Forschungsbericht 2022-20

Satellitenbewegung
Band IV-A: Zentralkörper bezogene Bewegungen

Ernst Friedrich Maria Jochim

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme
Oberpfaffenhofen

DLR Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

Forschungsbericht 2022-20

Satellitenbewegung
Band IV-A: Zentralkörper bezogene Bewegungen

Ernst Friedrich Maria Jochim

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme
Oberpfaffenhofen

667 Seiten
262 Bilder
151 Tabellen
170 Literaturstellen

DLR Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

Herausgeber:

Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e. V.
Wissenschaftliche Information
Linder Höhe
D-51147 Köln

ISSN 1434-8454
ISRN DLR-FB-2022-20
Erscheinungsjahr 2023

DOI: https://doi.org/10.57676/8397-yn90

Erklärung des Herausgebers
Dieses Werk ist unter einer Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung – Nicht kommerziell – Keine Bearbeitungen 3.0 Deutschland zugänglich.
Um eine Kopie dieser Lizenz einzusehen, konsultieren Sie http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/de/legalcode oder wenden Sie sich brieflich an Creative Commons, Postfach 1866, Mountain View, California, 94042, USA.

Lizenz

Creative Commons Lizenz vom Typ Namensnennung- Nicht kommerziell – Keine Bearbeitungen 3.0 Deutschland

Anomalistische Bewegung, Drakonitische Bewegung, Tropische Bewegung, Siderische Bewegung, Meridian-bezogene Bewegung, Reproduzierbare Bewegungen, Geosynchrone Bewegungen, Äquivalenzbahnen

Ernst Friedrich Maria JOCHIM
DLR, Institut für Hochfrequenztechnik und Radarsysteme, Oberpfaffenhofen

Satellitenbewegung Band IV-A: *Zentralkörper bezogene Bewegungen*

Im ersten Teil des vierten Bandes (IV-A) der Satellitenbewegung werden basierend auf einer allgemeinen Hansen-Bewegung die Bezüge einer Satellitenbewegung in unterschiedlichen Relationen zusammengestellt, wie sie zur Erfüllung spezieller Missionsanforderungen benötigt werden. Bezüge auf den Basiskörper (insbesondere die Erde) sind die anomalistische, drakonitische, tropische, siderische, Meridianbezogene und topozentrische Bewegung. Spezielle insbesondere für die Erdbeobachtung interessante Bewegungsarten sind reproduzierbare, geosynchrone, formstabile („eingefrorene"), Librations-Bewegungen. Alle der hier behandelten Bewegungsarten können zu Äquivalenzbahnen gekoppelt werden.

Anomalistic motion, draconic motion, tropical motion, sidereal motion, Meridian-related motion, repetitive motion, geosynchronous motion, equivalence orbits

(Published in German)

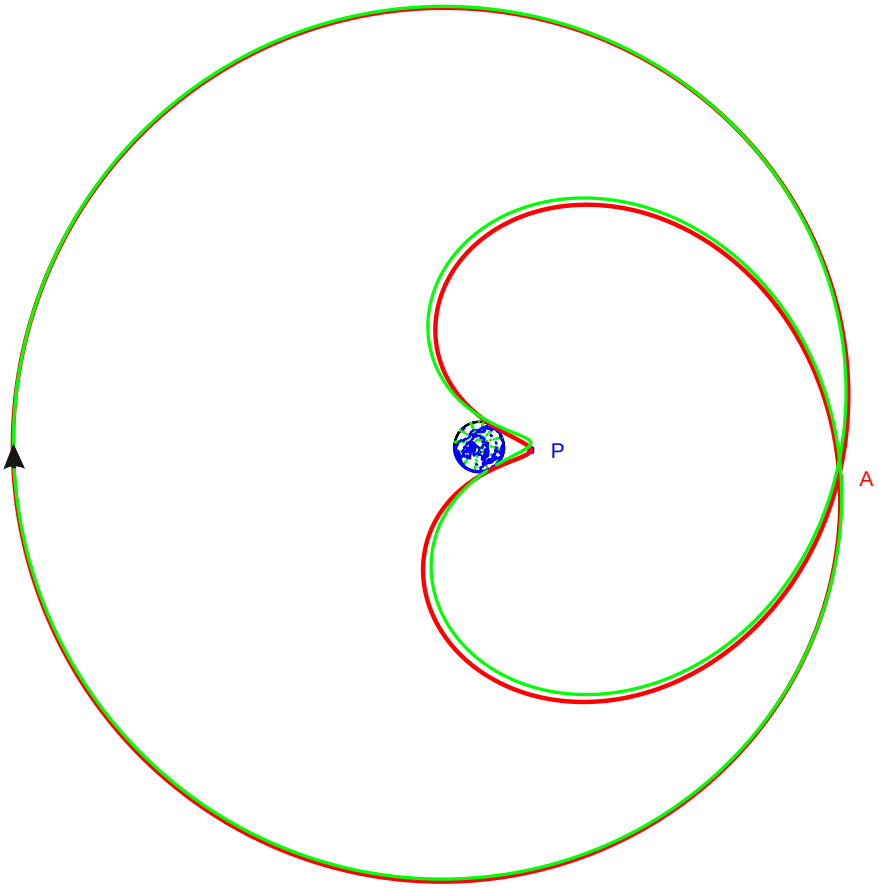
Ernst Friedrich Maria JOCHIM
German Aerospace Center (DLR), Microwaves and Radar Institute, Oberpfaffenhofen

Satellite Movement Band IV-A: *Central body related movements*

The first part of the fourth volume (IV-A) of satellite motion is dedicated based on general Hansen-motions to any relations of satellite motions with respect to the basis elliptical motion (anomalistic motion), to the nodal crossing (draconitic motion), to the vernal equinox (tropical motion), to interstellar reference points (sidereal motion). Included are special orbits as repetitive, Geo-synchronous, frozen, librational motions. A special focus is directed to the analysis of remote sensing orbits of satellites and orbiters. All of the types of motion discussed here can be coupled into equivalence orbits.

Ernst Friedrich Maria Jochim

Satellitenbewegung



Band IV-A: Zentralkörper bezogene Bewegungen

© Dr. E. F. M. Jochim (vormals Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, DLR)

Stand der Arbeit: Montag, 30. Januar 2023, 10:37

Titelbild: Wahrer Verlauf einer aus tropischer und meridionaler Bewegung gekoppelten Äquivalenzbahn im Verlauf eines Jahres (Bild 26-41, Seite 481, Kapitel 26.8.1.8)

Vorwort zu Band IV-A

Im vorliegenden ersten Teil des vierten Bandes der Satellitenbewegung werden in fortlaufender Nummerierung einige für die Bahnanalyse der Bewegung künstlicher Satelliten wichtige Bezüge und Zusammenhänge behandelt. Dazu zählen die unterschiedlichen Aspekte der Bewegung der Himmelskörper, die Steuerung und Kontrolle von künstlichen Objekten, und insbesondere die für eine Satellitenbahnanalyse wichtigen Bezüge der Satellitenbewegung. Diese Beziehungen lassen sich klassifizieren einerseits im Hinblick auf die Bewegung um einen Zentralkörper, in der klassischen Weise auf die Apsidenlinie eines zur Anpassung verwendeten Kegelschnitts. Wichtiger für das weite Spektrum der Erdbeobachtungssatelliten ist der Bezug auf den Äquator des Bezugskörpers etwa im Zusammenhang mit reproduzierbaren Bahnen oder auf einen speziellen Meridian im Zusammenhang etwa mit geosynchronen Bahnen.

Die zweite grundsätzliche Beziehung ist die auf einen dritten Körper gerichtete synodische Bewegung, die im zweiten Teil des vierten Bandes behandelt wird (Band IV-B). Hier findet sich der Bezug der Satellitenbewegung auf die Sonne mit den wichtigen Anwendungen der sonnensynchronen Bahnen. Dies schließt eine Erweiterung des Begriffs der sonnensynchronen synodischen Bewegung mit ein. Auch andere Bezugskörper wie Mond, Planeten, interplanetare Sonden und andere Satelliten sowie stellare Objekte können für eine Bahnanalyse zur Berücksichtigung der Aufgabenstellung einer Satellitenmission von Wichtigkeit sein.

Ausgehend von der grundlegenden *Hansen-B*ewegung konzentriert sich der vorliegende Band als Bahnmodell auf die allgemeine *Kepler*bewegung. Darunter kann eine Bewegung verstanden werden, in der die *Kepler*schen Gesetze grundlegend sind, wobei allerdings alle Parameter als bewegungsabhängig betrachtet werden.

In Erweiterung der ersten Gesamtausgabe des vierten Bandes[1] wurde in den vorliegenden Teilband IV-A die seit August 2019 entwickelte Theorie der Äquivalenzbahnen systematisch einbezogen[2]. Mit dem Begriff Äquivalenzbahnen kann interessanterweise der Bogen zur am weitesten entwickelten antiken Astronomie geknüpft werden. In Mesopotamien entstand durch die Babylonier seit etwa 3000 v. Chr. die älteste Hochkultur der Antike. Dies trifft insbesondere auf die Astronomie als älteste hochstehende Wissenschaft zu. In ihrer Spätzeit (etwa von 626 bis 64 v.Chr.) erlebte die babylonische Kultur eine besondere „Blüte und die Astronomie unter den Chaldäern ihre höchste Entwicklung“[3]. Hierzu gehört der für die praktische Anwendung besonders bedeutsame 18-jährige Finsterniszyklus[4] durch die Kopplung von synodischem und drakonitischem Monat: 223 (mittleren) synodischen Monaten entsprechen 242 (mittlere)

---

[1] JOCHIM, E. F. M. [2018 b]

[2] JOCHIM, E. F. M. [2120]

[3] BIALAS, V. [1989], p. 106

[4] Der 18-jährige Finsterniszyklus ist heutzutage meistens unter dem Begriff „Saros-Zyklus“ bekannt. Dieser Begriff wurde erst 1691 von *Edmund Halley* 1691 eingeführt. Diesen Begriff hat *Halley* irrtümlicherweise auf den sumerischen Begriff SAR zurückgeführt, der die Zahl 3600 bedeutet oder „im Weltall“ (siehe auch in https://de.wikipedia.org/wiki/Saroszyklus). Der 18-jährige Finsterniszyklus wird gelegentlich auch als chaldäischer oder sogar als *Halley*’scher Finsterniszyklus bezeichnet [siehe insbesondere in NEUGEBAUER, OTTO [1975], p.1094]

drakonitische Monate[1]. Dieser Zyklus stellt somit eine Kopplung von synodischer und drakonitischer Mondbewegung dar.

Die babylonische Astronomie strahlte auf viele Völker aus, in Nordafrika, Asien, insbesondere nach Griechenland. *Hipparch* übernahm viel von der babylonischen Astronomie, kontrollierte die Zahlenwerte, verbesserte sie wenn nötig durch eigene Beobachtungen und entwickelte sie weiter. Neben dem synodischen $P_{\mathbb{C},S}$ und drakonitischen Monat $P_{\mathbb{C},d}$ waren auch der anomalistische $P_{\mathbb{C},a}$, tropische $P_{\mathbb{C},t}$ und siderische Monat $P_{\mathbb{C},s}$ bekannt. Interessant ist auch, dass der Finsternis-Zyklus schon in der Antike auf eine Mehrfach-Kopplung erweitert worden war[2]

$$223 P_{\mathbb{C},S} = 239 P_{\mathbb{C},a} = 242 P_{\mathbb{C},d} \quad .$$

In die Theorie der Bewegung von künstlichen Satelliten wurden naheliegender Weise die Begriffe anomalistische, drakonitische, tropische, siderische und (Sonnen-) synodische Bewegung übernommen. Neu ist allerdings im Rahmen der Beschäftigung mit Erdbeobachtungssatelliten der Begriff der Meridian-bezogenen („meridionalen“) Bewegung dazu gekommen. Im Rahmen der Beschäftigung mit übersynchronen meridionalen Bewegungen wurde die Äquivalenz von tropischer und meridionaler Bewegung für spezielle Bahnen gefunden. Wir wollen diese Bahnen daher als Äquivalenzbahnen bezeichnen. Dieser Begriff kann auf eine beliebige Kombination unterschiedlicher Typen von Satellitenbewegungen erweitert werden. Im Allgemeinen lässt sich durch eine Kopplung von *N* Umläufen der Bewegung 1 mit *M* Umläufen der Bewegung 2 eine spezielle Familie von Äquivalenzbahnen definieren:

$$N P_1 = M P_2 \qquad \langle N, M, \text{ganzzahlig} \quad .$$

Im Fall von Satellitenbewegungen ist der einfache Fall $N=M=1$ von besonderem Interesse. Die Kopplung zwischen den verschiedenen Bewegungsarten ist von unterschiedlicher Qualität. Manche Kopplungen können mit hoher Präzision hergestellt werden, andere nur in einem geringen Genauigkeitsrahmen. In nahezu allen Fällen können interessante Bahnfamilien gefunden werden. Viele von ihnen sind für spezielle Anwendungen geeignet. Die sonnensynchronen Bahnen können beispielsweise als ein Spezialfall von mittleren Äquivalenzbahnen gedeutet werden.

Zur besseren Interpretation rückläufiger Bahnen wurde in den Bänden IV-A und IV-B wieder der Retrogradfaktor $\sigma_i = \text{sgn}(\cos i)$ verwendet[3].

Eine erschöpfende Bearbeitung der einzelnen Themenkreise darf nicht erwartet werden. Jeder Punkt könnte beliebig vertieft und ergänzt werden. Damit kann auf ergänzendes Studium anderer Bücher und Darstellungen und eigenes Weiterstudium nicht verzichtet werden.

Die Liste der verwendeten Symbole und die für Band IV-A relevante Literatur sind in diesen Band der Satellitenbewegung mit aufgenommen. Einige mit den Kollegen *Dr. Martin Ch. Eckstein* (vormals DFVLR-DF, DLR-RB*), Dr. Michael Kirschner* (DLR-RB), *Prof. Dr. Gerhard Krieger* (DLR-HR), *Dr. Hauke Fiedler* (DLR-HR und DLR-RB) durchgeführten Untersuchungen sind in diesem ersten Teilband berücksichtigt.

Besonders herzlicher Dank gebührt Herrn *Dr. Thomas Neff* (DLR-HR) für die kritische Unterstützung des gesamten Werkes, dem Raumfahrtingenieur *Sebastien Tailhades,* Herrn *Sebastian*

---

[1] NEUGEBAUER, O. [1975], pp. 310-312; BIALAS, V. [1989], p. 112

[2] Formel (1.42) in Kapitel 1, Abschnitt1.6.6 der Satellitenbewegung Band I [2017]

[3] Erstmals einbezogen in JOCHIM, E. F. [1983]

Calaminus, M. Sc. sowie Herrn Dipl. Ing. *Simon Krebietke* für die Unterstützung bei den Programmierarbeiten und der Betreuung der Programme, sowie Herrn Dipl. Ing. *Manfred Hager* für die so wichtige Betreuung des Rechners. Für die Veröffentlichung des vierten Gesamtbandes in der Reihe der DLR Forschungsberichte geht besonderer Dank an die Herren Professor *Dr. Alberto Moreira* und *Dr. Thomas Neff* (beide DLR-HR).

Mit großer Dankbarkeit darf Herrn *Dr. Ing. habil. Otto Wagner* (1936 - 2016), Professor für Flugmechanik an der TU München, gedacht werden. Er hat die in den fünf Bänden der *Satellitenbewegung* durchgeführten Arbeiten sehr interessiert und wohlwollend unterstützt und gefördert.

Inhaltsverzeichnis

VORWORT ZU BAND IV-A ..... **III**

INHALTSVERZEICHNIS ..... **VII**

ZENTRALKÖRPER BEZOGENE BEWEGUNG **1**

21 *KEPLER*BEWEGUNG AUF DER GRUNDLAGE VON *HANSEN*-SYSTEMEN **10**

21.1 DIE WICHTIGSTEN EIGENSCHAFTEN DER *HANSEN* SYSTEME 10
21.2 ZEIT UND *HANSEN*SCHER BAHNWINKEL 14
21.2.1 Die Zuordnung eines Hansenschen Bahnwinkels zur Zeit im Rahmen einer Keplerbewegung *15*
21.2.2 Berechnung des Hansenschen Bahnwinkels einer Keplerbewegung *18*
21.2.3 Mittlere Umlaufzeit erster Ordnung bezogen auf ein Hansen-System *20*
21.2.4 Die mittlere Hansensche Umlaufzeit *20*

21.3 DIE ÜBERLAGERTE FUNKTION **21**

21.3.1 Allgemeine Überlegungen *21*
21.3.2 Anwendung in einer Satellitenbahnanalyse *21*

21.4 DIE WAHRE *HANSEN*SCHE UMLAUFZEIT EINER *KEPLER*BEWEGUNG **24**

21.5 BAHNAUSWAHL MIT *HANSEN*SCHER UMLAUFZEIT **27**

21.6 ÄQUIVALENZEN ZWISCHEN *KEPLER*- UND *HANSEN*- BEWEGUNG **29**

22 ANOMALISTISCHE BEWEGUNG **31**

22.1 DAS APSIDENSYSTEM 32
22.2 WAHRE ANOMALIE ALS BAHNWINKEL IM APSIDENSYSTEM 35
22.2.1 Wahre Anomalie und Zeit *35*
22.2.2 Näherung der wahren Anomalie mit der Mittelpunktsgleichung *35*
22.2.3 Die anomalistische mittlere Bewegung in der Bahnmechanik für Erdsatelliten *40*
22.2.4 Näherungsweise Berechnung der Zeit aus der wahren Anomalie *41*
22.3 DIE ÜBERLAGERTE FUNKTION BEI ANOMALISTISCHEN BEWEGUNGEN 43
22.4 DIE ANOMALISTISCHE UMLAUFZEIT 44
22.4.1 Die wahre anomalistische Umlaufzeit *44*
22.4.2 Die mittlere anomalistische Umlaufzeit ohne Luftwiderstand *46*
22.4.3 Die mittlere anomalistische Umlaufzeit mit Luftwiderstand *48*
22.4.4 Zur numerischen Berechnung im Rahmen der anomalistischen Bewegung *49*
22.4.5 Die oskulierende anomalistische Umlaufzeit *58*
22.4.6 Die Variationsgleichungen der Keplerelemente in Abhängigkeit von der wahren Anomalie *58*
22.4.7 Die Lösung der oskulierenden anomalistischen Umlaufzeit nach E. A. Roth *61*
22.5 KLEINE BEWEGUNGSÄNDERUNGEN IM ERDGRAVITATIONSFELD 62
22.5.1 Partialausdrücke der allgemeinen Keplerbewegung *62*
22.5.1.1 Rektaszension des aufsteigenden Knotens 62
22.5.1.2 Argument des Perizentrums 63
22.5.1.3 Mittlere Epoche-Anomalie 64
22.5.2 Genauigkeitsabschätzungen für Erdsatelliten *65*
22.5.2.1 Rektaszension des aufsteigenden Knotens 65
22.5.2.2 Argument des Perizentrums 66
22.5.2.3 Mittlere Epoche-Anomalie 67
22.6 BAHNAUSWAHL AUS ANOMALISTISCHER UMLAUFZEIT 68
22.6.1 Große Bahnhalbachse bei Vorgabe der anomalistischen Umlaufzeit *68*
22.6.2 Die Zwei-Zeilen-Elemente („two-line elements“) *71*
22.6.3 Exzentrizität bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit *74*
22.6.4 Inklination bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit *75*

22.7 DIE SÄKULARE DRIFT DER MITTLEREN EPOCHEANOMALIE VON ERDSATELLITEN 77
22.8 DIE SÄKULARE DRIFT DES ARGUMENTES DES PERIZENTRUMS 77
22.8.1 Die säkulare Änderung des Argumentes des Perizentrums 77
22.8.2 Die Drehung der Apsidenlinie und die Wanderung der Apsiden....79
22.9 GEOGRAPHISCHE POSITIONEN UND DRIFTEN VON PERIGÄUM UND APOGÄUM 82
22.9.1 Die geographischen Koordinaten des Perigäums 82
22.9.2 Die Variation der geographischen Position des Perigäums....83
22.9.3 Die Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums pro anomalistischem Umlauf ...86
22.9.3.1 Die mittlere Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums 86
22.9.3.2 Die genäherte wahre Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums....87
22.9.3.3 Die Variation der geographischen Position des Apogäums 88
22.10 BAHNAUSWAHL AUS DRIFT DER PERIGÄUMSLÄNGE....88
22.10.1 Mittlere große Bahnhalbachse aus der säkularen Variation der Perigäumslänge 89
22.10.2 Mittlere Exzentrizität aus der säkularen Variation der Perigäumslänge....96
22.10.3 Mittlere Inklination aus der säkularen Variation der Perigäumslänge....97
22.10.4 Mittleres Argument des Perigäums aus der säkularen Variation der Perigäumslänge 99
22.11 VORGABE VON ANOMAL. UMLAUFZEIT UND VARIATION DER PERIGÄUMSLÄNGE 100
22.11.1 Berechnung von Halbachse und Inklination....101
22.11.2 Berechnung von Halbachse und Exzentrizität....106
22.11.3 Berechnung von Halbachse und Argument des Perigäums....106
22.11.4 Berechnung von Exzentrizität und Inklination....106
22.11.5 Berechnung von Exzentrizität und Argument des Perigäums....106
22.12 ÄQUIVALENZBAHNEN....106
22.12.1 Begriffsbildung von Äquivalenzbahnen 106
22.12.2 Schreibweise von Äquivalenzbahnen....107
22.12.3 Exakte Äquivalenzbahnen....107
22.12.4 Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen 108
22.13 ÄQUIVALENZEN ZWISCHEN *HANSEN*- UND ANOMALISTISCHER BEWEGUNG 108
22.13.1 Allgemeine Eigenschaften bei Hansen zu anomalistischer Äquivalenz....108
22.13.2 Bahnhalbachse bei Hansen zu anomalistischer Äquivalenz....112
22.13.3 Die Inklination bei Hansen zu anomalistischer Äquivalenz 115
22.13.4 Die Exzentrizität bei Hansen zu anomalistischer Äquivalenz....116
22.13.5 Übersicht über Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen mit Kopplung von anomalistischer mit Hansen Bewegung 118
22.14 ÄQUIVALENZEN ZWISCHEN *KEPLER*- UND ANOMALISTISCHER BEWEGUNG....122
22.14.1 Allgemeine Eigenschaften Kepler zu anomalistischer Äquivalenz 122
22.14.2 Die Bahnhalbachse bei Kepler zu anomalistischen Äquivalenz 123
22.14.3 Übersicht über Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen mit Kopplung von Kepler und anomalistischer Bewegung 129
22.15 ÄQUIVALENZEN ZWISCHEN *KEPLER*- UND *HANSEN*- BEWEGUNG....129
22.15.1 Allgemeine Eigenschaften bei Kepler zu Hansen Äquivalenz....129
22.15.2 Die Bahnhalbachse von Kepler zu Hansen Äquivalenzbahnen 130
22.15.3 Übersicht über Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen mit Kopplung von Kepler und Hansen Bewegung 133
22.16 EIGENSCHAFTEN VON NAHE-PARALLELEN ÄQUIVALENZBAHNEN....136
22.17 AUFBAU EINER SATELLITENFORMATION MIT ANOMALISTISCHER BEWEGUNG....136
22.17.1 Aufbau der Formation mit ganzzahligem Verhältnis anomalistischer Umläufe....136
22.17.2 Zeitlich rascher Konstellationsaufbau durch kleine Manöver....143

23 DRAKONITISCHE BEWEGUNG....146

23.1 DAS KNOTENBEZOGENE BAHNSYSTEM....147
23.1.1 Eigenschaften des knotenbezogenen Bahnsystems 147
23.1.2 Bezug des knotenbezogenen Bahnsystems zu anderen Bahnsystemen....150
23.2 DAS ARGUMENT DER BREITE ALS BAHNWINKEL....154
23.2.1 Darstellung des Argumentes der Breite....154
23.2.2 Die drakonitische mittlere Bewegung in der Bahnmechanik für Erdsatelliten....155
23.2.3 Zeit und Argument der Breite 156

23.2.4 Die Variationen der Keplerbewegung in Bezug auf das Argument der Breite 157
23.2.4.1 Die Variation der Zeit nach dem Argument der Breite 158
23.2.4.2 Die Variation des Flächenparameters nach dem Argument der Breite 161
23.2.4.3 Die Variation des Kegelschnittparameters nach dem Argument der Breite 162
23.2.4.4 Die Variation der Exzentrizität nach dem Argument der Breite 164
23.2.4.5 Die Variation der Inklination nach dem Argument der Breite 166
23.2.4.6 Die Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens nach dem Argument der Breite 168
23.2.4.7 Die Variation der Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens nach dem Argument der Breite 169
23.2.4.8 Die Variation des Argumentes des Perigäums nach dem Argument der Breite 171
23.3 DIE DRAKONITISCHE UMLAUFZEIT 174
23.3.1 Wahre drakonitische Umlaufzeit 174
23.3.2 Mittlere drakonitische Umlaufzeit 176
23.3.3 Die mittlere drakonitische Umlaufzeit mit Luftwiderstand 181
23.3.4 Zur numerischen Berechnung der drakonitischen Umlaufzeit 182
23.3.5 Bahnauswahl aus drakonitischer Umlaufzeit 184
23.3.5.1 Berechnung der großen Bahnhalbachse aus drakonitischer Umlaufzeit 184
23.3.5.2 Berechnung der Exzentrizität aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit 188
23.3.5.3 Berechnung der Inklination aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit 189
23.3.6 Bahnauswahl aus drakonitischen Tagesumläufen 190
23.3.7 Die oskulierende drakonitische Umlaufzeit 191
23.3.8 Beispiel für die oskulierenden Geschwindigkeiten auf drakonitischen Umläufen 193
23.4 DIE INERTIALE WANDERUNG DER KNOTEN 194
23.4.1 Die säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens 194
23.4.2 Drehung der Knotenlinie und Wanderung der Knoten 195
23.5 KNOTENLÄNGENVERSCHIEBUNG UND KNOTENLÄNGENDRIFT 198
23.5.1 Herleitung von Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift 198
23.5.2 Die Knotenlängenverschiebung als Bezugsintervall 203
23.5.3 Bahnauswahl aus mittlerer Knotenlängenverschiebung 205
23.5.4 Bahnauswahl aus Knotenlängendrift 208
23.5.4.1 Große Bahnhalbachse aus Knotenlängendrift 209
23.5.4.2 Exzentrizität aus Knotenlängendrift 209
23.5.4.3 Inklination aus Knotenlängendrift 210
23.6 BAHNAUSWAHL AUS KNOTENLÄNGENDRIFT UND DRAKONITISCHER UMLAUFZEIT 210
23.6.1 Erste Näherungslösung 210
23.6.2 Iterative Verbesserung 212
23.6.3 Genauigkeitsabschätzungen 217
23.7 ÄQUIVALENZBAHNEN BEI BEZUG AUF DRAKONITISCHE BEWEGUNG 220
23.7.1 Kopplung von anomalistischer mit drakonitischer Bewegung 220
23.7.1.1 Allgemeine Eigenschaften der Äquivalenz von anomalistischen zu drakonitischen Bewegungen 220
23.7.1.2 Besondere Eigenschaften der Äquivalenz von anomalistischen zu drakonitischen Bewegungen 222
23.7.1.3 Der Einfluss von J_4 224
23.7.1.4 Berechnung der Halbachse von anomalistischen zu drakonitischen Äquivalenzbahnen 227
23.7.1.5 Das (a,i) Gebiet von exakten anomalistischen mit drakonitischen Äquivalenzbahnen 228
23.7.1.6 Berechnung der Inklination bei anomalistischen zu drakonitischen Äquivalenzen 230
23.7.1.7 Berechnung der Exzentrizität von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ bzw. $\left(P_A \triangleq P_D\right)-$ Äquivalenzbahnen 231
23.7.1.8 Exakte Äquivalenz von anomalistischen zu drakonitischen Bewegungen 232
23.7.1.9 Die Konstruktion von Nahe-parallele anomalistischen zu drakonitischen Äquivalenzbewegungen 237
23.7.1.10 Äquivalenzbahnen 237
23.7.1.11 Veranschaulichung des gleitenden Übergangs von exakten zu nahezu parallelen anomalistischen mit drakonitischen Äquivalenzbahnen: hybride Äquivalenz 241
23.7.1.12 Wahre Nahe-Parallele anomalistische mit drakonitischen Äquivalenzbahnen 246
23.7.2 Mehrfache Kopplung von Äquivalenzbahnen 247
23.7.2.1 Analytische Herleitung mehrfach gekoppelter Bewegungen 247
23.7.2.2 Iterative Verbesserung 247
23.7.2.3 Partielle Ableitungen erster Ordnung der säkularen Störkoeffizienten 249
23.7.2.4 Anomalistische mit drakonitischer gekoppelter Äquivalenzbahn mit vorgegebener Umlaufzeit und Knotenlängenverschiebung 252
23.7.3 Kopplung von Hansen mit drakonitischer Bewegung 260
23.7.3.1 Allgemeine Eigenschaften von Hansen zu drakonitischen Äquivalenzbahnen 260

23.7.3.2 Die Bahnhalbachse von Hansen zu drakonit. Äquivalenzbahnen 261
23.7.4 Kopplung von Kepler- mit drakonitischer Bewegung 263
23.7.4.1 Allgemeine Eigenschaften von Kepler zu drakonitischen Äquivalenzbahnen 263
23.7.4.2 Die Bahnhalbachse bei Kepler zu drakonitischen Äquivalenzen 264
23.8 DER KNOTENUMLAUF 267
23.9 DIE KNOTENLÄNGENRESTVERSCHIEBUNG 267
23.9.1 Eigenschaften der mittleren Knotenlängenrestverschiebung 268
23.9.2 Bahnauswahl aus der mittleren Knotenlängenrestverschiebung 270
23.10 SPUR-REPRODUZIERBARE BAHNEN 272
23.10.1 Reproduzierbarkeit und Knotenlängenverschiebung 272
23.10.2 Bahnauswahl für Spur-reproduzierbare Bahnen 274
23.10.3 Reproduzierbarkeit und Knotenlängenrestverschiebung 277
23.10.4 Nachweis der Reproduzierbarkeit einer gegebenen Bahn 281
23.10.5 Subzyklen 282
23.10.6 Die Längen auf - und absteigender Knoten von reproduzierbaren Bahnen 285
23.11 FORMSTABILE BEWEGUNG 291
23.11.1 Notwendige Bedingung für eine formstabile Bewegung 292
23.11.2 Hinreichende Bedingungen für formstabile Bewegungen 296
23.11.3 Eigenschaften der formstabilen Bewegung 296
23.11.4 Librationen um die formstabile Bewegung 302
23.11.5 Korrekturen der formstabilen Bewegung 307
23.12 VARIATIONEN DER DRAKONITISCHEN BEWEGUNG DURCH EINSCHUSSFEHLER 310
23.13 VARIATIONEN DER DRAKONITISCHEN BEWEGUNG DURCH BEWEGUNGSEINFLÜSSE 315
23.13.1 Variation der mittleren drakonitischen Umlaufzeit 315
23.13.2 Die Spurdrift 319
23.13.3 Der Einfluss einer Variation der Knotenlängendrift 320
23.13.4 Der Einfluss einer Variation der Knotenlängenverschiebung 321
23.13.5 Korrekturzyklus für Spurstabilität 326
23.13.6 Die relative Positionsbewegung 335
23.13.7 Variation in Länge (along track variation) 339
23.14 BEWEGUNGEN IM FORMATIONSFLUG AUF KREISNAHEN BAHNEN 340
23.14.1 Satellitenkonstellationen mit kreisförmigen Bahnen nach Walker 340
23.14.2 Relativbewegung zu einer Kreisbewegung 341
23.14.3 Relativbewegung in der „CartWheel Ellipse“ 343
23.14.4 Formationsflug dreier Satelliten mit unterschiedlichen Knoten und Perigäen 349
23.14.5 Formationsflug zweier Satelliten in Helix-Konfiguration 356
23.14.6 Formationsflug mit Kreisbewegung in einer Bahnebene 358
23.14.7 Formationsflug mit Kreisbewegung über genau einer Bodenspur 360

24 DIE TROPISCHE BEWEGUNG 361

24.1 DAS GEOZENTRISCHE FRÜHLINGSPUNKT-BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM 362
24.1.1 Basissystem und Fundamentalsystem 362
24.1.2 Bezug auf ein Hansen System 363
24.1.3 Fundamentalsystem und Hansen System 365
24.2 DER BAHNWINKEL DER TROPISCHEN BEWEGUNG 365
24.2.1 Die äquatorialen Koordinaten eines Satelliten 365
24.2.2 Der tropische Bahnwinkel 367
24.2.3 Die Reduktion auf den Äquator 367
24.2.4 Bewegung des Knotens und Bewegung eines Satelliten 373
24.3 DIE TROPISCHE UMLAUFZEIT VON ERDSATELLITEN 374
24.3.1 Definition der tropischen Umlaufzeit 375
24.3.2 Die mittlere tropische Umlaufzeit 375
24.3.3 Die mittlere tropische Umlaufzeit und andere mittlere Umlaufzeiten 376
24.3.4 Bahnauswahl mit der mittleren tropischen Umlaufzeit 379
24.4 NAHE ÄQUIVALENZBAHNEN MIT DER TROPISCHEN BEWEGUNG 380
24.4.1 Nahe Äquivalenz zwischen anomalistischer und tropischer Bewegung 380
24.4.2 Nahe Äquivalenz zwischen drakonitischer und tropischer Bewegung 385

24.4.3 Nahe Äquivalenz zwischen Hansen- und tropischer Bewegung 389
24.4.4 Nahe Äquivalenz zwischen Kepler- und tropischer Bewegung 390
24.4.5 Übersicht einiger Eigenschaften von Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen 394

25 DIE SIDERISCHE BEWEGUNG 396

25.1 ZUR DEFINITION DER SIDERISCHEN BEWEGUNG EINES ERDSATELLITEN 396
25.2 NUMERISCHE ABSCHÄTZUNGEN DER SIDERISCHEN SATELLITENBEWEGUNG 397
25.3 EINFLUSS DER PRÄZESSION DURCH DIE PLANETEN 398

26 DIE MERIDIAN-BEZOGENE BEWEGUNG 399

26.1 DAS GEOZENTRISCHE MERIDIAN-BEZOGENE ÄQUATORSYSTEM 399
26.2 DIE MITTLERE MERIDIAN-BEZOGENE MITTLERE BEWEGUNG 400
26.3 DIE MERIDIAN-BEZOGENE UMLAUFZEIT 402
26.4 BAHNAUSWAHL AUS MERIDIAN-BEZOGENER SATELLITENBEWEGUNG 408
26.5 SCHEINBARE SATELLITENBEWEGUNG MIT MERIDIAN-BEZOGENER BEWEGUNG 411
26.5.1 Rechtläufige Bahnen 411
26.5.1.1 Untersynchrone Bahnen 411
26.5.1.2 Geosynchrone Bahnen 413
26.5.1.3 Übersynchrone Bahnen 414
26.5.2 Rückläufige Bahnen 419
26.6 GEOSYNCHRONE BAHNEN 420
26.6.1 Einige Beispiele geosynchroner Satellitenbahnen 421
26.6.2 Einige Eigenschaften geosynchroner Satellitenbahnen 423
26.7 SCHEINBARES BEWEGUNGSVERHALTEN VON SATELLITENBAHNEN 423
26.7.1 Scheinbares Bewegungsverhalten und scheinbar stationäre Bahnpunkte 424
26.7.1.1 Besondere Punkte bei scheinbarer Nord-Süd-Bewegung 425
26.7.1.2 Besondere Punkte bei scheinbarer Ost-West-Bewegung 425
26.7.2 Besondere scheinbare Bahnpunkte auf Kreisbahnen 426
26.7.2.1 Äquatoriale Kreisbahnen mit stationären Punkten 427
26.7.2.2 Besonderheiten einer Satellitenbewegung auf kreisförmigen Äquatorbahnen 429
26.7.2.3 Spitzenpunkte auf geneigten Kreisbahnen 432
26.7.2.4 Wendepunkte auf geneigten Kreisbahnen 435
26.7.2.5 Stillstandpunkte auf geneigten Kreisbahnen 435
26.7.2.6 Kreisförmige Schleifenbahnen 437
26.7.3 Scheinbares Bewegungsverhalten auf elliptischen Bahnen 448
26.7.3.1 Bahnen mit Perigäum auf dem Äquator 450
26.7.3.2 Satellitenbahnen mit scheinbaren Überflugwinkeln über der Erdoberfläche 454
26.8 MERIDIAN-BEZOGENE ÄQUIVALENZBAHNEN 454
26.8.1 Äquivalenzbahnen mit Äquivalenz tropischer und meridionaler Bewegungen 455
26.8.1.1 Basiseigenschaften 455
26.8.1.2 Weitere generelle Eigenschaften von tropischen zu meridionalen Äquivalenzbahnen 456
26.8.1.3 Große Bahnhalbachse bei tropischer zu meridionaler Äquivalenz 459
26.8.1.4 Der (a,i)- Bereich aller tropischen zu meridionaler Äquivalenz 462
26.8.1.5 Die Inklination bei tropischer zu meridionaler Äquivalenz 464
26.8.1.6 Die Exzentrizität bei tropischer zu meridionaler Äquivalenz 466
26.8.1.7 Überprüfung der Konsistenz der geodätisch-astronomischen Basisparameter 467
26.8.1.8 Beispiele aus der Äquivalenz der mittleren tropischen und meridionalen Umlaufzeiten 468
26.8.1.9 Beispiele aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten 482
26.8.2 Äquivalenz zwischen anomalistischer und meridionaler Bewegung 493
26.8.2.1 Basiseigenschaften 493
26.8.2.2 Die große Bahnhalbachse bei anomalistischer zu meridionaler Äquivalenz 494
26.8.2.3 Der (a,i)- Bereich möglicher anomalistischer zu meridionaler Äquivalenzbahnen 496
26.8.2.4 Die Inklination bei anomalistischer zu meridionaler Äquivalenz 500
26.8.2.5 Die Exzentrizität bei anomalistischer zu meridionaler Äquivalenz 501
26.8.2.6 Stabilisierung in der Umgebung von anomalistischer zu meridionaler Äquivalenz 501
26.8.3 Äquivalenz zwischen drakonitischer und meridionaler Bewegungen 503
26.8.3.1 Basiseigenschaften 503
26.8.3.2 Bahnhalbachse bei drakonitischer zu meridionaler Äquivalenz 504
26.8.3.3 Die Inklination bei drakonitischer zu meridionaler Äquivalenz 509
26.8.3.4 Die Exzentrizität bei drakonitischer zu meridionaler Äquivalenz 511

26.8.3.5 Der (a,i)- Bereich möglicher drakonitischer zu meridionaler Äquivalenzbahnen....511
26.8.4 Äquivalenz zwischen Hansen- und meridionaler Bewegung 514
26.8.4.1 Basiseigenschaften 514
26.8.4.2 Große Bahnhalbachse bei Hansen- zu meridionaler Äquivalenz....514
26.8.4.3 Die Inklination bei Hansen- zu meridionaler Äquivalenz....518
26.8.4.4 Die Exzentrizität bei Hansen- zu meridionaler Äquivalenz....519
26.8.4.5 Der (a,i)- Bereich möglicher Hansen- zu meridionaler Äquivalenz 519
26.8.5 Äquivalenz zwischen Kepler- und meridionaler Bewegung....522
26.8.5.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer Kepler- mit einer meridionalen Bewegung....522
26.8.5.2 Die große Bahnhalbachse bei Kopplung der Kepler- mit der meridionalen Bewegung 523
26.8.5.3 Der (a,i)- Bereich möglicher Kepler zu meridionalen Äquivalenzbahnen....526
26.8.5.4 Die Inklination bei Kopplung der Kepler- mit der meridionalen Bewegung....528
26.8.5.5 Die Exzentrizität bei Kopplung der Kepler- mit der meridionalen Bewegung....531
26.9 MIT DER ERDROTATION GEKOPPELTE ÄQUIVALENZBAHNEN....536
26.9.1 Kopplung von tropischer Bewegung mit der Erdrotation....537
26.9.1.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer tropischen Bewegung mit der Erdrotation 537
26.9.1.2 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen bei Kopplung tropischer Satellitenbewegung mit der Erdrotation 538
26.9.2 Kopplung von anomalistischer Bewegung mit der Erdrotation....541
26.9.2.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer anomalistischen Bewegung mit der Erdrotation 541
26.9.2.2 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen bei Kopplung anomalistischer Satellitenbewegung mit der Erdrotation 542
26.9.3 Kopplung von drakonitischer Bewegung mit der Erdrotation....544
26.9.3.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer drakonitischen Bewegung mit der Erdrotation 544
26.9.3.2 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen bei Kopplung drakonitischer Satellitenbewegung mit der Erdrotation 545
26.9.3.3 Beispiel einer rückläufigen QDE Äquivalenzbahn....548
26.9.4 Kopplung von Hansen Bewegung mit der Erdrotation....550
26.9.4.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer Hansen Bewegung mit der Erdrotation....550
26.9.4.2 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen bei Kopplung der Hansen Satellitenbewegung mit der Erdrotation 551
26.9.5 Kopplung von Kepler Bewegung mit der Erdrotation 553
26.9.5.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer Kepler Bewegung mit der Erdrotation....553
26.9.5.2 Beispiel von Bahnparametern einer Äquivalenzbahn bei Kopplung der Keplerschen Bewegung mit der Erdrotation 554
26.10 ÄQUIVALENZBAHNEN MIT ZWEI STERNTAGEN UMLAUFZEIT 555
26.10.1 Tropische Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit....555
26.10.1.1 Basiseigenschaften der tropischen Bewegung mit Umlauf in zwei Sterntagen 555
26.10.1.2 Der (a,i)- Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung der tropischen Bewegung mit der Erdrotation 560
26.10.2 Anomalistischer Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit....564
26.10.2.1 Eigenschaften der anomalistischen Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit....564
26.10.2.2 Der (a,i)- Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung der anomalistischen Bewegung mit zwei Sterntagen mittlerer Umlaufzeit 565
26.10.3 Drakonitische Satellitenbewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit....568
26.10.3.1 Basiseigenschaften der drakonitischen Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit 568
26.10.3.2 Der (a,i)- Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung der drakonitischen Bewegung mit der Erdrotation 569
26.10.3.3 Beispiel einer rückläufigen drakonitischen Bewegung in 2 Sterntagen Umlaufzeit 571
26.10.4 Hansen Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit 573
26.10.4.1 Basiseigenschaften der Hansen Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit....573
26.10.4.2 Der (a,i)- Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung der Hansen Bewegung mit der Umlaufzeit in zwei Sterntagen....574
26.10.5 Kepler Bewegung mit zwei Sterntagen Umlaufzeit....577
26.10.5.1 Basiseigenschaften der Kepler Bewegung mit zwei Sterntagen Umlaufzeit 577
26.10.5.2 Beispiel der Bahnparameter einer Äquivalenzbahn aus der Kopplung der Keplerschen Bewegung in 2 Sterntagen 578
26.11 SATELLITENBAHNEN BEI BEZUG AUF EINE BELIEBIGE FEST VORGEGEBENE UMLAUFZEIT 579
26.11.1 Anomalistische Satellitenbewegung bezogen auf eine fest vorgegebene Umlaufzeit....580
26.11.1.1 Große Bahnhalbachse bei Kopplung von anomalistischer Bewegung an beliebige feste Umlaufzeit 580

26.11.1.2 Der (a,i)-Bereich möglicher Satellitenbahnen bei Kopplung von anomalistischer Bewegung an ein beliebige feste Umlaufzeit 582
26.11.2 Drakonitische Satellitenbewegung bezogen auf eine beliebige feste Umlaufzeit 585
26.11.2.1 Große Bahnhalbachse bei Kopplung von drakonitischer Bewegung an beliebige feste Umlaufzeit ... 585
26.11.2.2 Der (a,i)-Bereich möglicher Satellitenbahnen bei Kopplung von drakonitischer Bewegung an ein beliebige feste Umlaufzeit 588
26.11.2.3 Der Reproduzierbare drakonitische Bewegung in Kopplung mit fester Umlaufzeit 590
26.11.3 Kopplung einer Kepler-Bewegung bezogen mit einer beliebigen festen Umlaufzeit 594
26.11.3.1 Elementares Verhalten einer Kepler Bewegung bei Bezug auf eine beliebige feste Umlaufzeit 594
26.11.3.2 Beispiel von Kepler Bahnen bei Bezug auf eine beliebige feste Umlaufzeit 594
26.12 MEHRFACH GEKOPPELTE ÄQUIVALENZBAHNEN 596
26.12.1 Heuristische Untersuchung mehrfach gekoppelter Bewegungen 596
26.12.2 Zweifach gekoppelte Bewegungen mit meridionaler Bewegung 598
26.12.2.1 Grundlegende Beziehungen für eine PA-PD-PR Äquivalenzbahn 598
26.12.2.2 PA-PD-PR-Äquivalenzbahn mit vorgegebener großer Bahnhalbachse 600
26.12.2.3 PA-PT-PR- Äquivalenzbahn mit vorgegebener Exzentrizität 603
26.12.2.4 PD-PT-PR- Äquivalenzbahn mit vorgegebener Exzentrizität 605
26.12.3 Mehrfach gekoppelte Bewegungen mit unterschiedlichen Bedingungen 610
26.13 ZUSAMMENSTELLUNG EINIGER EIGENSCHAFTEN VON ÄQUIVALENZBAHNEN 610

27 TOPOZENTRISCHE BEWEGUNG 612

27.1 TOPOZENTRISCHE KOORDINATEN 612
27.2 BAHNABSCHÄTZUNG AUS TOPOZENTRISCHER BEWEGUNG 615
27.3 TOPOZENTRISCHE BEWEGUNGSGRÖßEN 617
27.4 BEWEGUNG EINES SATELLITEN GESEHEN VON EINEM TOPOZENTRUM AUS 620
27.4.1 Darstellung einer topozentrischen Bewegung 620
27.4.2 Entfernung und Lichtzeit 623
27.4.3 Spezielle Punkte der scheinbaren topozentrischen Bewegung 628
27.5 DOPPLER BEOBACHTUNGEN 632
27.6 ANMERKUNGEN ZUR GENAUIGKEIT EINER GEOSTATIONÄREN BAHN 634

SCHRIFTTUM ZU BAND IV-A 635

INDEX 647

INHALT VON BAND I

DER BEWEGUNGSBEGRIFF

BEGRIFFLICHE DIMENSIONIERUNG DER BEWEGUNG

1. Die Antike Bewegungslehre

2. Die Klassische Bewegungslehre

3. Ansätze einer Nachklassischen Bewegungslehre

Schrifttum zu Band I

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND II

BEWEGUNG IN RAUM UND ZEIT

4. Bezugssysteme zur Beschreibung von Bewegungen
5. Die mathematische Anpassung beliebiger Bewegungen
6. Bewegungen in geradlinigen Systemen
7. Bewegungen in krummlinigen Systemen
8. Einige spezielle Koordinatensysteme
9. Bewegungen in Zeit
Schrifttum zu Band II
Liste der verwendeten Symbole
Abbildungsverzeichnis
Tabellenverzeichnis
Index

INHALT VON BAND III

NATÜRLICHE UND GESTEUERTE BEWEGUNG

10. Die spezielle Keplerbewegung
11. Bewegungsparameter
12. Natürliche und gesteuerte Bewegungsänderungen
13. *Kepler*bewegung in uniformisierter Darstellung
14. Parameterräume
15. Partialausdrücke
16. Bahnbestimmung und Bahnverbesserung
17. Bewegungseinflüsse
18. Anmerkungen zur Integration der Bewegungsgleichungen
19. Überblick Analytische Störungstheorie periodischer Bewegungen
20. Ergebnisse analytischer Satellitenbahntheorien
Schrifttum zu Band III
Liste der verwendeten Symbole
Abbildungsverzeichnis
Tabellenverzeichnis
Index

INHALT VON BAND IV-B

SYNODISCHE BEWEGUNGEN

28. Sonnenbezogene synodische Bewegung
29. Synodische Bewegung bezogen auf Mond und Mondorbiter
30. Synodische Bewegung in Bezug auf ein interplanetares Objekt
31. Synodische Bewegung zweier Satelliten

Schrifttum zu Band IV-B

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

INHALT VON BAND V [in 1. Auflage Band IV]

BEWEGUNG IN BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

BEWEGUNG IN SPHÄRISCHER BEOBACHTUNGSGEOMETRIE

32. Sphärische Beobachtungsgeometrie
33. Trigonometrie des sphärischen Breitenkreises
34. Überdeckung eines sphärischen Breitenkreises
35. Lokale Überdeckung
36 Sichtbarkeitsuntersuchungen

BEWEGUNG ÜBER REFERENZELLIPSOID

37. Allgemeine Beziehungen auf einem Rotationsellipsoid
38. Satellitenbewegung über Rotationsellipsoid

ANHANG

A. Grundformeln der sphärischen Trigonometrie
B. Näherungsausdrücke
C. Tschebyscheff-Approximationen
D. Integraltafel
E. Astronomische Konstante
F. Das julianische Datum
G. Tabellen reproduzierbarer Bahnen
H. Hohmann Übergänge im Interplanetaren Raum
I. Parameter der Attraktionssphären und kollinearen Librationspunkte im Sonnensystem
J. Sichtbarkeitsgrenzen geostationärer Satelliten

K. MSIS Luftwiderstandsmodell

Schrifttum zu Band V

Liste der verwendeten Symbole

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Index

Zentralkörper bezogene Bewegung

Die Bewegung eines Satelliten bzw. Orbiters um den Gravitationsschwerpunkt seines Zentralkörpers wird in diesem Kapitel bei Bezug auf diesen Zentralkörper unter verschiedenen bahngeometrischen und bahnkinematischen Gesichtspunkten untersucht. Dabei kann der Zentralkörper als Massenpunkt oder als ausgedehnter Körper von Interesse sein. Der Begriff der Zentralbewegung ist also hier allgemeiner gefasst als in der physikalischen Bewegungslehre üblich, welche sich auf die Fälle einschränkt, bei denen der Beschleunigungsvektor stets zum Massenmittelpunkt des Zentralkörpers gerichtet ist. Hier geht es um eine spezielle Interpretation von Form und Lage der Bahn im Raum um den Zentralkörper, um geometrische Beziehungen der Bahn oder der momentanen Position des Satelliten in seiner Bahn zu einem astronomischen Bezugssystem oder einem, das mit dem Zentralkörper gekoppelt ist, und den bahngeometrischen Bezug zur Oberfläche des Zentralkörpers (der beobachtungsgeometrische Bezug der Satellitenbewegung zur Oberfläche des Zentralkörpers wird in Band V behandelt). Je nach Referenzpunkt oder Referenzsystem lässt sich ein und dieselbe Satellitenbewegung in sehr verschiedenartigen Bezügen darstellen.

