

DLR-IB-SY-BS-2023-90

**Impedanzbasierte Modellierung
eines flexiblen Kragbalkens mit
piezoelektrischem Folienaktuator**

Wissenschaftlicher Bericht

M. Eng. Marc Sparenberg
Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Phys. Jörg Melcher



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Institut für Systemleichtbau

DLR-IB-SY-BS-2023-90

Impedanzbasierte Modellierung eines flexiblen Kragbalkens mit piezoelektrischem Folienaktuator

Zugänglichkeit:

Stufe 2 – DLR-intern zugänglich: Der Interne Bericht wird elektronisch in ELIB abgelegt, erhält aber die Zugriffsbeschränkung „nur DLR-intern zugänglich“. Die bibliographische Beschreibung ist, wie bei allen ELIB-Einträgen, weltweit sichtbar.

Braunschweig, *September, 2023*

Der Bericht umfasst: 104 Seiten

Abteilungsleiter:

Prof. Dr.-Ing. Hans Peter Monner

Autor:

M. Eng. Marc Sparenberg

Autor 2 / Betreuer:

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Phys. Jörg Melcher



**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Dokumenteigenschaften

Titel	Impedanzbasierte Modellierung eines flexiblen Kragbalkens mit piezoelektrischem Folienaktuator
Betreff	Anwendung des Impedanzformalismus auf eine einschlägig bekannte Struktur, hier auf einen flexiblen Kragbalken mit appliziertem und strukturintegriertem piezoelektrischen Folienaktuator
Institut	Institut für Systemleichtbau
Erstellt von	M. Eng. Marc Sparenberg
Beteiligt	Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Phys. Jörg Melcher
Geprüft von	
Freigabe von	
Datum	12.09.2023
Version	1.0
Dateipfad	...

Inhaltsverzeichnis

Dokumenteigenschaften	2
1. Statische Biegung eines Kragbalkens bei verschiedenen Lastfällen.....	5
1.1. Statische Steifigkeit des Kragbalkens.....	11
1.2. Aktive Kompensation statischer Auslenkungen des Kragbalkens	11
1.3. Wirkungsweise des Piezoaktuators bei einem beidseitig eingespannten Balken	21
2. Biegeschwingungen des Kragbalkens.....	22
3. Impedanzbasiertes Modell für dynamische Anregungen	31
3.1. Bewegungs- und Kraftgrößen, Impedanzen und Wandlerkonstante.....	31
3.2. Betriebsmodi des aktivierbaren Balkens am Ankoppelpunkt.....	36
3.2.1. Piezoaktuator nicht im Betrieb ($U_p = 0$), nur Einzelkraft am Balkenende ($F_B \neq 0$):..	36
3.2.2. Piezoaktuator im Betrieb ($U_p \neq 0$), keine Einzelkraft am Balkenende ($F_B = 0$):	37
3.2.3. Beide Quellen im Betrieb ($U_p \neq 0 \wedge F_B \neq 0$):.....	37
3.3. Am Ankoppelpunkt übertragene komplexe Leistung	39
3.4. Aktive und passive Impedanzeinstellungen am Ankoppelpunkt.....	40
3.4.1. Infinite Impedanz (Aktive Schwingungsunterdrückung).....	40
3.4.2. Null-Impedanz (Aktive Kraftkompensation).....	41
3.4.3. Balken mit passivem, nicht betriebener Piezoaktuator	42
3.4.4. Impedanzanpassung (Maximaler Leistungsentzug).....	43
3.5. Aktive und passive Impedanzeinstellungen nahe des Balkenendes.....	47
3.5.1. Aktive Schwingungsunterdrückung am Balkenende durch eine infinite Impedanz....	48
3.5.2. Aktive Kraftkompensation am Balkenende durch eine Null-Impedanz.....	49
3.5.3. Balken mit passivem, nicht betriebenem Piezoaktuator	50
3.5.4. Maximaler Leistungsentzug am Balkenende (Impedanzanpassung).....	52
3.6. Momentenimpedanz statt Kraftimpedanz	56
3.7. Balken mit strukturintegriertem Piezoaktuator.....	59
3.8. Modaler Impedanzformalismus.....	61
3.9. Bestimmung der Parameter der elektrischen Ersatzschaltung	65

3.9.1. Aufbau: Piezoaktuator ist freiliegend, nicht appliziert	65
3.9.2. Aufbau: Kragbalken ohne appliziertem Piezoaktuator.....	68
3.9.3. Aufbau zur Messung der mechanischen Eingangsimpedanz des Shakers	71
3.9.4. Aufbau: Piezoaktuator auf unendlich steifem Untergrund.....	73
3.9.5. Aufbau: Kragbalken mit Piezoaktuator zur Bestimmung der Wandlerkonstanten α über die Modellparameter	75
3.9.6. Bestimmung der Wandlerkonstanten α durch drei Messungen	78
3.9.7. Bestimmung der stat. Steifigkeit des applizierten Piezoaktuators nebst Klebeschicht	79
3.9.8. Sensorische Erfassung externer Größen mit dem Piezosensor/-aktuator	80
4. Exp. Bestimmung der mech. und elektr. Komponenten und Parameter	81
4.1. Betrachtung der Einzelkomponenten	82
4.1.1. Ermittlung der statisch mechanischen Eigenschaften des Biegebalkens.....	82
4.1.2. Dynamische Eigenschaften des Balkens	85
4.2. Ermittlung der mechanischen und elektrischen Eigenschaften des Piezo-Patches	87
4.3. Aufklebeprozess des Aktuators auf den Biegebalken	91
4.4. Bestimmung der Eigenschaften des Gesamtsystems	93
4.4.1. Bestimmung des E-Moduls mit statischer Steifigkeit.....	96
4.4.2. Untersuchungen mit dem Impulshammer	98
4.4.3. Bestimmung von αp	100
Literaturverzeichnis	103

1. Statische Biegung eines Kragbalkens bei verschiedenen Lastfällen

Ein metallischer Balken sei einseitig fest eingespannt (Kragbalken). Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Balkenlängsachse der x-Achse entspricht und die Biegung des Balkens ist in z-Richtung erfolgt (rechte Hand-Regel). Der Balken besitzt

- die Länge L ,
- die Breite b ,
- die Höhe (oder Dicke) h ,
- den Elastizitätsmodul E ,
- die Querkontraktionszahl ν und
- die Dichte ρ .

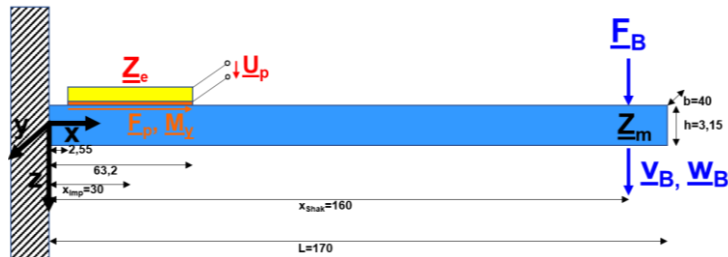


Abb. 1.1: Kragbalken mit appliziertem Piezoaktuator. Die Längenangaben sind in mm. Unterstrichene Größen sind dispersiv.

In der Nähe der Einspannung ist ein piezoelektrischer Flächenaktuator des Typs *DuraAct* einseitig aufgeklebt (Monomorph-Aktuator). An dessen elektrischen Eingang lässt sich eine elektrische Spannung $\underline{U}_p$ anlegen, die den Flächenaktuator durch den Piezoeffekt in x-Richtung verlängert. Entlang der Klebeschicht erfährt der Balken dadurch eine Normalkraft $\underline{F}_p$ oberhalb der neutralen Faser des Balkens. Sie erzeugt ein Streckenmoment $m_y(x)$, das einem Moment pro Längeneinheit entspricht, in den physikalischen Einheiten also eine Kraft ist. Das Integral über diese Funktion ergibt den Betrag M gemäß

$$M = \int_{x_{m1}}^{x_{m2}} m_y(x) dx, \quad (1.1)$$

der in einen piezoelektrischen Anteil M_{yPiezo} des dynamischen Biegemoments $\underline{M}_y(x)$ eingeht. Verläuft das Streckenmoment $m_y(x)$ bei dem Balken in dem Bereich $x_{m1} \leq x \leq x_{m2}$ konstant, ergibt sich für den piezoelektrischen Anteil des Biegemoments

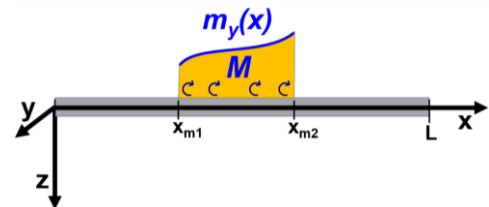


Abb. 1.2: Allgemeiner Verlauf eines Streckenmoments $m_y(x)$

$$M_{yPiezo}(x) = \begin{cases} M & 0 \leq x < x_{m1} \\ 0 & x_{m1} \leq x \leq x_{m2} \\ M & x_{m2} < x \leq L \end{cases} \quad (1.2)$$

Mit den Definitionen der beiden Sprungfunktionen

$$u(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.3)$$

und

$$u_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.4)$$

lässt sich der piezoelektrische Anteil auch umformulieren zu

$$M_{yPiezo}(x) = M(u(x_{m1} - x) + u(x - x_{m2})) \quad (1.5)$$

bzw. zu

$$M_{yPiezo}(x) = M \left(1 - u_B \left(\frac{x - \frac{1}{2}(x_{m1} + x_{m2})}{x_{m2} - x_{m1}} \right) \right). \quad (1.6)$$

Neben den Randbedingungen fließen in das Biegemoment $M_y(x)$ alle externen und internen Lasten:

- eine externe, senkrecht zur Auslenkung wirkende Einzel- oder Querkraft F_B [N] in der Nähe des Balkenendes,
- ein piezoelektrische Streckenmoment $m_y(x)$ $\left[\frac{Nm}{m} = N \right]$ und auch
- eine Streckenlast $q(x)$ $\left[\frac{N}{m} \right]$

senkrecht zur Auslenkungsrichtung, die entweder einem Druck oder einem Gravitationsfeld oder einer nicht-punktuellen Querkraft entspricht.

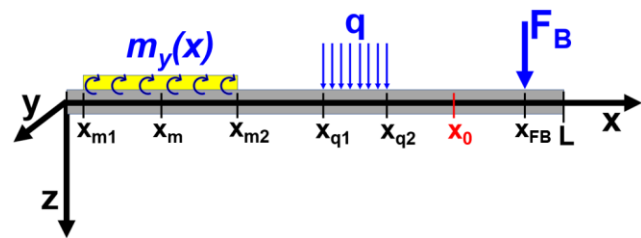


Abb. 1.3: Balken mit 3 verschiedenen Lastfällen und Koordinatensystem.

Die dadurch entstehende Biegelinie $w(x)$ ist der Verlauf der Balkenverformung. Der experimentelle Aufbau erhält an der Position $x = x_{FB}$, also an der Stelle der Krafteinwirkung durch die F_B eine Messstelle zur statischen und dynamischen Aufnahme der Auslenkung, der Kraft und der Schnelle v_B . Diese Messposition befindet sich in der Nähe des freien Balkenendes. Am elektrischen Eingang des Piezoaktuator ergibt sich die elektrische Impedanz $\underline{Z}_e$ als Quotient der Spannung und dem Strom. Der Zusammenhang zwischen den elektrischen und den mechanischen Größen ergibt sich aus der Kraft-Spannungsanalogie (siehe übernächstes Kapitel). Über einen elektrodynamischen Shaker oder über einen Impulshammer erfolgt die auf den Balken wirkende Kraft F_B . Der Quotient aus Kraft und Schnelle ergibt die mechanische Impedanz an dieser Position des Balkens:

$$\underline{Z}_m = \frac{F_B}{v_B} \left[\frac{N}{m/s} = \frac{kg}{s} \right]. \quad (1.7)$$

Der Zusammenhang zwischen den diversen Lasten und der Balkenauslenkung lässt sich mithilfe der gängigen technischen Biegetheorie ermitteln. Bei dieser Näherungstheorie ergibt die Annahme einer reinen Biegung, bei der es nur zu Belastungen in z-Richtung kommt, eine ausreichend genaue Abschätzung des Spannungs- und Deformationszustandes [Hartmann, 2017]. Mit dem

Schubmodul $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ und den Wellenzahlen k_i folgen aus den Spannungs-Verzerrungsbeziehungen und den Gleichgewichtsbedingungen drei gekoppelte partielle Differenzialgleichungen mit den drei Verschiebungsfunktionen $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ und $w(x, y, z)$. Diese Differenzialgleichungen entsprechen den Navier-Cauchy-Verschiebungsgleichungen unter Vernachlässigung der dynamischen (zeitabhängigen) Einflüsse [Hartmann, 2017]:

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \right) + \varrho \cdot k_x = 0, \quad (1.8)$$

$$G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) + \varrho \cdot k_y = 0 \text{ und} \quad (1.9)$$

$$G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \varrho \cdot k_z = 0. \quad (1.10)$$

Dabei entspricht

$$\varrho \cdot \vec{k} = \varrho \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

einer volumenverteilten Kraft, wie beispielsweise einer Schwerkraft. Dieser Term lässt sich nachfolgend jedoch vernachlässigen, da keine Streckenlasten wirksam sind. Für einfache Geometrien und Randbedingungen, wie bei einem geraden, isotropen Balken mit fest-freier Lagerung oder beidseitig fester Einspannung ist die analytische Berechnung der Lösung gelungen. Mit der Grundannahme, dass die Querschnittsfläche auch bei einer Deformation senkrecht zur Mittelachse steht, reduziert sich die Suche nach der dreidimensionalen Deformation auf die Berechnung der Funktion $w(x)$, die der Biegelinie entspricht. Ausgehend von dem mathematischen Zusammenhang zwischen der Krümmung κ und der Biegelinie

$$\kappa = \frac{w''(x)}{(1+(w'(x))^2)^{3/2}} = -\frac{M_y(x)}{E I_y} \quad (1.12)$$

ergeben sich mit den Materialgleichungen und für kleine Durchbiegungen die Zusammenhänge (unter Vernachlässigung von Anisotropien und Querschnittsänderungen):

- für eine Streckenlast:

$$q(x) = \left(E(x) I_y(x) w''(x) \right)'' = E I_y w''''(x) \quad (1.13)$$

- für die resultierende Querkraft:

$$Q_z(x) = - \left(E(x) I_y(x) w''(x) \right)' = -E I_y w'''(x) \quad (1.14)$$

- für das resultierende Biegemoment:

$$M_y(x) = -E I_y w''(x) \quad (1.15)$$

- für die resultierende Neigung:

$$Neig(x) = E I_y w'(x). \quad (1.16)$$

Bei einem Balken ergibt sich die allgemeine Biegefunktion bzw. Auslenkung

$$w(x) = \frac{1}{E I_y} \left(-\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 u(x - x_{FB}) - \frac{q}{24} (x - x_{q1})^4 u(x - x_{q1}) + \frac{q}{24} (x - x_{q2})^4 u(x - x_{q2}) - \iint M_{yPiezo}(x) d^2x + M_1 \frac{x^2}{2} + R_1 \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) \quad (1.17)$$

Das Doppelintegral über den piezoelektrischen Anteil führt bei dem Kragbalken zu dem Ergebnis

$$\iint M_{yPiezo}(x) d^2x = M \begin{cases} \frac{1}{2} x^2 & 0 \leq x < x_{m1} \\ x_{m1} x - \frac{1}{2} x_{m1}^2 & x_{m1} \leq x \leq x_{m2} \\ \frac{1}{2} x^2 + (x_{m1} - x_{m2})x + \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2} (x_{m1}^2 + x_{m2}^2) \right) & x_{m2} < x \leq L \end{cases} \quad (1.18)$$

Für das Querkraftgleichgewicht gilt beim vorliegenden Kragbalken

$$R_1 + R_2 - F_B - q(x_{q2} - x_{q1}) = 0 \quad (1.19)$$

und für das Momentengleichgewicht:

$$M_1 - M_2 + \frac{1}{2} q(x_{q2}^2 - x_{q1}^2) + F_B x_{FB} - M - R_2 L = 0. \quad (1.20)$$

Dabei sind

- R_1 und R_2 die Lagerkräfte (Einheit: N) am linken und rechten Lager,
- M_1 und M_2 die Lagermomente (Einheit: Nm) am linken und rechten Lager und
- C_1 und C_2 Integrationskonstanten (Einheiten: Nm² und Nm³), die aus den Lagerbedingungen jeweils zu ermitteln sind.

So erzeugt beispielsweise eine statische Einzellast F_B an der Kragbalkenposition x_{FB} die Verläufe im nachfolgenden Bild links, ein Piezoaktuator dagegen die Verläufe im Bild rechts bei gleicher Auslenkung bei x_{FB} . Erwartungsgemäß erfährt der Querkraftverlauf $Q_z(x)$ einen Sprung nach oben zur festen Einspannung hin, da die Kraft F_B nach unten zeigt. Es ist sehr bemerkenswert, dass die Auslenkung durch einen applizierten Piezoaktuator bei einem Kragbalken keine Lagerkräfte erzeugt. Das liegt daran, dass der Piezoaktuator sich im Kraftfluss befindet und keine Querkräfte erzeugt.

Bei diesem Kragbalkenbeispiel verschwinden alle Lagerkonstanten bis auf

$$M_1 = M = \int_{x_{m1}}^{x_{m2}} m_y \, dx = m_y (x_{m2} - x_{m1}) , \quad (1.21)$$

so dass sich die statische Auslenkung des Balkens in dem Bereich des Piezoaktuators parabolisch zeigt:

$$w(x)|_{x \in [x_{m1}, x_{m2}]} = \frac{1}{E I_y} \left(\frac{1}{2} x_{m1}^2 - x_{m1} x + \frac{1}{2} m_y (x_{m2} - x_{m1}) x^2 \right) \quad (1.22)$$

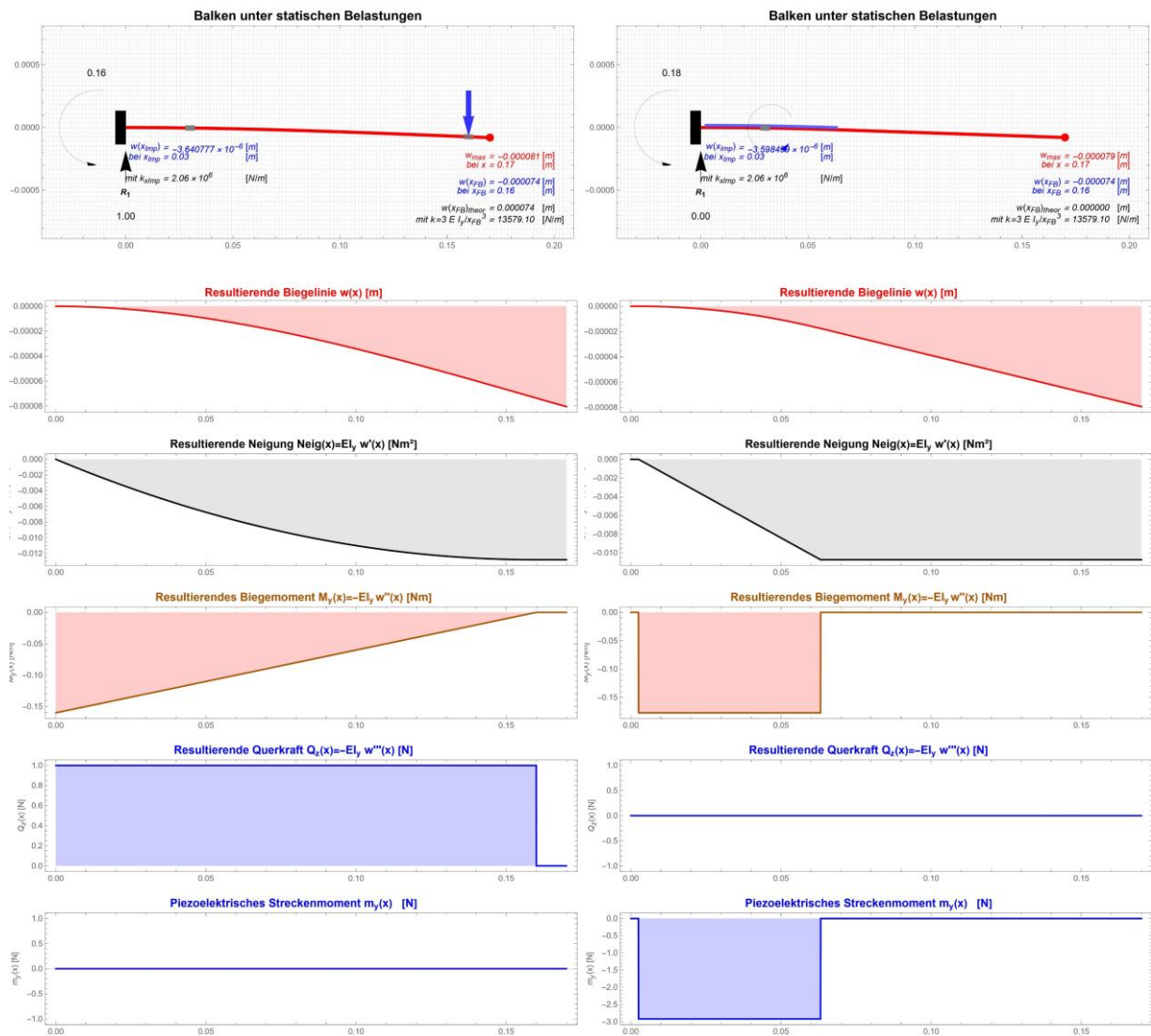
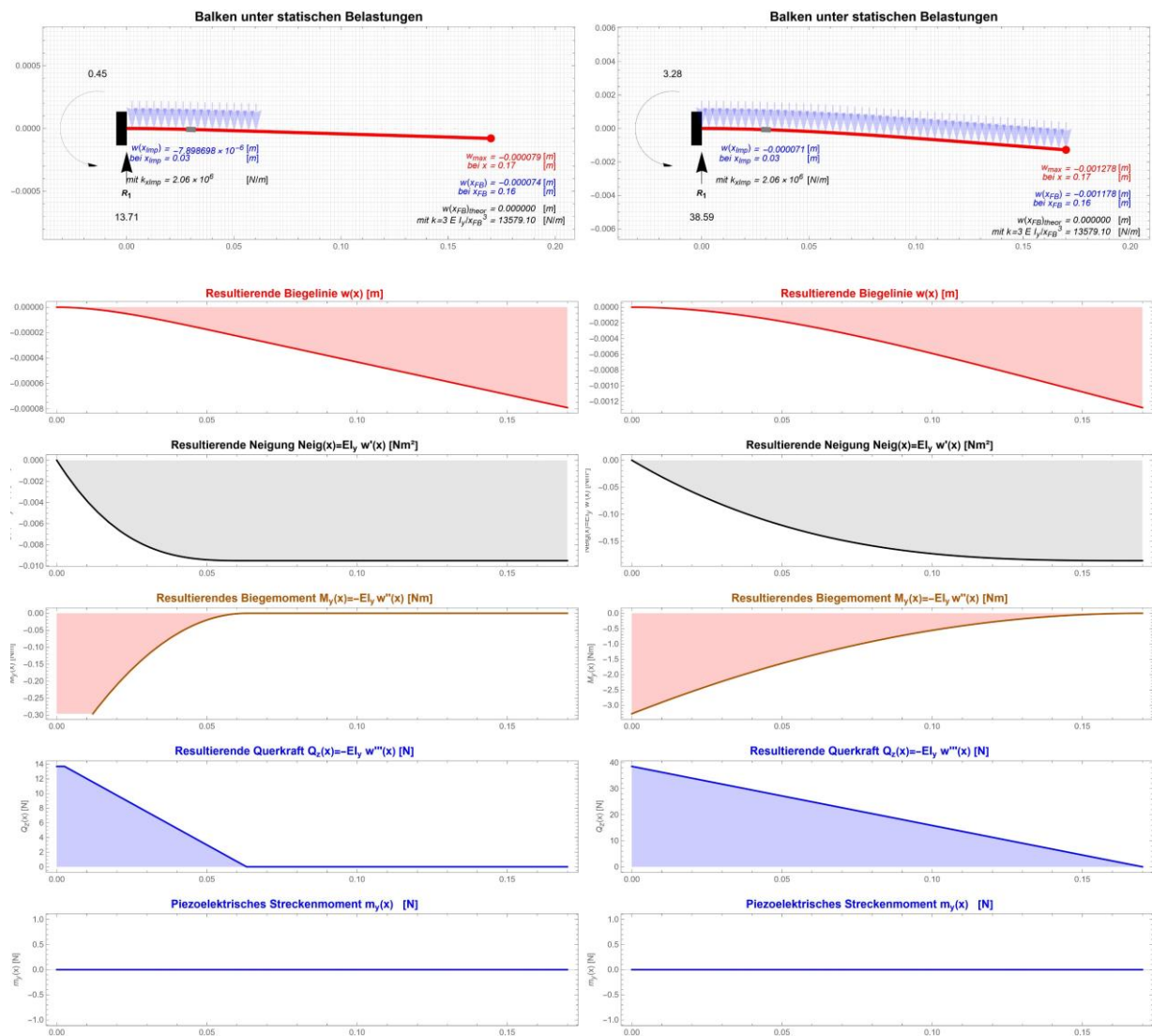


Abb. 1.4: Statische Auslenkung eines Kragbalkens:

links: bei einer Einzellast F_B ;

rechts: bei einem piezoelektrischen Streckenmoment $m_y(x)$.



1.1. Statische Steifigkeit des Kragbalkens

Grundsätzlich ergibt sich bei einem einseitig eingespannten Balken (Kragbalken) durch das Einwirken einer Einzel- oder Querkraft F_B an der Stelle x_{FB} die Auslenkung zu

$$w(x_{FB}) = \frac{x_{FB}^3}{3 E I_y} F_B. \quad (1.23)$$

Dementsprechend besitzt der Balken folglich dort die statische Steifigkeit

$$k|_{x=x_{FB}} = \frac{3 E I_y}{x_{FB}^3}. \quad (1.24)$$

Ist ein Piezoaktuator bereits auf dem Kragbalken appliziert, ist dessen Beitrag zur statischen Balkensteifigkeit k enthalten. Diese Gleichung ist dann lediglich eine Näherung, da sowohl der Elastizitätsmodul als auch das Flächenträgheitsmoment ortsabhängig sind.

1.2. Aktive Kompensation statischer Auslenkungen des Kragbalkens

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn das Biegemoment M_y , das der Piezoaktuator über sein Streckenmoment m_y erzeugt, die Auslenkung des Balkens durch eine externe statische Querkraft F_B an einer Stelle kompensiert, z.B. an der Position $x = x_{FB}$, wobei sich x_{FB} in der Nähe des Balkenendes befindet: $x_{M2} < x_{FB} \leq L$. Die statische Auslenkung kann aber auch durch eine externe statische Streckenlast $q(x)$ in einem Balkensegment $x \in [x_{q1}, x_{q2}]$ mit $0 \leq x_{q1} < x_{q2} \leq L$ erfolgen.

Eine statische Kompensation an allen Positionen gleichzeitig ist nicht möglich, da Querkräfte und Längskräfte unterschiedliche Biegemomente und Biegelinien erzeugen. Besonders deutlich wird dies in dem Fall der aktiven Auslenkungsreduktion an der Position x_{FB} durch einen applizierten Piezoaktuator. Die Zielsetzung $w(x = x_{FB}) = 0$ führt zu der Forderung

$$w(x_{FB}) = \frac{1}{E I_y} \left(\theta(x) - \iint M_{yPiezo}(x) d^2 x + M_1 \frac{x^2}{2} + R_1 \frac{x^3}{6} \right) |_{x=x_{FB}} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \quad (1.25)$$

mit der Streckenlastverteilung

$$\theta(x) := \begin{cases} 0 & 0 \leq x < x_{q1} \\ -\frac{1}{24} q (x - x_{q1})^4 & x_{q1} \leq x \leq x_{q2}, \\ \frac{1}{24} q \left(-x_{q1}^4 + x_{q2}^4 + 4x(x_{q1}^3 - x_{q2}^3) - 6x^2(x_{q1}^2 - x_{q2}^2) + 4x^3(x_{q1} - x_{q2}) \right) & x_{q2} < x \leq L \end{cases} \quad (1.26)$$

dem Anteil durch das Streckenmoment des Piezoaktuator

$$\iint M_{yPiezo}(x) d^2x = M \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < x_{m1} \\ x_{M1}x - \frac{1}{2}x_{m1}^2 & x_{m1} \leq x \leq x_{m2}, \\ \frac{1}{2}x^2 + (x_{m1} - x_{m2})x + \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2}(x_{m1}^2 + x_{m2}^2)\right) & x_{m2} < x \leq L \end{cases} \quad (1.27)$$

der Lagerkraft

$$R_1 = F_B + q(x_{q2} - x_{q1}) \quad (1.28)$$

und dem Lagermoment

$$M_1 = M - F_B x_{FB} - \frac{1}{2}q(x_{q2}^2 - x_{q1}^2). \quad (1.29)$$

Das optimale Moment M_{Opt} , das der Piezoaktuator für die Kompensation an der Stelle $x = x_{FB}$ im Balken generieren muss, ist somit:

$$M_{Opt} = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < x_{m1} \\ x_{M1}x - \frac{1}{2}x_{m1}^2 & x_{m1} \leq x \leq x_{m2} \\ \frac{1}{2}x^2 + (x_{m1} - x_{m2})x + \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2}(x_{m1}^2 + x_{m2}^2)\right) & x_{m2} < x \leq L \end{cases} \quad (1.30)$$

$$M_{Opt} = -\frac{2}{3} \frac{x_{FB}^3}{2x_{FB}(x_{m1} - x_{m2}) - (x_{m1}^2 - x_{m2}^2)} \cdot F_B - \frac{1}{12} \frac{x_{q1}^4 - x_{q2}^4 + 4x_{FB}(x_{q2}^3 - x_{q1}^3)}{2x_{FB}(x_{m1} - x_{m2}) - (x_{m1}^2 - x_{m2}^2)} \cdot q. \quad (1.31)$$

bzw. das optimale Streckenmoment $m_{y,Opt}$

$$m_{y,Opt} = \frac{M_{Opt}}{x_{m2} - x_{m1}}. \quad (1.32)$$

Die nachfolgenden Graphiken zeigen einige Beispiele der aktiven Kompensation durch das optimale Streckenmoment $m_{y,Opt}$. Solange zumindest ein Lager momentenfrei ist, bewirkt der Piezoaktuator keine Querkräfte.

Es stellt sich die Frage, bei welcher Aktuatorgeometrie am wenigsten elektrische Energie aufgebracht werden muss, um eine störende Auslenkung an einer bestimmten Stelle zu kompensieren. Im statischen Fall ist die Energie, die ein Piezoaktuator bei einer angelegten elektrischen Spannung U_p benötigt:

$$E = \frac{1}{2}C \cdot U_p^2. \quad (1.33)$$

Während seine elektrische Kapazität C nur linear mit der Aktuatorlänge ($x_{m2} - x_{m1}$) ansteigt, reduziert sich die anzulegende Spannung U_p mit dem Quadrat der Aktuatorlänge. Der Piezoaktuator sollte daher so lang wie möglich sein für diese statische Anwendung. Bei dynamischen Anwendungen spielen die strukturellen Eigenformen eine wichtige Rolle (siehe nachfolgende Kapitel).

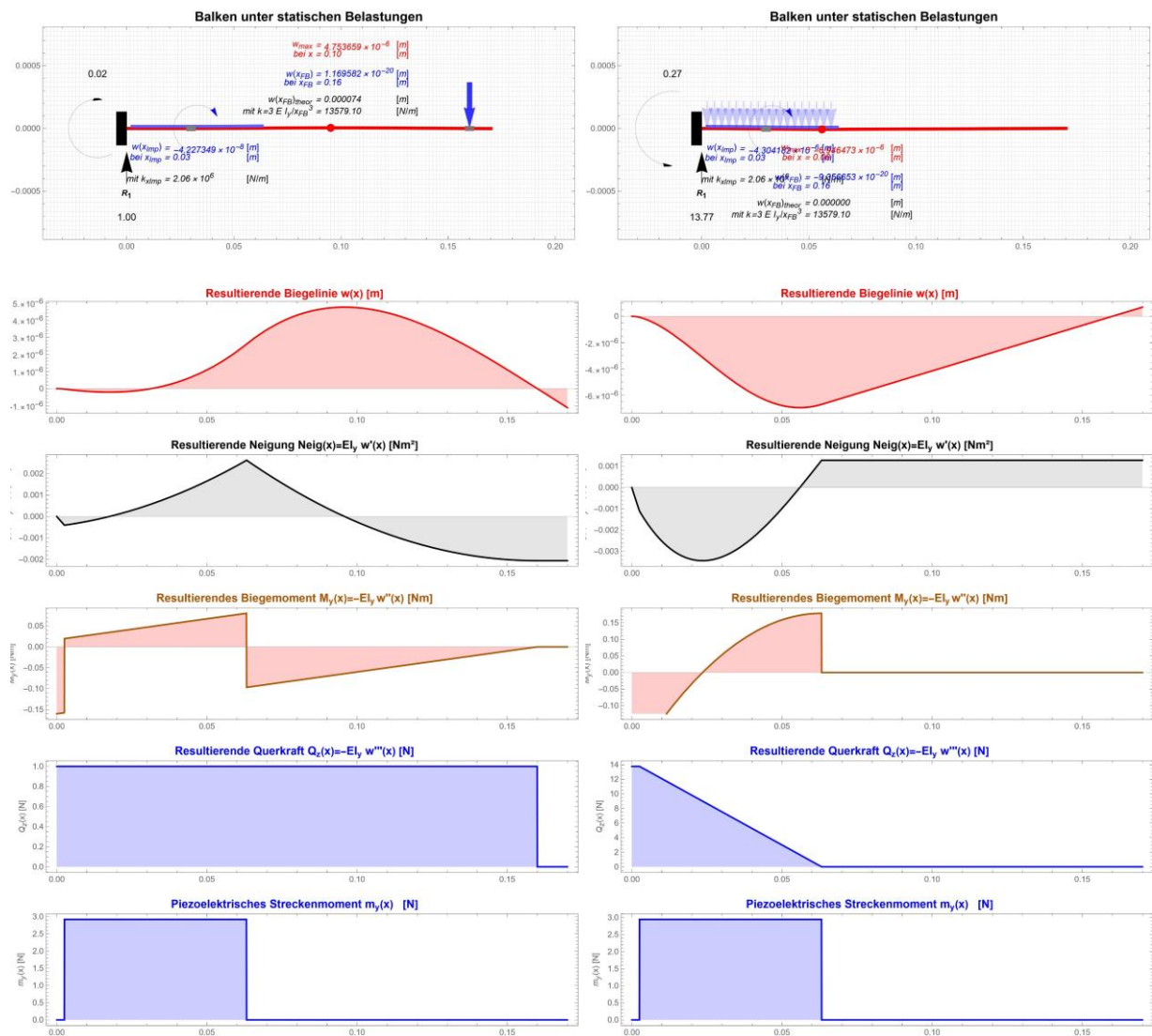


Abb. 1.6: Aktive Kompensation einer statischen Auslenkung mittels piezoelektrischem Streckenmoment $m_{y,opt}(x)$ an der Stelle x_{FB} :
links: bei einer externen Querkraft F_B ;
rechts: bei einer Streckenlast q .

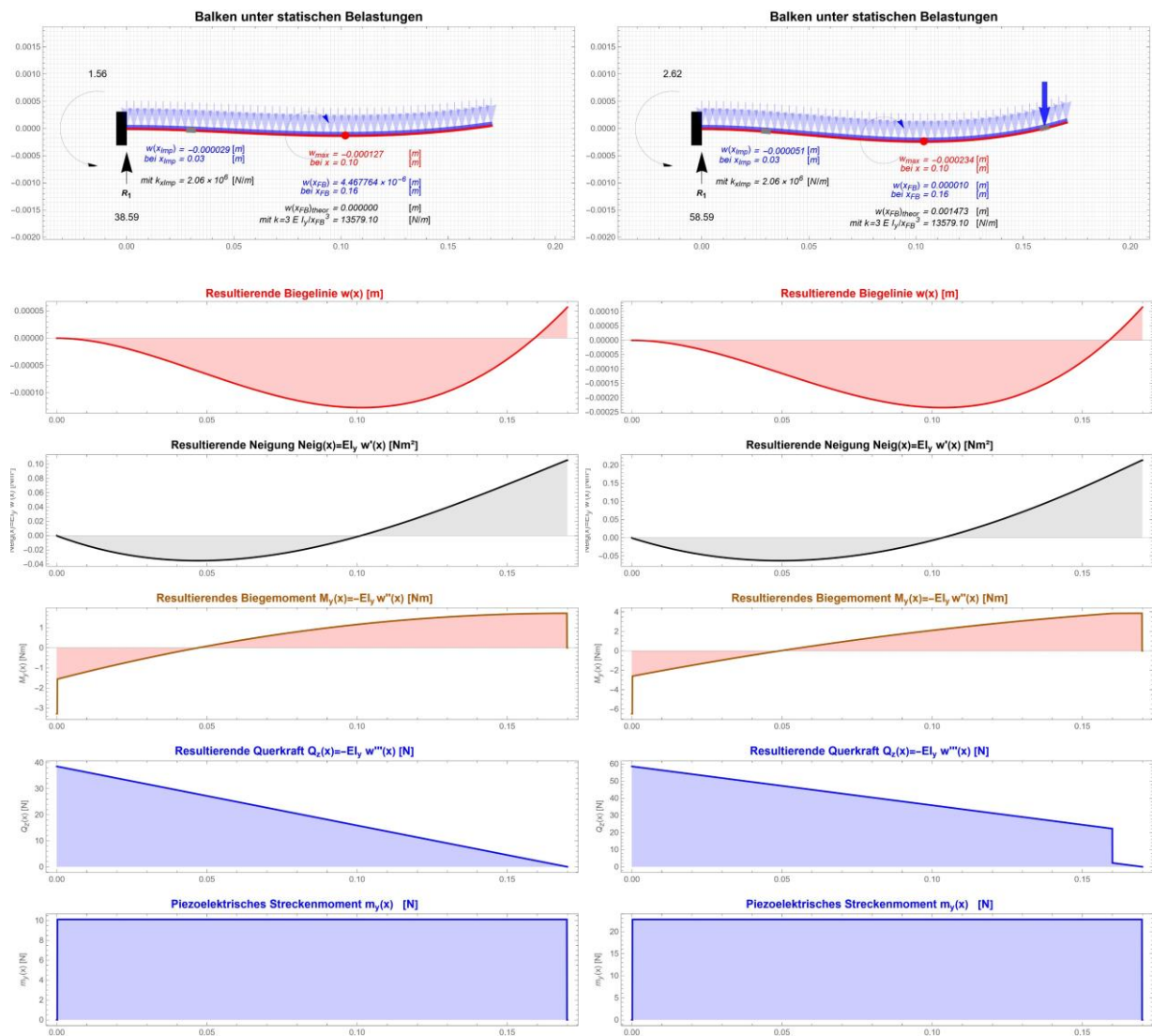


Abb. 1.7: Aktive Kompensation einer statischen Auslenkung an der Stelle x_{FB} mittels piezoelektrischem Streckenmoment $m_{y,opt}(x)$ über die vollständige Länge des Balkens:

links: im Schwerfeld q ;

rechts: bei gleichzeitig Präsenz von der Streckenlast und Einzel- bzw. Querkraft.

