,\mathbf{q}_j^{(E)} \tag{29.116}$$

die *Frenet*schen Formeln

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(E)} = \mathbf{D}_{q^{(E)}} \times \mathbf{q}_j^{(E)} = \mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(☾)}} \times \mathbf{q}_j^{(E)} + \mathbf{D}_{q^{(☾)}} \times \mathbf{q}_j^{(E)} \quad . \tag{29.117}$$

In der allgemeingültigen Darstellung der Variationen der Basisvektoren des Mondbahnsystems

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(☾)} = \mathbf{D}_{q^{(☾)}} \times \mathbf{q}_j^{(☾)} \tag{29.118}$$

hat der absolute Eigenbewegungsvektor dieses System die Darstellung

$$\mathbf{D}_{q^{(☾)}} = \mathbf{D}_{q^{(☾)}} - \mathbf{D}_{q^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}} = \mathbf{D}_{q^{(☾)}q^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}p} + \mathbf{D}_p \quad . \tag{29.119}$$

Damit folgt aus den Variationsgleichungen (29.115) für den relativen Eigenbewegungsvektor des Mondbahnsystems relativ zum Ekliptiksystem

$$\mathbf{D}_{q^{(☾)}q^{(E)}} := \mathbf{D}_{q^{(☾)}} - \mathbf{D}_{q^{(E)}} = D^j_{q^{(☾)}q^{(E)}}\;\mathbf{q}_j^{(☾)} \quad . \tag{29.120}$$

[1] siehe auch Abschnitt 6.3.2 (Band II)

Die Koeffizienten des relativen Eigenbewegungsvektors des Mondbahnsystems relativ zum Ekliptiksystem lauten dann[1]

$$\begin{aligned} D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}1} &= (i_{\mathbb{C}})^{\bullet} \\ D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}2} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \\ D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}3} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \end{aligned} \tag{29.121}$$

und die zugehörenden *Frenet*schen Formeln mit den Variationen (29.115)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(\mathbb{C})} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} - \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(E)}}{}^{k} a_{Bk3} \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(E)}}{}^{k} a_{Bk2} \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(\mathbb{C})} &= -\dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \cos i_{\mathbb{C}} \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} + (i_{\mathbb{C}})^{\bullet} \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(E)}}{}^{k} a_{Bk3} \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(E)}}{}^{k} a_{Bk1} \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(\mathbb{C})} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \sin i_{\mathbb{C}} \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - (i_{\mathbb{C}})^{\bullet} \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} + D_{q^{(E)}}{}^{k} a_{Bk2} \mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(E)}}{}^{k} a_{Bk1} \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} \quad . \end{aligned} \tag{29.122}$$

Für eine vollständige Aussage der absoluten Eigenbewegung des Mondbahnsystems wird in diesem Zusammenhang die absolute Eigenbewegung des Ekliptiksystems benötigt. Dies kann etwa durch Bezug auf das Erdäquatorsystem erreicht werden, wenn dieses als ein Fundamentalsystem angenommen wird[2].

Der relative Eigenbewegungsvektor des Ekliptiksystems in Bezug auf das Mondbahnsystem kann nach Formel (6.142) berechnet werden:

$$\begin{aligned} D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}1} &= -(i_{\mathbb{C}})^{\bullet} \cos \Omega_{\mathbb{C}} \\ D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}2} &= -(i_{\mathbb{C}})^{\bullet} \sin \Omega_{\mathbb{C}} \\ D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}3} &= -\dot{\Omega}_{\mathbb{C}} \quad . \end{aligned} \tag{29.123}$$

Diese Ausdrücke können auch aus der Zuordnung

$$\mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}} = -\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} \tag{29.124}$$

erhalten werden. Wichtig ist hier der richtige Bezug auf das entsprechende Basissystem:

$$\mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}} = D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}}{}^{j} \mathbf{q}_j^{(E)} = -D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^{k} \mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})} = -D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^{k} a_B{}^{j}{}_{k} \mathbf{q}_j^{(E)} \quad . \tag{29.125}$$

Seien y^i die Komponenten eines heliozentrischen Ortsvektors im $\mathbf{q}_i^{(E)}$ – Ekliptiksystem, gilt wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= y^i \mathbf{q}_i^{(E)} = y^i a_{Bi}{}^{j} \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = x_B{}^{j} \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{y}^i \mathbf{q}_i^{(E)} + y^i \dot{\mathbf{q}}_i^{(E)} = \dot{x}_B{}^{j} \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + x_B{}^{j} \dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} \end{aligned} \tag{29.126}$$

für die Transformationen der Komponenten

$$x_B{}^{j} = a_{Bi}{}^{j} y^i \ , \ y^i = a_B{}^{i}{}_{j} x_{\mathbb{C}}{}^{j} \tag{29.127}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\dot{x}_B{}^{j} = \dot{a}_B{}^{j} y^i + a_{Bi}{}^{j} \dot{y}^i \quad , \quad \dot{y}^i = \dot{a}_B{}^{i}{}_{j} x_B{}^{j} + a_B{}^{i}{}_{j} \dot{x}_B{}^{j} \quad . \tag{29.128}$$

---

[1] Diese Beziehungen können auch direkt aus den Formeln (6.136) in Abschnitt 6.3.4 (Band II) erhalten werden, wenn die Eulerschen Drehwinkel $A = \Omega_{\mathbb{C}}, B = i_{\mathbb{C}}, C = 0$ eingesetzt werden.

[2] Siehe im nächsten Abschnitt 29.3.3

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{B1} &= y_1 \cos\Omega_{☾} \phantom{\sin i_{☾}} + y_2 \sin\Omega_{☾} \\ x_{B2} &= -y_1 \sin\Omega_{☾} \cos i_{☾} + y_2 \cos\Omega_{☾} \cos i_{☾} + y_3 \sin i_{☾} \\ x_{B3} &= y_1 \sin\Omega_{☾} \sin i_{☾} - y_2 \cos\Omega_{☾} \sin i_{☾} + y_3 \cos i_{☾} \end{aligned} \tag{29.129}$$

und für die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Mondbahnsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_{B1} &= \dot{y}_1 \cos\Omega_{☾} \phantom{\sin i_{☾}} + \dot{y}_2 \sin\Omega_{☾} + \dot{\Omega}_{☾} \left(-y_1 \sin\Omega_{☾} + y_2 \cos\Omega_{☾}\right) \\ \dot{x}_{B2} &= -\dot{y}_1 \sin\Omega_{☾} \cos i_{☾} + \dot{y}_2 \cos\Omega_{☾} \cos i_{☾} + \dot{y}_3 \sin i_{☾} - \dot{\Omega}_{☾}\, x_{B1} \cos i_{☾} + \left(i_{☾}\right)^{\cdot} x_{B3} \\ \dot{x}_{B3} &= \dot{y}_1 \sin\Omega_{☾} \sin i_{☾} - \dot{y}_2 \cos\Omega_{☾} \sin i_{☾} + \dot{y}_3 \cos i_{☾} + \dot{\Omega}_{☾}\, x_{B1} \sin i_{☾} - \left(i_{☾}\right)^{\cdot} x_{B2} \quad . \end{aligned} \tag{29.130}$$

Für die Umkehrabbildung folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{B1} \cos\Omega_{☾} - x_{B2} \sin\Omega_{☾} \cos i_{☾} + x_{B3} \sin\Omega_{☾} \sin i_{☾} \\ y_2 &= x_{B1} \sin\Omega_{☾} + x_{B2} \cos\Omega_{☾} \cos i_{☾} - x_{B3} \cos\Omega_{☾} \sin i_{☾} \\ y_3 &= \phantom{x_{B1} \sin\Omega_{☾}} + x_{B2} \sin i_{☾} \phantom{\cos\Omega_{☾}} + x_{B3} \cos i_{☾} \end{aligned} \tag{29.131}$$

und den Geschwindigkeitskomponenten relativ zum Ekliptiksystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_{B1} \cos\Omega_{☾} - \dot{x}_{B2} \sin\Omega_{☾} \cos i_{☾} + \dot{x}_{B3} \sin\Omega_{☾} \sin i_{☾} - \dot{\Omega}_{☾}\, y_2 + \left(i_{☾}\right)^{\cdot} y_3 \sin\Omega_{☾} \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_{B1} \sin\Omega_{☾} + \dot{x}_{B2} \cos\Omega_{☾} \cos i_{☾} - \dot{x}_{B3} \cos\Omega_{☾} \sin i_{☾} + \dot{\Omega}_{☾}\, y_1 - \left(i_{☾}\right)^{\cdot} y_3 \cos\Omega_{☾} \\ \dot{y}_3 &= \phantom{\dot{x}_{B1} \sin\Omega_{☾}} \dot{x}_{B2} \sin i_{☾} \phantom{\cos\Omega_{☾}} + \dot{x}_{B3} \cos i_{☾} + \left(i_{☾}\right)^{\cdot} \left(x_{B2} \cos i_{☾} - x_{B3} \sin i_{☾}\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.132}$$

Es seien $r\left[l, b\right]$ die Polarkoordinaten eines Ortes im Ekliptiksystem, $r\left[l_B, b_B\right]$ im Mondbahnsystem. Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen folgen aus

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l, b\right] \;=\; r\left[l_B, b_B\right] \tag{29.133}$$

mit den Formeln (29.129) und (29.131) oder direkt aus Bild 29-4 auf S. 313 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos l_B \cos b_B &= \cos\left(l - \Omega_{☾}\right) \cos b \\ \sin l_B \cos b_B &= \sin\left(l - \Omega_{☾}\right) \cos b \cos i_{☾} + \sin b \sin i_{☾} \\ \sin b_B &= -\sin\left(l - \Omega_{☾}\right) \cos b \sin i_{☾} + \sin b \cos i_{☾} \end{aligned} \tag{29.134}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \cos\left(l - \Omega_{☾}\right) \cos b &= \cos l_B \cos b_B \\ \sin\left(l - \Omega_{☾}\right) \cos b &= \sin l_B \cos b_B \cos i_{☾} - \sin b_B \sin i_{☾} \\ \sin b &= \sin l_B \cos b_B \sin i_{☾} + \sin b_B \cos i_{☾} \end{aligned} \tag{29.135}$$

mit den Variationen relativ zum Mondbahnsystem

$$\begin{aligned} \left(l_B\right)^{\cdot} \cos b_B \;=\; & \left(\left(l\right)^{\cdot} - \dot{\Omega}\right) \cos b \left[\sin\left(l - \Omega\right) \sin l_B + \cos\left(l - \Omega\right) \cos i \cos l_B\right] + \\ & + \dot{b} \left[\cos\left(l - \Omega_{☾}\right) \sin b \sin l_B + \left(-\sin\left(l - \Omega_{☾}\right) \sin b \cos i_{☾} + \cos b \sin i_{☾}\right) \cos l_B\right] + \\ & + \left(i_{☾}\right)^{\cdot} \sin b_B \cos l_B \\ \dot{b}_B \;=\; & \left(\left(l\right)^{\cdot} - \dot{\Omega}_{☾}\right) \cos b \left\{-\cos\left(l - \Omega_{☾}\right) \sin i_{☾} \cos b_B + \right. \end{aligned} \tag{29.136}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[\sin(l-\Omega)\cos l_B-\cos(l-\Omega)\cos i\sin l_B\right]\sin b_B\Big\}+ \\
&+\dot{b}\Big\{\left[\sin(l-\Omega_{☾})\sin b\sin i_{☾}+\cos b\cos i_{☾}\right]\cos b_B+ \\
&\quad+\left[\cos(l-\Omega_{☾})\sin b\cos l_B+\left(\sin(l-\Omega_{☾})\sin b\cos i_{☾}-\cos b\sin i_{☾}\right)\sin l_B\right]\sin b_B\Big\}- \\
&\quad-(i_{☾})^{\cdot}\sin l_B
\end{aligned}
\tag{29.137}
$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Ekliptiksystem

$$
\begin{aligned}
(l)^{\cdot}\cos b \;=\;& \dot{\Omega}_{☾}\cos b \\
&+(l_B)^{\cdot}\cos b_B\left[\sin l_B\sin(l-\Omega_{☾})+\cos l_B\cos i_{☾}\cos(l-\Omega_{☾})\right]+ \\
&\quad+\dot{b}_B\left[\cos l_B\sin b_B\sin(l-\Omega_{☾})-\left(\sin l_B\sin b_B\cos i_{☾}+\cos b_B\sin i_{☾}\right)\cos(l-\Omega_{☾})\right]- \\
&-(i_{☾})^{\cdot}\sin b\cos(l-\Omega_{☾})
\end{aligned}
\tag{29.138}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{b} \;=\;& (l_B)^{\cdot}\cos b_B\Big\{\cos l_B\sin i_{☾}\cos b+ \\
&+\left[\sin l_B\cos(l-\Omega_{☾})-\cos l_B\cos i\sin(l-\Omega_{☾})\right]\sin b\Big\}+ \\
&+\dot{b}_B\;\Big\{\left[-\sin l_B\sin b_B\sin i_{☾}+\cos b_B\cos i_{☾}\right]\cos b+ \\
&\quad+\Big[\cos l_B\sin b_B\cos(l-\Omega_{☾})+ \\
&\quad+\left(\sin l_B\sin b_B\cos i_{☾}+\cos b_B\sin i_{☾}\right)\sin(l-\Omega_{☾})\Big]\sin b\Big\}+ \\
&+(i_{☾})^{\cdot}\sin(l-\Omega_{☾})\quad .
\end{aligned}
\tag{29.139}
$$

BEISPIEL: Der Pol der Mondbahnebene hat die ekliptikale Darstellung

$$
l_{Pol}=\Omega_{☾}+270^\circ\;,\;\; b_{Pol}=90^\circ-i_{☾}\;,\;\; (l_{Pol})^{\cdot}=\dot{\Omega}_{☾}\;,\;\; \dot{b}_{Pol}=-(i_{☾})^{\cdot}\;.\;\blacktriangleleft \tag{29.140}
$$

29.3.3 Transformation zwischen Mondbahn- und Erdäquatorsystem

Die Beschreibung auch interplanetarer Bewegungen erfolgt vorzugsweise im Erdäquatorsystem. Wenn die Bewegung in ekliptikalen Koordinaten bekannt ist, kann sie mit den üblichen Transformationen[1] auf das Erdäquatorsystem bezogen werden. Dieser Vorgang wird im Folgenden kurz angedeutet:

Die Transformation vom Mondbahnsystem in das Erdäquatorsystem kann mit den Entwicklungen im vorhergehenden Abschnitt mit Hilfe des Ekliptiksystems als Zwischenschritt durchgeführt werden[2].

Die Transformation aus dem Ekliptiksystem in das Erdäquatorsystem ist aus Abschnitt 8.2.2 (Band II) bekannt:

$$
\mathbf{q}_j^{(E)} =: a_{Ej}{}^{i}\,\mathbf{p}_i \qquad , \quad \mathbf{p}_i = a_E{}^{j}{}_{i}\,\mathbf{q}_j^{(E)} \tag{29.141}
$$

Die Transformationsmatrix und ihre Ableitung lauten

---

[1] in diesem Fall nach Abschnitt 8.2.2 (Band II)

[2] In der Praxis wird man jedoch die Formeln so weit wie möglich zusammenfassen um einen unnötigen Rechenaufwand mit einer möglichen Häufung von Rundungsfehlern weitgehendst zu vermeiden

$$\left(a_{Eji}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon\\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{pmatrix}\quad,\quad\left(\dot{a}_{Eji}\right)=\dot{\varepsilon}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon\\ 0 & -\cos\varepsilon & -\sin\varepsilon\end{pmatrix}\quad. \tag{29.142}$$

Mit der Transformation (29.113) vom Mondbahnsystem in das Ekliptiksystem mit Hilfe der Transformationsmatrix $\left(a_{Bkj}\right)$ aus (29.109) und ihren Ableitungen (29.111) kann die Transformation des Mondbahnsystems in das Erdäquatorsystem durch Kopplung der Einzeltransformationen erhalten werden:

$$\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}=a_B{}^k{}_j\,\mathbf{q}_k^{(E)}=a_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i\,\mathbf{p}_i=:c_{Bj}{}^i\,\mathbf{p}_i\quad. \tag{29.143}$$

Die Variationen der Basen werden transformiert mit

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})}=\dot{a}_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i\,\mathbf{p}_i+a_B{}^k{}_j\,\dot{a}_{Ek}{}^i\,\mathbf{p}_i+a_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i\,\dot{\mathbf{p}}_i\quad. \tag{29.144}$$

Die Umkehrung lautet

$$\mathbf{p}_i=a_E{}^j{}_i\,\mathbf{q}_j^{(E)}=a_E{}^j{}_i\,a_{Bj}{}^k\,\mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})}=c_B{}^k{}_i\,\mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})} \tag{29.145}$$

mit den Variationen

$$\dot{\mathbf{p}}_i=\dot{a}_E{}^j{}_i\,a_{Bj}{}^k\,\mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})}+a_E{}^j{}_i\,\dot{a}_{Bj}{}^k\,\mathbf{q}_k^{(\mathbb{C})}+a_E{}^j{}_i\,a_{Bj}{}^k\,\dot{\mathbf{q}}_k^{(\mathbb{C})}\quad. \tag{29.146}$$

In der Praxis wird man bestrebt sein, das hier verwendete Erdäquatorsystem als ein Fundamentalsystem annehmen zu können, so dass dann $\dot{\mathbf{p}}_i\equiv 0$ gesetzt werden kann. Im allgemeinen Fall muss jedoch eine Eigenbewegung auch des Erdäquatorsystems im Blick behalten werden und der Eigenbewegungsvektor dieses Systems zumindest formal mitgenommen werden:

$$\dot{\mathbf{p}}_i=\mathbf{D}_p\times\mathbf{p}_i\quad,\quad\mathbf{D}_p=D_p{}^j\mathbf{p}_j\quad. \tag{29.147}$$

Der Eigenbewegungsvektor des Ekliptiksystems in Bezug auf das Erdäquatorsystem lautet[1]

$$\mathbf{D}_{q^{(E)}}=\mathbf{D}_{q^{(E)}}-\mathbf{D}_p+\mathbf{D}_p=\mathbf{D}_{q^{(E)}p}+\mathbf{D}_p \tag{29.148}$$

der relative Eigenbewegungsvektor nach Formel (8.77)

$$\mathbf{D}_{q^{(E)}p}=D_{q^{(E)}p}{}^j\,\mathbf{q}_j^{(E)}=\dot{\varepsilon}\,\mathbf{q}_1^{(E)}\quad,\quad D_{q^{(E)}p1}=\dot{\varepsilon}\;,\;D_{q^{(E)}p2}=D_{q^{(E)}p3}=0\quad. \tag{29.149}$$

In der Variation der Basis des Mondbahnsystems

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})}=\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}}\times\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} \tag{29.150}$$

kann der absolute Eigenbewegungsvektor auf das Erdäquatorsystem bezogen werden:

$$\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}}=\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}+\mathbf{D}_{q^{(E)}p}+\mathbf{D}_p=D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^j\,\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}+D_{q^{(E)}p}{}^j\,\mathbf{q}_j^{(E)}+D_p{}^i\,\mathbf{p}_i=D_{q^{(\mathbb{C})}p}{}^j\,\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}+D_p{}^i\,\mathbf{p}_i\;. \tag{29.151}$$

Der relative Eigenbewegungsvektor des Mondbahnsystems hat somit bezogen auf das Erdäquatorsystem mit Hilfe der Beziehungen (29.145) die Komponenten

$$D_{q^{(\mathbb{C})}p}{}^j=D_{q^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^j+D_{q^{(E)}p}{}^k\,a_{Bj}{}^k\quad. \tag{29.152}$$

Im Einzelnen erhält man mit Hilfe der Beziehungen (29.121) und (29.149)

[1] Aus Abschnitt 8.2.3 (Band II)

$$
\begin{aligned}
D_{q^{(\mathbb{C})}p1} &= (i_{\mathbb{C}})^{\bullet} + \dot{\varepsilon}\cos\Omega_{\mathbb{C}} \\
D_{q^{(\mathbb{C})}p2} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\sin i_{\mathbb{C}} - \dot{\varepsilon}\cos i_{\mathbb{C}}\sin\Omega_{\mathbb{C}} \\
D_{q^{(\mathbb{C})}p3} &= \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\cos i_{\mathbb{C}} + \dot{\varepsilon}\sin i_{\mathbb{C}}\sin\Omega_{\mathbb{C}} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.153}
$$

Formal kann umgekehrt der relative Eigenbewegungsvektor des Erdäquatorsystems in Bezug auf das Mondbahnsystem berechnet werden:

$$
\mathbf{D}_{pq^{(\mathbb{C})}} = \mathbf{D}_{pq^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}} = D_{pq^{(E)}}{}^{i}\,\mathbf{p}_i + D_{q^{(E)}q^{(\mathbb{C})}}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} = D_{pq^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{29.154}
$$

Der relative Eigenbewegungsvektor des Erdäquatorsystems in Bezug auf das Ekliptiksystem lautet nach Formel (8.78) (Band II) mit seinen Komponenten

$$
\mathbf{D}_{pq^{(E)}} = -\dot{\varepsilon}\,\mathbf{p}_1 \quad , \quad D_{pq^{(E)}1} = -\dot{\varepsilon} \ , \ D_{pq^{(E)}2} = D_{pq^{(E)}3} = 0 \quad . \tag{29.155}
$$

Mit Hilfe der Transformation (29.141) sowie der Komponenten (29.123) und (29.155) ergeben sich die Koeffizienten des relativen Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{pq^{(\mathbb{C})}}$ zu

$$
\begin{aligned}
D_{pq^{(\mathbb{C})}1} &= -\dot{\varepsilon} - (i_{\mathbb{C}})^{\bullet}\cos\Omega_{\mathbb{C}} \\
D_{pq^{(\mathbb{C})}2} &= -(i_{\mathbb{C}})^{\bullet}\sin\Omega_{\mathbb{C}}\cos\varepsilon + \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\sin\varepsilon \\
D_{pq^{(\mathbb{C})}3} &= -(i_{\mathbb{C}})^{\bullet}\sin\Omega_{\mathbb{C}}\sin\varepsilon - \dot{\Omega}_{\mathbb{C}}\cos\varepsilon \quad .
\end{aligned}
\tag{29.156}
$$

Der geozentrische Ortsvektor eines Ortes im Mondbahnsystem habe im Mondbahnsystem sowie im Erdäquatorsystem die Darstellung

$$
\mathbf{r} = y^j\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = x^i\,\mathbf{p}_i \quad . \tag{29.157}
$$

Nach den Formeln (29.143) bzw. (29.145) werden die Koeffizienten transformiert mit

$$
\begin{aligned}
x^i &= y^j\,a_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i = y^j\,c_{Bj}{}^i \\
y^j &= x^i\,a_E{}^k{}_i\,a_{Bk}{}^i = x^i\,c_B{}^j{}_i \quad .
\end{aligned}
\tag{29.158}
$$

Damit kann dieser Ort auch in geozentrischen Polarkoordinaten Radius r, Rektaszension α, Deklination δ bei Vorgabe des Ortes im Mondbahnsystem beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
r &= |\mathbf{r}| \\
x_1 &= r\cos\delta\cos\alpha \\
x_2 &= r\cos\delta\sin\alpha \\
x_3 &= r\sin\delta \quad .
\end{aligned}
\tag{29.159}
$$

Die Geschwindigkeitskomponenten werden mit (29.158) berechnet aus

$$
\begin{aligned}
\dot{x}^i &= \dot{y}^j\,a_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i + y^j\,\dot{a}_B{}^k{}_j\,a_{Ek}{}^i + y^j\,a_B{}^k{}_j\,\dot{a}_{Ek}{}^i \\
\dot{y}^j &= \dot{x}^i\,a_E{}^k{}_i\,a_{Bk}{}^i + x^i\,\dot{a}_E{}^k{}_i\,a_{Bk}{}^i + x^i\,a_E{}^k{}_i\,\dot{a}_{Bk}{}^i \quad .
\end{aligned}
\tag{29.160}
$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten geben die relative Geschwindigkeit des betreffenden Objektes bezüglich des Mondbahnsystems bzw. des Erdäquatorsystems wieder. Der absolute Geschwindigkeitsvektor erfordert die Kenntnis der Eigenbewegung des Mondbahnsystems bzw. des Erdäquatorsystems:

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + y^j\dot{\mathbf{q}}_j^{(\mathbb{C})} = \dot{x}^i\mathbf{p}_i + x^i\dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{29.161}
$$

Sei der Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_p = D_p^{\ i}\,\mathbf{p}_i$ des Erdäquatorsystems bekannt, kann die Eigenbewegung des Mondäquatorsystems mit Hilfe der *Frenet*schen Formeln dieses Systems berechnet werden:

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(☾)} = \mathbf{D}_{q^{(☾)}p} \times \mathbf{q}_j^{(☾)} + \mathbf{D}_p \times \mathbf{q}_j^{(☾)} \tag{29.162}$$

im Einzelnen

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(☾)} &= D_{q^{(☾)}p3}\,\mathbf{q}_2^{(☾)} - D_{q^{(☾)}p2}\,\mathbf{q}_3^{(☾)} + D_p^{\ i}\,c_{B3i}\,\mathbf{q}_2^{(☾)} - D_p^{\ i}\,c_{B2i}\,\mathbf{q}_3^{(☾)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(☾)} &= -D_{q^{(☾)}p3}\,\mathbf{q}_1^{(☾)} + D_{q^{(☾)}p1}\,\mathbf{q}_3^{(☾)} - D_p^{\ i}\,c_{B3i}\,\mathbf{q}_1^{(☾)} + D_p^{\ i}\,c_{B1i}\,\mathbf{q}_3^{(☾)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(☾)} &= D_{q^{(☾)}p2}\,\mathbf{q}_1^{(☾)} - D_{q^{(☾)}p1}\,\mathbf{q}_2^{(☾)} + D_p^{\ i}\,c_{B2i}\,\mathbf{q}_1^{(☾)} - D_p^{\ i}\,c_{B1i}\,\mathbf{q}_2^{(☾)} \quad .
\end{aligned} \tag{29.163}$$

Um den direkten Bezug des Mondbahnsystems zum Erdäquatorsystem herzustellen werden nach Bild 29-5 die Neigung i_M der Mondbahn sowie die Rektaszension des Knotens Ω_B des aufsteigenden Knotens der Mondbahn gegenüber dem Erdäquator berechnet. Von Interesse ist noch der Abstand $\Delta_☾$ der Knoten der Mondbahn mit Ekliptik und Erdäquator. Bekannt seien aus der Mondtheorie neben der (wahren) Ekliptik die ekliptikale Länge $\Omega_☾$ der Mondbahn sowie die Neigung $i_☾$ gegenüber der Ekliptik. Mit dem Kosinussatz der Winkel kann zunächst die Neigung i_B eindeutig berechnet werden:

$$\cos i_B = -\cos\Omega_☾ \sin i_☾ \sin\varepsilon + \cos i_☾ \cos\varepsilon \quad , \quad \sin i_B = \sqrt{1-\sin^2 i_B} \quad . \tag{29.164}$$

Der Sinussatz liefert den Sinus der Winkel Ω_B und $\Delta_☾$:

$$\begin{aligned}
\sin\Omega_B \sin i_B &= \sin\Omega_☾ \sin i_☾ \\
\sin\Delta_☾ \sin i_B &= \sin\Omega_☾ \sin\varepsilon \quad .
\end{aligned} \tag{29.165}$$

Diese Größen sind nur für $\sin i_M \neq 0$ definiert, was aber vorausgesetzt werden kann, da sonst auch die Größen Ω_B und $\Delta_☾$ nicht existent sind. Weitere Anwendung des Kosinussatz der Winkel ergibt zur eindeutigen Berechnung die noch fehlenden

$$\cos\Omega_B = \frac{\cos i_☾ - \cos i_B \cos\varepsilon}{\sin i_B \sin\varepsilon} \quad , \quad \cos\Delta_☾ = \frac{\cos\varepsilon - \cos i_B \cos i_☾}{\sin i_B \sin i_☾} \quad . \tag{29.166}$$

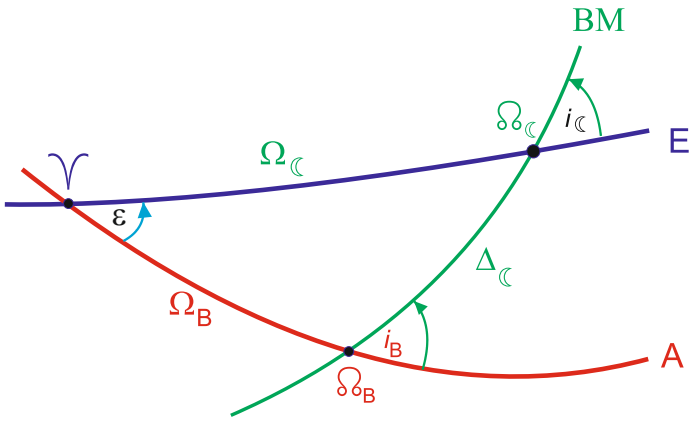


Bild 29-5: Die geometrische Verknüpfung des Mondbahnsystems BM mit dem Erdäquatorsystem A über die Ekliptik E

BEISPIEL: Gegeben[1] seien für eine größenordnungsmäßige Abschätzung die mittleren Zahlenwerte $\overline{i_{☾}} = 5°.145396$, $\bar{\varepsilon} = 23°.439291111$, sowie willkürlich $\Omega_{☾} = 50°$.

Damit ergeben sich die Werte $i_B = 27°.0192325$, $\Omega_B = 8°.698123$, $\Delta_{☾} = 42°.125021$. ◀

29.4 Das Äquatorsystem des Mondes

29.4.1 Ausrichtung des Äquatorsystems

Die Kartographie der Mondoberfläche erfolgt in einem körperfesten $\mathbf{p}_j^{(☾)}$ – Äquatorsystem. Dieses ist im Gegensatz zu den Planeten wie auch der Erde durch die Triaxialität des Mondkörpers ausgezeichnet. Die Achse des größten Drehmomentes ist die Rotationsachse und definiert die Polachse. Der entsprechende Richtungsvektor $\mathbf{p}_3^{(☾)}$ ist zum Nordpol gerichtet, der auf derselben Seite der Ekliptik wie der Nordpol der Ekliptik angenommen wird. Der $\mathbf{p}_1^{(☾)}$ – Richtungsvektor ist als Folge der gebundenen Rotation des Mondes stets im Mittel auf die Erde ausgerichtet. Allerdings ist der so definierte Ursprung auf der Mondoberfläche normalerweise nicht der subterrestrische Punkt, wenn dieser als der erdnächste Punkt definiert ist. In diesem Punkt steht die Erde genau im Zenit über dem Mondhorizont. Der subterrestrische Punkt muss stets in der Mondbahnebene liegen. Infolgedessen treffen subterrestrischer Punkt und Ursprung nur dann zusammen, wenn sich der Mond in einem Knoten seiner Bahn befindet. Das trifft nur zweimal während eines siderischen Umlaufs zu. Siehe hierzu im Vergleich Bild 29-7 und Bild 29-8 auf Seite 325. Die dritte Koordinate $\mathbf{p}_2^{(☾)}$ des Mondäquatorsystems liegt in der Mond-Äquatorebene in Richtung der Rotation des Mondes: $\mathbf{p}_2^{(☾)} = \mathbf{p}_3^{(☾)} \times \mathbf{p}_1^{(☾)}$.

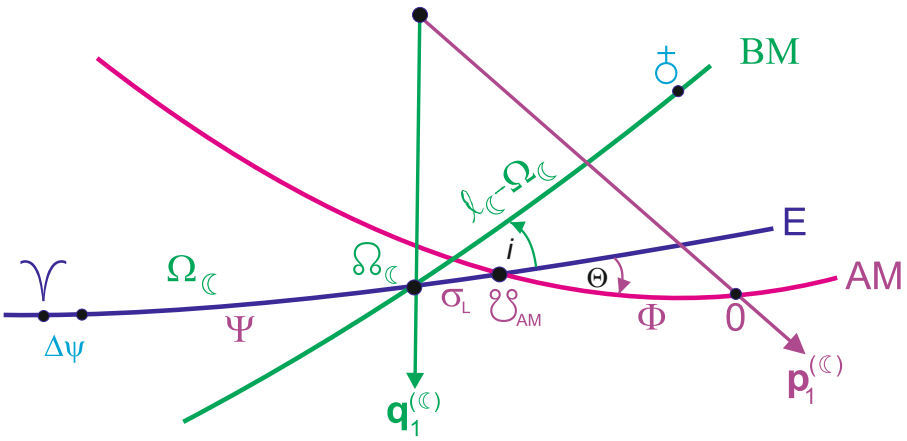


Bild 29-6: Zur Definition der Eulerschen Drehwinkel bei Bezug des Mondäquators auf die Ekliptik sowie die Orientierung des wahren subterrestrischen Punktes ♁ unter Berücksichtigung der physikalischen Librationen $(\rho_L, \sigma_L, \tau_L)$.

Nach dem ersten Gesetz von *Cassini* rotiert der Mond um seine Rotationsachse mit der mittleren siderischen Bewegung in seiner Bahn bei Bezug auf die Erde. Zur Berechnung wird jedoch die mittlere geometrische Länge $L_{☾}$ nach Formel (29.4) (auf Seite 282) verwendet, die auf den

[1] Aus Tabelle 29-2 auf Seite 282, sowie die Schiefe der Ekliptik aus Abschnitt E.3 (Band V)

Frühlingspunkt bezogen wird. Die entsprechende mittlere Bewegung ist somit eine tropische Bewegung.

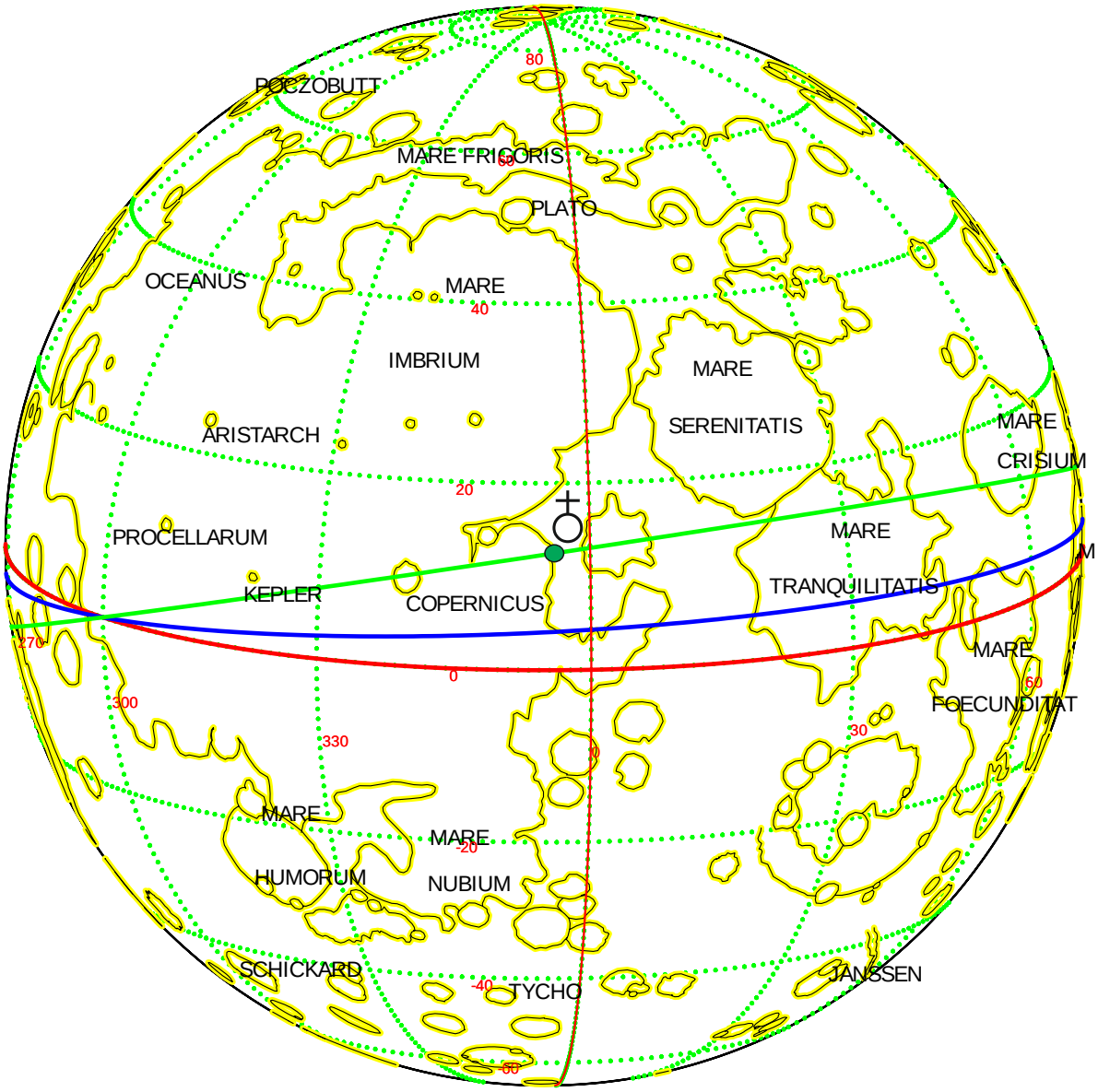


Bild 29-7: Symptomatische Darstellung der Koordinatensysteme des Mondes: Äquatorsystem in rot, Ekliptik in blau, Bahnebene in grün. Zur Veranschaulichung sind die Neigungen von Ekliptik (hier 5° statt 1°.5), und der Bahnebene (15° statt 6°.6) überhöht dargestellt. Sichtrichtung der Parallelprojektion in selenographischen Koordinaten: λ_0 = 355°, β_0 = 13°.333. Der aufsteigende Knoten der Bahnebene ist zur selenographischen äquatorialen Länge $\lambda_{☊} = 300°$ angenommen. Der subterrestrische Punkt (♁) befindet sich auf der (grünen) Mondbahn. Der Blick geht über den Nordpol und über den linken Rand der Mondscheibe

Um das Äquatorsystem des Mondes an die Ekliptik anschließen zu können, werden die drei Eulerschen Winkel Ψ als die ekliptikale Länge des absteigenden Knotens des Mondäquators, Θ als die Neigung des Mondäquators gegenüber der Ekliptik und Φ als Abstand des Ursprungs

0 vom absteigenden Knoten verwendet. Wenn die *Cassini*schen Gesetze exakt gelten würden, würden die Mittelwerte dieser Drehwinkel[1] lauten

$$\overline{\Psi} = \Omega_{☾} \ , \ \overline{\Theta} = I \ , \ \overline{\Phi + \Psi} = 180° + L_{☾} \quad . \tag{29.167}$$

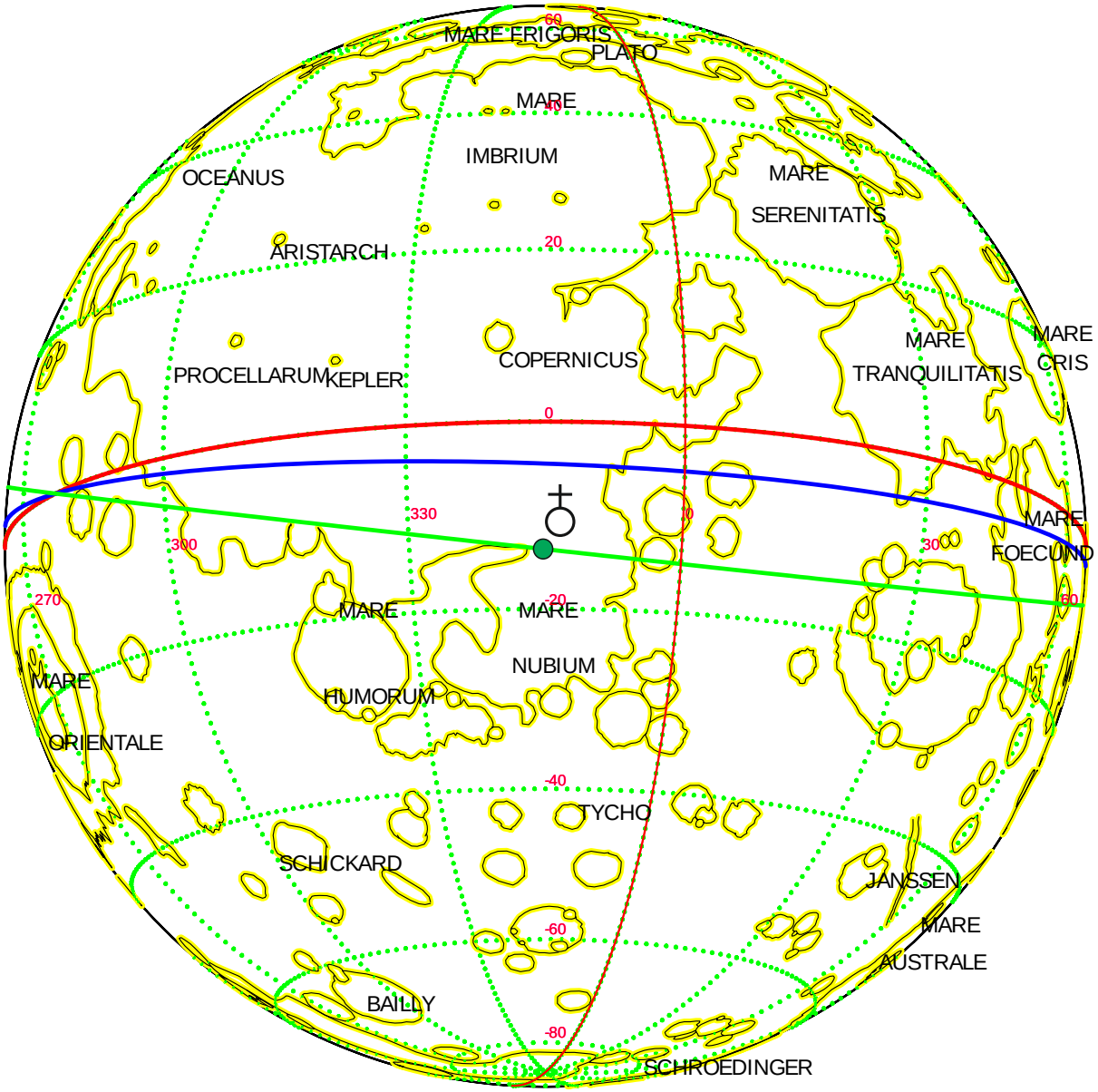


Bild 29-8: Darstellung der Koordinatensysteme des Mondes wie in Bild 29-7 jedoch mit aufsteigendem Knoten in der äquatorialen Länge $\lambda_{☊} = 100°$. Sichtrichtung in selenozentrischen Koordinaten λ_0 = 345°, β_0 = -13°.333.Der Blick geht über den Südpol des Mondes und über den linken Rand der Mondscheibe. Das Mare Orientale wird sichtbar.

[1] Bezeichnungsweise nach D. H. ECKHARDT [1981], p. 9; siehe auch in URBAN, S. E. et al. [2012], pp. 429-430

Abweichungen von diesen mittleren Werten sind durch die Nutationsbewegungen der Mondachse gegeben, die eine Folge der physikalischen Librationen sind[1]. Mit der physikalischen Libration in Neigung ρ_L, im Knoten σ_L und in Länge τ_L lauten die (wahren) Drehwinkel

$$\Psi = \Omega_{☾} + \sigma_L + \Delta\psi \;\;,\;\; \Theta = I + \rho_L \;\;,\;\; \Phi = 180° + L_{☾} - \Psi + \tau_L - \sigma_L \quad . \tag{29.168}$$

Zur Berechnung des wahren subterrestrischen Punktes ♁ in der Mondbahnebene (Bild 29-6) muss die wahre geometrische Länge $l_{☾}$ nach der allgemeinen Formulierung (29.49), zumindest in der Näherung (29.52) (auf Seite 296) zur Anwendung kommen[2].

Anmerkung: In Bild 29-6 ist die Verschiebung des Frühlingspunktes um die Nutation in Länge $\Delta\psi$ angedeutet. Diese ist in der wahren Länge des Mondes $l_{☾}$ enthalten (siehe in Formel (29.52) auf Seite 296). ◀

29.4.2 Das selenographische System

Das selenographische System dient zur Orientierung auf der Mondoberfläche. Auf der Erde wird zwischen dem geographischen und dem geozentrischen System. Der Unterschied ist eine Folge der Abplattung. Auch auf dem Mond kann man eine Abplattung messen, die aber erheblich kleiner nämlich etwa 10-mal kleiner als die Erdabplattung ist. Wegen der Triaxialität des Mondes muss auch eine Abplattung des Äquators beachtet werden. Beide Arten von Abplattung sind jedoch so gering, dass es üblich ist, nur die auf den Mondmittelpunkt bezogenen selenozentrischen Koordinaten als selenographische Koordinaten zu verwenden. Die Abplattung wird bei der Orientierung auf dem Mond vernachlässigt[3]. Als Bezugsoberfläche wird eine Kugel mit dem Referenzradius[4] $R_M = 1738.0\,\text{km}$ verwendet. Mit der selenozentrischen Länge λ_M und der selenozentrischen Breite β_M und dem $\mathbf{p}_1^{(☾)}$ – Basissystem hat ein Ortsvektor eines Punktes auf der Mondoberfläche die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M &= x_M^j\, \mathbf{p}_j^{(☾)} \\ x_{M1} &= R_M \cos\beta_M \cos\lambda_M \\ x_{M2} &= R_M \cos\beta_M \sin\lambda_M \\ x_{M3} &= R_M \sin\beta_M \quad . \end{aligned} \tag{29.169}$$

Ein Ort über der Mondoberfläche, etwa die momentane Position eines Mondorbiters, lautet entsprechend im Mondäquatorsystem

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_M &= x_A{}^j\, \mathbf{p}_j^{(☾)} \\ x_{A1} &= r_M \cos\beta_M \cos\lambda_M \\ x_{A2} &= r_M \cos\beta_M \sin\lambda_M \\ x_{A3} &= r_M \sin\beta_M \quad . \end{aligned} \tag{29.170}$$

---

[1] Diese werden in Abschnitt 29.5.2 auf Seite 341 untersucht

[2] siehe die Behandlung in Abschnitt 29.5.3 auf Seite 345

[3] siehe etwa in S. E. URBAN et al. [2012], Section 10.6, pp.427-434

[4] aus Tabelle 29-1 auf Seite 281

Die Polarkoordinaten des selenozentrischen Bahnsystems werden aus den kartesischen Koordinaten (etwa nach dem Formelsystem (4.91) (in Abschnitt 4.2.2, Band II)[1]) erhalten

$$
\begin{aligned}
r_M &= \sqrt{x_A^{\ i}\, x_{Ai}} \\
\sin\beta_M &= \frac{x_{A3}}{r_M} \quad , \quad \cos\beta_M = \sqrt{1-\sin^2\beta_M} \\
\cos\lambda_M &= \frac{x_{A1}}{r_M \cos\beta_M} \quad , \quad \left(r_M \cos\beta_M > 0\right) \\
\sin\lambda_M &= \frac{x_{A2}}{r_M \cos\beta_M} \quad , \quad \left(r_M \cos\beta_M > 0\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.171}
$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors lautet mit dem Formelsystem (4.123)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{A1} &= \frac{\dot{r}_M}{r_M}\, x_1 - \dot{\beta}_M\, x_{A3} \cos\lambda_M - \left(\lambda_M\right)^{\cdot} x_{A2} \\
\dot{x}_{A2} &= \frac{\dot{r}_M}{r_M}\, x_{A2} - \dot{\beta}_M\, x_{A3} \sin\lambda_M + \left(\lambda_M\right)^{\cdot} x_{A1} \\
\dot{x}_{A3} &= \frac{\dot{r}_M}{r_M}\, x_{A3} + r_M\, \dot{\beta}_M \cos\beta_M
\end{aligned}
\tag{29.172}
$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$
\begin{aligned}
\dot{r}_M &= \frac{x_A^{\ i}\, \dot{x}_{Ai}}{r_M} \\
\left(\lambda_M\right)^{\cdot} &= \frac{x_{A1}\, \dot{x}_{A2} - x_{A2}\, \dot{x}_{A1}}{r_M^2 \cos^2\beta_M} \quad , \quad \left(r_M \cos\beta_M > 0\right) \\
\dot{\beta}_M &= \frac{1}{r_M^2}\left[\left(x_{A3}\, \dot{x}_{A1} - x_1\, \dot{x}_{A3}\right)\cos\lambda_M - \left(x_2\, \dot{x}_{A3} - x_{A3}\, \dot{x}_{A2}\right)\sin\lambda_M\right] \quad \left\langle r_M > 0 \right. \quad .
\end{aligned}
\tag{29.173}
$$

Um den absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$
\dot{\mathbf{r}}_M = \dot{x}_A^{\ i}\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + x_A^{\ i}\, \dot{\mathbf{p}}_{ij}^{(\mathbb{C})} = \dot{\mathbf{r}}_{p^{(\mathbb{C})}} + \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} \times \mathbf{r}_M \quad . \tag{29.174}
$$

berechnen zu können, müssen zuvor die Variationen $\dot{\mathbf{p}}_j^{(\mathbb{C})}$ bzw. der (absolute) Systemeigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}}$ durch Bezug auf ein bekanntes System erhalten werden. Ein solches System kann im Fall des Mondes das Ekliptiksystem oder das geozentrische Frühlingspunkt-bezogene (d.h. bewegliche) Äquatorsystem sein.

29.4.3 Äquatorsystem des Mondes und Ekliptik

Um vom Ekliptiksystem in das Mond-Äquatorsystem mit den Formeln aus Abschnitt 6.3.2 (Band II) transformieren zu können, muss – entsprechend der Terminologie in den Beziehungen (29.167) und (29.168) - vom Frühlingspunkt zum aufsteigenden Knoten des Mondäquators um den Winkel $\Psi + 180°$ gedreht werden. Die Drehung in die Äquatorebene erfolgt um die Neigung Θ, und längs der Äquatorebene zum Anfangspunkt des Äquators wird schließlich um den

[1] Siehe zum Vergleich auch die Anwendung auf das geozentrische Ekliptiksystem in Abschnitt 8.2.1 (Band II)

Winkel $\Phi + 180° = L_{☾} - \Psi + 180°$ zum Ursprung des Mond-Äquatorsystems gedreht. Die Zuordnungen lauten somit

$$A := \Psi + 180° \;,\; B := \Theta \;,\; C := \Phi + 180° = L_{☾} - \Psi + 180° \quad . \tag{29.175}$$

Das $\mathbf{p}_i^{(☾)}$ – Äquator-System des Mondes hat in Bezug auf das $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptik- System die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1^{(☾)} &= \mathbf{q}_1^{(E)} \left(-\cos\Theta \sin\Phi \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi\right) + \\ &+ \mathbf{q}_2^{(E)} \left(\cos\Theta \sin\Phi \cos\Psi + \cos\Phi \sin\Psi\right) - \\ &- \mathbf{q}_3^{(E)} \sin\Theta \sin\Phi \end{aligned} \tag{29.176}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_2^{(☾)} &= \mathbf{q}_1^{(E)} (-\cos\Theta \cos\Phi \sin\Psi - \sin\Phi \cos\Psi) + \\ &+ \mathbf{q}_2^{(E)} (\cos\Theta \cos\Phi \cos\Psi - \sin\Phi \sin\Psi) - \\ &- \mathbf{q}_3^{(E)} \sin\Theta \cos\Phi \end{aligned} \tag{29.177}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3^{(☾)} &= -\mathbf{q}_1^{(E)} \sin\Theta \sin\Psi + \\ &+ \mathbf{q}_2^{(E)} \sin\Theta \cos\Psi + \\ &+ \mathbf{q}_3^{(E)} \cos\Theta \quad . \end{aligned} \tag{29.178}$$

In der Transformation

$$\mathbf{p}_i^{(☾)} = a_{Ai}{}^{j} \mathbf{q}_j^{(E)} \tag{29.179}$$

lauten somit die Koeffizienten der Transformationsmatrix

$$\begin{aligned} a_{A11} &= -\cos\Theta \sin\Phi \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi \\ a_{A12} &= \cos\Theta \sin\Phi \cos\Psi + \cos\Phi \sin\Psi \\ a_{A13} &= -\sin\Theta \sin\Phi \\ a_{A21} &= -\cos\Theta \cos\Phi \sin\Psi - \sin\Phi \cos\Psi \\ a_{A22} &= \cos\Theta \cos\Phi \cos\Psi - \sin\Phi \sin\Psi \\ a_{A23} &= -\sin\Theta \cos\Phi \\ a_{A31} &= -\sin\Theta \sin\Psi \\ a_{A32} &= \sin\Theta \cos\Psi \\ a_{A33} &= \cos\Theta \quad . \end{aligned} \tag{29.180}$$

Die Matrix ($b_{Ak}{}^{j}$) der Umkehrabbildung ist nach Formel (6.30) im Falle orthonormalisierter Systeme die zu ($a_{Aj}{}^{k}$) transponierte Matrix

$$b_{Ak}{}^{j} = a_{A}{}^{k}{}_{j} \quad , (\text{wenn } \mathbf{p}_i^{(☾)} \cdot \mathbf{p}_j^{(☾)} = \mathbf{q}_i^{(E)} \cdot \mathbf{q}_j^{(E)} = \delta_{ij}) \quad . \tag{29.181}$$

Daher lautet in diesem Fall die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(E)} = a_{A}{}^{i}{}_{j} \mathbf{p}_i^{(☾)} \quad , \quad (\text{wenn } \mathbf{q}_i^{(E)} \cdot \mathbf{q}_j^{(E)} = \delta_{ij}) \quad , \tag{29.182}$$

ausführlich

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^{(E)} &= \mathbf{p}_1^{(☾)} (-\cos\Theta \sin\Psi \sin\Phi + \cos\Psi \cos\Phi) + \\ &+ \mathbf{p}_2^{(☾)} (-\cos\Theta \sin\Psi \cos\Phi - \cos\Psi \sin\Phi) - \\ &- \mathbf{p}_3^{(☾)} \sin\Theta \sin\Psi \end{aligned} \tag{29.183}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_2^{(E)} &= \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} (\ \cos\Theta\cos\Psi\sin\Phi + \sin\Psi\cos\Phi) + \\
&+ \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} (\ \cos\Theta\cos\Psi\cos\Phi - \sin\Psi\sin\Phi) + \\
&+ \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \quad \sin\Theta\cos\Psi
\end{aligned}
\tag{29.184}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_3^{(E)} &= -\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \sin\Theta\ \sin\Phi\ - \\
&- \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \sin\Theta\ \cos\Phi\ + \\
&+ \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \cos\Theta \quad .
\end{aligned}
\tag{29.185}
$$

Für einen beliebigen Ortsvektor

$$
\mathbf{r}_M = x_A{}^i\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = y^j\, \mathbf{q}_j^{(E)} \tag{29.186}
$$

transformieren sich die Koordinaten bei einer Transformation zwischen orthonormierten Systemen entsprechend den Formeln (6.36) und (6.37) nach

$$
\begin{aligned}
y^j &= a_{Ai}{}^j\, x_A{}^i \quad , \\
x_A{}^i &= a_A{}^i{}_j\, y^j \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \cdot \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = \mathbf{q}_i^{(E)} \cdot \mathbf{q}_j^{(E)} = \delta_{ij}) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.187}
$$

Die Variationen der Koeffizienten der Transformationsmatrix können aus den Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{A11} &= -\ \dot{\Theta}\, a_{A31} \sin\Phi + \dot{\Phi}\, a_{A21} - \dot{\Psi}\, a_{A12} \\
\dot{a}_{A12} &= -\ \dot{\Theta}\, a_{A32} \sin\Phi + \dot{\Phi}\, a_{A22} + \dot{\Psi}\, a_{A11} \\
\dot{a}_{A13} &= -\ \dot{\Theta}\, a_{A33} \sin\Phi + \dot{\Phi}\, a_{A23} \\
\dot{a}_{A21} &= -\ \dot{\Theta}\, a_{A31} \cos\Phi - \dot{\Phi}\, a_{A11} - \dot{\Psi}\, a_{A22} \\
\dot{a}_{A22} &= -\ \dot{\Theta}\, a_{A32} \cos\Phi - \dot{\Phi}\, a_{A12} + \dot{\Psi}\, a_{A21} \\
\dot{a}_{A23} &= -\ \dot{\Theta}\, a_{A33} \cos\Phi - \dot{\Phi}\, a_{A13} \\
\dot{a}_{A31} &= -\ \dot{\Theta}\, a_{A33} \sin\dot{\Theta} - \dot{\Psi}\, a_{A32} \\
\dot{a}_{A32} &= \dot{\Theta}\, a_{A33} \cos\Psi + \dot{\Psi}\, a_{A31} \\
\dot{a}_{A33} &= -\dot{\Theta} \sin\Theta
\end{aligned}
\tag{29.188}
$$

berechnet werden. Ausführlich lauten diese Variationen

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{A11} &= \dot{\Theta} \sin\Theta \sin\Psi \sin\Phi - \\
&- \dot{\Phi} \left(\cos\Theta\cos\Phi\sin\Psi + \sin\Phi\cos\Psi\right) - \\
&- \dot{\Psi} \left(\cos\Theta\sin\Phi\cos\Psi + \cos\Phi\sin\Psi\right) \\
\dot{a}_{A12} &= -\dot{\Theta}\cos\Psi\ \sin\Theta\ \sin\Phi + \\
&+ \dot{\Phi} \left(\cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\sin\Psi\right) + \\
&+ \dot{\Psi} \left(-\cos\Theta\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\right) \\
\dot{a}_{A13} &= -\dot{\Theta}\cos\Theta\sin\Phi + \dot{\Phi}\sin\Theta\ \cos\Phi \\
\dot{a}_{A21} &= \dot{\Theta}\sin\Psi\sin\Theta\cos\Phi - \\
&- \dot{\Phi} \left(-\cos\Theta\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\right) - \\
&- \dot{\Psi}\ \left(\cos\Theta\cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\sin\Psi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{A22} &= -\dot{\Theta}\cos\Psi\,\sin\Theta\,\cos\Phi - \\
&\quad -\dot{\Phi}\left(\cos\Theta\sin\Phi\cos\Psi+\cos\Phi\sin\Psi\right) - \\
&\quad -\dot{\Psi}\left(\cos\Theta\cos\Phi\sin\Psi+\sin\Phi\cos\Psi\right) \\
\dot{a}_{A23} &= -\dot{\Theta}\cos\Theta\,\cos\Phi+\dot{\Phi}\sin\Theta\sin\Phi \\
\dot{a}_{A31} &= -\dot{\Theta}\sin\Psi\,\cos\Theta-\dot{\Psi}\cos\Psi\sin\Theta \\
\dot{a}_{A32} &= \dot{\Theta}\cos\Theta\,\cos\Psi-\dot{\Psi}\sin\Psi\sin\Theta \\
\dot{a}_{A33} &= -\dot{\Theta}\sin\Theta
\end{aligned}
\tag{29.189}
$$

Sofern diese Variationen bekannt sind, können die Transformationen der Variationen der Basen im Fall von Orthonormie aus

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} = \dot{a}_{Ai}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} + a_{Ai}{}^{j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(E)} \quad , \\
&\dot{\mathbf{q}}_j^{(E)} = \dot{a}_{Ai}^{j}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + a_{Ai}^{j}\,\dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}\cdot\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} \;=\; \delta_{ij})
\end{aligned}
\tag{29.190}
$$

erhalten werden. Die Geschwindigkeitskomponenten eines relativen Geschwindigkeitsvektors unterliegen nach den Formeln (29.190), sowie (6.39) und (6.40) den Transformationen

$$
\begin{aligned}
&\dot{y}^{j} = \dot{a}_{Aj}{}^{i}\,x_A{}^{i} + a_{Aj}{}^{i}\,\dot{x}_A{}^{i} \quad , \\
&\dot{x}_A{}^{i} = \dot{a}_{A\,j}^{\;i}\,y^{j} + a_{A\,j}^{\;i}\,\dot{y}^{j} \quad , \quad (\text{wenn} \quad \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}\cdot\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} \;=\; \delta_{ij}) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.191}
$$

Wenn die absoluten System - Variationsparameter $\left(p_i^{(\mathbb{C})j}\right)$ des $\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}$ – Systems und $\left(q_i^{(E)j}\right)$ des $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Systems bekannt sind, können die Variationen der Transformationsmatrix $\left(a_i{}^{j}\right)$ entsprechend Formel (4.211) aus der Tensorgleichung[1]

$$
\dot{a}_{Aj}{}^{k} = p^{(\mathbb{C})}{}_{j}{}^{i}\,a_{Ai}{}^{k} - a_{Aj}{}^{i}\,q_i^{(E)k}
\tag{29.192}
$$

berechnet werden. Die Transformationsmatrix $\left(a_i{}^{j}\right)$ mit ihren Ableitungen ist somit verantwortlich für den relativen Bezug zwischen den beiden Systemen mit ihren absoluten Eigenbewegungsvektoren $\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} = D_{p^{(\mathbb{C})}}^{(\mathbb{C})\,i}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}$ und $\mathbf{D}_{q^{(E)}} = D_{q^{(E)}}^{(E)\,j}\,\mathbf{q}_j^{(E)}$. Über die Variationsgleichungen (29.188) können in diesem Fall auch die Variationen der Rotationswinkel $\dot{\Psi},\dot{\Theta},\dot{\Phi}$ auf die Variationsparameter zurückgeführt werden. Im Fall von Orthonormalsystemen $\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}$, $\mathbf{q}_j^{(E)}$ lauten die Variationsausdrücke

$$
\begin{aligned}
\dot{\Theta} &= \quad p_{31}^{(\mathbb{C})}\,\sin\Phi - p_{32}^{(\mathbb{C})}\cos\Phi \;+\; q_{31}^{(E)}\sin\Psi \;+\; q_{23}^{(E)}\cos\Psi \\
\dot{\Psi}\,\sin\Theta &= -\,p_{31}^{(\mathbb{C})}\cos\Phi - p_{32}^{(\mathbb{C})}\sin\Phi - q_{12}^{(E)}\sin\Theta + (q_{31}^{(E)}\cos\Psi - q_{23}^{(E)}\sin\Psi)\cos\Theta \\
\dot{\Phi}\,\sin\Theta &= -\,q_{31}^{(E)}\cos\Psi + q_{23}^{(E)}\sin\Psi + p_{12}^{(\mathbb{C})}\sin\Theta + (p_{31}^{(\mathbb{C})}\cos\Phi \;+\; p_{23}^{(\mathbb{C})}\sin\Phi)\cos\Theta \;\;.
\end{aligned}
\tag{29.193}
$$

Da die Variationsparameter $\left(p_i^{(\mathbb{C})j}\right)$ und $\left(q_i^{(E)j}\right)$ nach den Formeln (4.230) zugleich die Komponenten des jeweiligen absoluten Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} = D_{p^{(\mathbb{C})}}^{(\mathbb{C})i}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}$, $\mathbf{D}_{q^{(E)}} = D_{q^{(E)}}^{(E)j}\,\mathbf{q}_j^{(E)}$ sind

[1] Abschnitt 4.3.12 (Band II)

$$p_{23}^{(\mathbb{C})} = D_{p1}^{(\mathbb{C})}\ ,\ p_{31}^{(\mathbb{C})} = D_{p2}^{(\mathbb{C})}\ ,\ p_{12}^{(\mathbb{C})} = D_{p3}^{(\mathbb{C})}\ ,$$
$$q_{23}^{(E)} = D_{q1}^{(E)}\ ,\ q_{31}^{(E)} = D_{q2}^{(E)}\ ,\ q_{12}^{(E)} = D_{q3}^{(E)}\ , \tag{29.194}$$

können die Variationen der Drehwinkel $\dot{\Psi}, \dot{\Theta}, \dot{\Phi}$ bei einer Rotation orthonormierter Systeme auch in der Form geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta} &= -D_{p1}^{(\mathbb{C})}\cos\Phi + D_{p2}^{(\mathbb{C})}\sin\Phi + D_{q1}^{(E)}\cos\Psi + D_{q1}^{(E)}\sin\Psi \\
\dot{\Psi}\ \sin\Theta &= -D_{p1}^{(\mathbb{C})}\sin\Phi - D_{p2}^{(\mathbb{C})}\cos\Phi - D_{q1}^{(E)}\cos\Theta\ \sin\Psi + D_{q2}^{(E)}\cos\Theta\ \cos\Psi - D_{q3}^{(E)}\sin\Theta \\
\dot{\Phi}\ \sin\Theta &= \ D_{q1}^{(E)}\sin\Psi - D_{q2}^{(E)}\cos\Psi + D_{p1}^{(\mathbb{C})}\cos\Theta\ \sin\Phi + D_{p2}^{(\mathbb{C})}\cos\Theta\ \cos\Phi + D_{p3}^{(\mathbb{C})}\sin\Theta\ \ .
\end{aligned} \tag{29.195}$$

Die beiden in der $\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}-$ Äquatorebene des Mondes gelegenen Vektoren $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ des Knotensystems können in den beiden $\mathbf{q}_j^{(E)}-$ und $\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}-$ Basissystemen dargestellt werden

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= -\mathbf{q}_1^{(E)}\cos\Psi - \mathbf{q}_2^{(E)}\sin\Psi &&= -\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}\cos\Phi + \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}\sin\Phi \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{q}_1^{(E)}\cos\Theta\sin\Psi - \mathbf{q}_2^{(E)}\cos\Theta\cos\Psi + \mathbf{q}_3^{(E)}\sin\Theta &&= -\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})}\sin\Phi - \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}\cos\Phi\ ,
\end{aligned} \tag{29.196}$$

ferner der in der ursprünglichen Äquatorebene zu $\mathbf{k}_1$ rechtwinklig entfernte Vektor $\mathbf{h}_2$ durch

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{p}_1\sin\Psi - \mathbf{p}_2\cos\Psi = -\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})}\cos\Theta\sin\Phi + \mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})}\cos\Theta\cos\Phi - \mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})}\sin\Theta\ . \tag{29.197}$$

Damit können die Variationsgleichungen (29.195) mit Hilfe des relativen Eigenbewegungsvektors des $\mathbf{p}_i^{\mathbb{C}}$-Systems bei Bezug auf das $\mathbf{q}_j^{(E)}-$Ekliptik-System auch in der überraschend einfachen Form geschrieben werden

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta} &= \left(\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}}^{(\mathbb{C})} - \mathbf{D}_{q^{(E)}}^{(E)}\right)\cdot\mathbf{k}_1 = \ \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}^{(\mathbb{C})}\cdot\mathbf{k}_1 = -D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}1}^{(\mathbb{C})}\cos\Phi + D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}2}^{(\mathbb{C})}\sin\Phi \\
\dot{\Psi}\sin\Theta &= \left(\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}}^{(\mathbb{C})} - \mathbf{D}_{q^{(E)}}^{(E)}\right)\cdot\mathbf{k}_2 = \ \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}^{(\mathbb{C})}\cdot\mathbf{k}_2 = -D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}1}^{(\mathbb{C})}\sin\Phi - D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}2}^{(\mathbb{C})}\cos\Phi \\
\dot{\Phi}\sin\Theta &= -\left(\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}}^{(\mathbb{C})} - \mathbf{D}_{q^{(E)}}^{(E)}\right)\cdot\mathbf{h}_2 = -\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}^{(\mathbb{C})}\cdot\mathbf{h}_2 = \\
&= D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}1}^{(\mathbb{C})}\cos\Theta\sin\Phi + D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}2}^{(\mathbb{C})}\cos\Theta\cos\Phi + D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}3}^{(\mathbb{C})}\sin\Theta\ .
\end{aligned} \tag{29.198}$$

Unter der Annahme, dass die Variationen $\dot{\Psi}, \dot{\Theta}, \dot{\Phi}$ der Rotationswinkel bekannt sind, etwa über die Zuweisungen (29.167) und (29.168) mit Hilfe der Entwicklungen in Abschnitt 29.1.6 (ab Seite 294) sowie der Nutation in Länge[1] und den physikalischen Librationen[2] können aus diesen Beziehungen die Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors des Mondäquatorsystems zur Ekliptik

$$\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} := \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} - \mathbf{D}_{q^{(E)}} = D_{p^{(\mathbb{C})}}^{(\mathbb{C})\,i}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} - D_{q^{(E)}}^{(E)\,j}\,\mathbf{q}_j^{(E)} = D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}^{(\mathbb{C})\ \ i}\,\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \tag{29.199}$$

berechnet werden[3]:

[1] Abschnitt 9.4.1 (Band II)

[2] Abschnitt 29.5.2 auf Seite 341

[3] vgl. etwa die generelle Darstellung in Formel (6.136) (Band II)

$$
\begin{aligned}
D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}1} &= -\dot{\Psi}\sin\Theta\sin\Phi - \dot{\Theta}\cos\Phi \\
D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}2} &= -\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Phi + \dot{\Theta}\sin\Phi \\
D^{(\mathbb{C})}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}3} &= \quad \dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Phi} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.200}
$$

Für die Variationen der Rotationswinkel ist somit das Skalarprodukt aus der Differenz der Drehwinkel der beiden Systeme, d.h. dem relativen Eigenbewegungsvektor, mit einem Vektor des Knotensystems des alten bzw. des neuen Basissystems verantwortlich.

Mit diesen Variationsgleichungen, es handelt sich wieder um *Euler*sche kinematische Gleichungen, wird die relative Bewegung der zwei orthonormierten geradlinigen Koordinatensysteme $\left(\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}, \mathbf{q}_j^{(E)}\right)$ im dreidimensionalen Raum relativ zueinander beschrieben.

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Mondäquatorsystems kann mit Hilfe des Ekliptiksystems und mit der Transformation (29.182) dargestellt werden:

$$
\mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}} = D_{p^{(\mathbb{C})}}{}^{i}\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}{}_{i} = \mathbf{D}_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}} + \mathbf{D}_{q^{(E)}} = D_{p^{(\mathbb{C})}q^{(E)}}{}^{i}\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}{}_{i} + D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A}{}^{i}{}_{j}\,\mathbf{p}^{(\mathbb{C})}{}_{i} \quad . \tag{29.201}
$$

Die Komponenten $D_{q^{(E)}j}$ des absoluten Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{q^{(E)}}$ des Ekliptiksystems müssen hier als bekannt angenommen werden. In der Praxis werden sie üblicherweise auf ein als fundamental gewähltes Erdäquatorsystem bezogen[1].

Die zugehörenden *Frenet*schen Formeln des Mondäquatorsystems haben dann die Form

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}}_1^{(\mathbb{C})} &= \left(\dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Phi}\right)\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} + \left(\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Phi - \dot{\Theta}\sin\Phi\right)\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} + \\
&\quad + D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A3j}\,\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \qquad - D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A2j}\,\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \\
\dot{\mathbf{p}}_2^{(\mathbb{C})} &= -\left(\dot{\Psi}\cos\Theta + \dot{\Phi}\right)\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} + \left(-\dot{\Psi}\sin\Theta\sin\Phi - \dot{\Theta}\cos\Phi\right)\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} - \\
&\quad - D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A3j}\,\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \qquad + D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A1j}\,\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \\
\dot{\mathbf{p}}_3^{(\mathbb{C})} &= -\left(\dot{\Psi}\sin\Theta\cos\Phi - \dot{\Theta}\sin\Phi\right)\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} + \left(\dot{\Psi}\sin\Theta\sin\Phi + \dot{\Theta}\cos\Phi\right)\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} + \\
&\quad + D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A2j}\,\mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \qquad - D_{q^{(E)}}{}^{j}\,a_{A1j}\,\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.202}
$$

Die kinematischen Gleichungen (29.200) können auch direkt erhalten werden, wenn die in den Zuordnungen (29.175) definierten Winkel in das System (6.136) eingesetzt werden[2]. Entsprechend lautet die Umkehrung nach (6.142)

$$
\begin{aligned}
D_{q^{(E)}p^{(\mathbb{C})}1} &= \quad \dot{\Phi}\sin\Theta\sin\Psi + \dot{\Theta}\cos\Psi \\
D_{q^{(E)}p^{(\mathbb{C})}2} &= -\dot{\Phi}\sin\Theta\cos\Psi + \dot{\Theta}\sin\Psi \\
D_{q^{(E)}p^{(\mathbb{C})}3} &= -\dot{\Phi}\cos\Theta - \dot{\Psi} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.203}
$$

[1] siehe etwa in Abschnitt 8.2.3 (Band II)

[2] Abschnitt 6.3.4 (Band II)

Von Interesse sind auch die Abhängigkeiten eines Ortsvektors von den Winkeln der räumlichen Orientierung. Man erhält[1] aus den Beziehungen (29.186) und (29.187) mit den Parametern (29.180)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_M}{\partial \Psi} &= \mathbf{q}_3^{(E)} \times \mathbf{r}_M = y_1\, \mathbf{q}_2^{(E)} - y_2\, \mathbf{q}_1^{(E)} \\
\frac{\partial \mathbf{r}_M}{\partial \Theta} &= \left(\mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \sin\Phi - \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \cos\Phi\right) \times \mathbf{r} = \\
&= x_3^{(\mathbb{C})} \left[\sin\Phi\, \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} + \cos\Phi\, \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})}\right] - \left[x_{A1} \sin\Phi + x_{A2} \cos\Phi\right] \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \\
\frac{\partial \mathbf{r}_M}{\partial \Phi} &= -\mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \times \mathbf{r}_M = x_{A1}\, \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} - x_{A1}\, \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \ .
\end{aligned} \tag{29.204}$$

Anmerkung: Wenn die Beziehungen zwischen den selenozentrischen Winkelkoordinaten (λ_M, β_M) des Mondäquatorsystems und den selenozentrischen ekliptikalen Winkelkoordinaten benötigt werden, können diese mit Hilfe der Definitionen (29.170) und (29.133) aus den Beziehungen (29.187) hergeleitet werden. Allerdings muss beachtet werden, dass die gegebenen ekliptikalen Koordinaten geozentrisch sind, während sie entsprechenden selenozentrischen Koordinaten sich um $l \to l + 180°, b \to -b$ unterscheiden. ◀

29.4.4 Bahnsystems des Mondes und Äquatorsystem

Für Untersuchungen der Bewegungen des Mondes um die Erde ist die Ekliptik $\left(\mathbf{q}_j^{(E)}\right)$ als die Bezugsebene für die gemeinsame Bewegung des Mondes mit der Erde um die Sonne die Basis. Der Bezug des Bahnsystems $\left(\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})}\right)$ des Mondes zum Äquatorsystem $\left(\mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})}\right)$ des Mondes kann etwa durch Kombination der Beziehungen (29.113) mit (29.182) hergestellt werden:

$$\mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = a_B{}^k{}_j\, \mathbf{q}_k^{(E)} = a_B{}^k{}_j\, a_A{}^i{}_k\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} =: a_C{}^i{}_j\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \ . \tag{29.205}$$

Die Transformationen lauten

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(\mathbb{C})} = {} & \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \left[-\cos\Theta \sin\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \sin\Phi + \cos\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \cos\Phi\right] + \\
& + \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \left[-\cos\Theta \sin\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \cos\Phi - \cos\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \sin\Phi\right] - \\
& - \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \quad \sin\Theta \sin\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right)
\end{aligned} \tag{29.206}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_2^{(\mathbb{C})} = {} & \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \left[\cos i_{\mathbb{C}} \cos\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \sin\Phi + \cos i_{\mathbb{C}} \sin\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \cos\Phi - \sin i_{\mathbb{C}} \sin\Theta \sin\Phi\right] + \\
& + \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \left[\cos i_{\mathbb{C}} \cos\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \cos\Phi - \cos i_{\mathbb{C}} \sin\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \sin\Phi - \sin i_{\mathbb{C}} \sin\Theta \cos\Phi\right] + \\
& + \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \left[\cos i_{\mathbb{C}} \sin\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) + \sin i_{\mathbb{C}} \ \cos\Theta\right]
\end{aligned} \tag{29.207}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_3^{(\mathbb{C})} = {} & \mathbf{p}_1^{(\mathbb{C})} \left[-\sin i_{\mathbb{C}} \cos\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \sin\Phi - \sin i_{\mathbb{C}} \sin\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \cos\Phi - \cos i_{\mathbb{C}} \sin\Theta \sin\Phi\right] + \\
& + \mathbf{p}_2^{(\mathbb{C})} \left[-\sin i_{\mathbb{C}} \cos\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \cos\Phi + \sin i_{\mathbb{C}} \sin\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) \sin\Phi - \cos i_{\mathbb{C}} \sin\Theta \cos\Phi\right] + \\
& + \mathbf{p}_3^{(\mathbb{C})} \left[-\sin i_{\mathbb{C}} \sin\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_{\mathbb{C}}\right) + \cos i_{\mathbb{C}} \ \cos\Theta\right]
\end{aligned} \tag{29.208}$$

[1] vgl. z.B. A. DEPRIT [1976], p.256, dort allerdings mit zum Teil anderen Vorzeichen; siehe dazu auch in Abschnitt 6.3.2 (Band II), insbesondere die Formeln (6.112)

mit den Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_{C11} &= -\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi+\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi \\
a_{C12} &= \cos i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi+\cos i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\sin i_{☾}\sin\Theta\sin\Phi \\
a_{C13} &= -\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi-\sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\cos i_{☾}\sin\Theta\sin\Phi \\
a_{C21} &= -\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi \\
a_{C22} &= \cos i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\cos i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi-\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\Phi \\
a_{C23} &= -\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi+\sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi-\cos i_{☾}\sin\Theta\cos\Phi \\
a_{C31} &= -\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right) \\
a_{C32} &= \cos i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)+\sin i_{☾}\cos\Theta \\
a_{C33} &= -\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)+\cos i_{☾}\cos\Theta \quad .
\end{aligned}
\tag{29.209}
$$

Die Umkehrung

$$
\mathbf{p}_i^{(☾)} = a_{Ci}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(☾)} \tag{29.210}
$$

lautet im Einzelnen

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1^{(☾)} &= \left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi+\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi\right]\mathbf{q}_1^{(☾)}+ \\
&+\left[\cos i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi+\cos i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\sin i_{☾}\sin\Theta\sin\Phi\right]\mathbf{q}_2^{(☾)}+ \\
&+\left[-\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi-\sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\cos i_{☾}\sin\Theta\sin\Phi\right]\mathbf{q}_3^{(☾)}
\end{aligned}
\tag{29.211}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_2^{(☾)} &= \left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi\right]\mathbf{q}_1^{(☾)}+ \\
&+\left[\cos i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\cos i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi-\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\Phi\right]\mathbf{q}_2^{(☾)}+ \\
&+\left[-\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi+\sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi-\cos i_{☾}\sin\Theta\cos\Phi\right]\mathbf{q}_3^{(☾)}
\end{aligned}
\tag{29.212}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_3^{(☾)} &= -\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\mathbf{q}_1^{(☾)}+ \\
&+\left[\cos i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)+\sin i_{☾}\cos\Theta\right]\mathbf{q}_2^{(☾)}+ \\
&+\left[-\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)+\cos i_{☾}\cos\Theta\right]\mathbf{q}_3^{(☾)} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.213}
$$

Ein Objekt habe im selenozentrischen Bahnsystem mit den Bezeichnungen (29.100) die Darstellung

$$
\mathbf{r}_M =: x_{BS}{}^{j}\,\mathbf{q}_j^{(☾)} \tag{29.214}
$$

mit den Polarkoordinaten r_M, l_{BS}, b_{BS} aus

$$
\begin{aligned}
x_{BS1} &= r_M\cos b_{BS}\cos l_{BS} \\
x_{BS2} &= r_M\cos b_{BS}\sin l_{BS} \\
x_{BS3} &= r_M\sin b_{BS} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.215}
$$

Die entsprechende Darstellung im selenozentrischen Äquatorsystem lautet

$$
\mathbf{r}_M =: x_A{}^{i}\,\mathbf{p}_i^{(☾)} \tag{29.216}
$$

mit den Polarkoordinaten r_M, λ_M, β_M aus

$$\begin{aligned} x_{A1} &= r_M \cos\beta_M \cos\lambda_M \\ x_{A2} &= r_M \cos\beta_M \sin\lambda_M \\ x_{A3} &= r_M \sin\beta_M \quad . \end{aligned} \tag{29.217}$$

Für die Transformationen zwischen den Koordinaten der beiden Systeme folgt mit der Zuordnung (29.205)

$$x_A{}^i \mathbf{p}_i^{(☾)} = x_{BS}{}^j \mathbf{q}_j^{(☾)} = x_{BS}{}^j \, a_C{}^i{}_j \mathbf{p}_i^{(☾)} \quad . \tag{29.218}$$

Im Einzelnen können die äquatorialen Winkelkoordinaten aus den vorgegebenen bahnbezogenen Koordinaten berechnet werden aus

$$\begin{aligned} \cos\lambda_M \cos\beta_M = {} & \cos l_{BS} \cos b_{BS} \left[-\cos\Theta \sin\left(\Psi - \Omega_☾\right) \sin\Phi + \cos\left(\Psi - \Omega_☾\right) \cos\Phi \right] + \\ & + \sin l_{BS} \cos b_{BS} \left[\cos i_☾ \cos\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_☾\right) \sin\Phi + \right. \\ & \left. + \cos i_☾ \sin\left(\Psi - \Omega_☾\right) \cos\Phi - \sin i_☾ \sin\Theta \sin\Phi \right] + \\ & + \sin b_{BS} \left[-\sin i_☾ \cos\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_☾\right) \sin\Phi - \right. \\ & \left. - \sin i_☾ \sin\left(\Psi - \Omega_☾\right) \cos\Phi - \cos i_☾ \sin\Theta \sin\Phi \right] \end{aligned} \tag{29.219}$$

$$\begin{aligned} \sin\lambda_M \cos\beta_M = {} & \cos l_{BM} \cos b_{BM} \left[-\cos\Theta \sin\left(\Psi - \Omega_☾\right) \cos\Phi - \cos\left(\Psi - \Omega_☾\right) \sin\Phi \right] + \\ & + \sin l_{BM} \cos b_{BM} \left[\cos i_☾ \cos\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_☾\right) \cos\Phi - \right. \\ & \left. - \cos i_☾ \sin\left(\Psi - \Omega_☾\right) \sin\Phi - \sin i_☾ \sin\Theta \cos\Phi \right] + \\ & + \sin_{BM} \left[-\sin i_☾ \cos\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_☾\right) \cos\Phi + \right. \\ & \left. + \sin i_☾ \sin\left(\Psi - \Omega_☾\right) \sin\Phi - \cos i_☾ \sin\Theta \cos\Phi \right] \end{aligned} \tag{29.220}$$

$$\begin{aligned} \sin\beta_M = {} & \cos l_{BM} \cos b_{BM} \left[-\sin\Theta \sin\left(\Psi - \Omega_☾\right) \right] + \\ & + \sin l_{BM} \cos b_{BM} \left[\cos i_☾ \sin\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_☾\right) + \sin i_☾ \cos\Theta \right] + \\ & + \cos b_{BM} \left[-\sin i_☾ \sin\Theta \cos\left(\Psi - \Omega_☾\right) + \cos i_☾ \cos\Theta \right] \quad . \end{aligned} \tag{29.221}$$

BEISPIEL: Eine interessante Anwendung dieser Zuordnung ist die Berechnung des wahren subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche (diese wird in Abschnitt 29.5.3 auf Seite 345 untersucht). ◀

Für die Umkehrabbildung mit der Transformation (29.210)

$$x_{BS}{}^j \mathbf{q}_j^{(☾)} = x_A{}^i \mathbf{p}_i^{(☾)} = x_A{}^j \, a_{Ci}{}^j \mathbf{q}_j^{(☾)} \tag{29.222}$$

können die äquatorialen Winkelkoordinaten aus den vorgegebenen selenozentrischen äquatorialen Koordinaten mit den Koeffizienten a_{Cij} aus (29.209) berechnet werden

$$\begin{aligned} \cos l_{BS} \cos b_{BS} &= a_{C11} \cos\beta_M \cos\lambda_M + a_{C21} \cos\beta_M \sin\lambda_M + a_{C21} \sin\beta_M \\ \sin l_{BS} \cos b_{BS} &= a_{C12} \cos\beta_M \cos\lambda_M + a_{C22} \cos\beta_M \sin\lambda_M + a_{C32} \sin\beta_M \\ \sin b_{BS} &= a_{C13} \cos\beta_M \cos\lambda_M + a_{C23} \cos\beta_M \sin\lambda_M + a_{C33} \sin\beta_M \end{aligned} \tag{29.223}$$

BEISPIEL: Eine direkte Anwendung dieser Zuordnung ist die Berechnung des Blicks vom Erdmittelpunkt zum Mond (Abschnitt 29.4.1, Bild 29-7 und Bild 29-8). Damit können auch die physikalischen Librationen dargestellt werden (siehe in Abschnitt 29.5 ab Seite 339). ◄

In den vorstehenden Formeln ist nach den Zuordnungen (29.168) (auf Seite 326) der Drehwinkel

$$\Psi - \Omega_{☾} = \sigma_L + \Delta\Psi \tag{29.224}$$

eine kleine Größe. Diese kann bei Näherungsuntersuchungen vernachlässigt werden, was die Formeln wesentlich vereinfacht. Allerdings muss eine solche Näherung immer im Auge behalten werden.

Falls das relative Bewegungsverhalten der beiden Systeme benötigt wird, können die entsprechenden Variationen berechnet werden. Aus den Beziehungen (29.205) (und folgenden) ergeben sich

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(☾)} = a_{C\,j}^{\;\;i}\mathbf{p}_i^{(☾)} + a_{C\,j}^{\;\;i}\,\dot{\mathbf{p}}_i^{(☾)} \tag{29.225}$$

bzw. die Umkehrung

$$\dot{\mathbf{p}}_i^{(☾)} = \dot{a}_{Ci}^{\;\;j}\,\mathbf{q}_j^{(☾)} + a_{Ci}^{\;\;j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(☾)} \quad . \tag{29.226}$$

Die Elemente der Transformationsmatrix haben die Variationen

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{C11} &= \dot{\Theta}\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi + \\
&\quad + \left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\left[-\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi\right] + \\
&\quad + \dot{\Phi}\left[-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi - \cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi\right] \\
\dot{a}_{C12} &= (i_{☾})^{\bullet}\left[-\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi - \cos i_{☾}\sin\Theta\sin\Phi\right] \\
&\quad + \dot{\Theta}\left[-\cos i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \sin i_{☾}\cos\Theta\sin\Phi\right] + \\
&\quad + \left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\left[-\cos i_{☾}\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi + \cos i_{☾}\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi\right] + \\
&\quad + \dot{\Phi}\left[\cos i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi - \cos i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \sin i_{☾}\sin\Theta\cos\Phi\right] \\
\dot{a}_{C13} &= (i_{☾})^{\bullet}\left[-\cos i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \cos i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi + \sin i_{☾}\sin\Theta\sin\Phi\right] + \\
&\quad + \dot{\Theta}\left[\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \cos i_{☾}\cos\Theta\sin\Phi\right] + \\
&\quad + \left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\left[\sin i_{☾}\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \sin i_{☾}\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi\right] + \\
&\quad + \dot{\Phi}\left[-\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi + \sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \cos i_{☾}\sin\Theta\cos\Phi\right] \\
\dot{a}_{C21} &= \dot{\Theta}\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi \\
&\quad + \left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\left[-\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi + \sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi\right] + \\
&\quad + \dot{\Phi}\left[\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi\right] \\
\dot{a}_{C22} &= (i_{☾})^{\bullet}\left[-\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi + \sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi - \cos i_{☾}\sin\Theta\cos\Phi\right] + \\
&\quad + \dot{\Theta}\left[-\cos i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi - \sin i_{☾}\cos\Theta\cos\Phi\right] + \\
&\quad + \left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\left[-\cos i_{☾}\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi - \cos i_{☾}\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi\right] + \\
&\quad + \dot{\Phi}\left[-\cos i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi + \sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi + \cos i_{☾}\sin\Theta\sin\Phi\right]
\end{aligned} \tag{29.227}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{C23} = {} & (i_{☾})^{\bullet}\left[-\cos i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi+\cos i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi+\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\Phi\right]+\\
& +\dot{\Theta}\left[\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi-\cos i_{☾}\cos\Theta\cos\Phi\right]+\\
& +\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\left[\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi+\sin i_{☾}\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi\right]+\\
& +\dot{\Phi}\left[\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\sin\Phi+\sin i_{☾}\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\cos\Phi+\cos i_{☾}\sin\Theta\sin\Phi\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{C31} = {} & \dot{\Theta}-\cos\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)-\\
& -\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{C32} = {} & (i_{☾})^{\bullet}\left[-\sin i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)+\cos i_{☾}\cos\Theta\right]+\\
& +\dot{\Theta}\left[\cos i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)-\sin i_{☾}\sin\Theta\right]+\\
& +\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\left[-\cos i_{☾}\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{C33} = {} & (i_{☾})^{\bullet}\left[-\cos i_{☾}\sin\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)-\sin i_{☾}\cos\Theta\right]+\\
& +\dot{\Theta}\left[-\sin i_{☾}\cos\Theta\cos\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)-\cos i_{☾}\sin\Theta\right]+\\
& +\left(\dot{\Psi}-\dot{\Omega}_{☾}\right)\left[\sin i_{☾}\sin\Theta\sin\left(\Psi-\Omega_{☾}\right)\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Um die *Frenet*schen Formeln des Mondäquatorsystems

$$\dot{\mathbf{p}}_i^{(☾)} = \mathbf{D}_{p^{(☾)}} \times \mathbf{p}_i^{(☾)} \tag{29.228}$$

berechnen zu können, wird der absolute Eigenbewegungsvektor im vorliegenden Zusammenhang in Hinblick auf das Mondbahnsystem entwickelt:

$$\mathbf{D}_{p^{(☾)}} = D_{p^{(☾)}}{}^{i}\,\mathbf{p}_i^{(☾)} = \mathbf{D}_{p^{(☾)}q^{(☾)}} + \mathbf{D}_{q^{(☾)}} = D_{p^{(☾)}q^{(☾)}}{}^{i}\,\mathbf{p}_i^{(☾)} + D_{q^{(☾)}}{}^{j}\,a_c{}^{i}{}_{j}\,\mathbf{p}_i^{(☾)} \quad . \tag{29.229}$$

Die Koeffizienten des Eigenbewegungsvektors können formal nach den Entwicklungen in Abschnitt 6.3.4 (Band II), insbesondere den Formeln (6.133) und (6.134) hergeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
D_{p^{(☾)}1} &= D_{p^{(☾)}q^{(☾)}1} + D_{q^{(☾)}}{}^{i}\,a_{C1i} = \dot{a}_{C2}{}^{i}\,a_{C3i} + D_{q^{(☾)}}{}^{i}\,a_{C1i}\\
D_{p^{(☾)}2} &= D_{p^{(☾)}q^{(☾)}2} + D_{q^{(☾)}}{}^{i}\,a_{C2i} = \dot{a}_{C3}{}^{i}\,a_{C1i} + D_{q^{(☾)}}{}^{i}\,a_{C2i}\\
D_{p^{(☾)}3} &= D_{p^{(☾)}q^{(☾)}3} + D_{q^{(☾)}}{}^{i}\,a_{C3i} = \dot{a}_{C1}{}^{i}\,a_{C2i} + D_{q^{(☾)}}{}^{i}\,a_{C3i} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.230}
$$

Die Koeffizienten $D_{q^{(☾)}j}$ des absoluten Eigenbewegungsvektors des Mondbahnsystems werden hier als bekannt vorausgesetzt. In der Praxis können sie auf das Ekliptiksystem entsprechend den Beziehungen (29.119) oder auf ein Erdäquatorsystem entsprechend (29.151) (und folgende) als bekannt angenommen werden.

29.4.5 Bezug des Äquatorsystems des Mondes auf das Äquatorsystem der Erde

Der Bezug des Mondäquatorsystems $\mathbf{p}_i^{☾}$ auf das Erdäquatorsystem $\mathbf{p}_k$ ist von besonderer Qualität. Dies ist etwa besonders dann unentbehrlich, wenn Punkte auf der Mondoberfläche, die in selenographischen Koordinaten gegeben sind, von einem Ort auf oder über der Erdoberfläche beobachtet werden sollen. Dieser Ort ist in äquatorialen oder darauf bezogenen geographischen oder geozentrischen Koordinaten bekannt.

Die formale Übertragung kann wie im Fall des Mondbahnsystems am durchsichtigsten erfolgen, wenn der Bezug zur Ekliptik bereits hergestellt ist. Mit den Transformationen (29.141), (29.179), (29.182) sowie den Transformationsmatrizen (29.180) und (29.142) lautet die Transformation zwischen Mondäquatorsystem und Erdäquatorsystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} &= a_{Ai}{}^j\, \mathbf{q}_j^{(E)} = a_{Ai}{}^j\, a_{Ej}{}^k\, \mathbf{p}_k =: a_{Di}{}^k\, \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_k &= a_E{}^j{}_k\, \mathbf{q}_j^{(E)} = a_E{}^j{}_k\, a_A{}^i{}_j\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} = a_D{}^i{}_k\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} \quad . \end{aligned} \tag{29.231}$$

Für die Systemvariationen gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} &= \dot{a}_{Ai}{}^j\, a_{Ej}{}^k\, \mathbf{p}_k + a_{Ai}{}^j\, \dot{a}_{Ej}{}^k\, \mathbf{p}_k + a_{Ai}{}^j\, a_{Ej}{}^k\, \dot{\mathbf{p}}_k = \dot{a}_{Di}{}^k\, \mathbf{p}_k + a_{Di}{}^k\, \dot{\mathbf{p}}_k \\ \dot{\mathbf{p}}_k &= \dot{a}_E{}^j{}_k\, a_A{}^i{}_j\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + a_E{}^j{}_k\, \dot{a}_A{}^i{}_j\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + a_E{}^j{}_k\, a_A{}^i{}_j\, \dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} = \dot{a}_D{}^i{}_k\, \mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})} + a_D{}^i{}_k\, \dot{\mathbf{p}}_i^{(\mathbb{C})} \quad . \end{aligned} \tag{29.232}$$

Hierfür sind die Variationen der Transformationsmatrizen aus (29.141), sowie (29.188) bzw. (29.189) bekannt. Die Koeffizienten lauten

$$\begin{aligned} a_{D11} &= -\cos\Theta \sin\Phi \sin\Psi + \cos\Phi \cos\Psi \\ a_{D12} &= \cos\varepsilon \left(\cos\Theta \sin\Phi \cos\Psi + \cos\Phi \sin\Psi\right) + \sin\varepsilon\, \sin\Theta \sin\Phi \\ a_{D13} &= \sin\varepsilon \left(\cos\Theta \sin\Phi \cos\Psi + \cos\Phi \sin\Psi\right) - \cos\varepsilon\, \sin\Theta \sin\Phi \\ a_{D21} &= -\cos\Theta \cos\Phi \sin\Psi - \sin\Phi \cos\Psi \\ a_{D22} &= \cos\varepsilon \left(\cos\Theta \cos\Phi \cos\Psi - \sin\Phi \sin\Psi\right) + \sin\varepsilon \sin\Theta \cos\Phi \\ a_{D23} &= \sin\varepsilon \left(\cos\Theta \cos\Phi \cos\Psi - \sin\Phi \sin\Psi\right) - \cos\varepsilon \sin\Theta \cos\Phi \\ a_{D31} &= -\sin\Theta\, \sin\Psi \\ a_{D32} &= \cos\varepsilon \sin\Theta\, \cos\Psi - \sin\varepsilon \cos\Theta \\ a_{A33} &= \sin\varepsilon\, \sin\Theta\, \cos\Psi + \cos\varepsilon \cos\Theta \quad . \end{aligned} \tag{29.233}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Mondäquatorsystems kann in den relativen Eigenbewegungsvektor in Bezug auf das Erdäquatorsystem und den absoluten Eigenbewegungsvektor des Erdäquatorsystems zerlegt werden:

$$\mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}} = D_{q^{(\mathbb{C})}}{}^j \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} = \mathbf{D}_{q^{(\mathbb{C})}p} + \mathbf{D}_p = D_{q^{(\mathbb{C})}p}{}^j\, \mathbf{q}_j^{(\mathbb{C})} + D_p{}^k\, \mathbf{p}_k \tag{29.234}$$

Die Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektors lauten[1] allgemein

$$D_{p^{(\mathbb{C})}i} = D_{p^{(\mathbb{C})}pi} + D_p{}^k a_{Dik} \quad , \tag{29.235}$$

die des relativen Eigenbewegungsvektors

$$\begin{aligned} D_{p^{(\mathbb{C})}p1} &= \dot{a}_{D2}{}^k a_{D3k} = \left(\dot{a}_{A2}{}^j\, a_{Ej}{}^k + a_{A2}{}^j\, \dot{a}_{Ej}{}^k\right) a_{A3}{}^j\, a_{Ejk} \\ D_{p^{(\mathbb{C})}p2} &= \dot{a}_{D3}{}^k a_{D1k} = \left(\dot{a}_{A3}{}^j\, a_{Ej}{}^k + a_{A3}{}^j\, \dot{a}_{Ej}{}^k\right) a_{A1}{}^j\, a_{Ejk} \\ D_{p^{(\mathbb{C})}p3} &= \dot{a}_{D1}{}^k a_{D2k} = \left(\dot{a}_{A1}{}^j\, a_{Ej}{}^k + a_{A1}{}^j\, \dot{a}_{Ej}{}^k\right) a_{A2}{}^j\, a_{Ejk} \quad . \end{aligned} \tag{29.236}$$

Ist im selenozentrischen System der Ortsvektor eines Ortes auf der Mondoberfläche oder über dem Mond (Mondorbiter) entsprechend der Definition (29.170) gegeben

$$\mathbf{r}_M = x_A{}^j\, \mathbf{p}_j^{(\mathbb{C})} \quad , \tag{29.237}$$

können die kartesischen Koordinaten entsprechend (29.231) transformiert werden

[1] vgl. (6.133) in Abschnitt6.3.4 (Band II)

$$x^i = x_A^j \, a_{Dj}{}^i \quad , \quad x_A^j = x^i \, a_D{}^j{}_i \quad . \tag{29.238}$$

Anmerkung: Falls der zugehörige Geschwindigkeitsvektor benötigt wird, können die Geschwindigkeitskoordinaten analog den Entwicklungen in den vorstehenden Abschnitten berechnet werden. Der Geschwindigkeitsvektor des Mondmittelpunktes ist aus Abschnitt 29.1.7 auf Seite 298 bekannt, der Geschwindigkeitsvektor des Beobachters etwa aus einem der Abschnitte 8.6, 8.7, 8.8. ◀

29.5 Die Librationen

Beobachtungen der Mondoberfläche zeigen, dass von der Erde aus trotz der gebundenen Rotation des Mondes im Laufe der Zeit etwa 59% der Mondoberfläche zu sehen sind. Dies hat unterschiedliche Ursachen, die eine Folge der Dynamik der Mondrotation, eine Folge der Bahngeometrie (geozentrische optische Librationen) sowie eine Folge des Ortes des Beobachters auf der (oder um die) Erde (topozentrische optische Librationen) sind[1]. Diese „Wackelbewegungen“ des Mondes gegenüber dem Beobachter von der Erde aus werden als Librationen bezeichnen. Sie können durch eine Bewegung des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche um den Mittelpunkt dargestellt werden, wie er durch das erste Gesetz von *Cassini* beschrieben wird.

29.5.1 Geozentrische geometrische Librationen

Zur Berechnung der Librationen werden in einer Mondephemeride die ekliptikalen Länge l_M und die ekliptikale Breite b_M bereitgestellt. Falls keine hochgenaue JPL-Ephemeride zur Verfügung steht, können die Winkelkoordinaten mit den in Abschnitt 29.1.6 (ab Seite 294) bereitgestellten Entwicklungen berechnet werden. Für missionsanalytische Untersuchungen sind diese Ergebnisse normalerweise ausreichend.

Die mittlere geometrische Länge des Mondortes $L_☾$ wird in Formel (29.4), die mittlere ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn $\Omega_☾$ in Formel (29.18) bereitgestellt. Die Nutation in Länge $\Delta\psi$ ist aus der Entwicklung (9.122) (Band II, Abschnitt 9.4.1) gegeben, die mittlere Inklination des Mondäquators entsprechend dem dritten Gesetz von *Cassini* mit dem Zahlenwert (29.1).

Bei der Berechnung der selenozentrischen Librations-Koordinaten (l', b') muss beachtet werden, dass die geozentrisch berechneten ekliptikalen Koordinaten auf das Mondzentrum bezogen in $(180° + l_M, -b_M)$ umgerechnet werden müssen. Dies gilt auch für die geozentrischen äquatorialen Koordinaten (α, δ), die bezogen auf das Mondzentrum mit $(\alpha + 180°, -\delta)$ gesetzt werden müssen:

$$\begin{aligned}
\cos\left(L_☾ - \Omega_☾ + l'\right)\cos b' &= \cos\left(l_M - \Omega_☾ - \Delta\psi\right)\cos b_M \\
\sin\left(L_☾ - \Omega_☾ + l'\right)\cos b' &= \sin\left(l_M - \Omega_☾ - \Delta\psi\right)\cos b_M \cos I - \sin b_M \sin I \\
\sin b' &= -\sin\left(l_M - \Omega_☾ - \Delta\psi\right)\cos b_M \sin I - \sin b_M \cos I
\end{aligned} \tag{29.239}$$

[1] siehe etwa in URBAN, S. and P. K. SEIDELMANN, (eds.) [2013], pp. 427-428

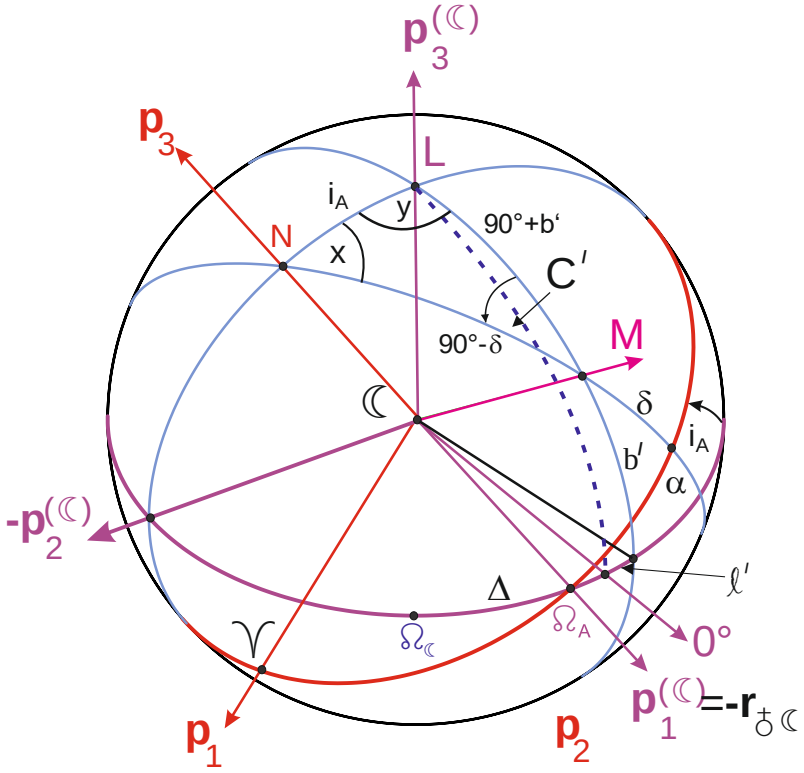


Bild 29-9: Zur Definition der geometrischen Librationen in äquatorialer Länge ℓ', Breite b', Positionswinkel C' bezogen auf den wahren Mondort M. N ist der Nordpol des Erdäquatorsystems („Himmelspol"), L ist der Nordpol des Mondäquatorsystems. Der Nullmeridian des Mondäquatorsystems ist punktiert angedeutet.

Der Positionswinkel C' gibt im wahren Mondort den Winkel zwischen den Richtungen zum Mond-Nordpol und zum Himmelspol (dem Nordpol des Erdäquatorsystems) an. Er kann aus einer der Beziehungen berechnet werden, die mit Hilfe der Innenwinkel x, y im Poldreieck MLN (Bild 29-9) und dem aufsteigenden Knoten Ω_A des Mondäquators mit dem Erdäquator (definiert in Bild 29-5) und dem Zwischenwinkel Δ_A des aufsteigenden Knotens des Mondäquators mit dem Erdäquator und dem absteigenden Knoten des Mondäquators mit der Ekliptik

$$\begin{aligned} x &= -90° + \Omega_M - \alpha \\ y &= \ \ 90° + L_☾ - \Omega_☾ + \Delta_A + l' \end{aligned} \tag{29.240}$$

erstellt werden können:

$$\sin C' = \frac{\sin i_A \cos\left(L_☾ - \Omega_☾ + \Delta_A + l'\right)}{\cos\delta} = \frac{-\sin i_A \cos\left(\alpha - \Omega_A\right)}{\cos b'} \quad . \tag{29.241}$$

Für Näherungsrechnungen können die Hilfsparameter (A, B, μ) aus folgenden Formeln verwendet werden[1]:

$$\begin{aligned} &\sin\mu := \tan^2\left(\frac{1}{2}I\right)\sin 2\left(L_☾ - \Omega_☾\right) \\ &A := \sin I \cos\left(L_☾ - \Omega_☾\right) \quad , \quad \tan B := -\tan I \sin\left(L_☾ - \Omega_☾\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.242}$$

[1] EXPLANATORY SUPPLEMENT [1961], pp.319

Damit werden die auf das Erdzentrum bezogenen geometrischen Librationen näherungsweise berechnet:

$$b' = B - b_M \quad , \quad l' = l_M + \mu + Ab' - l_{☾} - \Delta\psi \quad . \tag{29.243}$$

29.5.2 Die physikalischen Librationen des Mondes

Ähnlich wie bei der Erde ist die Rotationsachse des Mondes nicht raumfest, sondern unterliegt säkularen und periodischen Änderungen. Entsprechend der Wanderung des Knotens des Mondäquators, der nach der ersten Regel von *Cassini* mit einem Knoten der Mondbahn im Mittel zusammenfällt, vollführt die Mondachse in $P_{☾,\Omega}$ = 18.6 (julianischen) Jahren einen Umlauf um den Pol der Ekliptik (vgl. die Berechnung in (29.31)). Diese säkulare Bewegung ist, vergleichbar mit der Nutation der Erdachse[1]. Sie wird mit periodischen Variationen überlagert, die als *physikalische Librationen* bezeichnet werden. Sie modifizieren die *Cassini*schen Regeln, da sie kleine Schwankungen um die Mittelwerte darstellen, welche durch die *Cassini*sche Regeln beschrieben werden. Die physikalischen Librationen sind eine Folge der Triaxialität des Mondes. Sie müssen also bei Beobachtungen auf der Mondoberfläche berücksichtigt werden, da sich auch kleine Abweichungen auf präzise Beobachtungen stark auswirken können.

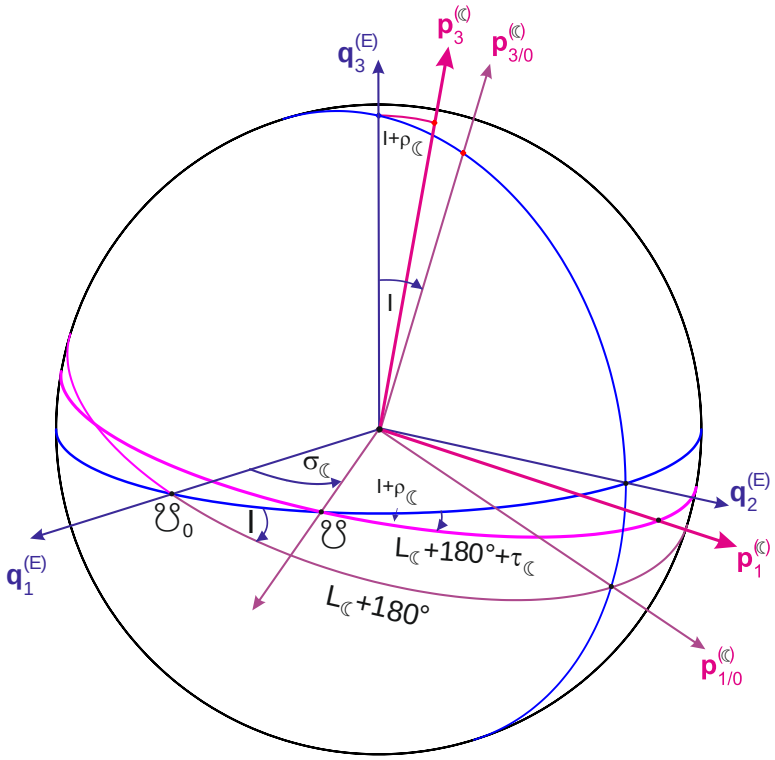


Bild 29-10: Auswirkungen der physikalischen Librationen auf die Orientierung des Mond-Äquatorsystems bei Bezug auf die Ekliptik: dargestellt ist die Orientierung des Mondäquatorsystems im Mittel $\left(\mathbf{p}_{j/0}^{(☾)}\right)$ und unter Berücksichtigung der physikalischen Librationen $\left(\mathbf{p}_j^{(☾)}\right)$

Die physikalischen Librationen werden dargestellt durch die Größen (Bild 29-10)

[1] siehe etwa in Green, R. M. [1985], p.434, Abschnitt 17.9

σ_L – Libration in Knotenlänge

ρ_L – Libration in Neigung (Inklination des Mondäquators)

τ_L – Libration in Länge (der ersten Achse auf dem Mondäquator)

Die Zahlenwerte der physikalischen Librationen sind sehr klein. Sie haben von der Erde aus beobachtet eine maximale Amplitude von etwa $6''$.

Im Zusammenhang mit einer Satellitenbahnanalyse werden im vorliegenden Abschnitt nur die Berechnungsmethoden zusammengestellt, wie sie zur Beobachtung von Punkten der Mondoberfläche von einer irdischen Bodenstation oder auch von Erdsatelliten aus erforderlich sind.

Die erste Achse des Mondes mit dem Trägheitsmoment A ist im Mittel auf den Erdmittelpunkt ausgerichtet. Die zweite mit Trägheitsmoment B ist entlang der Mondbahn orientiert. Die dritte mit Trägheitsmoment C ist parallel der Rotationsachse des Mondes zur Nordpol des Mondes gerichtet. Die beiden ersten Achsen definieren die Mondäquatorebene. Die drei Achsen unterliegen der Relation $A \le B \le C$. Die auf die Erde ausgerichtete Achse ist die Orientierung der größten Stabilität des Mondes. Die Wechselwirkung der drei Achsen mit der Gravitation durch die Erde verursachen die physikalischen Librationen. Sie zeigen sich in einer Oszillation der ersten Achse, welche im Mittel auf die Erde ausgerichtet ist.

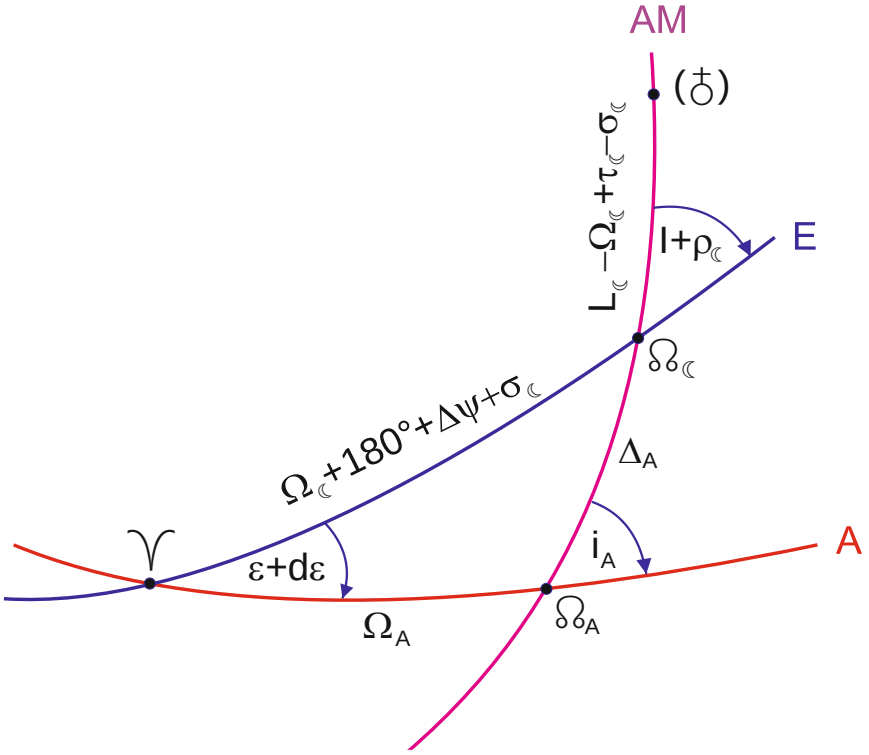


Bild 29-11: Darstellung der physikalischen Librationen in Bezug auf die momentane Ekliptik (E) („ecliptic of date“), zur Berechnung der ersten Achse des Mond-Äquatorsystems (AM) ausgerichtet auf den mit (♁) markierten mittleren subterrestrischen Punkt

Die folgenden Entwicklungen gehen auf die Berechnungen von *F. Hayn*[1] zurück. Auf Basis der von ihm eingeführten Parameter $(\sigma_L, \rho_L, \tau_L)$ berechnet er die physikalischen Librationen in

[1] HAYN, F. [1902]; siehe auch in KOPAL, Z. [1966], ch. 4 (pp.24-40); hier auch der Hinweis auf die Arbeit F. W. BESSEL [1839] 'Über die Bestimmung der Libration des Mondes durch Beobachtungen'

Breite, Länge und Positionswinkel. Diese Entwicklungen sollten in den meisten Anwendungen auch heute noch nützlich sein. Als Parameter werden neben der mittleren Länge des Mondes $L_☾$ und der mittleren Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega_☾$ verwendet

$\Gamma'_☾ = L_☾ - M_☾$, die mittlere Länge des Perigäums des Mondes (siehe die Entwicklung (29.9) auf Seite 283) und

$M_\odot$, die mittlere Anomalie der Sonne.

Die Entwicklungen lauten allgemein unter Verwendung der Ergebnisse der geozentrischen geometrischen Librationen (b', l', C') bezogen auf das Mondäquatorsystem

$$\delta b = 108'' \sin\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾ + l'\right) + 37'' \sin\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾ - l'\right) - 11'' \sin\left(L_☾ - \Omega_☾ - l'\right) \tag{29.244}$$

$$\begin{aligned} \delta l &= 12'' \sin\left(L_☾ - \Gamma'_☾\right) - 18'' \sin 2\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾\right) - 59'' \sin M_\odot - \\ &- \left\{108'' \cos\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾ + l'\right) - 37'' \cos\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾ - l'\right) + 11'' \cos\left(L_☾ - \Omega_☾ - l'\right)\right\} \tan b' \end{aligned} \tag{29.245}$$

$$\delta C = -\left\{108'' \cos\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾ + l'\right) - 37'' \cos\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾ - l'\right) + 11'' \cos\left(L_☾ - \Omega_☾ - l'\right)\right\} \frac{1}{\cos b'} \tag{29.246}$$

Statt dieser Formeln können näherungsweise auch folgende Formeln benutzt werden[1]:

Mit den Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} M_L &:= 0°.040 \sin\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾\right) - 0°.003 \sin\left(L_☾ - \Omega_☾\right) \\ N_L &:= 0°.020 \cos\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾\right) + 0°.003 \cos\left(L_☾ - \Omega_☾\right) \end{aligned} \tag{29.247}$$

lauten die Näherungsformeln

$$\begin{aligned} \delta C &= \frac{M_L \sin l' - N_L \cos l'}{\cos b'} \\ \delta b &= M_L \cos l' - N_L \sin l' \\ \delta l &= 0°.003 \sin\left(L_☾ - \Gamma'_☾\right) - 0°.005 \sin 2\left(\Gamma'_☾ - \Omega_☾\right) - 0°.016 \sin M_\odot + \delta C \sin b' \ . \end{aligned} \tag{29.248}$$

Alternativ lauten die ersten Glieder in den Entwicklungen der physikalischen Libration in den Bahnparametern[2]

$$\begin{aligned} \rho_L &= -107'' \cos M_☾ + 36'' \cos\left(M_☾ + 2\Gamma'_☾\right) - 11'' \cos 2\left(M_☾ + \Gamma'_☾\right) + \cdots \\ I\,\sigma_L &= -109'' \sin M_☾ + 36'' \sin\left(M_☾ + 2\Gamma'_☾\right) - 11'' \sin 2\left(M_☾ + \Gamma'_☾\right) + \cdots \\ \tau_L &= -14'' \sin M_☾ + 73'' \sin M_\odot + 19'' \sin 2\Gamma'_☾ + \cdots \ . \end{aligned} \tag{29.249}$$

Das erste Glied in ρ_L und σ_L ist jeweils eine Folge der Elliptizität der Mondbahn, in τ_L eine Folge der Jährlichen Gleichung. Die Zahlenwerte bestätigen: Die physikalischen Librationen bewirken eine maximale Abweichung von etwa zwei Bogenminuten gegenüber den Regeln von *Cassini*.

Die genaue Beobachtung und damit theoretische Erfassung der physikalischen Librationen konnte erst nach den Apollo Mondlandungen erfolgen. Die auf der Mondoberfläche

---

[1] Kopiert aus EXPLANATORY SUPPLEMENT [1961], pp.319-322

[2] Nach KOPAL, Z. [1966], pp. 38-39, Formeln (4-121), (4-122), (4-123). Diese sind die ersten Glieder einer längeren Entwicklung, die von F. HAYN [1902] durch Integration erhalten worden waren. Die dort wiedergegebenen Ergebnisse sind Entwicklungen mit einer Genauigkeit von über $1''$, Formeln (51a), (51b), (51c) auf Seiten 50-51

zurückgelassenen ALSEP Stationen (Bild 29-16 auf Seite 354) mit Laser Reflektor sowie die Möglichkeit von Radar Beobachtungen und Messungen mit Hilfe der Very Long Baseline Interferometry ermöglichten präzise Beobachtungen. Diese führten seit den 1970er Jahren zur Entwicklung aufwendiger Theorien zur Berechnung der physikalischen Librationen[1]. Dabei haben sich nicht nur die Bezeichnungen, sondern auch die verwendeten Parameter geändert. Es zeigte sich, dass der Mond als ein nichtstarrer Körper aufgefasst werden muss, der durch Kräfte deformiert wird, die im Wesentlichen von seinem Zentrifugalpotential sowie dem Gezeitenpotential zweiter Ordnung durch die Erde geprägt werden[2].

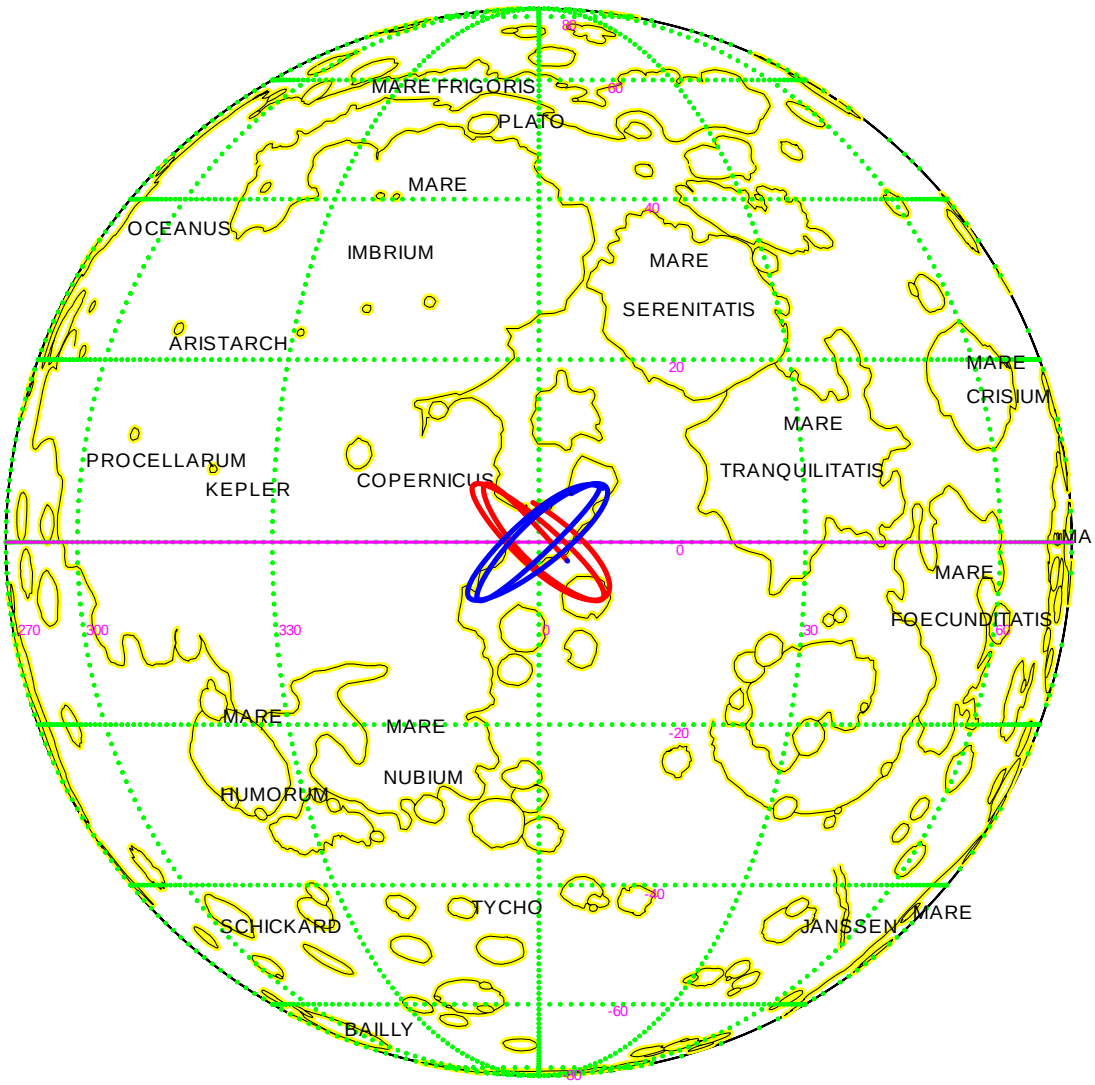


Bild 29-12: Die Bewegung des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche je über 2 Monate im Jahre 2018 (rote Kurve) und im Abstand von 9 Jahren im Jahr 2027 (blaue Kurve), realistische Darstellung

[1] Aus der zahlreichen Literatur seien genannt: HENRARD, J. AND MOONS, M. [1978]; MIGUS, A. [1980]; ECKHARDT, DONALD H. [1981]; ECKHARDT, DONALD H. [1982]; MOONS, M. [1982]; WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2008]; WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2013]; außerdem URBAN, S. and P. K. SEIDELMANN, (eds.) [2013], pp. 429-434; allgemeine Darstellung etwa in COOK, A. H. [1988], pp. 14-24, sowie ch. 10, pp. 166-186 (mit weiteren Literaturhinweisen)

[2] Hinweis etwa bei ECKHARDT, DONALD H. [1981], p. 12, auch Berücksichtigung der Erdabplattung ab p. 39

Die Auswirkungen der physikalischen Librationen werden im astronomischen Jahrbuch basierend auf den neuentwickelten hochgenauen Theorien wieder in den äquatorialen Winkeln Länge, Breite und Positionswinkel im Rahmen der physikalischen Mondephemeride zur Verfügung gestellt. Diese können dann, wenn benötigt, für präzise Beobachtungen genutzt werden.

29.5.3 Der Verlauf des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche

Die geozentrischen geometrischen und die physikalischen Librationen zusammen ergeben die selenozentrische Position des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche sowie den zugehörigen Positionswinkel

$$\lambda_{ME} = l' + \delta l \quad , \quad \beta_{ME} = b' + \delta b \quad , \quad C_{PA} = C' + \delta C \quad . \tag{29.250}$$

Eine Alternative zu den in den vorstehenden Abschnitten referierten Formeln zur Berechnung des subterrestrischen Punktes kann mit Hilfe der in Abschnitt 29.4.3 hergeleiteten Transformationsformeln direkt gefunden werden. Sei $\mathbf{r}_{♁☾} = y_E^j \, \mathbf{q}_j^{(E)}$ der geozentrische Ortsvektor des Mondmittelpunktes, lautet der selenozentrische Ortsvektor des subterrestrischen Punktes im Mondäquatorsystem mit der Transformation (29.182)

$$\mathbf{r}_{☾E} = -\frac{R_M}{r_☾} \mathbf{r}_{♁☾} = -\frac{R_M}{r_☾} y_E^j \, a_A{}^i{}_j \, \mathbf{p}_i^{(☾)} = x_{ME}^i \, \mathbf{p}_i^{(☾)} \quad . \tag{29.251}$$

Die selenozentrischen Polarkoordinaten des subterrestrischen Punktes können dann berechnet werden aus

$$\begin{aligned} x_{ME1} &= R_M \cos\beta_{ME} \cos\lambda_{ME} \\ x_{ME2} &= R_M \cos\beta_{ME} \sin\lambda_{ME} \\ x_{ME3} &= R_M \sin\beta_{ME} \quad . \end{aligned} \tag{29.252}$$

Diese Formeln sind vollständig. Sie berücksichtigen die Bahnbewegung des Mondes im Ortsvektor $\mathbf{r}_{♁☾}$ und damit die geometrischen geozentrischen Librationen. Zudem sind in den Transformationsformeln (29.180) die physikalischen Librationen über die Zuordnungen (29.168) berücksichtigt.

Eine quantitative Abschätzung der geometrischen (optischen) Librationen kann folgendermaßen erhalten werden:

Die Libration in Länge wird im Wesentlichen durch die Mittelpunktsgleichung geprägt. Nach Formel (29.49) ist hier größenordnungsmäßig der maximale Wert $\Delta l = \pm 6°.3$ zu erwarten.

Die Libration in Breite wird im Wesentlichen durch die Neigung des Mondäquators zur Mondbahnebene gebildet. Nach Tabelle 29-2 auf Seite 282 ergibt sich die Abschätzung für den maximalen Wert $\Delta b = \pm\left(I + i_☾\right) = \pm 6°.7$.

BEISPIEL: In Bild 29-12 (auf Seite 344) ist der Verlauf des subterrestrischen Punktes auf der Mondoberfläche zu sehen. Berechnet wurde die Kurve in zwei Fällen für die Dauer von je 2 Monaten, was sich jeweils in je zwei sich nicht schließenden Kurven abbildet. Für den Zeitraum Januar bis März 2018 wurde die rote Kurve erhalten. Die Veränderung der Kurve hängt wesentlich von der Bewegung des Bahnknotens $\Omega_☾$ ab. Der Umlauf des Knotens beträgt nach dem Ausdruck (29.31) etwa 18.6 julianische Jahre. Aus diesem Grund wurde für den Zeitraum von zwei Monaten im Jahr 2027 die Bewegung des subterrestrischen Punktes aufgezeichnet, die als blaue Kurve zu erkennen ist. Sie verläuft symmetrisch zum Nullmeridian des Mondes zu der 9 Jahre früher erhalten Kurve, also nach einem halben Umlauf des aufsteigenden Knotens der Mondbahn. ◄

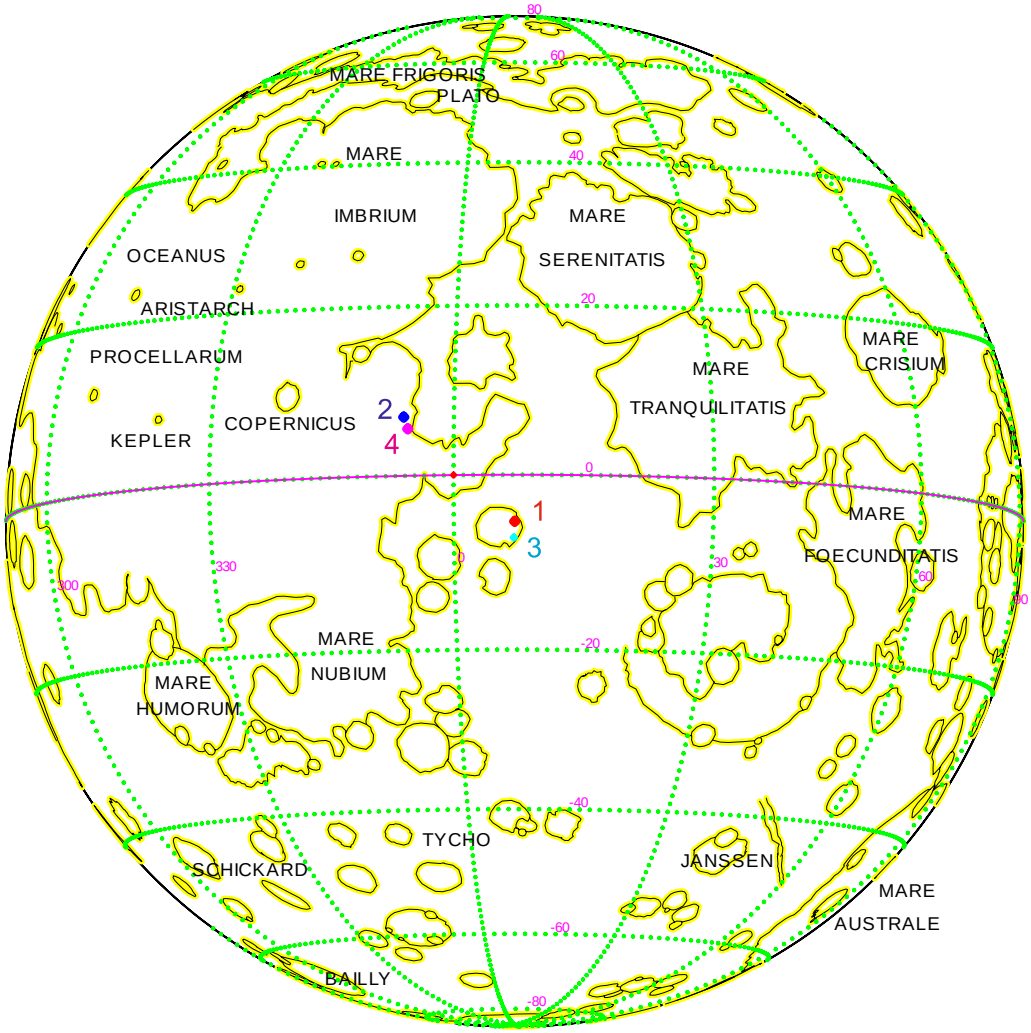


Bild 29-13: Zur Demonstration des Einflusses der topozentrischen Libration auf die Beobachtbarkeit der Mondoberfläche. Der subtopozentrische Punkt 1 gesehen von einer irdischen Station auf der Nordhalbkugel ist der Mittelpunkt des hier dargestellten Sichtkreises. Punkt 2 ist von derselben Station aus gesehen etwa einen halben siderischen Monat später. Die Punkte 3 und 4 markieren die subtopozentrischen Punkte zu denselben Zeitpunkten, jedoch gesehen von einer Station auf der irdischen Südhalbkugel. Die verwendeten Zahlenwerte sind in Tabelle 29-5 zusammengestellt.