Satellitenbewegungen werden vielerorts auf der Grundlage einer *Kepler*bewegung untersucht. Unter *Kepler*bewegung wird eine Bewegung verstanden, welche nach den *Kepler*schen Gesetzen abläuft, wobei alle Parameter konstant sind. Dies trifft auf keine Satellitenbewegung zu. Wir können den Begriff der *Kepler*bewegung verallgemeinern als eine Bewegung, die nach den *Kepler*schen Gesetzen abläuft, wenn in ihnen alle vorkommenden Parameter als variabel in der Zeit, das heißt mit der Bewegung sich verändernd angenommen werden. Für eine derart definierte Bewegung ist jedoch kein reproduzierbar fester Bezug zur Bahn definierbar. Dies ist nur möglich mit dem übergeordneten Begriff einer *Hansen*-Bewegung (Bild IV-1), da ein *Hansen*-System fest an eine Bahn gekoppelt ist (Kapitel 21).

Elliptische bzw. ellipsennahe Bahnen (allgemeiner beliebige Kegelschnittbahnen) können auf die Apsidenlinie bezogen werden, also die Verbindungslinie durch Perizentrum und Apozentrum der Bahn. Man bezeichnet diese Bewegung als *anomalistische Bewegung* (in Kapitel 22). Allgemeiner kann als *anomalistische Bewegung* der Bezug auf die Linie des kürzesten Abstandes der Bewegungsbahn zu einem Bezugspunkt („Zentrum“) definiert werden, dem Perizentrum. Bahnen von Beobachtungssatelliten sind meist kreisnah und haben daher nur ein schwach oder gar nicht ausgeprägtes Perizentrum. Sie sind jedoch in der Regel gegenüber der Äquatorebene des Zentralkörpers geneigt, die Schnittpunkte mit der Äquatorebene, die Knoten, sind scharf definiert. Als *drakonitische Bewegung* wird eine Satellitenbewegung bezeichnet, wenn sie auf die Knotendurchgänge bezogen wird (in Kapitel 23). Das wichtigste auf einen Zentralkörper bezogene astronomische System ist das bewegliche Äquatorsystem mit der Äquatorebene als Grundebene und im Fall der Erde als Zentralkörper dem Frühlingspunkt als Referenzpunkt. Als Frühlingspunkt wird der aufsteigende Knoten der scheinbaren Sonnenbahn, der Ekliptik, mit dem Erdäquator bezeichnet. Wird die Satellitenbewegung auf den Frühlingspunkt bezogen, wird sie als *tropische Bewegung* bezeichnet (in Kapitel 24). Bahnen, die in der Äquatorebene verlaufen, haben keine Knoten. Sie sind aber als tropische Bewegungen fassbar. Bezieht man die Satellitenbewegung auf den Fixsternhimmel, spricht man von *siderischer Bewegung* (Kapitel 25). Die Unterschiede zwischen tropischer und siderischer Bewegung sind so klein, dass sie in einer Satellitenbahnanalyse gewöhnlich vernachlässigt werden können.

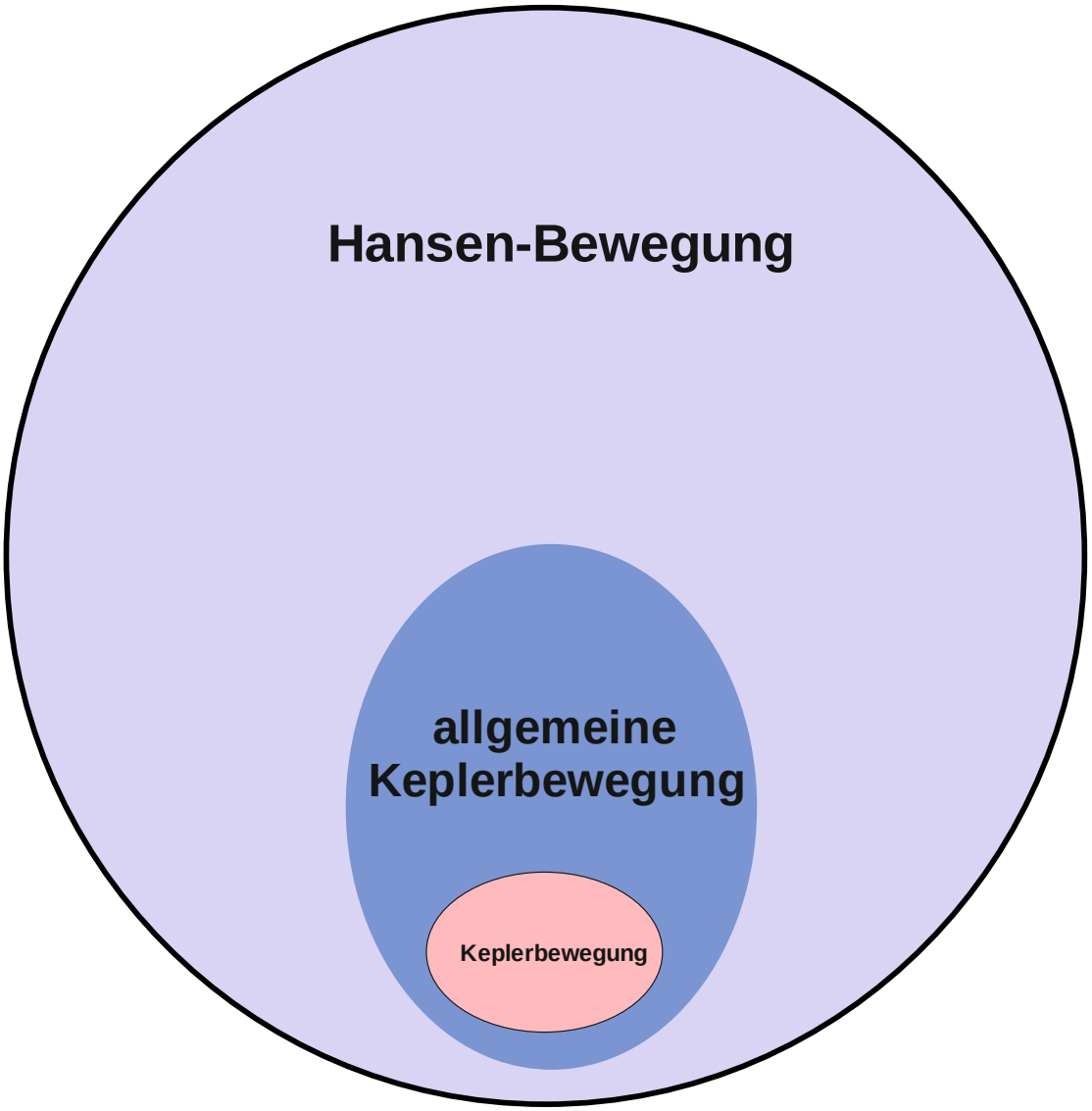


Bild IV-1: Zur Einordnung von Satellitenbewegungen

Für Beobachtungssatelliten und für die Beobachtbarkeit eines Satelliten von Bodenstationen aus wichtig ist der Bezug der Bewegung auf die Oberfläche des Zentralkörpers. Als Referenz kann - mit gewissen Einschränkungen - der Bezug der Satellitenbewegung auf einen bestimmten Längenkreis, einen Meridian, gewählt werden, was die *Meridian bezogene Bewegung* definiert (in Kapitel 26). Damit lässt sich eine Subsatellitenbahn berechnen, aber auch wichtige Spezialtypen von Satellitenbahnen, wie reproduzierbare, sonnensynchrone, geosynchrone Bahnen charakterisieren. Der globale Bezug der Satellitenbewegung zur Oberfläche des Zentralkörpers stellt sich als *scheinbare Bewegung* dar (in Kapitel 27). Infolge der Rotation des Zentralkörpers erscheint die Bewegung eines Satelliten gesehen von der Oberfläche des Zentralkörpers aus verändert. Rechtläufige Bahnen können beispielsweise scheinbar rückläufig sein, es gibt Bahnen mit scheinbaren Umkehrpunkten, mit scheinbar stationären Punkten, scheinbar stationäre ("geostationäre") Bahnen. Beispiele hierzu werden in Kapitel 26 vorgestellt.

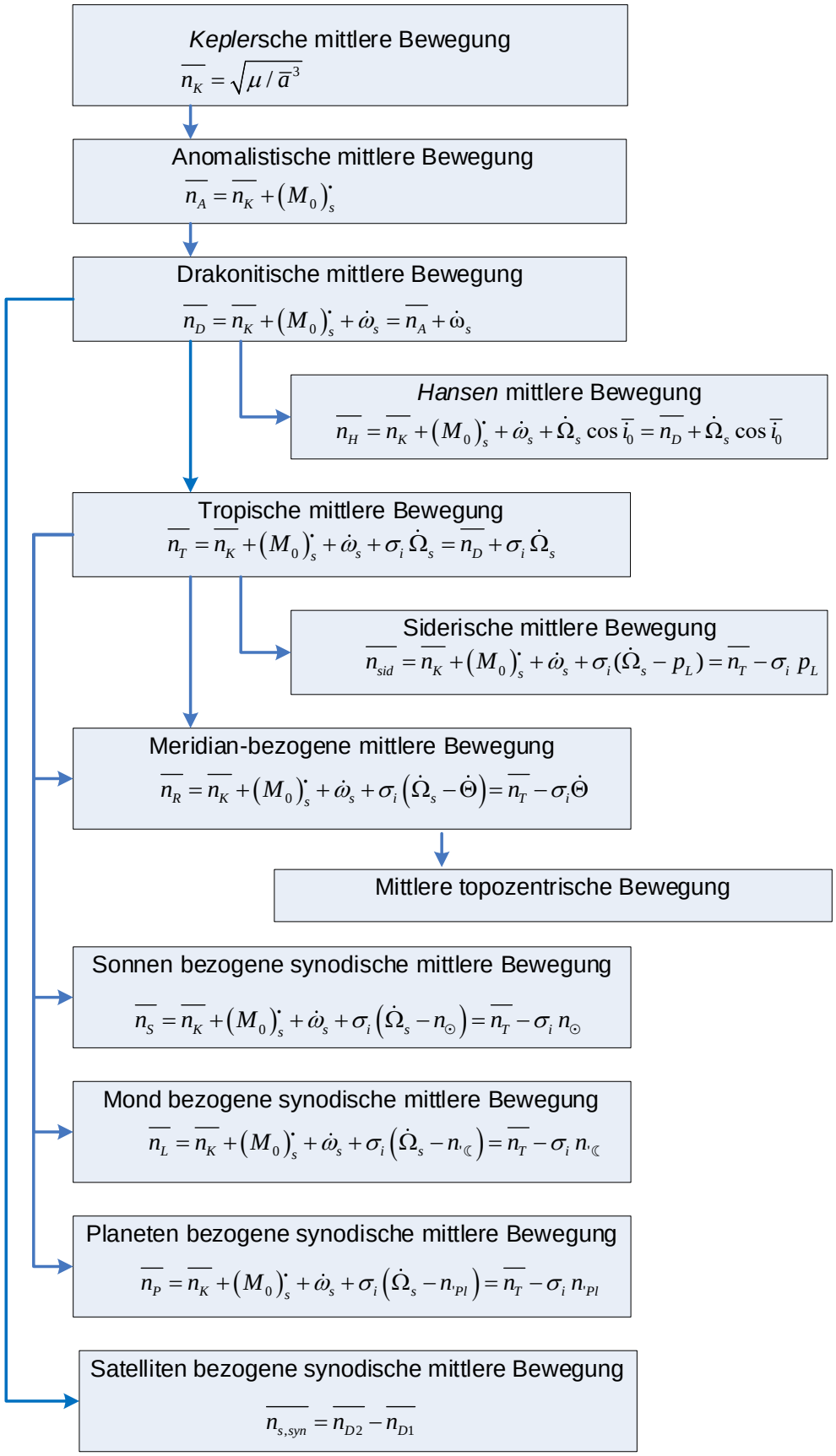


Bild IV-2: Relationen zwischen Bewegungsbezügen

In allen Fällen lassen sich Umlaufzeiten zuordnen und viele andere Parameter, die eine bestimmte Satellitenbewegung charakterisieren. Umgekehrt lassen sich diese Größen verwenden, um Bahnen auszuwählen, die bestimmte Anforderungen erfüllen sollen. Die Satellitenbewegung um einen Zentralkörper wird im vorliegenden Band IV der Satellitenbewegung durch genaue wie durch approximative mathematische Formulierungen beschrieben, durch zahlreiche Beispiele für Erdsatelliten, Mond- und Marsorbiter erläutert. Formeln zur approximativen Bahnauswahl werden entwickelt, die sich mit analytischen wie numerischen Methoden bearbeiten lassen. Ein analytischer Zusammenhang zwischen allen diesen Bewegungsmodellen kann in übersichtlicher Weise im Zusammenhang mit der mittleren Bewegung hergestellt werden, wie in Bild IV-2 demonstriert wird[1].

Eine zentrale Aufgabe einer Satellitenbahnanalyse ist die Auswahl einer geeigneten Bahn, die bestimmte Aufgabenstellungen erfüllen, welche etwa durch Beobachtungsbedingungen vorgegeben sein können. Einige solcher Verfahren der Bahnauswahl sind in Tabelle IV-1 zusammengestellt. Unter Ref. ist der Hinweis auf den Abschnitt, in dem die Behandlung des betreffenden Verfahrens enthalten ist.

vorgegebene Parameter	*Kepler*-Elemente	Ref.
anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_{A0}}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	22.6.1
$\overline{P_H}, (P_H), \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	21.5
$\overline{P_{A0}}, (P_A), \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	22.6.1
$\overline{P_{A0}}, (P_A), \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	22.6.3
$\overline{P_{A0}}, (P_A), \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	22.6.4
Perigäumslängendrift $\dot{\lambda}_{PGs}$, $\bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0$	$\bar{a}_0$	22.10.3
$\dot{\lambda}_{PGs}$, $\bar{a}_0, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0$	$\bar{e}_0$	22.10.4
$\dot{\lambda}_{PGs}$, $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{\omega}_0$	$\bar{i}_0$	22.10.5
$\dot{\lambda}_{PGs}$, $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{\omega}_0$	22.10.6
anom. Umlauf, Perig. Längendrift $\overline{P_a}, \dot{\lambda}_{Ps}, \bar{e}_0, \bar{\omega}_0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	22.11.3

[1] Diese Überlegungen wurden erstmals vorgestellt in: JOCHIM, E. F. [1980]: 'Zur Begriffsbildung in der Bahnmechanik für Erdbeobachtungssatelliten', DGLR Walter-Hohmann-Symposium Raumflugmechanik, 12. und 13. März 1980. DGLR 80-014 in DLR-Mitt. 80-01 (her. von W. SCHULZ [1980]), und in: JOCHIM, E. F. [1983] 'The Synodic Motion of Satellites Related to Sun'. AAS / AIAA Astrodynamics Conference, Lake Placid, New York, August, 22 - 25, 1983; AAS 83-334

$\overline{P_A}, \dot{\lambda}_{Ps}, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0$	$(\bar{a}_0, \bar{e}_0)$	22.11.4
$\overline{P_A}, \dot{\lambda}_{Ps}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$(\bar{a}_0, \bar{\omega}_0)$	22.11.5
$\overline{P_A}, \dot{\lambda}_{Ps}, (\bar{a}_0, \bar{\omega}_0)$	$(\bar{e}_0, \bar{i}_0)$	22.11.6
$\overline{P_A}, \dot{\lambda}_{Ps}, (\bar{a}_0, \bar{i}_0)$	$(\bar{e}_0, \bar{\omega}_0)$	22.11.7
Phasing Orbit zum Aufbau einer Formation	$\bar{a}_0, \bar{e}_0$	22.14.1
drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.3.5.1
$\overline{P_{D0}}, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	23.3.5.2
$\overline{P_{D0}}, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	23.3.5.3
Anzahl N_{0M} drakonitische Umläufen in M_0 Tagen, $\bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.3.6
Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$, $\bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.5.3
Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.5.4.1
$\dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	23.5.4.2
$\dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	23.5.4.3
drakonitische Umlaufzeit und Knotenlängendrift $\overline{P_{D0}}, \dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\bar{e}_0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	23.6
Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift $\overline{\Delta\lambda_\Omega}, \dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\bar{e}_0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	23.6
Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$, $\bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.9.2
Spur-Reproduzierbarkeit $K_1 : K_2, N_d, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.9.2
Reproduktionsdauer und drakonitische Umläufe $T_D, N_D, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.10.2
$T_D, N_D, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	23.10.2, 23.3.5

$T_D, N_D, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	23.10.2, 23.3.5
Knotenumläufe und drakonitische Umläufe $K, N_D, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	23.10.4, 23.3.5
Tropische Umlaufzeit $\overline{P_T}, (P_T), \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	24.3.4
Meridianbezogene Umlaufzeit $P_R, (P_{R.\text{sec}}), (\overline{P_R}), \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	26.4
Stationäre Punkte	$\bar{a}_0$	26.7.2.1
Bahnen mit Spitzenpunkten, $\bar{e}_0 = 0.0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	26.7.2.3
Stillstandpunkte bei Knotenüberflug, $\bar{e}_0 = 0.0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	26.7.2.5
$(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_T \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{a}_0$	26.8.1.2
$(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_T \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\overline{e_0}$	26.8.1.4
$(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_T \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{i}_0$	26.8.1.3
$(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_A \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{a}_0$	26.8.2.2
$(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_A \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{i}_0$	26.8.2.3
$(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_A \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{e}_0$	26.8.2.4
$(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_D \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{a}_0$	26.8.3.2
$(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_d \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{i}_0$	26.8.3.3
$(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_D \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{e}_0$	26.8.3.4
$(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_H \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{a}_0$	26.8.4.2
$(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_H \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{i}_0$	26.8.4.3
$(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R})-$ bzw. $(P_H \triangleq P_R)-$Äquivalenz	$\bar{e}_0$	26.8.4.4

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz, $\overline{a}_0$	$\overline{e}_0$, $\overline{i}_0$	26.9.2.2
$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz, $\overline{e}_0$	$\overline{a}_0$, $\overline{i}_0$	26.9.2.4
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz, $\overline{e}_0$	$\overline{a}_0$, $\overline{i}_0$	26.9.2.3
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	23.7.1.4
$\left(P_A \triangleq P_D\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	23.7.1.4
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{i}_0$	23.7.1.10
$\left(P_A \triangleq P_D\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{i}_0$	23.7.1.10
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – nahe Äquivalenz, $\overline{P_D}, \overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\overline{a}_0$, $\overline{e}_0$, $\overline{i}_0$	23.7.2.4
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{e}_0$	23.7.1.6
$\left(P_A \triangleq P_D\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{e}_0$	23.7.1.6
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_H}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	22.13.1
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_H}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{e}_0$	22.13.2
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_H}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{i}_0$	22.13.3
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_K}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	22.13.4
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	24.4.1
$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_H}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	23.7.3
$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_K}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	23.7.4
$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	24.4.2
$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_T}\right)$ – nahe Äquivalenz	$\overline{a}_0$	24.4.3

Sonnenbezogene Umlaufzeit $\overline{P_S}, (P_S), \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.5.1.6
$\overline{P_S}, (P_S), \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.5.1.6
$\overline{P_S}, (P_S), \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.5.1.6
Knotenlänge und Knoten-Durchgangszeit $\lambda_\Omega(t_\Omega), \bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	$\bar{\Omega}_0(t_\Omega)$, $\overline{M_0}(t_\Omega), T_\Omega(t_\Omega)$	28.6.3.1
Mittlere lokale und Greenwich-bezogene Knotendurchgangszeit $T_{m\Omega}(t_\Omega), \bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	t_Ω, $\bar{\Omega}_0(t_\Omega)$, $\overline{M_0}(t_\Omega), \lambda_\Omega(t_\Omega)$	28.6.3.1
Überflug einer geogr. Position in mittlerer Sonnenzeit $\lambda(t), \varphi(t), \mathrm{sgn}(\cos u)$, $\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	$\bar{\Omega}_0(t)$, $\overline{M_0}(t)$ oder $\bar{\omega}_0(t)$ oder t_P	28.6.3.2
Überflug einer geogr. Position in lokaler Sonnenzeit $\lambda(T), \varphi(T), \mathrm{sgn}(\cos u)$, $\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	t, $\bar{\Omega}_0(t)$, $\overline{M_0}(t)$ oder $\bar{\omega}_0(t)$ oder t_P	28.6.3.2
Sonnenwinkel und Überflug eines Breitenkreises in mittlerer Sonnenzeit $\bar{\tau}(t), \varphi(t), \mathrm{sgn}(\cos u)$, $\bar{\alpha}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, [\bar{\omega}_0]$	$\bar{\Omega}_0(t)$, $\overline{M_0}(t)$ oder $\bar{\omega}_0(t)$ oder t_P	28.6.3.3
Knotensonnendrift $\dot{\tau}_{\Omega s}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.7.4.1
$\dot{\tau}_{\Omega s}, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.7.4.1
$\dot{\tau}_{\Omega s}, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.7.4.1
Knotensonnenverschiebung $\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.7.4.2
$\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.7.4.2
$\overline{\Delta\tau_{\Omega 0}}, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.7.4.2
Sonnensynodische Bewegung der Bahnebene $\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}, \bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.7.4.3
$\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}, \bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.7.4.3
$\overline{P_{\Omega\bar{\odot}}}, \bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.7.4.3

sonnensynchron, $\bar{e}_0, \bar{i}_0$	$\bar{a}_0$	28.9.2.1
sonnensynchron, $\bar{a}_0, \bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	28.9.2.2
sonnensynchron, $\bar{a}_0, \bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	28.9.2.3
sonnensynchron, reproduzierbar, $\bar{e}_0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	28.9.5
Sonnensynchron, Knotenlängenrestverschiebung	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	28.9.5
Saros Zyklus	$\bar{a}_0$	28.10.2
Reproduzierbar in Zeit und Spur, $\bar{e}_0$	$\bar{a}_0, \bar{i}_0$	28.10.3
$\left(\overline{P_R} \triangleq \overline{P_S}\right)-$ bzw. $\left(P_R \triangleq P_S\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	28.8.1
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_S}\right)-$ bzw. $\left(P_A \triangleq P_S\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	28.8.2
$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_S}\right)-$ bzw. $\left(P_D \triangleq P_S\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	28.8.3, 28.9
$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_S}\right)-$ bzw. $\left(P_H \triangleq P_S\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	28.8.4
$\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_S}\right)-$ bzw. $\left(P_T \triangleq P_S\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	28.8.5
$\left(\overline{P_R} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ bzw. $\left(P_R \triangleq P_L\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	29.10.1
$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ bzw. $\left(P_A \triangleq P_L\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	29.10.2
$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ bzw. $\left(P_D \triangleq P_L\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	29.10.3
$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ bzw. $\left(P_H \triangleq P_L\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	29.10.5
$\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ bzw. $\left(P_T \triangleq P_L\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	29.10.4
$\left(\overline{P_S} \triangleq \overline{P_L}\right)-$ bzw. $\left(P_S \triangleq P_L\right)-$Äquivalenz	$\overline{a_0}$	29.10.6

Tabelle IV-1: Übersicht über einige Verfahren der Bahnauswahl von Erdsatellitenbahnen: Vorgabe bestimmter Bahn- oder Beobachtungsparameter, Berechnung der Kepler-Elemente

21 *Kepler*bewegung auf der Grundlage von *Hansen*-Systemen

Die allgemeine *Kepler*sche Bewegung hat keinen direkten Bezug zur Geometrie einer Satellitenbewegung, da sie keinen Bezugspunkt und keinen Bahnwinkel für eine solche Bewegung kennt. Dies ist nur für die spezielle *Kepler*bewegung der Fall, die von einer unveränderlichen Kegelschnittbewegung ausgeht, bei der etwa die wahre Anomalie als Bahnwinkel angesehen werden kann. Die allgemeine *Kepler*sche Bewegung muss daher als ein analytisches Hilfsmittel angesehen werden, während der reale Bezug auf die Bewegung eines Himmelskörpers (eines Satelliten) nur in einem anderen System mit klar definiertem Bezugspunkt und klar erkennbarem Bahnwinkel erfolgen kann.

Ein solcher Bezugspunkt ist etwa das Perizentrum einer Bahn und die darauf bezogenen wahre Anomalie (im Rahmen der anomalistischen Bewegung), ein auf oder absteigender Knoten und das darauf bezogene Argument der Breite (im Rahmen einer drakonitischen Bewegung), der Frühlingspunkt und die darauf bezogene Länge in der Bahn bzw. Rektaszension auf dem Äquator (im Rahmen der tropischen Bewegung), ein Fixstern (im Rahmen der siderischen Bewegung), ein fester Meridian auf der Erdoberfläche und die zugehörige geographische Länge (im Rahmen der meridionalen Bewegung), ein Beobachtungsort (aktiv oder passiv) auf der Erdoberfläche (im Rahmen der scheinbaren Bewegung), ein anderes bewegtes Objekt wie Sonne, Mond, Planet oder anderer Himmelskörper, ein anderer Satellit (im Rahmen einer synodischen Bewegung). Der grundlegend primäre Bezug zur Geometrie eines Bewegungsvorganges als Projektion einer *Kepler*bewegung in einem physikalischen Raum kann nur in einem *Hansen* System durchgeführt werden, da allein dieses auf einen willkürlich festzulegenden, dann aber unveränderlichen Bezugspunkt in einer Bahnebene mit klar definiertem Bahnwinkel ausgerichtet ist.

Die von *Peter Andreas Hansen* entdeckten „idealen Koordinaten“, die im vorliegenden Bericht unter dem Begriff „*Hansen*-System“ verwendet werden, bilden eine allgemeingültige Grundlage für die Untersuchung beliebiger Bewegungen[1]. Dies gilt insbesondere auch für die Satellitenbewegung, die unter verschiedenartigen Bezügen hier auf der Grundlage der *Hansen* Systeme entwickelt werden soll. *Hansen* selbst hatte die „idealen Koordinaten“ zur Herleitung der Störungsgleichungen zur Beschreibung der Bewegungen der Himmelskörper im Sonnensystem angewendet. Er scheint den grundlegenden Charakter dieser Koordinaten geahnt zu haben, weshalb er sie als „ideal“ bezeichnet hatte. Eine Ausführung zu diesen Überlegungen durch *Hansen* selbst, dessen Interesse sich auf die Anwendungen konzentrierte, ist nicht bekannt[2].

21.1 Die wichtigsten Eigenschaften der *Hansen* Systeme

Bevor die *Hansen* Systeme auf die Analyse einer Satellitenbewegung angewendet werden, werden in diesem Abschnitt einige ihrer charakterisierenden Eigenschaften zusammengestellt[3]. Sie

[1] Siehe etwa Abschnitt 2.7.7 (Band I), sowie Abschnitt 8.12 (Band II)

[2] JOCHIM, E.F.M. [2011]

[3] Basierend auf den Herleitungen in den Abschnitten 4.3.10 bis 4.4.10 (Band II)

sind notwendig und hinreichend mit *Hansen* Systemen verkoppelt. Wenn also eine solche Eigenschaft auftaucht, führt sie auch auf ein *Hansen* System.

1. Ein *Hansen* System kann ohne das mit einer Bewegung mitbewegte *Leibniz* System nicht verstanden werden. Seien $\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$ die orthonormierten Basisvektoren eines *Leibniz* Systems ($\mathbf{r}_0$ der radiale Richtungsvektor, $\mathbf{q}_0$ der transversale Richtungsvektor, $\mathbf{c}_0$ der normale Richtungsvektor) so kann ein Ortsvektor in der Form

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{r}_0 \qquad \langle r := |\mathbf{r}| \ , \ |\mathbf{r}_0| = 1 \tag{21.1}$$

geschrieben werden. Der absolute Geschwindigkeitsvektor lautet

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\,\dot{\mathbf{r}}_0 \tag{21.2}$$

Die Variation des transversalen Richtungsvektors habe den Betrag

$$\dot{\zeta} := |\dot{\mathbf{r}}_0| \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \qquad \langle |\mathbf{q}_0| = 1 \tag{21.3}$$

Der Normalenvektor in Richtung des normalen Richtungsvektors

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = G\,\mathbf{c}_0 \qquad \langle G := |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| \ , \ |\mathbf{c}_0| = 1 \tag{21.4}$$

hat als Betrag den Flächenparameter *G*. Damit ergibt sich die grundlegende Variationsgleichung

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad , \tag{21.5}$$

die in der klassischen Himmelsmechanik als skalare Form des Flächensatzes bezeichnet wird. Das Integral dieses Satzes führt auf den Bahnwinkel

$$\zeta = \zeta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{G}{r^2}\,dt \quad . \tag{21.6}$$

Dieser Winkel ist notwendig und hinreichend mit einem *Hansen* System verknüpft[1]. Er wird deshalb als *Hansen*scher Bahnwinkel (gelegentlich als erster *Hansen*scher Bahnwinkel) bezeichnet. Er kann an Stelle der Zeit als unabhängige Variable zur Beschreibung eines Bewegungsvorganges eingesetzt werden[2].

2. Im Fall einer *Kepler*bewegung kann die Differentialgleichung des *Hansen*schen Bahnwinkels auf die wahre Anomalie υ und die *Kepler*elemente ω, Ω, i zurückgeführt werden (siehe Formel (4.257) in Abschnitt 4.3.16 (Band II))

$$\dot{\zeta} = \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i \quad . \tag{21.7}$$

Mit dem Argument der Breite $u = \upsilon + \omega$ sowie dem *Hansen*schen Winkel des aufsteigenden Knotens σ mit[3]

$$\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i \tag{21.8}$$

---

[1] Sätze H10 und H11 in Abschnitt 4.3.16, (Band II)

[2] wie dies in Kapitel 5 durchgeführt wird (Band II)

[3] aus Formel (4.259)

lautet die charakterisierende Differentialgleichung auch

$$\dot{\zeta} = \dot{u} + \dot{\sigma} \quad . \tag{21.9}$$

3. Es seien $\mathbf{q}_1^{(I)}, \mathbf{q}_2^{(I)}, \mathbf{q}_3^{(I)} = \mathbf{q}_1^{(I)} \times \mathbf{q}_2^{(I)}$ die orthonormierten Basisvektoren eines *Hansen* Systems. Im Gegensatz zu einem *Leibniz*-System sind diese Richtungsvektoren auf einen Ursprung bezogen. Dieser Ursprung kann willkürlich angenommen werden, er muss sich nicht in der (oskulierenden) Bahnebene befinden, er sollte aber (sinnvollerweise) nicht auf der Bahnkurve liegen. Damit kann ein Ortsvektor im *Hansen*-System in der Form

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{q}_1^{(I)} \cos\zeta + \mathbf{q}_2^{(I)} \sin\zeta\right) \tag{21.10}$$

geschrieben werden.

4. Wird durch Variation des Geschwindigkeitsvektors (21.2) der zugehörige Beschleunigungsvektor gebildet[1], so ergibt sich für die radiale Beschleunigung der Ausdruck

$$\ddot{r} = \frac{G^2}{r^3} + b_R \quad , \tag{21.11}$$

(die *Leibniz* Gleichung), für die transversale Beschleunigung durch Variation des Flächenparameters

$$b_T = \frac{\dot{G}}{r} \quad . \tag{21.12}$$

Für die normale Beschleunigung folgt der Ausdruck

$$b_N = \frac{G}{r}\dot{\eta} \quad . \tag{21.13}$$

Die hier neu auftauchende Größe $\dot{\eta}$ ist im Zusammenhang mit *Hansen* Systemen von besonderer Wichtigkeit[2]. Das Integral η charakterisiert die räumliche Rotation eines *Hansen* Systems und kann deshalb als zweiter *Hansen*scher Bahnwinkel bezeichnet werden[3].

5. Der enge Zusammenhang zwischen *Hansen* und *Leibniz* System zeigt sich in den *Frenet*schen Formeln des *Leibniz* Systems (4.318), die auch als „*Frenet*'sche Formeln der Astrodynamik" bezeichnet werden können:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\zeta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\,\mathbf{c}_0 \\ \dot{\mathbf{c}}_0 &= -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \quad . \end{aligned} \tag{21.14}$$

Der Eigenbewegungsvektor des *Leibniz* Systems lautet

---

[1] Formel (4.300) und folgende in Abschnitt 4.4.2 (Band II)

[2] Herleitungen in Abschnitt 4.4.2

[3] Man muss jedoch beachten, dass der Winkel η keine unabhängige Variable ist, sondern als Funktion der Zeit bzw. besser als Funktion des *Hansen*schen Bahnwinkels behandelt werden muss: $\eta = \eta(\zeta)$

$$\mathbf{D}_{q^{(L)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\zeta}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{21.15}$$

6. Ein *Hansen* System ist unverrückbar mit der zugehörigen (auch oskulierenden) Bahnebene verknüpft. Die Basisrichtungsvektoren $\mathbf{q}_1^{(I)}$ und $\mathbf{q}_2^{(I)}$ führen keine Eigenbewegung innerhalb der Bahnebene aus, wie dies sonst prinzipiell bei allen anderen Bahnsystemen der Fall ist (außer im „ungestörten" Fall der exakten *Kepler*bewegung). Dies zeigen die *Frenet*schen Formeln des *Hansen* Systems (4.326)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\dot{\eta}\sin\zeta\,\mathbf{q}_3^{(I)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\eta}\cos\zeta\,\mathbf{q}_3^{(I)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\eta}\left(\sin\zeta\,\mathbf{q}_1^{(I)} - \cos\zeta\,\mathbf{q}_2^{(I)}\right) \quad . \end{aligned} \tag{21.16}$$

Der Richtungsvektor $\mathbf{q}_1^{(I)}$ ist auf einen Punkt in der oskulierenden Bahnebene ausgerichtet, der als „Anfangspunkt des *Hansen* Systems" bezeichnet wird[1]. Er verändert sich nicht in der Bahnebene, ebenso wenig wie der zweite Richtungsvektor $\mathbf{q}_2^{(I)}$. Wird die Bahnebene infolge einer normalen Beschleunigung gedreht (mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\eta}$), so bewegen sich diese beiden Basisvektoren mit der Ebene mit, bleiben aber unveränderlich an die Bahnebene gekoppelt. Dies ist eine der wesentlichen Eigenschaften des *Hansen* System im Vergleich zu allen anderen Systemen[2].

7. Im absoluten Geschwindigkeitsvektor tritt bei Bezug auf ein *Hansen*-System keine Eigenbewegung des Basissystems auf, auch wenn das System eine Eigenbewegung hat. Bei allen anderen Systemen verschwindet dieser Anteil dann und nur dann, wenn das entsprechende Basissystem keine Eigenbewegung hat (d.h. nur bei einem Inertialsystem). Sei der Ortsvektor mit kartesischen Koordinaten gegeben in der Form

$$\mathbf{r} = y^j\,\mathbf{q}_j^{(I)} \tag{21.17}$$

so gilt bei *Hansen*-Systemen[3]

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^j\,\mathbf{q}_j^{(I)} \quad \text{mit} \quad y^j\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = 0 \quad . \tag{21.18}$$

8. Wenn nach *Hansen* in bahnmechanischem Zusammenhang für das bewegte Objekt nur Systeme mit $y_3 = 0$ betrachtet werden (wie das schon *Hansen* selbst durchgeführt hat[4]), bleibt mit $y_1 = r\cos\zeta$, $y_2 = r\sin\zeta$ die wichtige Beziehung[5]

$$\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\cos\zeta + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\sin\zeta = 0 \quad . \tag{21.19}$$

---

[1] In der englisch sprachigen Literatur ist nach *A. Cayley* der Begriff „departure point" üblich

[2] Satz H23 in Abschnitt 4.4.6

[3] Satz H1 in Abschnitt 4.3.10. Dies ist der Grund weshalb *Hansen* dieses System als „ideal" bezeichnet hat

[4] Hinweis in Abschnitt 4.3.15, Unterpunkt (5)

[5] aus Abschnitt 4.3.16

9. Der absolute Eigenbewegungsvektor eines *Hansen* System ist stets auf den radialen Richtungsvektor ausgerichtet und hat den Betrag der Variation des zweiten *Hansen*-schen Bahnwinkels:

$$\mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \qquad . \tag{21.20}$$

10. Wird mit $\dot{\mathbf{r}}_q := \dot{y}^j \mathbf{q}_j^{(I)}$ der relative Geschwindigkeitsvektor bei Bezug auf das *Hansen* System bezeichnet, so folgt aus der Darstellung des absoluten Geschwindigkeitsvektors (21.18)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_q + \mathbf{D}_{q^{(I)}} \times \mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}_q \tag{21.21}$$

die interessante Aussage: bei *Hansen* Systemen sind absoluter und relativer Geschwindigkeitsvektor stets identisch[1].

11. Eine fundamentale Eigenschaft von *Hansen* Systemen ist folgenden Aussage: Die Oskulationsbedingung in der Methode der Variation der Parameter

$$\sum_\nu \frac{\partial r}{\partial A_\nu} \frac{dA_\nu}{d\zeta} = 0 \tag{21.22}$$

ist notwendig auf ein *Hansen* System mit dem *Hansen*schen Bahnwinkel ζ bezogen[2]. Die Methode der Variation der Parameter kann ohne Bezug auf ein *Hansen*-System nicht sinnvoll begründet werden. In diesem und nur in diesem Fall (abgesehen von einem physikalisch gesehen unmöglichen Inertialsystem) wird

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \qquad . \tag{21.23}$$

21.2 Zeit und *Hansen*scher Bahnwinkel

Der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ ist der einzige Bahnwinkel (von Interesse), dessen Variationsgleichung (21.5) nicht unmittelbar von einem Bahnmodell etwa mit Beschleunigungen in radialer, transversaler und normaler Richtung $\left(b_R, b_T, b_N\right)$ geprägt wird, wie dies für die meisten sonst verwendeten Bahnwinkel der Fall ist[3]. Dies macht ihn interessant für eine exakte analytische Begründung der allgemeinen *Kepler*bewegung.

Die Zeit, die einem *Hansen*schen Bahnwinkel zugeordnet ist, wird aus dem Integral über den Flächensatz

$$t - t_0 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^2}{G}\, d\zeta \tag{21.24}$$

erhalten, wobei t_0 ein dem Anfangswinkel ζ_0 zugeordneter Anfangswert ist. ζ_0 kann willkürlich gewählt werden, darf aber im gesamten Rechenprozess dann nicht mehr geändert werden.

---

[1] Satz H2 in Abschnitt 4.3.10

[2] Satz H24 in Abschnitt 4.4.7; JOCHIM, E.F.M. [2012]

[3] Siehe hierzu auch die vergleichenden Darstellungen in Abschnitt 11.13 mit Tabelle 11-1 (Band III)

In den folgenden Abschnitten wird das *Hansen*-System speziell in Bezug auf eine *Kepler*bewegung untersucht, zunächst die Berechnung der Zeit bei vorgegebenem *Hansen*schen Bahnwinkel, anschließend umgekehrt der *Hansen*sche Bahnwinkel bei vorgegebener Ephemeride.

21.2.1 Die Zuordnung eines *Hansen*schen Bahnwinkels zur Zeit im Rahmen einer *Kepler*bewegung

Zur Lösung des Integrals (21.24) werden die Parameter *G* und *r* als Funktionen des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ benötigt. Dazu muss ein geeignetes Bahnmodell zur Verfügung gestellt werden, welches alle Bewegungseinflüsse enthält, die zur adäquaten Beschreibung eines bestimmten Bewegungsvorganges benötigt werden.

Der Flächenparameter *G* wird mit der Differentialgleichung (21.12) aus dem Integral

$$G = G(\zeta) = G_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{r^3 b_T}{G} d\zeta \tag{21.25}$$

erhalten. Hierzu muss neben dem Radius *r* auch die transversale Beschleunigung b_T als Funktion des *Hansen*schen Bahnwinkels bekannt sein.

Der Bahnradius *r* werde mit dem Ansatz der geradlinigen Bewegung[1]

$$r = r(\zeta) = \frac{G}{g_1 \cos\zeta + g_2 \sin\zeta} \tag{21.26}$$

untersucht. Die Parameter g_1, g_2 sind ebenfalls Funktionen des *Hansen*schen Bahnwinkels. Sie genügen den Variationsgleichungen (5.105)

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left(\; b_R \sin\zeta + b_T \cos\zeta \right) \\ \frac{dg_2}{d\zeta} &= \frac{r^2}{G}\left(-b_R \cos\zeta + b_T \sin\zeta \right) \quad . \end{aligned} \tag{21.27}$$

Hier wird die Kenntnis der radialen Beschleunigung b_R und der transversalen b_T als Funktionen des *Hansen*schen Bahnwinkels vorausgesetzt.

Im Fall von Erdsatelliten wird üblicherweise als Basisbewegung (als eine intermediäre Bewegung) die *Kepler*bewegung angenommen. Sie wird durch die *Kepler*sche Beschleunigung[2] (17.3) charakterisiert

$$b_K = -\frac{\mu}{r^2} \quad . \tag{21.28}$$

Der Koeffizient μ ist die (hier als konstant angenommene) geozentrische Gravitationskonstante. Für die gestörte *Kepler*bewegung muss dann die radiale Beschleunigung in der Form

$$b_R = b_K + b_{R2} \tag{21.29}$$

angesetzt werden. Der Term b_{R2} enthält alle Restbeschleunigungen in radialer Richtung, die zur Beschreibung des betreffenden Bewegungsvorganges in Abweichung von der (exakten)

---

[1] mit Formel (5.106) in Abschnitt 5.2.7 (Band II)

[2] siehe in Abschnitt 17.1 (Band (III)

*Kepler*bewegung noch benötigt werden. Auch dieser Störterm muss in diesem Zusammenhang als Funktion des *Hansen*schen Bahnwinkels bekannt sein.

Je nach dem verwendeten Bahnmodell und den vorgegebenen Genauigkeitsanforderungen müssen dazu passende Formelsysteme entwickelt werden, die aber nicht generalisiert werden können. Dies trifft für numerische Lösungen zu wie insbesondere auch für analytische Näherungslösungen.

Für eine näherungsweise analytische Berechnung wird häufig die Zerlegung der Parameter in einen mittleren und periodischen Anteil durchgeführt:

$$r = r(\zeta) = \overline{r(\zeta)} + \delta r(\zeta) \quad , \quad G = G(\zeta) = \overline{G(\zeta)} + \delta G(\zeta) \quad . \tag{21.30}$$

Dies ist insbesondere im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*-Bewegung üblich, wenn von einer periodischen oder allgemeiner einer quasiperiodischen Bewegung ausgegangen werden kann.