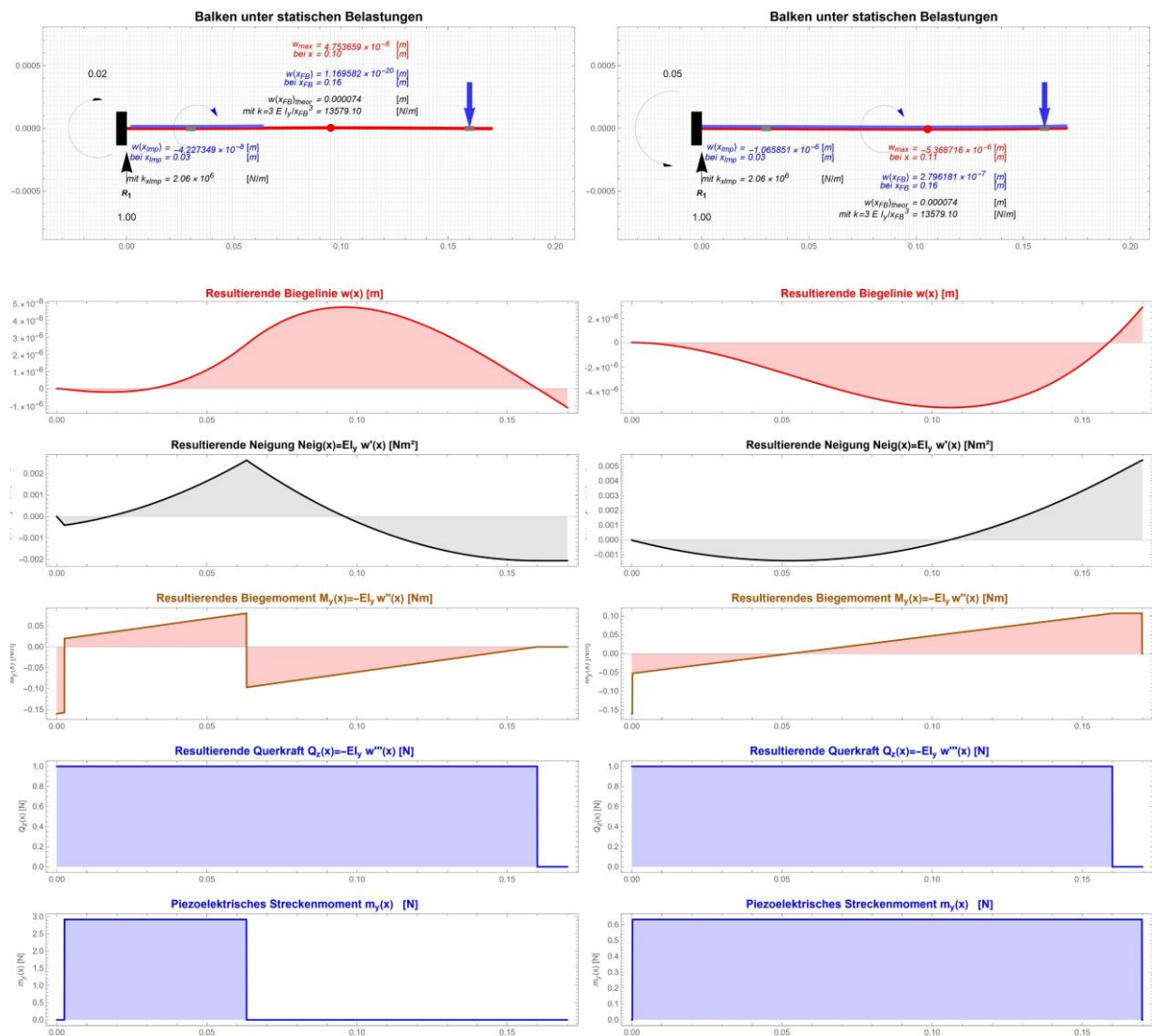


Abb. 1.8: Vergleich: aktive Kompensation einer statischen Auslenkung an der Stelle x_{FB} bei zwei verschiedenen Aktuatorlängen:

links: kürzere Aktuatorlängen;

rechts: Aktuatorlänge entspricht fast der Balkenlänge. Das Längenverhältnis (lang/kurz) ist etwa 2,797, während das Verhältnis der optimalen Streckenmomente (lang/kurz) nur 0,2166 ist. Die elektrische Energie reduziert sich in diesem Fall etwa um den Faktor 7,6.

Für die Berechnung des allgemeinen Falls der aktiven statischen Kompensation, bei der die drei verschiedenen Lasten in beliebigen, zusammenhängenden Bereichen des Balkens wirksam sind, empfehlen sich pathologischen Formulierungen. Bei der Einzelkraft F_B sind 2 Bereiche möglich, bei der Streckenlast q und dem piezoelektrischen Moment M jeweils 3, die zu insgesamt $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ Kombinationen führen:

$$Fall_1(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge 0 \leq x < x_{q1} \wedge 0 \leq x < x_{m1}$$

$$Fall_2(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge 0 \leq x < x_{q1} \wedge x_{m1} \leq x \leq x_{m2}$$

$$Fall_3(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge 0 \leq x < x_{q1} \wedge x_{m2} < x \leq L$$

$$Fall_4(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge x_{q1} \leq x \leq x_{q2} \wedge 0 \leq x < x_{m1}$$

$$Fall_5(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge x_{q1} \leq x \leq x_{q2} \wedge x_{m1} \leq x \leq x_{m2}$$

$$Fall_6(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge x_{q1} \leq x \leq x_{q2} \wedge x_{m2} < x \leq L$$

$$Fall_7(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge x_{q2} < x \leq L \wedge 0 \leq x < x_{m1}$$

$$Fall_8(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge x_{q2} < x \leq L \wedge x_{m1} \leq x \leq x_{m2}$$

$$Fall_9(x): 0 \leq x < x_{FB} \wedge x_{q2} < x \leq L \wedge x_{m2} < x \leq L$$

$$Fall_{10}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge 0 \leq x < x_{q1} \wedge 0 \leq x < x_{m1}$$

$$Fall_{11}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge 0 \leq x < x_{q1} \wedge x_{m1} \leq x \leq x_{m2}$$

$$Fall_{12}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge 0 \leq x < x_{q1} \wedge x_{m2} < x \leq L$$

$$Fall_{13}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge x_{q1} \leq x \leq x_{q2} \wedge 0 \leq x < x_{m1}$$

$$Fall_{14}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge x_{q1} \leq x \leq x_{q2} \wedge x_{m1} \leq x \leq x_{m2}$$

$$Fall_{15}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge x_{q1} \leq x \leq x_{q2} \wedge x_{m2} < x \leq L$$

$$Fall_{16}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge x_{q2} < x \leq L \wedge 0 \leq x < x_{m1}$$

$$Fall_{17}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge x_{q2} < x \leq L \wedge x_{m1} \leq x \leq x_{m2}$$

$$Fall_{18}(x): x_{FB} \leq x < L \wedge x_{q2} < x \leq L \wedge x_{m2} < x \leq L$$

Mit der Lagerkraft R_1 und dem Lagermoment M_1

$$R_1 = F_B + q(x_{q2} - x_{q1}) - R_2 \quad (1.34)$$

$$M_1 = M - F_B x_{FB} - \frac{1}{2} q(x_{q2}^2 - x_{q1}^2) + M_2 + R_2 L. \quad (1.35)$$

gilt dann für die Auslenkung des Kragbalkens:

$$w(x) = \frac{1}{E I_y} \left(M_1 \frac{x^2}{2} + R_1 \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 + w_i(x) |_{Fall_i(x)} \right) \quad \forall i \in [1, 18] \quad (1.36)$$

Dabei sind die Auslenkungsterme $w_i(x)$ für die 18 Fallunterscheidungen:

$$\begin{aligned}
 w_1(x) &= \frac{1}{2} M x^2 \\
 w_2(x) &= M x_{m1} x - \frac{1}{2} M x_{m1}^2 \\
 w_3(x) &= \frac{1}{2} M x^2 + M (x_{m1} - x_{m2}) x + M \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2} (x_{m1}^2 + x_{m2}^2) \right) \\
 w_4(x) &= -\frac{1}{24} q (x - x_{q1})^4 + \frac{1}{2} M x^2 \\
 w_5(x) &= -\frac{1}{24} q (x - x_{q1})^4 + M x_{m1} x - \frac{1}{2} M x_{m1}^2 \\
 w_6(x) &= -\frac{1}{24} q (x - x_{q1})^4 + \frac{1}{2} M x^2 + M (x_{m1} - x_{m2}) x + M \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2} (x_{m1}^2 + x_{m2}^2) \right) \\
 w_7(x) &= \frac{1}{24} q (-x_{q1}^4 + x_{q2}^4 + 4x(x_{q1}^3 - x_{q2}^3) - 6x^2(x_{q1}^2 - x_{q2}^2) + 4x^3(x_{q1} - x_{q2})) + \frac{1}{2} M x^2 \\
 w_8(x) &= \frac{1}{24} q (-x_{q1}^4 + x_{q2}^4 + 4x(x_{q1}^3 - x_{q2}^3) - 6x^2(x_{q1}^2 - x_{q2}^2) + 4x^3(x_{q1} - x_{q2})) + M x_{m1} x - \frac{1}{2} M x_{m1}^2 \\
 w_9(x) &= \frac{1}{24} q (-x_{q1}^4 + x_{q2}^4 + 4x(x_{q1}^3 - x_{q2}^3) - 6x^2(x_{q1}^2 - x_{q2}^2) + 4x^3(x_{q1} - x_{q2})) + \frac{1}{2} M x^2 \\
 &\quad + M (x_{m1} - x_{m2}) x + M \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2} (x_{m1}^2 + x_{m2}^2) \right) \\
 w_{10}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 + \frac{1}{2} M x^2 \\
 w_{11}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 + M x_{m1} x - \frac{1}{2} M x_{m1}^2 \\
 w_{12}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 + \frac{1}{2} M x^2 + M (x_{m1} - x_{m2}) x + M \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2} (x_{m1}^2 + x_{m2}^2) \right) \\
 w_{13}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 - \frac{1}{24} q (x - x_{q1})^4 + \frac{1}{2} M x^2 \\
 w_{14}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 - \frac{1}{24} q (x - x_{q1})^4 + M x_{m1} x - \frac{1}{2} M x_{m1}^2 \\
 w_{15}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 - \frac{1}{24} q (x - x_{q1})^4 + \frac{1}{2} M x^2 + M (x_{m1} - x_{m2}) x + M \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2} (x_{m1}^2 + x_{m2}^2) \right) \\
 w_{16}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 + \frac{1}{24} q (-x_{q1}^4 + x_{q2}^4 + 4x(x_{q1}^3 - x_{q2}^3) - 6x^2(x_{q1}^2 - x_{q2}^2) + 4x^3(x_{q1} - x_{q2})) \\
 &\quad + \frac{1}{2} M x^2 \\
 w_{17}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 + \frac{1}{24} q (-x_{q1}^4 + x_{q2}^4 + 4x(x_{q1}^3 - x_{q2}^3) - 6x^2(x_{q1}^2 - x_{q2}^2) + 4x^3(x_{q1} - x_{q2})) \\
 &\quad + M x_{m1} x - \frac{1}{2} M x_{m1}^2 \\
 w_{18}(x) &= -\frac{F_B}{6} (x - x_{FB})^3 + \frac{1}{24} q (-x_{q1}^4 + x_{q2}^4 + 4x(x_{q1}^3 - x_{q2}^3) - 6x^2(x_{q1}^2 - x_{q2}^2) + 4x^3(x_{q1} - x_{q2})) \\
 &\quad + \frac{1}{2} M x^2 + M (x_{m1} - x_{m2}) x + M \left(x_{m2}^2 - \frac{1}{2} (x_{m1}^2 + x_{m2}^2) \right)
 \end{aligned}$$

Für das optimale Moment M_{Opt} , das der Piezoaktuator für die aktive Kompensation an einer beliebigen Balkenstelle x_0 mit $0 \leq x_0 \leq L$ generieren muss, ergibt sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen des Kragbalkens:

$$M_{Opt}(x_0, F_B, q, x_{FB}, x_{q1}, x_{q2}) = M_{Opt,i}(x_0)|_{Fall_i(x_0)} \quad \forall i \in [1, 18] \quad (1.37)$$

mit den 18 Termen:

$$M_{Opt,1}(x_0) \rightarrow \infty$$

$$M_{Opt,2}(x_0) = \frac{-12C_2 - 12C_1x_0 - 6M_2x_0^2 - 6L R_2x_0^2 - 2F_Bx_0^3 + 2R_2x_0^3 + 6F_Bx_0^2x_{FB} + 2qx_0^3x_{q1} - 3qx_0^3x_{q1}^2 - 2qx_0^3x_{q2} + 3qx_0^3x_{q2}^2}{6(x_0 - x_{m1})^2}$$

$$M_{Opt,3}(x_0) = -\frac{12C_2 + 12C_1x_0 + 6M_2x_0^2 + 6L R_2x_0^2 + 2F_Bx_0^3 - 2R_2x_0^3 - 6F_Bx_0^2x_{FB} - 2qx_0^3x_{q1} + 3qx_0^3x_{q1}^2 + 2qx_0^3x_{q2} - 3qx_0^3x_{q2}^2}{6(x_{m1} - x_{m2})(-2x_0 + x_{m1} + x_{m2})}$$

$$M_{Opt,4}(x_0) \rightarrow \infty$$

$$M_{Opt,5}(x_0) = \frac{-24C_2 - 24C_1x_0 - 12M_2x_0^2 - 12L R_2x_0^2 - 4F_Bx_0^3 + 4R_2x_0^3 + qx_0^4 + 12F_Bx_0^2x_{FB} - 4qx_0x_{q1}^3 + qx_{q1}^4 - 4qx_0^3x_{q2} + 6qx_0^2x_{q2}^2}{12(x_0 - x_{m1})^2}$$

$$M_{Opt,6}(x_0) = \frac{-24C_2 - 24C_1x_0 - 12M_2x_0^2 - 12L R_2x_0^2 - 4F_Bx_0^3 + 4R_2x_0^3 + qx_0^4 + 12F_Bx_0^2x_{FB} - 4qx_0x_{q1}^3 + qx_{q1}^4 - 4qx_0^3x_{q2} + 6qx_0^2x_{q2}^2}{12(x_{m1} - x_{m2})(-2x_0 + x_{m1} + x_{m2})}$$

$$M_{Opt,7}(x_0) \rightarrow \infty$$

$$M_{Opt,8}(x_0) = -\frac{24C_2 + 24C_1x_0 + 12M_2x_0^2 + 12L R_2x_0^2 + 4F_Bx_0^3 - 4R_2x_0^3 - 12F_Bx_0^2x_{FB} + 4qx_0x_{q1}^3 - qx_{q1}^4 - 4qx_0^3x_{q2} + qx_{q2}^4}{12(x_0 - x_{m1})^2}$$

$$M_{Opt,9}(x_0) = -\frac{24C_2 + 24C_1x_0 + 12M_2x_0^2 + 12L R_2x_0^2 + 4F_Bx_0^3 - 4R_2x_0^3 - 12F_Bx_0^2x_{FB} + 4qx_0x_{q1}^3 - qx_{q1}^4 - 4qx_0^3x_{q2} + qx_{q2}^4}{12(x_{m1} - x_{m2})(-2x_0 + x_{m1} + x_{m2})}$$

$$M_{Opt,10}(x_0) \rightarrow \infty$$

$$M_{Opt,11}(x_0) = -\frac{12C_2 + 12C_1x_0 + 6M_2x_0^2 + 6L R_2x_0^2 - 2R_2x_0^3 - 6F_Bx_0^2x_{FB} + 2F_Bx_0^3x_{FB} - 2qx_0^3x_{q1} + 3qx_0^3x_{q1}^2 + 2qx_0^3x_{q2} - 3qx_0^3x_{q2}^2}{6(x_0 - x_{m1})^2}$$

$$M_{Opt,12}(x_0) = -\frac{12C_2 + 12C_1x_0 + 6M_2x_0^2 + 6L R_2x_0^2 - 2R_2x_0^3 - 6F_Bx_0^2x_{FB} + 2F_Bx_0^3x_{FB} - 2qx_0^3x_{q1} + 3qx_0^3x_{q1}^2 + 2qx_0^3x_{q2} - 3qx_0^3x_{q2}^2}{6(x_{m1} - x_{m2})(-2x_0 + x_{m1} + x_{m2})}$$

$$M_{Opt,13}(x_0) \rightarrow \infty$$

$$M_{Opt,14}(x_0) = \frac{-24C_2 - 24C_1x_0 - 12M_2x_0^2 - 12L R_2x_0^2 + 4R_2x_0^3 + qx_0^4 + 12F_Bx_0x_{FB}^2 - 4F_Bx_{FB}^3 - 4qx_0x_{q1}^3 + qx_{q1}^4 - 4qx_0^3x_{q2} + 6qx_0^2x_{q2}^2}{12(x_0 - x_{m1})^2}$$

$$M_{Opt,15}(x_0) = \frac{-24C_2 - 24C_1x_0 - 12M_2x_0^2 - 12L R_2x_0^2 + 4R_2x_0^3 + qx_0^4 + 12F_Bx_0x_{FB}^2 - 4F_Bx_{FB}^3 - 4qx_0x_{q1}^3 + qx_{q1}^4 - 4qx_0^3x_{q2} + 6qx_0^2x_{q2}^2}{12(x_{m1} - x_{m2})(-2x_0 + x_{m1} + x_{m2})}$$

$$M_{Opt,16}(x_0) \rightarrow \infty$$

$$M_{Opt,17}(x_0) = -\frac{24C_2 + 24C_1x_0 + 12M_2x_0^2 + 12L R_2x_0^2 - 4R_2x_0^3 - 12F_Bx_0x_{FB}^2 + 4F_Bx_{FB}^3 + 4qx_0x_{q1}^3 - qx_{q1}^4 - 4qx_0^3x_{q2} + qx_{q2}^4}{12(x_0 - x_{m1})^2}$$

$$M_{Opt,18}(x_0) = -\frac{24C_2 + 24C_1x_0 + 12M_2x_0^2 + 12L R_2x_0^2 - 4R_2x_0^3 - 12F_Bx_0x_{FB}^2 + 4F_Bx_{FB}^3 + 4qx_0x_{q1}^3 - qx_{q1}^4 - 4qx_0^3x_{q2} + qx_{q2}^4}{12(x_{m1} - x_{m2})(-2x_0 + x_{m1} + x_{m2})}$$

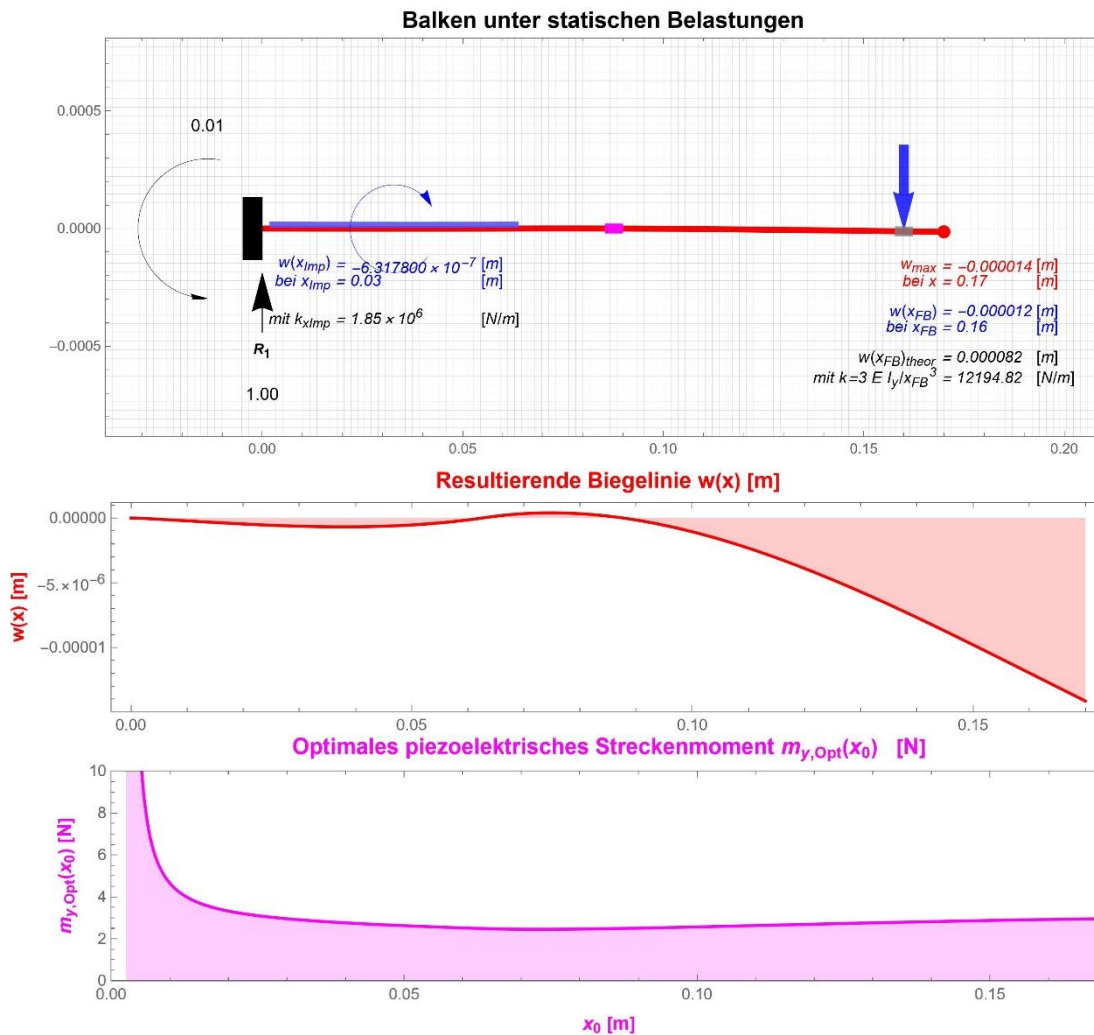
Das Ergebnis in der anschließenden Graphik zeigt sehr anschaulich, dass eine Kompensation links vom Piezoaktuator, also in dem Bereich $0 \leq x_0 < x_{m1}$ nicht möglich ist. Das liegt daran, dass der Piezoaktuator keine Querkräfte und Momente zur Einspannungsseite hin erzeugen kann. Die Stelle $x_0 = x_{m1}$ (am linken Rand des Aktuators) ist ebenfalls von einer Kompensation ausgeschlossen. Dort müsste der Aktuator ein unendlich hohes Moment aufbringen, da ihm dort keine relevante Aktuatorlänge zur Verfügung steht.

Die Berechnung weist eine weitere Polstelle auf, nämlich bei $x_0 = \frac{x_{m1} + x_{m2}}{2}$ (exakt in der Mitte des Aktuators). Sie tritt bei den Anwendungsfällen 3, 6, 9, 12, 15 und 18 auf. Allerdings ist diese Polstelle nicht wirksam, weil die Kondition für den Ort in diesen Fällen stets $x_{m2} < x_0 \leq L$ lautet.

Für das piezoelektrische Streckenmoment ergibt sich somit:

$$m_{y,opt}(x_0, F_B, q, x_{FB}, x_{q1}, x_{q2}) = \frac{M_{opt}(x_0, F_B, q, x_{FB}, x_{q1}, x_{q2})}{x_{m2} - x_{m1}}. \quad (1.38)$$

Nachfolgend sind zwei Simulationsbeispiele aufgeführt mit dem Verlauf des piezoelektrischen Streckenmoments. Es zeigt sich ein Kurvenminimum nur dann, wenn der Piezoaktuator nur geringe Längen aufweist.



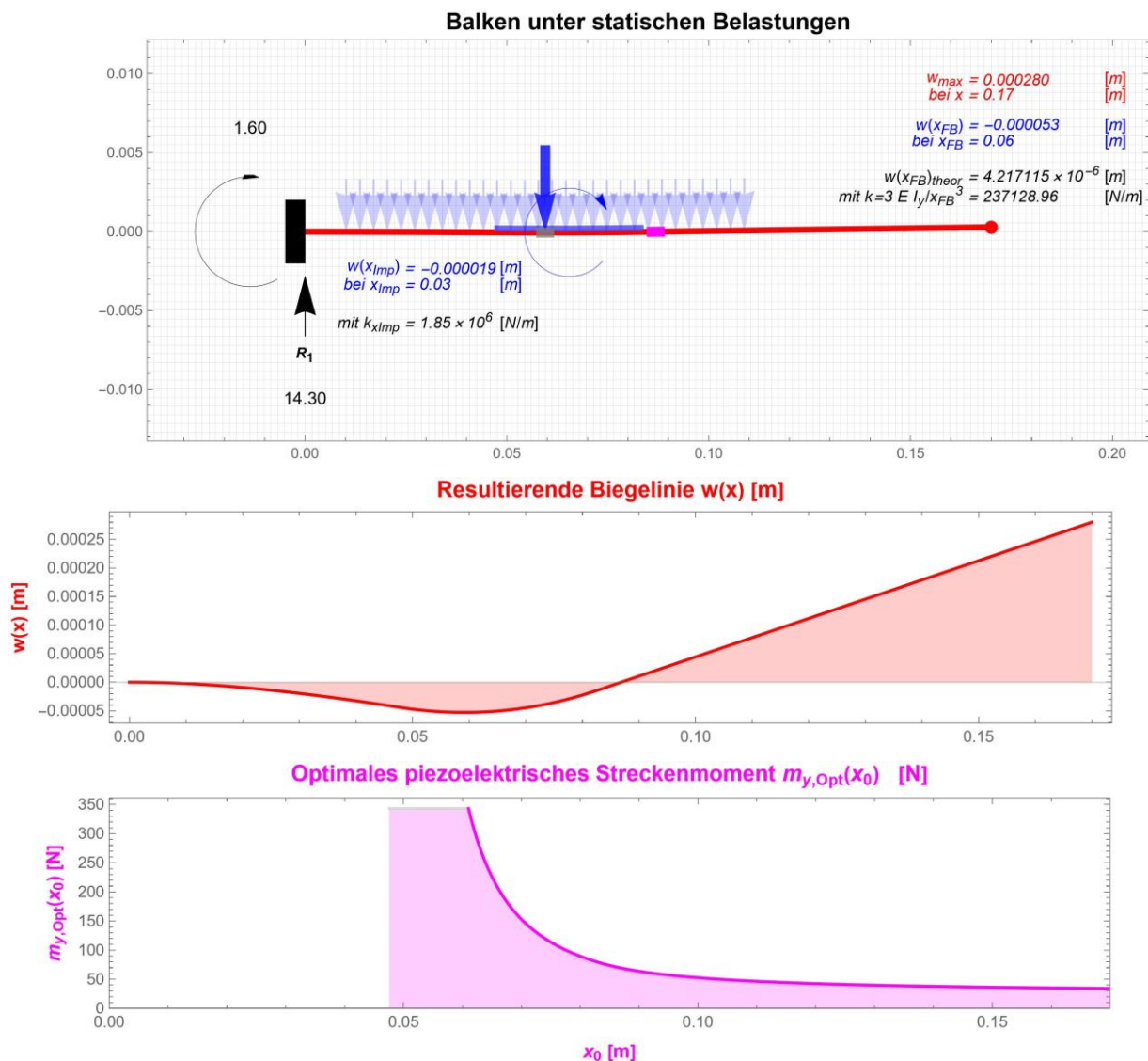


Abb. 1.10: Aktive Kompensation einer statischen Auslenkung in Abhängigkeit von der gewünschten Position x_0 der Kompensation (magenta-gefärbte Markierung) mittels piezoelektrischem Streckenmoment $m_{y,Opt}(x_0)$ im Bild unten.

1.3. Wirkungsweise des Piezoaktuators bei einem beidseitig eingespannten Balken

Die Wirkungsweise des Piezoaktuators ist bei einem beidseitig eingespannten Balken ähnlich: Die Einzellast verursacht Querkräfte (in z-Richtung) senkrecht zum Kraftfluss (x-Richtung), der Piezoaktuator dagegen erzeugt bei dem angenommenen Wirkungsbereich durch Normalkräfte an der Ankopplungsfläche Biegemomente. In dem vorliegenden Fall nimmt die Länge des Piezoaktuators die Balkenlänge an. Auch hier ist eine vollständige Kompensation der statischen Deformation nur an einzelnen Stellen möglich.

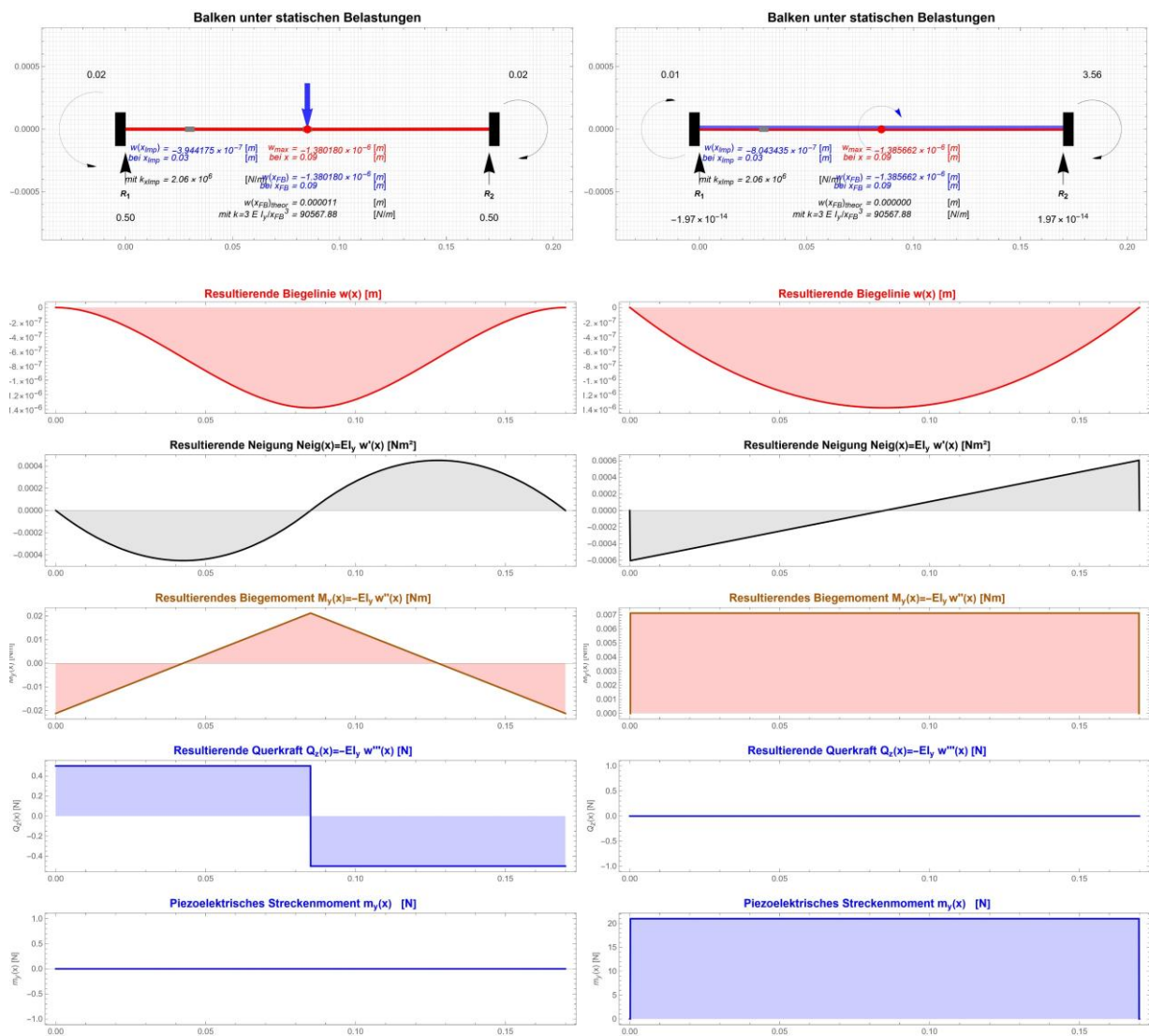


Abb. 1.11: Statische Auslenkung eines beidseitig fest eingespannten Balkens bei einer mittigen Einzellast (links) und durch einen über die ganze Balkenlänge applizierten Piezoaktuator (rechts).

2. Biegeschwingungen des Kragbalkens

Bei einem klassischen, Schubstarren Balken (Euler-Bernoulli-Balken) sind jegliche Schubverformungen aus Querkraften vernachlässigt. Ein Querschnitt steht demnach auch bei einer Verformung stets senkrecht zur Balkenachse. Zudem sei angenommen, dass ein ursprünglich ebener Querschnitt bei der Verformung eben und unverwölbt bleibt

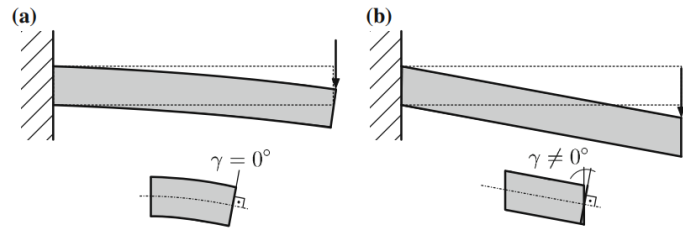


Abb. 2.1: Verformung bei einem (a) Schubstarren und bei einem (b) Schubweichen Biegebalken [Öchsner, 2016]

(Bernoulli-Hypothese). Die Breite und Höhe des Querschnitts bleiben also unverändert. Die Bernoulli-Hypothese gilt nachfolgend als angemessen, da die charakteristischen Abmessungen des Querschnitts mehr als zehn Mal kleiner als die Balkenlänge angenommen sind und der Schubanteil an der Verformung in erster Näherung vernachlässigbar ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise sind die Unterstreichungszeichen fortan weggelassen.

Biegewellen erfordern zu ihrer Beschreibung 4 Feldgrößen:

- die (transversale) Schnelle v_z eines Elements,
- seine Winkelgeschwindigkeit (Winkelschnelle) ω_y (um die zur Balkenachse und Auslenkung w senkrechte y-Achse),
- das am Querschnitt angreifende Biegemoment M_y (z.B. durch einen applizierten Piezoaktuator bedingt) und
- die durch den Querschnitt weitergeleitete Querkraft F_z .

Dies 4 Feldgrößen sind über differenzielle Beziehungen stets miteinander gekoppelt:

$$\omega_y = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (2.1) \quad \frac{\partial M_y}{\partial t} = -B \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$F_z = -\frac{\partial M_y}{\partial x} \quad (2.3) \quad -\frac{\partial F_z}{\partial x} = m' \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad (2.4)$$

Der Leistungstransport P einer Biegevelle in x-Richtung kann also sowohl durch einen auf dem Balken applizierten Piezopatch-Aktuator initiiert sein, der das Biegemoment M_y generiert, als auch durch eine externe Störkraft F_z :

$$P = M_y \cdot \omega_y + F_z \cdot v_z = 2 c_B \overline{m' v_z^2} = c_B \cdot \overline{m' v_z^2}. \quad (2.5)$$

Die dispersive Schall- bzw. Phasengeschwindigkeit der Biegevelle ist dabei

$$c_B = \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \sqrt[2]{\omega}. \quad (2.6)$$

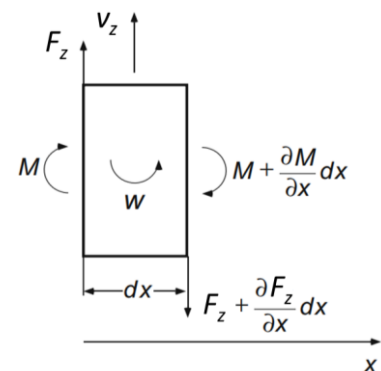


Abb. 2.2: Vorzeichenwahl der Feldgrößen bei einer Biegevelle [nach Cremer, Heckl, 1982 und Möser et al., 2010]. w ist die Auslenkung.

$m' = \rho A$ ist die Masse pro Längeneinheit, ρ die Dichte, A die Querschnittfläche, $B = E \cdot I_y$ die Biegesteife, E der Elastizitätsmodul, I_y das Flächenträgheitsmoment und ω die Kreisfrequenz. Der Quotient aus der Kreisfrequenz ω und der Biegewellen-Wellenzahl k

$$\frac{\omega}{k} = c_B \quad (2.7)$$

ergibt ebenfalls die Phasen-Geschwindigkeit c_B , mit der man fortschreiten muss, um immer die gleiche Phase der harmonischen Wellenbewegung anzutreffen [Cremer, Heckl, 1982]. Die Gruppengeschwindigkeit der Biegewelle ist für den Fall, dass Kreisfrequenzen und Wellenzahlen infinitesimal dicht beieinander liegen, durch den Differenzialquotienten gegeben:

$$c_B = \frac{d\omega}{dk} = 2 \sqrt{\frac{B}{m'}} k = 2 \cdot c_B. \quad (2.8)$$

Für die Biegewellen-Wellenzahl k gilt demnach der Zusammenhang:

$$k^4 = \omega^2 \frac{m'}{B}. \quad (2.9)$$

Sie kennzeichnet die zeitliche und räumliche Periodizität. Sobald Dämpfungserscheinungen durch einen komplexwertigen, dispersiven Elastizitätsmodul $\underline{E} = E' + jE'' = E'(1 + jd_0)$ zu berücksichtigen sind, ist die Wellenzahl ebenfalls komplexwertig [Kuttruff, 2004]:

$$\underline{k} = k \cdot \left(1 - j \frac{d_0}{4}\right). \quad (2.10)$$

Dabei ist d_0 der einheitslose Kennverlustfaktor der Biegewelle. Letztere ist auch der reziproke Wert der Güte Q und somit doppelt so groß wie das Lehrsche Dämpfungsmaß β :

$$d_0 = \frac{1}{Q} = 2\beta. \quad (2.11)$$

Der Kennverlustfaktor ist materialabhängig. Bei Stahl ist der typische Anhaltswert 10^{-4} .

Die Kombination der obigen 4 differenziellen Feldgrößen-Relationen ergibt die homogene, partielle Differenzialgleichung einer ungestörten Biegewelle auf einem unendlich langen Balken in eindimensionaler Form:

$$m' \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_z, \omega_y, M_y, F_z) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_z, \omega_y, M_y, F_z) \right) = 0. \quad (2.12)$$

Ist der unendlich lange Balken gerade und aus isotropem Material, also homogen, vereinfacht sich die Differenzialgleichung zu:

$$m' \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v_z, \omega_y, M_y, F_z) + B \frac{\partial^4}{\partial x^4} (v_z, \omega_y, M_y, F_z) = 0. \quad (2.13)$$

Der rein harmonische Ansatz, z.B.

$$v_z(x, t) = \hat{v}_z \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad (2.14)$$

erfüllt die Differenzialgleichung für beliebige Amplituden und Phasenwinkel [Cremer, Heckl, 1982]. Die Lösung $w(x, t)$ der obigen Biegewellen-Differenzialgleichung 4. Ordnung besitzt 4 Bestandteile: die auf- und abwärts laufenden Wellenanteile als auch die nach rechts und links abnehmenden Nahfelder an allen Störstellen. Letzte können durch Materialwechsel, Querschnittsprünge oder durch Lagerbedingungen entstehen. Sie verursachen Sprünge des Wellenwiderstands bzw. Impedanzsprünge. Sobald eine Welle auf einen derartigen Sprung trifft, kann sie dort eine reflektierte Welle und ein Nahfeld auslösen.

Bei einem endlich langen Balken erzeugen hin- und rücklaufende Biegewellen stehende Wellen. Es handelt sich hierbei um Biegeschwingungen, deren Form und Zeitverlauf von dem Material, der Geometrie und den Anfangs- und Randbedingungen abhängig sind.

Bezogen auf die freien Biegeschwingungen des ungedämpften Balkens lautet die Differenzialgleichung umgestellt:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} w(x, t) + \frac{m'}{B} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x, t) = 0. \quad (2.15)$$

Der Separationsansatz [Burg et al., 2010; Burg et al., 2013] für zunächst nur einer Mode

$$w(x, t) = \phi(x) \cdot q(t) \quad (2.16)$$

(Produktansatz von Bernoulli) führt die dadurch entstehende Relation

$$\frac{B}{m'} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} = -\frac{m'}{B} \frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \text{const} =: \omega^2 \quad (2.17)$$

nun zu zwei gewöhnlichen Differenzialgleichungen, einer zeitabhängigen

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \text{ bzw.} \quad (2.18)$$

$$\ddot{q}(t) + \frac{B}{m'} k^4 q(t) = 0 \quad (2.19)$$

und einer ortsabhängigen

$$\frac{B}{m'} \phi''''(x) - \omega^2 \phi(x) = 0 \text{ bzw.} \quad (2.20)$$

$$\phi''''(x) - k^4 \phi(x) = 0. \quad (2.21)$$

Die Randbedingungen für Biegeschwingungen an Balken sind durch die Lagerwahl an den Enden gegeben. Diese sind in Tabelle 2.1 aufgelistet.

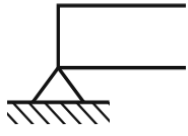
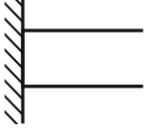
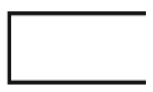
Feldgrößen an den Balkenenden:	$M = 0$	$w = 0$
$v = 0$	gelenkig gelagert: 	fest eingespannt: 
$F = 0$	frei: 	querkraftfrei: 

Tabelle 2.1: Feldgrößen an den Balkenenden.

Mit diesen Randbedingungen ergeben sich nur vereinzelte, diskrete Werte k_i ($i \in \mathbb{N}$) für die Wellenzahl k , bei denen sich Biegeschwingungen bei einer vorgegebenen Balkenlänge L ausbilden können. Mit diesen Werten k_i sind die Biege-Eigenfrequenzen $f_{B,i}$ und die Biege-Eigenformen $\phi_i(x)$ festgelegt.

Die Lösung der obigen zeitabhängigen Differenzialgleichung ist für die i -te Schwingungsform

$$q_i(t) = \hat{q}_i \cdot e^{j\sqrt{\frac{B}{m}} k_i^2 t + \varphi_i}, \quad (2.22)$$

wobei sich die Amplitude und Phase aus den Anfangsbedingungen ermitteln lassen.