Anmerkung: Der subterrestrische Punkt auf dem Mond wird wie der subsolare Punkt im astronomischen Jahrbuch[1] tabelliert in Schrittweiten von 1 Tag aufbereitet. ◀

29.5.4 Topozentrische geometrische Librationen

Während die geozentrischen Librationen die Ansicht des Mondes vom Erdmittelpunkt aus definieren, erscheint der Mond von einem Beobachter auf der (oder um die) Erde verändert. Diese Veränderung berücksichtigen die topozentrischen Librationen. Zu ihrer Berechnung gibt es

[1] ASTRONOMICAL ALMANAC (AA) herausgegeben vom Nautical Almanac Office, USNO, and Her Majesty's Nautical Almanac Office, Rutherford Appleton Laboratory, ISBN 0 11 887323 7, ISSN 0737-6421

Näherungsformeln[1]. Die Erdscheibe hat vom Mond ausgesehen etwa den Winkeldurchmesser $1°54'4''.25$. Dieser Wert kann somit nur als maximaler Wert für die topozentrische Libration erwartet werden.

Ziel ist die Berechnung der selenographischen Koordinaten des selenozentrischen Richtungsvektors zum Beobachter. Der Beobachter sei durch die geographischen Koordinaten geographische Länge λ, geographische Breite φ sowie die Höhe H' über dem Referenzellipsoid R gegeben[2].

Mit dem Querkrümmungsradius

$$R_Q = \frac{R_E}{\sqrt{1-\left[1-\left(1-f\right)^2\right]\sin^2\varphi}} \tag{29.253}$$

lautet der geozentrische Ortsvektor des Beobachters im $\mathbf{q}_j^{(G)}$ – Greenwich-System

$$\mathbf{R} = y^{(G)j}\mathbf{q}_j^{(G)} = \left(R_Q + H'\right)\cos\varphi\left\{\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda\right\} + \mathbf{q}_3^{(G)}\left[R_Q\left(1-f\right)^2 + H'\right]\sin\varphi \ . \tag{29.254}$$

Die entsprechende Darstellung im $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem erfordert die Drehung um die auf Greenwich bezogene Sternzeit Θ_G in

$$\mathbf{R} = y^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} = x_T^i\,\mathbf{p}_i \tag{29.255}$$

mit

$$x_{T1} = y_1^{(G)}\cos\Theta_G - y_2^{(G)}\sin\Theta_G \ , \ x_{T2} = y_1^{(G)}\sin\Theta_G + y_2^{(G)}\cos\Theta_G \ , \ x_{T3} = y_3^{(G)} \ . \tag{29.256}$$

Der geozentrische Mondort ist mit der Mondephemeride in ekliptikalen Koordinaten berechnet

$$\mathbf{r}_{♁☾} = y^{(☾)j}\mathbf{q}_j^{(E)} = r_m\left[\mathbf{q}_1^{(E)}\cos l_m\cos b_m + \mathbf{q}_2^{(E)}\sin l_m\cos b_m + \mathbf{q}_3^{(E)}\sin b_m\right] \tag{29.257}$$

und in äquatorialen Koordinaten $\mathbf{r}_{♁☾} = x^{(☾)i}\mathbf{p}_i$ mit

$$x_1^{(☾)} = y_1^{(☾)} \ , \ x_2^{(☾)} = y_2^{(☾)}\cos\varepsilon - y_3^{(☾)}\sin\varepsilon \ , \ x_3^{(☾)} = y_2^{(☾)}\sin\varepsilon + y_3^{(☾)}\cos\varepsilon \ . \tag{29.258}$$

Der topozentrische Ortsvektor des Mondmittelpunktes kann damit berechnet werden aus

$$\mathbf{r}_{T☾} = \mathbf{r}_{♁☾} - \mathbf{R} = x^{(T☾)i}\,\mathbf{p}_i = \left(x^{(☾)i} - x_T^i\right)\mathbf{p}_i \ . \tag{29.259}$$

Der selenozentrische Ortsvektor des dem Topozentrum nächsten Punktes auf der Mondoberfläche („Subtopozentrischer Punkt“) lautet in (Erd-)äquatorialen Koordinaten

$$\mathbf{r}_{☾T} = -\mathbf{r}_{T☾}\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T☾}\right|} = -\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T☾}\right|}x^{(T☾)i}\,\mathbf{p}_i \tag{29.260}$$

und in Mond-äquatorialen Koordinaten mit den Transformationen (29.238)

$$\mathbf{r}_{☾T} = y^{(☾T)j}\mathbf{p}_j^{(☾)} = -\frac{R_M}{\left|\mathbf{r}_{T☾}\right|}x^{(T☾)i}\,a_{D\ i}^{\ j}\,\mathbf{p}_j^{(☾)} \ . \tag{29.261}$$

---

[1] z.B. AA 2004, p. D5

[2] Die hier verwendeten Formeln sind den Abschnitten 8.6.1 entnommen, die Reduktion des geographischen Systems auf das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem in Abschnitt 8.5.2.1 (Band II)

Die selenozentrischen Winkelkoordinaten $(\lambda_{MT}, \beta_{MT})$ des subtopozentrischen Punktes können berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
y_1^{(\mathbb{C}T)} &= R_M \cos\beta_{MT} \cos\lambda_{MT} = -\frac{R_M}{|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}|} x^{(T\mathbb{C})i} a_{D1i} \\
y_2^{(\mathbb{C}T)} &= R_M \cos\beta_{MT} \cos\lambda_{MT} = -\frac{R_M}{|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}|} x^{(T\mathbb{C})i} a_{D2i} \\
y_3^{(\mathbb{C}T)} &= R_M \sin\beta_{MT} \qquad\qquad = -\frac{R_M}{|\mathbf{r}_{T\mathbb{C}}|} x^{(T\mathbb{C})i} a_{D3i} \quad .
\end{aligned}
\tag{29.262}
$$

	Beobachtungsort auf Erde			Beobachtungs-datum	$h_{\mathbb{C}}$ auf Erde	Subtopozentrischer Punkt	
	λ	φ	H			λ_{MT}	β_{MT}
1	10°	48°	100 km	2018-02-06	29°.7	6°.906	-5°.299
2				2018-02-20	34°.8	353°.431	6°.517
3	180°	-70°	100 km	2018-02-06	11°.0	6°.802	-7°.126
4				2018-02-20	1°.3	354°.720	5°.367

Tabelle 29-5: Beispiel zur Berechnung des subtopozentrischen Punktes auf der Mondoberfläche zu verschiedenen Zeitpunkten und von verschiedenen irdischen Beobachtungsstationen.

BEISPIEL: Der Einfluss der topozentrischen Libration auf die Beobachtung des Mondes von der Erde aus wird beispielhaft in Bild 29-13 demonstriert. Von einer Bodenstation auf der Nordhalbkugel der Erde wird der Mond zu einem gewissen Zeitpunkt beobachtet. Der subtopozentrische Punkt auf der Mondoberfläche wird als Mittelpunkt des Mondbildes gewählt: Punkt 1 im Bild. Da dieser Punkt südlich des Mondäquators liegt, erscheint die Mondkugel über den Nordpol gekippt, der Südpol wird sichtbar. Außerdem ist der Nullmeridian des selenographischen Systems nach Westen entgegen der Rotation des Mondes verschoben: dadurch wird am östlichen Rande des Mondes ein sonst nicht sichtbarer Sektor der Mondoberfläche sichtbar. Diese beiden Effekte sind eine Folge der geometrischen Libration in Länge und in Breite. Die entsprechenden physikalischen Librationen sind so gering, dass sie im Bild nicht erscheinen. Punkt 2 ist der subtopozentrische Punkt nach einem halben siderischen Mondumlauf. Dieser Punkt ist gegenüber dem ersteren erheblich nach Norden und nach Westen verschoben. Der Einfluss der geometrischen Librationen wird hier deutlich. Würde dieser Punkt als Mittelpunkt des Bildes gewählt, würden der Nordpol des Mondes und Bereiche jenseits des westlichen Randes der Mondoberfläche sichtbar. Während eines siderischen Umlaufs des Mondes wirken sich somit die geometrischen (optischen) Librationen so aus, dass sowohl der Süd- wie der Nordpol, außerdem der westliche wie der östliche Rand überschritten werden.

Um den Einfluss der topozentrischen Libration als Folge unterschiedlicher Beobachtungsorte auf der Erde zu zeigen, werden zu denselben Daten wie in den ersten beiden vorhergehenden Fällen die Beobachtung von einer Station auf der Südhalbkugel aus durchgeführt. Die entsprechenden subtopozentrischen Punkte sind die Punkte 3 und 4. Diese Punkte sind gegenüber den

von der irdischen Nordhalbkugel durchgeführten Beobachtungen wie zu erwarten nach Süden auch auf dem Mond verschoben. In Tabelle 29-5 sind die zugehörigen Zahlenwerte gelistet. Die Tabelle zeigt die jeweilige Elevation unter der die Beobachtungen erfolgt sind. Da die Beobachtbarkeit von den verschiedenen Beobachtungsstationen infolge der Erdrotation unterschiedlich ist, können die hier erfolgten Berechnungen nicht exakt zum jeweiligen exakt gleichen Zeitpunkt durchgeführt werden. Die Tendenz der Aussagen wird wegen der langsamen Rotation des Mondes dadurch nicht verfälscht.

Gegenüber den Abschätzungen über die zu erwartenden Größen der geometrischen Librationen in Abschnitt 29.5.3 werden in Tabelle 29-5 zum Teil größere Zahlenwerte gefunden. Die Abweichung ist eine Folge der topozentrischen Libration, die in der Größenordnung 1° erwartet werden muss.◀

29.6 Die Beobachtung des Mondes von der Erdoberfläche aus

Die auf die Sonne bezogene Bewegung des Mondes wird als synodische Bewegung bezeichnet. Ein Umlauf des Mondes um die Erde in Bezug auf die Sonne wird als synodischer Monat bezeichnet, in der Antike auch als *Lunation*. Durch Beobachtung der Phasen des Mondes (Neumond, erstes Viertel, Vollmond, drittes Viertel) ist der synodische Monat seit alters die unmittelbarste Aussage über die Mondbewegung. Die durch die Elongation $D_{☾}$ beschriebenen Phasen des Mondes geben das „Alter des Mondes“ an.

29.6.1 Die Mondphase

Die mittlere Elongation $D_{☾}$ gibt die Phase des Mondes nur näherungsweise an. Das liegt an der Mittelung, die einen Fehler bis zu 7 Stunden ausmachen kann. Dies liegt aber auch an der Neigung der Mondbahn, die verursacht, dass eine Phase von der Erde oder einem Erdsatelliten aus nicht voll wahrgenommen werden kann. Man definiert daher als Phasenwinkel Φ den selenozentrischen Winkel zwischen der Richtung zum Sonnen- und zum Erdmittelpunkt (= selenozentrische Elongation Sonne – Erde).

Seien $\mathbf{r}_{♁☉}$ der geozentrische Ortsvektor der Sonne, $\mathbf{r}_{♁☾}$ des Mondes, errechnet sich der Phasenwinkel aus (siehe Bild 29-14)

$$\cos\Phi = -\frac{\left(\mathbf{r}_{♁☉} - \mathbf{r}_{♁☾}\right)\cdot\mathbf{r}_{♁☾}}{\left|\mathbf{r}_{♁☉} - \mathbf{r}_{♁☾}\right|\left|\mathbf{r}_{♁☾}\right|} \quad . \tag{29.263}$$

Der Mond hat vom Erdmittelpunkt aus gesehen Neumond, wenn $\Phi = 0°$, Vollmond, wenn Φ = 180°. Er ist im ersten Viertel, wenn $\Phi = 90°$, im dritten Viertel, wenn $\Phi = 270°$, usw..

An Stelle des Phasenwinkels wird gelegentlich auch der Begriff der *Phase k* verwendet, definiert durch[1]

$$k := \frac{1}{2}\left(1 + \cos\Phi\right) \ . \tag{29.264}$$

Die Phase gibt den vom Erdmittelpunkt aus gesehenen von der Sonne beleuchteten Bruchteil der Mondoberfläche an, wenn der Mond als Kugel aufgefasst wird. Für k=1 ist Vollmond, für k=0 ist Neumond, k=0.5 im ersten oder dritten Viertel, usw..

[1] SEIDELMANN, P. K. (ed.) [1992], p.396

Ebenfalls auf die kugelförmig angenommene Oberfläche des Mondes kann der *Defekt* definiert werden als der nicht von der Sonne beschienene aber von der Erde (= Erdmittelpunkt) aus sichtbare Anteil der Mondscheibe:

$$D_f := \frac{1}{2}\left(1-\cos\Phi\right) \ . \tag{29.265}$$

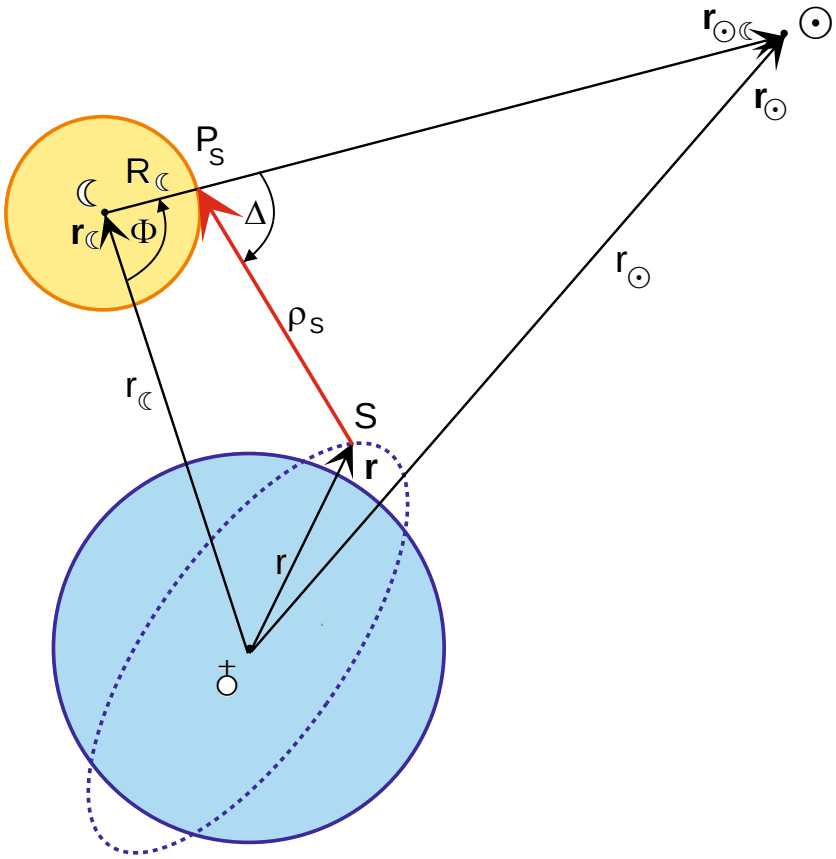


Bild 29-14: Der Phasenwinkel Δ des subsolaren Punktes P_S auf der Mondoberfläche gesehen von einem Erdsatelliten S aus

29.6.2 Der subsolare Punkt auf der Mondoberfläche

Ähnlich wie im Fall des subterrestrischen Punktes kann der subsolare Punkt auf der Mondoberfläche berechnet werden. Der Ort des subsolaren Punktes liefert eine Aussage über die von der Erde aus sichtbare beleuchtete Fläche des Mondes, hängt also mit der Phase Φ zusammen.

Es seien die ekliptikalen Koordinaten der geozentrischen Vektoren zu Sonne und Mond gegeben:

$$\mathbf{r}_{♁\odot} = y_S^j\,\mathbf{q}_j^{(E)} \ , \ \mathbf{r}_{♁☾} = y_M^j\,\mathbf{q}_j^{(E)} \quad . \tag{29.266}$$

Der selenozentrische Ortsvektor der Sonne wird mit Hilfe der Transformation (29.187) und den Transformationskoeffizienten (29.180) in das Mondäquatorsystem transformiert:

$$\mathbf{r}_{☾\odot} = \mathbf{r}_{♁☾} - \mathbf{r}_{♁\odot} = \left(y_M^j - y_S^j\right)\mathbf{q}_j^{(E)} = y_{MS}^j\,\mathbf{q}_j^{(E)} = y_{MS}^j\,a_{A\ j}^{\ i}\,\mathbf{p}_i^{(☾)} \quad . \tag{29.267}$$

Die Polarkoordinaten $\left(\lambda_{MS}, \beta_{MS}\right)$ des subsolaren Punktes werden erhalten aus

$$\mathbf{r}_{☾\odot} = \left|\mathbf{r}_{☾\odot}\right|\left\{\cos\lambda_{MS}\cos\beta_{MS}\,\mathbf{p}_1^{(☾)} + \sin\lambda_{MS}\cos\beta_{MS}\,\mathbf{p}_2^{(☾)} + \sin\beta_{MS}\,\mathbf{p}_3^{(☾)}\right\} \quad . \tag{29.268}$$

Wenn der subsolare Punkt sowie der subterrestrische Punkt bekannt sind, kann die Phase berechnet werden aus

$$\cos\Phi = \cos\left(\lambda_{ME} - \lambda_{MS}\right)\cos\beta_{ME}\cos\beta_{MS} + \sin\beta_{ME}\sin\beta_{MS} \quad . \tag{29.269}$$

Anmerkung: die selenographischen Koordinaten des subsolaren Punktes sind wie die des subterrestrischen Punktes im Astronomischen Jahrbuch für jeden Tag tabelliert[1]. ◀

29.6.3 Der Phasenwinkel bezogen auf einen Erdsatelliten

Wenn die Mondoberfläche von einem Erdsatelliten aus beobachtet wird, so sind die geometrischen Verhältnisse merklich anders als beim Bezug auf den Erdmittelpunkt, auch ändern sie sich infolge der Bewegung des Erdsatelliten um die Erde.

Als charakteristisch für die Sonneneinstrahlung sei der subsolare Punkt P_S auf der Mondoberfläche angesehen. Dieser Punkt hat den selenozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{\odot☾,P} = R_☾ \frac{\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}_☾}{\left|\mathbf{r}_\odot - \mathbf{r}_☾\right|} \tag{29.270}$$

wenn $R_☾$ der mittlere Radius des kugelförmig angenommenen Mondes ist.

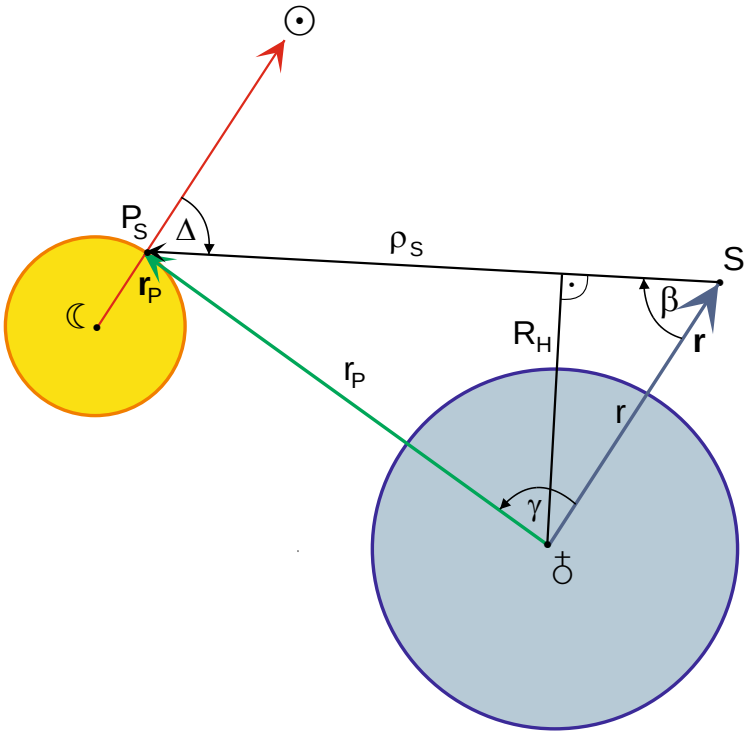


Bild 29-15: Sichteinschränkungen bei Beobachtung des subsolaren Punktes P_S auf der Mondoberfläche von einem Erdsatelliten S aus

Seien $\mathbf{r}$ der momentane Ortsvektor des Satelliten, $\mathbf{r}_\odot$ der geozentrische Ortsvektor der Sonne (Zentrum der Sonne), $\mathbf{r}_☾$ des Mondes, so hat der subsolare Punkt vom Satelliten aus gesehen den Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{PS} = \mathbf{r}_{\odot☾,P} - \mathbf{r}_☾ - \mathbf{r} \tag{29.271}$$

mit Radius

$$\rho_S := \left|\mathbf{r}_{PS}\right| \quad . \tag{29.272}$$

Im subsolaren Punkt P_S kann der Phasenwinkel $\Delta := \sphericalangle(\odot, P_S, S)$ berechnet werden aus

[1] z.B. AA 2004, pp. D6 – D21

$$\cos\Delta = -\frac{\mathbf{r}_{PS}\cdot\mathbf{r}_{\odot☾,P}}{\rho_S\, R_☾} \quad . \tag{29.273}$$

Als erste Bedingung für Sichtkontakt vom subsolaren Punkt zum Erdsatelliten muss der Satellit über dem Mondhorizont liegen, es muss also $\beta \le 90°$ erfüllt sein, bzw.

$$\cos\Delta \ge 0 \quad . \tag{29.274}$$

Als zweite Bedingung für Sichtkontakt darf der Mond vom Erdsatelliten aus gesehen sich nicht „hinter" der Erde befinden. Um diese Sichteinschränkungen abzuschätzen, wird entsprechend Bild 29-15 zunächst der geozentrische Zentralwinkel $\gamma = \sphericalangle(P_S, ♁, S)$ zwischen subsolarem Punkt und Satelliten berechnet. Dazu wird der geozentrische Ortsvektor des subsolaren Punktes benötigt

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{\odot☾,P} + \mathbf{r}_☾ \quad , \tag{29.275}$$

mit Betrag $r_P := |\mathbf{r}_P|$, sowie der geozentrische Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ des Satelliten mit Radius $r := |\mathbf{r}|$. Dann ist

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{r}_P\cdot\mathbf{r}}{r_P\, r} \quad , \tag{29.276}$$

und die Sichtbedingung ist im Fall $\cos\gamma \ge 0$ sicher erfüllt. Sonst muss der satellitenzentrierte Nadirwinkel $\beta = \sphericalangle(♁, S, P_S)$ aus

$$\cos\beta = -\frac{\mathbf{r}_{PS}\cdot\mathbf{r}}{\rho_S\, r}$$

untersucht werden. Die Sichtlinie vom Satelliten zum subsolaren Punkt hat vom Erdmittelpunkt den Abstand

$$R_H = r\sin\beta = r\sqrt{1-\cos^2\beta} \quad . \tag{29.277}$$

Wenn $R_H \le R_E$, mit (mittlerem oder um eine gewisse Lufthöhe erweitertem) Erdradius R_E, ist der Sichtkontakt unterbrochen. Wenn R_H nahe an R_E ist, kann die Sicht zum Mond durch Strahlbeeinflussung nahe der Erdoberfläche beeinträchtigt werden.

BEISPIEL: Der indische Erdbeobachtungssatellit IRS-P3 hatte am 22 Dezember 1999 um 4^h 16^m $51^s.36$ die mittleren (geozentrischen) Bahnelemente (berechnet aus 2-line Elementen):

Große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 7194.976 km (entsprechend etwa 816.8 km gemittelte Bahnhöhe),

Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.0001504,

Inklination $\bar{i}_0$ = 98°.6359,

Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\bar{\Omega}_0$ = 67°.3896,

Argument der Breite $\bar{\omega}_0$ = 50°.7649,

Mittlere Anomalie zur Epoche $\overline{M_{0\,0}}$ = 309°.3662.

Am selben Tag hatte der Mond das Alter $D_☾ = 174°.513$, den Phasenwinkel $\Phi = 5°.977$ und die Phase k = 0.997282. Vom entsprechenden Satellitenort aus gesehen hatte der subsolare Punkt auf der Mondoberfläche den Abstand $\rho_S = 356223.734\,\text{km}$ und den Phasenwinkel $\Delta = 6°.679$. Der geozentrische Winkel zwischen subsolarem Punkt und Satelliten betrug γ = 93°.145 und der entsprechende Nadirwinkel am Satelliten β = 85°.699. Die Sichtlinie vom

Satelliten zur Mondoberfläche hatte vom Erdmittelpunkt den kürzesten Abstand R_H = 7174.299 km.◀

29.6.4 Beobachtung eines Ortes auf der Mondoberfläche von der Erde aus

Ein Ort auf der als Kugel angenommenen Mondoberfläche sei durch die selenozentrischen Winkelkoordinaten (λ_M, β_M) gegeben. Der zugehörige selenozentrische Ortsvektor lautet bezogen auf das $\mathbf{p}_i^{(☾)}$ – Mondäquatorsystem nach Definition (29.169)

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_M = y_M^j\, \mathbf{p}_j^{(☾)} \\ &y_{M1} = R_M \cos\beta_M \cos\lambda_M \;,\; y_{M2} = R_M \cos\beta_M \sin\lambda_M \;,\; y_{M3} = R_M \sin\beta_M \quad . \end{aligned} \tag{29.278}$$

Zur Beobachtung von einem Ort auf (oder über der) Erde muss dieser Ortsvektor auf das $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem bezogen werden. Mit den Transformationsformeln (29.231) für die Basisvektoren sowie (29.238) für die Koeffizienten wird dies für den Beobachtungszeitpunkt durchgeführt mit

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_M = y_M^j\, \mathbf{p}_j^{(☾)} = y_M^j\, a_{Dj}{}^i\, \mathbf{p}_i = x_M^i\, \mathbf{p}_i \\ &x_M^i = y_M^j\, a_{Dj}{}^i \quad , \quad y_M^j = x_M^i\, a_D{}^j{}_i \quad . \end{aligned} \tag{29.279}$$

Der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{r}_{♁☾}$ des Mondmittelpunktes ist bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem aus den Beziehungen (29.257) und (29.258) (auf Seite 347) zum gewählten Beobachtungszeitpunkt bekannt: $\mathbf{r}_{♁☾} = x^{(☾)i}\mathbf{p}_i$.

Der geozentrische Ortsvektor $\mathbf{R}$ des Beobachters, der mit den geographischen Polarkoordinaten gegeben ist, hat im Erdäquatorsystem mit den Beziehungen (29.253) - (29.256) die Darstellung $\mathbf{R} = y^{(G)j}\, \mathbf{q}_j^{(G)} = x_T^i\, \mathbf{p}_i$.

Der irdische Beobachter kann den betreffenden Ort auf der Mondoberfläche beobachten unter dem Ortsvektor

$$\mathbf{r}_{TM} = \mathbf{r}_{♁☾} + \mathbf{R}_M - \mathbf{R} = x_{TM}^i\, \mathbf{p}_i = \left(x^{(☾)i} + x_M^i - x_T^i\right)\mathbf{p}_i \quad . \tag{29.280}$$

Die zu beobachtenden Koordinaten sind die topozentrische Rektaszension α_T und die topozentrische Deklination δ_T aus

$$x_{TM1} = |\mathbf{r}_{TM}| \cos\delta_T \cos\alpha_T \;,\; x_{TM2} = |\mathbf{r}_{TM}| \cos\delta_T \sin\alpha_T \;,\; x_{TM1} = |\mathbf{r}_{TM}| \sin\delta_T \quad . \tag{29.281}$$

Mikrowellenantennen werden üblicherweise in horizontalen Koordinaten gesteuert. Nach Abschnitt 8.9.3.2 (Band II) erfolgt die Umrechnung in das lokale Horizontsystem. Hierzu wird der lokale Stundenwinkel benötigt, der mit der Sternzeit Θ_G für Greenwich mit Formel (8.135) berechnet werden kann:

$$\vartheta_T = \Theta_G + \lambda - \alpha_T \quad . \tag{29.282}$$

Die horizontalen Koordinaten Azimut A und Elevation h werden dann mit den Transformationsformeln (8.293) berechnet:

$$\begin{aligned} \cos A \cosh &= -\cos\vartheta_T \cos\delta_T \sin\varphi + \sin\delta_T \cos\varphi \\ \sin A \cosh &= -\sin\vartheta_T \cos\delta_T \\ \sinh &= \cos\vartheta_T \cos\delta_T \cos\varphi + \sin\delta_T \sin\varphi \quad . \end{aligned} \tag{29.283}$$

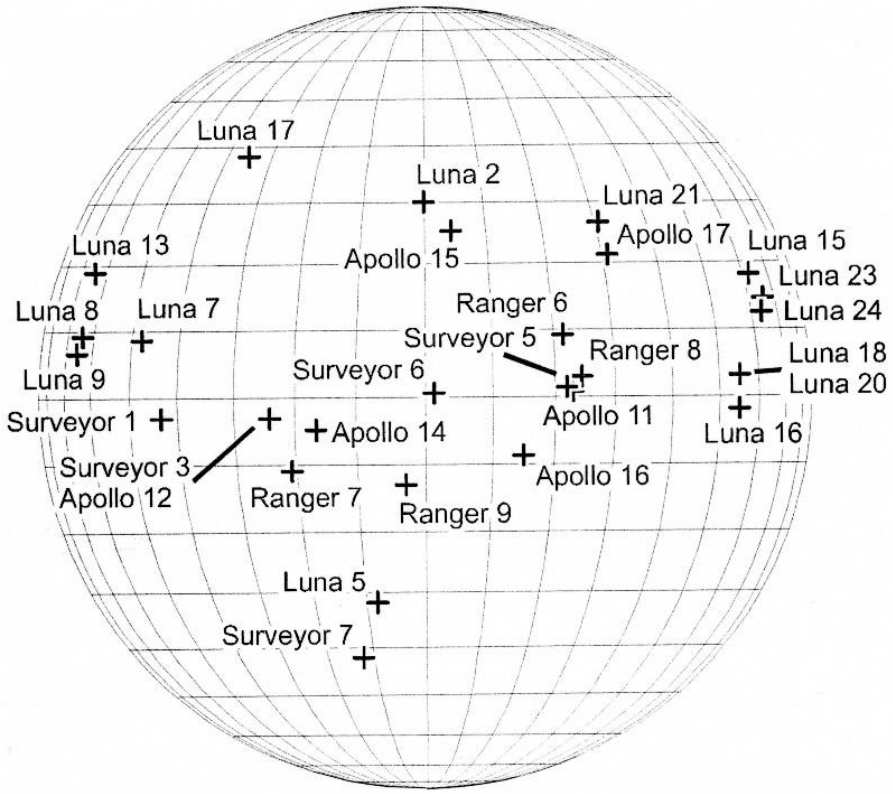


Bild 29-16: Landeorte einiger bis zum Jahr 1991 auf der Vorderseite des Mondes gelandeter bemannter und unbemannter Mondmissionen[1].

	Lunar Module		ALSEP	
	Selenozentrische Länge Ost	Selenozentrische Breite Nord	Selenozentrische Länge Ost	Selenozentrische Breite Nord
Apollo 11	23°28′23″.304	0°40′26″.976	---	---
Apollo 12	–23°25′18″.840	–3°00′46″.080	–23°25′29″.640	–3°00′35″.280
Apollo 14	–17°28′18″.984	–3°38′45″.204	–17°28′39″.648	–3°38′39″.084
Apollo 15	3°37′59″.880	26°07′56″.604	3°37′47″.676	26°08′02″.616
Apollo 16	15°30′03″.960	–8°58′24″.240	15°29′54″.960	–8°58′33″.240
Apollo 17	30°46′20″.280	20°11′27″.960	30°45′55″.800	20°11′32″.280

Tabelle 29-6: Selenozentrische Koordinaten (λ_M, β_M) der Apollo Mondlandungspositionen und der ALSEP Stationen[2].

BEISPIEL 1: In Tabelle 29-6 sind die selenographischen Koordinaten der Apollo Landemodule und der bei den Apollo Missionen hinterlassenen Messstationen (ALSEP)

[1] Kopie aus: TH. NEFF , 'History of Lunar Exploration', in ECKART, P. [2006], pp. 5-33

[2] Die Koordinaten sind bezogen auf das selenozentrische Mittlere Erde / Mondpolachsen Referenzsystem der DE421 Ephemeriden. Sie wurden errechnet aus Aufnahmen des Lunar Reconnaissance Orbiters, veröffentlicht in WAGNER et. al. [2017], siehe in: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/lunar_sites.html

zusammengestellt. Die ALSEP Stationen wurden verwendet um die 30m Kommando Antenne in der deutschen Bodenstation Weilheim-Lichtenau im Rahmen der beiden HELIOS-Missionen zu kalibrieren[1]. ◀

BEISPIEL 2: In Bild 29-17 wird die Beobachtung eines Ortes auf der Mondoberfläche symptomatisch dargestellt[2]. ◀

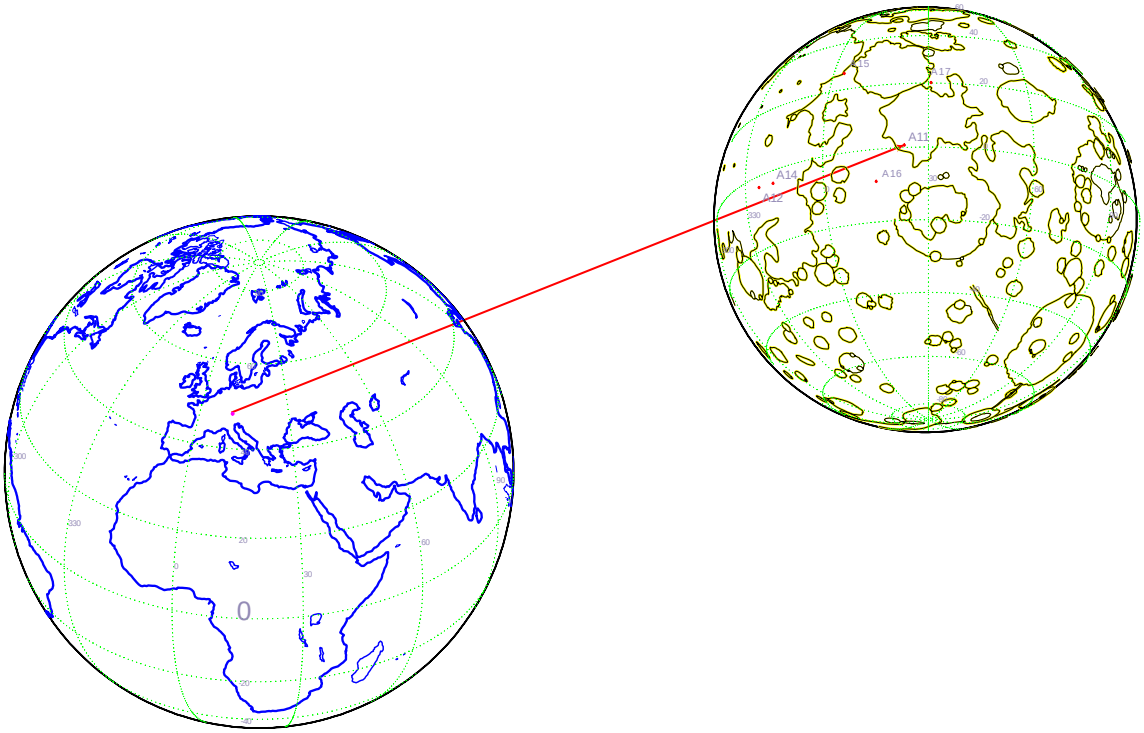


Bild 29-17: Beobachtung eines Punktes auf der Mondoberfläche von der Erdoberfläche aus. Der Pfeil weist von der deutschen Bodenstation in Weilheim – Lichtenau (WHM) zum Landeplatz von Apollo 11.

29.7 Der Mondorbiter

Künstliche Satelliten, die in eine Umlaufbahn um den Mond eingeschossen werden, werden üblicherweise als Mondorbiter bezeichnet. Die Berechnung der Bahn eines solchen Orbiters erfolgt ähnlich wie bei Erdsatelliten, prinzipiell mit sechs zeitabhängigen Bahnparametern. Diese werden von einem komplizierten Störmodell geprägt, wobei nicht so sehr die Asphärizität des Mondkörpers als vor allem die Dominanz der nahen Erde mit ihrem unregelmäßigen Gravitationsfeld einen Einfluss hat[3]. Für bahnanalytische Untersuchungen genügt jedoch in erster Näherung vor allem für Mond-nahe Orbiter wie bei der Erde der Einfluss der säkularen

---

[1] JOCHIM, E. F. UND SLIWINSKI, P. [1976]

[2] Beachte: da Apollo 11 keine ALSEP Stationen hinterlassen hat, wurden die in BEISPIEL 1 genannten Messungen nur für die von Apollo 12, 14, 15, 16 und 17 hinterlassenen ALSEP Stationen durchgeführt.

[3] einige Studien zu Mondorbitern: OESTERWINTER, C. [1969]; GIACAGLIA, G. E. O. , MURPHY, J. P., FELSENTREGGER, T. L. [1970]; FERRARI, A., J. AND HEFTRON, W. G. [1973]; COOK, RICHARD A.; ANDREY B. SERGEYEVSKY; EDWARD A. BELBRUNO and THEODORE H. SWEETSER [1990]; COOK, RICHARD A. and THEODORE H. SWEETSER [1992]; PARK, SANG-YOUNG and JOHN L. JUNKINS [1994]; BECKMAN, MARK & MARCO CONCHA [1998]

Variationen des Hauptproblems mit den Harmonischen J_2, J_3, J_4 nach dem Modell von D. BROUWER [1959].

29.7.1 Selenozentrische Bewegung eines Mondorbiters

Infolge der gebundenen Rotation des Mondes ist es sinnvoll, den Bahnknoten eines Mondorbiters in Bezug auf den Mondäquator auf die selenographische Länge des auf- oder absteigenden Knotens zu definieren und nicht wie bei Erdsatelliten prinzipiell mit der Rektaszension des aufsteigenden Knotens.

Da die Bahn eines Orbiters (im Wesentlichen) von der Rotation des Mondes unabhängig ist, muss die Bewegung, ähnlich wie bei Erdsatelliten, auf den Sternhimmel oder direkter auf die Ekliptik als Bezugsebene ausgerichtet werden. Wie bei Erdsatelliten wird dazu die mittlere lunare Sternzeit

$$\Theta_L = \Theta_{L0} + \dot{\Theta}_L \left(t - t_0\right) + \cdots \tag{29.284}$$

benötigt. Diese wird auf den Frühlingspunkt bezogen. Sie wird somit wegen der Beziehungen (29.168) durch den (Knick-) Winkel

$$\Theta_L = \Psi + \Phi = L_{☾} + 180° + \tau_L - \sigma_L \tag{29.285}$$

berechnet. Der Anfangswert Θ_{L0} wird zur Fundamentalepoche J2000.0 angenommen. Die mittlere geometrische Länge (29.4) (auf Seite 282) des Mondes liefert

$$L_{☾}\left(J2000.0\right) = 218°.3164325 \quad \Rightarrow \quad \Theta_{L0} = 38°.3164325 \quad . \tag{29.286}$$

Die Variation der Sternzeit, damit die tropische Rate der Rotation des Mondes beträgt nach Beziehung (29.5)

$$\dot{\Theta}_L \triangleq n_{☾Ls} = 13°.176396476/\mathrm{d} + \cdots \quad . \tag{29.287}$$

Unter Einschluss der physikalischen Librationen beträgt die lunare Sternzeit[1]

$$\begin{aligned}\Theta_L = \Theta_{L0} + \dot{\Theta}_L + 3°.558 \sin E_1 + 0°.121 \sin E_2 - 0°.064 \sin E_3 + \\ + 0°.016 \sin E_4 + 0°.025 \sin E_5\end{aligned} \tag{29.288}$$

mit

$$E_1 = 125°.045 - 0°.052992\left(t - t_0\right), \quad E_2 = 249°.390 - 0°.105984\left(t - t_0\right) \quad ,$$

$$E_3 = 196°.694 - 13°.012000\left(t - t_0\right) \quad . \quad E_4 = 176°.630 + 13°.340716\left(t - t_0\right) \quad ,$$

$$E_5 = 358°.219 - 0°.985600\left(t - t_0\right) \quad .$$

Hier wird mit $\left(t - t_0\right)$ das Zeitintervall zur Fundamentalepoche in Tagen bezeichnet.

Es sei $\lambda_{M\Omega}$ die selenographische Länge des gewünschten Knotens. Längs des Mondäquators wird dann mit Hilfe der lunaren Sternzeit die lunare Rektaszension des aufsteigenden Knotens des Mondorbiters gebildet:

$$\alpha_{L\Omega} = \Theta_L + \lambda_{M\Omega} \quad . \tag{29.289}$$

Die säkulare Drift der Knotenlänge eines Mondorbiters

[1] Etwa nach AA1984, pp. E87-88, S6-S8, S31. Zusammenstellung in Anhang E (Band V)

$$\dot{\lambda}_{M\Omega} = -\dot{\Theta}_L + \dot{\alpha}_{L\Omega} \tag{29.290}$$

ist auch beim Mond, wie auch auf der Erde, negativ, da die Drift des Knotens relativ klein ist. Die Bahnebene eines Mondorbiters driftet somit nach Westen (in Richtung absteigender selenographischer Länge) während die Rotation des Mondes in östlicher Richtung erfolgt.

Bezugnehmend auf das Mond-feste $\mathbf{p}_i^{(\mathbb{C})}$ – System kann ein lunares „inertiales“ $\mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})}$ – Mondäquatorsystem eingeführt werden. Mit der Transformationsmatrix

$$a_{L\,jk} = \begin{pmatrix} \cos\Theta_L & -\sin\Theta_L & 0 \\ \sin\Theta_L & \cos\Theta_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{29.291}$$

wird die Basis durch die Transformation

$$\mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} = a_{Lj}{}^k \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} \quad , \quad \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} = a_L{}^j{}_k \, \mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} \quad . \tag{29.292}$$

erhalten. In diesem System habe der selenozentrische Ortsvektor eines Mondorbiters die kartesische Darstellung

$$\mathbf{r}_M = y_A{}^j \, \mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} = x_A{}^k \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} = y_A{}^j \, a_{Lj}{}^k \, \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} = x_A{}^k \, a_L{}^j{}_k \, \mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} \quad . \tag{29.293}$$

Die Koordinaten werden transformiert nach

$$y_A{}^j = x_A{}^k \, a_L{}^j{}_k \quad , \quad x_A{}^k = y_A{}^j \, a_{Lj}{}^k \quad . \tag{29.294}$$

Damit kann die Bewegung eines Mondorbiters auf die feste Mondoberfläche zurückgeführt werden.

BEISPIEL: Um einen Anhaltspunkt über die Bahndaten eines Mondorbiters zu bekommen, wird eine niedrige kreisförmige polnahe Bahn betrachtet[1] (Bild 29-18). Die vorgegebenen und abgeleiteten Bahnparameter sind in Tabelle 29-7 zusammengestellt.

Die lunare Rektaszension der Bahn hat die Drift $\dot{\alpha}_{L\Omega} = -0°.095701\ /\mathrm{d}$. Dies führt mit Beziehung (29.290) auf die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -13°.318251\ /\mathrm{Tag}$, die somit etwas größer als die Rotationsrate $\dot{\Theta}_L$ ist (Formel (29.287)). Die Bodenspur des Orbiters driftet infolge der langsamen Rotation des Mondes sehr langsam in östlicher Richtung. Nach einem mittleren Sonnentag ist somit nur ein geringes Gebiet der Mondoberfläche, ein wichtiger Aspekt für die Bahnauslegung eines Mondorbiters (siehe Bild 29-19 und Bild 29-20).

Bemerkenswert ist also infolge der gegenüber der Erde etwa 81mal kleineren zentrischen Gravitationskonstante die Bahngeschwindigkeit von etwa 1.6 km/s. Die Umlaufzeit des Orbiters um den Mond beträgt knapp 2 Stunden. In Bild 29-21 und ist die Subsatellitenspur im Abstand 1 Minute getaktet. Dies gibt einen Eindruck, wie schnell eine Überdeckung der Mondoberfläche möglich sein wird.

[1] Daten des Projektes POLO (Polar Orbiting Lunar Observatory), siehe etwa in ESA [1981]. Die hier gezeigten Bilder entstammen DFVLR-Studien zu diesem Projekt.

Periselen Höhe	$H_P = 100\,\text{km}$
Aposelen Höhe	$H_A = 100\,\text{km}$
Inklination	$i = 85°$
selenographische Länge des ersten absteigenden Knotens	$\lambda_{M☊} = 330°$
Lunare Rektaszension des aufsteigenden Knotens	$\alpha_{L\Omega} = 348°.26521290$
Lunare Sternzeit zur Epoche 2018-02-19/12h	$\Theta_L = 18°.26521290$
große Bahnhalbachse	$a = 1837.400$ km
Exzentrizität	$e = 0.0$
Kreisbahngeschwindigkeit	$V_K = 1.633489$ km/s
Drift des Periselen	$\dot{\omega}_{Ls} = -0.1070606 \times 10^{-6}$ rad/s
Drift des aufsteigenden Knotens	$\dot{\alpha}_{L\Omega} = -0.19332174 \times 10^{-7}$ rad/s
Drift der mittleren Anomalie	$\left(M_{0L}\right)^{\bullet}_{s} = -0.11807172 \times 10^{-6}$ rad/s
Drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_d} = 1^h\ 57^m\ 49^s.469$
Drakonitische Umläufe pro Tag	12.221835
Tropische Umlaufzeit	$\overline{P_t} = 1^h\ 57^m\ 49^s.315$
Sonnensynodische Umlaufzeit	$\overline{P_S} = 1^h\ 57^m\ 51^s.053$
Knotenlängenverschiebung pro Umlauf	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -1°.085930\ /P_d$
Knotenlängendrift	$\dot{\lambda}_{\Omega s} = -13°.318251$ /Tag
Verschiebung der Sonnenzeit des Knotens pro drakonitischem Umlauf	$\overline{\Delta\tau_\Omega} = -0.3539$ Minuten

Tabelle 29-7: Bahndaten eines niedrigfliegenden kreisförmigen Mondorbiters auf polnaher Bahn

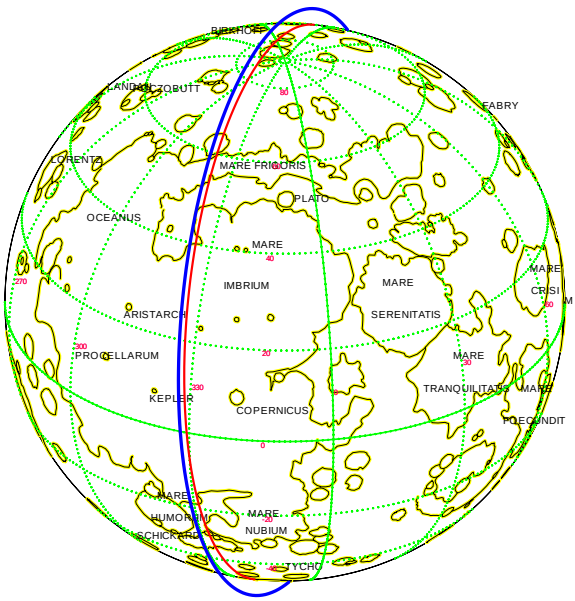


Bild 29-18: Bahn eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters mit Subsatellitenbahn in realistischen Größenverhältnissen

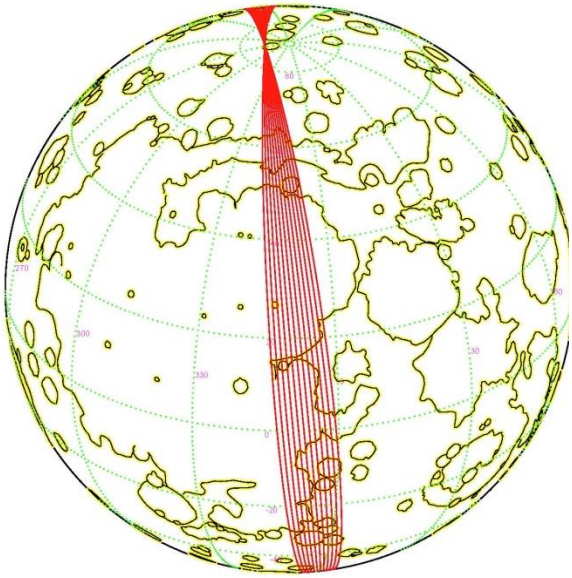


Bild 29-19: Die Subsatellitenspur eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters über einen mittleren Sonnentag in Parallelprojektion der Mondvorderseite

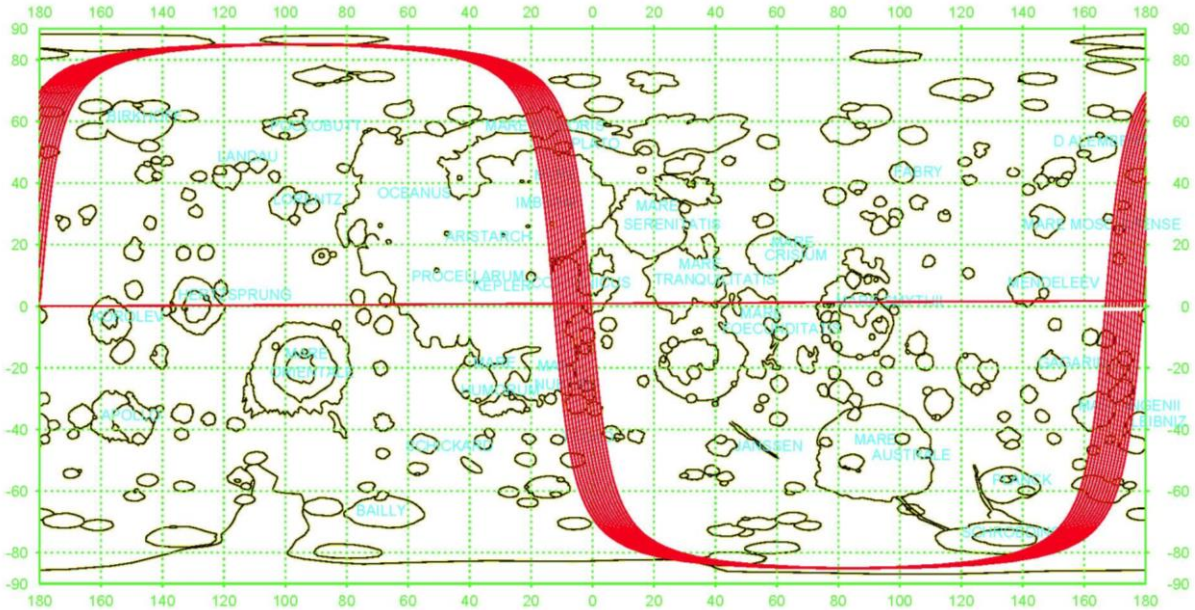


Bild 29-20: Die Subsatellitenspur eines niedrig fliegenden (H=100 km) polnahen (i=85°) Mondorbiters über einen mittleren Sonnentag in linearer Projektion der Gesamt-Mondoberfläche

BEISPIEL 2: Die Bahn eines Mondorbiters wird wesentlich durch die Abplattung des Mondkörpers geprägt, auch wenn diese etwa 5mal kleiner als der entsprechende Effekt (geprägt durch den J_2 – Term) für einen Erdsatelliten wirkt. Einen wesentlich größeren Einfluss hat im Rahmen des Dreikörperproblems Mond-Mondorbiter-Erde die nahe Erde als Hauptstörkörper auf die Bahn eines Mondorbiters. Zur Abschätzung dieses Einflusses auf die wesentlichen Bahnelemente werden in Tabelle 29-8 die Daten für einen Mondorbiter mit (gegenüber BEISPIEL 1) leicht modifizierten Bahnparametern (a= 1840 km, e=0.01) für den Verlauf eines tropischen

Jahres berechnet und mit dem Einfluss durch die, in diesem Fall auch als „Störkörper“ aufgefasste, Sonne verglichen[1].

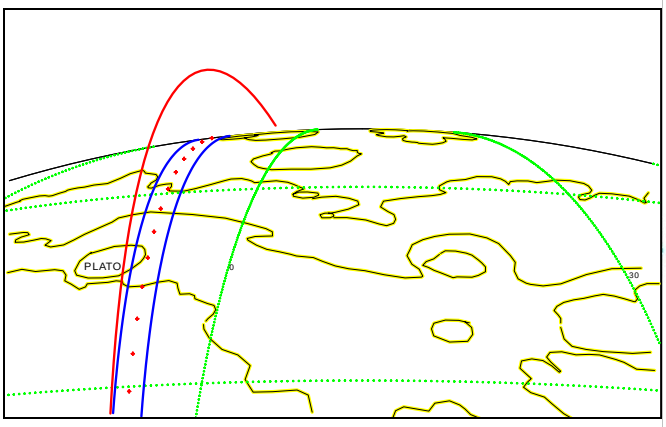


Bild 29-21: Überdeckungsstreifen eines querscannenden optischen Sensors mit Onboard Off-Nadir-Winkel $\beta = \pm 11°.5$ über der Mondoberfläche, Mondorbiter (H=100 km, e=0.0, i=85°) Zeittaktung der Bodenspur $\Delta t = 1\,\text{min}$. Ausschnitt einer Parallelprojektion oberhalb des Mare Imbrium

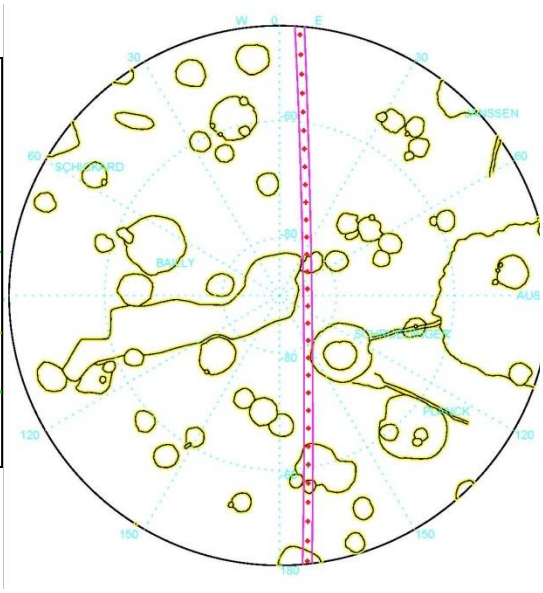


Bild 29-22: Überdeckungsstreifen über der Südpolgegend in stereographischer Projektion. Daten wie in Bild 29-21

Attraktion	durch Erde	durch Sonne
Δa_L	0 km	0 km
Δe_L	$\pm 4.5\times 10^{-3}$	$\pm 2.6\times 10^{-5}$
Δi_L	$\pm 2°.3\times 10^{-6}$	$\pm 1°.3\times 10^{-8}$
$\Delta \alpha_{L\Omega}$	$-0°.9$	$-5°.1\times 10^{-3}$
$\Delta \omega_L$	$+32°.0$	$+0°.17$
ΔH_P	$\pm 8.6\,\text{km}$	$\pm 4.8\times 10^{-2}\,\text{km}$

Tabelle 29-8: Die säkularen Variationen der *Kepler*elemente eines Mondorbiters im Verlauf eines tropischen Jahres, mit Halbachse a = 1840 km, Exzentrizität e=0.01, Inklination i = 85°, mit der Perigäumshöhe $H_P = 82\,\text{km}$.

Die „Störeinflüsse“ durch die Erde sind größenordnungsmäßig etwa 100mal größer als durch die Sonne. Bemerkenswert ist die relativ kleine inertiale Drift des Bahnknotens. Die kleine Exzentrizität der betrachteten Bahn bewirkt eine bemerkenswerte inertiale Drift des Periselen. Von besonderem Interesse ist die Variation der Periselenhöhe. Die vorgegebenen Bahnparameter führen auf die Periselenhöhe $H_P = a_L(1-e_L) = 83.6\,\text{km}$. Die Variation der Periselenhöhe um $\pm 8.6\,\text{km}$ wirkt sich auf die Beobachtung der Mondoberfläche aus.◀

[1] Abschätzungen durch *M. C. Eckstein* (1980), basierend auf Formeln in EL'YASBERG, P. E. [1967], p. 309

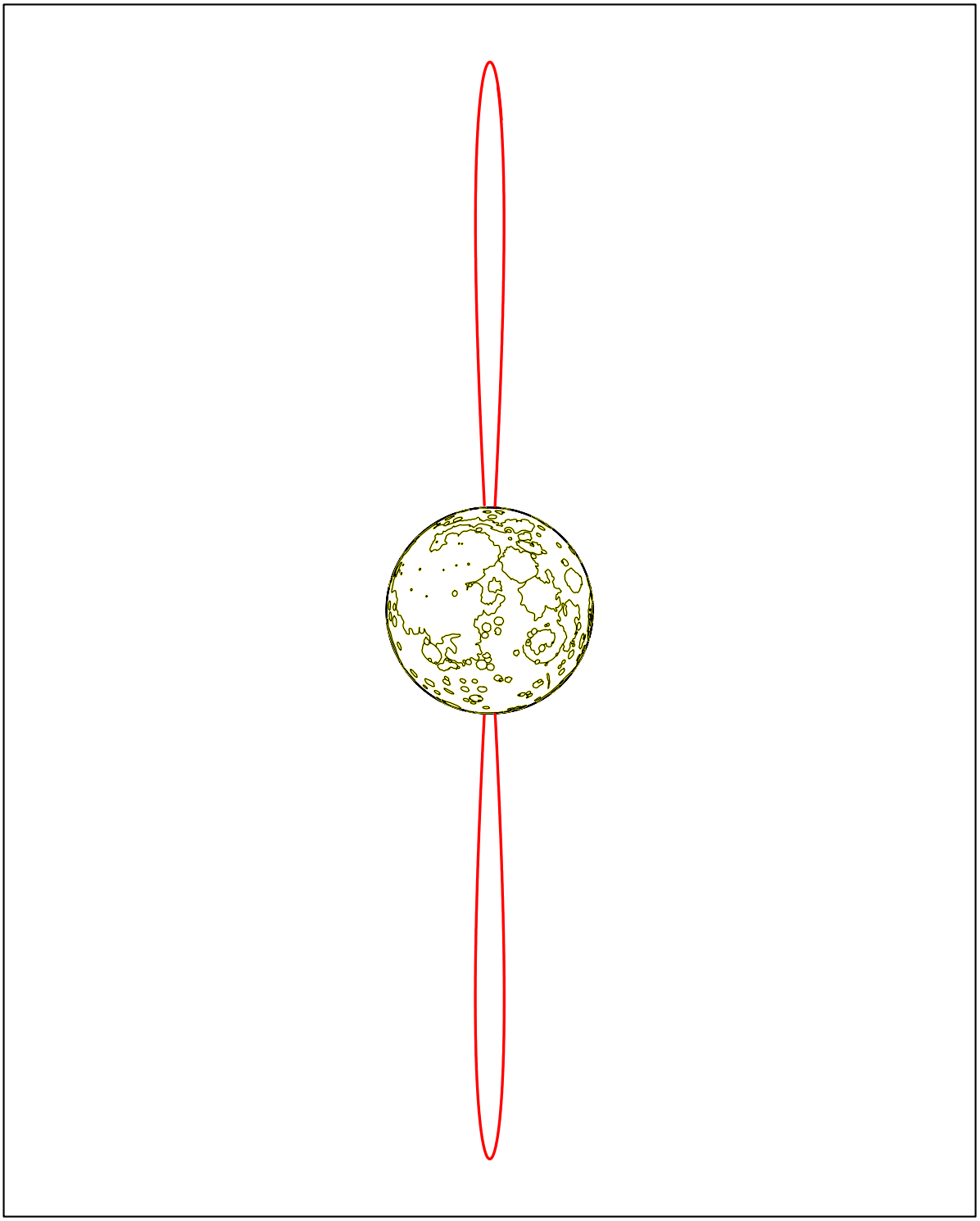


Bild 29-23: Kreisförmige mondsynchrone Mondorbiterbahn mit Inklination i = 6° bezüglich des Mondäquators in wahren Größenverhältnissen. Der Knoten der Orbiterbahn liegt über der Rückseite des Mondes.

29.7.2 Synchrone und stationäre Bewegung eines Mondorbiters

Eine Mond-synchrone Bahn eines Mondorbiters muss nach Formel (26.55) (Abschnitt 26.6) die mittlere große Halbachse

$$a_{Lsyn} = \sqrt[3]{\frac{\mu_{☾}}{\dot{\Theta}_L^2}} = 88452.1\,\text{km} \tag{29.295}$$

haben[1]. Die Darstellung einer solchen Bahn wie es auch bei Erdsatelliten bekannt ist (vgl. Abschnitt 26.6), wird im Wesentlichen durch die Bahnexzentrizität und die Neigung gegenüber der Mondäquatorebene geprägt.

Als BEISPIEL wird in Bild 28-1 die mondsynchrone kreisförmige Bahn eines Mondorbiters mit der großen Bahnhalbachse $a_{L\,syn}$ und der Inklination i= 6° in wahren Größenverhältnissen in Parallelprojektion dargestellt. Die Umlaufzeit auf dieser Bahn ist entsprechend dem ersten Gesetz von *Cassini* genau der siderischen Umlaufzeit des Mondes um die Erde gleich, also 27.233 mittlerer Sonnentagen[2].

Der Bezugsknoten der Bahn für die selenographische Länge $\lambda_{M\Omega}$=180° liegt über der Rückseite des Mondes. Die Bahn dieses Mondorbiters befindet sich also gesehen von der Erde aus stets „hinter“ dem Mond. Damit kann ein solcher Orbiter dann als Relaissatellit verwendet werden, wenn seine Bahn nicht durch die Mondscheibe verdeckt wird. Dies ist für den größten Teil seines Umlaufs (ungefähr 70%) der Fall. In diesem Fall können etwa über den mondsynchronen Orbiter die Daten von einem Mondorbiter, der sich auf einer Umlaufbahn um den Mond gerade hinter dem Mond befindet zur Erde übertragen werden.◀

29.7.3 Sonnensynchrone Mondorbiter

Um in erster Näherung zu untersuchen, ob es sonnensynchrone Mondorbiterbahnen geben kann, wird in der Formel[3] für die säkulare Drift des aufsteigenden Knotens (20.15) auch im Fall des Erdmondes nur der Einfluss erster Ordnung durch den lunaren Potentialkoeffizienten $J_{2☾}$ berücksichtigt. Mit der tropischen mittleren Bewegung des Mondes um die Sonne lautet der Ausdruck für einen Mondorbiter mit der mittleren großen Epoche-Bahnhalbachse $\bar{a}_0$, der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ und der mittleren Inklination $\bar{i}_0$ bezüglich des Mondäquators

$$n_{\odot} = -\frac{3}{2} J_{2☾} \sqrt{\frac{\mu_{☾}}{\bar{a}_0^3}} \frac{R_M^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \cos \bar{i}_0 + O\left(J_{2☾}^2\right) \quad . \tag{29.296}$$

Der J_2 – Term des Mondes ist um den Faktor 10 kleiner als der entsprechende Koeffizient der der Erde ist[4]: $J_{2☾} = 2.027 \times 10^{-4}$, der mittlere Äquatorradius des Mondes beträgt $R_{E☾}$ = 1738.390 km, die selenozentrische Gravitationskonstante $\mu_{☾} = 4902.700\,\text{km}^3\,\text{s}^{-2}$. Da sich der Mond zusammen mit der Erde als einem Doppelplanetensystem um die Sonne bewegt, hat der

---

[1] Die hier benötigten physikalischen Parameter des Mondes sind in Anhang E, Band V, zusammengestellt

[2] Siehe den Zahlenwert in (29.41) auf Seite 290

[3] Aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

[4] Die physikalischen Parameter des Erdmondes sind in Anhang E.7 (Band V) zusammengestellt

Mond dieselbe tropische mittlere Bewegung wie die Erde[1]: $n_{\odot} = 1.991063 \times 10^{-7}$ rad/s . Mit diesen Parametern werden mögliche sonnensynchrone Bahnen von Mondorbitern untersucht. Bahnen, deren Perizentrumshöhe (Periselenhöhe) unter 10 km liegt sowie solche, der große Bahnhalbachse kleiner als der Äquatorradius des Mondes ist, werden ausgeschlossen. Als Ergebnis zeigt Bild 29-24, dass sonnensynchrone Mondorbiterbahnen nur auf kreisnahen rückläufigen Bahnen mit Inklination größer als etwa 135° vorkommen können.

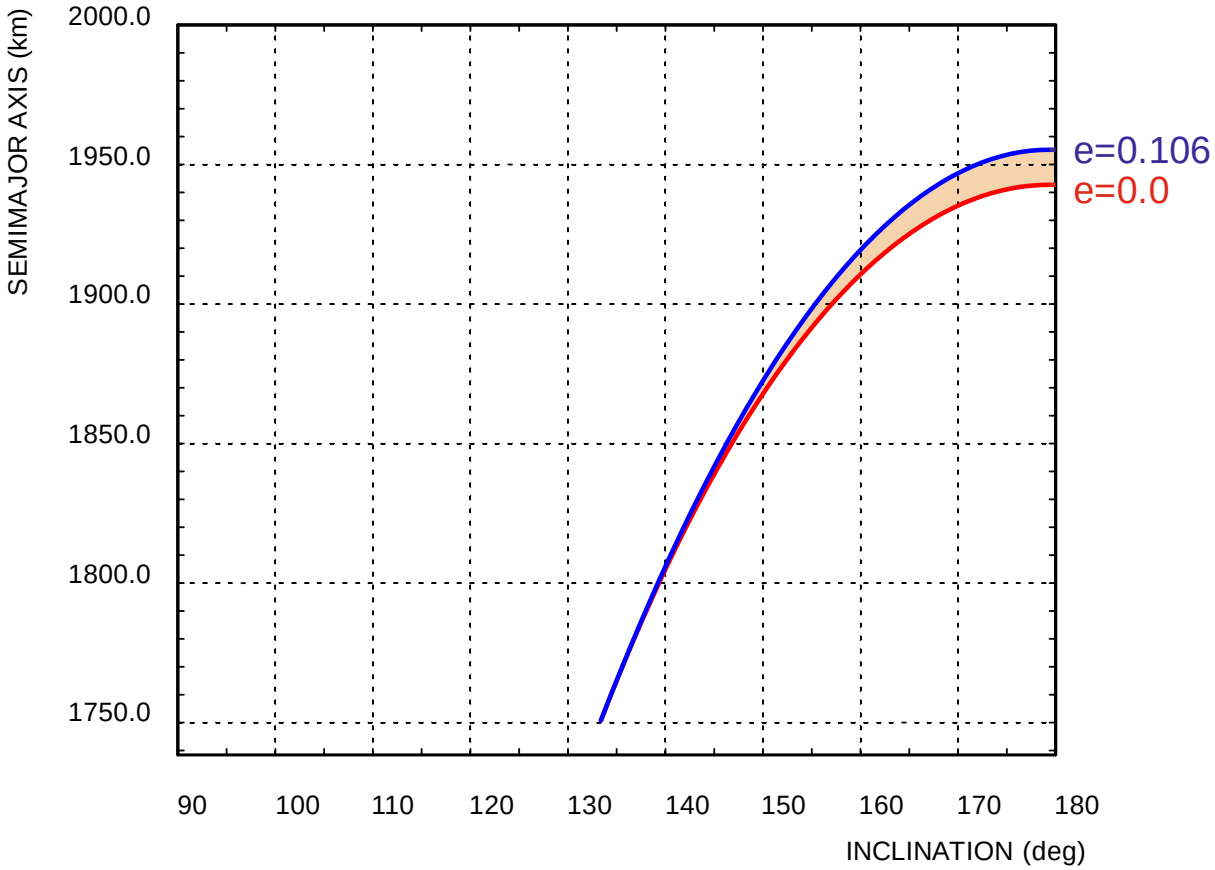


Bild 29-24: Die möglichen sonnensynchronen Bahnen eines Mond-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der Periselenhöhe H_P = 10 km

29.8 Beobachtung eines Mondorbiters von der Erde aus

Der selenozentrische Ortsvektor eines Mondorbiters hat entsprechend den Beziehungen (29.293) auf das Mond-feste Äquatorsystem bezogen die Darstellung

$$\mathbf{r}_M = y_A{}^j \, \mathbf{q}_j^{(A\mathbb{C})} = x_A{}^k \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} = y_A{}^j \, a_{Lj}{}^k \, \mathbf{p}_k^{(\mathbb{C})} . \tag{29.297}$$

Um die Beobachtung des Orbiters von der Erde (beliebiges Topozentrum, Bodenstation, Erdsatellit, usw.) darstellen zu können, werden die Koordinaten des Orbiters im Frühlingspunkt-orientierten Erdäquatorsystem benötigt:

$$\mathbf{r}_M = x_{MA}{}^i \, \mathbf{p}_i \quad . \tag{29.298}$$

[1] Aus Tabelle 9-1 in Abschnitt 9.1.1.1 (Band II)

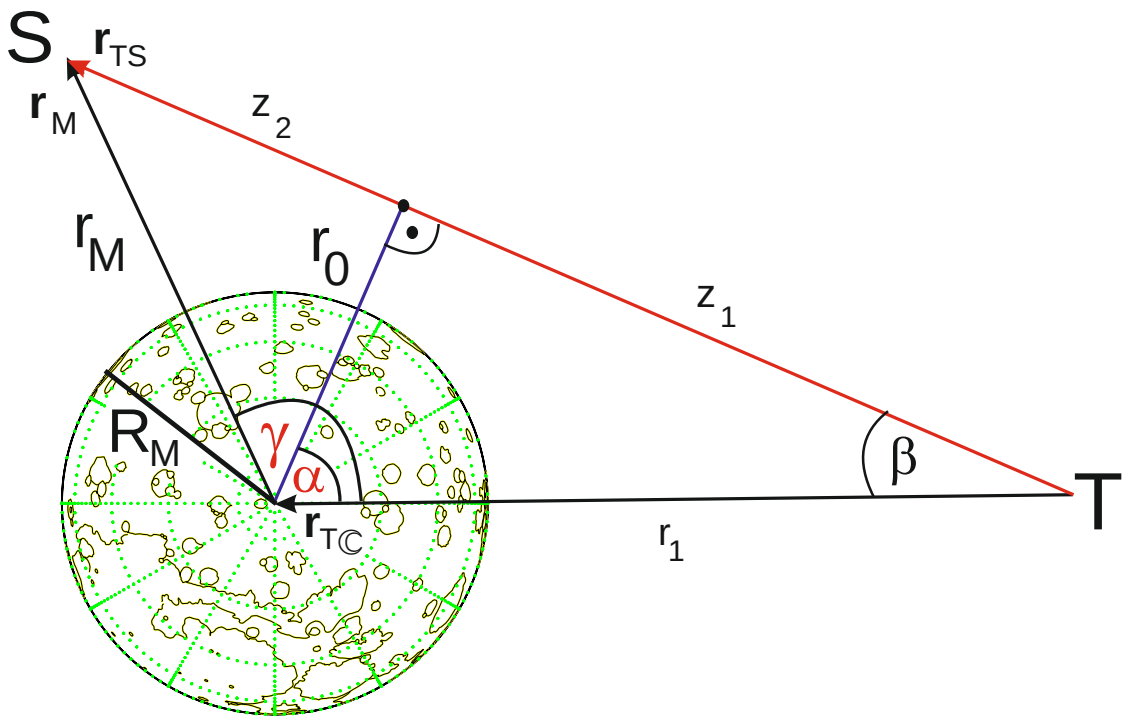


Bild 29-25: Zur Abschätzung, wann ein Mondorbiter S gesehen von einem irdischen Beobachter T hinter der Mondscheibe verschwindet

Die entsprechende Transformation (29.238) erfolgt mit der Transformationsmatrix (29.233) und ergibt die kartesischen Koordinaten des Mondorbiters im Erdäquatorsystem:

$$x_{MA}{}^{i} = x_A{}^{k}\, a_{Dk}{}^{i} = y_A{}^{j}\, a_{Lj}{}^{k}\, a_{Dk}{}^{i} \quad . \tag{29.299}$$

Der geo-topozentrische Ortsvektor des Mondmittelpunktes $\mathbf{r}_{T☾}$ ist aus der Beziehung (29.259) (auf Seite 347) bekannt. Damit lautet der topozentrische Ortsvektor des Mondorbiters an der Position S

$$\mathbf{r}_{TS} = \mathbf{r}_{T☾} + \mathbf{r}_M = x_{TS}^{i}\, \mathbf{p}_i \quad . \tag{29.300}$$

Der topozentrische Zwischenwinkel β zwischen Mondmittelpunkt und Orbiter wird nach Bild 29-25 berechnet aus

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{r}_{T☾} \cdot \mathbf{r}_{TS}}{|\mathbf{r}_{T☾}| \cdot |\mathbf{r}_{TS}|} = \frac{\mathbf{r}_{T☾} \cdot \mathbf{r}_{TS}}{r_1 \cdot (z_1 + z_2)} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha < 90° \quad . \tag{29.301}$$

Der selenozentrische Abstand des Radiusvektors $\mathbf{r}_{TS}$ vom Mondmittelpunkt beträgt

$$r_0 = r_1 \sin\beta \quad . \tag{29.302}$$

Für die Sichtbarkeitsabschätzungen kann der Mond als Kugel mit Radius R_M aufgefasst werden. Als erste Bedingung, dass der Orbiter vom Topozentrum T (auf der Erdoberfläche) aus gesehen hinter der Mondkugel verschwindet, ist somit

$$r_0 \le R_M \quad . \tag{29.303}$$

Diese Bedingung reicht nicht aus, da der Zwischenwinkel γ zwischen den selenozentrischen Richtungen zum Orbiter S und zum Topozentrum T größer als der Winkel α sein muss. Somit muss als zweite Bedingung erfüllt sein

$$\cos\alpha > \cos\gamma = -\frac{\mathbf{r}_M \cdot \mathbf{r}_{T☾}}{r_M\, r_1} \quad . \tag{29.304}$$

29.9 Mond-synodische Erdsatellitenbahnen

Erdsatelliten können einen Bezug zum Mond haben. Der kann etwa in einer Beobachtung der Mondoberfläche oder eines Mondorbiters bestehen, er kann zur Lageregelung des Satelliten mit Hilfe eines Mondsensors dienen, oder er kann zur Kommunikation mit einem Ort auf dem Mond oder einer Mondsonde genutzt werden.

29.9.1 Der synodische Bezug von Erdsatelliten auf den Mond

Ähnlich wie im Fall des Sonnen-synodischen Bezugs von Erdsatelliten wird zur Erarbeitung einer Bahnanalyse in erster Näherung auf eine mittlere Bewegung von Mond und Erdsatellit zurückgegriffen. Dazu werden die Bewegungen von Satellit und Mond in die Erdäquatorebene projiziert und ihre mittleren Anteile verglichen.

Die Projektion der Satellitenbewegung erfolgt mit Hilfe der Reduktion auf den Äquator nach Abschnitt 24.2.5. Der mittlere Anteil dieser projizierten Bewegung wird auf den Frühlingspunkt mit der Rektaszension α bezogen. Es handelt sich hier nach Beziehung (24.47) somit wegen $\dot{\alpha} = \overline{n_T} + \Delta\dot{\alpha}$ um die mittlere tropische Bewegung $\overline{n_T}$, wenn mit $\Delta\dot{\alpha}$ der periodische Anteil der Entwicklung für die Variation der Rektaszension bezeichnet wird.

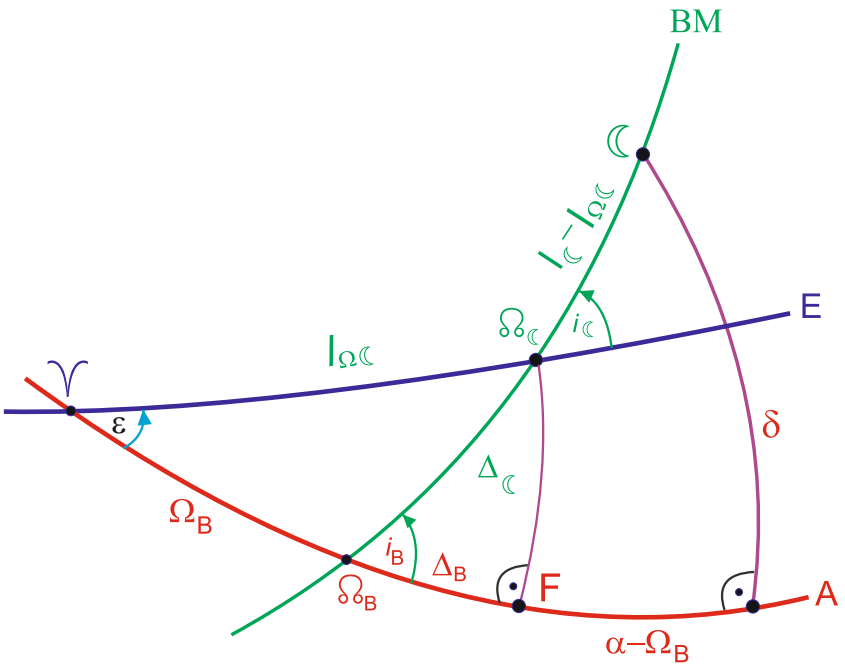


Bild 29-26: Zur Reduktion der Mondbahn BM auf den Erdäquator A über die Ekliptik E

Um die Bewegung des Mondes auf den Erdäquator zu beziehen, wird nach Bild 29-5 (auf Seite 322) vom aufsteigenden Knoten Ω_B der Bahn mit dem Erdäquator das Argument der Breite zum Ort des Mondes aus

$$u_☾ = \Delta_☾ + l_☾ - l_{\Omega☾} \tag{29.305}$$

gebildet. Hier wird mit $l_{\Omega☾} = \Omega_☾ + \delta\Omega_☾$ die ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn unter Einschluss der periodischen Variationen bezeichnet. Der Abstand $\Delta_☾$ zwischen Ω_B und dem Knoten $\Omega_☾$ der Bahn mit der Ekliptik wird aus den Beziehungen (29.165)

und (29.166) berechnet. Die Größen geometrische Länge $l_{☾}$ des Mondes und mittlere Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega_{☾}$ sind in Abschnitt 29.1.3.2 (auf Seite 281) gegeben (Darstellungen (29.18) und (29.24)). Die Reduktion auf den Äquator $\alpha - \Omega_B - u_{☾}$ kann mit der Projektion (24.38)

$$\tan\left[\left(\alpha_{☾} - \Omega_B\right) - u_{☾}\right] = -\frac{\left(1-\cos i_B\right)\tan u_{☾}}{1+\cos i_B \tan^2 u_{☾}} \tag{29.306}$$

berechnet werden. Die hier benötigte Neigung i_B der Mondbahn gegenüber dem Erdäquator ist aus Formel (29.164) berechenbar. Wie in der Entwicklung (24.45) folgt

$$\alpha_{☾} = \Omega_B + u_{☾} + \Delta\alpha_{red} \quad , \tag{29.307}$$

wobei die periodischen Glieder $\Delta\alpha_{red}$ eine Folge der Reduktion auf den Äquator sind. Mit (29.305) wird

$$\alpha_{☾} = \Omega_B + \Delta_{☾} + l_{☾} - \Omega_{☾} + \Delta\alpha_{red} \quad . \tag{29.308}$$

Entsprechend Bild 29-26 (auf Seite 365) werden auch die Bögen $\Delta_{☾}, \Omega_{☾}$ getrennt auf den Erdäquator projiziert

$$\Omega_B + \Delta_B = l_{\Omega☾} + \delta\left(\Omega_{☾,red}\right) \quad , \quad \Delta_B = \Delta_{☾} + \delta\left(\Delta_{☾,red}\right) \quad . \tag{29.309}$$

In allen diesen Ausdrücken sind säkulare und periodische Anteile enthalten:

$$\begin{aligned}
l_{\Omega☾} &= \Omega_{☾0} + \dot{\Omega}_{☾s}\left(t-t_0\right) + \delta\left(\Omega_{☾}\right) \\
\Omega_B &= \overline{\Omega_{B0}} + \dot{\Omega}_{Bs}\left(t-t_0\right) + \delta\left(\Omega_B\right) \\
\Delta_{☾} &= \overline{\Delta_{☾0}} + \left(\Delta_{☾}\right)^{\bullet}_{s}\left(t-t_0\right) + \delta\left(\Delta_{☾}\right) \\
\Delta_B &= \overline{\Delta_{B0}} + \left(\Delta_B\right)^{\bullet}_{s}\left(t-t_0\right) + \delta\left(\Delta_B\right) \\
l_{☾} &= L_{☾} + n_{☾Ls}\left(t-t_0\right) + \delta\left(l_{☾}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{29.310}$$

Längs des Erdäquators gilt unter Vernachlässigung aller periodischen Variationen, sowohl derer in den Bahnparametern wie derer als Folge der Reduktion auf den Äquator, für die mittleren Bewegungen

$$\left(l_{\Omega☾}\right)^{\bullet}_{s} = \dot{\Omega}_{Bs} + \left(\Delta_B\right)^{\bullet}_{s} \quad . \tag{29.311}$$

Somit bleibt für die mittlere tropische Bewegung des Mondes

$$n_{☾} = n_{☾Ls} \quad . \tag{29.312}$$

Anmerkung: Eine heuristische Überlegung kann die Beziehung (29.311) bestätigen: Nach Bild 29-26 wird der Bogen $\Upsilon\Omega_{☾}$ gleichzeitig durchlaufen, d.h. mit derselben mittleren Geschwindigkeit, wie längs des Erdäquators der Bogen $\Upsilon\Omega_B F$. ◄

Nach Vorgabe der wahren ekliptikalen Länge $l_{\Omega☾}$ des aufsteigenden Knotens der Mondbahn, der Neigung $i_{☾}$ der Mondbahn bezüglich der Ekliptik sowie der Schiefe der Ekliptik können im Dreieck $\left(\Upsilon, \Omega_{☾}, \Omega_B\right)$ die Neigung i_B der Mondbahn bezüglich der Erdäquatorebene, die Rektaszension Ω_B des aufsteigenden Knotens der Mondbahn sowie der Abstand $\Delta_{☾}$ zwischen den Knoten Ω_B und $\Omega_{☾}$ auch direkt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\cos\Delta_{☾}\sin i_B &= \cos l_{\Omega☾}\ \sin\varepsilon\ \cos i_{☾} + \cos\varepsilon\ \sin i_{☾} \\
\sin\Delta_{☾}\sin i_B &= \sin l_{\Omega☾}\ \sin\varepsilon \\
\cos\Omega_B\sin i_B &= \cos l_{\Omega☾}\ \sin i_{☾}\cos\varepsilon + \cos i_{☾}\sin\varepsilon \\
\sin\Omega_B\sin i_B &= \sin l_{\Omega☾}\ \sin i_{☾} \\
\cos i_B &= -\cos l_{\Omega☾}\ \sin i_{☾}\sin\varepsilon + \cos i_{☾}\cos\varepsilon \quad .
\end{aligned} \tag{29.313}$$

29.9.2 Bezug von Erdsatellitenbahnen auf tropische Bewegung des Mondes

29.9.2.1 Der mittlere Mond-Winkel eines Erdsatelliten

Analog zur fiktiven mittleren Sonne[1] kann ein fiktiver mittlerer Mond $\bar{☾}$ eingeführt werden. Er bewegt sich längs des Erdäquators mit der mittleren Umlaufzeit eines mittleren tropischen Monats $P_{☾,t} = 2\pi / n_{☾,L} = 2\pi / n_{☾,T}$ (aus (29.38) in Abschnitt 29.1.4.2 auf Seite 288):

$$P_{☾,\mathrm{T}} = 27^d.321582244\left[1 + 9.1685151\times10^{-14}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] - 8.220\times10^{-21}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right]\right] + \cdots \tag{29.314}$$

ΔJD ist die Differenz zwischen dem aktuellen Datum und der Fundamentalepoche J2000.0 in (Sonnen-) Tagen. Der fiktive mittlere Mond hat nach (29.5) die mittlere tropische Bewegung

$$\begin{aligned}
n_{☾} = n_{☾\mathrm{T}} &= 13°.176396476 - 1°.2080799\times10^{-12}\left(\Delta JD\right)\left[1/\mathrm{d}\right] + \\
&\quad + 1°.083101\times10^{-19}\left(\Delta JD\right)^2\left[1/\mathrm{d}^2\right] + \cdots\left[1/\mathrm{d}\right] \quad = \\
&= 2.66170720\times10^{-6} - 2.4403903\times10^{-19}\left(\Delta JD\right)\left[\mathrm{rad/sec}\right] + \\
&\quad + 2.1879258\times10^{-26}\left(\Delta JD\right)^2\left[\left[\mathrm{rad/sec}^2\right]\right] + \cdots\left[\mathrm{rad/sec}\right]
\end{aligned} \tag{29.315}$$

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse werden die Abweichungen vom Basiswert üblicherweise vernachlässigt.

Der fiktive mittlere Mond $\bar{☾}$ hat die Rektaszension

$$\alpha_{\bar{☾}} = \alpha_{\bar{☾}0} + n_{☾}\left(t - t_0\right) \quad . \tag{29.316}$$

Ein Anfangswert $\alpha_{\bar{☾}0} = \alpha_{\bar{☾}}\left(t_0\right)$ zu einem Zeitpunkt t_0 kann nach Bild 29-26 (auf Seite 365) folgendermaßen hergeleitet werden: es werde angenommen, dass der wahre und der fiktive mittlere Mond gemeinsam im aufsteigenden Knoten ☊$_B$ gestartet werden. Dann ist $\alpha_{\bar{☾}0} = \Omega_B$. In diesem Punkt hat der wahre Mond die wahre geometrische Länge

$$l_{☾} = 360° - \Delta_{☾} + l_{\Omega☾} \qquad \left\langle \delta_{☾} = 0, \dot{\delta}_{☾} > 0 \right. \quad . \tag{29.317}$$

BEISPIEL: In der Praxis können bei der zu erwartenden geringeren Genauigkeit die periodischen Variationen vernachlässigt werden, ebenso die Zeitabhängigkeit in den Fundamentalparametern der Mondbewegung $L_{☾}$ und $\Omega_{☾}$. Für einen Anfangszeitpunkt t_0 können für die wahre geometrische Länge des Mondes $l_{☾}$ (aus Beziehung (29.24)) sowie die wahre geometrische Länge des aufsteigenden Knotens $l_{\Omega☾}$ die Näherungen

$$l_{☾} \approx L_{☾}\left(t_0\right) \ , \ l_{\Omega☾} \approx \Omega_{☾}\left(t_0\right) \ , \ \Delta_{☾}\left(t_0\right) \approx \Omega_{☾}\left(t_0\right) - L_{☾}\left(t_0\right) \tag{29.318}$$

[1] Abschnitt 28.2.1

angenommen werden. Mit den Zahlenwerten (29.4) und (29.18) sowie der mittleren Inklination der Mondbahn $\overline{i_{☾}} = 5°.145396$ bezüglich der Ekliptik aus Tabelle 29-2 (auf Seite 282) und der mittleren Schiefe der Ekliptik werden[1]

$$\begin{aligned} L_{☾} &= 218°.3164325 + 481267°.8812772\,T + \cdots \\ \Omega_{☾} &= 125°.0445222 + 1934°.1362608\,T + \cdots \\ \overline{i_{☾}} &= 5°.145396 \\ \overline{\varepsilon} &= 23°.43927944 - 0°.013010214\,\mathrm{T} + \cdots \quad . \end{aligned}$$

In diesen Formeln ist die Zeit T in julianischen Jahrhunderten in Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0 gegeben[2]. Wenn zum Zeitpunkt t_0 das julianische Datum JD ist, kann T berechnet werden aus

$$T = \frac{JD - 2451545.0}{36525} \quad .$$

Im numerischen Beispiel sei der Anfangszeitpunkt t_0 : 2020-06-16/10:00:0.0 gewählt. Nach Tabelle F-9 (Band V) mit Formel (F.2) ist $JD = Jd + t / 86400.0 - 0.5 = 2459016.91666667$, somit T = 0.204569929. Die Anfangsparameter lauten:

$$L_{☾}(t_0) = 31°.25291,\ \Omega_{☾}(t_0) = 160°.71064045,\ \overline{\varepsilon}(t_0) = 23.441940939 \quad .$$

Die Beziehungen (29.313) ergeben schließlich

$$\begin{aligned} i_B(t_0) &= 18°.658627761 \\ \Delta_{☾}(t_0) &= 155°.747147761, \\ \alpha_{\overline{☾}0} &= \Omega_B(t_0) = 5°.313295993 \quad . \ ◄ \end{aligned}$$

Der mittlere Mondwinkel eines Erdsatelliten bezieht seine Position auf die des fiktiven mittleren Mondes. Er wird definiert als Differenz zwischen der Rektaszension α des Satelliten und der Rektaszension $\alpha_{\overline{☾}}$ des fiktiven mittleren Mondes

$$\overline{\tau_{☾}} := \alpha - \alpha_{\overline{☾}} \quad . \tag{29.319}$$

Nach Definition (29.316) hat der mittlere Mondwinkel eines Satelliten die Variation

$$\dot{\overline{\tau}} = n_{☾} \quad . \tag{29.320}$$

29.9.2.2 Mittlere Mond-synodische Umlaufzeit eines Erdsatelliten

Analog zur Herleitung der mittleren Sonnen-synodischen mittleren Bewegung eines Erdsatelliten in Abschnitt 28.5.1.2 kann auch die mittlere Mond-synodische mittlere Bewegung hergeleitet werden. Mit der Variation (29.320) des mittleren Mondwinkels und im Rückgriff auf die mittlere tropische mittlere Bewegung aus Beziehung (24.30) wird die Beziehung

$$\overline{n_L} := \sigma_i\,\dot{\overline{\tau}}_{☾} = \overline{n_K} + (M_0)^{\bullet}_{s} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) = \overline{n_T} - \sigma_i\,n_{☾} \tag{29.321}$$

erhalten. Die mittlere Mond-synodische Umlaufzeit lautet damit

$$\overline{P_L} = \frac{2\pi}{\overline{n_L}} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + (M_0)^{\bullet}_{s} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right)} \quad . \tag{29.322}$$

---

[1] etwa aus Anhang E3 in Band V

[2] Siehe in Abschnitt 29.1.3.2 auf Seite 281

Eine mondsynchrone Erdsatellitenbahn mit der Bedingung $\dot{\Omega}_s = n_{☾}$ kann es nicht geben (siehe Formel (29.321)), da die mittlere Geschwindigkeit des Mondes mit $n_{☾} = n_{☾Ls} = 13°.176396476\cdots\left[1/\mathrm{d}\right]$ außerhalb des möglichen Bereiches der säkularen Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens eines Erdsatelliten mit maximalen Grenzen $\dot{\Omega}_s \in \left(-7°\left[1/\mathrm{d}\right], +7°\left[1/\mathrm{d}\right]\right)$ liegt[1].

29.9.2.3 Wahre Mond-synodische Umlaufzeit eines Erdsatelliten

Zur Berechnung der wahren Mond-synodischen Umlaufzeit wird neben der Ephemeride der Satellitenbahn mit der Rektaszension α auch die Ephemeride der geozentrisch angenommenen Mondbewegung benötigt. Es seien die auf den Erdäquator bezogenen geozentrischen Polarkoordinaten $r_{☾}\left(\alpha_{☾}, \delta_{☾}\right)$ des Mondzentrums bekannt. Um diese zu erhalten, werden zunächst die geozentrischen ekliptikalen Koordinaten des Mondes berechnet (Abschnitt 29.1.5) und dann in das geozentrische äquatoriale Koordinatensystem transformiert. Der wahre Mondwinkel eines Erdsatelliten kann durch die Beziehung

$$\tau_{☾} = \alpha - \alpha_{☾} \tag{29.323}$$

definiert werden. Die wahre Mond-synodische Umlaufzeit P_L kann iterativ mit der überlagerten Funktion

$$fct\left[P_L\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_L\right) - \tau_{☾}\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{29.324}$$

berechnet werden. Als erste Näherung kann bei gegebenen Bahnparametern die entsprechende Keplersche Umlaufzeit verwendet werden oder die mittlere Mond-synodische Umlaufzeit (29.322)

29.10 Äquivalenzbahnen mit Mond-synodischer Satellitenbewegung

Eine besondere Anwendung der Mond-synodischen Bewegung von Erdsatelliten kann im Rahmen der Äquivalenz mit anderen Arten von Satellitenbewegungen erfolgen. Auch hier kann es wie bei den in den bisherigen Kapiteln gefundenen Äquivalenzbahnen zu interessanten Zusammenhängen kommen, die für manche Anwendungen von Nutzen sein können.

29.10.1 Kopplung Mond-synodischer mit meridionaler Sat. Bewegung

Bei Äquivalenz zwischen der mittleren Mond-synodischen und der mittleren meridionalen Bewegung ist die Mond-synodische Bewegung nach einem Umlauf auf einen bestimmten Meridian über der Erdoberfläche fixiert.

29.10.1.1 Basiseigenschaften

Zur Herleitung einer mittleren $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn werden die entsprechenden mittleren Bewegungen verglichen. Mit der mittleren meridionalen Satellitenbewegung (26.15) und der mittleren Mond-synodischen Bewegung (29.321) folgt im Fall rechtläufiger Bewegung $\left(\sigma_i = +1\right)$ die gesuchte Relation mit den Ausdrücken

[1] siehe dazu Bild 23-15 in Abschnitt 23.4.1, Band IV A

$$\left.\begin{aligned}\overline{n_L} &= \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) = \overline{n_T} - \sigma_i\, n_{\odot} = \overline{n_t} - n_{☾} \\ \overline{n_R} &= \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) = \overline{n_T} - \sigma_i\,\dot{\Theta} = \overline{n_t} - \dot{\Theta}\end{aligned}\right\rangle \sigma_i = +1 \ . \qquad (29.325)$$

Analog Bild 26-5 und den Beziehungen (26.59) und (26.60) werden für eine Äquivalenz der mittleren Mond-synodischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Bewegung die Bedingungen[1]

$$\overline{n_L} = \left|\overline{n_R}\right| \ , \quad \overline{n_R} = -\overline{n_L} \ \Rightarrow \ \overline{n_R} + \overline{n_L} = 0 \quad \left\langle \overline{P_L} = \overline{P_R}\right. \qquad (29.326)$$

gefordert. Diese beiden führen auf

$$\overline{n_R} + \overline{n_L} = 2\overline{n_T} - \left(\dot{\Theta} + n_{☾}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{n_T} - \dot{\Theta} + \overline{n_L} = 2\overline{n_L} - \dot{\Theta} + n_{☾} = 0 \ . \qquad (29.327)$$

Mit den Zahlenwerten (26.2) für die mittlere tropische Rotation der Erde $\left(\dot{\Theta} = 0.7292115857334 \times 10^{-4} / \sec\right)$ und der mittleren tropischen Bewegung des Mondes (29.315) ergibt sich bei Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0 bei $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz die mittlere Mond-synodische mittlere Satellitenbewegung

$$\overline{n_{QLR}} = \frac{\dot{\Theta} - n_{☾}}{2} = 3.51297257 \times 10^{-5}\left[\frac{1}{s}\right] \qquad \left\langle \overline{P_L} = \overline{P_R}\right. \ . \qquad (29.328)$$

Die zugehörige mittlere Mond-synodische und mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit beträgt

$$\overline{P_{QLR}} = \overline{P_L} = \overline{P_R} = \frac{2\pi}{\overline{n_{QLR}}} = 178856.6573\text{s} \ . \qquad (29.329)$$

Die mittlere Bahnhalbachse der *Kepler*schen $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn hat den Wert

$$\overline{a_{QLR\,K}} = \sqrt[3]{\frac{\mu\,\overline{P_{QLR}}^{\,2}}{4\pi^2}} = 68611.369200 \text{ km} \ . \qquad (29.330)$$

Mit Vorgabe der mittleren Bahnparameter Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ sowie einem angenommenen Wert für die große Bahnhalbachse können die mittleren Bewegungen $\overline{n_L}, \overline{n_R}$ mit den Ausdrücken (29.325) erhalten werden[2].

Zur Berechnung der wahren Mond-synodischen Umlaufzeit eines Erdsatelliten wird der wahre Mondwinkel

$$\tau_L := \alpha - \alpha_{☾} \qquad (29.331)$$

benötigt. Gegenüber einer Epoche verändert sich der Mondwinkel pro Umlauf P_L um 360°. Mit vorgegebenen Bahnelementen können die Umlaufzeiten P_L und die Meridian-bezogene Umlaufzeit P_R getrennt berechnet werden mit Hilfe der überlagerten Funktionsgleichungen

$$\begin{aligned} fct\left(P_L\right) &\equiv \sin\left[\tau_L\left(t_0 + P_L\right) - \tau_L\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(P_R\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\right) - \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (29.332)$$

---

[1] Abschnitt 26.5.1.3, Band IV-A

[2] Die hier benötigten säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s, \dot{\omega}_s, \left(M_0\right)_s^{\bullet}$ sind im Rahmen der *Brouwer*schen analytischen Lösung in Kapitel 20.2.1 (Band III) zusammengestellt

29.10.1.2 Berechnung der großen Bahnhalbachse

Die mittlere große Bahnhalbachse kann nach Vorgabe der übrigen Bahnparameter mit der $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbedingung unter Verwendung eines geeigneten beliebigen Bahnmodells aus der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QLR}}\right) \equiv \overline{P_L}\left(\bar{a}\right) - \overline{P_R}\left(\bar{a}\right) = 0 \tag{29.333}$$

berechnet werden.

$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\overline{a_{QLR}}\left[\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{P_L} = \overline{P_R}$	$\overline{a_{QLR}}\left[P_L \triangleq P_R\right]$	$P_{\mathrm{L,sec}} = P_{\mathrm{R,sec}}$
0.0	0°	65352.064256 km	178856.657271 s	65292.892880 km	179118.665574 s
	30°	65351.480603 km	178856.657271 s	64894.572372 km	179118.665574 s
	60°	65350.379407 km	178856.657271 s	63261.972261 km	179118.665574 s
	85°	65350.004187 km	178856.657271 s	X	X
0.3	0°	65352.306579 km	178856.657271 s	66853.381569 km	179118.665574 s
	30°	65351.615816 km	178856.657271 s	66621.156781 km	179118.665574 s
	60°	65350.314139 km	178856.657271 s	X	X
	85°	65349.874663 km	178856.657271 s	X	X
0.6	0°	65353.678192 km	178856.657271 s	X	X
	30°	65352.376514 km	178856.657271 s	X	X
	60°	65349.938873 km	178856.657271 s	X	X
	85°	65349.142523 km	178856.657271 s	X	X
0.8	0°	65359.039307 km	178856.657271 s	X	X
	30°	65355.313518 km	178856.657271 s	X	X
	60°	65348.375588 km	178856.657271 s	X	X
	85°	65346.237692 km	178856.657271 s	X	X

Tabelle 29-9: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer Äquivalenz -Bahn mit Äquivalenz zwischen Mond-synodischer und Meridian-bezogener Bewegung für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}} = 0$, Epoche: 2019-04-16/12:00:0.00. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\mathrm{km}$, $\mu_{\oplus} = 398600.4418\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340$\times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$

Als Anfangslösung kann hier etwa der erste Wert für eine mittlere Bahn aus Tabelle 29-9 (Seite 374) eingesetzt werden[1]: $\overline{a_{QLR}}^{(0)} = 65352.068353$ km . Tabelle 29-9 zeigt außerdem Einschränkungen bei der Suche nach geeigneten wahren $\left(\overline{P_L} = \overline{P_R}\right)-$ Äquivalenzbahnen. Ursache ist das prinzipielle Problem wahre Meridian-bezogene Umlaufzeiten für alle möglichen Bahnhalbachsen zu finden, wie aus Bild 26-43 (Abschnitt 26.8.1) bei Lösung der Funktionsgleichung (26.18) zu erkennen ist[2].

Die Kopplung mit der Bewegung des Mondes kann in Halbachsenbereiche führen, in denen keine Lösung gefunden werden kann. Es gibt dann nur einige brauchbare Lösungen bei beliebiger Wahl der *Kepler*schen Bahnparameter $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M}_{00}\right)$. Diese Lösungen hängen zudem noch wesentlich von der Epoche ab. Dies kann beispielhaft aus Tabelle 29-10 (Seite 372) abgelesen werden. Eine allgemein mögliche Kopplung einer beliebigen Meridian-bezogenen Bewegung mit der Bewegung des Mondes kann daher nur für mittlere Bewegungen gefunden werden.

$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	Epoche: 2019-10-16/12:00:0.00		Epoche: 2019-04-16/12:00:0.00	
		$\overline{a_{QLR}}\left[P_L \triangleq P_R\right]$	$P_{\mathrm{L,sec}} = P_{\mathrm{R,sec}}$	$\overline{a_{QLR}}\left[P_L \triangleq P_R\right]$	$P_{\mathrm{L,sec}} = P_{\mathrm{R,sec}}$
0.0	0°	65378.880386 km	178738.365413 s	65292.892880 km	179118.665574 s
	30°	64992.046734 km	178738.365413 s	64894.505722 km	179118.665574 s
	60°	63373.316945 km	178738.365413 s	63262.048677 km	179118.665574 s
0.3	0°	66861.057113 km	178738.365413 s	66853.332902 km	179118.665574 s
	30°	66637.730277 km	178738.365413 s	66621.083997 km	179118.665574 s
	40°	66433.215766 km	178738.365413 s	66409.674840 km	179118.665574 s

Tabelle 29-10: Beispiele einiger $\left(P_L \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenzbahnen mit Abhängigkeit von der Referenzepoche. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\mathrm{km}$, $\mu_{\overset{+}{\delta}} = 398600.4418\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340$\times 10^{-4}$ / s ,

$J_2 = 0.001082625379977$

BEISPIEL 1: Nach Vorgabe der mittleren Bahnelemente $\overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 30°, \overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$ wird mit der Bedingungsgleichung (29.333) die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QLR}} = 65351.619912$ km berechnet. Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn sind in Tabelle 29-11 zusammengefasst. Bild 29-27 zeigt die Bodenspuren dieser Bahn über je zwei Umläufe nach der Epoche t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0 in roter Farbe und nach einem Jahr in grüner Farbe. Die Apsiden sind markiert. Sie liegen nach Vorgabe auf dem Äquator. In der Umgebung des Perigäums zeigt sich ein Sprung zwischen den Breitengraden $\varphi = \pm 30°$. Dagegen erscheint die Bahn in der weiteren Umgebung der Apogäen geradlinig nach Süden verlaufend.

[1] Man beachte, dass die hier unter Einschluss der Störungen der Satellitenbahn gefundene realistische Bahnhalbachse erheblich von der theoretisch abgeleiteten Halbachse (29.330) abweicht.

[2] Abschnitt 26.3, Band IV-A

$\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QLR}}$ = 65351.615816 km, $\overline{e_0}$ =0.3, $\overline{i_0}$ =30°, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 166262.847522 sec	t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 166259.154770 sec	P_H = 166260.098799 sec
$\overline{P_A}$ = 166261.095859 sec	P_A = 166261.095859 sec
$\overline{P_D}$ = 166256.825859 sec	P_D = 166258.902388 sec
$\overline{P_T}$ = 166259.616114 sec	P_T = 166259.515114 sec
$\overline{P_R}$ = 178856.657271 sec	P_R = 196947.545471 sec
$\overline{P_S}$ = 167140.102568 sec	P_S = 166829.880999 sec
$\overline{P_L}$ = 178856.657271 sec	P_L = 173057.285718 sec
$\overline{H_P}$ = 39367.994471 km	$\overline{H_A}$ = 78578.963961 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -694°.649082$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -694°.639247$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -694°.649082$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -694°.647925$

Tabelle 29-11: Bahncharakteristika der mittleren Mond-synodischen mit der mittleren Meridian-bezogenen $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn, Epoche: t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0, säkulares *Brouwer*sches Bahnmodell, Genauigkeiten $\overline{\Delta fct} \le 10^{-10}$ sec, $\Delta\left(\overline{a}\right) \le 10^{-10}$ km. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\overset{+}{\circ}}$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 × 10^{-4} / s , J_2 = 0.001082625379977 .

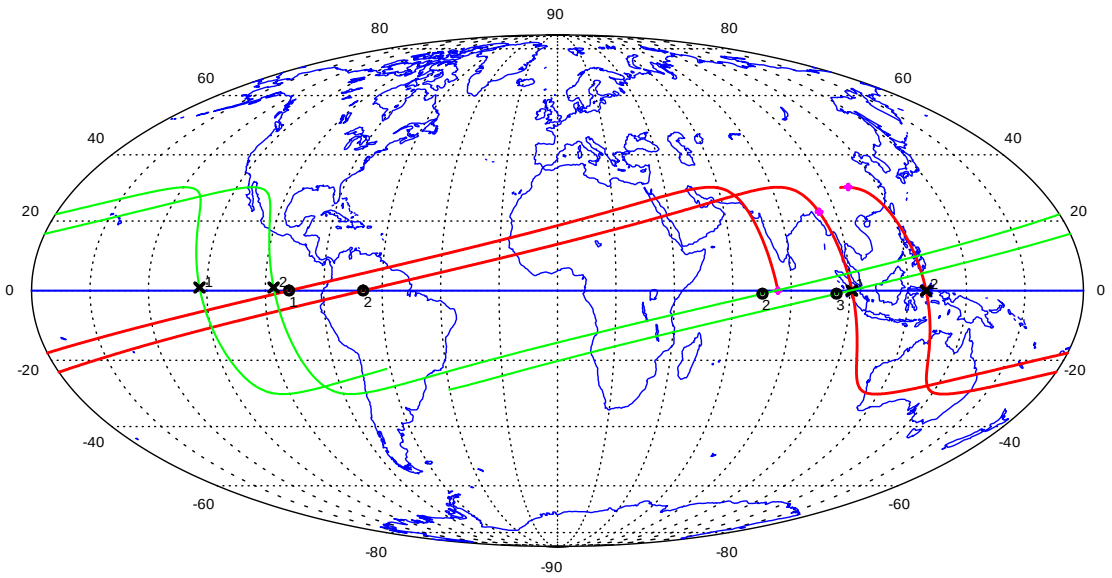


Bild 29-27: Verlauf der Subsatellitenbahn der $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz mit den mittleren *Kepler*schen Bahnparameter $\overline{a_{QLR}}$ = 65351.619912 km,. $\overline{e_0}$ = 0.3, $\overline{i_0}$ = 30°, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$. Im Vergleich zur über zwei Umläufe gerechneten roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02} : 2021-01-06/12:00:0.0 über zwei Umläufe gerechnet.

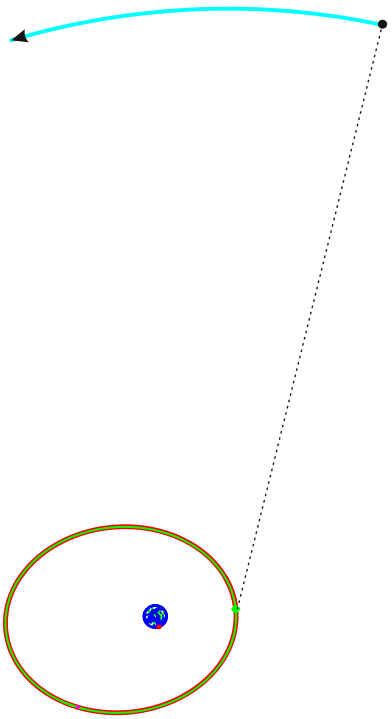


Bild 29-28: Verlauf der $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit den mittleren *Kepler*schen Bahnparametern $\overline{a_{QLR}}$ = 65351.615816 km, $\overline{e_0}$ = 0.3, $\overline{i_0}$ = 30°, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0}$ = 0° in inertial festen Koordinaten. Im Vergleich zur über zwei Umläufe gerechneten roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02} :2020-01-06/12:00:0.0 über zwei Umläufe gerechnet. Die Bahn ist „inertial“ stabil.

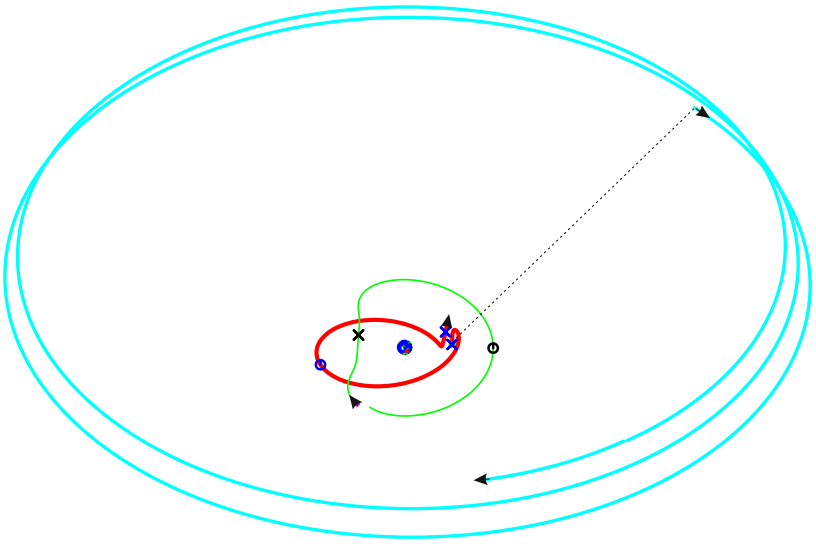


Bild 29-29: Im mit der Erdrotation mitrotierenden System ist der Verlauf der $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit den mittleren *Kepler*schen Bahnparameter $\overline{a_{QLR}}$ = 65351.615816 km, $\overline{e_0}$ = 0.3, $\overline{i_0}$ = 30°, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0}$ = 0° dargestellt. Im Vergleich zur roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0 ist die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02} :2020-01-06/12:00:0.0 gerechnet.

Der Versatz der Apsiden pro anomalistischem Umlauf sowie der Knoten pro drakonitischem Umlauf verläuft bezüglich der Erdoberfläche um den Betrag 25°.35 in östlicher Richtung.

Die räumliche Darstellung der Bahn zeigt die „inertiale“ Stabilität der Bahn. Die Spur der Bahn verläuft nach einem Jahr exakt über der ursprünglichen Spur. Die Relation der Bahn zum Mond bei Bezug auf die Epoche t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0 ist markiert. Im Gegensatz zur inertialen Darstellung zeigt Bild 29-29 (auf Seite 374) den Verlauf der Bahnen in einem mit der Erdrotation mitrotierenden Koordinatensystem. Der relative Sprung in der Umgebung der Perigäen ist deutlich zu erkennen. ◀

$(P_L \triangleq P_R)$	
$\overline{a_{QLR}}$ = 66038.182094 km, $\bar{e}_0$ =0.3, $\bar{i}_0$ =30°, $\bar{\Omega}_0$ = 0°, $\bar{\omega}_0$ = 0°, $\overline{M_{00}}$ = 0°	
$\overline{P_K}$ = 168889.886824 sec	t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 168886.113841 sec	P_H = 168887.052949 sec
$\overline{P_A}$ = 168888.044813 sec	P_A = 168888.044836 sec
$\overline{P_D}$ = 168883.796720 sec	P_D = 168885.862773 sec
$\overline{P_T}$ = 168886.472307 sec	P_T = 168887.449686 sec
$\overline{P_R}$ = 175913.083843 sec	P_R = 175913.083843 sec
$\overline{P_S}$ = 169795.182812 sec	P_S = 169485.303097 sec
$\overline{P_L}$ = 181900.417425 sec	P_L = 175913.083843 sec
$\overline{H_P}$ = 39848.590866 km	$\overline{H_A}$ = 79471.500122 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -705°.624715$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -705°.614809$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -705°.624716$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -705°.623441$

Tabelle 29-12: Bahncharakteristika der wahren Mond-synodischen mit der wahren Meridian-bezogenen $(P_L \triangleq P_R)$ – Äquivalenzbahn, Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{☾}$ = 398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 × 10^{-4} / s , J_2 = 0.001082625379977 , $\overline{\Delta fct} \le 10^{-10}$ sec , $\Delta(\bar{a}) \le 10^{-10}$ km , vollständiges *Eckstein*sches Bahnmodell, a posteriori Genauigkeit 5.2387 ×10^{-10} s.

Die Berechnung der großen Bahnhalbachse einer wahren $(P_L \triangleq P_R)$ – Äquivalenzbahn erfordert die Berechnung der wahren Umlaufzeiten entsprechend dem System (29.332). Nach jedem Schritt muss sie mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QLR}}\right) \equiv P_L\left(\overline{a_{QLR}}\right) - P_R\left(\overline{a_{QLR}}\right) = 0 \tag{29.334}$$

angepasst werden. Der gesamte Prozess (29.332)-(29.334) muss iterativ mehrfach durchlaufen werden.

BEISPIEL 2: Die wahre $(P_L \triangleq P_R)$ – Äquivalenzbahn mit Kopplung von wahrer Mond-synodischer und wahrer Meridian-bezogener Bewegung wird wie im vorhergehenden Beispiel 1 mit

denselben Bahnelementen $\overline{e}_0 = 0.3$, $\overline{i}_0 = 30°$, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$ zur Epoche t_0: 2020-01-05/12:00:0.0 berechnet. Die große Bahnhalbachse lautet mit Anwendung der Bedingungsgleichungen (29.332) - (29.334) $\overline{a_{QLR}}$ = 66649.424229 km. Dieser Wert für die große Bahnhalbachse liegt somit weit außerhalb des (a,i)-Gebietes für mittlere $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen.

Dies ist eine Folge der wahren Eigenbewegung der Mondbahn sowie des gewählten Zeitpunktes t_0. Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 29-12 zusammengefasst.

Der Verlauf der Bodenspur dieser Bahn in Bild 29-30 ist prinzipiell ähnlich wie im Fall der mittleren Äquivalenzbahn Bild 29-27 (auf Seite 373). Für den Zeitraum der ersten Bahnen sind in Bild 29-30 die sublunaren Punkte auf der Erdoberfläche markiert: gelbe Punkte über Pazifik. ◀

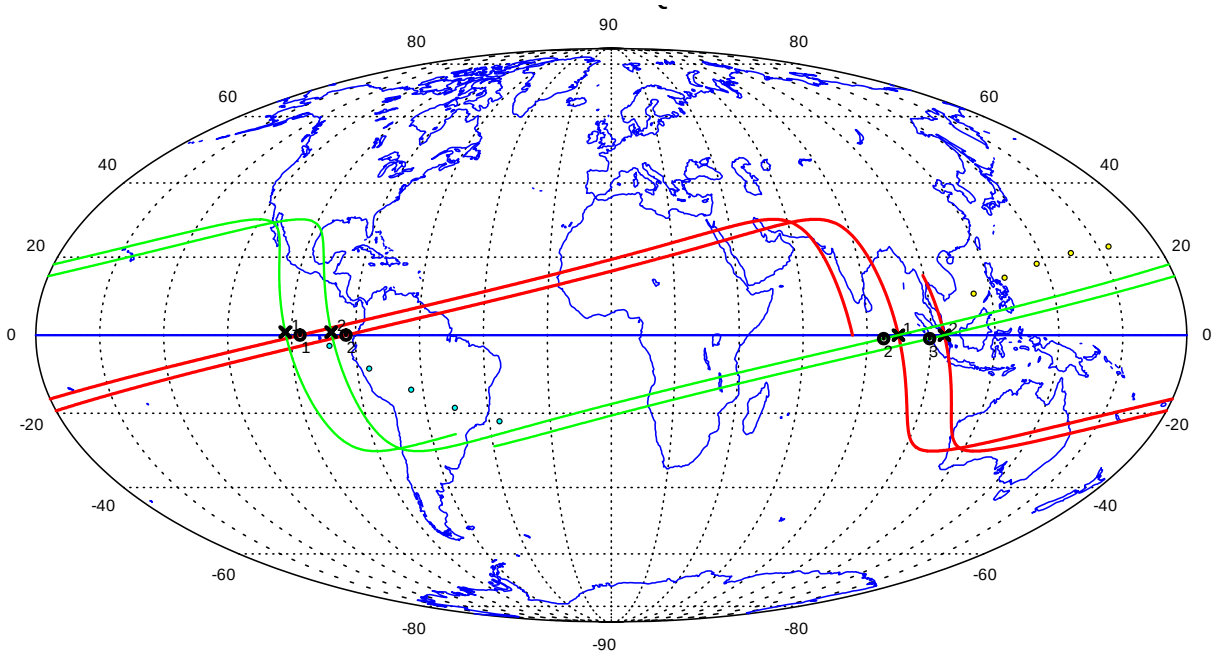


Bild 29-30: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit $\left(P_L \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz der wahren Mond-synodischen und der wahren Meridian-bezogenen Bewegung. Die (mittleren) *Kepler*schen Bahnparameter sind $\overline{a_{QLR}}$ = 66038.182094 km, $\overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 30°, \overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$. Im Vergleich zur über zwei Umläufe gerechneten roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0: 2020-01-05/12:00:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02}: 2021-01-06/12:00:0.0 über zwei Umläufe gerechnet.

29.10.1.3 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung mittlerer Mond-synodischer mit mittlerer meridionaler Bewegung

Bild 29-31 (auf Seite 378) zeigt eine Übersicht aller möglichen $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität $e_B \in \left[0.8993819 - 0.8993819\right]$. Die Kurven sind für je eine Exzentrizität berechnet. Wie

im Fall von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen (siehe in Abschnitt 26.8.1.6) schneiden sich alle Kurven in einem fast punktförmigen Gebiet, hier in der Nähe des Punktes $\overline{a}_{cross} \approx 65352\,\text{km}$, $\overline{i}_{cross} \approx 49°$. Um diesen Schnittpunkt (bzw. Schnittpunkte) zu berechnen, werden die Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten (e_1, e_2) zum Schnitt gebracht.

Aus der Bedingungsgleichung (29.327) für $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen wird die Gleichung einer Kurve im Fall einer bei Äquivalenz mit einer meridionalen Bewegung stets rechtläufigen Bahn $\left(\sigma_i = \operatorname{sgn}(\cos i) = +1\right)$ erhalten

$$\overline{n_R} + \overline{n_L} = 2\overline{n_K} + 2\left(M_0\right)_s^{\bullet} + 2\dot{\omega}_s + 2\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} - n_{☾} = 0 \qquad \left\langle \sigma_i = \operatorname{sgn}\left(\cos \overline{i}_0\right) = +1 \right. . \tag{29.335}$$

Mit den säkularen Anteilen der Variationsgleichungen $\left(M_0\right)_s^{\bullet}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ erster Ordnung (des *Brouwer*schen Bahnmodells[1]) und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \tag{29.336}$$

wird eine Trennung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse

$$f_e \equiv E_i\left[1+\sqrt{1-e^2} - \cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right) + 2\cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}+n_{☾}}{2n_K} - 1\right) \tag{29.337}$$

formal erhalten. Werden hier jeweils die vorgegebenen Exzentrizitäten (e_1, e_2) eingesetzt und die beiden erhalten Ausdrücke subtrahiert, bleibt eine quadratische Gleichung für den Cosinus der Inklination

$$A_0 \cos^2 i + B_0 \cos i + C_0 = 0 \tag{29.338}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) - E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right) \\ B_0 &:= 2\left(E_1 - E_2\right) \\ C_0 &:= E_1 - E_2 + E_1\sqrt{1-e_1^2} - E_2\sqrt{1-e_2^2} \quad . \end{aligned} \tag{29.339}$$

Ihre Lösungen mit Hilfe der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0 + \operatorname{sgn}(B_0)\sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}\right] \;,\; \cos i_1 = \frac{Q_0}{A_0} \;,\; \cos i_2 = \frac{C_0}{Q_0} \;. \tag{29.340}$$

Im Fall der Äquivalenz unter Einschluss der meridionalen Bewegung kann nur die positive Lösung verwendet werden.

In Tabelle 29-13 sind ergänzend zu Bild 29-31 besondere Parameter der einzelnen Kurve zusammengestellt. Als charakteristische Größen sind die Parameter der Überschneidungen (i_{cross}, a_{cross}) für Kopplungen der Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e= 0.0 gerechnet. Nach Berechnung der charakteristischen Inklination i_{cross} werden die Halbachsen a_{cross} mit den laufenden Exzentrizitäten gerechnet.

---

[1] aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

Im Vergleich zu den möglichen Kurven von Meridian bezogenen Äquivalenzbahnen mit anderen Bewegungen ist das Gebiet möglicher $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen sehr umfangreich.

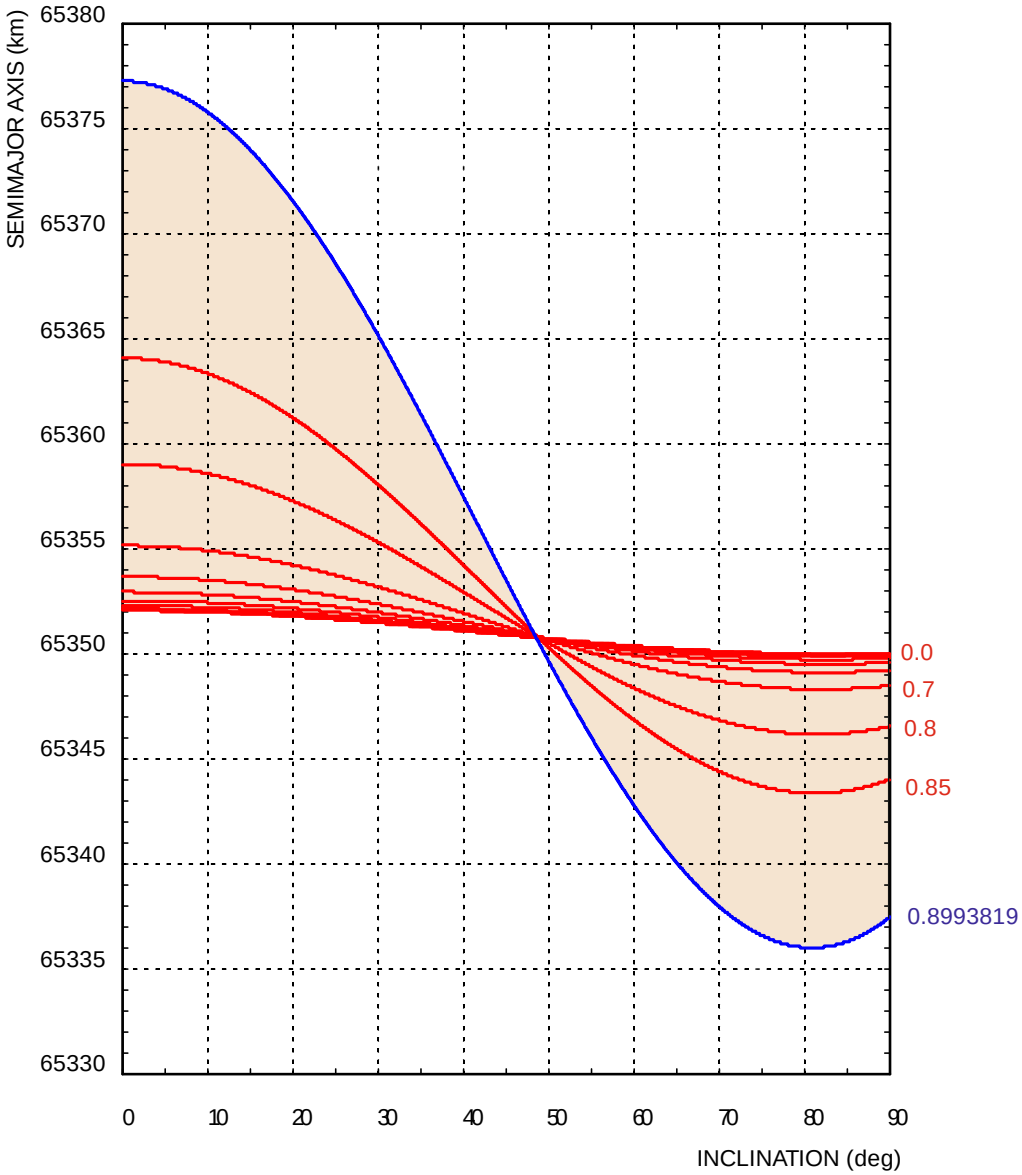


Bild 29-31: Das (a,i) – Gebiet möglicher mittlerer $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen in erster Ordnung, parametrisiert für einige Exzentrizitäten (e=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.85), Grenzexzentrizität $e_B \in [0.8993819 - 0.8993819]$, geforderte Genauigkeit $\Delta(\overline{a}) \leq 10^{-3}$ km, $|\Delta fct| \leq 10^{-6}$ sec, Schrittweiten $\Delta a = 5\,\text{km},\ \Delta e = 0.01, \Delta i = 0°.01$

Anmerkung: Beispiel 2 unter Verwendung der wahren Umlaufzeiten hat eine Bahn ergeben, die nicht im Bereich der mittleren Bahnen liegt, wie sie in Bild 29-31 dargestellt werden. Dies ist ein Hinweis darauf, dass wie in einer Missionsanalyse üblich, allgemeingültige Aussagen nur für mittlere Bewegungen möglich sind. Das vorliegende Beispiel einer Äquivalenz zwischen wahren Bewegungen zeigt eine wesentliche Abhängigkeit der Aussagen von der Epoche, sowie der Wahl des Bahnmodells. Werden auch periodische Bewegungseinflüsse bei den Abschätzungen zugelassen, variieren die Aussagen erheblich und lassen keinen einheitlichen Schluss zu. Ein Zugriff zu möglichen $\left(P_L \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahnen kann über die Berechnung

der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QLR}}$ bei Vorgabe der mittleren Bahnparameter $\left(\overline{e}_0\ ,\overline{i}_0\right)$ gefunden werden. Basierend auf einer derartigen Vorgabe wurden in den Beispielen 4 und 6 in den folgenden Abschnitten sinnvolle $\left(P_L \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenzbahnen gefunden.◀

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	65352.06	---	---	65350.00	65350.04
e=0.1	65352.09	49°.586764	65350.738514	65349.99	65350.03
e=0.2	65352.16	49°.571270	65350.739093	65349.95	65349.99
e=0.3	65352.31	49°.543758	65350.740122	65349.87	65349.92
e=0.4	65352.55	49°.501236	65350.741711	65349.74	65349.80
e=0.5	65352.95	49°.438354	65350.744056	65349.52	65349.60
e=0.6	65353.68	49°.345395	65350.747510	65349.12	65349.23
e=0.7	65355.16	49°.203399	65350.752722	65348.31	65348.49
e=0.8	65359.04	48°.969895	65350.760829	65346.17	65346.55
e=0.85	65364.09	48°.787815	65350.765965	65343.37	65344.03
e_B	65377.27	48°.524191	65350.766518	65336.02	65337.46

Tabelle 29-13: Besondere Parameter von $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)-$ Äquivalenzbahnen, nach der Exzentrizität parametrisiert, Grenzexzentrizität $e_B = 0.8993819$

Aufgabenstellungen:

1. Berechne den Kreuzungspunkt der (a,i)-Kurven mit Hilfe der verschwindenden Krümmung κ. ◀
2. Wiederhole die Rechnungen unter Einschluss höherer Störungen $\left(J_3, J_4\right)$.◀
3. Untersuche den Bereich möglicher $\left(P_L \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenzbahnen mit Berücksichtigung säkularer Bewegungseinflüsse (Störungen der *Kepler*bahn). ◀
4. Untersuche den Bereich möglicher $\left(P_L \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenzbahnen mit Berücksichtigung aller periodischen Bewegungseinflüsse eines Bahnmodells. ◀
5. Untersuche den Bereich möglicher $\left(P_L \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenzbahnen mit Hilfe einer numerischen Ephemeridenrechnung. ◀

29.10.1.4 Berechnung der Inklination

Mit Bild 29-31 (auf Seite 378) können eine geeignete große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und eine geeignete Exzentrizität $\bar{e}_0$ zur Berechnung der Inklination $\overline{i_{QLR}}$ einer $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn vorgewählt werden. Die Berechnung der Inklination wird analog zur Bedingungsgleichung (29.333) mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{i}\right) \equiv \overline{P_L}\left(\bar{i}\right) - \overline{P_R}\left(\bar{i}\right) = 0 \tag{29.341}$$

durchgeführt.