Beim *Hansen*schen Winkel $\sigma = \zeta - u$ des aufsteigenden Knotens lautet die Zerlegung in einen säkularen und in einen periodischen Anteil

$$\sigma = \sigma(\zeta) = \overline{\sigma(\zeta)} + \delta\sigma(\zeta) = \zeta - u(\zeta) = \zeta - \overline{u(\zeta)} - \delta u(\zeta) \quad . \tag{21.31}$$

Hier ist offensichtlich

$$\delta\sigma(\zeta) = -\delta u(\zeta) \quad . \tag{21.32}$$

BEISPIEL: Im Rahmen des Hauptproblems der Satellitenbahnmechanik („Störeinflüsse“ nur durch den größten der harmonischen Koeffizienten J_2) unterliegen die Parameter g_1, g_2 in erster Näherung den Variationsgleichungen (unter Verwendung der Entwicklungen (17.34) und (17.35))

$$\begin{aligned}
\frac{dg_1}{d\zeta} &= -\frac{\mu \sin\zeta}{\bar{G}} + \frac{\mu\ \delta G\ \sin\zeta}{\bar{G}^2} + \\
&\quad + \frac{3}{2}\frac{\mu J_2 R_E^2}{\bar{G}\bar{r}^2}\left[3\sin^2\bar{i}\,\sin^2(\zeta-\bar{\sigma}) - 1\right]\sin\zeta - \\
&\quad - 3\frac{\mu J_2 R_E^2}{\bar{G}\bar{r}^2}\sin^2\bar{i}\,\sin(\zeta-\bar{\sigma})\cos(\zeta-\bar{\sigma})\cos\zeta + O\left(J_2^2\right) \\
\frac{dg_2}{d\zeta} &= \frac{\mu\cos\zeta}{\bar{G}} - \frac{\mu\ \delta G\ \cos\zeta}{\bar{G}^2} - \\
&\quad - \frac{3}{2}\frac{\mu J_2 R_E^2}{\bar{G}\bar{r}^2}\left[3\sin^2\bar{i}\,\sin^2(\zeta-\bar{\sigma}) - 1\right]\cos\zeta - \\
&\quad - 3\frac{\mu J_2 R_E^2}{\bar{G}\bar{r}^2}\sin^2\bar{i}\,\sin(\zeta-\bar{\sigma})\cos(\zeta-\bar{\sigma})\sin\zeta + O\left(J_2^2\right) \quad .
\end{aligned} \tag{21.33}$$

Entsprechend gilt für den Flächenparameter in erster Näherung

$$\frac{dG}{d\zeta} = -\frac{3\mu J_2 R_E^2}{\bar{r}\ \bar{G}}\sin^2\bar{i}\,\sin(\zeta-\bar{\sigma})\cos(\zeta-\bar{\sigma}) + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{21.34}$$

Im Fall von Erdsatelliten ist bekannt[1], dass

$$\left|\delta G\right| = O(J_2) \quad . \tag{21.35}$$

[1] Siehe die Formeln (20.180) und (20.182) in Abschnitt 20.2.4.12 (Band III)

Der mittlere Anteil des Flächenparameters ist bei Berücksichtigung der Beschleunigungen durch das Gravitationsfeld der Erde konstant[1]:

$$\bar{G} \triangleq \overline{G_G} = \overline{G_{G0}} = const. \quad . \tag{21.36}$$

Für den mittleren Radius erhält man aus der Darstellung (21.26)

$$\bar{r} = \bar{r}(\zeta) = \frac{\bar{G}}{\overline{g_1}\cos\zeta + \overline{g_2}\sin\zeta} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{21.37}$$

Hier werden zur Berechnung der Parameter $\overline{g_1}, \overline{g_2}$ in den Differentialgleichungen (21.33) die periodischen Anteile im Flächenparameter δG abgespalten.

Es fehlt noch die Berechnung des *Hansen*schen Knotenwinkels σ mit Hilfe der Differentialgleichung (21.8). Mit (11.71) und (17.33) sowie (17.35) ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\zeta} = -3\mu J_2 R_E^2 \frac{\cos^2 i \sin^2(\zeta - \sigma)}{G^2 r} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{21.38}$$

Der mittlere Anteil im *Hansen*-Winkel des aufsteigenden Knotens $\bar{\sigma}$ kann aus dem Integral

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\zeta} = -3\mu J_2 R_E^2 \frac{\cos^2 \bar{i} \sin^2(\zeta - \bar{\sigma})\left[\bar{g}_1 \cos\zeta + \bar{g}_2 \sin\zeta\right]}{\bar{G}^3} + O\left(J_2^2\right) \tag{21.39}$$

erhalten werden. Hier muss allerdings wegen des hier verwendeten Bahnmodells bei Bezug auf das Gravitationsfeld der Erde auch ein Beschleunigungsanteil in der Variationsgleichung für den aufsteigenden Knoten (21.8)[2] normal zur Bahnebene berücksichtigt werden.

Für eine analytische Näherung nullter Ordnung kann gesetzt werden

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\zeta} &= -\frac{\mu \sin\zeta}{\bar{G}} + O\left(J_2\right) \\ \frac{dg_2}{d\zeta} &= \frac{\mu \cos\zeta}{\bar{G}} + O\left(J_2\right) \\ \frac{dG}{d\zeta} &= \bar{G} + O\left(J_2\right) = const. + O\left(J_2\right) \quad . \end{aligned} \tag{21.40}$$

Wie in Abschnitt 5.4.3 lautet die Lösung nullter Ordnung

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1(\zeta) = g_{11} + \frac{\mu}{\bar{G}}\cos\zeta + O\left(J_2\right) = \overline{g_1} + O\left(J_2\right) \qquad \langle g_{11} = const. \\ g_2 &= g_2(\zeta) = g_{21} + \frac{\mu}{\bar{G}}\sin\zeta + O\left(J_2\right) = \overline{g_2} + O\left(J_2\right) \qquad \langle g_{21} = const. \quad . \end{aligned} \tag{21.41}$$

Werden diese Ergebnisse in die Gleichung (21.26) für den Bahnradius eingesetzt, ergibt sich notwendigerweise mit den Abkürzungen

$$g_{100} := \sqrt{\overline{g_{11}}^2 + \overline{g_{21}}^2} \quad , \quad \bar{e} := \frac{\mu}{\bar{G}} g_{100} \quad , \quad \bar{G} := \sqrt{\mu \bar{p}^2} \tag{21.42}$$

sowie

---

[1] Formeln (20.175) und (20.176)

[2] mit Formel (11.71) (Abschnitt 11.1.5, Band III)

$$\frac{\bar{G}}{\mu}\overline{g_1} - \cos\zeta =: \bar{e}\cos\overline{\zeta_K} \quad , \quad \frac{\bar{G}}{\mu}\overline{g_2} - \sin\zeta =: \bar{e}\sin\overline{\zeta_K} \tag{21.43}$$

für den mittleren Bahnradius die Polargleichung

$$\bar{r} = \frac{\bar{p}}{1+\bar{e}\cos\left(\zeta - \overline{\zeta_K}\right)} \quad . \tag{21.44}$$

Hier ist $\overline{\zeta_K} = \bar{\sigma} + \bar{\omega}$ der mittlere *Hansen*sche Bahnwinkel des Perizentrums des Kegelschnitts. Er kann in der hier betrachteten Näherung nullter Ordnung als konstant betrachtet werden. Die periodische Variation des Radius ist im Fall von Erdsatelliten durch Formel (20.187) gegeben.

Näherungen höherer Ordnung können etwa mit Hilfe eines Formel-Manipulator Systems (etwa MAPLE oder MATHEMATICA) zur gemeinsamen Integration der Differentialgleichungen (21.33), (21.34) und (21.38) erhalten werden. Dies führt auf eine vollständige Lösung des Bewegungsproblems innerhalb der Bahnebene. ◄

21.2.2 Berechnung des *Hansen*schen Bahnwinkels einer *Kepler*bewegung

Wenn der *Hansen*sche Bahnwinkel explizit benötigt wird, kann er mit Hilfe der Integration der Differentialgleichung (21.6) direkt erhalten werden, wie im vorhergehenden Abschnitt angedeutet wurde. Der Anfangswert $\zeta_0 := \zeta\left(t_0\right)$ wird willkürlich festgelegt, darf aber dann während des gesamten Rechenprozesses nicht mehr geändert werden.

Im vorliegenden Abschnitt wird der *Hansen*sche Bahnwinkel aus einer bereits vorhandenen Ephemeride berechnet. Im Fall einer allgemeinen *Kepler*bewegung werden die *Kepler*elemente und als Bahnwinkel die wahre Anomalie erhalten. Damit kann der *Hansen*sche Bahnwinkel durch Integration der für eine *Kepler*bewegung gültigen Differentialgleichung (21.9) bzw. (21.7) erhalten werden:

$$\zeta = \zeta\left(t\right) = \zeta_0 + u\left(t\right) + \int_{t_0}^{t} \dot{\Omega}\cos i \, dt \quad . \tag{21.45}$$

Die Lösung des verbleibenden Integrals

$$\sigma = \sigma\left(t\right) = \int_{t_0}^{t} \dot{\Omega}\cos i \, dt \tag{21.46}$$

kann zu numerischen Unstimmigkeiten führen. Um diese (näherungsweise) in den Griff zu bekommen, kann folgendermaßen vorangegangen werden:

Die Inklination einer Satellitenbahn kann in der üblichen Weise in einen säkularen (mittleren) und periodischen Anteil zerlegt werden

$$i = \bar{i} + \delta i = \bar{i}_0 + (i)^{\cdot}\left(t - t_0\right) + \delta i \quad . \tag{21.47}$$

Damit kann die Variationsgleichung (21.7) in diesem Fall umgeschrieben werden

$$\dot{\zeta} = \dot{\upsilon} + \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos\bar{i}\cos\left(\delta i\right) - \dot{\Omega}\sin\bar{i}\sin\left(\delta i\right) \quad . \tag{21.48}$$

Im Fall von Erdsatellitenbahnen ist in erster Näherung[1] $(i)^{\cdot} = O\left(J_2^4\right) \approx 0.0/s$. Die periodischen Variationen der Inklination δi sind im Fall von Erdsatelliten aus den Ausdrücken (20.27) und

[1] siehe in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

(20.59) bekannt. Können sie als klein angenommen werden[1] $\delta i \approx 0.0$, lautet die Variationsgleichung näherungsweise mit einem Anfangswert $\bar{i}_0$ für die Inklination

$$\dot{\zeta} = \dot{u} + \dot{\Omega}\cos\bar{i}_0 + \cdots \quad . \tag{21.49}$$

Damit kann die Variationsgleichung (21.48) direkt integriert werden

$$\zeta = \zeta_0 + \upsilon(t) - \upsilon(t_0) + \omega(t) - \omega(t_0) + \left[\Omega(t) - \Omega(t_0)\right]\cos\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{21.50}$$

Werden die periodischen Variationen in den Elementen, insbesondere in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens, abgetrennt, bleibt

$$\Delta\Omega = \Omega(t) - \Omega(t_0) = \dot{\Omega}_s\,(t - t_0) + \delta\Omega\left[t, t_0\right] \quad . \tag{21.51}$$

Im Fall der Anfangswerte ist

$$\zeta_0 = u_0 + \sigma_0 \quad . \tag{21.52}$$

Da $u_0 = u(t_0)$ aus der Ephemeridenrechnung bekannt ist, ζ_0 ein (willkürlich) vorgegebener Anfangswert ist, bleibt für den *Hansen*-Winkel des aufsteigenden Knotens die jetzt bekannte Größe

$$\sigma_0 = \zeta_0 - u_0 \quad . \tag{21.53}$$

Damit kann der *Hansen*sche Bahnwinkel (im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*bewegung) schließlich zum Zeitpunkt t mit dem Argument der Breite $u = u(t)$ berechnet werden aus

$$\zeta = \zeta(t) = \sigma_0 + u + \Delta\Omega\cos\bar{i}_0 + \cdots = u + \Omega\cos\bar{i}_0 + \cdots \quad . \tag{21.54}$$

Da im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse mit bekanntem Bahnmodell zu jedem Zeitpunkt *t* die wahre Anomalie $\upsilon = \upsilon(t)$ sowie die Parameter $\omega = \omega(t)$ und $\Omega = \Omega(t)$ berechnet werden können, ist damit auch der *Hansen*sche Bahnwinkel $\zeta = \zeta(t)$ (zumindest in guter und für die meisten Anwendungen ausreichender Näherung) bekannt.

Anmerkung: Die Bedeutung des *Hansen*-Winkels σ des aufsteigenden Knotens kann aus der relativen Sicht eines *Hansen*-Systems folgendermaßen gedeutet werden: Das *Hansen*-System wird als fester Bezug angesehen, demgegenüber alle anderen Systeme als variable angesehen werden können. Dies trifft insbesondere für das Äquatorsystem zu[2]. Dieses bewegt sich gegenüber dem *Hansen*-System mit den Variationen der Inklination und des aufsteigenden Knotens infolge einer normalen Beschleunigung auf die Bahnebene mit den Variationen[3]

$$(i)^{\cdot} = \frac{r}{G}\cos u\, b_N \quad , \quad \dot{\sigma} = \frac{r}{G}\frac{\sin u\cos i}{\sin i}\, b_N \quad . \tag{21.55}$$

Wird der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ als unabhängige Variable gewählt, lauten die entsprechenden Variationsgleichungen[4]

---

[1] siehe die Ausdrücke (20.27) und (20.59)

[2] Man könnte formulieren: „wir blicken hoch zum Äquatorsystem, das eine scheinbare Eigenbewegung gegenüber dem *Hansen*-System hat“

[3] Formeln (11.70) und (11.71) in Abschnitt 11.1.5 (Band III)

[4] Hier wird der Flächensatz $r^2\,\dot{\zeta} = G$ verwendet (Formel (4.297) in Abschnitt 4.4.2, Band II)

$$\frac{di}{d\zeta}=\frac{r^3}{G^2}\cos(\zeta-\sigma)b_N \quad , \quad \frac{d\sigma}{d\zeta}=\frac{r^3}{G^2}\frac{\sin(\zeta-\sigma)\cos i}{\sin i}b_N \quad . \tag{21.56}$$

21.2.3 Mittlere Umlaufzeit erster Ordnung bezogen auf ein *Hansen*-System

Eine Umlaufzeit kann nur bei periodischen Bahnen berechnet werden. Es werde angenommen, dass die mittleren Bahnparameter große Bahnhalbachse, Exzentrizität und Kegelschnittparameter $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{p}_0$ etwa für einen Anfangswert t_0 als konstante Größen bekannt seien: $\overline{a}_0 := \overline{a}(t_0)$, usw.. Im Fall einer Ellipse (21.44) gilt notwendig für den Kegelschnittparameter die Beziehung

$$\overline{p}_0=\overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right) \quad . \tag{21.57}$$

Bezogen darauf ergibt die Lösung des Zeitintergrals (21.24) mit der Integration nach Anhang D2 (Band V)

$$\overline{P_{K0}}=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{r}^2}{\sqrt{\overline{p}_0}}d\zeta=\frac{1}{\sqrt{\mu}}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{p}_0^{3/2}}{1+\overline{e}_0\cos\left(\zeta-\overline{\zeta_{K0}}\right)}d\zeta=2\pi\sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}=\frac{2\pi}{\overline{n_{K0}}} \quad . \tag{21.58}$$

Die Integration wird mit Hilfe des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ durchgeführt, beginnend im Anfangspunkt des *Hansen* Systems und wieder endend in exakt diesem festen Punkt. Damit wird genau ein voller Umlauf vollzogen. Dies ist nur im Rahmen eines *Hansen* Systems möglich. Damit ist das *Hansen* System eine Voraussetzung zur exakten Betrachtung der *Kepler*bewegung.

Das in (21.58) gefundene Integral ist nichts anderes als die *Kepler*sche mittlere. Allerdings wird hier die Integration geometrisch einwandfrei auf den Ursprung eines *Hansen* Systems bezogen durchgeführt, während sonst üblicherweise die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung definitorisch durch

$$\overline{n_{K0}} := \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \tag{21.59}$$

ohne möglichen geometrischen Bezug bestimmt wird. Um diesen Wert deuten zu können muss angenommen werden, dass die Bewegung ohne Störungen der *Kepler*bewegung stattfindet.

21.2.4 Die mittlere *Hansen*sche Umlaufzeit

Der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ kann prinzipiell als unabhängige Variable aufgefasst werden. Wenn jedoch eine Ephemeride mit *Kepler*-Elementen oder darauf basierenden Parametern (etwa äquinoktiale Parameter[1]) vorliegt, kann daraus der Bahnwinkel berechnet werden. Dazu kann eine Zerlegung in eine säkularen („mittleren“) und einen periodischen Anteil erfolgen:

$$\zeta=\overline{\zeta}+\delta\zeta \quad . \tag{21.60}$$

Um die zugehörige Variation

$$\dot{\zeta}=\dot{\overline{\zeta}}+\frac{d(\delta\zeta)}{dt} \tag{21.61}$$

[1] Kapitel 11, Band III

zu berechnen, kann in Formel (21.49) die wahre Anomalie $\upsilon = u - \omega$ mit Hilfe der Mittelpunktsgleichung[1] (22.16) auf die mittlere Anomalie zurückgeführt werden. Die mittlere *Hansen*sche mittlere Bewegung kann dann ausgedrückt werden durch[2]

$$\overline{n_H} := \dot{\bar{\zeta}} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i} + \cdots = \overline{n_a} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i} + \cdots = \overline{n_d} + \dot{\Omega}\cos\bar{i} + \cdots \quad . \tag{21.62}$$

Vernachlässigt sind in diesem Ausdruck höhere säkulare Bewegungseinflüsse und weitere säkulare Einflüsse („Störungen). Die zugehörige mittlere *Hansen*sche Umlaufzeit wird definiert durch

$$\overline{P_H} := \frac{2\pi}{\overline{n_H}} \quad . \tag{21.63}$$

Wie im vorstehenden Abschnitt 21.2.3 kann der Zeitbezug dieser Ausdrücke auf eine spezielle Epoche t_0 bezogen werden. Nach einem *Hansen*schen Umlauf befindet sich der Satellit wieder im selben Bahnpunkt wie zu Beginn des Umlaufs.

Die weiteren Bezüge einer Satellitenbewegung, die auf einen nicht in der Bahnebene fest liegenden Bezugspunkt orientiert sind, werden in den folgenden Kapiteln[3] im Hinblick auf die Durchführung einer Bewegungsanalyse untersucht.

21.3 Die überlagerte Funktion

21.3.1 Allgemeine Überlegungen

Eine beliebige Funktion $y(x) = 0$ soll nach der Variablen *x* aufgelöst werden. In manchen Anwendungen kann eine geeignete Funktion $z\left[y(x)\right] = 0$ gefunden werden, so dass die Lösung *x* die Funktionen $y(x) = 0$ UND $z\left[y(x)\right] = 0$ löst. Numerische Untersuchungen zeigen, dass eine geschickte Auswahl der *überlagerten* Funktion zu einer schnelleren und stabileren Berechnung der Lösung *x* führen kann als die direkte Berechnung mit der Funktion $y(x) = 0$. Dies kann sogar dann der Fall sein, wenn die *Horner*-Zahl (= Anzahl der Aufrufe der Funktion und ihrer Ableitungen[4]) wächst und der Konvergenzradius kleiner wird. Ein Nachteil des Verfahrens besteht darin, dass es notwendig zur Lösung führen, aber nicht hinreichend zu ein und derselben Lösung führen kann. Eine Lösung muss daher stets sorgfältig überprüft werden. Im Allgemeinen können die Variablen x, y, z mehrdimensionale Vektoren sein.[5]

21.3.2 Anwendung in einer Satellitenbahnanalyse

In einer Satellitenbahnanalyse wird meist mit Winkeln gerechnet. Üblicherweise werden jedoch nicht die Winkel selbst, sondern die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus dieser Winkel als Ergebnisse einer Bahnberechnung erhalten. Für eine numerische iterative Lösung

---

[1] Abschnitt 22.2.2

[2] man vergleiche mit (22.28) sowie (23.48)

[3] Ab Kapitel 22

[4] JORDAN-ENGELN, GISELA; FRITZ REUTTER [1981], p. 25

[5] HORNER, William Georg (https://de.wikipedia.org/wiki/Horner-Schema)

einer analytisch nicht mehr zu bearbeitenden Problemstellung (etwa unter Einschluss eines beliebig aufwendigen Bahnmodells) ist es in vielen Anwendungen sinnvoller und meist auch numerisch stabiler etwa mit einer Sinusfunktion als einer überlagerten Funktion zu rechnen. Vorausgesetzt wird, dass die überlagerte Funktion auf denselben Fixpunkt führt, wie die Unbekannte selbst. Dies ist etwa der Fall, wenn die Differenz zweier nahe beieinander liegender Winkel verschwinden soll, was dann auch für den Sinus dieser Winkel zutreffen muss.

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse werden wir häufig auf derartige Problemstellungen stoßen und können dieses Verfahren bei der numerischen Behandlung dieses Problems vorteilhaft einsetzen.

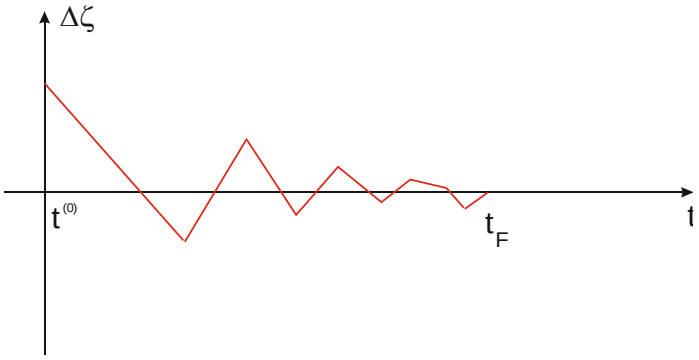


Bild 21.3-1: Symptomatische Darstellung eines Fixpunktverfahrens zur Berechnung des Zeitpunktes t_F , der einem gegebenen Bahnwinkel zugeordnet wird mit Hilfe der Winkeldifferenz $\Delta\zeta = \zeta(t) - \zeta(t_F)$

Die Vorteile des Verfahrens der überlagerten Funktion mit Hilfe einer Sinusfunktion

$$fct(x) \equiv \sin(y(x)) = 0 \tag{21.64}$$

sind vor allem:

1. Das Verfahren ist glatter als mit dem zugrundeliegenden Winkel (vgl. Bild 21.3-1 mit Bild 21.3-2)

2. Das Verfahren ist numerisch stabil. An Stelle eines *Newton*-Verfahrens führt auch ein die Ableitungen vermeidendes Verfahren der fortgesetzten Halbierung rasch zum Ziel.

3. Der Konvergenzkreis ist mit etwa $\pm 80°$ für den zu iterierenden Winkel (die zu iterierende Winkeldifferenz) sehr groß (siehe den hervorgehobenen Bereich der Kurve in Bild 21.3-2). Da üblicherweise bei trigonometrischen Rechnungen neben dem Sinus auch der Cosinus eines Winkels berechnet werden kann, ist es möglich mit dem Vorzeichen des Cosinus zu entscheiden, ob um den Winkel 0° oder 180° iteriert werden soll.

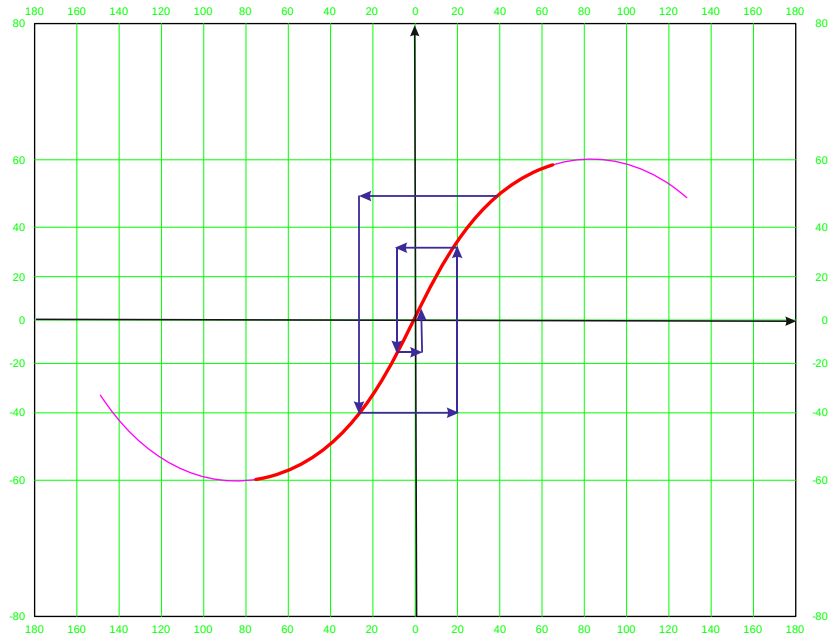


Bild 21.3-2: Beispiel für ein Fixpunktverfahren mit Sinus-Funktion als überlagerter Funktion

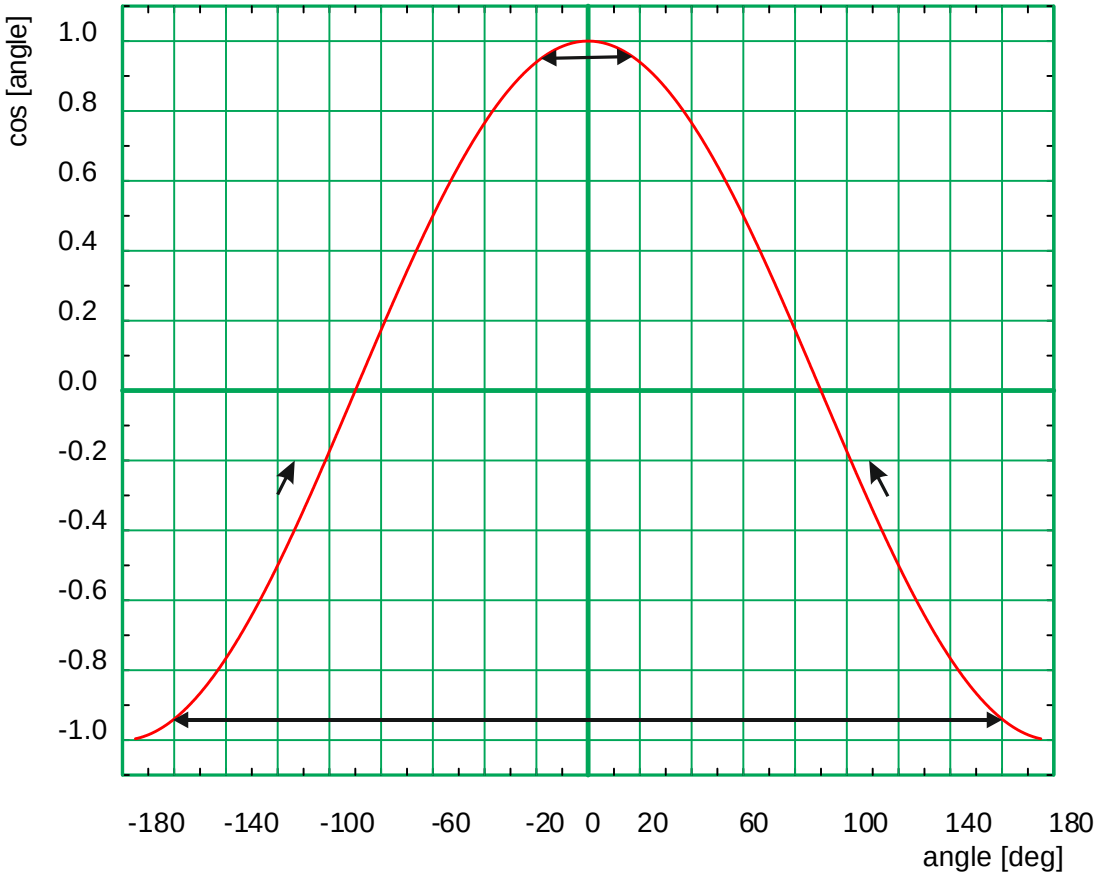


Bild 21.3-3: Beispiel für ein Fixpunktverfahren mit Cosinus-Funktion als überlagerter Funktion: gute Konvergenz zwischen $[-160°,-15°]$ bzw. $[160°,15°]$

Falls im Fall einer Sinusfunktion als überlagerter Funktion der Konvergenzkreis mit ±80° jedoch in manchen Anwendungen nicht ausreicht, kann mit Hilfe der Cosinusfunktion der

Konvergenzkreis bis zu etwa dem Intervall $\pm 175°$ ausgedehnt werden. Die Bedingungsfunktion lautet dann

$$fct(x) \equiv 1.0 - \cos\left(y\left(x\right)\right) = 0 \quad . \tag{21.65}$$

Im Fall einer Sinusfunktion kann der Fixpunkt, wie aus Bild 21.3-2 abgelesen werden kann, sehr präzise und mit hoher Genauigkeit berechnet werden. Dies ist im Fall einer Cosinusfunktion mit Bedingung (21.65) nicht der Fall, da in der Umgebung des Fixpunktes sich die Cosinusfunktion nur schleifend annähert. Dies kann in Bild 21.3-3 gesehen werden. Erfahrungsgemäß kann hier nur eine Genauigkeit von der Größenordnung 10^{-3} erreicht werden. In diesem Fall ist es empfehlenswert, wenn benötigt für eine präzisere Annäherung zur Bedingungsfunktion mit einer Sinusfunktion zu wechseln.

Anmerkungen:

1. Das Verfahren der überlagerten Funktion ist im Grunde der Ersatz einer physikalischen Größe (hier ein Winkel mit der Dimension Grad oder in Radian) durch einen mathematischen Ausdruck (hier eine trigonometrische Funktion). Man kann dies auch als Projektion einer physikalischen Größe in einen mathematischen Strukturraum bezeichnen, womit die physikalische Größe einer geschickten eindeutigen Lösung zugeführt werden kann[1].
2. Je nach Ausgangslösung kann es notwendig werden, im ersten Suchprozess zum starten des Verfahrens die Schrittweite der unabhängigen Variablen anzupassen. Sonst kann es passieren, dass nach einem ersten Schritt die Ausgangslösung über 90° oder unter 270° liegt und das Verfahren auf 180° zuläuft. Man muss also gelegentlich flexibel agieren und den Cosinus des Winkels auf sein Vorzeichen überprüfen. ◄

21.4 Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit einer *Kepler*bewegung

Das Verfahren der überlagerten Funktion kann verwendet werden um etwa die (wahre) *Hansen*sche Umlaufzeit P_H mit Hilfe der Bedingungsgleichung

$$fct\left(P_H\right) \equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{21.66}$$

bezogen auf einen Anfangszeitpunkt t_0 zu berechnen. Dazu wird eine Ephemeridenrechnung mit einem analytischen Modell durchgeführt, wenn vorhanden und ausreichend. Es kann aber auch das Ergebnis einer numerischen Ephemeridenrechnung verwendet werden, wenn ein beliebig umfangreiches numerisches Bahnmodell zur Verfügung steht. Der Vorgang kann bei einem beliebigen Bahnmodell nur iterativ bearbeitet werden. Als Anfangswert kann die *Kepler*sche mittlere Umlaufzeit (21.58) verwendet werden:

$$P_H^{(0)} := \overline{P_K} \quad . \tag{21.67}$$

Mit der Einführung

$$\sigma_0 := \Omega \cos \bar{i}_0 \tag{21.68}$$

werden die Ausdrücke

[1] siehe hierzu auch die prinzipiellen Überlegungen in Kapitel 14 (Band III)

$$\begin{aligned}\sin\zeta &= \sin u\ \cos\sigma_0 + \cos u \sin\sigma_0 \\ \cos\zeta &= \cos u \cos\sigma_0 - \sin u \sin\sigma_0\end{aligned} \tag{21.69}$$

benötigt, die direkt mit Hilfe der Ergebnisse der Ephemeridenrechnung erhalten werden können. Wird der *Hansen*-Winkel σ des aufsteigenden Knotens mit der vollständigen Berechnung der Inklination gewünscht, muss die Differentialgleichung (21.8) zusätzlich integriert werden um den Winkel σ an Stelle von σ_0 zu erhalten.

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine Erdsatellitenbahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10000$ km und der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.3$, sowie der Inklination $\bar{i}_0 = 85°$. Die *Kepler*sche mittlere Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{K0}} = 9952.014050$ s. Bei Bezug auf ein Bahnmodell mit nur säkularen Störungen auf die *Kepler*bewegung durch die zonalen Harmonischen J_2, J_4 hat die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit den Betrag $\overline{P_H} = 9957.705601$ s. Werden auch die periodischen Störeinflüsse durch J_2, J_3, J_4 berücksichtigt und die a priori Genauigkeit $\Delta t = 10^{-6}$ sec verlangt, hat die *Hansen*sche Umlaufzeit bezogen auf den Anfangszeitpunkt t_0 den Betrag $P_H = 9957.706308$ s.◄

Der Einfluss der Inklination auf die *Hansen*sche Umlaufzeit erscheint zunächst überraschend, da der *Hansen* Raum fest an die Bahnebene geknüpft ist und daher von der räumlichen Orientierung unabhängig sein muss. Jedoch sind die den *Hansen*schen Bahnwinkel ζ nach Formel (21.7) im Gravitationsfeld der Erde wesentlich auch von der Inklination abhängig, was sich daher auch auf die *Hansen*sche Umlaufzeit auswirken muss. Dies zeigt im Unterschied zum vorherigen Beispiel

BEISPIEL 2: Gegeben sei die Bahn von BEISPIEL 1 einer Erdsatellitenbahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10000$ km und der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.3$, sowie der Inklination $\bar{i}_0 = 5°$. Die *Kepler*sche mittlere Umlaufzeit beträgt wie oben $\overline{P_{K0}} = 9952.014050$ s. Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit hat mit säkularen Störeinflüssen den Betrag $P_H = 9940.502630$ s, bei Berücksichtigung der periodischen Störeinflüsse den Betrag $P_H = 9940.505316$ s.◄

Der Vergleich der beiden Beispiele zeigt den großen Einfluss der Inklination auf die *Hansen*sche Umlaufzeit. In Bild 21.4-1 wird die Variation der *Hansen*schen Umlaufzeit über der Inklination am Beispiel einer Bahn mit der großen Bahnhalbachse a=10000 km und für einige Exzentrizitäten demonstriert. In diesem Beispiel, das unter Verwendung der Bedingungsgleichung (21.66) nur mit säkularen Bewegungseinflüssen durch die zonalen Harmonischen J_2, J_4 gerechnet wurde, werden Variationen der Umlaufzeit bis zu etwa 20 Sekunden beobachtet. Der Einfluss der Exzentrizität ist gering. Werden jedoch auch die periodischen Bewegungseinflüsse durch J_2, J_3, J_4 berücksichtigt, ergeben sich die in Bild 21.4-2 dargestellten Kurven, die erheblich von denen in Bild 21.4-1 abweichen.

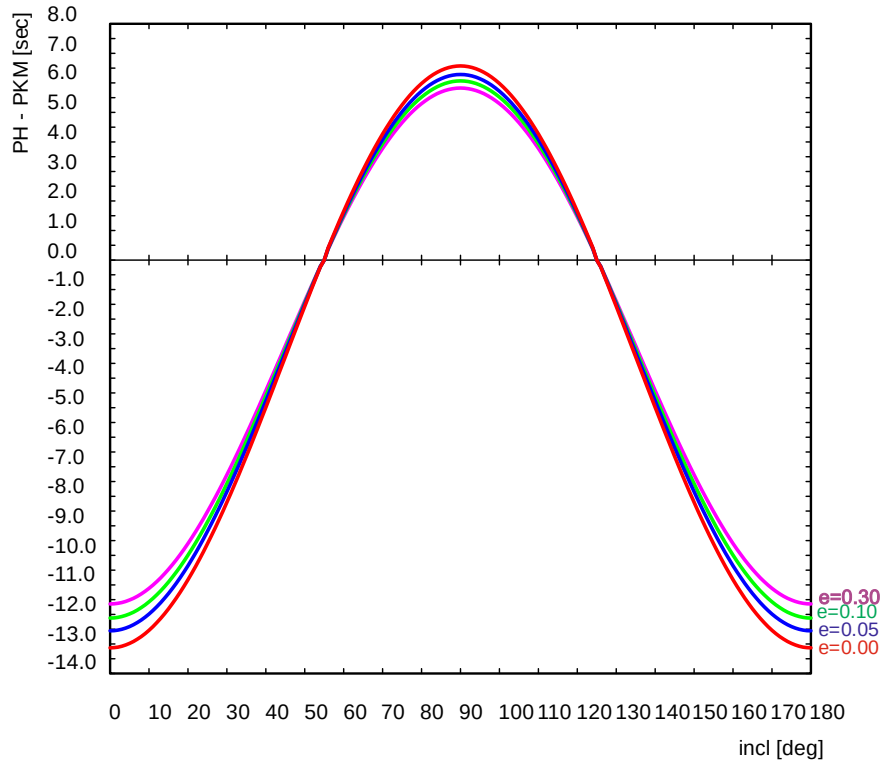


Bild 21.4-1: Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit über der Inklination bei Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“). Große Bahnhalbachse: a= 10000 km, für verschiedene Exzentrizitäten

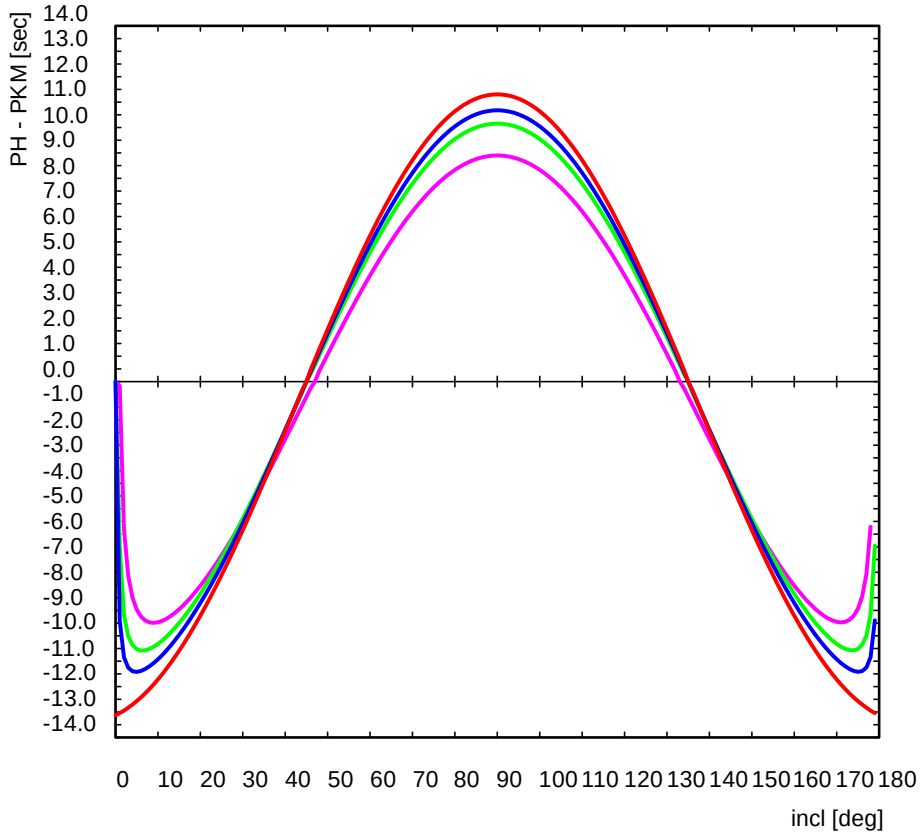


Bild 21.4-2: Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit über der Inklination bei Berücksichtigung aller (d.h. säkularer und periodischen) Bewegungseinflüssen („Störungen“) durch die zonalen Harmonischen $\left(J_2, J_3, J_4\right)$. Große Bahnhalbachse: a= 10000 km, für verschiedene Exzentrizitäten (Anordnung wie in Bild 21.4-1)

Anmerkung zur Begriffsbildung:

Es ist üblich, die mit Hilfe der Anfangsbahnelemente berechnete Umlaufzeit als „mittlere Umlaufzeit“ zu bezeichnen. Im Fall der *Hansen*schen Umlaufzeit ist diese die mittlere *Hansen*sche Umlaufzeit (21.63).

Die mit Hilfe der Bedingungsgleichung (21.66) unter Berücksichtigung allein von säkularen Bewegungseinflüssen („Störungen“) erhaltene Umlaufzeit wollen wir dagegen als die „säkulare *Hansen*sche Umlaufzeit einer *Kepler*nahen Satellitenbewegung“ $\overline{P_H}$ benennen. Sie kann sich wesentlich von der mittleren Umlaufzeit unterscheiden, wenn die wahre Bewegung des Satelliten im Hinblick auf das verwendete Bahnmodell berücksichtigt wird. Bei den Bahnen von Erdsatelliten wirken sich hier die säkularen Variationen in den *Kepler*elementen Ω, ω, M_0 aus. Diese sind in der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit nicht berücksichtigt.

Werden bei dieser Berechnung auch die periodischen Einflüsse auf die Bahn und die Bewegung eines Satelliten in der Bahn berücksichtig, können wir von der „wahren *Hansen*schen Umlaufzeit“ P_H sprechen. Diese beiden Begriffe müssen somit in ihrem Verständnis stets das verwendete Bahnmodell implizieren.

21.5 Bahnauswahl mit *Hansen*scher Umlaufzeit

Das dritte *Kepler*sche Gesetz hat die Beziehung zwischen Umlaufzeit und großer Bahnhalbachse einer elliptischen *Kepler*bewegung zum Inhalt. Dies legt nahe, auch im Fall einer allgemeinen *Kepler*bewegung einer vorgegebenen Umlaufzeit die Auswahl einer Bahnhalbachse zuzuordnen. Dies soll im vorliegenden Abschnitt am Beispiel einer vorgegebenen *Hansen*schen Umlaufzeit $\overline{P_H}$ bzw. P_H demonstriert werden[1]. Es soll die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zu einer Epoche t_0 berechnet werden.

Die Bahnauswahl bei Vorgabe einer *Hansen*schen Umlaufzeit kann nur iterativ durchgeführt werden. Als nullte Näherung wird formal das dritte *Kepler*sche Gesetz verwendet

$$\frac{2\pi}{\left(P_H\right)_0} \mathrel{\hat{=}} \frac{2\pi}{P_H} = n_H =: \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} \quad , \tag{21.70}$$

woraus der Anfangswert für die große Bahnhalbachse

$$\bar{a}_0^{(0)} = \sqrt[3]{\mu \frac{\left(P_H\right)^2}{4\pi^2}} \tag{21.71}$$

erhalten wird. Die Iteration erfolgt mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left(\zeta\left[t_0 + P_H; \bar{a}_0\right] - \zeta\left[t_0; \bar{a}_0\right]\right) = 0 \quad . \tag{21.72}$$

[1] Beispiele mit anderen Umlaufzeiten und zur Auswahl anderer Bahnelemente, wie Exzentrizität, Inklination usw., werden in den folgenden Kapiteln der Bände IV-A und IV-B der Satellitenbewegung hergeleitet.

Die Lösung ergibt die mittlere große Halbachse $\bar{a}_0$ zur Epoche t_0. Die Iteration wird in Abhängigkeit vom *Hansen*schen Bahnwinkel ζ durchgeführt. Dieser wird mit dem gegebenen Bahnmodell aus dem Integral (21.45) bzw. näherungsweise aus Formel (21.54) aus der vorhandenen Lösung einer Ephemeridenrechnung erhalten.

Mit der so berechneten großen Bahnhalbachse kann auch die Berechnung der *Hansen*schen Umlaufzeit in Abschnitt 21.4 kontrolliert werden. Dies zeigt folgendes

BEISPIEL: In Beispiel 1 des vorhergehenden Abschnitts wurde für die Bahn a=10000 km, e=0.3, i=85° die säkulare *Hansen*sche Umlaufzeit $\overline{P_H} = 9957.706290\,\mathrm{s}$ bzw. die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit $P_H = 9957.70631\mathrm{s}$ erhalten. Mit letzterer Umlaufzeit liefert Formel (21.71) für die große Bahnhalbachse den Näherungswert $\bar{a}_0^{(0)} = 10003.8127605712\,\mathrm{km}$. Die Iteration (21.72) liefert $\bar{a}_0 = 10000.000\,\mathrm{km}$. Als a priori Genauigkeit werden für die Halbachse $|\Delta a| \le 10^{-5}\,\mathrm{km}$ und für den Funktionswert $\left| fct\left(\bar{a}_0\right)\right| \le 10^{-7}$ verlangt.

Um einen Einblick in das Rechnen mit einer überlagerten Funktion zu gewähren, welche die Nullstelle eines Differenzwinkels zu berechnen gestattet, der mit einer Sinusfunktion überlagert ist, wird das Verfahren an Hand des vorliegenden Beispiels detailliert entwickelt.

Gegeben sei die *Hansen*sche Umlaufzeit P_H, die auf ein bestimmtes Bahnmodell (säkulare, periodische, andere Einflüsse) bezogen sei. Formel (21.71) liefert die Näherung nullter Ordnung $\bar{a}_0^{(0)}$ der gesuchten großen Bahnhalbachse. Mit dem verwendeten Bahnmodell werden mit Hilfe der Formeln (21.69) die *Hansen*schen Bahnwinkel am Anfang und Ende eines *Hansen*-Umlaufs bezogen auf eine Epoche t_0 berechnet:

$$\zeta_1\left(t_0\right) = \text{-}0°.2155996478 \quad , \quad \zeta_2\left(t_0 + P_H\right) = \text{-}0°.6157798478 \quad .$$

Um einen vollständigen *Hansen*-Umlauf zu erhalten muss $\zeta_2 - \zeta_1 = 360°$ exakt erfüllt sein. Im vorliegenden Fall ist $\Delta\zeta = \zeta_2 - \zeta_1 = 360°\text{-}0°.4001802000 \mathrel{\hat{=}} \text{-}0°.4001802000$. Für eine iterative Verbesserung wird die berechnete Halbachse um einen Wert Δa (im vorliegenden Fall $\Delta a = 2\,\mathrm{km}$) so verändert, dass der Differenzwinkel $\Delta\zeta$ bzw. die überlagerte Funktion $\sin\left(\Delta\zeta\right)$ kleiner wird. Der neue Funktionswert wird mit dem vorhergehenden verglichen: haben beide dasselbe Vorzeichen, wird die Halbachse wieder mit Δa so verändert, dass der neue Funktionswert wieder kleiner wird. Haben die beiden Funktionswerte unterschiedliches Vorzeichen bedeutet dies, dass der gesuchte Fixpunkt („Nullstelle“) durch die beiden Werte eingeschlossen ist. In diesem Fall wird das Intervall, das den Fixpunkt einschließt, durch fortgesetzte Halbierung weiter eingeengt. Dabei kann es passieren, dass ein neuer Funktionswert, der oberhalb der verlangten Genauigkeitsgrenze liegt, größer als der vorhergehende Funktionswert ist. Die weitere Anwendung des Verfahrens wird aber sicher zur gewünschten Lösung führen. Dieser Prozess kann an den numerischen Werten in der folgenden Tabelle nachvollzogen werden:

$\bar{a}_0$	$\Delta\zeta$	$fct(\bar{a}_0)$
10003.8127605712 km	-0°.4001802000	-0.0069844053
10005.8135231233 km	-0°.6100194505	-0.0106466468
10001.8119980191 km	-0°.1902329099	-0.0033201845
9999.8112354670 km	0°.0198211941	0.0003459451
10000.8116167430 km	-0°.0852191329	-0.0014873539
10000.3114261050 km	-0°.0327022785	-0.0005707624
10000.0613307860 km	-0°.0064413683	-0.0001124231
9999.9362831265 km	0°.0066897066	0.0001167574
9999.9988069562 km	0°.0001241175	0.0000021663
10000.0300688711 km	-0°.0031586383	-0.0000551286
10000.0144379137 km	-0°.0015172636	-0.0000264812
10000.0066224349 km	-0°.0006965738	-0.0000121575
10000.0027146956 km	-0°.0002862283	-0.0000049956
10000.0007608259 km	-0°.0000810554	-0.0000014147
9999.9997838911 km	0°.0000215310	0.0000003758
10000.0002723585 km	-0°.0000297622	-0.0000005194
10000.0000281248 km	-0°.0000041156	-0.0000000718
9999.9999060079 km	0°.0000087077	0.0000001520
9999.9999670663 km	0°.0000022961	0.0000000401
9999.9999975955 km	-0°.0000009098	-0.0000000159
9999.9999823309 km	0°.0000006932	0.0000000121
9999.9999899632 km	-0°.0000001083	-0.0000000019
9999.9999899632 km	-0°.0000001083	-0.0000000019

Die a posteriori Genauigkeit der überlagerten Funktion als Bedingungsgleichung beträgt somit $\bar{\Delta} fct(\bar{a}_0) = 2 \times 10^{-9}$. Da das verwendete Rechnerprogramm nur eine Eingabegenauigkeit von 5 geltenden Ziffern erlaubt, konnte die angestrebte Genauigkeit der großen Bahnhalbachse nicht ganz erreicht werden. ◄

21.6 Äquivalenzen zwischen *Kepler*- und *Hansen*- Bewegung

Es sei auf Äquivalenzen zwischen *Hansen*- und *Kepler*-Bewegung in Abschnitt 22.15 hingewiesen. Prinzipiell könnte dieser Zusammenhang an dieser Stelle behandelt werden, wird aber sinnvollerweise erst nach Einführung des Begriffes Äquivalenzbahnen ab Abschnitt 22.12 untersucht.