Die Lösung der obigen ortsabhängigen Differenzialgleichung lässt sich für die i -te Schwingungsform mit Exponentialfunktionen oder gleichwertig auch mit trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen darstellen:

$$\phi_i(x) = \underbrace{\hat{\phi}_{i,+} e^{-jk_i x}}_{\substack{\text{nach rechts} \\ \text{laufende Welle}}} + \underbrace{\hat{\phi}_{i,-} e^{+jk_i x}}_{\substack{\text{nach links} \\ \text{laufende Welle}}} + \underbrace{\hat{\phi}_{i,-j} e^{-k_i x}}_{\substack{\text{nach rechts} \\ \text{abnehmendes Nahfeld}}} + \underbrace{\hat{\phi}_{i,j} e^{+k_i x}}_{\substack{\text{nach links} \\ \text{abnehmendes Nahfeld}}} \quad (2.23)$$

bzw. umgerechnet:

$$\phi_i(x) = \hat{\phi}_{i,s} \sin(k_i x) + \hat{\phi}_{i,c} \cos(k_i x) + \hat{\phi}_{i,sh} \sinh(k_i x) + \hat{\phi}_{i,ch} \cosh(k_i x). \quad (2.24)$$

Bei dieser Umrechnung sind die Konstanten:

$$\hat{\phi}_{i,-j} = \frac{1}{2}(\hat{\phi}_{i,ch} - \hat{\phi}_{i,sh}) \quad (2.25)$$

$$\hat{\phi}_{i,j} = \frac{1}{2}(\hat{\phi}_{i,ch} + \hat{\phi}_{i,sh}) \quad (2.26)$$

$$\hat{\phi}_{i,+} = \frac{1}{2}(\hat{\phi}_{i,c} + j \hat{\phi}_{i,s}) \quad (2.27)$$

$$\hat{\phi}_{i,-} = \frac{1}{2}(\hat{\phi}_{i,c} - j \hat{\phi}_{i,s}). \quad (2.28)$$

Bei einem fest-freien Balken führt eine weitere Umformung durch die Symmetrieeigenschaften

$$\hat{\phi}_{i,c} = \hat{\phi}_{i,ch} \text{ und} \quad (2.29)$$

$$\hat{\phi}_{i,s} = \hat{\phi}_{i,sh} \quad (2.30)$$

und mit der Normierung auf $\hat{\phi}_{i,c}$ zu der vereinfachten Form:

$$\frac{\phi_i(x)}{\hat{\phi}_{i,c}} = \cos(k_i x) - \cosh(k_i x) + \gamma_i(\sin(k_i x)), \quad (2.31)$$

mit nur noch einem Randbedingungsfaktor pro Eigenform:

$$\gamma_i = -\frac{\cos(k_i L) + \cosh(k_i L)}{\sin(k_i L) + \sinh(k_i L)}. \quad (2.32)$$

Seine Bestimmung erfolgt aus der Ansetzung von 4 Randbedingungen, jeweils 2 an jedem Balkenende. Das dabei entstehende homogene lineare Gleichungssystem hat nicht-triviale Lösungen, wenn seine Determinante verschwindet. Bei einem fest-freien Balken der Länge L lautet diese charakteristische Gleichung:

$$1 + \cos(kL) \cosh(kL) = 0. \quad (2.33)$$

Mit den Nullstellen führt sie zu den diskreten Werten $k_i L$, bei denen sich eine Biegeschwingung ausbilden kann. Mit den Material- und Geometriewerten aus [Tabelle 2.2](#) ergeben sich die Eigenwerte, Wellenzahlen, Eigenfrequenzen, Schallgeschwindigkeiten und Wellenlängen in [Tabelle 2.3](#) und die ersten 4 Eigenformen $\phi_i(x)$ ($i \in [1,4]$) gemäß der nicht-normierten und normierten Verläufe in den beiden Graphiken in [Abb. 2.5](#).

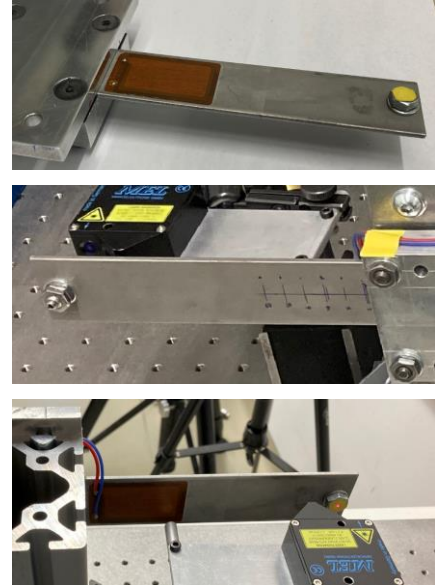


Abb. 2.3: Ansichten des einseitig eingespannten, hier bereits mit appliziertem Piezoaktuator und Zusatzmasse (2,2 g) am Balkenende [Späenberg, Melcher, 2022].

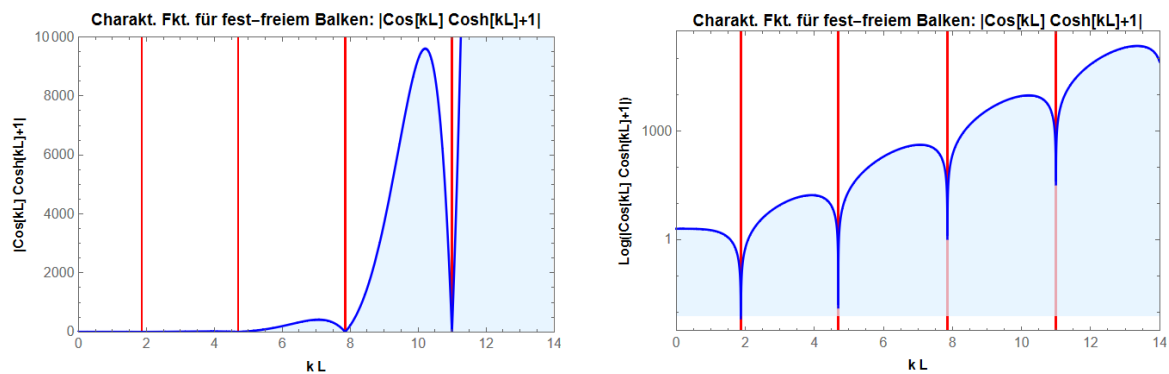


Abb. 2.4: Lineare und logarithmische Darstellung der charakteristischen Funktion für einen fest-freien Balken.

Balkenlänge:	$L = 0,17 \text{ [m]}$
Breite:	$b = 0,040 \text{ [m]}$
Höhe:	$h = 0,00315 \text{ [m]}$
Querschnittsfläche:	$A = b h = 0,000126 \text{ [m}^2\text{]}$
Dichte: (Federstahl)	$\varrho = 7850 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
Korrekturfaktor: (wg. Piezoklebung u. Extramasse)	KorrFaktor = 1,72121 [1]
Korr. Dichte	$\varrho_{eff} = 13511,5 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
Masse pro Länge	$m' = \varrho_{eff} \cdot A = 1,70245 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$
Elastizitätsmodul:	$E = 206 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
Flächenträgheitsmoment:	$I_y = \frac{b h^3}{12} = 1,04186 \cdot 10^{-10} \text{ [m}^4\text{]}$
Biegesteifigkeit:	$B = E I_y = 21,4624 \text{ [Nm}^2\text{]}$

Tabelle 2.2: Material- und Geometriewerte des Biegebalkens.

Mode i	Eigenwerte $k_i L$ [1]	Wellenzahlen k_i $\left[\frac{1}{m}\right]$	Randbedingungs- faktoren γ_i [1]	Biege-Eigen- frequenzen $f_{B,i}$ [Hz]	Schall- geschwin- digkeiten $c_{B,i}$ $\left[\frac{m}{s}\right]$	Biege- wellen- längen $\lambda_{B,i}$ [m]
1	1,8751	11,03	-0,734096	68,75	39,1631	0,5696
2	4,6941	27,6124	-1,01847	430,9	98,0404	0,2276
3	7,8548	46,2047	-0,999224	1206,4	164,054	0,1360
4	10,9956	64,68	-1,00003	2364,1	229,653	0,09714
$i > 4$	$(2i - 1) \frac{\pi}{2}$	$(2i - 1) \frac{\pi}{2L}$	$\gamma_i = -\frac{\cos(k_i L) + \cosh(k_i L)}{\sin(k_i L) + \sinh(k_i L)}$	$f_{B,i} = \frac{\omega_{B,i}}{2\pi} = \frac{k_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{B}{m'}}$	$c_{B,i} = \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \sqrt{\omega_{B,i}}$	$\lambda_{B,i} = \frac{c_{B,i}}{f_{B,i}}$

Tabelle 2.3: Eigenwerte, Wellenzahlen, Eigenfrequenzen, Schallgeschwindigkeiten und Wellenlängen des Biegebalkens

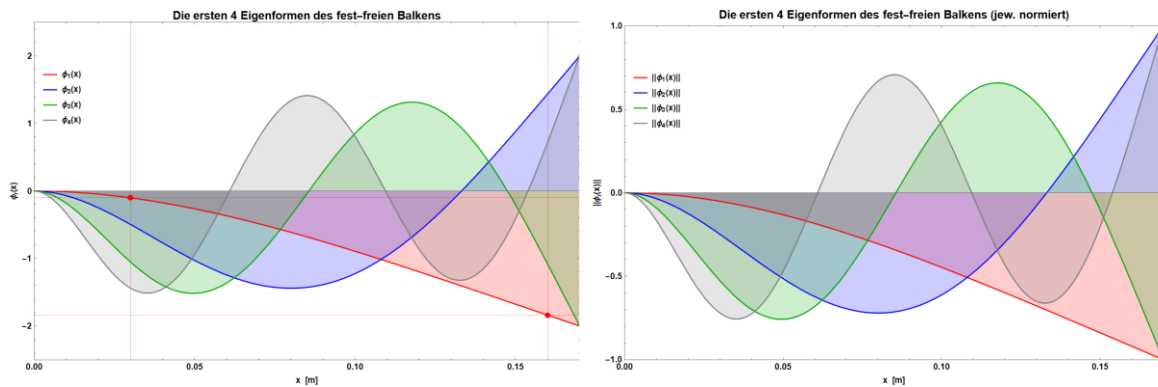


Abb. 2.5: Nicht-normierte und normierte Eigenformen des fest-freien Balkens.

Bei einem Balken mit beidseitig fester Einspannung ist der Randbedingungsfaktor

$$\alpha_i = -\frac{\cos(k_i L) - \cosh(k_i L)}{\sin(k_i x) - \sinh(k_i x)} \quad (2.34)$$

wogegen die Formulierung der Eigenformen erhalten bleibt:

$$\frac{\phi_i(x)}{\phi_{i,c}} = \cos(k_i x) - \cosh(k_i x) + \alpha_i (\sin(k_i x) - \sinh(k_i x)). \quad (2.35)$$

Die charakteristische Gleichung lautet jedoch verändert:

$$\cos(kL) \cosh(kL) - 1 = 0. \quad (2.36)$$

Mit den Nullstellen führt sie zu den diskreten Werten $k_i L_i$, bei denen sich eine Biegeschwingung ausbilden kann. Mit den Material- und Geometriewerten (Tabelle 2.4) resultieren die Eigenwerte, Wellenzahlen, Eigenfrequenzen, Schallgeschwindigkeiten und Wellenlängen (Tabelle 2.5) und die

ersten vier Eigenformen $\phi_i(x)$ ($i \in [1,4]$) gemäß der nicht-normierten und normierten Verläufe in den beiden Graphiken in [Abb. 2.8](#): Bei einer freien Schwingung sind grundsätzlich unendlich viele Eigenschwingungsformen beteiligt, so dass der Produktansatz in vollständiger Weise alle Eigenformen $\phi_i(x)$ mit den entsprechenden Zeitverläufen $q_i(t)$ zu

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \cdot q_i(t) \quad (2.37)$$

superponiert.

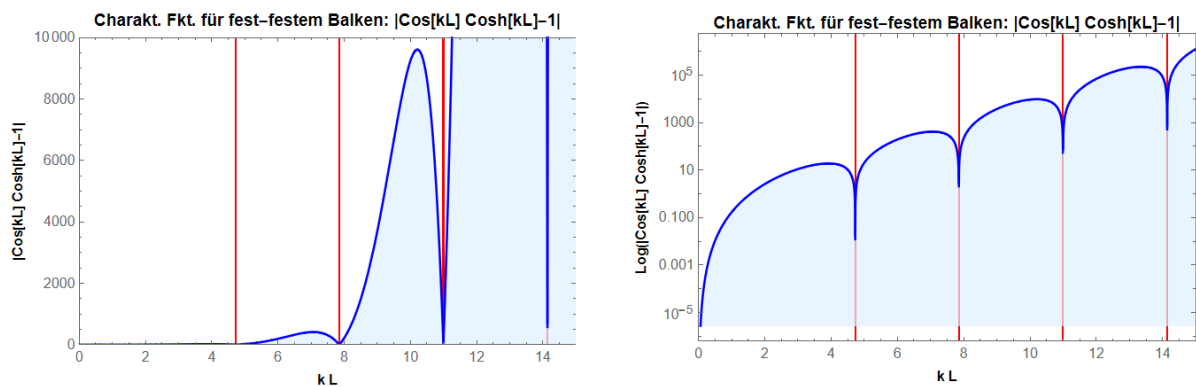


Abb. 2.6: Lineare und logarithmische Darstellung der charakteristischen Funktion für einen beidseitig fest eingespannten Balken.

Balkenlänge:	$L = 0,068 \text{ [m]}$
Breite:	$b = 0,040 \text{ [m]}$
Höhe:	$h = 0,00315 \text{ [m]}$
Querschnittsfläche:	$A = b \cdot h = 0,000126 \text{ [m}^2\text{]}$
Dichte: (Federstahl)	$\rho = 7850 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
Korrekturfaktor: (wg. Piezoklebung u. Extramasse)	KorrFaktor = 1,72121 [1]
Masse pro Länge	$m' = \rho_{eff} \cdot A = 1,70245 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$
Elastizitätsmodul:	$E = 206 \cdot 10^9 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
Flächenträgheitsmoment:	$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = 1,04186 \cdot 10^{-10} \text{ [m}^4\text{]}$
Biegesteifigkeit:	$B = E \cdot I_y = 21,4624 \text{ [Nm}^2\text{]}$

Tabelle 2.4: Material- und Geometriewerte des fixierten Biegebalkens.

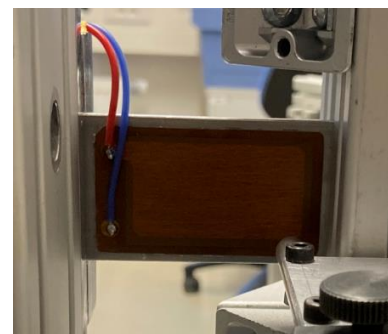
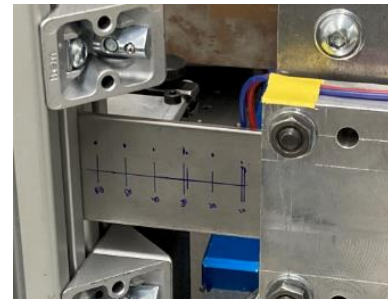


Abb. 2.7: Ansichten des beidseitig eingespannten Balkens, hier bereits mit appliziertem Piezoaktuator [Sparenberg, Melcher, 2022].

Mode i	Eigen- werte $k_i L$ [1]	Wellen- zahlen k_i $\left[\frac{1}{m}\right]$	Randbedingungs- faktoren γ_i [1]	Biege- Eigenfrequenzen $f_{B,i}$ [Hz]	Schall- geschwindig- keiten $c_{B,i}$ $\left[\frac{m}{s}\right]$	Biege- wellen- längen $\lambda_{B,i}$ [m]
1	4,73	69,56	-0,982502	2734	247	0,09
2	7,853	115,49	-1,00078	7537	410	0,05
3	10,996	161,7	-0,999966	14776	574	0,04
4	14,137	207,9	-1,0	24425	738	0,03
i>4	$(2i + 1) \frac{\pi}{2}$	$(2i + 1) \frac{\pi}{2L}$	$\gamma_i = -\frac{\cos(k_i L) - \cosh(k_i L)}{\sin(k_i L) - \sinh(k_i L)}$	$f_{B,i} = \frac{\omega_{B,i}}{2\pi} = \frac{k_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{B}{m'}}$	$c_{B,i} = \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \sqrt{\omega_{B,i}}$	$\lambda_{B,i} = \frac{c_{B,i}}{f_{B,i}}$

Tabelle 2.5: Eigenwerte, Wellenzahlen, Eigenfrequenzen, Schallgeschwindigkeiten und Wellenlängen des fixierten Biegebalkens

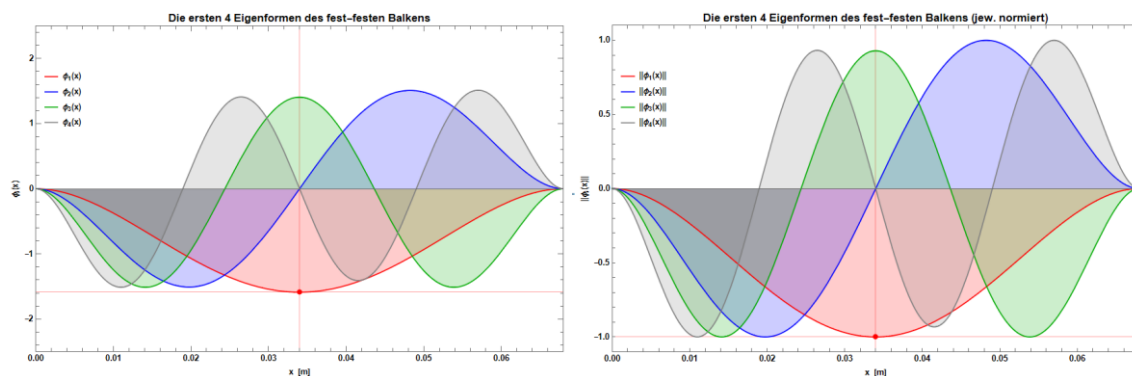


Abb. 2.8: Nicht-normierte und normierte Eigenformen des beidseitig fest eingespannten Balkens der Länge $L=0,068$ m. Rot gekennzeichnet ist der Ort der Impulshammer-Anregung.

3. Impedanzbasiertes Modell für dynamische Anregungen

3.1. Bewegungs- und Kraftgrößen, Impedanzen und Wandlerkonstante

Reale strukturintegrierte oder applizierte Piezoaktuatoren lassen sich sehr gut mit Hilfe elektrischer Ersatzschaltbilder modellieren, die sowohl die elektrischen als auch die mechanischen Eigenschaften vereinen [Melcher, 2001]. Die Basis ist die Kraft-Spannungsanalogie [Guicking, 2016]. Bei einem idealen (verlustfreien) Wandler gelten bei dieser elektromechanischen Analogie die Relationen zwischen dispersiven Kräften $\underline{F}$ und dispersiven Spannungen $\underline{U}$ bzw. zwischen Strömen $\underline{I}$ und Schnellen $\underline{v}$ gemäß

$$\underline{F} = \alpha \cdot \underline{U} \text{ bzw.} \quad (3.1)$$

$$\underline{I} = \alpha \cdot \underline{v}. \quad (3.2)$$

Mit Hilfe der Wandlergröße α erfahren die mechanischen Komponenten dabei eine Transformation in elektrische Größen. α ist eine skalare Größe, durch die sich der applizierte Piezo-Aktuator bzw. -Sensor kalibrieren lässt. Die Wandlergröße ist abhängig von den piezoelektrischen Ladungskonstanten (wie z.B. d_{31} , d_{33} , d_{15}) und von den Steifigkeiten der beteiligten mechanischen Struktursysteme. Bei einer Positionsänderung des Aktuators ändert sich daher auch der Wert der Wandlerkonstanten α . Aktuator- und Sensorbetrieb des identischen Piezowandlers besitzen eine identische Wandlergröße α . In der Relation zwischen elektrischen und mechanischen Impedanzen geht sie quadratisch ein:

$$\underline{Z}_{elek} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{F}/\alpha}{\alpha \cdot \underline{v}} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\underline{F}}{\underline{v}} = \frac{1}{\alpha^2} \underline{Z}_{mech}. \quad (3.3)$$

Bei der Kraft-Spannungsanalogie ändert sich allerdings der Schaltungstyp bei dem Wechsel vom Elektrischen ins Mechanische: eine elektrische Parallelschaltung entspricht im Mechanischen einer Serienschaltung und umgekehrt. Das liegt daran, dass sich im Elektrischen die Ströme bei einer Parallelschaltung aufteilen und die Spannungen überall gleich sind, wogegen sich die mechanischen Kräfte bei einer mechanischen Serienschaltung aufteilen und die Schnellen dann gleich sind.

Durch Einführung der Wandlerkonstanten α sind die elektrischen und die entsprechenden mechanischen Größen grundsätzlich gleichwertig. Allerdings bedarf es einer besonderen Sorgfalt bei der Verschaltung der mechanischen Masse (serielle oder parallele Masse), da eine Masse im Gegensatz zu einer Induktivität nur einen Anschlusspunkt besitzt.

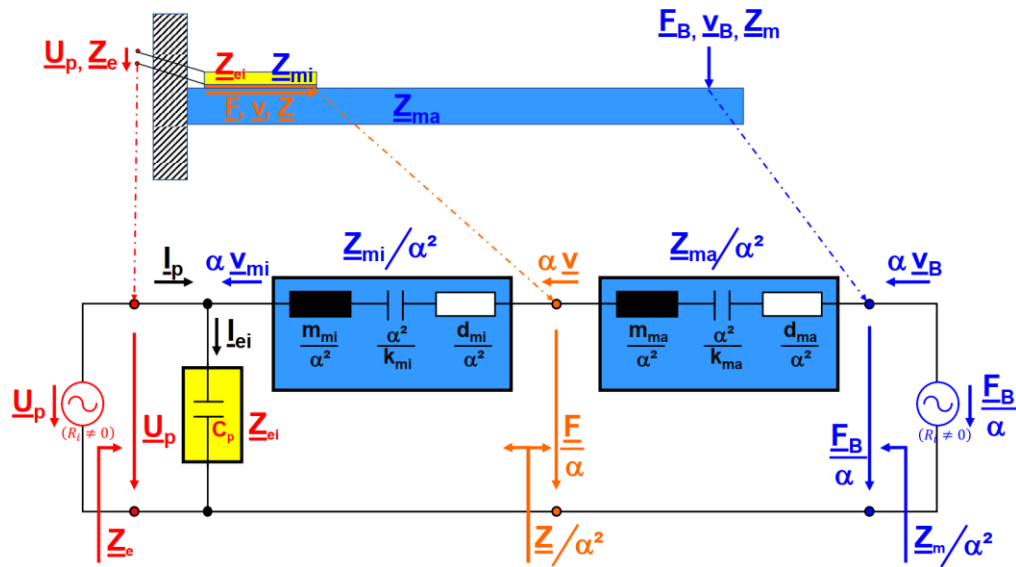


Abb. 3.1: Schema des mechanischen Aufbaus (oben) und dazugehöriges elektrisches Ersatzschaltbild (unten) des Balkens mit einem applizierten piezoelektrischen Aktuator. Mechanische Größen erfahren mit Hilfe der Wandlerkonstanten α eine Transformation in elektrische Größen. Beide Spannungsquellen sind nicht ideal ($R_i \neq 0$). Die mechanischen Komponenten Z_{mi} und Z_{ma} sind exemplarisch als Ein-Freiheitsgradsysteme dargestellt. Die Analogie des Ankoppelpunkts und der Messpunkte sind gestrichelt gekennzeichnet. Die Vorzeichenkonvention richtet sich nach der primären Störquelle. An der Ankoppelstelle bewegen sich der Piezoaktuator und der Balken mit der gleichen Schnelle $\underline{v}$. Der Piezoaktuator und der Balken sind daher mechanisch parallel angeordnet.

Das elektrische Ersatzschaltbild ist eine vereinfachte Analogie des mechanischen Aufbaus. Sie kann sich in dem vorliegenden Fall auf die Klebestelle des Piezoaktuators mit dem Balken beziehen oder auf die beiden Messpunkte, das sind der elektrische Eingang des Piezoaktuators und die Messstelle der mechanischen Größen in der Nähe des Balkenendes. Zudem enthält das Ersatzschaltbild konzentrierte, diskrete Schaltelemente. Abweichungen davon, z. B. durch Annahme einer Ankoppelstrecke -bzw. -fläche anstelle eines Ankoppelpunktes, führen zu modifizierten Betrachtungsweisen (s. später).

Der Piezoaktuator besitzt durch seinen Kondensatoraufbau die elektrische Kapazität

$$C_p = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{h}. \quad (3.4)$$

ε und ε_0 sind die absolute und die relative Dielektrizitätszahl, A ist die Fläche des Flächenaktuators und h der Abstand der Elektroden. Die Kapazität geht allein in die innere elektrische Impedanz Z_{ei} ein gemäß

$$Z_{ei} = \frac{1}{j\omega C_p}. \quad (3.5)$$

Die mechanischen Komponenten des Piezoaktuators (einschließlich der Klebeschicht) sind in der inneren mechanischen Impedanz

$$\underline{Z}_{mi} = j\omega \cdot m_{mi} + d_{mi} + \frac{1}{j\omega} k_{mi} \quad (3.6)$$

enthalten. In dem elektrischen Ersatzschaltbild ist sie die elektrische Impedanz

$$\frac{\underline{Z}_{mi}}{\alpha^2} = j\omega \cdot \frac{m_{mi}}{\alpha^2} + \frac{d_{mi}}{\alpha^2} + \frac{1}{j\omega} \frac{k_{mi}}{\alpha^2}. \quad (3.7)$$

Als $\frac{m_{mi}}{\alpha^2}$ entspricht die mitschwingende Masse m_{mi} nun einer Induktivität. Der ohmsche Widerstand $\frac{d_{mi}}{\alpha^2}$ ist die elektrische Analogie der physikalischen Dämpfung d_{mi} und der Term $\frac{k_{mi}}{\alpha^2}$ ist die analoge, reziproke Kapazität der Steifigkeit k_{mi} .

Die mechanische Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ repräsentiert den Balken. Sie ist die ortsabhängige, mechanische Eingangsimpedanz des Balkens aus Sicht des Shakers oder (mit veränderten Werten, s. später) die mechanische Eingangsimpedanz aus Sicht des Piezoaktuators an der Stelle des Aktuators:

$$\underline{Z}_{ma} = j\omega \cdot m_{ma} + d_{ma} + \frac{1}{j\omega} \cdot k_{ma} =: \begin{cases} \underline{Z}_{ma,F} & \text{am Ankoppelpunkt } \underline{F} \\ \underline{Z}_{ma,FB} & \text{am Ankoppelpunkt } \underline{F}_B. \\ \underline{Z}_{ma,x} & \text{an beliebiger Stelle } x \end{cases} \quad (3.8)$$

Auch hier ist zunächst lediglich die erste Schwingungsform betrachtet. In dem elektrischen Ersatzschaltbild ist die Balkenimpedanz repräsentiert durch die elektrische Impedanz

$$\frac{\underline{Z}_{ma}}{\alpha^2} = j\omega \cdot \underbrace{\frac{m_{ma}}{\alpha^2}}_{\text{Induktivität}} + \underbrace{\frac{d_{ma}}{\alpha^2}}_{\text{Widerstand}} + \frac{1}{j\omega} \cdot \underbrace{\frac{k_{ma}}{\alpha^2}}_{\text{reziproke Kapazität}} \quad (3.9)$$

mit der identischen Wandlerkonstanten α wie bei der Impedanz $\underline{Z}_{mi}$. Die beiden Spannungsquellen $\underline{U}_p$ und $\frac{\underline{F}_B}{\alpha}$ sind nicht-ideal. Ihr Innenwiderstand verschwindet daher nicht. Auch ein Shaker ist nicht rückwirkungsfrei. Ggf. ist für ihn die Impedanz $\underline{Z}_s$ vorzusehen, die, aus Sicht des Piezoaktuators, die Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ additiv ergänzt. Sobald der piezoelektrische Wandler aktuatorisch betrieben wird, fließt ein elektrischer Strom $\underline{I}_p$, der sich in den Strom $\underline{I}_{ei}$, der den piezoelektrischen Kondensator lädt, und in den Strom $\alpha \underline{v}_{mi}$, der die mechanischen Komponenten der Schaltung versorgt. Die Vorzeichenkonvention des Stroms am Ankoppelpunkt richtet sich nach der primären Störquelle, so dass gilt:

$$\underline{I}_p = \underline{I}_{ei} - \alpha \cdot \underline{v}_{mi} = \underline{I}_{ei} - \alpha \cdot \underline{v} = \frac{1}{\underline{Z}_{ei}} \underline{U}_p + \underline{U}_p \cdot \frac{\alpha^2}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} = \underline{U}_p \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{ei}(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})}, \quad (3.10)$$

Mit der Impedanzaufteilung folgen die Stromrelationen:

$$\frac{\alpha \underline{v}_{mi}}{\underline{I}_{ei}} = - \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\underline{I}_{ei}}{\underline{I}_p} = \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad \text{und} \quad (3.12)$$

$$\frac{\alpha \cdot \underline{v}_{mi}}{l_p} = -\frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.13)$$

Die aktuatorische Kraft- und Bewegungsgleichung lauten somit:

$$\underline{F}_B = \alpha \cdot \underline{U}_p + (\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}) \cdot \underline{v}_B \quad \text{und} \quad (3.14)$$

$$l_p = \frac{1}{\underline{Z}_{ei}} \underline{U}_p - \alpha \cdot \underline{v}_B, \quad (3.15)$$

zusammengefasst in der Aktuatorgleichung:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ l_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha \underline{Z}_{ei}} & -\alpha - \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha \underline{Z}_{ei}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_B \\ \underline{v}_B \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Liegt am Piezoaktuatoreingang die Spannung $\underline{U}_p$ an, ergibt sich am freien Balkenende die Schnelle

$$\underline{v}_B(\underline{U}_p) = \underline{v}(\underline{U}_p) = \underline{v}_{mi}(\underline{U}_p) = -\alpha \cdot \underline{U}_p \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.17)$$

Bei einem freien Balkenende ist die Kraft $\underline{F}_B$ ist dort null. Gegenüber einer unendlich hohen Steifigkeit hätte sie an einem dadurch fixierten Balkenende aber den Wert einer Blockierkraft (Blocking force):

$$\underline{F}_B(\underline{U}_p) = \alpha \cdot \underline{U}_p \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma,fix}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}}. \quad (3.18)$$

Zu beachten ist dabei, dass sich die Impedanz $\underline{Z}_{ma,fix}$ nicht mehr auf einen Kragbalken beziehen kann.

Bei der sensorischen Kraft- und Bewegungsgleichung ändern sich nur zwei Vorzeichen:

$$\underline{F}_B = \alpha \cdot \underline{U}_p - (\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}) \cdot \underline{v}_B \quad \text{und} \quad (3.19)$$

$$l_p = -\frac{1}{\underline{Z}_{ei}} \underline{U}_p - \alpha \cdot \underline{v}_B, \quad (3.20)$$

die sich in der Sensorgleichung zusammenfassen lassen gemäß:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_B \\ \underline{v}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha \underline{Z}_{ei}} & \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha \underline{Z}_{ei}} & -\frac{1}{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_p \\ l_p \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Nomenklatur bei Parallelschaltungen:

$$\underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \text{bzw.} \quad \underline{Z}_1 \parallel \underline{Z}_2 \parallel \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}$$

Die sensorische Spannung $\underline{U}_p(\underline{F}_B)$ lässt sich gemäß der Schaltung auch als Funktion der Kraft $\underline{F}_B$ ausdrücken:

$$\underline{U}_p(\underline{F}_B) = \frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \frac{\underline{Z}_{ei}}{\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2} + \underline{Z}_{ei}} = \frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.22)$$

An den Elektroden des Piezoaktuators ist die elektrische Eingangsimpedanz $\underline{Z}_e$ messbar:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{ei} \parallel \frac{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} - \underline{F}_B / \underline{v}_B)}{\alpha^2} = \frac{\underline{Z}_{ei} \cdot (\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} - \underline{F}_B / \underline{v}_B)}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + (\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} - \underline{F}_B / \underline{v}_B)}. \quad (3.23)$$

Für den Fall, dass keine mechanische Krafteinwirkung vorhanden ist ($\underline{F}_B = 0$), gilt:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_{ei} \cdot (\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.24)$$

An einer definierten Position des Balkens (z.B. am Ende oder an der Anbringungsstelle des anregenden Shakers, siehe nächste Kapitel) besitzt das System gemäß der Ersatzschaltung unter Berücksichtigung der Vorzeichenkonvention die mechanische Ausgangsimpedanz $\underline{Z}_m$

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}_B}{\underline{v}_B} = -(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}) - \alpha^2 \underline{Z}_{ei} \parallel \frac{\underline{U}_p}{\underline{I}_p}. \quad (3.25)$$

Für den Fall, dass am Piezoaktuator keine Spannung anliegt ($\underline{U}_p = 0$), gilt:

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}_B}{\underline{v}_B} = -(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}) - \alpha^2 \underline{Z}_{ei}. \quad (3.26)$$

3.2. Betriebsmodi des aktivierbaren Balkens am Ankoppelpunkt

Die Ankopplung des Piezowandlers an den Balken erfolgt über eine Klebeschicht. Dort bewegen sich der Piezoaktuator und der Balken mit der gleichen Schnelle $\underline{v}$. Sie sind daher mechanisch parallel angeordnet und im elektrischen Ersatzschaltbild seriell geschaltet. Zwischen dem Piezoaktuator und dem Balken wirkt die Normalkraft $\underline{F}$. Die Kraft und die Schnelle sind dort grundsätzlich bestimmbar, wenn die beiden Impedanzen mechanischen $\underline{Z}_{mi}$ und $\underline{Z}_{ma}$ einzeln bekannt sind. Die mechanische Impedanz am Ankoppelbereich ist hier zunächst als Kraftimpedanz angesetzt:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} \quad (3.27)$$

bzw. als elektrische Impedanz in der Schaltung:

$$\frac{\underline{Z}}{\alpha^2} = \frac{\underline{F}/\alpha}{\alpha \cdot \underline{v}} \quad (3.28)$$

Da die Kraft $\underline{F}$ dispersive Biegemomente $\underline{M}$ erzeugt, kann die Impedanz auch als eine Momentenimpedanz $\underline{W} = \underline{M}/\underline{\omega}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ aufgefasst werden (s. Kap. 3.6, unter Berücksichtigung der Änderung der physikalischen Einheiten). Um die Abhängigkeiten der drei Größen $\underline{Z}$, $\underline{F}$ und $\underline{v}$ von den beiden Quellen $\underline{U}_p$ und $\underline{F}_B$ zu erhalten, ist die Betrachtung der nachfolgenden drei Betriebsmodi hilfreich.

3.2.1. Piezoaktuator nicht im Betrieb ($\underline{U}_p = 0$), nur Einzelkraft am Balkenende ($\underline{F}_B \neq 0$):

Gemäß der Schaltung ergibt sich dann für die Schnelle $\underline{v}$ am Ankoppelpunkt der Strom:

$$\alpha \cdot \underline{v} =: \alpha \cdot \underline{v}_{(1)} = \frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.29)$$

und für die Normalkraft $\underline{F}$ die Spannung

$$\frac{\underline{F}}{\alpha} =: \frac{\underline{F}_{(1)}}{\alpha} = \frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.30)$$

Die mechanische Impedanz $\underline{Z}$ entspricht somit erwartungsgemäß der Impedanz des Aktuators:

$$\frac{\underline{Z}}{\alpha^2} = \frac{\underline{F}_{(1)}/\alpha}{\alpha \cdot \underline{v}_{(1)}} = \underline{Z}_{ei} + \frac{\underline{Z}_{mi}}{\alpha^2} \quad (3.31)$$

3.2.2. Piezoaktuator im Betrieb ($\underline{U}_p \neq 0$), keine Einzelkraft am Balkenende ($\underline{F}_B = 0$):

Bei dieser Einstellung ergibt sich für die Schnelle $\underline{v}$ am Ankoppelpunkt der Strom:

$$\alpha \cdot \underline{v} =: \alpha \cdot \underline{v}_{(2)} = -\underline{U}_p \cdot \frac{\alpha^2}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.32)$$

Die Stromaufteilung

$$\underline{I}_p = \underline{I}_{ei} - \alpha \cdot \underline{v} = \frac{1}{\underline{Z}_{ei}} \underline{U}_p + \underline{U}_p \cdot \frac{\alpha^2}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} = \underline{U}_p \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{ei}(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})} \quad (3.33)$$

führt in der Schaltung zu dem Stromverhältnis

$$\frac{\alpha \cdot \underline{v}}{\underline{I}_p} = -\frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.34)$$

Aus der linken Masche der Schaltung ergibt sich für die Normalkraft $\underline{F}$ die Spannung

$$\frac{\underline{F}}{\alpha} =: \frac{\underline{F}_{(2)}}{\alpha} = \underline{U}_p + \frac{\underline{Z}_{mi}}{\alpha^2} \alpha \underline{v}_{(2)} = \underline{U}_p \left(1 - \frac{\underline{Z}_{mi}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \right) = \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.35)$$

und somit für die mechanische Impedanz $\underline{Z}$

$$\frac{\underline{Z}}{\alpha^2} = \frac{\underline{F}_{(2)}/\alpha}{\alpha \cdot \underline{v}_{(2)}} = -\frac{\underline{Z}_{ma}}{\alpha^2}. \quad (3.36)$$

Wegen der Vorzeichenkonvention führt dieser Betriebsmodus zu einer negativen Impedanz.

3.2.3. Beide Quellen im Betrieb ($\underline{U}_p \neq 0 \wedge \underline{F}_B \neq 0$):

In diesem Fall superponieren die beiden vorangehenden Fälle. Die Schnelle

$$\underline{v}(\underline{U}_p, \underline{F}_B) = \underline{F}_B \cdot \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} - \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.37)$$

entspricht dem Strom

$$\alpha \cdot \underline{v} = \alpha \cdot \underline{v}_{(1)} + \alpha \cdot \underline{v}_{(2)} = \frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} - \underline{U}_p \cdot \frac{\alpha^2}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.38)$$

und die dortige Normalkraft

$$\underline{F}(\underline{U}_p, \underline{F}_B) = \underline{F}_B \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} + \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.39)$$

der Spannung

$$\frac{\underline{F}}{\alpha} = \frac{\underline{F}_{(1)}}{\alpha} + \frac{\underline{F}_{(2)}}{\alpha} = \frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} + \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.40)$$

Bei vollständigem Betrieb ist die mechanische Impedanz des Ankoppelpunkts

$$\underline{Z}(\underline{U}_p, \underline{F}_B) = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} = \frac{\underline{F}_B(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}) + \alpha \underline{U}_p \frac{\underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})}{\underline{F}_B - \alpha \underline{U}_p \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})} \quad (3.41)$$

in elektrischer Form:

$$\frac{\underline{Z}}{\alpha^2} = \frac{\underline{F}/\alpha}{\alpha \underline{v}} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\frac{\underline{F}_B}{\alpha} (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}) + \underline{U}_p \frac{\underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})}{\frac{\underline{F}_B}{\alpha} - \underline{U}_p \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})} \quad (3.42)$$

3.3. Am Ankoppelpunkt übertragene komplexe Leistung

$\underline{P}(t)$ enthält die reale Wirkleistung $P_W(t)$ und die imaginäre Blindleistung $P_B(t)$ [Melcher, 2001]:

$$\underline{P}(t) = P_W(t) + j \cdot P_B(t) = \frac{1}{2} \underline{F} \cdot \underline{v}^* = \frac{1}{2} \underline{v} \cdot \underline{v}^* \cdot \underline{Z} = \frac{1}{2} \frac{\underline{F} \underline{F}^*}{\underline{Z}} = \frac{1}{2} |\underline{F}|^2 \frac{1}{\underline{Z}}. \quad (3.43)$$

Die Leistung, die die mechanische Struktur an dieser Stelle aufnimmt, ist nur durch die Kraft $\underline{F}$ und die Schnelle $\underline{v}$ bzw. durch die Eingangsimpedanz $\underline{Z}(\underline{U}_p)$ an dieser Stelle gegeben [Möser, et al., 2010]:

$$\overline{P_W(t)} = \overline{Re\{\underline{P}(t)\}} = \frac{1}{4} (\underline{F} \cdot \underline{v}^* + \underline{F}^* \cdot \underline{v}) = \frac{1}{2} Re\{\underline{F} \cdot \underline{v}^*\} = \frac{1}{2} |\underline{F}|^2 Re\left\{\frac{1}{\underline{Z}(\underline{U}_p)}\right\}. \quad (3.44)$$

Da sich die mechanische Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ elektrisch durch $\underline{U}_p$ gemäß

$$\underline{Z}(\underline{U}_p) = \frac{\underline{F}_B(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}) + \alpha \underline{U}_p \frac{\underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})}{\underline{F}_B - \alpha \underline{U}_p \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})} \quad (3.45)$$

verändern lässt, sind nahezu alle Werte für $\underline{Z}$ aktiv einstellbar, solange $\underline{F}_B \neq 0$ ist.