$\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\bar{a}_0 = 65352.0$ km, $\bar{e}_0 = 0.3$, $\overline{i_{QLR}} = 19°.393914587$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 166264.413644$ sec	t_0 : 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 166259.348888$ sec	$P_H = 166260.609418$ sec
$\overline{P_A} = 166261.941000$ sec	$P_A = 166261.941000$ sec
$\overline{P_D} = 166256.585655$ sec	$P_D = 166259.191025$ sec
$\overline{P_T} = 166259.515114$ sec	$P_T = 166260.785433$ sec
$\overline{P_R} = 178856.657271$ sec	$P_R = 196382.906799$ sec
$\overline{P_S} = 167140.102568$ sec	$P_S = 166792.629879$ sec
$\overline{P_L} = 178856.657271$ sec	$P_L = 172541.571297$ sec
$H_P = 39368.263400$ km	$H_A = 78579.463400$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -694°.650202$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -694°.638765$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -694°.650202$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -694°.649650$
$\dot{\Omega}_s = -0.66588918489890917 \times 10^{-9}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.12172944835581163 \times 10^{-8}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\bullet}_s = 0.56201681370649339 \times 10^{-9}$ rad / sec	

Tabelle 29-14: Bahncharakteristika der mittleren Mond-synodischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Epoche: t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km , $\mu_☾ = 398600.4418$ km^3 / s^2, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s , $J_2 = 0.001082625379977$, Genauigkeiten $\overline{\Delta fct} \le 10^{-10}$ sec , $\Delta\left(\bar{i}\right) \le 10^{-10}$ Grad ◄

BEISPIEL 3: Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 65352.0$ km, sowie die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.3$. Als Anfangswert für die Inklination kann nach Bild 29-31 $\bar{i}_0^{(0)} = 30°$ gewählt werden. Mit Funktionsgleichung (29.341) wird die mittlere Inklination $\overline{i_{QLR}} = 19°.393914587$ errechnet. Es werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4 berücksichtigt. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_L} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-10}$ sec und $\Delta\bar{i} \le 10^{-10}$ [Grad]. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten

beträgt $\left|\overline{P_L}-\overline{P_R}\right|=8.731149137020\times10^{-11}\,\text{sec}$. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 29-14 zusammengestellt. ◀

Zur Berechnung der mittleren Inklination $\bar{i}_0$ einer wahren $\left(P_L \mathrel{\hat{=}} P_R\right)-$ Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$ vorgegeben. Als Anfangsnäherung für die gesuchte mittlere Inklination kann nach Bild 29-31 die Inklination $\bar{i}_0^{(0)}=30°.0$ gewählt werden. Die mittlere Inklination wird dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell mit dem System

$$\begin{aligned} fct\left(P_R\left(\bar{i}\right)\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0+P_R\left(\bar{i}\right)\right)-\lambda\left(t_0\right)\right]=0 \\ fct\left[P_L\left(\bar{i}\right)\right] &\equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0+P_L\left(\bar{i}\right)\right)-\tau_{☾}\left(t_0\right)\right]=0 \\ fct\left(\bar{i}\right) &\equiv P_L\left(\bar{i}\right)-P_R\left(\bar{i}\right)=0 \end{aligned} \tag{29.342}$$

berechnet.

$\left(P_L \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\bar{a}_0$=66038.0 km, $\bar{e}_0$= 0.3, $\bar{i}_{QLR}$=52°.6798932, $\bar{\Omega}_0=\bar{\omega}_0=\overline{M}_{00}$=0°	
$\overline{P_K}$ = 168889.188279 sec	$\bar{t}_0$:2020-01-05/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 168888.878398 sec	P_H = 168888.955509 sec
$\overline{P_A}$ = 168889.036969 sec	P_A = 168889.036969 sec
$\overline{P_D}$ = 168887.742827 sec	P_D = 168888.372222 sec
$\overline{P_T}$ = 168889.615888 sec	P_T = 168889.959166 sec
$\overline{P_R}$ = 175909.673368 sec	P_R = 178471.948757 sec
$\overline{P_S}$ = 169798.360314 sec	P_S = 169744.869921 sec
$\overline{P_L}$ = 181904.064150 sec	P_L = 178471.948757 sec
H_P = 39848.463400 km	H_A = 79471.263400 km
$\overline{\Delta\lambda_P}=\dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A}=-705°.633320$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}=\dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D}=-705°.629585$
$\Delta\lambda_P=\dot{\lambda}_{Ps}\,P_A=-705°.633320$	$\Delta\lambda_\Omega=\dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D=-705°.632215$
$\dot{\Omega}_s$ =-0.57089624542885808$\times10^{-9}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ =0.90699091746071522$\times10^{-9}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\bullet}_s$ =0.39339112521084288$\times10^{-9}$ rad / sec	

Tabelle 29-15: Bahncharakteristika der wahren Mond-synodischen mit der wahren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km, $\mu_☾$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340$\times10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977, Genauigkeiten $\overline{\Delta fct}\le10^{-9}$ sec, $\Delta\left(\bar{i}\right)\le10^{-9}$ deg, vollständiges *Ecksteinsches* Bahnmodell mit vollständigen Bewegungseinflüssen. A posteriori Genauigkeit ΔP= 2.14088$\times10^{-7}$ sec◀

BEISPIEL 4: Vorgegeben seien entsprechend dem Ergebnis in Beispiel 2 die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 66038.0 km sowie die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.3. Als Anfangsnäherung

für die Inklination sei $\bar{i}_0^{(0)} = 25°$ gewählt. Mit dem System (29.342) wird die mittlere Inklination $\overline{i_{QLR}} = 29°.963608520$ errechnet. Im Bahnmodell werden alle Bewegungseinflüsse („Störungen“) des *Eckstein*-Modells einbezogen. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_L} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-10}$ sec und $\Delta\left(\bar{i}\right) \le 10^{-10}$ [Grad]. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|P_L - P_R\right| = 0.9720679372549 \times 10^{-8}$ sec. Die Schrittweite ist $\Delta i = 0°.01$. Die erhaltenen Parameter der gesuchten $\left(P_L \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn sind in Tabelle 29-15 zusammengestellt.

Aufgabenstellungen: 1. Untersuche Äquivalenzen mit einer Mond-synodischen Bewegung mit analytischen Näherungen.◀

2. Variiere das Bahnmodell und schätze die Ergebnisse ab.◀

3. Wiederhole die Berechnungen mit numerischen Ephemeridenrechnungen mit unterschiedlich anspruchsvollen Bahnmodellen. ◀

$\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\bar{a}_0 = 65345.0$ km, $\overline{e_{QLR}} = 0.879532544$, $\bar{i}_0 = 60°$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 166237.700926$ sec	$\bar{t}_0$: 2020-01-05/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 166246.975104$ sec	$P_H = 166240.879427$ sec
$\overline{P_A} = 166240.687684$ sec	$P_A = 166240.687684$ sec
$\overline{P_D} = 166234.436986$ sec	$P_D = 166240.497088$ sec
$\overline{P_T} = 166259.515114$ sec	$P_T = 166242.026629$ sec
$\overline{P_R} = 178856.657271$ sec	$P_R = 178856.657271$ sec
$\overline{P_S} = 167140.102568$ sec	$P_S = 166301.381097$ sec
$\overline{P_L} = 178856.657271$ sec	$P_L = 178856.657271$ sec
$H_P = 1493.808964$ km	$H_P = 116439.917836$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -694°.613534$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = --694°.594184$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -694°.613534$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -694°.619506$

Tabelle 29-16: Bahncharakteristika der mittleren Mond-synodischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Epoche: t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0 : 2020-01-05/12:00:0.0. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km, $\mu_{♁} = 398600.4418$ km^3/s^2, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$, Genauigkeiten $\overline{\Delta fct} \le 10^{-10}$ sec, $\Delta\left(\bar{e}\right) \le 10^{-11}$. Säkulares Bahnmodell nach *Brouwer*.

29.10.1.5 Berechnung der Exzentrizität

Nach Bild 29-31 (auf Seite 378) können eine geeignete große Bahnhalbachse und eine geeignete Inklination zur Berechnung der Exzentrizität einer $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn

vorgewählt werden. Die Berechnung der Exzentrizität wird analog zur Bedingung (29.333) mit der Funktionsgleichung

$$fct(\bar{e}) \equiv \overline{P_L}(\bar{e}) - \overline{P_R}(\bar{e}) = 0 \tag{29.343}$$

durchgeführt. Als Anfangsnäherung kann nach Bild 29-31 eine geeignete Exzentrizität $\bar{e}_0^{(0)}$ als Anfangsnäherung gewählt werden.

BEISPIEL 5: Entsprechend Bild 29-31 werden zur Berechnung einer mittleren $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$–Äquivalenzbahn die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 65345$ km und die Inklination $\bar{i}_0 =$ 60° vorgewählt. Als Anfangsnäherung für die gesuchte Exzentrizität sei $\bar{e}_0^{(0)} =$ 0.8 vorgegeben. Für die iterative Lösung mit der Funktionsgleichung (29.343) werden die Genauigkeiten $\overline{\Delta fct} \le 10^{-10}$ sec, $\Delta(\bar{e}) \le 10^{-11}$ gefordert. Es ergibt sich die Exzentrizität $\overline{e_{QLR}} =$ 0.8795325493333. Dazu wurde die Genauigkeit $\left|\overline{P_L} - \overline{P_R}\right| = 2.910383045673 \times 10^{-11}$ sec erreicht. Die Parameter sind in Tabelle 29-16 zusammengestellt.◀

$\left(P_L \triangleq P_R\right)$	
$\bar{a}_0 = 65650.0$ km, $\overline{e_{QLR}} = 0.122892741$, $\bar{i}_0 = 35°$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 167402.938130$ sec	t_0 : 2020-01-05/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 167400.268542$ sec	$P_H = 167400.568675$ sec
$\overline{P_A} = 167401.608412$ sec	$P_A = 167401.608412$ sec
$\overline{P_D} = 167398.493551$ sec	$P_D = 167399.193428$ sec
$\overline{P_T} = 167400.660420$ sec	$P_T = 167401.244385$ sec
$\overline{P_R} = 177554.587432$ sec	$P_R = 178471.948757$ sec
$\overline{P_S} = 168293.409881$ sec	$P_S = 168340.244465$ sec
$\overline{P_L} = 180177.965255$ sec	$P_L = 178471.948757$ sec
$\overline{H_P} = 51203.954972$ km	$\overline{H_A} = 67339.771828$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -699°.415585$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -699°.408058$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -699°.415585$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -699°.410982$
$\dot{\Omega}_s = -0.48585183761471496 \times 10^{-9}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.69840512333142778 \times 10^{-9}$ rad / sec	
$(M_0)^{\bullet}_s = 0.29813752483118914 \times 10^{-9}$ rad / sec	

Tabelle 29-17: Bahncharakteristika der wahren Mond-synodischen mit der wahren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km, $\mu_{☾} = 398600.4418$ km^3 / s^2, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$, Genauigkeiten $\overline{\Delta fct} \le 10^{-10}$ sec, $\Delta\bar{a} \le 10^{-10}$ km, vollständiges *Eckstein*sches Bahnmodell mit säkularen Bewegungseinflüssen.

Zur Berechnung der mittleren Exzentrizität $\overline{e}_0$ einer wahren $\left(P_L \mathrel{\hat{=}} P_R\right)-$ Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\overline{a}_0$, $\overline{i}_0$ vorgegeben. Nach Vorgabe einer geeigneten Exzentrizität kann die endgültige Lösung mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell mit dem System

$$\begin{aligned} fct\left(P_R\left(\overline{e}\right)\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\left(\overline{e}\right)\right) - \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left[P_L\left(\overline{e}\right)\right] &\equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_L\left(\overline{e}\right)\right) - \tau_{☾}\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(\overline{e}\right) &\equiv P_L\left(\overline{e}\right) - P_R\left(\overline{e}\right) = 0 \end{aligned} \tag{29.344}$$

berechnet werden.

BEISPIEL 6: Vorgegeben seien entsprechend dem Ergebnis in Beispiel 2 zur Berechnung einer wahren $\left(P_L \mathrel{\hat{=}} P_R\right)-$Äquivalenzbahn die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 65650.0\,\text{km}$, sowie die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.3$. Als Anfangsnäherung für die Inklination sei $\overline{i}_0^{(0)} = 35°$ einer $\left(P_L \mathrel{\hat{=}} P_R\right)-$Äquivalenzbahn zur Epoche t_0 :2020-01-05/12:00:0.0 gewählt.

Mit dem System (29.344) wird die mittlere Exzentrizität $\overline{e_{QKL}} = 0.1228927407229$ errechnet. Im Bahnmodell werden säkulare Bewegungseinflüsse („Störungen“) einbezogen. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_L} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-10}\,\text{sec}$ und $\Delta\overline{i} \le 10^{-10}\,[\text{Grad}]$. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|P_L - P_R\right| = 2.881279215217 \times 10^{-9}\,\text{sec}$. Die Schrittweite ist $\Delta e = 0.001$. Die erhaltenen Parameter der gesuchten $\left(P_L \mathrel{\hat{=}} P_R\right)-$ Äquivalenzbahn sind in Tabelle 29-17 zusammengestellt.◀

29.10.2 Kopplung anomalistischer mit Mond-synodischer Sat.bewegung

Die mittlere Mond-synodische Satellitenbewegung beträgt nach Formel (29.321)

$$\overline{n_L} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\bullet}_{s} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) \tag{29.345}$$

Um die anomalistische Bewegung mit der Mond-synodischen Bewegung koppeln zu können, müsste die Beziehung $\sigma_i\,\dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s = n_{☾}$ erfüllt sein. Für eine erste Übersicht wird die Differenz $\left(\overline{P_A} - \overline{P_L}\right)$ von anomalistischer und Mond-synodischer Umlaufzeit für einige Exzentrizitäten sowie für recht- und rückläufige Bahnen in Bild 29-32 aufgetragen. Eine mögliche Äquivalenz kann danach nur in der Umgebung der Nullstelle mit Exzentrizität e=0.0 und Anfangswert der großen Bahnhalbachse gefunden werden. Die Kurven mit unterschiedlichen Inklinationen liegen im Wesentlichen übereinander. Dies trifft für Kurven mit Inklinationen i<90° für negative Differenzen zu wie analog für Kurven von retrograden Bahnen mit positiven Differenzen der Umlaufzeiten.

Da die Auflösung in diesem Bild zu gering ist, wird die Umgebung der Nullstelle in Bild 29-33 herausvergrößert. Keine der Differenzkurven schneidet die Nulllinie. Diese Untersuchung wird für verschiedene Inklinationen wiederholt, ohne dass eine Überschneidung der Nulllinie gefunden wird. Es können somit keine Äquivalenzen zwischen der anomalistischen und der Mond-synodischen Bewegung gefunden werden.

Aufgabenstellung: Prüfe nach, ob diese Aussage auch für wahre Äquivalenzen $\left(P_A \triangleq P_L\right)$ zutrifft. ◀

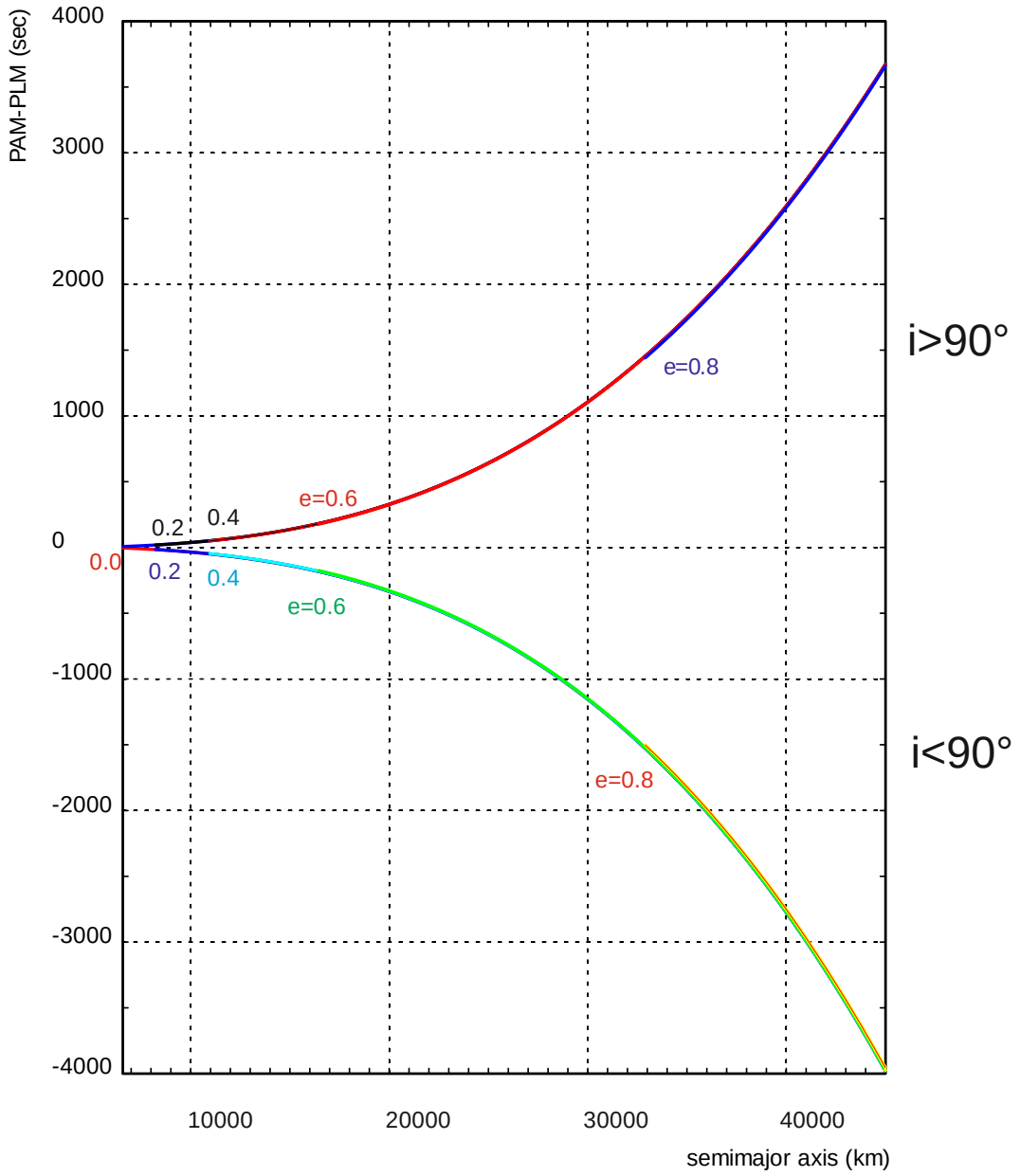


Bild 29-32: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_A} - \overline{P_L}$ der mittleren anomalistischen und der mittleren Mond-synodischen Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse. Schrittweite 10 km. Farbcodierung entsprechend der Exzentrizität

29.10.3 Drakonitischer mit Mond-synodischer Satellitenbewegung

Die mittlere Mond-synodische Satellitenbewegung beträgt nach Formel (29.321)

$$\overline{n_L} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\bullet}_{s} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) = \overline{n_D} + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) \quad . \tag{29.346}$$

Äquivalenz mit der drakonitischen Bewegung führt notwendig auf die Beziehung

$$\dot{\Omega}_s \triangleq n_{☾} \quad . \tag{29.347}$$

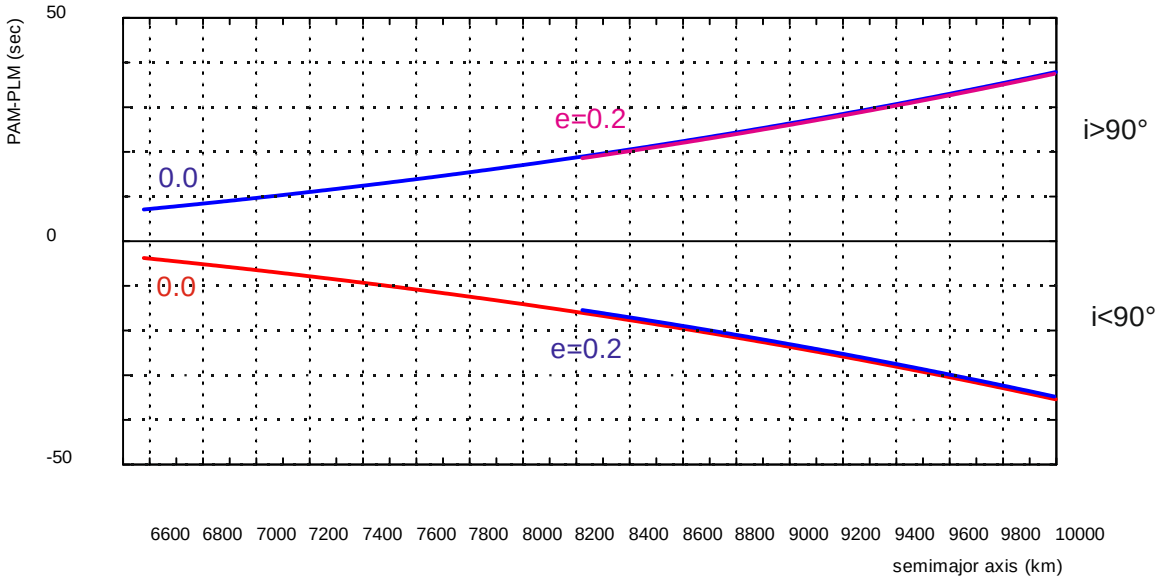


Bild 29-33: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_A} - \overline{P_L}$ der mittleren anomalistischen und der mittleren Mond-synodischen Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse für kreisförmige Bahnen. Schrittweite 10 km. Ausschnitt aus Bild 29-32. Ähnlicher Verlauf für verschiedene Inklinationen.

Für eine erste Abschätzung wird für die mittlere Mondbewegung nach Ausdruck (29.315) die Näherung $n_☾ \approx 13°/\mathrm{d}$ verwendet. Für die säkulare Variation des aufsteigenden Knotens von Erdsatellitenbahnen kann nach Formel (22.149) die auf die Mindest-Bahnhöhe 200 km bezogene Abschätzung $\left|\dot{\Omega}_{Gs0}\right| \leq 8°.9/\mathrm{d}$ herangezogen werden. Demnach muss immer mit der Einschränkung

$$\left|\dot{\Omega}_s\right| \leq 8°.9 < n_☾ \approx 13° \quad . \tag{29.348}$$

gerechnet werden. Die Identität (29.347) ist somit nicht möglich. Es kann keine Äquivalenz zwischen der drakonitischen und der Mond-synodischen Bewegung hergestellt werden.

Aufgabenstellung: Prüfe nach, ob diese Aussage auch für wahre Äquivalenzen $\left(P_D \triangleq P_L\right)$ zutrifft. ◀

29.10.4 Kopplung tropischer mit Mond-synodischer Satellitenbewegung

Die mittlere Mond-synodische Satellitenbewegung beträgt nach Formel (29.321)

$$\overline{n_L} = \overline{n_T} - \sigma_i \, n_☾ \quad . \tag{29.349}$$

Um eine Äquivalenz zwischen der mittleren tropischen und der mittleren Mond-synodischen Satellitenbewegung zu erhalten müsste ihre Differenz identisch verschwinden. Das ist aber wegen

$$\overline{n_L} - \overline{n_T} = -\sigma_i \, n_☾ \neq 0.0 \tag{29.350}$$

nicht möglich. Dies ist sicher auch für wahre Äquivalenzbewegungen der Fall, da diese auf den entsprechenden mittleren Bewegungen aufbauen.

Aufgabenstellung: Überprüfe, ob diese Aussage auch für wahre Satellitenbewegungen $\left(P_T \hat{=} P_L\right)$ richtig ist. ◀

29.10.5 Kopplung *Hansen*- mit Mond-synodischer Satellitenbewegung

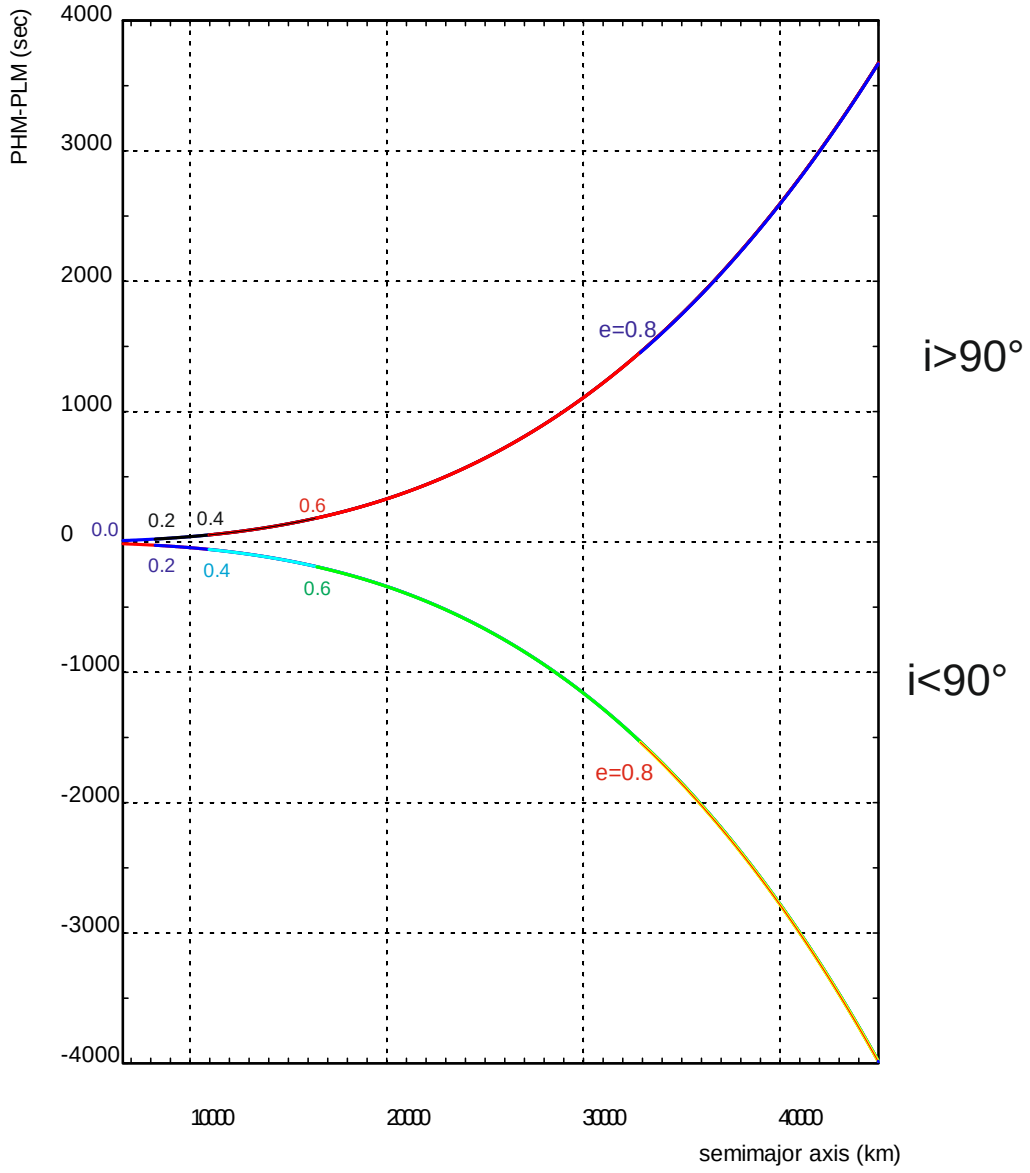


Bild 29-34: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_H} - \overline{P_L}$ der mittleren *Hansen*schen und der mittleren Mond-synodischen Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse. Schrittweite 10 km.

Die mittlere *Hansen*sche mittlere Satellitenbewegung[1] lautet nach Formel (21.62)

$$\overline{n_H} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \cos \bar{i} \quad . \tag{29.351}$$

Die mittlere Mond-synodische Satellitenbewegung beträgt nach Formel (29.321)

[1] Abschnitt 21.3

$$\overline{n_L} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\bullet}_{s} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) \quad . \tag{29.352}$$

Zur Untersuchung, ob eine Kopplung der *Hansen*schen mit der Mond-synodischen Bewegung möglich ist, muss die Differenz

$$\overline{n_L} - \overline{n_H} = \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) - \dot{\Omega}_s \cos \overline{i_0} \tag{29.353}$$

untersucht werden.

Auch hier gelten die Überlegungen von Abschnitt 29.10.3: Für eine erste Abschätzung wird für die mittlere Mondbewegung nach Ausdruck (29.315) die Näherung $n_{☾} \approx 13°/\mathrm{d}$ verwendet. Für die säkulare Variation des aufsteigenden Knotens von Erdsatellitenbahnen kann nach Formel (22.149) die Abschätzung $\left|\dot{\Omega}_{Gs0}\right| \leq 8°.9/\mathrm{d}$ herangezogen werden. Wenn $\overline{n_L} - \overline{n_H} \rightarrow 0.0$ angenommen werden soll, führt der Ausdruck (28.379) auf die widersprüchliche Aussage $\left|\cos \overline{i_0}\right| \approx -0.46$. Demnach kann es keine Äquivalenz zwischen einer *Hansen*schen und Mond-synodischen Bewegung geben.

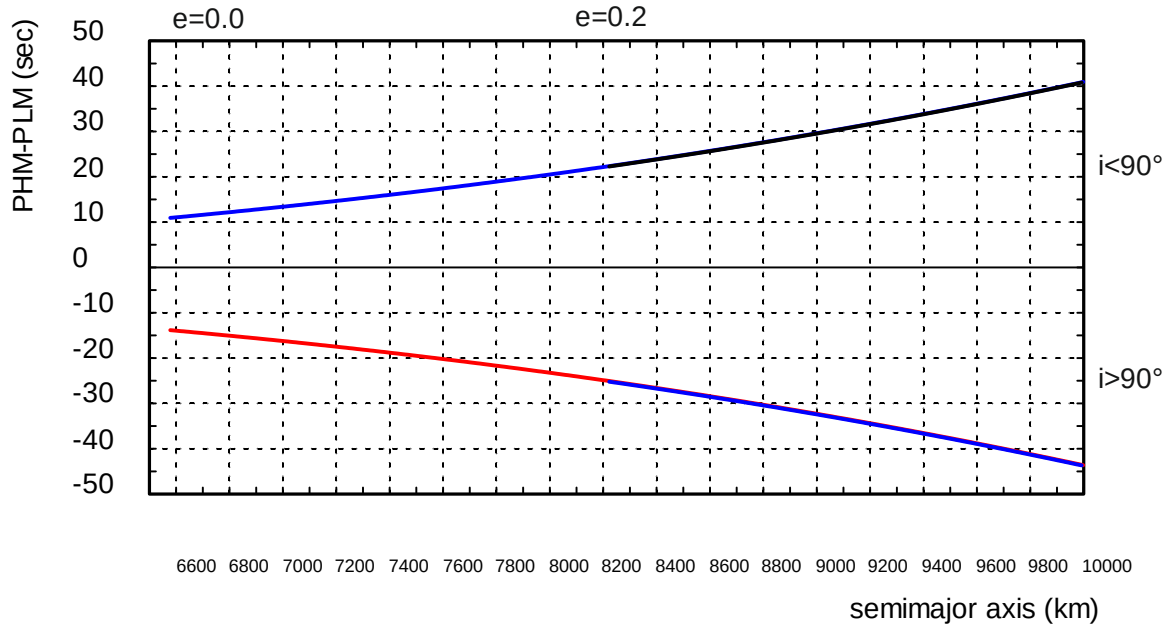


Bild 29-35: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_H} - \overline{P_L}$ der mittleren *Kepler*schen und der mittleren Mond-synodischen Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse. Schrittweite 10 km. Ausschnitt aus Bild 29-34

Diese Aussage wird vertieft durch eine Untersuchung des Verlaufs der Differenz $\overline{P_H} - \overline{P_L}$ der mittleren *Hansen*schen und der mittleren Mond-synodischen Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse. Diese Differenz ist für rechtläufige Bahnen stets negativ, für rückläufige Bahnen stets positiv. Die jeweiligen Kurven sind im Wesentlichen unabhängig von der Inklination übereinanderliegend. Auch die entsprechenden Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten liegen je auf ein und derselben Kurve. Mit wachsender Exzentrizität ist der Beginn der Kurve entsprechend der erhöhten großen Bahnhalbachse. In Bild 29-34 ist der Beginn der Kurve für die jeweilige Exzentrizität gekennzeichnet und farblich kodiert. Bild 29-35 zeigt einen Ausschnitt des Beginns der Kurven. Da keine der Differenzkurven die Nulllinie schneidet, kann es keine Äquivalenzbahn zwischen der *Hansen*schen und der synodischen Mond-bezogenen Bewegung geben. Weitere Untersuchungen unter Berücksichtigung verschiedener Inklinationen kommen zu keinem anderen Ergebnis.

Aufgabenstellungen: 1. Überprüfe ob es Sinn macht, nahe parallele $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_L}\right)$ – Äquivalenzbahnen vorzuschlagen.◀

2. Überprüfe, ob diese Aussage auch für wahre Satellitenbewegungen $\left(P_T \triangleq P_L\right)$ richtig ist.◀

29.10.6 Kopplung *Kepler*- mit Mond-synodischer Satellitenbewegung

Falls eine Äquivalenz-Kopplung zwischen der *Kepler*schen und der Mond-synodischen Satellitenbewegung möglich ist, kann auch die erhaltene $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$ – Äquivalenzbahn zur Erzeugung einer realen *Kepler*schen Satellitenbewegung genutzt werden.

29.10.6.1 Basiseigenschaften

Die mittlere Mond-synodische Satellitenbewegung (29.321)

$$\overline{n_L} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\bullet}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) \tag{29.354}$$

führt bei Äquivalenz mit der mittleren *Kepler*schen Bewegung $\overline{n_K}$ notwendig auf die Bedingung

$$\left(M_0\right)^{\bullet}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s - \sigma_i n_{☾} = 0 \quad . \tag{29.355}$$

Für eine Näherung erster Ordnung kann das *Brouwer*sche Bahnmodell für säkulare Störungen erster Ordnung[1] eingesetzt werden. Mit der Abkürzung

$$C_2 := -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \sqrt{\mu} \tag{29.356}$$

ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{C_2}{\sqrt{a^7}\left(1-e^2\right)^2}\left[-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)+2\sigma_i \cos i+\left(1+3\sqrt{1-e^2}\right)\right]=n_{☾} \quad , \tag{29.357}$$

der zur Abschätzung einer Anfangsnäherung bei der Berechnung eines der Bahnelemente einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$ – Äquivalenzbahn verwendet werden kann.

Die allgemeine Bedingungsgleichung[2] einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$ – Äquivalenzbahn lautet

$$\overline{P_K} - \overline{P_L} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}^3}} - \frac{2\pi}{\overline{n_L}} = 0 \quad . \tag{29.358}$$

---

[1] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

[2] d.h. bei Verwendung eines beliebigen Bahnmodells

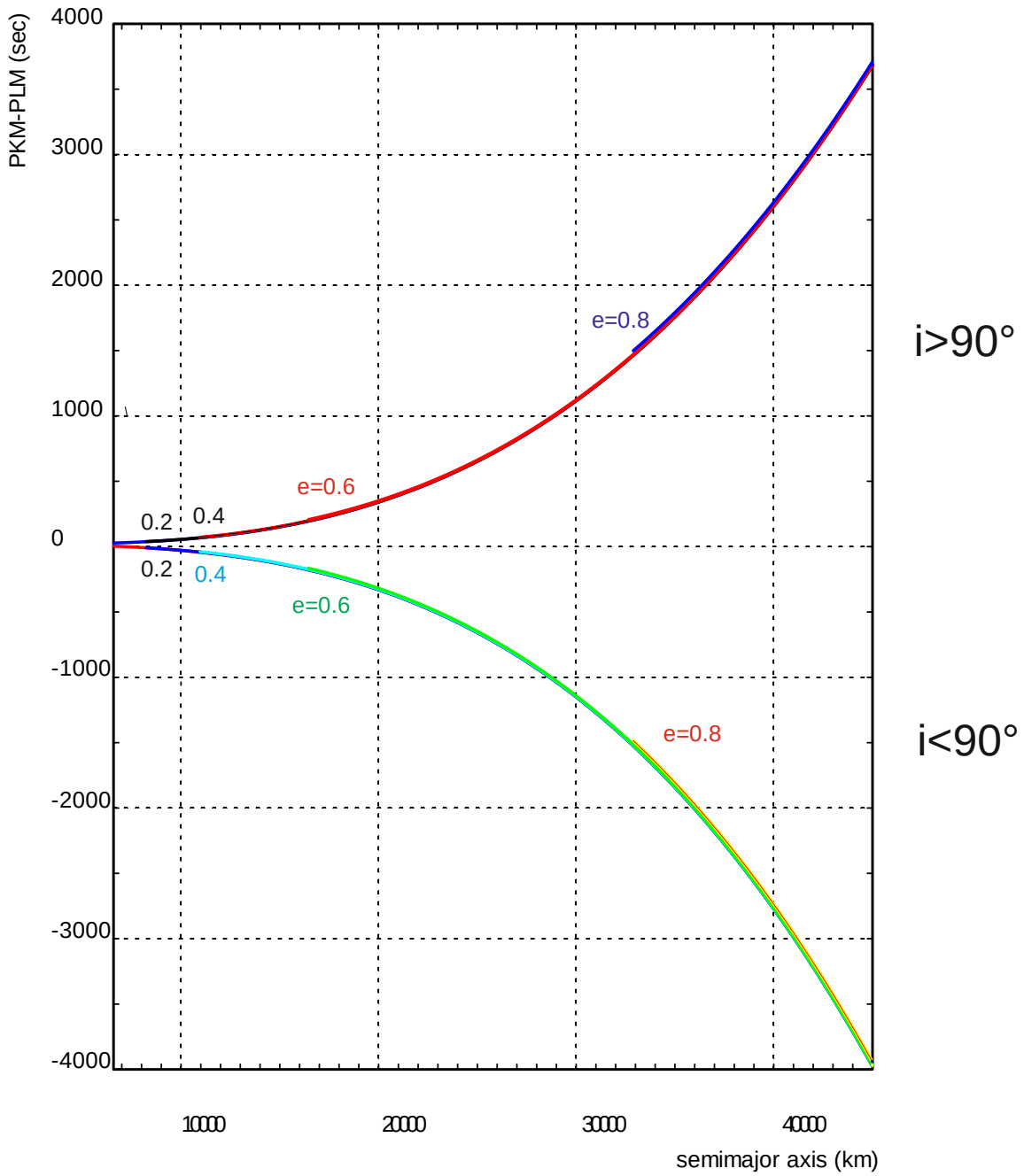


Bild 29-36: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_K} - \overline{P_L}$ der mittleren *Kepler*schen und der mittleren Mond-synodischen Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse. Schrittweite 10km.

Im Fall einer wahren $\left(P_K \triangleq P_K\right)-$ Äquivalenzbahn hat die *Kepler*sche Umlaufzeit bei Verwendung von mittleren Bahnparametern[1] wieder den Wert $P_K = \sqrt{\mu / \bar{a}^3}$. Die wahre Mond-synodische Umlaufzeit kann mit Hilfe des wahren Mondwinkels $\tau_{☾}$ (29.323) aus der überlagerten Funktion (29.324)

$$fct\left[P_L\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_L\right) - \tau_{☾}\left(t_0\right)\right] = 0 \qquad (29.359)$$

[1] die für eine Satellitenbahnanalyse grundlegend sind

berechnet werden. Die Berechnung erfolgt bei Bezug auf eine Epoche t_0. Werden die wahren Bahnparameter gewünscht, ist der Bezug auf eine Anfangsepoche wesentlich. Eine allgemeingültige Aussage ist dann jedoch nicht mehr zu erwarten.

Um abzuschätzen, ob eine $\left(\overline{P_K} - \overline{P_L}\right)$– Äquivalenzbahn möglich ist, wird die Differenz $\overline{P_K} - \overline{P_L}$ der *Kepler*schen und der Mond-synodischen Umlaufzeiten für verschiedene Exzentrizitäten und für rechtläufige sowie rückläufige Bahnen in Bild 29-36 aufgetragen. Eine Äquivalenz ist (wie in den 4 vorhergehenden Fällen) nur für niedrige kreisnahe Bahnen zu erwarten.

Aus diesem Grund wird das Gebiet um den Nullpunkt in Bild 29-37 herausvergrößert. Es zeigt sich

in der Tat, dass die Kurve für rechtläufige kreisnahe Bahnen die Nulllinie schneidet. In diesem Fall sind somit $\left(\overline{P_K} - \overline{P_L}\right)$– Äquivalenzbahnen möglich. Dieser Fall in der Umgebung der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKL}} \approx 7200\,\text{km}$ wird daher im vorliegenden Abschnitt detailliert untersucht.

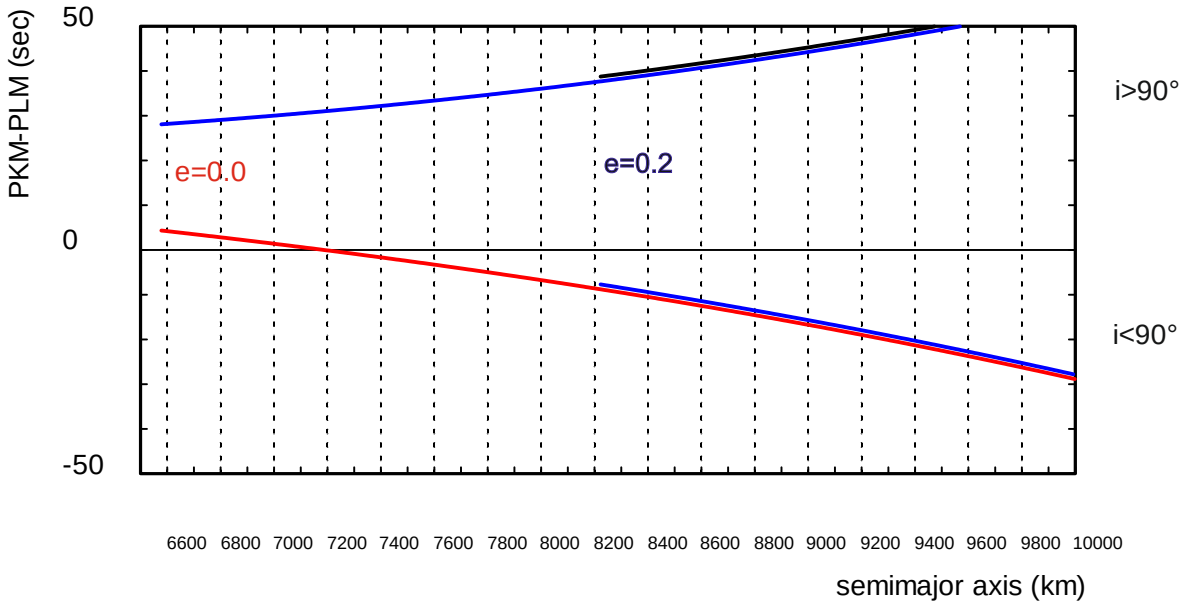


Bild 29-37: Der Verlauf der Differenz $\overline{P_K} - \overline{P_L}$ der mittleren *Kepler*schen und der mittleren Mond-synodischen Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse. Schrittweite 10 km. Ausschnitt aus Bild 29-36

29.10.6.2 Berechnung der großen Bahnhalbachse

Zur Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$– Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\bar{e}_0, \bar{i}_0$ vorgegeben. Eine Anfangslösung der großen Bahnhalbachse erster Ordnung kann aus der Bedingungsgleichung (29.357) erhalten werden:

$$\bar{a}_0^{(0)} = \sqrt[7]{\frac{C_2}{n_{☾}\left(1-e^2\right)^2}\left[-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)+2\sigma_i \cos i+\left(1+3\sqrt{1-e^2}\right)\right]} \quad . \qquad (29.360)$$

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$	
$\overline{a_{QKL}}$ =6939.597652 km, $\overline{e}_0$ =0.03, $\overline{i}_0$ =15°, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 5753.239025 sec	t_0 : 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 5738.990778 sec	P_H = 5739.408925 sec
$\overline{P_A}$ = 5746.125533 sec	P_A = 5746.125533 sec
$\overline{P_D}$ = 5731.616302 sec	P_D = 5732.465514 sec
$\overline{P_T}$ = 5739.251268 sec	P_T = 5739.908068 sec
$\overline{P_R}$ = 6148.813854 sec	P_R = 6137.173596 sec
$\overline{P_S}$ = 5740.295254 sec	P_S = 5740.902664 sec
$\overline{P_L}$ = 5753.239025 sec	P_L = 5752.996566 sec
H_P = 353.273123 km	H_A = 769.648982 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -23°.607599$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -24°.426031$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -23°.607599$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -24°.429650$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.14583260494155427×10^{-5} rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.27680380301051508×10^{-5} rad / sec	
$(M_0)^{\bullet}_s$ = 0.13519952190892356×10^{-5} rad / sec	

Tabelle 29-18: Bahncharakteristika der mittleren *Kepler*schen mit der mittleren Mond-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss der säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4, Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km, $\mu_{☾}$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 = 0.001082625379977, geforderte Genauigkeit $|\Delta\overline{P}| < 10^{-8}$ sec, $\Delta(\overline{a}) \le 10^{-8}$ km, Schrittweite Δa = 1 km.◀

Alternativ kann eine Anfangslösung durch einen Suchprozess mit Hilfe des gesamten zur Verfügung stehenden Bahnmodels gefunden werden: Ausgehend von einer gewählten Anfangsbahnhalbachse wird mit der Schrittweite Δa die Bahnhalbachse erhöht, bis die Differenz $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right|$ in die Nähe der gewünschten Genauigkeit geraten ist. Die mittlere Bahnhalbachse wird dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell aus der Funktionsgleichung erhalten

$$fct(\overline{a}) \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}^3}} - \frac{2\pi}{\overline{n}_L(\overline{a})} = 0 \quad . \tag{29.361}$$

BEISPIEL 1: Vorgegeben seien die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.03$ sowie die Inklination $\overline{i}_0 = 15°$. Mit Hilfe der Funktionsgleichung (29.361) wird die in Tabelle 28-23 zusammengestellte Satellitenbahn erhalten. Als Genauigkeit für die Differenz der mittleren Umlaufzeiten wird 10^{-8} sec sowie für die große Bahnhalbachse $\Delta(\overline{a}) \le 10^{-8}$ km verlangt. Die erhaltene a-posteriori Genauigkeit beträgt $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| = 2.728484105319 \times 10^{-10}$ sec.

Auch zur Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ einer wahren $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\bar{e}_0, \bar{i}_0$ vorgegeben. Wie im Fall mittlerer Umlaufzeiten kann eine geeignete Anfangsnäherung für die gesuchte mittlere Bahnhalbachse gefunden werden. Die mittlere Bahnhalbachse wird dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell mit dem System

$$P_K(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} \quad , \quad fct\left[P_L(\bar{a})\right] \equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_L(\bar{a})\right) - \tau_{☾}(t_0)\right] = 0 \qquad (29.362)$$
$$fct(\bar{a}) \equiv P_K(\bar{a}) - P_L(\bar{a}) = 0$$

berechnet.

$\left(P_K \triangleq P_L\right)$	
$\overline{a_{QKL}}$ =6890.7309837 km, $\bar{e}_0$ =0.02, $\bar{i}_0$ =12°, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\varpi}_0 = \overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K} = P_K =$ 5692.564734 sec	t_0 : 2019-04-16/12:00:0.0
$\overline{P_H} =$ 5677.710413 sec	$P_H =$ 5678.003414 sec
$\overline{P_A} =$ 5685.148652 sec	$P_A =$ 5684.750940 sec
$\overline{P_D} =$ 5670.128986 sec	$P_D =$ 5670.722129 sec
$\overline{P_T} =$ 5677.880018 sec	$P_T =$ 5678.332847 sec
$\overline{P_R} =$ 6078.424674 sec	$P_R =$ 6070.412684 sec
$\overline{P_S} =$ 5678.901794 sec	$P_S =$ 5679.276743 sec
$\overline{P_L} =$ 5691.569868 sec	$P_L =$ 5692.564734 sec
$H_P =$ 374.769964 km	$H_A =$ 650.398803 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -23°.312978$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -24°.181668$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -23°.312978$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -24°.184198$
$\dot{\Omega}_s =$ -0.15127259444539830$\times 10^{-5}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s =$ 0.29275571671056215$\times 10^{-5}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\bullet}_s =$ 0.14398080915473186$\times 10^{-5}$ rad / sec	

Tabelle 29-19: Bahncharakteristika der wahren *Kepler* mit der wahren Mond-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss aller säkularen und periodischen Bewegungseinflüsse nach dem Bahnmodell von *M. C. Eckstein*, Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{♁}$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340$\times 10^{-4}$ / s , J_2 = 0.001082625379977 , geforderte Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-8}$ sec , $\Delta(a) \le 10^{-8}$ km , Schrittweite $\Delta a = 1$ km .◀

BEISPIEL 2: Vorgegeben seien die Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.02 sowie die Inklination $\bar{i}_0$ = 12°. Mit Hilfe des Systems (29.362) wird die in Tabelle 29-19 zusammengestellte Satellitenbahn erhalten. Für die Berechnung der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKL}}$ werden alle kurz- und langperiodischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) (des *Eckstein*schen Bahnmodells) einbezogen. Als

Genauigkeit für die Differenz der mittleren Umlaufzeiten wird 10^{-8} sec verlangt. Die erhaltene a-posteriori Genauigkeit beträgt $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| = 4.729372449219 \times 10^{-11}$ sec.

29.10.6.3 Der Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung Keplerscher mit Mond-synodischer Bewegung

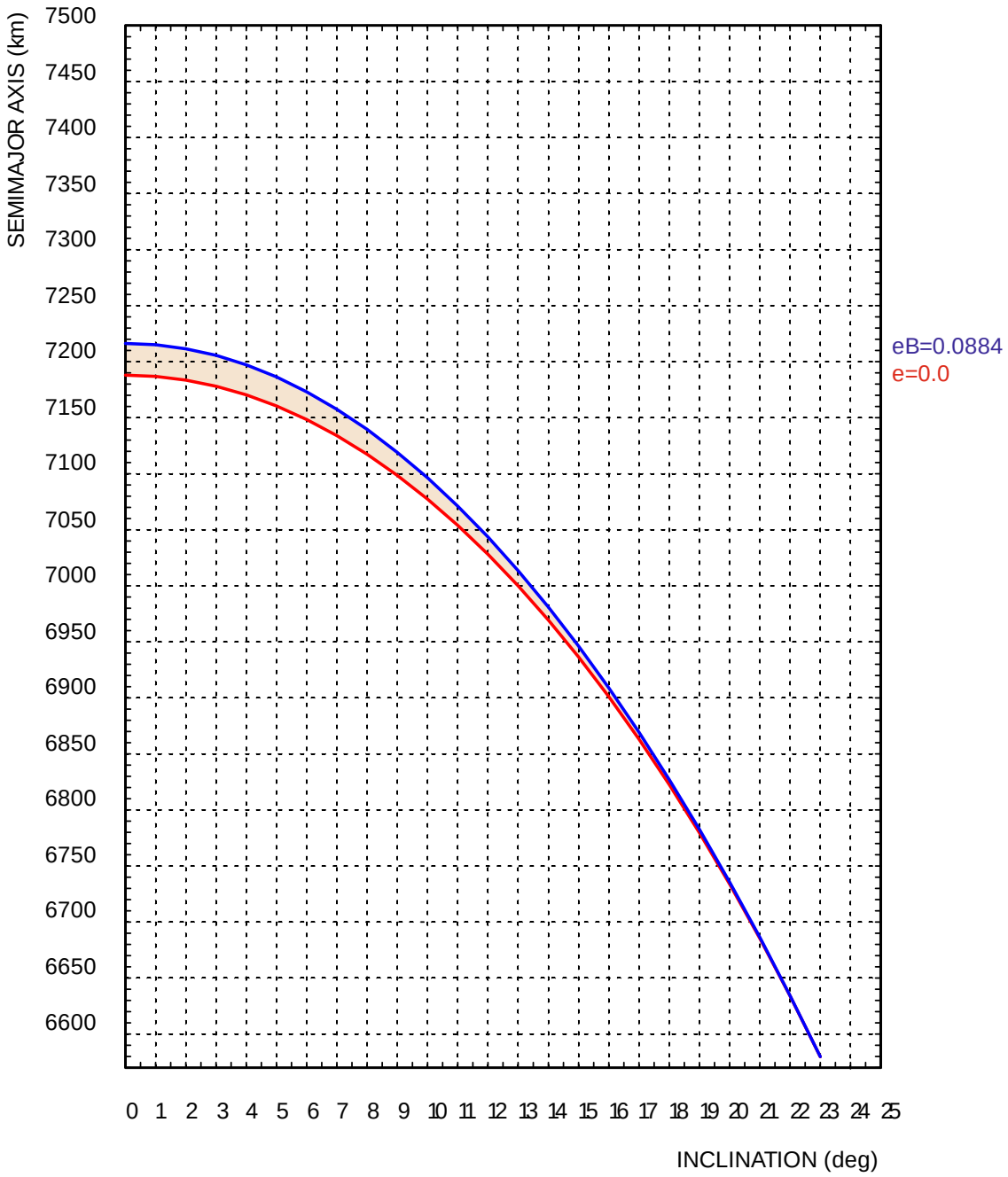


Bild 29-38: Äquivalenzbahnen aus Kopplung von *Kepler*scher mit Mond-synodischer Bewegung, Grenzexzentrizität $e_B \in [0.0002598267\text{-}0.08842535]$, geforderte Genauigkeit $\Delta(a) \le 10^{-6}$ km, $|\Delta fct| \le 10^{-3}$ sec, Schrittweiten $\Delta a = 20$ km, $\Delta e = 0.001$, $\Delta i = 1°.0$

Wenn die Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ Äquivalenzbahn bei Vorgabe der mittleren Bahnelemente $\overline{e}_0, \overline{i}_0$ zur Verfügung steht, kann die Übersicht möglicher $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ Äquivalenzbahnen dargestellt werden. Bild 29-38 zeigt den (sehr eingeschränkten) Bereich dieser Äquivalenzbahnen. Dieser ist ein schmaler Streifen zwischen der Kreisbahn und der Bahn mit wechselnder Grenzexzentrizität $e_B \in [0.0002598267\text{-}0.08842535]$.

Die maximal mögliche große Bahnhalbachse für Kreisbahnen im Fall von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ Äquivalenzbahnen hat den Wert $a_{\max}(e = 0.0) = 7187.955$ km.

Die maximal mögliche große Halbachse beträgt $a_{\max}(e_B = 0.08842535) = 7216.235\,\text{km}$. Mögliche Inklinationen einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ Äquivalenzbahn kommen nur im Intervall $i \in [0°, 23°]$ vor. Werden $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ oder $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahnen gesucht, kann Bild 29-38 von entscheidender Hilfe sein.

29.10.6.4 Berechnung der Inklination

Auch in diesem Fall können mit Bild 29-38 eine geeignete große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und eine geeignete Exzentrizität $\overline{e}_0$ zur Berechnung der Inklination $\overline{i_{QKL}}$ einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ Äquivalenzbahn vorgewählt werden. Die Berechnung der Inklination wird analog zu (29.361) mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{i}\right) \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} - \frac{2\pi}{\overline{n}_L\left(\overline{i}\right)} = 0 \tag{29.363}$$

durchgeführt. Als Anfangsnäherung kann nach Bild 29-38 die Inklination $\overline{i}_0^{(0)} = 0°.0$ gewählt werden.

BEISPIEL 3:

Vorgegeben seien zur Berechnung einer mittleren $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$-Äquivalenzbahn die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 7100.0$, sowie die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.07$. Mit Funktionsgleichung (29.363) wird die mittlere Inklination $\overline{i_{QKL}} = 9°.7648278046$ errechnet. Es werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4 berücksichtigt. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| \le 10^{-9}\,\text{sec}$ und $\Delta\overline{i} \le 10^{-8}\,[\text{Grad}]$. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| = 7.430571713485 \times 10^{-10}\,\text{sec}$. Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 28-36Tabelle 29-20 zusammengestellt. ◀

Zur Berechnung der mittleren Inklination $\overline{i}_0$ einer wahren $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\overline{a}_0$, $\overline{e}_0$ vorgegeben. Als Anfangsnäherung für die gesuchte mittlere

Inklination kann nach Bild 29-38 die Inklination $\bar{i}_0^{(0)} = 0°.0$ gewählt werden. Die mittlere Inklination wird dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell mit dem System

$$P_K(\bar{a}) = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} \quad , \quad fct\left[P_L(\bar{i})\right] \equiv \sin\left[\tau_☾\left(t_0 + P_L(\bar{i})\right) - \tau_☾(t_0)\right] = 0$$
$$fct(\bar{i}) \equiv P_K(\bar{a}_0) - P_L(\bar{i}) = 0 \tag{29.364}$$

berechnet.

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$	
$\bar{a}_0$=7100.000 km, $\bar{e}_0$=0.07, $\overline{i_{QKL}}$=9°.764827795, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M}_{00}$=0°	
$\overline{P_K}$ = 5953.858426 sec	t_0 : 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 5938.766786 sec	P_H = 5939.771744 sec
$\overline{P_A}$ = 5946.332330 sec	P_A = 5946.332330 sec
$\overline{P_D}$ = 5931.115980 sec	P_D = 5933.134710 sec
$\overline{P_T}$ = 5938.879406 sec	P_T = 5939.968471 sec
$\overline{P_R}$ = 6378.520363 sec	P_R = 6324.449536 sec
$\overline{P_S}$ = 5939.997288 sec	P_S = 5940.930032 sec
$\overline{P_L}$ = 5953.858426 sec	P_L = 5952.621261 sec
H_P = 224.863400 km	H_A = 1218.863400 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -24°.405823$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -25°.251245$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -24°.405823$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -25°.259839$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.13848168513339558 $\times 10^{-5}$ rad / sec	

Tabelle 29-20: Bahncharakteristika der mittleren *Kepler*schen mit der mittleren Mond-synodischen Äquivalenzbahn, , Berechnung unter Einschluss der säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4, Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_☾$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s , J_2 = 0.001082625379977 , geforderte Genauigkeit $|\Delta\overline{P}| < 10^{-9}$ sec , $\Delta(\bar{i}) \le 10^{-8}$ [Grad], Schrittweite $\Delta i = 0°.01$.◀

BEISPIEL 4: Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7100.0$, sowie die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.07$. Mit lezterem System wird die mittlere Inklination $\overline{i_{QKL}} = 9°.495281378$ errechnet. Im Bahnmodell werden alle kurz- und langperiodischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) einbezogen. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta(\bar{i}) \le 10^{-8}$ [Grad]. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| =$ 5.568836058956 $\times 10^{-8}$ sec . Die Schrittweite ist $\Delta i = 0°.01$. Die erhaltene Satellitenbahn ist in Tabelle 29-21 zusammengestellt. Werden die periodischen Bewegungseinflüsse vernachlässigt, ergeben sich Abweichungen in der Ordnung $0°.02$, in den Umlaufzeiten etwa 0.002 sec. ◀

29.10.6.5 Berechnung der Exzentrizität

Nach Bild 29-38 können eine geeignete große Bahnhalbachse und eine geeignete Inklination zur Berechnung der Exzentrizität einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$ – Äquivalenzbahn vorgewählt werden. Die Berechnung der Inklination wird analog zu (29.361) mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{e}\right) \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} - \frac{2\pi}{\overline{n_L}\left(\bar{e}\right)} = 0 \tag{29.365}$$

durchgeführt. Als Anfangsnäherung kann nach Bild 29-38 die Exzentrizität $\bar{e}_0^{(0)} = 0.0$ versucht werden.

$\left(P_K \triangleq P_L\right)$	
$\bar{a}_0 = 7100.0$ km, $\bar{e}_0 = 0.07$, $\overline{i_{QKL}} = 9°.495281375$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 5953.858426$ sec	t_0 : 2019-04-16/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 5938.729962$ sec	$P_H = 5939.738852$ sec
$\overline{P_A} = 5946.314017$ sec	$P_A = 5946.309465$ sec
$\overline{P_D} = 5931.066930$ sec	$P_D = 5933.098400$ sec
$\overline{P_T} = 5938.836550$ sec	$P_T = 5939.924884$ sec
$\overline{P_R} = 6378.470927$ sec	$P_R = 6323.901953$ sec
$\overline{P_S} = 5939.954416$ sec	$P_S = 5940.849165$ sec
$\overline{P_L} = 5953.815354$ sec	$P_L = 5953.858426$ sec
$H_P = 224.863400$ km	$H_A = 1218.863400$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -24°.403573$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -25°.251419$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -24°.403554$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -25°.260067$
$\dot{\Omega}_s = -0.13859431433905799 \times 10^{-5}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.27163520732579906 \times 10^{-5}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)_s^{\bullet} = 0.13389328496252641 \times 10^{-5}$ rad / sec	

Tabelle 29-21: Bahncharakteristika der mittleren *Kepler*schen mit der mittleren Mond-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss aller säkularen und periodischen Bewegungseinflüsse nach dem Bahnmodell von *M. C. Eckstein*, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km, $\mu_{☾} = 398600.4418$ km^3 / s^2, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$, geforderte Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-8}$ sec, $\Delta\left(\bar{i}\right) \le 10^{-8}$ [Grad], Schrittweite $\Delta i = 0°.01$.◀

BEISPIEL 5: Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7000.0$. Sowie entsprechend Bild 29-38 die mittlere Inklination $\bar{i}_0 = 13°.1$. Mit der obigen Funktionsgleichung wird die mittlere Exzentrizität $\overline{e_{QKL}}$ errechnet. Es werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4 berücksichtigt. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| \le 10^{-9}$ sec und

$\Delta(\bar{e}) \le 10^{-9}$, die Schrittweite $\Delta e = 0.001$. Die erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $6.075424607843 \times 10^{-10}$ sec . Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn sind in Tabelle 29-22 zusammengestellt. ◀

Zur Berechnung der mittleren Exzentrizität $\overline{e_{QKL}}$ einer wahren $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahn seien die mittleren Bahnelemente $\bar{a}_0, \bar{i}_0$ vorgegeben. Als Anfangsnäherung für die gesuchte mittlere Exzentrizität kann nach Bild 29-38 die Exzentrizität $\bar{e}_0^{(0)} = 0.0$ gewählt werden. Die mittlere Exzentrizität wird dann endgültig mit einem geeigneten beliebigen Bahnmodell mit dem System

$$P_K(\bar{a}_0) = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \quad , \quad fct\left[P_L(\bar{e})\right] \equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_L(\bar{e})\right) - \tau_{☾}(t_0)\right] = 0$$
$$fct(\bar{e}) \equiv P_K(\bar{a}_0) - P_L(\bar{e}) = 0 \tag{29.366}$$

berechnet.

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$	
$\bar{a}_0$ =7000.000 km, $\overline{e_{QKL}}$ =0.029174436, $\bar{i}_0$ =13°.1, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 5828.516638 sec	t_0 : 2021-08-03/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 5813.961182 sec	P_H = 5814.376807 sec
$\overline{P_A}$ = 5821.250026 sec	P_A = 5821.250026 sec
$\overline{P_D}$ = 5806.496362 sec	P_D = 5807.336645 sec
$\overline{P_T}$ = 5814.160901 sec	P_T = 5814.758574 sec
$\overline{P_R}$ = 6234.876477 sec	P_R = 6220.401662 sec
$\overline{P_S}$ = 5815.232320 sec	P_S = 5815.772543 sec
$\overline{P_L}$ = 5828.516638 sec	P_L = 5828.102512 sec
H_P = 417.642351 km	H_A = 826.084449 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -23°.906479$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -24°.734546$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -23°.906479$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -24°.738126$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.14264766616192319 $\times 10^{-5}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.27425171680098599 $\times 10^{-5}$ rad / sec	
$(M_0)^{\bullet}_s$ = 0.13456666775280529 $\times 10^{-5}$ rad / sec	

Tabelle 29-22: Bahncharakteristika der mittleren *Kepler*schen mit der mittleren Mond-synodischen Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss der säkularen Bewegungseinflüsse mit J_2, J_4, Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{♁}$ = 398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s , J_2 = 0.001082625379977 , geforderte Genauigkeiten $|\Delta\bar{P}| < 10^{-9}$ sec, $\Delta(\bar{e}) \le 10^{-9}$, Schrittweite $\Delta e = 0.001$.

BEISPIEL 6: Vorgegeben seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7050.0$, sowie die mittlere Inklination $\bar{i}_0 = 10°.7$. Zu berechnen ist die Exzentrizität einer wahren $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahn. Mit dem System (28.395) wird die mittlere Exzentrizität $\overline{e_{QKL}} = 0.06575285$ errechnet. Im Bahnmodell werden alle kurz- und langperiodischen Bewegungseinflüsse („Störungen") einbezogen. Die geforderten Genauigkeiten betragen $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| \le 10^{-9}$ sec und $\Delta\left(\bar{e}\right) \le 10^{-9}$. Die a posteriori erreichte Genauigkeit in der Differenz der mittleren Umlaufzeiten beträgt $\left|\overline{P_K} - \overline{P_L}\right| = 1.773514668457 \times 10^{-10}$ sec . Die Bahnparameter der erhaltenen Satellitenbahn ist in Tabelle 29-23 zusammengestellt. Werden die periodischen Bewegungseinflüsse vernachlässigt, ergibt sich die Exzentrizität $\overline{e_{QKL}}_{\sec} = 0.06601914$.

$\left(P_K \triangleq P_L\right)$	
$\bar{a}_0$ =7050.000 km, $\overline{e_{QKL}}$ =0.065752848, $\bar{i}_0$ =10°.7, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K} = 5891.076413$ sec	t_0 : 2019-04-16/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 5876.082082$ sec	$P_H = 5877.024040$ sec
$\overline{P_A} = 5883.597708$ sec	$P_A = 5883.595043$ sec
$\overline{P_D} = 5868.458204$ sec	$P_D = 5870.358811$ sec
$\overline{P_T} = 5876.217164$ sec	$P_T = 5877.262348$ sec
$\overline{P_R} = 6306.293671$ sec	$P_R = 6257.656205$ sec
$\overline{P_S} = 5877.311578$ sec	$P_S = 5878.178693$ sec
$\overline{P_L} = 5890.881369$ sec	$P_L = 5891.076413$ sec
$H_P = 224.863400$ km	$H_A = 1218.863400$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -24°.146120$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -24°.994200$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -24°.146120$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -25°.002295$
$\dot{\Omega}_s = -0.14137138488119833 \times 10^{-5}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.2755018595775200 \times 10^{-5}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\bullet}_s = 0.13557157268520532 \times 10^{-5}$ rad / sec	

Tabelle 29-23: Bahncharakteristika der wahren *Kepler*schen mit der wahren Mond-synodischen $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahn, Berechnung unter Einschluss aller säkularen und periodischen Bewegungseinflüsse nach dem Bahnmodell von *M. C. Eckstein*, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km , $\mu_{☾} = 398600.4418$ km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s , $J_2 = 0.001082625379977$, geforderte Genauigkeiten $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-8}$ sec , $\Delta\left(\bar{e}\right) \le 10^{-9}$, Schrittweite $\Delta e = 0.001$.◀

Anmerkung: Die im Fall der $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahn vorgewählte Inklination $\bar{i}_0$ liegt nach Bild 29-38 außerhalb des Bereiches von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ Äquivalenzbahnen. Dieser

Sachverhalt zeigt, dass die möglichen Bereiche von $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahn nicht identisch des Bereiches von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ Äquivalenzbahnen sind. Die Unterschiede sind extrem empfindlich. ◀

Aufgabenstellung: Vergleiche die Ephemeride einer ungestörten Keplerbahn mit der Ephemeride einer entsprechenden $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ Äquivalenzbahn. Entsprechendes für $\left(P_K \triangleq P_L\right)-$ Äquivalenzbahnen. ◀

29.10.7 Kopplung Sonnen-synodischer mit Mond-synodischer Satellitenbewegung

Die mittleren Satellitenbewegungen in Bezug auf die fiktive mittlere Sonne (28.164) und in Bezug auf den fiktiven mittleren Mond (29.321) sind

$$\overline{n_S} = \overline{n_T} - \sigma_i\, n_\odot \quad , \quad \overline{n_L} = \overline{n_T} - \sigma_i\, n_☾ \quad . \tag{29.367}$$

Bei Äquivalenz muss die Differenz

$$\overline{n_S} - \overline{n_☾} = \sigma_i \left(n_\odot - n_☾\right) \tag{29.368}$$

untersucht werden. Offensichtlich ist eine Kopplung zwischen mittlerer Sonnen-synodischer und mittlerer Mond-synodischer Satellitenbewegung wegen $n_\odot \neq n_☾$ nicht möglich.

29.10.8 Mond-synodische Satellitenbewegung gekoppelt mit Erdrotation

Der Bezug der Mond-synodischen Bewegung auf die (tropische) Erdrotation $\dot{\Theta}$ kann interessante Einblicke in das Verhalten von Satellitenbewegungen geben. Die tropische Erdrotation hat die Umlaufzeit $P_E = 2\pi / \dot{\Theta} = 86164.090507$ s.

29.10.8.1 Basiseigenschaften der Mond-synodischen Bewegung mit der Erdrotation

Mit der mittleren Mond-synodischen Satellitenbewegung[1] (29.321) muss eine $\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)-$ Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_L} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - n_☾\right) - \dot{\Theta} = 0 \tag{29.369}$$

erfüllen. Damit kann ein Keplersches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa für die große Bahnhalbachse,

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \overline{n_L}\left(\bar{a}\right) - \dot{\Theta} = 0 \tag{29.370}$$

iterativ berechnet werden. Als Anfangswert zur Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse empfiehlt sich ein Wert unterhalb der mittleren geosynchronen Bahn

[1] Abschnitt 29.9.2.2 auf Seite 368

$$\overline{a_{QKG\,0}} = \sqrt[3]{\mu / \dot{\Theta}^2} = 42164.169626\,\text{km} \quad . \tag{29.371}$$

Falls eine wahre $\left(P_L \triangleq P_E\right)-$ Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit dem wahren Mondwinkel (29.323) $\tau_{☾}$ des Satellitenortes als Bahnwinkel die wahre Mond-synodische Umlaufzeit P_L mit der überlagerten Funktion (29.324) und der großen Bahnhalbachse $\bar{a}$ als unabhängiger Variable

$$fct\left[P_L\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_L\right) - \tau_{☾}\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{29.372}$$

berechnet werden. Anschließend muss mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse $\bar{a}$ die Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv P_L\left(\bar{a}\right) - P_E = 0 \tag{29.373}$$

gelöst werden. Der gesamte Vorgang (29.372)-(29.373) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis eine vorgegebene Grenze $\left|P_L - P_E\right| < \Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Tabelle 29-24 enthält die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination.

	$\overline{a_{QLE}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)-$	41170.520274	0.1	5°
$\left(P_L \triangleq P_E\right)-$	41162.524771	0.1	5°
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)-$	41167.826485	0.1	60°
$\left(P_L \triangleq P_E\right)-$	40337.113283	0.1	60°
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)-$	41167.452382	0.5	60°
$\left(P_L \triangleq P_E\right)-$	41477.453203	0.5	60°
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)-$	41166.486261	0.5	85°
$\left(P_L \triangleq P_E\right)-$	40267.877570	0.5	85°
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)-$	43224.775111	0.5	155°
$\left(P_L \triangleq P_E\right)-$	42574.807359	0.5	155°

Tabelle 29-24: Die große Bahnhalbachse einiger mittlerer und wahrer Äquivalenzbahnen bei Kopplung and die Erdrotation

29.10.8.2 Das mögliche Gebiet von Mond-synodischen Bewegungen mit der Erdrotation

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)-$ Äquivalenzbahnen zu konstruieren, die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ angegeben. Wird eine

Exzentrizität $\overline{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 29.10.8.1 berechnet werden.

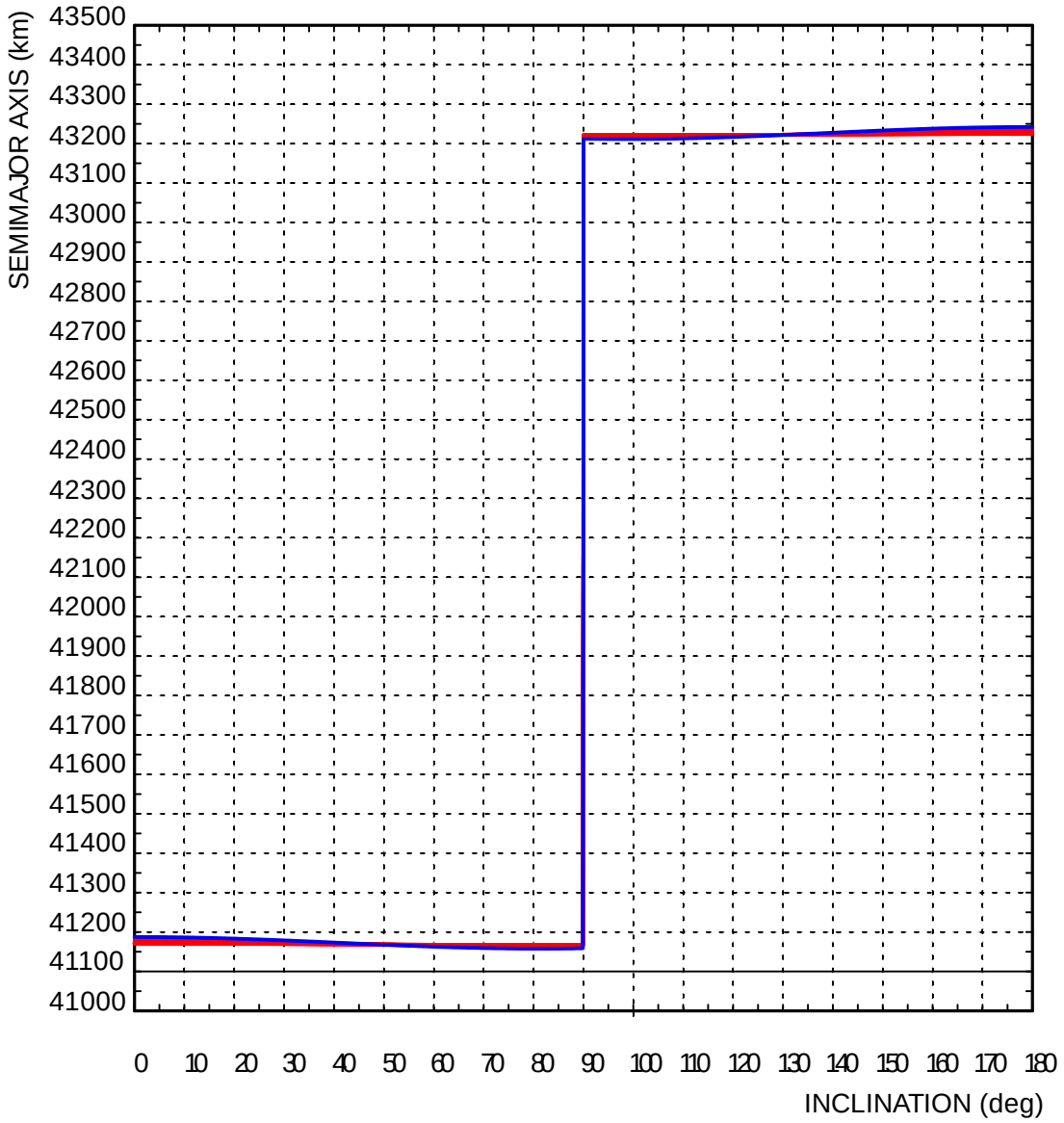


Bild 29-39: Das (a,i)-Gebiet der $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen große Bahnhalbachse gegen Inklination 0°-180°, mit parametrisierten Exzentrizitäten e=0.1 - $e_B \in \left[0.8401732 - 0.8401768 / 0.8477728 - 0.8478770\right]$

Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ zur Inklination $\overline{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0{,}1$, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann etwa mit der Methoden in Abschnitt 28.9.3 berechnet werden.

Das Ergebnis in Bild 29-39 zeigt zwei völlig getrennte Bereiche für mögliche $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen, je nachdem ob es sich um rechtläufige oder rückläufige Bahnen handelt. Es ist daher sinnvoll, diese beiden Bereiche getrennt zu untersuchen. Die Werte der Grenzexzentrizität $e_B \in \left[0.8401732 - 0.8401768 / 0.8477728 - 0.8478770\right]$, die sich auf die minimale mittlere

Bahnhöhe =200 km bezieht, sind bezogen auf die beiden getrennten Bereiche sehr unterschiedlich.

29.10.8.3 Rechtläufige Äquivalenzbahnen von Mond-synodischen Bewegungen mit der Erdrotation

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QLE\,cross}} \approx 49°$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QLE\,cross}} \approx 41168.3\,\text{km}$. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} P_E\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (29.369) folgt im Fall rechtläufiger Bewegung die Bedingungsgleichung

$$\overline{n_L} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - n_{☾} - \dot{\Theta} = 0 \quad , \quad \sigma_i = +1 \,. \tag{29.374}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\bullet}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{29.375}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[1 - n_{☾} + \sqrt{1-e^2} - \cos^2 i\left(5 + 3\sqrt{1-e^2}\right) + 2\cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K} - 1\right) \tag{29.376}$$

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	41170.51	---	---		---
e=0.1	41170.55	49°.588026	41168.406636	41167.21	41167.28
e=0.2	41170.67	49°.571593	41168.407608	41167.15	41167.22
e=0.3	41170.90	49°.543907	41168.409243	41167.03	41167.11
e=0.4	41171.28	49°.501325	41168.411751	41166.82	41166.92
e=0.5	41171.92	49°.438415	41168.415440	41166.47	41166.60
e=0.6	41173.07	49°.345441	41168.420830	41165.84	41166.02
e=0.7	41175.42	49°.203438	41168.428792	41164.56	41164.84
e=0.8	41181.59	48°.969929	41168.439987	41161.16	41161.77
e_B	41187.50	48°.812980	41168.443868	41157.90	41158.83

Tabelle 29-25: Spezielle Parameter von $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert entsprechend der laufenden Exzentrizität, Grenz-Exzentrizität e_B =0.8401768

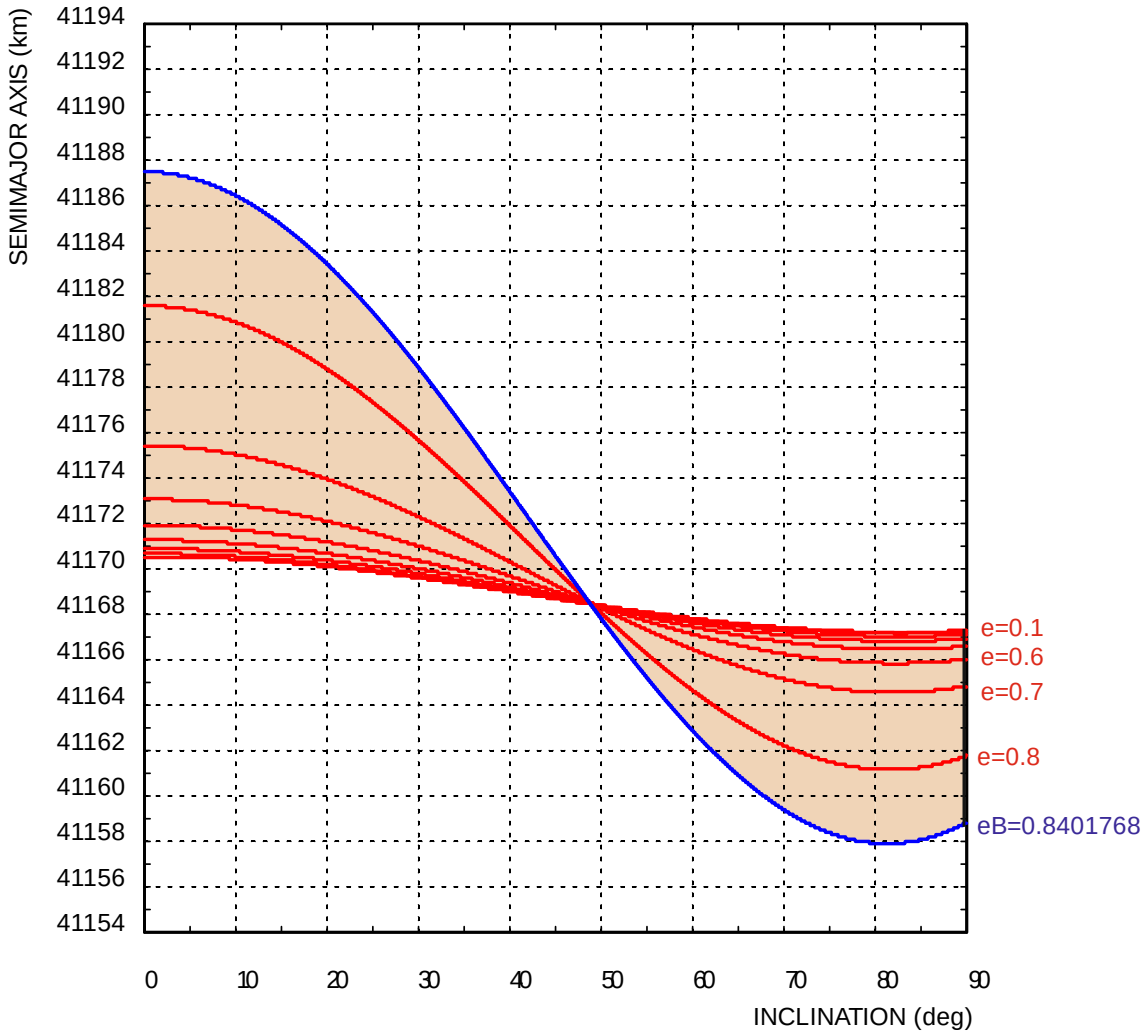


Bild 29-40 Das (a,i)-Gebiet der $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen große Bahnhalbachse gegen Inklination 0°-90°, mit parametrisierten Exzentrizitäten e=0.1 - - $e_B \in [0.8401732 - 0.8401768]$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität (e_1, e_2) ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$f_{e2} - f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + B_0 |\cos i| + C_0 = 0 \tag{29.377}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_1\left(5 + 3\sqrt{1-e_1^2}\right) - E_2\left(5 + 3\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ B_0 &:= 2\left(E_2 - E_1\right) \\ C_0 &:= E_2\left(1 - n_☾ + \sqrt{1-e_2^2}\right) - E_1\left(1 - n_☾ + \sqrt{1-e_2^2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.378}$$

Ihre Lösungen unter Verwendung der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0 + \operatorname{sgn}(B_0)\sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}\right] \quad , \quad |\cos i_1| = \frac{Q_0}{A_0} \quad , \quad |\cos i_2| = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \tag{29.379}$$

In Tabelle 29-25 sind in Ergänzung zu Bild 29-40 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 29.10.8.1 berechnet.

29.10.8.4 Rückläufige Äquivalenzbahnen von Mond-synodischen Bewegungen mit der Erdrotation

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QLE\,cross}} \approx 131°$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QLE\,cross}} \approx 42222.2$ km. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)$– Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (29.369) folgt im Fall rückläufiger Bewegung die Bedingungsgleichung

$$\overline{n_L} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s - \dot{\Omega}_s + n_{☾} - \dot{\Theta} = 0 \quad , \quad \sigma_i = -1 \, . \tag{29.380}$$

ecc	a_{init} [km]	$a_{\min}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\max}$ [km]
e=0.0	43221.44	---	---	---	---
e=0.1	43221.42	43221.35	130.414497	43222.487685	43224.53
e=0.2	43221.36	43221.29	130.429052	43222.488505	43224.64
e=0.3	43221.25	43221.17	130.456391	43222.490044	43224.86
e=0.4	43221.07	43220.98	130.498852	43222.492430	43225.22
e=0.5	43220.76	43220.64	130.561707	43222.495947	43225.84
e=0.6	43220.21	43220.05	130.654652	43222.501094	43226.93
e=0.7	43219.10	43218.82	130.796639	43222.508726	43229.17
e=0.8	43216.16	43215.59	131.030139	43222.519644	43235.04
e_B	43212.60	43211.63	131.203109	43222.523984	43242.21

Tabelle 29-26: Spezielle Parameter von $\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_E}\right)$– Äquivalenzbahnen, parametrisiert entsprechend der laufenden Exzentrizität, Grenz-Exzentrizität e_B =0.8478770

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $(M_0)^{\bullet}_s, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \;, \tag{29.381}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[1+n_{☾}+\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)-2\cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K}-1\right) \tag{29.382}$$

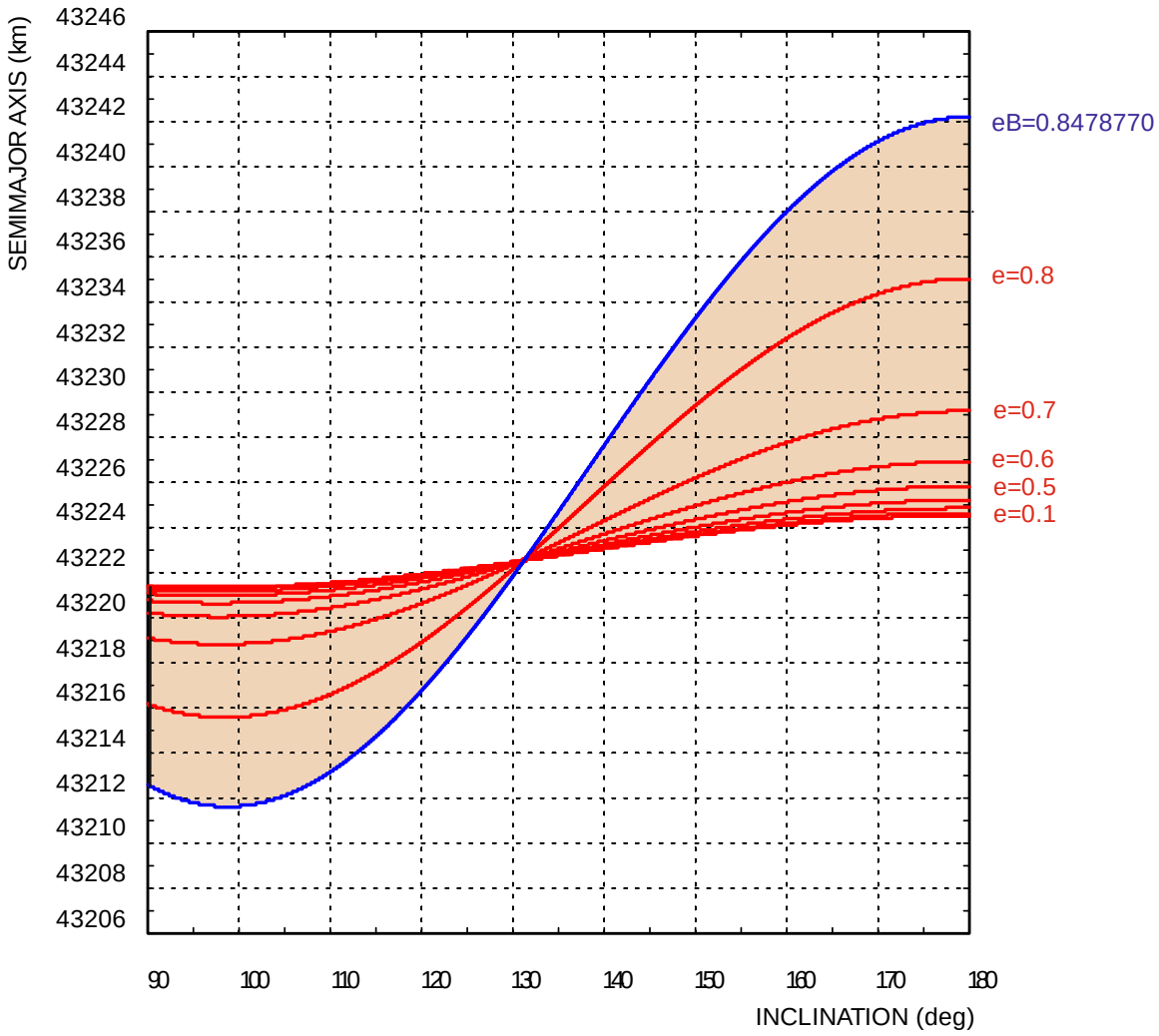


Bild 29-41: Das (a,i)-Gebiet der $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen große Bahnhalbachse gegen Inklination 90°-180°, mit parametrisierten Exzentrizitäten e= 0.1 - $e_B \in [0.8477728 - 0.8478770]$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität (e_1, e_2) ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$f_{e2} - f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + B_0 \left|\cos i\right| + C_0 = 0 \tag{29.383}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right)-E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ B_0 &:= 2\left(E_1-E_2\right) \\ C_0 &:= E_2\left(1+n_{☾}+\sqrt{1-e_2^2}\right)-E_1\left(1+n_{☾}+\sqrt{1-e_2^2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.384}$$

Ihre Lösungen unter Verwendung der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0+\operatorname{sgn}\left(B_0\right)\sqrt{B_0^2-4A_0C_0}\right] \quad , \quad \left|\cos i_1\right| = \frac{Q_0}{A_0} \quad , \quad \left|\cos i_2\right| = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \tag{29.385}$$

In Tabelle 29-26 sind in Ergänzung zu Bild 29-41 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 29.10.8.1 berechnet.

Anmerkung: Aus Tabelle 29-24 kann abgelesen werden, dass die Bereichsbilder Bild 29-39, Bild 29-40 und Bild 29-41 nicht notwendig die möglichen Bereiche wahrer $\left(P_L \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen abdecken.◀

29.10.9 Kopplung der Mond-synodischen Bewegung in 2 Sterntagen

29.10.9.1 Elementares Verhalten von Mond-synodischen Bewegungen mit der Dauer von 2 Sterntagen

Nach dem WGS 1984 System haben 2 Sterntage die Dauer[1]

$$P_Q := \frac{4\pi}{\dot{\Theta}} = 172328.18104\,\text{sec} \triangleq 47^h 52^m 08^s.18104 \quad . \tag{29.386}$$

Bei Bezug auf die meridionale Bewegung haben $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen[2] exakt die Umlaufzeit 2 Sterntage P_Q. Die Umlaufzeiten anderer auf die meridionale Bewegung bezogener Äquivalenzbahnen haben Umlaufzeiten nahe P_Q. Satellitenbewegungen die auf 2 Sterntage P_Q bezogen werden, können daher als Alternative zu den Meridian bezogenen Bewegungen aufgefasst werden. Allerdings ist der Unterschied zu diesen beiden Bewegungsarten wesentlich:

1. Es werden keine zwei Bewegungsarten gekoppelt. Vielmehr wiederholt sich ein spezieller Bewegungsbezug nach genau 2 Sterntagen. BEISPIEL: der aufsteigende Knoten einer $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn findet genau alle zwei Sterntage statt.

---

[1] Formel (26.322), Abschnitt 26.10 (Band IV-A, Jhrgg 2023)

[2] Abschnitt 26.8.1 (Band IV-A, Jhrgg 2023)

2. Während Meridian bezogene Äquivalenzbahnen ausschließlich für rechtläufige Bahnen auftreten können, kommen die auf P_Q bezogenen Äquivalenzbahnen für alle Bahnneigungen vor.

Mit der mittleren mondsynodischen Satellitenbewegung[1] (29.321)) muss eine mittlere $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_L} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - n_{☾}\right) - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \tag{29.387}$$

erfüllen. Damit kann ein *Kepler*'sches Bahnelement berechnet werden, wenn die anderen Bahnelemente gegeben sind. Dies geschieht iterativ mit Hilfe einer entsprechenden Funktionsgleichung. Im Fall der Berechnung der großen Bahnhalbachse lautet sie

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \overline{n_L}\left(\bar{a}\right) - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad . \tag{29.388}$$

Als Anfangswert der großen Bahnhalbachse für die Iteration kann der Ausdruck (26.158)[2]

$$\overline{a_{QR}}_K = \sqrt[3]{4\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 66931.4468893\,\text{km} \tag{29.389}$$

verwendet werden.

Wenn eine wahre $\left(P_L \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet werden soll, kann mit dem wahren Mondwinkel (29.321) $\tau_{☾} = \alpha - \alpha_{☾}$ der Satellitenposition als Bahnwinkel die wahre mondsynodische Umlaufzeit P_L iterativ mit der überlagerten Funktion (29.322) berechnet werden

$$fct\left[P_L\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\tau_{☾}\left(t_0 + P_L\right) - \tau_{☾}\left(t_0\right)\right] = 0 \quad . \tag{29.390}$$

Anschließend kann zur Berechnung der großen Bahnhalbachse $\bar{a}$ die Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv P_L\left(\bar{a}\right) - P_Q = 0 \tag{29.391}$$

gelöst werden. Der gesamte Prozess (29.388) - (29.389) muss mehrmals wiederholt werden, bis ein bestimmter Grenzwert $\left|P_L - P_Q\right| = \Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Tabelle 29.1 enthält die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse einiger mittlerer $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$ – sowie wahrer $\left(P_L \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen nach Auswahl von Exzentrizität und Inklination. ◀

Um den (*a*,*i*)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird die Inklination $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ vorgegeben. Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die zugehörige große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 29.10.9.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung der

[1] Abschnitt 29.9.2.2 auf Seite 368

[2] Abschnitt 26.8.1.1 (Band IV-A, [2023])

großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ zur Inklination $\overline{i}_0$ kann für eine gegebene Exzentrizität $\overline{e}_0$ eine Kurve gezeichnet werden, die die Beziehung eindeutig darstellt.

29.10.9.2 Der zulässige Bereich von Mond-synodischen Äquivalenzbahnen in 2 siderischen Tagen

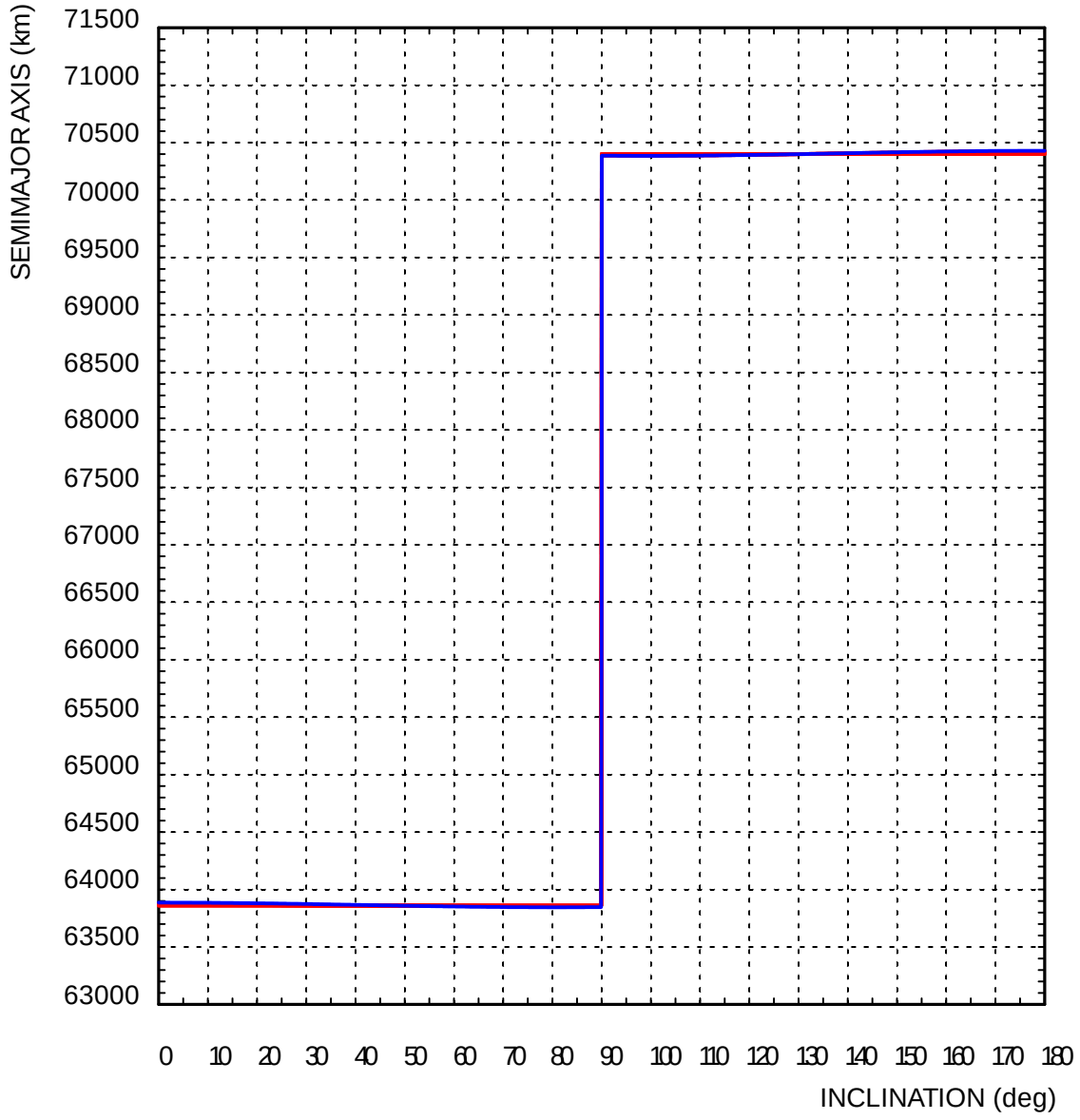


Bild 29-42: Das (a,i) Gebiet der großen Bahnhalbachse der $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen in Abhängigkeit von der Inklination 0°-180°, mit parametrisierten Exzentrizitäten e=0,0 - $e_B \in$ [0,8969682,0,8970336/0,9016985, 0,9065989]

Der untere Bereich möglicher Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0{,}0$, die obere Grenze durch den Verlauf der Randexzentrizität e_B. Die Randexzentrizität e_B kann berechnet werden mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(e_B\right) \equiv r_P - r_{P,\min} \quad . \tag{29.392}$$

Die Randexzentrizität soll auf die vorgewählte Mindesthöhe $H_{P,\min} = r_{P,\min} - R_E$ bezogen werden. r_P ist der momentane Perigäums-Radius, der in der Iteration an den Minimalwert $r_{P,\min}$ angepasst werden soll.

Das Ergebnis in Bild 29-42 (auf Seite 409) zeigt zwei völlig unterschiedliche Bereiche für mögliche $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen, je nachdem, ob es sich um rechtläufige oder rückläufige Bahnen handelt. Es ist daher sinnvoll, diese beiden Bereiche getrennt zu untersuchen. Die Werte der Randexzentrizitäten $e_B \in$ [0.8969682,0.8970336/0.9016985, 0.9065989], die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe $H_{P,\min}$ = 200 km beziehen, sind in Bezug auf die beiden getrennten Bereiche sehr unterschiedlich.

Äquivalenzbahn	$\overline{a_{QLQ}}$ [km]	$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)-$	63861.487222	0.0	5°
$\left(P_L \triangleq P_Q\right)-$	63355.313214	0.0	5°
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)-$	63859.781376	0.0	60°
$\left(P_L \triangleq P_Q\right)-$	61368.560339	0.0	60°
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)-$	63859.533680	0.5	60°
$\left(P_L \triangleq P_Q\right)-$	65045.394384	0.5	60°
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)-$	63858.910805	0.5	85°
$\left(P_L \triangleq P_Q\right)-$	63435.369918	0.5	85°
$\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)-$	70402.256124	0.5	155°
$\left(P_L \triangleq P_Q\right)-$	68201.941580	0.5	155°

Tabelle 29-27: Die große Bahnhalbachse einiger mittlerer und wahrer Äquivalenzbahnen bei gekoppelter Mond-synodischer Bewegung mit 2 Sterntagen Umlaufzeit.

29.10.9.3 Rechtläufige Äquivalenzbahnen von Mond-synodischen Satellitenbewegungen mit 2 Sterntagen Umlaufzeit

Der (a,i)-Bereich aller möglichen mittleren rechtläufigen $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen ist in Bild 29-43 dargestellt. Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die charakteristische Inklination $\overline{i_{QLQ}}_{cross} \approx 49°$ und die charakteristische große Bahnhalbachse $\overline{a_{QLQ}}_{cross} \approx 63860$ km. Dieser Bereich kann als das charakteristische Zentrum der mittleren Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte jeder Kurve lassen sich finden, indem man zwei Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten schneidet. Für verschiedene Paarungen von Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (29.387) folgt für den Fall rechtläufiger Bewegung die Bedingungsgleichung

$$\overline{n_L} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - n_{☾} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad , \quad \sigma_i = +1 \, . \tag{29.393}$$

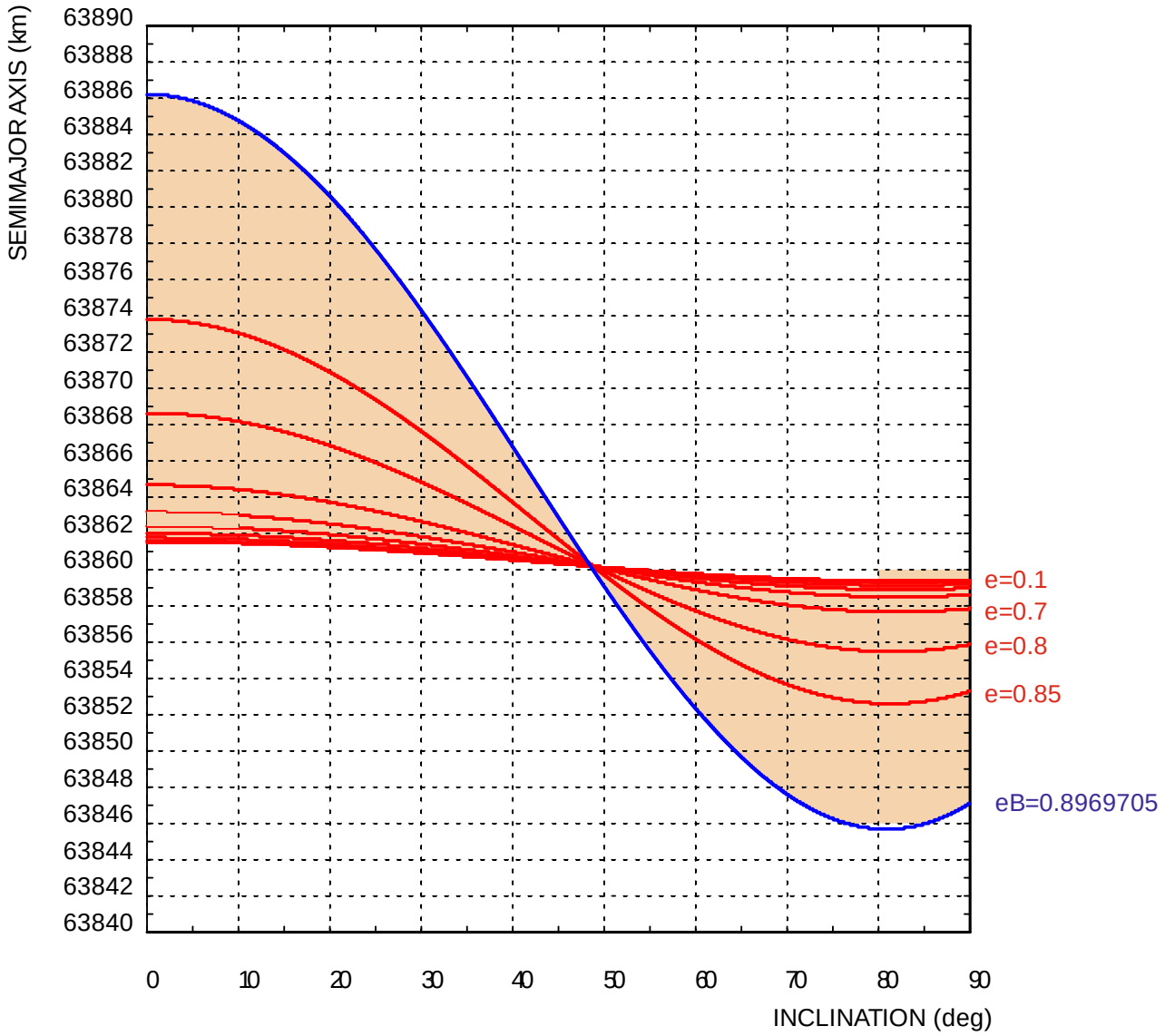


Bild 29-43: Das (a,i) Gebiet der rechtläufigen $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen mit großer Bahnhalbachse in Abhängigkeit von der Inklination im Intervall 0°-90°, mit parametrisierten Exzentrizitäten e= 0.1 - $e_B \in$ [0.8969705, 0.8970336]

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen $\left(M_0\right)_s^{\bullet}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ erster Ordnung und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;\; , \;\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;\; , \;\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;\; , \;\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{29.394}$$

wird eine Aufspaltung in einen Anteil mit der Inklination sowie mit der großen Bahnhalbachse formal erhalten

$$f_e \equiv E\left[1-n_{☾}+\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)+2\cos i\right]=\frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2n_K}-1\right) \quad . \tag{29.395}$$

Setzt man jeweils ein bestimmtes Paar (e_1, e_2) von Exzentrizitäten ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, so erhält man eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Inklination

$$f_{e2}-f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + B_0 \left|\cos i\right| + C_0 = 0 \tag{29.396}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right)-E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ B_0 &:= 2\left(E_2-E_1\right) \\ C_0 &:= E_2\left(1-n_{☾}+\sqrt{1-e_2^2}\right)-E_1\left(1-n_{☾}+\sqrt{1-e_2^2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{29.397}$$

Die Lösungen mit Hilfe der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0+\operatorname{sgn}(B_0)\sqrt{B_0^2-4A_0C_0}\right] \;,\; \left|\cos i_1\right| = \frac{Q_0}{A_0} \;,\; \left|\cos i_2\right| = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \tag{29.398}$$

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	63861.51	---	---	---	---
e=0.1	63861.53	49°.588026	63860.148816	63859.38	63859.42
e=0.2	63861.61	49°.571593	63860.149445	63859.34	63859.39
e=0.3	63861.75	49°.543907	63860.150504	63859.26	63859.31
e=0.4	63862.00	49°.501325	63860.152131	63859.13	63859.19
e=0.5	63862.41	49°.438415	63860.154531	63858.90	63858.98
e=0.6	63863.16	49°.345441	63860.158064	63858.50	63858.61
e=0.7	63864.67	49°.203438	63860.163391	63857.67	63857.85
e=0.8	63868.64	48°.969929	63860.171650	63855.48	63855.87
e=0.85	63873.81	48°.787849	63860.176817	63852.61	63853.29
e_B	63886.23	48°.539582	63860.177413	63845.69	63847.11

Tabelle 29-28: Spezielle Parameter von $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert nach wachsender Exzentrizität, Grenzexzentrizität $e_B = 0.8970336$

In Tabelle 29-28 sind in Ergänzung zu Bild 29-43 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen $\left(\overline{i_{QLQ}}_{cross}, \overline{a_{QLQ}}_{cross}\right)$ werden die Parameter des Schnittpunktes der Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit $\overline{e}_0 = 0.0$ berechnet. Nach Berechnung der charakteristischen Inklination $\overline{i_{QLQ}}_{cross}$ werden die charakteristischen Halbachsen $\overline{a_{QLQ}}_{cross}$ mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 29.10.9.1 erhalten.

29.10.9.4 Rückläufige Äquivalenzbahnen der Mond-synodischen Satelliten-Bewegungen in 2 Sterntagen

Der (a,i)-Bereich aller möglichen mittleren rückläufigen $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen ist in Bild 29-44 dargestellt. Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die charakteristische Inklination $\overline{i_{QLQ\,cross}} \approx 131°$ und die charakteristische große Bahnhalbachse $\overline{a_{QLQ\,cross}} \approx 70401$ km. Dieser Bereich kann als das charakteristische Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte jeder Kurve lassen sich finden, indem man zwei Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten schneidet. Für verschiedene Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (29.387) folgt für den Fall der retrograden Bewegung die Bedingungsgleichung

$$\overline{n_L} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s - \dot{\Omega}_s + n_{☾} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad , \quad \sigma_i = -1 \, . \tag{29.399}$$

ecc	a_{init} [km]	$a_{\min}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\max}$ [km]
e=0.0	70400.21	70387.02	---	---	70425.75
e=0.1	70400.19	70400.15	130.414497	70400.851813	70402.10
e=0.2	70400.16	70400.12	130.429052	70400.852319	70402.18
e=0.3	70400.09	70400.04	130.456391	70400.853268	70402.31
e=0.4	70399.98	70399.92	130.498852	70400.854742	70402.53
e=0.5	70399.79	70399.72	130.561707	70400.856920	70402.91
e=0.6	70399.46	70399.35	130.654652	70400.860131	70403.58
e=0.7	70398.77	70398.60	130.796639	70400.864987	70404.95
e=0.8	70396.97	70396.61	131.030139	70400.872604	70408.56
e=0.85	70394.63	70394.01	131.212218	70400.877599	70413.24
e=0.9	70388.39	70387.02	131.479945	70400.879248	70425.75
e_B	70386.82	70385.25	131.525373	70400.877890	70428.93

Tabelle 29-29: Ausgewählte Parameter von $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert nach wachsender Exzentrizität, Grenzexzentrizität $e_B \in$ [0.9065410, 0.9065989]

Unter Verwendung der säkularen Anteile $\left(M_0\right)_s^{\bullet}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ der Variationsgleichungen erster Ordnung und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{29.400}$$

wird formal eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination sowie der großen Bahnhalbachse ermittelt

$$f_e \equiv E\left[1+n_{☾}+\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)-2\cos i\right]=\frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,n_K}-1\right) \tag{29.401}$$

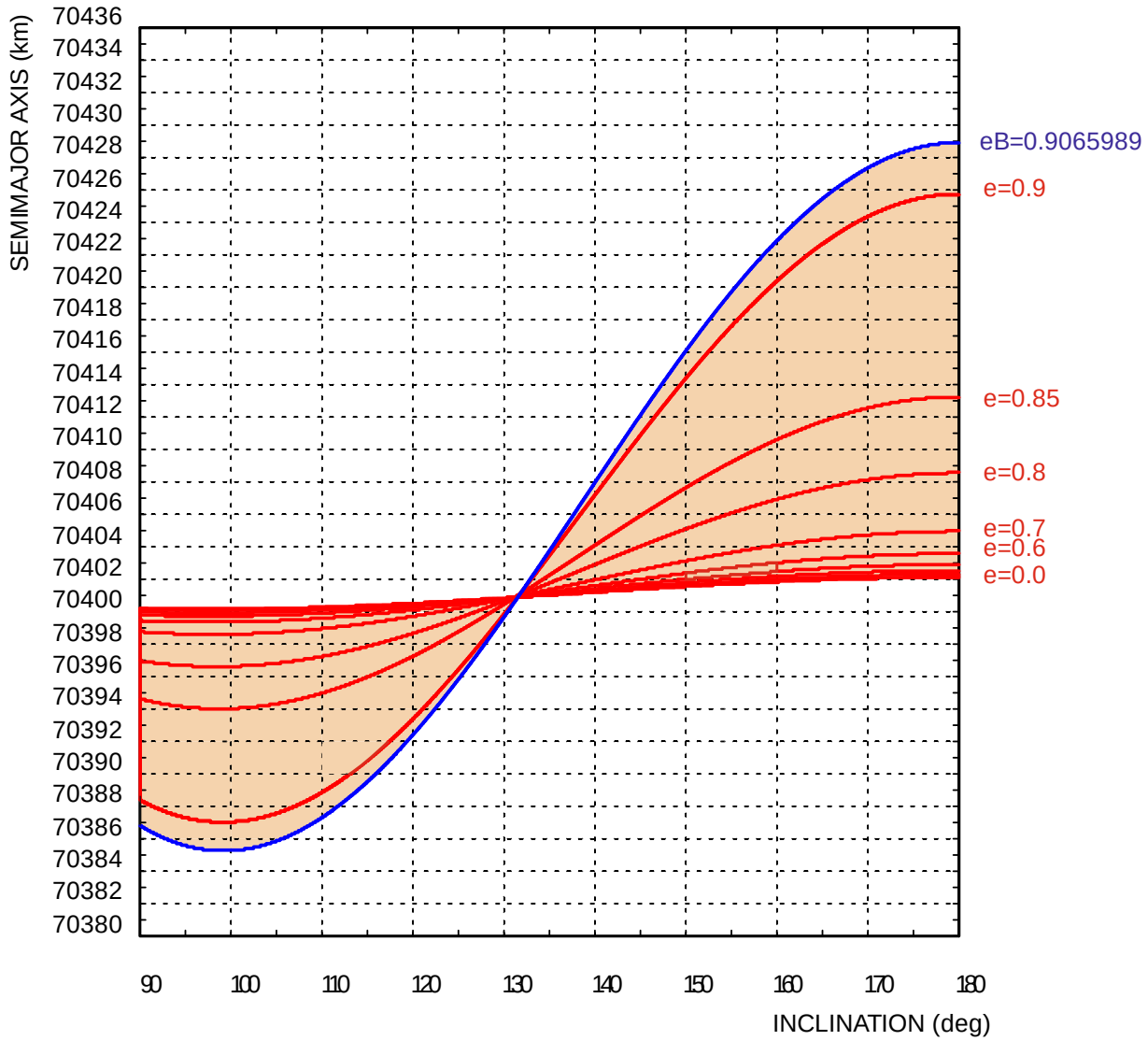


Bild 29-44: Das (a,i) Gebiet der rückläufigen $\left(\overline{P_L} \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen, große Bahnhalbachse über der Inklination im Intervall 90°-180°, mit parametrisierten Exzentrizitäten e = 0,0 - e_B ∈ [0,9065410, 0,9065989]

Setzt man hier jeweils eine bestimmte Exzentrizität (e_1, e_2) ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, so erhält man eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Inklination

$$f_{e2}-f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + B_0 \left|\cos i\right| + C_0 = 0 \tag{29.402}$$

mit den Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
A_0 &:= E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right)-E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right)\\
B_0 &:= 2\left(E_1-E_2\right)\\
C_0 &:= E_2\left(1+n_{☾}+\sqrt{1-e_2^2}\right)-E_1\left(1+n_{☾}+\sqrt{1-e_2^2}\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{29.403}
$$

Die Lösungen unter Verwendung der Diskriminante Q_0 sind

$$
Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0+\operatorname{sgn}\left(B_0\right)\sqrt{B_0^2-4A_0C_0}\right] \;,\; \left|\cos i_1\right| = \frac{Q_0}{A_0} \;,\; \left|\cos i_2\right| = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \tag{29.404}
$$

In Tabelle 29-29 sind in Ergänzung zu Bild 29-44 einige spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter $\left(\overline{i_{QLQ}}_{cross}, \overline{a_{QLQ}}_{cross}\right)$ des Schnittpunktes der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.0$ berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung $\overline{i_{QLQ}}_{cross}$ werden die charakteristischen großen Bahnhalbachsen $\overline{a_{QLQ}}_{cross}$ mit den wachsenden Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 29.10.9.1 berechnet.

Anmerkung: Aus Tabelle 29-27 (Seite410) kann geschlossen werden, dass die Bilder Bild 29-43 und Bild 29-44 nicht notwendig die möglichen Bereiche von wahren $\left(P_L \triangleq P_Q\right)-$Äquivalenzbahnen vollständig abdecken.◀

Aufgabenstellungen:

1. Bestimmen Sie die Veränderung des Verlaufs der Kurven in Bild 29-43 sowie in Bild 29-44 anstelle der Kreuzungspunkte mit Hilfe der verschwindenden Krümmung der einzelnen Kurven. ◀
2. Berechnen Sie die Inklination $\overline{i_{QLQ}}$ einer $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)-$bzw. einer $\left(P_L \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahn, wenn die *Kepler*schen Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M}_{0\,0}\right)$ vorgewählt sind. ◀
3. Berechnen Sie die Exzentrizität $\overline{e_{QLQ}}$ einer $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)-$bzw. einer $\left(P_L \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahn, wenn die *Kepler*schen Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M}_{0\,0}\right)$ vorgewählt sind. ◀

29.10.10 Übersicht der Äquivalenzbahnen mit Mond-synodischen Satelliten-Bahnbewegungen

Äquivalenzbahn Mond-synodisch mit	Mittlere Bewegungen	Große Bahnhalbachse [km]	Exzentrizität	Inklination
meridionaler Satelliten Bahnbewegung	$\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right)$	65336 - 65377	0.0 - 0.8994	0°-90°
anomalistischer Satelliten Bahnbewegung	$\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_A}\right)$	Keine Kopplung möglich		
drakonitischer Satelliten Bahnbewegung	$\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_D}\right)$	Keine Kopplung möglich		
tropischer Satelliten Bahnbewegung	$\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_T}\right)$	Keine Kopplung möglich		
Hansen Satelliten Bahnbewegung	$\left(\overline{P_L} \triangleq \overline{P_H}\right)$	Keine Kopplung möglich		
Kepler Satelliten Bahnbewegung	$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_L}\right)$	6555 - 7215	0.0 – 0.0884	0° - 23°
Sonnen-synodischer Satelliten Bahnbewegung.	$\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_L}\right)$	Keine Kopplung möglich		
ein Sterntag	$\left(\overline{P_L} \triangleq P_E\right)$	41157 - 41187	0.0- 0.8402	0°-90°
		43218 - 43241	0.0-0.8479	90°-180°
zwei Sterntage	$\left(\overline{P_L} \triangleq P_Q\right)$	63845 - 63886	0.0-0.8570	0°-90°
		70385 – 70429	0.0-0.9066	90°-180°

Tabelle 29-30: Übersicht über Äquivalenzbahnen gekoppelt mit Mond-synodischer Bewegung, Minimale Bahnhöhe H_P = 200 km

30 Synodische Bewegung bezogen auf interplanetares oder interstellares Objekt

Die Kenntnis der Bahnbewegung eines Planeten, Kleinen Planeten, Kometen oder eines künstlichen interplanetaren Raumflugkörpers wird in der Satellitenbahnmechanik etwa zur Beobachtung dieses Objektes von einem Erdsatelliten aus benötigt, ferner zur Beobachtung der Bewegung eines Mondes oder künstlichen Orbiters um den betreffenden Körper oder zur Auslegung einer interplanetaren Mission.

Die Bewegungsgleichung etwa in der allgemeinen Form[1] (5.1) bei Bezug auf das $(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0)$ *Leibniz*system

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \tag{30.1}$$

enthält den Bezug auf ein geeignetes Basissystem und als Komponenten vor allem die aus gravitativen Wechselwirkungen stammenden Zugbeschleunigungen und Druckbeschleunigungen eventuell etwa durch Strahlungsdruck, durch Bahnkorrekturen bei Sonden, u. ä..

Die hochgenaue Integration dieser Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung des gesamten bekannten Bewegungsmodells kann entweder für eines dieser Objekte direkt durchgeführt werden oder speziell im Fall der Planeten (wie von Sonne und Mond) durch eine fertig gerechnete Ephemeride ersetzt werden, die etwa mit *Tschebyscheff*-Approximationen eine hinreichende Genauigkeit zu erhalten gestattet. Als Beispiel dient die JPL-Ephemeride[2], etwa DE200, mit der Genauigkeit besser als 1”. Die JPL-Berechnungen liegen derzeit auch den Ephemeriden im *Astronomical Almanac* zugrunde.

Für Missionsanalysezwecke genügt gewöhnlich eine Näherung der Planetenbewegung durch die mittlere Bewegung der Planeten (Abschnitt 30.2.2 auf S. 420), bei höheren Anforderungen durch eine analytische Formulierung durch Reihen, die auch periodische Bewegungseinflüsse berücksichtigen. Diese Formeln wurden durch *S. Newcomb* erstmals aufgestellt und werden seither ständig verfeinert (Abschnitt 30.2 auf S. 419). Die Beobachtung der interplanetaren Objekte unter Einschluss der Korrekturen aus der sphärischen Astronomie wird in Abschnitt 30.8 auf S. 454 behandelt, die Bewegung eines Planetenorbiters in Abschnitt 30.11 auf S. 499, eine Beobachtung unter Einschluss der physikalischen Ephemeriden der Planeten, wie sie etwa zur Beobachtung der synodischen Bewegung eines Planetenmondes oder -orbiters erforderlich ist, in Abschnitt 30.5 auf S. 452.

30.1 Einige Beziehungen zur Beschreibung der Planetenbewegung

Die bahnmechanische Darstellung der Bewegung interplanetarer Objekte erfolgt aus historischen Gründen in unterschiedlichen Parametersätzen, die alle auf der (speziellen) *Kepler*bewegung beruhen. Aus Referenzgründen werden die wichtigsten derartigen Parametersätze im Folgenden zusammengestellt.

Basis sind die *Kepler*elemente:

---

[1] Siehe auch Kapitel 4, Abschnitt 4.4.2 und Kapitel 5 (Band II)

[2] z. B. in: STANDISH, E. M. [1982], 'The JPL Planetary Ephemeris', *Cel. Mech.* ***26***, pp. 181–186; in: SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], ch. 5, pp. 279–323, mit ausführlichen Literaturhinweisen

Große Bahnhalbachse	a	[AU]
Exzentrizität	e	
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i	[Grad]
Ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	Ω	[Grad]
Argument des Perihels	ω	[Grad]
Mittlere Anomalie zur Epoche t0	M_0	[Grad]
Epochezeit	t_0	

30.1.1 Häufig gebrauchte Bahnparameter der Planeten

Die mittleren Parameter („Elemente“) der Planeten werden üblicherweise mit

mittlere Länge des Perihels	$\tilde{\omega} := \omega + \Omega$	[Grad]
mittlere Länge des Planetenortes	$L := M_0 + \tilde{\omega}$	[Grad]

gegeben, woraus die *Kepler*elemente

$$\begin{aligned} \omega &= \tilde{\omega} - \Omega \\ M_0 &= L - \tilde{\omega} \end{aligned} \tag{30.2}$$

berechnet werden können. Die hier gewählten mittleren Elemente $\tilde{\omega}$ und L werden wegen der Kleinheit der Exzentrizitäten sowie der Bahninklinationen der meisten Planetenbahnen als präziser als die originalen *Kepler*elemente angesehen. Sie werden daher u. a. auch im Astronomischen Jahrbuch (jetzt weltweit nur noch im *Astronomical Almanac*) verwendet (vgl. die Daten der Planeten in Abschnitt 30.2.2 auf S. 420).

30.1.2 Bahnparameter der kleinen Planeten

Für kleine Planeten werden vorzugsweise folgende Bewegungsparameter („Bahnelemente“) verwendet:

Periheldistanz	$q := a(1-e)$	[AU]
Exzentrizität	e	
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i	[Grad]
Ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens	Ω	[Grad]
Argument des Perihels	ω	[Grad]
Perihel-Durchgangszeit	t_P	
Epochezeit	t_0	

Aus diesen Parametern kann die große Bahnhalbachse

$$a = \frac{q}{1-e} \quad [AU] \tag{30.3}$$

berechnet werden. Damit lautet die mittlere (*Kepler*sche) Bewegung

$$n_K = \sqrt{\frac{\mu_\odot}{a^3}} \quad . \tag{30.4}$$

Die mittlere Anomalie zur Epoche t_0 wird dann berechnet aus

$$M_0 = n_K \left(t_0 - t_p\right) \frac{180°}{\pi} \quad ,$$

wenn M_0 im Gradmaß gewünscht wird.

BEISPIEL: Der kleine Planet 1992 QN aus der Gruppe der die Erdbahn kreuzenden Objekten („Earth Crazer“) hat folgende Bahnelemente[1]

$$q = 0.763138\ AU$$

$$e = 0.35920016$$

$$i = 9°.590474$$

$$\Omega = 356°.093745$$

$$\omega = 202°.123099$$

$$t_p = 1996, \text{März}, 10, 2^h, 14^m, 29^s.5872$$

$$t_0 = 1996, \text{Jan.}, 6, 0^h, 0^m, 0^s.0$$

Bezugsepoche: $t_F = J2000.0$

Es ergeben sich mit der astronomischen Einheit[2]

$$1\ AU = 149597870.0\ \text{km}$$

und der heliozentrischen Gravitationskonstante

$$\mu_\odot = 1.32712438 \times 10^{11}\ \text{km}^3/\text{s}^2$$

die Werte

$$a = 1.190915903\ AU = 178158485.640919\ \text{km}$$

$$n = 1.531955 \times 10^{-7}\ \frac{1}{\text{s}} = 8°.777456 \times 10^{-6}\ \frac{1}{\text{s}} = 0''.031598843\ \frac{1}{\text{s}} = 0°.758372\ \frac{1}{\text{d}}$$

$$M_0 = -48°.606653 = 311°.393347 \quad ◀$$

30.2 Genäherte Bewegung der Planeten

30.2.1 Wahre Bewegung der Planeten

Die hochgenauen Ephemeriden der Planeten, welche durch Integration der allgemeinen Bewegungsgleichung (30.1) erhalten werden, finden sich im Astronomischen Jahrbuch sowie heutzutage in einem aktuellen JPL-Band. Hier sind auch Programme zur Interpolation für beliebige

---

[1] Comet and Asteroid Ephemeris Group, MS 301-150 G, JPL, Feb. 1996

[2] Anhang E.1 (Band V)

Daten enthalten. Im folgenden Abschnitt werden genäherte Daten zur Verfügung gestellt, die für die meisten Anwendungen ausreichend genau für bahnanalytische Zwecke sind.

Die Berechnungen aller Bewegungen von Körpern im Sonnensystem müssen in baryzentrischer dynamischer Zeit (TDB) erfolgen[1].

30.2.2 Mittlere Bewegung der Planeten

Die genäherte mittlere Bewegung der Planeten berücksichtigt bei Bezug auf einen Epochewert P_0 ausschließlich das lineare Variationsglied $P_s^{\bullet}$. Als Bezugsepoche wird eine Fundamentalepoche t_F gegeben. Bezogen darauf kann der (mittlere) Bahnparameter *P* des Planeten zu einem beliebigen Zeitpunkt *t* berechnet werden

$$\bar{P} = \bar{P}_F + P_s^{\bullet}\left(t - t_F\right) \quad . \tag{30.5}$$

Die Epocheparameter werden üblicherweise mit der Dimension astronomische Einheit [AU] sowie Winkelgrößen im Gradmaß gegeben, die Variationen in astronomischen Einheiten pro Jahrhundert bzw. in Bogensekunden pro Jahrhundert. Das Jahrhundert wird zu 36525 julianischen (mittleren Sonnen-) Tagen gerechnet. Die Zeitdifferenz kann aus der julianischen Tagesnummer *Jd* und der Tageszeit *t* in Sekunden berechnet werden[2].

Bei dem derzeit üblichen Bezug auf die Fundamentalepoche J2000.0 ist

$$\begin{aligned} Jd_F &= Jd_{J2000} = 2451545 \\ t_F &= t_{J2000} = 43200\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{30.6}$$

und es wird, wenn die Zeitspanne in Jahrhunderten angegeben wird,

$$T = \left[Jd - Jd_F + \frac{t - t_F}{86400} \right] \times \frac{1}{36525} \quad .$$

Im Einzelnen lauten (als ein derzeit aktuelles Beispiel) die mittleren Bahnparameter der Planeten[3] (die Parameter gelten als Mittelwerte für den Zeitraum A.D. 1800 bis A.D. 2050):

---

[1] Bis 1984 wurde statt TDB die Ephemeridenzeit E. T. verwendet. Dies muss bei der Rückrechnung auf Daten vor 1984 berücksichtigt werden. Allerdings kann ohne Verlust an Genauigkeit in diesem Fall die Ephemeridenzeit der TDB gleichgesetzt werden.

[2] Die julianische Tagesnummer wird in Anhang F (Band V) tabellarisch gegeben.