22 Anomalistische Bewegung

Als anomalistische Bewegung wird eine Bewegung verstanden, die auf das Perizentrum ihrer Bahn im Hinblick auf einen Bezugspunkt bezogen wird. Im Rahmen einer (allgemeinen) *Kepler*bewegung kann dieser Bezugspunkt ein Kraftzentrum wie etwa die Sonne im Rahmen von Untersuchungen der Planetenbewegung, der Erdmittelpunkt bei Erdsatelliten, es kann aber auch der gemeinsame Schwerpunkt in einem Mehrkörpersystem oder irgendein willkürlicher Referenzpunkt sein.

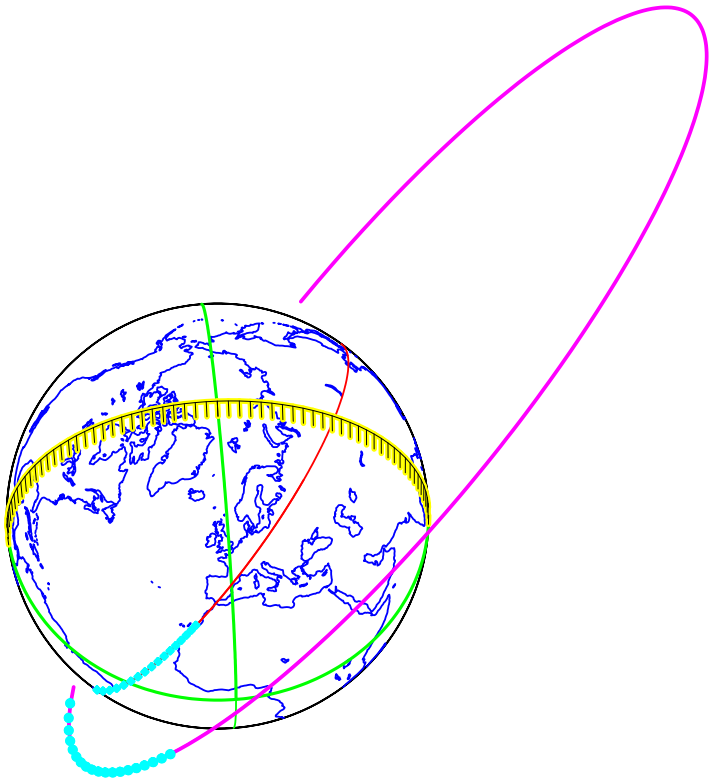


Bild 22-1: Anomalistische Bewegung einer hochexzentrischen Erdsatelliten Bahn: Apogäumshöhe 20000km, Perigäumshöhe 200 km, Inklination 60°. Das Bild zeigt die wahre Bahn und die zugehörige Subsatellitenbahn über einen anomalistischen Umlauf. Die Rotation der Erde ist im Bild nicht dargestellt. Der Terminator ist für den 1. Oktober 1985 um 00:25:0.0 eingezeichnet. Das Perigäum der Bahn liegt im Erdschatten, der in hellblauer Farbe markiert ist. In grüner Farbe sind der Erdäquator und der Nullmeridian eingezeichnet.

Somit ist die anomalistische Bewegung am engsten mit der allgemeinen *Kepler*bewegung verknüpft, die ebenfalls auf das Perizentrum der Bahn bezogen wird, im Fall einer elliptischen Bewegung auf die Apsidenlinie, die Perizentrum und Apozentrum verbindet. Allerdings wird im Gegensatz zur (speziellen) *Kepler*bewegung für die anomalistische Bewegung eine Eigenbewegung des Perizentrums und damit eines Perizentrum-bezogenen Koordinatensystems zugelassen. Die Untersuchung der anomalistischen Bewegung ist vor allem für exzentrische Bahnen sinnvoll, deren Perizentrum scharf ausgeprägt ist, nicht aber für kreisnahe Bahnen, deren Perizentrum nicht präzise definiert werden kann. Allerdings spielt in der praktischen Anwendung der Raumfahrttechnik die anomalistische Bewegung auch für kreisnahe Bahnen eine gewisse formale Rolle, etwa bei der Definition der gelegentlich verwendeten Zweizeilen Parameter („two-line elements“).

22.1 Das Apsidensystem

Als Apsidensystem (Perizentrum-bezogenes Koordinatensystem) wird ein orthonormiertes Koordinatensystem verstanden, dessen Basisvektoren die Einheitsvektoren $\mathbf{q}_j^{(P)}$ $\left(\left(\mathbf{q}_j^{(P)}\right)^2 = 1\right)$ seien. Die $\mathbf{q}_1^{(P)}$ – Achse dieses Systems ist zum Perizentrum der oskulierenden Bahn ausgerichtet, die $\mathbf{q}_2^{(P)}$ – Achse liegt in der oskulierenden Bahnebene um einen Winkel von 90° gegenüber dem Perizentrum in Richtung der Bahnbewegung gedreht. Diese Achse wird gelegentlich auch als „Parameterachse“ bezeichnet, da der innerhalb des Kegelschnittes liegende Anteil bis zur Apsidenlinie die Länge des Kegelschnittparameters *p* hat. Die $\mathbf{q}_3^{(P)}$ – Achse ergänzt das System zum orthonormierten Koordinatensystem und fällt mit der Bahnnormale zusammen:

$$\mathbf{q}_3^{(P)} = \mathbf{q}_1^{(P)} \times \mathbf{q}_2^{(P)} = \mathbf{c}_0 \quad . \tag{22.1}$$

Die Bezüge dieses Systems zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem, zum bewegungsbezogenen *Hansen*-System und zum mitbewegten *Leibniz*-System sind in Abschnitt 8.13.2 (Band II) zusammengestellt.

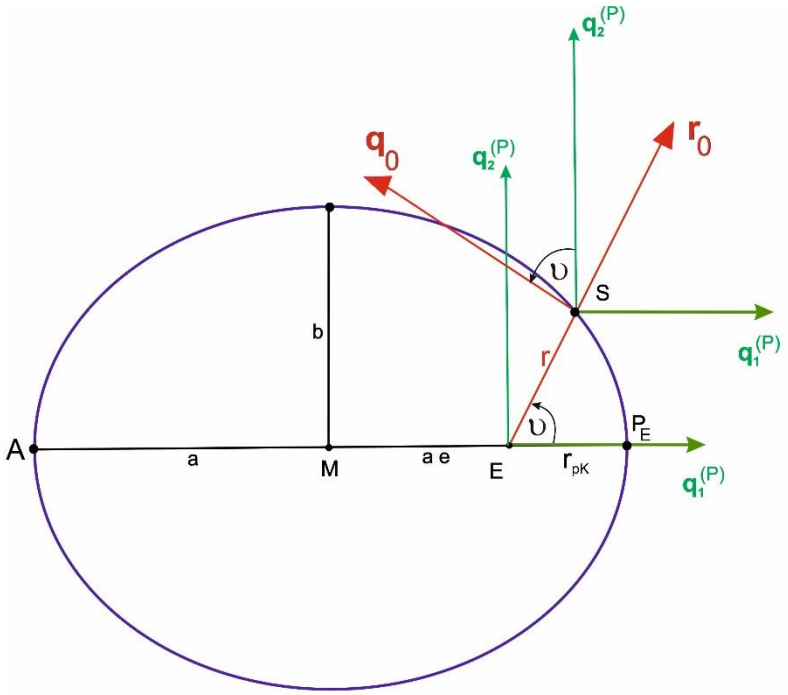


Bild 22-2: Das $\mathbf{q}_j^{(P)}$ – Apsidensystem in Bezug auf das $\left(\mathbf{r}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0\right)$ – *Leibniz*-System. υ-wahre Anomalie, M-Mittelpunkt der Ellipse, E-Brennpunkt der Ellipse („Erdmittelpunkt“), A-Apogäum, P_E-Perigäum[1]

Hier sei zur Übersichtlichkeit der Bezug auf das *Leibniz*system reproduziert. Das *Leibniz*system wird durch den radialen Richtungsvektor $\mathbf{r}_0$, den transversalen Richtungsvektor $\mathbf{q}_0$ und den normalen Richtungsvektor $\mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$ aufgespannt. Mit der wahren Anomalie υ als Bahnwinkel ergeben sich dann die Beziehungen für die Basisvektoren

[1] Kopie von Bild 8-20 (Band II)

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon \\
\mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(P)}\sin\upsilon + \mathbf{q}_2^{(P)}\cos\upsilon \\
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(P)} \quad , \\
\mathbf{q}_1^{(P)} &= \mathbf{r}_0\cos\upsilon - \mathbf{q}_0\sin\upsilon \\
\mathbf{q}_2^{(P)} &= \mathbf{r}_0\sin\upsilon + \mathbf{q}_0\cos\upsilon \\
\mathbf{q}_3^{(P)} &= \mathbf{c}_0 \quad .
\end{aligned} \tag{22.2}$$

Die Variationen der Basisvektoren der beiden Systeme werden umgerechnet mit

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(P)}\cos\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)}\sin\upsilon + \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_0 \\
\dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)}\sin\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_2^{(P)}\cos\upsilon - \dot{\upsilon}\,\mathbf{r}_0 \\
\dot{\mathbf{c}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} \quad , \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \dot{\mathbf{r}}_0\cos\upsilon - \dot{\mathbf{q}}_0\sin\upsilon - \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_2^{(P)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= \dot{\mathbf{r}}_0\sin\upsilon + \dot{\mathbf{q}}_0\cos\upsilon + \dot{\upsilon}\,\mathbf{q}_1^{(P)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\mathbf{c}}_0 \quad .
\end{aligned} \tag{22.3}$$

Die wahre Anomalie hat im Rahmen einer „Störung“ des Zweikörperproblems mit dem Bahnparameter *G*, der zentrischen Gravitationskonstanten μ, der numerischen Exzentrizität *e* und dem Kegelschnittparameter *p* die *Gauß*sche Variation (aus Abschnitt 11.1 (Band II))

$$\dot{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{G}{r^2} + \frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)\right] \quad . \tag{22.4}$$

Im Zweikörperproblem hat der Bahnparameter die Relation[1] $G = \sqrt{\mu\, p}$. b_{R2} ist die radiale Beschleunigung, welche eine Zweikörperbewegung „stört“, b_T die zugehörige transversale Beschleunigung. Die wahre Anomalie wird somit ausschließlich durch Einflüsse innerhalb der Bahnebene beeinflusst. Dies trifft jedoch nicht auf das Apsidensystem zu, das auch Einflüssen aus normaler Richtung unterliegt. Dies zeigen die

***Frenet*schen Formeln der absoluten Eigenbewegung des Apsidensystems**[2]

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(P)} &= \left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_2^{(P)} - \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(P)}\sin\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(P)} &= -\left(\dot{\zeta} - \dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_1^{(P)} + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(P)}\cos\upsilon \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(P)} &= \dot{\eta}\left[\mathbf{q}_1^{(P)}\sin\upsilon - \mathbf{q}_2^{(P)}\cos\upsilon\right] \quad .
\end{aligned} \tag{22.5}$$

Hier ist

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} = \left|\dot{\mathbf{r}}_0\right| \tag{22.6}$$

[1] sie wird als „drittes *Kepler*sches Gesetz“ bezeichnet, wenn die Parameter als konstant angenommen werden können (Siehe in Abschnitt 10.1.3 (Band III))

[2] nach Abschnitt 8.13.4.2 (Band II)

die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels[1], der auch als erster Bahnwinkel bezeichnet wird. Dagegen beschreibt der zweite (*Hansen*sche) Bahnwinkel η die räumliche Bewegung der Bahnebene. Seine Variation lautet[2] mit der Beschleunigung b_N in normaler Richtung zur Bahnebene

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad . \tag{22.7}$$

Nach Beziehung (22.4) und da im Rahmen einer *Kepler*bewegung $G = \sqrt{\mu\, p}$, ist

$$\dot{\zeta} - \dot{\upsilon} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)\right] \quad . \tag{22.8}$$

Das Apsidensystem hat den absoluten Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_{q^{(P)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{q}_1^{(P)}\cos\upsilon + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_2^{(P)}\sin\upsilon + \left(\dot{\zeta}-\dot{\upsilon}\right)\mathbf{q}_3^{(P)} = D^j_{q^{(P)}}\,\mathbf{q}_j^{(P)} \quad . \tag{22.9}$$

Die Formeln (22.7) und (22.8) zeigen, dass der Eigenbewegungsvektor des Apsidensystems verschwindet, wenn keine der Beschleunigungen b_{R2}, b_T, b_N auf die Bewegung des Objektes einwirkt. Ohne diese Beschleunigungen ist die Bewegung im Apsidensystem eine exakte *Kepler*bewegung. Eine exakte *Kepler*bewegung erzeugt somit ein Apsidensystem das keine Eigenbewegung hat.

Im allgemeinen Fall können die *Frenet*schen Formeln des Apsidensystems durch die bekannte Beziehung ersetzt werden:

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(P)} = \mathbf{D}_{q^{(P)}} \times \mathbf{q}_j^{(P)} \qquad \langle\ j = 1,2,3 \quad . \tag{22.10}$$

Die zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem relativen *Frenet*-Formeln und der zugehörige relative Eigenbewegungsvektor sind in Abschnitt 8.13.4.1 (Band II) zusammengestellt.

Es seien die $y^{(P)j}$ die kartesischen Koordinaten eines Ortes im Apsidensystem:

$$\mathbf{r} = y^{(P)j}\,\mathbf{q}_j^{(P)} \quad . \tag{22.11}$$

Der absolute Geschwindigkeitsvektor hat dann die Gestalt

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}^{(P)j}\,\mathbf{q}_j^{(P)} + y^{(P)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(P)} = \dot{y}^{(P)j}\,\mathbf{q}_j^{(P)} + \mathbf{D}_{q^{(P)}} \times \mathbf{q}_j^{(P)} = \dot{\mathbf{r}}_{q^{(P)}} + \mathbf{D}_{q^{(P)}} \times \mathbf{q}_j^{(P)} \quad . \tag{22.12}$$

Damit ist wieder die Trennung in die zum Apsidensystem relative Bewegung des betrachteten Objektes mit dem relativen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_{q^{(P)}}$ und der Eigenbewegung dieses Systems mit Eigenbewegungsvektor $\mathbf{D}_{q^{(P)}}$ erreicht.

---

[1] Siehe Satz H10 in Abschnitt 4.3.16 (Band II)

[2] Etwa nach Abschnitt 5.1 (Band II)

22.2 Wahre Anomalie als Bahnwinkel im Apsidensystem

22.2.1 Wahre Anomalie und Zeit

Wie in der speziellen *Kepler*bewegung kann auch in der anomalistischen Bewegung die wahre Anomalie als Bahnparameter verwendet werden. Der Bezug zur Zeit kann mit der Variationsgleichung (22.4) hergestellt werden:

$$t = t_0 + \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\dot{\upsilon}} \qquad . \tag{22.13}$$

Nach Vorgabe der wahren Anomalie υ bei Bezug auf einen Anfangswert υ_0, wobei keine Reduktion um 360° (bzw. 2π) erfolgen darf, liefert dieses Integral das Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$, das zum Durchlaufen des Bahnbogens auf der angenommenen Bahn benötigt wird. Da alle Parameter in der Variationsgleichung (22.4) der wahren Anomalie üblicherweise Funktionen der Zeit t sind, kann das Integral (22.13) grundsätzlich nur iterativ gelöst werden: Die Funktion des Zeitintervalls kann aus einer identischen Beziehung etwa der Form

$$fct_0(\Delta t) \equiv \upsilon(t_0 + \Delta t) - \upsilon(t_0) = 0 \tag{22.14}$$

für das sichere numerische Rechnen günstiger mit der überlagerten Funktion

$$fct(\Delta t) \equiv \sin\left[\, \upsilon(t_0 + \Delta t) - \upsilon(t_0)\right] = 0 \tag{22.15}$$

berechnet werden.

Für bahnanalytische Untersuchungen ist es sinnvoll, Näherungslösungen zu untersuchen. Mit ihrer Hilfe können bestimmte Bewegungseinflüsse herausgefunden werden, welche eine Bewegung wesentlich prägen. Eine solche Näherungslösung kann dann auch als Ausgangslösung für die iterative Bearbeitung der Beziehung (22.14) oder (22.15) verwendet werden.

22.2.2 Näherung der wahren Anomalie mit der Mittelpunktsgleichung

Die Entwicklung für die wahre Anomalie (Mittelpunktsgleichung) nach Potenzen der Exzentrizität lautet

$$\begin{aligned}
\upsilon = {} & M + \\
& + 2e\sin M + \\
& + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \\
& + \frac{1}{12}e^3\left(13\sin 3M - 3\sin M\right) + \\
& + \frac{1}{96}e^4\left(103\sin 4M - 44\sin 2M\right) + \\
& + \frac{1}{960}e^5\left(1097\sin 5M - 645\sin 3M + 50\sin M\right) + \\
& + \frac{1}{960}e^6\left(1223\sin 6M - 902\sin 4M + 85\sin 2M\right) + \\
& + \frac{1}{32256}e^7\left(47273\sin 7M - 41699\sin 5M + 5985\sin 3M + 749\cos M\right) + \cdots
\end{aligned} \tag{22.16}$$

Auf Grund der doppelt unendlichen Entwicklung der Reihen muss die Frage nach der Konvergenz der Reihen unterschiedlich beantwortet werden. Schon *P.S. Laplace* hatte herausgefunden,

dass die Entwicklungen der Reihen im Zweikörperproblem nach der Exzentrizität nur für Exzentrizitäten

$$e < 0.6627434194\cdots \tag{22.17}$$

konvergieren. Werden diese Reihen jedoch umgeordnet nach Fourier Sinus-Reihen nach Vielfachen der mittleren Anomalie[1], wobei die Koeffizienten unendliche Reihen in der Exzentrizität sind, so konvergieren diese Reihen für alle Exzentrizitäten e<1:

$$\begin{aligned}
\upsilon = \quad & M + \left(2e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin M + \\
& + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6 - \cdots\right)\sin 2M + \\
& + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{192}e^5 + \frac{95}{512}e^7 - \cdots\right)\sin 3M + \\
& + \left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6 + \cdots\right)\sin 4M + \\
& + \left(\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin 5M + \\
& + \left(\frac{1223}{960}e^6 - \cdots\right)\sin 6M + \\
& + \left(\frac{47273}{32256}e^7 - \cdots\right)\sin 7M + \cdots .
\end{aligned} \tag{22.18}$$

Diese Darstellung ist in der Satellitenbahnanalyse von Interesse bei hochexzentrischen Bahnen, wie etwa den Transferbahnen in die geostationäre Bahn. Allerdings konvergieren diese Reihen so langsam, dass sie für praktische Anwendungen, also höhere Exzentrizitäten, rasch ihre Bedeutung verlieren[2]. Für allgemeingültige bahnanalytische Untersuchungen ist sie jedoch von zentraler Bedeutung. Dies wird in den folgenden Überlegungen angedeutet.

Wenn die wahre Anomalie in einen säkular variierenden Anteil $\bar{\upsilon}$ und einen periodisch variierenden Anteil $\delta\upsilon$ zerlegt werden kann[3],

$$\upsilon = \bar{\upsilon} + \delta\upsilon \quad , \tag{22.19}$$

kann in Formel (22.18) der gesamte Anteil mit den $\sin kM$ $(k = 1, 2, \cdots)$ dem periodischen Anteil $\delta\upsilon$ zugeordnet werden. Allerdings enthält auch die mittlere Anomalie *M* periodische Anteile, die ebenfalls $\Delta\upsilon$ zugeordnet werden können. Neben der üblichen Darstellung der mittleren Anomalie bei Bezug auf eine Anfangsanomalie (wie sie durch Projektion auf eine Kreisbewegung im Rahmen der *Kepler*bewegung gedeutet werden kann[4])

$$M = M_0 + n(t)(t - t_0) \tag{22.20}$$

---

[1] BATTIN, R. H. [1987]: p. 206; siehe hierzu auch die ausführlichen Untersuchungen zur Konvergenz dieser Reihen bei STUMPFF, K. [1959], pp. 317 ff.; siehe auch BROUWER, D. [1959/2], p.153; sowie die Originalarbeit von F. W. BESSEL [1818/1875]

[2] Siehe etwa CHEBOTAREV, G. S. [1967], p. 317

[3] Siehe etwa auch die formale Darstellung in Abschnitt 20.2.4.2 (Band III)

[4] Siehe in Abschnitt 14.1 (Band III)

kann sie auch in einen mittleren (d.h. säkular variierenden) und einen periodischen Anteil aufgespalten werden:

$$M = M(t) = \overline{M}(t) + \delta M(t) \quad . \tag{22.21}$$

Dies ist entsprechend auch für die Epocheanomalie als einem eigenständigen Parameter möglich

$$M_0 = M_0(t) = \overline{M_0}(t) + \delta M_0[t,t_0] = \overline{M_0}(t_0) + (M_0)^{\cdot}_{s0}(t-t_0) + \delta M_0[t,t_0] \quad , \tag{22.22}$$

wobei auch die Schreibweise

$$\overline{M_{00}} := \overline{M_0}(t_0) \tag{22.23}$$

verwendet werden kann. In der säkularen Variation der Anfangsanomalie $(M_0)^{\cdot}_s$ wird die Gesamtheit der säkularen Änderungen in M_0 zusammengefasst. Somit darf diese Größe prinzipiell nicht als eine Konstante aufgefasst werden.

n ist die *Kepler*sche mittlere Bewegung, welche mit der großen Bahnhalbachse durch die Beziehung

$$n_K := n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \tag{22.24}$$

verknüpft ist. Diese Beziehung kann nur im Rahmen der exakten *Kepler*bewegung als eine Gesetzmäßigkeit verstanden werden. Im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung mit Zeitabhängigkeit aller Parameter darf sie nur definitorisch aufgefasst werden. Um den Unterschied zu den in einer Bahnanalyse anfallenden unterschiedlichen Bewegungsbezügen herauszuarbeiten, wollen wir die *Kepler*sche mittlere Bewegung in der Schreibweise

$$n_K = n_K(t) := \sqrt{\frac{\mu}{\left(a(t)\right)^3}} \tag{22.25}$$

verwenden. In diesem Zusammenhang muss die mittlere Anomalie in der Schreibweise

$$M = M_0 + n_K(t)(t-t_0) \tag{22.26}$$

dargestellt werden. Auch die *Kepler*sche mittlere Bewegung kann im Allgemeinen periodische Anteile enthalten. Es gibt somit die Zerlegung

$$n_K = n_K(t) = \overline{n_K}(t) + \delta n_K[t,t_0] = \overline{n_K}(t_0) + \dot{n}_{Ks0}(t-t_0) + \delta n_K[t,t_0] \quad , \tag{22.27}$$

wobei der nur säkular beeinflusste Anteil $\overline{n_K}(t)$ als die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung bezeichnet werden kann. $\delta n_K = \delta n_K(t)$ ist der periodische Anteil der *Kepler*schen mittleren Bewegung. Es gelten die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} &n_K(t_0) = n_{K0} = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \ , \ \overline{n_K} = \overline{n_K}(t) = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} \ , \\ &\overline{n_K}(t_0) = \overline{n_{K0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \qquad\qquad \left\langle \bar{a} = \bar{a}(t) \ , \ \bar{a}_0 = \bar{a}(t_0) \right. \quad . \end{aligned} \tag{22.28}$$

Im Allgemeinen wird für die mittlere Anomalie die Darstellung mit den Formeln (22.26) und (22.22)

$$\begin{aligned} M = M(t) = \overline{M_{00}} + \left[(M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_{K0}} + \dot{n}_{Ks0}(t-t_0) \right](t-t_0) + \\ + \delta n_K[t,t_0](t-t_0) + \delta M_0[t,t_0] = \bar{M} + \delta M \quad . \end{aligned} \tag{22.29}$$

erhalten. Hier definiert die Größe

$$\overline{n_A} = \overline{n_A}(t) := (M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_{K0}} + \dot{n}_{Ks0}(t-t_0) = (M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_{K0}} =: \overline{n_{A0}} + \dot{n}_{Ks}(t-t_0) \qquad (22.30)$$

die säkulare Variation der mittleren Anomalie in Bezug auf das Perizentrum. Diese Größe wird daher als die *mittlere anomalistische mittlere Bewegung* bezeichnet. Die anomalistische mittlere Bewegung enthält jedoch im Allgemeinen auch periodische Anteile:

$$n_A = n_A(t) := (M_0)^{\cdot}_s + \overline{n_{K0}} + \left(\dot{n}_{Ks0} + \delta n_K[t,t_0]\right)(t-t_0) = \overline{n_A} + \delta n_K[t,t_0](t-t_0) \quad . \qquad (22.31)$$

Die periodischen Anteile der anomalistischen mittleren Bewegung werden im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse für Missionsauslegungen üblicherweise nicht berücksichtigt.

Mit den vorstehenden Darstellungen der mittleren Anomalie kann auch eine für eine Bahnanalyse geeignete Darstellung der wahren Anomalie im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung erhalten werden. Dazu werde die Mittelpunktsgleichung (22.16) formal dargestellt (mit Hilfe der Schreibweise (22.26)) durch

$$\upsilon = M + \Delta\upsilon_M = \bar{M} + \delta M + \Delta\upsilon_M = M_0 + n_K(t-t_0) + \Delta\upsilon_M \quad . \qquad (22.32)$$

In der Differenzformel $\Delta\upsilon_M := \upsilon - M$ sind nicht alle periodischen Anteile der Mittelpunktsgleichung zusammengefasst, da auch die mittlere Anomalie selbst periodische Anteile enthält.

Mit den vorstehenden Begriffen folgt

$$\upsilon = \upsilon(t) = \overline{M_0}(t) + \delta M_0[t,t_0] + \left[\overline{n_K}(t) + \delta n_K[t,t_0]\right](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t) \quad . \qquad (22.33)$$

Ein Bezug auf eine Anfangsepoche t_0 kann sinnvollerweise nur dann erhalten werden, wenn die säkularen Störanteile als zeitunabhängig betrachtet werden können, d.h. wenn $(M_0)^{\cdot}_s(t) \triangleq (M_0)^{\cdot}_s(t_0)$, $\dot{n}_{Ks}(t) \triangleq \dot{n}_{Ks}(t_0)$. Dies ist bei großen Zeiträumen bzw. bei großen Bahnänderungen sicherlich nicht erlaubt. Bei kleinen Bahnänderungen sowie zur Abschätzung von Manövern zur Bahnhaltung kann diese Annahme jedoch akzeptiert werden. Dann kann die wahre Anomalie dargestellt werden in der Form

$$\begin{aligned}\upsilon = \upsilon(t) = \overline{M_0}(t_0) + \left[\overline{n_K}(t_0) + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{n}_{Ks0}(t-t_0)\right](t-t_0) + \\ + \delta M_0[t,t_0] + \delta n_K[t,t_0](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t)\end{aligned} \qquad (22.34)$$

bzw. mit der Bezeichnung (22.30) sowie der Definition

$$\Delta\upsilon_A = \Delta\upsilon_A(t) := \delta M_0[t,t_0] + \delta n_K[t,t_0](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t) \qquad (22.35)$$

auch in

$$\upsilon = \upsilon(t) = \overline{M_0}(t_0) + \overline{n_A}(t_0)(t-t_0) + \Delta\upsilon_A(t) \quad . \qquad (22.36)$$

In diesem Ausdruck ist in $\Delta\upsilon_A$ die Gesamtheit aller periodischen Variationen aus der Mittelpunktsgleichung (22.16) und aller periodischen Einflüsse auf die mittlere Anomalie zur Epoche t_0 sowie die *Kepler*sche mittlere Bewegung zum Zeitpunkt *t* zusammengefasst enthalten.

Anmerkung: Hier bedeuten die Ausdrücke der Form $\delta M_0[t,t_0], \delta n_K[t,t_0]$ usw. den Wert dieser Größe zum Zeitpunkt *t* bei Bezug auf die Anfangswerte zum Zeitpunkt t_0. Diese Schreibweise könnte auch für die säkularen Parameter $(M_0)^{\cdot}_s[t,t_0], \dot{n}_{Ks}[t,t_0]$ usw. verwendet werden, da im Prinzip auch diese Größen als variabel aufgefasst werden müssen. In der Praxis einer Satellitenbahnanalyse werden diese allerdings normalerweise als konstant angesehen. ◄

Eine Näherung lautet etwa mit der Mittelpunktsgleichung (22.16)

$$\upsilon = \overline{M}_{0\,0} + \overline{n}_{A\,0}\left(t - t_0\right) + 2e\sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + O\left(e^3\right) + \delta M \quad . \tag{22.37}$$

Je nach Anforderungsprofil können die periodischen Anteile δM , in welchen die periodischen Anteile der Epocheanomalie und der *Kepler*schen mittleren Bewegung enthalten sind, vernachlässigt werden und/oder bei Bedarf der Einfluss höherer Potenzen der Exzentrizität einbezogen werden.

Für weitere Untersuchungen insbesondere im Vergleich zu anderen Bezügen der Satellitenbewegung wird die säkulare Abnahme $\dot{n}_{K\,s}$ der *Kepler*schen mittleren Bewegung, die vor allem eine Folge des säkularen Einflusses der Luftdichte auf die Satellitenbewegung ist, vernachlässigt, bzw. es kann eine Bahnerhaltung vorausgesetzt werden. In diesem Fall ist die Verwendung der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung üblich in der Form

$$\overline{n_A} = \overline{n_K} + (M_0)^{\cdot}{}_s \qquad \left\langle \dot{n}_{Ks} \approx 0 \quad . \right. \tag{22.38}$$

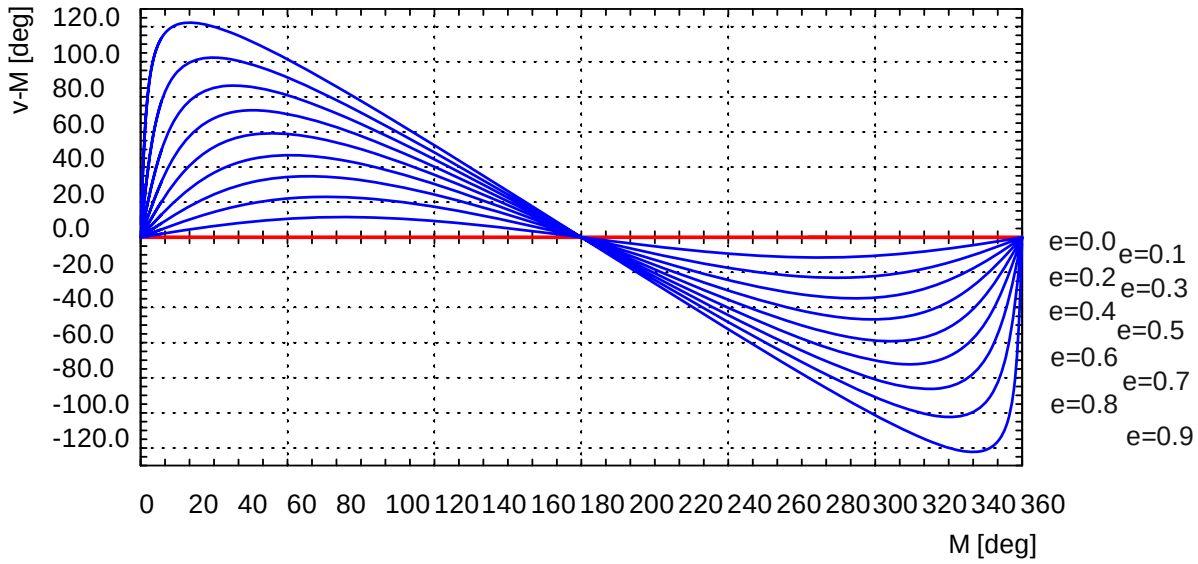


Bild 22-3: Die Differenz wahre υ – mittlere Anomalie M über der mittleren Anomalie für die große Bahnhalbachse a = 66000 km, die Inklination i = 80°, die Exzentrizitäten e=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9

BEISPIEL: Um einen Eindruck zu vermitteln, wie sich die wahre Anomalie von der mittleren Anomalie mit zunehmender Exzentrizität unterscheidet, wird in Bild 22-3 die Differenz zwischen wahrer und mittlerer Anomalie aufgetragen. Gewählt ist die große Bahnhalbachse a = 66000 km und die Inklination i = 80°. Die Rechnung ist für Erdsatellitenbahnen unter Einschluss der kurzperiodischen Störungen durch J_2, J_3, J_4 durchgeführt worden. Allerdings ist der Einfluss der kurzperiodischen Störungen im Bild nicht erkennbar. (Zur größenordnungsmäßigen Abschätzung: für die obige Bahn mit Exzentrizität e = 0.9 ergibt sich für den maximalen Wert $\upsilon - M$ eine Abweichung von etwa 17“ zwischen den Werten mit und ohne Berücksichtigung der kurzperiodischen Störeinflüsse). ◄

22.2.3 Die anomalistische mittlere Bewegung in der Bahnmechanik für Erdsatelliten

Im Rahmen einer Bahnanalyse für Satellitenmissionen werden nur die Bewegungseinflüsse durch die ersten drei (oder fünf) zonalen Harmonischen berücksichtigt, in erster Näherung nur durch den Faktor J_2. Für erdnahe Missionen wird in einem nächsten Schritt lediglich der säkulare Einfluss durch den Luftwiderstand einbezogen.

Da die *Kepler*sche mittlere Bewegung $n_K = \sqrt{\mu / a^3}$ nach Formel (20.12) nicht durch J_2, J_3, J_4, J_5 säkular gestört wird[1], bleiben im Näherungsausdruck (22.37) lediglich die säkularen Störungen in der mittleren Epocheanomalie M_0 zu berücksichtigen.

Die säkulare Variation der mittleren Anomalie wird in einer Theorie erdnaher Satellitenbahnen bei Berücksichtigung der Einflüsse durch J_2 allein nach Formel (20.17) gegeben durch den Ausdruck

$$(M_0)^{\cdot}_{Gs0} = \frac{3}{2}\,\overline{n_{K0}}\,J_2\,\frac{R_E^2\,\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right) + O\left(\overline{n_{K0}}\,J_2^2\right)\,, \tag{22.39}$$

wobei die Werte $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ gegebene (eine bestimmte Bahn gegebenenfalls definierende) Anfangswerte für eine Epoche t_0 sind. Die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung zur Epoche lautet $\overline{n_{K0}} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3}$. Damit hat die genäherte anomalistische mittlere Bewegung basierend auf der allgemeinen Formel (22.30) ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes die Darstellung

$$\begin{aligned}\overline{n_{A0}} &= \overline{n_{K0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{Gs} + \cdots = \\ &= \overline{n_{K0}}\left[1+\frac{3}{2}\,J_2\,\frac{R_E^2\,\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(\overline{n_{K0}}\,J_2^2\right)\,.\end{aligned} \tag{22.40}$$

Wird der säkulare Einfluss des Luftwiderstands berücksichtigt, der sich in einer säkularen Variation der großen Bahnhalbachse auf die *Kepler*sche mittlere Bewegung wegen

$$\dot{n}_K = -\frac{3}{2}\frac{n_K}{a}\,\dot{a} \tag{22.41}$$

auswirkt, lautet der mittlere Anteil

$$\overline{n_K} = \overline{n_{K0}} + \dot{n}_{Ks}\left(t-t_0\right) + \cdots = \overline{n_{K0}} - \frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\,\dot{a}_s\left(t-t_0\right) + \cdots \quad \left\langle \overline{n_{K0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0\right)^3}} \right. \,. \tag{22.42}$$

In diesem Fall wird die mittlere große Bahnhalbachse gestört

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \dot{a}_s\left(t-t_0\right) \,. \tag{22.43}$$

Dies wirkt sich auch auf die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung aus

$$\overline{n_K} = \overline{n_K}\left(t\right) = \overline{n_{K0}} + \dot{n}_{Ks}\left(t-t_0\right) \tag{22.44}$$

Mit der säkularen Variation der *Kepler*schen mittleren Bewegung bzw. der großen Halbachse

$$\dot{n}_{Ks} = -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\,\dot{a}_s \,. \tag{22.45}$$

---

[1] Siehe die dazugehörenden Entwicklungen in Abschnitt 20.2.1, Band II. Dort ist auch die Entwicklung höherer Ordnung einschließlich der Beeinflussung durch J_4 wiedergegeben

Die genäherte anomalistische mittlere Bewegung von Erdsatelliten zum Zeitpunkt *t* bei Bezug auf die Epoche t_0 beträgt bei Berücksichtigung der säkularen Einflüsse des Luftwiderstandes

$$\overline{n_A}(t) = \overline{n_{K0}}\left[1+\frac{3}{2}\,J_2\,\frac{R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}}{\bar{a}_0^{\,2}\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)-\frac{3}{2}\frac{\dot{a}_s}{\bar{a}_0}\left(t-t_0\right)\right]+ \\ +O\left(\overline{n_{K0}}\,J_2^2\right)+O\left(\overline{n_{K0}}\,\dot{a}_s^2\right). \tag{22.46}$$

Falls höhere Bewegungseinflüsse („Störungen“) wie etwa bereits durch J_4 berücksichtigt werden sollten, müssten auch alle anderen Störungen einbezogen werden, die in derselben Größenordnung liegen, also etwa auch tesserale geodynamische Formfaktoren wie J_{22}, λ_{22} , allgemeine Terme des Luftwiderstandes für erdnahe Bahnen (vor allem unter 600 km), Sonne-Mond-Attraktion usw.. Dadurch würde sich aber die Auswahl einer Nominalbahn nur unwesentlich verbessern, die Formelsysteme aber wesentlich verkompliziert und unübersichtlich werden. Für bahnanalytische Untersuchungen genügen daher in den meisten Anwendungsfällen die obigen Formeln (22.40) bzw. (22.46).

22.2.4 Näherungsweise Berechnung der Zeit aus der wahren Anomalie

Als eine Anwendung der vorstehenden Überlegungen soll aus einer vorgegebenen wahren Anomalie υ die Zeit berechnet werden, die ein Satellit benötigt, um von einer vorgegebenen Epoche t_0 zu dem Ort zu gelangen, an dem der Satellit die wahre Anomalie υ annimmt.

1. Fall: exakte *Kepler*bewegung

Im „ungestörten“ Fall, das heißt im Fall einer speziellen *Kepler*bewegung, kann für jede elliptische (und damit auch kreisnahe) Bewegung das zugehörige Zeitintervall mit den Formeln aus Abschnitt 10.1.3 (Band III) berechnet werden. Bekannt seien für eine Epoche t_0 die *Kepler*parameter große Bahnhalbachse *a* und Exzentrizität *e*, sowie die mittlere Epocheanomalie M_0. Damit sind die *Kepler*sche mittlere Bewegung $n_K = \sqrt{\mu / a^3}$ sowie die exzentrische und die mittlere Anomalie berechenbar

$$\cos E = \frac{e+\cos\upsilon}{1+e\cos\upsilon} \quad , \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\sin\upsilon}{1+e\cos\upsilon} \quad , \; M = E - e\sin E = M_0 + n_K\left(t-t_0\right) \; . \tag{22.47}$$

Das Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$ zwischen der Epoche und dem Zeitpunkt *t*, an dem die wahre Anomalie υ angenommen wird, ist daher bekannt und der gesuchte Zeitpunkt lautet

$$t = t_0 + \frac{M - M_0}{n_K} \quad . \tag{22.48}$$

Als BEISPIEL werde die Perizentrumsdurchgangszeit t_p berechnet. Mit der vorgegebenen wahren Anomalie υ zum Zeitpunkt t_0 der Epoche lautet die mittlere Anomalie im Perizentrum $M_P = M_0 + n_K\left(t_P - t_0\right) = 0$, der Zeitpunkt des Perizentrumsdurchganges beträgt:

$$t_p = t_0 - \frac{M_0}{n_K} \quad . \tag{22.49}$$

Dieser Zeitpunkt liegt im Allgemeinen vor der Epoche. Da die Epoche gewöhnlich mit Beginn oder vor Beginn einer Ephemeride gesetzt ist, und um auch die Apozentren berechnen zu können, wird der allgemeine Ansatz gewählt

$$t_A = t_0 - \frac{M_0}{n_K} + N_i\, 2\pi \quad \langle N_i = 1,\, 1.5,\, 2,\, 2.5,\, 3,\, 3.5,\, 4,\, \cdots \,. \tag{22.50}$$

Ganzzahlige Werte N_i entsprechen dann Perizentren, die Zwischenwerte 1.5, 2.5 usw. den Apozentren nach der gegebenen Epoche. Diese Formel erfasst allerdings auch Zeitpunkte vor der Epoche, wenn den N_i negative Werte zugeordnet werden.

2. Fall: allgemeine *Kepler*bewegung, nur säkulare „Störungen“ durch die Erdabplattung ohne Luftwiderstand:

Die zum unbekannten Zeitpunkt *t* oskulierende mittlere Anomalie $M(t)$ kann aus der vorgegebenen wahren Anomalie $\upsilon = \upsilon(t)$ aus dem Ansatz (22.33) berechnet werden. Zur Epochezeit t_0 sei die mittlere Epocheanomalie $\overline{M}_{00} = \overline{M}_0(t_0)$ als ein Anfangswert bekannt, mit den mittleren Epocheparametern $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0$ die säkulare Variation von $\left(\dot{M}_0\right)_s$ aus Formel (22.39). Mit der genäherten wahren Anomalie $\upsilon(t)$ aus Formel (22.36) sowie der anomalistischen mittleren Bewegung aus (22.40) folgt die gesuchte Zeit aus

$$t = t_0 + \frac{\upsilon(t) - \overline{M}_0(t_0)}{\overline{n}_{A0}} \quad . \tag{22.51}$$

3. Fall: allgemeine *Kepler*bewegung, säkulare „Störungen“ durch die Erdabplattung und den Luftwiderstand:

Unter Vernachlässigung der periodischen Störungen wird die wahre Anomalie zum Zeitpunkt *t* mit Formel (22.33) mit Einbeziehung der säkularen Variation der großen Bahnhalbachse infolge des Luftwiderstandes entsprechend (22.46) dargestellt durch

$$\upsilon = \upsilon(t) = \overline{M}_{00} + \left[\overline{n}_{A0} + \dot{n}_{As}(t - t_0)\right](t - t_0) + \cdots \quad . \tag{22.52}$$

Auflösung nach dem Zeitintervall $(t - t_0)$ ergibt

$$t = t_0 + \frac{1}{2\dot{n}_{As}}\left[-\overline{n}_{A0} \pm \sqrt{\left(\overline{n}_{A0}\right)^2 + 4\dot{n}_{As}\left(\upsilon - \overline{M}_{00}\right)}\right] + \cdots \,. \tag{22.53}$$

Um hier die Singularität für $\dot{n}_{as} \to 0$ zu vermeiden, sollte stets die alternative Lösung[1]

$$t = t_0 + \frac{2\left(\upsilon - \overline{M}_{00}\right)}{\overline{n}_{A0} + \sqrt{\left(\overline{n}_{A0}\right)^2 + 4\dot{n}_{As}\left(\upsilon - \overline{M}_{00}\right)}} \tag{22.54}$$

verwendet werden. Diese stellt eine Verallgemeinerung von Formel (22.51) dar. Falls der erste Zeitpunkt *t* nach der Epoche t_0 gewünscht wird, muss $\upsilon > \overline{M}_{00}$ angenommen werden. Dazu wird eventuell $\upsilon \bmod(2\pi)$ benötigt.

Hier wird nach Formel (22.40) unter der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung zur Epoche der Ausdruck

$$\overline{n}_{A0} = \overline{n}_{K0} + \dot{M}_{0s0} \tag{22.55}$$

[1] Siehe etwa in PRESS, W. H. et al. [1986], ch. 5.5, p. 145, oder auch in Abschnitt 22.4.4

verstanden. Ein prinzipieller Fehler, der bei der Verwendung der Näherung

$$\dot{n}_{As} \approx \dot{n}_{Ks} = -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K0}}}{\overline{a}_0}\dot{a}_s \tag{22.56}$$

auftreten kann, wird in der praktischen Anwendung üblicherweise vernachlässigt[1].

4. Fall: Allgemeiner Störansatz.

Der gesuchte Zeitpunkt werde mit t_F bezeichnet. Die vorgegebene wahre Anomalie lautet dann $\upsilon(t_F)$. Wenn nach einer der vorstehenden Methoden ein Näherungswert $t = t^{(0)}$ für den gesuchten Zeitpunkt t_F gefunden ist, kann durch ein Fixpunktverfahren mit der Funktion

$$fct\left(t^{(\kappa)}\right) \equiv \upsilon\left(t^{(\kappa)}\right) - \upsilon\left(t_F\right) = 0 \qquad \langle \kappa = 0,1,2,\cdots \tag{22.57}$$

bei Konvergenz der gesuchte Zeitpunkt gefunden werden. Zu jedem Zeitpunkt $t^{(\kappa)}$ wird zur Berechnung der entsprechenden wahren Anomalie $\upsilon\left(t^{(\kappa)}\right)$ das gesamte bekannte Bahnmodell eingesetzt. Numerisch sinnvoll ist die Verwendung einer überlagerten Funktion an Stelle der Fixpunktbedingung (22.57) (siehe in Abschnitt 21.3)[2].

22.3 Die überlagerte Funktion bei anomalistischen Bewegungen

Das Verfahren der überlagerten Funktion (siehe in Abschnitt 21.3) ist im Rahmen einer Bewegungsanalyse von Satellitenbewegungen von großem Interesse. Symptomatisch ist dies etwa im Fall der Untersuchung einer anomalistischen Bewegung.

BEISPIEL: Im vorstehenden Fall (Abschnitt 22.2.4) der Berechnung eines Zeitpunktes t_F zu einer vorgegebenen wahren Anomalie $\upsilon\left(t_F\right)$ können die zugehörigen trigonometrischen Funktionen $\sin\left(\upsilon\left(t_F\right)\right), \cos\left(\upsilon\left(t_F\right)\right)$ berechnet werden. Die überlagerte Funktion lautet dann

$$fct \equiv \sin\left[\upsilon(t) - \upsilon\left(t_F\right)\right] = \sin\left(\upsilon(t)\right)\cos\left(\upsilon\left(t_F\right)\right) - \cos\left(\upsilon(t)\right)\sin\left(\upsilon\left(t_F\right)\right) = 0 \quad . \tag{22.58}$$

Die trigonometrischen Funktionen $\sin\left(\upsilon(t)\right), \cos\left(\upsilon(t)\right)$ werden zu jedem Zeitpunkt *t* mit dem gesamten vorgegebenen Bahnmodell im Rahmen einer Ephemeridenrechnung berechnet und stehen somit ohne zusätzlichen Rechenaufwand für das Iterationsverfahren zur Verfügung. Anmerkungen zum numerischen Verfahren werden in Abschnitt 22.4.4 gegeben.