3.4. Aktive und passive Impedanzeinstellungen am Ankoppelpunkt

3.4.1. Infinite Impedanz (Aktive Schwingungsunterdrückung)

Die Impedanz $\underline{Z}$ kann durchaus unendlich hohe Werte annehmen (Infinite Impedance)

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{Inf} \rightarrow \infty. \quad (3.46)$$

Dazu ist für die Ansteuerspannung $\underline{U}_p$ die Einstellung

$$\underline{U}_{p,Inf} = \frac{\underline{F}_B}{\alpha} \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.47)$$

erforderlich. Die aktive dynamische Steifigkeit des Piezoaktuator strebt dann ebenfalls gegen unendlich:

$$\underline{K} = s \cdot \underline{Z}_{Inf} \rightarrow \infty. \quad (3.48)$$

Die Balkenschnelle $\underline{v}$ verschwindet bei der infiniten Impedanz (entsprechend eines elektrischen Stroms bei einem Leerlauf):

$$\underline{v} = \underline{v}_{Zinf} = 0. \quad (3.49)$$

Dagegen ist die Kraft $\underline{F}$ nun maximal. Sie entspricht exakt der Störkraft $\underline{F}_B$:

$$\underline{F} = \underline{F}_{Zinf} = \underline{F}_B \quad (3.50)$$

Sie hat den Charakter einer Blockierkraft (*blocking force*), die an der Stelle des Piezoaktuator eine virtuelle feste Einspannung des Balkens erzeugt, bei der der Balken keine Bewegung vollziehen kann. Durch das virtuelle Festklemmen entzieht der Piezoaktuator dem Balken bei der infiniten Impedanz $\underline{Z}_{Inf}$ keine Leistung:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{Z} \rightarrow \infty} = 0. \quad (3.51)$$

3.4.2. Null-Impedanz (Aktive Kraftkompensation)

Die Impedanz $\underline{Z}$ ist null (*Null-Impedanz, Zero-Impedance*)

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{Zero} = 0, \quad (3.52)$$

wenn $\underline{U}_p$ den Wert

$$\underline{U}_{p,z0} = -\frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\underline{Z}_{ma}} \quad (3.53)$$

bzw. umgeformt

$$\underline{U}_{p,z0} = -\frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} \underline{Z}_{mi}}{\underline{Z}_{ma} (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})} \right) \quad (3.54)$$

annimmt. Die aktive dynamische Steifigkeit des Piezoaktuators verschwindet dann ebenfalls:

$$\underline{K} = s \cdot \underline{Z}_{Zero} = 0. \quad (3.55)$$

Besitzt der Balken in dem relevanten Frequenzbereich Eigenfrequenzen, reduziert sich die Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ bis auf den Wert seiner physikalischen Dämpfung. Ist der passive Piezoaktuator sehr steif ausgelegt, sind die elektrischen Spannungen $\underline{U}_{p,z0}$ entsprechend sehr hoch, eventuell sogar jenseits seiner Machbarkeit. Ist der Piezoaktuator jedoch an den Balken impedanzangepasst, so dass bereits passiv

$$\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} = \underline{Z}_{ma} \quad (3.56)$$

gilt, ist zur Realisierung der Null-Impedanz lediglich die Einstellung

$$\underline{U}_{p,z0} \approx -\frac{\underline{F}_B}{\alpha} \quad (3.57)$$

vorzunehmen. Die Kraft $\underline{F}$ verschwindet bei der Null-Impedanz (entsprechend einer elektrischen Spannung bei einem elektrischen Kurzschluss)

$$\underline{F} = \underline{F}_{z0} = 0, \quad (3.58)$$

wogegen die Balkenschnelle $\underline{v}$ ihren maximalen Wert annimmt:

$$\underline{v} = \underline{v}_{z0} = \underline{F}_B \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{ma}}. \quad (3.59)$$

Bei dieser Einstellung hat der Piezoaktuator sich selbst sozusagen virtuell verschwinden lassen („*strukturdynamische Transparenz*“), einschließlich seiner elektrischen Eigenschaften, als ob er nicht mehr auf dem Balken appliziert wäre. Der Piezoaktuator vollzieht dabei die maximalen Auslenkungen, die er auf dem Balken appliziert ausüben kann ohne auf den Balken Leistung zu übertragen. Ist die Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ bekannt, lässt sich durch Messung der Schnelle auf die Störkraft schließen ohne sie dabei direkt zu messen [Melcher, Kletz, 2016]:

$$\underline{F}_B = \underline{Z}_{ma} \cdot \underline{v}_{Z0} \quad (3.60)$$

Da der Piezoaktuator aber bei dieser Einstellung keine Kräfte auf den Balken ausübt, entzieht er dem Balken auch keine Leistung:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{Z}=0} = 0. \quad (3.61)$$

3.4.3. Balken mit passivem, nicht betriebener Piezoaktuator

Ist der Piezoaktuator lediglich passiv appliziert bzw. ist seine aktuatorische Versorgungsspannung $\underline{U}_p$ null, führen die daraus resultierende Schnelle

$$\underline{v}|_{\underline{U}_p=0} = \underline{F}_B \cdot \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}, \quad (3.62)$$

die Normalkraft

$$\underline{F}|_{\underline{U}_p=0} = \underline{F}_B \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.63)$$

zu einer Impedanz am Ankoppelpunkt, die erwartungsgemäß der des Aktuators entspricht:

$$\underline{Z}(\underline{U}_p = 0) = \alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}. \quad (3.64)$$

Demnach erfolgt bereits im passiven Betrieb eine Leistungsabsorption mit dem Wert:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{U}_p=0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{F} \cdot \underline{v}^*\}|_{\underline{U}_p=0} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}\{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}\}}{|\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}|^2} |\underline{F}_B|^2. \quad (3.65)$$

Dieser Betrag kann bereits sehr groß sein, nämlich dann, wenn der Piezoaktuator im passiven Zustand bereits an den Balken passiv konjugiert komplex impedanzangepasst ist, wenn also optimalerweise

$$(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi})_{opt} = \underline{Z}_{ma}^* \quad (3.66)$$

bzw. vereinfachend im Kurzschlussfall

$$\underline{Z}_{mi,opt} = \underline{Z}_{ma}^* \quad (3.67)$$

gilt. Dann ist der Leistungsentzug sogar maximal mit dem Betrag:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{U}_p=0} = \frac{1}{8 \operatorname{Re}\{\underline{Z}_{ma}\}} |\underline{F}_B|^2. \quad (3.68)$$

Der passive Piezoaktuator fungiert in diesem Fall wie ein optimaler breitbandiger Tilger. Doch ist die Frage nicht einfach zu beantworten, welches Aktuatordesign zu dieser passiven Eigenschaft führt. Bei dem maximalen Leistungsentzug sind die Impedanz

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{opt} = \underline{Z}_{ma}^*, \quad (3.69)$$

die Schnelle

$$\underline{v}|_{\underline{Z}=\underline{Z}_{opt}} = \underline{F}_B \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_{ma}^*}, \quad (3.70)$$

und die Kraft

$$\underline{F}|_{\underline{Z}=\underline{Z}_{opt}} = \underline{F}_B \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}^*}{\underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_{ma}^*}. \quad (3.71)$$

3.4.4. Impedanzanpassung (Maximaler Leistungsentzug)

Bei nicht-optimalem Aktuatordesign lässt sich eine optimale Leistungsabsorption nur durch eine Aktivierung des Aktuators erreichen. Für den Leistungsentzug gilt in Abhängigkeit von der Ansteuerung:

$$\begin{aligned} \overline{P_W}(\underline{U}_p) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{F}(\underline{U}_p) \cdot \underline{v}^*(\underline{U}_p)\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{\left(\underline{F}_B \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} + \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}\right) \cdot \left(\underline{F}_B \cdot \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} - \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}\right)^*\right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{ \begin{aligned} & -\alpha^2 \underline{U}_p \underline{U}_p^* \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}}{|\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}|^2} \\ & + \alpha \underline{U}_p \underline{F}_B^* \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}}{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})^*} - \alpha \underline{U}_p^* \underline{F}_B \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})^*(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})} \\ & + \underline{F}_B \underline{F}_B^* \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{|\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}|^2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Es handelt sich hierbei um eine reellwertige Funktion mit einer komplexwertigen Variablen. Die Funktion $\overline{P_W}(\underline{U}_p)$ ist stetig differenzierbar, jedoch nicht holomorph, da sie aufgrund ihrer Reellwertigkeit den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen nicht genügt. Zur Berechnung der optimalen Ansteuerung empfiehlt sich die Aufspaltung der komplexen Variable $\underline{U}_p$ in zwei reellwertige Variablen:

$$\underline{U}_p =: U_p' + jU_p'', \quad (3.73)$$

wobei $(U'_p, U''_p) \in \mathbb{R}^2$. So entsteht das elliptische Paraboloid

$$\overline{P_W}(U'_p, U''_p) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{Z_{ma}}{|Z_{mi}+Z_{ma}|^2} (\alpha U'_p)^2 - \frac{Z_{ma}}{|Z_{mi}+Z_{ma}|^2} (\alpha U''_p)^2 \\ & + \left(\frac{Z_{ma} F_B^*}{(Z_{mi}+Z_{ma})(\alpha^2 Z_{ei}+Z_{mi}+Z_{ma})^*} - \frac{(\alpha^2 Z_{ei}+Z_{mi}) F_B}{(Z_{mi}+Z_{ma})^* (\alpha^2 Z_{ei}+Z_{mi}+Z_{ma})} \right) \alpha U'_p \\ & + j \left(\frac{Z_{ma} F_B^*}{(Z_{mi}+Z_{ma})(\alpha^2 Z_{ei}+Z_{mi}+Z_{ma})^*} - \frac{(\alpha^2 Z_{ei}+Z_{mi}) F_B}{(Z_{mi}+Z_{ma})^* (\alpha^2 Z_{ei}+Z_{mi}+Z_{ma})} \right) \alpha U''_p \\ & + F_B F_B^* \cdot \frac{\alpha^2 Z_{ei}+Z_{mi}}{|\alpha^2 Z_{ei}+Z_{mi}+Z_{ma}|^2} \end{aligned} \right\}. \quad (3.74)$$

Es ist nach unten geöffnet und besitzt nur ein Extremum, nämlich ein globales Maximum, da die Determinante der Hesse-Matrix größer als null ist,

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p'^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p''^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p' \partial U_p''} \right)^2 > 0 \quad (3.75)$$

und zugleich gilt:

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p'^2} \right) < 0 \quad \text{bzw.} \quad (3.76)$$

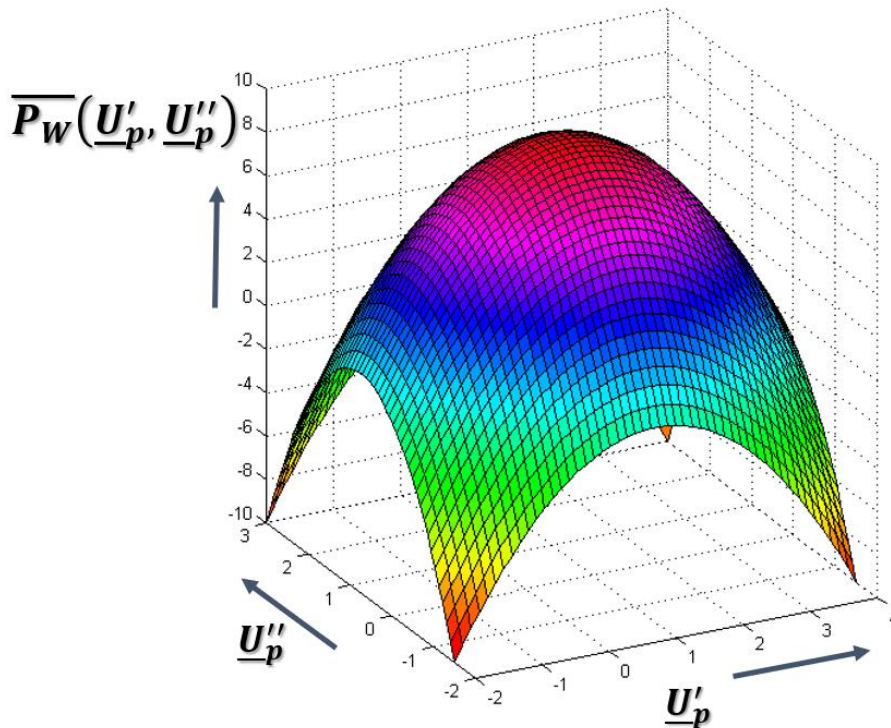


Abb. 3.2: Elliptisches Paraboloid des aktiven Leistungsentzugs an der Position des Piezoaktuators. Negative Leistungswerte sind möglich, bedeuten aber ein Hinzufügen mechanischer Energie in die Struktur durch den Piezoaktuator.

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p'^2} \right) < 0. \quad (3.77)$$

Um dieses Maximum zu erreichen, ist die optimale Aktuatoransteuerung erforderlich:

$$U_{p,opt}' + jU_{p,opt}'' = \underline{U}_{p,opt} = \left(\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} - \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}^*}{\underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_{ma}^*} \right) \cdot \frac{\underline{F}_B}{\alpha}. \quad (3.78)$$

Sie sorgt am Ankoppelpunkt für eine optimale Schnelle

$$\underline{v}_{opt} = \underline{F}_B \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_{ma}^*} \quad (3.79)$$

und für eine optimale Normalkraft

$$\underline{F}_{opt} = \underline{F}_B \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}^*}{\underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_{ma}^*}, \quad (3.80)$$

wodurch der Piezoaktuator die perfekte Impedanzanpassung (*Matched Impedance*) aktiv eingestellt:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{opt} = \underline{Z}_{ma}^*. \quad (3.81)$$

Das Leistungsmaximum ist dann:

$$\overline{P_W}|_{\underline{U}_p = \underline{U}_{p,opt}} = \frac{1}{8} \frac{1}{\text{Re}\{\underline{Z}_{ma}\}} |\underline{F}_B|^2. \quad (3.82)$$

Dieser Wert entspricht der vollständigen Leistung, die der Balken durch die externe Anregung aufnimmt. Die Dissipation erfolgt zu 100 %. In einer graphischen Prinzipskizze lässt sich das grundsätzliche Verhalten des Leistungsentzugs in Abhängigkeit von den aktiven Impedanzeinstellungen sehr gut erkennen. Aus Sicht der Struktur besitzt der Piezoaktuator eine mechanische Eingangsimpedanz, die sich aktiv verändern lässt:

$$\underline{Z}(\underline{U}_p) = \underline{Z}_{mi} + \alpha^2 \underline{Z}_{ei} \parallel \frac{\underline{U}_p}{\underline{I}_p} = \underbrace{\underline{Z}_{mi}}_{\text{passiver Anteil}} + \underbrace{\frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} \underline{U}_p}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} \underline{I}_p + \underline{U}_p}}_{\text{aktiver Anteil}}. \quad (3.83)$$

Sobald der Piezoaktuator an die mechanische Struktur impedanzangepasst ist, vereinfachen sich alle Einstellwerte. Im Fall einer optimalen Leistungsabsorption ist dann keine aktive Maßnahme mehr erforderlich, ggf. nur noch eine Phasendrehung zur Realisierung konjugiert komplexer Werte oder eine spezielle Bauweise [Melcher, Schröter, Fingerhut, 2008], die die Konjugation bewirkt.

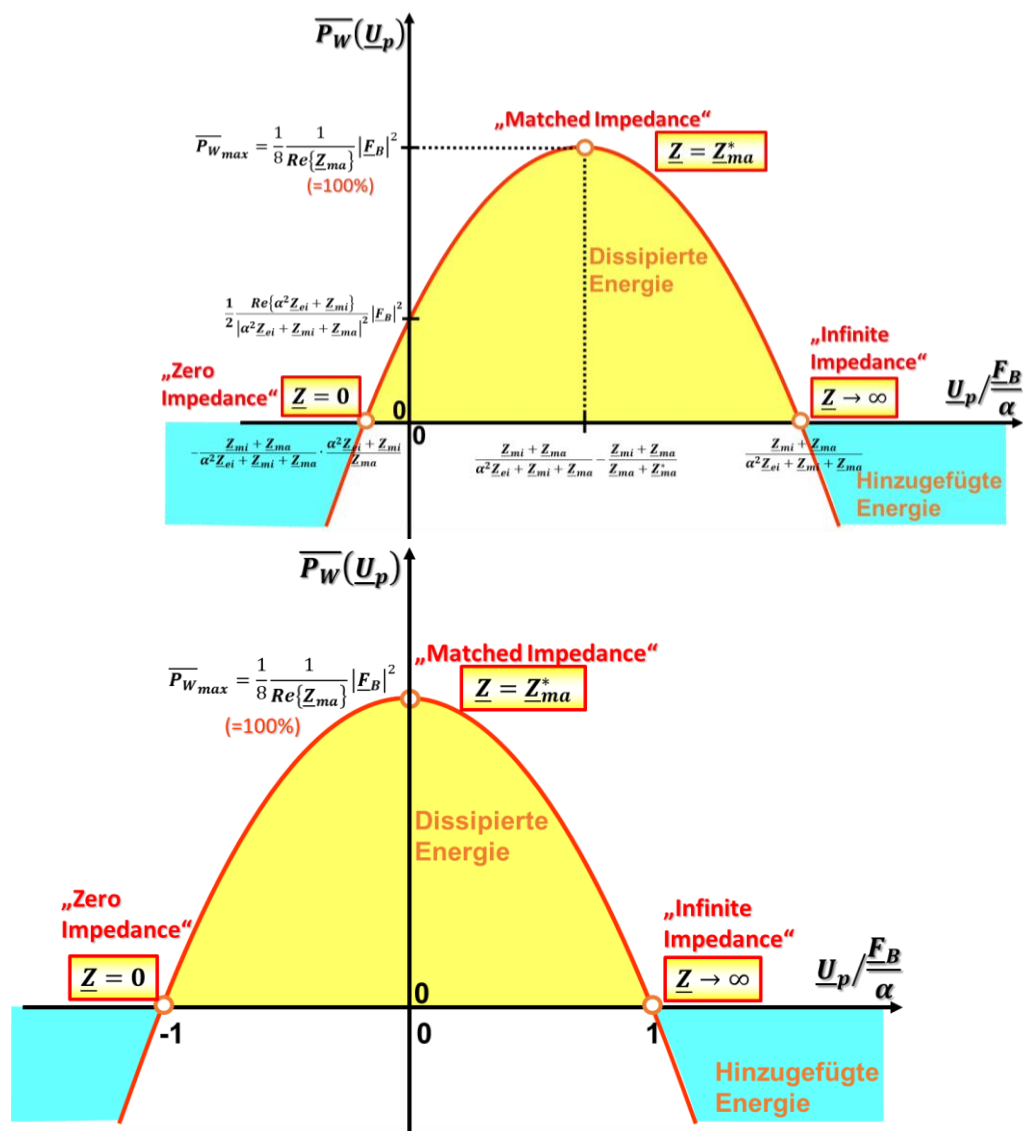


Abb. 3.3: Aktiver Leistungsentzug an der Position des Piezoaktuator. Zwei-dimensionale Prinzipskizze der aktiven Impedanzeinstellmöglichkeiten. Oben: Einstellungen der Impedanzen bei nicht-angepasstem Piezoaktuator, unten: bei impedanzangepasstem Aktuator.

3.5. Aktive und passive Impedanzeinstellungen nahe des Balkenendes

Eine Besonderheit dieses Kragbalkens ist der applizierte Piezoaktuator: Mit ihm lassen sich mechanische Größen elektrisch erfassen und man kann das strukturdynamische Eigenschaften des Kragbalkens aktiv beeinflussen. Spezielle Einstellungen können zur vollständigen Schwingungsunterdrückung oder zur Kraftkompensation oder zur Maximierung der Leistungsabsorption führen. Je nach Zielsetzung übernimmt der Piezoaktuator dabei die Aufgabe, ganz bestimmte Impedanzverhältnisse am Balkenende einzustellen.

Der unmittelbar vor dem Balkenende angekoppelte Shaker besitzt die mechanische Eingangsimpedanz $\underline{Z}_s$, die ebenfalls dispersiv, also komplexwertig, anzusetzen ist. Im Gegensatz zu der Schaltung, die für den Ankoppelpunkt des Piezoaktuators vorgesehen ist, entspricht die mechanische Impedanz $\underline{Z}_m$ der Eingangsimpedanz des Balkens inklusive des applizierten Piezoaktuators aus Sicht des externen Shakers. An dessen Ankoppelpunkt gibt es drei Messgrößen, die von der externen Einzelkraft $\underline{F}_{ex}$, die der Shaker erzeugt, und von der an dem Piezoaktuator angelegten elektrischen Spannung $\underline{U}_p$ abhängen:

- die Schnelle $\underline{v}_B$, für deren Abhängigkeiten das komplexwertige Funktional gilt:

$$\underline{v}_B(\underline{F}_{ex}, \underline{U}_p) = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} - \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} \quad (3.84)$$

- die Kraft $\underline{F}_B$ am Ankoppelpunkt

$$\underline{F}_B(\underline{F}_{ex}, \underline{U}_p) = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} + \alpha \cdot \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} \quad (3.85)$$

- und die daraus sich bildende mechanische Eingangsimpedanz $\underline{Z}_m$ gemäß

$$\underline{Z}_m(\underline{F}_{ex}, \underline{U}_p) = \frac{\underline{F}_B}{\underline{v}_B} = \frac{\underline{F}_{ex} \cdot (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}) + \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_s (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}}{\underline{F}_{ex} - \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}}. \quad (3.86)$$

Da sich die mechanische Eingangsimpedanz $\underline{Z}_m$ elektrisch mithilfe von $\underline{U}_p$ verändern lässt, sind nahezu alle Werte für $\underline{Z}_m$ aktiv einstellbar, solange $\underline{F}_{ex} \neq 0$ ist.

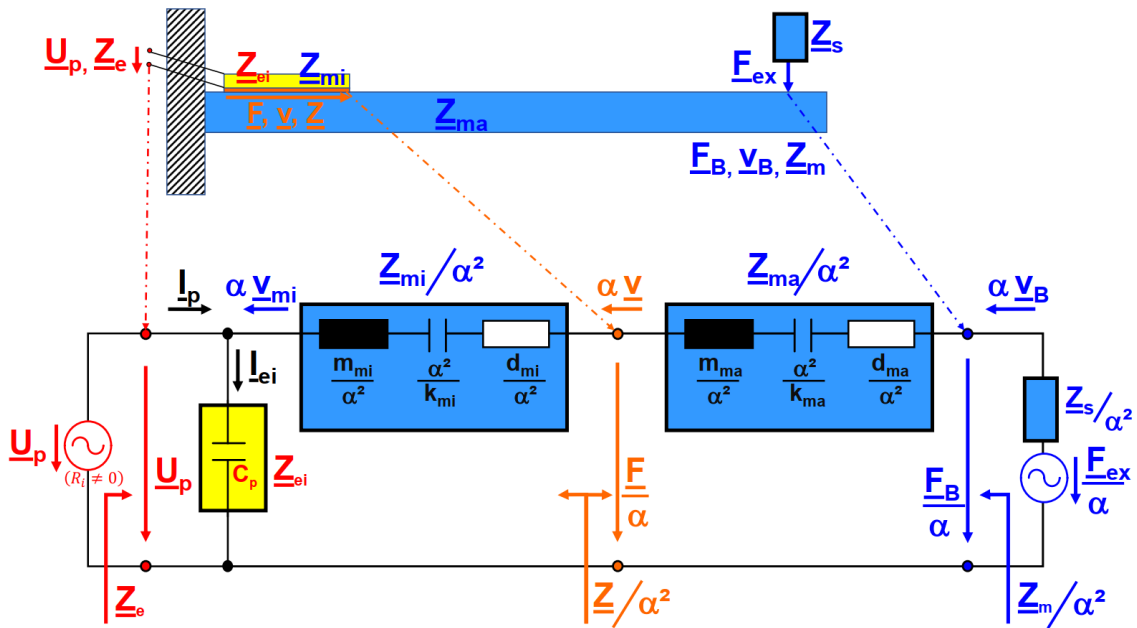


Abb. 3.4: Schema des Kragbalkens mit applizierten Piezoaktuator (oben) und dazugehöriges elektrisches Ersatzschaltbild (unten) für den Ort der Shakeranregung über dessen Eingangsimpedanz Z_s .

3.5.1. Aktive Schwingungsunterdrückung am Balkenende durch eine infinite Impedanz

Bei einer vollständigen Schwingungsunterdrückung verschwindet die Schnelle $\underline{v}_B$ am Ankoppel-punkt, obwohl dort eine externe Kraft $\underline{F}_{ex}$ den Balken zu Schwingungen anregen kann. Die Unterdrückung erfolgt dabei aktiv mit Hilfe einer elektrischen Spannung $\underline{U}_p$ am Piezoaktuator-eingang. Dafür muss die Impedanz $\underline{Z}_m$ unendlich hohe Werte annehmen (*Infinite Impedance*):

$$\underline{Z}_m = \underline{Z}_{m,Inf} \rightarrow \infty. \quad (3.87)$$

Diese Einstellung lässt sich erreichen mit der Aktuator-Ansteuerspannung

$$\underline{U}_{p,Inf} = \frac{\underline{F}_{ex}}{\alpha} \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}. \quad (3.88)$$

Die aktive dynamische Steifigkeit des Balkens strebt an dieser Stelle dann ebenfalls gegen unendlich:

$$\underline{K}_m = s \cdot \underline{Z}_{m,Inf} \rightarrow \infty. \quad (3.89)$$

Die Balkenschnelle $\underline{v}_B$ verschwindet bei der infiniten Impedanz (entsprechend einem elektrischen Strom bei Leerlauf):

$$\underline{v}_B = \underline{v}_{B,Inf} = 0. \quad (3.90)$$

Dagegen ist die Kraft $\underline{F}_B$ nun maximal. Sie entspricht exakt der externen Störkraft $\underline{F}_{ex}$:

$$\underline{F}_{B,max} = \underline{F}_{ex} \quad (3.91)$$

Sie hat den Charakter einer Blockierkraft, die exakt am Ankoppelpunkt des Shakers eine virtuelle feste Einspannung des Balkens bewirkt, bei der der Balken keine Bewegung vollziehen kann.

Durch das virtuelle Festklemmen nimmt der Balken keine mechanische Leistung auf:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{Z}_m \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\underline{F}_{B,max} \cdot \underline{v}_{B,zinf}^*\} = 0. \quad (3.92)$$

3.5.2. Aktive Kraftkompensation am Balkenende durch eine Null-Impedanz

Im Gegensatz zu einer infiniten Impedanz bewirkt die Einstellung einer Null-Impedanz (*Zero-Impedance*) am Ankoppelpunkt, dass dort keine Kräfte auf den Balken wirken:

$$\underline{F}_{B,z0} = 0 \quad (3.93)$$

Eine verschwindende Impedanz

$$\underline{Z}_m = \underline{Z}_{m,zero} = 0, \quad (3.94)$$

ist mithilfe der Ansteuerung

$$\underline{U}_{p,z0} = -\frac{\underline{F}_{ex}}{\alpha} \cdot \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_s} \quad (3.95)$$

erreichbar. Die damit resultierende Schnelle ergibt sich zu dem maximalen Wert

$$\underline{v}_{B,z0} = \underline{v}_{B,max} = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_s} \quad (3.96)$$

Ist die Impedanz $\underline{Z}_s$ bekannt, lässt sich durch Messung der Schnelle $\underline{v}_B$ auf die Störkraft $\underline{F}_{ex}$ schließen ohne sie dabei direkt zu messen [Melcher, Kletz, 2016]. Mit der Einstellung der Null-Impedanz bewirkt der Piezoaktuator, dass der Balken, einschließlich er selbst, am Ankoppelpunkt strukturdynamisch transparent ist. Wie auch der Balken vollzieht der Piezoaktuator dabei maximale Auslenkungen.

Da der Balken jeglichen Kräften ausweicht, nimmt er keine mechanische Leistung auf:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{Z}_m=0} = 0. \quad (3.97)$$

Die aktive dynamische Steifigkeit des aktiv manipulierten Balkens verschwindet ebenfalls:

$$\underline{K}_m = s \cdot \underline{Z}_{m,zero} = 0. \quad (3.98)$$

Besitzt der Balken in dem relevanten Frequenzbereich Eigenfrequenzen, reduziert sich die Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ bis auf den Wert seiner physikalischen Dämpfung. Ist der passive Piezoaktuator sehr steif ausgelegt, sind die elektrischen Spannungen $\underline{U}_{p,z0}$ entsprechend sehr hoch, eventuell sogar jenseits seiner Machbarkeit. Ist der Piezoaktuator inkl. des Balkens jedoch an den Shaker impedanzangepasst, so dass bereits passiv

$$\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} = \underline{Z}_s \quad (3.99)$$

gilt, ist zur Realisierung der Null-Impedanz lediglich die Einstellung

$$\underline{U}_{p,z0} = -\frac{\underline{F}_{ex}}{\alpha} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_s} - 1 \right) \approx -\frac{\underline{F}_{ex}}{\alpha} \quad (3.100)$$

vorzunehmen.

3.5.3. Balken mit passivem, nicht betriebenem Piezoaktuator

Ist der Piezoaktuator lediglich passiv appliziert bzw. ist seine aktuatorische Versorgungsspannung $\underline{U}_p$ null, führen die Schnelle $\underline{v}_B$ am Ankoppelpunkt des Shakers

$$\underline{v}_B(\underline{F}_{ex})|_{\underline{U}_p=0} = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}, \quad (3.101)$$

die dortige Kraft

$$\underline{F}_B(\underline{F}_{ex})|_{\underline{U}_p=0} = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} \quad (3.102)$$

zu einer Impedanz $\underline{Z}_m$ am Ankoppelpunkt, die erwartungsgemäß der des Balkens mit appliziertem Aktuator entspricht:

$$\underline{Z}_m(\underline{F}_{ex})|_{\underline{U}_p=0} = \frac{\underline{F}_B(\underline{F}_{ex})}{\underline{v}_B(\underline{F}_{ex})}|_{\underline{U}_p=0} = \alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} \quad (3.103)$$

Im passiven Betrieb erfolgt demnach bereits eine Leistungsabsorption durch den Balken mit dem Wert:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{U}_p=0} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{F}_B \cdot \underline{v}_B^*\}|_{\underline{U}_p=0} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{Re}\{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}\}}{|\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s|^2} |\underline{F}_{ex}|^2. \quad (3.104)$$

Dieser Betrag kann bereits sehr groß sein, nämlich dann, wenn der Balken inkl. Piezoaktuator im passiven Zustand bereits an die Impedanz der Anregung, in diesem Fall an die Impedanz des Shakers, passiv konjugiert komplex impedanzangepasst ist, wenn also optimalerweise

$$(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})_{opt} = \underline{Z}_s^* \quad (3.105)$$

bzw. vereinfachend im Kurzschlussfall

$$(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})_{opt} = \underline{Z}_s^* \quad (3.106)$$

gilt. Dann ist der Leistungsentzug sogar maximal mit dem Betrag:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{u}_p=0 \wedge \underline{Z}_m=\underline{Z}_s^*} = \frac{1}{8} \frac{1}{\text{Re}\{\underline{Z}_s\}} |\underline{F}_{ex}|^2. \quad (3.107)$$

Der passive Balken fungiert in diesem Fall wie ein optimaler breitbandiger Tilger. Doch ist die Frage nicht einfach zu beantworten, welches Aktuatordesign zu dieser passiven Eigenschaft führt, denn selbst wenn der Balken mit seiner Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ nicht angepasst ist, muss die Aktuatorimpedanz $(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi})$ bereits im passiven Fall diese Fehlanpassung kompensieren:

$$(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi})_{opt} = \underline{Z}_s^* - \underline{Z}_{ma} \quad (3.108)$$

Bei einem optimalen, maximalen Leistungsentzug ist die Impedanz am Ankoppelpunkt

$$\underline{Z}_m = \underline{Z}_{m,opt} = \underline{Z}_s^*. \quad (3.109)$$

Dabei sind dann die Schnelle

$$\underline{v}_B(\underline{F}_{ex})|_{\underline{Z}_m=\underline{Z}_s^*} = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_s^*} \quad (3.110)$$

und die dortige Kraft

$$\underline{F}_B(\underline{F}_{ex})|_{\underline{Z}_m=\underline{Z}_s^*} = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{\underline{Z}_s^*}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_s^*}. \quad (3.111)$$

3.5.4. Maximaler Leistungsentzug am Balkenende (Impedanzanpassung)

Die von der Punktkraft F_{ex} übertragene komplexe Leistung $\underline{P}(t)$ [Melcher, 2001] enthält die reale Wirkleistung $P_W(t)$ und die imaginäre Blindleistung $P_B(t)$:

$$\underline{P}(t) = P_W(t) + j \cdot P_B(t) = \frac{1}{2} \underline{F}_B \cdot \underline{v}_B^* = \frac{1}{2} \underline{v}_B \cdot \underline{v}_B^* \cdot \underline{Z}_m = \frac{1}{2} \frac{\underline{F}_B \underline{F}_B^*}{\underline{Z}_m} = \frac{1}{2} |\underline{F}_B|^2 \frac{1}{\underline{Z}_m}. \quad (3.112)$$

Bei nicht optimalem Aktuatordesign lässt sich eine optimale Leistungsabsorption nur durch eine spezielle Aktivierung des Aktuators erreichen. Für den Leistungsentzug gilt in Abhängigkeit von der Ansteuerung:

$$\begin{aligned} \overline{P_W}(\underline{U}_p) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{F}_B(\underline{U}_p) \cdot \underline{v}_B^*(\underline{U}_p)\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{\left(\underline{F}_{ex} \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} + \alpha \underline{U}_p \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}\right) \cdot \left(\underline{F}_{ex} \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} - \alpha \underline{U}_p \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}\right)^*\right\}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Umformuliert ergibt sich für den Leistungsentzug:

$$\overline{P_W}(\underline{U}_p) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & -\alpha^2 \underline{U}_p \underline{U}_p^* \cdot \frac{\underline{Z}_s}{|\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s|^2} \\ & + \alpha \underline{U}_p \underline{F}_{ex}^* \cdot \frac{\underline{Z}_s}{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)^*} \\ & - \alpha \underline{U}_p^* \underline{F}_{ex} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)^* (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)} \\ & + \underline{F}_{ex} \underline{F}_{ex}^* \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{|\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s|^2} \end{aligned} \right\}. \quad (3.114)$$

Es handelt sich hierbei um eine reellwertige Funktion mit einer komplexwertigen Variablen. Die Funktion $\overline{P_W}(\underline{U}_p)$ ist stetig differenzierbar, jedoch nicht holomorph, da sie aufgrund ihrer Reellwertigkeit den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen nicht genügt. Zur Berechnung der optimalen Ansteuerung empfiehlt sich die Aufspaltung der komplexen Variable $\underline{U}_p$ in zwei reellwertige Variablen:

$$\underline{U}_p =: U_p' + j U_p'', \quad (3.115)$$

wobei $(U_p', U_p'') \in \mathbb{R}^2$. So entsteht das elliptische Paraboloid

$$\overline{P_W}(U_p', U_p'') = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\underline{Z}_s}{|\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s|^2} (\alpha U_p')^2 - \frac{\underline{Z}_s}{|\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s|^2} (\alpha U_p'')^2 \\ & + \left(\frac{\underline{Z}_s \underline{F}_{ex}^*}{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)^*} - \frac{(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}) \underline{F}_{ex}}{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)^* (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)} \right) \alpha U_p' \\ & + j \left(\frac{\underline{Z}_s \underline{F}_{ex}^*}{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)^*} - \frac{(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}) \underline{F}_{ex}}{(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)^* (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)} \right) \alpha U_p'' \\ & + \underline{F}_{ex} \underline{F}_{ex}^* \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{|\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s|^2} \end{aligned} \right\}. \quad (3.116)$$

Es ist nach unten geöffnet und besitzt nur ein Extremum, nämlich ein globales Maximum, da die Determinante der Hesse-Matrix größer als null ist. Es gilt

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p'^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p''^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p' \cdot \partial U_p''}\right)^2 > 0 \quad (3.117)$$

und zugleich:

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p'^2}\right) < 0 \text{ bzw.} \quad (3.118)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{P_W}}{\partial U_p''^2}\right) < 0. \quad (3.119)$$

Um dieses Maximum zu erreichen, ist die optimale Aktuatoransteuerung erforderlich:

$$U_{p,opt}' + jU_{p,opt}'' = \underline{U}_{p,opt} = \left(\frac{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s}{\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} - \frac{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s}{Z_{ma} + Z_{ma}^*} \right) \cdot \frac{F_{ex}}{\alpha}. \quad (3.120)$$

Sie sorgt am Ankoppelpunkt für eine optimale Schnelle

$$\underline{v}_B(F_{ex})|_{\underline{U}_p = \underline{U}_{p,opt}} = F_{ex} \cdot \frac{1}{Z_s + Z_s^*} \quad (3.121)$$

und für eine optimale Kraft

$$\underline{F}_B(F_{ex})|_{\underline{U}_p = \underline{U}_{p,opt}} = F_{ex} \cdot \frac{Z_s^*}{Z_s + Z_s^*}, \quad (3.122)$$

wodurch der Piezoaktuator die perfekte Impedanzanpassung (*Matched Impedance*) aktiv eingestellt:

$$\underline{Z}_m = \underline{Z}_{m,opt} = \underline{Z}_s^*. \quad (3.123)$$

Das so eingestellte Leistungsmaximum besitzt den Wert:

$$\overline{P_W(t)}|_{\underline{U}_p = \underline{U}_{p,opt}} = \frac{1}{8} \frac{1}{\text{Re}\{\underline{Z}_s\}} |\underline{F}_{ex}|^2. \quad (3.124)$$

Dieser Wert entspricht der vollständigen Leistung, die der Balken durch die externe Anregung aufnimmt. Die Dissipation erfolgt zu 100 %. Diese Gleichung sagt zudem aus, dass jegliche strukturelle Dämpfungen die Leistungsübertragung behindern.

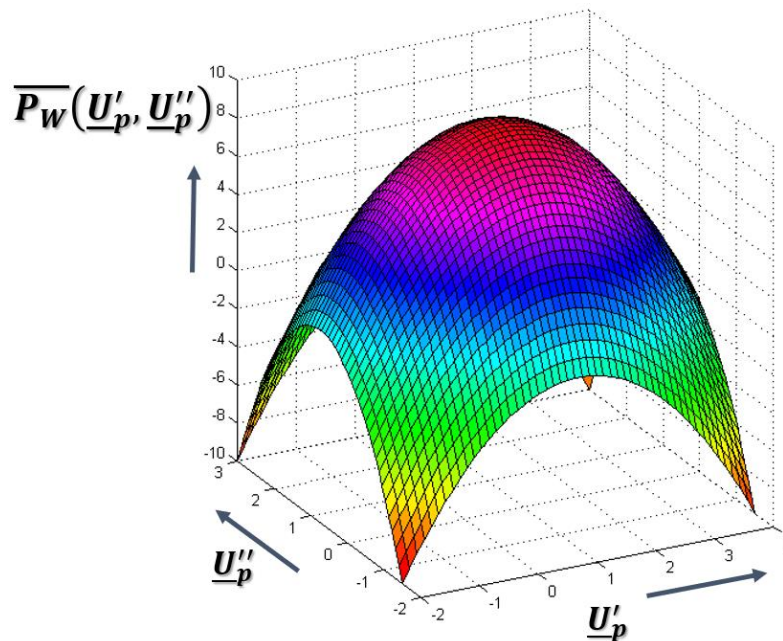


Abb. 3.5: Elliptisches Paraboloid des aktiven Leistungszugs an der Position des Shakers. Negative Leistungswerte sind möglich, bedeuten aber ein Hinzufügen mechanischer Energie in die Balkenstruktur durch den Piezoaktuator.

In einer graphischen Prinzipskizze lässt sich das grundsätzliche Verhalten des Leistungszugs in Abhängigkeit von den aktiven Impedanzeinstellungen sehr gut erkennen. Aus Sicht des Shakers besitzt der Balken eine mechanische Eingangsimpedanz, die sich aktiv durch den Piezoaktuator verändern lässt:

$$\underline{Z}_m(\underline{U}_p) = \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_{mi} + \alpha^2 \underline{Z}_{ei} \parallel \frac{\underline{U}_p}{L_p} = \underbrace{\underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_{mi}}_{\text{passiver Anteil}} + \underbrace{\frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} \underline{U}_p}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} L_p + \underline{U}_p}}_{\text{aktiver Anteil}} . \quad (3.125)$$

Sobald der Piezoaktuator den Balken an die Impedanz des Shakers strukturdynamisch angepasst hat, vereinfachen sich die Einstellwerte. Im Fall einer optimalen Leistungsabsorption ist keine aktive Maßnahme mehr erforderlich, ggf. nur noch eine Vorzeichenumkehr aufgrund der Notwendigkeit einer konjugiert komplexen Impedanzanpassung.