[3] aus: URBAN, E. S. and SEIDELMANN, P. K., ed. [2013], p. 338

Merkur

$$
\begin{aligned}
a &= 5.790922627\times 10^{7} + 55.3512119\,T \quad \text{km} \\
&= 0.38709927 + 0.00000037\,T \quad AE \\
e &= 0.20563593 + 00001906\,T \\
i &= 7°.00497902 - 0°.00594749\,T \\
\Omega &= 48°.33076593 - 0°.12534081\,T \\
\tilde{\omega} &= 77°.45779628 + 0°.16047689\,T \\
\omega &= 29°.12703035 - 0°.2858177\,T \\
M_0 &= 174°.7925272 + 7°.545556\times 10^{-5}\,T \\
L &= 252°.25032350 + 149472°.67411175\,T
\end{aligned}
$$

Venus

$$
\begin{aligned}
a &= 1.082094740\times 10^{8} + 583.431693\,T \quad \text{km} \\
&= 0.72333566 + 0.00000390\,T \quad AE \\
e &= 0.00677672 - 0.00004107\,T \\
i &= 3°.39467605 - 0°.00078890\,T \\
\Omega &= 76°.67984255 - 0°.27769418\,T \\
\tilde{\omega} &= 131°.60246718 + 0°.00268329\,T \\
\omega &= 54°.922624630 + 0.280377470\,T \\
M_0 &= 50°.376632320 + 0°.072816814\,T \\
L &= 181°.97909950 + 58517°.81538729\,T
\end{aligned}
$$

Baryzentrum Erde-Mond

$$
\begin{aligned}
a &= 1.495982605\times 10^{8}\,k\text{m} \\
&= 1.00000261\,AE + 0.00000562\,T \\
e &= 0.01671123 - 0.00004392\,T \\
i &= 0°.00001531 - 0°.01294668\,T \\
\Omega &= 0°.0 - 0°.0\,T \\
\tilde{\omega} &= 102°.93768193 + 0°.32327364\,T \\
\omega &= 102°.93768193 + 0°.32327364\,T \\
M_0 &= 357°.5268897 + 35999.0491762\,T \\
L &= 100°.46457166 + 35999°.37244981\,T
\end{aligned}
$$

Mars[1]

$$
\begin{aligned}
a &= 2.27943821361\times10^{8} + 2224.5203269\,T \text{ km} \\
&= 1.52371034 + 0.00001487\,T\ AE \\
e &= 0.093339410 + 0.00007882\,T \\
i &= 1°.84969142 - 0°.00813131\,T \\
\Omega &= 49°.55953891 - 0°.29257343\,T \\
\tilde{\omega} &= -23°.94362959 + 0°.44441088\,T \\
\omega &= 286°.4968315 + 0°.73698431\,T \\
M_0 &= 19°.390197540 - 0°.97685\,T \\
L &= -4°.55343205 + 19140°.30268499\,T
\end{aligned}
$$

Jupiter

$$
\begin{aligned}
a &= 7.78340813051\times10^{8} + 17363.8247709\,T \text{ km} \\
&= 5.20288700 - 0.00011607\,T\ AE \\
e &= 0.04838624 - 0.00013253\,T \\
i &= 1°.30439695 - 0°.00183714\,T \\
\Omega &= 100°.47390909 + 0°.20469106\,T \\
\tilde{\omega} &= 14°.72847983 + 0°.21252668\,T \\
\omega &= 274°.25457054 - 0°.007835620\,T \\
M_0 &= 19°.66796 + 1°.5407000\,T \\
L &= 34°.39644051 + 3034°.74612775\,T
\end{aligned}
$$

Saturn

$$
\begin{aligned}
a &= 1.4266664075\times10^{9} - 18559.1117522\,T \text{ km} \\
&= 9.53667594 - 0.00124060\,T\ AE \\
e &= 0.05386179 - 0.00050991\,T \\
i &= 2°.48599187 + 0°.00193609\,T \\
\Omega &= 113°.66242448 - 0°.28867794\,T \\
\tilde{\omega} &= 92°.59887831 - 0°.41897216\,T \\
\omega &= 338°.93645383 - 0°.13029422\,T \\
M_0 &= 317°.35536593 + 0°.772925\,T \\
L &= 49°.95424423 + 1222°.49362201\,T
\end{aligned}
$$

[1] Siehe hierzu etwa auch die Theorie 1. Ordnung des Mars von G. M. CLEMENCE [1949]

Uranus

$$
\begin{aligned}
a &= 2.870658157\times10^{9} - 2.934751175\times10^{5}\,T \text{ km} \\
&= 19.18916464 - 0.00196176\,T\ AE \\
e &= 0.04725744 - 0.00004397\,T \\
i &= 0°.77263783 - 0°.00242939\,T \\
\Omega &= 74°.01692503 + 0°.04240589\,T \\
\tilde{\omega} &= 170°.9542763 + 0°.40805281\,T \\
\omega &= 96°.93735127 - 0°.3564692\,T \\
M_0 &= 142°.283828210 - 0°.071480556\,\frac{257''.33}{3600.0}\,T \\
L &= 313°.23810451 + 428°.48202785\,T
\end{aligned}
$$

Neptun

$$
\begin{aligned}
a &= 4.498396396\times10^{9} - 3.9330776\times10^{5}\,T \text{ km} \\
&= 30.06992276 + 0.00026291\,T\ AE \\
e &= 0.00859048 + 0.00005105\,T \\
i &= 1°.7700437 - 0°.00035372\,T \\
\Omega &= 131°.78422574 - 0°.00508664\,T \\
\tilde{\omega} &= 44°.96476227 - 0°.32241464\,T \\
\omega &= 273°.1805365 - 0°.317328\,T \\
M_0 &= 259°.915208 + 0°.361069444\,T \\
L &= -55°.12002969 + 218°.45945325\,T
\end{aligned}
$$

Pluto

$$
\begin{aligned}
a &= 5.906440569\times10^{9} - 4.726694301\times10^{4}\,T \text{ km} \\
&= 39.48211675 - 0.00031596\,T\ AE \\
e &= 0.24882730 + 0.00005170\,T \\
i &= 17°.14001206 + 0°.00004818\,T \\
\Omega &= 110°.30393684 - 0°.01183482\,T \\
\tilde{\omega} &= 224°.06891629 - 0°.04062942\,T \\
\omega &= 113°.7649795 - 0°.0287946\,T \\
M_0 &= 14°.86012204 + 8°.466680556\,T \\
L &= 238°.92903833 + 145°.20780515\,T
\end{aligned}
$$

Die Genauigkeiten dieser Bahndaten sind in der folgenden Tabelle 30-1 zusammengestellt:

	Rektaszension		**Deklination**		**Entfernung**	
	[arcsec]	[1000 km]	[arcsec]	[1000 km]	[arcsec]	[1000 km]
Merkur	20”	6	5”	1	5”	1
Venus	20”	10	5”	2	20”	10
Mars	25”	25	30”	30	40”	40
Jupiter	300”	1000	100”	350	200”	600
Saturn	600”	4000	200”	1400	600”	4000
Uranus	60”	800	25”	400	125”	2000
Neptun	40”	800	20”	400	100”	2000
Pluto	40”	1100	10”	250	70”	2000

Tabelle 30-1: Die Genauigkeiten der mittleren Bahnparameter der Planeten (eingeschlossen Zwergplanet Pluto) im Zeitraum 1800–2050 gegeben in heliozentrischen äquatorialen Koordinaten Rektaszension, Deklination und Distanz (nach SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 316)

30.3 Das Koordinatensystem einer Planetenbahn

Die hier behandelten Koordinatensysteme schließen an die in Kapitel 8 (Band II) vorgestellten Koordinatensysteme an und stellen den Bezug zu diesen Systemen her.

Alle hier behandelten Systeme sind geradlinige Systeme (vgl. Kapitel 6 in Band II).

30.3.1 Das Bahnsystem eines Planeten

Das Planetenbahnsystem ist auf die Bahnebene eines Planeten oder eines anderen interplanetaren Objektes (kleiner Planet, Komet, Interplanetarer Raumflugkörper) bezogen. Der Mittelpunkt des Systems ist üblicherweise das Baryzentrum des Sonnensystems (baryzentrisches System), es kann aber auch durch lineare Transformation der Sonnenmittelpunkt sein (heliozentrisches System), oder der Mittelpunkt des betreffenden Planeten oder interplanetaren Objekts (z. B. aerozentrisches System, jovizentrisches System usw.) oder von einem anderen bewegten Objekt „mitgenommen“ werden (z.B. auf einer Raumsonde). Das Basissystem (siehe Bild 29-4 auf S. 313) $\mathbf{q}_j^{(B)}$ wird üblicherweise so gewählt, dass $\mathbf{q}_1^{(B)}$ zum aufsteigenden Knoten Ω der Bahnebene mit der Ekliptikebene, $\mathbf{q}_2^{(B)}$ in der Bahnebene gegenüber dem Knoten um 90° in positiver Bewegungsrichtung des betrachteten Objektes gedreht ist und $\mathbf{q}_3^{(B)} = \mathbf{q}_1^{(B)} \times \mathbf{q}_2^{(B)}$ zu dem dadurch definierten (Nord-) Pol des Bahnsystems weist.

Als Polarkoordinaten $r\left[l_B, b_B\right]$ werden die *Länge in der Bahn* in der Bahnebene vom Knoten rechtläufig im Sinne der Bewegung des Planeten im Gradmaß gezählt

$$0° \leq l_B \leq 360° \quad , \tag{30.7}$$

die *Breite* positiv von der Bahnebene zum Nordpol der Bahn, negativ zu ihrem Südpol

$$-90° \leq b_B \leq 90° \quad . \tag{30.8}$$

Ein Objekt hat in diesem System den heliozentrischen Ortsvektor

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l_B, b_B\right] \quad . \tag{30.9}$$

Mit kartesischen Koordinaten x_{Bi} hat der Ortsvektor die Darstellung

$$\mathbf{r} \;=\; x_B^{\,i}\,\mathbf{q}_j^{(B)} \quad . \tag{30.10}$$

Somit ist der Zusammenhang der Polarkoordinaten $r\left[l_B, b_B\right]$ mit den kartesischen Koordinaten x_{Bi} gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{B1} &= r\cos b_B \cos l_B \\ x_{B2} &= r\cos b_B \sin l_B \\ x_{B3} &= r\sin b_B \quad . \end{aligned} \tag{30.11}$$

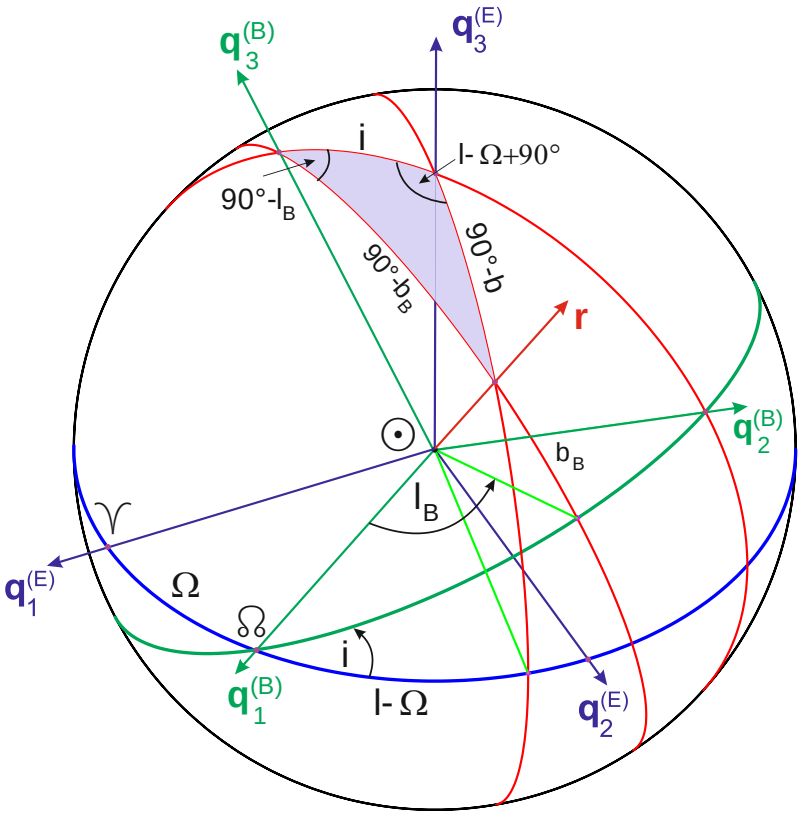


Bild 30-1: Das $\mathbf{q}_j^{(B)}$ – Bahnsystem eines Planeten oder eines anderen interplanetaren Objektes und sein Bezug zum $\mathbf{q}_j^{(E)}$ – Ekliptik-System

Die Polarkoordinaten des Bahnsystems werden aus den kartesischen Koordinaten (etwa nach dem Formelsystem (4.91) (in Abschnitt 4.2.2, Band II)[1]) erhalten

[1] Siehe zum Vergleich auch die Anwendung auf das geozentrische Ekliptiksystem in Abschnitt 8.2.1

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x_B^{\ i}\, x_{Bi}} \\
\sin b_B &= \frac{x_{B3}}{r} \quad , \quad \cos b_B = \sqrt{1-\sin^2 b_B} \\
\cos l_B &= \frac{x_{B1}}{r\cos b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \\
\sin l_B &= \frac{x_{B2}}{r\cos b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{30.12}
$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors ist mit dem Formelsystem (4.123)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{B1} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B1} - \dot{b}_B\, x_{B3} \cos l_B - \left(l_B\right)^{\cdot} x_{B2} \\
\dot{x}_{B2} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B2} - \dot{b}_B\, x_{B3} \sin l_B + \left(l_B\right)^{\cdot} x_{B1} \\
\dot{x}_{B3} &= \frac{\dot{r}}{r}\, x_{B3} + r\,\dot{b}_B \cos b_B
\end{aligned}
\tag{30.13}
$$

und umgekehrt mit den Formeln (4.124) bis (4.131)

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{x_B^{\ i}\, \dot{x}_{Bi}}{r} \\
\left(l_B\right)^{\cdot} &= \frac{x_{B1}\,\dot{x}_{B2} - x_{B2}\,\dot{x}_{B1}}{r^2 \cos^2 b_B} \quad , \quad \left(r\cos b_B > 0\right) \\
\dot{b}_B &= \frac{1}{r^2}\left[\left(x_{B3}\,\dot{x}_{B1} - x_{B1}\,\dot{x}_{B3}\right)\cos l_B - \left(x_{B2}\,\dot{x}_{B3} - x_{B3}\,\dot{x}_{B2}\right)\sin l_B\right] \quad , \quad \left(r > 0\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{30.14}
$$

Um den absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$
\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}_B^{\ j}\, \mathbf{q}_j^{(B)} + x_B^{\ j}\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(B)} = \dot{\mathbf{r}}_{q^{(B)}} + \mathbf{D}_{q^{(B)}} \times \mathbf{r} \ . \tag{30.15}
$$

berechnen zu können, muss zuvor die Variation $\dot{\mathbf{q}}_j^{(B)}$ bzw. der Systemeigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(B)}}$ durch Bezug auf ein bekanntes System zur Verfügung gestellt werden.

30.3.2 Transformation zwischen Planetenbahnsystem und Ekliptiksystem

Der Bezug des Planetenbahnsystems zu anderen Koordinatensystemen wird üblicherweise über das (auf dasselbe Zentrum, zum Beispiel das Baryzentrum des Sonnensystems, bezogene) Ekliptiksystem hergestellt. Seien die $\mathbf{q}_k^{(E)}$ die Basisvektoren des Ekliptiksystems, $\mathbf{q}_j^{(B)}$ die Basisvektoren im Planetenbahnsystem. In der Beziehung

$$
\mathbf{q}_k^{(E)} = a_k^{\ j}\, \mathbf{q}_j^{(B)} \tag{30.16}
$$

wird nach Bild 29-4 auf S. 313 das Ekliptiksystem um den Ekliptikpol mit der Länge des aufsteigenden Knotens Ω in den Frühlingspunkt und um den Knoten mit der Inklination i in die Planetenbahnebene gedreht. Die Drehung lautet

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(E)} &= \cos\Omega\ \mathbf{q}_1^{(B)} - \sin\Omega\cos i\ \mathbf{q}_2^{(B)} + \sin\Omega\sin i\ \mathbf{q}_3^{(B)} \\
\mathbf{q}_2^{(E)} &= \sin\Omega\ \mathbf{q}_1^{(B)} + \cos\Omega\cos i\ \mathbf{q}_2^{(B)} - \cos\Omega\sin i\ \mathbf{q}_3^{(B)} \\
\mathbf{q}_3^{(E)} &= \qquad\qquad\qquad \sin i\ \mathbf{q}_2^{(B)} + \qquad \cos i\ \mathbf{q}_3^{(B)} \quad .
\end{aligned} \tag{30.17}$$

Die Rotationsmatrix lautet

$$\left(a_i{}^j\right) = \begin{bmatrix} \cos\Omega & -\cos i\sin\Omega & \sin i\sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i\cos\Omega & -\sin i\cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix} \tag{30.18}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\Omega \\
a_{12} &= -\sin\Omega\cos i \\
a_{13} &= \sin\Omega\sin i \\
a_{21} &= \sin\Omega \\
a_{22} &= \cos\Omega\cos i \\
a_{23} &= -\cos\Omega\sin i \\
a_{31} &= 0 \\
a_{32} &= \sin i \\
a_{33} &= \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{30.19}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -\dot{\Omega}\,a_{21} \\
\dot{a}_{12} &= -\dot{\Omega}\,a_{22} + (i)^{\cdot}\,a_{13} \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{\Omega}\,a_{23} - (i)^{\cdot}\,a_{12} \\
\dot{a}_{21} &= \dot{\Omega}\,a_{11} \\
\dot{a}_{22} &= \dot{\Omega}\,a_{12} + (i)^{\cdot}\,a_{23} \\
\dot{a}_{23} &= -\dot{\Omega}\,a_{13} - (i)^{\cdot}\,a_{22} \\
\dot{a}_{31} &= 0 \\
\dot{a}_{32} &= (i)^{\cdot}\,a_{33} \\
\dot{a}_{33} &= -(i)^{\cdot}\,a_{32} \quad .
\end{aligned} \tag{30.20}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(B)} = b_j{}^i\,\mathbf{q}_i^{(E)} \tag{30.21}$$

ist daher mit nach Abschnitt 6.1.3 und da wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j{}^i\right) = 1$ und mit Formel (6.30) $b_i{}^j = a_j{}^i$, in Matrixschreibweise[1]

$$\left(b_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) \quad . \tag{30.22}$$

Seien y^i die Komponenten eines heliozentrischen Ortsvektors im $\mathbf{q}_i$-Ekliptiksystem, gilt wegen

[1] Siehe auch Abschnitt 6.3.2 (Band II)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= y^i\,\mathbf{q}_i^{(E)} = y^i\,a_i{}^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} = x_B{}^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{y}^i\,\mathbf{q}_i^{(E)} + y^i\,\dot{\mathbf{q}}_i^{(E)} = \dot{x}_B{}^j\,\mathbf{q}_j^{(B)} + x_B{}^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(B)} \end{aligned} \tag{30.23}$$

für die Transformationen der Komponenten

$$\begin{aligned} x_B{}^j &= a_i{}^j\,y^i \\ y^i &= a^i{}_j\,x_B{}^j \end{aligned} \tag{30.24}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} \dot{x}_B{}^j &= \dot{a}_i{}^j\,y^i + a_i{}^j\,\dot{y}^i \\ \dot{y}^i &= \dot{a}^i{}_j\,x_B{}^j + a^i{}_j\,\dot{x}_B{}^j \quad . \end{aligned} \tag{30.25}$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{B1} &= y_1\cos\Omega + y_2\sin\Omega \\ x_{B2} &= -y_1\sin\Omega\cos i + y_2\cos\Omega\cos i + y_3\sin i \\ x_{B3} &= y_1\sin\Omega\sin i - y_2\cos\Omega\sin i + y_3\cos i \end{aligned} \tag{30.26}$$

und für die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Planetenbahnsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_{B1} &= \dot{y}_1\cos\Omega + \dot{y}_2\sin\Omega + \dot{\Omega}\left(-y_1\sin\Omega + y_2\cos\Omega\right) \\ \dot{x}_{B2} &= -\dot{y}_1\sin\Omega\cos i + \dot{y}_2\cos\Omega\cos i + \dot{y}_3\sin i - \dot{\Omega}\,x_{B1}\cos i + (i)^{\cdot}x_{B3} \\ \dot{x}_{B3} &= \dot{y}_1\sin\Omega\sin i - \dot{y}_2\cos\Omega\sin i + \dot{y}_3\cos i + \dot{\Omega}\,x_{B1}\sin i - (i)^{\cdot}x_{B2} \quad . \end{aligned} \tag{30.27}$$

Für die Umkehrabbildung folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{B1}\cos\Omega - x_{B2}\sin\Omega\cos i + x_{B3}\sin\Omega\sin i \\ y_2 &= x_{B1}\sin\Omega + x_{B2}\cos\Omega\cos i - x_{B3}\cos\Omega\sin i \\ y_3 &= + x_{B2}\sin i + x_{B3}\cos i \end{aligned} \tag{30.28}$$

und den Geschwindigkeitskomponenten relativ zum Ekliptiksystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_{B1}\cos\Omega - \dot{x}_{B2}\sin\Omega\cos i + \dot{x}_{B3}\sin\Omega\sin i - \dot{\Omega}\,y_2 + (i)^{\cdot}y_3\sin\Omega \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_{B1}\sin\Omega + \dot{x}_{B2}\cos\Omega\cos i - \dot{x}_{B3}\cos\Omega\sin i + \dot{\Omega}\,y_1 - (i)^{\cdot}y_3\cos\Omega \\ \dot{y}_3 &= \dot{x}_{B2}\sin i + \dot{x}_{B3}\cos i + (i)^{\cdot}\left(x_{B2}\cos i - x_{B3}\sin i\right) \quad . \end{aligned} \tag{30.29}$$

Es seien $r\left[l, b\right]$ die Polarkoordinaten eines Punktes im Ekliptiksystem, $r\left[l_B, b_B\right]$ im Planetenbahnsystem. Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen folgen aus

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[l, b\right] = r\left[l_B, b_B\right] \tag{30.30}$$

mit den Formeln (29.129) und (29.131) oder direkt aus Bild 29-4 auf S. 313 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos l_B\cos b_B &= \cos(l-\Omega)\cos b \\ \sin l_B\cos b_B &= \sin(l-\Omega)\cos b\cos i + \sin b\sin i \\ \sin b_B &= -\sin(l-\Omega)\cos b\sin i + \sin b\cos i \end{aligned} \tag{30.31}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \cos(l-\Omega)\cos b &= \cos l_B\cos b_B \\ \sin(l-\Omega)\cos b &= \sin l_B\cos b_B\cos i - \sin b_B\sin i \\ \sin b &= \sin l_B\cos b_B\sin i + \sin b_B\cos i \end{aligned} \tag{30.32}$$

mit den Variationen relativ zum Planetenbahnsystem

$$
\begin{aligned}
(l_B)^{\cdot}\cos b_B \;=\; & \left((l)^{\cdot}-\dot{\Omega}\right)\cos b\left[\sin(l-\Omega)\sin l_B+\cos(l-\Omega)\cos i\cos l_B\right]+ \\
& +\dot{b}\left[\cos(l-\Omega)\sin b\sin l_B+\left(-\sin(l-\Omega)\sin b\cos i+\cos b\sin i\right)\cos l_B\right]+ \\
& +(i)^{\cdot}\sin b_B\cos l_B
\end{aligned}
\tag{30.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{b}_B \;=\; & \left((l)^{\cdot}-\dot{\Omega}\right)\cos b\left\{-\cos(l-\Omega)\sin i\cos b_B+\right. \\
& \left.+\left[\sin(l-\Omega)\cos l_B-\cos(l-\Omega)\cos i\sin l_B\right]\sin b_B\right\}+ \\
& +\dot{b}\left\{\left[\sin(l-\Omega)\sin b\sin i+\cos b\cos i\right]\cos b_B+\right. \\
& \left.+\left[\cos(l-\Omega)\sin b\cos l_B+\left(\sin(l-\Omega)\sin b\cos i-\cos b\sin i\right)\sin l_B\right]\sin b_B\right\}- \\
& -(i)^{\cdot}\sin l_B
\end{aligned}
\tag{30.34}
$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Ekliptiksystem

$$
\begin{aligned}
(l)^{\cdot}\cos b \;=\; & \dot{\Omega}\cos b+ \\
& +(l_B)^{\cdot}\cos b_B\left[\sin l_B\sin(l-\Omega)+\cos l_B\cos i\cos(l-\Omega)\right]+ \\
& +\dot{b}_B\left[\cos l_B\sin b_B\sin(l-\Omega)-\left(\sin l_B\sin b_B\cos i+\cos b_B\sin i\right)\cos(l-\Omega)\right]- \\
& -(i)^{\cdot}\sin b\cos(l-\Omega)
\end{aligned}
\tag{30.35}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{b} \;=\; & (l_B)^{\cdot}\cos b_B\left\{\cos l_B\sin i\cos b+\right. \\
& \left.+\left[\sin l_B\cos(l-\Omega)-\cos l_B\cos i\sin(l-\Omega)\right]\sin b\right\}+ \\
& +\dot{b}_B\left\{\left[-\sin l_B\sin b_B\sin i+\cos b_B\cos i\right]\cos b+\right. \\
& +\left[\cos l_B\sin b_B\cos(l-\Omega)+\right. \\
& \left.\left.+\left(\sin l_B\sin b_B\cos i+\cos b_B\sin i\right)\sin(l-\Omega)\right]\sin b\right\}+ \\
& +(i)^{\cdot}\sin(l-\Omega)\quad .
\end{aligned}
\tag{30.36}
$$

BEISPIEL: Der Pol der Planetenbahnebene hat die ekliptikale Darstellung

$$
l_{Pol} = \Omega+270^\circ \quad , \quad b_{Pol} = 90^\circ - i \quad , \quad (l_{Pol})^{\cdot} = \dot{\Omega} \quad , \quad \dot{b}_{Pol} = -(i)^{\cdot} \tag{30.37}
$$

30.4 Das Planetenäquatorsystem (bezogen auf IAU-Vektor)

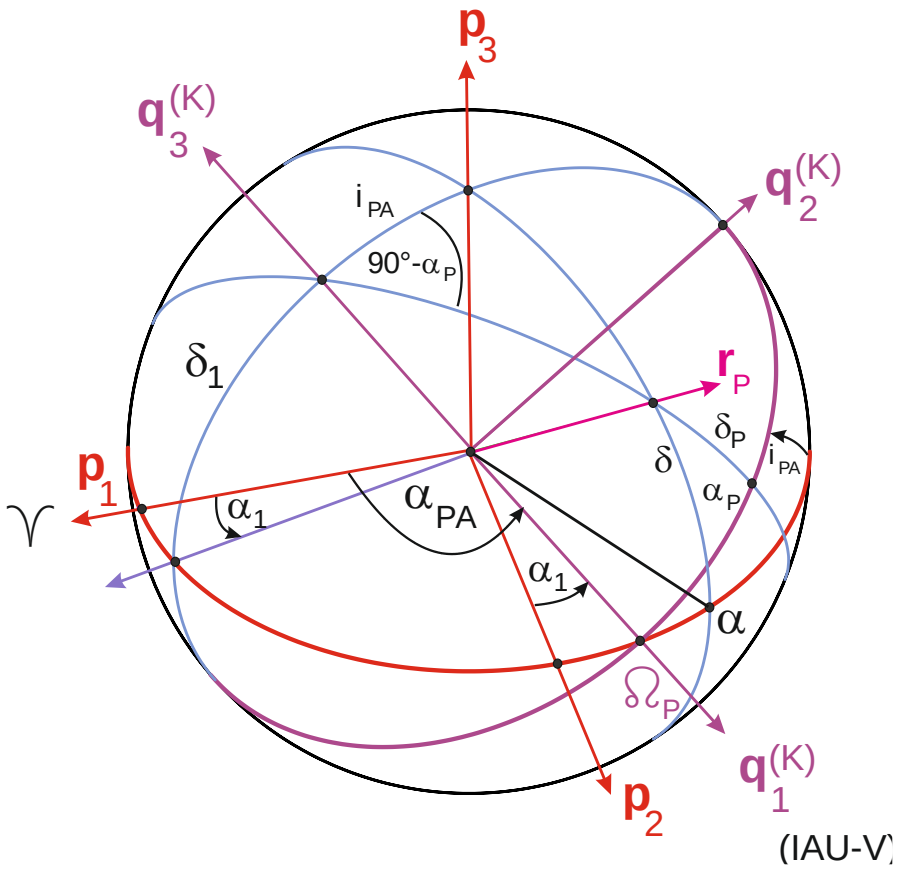


Bild 30-2: Das $\mathbf{q}_j^{(K)}$ – Planetenäquatorsystem bei Bezug auf den IAU-Vektor $\left(\mathbf{q}_1^{(K)}\right)$, Bezug zum $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem, das hier durch Parallelverschiebung in den Mittelpunkt des Planeten transformiert ist

Die Bewegung eines (Planeten-) Orbiters um einen Planeten wird üblicherweise in einem auf die Äquatorebene des Planeten bezogenem äquatorialem System beschrieben, ähnlich wie es bei der Bewegung von Erdsatelliten im (Frühlingspunkt-bezogenen) Erdäquatorsystem der Fall ist. Da das Frühlingspunkt-bezogene Erdäquatorsystem in der Raumfahrt das Basissystem ist, auf das alle raumfahrtspezifischen Bewegungsvorgänge bezogen werden, muss auch das Planetenäquatorsystem auf das Erdäquatorsystem bezogen werden, was auch ohne Zwischenschritte möglich ist. Werden Planeten- und Erdäquatorsystem zum Schnitt gebracht (siehe Bild 30-2 auf S. 430), so wird der aufsteigende Knoten des Planetenäquatorsystems bezüglich des Erdäquators als Ausgangspunkt der Zählung auf dem Planetenäquator gewählt. Dadurch wird als erster Winkel eines Polarkoordinatensystems die (relative) Planetenäquator-bezogene *Rektaszension* („planetare Rektaszension“) definiert. Als Nordpol des Planetensystems wird der Pol definiert, der nördlich der invariablen Ebene des Sonnensystems liegt.

Die Einheitsvektoren $\mathbf{q}_j^{(K)}$ seien die Basisvektoren des Planetenäquatorsystems. Der $\mathbf{q}_1^{(K)}$ – Vektor liegt in Richtung des aufsteigenden Knotens Ω_P des Planetenäquators bezüglich des Erdäquators. Dieser Vektor wird als *IAU-Vektor* bezeichnet, der für eine bestimmte Epoche (derzeit die Fundamentalepoche J2000) definiert ist[1]. $\mathbf{q}_3^{(K)}$ ist zum Nordpol des Planeten

[1] vgl. *Mars Observer*, Planetary Constants and Models, JPL D-3444, November 1990, pp. 2-10, 2-11

gerichtet, $\mathbf{q}_2^{(K)} = \mathbf{q}_3^{(K)} \times \mathbf{q}_1^{(K)}$ ergänzt das Rechtssystem. Die (planetare) Rektaszension wird positiv im Sinn des $\mathbf{q}_1^{(K)}, \mathbf{q}_2^{(K)}$ – Systems gezählt.

Der planetare Nordpol wird in dem auf den Frühlingspunkt bezogenen Erdäquatorsystem in äquatorialen Koordinaten (α_1, δ_1) gegeben (im astronomischen Almanach bezogen auf den mittleren Erdäquator und den mittleren Frühlingspunkt zur Fundamentalepoche J2000, z.B. in AA 2004, p. E87). Bezogen auf den Erdäquator hat der aufsteigende Knoten des Planetenäquators („IAU-Vektor“) die (Erdäquator-bezogene) Rektaszension

$$\Omega_{PA} = \alpha_{PA} = \alpha_1 + 6^h \tag{30.38}$$

und die Inklination

$$i_{PA} = 90° - \delta_1 \quad . \tag{30.39}$$

Es sei α_P die Rektaszension eines gegeben Ortes im Planetenäquatorsystem bezogen auf den Schnittpunkt Ω_P des Planetenäquators mit der Planetenbahnebene. Dann sei α_{PA} die planetare Rektaszension des aufsteigenden Knotens $☊_P$. Die relative (= auf den IAU-Vektor bezogene) planetare Rektaszension ist definiert im Bereich

$$0^h \le \alpha_P - \alpha_{PA} \le 24^h \quad \text{oder} \quad 0° \le \alpha_P - \alpha_{PA} \le 360° \quad . \tag{30.40}$$

Die *planetare Deklination* wird vom Planetenäquator positiv zum Nordpol des Planeten, negativ zu seinem Südpol gerechnet

$$-90° \le \delta_P \le 90° \quad . \tag{30.41}$$

Ein Objekt mit planetozentrischem Radius r_P hat in diesem System den Ortsvektor

$$\mathbf{r} \Leftrightarrow r_P \left[\alpha_P, \delta_P\right] \quad , \tag{30.42}$$

somit die kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{r} = x_P^{\ j}\, \mathbf{q}_j^{(K)} \tag{30.43}$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned} x_{P1} &= r_P \cos\delta_P \cos\alpha_P \\ x_{P2} &= r_P \cos\delta_P \sin\alpha_P \\ x_{P3} &= r_P \sin\delta_P \quad . \end{aligned} \tag{30.44}$$

Die Polarkoordinaten des Planetenäquatorsystems werden aus den kartesischen Koordinaten etwa nach dem Formelsystem (29.102) erhalten

$$\begin{aligned} r_P &= \sqrt{x_P^{\ i}\, x_{P\,i}} \\ \sin\delta_P &= \frac{x_{P3}}{r_P} \quad , \quad \cos\delta_P = \sqrt{1-\sin^2\delta_P} \\ \cos\alpha_P &= \frac{x_{P1}}{r_P \cos\delta_P} \quad , \quad \left(r_P \cos\delta_P > 0\right) \\ \sin\alpha_P &= \frac{x_{P2}}{r_P \cos\delta_P} \quad , \quad \left(r_P \cos\delta_P > 0\right) \quad . \end{aligned} \tag{30.45}$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten des (relativen) Geschwindigkeitsvektors ist analog zu dem Formelsystem (29.103) auf Seite 314

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{P1} &= \frac{\dot{r}_P}{r_P}\, x_{P1} - \dot{\delta}_P\, x_{P3} \cos\alpha_P - \dot{\alpha}_P\, x_{P2} \\
\dot{x}_{P2} &= \frac{\dot{r}_P}{r_P}\, x_{P3} - \dot{\delta}_P\, x_{P3} \sin\alpha_P + \dot{\alpha}_P\, x_{P1} \\
\dot{x}_{P3} &= \frac{\dot{r}_P}{r_P}\, x_{P3} + r_P\, \dot{\delta}_P \cos\delta_P
\end{aligned}
\tag{30.46}
$$

und umgekehrt analog zu den Formeln (29.104)

$$
\begin{aligned}
\dot{r}_P &= \frac{x_P{}^i\, \dot{x}_{Pi}}{r_P} \\
\dot{\alpha}_P &= \frac{x_{P1}\, \dot{x}_{P2} - x_{P2}\, \dot{x}_{P1}}{r_P^2 \cos^2\delta_P} \quad , \quad \left(r_P \cos\delta_P > 0\right) \\
\dot{\delta}_P &= \frac{1}{r_P^2}\left[\left(x_{P3}\, \dot{x}_{P1} - x_{P1}\, \dot{x}_{P3}\right)\cos\alpha_P - \left(x_{P2}\, \dot{x}_{P3} - x_{P3}\, \dot{x}_{P2}\right)\sin\alpha_P\right] \quad , \quad \left(r_P > 0\right) .
\end{aligned}
\tag{30.47}
$$

Im absoluten Geschwindigkeitsvektor

$$
\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{x}_P{}^j\, \mathbf{q}_j^{(K)} + x_P{}^j\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(K)} \tag{30.48}
$$

ist die Variation $\dot{\mathbf{q}}_j^{(K)}$ durch Bezug auf ein bekanntes System zu berechnen.

30.4.1 Transformationen des Planetenäquatorsystems

30.4.1.1 Planetenäquatorsystem und Erdäquatorsystem

Der Bezug des Planetenbahnsystems zu anderen Koordinatensystemen wird üblicherweise über das (auf dasselbe Zentrum bezogene) Erdäquatorsystem hergestellt. Dies ist vollständig nach Vorgabe der (Erd-) äquatorialen Winkelkoordinaten $\left(\alpha_1, \delta_1\right)$ des Nordpols des Planeten möglich. Seien die $\mathbf{p}_i$ die Basisvektoren des Erdäquatorsystems, $\mathbf{q}_j^{(K)}$ die Basisvektoren des Planetenäquatorsystems. In der Beziehung

$$
\mathbf{p}_i = a_i{}^j\, \mathbf{q}_j^{(K)} \tag{30.49}
$$

wird nach Bild 30-2 auf Seite 430 das Ekliptiksystem um den Nordpol des Erde mit der Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega_{PA} = \alpha_1 + 6^h$ in den aufsteigenden Knoten und um den Knoten mit der Inklination $i_{PA} = 90° - \delta_1$ in die Planetenäquatorebene gedreht (siehe die Formeln (30.38) und (30.39)). Die Drehung lautet

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= -\sin\alpha_1\, \mathbf{q}_1^{(K)} - \cos\alpha_1 \sin\delta_1\, \mathbf{q}_2^{(K)} + \cos\alpha_1 \cos\delta_1\, \mathbf{q}_3^{(K)} \\
\mathbf{p}_2 &= \cos\alpha_1\, \mathbf{q}_1^{(K)} - \sin\alpha_1 \sin\delta_1\, \mathbf{q}_2^{(K)} + \sin\alpha_1 \cos\delta_1\, \mathbf{q}_3^{(K)} \\
\mathbf{p}_3 &= \cos\delta_1\, \mathbf{q}_2^{(K)} + \sin\delta_1\, \mathbf{q}_3^{(K)} \quad .
\end{aligned}
\tag{30.50}
$$

Die Rotationsmatrix lautet

$$
\left(a_i{}^j\right) = \begin{bmatrix} -\sin\alpha_1 & -\sin\delta_1 \cos\alpha_1 & \cos\delta_1 \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_1 & -\sin\delta_1 \sin\alpha_1 & \cos\delta_1 \sin\alpha_1 \\ 0 & \cos\delta_1 & \sin\delta_1 \end{bmatrix} \tag{30.51}
$$

bzw. ausführlich

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\sin\alpha_1 \\
a_{12} &= -\sin\delta_1\cos\alpha_1 \\
a_{13} &= \cos\delta_1\cos\alpha_1 \\
a_{21} &= \cos\alpha_1 \\
a_{22} &= -\sin\delta_1\sin\alpha_1 \\
a_{23} &= \cos\delta_1\sin\alpha_1 \\
a_{31} &= 0 \\
a_{32} &= \cos\delta_1 \\
a_{33} &= \sin\delta_1 \quad .
\end{aligned} \tag{30.52}$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -\dot{\alpha}_1\, a_{21} \\
\dot{a}_{12} &= -\dot{\alpha}_1\, a_{22} - \dot{\delta}_1\, a_{13} \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{\alpha}_1\, a_{23} + \dot{\delta}_1\, a_{12} \\
\dot{a}_{21} &= \dot{\alpha}_1\, a_{11} \\
\dot{a}_{22} &= \dot{\alpha}_1\, a_{12} - \dot{\delta}_1\, a_{23} \\
\dot{a}_{23} &= \dot{\alpha}_1\, a_{13} + \dot{\delta}_1\, a_{22} \\
\dot{a}_{31} &= 0 \\
\dot{a}_{32} &= -\dot{\delta}_1\, a_{33} \\
\dot{a}_{33} &= \dot{\delta}_1\, a_{32} \quad .
\end{aligned} \tag{30.53}$$

Für die Umkehrabbildung

$$\mathbf{q}_j^{(K)} = b_j{}^i\, \mathbf{p}_i \tag{30.54}$$

ist daher wieder mit dem System (6.30) und da wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j{}^i\right) = 1$ und $b_i{}^j = a_j{}^i$ in Matrixschreibweise

$$\left(b_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) \quad . \tag{30.55}$$

Seien x_i die Komponenten eines Ortsvektors im $\mathbf{p}_i$ – Erdäquatorsystem. Wegen

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= x^i\, \mathbf{p}_i = x^i\, a_i{}^j\, \mathbf{q}_j^{(K)} = x_P{}^j\, \mathbf{q}_j^{(K)} \\
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}^i\, \mathbf{q}_i + x^i\, \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{x}_P{}^j\, \mathbf{q}_j^{(K)} + x_P{}^j\, \dot{\mathbf{q}}_j^{(K)}
\end{aligned} \tag{30.56}$$

gilt dann für die Transformationen der Komponenten

$$\begin{aligned}
x_P{}^j &= a_i{}^j\, x^i \\
x^i &= a^i{}_j\, x_P{}^j
\end{aligned} \tag{30.57}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned}
\dot{x}_P{}^j &= \dot{a}_i{}^j\, x^i + a_i{}^j\, \dot{x}^i \\
\dot{x}^i &= \dot{a}^i{}_j\, x_P{}^j + a^i{}_j\, \dot{x}_P{}^j \quad .
\end{aligned} \tag{30.58}$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{P1} &= -x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \cos\alpha_1 \\ x_{P2} &= -x_1 \cos\alpha_1 \sin\delta_1 - x_2 \sin\alpha_1 \sin\delta_1 + x_3 \cos\delta_1 \\ x_{P3} &= x_1 \cos\alpha_1 \cos\delta_1 + x_2 \sin\alpha_1 \cos\delta_1 + x_3 \sin\delta_1 \end{aligned} \tag{30.59}$$

und die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Planetenäquatorsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_{P1} &= -\dot{x}_1 \sin\alpha_1 + \dot{x}_2 \cos\alpha_1 - \dot{\alpha}_1 \left(x_1 \cos\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_1\right) \\ \dot{x}_{P2} &= -\dot{x}_1 \cos\alpha_1 \sin\delta_1 - \dot{x}_2 \sin\alpha_1 \sin\delta_1 + \dot{x}_3 \cos\delta_1 - \dot{\alpha}_1 x_{P1} \sin\delta_1 - \dot{\delta}_1 x_{P3} \\ \dot{x}_{P3} &= \dot{x}_1 \cos\alpha_1 \cos\delta_1 + \dot{x}_2 \sin\alpha_1 \cos\delta_1 + \dot{x}_3 \sin\delta_1 + \dot{\alpha}_1 x_{P1} \cos\delta_1 + \dot{\delta}_1 x_{P2} \quad . \end{aligned} \tag{30.60}$$

Für die Umkehrabbildung folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_{P1} \sin\alpha_1 - x_{P2} \cos\alpha_1 \sin\delta_1 + x_{P3} \cos\alpha_1 \cos\delta_1 \\ x_2 &= x_{P1} \cos\alpha_1 - x_{P2} \sin\alpha_1 \sin\delta_1 + x_{P3} \sin\alpha_1 \cos\delta_1 \\ x_3 &= + x_{P2} \cos\delta_1 + x_{P3} \sin\delta_1 \end{aligned} \tag{30.61}$$

und den Geschwindigkeitskomponenten relativ zum Erdäquatorsystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\dot{x}_{P1} \sin\alpha_0 - \dot{x}_{P2} \cos\alpha_0 \sin\delta_0 + \dot{x}_{P3} \cos\alpha_0 \cos\delta_0 - \dot{\alpha}_0 x_2 - \dot{\delta}_0 x_3 \cos\alpha_0 \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_{P1} \cos\alpha_0 - \dot{x}_{P2} \sin\alpha_0 \sin\delta_0 + \dot{x}_{P3} \sin\alpha_0 \cos\delta_0 + \dot{\alpha}_0 x_1 - \dot{\delta}_0 x_3 \sin\alpha_0 \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_{P2} \cos\delta_0 + \dot{x}_{P3} \sin\delta_0 - \dot{\delta}_0 \left(x_{P2} \sin\delta_0 - x_{P3} \cos\delta_0\right) \quad . \end{aligned} \tag{30.62}$$

Es seien $r\left[\alpha, \delta\right]$ die planetozentrischen Polarkoordinaten eines Punktes im Erdäquatorsystem, $r\left[\alpha_P - \alpha_{PA}, \delta_P\right]$ im Planetenäquatorsystem. Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen folgen aus

$$\mathbf{r} \;\Leftrightarrow\; r\left[\alpha, \delta\right] \;\Leftrightarrow\; r\left[\alpha_P - \alpha_{PA}, \delta_P\right] \tag{30.63}$$

mit den Formeln (30.59) und (30.61) oder direkt aus Bild 30-2 auf Seite 430 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P &= \sin\left(\alpha - \alpha_1\right)\cos\delta \\ \sin\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P &= -\cos\left(\alpha - \alpha_1\right)\cos\delta \sin\delta_1 + \sin\delta \cos\delta_1 \\ \sin\delta_P &= \cos\left(\alpha - \alpha_1\right)\cos\delta \cos\delta_1 + \sin\delta \sin\delta_1 \end{aligned} \tag{30.64}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha - \alpha_0\right)\cos\delta &= \cos\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P \\ \cos\left(\alpha - \alpha_0\right)\cos\delta &= -\sin\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P \sin\delta_0 + \sin\delta_P \cos\delta_0 \\ \sin\delta &= \sin\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_P \cos\delta_0 + \sin\delta_P \sin\delta_0 \end{aligned} \tag{30.65}$$

mit den Variationen relativ zum Planetenäquatorsystem

$$\begin{aligned} \left(\dot{\alpha}_P - \dot{\alpha}_{PA}\right)\cos\delta_P = {} & \left(\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_1\right)\cos\delta \Big[-\cos\left(\alpha - \alpha_1\right)\sin\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right) + \\ & + \sin\left(\alpha - \alpha_1\right)\sin\delta_1 \cos\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\Big] + \\ & + \dot{\delta}\,\Big[\sin\left(\alpha - \alpha_1\right)\sin\delta \sin\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right) + \\ & + \left(\cos\left(\alpha - \alpha_1\right)\sin\delta \sin\delta_1 + \cos\delta \cos\delta_1\right)\cos\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right)\Big] - \\ & - \dot{\delta}_0 \sin\delta_P \cos\left(\alpha_P - \alpha_{PA}\right) \end{aligned} \tag{30.66}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta}_P \;=\; & -\left(\dot{\alpha}-\dot{\alpha}_1\right)\cos\delta\,\Big\{\sin\left(\alpha-\alpha_1\right)\cos\delta_1\cos\delta_P + \\
& \quad +\left[\cos\left(\alpha-\alpha_1\right)\cos\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)+\sin\left(\alpha-\alpha_1\right)\sin\delta_1\sin\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\right]\sin\delta_P\Big\} + \\
& + \dot{\delta}\Big\{\left[-\cos\left(\alpha-\alpha_1\right)\sin\delta\cos\delta_1+\cos\delta\sin\delta_1\right]\cos\delta_P + \\
& \quad +\Big[\sin\left(\alpha-\alpha_1\right)\sin\delta\cos\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)- \\
& \quad -\left(\cos\left(\alpha-\alpha_1\right)\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\right)\sin\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\Big]\sin\delta_P\Big\} + \\
& + \dot{\delta}_0\sin\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)
\end{aligned}
\tag{30.67}
$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Erdäquatorsystem[1]

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}\cos\delta \;=\; & \dot{\alpha}_1\cos\delta + \\
& + \left(\dot{\alpha}_P-\dot{\alpha}_{PA}\right)\cos\delta_P\Big[-\sin\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\cos\left(\alpha-\alpha_1\right)+ \\
& \quad +\cos\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\sin\delta_1\sin\left(\alpha-\alpha_1\right)\Big]- \\
& - \dot{\delta}_P\Big[\cos\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\sin\delta_P\cos\left(\alpha-\alpha_1\right)+ \\
& \quad +\left(\sin\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\sin\delta_P\sin\delta_1+\cos\delta_P\cos\delta_1\right)\sin\left(\alpha-\alpha_1\right)\Big] + \\
& + \dot{\delta}_0\sin\delta\sin\left(\alpha-\alpha_1\right)
\end{aligned}
\tag{30.68}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\delta} \;=\; & \left(\dot{\alpha}_P-\dot{\alpha}_{PA}\right)\cos\delta_P\,\Big\{\cos\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\cos\delta_0\cos\delta + \\
& \quad +\left[\sin\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\sin\left(\alpha-\alpha_1\right)+\cos\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\sin\delta_0\cos\left(\alpha-\alpha_1\right)\right]\sin\delta\Big\} + \\
& + \dot{\delta}_P\,\Big\{\left[-\sin\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\sin\delta_P\cos\delta_1+\cos\delta_P\sin\delta_1\right]\cos\delta + \\
& \quad +\Big[\cos\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\sin\delta_P\sin\left(\alpha-\alpha_1\right)+ \\
& \quad +\left(-\cos\left(\alpha_P-\alpha_{PA}\right)\sin\delta_P\sin\delta_1+\cos\delta_P\cos\delta_1\right)\cos\left(\alpha-\alpha_1\right)\Big]\sin\delta\Big\} + \\
& + \dot{\delta}_1\cos\left(\alpha-\alpha_1\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{30.69}
$$

30.4.1.2 Planetenäquatorsystem und Ekliptiksystem

Es sei Υ_P der aufsteigende Knoten des Äquators A_P eines Planeten bezogen auf die Ekliptik E (vgl. Bild 30-3 auf S. 436). Als bekannt wird die Schiefe der Ekliptik ε bezogen auf den Erdäquator A angenommen sowie die (Erd-) äquatorialen Koordinaten $\left[\alpha_1, \delta_1\right]$ des Nordpols N_P des Planeten. Somit ist über die Formeln (30.38) und (30.39) auf S. 431 auch die Rektaszension Ω_{PA} des aufsteigenden Knotens des Planetenäquators und seine Inklination i_{PA} bezogen auf den Erdäquator bekannt.

[1] Index PA: Äquatorsystem A eines Planeten P

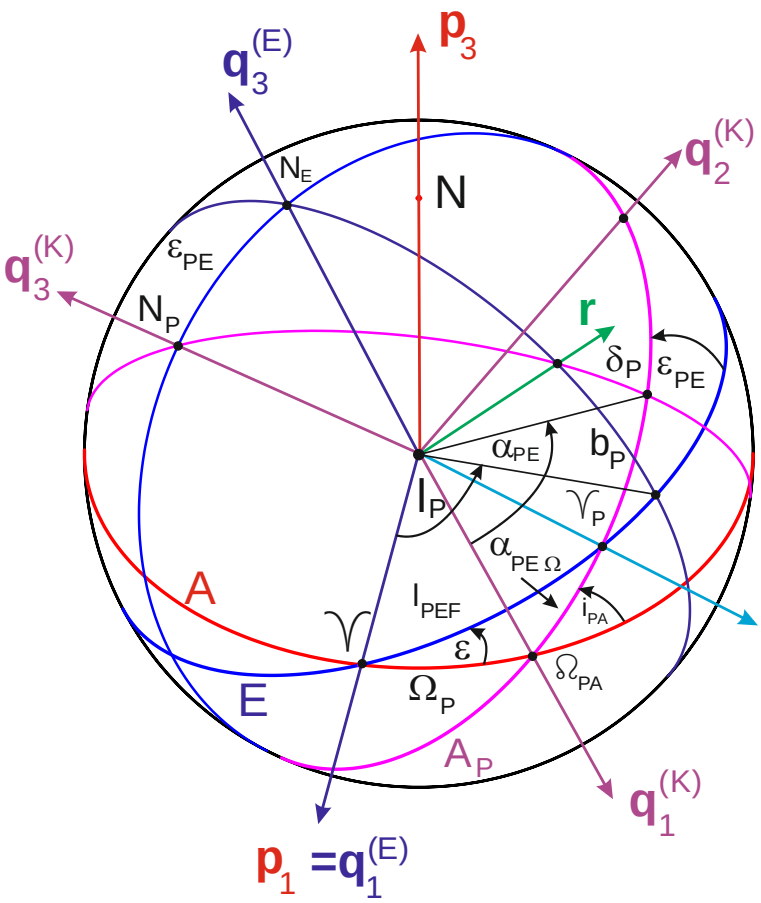


Bild 30-3: Planetenäquatorsystem A_P, Erdäquatorsystem A und Ekliptiksystem E

Der planetare Äquatorknoten Υ_P habe vom Frühlingspunkt Υ den Winkelabstand l_{PEF}, vom aufsteigenden Knoten Ω_{PA} den Winkelabstand $\alpha_{PE\Omega}$, der Planetenäquator gegenüber der Ekliptik die Schiefe ε_{PE}. Im sphärischen Dreieck $\Upsilon\Omega_{PA}\Upsilon_P$ kann der *Gauß*sche Formelsatz für die Winkel[1] angewendet werden:

$$\begin{aligned} \cos l_{PEF} \sin \varepsilon_{PE} &= \cos \Omega_{PA} \sin i_{PA} \cos \varepsilon - \cos i_{PA} \sin \varepsilon \\ \sin l_{PEF} \sin \varepsilon_{PE} &= \sin \Omega_{PA} \sin i_{PA} \\ \cos \varepsilon_{PE} &= \cos \Omega_{PA} \sin i_{PA} \sin \varepsilon + \cos i_{PA} \cos \varepsilon \quad , \end{aligned} \tag{30.70}$$

woraus die Winkel l_{PEF} und ε_{PE} eindeutig zu berechnen sind. Ihre Variationen sind

$$\begin{aligned} (l_{PEF})^{\cdot} \sin \varepsilon_{PE} = \; & \dot{\Omega}_{PA} \sin i_{PA} \left(\sin \Omega_{PA} \cos \varepsilon \sin l_{PEF} + \cos \Omega_{PA} \cos l_{PEF} \right) + \\ & + (i_{PA})^{\cdot} \left[-\left(\cos \Omega_{PA} \cos i_{PA} \cos \varepsilon + \sin i_{PA} \sin \varepsilon \right) \sin l_{PEF} + \right. \\ & \left. + \sin \Omega_{PA} \cos i_{PA} \cos l_{PEF} \right] + \\ & + \dot{\varepsilon} \cos \varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \end{aligned} \tag{30.71}$$

[1] etwa nach dem allgemeinen Ansatz (A.16) in Anhang A.2, Band V

$$
\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{PE} \;=\; & \dot{\Omega}_{PA}\,\sin i_{PA}\Big[\big(-\sin\Omega_{PA}\cos\varepsilon\cos l_{PEF}+\cos\Omega_{PA}\sin l_{PEF}\big)\cos\varepsilon_{PE}+ \\
& \qquad +\sin\Omega_{PA}\sin\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}\Big]+ \\
& +\big(i_{PA}\big)^{\cdot}\Big\{\Big[\big(\cos\Omega_{PA}\cos i_{PA}\cos\varepsilon+\sin i_{PA}\sin\varepsilon\big)\cos l_{PEF}+ \\
& \qquad +\sin\Omega_{PA}\cos i_{PA}\sin l_{PEF}\Big]\cos\varepsilon_{PE}- \\
& \qquad -\big[\cos\Omega_{PA}\cos i_{PA}\sin\varepsilon-\sin i_{PA}\cos\varepsilon\big]\sin\varepsilon_{PE}\Big\}- \\
& -\dot{\varepsilon}\,\cos l_{PEF} \quad .
\end{aligned}
\tag{30.72}
$$

Die Winkeldistanz $\alpha_{PE\Omega}$ des Schnittpunktes Υ_P des Planetenäquators mit der Ekliptik vom aufsteigenden Knoten Ω_{PA} des Planetenäquators bezogen auf den Erdäquator wird unter Verwendung der Formeln[1] (A.16) berechnet aus[2]

$$
\begin{aligned}
\cos i_{PA}\sin\alpha_{PE\Omega} &= \cos\varepsilon\sin l_{PEF}\cos\Omega_{PA}-\cos l_{PEF}\sin\Omega_{PA} \\
\sin i_{PA}\sin\alpha_{PE\Omega} &= \sin\varepsilon\sin l_{PEF} \\
\cos\alpha_{PE\Omega} &= \cos\varepsilon\sin l_{PEF}\sin\Omega_{PA}+\cos l_{PEF}\cos\Omega_{PA}
\end{aligned}
\tag{30.73}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha_{PE\Omega} &= \big(\cos\varepsilon\sin l_{PEF}\cos\Omega_{PA}-\cos l_{PEF}\sin\Omega_{PA}\big)\cos i_{PA}+\sin\varepsilon\sin l_{PEF}\sin i_{PA} \\
\cos\alpha_{PE\Omega} &= \cos\varepsilon\sin l_{PEF}\sin\Omega_{PA}+\cos l_{PEF}\cos\Omega_{PA} \quad .
\end{aligned}
\tag{30.74}
$$

Damit ist $\alpha_{PE\Omega}$ eindeutig berechenbar. Für seine Variation gilt

$$
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{PE\Omega} \;=\; & \dot{\varepsilon}\,\sin l_{PEF}\Big[\big(-\sin\varepsilon\cos\Omega_{PA}\cos i_{PA}+\cos\varepsilon\sin i_{PA}\big)\cos\alpha_{PE\Omega}+ \\
& \qquad +\sin\varepsilon\sin\Omega_{PA}\sin\alpha_{PE\Omega}\Big]+ \\
& +\big(l_{PEF}\big)^{\cdot}\Big\{\Big[\big(\cos\varepsilon\cos l_{PEF}\cos\Omega_{PA}+\sin l_{PEF}\sin\Omega_{PA}\big)\cos i_{PA}+ \\
& \qquad +\sin\varepsilon\cos l_{PEF}\sin i_{PA}\Big]\cos\alpha_{PE\Omega}- \\
& \qquad -\big[\cos\varepsilon\cos l_{PEF}\sin\Omega_{PA}-\sin l_{PEF}\cos\Omega_{PA}\big]\sin\alpha_{PE\Omega}\Big\}- \\
& -\dot{\Omega}_{PA}\,\cos i_{PA} \quad .
\end{aligned}
\tag{30.75}
$$

Umgekehrt können bei gegebenen l_{PEF}, ε_{PE} und $\alpha_{PE\Omega}$ die bahnorientierenden Winkel Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω_{PA}, i_{PA} und formal auch die Schiefe der Ekliptik ε berechnet werden. Aus

$$
\begin{aligned}
\cos\varepsilon\sin\Omega_{PA} &= -\cos\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF}+\cos\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF} \\
\sin\varepsilon\sin\Omega_{PA} &= \sin\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega} \\
\cos\Omega_{PA} &= \cos\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF}+\cos\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF}
\end{aligned}
\tag{30.76}
$$

können Ω_{PA} und ε eindeutig berechnet werden. Mit dem Formelsatz (unter Verwendung des Kosinussatzes der Winkel)

---

[1] nach einem *Gauß*schen Formelsatz in Anhang A.2, Band V

[2] Index PA: Äquatorsystem A des Planeten P

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_{PE\Omega}\sin i_{PA} &= \cos l_{PEF}\sin\varepsilon\cos\varepsilon_{PE}+\cos\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}\\
\sin\alpha_{PE\Omega}\sin i_{PA} &= \sin l_{PEF}\sin\varepsilon\\
\cos i_{PA} &= -\cos l_{PEF}\sin\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}+\cos\varepsilon\cos\varepsilon_{PE}
\end{aligned} \tag{30.77}$$

folgt die Inklination des Planetenäquators bei bekanntem $\alpha_{PE\Omega}$ eindeutig aus

$$\begin{aligned}
\cos i_{PA} &= -\cos l_{PEF}\sin\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}+\cos\varepsilon\cos\varepsilon_{PE}\\
\sin i_{PA} &= \sin l_{PEF}\sin\varepsilon\sin\alpha_{PE\Omega}+\left(\cos l_{PEF}\sin\varepsilon\cos\varepsilon_{PE}+\cos\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}\right)\cos\alpha_{PE\Omega}\quad .
\end{aligned} \tag{30.78}$$

Die Variationen dieser Größen lauten

$$\begin{aligned}
\dot\varepsilon\sin\Omega_{PA} = {} & \dot\varepsilon_{PE}\ \sin\alpha_{PE\Omega}\left(\sin\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\sin\varepsilon+\cos\varepsilon_{PE}\cos\varepsilon\right)+\\
& +\dot\alpha_{PE\Omega}\left[\left(\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF}+\sin\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF}\right)\sin\varepsilon+\right.\\
& \left.+\sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\cos\varepsilon\right]-\\
& -\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\ \cos\Omega_{PA}\sin\varepsilon
\end{aligned} \tag{30.79}$$

$$\begin{aligned}
\dot\Omega_{PA} = {} & \dot\varepsilon_{PE}\ \sin\alpha_{PE\Omega}\left\{\left[\cos l_{PEF}\sin\varepsilon_{PE}\cos\varepsilon+\cos\varepsilon_{PE}\sin\varepsilon\right]\cos\Omega_{PA}+\right.\\
& \left.+\sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\Omega_{PA}\right\}+\\
& +\dot\alpha_{PE\Omega}\ \left\{\left[-\left(\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF}+\sin\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF}\right)\cos\varepsilon+\right.\right.\\
& \left.+\sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\sin\varepsilon\right]\cos\Omega_{PA}+\\
& \left.+\left[-\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}\sin l_{PEF}+\sin\alpha_{PE\Omega}\cos l_{PEF}\right]\sin\Omega_{PA}\right\}+\\
& +\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\ \cos\varepsilon
\end{aligned} \tag{30.80}$$

$$\begin{aligned}
\left(i_{PA}\right)^{\cdot} = {} & \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\ \sin\varepsilon\left\{\left[-\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]\cos i_{PA}-\right.\\
& \left.-\sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin i_{PA}\right\}+\\
& +\dot\varepsilon\ \left\{\left[\left(\cos l_{PEF}\cos\varepsilon\cos\varepsilon_{PE}-\sin\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}\right)\cos\alpha_{PE\Omega}+\right.\right.\\
& \left.+\sin l_{PEF}\cos\varepsilon\sin\alpha_{PE\Omega}\right]\cos i_{PA}+\\
& \left.+\left[\cos l_{PEF}\cos\varepsilon\sin\varepsilon_{PE}+\sin\varepsilon\cos\varepsilon_{PE}\right]\sin i_{PA}\right\}+\\
& +\dot\varepsilon_{PE}\ \cos\alpha_{PE\Omega}\quad .
\end{aligned} \tag{30.81}$$

Mit den vorstehenden Formeln ist der Bezug zwischen dem Planetenäquatorsystem und der Ekliptik vollständig beschrieben. Zur Umrechnung der Koordinaten eines beliebigen Punktes in planetenäquatorialen bzw. in ekliptikalen Koordinaten werden die folgenden Formeln benötigt. Seien die $\mathbf{q}_j^{(K)}$ die Basisvektoren des Planetenäquatorsystems, $\mathbf{q}_j^{(E)}$ die Basisvektoren des Ekliptiksystems. In der Beziehung

$$\mathbf{q}_k^{(E)} = a_k^{\ j}\,\mathbf{q}_j^{(K)} \tag{30.82}$$

wird nach Bild 30-3 auf Seite 436 das Ekliptiksystem um den Nordpol der Ekliptik mit der Länge des aufsteigenden Knotens l_{PEF} in den aufsteigenden Knoten und um den Knoten mit der Schiefe ε_{PE} in die Planetenäquatorebene gedreht. Die Drehung lautet

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(E)} &= \mathbf{q}_1^{(K)}\left[-\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right]- \\
&\quad -\mathbf{q}_2^{(K)}\left[\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]+ \\
&\quad +\mathbf{q}_3^{(K)}\sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF} \\
\mathbf{q}_2^{(E)} &= \mathbf{q}_1^{(K)}\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}+\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right]+ \\
&\quad +\mathbf{q}_2^{(K)}\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}-\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right]- \\
&\quad -\mathbf{q}_3^{(K)}\sin\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF} \\
\mathbf{q}_3^{(E)} &= \mathbf{q}_1^{(K)}\sin\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega}+ \\
&\quad +\mathbf{q}_2^{(K)}\sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega}+ \\
&\quad +\mathbf{q}_3^{(K)}\cos\varepsilon_{PE} \quad .
\end{aligned}
\tag{30.83}
$$

Die Koeffizienten der Rotationsmatrix lauten

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega} \\
a_{12} &= -\left(\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}+\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right) \\
a_{13} &= \sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF} \\
a_{21} &= \cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}+\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega} \\
a_{22} &= \cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}-\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega} \\
a_{23} &= -\sin\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF} \\
a_{31} &= \sin\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega} \\
a_{32} &= \sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega} \\
a_{33} &= \cos\varepsilon_{PE} \quad .
\end{aligned}
\tag{30.84}
$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\,a_{13}\sin\alpha_{PE\Omega}-\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}a_{21}+\dot{\alpha}_{PE\Omega}\,a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= -\dot{\varepsilon}_{PE}\,a_{13}\cos\alpha_{PE\Omega}-\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}a_{22}-\dot{\alpha}_{PE\Omega}\,a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{\varepsilon}_{PE}\,a_{33}\sin l_{PEF}+\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\,a_{23}\sin\alpha_{PE\Omega}+\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}a_{11}+\dot{\alpha}_{PE\Omega}\,a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\,a_{23}\cos\alpha_{PE\Omega}+\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}a_{12}-\dot{\alpha}_{PE\Omega}\,a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= -\dot{\varepsilon}_{PE}\,a_{33}\cos l_{PEF}+\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\,a_{33}\sin\alpha_{PE\Omega}+\dot{\alpha}_{PE\Omega}\,a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= \dot{\varepsilon}_{PE}\,a_{33}\cos\alpha_{PE\Omega}-\dot{\alpha}_{PE\Omega}\,a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{\varepsilon}_{PE}\cos\varepsilon_{PE} \quad .
\end{aligned}
\tag{30.85}
$$

Für die Umkehrabbildung

$$
\mathbf{q}_j^{(K)} = b_j^{\ k}\,\mathbf{q}_k^{(E)} \tag{30.86}
$$

ist daher analog zu (30.22) und da wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j^{\ i}\right)=1$ und $b_i^{\ j}=a_j^{\ i}$ in Matrixschreibweise

$$
\left(b_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) \quad . \tag{30.87}
$$

Seien x_{Pj} die Komponenten eines Ortsvektors im $\mathbf{q}_j^{(K)}$-Planetenäquatorsystem und y_k seine Komponenten im $\mathbf{q}_k^{(E)}$-Ekliptiksystem, gilt wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= y^k\,\mathbf{q}_k^{(E)} = y^k\,a_k{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} = x_P{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{y}^k\,\mathbf{q}_k^{(E)} + y^k\,\mathbf{q}_k^{(E)} = \dot{x}_P{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} + x_P{}^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(K)} \end{aligned} \tag{30.88}$$

für die Transformationen der Komponenten

$$\begin{aligned} x_P{}^j &= a_k{}^j\,y^k \\ y^k &= a^k_j\,x_P{}^j \end{aligned} \tag{30.89}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} \dot{x}_P{}^j &= \dot{a}_k{}^j\,y^k + a_k{}^j\,\dot{y}^k \\ \dot{y}^k &= \dot{a}^k_j\,x_P{}^j + a^k_j\,\dot{x}_P{}^j \quad . \end{aligned} \tag{30.90}$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{P1} &= y_1\left[-\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right] + \\ &\quad + y_2\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega} + \sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right] + \\ &\quad + y_3\sin\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega} \\ x_{P2} &= -y_1\left[\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right] + \\ &\quad + y_2\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega} - \sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right] + \\ &\quad + y_3\sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega} \\ x_{P3} &= y_1\sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF} - \\ &\quad - y_2\sin\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF} + \\ &\quad + y_3\cos\varepsilon_{PE} \quad . \end{aligned} \tag{30.91}$$

Für die Umkehrabbildung folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= x_{P1}\left[-\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right] - \\ &\quad - x_{P2}\left[\cos\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega} + \cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right] + \\ &\quad + x_{P3}\sin\varepsilon_{PE}\sin l_{PEF} \\ y_2 &= x_{P1}\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega} + \sin l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega}\right] + \\ &\quad + x_{P2}\left[\cos\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF}\cos\alpha_{PE\Omega} - \sin l_{PEF}\sin\alpha_{PE\Omega}\right] - \\ &\quad - x_{P3}\sin\varepsilon_{PE}\cos l_{PEF} \\ y_3 &= x_{P1}\sin\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE\Omega} + \\ &\quad + x_{P2}\sin\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE\Omega} + \\ &\quad + x_{P3}\cos\varepsilon_{PE} \quad . \end{aligned} \tag{30.92}$$

Die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}_{Pj}$ relativ zum Planetenäquatorsystem und umgekehrt den $\dot{y}$ relativ zum Ekliptiksystem können mit den Gleichungen (30.90) auf S. 440 mit den Variationen (30.85) auf S. 439 berechnet werden.

Es seien $r\left[l_P, b_P\right]$ die Polarkoordinaten eines Punktes im Ekliptiksystem, $r\left[\alpha_{PE}, \delta_P\right]$ im Planetenäquatorsystem. Hier ist die planetare Rektaszension α_{PE} auf den aufsteigenden Knoten Υ_P des Planetenäquators mit der Ekliptik bezogen. Wenn α_P die planetare Rektaszension bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten Ω_P des Planetenäquators mit der Planetenbahn und $\alpha_{PE\Omega}$ der Abstand des Knotens Ω_{PA} mit dem Erdäquator und Υ_P ist, gilt nach Bild 30-3 auf S. 436

$$\alpha_{PE} = \alpha_P - \alpha_{PA} - \alpha_{PE\Omega} \quad . \tag{30.93}$$

Zur Umrechnung der Polarkoordinaten in den beiden Systemen folgt mit dem planetozentrischen Ortsvektor $\mathbf{r}$ aus

$$\mathbf{r} \Leftrightarrow r\left[l_P, b_P\right] \Leftrightarrow r\left[\alpha_{PE}, \delta_P\right] \tag{30.94}$$

mit den Formeln (30.91) und (30.84) oder direkt aus Bild 30-2 auf Seite 430 die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_{PE}\cos\delta_P &= \cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P \\
\sin\alpha_{PE}\cos\delta_P &= \sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P \cos\varepsilon_{PE} + \sin b_P \sin\varepsilon_{PE} \\
\sin\delta_P &= -\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P \sin\varepsilon_{PE} + \sin b_P \cos\varepsilon_{PE}
\end{aligned} \tag{30.95}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}
\cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P &= \cos\alpha_{PE}\cos\delta_P \\
\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos b_P &= \sin\alpha_{PE}\cos\delta_P\cos\varepsilon - \sin\delta_P\sin\varepsilon \\
\sin b_P &= \sin\alpha_{PE}\cos\delta_P\sin\varepsilon + \sin\delta_P\cos\varepsilon
\end{aligned} \tag{30.96}$$

mit den Variationen relativ zum Planetenäquatorsystem

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_{PE}\cos\delta_P = &\left[\left(l_P\right)^{\cdot} - \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\right]\cos b_P \left[\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\sin\alpha_{PE} + \right. \\
&\left. + \cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos\varepsilon_{PE}\cos\alpha_{PE}\right] + \\
&+ \dot{b}_P \left\{\cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\sin b_P \sin\alpha_{PE} + \right. \\
&\left. + \left[-\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\sin b_P \cos\varepsilon_{PE} + \cos b_P \sin\varepsilon_{PE}\right]\cos\alpha_{PE}\right\} + \\
&+ \dot{\varepsilon}_{PE}\ \sin\delta_P \cos\alpha_{PE}
\end{aligned} \tag{30.97}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\delta}_P = &\left[\left(l_P\right)^{\cdot} - \left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\right]\cos b_P \left\{-\cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\sin\varepsilon_{PE}\cos\delta_P + \right. \\
&\left. + \left[\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos\alpha_{PE} - \right.\right. \\
&\left.\left. - \cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\cos\varepsilon_{PE}\sin\alpha_{PE}\right]\sin\delta_P\right\} + \\
&+ \dot{b}_P \left\{\left[\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\sin b_P \sin\varepsilon_{PE} + \cos b_P \cos\varepsilon_{PE}\right]\cos\delta_P + \right. \\
&+ \left[\cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\sin b_P \cos\alpha_{PE} + \right. \\
&\left.\left. + \left(\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\sin b_P \cos\varepsilon_{PE} - \cos b_P \sin\varepsilon_{PE}\right)\sin\alpha_{PE}\right]\sin\delta_P\right\} - \\
&- \dot{\varepsilon}_{PE}\ \sin\alpha_{PE}
\end{aligned} \tag{30.98}$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Ekliptiksystem

$$\begin{aligned}
\left(l_P\right)^{\cdot}\cos b_P = &\left(l_{PEF}\right)^{\cdot}\cos b_P + \\
&+ \dot{\alpha}_{PE}\ \cos\delta_P \left[\sin\alpha_{PE}\sin\left(l_P - l_{PEF}\right) + \cos\alpha_{PE}\cos\varepsilon_{PE}\cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\right] + \\
&+ \dot{\delta}_P \left\{\cos\alpha_{PE}\sin\delta_P\cos\left(l_P - l_{PEF}\right) - \right. \\
&\left. - \left[\sin\alpha_{PE}\sin\delta_P\cos\varepsilon_{PE} + \cos\delta_P\sin\varepsilon_{PE}\right]\cos\left(l_P - l_{PEF}\right)\right\} - \\
&- \dot{\varepsilon}_{PE}\ \sin b_P \cos\left(l_P - l_{PEF}\right)
\end{aligned} \tag{30.99}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{b}_P \;=\; & \dot{\alpha}_{PE}\,\cos\delta_P\,\{\cos\alpha_{PE}\sin\varepsilon_{PE}\cos b_P + \\
& \quad +\left[\sin\alpha_{PE}\cos\left(l_P - l_{PEF}\right) - \cos\alpha_{PE}\cos\varepsilon_{PE}\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\right]\sin b_P\} + \\
& + \dot{\delta}_P\,\{[-\sin\alpha_{PE}\sin\delta_P\sin\varepsilon_{PE} + \cos\delta_P\cos\varepsilon_{PE}]\cos b_P + \\
& \quad +\left[\cos\alpha_{PE}\sin\delta_P\cos\left(l_P - l_{PEF}\right) + \right. \\
& \quad\quad \left. +\left(\sin\alpha_{PE}\sin\delta_P\cos\varepsilon_{PE} + \cos\delta_P\sin\varepsilon_{PE}\right)\sin\left(l_P - l_{PEF}\right)\right]\sin b_P\} + \\
& + \dot{\varepsilon}_{PE}\,\sin\left(l_P - l_{PEF}\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{30.100}
$$

30.4.1.3 Planetenäquatorsystem und Planetenbahnsystem

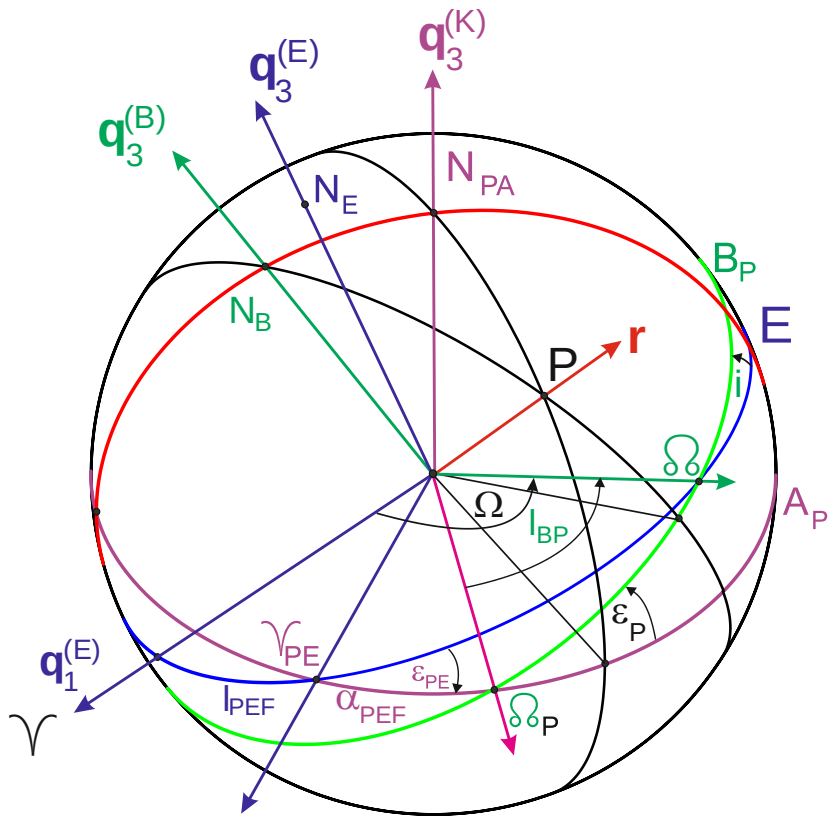


Bild 30-4: Planetenäquatorsystem und Planetenbahnsystem

Als erstes werden die Beziehungen zwischen dem Planetenäquatorsystem und dem Planetenbahnsystem nach Bild 30-4 auf S. 442 hergeleitet. Es seien ε_P die Neigung des Planetenäquators A_P bezogen auf die Planetenbahn B_P, l_{BP} der Winkelabstand des Knotens Ω_P von A_P mit B_P vom aufsteigenden Knoten Ω. Als bekannt angenommen werden können die ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens Ω der Planetenbahn und ihre Neigung i bezüglich der Ekliptik mit ihren Variationen $\dot{\Omega}$ und $(i)^{\bullet}$. Über die Formelsysteme (30.70) auf S. 436 bis (30.72) auf S. 437 sind auch der Winkelabstand l_{PEF} des Knotens Υ_{PE} auf der Ekliptik sowie die Neigung ε_{PE} des Planetenäquators mit der Ekliptik mit ihren Variationen $\left(l_{PEF}\right)^{\bullet}$ und $\dot{\varepsilon}_{PE}$ bekannt. Ergänzend kann dann noch der Winkelabstand α_{PEF} zwischen dem Knoten Ω_P und dem Schnittpunkt Υ_{PE} längs des Planetenäquators berechnet werden.

Im Dreieck $\Omega \Upsilon_{PE} \Omega_P$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \cos\alpha_{PEF} \sin\varepsilon_P &= -\cos l_{PEF} \sin i \cos\varepsilon_{PE} + \cos i \sin\varepsilon_{PE} \\ \sin\alpha_{PEF} \sin\varepsilon_P &= -\sin l_{PEF} \sin i \\ \cos\varepsilon_P &= \cos l_{PEF} \sin i \sin\varepsilon_{PE} + \cos i \cos\varepsilon_{PE} \quad , \end{aligned} \tag{30.101}$$

woraus die Winkel α_{PEF} und ε_P eindeutig zu berechnen sind. Ferner ist

$$\begin{aligned} \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} &= \sin\varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \\ \cos l_{BP} &= \cos\varepsilon_{PE} \sin l_{PEF} \sin\alpha_{PEF} + \cos l_{PEF} \cos\alpha_{PEF} \end{aligned} \tag{30.102}$$

zur eindeutigen Berechnung von l_{BP}. Ihre Variationen sind

$$\begin{aligned} \dot\alpha_{PEF} \sin\varepsilon_P = & -\left(l_{PEF}\right)^{\cdot} \sin i \left[\sin l_{PEF} \cos\varepsilon_{PE} \sin\alpha_{PEF} + \cos l_{PEF} \cos\alpha_{PEF}\right] + \\ & + (i)^{\cdot} \left[\left(\cos l_{PEF} \cos i \cos\varepsilon_{PE} + \sin i \sin\varepsilon_{PE}\right) \sin\alpha_{PEF} - \right. \\ & \left. - \sin l_{PEF} \cos i \cos\alpha_{PEF}\right] - \\ & - \dot\varepsilon_P \cos\varepsilon_P \sin\alpha_{PEF} \end{aligned} \tag{30.103}$$

$$\begin{aligned} \dot\varepsilon_P = & \left(l_{PEF}\right)^{\cdot} \sin i \left[\left(\sin l_{PEF} \cos\varepsilon_{PE} \cos\alpha_{PEF} - \cos l_{PEF} \sin\alpha_{PEF}\right) \cos\varepsilon_P + \right. \\ & \left. + \sin l_{PEF} \sin\varepsilon_{PE} \sin\varepsilon_P\right] - \\ & - (i)^{\cdot} \left\{\left[\left(\cos l_{PEF} \cos i \cos\varepsilon_{PE} + \sin i \sin\varepsilon_{PE}\right) \cos\alpha_{PEF} + \right.\right. \\ & \left. + \sin l_{PEF} \cos i \sin\alpha_{PEF}\right] \cos\varepsilon_P + \\ & \left. + \left[\cos l_{PEF} \cos i \sin\varepsilon_{PE} - \sin i \cos\varepsilon_{PE}\right] \sin\varepsilon_P\right\} + \\ & + \dot\varepsilon_{PE} \cos\alpha_{PEF} \quad . \end{aligned} \tag{30.104}$$

Umgekehrt folgen aus bekannten l_{BP}, α_{PEF} und ε_P mit ihren Variationen $\left(l_{BP}\right)^{\cdot}$, $\dot\alpha_{PEF}$ und $\dot\varepsilon_P$ die Winkelgrößen l_{PEF}, i, ε_{PE} mit ihren Variationen nach Bild 30-4 auf S. 442 aus dem sphärischen Dreieck $\Omega \Upsilon_{PE} \Omega_P$:

$$\begin{aligned} \cos i \sin l_{PEF} &= -\cos\varepsilon_P \sin\alpha_{PEF} \cos l_{BP} + \cos\alpha_{PEF} \sin l_{BP} \\ \sin i \sin l_{PEF} &= \sin\varepsilon_P \sin\alpha_{PEF} \\ \cos l_{PEF} &= \cos\varepsilon_P \sin\alpha_{PEF} \sin l_{BP} + \cos\alpha_{PEF} \cos l_{BP} \quad . \end{aligned} \tag{30.105}$$

Da l_{PEF} nicht eindeutig aus $\cos l_{PEF}$ berechnet werden kann (das Dreieck $\Omega \Upsilon_{PE} \Omega_P$ ist ein Äquatordreieck), muss aus den ersten beiden der Gleichungen (30.105)

$$\cot i = -\cot\varepsilon_P \cos l_{BP} + \cot\alpha_{PEF} \frac{\sin l_{BP}}{\sin\varepsilon_P} \tag{30.106}$$

berechnet werden, womit die Inklination i dann eindeutig berechnet werden kann:

$$\cos i = \frac{\cot i}{\sqrt{1+\cot^2 i}} \quad , \quad \sin i = \sqrt{1-\cos^2 i} \quad , \tag{30.107}$$

sofern nur $\sin\varepsilon_P \neq 0$ und $\sin\alpha_{PEF} \neq 0$. Falls aber $\sin\varepsilon_P = 0$, fallen Bahnebene des Planeten und seine Äquatorebene zusammen. Dann kann $\alpha_{PEF} = 0°$ gesetzt werden, ebenso $l_{PEF} = 0°$ und $\sin l_{BP} = \sin\varepsilon_P$, wodurch die Pole eindeutig zugeordnet werden können: der Nordpol liegt nördlich der Ekliptik, wenn $\sin\varepsilon_P > 0$, sonst südlich.

Falls $\sin\varepsilon_P \neq 0$, wird l_{PEF} aus der dritten der Gleichungen (30.105) und

$$\begin{aligned}\sin l_{PEF} &= \left(-\cos\varepsilon_P \sin\alpha_{PEF} \cos l_{BP} + \cos\alpha_{PEF} \sin l_{BP}\right)\cos i + \\ &\quad + \sin\varepsilon_P \sin\alpha_{PEF} \sin i\end{aligned} \tag{30.108}$$

berechnet. Da $\varepsilon \in [0°, 180°]$, genügt zu seiner Berechnung die Beziehung

$$\cos\varepsilon_{PE} = -\cos l_{BP} \sin i \sin\varepsilon_P + \cos i \cos\varepsilon_P \quad . \tag{30.109}$$

Die zugehörigen Variationen sind:

$$\begin{aligned}(i)^{\cdot} \sin l_{PEF} &= \dot{\varepsilon}_P \sin\alpha_{PEF} \left[-\sin\varepsilon_P \cos l_{BP} \sin i + \cos\varepsilon_P \cos i\right] + \\ &\quad + \dot{\alpha}_{PEF} \left\{\left[\cos\varepsilon_P \cos\alpha_{PEF} \cos l_{BP} + \sin\alpha_{PEF} \sin l_{BP}\right]\sin i + \right. \\ &\quad \left. + \sin\varepsilon_P \cos\alpha_{PEF} \cos i\right\} - \\ &\quad - (l_{BP})^{\cdot} \cos l_{PEF} \sin i\end{aligned} \tag{30.110}$$

$$\begin{aligned}(l_{PEF})^{\cdot} &= \dot{\varepsilon}_P \sin\alpha_{PEF} \left\{\left[\sin\varepsilon_P \cos l_{BP} \cos i + \cos\varepsilon_P \sin i\right]\cos l_{PEF} + \right. \\ &\quad \left. + \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} \sin l_{PEF}\right\} + \\ &\quad + \dot{\alpha}_{PEF} \left\{\left[-\left(\cos\varepsilon_P \cos\alpha_{PEF} \cos l_{BP} + \sin\alpha_{PEF} \sin l_{BP}\right)\cos i + \right.\right. \\ &\quad \left. + \sin\varepsilon_P \cos\alpha_{PEF} \sin i\right]\cos l_{PEF} - \\ &\quad \left. - \left[\cos\varepsilon_P \cos\alpha_{PEF} \sin l_{BP} + \sin\alpha_{PEF} \cos l_{BP}\right]\sin l_{PEF}\right\} + \\ &\quad + (l_{BP})^{\cdot} \cos i\end{aligned} \tag{30.111}$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{PE} &= (l_{BP})^{\cdot} \sin i \left\{\left[-\sin l_{BP} \cos\varepsilon_P \cos\alpha_{PEF} + \cos l_{BP} \cos\alpha_{PEF}\right]\cos\varepsilon_{PE} - \right. \\ &\quad \left. - \sin l_{BP} \sin\varepsilon_P \sin\varepsilon_{PE}\right\} + \\ &\quad + (i)^{\cdot} \left\{\left[\left(\cos l_{BP} \cos i \cos\varepsilon_{PE} - \sin i \sin\varepsilon_{PE}\right)\cos\alpha_{PEF} + \right.\right. \\ &\quad \left. + \sin l_{BP} \cos i \sin\alpha_{PEF}\right]\cos\varepsilon_{PE} + \\ &\quad \left. + \left[\cos l_{BP} \cos i \sin\varepsilon_P + \sin i \cos\varepsilon_P\right]\sin\varepsilon_{PE}\right\} + \\ &\quad + \dot{\varepsilon}_P \cos\alpha_{PEF} \quad .\end{aligned} \tag{30.112}$$

Der Bezug des Planetenäquatorsystems zum Planetenbahnsystem wird entsprechend Bild 30-4 auf Seite 442 durch Drehung um den Nordpol N_P des Planeten mit dem Winkel α_{PA} in den Knoten Ω_P des Planetenäquators A_P bezogen auf die Planetenbahn hergestellt, sodann Drehung um diesen Knoten mit dem Winkel ε_P in die Planetenbahnebene B_P und schließlich durch Drehung um den Nordpol N_B der Bahnebene um den Winkel l_{BP} in den Knoten Ω der Planetenbahn mit der Ekliptik. Seien die $\mathbf{q}_j^{(K)}$ die Basisvektoren des Planetenäquatorsystems, $\mathbf{q}_j^{(B)}$ die Basisvektoren des Planetenbahnsystems. Die gesamte Transformation kann in der Beziehung

$$\mathbf{q}_k^{(B)} = a_k^{\ j}\, \mathbf{q}_j^{(K)} \tag{30.113}$$

zusammengefasst werden, die im Einzelnen lautet:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(B)} &= \mathbf{q}_1^{(K)}\left[-\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] - \\
&\quad - \mathbf{q}_2^{(K)}\left[\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] + \\
&\quad + \mathbf{q}_3^{(K)} \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} \\
\mathbf{q}_2^{(B)} &= \mathbf{q}_1^{(K)}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] - \\
&\quad + \mathbf{q}_2^{(K)}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] + \\
&\quad - \mathbf{q}_3^{(K)} \sin\varepsilon_P \cos l_{BP} \\
\mathbf{q}_3^{(B)} &= \mathbf{q}_1^{(K)} \sin\alpha_{PA} \sin\varepsilon_P + \mathbf{q}_2^{(K)} \cos\alpha_{PA} \sin\varepsilon_P + \mathbf{q}_3^{(K)} \cos\varepsilon_P \quad .
\end{aligned}
\tag{30.114}
$$

Die Rotationsmatrix $\left(a_i^{\ j}\right)$ hat die Koeffizienten

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} \\
a_{12} &= -\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} \\
a_{13} &= \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} \\
a_{21} &= \cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} \\
a_{22} &= \cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} \\
a_{23} &= -\sin\varepsilon_P \cos l_{BP} \\
a_{31} &= \sin\varepsilon_P \sin\alpha_{PA} \\
a_{32} &= \sin\varepsilon_P \cos\alpha_{PA} \\
a_{33} &= \cos\varepsilon_P \quad .
\end{aligned}
\tag{30.115}
$$

Die zugehörigen Variationen sind

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{13} \sin\alpha_{PA} - \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{21} + \dot{\alpha}_{PA}\, a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{13} \cos\alpha_{PA} - \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{22} - \dot{\alpha}_{PA}\, a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= -\dot{\varepsilon}_P\, a_{33} \sin l_{BP} + \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{23} \sin\alpha_{PA} + \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{11} + \dot{\alpha}_{PA}\, a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{23} \cos\alpha_{PA} + \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{12} - \dot{\alpha}_{PA}\, a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= -\dot{\varepsilon}_P\, a_{33} \cos l_{BP} + \left(l_{BP}\right)^{\cdot} a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{33} \sin\alpha_{PA} + \dot{\alpha}_{PA}\, a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= \dot{\varepsilon}_P\, a_{33} \cos\alpha_{PA} - \dot{\alpha}_{PA}\, a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -\dot{\varepsilon}_P \sin\varepsilon_P \quad .
\end{aligned}
\tag{30.116}
$$

Für die Umkehrabbildung

$$
\mathbf{q}_j^{(K)} = b_j^{\ k}\, \mathbf{q}_i^{(B)} \tag{30.117}
$$

ist daher (wieder) mit dem System (30.22) und da wegen der Orthonormie der Basen $\det\left(a_j^{\ i}\right) = 1$ und $b_i^{\ j} = a_j^{\ i}$ in Matrixschreibweise

$$
\left(b_{ij}\right) = \left(a_{ji}\right) \quad . \tag{30.118}
$$

Seien $x_B^{\ i}$ die Komponenten eines Ortsvektors im $\mathbf{q}_{Bi}$-Planetenbahnsystem, gilt wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x_B{}^i\,\mathbf{q}_k^{(B)} = x_B{}^i\,a_i{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} = x_P{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}_B{}^k\,\mathbf{q}_k^{(B)} + x_B{}^k\,\dot{\mathbf{q}}_k^{(B)} = \dot{x}_P{}^j\,\mathbf{q}_j^{(K)} + x_P{}^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(K)} \end{aligned} \tag{30.119}$$

und für die Transformationen der Komponenten

$$\begin{aligned} x_P{}^j &= a_i{}^j\,x_B{}^i \\ x_B{}^i &= a^i{}_j\,x_P{}^j \end{aligned} \tag{30.120}$$

sowie für die Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} \dot{x}_P{}^j &= \dot{a}_i{}^j\,x_B{}^i + a_i{}^j\,\dot{x}_B{}^i \\ \dot{x}_B{}^i &= \dot{a}^i{}_j\,x_P{}^j + a^i{}_j\,\dot{x}_P{}^j \quad . \end{aligned} \tag{30.121}$$

Ausführlich lauten diese Beziehungen

$$\begin{aligned} x_{P1} &= x_{B1}\left[-\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad - x_{B2}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{B3} \sin\varepsilon_P \sin\alpha_{PA} \\ x_{P2} &= x_{B1}\left[-\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{B2}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{B3} \sin\varepsilon_P \cos\alpha_{PA} \\ x_{P3} &= x_{B1} \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} - \\ &\quad - x_{B2} \sin\varepsilon_P \cos l_{BP} + \\ &\quad + x_{B3} \cos\varepsilon_P \quad . \end{aligned} \tag{30.122}$$

Die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Planetenbahnsystem ergeben sich mit den Formeln (30.117) auf S. 445 aus den Beziehungen (30.121). Für die Umkehrabbildung folgt

$$\begin{aligned} x_{B1} &= x_{P1}\left[-\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] - \\ &\quad - x_{P2}\left[\cos\varepsilon_P \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA} + \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{P3} \sin\varepsilon_P \sin l_{BP} \\ x_{B3} &= x_{P1}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \sin\alpha_{PA} + \sin l_{BP} \cos\alpha_{PA}\right] + \\ &\quad + x_{P2}\left[\cos\varepsilon_P \cos l_{BP} \cos\alpha_{PA} - \sin l_{BP} \sin\alpha_{PA}\right] - \\ &\quad - x_{P3} \sin\varepsilon_P \cos l_{BP} \\ x_{B3} &= x_{P1} \sin\varepsilon_P \sin\alpha_{PA} + \\ &\quad + x_{P2} \sin\varepsilon_P \cos\alpha_{PA} + \\ &\quad + x_{P3} \cos\varepsilon_P \quad . \end{aligned} \tag{30.123}$$

Die zugehörigen Geschwindigkeitsanteile relativ zum Planetenäquatorsystem folgen mit den Formeln (30.116) wieder aus den Beziehungen (30.121).

Ein beliebiger Ort P über oder auf der Oberfläche eines Planeten mit planetozentrischem Abstand r_P habe im Planetenbahnsystem den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r_P\left[l_B, b_B\right] \quad , \tag{30.124}$$

im Planetenäquatorsystem

$$\mathbf{r} = r_P\left[\alpha_P, \delta_P\right] \quad . \tag{30.125}$$

Die Transformation zwischen diesen Systemen erfolgt nach Bild 30-4 auf S. 442, wobei die Kenntnis der Winkel $l_{BP} = \sphericalangle(\Omega, \Omega_P)$, $\alpha_{PA} = \sphericalangle(\Omega_P, \Omega_{PA})$ und der Schiefe ε_P mit ihren Variationen aus den Formeln (30.99) auf S. 441 bis (30.116) auf S. 445 vorausgesetzt werden kann. Somit gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_P \cos\delta_P &= \cos(l_B - l_{BP})\cos b_B \\
\sin\alpha_P \cos\delta_P &= \sin(l_B - l_{BP})\cos b_B \cos\varepsilon_P + \sin b_B \sin\varepsilon_P \\
\sin\delta_P &= -\sin(l_B - l_{BP})\cos b_B \sin\varepsilon_P + \sin b_B \cos\varepsilon_P
\end{aligned} \tag{30.126}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}
\cos(l_P - l_{BP})\cos b_B &= \cos\alpha_P \cos\delta_P \\
\sin(l_P - l_{BP})\cos b_B &= \sin\alpha_P \cos\delta_P \cos\varepsilon_P - \sin\delta_P \sin\varepsilon_P \\
\sin b_B &= \sin\alpha_P \cos\delta_P \sin\varepsilon_P + \sin\delta_P \cos\varepsilon_P
\end{aligned} \tag{30.127}$$

mit den Variationen relativ zum Planetenäquatorsystem

$$\begin{aligned}
\dot\alpha_P \cos\delta_P = {} & \left[(l_B)^{\cdot} - (l_{BP})^{\cdot}\right]\cos b_B \left[\sin(l_B - l_{BP})\sin\alpha_P + \right. \\
& \left. + \cos(l_B - l_{BP})\cos\varepsilon_P \cos\alpha_P\right] + \\
& \dot b_B \left\{\cos(l_B - l_{BP})\sin b_B \sin\alpha_P + \right. \\
& \left. + \left[-\sin(l_B - l_{BP})\sin b_B \cos\varepsilon_P + \cos b_B \sin\varepsilon_P\right]\cos\alpha_P\right\} + \\
& + \dot\varepsilon_P \sin\delta_P \cos\alpha_P
\end{aligned} \tag{30.128}$$

$$\begin{aligned}
\dot\delta_P = {} & \left[(l_B)^{\cdot} - (l_{BP})^{\cdot}\right]\cos b_B \left\{-\cos(l_B - l_{BP})\sin\varepsilon_P \cos\delta_P + \right. \\
& \left. + \left[\sin(l_B - l_{BP})\cos\alpha_P - \cos(l_B - l_{BP})\cos\varepsilon_P \sin\alpha_P\right]\sin\delta_P\right\} + \\
& \dot b_B \left\{\left[\sin(l_B - l_{BP})\sin b_B \sin\varepsilon_P + \cos b_B \cos\varepsilon_P\right]\cos\delta_P + \right. \\
& + \left[\cos(l_B - l_{BP})\sin b_B \cos\alpha_P + \right. \\
& \left. \left. + \left(\sin(l_B - l_{BP})\sin b_B \cos\varepsilon_P - \cos b_B \sin\varepsilon_P\right)\sin\alpha_P\right]\sin\delta_P\right\} - \\
& - \dot\varepsilon_P \sin\alpha_P
\end{aligned} \tag{30.129}$$

und umgekehrt den Variationen relativ zum Planetenbahnsystem

$$\begin{aligned}
(l_B)^{\cdot}\cos b_B = {} & + (l_{BP})^{\cdot} \cos b_B + \\
& \dot\alpha_P \cos\delta_P \left[\sin\alpha_P \sin(l_B - l_{BP}) - \cos\alpha_P \cos\varepsilon_P \cos(l_B - l_{BP})\right] + \\
& + \dot\delta_P \left[\cos\alpha_P \sin\delta_P \sin(l_B - l_{BP}) + \right. \\
& \left. + \left(\sin\alpha_P \sin\delta_P \cos\varepsilon_P + \cos\delta_P \sin\varepsilon_P\right)\cos(l_B - l_{BP})\right] + \\
& + \dot\varepsilon_P \sin b_B \cos(l_B - l_{BP})
\end{aligned} \tag{30.130}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{b}_B \;=\; & \dot{\alpha}_P \cos\delta_P \,\{\cos\alpha_P \sin\varepsilon_P \cos b_B + \\
& \quad + \left[\sin\alpha_P \cos\left(l_B - l_{BP}\right) + \cos\alpha_P \cos\varepsilon_P \sin\left(l_B - l_{BP}\right)\right] \sin b_B\} + \\
& + \dot{\delta}_P \,\{\left[-\sin\alpha_P \sin\delta_P \sin\varepsilon_P + \cos\delta_P \cos\varepsilon_P\right] \cos b_B + \\
& \quad + \left[\cos\alpha_P \sin\delta_P \cos\left(l_B - l_{BP}\right) - \right. \\
& \quad\quad \left. - \left(\sin\alpha_P \sin\delta_P \cos\varepsilon_P + \cos\delta_P \sin\varepsilon_P\right) \sin\left(l_B - l_{BP}\right)\right] \sin b_B\} - \\
& - \dot{\varepsilon}_P \sin\left(l_B - l_{BP}\right) \quad .
\end{aligned}
\tag{30.131}
$$

30.4.2 Das planetographische System

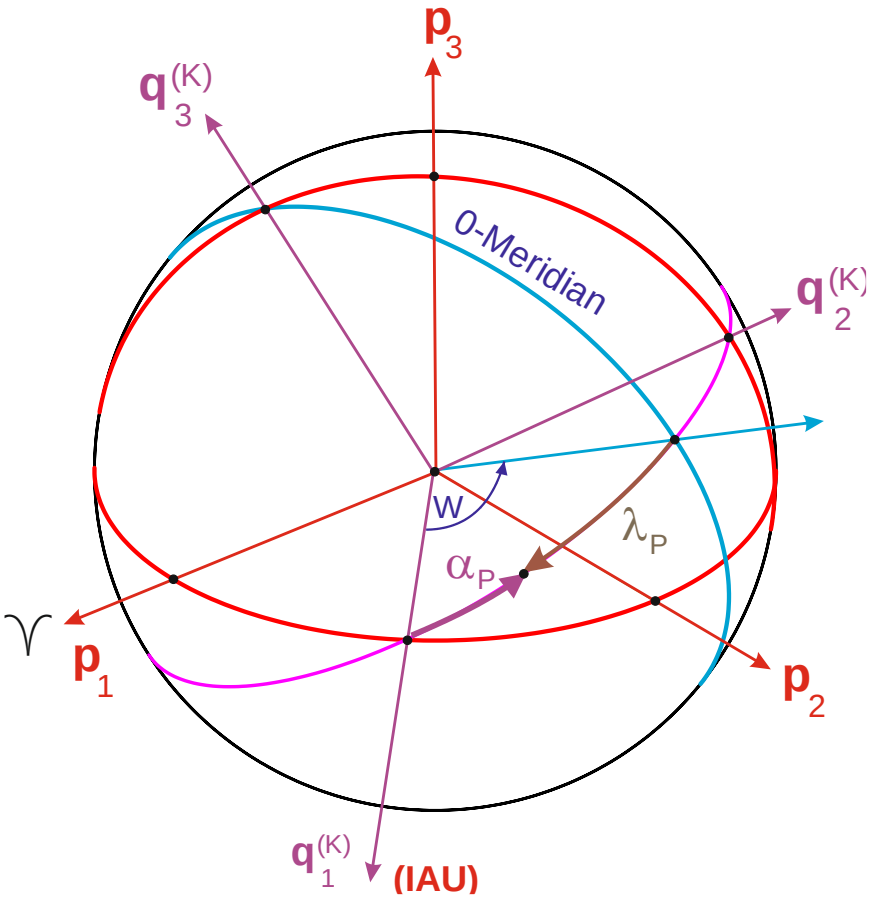


Bild 30-5: Die planetographische Länge λ_P bei rechtläufiger Rotation eines Planeten. Der 0-Meridian hat bezogen auf den IAU-Vektor (Schnittpunkt des Planeten-Äquators mit dem Erd-Äquator) die Winkeldistanz W_0. Die planetographische Länge wird entgegengesetzt zur Rotation des Planeten gezählt[1].

Um den Bezug eines Planetenorbiters zur Oberfläche des Planeten zu beschreiben, etwa für Überdeckungs- oder Sichtbarkeitsuntersuchungen, wird seine Bewegung in einem mitrotierenden planetozentrischen System dargestellt. Ausgangspunkt dazu ist das Planetenäquatorsystem,

[1] Achtung: die geographische Länge auf der Erde wird im Gegensatz zur Definition bei den Planeten mit der Erdrotation gezählt.

dessen Nordpolrichtung durch die auf das Erd-Äquatorsystem[1] bezogenen Koordinaten (α_1, δ_1) mit ihren Variationen zu jedem Zeitpunkt bekannt sind. Es wird (wie auf der Erde) zwischen *planetozentrischen* und *planetographischen* Koordinaten unterschieden. Das planetographische System beschreibt den Planetenkörper durch ein Referenzellipsoid. Dieses wird durch Angabe des mittleren Äquatorradius R_E und der Abplattung f beschrieben. Dies ist physikalisch gesehen willkürlich, da für die Körper des Sonnensystems unterschiedliche Bezugsoberflächen gewählt werden müssen, für die Erde etwa der ideale mittlere Meeresspiegel (ideal bedeutet hier Außerachtlassung der Schwereanomalien des Erdkörpers), für die gasförmigen Planeten die Oberfläche mit einem Druck von 1 bar[2].

Um den Bezug eines Planetenorbiters zur Oberfläche des Planeten zu beschreiben, etwa für Überdeckungs- oder Sichtbarkeitsuntersuchungen, wird seine Bewegung in einem mitrotierenden planetozentrischen System dargestellt. Ausgangspunkt dazu ist das Planetenäquatorsystem, dessen Nordpolrichtung durch die auf das Erd-Äquatorsystem[3] bezogenen Koordinaten (α_1, δ_1) mit ihren Variationen zu jedem Zeitpunkt bekannt sind. Es wird (wie auf der Erde) zwischen *planetozentrischen* und *planetographischen* Koordinaten unterschieden. Das planetographische System beschreibt den Planetenkörper durch ein Referenzellipsoid. Dieses wird durch Angabe des mittleren Äquatorradius R_E und der Abplattung f beschrieben. Dies ist physikalisch gesehen willkürlich, da für die Körper des Sonnensystems unterschiedliche Bezugsoberflächen gewählt werden müssen, für die Erde etwa der ideale mittlere Meeresspiegel (ideal bedeutet hier Außerachtlassung der Schwereanomalien des Erdkörpers), für die gasförmigen Planeten die Oberfläche mit einem Druck von 1 bar[4].

Die Planeten-äquatorialen Koordinaten planetare Rektaszension α_P und Deklination δ_P sind entweder in Bezug auf den Schnittpunkt Ω_P zwischen Planetenäquator und Planetenbahnebene gegeben (α_P, δ_P) oder mit Bezug auf den Schnitt Ω_{PA} zwischen Planetenäquator und Erdäquator $(\alpha_P - \alpha_{PA}, \delta_P)$. Für einen Punkt auf der Referenzoberfläche des Planeten ist die *planetozentrische Breite* φ'_P der planetaren Deklination δ_P gleich. Die *planetographische Breite* φ_P wird berechnet aus[5]

$$\sin\varphi_P = \frac{\sin\varphi'_P}{\sqrt{\sin^2\varphi'_P + (1-f)^4\cos^2\varphi'_P}} \quad . \tag{30.132}$$

Ein Punkt mit der Höhe H' über dem Referenzellipsoid kann mit den in Kapitel 38 (Band V) hergeleiteten Formeln (wie im Fall der Erde) behandelt werden.

---

1 Siehe die Definitionen in Abschnitt 29.4 auf Seite 323 sowie die Beschreibung in Bild 30-2 auf Seite 430

2 vgl. SEIDELMANN P. K., ed. [1992], pp. 383–388; DAVIES ET AL. [1986]; Zusammenstellung der wichtigsten physikalischen Parameter von Sonne und Planeten in Anhang E.7 (Band V)

3 Siehe die Definitionen in Abschnitt 29.4 auf Seite 323 sowie die Beschreibung in Bild 30-2 auf Seite 430

4 vgl. SEIDELMANN P. K., ed. [1992], pp. 383–388; DAVIES ET AL. [1986]; Zusammenstellung der wichtigsten physikalischen Parameter von Sonne und Planeten in Anhang E.7 (Band V)

5 etwa mit einer der Formeln (37.38) bis (37.43) in Abschnitt 37.2.3, Band V

Bei den Planeten wird zwischen *planetozentrischer Länge* λ'_P und *planetographischer Länge* λ_P und unterschieden. Die planetozentrische Länge λ'_P wird längs des Planetenäquators vom Planetennordpol aus gesehen im Uhrzeigersinn (also „westlich“) gezählt. Die planetographische Länge λ_P wird dagegen auf die Rotation des Planeten bezogen. Sie wird positiv entgegen der Rotationsrichtung des Planeten gezählt. Bei rechtläufig rotierenden Planeten stimmen planetozentrische und planetographische Länge überein.

Planet	Rotation des Planeten um seine Achse $\dot{W}\left(\approx \dot{\Theta}\right)[\mathrm{rad/sec}]$
Merkur	1.24001250×10^{-6}
Venus	-2.99243084×10^{-7}
Erde	7.29211537×10^{-5}
Mars	7.08821808×10^{-5}
Jupiter	1.75853234×10^{-4}
Saturn	1.63784990×10^{-4}
Uranus	-1.01237196×10^{-4}
Neptun	1.08338253×10^{-4}
Pluto	-1.13855098×10^{-5}

Tabelle 30-2: Die tropische Rotation[1] der Planeten um ihre Rotationsachse, Daten zur Epoche J2000.0

Zur Charakterisierung der Rotation eines Planeten wird für eine Epoche t_0 die planetare Rektaszension W_0 eines für den betreffenden Planeten ausgewählten Bezugsmeridians („Nullmeridian“) zum Schnitt Ω_P mit dem (mittleren) Erdäquator (zum betreffenden Zeitpunkt) vorgegeben. Für einen beliebigen Zeitpunkt *t* hat der 0°-Meridian das Argument

$$W = W_0 + \dot{W}\left(t - t_0\right) \quad , \tag{30.133}$$

welches der Sternzeit auf der Erde entspricht („Stundenwinkel des Nullmeridians“). $\dot{W}$ charakterisiert die Rotation des Planeten. Für retrograde Planeten (Venus, Uranus, Pluto) ist $\dot{W} < 0$ (siehe in Tabelle 30-2 auf Seite 450).

Die planetographische Länge wird aus der planetaren Rektaszension berechnet durch die Beziehung (vgl. auch Bild 30-5)

$$\lambda_P = \mathrm{sgn}\left(\dot{W}\right)\left(W - \alpha_P\right) \quad . \tag{30.134}$$

[1] die aber zur Berechnung sonnensynchroner Bahnen nicht benötigt wird

Planetographische Systeme werden in der sphärischen Astronomie im Rahmen der Berechnung der physischen Ephemeriden der Körper des Sonnensystems verwendet.

Die planetographische Länge des aufsteigenden Knotens der Planetenorbiterbahn hat dann mit Formel (30.134) die säkulare Variation

$$\dot{\lambda}_{p\Omega s} = \operatorname{sgn}\left(\dot{W}\right)\left[\dot{W} - \dot{\Omega}_p\right] \quad . \tag{30.135}$$

Damit können Untersuchungen der drakonitischen Bewegung von Planetenorbitern durchgeführt werden, wie es in Kapitel 23 im Fall der Erdsatelliten geschieht.

30.4.3 Der subterrestrische Punkt auf einer Planetenoberfläche

Die planetographischen Koordinaten der Erde auf einer Planetenoberfläche definieren *den subterrestrischen Punkt.* Zu einem Zeitpunkt *t* habe der Mittelpunkt des Planeten die geozentrischen äquatorialen Koordinaten (α, δ) und die geozentrische Distanz Δ. Der Nordpol des Planeten habe die Koordinaten (α_1, δ_1), die durch Umrechnung aus den Epocheelementen (α_0, δ_0) und ihren Variationen auf den gewünschten Zeitpunkt t umgerechnet sind. Die planetozentrische Rektaszension $\alpha_{P♁}$ und Deklination $\delta_{P♁}$ der Erde errechnen sich mit den Formeln (30.64) auf S. 434 und unter Beachtung, dass von dem Planeten aus gesehen $\alpha \to \alpha + 12^h$ und $\delta \to -\delta$ gesetzt werden muss, aus[1]

$$\begin{aligned}
\cos\left(\alpha_{P♁} - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_{P♁} &= \sin\left(\alpha_1 - \alpha\right)\cos\delta_1 \\
\sin\left(\alpha_{P♁} - \alpha_{PA}\right)\cos\delta_{P♁} &= \cos\left(\alpha_1 - \alpha\right)\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\delta\cos\delta_1 \\
\sin\delta_{P♁} &= -\cos\left(\alpha_1 - \alpha\right)\cos\delta\cos\delta_1 - \sin\delta\sin\delta_1 \quad .
\end{aligned} \tag{30.136}$$

Die planetographische Länge $\lambda_{P♁}$ des subterrestrischen Punktes folgt aus Formel (30.134):

$$\lambda_{P♁} = \operatorname{sgn}\left(\dot{W}\right)\left(W - \alpha_{P♁}\right) \quad . \tag{30.137}$$

Für eine Beobachtung dieses Punktes von der Erde aus muss die Lichtlaufzeit entsprechend der Distanz Δ in der Berechnung der Zeit berücksichtigt werden. In diesem Fall muss der Stundenwinkel *W* aus der gegenüber Formel (30.133) erweiterten Beziehung

$$W = W_0 + \dot{W}\left(t - t_0 - \frac{\Delta}{c}\right) \tag{30.138}$$

berechnet werden[2]. Wird die Distanz Δ in astronomischen Einheiten gegeben und das Zeitintervall in Tagen (TDB) verlangt, lautet der Umrechnungsfaktor mit den IAU 1984-Werten[3]

$$\frac{\Delta}{c}\left[\frac{AU}{\text{km/s}}\right] = \frac{1.49597810\times10^8}{86400\times299792.458}\Delta\ [\text{d}] = 0.005775518\Delta\ [\text{d}] \quad . \tag{30.139}$$

Die planetographische Breite folgt aus Formel (30.132), da wieder die planetozentrische Breite $\varphi'_{P♁}$ auf der Referenzfläche der Deklination $\delta_{P♁}$ als gleich angenommen werden kann,

---

[1] Index PA: Äquatorsystem A eines Planeten P

[2] vgl. etwa AA 1993 [1982], p. E88

[3] siehe Anhang E.1 (Band V)

$$\sin\varphi_{P♁} = \frac{\sin\delta_{P♁}}{\sqrt{\sin^2\delta_{P♁} + (1-f)^4\cos^2\delta_{P♁}}} \tag{30.140}$$

und umgekehrt

$$\sin\delta_{P♁} = \frac{(1-f)^2\sin\varphi_{P♁}}{\sqrt{\cos^2\varphi_{P♁} + (1-f)^4\sin^2\varphi_{P♁}}} \quad . \tag{30.141}$$

Ein BEISPIEL für die Darstellung des subterrestrischen Punktes auf einer Planetenoberfläche ist in Bild 30-34 auf Seite 501 für die Beobachtung eines Marsorbiters gesehen von der Erde gegeben. ◀

Anmerkung: der subterrestrische Punkt der Planeten wird im astronomischen Jahrbuch[1] tabelliert in Schrittweiten von 4 Tagen aufbereitet. Analog zu den vorstehenden Formeln kann auch der subsolare Punkt berechnet werden, der ebenfalls im astronomischen Jahrbuch zu finden ist. ◀

30.5 Physikalische Ephemeriden der Planeten

Die physikalischen Ephemeriden von Planeten und ihren Monden, wozu auch die Kleinen Planeten gezählt werden, werden üblicherweise in zwei Gruppen behandelt[2]:

1. Die Eigenschaften der Planetenoberfläche, die Rotationseigenschaften und die kartographischen Koordinaten. Das Arbeiten mit diesen Daten wird im vorhergehenden Abschnitt behandelt. Die dazu benötigen Zahlenwerte sind in Anhang E.7 (Band V) zusammengestellt.
2. Die Phasen und die damit verbundenen Helligkeiten der interplanetaren Objekte, wie sie von der Erde aus erscheinen. Die Phase wird in Abschnitt 30.8.3 (auf Seite 469) behandelt, wie sie aus einer Ephemeridenrechnung erhalten werden kann. Die Berechnung der scheinbaren Helligkeit („Magnitude“) ist nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes.

30.6 Die erdbezogene synodische Bewegung der Planeten

Die relative Bewegung zweier Planeten (und anderer interplanetarer Objekte) wird vor dem Hintergrund des Fixsternhimmels untersucht. Aus diesem Grund müssen die siderischen Bewegungen dieser Körper betrachtet werden. Der Bezug der siderischen Bewegungen der beiden aufeinander wird als synodische Bewegung bezeichnet. Markante Punkte der synodischen Bewegung sind die Opposition bzw. die Konjunktion bei Bezug auf die Sonne. Die Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch die Opposition und entsprechend durch die Konjunktion wird als synodischer Umlauf (der Planeten) bezeichnet.

Für bahnanalytische Zwecke ist es üblich, die mittleren siderischen Bewegungen der beiden Objekte zu vergleichen. Um die beiden Bewegungen einheitlich vergleichen zu können, werden

---

[1] Astronomical Almanac herausgegeben vom Nautical Almanac Office, USNO, und Her Majesty’s Nautical Almanac Office, Rutherford Appleton Laboratory, ISBN 0 11 887323 7, ISSN 0737-6421

[2] siehe hierzu die ausführlichen Darstellungen in SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], chapter 7, pp.383-419

ihre Projektionen auf die Ekliptik verwendet[1]. Wenn es nicht auf die letzte Genauigkeit ankommt, wird die siderische mittlere Bewegung durch die tropische mittlere Bewegung $\left(\dot{L}\right)$ ersetzt, die als säkularer Anteil in der mittleren Länge eines Planeten auftritt[2].

Die beiden betrachteten Planeten haben die siderische Umlaufzeit $\overline{P_{ps1}}, \overline{P_{ps2}}$ und die zugehörigen mittleren siderischen Bewegungen $\overline{n_1} = 360° / \overline{P_{ps1}}$, $\overline{n_2} = 360° / \overline{P_{ps2}}$.

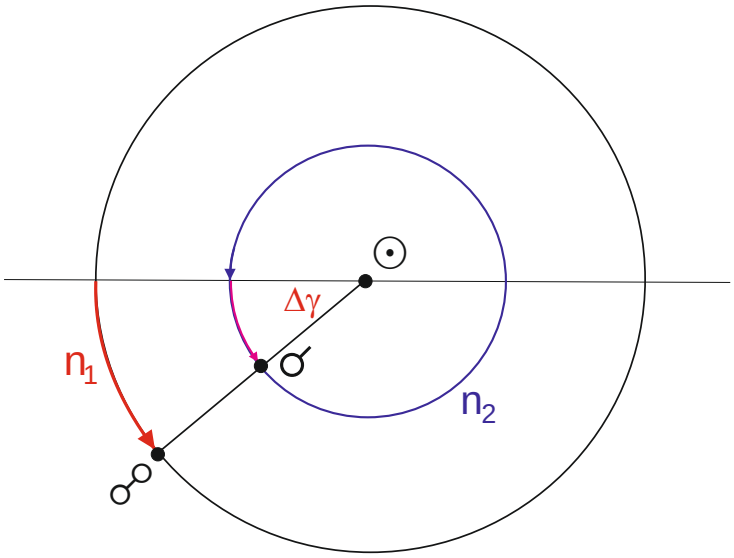


Bild 30-6: Zur Herleitung der synodischen Bewegung zwischen zwei Planeten mit den mittleren siderischen Bewegungen n_1, n_2. Planet 1 befindet sich von Planet 2 aus gesehen in Opposition $\left(☍\right)$ zur Sonne, von Planet 1 aus gesehen befindet sich Planet 2 in Konjunktion $\left(☌\right)$ mit der Sonne

Zur Berechnung der synodischen Umlaufzeit $\overline{P_{PS}} = 360° / \overline{n_{PS}}$ wird (siehe Bild 30-6) der Winkel $\Delta\gamma$, der von Planet 1 in einem synodischen Umlauf durchlaufen wird mit der Bewegung des zweiten Planeten verglichen, der im selben Zeitraum den Winkel durchläuft. Daraus wird

$$\Delta\gamma = \overline{n_1}\,\overline{P_{PS}} = \overline{n_2}\,\overline{P_{PS}} - 360° = \overline{n_2}\,\overline{P_{PS}} - \overline{n_{PS}}\,\overline{P_{PS}} \tag{30.142}$$

somit

$$\overline{n_1} = \overline{n_2} - \overline{n_{PS}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\overline{P_{ps1}}} = \frac{1}{\overline{P_{ps2}}} - \frac{1}{\overline{P_{PS}}} \quad . \tag{30.143}$$

Für die Berechnung der synodischen Umlaufzeit ergeben sich daraus die beiden möglichen Fälle

$$\overline{P_{PS}} = \frac{\overline{P_{ps1}}\,\overline{P_{ps2}}}{\pm\left(\overline{P_{ps1}} - \overline{P_{ps2}}\right)} \tag{30.144}$$

je nachdem, ob

[1] Reduktion auf die Ekliptik, analog zur Reduktion auf den Äquator (siehe in Abschnitt 24.2.5)

[2] Siehe in den Planetenparametern in Abschnitt 30.2.2 auf Seite 420

$$\begin{aligned} (+) &\Leftrightarrow \overline{P_{ps1}} > \overline{P_{ps2}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Planet 2 innerer Planet zu Planet1} \\ (-) &\Leftrightarrow \overline{P_{ps1}} < \overline{P_{ps2}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Planet 2 äußerer Planet zu Planet1} \quad . \end{aligned} \tag{30.145}$$

Diese Unterscheidung ist bei der Beobachtung der Planeten von Bedeutung, wenn die synodische Bewegung auf die Erde bezogen werden soll. Eine Aussage über die Größenordnung der synodischen Umlaufzeit kann durch Vergleich der Größen der siderischen Umlaufzeit der Planeten in Bezug auf die Erde erhalten werden:

- Wenn $\left|\overline{P_{♁}} - \overline{P_{PS}}\right|$ klein ist, wird $\overline{P_{PS}}$ groß, was für Venus und Mars zutrifft.
- Wenn $\left|\overline{P_{♁}} - \overline{P_{PS}}\right|$ groß ist, wird $\overline{P_{PS}}$ klein, was für Merkur, Jupiter und Saturn zutrifft.

Diese Eigenschaften werden in Tabelle 30-3 quantitativ unterlegt.

Planet	Siderische Umlaufzeit	Mittlere synodische Umlaufzeit	Mittlere tägliche Bewegung	Mittlere Bahngeschwindigkeit
Merkur	87.968435728 d	115.8775 d	4°.09237706	47.8725 km/s
Venus	224.695433692 d	583.9214 d	1°.60216874	35.0214 km/s
Erde	365.17190955 d		0°.98564736	29.7859 km/s
Mars	686.929711912 d	779.9361 d	0°.52407109	24.1309 km/s
1 Ceres	1679.89633786 d	466.6004 d	0°.21429894	17.9101 km/s
Jupiter	4330.59576356 d	398.8840 d	0°.08312944	13.0697 km/s
Saturn	10746.9404426 d	378.0919 d	0°.03349791	9.6724 km/s
Uranus	30588.7403410 d	369.6560 d	0°.01176904	6.8352 km/s
Neptun	59799.9004436 d	367.4867 d	0°.006020076	5.4778 km/s
Pluto	90589.5972 d	366. 7207 d	0°.003973966	4.7490 km/s

Tabelle 30-3: Die mittlere synodische Umlaufzeit der Planeten[1] und zugehörige Bewegungsgrößen zur Epoche J2000.0

Eine Aussage über die synodische Bewegung der Planeten bei Bezug auf die Erde kann (näherungsweise) aus Beziehung (30.143) mit Hilfe der tropischen mittleren Bewegung der Planeten erhalten werden

$$\dot{L}_S = \pm\left(\dot{L}_{sP} - \dot{L}_{s♁}\right) \quad . \tag{30.146}$$

Hier bedeuten: $\dot{L}_S$ - mittlere synodische Umlaufzeit, $\dot{L}_{sP}$ - mittlere tropische (ungefähr siderische) Umlaufzeit eines Planeten, $\dot{L}_{s♁}$ - mittlere tropische (ungefähr siderische) Umlaufzeit der Erde. Auch hier gilt das positive Vorzeichen für die inneren Planeten, das negative für die äußeren. Beispiele zur Darstellung der Bewegung interplanetarer Objekte Innere Planeten durchlaufen in Bezug auf die Erde keine Opposition, sondern die innere (manchmal auch obere genannt) Konjunktion, wenn Planet und Erde sich auf derselben Seite zur Sonne befinden (der Planet steht vor der Sonne, ein Moment der in der Planetentheorie von besonderer Bedeutung

[1] Kopie aus SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 704, Table 15.6; 1 Ceres aus T. GEHRELS [1979]

ist), die untere Konjunktion, wenn Planet und Erde sich auf verschiedenen Seite der Sonne befinden (der Planet steht hinter der Sonne und kann schlecht oder gar nicht beobachtet werden). Bei bestimmten Familien von Kleinen Planeten und insbesondere bei interplanetaren Raumsonden auf elliptischen Bahnen muss mit Oppositionen und verschiedenartigen Konjunktionen gerechnet werden.

30.7 Beispiele zur Darstellung der Bewegung interplanetarer Objekte

30.7.1 Heliozentrischen Bewegung

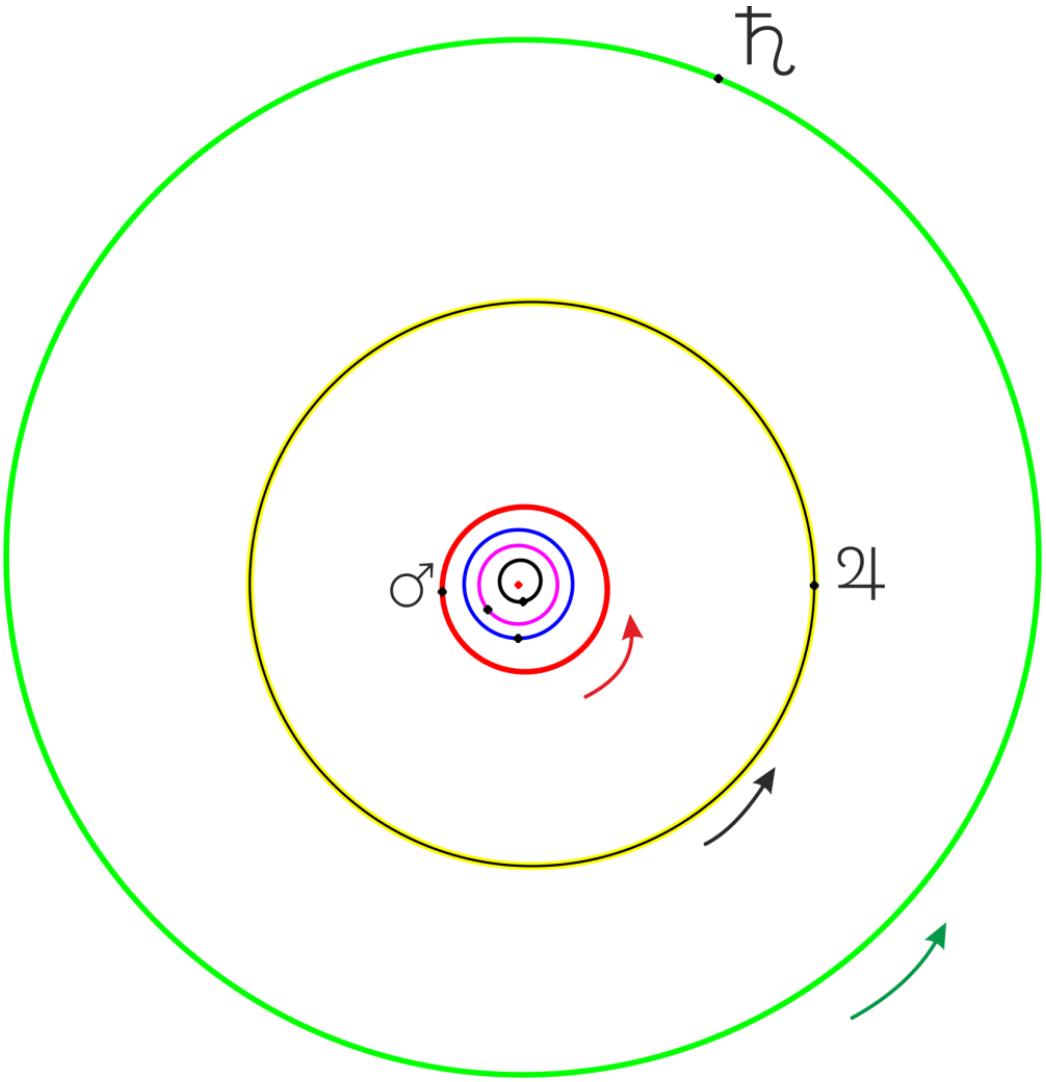


Bild 30-7: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Saturn über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik

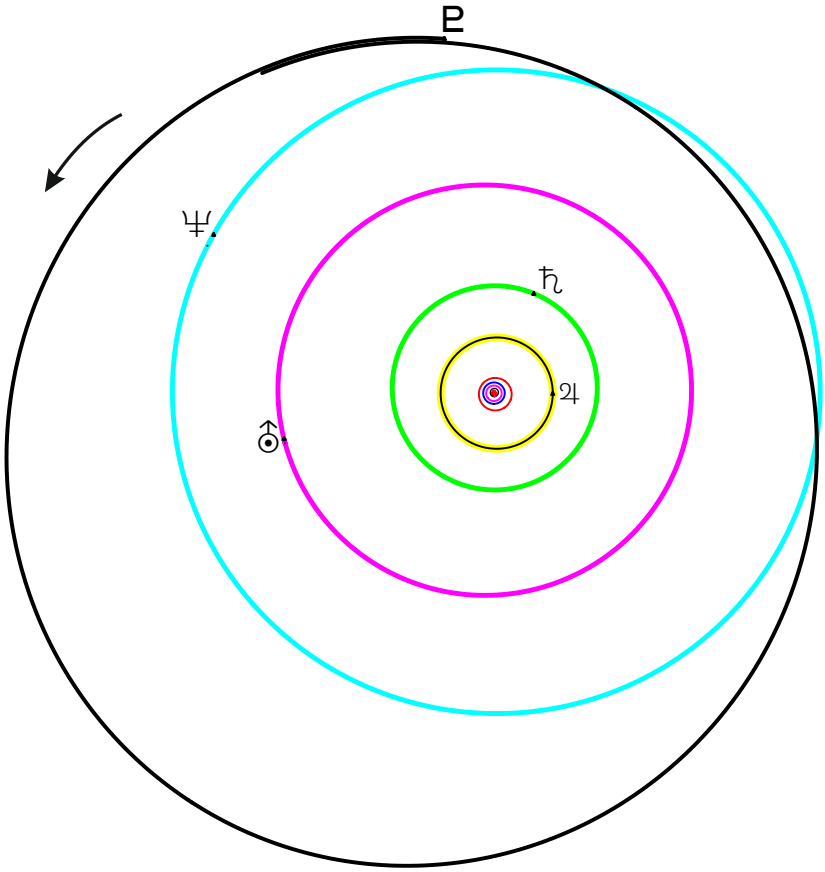


Bild 30-8: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Neptun und des Zwergplaneten Pluto über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik

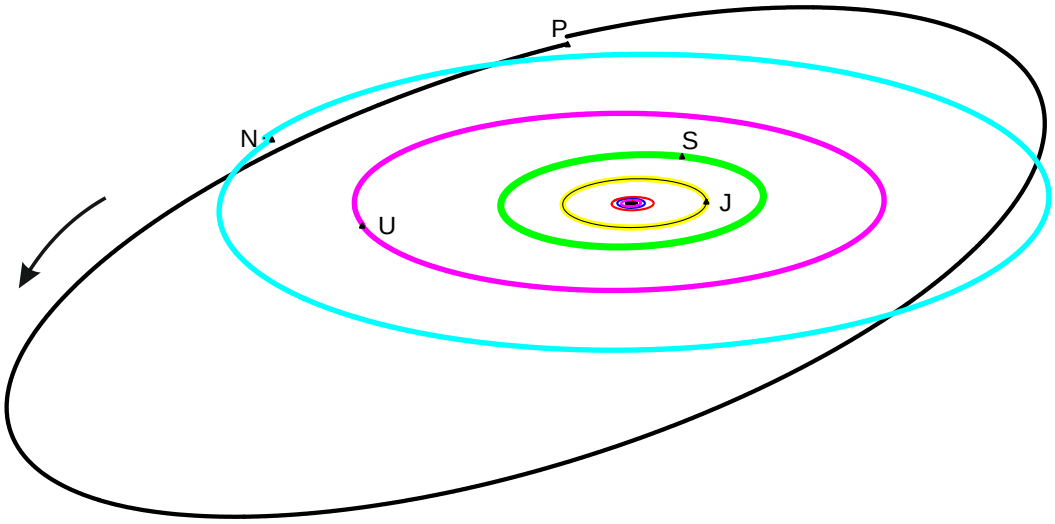


Bild 30-9: Die heliozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Neptun und des Zwergplaneten Pluto über je ein siderisches Jahr in realistischen Größenverhältnissen. Der Beginn am 1. Januar 2017 ist markiert. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik ist unter der ekliptikalen Breite $\beta = 20°$.