Numerisches BEISPIEL: Gegeben sei die Bahn a = 8300 km, e = 0.2, i = 60°, Ω = 245°, ω = 156°, M_0 = 23°.456, Epoche: 2015-Sep-30/11:00:0.0. Es ist der Zeitpunkt zu berechnen, an dem

---

[1] Bei den bisherigen Herleitungen wurde stets $\dot{n}_{As} \triangleq \dot{n}_{Ks}$ angenommen. Eine Abweichung zwischen diesen beiden Größen ist zu erwarten, wenn etwa die säkulare Variation der mittleren Epocheanomalie $\left(\dot{M}_0\right)_s$ säkularen Variationen unterliegt

[2] Ein numerisches Beispiel hierzu wird in Abschnitt 22.4.4 (Beispiel 4) gegeben.

der Satellit die wahre Anomalie $\upsilon = 58°$ durchläuft. Das Iterationsverfahren mit dem Anfangswert aus (22.51) ergibt die Tageszeit $t^{(0)} = 39947.8931$ s mit der Funktionsgenauigkeit $\left|\Delta fct^{(0)}\right| = 0.00377$. Die iterative Verbesserung ergibt t = 39944.44 s mit der Genauigkeit $\left|\Delta fct\right| = 3.21446925 \times 10^{-8}$. Der gesuchte Zeitpunkt lautet daher 2015-Sep-30/11:05:44.44. Zur Kontrolle kann die entsprechende wahre Anomalie berechnet wird. Sie beträgt für den berechneten Zeitpunkt $\upsilon = 58°.00000$, der Fehler ist somit weit unter 0“.01 .◀

22.4 Die anomalistische Umlaufzeit

Es werde die Bewegung eines Satelliten in Bezug auf das Perigäum seiner Bahn betrachtet. Als anomalistische Umlaufzeit wird die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch das Perigäum bezeichnet. Ist die Variation $\dot{\upsilon}$ der wahren Anomalie υ bekannt, beträgt die Zeitdauer zum Durchlaufen des Bahnbogens der Länge $\upsilon - \upsilon_0 = \upsilon(t) - \upsilon(t_0)$ im Allgemeinen

$$\Delta t \;=\; t \;-\; t_0 \;=\; \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\dot{\upsilon}} \quad . \tag{22.59}$$

Über das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ ändert sich die wahre Anomalie entsprechend Ausdruck (22.34) bei Vernachlässigung einer Variation der großen Bahnhalbachse infolge des Luftwiderstandes um die Winkeldifferenz

$$\Delta\upsilon \;=\; \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}\left(t_2 - t_1\right) \;+\; n_K\left(t_2 - t_1\right) \;+\; O\left(n_K\; J_2^2\right) \;+\; \delta_p M_0\left[t_2 - t_1\right] + \;\delta_p n_K\left[t_2 - t_1\right] \;, \tag{22.60}$$

wobei die beiden δ_p – Terme die periodischen Anteile in der mittleren Epocheanomalie zusammenfassen.

22.4.1 Die wahre anomalistische Umlaufzeit

Für einen anomalistischen Umlauf ergibt sich die wahre anomalistische Umlaufzeit bezogen auf eine Epoche t_0 aus dem Integral

$$P_A \;= P_A\left(\upsilon_0\right) \;=\; P_A\left(\upsilon(t_0)\right) \;=\; \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+360°} \frac{d\upsilon}{\dot{\upsilon}} \quad . \tag{22.61}$$

Diese Darstellung bringt zum Ausdruck, dass die wahre anomalistische Umlaufzeit als Funktion des Anfangswertes $\upsilon_0 = \upsilon\left(t_0\right)$ akzeptiert werden muss, wenn t_0 ein Anfangszeitpunkt ist. Die wahre anomalistische Umlaufzeit ist daher prinzipiell keine konstante Größe.

Für das praktische Rechnen kann die Beziehung mit der überlagerten Funktion

$$fct\left(P_A\right) \;\equiv\; \sin\left[\upsilon\left(t_0 + P_A\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] \;=\; 0 \tag{22.62}$$

bearbeitet werden. Für das iterative Rechnen muss ein geeigneter Anfangswert $P_a^{(0)}$ bekannt sein. Als solcher empfiehlt sich im Fall von Satellitenbewegungen die *Kepler*sche Umlaufzeit

$$P_K \;=\; 2\pi\sqrt{a^3/\mu} \quad . \tag{22.63}$$

Da die große Bahnhalbachse *a* von den physikalischen „Störeinflüssen“ abhängig ist, somit eine Funktion von der Zeit, was dann auch für die *Kepler*sche Umlaufzeit gilt

$$P_K = P_K(t) = 2\pi\sqrt{\left(a(t)\right)^3/\mu} \quad , \tag{22.64}$$

ist es sinnvoll, als Anfangsnäherung die „mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit“ zu wählen, die mit einer als konstant angenommenen mittleren Halbachse $\bar{a} = a(t) - \delta a(t)$ berechnet wird:

$$\overline{P_K} = 2\pi\sqrt{\bar{a}^3/\mu} \quad . \tag{22.65}$$

Falls auch die mittlere Halbachse zeitabhängig ist, kann ein mittlerer Anfangswert gewählt werden: $\bar{a}_0 = \bar{a}(t_0) = a(t_0) - \delta a(t_0)$. Dann wird $P_A^{(0)} = \overline{P_{K0}}$ gewählt mit

$$\overline{P_{K0}} = 2\pi\sqrt{\bar{a}_0^3/\mu} \quad . \tag{22.66}$$

Anmerkung: Um den Iterationsprozess zu beschleunigen, kann als Anfangswert anstelle der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit die mittlere anomalistische Umlaufzeit verwendet werden (siehe in Abschnitt 22.4.2). ◄

Die Notwendigkeit zu einer iterativen Berechnung der wahren anomalistischen Umlaufzeit ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

Für die Differenz in der wahren Anomalie zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_1, t_2 folgt aus der Mittelpunktsgleichung (22.16) näherungsweise

$$\Delta\upsilon = \upsilon_2 - \upsilon_1 = \upsilon(t_2) - \upsilon(t_1) = M_2 - M_1 + 2\left(e_2 \sin M_2 - e_1 \sin M_1\right) + O\left(e^2\right) \quad .$$

In erster Näherung ergibt sich mit der Definition der mittleren Anomalie (vgl. die allgemeine Darstellung in Formel (22.22)) $M = M(t) = M_0(t) + n(t - t_0)$

$$\Delta\upsilon \;=\; M_0(t_2) \;-\; M_0(t_1) \;+\; n_K(t_2)(t_2 - t_0) \;-\; n_K(t_1)(t_1 - t_0) \;+\; O(e) \quad . \tag{22.67}$$

Da die mittlere *Kepler*sche Bewegung nach Formel (20.12) (Band III) durch J_2 nicht säkular gestört wird, bleiben in diesem Näherungsausdruck lediglich die säkularen Störungen in der mittleren Epocheanomalie M_0 zu berücksichtigen. Nach Formel (22.33) wird über das Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\begin{aligned} \Delta\upsilon \;=\; & \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}(t_2 - t_1) \;+\; \overline{n_K}(t_2 - t_1) \;+\; O\left(n_K\, J_2^2\right) \;+ \\ & + \delta_p M_0\left[t_2 - t_1\right] + \;\delta_p n_K\left[t_2 - t_1\right] + \;\delta_p \upsilon_M\left[t_2 - t_1\right] \quad , \end{aligned} \tag{22.68}$$

berechnet. Die δp– Terme fassen die periodischen Anteile zusammen. Entsprechend über einen wahren anomalistischen Umlauf (d.h. von Perizentrum zum darauf folgenden Perizentrum) wird

$$2\pi \;=\; \left(M_0\right)^{\cdot}_{s} P_a \;+\; \overline{n_K}\, P_A \;+\; O\left(n_K\, J_2^2\right) + \delta_P M_0\left[P_A\right] + \;\delta_P n_K\left[P_A\right] + \;\delta_P \upsilon_M\left[P_A\right] \quad . \tag{22.69}$$

Die Herleitung zeigt, dass die wahre anomalistische Umlaufzeit P_A in allen Resttermen enthalten ist. Der genaue Wert von P_A kann daher nur iterativ aus dem Gesamtausdruck (22.69) oder direkt über die Bedingungsgleichung (22.62) erhalten werden.

22.4.2 Die mittlere anomalistische Umlaufzeit ohne Luftwiderstand

Bei Vernachlässigung aller Restglieder in Gleichung (22.69) erhält man mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}$ die *mittlere anomalistische mittlere Bewegung*

$$\overline{n_A} = \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \overline{n_K} \tag{22.70}$$

und damit die *mittlere anomalistische Umlaufzeit*

$$\overline{P_A} = \overline{P_A}(t) = \frac{2\pi}{\overline{n_A}} \quad . \tag{22.71}$$

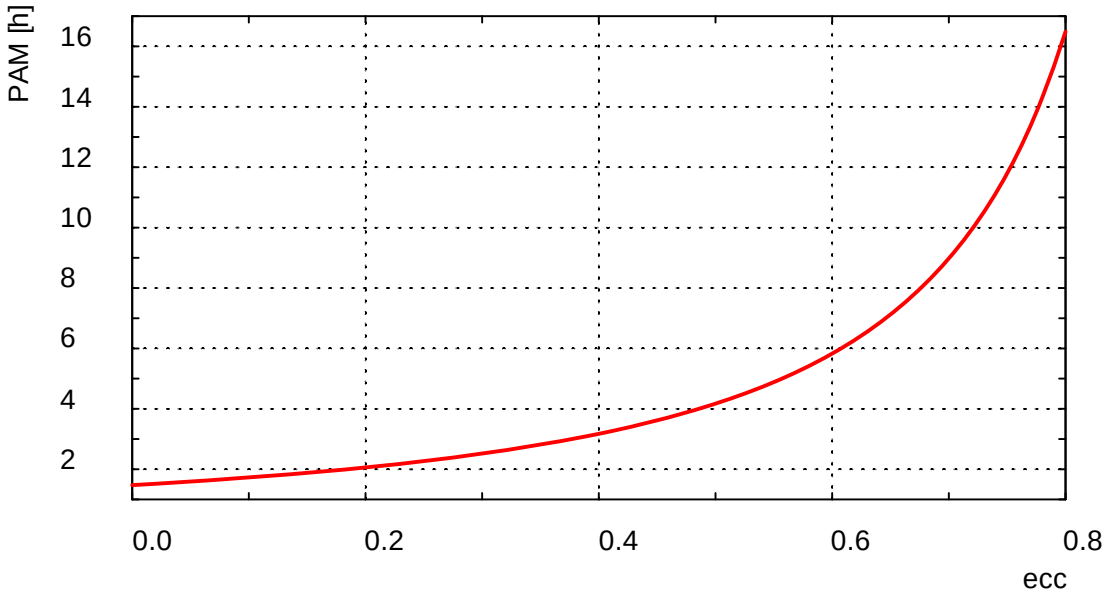


Bild 22-4: Die mittlere anomalistische Umlaufzeit über der Exzentrizität im Bereich $e \in [0.0, 0.8]$, bezogen auf die Perigäumshöhe H_P=200 km und die Inklination 23°.

Das Wort *mittlere* bezieht sich auf die Vernachlässigung aller periodischen Terme. Die säkulare Variation $\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ der mittleren Epocheanomalie hängt von den mittleren Keplerelementen $\overline{a} = \overline{a}(t), \overline{e} = \overline{e}(t), \overline{i} = \overline{i}(t)$ ab, die mittlere *Kepler*sche Bewegung von $\overline{a} = \overline{a}(t)$. Da diese Größen zeitabhängig sind, ist auch die mittlere anomalistische Umlaufzeit zeitabhängig.

In der Praxis werden die spezifizierenden Begriffe gerne weggelassen, müssen aber auch in einer Bahnanalyse im Auge behalten werden, um nicht die Gültigkeit bzw. die einschränkenden Randbedingungen einer Untersuchung zu vergessen. So ist es üblich, im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse statt der mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P_A}(t_0)$ zur Epoche t_0 einfach die mittlere anomalistische Umlaufzeit in der Schreibweise $\overline{P_A} \hat{=} \overline{P_A}(t_0)$ zu verwenden unter der impliziten Annahme, dass es sich um eine Größe zu einer Epoche t_0 handelt.

Die anomalistische Umlaufzeit definiert einen Umlauf eines Satelliten in Bezug auf das anomalistische Bahnsystem, zum Beispiel von Perigäum zu Perigäum.

Es erscheint notwendig auf diese scharfen Begriffsbildungen hinzuweisen, da insbesondere der Begriff der Umlaufzeit in seinen sehr unterschiedlichen Facetten im Rahmen einer Bahnanalyse von zentraler Bedeutung ist. Eine oberflächliche Begriffsbildung kann zu falschen Folgerungen führen.

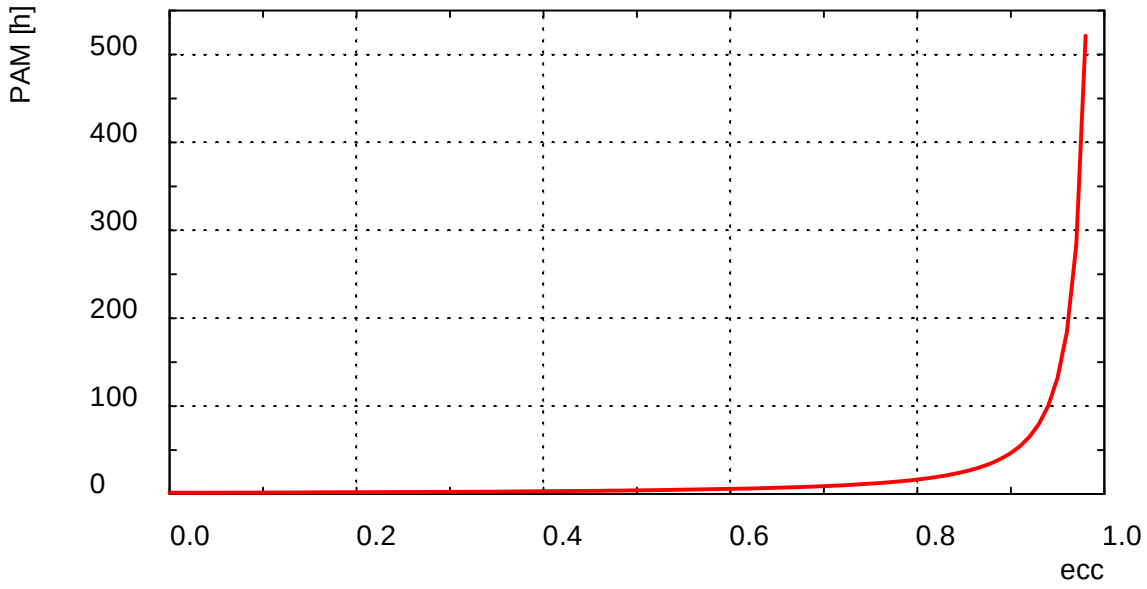


Bild 22-5: Die mittlere anomalistische Umlaufzeit über der Exzentrizität im Bereich $e \in [0.0, 1.0)$, bezogen auf die Perigäumshöhe H_P=200 km und die Inklination 23°. Man beachte: die untere Grenze der Umlaufzeit beträgt $\overline{P}_A$ (e=0.0)=1^h .47490.

BEISPIEL: Um die Abhängigkeit der mittleren anomalistischen Umlaufzeit von der Exzentrizität der Bahn zu demonstrieren werden Bahnen untersucht, die alle die Perigäumshöhe $H_P = 200\,\text{km}$ haben. Die Inklination sei für alle untersuchten Bahnen dieselbe (im Beispiel i = 23°). Bild 22-4 zeigt den Verlauf der mittleren anomalistischen Umlaufzeit für die Exzentrizitäten von 0.0 bis 0.8 mit allmählicher Zunahme. Bild 22-5 zeigt die dramatische Zunahme der Umlaufzeit für Exzentrizitäten über 0.8. Allerdings muss beachtet werden, dass es sich bei diesen Darstellungen nur um theoretische Werte handeln kann, da bei derart hochexzentrischen Bahnen der Einfluss der Potentialterme des Erdkörpers durch die Attraktion von Sonne und Mond so übertroffen wird, dass dadurch der Verlauf der Kurve verfälscht werden wird. ◀

Der Einfluss der Inklination auf den Wert der mittleren anomalistischen Umlaufzeit ist bei der Auflösung dieser Plots nicht erkennbar. Die Abhängigkeit von der Inklination wird in Beispiel 2 in Abschnitt 22.4.4 untersucht.

Im Rahmen einer Bahnanalyse für Erdsatelliten ergibt die Näherung (22.40) einen Ausdruck erster Näherung für die mittlere anomalistische Umlaufzeit ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes:

$$\begin{aligned} \overline{P}_{A0} &= \frac{2\pi}{\overline{n}_{A0}} = \frac{2\pi}{\overline{n}_{K0} + \left(\overline{M}_0\right)^{\cdot}_{Gs}} + \cdots = \\ &= \frac{2\pi}{\overline{n}_{K0}} \left[1 - \frac{3}{2}\, J_2\, \frac{R_E^2 \sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\overline{a}_0^2 \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \overline{i}_0 \right) \right] + O\left(J_2^2 \right) . \end{aligned} \tag{22.72}$$

Anstelle dieses Ausdrucks zur Berechnung der mittleren anomalistischen Umlaufzeit kann auch die Bedingungsgleichung (22.62) verwendet werden, wenn als Bahnmodell nur säkulare

Bewegungseinflüsse (bei Erdsatelliten die säkularen „Störungen“ durch (J_2, J_4)) zugelassen werden[1]. Dann liefert die Bedingungsgleichung

$$fct\left(\overline{P_A}\right) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0+\overline{P_A}\right)-\upsilon\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{22.73}$$

die „säkulare anomalistische Umlaufzeit“. Ein Blick auf (22.69) zeigt jedoch, dass die mittlere anomalistische Umlaufzeit aus der Beziehung

$$2\pi \triangleq \Delta\upsilon = \upsilon\left(t_0+\overline{P_A}\right)-\upsilon\left(t_0\right) = \overline{n_A}\,\overline{P_A} \tag{22.74}$$

unter Vernachlässigung aller periodischen Bewegungseinflüsse (und in diesem Fall auch höherer Einflüsse) erhalten werden kann. Da $\sin(2\pi)=0$ ist die Bedingung (22.73) mit der mittleren anomalistischen Umlaufzeit (22.72) erfüllt:

- *Mittlere und säkulare anomalistische Umlaufzeit sind identisch.*

22.4.3 Die mittlere anomalistische Umlaufzeit mit Luftwiderstand

Die mittlere Anomalie wird unter Einschluss der säkularen Einflüsse durch den Luftwiderstand nach der Darstellung (22.29) mit der Variation (22.45) der mittleren *Kepler*schen Bewegung berechnet aus

$$M(t) = M_0(t_0) + \left[\left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \overline{n_K}\left(t_0\right)\right]\left(t-t_0\right) - \frac{3}{2}\frac{\dot{a}_s}{\overline{a}_0}\overline{n_K}\left(t_0\right)\left(t-t_0\right)^2 + \cdots \quad . \tag{22.75}$$

Für die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_a}$ folgt daraus die Bedingung (unter Verwendung der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.30))

$$\frac{3}{2}\frac{\dot{a}_s}{\overline{a}_0}\overline{n_{K0}}\;\overline{P_{A0}}^2 - \overline{n_{A0}}\;\overline{P_{A0}} + 2\pi = 0 \tag{22.76}$$

somit

$$\overline{P_{A0}} = \frac{\overline{a}_0}{3\dot{a}_s\,\overline{n_{K0}}}\left[\overline{n_{A0}} \pm \sqrt{\left(\overline{n_{A0}}\right)^2 - 12\pi\,\frac{\dot{a}_s}{\overline{a}_0}\overline{n_{K0}}}\right] \quad . \tag{22.77}$$

Während die Bedingungsgleichung (22.76) allgemein gültig ist, ist die Auflösung nach $\overline{P_A}$ in (22.77) nur dann erlaubt, wenn $\dot{a}_s \neq 0$ angenommen werden kann. Da die Umlaufzeit eine positive Größe ist, muss das Vorzeichen vor der Wurzel entsprechend gewählt werden:

$$\begin{aligned} \dot{a}_s > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Vorzeichen: } +1 \\ \dot{a}_s < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{Vorzeichen: } -1 \quad . \end{aligned} \tag{22.78}$$

Nach NUMERICAL RECIPES[2] kann die Lösung der quadratischen Gleichung (22.76) mit der formalen Darstellung $Ax^2+Bx+C=0$ mit den Koeffizienten $A = 3\dot{a}_s\,\overline{n_{K0}}\,/\left(2\overline{a}_0\right)$, $B = -\overline{n_{A0}}$, $C = 2\pi$ und der Größe

---

[1] Siehe zum Vergleich die entsprechenden Herleitungen und Begriffsbildung in Abschnitt 21.4

[2] PRESS, W. H. et al. [1986], ch. 5.5, p. 145

$$Q := -\frac{1}{2}\left[B + \operatorname{sgn}(B)\sqrt{B^2 - 4AC} \right]$$

in der Form $x_1 = Q / A$, $x_2 = C / Q$ gefunden werden. Im aktuellen Fall führt die erste Lösung auf eine Singularität, wenn $\dot{a}_s \to 0$ angenommen wird. Es bleibt somit die zweite sicher singularitätenfreie Lösung

$$\overline{P_A} = \frac{4\pi}{\overline{n_{A0}} + \sqrt{\left(\overline{n_A}\right)_0^2 - 12\,\pi\,\dot{a}_s \dfrac{\overline{n_{A0}}}{\overline{a}_0}}} \quad . \tag{22.79}$$

Diese Darstellung ist die natürliche Erweiterung der Basisbeziehung (22.71) im Hinblick auf den Luftwiderstand.

22.4.4 Zur numerischen Berechnung im Rahmen der anomalistischen Bewegung

Zur Lösung der Bedingungsfunktion (22.62) mit einem Verfahren der sukzessiven Approximation

$$P_A^{(\kappa+1)} = P_A^{(\kappa)} - \frac{\operatorname{fct}\left(P_A^{(\kappa)}\right)}{\dfrac{d\,\operatorname{fct}\left(P_A^{(\kappa)}\right)}{dP_A^{(\kappa)}}} \tag{22.80}$$

wird die Ableitung der Bedingungsfunktion

$$\frac{d\,\operatorname{fct}\left(P_A^{(\kappa)}\right)}{dP_A^{(\kappa)}} = \cos\left[\upsilon\left(t_1 + P_A\right) - \upsilon\left(t_1\right)\right]\frac{d\upsilon}{dP_A} \tag{22.81}$$

benötigt. Als Startwert für die Iteration kann die mittlere anomalistische Umlaufzeit (22.71) verwendet werden, oder eventuell auch die oskulierende anomalistische Umlaufzeit (22.112) auf Seite 60.

Die hier benötigte Ableitung der wahren Anomalie nach der wahren anomalistischen Umlaufzeit P_A als unabhängiger Variablen kann berechnet werden mit

$$\frac{d\upsilon}{dP_A} = \frac{d\upsilon}{dE}\frac{dE}{dM}\frac{dM}{dP_A} \quad . \tag{22.82}$$

Die einzelnen Differentialquotienten werden mit Hilfe der Formeln des Zweikörperproblems erhalten:

$$\begin{aligned}
\cos\upsilon &= \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E} \\
M &= E - e\sin E \\
M &= M\left(t_1\right) + n_K\left(t - t_1\right) \\
M_1 &:= M\left(t_1\right) \\
M_2 = M\left(t_2\right) &:= M\left(t_1 + P_A\right) = E_2 - e_2\sin E_2 = M_1 + n_K\left(t_2\right)P_A \quad .
\end{aligned} \tag{22.83}$$

Der Index 2 bezieht sich auf das Ende des betrachteten Zeitintervalls $t_2 = t_1 + P_A$, wofür der Anfangszeitpunkt t_1 konstant festgehalten wird. Der zu berechnende Differentialquotient muss daher die exakte Schreibweise annehmen

$$\frac{d\upsilon_2}{dP_A} = \frac{d\upsilon_2}{dE_2}\frac{dE_2}{dM_2}\frac{dM_2}{dP_A} \tag{22.84}$$

mit $\upsilon_2 = \upsilon(t_2), E_2 = E(t_2), e_2 = e(t_2),\ n_{K2} = n_K(t_2) = \sqrt{\mu / a(t_2)}$. Damit folgen im Einzelnen[1] mit den Formeln (15.20) und (15.47)

$$\begin{aligned}
\frac{d\upsilon_2}{dE_2} &= \left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial E_2}\right|_{(e,E)} + \left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial e_2}\right|_{(e,E)} \left.\frac{\partial e_2}{\partial E_2}\right|_{(\upsilon,E)} \\
\left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial E_2}\right|_{(e,E)} &= \frac{1+e_2\cos\upsilon_2}{\sqrt{1-e_2^2}} = \frac{\sqrt{1-e_2^2}}{1-e_2\cos E_2} \\
\left.\frac{\partial\upsilon_2}{\partial e_2}\right|_{(e,E)} &= \frac{\sin\upsilon_2}{1-e_2^2} = \frac{\sin E_2}{\sqrt{1-e_2^2}\,(1-e_2\cos E_2)} \\
\left.\frac{\partial e_2}{\partial E_2}\right|_{(\upsilon,E)} &= -\frac{1-e_2^2}{\sin E_2} \quad ,
\end{aligned} \tag{22.85}$$

mit den Formeln (15.29) und (15.44)

$$\begin{aligned}
\frac{dE_2}{dM_2} &= \left.\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\right|_{(e,M)} + \left.\frac{\partial E_2}{\partial e_2}\right|_{(e,M)} \left.\frac{\partial e_2}{\partial M_2}\right|_{(E,M)} \\
\left.\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\right|_{(e,M)} &= \frac{1+e_2\cos\upsilon_2}{1-e_2^2} = \frac{1}{1-e_2\cos E_2} \\
\left.\frac{\partial E_2}{\partial e_2}\right|_{(e,M)} &= \frac{\sin\upsilon_2}{\sqrt{1-e_2^2}} = \frac{\sin E_2}{1-e_2\cos E_2} \\
\left.\frac{\partial e_2}{\partial M_2}\right|_{(E,M)} &= -\frac{1}{\sin E_2} \quad .
\end{aligned} \tag{22.86}$$

Um den Differentialquotienten der mittleren Anomalie am Ende des P_A – Intervalls zu berechnen, wird auf die Darstellung (22.29) für die mittlere Anomalie zum Endpunkt des betrachteten Intervalls zurückgegriffen:

$$\begin{aligned}
M_2 = M(t_2) = \overline{M_0}(t_1) + \left[(M_0)^{\cdot}{}_s(t_1) + \overline{n_K}(t_1) + \dot{n}_{Ks}(t_1)P_A\right]P_A + \\
+ \delta n_K(t_1+P_A)P_A + \delta M_0(t_1+P_A) = \\
= \overline{M_{01}} + n_A P_A + \delta M_0(t_1+P_A) \quad .
\end{aligned} \tag{22.87}$$

Da $\overline{M_0}(t_1)$ von P_A unabhängig ist, ebenso $\overline{n_A}$ und $\dot{n}_{Ks}$, bleibt

$$\frac{dM_2}{dP_A} = \overline{n_A} + 2\dot{n}_{Ks}P_A + \frac{\partial\left(\Delta M_0(t_2)\right)}{\partial P_A} \quad . \tag{22.88}$$

Im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung können die Abhängigkeiten *E* bzw. *M* von *e* sowie der periodischen Variationen der mittleren Epocheanomalie nur näherungsweise oder gar nicht explizit erhalten werden. Verzichtet man auf sie, wird die sukzessive Approximation (22.80) nicht als *Newton*sches Verfahren mit quadratischer Konvergenz sondern als

[1] Wegen der hier verwendeten spezifischen Schreibweise der partiellen Ableitungen siehe in Kapitel 15, Band III

vereinfachtes *Newton*sches Verfahren mit geringerer Konvergenz erhalten[1]. Dann bleiben, wenn noch auf die säkulare Variation der großen Bahnhalbachse (auf Grund etwa des Luftwiderstandes) verzichtet werden kann,

$$\begin{aligned} \frac{d\upsilon_2}{dE_2} &\approx \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2} = \frac{\sqrt{1-e_2^2}}{1-e_2 \cos E_2} \\ \frac{dE_2}{dM_2} &\approx \frac{\partial E_2}{\partial M_2} = \frac{1}{1-e_2 \cos E_2} \\ \frac{dM_2}{dP_A} &\approx \overline{n_A} \qquad . \end{aligned} \tag{22.89}$$

Gewöhnlich wird im Verlauf der Iteration der Differentialquotient $d\,\mathrm{fct}\left(P_A\right)/dP_A$ nur schwach verändert, so dass er nur einmal berechnet und dann für den ganzen Iterationsprozess unverändert verwendet werden kann.

Der Konvergenzradius der so definierten sukzessiven Approximation ist erfahrungsgemäß oft so klein, dass die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_A}$ nicht als Anfangswert genügen kann. Für jede in der wahren Anomalie υ periodische Bahn muss die wahre anomalistische Umlaufzeit P_A existieren. In diesem Fall ist es zielführender, P_A mit einer linearen Interpolation zu berechnen. Diese ist zwar numerisch aufwendiger, da sie einen häufigeren Funktionsaufruf $\mathrm{fct}\left(P_A\right)$ erfordert. Allerdings ist dieses Verfahren numerisch stabil und muss daher immer zum Ziel führen, sofern nur die Schrittweite hinreichend klein gewählt werden kann.

Anmerkung: Eine wesentliche Einschränkung beim Rechnen mit der anomalistischen Bewegung ist bei kreisnahen Bahnen gegeben als Folge der dann unpräzisen Positionierung der Apsiden: für Exzentrizitäten etwa $e < 0.01$ ist erfahrungsgemäß eine Berechnung der wahren anomalistischen Umlaufzeit und anderer mit der anomalistischen Bewegung zusammenhängenden Größen nicht sinnvoll. ◀

Zur a-priori Genauigkeitsabschätzung verwendet man mit der Bedingungsfunktion (22.62) mit der vorgegebenen Fehlergröße ΔP_A die Differenzengleichung

$$\Delta fct\left(P_A\right) = \frac{dfct\left(P_A\right)}{dP_A}\Delta P_A \qquad . \tag{22.90}$$

Die Fehlergröße ΔP_A kann mit Hilfe der wahren anomalistischen mittleren Bewegung n_a und der Definition der wahren anomalistischen Umlaufzeit

$$P_A = \frac{2\pi}{n_A} \tag{22.91}$$

sowie mit den Bahnparametern $El_k\ \left[k=1,6\right]$ und „Störparametern“ $S_k\left[k=1,2,\cdots\right]$ aus

$$\Delta P_A = -\frac{2\pi}{n_A^2}\left[\sum_{k=1}^{6}\frac{\partial n_A}{\partial El_k}\Delta El_k \;+\; \sum_k \frac{\partial n_A}{\partial S_k}\Delta S_k\right] \tag{22.92}$$

berechnet werden. Aus

[1] Siehe hierzu etwa in STUMMEL, F. UND HAINER, K. [1971], p.37 u.a.

$$n_A \approx \overline{n_A} \approx \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \cdots = \overline{n_K}\left(1 + \frac{\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{\overline{n_K}} + \cdots\right) \tag{22.93}$$

folgt

$$\frac{\partial n_A}{\partial El_k} = \frac{\partial n_K}{\partial El_k} + \frac{\partial\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{\partial El_k} + \cdots \quad \langle k = 1,2,\ldots 6 \quad . \tag{22.94}$$

Im Fall, dass die El_k die *Kepler*-Elemente seien und wenn $\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ durch die Formel (22.39) bekannt sei, ergeben sich die partiellen Ableitungen näherungsweise zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_A}{\partial a} &= -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_K}}{a}\left(1 + \frac{\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{\overline{n_K}} + \cdots\right) + \frac{3}{2}\frac{\overline{\quad}}{n_K}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-e^2}}{a^3\left(1-e^2\right)^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2 i\right) + \cdots \\
\frac{\partial n_A}{\partial e} &= -\frac{15}{4}\frac{\overline{\quad}}{n_K}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-e^2}}{a^2\left(1-e^2\right)^3}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2 i\right) + \cdots \\
\frac{\partial n_A}{\partial i} &= -\frac{9}{2}\frac{\overline{\quad}}{n_K}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-e^2}}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\sin i\cos i + \cdots \\
\frac{\partial n_A}{\partial J_2} &= \frac{3}{2}\frac{\overline{\quad}}{n_K}\frac{R_E^2\sqrt{1-e^2}}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2 i\right) + \cdots \quad .
\end{aligned} \tag{22.95}$$

Wie zu erwarten wird der Hauptanteil einer Variation in P_A durch eine Variation in der großen Bahnhalbachse *a* verursacht. Im erdnahen Bereich wirken sich die Schwankungen in *a* um einige Kilometer mit Variationen im Sekundenbereich in P_A aus.

BEISPIEL 1: Berechne die wahre anomalistische Umlaufzeit der Bahn

a = 8300.000, e = 0.2, i = 60°.0, Ω = 33°.0, ω = 221°.0, M_0 = 125°.0

zur Epoche t_0: 2015-09-25/11:30:0.00.

Der hier vorgegebenen großen Bahnhalbachse entspricht die *Kepler*sche Umlaufzeit $P_K = 7525.374528\ \mathrm{s}$. Die mittlere anomalistische Umlaufzeit auf dieser Bahn beträgt nach Formel (22.71) $\overline{P_A} = 7526.333512\ \mathrm{s}$. Zur Durchführung der Fixpunktiteration sei die Genauigkeitsschranke $\Delta P_A = 0.001\mathrm{s}$ vorgegeben. Die Ableitung der Bedingungsfunktion $fct\left(P_A\right) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0 + P_A\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] = 0$ beträgt

$$\frac{dfct\left(P_A\right)}{dP_A} = 0.6323911981499\times 10^{-3}\left[\frac{1}{s}\right] \quad .$$

Nach Beziehung (22.90) hat die Bedingungsfunktion somit die (a-priori-) Schranke $\Delta fct\left(P_A\right) = 0.6323911981499\times 10^{-6}$. (Diese Schranke kann in der Praxis auch separat vorgegeben werden). Zu einem vorgegebenen Zeitpunkt (im Beispiel $\left(t_1 = t_0\right)$) hat der Satellit die wahre Anomalie $\upsilon_1 = 141°.2111556944$. Für den Beginn der Iteration wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit als Anfangswert vorgegeben. Dies führt am Ende des $\overline{P_A}$ – Intervalls auf die wahre Anomalie $\upsilon_2^{(0)} = 141°.2110603476$ mit der Bedingungsfunktion

$\left| fct\left(\overline{P_A}\right)\right| = 0.1664114750666\times10^{-5}$. Da diese geringfügig über der Schranke $\Delta fct\left(P_A\right)$ liegt, ist ein Iterationsschritt erforderlich, der auf die wahre anomalistische Umlaufzeit $P_A = 7526.336382805\,\mathrm{s}$ führt. Die zugehörende wahre Anomalie beträgt dann $\upsilon_2^{(1)} = 141°.2111647428$ mit der Bedingungsfunktion $\left| fct\left(\overline{P_A}\right)\right| = 0.1579249895856\times10^{-6}$, die somit den berechneten Grenzwert unterscheidet. Die a-posteriori Untersuchung der Position in der Bahn beträgt $\Delta\upsilon = \left|\upsilon_2^{(1)} - \upsilon_1\right| = 0°.000009048 \mathrel{\hat{=}} 0''.033$. Dieser Wert dürfte der Genauigkeit des verwendeten Bahnmodells (säkulare, lang- und kurzperiodische Einflüsse des Erdfeldes mit den Potentialkoeffizienten J_2, J_3, J_4) entsprechen.◀

BEISPIEL 2: Um die Abhängigkeit der wahren anomalistischen Umlaufzeit (bezogen auf die Epoche t_0) von der Inklination zu untersuchen wird dieselbe Bahn wie in Beispiel 1 verwendet, jedoch mit den Inklinationen $i \in \left[0°, 180°\right)$. Die Ergebnisse werden in Tabelle 22-1 zusammengefasst[1]: Wahre und mittlere anomalistische Umlaufzeit werden wesentlich durch die Inklination beeinflusst. Im Beispiel hat der Satellit die mittlere Bahngeschwindigkeit 6.9 km/s. Die Abweichungen bis zu 12 Sekunden als Folge unterschiedlicher Inklinationen können bei deren Vernachlässigung zu erheblichen Fehlern führen. Der Unterschied zwischen der mittleren und der wahren anomalistischen Umlaufzeit ist im Beispiel sehr gering. Dies deutet darauf hin, dass für bahnanalytische Untersuchungen die Verwendung der mittleren anomalistischen Umlaufzeit für die meisten Anwendungen ausreichend ist. Auf Grund der Tatsache, dass die Inklination in den relevanten Entwicklungen (die säkulare Variation in der mittleren Epocheanomalie (22.39) sowie den Ausdrücken für die periodischen Variationen in Kapitel 20, Band III) nur in Quadraten der trigonometrischen Funktionen vorkommen, sind die Ausdrücke für die Inklinationen *i* und 180°-*i* identisch.

Im Beispiel wird auch die *Hansen*sche Umlaufzeit entsprechend den Berechnungen in Abschnitt 21.4 mit angezeigt. Die säkulare *Hansen*sche Umlaufzeit wird erhalten, wenn im verwendeten Bahnmodell lediglich die säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“) durch die zonalen Harmonischen $\left(J_2, J_4\right)$ berücksichtigt werden, die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit bei Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells unter Einschluss der periodischen Bewegungseinflüsse durch $\left(J_2, J_3, J_4, \text{ohne Luftwiderstand}\right)$. ◀

[1] Bei dem hier verwendeten Bahnmodell ist der Fall einer rückläufigen Äquatorbahn (*i*=180°) nicht definiert. Dieser Fall könnte berücksichtigt werden, wenn wie in den Abschnitten 11.4 und 11.6 der Faktor $\sigma_i = \mathrm{sgn}(\cos i)$ verwendet wird und entsprechend die Formeln des Bahnmodells variiert werden.

Inklination *i*	Säkulare *Hansen*-sche Umlaufzeit	wahre *Hansen*-sche Umlaufzeit	Mittlere anomalistische Umlaufzeit	wahre anomalistische Umlaufzeit
0°	7507.421843 s	7507.416331 s	7517.697574 s	7517.697574 s
10°	7508.235745 s	7508.230233 s	7518.044938 s	7518.053542 s
20°	7510.574563 s	7510.570889 s	7519.045059 s	7519.059400 s
30°	7514.159037 s	7514.157200 s	7520.577123 s	7520.592614 s
40°	7518.557413 s	7518.555576 s	7522.456129 s	7522.469329 s
50°	7523.238725 s	7523.236888 s	7524.455302 s	7524.463913 s
60°	7527.638938 s	7527.635263 s	7526.333512 s	7526.336383 s
70°	7531.225249 s	7531.221575 s	7527.864356 s	7527.861484 s
80°	7533.565905 s	7533.564068 s	7528.863404 s	7528.857085 s
90°	7534.377970 s	7534.376132 s	7529.210344 s	7529.202876 s
100°	7533.565905 s	7533.564068 s	7528.863404 s	7528.857085 s
110°	7531.225249 s	7531.223412 s	7527.864356 s	7527.860335 s
120°	7527.638938 s	7527.637101 s	7526.333512 s	7526.333512 s
130°	7523.238725 s	7523.236888 s	7524.455302 s	7524.461617 s
140°	7518.557413 s	7518.553739 s	7522.456129 s	7522.467033 s
150°	7514.159037 s	7514.153526 s	7520.577123 s	7520.591467 s
160°	7510.574563 s	7510.565377 s	7519.045059 s	7519.058253 s
170°	7508.235745 s	7508.222884 s	7518.044938 s	7518.052395 s
179°	7507.431029 s	7507.421843 s	7517.701083 s	7517.701083 s

Tabelle 22-1: Beispiel für die Abhängigkeit der wahren *Hansen*schen sowie der mittleren und wahren anomalistischen Umlaufzeit von der Bahninklination für Bahnen mit a = 8300 km, e = 0.2

BEISPIEL 3: Es soll der Verlauf der wahren anomalistischen Umlaufzeit über einen Umlauf untersucht werden. Dazu werde dieselbe Bahn wie in Beispiel 1 verwendet. Wie Tabelle 22-1 zeigt, sind die Unterschiede zwischen der wahren und der mittleren anomalistischen Umlaufzeit quantitativ sehr gering. Um trotzdem zu der vermuteten Variation des Betrages der wahren anomalistischen Umlaufzeit über einen (anomalistischen) Umlauf zu kommen, wird die Differenz

$$\Delta P := P_A - \overline{P_A}$$

untersucht. Um Rundungsfehler bei der numerischen Berechnung zu vermeiden, mussten die Genauigkeitsgrenzen gegenüber denen in Beispiel 2 erheblich verschärft werden: $\Delta P_A = 0.0001\text{s}$, $\Delta fct\left(P_A\right) = 1.0\times10^{-8}$. Mit diesen Werten konnte die in Bild 22-6 wiedergegebene obere Kurve (1) erhalten werden. Für eine weitere Analyse werden in diesem Bild die unterschiedlichen Auswirkungen der Bewegungseinflüsse durch die einzelnen Potentialterme J_2, J_3, J_4 demonstriert. Die qualitativen Unterschiede sind bemerkenswert und zeigen, dass die Einflüsse der kurzperiodischen „Störungen“ sehr unterschiedlich ausfallen können. Das Beispiel zeigt jedoch auch, dass die Unterschiede im Verlauf der wahren anomalistischen

Umlaufzeit im Millisekundenbereich liegen können. Insgesamt gesehen müssen die kurzperiodischen „Störungen“ im Falle einer Missionsanalyse im Zusammenhang mit der anomalistischen Bewegung daher normalerweise nicht notwendig berücksichtigt werden. ◀

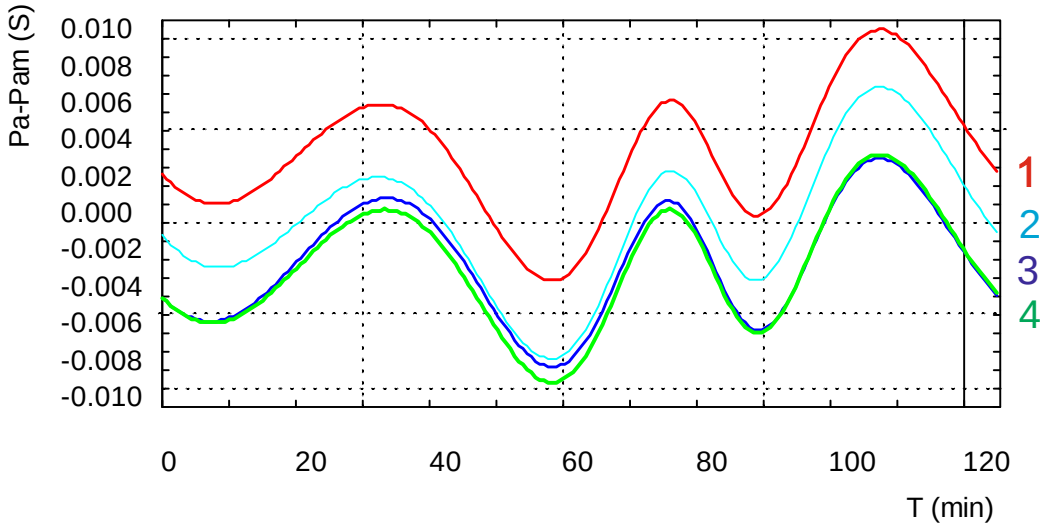


Bild 22-6: Verlauf der Differenz zwischen wahrer und mittlerer anomalistischer Umlaufzeit für die Erdsatellitenbahn a=8300 km, e = 0.2, i = 60°, bezogen auf die Epoche t_0, über einen (anomalistischen) Umlauf unter Berücksichtigung unterschiedlicher Bahnmodelle. Kurve 1 (rot): komplettes analytisches Bahnmodell, Kurve 2 (hellblau): ohne J_4, Kurve 3 (blau): nur mit J_2, Kurve 4 (grün): mit J_2 und J_4, ohne J_3.

BEISPIEL 4: Berechnung des ersten Perigäums nach einer Epoche. Diese Aufgabe besteht in der Berechnung des ersten Zeitpunktes, an dem die wahre Anomalie den Wert $0° = \upsilon_F = \upsilon(t_F) \bmod (2\pi)$ annimmt. Wir verwenden für die erste Näherung die Formel (22.50) . Die iterative Verbesserung unter Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells verwendet als Bedingungsfunktion die überlagerte Funktion

$$fct \equiv \sin\upsilon = 0 \quad .$$

Als numerisches Beispiel werde wieder die Bahn von Beispiel 1 verwendet mit der Epoche t_0: 2015-09-25/11:30:0.00. Die Tageszeit in Sekunden ist $t_0 = 41400\,\mathrm{s}$. Die zugehörige wahre Anomalie beträgt $\upsilon_0 = 141°.20$. Die mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt nach Formel (22.71) $\overline{P_a} = 7526.333512\,\mathrm{s}$. Formel (22.50) liefert mit $\sigma_i = +1$ als erste Näherung für den gesuchten Zeitpunkt des ersten Perigäums $t_P^{(0)} = 46312.397\,\mathrm{s}$ mit der wahren Anomalie $\upsilon^{(0)} = 359°.954$. Iterative Verbesserung führt auf den Zeitpunkt 46313.023 s, die zugehörige wahre Anomalie beträgt 360°.00000, was im Rahmen des verwendeten Bahnmodells als ausreichend genau betrachtet werden sollte. Die hier besprochene Aufgabenstellung dient als Vorbereitung zur Berechnung der Folge der Apsiden (siehe im folgenden Beispiel).◀

BEISPIEL 5: Fortlaufende Berechnung der Apsiden: Gegeben sei eine hochexzentrische Bahn. Die Folge der Apsiden und ihrer geographischen und inertialen Positionen ist zu berechnen.