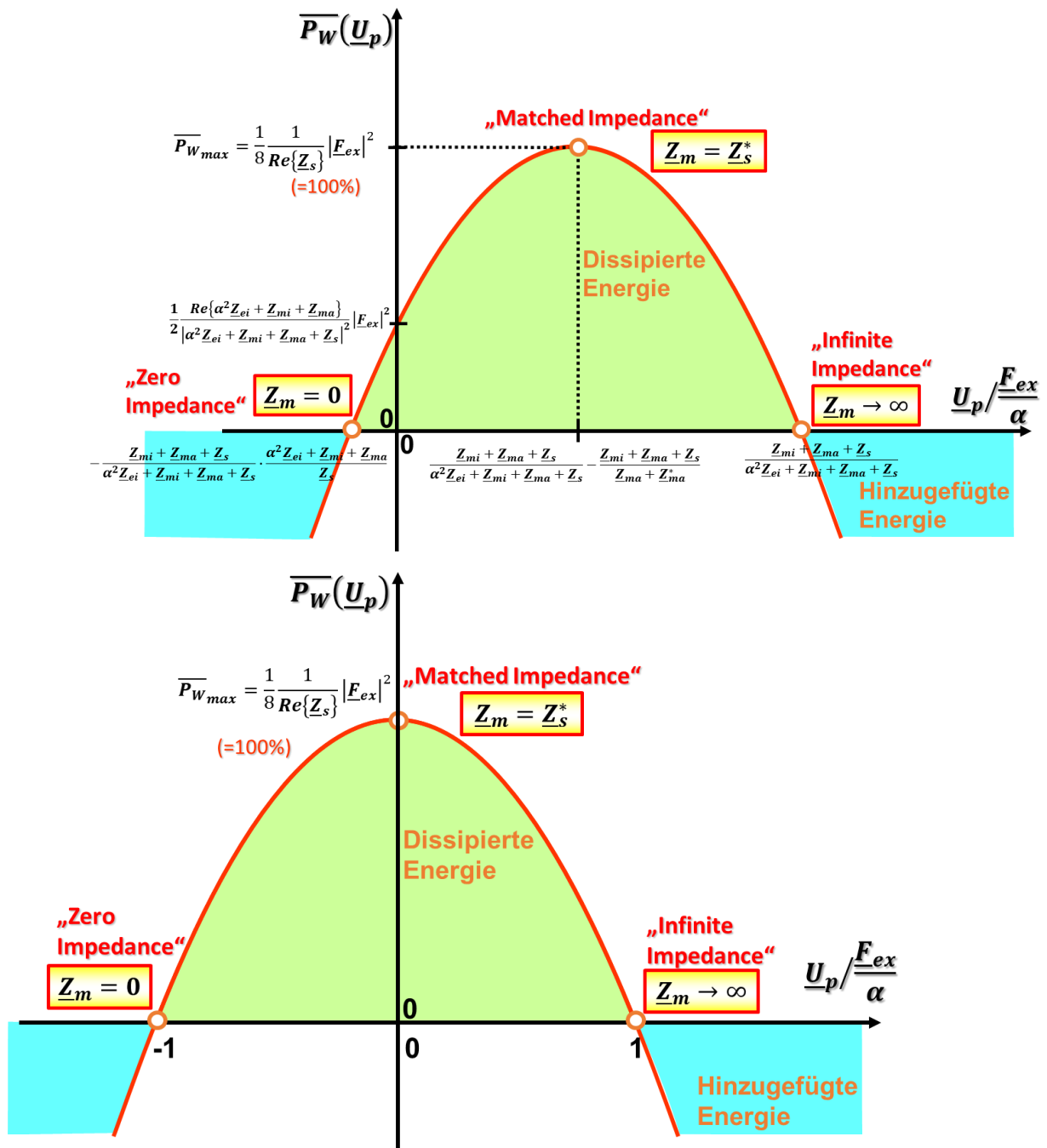


Abb. 3.6: Aktiver Leistungsentzug an der Ankoppelstelle des Shakers: Zwei-dimensionale Prinzipskizze der aktiven Impedanzeinstellmöglichkeiten. Oben: Einstellungen der Impedanzen bei nicht-angepasstem System, unten: bei impedanzangepasstem System (Balken mit Aktuator).

3.6. Momentenimpedanz statt Kraftimpedanz

Solange die Abmessungen nicht größer als etwa ein Zehntel der Wellenlänge der auftretende Biegeschwingung ist, entspricht $\underline{Z}$ einer Punkt- oder Kraftimpedanz. Ansonsten ist es physikalisch naheliegend, für die Anbringungsfläche die Momentenimpedanz $\underline{W}$ einzuführen [Cremer, Heckl, 1982],

$$\underline{W} = \frac{\underline{M}}{\underline{\omega}}, \quad (3.126)$$

die dem Quotienten aus dem dort auftretenden dispersiven Moment $\underline{M}$ und der dort erzeugten Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ entspricht. Dabei ist allerdings zu beachten, dass $\underline{W}$ sich auch in den Einheiten von der punktuellen Kraftimpedanz $\underline{Z}$ unterscheidet. Die Momentenimpedanz $\underline{W}$ besitzt dort die Einheit $\frac{\text{kg}}{\text{s}} \text{m}^2$ statt $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Ähnlich den elektrischen Ersatzschaltbildern aus der Elektroakustik [Zollner, Zwicker, 1993] und der Fluidmechanik [Tafel, Schaedel, 1969] liegt der Schritt zunächst nahe, von einer Kraft-Spannungsanalogie auf eine Druck-Spannungsanalogie zu wechseln, um die Strecken- bzw. Flächenlasten direkt in den Grundgleichungen mitführen zu können. Angepasst an die Modifikation würde sich die Einheit der modifizierten Wandlerkonstante α_M entsprechend ändern, nämlich von $\frac{\text{N}}{\text{V}} = \frac{\text{As}}{\text{m}}$ auf $\frac{\text{Nm}}{\text{V}} = \text{As}$. In dem vorliegenden Fall liefe es jedoch auf eine gemischte Darstellung hinaus, da sowohl Punktkräfte als auch ein- bzw. zweidimensional wirkende Momente wirksam sind. Für dynamische Fälle ist es daher ratsam, zwei Aspekte einfließen zu lassen, dass nämlich

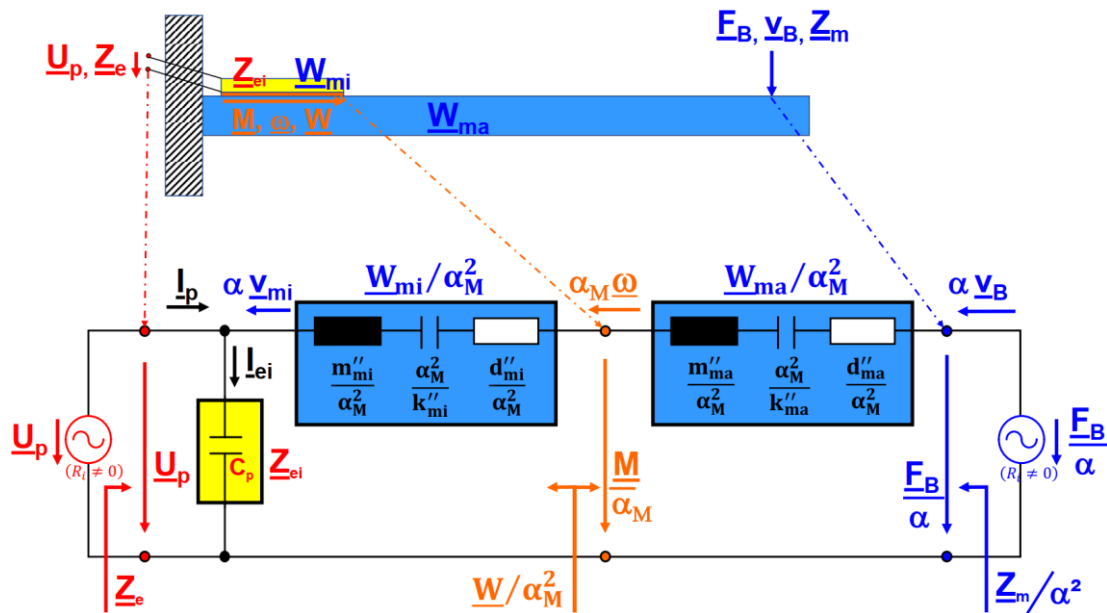


Abb. 3.7: Modifiziertes Schema des mechanischen Aufbaus (oben) und des dazugehörigen elektrischen Ersatzschaltbildes (unten) des Balkens mit appliziertem piezoelektrischem Aktuator, wenn die Abmessungen des Piezoaktuators größer als ein Zehntel der Biegewellenlänge sind. An der Ankoppelstelle ist dann eine Momentenimpedanz $\underline{W}$ vorzusehen. Dort treten das Moment $\underline{M}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega}$ auf. Dementsprechend ersetzen Momentenimpedanzen die bisherigen Kraftimpedanzen.

- die Ausdehnung des anregenden elektrischen Feldes im Piezoaktuator zwar ein- bzw. zweidimensional ist, dessen Ansteuerung jedoch über die Elektroden punktuell erfolgt,
- und dass die in dem Klebebereich unendlich vielen Längskräfte, die das Moment $\underline{M}$ bewirken, an den beiden Messstellen (am elektrischen Eingang bzw. Ausgang des Piezoaktuator und in der Nähe des Balkenendes) zu punktuellen Größen superponieren (z.B. $\underline{U}_p$ und $\underline{F}_B$ oder $\underline{v}_B$),

mit anderen Worten: eine null-dimensionale Größe, wie $\underline{U}_p$, bewirkt in einer Schaltung, in der Piezowandler als Aktuator fungiert, ein- bzw. zweidimensionale Zwischengrößen, wie $\underline{M}$ oder $\underline{\omega}$, die ihrerseits wieder zu einer nulldimensionalen Ausganggröße führen ($\underline{F}_B$ oder $\underline{v}_B$) und entsprechend umgekehrt, wenn der Piezowandler als Sensor dient.

Es wird daher empfohlen, bei der üblichen Kraft-Spannungsanalogie zu bleiben, an der Ankoppelstelle anstelle von $\frac{1}{\alpha} \underline{F}$, $\alpha \underline{v}$ und $\frac{1}{\alpha^2} \underline{Z}$ die Größen $\frac{1}{\alpha_M} \underline{M}$, $\alpha_M \underline{\omega}$ und $\frac{1}{\alpha_M^2} \underline{W}$ vorzusehen und anstelle der Kraftimpedanzen $\frac{Z_{mi}}{\alpha^2}$ und $\frac{Z_{ma}}{\alpha^2}$ mit den Momentenimpedanzen $\frac{W_{mi}}{\alpha_M^2}$ und $\frac{W_{ma}}{\alpha_M^2}$ zu ersetzen.

Erfolgt die Anregung von Biegewellen durch die gleichzeitige Präsenz von Kräften $\underline{F}_B$ und Momenten $\underline{M}_y$, hilft die Admittanzmatrix $\underline{Y}$ weiter, denn sie erzeugen die Bewegungsgrößen $\underline{v}_p$ und $\underline{\omega}$ gemäß [Möser, et al., 2010]:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_p \\ \underline{\omega} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}}_{\underline{Y}} \begin{bmatrix} \underline{F}_B \\ \underline{M}_y \end{bmatrix}. \quad (3.127)$$

Neben der Kraftadmittanz $Y_{11} = \frac{1}{Z_m} \left[\frac{m}{Ns} = \frac{s}{kg} \right]$ und der Momentenadmittanz $Y_{22} \left[\frac{1}{Nms} = \frac{s}{kg \, m^2} \right]$ treten mit Y_{12} und Y_{21} zwei Kopplungsübertragungsfunktionen mit identischer Einheit auf $\left[\frac{1}{Ns} = \frac{s}{kg \, m} \right]$. Das Separieren von punktuellen und höherdimensionalen Größen überführt die Gleichung in die Form:

$$\begin{bmatrix} \underline{\omega} \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{Y_{12}} \begin{bmatrix} Y_{22} & -\det(\underline{Y}) \\ 1 & -Y_{11} \end{bmatrix}}_{\underline{H}} \begin{bmatrix} \underline{v}_p \\ \underline{F}_B \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

mit der Matrix $\underline{H}$ und ihren Elementen. Die Matrixelemente und die dazugehörigen Einheiten sind in [Tabelle 3.1](#) aufgelistet. An einer Balkenstelle ist es also möglich, eine durch eine Punktkraft $\underline{F}_B$ bewirkte Biegewellenauslenkung durch ein geeignetes Moment $\underline{M}_y$ vollständig zu unterdrücken. Dabei ist jedoch zu beachten, dass exponentiell abklingende Nahfelder übrigbleiben können, durch die keine mechanische Leistung übertragen wird, denn für von dem Piezoaktuator übertragene Leistung gilt:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{M}_y \cdot \underline{\omega}_y^*\} = \frac{1}{2} |\underline{M}_y|^2 \operatorname{Re}\{\underline{W}_{mi}\}. \quad (3.129)$$

Matrizelement:	Einheit:
$\underline{H}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{12}}$	$\left[\frac{1}{m}\right]$
$\underline{H}_{22} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{12}}$	$[m]$
$\underline{H}_{12} = -\frac{\det(\underline{Y})}{\underline{Y}_{12}}$	$\left[\frac{1}{N^2 s^2}\right]$
$\underline{H}_{21} = \frac{1}{\underline{Y}_{12}}$	$[Ns]$

Tabelle 3.1: Auflistung der Matrizelemente von $\underline{H}$

3.7. Balken mit strukturintegriertem Piezoaktuator

Ist der Piezoaktuator multifunktional ausgelegt, übernimmt er lasttragende Aufgaben. Er trägt auch im passiven Betrieb zur Steifigkeit des Balkens bei und gilt nunmehr als strukturintegriert. Seine Kraftübertragung auf die ihn umgebende Struktur des Kragbalkens erfolgt über alle, räumlich angeordneten Kontaktflächen. An diesen Kontaktflächen weisen jedoch sowohl der Piezoaktuator als auch der Kragbalken gleiche Dehnungen auf, so dass der Piezoaktuator und der Kragbalken nach wie vor mechanisch parallel zueinander angeordnet sind. Im zugehörigen elektrischen Ersatzschaltbild sind die mechanischen Impedanzen $\underline{Z}_{mi}$ und $\underline{Z}_{ma}$ daher seriell geschaltet. Bei einer Anregung durch den Piezoaktuator wirken die Schwingungen des Kragbalkens auf den strukturintegrierten Aktuator zurück, da er sich im direkten Kraftfluss der mechanischen Struktur befindet. Der Piezoaktuator gilt als perfekt kraftflusskonform, wenn er bei kurzgeschlossenen Elektroden statisch und dynamisch die identischen mechanischen Eigenschaften der passiven Strukturkomponente besitzt, für die er ausgetauscht wurde. Bei offenen Elektroden bewirkt der piezoelektrische Effekt eine zusätzliche dispersive Versteifung des Kragbalkens. Der unmittelbar vor dem Balkenende angekoppelte Shaker besitzt die mechanische Eingangsimpedanz $\underline{Z}_s$, die ebenfalls dispersiv anzusetzen ist. Im Gegensatz zu der Schaltung, die für den Ankoppelpunkt des Piezoactuators vorgesehen ist, entspricht die mechanische Impedanz $\underline{Z}_m$ der Eingangsimpedanz des Balkens aus Sicht des externen Shakers. An dessen Ankoppelpunkt gibt es drei Messgrößen, die von der externen Einzelkraft $\underline{F}_{ex}$ und der elektrischen Spannung $\underline{U}_p$ des Piezoactuators abhängen:

- die Schnelle $\underline{v}_B$:

$$\underline{v}_B(\underline{F}_{ex}, \underline{U}_p) = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} - \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} \quad (3.130)$$

- die Kraft $\underline{F}_B$:

$$\underline{F}_B(\underline{F}_{ex}, \underline{U}_p) = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} + \alpha \cdot \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} \quad (3.131)$$

- und die daraus sich bildende mechanische Eingangsimpedanz $\underline{Z}_m$ gemäß

$$\underline{Z}_m(\underline{F}_{ex}, \underline{U}_p) = \frac{\underline{F}_B}{\underline{v}_B} = \frac{\underline{F}_{ex} \cdot (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}) + \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_s (\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}}{\underline{F}_{ex} - \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{(\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s)}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}}. \quad (3.132)$$

des Kragbalkens bzw. die Ortsverteilung der beteiligten Größen nicht berücksichtigt sind, ergeben sich an dem Ankoppelpunkt bzw. an den Ankoppelflächen des strukturintegrierten Piezoactuators die Schnelle

$$\underline{v}(\underline{F}_{ex}, \underline{U}_p) = \underline{F}_{ex} \cdot \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s} - \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \underline{Z}_s}. \quad (3.133)$$

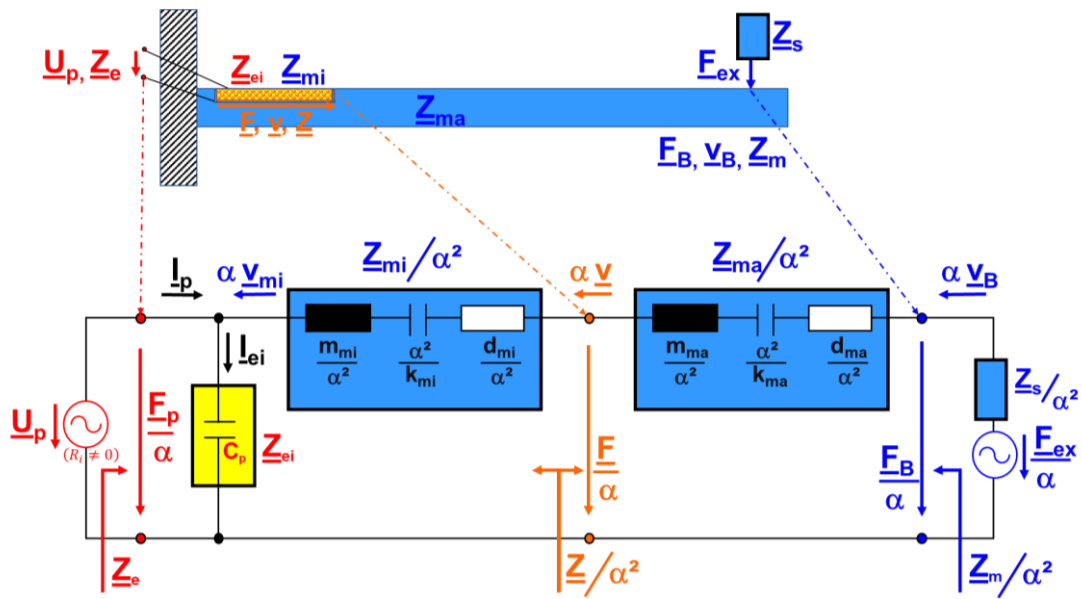


Abb. 3.8: Schema des mechanischen Aufbaus (oben) und dazugehöriges elektrisches Ersatzschaltbild (unten) des Balkens mit einem strukturintegrierten piezoelektrischen Aktuator. Die mechanischen Komponenten Z_{mi} und Z_{ma} sind exemplarisch als Ein-Freiheitsgradsysteme dargestellt. Die Analogie des Ankoppelpunkts und der Messpunkte sind gestrichelt gekennzeichnet. Die Vorzeichenkonvention richtet sich nach der primären Störquelle.

Gemäß des hier angeführten elektrischen Ersatzschaltbildes, in dem die modalen Eigenformen Sie entspricht dem Strom in der Analogieschaltung

$$\alpha \cdot \underline{v} = \alpha \cdot \underline{v}_{(1)} + \alpha \cdot \underline{v}_{(2)} = \frac{F_{ex}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} - \underline{U_p} \cdot \frac{\alpha^2}{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s}. \quad (3.134)$$

Für die Kraft ergibt sich

$$\underline{F}(F_{ex}, \underline{U_p}) = F_{ex} \cdot \frac{\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi}}{\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} + \alpha \underline{U_p} \cdot \frac{Z_{ma} + Z_s}{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} \quad (3.135)$$

bzw. in der Analogie die entsprechende Spannung

$$\frac{\underline{F}}{\alpha} = \frac{F_{(1)}}{\alpha} + \frac{F_{(2)}}{\alpha} = \frac{F_{ex}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi}}{\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} + \underline{U_p} \cdot \frac{Z_{ma} + Z_s}{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s}. \quad (3.136)$$

Bei vollständigem Betrieb ist die mechanische Impedanz $\underline{Z}$ am Ankoppelpunkt

$$\underline{Z}(F_{ex}, \underline{U_p}) = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} = \frac{F_{ex}(\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi}) + \alpha \underline{U_p} \cdot \frac{Z_{ma} + Z_s}{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} (\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s)}{F_{ex} - \alpha \underline{U_p} \cdot \frac{1}{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} (\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s)} \quad (3.137)$$

bzw. in elektrischer Form in der Analogieschaltung

$$\frac{\underline{Z}}{\alpha^2} = \frac{\underline{F}/\alpha}{\alpha \cdot \underline{v}} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\frac{F_{ex}}{\alpha} (\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi}) + \underline{U_p} \cdot \frac{Z_{ma} + Z_s}{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} (\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s)}{\frac{F_{ex}}{\alpha} - \underline{U_p} \cdot \frac{1}{Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s} (\alpha^2 Z_{ei} + Z_{mi} + Z_{ma} + Z_s)}. \quad (3.138)$$

3.8. Modaler Impedanzformalismus

Mechanische Impedanzen, die sich wie Z_{ma} oder Z_{mi} auf flexible, schwingungsfähige Strukturen beziehen, lassen sich auch modal formulieren. Dadurch erfolgt eine Konzentration auf die Eigenfrequenzen und es ermöglicht die Berücksichtigung der Verhältnisse an einer beliebiger Ankoppelstelle, für die z.B. eine Impedanz anzugeben ist. Unabdingbar für die modale Modellierung sind die Kenntnis der Eigenformen und die Einführung generalisierter Parameter.

Bei dem modalen Impedanzformalismus [Melcher, 2001] sind die Eigenformen ϕ_i einer Struktur als linear unabhängige Eigenvektoren in der Modalmatrix Φ spaltenweise zusammengefasst. Bei N Schwingungsmoden ergibt sich die quadratische spaltenreguläre Matrix

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_i \quad \cdots \quad \phi_N]. \quad (3.139)$$

Der Kehrwert der spektralen Impedanz $\underline{Z}(s)$, die Admittanz $\underline{Y}(s)$, ist die strukturdynamische Übertragungsfunktion, bei der die L Kräfte die Eingangsgrößen und die K Sensoren die Schnellen ausgangsseitig erfassen:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \\ \vdots \\ V_K(s) \end{bmatrix}}_{=\underline{V}(s) \in \mathbb{C}^{K \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{11}(s) & \cdots & Y_{1L}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{K1}(s) & \cdots & Y_{KL}(s) \end{bmatrix}}_{=\underline{Y}(s) \in \mathbb{C}^{K \times L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_L(s) \end{bmatrix}}_{=\underline{F}(s) \in \mathbb{C}^{L \times 1}} \quad (3.140)$$

Die Admittanz-Matrix $\underline{Y}(s)$ lässt sich physikalisch formulieren gemäß

$$\underline{Y}(s) = \underline{V}(s) \cdot \underline{F}^{-1}(s) \quad (3.141)$$

(dabei ist $\underline{F}^{-1}(s)$ die Pseudoinverse von $\underline{F}(s)$) und ggf. modal umzuschreiben zu, wenn $N \leq K$ gilt:

$$\underline{Y}(s) = \Phi \cdot \text{diag}[\underline{Y}_i(s)] \cdot \Phi^T \quad \text{mit} \quad (3.142)$$

$$\text{diag}[\underline{Y}_i(s)] = \Phi^T \cdot \underline{Z}^{-1}(s) \cdot \Phi \quad (3.143)$$

oder auch

$$\underline{Y}(s) = \sum_{i=1}^N \underline{Y}_i(s) \cdot \phi_i \phi_i^T, \quad (3.144)$$

wobei für die i -te Schwingungsmode gilt:

$$\underline{Y}_i(s) = \frac{s}{M_i s^2 + D_i s + K_i} = \frac{1/M_i \cdot s}{s^2 + 2\omega_{0,i} \beta_i s + \omega_{0,i}^2}. \quad (3.145)$$

Es sind $\omega_{0,i}$ die i -te Kreiseigenfrequenz, β_i das i -te Lehrsche Dämpfungsmaß und M_i das i -te Element der generalisierten, quadratischen $N \times N$ -Massenmatrix M , die aus der Diagonalisierung der physikalischen $K \times K$ -Massenmatrix m herrührt:

$$M = \Phi^T \cdot m \cdot \Phi. \quad (3.146)$$

Zudem gilt unter Annahme der Bequemlichkeitshypothese

$$D = \Phi^T \cdot d \cdot \Phi \text{ und} \quad (3.147)$$

$$K = \Phi^T \cdot k \cdot \Phi. \quad (3.148)$$

Für die Matrixelemente der Matrix $\underline{Y}(s)$ gilt mit $k \in [1, K]$ und $l \in [1, L]$:

$$\underline{Y}_{kl}(s) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\underline{Y}_i(s) \cdot \phi_{ik} \phi_{il}}_{=: \underline{Y}_{ikl}(s)}. \quad (3.149)$$

Hieraus ergibt sich die Ortsabhängigkeit, denn ϕ_{ik} ist der Eigenformfaktor für die Schnelle der i -ten Eigenform durch den k -ten Schnellesensor an dessen Position und ϕ_{il} ist der Eigenformfaktor für die Kraftanregung der i -ten Eigenform durch die l -te Kraftanregung an deren Position.

Die Multi-Input-Multi-Output-Variante der Impedanz führt zur Impedanzmatrix $\underline{Z}(s)$, für die gilt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{F}_1(s) \\ \underline{F}_2(s) \\ \vdots \\ \underline{F}_L(s) \end{bmatrix}}_{=\underline{F}(s) \in \mathbb{C}^{L \times 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}(s) & \cdots & \underline{Z}_{1K}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}_{L1}(s) & \cdots & \underline{Z}_{LK}(s) \end{bmatrix}}_{=\underline{Z}(s) \in \mathbb{C}^{L \times K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{V}_1(s) \\ \underline{V}_2(s) \\ \vdots \\ \underline{V}_K(s) \end{bmatrix}}_{=\underline{V}(s) \in \mathbb{C}^{K \times 1}} \text{ bzw.} \quad (3.150)$$

$$\underline{Z}(s) = \underline{Y}^{-1}(s) = \underline{F}(s) \cdot \underline{V}^{-1}(s). \quad (3.151)$$

Die modale Beschreibung der Impedanz $\underline{Z}(s) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ beansprucht die Modalmatrix Φ , denn es gilt

$$\begin{aligned} \underline{Z}(s) &= [\Phi \cdot \text{diag}[\underline{Y}_i(s)] \cdot \Phi^T]^{-1} \\ &= (\Phi^T)^{-1} \cdot \text{diag}[\underline{Y}_i(s)]^{-1} \cdot \Phi^{-1} \\ &= (\Phi^T)^{-1} \cdot \text{diag}[\underline{Z}_i(s)] \cdot \Phi^{-1} \end{aligned} \quad (3.152)$$

mit den Termen für die i Schwingungsmoden:

$$\underline{Z}_i(s) = \frac{M_i s^2 + D_i s + K_i}{s} = M_i s + D_i + \frac{1}{s} K_i = \frac{s^2 + 2\omega_{0,i} \beta_i s + \omega_{0,i}^2}{1/M_i \cdot s}. \quad (3.153)$$

Die Matrixelemente der physikalischen Impedanzmatrix $\underline{Z}(s)$ haben in der modalen Form die Elemente:

$$\underline{Z}_{lk}(s) = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i(s) (\phi_i \cdot \phi_i^T)^{-1} = \sum_{i=1}^N \underbrace{\underline{Z}_i(s) \cdot (\phi_{il} \phi_{ik})^{-1}}_{=: \underline{Z}_{ilk}(s)} \quad (3.154)$$

mit $l \in [1, L]$ und $k \in [1, K]$.

Bezogen auf die mechanische Eingangsimpedanz des Kragbalkens $\underline{Z}_{ma}$ zeigt sich die Ortsabhängigkeit durch ihre modale Formulierung:

$$\underline{Z}_{ma}(s) = (\Phi^T)^{-1} \cdot \text{diag}[\underline{Z}_{ma,i}(s)] \cdot \Phi^{-1} =: \begin{cases} \underline{Z}_{ma,F}(s) & \text{am Ankoppelpunkt bei } \underline{F} \\ \underline{Z}_{ma,FB}(s) & \text{am Ankoppelpunkt bei } \underline{F}_B \\ \underline{Z}_{ma,Imp}(s) & \text{am Ort der Impulshammeranr.} \end{cases} \quad (3.155)$$

Bei der l -ten Krafteinleitung und dem k -ten Sensor besitzt die Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ den Wert

$$\underline{Z}_{ma,lk}(s) = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_{ma,i}(s) \cdot (\phi_{il}\phi_{ik})^{-1} \quad (3.156)$$

Am Ort der Shakeranregung hat der Balken also die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_{ma,FB}(s) = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_{ma,i}(s) \cdot (\phi_{iFB}\phi_{ivB})^{-1} \quad (3.157)$$

und an der Ankoppelstelle des Piezoaktuators die Impedanz

$$\underline{Z}_{ma,F}(s) = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_{ma,i} \cdot (\phi_{iF}\phi_{iv})^{-1}. \quad (3.158)$$

Messungen mit dem Impulshammer führen ggf. zu einer Übertragungsimpedanz

$$\underline{Z}_{ma,Imp}(s) = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_{ma,i} \cdot (\phi_{iImp}\phi_{ivB})^{-1}. \quad (3.159)$$

Dabei gilt für die i Schwingungsmoden

$$\underline{Z}_{ma,i}(s) = \frac{M_{ma,i}s^2 + D_{ma,i}s + K_{ma,i}}{s} \quad (3.160)$$

mit

$$M_{ma,i} = \Phi^T \cdot m_{ma} \cdot \Phi, \quad (3.161)$$

$$K_{ma,i} = \Phi^T \cdot k_{ma} \cdot \Phi \quad (3.162)$$

$$\text{und } D_{ma,i} = \Phi^T \cdot d_{ma} \cdot \Phi \quad (3.163)$$

Die Eigenvektorelemente am Ort der Shakeranregung für die Kraft und die dortige Schnelle sind ϕ_{iFB} und ϕ_{ivB} , wogegen die Eigenvektorelemente am Ort des Piezoaktuators ϕ_{iF} und ϕ_{iv} sind.

Die Eingangsimpedanz des Kragbalkens an der Position des Piezoaktuators verändert sich gegenüber der Impedanz an der Shakerposition lediglich durch die Eigenvektorkomponenten. Bis zum ersten Schwingungsmoden gilt beispielsweise die Impedanzrelation:

$$\underline{Z}_{ma,F} = \frac{\phi_{1,FB} \cdot \phi_{1,vB}}{\phi_{1,F} \cdot \phi_{1,v}} \underline{Z}_{ma,FB}, \quad (3.164)$$

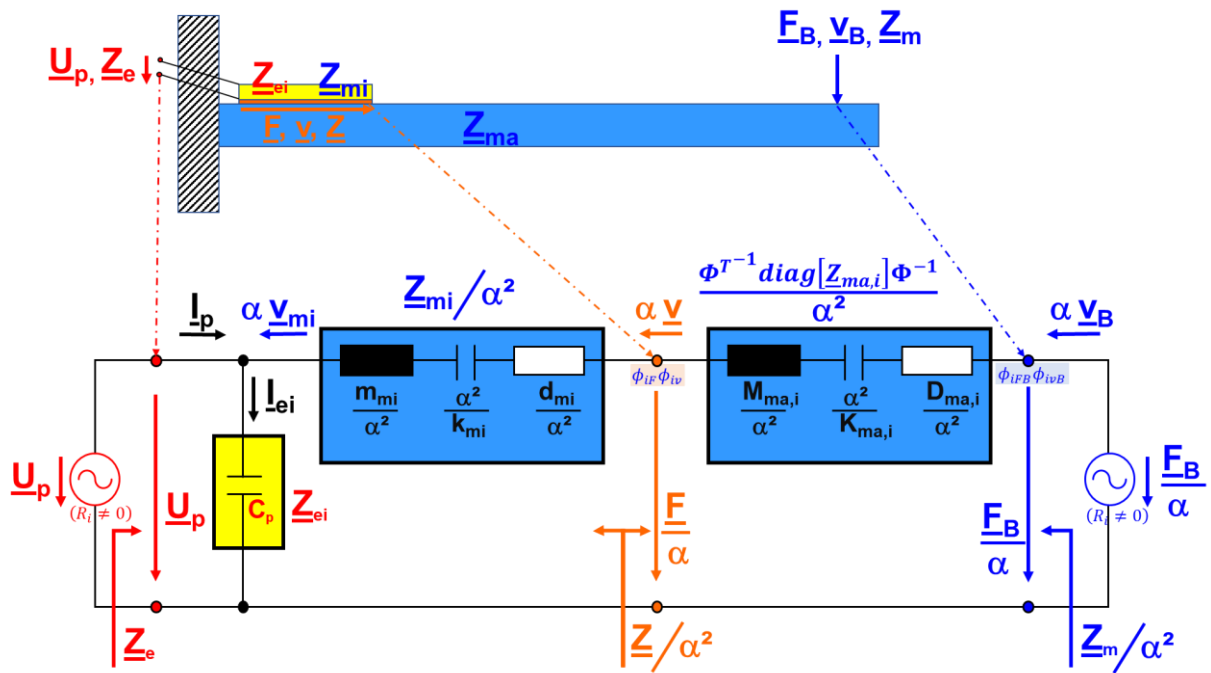


Abb. 3.9: Schema des mechanischen Aufbaus (oben) und dazugehöriges elektrisches Ersatzschaltbild (unten) des Balkens mit einem strukturintegrierten piezoelektrischen Aktuator. Die mechanische Impedanz Z_{ma} ist hier modal dargestellt. An den Ankoppelpunkten wirken die jeweiligen Eigenvektorkomponenten.

$$\lim_{f \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{\underline{Z}_e\} = R_{par} \parallel R_{ser} = \frac{R_{par} \cdot R_{ser}}{R_{par} + R_{ser}} =: R_{ppss}, \quad (3.169)$$

woraus sich der serielle Widerstand R_{ser} ermitteln lässt gemäß:

$$R_{ser} = \frac{R_{par} R_{ppss}}{R_{par} - R_{ppss}}. \quad (3.170)$$

Die für $\underline{Z}_e$ maßgeblichen Parameter sind jedoch die Komponenten: C_p , L_s , C_s und R_s . Diese vier Größen sind aus einer einzigen $\underline{Z}_e$ -Messung eindeutig bestimmbar durch die folgenden vier Zusammenhänge:

- Bei der seriellen Resonanzfrequenz

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (3.171)$$

hat der Realteil der Admittanz $\underline{Y}_e$ das Maximum

$$MY := \max[\operatorname{Re}\{\underline{Y}_e\}] = \operatorname{Re}\{\underline{Y}_e\}|_{f=f_s} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\underline{Z}_e}\right\}|_{f=f_s} = \frac{1}{R_s}. \quad (3.172)$$

- Bei der parallelen Resonanzfrequenz

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2(C_p + C_s)L_s - C_p C_s R_s^2}{2C_p C_s L_s^2}} \quad (3.173)$$

- hat der Realteil der Impedanz $\underline{Z}_e$ das Maximum

$$MZ := \max[\operatorname{Re}\{\underline{Z}_e\}] = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_e\}|_{f=f_p} = \frac{1}{R_s} \frac{4C_s L_s^2}{4C_p^2 L_s + 4C_p C_s L_s - C_p^2 C_s R_s^2}. \quad (3.174)$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich eindeutige Werte für die zu identifizierenden Parameter:

$$R_s = \frac{1}{MY}, \quad (3.175)$$

$$C_p = \frac{1}{\pi(f_p^2 + f_s^2)R_s \sqrt{2MZ}} \sqrt{f_s^2 R_s + f_p^2 (R_s - MZ) + \sqrt{MZ(f_p^4 (MZ - R_s) + f_s^4 R_s)}}, \quad (3.176)$$

$$L_s = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\pi^2 C_p^2 R_s^2 (f_s^2 - f_p^2)}}{8\pi^2 C_p (f_p^2 - f_s^2)}, \quad (3.177)$$

$$C_s = \frac{1}{8\pi^2 f_s^2 L_s}. \quad (3.178)$$

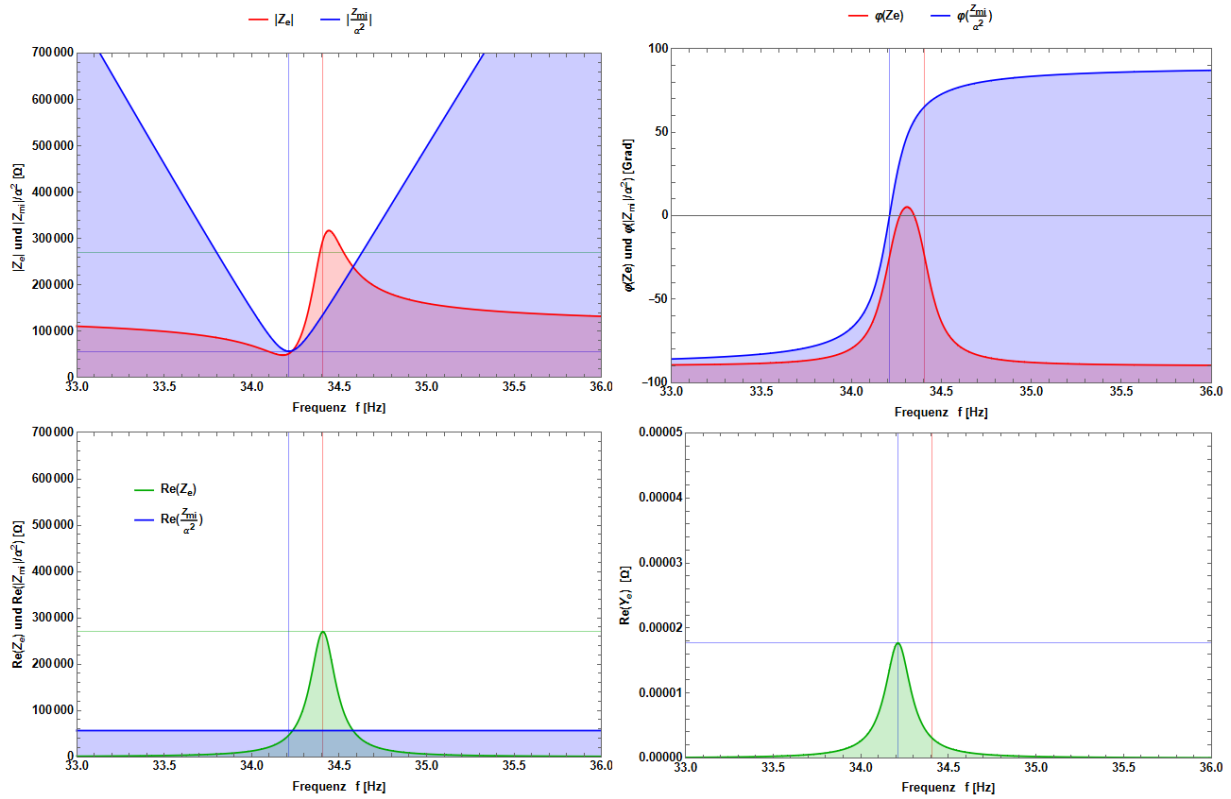


Abb. 3.11: Typischer Verlauf der elektrischen Impedanz; Betrag: oben links; Phase: oben rechts; Realteil: unten links; Realteil der Admittanz: unten rechts. Die senkrechten Linien kennzeichnen die beiden Resonanzfrequenzen: blau: f_s ; rot: f_p . In diesem Beispiel sind die Werte der elektrischen Parameter: $C_p=3,7445 \cdot 10^{-8} \text{ F}$, $R_{ser}=0 \text{ } \Omega$, $R_{par} \rightarrow \infty \text{ } \Omega$, $C_s=4,2812 \cdot 10^{-10} \text{ F}$, $R_s=56500 \text{ } \Omega$, $L_s=50548,5 \text{ H}$.

Zu beachten ist allerdings, dass diese vier Werte sich durchaus deutlich von denen unterscheiden können, die sich bei einem applizierten oder strukturintegrierten Piezoaktuator ergeben.