Zur Veranschaulichung werden einige aktuelle Darstellungen von Planetenbahnen in realistischen Größenverhältnissen demonstriert[1].

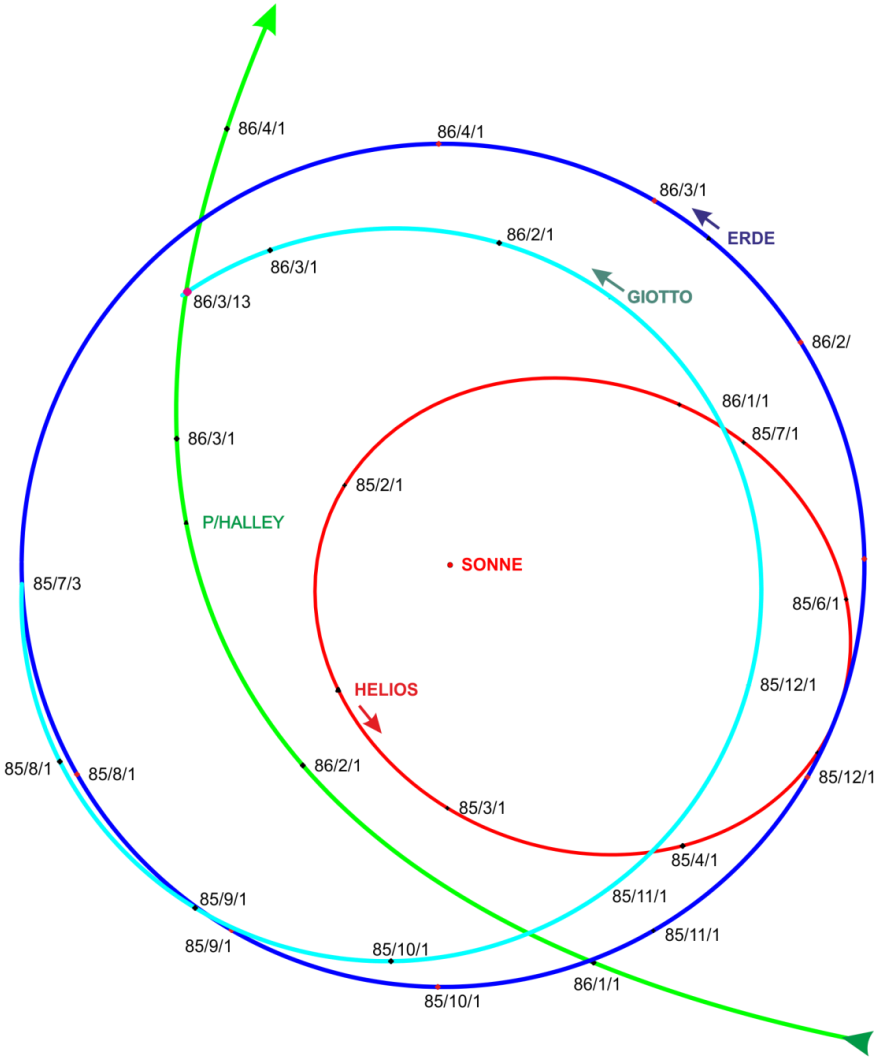


Bild 30-10: Die heliozentrischen Bahnen der Erde, der Kometensonde Giotto und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 in realistischen Größenverhältnissen dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde Helios 1 ist angedeutet. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik und lässt die extreme Exzentrizität der Kometenbahn mit e = 0.967 und ihre Rückläufigkeit mit i = 162° erkennen.

BEISPIEL 1: Bild 30-7 (auf Seite 455) zeigt den Verlauf der Planeten Merkur (☿), Venus (♀), Erde (♁), Mars (♂), Jupiter (♃) und Saturn (♄) über je ein siderisches Jahr (Daten in Tabelle 30-3 auf Seite 454). Der Beginn der Darstellung ist am 1. Januar 2017, 12h (UT1). Der Ort des Planeten ist für diesen Zeitpunkt auf seiner Bahn markiert. Deutlich sind die elliptischen Bahnen von Merkur $(e_{☿} = 0.0206)$ und Mars $(e_{♂} = 0.093)$ zu erkennen. Nicht so stark ausgeprägt sind die Elliptizitäten von Jupiter und Saturn. Die entsprechende Darstellung unter Einschluss der äußeren Planeten Uranus (♅), Neptun (♆) und des Zwergplaneten Pluto (♇) ist in Bild 30-8 gegeben. Auch hier fällt die Elliptizität der Neptunbahn auf $(e_{♆} = 0.086)$.

[1] Die benötigten Bahnparameter sind in Abschnitt 30.2.2 auf Seite 420 zusammengestellt

Völlig aus dem Rahmen des Planetensystem fällt der Zwergplanet Pluto auf Grund seiner großen Exzentrizität $(e_{\text{P}} = 0.249)$, wodurch seine Bahn zeitweise innerhalb der Neptunbahn verläuft. Besonders auffällig ist auch seine Bahnneigung gegenüber der Ekliptik $(i_{\text{P}} = 17°.142)$, wie durch den schrägen Blick auf die Ekliptik in Bild 30-9 zu erkennen ist. Schon auf Grund dieser für Planeten ungewöhnlichen Bahndaten fällt Pluto aus dem Rahmen des Planetensystems heraus. ◄

BEISPIEL 2: Als weiteres Beispiel wird die Bahn der interplanetaren Raumsonde Giotto zur Begegnung mit dem Kometen P/Halley am 13. März 1986 in Bild 30-10 (auf Seite 457) vorgestellt. Die hier verwendeten Bahnparameter sind:

Giotto, ekliptikale *Kepler*elemente bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0:

Halbachse	a = 131751253.594 km
Exzentrizität	e = 0.177302
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i = 2°.0904719
eklipt. Länge aufsteig. Knoten	Ω = 281°.69921851
Argument des Perihels	ω = 204°.66258995
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_0 = 178°.48627974
Epoche t_0 :	1985-07-31/00:00:0.00

P/Halley, ekliptikale *Kepler*elemente bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0:

Halbachse	a = 2684217919.0000 km
Exzentrizität	e = 0.967279234
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i = 162°.239212
eklipt. Länge aufsteig. Knoten	Ω = 58°.143695
Argument des Perihels	ω = 111°.847256
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_0 = 0°.0
Epoche t_0 :	1986-02-09/23:00:0.00

Während der Vorbereitung der Giotto Mission war die Sonnensonde Helios 1 noch in Betrieb und musste noch mit den Antennen zur Beobachtung interplanetarer Missionen beobachtet werden. Aus diesem Grund musste diese Bahn in die Untersuchungen einbezogen werden:

Helios 1, ekliptikale *Kepler*elemente bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0:

Halbachse	a = 96810322.391 km
Exzentrizität	e = 0.521699686
Inklination (bzgl. Ekliptik)	i = 0°.0249406
eklipt. Länge aufsteig. Knoten	Ω = 79°.5632522981
Argument des Perihels	ω = 178°.6312961597
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_0 = 249°.2098906816
Epoche t_0 :	1982-05-01/00:00:0.00

Bild 30-10 zeigt, dass die Bahn der Kometensonde Giotto im Wesentlichen innerhalb der Erdbahn verläuft, da der Encounter der Sonde mit dem Kometen innerhalb der Erdbahn erfolgen

soll um eine große Aktivität des Kometen in der Nähe der Sonne beobachten zu können. Entsprechend wurde die Sonde beim Einschuss gegenüber der Erdbewegung abgebremst. Sie bleibt somit gegenüber der Erde zurück, was aus den Zeitzuordnungen abgelesen werden kann. Die Sonde begegnet dem Kometen, der sich mit der Bahninklination i=162° auf einer rückläufigen Bahn befindet mit der Relativgeschwindigkeit von etwa $\Delta V \approx 69\,\text{km/s}$. Bild 30-11 zeigt denselben Sachverhalt jedoch aus einer Sicht unter der ekliptikalen Breite $b = 5°$, wodurch die räumliche Dimensionierung des Vorganges zu erkennen ist. ◄

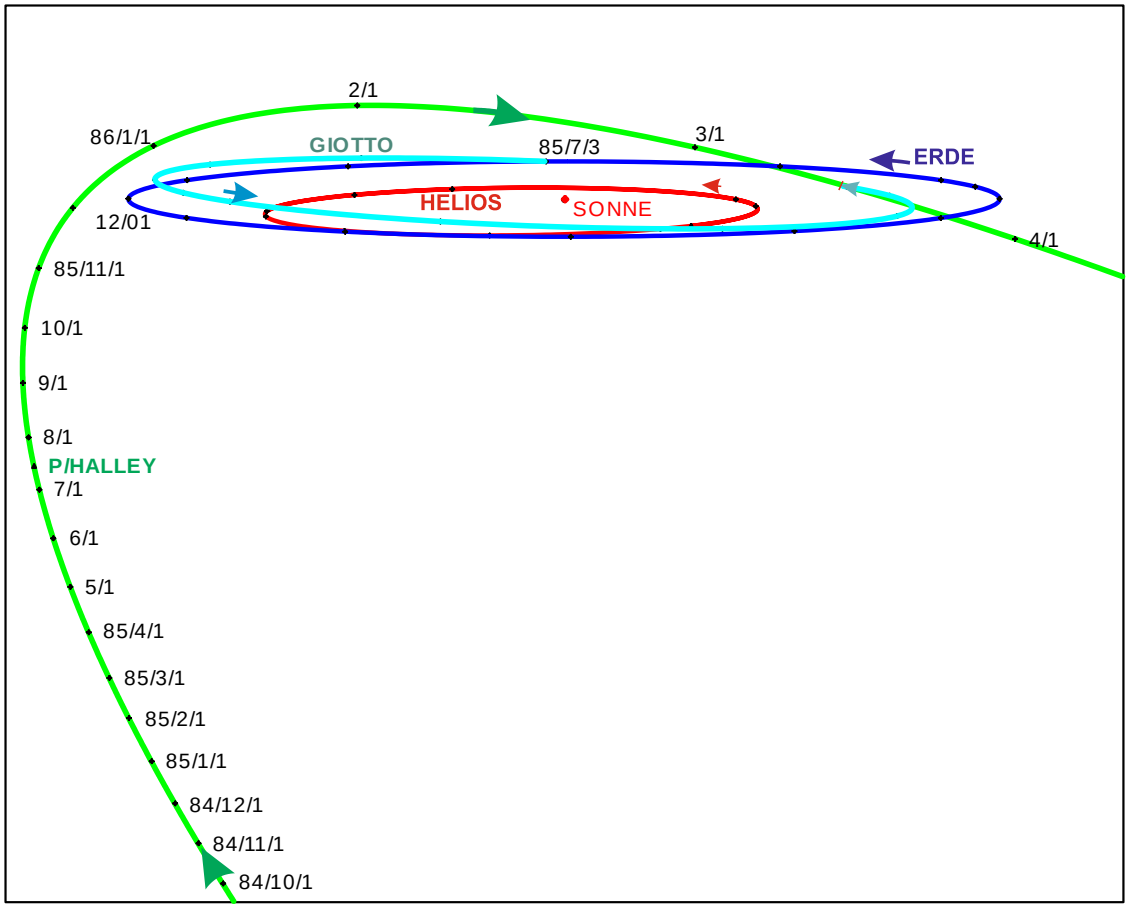


Bild 30-11: Die heliozentrischen Bahnen der Erde, der Kometensonde Giotto und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 in realistischen Größenverhältnissen dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde Helios 1 ist angedeutet. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik ist unter der ekliptikalen Breite $b = 5°$ und lässt die Neigung mit i = 162° und entsprechender Rückläufigkeit der Kometenbahn erkennen.

BEISPIEL 3: Auf interplanetaren Missionen, die in den Asteroidengürtel eindringen bzw. durchqueren, ist es üblich im Vorbeiflug einen oder mehrere der Kleinen Planeten zu beobachten. Die Galileo-Mission 1991 wurde deshalb zu den Kleinen Planeten 951 Gaspra und 243 Ida gelenkt[1]. Allerdings ist der Zwischenraum zwischen den Kleinen Planeten auch im Asteroidengürtel relativ groß, so dass es notwendig ist, bei einer sorgfältigen Missionsplanung bestimmte Objekte gezielt anzusteuern.

Bild 30-12 aus einer Studie für eine Mission zum Kleinen Planeten 4 Vesta zeigt im Verlauf der Missionszeit, wie die Sonde in den Asteroidengürtel eindringt und einigen Kleinen Planeten

[1] Siehe Bild 1-1 im Vorwort zu Band I

begegnet. Die Kleinen Planeten, in deren Nähe die Sonde kommt werden nach ihrer Größe klassifiziert. Ein weiterer Charakterisierungspunkt ist die geophysikalische Zusammensetzung neben weiteren Punkten von Interesse, welche die Auswahl eines geeigneten Objektes einschränken. „Zufällig“ darf also kein interessantes Objekt im Vorbeiflug erwartet werden. ◄

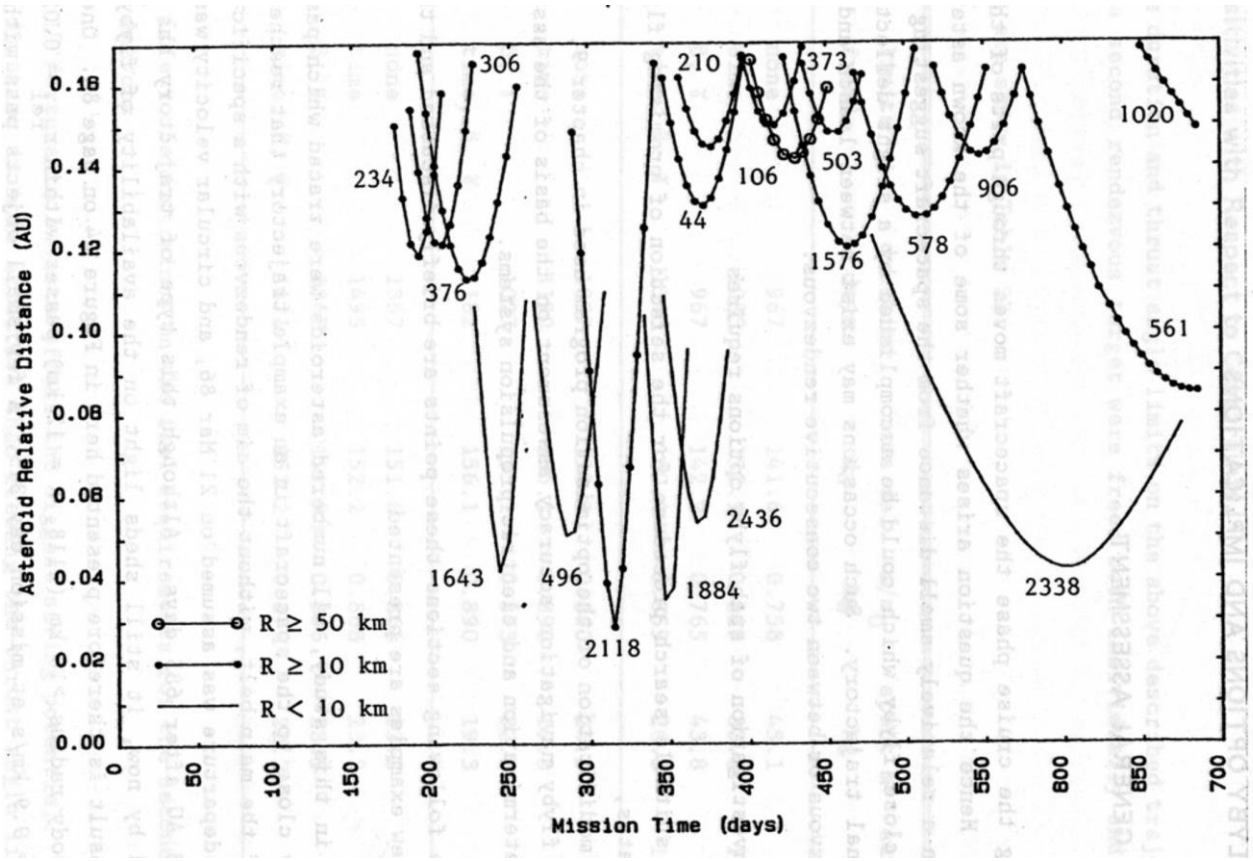


Bild 30-12: Mögliche nahe Begegnungen einer Raumsonde mit einigen Asteroiden (Bild aus einer Studie[1] einer mit Ionentriebwerken angetriebenen Probe zum Kleinen Planeten 4 Vesta). Die in Frage kommenden Kleinen Planeten sind nach ihrer Größe klassifiziert.

30.7.2 Erdbezogene Bewegung

Die Beobachtung interplanetarer Bewegungen von der Erde aus erscheint völlig anders, als die „physikalisch richtige“ heliozentrische Darstellung vorgibt. Der Bezug auf die bewegte Erde muss mit Hilfe der Planeten-bezogenen synodischen Bewegung durchgeführt werden. Dazu wird die Verbindungstrecke der Sonne zur mittleren Erde mit der mittleren tropischen Bewegung $n_\odot$ (der Unterschied zur siderischen Bewegung wird vernachlässigt) um die Sonne bewegt. Dadurch erscheint die Bewegung der wahren Erde als kleine Ellipse um den Ort der mittleren Erde. Bei gröberen Darstellungen schrumpft diese Ellipse zu einem Punkt zusammen

[1] Kopie aus: ECKSTEIN, M. C. et al. [1983]

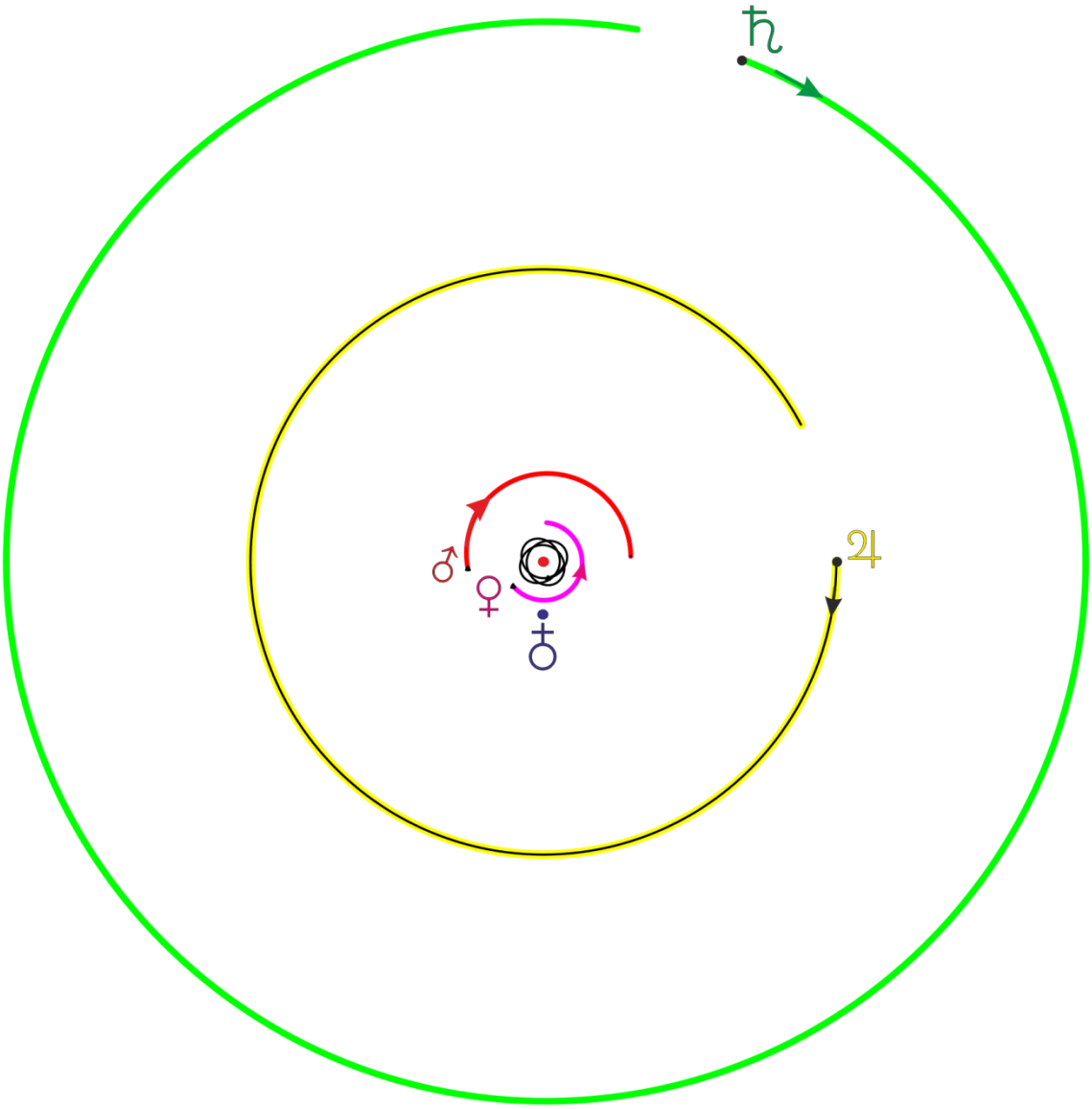


Bild 30-13: Die geozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Saturn über ein irdisches siderisches Jahr, richtige Größenverhältnisse

Bild 30-13 zeigt die synodischen Bewegungen der Planeten Merkur bis Saturn über den Zeitraum eines siderischen Jahres der Erde. Die Erdbahn erscheint als Punkt, die scheinbaren Bahnen der Planeten sind nicht geschlossen was eine Folge der Tatsache ist, dass die synodischen Umläufe der Planeten alle größer als die siderische Umlaufzeit der Erde sind. Insbesondere fällt auf, dass die scheinbare Bewegung der Venus (ebenso wie die des Merkur, was aber in der groben Darstellung nicht zu erkennen ist) rechtläufig im Sinne der Bewegung aller Planeten erfolgt, die äußeren Planeten sich alle scheinbar rückläufig bewegen. Dies ist mit der mittleren synodischen Bewegung aus Formel (30.143) (auf Seite 453) zu erklären:

$$n_S = n_{sP} - n_{\odot} \quad . \tag{30.147}$$

Die Bewegung eines Planeten erscheint

$$\begin{aligned} &\text{rechtläufig bei inneren Planeten mit} \quad n_S > 0 \\ &\text{rückläufig bei äußeren Planeten mit} \quad n_S < 0 \quad . \end{aligned} \tag{30.148}$$

Bild 30-14 schließt in Ergänzung zu dem vorstehenden Bild auch die äußeren Planeten Uranus und Neptun sowie den Zwergplaneten Pluto ein. Auch hier zeigt sich im Verlauf eines irdischen siderischen Jahres keine geschlossene Bahn für die scheinbare Bewegung der Planeten.

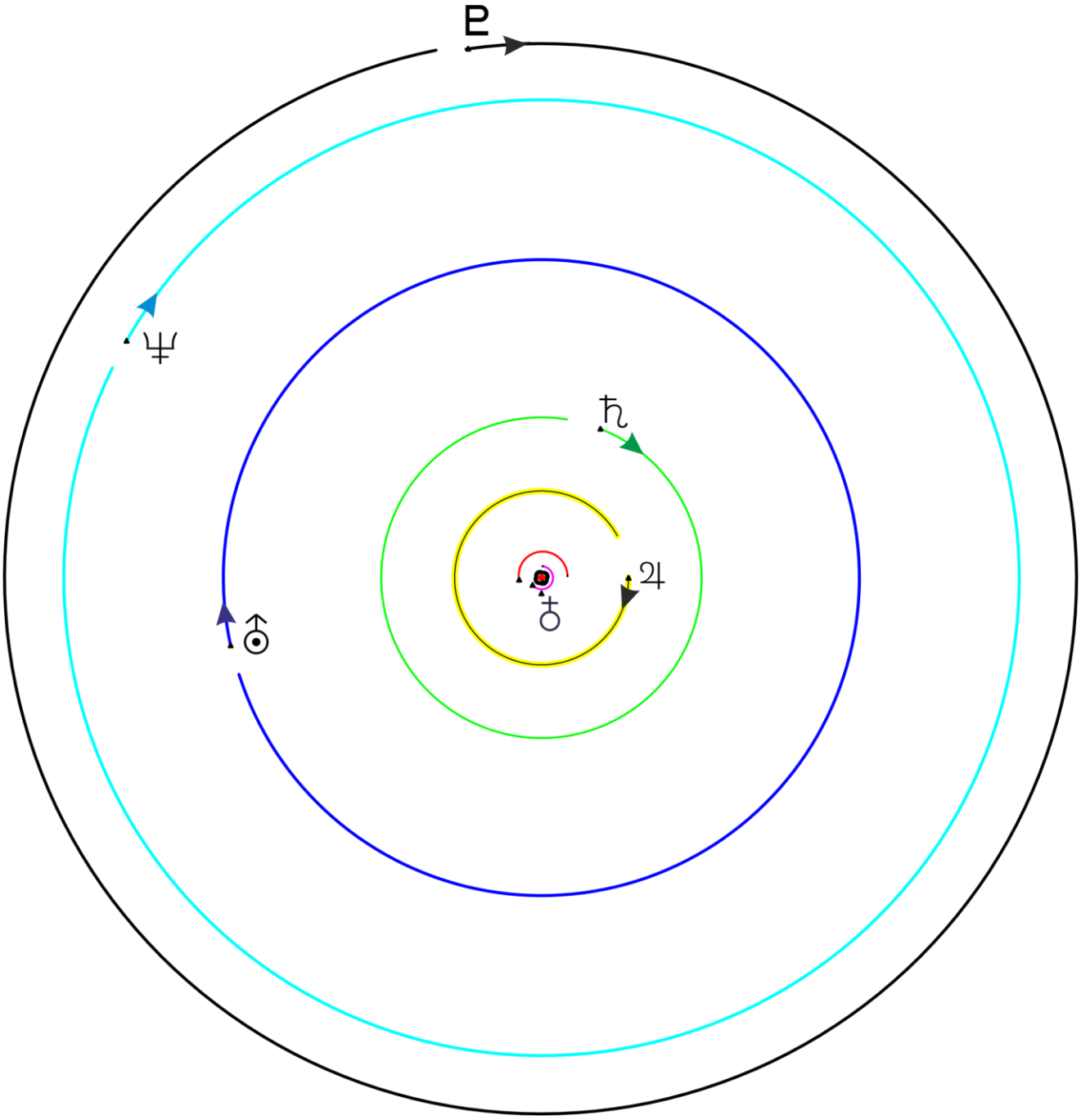


Bild 30-14: Die geozentrischen Bahnen der Planeten Merkur bis Zwergplanet Pluto über ein irdisches siderisches Jahr, beginnend am 1. Januar 2017; richtige Größenverhältnisse

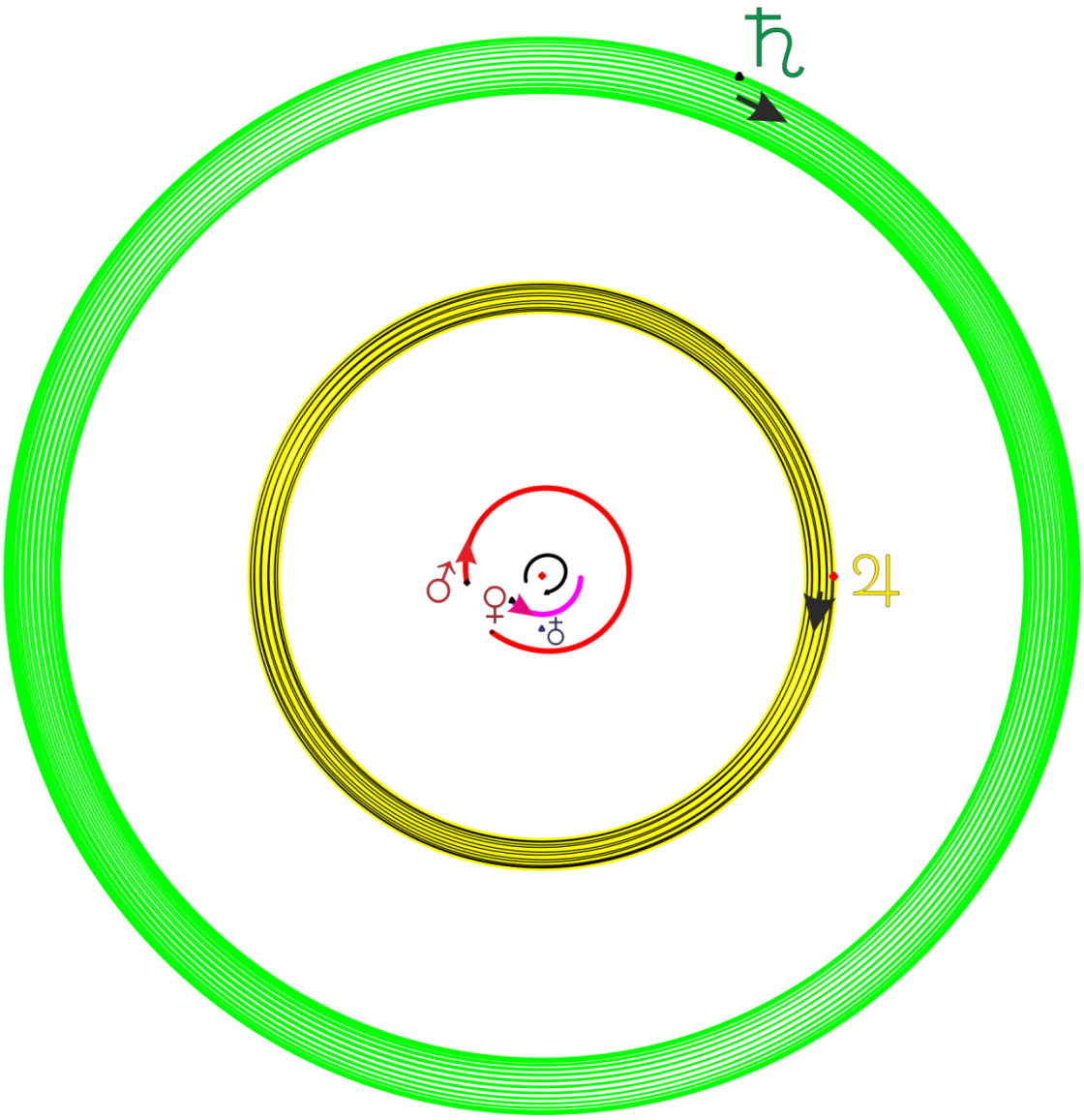


Bild 30-15: Die erdbezogenen synodischen Bewegungen der Planeten Merkur bis Saturn über je einen siderischen Umlauf eines jeden Planeten, beginnend am 1. Januar 2017

In Erweiterung der bisherigen Darstellungen wird in Bild 30-15 und Bild 30-16 die Bewegung der betrachteten Planeten über je einen siderischen Umlauf aufgetragen. Die (scheinbaren) Bahnen der Planeten Merkur bis Mars sind nicht geschlossen. Wie aus Tabelle 30-3 (auf Seite 454) entnommen werden kann ist Ursache dafür die Tatsache, dass für diese Planeten die siderische Umlaufzeit kleiner als ihre synodische Umlaufzeit ist. Anders ist es für die äußeren Planeten. Hier übertrifft die siderische Umlaufzeit wesentlich die synodische Umlaufzeit. Zum Beispiel entsprechen bei Saturn etwa 31 synodische Umläufe bei Bezug auf die Erde einem siderischen Umlauf um die Sonne. Entsprechend der Exzentrizität der Saturnbahn sind die scheinbaren synodischen Umläufe in einem breiten Band zu erkennen. Noch extremer trifft dies für den Zwergplaneten Pluto zu. Bei ihm sind es 247 synodische Umläufe für einen siderischen Umlauf. Wegen der großen Exzentrizität ist das scheinbar überdeckte Gebiet erschreckend groß. Man beachte aber in allen Darstellungen die korrekte Größenordnung.

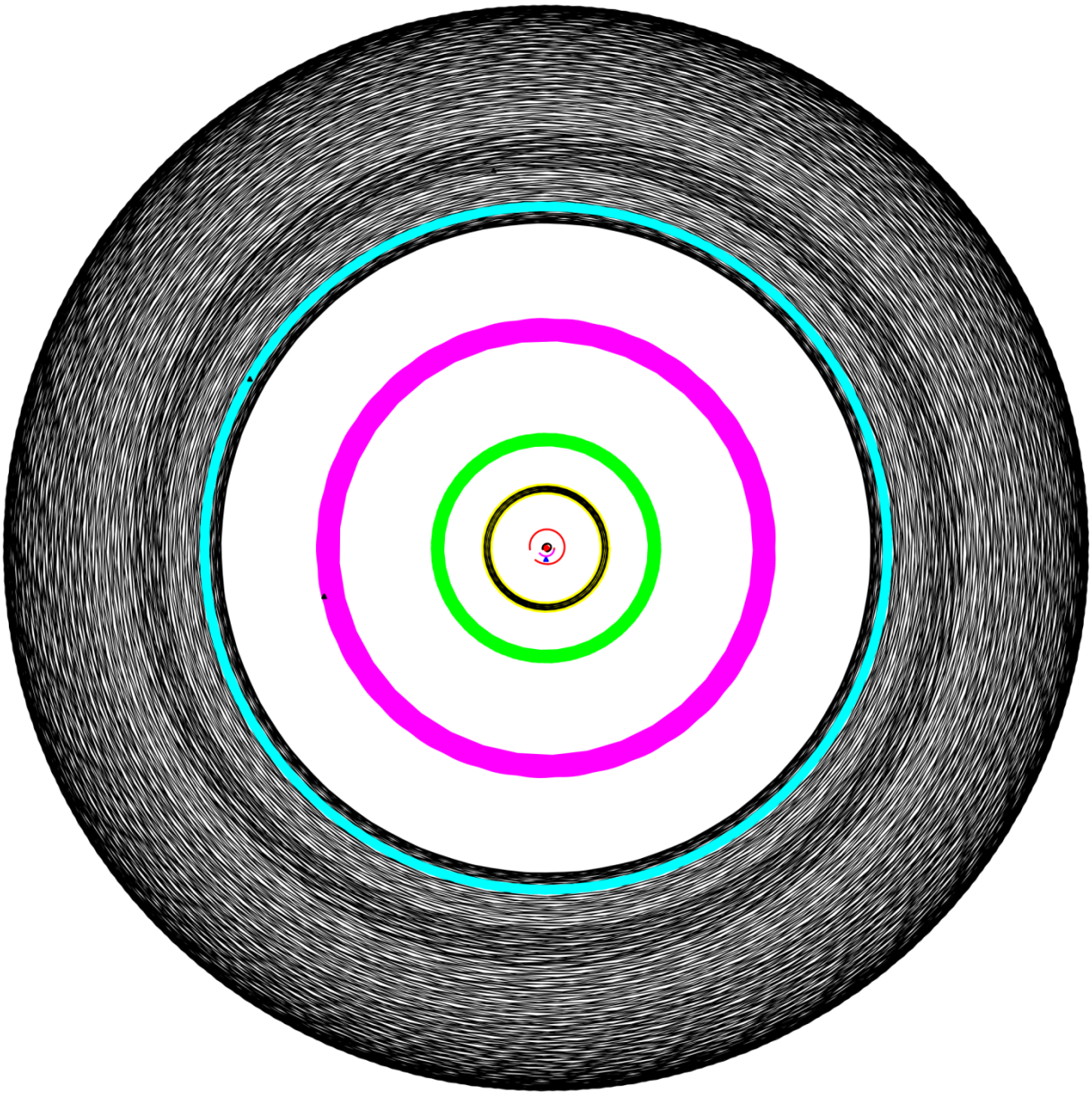


Bild 30-16: Die erdbezogenen synodischen Bewegungen der Planeten Merkur bis Zwergplanet Pluto über je einen siderischen Umlauf eines jeden Planeten, beginnend am 1. Januar 2017

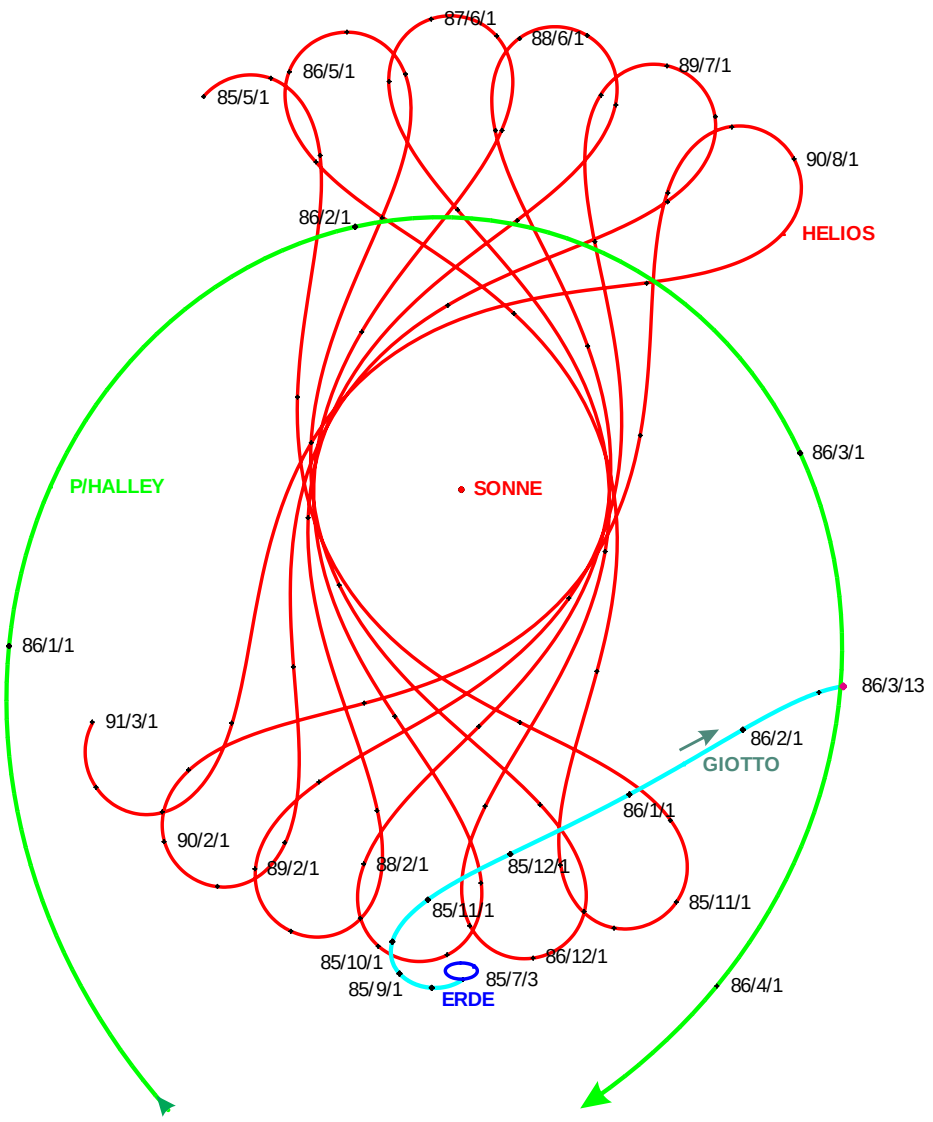


Bild 30-17: Die geozentrischen Bahnen der wahren Erde, der Kometensonde Giotto und des Kometen P/Halley sind bis zum Encounter am 13. März 1986 dargestellt. Die Bahn der Sonnensonde Helios 1 ist zur Ergänzung eingetragen. Die Blickrichtung auf die Ebene der Ekliptik erfolgt vom Nordpol der Ekliptik

Als letztes Beispiel soll Bild 30-17 in Ergänzung zu Bild 30-10 (bzw. Bild 30-11) die erdbezogene Bewegung der Kometensonde Giotto und ihrer Begegnung mit dem Kometen P/Halley dargestellt werden. Der Hintergrund für eine solche Darstellung ist die Notwendigkeit die Beobachtung der interplanetaren Mission mit der Beobachtung von einer Bodenstation aus zu koordinieren. In diesem Fall einer detaillierten Darstellung des inneren Bereiches des Sonnensystems ist die Ellipse der wahren Erde bei Bezug auf die mittlere Erde gut zu erkennen. Die beobachtende Antenne kann dem Lauf der Kometensonde gut folgen. Die scheinbare Bahn der Kometensonde ist von der Antenne aus gesehen etwa zwei Monate nach Einschuss bis zum Encounter nahezu geradlinig. Die Bedingung für die Beobachtung des Kometenschweifes ist optimal. Die Bahn des Kometen, die in Wirklichkeit fast parabolisch ist, erscheint hier fast kreisnah. Auffällig ist die scheinbare Bahn der Sonnensonde Helios 1, die in dieser Darstellung der erdbezogenen Bewegung als rotierende Doppelacht erscheint. Die Darstellung erlaubt die Abschätzung, ob eine Beobachtung der Kometensonde mit der Beobachtung der Sonnensonde kollidieren könnte

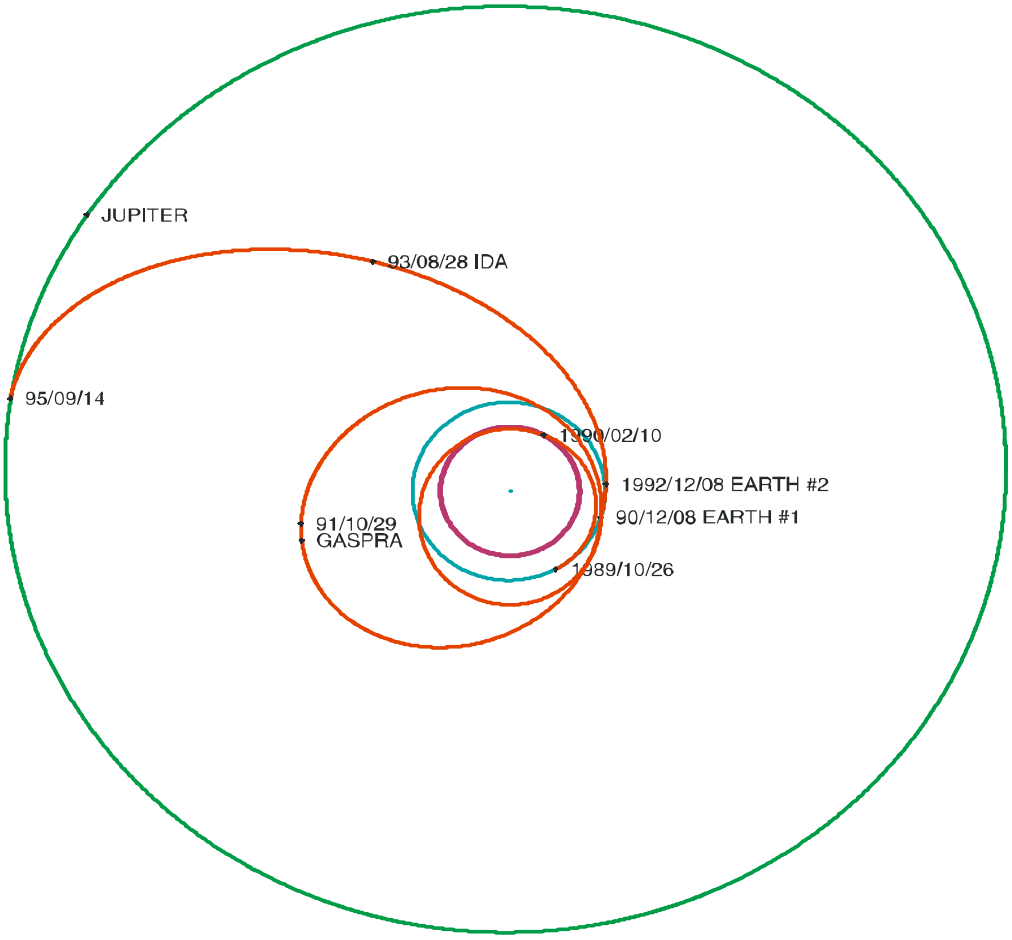


Bild E1: Die interplanetare Transferbahn der Galileo Sonde von der Erde zum Jupiter mit Swing-By Manövern an Venus und zweimal an der Erde und Vorbeiflügen an den kleinen Planeten Gaspra und Ida

Die Bedeutung des *Newton*schen Gesetzes im Hinblick auf die mathematische Behandlung der Satellitenbewegung liegt darin, dass es als erstes über die *Kepler*bewegung in der speziellen Form als Zweikörperbewegung hinauswies und wie *I. Newton* selbst schon erkannte, den Weg zum n-Körperproblem öffnete. Dieses kann, wie *H. Poincaré* 1899 nachweisen konnte, mit den bisher bekannten Methoden der Mathematik nicht analytisch exakt gelöst werden. Den Weg zu einer mathematischen Behandlung wies *L. Euler* durch seine Methode der „Variation der Konstanten". Diese Methode kann in einem sehr allgemeinen Sinn verwendet werden, da sie gestattet die Satellitenbewegung von jeder beliebigen Anpassungskurve ausgehend durch „Anpassung" an die Beobachtung der physikalischen Realität zu beschreiben. Dazu können alle beobachteten Einflüsse auf die Bewegung berücksichtigt werden. Diese Einflüsse werden in der klassischen Himmelsmechanik, da sie die Zweikörperbewegung verändern („stören"), als „Störeinflüsse" oder gar als „Störungen" bezeichnet, die aus der Methode der „Variation der Konstanten" folgenden Variationsgleichungen für die Parameter der Bewegungen als „Störgleichungen". Es kann nachgewiesen werden, dass die Methode der „Variation der Konstanten" in

der Form der *Lagrange* Bedingung („Lagrange constraint“) mathematisch mit den von *P. A. Hansen* [1857] eingeführten „idealen Koordinaten“ begründet werden können[1].

30.8 Die Beobachtung interplanetarer Bewegungen

In diesem Abschnitt werden einige spezielle Parameter zur Beobachtung interplanetarer Bewegungen untersucht.

30.8.1 Geozentrische Distanzen und Lichtzeit interplanetarer Objekte

Die geozentrischen Distanzen (in der Dimension 1 Astronomische Einheit) werden mit Kenntnis der entsprechenden heliozentrischen Ortsvektoren berechnet:

$$\rho = \left| \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{\oplus} \right| \quad . \tag{30.149}$$

Entsprechend folgt die Lichtzeit mit der (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit aus

$$\tau = \frac{\rho}{c} \quad . \tag{30.150}$$

BEISPIEL: Die geozentrischen Distanzen der Planeten sind für die Jahre 2017-2018 in Bild 30-18 berechnet. Die entsprechenden Lichtzeiten, die zur Reduktion der Beobachtungen benötigt werden, sind in Bild 30-19 für die Planeten Jupiter bis Pluto mit der Dimension in Stunden berechnet. Die Lichtzeiten der erdnahen Planeten Merkur, Venus, sind mit der Dimension Minute in Bild 30-20 aufgetragen.

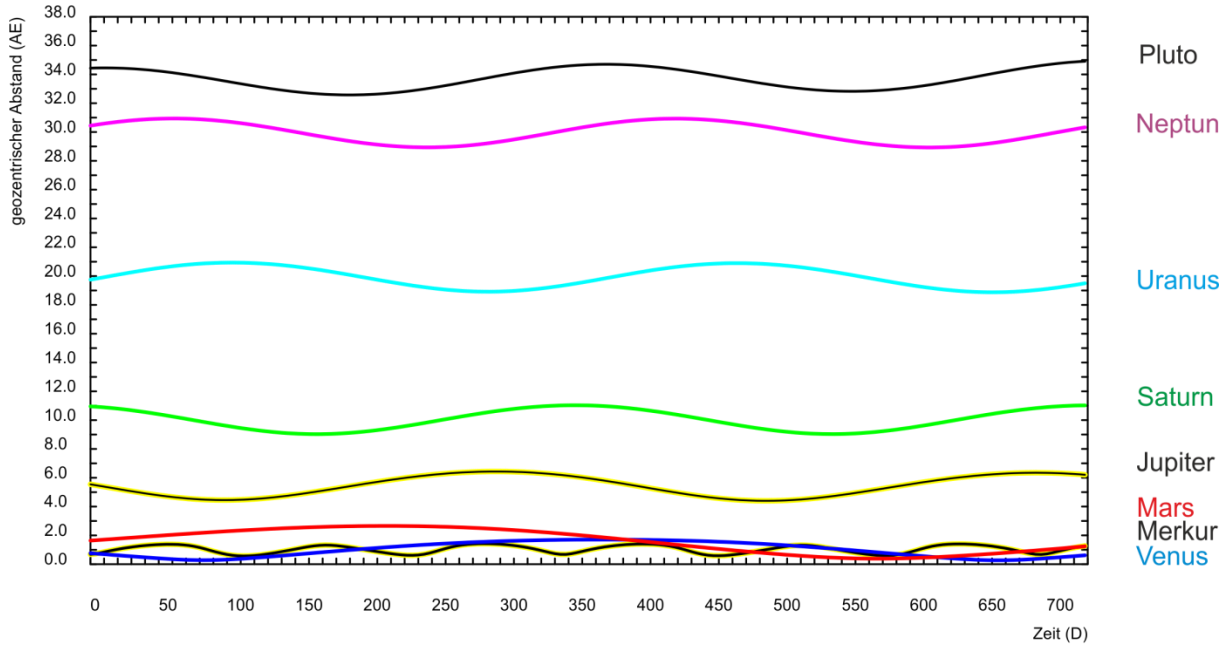


Bild 30-18: Geozentrische Distanzen der Planeten sowie des Zwergplaneten Pluto von der Erde in den Jahren 2017-2018

[1] JOCHIM, E.F. [2011], JOCHIM, E.F. [2012], detailliert in JOCHIM, E. F. M. [2016 b] in den Abschnitten 4.3.10 und 4.4.7 . EFROIMSKY, M. [2011]

Die Zahlenwerte zur Beschreibung der großen Schwankungen in geozentrischer Entfernung und Lichtzeit sind:

Mars: $\rho_{\min} = 0.3847147\ \text{AE}$, $\tau_{\min} = 3.199575\ \text{min}$, $\rho_{\max} = 2.658167\ \text{AE}$, $\tau_{\max} = 22.10730\ \text{min}$

Venus: $\rho_{\min} = 0.2721882\ \text{AE}$, $\tau_{\min} = 2.263720\ \text{min}$, $\rho_{\max} = 1.711033\ \text{AE}$, $\tau_{\max} = 14.23022\ \text{min}$

Merkur: $\rho_{\min} = 0.5683169\ \text{AE}$, $\tau_{\min} = 4.726548\ \text{min}$, $\rho_{\max} = 1.426142\ \text{AE}$, $\tau_{\max} = 11.86086\ \text{min}$

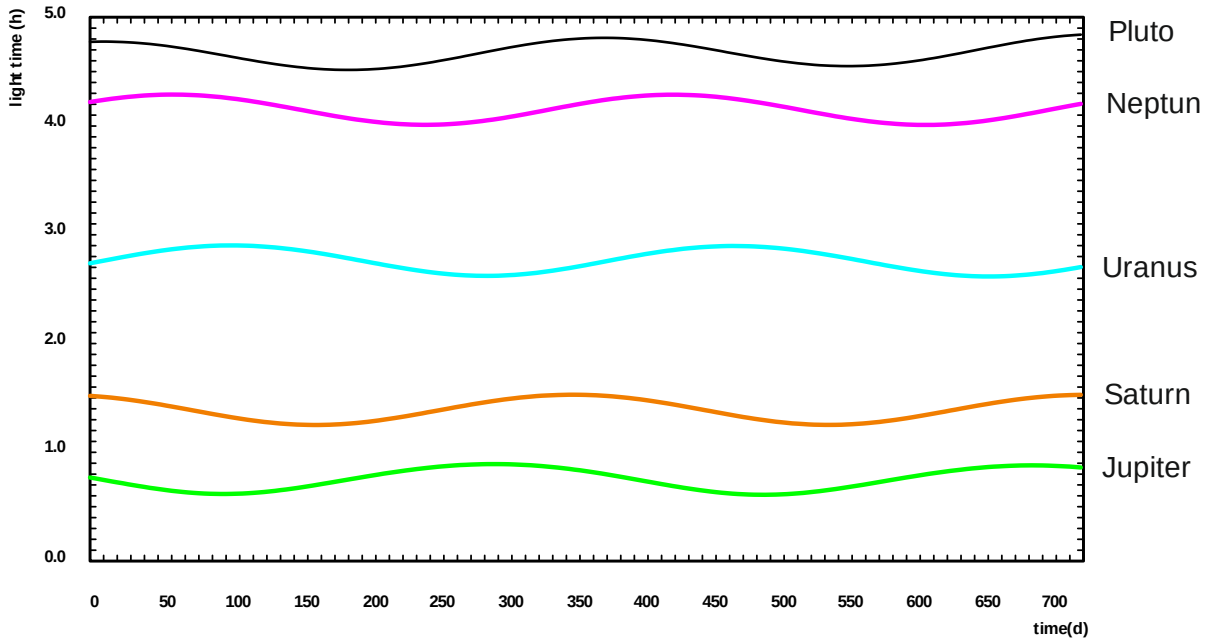


Bild 30-19: Lichtzeit (Stunden) zwischen der Erde und den äußeren Planeten inclusive den Zwergplaneten Pluto in den Jahren 2017-2018

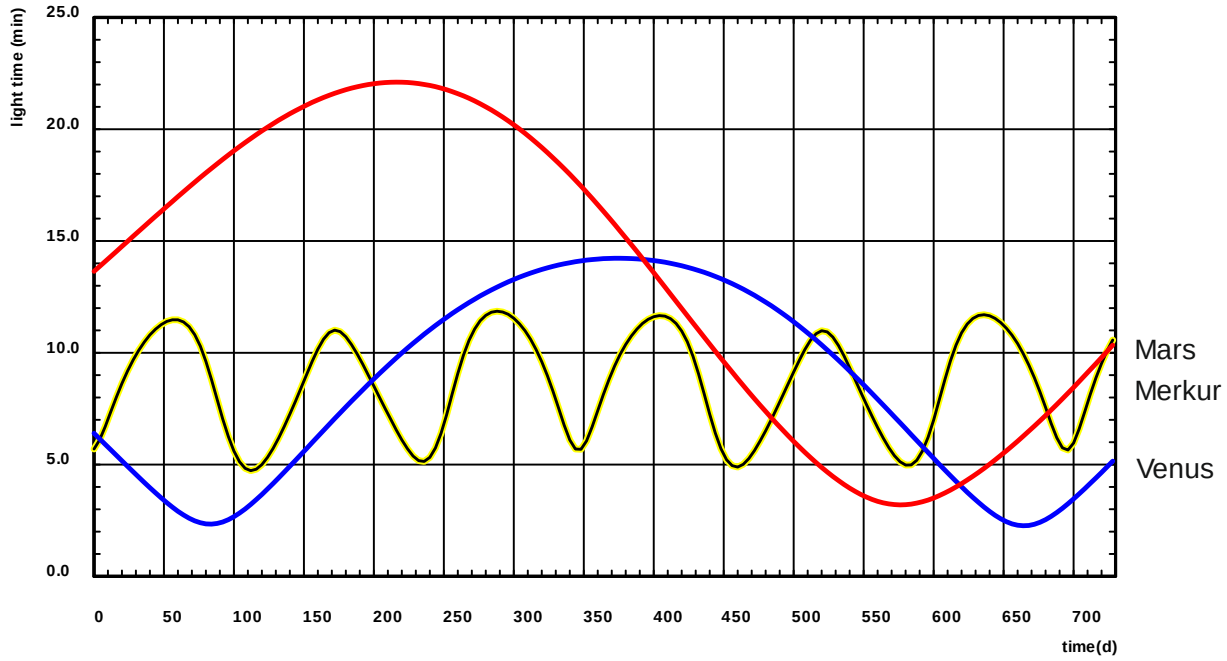


Bild 30-20: Lichtzeit (Minuten) zwischen der Erde und den inneren Planeten sowie Mars in den Jahren 2017-2018 ◀

30.8.2 Interplanetare Missionen von einer irdischen Station beobachtet

Infolge der Erdrotation sind zur lückenlosen Beobachtung interplanetarer Objekte grundsätzlich drei irdische Bodenstationen erforderlich.

BEISPIEL: Bild 30-21 zeigt die lückenlose Beobachtung des Mars über einen Tag (am 28. Juni 2017, U.T.) von den drei irdischen Bodenstationen Perth (Australien, grün), Weilheim (Bayern, rot), Goldstone (Kalifornien, blau). ◄

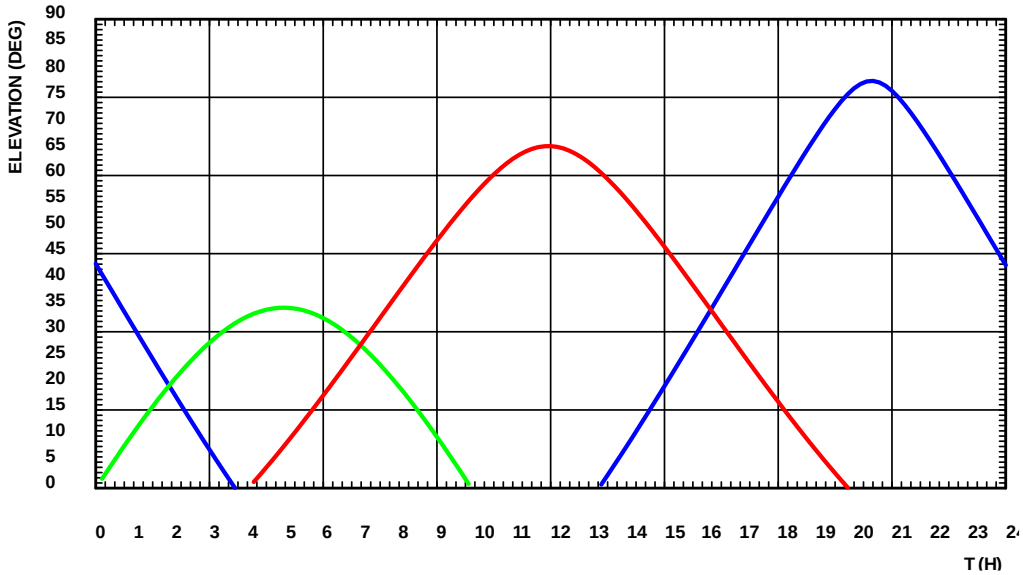


Bild 30-21: Beobachtung des Mars über einen Tag von den drei Bodenstationen Perth (grün), Weilheim (rot), Goldstone (blau)

30.8.3 Der Phasenwinkel interplanetarer Objekte

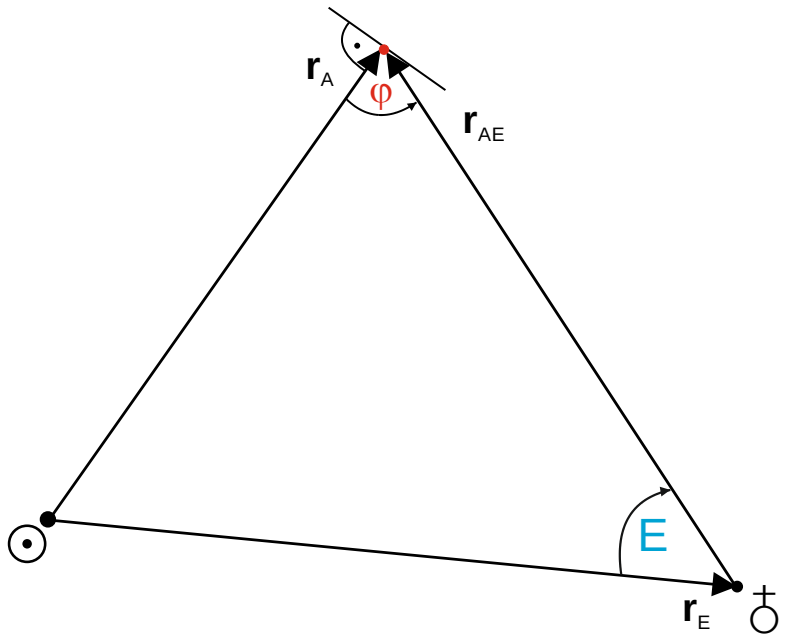


Bild 30-22: Zur Definition des Phasenwinkels φ und der Elongation E eines Planetenortes von der Sonne bei Bezug auf die Erde

Bei der Beobachtung eines interplanetaren Objektes wird als Phasenwinkel φ der Winkel zwischen den planetozentrischen Richtungen zur Sonne und zum Beobachtungsort bezeichnet

(siehe Bild 30-22). Damit kann eine Aussage etwa über die Beleuchtung des Objektes durch die Sonne und die Beobachtbarkeit der Wechselwirkungen der Sonnenstrahlung mit diesem Objekt wesentlich unterstützt werden.

BEISPIEL 1: Bild 30-23 zeigt den Verlauf des Phasenwinkels φ der großen Planeten sowie des Zwergplaneten Pluto über die zwei Jahre 2017 und 2018. Innere und äußere Planeten sind klar unterschieden.

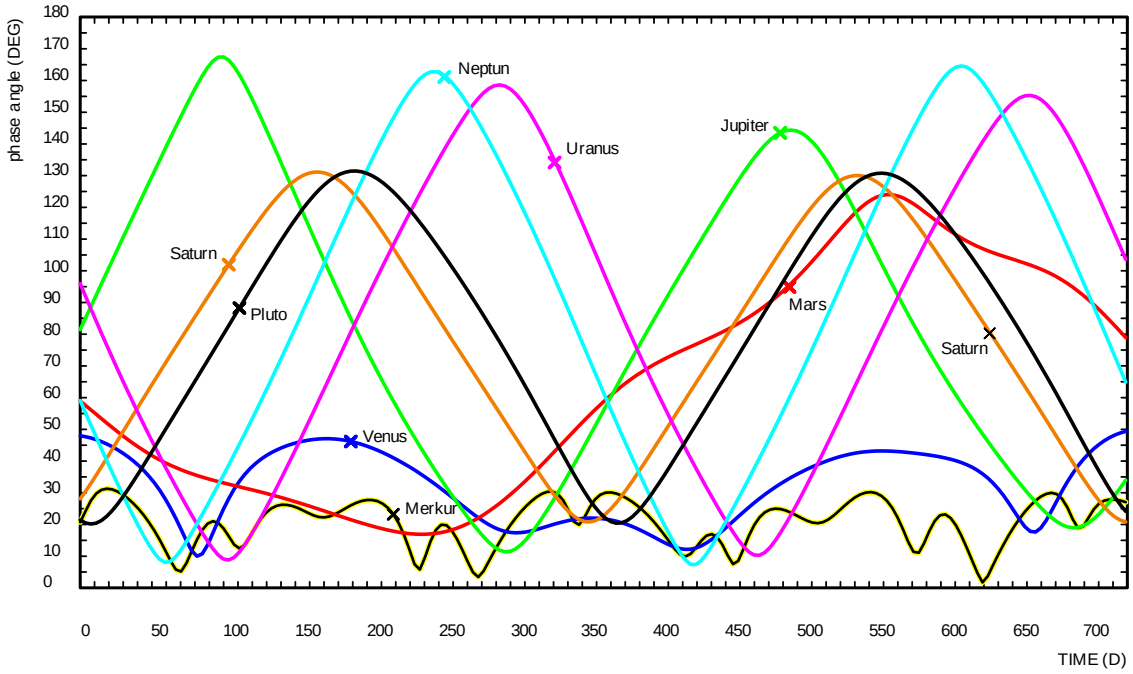


Bild 30-23: Verlauf des Phasenwinkels der großen Planeten in den Jahren 2017, 2018 bei Bezug auf die Beobachtung von der Erde aus

BEISPIEL 2: Beobachtung des Durchflugs einer Raumsonde durch den Schweif eines Kometen bei Beobachtung mit Antennen auf der Erde. Das Beispiel enthält die Begegnung[1] („encounter“) der Kometensonde Giotto mit dem Kometen P/*Grigg-Skjellerup* am 10. Juli 1992.

Die Kometensonde GIOTTO hatte zur Epoche t_0: 1992-07-10/15:18:43.6 die heliozentrischen äquatorialen kartesischen Koordinaten $\left(\mathbf{r}_{G\odot}, \dot{\mathbf{r}}_{G\odot}\right)$, bezogen auf das Fundamentalsystem zur mittleren Epoche 1949-12-31/22:09:07.2 (*Bessel*sche Epoche B1975.0)

[1] Alle Zustandsvektoren von ESOC: TREVOR MORLEY (6. Jan. 2003); MORLEY, T. [2003] *Acta Astronautica* 66 (2010) 309-330; SCHWEHM, G., T. MORLEY, H. BOENHARDT [1991]: ‘Giotto to Visit Comet P/Grigg-Skjellerup in 1992‘,www.eso.org/sci/publications/messenger/no.65-Sep.91/messenger-no65-37-39.pdf; http://sci.esa.int/giotto/31880-grigg-skjellerup/

$$x_{G\odot 1} = -142124192.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{G\odot 1} = 10.784293 \text{ km/s}$$
$$x_{G\odot 2} = -37003540.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{G\odot 2} = -26.534798 \text{ km/s}$$
$$x_{G\odot 3} = -31707948.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{G\odot 3} = -10.865080 \text{ km/s}$$

Der Komet P/*Grigg-Skjellerup* hatte zur selben Epoche 1992,07,10/15:18:43.6 den ebenfalls auf die dieselbe *Bessel*sche Epoche (B1950.0) bezogenen heliozentrischen äquatorialen Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{C\odot}, \dot{\mathbf{r}}_{C\odot}\right)$

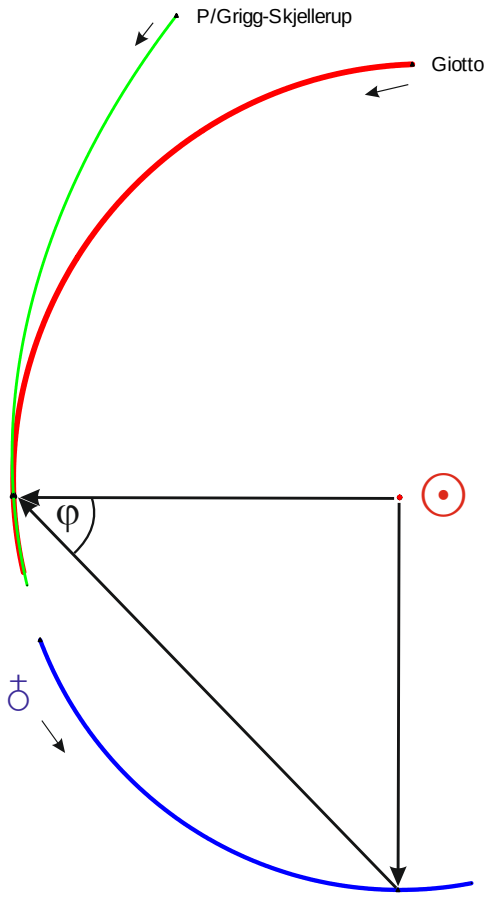


Bild 30-24: Die Bewegung des Kometen Grigg-Skjellerup, der Kometensonde Giotto und der Erde vom 1. Mai 1992 bis einige Tage nach dem Encounter der Sonde mit dem Kometen, gesehen vom Nordpol der Ekliptik. Für den Moment des Encounters am 10. Juli 1992 ist der Phasenwinkel eingezeichnet

$$x_{C\odot 1} = -142124182.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{C\odot 1} = 13.647338 \text{ km/s}$$
$$x_{C\odot 2} = -37003531.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{C\odot 2} = -35.692948 \text{ km/s}$$
$$x_{C\odot 3} = -31707942.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{C\odot 3} = -0.682822 \text{ km/s}$$

Der heliozentrische äquatoriale Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{♁\odot}, \dot{\mathbf{r}}_{♁\odot}\right)$ der Erde zur selben Epoche t_0 und bezogen auf dieselbe *Bessel*sche Koordinatenepoche lautet

$$x_{♁\odot 1} = 47380110.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{♁\odot 1} = 27.832484 \text{ km/s}$$
$$x_{♁\odot 2} = -132226708.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{♁\odot 2} = 8.367410 \text{ km/s}$$
$$x_{♁\odot 3} = -57343476.0 \text{ km} \quad , \quad \dot{x}_{♁\odot 3} = 3.626565 \text{ km/s}$$

Um hochgenaue Berechnungen zu ermöglichen wurde auch der baryzentrische äquatoriale Zustandsvektor $\left(\mathbf{r}_{\odot\mathrm{B}}, \dot{\mathbf{r}}_{\odot\mathrm{B}}\right)$ der Sonne bei Bezug auf dieselbe Epoche t_0 und dieselbe Besselsche Fundamentalepoche zur Verfügung gestellt:

$$x_{\odot B1} = 366296.0\,\mathrm{km} \quad , \quad \dot{x}_{\odot B1} = 0.000066\,\mathrm{km/s}$$
$$x_{\odot B2} = 470474.0\,\mathrm{km} \quad , \quad \dot{x}_{\odot B2} = 0.008841\,\mathrm{km/s}$$
$$x_{\odot B3} = 190814.0\,\mathrm{km} \quad , \quad \dot{x}_{\odot B3} = 0.003848\,\mathrm{km/s}$$

Mit diesen Bahnparametern werden die Bahnen des Kometen, der Sonde und der Erde in Bild 30-24 als *Kepler*bahnen gerechnet. Der Moment des Encounters der Sonde mit dem Kometen ist eingetragen. Der Sichtstrahl Erde-Sonde durchdringt den Schweif des Kometen. Der Phasenwinkel, der zur Beurteilung dieses Vorganges erforderlich ist, wird berechnet aus

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{r}_{G\odot} \cdot \left(\mathbf{r}_{G\odot} - \mathbf{r}_{♁\odot}\right)}{\left|\mathbf{r}_{G\odot}\right| \cdot \left|\mathbf{r}_{G\odot} - \mathbf{r}_{♁\odot}\right|} \quad . \tag{30.151}$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich: $\varphi = 45°.24955790$. ◀

30.8.4 Die Elongation interplanetarer Objekte

Als Elongation bei der Beobachtung interplanetarer Objekte wird der geozentrische Winkel zwischen der Richtung zur Sonne und dem Planeten bezeichnet (siehe Bild 30-22 auf Seite 469). Dieser Winkel ist ein Maß für die Wechselwirkung zwischen Planet und Sonne. Zum Beispiel ist dieser Winkel ein wichtiger Parameter um die Helligkeit eines Planeten gesehen von der Erde aus abzuschätzen.

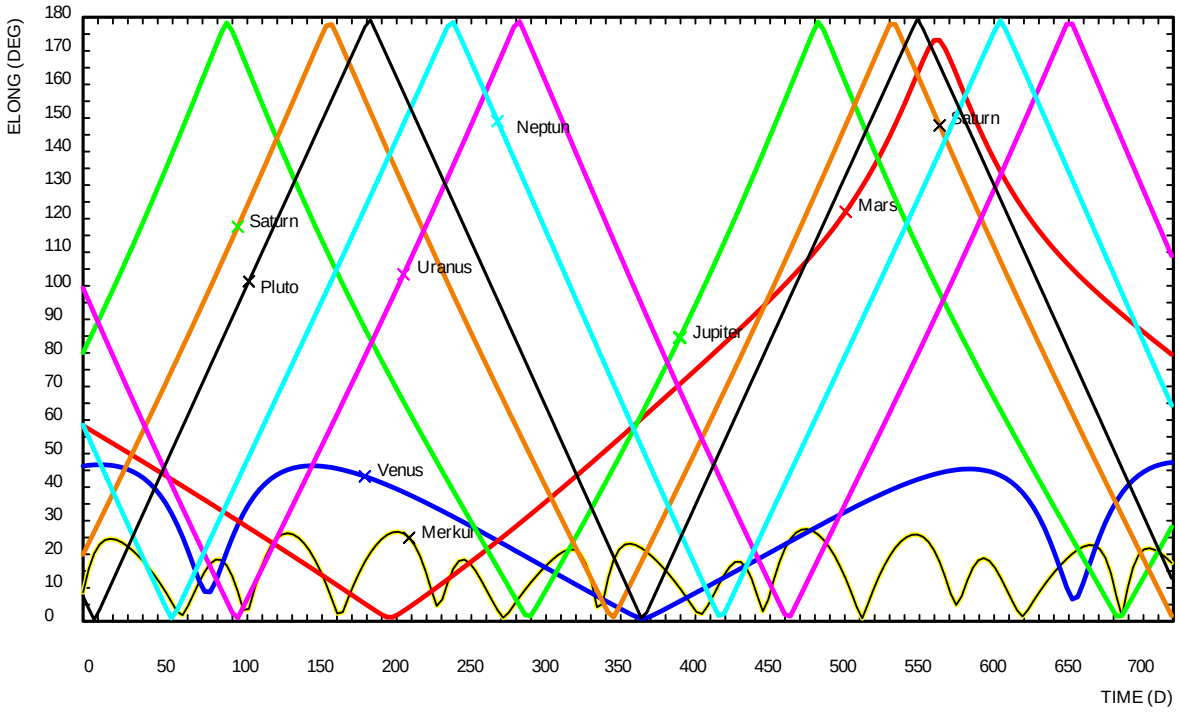


Bild 30-25: Die geozentrischen Elongationen der großen Planeten zur Sonne in den Jahren 2017 und 2018

BEISPIEL 1: Bild 30-25 zeigt die Elongationen zwischen den geozentrischen Richtungen zur Sonne und den Großen Planeten sowie zum Zwergplaneten Pluto über zwei Jahre. Die dazu benötigten Bahnelemente sind in Abschnitt 30.2.2 ab Seite 420 zusammengestellt.

BEISPIEL 2: Zur Darstellung der Elongationen einiger Kleiner Planeten (in Bild 30-26 auf Seite 474) werden folgende (ekliptikale) Bahnelemente verwendet[1]:

	1 Ceres	2 Pallas	3 Juno	4 Vesta
Große Bahnhalbachse a [km]	2.7656 AE ≙ 413727873.321	2.7709 AE ≙ 414643848.2896	2.6678 AE ≙ 399236304.2553	2.3610 AE ≙ 353200574.5265
Exzentrizität e	0.0784	0.2344	0.2583	0.0906
Inklination i bzgl. Ekliptik	10°.607	34°.797	12°.998	7°.139
eklipt. Länge Ω des aufsteigenden Knotens	80°.704	173°.328	170°.576	104°.019
Argument des Perihels ω	72°.045	309.784	246°.865	150°.335
Mittl. Anomalie zur Epoche M_0	200°.828	188.274	294°.390	294°.514
Epoche t_0	1988-08-27/0h	1988-08-27/0h	1987-07-24/0h	1988-08-27/0h

Tabelle 30-4: Mittlere ekliptikale *Kepler*elemente der ersten 4 Kleinen Planeten (einschließlich des Zwergplaneten 1 Ceres)

	243 Ida	951 Gaspra	2062 Aten	2100 Ra-Shalom
Große Bahnhalbachse a [km]	2.8608 AE ≙ 428115496.192	2.2102 AE ≙ 330635246.555	0.9664506 AE ≙ 144588355.147	0.832082 AE ≙ 124483641.355
Exzentrizität e	0.0420817	0.1733601	0.18251596	0.436471389
Inklination i bzgl. Ekliptik	1°.13586	4°.09901	18°.9313982	15°.7543432
eklipt. Länge Ω des aufsteigenden Knotens	323°.90828	252°.67577	108°.7238893	170°.98274711
Argument des Perihels ω	109°.60629	129°.22968	147°.838893	355°.9270889
Mittl. Anomalie zur Epoche M_0	41°.68377	173°.04378	274°.530270	68°.37959438
Epoche t_0	1987-07-24/0h	1987-07-24/0h	1987-07-24/0h	1987-07-24/0h

Tabelle 30-5: Mittlere ekliptikale *Kepler*elemente 4 unterschiedlicher Kleiner Planeten

[1] Daten aus T. GEHRELS [1979]

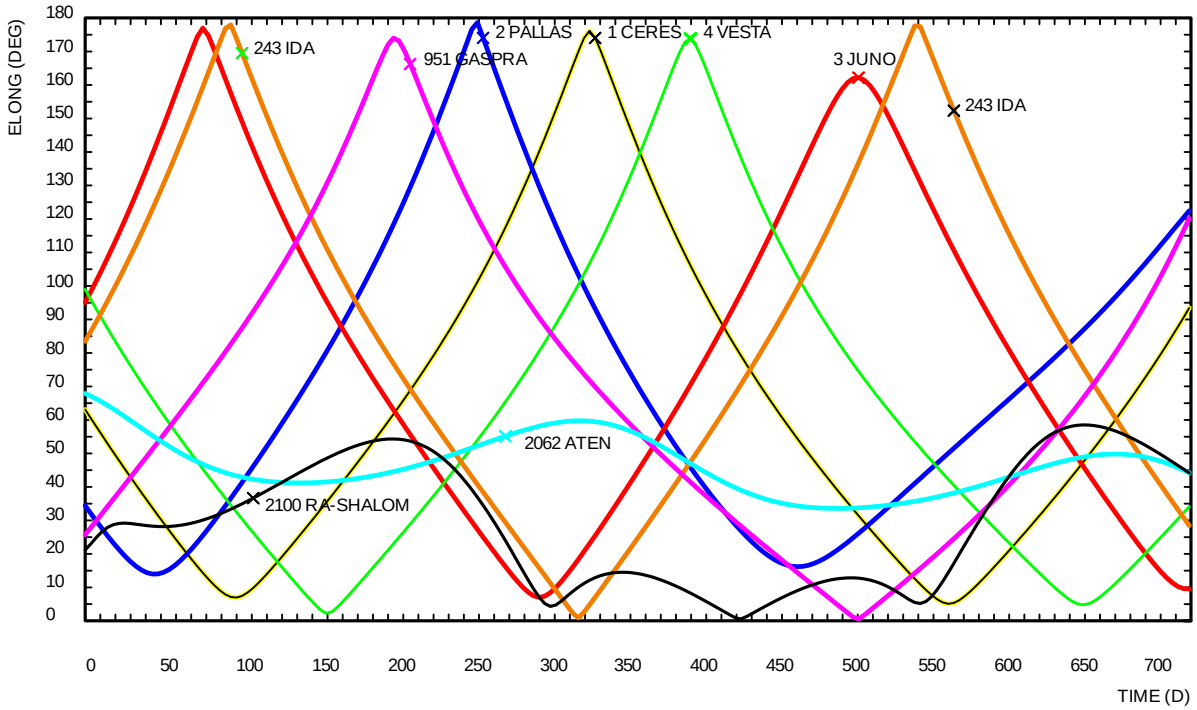


Bild 30-26: Die geozentrischen Elongationen einige Kleiner Planeten zur Sonne in den Jahren 1998 und 1999

30.9 Anmerkungen zur Bewegung von Raumsonden

Eine erschöpfende Beschreibung der Bewegung interplanetarer Objekte wird im vorliegenden Bericht nicht angestrebt. Einige wesentliche Aspekte (auf die im folgenden Abschnitt hingewiesen wird) finden sich in systematischem Zusammenhang in den ersten 4 Bänden der Satellitenbewegung.

30.9.1 Die Bewegung von Raumsonden

Die Beschleunigungsgleichungen interplanetarer Raumsonden unterscheiden sich in qualitativer Hinsicht von denen der Erdsatelliten. Primär handelt es sich dann um ein Mehrkörperproblem (siehe die Bewegungsgleichungen (10.105) bzw. (10.106) sowie (17.48) in Band III). Die hierzu benötigten Ephemeriden der Planeten können zur Zeit den JPL-Ephemeriden als bekannt entnommen werden. Je nach Form und Größe einer Sonde wirken sich der Strahlungsdruck der Sonne, eventuell der Sonnenwind, sowie spezielle Effekte aus (siehe in Kapitel 17, Band III), wobei die Einflüsse auf Satelliten und Raumsonden quantitativ sehr unterschiedlich ausfallen können[1].

[1] Siehe allgemeine Darstellungen und astrodynamische Basiswerke, etwa in BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1996], [1998]; auch BATTIN, R. H. [1987] (insbesondere Kapitel 14 “Space Navigation”); MURRAY, CARL. D. AND DERMOTT, STANLEY, F. [1999]; aber auch spezielle Werke, wie “Solar Sailing” von MCINNES, COLIN R. [1999]; jeweils unter Zitierung zahlreicher weiterführender Literatur

30.9.2 Natürliche und gesteuerte Beeinflussung der Bewegungen von Raumsonden

Neben der primären Beeinflussung einer interplanetaren Bahn durch die großen Körper des Sonnensystems können weitere Effekte die Bahn eines interplanetaren Objektes beeinflussen, wozu insbesondere Bahnmanöver von Raumflugkörpern zählen (ausführlich untersucht in Kapitel 12, Band III).

Es seien hier drei spezielle Effekte erwähnt:

1. Die Ablenkung der Bahn bei einem nahen Vorbeiflug an einem der großen Planeten. Dies wird bei Raumsonden zur gezielten Änderung der Bahn angewandt (Gravitationsmanöver, „Swing By“, siehe in Kapitel 12, insbesondere Abschnitt 12.9, Band III).

2. In diesem Zusammenhang kann etwa das *Tisserand* Kriterium auch für Raumsonden von Interesse sein. In diesem werden aus dem *Jacobi* Integral hergeleitete Bedingungen für die Halbachse a, die Exzentrizität e und die Inklination i vor und nach einem Flyby verglichen um auf diese Weise die Identität eines Objektes zu überprüfen (siehe in Abschnitt 2.7.18, Band I).

3. Ein ähnlicher Effekt ist der von *Y. Kozai* entdeckte „Kozai Effekt“. Danach sind die Exzentrizität und die auf die Jupiterbahnebene bezogene Inklination unter bestimmten Randbedingungen über die *Kozai-Konstante* gekoppelt. Hier kann es für große Inklinationen zu einer Resonanz kommen, die sich in einer Librationsbewegung des interplanetaren Objektes auswirkt. Die Folge kann auch ohne Swing By an einem großen Planeten die Zunahme der Exzentrizität sein, was etwa zu einer Absenkung des Perihels und dann Absturz in die Sonne oder zu einer Gefährdung für eine Kollision mit einem anderen Körper (etwa mit der Erde) führen kann (siehe in Abschnitt 2.10.3, Band I).

30.10 Distanz-Variationen interplanetarer Objekte

Topozentrische Entfernungsänderungen (“range-rate”) können mit Einweg- oder Zweiwegmessungen (Einweg-*Doppler*, Zweiweg-*Doppler*) gemessen werden. Zweiwegmessungen werden als stabiler bevorzugt, stehen aber nicht immer zur Verfügung. Unterschiede zwischen Einweg- und Zweiwegmessungen können physikalisch deutbar sein. Dies soll nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes sein. Im Folgenden wird eine mathematische Untersuchung dieses Problemkreises vorgestellt, wie derartige Unterschiede behandelt werden können.

30.10.1 Das Beobachter-System

Das $\mathbf{p}_i$ – Frühlingspunkt-bezogene Erdäquatorsystem werde als „inertiales“ Fundamentalsystem betrachtet[1]. Sein Eigenbewegungsvektor wird somit als Nullvektor definiert:

$$\mathbf{D}_p \equiv 0 \quad . \tag{30.152}$$

[1] Etwa bei Bezug auf die mittlere Fundamentalepoche J2000.0, siehe z.B. in Abschnitt 8.1.3 (Band II)

Auf dieses System werde das bewegliche $\mathbf{q}_j$ – Beobachter-System („T-System“ in Bild 30-28 auf Seite 477) bezogen. Dieses entsteht durch Drehung um die drei *Euler*-Winkel A, B, C mit Hilfe der Transformation

$$\mathbf{q}_j = a_j{}^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i \mathbf{q}_j \quad . \tag{30.153}$$

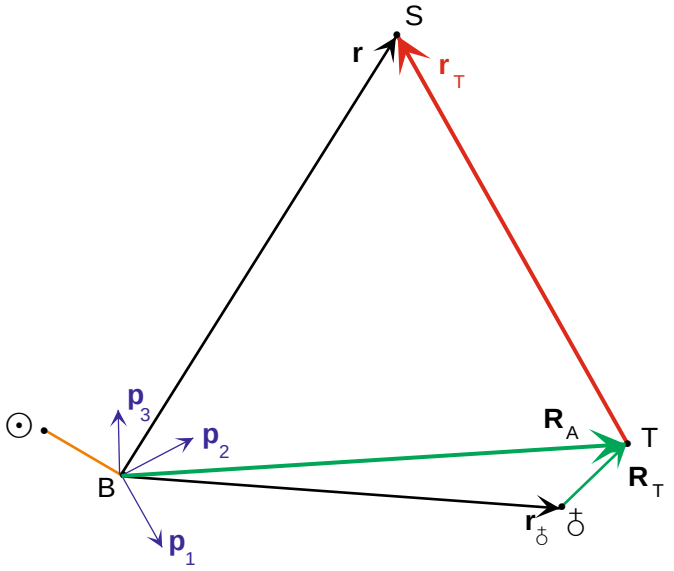


Bild 30-27: Ortsvektor der Raumsonde bezogen auf das Baryzentrum *B* des Sonnensystems, sowie auf den Ort *T* des Beobachters; ♁ bezeichnet den Mittelpunkt der Erde

Die Transformationskoeffizienten lauten[1]

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\cos B \sin C \sin A + \cos C \cos A \\
a_{12} &= \cos B \sin C \cos A + \cos C \sin A \\
a_{13} &= \sin B \sin C \\
a_{21} &= -\cos B \cos C \sin A - \sin C \cos A \\
a_{22} &= \cos B \cos C \cos A - \sin C \sin A \\
a_{23} &= \sin B \cos C \\
a_{31} &= \sin B \sin A \\
a_{32} &= -\sin B \cos A \\
a_{33} &= \cos B \quad .
\end{aligned} \tag{30.154}$$

Diese Koeffizienten gilt es aus den Bedingungen der Transformation herzuleiten, die folgendermaßen erhalten werden:

Die berechnete Bewegung habe den geozentrischen Zustandsvektor[2] $\left(\mathbf{r}_{GC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_{♁}, \dot{\mathbf{r}}_{GC} = \dot{\mathbf{r}}_C - \dot{\mathbf{r}}_{♁}\right)$. Bekannt sei für denselben Zeitpunkt der geozentrische

[1] Herleitung in Abschnitt 6.3.2. (Band II), insbesondere Formel (6.91)

[2] Der Index „C“ steht für „computed“

Zustandsvektor $\left(\mathbf{R}_T, \dot{\mathbf{R}}_T\right)$ des Beobachters (Antenne, Teleskop). Der topozentrische (auf den Beobachter bezogene) Zustandsvektor lautet dann

$$\mathbf{r}_{TC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_{♁} - \mathbf{R}_T \,,\; \dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{\mathbf{r}}_C - \dot{\mathbf{r}}_{♁} - \dot{\mathbf{R}}_T \quad . \tag{30.155}$$

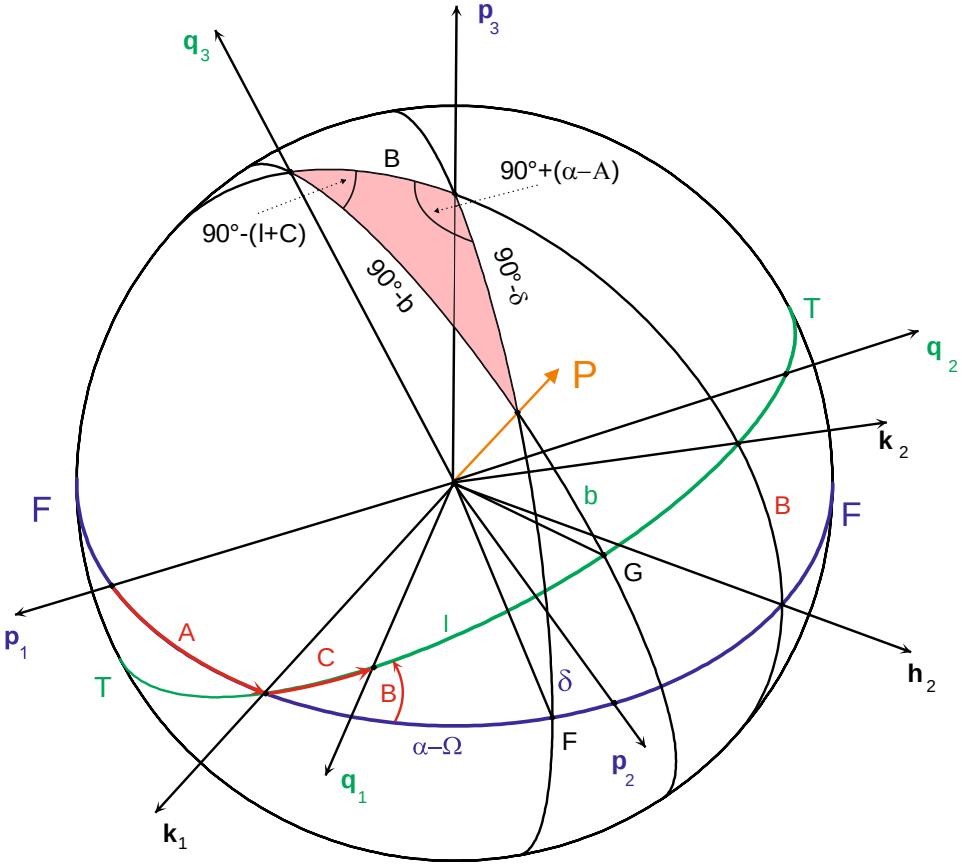


Bild 30-28: Transformation vom $\mathbf{p}_i$ – Frühlingspunkt-bezogenen Basissystem F in das $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem T um die *Euler*winkel *A* („Knotenlänge“), *B* („Inklination“), *C* („Länge des Ursprungs in der Bahnebene“). $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ – Knotensystem in der T-Ebene, $\mathbf{h}_2$-Vektor ein Hilfsvektor zur Drehung der F-Ebene um den aufsteigenden Knoten $\mathbf{k}_1$ in die Ebene T nach $\mathbf{k}_2$. Eine Sichtrichtung P (Planet, Sonde, Satellit, Stern) hat im $\mathbf{p}_i$ – System die Richtungswinkel $\alpha - A$, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und δ (Deklination), im $\mathbf{q}_j$ – System die Richtungswinkel *l* (Länge), bezogen auf $\mathbf{q}_1$, und *b* (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ P, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{q}_3$.

Dem Beobachter sei ein orthonormiertes auf die berechnete Bewegung zugeordnetes $\mathbf{q}_j$ – Basissystem zugeordnet, dessen $\mathbf{q}_1$ – Achse in die berechnete Richtung zu dem gewünschten Objekt gerichtet sei. Damit sind die Richtungsvektoren des so definierten Beobachter-Systems bestimmt durch

$$\mathbf{q}_1 := \frac{\mathbf{r}_{TC}}{\left|\mathbf{r}_{TC}\right|} \;,\; \mathbf{q}_3 := \frac{\mathbf{r}_{TC} \times \dot{\mathbf{r}}_{TC}}{\left|\mathbf{r}_{TC} \times \dot{\mathbf{r}}_{TC}\right|} \;,\; \mathbf{q}_2 := \mathbf{q}_3 \times \mathbf{q}_1 \quad . \tag{30.156}$$

Der berechnete Geschwindigkeitsvektor liegt somit in der $\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\right)$ – Basisebene und es ist

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_3 = 0 \quad . \tag{30.157}$$

Es gelten die Bezeichnungen

$$\rho_C := |\mathbf{r}_{TC}| \ , \ V_0 := |\dot{\mathbf{r}}_{TC}| \ , \ V_0 \cos\beta = \dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_1 =: \dot{\rho}_C \ , \ V_0 \sin\beta = \dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_2 \quad . \tag{30.158}$$

Der topozentrische Geschwindigkeitsvektor kann daher in der Form

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = V_0 \left(\mathbf{q}_1 \cos\beta + \mathbf{q}_2 \sin\beta \right) = \dot{\rho}_C \, \mathbf{q}_1 + \left(\dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_2 \right) \mathbf{q}_2 \tag{30.159}$$

dargestellt werden. Hier ist $\dot{\rho}_C$ die berechnete Entfernungsänderung („range rate“) des Objektes zum Beobachter. Der Vektor

$$\mathbf{D}_{qpc} := D_{qpc}{}^{j} \, \mathbf{q}_j \tag{30.160}$$

sei der zum $\mathbf{p}_i$ – System relative Eigenbewegungsvektor[1] des Beobachtersystems. Wegen (30.152) kann hier gesetzt werden

$$\mathbf{D}_{qpC} = \mathbf{D}_{qC} - \mathbf{D}_p \triangleq \mathbf{D}_{qC} \quad . \tag{30.161}$$

Die Variationen der Basisvektoren des Beobachtersystems haben den Zusammenhang[2]

$$\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_{qpC} \times \mathbf{q}_j \quad . \tag{30.162}$$

Aus den Formeln (30.156) und (30.158) folgt für den topozentrischen Zustandsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{TC} &= \rho_C \, \mathbf{q}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_{TC} &= \dot{\rho}_C \, \mathbf{q}_1 + \rho_C \, \dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\rho}_C \, \mathbf{q}_1 + \rho_C \, \mathbf{D}_{qpc} \times \mathbf{q}_1 = \dot{\mathbf{r}}_{TqC} + \mathbf{D}_{qpc} \times \mathbf{r}_{TC} \quad . \end{aligned} \tag{30.163}$$

Der Geschwindigkeitsanteil in der topozentrischen radialen Richtung („pseudoradialer Geschwindigkeitsanteil“) ist

$$\dot{\mathbf{r}}_{TqC} := \dot{\rho}_C \, \mathbf{q}_1 \quad . \tag{30.164}$$

Der topozentrische Ortsvektor hat in den beiden Systemen die kartesische Darstellung

$$\mathbf{r}_{TC} = y_{TC}^{j} \, \mathbf{q}_j = x_{TC}^{i} \, \mathbf{p}_i \quad . \tag{30.165}$$

Nach (30.156) lauten die Koeffizienten im $\mathbf{q}_j$ – System

$$y_{TC1} = \rho_C \ , \ y_{TC2} = y_{TC3} = 0 \quad . \tag{30.166}$$

Die Transformation in das $\mathbf{p}_i$ – System

$$x_{TC}^{i} = y_{TC}^{j} \, a_j{}^{i} \tag{30.167}$$

ergibt somit die ersten drei der gesuchten Transformationskoeffizienten (29.180)

$$a_{1i} = \frac{x_{TCi}}{\rho_C} \qquad \langle i = 1,2,3 \quad . \tag{30.168}$$

Für den topozentrischen Geschwindigkeitsvektor bestehen die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{x}_{TC}^{i} \, \mathbf{p}_i + x_{TC}^{i} \, \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{y}_{TC}^{j} \, \mathbf{q}_j + y_{TC}^{i} \, \dot{\mathbf{q}}_j \quad . \tag{30.169}$$

wobei wegen der Annahme (30.152)

$$\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0 \qquad \langle i = 1,2,3, \ \mathbf{D}_p \equiv 0 \tag{30.170}$$

gesetzt werden kann. Mit (30.166) lauten die Geschwindigkeitskomponenten im $\mathbf{q}_j$ – System

$$\dot{y}_{TC1} = \dot{\rho}_C \ , \ \dot{y}_{TC2} = \dot{y}_{TC3} = 0 \quad . \tag{30.171}$$

---

[1] vgl. etwa die Herleitungen in Abschnitt 6.1.5 (Band II)

[2] vgl. etwa die Formeln (6.123) in Abschnitt 6.3.4 (Band II)

Der Eigenbewegungsvektor des Beobachtersystems habe die Koordinatendarstellung

$$\mathbf{D}_{qpC} = D_{qpC}{}^{j}\ \mathbf{q}_j \quad . \tag{30.172}$$

Damit kann der topozentrische Geschwindigkeitsvektor in der Form

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{\mathbf{r}}_{TC} + \mathbf{D}_{qpC} \times \mathbf{r}_{TC} = \dot{\rho}_C\, \mathbf{q}_1 + \mathbf{D}_{qpC} \times \mathbf{r}_{TC} \tag{30.173}$$

geschrieben werden. Skalare Multiplikation mit dem Normalenvektor ergibt

$$\mathbf{q}_3 \cdot \dot{\mathbf{r}}_{TC} = \rho_C\, \mathbf{D}_{qpC} \cdot \left(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_3\right) = -\rho_C\, \mathbf{D}_{qpC} \cdot \mathbf{q}_2 = -\rho_C\, D_{qpC2} \quad . \tag{30.174}$$

Wegen (30.157) folgt notwendig

$$D_{qpC2} = 0 \quad . \tag{30.175}$$

Es bleibt daher

$$\mathbf{D}_{qpC} = D_{qpC1}\, \mathbf{q}_1 + D_{qpC3}\, \mathbf{q}_3 \tag{30.176}$$

und wegen $\mathbf{r}_{TC} = \rho_C\, \mathbf{q}_1$

$$\mathbf{D}_{qpC} \times \mathbf{r}_{TC} = D_{qpC3}\, \mathbf{q}_2 \quad . \tag{30.177}$$

Im verbleibenden Ausdruck für den topozentrischen Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{\rho}_C\, \mathbf{q}_1 + \rho_C\, D_{qpC3}\, \mathbf{q}_2 \tag{30.178}$$

können radialer und transversaler Anteil klar getrennt werden. Danach kann die dritte Komponente des Eigenbewegungsvektors berechnet werden:

$$D_{qpC3} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_{TC} \cdot \mathbf{q}_2}{\rho_c} \quad . \tag{30.179}$$

Werde für den Betrag des Normalenvektors der Flächenparameter

$$G := \left|\mathbf{r}_{TC} \times \dot{\mathbf{r}}_{TC}\right| \tag{30.180}$$

eingeführt, ergibt sich aus (30.178) auch

$$D_{qpC3} = \frac{G}{\rho_C^2} \quad . \tag{30.181}$$

Werde in (30.178) die Fundamentalbasis $\mathbf{p}_i$ eingesetzt, wird mit den Transformationsformeln (30.165)

$$\dot{\mathbf{r}}_{TC} = \dot{x}_{TC}^{i}\, \mathbf{p}_i = \dot{\rho}_C\, a_1^i\, \mathbf{p}_i + \frac{G}{\rho_C}\, a_2^i\, \mathbf{p}_i \tag{30.182}$$

Daraus kann die zweite Gruppe der Transformationskoeffizienten (29.180) berechnet werden:

$$a_{2i} = \rho_C\, \frac{\dot{x}_i - \dot{\rho}_C\, a_{1i}}{G} \quad \langle i = 1,2,3 \quad . \tag{30.183}$$

Zwischen den Basisvektoren bestehen die Transformationen

$$\mathbf{p}_i = a^j{}_i\, \mathbf{q}_j \quad , \quad \mathbf{q}_j = a_j{}^i\, \mathbf{p}_i \quad , \tag{30.184}$$

somit für den Normalenvektor

$$\mathbf{q}_3 = a_3^{\ i}\, \mathbf{p}_i \quad . \tag{30.185}$$

In üblicher Weise ist

$$\begin{aligned} G\,\mathbf{q}_3 &= \mathbf{r}_{TC} \times \dot{\mathbf{r}}_{TC} = x_C^i\,\mathbf{p}_i \times \dot{x}_C^i\,\mathbf{p}_i = \\ &= \left(x_{2C}\,\dot{x}_{3C} - x_{3C}\,\dot{x}_{2C}\right)\mathbf{p}_1 + \left(x_{3C}\,\dot{x}_{1C} - x_{1C}\,\dot{x}_{3C}\right)\mathbf{p}_3 + \left(x_{1C}\,\dot{x}_{2C} - x_{2C}\,\dot{x}_{1C}\right)\mathbf{p}_3 \quad . \end{aligned} \tag{30.186}$$

Die dritte Gruppe der Transformationskoeffizienten kann daher berechnet werden aus

$$\begin{aligned} a_{31} &= \frac{x_{2C}\,\dot{x}_{3C} - x_{3C}\,\dot{x}_{2C}}{G} \\ a_{32} &= \frac{x_{3C}\,\dot{x}_{1C} - x_{1C}\,\dot{x}_{3C}}{G} \\ a_{33} &= \frac{x_{1C}\,\dot{x}_{2C} - x_{2C}\,\dot{x}_{1C}}{G} \quad . \end{aligned} \tag{30.187}$$

Jetzt können die drei *Euler*winkel berechnet werden: Der Inklinationswinkel B folgt eindeutig aus

$$a_{33} = \cos B \quad , \quad \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} \quad . \tag{30.188}$$

Der Winkel A längs des Äquators zum aufsteigenden Knoten folgt aus

$$\begin{aligned} a_{31} &= \sin B \sin A \\ a_{32} &= -\sin B \cos A \quad . \end{aligned} \tag{30.189}$$

Der Winkel C vom aufsteigenden Knoten längs der Basisebene des Beobachtersystems zur Hauptstrahlrichtung $\mathbf{q}_1$ des Beobachters folgt aus

$$\begin{aligned} a_{13} &= \sin B \sin C \\ a_{23} &= \sin B \cos C \quad . \end{aligned} \tag{30.190}$$

Um den Geschwindigkeitsvektor in das Beobachtersystem zu transformieren, werden die Variationen der Transformationskoeffizienten a_{ij} benötigt. Aus der Zuweisung (30.168) folgt

$$\dot{a}_{1i} = \frac{\dot{x}_{TCi} - a_{1i}\,\dot{\rho}_C}{\rho_C} \qquad \langle i = 1,2,3 \quad . \tag{30.191}$$

Weiter gelten die Variationen (nach (6.99) in Abschnitt 6.2.2 (Band II))

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \dot{B}\,a_{31} \sin C + \dot{C}\,a_{21} - \dot{A}\,a_{12} \\ \dot{a}_{12} &= \dot{B}\,a_{32} \sin C + \dot{C}\,a_{22} + \dot{A}\,a_{11} \\ \dot{a}_{13} &= \dot{B}\,a_{33} \sin C + \dot{C}\,a_{23} \quad . \end{aligned} \tag{30.192}$$

Hieraus können die Variationen der drei Drehwinkel allerdings nicht berechnet werden, da diese drei Gleichungen linear abhängig sind. Aus der Transformation (30.184) folgt nämlich

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \dot{a}^j{}_i\,\mathbf{q}_j + a^j{}_i\,\dot{\mathbf{q}}_j \quad , \tag{30.193}$$

somit

$$\mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i = a^j{}_i\,\mathbf{q}_j \cdot \dot{a}^k{}_i\,\mathbf{q}_k + a^j{}_i\,\mathbf{q}_j \cdot a^k{}_i\,\dot{\mathbf{q}}_k = a^j{}_i\,\dot{a}^k{}_i\,\delta_{jk} = a^j{}_i\,\dot{a}_{ji} = 0 \quad . \tag{30.194}$$

Mit bekannten $\dot{a}_{1i}$ $(i = 1,2,3)$ können aus diesem System etwa zwei unabhängige Gleichungen erhalten werden:

$$\dot{a}_{13} = \dot{B}\cos B \sin C + \dot{C}\sin B \cos C \quad ,$$

woraus die Beziehung

$$\dot{C}\sin B = \frac{\dot{a}_{13} - \dot{B}\cos B \sin C}{\cos C} \tag{30.195}$$

folgt. Es sind noch die Beziehungen für die Variationen $\dot{A}, \dot{B}$ zu suchen. Aus (30.168) folgen

$$\begin{aligned} y_{Tc}^{\ j} &= a^j{}_i \; x_{Tc}^{\ i} \\ \dot{y}_{Tc}^{\ j} &= \dot{a}^j{}_i \; x_{Tc}^{\ i} + a^j{}_i \; \dot{x}_{Tc}^{\ i} \end{aligned} \tag{30.196}$$

mit

$$\begin{aligned} y_{Tc1} &= \rho_c \;, \quad y_{Tc2} = y_{Tc3} = 0 \\ \dot{y}_{Tc1} &= \dot{\rho}_c \;, \quad \dot{y}_{Tc2} = \dot{y}_{Tc3} = 0 \end{aligned} \tag{30.197}$$

und daher etwa die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{y}_{Tc3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{a}_{3i} \, x_{Tc}{}^i = -a_{3i} \, \dot{x}_{Tc}{}^i =: A_3 \\ \dot{y}_{Tc2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{a}_{2i} \, x_{Tc}{}^i = -a_{2i} \, \dot{x}_{Tc}{}^i =: B_4 \quad . \end{aligned} \tag{30.198}$$

mit bekannten rechten Seiten A_3 und B_4. Dies führt auf

$$x_{Tc1}\left(\dot{B}\cos B \sin A + \dot{A}\sin B \cos A\right) + x_{Tc2}\left(-\dot{B}\cos B \cos A + \dot{A}\sin B \sin A\right) - x_{Tc3}\,\dot{B}\sin B = A_3$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_1 &:= x_{Tc1} \cos B \sin A - x_{Tc2} \cos B \cos A - x_{Tc3} \sin B \\ A_2 &:= x_{Tc1} \cos A + x_{Tc2} \sin A \end{aligned} \tag{30.199}$$

und

$$\begin{aligned} & x_{Tc1}\left(\dot{B}\,a_{31}\cos C - \dot{C}\,a_{11} - \dot{A}a_{22}\right) + x_{Tc2}\left(\dot{B}\,a_{32}\cos C - \dot{C}\,a_{12} + \dot{A}a_{21}\right) + \\ & \quad + \; x_{Tc3}\left(\dot{B}\cos B \cos C - \dot{C}\,a_{13}\right) = B_4 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} B_1 &:= x_{Tc1}\,a_{31}\cos C + x_{Tc2}\,a_{32}\cos C + x_{Tc3} \cos B \cos C \\ B_2 &:= x_{Tc1}\,a_{11} + x_{Tc2}\,a_{12} + x_{Tc3}\,a_{13} \\ B_3 &:= x_{Tc1}\,a_{22} + x_{Tc2}\,a_{21} \quad . \end{aligned} \tag{30.200}$$

Damit kann die Variation des Inklinationswinkels B berechnet werden:

$$\dot{B} = \frac{A_3 B_3 \cos C - A_2 B_4 \sin B \cos C - B_2 A_2 \dot{a}_{13}}{A_1 B_3 \cos C - A_2 B_1 \sin B \cos C - A_2 B_2 \cos B \sin C} \quad , \tag{30.201}$$

sowie die Variation des Knotenwinkels

$$\dot{A} \sin B = \frac{1}{A_2}\left(A_3 - \dot{B}\,A_1\right) \quad , \tag{30.202}$$

sofern die jeweiligen Nenner nicht verschwinden.

Mit den Variationen $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ können die Komponenten des zum Frühlingspunktsystem relativen Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{qpC} = D_{qpC}{}^j \, \mathbf{q}_j$ nach dem Formelsystem (6.136) (aus Band II) berechnet werden:

$$\begin{aligned} D_{qpC1} &= \dot{B}\cos C + \dot{A}\sin B \sin C \\ D_{qpC2} &= -\dot{B}\sin C + \dot{A}\sin B \cos C \\ D_{qpC3} &= \dot{A}\cos B + \dot{C} \quad . \end{aligned} \tag{30.203}$$

Hier sind die Größen $D_{qpC2} = D_{qC2} = 0$ aus der Beziehung (30.175) und $D_{qpC3} = D_{qC3}$ aus (30.181) bekannt. Sie müssen durch die beiden letzten der Gleichungen (30.203) bestätigt werden können. Im vorliegenden Fall ergeben sich auch die manchmal nützlichen Beziehungen

$$\begin{aligned} D_{qpC1} \cos C &= \dot{B} \\ D_{qpC1} \sin C &= \dot{A} \sin B \qquad , \quad \left(D_{qC2} = D_{qpC2} = 0\right) \end{aligned} \tag{30.204}$$

sowie

$$\dot{C} \sin B = -D_{qpC1} \cos B \sin C + D_{qpC3} \sin B \quad , \tag{30.205}$$

außerdem die Beziehung

$$\dot{a}_{13} = D_{qpC3} \sin B \cos C \quad , \tag{30.206}$$

die zur Kontrolle benutzt werden kann.

Mit den Formeln (30.204) ist schließlich auch die erste Komponente D_{qpC1} des Eigenbewegungsvektors $\mathbf{D}_{qpC}$ bekannt und damit die *Frenet*schen Formeln des Beobachtersystems

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= \qquad\qquad D_{qpC3}\,\mathbf{q}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= -D_{qpC3}\,\mathbf{q}_2 \qquad\qquad + D_{qpC1}\,\mathbf{q}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 &= \qquad\qquad - D_{qpC1}\,\mathbf{q}_2 \quad . \end{aligned} \tag{30.207}$$

30.10.2 Beobachtung einer „gestörten“ Bewegung

Es werde jetzt angenommen, dass die wahre Bewegung des beobachteten Objektes durch eine nicht modellierte bzw. nicht modellierbare Beschleunigung beeinflusst werde. Wie wirkt sich diese Variation auf die Beobachtung der Entfernungsvariation (range rate) aus, wenn die Antenne nach wie vor auf die („ungestörte“ also berechnete) Nominalbewegung pointiert ist?

Es wird die als bekannt angenommene berechenbare Bewegung eines Objektes (interplanetare Raumsonde, Planet, Satellit, Orbiter, interstellares Objekt) mit einer unbekannten realen Bewegung verglichen. Die Berechnung der Abweichung (wir wollen sie als „Störung“ bezeichnen) der wahren Bewegung von der berechneten Bewegung wird unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C \quad , \tag{30.208}$$

wobei $\mathbf{r}$ die gestörte, $\mathbf{r}_C$ die ungestörte (= berechnete) Position der Sonde bezeichne. Vom Antennenort aus gesehen lautet entsprechend die gestörte Position bei Bezug auf die ungestörte topozentrische Position $\mathbf{r}_{Tc}$

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{TC} + \Delta\mathbf{r} \quad . \tag{30.209}$$

Auch die Geschwindigkeit der Sonde wird von der Störung betroffen. Sie wird um den heliozentrischen Störvektor $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ verändert

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_c + \Delta\dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{30.210}$$

Dieser ist, wie Gleichung (30.209) zeigt (vgl. auch Bild 30-29), mit dem topozentrischen Störvektor identisch und es gilt

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}}_{Tc} + \Delta\dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{30.211}$$

Die Störung verändere den heliozentrischen Ort der Sonde um den Differenzvektor $\Delta\mathbf{r}$.

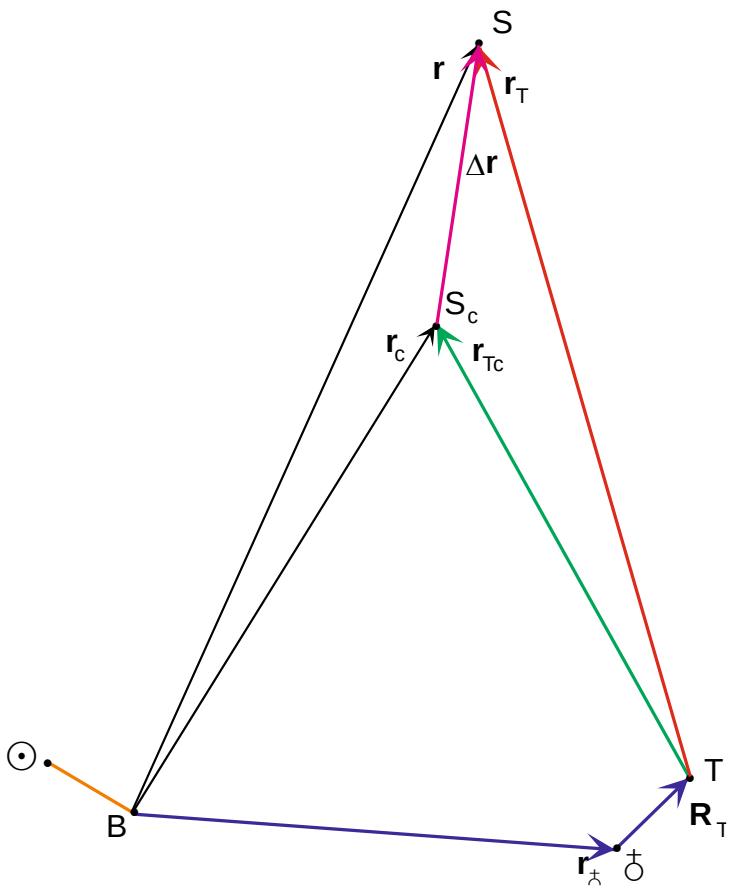


Bild 30-29: Berechneter Ort ($\mathbf{r}_c$) und „gestörter“ Ort ($\mathbf{r}$) gesehen vom Baryzentrum *B* sowie der Antenne *T* aus.

Die Untersuchung wird im vorliegenden Bericht unter folgende Prämisse durchgeführt:

▶ *Wie müsste die Beobachtungsrichtung bewegt werden um der wahren Bewegung des Himmelskörpers folgen zu können? Diese Bewegung muss auf die gesteuerte da berechnete Bewegung der Antenne bezogen werden. Wie kann diese (fehlerhafte, d.h. „gestörte“) Bewegung in der berechneten Bewegung der Antenne dargestellt und somit beobachtet werden?*

Das mitbewegte Antennensystem[1] sei aus dem Bewegungszustand $\left(\mathbf{r}_{Tc}, \dot{\mathbf{r}}_{Tc}\right)$ der berechneten Bewegung des Himmelskörpers mit den Basisvektoren $\mathbf{q}_j$ aus den Gleichungen (30.156) bekannt. Der Geschwindigkeitsanteil $\dot{\mathbf{r}}_{TqC}$ in der radialen Beobachtungsrichtung ist mit den Formeln (30.163) und (30.178) bekannt. In diesem Fall kann die durch den Parameter D_{qpC3} repräsentierte Eigenbewegung des Beobachters keinen Einfluss auf die radiale Entfernungsvariation $\dot{\rho}_C$ nehmen (wie es die klassische *Doppler*lehre beinhaltet).

[1] Dieses System, das auf die Hauptkeulenachse der beobachtenden Antenne bezogen sein kann, wird gelegentlich statt Beobachtungssystem gelegentlich auch als „*Antennensystem*“ bezeichnet.

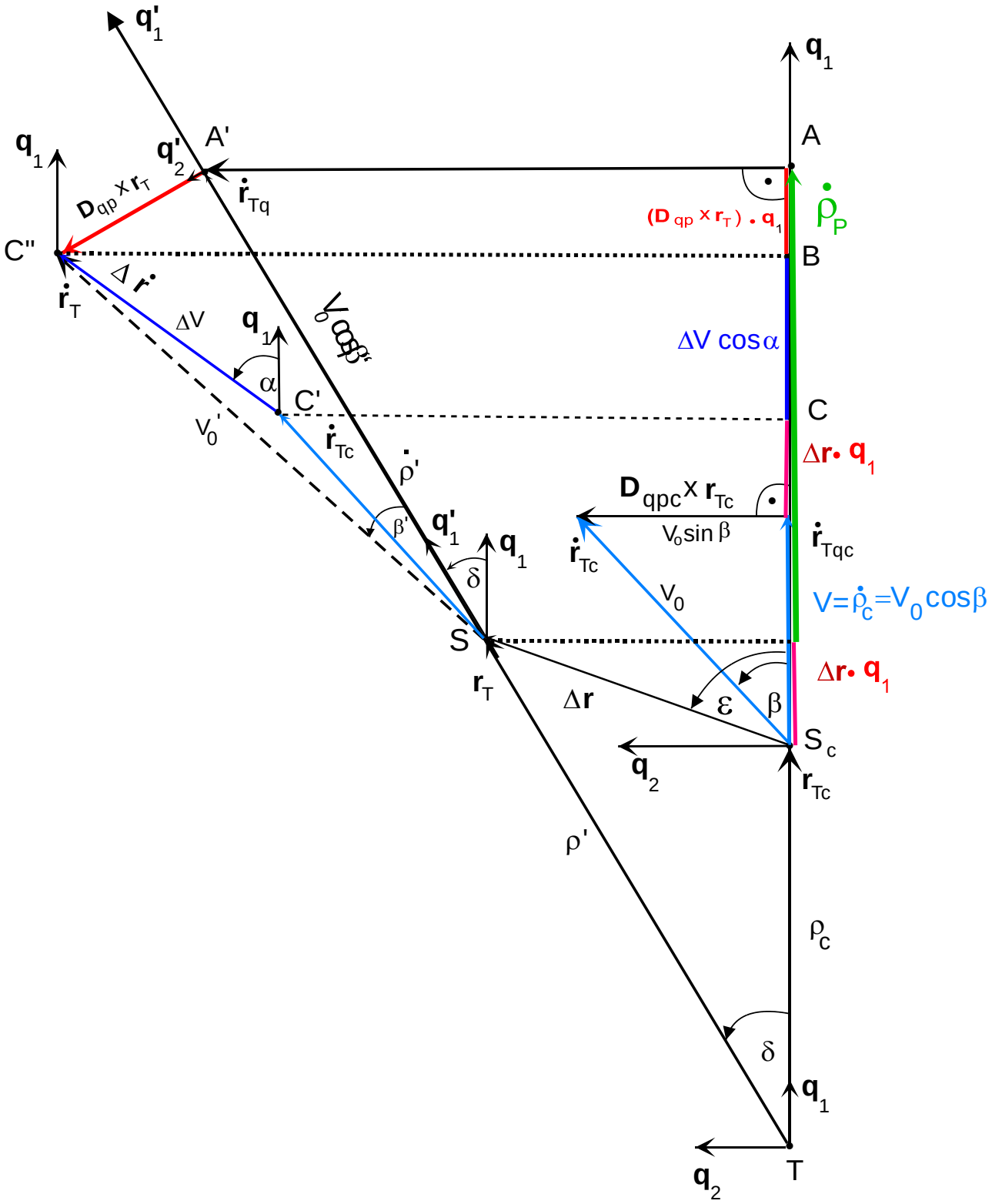


Bild 30-30: Zur Berechnung der „gestörten“ Ein-Weg Entfernungsvariation

Wenn das Beobachtungssystem der wahren Bewegung des Himmelskörpers nachgeführt würde, würde das Antennensystem die Basis

$$\mathbf{q}_1' = \frac{\mathbf{r}_T}{|\mathbf{r}_T|} \;,\quad \mathbf{q}_3' = \frac{\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T}{|\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T|} \;,\quad \mathbf{q}_2' = \mathbf{q}_3' \times \mathbf{q}_1' \tag{30.212}$$

haben (vgl. Bild 30-30). In diesem System würde der Zustand des Himmelskörpers mit den Ausdrücken (30.209) und (30.211) $\mathbf{r}_T$, $\dot{\mathbf{r}}_T$ betragen. Der radiale also in der wahren Beobachtungsrichtung erfolgende Geschwindigkeitsanteil würde

$$\dot{\mathbf{r}}_{Tq} = \dot{\mathbf{r}}_T - \mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{r}_T \tag{30.213}$$

sein, wobei die Eigenbewegung des Beobachters $\mathbf{D}_{qp}$ in Richtung der gestörten Bewegung des Himmelskörpers von der realen berechneten Eigenbewegung $\mathbf{D}_{qpC}$ als verschieden angenommen werden muss. Schrägentfernung, radiale Variation und Parameter des Antennen-Eigenbewegungsvektors errechnen sich in diesem („Stör-„) Fall aus

$$\rho' := |\mathbf{r}_T| \;,\; \dot{\rho}' := |\dot{\mathbf{r}}_{Tq}| = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1' \;,\; \rho' D_{qp3} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_2' \quad . \tag{30.214}$$

Damit gilt (analog wie in Formel (30.178)) auch die Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_{Tq} = \dot{\rho}' \mathbf{q}_1' = \dot{\mathbf{r}}_T - \rho' D_{qp3} \mathbf{q}_2' \quad , \tag{30.215}$$

wobei im Allgemeinen

$$D_{qp3} \neq D_{qpC3} \tag{30.216}$$

akzeptiert werden muss.

In der klassischen *Doppler*lehre wird weder die Missweisung der Beobachtungsrichtung, die in Bild 30-30 (auf Seite 484) durch den Winkel δ zwischen den Radiusvektoren $\mathbf{r}_{Tc}$ und $\mathbf{r}_T$ repräsentiert wird mit

$$\cos\delta = \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1' \quad , \tag{30.217}$$

noch die fehlerhafte Antennenbewegung, die durch die Beziehung (30.216) ausgedrückt wird, berücksichtigt[1]. Vielmehr wird die fehlerhafte radiale Entfernungsvariation einfach durch den Ausdruck

$$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1 \quad , \tag{30.218}$$

also die Projektion des „gestörten“ Geschwindigkeitsvektors auf die berechnete Beobachtungsrichtung, angegeben.

Die Fragestellung lautet[2]:

▶ *Muss und wenn wie müssen Missweisung und fehlerhafte Antennenbewegung in der Berechnung der radialen Entfernungsvariation berücksichtigt werden?*

Eine Möglichkeit diese Fehler zu berücksichtigen könnte aus folgender Überlegung kommen: Wenn der Beobachter zum gestörten topozentrischen Ort $\mathbf{r}_T$ gerichtet ist, wird die Entfernungsvariation in der üblichen Weise aus der Projektion des („gestörten“) Geschwindigkeitsvektors $\dot{\mathbf{r}}_T$ in diese Beobachtungsrichtung berechnet:

$$\dot{\rho}' = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1' = |\dot{\mathbf{r}}_{Tq}| \quad . \tag{30.219}$$

---

[1] Man beachte, dass die in Abschnitt 30.10 verwendeten hier mathematischen Symbole $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta)$ ausschließlich hier zur Beschreibung der modifizierten Dopplertheorie verwendet werden, also nichts mit den in den anderen Kapiteln definierten Symbole gemein haben.

[2] Nach den Überlegungen in H. PORSCHE [1999]

Nun werde aber der Beobachter in die berechnete Beobachtungsrichtung gedreht. Dadurch wird die modifizierte fehlerhafte Entfernungsvariation

$$\dot{\rho}_P = \dot{\mathbf{r}}_{Tq} \cdot \mathbf{q}_1 = \dot{\rho}'\left(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1\right) = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1 - \left(\mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{r}_T\right) \cdot \mathbf{q}_1 = \dot{\rho} - \rho' D_{qp3}\left(\mathbf{q}_2' \cdot \mathbf{q}_1\right) \tag{30.220}$$

bzw. einfach

$$\dot{\rho}_P = \left(\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1'\right)\left(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1\right) = \dot{\rho}' \cos\delta \tag{30.221}$$

erhalten. Dieser Ausdruck enthält sowohl die Missweisung der Antenne wie ihre fehlerhafte Eigenbewegung, da D_{qp3} in Formel (30.220) und damit implizit auch in Formel (30.221) enthalten ist. Ob jedoch mit dieser Formel die reale physikalische Einweg *Doppler* Beobachtung beschrieben werden kann, muss die Beobachtung ergeben.

30.10.3 Geom. Interpretation der modifizierten Einweg-*Doppler*-Formel

Für eine verfeinerte geometrische Untersuchung sei ein orthonormales Koordinatensystem entsprechend Bild 30-32 und Bild 30-32 eingeführt mit den Winkeln

$$\alpha := \sphericalangle\left(\Delta\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{q}_1\right) \;,\; \beta := \sphericalangle\left(\dot{\mathbf{r}}_{Tq}, \mathbf{q}_1\right) \;,\; \varepsilon := \sphericalangle\left(\Delta\mathbf{r}, \mathbf{q}_1\right) \;,\; \beta' := \sphericalangle\left(\dot{\mathbf{r}}_T, \mathbf{q}_1'\right) \;. \tag{30.222}$$

Außerdem bezeichne γ die Abweichung des Geschwindigkeits-Fehlervektors sowie η die Abweichung des Orts-Fehlervektors von der topozentrischen Bahnebene ($\left(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\right)-$Ebene). Mit den Zuordnungen $\Delta r := \left|\Delta\mathbf{r}\right|$, $\Delta V := \left|\Delta\dot{\mathbf{r}}\right|$ kann der Fehler-Zustandsvektor dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \Delta r \left(\mathbf{q}_1 \cos\varepsilon + \mathbf{q}_2 \sin\varepsilon \cos\eta + \mathbf{q}_3 \sin\varepsilon \sin\eta\right) \\ \Delta\dot{\mathbf{r}} &= \Delta V \left(\mathbf{q}_1 \cos\alpha + \mathbf{q}_2 \sin\alpha \cos\gamma + \mathbf{q}_3 \sin\alpha \sin\gamma\right) \;. \end{aligned} \tag{30.223}$$

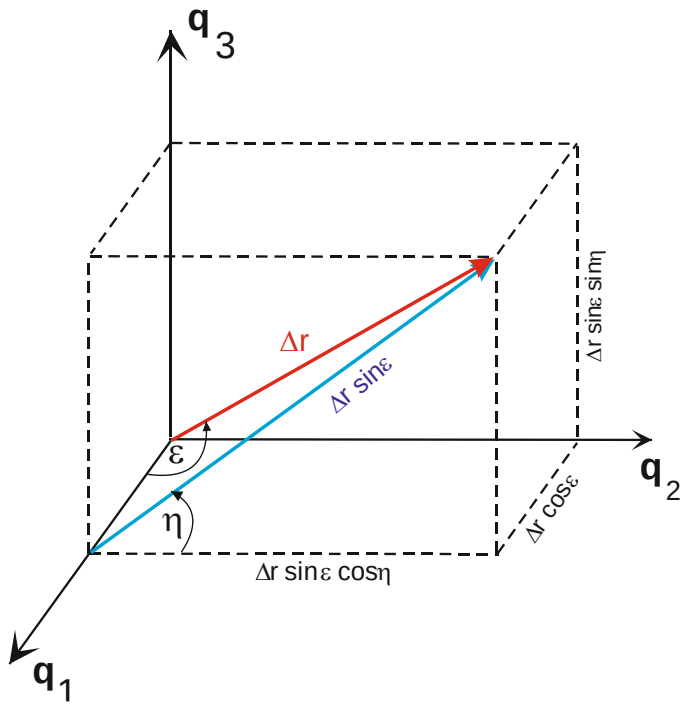


Bild 30-31 : Darstellung der Koordinaten des Orts-Fehlervektors im $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem

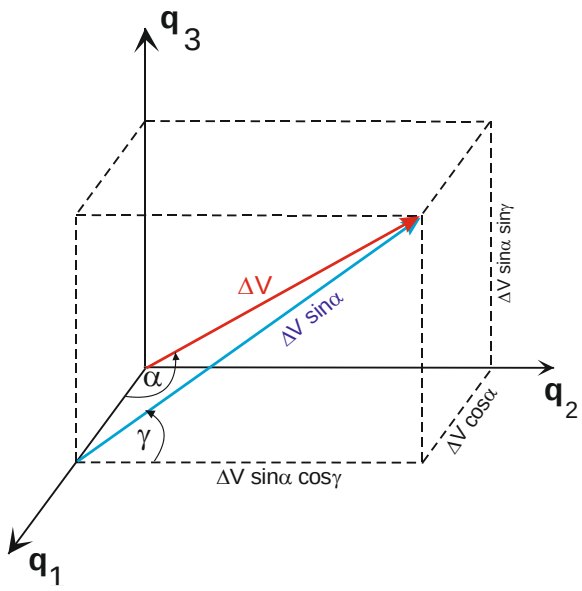


Bild 30-32 : Darstellung der Koordinaten des Geschwindigkeits-Fehlervektors im $\mathbf{q}_j$ – Beobachtersystem

Der Winkel δ zwischen der berechneten und der fehlerhaften („wahren“) Beobachtungsrichtung kann berechnet werden aus

$$\sin\delta = \frac{\Delta r\ \sin\varepsilon}{\rho'} \quad , \quad \cos\delta = \frac{\rho_C + \Delta r\cos\varepsilon}{\rho'} \quad . \tag{30.224}$$

Der Geschwindigkeitsvektor der wahren Bewegung kann im Beobachtersystem der berechneten Bewegung mit (30.215) und mit Hilfe der Beziehungen (30.158) dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_T &= \dot{\mathbf{r}}_{Tq} + \mathbf{D}_{qp} \times \mathbf{r}_T = \\
&= \left(\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1'\right)\mathbf{q}_1' + \left(\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_2'\right)\mathbf{q}_2' + \left(\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_3'\right)\mathbf{q}_3' = \\
&= \dot{\rho}'\,\mathbf{q}_1' + \rho'\,D_{qp3}\,\mathbf{q}_2' = \\
&= \left(\dot{\rho}_C + \Delta V\cos\alpha\right)\mathbf{q}_1 + \left(\rho_C\,D_{qpC3} + \Delta V\sin\alpha\cos\gamma\right)\mathbf{q}_2 + \Delta V\sin\alpha\sin\gamma\,\mathbf{q}_3 = \\
&= \left(V_0\cos\beta + \Delta V\cos\alpha\right)\mathbf{q}_1 + \left(V_0\sin\beta + \Delta V\sin\alpha\cos\gamma\right)\mathbf{q}_2 + \Delta V\sin\alpha\sin\gamma\,\mathbf{q}_3 \quad .
\end{aligned} \tag{30.225}$$

Dies führt mit Formel (30.218) auf die klassische Formel der topozentrischen Entfernungsänderung („range-rate“)

$$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1 = V_0\cos\beta + \Delta V\cos\alpha \quad . \tag{30.226}$$

Der Richtungsvektor der gestörten („wahren“) Bewegung $\mathbf{q}_1'$ kann auf das berechnete Beobachtersystem bezogen werden:

$$\begin{aligned}
\rho'\,\mathbf{q}_1' &= \mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{TC} + \Delta\mathbf{r} \\
&= \left(\rho_C + \Delta r\cos\varepsilon\right)\mathbf{q}_1 + \Delta r\sin\varepsilon\cos\eta\,\mathbf{q}_2 + \Delta r\sin\varepsilon\sin\eta\,\mathbf{q}_3
\end{aligned} \tag{30.227}$$

Damit kann die Entfernungsvariation in der gestörten Beobachtungsrichtung berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}' = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1' &= \left(V_0\cos\beta + \Delta V\cos\alpha\right)\cos\delta\ + \\
&+ \frac{\Delta r\ \sin\varepsilon}{\rho'}\left[\left(V_0\sin\beta + \Delta V\ \sin\alpha\ \cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V\ \sin\alpha\ \sin\gamma\ \sin\eta\right] \ .
\end{aligned} \tag{30.228}$$

Die modifizierte Entfernungsänderung hat dann wieder entsprechend Formel (30.221) die Darstellung

$$\dot{\rho}_P = \dot{\rho}' \cos\delta \quad . \tag{30.229}$$

Wenn es also möglich ist, die Störausdrücke Δr, ΔV und die zugehörigen Winkel ε, η und α, γ zu messen, kann auch der Fehler-Zustandsvektor $\Delta\mathbf{r}$, $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ berechnet werden.