Im Beispiel wird die Transferbahn des Satelliten Symphonie A nach Start mit einer Delta-Rakete von der ETR (Cape Canaveral) gegeben. Die Bahn wird durch die mittleren Einschussbahnelemente definiert:

Epoche: 1974-12-19/03:12:0.0 (UTC)

Höhe des Apogäums: H_A = 38138.138 km

Höhe des Perigäums: H_P = 397.932

Inklination : i = 13°.27

Östliche geographische Länge des ersten (nominellen, d.h. vor der Epoche liegenden) absteigenden Knotens: $\lambda_{\Im} = 359°.5$

Argument des Perigäums : ω=179°.798

Mittlere Epocheanomalie : M_0 = 4°.11

P	A	N	M	YEAR	MO	DA	HO	MI	SE	L(deg)	P(deg)	H(km)	AR(deg)	DE(deg)
	A	0	0	1974	12	19	8	44	44.295	95.962	-0.008	38138.138	314.718	-0.008
P		1	0	1974	12	19	14	25	15.094	190.673	-0.029	397.932	134.791	-0.029
	A	1	0	1974	12	19	20	5	45.893	285.385	0.066	38138.138	314.864	0.066
P		2	0	1974	12	20	1	46	16.692	20.096	-0.103	397.932	134.936	-0.102
	A	2	0	1974	12	20	7	26	47.490	114.807	0.139	38138.138	315.009	0.139
P		3	1	1974	12	20	13	7	18.289	209.518	-0.177	397.932	135.081	-0.176
	A	3	1	1974	12	20	18	47	49.088	304.230	0.213	38138.138	315.154	0.213
P		4	1	1974	12	21	0	28	19.887	38.941	-0.252	397.932	135.227	-0.250
	A	4	1	1974	12	21	6	8	50.685	133.652	0.287	38138.139	315.299	0.287
P		5	2	1974	12	21	11	49	21.484	228.363	-0.326	397.933	135.372	-0.324
	A	5	2	1974	12	21	17	29	52.283	323.075	0.361	38138.139	315.445	0.361
P		6	2	1974	12	21	23	10	23.081	57.786	-0.400	397.933	135.517	-0.398
	A	6	2	1974	12	22	4	50	53.880	152.497	0.435	38138.139	315.590	0.435
P		7	3	1974	12	22	10	31	24.679	247.208	-0.474	397.933	135.663	-0.471
	A	7	3	1974	12	22	16	11	55.478	341.920	0.509	38138.140	315.735	0.508
P		8	3	1974	12	22	21	52	26.276	76.631	-0.549	397.934	135.808	-0.545
	A	8	3	1974	12	23	3	32	57.075	171.342	0.583	38138.140	315.881	0.582
P		9	4	1974	12	23	9	13	27.874	266.053	-0.623	397.935	135.953	-0.619
	A	9	4	1974	12	23	14	53	58.672	0.765	0.657	38138.141	316.026	0.656
P		10	4	1974	12	23	20	34	29.471	95.476	-0.697	397.935	136.099	-0.693
	A	10	4	1974	12	24	2	15	0.270	190.187	0.730	38138.141	316.171	0.730
P		11	5	1974	12	24	7	55	31.069	284.898	-0.771	397.936	136.244	-0.767
	A	11	5	1974	12	24	13	36	1.867	19.610	0.804	38138.142	316.317	0.803
P		12	5	1974	12	24	19	16	32.666	114.321	-0.846	397.937	136.389	-0.840
	A	12	5	1974	12	25	0	57	3.465	209.032	0.878	38138.143	316.462	0.877
P		13	6	1974	12	25	6	37	34.264	303.744	-0.920	397.937	136.535	-0.914
	A	13	6	1974	12	25	12	18	5.062	38.455	0.952	38138.144	316.607	0.951
P		14	6	1974	12	25	17	58	35.861	133.166	-0.994	397.938	136.680	-0.988
	A	14	6	1974	12	25	23	39	6.660	227.878	1.025	38138.145	316.753	1.024
P		15	7	1974	12	26	5	19	37.458	322.589	-1.068	397.939	136.826	-1.061
	A	15	7	1974	12	26	11	0	8.257	57.300	1.099	38138.146	316.898	1.098
P		16	7	1974	12	26	16	40	39.056	152.011	-1.142	397.940	136.971	-1.135
	A	16	7	1974	12	26	22	21	9.855	246.723	1.173	38138.147	317.044	1.172

Tabelle 22-2: Die Abfolge der Apsiden und ihrer Positionen bezüglich der Erdoberfläche für eine Transferbahn in eine geostationäre Sollbahn (Beispiel Symphonie A)

Daraus ergeben sich die mittleren *Kepler*elemente:

Große Bahnhalbachse : $\bar{a}_0 = 25646.172$ km

Exzentrizität : $\bar{e}_0 = 0.73578634$

Inklination : $\bar{i}_0 = 13°.27$

Rektaszension des aufsteigenden Knotens: $\bar{\Omega}_0 = 314°.83971666$

Argument des Perigäums : $\bar{\omega}_0 = 179°.79800000$

Mittlere mittlere Epocheanomalie : $\overline{M_{00}} = 4°.11$

Die entsprechenden Umlaufzeiten betragen:

Mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit : $\overline{P_{K0}} = 40873.780316\ \mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 11^h\ 21^m\ 13^s.780316$

Mittlere anomalistische Umlaufzeit : $\overline{P_{A0}} = 40861.597445\ \mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 11^h\ 21^m\ 1^s.597445$

In Tabelle 22-2 wird die Folge der Apsiden in Bezug auf die Erdoberfläche sowie im inertialen Raum dargestellt:

Es bedeuten:

P – Perigäum

A – Apogäum

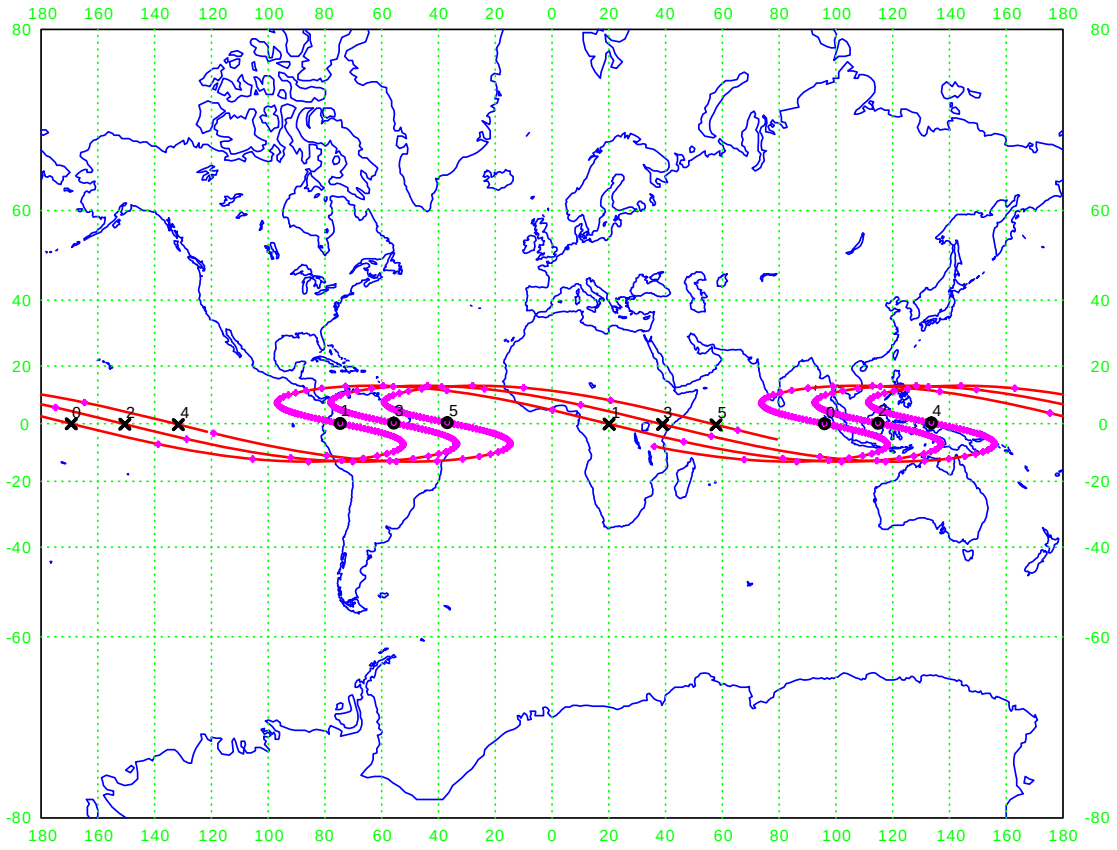


Bild 22-7: Die ersten 6 anomalistischen Umläufe der Transferbahn des Satelliten Symphonie-A in die geostationäre Bahn mit Kennzeichnung der Apsiden: X für Perigäum, O für Apogäum

N – Anzahl der anomalistischen Umläufe

M – Anzahl der Umläufe der Apsidenlinie (ungefähr Anzahl der Tage)

Zeit in U.T.

L - geographische Länge (östlich) [Grad]

P – geodätische Breite [Grad]

H – Höhe über dem mittleren Äquator [km]

AR – Rektaszension [Grad]

DE – Deklination [Grad].

Die Projektion dieser Bahn auf die Erdoberfläche über die ersten 6 anomalistischen Umläufe ist in Bild 22-7 wiedergegeben. ◀

22.4.5 Die oskulierende anomalistische Umlaufzeit

Neben den analytischen Darstellungen der mittleren anomalistischen Umlaufzeit (22.71) bzw. (22.79) wird die wahre anomalistische Umlaufzeit durch numerische Verfahren ermittelt. Im Rahmen einer Bahnanalyse kann jedoch auch eine näherungsweise hinreichend genaue analytische Darstellung von Interesse sein. Die (vermutlich) erste Darstellung geht auf *I. D. Zhongolovich*[1] zurück, der für kleine Exzentrizitäten einen analytischen Ausdruck erster Ordnung hergeleitet hat (mit der Genauigkeit $O\left(e^2\right)$). Diese Arbeit ist ein Musterbeispiel mit welcher Sorgfalt auch analytische Näherungsausdrücke hergeleitet werden müssen.

Eine für alle Exzentrizitäten gültige Form der oskulierenden anomalistischen Umlaufzeit wurde unter Berücksichtigung des Einflusses von J_2 von *Moe* und *Karp*[2] gefunden. Eine allgemeingültige Formel unter Berücksichtigung der zonalen Harmonischen $J_n\left(n \geq 2\right)$, die insbesondere auch für hochexzentrische Bahnen gültig ist, wurde von *E. A. Roth* gefunden[3]. Auf diese Arbeit wird in diesem Abschnitt hingewiesen.

22.4.6 Die Variationsgleichungen der Keplerelemente in Abhängigkeit von der wahren Anomalie

Da in der anomalistischen Bewegung die wahre Anomalie als Bahnwinkel betrachtet wird, muss die im Folgenden benötigte Integration über der wahren Anomalie durchgeführt werden. Hierzu werden die Variationsgleichungen für die große Halbachse, die Exzentrizität und die wahre Anomalie benötigt, die in der *Gauß*schen Form[4] verwendet werden. Mit der radialen Beschleunigung b_{R2}, die sich „störend" auf die „ungestörte" Zweikörperbewegung auswirkt, sowie der transversalen Beschleunigung b_T und dem Flächenparameter, der im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*bewegung die Darstellung $G = \sqrt{\mu p}$ hat, erhält man für die große Halbachse unter Verwendung der Formeln (11.82) und (11.80)

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\upsilon} = \frac{\dot{a}}{\dot{\upsilon}} = \frac{da}{dt}\frac{dt}{d\upsilon} = \frac{2a^2 r^2}{G^2} \frac{b_{R2} e \sin\upsilon + b_T\left(1 + e\cos\upsilon\right)}{1 + \frac{r^2}{e\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T \sin\upsilon\left(1 + \frac{r}{p}\right)\right]} = \\ = \frac{2a^2 r^2}{G^2}\left[b_{R2} e\sin\upsilon + b_T\left(1 + e\cos\upsilon\right)\right]\left\{1 - \frac{r^2}{e\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\sin\upsilon\left(1 + \frac{r}{p}\right) + \cdots\right]\right\} \end{aligned} \tag{22.96}$$

Da die Beschleunigungen b_{R2} und b_T im Fall von Erdsatelliten nach den Ausdrücken[5] (17.33)-(17.35) von der Größenordnung $\left(O\left(10^{-3}\right)\right)$ sind, sowie nach Linearisierung von Exzentrizität

---

[1] ZHONGOLOVITCH, I. D. [1960]. Diese Arbeit wird diskutiert in Abschnitt 2.10.8, Band I

[2] MOE, M. M. and KARP, E. E. [1961]: 'Effect of Earth's Oblateness on the Anomalistic Period of a Satellite', *ARS J.* 31, 1462 (zitiert nach ROTH, E. A. [1981], p.86)

[3] E. A. ROTH [1981]

[4] zusammengestellt in Kapitel 11.1.5 (Band III), siehe hierzu auch Abschnitt 11.13

[5] In Kapitel 17.2.2 (Band III)

und Kegelschnittparameter $p = a\left(1-e^2\right)$ um den mittleren Epochewert, erhält man in erster Näherung die Variationsgleichung[1]

$$\frac{da}{d\upsilon} = \frac{2\,\overline{p}_0^3}{\mu\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left[\frac{\overline{e}_0 \sin\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2} b_{R2} + \frac{b_T}{1+\overline{e}_0\cos\upsilon}\right] + \cdots \quad . \tag{22.97}$$

Hieraus wird durch Integration die Lösung in erster Ordnung als Funktion der wahren Anomalie υ erhalten:

$$a^{(1)} = a^{(1)}\left(\upsilon\right) = \overline{a}_0 + \Delta a^{(1)} = \overline{a}_0 + \Delta a^{(1)}\left(\upsilon\right) = \overline{a}_0 + \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{da}{d\upsilon}\, d\upsilon \quad . \tag{22.98}$$

Als Integrationskonstante wird hier der „ungestörte“ mittlere Ausgangswert $\overline{a}_0$ gesetzt.

In gleicher Weise folgt für die Exzentrizität mit dem Ausdruck[2] (11.72)

$$\frac{de}{d\upsilon} = \frac{\overline{p}_0^3}{\mu}\left[\frac{\sin\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2} b_{R2} + \frac{\overline{e}_0 + 2\cos\upsilon + \overline{e}_0\cos^2\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^3} b_T\right] + \cdots \tag{22.99}$$

somit das Integral erster Ordnung mit dem konstanten Anfangswert $\overline{e}_0$

$$e^{(1)} = e^{(1)}\left(\upsilon\right) = \overline{e}_0 + \Delta e^{(1)} = \overline{e}_0 + \Delta e^{(1)}\left(\upsilon\right) = \overline{e}_0 + \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{de}{d\upsilon}\, d\upsilon \quad . \tag{22.100}$$

Um nun die oskulierende anomalistische Umlaufzeit in erster Ordnung zu erhalten, muss das Zeitintegral über einen Umlauf der wahren Anomalie integriert werden:

$$P_A = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{1}{\dot{\upsilon}}\, d\upsilon \quad . \tag{22.101}$$

Die *Gauß*sche Variationsgleichung der wahren Anomalie (11.80) ergibt in erster Näherung

$$\frac{1}{\dot{\upsilon}} = \frac{dt}{d\upsilon} = \frac{r^2}{G} + \frac{\overline{p}_0^4}{\overline{e}_0\,\mu\sqrt{\mu\,\overline{p}_0}}\left[-\cos\upsilon\, b_{R2} + \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{\overline{p}_0}\right) b_T\right] + \cdots \quad . \tag{22.102}$$

Die Integration kann für die beiden Komponenten getrennt durchgeführt werden, da nur im zweiten Anteil die „Störgrößen“ b_{R2}, b_T enthalten sind, während der erste Anteil ohne direkten Anteil dieser Größen von erster Integrationsordnung ist. Dazu wird

$$\frac{dt}{d\upsilon} = \frac{dt_1}{d\upsilon} + \frac{dt_2}{d\upsilon} \tag{22.103}$$

gesetzt. Das zweite Integral erfolgt mit dem Flächenparameter $\overline{G}_0 = \sqrt{\mu\,\overline{p}_0}$ und der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit zur Epoche $\overline{P_{K\,0}} = 2\pi\sqrt{\overline{a}_0^3/\mu}$ über der Differentialgleichung

$$\frac{dt_2}{d\upsilon} = \frac{\overline{p}_0^2\sqrt{\left(1-\overline{e}_0^2\right)^3}}{\overline{e}_0\,\mu}\,\frac{\overline{P_{K\,0}}}{2\pi}\left[-\frac{\cos\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^4} b_{R2} + \frac{\sin\upsilon\left(2+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^5} b_T\right] + \cdots \tag{22.104}$$

und ergibt das Integral

---

[1] Die Variationen nach der wahren Anomalie finden sich bereits (vielleicht erstmals) bei *H. G. L. Krause* (in Arbeiten zwischen 1951 bis 1956) (siehe z.B. in Abschnitt 2.9.4 (Band I))

[2] Band III

$$\Delta P_{A2} = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{dt_2}{d\upsilon} d\upsilon \quad . \tag{22.105}$$

Zur Bearbeitung der ersten Komponente

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{r^2}{G} \quad , \tag{22.106}$$

die nicht (direkt) von den „Störgrößen“ b_{R2}, b_T abhängt und daher ungenähert gelöst werden muss, müssen die Lösungen $a^{(1)}$ und $e^{(1)}$ der Integrale über die Differentialgleichungen (22.97) und (22.99) verwendet werden. Um die entsprechende Differentialgleichung aufzustellen, wird mit den Lösungen (22.98) und (22.100) der Ausdruck verwendet

$$\frac{r^2}{G} = \frac{\left(p^{(1)}\right)^2}{\sqrt{\mu\, p^{(1)}}\left(1+e^{(1)}\cos\upsilon\right)^2} = \frac{\left(\overline{p}_o + \Delta p^{(1)}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}\left[1+\left(\overline{e}_0 + \Delta e^{(1)}\right)\cos\upsilon\right]^2} \quad . \tag{22.107}$$

Für den Kegelschnittparameter gilt mit der Beziehung $\overline{p}_0 = \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right)$ die Zerlegung

$$\begin{aligned} p = p^{(1)} = \overline{p}_0 + \Delta p^{(1)} &= \left(\overline{a}_0 + \Delta a^{(1)}\right)\left[1-\left(\overline{e}_0 + \Delta e^{(1)}\right)^2\right] \approx \\ &\approx \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right) + \left(1-\overline{e}_0^2\right)\Delta a^{(1)} - 2\overline{a}_0\overline{e}_0\,\Delta e^{(1)} \quad . \end{aligned} \tag{22.108}$$

Damit wird schließlich

$$\frac{r^2}{G} = \frac{\left(\overline{p}_0\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2}\left\{1+\frac{3}{2\,\overline{a}_0}\Delta a^{(1)} - \frac{3\overline{e}_0+\left(2+\overline{e}_0^2\right)\cos\upsilon}{\left(1-\overline{e}_0^2\right)\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)}\Delta e^{(1)}\right\} \quad . \tag{22.109}$$

Dieser Ausdruck zerfällt in zwei unterschiedliche Anteile. Der erste Anteil kann entsprechend der Integraltafel in Anhang D2 sofort integriert werden und ergibt die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit zur Epoche

$$\frac{\left(\overline{a}_0\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\overline{e}_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{d\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2} = \overline{P_{K0}} \quad . \tag{22.110}$$

Der zweite Anteil führt auf das Integral

$$\Delta P_{A1} = \frac{\overline{P_{K0}}\sqrt{\left(1-\overline{e}_0\right)^3}}{2\pi} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \left\{\frac{3}{2\overline{a}_0\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2}\Delta a^{(1)} - \frac{3\overline{e}_0+\left(2+\overline{e}_0^2\right)\cos\upsilon}{\left(1-\overline{e}_0^2\right)\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^3}\Delta e^{(1)}\right\} d\upsilon \quad . \tag{22.111}$$

Das Gesamtergebnis lautet

$$P_A = \overline{P_{K0}} + \Delta P_{A1} + \Delta P_{A2} \quad . \tag{22.112}$$

Mit bekannten Lösungen $\Delta a^{(1)}, \Delta e^{(1)}$ können die Integrale (22.105) und (22.111) mit Hilfe der vollständigen Integrale gelöst werden, die in Anhang D2 (Band V) zusammengestellt sind.

22.4.7 Die Lösung der oskulierenden anomalistischen Umlaufzeit nach E. A. Roth

Mit den zonalen Harmonischen J_n sowie den *Legendre*-Polynomen $P_n\left(\sin i \cdot \sin \omega\right)$ erhält *Roth* (nach langwierigen Rechnungen[1]) die allgemeine Lösung

$$\Delta P_{A1} + \Delta P_{A2} = \sum_{n=2}^{\infty} \left[3 J_n \overline{P_{K0}} \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0} \right)^n \frac{P_n\left(\sin i \cdot \sin \omega\right)}{\left(1-\overline{e}_0\right)^{n+1}} + C_n J_n \overline{P_{K0}} \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0} \right)^n \frac{f_n\left(\sin i, \sin \omega\right)}{e^{\sigma_e}\left(1-\overline{e}_0^2\right)^{n-3/2}} \right] =: \tag{22.113}$$

$$=: \sum_{n=2}^{\infty} \left[\Delta t_{1n} + \Delta t_{2n} \right] \quad .$$

Hier ist der Faktor C_n eine Konstante, f_n ist eine Funktion der beiden (getrennten) Argumente $\sin i$ und $\sin \omega$, wobei *i* und ω als oskulierende Parameter aufzufassen sind. Außerdem ist $\sigma_e = 0$ für geradzahlige *n* und $\sigma_e = 1$ für ungeradzahlige *n*.

Im Fall *n*=2 verschwindet f_2 identisch und es bleibt in diesem Fall für die oskulierende anomalistische Umlaufzeit

$$P_A\left(J_2; \omega\right) = \overline{P_{K0}} - \frac{3}{2} J_2 \overline{P_{K0}} \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0} \right)^2 \frac{1 - 3\sin^2 i \, \sin^2 \omega}{\left(1-\overline{e}_0\right)^3} \quad . \tag{22.114}$$

Dieser Ausdruck ist für alle Exzentrizitäten mit $0 < e < 1$ definiert. Man vergleiche diesen Ausdruck mit dem von *I. D. Zhongolovich* gefundenen Ausdruck (2.434), der nur für kleine Exzentrizitäten bis zur Ordnung e^2 gültig ist[2].

Für die Fälle $n \geq 3$ sind nach *Roth* folgende Fälle zu unterscheiden:

(I) Für etwa $0.8 < e < 1$ wird $\left(1-e\right)^{n+1} \ll e^{\sigma_e}\left(1-e^2\right)^{n-3/2}$ somit $\Delta t_{1n} \gg \Delta t_{2n}$, d.h. der zweite Anteil im Ausdruck (22.113) kann vernachlässigt werden.

(II) Für $0.1 < e < 0.5$ und $0 < e < 0.1$ wird bei geradzahligem *n*

$\left(1-e\right)^{n+1} \sim \left(1-e^2\right)^{n-3/2}$, somit $\Delta t_{1n} \sim \Delta t_{2n}$.

(III) Für $0.1 < e < 0.05$ wird bei ungeradzahligem *n*

$\left(1-e\right)^{n+1} \gg e\left(1-e^2\right)^{n-3/2}$, somit $\Delta t_{1n} \ll \Delta t_{2n}$.

Kritische Anmerkung: Bei der Herleitung der Differentialgleichungen (22.104) und (22.109) wurden infolge der Linearisierung Fehler der Größenordnung J_2^2 vernachlässigt. Da die höheren zonalen Harmonischen $J_n\left(n \geq 3\right)$ von dieser Größenordnung sind, können die Aussagen über die Anteile in der oskulierenden anomalistischen Umlaufzeit mit $n \geq 3$ nur als unvollständige analytisch interessierende Aussagen bewertet werden. ◀

---

[1] Die Rechnungen können nachgelesen werden in: ROTH, E. A. [1970]: 'A Method and a Computer Program for the Quick Determination of a Preliminary Launch Window for Satellites with Moderate-to-Highly Eccentric Orbits', ESRO SR-15, Paris (zitiert nach ROTH, E. A. [1981], p.86)

[2] Abschnitt 2.10.8, Band I

22.5 Kleine Bewegungsänderungen im Erdgravitationsfeld

Geschlossene analytische Ausdrücke, die für Überblicks- und Langzeituntersuchungen vorteilhaft sind, sind nur mit eingeschränkter Genauigkeit und in eingeschränktem Umfang bekannt, wie die Formulierungen im vorhergehenden Kapitel zeigen. Das mit diesen Formeln beschreibbare Bahnverhalten weicht nach einiger Zeit vom wahren Bahnverhalten in einem Maß ab, das für bestimmte Untersuchungen nicht mehr tolerierbar ist. Diese Abweichungen werden als „kleine Bahnänderungen" bezeichnet, wenn sie die analytisch erfassbare „Sollbahn" nur in größeren Zeiträumen (Tage, Wochen) etwas verändern. Sie haben ihre Ursachen in den höheren Einflüssen durch die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers, langfristige Variationen durch den Luftwiderstand, Attraktionen anderer Himmelskörper und weiterer kleiner Effekte. Diese Einflüsse müssen mit Näherungsformeln abgeschätzt oder aus numerischen Rechnungen gemittelt werden können. Sie müssen bei Langfristuntersuchungen berücksichtigt werden. Sie helfen auch bei der Abschätzung von Bahnkorrekturen, die zum Erhalt einer analytisch gewählten Sollbahn dienen. In beiden Anwendungen kann die numerisch ermittelte Bahn, die alle kurzperiodischen Variationen enthält, nicht oder nur mit unnötig großem Aufwand für generelle Aussagen herangezogen werden.

22.5.1 Partialausdrücke der allgemeinen Keplerbewegung

Analytische Ephemeridenrechnungen über lange Zeiträume, Genauigkeitsabschätzungen und manche Verbesserungsmethoden benötigen Partialausdrücke der analytisch dargestellten Bahnparameter. Es ist nicht sinnvoll, einen kompletten Vorrat dieser Ausdrücke hier zusammenzustellen, von denen dann erfahrungsgemäß nur ein kleiner Teil benötigt wird. Für gewisse Langzeituntersuchungen sind freilich die Partialausdrücke zumindest erster Ordnung in J_2 in den mittleren Bahnelementen unentbehrlich. Sie werden deshalb hier zusammenfassend hergeleitet. Bei langfristigen Untersuchungen müssen Korrekturen höherer Ordnung berücksichtigt werden. Gewöhnlich genügen Korrekturen 2. Ordnung, wie in den Formeln dieses Kapitels behandelt.

Es wird angenommen, dass die wichtigsten Variationen in den Epoche-Bahnelementen $\bar{a}_0$, $\bar{e}_0$, $\bar{i}_0$, $\bar{\Omega}_0$, $\bar{\varpi}_0$, $\bar{M}_{00}$ und eventuell auch in den säkularen Störkoeffizienten, insbesondere in $\dot{a}_s$, $\dot{e}_s$ und $(i)^{\cdot}_s$, bekannt seien. Allerdings kann im Allgemeinen nicht angenommen werden, dass die gegebenen Variationen nicht von der Zeit unabhängig seien. Die folgenden Formeln gelten daher nicht in voller Allgemeinheit. Es müssen gegebenenfalls feinere Untersuchungen angestellt werden als sie mit diesen Formeln möglich sind. Die Variationen in den Epocheelementen sind in der Regel nicht konstant. Typische Beispiele sind die Einflüsse des Luftwiderstandes, der vor allem dem 11-jährigen Sonnenzyklus mit unterschiedlichen Maxima unterworfen ist sowie Einflüsse durch Sonnen- und Mondgravitation mit ihren Perioden von einem Jahr bzw. einem Monat.

22.5.1.1 Rektaszension des aufsteigenden Knotens

Die mittlere Rektaszension des aufsteigenden Knotens hat die Entwicklung um den mittleren Wert zur Epoche des aufsteigenden Knotens

$$\bar{\Omega} \;=\; \bar{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_{s0}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\ddot{\Omega}_{s0}\,(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.115}$$

mit $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}(t)$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}(t_0)$, wenn säkulare Veränderungen in den Epocheelementen, dargestellt etwa durch die Ausdrücke $\dot{a}_{s0}$, $\dot{e}_{s0}$, $(i)^{\cdot}_{s0}$, $\dot{\Omega}_{s0}$, $\dot{\omega}_{s0}$, $\dot{M}_{0s0}$, berücksichtigt werden müssen. Die Variation der Epocheknotendrift lautet

$$\begin{aligned}\ddot{\Omega}_{s0} &= \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0} + \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{e}_0}\,\dot{e}_{s0} + \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{i}_0}\,(i)^{\cdot}_{s0} + \\ &+ \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{\Omega}_0}\,\dot{\Omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{\omega}_0}\,\dot{\omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{\Omega}_{s0}}{\partial\bar{M}_{00}}\,(M_0)^{\cdot}_{s0} \quad .\end{aligned} \tag{22.116}$$

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, ist nach Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$\dot{\Omega}_{Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2\,\frac{\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.117}$$

In diesem Fall lauten die Partialausdrücke erster Ordnung

$$\frac{\partial\dot{\Omega}_{Gs0}}{\partial\bar{a}_0} = \frac{21}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.118}$$

$$\frac{\partial\dot{\Omega}_{Gs0}}{\partial\bar{e}_0} = -6\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\,\bar{e}_0}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\cos\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.119}$$

$$\frac{\partial\dot{\Omega}_{Gs0}}{\partial\bar{i}_0} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\sin\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.120}$$

Die Variation des säkularen Variationskoeffizienten $\dot{\Omega}_{s0G}$ in erster Ordnung durch die Anisotropie des Schwerefeldes das Zentralkörpers lautet daher

$$\ddot{\Omega}_{Gs0} = -\frac{3}{4}\,J_2\,R_E^2\,\frac{\overline{n_{K0}}}{p_0^2}\left\{\cos\bar{i}_0\left[-\frac{7}{\bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0} + \frac{8\,\bar{e}_0}{1-\bar{e}^2}\,\dot{e}_{s0}\right] - 2\sin\bar{i}_0\,(i)^{\cdot}_{s0}\right\} + O\left(J_2^2\right) . \tag{22.121}$$

22.5.1.2 Argument des Perizentrums

Das mittlere Argument des Perizentrums hat die allgemeine Darstellung

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_{s0}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\ddot{\omega}_{s0}\,(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.122}$$

und

$$\begin{aligned}\ddot{\omega}_{s0} &= \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0} + \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{e}_0}\,\dot{e}_{s0} + \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{i}_0}\,(i)^{\cdot}_{s0} + \\ &+ \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{\Omega}_0}\,\dot{\Omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{\omega}_0}\,\dot{\omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{\omega}_{s0}}{\partial\bar{M}_{00}}\,(M_0)^{\cdot}_{s0} \quad .\end{aligned} \tag{22.123}$$

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, ist nach Abschnitt 20.2.1

$$\dot{\omega}_{Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2\,\frac{1-5\cos^2\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} + O\left(J_2^2\right)$$

und daher

$$\frac{\partial\dot{\omega}_{Gs0}}{\partial\bar{a}_0} = \frac{21}{8}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right) + \ldots \tag{22.124}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_{Gs0}}{\partial \bar{e}_0} = -3\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\,\bar{e}_0}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right)+\ldots \tag{22.125}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_{Gs0}}{\partial \bar{i}_0} = -\frac{15}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0\sin\bar{i}_0+\ldots \tag{22.126}$$

Der säkulare Variationskoeffizient $\dot{\omega}_{s0G}$ beschreibt in erster Ordnung die Drift infolge der Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers

$$\ddot{\omega}_{Gs0} = -\frac{3}{4}\,J_2\,R_E^2\,\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{p}_0^2}\left\{\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)\left[-\frac{7}{2\,\bar{a}_0}\,\dot{a}_{s0}+\frac{4\,\bar{e}_0}{1-\bar{e}_0^2}\,\dot{e}_{s0}\right]-10\cos\bar{i}_0\sin\bar{i}_0\,(i)^{\cdot}_{s0}\right\}+O\left(J_2^2\right). \tag{22.127}$$

22.5.1.3 Mittlere Epoche-Anomalie

In der Definitionsgleichung der mittleren Anomalie

$$M = M_0+\int_{t_0}^{t} n_K\,dt \tag{22.128}$$

werde die hier verwendete *Kepler*sche mittlere Bewegung $n_K=\sqrt{\mu/a^3}$ zerlegt in

$$n_K = \overline{n_{K0}}+\left(\overline{n_{K0}}\right)^{\cdot}(t-t_0)+\frac{1}{2}\left(\overline{n_{K0}}\right)^{\cdot\cdot}(t-t_0)^2+\ldots+\delta n_K \quad . \tag{22.129}$$

Der periodische Anteil δn_K werde herausgemittelt, so dass sich für die mittlere mittlere Anomalie der Ausdruck

$$\bar{M} = \bar{M}_0+\overline{n_{K0}}\,(t-t_0)+\frac{1}{2}\left(\overline{n_{K0}}\right)^{\cdot}(t-t_0)^2+\ldots \tag{22.130}$$

ergibt. Die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung $\overline{n_{K0}}$ zur Epoche t_0 wird mit Hilfe des 3. *Kepler*schen Gesetzes

$$\mu = \overline{n_{K0}}^2\,\bar{a}_0^3 \tag{22.131}$$

auf die mittlere Halbachse $\bar{a}_0$ zur Epoche bezogen, so dass ihre Variation

$$\left(\overline{n_{K0}}\right)^{\cdot} = -\frac{3}{2}\,\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\left(\bar{a}_0\right)^{\cdot} \tag{22.132}$$

ergibt. Wird in der Variation der Epochehalbachse nur der säkulare Anteil $\dot{a}_s$ berücksichtigt

$$\left(\bar{a}_0\right)^{\cdot} = \dot{a}_s+\delta\left(\bar{a}_0\right)^{\cdot} \quad , \tag{22.133}$$

hat die mittlere mittlere Anomalie die Entwicklung

$$M = \bar{M}_0+\overline{n_{K0}}\,(t-t_0)-\frac{3}{4}\,\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\,\dot{a}_s\,(t-t_0)^2+\ldots \tag{22.134}$$

Die mittlere mittlere Epocheanomalie $\bar{M}_0$ wird üblicherweise als ein Bahnparameter („*Kepler*element“) verwendet, weshalb die Schreibweise

$$\overline{M_0} := \bar{M}_0 \tag{22.135}$$

sinnvoll ist. Sie lässt sich selbst um einen Epochewert entwickeln

$$\overline{M_0} = \overline{M_{00}} + \dot{M}_{0s0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{M}_{0s0}(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.136}$$

Dies führt auf die allgemeine Darstellung der mittleren mittleren Anomalie

$$\bar{M} = \overline{M_{00}} + \left(\overline{n_{K0}} + \dot{M}_{0s0}\right)(t-t_0) + \left(-\frac{3}{4}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0}\dot{a}_s + \frac{1}{2}\ddot{M}_{0s0}\right)(t-t_0)^2 + \ldots \tag{22.137}$$

Die Variation der Drift der mittleren Epocheanomalie lautet

$$\begin{aligned}\ddot{M}_{0s0} = {} & \frac{\partial\dot{M}_{0s0}}{\partial\bar{a}_0}\dot{a}_{s0} + \frac{\partial\dot{M}_{0s0}}{\partial\bar{e}_0}\dot{e}_{s0} + \frac{\partial\dot{M}_{0s0}}{\partial\bar{i}_0}(i)^{\cdot}_{s0} + \\ & + \frac{\partial\dot{M}_{0s0}}{\partial\bar{\Omega}_0}\dot{\Omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{M}_{0s0}}{\partial\bar{\omega}_0}\dot{\omega}_{s0} + \frac{\partial\dot{M}_{0s0}}{\partial\bar{M}_{00}}(M_0)^{\cdot}_{s0} + \ldots\end{aligned} \tag{22.138}$$

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, ist nach Abschnitt 20.2.1

$$\dot{M}_{0Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2\,\frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \tag{22.139}$$

und daher

$$\frac{\partial\dot{M}_{0Gs0}}{\partial\bar{a}_0} = \frac{21}{8}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + \ldots \tag{22.140}$$

$$\frac{\partial\dot{M}_{0Gs0}}{\partial\bar{e}_0} = -\frac{9}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + \ldots \tag{22.141}$$

$$\frac{\partial\dot{M}_{0Gs0}}{\partial\bar{i}_0} = -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0\sin\bar{i}_0 + \ldots \tag{22.142}$$

Nach dem Muster der in diesem Kapitel hergeleiteten Variationsgleichungen werden weitere Formeln im Zusammenhang mit den speziellen Aufgabenstellungen der nächsten Kapitel hergeleitet.

22.5.2 Genauigkeitsabschätzungen für Erdsatelliten

Für eine Genauigkeitsabschätzung erster Ordnung der Variationen der Bahnparameter Ω, ω, M_0 können die in Abschnitt 22.5.1 (ab Seite 62) hergeleiteten Variationen angewandt werden. Die Abschätzungen gelten jeweils unter der Annahme, dass die höheren Einflüsse („Störungen“) klein gegenüber den Einflüssen durch J_2 sind und daher gegenüber diesen Abschätzungen vernachlässigt werden können.

22.5.2.1 Rektaszension des aufsteigenden Knotens

Um einen Fehler in der Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens wegen der Funktionalität (22.117) auf Fehler in den Parametern a, e, i zurückführen zu können, wird der Ansatz

$$\Delta\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)=\frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)}{\partial e}\Delta e+\frac{\partial\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)}{\partial i}\Delta i \tag{22.143}$$

verwendet. Zur Übersichtlichkeit kann die Definition

$$B_2 := \frac{3}{2}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \tag{22.144}$$

eingeführt werden. Damit folgt

$$\Delta\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)=B_2\left\{\frac{7}{2}\frac{\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta a-4\frac{\bar{e}_0\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\Delta e+\frac{\sin\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta i\right\}+\cdots \quad . \tag{22.145}$$

Für Erdsatelliten können folgende numerische Abschätzungen durchgeführt werden. Zunächst wird

$$B_{2_{\oplus}^{\pm}}=4.170886113\times10^7\,\frac{\mathrm{km}^3\sqrt{\mathrm{km}}}{s} \tag{22.146}$$

erhalten. Wird als untere Grenze für eine Erdsatellitenbahn die Bahnhöhe H=200 km zugelassen, gelten die Abschätzungen $\bar{a}_0 \geq \overline{r_{P0}} = \bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0\right) \geq R_E + 200\,\mathrm{km}$. Damit können obere Grenzen für die hier verwendeten Parameter abgeschätzt werden:

$$\left|\frac{7}{2}\frac{\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right|=\left|\frac{7}{2}\frac{\cos\bar{i}_0}{\bar{a}_0^2\sqrt{\bar{a}_0}\left(1+\bar{e}_0\right)^2\overline{r_{P0}}^2}\right|\leq\frac{7}{2}\frac{\cos\bar{i}_0}{\overline{r_{P0}}^4\sqrt{\overline{r_{P0}}}}\leq 2.3\times10^{-17}\ \mathrm{km}^{-4.5} \tag{22.147}$$

$$\left|\frac{4\bar{e}_0\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\right|=\frac{4\bar{e}_0\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0}\left(1+\bar{e}_0\right)^3\overline{r_{P0}}^3}\leq\frac{4}{\overline{r_{P0}}^3\sqrt{\overline{r_{P0}}}}\leq1.7\times10^{-13}\ \mathrm{km}^{-3.5} \tag{22.148}$$

$$\left|\frac{\sin\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right|=\frac{\left|\sin\bar{i}_0\right|}{\bar{a}_0\sqrt{\bar{a}_0}\left(1+\bar{e}_0\right)^2\overline{r_{P0}}^2}\leq\frac{1}{\overline{r_{P0}}^3\sqrt{\overline{r_{P0}}}}\leq4.3\times10^{14}\ \mathrm{km}^{-3.5} \tag{22.149}$$

Es ergibt sich für Erdsatelliten die Abschätzung

$$\left|\Delta\left(\dot{\Omega}_{Gs0}\right)\right|\leq9.6\times10^{-6}\left|\Delta a\right|+7.1\times10^{-6}\left|\Delta e\right|+1.8\times10^{-6}\left|\Delta i\right|\quad\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \quad . \tag{22.150}$$

- *Der Fehler in der Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens hängt ausschließlich von der Größenordnung der Fehler in den Keplerelementen a, e und i ab.*

Mit den obigen Werten kann im Fall von Erdsatelliten die Größenordnung der Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens in erster Ordnung nach oben abgeschätzt werden:

$$\left|\dot{\Omega}_{Gs0}\right|=\left|-\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2\,\frac{\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right|\leq\frac{B_2}{\sqrt{\overline{r_{P0}}^7}}\leq1.8\times10^{-6}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]\hat{=}\,8°.9/\mathrm{d} \quad . \tag{22.151}$$

22.5.2.2 Argument des Perizentrums

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, kann nach Abschnitt 20.2.1 das Argument des Perigäums als Funktion der *Kepler*elemente *a, e, i* aufgefasst werden:

$$\dot{\omega}_{Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \frac{1-5\cos^2 \bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} + O\left(J_2^2\right) = \\ = \frac{1}{2} B_2 \frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} + O\left(J_2^2\right) \ . \tag{22.152}$$

Mit dem Ansatz

$$\Delta\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right) = \frac{\partial\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)}{\partial i}\Delta i \tag{22.153}$$

lautet die Variation

$$\Delta\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right) = \frac{1}{2} B_2 \left\{ -\frac{7}{2}\frac{5\cos^2 \bar{i}_0 - 1}{\sqrt{\bar{a}_0^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta a + \frac{4\bar{e}_0\left(5\cos^2 \bar{i}_0 - 1\right)}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\Delta e - \frac{10\sin \bar{i}_0 \cos \bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta i \right\} + \cdots \tag{22.154}$$

Die entsprechende Abschätzung ergibt (wie im vorhergehenden Abschnitt) mit der Perizentrumsdistanz r_P

$$\left|\Delta\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)\right| \le \frac{1}{2} B_2 \left\{ \frac{14}{\overline{r_{P0}^4}\sqrt{r_{P0}}}\Delta a + \frac{16}{\overline{r_{P0}^3}\sqrt{r_{P0}}}\Delta e + \frac{5}{\overline{r_{P0}^3}\sqrt{r_{P0}}}\Delta i \right\} \tag{22.155}$$

und im Fall von Erdsatelliten die obere Abschätzung

$$\left|\Delta\left(\dot{\omega}_{Gs0}\right)\right| \le 1.92\times10^{-9}\left|\Delta a\right| + 2.9\times10^{-5}\left|\Delta e\right| + 9.03\times10^{-6}\left|\Delta i\right| \quad \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \quad . \tag{22.156}$$

Die Größenordnung in erster Ordnung der Variation des Argumentes des Perigäums kann nach oben abgeschätzt werden zu:

$$\left|\dot{\omega}_{Gs0}\right| = \left| -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \frac{1-5\cos^2 \bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \right| \le \frac{2B_2}{\sqrt{r_{P0}^7}} \le 3.6\times10^{-6}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \triangleq 17°.8/\mathrm{d} \quad . \tag{22.157}$$

22.5.2.3 Mittlere Epoche-Anomalie

Im Fall, dass nur die Anisotropie des Schwerefeldes des Zentralkörpers herangezogen wird, kann nach Abschnitt 20.2.1 auch die mittlere Epocheanomalie als Funktion der *Kepler*elemente *a, e, i* aufgefasst werden:

$$\dot{M}_{0Gs0} = \mathrm{fct}\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) = -\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2 \bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) = \\ = \frac{1}{2} B_2 \frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(3\cos^2 \bar{i}_0 - 1\right) + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.158}$$

Mit dem Ansatz

$$\Delta\left(\dot{M}_{0Gs0}\right) = \frac{\partial\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)}{\partial i}\Delta i \tag{22.159}$$

lautet die Variation

$$\Delta\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)=\frac{1}{2}B_2\left\{-\frac{7}{2}\frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(3\cos^2\bar{i}_0-1\right)}{\sqrt{\bar{a}_0^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta a+\frac{3\bar{e}_0\left(3\cos^2\bar{i}_0-1\right)}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)^5}\Delta e-\right.$$
$$\left.-\frac{6\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\sin\bar{i}_0\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\Delta i\right\}+\cdots \quad . \tag{22.160}$$

Die Abschätzung ergibt

$$\left|\Delta\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)\right|\le\frac{1}{2}B_2\left\{\frac{7}{\bar{r}_{P0}^4\sqrt{\bar{r}_{P0}}}\Delta a+\frac{6}{\bar{r}_{P0}^3\sqrt{\bar{r}_{P0}}}\Delta e+\frac{3}{\bar{r}_{P0}^3\sqrt{\bar{r}_{P0}}}\Delta i\right\} \tag{22.161}$$

und im Fall von erdnahen Satellitenbahnen

$$\left|\Delta\left(\dot{M}_{0Gs0}\right)\right|\le 9.61\times10^{-10}\left|\Delta a\right|+1.08\times10^{-5}\left|\Delta e\right|+5.42\times10^{-6}\left|\Delta i\right|\ \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \quad . \tag{22.162}$$

Die Größenordnung in erster Ordnung der Variation des Argumentes des Perigäums kann nach oben abgeschätzt werden zu:

$$\left|\dot{M}_{0Gs0}\right|=\left|-\frac{3}{4}\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2\frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\sqrt{\bar{a}_0^7}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right)\right|\le\frac{B_2}{\sqrt{\bar{r}_{P0}^7}}\le 1.8\times10^{-6}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]\triangleq 8°.9/\text{d}. \tag{22.163}$$

22.6 Bahnauswahl aus anomalistischer Umlaufzeit

22.6.1 Große Bahnhalbachse bei Vorgabe der anomalistischen Umlaufzeit

Wir wollen die vorstehenden Überlegungen auf die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zu einer Epoche t_0 aus der mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P_{A0}}=\overline{P_A}\left(t_0\right)$ bzw. der wahren anomalistischen Umlaufzeit $P_{A0}=P_A\left(t_0\right)$ anwenden. Die Epocheelemente mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ und mittlere Inklination $\bar{i}_0$ seien vorgegeben. Eine erste Näherung für die entsprechende große Bahnhalbachse ergibt sich unter Vernachlässigung aller „Störungen“ aus dem *Kepler*schen Ansatz

$$\frac{2\pi}{\left(\overline{P_A}\right)_0}\ \hat{=}\ \frac{2\pi}{\overline{P_A}}\ =\ \overline{n_A}\ =:\ \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} \tag{22.164}$$

somit

$$\bar{a}_0^{(0)}\ =\ \sqrt[3]{\frac{\mu\,\overline{P_A}^2}{4\pi^2}} \quad . \tag{22.165}$$

Um einen verbesserten Wert für die große Bahnhalbachse zu berechnen

$$\bar{a}_0^{(1)}\ =\ \bar{a}_0^{(0)}+\Delta\bar{a}_0^{(1)} \tag{22.166}$$

wird im Fall von erdnahen Satellitenbahnen mit Berücksichtigung der säkularen „Störeinflüsse“ durch J_2 die mittlere anomalistische mittlere Bewegung mit den Gleichungen (22.70) und (22.39) dargestellt durch

$$\overline{n_A} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^{\,3}}}\left[1+\frac{3}{2}J_2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(\frac{R_E}{\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \quad .(22.167)$$

Quadrierung ergibt

$$\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3} = \frac{\mu}{\bar{a}_0^{\,3}}\left[1+3J_2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(\frac{R_E}{\bar{a}_0\left(1-\bar{e}_0^2\right)}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \quad . \quad (22.168)$$

Wird hier die Linearisierung (22.166) eingesetzt, wird

$$\frac{1}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3} = \frac{1}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3} - \frac{3\Delta\bar{a}_0^{(1)}}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^4} + \frac{3}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^5}J_2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(\frac{R_E}{1-\bar{e}_0^2}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \quad (22.169)$$

bzw.