Typischerweise zeigt sich in der Nähe der Resonanzfrequenz von $\frac{Z_{mi}}{\alpha^2}$ ein S-Schlag im Spektrum des Betrags $|Z_e|$. In der Literatur wird leider nicht selten irrtümlicherweise angenommen, dass das Minimum des S-Schlags bei der seriellen Resonanzfrequenz f_s und das Maximum bei der parallelen Resonanz f_p lägen. Dem ist jedoch nicht so, wenn die Dämpfung groß ist, wie man in der Graphik leicht erkennen kann. Nur bei geringen Dämpfungen ist eine Näherungsangabe sinnvoll:

$$f_p \approx f_s \sqrt{1 + \frac{C_s}{C_p}} . \quad (3.179)$$

Die serielle Resonanzfrequenz f_s entspricht exakt der ersten Eigenfrequenz $f_{0,mi}$ der mechanischen Komponente, repräsentiert durch Z_{mi} :

$$f_s \equiv f_{0,mi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{mi}}{m_{mi}}} . \quad (3.180)$$

3.9.2. Aufbau: Kragbalken ohne appliziertem Piezoaktuator

In der Nähe des freien Balkenendes besitzt der Balken die messbare mechanische Impedanz

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}_B}{\underline{v}_B} = \underline{Z}_{ma} = j\omega \cdot m_{ma} + d_{ma} + \frac{1}{j\omega} \cdot k_{ma}, \quad (3.181)$$

wenn der Piezoaktuator noch nicht appliziert ist. Bei einem mechanischen System mit nur einem Freiheitsgrad hat der Betrag sein Minimum bei der Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{ma}}{m_{ma}}}. \quad (3.182)$$

Im tieffrequenten Bereich fällt die Betragskurve aufgrund der Steifigkeit hyperbelförmig ab, im höherfrequenten Bereich steigt die Kurve wegen der trägen Masse fast linear an. Je nach Anwendung bieten sich unterschiedliche Verfahren zur Bestimmung der Parameter m_{ma} , k_{ma} und d_{ma} an. Dabei kann die dynamische Kraftanregung $\underline{F}_B$ durch einen Shaker oder einem Impulshammer erfolgen. Die Messgrößen sind die anregende Kraft $\underline{F}_B$ und die Bewegungsgrößen $\underline{v}_B$ bzw. $\underline{w}_B$.

a) Spektrale Parameteridentifikation:

Exakt bei der Resonanzfrequenz f_0 hat der Betrag der Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ den Wert d_{ma} :

$$|\underline{Z}_{ma}| \Big|_{f=f_0} = d_{ma}. \quad (3.183)$$

Die anderen beiden Parameter k_{ma} und m_{ma} lassen sich aus den Verläufen der dynamischen Steifigkeit $\underline{K}_{ma}$ und der freien effektiven Masse $\underline{M}_{ma}$ gemäß

$$\underline{K}_{ma} = s \cdot \underline{Z}_{ma} \text{ und} \quad (3.184)$$

$$\underline{M}_{ma} = \frac{1}{s} \cdot \underline{Z}_{ma} \quad (3.185)$$

ablesen. Sie erhält man aus den Grenzwertbetrachtungen:

$$|\underline{K}_{ma}| \Big|_{f=0} = k_{ma} \text{ bzw.} \quad (3.186)$$

$$\lim_{f \rightarrow \infty} |\underline{M}_{ma}| = m_{ma}. \quad (3.187)$$

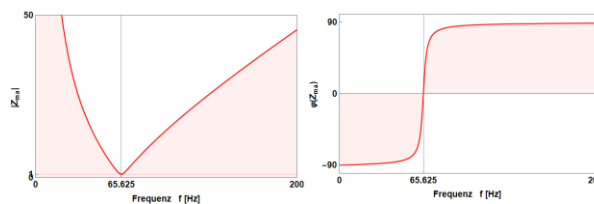


Abb. 3.12: Typischer Verlauf der mechanischen Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ am Ankoppelpunkt des Shakers (links: Betrag, rechts: Phase). Die mechanischen Parameter sind in diesem Beispiel:

$$m_{ma} = 0.0405855 \text{ kg}; \quad k_{ma} = 6900.32 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}; \quad d_{ma} = 1 \text{ kg/s}.$$

b) An f_0 angepasste Parameteridentifikation:

Eine messtechnisch geeignetere Identifikationsmethode wendet das Wissen an, dass das Verhältnis von Steifigkeit und mitschwingender Masse die Resonanzfrequenz f_0 bestimmt (siehe oben). Eingesetzt in die analytische Gleichung für den Betrag der mechanischen Impedanz, ergibt sich eine Funktion

$$|Z_{ma}(f)| = \sqrt{d_{ma}^2 + \left(2\pi f \cdot m_{ma} - \frac{1}{2\pi f} \cdot k_{ma}\right)^2} = \sqrt{d_{ma}^2 + (2\pi f)^2 \left(1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2\right)^2 m_{ma}^2}, \quad (3.188)$$

die mit einem numerischen Curve-Fit-Verfahren den optimalen Wert für m_{ma} identifiziert. Der Steifigkeitsparameter k_{ma} ergibt sich nachfolgend aus der Beziehung mit der Resonanzfrequenz:

$$k_{ma} = (2\pi f_0)^2 \cdot m_{ma}. \quad (3.189)$$

Bei diesem Verfahren bleibt sichergestellt, dass die Werte um die Resonanzfrequenz herum optimal angepasst sind.

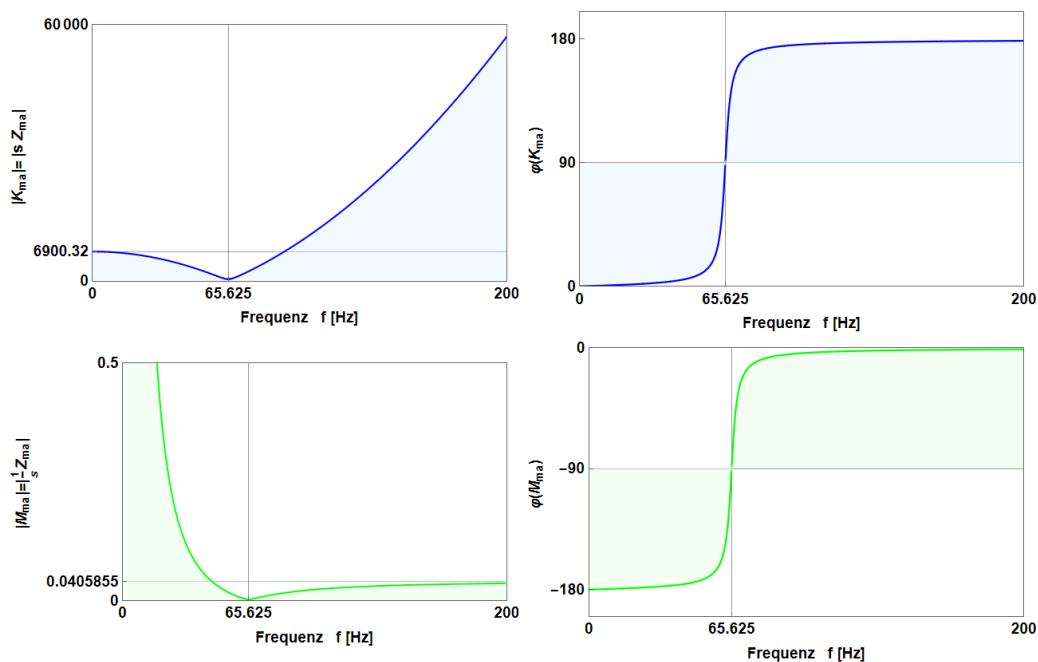


Abb. 3.13: Der Verlauf der dynamischen Steifigkeit $K_{ma} = s \cdot Z_{ma}$ (obere Zeile: Betrag und Phase) ergibt $k_{ma} = 6900.32 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$. Der Verlauf der freien effektiven Masse $M_{ma} = \frac{1}{s} \cdot Z_{ma}$ (untere Zeile: Betrag und Phase) ergibt $m_{ma} = 0.0405855 \text{ kg}$.

c) Statisches Identifikationsverfahren:

Die Messung der statischen Auslenkung w_B exakt an der Stelle des Kragbalkens, für die die Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ definiert ist, führt zu den Werten

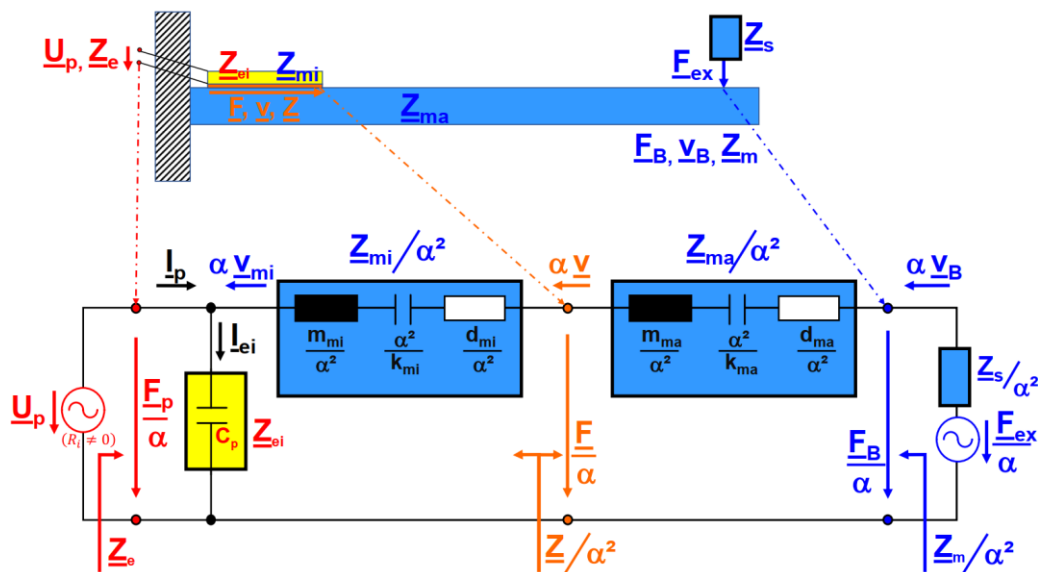
$$w_B(x_{FB}) = \frac{x_{FB}^3}{3 E I_y} F_B \quad (3.190)$$

Die dafür erforderliche Kraft ist die statische Querkraft F_B . Für die statische Steifigkeit k_{ma} ergibt sich somit der Wert

$$k_{ma} = \frac{F_B(x_{FB})}{w_B(x_{FB})} = \frac{3 E I_y}{x_{FB}^3}. \quad (3.191)$$

Voraussetzung für dieses Verfahren ist die Kenntnis des Elastizitätsmoduls E und des Flächenträgheitsmoments I_y .

Der Shaker ist kein rückwirkungsloses Tauchspulsystem, dass beliebig große dynamische Kräfte auf eine mechanische Struktur ausüben kann. Rückwirkungen sind zu erwarten, wenn die dynamische Steifigkeit des Shakers deutlich geringer ist als die der angeregten Struktur. In einem elektrischen Ersatzschaltbild ist dieser Aspekt modellierbar mithilfe der Impedanz $\underline{Z}_S$. Sie ist die mechanische Eingangsimpedanz des Shakers aus Sicht des Balkens und macht sich durchaus bemerkbar, wenn der Balken noch weitere Anregungen erfährt, die sich ebenfalls am Ankoppelpunkt des Shakers auswirken.

$$\underline{F}_p := \alpha \cdot \underline{U}_p \quad (3.192)$$
$$\underline{F} = \alpha \cdot \underline{U}_p - \underline{Z}_{mi} \cdot \underline{v} = \underline{F}_p - \underline{Z}_{mi} \cdot \underline{v} \quad (3.193)$$
$$\underline{I}_p = \frac{1}{z_{\rho i}} \underline{U}_p - \alpha \cdot \underline{v}. \quad (3.194)$$


Seite: 71

In dem vereinfachten Ersatzschaltbild bleiben weiterhin die Shakerimpedanz durch $\underline{Z}_s$ und dessen Kraftausübung durch $\underline{F}_{ex}$ repräsentiert. Direkt am Ankoppelpunkt des Shakers sind die Schnelle $\underline{v}_B$ und die Kraft $\underline{F}_B$ messbar. Gemeinsam führen sie zur mechanischen Impedanz am Ankoppelpunkt:

$$\underline{Z}_B := \frac{\underline{F}_B}{\underline{v}_B}. \quad (3.195)$$

Sind beide Quellen aktiv, ergeben sich mit der hier gewählten Vorzeichenkonvention am Ankoppelpunkt für die Schnelle

$$\underline{v}_B = \frac{1}{\underline{Z}_m + \underline{Z}_s} (\underline{F}_{ex} - \underline{F}_p), \quad (3.196)$$

für die Kraft

$$\underline{F}_B = \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_m + \underline{Z}_s} \underline{F}_p + \frac{\underline{Z}_m}{\underline{Z}_m + \underline{Z}_s} \underline{F}_{ex} \quad (3.197)$$

und für die Impedanz:

$$\underline{Z}_B = \frac{\underline{F}_B}{\underline{v}_B} = \underline{Z}_s + \frac{\underline{F}_{ex}}{\underline{v}_B} = \frac{\underline{F}_p}{\underline{F}_{ex} - \underline{F}_p} \underline{Z}_s + \frac{\underline{F}_{ex}}{\underline{F}_{ex} - \underline{F}_p} \underline{Z}_m. \quad (3.198)$$

Ist nur der Shaker durch $\underline{F}_{ex} \neq 0 \wedge \underline{F}_p = 0$ aktiv, entspricht die Impedanz am Ankoppelpunkt der Impedanz der mechanischen Struktur:

$$\underline{Z}_B|_{\underline{F}_{ex} \neq 0 \wedge \underline{F}_p = 0} = \underline{Z}_m. \quad (3.199)$$

Bleibt der Shaker jedoch passiv und die anderweitige Anregungsquelle ist aktiv, entspricht die Impedanz am Ankoppelpunkt der negativen Eingangsimpedanz des Shakers:

$$\underline{Z}_B|_{\underline{F}_{ex} = 0 \wedge \underline{F}_p \neq 0} = -\underline{Z}_s. \quad (3.200)$$

Das negative Vorzeichen rührt aus der gewählten Stromrichtung von $\underline{v}_B$ in dem Ersatzschaltbild.

Die mechanische Impedanz $\underline{Z}_s$ lässt sich messtechnisch also dadurch bestimmen, dass der Piezoaktuator den Balken zu Schwingungen anregt und der Shaker dabei passiv bleibt. Die Charakteristik des Balkens hat bei der Messung von $\underline{Z}_B$ keinen Einfluss auf das Ergebnis, auch wenn sie eine Vielzahl von Schwingungsmoden aufweist, jedoch aber alle mechanischen Adapterstücke zwischen einem Impedanzsensor und dem Shaker, wie z.B. die Stößel. Aufgrund deren hoher Steifigkeit wirken sie meist wie zusätzliche, parallel geschaltete Massen.

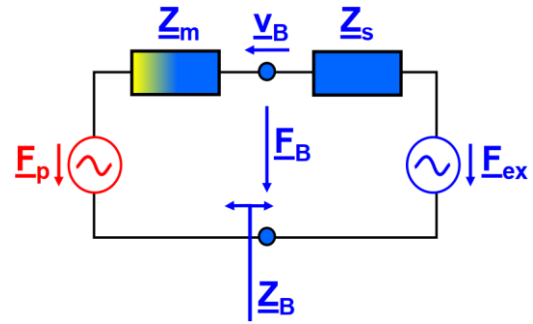


Abb. 3.15: Elektrisches Ersatzschaltbild für eine mech. Struktur mit der Impedanz $\underline{Z}_p$, bezogen auf den Ankoppelpunkt des Shakers mit der Impedanz $\underline{Z}_s$.

3.9.4. Aufbau: Piezoaktuator auf unendlich steifem Untergrund

Sobald der Piezoaktuator auf einem unendlich steifen, nicht schwingungsfähigem Untergrund appliziert ist, reduziert sich das elektrische Ersatzschaltbild lediglich auf die Impedanzen $\underline{Z}_{ei}$ und $\frac{\underline{Z}_{mi}}{\alpha^2}$. Ein derartiger Untergrund lässt sich bereits durch den Balken realisieren, auf dem der Piezoaktuator aufgeklebt ist. Dazu muss der Balken beidseitig fest eingespannt sein mit etwa der Länge des Aktuators. Die Bedingung der unendlich hohen Steifigkeit ist allerdings nur bis zur ersten Biegeeigenfrequenz ansatzweise gegeben. In dem vorliegenden Fall liegt die erste Biegeeigenfrequenz bereits über 2600 Hz. Bis 2000 Hz sollte man das reduzierte Ersatzschaltbild als Modell daher annehmen dürfen, wobei die Klebeschicht zur Impedanz $\frac{\underline{Z}_{mi}}{\alpha^2}$ einbezogen ist. Im Gegensatz zu dem freiliegenden, nicht applizierten Fall (siehe 3.9.1) entspricht sie nun exakt derjenigen, die auch beim Kragbalken vorliegt. Für die elektrische Eingangsimpedanz des Piezoaktuators gilt dann nur noch:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{ei} \parallel \frac{\underline{Z}_{mi}}{\alpha^2} = \frac{\underline{Z}_{ei} \cdot \underline{Z}_{mi}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}. \quad (3.201)$$

Bei bekannter Impedanz $\underline{Z}_{ei}$ und mit der gemessenen Impedanz $\underline{Z}_e$ ergibt sich somit die Impedanz:

$$\frac{\underline{Z}_{mi}}{\alpha^2} = -\frac{\underline{Z}_e \underline{Z}_{ei}}{\underline{Z}_e - \underline{Z}_{ei}}. \quad (3.202)$$

Ist die Wandlerkonstante α bekannt, liegt die mechanische Impedanz $\underline{Z}_{mi}$ vollständig separat vor. Sie ist bei diesem Aufbau der mechanische Teil der mechanischen Eingangsimpedanz des Piezoaktuators aus Sicht des Balkens. Der andere Teil der mechanischen Eingangsimpedanz des Piezoaktuators ist die mechanische Impedanz $\alpha^2 \underline{Z}_{ei}$, die der elektrische Kondensator C_p bewirkt.

Die Schnelle $\underline{v}$ entspricht bei diesem Aufbau derjenigen Schnelle, mit der sich der Balken und die untere Seite der Klebeschicht an der Anbringungsstelle bewegt. Da der Aktuator bei diesem Aufbau durch den unendlich steifen Untergrund einseitig festgeklemt ist, verschwindet sie:

$$\underline{v} = 0. \quad (3.203)$$

Dagegen entspricht die Normalkraft $\underline{F}$

$$\underline{F} = \alpha \underline{U}_p \cdot \frac{\underline{Z}_{ma}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}} \quad (3.204)$$

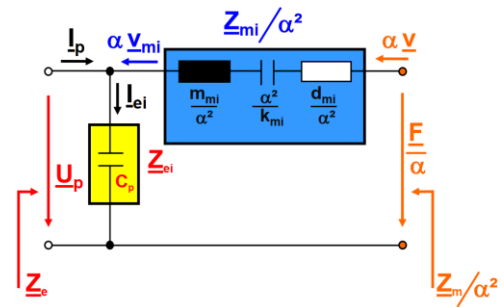
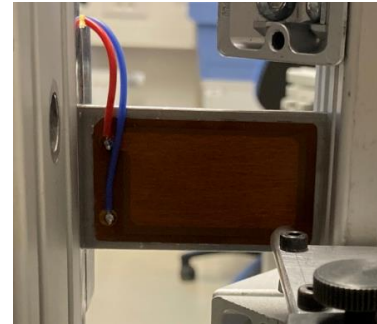


Abb. 3.16: Oben: beidseitig festgeklemtter Balken mit appl. Piezoaktuator; Unten: zugehöriges Ersatzschaltbild.

nun der Blockierkraft $\underline{F}_{Block}$ des Aktuators:

$$\underline{F}_{Block} = \lim_{\underline{Z}_{ma} \rightarrow \infty} \underline{F} = \alpha \underline{U}_p. \quad (3.205)$$

Sie ist die maximale Kraft, die der Piezoaktuator auf eine Struktur, auf die er appliziert ist, ausüben kann.

Die Impedanz $\underline{Z}$ strebt dabei – vorzeichenbedingt – gegen minus unendlich

$$\underline{Z} = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} \rightarrow -\infty, \quad (3.206)$$

da sie den unendlich steifen Untergrund charakterisiert. Für den Strom, der durch den Aktuator fließt, gilt

$$\underline{I}_p(\underline{U}_p) = \frac{\underline{U}_p}{\underline{Z}_e} = \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\underline{Z}_{ei} \cdot \underline{Z}_{mi}} \underline{U}_p. \quad (3.207)$$

Umgekehrt, wenn eine externe Kraft $\underline{F}$ (z.B. durch einen Impulshammer generiert) auf den Balken wirkt, ergibt sich die piezosensorische Spannung $\underline{U}_p(\underline{F})$ gemäß der Schaltung:

$$\underline{U}_p(\underline{F}) = \frac{\underline{F}}{\alpha} \cdot \frac{\underline{Z}_{ei}}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ei}} = \frac{\underline{F}}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}. \quad (3.208)$$

Durch den Piezosensor fließt dann der Strom

$$\underline{I}_p(\underline{F}) = \frac{\alpha^2}{\underline{Z}_{mi}} \cdot \frac{\underline{F}}{\alpha}. \quad (3.209)$$

Der Strom lässt sich auch in Abhängigkeit von der Schnelle $\underline{v}$ ausdrücken. Durch die Stromaufteilung ergibt sich:

$$\underline{I}_p(\underline{v}) = -\frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}} \cdot \alpha \underline{v}. \quad (3.210)$$

3.9.5. Aufbau: Kragbalken mit Piezoaktuator zur Bestimmung der Wandlerkonstanten α über die Modellparameter

Zur vollständigen Bestimmung der Schaltungsparameter ist die Identifikation der Wandlergröße α unerlässlich. Grundsätzlich gibt es mehrere Methoden der Wert der Wandlergröße zu bestimmen. Ein vielversprechender Weg ist der Vergleich der identifizierten elektrischen Parameter L_s , C_s und R_s aus der Messung der elektrischen Impedanz $\underline{Z}_e$ mit den identifizierten mechanischen Parametern m , k und d aus der Messung der mechanischen Impedanz $\underline{Z}_m$, wenn der Piezoaktuator auf dem Kragbalken kurzgeschlossen ist.

Für die gemessene elektrischen Impedanz $\underline{Z}_e$ ergibt sich ohne eine externe Krafteinwirkung ($F_B = 0$)

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{ei} \parallel \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2} = \frac{\underline{Z}_{ei} \cdot (\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.211)$$

Aus ihrem Verlauf lassen sich die elektrischen Parameter

- Kapazität C_p ,
- Induktivität L_s ,
- Kapazität C_s und
- ohmscher Widerstand R_s

ermitteln.

Die Messung der mechanischen Impedanz $\underline{Z}_m$ liefert bei kurzgeschlossenem Piezoaktuator direkt die mechanischen Parameter, denn die Wandlerkonstante α tritt bei dieser Messung nicht in Erscheinung:

$$\underline{Z}_m = \frac{F_B}{v_B} = \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} = j\omega \cdot m + d + \frac{1}{j\omega} \cdot k. \quad (3.212)$$

Dabei superponieren die Parameter der beiden Impedanzen $\underline{Z}_{mi}$ und $\underline{Z}_{ma}$ zu:

$$m = m_{mi} + m_{ma}, \quad (3.213)$$

$$k = k_{mi} + k_{ma}, \text{ und} \quad (3.214)$$

$$d = d_{mi} + d_{ma}. \quad (3.215)$$

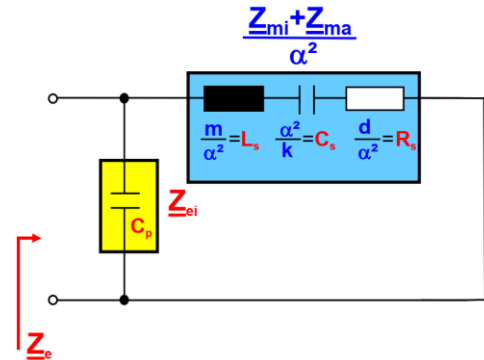


Abb. 3.17: Ersatzschaltbild des Kragbalkens mit appl. Piezoaktuator für die Messung der elektrischen Impedanz $\underline{Z}_e$.

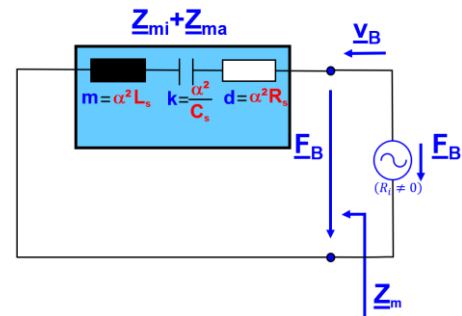


Abb. 3.18: Ersatzschaltbild des Kragbalkens mit appliziertem, aber kurzgeschlossenem Piezoaktuator für die Messung der mechanischen Impedanz $\underline{Z}_m$.

Bei der elektrischen Messung werden sie als Induktivität L_s , Kapazität C_s und ohmscher Widerstand R_s identifiziert:

$$L_s = \frac{m}{\alpha^2}, \quad (3.216)$$

$$C_s = \frac{\alpha^2}{k} \text{ und} \quad (3.217)$$

$$R_s = \frac{d}{\alpha^2}. \quad (3.218)$$

Da sich die Dämpfungswerte (R_s bzw. d) meist nur ungenau bestimmen lassen, ist die Identifikation von α nur aus den beiden Gleichungen

$$\alpha = \sqrt{\frac{m}{L_s}} \text{ bzw.} \quad (3.219)$$

$$\alpha = \sqrt{k C_s} \quad (3.220)$$

empfehlenswert. Beide Gleichungen sollten zu nahezu gleichen Werten für α führen.

Zu einem verkürzenden Verfahren führt der Vergleich der jeweiligen mechanischen Impedanz $\underline{Z}_m$ bei kurzgeschlossenem und bei offenem Piezoaktuator. Das Öffnen der elektrischen Anschlüsse erfordert die Berücksichtigung der inneren elektrischen Impedanz

$$\underline{Z}_{ei} = \frac{1}{j\omega C_p}, \quad (3.221)$$

wobei C_p die elektrische Kapazität des Piezoaktuators ist. Sie bewirkt eine ausschließliche additive Komponente der Steifigkeit um den Betrag

$$k_p = \frac{\alpha^2}{C_p}, \quad (3.222)$$

denn es gilt für die Impedanz $\underline{Z}_m$ bei offenen Piezokontakten:

$$\underline{Z}_m = \frac{F_B}{v_B} = \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma} + \alpha^2 \underline{Z}_{ei} = j\omega \cdot m + d + \frac{1}{j\omega} \cdot (k + k_p). \quad (3.223)$$

Die Masse m und die Dämpfung d sollten unverändert bleiben. Allerdings verschiebt sich die Eigenfrequenz bei offenen Elektroden zu dem vergrößerten Wert

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k+k_p}{m}}. \quad (3.224)$$

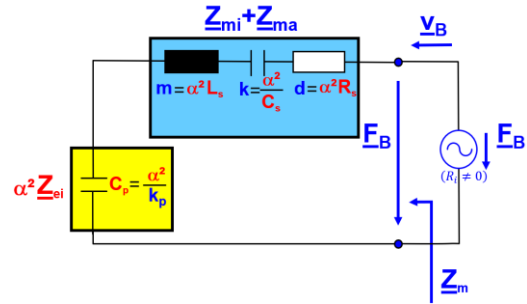


Abb. 3.19: Ersatzschaltbild des Kragbalkens mit appliziertem Piezoaktuator für die Messung der mechanischen Impedanz $\underline{Z}_m$ mit offenen elekt. Kontakten.

Die Eigenfrequenzverschiebung erfolgt also um den Betrag

$$\Delta f_0 := f_{0,offen} - f_{0,geschlossen} = \frac{1}{2\pi\sqrt{m}}(\sqrt{k + k_p} - \sqrt{k}). \quad (3.225)$$

Sind die elektrische Kapazität des Piezokondensators und die Steifigkeitsänderung bekannt, lässt sich direkt die Wandlerkonstante α ermitteln, denn es gilt:

$$\alpha = \sqrt{k_p C_p} \quad (3.226)$$

Die physikalische Einheit der Wandlerkonstante α ist

$$[\alpha] = \frac{N}{V} = \frac{As}{m}. \quad (3.227)$$

Der Zusammenhang zwischen der Wandlerkonstanten α und den piezoelektrischen Koeffizienten d_{ij} zeigt sich aus deren Eigenschaft, dass diese auch die piezoelektrischen Verzerrungskoeffizienten sind. Sie geben an, inwieweit eine Verzerrung des Kristallgitters aufgrund eines angelegten elektrischen Feldes erfolgt:

$$d_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial T_j} = \frac{\partial S_j}{\partial E_i} \quad (3.228)$$

mit den Laufvariablen $i \in [1,3]$ und $j \in [1,6]$. So gesehen sind die piezoelektrischen Koeffizienten d_{ij} Materialkonstanten 2. Ordnung, nämlich als die partiellen Ableitungen 2. Ordnung des entsprechenden thermodynamischen Potentials. Makroskopisch ergibt sich die piezoelektrische Ladungskonstante d_{31} auch aus der Wandlerkonstanten α , deren Wert sich ändert, sobald der Piezoaktuator appliziert ist:

$$d_{31} = \frac{\alpha}{k_{PB}}. \quad (3.229)$$

Hier ist k_{PB} diejenige ortsabhängige Steifigkeit, gegen die der Piezoaktuator agiert. Für den vorliegenden Fall des Kragbalkens mit appliziertem Piezoaktuator ist dies seine eigene mechanische Längssteifigkeit und zusätzlich die Eingangssteifigkeit des Balkens an der Ankoppelstelle (in axialer Richtung). Da bis zum ersten Schwingungsmoden die Impedanzrelation gilt (s. Kap. 3.8):

$$\underline{Z}_{ma,F} = \frac{\phi_{1,FB} \cdot \phi_{1,vB}}{\phi_{1,F} \cdot \phi_{1,v}} \underline{Z}_{ma,FB}, \quad (3.230)$$

wobei $\phi_{1,F}$ und $\phi_{1,v}$ die Eigenvektorelemente an der Stelle des Piezoaktuator und $\phi_{1,FB}$ und $\phi_{1,vB}$ die der Shakerposition sind, ergibt sich für den Steifigkeitsvergleich dementsprechend:

$$k_{PB} = k_{mi} + \frac{\phi_{1,FB} \cdot \phi_{1,vB}}{\phi_{1,F} \cdot \phi_{1,v}} k_{ma}. \quad (3.231)$$

Ist bei einer Messung der elektrischen Impedanz $\underline{Z}_e$ der Shaker noch an den Balken angekoppelt, ist in den obigen Gleichungen die Impedanz $\underline{Z}_{ma}$ gegebenenfalls noch um die Impedanz $\underline{Z}_s$ additiv zu ergänzen und bei der Berechnung der Wandlerkonstanten α vorab zu berücksichtigen.

3.9.6. Bestimmung der Wandlerkonstanten α durch drei Messungen

Solange keine externen dynamischen Kräfte auf den Piezoaktuator wirken, lässt sich die Wandlerkonstante α auch durch drei einzelne Messungen ermitteln. Dabei sind weder die Messung einer mechanischen Impedanz noch die Bestimmung von Modellparametern erforderlich. Der Piezoaktuator kann bei dieser Bestimmung frei gelagert oder appliziert oder strukturintegriert sein und über mehrere Moden in dem betrachteten Frequenzbereich verfügen. Das zugrunde liegende Modell ist das bekannte Vierpol-Netzwerk. Es sieht die innere elektrische Impedanz

$$\underline{Z}_{ei} = \frac{1}{j\omega C_p} \quad (3.232)$$

vor und die mechanischen Eigenschaften des Aktuators und der Struktur durch die elektrische Impedanz

$$\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2} = \sum_{i=1}^N \left(R_{si} + j \cdot \left(\omega L_{si} - \frac{1}{\omega C_{si}} \right) \right). \quad (3.233)$$

Dabei ist eine finite ganze Zahl N für die Anzahl der Schwingungsmoden in dem betrachteten Frequenzbereich angenommen. Ist der Piezoaktuator frei gelagert, gilt $\underline{Z}_{ma} = 0$.

Die erforderlichen drei Messungen sind im Einzelnen:

1. Messung der Kapazität C_p : Durch die elektrische Messung der Kapazität C_p ergibt sich die Impedanz $\underline{Z}_{ei}$.
2. Messung der elektrischen Impedanz $\underline{Z}_e$: Gemäß der Schaltung gilt

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{ei} \parallel \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2} = \frac{\underline{Z}_{ei} (\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.234)$$

Nach den mechanischen Impedanzen umgestellt ergibt sich

$$\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2} = \frac{\underline{Z}_{ei} \cdot \underline{Z}_e}{\underline{Z}_{ei} - \underline{Z}_e}. \quad (3.235)$$

3. Messung der Ansteuerspannung $\underline{U}$ und der Schnelle $\underline{v}$: Gemäß der obigen Schaltung gilt für die Abhängigkeit der Schnelle $\underline{v}$ von der Spannung $\underline{U}$:

$$\underline{v}(\underline{U}) = -\alpha \underline{U} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.236)$$

Umgestellt ergibt sich

$$\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha} = -\frac{\underline{U}}{\underline{v}} \quad (3.237)$$

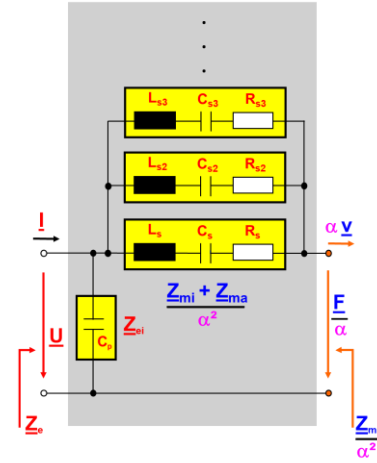


Abb. 3.20: Elektrisches Ersatzschaltbild des Piezoaktuators zur Bestimmung der Wandlerkonstanten α .

Der Vergleich der letzten beiden Ergebnisterme liefert die Wandlerkonstante α :

$$\frac{\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha}}{\frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2}} = \alpha = \frac{U(\underline{Z}_e - \underline{Z}_{ei})}{v \underline{Z}_e \underline{Z}_{ei}}. \quad (3.238)$$

Dieses Verfahren liefert einen dispersiven Verlauf von α . Der konstante Verlauf sollte jedoch die Modenunabhängigkeit erkennen lassen. Erfolgt die Messung der Schnelle berührungslos, sollten die mechanische und die elektrischen Messungen sehr gut übereinstimmen, da sich an der Struktur bzw. an dem Piezoaktuator und seinen Randbedingungen nichts geändert hat. Zu berücksichtigen sind ggf. messtechnisch bedingte Totzeiten und Sensitivitätswerte.

3.9.7. Bestimmung der stat. Steifigkeit des applizierten Piezoaktuators nebst Klebeschicht

Wie bei dem Aufbau in 3.9.2c lässt sich die statische Steifigkeit k auch durch eine Messung der statischen Auslenkung w_B exakt an der Stelle des Kragbalkens, für die die Impedanz $\underline{Z}_m$ definiert ist, ermitteln. Doch im Gegensatz zu dem Kragbalken ohne appliziertem Piezoaktuator (3.9.2c) ergibt sich nun an der Kräfteinleitungsstelle (Position des Shakers) die Steifigkeit:

$$k(x_{FB}) = k_{mi} + k_{ma} = \frac{F_B(x_{FB})}{w_B(x_{FB})} = \frac{3 E I_y}{x_{FB}^3}. \quad (3.239)$$

Sofern die Steifigkeit k_{ma} vorab am Kragbalken ohne applizierten Piezoaktuator ermittelt wurde, ist somit auch die statische Steifigkeit k_{mi} des Piezoaktuators und der Klebeschicht identifizierbar durch

$$k_{mi} = k - k_{ma}. \quad (3.240)$$

Da der Piezoaktuator über die Strecke von x_{m1} bis x_{m2} durch Normalkräfte auf den Kragbalken ausübt, handelt es sich bei der statischen Steifigkeit k_{mi} um die (einseitige) Längssteifigkeit des Aktuators.

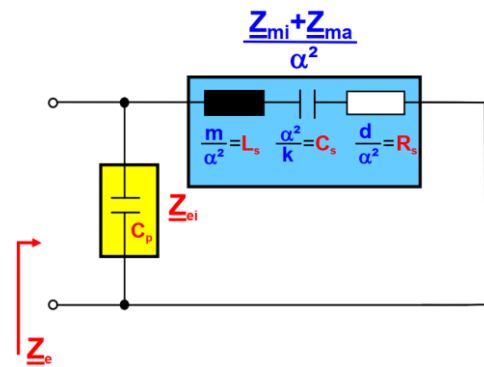


Abb. 3.21: Ersatzschaltbild des Kragbalkens mit appliziertem Piezoaktuator für die Messung der elektrischen Impedanz $\underline{Z}_e$.

3.9.8. Sensorische Erfassung externer Größen mit dem Piezosensor/-aktuator

Wirkt eine Kraft $\underline{F}_B$ auf den Balken, verursacht sie am elektrischen Ausgang des Piezoaktuators, der nun als Sensor fungiert, die elektrische Spannung

$$\underline{U}_p(\underline{F}_B) = \frac{\underline{F}_B}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.241)$$

Demnach lässt sich die Kraft $\underline{F}_B$ aus der gemessenen Piezospannung $\underline{U}_p$ ermitteln gemäß:

$$\underline{F}_B(\underline{U}_p) = \alpha \cdot \underline{U}_p \left(1 + \frac{\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei}} \right), \quad (3.242)$$

sofern die Größen α , $\underline{Z}_{ei}$ und die Summe $(\underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma})$ bekannt sind. Für die Normalkraft $\underline{F}$ zwischen dem Piezoaktuator und dem Balken ergibt sich in diesem Betriebsmodus

$$\underline{F}(\underline{F}_B) = \underline{F}_B \cdot \frac{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.243)$$

Die Spannung $\underline{U}_p$ lässt sich aber auch in Abhängigkeit von der Schnelle $\underline{v}_B$ ausdrücken, die dabei am Balkenende auftritt:

$$\underline{U}_p(\underline{v}_B) = \alpha \underline{v}_B \cdot \underline{Z}_{ei}. \quad (3.244)$$

Demnach lässt sich auch die Schnelle $\underline{v}_B$ aus der gemessenen Piezospannung $\underline{U}_p$ ermitteln gemäß:

$$\underline{v}_B(\underline{U}_p) = \frac{1}{\alpha \underline{Z}_{ei}} \underline{U}_p. \quad (3.245)$$

Gemäß der elektrischen Ersatzschaltung ergibt sich für die Schnelle $\underline{v}$ am Ankoppelpunkt:

$$\underline{v}(\underline{F}_B) = \underline{F}_B \cdot \frac{1}{\alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}}. \quad (3.246)$$

Die Messung der mechanischen Impedanz $\underline{Z}_m$ am Balkenende ergibt erwartungsgemäß (vgl. Kap. 3.1):

$$\underline{Z}_m = \alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi} + \underline{Z}_{ma}. \quad (3.247)$$

Die mechanische Impedanz $\underline{Z}$ (zwischen dem Piezoaktuator und dem Balken) entspricht in diesem Betriebsmodus somit erwartungsgemäß der Impedanz des Aktuators:

$$\underline{Z} = \alpha^2 \underline{Z}_{ei} + \underline{Z}_{mi}. \quad (3.248)$$

4. Exp. Bestimmung der mech. und elektr. Komponenten und Parameter

Die Untersuchungen am Balken zeigen speziell den Einfluss der Einzelkomponenten auf das Gesamtsystem und das hier dargestellte Vorgehen ermöglicht ein Lösen des Balkens, ohne die Einspannung zu verändern. Die Einspannung des Balkens hat hierbei einen großen Einfluss auf das statische und dynamische Verhalten. Während des Klebprozesses bleibt die Einspannung des Balkens selbst möglichst unverändert. Diese Einspannung bleibt daher stets erhalten (siehe roter Pfeil in [Abb. 4.1](#)), da die Schrauben (rot gestreifte Pfeile) fixiert bleiben. Um den Balken zu lösen, wird die gesamte Aufhängung gelöst. Der Balken hat die Maße (gemessen ab der Einspannung) $170 \times 40 \times 3,15 \text{ mm}^3$ mit einer 8,5 mm Bohrung an der Shaker-Position x_{Shk} (160 mm von der Einspannung entfernt).