Der Zusammenhang dieser modifizierten Formel zu den geometrischen Parametern der gestörten Bewegung kann nun auf die folgende Weise hergeleitet werden: der gestörte Geschwindigkeitsvektor habe den Betrag

$$V_0' := \left|\dot{\mathbf{r}}_T\right| \quad . \tag{30.230}$$

Sei der Winkel β' zwischen den Vektoren $\dot{\mathbf{r}}_T$ und $\mathbf{q}_1'$ definiert, wird

$$\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1' = V_0' \cos\beta' \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_2' = V_0' \sin\beta' \tag{30.231}$$

und

$$\dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\rho}'\mathbf{q}_1' + \rho' D_{qp3}\mathbf{q}_2' = V_0'\cos\beta'\,\mathbf{q}_1' + V_0'\sin\beta'\,\mathbf{q}_2' \quad . \tag{30.232}$$

Mit diesen Beziehungen kann Formel (30.220) geschrieben werden in der Form

$$\dot{\rho}_P = \dot{\mathbf{r}}_{Tq} \cdot \mathbf{q}_1 = \dot{\rho}'\left(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1\right) = V_0 \cos\beta + \Delta V \cos\alpha - V_0' \sin\beta'\,\mathbf{q}_2' \cdot \mathbf{q}_1 \quad . \tag{30.233}$$

Für manche Anwendungen kann es erforderlich sein, die anderen Richtungsvektoren des $\mathbf{q}_j'$ − Systems in Beziehung zum berechneten $\mathbf{q}_j$ − Beobachtersystem darzustellen:

$$\begin{aligned}
\rho'\, D_{qp3}\,\mathbf{q}_2' = {} & \mathbf{q}_1\left[\dot{\rho}_c + \Delta V\,\cos\alpha - \frac{\dot{\rho}'}{\rho'}\left(\rho_c + \Delta r\cos\varepsilon\right)\right] + \\
& + \mathbf{q}_2\left[\rho_c\, D_{qpc3} + \Delta V\,\sin\alpha\,\cos\gamma - \frac{\dot{\rho}'\,\Delta r}{\rho'}\sin\varepsilon\cos\eta\right] + \\
& + \mathbf{q}_3\left[\Delta V\,\sin\alpha\,\sin\gamma - \frac{\dot{\rho}'\,\Delta r}{\rho'}\sin\varepsilon\sin\eta\right] \quad ,
\end{aligned} \tag{30.234}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T = {} & \left|\mathbf{r}_T \times \dot{\mathbf{r}}_T\right| \mathbf{q}_3' = \\
& = \mathbf{q}_1\,\Delta r \sin\varepsilon\left[\Delta V \sin\varepsilon\,\sin\alpha\,\sin\gamma - \rho_c\, D_{qpC3}\sin\eta - \Delta V\,\sin\eta\,\sin\alpha\,\cos\gamma\right] + \\
& + \mathbf{q}_2\left[\dot{\rho}_C\,\Delta r \sin\varepsilon\,\sin\eta + \Delta r\,\Delta V \sin\varepsilon\,\cos\alpha\sin\eta - \right. \\
& \qquad \left. - \rho_C\,\Delta V \sin\alpha\,\sin\gamma - \Delta r\,\Delta V\,\cos\varepsilon\,\sin\alpha\,\sin\gamma\right] + \\
& + \mathbf{q}_3\left[\rho_C^2\, D_{qpC3} + \rho_C\,\Delta V\,\sin\alpha\,\cos\gamma + \rho_c\,\Delta r\, D_{qpc3}\,\cos\varepsilon + \right. \\
& \qquad \left. + \Delta r\,\Delta V \cos\varepsilon\,\sin\alpha\cos\gamma - \dot{\rho}_C\,\Delta r\,\sin\varepsilon\,\cos\eta - \Delta r\,\Delta V \sin\varepsilon\,\cos\eta\,\cos\alpha\right]
\end{aligned} \tag{30.235}$$

Diese Formel wird benutzt, um das geometrische Verhalten der fehlerhaften Beobachtung in den verschiedenen Anwendungen (terrestrisch, interplanetar, stellar) zu untersuchen.

30.10.4 Zweiweg-*Doppler*messungen in der modifizierten Theorie

Interplanetare Raumflugkörper in gleicher Weise wie Erdsatelliten können üblicherweise ein von der Bodenstation ausgesandtes Signal an Bord empfangen und ein anderes Signal (etwa mit Beobachtungswerten) an die Bodenstation zurücksenden.

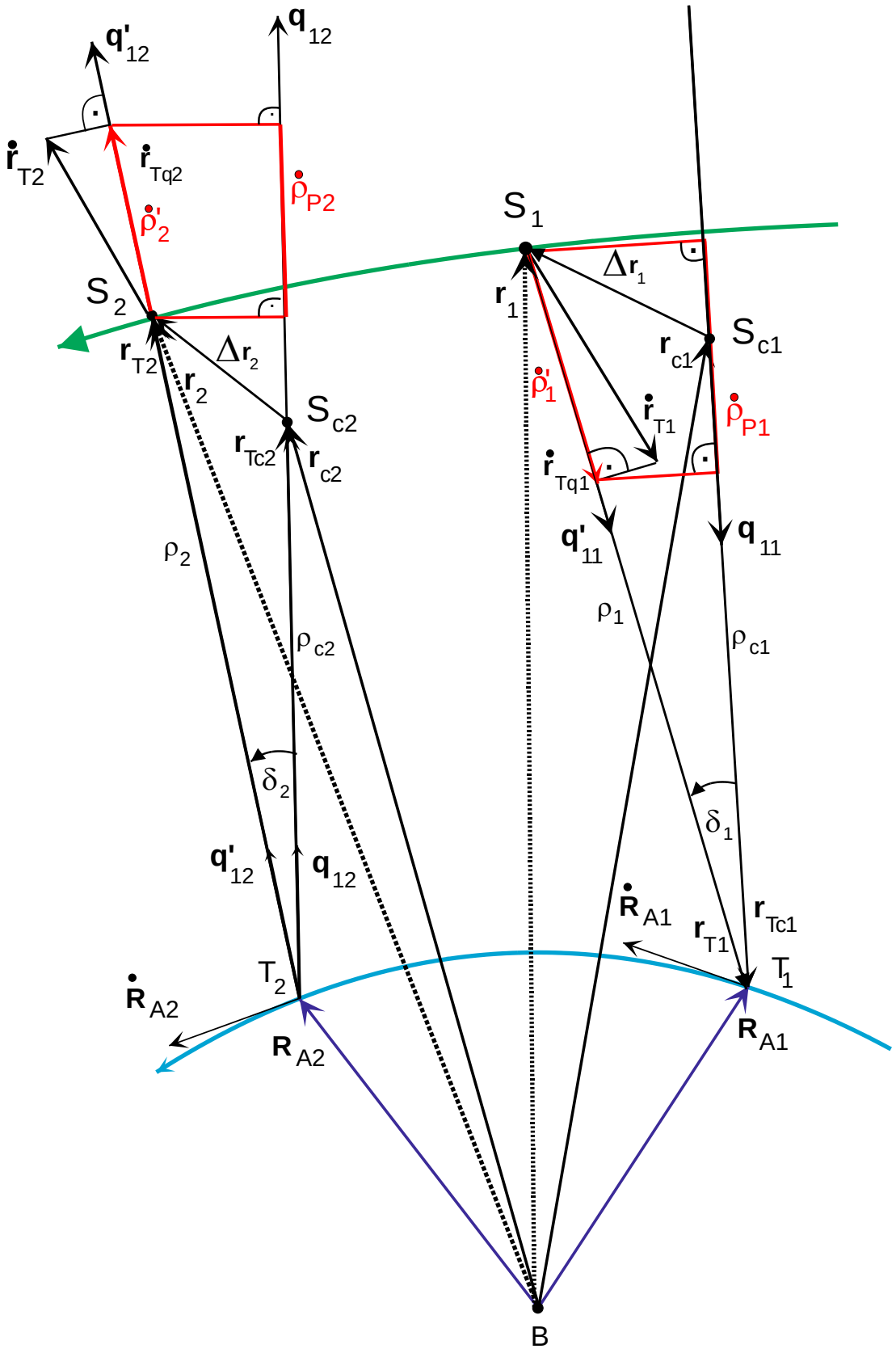


Bild 30-33: Die radiale Geschwindigkeit einer „gestörten“ Bewegung mit Abweichung der beobachtenden Antenne im Zweiweg-*Doppler*: Aufwärtsbeobachtung $T_1 \rightarrow S_{c1}$, Abwärtsbeobachtung $T_2 \rightarrow S_{c2}$

Das zur Bodenstation zurückgesandte Signal selbst kann für wissenschaftliche Untersuchungen genutzt werden, was im Rahmen von „Radio Science“ geschieht.

Das allgemeine Verhalten einer Zwei- Wege-Beobachtung wird für den Fall einer fehlerhaften Beobachtung in Bild 30-33 demonstriert. In diesem allgemeinen Fall wird eine inertiale Drehung der Beobachtungsrichtung während Aussendung und Empfang des Signals angenommen, sowie eine Zeitdifferenz zwischen dem Empfang des Signals an Bord des Raumflugkörpers und dem Senden des Signals zurück an die Bodenstation. In diesen beiden Fällen würde eine richtige Ausrichtung der Antenne des Beobachters die Zwei-Wege-Entfernungsvariation (was dem Zwei-Wege-*Doppler* entspricht) verursachen

$$\dot{\rho}'_{2Weg} = \dot{\rho}'_2 + \dot{\rho}'_1 \quad . \tag{30.236}$$

Um das Verhältnis zwischen den beiden Teilen der radialen Entfernungsvariation abschätzen zu können, wird entsprechend Bild 30-33 folgender Ausdruck verwendet:

$$\mathbf{R}_{A2} + \mathbf{r}_{T2} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{T1} - \mathbf{R}_{A1} = 0 \quad . \tag{30.237}$$

Zu den zwei verschiedenen Zeitpunkten (Empfang und Rücksendung des Signals) lauten die radialen Richtungsvektoren der gestörten (= wahren) Bewegung

$$\mathbf{q}'_{11} := \frac{\mathbf{r}_{T1}}{|\mathbf{r}_{T1}|} = \frac{\mathbf{r}_{T1}}{\rho_1} \quad , \quad \mathbf{q}'_{12} := \frac{\mathbf{r}_{T2}}{|\mathbf{r}_{T2}|} = \frac{\mathbf{r}_{T2}}{\rho_2} \quad . \tag{30.238}$$

Entsprechend haben die geozentrischen Geschwindigkeitsvektoren des Beobachters die Relation

$$\Delta\dot{\mathbf{R}}_A := \dot{\mathbf{R}}_{A2} - \dot{\mathbf{R}}_{A1} \quad . \tag{30.239}$$

Die topozentrischen Geschwindigkeitsvektoren der gestörten Bewegung können (entsprechend Formel (30.215)) in einen radialen und einen transversalen Richtungsanteil getrennt werden. Mit den Eigenbewegungsvektoren $\mathbf{D}_{qp1} := \mathbf{D}_{qp}(t_1), \mathbf{D}_{qp2} := \mathbf{D}_{qp}(t_2)$ der gestörten Bewegung lauten die Geschwindigkeitsvektoren

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{T1} &= \dot{\mathbf{r}}_{Tq1} + \mathbf{D}_{qp1} \times \mathbf{r}_{T1} \\ \dot{\mathbf{r}}_{T2} &= \dot{\mathbf{r}}_{Tq2} + \mathbf{D}_{qp2} \times \mathbf{r}_{T2} \quad . \end{aligned} \tag{30.240}$$

Die Eigenbewegung des Beobachters (Bodenantenne) werde auf die wahre Beobachtungsrichtung bezogen und nicht auf die berechnete und verwendete Beobachtungsrichtung. Es muss deshalb die Beobachtungsrichtung als fehlerhaft angenommen werden. Es gilt die Beziehung

$$\dot{\mathbf{r}}_{Tq2} + \mathbf{D}_{qp2} \times \mathbf{r}_{T2} + \dot{\mathbf{r}}_{Tq1} + \mathbf{D}_{qp1} \times \mathbf{r}_{T1} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - \left(\dot{\mathbf{R}}_{A2} - \dot{\mathbf{R}}_{A1}\right) \quad . \tag{30.241}$$

Der Eigenbewegungsvektor des Beobachtersystems kann entsprechend Formel (30.176) in einen radialen und einen transversalen Anteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{qp1} &= \mathbf{D}_{qp}(t_1) := D_{qp11}\,\mathbf{q}'_{11} + D_{qp31}\,\mathbf{q}'_{31} \quad , \\ \mathbf{D}_{qp2} &= \mathbf{D}_{qp}(t_2) := D_{qp12}\,\mathbf{q}'_{12} + D_{qp32}\,\mathbf{q}'_{32} \quad . \end{aligned} \tag{30.242}$$

Die Entfernungsvariation in der “gestörten” Beobachtungsrichtung ist zu den beiden Beobachtungszeitpunkten

$$\dot{\rho}'_1 = |\dot{\mathbf{r}}_{Tq1}| \quad , \quad \dot{\rho}'_2 = |\dot{\mathbf{r}}_{Tq2}| \quad . \tag{30.243}$$

Deshalb kann die Beziehung (30.241) in der Form geschrieben

$$\dot{\rho}'_2\,\mathbf{q}'_{12} + \rho_2\,D_{qp32}\mathbf{q}'_{32} + \dot{\rho}'_1\,\mathbf{q}'_{11} + \rho_1\,D_{qp31}\mathbf{q}'_{31} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{R}}_A \quad . \tag{30.244}$$

werden. Die Projektion auf die “gestörte” Beobachtungsrichtung beträgt am zweiten Zeitpunkt

$$\dot{\rho}_2' = -\dot{\rho}_1' \mathbf{q}_{11}' \cdot \mathbf{q}_{12}' - \rho_1 D_{qp31} \mathbf{q}_{31}' \cdot \mathbf{q}_{12}' + \left(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{R}}_A\right) \cdot \mathbf{q}_{12}' \quad . \tag{30.245}$$

Offensichtlich muss im allgemeinen Fall beachtet werden, dass die Entfernungsvariation im aufsteigenden Ast zum ersten Zeitpunkt abweicht von der Entfernungsvariation im absteigenden Ast zum zweiten Zeitpunkt:

$$\dot{\rho}_1' \neq \dot{\rho}_2' \quad . \tag{30.246}$$

Im Fall einer fehlerhaften Beobachtungsrichtung und einer fehlerhaften Eigenbewegung des Beobachters muss eine zweite Projektion entsprechend Formel (30.221) angewendet werden:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{P2} &= \dot{\rho}_2' \mathbf{q}_{12}' \cdot \mathbf{q}_{12} = \\ &= -\dot{\rho}_1' \left(\mathbf{q}_{11}' \cdot \mathbf{q}_{12}\right) - \rho_2 D_{qp32} \mathbf{q}_{22}' \cdot \mathbf{q}_{12} - \rho_1 D_{qp31} \mathbf{q}_{21}' \cdot \mathbf{q}_{12} + \left(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1 - \Delta\dot{\mathbf{R}}_A\right) \cdot \mathbf{q}_{12} \quad . \end{aligned} \tag{30.247}$$

Diese Beziehung beschreibt die Wirkung einer fehlerhaften Ausrichtung der Beobachtungsantenne und einer fehlerhaften Eigenbewegung in Überlagerung der Bewegung des Raumflugkörpers sowie der Bodenstation auf eine unterschiedliche Beobachtung der Entfernungsänderung in den Augenblicken des Aussendens eines Signals und des Empfangs.

In diesem Fall kann die Zwei-Wege-Entfernungsänderung (d.h. der 2-Wege *Doppler*) berechnet werden aus

$$\dot{\rho}_{P-2way} = \dot{\rho}_{P1} + \dot{\rho}_{P2} \quad . \tag{30.248}$$

Es tritt somit gegenüber dem „ungestörten“ Fall, der bei richtiger Ausrichtung und richtiger Eigenbewegung der Antenne besteht, ein nicht zu vernachlässigender Unterschied auf:

$$\dot{\rho}_{P1} \neq \dot{\rho}_{P2} \quad . \tag{30.249}$$

Nach der Behandlung des <u>qualitativen</u> Aspektes des hier untersuchten Problemkreises wird im Folgenden die Näherung <u>quantitativ</u> untersucht, mit der üblicherweise in der Beobachtung von Satelliten und Raumflugkörpern gearbeitet wird. Dazu wird bei Untersuchungen der Zwei-Wege Entfernungsänderung die Bewegung des Raumflugkörpers während Empfang und Rücksendung des Signals vernachlässigt:

$$\mathbf{r}_{c1} = \mathbf{r}_{c2} = \mathbf{r}_c \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_{c1} = \dot{\mathbf{r}}_{c2} = \dot{\mathbf{r}}_c \quad . \tag{30.250}$$

Im Fall einer “Störung” wird auch eine Veränderung des Fehler-Zustandsvektors in dem entsprechenden Zeitraum vernachlässigt

$$\Delta\mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}_2 = \Delta\mathbf{r} \quad , \quad \Delta\dot{\mathbf{r}}_1 = \Delta\dot{\mathbf{r}}_2 = \Delta\dot{\mathbf{r}} \quad . \tag{30.251}$$

Dagegen muss die Eigenbewegung der Bodenantenne während des Zeitraumes zwischen Aussenden und Empfang des Signals berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{T1} &= -\mathbf{r} + \mathbf{R}_{A1} \ , \ \mathbf{r}_{T2} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_{A2} \ , \\ \dot{\mathbf{r}}_{T1} &= -\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{R}}_{A1} \ , \ \dot{\mathbf{r}}_{T2} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}_{A2} \ , \end{aligned} \tag{30.252}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{T1} - \dot{\mathbf{R}}_{A1} = -\dot{\mathbf{r}} = -\dot{\mathbf{r}}_{T2} + \dot{\mathbf{R}}_{A2} \quad , \quad \left(\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} \ , \ \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}\right) \quad . \tag{30.253}$$

Formel (30.247) vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{P2} &= -\dot{\rho}_1' \left(\mathbf{q}_{11}' \cdot \mathbf{q}_{12}\right) - \rho_2 D_{qp32} \left(\mathbf{q}_{22}' \cdot \mathbf{q}_{12}\right) - \\ &\quad - \rho_1 D_{qp31} \left(\mathbf{q}_{21}' \cdot \mathbf{q}_{12}\right) - \Delta\dot{\mathbf{R}}_A \cdot \mathbf{q}_{12} \quad , \left(\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \, , \, \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2\right) \end{aligned} \tag{30.254}$$

Und es bleibt im “gestörten” Fall sicherlich $\dot{\rho}_{P1} \neq \dot{\rho}_{P2}$.

Als weitere Vereinfachung werde jetzt auch die Eigenbewegung des Beobachterstandortes und dann auch die Eigenbewegung der Antenne vernachlässigt, es bleibt dann

$$\mathbf{R}_{A1} = \mathbf{R}_{A2} \quad , \quad \dot{\mathbf{R}}_{A1} = \dot{\mathbf{R}}_{A2} \quad , \quad \Delta\dot{\mathbf{R}}_A = 0 \quad , \quad \mathbf{D}_{qp1} = \mathbf{D}_{qp2} \; , \; D_{qp31} = D_{qp32}$$

und

$$\mathbf{r}_{T1} = -\mathbf{r}_{T2} \; , \; \dot{\mathbf{r}}_{T1} = -\dot{\mathbf{r}}_{T2} \; ,$$

daher

$$\rho_1 = \mathbf{r}_{T1} \cdot \mathbf{q}'_{11} = \mathbf{r}_{T2} \cdot \mathbf{q}'_{12} = \rho_2 \quad .$$

Die gestörte Richtung der Antenne vereinfacht sich dann zu

$$\mathbf{q}'_{11} = \frac{\mathbf{r}_{T1}}{\rho_1} = -\frac{\mathbf{r}_{T2}}{\rho_2} = -\mathbf{q}'_{12} \quad .$$

Die Konsequenz ist: In diesem und nur in diesem Fall von Vereinfachungen wird Formel (30.254) reduziert auf

$$\dot{\rho}_{P2} = \dot{\rho}'_1 \, \mathbf{q}'_{11} \cdot \mathbf{q}_{11} = \dot{\rho}_{P1} \quad , \left(\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 , \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1 , \mathbf{R}_{A1} = \mathbf{R}_{A2} , \dot{\mathbf{R}}_{A1} = \dot{\mathbf{R}}_{A2} , \mathbf{D}_{qp1} = \mathbf{D}_{qp2}\right) \quad . \tag{30.255}$$

In diesem in der Praxis vor allem bei der Beobachtung von Erdsatelliten wichtigen Spezialfall sind die beiden Anteile des Zwei-Wege-*Doppler*s gleichgewichtig. Eine fehlerhafte Ausrichtung der Bodenantenne wirkt sich auf den Betrag des Zwei-Wege-*Doppler*s aus, während eine fehlerhafte Eigenbewegung der Antenne keinen Einfluss hat[1].

Werden kleine Zeitdifferenzen zugelassen und somit eine allerdings geringfügige Eigenbewegung, ist zu erwarten, dass die Beziehung (30.255) nur sehr wenig modifiziert werden muss, so dass mit einem kleinen Betrag $\Delta\dot{\rho}$ gesetzt werden darf

$$\dot{\rho}_{P2} = \dot{\rho}_{P1} + \Delta\dot{\rho} \quad . \tag{30.256}$$

30.10.5 Anwendung auf interplanetare Beobachtungen

f_0 sei die Frequenz des Transponders an Bord des Raumflugkörpers. δf sei die Ein-Weg *Doppler* Frequenzverschiebung, Δf die um den Faktor 2 reduzierte Zwei-Weg-*Doppler*verschiebung. Unter der Annahme, dass der Winkel γ bekannt sei (Bild 30-32), können der Fehler ΔV in der Geschwindigkeit des Raumflugkörpers sowie die Winkel α und β (vgl. Bild 30-30) mit Hilfe der Formeln (30.226) and (30.228) (c = Vakuum Lichtgeschwindigkeit) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\rho} &:= \dot{\rho} - \dot{\rho}_c = \Delta\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{q}_1 = -c\frac{\Delta f}{f_0} = \Delta V \cos\alpha \\ \Delta\dot{\rho}_P &:= \dot{\rho}_P - \dot{\rho}_c = -c\frac{\delta f}{f_0} \approx \Delta V \cos\alpha + \\ &+ \frac{\Delta r \sin\varepsilon}{\rho'}\left[\left(V_0 \sin\beta + \Delta V \sin\alpha \cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V \sin\alpha \sin\gamma \sin\eta\right] \quad . \end{aligned} \tag{30.257}$$

Entsprechend ergeben sich die beiden Ausdrücke

$$\frac{\delta f}{\Delta f} = 1 + \frac{\Delta r \sin\varepsilon\left[\left(V_0 \sin\beta + \Delta V \sin\alpha \cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V \sin\alpha \sin\gamma \sin\eta\right]}{\rho' \, \Delta V \cos\alpha} \tag{30.258}$$

---

[1] PORSCHE, H. [1999]

und

$$-c\frac{\delta f}{f_0} + c\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta r \sin\varepsilon}{\rho'}\left[\left(V_0 \sin\beta + \Delta V \sin\alpha \cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V \sin\alpha \sin\gamma \sin\eta\right]. \quad (30.259)$$

Die Geschwindigkeit V_0 der berechneten Bewegung erlaubt die Berechnung des Winkels β mit den Formeln $\dot{\rho}_c = V_0 \cos\beta$, $\rho_c D_{qpc3} = V_0 \sin\beta$. Mit Hilfe einer Bahnbestimmung des Raumflugkörpers basierend auf einer Serie von Beobachtungen können die Parameter $\Delta r, \varepsilon, \eta, \Delta V, \alpha, \gamma$ als bekannt angenommen werden. Entsprechend kann dann auch die Basis des $\mathbf{q}_j$ −Beobachtersystems aus der berechneten Bewegung erhalten werden[1]. Mit Formel (30.22) sind auch die Fehlerzustandsvektoren bekannt. Sei zur Abkürzung

$$A := \left(V_0 \sin\beta + \Delta V \sin\alpha \cos\gamma\right)\cos\eta + \Delta V \sin\alpha \sin\gamma \sin\eta \quad (30.260)$$

gesetzt, folgt aus (30.258)

$$\frac{\Delta r}{\rho'} = \frac{\Delta V \cos\alpha}{A \sin\varepsilon}\left(\frac{\delta f}{\Delta f} - 1\right) \quad (30.261)$$

und mit (30.224)

$$\sin\delta = \frac{\Delta V \cos\alpha}{A}\left(\frac{\delta f}{\Delta f} - 1\right) \quad . \quad (30.262)$$

Aus Gründen der Beobachtbarkeit ist sicherlich $\cos\delta > 0$. Der Winkel ist somit aus der obigen Formel eindeutig bestimmbar. Somit hat der Fehlerortsvektor den Betrag

$$\Delta r = \frac{\rho' \sin\delta}{\sin\varepsilon} \quad (30.263)$$

und die gestörte Entfernung folgt aus

$$\rho' = \rho_c \frac{\sin\varepsilon}{\cos\delta \sin\varepsilon - \sin\delta \cos\varepsilon} = \rho_c \frac{\sin\varepsilon}{\sin\left(\varepsilon - \delta\right)} \quad . \quad (30.264)$$

Wenn jedoch $\sin\varepsilon = 0$, folgen aus dem Ausdruck (30.258) die Beziehungen $\delta f = \Delta f$ und $\dot{\rho}_P = \dot{\rho}'$, d.h. in diesem Fall darf keine Störung vermutet werden. Zusätzlich kann mit Hilfe der *Doppler* Messungen nicht nur die Radialgeschwindigkeit erhalten werden, sondern auch die Richtung zu dem Raumflugkörper. Dazu werden die Erdrotation und damit auch die Eigenbewegung der Antenne der Bodenstation berücksichtigt[2]. Die geometrischen Parameter (d.h. die Winkel nach Bild 30-30 auf Seite 484) können damit dann auch geschätzt werden.

30.10.6 1. BEISPIEL: Die Raumsonde GIOTTO beim Kometen P/Halley

Die Bewegung einer interplanetaren Raumsonde werde durch eine unbekannte Beschleunigung beeinflusst. Die Antenne der Bodenstation ist nach wie vor in die berechnete Richtung orientiert. Daher wird ein Fehler in der radialen Geschwindigkeit („Range rate“) beobachtet. Die kontrovers diskutierte physikalische Deutung dieses Vorganges[3] ist nicht Gegenstand der

---

[1] Abschnitt 30.10.1 ab Seite 475

[2] PH. HARTL [1973]

[3] PÄTZOLD, M, BIRD, M. K. [2001]; PÄTZOLD, M, et al. [1991]; PORSCHE, H. [2015]

vorliegenden Untersuchungen. Die mathematische Behandlung beruht auf Vorschlägen von H. PORSCHE [1999][1].

Während der Begegnung der europäischen Raumsonde Giotto mit dem Kometen P/Halley wurden die folgenden Parameter berechnet bzw. aus der Beobachtung zur Epoche 1986-03-14/00:03:1.84 (U.T.1) abgeleitet. Der berechnete Zustandsvektor $(\mathbf{r}_c, \dot{\mathbf{r}}_c)$ der Raumsonde hat die heliozentrischen ekliptikalen Koordinaten (J2000.0):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{-0.80171187187242D+08 km} \\
x_2 &= \text{-0.10854734148444D+09 km} \\
x_3 &= \text{-0.36184290742135D+07 km} \\
\dot{x}_1 &= 21.299416885262 \text{ km/s} \\
\dot{x}_2 &= -22.482162378519 \text{ km/s} \\
\dot{x}_3 &= 0.60385539849442 \text{ km/s}
\end{aligned}
$$

Die Beobachtungsparameter sind:

$$
\begin{aligned}
\delta f &= 16.5 \pm 0.5 \; Hz \\
\Delta f &= 4.64 \pm 0.05 \; Hz \\
f_0 &= 8.429 \cdot 10^9 \; Hz \\
\gamma &\approx -60°.000 \\
V_0 &= 25.970099 \text{ km/s} \\
\beta &= 77°.34623 \quad .
\end{aligned}
$$

Diese führen (mit der ersten der Formeln (30.257)) auf

$$\Delta V \cos\alpha = -0.165029897 \; m/s \quad .$$

Von zentralem Interesse ist die <u>relative Abweichung</u> der Ein-Weg-*Doppler* Messung von der Zwei-Weg-*Doppler*messung

$$\left| \frac{\delta f - \Delta f}{\Delta f} \right| = 2.556 \quad . \tag{30.265}$$

Mit dem berechneten Winkel $\alpha = 228°.93462$ nimmt die fehlerhafte Geschwindigkeit den Betrag $\Delta V = 25.1547$ cm/s an. Die Positionswinkel des fehlerhaften Ortsvektors werden geschätzt auf $\varepsilon = 120°, \eta = 10°$. Damit hat der Fehlervektor den Betrag $\Delta r =$ 2789 km. Als Folge hat der Fehler-Zustandsvektor die Komponenten (mit den Ausdrücken (30.223))

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= 1436.757 \text{ km} \\
\Delta y &= 1924.120 \text{ km} \\
\Delta z &= 1418.092 \text{ km}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta\dot{x} &= \text{-0.1643036072D-03 km/s} \\
\Delta\dot{y} &= \text{0.2127953121D-04 km/s} \\
\Delta\dot{z} &= \text{0.1892817099D-03 km/s} \quad .
\end{aligned}
$$

[1] Die Herleitungen und Rechnungen im vorliegenden Abschnitt wurden dankenswerterweise von *H. Porsche* begleitet

Die ekliptikalen *Kepler*elemente des Raumflugkörpers (bezogen auf J2000.0) sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst: linke Spalte die "ungestörten" Elemente, wie sie vor dem Encounter errechnet wurden (berechnet aus dem Zustandsvektor $(\mathbf{r}_c, \dot{\mathbf{r}}_c)$), rechte Spalte die Elemente unter Berücksichtigung der zuvor hergeleiteten "Störungen" (berechnet aus $(\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \Delta\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_c + \Delta\dot{\mathbf{r}})$):

a = 131824122.742 km	a = 131817447.181 km
e = 0.176318003175	e = 0.17632208382808
i = 2°.083	i = 2°.0833
Ω = 280°.799	Ω = 281°.02990
ω = 204°.764	ω = 204°.71584
M_0 = 87°.827	M_0 = 87°.83732

Die Schrägentfernung des Raumflugkörpers beträgt ρ= 0.1428760*10^9 km. Die Entfernungsänderung (range-rate) beträgt in den unterschiedlichen Fällen (mit den Zuordnungen $(\mathbf{r}_{TC}, \dot{\mathbf{r}}_{TC})$ aus (30.155), $(\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{TC} + \Delta\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}}_{TC} + \Delta\dot{\mathbf{r}})$ aus (30.209), $\mathbf{q}_1$ aus (30.156), $\mathbf{q}_1'$ aus (30.227)):

Berechneter Wert: $\dot{\rho}_c = \dot{\mathbf{r}}_{Tc} \cdot \mathbf{q}_1 = 5.684111\ km/s$

Klassische Formel: $\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1 = 5.697945\ km/s$

Modifizierte Formel: $\dot{\rho}_P = (\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1')(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1) = 5.698368\ km/s$.

Die absoluten Fehler lauten

$$\Delta\dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_c = -0.1654243 \cdot 10^{-3}\, km/s$$

$$\Delta\dot{\rho}_P := \dot{\rho}_P - \dot{\rho}_c = 0.2573392 \cdot 10^{-3}\ km/s$$

Der Unterschied der klassischen von der modifizierten Formel (30.221) beträgt

$$\Delta^{(2)}\dot{\rho} := \Delta\dot{\rho}_P - \Delta\dot{\rho} = 0.4227635 \cdot 10^{-3}\ km/s \approx 0.4\ m/s\ .$$

Die relativen Abweichungen sind

$$\frac{\Delta\dot{\rho}}{\dot{\rho}_c} = -2.9103 \cdot 10^{-5} \quad \text{and} \quad \frac{\Delta^{(2)}\dot{\rho}}{\dot{\rho}_c} = 7.4376 \cdot 10^{-5} \quad .$$

Dies führt mit einer zum Ausdruck (30.265) analogen Betrachtung zu dem Wert

$$\left|\frac{\Delta^{(2)}\dot{\rho}}{\Delta\dot{\rho}}\right| = \left|\frac{\Delta\dot{\rho}_P - \Delta\dot{\rho}}{\Delta\dot{\rho}}\right| = \left|\frac{\dot{\rho}_P - \dot{\rho}}{\dot{\rho} - \dot{\rho}_c}\right| = 2.556 \quad . \tag{30.266}$$

Beachte: Der Ausdruck (30.265) ist durch Auswertung der direkten Beobachtungen erhalten worden. Das hier hergeleitete Ergebnis (30.266) ist eine Folge der modifizierten Theorie, der Schätzung der Winkelgrößen im Fehler-Ortsvektor und der entsprechenden Berechnungen. Die zahlenmäßige Übereinstimmung ist eine Bestätigung der Richtigkeit der modifizierten Theorie[1].

[1] Basierend auf den Überlegungen von PORSCHE, H. [1999]

Eine weitere interessante Beobachtung kann aus der Auswahl der Richtungswinkel des Fehler-Ortsvektors insbesondere des Winkels ε abgeleitet werden. Der beste Wert für diesen Winkel, um die charakteristischen Zahlenwerte in den Ausdrücken (30.265) und (30.266) zur Übereinstimmung zu bringen, ist $\varepsilon = 120°$. Das bedeutet, die relative Bewegung des Raumflugkörpers ist zum Beobachter gerichtet, obgleich dieser auf die berechnete Position bezogen ist. Deshalb darf eine Blauverschiebung des *Doppler*-Signals erwartet werden, die tatsächlich während der Begegnung der Sonde mit dem Kometen beobachtet worden ist.

Der Missweisungswinkel δ wird mit Formel (30.262) berechnet. Er beträgt im vorliegenden Fall $\delta = 3''.5$. Obgleich dieser Winkel sehr klein ist, darf er auf keinen Fall vernachlässigt werden. Würde er vernachlässigt $(\delta \to 0°)$, würde mit $\left(\Delta^{(2)}\dot{\rho} \to 0.0\right)$ der Unterschied zwischen der klassischen und der modifizierten Theorie verschwinden.

- *Bei der Berechnung der Entfernungsvariation im Fall einer unbekannten Bahnstörung muss eine Missweisung der Antenne unbedingt berücksichtigt werden, auch wenn wie im Fall interplanetarer Bahnen diese Missweisung nur sehr gering ausfallen kann.*

30.10.7 2. BEISPIEL: GIOTTO beim Kometen P/Grigg-Skjellerup 1992

Um die modifizierte Theorie des Einweg-*Doppler* mit einer weiteren unabhängigen Beobachtung zu testen, wird die Begegnung der Raumsonde Giotto mit dem Kometen P/Grigg-Skjellerup untersucht. Diese hat sich unter völlig anderen geometrischen Randbedingungen als die Begegnung mit P/Halley ereignet.

Der Encounter fand zur Epoche 1992 Juli 10/ 15:18:43.6 (UTC) statt. Die ekliptikalen *Kepler* Elemente der Raumsonde bei Bezug auf die Fundamentalepoche B1950.0 waren

$$\begin{aligned} a &= 160251227.571 \text{ km} \\ e &= 0.0768075562 \\ i &= 5°.5552 \\ \Omega &= 279°.2533 \\ \omega &= 317°.1198 \\ M_0 &= 326°.9386 \quad . \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass zur obigen Epoche eine Störung auf die Raumsonde stattgefunden hat, wurden folgende Radio Science Messungen erhalten:

$$\begin{aligned} \delta f &= -124.5\,Hz \qquad [X-\text{Band, gemessen in Madrid}] \\ \Delta f &= 0.01283\,Hz \qquad [S-\text{Band}] \\ \Delta f &= 0.01283 \cdot \frac{11}{3}\,Hz = 0.04704\,Hz \qquad [\text{entsprechend der Frequenz im } X-\text{Band}] \\ f_0 &= 8.429 \cdot 10^9\,Hz \\ \cos\gamma &\approx 0.5 \quad , \quad \alpha = 269°.94435 \approx -90° \quad , \gamma \approx -60°.0 \quad . \end{aligned}$$

Die relative Abweichung der Einweg-*Doppler* Messung in Bezug auf die Zweiweg-*Doppler*-Messung beträgt

$$\left|\frac{\delta f - \Delta f}{\Delta f}\right| = 2647.5 \quad . \tag{30.267}$$

Die Orientierungswinkel des Fehler-Ortsvektors werden so gewählt, dass die Ergebnisse in Ausdruck (30.268) bestmöglich mit dem Zahlenwert in (30.267) übereinstimmen. Die Abhängigkeit dieser Winkel ist sehr empfindlich:

$$\varepsilon = 5°.324 \quad , \quad \eta = 4°.0 \quad .$$

Die berechnete Geschwindigkeit der Raumsonde und die zugehörigen Winkel sind

$$V_0 = 41.1183 \text{ km/s}$$

$$\beta = 93°.16775$$

$$\Delta V \cos\alpha = -0.1673062 \cdot 10^{-5} \; km/s$$

$$\Delta V = 1.722 \; m/s$$

Diese Zahlenwerte führen auf die Komponenten des Fehler-Zustandsvektors

$$\Delta x = -214158.930 \text{ km}$$

$$\Delta y = 80577.419 \text{ km}$$

$$\Delta z = 21293.668 \text{ km}$$

mit dem Betrag Δr = 249204.245 km. Für den Fehler-Geschwindigkeitsvektor ergibt sich

$$\Delta\dot{x} = 0.3057041191\text{D-03 km/s}$$

$$\Delta\dot{y} = 0.1655472791\text{D-03 km/s}$$

$$\Delta\dot{z} = 0.1687093827\text{D-02 km/s} \quad .$$

Die Missweisung beträgt in diesem Fall $\delta = 21''.5$ während des Encounters. Die Raumsonde hat von der Bodenstation die Entfernung

$$\rho = 213532500 \text{ km} \triangleq 1.4273556 \text{ AU} \quad .$$

Mit diesen Zahlenwerten ergeben sich für die Entfernungsvariation ("range-rate") der Raumsonde unter den unterschiedlichen Annahmen die Zahlenwerte.

Berechnete Entfernungsvariation:	$\dot{\rho}_c = \dot{\mathbf{r}}_{Tc} \cdot \mathbf{q}_1$	$= -2.255134$ km/s
Klassische Formel:	$\dot{\rho} = \dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1$	$= -2.255132$ km/s
Modifizierte Formel:	$\dot{\rho}_P = (\dot{\mathbf{r}}_T \cdot \mathbf{q}_1')(\mathbf{q}_1' \cdot \mathbf{q}_1)$	$= -2.250791$ km/s .

Die absoluten Fehler betragen

$$\Delta\dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_c = 0.163990 \cdot 10^{-5} \text{ km/s}$$

$$\Delta\dot{\rho}_P := \dot{\rho}_P - \dot{\rho}_c = 0.4342725 \cdot 10^{-2} \text{ km/s} \; .$$

Somit beträgt die Abweichung der Entfernungsvariation nach der klassischen Theorie von der modifizierten Theorie für die gestörte Bewegung der Raumsonde

$$\Delta^{(2)}\dot{\rho} := \Delta\dot{\rho}_P - \Delta\dot{\rho} = 4.341085 \text{ m/s} \; .$$

Die relativen Fehler sind

$$\left|\frac{\Delta\dot{\rho}}{\dot{\rho}_c}\right| = 7.27 \cdot 10^{-7} \quad , \quad \left|\frac{\Delta^{(2)}\dot{\rho}}{\dot{\rho}_c}\right| = 1.925 \cdot 10^{-3}$$

Dies führt schließlich (in analoger Untersuchung wie zu Ausdruck (30.267)) auf

$$\left|\frac{\Delta^{(2)}\dot{\rho}}{\Delta\dot{\rho}}\right| = \left|\frac{\Delta\dot{\rho}_P - \Delta\dot{\rho}}{\Delta\dot{\rho}}\right| = \left|\frac{\dot{\rho}_P - \dot{\rho}}{\dot{\rho} - \dot{\rho}_c}\right| = 2647.2 \quad . \tag{30.268}$$

Kritische Anmerkungen: Die Beobachtungsgenauigkeit während des Vorbeiflugs der Raumsonde am Kometen wurde zu 25% geschätzt[1]. Der Wert $\cos\alpha \approx 0.0$ zeigt für die Beobachtung eine sehr ungünstige Randbedingung. Außerdem muss beachtet werden, dass seit der Begegnung der Raumsonde mit dem Kometen P/Halley 6 Jahre vergangen sind, was zu einer Degradation der Instrument an Bord geführt haben dürfte. Deshalb sind die Messungen beim Encounter mit dem Kometen P/Grigg-Skjellerup sicherlich mit einer wesentlich höheren Unsicherheit behaftet als bei der Begegnung mit dem Kometen P/Halley. Daher muss akzeptiert werden, dass die Näherungen in den Formeln (30.251), (30.253) und (30.256) für die Auswertung der Daten in diesem Zusammenhang benutzt werden müssen. Der Zahlenwert in Ausdruck (30.267) beruht unmittelbar auf den direkten Beobachtungen. Dagegen ist der Ausdruck (30.268) eine Folgerung aus den Annahmen der modifizierten Theorie und den darauf beruhenden Berechnungen. Würde die klassische Theorie angewendet, würde der Wert in (30.268) notwendig verschwinden.

Die Übereinstimmung der Ergebnisse in den Ausdrücken (30.267), basierend auf den Beobachtungen, und in (30.268), basierend auf Berechnungen, bestätigt die modifizierte Ein-Weg-*Doppler* Theorie nicht nur in quantitativer sondern auch in qualitativer Hinsicht. Die Ergebnisse, die in den letzten beiden Abschnitten vorgestellt werden, zeigen, dass trotz aller geometrischen und technischen Benachteiligungen, die beobachteten Daten als Folge einer (physikalisch) unbekannten Änderung im Zustand des Raumflugkörpers interpretiert werden **können**. Die beeindruckende Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Daten wurden im Fall der Begegnung des Giotto mit P/Halley wie mit P/Grigg-Skjellerup durch Anpassung der Richtungswinkel ε and η des Fehler-Ortsvektors erhalten.[2]

30.10.8 Zusammenfassung der Ergebnisse der Untersuchungen in 30.10

- Eine auch noch so kleine Missweisung der Beobachtungsantenne darf bei Einweg Doppler Messungen grundsätzlich nicht vernachlässigt werden.
- Eine fehlerhafte Ausrichtung und Eigenbewegung der beobachtenden Bodenantenne muss durch eine doppelte Projektion (entsprechend Formel (30.221) auf Seite 486) berechnet werden.
- Der Bezug der doppelten Projektion liegt im Referenzpunkt der beobachtenden Antenne.
- Der Einfluss der doppelten Projektion im Fall des Zweiweg-Dopplers kann bei kleinen Missweisungen der beobachtenden Antenne vernachlässigt werden (*Porsche* (1999)).
- Die Auswirkungen einer auch noch so geringfügigen fehlerhaften Ausrichtung und Eigenbewegung des Beobachtungsgerätes (Bodenantenne) auf die Bestimmung der radialen Geschwindigkeit aus einer Einweg Dopplermessung insbesondere bei Objekten, für deren Beobachtung kein Zweiweg-Doppler zur Verfügung steht (etwa stellaren Objekten), darf auf keinen Fall vernachlässigt werden.
- Beim Zweiweg-Doppler kann bei kleinen Zeitdifferenzen und insbesondere bei der Beobachtung von nahen Erdsatelliten die Eigenbewegung des Beobachters näherungsweise eliminiert werden (Formeln (30.255) und (30.256)).

---

[1] PÄTZOLD, M, et al. [1993]

[2] Weitere Untersuchungen und Beispiele zu dem in Abschnitt 30.10 behandelten Problemkreis finden sich in der Veröffentlichung E. F. JOCHIM [2009] sowie in der technischen Note E. F. JOCHIM [2008]

30.11 Bewegung eines Planetenorbiters

Bei der Untersuchung der Bewegung eines künstlichen Satelliten um einen Planeten hat es sich eingebürgert, diese als Planeten*orbiter* im Gegensatz zu Erds*atelliten* zu bezeichnen. Diese Definition ist nicht zwingend, aber charakterisierend, wenn der Unterschied zu Erdsatelliten betont werden soll.

30.11.1 Die Bewegungsparameter eines Planetenorbiters

Die Untersuchung der Bewegung eines Planetenorbiters wird analog wie die Bewegung eines Erdsatelliten auf die Äquatorebene des Planeten bezogen. Entsprechend wird die Bewegung des Planetenorbiters in einem planetozentrischen äquatorialen Koordinatensystem mathematisch beschrieben. Bevorzugt wird dazu das auf den IAU-Vektor (gerichtet zum aufsteigenden Knoten des Planetenäquators bezüglich des Erdäquators) bezogene Planetenäquatorsystem benutzt, das in Abschnitt 29.4 auf Seite 323 vorgestellt wird. Der Vorteil in der Verwendung dieses Systems liegt darin, dass die Rotation des Planeten im astronomischen IAU 1976 System[1] ebenfalls auf diesen Vektor bezogen ist, so dass der Bezug der Bewegung eines Planetenorbiters zur Planetenoberfläche in einfacher Weise hergestellt werden kann. Entsprechend erfolgt die Umrechnung eines Zustandsvektors in diesem System auf Bahnparameter mit den in Abschnitt 11.1.1 (Band III) zusammengestellten Formeln. Dabei muss der Bezug auf den Ursprung des Planetenäquatorsystems, üblicherweise also auf den IAU-Vektor, betont werden. Dies ist anstelle des Bezugs auf den Frühlingspunkt wie bei Erdsatelliten. Werden die *Kepler*elemente verwendet, zeigt sich dieser Bezug daher ausschließlich in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens, die also auf den IAU-Vektor bezogen ist.

Alternativ zum IAU-System wird gelegentlich auch (etwa in der russischen Raumfahrt) ein System benutzt, das auf den Schnittpunkt des Planetenäquators mit der Bahn des Planeten um die Sonne bezogen ist (die Formeln sind in Abschnitt 30.4.1.3 auf Seite 442 zusammengestellt). Auf dieses System wird im Rahmen dieses Kapitels nicht weiter eingegangen.

Die Integration der Bewegung eines Planetenorbiters erfolgt in dem auf den IAU-Vektor bezogenen Planetenäquatorsystem in gleicher Weise wie sie auch für Erdsatellitenbahnen durchgeführt wird. Das verwendete Bahnmodell ist planetenspezifisch und hängt von den Genauigkeitsanforderungen ab.

Ein Planetenorbiter um einen Planeten mit der planetozentrischen Gravitationskonstante[2] $\mu_P \left[km^3 / s^2 \right]$ hat die (planetozentrische) Bewegungsgleichung entsprechend der allgemeinen Darstellungen[3] (17.1) und (17.2)

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R \, \mathbf{r}_0 + b_T \, \mathbf{q}_0 + b_N \mathbf{c}_0 = -\mu_P \frac{\mathbf{r}}{r_P^3} + \mathbf{R}_2 \qquad . \tag{30.269}$$

Der dominierende („Stör“-) Einfluss auf die Bahn eines Planetenorbiters dürfte normalerweise die *Kepler*sche Beschleunigung $b_K = -\mu_P \, \mathbf{r} / r^3$ sein. $\mathbf{R}_2$ fasst dann alle „Rest“-Beschleunigungen zusammen, welche das Zweikörperproblem Orbiter-Planet „stören“. Damit kann auch die

---

[1] siehe etwa in AA 1984 [1983], p. S28–S33

[2] Die Zahlenwerte sind in Anhang E.7 (Band V) wiedergegeben

[3] nach Kapitel 17, Band III

Bewegung eines Planetenorbiters mit den in Abschnitt 17 vorgestellten Formelsystemen bearbeitet werden

In speziellen Fällen etwa bei Bewegung einer Raumsonde um einen Kometen können andere Effekte die *Kepler*bewegung dominieren. Um einen Orbiter in einer Umlaufbahn um einen solchen Körper zu ermöglichen, kann es sein, dass nur künstlich erzeugte Bewegungseinflüsse eine solche Bahn ermöglichen (Beispiel: Rosetta).

BEISPIEL 1: Für die Einschussbahn des europäischen Marsorbiters Mars-Express in eine erste Marsumlaufbahn seien die in Tabelle 30-6 zusammengestellten Bahnparameter angenommen.

Es wird verlangt, dass die Einschussbahn vollständig von der Erde aus beobachtet werden kann. Dazu wird für den Moment der Epoche der subterrestrische Punkt auf der Marsoberfläche benötigt und damit die Bahn des Orbiters „inertial“ festgehalten während sich der Mars unter der Bahn weiterdreht. Zum Zeitpunkt der Epoche lauten die planetographischen Koordinaten des subterrestrischen Punktes (entnommen dem astronomischen Jahrbuch von 1996)[1]:

$$\lambda_{P\♁} = 54°.300 \ , \ \varphi_{P\♁} = -20°.954 \quad .$$

Das Argument W_0 des Nullmeridians kann dem astronomischen Jahrbuch entnommen werden, ebenso die Rotation $\dot{W}$ des Planeten[2]. Im Moment t_A der Beobachtung von der Erde aus, d.h. unter Berücksichtigung der Lichtzeit τ (nach Formel (30.150)), hat das Argument des Nullmeridians den Betrag $W = 224°.503$. Dieser Wert ist auf Erd- bzw. Marsmittelpunkt bezogen, die Parallaxen zwischen Erdmittpunkt und Beobachter auf der Erde sowie zwischen Marsmittelpunkt und dem subterrestrischen Punkt auf der Marsoberfläche sind somit vernachlässigt.

Mit Formel (30.133) (auf Seite 450) ergeben sich im auf den Frühlingspunkt bezogenen Erdäquatorsystem aus Formel (30.134) die planetozentrische Rektaszension $\alpha_{P\♁}$ = 170°.203 und mit (30.141) die zugehörige Deklination $\delta_{P\♁}$ = -20°.954 .

Würde die Lichtzeit nicht berücksichtigt, hätte das Argument des Nullmeridians den Wert $W' = 229°.334$. Ein Zeitfehler wirkt sich also erheblich aus. Selbst eine Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen terrestrischer Weltzeit (U.T.1) und baryzentrischer dynamischer Zeit (TDB) würde bei der Berechnung der Marsrotation einen Fehler von etwa $0°.5$ zur Folge haben.

Bild 30-34 zeigt die Projektion eines Marsorbiters auf die Marsoberfläche gesehen von der Erde aus, die wahre Bahn sowie den subterrestrischen Punkt. Im Bild sind die Apsiden markiert: Apomartium : H_A = 21973.508 km, Perimartium: H_P = 295.760 km .

---

[1] Beachte: Index P bedeutet Ort auf dem Planeten, hier der subterrestrische Punkt der Erde ♁

[2] Beispiel: für 2004, Januar, 0 /0h TT können dem Jahrbuch für 2014 folgende Werte für den Planeten Mars entnommen werden: $W_0 = 23°.50$, $\dot{W} = 350°.8919993/\text{day}$. Nähere Erklärungen und Formeln sind im jeweiligen astronomischen Jahrbuch zu finden. Siehe auch SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], Table 15.7, Planets: Rotational Data, p. 705, hier Bezug der Daten auf 2000, Januar, 1.5 TDB

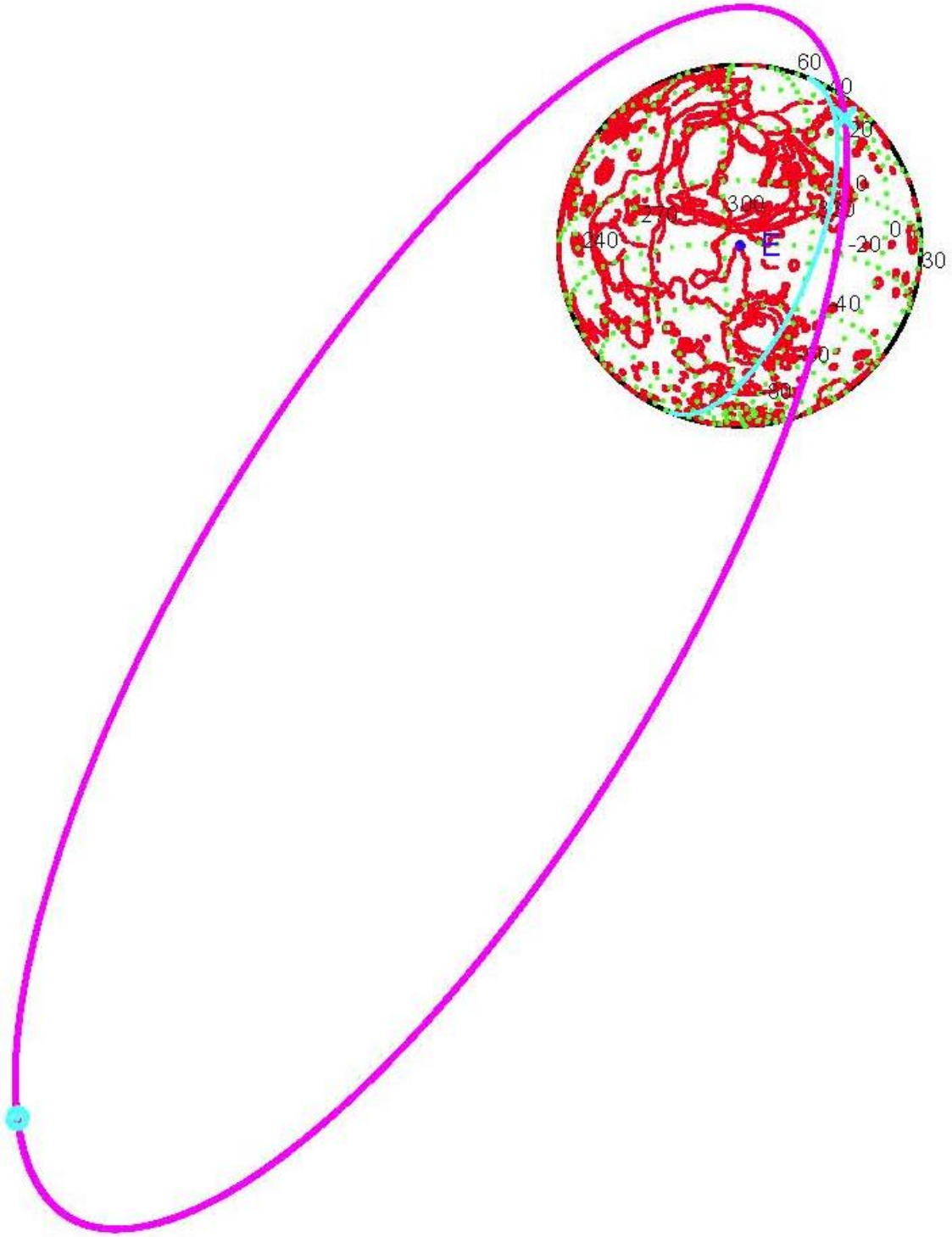


Bild 30-34: Einschussbahn eines Marsorbiters (MARS-EXPRESS) in eine hochexzentrische Marsumlaufbahn, die vollständig von der Erde aus eingesehen werden kann. Der subterrestrische Punkt ist auf der Marsoberfläche durch „E“ gekennzeichnet[1]. Die Subsatellitenbahn sowie das Perimartium und das Apomartium sind durch hellblaue Punkte gekennzeichnet.

Die physischen Daten des Mars, welche die Bahn des Orbiters beeinflussen, Mars-zentrierte Gravitationskonstante, mittlerer Äquatorradius, Abplattung, dynamischen Potentialkoeffizienten J_2, J_3, J_4, sind Anhang E7 (Band V) entnommen. Weitere Bewegungseinflüsse wie

[1] Daten der Marsoberfläche von *G. Balmino* (Feb. 1994)

Luftwiderstand, Solarstrahlung, Attraktion durch Jupiter und andere Planeten sind hier vernachlässigt. ◄

Große Bahnhalbachse	a = 14531.834 km
Exzentrizität	e = 0.745871
Inklination (bezogen auf Marsäquator)	i = 100°.1
Rektaszension des aufsteigenden Knotens (bezogen auf Marsäquator und IAU-Vektor)	Ω = 359°.958
Argument des Perimartiums	ω = 155°.772
Mittlere Anomalie	M_0 = 0°.000
Epoche	t_A = 1996–05–01 / 18:00:00.0 (TDB)

Tabelle 30-6: Bahnparameter eines Mars-Orbiters (Projekt MARS-EXPRESS)

BEISPIEL 2: Tabelle 30-7 dient dem Vergleich der Bahnparameter eines Erdsatelliten mit denen eines Marsorbiters. Beide Bahnen haben dieselben Einschusselemente Perizentrums- und Apozentrumshöhe sowie die geographische Länge des ersten absteigenden Knotens. Berechnet werden jeweils die *Kepler*elemente sowie die säkularen Variationen von Rektaszension des aufsteigenden Knotens, des Argumentes des Perizentrums sowie der mittleren Epocheanomalie. Die Unterschiede sind eine Folge der unterschiedlichen Körperdaten (mittlerer Äquatorradius und planetozentrische Gravitationskonstante) sowie der dynamischen Potentialkoeffizienten (J_2, J_4). In Ergänzung zu diesen Berechnungen zeigt Bild 30-35 den Verlauf der Rektaszension des aufsteigenden Knotens einiger Marsorbiter mit der obigen Bahnform und für einige Inklinationen des Marsorbiters bezüglich des Mars-Äquators. ◄

Bahnparameter	Erde	Mars
Apozentrumshöhe	H_A = 18000 km	H_A = 18000 km
Perizentrumshöhe	H_P = 250 km	H_P = 250 km
Planetographische Länge des ersten absteigenden Knotens	$\lambda_{ab} = 0°$	$\lambda_{ab} = 0°$
Mittlerer Äquatorradius	$R_E = 6378.140\,\mathrm{km}$	$R_E = 3397.2\,\mathrm{km}$
Planetozentrische Gravitationskonstante	$\mu_{♁} = 398600.5\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$	$\mu_{♂} = 4282.28596\,\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$
Erster Potentialkoeffizient	$J_2 = 0.00108263$	$J_2 = 0.001964$
Große Bahnhalbachse	a = 15503.137 km	a = 12522.515 km
Exzentrizität	e = 0.57246479	e = 0.70872345
Inklination	i = 75°	i = 75°
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Ω = 280°.41441656	Ω =337°.08716784
Argument des Perizentrums	ω = 180°	ω = 180°
Mittlere Anomalie zur Epoche	M_0 = 0°	M_0 = 0°
Epoche	t_0: 1994-01-01/00:00:0.00	t_0: 1994-01-01/00:00:0.00
Säkulare Variation des Knotens	$\dot{\Omega}_s = -0.51404799 \times 10^{-7}/\mathrm{sec}$	$\dot{\Omega}_s = -0.33189876 \times 10^{-7}/\mathrm{sec}$
Säkulare Var. des Perizentrums	$\dot{\omega}_s = -0.66117951 \times 10^{-7}/\mathrm{sec}$	$\dot{\omega}_s = -0.42888412 \times 10^{-7}/\mathrm{sec}$
Säkulare Variation der Epocheanomalie	$(M_0)^{\bullet}_s = -0.65140674 \times 10^{-7}/\mathrm{sec}$	$(M_0)^{\bullet}_s = -0.36400573 \times 10^{-7}/\mathrm{sec}$

Tabelle 30-7: Vergleich der Bahnelemente eines Erdsatelliten mit denen eines Marsorbiters unter Voraussetzung derselben Einschussbahnelemente[1].

- Folgende weitere Beispiele für das Rechnen mit einem Marsorbiter sind in Band V zu finden:

BEISPIEL 3: Der Verlauf der wahren Bahnhöhe eines Marsorbiters über der als Rotationsellipsoid angenommen Marsoberfläche unter Einfluss der dynamischen Potentialkoeffizienten J_2, J_3, J_4 ist in Abschnitt 38.4.1 (Band V) an einem Beispiel dargestellt (Bild 38-19). ◄

BEISPIEL 4: Das Überdeckungsband einer hochexzentrischen Marsorbiterbahn zur Beobachtung mit einer optischen Kamera (HRSC auf Mars Express) ist in Abschnitt 38.4.3 (Band V) dargestellt (Bild 38-23). ◄

[1] Physikalische Daten des Mars (im Vergleich zur Erde) in Abschnitt E.7 (Band V)

BEISPIEL 5: In Bild 38-25 ist das Geschwindigkeitsverhalten des Endpunktes eines scannenden optischen Sensors auf einem Mars Orbiter für verschiedene Sensorgeometrien dargestellt (Abschnitt 38.4.5, Band V). ◀

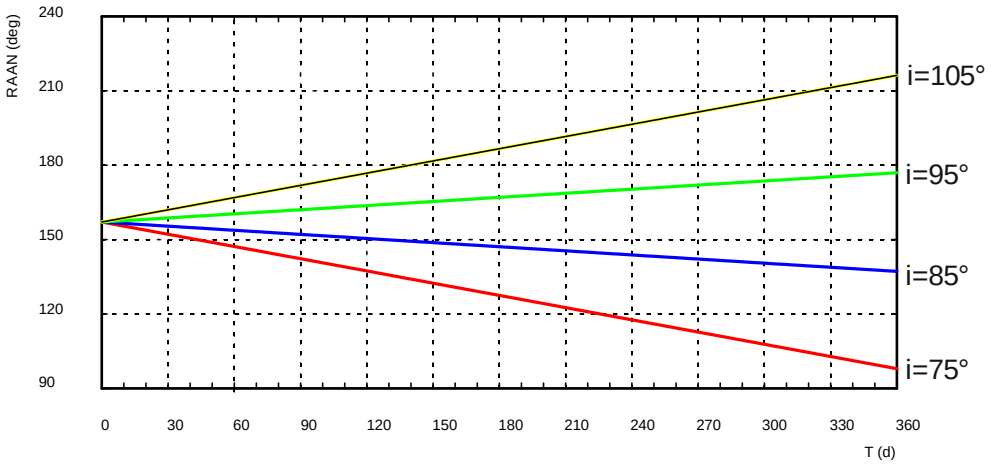


Bild 30-35: Die säkulare Änderung der äquatorialen Länge (Rektaszension) des aufsteigenden Knotens einiger Marsorbiter für verschiedene Inklinationen über ein Jahr (Bahn H_P= 250 km, H_A=18000 km)

Anmerkung: Eine systematische Zusammenstellung von Mars Orbiter Parametern findet sich in WERTZ, JAMES R. [2001], Table F-2, pp. 880-885 ◀

30.11.2 Sonnensynchrone Bewegung eines Planetenorbiters

Sonnensynchrone Orbiterbahnen sind, ähnlich wie die entsprechenden Bahnen von Erdsatelliten, von Interesse für die Fernerkundung von Planetenoberflächen unter möglichst gleichbleibenden Beleuchtungsverhältnissen. Die Definition der sonnensynchronen Bahnen wird auf den (mittleren) Planetenäquator bezogen. Dazu wird die mittlere Bewegung der Bahnebene längs des Planetenäquators, gegeben durch die säkulare Drift $\dot{\Omega}_s$ des aufsteigenden Knotens bezüglich des Planetenäquators, wie schon im Fall von sonnensynchronen Erdsatellitenbahnen in Relation gesetzt zur tropischen Bewegung $n_\odot$ einer mittleren fiktiven Sonne. Diese wird wie im Fall der Erde durch Reduktion der wahren Sonne auf den Planetenäquator und durch Mittelung (mit Hilfe der Mittelpunktsgleichung) erhalten. Diese mittlere Sonnenbewegung wird im Fall von Planetenorbitern näherungsweise aus der siderischen mittleren Bewegung des Umlaufs eines Planeten um die Sonne erhalten (der Fehler wird im Rahmen einer Orbiteranalyse üblicherweise vernachlässigt).

Mit Hilfe der Bedingung

$$\dot{\Omega}_s = n_\odot \tag{30.270}$$

kann eine sonnensynchrone Bahn konstruiert werden. Die säkulare Variation $\dot{\Omega}_s$ ist eine Funktion der mittleren Bahnelemente des Orbiters sowie der physikalischen Einflüsse („Störungen“) auf die Bahn. Im Fall des Mars ist wie bei der Erde die Abplattung des Mars, im Wesentlichen

repräsentiert durch den ersten zonalen Potentialkoeffizienten J_2, wie aus Formel[1] (20.15) ersichtlich, die Hauptursache für die Drift des Knotens. Aus Formel[2] (23.228) folgt dann

$$n_\odot = -\frac{3}{2} J_2 \sqrt{\frac{\mu_P}{\bar{a}_0^3}} \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \cos \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{30.271}$$

Da die mittlere tropische Bewegung $n_\odot$ des Planeten um die Sonne für alle Planeten eine positive Größe ist (siehe Tabelle 30-8 auf Seite 506) können sich auch Planetenorbiter nur dann auf einer sonnensynchronen Bahn bewegen, wenn die Bahn bezogen auf den Planeten rückläufig verläuft. Die Bahninklination bezogen auf den Planetenäquator muss also größer als 90° sein.

Im Folgenden (siehe dazu auch die Bilder Bild 30-36 bis Bild 30-40) wird für alle Planeten untersucht, ob es sonnensynchrone Orbiterbahnen geben kann und wenn, um was für Bahnen es sich handelt. Dazu werden die Bahnparameter große Halbachse, Exzentrizität und Inklination mit Hilfe der Bedingungsgleichung (30.271) variiert. Im Fall von Sonnensynchronität haben diese drei Parameter für jede Bahn genau eine charakteristische Relation. Kriterien für die Auswahl sind: die Bahnen dürfen eine Mindesthöhe (Perizentrumshöhe) nicht unterschreiten. Die benötigten physikalischen Parameter sind in Anhang E.7 (Band V) zusammengestellt.

Zusammenfassung der Ergebnisse:

1. Um Merkur und Venus können sich Orbiter nicht auf sonnensynchronen Bahnen bewegen (sonnensynchrone Bahnen würden im Inneren dieser Planeten verlaufen). Werden um diese Planeten sonnensynchrone Bahnen benötigt, müssen diese durch andere Bahneinflüsse erzeugt werden. Eine in der Literatur ausführlich diskutierte Möglichkeit nutzt den Einsatz eines Sonnenseglers[3].

2. Mars hat, obwohl kleiner als die Erde, ein ähnliches Verhalten sonnensynchroner Bahnen wie sonnensynchrone Erdsatellitenbahnen. Im Gegensatz zur Erde sind sogar noch Bahnen mit größerer Exzentrizität möglich. Die Grenzexzentrizität kann nicht überschritten werden. Alle sonnensynchronen Bahnen um Mars sind somit wie die um die Erde stabil an den Planeten gekoppelt.

3. Die vier Gasplaneten erlauben wegen ihrer großen Abplattung und damit großen Potentialkoeffizienten J_2 in allen Bahnhöhen sonnensynchrone Orbiterbahnen. Hohe sonnensynchrone Bahnen können aus dem Umlauf um den Planeten herausgeschleudert werden.

4. Da alle Planeten sich rechtläufig um die Sonne bewegen, können nur rückläufige Bahnen sonnensynchron sein. Würde dagegen ein Planet sich rückläufig um die Sonne bewegen $\left(n_\odot < 0\right)$, würden um diesen Planeten sonnensynchrone Bahnen (wenn möglich) rechtläufig sein.

5. Dies schränkt die Bedeutung der Sonnensynchronität ein und macht detaillierte Untersuchungen entsprechender Bahnen nicht überflüssig. Die Bahnen hoher Exzentrizität um die Gasplaneten sind nur von theoretischem Interesse. Man muss davon ausgehen,

[1] Band III

[2] Abschnitt 23.5.1

[3] LEIPOLD, M. [2000], pp. 76-86

dass diese Bahnen instabil werden, infolge von Bahnstörungen durch die Gravitation anderer Planeten und anderer physikalischer Einflüsse. Im Einzelnen sind hierzu weitere Untersuchungen nötig, die nicht Bestandteil der vorliegenden Studien sein sollen.

Planet	Siderische Umlaufzeit $P_{sid}\left[\mathrm{d}\right]$	Mittlere siderische Bewegung des Planeten bezogen auf die Sonne $n_{\odot} = 2\pi / P_{sid}$ [rad / sec]	Mittlerer Äquatorradius $R_E\left[\mathrm{km}\right]$	Planetozentrische Gravitationskonstante $\mu_P\left[\mathrm{km}^3/\mathrm{sec}^2\right]$	J_2
Mercury	87.968435728	8.26683482×10^{-7}	2439.7	22032.08015	0.0
Venus[1]	224.695433692	3.23647219×10^{-7}	6051.8	324858.7609	0.027×10^{-3}
Earth	365.17190955	1.99106385×10^{-7}	6378.1366	398600.448	1.08263×10^{-3}
Mars	686.929711912	1.05865348×10^{-7}	3396.19	42828.28596	0.001964
1 Ceres	1679.89633786	4.32896075×10^{-8}			
Jupiter	4330.59576356	1.67926208×10^{-8}	71492.	126711991.6	0.01475
Saturn	10746.9404426	6.76676877×10^{-9}	60268.	37934096.9	0.01645
Uranus	30588.7403410	2.37741317×10^{-9}	25559.	5803158.774	0.012
Neptun	59799.9004436	1.21608967×10^{-9}	24764.	6871307.756	0.004

Tabelle 30-8: Die mittlere siderische Umlaufzeit der großen Planeten um die Sonne, einige relevante physikalische Parameter, die Daten sind bezogen auf die Fundamentalepoche J2000.0

Planet	Bezugsperizentrum	Maximale Bahnhalbachse	Maximale Exzentrizität
Merkur	100 km	keine sonnensynchrone Bahn	
Venus	200 km		
Erde	200 km	a = 15579.81 km	e =0.5777113
Erdmond	10 km	a = 1954.594	e = 0.106004
Mars	100 km	a = 14550.30 km	e = 0.7664986
Jupiter	200 km	(bis zu hyperbolischer Bahn) Entweichbahn	
Saturn	200 km		
Uranus	200 km		
Neptun	200 km		

Tabelle 30-9: Grenzexzentrizität und Grenzhalbachse für sonnensynchrone Planetenorbiter

[1] 1984

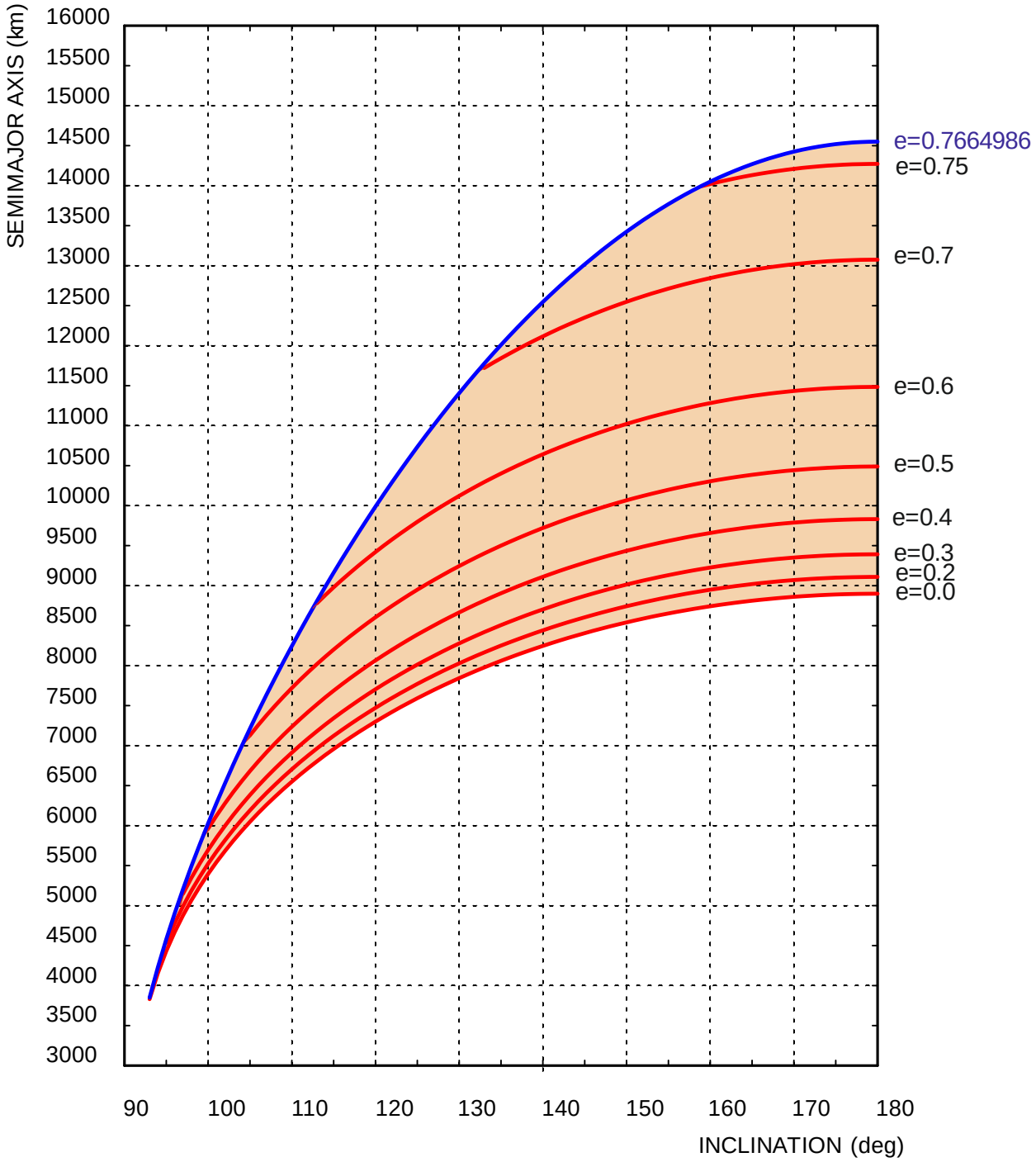


Bild 30-36: Die sonnensynchronen Bahnen eines Mars-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der Perimartiumhöhe H = 100 km. Neigung der Äquatorebene zur Ekliptik $\varepsilon_{♂} = 25°11'.4$.

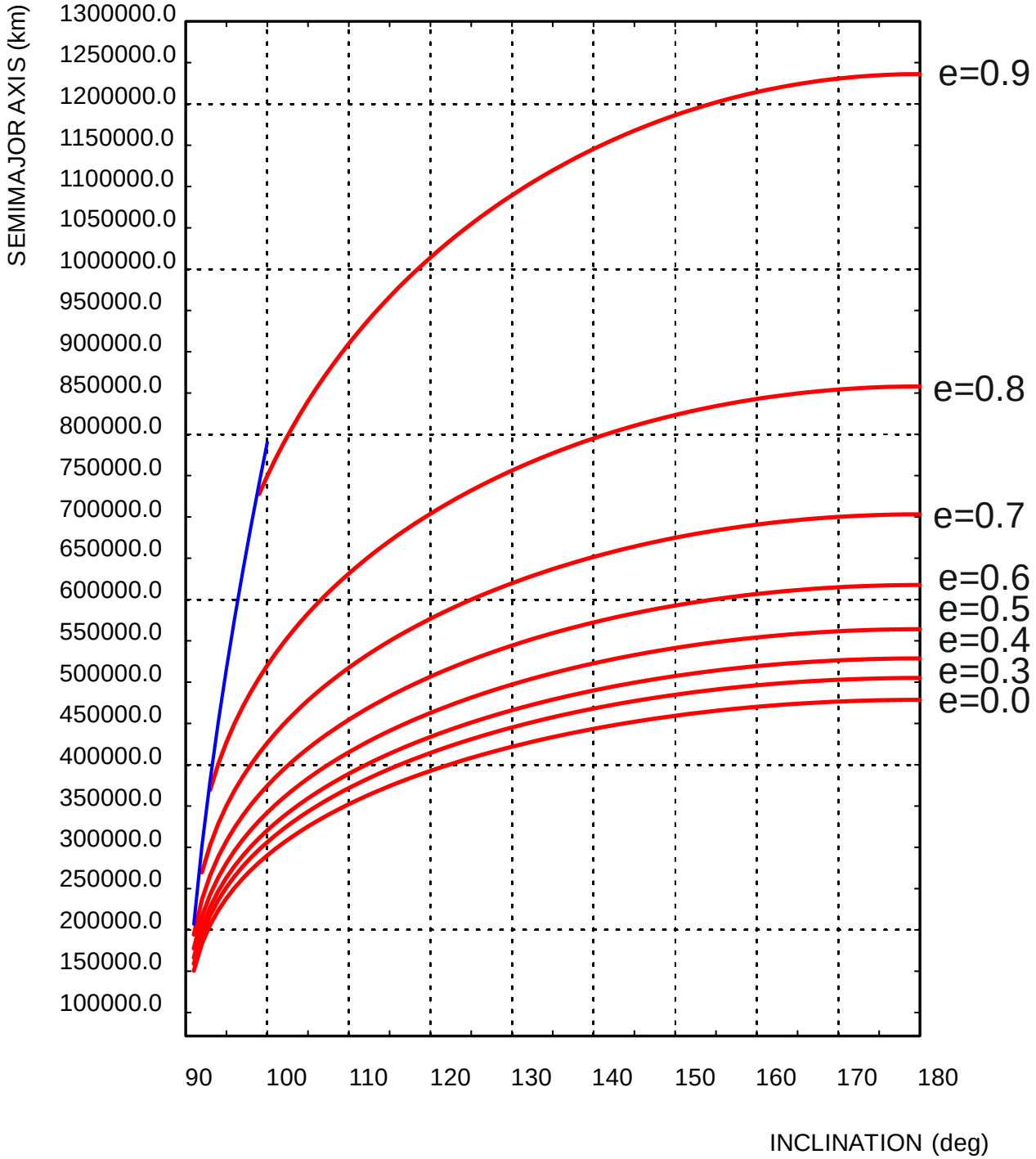


Bild 30-37: Die sonnensynchronen Bahnen eines Jupiter-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perijoviumhöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Mit wachsender Halbachse keine Einschränkung. Neigung der Äquatorebene zu Ekliptik $\varepsilon_{♃} = 3°.12$.

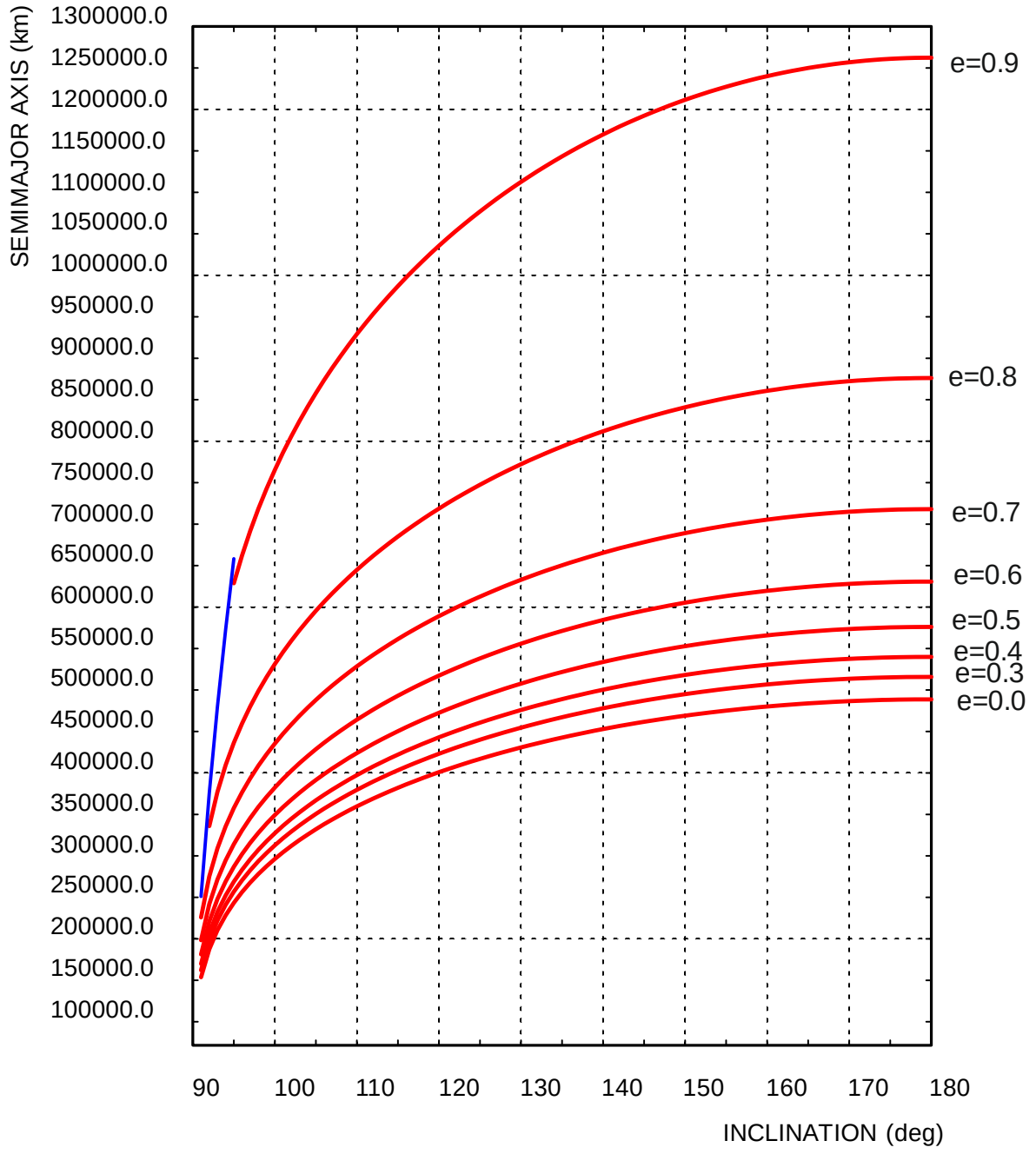


Bild 30-38: Die sonnensynchronen Bahnen eines Saturn-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perizentrumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Mit wachsender Halbachse keine Einschränkung. Neigung Äquatorebene zu Ekliptik $\varepsilon_{\hbar} = 26°.37$.

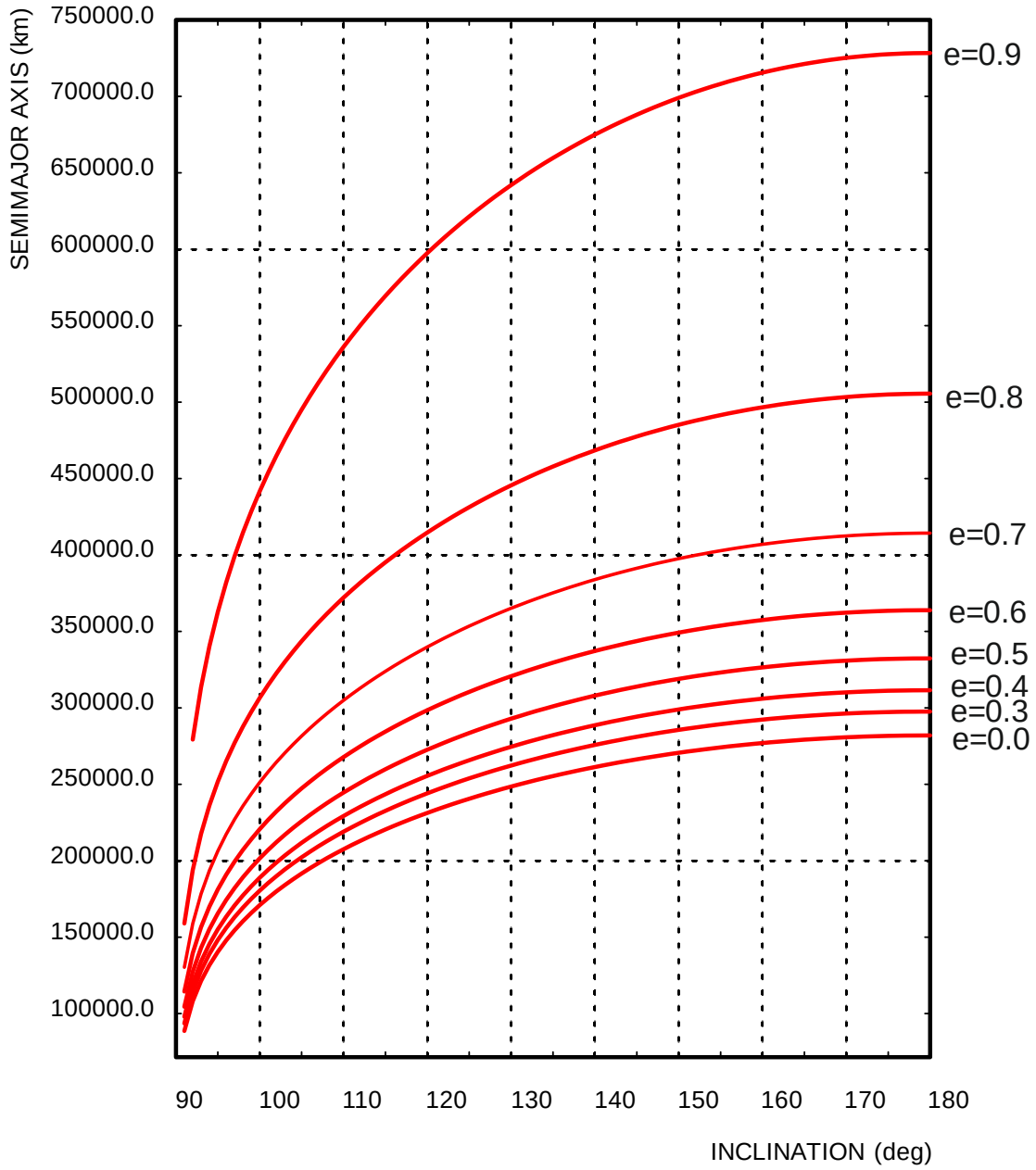


Bild 30-39: Die sonnensynchronen Bahnen eines Uranus-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Mit wachsender Halbachse keine Einschränkung.

Achtung: diese Darstellung der Parameter eines Uranus-Orbiters sind rein theoretischer Natur. Eine Sonnensynchrone Bahn kann der Definition nach als eine mittlere $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$ – Äquivalenzbahn aufgefasst werden[1]. Sie ist stets auf eine mittlere fiktive Sonne bezogen, die gleichförmig in der Äquatorebene den Planeten umläuft. Diese mittlere Sonne wird durch Reduktion der wahren Sonne auf den Äquator durch Drehung der Bahnebene um die Neigung des Äquators zur Ekliptik gebildet. Im Fall des Uranus hat die Äquatorebene bezüglich der Ekliptik die Neigung $\varepsilon_{\hat{\odot}} = 97°.86$. Die Abweichung der wahren Uranus bezogenen Sonne von der fiktiven mittleren Sonne ist also beträchtlich. Ob eine solche Sonnensynchrone Bahn physikalisch sinnvoll ist, muss im speziellen Fall geprüft werden.

[1] Siehe etwa in Abschnitt 28.9.1

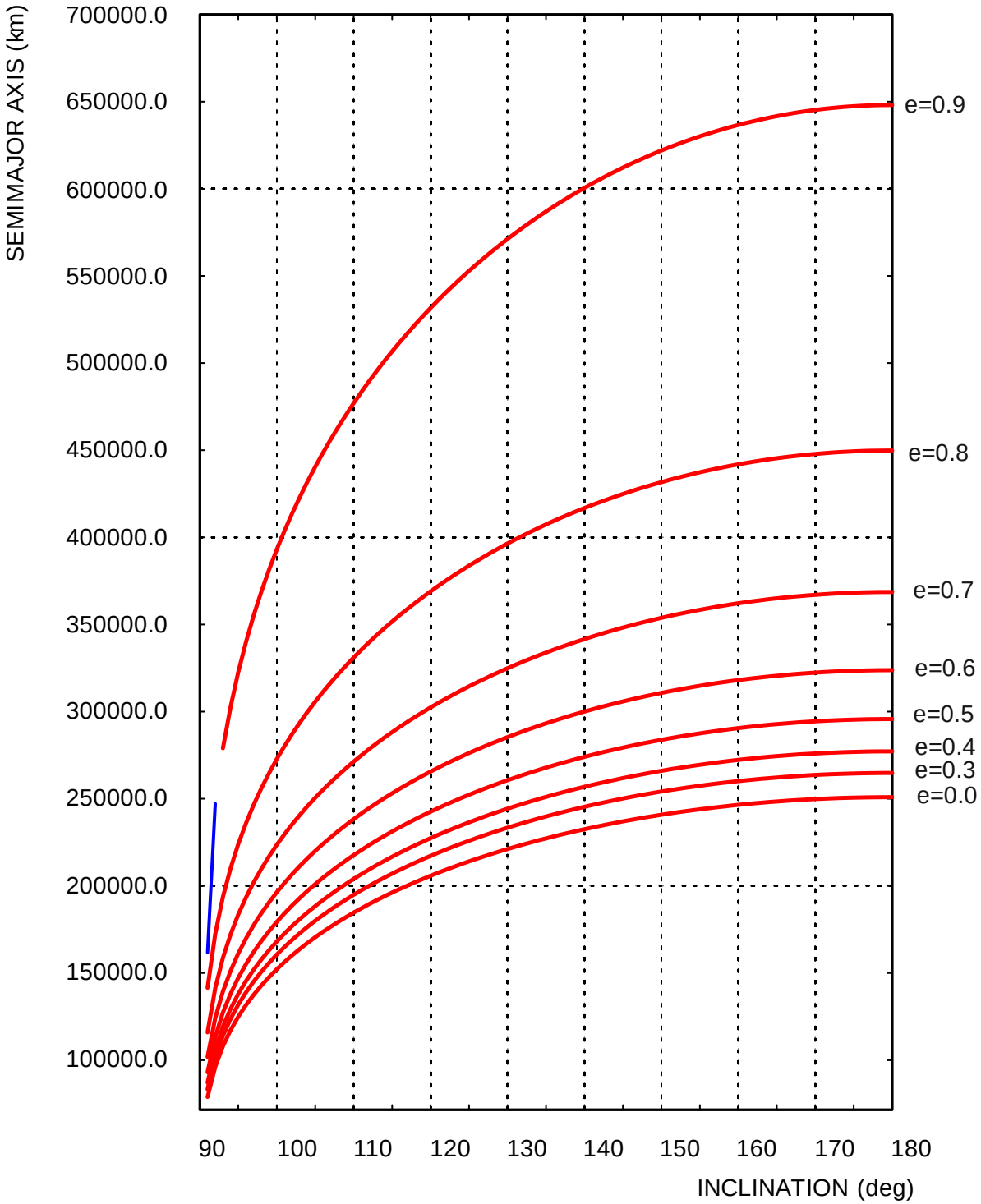


Bild 30-40: Die sonnensynchronen Bahnen eines Neptun-Orbiters: große Bahnhalbachse über der Bahninklination für einige Exzentrizitäten. Die blaue Grenzkurve charakterisiert alle Bahnen mit der gewählten Perizentrumshöhe $H_P = 200\,\mathrm{km}$. Mit wachsender Halbachse keine Einschränkung. Neigung Äquatorebene zu Ekliptik $\varepsilon_{\Psi} = 29°.59$.

30.12 Ergänzende Literatur zu Mars-Orbitern

Nach dem Mond ist der Mars das bevorzugte Ziel interplanetarer Missionen. Aus diesem Grund ist die Literatur zu Marsmissionen, zu Mars-Orbitern und zu Mars-Landemissionen unübersichtlich. Hier soll ohne jeden Anspruch auf Vollständigkeit auf einige Arbeiten zu Mars-Orbitern verwiesen werden:

BERNARD, JACQUES; DELOBETTE, DAMIEN; DUFOUR, C.; BONNEAU F.; CHAFFAUT, F. X. [1994]: 'Mission and System Design for a Martian Spatial Segment', AAS Spaceflight Dynamics Symposium, May. 21-28, 1994

DESAI, PRASUN N., BRAUN, ROBERT D. [1990]: 'Mars Parking Orbit Selection', AIAA 90-2890-CP

ESPOSITO, P. B., DEMCAK, S. N. [1989]: 'Atmospheric Drag Perturbations on the Mars Observer Orbiter', AAS 89-405

ESPOSITO, P. B., DEMCAK, S. N., SANTEE, M. L. [1986]: 'Mars Observer Orbital Accuracy Analysis ', AIAA/AAS Astrodynamics Conference, August 18-20, 1986, Williamsburg, Virgina, AIAA 86-2057

GILL, E. [1994]: 'Force Modeling for the Mars-95 Orbiter', AAS Space Flight Dynamics Symposium, May 21-28, 1994

GLICKMAN, R. E., STUART, J. R. [1981]: 'Low Cost Transfer into Useful Sun-Synchronous Orbits at Mars', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, August 3-5, 1981, Lake Tahoe, Nevada, AAS 81-136

HALSELL, C. ALLEN [1989]: 'Maneuver Analysis for the Mars Observer Mission', AIAA 89-472

KONOPLIV, ALEX; WOOD, LINCOLN J. [1990]: 'High Accuracy Mars Approach Navigation with Radio Metric and Optical Data', AIAA 90-2907-CP

LEMOINE, FRANK G.; ROSBOROUGH, GEORGE W. [1990]: 'Modelling Issues in Precision Orbit Determination for Mars Orbiters', AIAA 90-2953-CP

MCKINLEY, E. L.; BEERER, J. G. [1990]: 'Mars Observer, Planetary Constants and Models', JPL D-3444, November 1990

PERNICKA, HENRY J.; SWEETSER, THEODORE H.; AND RONCOLI, RALPH B. [1993]: 'A Strategy to Rotate the Mars Observer Orbit Node Line to Advance the Mapping Schedule', Paper AAS 93-150, AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Feb. 22-24, 1993, Pasadena, Ca.

UPHOFF, C. [1984]: 'Orbit Selection for a Mars Geoscience / Climatology Orbiter', *AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting*, Jan. 9-12, 1984, Reno, Nevada, AIAA 84-0318

31 Synodische Bewegung zweier Satelliten

Das wechselseitige Bewegungsverhalten mehrerer Satelliten spielt in den Anwendungen der Satellitenbahnanalyse eine große Rolle, etwa bei der Kommunikation mit einem tieffliegenden Satelliten (z.B. dem Space Shuttle) über einen hochfliegenden Relay-Satelliten, der Bahnvermessung eines Satelliten mit Hilfe von Satelliten eines Positionsvermessungssystems (etwa den Satelliten des „Global Positioning Systems“ GPS), der interferometrischen Beobachtung von zwei Satelliten aus, beim Andocken eines Satelliten an einen anderen Satelliten (z.B. an eine Raumstation), der gleichzeitigen Beobachtung ein und desselben Gebietes von zwei Satelliten mit unterschiedlichen Sensoren, usw.. Dazu werden in diesem Kapitel zunächst Sichtbarkeitsbedingungen untersucht, anschließend die synodische Bewegung zweier koplanarer Satelliten behandelt, anschließend Bedingungen für die Untersuchungen der synodischen Bewegung von Satelliten auf beliebigen Bahnen hergeleitet.

31.1 Sicht Satellit-Satellit

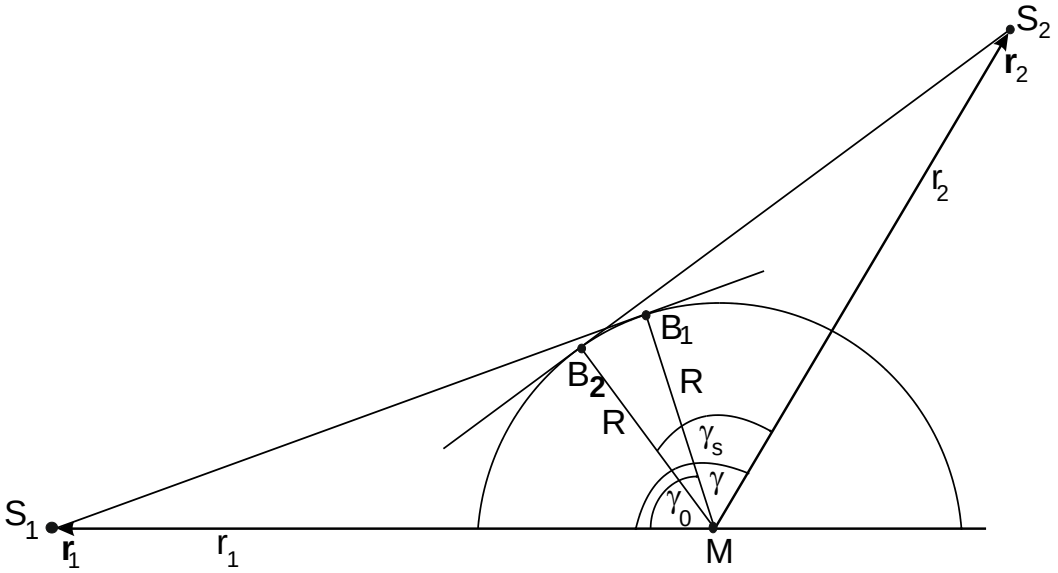


Bild 31-1: Zur Herleitung der Sichtbarkeitsbedingung bei Sicht Satellit-Satellit

Die Positionen zweier Satelliten seien durch ihre geozentrischen äquatorialen erdfesten oder auf den Frühlingspunkt bezogenen Polarkoordinaten

$$S_1\left(r_1,\lambda_1,\delta_1\right),\ S_2\left(r_2,\lambda_2,\delta_2\right)$$

vorgegeben. Der Sichtkontakt zwischen den beiden Satelliten wird durch den Erdkörper mit Radius R_E bzw. bei Berücksichtigung einer Atmosphäre oder sonstigen Einschränkung von der Höhe H eingeschränkt. Um die Sichtbarkeitsbedingung herzuleiten, genügt es in den meisten Anwendungen als Grenzkugel ein überhöhte Erdkugel vom Radius $R = R_E + H$ anzunehmen. Der Zentralwinkel γ zwischen den beiden Satelliten wird aus

$$\cos\gamma = \cos\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\cos\delta_2\cos\delta_1+\sin\delta_2\sin\delta_1 \tag{31.1}$$

berechnet, wobei der Zwischenwinkel längs des Äquators auf den Nullmeridian oder den Frühlingspunkt bezogen sein kann. Da für die beiden Satelliten die Beobachtung zum selben Zeitpunkt erfolgt, gilt

$$\cos(\lambda_2 - \lambda_1) = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad . \tag{31.2}$$

Falls aus einer Ephemeridenrechnung die geozentrischen Ortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ der beiden untersuchten Satelliten bekannt sind, kann der Winkel γ wie üblich auch berechnet werden aus

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2} \quad \langle \; r_1 := |\mathbf{r}_1| \, , \; r_1 := |\mathbf{r}_2| \quad . \tag{31.3}$$

B_1 sei der Berührpunkt einer Tangente von S_1 an die Grenzkugel, B_2 von S_2. Die Grenzkugel habe den Radius $R = R_E + H$, mit dem mittleren Erdäquatorradius R_E und einer Überhöhung um die Höhe H. Die Zentralwinkel γ_0 im Dreieck S_1MB_1 sowie γ_s im Dreieck S_2MB_2 sind aus

$$\cos\gamma_0 = \frac{R}{r_1} \quad , \quad \cos\gamma_s = \frac{R}{r_2} \tag{31.4}$$

bekannt. Der Sichtstrahl zwischen den Satelliten berührt nach Bild 31-1 auf Seite 513 die Grenzkugel genau dann, wenn

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_s \quad .$$

Es besteht somit Sichtbarkeit, wenn

$$\gamma \le \gamma_0 + \gamma_s \quad \text{bzw.} \quad \cos\gamma \ge \cos(\gamma_0 + \gamma_s) \quad ,$$

kein Sichtkontakt, wenn

$$\gamma \ge \gamma_0 + \gamma_s \quad \text{bzw.} \quad \cos\gamma \le \cos(\gamma_0 + \gamma_s) \quad .$$

Somit kann die *Sichtbarkeitsgleichung*

$$S := \cos\gamma - \cos(\gamma_0 + \gamma_s) \tag{31.5}$$

definiert werden. Es besteht somit

$$\begin{aligned} &\text{Sichtbarkeit, wenn} \quad S \ge 0 \\ &\text{keine Sichtbarkeit, wenn} \quad S < 0 \quad . \end{aligned} \tag{31.6}$$

Da für die Winkel $\gamma_0 \le 180°$ und $\gamma_s \le 180°$ gilt, kann die Sichtbarkeitsgleichung in der Form

$$S = \cos\gamma - \frac{R}{r_1} \cdot \frac{R}{r_2} + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r_1}\right)^2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r_2}\right)^2} \tag{31.7}$$

verwendet werden, womit das unmittelbare Rechnen mit Winkeln vermieden werden kann, was für das automatische Rechnen von Vorteil ist.

Anmerkung: Stehen die Beobachtungswinkel unmittelbar zur Verfügung, kann eine Sichtbarkeitsbedingung für die Sicht Satellit-Satellit alternativ auf folgende Weise erhalten werden[1]:

Die Sichtwinkel an den Satelliten seien nach Bild 31-2 die Winkel γ_1 und γ_2, welche aus

$$\sin\gamma_1 = \frac{R}{r_1} \quad , \quad \sin\gamma_2 = \frac{R}{r_2} \tag{31.8}$$

zu berechnen sind.

[1] G. K. RAJASINGH [1977]

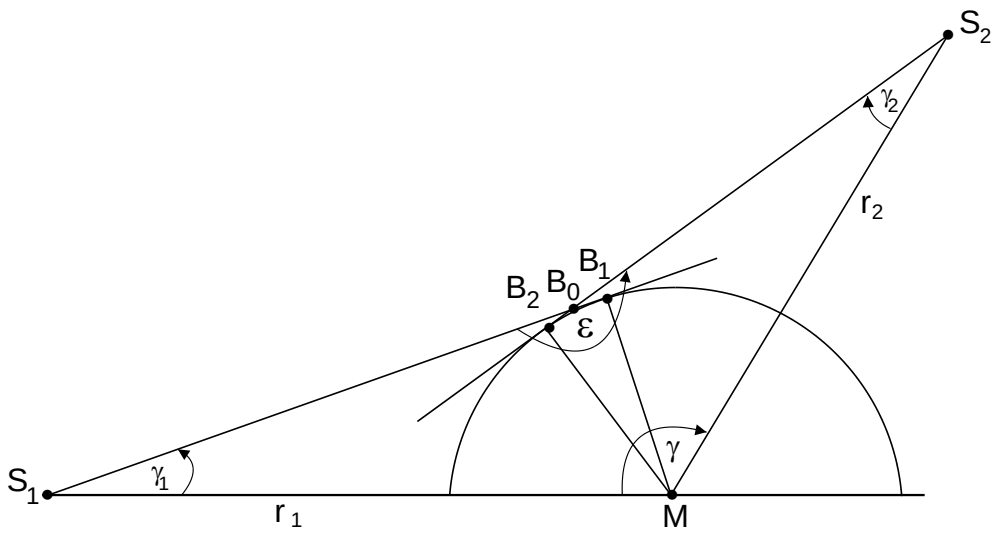


Bild 31-2: Winkelbedingung für Sicht Satellit-Satellit

B_0 sei der Schnittpunkt der beiden Tangenten S_1B_1 bzw. S_2B_2 und ε der Innenwinkel im Viereck $S_1MS_2B_0$. Dann besteht Sichtkontakt, wenn

$$\varepsilon \geq 180°$$

bzw.

$$180° \geq \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma \quad . \tag{31.9}$$

BEISPIEL 1: In diesem Beispiel wird in einigen Darstellungen demonstriert, wie die relative Bewegung zweier Satelliten untersucht werden kann. Gegeben sind ein Satellit auf einer LEO-Bahn, der auf einen Satelliten auf einer MEO Bahn bezogen werden soll.

Satellit 1: a=7007.138 km, e = 0.0, i = 97°.93, Ω=0°.0,

$$\overline{P_D} = 5844.688\,\text{s} \triangleq 97.41147\,\text{min}$$

Satellit 2: a= 20378.137 km, e = 0.0, i = 50°.0, Ω=316°.379,

$$\overline{P_D} = 28947.6037\,\text{s} \triangleq 482.46\,\text{min} \triangleq 8.041\,\text{h}\,.$$

Der Verlauf der geozentrischen Winkeldistanz γ ist über einen Tag in Bild 31-3 aufgetragen. Pro drakonitischem Umlauf des tieffliegenden ist der Sichtkontakt (nach Formel (31.7)) zu dem hohen Satelliten nur kurzzeitig unterbrochen.

In Bild 31-4 ist die relative Distanz zwischen dem LEO- und dem MEO-Satelliten über einen Umlauf des tief-fliegenden Satelliten aufgezeichnet. Der Sichtkontakt, der berechnet wird, ist nur kurzzeitig unterbrochen.

Die Entwicklung der relativen Sichtbarkeiten zwischen den beiden Satelliten ist in dem Sichtbarkeitsdiagramm Bild 31-5 über einen längeren Zeitraum dargestellt. ◄

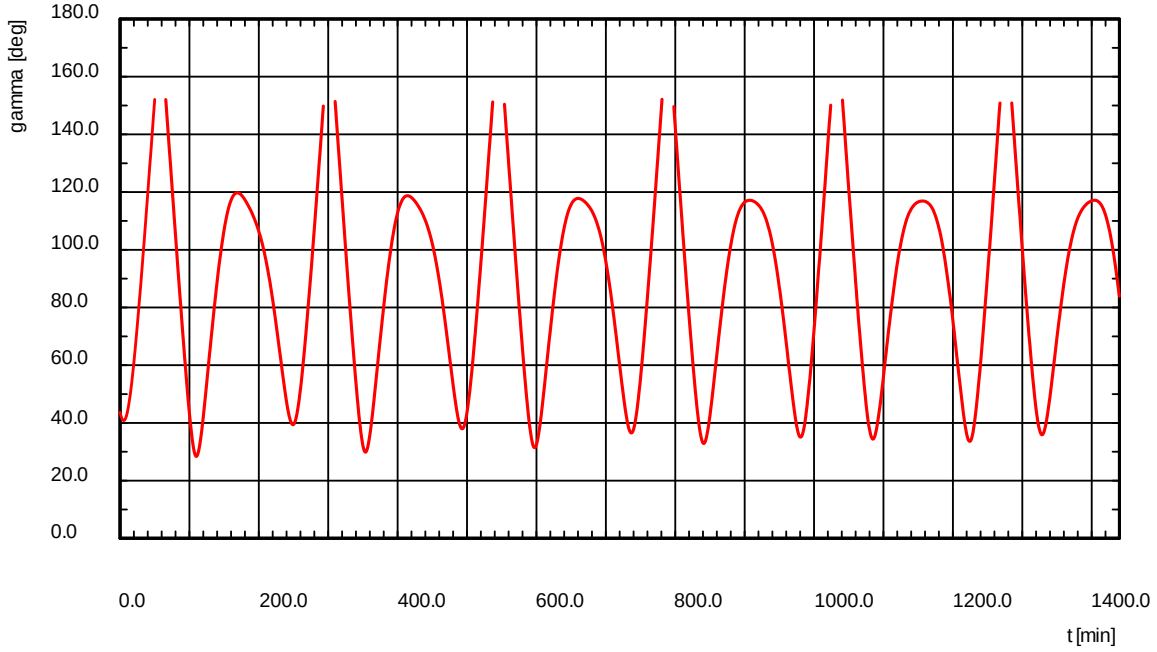


Bild 31-3: Die geozentrische Winkeldistanz γ zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über einen ganzen Tag berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieser Umläufe nur kurzzeitig unterbrochen

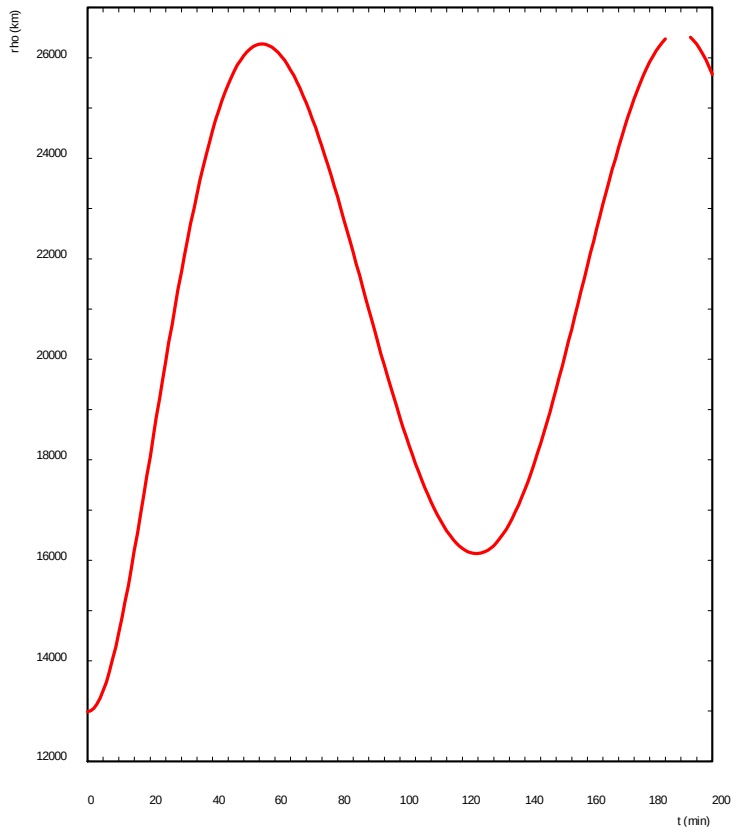


Bild 31-4: Die relative Distanz zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über nicht ganz zwei drakonitische Umläufe des tieffliegenden Satelliten berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieses Umlaufs nur kurzzeitig unterbrochen

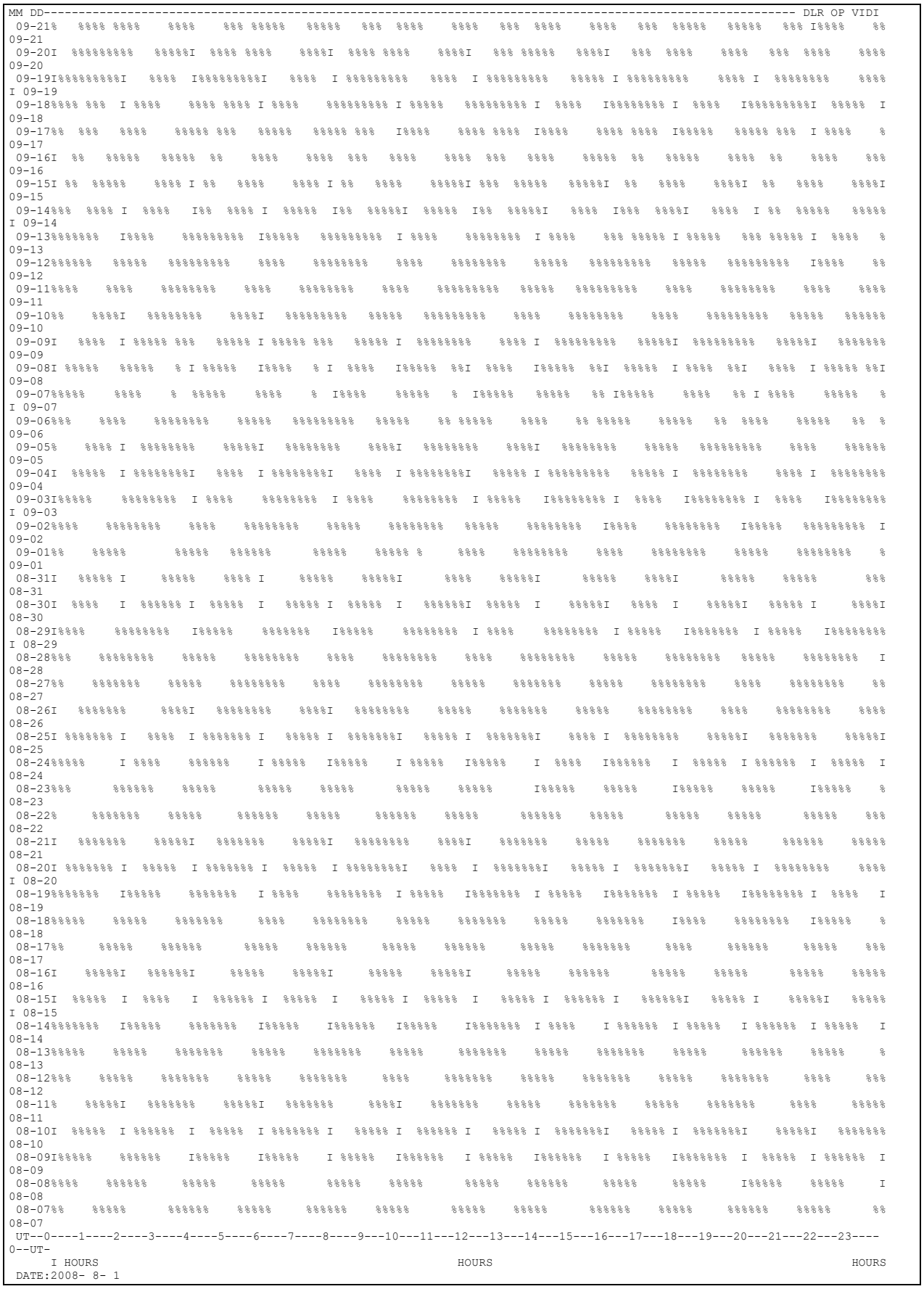


Bild 31-5: Die Entwicklung der relativen Distanz zwischen zwei Satelliten zwischen einer LEO-Bahn (a=7007 km, e = 0.0, i = 97°.93) und einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) über knapp zwei Monate. Auflösung 12 Minuten pro Bildpunkt

BEISPIEL 2: Es werden die Sichtkontakte zwischen zwei Satelliten auf erdnahen aber unterschiedlichen Bahnen dargestellt.

Satellit 1: a= 6879.321 km, e = 0.0, i = 88°.2123, Ω=278°.732, $\overline{P_D} = 5686.337\,\mathrm{s} \triangleq 94.77228\,\mathrm{min}$

Satellit 2: a= 7121.556 km, e = 0.0, i = 98°.3907, Ω=0°.0, $\overline{P_D} = 5980.371\,\mathrm{s} \triangleq 99.67285\,\mathrm{min}$

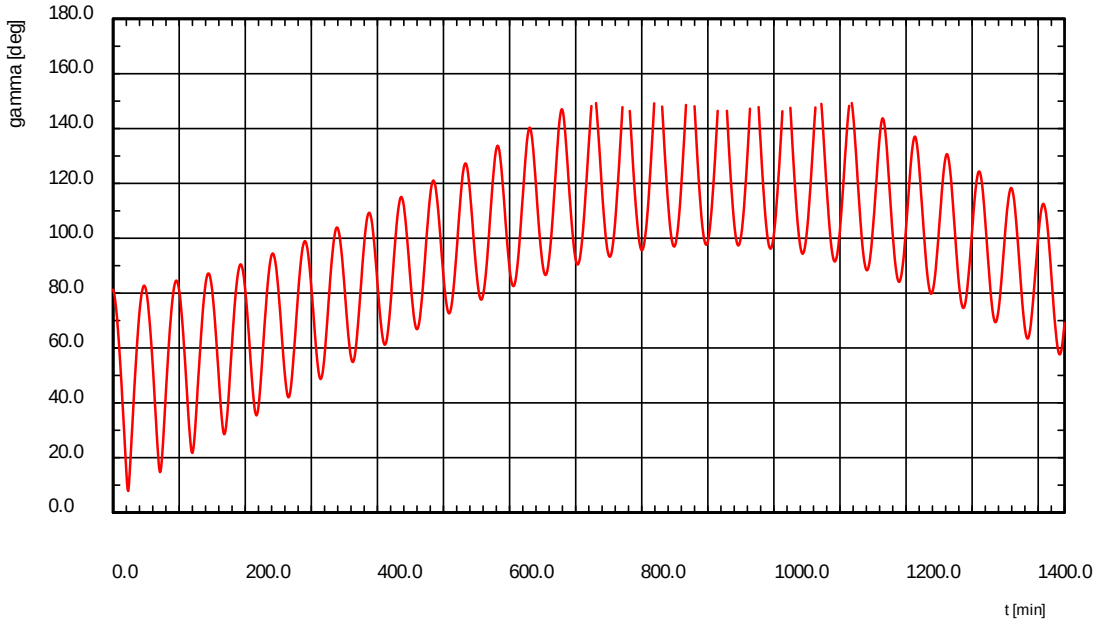


Bild 31-6: Die geozentrische Winkeldistanz γ zwischen zwei Satelliten, wobei sich der eine auf einer erdnahen Bahn (a=7007 km, e=0.0, i=97°.93), der andere auf einer MEO-Bahn (a = 20000 km, e = 0.0, i = 50°) bewegt. Der Kontakt wird über einen ganzen Tag berechnet. Der Sichtkontakt zwischen den Satelliten ist während dieser Umläufe nur kurzzeitig unterbrochen

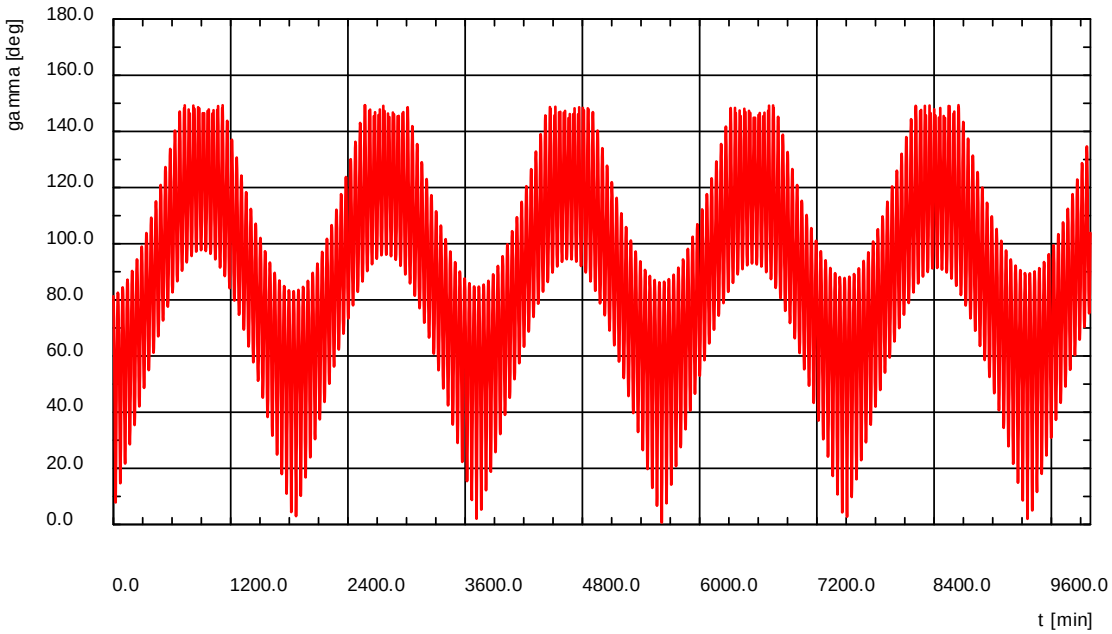


Bild 31-7: Der Sichtbarkeitsverlauf zwischen den beiden erdnahen Satelliten wie in Bild 31-6, jedoch über 7 Tage

Abhängig von den relativen Einschussdaten zeigt Bild 31-6 fast über einen halben Tag ständigen Sichtkontakt zwischen den Satelliten. Zu Beginn kommen sich die beiden Satelliten sehr nahe, was durch die minimale geozentrische Winkeldistanz von etwa 7°.9 ausgedrückt wird. In den folgenden etwa 6 Stunden ist kurzzeitiger Sichtverlust zu erkennen. Wegen der unterschiedlichen Bahnhöhe und somit unterschiedlicher Umlaufzeit, sowie unterschiedlicher Inklination ist im Verlauf eines Jahres eine sehr unterschiedliche Entwicklung der Sichtkontakte zu erwarten.

In Ergänzung zeigt Bild 31-7 den Sichtbarkeitsverlauf zwischen den beiden Satelliten über einen Zeitraum von etwa 7 Tagen. ◄

31.2 Die synodische Bewegung zweier koplanarer Satelliten

Der einfachste Fall der synodischen Bewegung zweier Satelliten ist gegeben, wenn sich die beiden Satelliten in derselben Bahnebene bewegen. Bereits aus der Betrachtung der mittleren Bewegung können für bahnanalytische Untersuchungen weitreichende Aussagen erhalten werden.

31.2.1 Mittlere synodische Bewegung koplanarer Satelliten

Gegeben sei die mittlere Bewegung der beiden untersuchten Satellitenbahnen, wofür ohne Einschränkung die mittlere drakonitische Bewegung $n_{D,1}, n_{D,2}$ gewählt werden kann. Die *mittlere synodische Bewegung* der beiden Satelliten relativ zueinander kann aus dem Unterschied ihrer mittleren Bewegungen d.h. aus der relativen mittleren Drift des einen Satelliten bezogen auf den anderen

$$n_{s,syn} = n_{D2} - n_{D1} \tag{31.10}$$

berechnet werden. Die *mittlere synodische Umlaufzeit* zweier Satelliten lautet

$$\overline{P_{s,syn}} = \frac{360°}{n_{s,syn}} \tag{31.11}$$

wenn die mittlere Bewegung in [Grad/s] gegeben ist.

NUMERISCHES BEISPIEL: Gegeben seien zwei Satelliten in koplanaren Bahnen mit leicht unterschiedlichen Bahnhöhen. Wie lange dauert es, bis sie wieder zusammentreffen, d.h. genau übereinander stehen bzw. wieder denselben Bahnwinkel haben? Zu berechnen ist also die synodische Umlaufzeit der beiden Satelliten.

Gegeben seien für den ersten Satelliten mit kreisförmiger Bahn ($\overline{e_1} = 0.0$) die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a_1} = 6778.140$ km und die Bahnneigung $\overline{i_1} = 51°.0$. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit lautet dann $\overline{P_{D1}} = 5548.970\,\text{sec}$.

Ein zweiter Satellit werde auf einer koplanaren Kreisbahn allerdings etwas tiefer als der erste geflogen. Die entsprechende synodische Umlaufzeit dieses Satelliten in Bezug auf den ersten kann aus Tabelle 31-1 abgelesen werden. Die Tabelle enthält zur Referenz auch die drakonitischen Umlaufzeiten und mittleren drakonitischen Bewegungen, sowie zur Ergänzung die zugehörigen Kreisbahngeschwindigkeiten V_K. Es ist zu ersehen, wie auch zu erwarten ist, dass bei kleiner relativer Drift der beiden Satelliten die synodische Umlaufzeit beträchtlich anwachsen,

das Zusammentreffen der beiden Satelliten sich also erheblich verzögern kann. Die Tabelle enthält die entsprechenden Werte für verschiedene Bahnen um den großen Einfluss der relativen Bewegung zu demonstrieren.

Satellit	$\bar{a}\,[\mathrm{km}]$	$\overline{P_D}\,[\mathrm{sec}]$	n_D	$V_K\,[\mathrm{km/s}]$	$n_{s,syn}$	$\overline{P_{s,syn}}$
1	6778.140	5548.972	5605°.36 /d	7.66856	-	-
2	6740.140	5502.322	5652°.89 /d	7.69014	47°.530 /d	7.57416 d
3	6768.140	5536.683	5617°.84 /d	7.67422	12°.480 /d	28.84156 d
4	6771.140	5540.369	5614°.07 /d	7.67252	8°.710 /d	41.33180 d
5	6777.140	5547.743	5606°.60 /d	7.66912	1°.240 /d	290.32258 d
6	6778.040	5548.849	5605°.49 /d	7.66861	0°.130 /d	2769.23077 d

Tabelle 31-1: Beispiele der mittleren synodischen Umlaufzeit zweier Satelliten auf kreisförmigen Bahnen mit der Inklination i = 51°.

Man muss allerdings beachten, dass dieses Beispiel nur näherungsweise als zutreffend angesehen werden darf, da die Knotendrift auf Grund der unterschiedlichen Bahnhalbachse (vgl. den Ausdruck (20.15) in Abschnitt 20.2.1, Band III) für die beiden Bahnebenen allmählich auseinander driften lässt. (Dies wird in Abschnitt 31.3 auf Seite 522 näher untersucht)◀

31.2.2 Säkular gestörte synodische Bewegung koplanarer Satelliten

Bei erdnahen Satellitenbahnen wird die große Bahnhalbachse durch den Luftwiderstand allmählich verringert. Dieser Effekt kann sich beträchtlich auf die mittlere synodische Umlaufzeit der beiden untersuchten Satelliten auswirken.

Für die Variation der mittleren Bewegung werde die drakonitische mittlere Bewegung $\overline{n_d}$ der mittleren *Kepler*schen Bewegung n_K gleichgesetzt. Dann liefert das dritte *Kepler*sche Gesetz in der für ellipsennahe *Kepler*bahnen gültigen Form (11.83) $\mu = n^2 a^3$ die bekannte Beziehung[1]

$$\dot{n} = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\dot{a} \qquad . \tag{31.12}$$

Die beiden Satelliten mögen bezogen auf eine mittlere (ohne Einschränkung drakonitische) Bewegung zu einem Anfangszeitpunkt t_0 die mittlere (drakonitische) Bewegung

$$\begin{aligned} n_{D1} &= n_{D1,0} + (n_{D1})^{\cdot}_s (t - t_0) \\ n_{D2} &= n_{D2,0} + (n_{D2})^{\cdot}_s (t - t_0) \end{aligned} \tag{31.13}$$

haben, woraus für die Differenz

$$n_{s,syn} := \Delta n_D := n_{D2,0} - n_{D1,0} + [(n_{D2})^{\cdot}_s - (n_{D1})^{\cdot}_s](t - t_0)$$

bzw.