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = \frac{1}{\bar{a}_0^{(0)}}J_2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(\frac{R_E}{1-\bar{e}_0^2}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\,\bar{a}_0^{(0)}\right) \quad . \quad (22.170)$$

Mit dem Näherungsausdruck (21.71) kann die mittlere große Bahnhalbachse in erster Näherung bei vorgegebener anomalistischer mittlerer Umlaufzeit mit der Formel

$$\bar{a}_0^{(1)} = \bar{a}_0^{(0)} + \frac{1}{\bar{a}_0^{(0)}}J_2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(\frac{R_E}{1-\bar{e}_0^2}\right)^2\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\,\bar{a}_0^{(0)}\right) \quad (22.171)$$

berechnet werden.

Die ausführliche Herleitung zeigt, dass die beiden Linearisierungen (22.168) und (22.169) keinen größeren Gesamtfehler als von der Ordnung J_2^2 verursachen. Deshalb ist die analytische Darstellung (22.171) im Hautproblem der Erdsatelliten-Bahnmechanik völlig ausreichend zur Berechnung der großen Epoche-Bahnhalbachse $\bar{a}_0$. Ein Iterationsprozess, wie ihn Gleichung (22.70) ohne die Linearisierung (22.166) nahe legen würde, kann somit umgangen werden.

Eine weitere Verbesserung kann mit der Bedingungsgleichung (wieder mit der Sinusfunktion als überlagerter Funktion)

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left(\upsilon\left[t_0+P_A;\bar{a}_0\right]-\upsilon\left[t_0;\bar{a}_0\right]\right) = 0 \quad (22.172)$$

geschehen, wozu die vorgegebene mittlere oder wahre anomalistische Umlaufzeit eingesetzt wird. Die hierzu eventuell benötigte Ableitung dieser Bedingungsgleichung nach der wahren Anomalie findet sich in Abschnitt 22.4.4 ab Seite 49.

Die Korrektur erster Ordnung (22.170) zeigt, dass der Term $\bar{a}_0^{(0)}\,\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ eine von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Größe ist, welche für alle Halbachsen denselben Betrag liefert.

Diese Größe hängt nur von der Exzentrizität und der Inklination ab. Bild 22-8 zeigt den Verlauf über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Die gemeinsame Nullstelle wird aus

$$\sin^2\bar{i}_{0a1/2} = \frac{2}{3} \quad (22.173)$$

errechnet für die Inklinationen $\bar{i}_{0a1} = 54°.7356$, $\bar{i}_{0a2} = 125°.2644$.

BEISPIEL 1: Gegeben sei die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_a = 43200\,\mathrm{s}$, die Bahn soll die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.75$ haben, die Bahnebene soll um $\overline{i}_0 = 23°$ gegenüber dem Äquator geneigt sein. Damit ergeben sich für die gesuchte mittlere große Bahnhalbachse folgende Werte:

$\overline{a}_0^{(0)} = 26610.22281\,\mathrm{km}$. Die Korrektur mit Formel (22.170) ergibt $\Delta\overline{a}_0 = 4.40962\,\mathrm{km}$. Der endgültige Wert mit Hilfe der Iteration (22.172) lautet somit $\overline{a}_0 = 26614.63243\,\mathrm{km}$. Zur Kontrolle wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit mit der berechneten Halbachse ausgerechnet: $\overline{P}_A(\overline{a}_0) = 43199.994960\,\mathrm{s}$. Der a posteriori Fehler ist somit von der Größenordnung $10^{-3}\,\mathrm{s}$. ◄

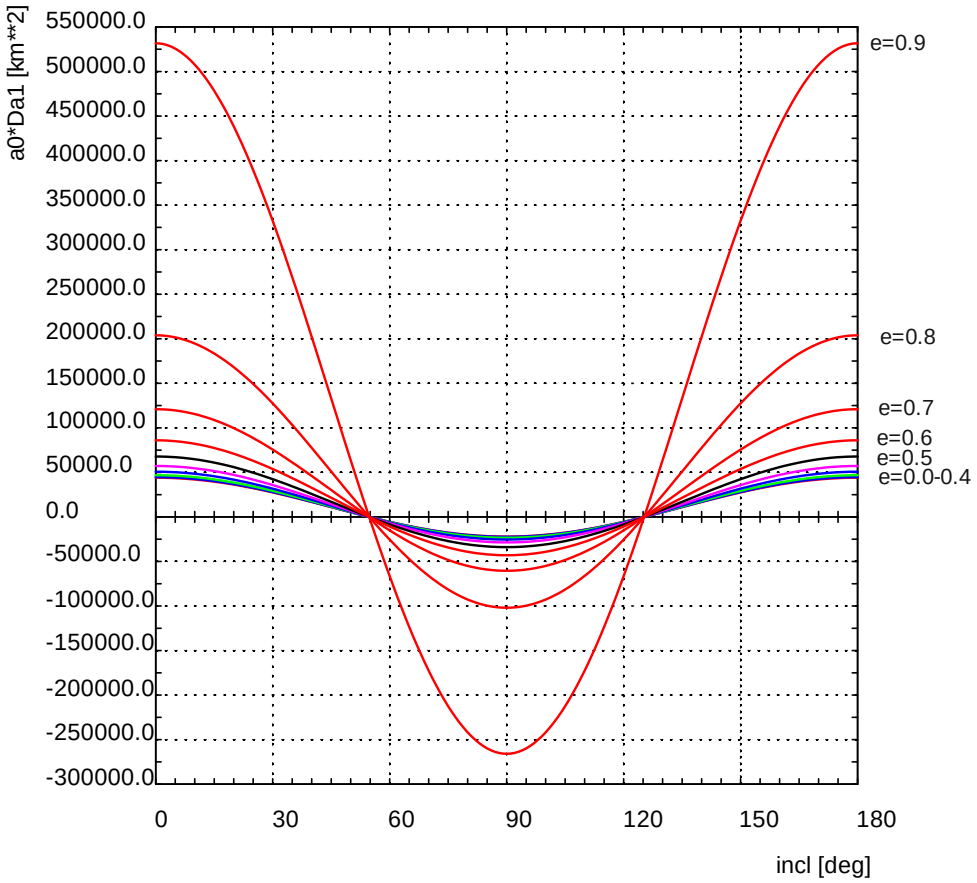


Bild 22-8: Der von der nullten Näherung $\overline{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\overline{a}_0^{(0)}\,\Delta\overline{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit, berechnet über alle Inklinationen für verschiedene Exzentrizitäten

BEISPIEL 2: Es werde jetzt angenommen, dass der Wert $P_A = 43200\,\mathrm{s}$ die wahre anomalistische Umlaufzeit einer Erdsatellitenbahn sei. Mit den weiteren Parametern $\overline{e}_0 = 0.75$ und $\overline{i}_0 = 23°$ liefert die Iteration (22.172) für die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 26614.63243\,\mathrm{km}$. Die entsprechende mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P}_A = 43199.994960\,\mathrm{s}$, die wahre anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_A = 43199.993364\,\mathrm{s}$. Auch hier ist der a posteriori Fehler von der Größenordnung $10^{-3}\,\mathrm{s}$. Die Rechnungen wurden mit den a priori Genauigkeiten $|\Delta a| = |\Delta fct| = 10^{-6}, |\Delta a| = 10^{-7}$ durchgeführt. ◄

22.6.2 Die Zwei-Zeilen-Elemente („two-line elements“)

Als ein BEISPIEL zur Anwendung der anomalistischen mittleren Bewegung in der Satellitenbahnmechanik können die „Zweizeilenelemente“ („two-line elements“) angeführt werden. Standardmäßig werden Bahnelemente für alle Erdsatelliten nach automatischer Beobachtung und Auswertung in vereinfachter Form in kurzen Zeitabständen (täglich bzw. nach wenigen Tagen) zur Verfügung gestellt[1]. Diese Bahnelemente sind mittlere Elemente wesentlich im Sinn des *Brouwer*schen Bahnmodells und seiner formalen Weiterentwicklung[2]. Hier wird üblicherweise der *SGP4 Orbit Propagator* für die Bahnberechnungen zur Verfügung gestellt, es kann aber auch ein darauf aufbauender Orbit Propagator zum Einsatz kommen. Dies schränkt aber in jedem Fall die Genauigkeitsaussage ein, genügt aber etwa für bahnanalytische Untersuchungen oder zur Berechnung für das Beobachten mit dem bloßen Auge oder für Antennenanlagen mit nicht allzu enger Antennenkeule. Sie sind jedoch nicht geeignet für hochpräzise Untersuchungen, etwa zur Formationshaltung oder zu exakter Bahnvorhersage.

Diese Bahndaten werden in einem strengen Format in zwei Zeilen übermittelt. Das Arbeiten mit diesen Elementen wird dadurch erschwert, dass zwar die Bahnelemente in der *Kepler*schen Form verwendet werden - unter Einschluss der mit den *Kepler*schen Elementen verknüpften Singularitäten - , dass aber die große Bahnhalbachse nicht beigestellt wird, sondern erst aus der Anzahl N_a der mittleren anomalistischen Umläufe pro mittlerem Sonnentag berechnet werden muss.

Aus der Anzahl N_a wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit, die im Sinne der Definitionsgleichung (22.71) gegeben ist, berechnet

$$\overline{P_A} = \frac{86400}{N_A} = \frac{2\pi}{\overline{n_A}} \; [s] \quad , \tag{22.174}$$

womit auch die mittlere anomalistische mittlere Bewegung

$$\overline{n_A} = \frac{2\pi N_A}{86400}\left[\frac{1}{s}\right] \tag{22.175}$$

bekannt ist. Die gesuchte mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ wird dann mit dem Näherungswert (21.71) aus der Näherungsformel (22.171) erhalten. Aus diesem Vorgang ist die erhebliche Einschränkung im Gebrauch der Two-line Elements ersichtlich. Wesentlich ist, dass sowohl die Berechnung der Anzahl N_a der mittleren anomalistischen Umläufe pro Tag und der großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ mit **demselben** Bahnmodell durchgeführt werden. Andernfalls sind infolge von Modell-Inkonsistenzen erhebliche Fehler zu erwarten, die zuverlässige Aussagen nahezu unmöglich machen. Beispielweise muss streng darauf geachtet werden, ob in N_a die säkularen Störungen in der großen Bahnhalbachse durch den Luftwiderstand berücksichtigt wurden. Nur in diesem Fall müsste der mit Formel (22.171) berechnete Wert für die mittlere Halbachse durch eine ergänzende Iteration verbessert werden. Dies ist aber in der Regel nicht der Fall, so dass $\dot{a}_s$ nicht verwendet werden darf. Wenn aber säkulare „Störungen“ durch J_4 entsprechend Formel (20.15) zur Berechnung der Umläufe verwendet wurden[3], muss die Berechnung mit (22.171) iterativ um diesen Faktor ergänzt werden.

---

[1] http://www.celestrak.com/NORAD/elements/

[2] D. BROUWER [1959], BROUWER, D. and CLEMENCE, G. M. [1961], LYDDANE, R. H. [1963], HOOTS, F. R. [1979], HOOTS, F. R. [1981]

[3] Siehe in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

NUMERISCHES BEISPIEL: Für die internationale Raumstation ISS, bezogen auf das Kernmodul Zarya, werden folgende Two-line Elements zur Verfügung gestellt:

```
  SatNo
. Launch   yyDoY.dayfract    NDOT2    (NDDOT6) (BSTAR)
1 25544U 98067A   05069.80658593  .00020305  00000-0  16508-3 0  9863
2 25544  51.6464  44.1899 0004064 174.6830 257.5491 15.70669395360212
  SatNo.    i        Ω        e       ω        M0         NA        REVNO
```

Hier bedeuten:

in Zeile 1:

SatNo ⇔ 25544: die fortlaufende Satellitennummer, U steht für Unclassified (NORAD ID)

Launch ⇔ 98067A: 98 ⇔ Startjahr 1998, der 67. Start, Teil A bei mehreren Teilen, die gemeinsam gestartet wurden

yy-05 ⇔ 2005: Jahr der Epoche der Bahnelemente

DoY ⇔ 069: Tag 69 des laufenden Jahres der Epoche, entsprechend dem Datum 2005-03-10

Dayfract ⇔ 0. 80658593: Bruchteil des Tages der Epoche, c_w entsprechend der Zeit $19^h\ 21^m\ 29^s.02$

NDOT2 ⇔ 0.00020305 REV/D**2 – die säkulare Variation der mittleren Bewegung $\left[rev / d^2 \right]$

NDDOT6 ⇔ $\ddot{n}/6$. Dieser Faktor wird im SGP-Modell als Widerstandskoeffizient bezeichnet, er wird normalerweise gleich Null gesetzt

BSTAR ⇔ Widerstandskoeffizient im SGP4-Modell $B^* = 0.5 \cdot \rho_0 \, m / (c_D \, A_D) \left[1 / R_E \right]$

0 ⇔ bedeutet SGP4 Modell

Die letzte Ziffer (3) ist eine Kontrollzahl (Prüfsumme modulo 10)

in Zeile 2:

SatNo

i ⇔ 51°.6464: Inklination [Grad]

Ω ⇔ 44°.1899: Rektaszension des aufsteigenden Knotens [Grad]

e ⇔ 0. 0004064: Exzentrizität (nur für elliptische Bahnen)

ω ⇔ 174°.6830: Argument des Perigäums [Grad]

M_0 ⇔ 257°.5491: Mittlere Anomalie [Grad] zur Epoche

N_A ⇔ 15.706693953: Anzahl der mittleren anomalistischen Umläufe pro mittlerem Sonnentag

REVNO ⇔ 36021: Umlauf Nummer (eines drakonitischen Umlaufs, bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten)

Die letzte Ziffer (2) ist eine Kontrollzahl (Prüfsumme modulo 10).

Anmerkung: Der hier für B^* verwendete Faktor $B := m/(c_D\, A_D)$ wird gelegentlich als ballistischer Koeffizient bezeichnet. Leider wird diese Bezeichnung in der Literatur missverständlich verwendet, da auch die Umkehrung häufig als ballistischer Koeffizient bezeichnet wird[1] (siehe Formel (17.41) in Abschnitt 17.3.1 in Band III: $B := 1/B_D$). Mit ρ_0 wird die Dichte der Atmosphäre bezogen auf eine Referenzhöhe bezeichnet. Im Zusammenhang mit den NORAD Bahnelementen hat der Luftwiderstandsbeiwert das Symbol c_w an Stelle des sonst üblichen c_D. ◄

Umrechnungen:

Mit der Anzahl der Umläufe wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit berechnet

$$\overline{P_A} = \frac{86400s}{15.706693953} = 5500.83934 \text{ s} \quad .$$

Formel (21.71) liefert die erste Näherung für die Halbachse

$$\bar{a}_0^{(0)} = 6735.11972 \text{ km} \quad ,$$

eine Verbesserung mit Formel (22.171) schließlich

$$\bar{a}_0 = 6735.62686 \text{ km} \quad .$$

Aus der Variation NDOT2 $\Leftrightarrow \dot{n}_{Ks}$ wird mit der Formel (17.43) (Band III, Abschnitt17.3.2)

$$\overline{n_{K0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_0}^3}} \quad , \quad \dot{a}_s = -\frac{8\pi\, \dot{n}_{Ks}\, \bar{a}_0}{86400^2 \cdot 3 \cdot \overline{n_{K0}}} = \text{-0.1343910282372D-05 km/s} \quad .◄$$

Anmerkung zur Genauigkeit der Zweizeilenelemente: Die Umrechnung eines Zustandsvektors in und von Zweizeilenelementen erfolgt im Wesentlichen (d.h. mit geringfügigen Modifikationen) mit dem auf *D. Brouwer* [1969] zurückgehenden analytischen Bahnmodell, allerdings nur unter Einschluss der zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4. Die zu erwartende Genauigkeit der Zweizeilenelemente und der mit ihnen erzeugten Ephemeride unterscheidet sich daher unwesentlich von diesem Modell (siehe in Abschnitt 20.2, Band III). In der Praxis wird die Zuverlässigkeit der Zweizeilenelemente durch die Updaterate der Elemente durch die NORAD[2] eingeschränkt. Eine Bahn kann sich gegenüber der hier vorgegebenen Epoche im Verlauf der Zeit entscheidend verändern, bis neue Bahnparameter eine Bahn besser annähern können. Zielvorstellung ist, dass spätestens bei einer Abweichung der wahren Bahn von der mit den Zweizeilenelementen erzeugten Ephemeride in der Größenordnung von 5 km eine Angleichung erfolgt[3]. Die Zweizeilenelemente sind daher nur für Beobachtungen etwa zur Steuerung von Bodenantennen oder visuelle Beobachtungen und für langfristige Untersuchungen geeignet, nicht aber etwa für aktuelle Untersuchungen oder gar als Grundlage für die Berechnung von Bahnmanövern oder zur Steuerung enger Formationsflüge. ◄

---

[1] in R. H. BATTIN [1987], p. 505 wird der Faktor $0.5\, B_D = 0.5\, c_D\, A_D / m$ als *ballistischer Koeffizient* bezeichnet. Dagegen wird in WERTZ, JAMES R. and WILEY J. LARSON [2007], ch. 8, die Definition $B := m/(c_D\, A_D)$ verwendet. Die im vorliegenden Bericht verwendete Definition findet sich etwa in H. KLINKRAD [2006], p. 171.

[2] http://www.celestrak.com/NORAD/elements/

[3] KELSO, D. T. [1995]

22.6.3 Exzentrizität bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit

Zu einer Epoche t_0 seien die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_{A0}}$, die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ vorgegeben. Zu berechnen ist die entsprechende Exzentrizität $\bar{e}_0$. Einen ersten Näherungswert erhält man durch Auflösung der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.167) nach der Exzentrizität

$$\bar{e}_0^{(0)} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_E}{\bar{a}_0}\right)^2 \frac{1 - 3\cos^2 \bar{i}_0}{1 - \frac{2\pi}{\overline{P_{A0}}} \sqrt{\frac{\bar{a}_0^3}{\mu}}}}^{\,3}} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.176}$$

Diese Berechnung ist numerisch außerordentlich kritisch und liefert erfahrungsgemäß keinen zuverlässigen Wert für die Exzentrizität. Dieser kann erst nach Iteration mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) \equiv \overline{P_A}\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_{A0}} = 0 \qquad \langle \nu = 0,1,2,\cdots \tag{22.177}$$

errechnet werden. Für die numerische Iteration wird die Ableitung dieser Bedingungsgleichung nach der Exzentrizität als Variablen benötigt. Mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.40) erhält man

$$\frac{dfct\left(\bar{e}_0\right)}{d\bar{e}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_a}\right)^2} \frac{d\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{d\bar{e}_0} \quad . \tag{22.178}$$

Die Variation der Ableitung der mittleren Epocheanomalie nach der Exzentrizität ist in Formel (22.139) berechnet. Allerdings müssen in diesem Zusammenhang die Exzentrizität als Variable aufgefasst werden, die anderen *Kepler*elemente als feste Eingangsparameter. In Bezug auf das Gravitationsfeld der Erde in erster Ordnung ist

$$\frac{\partial\left(M_0\right)^{\cdot}_{sG0}}{\partial \bar{e}_0^{(n)}} \triangleq \frac{d\left(M_0\right)^{\cdot}_{sG0}}{d\bar{e}_0^{(n)}} = -\frac{9}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \frac{J_2 R_E^2 \sqrt{1 - \left(\bar{e}_0^{(n)}\right)^2}}{\bar{a}_0^2 \left[1 - \left(\bar{e}_0^{(n)}\right)^2\right]^2} \left(1 - 3\cos^2 \bar{i}_0\right) + \ldots \langle n = 0,1,2,\cdots \quad . \tag{22.179}$$

Als nullte Näherung wird der in (22.176) berechnete Wert für den Iterationsprozess herangezogen.

BEISPIEL: Es werden die Zahlenwerte des Beispiels in Abschnitt 22.6.1 verwendet: Vorgegeben seien die Werte

$$\overline{P_{A0}} = 43200.0000\,\mathrm{s}\ ,\ \bar{a}_0 = 26614.6324\,\mathrm{km}\ ,\ \bar{i}_0 = 23°\ .$$

Formel (22.176) liefert als nullte Näherung $\bar{e}_0^{(0)} = 0.7500713637183$. Die zugehörende mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{A0}}^{(0)} = 43199.99094981\,\mathrm{s}$. Die a posteriori Genauigkeit ist besser als $10^{-2}\,\mathrm{s}$. Um die Stabilität des Verfahrens zu testen, werde willkürlich die Anfangslösung $\bar{e}_{0f}^{(0)} = 0.53$ vorgegeben. Eine Iteration nach der Bedingungsgleichung (22.177) mit den apriori Genauigkeiten $\Delta e = 10^{-7}$ und $\Delta fct = 10^{-7}$ ergibt für die Exzentrizität und als Kontrolle für die mittlere anomalistische Umlaufzeit die Werte

$$\bar{e}_0^{(n)} = 0.74990778 \quad , \quad \overline{P}_{A0}^{(n)} = 43199.99999633\,\mathrm{s} \qquad .$$

Die a posteriori Genauigkeit ist somit von der Größenordnung $10^{-6}\,\mathrm{s}$. ◀

Das Beispiel zeigt, dass das Verfahren sehr robust ist. Allerdings zeigt sich umgekehrt, dass die Abhängigkeit der zu bestimmenden Exzentrizität sehr sensitiv gegenüber den gewählten Eingangsdaten große Bahnhalbachse und mittlerer anomalistischer Umlaufzeit ist.

22.6.4 Inklination bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit

Zu einer Epoche t_0 seien die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{A0}$, die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ vorgegeben. Zu berechnen ist die entsprechende mittlere Inklination $\bar{i}_0$. Einen ersten Näherungswert erhält man durch Auflösung der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.167) nach der Inklination

$$\cos\bar{i}_0^{(0)} = \mathrm{sgn}\left(\cos\bar{i}_0^{(0)}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{4}{3}\frac{1}{J_2}\left(\frac{\bar{a}_0}{R_E}\right)^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}^{\,3}\left(1-\bar{a}_0\right)\sqrt{\frac{\bar{a}_0}{\mu}}\frac{2\pi}{\overline{P}_{A0}}} \qquad . \quad (22.180)$$

Die Lösung ist nicht eindeutig. Es muss zusätzlich zu den Eingangswerten noch eine Aussage geben, ob eine recht- oder eine rückläufige Bahn erwartet wird. Eine iterative Verbesserung des Ergebnisses kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) \equiv \overline{P}_A\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P}_{A0} = 0 \qquad \langle \nu = 1, 2, \cdots \quad (22.181)$$

durchgeführt werden. Für die numerische Iteration wird die Ableitung dieser Bedingungsgleichung nach der Inklination als Variablen benötigt. Mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.40) erhält man

$$\frac{dfct\left(\bar{i}_0\right)}{d\bar{i}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n}_A\right)^2}\frac{d\left(M_0\right)^{\cdot}_s}{d\bar{i}_0} \qquad . \quad (22.182)$$

Die Variation der Ableitung der mittleren Epocheanomalie nach der Inklination ist in Formel (22.142) berechnet. Allerdings müssen in diesem Zusammenhang die Inklination als Variable aufgefasst werden, die anderen *Kepler*elemente als feste Eingangsparameter:

$$\frac{\partial\left(M_0\right)^{\cdot}_{sG0}}{\partial\bar{i}_0} \triangleq \frac{d\left(M_0\right)^{\cdot}_{sG0}}{d\bar{i}_0^{(n)}} = -\frac{9}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0^{(n)}\sin\bar{i}_0^{(n)} + \ldots \quad \langle n = 0, 1, 2, \cdots \quad . \quad (22.183)$$

BEISPIEL: Gegeben seien zu einer Epoche die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 26614.632\,\mathrm{km}$, die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.75$, außerdem sei bekannt, dass die gewünschte Bahn rechtläufig sei: $\mathrm{sgn}\left(\cos\bar{i}_0\right) = 1$. Als nullte Näherung für die gesuchte Inklination liefert Formel (22.180) den Wert $\bar{i}_0^{(0)} = 54°.7356103172$ mit der zugehörenden mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P}_A\left(\bar{i}_0^{(0)}\right) = 43210.74065\,\mathrm{s}$, der Fehler ist also erheblich. Erst die sehr langsame Iteration mit der Bedingungsfunktion (22.181) führt auf $\bar{i}_0^{(n)} = 23°.019417$ mit der zugehörenden mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P}_A\left(\bar{i}_0^{(n)}\right) = 43200.000001\,\mathrm{s}$. Das Zahlenbeispiel zeigt, dass das Verfahren außerordentlich sensitiv ist und nicht zu einer 100% sicheren Lösung führen kann. ◀

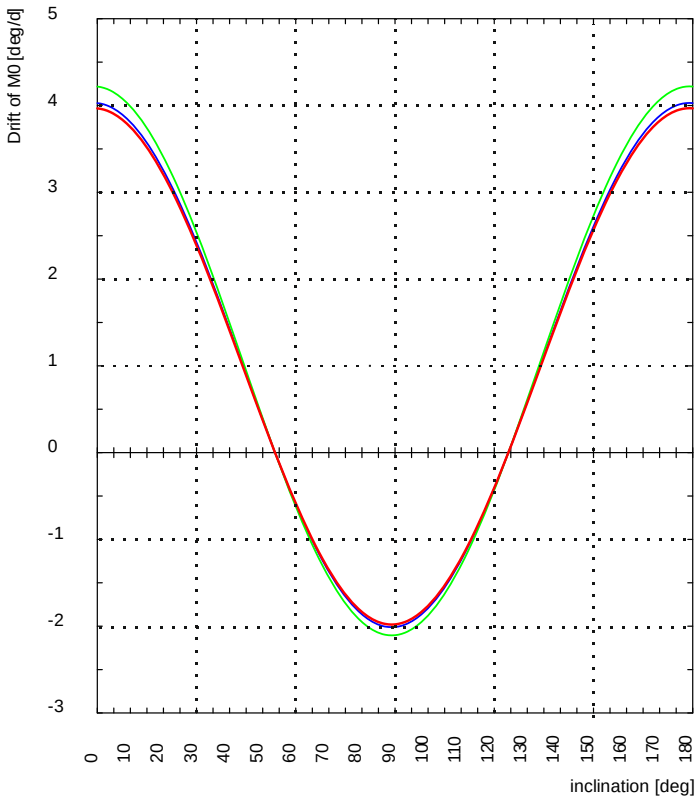


Bild 22-9: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta M_0\,[\text{Grad}]$ der mittleren Epocheanomalie, in Abhängigkeit von der Inklination über einen Tag. Der Plot wurde gerechnet für die Bahn a = 8300 km mit den Exzentrizitäten e=0.0 (rote Kurve), e=0.1 (blaue Kurve), e = 0.2 (grüne Kurve).

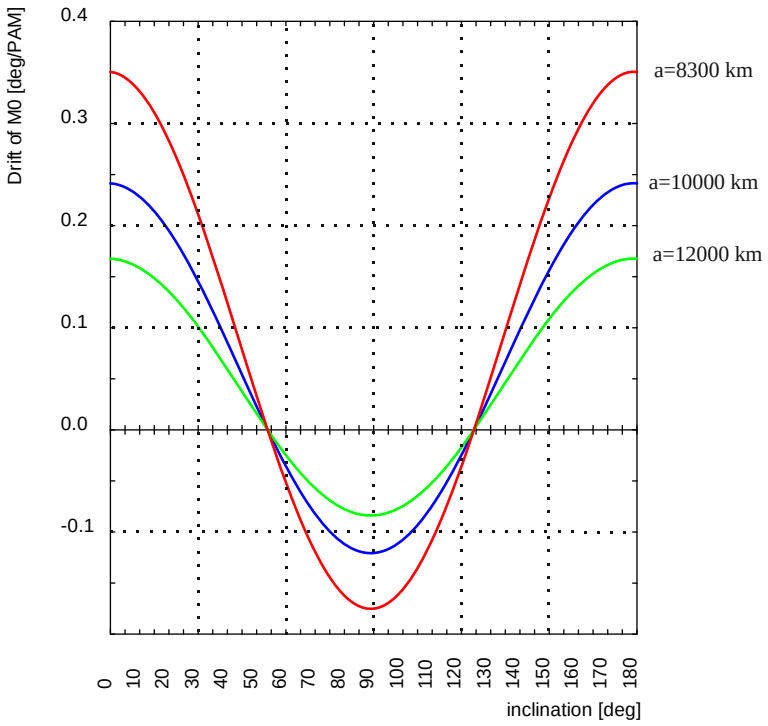


Bild 22-10: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta M_0\,[\text{Grad}]$ der mittleren Epocheanomalie, in Abhängigkeit von der Inklination über einen mittleren anomalistischen Umlauf. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 8300 km (rote Kurve), a = 10000 km (blaue Kurve), a = 12000 km (grüne Kurve) und mit der Exzentrizität e=0.1.

Anmerkung: Man beachte, dass die Formel (22.180) nur verwendet werden darf, wenn $J_2 \neq 0$ verwendet wird. Ansonsten ist die hier vorgestellte Theorie unsinnig.◀

22.7 Die säkulare Drift der mittleren Epocheanomalie von Erdsatelliten

Die Beziehung (22.40) zeigt, dass die mittlere Epocheanomalie und ihre Variation nach Formel (20.17)

$$(M_0)^{\cdot}_{Gs0} = \frac{3}{2}\overline{n}_{K0}\, J_2 \frac{R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right) + O\left(\overline{n_{K0}}\, J_2^2\right) , \tag{22.184}$$

wesentlich die anomalistische Bewegung prägt. Durch Integration über die Zeit kann die Drift der mittleren Epocheanomalie in einem Zeitintervall erhalten werden:

$$\Delta M_0\left[t_2 - t_1\right] = \int_{t_1}^{t_2} (M_0)^{\cdot}_s \, dt = (M_0)^{\cdot}_s \left(t_2 - t_1\right) \quad . \tag{22.185}$$

In erster Näherung gilt für erdnahe Satellitenbahnen

$$\Delta M_0\left[t_2 - t_1\right] = \frac{3}{2}\overline{n}_{K0}\frac{J_2 R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)\left(t_2 - t_1\right) + \cdots \quad . \tag{22.186}$$

Als erstes BEISPIEL ist in Bild 22-9 die Drift für die Bahn a = 8300 km und die Exzentrizitäten e=0.0, 0.1, 0.2 über der Inklination für einen Tag aufgetragen. ◀

Als zweites BEISPIEL ist in Bild 22-10 die Drift über einen mittleren anomalistischen Umlauf $\overline{P_a}$ für Bahnen mit der Exzentrizität e=0.1 und verschiedene große Bahnhalbachsen dargestellt.◀

Wie unmittelbar aus Formel (22.186) erkannt werden kann, verschwindet die säkulare Drift der mittleren Epocheanomalie für die Inklinationen

$$i_{M1} = 54°.735610317 \;,\; i_{M2} = 125°.264389683 \quad . \tag{22.187}$$

Sie ist positiv für Äquator-nahe Bahnen, negativ für Pol-nahe Bahnen. Die Abhängigkeit von der Exzentrizität der Bahn ist gering, dagegen von der großen Bahnhalbachse sehr groß. Je nach Inklination muss täglich mit einer Drift bis zu 4° gerechnet werden.

22.8 Die säkulare Drift des Argumentes des Perizentrums

Der Ort des Perizentrums einer Bahn und damit die Eigenschaften der anomalistischen Bewegung werden durch das Argument ω des Perizentrums wesentlich geprägt. Es ist daher von Interesse im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse das langfristige Verhalten dieses Bahnparameters zu untersuchen.

22.8.1 Die säkulare Änderung des Argumentes des Perizentrums

In erster Näherung hat das Argument der Perizentrums (nach Formel (20.17)) die säkulare Drift (mit den Epocheparametern $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$)

$$\dot{\omega}_s = \frac{3}{4}\overline{n}_{K0}\, J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(5\cos^2\bar{i}_0 - 1\right) + \cdots \quad . \tag{22.188}$$

Unabhängig von der Bahnform ist diese Drift positiv, wenn $\cos^2 \bar{i}_0 > 1/5$, somit für Inklinationen

$$0° \le \bar{i}_0 < 63°.434948823 \quad \text{und} \quad 116°.565051177 < \bar{i}_0 \le 180° \ , \tag{22.189}$$

rückläufig für

$$63°.434948823 < \bar{i}_0 < 116°.56505051177 \ . \tag{22.190}$$

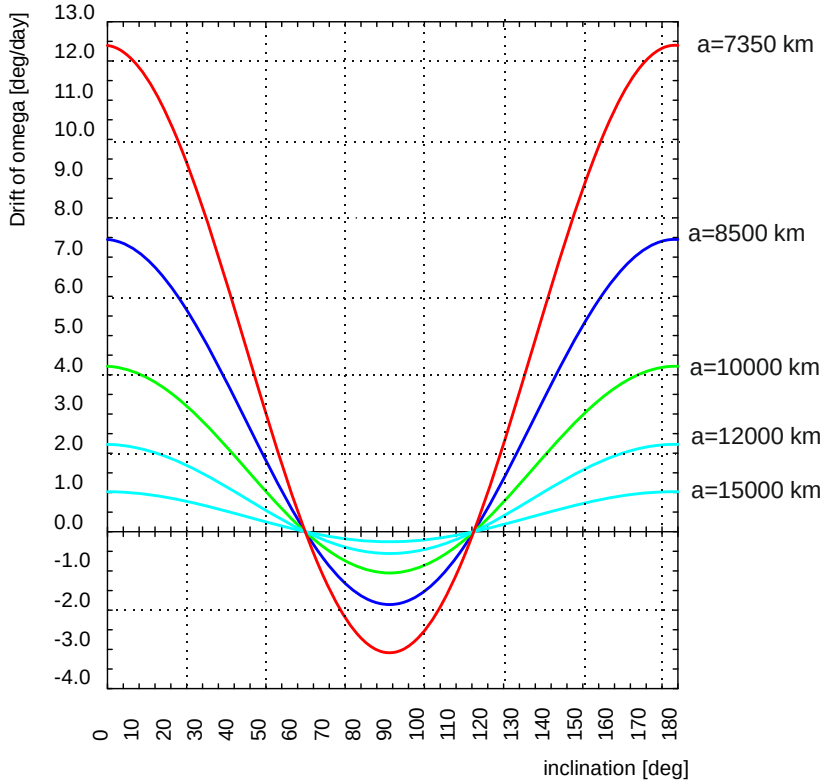


Bild 22-11: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta\bar{\omega}[\text{Grad}]$ des mittleren Argumentes des Perigäums, in Abhängigkeit von der Inklination über einen Tag. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 7350, 8000, 10000, 12000, 15000 km mit der Exzentrizität e=0.1

Anmerkung: Die Inklination

$$i_K = 63°.434948823 \quad (\text{bzw.}116°.56505051177) \tag{22.191}$$

spielte in der Satellitenbahnmechanik als „kritische Inklination" eine besondere Rolle, da sie in den langperiodischen Variationen der *Kepler*elemente *a, e, i, Ω, ω, M*$_0$ in den Ausdrücken mit den zonalen Harmonischen J_4 und J_5 (und höheren) im Nenner vorkommen, so dass für Bahnen mit diesen Inklinationen Singularitäten in einer Ephemeridenrechnung auftreten. Dies ist eine Folge der Wahl des Argumentes der Breite als ein Bahnparameter, so dass diese Singularität nur mathematische Bedeutung hat, physikalisch jedoch irrelevant ist.

Um Satellitenbahnen in Nähe der kritischen Inklination analytisch untersuchen zu können, müssen daher andere Parameter gewählt werden, oder die Ephemeride muss numerisch integriert werden, wobei keine Singularitäten auftreten können (wenn das Verfahren numerisch stabil ist). Bahnen mit kritischer Inklination sind jedoch in der astronautischen Anwendung für bestimmte Anwendungen von besonderer Wichtigkeit, da auf ihnen wegen des Ausdrucks (22.188) keine Apsidendrehung stattfinden wird, so dass damit gewisse Aufgabenstellungen erfüllt werden können, die eine feste Position der Apside erfordern. Das bekannteste Beispiel dafür sind die *Molnija* Satelliten. (Siehe näheres dazu etwa im Beispiel 2 in Abschnitt 23.5.3) ◀

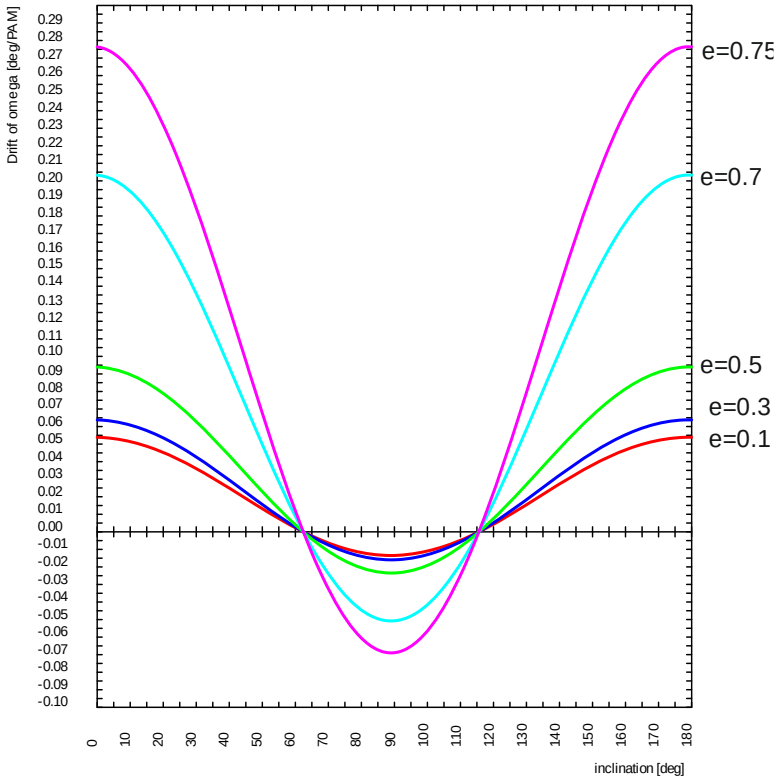


Bild 22-12: Beispiel für die säkulare Drift $\Delta\bar{\omega}[\text{Grad}]$ des mittleren Argumentes des Perigäums, in Abhängigkeit von der Inklination über einen mittleren anomalistischen Umlauf. Der Plot wurde gerechnet für die Bahnen a = 30000 km mit den Exzentrizitäten e=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.75

Durch Integration über die Zeit kann die Drift des mittleren Argumentes des Perizentrums in einem Zeitintervall erhalten werden:

$$\Delta\bar{\omega}[t_2,t_1]=\int_{t_1}^{t_2}\dot{\omega}_s dt=\dot{\omega}_s\left(t_2-t_1\right) \quad . \tag{22.192}$$

In erster Näherung gilt für erdnahe Satellitenbahnen

$$\Delta\bar{\omega}[t_2,t_1]=\frac{3}{4}\overline{n}_{K0}\frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(5\cos^2\bar{i}_0-1\right)\left(t_2-t_1\right)+\cdots \quad . \tag{22.193}$$

Als erstes BEISPIEL ist in Bild 22-11 (auf Seite 78) die Drift des mittleren Argumentes des Perigäums für die Bahnen *a* = 7350, 8500, 10000, 12000., 15000 km mit der Exzentrizität e= 0.1 über der Inklination für einen Tag aufgetragen. ◀

Als zweites BEISPIEL ist in Bild 22-12 die Drift über einen mittleren anomalistischen Umlauf $\overline{P_A}$ für Bahnen mit der großen Bahnhalbachse a=30000 km und die Exzentrizitäten *e*=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.75 dargestellt.◀

22.8.2 Die Drehung der Apsidenlinie und die Wanderung der Apsiden

Die säkulare Drift des Argumentes des Perigäums kann, wie die beiden vorstehenden Beispiele zeigen, erheblich für erdnahe Bahnen sein. Auch für erdferne Bahnen kann der Einfluss der Exzentrizität auf diese Drift zwar quantitativ klein, aber doch sehr bemerkbar sein (vgl. Bild 22-12).

Die Drift des Perigäums hat eine Drift der Apsidenlinie zur Folge. Für Bahnen, die näherungsweise als eine allgemeine *Kepler*bewegung charakterisiert werden können, verbindet sich mit der Drehung der Apsidenlinie eine Drehung der scheinbaren Bahnellipse zu einer quasiperiodischen Spiralbewegung. Dies veranschaulicht folgendes

BEISPIEL 1: Zur Veranschaulichung der Apsidendrehung als Folge der Erdabplattung wird in Bild 22-13 der Verlauf einer hochexzentrischen Bahn dargestellt. Gewählt wurden die Daten einer Transferbahn (TVSAT-1) in eine geostationäre Bahn. Die Bahndaten sind große Bahnhalbachse a = 24354.797 km, Exzentrizität e =0.73. Die Bahn soll ausschließlich in der Äquatorebene verlaufen (i=0°.0). Um den Effekt der Apsidendrehung zu veranschaulichen, wird der größte (und für diesen Effekt entscheidende) zonale harmonische Potentialkoeffizient J_2 um das 100-fache gegenüber dem für den Erdkörper gültigen Wert überhöht:

$J_2 \triangleq 0.1$. Mit diesem Wert lautet die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_A} = 36563.537570\,\mathrm{s} \triangleq 10.156538214\,\mathrm{h}$. Dargestellt ist der Verlauf der Bahn über 7 Tage, was etwa 16.54 anomalistischen Umläufen entspricht.◀

BEISPIEL 2: In Bild 22-14 wird der Einfluss des Luftwiderstandes auf die Bewegung einer Satellitenbahn qualitativ beschrieben. Die Bahn im linken Bild ist mit den *Kepler*elementen a=24354.8 km, *e*=0.74, i=0° definiert. Zur Demonstration des Einflusses des Luftwiderstandes werden die (unrealistischen) Werte $\dot{a}_s = -50\,\mathrm{m/s}$ für die säkulare Abnahme der Halbachse sowie $\dot{e}_s = -5\times10^{-7}$ für die Abnahme der Exzentrizität angenommen. Die Abbremsung dieser Bahn im Perigäum wird durch die angedeutete Atmosphäre verursacht.

In Bild 22-15 wird die Überlagerung der anomalistischen Bewegung durch den Einfluss des Luftwiderstandes qualitativ demonstriert. Das Szenario ist realistisch, da hochexzentrische Bahnen (etwa Transferbahnen aus dem erdnahen Bereich in eine geosynchrone Bahn) durchaus dem Einfluss der Restatmosphäre in der Umgebung des Perigäums unterliegen können. Im Beispiel wird von der Bahn *a*= 24354.797 km, *e*= 0.73, *i*= 0° ausgegangen, die Bahn werde durch die säkulare Abnahme der Bahnelemente $\dot{a}_s = -20\,\mathrm{m/s}$, $\dot{e}_s = -2\times10^{-7}$ beeinflusst. Für das Erdmodell wurden die zonalen Harmonischen $J_2 = 0.1, J_3 = J_4 = 0.0$ gewählt.◀

BEISPIEL 3: Die Abfolge der Apsiden kann tabellarisch erfasst werden, wie in Tabelle 22-2 auf Seite 56 am Beispiel einer Transferbahn gezeigt wird. ◀

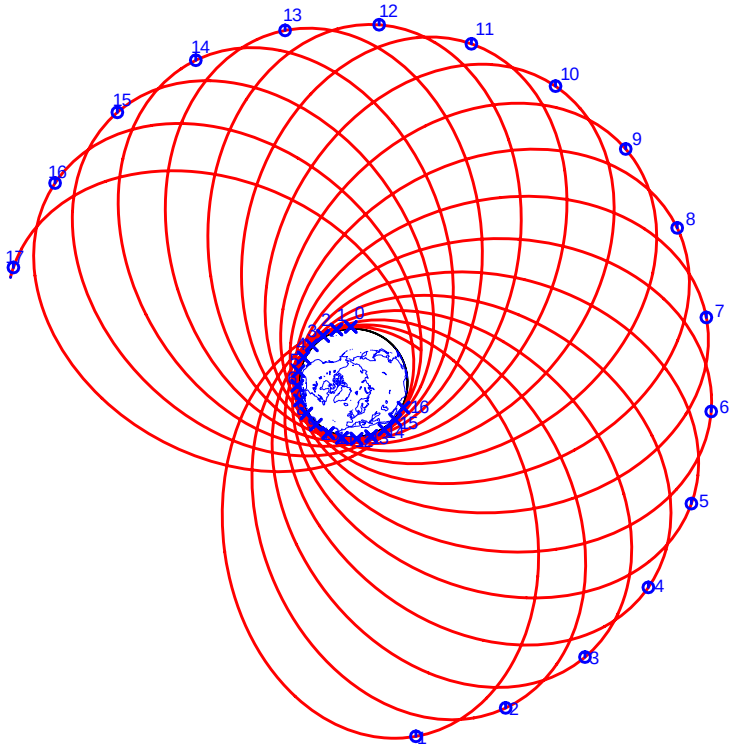


Bild 22-13: Veranschaulichung der (mittleren) Apsidendrehung für die Bahn a=24354.797 km, e=0.73, i=0°.0. Zur Veranschaulichung ist die Abplattung der Erde um das 100-fache überhöht mit der Annahme J_2=0.1.

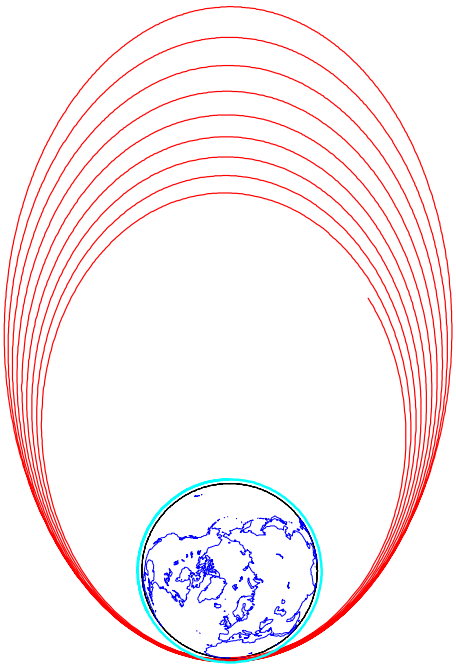


Bild 22-14: Veranschaulichung der Wirkung des Luftwiderstandes (angedeutete Atmosphäre in hellblau um die Erde).