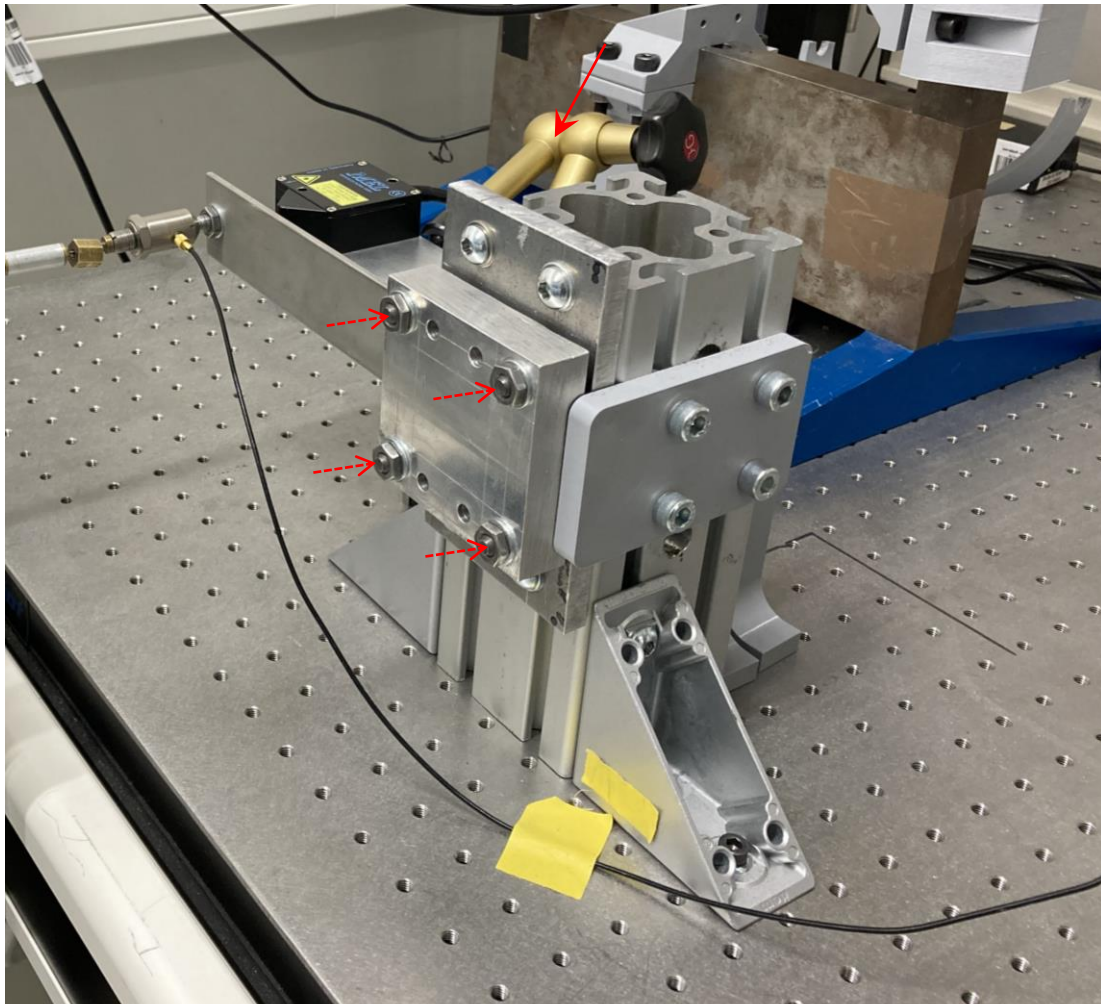


Abb. 4.1: Einspannung des Biegebalkens

4.1. Betrachtung der Einzelkomponenten

4.1.1. Ermittlung der statisch mechanischen Eigenschaften des Biegebalkens

Beginnend mit den statischen Eigenschaften sind Dichte und Steifigkeit wichtige Eigenschaften für die nachfolgende Untersuchung. Die Ermittlung der Dichte des Balkens erfolgt über zwei Proben, welche aus demselben Material wie der Trägerbalken bestehen. [Abb. 4.2](#) zeigt die verwendete Probe „1“. Diese Probe besitzt insgesamt fünf Bohrungen. Vier Bohrungen haben einen Durchmesser von 3 mm und eine 4 mm. Mit einer Länge von 148,8 mm und einer Breite von 40 mm sowie einer Stärke von 3 mm ergibt sich somit ein Volumen von $1,773348 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$. Mit einem Gewicht von 139 g ergibt sich eine Dichte von $7838,28 \text{ kg/m}^3$. Die zweite Probe mit den Maßen $11,06 \times 40 \times 3 \text{ mm}^3$ und einem Gewicht von 10,4 g ist in [Abb. 4.3](#) dargestellt. Sie hat somit eine Dichte von $7836,05 \text{ kg/m}^3$. Im Mittel hat dieses Material eine Dichte von $7837,165 \text{ kg/m}^3$. Dieser Wert liegt im Bereich der Austenit-Stähle, welche mit $7800 - 7850 \text{ kg/m}^3$ angegeben sind [[Wittel, 2011](#) und [Hamm, 1976](#)]

$$\rho = \frac{m}{V} = 7838,28 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4.1)$$

$$\rho = \frac{m}{V} = 7836,05 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (4.2)$$

Die Ermittlung der statischen Steifigkeit erfolgt durch zwei verschiedene Sensoren. Die Krafteinleitung erfolgt in eine 8,5 mm Bohrung in der modifizierte M8x20 Schraube die am Ende des Balkens angebracht ist. Die genaue Position ist 10 mm entfernt vom Balkenende bzw. 160 mm von der Einspannung. Die erste Messung erfolgt mit einem Impedanz-Sensor der Firma „Brüel & Kjær“ (siehe [Abb. 4.4](#)). Der Impedanz-Sensor mit der Typbezeichnung „8001“ hat zwei



[Abb. 4.2:](#) Probe 1 vom Trägerbalken mit einem Gewicht von 139 g.



[Abb. 4.3:](#) Probe 2 vom Trägerbalken mit einem Gewicht von 10,4 g.

Anschlüsse: einen für die Beschleunigung und einen für die Kraft. Vor dem Sensor ist ein Gewinde angebracht, welches mit 2,2 g bei allen Messungen zu berücksichtigen ist. Für diese Messung wird lediglich die Kraft verwendet. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 4.5 dargestellt. Über einen Verstärker von Kepco „BIPOLAR OPERATIONAL POWER SUPPLY/ AMPLIFIER“ wird der Shaker mit dem Onosokki „FFT Analyzer CF-9200“ angesteuert. Der Kraftsensor sitzt zwischen dem Shaker und dem Krafteinleitungspunkt des Balkens und misst somit die Kraft, die durch den Shaker in den Balken eingebracht wird. Die durch den Kraftsensor erzeugte Ladung wandelt der Nexus von Brüel & Kjær in die eingebrachte Kraft um. Die erzeugte Auslenkung am Krafteinleitungspunkt misst der Distanzsensor „MEL LASER Distance Senors M7LL/2“ gegenüber dem Impedanz-Sensor. Die Aufzeichnung der Daten sowie die Erzeugung des Ansteuerungssignals übernimmt der Onosokki. Mithilfe eines Sinus-Signals mit einer Amplitude von nahezu null (kleinstmöglicher Wert: 0,001V) ist ein quasistatisches Signal über den Offset generierbar.



Abb. 4.4: Impedanz-Sensor von Brüel & Kjær mit der Typbezeichnung „8001“.

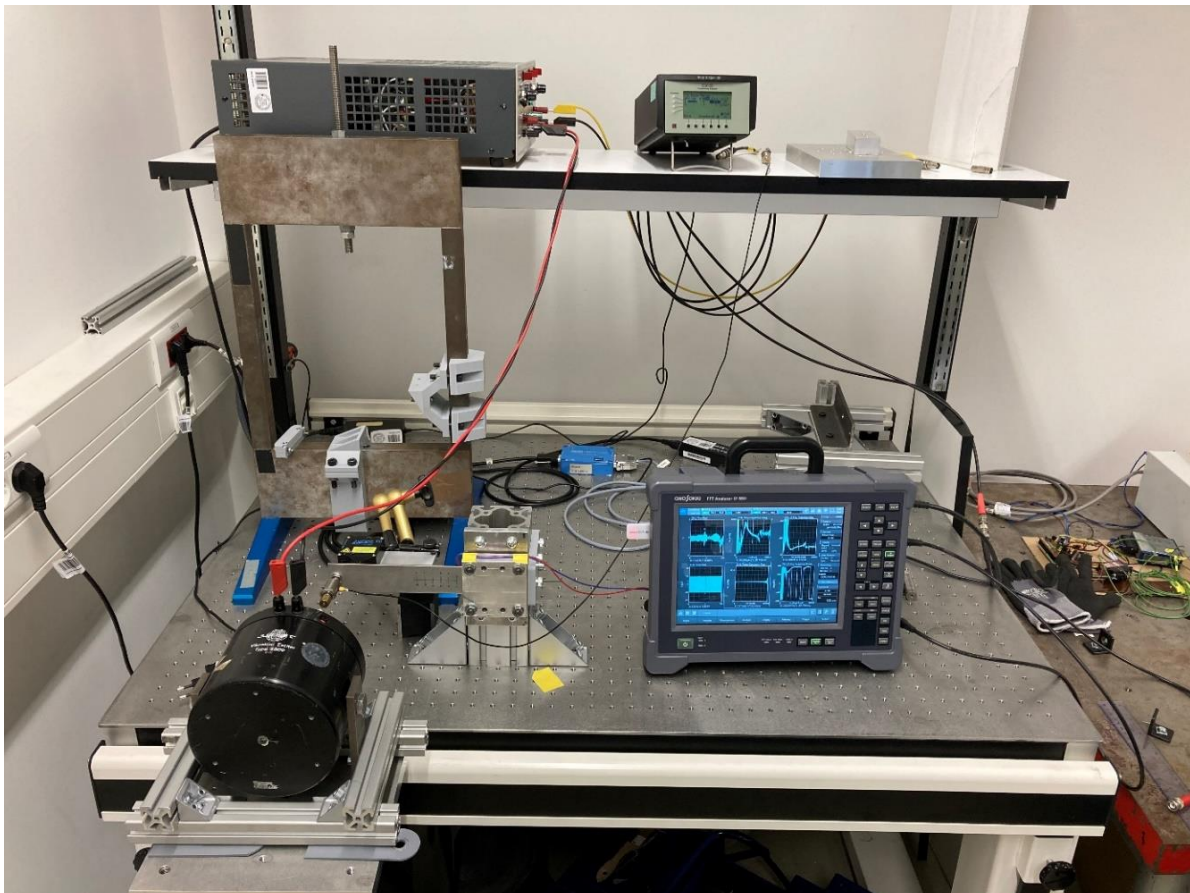
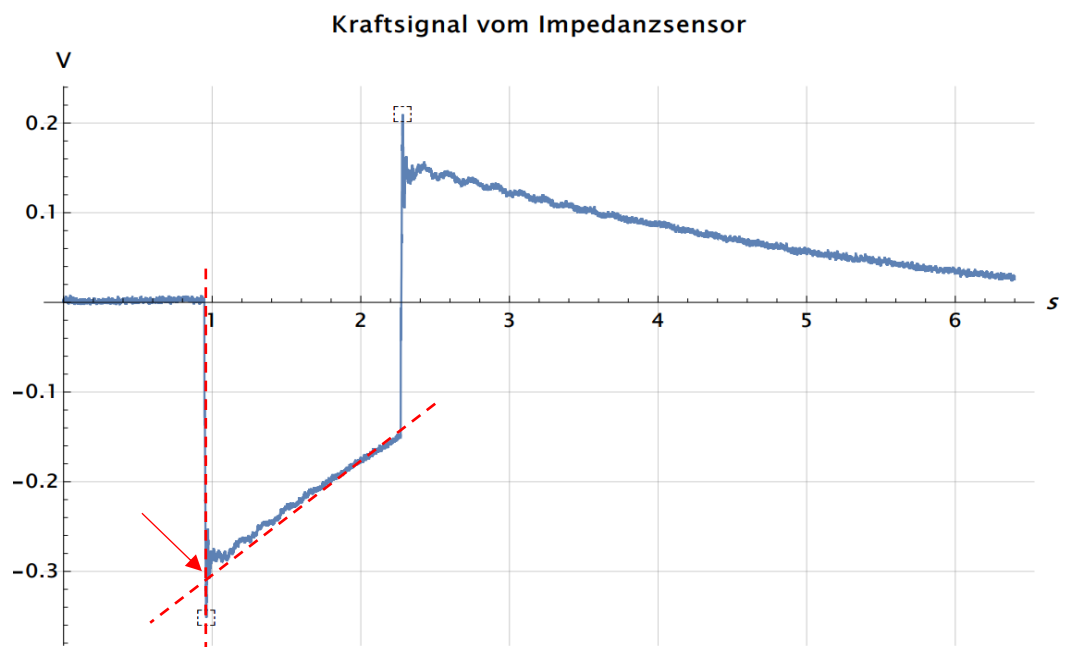


Abb. 4.5: Versuchsaufbau zur Ermittlung der Steifigkeit mit dem Impedanz-Sensor

Bei den Messungen mit dem Impedanz-Sensor fällt die gemessene Last bei statischer Belastung kontinuierlich gegen den Wert null. [Abb. 4.6](#) zeigt den zeitlichen Verlauf der gemessenen Kraft bei statischer Last. Zu Beginn der Krafteinleitung ist der Anstieg durch den Sprung ins Negative repräsentiert. Der Wert ist negativ, da es sich um eine Zugbelastung handelt. Sofort nach Aufbringung der Kraft ist der Abfall sichtbar. Der zweite Sprung ist der Abschaltvorgang des Ansteuerungssignals. Ein möglicher Grund könnte die Auslegung des Sensors sein, da es kein reiner Kraftsensor ist. Um trotzdem ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten, ist es ratsam, den Anfangswert gleich nach dem Anlegen der Kraft auszuwerten. Dieser Wert ist mit zwei Linien interpolierbar (siehe die gestrichelten Linien in [Abb. 4.6](#)). Die senkrechte Linie gibt den Beginn der Krafteinleitung und die angewinkelte Linie gibt die ungefähre Steigung zu diesem Zeitpunkt wieder. Die Steigung nimmt kontinuierlich in der Zeit ab. Um den Effekt zu minimieren, ist alternativ die Steifigkeit dynamisch messbar.



[Abb. 4.6](#): Kraftsignal des Impedanz-Sensors aufgrund eines Rechtecksignals.

4.1.2. Dynamische Eigenschaften des Balkens

Die Messung der dynamischen Eigenschaften erfolgt entsprechend dem Aufbau in [Abb. 4.5](#). Das Anregungssignal ist ein Sinus Sweep im Frequenzbereich von 0 bis 100 Hz, da sich der erste Mode in diesem Bereich befindet. Die gemessene Kraft und Auslenkung ergeben die Impedanz bzw. auch die dynamische Steifigkeit. Ihr Betrag

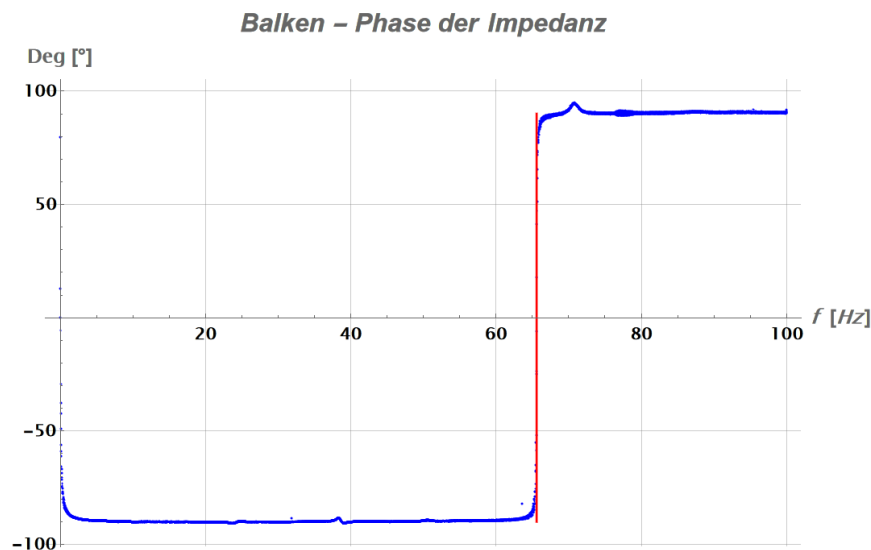
$$|K_{ma}| = \sqrt{(2\pi f)^4 \cdot m_{ma}^2 + (2\pi f)^2(d_{ma}^2 - 2 \cdot k_{ma} \cdot m_{ma}) + k_{ma}^2} \quad (4.3)$$

ist als Verlauf der dynamischen Steifigkeit abbildbar, wobei m_{ma} , d_{ma} und k_{ma} jeweils die statischen Werte der Masse, Dämpfung und Steifigkeit sind. Die Masse ist bestimmt durch

$$m_{ma} = \frac{k_{ma}}{(f_0 2\pi)^2}. \quad (4.4)$$

Mit der am Phasenwechsel ablesbaren Resonanzfrequenz f_0 sind die Werte für d_{ma} und k_{ma} numerisch ermittelbar. Der frei schwingende Balken hat eine Resonanzfrequenz von 65,6 Hz (siehe [Abb. 4.7](#)). [Abb. 4.8](#) zeigt den relevanten Ausschnitt zur Ermittlung der Dämpfung: das Minimum der Kurve. [Abb. 4.9](#) zeigt den kompletten Verlauf der dynamischen Steifigkeit des Balkens ohne aufgeklebten Piezo-Aktuator. Somit ergibt sich durch die dynamische Messung

- eine statische Steifigkeit von $k_{ma} = 12047.2 \text{ N/m}$,
- eine Dämpfung von $d_{ma} = 0.035 \text{ kg/s}$
- und eine Masse von $m_{ma} = 0.070934 \text{ kg}$.



[Abb. 4.7](#): Phasenverlauf der Balkenimpedanz von 0 bis 100 Hz.

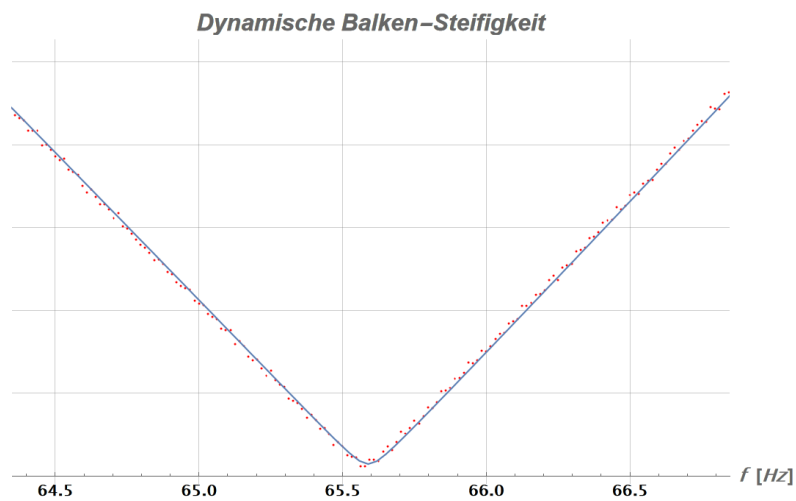


Abb. 4.8: Ausschnitt der dynamischen Steifigkeit des Balkens zur Ermittlung der Dämpfung. Die Punkte sind die Werte der Messung und die Linie zeigt das Modell mit den angepassten Werten.

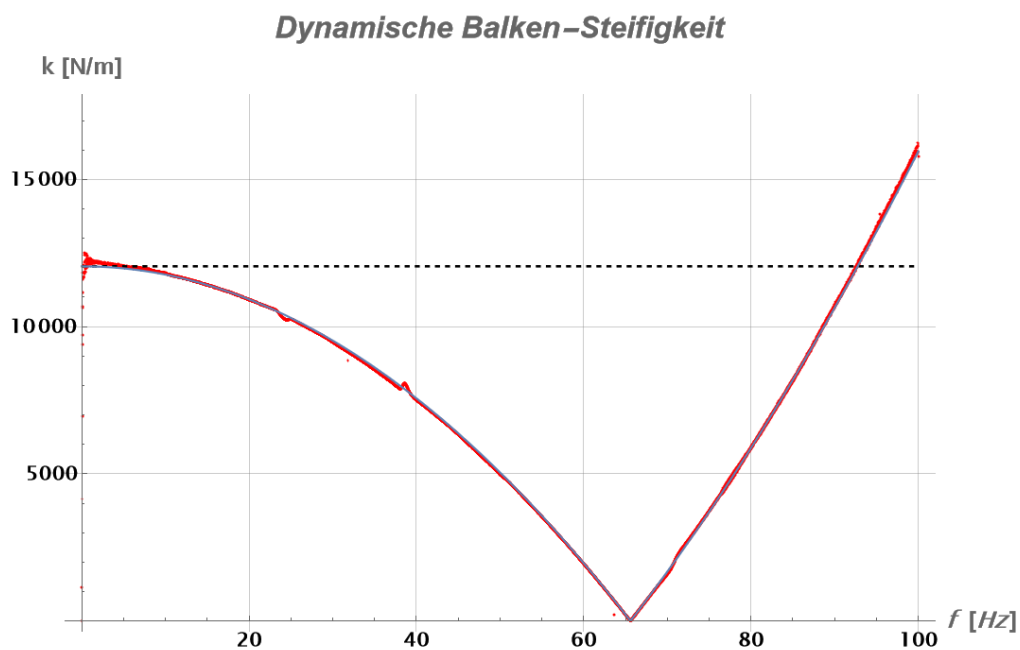


Abb. 4.9: Dynamische Steifigkeit des Biegebalkens ohne Piezoaktuator. Die Messwerte sind rot dargestellt. Die blaue darauf liegende Linie ist das errechnete Modell und die gestrichelte Linie ist die aus der Messung ermittelte statische Steifigkeit.

4.2. Ermittlung der mechanischen und elektrischen Eigenschaften des Piezoaktuators

In diesem Aufbau fand der „DuraAct P-876.A12“ Anwendung. Die exakten Abmessungen des Patches sind $60,65 \times 34,7 \times 0,5 \text{ mm}^3$. Die aktive Schicht erstreckt sich entsprechend Abb. 4.10 über eine Fläche von $30 \times 50 \text{ mm}^2$. Abb. 4.11 zeigt die vom Hersteller mitgelieferten Eigenschaften des Piezoaktuators. Die durch einem „Fluke 117“ Multimeter ermittelte Kapazität von 87 nF entspricht den Herstellerangaben.

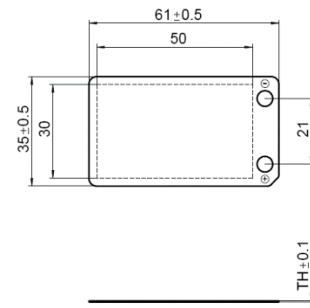


Abb. 4.10: P-876.A1x, Abmessungen in mm; Quelle: „DuraAct Patch Transducer“, www.PI.ws, 19.06.2020

	P-876.A11	P-876.A12	P-876.A15	P-876.SP1	Unit	Tolerance
Operating voltage range	-50 to 200	-100 to 400	-250 to 1000	-100 to 400	V	
Motion and positioning						
Min. lateral contraction	400	650	800	650	$\mu\text{m/m}$	
Rel. lateral contraction	1.6	1.3	0.64	1.3	$\mu\text{m/m/V}$	
Mechanical properties						
Blocking force	90	265	775	280	N	
Min. bending radius	12	20	70	–	mm	
Drive properties						
Electrical capacitance	150	90	45	8	nF	$\pm 20 \%$
Piezo ceramic	PIC255	PIC255	PIC255	PIC255		
Piezoceramic height	100	200	500	200	μm	
Miscellaneous						
Voltage connector	Soldering points	Soldering points	Soldering points	Soldering points		
Dimensions	61 mm $\times$ 35 mm $\times$ 0.4 mm	61 mm $\times$ 35 mm $\times$ 0.5 mm	61 mm $\times$ 35 mm $\times$ 0.8 mm	16 mm $\times$ 13 mm $\times$ 0.5 mm		
Recommended electronics	E-413, E-821, E-835	E-413, E-821, E-835	E-413, E-821, E-835	E-413, E-821, E-835		

Abb. 4.11: P-876.A1x, Eigenschaften vom Hersteller; Quelle: „DuraAct Patch Transducer“, www.PI.ws, 19.06.2020

Mit Hilfe der elektrischen Impedanzspektroskopie wird die elektrische Impedanz wie in [Melcher, 2001] und [Buchholz, 2018] über eine Spannungsteilerschaltung aus der zu messenden Impedanz Z_e und einem ohmschen Widerstand R gemessen. Der Messaufbau ist in Abb. 4.12 schematisch dargestellt. Über den Signalgenerator des FFT-Analysators („OnoSokki CF 9200“) wird ein Gleitsinus-Signal ausgegeben und über die Zusatzschaltung sind Aktuator mit der Impedanz Z_e und Widerstand ($R = 120 \Omega$) mit der Spannungsquelle in Reihe geschaltet. Die Eingangsspannung sowie die über den Widerstand abfallende Spannung werden dem

FFT-Analysator über die Kanäle B und A zugeführt. Die Funktion FRF (*Frequency Response Function*) transformiert die Signale in den Frequenzbereich und teilt sie durcheinander, wodurch die Übertragungsfunktion B/A gemessen wird. Da durch die Spannungsteilereigenschaften der Zusatzschaltung

$$\frac{U_A}{U_B} = R \cdot I = \frac{R}{R + Z_e} \cdot U_B \quad (4.5)$$

gilt, ergibt sich der Zusammenhang

$$Z_e = R \cdot \left(\frac{U_B}{U_A} - 1 \right). \quad (4.6)$$

Mit Gleichung (4.6) und der gemessenen Übertragungsfunktion U_B/U_A ist die Impedanz Z_e nach Betrag und Phase ermittelbar. Die elektrische Impedanzmessung zeigt erst bei deutlich höheren Frequenzen einen S-Schlag. Erst bei einer Frequenz von 25218.75 Hz tritt das erste Maximum der Phase ein und somit eine messbare Resonanzfrequenz auf. Abb. 4.14 zeigt links den Verlauf des Betrags der elektrischen Impedanz und rechts die Phase der Messung bis 100.000 Hz . Die nachfolgenden S-Schläge im Betrag der Impedanz und die Anhebungen der Phasen signalisieren weitere Resonanzfrequenzen.

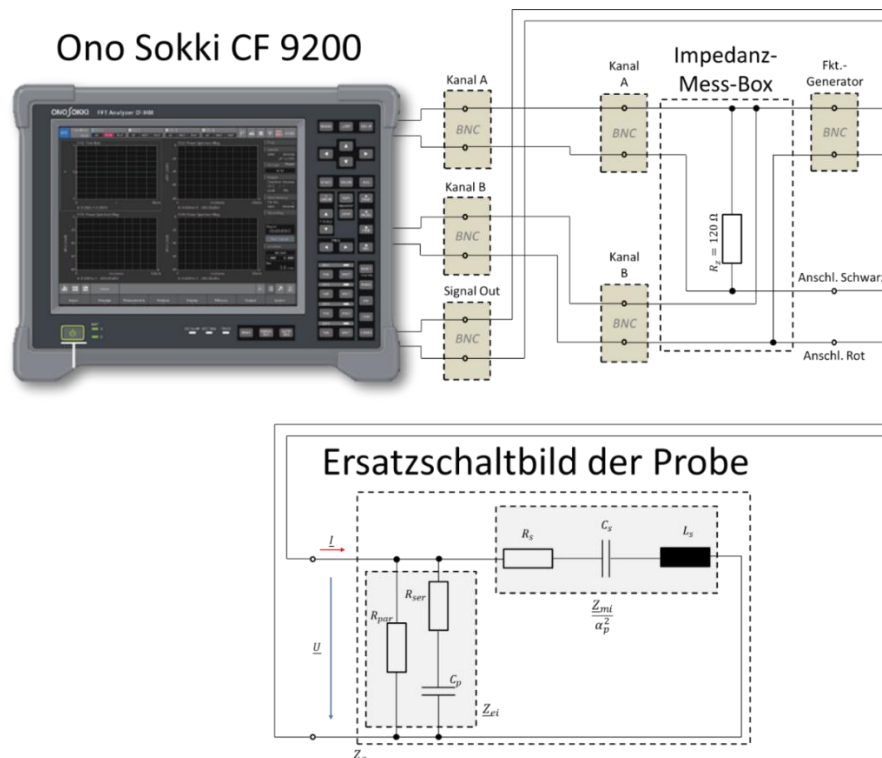


Abb. 4.12: Schematischer Aufbau zur Messung der elektrischen Impedanz. Über die Zusatzschaltung sind Aktuator mit der Impedanz Z_e und Widerstand ($R=120 \text{ } \Omega$) mit der Spannungsquelle in Reihe geschaltet. Die Eingangsspannung sowie die über den Widerstand abfallende Spannung werden dem FFT-Analysator über die Kanäle B und A zugeführt.

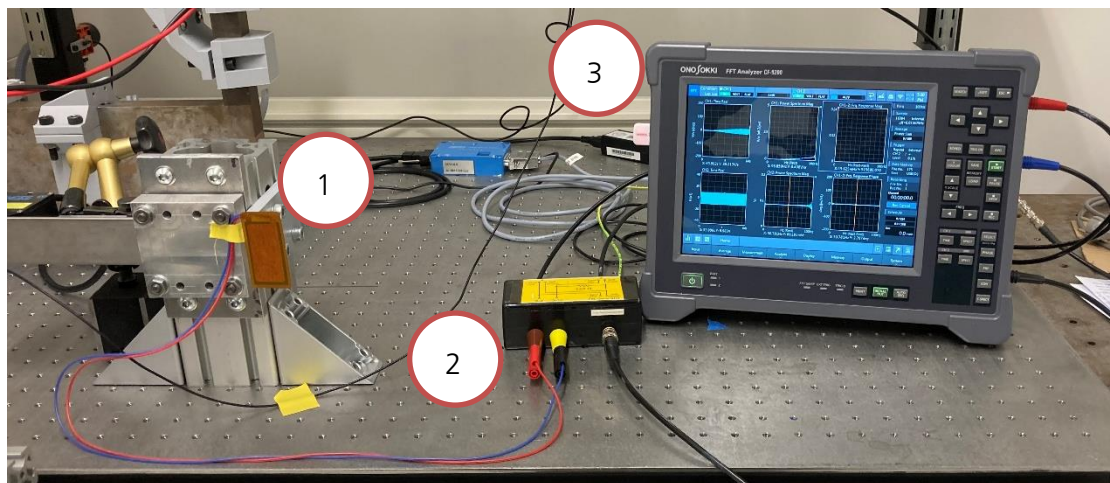


Abb. 4.13: Messaufbau zur Messung der elektrischen Impedanz.

1) Piezoaktuator; 2) Impedanzmessbox mit $120\ \Omega$ Widerstand; 3) Ono Sokki CF 9200.

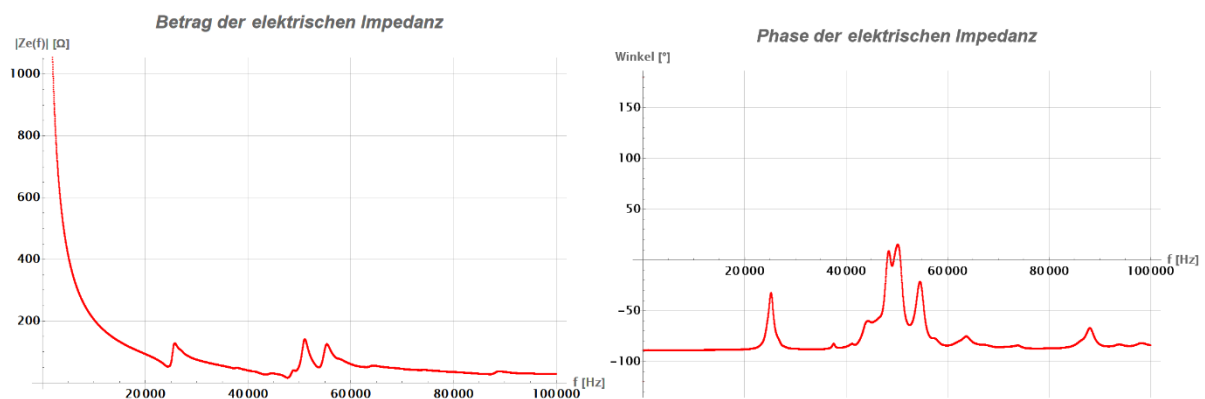


Abb. 4.14: Elektrische Impedanz Z_{mi} des frei hängendem Piezopatches bis 100.000 Hz

Die Auswertung dieser Messergebnisse durch die in „Aufbau: Piezoaktuator ist frei liegend, nicht appliziert“ dargelegten Modelle ist in [Abb. 4.15](#) dargestellt. Aus diesen Kurven gehen folgende Parameter des einzelnen Piezoaktuators im frei hängendem Zustand hervor:

für Z_{ei} :

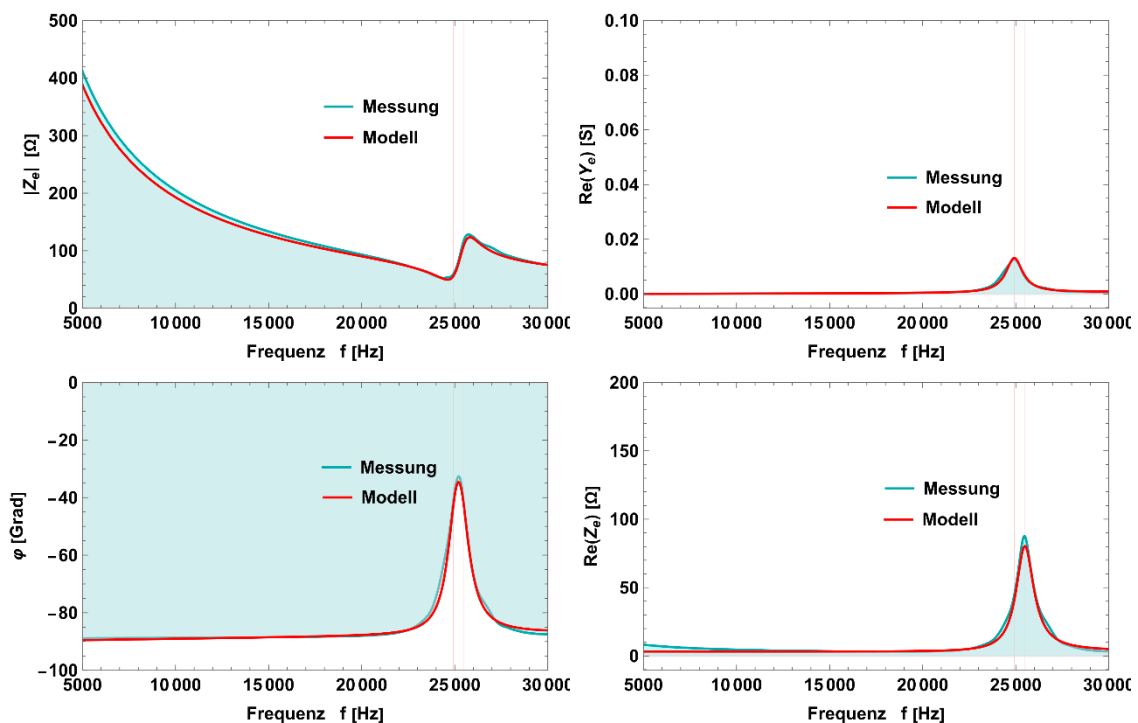
- $C_p = 7,82927 \cdot 10^{-8} F$,
- $R_{ser} = 3,30088 \Omega$,
- $R_{par} = 3,2 \cdot 10^6 \Omega$,

für Z_{mi} :

- $L_s = m/\alpha^2 = 0,0114894 H$,
- $R_s = d/\alpha^2 = 79,2097 \Omega$,
- $C_s = \alpha^2/k = 3,54962 \cdot 10^{-9} F$,

mit den Resonanzfrequenzen

- $f_s = 24921,9 Hz$,
- $f_0 = 24921,9 Hz$,
- $f_p = 25468,8 Hz$.



[Abb. 4.15](#): Messergebnisse der elektrischen Impedanz und das darüber liegende Modell.

4.3. Aufklebeprozess des Aktuators auf den Biegebalken

Für den Aufklebeprozess blieb die Einspannung des Balkens selbst unberührt. Es wurde die gesamte Aufhängung gelöst (siehe [Abb. 4.16](#)). Die Positionierung des Patches erfolgte mit Tapes, welche mit dem Skalpell entlang drei Kanten geschnitten wurde, sodass durch Umklappen des Aktuators eine Klebeschicht applizierbar ist. Das Anrauen der Flächen mit Schleifpapier beseitigt Verunreinigungen und sorgt für eine bessere Haftung für den Klebeprozess. Neben dem Balken ist der Vakuumbbeutel vorzubereiten (siehe [Abb. 4.17](#) links). Sofort nach dem Aufbringen des zwei Komponentenklebers „Loctite EA9466“ ist der Vakuumbbeutel zu schließen und ein Unterdruck ist über eine Vakuumpumpe aufzubauen. Der aufgebaute Unterdruck sorgt für eine gleichmäßige Verteilung der Kraft, die für eine optimale Verklebung sorgt (siehe [Abb. 4.17](#) rechts). [Abb. 4.18](#) zeigt den fertigen Balken mit aufgeklebten Piezo-Patch nach ca. 8 Stunden und entsprechender Kontaktierung.

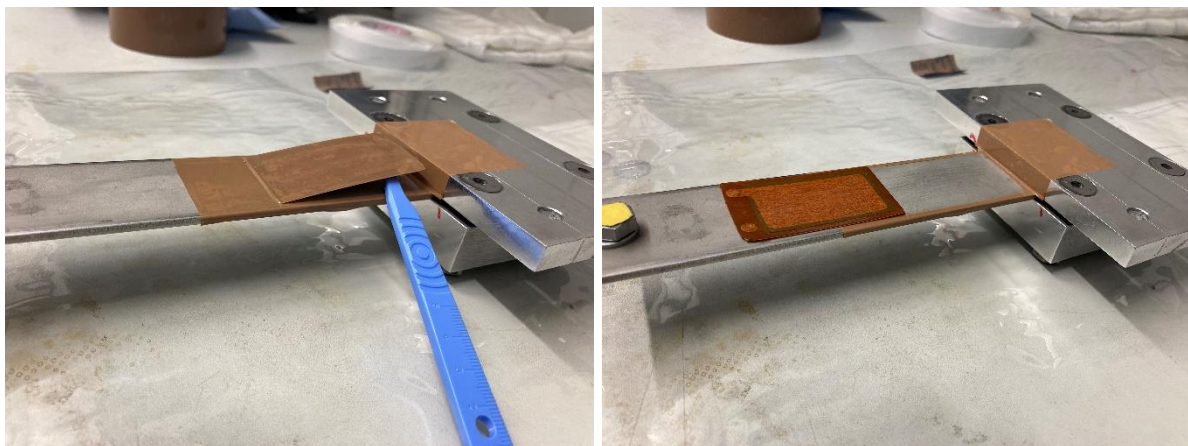


Abb. 4.16: Mit Tape fixierter Piezo-Patch als Vorbereitung zum Klebeprozess. Der Piezo-Patch ist mit einem Skalpell freigelegt, um den Kleber aufbringen zu können.



Abb. 4.17: Herstellung des Vakuumbetels. **Links:** Vorbereiteter Beutel mit Balken. Nachdem der Kleber „Loctite EA9466“ aufgetragen ist, wird dieser mit Dichtband geschlossen. **Rechts:** geschlossener Beutel.

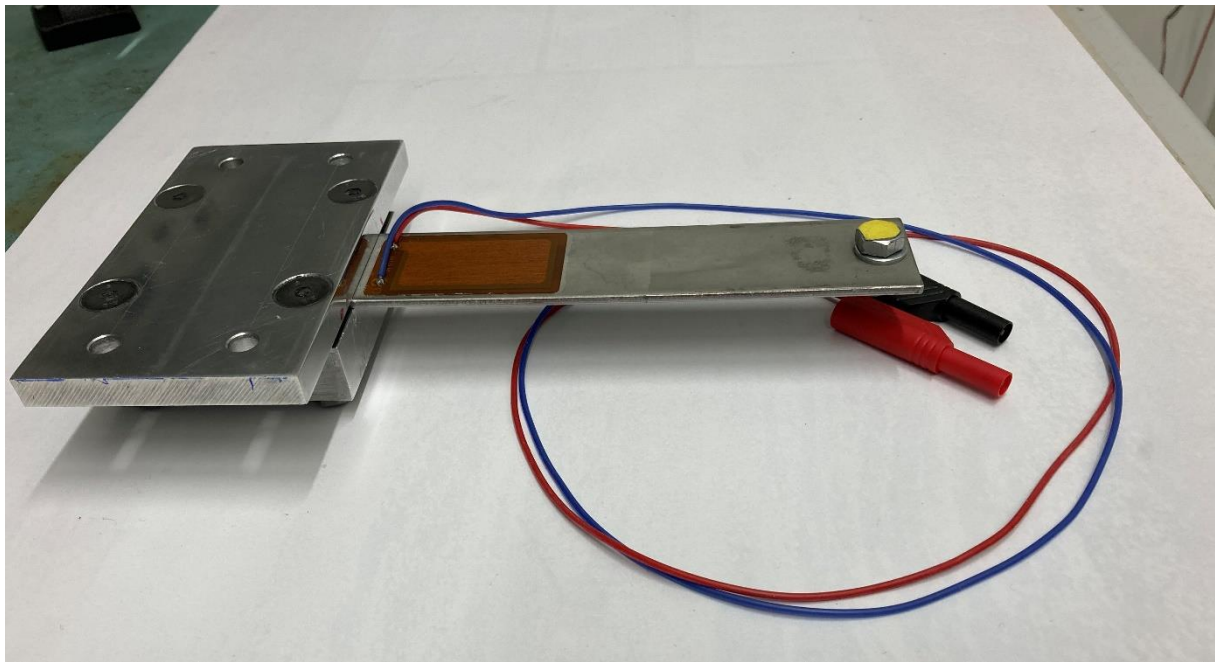


Abb. 4.18: Aufgeklebter Piezopatch auf dem Balken.