[1] Abschnitt 11.1.5 (Band III)

$$
\begin{aligned}
n_{s,syn} &= \Delta n_{D,0} + \Delta(n_D)^{\cdot}_s (t - t_0) \\
\Delta n_{D,0} &:= n_{D2,0} - n_{D1,0} \\
\Delta(n_D)^{\cdot}_s &:= (n_{D2})^{\cdot}_s - (n_{D1})^{\cdot}_s
\end{aligned}
\tag{31.14}
$$

folgt. Nun ist Δn_D die mittlere synodische Bewegung, so dass für die mittlere synodische Umlaufzeit

$$
\overline{P_{s,syn}} = \frac{360°}{\Delta n_D} \quad , \quad \overline{P_{s,syn,0}} = \frac{360°}{\Delta n_{D,0}} \tag{31.15}
$$

gesetzt werden kann. Damit wird nach einem synodischen Umlauf

$$
n_{s,syn} = \Delta n_D = \frac{360°}{\overline{P_{s,syn}}} = n_{s,syn,0} + \Delta(n_D)^{\cdot}_s \cdot \overline{P_{s,syn}} \tag{31.16}
$$

Die „gestörte“ mittlere synodische Umlaufzeit kann daher berechnet werden aus

$$
\Delta(n_D)^{\cdot}_s \cdot \left(\overline{P_{s,syn}}\right)^2 + n_{s,syn,0} \cdot \overline{P_{s,syn}} - 360° = 0
$$

mit der eindeutigen (da nicht negativen) Lösung

$$
\overline{P_{s,syn}} = \frac{2 \cdot 360°}{n_{s,syn,0} + \sqrt{(n_{s,syn,0})^2 + 4 \cdot 360° \cdot \Delta(n_D)^{\cdot}_s}} \quad . \tag{31.17}
$$

NUMERISCHES BEISPIEL: Es sei die große Halbachse des ersten Satelliten $\overline{a}_{1,0} = 6778.140$ km. Dann beträgt mit den entsprechenden Werten von Tabelle 31-1 auf Seite 520 die mittlere drakonitische Bewegung des ersten Satelliten $n_{D,1}$ = 5605°.36 /d . Das Querschnitt zu Masse Verhältnis sei bekannt zu

$$
\frac{A_D}{m} = \frac{1}{500} \frac{m^2}{kg} \quad ,
$$

der Luftwiderstandsbeiwert sei c_D = 2.3, die (mittlere) Luftdichte für den gegebenen Höhenbereich[1]

$$
\rho[400km] = 5 \frac{g}{km^3} \quad .
$$

Mit V = 7.66856 km/s wird nach Formel (17.43)[2]

$$
\dot{a}_{1,s} = -\rho \cdot c_D \cdot \frac{A_D}{m} \cdot \frac{a^2}{\mu} \cdot V^3 = -1.1955 \times 10^{-6} \frac{km}{s} \cong -0.10329 \frac{km}{d} \cong -37.72653 \frac{km}{a}
$$

und für die Variation der mittleren Bewegung nach Formel (31.12)

$$
\dot{n}_{D1,s} = 0°.12814 \frac{1}{d^2}
$$

Ein zweiter Satellit habe die Ausgangshalbachse $\overline{a}_{6,0} = 6778.040$ km, so dass nach Tabelle 31-1 die mittlere drakonitische Bewegung den Wert $n_{d,6}$= 5605°.490 /d annimmt. Bei einem doppelt so groß angenommenen Querschnitt zu Masse Verhältnis wie beim ersten Satelliten wird

[1] Aus Tabelle 17-12 in Abschnitt 17.3.1 (Band III)

[2] In Abschnitt 17.3.2 (Band III)

$$\dot{n}_{D6,s} = 0°.25627 \frac{1}{d^2}.$$

Somit lautet zur Anfangszeit t_0 die mittlere synodische Bewegung

$$n_{s,syn,0} = \Delta n_d = 0°.130 \frac{1}{d}$$

und die zugehörige Variation nach der dritten der Formeln (31.14)

$$\Delta(n_{s,syn})^{\cdot}_s = 0°.12814 \frac{1}{d^2} .$$

Mit der mittleren synodischen Umlaufzeit $\overline{P_{syn,0}} = 2769.231\,\mathrm{d}$ aus Tabelle 31-1 auf Seite 520 liefert Formel (31.17) schließlich die mittlere synodische Umlaufzeit für den ersten mittleren synodischen Umlauf bei Berücksichtigung einer mittleren Bahnhöhenabnahme infolge des Luftwiderstandes

$$\overline{P_{syn}} = 52.49920\,\mathrm{d} .$$

Das Ergebnis zeigt den beträchtlichen Einfluss der unterschiedlichen Wirkung des Luftwiderstandes auf die synodische Umlaufzeit der beiden Satelliten.

➢ *Bei der Berechnung der synodischen Bewegung zweier Satelliten sind die unterschiedlichen Störungen auf die beiden Bahnen so weit wie möglich zu beachten.* ◀

31.3 Synodische Bewegung von Satelliten auf kreisnahen Bahnen

Das synodische Bewegungsverhalten zweier Satelliten, die sich auf kreisförmigen Bahnen bewegen, kann mit Hilfe ihrer mittleren Bewegungen wie im vorstehenden Abschnitt untersucht werden. Ist eine Begegnung der beiden Satelliten gefunden, wird mit Formel (31.11) auf Seite 519 nach dem Zeitintervall

$$\overline{P_{s,syn}} = \frac{360°}{n_{s,syn}} \tag{31.18}$$

ein gleichartiges Ereignis zu erwarten sein. Hier können auch etwas kompliziertere Verhältnisse berücksichtigt werden, wie im folgenden Beispiel demonstriert wird. Allerdings gilt diese Formel nur bei nahezu koplanaren Bahnen. Wenn die Bahnen auseinander triften, wie im linken Bild 31-10 angedeutet wird, kann es lange dauern, bis es wieder zu einer Überlappung außerhalb der Polgebiete kommen kann. Diese Dauer kann aus der Beziehung

$$\overline{P_{s,syn,II}} = \frac{360°}{|\dot{\Omega}_{s2} - \dot{\Omega}_{s1}|} \tag{31.19}$$

berechnet werden, wenn die säkularen Driften der Rektaszensionen der aufsteigenden Knoten der beiden Satellitenbahnen verglichen werden.

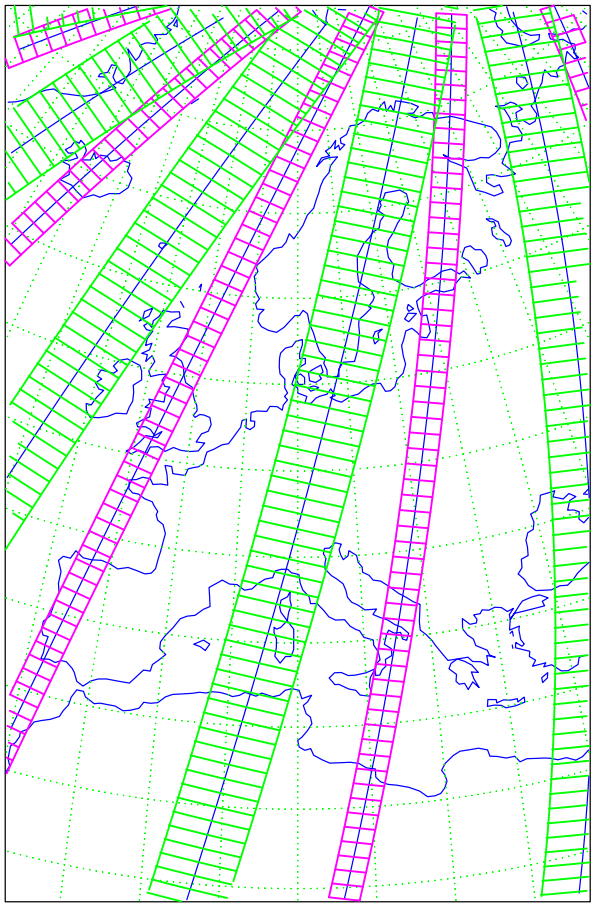


Bild 31-8: Überdeckungsbänder von ERS-2 (rot) und ADEOS (grün) im absteigenden Bahnast, ohne Überlappung außerhalb der Polbereiche, die Subsatellitenbahnen sind eingezeichnet

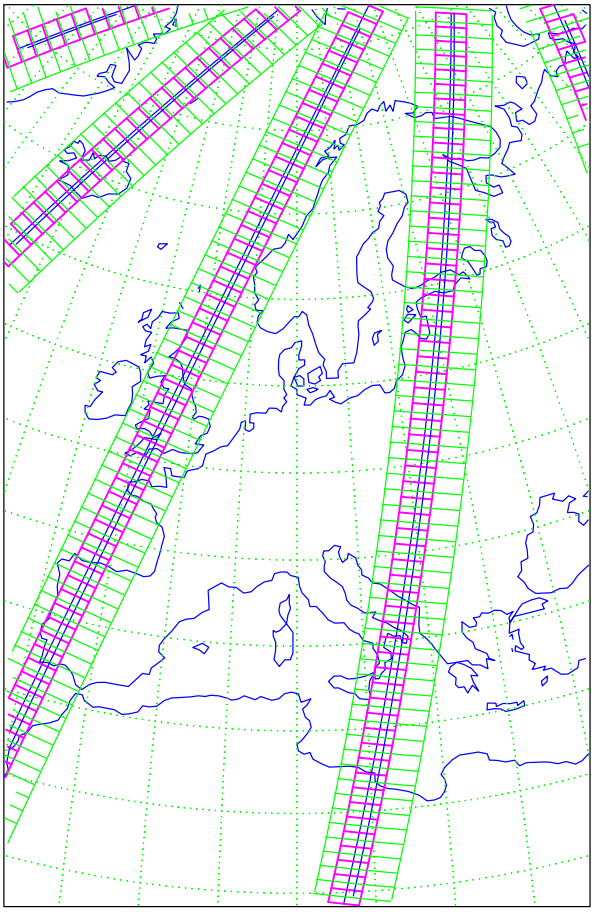


Bild 31-9: Überdeckungsbänder von ERS-2 (rot) und ADEOS (grün) im absteigenden Bahnast, mit Überlappung außerhalb der Polbereiche, die Subsatellitenbahnen sind eingezeichnet

NUMERISCHES BEISPIEL: Mit ihren Sensoren sollen die beiden Satelliten ERS-2 (a = 7159.483 km, e = 0.0001, i = 98°.5433, Ω = 34°.6764, ω = 98°.0306, M_0 = 262°.1017, t_0 : 1996-Nov-17, $20^h\ 0^m\ 9^s.25$; $\overline{P_D} = 100.59865\ \text{min}$) und ADEOS ($a$ = 7174.908 km, e = 0.0002, i = 98°.6198, Ω = 36°.6995, ω = 66°.6295, M_0 = 293°.5041, t_0 : 1996-Nov-17, $23^h\ 8^m\ 54^s.84$; $\overline{P_D} = 100.92321\text{min}$) ein und dasselbe Gebiet auf der Erdoberfläche innerhalb von ±15 min und nicht weiter als 160 km (entsprechend einer Pixelgröße der betreffenden Sensoren) voneinander getrennt beobachten können. Außerdem soll das beobachtete Gebiet von der Sonne unter der Mindesthöhe h = 20° beschienen sein. Bild 31-8 zeigt die aufeinanderfolgenden Bodenspuren und Überdeckungsbänder der beiden Satelliten im jeweils absteigenden Bahnast. Die eingezeichneten Querscanstreifen sind in 15 Sekunden getaktet. Es tritt keine Überlappung der überdeckten Gebiete außerhalb der Polbereiche auf. Bild 31-9 zeigt mit den Bodenspuren am 10. Januar 1997 eine Überlappung im gesamten absteigenden Bahnast. Hiervon ausgehend wurden in Bild 31-10 die Zeitpunkte aller möglichen Überlappungen eingetragen, zu denen alle geforderten Bedingungen erfüllt sind. Mit den entsprechenden Werten für die mittlere drakonitische Bewegung der beiden Satelliten wird

$$P_{syn} = \frac{360°}{0°.691/h} = 520^h.98408 \cong 21^d.7067$$

erhalten. Eine gewünschte Begegnung ist somit nach mehr als 21 Tagen zu erwarten. Dies kann in Bild 31-10 nachvollzogen werden.

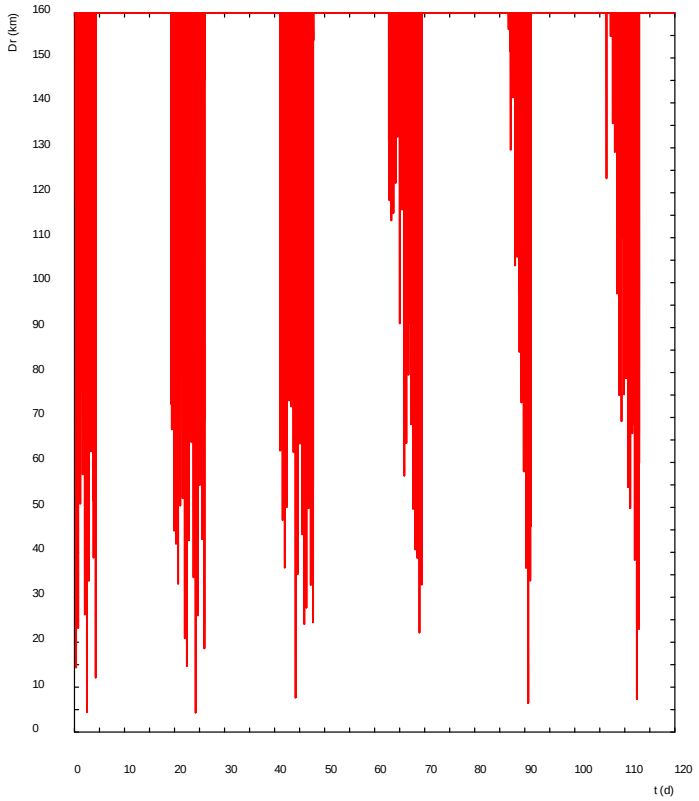


Bild 31-10: Überlappende Beobachtung der Satelliten ADEOS und ERS-2 für die minimale Sonnenelevation $h_{\odot} = 20°$, im Zeitintervall -15 Min - + 15 Min und maximal erlaubte Bodendistanz 160 km über 120 Tage, Zeitschrittweite 2 Minuten

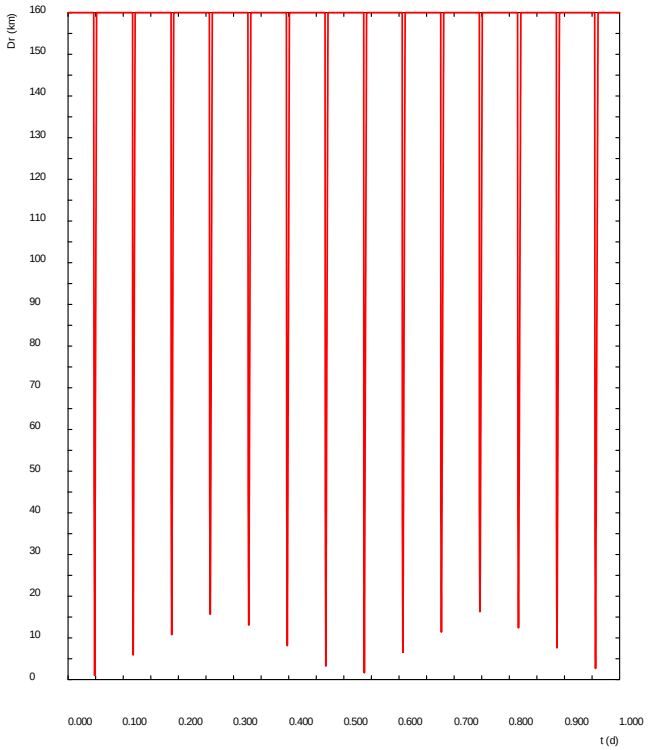


Bild 31-11: Überlappende Beobachtung der Satelliten ADEOS und ERS-2 für die minimale Sonnenelevation $h_{\odot} = 20°$, im Zeitintervall -15 Min - + 15 Min und maximal erlaubte Bodendistanz 160 km über 1 Tag, Zeitschrittweite 5 Sekunden

Das Bild zeigt über den Zeitraum von etwa 4 Monaten den minimalen Abstand zwischen den Subsatellitenpunkten der beiden Satelliten im Moment der kürzesten Distanz als den unteren Endpunkt der roten Linie zur Nulllinie: In der ersten Serie möglicher Überlappungen beträgt der minimale Abstand somit etwa 4.4 km. Das Bild ist mit einer zeitlichen Auflösung von 2 Minuten gerechnet. Für eine feinere Auflösung werden in Bild 31-11 mit der Schrittweite 5 Sekunden die möglichen Überlappungen über einen Tag gerechnet. Dazu wurde der erste Tag des für Bild 31-10 berechneten Zeitraumes gewählt. Hier wurde eine Begegnung mit der minimalen Distanz von 1 km gefunden. Es zeigt sich, dass von dem hier gewählten Verfahren nur eine grobe langfristige Übersicht möglicher überlappender Beobachtungsmöglichkeiten erwartet werden darf. ◀

31.4 Stationäre Punkte und Rückläufigkeit bei Sicht Satellit-Satellit

31.4.1 Bewegung auf koplanaren Bahnen

Zwei Satelliten mögen sich um den Zentralkörper auf koplanaren Bahnen mit den Halbachsen $a_1, a_2 \left(a_2 > a_1\right)$ und Exzentrizitäten $\left(e_1, e_2\right)$ bewegen.

Für welche Bedingung wird die Bewegung des äußeren Satelliten vom inneren aus gesehen scheinbar stationär bzw. rückläufig?

Die Bearbeitung dieser Frage erfolgte in der klassischen Himmelsmechanik im Rahmen der Untersuchung der scheinbaren Bewegung der Planeten[1]. Da sich diese nahezu in der instantanen Ebene des Sonnensystems bewegen, hat die Reduktion auf die koplanare Bewegung von Erde und Planeten Ergebnisse mit ausreichender Genauigkeit ergeben. Diese werden im vorliegenden Fall der Satellitenbahnmechanik bei Bezug auf eine ungestörte *Kepler*-Bewegung verallgemeinert nachvollzogen. Der allgemeine Fall wird in Abschnitt 31.4.3 diskutiert.

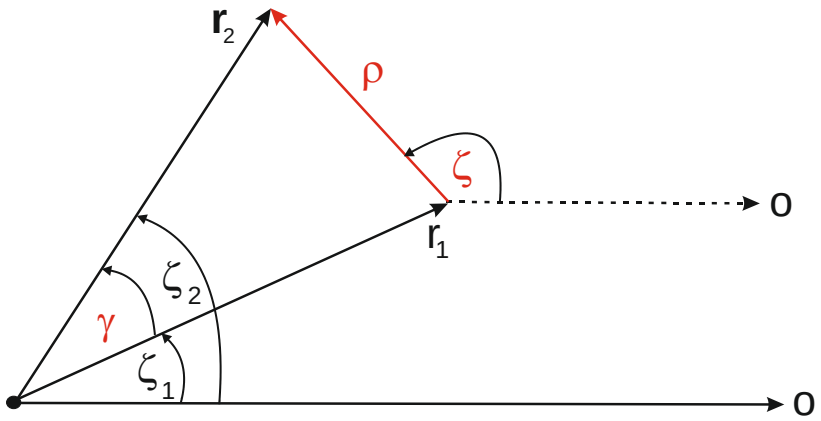


Bild 31-12: Zur Geometrie der relativen Bewegung zweier Satelliten auf koplanaren Bahnen, O – Ursprung eines *Hansen* Systems

Zugrunde gelegt werde ein *Hansen*-System mit dem orthonormierten Basissystem $\mathbf{q}_j^{(I)}$. Wenn die Bewegung als eben angesetzt werden kann, haben die Radiusvektoren der beiden Bewegungen die Darstellung

[1] Siehe etwa in BAUSCHINGER, J. [1928], pp. 246-253

$$\mathbf{r}_i = r_i\,\mathbf{r}_{i0} = r_i\left(\mathbf{q}_{i1}^{(I)}\cos\zeta_i + \mathbf{q}_{i2}^{(I)}\sin\zeta_i\right) \qquad \left\langle r_i = |\mathbf{r}_i| \;,\; i = 1,2 \;. \tag{31.20}$$

Der Zusammenhang zwischen dem $\left(\mathbf{r}_{i0}, \mathbf{q}_{i0}, \mathbf{c}_{i0} = \mathbf{r}_{i0} \times \mathbf{q}_{i0}\right)$ *Leibniz*-Systemen und den *Hansen*-Systemen ist gegeben durch[1]

$$\mathbf{r}_{i0} = \mathbf{q}_{i1}^{(I)}\cos\zeta_i + \mathbf{q}_{i2}^{(I)}\sin\zeta_i \;,\; \mathbf{q}_{i0} = -\mathbf{q}_{i1}^{(I)}\sin\zeta_i + \mathbf{q}_{i2}^{(I)}\cos\zeta_i \;,\; \mathbf{c}_{i0} = \mathbf{q}_{i3}^{(I)} \quad \langle i = 1,2 \;. \tag{31.21}$$

Im vorliegenden Fall einer koplanaren Bewegung können die beiden Bewegungen auf ein und dasselbe *Hansen*-System bezogen werden. Dieses hat den Vorteil unverrückbar in der gemeinsamen Bahnebene der beiden bewegten Körper zu liegen[2]. Man kann daher setzen

$$\mathbf{q}_j^{(I)} := \mathbf{q}_{ij}^{(I)} \qquad \langle i = 1,2;\; j = 1,2,3 \;;\; \text{koplanar} \;. \tag{31.22}$$

Somit kann für den Geschwindigkeitsvektor geschrieben werden

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{r}_i\mathbf{r}_{0i} + r_i\,\dot{\zeta}_i\,\mathbf{q}_{0i} = \mathbf{q}_1^{(I)}\left(\dot{r}_i\cos\zeta_i - r_i\,\dot{\zeta}_i\sin\zeta_i\right) + \mathbf{q}_2^{(I)}\left(\dot{r}_i\sin\zeta_i + r_i\,\dot{\zeta}_i\cos\zeta_i\right) \quad \langle \dot{r}_i \equiv 0 \;, i = 1,2. \tag{31.23}$$

Die radialen Geschwindigkeiten der beiden Satelliten sowie die Variationen der zugehörenden *Hansen*schen Bahnwinkel werden berechnet aus

$$\mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = r_i\,\dot{r}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \mathbf{q}_{i0} = r_i\,\dot{\zeta}_i \qquad \langle i = 1,2 \;. \tag{31.24}$$

Der radiale und der transversale Richtungsvektor im *Leibniz*-System folgen aus

$$\mathbf{r}_{i0} = \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \quad , \quad \mathbf{q}_{i0} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{r}_i\,\mathbf{r}_{i0}}{r_i\,\dot{\zeta}_i} \qquad \langle i = 1,2 \;;\; \dot{\zeta}_i \neq 0 \;. \tag{31.25}$$

Das *Hansen*-System kann durch einen Anfangswert festgelegt werden. Sei etwa zu einem Anfangszeitpunkt t_0 der Radiusvektor des ersten Satelliten gegeben, so kann

$$\mathbf{q}_1^{(I)} := \mathbf{r}_1\left(t_0\right) \tag{31.26}$$

gewählt werden. Wegen $\mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{r}_{10} \times \mathbf{q}_{10} = \mathbf{c}_{10}$ ist damit auch der zweite Richtungsvektor des *Hansen*-Systems bekannt:

$$\mathbf{q}_2^{(I)} = \mathbf{q}_3^{(I)} \times \mathbf{q}_1^{(I)} \;. \tag{31.27}$$

Die *Hansen*schen Bahnwinkel der beiden Satelliten bei Bezug auf das so definierte *Hansen*-System werden berechnet aus

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{q}_1^{(I)} = r_i\cos\zeta_i \quad , \quad \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{q}_2^{(I)} = r_i\sin\zeta_i \qquad \langle i = 1,2 \;. \tag{31.28}$$

Die beiden Satelliten mögen den Abstand ρ haben. Der relative Ortsvektor des zweiten Satelliten bei Bezug auf den ersten Satelliten möge den relativen *Hansen*schen Bahnwinkel ζ haben (vgl. Bild 31-12):

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 := \rho\left(\mathbf{q}_1^{(I)}\cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\zeta\right) \;. \tag{31.29}$$

Aus den hieraus folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \rho\cos\zeta &= r_2\cos\zeta_2 - r_1\cos\zeta_1 \\ \rho\sin\zeta &= r_2\sin\zeta_2 - r_1\sin\zeta_1 \end{aligned} \tag{31.30}$$

kann nach Differentiation nach der Zeit und Elimination der Variation des Abstandes $\dot{\rho}$ für die Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels die Beziehung erhalten werden

---

[1] siehe etwa in Abschnitt 4.4.3 (Band II)

[2] Satz H23, Abschnitt 4.4.6 (Band II)

$$\rho\dot{\zeta} = \dot{r}_2 \sin(\zeta_2 - \zeta) + r_2 \dot{\zeta}_2 \cos(\zeta_2 - \zeta) - \dot{r}_1 \sin(\zeta_1 - \zeta) - r_1 \dot{\zeta}_1 \cos(\zeta_1 - \zeta) \quad . \tag{31.31}$$

Aus den Beziehungen (31.30) können erhalten werden

$$\begin{aligned} \rho\cos(\zeta_2 - \zeta) &= r_2 - r_1 \cos(\zeta_2 - \zeta_1) \\ \rho\cos(\zeta_1 - \zeta) &= r_2 \cos(\zeta_2 - \zeta_1) - r_1 \\ \rho\sin(\zeta_2 - \zeta) &= -r_1 \sin(\zeta_2 - \zeta_1) \\ \rho\sin(\zeta_1 - \zeta) &= -r_2 \sin(\zeta_2 - \zeta_1) \quad . \end{aligned} \tag{31.32}$$

Dies in (31.31) eingesetzt führt auf die skalare Form des Flächensatzes im Fall der relativen Bewegung, wenn noch die Flächenparameter der beiden Bewegungen $G_i = r_i^2 \dot{\zeta}_i \;\; (i = 1,2)$ berücksichtigt werden:

$$\rho^2 \dot{\zeta} = G_1 + G_2 + (r_2 \dot{r}_1 - r_1 \dot{r}_2)\sin(\zeta_2 - \zeta_1) - r_1 r_2 (\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_2)\cos(\zeta_2 - \zeta_1) \quad . \tag{31.33}$$

Die Variation $\dot{\zeta}$ des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels ist nun entscheidend für die relative Bewegung des zweiten Satelliten gesehen vom ersten Satelliten. Nach Bild 31-12 ist wegen der Koplanarität der beiden Bahnen der Zwischenwinkel γ zwischen den beiden Ortsvektoren gleich der Differenz der beiden *Hansen*schen Bahnwinkel, so dass diese im Einzelfall nicht explizit berechnet werden müssen:

$$\gamma = \zeta_2 - \zeta_1 \;,\; \cos\gamma = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1 r_2} \quad \langle \text{koplanare Bahnebenen} \quad . \tag{31.34}$$

In diesem Fall kann die Bedingungsgleichung (31.33) auch in der für den Rechner geeigneten Form geschrieben werden

$$\rho^2 \dot{\zeta} = G_1 \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\cos\gamma\right) + G_2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\cos\gamma\right) + (r_2 \dot{r}_1 - r_1 \dot{r}_2)\sin(\zeta_2 - \zeta_1) \quad . \tag{31.35}$$

Das Ergebnis lautet:

- *Wenn* $\dot{\zeta} = 0$ *erscheint der zweite Satellit für den ersten als stationär, für* $\dot{\zeta} > 0$ *rechtläufig, für* $\dot{\zeta} < 0$ *rückläufig.*

Falls etwa berechnet werden soll, für welche Zwischenwinkel stationäre Punkte auftreten, muss wegen der Abhängigkeiten der Radien und der radialen Geschwindigkeiten, sowie der Variationen der *Hansen*schen Bahnwinkel von der Zeit bzw. von den *Hansen*schen Bahnwinkel als unabhängigen Variablen, iterativ gerechnet werden. Als Anfangsnäherung kann eine Lösung im Fall von Kreisbahnen gewählt werden (siehe im nächsten Abschnitt).

Da sich der zweite Satellit für $\gamma = 0°$ vom inneren Satelliten aus gesehen in Opposition befindet, vereinfacht sich die Bedingungsgleichung (31.35) auf

$$(r_2^2 - r_1^2)\dot{\zeta}[\gamma = 0°] = G_1 \left(1 - \frac{r_2}{r_1}\right) + G_2 \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \quad . \tag{31.36}$$

Scheinbare Rückläufigkeit sowie Stationarität können nur in der Nähe der Opposition des zweiten in Bezug auf den ersten Satelliten erwartet werden.

BEISPIEL: Das hier vorgestellte realistische Beispiel aus der Satellitenbewegung geht zum Test der Theorie zunächst von einer koplanaren Bewegung aus. Angenommen sind zwei Kreisbahnen mit den Halbachsen $a_1 = 7000\text{km}$ und $a_2 = 12000\text{km}$ bei einer gemeinsamen Inklination i=60°. Bild 31-13 zeigt den Verlauf der Variation $\dot{\zeta}$ des relativen *Hansen*schen

Bahnwinkels entsprechend Formel (31.35). Wegen der unterschiedlichen Bahnhöhen haben die beiden Bahnen eine unterschiedliche Drift $\dot{\Omega}$ des jeweiligen aufsteigenden Knotens der Bahn, so dass die Annahme von Koplanarität nur näherungsweise am Beginn der Rechnung gemacht werden darf. Das Bild zeigt über zwei Umläufe des inneren Satelliten je einen kurzen Abschnitt eines scheinbar rückläufigen Bahnabschnitts des äußeren Satelliten, gesehen vom inneren Satelliten aus. Wenn $\dot{\zeta} = 0$, ist der äußere Satellit stationär, die scheinbare Bewegung wird umgekehrt.

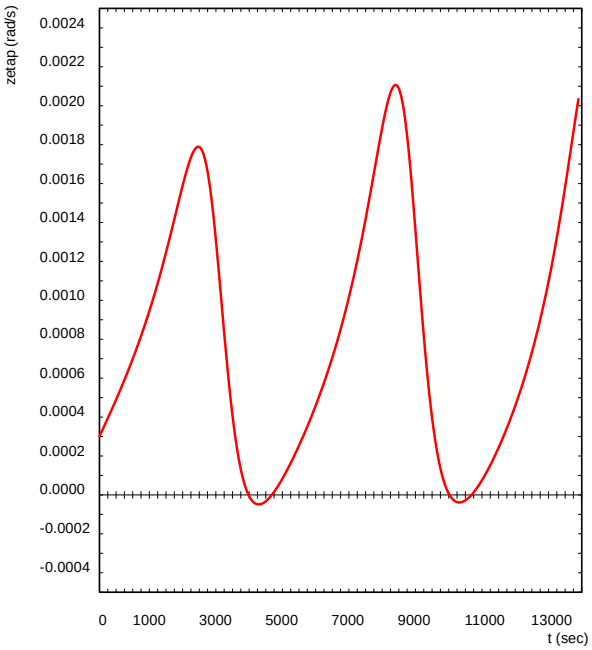


Bild 31-13: Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels $\dot{\zeta}$ über der Zeit *t* für die relative Sicht zwischen zwei kreisförmigen Satellitenbahnen mit den Bahnhalbachsen: $a_1 = 7000\,\text{km}$, $a_2 = 12000\,\text{km}$ und mit derselben Inklination $i_1 = i_2 = 60°$.

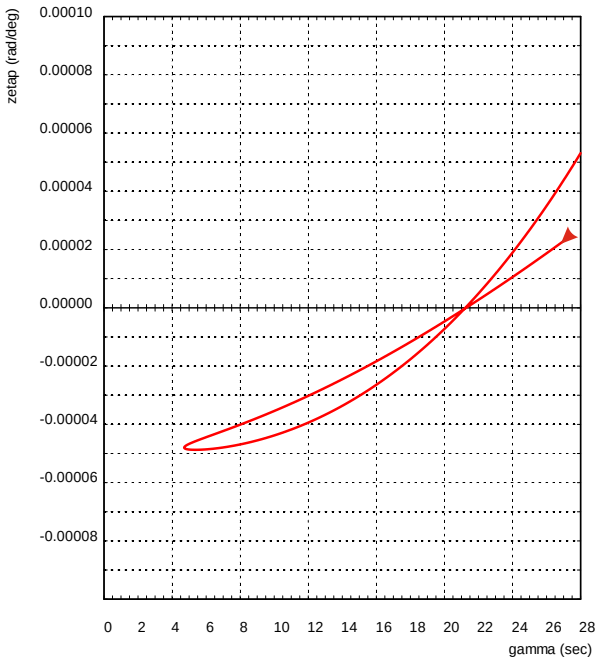


Bild 31-14: Der Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels über dem geozentrischen Zwischenwinkel γ zwischen den Ortsvektoren der beiden Satelliten. Die Wirkung der unterschiedlichen Knotendrift wirkt sich erkennbar auf den Kurvenverlauf aus

Bild 31-14 zeigt den Verlauf von $\dot{\zeta}$ über dem geozentrischen Zwischenwinkel γ der Ortsvektoren der beiden Satelliten. Der Zwischenwinkel nimmt auch im Bahnast der scheinbaren Rückläufigkeit nicht den Wert $\gamma = 0°$ an, was für eine exakt stattfindende Opposition erwartet wird. Die näherungsweise Opposition findet für den minimalen Zwischenwinkel $\gamma = 4°.713$ statt, was auf die relative Drift der beiden Bahnebenen zurückgeführt werden kann. Zum Zeitpunkt der Opposition sind die beiden Bahnebenen nicht mehr koplanar.

Eine langfristig zu erwartende Koplanarität der Bahnebenen zweier Satellitenbahnen kann nur im Fall äquatorialer Bahnen erwartet werden. Dieser Fall wird in Bild 31-15 bestätigt. Auch hier treten die beiden scheinbar stationären (Umkehr-) Punkte für denselben Zwischenwinkel γ ein. Dass die Kurven vor und nach der Opposition nicht völlig identisch verlaufen, kann darauf zurückgeführt werden, dass für die Berechnung hier das vollständige analytische *Brouwer*sche Bahnmodell unter Einschluss alle periodischen Störeinflüsse auf die *Kepler*bewegung verwendet wurde.

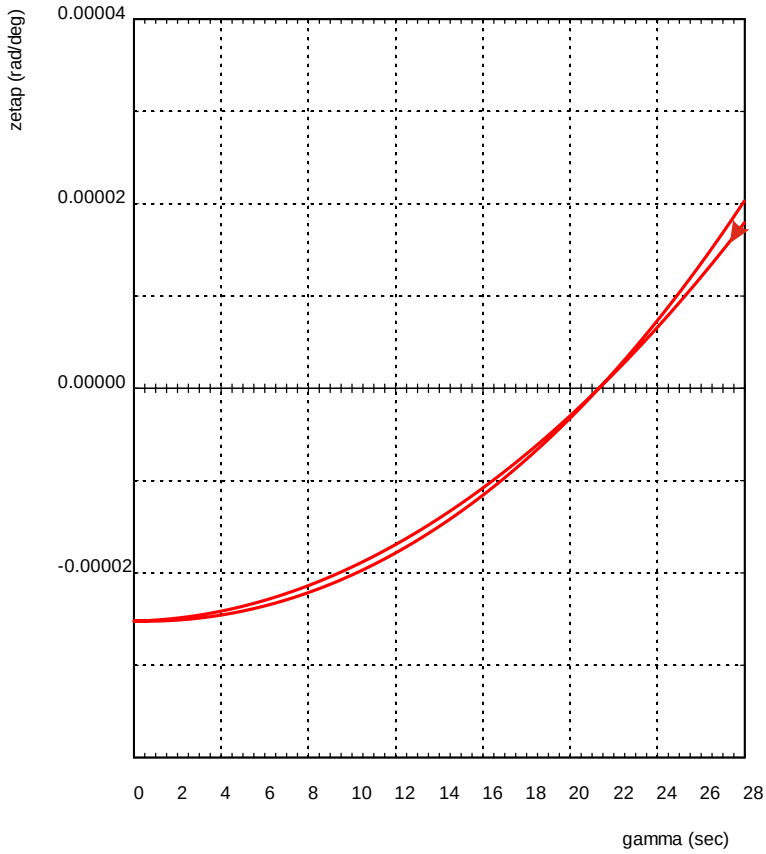


Bild 31-15: Der Verlauf der Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels über dem geozentrischen Zwischenwinkel γ zwischen den Ortsvektoren der beiden Satelliten für in der Äquatorebene liegende Kreisbahnen (andere Bahnelemente wie in Bild 31-13 und Bild 31-14)

31.4.2 Der Fall koplanarer Kreisbahnen

Im Fall von Kreisbahnen betragen die Geschwindigkeiten V_i der beiden Satelliten

$$V_i^2 = \dot{\mathbf{r}}_i^2 = r_i^2\,\dot{\zeta}_i^2 = \frac{\mu}{r_i} \quad \langle e_i = 0.0,\ a_i = r_i,\ i = 1,2 \quad . \tag{31.37}$$

Deshalb und wegen des für eine *Kepler*bewegung gültigen Flächensatzes in der Form $r_i^2\dot{\zeta}_i = G_i = \sqrt{\mu a_i\left(1-e_i^2\right)}$ errechnet sich die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels aus

$$\dot{\zeta}_i = \frac{1}{r_i}\sqrt{\frac{\mu}{r_i}} \qquad \langle r_i = a_i = const.,\quad i = 1,2 \quad . \tag{31.38}$$

Da Kreisbahnen keine radialen Geschwindigkeiten haben, bleibt für Beziehung (31.31)

$$\rho\,\dot{\zeta} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\cos\left(\zeta_2 - \zeta\right) - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\cos\left(\zeta_1 - \zeta\right) \quad . \tag{31.39}$$

Mit dem Zwischenwinkel mit $\gamma := \zeta_2 - \zeta_1$ folgt aus (31.33) schließlich

$$\rho^2\,\dot{\zeta} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1\,r_2}}\left\{-\left[r_1\sqrt{r_1} + r_2\sqrt{r_2}\right]\cos\gamma + \left[r_2\sqrt{r_1} + r_1\sqrt{r_2}\right]\right\} \quad . \tag{31.40}$$

Die hier verwendeten Wurzeln werden alle als positiv angenommen. Die Radien r_i sind konstant. Damit folgen die Bedingungen für das scheinbare Bahnverhalten des zweiten Satelliten beobachtet vom ersten Satelliten:

Scheinbare Bahn	Variation des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels	Bedingung für den Zwischenwinkel γ		
stationär	$\dot{\zeta} = 0$	$\cos\gamma$	=	$\dfrac{r_2\sqrt{r_1} + r_1\sqrt{r_2}}{r_2\sqrt{r_2} + r_1\sqrt{r_1}}$
rechtläufig	$\dot{\zeta} > 0$		<	
rückläufig	$\dot{\zeta} < 0$		>	

Tabelle 31-2: Die Bedingungen für das scheinbare Bahnverhalten zweier Satelliten auf koplanaren Kreisbahnen

Sind die Radien r_1, r_2 der beiden Satelliten gegeben, so können die Zwischenwinkel γ_0 berechnet werden, für die der zweite Satellit in Bezug auf den ersten Satelliten stationär erscheint. Dieser Winkel kann nach Tabelle 31-2 berechnet werden aus

$$\cos\gamma_0 = \frac{r_2\sqrt{r_1} + r_1\sqrt{r_2}}{r_2\sqrt{r_2} + r_1\sqrt{r_1}} \quad . \tag{31.41}$$

Bild 31-16 beschreibt die scheinbare relative Bewegung zweier Satelliten auf koplanaren kreisförmigen rechtläufigen Bahnen in der Umgebung der Opposition, die für den Zwischenwinkel $\gamma = \zeta_2 - \zeta_1 = 0°$ durchlaufen wird. Befindet sich der innere Satellit um den Winkel γ_0 vor der Opposition im Punkt 1 seiner Bahn, durchläuft der Satellit auf der äußeren Bahn Punkt 3. In diesem Moment erscheint der äußere Satellit stationär und kehrt seine scheinbare Bewegungsrichtung um. Er durchläuft die Opposition scheinbar rückläufig, bis er Punkt 4 erreicht, der wieder den Winkelabstand γ_0 hat. In diesem Moment durchläuft der innere Satellit Punkt 2 seiner Bahn, der äußere Satellit erscheint stationär und kehrt seine Bewegungsrichtung um. Er bewegt sich dann wieder rechtläufig.

BEISPIEL 1: Es seien zwei Satelliten auf koplanaren kreisförmigen Bahnen mit den Kreisbahnhöhen $H_1 = r_1 - R_E = 500\,\text{km}$ und $H_2 = r_2 - R_E = 800\,\text{km}$ gegeben. Die relativen Bahnwinkel für stationäre Punkte werden berechnet aus der Bedingung $\cos\gamma_0 = 0.999544537$, entsprechend

$$\gamma_{01} = 1°.72934\,,\ \gamma_{02} = 358°.27066 \quad .◀$$

BEISPIEL 2: Betrachtet[1] werden die Jupitermonde[2] Europa $\left(r_{II} = 6.71\times10^5\,\text{km}\right)$ und Ganymed $\left(r_{III} = 10.70\times10^5\,\text{km}\right)$. Ganymed wird von Europa aus gesehen stationär, wenn $\cos\gamma_0 = 0.9479$, d.h. für die Zwischenwinkel $\gamma_{01} = 18°.576$, $\gamma_{02} = 341°.424$. In der Umgebung der Opposition $(\gamma = 0°)$ ist Ganymed für Europa rückläufig, was für γ_{01} eintritt. Ab γ_{02} wird Ganymed wieder rechtläufig.

---

[1] nach SuW, 1972, Januar, p.27

[2] Daten aus Anhang I (Band V)

Als zusätzliche Aufgabe soll untersucht werden, welche Bedingung die relativen Bewegungen die Jupitermonde erfüllen, wenn die beiden Jupitermonde Europa (II) und Ganymed (III) vom inneren Mond Io (I) $(r_I = 422000\,\text{km})$ aus gesehen in Konjunktion stehen. Die Bahnen der drei Monde werden als kreisförmig und koplanar angenähert. Der Grenzfall tritt ein, wenn die Verbindungsstrecke durch die Monde II und III die Bahn des inneren Mondes I berührt (siehe Bild 31-17). Es werde angenommen, dass die Entfernung von I zu II mit x_1, die von I zu III mit x_2 bezeichnet werde. Dann sind

$$\dot{x}_1^2 = r_{II}^2 - r_I^2 \quad , \quad \dot{x}_2^2 = r_{III}^2 - r_I^2 \quad .$$

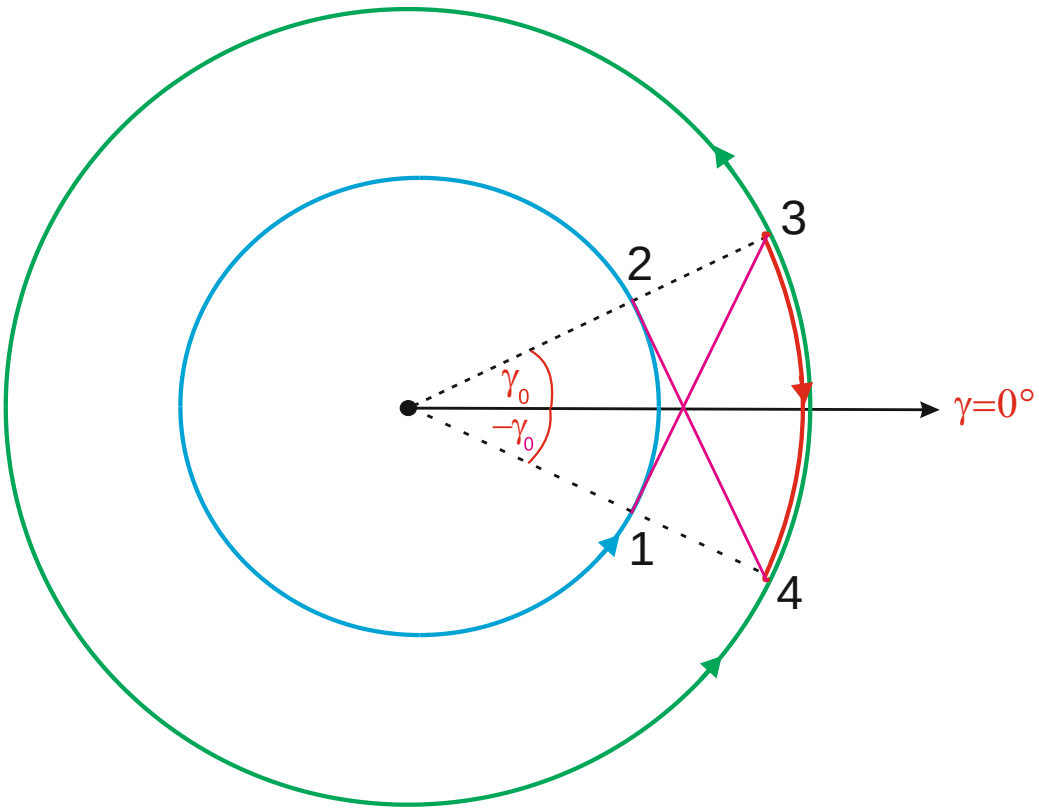


Bild 31-16: Die scheinbare relative Bewegung zweier Satelliten auf koplanaren kreisförmigen rechtläufigen Bahnen in der Nähe der Opposition

In einem Inertialsystem können die Ortsvektoren im Grenzfall durch

$$\mathbf{r}_{II} = r_{II}\mathbf{p}_1 + x_1\mathbf{p}_2 \quad , \quad \mathbf{r}_{III} = r_{III}\mathbf{p}_1 + x_1\mathbf{p}_2$$

dargestellt werden. Der maximal mögliche Zwischenwinkel kann dann aus

$$\cos\gamma^* = \frac{\mathbf{r}_{II}\cdot\mathbf{r}_{III}}{r_{II}\,r_{III}} = \frac{r_I^2 + x_1\,x_2}{r_{II}\,r_{III}}$$

berechnet werden. Im Fall der Jupitermonde ergibt sich

$$\cos\gamma^* = 0.9623 \quad \Rightarrow \gamma^* = 15°.783 \quad .$$

Der Zwischenwinkel γ^* ist kleiner als der Winkel γ_0, für den der Mond III von II aus gesehen scheinbar stationär wird, III bewegt sich also dann stets rückläufig bezüglich II. Bewegt sich Mond I auf seiner Bahn, so wird der Zwischenwinkel zwischen den Monden II und III, wenn

diese Monde in Konjunktion zu I stehen, kleiner als $\gamma*$, so dass als generelles Ergebnis formuliert werden kann: Falls die Monde II und III in Konjunktion zum Mond I stehen, bewegt sich III bezüglich II stets scheinbar rückläufig. ◀

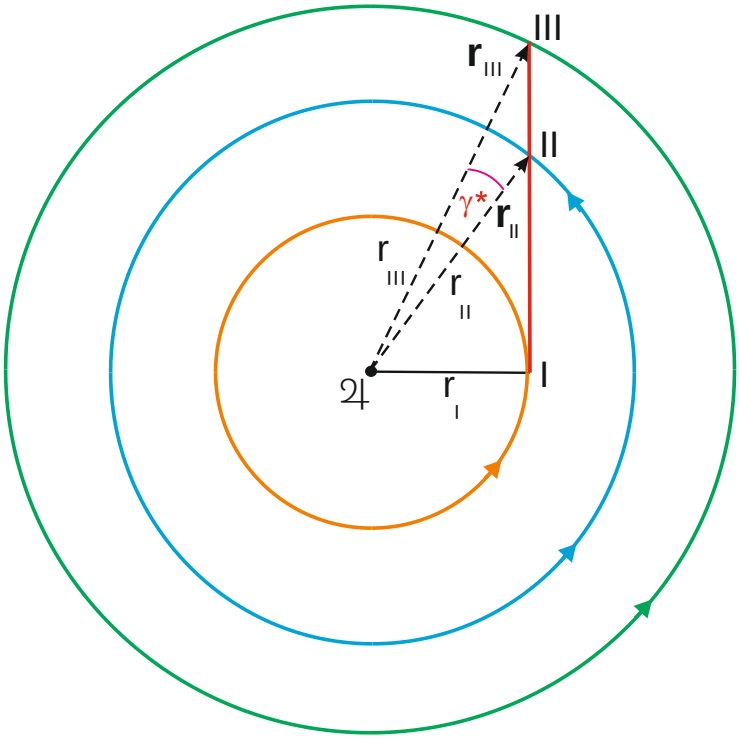


Bild 31-17: Zur Problematik der Konjunktion der Jupitermonde Europa (II) und Ganymed (III) gesehen vom inneren Mond Io (I) aus. Unter der Annahme, dass alle Bahnen kreisförmig seien

31.4.3 Diskussion beliebiger relativer Bewegungen zweier Satelliten

Zwei Satelliten mit im Wesentlichen unterschiedlichen Bahnhöhen haben eine unterschiedliche Drift $\dot{\Omega}$ der Bahnebene längs des Äquators. Dies bewirkt, dass die beiden Bahnebenen nach einem bestimmten Zeitraum für einen Moment koplanar werden können. Dann können auch exzentrische Bahnen mit den Formeln aus Abschnitt 31.4.1 näherungsweise auf ihr scheinbares relatives Bahnverhalten untersucht werden[1].

Als BEISPIEL wird in Bild 31-18 das Beispiel aus Bild 31-13 aufgenommen, hier allerdings mit exzentrischen Bahnen: die innere Bahn mit der großen Bahnhalbachse a_1=7000 km habe die Exzentrizität e_1=0.01 und die Inklination i=60°. Der zweite äußere Satellit habe die große Bahnhalbachse a_2=12000 km, die Exzentrizität e_2=0.3 und wieder die Inklination i=60°. Das Bild zeigt, dass bei Beginn der Rechnung die beiden Bahnen noch als näherungsweise koplanar aufgefasst werden können. Im ersten Umlauf des inneren Satelliten erscheint der äußere Satellit knapp 12 Minuten lang als rückläufig. Danach driften die Bahnebenen auseinander, für minimales $\dot{\zeta}$ befindet sich der äußere Satellit in Opposition aber nicht mehr auf einem (scheinbar) retrograden Bahnast. ◀

[1] Für eine numerische Aussage kann dazu etwa die säkulare Bahndrift $\dot{\Omega}_s$ aus Formel (20.15) (Band III) herangezogen werden

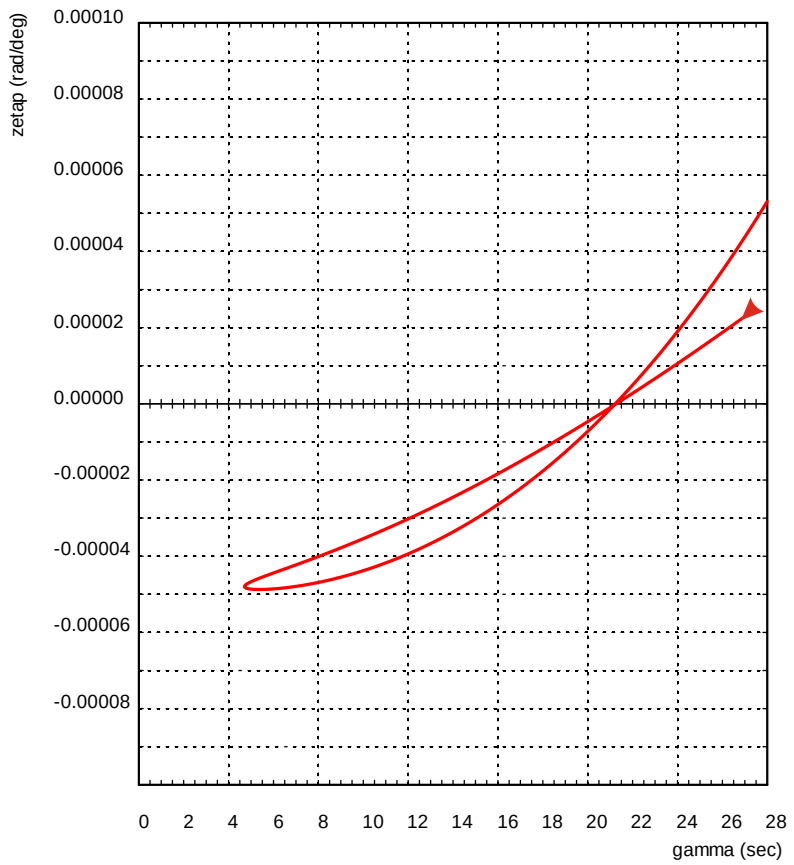


Bild 31-18: Die scheinbare relative Bewegung zweier Satelliten auf exzentrischen Bahnen. Die Variation $\dot{\zeta}$ des relativen *Hansen*schen Bahnwinkels wird über der Zeit aufgetragen: für $\dot{\zeta} < 0$ bewegt sich der äußere Satellit scheinbar retrograd, was im ersten Umlauf für den inneren Satelliten sichtbar wird.

Die Untersuchung des scheinbaren Bahnverhaltens zwischen zwei Satelliten ist im allgemeinen Fall wesentlich aufwendiger. Sie soll in diesem Abschnitt hergeleitet werden.

Um die Bewegung eines zweiten Satelliten auf einen ersten allgemein zu beziehen, muss die Bahn des zweiten in Koordinaten des ersten dargestellt werden. Da ein *Hansen*-System der allgemeinste Bezug einer Bahnbewegung ist und notwendig unverrückbar an die Bahnebene gekoppelt ist, sollen beide Bewegungen in *Hansen*-Koordinaten gegeben sein. Der Bezug zwischen den Systemen werde über die Kopplung in das als fundamental betrachtete Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem hergestellt. Dieses System habe die Orthonormalbasis $\mathbf{p}_i$. Die beiden *Hansen*-Systeme $\mathbf{q}^{(I)}_{1/j}, \mathbf{q}^{(I)}_{2/j}$ haben dann die Transformationen

$$\mathbf{p}_i = a^j_{k/i}\,\mathbf{q}^{(I)}_{k/j} \quad , \quad \mathbf{q}^{(I)}_{k/j} = a_{kj}{}^{i}\,\mathbf{p}_i \tag{31.42}$$

mit den Koeffizienten[1]

[1] Mit den Formeln (8.426) aus Abschnitt 8.12.1 (Band II)

$$
\begin{aligned}
a_{k/11} &= \cos i_k \sin\sigma_k \sin\Omega_k + \cos\sigma_k \cos\Omega_k \\
a_{k/12} &= -\cos i_k \sin\sigma_k \cos\Omega_k + \cos\sigma_k \sin\Omega_k \\
a_{k/13} &= -\sin i_k \sin\sigma_k \\
a_{k/21} &= -\cos i_k \cos\sigma_k \sin\Omega_k + \sin\sigma_k \cos\Omega_k \\
a_{k/22} &= \cos i_k \cos\sigma_k \cos\Omega_k + \sin\sigma_k \sin\Omega_k \\
a_{k/23} &= \sin i_k \cos\sigma_k \\
a_{k/31} &= \sin i_k \sin\Omega_k \\
a_{k/32} &= -\sin i_k \cos\Omega_k \\
a_{k/33} &= \cos i_k \qquad \langle k = 1,2 \quad .
\end{aligned}
\tag{31.43}
$$

Hier sind i, Ω die *Kepler*elemente Inklination und Rektaszension des aufsteigenden Knotens. σ ist der *Hansen*-Winkel des aufsteigenden Knotens (definiert durch $\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i$) bezogen auf den Ursprung O_k des jeweiligen *Hansen*-Systems. Wenn eine Lösung eines Bahnproblems mit den *Kepler*elementen a, e, i, Ω, ω bekannt ist, kann der Winkel σ durch die direkte Integration über die Zeit bzw. den *Hansen*schen Bahnwinkel

$$
\sigma = \sigma_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{\Omega}\cos i \, dt = \sigma_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\Omega}{d\zeta} \cos i \, d\zeta \tag{31.44}
$$

erhalten werden. Je nach verwendetem Bahnmodell kann die Integration mit $\dot{\Omega}$ aus Formel[1] (11.71) numerisch oder analytisch in jedem Bahnpunkt durchgeführt werden. Eine häufige ausreichende Näherungslösung wird für die praktische Anwendung in Abschnitt 21.2.2 vorgeschlagen. Diese dürfte auch für die hier behandelte Problematik ausreichend sein. Der Anfangswinkel σ_0 kann hierbei willkürlich festgelegt werden. Bisweilen wird auch $\sigma_0 := \Omega_0 \cos i_0$ mit den Anfangswerten i_0, Ω_0 gewählt. Einmal gewählt darf σ_0 nicht verändert werden, da das zugrunde gelegte *Hansen*system unveränderlich an die Bahnebene geknüpft ist. In den meisten Fällen der Praxis wird die folgende Näherung ausreichen

$$
\sigma \approx \sigma_0 + \Delta\Omega \cos i \quad , \tag{31.45}
$$

wobei die Werte $\Delta\Omega := \Omega(t) - \Omega(t_0)$, $i = i(t)$ als oskulierende Werte aus der Ephemeridenrechnung entnommen werden können. Im Verlauf eines längeren Rechenprozesses kann statt eines Epochewertes für die Epoche t_0 in jedem Schritt t_{n+1} der Bezug auf den vorhergehenden Schritt t_n genommen werden. In diesem Fall errechnet sich der *Hansen*-Winkel des aufsteigenden Knotens aus

$$
\sigma = \sigma(t_{n+1}) \approx \sigma(t_n) + \left[\Omega(t_{n+1}) - \Omega(t_n)\right] \cos i(t_{n+1}) = \sigma(t_n) + \Delta\Omega \cos i \quad . \tag{31.46}
$$

Um Eindeutigkeit zu wahren und da die trigonometrischen Funktionen der Elemente i, σ, Ω für die Transformationen (31.43) benötigt werden, wird $\Delta\Omega$ berechnet aus

$$
\sin(\Delta\Omega) = \sin\Omega_{n+1} \cos\Omega_n - \cos\Omega_{n+1} \sin\Omega_n \quad . \tag{31.47}
$$

Die trigonometrischen Funktionen des *Hansen*-Winkels σ folgen dann aus

$$
\begin{aligned}
\sin\sigma &\triangleq \sin\sigma_{n+1} = \sin\sigma_n \cos\left[\Delta\Omega \cos i_{n+1}\right] + \cos\sigma_n \sin\left[\Delta\Omega \cos i_{n+1}\right] \\
\cos\sigma &\triangleq \cos\sigma_{n+1} = \cos\sigma_n \cos\left[\Delta\Omega \cos i_{n+1}\right] - \sin\sigma_n \sin\left[\Delta\Omega \cos i_{n+1}\right] \quad .
\end{aligned}
\tag{31.48}
$$

[1] In Abschnitt 11.1.5 (Band III)

Aus dem Vergleich (nach (31.42))

$$\mathbf{p}_i = a^j_{1/i}\,\mathbf{q}^{(I)}_{1/j} = a^j_{2/i}\,\mathbf{q}^{(I)}_{2/j} \qquad \langle i, j = 1,2,3 \tag{31.49}$$

können die Basisvektoren des *Hansen*-System des Satelliten 2 dargestellt im *Hansen*-System des Satelliten 1 gefunden werden:

$$\mathbf{q}^{(I)}_{2/j} = b_j{}^i\,\mathbf{q}^{(I)}_{1/i} \qquad \langle i, j = 1,2,3 \quad . \tag{31.50}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten b_{ji} dieser Transformation werden die folgenden Hilfsgrößen eingeführt:

$$\begin{aligned}
A_1 &:= a_{2/21}\,a_{2/12} - a_{2/22}\,a_{2/11}\\
A_2 &:= a_{2/31}\,a_{2/12} - a_{2/32}\,a_{2/11}\\
A_3 &:= a_{2/21}\,a_{2/13} - a_{2/23}\,a_{2/11}\\
A_4 &:= a_{2/31}\,a_{2/13} - a_{2/33}\,a_{2/11}\\
A_5 &:= a_{2/11}\,a_{2/33} - a_{2/13}\,a_{2/31} = -A_4\\
A_6 &:= a_{2/21}\,a_{2/33} - a_{2/23}\,a_{2/31}\\
A_7 &:= a_{2/12}\,a_{2/33} - a_{2/13}\,a_{2/32}\\
A_8 &:= a_{2/22}\,a_{2/33} - a_{2/23}\,a_{2/32}
\end{aligned} \tag{31.51}$$

$$\begin{aligned}
&B_1 := A_4\,a_{2/12} - A_2\,a_{2/13}\ ,\ B_2 := -A_4\,a_{2/11}\ ,\ B_3 := A_2\,a_{2/11}\ ,\\
&B_4 := A_8\,a_{2/33}\ ,\ B_5 := -A_6\,a_{2/33}\ ,\ B_6 := A_6\,a_{2/32} - A_8\,a_{2/31}\ ,\\
&B_7 := A_3\,a_{2/12} - A_1\,a_{2/13}\ .\ B_8 := -A_3\,a_{2/11}\ ,\ B_9 := A_1\,a_{2/11}
\end{aligned} \tag{31.52}$$

$$D_1 := A_5\,A_8 - A_6\,A_7 \quad , \quad D_2 := A_1\,A_4 - A_2\,A_3 \tag{31.53}$$

Damit lauten die Koeffizienten

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \left(B_4\,a_{1/11} + B_5\,a_{1/12} + B_6\,a_{1/13}\right)/D_1\\
b_{12} &= \left(B_4\,a_{1/21} + B_5\,a_{1/22} + B_6\,a_{1/23}\right)/D_1\\
b_{13} &= \left(B_4\,a_{1/31} + B_5\,a_{1/32} + B_6\,a_{1/33}\right)/D_1\\
b_{21} &= \left(B_1\,a_{1/11} + B_2\,a_{1/12} + B_3\,a_{1/13}\right)/D_2\\
b_{22} &= \left(B_1\,a_{1/21} + B_2\,a_{1/22} + B_3\,a_{1/23}\right)/D_2\\
b_{23} &= \left(B_1\,a_{1/31} + B_2\,a_{1/32} + B_3\,a_{1/33}\right)/D_2\\
b_{31} &= -\left(B_7\,a_{1/11} + B_8\,a_{1/12} + B_9\,a_{1/13}\right)/D_1\\
b_{32} &= -\left(B_7\,a_{1/21} + B_8\,a_{1/22} + B_9\,a_{1/23}\right)/D_1\\
b_{33} &= -\left(B_7\,a_{1/31} + B_8\,a_{1/32} + B_9\,a_{1/33}\right)/D_1 \quad .
\end{aligned} \tag{31.54}$$

Aus einer Ephemeridenrechnung seien die Ortsvektoren der beiden Satelliten im Frühlingspunkt bezogenen $\mathbf{p}_i$ – System mit ihren Koeffizienten $x_{k/i}$ bekannt:

$$\mathbf{r}_k = x_{k/}{}^i\,\mathbf{p}_i \qquad \langle k = 1,2;\ i = 1,2,3 \quad . \tag{31.55}$$

Die Basisvektoren der beiden *Hansen*-Systeme seien ebenfalls im $\mathbf{p}_i$ – System gegeben:

$$\mathbf{q}^{(I)}_{k/j} = a_{k/j}{}^i\,\mathbf{p}_i \qquad \langle k = 1,2;\ i, j = 1,2,3 \quad . \tag{31.56}$$

In den beiden *Hansen*-Systemen haben die Ortsvektoren mit den auf den jeweiligen Ursprung bezogenen *Hansen*-Winkel ζ_k die Darstellung

$$\mathbf{r}_k = r_k \left(\mathbf{q}_{k/1}^{(I)} \cos\zeta_k + \mathbf{q}_{k/2}^{(I)} \sin\zeta_k \right) \qquad \langle k = 1,2 \quad . \tag{31.57}$$

Die ζ_k-Winkel können durch skalare Multiplikation der Ortsvektoren (31.55) mit den Basisvektoren (31.56) erhalten werden

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{q}_{k/1}^{(I)} &= x_{k/1}\, a_{k/11} + x_{k/2}\, a_{k/12} + x_{k/3}\, a_{k/13} = r_k \cos\zeta_k \\ \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{q}_{k/2}^{(I)} &= x_{k/1}\, a_{k/21} + x_{k/2}\, a_{k/22} + x_{k/3}\, a_{k/23} = r_k \sin\zeta_k \quad . \end{aligned} \tag{31.58}$$

Der relative Ortsvektor, unter dem Satellit 2 von Satellit 1 aus beobachtet werden kann, habe im *Hansen*-System von Satellit 1 die Darstellung

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 =: c^j\, \mathbf{q}_{1/j}^{(I)} \quad . \tag{31.59}$$

Die Koeffizienten c_j werden aus

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = r_2 \left[\cos\zeta_2\, \mathbf{q}_{2/1}^{(I)} + \sin\zeta_2\, \mathbf{q}_{2/2}^{(I)} \right] - r_1 \left[\cos\zeta_1\, \mathbf{q}_{1/1}^{(I)} + \sin\zeta_1\, \mathbf{q}_{1/2}^{(I)} \right] \tag{31.60}$$

mit Hilfe der Transformation (31.50) erhalten:

$$\begin{aligned} c_1 &= r_2 \left(\cos\zeta_2\, b_{11} + \sin\zeta_2\, b_{21} \right) - r_1 \cos\zeta_1 \\ c_2 &= r_2 \left(\cos\zeta_2\, b_{12} + \sin\zeta_2\, b_{22} \right) - r_1 \sin\zeta_1 \\ c_3 &= r_2 \left(\cos\zeta_2\, b_{13} + \sin\zeta_2\, b_{23} \right) \quad . \end{aligned} \tag{31.61}$$

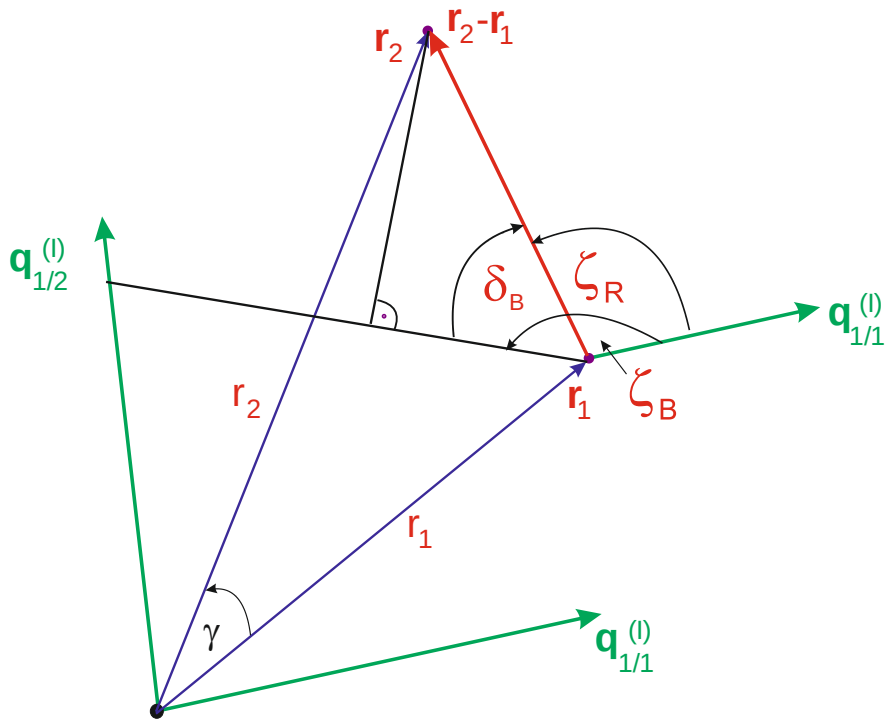


Bild 31-19: Die Beobachtung des zweiten Satelliten vom ersten Satelliten aus bezogen auf die Basiseben des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*-System des ersten Satelliten, berechnet vom Erdmittelpunkt aus

Mit diesen Koeffizienten kann die Blickrichtung von Satellit 1 bezogen auf die (momentane) Bahnebene dieses Satelliten zu Satellit 2 in Beobachtungswinkeln dargestellt werden (Bild 31-19). In der Bahnebene werde dazu der auf den Anfangspunkt des *Hansen*-Systems bezogene Winkel ζ_B eingeführt, aus der Bahnebene heraus die Deklination δ_B. Diese Winkel können berechnet werden aus

$$\begin{aligned} c_1 &= \rho \cos\delta_B \cos\zeta_B \\ c_2 &= \rho \cos\delta_B \sin\zeta_B \\ c_3 &= \rho \sin\delta_B \quad . \end{aligned} \tag{31.62}$$

Insbesondere sind

$$\begin{aligned} &\rho \cos\delta_B = c_1 \cos\zeta_B + c_2 \sin\zeta_B = \sqrt{1-c_3^2} \geq 0 \\ &\cos\zeta_B = \frac{c_1}{\rho\cos\delta_B} \;,\; \sin\zeta_B = \frac{c_2}{\rho\cos\delta_B} \quad . \end{aligned} \tag{31.63}$$

Die Variationen $\dot{\zeta}_B, \dot{\delta}_B$ der Winkel ζ_B in der Bahnebene des ersten Satelliten und mit der entsprechenden Deklination δ_B können aus den Beziehungen (31.62) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_B &= \frac{-\dot{c}_1 \sin\zeta_B + \dot{c}_2 \cos\zeta_B}{c_1 \cos\zeta_B + c_2 \sin\zeta_B} = \frac{-\dot{c}_1 \sin\zeta_B + \dot{c}_2 \cos\zeta_B}{\rho\cos\zeta_B} \\ \rho^2 \dot{\delta}_B &= \left(\dot{c}_3 c_1 - c_3 \dot{c}_1\right)\cos\zeta_B + \left(\dot{c}_3 c_2 - c_3 \dot{c}_2\right)\sin\zeta_B \quad . \end{aligned} \tag{31.64}$$

Damit kann die relative Bewegung von Satellit 2 gesehen von Satellit 1 aus ähnlich wie die relative Bewegung eines Satelliten gesehen von einem Beobachtungsort auf der Erde untersucht werden[1].

Der relative Ortsvektor schließe mit dem ersten Basisvektor des *Hansen*-Systems 1 den Winkel ζ_R ein. Der Betrag dieses Vektors sei $\rho := \left|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right|$. Dann kann der Zwischenwinkel, der nur zwischen 0° und 180° liegen kann, berechnet werden aus

$$\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right) \cdot \mathbf{q}_{1/1}^{(I)} = \rho \cos\zeta_R \quad . \tag{31.65}$$

Mit den Koeffizienten c_j aus der Definition (31.59) wird

$$\begin{aligned} &\rho \cos\zeta_R = c_1 \\ &\rho \sin\zeta_R = \sqrt{\rho^2 - c_1^2} = \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \geq 0 \quad \left\langle \zeta_R \in \left[0°, 180°\right] \right. \quad . \end{aligned} \tag{31.66}$$

Analog zu den beiden vorhergehenden Abschnitten des koplanaren Falles interessiert auch hier die Variation $\dot{\zeta}_R$ des relativen *Hansen*-Winkels ζ_R, der im Fall scheinbar stationärer Punkte des Satelliten 2 gesehen vom Satelliten 1 aus verschwindet, im Fall scheinbar rückläufiger Bewegung negativ wird. Dazu werden die Variationen der Ausdrücke (31.66)

$$\begin{aligned} &\dot{\rho} \cos\zeta_R - \rho \dot{\zeta}_R \sin\zeta_R = \dot{c}_1 \\ &\dot{\rho} \sin\zeta_R + \rho \dot{\zeta}_R \cos\zeta_R = \frac{c_2 \dot{c}_2 + c_3 \dot{c}_3}{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}} \end{aligned} \tag{31.67}$$

gebildet. Nach Elimination der Variation $\dot{\rho}$ der relativen Distanz zwischen den beiden Satelliten bleibt in der Form des relativen Flächensatzes der Ausdruck

$$\rho^2 \dot{\zeta}_R = -\dot{c}_1 \sqrt{c_2^2 + c_3^2} + c_1 \frac{c_2 \dot{c}_2 + c_3 \dot{c}_3}{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}} \quad . \tag{31.68}$$

[1] siehe in den Kapiteln 26 und 27

Um die Variation des relativen Bahnwinkels ζ_R und der Ortswinkel ζ_B, δ_B berechnen zu können, müssen die Variationen der Parameter c_i und aller darin enthaltenen Größen bekannt sein. Aus den Gleichungen (31.61) folgen

$$\begin{aligned}
\dot{c}_1 &= \dot{r}_2\left(\cos\zeta_2\, b_{11} + \sin\zeta_2\, b_{21}\right) - \dot{r}_1 \cos\zeta_1 + \dot{\zeta}_1\, r_1 \sin\zeta_1 + \\
&\quad + r_2\left[\dot{\zeta}_2\left(-\sin\zeta_2\, b_{11} + \cos\zeta_2\, b_{21}\right) + \dot{b}_{11}\cos\zeta_2 + \dot{b}_{21}\sin\zeta_2\right] \\
\dot{c}_2 &= \dot{r}_2\left(\cos\zeta_2\, b_{12} + \sin\zeta_2\, b_{22}\right) - \dot{r}_1 \sin\zeta_1 - \dot{\zeta}_1\, r_1 \cos\zeta_1 + \\
&\quad + r_2\left[\dot{\zeta}_2\left(-\sin\zeta_2\, b_{12} + \cos\zeta_2\, b_{22}\right) + \dot{b}_{12}\cos\zeta_2 + \dot{b}_{22}\sin\zeta_2\right] \\
\dot{c}_3 &= \dot{r}_2\left(\cos\zeta_2\, b_{13} + \sin\zeta_2\, b_{23}\right) + \\
&\quad + r_2\left[\dot{\zeta}_2\left(-\sin\zeta_2\, b_{13} + \cos\zeta_2\, b_{23}\right) + \dot{b}_{13}\cos\zeta_2 + \dot{b}_{23}\sin\zeta_2\right]
\end{aligned} \tag{31.69}$$

Die radialen Geschwindigkeiten sind aus den vorgegebenen Zustandsvektoren bekannt

$$\dot{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1}{r_1} \quad , \quad \dot{r}_2 = \frac{\mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2}{r_2} \quad . \tag{31.70}$$

Die Variationen des *Hansen*schen Bahnwinkels folgen aus dem jeweils gültigen Flächensatz

$$\dot{\zeta}_1 = \frac{G_1}{r_1^2} \quad , \quad \dot{\zeta}_2 = \frac{G_2}{r_2^2} \quad . \tag{31.71}$$

Die Flächenparameter G_k können im vorliegenden Fall der Untersuchung der Bewegung von Erdsatelliten auf ellipsennahen Bahnen auf die große Bahnhalbachse und die Exzentrizität zurückgeführt werden, die aus der Ephemeridenrechnung bekannt sind:

$$G_1 = \sqrt{\mu\, a_1\left(1 - e_1^2\right)} \quad , \quad G_2 = \sqrt{\mu\, a_2\left(1 - e_2^2\right)} \quad . \tag{31.72}$$

Die noch fehlenden $\dot{b}_{ij}$ können aus den Gleichungen (31.54) berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\dot{b}_{11} &= \left\{\left[\dot{B}_4\, a_{1/11} + B_4\, \dot{a}_{1/11} + \dot{B}_5\, a_{1/12} + B_5\, \dot{a}_{1/12} + \dot{B}_6\, a_{1/13} + B_6\, \dot{a}_{1/13}\right] - \dot{D}_1\, b_{11}\right\} / D_1 \\
\dot{b}_{12} &= \left\{\left[\dot{B}_4\, a_{1/21} + B_4\, \dot{a}_{1/21} + \dot{B}_5\, a_{1/22} + B_5\, \dot{a}_{1/22} + \dot{B}_6\, a_{1/23} + B_6\, \dot{a}_{1/23}\right] - \dot{D}_1\, b_{12}\right\} / D_1 \\
\dot{b}_{13} &= \left\{\left[\dot{B}_4\, a_{1/31} + B_4\, \dot{a}_{1/31} + \dot{B}_5\, a_{1/32} + B_5\, \dot{a}_{1/32} + \dot{B}_6\, a_{1/33} + B_6\, \dot{a}_{1/33}\right] - \dot{D}_1\, b_{13}\right\} / D_1 \\
\dot{b}_{21} &= \left\{\left[\dot{B}_1\, a_{1/11} + B_1\, \dot{a}_{1/11} + \dot{B}_2\, a_{1/12} + B_2\, \dot{a}_{1/12} + \dot{B}_3\, a_{1/13} + B_3\, \dot{a}_{1/13}\right] - \dot{D}_2\, b_{21}\right\} / D_2 \\
\dot{b}_{22} &= \left\{\left[\dot{B}_1\, a_{1/21} + B_1\, \dot{a}_{1/21} + \dot{B}_2\, a_{1/22} + B_2\, \dot{a}_{1/22} + \dot{B}_3\, a_{1/23} + B_3\, \dot{a}_{1/23}\right] - \dot{D}_2\, b_{22}\right\} / D_2 \\
\dot{b}_{23} &= \left\{\left[\dot{B}_1\, a_{1/31} + B_1\, \dot{a}_{1/31} + \dot{B}_2\, a_{1/32} + B_2\, \dot{a}_{1/32} + \dot{B}_3\, a_{1/33} + B_3\, \dot{a}_{1/33}\right] - \dot{D}_2\, b_{23}\right\} / D_2 \\
\dot{b}_{31} &= \left\{-\left[\dot{B}_7\, a_{1/11} + B_7\, \dot{a}_{1/11} + \dot{B}_8\, a_{1/12} + B_8\, \dot{a}_{1/12} + \dot{B}_9\, a_{1/13} + B_9\, \dot{a}_{1/13}\right] - \dot{D}_1\, b_{31}\right\} / D_1 \\
\dot{b}_{32} &= \left\{-\left[\dot{B}_7\, a_{1/21} + B_7\, \dot{a}_{1/21} + \dot{B}_8\, a_{1/22} + B_8\, \dot{a}_{1/22} + \dot{B}_9\, a_{1/23} + B_9\, \dot{a}_{1/23}\right] - \dot{D}_1\, b_{32}\right\} / D_1 \\
\dot{b}_{33} &= \left\{-\left[\dot{B}_7\, a_{1/31} + B_7\, \dot{a}_{1/31} + \dot{B}_8\, a_{1/32} + B_8\, \dot{a}_{1/32} + \dot{B}_9\, a_{1/33} + B_9\, \dot{a}_{1/33}\right] - \dot{D}_1\, b_{33}\right\} / D_1
\end{aligned} \tag{31.73}$$

Hier werden folgende Variationsausdrücke benötigt: mit (31.53)

$$\begin{aligned}
\dot{D}_1 &= \dot{A}_5\, A_8 + A_5\, \dot{A}_8 - \dot{A}_6\, A_7 - A_6\, \dot{A}_7 \\
\dot{D}_2 &= \dot{A}_1\, A_4 + A_1\, \dot{A}_4 - \dot{A}_2\, A_3 - A_2\, \dot{A}_3
\end{aligned} \tag{31.74}$$

sowie mit (31.52)

$$
\begin{aligned}
\dot{B}_1 &= \dot{A}_4\, a_{2/12} + A_4\, \dot{a}_{2/12} - \dot{A}_2\, a_{2/13} - A_2\, \dot{a}_{2/13} \\
\dot{B}_2 &= -\dot{A}_4\, a_{2/11} - A_4\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{B}_3 &= \dot{A}_2\, a_{2/11} + A_2\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{B}_4 &= \dot{A}_8\, a_{2/33} + A_8\, \dot{a}_{2/33} \\
\dot{B}_5 &= -\dot{A}_6\, a_{2/33} - A_6\, \dot{a}_{2/33} \\
\dot{B}_6 &= \dot{A}_6\, a_{2/32} + A_6\, \dot{a}_{2/32} - \dot{A}_8\, a_{2/31} - A_8\, \dot{a}_{2/31} \\
\dot{B}_7 &= \dot{A}_3\, a_{2/12} + A_3\, \dot{a}_{2/12} - \dot{A}_1\, a_{2/13} - A_1\, \dot{a}_{2/13} \\
\dot{B}_8 &= -\dot{A}_3\, a_{2/11} - A_3\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{B}_9 &= \dot{A}_1\, a_{2/11} + A_1\, \dot{a}_{2/11}
\end{aligned}
\tag{31.75}
$$

Aus den Zuordnungen (31.51) folgen

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_1 &= \dot{a}_{2/21}\, a_{2/12} + a_{2/21}\, \dot{a}_{2/12} - \dot{a}_{2/22}\, a_{2/11} - a_{2/22}\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{A}_2 &= \dot{a}_{2/31}\, a_{2/12} + a_{2/31}\, \dot{a}_{2/12} - \dot{a}_{2/32}\, a_{2/11} - a_{2/32}\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{A}_3 &= \dot{a}_{2/21}\, a_{2/13} + a_{2/21}\, \dot{a}_{2/13} - \dot{a}_{2/23}\, a_{2/11} - a_{2/23}\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{A}_4 &= \dot{a}_{2/31}\, a_{2/13} + a_{2/31}\, \dot{a}_{2/13} - \dot{a}_{2/33}\, a_{2/11} - a_{2/33}\, \dot{a}_{2/11} \\
\dot{A}_5 &= \dot{a}_{2/11}\, a_{2/33} + a_{2/11}\, \dot{a}_{2/33} - \dot{a}_{2/13}\, a_{2/31} - a_{2/13}\, \dot{a}_{2/31} = -\dot{A}_4 \\
\dot{A}_6 &= \dot{a}_{2/21}\, a_{2/33} + a_{2/21}\, \dot{a}_{2/33} - \dot{a}_{2/23}\, a_{2/31} - a_{2/23}\, \dot{a}_{2/31} \\
\dot{A}_7 &= \dot{a}_{2/12}\, a_{2/33} + a_{2/12}\, \dot{a}_{2/33} - \dot{a}_{2/13}\, a_{2/32} - a_{2/13}\, \dot{a}_{2/32} \\
\dot{A}_8 &= \dot{a}_{2/22}\, a_{2/33} + a_{2/22}\, \dot{a}_{2/33} - \dot{a}_{2/23}\, a_{2/32} - a_{2/23}\, \dot{a}_{2/33}
\end{aligned}
\tag{31.76}
$$

Schließlich müssen noch die $\dot{a}_{k/ij}$ $\langle k = 1,2;\ i, j = 1,2,3$ zur Verfügung gestellt werden. Sie sind in den Ausdrücken (8.428) (Abschnitt 8.12.2, Band II) gegeben. Unter Berücksichtigung der Variationsgleichung $\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i$ haben sie im vorliegenden Zusammenhang die Darstellung (mit k=1,2 für die beiden zu betrachtenden Satellitenbahnen)

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{k/11} &= -(i_k)^{\bullet}\, a_{k/31} \sin\sigma_k - \dot{\Omega}_k \left(a_{k/21} \cos i_k + a_{k/12}\right) \\
\dot{a}_{k/12} &= -(i_k)^{\bullet}\, a_{k/32} \sin\sigma_k - \dot{\Omega}_k \left(a_{k/22} \cos i_k + a_{k/11}\right) \\
\dot{a}_{k/13} &= (i_k)^{\bullet}\, a_{k/33} \sin\sigma_k - \dot{\Omega}_k\, a_{k/23} \cos i_k \\
\dot{a}_{k/21} &= (i_k)^{\bullet}\, a_{k/31} \cos\sigma_k + \dot{\Omega}_k \left(a_{k/11} \cos i_k - a_{k/22}\right) \\
\dot{a}_{k/22} &= (i_k)^{\bullet}\, a_{k/32} \cos\sigma_k + \dot{\Omega}_k \left(a_{k/12} \cos i_k + a_{k/21}\right) \\
\dot{a}_{k/23} &= (i_k)^{\bullet}\, a_{k/33} \cos\sigma_k + \dot{\Omega}_k\, a_{k/13} \cos i_k \\
\dot{a}_{k/31} &= (i_k)^{\bullet}\, a_{k/33} \cos\Omega_k - \dot{\Omega}_k\, a_{k/32} \\
\dot{a}_{k/32} &= -(i_k)^{\bullet}\, a_{k/32} \cos\Omega_k + \dot{\Omega}_k\, a_{k/31} \\
\dot{a}_{k/33} &= -(i_k)^{\bullet} \sin i_k .
\end{aligned}
\tag{31.77}
$$

Die allgemeinen Variationsgleichungen für die Inklination und die Rektaszension des aufsteigenden Knotens sind in Abschnitt 11.1.5 (Band III) in den Ausdrücken (11.70) und (11.71) gegeben:

$$
(i_k)^{\bullet} = \frac{r_k}{G_k} \cos u_k\, b_{Nk} \quad , \quad \dot{\Omega}_k = \frac{r_k \sin u_k}{G_k \sin i_k} b_{Nk} \qquad \langle k = 1,2 \quad . \tag{31.78}
$$

Das Argument der Breite u_k ist für beide Bahnen aus der Ephemeridenrechnung bekannt. Der Flächenparameter G_k ist im vorliegenden Problem durch (31.72) gegeben. Die normale Beschleunigung b_{Nk} muss aus dem verwendeten Bahnmodell bekannt sein. Für Erdsatelliten genügt normalerweise die Darstellung (17.33) (in Abschnitt 17.2.2 (Band II)). Im Rahmen einer Bahnanalyse wird häufig nur der säkulare Epocheanteil der Variationen der *Kepler*elemente aus (20.12) und (20.15) genommen, was den Rechenprozess erheblich vereinfachen kann.

BEISPIEL: Zur Demonstration des hier hergeleiteten Verfahrens zur Beobachtung eines Satelliten von einem anderen Satelliten aus, werden zwei kreisförmige Satellitenbahnen betrachtet. Der beobachtende Satellit bewege sich in der Äquatorebene mit den mittleren Epoche-*Kepler*elementen

$$a_1 = 7000\,\text{km}, \mathrm{e}_1 = 0.0, i_1 = 0°, \Omega_1 = 0°, \omega_1 = 0° \ .$$

Der zweite Satellit bewege sich auf einer höheren Bahn, die gegenüber der Äquatorebene um 20° geneigt sei:

$$a_2 = 12000\,\text{km}, \mathrm{e}_2 = 0.0, i_2 = 20°, \Omega_2 = 0°, \omega_2 = 0° \ .$$

Zur Epoche befinden sich beide Satelliten über dem Äquator. Die $\mathbf{q}_{1/1}^{(I)}$ – Achse des *Hansen*-Systems des ersten Satelliten werde so gewählt, dass der zweite Satellit in diesem Moment sich genau in dieser Richtung befindet. Dies gibt eine charakteristische Darstellung, der gegenüber sich die relative Darstellung im Laufe der Zeit erheblich verändern muss.

Bild 31-20 zeigt den Verlauf der Beobachtungswinkel des zweiten Satelliten im Gesichtsfeld des ersten Satelliten. Basisebene ist die Bahnebene des ersten Satelliten. In ihr wird der Azimutwinkel ζ_B gezählt, wobei der Nullpunkt in der Richtung der $\mathbf{q}_{1/1}^{(I)}$ – Achse liegt. Die Abweichung von der Bahnebene wird durch den Elevationswinkel δ_B charakterisiert. Die Darstellung erfasst den gesamten „Sichthimmel“ des ersten Satelliten. Wird die Sichtlinie zwischen den beiden Satelliten unterbrochen – der beobachtete Satellit befindet sich „hinter“ dem Erdkörper -, wird der Blickkontakt unterbrochen. Die hier gewählte Darstellung beginnt eine halbe Stunde vor der Epoche. Im Moment der Epoche hat die Sichtrichtung die Sichtwinkel $\zeta_{B0} = \delta_{B0} = 0°$. Der Verlauf der Sichtrichtung durchläuft hier die charakteristische S-Kurve. Die anderen Begegnungen weisen Schleifen und Doppelpunkte auf. Auch Umkehrpunkte der scheinbaren Bewegungsrichtung und scheinbar stationäre Punkte lassen sich erkennen. Um die zeitliche Zuordnung zu erkennen, wird der separate Verlauf der Beobachtung über der Zeit benötigt. Dies geschieht in

Bild 31-21. Hier wird der Verlauf der Elevation δ_B aufgetragen, in diesem Bild über 12.5 Stunden. Damit kann die zeitliche Zuordnung in Bild 31-20 erfolgen.

Die Variationen der beiden Beobachtungswinkel entsprechend den Formeln (31.64) sind in Bild 31-22 aufgetragen: in roter Farbe die Variationen $\dot{\zeta}_B$, darüber in blauer Farbe die Variationen $\dot{\delta}_B$. Negative Werte in $\dot{\zeta}_B$ zeigen Rückläufigkeit in azimutaler Bewegung, in $\dot{\delta}_B$ absteigende Bewegung. Bei Nulldurchgang ändert sich die Bewegungsrichtung. Die Zuordnung kann durch Vergleich mit den Kurven in Bild 31-20 nachvollzogen werden.

In Ergänzung dieser Darstellungen werde auch der Verlauf des relativen *Hansen*-Winkels ζ_R untersucht, der entsprechend den Formeln (31.66) die relative Sicht von Satellit 1 zu Satellit 2 bei Bezug auf die $\mathbf{q}_{1/1}^{(I)}$ – Achse des ersten Satelliten beschreibt. Da dieser Winkel nur im Bereich

$\zeta_R \in [0°,180°]$ gezählt wird, ist im Moment der Epoche eine Umkehr dieses Winkels zu erwarten. Dies wird in Bild 31-23 demonstriert, wo auch der weitere Verlauf dieses Winkels für die folgenden Sichtbarkeitspassagen dargestellt wird. Die Variationen dieses Winkels sind in Bild 31-24 berechnet. Das Sprungverhalten im Moment der Epoche ist deutlich erkennbar. ◄

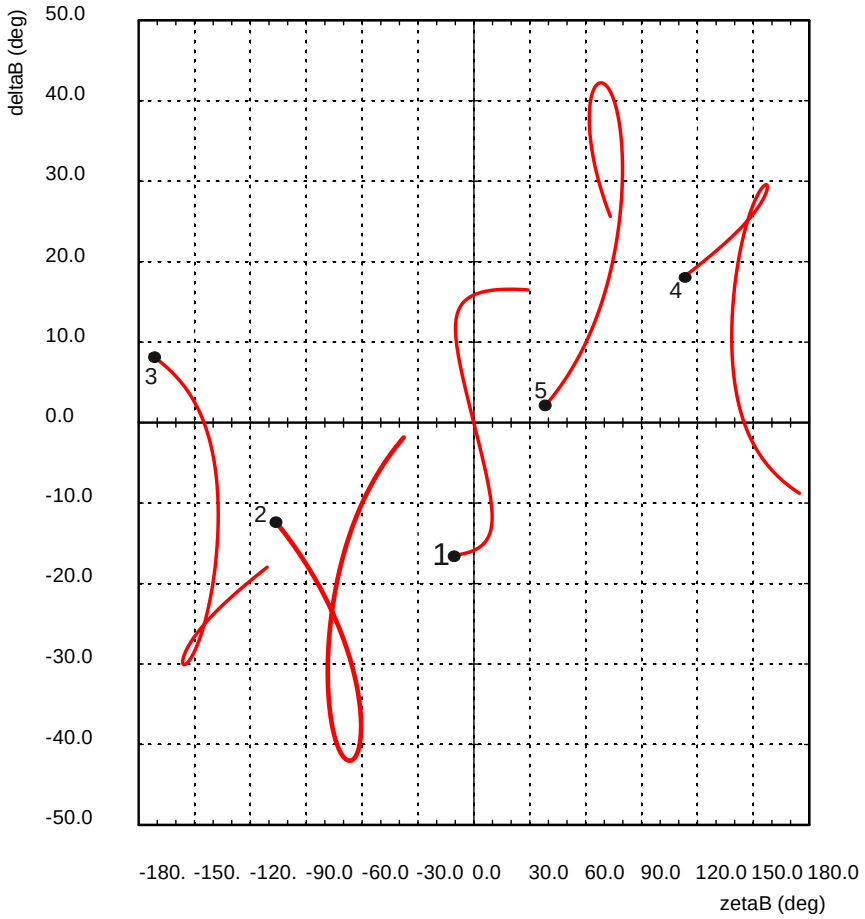


Bild 31-20: Verlauf der lokalen Beobachtungswinkel δ_B über ζ_B bezogen auf die Basisebene des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*-Systems des ersten Satelliten (a=7000 km, e=0.0, i=0°, Ω=0°) für den Verlauf von 12 Stunden: Blickwinkel zu Satellit 2 (a=12000 km, e=0.0, i=20°, Ω=0°)

Hinweis: Aus der Theorie der Planetenbewegung, die im Rahmen der klassischen Himmelsmechanik und ihrer Anwendungen entwickelt worden ist, sind auch Aussagen über das scheinbare Bewegungsverhalten der Planeten von der Erde aus gegeben. Diese Aussagen können wesentlich verallgemeinert auf das scheinbare Bewegungsverhalten von Erdsatelliten übertragen werden, wie es in diesem Kapitel versucht wurde. In diesem Zusammenhang kann auf einige Sätze hingewiesen werden[1], welche Bedingungen zur Bildung von Doppelpunkten und Schleifen sowie zur Berechnung der Oppositionszeit zum Inhalt haben. Entsprechende Überlegungen finden sich im Zusammenhang mit der Meridianbezogenen sowie der topozentrischen Satellitenbewegung in den Kapiteln 26 und 27. Eine allgemeingültige Übertragung auf die synodische Bewegung zweier Satelliten soll hier nicht weiterverfolgt werden. Der allgemeine Fall beliebiger und vor allem auch exzentrischer Bahnen muss im Spezialfall direkt untersucht werden. ◄

[1] etwa nach BAUSCHINGER, J. [1928], p. 253

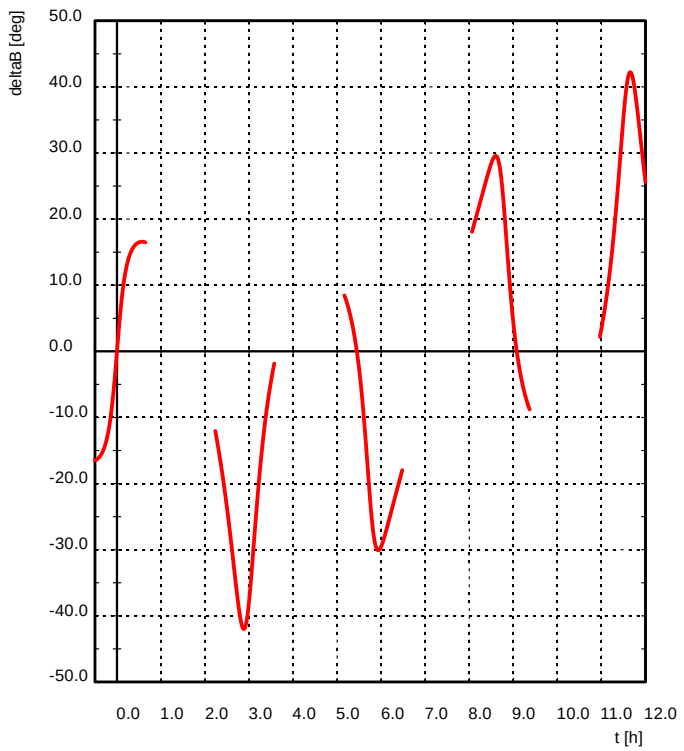


Bild 31-21: Verlauf des lokalen Beobachtungswinkel Elevation δ_B über der Zeit bezogen auf die Basisebene des $\mathbf{q}_{1/j}^{(I)}$ – *Hansen*systems des ersten Satelliten (a=7000 km, e=0.0, i=0°, Ω=0°) für den Verlauf von 12 Stunden: Blickwinkel zu Satellit 2 (a=12000 km, e=0.0, i=20°, Ω=0°)

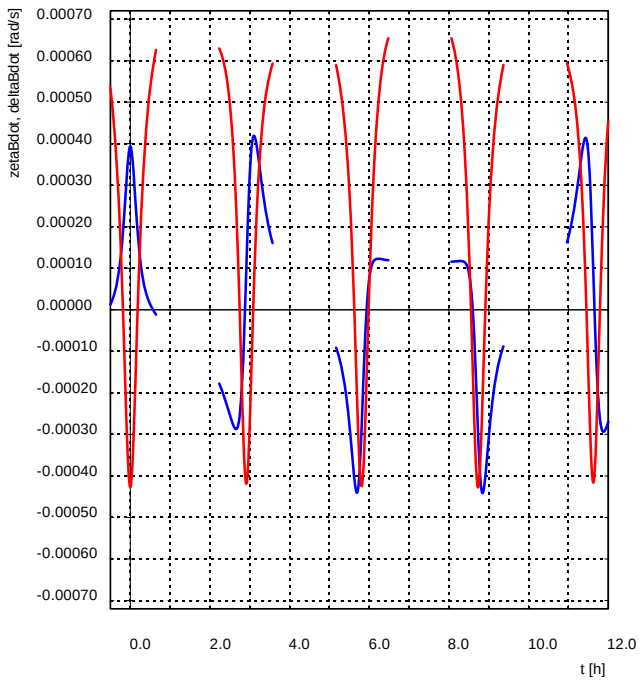


Bild 31-22: Die Variationen der lokalen Beobachtungswinkel (ζ_B, δ_B) von Satellit 2 (a=12000km, e=0.0,i=20°) gesehen vom Satelliten 1 (a=7000km, e=0.0, i=0°) aus: $\dot{\zeta}_B$ in rot, $\dot{\delta}_B$ in blau

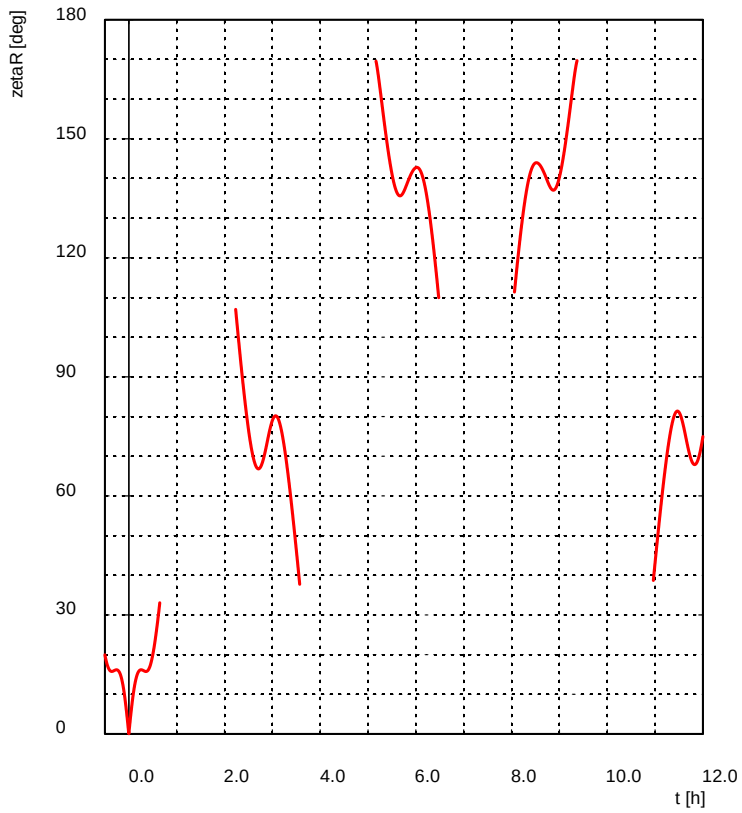


Bild 31-23: Verlauf des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ_R über der Zeit bei Sicht von Satelliten 1 (a=7000km, e=0.0, i=0°) zu Satellit 2 (a=12000km, e=0.0,i=20°)

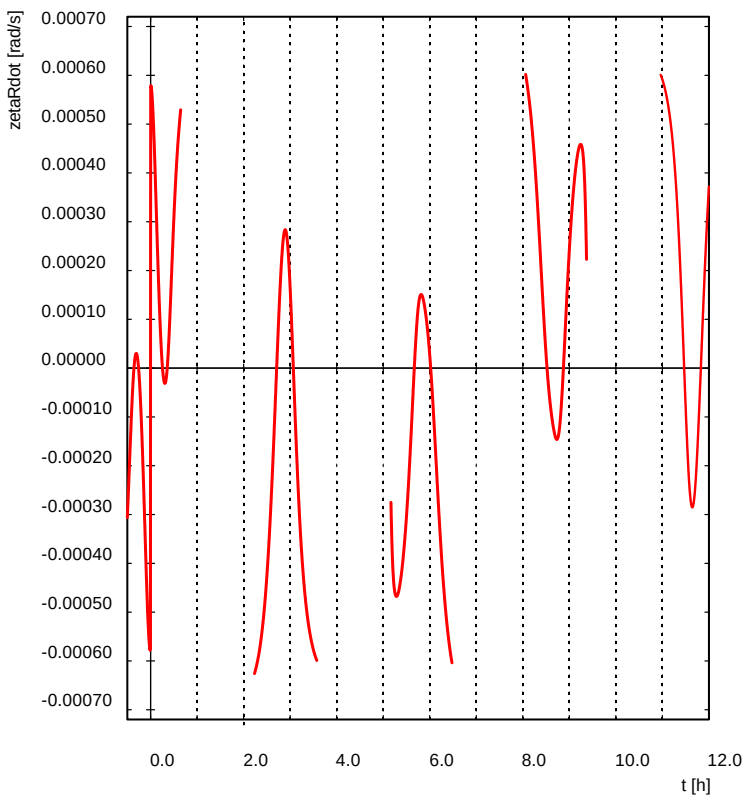


Bild 31-24: Die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ_R über der Zeit bei Sicht von Satellit 1 (a= 7000 km, e= 0.0, i= 0°) zu Satellit 2 (a= 12000 km, e= 0.0, i= 20°)

Schrifttum zu Band IV-B

In diesem Literaturverzeichnis wird nur Basiswerke, weiterführende und vertiefende Literatur hingewiesen. Einige weitere Einzelreferenzen sind in direktem Bezug im fortlaufenden Text enthalten. Siehe zur Ergänzung auch das ausführliche Literaturverzeichnis in Band I.

AA 1984 [1983]: *The Astronomical Almanac for the Year 1984*, Washington: U. S. Government Printing Office, London: Her Majesty's Stationary Office

AA 2004 [2002]: *The Astronomical Almanac for the Year 2004*, Washington: U. S. Government Printing Office, London: Her Majesty's Stationary Office

AA 2015 [2014]: The Astronomical Almanac for the year 2015 , ISBN 978-0-7077-41499, ISSN 0737-6421, published by the United Kingdom Hydrographic Office http://www.ukho.gov.uk , Crown Copyright 2014

AKILA, S. AND C. K. RAJASINGH [1983]: 'Statistical Visibility Analysis of near-Earth circular orbits', Orbital Mechanics Section, Mission Operations and Planning Division, ISRO Satellite Centre, Bangalore – 560058, December 1983, Doc. No. ISAC-42-83-12-05-016

AOKI, A., GUINOT, B., KAPLAN, G. H., KINOSHITA, H., MCCARTHY, D. D., SEIDELMANN, P. K. [1982]: 'The New Definition of Universal Time', *Astronomy and Astrophysics* **105**, 359–361

BAKER, ROBERT M. L. JR. [1967]: Astrodynamics Applications and Advanced Topics, Academic Press

BARNES, J. A. [1974]: 'Basics Concepts of Precise Time and Frequency', in: Blair, B. R. ed., *Time and Frequency: Theory and Fundamentals*, U. S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Boulder, CO 80302, Issue May 1974

BATE, ROGER R., MUELLER, DONALD D., WHITE, JERRY E., SAILOR, WILLIAM W. [2020]: *Fundamental of Astrodynamics*, Second Edition, Dover Publications, ISBN-13: 9780486497044

BATRAKOV, Yu. V. [1963]: 'Perturbations in the motion of a satellite due to the second zonal harmonic of the Earth's potential', in: Roy, M. ed., *Dynamics of Satellites*, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Symposium Paris, May 28-30, 1962, Springer Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, pp.74-82

BATTIN, R. H. [1987]: *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, J. S. Przemieniecki / Series Editor-in-Chief, New York

BAUSCHINGER, J. [1928]: *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, Zweite Auflage, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig

BECKMAN, MARK & MARCO CONCHA [1998]: 'Lunar Prospector Orbit Determination Results', AIAA 98-4561

BELETSKY, V. V. [2001]: *Essays on the Motion of Celestial Bodies*, Translation from the Russian, Basel ; Boston : Birkhäuser Verlag, c2001. ISBN: 3764358661 (acid-free paper), 3764364084, 9783764358662 (acid-free paper), 9783764364083 (acid-free paper), 0817658661 (acid-free paper), 9780817658663 (acid-free paper)

BERMAN, ARTHUR I. [1961]: *The physical principles of Astronautics, fundamentals of dynamical astronomy and space flight*, New York, London, John Wiley and Sons, Inc., Library of Congress Catalog Card Number: 61-11514

BILL, BRUCE G. [1990]: 'The Rigid Body Obliquity of Mars', *Journal of Geophysical Research*, Vol. 95, No. B9, pp. 14,137 – 14,153

BLANCHARD, DOUGLAS [1987]: 'Planetary Exploration in the 1990's', AAS 87-639

BLITZER, L. [1957]: 'Effect of Earth's Oblateness on the Period of a Satellite', *Jet Propulsion*, Vol. **27**, p.405-406

BLITZER, L. AND A. D. WHEELON [1957]: 'Perturbations of a Satellite's Orbit Due to the Earth's Oblateness', *J. Appl. Phys.*, Vol. **27**, No. 10, pp.1141-1149

BLITZER, L., M. WEISFELD. AND A. D. WHEELON [1956]: 'Oblateness Perturbations of Elliptical Satellite Orbits', *J. Appl. Phys.*, Vol. **27**, No. 10, p.279

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1996]: *Theory of Orbits, Volume 1: Integrable Systems and Non-perturbative Methods*, ISBN 3-540-58963-5 Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York,

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1998]: *Theory of Orbits, Volume 2: Perturbative and Geometrical Methods*, ISSN 0941-7834, ISBN 3-540-60355-7 Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

BOHRMANN, A. [1963]: *Bahnen künstlicher Satelliten*, BI Hochschultaschenbücher Nr. 40, Mannheim; zweite Auflage 1966

BREAKWELL, J. V. [1959]: 'On the Anomalies in the Movement of the Perigee due to Oblateness and Air Drag for Critical Values of the Inclination', *Proceedings of the NASA Conference on Orbit and Space Trajectory Determination*

BREAKWELL, J. V. [1963]: 'Trajectories Launched Normal to the Ecliptic', *XIVth International Astronautical Congress*, Palais de l'Unesco, Paris, 25 Septembre – 1er Octobre 1963, No. 67

BREAKWELL, J. V. AND MERZ, A.W. [1994]: 'Synchronous Orbit Accuracy Evaluation', *Dynamics and Control* **4**, 407–427

BRENDEL, MARTIN [1905]: 'Theorie des Mondes', *Astronomische Mittheilungen der Königlichen Sternwarte zu Göttingen*, Achter Theil. Aus den Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Neue Folge. Band III. No.4. Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

BRETAGNON, P. AND G. FRANCOU [1988]: 'Planetary theories in rectangular and spherical variables. VSOP87 solutions', *Astronomy and Astrophysics* **202**, 309–315

BRONSTEIN, I. AND K. SEMENDJAJEW [1962]: *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, Frankfurt/Main

BROUWER, D. [1944]: 'Integration of the Equations of General Planetary Theory in Rectangular Coordinates', *Astronomical Journal* **51**, pp.73-43

BROUWER, D. [1946]: 'The Motion of a Particle with Negligible Mass under the Gravitational Influence of a Spheroid', *Astronomical Journal* **51**, 1156, pp.223-231

BROUWER, D. [1958]: 'Outlines of General Theories of the Hill-Brown and Delaunay Types for Orbits of Artificial Satellites', *Astronomical Journal* **63**, No. 1264, 433–438

BROUWER, D. [1959]: 'Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag', *Astronomical Journal* **64**, 378–397

BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961]: *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press

BROWN, E. W. [1896/1960]: *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*, Cambridge University Press, Cambridge; Neuauflage: Dover Publication, New York 1960

BROWN, E. W. [1897-1908]: 'Theory of the Moon containing a new calculation of the expressions for the coordinates of the Moon in terms of time', *Memoirs Roy. Astronom. Soc.*, London

BROWN, E. W. [1936], 'On the Calculation of the Principal Parts of the Motions of the Lunar Perigee and Node', *Astronomical Journal*, **45**, No. 1044, pp. 84-88

BROWN, E. W. and CLARENCE A. SHOOK, [1933]: *Planetary Theory*, Cambridge at the University Press, Cambridge; Cambridge University Press London, New York, Toronto, Bombay, Calcutta, Madras, Tokyo

BRUMBERG, V. A. [1991]: *Essential Relativistic Celestial Mechanics*, Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York

BRUMBERG, V. A. [1992 ?]: 'General Planetary Theory revisited with the Aid of Elliptic Functions', NAO Tokyo, Japan

BRUMBERG, V. A. [1994]: 'General Planetary Theory in Elliptic Functions', *Celest. Mech and Dynamical Astronomy* **59,** 1-36

BRUMBERG, V. A. [1995]: *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

BRUMBERG, V. A.; L. S. EVDKIMOVA and N. G. KOCHINA [1971]: 'Analytical methods for the orbits of artificial satellites of the Moon', *Celestial Mechanics* **3**, pp. 197-221

BUCERIUS, H. [1966]: *Himmelsmechanik I*, BI Hochschultaschenbücher, 143/143a, Bibliographisches Institut Mannheim

BUCERIUS, H., SCHNEIDER, M. [1968]: *Himmelsmechanik II*, BI Hochschultaschenbücher, 144/144a, Bibliographisches Institut Mannheim

BURNS, RICH. et al. [2000]: 'Solar Radiation Pressure Effects on Formation Flying of Satellites with Different Area to Mass Ratios', Paper AIAA-2000-4132, presented at AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference, Denver, Co.

CAMPBELL, J.A., JEFFERYS, W.H. [1970], 'Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit'. *Celestial Mechanics* **2,** 467–473 (1970), https://doi.org/10.1007/BF01625278

CANUTO, ENRICO ; NOVARA, CARLO; MASOTTI, LUCA; CARLUCCI, DONATO; PÉREZ MONTENEGRO, CARLOS [2018]: *Spacecraft Dynamics and Control, The embbeded Model Control Approach*, Elsevier Science, Aerospace Engineering, ISBN : 9780081017951 , Paperback ISBN: 9780081007006

CAPDEROU, MICHEL [2003]: *Satellites, Orbites et Missions* , Springer-Verlag France, ISBN 2-287-59772-7

CAPELLARI, J. O., VELEZ, C. E. AND FUCHS, A. J. [1976]: *Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md., X-582-76-77

CAYLEY, A. [1857]: 'On Hansen's Lunar Theory', *Quarterly Mathematical Journal*, Vol. **1**, pp. 112-125 (oder in: *Coll. Works*, Vol. III, 1890)

CEFOLA, P. J. [1972]: 'Equinoctial Orbit Elements – Application to Artificial Satellite Orbits', AIAA/ AAS Astrodynamics Conference, Palo Alto, Calif., September 11–12, 1972, Preprint AIAA 72-937

CEFOLA, P. J. [1975]: 'On the Formulation of the Gravitational Potential in Terms of Equinoctial Variables', AIAA Aerospace Sciences Meeting, January 1975, N76-10169

CHEBOTAREV, G. S. [1967]: *Analytical and Numerical Methods of Celestial Mechanics*, USSR Academy of Sciences, Translation from Russian, translated by Scripta Technica, Inc., Translation Editor: Ludwig Oster, University of Colorado, American Elsevier Publishing Company, Inc., New York

CLAUS, A. J. AND LUBOWE, A. G. [1963]: 'A High Accuracy Perturbation Method with Direct Application to Communication Satellite Orbit Prediction', *Astronautica Acta*, Vol. **IX** Fasc. 5-6, 275–301

CLEMENCE, G. M. [1949]: 'First-Order Theory of Mars', *Astronomical Papers*, prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Vol. **XI** Part II, United Government Printing Office, Washington

COOK, G. E. [1988]: *The Motion of the Moon*, Adam Hilger, Bristol and Philadelphia

COOK, G. E. [1962]: 'Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite', *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol **6**, 271

COOK, RICHARD A.; ANDREY B. SERGEYEVSKY; EDWARD A. BELBRUNO and THEODORE H. SWEETSER [1990]: 'Return to the Moon: the lunar observer mission', AIAA-90-2888-CP

COOK, RICHARD A. and THEODORE H. SWEETSER [1992]: 'Orbit Maintenance for low altitude near-circular lunar orbits', AIAA-92-185

COUNSELMAN, C. C. [1970]: 'VLBI observations of ALSEP transmitters', Massachusetts Inst. of Tech., Cambridge, Dept. of Earth and Planetary Sciences (MJ700802), 3153 HC A02/MF A01

DACHWALD, B. [2002]: 'Verwendung eines neuronalen Reglers und evolutionärer Algorithmen zur Berechnung optimaler interplanetarer Sonnenseglerbahnen', *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress, 2002*, Stuttgart, Germany, 23-26 September 2002

DACHWALD, B., W. SEBOLDT [2002]: 'Optimization of Interplanetary Rendezvous Trajectories for Solar Sailcraft using a Neurocontroller', *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*, Monterey, AIAA 2002-4989

DACHWALD, B., W. SEBOLDT AND B. HÄUSLER [2002]: 'Performance Requirements for Near-Term Interplanetary Solar Sailcraft Missions', *6th International Symposium on Propulsion for Space Transportation of the XXIst Century*, Versailles, France, 14-16 May 2002

DANJON, A. [1980]: *Astronomie Générale, Astronomie Sphérique et éléments de Mécanique Céleste*, Seconde Edition, revue et corrigée, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 9, Rue de Médicis, 75006 Paris

DAVIES, M. E., ABALAKIN, V. K., BURSA, M., LEDERLE, T., LIESKE, J. H., RAPP, R. H., SEIDELMAN, P. K., SINCLAIR, A. T., TEIFEL, V. G., TJUFLIN, Y. S. [1986]: 'Report of the IAU/IAG/COSPAR Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites: 1985', *Celest. Mech.* **39.**, 103–113

DEPRIT, A. [1969]: 'Canonical Transformations Depending on a small Parameter', *Celest. Mech.* **1,** 12–30

DEPRIT, A. [1975]: 'Ideal Elements for Perturbed Keplerian Motions', *Journal of Research of the National Bureau of Standards - B. Mathematical Sciences.* **79B** , Nos. 1 and 2, January - June 1975, pp. 1-15

DEPRIT, A. [1976]: 'Ideal Frames for Perturbed Keplerian Motion', *Celest. Mech.* **13,** 253–263

DEPRIT, A. AND DEPRIT-BARTHOLOMÉ, A [1976]: 'Conversion from geocentric to geodetic Coordinates', *Celest. Mech.* **12,** 489–493

DICKEY, J. O., BENDER, P. L., FALLER, J. E., NEWHALL, X., RICKLEFS, J. G., RIES, J. G., SHELUS, P. J., VEILLET, C., WHIPPLE, A. L., WIANT, J. R., WILLIAMS, J. G. YODER, C. F. [1994]: 'Lunar Laser Ranging: A Continuity Legacy of the Apollo Program', *Science Reprint Series*, 22. July 1994, Volume **265**, pp. 482-490; copyright 1994 by the American Association for the Advancement of Science

DURIEZ, L. [1988]: 'Long-Term Evolution of the Orbits of Natural Satellites', *Celestial Mechanics* **43**, pp. 331-348

ECKART, P. [2006], *The Lunar Base Handbook: An Introduction to Lunar Base Design, Development and Operations*, New York, McGraw-Hill

ECKHARDT, DONALD H. [1981]: 'Theory of the Libration of the Moon', in *The Moon and the Planets*, **25**, pp. 3-49

ECKHARDT, DONALD H. [1982]: 'Planetary and Earth Figure Perturbations in the Libration of the Moon', in *High-Precision Earth Rotation and Earth-Moon Dynamics*, O. Calame ed., (Reidel, Dordrecht, Holland), pp.193-198

ECKSTEIN, M. C. [1972]: 'Säkulare Bahnstörungen durch den Luftwiderstand', DFVLR IB 013-72/4

ECKSTEIN, M. C. [1973a]: 'Ein Satellitenbahnmodell ohne Singularitäten', DLR-FB 73-67, 'A Satellite Model without Singularities', ESRO TT-102, Oct. 1974

ECKSTEIN, M. C. [1973b]: 'Konvergenzverbesserung bei der Bahnbestimmung künstlicher Satelliten', DLR-FB 73-95

ECKSTEIN, M. C. [1974]: 'Ein Satellitenbahnmodell mit Schubphase', DLR-IB 552-74/9

ECKSTEIN, M. C. [1976]: 'An Approximate Semi-Analytical Solution for Orbit- and Attitude Manoeuvres of Spin-Stabilized Satellites', *Cel. Mech.* **14**, pp. 307-320

ECKSTEIN, M. C. [1979]: 'Ein Verfahren zur Herstellung analytischer Bahnmodelle für geostationäre Satelliten', *DFVLR*-FB 79-16

ECKSTEIN, M. C. [1980]: 'Optimal Station Keeping by Electric Propulsion with Thrust Operation Constraints', *Cel. Mech.* **21**, pp. 129–147

ECKSTEIN, M. C. [1983]: 'Approximate TV-SAT Orbit Injection Optimization by Means of Impulsive Hohmann Transfers', DFVLR-FB 83-02

ECKSTEIN, M. C. AND F. HECHLER [1970]: 'A Reliable Derivation of the Perturbations due to any Zonal and Tesseral Harmonics of the Geopotential for Nearly-Circular Orbits', Scientific Report, *ESRO* SR-13, June 1970, 11 pages

ECKSTEIN, M. C. AND YUN Y. SHI [1967]: 'Low-Thrust Elliptic Spiral Trajectories of a Satellite of Variable Mass', *AIAA Journal*, **5**, pp.1491-1494

ECKSTEIN, M. C. , SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1964/1966a]: 'Satellite Motion for all Inclinations Around an Oblate Planet', *Douglas Paper* No. 3078, August 1964; Reprint from International Astronomical Union, Symposium No. 25, pp.291-322

ECKSTEIN, M. C. , SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1965]: 'The Time History of a Satellite Around an Oblate Planet', *Douglas Paper* No. 3529, February 1965

ECKSTEIN, M. C. , SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1966b]: 'Satellite Motion for Arbitrary Eccentricity and Inclination Around the Smaller Primary in the Restricted Three-Body Problem', *The Astronomical Journal*, Vol. **71**, No. 4, pp. 248-263

ECKSTEIN, M. C., SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1966c]: 'A Uniformly Valid Asymptotic Representation of Satellite Motion Around the Smaller Primary in the Restricted Three-Body Problem', *Progress in Astronautics*, Vol. **17**, pp. 183-198

ECKSTEIN, M. C., SHI, Y., KEVORKIAN, J. [1966d]: 'Use of the Energy Integral to Evaluate Higher-Order Terms in the Time History of Satellite Motion', *The Astronomical Journal*, Vol. **71**, No. 5, pp. 301-305

ECKSTEIN, M.C., JOCHIM, E.F., LEIBOLD, A.F., LORENZ, J.K., PIETRASS, A.E. [1983]: „Design and Navigation Accuracy Assessment of an Ion Drive Asteroids Flyby and Rendezvous Mission, Launched by Ariane 4 APEX Demonstration Flight", Internal Report GSOC 83-1, DFVLR Oberpfaffenhofen

ECKSTEIN, M.C., LEIBOLD, A.F., PIETRASS, A.E. [1984]: „Effect of Changes in Spacecraft Design Data on Mission Design and Navigation Accuracy of the AMSAT Asteroid Rendezvous Mission ", IB DFVLR-GSOC 84-1

ECKSTEIN, M.C.; PIETRASS, A. E.; Blumer, P. [1992]: „ Anordnung und Verfahren zur koordinierten Positionshaltung eines geostationären Satellitenschwarmes", Patent P 4142 685.1

EDENHOFER, P., GLESNER, D., STEIN, V. [1973]: 'Ausbreitungsfehler elektromagnetischer Wellen bei der Bahnvermessung von Erdsatelliten. Korrektur der systematischen und Abschätzung der statistischen Ausbreitungsfehler', DLR-FB 73-56

EFROIMSKY, M. [2005]: 'Gauge Freedom in Orbital Mechanics', *Annals of the New York Academy of Sciences*, Vol. **1065**, New Trends in Astrodynamics and Applications, pp.346-374, Dec. 2005

EICHHORN, H. [1988]: 'Physical Time and Astronomical Time', *Celest. Mech.* ***43***, 237–241

EL'YASBERG, P. E. [1967]: *Introduction to the Theory of Flight of Artificial Earth Satellites* , translated from Russian, Moskva 1965, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem

EL'YASBERG, P. E. & A. A. SUKHANOV, T. MORLEY & F. HECHLER [1984]: 'Orbit Determination for Comet Halley by means of Optimally Selected Observations', ESA Journal 1984, Vol. **8**, pp. 8-25

ESCOBAL, P. R. [1965]: *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., New York

EUROPEAN SPACE AGENCY, SCIENCE PROGRAM COMMITTEE [1981]: 'Polar Orbiting Lunar Observatory (POLO) Studies', ESA/SPC (81) 19, Att.: Annex 1, Paris, 19 November 1981

EXPLANATORY SUPPLEMENT [1971] *to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*, prepared jointly by the Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, London, Her Majesty's Stationary Office, Reprinted with corrections 1962

FARQUHAR, R. W.; MUHONEN, D.; NEWMAN, CH.; HEUBERGER, H. [1979]: 'The first Libration Point Satellite: Mission Overview and Flight History', AAS 79-126

FARQUHAR, R. W.; DUNHAM, D. W. [1986]: 'Orbital Acrobatics in the Sun-Earth-Moon System', Proceedings of the Second International Symposium on Spacecraft Dynamics, Darmstadt, 20–23 October 1986, ESA SP-255, 191–198

FAUVEL, J.; FLOOD, R.; SHORTLAND, M.; WILSON, R. ed. [1993]: *Newtons Werk, Die Begründung der modernen Naturwissenschaft*, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, ISBN 3-7643-2890-8

FEKETE, THOMAS A., LESTER L. SACKETT and ANDREAS H. VON FLOTOW [1992]: 'Trajectory design for solar sailing from low-Earth orbit to the Moon', AAS 92-184

FERRARI, A., J. AND HEFTRON, W. G. [1973]: 'Effects of physical librations of the Moon on the orbital elements of a lunar satellite', *Celest. Mech.* **8**, 1973-1974, pp. 111- 120FRAUTNIK, J. C. [1976]: 'Dynamics of Frozen Orbits', JPL Interoffice Memorandum, 392.6-922, 3 February 1976

FERRAZ-MELLO, SYLVIO AND WAGNER SESSIN, ed. [1985]: *Resonances in the Motion of Planets, Satellites and Asteroids*, Universidade de São Paulo, Instituto Astronômico e Geofísico, Mathematical and Dynamical Astronomy Series, volume 3, ISBN 85-85047-03-8

FERRAZ-MELLO, SYLVIO [2007]: *Canonical Perturbation Theories, Degenerate Systems and Resonance*, Springer Science+Business Media, LLC, ISBN-10: 0-387-38900-8; ISBN-13: 978-0-387-38900-4ISBN-10: 0-387-38900-8; ISBN-13: 978-0-387-38900-4

FERRAZ-MELLO, SYLVIO AND WAGNER SESSIN, ed. [1985]: *Resonances in the Motion of Planets, Satellites and Asteroids*, Universidade de São Paulo, Instituto Astronômico e Geofísico, Mathematical and Dynamical Astronomy Series, volume 3, ISBN 85-85047-03-8

GABBARD, TAYLOR JR. AND EUGENE LEVIN [1963]: 'Astrodynamics, A Bibliography of General Perturbation Solutions of Earth-Satellite Motion', *Astronautics and Aerospace Engineering*, November 1963, pp.121-125

GACKSTÄTTER, FRITZ [2000]: *Von den Monden der Planeten im Sonnensystem, über die Kommensurabilitätsphänomene in Saturnring und Planetoidengürtel zu den Gravitationswellen. Beiträge zu Keplers Neuer Astronomie und Weltharmonik, zur Newtonschen Himmelsmechanik und zur Einstein'schen Relativitätstheorie mit Methoden der Differentialgeometrie*, 1. mathematisches Institut der Freien Universität, Berlin [Eigenverlag]

GACKSTATTER, F. H. [2007]: 'Lunisolar Effect on Spring Tides, Earthquakes, and Tsunamis', *Journal of Coastal Research*, **23**, 528

GACKSTATTER, F. H. AND GACKSTATTER, C. F. [2011]: 'Lunisolar effect on the trigger of earthquakes', *Astron. Nachr.* / AN **332**:8, 795-804/ **DOI** 10.1002/asna.201111583

GARFINKEL, B. [1957]: 'On the Motion of a Satellite of an Oblate Planet', *Astronomical Journal* **63**, No. 1257, pp.88–96

GARFINKEL, B. [1959]: 'The Orbit of a Satellite of an Oblate Planet', *Astronomical Journal* **64**, 353–367

GARFINKEL, B. [1982]: 'On Resonance in Celestial Mechanics, [A survey]', *Celestial Mechanics* **28**, 275–290

GEHRELS, T. ed. [1979]: *Asteroids*, The University for Arizona Press, Tucson, Arizona

GIACAGLIA, G. E. O. , MURPHY, J. P., FELSENTREGGER, T. L. [1970], 'A semianalytical theory for the motion of a lunar satellite', *Celestial Mechanics* **3**, (1970-1971), pp. 3-66

GIACAGLIA, G. E. O. [1973], 'Lunar Perturbations on Artificial Satellites of the Earth', SAO, Special Report 352, and [1974], *Celestial Mechanics* **9**, pp. 239-267

GIACAGLIA, G. E. O. [1973], 'Lunar Perturbations on Artificial Satellites of the Earth', SAO, Special Report 352, and [1974], *Celestial Mechanics* **9**, pp. 239-267

GIACAGLIA, G. E. O. [1976]: 'A note on Hansen's Coefficients in Satellite Theory', *Celest. Mech.* **14,** 515-523

GIACAGLIA, G. E. O. et alii [1965], 'The Motion of a Satellite of the Moon', TR NASA GSFC No. X-547-65-218

GIACAGLIA, G. E. O. et alii [1975], 'Evaluation of Geopotential and Luni-Solar Perturbations by a Recursive Algorithm', Appl. Mech. Res. Lab. Paper No. 1073, Univ. of Texas at Austin

GIACAGLIA, GIORGIO EUGÊNIO OSCARE; PRADO, ANTONIO FERNANDO BERTACHINE DE ALMEIDA [2003]: *Third Body Perturbations on Satellites*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Sâo José dos Campos, SP, Brazil, ISBN 85-17-00010-2

GIESE, R. H. [1966]: *Weltraumforschung I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, Hochschultaschenbücher 107/107a

GOODING, R. H. [1981]: 'A second-order satellite orbit theory, with compact results in cylindrical coordinates', *Phil Trans. Roy. Soc.*, **A299**, pp.425-474

GOODING, R. H. [1983]: 'Complete second-order satellite perturbations due to J_2 and J_3, Compactly expressed in spherical-polar coordinates', *Acta Astronautica*, **10**, No. 5-6, pp.309-317

GOODING, R. H. [1984]: 'An introduction to satellite orbits', *RAE*, Tech. Memo. Space 344

GOODING, R. H. [1986]: 'A Cowell-Based Semianalytical Procedure for Generating Orbits of low Eccentricity', *Adv. Space Res.* Vol. 6, No.9, pp. 119-133

GOODING, R. H. [1989a]: 'Satellite motion in an axi-symmetric gravitational field, part 2: perturbations due to an arbitrary J_l', *RAE Technical Report* 89022, 101 pages

GOODING, R. H. [1989b]: 'Perturbations, untruncated in eccentricity, for an orbit in an axi-symmetric gravitational field', *AAS* 89-451

GOODING, R. H. [1990]: 'Untruncated perturbation analysis for a satellite orbiting in a non-rotating gravitational field ', *AIAA* 90-2884-0

GOODING, R. H. [1991]: 'Orbit perturbations due to an axi-symmetric gravitational field, analyzed over extended periods of time', *AAS* 91-466

GOODING, R. H. [1992]: 'Untruncated Satellite Perturbations in a Nonrotating Gravitational Field', *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, No. 6, November-December 1992, pp. 1397-1405

GOODING, R. H. AND D. G. KING-HELE [1989]: 'Explicit forms of some functions arising in the analysis of resonant satellite orbits', *Proc.R. Soc. Lond.*, **A 422**, pp.241-259

GOODWIN, P. S. [1974]: Koordinaten der ALSEP Mondsender, Persönliche Mitteilung (15. Mai 1974)

GREEN, R. M. [1985]: *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

GRIFFITH, J. S. [1971]: 'On some approximations in Brown's lunar theory', *Celest. Mech.* ***4***, 1971, pp. 54 - 59GUTZWILLER, M. C. AND SCHMIDT, D. S. [1986]: 'The Motion of the Moon as Computed by the Method of Hill, Brown, and Eckert', Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac, Vol. XXIII, Part I, U. S. Government Printing Office, Washington

GURFIL, PINI; ED. [2016]: *Modern Astrodynamics*, Elsevier Science, Elsevier Astrodynamics Series, ISBN: 9780080464916

GURFIL, PINI; SEIDELMANN, P. KENNETH [2006]: *Celestial Mechanics and Astrodynamics, Theory and Practice*, Astrophysics and Space Science Library 436, http://www.springer.com/series/5664, ISSN 0067-0057 ISSN 2214-7985 (electronic), ISBN 978-3-662-50368-3 ISBN 978-3-662-50370-6 (eBook), DOI 10.1007/978-3-662-50370-6, Library of Congress Control Number: 2016943837, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

HAGIHARA, YUSUKE [1970]: *Celestial Mechanics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England

HANSEN, P.A. [1838/1]: *Fundamenta Nova Investigationis Orbitae verae quam Luna perlustrat*, Gotha

HANSEN, P. A. [1838/2]: 'Bemerkungen über die Behandlung der Theorie des Störungen des Mondes', Astron. Nachr., Vol.XIX, Cols. 33-92, (cit. nach: E. W. BROWN [1896/1960], p. 161)

HANSEN, P.A. [1864]: 'Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, erste, zweite Abhandlung', Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, sechster und siebenter Band [1865], bei S. Hirzel, Leipzig

HARRISON, E. F., NASA Langley Research Center, Hampton, Va., and G. G. GIBSON, Kentron International, Inc. [1980]: 'Orbital Analysis for the Upper Atmosphere Research Satellite Mission', *AIAA 18th Aerospace Sciences Meeting*, January 14-16, 1980/Pasadena, California, AIAA-80-0236

HARTL, PH. [1973]: 'Die Bedeutung der Doppler- und Laufzeitmessung für erdferne Raumfahrt-Missionen', DLR-FB 73-104

HARTL, PH. [1977]: *Fernwirktechnik der Raumfahrt, Telemetrie, Telekommando, Bahnvermessung*, Nachrichtentechnik, herausgegeben von H. Marko, Band 2, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, ISBN 3-540-08172-0

HAYN, FRIEDRICH [1902]: 'Selenographische Koordinaten I', in: *Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften , math-phys. Klasse*, **27**, pp. 861-921

HEIKEN, GRANT H.; DAVID T. VANIMAN; and BEVAN M. FRENCH [1991]: *Lunar Sourcebook: A User's Guide to the Moon*, Cambridge: Cambridge University Press

HENRARD, J. [1974]: 'Virtual Singularities in the Artificial Satellite Theory', *Celest. Mech.* ***10***, 437

HENRARD, J. AND MOONS, M. [1978]: 'Hamiltonian Theory of the Libration of the Moon', Proceedings of the 14th Colloquium of the International Astronomical Union, edited by Victor G. Szebehely, Cambridge, England 17-19 August, 1976

HERGET, PAUL AND MUSEN, PETER [1958]: 'A modified Lunar Theory for Artificial Satellites', *The Astronomical Journal* ***63***, No. 1264, 430-433

HERRICK, S. [1971]: *Astrodynamics Volume 1 Orbit determination, Space Navigation, Celestial Mechanics*, London , Van Nostrand Reinhold, ISBN 0-442-03370-2

HERRICK, S. [1972]: *Astrodynamics Volume 2 Orbit correction, perturbation theory, integration*, London , Van Nostrand, ISBN 0-442-03371-0

HERRICK, S. [1985]: 'The Foundations of Astrodynamics', in: *First Steps Toward Space* Durant III, F.C. and James, G.S. ed. [1985]

HILL, G. W. [1878]: 'Researches in the Lunar Theory', *American Journal of Mathematics, Pure and Applied*. ***1***, 5–26

Hill, G. W. [1881], 'Note on Hansen's Theory of Perturbations', *Am. J. Math.*, **4**, 256-259 (oder in: *Coll. Math. Works* **1**, 348)

Hill, G. W. [1886], 'On the Part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon ', *Acta Math*., **8**, 1 (oder in: *Coll. Math. Works* **1**, 243) (first separately published in 1877, Cambridge, Mass.)