4.4. Bestimmung der Eigenschaften des Gesamtsystems

Die messtechnische Erfassung der mechanischen Impedanz lässt sich sowohl mit einem extern angebrachten Shaker in Kombination mit einem Impedanz-Sensor vornehmen, als auch mit einem Impulshammer mit eingebautem Kraftaufnehmer. Die Verwendung des Shakers besitzt den Vorteil der guten Reproduzierbarkeit. Allerdings bewirkt seine direkte mechanische Ankopplung an die zu testende Struktur eine Beeinflussung des Messergebnisses. Für den Impulshammer gilt entsprechend Gegenteiliges. Hinzu kommt die nahezu beliebige Positionswahl. Allerdings besteht stets die Gefahr eines doppelten Hammerschlags, induziert durch die schnell zurückschwingende Struktur, auch bekannt als „Double Hit“. Bei beiden Methoden bedarf es daher einer sorgfältig vorbereiteten und durchgeführten Messprozedur. Der Impedanz-Sensor zwischen Shaker und Balken erfasst die dynamische Kraft $\underline{F}_B$, die durch den Shaker auf das Balkenende (Position $x_{shk} = 0.16 \text{ m}$) eingebracht wird. Der gegenüberliegende Lasersensor erfasst die Auslenkung $\underline{w}_B$ als Zeitsignal und somit auch $\underline{v}_B$. Die Messung der dynamischen Steifigkeit, entsprechend Kapitel 4.1, erfolgt mit der Anregung des Systems durch ein Gleitsinus-Signal von $0 - 100 \text{ Hz}$. Die Impedanzen der jeweiligen Zustände (mit offenen und geschlossenen Kontakten) sind in [Abb. 4.20](#) und [Abb. 4.21](#) dargestellt. Die dynamische Steifigkeit für den Zustand mit offenen Kontakten ist in [Abb. 4.22](#) und für den geschlossenen Zustand in [Abb. 4.23](#) zu sehen. [Abb. 4.24](#) und [Abb. 4.25](#) zeigen die Phasenverläufe der Impedanz und der dynamischen Steifigkeit. Die Phasenverschiebung verursacht die Multiplikation mit der komplexen Kreisfrequenzachse. Für die jeweiligen Zustände Kontakte ergeben sich die Steifigkeiten:

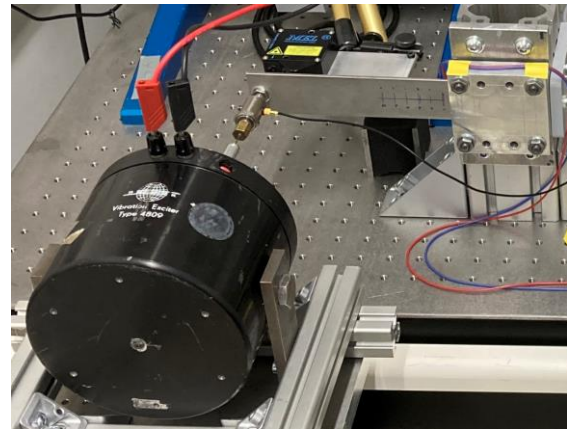


Abb. 4.19: Kragbalken mit angebrachtem Shaker und Impedanzsensor.

$$k_{\text{offen}} = 12062.8 \text{ N/m}$$

$$k_{\text{geschlossen}} = 12049.9 \text{ N/m},$$

die Massen

$$m_{\text{offen}} = 0.067205 \text{ kg}$$

$$m_{\text{geschlossen}} = 0.067416 \text{ kg},$$

die Dämpfungen

$$d_{\text{offen}} = 0.056 \text{ kg/s}$$

$$d_{\text{geschlossen}} = 0.056 \text{ kg/s}$$

und die Resonanzfrequenzen

$$f_{0_{\text{offen}}} = 67.4 \text{ Hz}$$

$$f_{0_{\text{geschlossen}}} = 67.3 \text{ Hz}.$$

Durch die zusätzliche Steifigkeit k_p aus $\underline{Z}_{ei}$ bei offenen Kontakten steigt die gemessene Resonanzfrequenz um $0,14 \text{ Hz}$ und die Steifigkeit um $12,9 \text{ N/m}$. Die Dämpfung und die Masse bleiben erwartungsgemäß nahezu unverändert. Deutlich größer ist der Einfluss durch den Klebprozess selbst. Abb. 4.26 zeigt mit der links liegenden blauen Kurve das Ergebnis der Messung ohne Patch und rechts die Kurve aus roten Punkten die Messdaten des Balkens mit kurzgeschlossenem appliziertem Aktuator. Durch die erhöhte Steifigkeit hat sich die Resonanzfrequenz verschoben und die Steifigkeit erhöht. Es ergibt sich ein Unterschied der Werte von:

- $k_{\text{geschlossen}} - k_{\text{ma}} = +2,7 \text{ N/m},$
- $d_{\text{geschlossen}} - d_{\text{ma}} = +0,021 \text{ kg/s},$
- $m_{\text{geschlossen}} - m_{\text{ma}} = -0,003517 \text{ kg},$
- $f_{0\text{geschlossen}} - f_0 = +1,7 \text{ Hz}.$

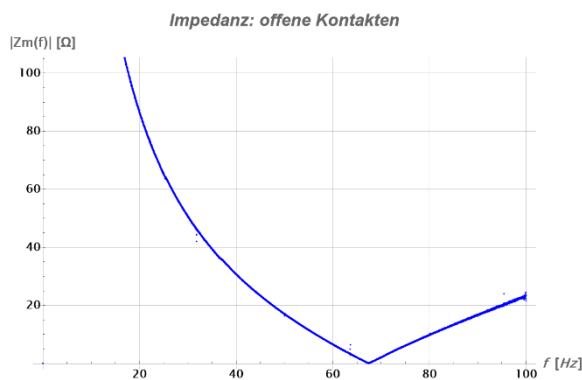


Abb. 4.20: Impedanz des Balkens mit offenen Kontakten.

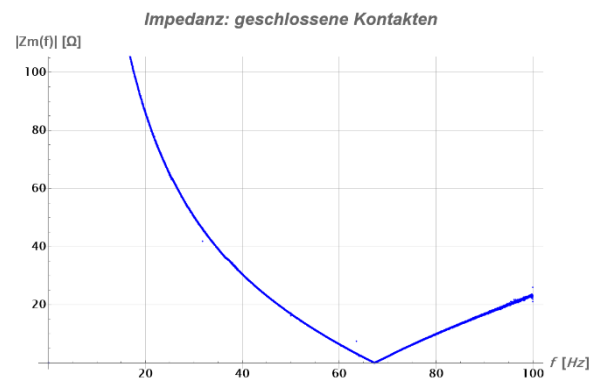


Abb. 4.21: Impedanz des Balkens mit geschlossenen Kontakten.

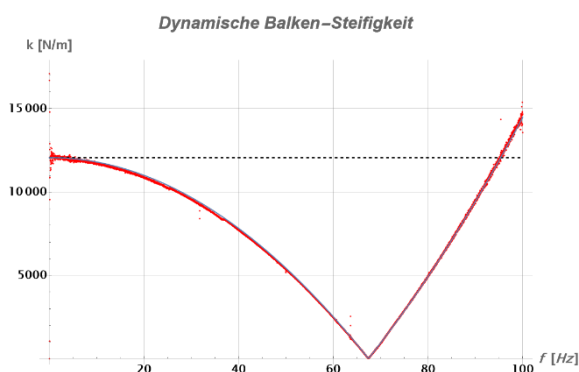


Abb. 4.22: Dynamische Steifigkeit des Balkens mit offenen Kontakten. Die gestrichelte Linie gibt den Wert der statischen und die Kurve die der dynamischen Steifigkeit wieder.

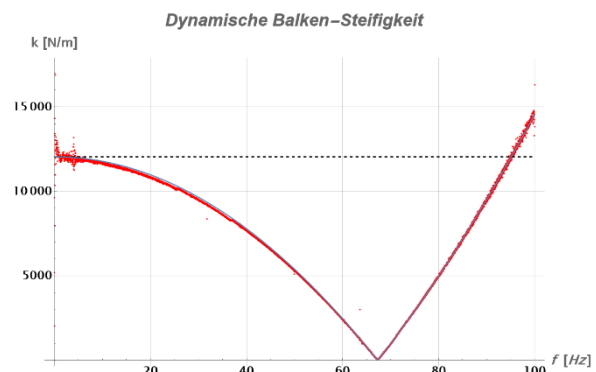


Abb. 4.23: Dynamische Steifigkeit des Balkens mit geschlossenen Kontakten. Die gestrichelte Linie gibt den Wert der statischen und die Kurve die der dynamischen Steifigkeit wieder.

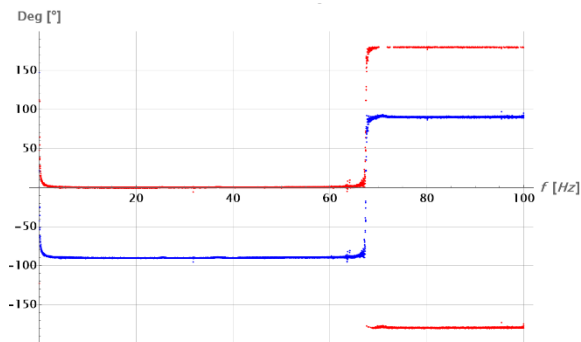


Abb. 4.24: Phasen der Impedanz und der dynamischen Steifigkeit offener Kontakte. Die Impedanz beginnt mit einem Phasenwinkel von -90° .

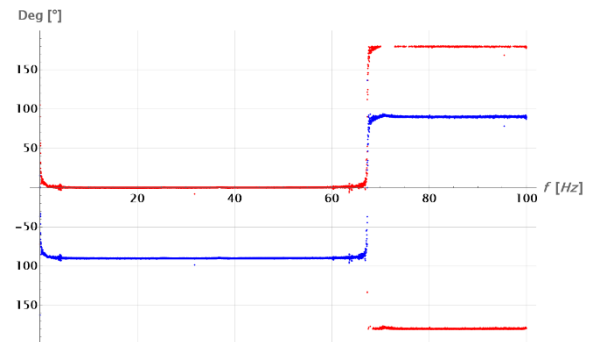


Abb. 4.25: Phasen der Impedanz und der dynamischen Steifigkeit geschlossener Kontakte. Die Impedanz beginnt mit einem Phasenwinkel von -90° .

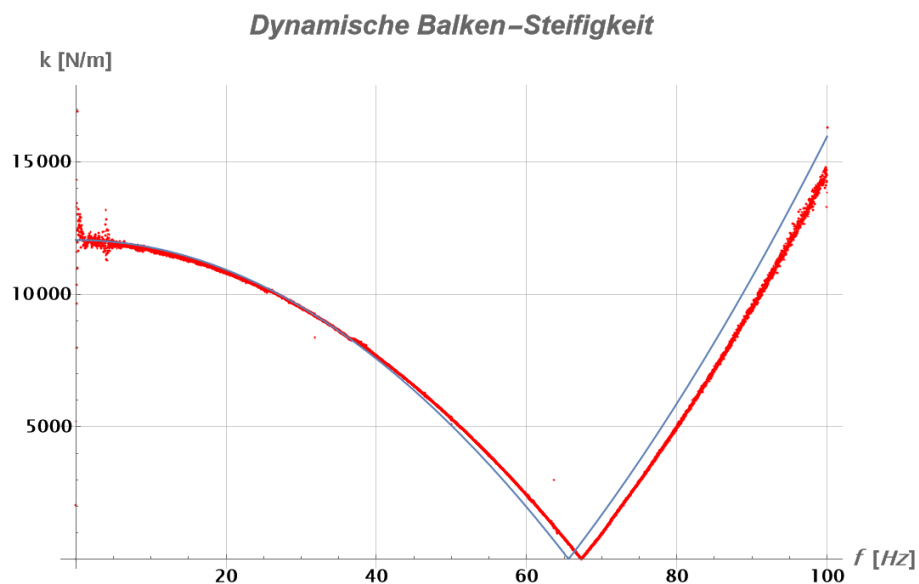


Abb. 4.26: Auswirkung des applizierten Piezo-Patches auf die dynamische Steifigkeit des Balkens. Die links liegende Kurve ist das Ergebnis der Messung ohne Patch und die rechts liegende Kurve aus Punkten sind die Messdaten des Balkens mit appliziertem Patch und geschlossenen Kontakten.

4.4.1. Bestimmung des E-Moduls mit statischer Steifigkeit

Die Messung des E-Moduls erfolgt mit einem Kraftsensor, um nicht-lineare Verhalten auszuschließen. Der Messaufbau mit dem Kraftsensor (siehe [Abb. 4.27](#)) entspricht dem der dynamischen Steifigkeitsmessung. Der Sensor befindet sich zwischen Shaker zum Balken und misst die resultierende Kraft F_B . Wieder misst der Distanzlaser die Auslenkung w_B durch die eingebrachte Kraft. In [Abb. 4.28](#) ist das vom Kraftsensor erzeugte Signal infolge einer Sprunganregung. Da diese Art des Sensors im Gegensatz zum Impedanz-Sensor träge reagiert, ist der statische Wert nach der Ausklingphase auszuwerten. Weiterhin ist aufgrund des statischen Messverfahrens die Differenz aus Grundlast und eingebrachte Last für die Berechnung der Steifigkeit zu verwenden. Dieser Wert ist in [Abb. 4.28](#) mit einem Pfeil markiert. Die Ergebnisse der Messungen sind in [Tabelle 4.1](#) aufgelistet. Dabei ist das Ansteuerungssignal, welches den Shakerverstärker steuert, schrittweise erhöht worden.



Abb. 4.27: Kraftsensor "KD24s $\pm 10N$ " der Firma ME-Meßsysteme GmbH

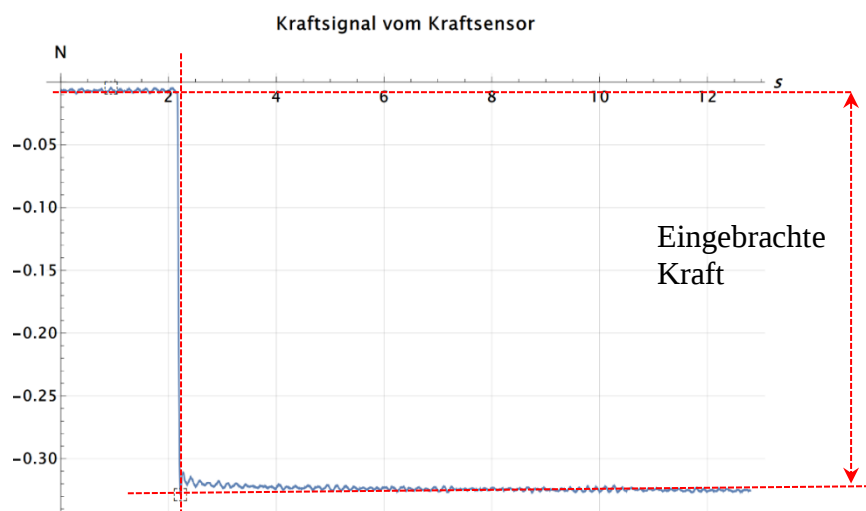


Abb. 4.28: Zeitsignal der Kraft gemessen durch den Kraftsensor

Messung	Ausg.- signal [V]	Kontakt- zustand	Gemessene Kraft [N]	Auslenkung [mm]	Resultierende Steifigkeit [N/m]
1	0,1	Offen	0,31876	0,026	12353,9
2		Geschlossen	0,31894	0,026	12279,0
3	0,12	Offen	0,41454	0,034	12325,3
4		Geschlossen	0,41545	0,034	12263,0
5	0,13	Offen	0,48059	0,039	12311,5
6		Geschlossen	0,48078	0,039	12245,5
7	0,15	Offen	0,64331	0,052	12280,3
8		Geschlossen	0,64090	0,052	12219,5

Tabelle 4.1: Auswertung der Messungen mit dem Kraftsensor

Die größere Steifigkeit bei offenen Kontakten macht sich wieder deutlich bemerkbar. Im Mittel bedeutet dies eine Steifigkeit von

$$k_{geschlossen} = \frac{F_B}{w_B} = 12251,8 \frac{N}{m} \quad (4.7)$$

und

$$k_{offen} = \frac{F_B}{w_B} = 12317,7 \frac{N}{m}. \quad (4.8)$$

Mit der ermittelten Steifigkeit ist der Elastizitätsmodul über die Biegebalkentheorie bestimmbar.

Da die Kraft und die Durchbiegung an gleicher Stelle bekannt sind, ist die Gleichung für die Durchbiegung des einseitig eingespannten Balkens verwendbar. Laut dieser Gleichung ergibt sich die Durchbiegung aus:

$$w(x_{Shk}) = \frac{F_B \cdot x_{Shk}^3}{3 \cdot E \cdot I_y}, \quad (4.9)$$

wobei $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ ist. Das Einsetzen der Steifigkeit

$$k(x_{Shk}) = \frac{F(x_{Shk})}{w(x_{Shk})} \quad (4.10)$$

und die anschließende Umstellung der Gleichung nach dem E-Modul ergibt:

$$E = k(x) \cdot \frac{x_{Shk}^3 \cdot 12}{3 \cdot b \cdot h^3}. \quad (4.11)$$

Es ergeben sich folgende E-Module für offene und geschlossene Kontakte:

$$E_{\text{offen}} = 161,420 \text{ GPa} \quad (4.12)$$

und

$$E_{\text{geschlossen}} = 160,557 \text{ GPa.} \quad (4.13)$$

4.4.2. Untersuchungen mit dem Impulshammer

Abb. 4.29 zeigt den Versuchsaufbau für die Messungen mit dem Impulshammer „086C02“ von PCB. Eine angeschraubte preparierte Mutter (siehe Abb. 4.30) mit dem exakten Gewicht von 2,2 g sorgt für die Vergleichbarkeit mit der vergangenen Messung. Der zuvor verwendete Impedanz-Sensor besitzt ein Gewinde hinter dem eigentlichen Messsensor mit dem gleichen Gewicht.

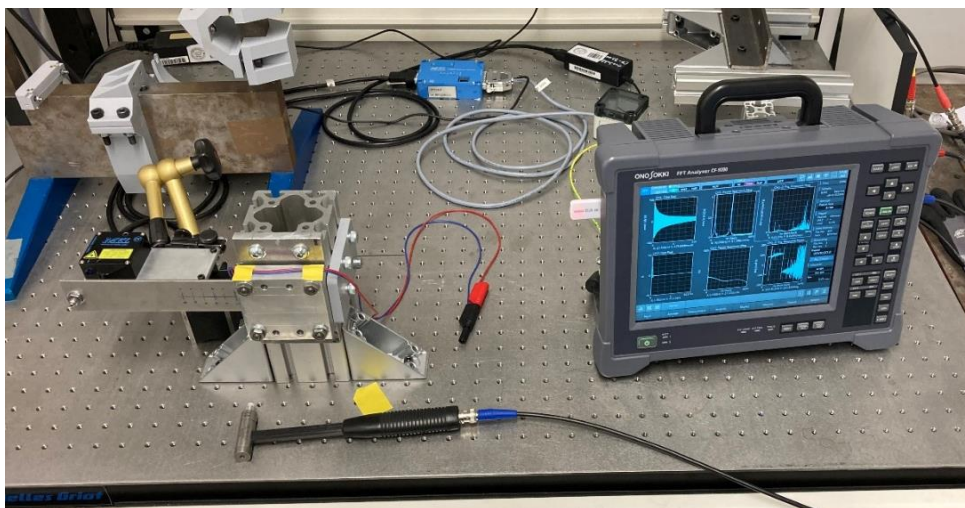


Abb. 4.29: Versuchsaufbau zur Impedanzmessung des Balkens mit Piezo-aktuator und Impulshammer „PCB 086C03“

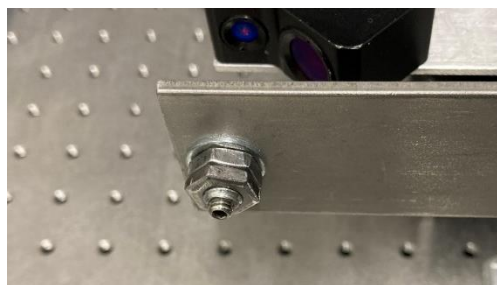
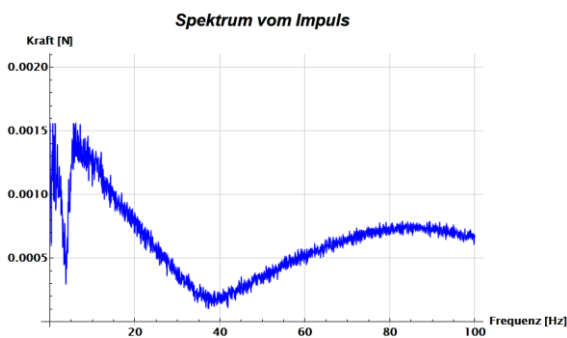
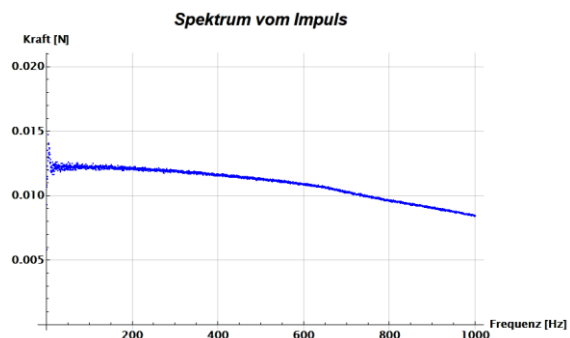


Abb. 4.30: Angeschraubte 2,2 g Mutter zur Kompensation der zusätzlichen Gewindemasse bei der Messungen mit dem Impedanz-Sensor.

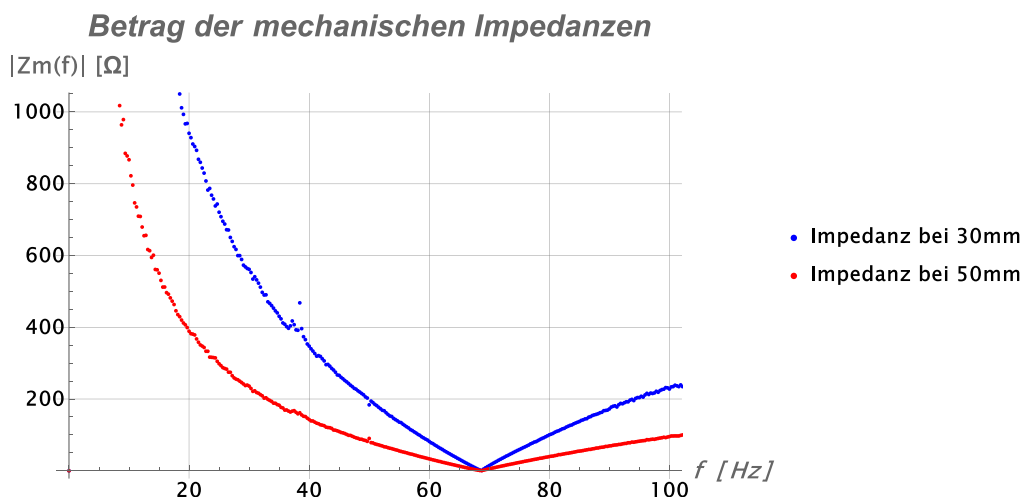
Voraussetzung für eine erfolgreiche Messung mit dem Impulshammer sind der ausgewählte Messbereich und ein sauberer Impuls. Der Messbereich von $0 - 1000 \text{ Hz}$ erweist sich als geeignet zur Vermeidung unsauberer Schläge. Unsaubere Schläge (z.B. durch einen „double hit“) machen sich unmittelbar im Spektrum des Impulses bemerkbar. Liegt ein Fehler im eingebrachten Impuls vor, zeichnet sich dies durch Einbrüche im Spektrum aus (siehe [Abb. 4.31](#)). Ein sauberer Impuls regt theoretisch die Struktur in allen Frequenzen gleichmäßig an, woraus ein horizontaler Verlauf im Spektrum resultiert. [Abb. 4.32](#) zeigt das Spektrum eines realen sauber durchgeführten Impulses. In Abhängigkeit vom Abstand zur Einspannung des Balkens ist dies gut oder weniger gut erreichbar. Bis zu einem Abstand von 50 mm sind bei diesem Aufbau saubere Messungen entstanden. Bei der Auswertung der Parameter ist die Position des Impulses x_{Imp} entscheidend. Den Unterschied verdeutlicht der Vergleich der Beträge der gemessenen Impedanzen durch den Impulshammer bei 30 mm und 50 mm in [Abb. 4.33](#).



[Abb. 4.31](#): Spektrum eines unsauberen Impulses.



[Abb. 4.32](#): Spektrum eines sauberen Impulses.



[Abb. 4.33](#): Betrag der Impedanz gemessen durch den Impulshammer. Die obere Kurve ist die des Impulses bei 30 mm und die untere Kurve ist die Impedanz bei 50 mm.

4.4.3. Bestimmung von α_p

Mit den Messungen mit dem Impulshammer ist für die Bestimmung von α ein Mathematica-Programm entsprechend der in Kapitel 3.9 vorgestellten Modelle entstanden, mit dem Hintergrund, dass die zusätzliche Versteifung durch das Anschrauben eines Shakers zu einer veränderten Impedanz führt. Es erfolgt die mechanische Impedanzmessung mit dem Impulshammer bei einem Abstand x_{imp} von 30 mm zur Einspannung. Zu beachten ist, dass für die Bestimmung eines piezoelektrischen Kennwerts die Kontakte des Piezoaktuators bei mechanischen Messungen nicht geschlossen sein dürfen, um den piezoelektrischen Effekt nicht zu unterdrücken. Der Betrag der gemessenen mechanischen Impedanz sowie die dazugehörige Phase sind in Abb. 4.34 a) und b) dargestellt. In den Diagrammen sind jeweils die Messdaten („Messung“) und die Verläufe der Modelle („Man. Modell“) dargestellt. Die aus der Messung resultierenden Parameter für das physikalische und modale Modell lauten wie folgt:

Z_m des physikalischen Modells:

- $m = 0,690673 \text{ kg}$
- $k = 128878 \text{ kg/s}^2$
- $d = 1,0255 \text{ kg/s}$
- $f_0 = 68,75 \text{ Hz}$
- $\beta = 0,00171861$
- $d_0 = 0,00343723$

Z_m des modalen Modells:

- $M_1 = 0,127753 \text{ Nms}^2$
- $K_1 = 23838,4 \text{ Nm}$
- $D_1 = 0,184969 \text{ Nms}$
- $f_1 = 68,75 \text{ Hz}$
- $\beta = 0,00167589$

mit

- $\Phi_1(F) = -0,100632 \text{ m}$
- $\Phi_1(v) = -1,83806 \text{ m}$
- $\Phi_1(F) \cdot \Phi_1(v) = 0,184969 \text{ m}^2$

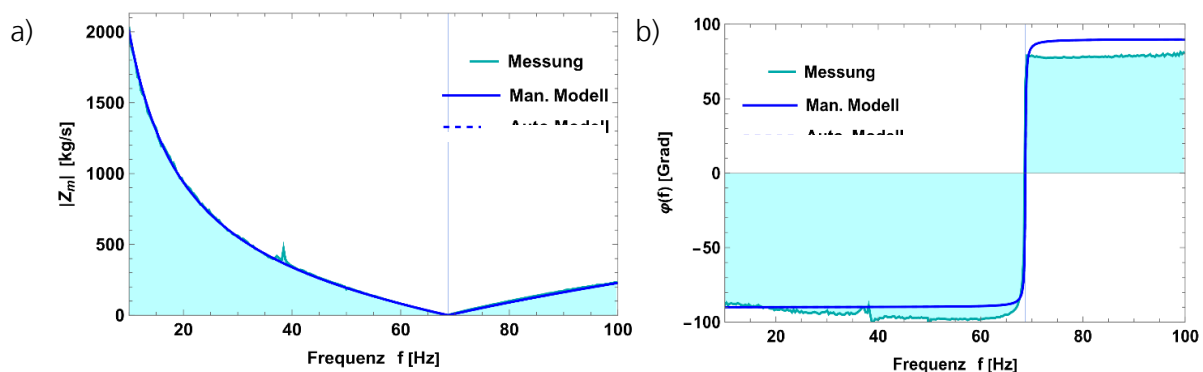


Abb. 4.34: Gemessene mechanische Impedanz mit einer Impulsanregung durch den Impulshammer „PCB 086C03“. Die Position des Impulses war 30 mm von der Einspannung entfernt.

- a) Messdaten des Betrags der mechanischen Impedanz und der Verlauf des dazugehörigen Modells.
 b) Messdaten der Phase der mechanischen Impedanz und dem dazugehörigen Modell.

Für die Messung der elektrischen Impedanzspektroskopie wird die elektrische Impedanz gemäß [Melcher, 2001] über eine Spannungsteilerschaltung gemessen. Die Messung erfolgte am frei schwingenden Balken. Der Betrag der gemessenen elektrischen Impedanz sowie die dazugehörige Phase sind in [Abb. 4.35](#) a) und b) dargestellt. In den Diagrammen sind jeweils die Messdaten („Messung“) und die Verläufe der Modelle („Modell“) dargestellt. Die gemessenen und die daraus resultierenden Parameter für das physikalische Modell lauten:

Z_e des physikalischen Modells

- $C_{p,Fluke117}$	= $6,2567 \cdot 10^{-8} F$	- R_s	= $291,3 \Omega$
- C_p	= $6,4 \cdot 10^{-8} F$	- C_s	= $2,90095 \cdot 10^{-10} F$
- R_{ser}	= $490,553 \Omega$	- f_s	= $68,745 Hz$
- R_{par}	= $3,2 \cdot 10^6 \Omega$	- f_0	= $68,745 Hz$
- L_s	= $18476,4 H$	- f_p	= $68,9 Hz$

wobei die Messung von $C_{p,Fluke117}$, mit dem Multimeter „Fluke 117“ erfolgte. Für die Bestimmung von f_s und f_p ist entsprechend Kapitel 3.9 jeweils das Maximum in den Realteilen der elektrischen Admittanz und Impedanz ablesbar (siehe [Abb. 4.36](#)).

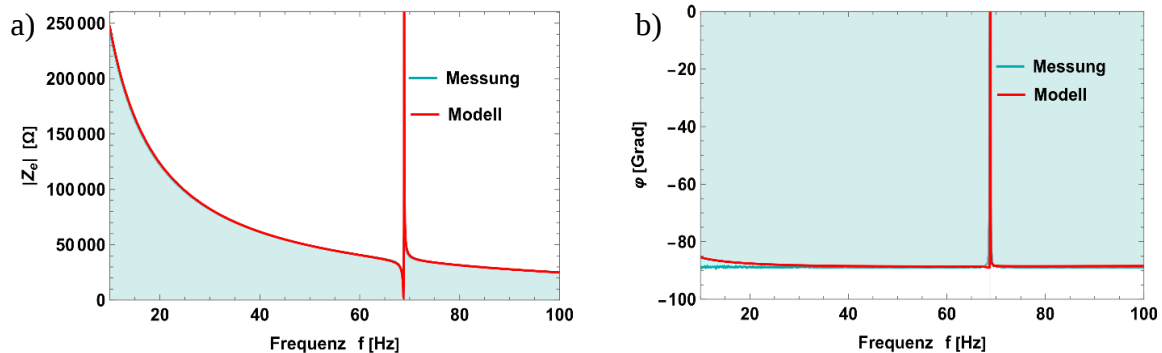


Abb. 4.35: Gemessene elektrische Impedanz des frei schwingenden Balkens. Die Anregung erfolgte durch ein Sinus Sweep Signal mit der Amplitude 10 V in einem Frequenzbereich von 0-1000 Hz

a) Messdaten der elektrischen Impedanz und der Verlauf des dazugehörigen Modells.

b) Phase der elektrischen Impedanz und dem dazugehörigen Modell.

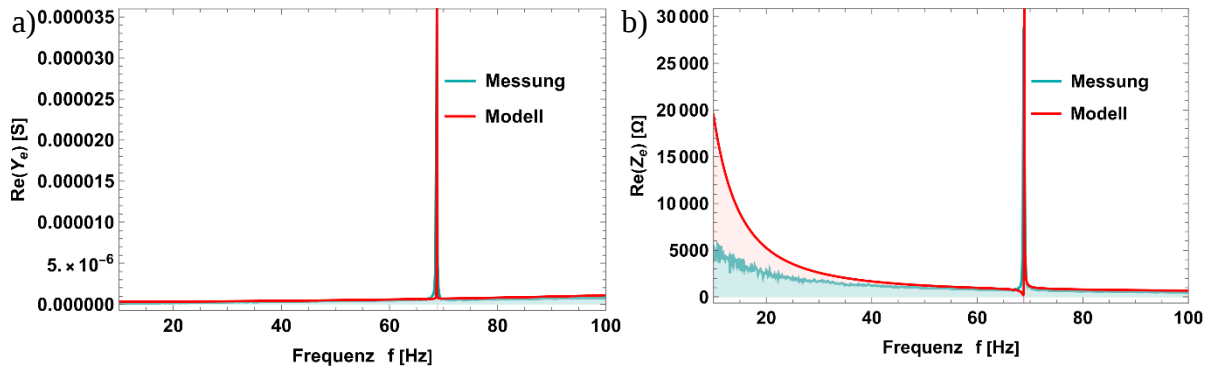


Abb. 4.36: **a)** Realteil der gemessenen Admittanz und der Verlauf des dazugehörigen Modells mit der Erhöhung an der Frequenz f_s .
b) Realteil der gemessenen Impedanz und der Verlauf des dazugehörigen Modells mit der Erhöhung an der Frequenz f_p .

Die Umrechnung von $\underline{Z}_e$ auf $\underline{Z}_m$ durch Gleichung (3.3) ermöglicht den Vergleich der mechanischen und elektrischen Impedanz, bzw. die Ermittlung von α . Dadurch ist α auf verschiedene Wege ermittelbar:

$$\alpha_m = \sqrt{m/L_s} = 0,00611402 \quad (4.14) \quad \alpha_k = \sqrt{k \cdot C_s} = 0,00611477. \quad (4.15)$$

Dabei ist zu beachten, dass dies nur für den Fall des einseitig eingespannten Balkens mit aufgeklebten Piezoaktuator gilt, der die Kräfte 30 mm von der Einspannung entfernt überträgt. Der Mittelwert eingesetzt in (3.3) zeigt, dass die mechanische und elektrische Messung exakt übereinander liegen. Abb. 4.37 a) zeigt die Kurven der ermittelten mechanischen und elektrischen Impedanz als Betrag und b) die dazugehörige Phase des Balkens. Somit ergibt sich eine Wandlerkonstante von

$$- \alpha_{Mean} = 0,00611425$$

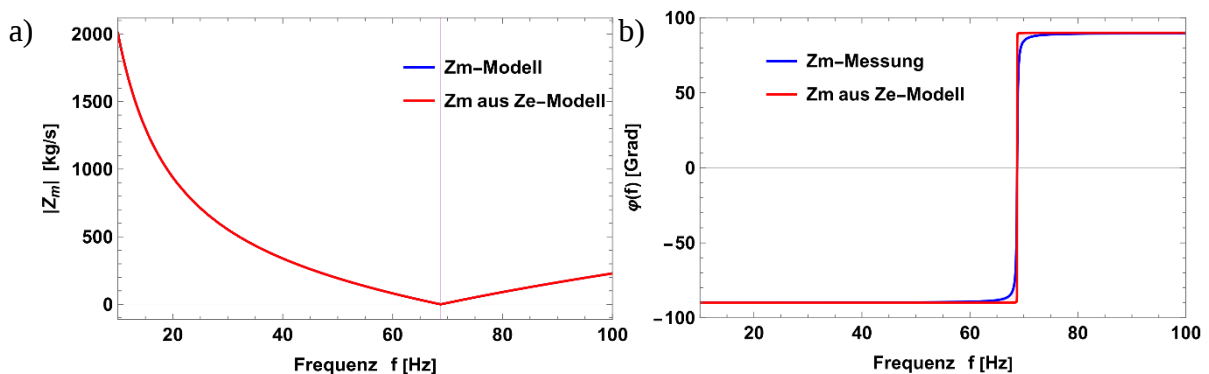


Abb. 4.37: Vergleich der mechanischen und elektrischen Impedanz Modelle ermittelt aus den Messungen mit dem Impulshammer. Der Impuls erfolgte in 30 mm Entfernung zur Einspannung.
a) Beträge der Impedanzen den mechanischen und elektrischen Messungen
b) Phasen der Impedanzen aus den mechanischen und elektrischen Impedanzen.

Literaturverzeichnis

- Buchholz, C., 2018: „*Experimentelle Untersuchungen an additiv gefertigten Polyvinylidenfluorid (PVDF)-Wandlern*“, Bachelorarbeit, Ostfalia, Hochschule für angewandte Wissenschaften, Wolfenbüttel, 2018.
- Burg, K., Wille, F., Haf, H., Meister, A., 2010: „*Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen*“, Vieweg+Teubner Verlag, 5. Auflage, ISBN 978-3-8348-1294-0.
- Burg, K., Wille, F., Haf, H., Meister, A., 2013: „*Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 3: Gew. Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*“, Springer Vieweg, 6. Auflage, ISBN 978-3-8348-1943-7.
- Cremer, L. und Heckl, M., 1982: „*Körperschall: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*“, Springer, Berlin, ISBN 978-3-540-40336-4.
- Guan, M. und Liao, W., 2004: „*Studies on the Circuit Models of Piezoelectric Ceramics*“, Proc. of 2004 Int. Conf. on Information Acquisition, IEEE, S. 26-31, <https://doi.org/10.1109/ICIA.2004.1373314>.
- Guicking, D., 2016: „*Schwingungen*“, Springer-Verlag, Wiesbaden, ISBN 978-3-658-14135-6.
- Hamm, G. und Burk, G., 1976: „*Tabellenbuch Kraftfahrtechnik*“, 12. Auflage, Holland + Josenhans Verlag, Stuttgart, ISBN 978-3808521328.
- Hartmann, S., 2017: „*Technische Mechanik*“, Wiley-VCH Verlag, ISBN 978-3-527-33699-9.
- Kuttruff, H., 2004: „*Akustik*“, S. Hirzel-Verlag, ISBN 3-7776-1244-8, 2004.
- Melcher, J., 2001: „*Adaptive Impedanzregelung an strukturmechanischen Systemen*“, Shaker Verlag, ISBN: 978-3-8265-8887-7.
- Kletz, B. T. und Melcher, J., 2016: „*Verfahren zum separierten Erfassen von Störgrößen*“, Deutsches Patent DE102016103579. [Möser et al., 2010]
- Melcher, J., Schröter, C., Fingerhut, D., 2008: „*Schwingungsgedämpftes Bauteil*“, Deutsches Patent DE 10 2008 046 457 A1.
- Möser, M., Kropp, W., Cremer, L. und Heckl, M., 2010: „*Körperschall: Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*“, 3. Auflage, Springer, Berlin, ISBN 978-3-540-40336-4, 2010.
- Öchsner, A., 2016: „*Theorie der Balkenbiegung*“, Springer-Vieweg, ISBN 978-3-658-14638-2 (eBook).
- Sparenberg, M. R. A. und Melcher, J., 2022: „*Modified Triply Periodic Actuator Topologies*“, ASME 2022 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems,

Paper No: SMASIS2022-91015, V001T04A012, <https://doi.org/10.1115/SMASIS2022-91015>, ISBN: 978-0-7918-8627-4.

Tafel, H. J. und Schaedel, H., 1969: „Analogien zwischen elektrischen und fluidischen Bauelementen und Netzwerken“, Frequenz 23, Band 23, Heft 3, S. 68-73, <https://doi.org/10.1515/FREQ.1969.23.3.68>.

Wittel, H., Muhs, D., Jannasch, D. und Voßiek, J., 2011: „Roloff/Matek Maschinenelemente, Tabellenbuch“, 20. Auflage, Vieweg+Teubner, Reutlingen, ISBN: 978-3-8348-1454-8.

Zollner, M., Zwicker, E., 1993: „Elektroakustik“, Springer-Verlag, ISBN 978-3-540-56600-7 (2. korr. Nachdruck 2003) bzw. 978-3-642-58003-1 (eBook).