HOHMANN, W. [1925]: *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper, Untersuchungen über das Raumfahrtproblem*, Druck und Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin, 1925, Unveränderter Neudruck bei Dr. M. Sändig oHG, 6229 Walluf bei Wiesbaden, ISBN 3 500 26620 7, 1973

HOHMANN, W. [1928]: *Fahrtrouten, Fahrzeiten, Landungsmöglichkeiten*, Din: Ley, W. [ed.] [1928], pp. 177-215

HORI, G. I. [1966]: 'Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables', *Publ. Astr. Soc. Japan* **18**, 287–296

HORI, G. I [1971]: 'Theory of General Perturbations for Non-Canonical Systems', *Publ. Astr. Soc. Japan* **23,** *No. 4*, 567–587

HORI, G. I. [1973]: 'Theory of General Perturbations', in: Tapley, B. D. and Szebehely, V., ed. [1973]: *Recent Advances in Dynamical Astronomy*

HORI, G. I. AND KOZAI, Y. [1974]: 'Analytical Theories of the Motion of Artificial Satellites', in: Giacaglia, G. O. ed. [1975]: *Satellite Dynamics*, COSPAR-IAU-IUTAM, Symposium São Paulo, Brazil, June 19-21, 1974, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

HOSCHEK, J. [1969] Mathematische Grundlagen der Kartographie, BI Bibliographisches Institut Mannheim/Zürich, Hochschultaschenbücher Verlag, Nr. 443/443a, 1969

IERS [1989]: 'IERS Standards 1989, IERS Technical Note 3', Central Bureau of IERS, Observatoire de Paris, 61, avenue de l'observatoire, F-75014 Paris, France

ILE [1954]: 'Improved Lunar Ephemeris 1952-1959, a joint Supplement to the American Ephemeris and the (British) Nautical Almanac', prepared jointly by the Nautical Almanac Offices of the United States of America and the United Kingdom, issued by the Nautical Almanac Office United States Naval Observatory, United States Government Printing Office, Washington 1954

IZSAK, I. G [1963]: 'A Note on Perturbation Theory', *Astronomical Journal*, **68**, No.8, pp. 559-561

IZSAK, I. G [1960]: 'A Theory of Satellite Motion About an Oblate Planet. I. A Second-Order Solution of Vinti's Dynamical Problem', *SAO Special Report No. 52*, Smithsonian Institution, Astrophysical Observatory, Cambridge 38, Massachusetts, November 21, 1960

JACOBSON, R. A., SYNOTT, S. P. AND CAMPBELL, J. K. [1989): 'The Orbits of the Satellites of Mars from Spacecraft and Earth based Observations', *Astronomy and Astrophysics* **225**, 548–554

JANIN, G. [1981]: 'The stability of eccentric polar orbits around the Moon', *Acta Astronautica*, vol. **9**, pp. 421-423

JAZWINSKI, ANDREW H. [1970]: *Stochastic Processes and Filtering Theories*, Volume 64 in the series *Mathematics in Science and Engineering*, ed. by Richard Bellman, Academic Press New York-San Francisco-London,

JEFFREYS, H. [1961]: 'On the Figure of the Moon', *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. **122**, p. 421

JENSEN, J., TOWNSEND, G., KORK, J., KRAFT, D. [1962]: *Design Guide to Orbital Flight*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

JOCHIM, E. F. **[**1980] 'Zur Begriffsbildung in der Bahnmechanik für Erdbeobachtungssatelliten', DGLR Walter-Hohmann-Symposium Raumflugmechanik, 12. und 13. März 1980. DGLR 80-014 in DLR-Mitt. 80-01

JOCHIM, E. F. [1983]: 'The Synodic Motion of Satellites Related to Sun'. *Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, Lake Placid, New York, August, 22 - 25, 1983. AAS 83-334

JOCHIM, E. F. M. [2008]: 'Einweg Doppler bei Bahnstörungen, Mathematische Verifizierung der von Porsche veröffentlichten Formel, 2. Ansatz', DLR-TB-EWD-0003, December 2008

JOCHIM, E. F. M. [2009]: 'On One-Way Doppler Measurements of Space Craft and Celestial Objects', *Acta Astronautica*, AA3598, (AA-D-09-00290)

JOCHIM, E. F. M. [2011] 'Die Verwendung von Hansen-Systemen in Himmelsmechanik und Astronautik', ISSN 1434-8454, ISRN DLR-FB—2011-04

JOCHIM, E. F. M. [2012]: 'The Significance of the Hansen Ideal Space frame', Astr. Nachr. / AN **333**, No. 8, 774-783 (2012) / **DOI** 10.1002/asna.202222711

JOCHIM, E. F. M. [2013]: *Satellitenbewegung, Band V, Bewegung und Beobachtungsgeometrie* (Satellite Orbital Motion, Vol. V.: Motion and observational Geometry), ISRN DLR FB 2013-12, ISSN 1434-8454

JOCHIM, E. F. M. [2015]: 'The Circle will Now be Closed, Finally (On the Inability to Adapt Circular Motions) ', *Journal of Space Operations and Communicator*, April 02, 2015, Vol. 12 Issue 2, ISSN 2410-0005

JOCHIM, E. F. M. [2016 a]: 'Rectilinear Motion: A Basis for the Adaptation of Arbitrary Motion', *Journal of Space Operations and Communicator* (ISSN 2410-0005), Vol. **13** Issue 2, 2016

JOCHIM, E. F. M. [2016 b]: *Satellitenbewegung, Band II, Bewegung in Raum und Zeit* (Satellite Orbital Motion, Vol. II.: Motion in Space and Time), ISRN DLR FB 2012-13, ISSN 1434-8454

JOCHIM, E. F. M. [2017]: *Satellitenbewegung, Band I, Der Bewegungsbegriff* (Satellite Orbital Motion, Vol. I.: The Perception of Motion), ISRN DLR FB 2012-12, ISSN 1434-8454

JOCHIM, E. F. M. [2018 a]: *Satellitenbewegung, Band III, Natürliche und gesteuerte Bewegung* (Satellite Motion, Vol. III.: Natural and Guided Motion), ISRN DLR FB 2014-36, ISSN 1434-8454

JOCHIM, E. F. M. [2018 b]: *Satellitenbewegung, Band IV, Bewegungsanalyse* (Satellite Motion, Vol. IV.:Satellite Orbit Analysis), ISRN DLR FB 2018-31, ISSN 1434-8454

JOCHIM, E. F. M. [2020]: 'Satellite Equivalence Orbits', *Acta Astronautica* 179 (2021), 213-227 (https://doi.org/10.1016/j.actaastro,2020.10.045, Available online 1 November 2020, 0094-5765/© 2020 Published by Elsevier Ltd on behalf of IAA)

JOCHIM, E. F. M. [2022]: *Satellitenbewegung, Band IV-A, Zentralkörper bezogene Bewegungen* (Satellite Motion, Vol. IV-A.: Central Body related Movements), ISRN DLR FB 2022-20, ISSN 1434-8454, https://doi.org/10.57676/8397-yn90

JOCHIM, E. F.; SLIWINSKI, P.***)** [1976] *) DFVLR Inst. Flugfunk und Mikrowellen, Oberpfaffenhofen, 'Bestimmung elevationsabhängiger Korrekturen für die Hauptstrahlrichtung der 30-m-Antenne der HELIOS-Kommandostation mit Hilfe der ALSEP-Sender auf dem Mond'. *ZfW **24***, Heft 2, pp.101-108, 1976, überarbeitete Fassung in DGLR-Jahrbuch 1976 nach Vortrag auf der 9. Jahrestagung der DGLR, München, 15. Sep. 1976 unter Nr. DGLR 76-174, 'Bestimmung elevationsabhängiger Korrekturen für die Haupt- Strahlrichtung der 30m-Helios-Kommando-Antenne'. *Nachrichten-Elektronik* **31**, August 1977

JONES, BRIAN L. and ROBERT H. BISHOP [1993]: 'Stable rendezvous for a small radius translunar halo orbit', AAS 93-144Springer, published in association with Praxis Publishing, Chichester, UK, ISBN 3_540-25448-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

JORDAN-ENGELN, GISELA; FRITZ REUTTER [1981]: *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN-Programmen*, BI Hochschultaschenbücher, Band 106, 3. Auflage, ISBN 3-411-06106-5

KAULA, W. M. [1962]: 'A Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite', *NASA Technical Note* , D-1126, NASA, Washington, January 1962; [1962]: Astronomical Journal, Vol. **67**, n.2., pp. 300-303

KAULA, W. M. [1966]: *Theory of Satellite Geodesy, Applications of Satellites to Geodesy*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass. – Toronto – London

KAWAKATSU, YASUIHIRO; KEN NAKAJIMA; MASAHIRO OGASAWARA; YUTAKA KANEKO; YOSHISADA TAKIZAWA[1999], 'Selene translunar trajectory and lunar orbit injection', ISSFD XIV

KELSO, D. T. [1995] „Satellite Times Orbit Determination," July 1995., [Online]. Available: http://celestrak.com/columns/v01n06/

KLINKRAD, H. [1982]: 'ERS-1 Orbit Maintenance Manoeuvre Strategy and Fuel Consumption Estimation', ESOC Working Paper No. 212, Darmstadt, Nov 1982

KLINKRAD, H. [1983]: 'Analytische Berechnung erdnaher Satellitenbahnen unter Verwendung eines realistischen Luftwiderstandsmodells', Dissertation [Dr. Ing.], Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

KLINKRAD, H. [1985]: 'Orbit Design of the First ESA Remote Sensing Satellite ERS-1', IAF-85-254

KLINKRAD, H. [2006]: *Space Debris, Models and Risk Analysis*, Springer, published in association with Praxis Publishing, Chichester, UK, ISBN 3_540-25448-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

KOELLE, H. H. ED. [1961]: *Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

KOPAL, ZDENEK [1966]: *An Introduction to the Study of the Moon*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland

KOZAI, Y. [1959]: 'The Motion of a Close Earth Satellite', *Astronomical Journal* **64**, 367–377

KOZAI, Y. [1962]: 'Second-Order Solution of Artificial Satellite Theory without Drag', *Astronomical Journal* **67**, 446–461

KOZAI, Y. [1966]: 'The Earth Gravitational Potential Derived from Satellite Motion', *Space Science Reviews*, **5**, 818-879

KOZAI, Y. [1969]: 'Revised Values for Coefficients of Zonal Harmonics in the Geopotential', *Dynamics of Satellites* , Morando, B. ed. [1970], COSPAR-IAU-IAG-IUTAM, Proceedings of the Symposium held in Prague, May 10-24, 1969, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

KOZAI, Y. [1970]: 'Seasonal Variations of the Geopotential', *Smithsonian Astrophysical Observatory*, Special Report 312

KOZAI, Y. [1978]: 'Secular perturbations of Asteroids and Comets', *Dynamics of the Solar System*, Reidel Dordrecht

KOZAI, YOSHIHIDE AND HIROSHI KINOSHITA [1973]: 'Effects of Motion of the Equatorial Plane on the Orbital Elements of an Earth Satellite', *Celestial Mechanics* **7**, 356-366

KRAMER, HERBERT J. [2002]: *Observation of the Earth and Its Environment*, 4th Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-42388-5

KRISH, V., BELBRUNO, E. A., and HOLLISTER, W. M. [1992], 'An investigation into critical aspects of a new form of low energy lunar transfer, the Belbruno-Miller trajectories', AIAA-92-4581-CP

KUGA, HELIO KOITI, VALCIR ORLANDO [2003], 'Assessing Orbit Determination Through One Way Doppler Signals', 17th International Symposium on Space Flight Dynamics, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, June, 16th – 20th, Aerospace Sciences and Technology, Paper 12-3

KUZNIK, F. [1983]: 'Visit to a Small Comet', *Space World*, July 1983, 23–26

LEIPOLD, M. [2000]: 'Solar Sail Mission Design', Dissertation, Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München

LENSE, JOSEF [1940]: 'Die sphärische Trigonometrie in der sphärischen Astronomie', *Astronomische Nachrichten* ***271***, 121–132

LEXIKON DER ASTRONOMIE, Band 1 [1989], Band 2 [1990], Herder Verlag, Freiburg – Basel - Wien

LIDOV, M. L. ;V. A. LYAKHOVA AND A. A. SOLOV'EV [1974/75]: 'Semianalytical calculation of the motion of an artificial satellite of the Moon', translated from *Kosmicheskie Issledovaniya*, vol. **13**, No. 3, pp. 283-310, May-June 1975; copyright: Plenum Publishing Corporation, 227 West 17th Street, New York, N. Y. 10011

LONG, ANNE C. et al. [1989]: 'Goddard Trajectory Determination System (GTDS), Mathematical Theory (Revision 1)', FDD/552-89/001 and CSC/TR-89/6001, Goddard Space Flight Center, NASA

LYDDANE, R. H. [1963]: 'Small Eccentricities or Inclinations in the Brouwer Theory of the Artificial Satellite', *Astronomical Journal* ***68***, 555–558

MCINNES, COLIN R. [1999]: *Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer–Praxis Series in Space Science and Technology, Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK, ISBN 1-85233-102-X

MERSON, R. H. [1961]: 'The Motion of a Satellite in an Axi-symmetric Gravitational Field', *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **4**, 17–52

MERSON, R. H. [1963]: 'The Perturbations of a Satellite Orbit in an Axi-symmetric Gravitational Field', *Technical Note*, No. Space 26, Royal Aircraft Establishment [Farnborough], U.D.C No. 629.195.077.3 : 531.261

MEYER, KURT W. [1992]: 'Development of a simplified gravitational model for lifetime studies of lunar satellite orbits', AAS 92-128

MIGUS, A. [1980]: 'Analytical Lunar Libration Tables', *The Moon and the Planets*, **23**, pp. 391-427

MOONS, M. [1982]: 'Physical Libration of the Moon', *Celestial Mechanics* **26**, pp. 131-142

MORANDO, B. [1974]: *Mouvement d'un satellite artificiel de la terre*, Gordon & Beach, Paris, London, New York

MORBIDELLI, A. [2002]: *Modern Celestial Mechanics, Aspects of Solar System Dynamics*, ISBN 0-415-27939-9, Taylor & Francis, London

MUELLER, I. I. [1977]: *Spherical and Practical Astronomy as applied to Geodesy*, Second Printing, Frederick Ungar Publishing Co., New York

MURRAY, CARL. D. AND DERMOTT, STANLEY, F. [1999]: *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press

MUSEN, P. [1963]: 'On a Modification of Hansen's Lunar Theory', *Journal of Geophysical Research*, **68,** No. 5, 1439-1456

MUSEN, P. [1968 a]: 'On Some Possible Simplificatio9ns and Changes in Hansen's Lunar Theory', *The Journal of the Astronautical Sciences* , Vol. **XV**, No. 3, pp. 124-135

MUSEN, P. [1968 b]: 'Investigations in Hansen's Planetary Theory', [NASA TN D-4169, 19 pages], *Bulletin Astronomique*, Série 3, **3,** Fascicule 3, 253–263

MUSEN, P. [1969]: 'A Discussion of Hill's Method of Secular Perturbations and its Application to the Determination of the Zero-Rank Effects in Non-Singular Vectorial Elements of a Planetary Motion', *Celestial Mechanics*, **2**, pp. 41-59

MUSEN, P. [1971]: 'The Influence of the Great Inequality on the Secular Disturbing Function of the Planetary System', *Celestial Mechanics*, **4**, pp. 378-396

MUSEN, P., A. BAILIE AND E. UPTON [1961]: 'Development of the Lunar and Solar Perturbations in the Motion of an Artificial Satellite', Technical Note NASA TN D-494, Washington D.C., January 1961

NEUGEBAUER, O. [1975]: *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, 3 Vol., Springer, Heidelberg

NEWCOMB, S. [1898]: 'Tables of the motion of the Earth on its Axis and around the Sun', Astronomical Papers of the American Ephemeris **VI/1**,1-170, Washington

OESTERWINTER, C. [1969]: 'The motion of a lunar satellite', *Celestial Mechanics*, **1**, (1969-1970) pp. 368-436

OESTERWINTER, C. AND COHEN, C. J. [1971]: 'New orbital elements for Moon and Planets', *Celestial Mechanics*, **5**, pp. 54-59

OPPOLZER, HOFRATH PROF. THEODOR RITTER V. [1887]: 'Canon der Finsternisse', Herausgegeben von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften als LIL Band ihrer Denkschriften, mit 160 Tafeln, Wien aus der kaiserlich-königlichen Hof und Staatsdruckerei in Commission bei Karl Gerold's Sohn

PARK, SANG-YOUNG and JOHN L. JUNKINS [1994]: 'Orbital mission analysis for a lunar mapping satellite', AIAA-94-3717-CP

PÄTZOLD, M, M. K. BIRD, H. VOLLAND, P. EDENHOFER, H. BUSCHERT [1991]: 'Dynamics of the GIOTTO spacecraft in the inner dust coma of Comet P/Halley', *ZFW* **15** (159), pp. 89-96

PÄTZOLD, M, P. EDENHOFER, M. K. BIRD, H. VOLLAND [1993]: 'The GIOTTO encounter with comet P/Grigg-Skjellerup: first results from the GIOTTO radio-science experiment', *Astronomy & Astrophysics* **268**, L13-L16

PÄTZOLD, M, M. K. BIRD [2001]: 'Velocity changes of the GIOTTO spacecraft during the comet flybys: on the interpretation of perturbed Doppler data', *Aerospace Sciences and Technology* **5**, pp. 235-241

PIETRASS, A. E.; PULS, J. ET AL. [1975]: 'Ariane Passenger Satellit zur Erprobung von Ionentriebwerken', IB 552-75/20

PIETRASS, A. E. [1976]: 'Auslegung der Bahn und der Konfiguration eines sonnen- und erdbeobachtenden meteorlogischen Satelliten (POMS)', IB 552-76/4

PIETRASS, A. E. [1977]: 'Untersuchungen über Bahnebenen-Driftmanöver für zwillingsgestartete Erdbeobachtungssatelliten', IB 552-77/12

PIETRASS, A. E. [1977]: 'Computation of Various Solar Aspect Angles from Low-Orbiting Earth Observation Satellites', IB 552-77/21

PIETRASS, A. E. [1978]: 'Trajectory Reconstitution from Two Interferometers', IB 552-78/22

PIETRASS, A. E. [1980]: ' Sonnenbewegung in Satellitenkoordinaten und Kalibration im Orbit des Conical Scan Radiometers', IB 552-80/15

PIETRASS, A. E.; JOCHIM, E. F. [1982]: ' TVSAT and TDF-1 RF Ellispse Displacement on the Earth Surface due to Pointing and Position Errors ', Project Note TV-OP D-19/82

PIETRASS, A. E. [1983]: 'MEOSS Imaging Pass Sequences for 60 km and 240 km Swath Width Options as Affected by Decreasing Mean Orbital Altitude ', DFVLR-WT-RM TN-6/83

PIETRASS, A. E. [1984]: 'EUA-II-Studie. Trajectory Design for an Ion Dive Asteroids Rendezvous Mission Launched into an Ariane Geostationary Transfer Orbit', AIAA/AAS Astrodyn. Spec. Conf., Seattle, Wa./USA, 20-22 Aug. 1984, Paper No. 84-2058

PIETRASS, A. E. [1984]: ' Orbit Data and Visibility Information for IRM Comet Release Windows', DVLR-GSOC TN 84/12

PIETRASS, A. E. [1984]: ' Missionsentwurf der AMSAT-Asteroiden-Rendezvous-Mission', TU München, Vortrag 17.5.1984

PIETRASS, A. E. [1985]: 'Trajectory Considerations, In: Mercury Polar Orbiter New Mission Proposal to ESA'

PIETRASS, A. E. [1985]: ' AMPTE: Ion Release Module Observation Predicts for Tail Release Windows', DFVLR GSOC TN-85-5

PIETRASS, A. E. [1985]: ' Information Related to Preprocessing of Orbit Determination with Weilheim Tracking Data ', TV-SAT Project Note TV OP-D-54/85

PORSCHE, H. [1999]: 'Velocity changes of GIOTTO spacecraft induced during the flyby of the comets P/Halley and P/Grigg-Skjellerup', *Aerospace Sciences and Technology* **3**, pp. 107-110

PORSCHE, H. [2015]: 'GIOTTO: Artificial Asteroid Probing the Comet P/Halley', *The Journal of Space Operators & Communicator* **12**, Issue 2, April 07, 2015, ISSN 2410-0005, http://opsjournal.org/

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. [1986]: *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

ROTH, ERNST A. [1975]: 'Perturbation of a Satellite Orbiter by the Oblateness of the Primary Planet', ESA Scientific Report SR-26 (ESOC)

ROTH, ERNST A. [1981]: 'On the Perturbations of the Anomalistic Period of a Highly Eccentric Orbit Satellite due to the Zonal Harmonics', *Celestial Mechanics* **23** , pp. 83-87

ROTH, ERNST A. [1982]: 'Construction of a consistent semianalytic theory of a planetary or Moon orbiter perturbed by a third body', *Celestial Mechanics* **28** , pp. 155-169

ROTH, ERNST A. [1982]: 'On the Nodal Period of a Satellite perturbed by the Earth Oblateness (J2)', ESA M.A.O. Working Paper No. 167, April 1982

ROY, A. E. [1982]: *Orbital Motion*, Adam Hilger Ltd, Bristol, ISBN 0-85274-462-5

RUPPE, H. O. [1966/1967]: *Introduction to Astronautics*, Vol. 1, 1966, Vol. 2, 1967, Academic Press, New York and London, Library of Congress Catalog Card Number: 66-14469

SAYLOR, WILLIAM W. [2021]: *Learning Fundamental of Astrodynamics with Matlab and Stk*, Dover Books on Aeronautical Engineering, Dover Publications, ISBN-13: 9780486838595, ISBN-10: 0486838595

SCHNEIDER, M. [1992]: *Himmelsmechanik, Band I: Grundlagen, Determinierung*, BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut & D. A. Brockhaus AG, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, ISBN 3-411-15223-0

SCHNEIDER, M. [1993]: *Himmelsmechanik, Band II: Systemmodelle*, BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut & D. A. Brockhaus AG, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, ISBN 3-411-15981-2

SCHNEIDER, M. [1996]: *Himmelsmechanik, Band III: Gravitationstheorie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin, ISBN-10: 3860257188 , ISBN-13: 978-3860257180

SCHNEIDER, M. [1999]: *Himmelsmechanik, Band IV: Theorie der Satellitenbewegung, Bahnbestimmung*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin, ISBN 3-8274-0484-3, ISBN-13: 978-3827404848

SCHULZ, W. ed. [1980]: 'Vorträge auf dem Walter-Hohmann-Symposium der DGLR über Raumflugmechanik', Köln, 12. und 13. März 1980, DLR-Mitt. 80-01

SEIDELMANN, P. K. ED. [1992]: *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, A Revision to the Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, Prepared by the Nautical Almanac Office, U. S. Naval Observatory with Contributions from H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, Jet Propulsion Laboratory, Bureau des Longitudes, and the Time Service and Astrometry Departments, U. S. Naval Observatory, University Science Books, Mill Valley, California (ISBN 0-935702-68-7)

SIRY, J. W. [1970], 'Goddard astronomic and geodynamic parameters', *Goddard Space Flight Center, Preprint Nr.* X-550, pp. 70-481

STANDISH, E. MYLES, JR. [1982]: 'The JPL Planetary Ephemerides', *Celestial Mechanics* **26** , pp. 181-186

STANEK, B. [1983]: *Raumfahrtlexikon*, Hallwag Verlag, Bern und Stuttgart

STEICHEN, DANIEL [1993]: 'Study of a Moon's artificial satellite dynamics valid for all eccentricities and inclinations', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **57**, pp. 245-246

STIEFEL, EDUARD [1965]: *Einführung in die numerische Mathematik*, 3. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart

STIEFEL, E. AND SCHEIFELE, G. [1971]: *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

STOFFELS, K. P. [1985], 'Untersuchungen zur Verbesserung Brownscher Mondentfernungen aufgrund von Variationen der Integrationskonstanten und anderer Parameter', Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelm-Universität, Bonn, Nr. 66, ISSN 0723-4325

STRÖMGREN, E. UND STRÖMGREN, B. [1933]: *Lehrbuch der Astronomie*, Springer-Verlag, Berlin

STUMMEL, F. und HAINER, K. [1971]: *Praktische Mathematik*, B. G. Teubner Stuttgart, ISBN 3-519-02040-8

STUMPFF, K. [1959, 1965, 1974]: *Himmelsmechanik I* [1959); *Himmelsmechanik II* [1965]; *Himmelsmechanik III* [1974], DVW Berlin

STUMPFF, P. [1981]: 'The Motion of the Earth-Moon System between 1700 and 2100 in Newcombs Theory and in JPL-Ephemerides', *Astronomy and Astrophysics* ***101***, 52–71

STUMPFF, P. and LIESKE, J. H. [1984]: 'The Motion of the Earth-Moon System in modern tabular ephemerides', *Astronomy and Astrophysics* **130**, 211–226

SZEBEHELY, VICTOR G. (ed.) [1978]: Proceedings of the 14th Colloquium of the International Astronomical Union, Cambridge, England 17-19 August, 1976, Astrophysics and Space Science Library, Volume 72, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht: Holland, Boston: U.S.A., ISBN 90-277-0869 x

TISSERAND, F. [1889-1896]: *Traité de Mécanique Céleste*, Tome I – Tome IV, Gauthiers-Villars, Paris

ULIVIERI, C. ; P. D'AVANCO [1996], 'Passive stabilized high lunar orbits', AIAA-96-3581-CP

URBAN, S. and P. K. SEIDELMANN, (eds.) [2012], *Explanatory Supplement to The Astronomical Almanac*. Mill Valley, CA: University Science Books

VALLADO, DAVID A. [2001]: *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, with contributions by Wayne D. McClain, Second Edition, Space Technology Library, Microcosm Press El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London

VALLADO, DAVID A. [2013]: *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, with contributions by Wayne D. McClain, Fourth Edition, Space Technology Library, Microcosm Press El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London

VAN FLANDERN, T. C. [1969]: 'Corrections to the improved lunar ephemeris', *Celestial Mechanics* **1** , pp. 163-166

VOIGT, H.-H. [1983]: *Abriss der Astronomie I*, BI Hochschulskripten, 807/807a, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, *Band II*, 819/819a

VOLK, O. [1969]: 'Eulers Beiträge zur Theorie der Bewegungen der Himmelskörper', in: Leonhard Euler 1707-1783, Beiträge zu Leben und Werk, Basel 1983, pp. 345-362

WAGNER et al. [2017]: *Icarus*, **283,** pp. 92-103

WALTER, H. G. and SOVERS, O. S. [2000]: *Astrometry of Fundamental Catalogues*, The Evolution from Optical to Radio Reference Frames, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-67436-5

WALTER, U. [2008]: *Astronautics*, Wiley-VCH Verlag GmbH&Co. KGaA, Weinheim, ISBN 978-3-527-40685-2

WALTER, U. [2018]: *Astronautics, The Physics of Space Flight*, Springer Cham, Springer Nature Switzerland AG 2018, • Hardcover ISBN978-3-319-74372-1, Published: 01 March 2019, • eBook ISBN 978-3-319-74373-8 Published: 14 February 2019, https://doi.org/10.1007/978-3-319-74373-8 , • Edition Number3, • Number of Pages XXXVI, 828,

WERTZ, JAMES R. [2001]: *Mission Geometry; Orbit and Constellation Design and Management*, Space Technology Library, Microcosm Press, El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 0-7923-6903-3

WERTZ, JAMES R. and WILEY J. LARSON (editors) [1999, ninth printing 2007]: *Space Mission Analysis and Design*, Space Technology Library, Space Technology Series, Microcosm Press, Hawthorne, California, Springer New York, ISBN 978-1881883-10-4, ISBN 978-0-7923-5901-2

WILLIAMS, J. G. and HIERATH, J. E. [1987]: 'Palomar-Leiden Minor Planets: Proper Elements, Frequency Distribution, Belt Boundaries, and Family Memberships', *Icarus* **72**, 276-303

WILLIAMS, J. G., NEWHALL X. X., and DICKEY, J. O. [1996]: 'Relativity parameters determined from lunar laser ranging', *Physical Review D*, Vol. **53**, No. 11, 6730-6730, copyright: The American Physical Society

WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2008]: DE421 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates. *JPL IOM 335-JW, DB, WF-20080314-001*

WILLIAMS, J. G., D. H. BOGGS, and W. M. FOLKNER [2013]: DE430 Lunar Orbit, Physical Librations, and Surface Coordinates. *JPL IOM 335-JW, DB, WF-20130722-016*

WOOLARD, E. W. and CLEMENCE, G. M. [1966]: *Spherical Astronomy*, Academic Press, New York and London

YAMAKAWA HIROSHI, JUN'ICHIRO KAWAGUCHI, NOBUAKI ISHII, HIROKI MATSUO [1990]: 'On Earth-Moon transfer trajectory with gravitational capture', AAS 93-633

In Ergänzung zur gedruckten Version *Astronomical Almanac* sind die aktuellen astronomischen Daten auch in der Online Version (*The Astronomical Almanac Online*) erhältlich:

http://asa.usno.navy.mil , http://asa.hmnao.com

(weitere Anmerkungen dazu in AA2015)

Weitere Literatur in: https://searchworks.stanford.edu/browse?start=4717256&view=gallery

Liste der verwendeten Symbole

Zusammenstellung der wichtigsten verwendeteten Symbole (Liste unvollständig, ersetzt nicht die Definitionen in den einzelnen Kapiteln).

Lateinische Symbole

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
A	Grad	Azimut (positiv von Nord über Ost nach Süd)
A	m^2	Fläche
$\mathbb{A}_n$	---	Affiner Punktraum
A_D	m^2	Anströmfläche bei Luftwiderstand (D = drag)
A_1	Grad	Azimut der Sichtrichtung bezogen auf Bewegungsrichtung des Satelliten (Beobachtungsort)
A_{Pyx}	Grad	Azimut des Pols des satellitenzentrierten y-Systems im x-System
A_{Pxy}	Grad	Azimut des Pols des satellitenzentrierten x-Systems im y-System
A_T	Grad	Azimut der transversalen Bewegungskomponente des Satelliten
a	km	große Bahnhalbachse
a	< Länge >	große Halbachse einer Ellipse, Rotationsellipsoid (siehe Kapitel 32, Band V)
a_A	km	Näherungswert für a, wenn die anomalistische Umlaufzeit P_A vorgegeben ist
a_B	km	Mittlere Bahnhalbachse in der Satellitentheorie von *D. Brouwer*
a_D	km	Näherungswert für a, wenn die drakonitische Umlaufzeit P_D vorgegeben ist
a_G	km	große Bahnhalbachse einer geosynchronen Bahn
a_{G0}	km	Näherungswert für a_G
a_H	km	erste Bahnhalbachse einer hyperbolischen Bahn

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
a_K	km	Mittlere Bahnhalbachse in der Satellitentheorie von *Y. Kozai*
a_R	km	große Bahnhalbachse bei gegebener Meridian-bezogener Umlaufzeit P_R
a_Q	km	große Bahnhalbachse einer Q-Bahn
a_T	km	große Bahnhalbachse bei gegebener tropischer Umlaufzeit P_T
a_S	km	große Bahnhalbachse bei gegebener sonnensynodischer Umlaufzeit P_S
a_{ss}	km	Näherungswert für a für eine sonnensynchrone Bahn
a_λ	km	Näherungswert für a, wenn die Knotenlängenverschiebung $\Delta\lambda_\Omega$ gegeben ist
$a_{♁}$	km oder *AU*	große Bahnhalbachse der Erdbahn um die Sonne
$a_\odot$	km oder *AU*	große Bahnhalbachse der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
$\mathbf{a}$	km, Grad	*Kepler*element $\mathbf{a} = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0)^T$
$\mathbf{a}_L$	km, Grad	*Kepler*element mit langperiodischen Störungen (kurzperiodische Störungen weggelassen)
B		*Bessel*sche Epoche (z. B. B1950.0)
B_2		$1.5\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2$
B_D	km²/kg	ballistischer Koeffizient $B_D = c_D\, A_D / m$ **Anmerkung**: In der Literatur finden sich unterschiedliche Definitionen des ballistischen Koeffizienten, etwa $0.5\, c_D\, A_D / m$, aber auch $m / (c_D\, A_D)$
b	Grad	ekliptikale Breite
b	< Länge >	kleine Halbachse einer Ellipse, eines Rotationsellipsoids (nur in Kapitel 32)
b_{BS}	Grad	Breite im selenozentrischen Bahnsystem

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
b_M	Grad	ekliptikale Breite des Mondes
b_C	km	Kollisionsradius
b_H	km	zweite Bahnhalbachse einer hyperbolischen Bahn
b_{HN}	km/s^2	Beschleunigung in Richtung der Hauptnormalen
b_N	km/s^2	Normalbeschleunigung
b_R	km/s^2	Radialbeschleunigung
b_T	km/s^2	Transversalbeschleunigung
b_V	km/s^2	Tangentialbeschleunigung
C	–	Konstante bei Wellenvorgang (nur in Kapitel 9)
C_J		*Jacobi*sche Konstante (nur in Kapitel 2)
C_{JH}		*Jacobi*sche Konstante im *Hill*schen Spezialfall des eingeschränkten Dreikörperproblems
c	km/s	Lichtgeschwindigkeit
$c_0^i \ (i=1,2,3)$	-	Koeffizienten des normalen Richtungsvektors $\mathbf{c}_0 = c_0^i \mathbf{p}_i$
c_D	-	Luftwiderstandsbeiwert
c_R	-	Strahlungsdruckbeiwert
$\mathbf{c}$	km^2/s	2. *Kepler*scher Vektor (1. *Laplace*scher Vektor, Normalenvektor der Bahnebene, Drallvektor, Drehmomentenvektor, Inklinationsvektor), $\mathbf{c} = c^i \mathbf{p}_i$, $G = \lvert\mathbf{c}\rvert$
$\mathbf{c}_0$		Richtungsvektor in Richtung des Normalenvektors der Bahnebene, $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c} / G$
$\mathbf{D}$		*Darboux*scher Vektor (allgemeiner Drehvektor, allgemeiner Systemeigenbewegungsvektor)
$\mathbf{D}_p$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{p}_i$ – Systems $\left(\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_p \times \mathbf{p}_i\right)$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{D}_{p^{(☾)}}$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des selenozentrischen $\mathbf{p}_i$ – Systems
$\mathbf{D}_q$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems $\left(\dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{D}_q \times \mathbf{q}_j\right)$
$\mathbf{D}_{q^{(L)}}$		Absoluter Eigenbewegungsvektor des Leibniz-Systems
$\mathbf{D}_{qp}$		relativer Eigenbewegungsvektor des $\mathbf{q}_j$ – Systems bezogen auf das $\mathbf{p}_i$ – System $\left(\mathbf{D}_{q\,p} = \mathbf{D}_q - \mathbf{D}_p\right)$
D		Tag [Bürgerliches Datum)
D_f		Defekt, von der Erde aus sichtbarer aber nicht von der Sonne beschienener Anteil der Mondoberfläche
$D_p{}^i$		Komponenten des absoluten Eigenbewegungsvektors $\left(\mathbf{D}_p = D_p{}^i\,\mathbf{p}_i\right)$
$D_{qp}{}^j$		Komponenten des relativen Eigenbewegungsvektors $\left(\mathbf{D}_{qp} = D_{qp}{}^j\,\mathbf{q}_j\right)$
$D_☾$	Grad	mittlere Elongation des Mondes von der Sonne $\left(D_☾ = L_☾ - L_\odot\right)$
$\mathbf{d}$	km^3/s^2	1. *Kepler*'scher Vektor (*Herrmann-Laplace*-Vektor, 2. *Laplace*-scher Vektor, Exzentrizitätsvektor, Perizentrumsvektor), $\left(\mathbf{d} = d^i\,\mathbf{p}_i \;,\; e\mu = \lvert\mathbf{d}\rvert\right)$
dm	kg	Massenänderung (Massenausstoß bei Raketenmotor)
dV	km/s	Geschwindigkeitsänderung (durch Zünden eines Raketenmotors)
E	Grad	exzentrische Anomalie [bei Bezug auf Perizentrum]
E_i	-	Reguläre Elemente (*M. C. Eckstein*) (i=1, … , 6) (Kap. 28.16.1) [im Rechnerprogramm: REL]
$\mathbb{E}_n$		n-dimensionaler eigentlich euklidischer Vektorraum
E_A	Grad	exzentrische Anomalie (bei Bezug auf Apozentrum) $\left(E_A = E + 180°\right)$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{E}$		beliebiger Bahnelementevektor
$\mathbf{E}$		Einheitstensor der zweiten Stufe: $\left(\mathbf{E}=\mathbf{g}^{i\,j}\,\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j\right)$
e		Exzentrizität (numerische)
e_H		Exzentrizität einer Hohmann-Übergangsbahn
e_f		numerische Exzentrizität einer formstabilen Bahn („eingefrorene Bahn“)
e_f		numerische Exzentrizität einer Ellipse, eines Ellipsoids
e_l	Grad	säkularer und langperiodischer Anteil der Exzentrizität einer Bahnellipse $\left(e_l = \bar{e} + \delta e_l\right)$
$e_{♁}$		numerische Exzentrizität der Erdbahn
$e_{\odot}$		numerische Exzentrizität der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
$\mathbf{F}$	km kg/s^2	Kraftvektor
F	-	Phasing Parameter einer *Walker* Konstellation (T/P/F)
$F_{☾}$	Grad	mittleres Argument des Mondes von der Sonne $\left(F_{☾} = L_{☾} - \Omega_{☾}\right)$
f_N	km^3 kg^{-1} s^{-2}	*Newton*sche Gravitationskonstante
f		Abplattung des Zentralkörpers
f_0	Hz	Sendefrequenz
$\mathbf{f}$		3. *Kepler*scher Vektor = Hilfsvektor in Richtung $\upsilon = 90°$, $\mathbf{f} = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{d}$ („Parametervektor“)
G	km^2/s	Flächenparameter (= Betrag des Bahnnormalenvektors), in *Kepler*scher Bewegung: $G = \lvert\mathbf{c}\rvert = \sqrt{\mu\, p}$ (5. *Delaunay* Element bei Bezug auf eine elliptische Bewegung)
G_N	km^3/s / kg	*Newton*sche Gravitationskonstante (alternative Bezeichnung)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$g_{\odot}$	Grad	mittlere Anomalie der scheinbaren Sonne (Bezeichnung verwendet in AA und der klassischen Literatur. In diesem Bericht ist $g_{\odot} \Rightarrow M_{\odot}$ gesetzt.)
g_{ik}		kovarianter Metriktensor (= kovarianter Fundamentaltensor)
g^{ik}		kontravarianter Metriktensor (= kontravarianter Fundamentaltensor)
H	km	Höhe über R_E = „mittlere Äquatorbahnhöhe“
H'	km	Höhe über abgeplatteter Oberfläche des Zentralkörpers
H_A	km	Apogäumshöhe über R_E
h	kg km$^{2/}$s^2	Gesamtenergie
H_P	km	Perigäumshöhe über R_E
h	Grad	Elevation (astronomisch: „Höhe“)
h_{Pyx}	Grad	Elevation des Pols des satellitenzentrierten y-Systems im x-System
h_{Pxy}	Grad	Elevation des Pols des satellitenzentrierten x-Systems im y-System
I	Grad	Überflugwinkel über Breitenkreis
I	Grad	Die Neigung (I) des mittleren Mondäquators zur Ekliptik ist konstant: $I = 1°32'32''.7$.
I'	Grad	scheinbarer Überflugwinkel über Breitenkreis bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
I_1, I_2, I_3		skalare Invariante des symmetrischen Tensors der zweiten Stufe
i	-	Imaginäre Einheit $\left(i^2 = -1\right)$
i	-	Index Parameter
i	Grad	Inklination
i'	Grad	scheinbarer Überflugwinkel über Äquator bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
i_{ss}	Grad	Inklination einer sonnensynchronen Bahn
$i_{♁}$	Grad	Inklination der Erdbahn bezüglich Ekliptik
$i_{\odot}$	Grad	Inklination der (scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde bezüglich Ekliptik
i_B	Grad	Inklination der Mondbahn um die Erde bezüglich des Erdäquators
i_M	Grad	Inklination des Mondäquators bezüglich des Erdäquators
J		*Lagrange*sche Funktion (in Kapitel 2)
J		julianische Epoche (z. B. J2000.0)
J_D		julianisches Datum
J_d		julianische Tagesnummer
$J_2, J_3, J_4, J_5, \ldots$		geodynamische Formfaktoren (Zonale des Schwerefeldes eines Zentralkörpers)
J_n		*Bessel* Funktionen
K		Reproduktionszyklus, Wiederholungszyklus (Anzahl der Perioden der Knotenlänge, bei sonnensynchronen Bahnen identisch mit mittleren Sonnentagen)
K		Aberrationskonstante
K_1, K_2		natürliche Zahl $\left(K = 2K_1 \text{ oder } K = 2K_1 - 1\right)$
K_x	Grad	Knotenlänge des satellitenzentrierten x-Systems
K_y	Grad	Knotenlänge des satellitenzentrierten y-Systems
$\mathbf{k}_j$	–	Basisvektoren des Knotensystem: $\mathbf{k}_j := \mathbf{q}_j^{(D)}$
k^2	$AU^3\, d^{-2}\, M_0^{-1}$	*Gauß*sche Gravitationskonstante
LP	-	Langperiodische Parameter erstellt mit FORMAC
l	Grad	ekliptikale Länge

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
l	Grad	wahre Länge $\left(l = \upsilon + \omega + \sigma_i \Omega\right)$
$l_{\odot}$	Grad	wahre Länge der Sonne in ihrer Bahn
$\left(l_{\odot}\right)^{\bullet}$	Grad	Variation der wahren Länge der Sonne
$l_{☾}$	Grad	wahre Länge des Mondes in seiner Bahn
l_{BS}	Grad	Länge im selenozentrischen Bahnsystem
l_M	Grad	ekliptikale Länge des Mondes
L	Grad	mittlere Länge $\left(l = M + \omega + \sigma_i \Omega\right)$
L_E	Grad	exzentrische Länge $\left(L_E = E + \omega + \sigma_i \Omega\right)$
$L_{☾}$	Grad	mittlere Länge des Mondes (in seiner Bahn)
$L_{♁}$	Grad	mittlere Länge der Erde (in ihrer Bahn)
$L_{\odot}$	Grad	mittlere Länge der (scheinbaren) Sonne
L_0	Grad	mittlere Epochelänge in der Bahn $\left(L_0 = M_0 + \omega + \sigma_i \Omega\right)$
M	Grad	mittlere Anomalie
M	---	Monat (bürgerliches Datum)
$\mathbb{M}$	---	Metrischer Raum
M_{JD}		modifiziertes julianisches Datum
M_0	Grad	mittlere Epocheanomalie
$\left(M_0\right)_s^{\bullet}$	Grad/s	säkulare Variation in M_0
$M_{☾}$	Grad	mittlere Anomalie des Mondes
$M_{\odot}$	Grad	mittlere Anomalie der scheinbaren Sonne
m	kg	Masse

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbb{N}$		natürliche Zahlen
N_D	–	Anzahl der drakonitischen Umläufe
N_s	–	Brechungsindex (siehe Abschnitt 9.9)
N_0		Anzahl der drakonitischen Umläufe pro Knotenumlauf [= pro Tag bei sonnensynchronen Bahnen]
N_1		Restzahl an Umläufen pro Tag: $\left(N = N_0 K + N_1\right)$
N_2		natürliche Zahl $\left(N_0 = 2N_2 \text{ oder } N_0 = 2N_2 - 1\right)$
N_3		natürliche Zahl $\left(N_1 = 2N_3 \text{ oder } N_1 = 2N_3 - 1\right)$
n	rad/s	oskulierende (= Keplersche) mittlere Bewegung $n = \sqrt{\mu / a^3}$
$\bar{n}$	rad/s	mittlere mittlere Bewegung $\bar{n} = \sqrt{\mu / \bar{a}^3}$
n_A	rad/s	anomalistische mittlere Bewegung
n_D	rad/s	drakonitische mittlere Bewegung
n_K	rad/s	*Kepler*sche mittlere Bewegung $n_K = \sqrt{\mu / a^3}$
$\overline{n_K}$	rad/s	mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung $\overline{n_K} = \sqrt{\mu / \bar{a}^3}$
$\overline{n_{K\,0}}$	rad/s	mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung zur Epoche t_0: $\overline{n_{K\,0}} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3}$
n_R	rad/s	Meridian-bezogene mittlere Bewegung
n_S	rad/s	synodische mittlere Bewegung
n_{sid}	rad/s	siderische mittlere Bewegung
n_T	rad/s	tropische mittlere Bewegung
$n_\odot$	rad/s	tropische mittlere Bewegung der scheinbaren Sonne

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
P	-	Anzahl der Bahnebenen einer Walker Konstellation (T/P/F)
P_A, $\overline{P_A}$	h oder s	anomalistische Umlaufzeit, mittlere
P_D, $\overline{P_D}$	h oder s	drakonitische Umlaufzeit, mittlere
P_H, $\overline{P_H}$	h oder s	*Hansen*sche Umlaufzeit (Bezug auf einen festen Anfangspunkt im *Hansen*-System), mittlere
P_j	d	julianisches Jahr (zu 365.25 mittleren Sonnentagen)
P_K	h oder s	*Kepler*sche Umlaufzeit
P_L, $\overline{P_L}$	h oder s	Mond-synodische Umlaufzeit, mittlere
P_R, $\overline{P_R}$	h oder s	Meridian-bezogene Umlaufzeit
P_S, $\overline{P_S}$	h oder s	Sonnen-synodische Umlaufzeit, mittlere
P_{sid}	h oder s	siderische Umlaufzeit
P_T, $\overline{P_T}$	h oder s	tropische Umlaufzeit, mittlere
$\left(P_A \triangleq P_S\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von wahrer anomalistischer und wahrer Sonnen-synodischer Bewegung
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von mittlerer anomalistischer und mittlerer Sonnen-synodischer Bewegung
$\left(P_A \triangleq P_L\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von wahrer anomalistischer und wahrer Mond-synodischer Bewegung
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_L}\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von mittlerer anomalistischer und mittlerer Mond-synodischer Bewegung
$\left(P_D \triangleq P_S\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von wahrer drakonitischer und wahrer Sonnen-synodischer Bewegung
$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von mittlerer drakonitischer und mittlerer Sonnen-synodischer Bewegung
$\left(P_D \triangleq P_L\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von wahrer drakonitischer und wahrer Mond-synodischer Bewegung

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_L}\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von mittlerer drakonitischer und mittlerer Mond-synodischer Bewegung
$\left(P_H \triangleq P_S\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von wahrer Hansen und wahrer Sonnen-synodischer Bewegung
$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von mittlerer Hansen und mittlerer Sonnen-synodischer Bewegung
$\left(P_H \triangleq P_L\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von wahrer Hansen und wahrer Mond-synodischer Bewegung
$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_L}\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von mittlerer Hansen und mittlerer Mond-synodischer Bewegung
$\left(P_T \triangleq P_S\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von wahrer tropischer und wahrer Sonnen-synodischer Bewegung
$\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_S}\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von mittlerer tropischer und mittlerer Sonnen-synodischer Bewegung
$\left(P_T \triangleq P_L\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von wahrer tropischer und wahrer Mond-synodischer Bewegung
$\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_L}\right)$	-	Äquivalenzbahn aus Kopplung von mittlerer tropischer und mittlerer Mond-synodischer Bewegung
$P_{\odot,s}$, $\left[P_{\odot,sid}\right]$	a oder d	siderisches Jahr
$P_{\odot,T}$	a oder d	tropisches Jahr
$\overline{P_{\odot,T}}$	a oder d	mittleres tropisches Jahr
$P_{☾,A}$	d oder h	anomalistischer Monat
$P_{☾,D}$	d oder h	drakonitischer Monat
$P_{☾,s}$, $\left[P_{☾,sid}\right]$	d oder h	siderischer Monat
$P_{☾,S}$	d oder h	Sonnen-synodischer Monat
$P_{☾,T}$	d oder h	tropischer Monat
p	km	Bahnparameter, Parameter des Kegelschnitts [semilatus rectum)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
p	mbar	Druck (nur in Abschnitt 9.9)
p_t	rad/sec	Mittlere Planeten-bezogene Satellitenbewegung
$\mathbf{p}_i$		Richtungsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \ \ (i = 1,2,3)$, $\mathbf{p}_i \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{p}_j^{(☾)}$		Kartesische Basis des körperfesten Äquator-Systems des Mondes (selenographisches System)
Q	----	Überlappungsfaktor
q	km	Perizentrumsdistanz
q	Grad	Positionswinkel (PA – „position angle“) (in Kapitel 29)
$q_0^i \ \ (i = 1,2,3)$	-	Koeffizienten des transversalen Richtungsvektors $\mathbf{q}_0 = q_0^i \mathbf{p}_i$
$\mathbf{q}_0$		transversaler Richtungsvektor $\mathbf{q}_0 = \mathbf{c}_0 \times \mathbf{r}_0$
$\mathbf{q}_j$		Richtungsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems $\mathbf{r} = y^j \mathbf{q}_j \ \ (j = 1,2,3)$, $\mathbf{q}_i \mathbf{q}_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{q}_j^{(A)}$		Kartesische Basis des Antennensystems
$\mathbf{q}_j^{(B)}$		Kartesische Basis des Bahnsystems eines Planeten oder anderen interplanetaren Objektes bei Bezug auf das Ekliptiksystem des Sonnensystems
$\mathbf{q}_j^{(E)}$		Kartesische Basis des Ekliptik Systems
$\mathbf{q}_j^{(G)}$		Kartesische Basis des geographischen und des Greenwich bezogenen Koordinatensystems
$\mathbf{q}_j^{(H)}$		Kartesische Basis des topozentrischen Horizontsystems
$\mathbf{q}_j^{(I)}$		Kartesische Basis des mitgeführten (= mitbewegten) Koordinatensystems („*Hansen*“ System)
$\mathbf{q}_j^{(D)}$		Kartesische Basis des Knotensystems (drakonitisches System)
$\mathbf{q}_j^{(K)}$		Kartesische Basis des planetaren Äquatorsystems

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\mathbf{q}_j^{(M)}$		Kartesische Basis des (geozentrischen oder topozentrischen) Koordinatensystems (Bezug auf den Ortsmeridian)
$\mathbf{q}_j^{(P)}$		Kartesische Basis des Apsidensystems (anomalistisches System, Perigäum bezogenes System)
$\mathbf{q}_j^{(S)}$		Kartesische Basis eines satellitenzentrierten Systems
$\mathbf{q}_j^{(T)}$		Kartesische Basis des Tangenten bezogenen Systems
$\mathbf{q}_j^{(☾)}$		Kartesische Basis des Bahn-Systems des Mondes
R	km	geozentrische Distanz eines Punktes auf der kugelförmig angenommenen Erdoberfläche
$\mathbb{R}$	---	Körper der reellen Zahlen
$\mathbf{R}_{♁}$	km/s^2	„Stör-„ Vektor, in dem alle weiteren beschleunigenden Einflüsse auf die Erdbahn zusammengefasst sind
R'	km	geozentrische Distanz eines Punktes auf der abgeplatteten Erdoberfläche
R_E	km	mittlerer Äquatorradius der Erde
R_G		Gravitationspotential
R_M	km	Referenzradius des Mondes
R_Q	km	Querkrümmungsradius des Ellipsoids
R_φ	km	Radius des Parallelkreises unter der Breite φ
$R_☾$	km	Mittlerer Radius des Mondes
$R_{☾a}, R_{☾b}, R_{☾c}$,	km	Radius des Mondes in Richtung der Hauptträgheitsachsen A<B<C: a in Ríchtung zur Erde, b in Bahnrichtung, c zum Nordpol des Mondes
r	km	zentrische Distanz („Radius“) eines Satelliten oder Raumflugkörpers
r_0	km	Abstand des Mittelpunktes der Attraktionssphäre vom Mittelpunkt des Ablenkkörpers

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$r_0^i \quad (i = 1,2,3)$	-	Koeffizienten des radialen Richtungsvektors $\mathbf{r}_0 = r_0^i \, \mathbf{p}_i$
r_{32H}	[km], [AE]	Radius der Hillschen Gravitationssphäre (um einen Körper m_2 im eingeschränkten Dreikörperproblem)
r_A	km	Apozentrumsdistanz
r_F	km	antifokaler Radius $r_F = 2\,a - r$
r_g	km	Radius der geostationären Bahn
r_{g0}	km	Näherungswert für r_g
r_K	km	Radius der Attraktionssphäre
r_M	km	Selenozentrischer Radius eines Ortes auf oder über dem Mond
r_m	km	Geozentrische Distanz des Mondmittelpunktes
r_P	km	Perizentrumsdistanz
$\mathbf{r}$	km	(Geozentrischer) Ortsvektor
$\mathbf{r}_{B♁}$	km	Baryzentrischer Ortsvektor der Erde
$\mathbf{r}_{♁☾}$	km	Geozentrischer Ortsvektor des Mondes
$\mathbf{r}_{\odot♁}$	km	Heliozentrischer Ortsvektor der Erde
$\mathbf{r}_{\odot☾}$	km	Heliozentrischer Ortsvektor des Mondes
$\mathbf{r}_{\odot}$	km	Geozentrischer Ortsvektor de Sonne
$\dot{\mathbf{r}}$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (absoluter)
$\mathbf{r}$	km (AE)	Heliozentrischer Ortsvektor eines interplanetaren Objektes (Plane, Raumsonde, etc.)
$\mathbf{r}_P$	km	Planetozentrischer Ortsvektor
$\dot{\mathbf{r}}_P$	km/s	Geschwindigkeitsvektor (relativ zum $\mathbf{p}_i$ – System) $\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{x}^i \, \mathbf{p}_i$

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\ddot{\mathbf{r}}$	km/s^2	Beschleunigungsvektor (absoluter)
$\mathbf{r}_0$		radialer Richtungsvektor $\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0$
s	km	Bogenlänge $(t_2 - t_1)/(36525 \times 86400)$
SP	-	Kurzperiodische Parameter erstellt mit FORMAC
T	Jhrh.	Zeit in julianischen Jahrhunderten $(t_2 - t_1)/(36525 \times 86400)$ seit Fundamentalepoche J2000.0
T	C (oder Kelvin)	Temperatur (siehe Abschnitt 9.9)
T	-	Anzahl der Satelliten in einer Walker Konstellation (T/P/F)
T	kg km^2/s^2	kinetische Energie
T		Tensor
T_0	Jhrh.	Zeit einer Koordinatenepoche in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche $J2000.0 \Leftrightarrow JD = 2451545.0$
T_A	Jhrh.	Zeit in julianischen Jahrhunderten $(t_2 - t_1)/(36525 \times 86400)$ seit Fundamentalepoche J1900.0
T_m	h	mittlere Sonnenzeit
T_w	h	wahre Sonnenzeit
T_λ	h	mittlere Ortssonnenzeit für Meridian der (östlichen) geographischen Länge λ
T_Ω	h	mittlere Sonnenzeit im aufsteigenden Knoten
t	s	Zeit
t_0	s	Epochezeit (U.T.)
t_P	s	Perigäumsdurchgangszeit (U.T.)
t_Ω	s	Zeit (U.T.) im aufsteigenden Knoten
t	km	Tangente

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
U	kg km^2/s^2	potentielle Energie (Potential)
u	km/s	Geschwindigkeit einer Rakete in Bezug auf ein Ruhesystem (im Rahmen der spez. Relativitätstheorie)
u	Grad	Argument der Breite $(u = \upsilon + \omega)$
u	km/s	Betrag des Geschwindigkeitsvektors **u**
$u_1, u_2, u_3, u_4,$	---	*Gauß-Rodrigues* Parameter („*Euler* Parameter“) Beschreibung in Abschnitt 11.11.1, SAB Band III
V	km/s	Geschwindigkeit
$\mathbb{V}$	---	Vektorraum
$\mathbb{V}_n$	---	n-dimensionaler Vektorraum
V_A	km/s	Geschwindigkeit im Apozentrum der Bahn
V_A	km/s	Drehgeschwindigkeit des Äquators mit der Rotation des Zentralkörpers
V_B	km/s	Drehgeschwindigkeit eines Breitenkreises mit der Rotation des Zentralkörpers
V_E	km/s	elliptische Geschwindigkeit
V_e	km/s	Austritts – Geschwindigkeit der Treibgase eines Raketenmotors
V_F	km/s	Fluchtgeschwindigkeit (= Entweichgeschwindigkeit, = parabolische Geschwindigkeit im Perizentrum)
V_g	km/s	Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers
V'_{g0}	km/s	scheinbare Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes bei Äquatorüberflug auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
V'_{gB}	km/s	Scheinbare Geschwindigkeit des Subsatellitenpunktes bei Überflug eines Breitenkreises auf der kugelförmig gedachten Oberfläche des Zentralkörpers bei Berücksichtigung der Eigenrotation des Zentralkörpers
V_H	km/s	hyperbolische Geschwindigkeit

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
V_K	km/s	Kreisbahngeschwindigkeit
V_P	km/s	Geschwindigkeit im Perizentrum der Bahn
V_R	km/s	radiale Geschwindigkeit
V_T	km/s	transversale Geschwindigkeit $V_T = V_{TC} + eV_C \cos\upsilon$
V_{TC}	km/s	Konstanter (ungestörter) Anteil der transversalen Geschwindigkeit einer Keplerbewegung $V_C = G/p$, $V_T = V_{TC} + eV_C \cos\upsilon$
$V_{♁}$	km/s	Geschwindigkeit der Erde um die Sonne
V_∞	km/s	asymptotische Geschwindigkeit
υ	Grad	wahre Anomalie
υ_F	Grad	antifokale Anomalie
υ_∞	Grad	asymptotische Anomalie (= hyperbolischer Exzess)
$\mathbf{v}_i$		begleitendes Dreibein (i-1,2,3)
$\dot{\mathbf{v}}_q$	km/s^2	Beschleunigungsvektor relativ zum $\mathbf{q}_j$ – System $\left(\dot{\mathbf{v}}_q = \ddot{y}^j \mathbf{q}_j\right)$
$\dot{\mathbf{v}}_p$	km/s^2	Beschleunigungsvektor relativ zum $\mathbf{p}_i$ – System $\left(\dot{\mathbf{v}}_p = \ddot{x}^i \mathbf{p}_i\right)$
$\mathbf{v}_1$		Tangentialvektor $\dot{\mathbf{r}} = V\,\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$		Hauptnormalenvektor $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$		Binormalenvektor $\mathbf{v}_3 = \mathbf{c}_0$
$\mathbf{v}_e, \mathbf{v}_{e0}$	km/s	Austrittsgeschwindigkeit von Raketentreibstoff [in Bezug auf ein bewegtes bzw. ruhendes System)
W	km	Überdeckungsstrecke
W_d		Wochentag (0 – Montag, 1 – Dienstag, 2 – Mittwoch, 3 – Donnerstag, 4 – Freitag, 5 – Samstag, 6 – Sonntag)
W_0	km	Überdeckung des Äquators

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
W_φ	km	Überdeckung eines Breitenkreises der geodätischen Breite φ
$W_{\lambda\Omega}$	km	Distanz auf Äquator, die $\Delta_{\lambda\Omega}$ entspricht
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$	km, km/s	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_m[t;t_0]$, $\dot{\mathbf{x}}_m$	km, km/s	Zustandsvektor zum Zeitpunkt *t* in Koordinaten, die auf den mittleren Äquator und den mittleren Frühlingspunkt zur Epoche t_0 bezogen sind
$\mathbf{x}_w[t]$, $\dot{\mathbf{x}}_w$	km, km/s	Zustandsvektor zum Zeitpunkt *t* in Koordinaten, die auf den wahren momentanen Äquator und den wahren momentanen Frühlingspunkt bezogen sind
$\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T$	km, km/s	topozentrischer Zustandsvektor
$\mathbf{x}_{♁}$	km, AE	Sonnensystem-baryzentrischer Ortsvektor der Erde
$(\mathbf{x}_{♁}, \dot{\mathbf{x}}_{♁})$	km, km/s	baryzentrische Zustandsvektor der Erde bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoktium J2000.0
$\ddot{\mathbf{x}}_{♁}$	Km / s^2	Beschleunigsungsvektor der Erde bezogen auf das Sonnensystem-Baryzentrum
$x_{♁☾i}$	km	kartesische geozentrische Koordinaten des Mondes im Erdäquatorsystem $\mathbf{r}_{♁☾} = x^i_{♁☾}\,\mathbf{p}_i$, (i=1,2,3)
x_{Ai}	km	kartesische selenozentrische Koordinaten des Mondes im Mondäquatorsystem $\mathbf{r} = x^i_A\,\mathbf{p}_i^{(☾)}$, (i=1,2,3)
x_{BSi}	km	kartesische selenozentrische Koordinaten des Mondes im Mondbahnsystem $\mathbf{r} = x^i_{BS}\,\mathbf{p}_i^{(☾)}$, (i=1,2,3)
x_{Mi}	km	kartesische selenozentrische Koordinaten eines Punktes auf der Mondoberfläche im Mondäquatorsystem $\mathbf{r} = x^i_M\,\mathbf{p}_i^{(☾)}$, (i=1,2,3)
x_{MAi}	km	kartesische Koordinaten eines Mondorbiters im beweglichen Erdäquatorsystem $\mathbf{r}_M = x^i_{MA}\,\mathbf{p}_i$, (i=1,2,3)
Y		*Euler*winkel
Y	d	Jahr (bürgerliches Datum)

Lateinische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
Y_B	d	*Bessel*sches Jahr (annus fictus)
Y_{sid}	d	siderisches Jahr (siehe auch $P_{\odot,sid}$)
Y_{trop}	d	tropisches Jahr (siehe auch $P_{\odot,T}$)
$y_j^{(☾)}$	km	kartesische selenozentrische Koordinaten des Mondes im Mondbahnsystem $\mathbf{r} = y^{(☾)j}\,\mathbf{q}_j^{(☾)}$
Z	Grad, Min	Zeitgleichung
z	Grad	Zenitdistanz $\left(z = 90° - h\right)$
z_{A}	”	$90° + z_A \mathrel{\hat{=}}$ Rektaszension des aufsteigenden Knotens des mittleren Äquators zur Zeit T_0 auf dem mittleren Äquator zur Zeit T [siehe auch ζ_A; benötigt zur Berechnung der Präzession)

Griechische Symbole

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
α	Grad	Rektaszension
α_1	Grad	Rektaszension des Nordpols eines Planeten bezogen auf das Frühlingspunkt-bezogene Erdäquatorsystem
α_{D}	Grad	Rektaszension des Sonnen-Okkultationspunktes
α_h	Grad	Steigungswinkel der Asymptote einer hyperbolischen Bahn
α_Ω	Grad	knotenbezogene Rektaszension $\alpha_\Omega(t) = \sigma_i\left[\alpha(t) - \Omega(t)\right]$
$\alpha_{L\Omega}$	Grad	lunare Rektaszension des aufsteigenden Knotens eines Mondorbiters
$\alpha_\odot$	Grad	Rektaszension der wahren Sonne

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\dot{\alpha}_{\odot}$	rad/sec	Variation der Rektaszension der wahren Sonne
$\overline{\alpha_{\odot}}$	Grad	Rektaszension der mittleren Sonne
$(\alpha_{\odot})^{\cdot} = \dot{\alpha}_{\odot s}$	rad/sec	Variation der Rektaszension der mittleren Sonne (= säkularer Anteil der Variation der wahren Sonne)
$\alpha_{\bar{\odot}}$	Grad	Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne
$\dot{\alpha}_{\bar{\odot}s} = n_{\odot}$	rad/sec	Variation der Rektaszension der fiktiven mittleren Sonne
β	---	β=V/c im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie (V = Geschwindigkeit des bewegten Inertialsystems, c = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit)
β	---	$\beta := \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}$, e = numerische Exzentrizität [im Rahmen von *Bessel* Funktionen]
β	Grad	Nadirwinkel
β_g	Grad	Grenznadirwinkel an kugelförmige Oberfläche
β'_g	Grad	Grenznadirwinkel an Rotationsellipsoid
β_N	Grad	Sonneneinfallswinkel in Satellitenbahnebene, Komplement zum Sonnenaspektwinkel σ: NASA Beta-Winkel $= \gamma_N = 90° - \sigma$
β_M	Grad	Breite im selenozentrischen Äquatorsystem
$\Gamma_{\odot}$	Grad	mittlere Länge des Perigäums der (scheinbaren) Sonne $\Gamma_{\odot} = \omega_{\odot} + \Omega_{\odot}$
$\Gamma'_{☾}$	Grad	mittlere Länge des Perigäums des Mondes $\Gamma'_{☾} = L_{☾} - M_{☾}$ (in der Literatur häufig dargestellt durch $\Gamma'_{☾}$)
γ	Grad	Zentralwinkel
γ_g	Grad	Grenzzentralwinkel an kugelförmige Oberfläche
γ'_g	Grad	Grenzzentralwinkel an Rotationsellipsoid

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
γ_0	Grad	kürzester Zentralwinkel zwischen Sichtpunkt und Subsatellitenbahn
Δ	Grad	Überdeckung auf Äquator
Δ	Grad	Zwischenwinkel zwischen Radius und Tangente
Δ_A	Grad	Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten des Mondäquators mit der Erdäquatorebene und dem aufsteigenden Knoten mit der Ekliptik
Δ_φ	Grad	Überdeckung auf Parallelkreis φ
Δa_a	km	Korrektur zu a_a
Δa_d	km	Korrektur zu a_d
Δa_L	km	Korrektur zu a_L
Δa_R	km	Korrektur zu a_R
Δa_S	km	Korrektur zu a_S
Δa_T	km	Korrektur zu a_T
Δa_{ss}	km	Korrektur zu a_{ss}
Δa_g	km	Korrektur zu a_g
Δr_{g0}	km	Korrektur zu r_{g0}
Δt	s, h	Zeitintervall
Δu	Grad	Intervall im Argument der Breite während des Zeitintervalls Δt
ΔV	km/s	Geschwindigkeitsinkrement
ΔV_{char}	km/s	charakteristische Geschwindigkeit (für Manöver bei Bahnänderungen)
$\Delta\alpha$	”	Gleichung der Äquinoktien (Nutation in Rektaszension) $\Delta\alpha = \Delta\psi \cos\varepsilon$
$\Delta\delta$	”	Nutation in Deklination
$\Delta\varepsilon$	”	Nutation in Schiefe

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
Δf	Hz	Zweiweg-Doppler
$\Delta\lambda_k$	Grad	Toleranz-Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf für Spurstabilität
$\Delta\lambda_\Omega$	Grad	Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf
$\Delta\lambda_{\Omega K}$	Grad	Knotenlängenrestverschiebung nach *K* Umläufen der Knotenlänge
$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	Grad	Spurfehler = Fehler der mittleren geographischen Länge des aufsteigenden Knotens infolge von Variationen in den Anfangsbahnelementen
$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}$	Grad	Spurfehler beim *N*-ten Überflug des aufsteigenden Knotens
$\Delta\tau_k$	sec	Toleranz-Zeitintervall für Zeitstabilität
$\Delta\tau_\Omega$	Grad	Verschiebung des Sonnenwinkels $\tau_\Omega = \Omega\text{-}\alpha_\odot$ des aufsteigenden Knotens pro drakonitischem Umlauf $\Delta\tau_\Omega = \tau_\Omega\left(t_{\Omega 0} + P_d\right) - \tau_\Omega\left(t_{\Omega 0}\right)$
$\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}}$	Grad	Verschiebung des mittleren auf die fiktive mittlere Sonne bezogenen Sonnenwinkels pro mittlerem drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}} = \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}\,\overline{P_d}$
$\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}}$	Grad	Wahre Verschiebung des mittleren auf die fiktive mittlere Sonne bezogenen Sonnenwinkels pro wahrem drakonitischem Umlauf $\Delta\tau_{\Omega\bar{\odot}} = \tau_{\Omega\bar{\odot}}\left(t_0 + P_d\right) - \tau_{\Omega\bar{\odot}}\left(t_0\right)$
$\Delta\psi$	”	Nutation in Länge
δ	Grad	Deklination
δ_1	Grad	Deklination des Nordpols eines Planeten bezogen auf das Frühlingspunkt bezogene Erdäquatorsystem
δA_j	km, Grad	Variationen der *Kepler*elemente nach *Brouwer* und *Kozai* (Kap. 28.16.2)
δ_D	Grad	Deklination des Sonnen-Okkultationspunktes
δ_h	Grad	Umlenkwinkel einer hyperbolischen Bewegung

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\delta_i^{\,j}$		*Kronecker*symbol $\delta_i^{\,j} = 0$ für i = j, $\delta_i^{\,j} \neq 0$ für i ≠ j [*Kronecker*tensor der zweiten Stufe]
δ_m	Grad	Deklination des Grenzparallelkreises für Überdeckung
$\delta E_{i,lG}$		Langperiodische Variationen der regulären Elemente E_i (i=1 , … 6) bei Bezug auf das Gravitationsfeld der Erde $\left(J_2, J_3, J_4, J_5\right)$
$\delta E_{i,kG}$		Kurzperiodische Variationen der regulären Elemente E_i (i=1 , … 6) bei Bezug auf das Gravitationsfeld der Erde $\left(J_2\right)$
$\delta_\odot$	Grad	Deklination der wahren Sonne
$\overline{\delta_\odot}$	Grad	Deklination der mittleren Sonne
$\delta_{\overline{\odot}}$	Grad	Deklination der fiktiven mittleren Sonne
$\delta a[t,t_0]$	Grad	periodische Störungen in a zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0
δa_l	Grad	langperiodische Störungen in a zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta a_l = \delta a\left[t, t_0\right]_l$
δa_k	Grad	kurzperiodische Störungen in a zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta a_k = \delta a\left[t, t_0\right]_k$
$\delta \mathbf{a}[t,t_0]$	km, Grad	periodische Störungen auf ein *Kepler*element $\mathbf{a} := \left\{a, e, i, \Omega, \omega, M_0\right\}$
δ_B	Grad	Deklination eines Breitenkreises (parallel zum Äquator)
δf	Hz	Einweg-Doppler
$\delta \mathbf{E}[t,t_0]$	km, Grad	periodische Störungen auf ein beliebiges Bahnelement zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0
$\delta e[t,t_0]$	Grad	periodische Störungen in e zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0
δe_l	Grad	langperiodische Störungen in e zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche , $\delta e_l = \delta e[t,t_0]_l$
δe_k	Grad	kurzperiodische Störungen in e zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta e_k = \delta e[t,t_0]_k$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\delta i[t,t_0]$	Grad	periodische Störungen in i zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche
δi_l	Grad	langperiodische Störungen in i zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta i_l = \delta i[t,t_0]_l$
δi_k	Grad	kurzperiodische Störungen in i zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta i_k = \delta i[t,t_0]_k$
$\delta M_0[t,t_0]$	Grad	periodische Störungen in M_0 bezogen auf die Epoche t_0
δM_l	Grad	langperiodische Störungen in M zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta M_l = \delta M[t,t_0]_l$
δM_k	Grad	kurzperiodische Störungen in M zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta M_k = \delta M[t,t_0]_k$
$\delta P[t,t_0]$	Grad	periodische Störungen in P
$\delta\Omega[t,t_0]$	Grad	periodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0
$\delta\Omega_l$	Grad	langperiodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_l = \delta\Omega\ [t,t_0]_l$
$\delta\Omega_{lG}$	Grad	Langperiodische Störungen in Ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_{lG} = \delta\Omega\ [t,t_0]_{lG}$
$\delta\Omega_k$	Grad	kurzperiodische Störungen in Ω zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_k = \delta\Omega\ [t,t_0]_k$
$\delta\Omega_{kG}$	Grad	kurzperiodische Störungen in Ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\Omega_{kG} = \delta\Omega\ [t,t_0]_{kG}$
$\delta\omega[t,t_0]$	Grad	periodische Störungen in ω bezogen auf die Epoche t_0
$\delta\omega_l$	Grad	langperiodische Störungen in ω zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_l = \delta\omega\ [t,t_0]_l$
$\delta\omega_{lG}$	Grad	langperiodische Störungen in ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_{lG} = \delta\omega\ [t,t_0]_{lG}$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\delta\omega_k$	Grad	kurzperiodische Störungen in ω zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_k = \delta\omega\,[t,t_0]_k$
$\delta\omega_{kG}$	Grad	kurzperiodische Störungen in ω durch das Gravitationsfeld des Zentralkörpers zum Zeitpunkt t bezogen auf die Epoche t_0, $\delta\omega_{kG} = \delta\omega\,[t,t_0]_{kG}$
$\delta\lambda_\Omega[t_1,t_2]$	Grad	Änderung der Knotenlänge im Zeitintervall t_1 bis t_2
ε	Grad	wahre Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon$
$\bar{\varepsilon}$	Grad	mittlere Schiefe der Ekliptik
ζ	Grad	Bahnwinkel (wahre Länge in der Bahn, erster *Hansen* Winkel) $\zeta = \upsilon + \omega + \sigma$
ζ	cm	Koordinate bei Parallelprojektion in Richtung zum Blickpunkt
ζ_A	„	90°+ ζ_A = Rektaszension des aufsteigenden Knotens des mittleren Äquators zur Zeit T auf dem mittleren Äquator zur Zeit T_0 (siehe auch z_A; benötigt zur Berechnung der Präzession) (siehe Abschnitt 9.3)
Θ	Grad	Sternzeit (lokale, mittlere)
Θ	Grad	Wahre Neigung des Mondäquators bezüglich Ekliptik $\Theta = I + \rho_L$
Θ^*	Grad	scheinbare Sternzeit $\left(\Theta^* = \Theta + \Delta\Psi\cos\varepsilon\right)$
Θ_A	„	Inklination des mittleren Äquators zur Zeit t_0 bezüglich des mittleren Äquators zur Zeit T (siehe auch z_A, ζ_A ; benötigt zur Berechnung der Präzession)
Θ_B	Grad	Sternzeit in Beobachtungsstation $\Theta_B = \Theta_A + \lambda_B$ (λ_B geographische Länge der Station)
Θ_G	Grad	Sternzeit in Greenwich (mittlere), bezogen auf Nullmeridian, zu beliebiger (mittlerer) Tageszeit
Θ_L	Grad	lunare Sternzeit bezogen auf Nullmeridian
Θ_0	Grad	lokale Sternzeit (mittlere) zur (Fundamental-) Epoche t_0
Θ_{L0}	Grad	lunare Sternzeit (mittlere) zur (Fundamental-) Epoche t_0
$\dot{\Theta}$	Grad/s	tropische Rotationsgeschwindigkeit eines Zentralkörpers

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\dot{\Theta}_L$	Grad/s	tropische Rotationsgeschwindigkeit des Mondes, Variation der lunaren Sternzeit
ϑ	Grad	Stundenwinkel
$\vartheta_{\odot}$	Grad	Stundenwinkel der wahren Sonne
$\overline{\vartheta_{\odot}}$	Grad	Stundenwinkel der mittleren Sonne
$\vartheta_{\overline{\odot}}$	Grad	Stundenwinkel der fiktiven mittleren Sonne (auf Äquator)
η	Grad	Drehwinkel der Bahnebene bei beliebiger Bewegung (zweiter Bahnwinkel im *Hansen*-System)
η	cm	Bildkoordinate bei Parallelprojektion positiv nach Norden
κ	1/km	Krümmung
λ	Grad	östliche geographische Länge auf der Erde
(l_D, φ_D)	Grad	Geodätische Koordinaten des Sonnen-Okkultationspunktes
λ_M	Grad	östliche Länge im selenozentrischen Äquatorsystem
(λ_M, β_M)	Grad	Polarkoordinaten im selenozentrischen Basissystem
λ_P	Grad	westliche planetographische Länge auf der Oberfläche eines Planeten
$\lambda_{P\dagger}$	Grad	westliche planetographische Länge des subterrestrischen Punktes auf der Oberfläche eines Planeten
λ_Ω	Grad	geographische Länge des aufsteigenden Knotens auf der Erde (positiv nach Ost)
$\lambda_{K\Omega}$	Grad	Länge bezogen auf den wahren Knoten $\lambda_{K\Omega}(t) = \sigma_i\left[\lambda_\Omega(t_\Omega) - \lambda(t)\right]$
$\lambda_{M\Omega}$	Grad	selenographische Länge des aufsteigenden Knotens einer Mondorbiterbahn
$\dot{\lambda}_\Omega$	Grad/s	Variation der Knotenlänge
$\dot{\lambda}_{\Omega s}$	Grad/s	säkulare Drift der Knotenlänge
λ_O	Grad	östliche Grenzlänge (positiv nach Ost)

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
λ_W	Grad	westliche Grenzlänge (positiv nach Ost)
μ	km^3/s^2	zentrische Gravitationskonstante (= Newtonsche Gravitationskonstante × Masse des Zentralkörpers)
μ_α	”	Präzession in Rektaszension
μ_δ	”	Präzession in Deklination
ξ		Erste Koordinate bei Zerlegung des Beschleunigungsvektors im *Leibniz*-System $\left(\dot{\xi} = -\dot{\zeta}\right)$ (siehe in den Abschnitten 4.4.2 – 4.4.5, Band II)
ξ	cm	Bildkoordinate bei Parallelprojektion positiv nach Osten
π		Kreiszahl (π = 3.14159265358979323846264338327950288419 71…)
π_1	”	Parallaxe
π_2	”	Parallaxe
$\pi_{B,1}$	”	Parallaxe
$\pi_{E,1}$	”	Parallaxe
ρ	km	Schrägentfernung Satellit–Sichtpunkt auf kugelförmiger Oberfläche des Zentralkörpers
ρ'	km	Schrägentfernung Satellit–Sichtpunkt auf abgeplatteter Oberfläche des Zentralkörpers
$\dot{\rho}$	km/s	Entfernungsänderung („range rate“)
$\dot{\rho}_c$	km/s	Berechnete Entfernungsänderung
$\dot{\rho}_P$	km/s	Berechnete Entfernungsänderung modifizierte Theorie
ρ_L	Grad	Physikalische Libration des Mondes in Inklination
σ	Grad	Solaraspektwinkel Bahnnormale–Sonne
σ	Grad	Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf Anfangspunkt eines Hansen-Systems $\left(\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i\right)$
$\bar{\sigma}$	Grad	Solaraspektwinkel Bahnnormale–mittlere Sonne

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
σ_i		relative Bewegungsrichtung der Bahn: $\left(\sigma_i = \operatorname{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right)\right)$ $\sigma_i = +1 \Leftrightarrow$ rechtläufig, $\sigma_i = -1 \Leftrightarrow$ rückläufig, $\sigma_i = 0 \Leftrightarrow$ Polbahn
σ_L	Grad	Physikalische Libration des Mondes des Mondknotens
τ	Grad	Sonnenwinkel $\tau = \alpha - \alpha_\odot \mathrel{\hat{=}}$ Argument des sonnenbezogenen synodischen Umlaufs (längs des Äquators)
$\dot{\tau}$	Rad/sec	Wahre Sonnendrift eines Satelliten $\dot{\tau} = \dot{\alpha} - \dot{\alpha}_\odot$.
τ	1/km	Torsion
τ	sec	Lichtzeit $\left(\tau = \rho / c\right)$
τ_E	Grad	Sonnenwinkel bei Bezug auf Ekliptik (Abschnitt 28.5.2)
τ_S	Grad	Sonnenwinkel bei Bezug auf Satellitenbahnebene (Abschnitt 28.5.3)
τ_S	Grad	Mittlerer Sonnenwinkel bei Bezug auf die wahre Sonne $\left(\tau_s = \bar{\alpha} - \alpha_\odot = \alpha_s - \alpha_\odot\right)$
$\dot{\tau}_S$	rad/sec	mittlere Sonnendrift bei Bezug auf die wahre Sonne $\dot{\tau}_s = \dot{\alpha}_s - \dot{\alpha}_\odot$
τ_G	Grad	Sonnenwinkel des Nullmeridians (Greenwich) bei Bezug auf die wahre Sonne $\left(\tau_G = \Theta_G - \alpha_\odot\right)$
τ_{GM}	Grad	Sonnenwinkel des Nullmeridians (Greenwich) bei Bezug auf die mittlere Sonne $\left(\tau_{GM} = \Theta_G - \overline{\alpha_\odot}\right)$
τ_M	Grad	Sonnenwinkel bei Bezug auf die mittlere Sonne: $\left(\tau_M = \alpha - \overline{\alpha_\odot}\right)$
$\overline{\tau_M}$	Grad	Sonnenwinkel bei Bezug auf die mittlere Sonne: $\left(\overline{\tau_M} = \bar{\alpha} - \overline{\alpha_\odot}\right)$
$\dot{\tau}_M$	Grad	Wahre Sonnendrift bei Bezug auf die mittlere Sonne: $\left[\dot{\tau}_M = \dot{\alpha} - \left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet}\right]$
$\left(\overline{\tau_M}\right)^{\bullet}$	rad/sec	Mittlere Sonnendrift bei Bezug auf die mittlere Sonne: $\left[\left(\overline{\tau_M}\right)^{\bullet} = \dot{\alpha}_s - \left(\overline{\alpha_\odot}\right)^{\bullet}\right]$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\tau_{G\bar{\odot}}$	Grad	Sonnenwinkel des Nullmeridians (Greenwich) bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne: $\left(\tau_{G\bar{\odot}} = \Theta_G - \alpha_{\bar{\odot}}\right)$
$\tau_{\bar{\odot}}$	Grad	wahrer Sonnenwinkel bezogen auf die fiktive mittlere Sonne $\left(\tau_{\bar{\odot}} = \alpha - \alpha_{\bar{\odot}}\right)$
$\dot{\tau}_{\bar{\odot}}$	rad/sec	wahrer Sonnenwinkel bezogen auf die fiktive mittlere Sonne $\left(\dot{\tau}_{\bar{\odot}} = \dot{\alpha} - \dot{\alpha}_{\bar{\odot}}\right)$
$\overline{\tau_{\bar{\odot}}}$	Grad	mittlerer Sonnenwinkel bezogen auf die fiktive mittlere Sonne $\left(\overline{\tau_{\bar{\odot}}} = \bar{\alpha} - \alpha_{\bar{\odot}}\right)$
$\left(\tau_{\bar{\odot}}\right)^{\bullet}$	Grad	mittlere Sonnendrift bezogen auf die fiktive mittlere Sonne $\left[\left(\tau_{\bar{\odot}}\right)^{\bullet} = \dot{\bar{\alpha}} - n_{\odot} = \dot{\alpha}_s - n_{\odot}\right]$
τ_{Ω}	Grad	Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens bezogen auf die wahre Sonne $\left(\tau_{\Omega} = \Omega - \alpha_{\odot}\right)$
$\dot{\tau}_{\Omega}$	rad/sec	wahre Sonnendrift des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf die wahre Sonne $\left(\dot{\tau}_{\Omega} = \dot{\Omega} - \dot{\alpha}_{\odot}\right)$
$\tau_{\Omega s}$	Grad	mittlerer Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf die wahre Sonne $\left(\tau_{\Omega s} = \bar{\Omega} - \alpha_{\odot}\right)$
$\dot{\tau}_{\Omega s}$	rad/sec	mittlere Sonnendrift des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf die wahre Sonne $\left(\dot{\tau}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\alpha}_{\odot}\right)$
$\tau_{\Omega M}$	Grad	Wahrer Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens bezogen auf die mittlere Sonne $\left(\tau_{\Omega M} = \Omega - \overline{\alpha_{\odot}}\right)$
$\dot{\tau}_{\Omega M}$	rad/sec	Wahre Sonnendrift des aufsteigenden Knotens bezogen auf die mittlere Sonne $\left(\tau_{\Omega M} = \Omega - \overline{\alpha_{\odot}}\right)$
$\overline{\tau_{\Omega M}}$	Grad	Mittlerer Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens bezogen auf die mittlere Sonne $\left(\overline{\tau_{\Omega M}} = \bar{\Omega} - \overline{\alpha_{\odot}}\right)$
$\left(\tau_{\Omega M}\right)_s^{\bullet}$	rad/sec	mittlere Sonnendrift des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf die mittlere Sonne $\left[\left(\tau_{\Omega M}\right)_s^{\bullet} = \dot{\tau}_{\Omega M\, s} = \dot{\Omega}_s - \left(\overline{\alpha_{\odot}}\right)^{\bullet}\right]$
$\tau_{\Omega\bar{\odot}}$	Grad	Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens bezogen auf die fiktive mittlere Sonne $\left(\tau_{\Omega\bar{\odot}} = \Omega - \alpha_{\bar{\odot}}\right)$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}}$	rad/sec	wahre Sonnendrift bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\left(\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}} = \dot{\Omega} - n_{\odot}\right)$
$\tau_{\Omega\bar{\odot}}$	Grad	Mittlerer Sonnenwinkel des aufsteigenden Knotens bezogen auf die fiktive mittlere Sonne $\left(\tau_{\Omega\bar{\odot}} = \Omega - \alpha_{\bar{\odot}}\right)$
$\dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s}$	rad/s	Mittlere Sonnendrift des aufsteigenden Knotens bei Bezug auf die fiktive mittlere Sonne $\left(\tau_{\Omega\bar{\odot}}\right)_s^{\bullet} = \dot{\tau}_{\Omega\bar{\odot}s} = \dot{\Omega}_s - n_{\odot}$
τ_L	Grad	Physikalische Libration des Mondes in Länge
Φ	Grad	Phase (nur in Kapitel 9)
Φ	Grad	Winkeldistanz des Ursprungs des Mondäquators (mittlerer subterrestrischer Punkt) vom absteigenden Knoten mit der Ekliptik
φ	Grad	Phasenwinkel (bei Beobachtung des Mondes oder eines interplanetaren Objektes)
φ	Grad	geodätische Breite
φ_P	Grad	Planetographische Breite
$\varphi_{P\overset{+}{\circlearrowleft}}$	Grad	Planetographische Breite des subterrestrischen Punktes auf einer Planetenoberfläche
φ'	Grad	geozentrische Breite
φ'_P	Grad	Planetozentrische Breite
$\varphi'_{P\overset{+}{\circlearrowleft}}$	Grad	Planetozentrische Breite des subterrestrischen Punktes auf der Oberfläche eines Planeten
χ	Grad	geozentrische Elongation Satellit–Sonne
χ	---	Relation der Störung einer kreisnahen Bahn durch die Abplattung des Zentralkörpers (in Abschnitt 2.9)
$\bar{\chi}$	Grad	geozentrische Elongation Satellit–mittlere Sonne
Ψ	Grad	Ekliptikale Länge des absteigenden Knotens des Monäquators
ψ	Grad	Bahnwinkel in einem Bahnsystem, das kein *Hansen-System* ist
ψ	Grad	Depressionswinkel $(\psi = 90° - \beta)$

Griechische Symbole		
Symbol	**Dimension**	**Beschreibung**
$\psi_{\odot}, \psi_{☾}$	---	Relation der Störung einer kreisnahen Bahn durch Sonnen- bzw. Mondattraktion (in Abschnitt 2.9)
Ω	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens
$\Omega_{♁}$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der Erdbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\Omega_{☾}$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der mittleren Mondbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
$\Omega_{\odot}$	Grad	Länge des aufsteigenden Knotens der (scheinbaren) Sonnenbahn in der Ekliptik, gemessen vom mittleren momentanen Frühlingspunkt
Ω_A	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens des Mondäquators
Ω_B	Grad	Rektaszension des aufsteigenden Knotens der Mondbahn
$\dot{\Omega}_s$	rad/s	säkulare Störung in Ω
ω	Grad	Argument des Perizentrums
ω	–	Kreisfrequenz (nur in Kapitel 9)
ω_A	rad/s	Rotationswinkelgeschwindigkeit des Äquators bei Eigenrotation des Zentralkörpers
ω_E	rad/s	Erdrotation (siderisch)
ω_l	Grad	säkularer und langperiodischer Störungsanteil im Argument des Perizentrums ω $\left(\omega_l := \bar{\omega} + \delta\omega_l\right)$
$\omega_{♁}$	Grad	Argument des Perihels der Erdbahn um die Sonne
$\omega_{\odot}$	Grad	Argument des Perigäums der [scheinbaren) Sonnenbahn um die Erde
$\dot{\omega}_s$	rad/s	Säkulare Störung in ω
$\tilde{\omega}$	rad/s	Länge des Perizentrums $\tilde{\omega} = \omega + \sigma_i \Omega$

Indizes

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**
A	Apozentrum (Apogäum, Aphel)
a	anomalistisch (bezogen auf das Perizentrum)
B	Attraktion durch dritte Körper
D	Luftwiderstand
d	drakonitisch (bezogen auf den aufsteigenden Knoten)
E	Entweich (nur bei Fluchtgeschwindigkeit *VE*)
G	Greenwich (Nullmeridian)
G	Schwerefeld des Zentralkörpers
g	geostationär
H	Hyperbel (hyperbolisch)
K	Kreis, kreisförmig
k	kurzperiodisch
l	langperiodisch
m	bezogen auf einen Meridian
m	mittlerer Wert von …
N	Nutation
PAR	Parabel, parabolisch
P	Präzession
P	Perizentrum [Perigäum, Perihel)
R	Strahlungsdruck
R	radial
S	synodisch [bezogen auf einen anderen Körper)
s	säkular
ss	sonnensynchron
T	transversal
t	tropisch [bezogen auf den [mittleren) Frühlingspunkt)
w	wahrer Wert von …
0	Epoche
0	bei Vektoren: Einheitsvektor
λ	Längenkreis der Länge λ
Ω	… des aufsteigenden Knotens

Indizes	
Symbol	**Beschreibung**
φ	Breitenkreis der Breite φ
♁	… der Erde
☾	… des Mondes
☉	… der Sonne
$\overline{\odot}$	… der fiktiven mittleren Sonne
♀	… der Venus
♂	… des Mars
♃	… des Jupiter
♄	… des Saturn
♆	… des Neptun
♈	… des Frühlingspunktes

Mathematische Symbole

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$\mathbb{A}_n$	endlich dimensionaler affiner Punktraum
$\mathbb{E}_n$	endlich dimensionaler euklidischer Punktraum
$\mathbb{M}$	Metrischer Raum
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$ R	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{T}_n$	Tangentialraum an einen n-dimensionalen Punktraum [$\mathbb{A}_n$ oder $\mathbb{E}_n$)
$\mathbb{V}$	Vektorraum
$\mathbb{V}_n$	endlicher Vektorraum (n-dimensionaler Vektorraum)
$\mathbb{V}_{En}$	endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum
:=	Definition eines Ausdrucks BEISPIEL: $g_1 := V \cos \zeta_A$, die Größe g_1 wird durch den rechts stehenden Ausdruck definiert
$\in$	Element von …

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$\mathbf{a}$	Vektor
T	Tensor
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	tensorielles Produkt
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	skalares Produkt
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	äußeres Produkt $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	vektorielles Produkt
$\left(a_i{}^j\right)$	Matrix mit Reihenindex *i*, Spaltenindex *j*
$\det\left(a_i{}^j\right)$	Determinante der Matrix $\left(a_i{}^j\right)$
[ ]	geschlossenes Intervall
( )	offenes Intervall
[ )	links geschlossenes, rechts offenes Intervall
( ]	links offenes, rechts geschlossenes Intervall
$[\lambda, \varphi]$	Schreibweise eines Richtungsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bekanntes Koordinatensystem BEISPIEL: $[\lambda, \varphi] := \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$
$r[\lambda, \varphi]$	Schreibweise eines Ortsvektors in Polardarstellung bezogen auf ein bekanntes Koordinatensystem BEISPIEL: $\mathbf{x} \Leftrightarrow r[\lambda, \varphi] := r \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$
$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(x^i\right)$	Vektorfeld mit den Koordinaten x^i [i-te Koordinate [kein Exponent, *Einstein*sche Schreibweise])
$\mathbf{r}_{,i}$	[partielle) Ableitung eines Vektorfeldes nach der i-ten Koordinate: $\mathbf{r}_{,i} := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$
$x^i{}_{,j}$	[partielle) Ableitung eines Skalarfeldes $x^i = x^i\left(y^j\right)$ nach der j-ten Koordinate: $x^i{}_{,j} := \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$
[*A*,*h*]	Horizontsystem
[α,δ]	bewegliches Äquatorsystem [Bezug Frühlingspunkt)

Mathematische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
$[\vartheta, \delta]$	festes Äquatorsystem [Bezug Ortsmeridian)
$[\lambda, \delta]$	geozentrisches System [Bezug Nullmeridian)
$[\lambda, \varphi]$	geographisches System [Bezug Nullmeridian)
$[A_x, h_x]$	satellitenzentriertes Horizontsystem [„x-System“)
$[A_y, h_y]$	satellitenzentriertes Horizontsystem [„y-System“)
$[l, b]$	ekliptikales System
$[l_{II}, b_{II}]$	galaktisches System (neu)
$[\lambda, \varphi] \xrightarrow{A,B,C} [\alpha, \delta]$	Darstellung einer Rotation: Ein Einheitsvektor $[\lambda, \varphi]$ im λ, φ- System wird durch Drehung um die Winkel *A*, *B*, *C* [in dieser Reihenfolge) in den Einheitsvektor $[\alpha, \delta]$ des α, δ- Systems transformiert.
$A \in [0°, 180°)$	Beispiel für ein links geschlossenes, rechts offenes Intervall
O	Ordnung einer Funktion: In $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{x}) + O(\varepsilon)$ ist $O(\varepsilon)$ ein Restterm der Form $\varepsilon \mathbf{R}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, wobei $\mathbf{R}$ von $\mathbf{f}, \mathbf{f}_0$ und ε abhängig ist.

Astronomische Symbole

Astronomische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
♁	Erde
☉	Sonne
⊙̄	fiktive mittlere Sonne
☾	Erdmond
☿	Merkur
♀	Venus
♂	Mars
♃	Jupiter
♄	Saturn
♆	Neptun
⛢	Satellit / Orbiter
♈	Frühlingspunkt

Astronomische Symbole	
Symbol	**Beschreibung**
☍	Opposition
☌	Konjunktion

Index

(a,i)-Bereich
anom. zu Sonnen-syn. Bew. 117
Hansen zu Sonnen-syn. Bew. 136
Kepler zu Sonnen-syn. Bew. 146
Sonne zu Meridian 104
Sonnen-syn. mit Erdrotation 158
sonnensynchrone Bahnen 168
1 Ceres 473, 506
Zwergplanet 454
2 Pallas 473
3 Juno 473
4 Vesta 459, 473
Aberration
jährliche 4, 7
Aberrationskonstante 5, 23
tägliche der Erde 34
Abplattung 449
ADEOS 523
Almanach
astronomischer 3
ALSEP 344, 354
Analemma 30, 35
Anomalie
geozentrische mittlere der Sonne 285
mittlere des Mondes 283
anomalistische
Bewegung des Mondes 283
Anpassung 466
Antennensystem
mitbewegtes 483
Apollo
Mondlandungen 343
APOLLONIUS 276
Apomartium 500
Apsidenlinie
der Mondbewegung um Erde 291
Apsidenlinie des Mondes 291
Äquatorradius 449
Äquatorsystem 430
Bezug Mond zu Erde 337
des Mondes 323
festes 38
Äquatorsystem des Mondes
in Ekliptiksystem 324
Äquinoktien 236
Äquinoktium
wahres 5
Äquivalenz
beliebige 182
Äquivalenzbahn
Mond-synodische mit anomalistischer Bewegung 384, 416
Mond-synodische mit drakonitischer Bewegung 385, 416
Mond-synodische mit Erdrotation 400, 416
Mond-synodische mit Hansen Bewegung 387, 416
Mond-synodische mit Kepler Bewegung 389, 416
Mond-synodische mit meridionaler Bewegung 369, 416
Mond-synodische mit Sonnen-synodischer Bewegung 400
Mond-synodische mit tropischer Bewegung 386, 416
Mond-synodische mit zwei Sterntagen 407, 416
Äquivalenzbahnen
mit Mond-synodischer Bewegung 369
mit Sonnen-synodischer Bewegung 98
Sonnen-synodische Bew. mit Erdrotation 157
Sonnen-synodische mit anomalistischer Bewegung 113
Sonnen-synodische mit drakonitischer Bewegung 125
Sonnen-synodische mit Hansen Bewegung 134
Sonnen-synodische mit meridionaler Bewegung 98
Sonnen-synodische mit tropischer Bewegung 132
Äquivalenzparameter
bei Sonnen-synodischer Bewegung 100
Äquivalenz-Zyklus
auf Satellitenbahnen 181
Argument
mittleres des Mondes 284
Asteroidengürtel 459
Astronomical Almanac 346, 452
ATMOS 238
Azimut
der wahren Sonne 33
Babylonier
Monatslängen 276
Bahn
geosynchron 191
Bahnänderungen 253
Bahnauslegung
aus Sonnenwinkel und Sonnendrift 64
Bahnauswahl 103
anomalistische zu Sonnen-syn. Bew. 116
aus gleichartiger Sonnenstellung der Bahnebene 95
aus Knotensonnendrift 89
aus Knoten-Sonnenverschiebung 90, 91
aus Knotenüberflug 64
aus mittlerem Sonnenwinkel 70
aus mittlerer Sonnen-synodischer Umlaufzeit 52
aus Reproduzierbarkeit in Zeit und Spur 189
aus sonnenbezogener Umlaufzeit einer Bahnebene 95
aus Überflugzeit über Subsatellitenpunkt 66

aus Zeitverschiebung pro drakonitischem Umlauf 186
bei Sonne zu Meridian Bewegung 103
für sonnensynchrone Bahnen 167
Halbachse Hansen zu Sonnen-syn. Bew. 137
Kepler zu Sonnen-syn. Äquivalenzbahnen 148
mit beliebigem Äquivalenz-Zyklus 184
reproduzierbare sonnensynchrone Bahnen 175
Bahnbogen der Sonne
täglicher längs der Ekliptik 24
Bahnelemente des Mondes 282
bezüglich Erde 282
Bahnfamilien
sonnensynchrone 170
Bahnhalbachse
mittlere einer geosynchronen Bahn 157
Bahnkorrekturen 253
Bahnmodell
planetozentrisch 499
Bahnparameter 499
Bahnsystem 312
der Planeten 424
BALMINO. G. 501
Baryzentrum
des Erde-Mond-Systems 16, 308
Erde-Mond-System 309
BAUSCHINGER, J. 525, 541
Beobachtersystem
Basis 493
Eigenbewegungsvektor 478
Variation der Basis 478
Beobachter-System 476
Beobachtung
fehlerhafte 490
Beobachtungsantenne
fehlerhafte Ausrichtung 491
Beobachtungswinkel 540
Beschleunigungsgleichungen
interplanetarer Raumsonden 474
BESSEL, F. W. 342
Besselsches Jahr 21
Beta-Winkel 228
NASA Definition 227
Bewegung
anomalistische 113
drakonitische 125
drskonitische 81
erdbezogene der Planeten 460
gestörte interplanetare 488
Kepler Bewegung 145
mittlere Mond-synodische 368
Planetenorbiter 499, 500
relative 332
Sonnen-synodisch, der Satellitenbahnebene 71
Sonnen-synodische 81
Sonnen-synodische von Satelliten 38
synodische
zweier Satelliten 513
synodische der Planeten 461
synodische zweier Satelliten 513, 519
wahre gestörte interplanetare 482
Bewegung
synodische
koplanarer Satelliten 519
Bewegung der Planeten
scheinbare 462
Bewegung der Sonne
gesehne von den Polen 36
mittlere tropische 19
Bewegung des Mondes
um die Sonne 307
Bewegungseinflüsse
Zeitstabilität 253
Bewegungsverhalten
der ekliptikalen Sonne 23
Bodenantenne
Eigenbewegung 490
BRAHE, TYCHO
Variation des Mondes 284
Breite 313, 424
BROUWER, D. 102, 580
Browersches Bahnmodell
erster Ordnung 389
BROWN, E. W. 278, 292
Cargobay 241
CASSINI, J. D. 341
erstes Gesetz 323
Gesetze der Mondrotation 279, 325, 339, 343, 362
CASSINI, JACQUES 279
CLAIRAUT, A. C.
Théorie de la Lune 277
D'ALEMBERT, JEAN LE ROND
Théorie de la Lune 277
Dämmerungsbahn 209, 236
Dämmerungsgebiete 191, 217, 220, 221
Dämmerungslinie 108, 213
DE200/LE200 3
Defekt
des Mondes 350
Deklination, planetare 431
DELAUNAY, CH. E. 278
DESCARTES, R.
Vorzeichenregel 92
Distanzen
geozentrische 467
DLR Bahnanalyse 268
Dopplerlehre 485
Doppler-Messungen 475
Drehungen 328
Dreikörperproblem 312
Earth Crazer 419
ECKSTEIN, M. C. 2, 53, 102, 103, 138, 139, 142, 144, 151, 154, 267, 268, 269, 272, 274, 360, 460, 562
Eclipse year 20
EFROIMSKY, MICHAEL 467
Eigenbewegung 485
Eigenbewegungsvektor
des Beobachtersystems 478
des Mondäquatorsystems 332
des Mondbahnsystems 317

relativer 332
relativer des Mondäquatorsystems zur Ekliptik 332
Einfluss
fehlerhafte Ausrichtung der Bodenantenne 492
fehlerhafte Eigenbewegung der Bodenantenne 492
Einschussfehler 247
Einweg-Doppler 475
Einweg-Doppler-Formel 486
Ekliptik 2, 5, 453
mittlere scheinbare
ekliptikale Breite 6
ekliptikale Länge 6
ekliptikale Länge des aufsteigenden Knotens 5
Exzentrizität 5
geozentrische Deklination 7
geozentrische Distanz 7
große Halbachse 5
Inklination 5
Länge des Perigäums 5
mittlere Anomalie 5
Schiefe der 35
ekliptikale Breite
geozentrische des Mondes 296
Vaiation, des Mondes 304
ekliptikale Breite der Sonne
Genauigkeit im Jahrbuch 4
geometrische geozentrische 4
scheinbare 5
ekliptikale Länge
geozentrische des Mondes 294
Variation, des Mondes 301
ekliptikale Länge der Sonne
Genauigkeit im Jahrbuch 4
geometrische geozentrische 4
scheinbare 4
ekliptikale Polarkoordinaten
geozentrische der Sonne 22
geozentrische der wahren Sonne 10
Ekliptiksystem
geozentrisches 425
Elemente
Poincaré Elemente 267
Elevation
der wahren Sonne 33
Elongation
interplanetarer Objekte 472
kleiner Planeten zur Sonne 474
mittlere 289
mittlere des Mondes von der Sonne 284
El'Yasberg, P. E. 360
Entfernung
geozentrische der Planeten 468
Entfernungsvariation
der gestörten Beobachtungsrichtung 487
Ephemeridenrechnung 39
Epizykelmodell 276
EQUATOR-S 229
Satellitenmission 228
Erdbahn
heliozentrisch 2
Erdbewegung um die Sonne
mittlere Bahnebene 2
Erde 506
Baryzentrum Erde-Mond 421
Masse 309
Erdrotation
tropische 157
Erdsatelliten 499
ERS-1 233
Bahn 233
Mission 235
ERS-2 523
ESOC 268
EULER, L.
kinematische Gleichungen 332
Variation der Konstanten 466
Eulerwinkel 480
Evektion 276, 284, 290
des Mondes 287
evektiver Monat 287
EVEKTION 278
Exeligmos 286
Finsternisjahr 20
Finsternis-Zyklus
18-Jähriger 286
FK5-Referenzsystem 18
Flächenparameter 39
zweier Satelliten 527
FORMAC 565, 573
Frenetsche Formeln
Beobachtersystem 482
des Mondäquatorsystems 332, 337
Frequenzverschiebung 492
Frühlingspunkt 2
Fundamentalepoche 39, 367, 420
Funktion
überlagerte 43, 48, 50, 53, 56, 58, 65, 68, 103, 138, 150, 238, 370
Funktionsgleichung 103, 116
Galileo-Mission 459
Gasplaneten 505
Gaspra 951 459
Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen
Sonnen-synodisch mit Meridian 104
Gegensonne 192, 223
GEHRELS, T. 454
geometrische Daten 4
geometrische Länge
mittlere des Mondes 282
Geschwindigkeitsvektor
geozentrische des Mondes 298
Gesetze
von CASSINI 279
Giotto
Kometensonde 457, 458, 459, 465, 470
Raumsonde 496
GPS 513
Gradmaß 313, 424
Gravitationskonstante
planetozentrische 499
selenozentrische 362

Gravitationsmanöver 475
Greenwich-Meridian 34
Greenwich-System 347
GYLDÉN, H. 278
Halbachsen
charakteristische 105
Halbschatten 194, 219
HANSEN, P. A.
ideale Koordinaten 467
Mondtheorie 278
Umlaufzeit 54
*Hansen*scher Bahnwinkel 526, 527
Variation 528
Hansen-System 525, 526, 533
Hansen-Systeme
zweier Satellitenbahnen 535
Hansen-Winkel 537
Hansen-Winkel σ 534
HARTL, PH. 493
HAYN, F. 278, 342
HELIOS
Sonnensonden 1974, 1976 355
Helios 1
Sonnensonde 457, 459, 465
heliozentrisches System 424
Helix-Bewegung 312
HILL, G. W. 278, 292
HIPPARCH *276*, 283, 286
horizontale Polarkoordinaten
der wahren Sonne 33
Horizontalparallaxe
der Sonne 34
HRSC
optische Kamera auf Mars Express 503
IAU 1976 System 499
IAU-Vektor 430, 431, 499
IBN ASH-SHATIR
Mondtheorie 277
Ida 243 459
ILE 278, 298
Inklination
charakteristische 105
Inklinationswinkel 481
IRS-1E 230
indischer Erdbeobachtungssatellit 229
IRS-P3 352
Jahr
annus fictus 21
anomalisisches 20
anomalisisches, mittleres 20
astronomisches 21
Besselsches 21
Mondjahr 21
siderisches 20
siderisches, mittleres 20
tropisches 18
tropisches, mittleres 18
Jahrbuch
astronomisches (AA) 345
Jahreslängen 18
jährliche Gleichung 343
der Mondbewegung 277
jährliche Variation 286
Jonentriebwerk 460
JPL 3
-Ephemeride 417
JPL-Ephemeride 5
julianische Jahrhunderte 368
julianischen Jahrhunderte 5
Jupiter 422, 454, 506
Orbiter, sonnensynchron 508
Jupitermonde 530
KEPLER, J. 277
Beschleunigung 499
Marsbewegung 277
Kernschatten 219, 224
Kernschattengleichung 193, 222
Kernschattenkegel 202
Kiruna
Esrange 36
Knoten
aufsteigender des Mondäquators 340
der Mondbahn 285, 341
geographische Länge 100
Knotendurchgangszeit 68
Knotenlänge eines Mondorbiters
säkulare Drift 356
Knotenlängendrift
eines Mondorbiters 356
Grenzen 74
sonnensynchrone Bahn 166
Knotenlängenrestverschiebung 172
Knotenlängenverschiebung
kreisförmige sonnensynchrone Bahnfamilien 173
Knotensonnendrift 73, 182, 255
mittlere 75
säkulare 74, 247
säkulare, bezogen auf wahre Sonne 72
Knoten-Sonnendrift 64
Knotensonnenintervall 254, 256
Variation 256
Knoten-Sonnenverschiebung 82, 183, 186
mittlere 127, 184, 186
pro drakonitischem Umlauf 79, 166
Stabilisierung 127
unterschiedliche Definitionen 129
wahre 127
wahre pro wahrem drakonitischem Umlauf 83
wahre, pro wahrem drakonitischem Umlauf 83
Knotensonnenwinkel 247
mittlerer 71, 254
Verschiebung 248
Knotensonnenwinkeldrift 254
Knotensonnenzeit
Drift 255
Konjunktion 42
innere (oder obere) 454
Sonne-Mond 38
von Planeten 452
Konjunktionen
Erdsatellit-Sonne 48

Koordinaten
seleongraphische 281
Koordinatensystem
Äquatorsystem des Mondes 323
des Beobachtungsortes 476
Mondbahn- 312
Planetenäquator- 430
Planetenbahn- 424
planetographisches 449
planetozentrisches 449
satellitenzentriert 241
satellitenzentriertes 239
selenographisches 326
KOPAL, Z 342
KOPERNIKUS, N. 23
Mondtheorie 276
Kopplung
geogr. Länge mit Sonnenwinkel 108
Korrektur
der Sonnen koordinaten 34
Korrekturzyklus 261, 262
für Zeitstabilität 260
KOZAI, Y, 267
KOZAI, Y. 580
Kozai Effekt 475
KOZIEL, K. 278
Kreuzungspunkt
der (a,i) Kurven 106
KSC 227, 234, 241
Kulmination eines Sterns
obere, untere 35
LAGRANGE, J. L.
Mondtheorie 278
Länge
ekliptikale des aufst. Knotens der Mondbahn 285
mittlere geometrische des Mondes 282, 289
selenographische des Knotens eines Mondorbiters 356
Länge in der Bahn 313, 424
LEIBNIZ, G. W.
Bahnsystem 239
Leibnizsystem 417
Leibniz-System 526
LENSE, JOSEF.
Lense-Thirring-Effekt 308
Librationen
des Mondes 339
geometrische (optische) 345
physikalische 356
physikalische des Mondes 278, 279, 326, 341
physikalische, Bezeichnungen 341
Librations-Koordinaten
selenozentrisch 339
Lichtzeit 4
Erde zu inneren Planeten 468
Lichtzeit der Sonne 7
Lichtzeiten
der Planeten 467
Lunation 38, 289, 349
Manöver
zwischen sonnensynchronen Bahnen 178
Mars 422, 452, 454, 506
Express 500
Orbiter 500
Orbiter, sonnensynchron 507
physische Parameter 501
sonnensynchrone um 505
Massenverhältnis
Erde zu Mond 309
MAYER, TOBIAS 278
MEO-Bahn 516
Merkur 421, 454, 455, 456, 461, 467, 505, 506
METON
Zyklus 287
MIR 232
MIR-Station 231
Mittelpunktsgleichung 7, 9, 100, 276, 295
in Mondbewegung 283
mittlere Anomalie
bei Knotenüberflug 65
mittlere Bewegung
Meridian bezogen 98
mittlere Sonnen-synodische 43
Sonnen-synodisch 98
mittlere Ortssonnenzeit 73
mittleren Bewegung
des Knotens des Mondbahn 287
evektive 287
mittlerer
Begriffsunterscheidung 44
Modellierung
interplanetarer Bewegung 482
Monat
anomalistischer 288
drakonitischer 276, 287
mittlerer drakonitischer 288
mittlerer evektiver 290
mittlerer siderischer 290
mittlerer synodischer 289
mittlerer tropischer 289
synodischer 276, 349
tropischer 286
Monatslängen
mittlere 292
Mond
Bewegung um Erde 275
fiktiver mittlerer 367
Masse 309
Mondalter 16
Mondjahr 21
Mondperioden, Monate 286
Orbiter, sonnensynchron 362
Phase 349
Phasenwinkel 349
synodische Bewegung 349
Mondalter 276, 349, 352
Mondapside
mittlere Umlaufzeit 291
Mondbahnsystem 312
in Erdäquatorsystem 319
Mondbewegung
Einfluss der Planeten 293
geozentrischer Ortsvektor 294

in den Quadraturen 276
Mondephemeride 279, 347
Mondmittelpunkt
topozentrischer Ortsvektor 347
Mondorbiter 338, 355, 365
Beobachtung von Erde aus 363
Mond-synchrone Bewegung 362
selenozentrische Bewegung 356
sonnensynchron 363
Mondort
geozentrisch 275
mondsynchrone
Erdsatellitenbahn 369
Mondsynchrone Bahn
eines Mondorbiters 362
Mond-synodische Bewegung
von Erdsatelliten 365
Mondtheorie
Hauptproblem 292
Mondwinkel
mittlerer, eines Erdsatelliten 368
wahrer 370
Morley, T. 470
NASA-Betawinkel 227
NEFF, THOMAS 354
Neigung
des mittleren Mondäquators zur Ekliptik 279
Neptun
Orbiter, sonnensynchron 511
Neptun 423, 454, 456, 462, 506
NEWCOMB, S.
Sonnentheorie 10, 40
NEWCOMB, S. 121, 124
Entwicklung der Formeln der
Sonnenephemeride 5
NEWTON, I. 466
Mondtheorie 277
numerische Lösung einer Gleichung 49
Normalschub 266
Nullmeridian
Argument, auf Planetenoberfläche 500
auf Marsoberfläche 500
Nullmeridian bei Planeten 450
Nutation 4
in Länge 7
Nutationsbewegungen
des Mondes 326
Okkultationsmessungen 217
Oktanten 277
Opposition 42, 527
von Planeten 452
Oppositionen
Sonne Erdsatellit 48
Orbiter 499
Ort auf Mondoberfläche
beobachtet von Erde aus 353
Ortsmeridian
des Subsatellitenpunktes 62
Ortssonnenzeit
mittlere 61
Ortsvektor
geozentrische ekliptikal 298
P/Grigg-Skjellerup 496
Komet, Begegnung mit Giotto 470
P/Halley 457, 458, 459, 465, 498
Parallaxe
äquatorial-horizontal, geozentrische 297
tägliche 34
tägliche, Korrektur 34
Parallaxe des Mondes
Variation 306
Parameter
physikalische des Mondes 279
Parameterwinkel 213
Perigäum
mittlere Länge der Sonne 578
mittlere Länge des Mondes 343, 578
mittleres des Mondes 287
Perigäum des Mondes
mittlere geometrische Länge 283
Perigäumsdurchgangszeit 65, 67
Perigäumssonnendrift
säkulare 123
Perigäumssonnenverschiebung 123
Perihel
der Erdbahn 2
Perimartium 500
Periselen 363
Phase
des Mondes 349
Phasenwinkel 349
Bezug auf Erdsatellit 351
der großen Planeten bezogen auf Erde 470
inerplanetarer Objekte 469
Planeten 423
Bahndaten 423
Ephemeriden 419
retrograde 450
Planetenäquatorsystem 430, 499
und Eliptiksystem 435
und Erdäquatorsystem 432
zu Planeten-Bahnsystem 442
Planetenbahnsystem 424
mittlere Bahnparameter 420
Variationen 429
Planetenorbiter 499
sonnensynchrone Bahnen 504
planetographische Länge 450
planetographisches System 448, 449
planetozentrische Länge 450
planetozentrisches System 430
Pluto 423, 450
Zwergplanet 456, 463, 467
Zwerplanet 454, 462
POINCARÉ, J. H. 466
Elemente 267
Polarkoordinaten
des Mondes 299
des selenozentrischen Basissystems 584
ekliptikale des Mondes 299
im selenozentrischen Bahnsystem 327
Planeten-Bahnsystem 425

Polarkreis 35, 36
Variation der geodätischen Breite 35
PORSCHE, H. 494
Positionswinkel 340, 343
der physikalischen Libration 345
Präzession 4
Rückläufigkeit 290
Projekt OASIS 229
PTOLEMÄUS 23, 275, 276, 283, 284, 286, 292
Evektionstheorie 276
quantitative Näherung
von Beobachtungen von Bewegungen 491
Querkrümmungsradius 347
Querscanner 239
Radialgeschwindigkeit
aus Dopplermessungen 493
Radio Science 490, 496
Range rate 493
Raumstation
Annäherung 513
Reduktion
auf den Äquator 100
auf die Ekliptik 277, 285
auf die Ekliptik 453
Reduktion auf Äquator
der Mondbahn 366
Reduktion auf den Äquator 365
der wahren Sonne 25
Referenzellipsoid 449
Refraktion
Beobachtung der Sonne 38
Einfluss auf Sonnenkontaktzeiten 36
Rektaszension
Knoten-bezogene 73
lunare 356
Rektaszension, planetare 430, 431
Relaissatellit 362
Reproduzierbare
sonnensynchrone Bahnen 177
Reproduzierbarkeit
in der Zeit 181
in Zeit und Subsatellitenbahn 189
sonnensynchroner Bahnen 172
retrograde
Planeten 450
Rosetta
Raumsonde 500
Rotation
der Erde 99
Rotation des Mondes
mittlere Rate 356
Rotationsachse 342
Rotationsgeschwindigkeit der Erde
tropische 19
Rotationssonnentag 32
Rotationssonnenzeit 28, 32
säkularen Variationen
der Keplerelemente der scheinbaren
Sonnenbewegung 9
San Marco
Raketenstartplatz vor Kenia 229
Satelliten 499
Satelliten Bewegung
koplanar 519
Satellitenbewegung
Bezug auf fiktive mittlere Sonne 60
Keplersche 389
mittlere Hansensche 133
mittlere Mond-synodische 370
Mond-synodische, mittlere 389
sonnensynodisch bezogen auf Satelliten-
Bahnebene 57
Satellitenlage
Nadir ausgerichtet 241
sonneninertial 243
Satellitenstabilisierung 241
Saturn 422, 454, 455, 461, 463, 506
Orbiter, sonnensynchron 509
Schatten 190
-dauer 207, 249
-faktor 207
-grenze 213
-index 207
-kontakte 199
-zeiten
Verlauf über Jahr 252
Schattenberechnungen 191
Genauigkeitsabschätzung 222
Schattengleichung 191
allgemeine 196, 197
Differentiation 205
Halb- 195
Kern- 193
Zylinder- 196
Schattengrenze 191, 214
Schattenkegel 191, 192
Schattenkontaktzeiten 203
exakte 205
Schattenmodelle 191
Schattenverhalten
auf elliptischer Bahn 209
Schattenzeiten
geostationäre Bahn 212
Schattenzonen 191
scheinbare Bewegung
zweier Satelliten
rückläufig 525
zweier Satelliten - stationär 525
scheinbare Bewegung zwischen Satelliten
rechtläufig 527
rückläufig 527
stationär 527
scheinbaren Sonne
Bewegung 3
Schiefe
der Ekliptik 55
SEIDELMANN, P. K 454
selenographisches System 326
Sichtbarkeitsgleichung
bei Sicht Satellit-Satellit 514
Sichtkontakt
zwischen Satelliten 513
Sichtkontakte
Entwickungen 519

siderische Bewegung
der Sonne 287
SLIWINSKI, P. 275
Solarwinkel
Satellitenbahn bezogener 58
Solstitien 212, 236
Sommersonnenwende 37
Sonne
Ephemeride 3
fiktive mittlere 5, 22, 28, 41, 43, 99, 100, 367
mittlere 5, 41
mittlere scheinbare 5
Sonnenzeit
Rotations- 28
wahre, bei Äquivalenzen 102
Sonne in Subsatellitenbahn 230
Sonneinstrahlung
bei Schattenaustritt 229
Sonnenaspektwinkel 57, 201, 226, 249
Verlauf 251
Sonnenbahn
geozentrisch 2
Perigäum 2
Sonnenbezogenen Bewegung einer Bahnebene
Veranschaulichung 84
Sonnenbezug
Entwicklung 246
Sonnendrift 43
des aufsteigenden Knotens 40
des Perigäums der Satellitenbahn 40
mittlere 61
mittlere knotenbezogene 79, 127
ohne Bahnkorrektur 249
wahre 38
wahrer, Bezug auf fiktive Sonne 42
Sonneneinstrahlung
auf Satelliten 239
im Perigäum der Bahn 229
in Bahnpunkte 228
Sonnenelevation
in Sensor Aufsichtpunkt 235
Sonnenelevationskurven 216
Sonnenentfernung
geozentrisch 34
Sonnenkontaktzeiten 36
Sonnenokkultationspunkt 218
Sonnenspiegelung 237
Sonnenspiegelungspunkt 239
sonnensynchron 165
sonnensynchrone
Bewegung der Bahnebene 84, 165
Sonnensynchrone
Bahnfamilien 170
sonnensynchrone Bahnen 189
Bahnauswahl 167
Eigenschaften 165
Planetenorbiter 504
sonnensynchronen
Bahnen 125
Sonnen-synodischen
Bewegung 38
Sonnensystem
Baryzentrum 3
Sonnenuhr 26
Sonnenverschiebung
mittlere 81
wahre 124
Sonnenwinkel 108
bei Schatten 204
des Perigäums 121
Ekliptik-bezogen 56
mittlerer 61, 99
mittlerer, Bezug auf fiktive Sonne 42
Variationen 99
wahrer 38, 108
wahrer, Bezug auf fiktive Sonne 42
Sonnenzeit
mittlere 254
mittlere eines Satelliten 60
mittlere lokale 28, 108
wahre 26, 28
Space Shuttle 241, 242, 244
Spurfehler 580
spurreproduzierbaren
sonnensynchrone Bahnen 174
Stabilisierung 127
drakon. mit Sonnen-syn. Bew. 126
in Umgebunf sonnen-synchroner Bahnen 129
Sternjahr 19
Sternzeit
lunare 356
Störungen 466
Störungsrechnung 277
STS-Bahn 230, 231, 234
Stundenwinkel 38
subsolarer Punkt 239
auf der Mondoberfläche 351
auf Erdoberfläche 107
auf Mondoberfläche 350, 351, 352
der fiktiven mittleren Sonne 62
Subsolarpunkt 213
subterrestrischer Punkt 326
auf der Mondoberfläche 280, 323, 339, 345, 351
auf Marsoberfläche 500
auf Planetenoberfläche 451
Bewegung auf Mondoberfläche 344
Subtopozentrischer Punkt
auf Mondoberfläche 347
Subzyklen 178
Sun glint points 237
Sunrise 218
Sunset 218
SwingBy 475
Symphonie A 197
SYMPHONIE-A 209
synodische Bewegung
zweier Satelliten 519
Systemeigenbewegungsvektor 426
Syzygien 276
Tag und Nachtgleiche 38
Tag- und Nachtgleiche 38
TanDEM-X 312

Tangentialpunkte
Sonnendistanz 242
Tangentialschub 265
TDT 5
Terminator 213
TerraSAR-X 312
Thermalhaushalt
eines Satelliten 207
THIRRING, HANS
Lense-Thirring-Effekt 308
TISSERAND, F.
Kriterium 475
topozentrische Beobachtung
der wahren Sonne 33
Transformationsmatrix 328
Drehungen von Orthonormalsystemen 328
Transit
der Sonne in TDT 33
Triaxialität
des Mondes 280
tropische Bewegung
mittlere 365
mittlere des Mondes 366
Tschebyscheff
-Approximation 417
Tschebyscheff-Approximationen 18
TYCHO BRAHE 277
überlagerte Funktion 390
Überlappung
Beobachtungsmöglichkeit 525
übersonnensynchron 86
Umlauf
synodischer von planetaren Objekten 452
Umlaufzeit
Ekliptik-bezogene Sonnen-synodische 56
mittlere Mond-synodische 368
mittlere Sonnen-synodische 44
Satellitenbahn-bezogene Sonnen-synodische 58
Sonnen-synodische 43
Sonnen-synodische des Bahnknotens 77, 79, 227
Sonnen-synodische, gemittelte 46
Sonnen-synodische, mittlere 46
Sonnen-synodische, wahre 46
wahre Mond-synodische 369, 390
Umlaufzeit
synodische
zweier Satelliten 519
Ungleichheit
erste 276
große 276
untersonnensynchron 85
Uranus 423, 450, 454, 462, 506
Orbiter, sonnensynchron 510
Vakuum Lichtgeschwindigkeit 492
Variation
der Mondbewegung 277
geodätische Breite des Polarkreises 35
in der eklipt. Länge des Mondes 284
jährliche 286
Variation der Konstanten 466
Vektor
IAU- 430
Venus 421, 450, 454, 467, 505, 506
VSOP87-System 18
wahre Sonne
Bewegung in Äquator 25
topozentrische Beobachtung 33
Wechselwirkung
zwischen Planet und Sonne 472
Weilheim-Lichtenau
deutsche Bodenstation 355
Weltzeit 29
Weltzeit (U.T.1)
terrestrische 500
Winkeldistanz
geozentrisch zwischen zwei Satelliten 515
Wintersonnenwende 37
Zeit
baryzentrische dynamische 3, 500
baryzentrische dynamische, TBD 420
mittlere Sonnen 254
Sonnenzeit
Rotations- 28
Zeitfehler 255, 258
Zeitgleichung 29, 250, 252
Zeitstabilität 261
Zeitverschiebung 186
Zustandsgleichung 106, 107
Zweiweg-Doppler 475
Zweiweg-Dopplermessungen 490
Zwei-Weg-Dopplerverschiebung 492
Zwergplaneten
1 Ceres 454
Pluto 456
Zylindermodell 196, 225
Zylinderschatten 196

Forschungsbericht 2023-17

Satellitenbewegung Band IV-B:

Synodische Bewegungen

Ernst Friedrich Maria Jochim

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Hochfrequenztechnik und
Radarsysteme
Oberpfaffenhofen

619 Seiten
239 Bilder
105 Tabellen
317 Literaturstellen

DLR
Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Sonnensynodische Bewegung, synodische Bewegung bei Bezug auf Mond, Planeten, andere Satelliten, Reproduzierbare Bewegungen, Sonnensynchrone Bewegungen von Satelliten und Orbitern, Äquivalenzbahnen unter Einschluss von synodischen Bewegungen

Ernst Friedrich Maria JOCHIM

Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme des DLR, Oberpfaffenhofen

Satellitenbewegung, Band IV-B: Synodische Bewegungen

DLR-Forschungsbericht 2023, 2023-17 , 619 Seiten, 239 Bilder, 105 Tabellen, 317 Literaturstellen

Im zweiten Teil des vierten Bandes der Satellitenbewegung werden basierend auf einer allgemeinen Hansen-Bewegung die Bezüge einer Satellitenbewegung in unterschiedlichen Relationen zusammengestellt, wie sie zur Erfüllung spezieller Missionsanforderungen benötigt werden. Synodische Bewegungen stellen die Bezüge zu anderen Körpern dar, zur Sonne, zum Mond, zu Planeten und anderen interplanetaren sowie interstellaren Objekten, zu anderen Satelliten etwa bei Formationsflügen. Spezielle insbesondere für die Erdbeobachtung interessante Bewegungsarten sind reproduzierbare, sonnensynchrone Bewegungen. Eine Erweiterung des Begriffes der reproduzierbaren sonnenbezogenen Bewegung wird vorgestellt. Äquivalenzbahnen durch Kopplung mit synodischen Satelliten-Bewegungen werden neu behandelt.

Sun synodical motion, synodical motion related to Moon, planets or other satellites, repetitive motion, Sun-synchronous motion of satellites und orbiters, equivalence orbits by coupling with synodical motions

(Published in German)

Ernst Friedrich Maria JOCHIM

Microwave and Radar Institute of the German Aerospace Centre (DLR), Oberpfaffenhofen

Satellite Orbital Motion, volume IV-B: Synodical Motions

DLR-Forschungsbericht 2023, 2023-17, 619 pages, 239 figs., 105 tabs., 317 refs

The second part of the fourth volume is dedicated to synodical motions with respect to Sun, Moon, Planets and other interplanetary and interstellar objects. Included are special orbits as repetitive, Sun-synchronous motions. An extension of a repetitive-sun-synchronous motion will be included. A special focus is directed to the analysis of remote sensing orbits of satellites and orbiters. All of the types of satellite orbital motion discussed here can be coupled into equivalence orbits.