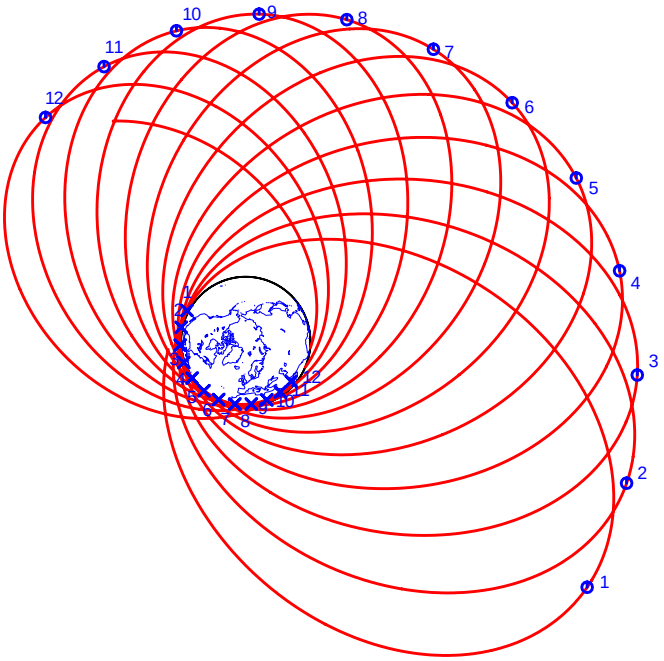


Bild 22-15: Veranschaulichung der (mittleren) Apsidendrehung für eine Bahn unter Einwirkung des Luftwiderstandes

22.9 Geographische Positionen und Driften von Perigäum und Apogäum

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse kann der Bezug einer anomalistischen Bewegung zur Erdoberfläche benötigt werden. In diesem Abschnitt werden die geographischen Positionen von Perigäum und Apogäum und ihre Driften gegenüber der Erdoberfläche untersucht. Bei Vorgabe dieser Größen können im Rahmen einer Bahnauslegung einige der *Kepler*schen Elemente einer Satellitenbahn bestimmt werden.

22.9.1 Die geographischen Koordinaten des Perigäums

Wenn die Parameter der räumlichen Orientierung einer Satellitenbahn, Inklination *i*, Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens und Argument des Perigäums ω für einen bestimmten Zeitpunkt *t* vorgegeben sind, können mit ihrer Hilfe die geographischen Koordinaten des Perigäums, geographische Länge λ_P und Deklination δ_P berechnet werden[1]. Dazu wird die zum Zeitpunkt *t* gültige Sternzeit[2]

$$\Theta_G = \Theta_{G0} + \dot{\Theta}\left(t - t_0\right) \tag{22.194}$$

benötigt, wenn Θ_{G0} ein (fester) Anfangswert[3] zum Zeitpunkt t_0 und $\dot{\Theta}$ die tropische Rotationsperiode der Erde ist. Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird $\dot{\Theta}$ als konstante Größe angenommen. Säkulare (und eventuell auch nichtsäkulare) Variationen sind so klein, dass sie hier vernachlässigt werden können[4]. Der aufsteigende Knoten ☊ der Satellitenbahn hat die auf den Greenwich-Meridian bezogene geographische Länge

$$\lambda_\Omega = \Omega - \Theta_G \quad . \tag{22.195}$$

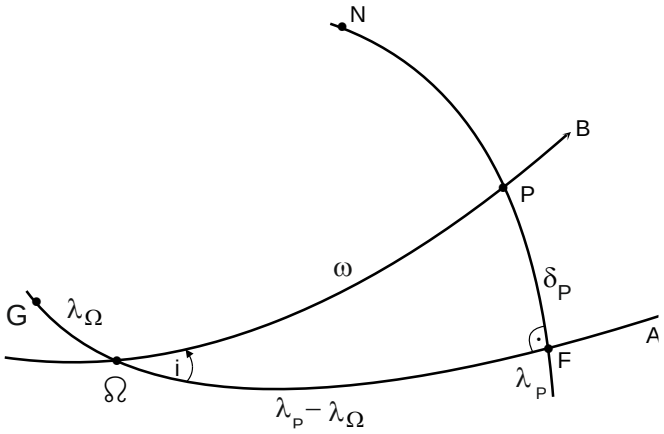


Bild 22-16: Zu Berechnung der geographischen Länge λ_P des Perigäums P mit Hilfe der geographischen Länge λ_Ω des aufsteigenden Knotens ☊. G bezeichnet den Schnittpunkt des Meridians durch Greenwich mit dem Äquator A, B die Bahnebene unter der Inklination *i* gegenüber dem Äquator

---

[1] Wird die geodätische Breite φ_P des Perigäums benötigt, kann sie mit den Formeln (8.189), (8.190) [Band II, Abschnitt 8.6.1] berechnet werden. Im vorliegenden Zusammenhang spielt der Bezug auf die abgeplattete Erdoberfläche zunächst nur eine untergeordnete Rolle

[2] Siehe in Abschnitt 9.1.2

[3] Vorzugsweise eine Fundamentalepoche

[4] Siehe Formel (9.19) (Band II)

Nach Bild 22-16 ergeben sich die geographischen Koordinaten des Perigäums aus

$$\begin{aligned} \sin\delta_P &= \sin\omega\,\sin i \\ \cos\delta_P &= \sqrt{1-\sin^2\omega\,\sin^2 i} \\ \cos\left(\lambda_P-\lambda_\Omega\right)\cos\delta_P &= \cos\omega \\ \sin\left(\lambda_P-\lambda_\Omega\right)\cos\delta_P &= \sin\omega\,\cos i \end{aligned} \tag{22.196}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \cos\lambda_P\cos\delta_P &= -\cos i\sin\omega\,\sin\lambda_\Omega+\cos\omega\,\cos\lambda_\Omega \\ \sin\lambda_P\cos\delta_P &= \quad\cos i\sin\omega\,\cos\lambda_\Omega+\cos\omega\,\sin\lambda_\Omega \quad . \end{aligned} \tag{22.197}$$

Um die geographische Länge des aufsteigenden Knotens zu vermeiden, kann mit Beziehung (22.195) gebildet werden:

$$\begin{aligned} \cos\lambda_P\cos\delta_P &= \cos\Theta_G\left(-\cos i\,\sin\Omega\,\sin\omega+\cos\Omega\,\cos\omega\right)+ \\ &\quad+\sin\Theta_G\left(\cos i\,\cos\Omega\,\sin\omega+\sin\Omega\,\cos\omega\right) \\ \sin\lambda_P\cos\delta_P &= \cos\Theta_G\left(\cos i\,\cos\Omega\,\sin\omega+\sin\Omega\,\cos\omega\right)+ \\ &\quad+\sin\Theta_G\left(\cos i\,\sin\Omega\,\sin\omega-\cos\Omega\,\cos\omega\right) \quad . \end{aligned} \tag{22.198}$$

Als dritte Möglichkeit zur Berechnung der geographischen Länge des Perigäums bietet sich das Ergebnis einer Ephemeridenrechnung an, welche die Rektaszension α_P des Perigäums berechnet. Dann ist

$$\lambda_P = \alpha_P - \Theta_G \quad . \tag{22.199}$$

22.9.2 Die Variation der geographischen Position des Perigäums

Falls die Variation der Rektaszension der geographischen Länge des Perigäums bekannt ist, lautet ihre Variation

$$\dot\lambda_P = \dot\alpha_P - \dot\Theta \quad . \tag{22.200}$$

Um den Bezug auf die Bahnparameter und damit auf ein Bahnmodell herstellen zu können, wird aus den Beziehungen (22.196) mit (22.199) $\dot\Theta$ eliminiert, und es bleibt:

$$\dot\lambda_P = \dot\lambda_\Omega + \frac{\cos i}{\cos^2\delta_P}\dot\omega - \frac{\sin i\sin\omega\cos\omega}{\cos^2\delta_P}(i)^{\cdot} \quad , \tag{22.201}$$

somit wegen (22.195)

$$\dot\lambda_\Omega = \dot\Omega - \dot\Theta \tag{22.202}$$

auch

$$\dot\lambda_P = \dot\Omega + \frac{\cos i}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}\dot\omega - \frac{\sin i\sin\omega\cos\omega}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}(i)^{\cdot} - \dot\Theta \quad . \tag{22.203}$$

Die Variation der Rektaszension des Perigäums hat nach (22.200) die Darstellung

$$\dot\alpha_P = \dot\Omega + \frac{\cos i}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}\dot\omega - \frac{\sin i\sin\omega\cos\omega}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}(i)^{\cdot} \quad . \tag{22.204}$$

Werden hier die *Gauß*schen Variationsgleichungen[1] (11.70), (11.71) und (11.73) eingesetzt, folgt die *Gauß*sche Variationsgleichung für die geographische Länge des Perigäums

[1] In Abschnitt 11.1.5, Band III

$$\dot{\lambda}_P = -\frac{G}{e\,\mu}\,\frac{\cos i}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}\left[\cos\upsilon\, b_{R2} - \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)b_T\right] + \frac{r}{G}\,\frac{\sin i\,\cos\omega\,\sin\upsilon}{\left(1-\sin^2 i\,\sin^2\omega\right)}\,b_N - \dot{\Theta}\ . \quad (22.205)$$

Aus der ersten der Formeln (22.196) folgt für die Variation der Deklination des Perigäums

$$\dot{\delta}_P \cos\delta_P = \dot{\omega}\cos\omega\,\sin i + (i)^{\cdot}\,\sin\omega\,\cos i \quad , \quad (22.206)$$

mit den Variationsgleichungen (11.70) und (11.73) die *Gauß*sche Variationsgleichung der geographischen Breite des Perigäums

$$\dot{\delta}_P = -\frac{G}{e\,\mu}\,\cos\omega\,\sin i\left[\cos\upsilon\, b_{R2} - \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)b_T\right] - \frac{r}{G}\cos i\,\sin\upsilon\, b_N \quad . \quad (22.207)$$

BEISPIEL 1: Um eine größenordnungsmäßige Einordnung der Drift der geographischen Länge des Perigäums zu ermöglichen, wird in diesem Beispiel die säkulare Drift über der Inklination für verschiedene Bahnhöhen dargestellt (Bild 22-17). Das Beispiel ist theoretisch zu verstehen, da in jedem Fall eine kreisförmige Bahn zugrunde gelegt wird. Der Einfluss der Exzentrizität wird in den beiden nächsten Beispielen untersucht. Interessant ist die Auszeichnung des Bezugs auf die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde, da sich alle Kurven in diesem Wert treffen. Als Bahnmodell wird die säkulare Wirkung der Erdabplattung erster und zweiter Ordnung verwendet. Die „Nullstellen", d.h. die Schnittpunkte der $\dot{\lambda}_P$ – Kurven mit der $-\dot{\Theta}$-Geraden werden für die Bedingung $\dot{\lambda}_P + \dot{\Theta} = 0$ erhalten. Sie werden mit der Formel (22.250) in Abschnitt 22.11 abgeschätzt. ◀

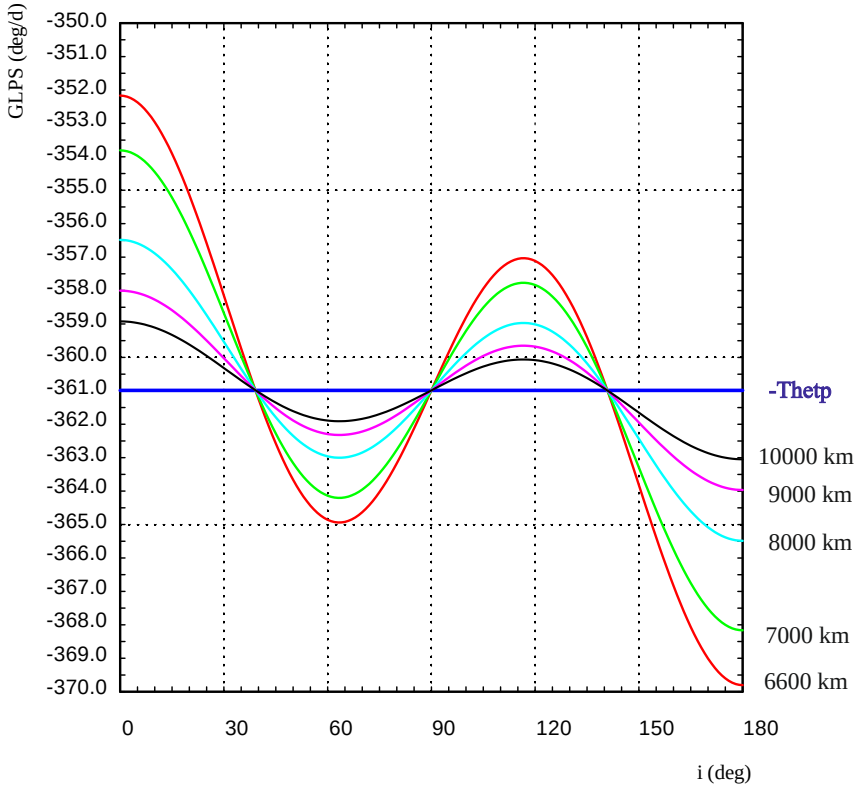


Bild 22-17: Theoretische Beschreibung der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für verschiedene große Bahnhalbachsen für Kreisbahnen, zum Vergleich ist die tropische Erd-Rotation $\dot{\Theta}$ (Thetp) (der negative Wert) eingetragen

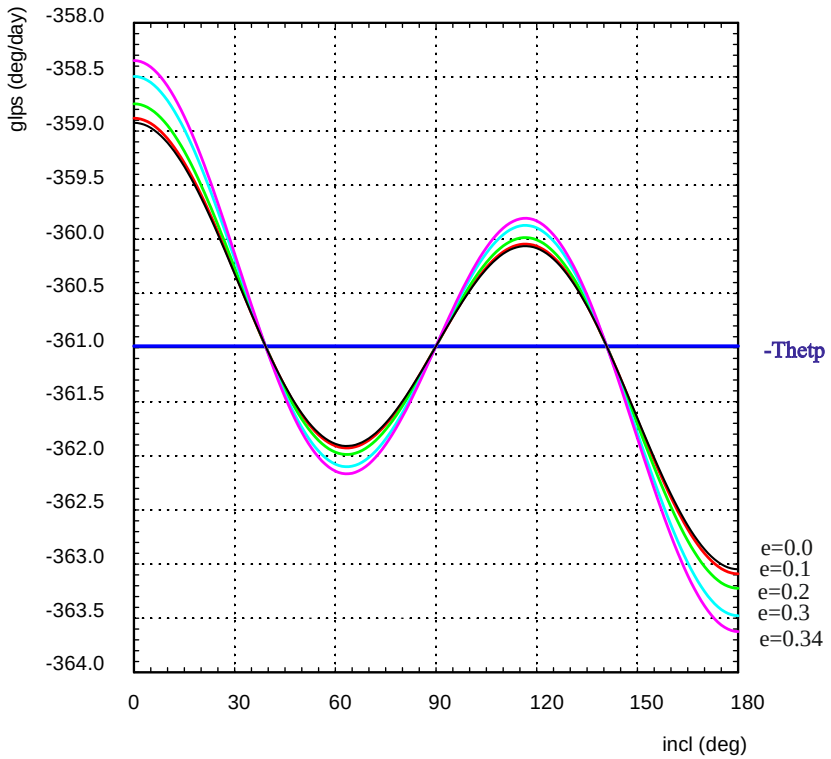


Bild 22-18: Verlauf der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten für Bahnen mit der großen Bahnhalbachse a = 10000 km und minimale Perigäumshöhe über 200 km. Zum Vergleich ist die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ (Thetp) eingetragen

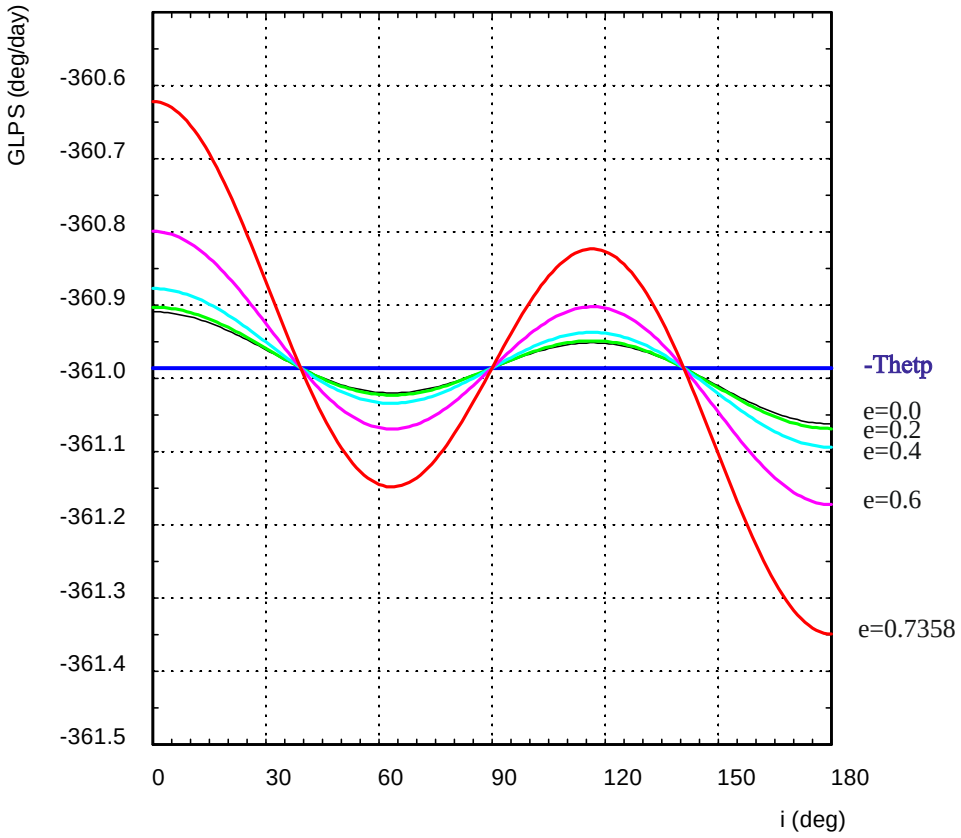


Bild 22-19: Verlauf der säkularen Drift der geographischen Länge (positiv nach Osten) des Perigäums über der Inklination für eine Übergangsbahn in eine geostationäre Bahn

BEISPIEL 2: In diesem Beispiel (

Bild 22-18) wird der Einfluss einer Variation der Exzentrizität auf die säkulare Drift der geographischen Länge des Perigäums untersucht. Ausgewählt ist die Bahn mit der großen Bahnhalbachse a= 10000 km. Die Exzentrizität variiert zwischen 0.0 und 0.34 (Grenzwert, wenn das Perigäum eine Mindesthöhe von ungefähr 200 km haben soll). Der Verlauf der Kurven variiert sehr gering im Vergleich zum vorstehenden Beispiel einer Variation der großen Bahnhalbachse. ◀

BEISPIEL 3: Um den Einfluss der Exzentrizität auf die Drift der Perigäumslänge über der Inklination bei höheren Exzentrizitäten zu demonstrieren wird in diesem Beispiel (Bild 22-19) die große Bahnhalbachse einer geostationären Übergangsbahn gewählt: a = 25646.172 km. Mit zunehmender Exzentrizität wird der Verlauf der Kurve erheblicher. ◀

22.9.3 Die Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums pro anomalistischem Umlauf

Pro wahrem anomalistischen Umlauf kann die Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums berechnet werden aus

$$\Delta\lambda_P = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\dot{\lambda}_p}{\dot{\upsilon}} d\upsilon \quad . \tag{22.208}$$

Die Variation der geographischen Länge ist aus Formel (22.205) bekannt, die der wahren Anomalie aus (11.80) (Band III). Die Zerlegung (22.200) ergibt

$$\Delta\lambda_P = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\dot{\alpha}_P}{\dot{\upsilon}} d\upsilon - \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\dot{\Theta}}{\dot{\upsilon}} d\upsilon \quad . \tag{22.209}$$

Da die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse als konstant angenommen werden darf, kann das zweite dieser Integrale auf die wahre anomalistische Umlaufzeit in Beziehung (22.61) zurückgeführt werden und es bleibt

$$\Delta\lambda_P = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} \frac{\dot{\alpha}_P}{\dot{\upsilon}} d\upsilon - \dot{\Theta} P_A \quad . \tag{22.210}$$

22.9.3.1 Die mittlere Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums

Nach Elimination aller periodischen Anteile in der Variationsgleichung (22.203) folgt der säkulare Anteil in Bezug auf mittlere Epocheelemente

$$\dot{\lambda}_{Ps0} := \dot{\Omega}_{s0} + \frac{\cos \bar{i}_0}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \cos^2 \bar{\omega}_0} \dot{\omega}_{s0} - \frac{\sin \bar{i}_0 \sin \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_0}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \cos^2 \bar{\omega}_0} (i)^{\cdot}_{s0} - \dot{\Theta} \quad . \tag{22.211}$$

Im Fall der Einflüsse durch das Gravitationsfeld der Erde werden hier die säkularen Variationen (20.14) – (20.16) (Band III) mit den als konstant angenommenen mittleren Epocheelementen verwendet. Integration über einen anomalistischen Umlauf ergibt die mittlere Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums in Bezug auf die mittlere anomalistische Umlaufzeit

$$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps} \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi} d\upsilon = \dot{\lambda}_{Ps}\, \overline{P_A} \quad . \tag{22.212}$$

Diese Formel findet Verwendung bei Untersuchungen des langfristigen Bahnverhaltens von Satellitenmissionen.

22.9.3.2 Die genäherte wahre Verschiebung der geographischen Länge des Perigäums

Entsprechend der Darstellung der Verschiebung (22.210) der wahren geographischen Länge des Perigäums pro anomalistischem Umlauf, muss nur der erste Anteil auf der rechten Seite betrachtet werden. Mit der Entwicklung (22.102) führt die Variationsgleichung (22.205) auf den Näherungsausdruck

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_P}{d\upsilon} &= \frac{\dot{\alpha}_P}{\dot{\upsilon}} = \\ &= -\frac{r^2}{e\,\mu}\frac{\cos i}{\left(1-\sin^2 i\sin^2\omega\right)}\left[\cos\upsilon\, b_{R2} - \sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)b_T\right] + \frac{r^3}{G^2}\frac{\sin i\cos\omega\sin\upsilon}{\left(1-\sin^2 i\sin^2\omega\right)}b_N + \cdots .\end{aligned} \tag{22.213}$$

Mit Linearisierungen um die mittleren Anfangswerte $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{p}_0 = \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right), \overline{i}_0, \overline{\omega}_0\right)$ ergibt sich als zweite Näherung

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_P}{d\upsilon} = -\frac{\overline{p}_0^2}{\mu\left(1-\sin^2 i\sin^2\omega\right)}\Bigg[&\frac{\cos\overline{i}_0\cos\upsilon}{\overline{e}_0\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2}b_{R2} - \frac{\cos\overline{i}_0\sin\upsilon}{\overline{e}_0\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^2}\left(2+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)b_T + \\ &+ \frac{\sin i\cos\omega\sin\upsilon}{\left(1+\overline{e}_0\cos\upsilon\right)^3}b_N\Bigg] + \cdots\end{aligned} \tag{22.214}$$

Werden hier die Beschleunigungen erster Ordnung auf Grund des Gravitationsfeldes der Erde eingesetzt (nach Abschnitt 17.2.2, Band III)

$$\begin{aligned} b_{R2} &= \frac{3}{2}\mu J_2 \frac{R_E^2}{r^4}\left(3\sin^2 i\sin^2 u - 1\right) + O\left(J_2^2\right) \\ b_T &= -\frac{3}{4}\mu J_2 \frac{R_E^2}{r^4}\sin^2 i\,\sin 2u + O\left(J_2^2\right) \\ b_N &= -\frac{3}{2}\mu J_2 \frac{R_E^2}{r^4}\sin 2i\,\sin u + O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{22.215}$$

und wird wieder die Linearisierung um die mittleren Anfangswerte durchgeführt, bleibt schließlich

$$\Delta\alpha_P\left[P_a\right]=\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi}\frac{\dot\alpha_P}{\dot\upsilon}\,d\upsilon=\frac{3}{2}\frac{J_2\,R_E^2}{\bar p_0^2\left(1-\sin^2\bar i_0\sin^2\bar\omega_0\right)}\times$$

$$\times\Bigg\{\sin\bar i_0\sin 2\bar i_0\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi}\sin\upsilon\left(1+\bar e_0\cos\upsilon\right)\left[\sin\upsilon\cos\bar\omega_0+\cos\upsilon\sin\bar\omega_0\right]d\upsilon-$$

$$-\frac{\cos\bar i_0}{\bar e_0}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi}\cos\upsilon\left(1+\bar e_0\cos\upsilon\right)^2\left[3\sin^2\bar i_0\left(\sin\upsilon\cos\bar\omega_0+\cos\upsilon\sin\bar\omega_0\right)^2-1\right]d\upsilon- \qquad (22.216)$$

$$-\frac{\cos\bar i_0}{\bar e_0}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_0+2\pi}\sin\upsilon\left(1+\bar e_0\cos\upsilon\right)^2\left(2+\bar e_0\cos\upsilon\right)\times$$

$$\times\left[\sin\upsilon\cos\bar\omega_0+\cos\upsilon\sin\bar\omega_0\right]\left[\cos\upsilon\cos\bar\omega_0-\sin\upsilon\sin\bar\omega_0\right]d\upsilon\Bigg\}\quad .$$

Die hier benötigten Integrationen können mit Hilfe der in Anhang D2 zusammengestellten bestimmten Integrale durchgeführt werden[1]. Da die hier untersuchte Formel in der Praxis der Satellitenbahnanalyse keine besondere Rolle spielt, wollen wir diesen Weg hier nicht weiter verfolgen.

22.9.3.3 Die Variation der geographischen Position des Apogäums

Die geographischen Koordinaten $\left(\lambda_A,\delta_A\right)$ des Apogäums einer Satellitenbahn werden berechnet, wenn $\omega_A=\omega+180°$ das Argument der Breite des Apogäums ist, aus dem System

$$\begin{aligned}\sin\delta_A&=-\sin\omega\,\sin i\\ \cos\delta_A&=\sqrt{1-\sin^2\delta_P}\\ \cos\left(\lambda_A-\lambda_\Omega\right)\cos\delta_P&=-\cos\omega\\ \sin\left(\lambda_A-\lambda_\Omega\right)\cos\delta_P&=-\sin\omega\,\cos i\quad .\end{aligned}\qquad (22.217)$$

Durch die Differentiation folgt

$$\dot\lambda_A-\dot\lambda_\Omega=\frac{\cos i}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}\dot\omega-\frac{\sin i\sin\omega\cos\omega}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}(i)^{\cdot}\quad , \qquad (22.218)$$

somit die (triviale) Aussage:

$$\dot\lambda_A=-\frac{G}{e\,\mu}\frac{\cos i}{1-\sin^2 i\sin^2\omega}\left[\cos\upsilon\,b_{R2}-\sin\upsilon\left(1+\frac{r}{p}\right)b_T\right]+\frac{r}{G}\frac{\sin i\cos\omega\sin\upsilon}{\left(1-\sin^2 i\sin^2\omega\right)}b_N-\dot\Theta=\dot\lambda_P\,. \qquad (22.219)$$

Entsprechendes gilt für die Variation der Deklination des Apogäums.

22.10 Bahnauswahl aus Drift der Perigäumslänge

Im Fall der Satellitenbewegung werden ausgehend von der Beziehung (22.211) die säkularen Variationen erster Ordnung durch das Gravitationsfeld der Erde berücksichtigt. Nach Formel (22.188) ist

$$\dot\omega_{Gs}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar a_0^3}}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar a_0^2\left(1-\bar e_0^2\right)^2}\left(5\cos^2\bar i_0-1\right)+O\left(J_2^2\right)\qquad . \qquad (22.220)$$

---

[1] Band V

entsprechend den Ausdrücken (20.14) und (20.15)[1]

$$\begin{aligned}(i_{Gs})^{\cdot} &= O\left(J_2^2\right)\\ \dot{\Omega}_{Gs} &= -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad .\end{aligned} \tag{22.221}$$

Diese Ausdrücke in Formel (22.203) ergeben die Bedingungsgleichung der säkularen Variation durch das Gravitationsfeld der Erde für die geographische Länge des Perigäums

$$\dot{\lambda}_{PGs} = \dot{\Omega}_{Gs} + \frac{\cos i}{1-\sin^2 i\,\sin^2\omega}\,\dot{\omega}_{Gs} - \dot{\Theta} \tag{22.222}$$

somit in erster Ordnung

$$\dot{\lambda}_{PGs0} + \dot{\Theta} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,J_2\,\frac{R_E^2\cos\bar{i}_0}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left[\frac{5\cos^2\bar{i}_0-1}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right] + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.223}$$

22.10.1 Mittlere große Bahnhalbachse aus der säkularen Variation der Perigäumslänge

Neben der säkularen Variation $\dot{\lambda}_{PGs}$ seien die mittleren Epocheelemente $\bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0$ vorgegeben. Die mittlere große Bahnhalbachse zur Epoche als Näherung erster Ordnung kann aus dem Ausdruck (22.223) berechnet werden:

$$\bar{a}_0^{(1)} = \sqrt[7]{\mu\left[\frac{3}{4}\frac{J_2\,R_E^2\cos\bar{i}_0}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2\left(\dot{\lambda}_{PGs}+\dot{\Theta}\right)}\left(\frac{5\cos^2\bar{i}_0-1}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right)\right]^2} \quad . \tag{22.224}$$

Die Berechnung wird ungenau für große Exzentrizitäten, außerdem für Polbahnen $\left(\bar{i}_0 = 90°\right)$ und wenn die Apside über dem Pol liegt $\left(\bar{\omega}_0 = 90° \text{ oder} = 270°\right)$. Eine Verbesserung der Berechnung der mittleren großen Bahnhabachse ist möglich mit der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0^{(k)}\right) \equiv \dot{\lambda}_{PGs0}^{(k)} - \dot{\lambda}_{PGs} = 0 \quad . \tag{22.225}$$

Zur Durchführung einer sukzessiven Approximation als einem vereinfachten *Newton*-Verfahren wird die Ableitung der Bedingungsgleichung nach der gesuchten Halbachse nach (22.222) benötigt:

$$\frac{d\left(fct\right)}{d\bar{a}_0} = \frac{d\left(\dot{\lambda}_{PGs}^{(k)}\right)}{d\bar{a}_0} = \frac{d\left(\dot{\Omega}_{Gs}\right)}{d\bar{a}_0} + \frac{\cos\bar{i}_0}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0}\,\frac{d\left(\dot{\omega}_{Gs}\right)}{d\bar{a}_0} \quad . \tag{22.226}$$

Im Fall der Einflüsse erster Ordnung durch das Erdschwerefeld folgt aus (22.223)

$$\frac{d\left(fct\right)}{d\bar{a}_0} = -\frac{21}{8}\,\frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}_0^4\sqrt{\bar{a}_0}}\,\frac{J_2\,R_E^2\cos\bar{i}_0}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left[\frac{5\cos^2\bar{i}_0-1}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right]+\cdots \quad . \tag{22.227}$$

Eine Einschränkung in den Berechnungen wird durch die Höhe des Perigäums vorgegeben, die nicht unterschritten werden darf. Wird hierfür der Wert $H_P = r_P - R_E$ gewählt, so kann die zugehörige erlaubte Exzentrizität in Bezug auf die große Bahnhalbachse aus

[1] Band III, Abschnitt 20.2.1

$$\bar{e}_0 = 1 - \frac{r_P}{\bar{a}_0} \tag{22.228}$$

berechnet werden. Wird dieser Wert mit fest vorgegebenem Perigäumsradius r_P in (22.224) eingesetzt, kann die Grenzkurve Halbachse über Inklination iterativ aus der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0^{(1)}\right) \equiv \bar{a}_0^{(1)} - \sqrt[7]{\mu\left[\frac{3}{4}\frac{J_2 R_E^2 \cos\bar{i}_0\left(\frac{5\cos^2\bar{i}_0 - 1}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0} - 2\right)}{\left[1-\left(1-\frac{r_P}{\bar{a}_0^{(1)}}\right)^2\right]^2\left(\dot{\lambda}_{PGs}+\dot{\Theta}\right)}\right]^2} = 0 \tag{22.229}$$

berechnet werden. Es zeigt sich, dass damit eine obere Schranke für die Exzentrizität notwendig erhalten wird.

BEISPIEL 1: Berechnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe von Exzentrizität, Inklination und Argument des Perigäums. Gegeben sei die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$. Mit Annahme der Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.35$, der Inklination $\bar{i}_0 = 25°$, sowie dem Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 0°$ liefert Formel (22.224) die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(0)} = 10929.084\,\mathrm{km}$. Da die Kontrolle mit Formel (22.222) den Wert $\dot{\lambda}_{PGs}^{(0)} = -360°.0033656701/\mathrm{d}$ ergibt, der eine Abweichung vom vorgegebenen Sollwert $\dot{\lambda}_{PGs}$ im zweistelligen Sekundenbereich hat, ist eine iterative Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (22.225) erforderlich. Diese ergibt die große Halbachse $\bar{a}_0^{(1)} = 10918.38742930\,\mathrm{km}$, somit die Korrektur $\Delta a = \bar{a}_0^{(1)} - \bar{a}_0^{(0)} = \text{-}10.69703\,\mathrm{km}$. Damit liefert die Kontrolle für die Längendrift den geforderten Wert auf mindestens 10 Stellen nach dem Komma genau.

Wenn dagegen $\bar{\omega}_0 = 60°$ vorgegeben ist, wird als erster Näherungswert für die mittlere große Halbachse $\bar{a}_0^{(0)} = 12114.995\,\mathrm{km}$ erhalten. Das Argument des Perigäums hat ersichtlich wesentlichen Einfluss auf die Berechnungen. Die Kontrolle mit Formel (22.222) ergibt den Wert $\dot{\lambda}_{PGs}^{(0)} = -360°.3002670930/\mathrm{d}$. Die iterative Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (22.225) liefert $\bar{a}_0^{(1)} = 12108.73332653\mathrm{km}$ mit der Korrektur $\Delta a = \bar{a}_0^{(1)} - \bar{a}_0^{(0)} = \text{-}6.26214\,\mathrm{km}$. Die a-posteriori Genauigkeit liegt unter 2×10^{-12}.◀

BEISPIEL 2: Berechnung von großer Bahnhalbachse und Exzentrizität bei Vorgabe von minimaler Perigäumshöhe $H = 200$ km, Inklination $\bar{i}_0 = 25°$ und Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 0°$. Gegeben sei die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$. Um eine Iteration mit Formel (22.229) starten zu können, wird ein Anfangswert für die große Bahnhalbachse benötigt, bzw. nach Formel (22.228) für die Exzentrizität. In Bild 22-20 ist die Halbachse über der Inklination für eine feste Drift der Perigäumslänge für verschiedene Exzentrizitäten aufgetragen. Es ist zu ersehen, dass für die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.0$ das größte Inklinationsintervall erhalten wird. Um also das Problem unabhängig von einer gewählten Inklination bearbeiten zu

können, ist es sinnvoll als Anfangswert für die gestellte Aufgabe stets $\bar{e}_0 = 0.0$ zu wählen. Im aktuellen Fall wird dann aus Formel (22.224) der Näherungsausdruck $\bar{a}_0 = 10142.700\ \text{km}$ erhalten. Die iterative Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (22.229) ergibt eine Korrektur um $\Delta\bar{a}_0 = 1184.75610\ \text{km}$.

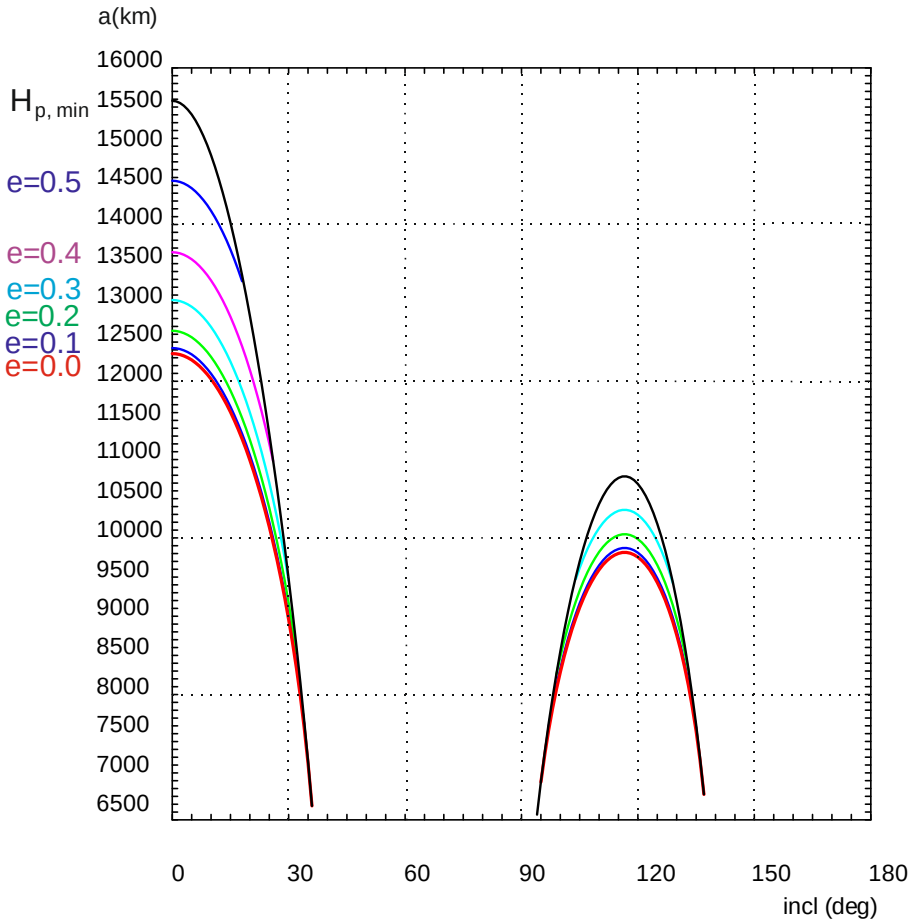


Bild 22-20: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten bei Annahme der säkularen Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\text{d}$, Die Berechnung wird eingeschränkt durch Vorgabe der minimalen Perigäumshöhe H_P =200 km. Im Beispiel ist $\bar{\omega}_0 = 0°$ vorgegeben.

Die endgültige Lösung beträgt somit $\bar{a}_0 = 11327.456\ \text{km}$, die zugehörige Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.41927498$. Die a posteriori Genauigkeit beträgt $\left| fct\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)\right| = 4\times10^{-6}$. Zur Durchführung der Iteration war die Schrittweite $\bar{a}_0/100[\text{km}]$ gewählt worden, bevor das stabile Verfahren fortgesetzter Halbierung einsetzen kann. Die Ableitung der Bedingungsfunktion (22.227) beträgt in diesem Fall $d\left(fct\right)/d\left(\bar{a}_0\right) = -6\times10^{-8}$, was aber die langsame Konvergenz des Verfahrens nicht wesentlich beeinflusst. ◀

BEISPIEL 3: Übersicht über alle möglichen Bahnen, welche die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = 360°.0/\text{d}$ und mindestens die Perigäumshöhe 200 km haben. Bei diesen Bahnen ist auch eine höhere Perigäumshöhe zugelassen. Mit den in den beiden vorstehenden Beispielen angewandten Verfahren wird in diesem Beispiel als Funktion der Inklination und für

verschiedene Exzentrizitäten die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ berechnet. Außerdem wird in jedem Fall die mögliche Grenzexzentrizität für den Fall berechnet, dass die Bahn exakt die minimale Perigäumshöhe $H = 200\,\text{km}$ annimmt. Die entsprechende Kurve, die in Bild 22-20 als schwarze Kurve eingetragen ist, hüllt die Schar möglicher Bahnen ein. Die Kurven aller dieser möglichen Bahnen enden auf der Kurve der Grenzexzentrizitäten. In Bild 22-21 ist der Verlauf der Grenzexzentrizität aufgetragen. Das Bild zeigt als Ergebnis: es gibt keine Erdsatellitenbahn mit einer höheren Exzentrizität, wenn nach genau einem mittlerem Sonnentag das Perigäum wieder über demselben geographischen Längengrad stehen soll, wobei die minimaler Perigäumshöhe exakt den Wert $H = 200\,\text{km}$ und das mittlere Argument des Perigäums den Wert $\bar{\omega}_0 = 0°$ annehmen sollen. ◀

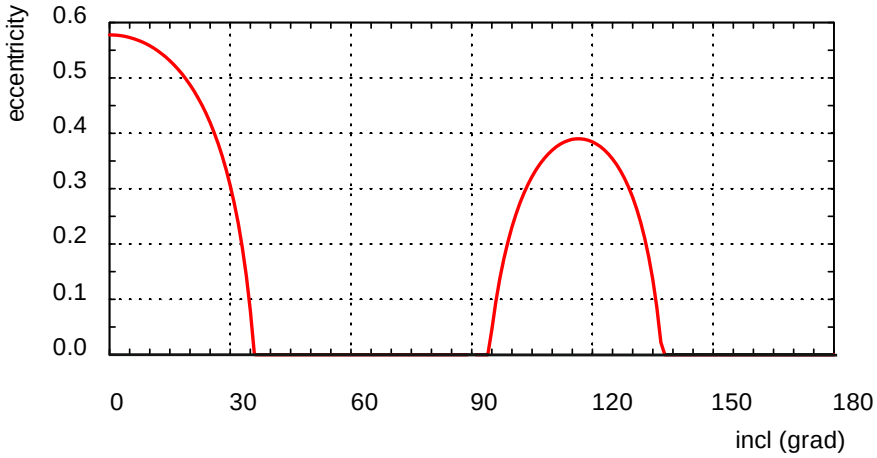


Bild 22-21: Verlauf der (mittleren) Exzentrizität $\bar{e}_0$ über der Inklination für Satellitenbahnen mit der säkularen Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0\,/\,\text{d}$ und bei der minimalen Perigäumshöhe H_P =200 km. Dies ist die Grenzexzentrizität, die erreicht werden kann, wenn die obige säkulare Drift der Perigäumslänge eingehalten werden soll. Im Beispiel ist $\bar{\omega}_0 = 0°$ vorgegeben.

BEISPIEL 4: In den bisherigen drei Beispielen wurde die Längendrift des Perigäums so gewählt, dass nach genau einem mittleren Sonnentag das Perigäum sich exakt wieder über demselben Längengrad befindet. Da das Argument des Perigäums von den Einflüssen der Erdabplattung abhängt, muss in diesem Fall (außer bei Äquatorbahnen) erwartet werden, dass sich die geographische Breite des Perigäums notwendig ändert. Einen Hinweis liefert die in Tabelle 22-3 berechnete Abfolge der Apsiden: man erkennt eine langsame aber merkbare Drift der geographischen Breiten phi der Apogäen wie der Perigäen. ◀

Anmerkung: In Tabelle 22-3 befindet sich zum angegebenen Zeitpunkt der Satellit an der angegebenen Position. Wenn die Lage des Perigäums nach einem Tag betrachtet wird, so befindet sich der Satellit nicht notwendig im Perigäum seiner Bahn. Die Vorgabe der Drift des Perigäums einer Satellitenbahn hat somit nichts mit der Bewegung des Satelliten in seiner Bahn zu tun. ◀

BEISPIEL 5: In allen vorstehenden Beispielen wurde angenommen, dass das erste Perigäum auf dem Äquator liegt $\left(\bar{\omega}_0 = 0°.0\right)$. Formel (22.224) lässt jedoch vermuten, dass mit wachsender Inklination auch der Einfluss eines wachsenden Argumentes des Perigäums die Berechnung der Bahnparameter beeinflussen wird. Um dies zu demonstrieren wird mit $\sin\bar{\omega}_0 = 1$ der maximal mögliche Einfluss untersucht. Das Ergebnis ist in **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** dargestellt. Ein Vergleich mit Bild 22-20 zeigt nur geringe Abweichungen

für Inklinationen unter 90°, jedoch erhebliche für rückläufige Bahnen. Genauere Daten unter Einschluss des Zwischenwertes $\left(\bar{\omega}_0 = 45°.0\right)$ sind in Tabelle 22-4 enthalten. Alle Bahnen wurden wieder für die säkulare Drift $\dot{\lambda}_{PGs} = 360°.0/\mathrm{d}$ gerechnet. In allen drei Fällen hat die große Bahnhalbachse im Fall i = 0° den maximalen Wert 15580.0 km, die Exzentrizität e = 0.5777855. Dieses erste Intervall möglicher Bahnen wird mit zunehmendem Argument des Perigäums etwas größer mit wachsender Inklination. Das zweite Intervall für Inklinationen größer als 90° sind die Verhältnisse auffallend anders. Das Inklinationsintervall wird immer enger, so als würden die Kurven gestaucht (vgl. **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** auf Seite **Fehler! Textmarke nicht definiert.** und die Zusammenstellung in Tabelle 22-4). Damit verbunden wird die große Bahnhalbachse wie entsprechend auch die Exzentrizität erheblich größer als im Fall $\bar{\omega}_0 = 0°$. Dieses Verhalten muss bei langfristigen Untersuchungen sorgfältig berücksichtigt werden, da das Argument des Perigäums langfristig wächst, so dass im Lauf der Zeit das Bahnverhalten grundsätzlich periodisch variiert, obwohl nur die säkulare Variation des Argumentes des Perigäums betrachtet wird. ◀

P|A|	N|	M|	YEAR	MO	DA	HO	MI	SE	L(deg)	phi(deg)	H(km)	AR(deg)	DE(deg)
P| |	0|	0|	2016	1	16	11	37	24.619	344.378	-25.046	2714.298	274.084	-24.942
|A|	0|	0|	2016	1	16	13	17	20.605	208.145	7.785	9102.315	162.902	7.764
P| |	1|	0|	2016	1	16	14	57	16.591	294.494	-25.032	2714.294	274.303	-24.929
|A|	1|	0|	2016	1	16	16	37	12.577	158.185	7.613	9102.298	163.045	7.592
P| |	2|	0|	2016	1	16	18	17	8.563	244.610	-25.017	2714.290	274.522	-24.914
|A|	2|	0|	2016	1	16	19	57	4.549	108.224	7.441	9102.281	163.188	7.420
P| |	3|	0|	2016	1	16	21	37	0.535	194.726	-25.001	2714.285	274.742	-24.898
|A|	3|	0|	2016	1	16	23	16	56.521	58.264	7.268	9102.265	163.331	7.248
P| |	4|	0|	2016	1	17	0	56	52.508	144.842	-24.983	2714.280	274.961	-24.880
|A|	4|	0|	2016	1	17	2	36	48.494	8.303	7.095	9102.249	163.473	7.076
P| |	5|	0|	2016	1	17	4	16	44.480	94.957	-24.964	2714.274	275.180	-24.861
|A|	5|	0|	2016	1	17	5	56	40.466	318.341	6.922	9102.233	163.615	6.903
P| |	6|	0|	2016	1	17	7	36	36.452	45.073	-24.943	2714.269	275.398	-24.840
|A|	6|	0|	2016	1	17	9	16	32.438	268.380	6.748	9102.218	163.757	6.729
P| |	7|	0|	2016	1	17	10	56	28.424	355.188	-24.921	2714.262	275.617	-24.818
|A|	7|	0|	2016	1	17	12	36	24.410	218.418	6.574	9102.203	163.899	6.556
P| |	8|	1|	2016	1	17	14	16	20.396	305.303	-24.897	2714.256	275.835	-24.794

Tabelle 22-3: Die Abfolge von Perigäen (P) und Apogäen (A) und ihre geographischen Positionen für die Bahn $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, a=11327.456, e=0.4192750, i=25°, ω=0°.

$\bar{\omega}_0$	Erstes Intervall	Zweites Intervall			
		a_{max}	e_{max}	i_{max}	
0°	i = 0° → i = 39°	10784.07 km	0.3900744	117°	i = 95° → i = 140°
45°	i = 0° → i = 47°	11724.47 km	0.4389396	108°	i = 95° → i = 130°
90°	i = 0° → i = 48°	12286.52 km	0.4646054	107°	i = 95° → i = 128°

Tabelle 22-4: Übersicht über das Bahnverhalten bei Vorgabe der säkularen Drift des Perigäums $\dot{\lambda}_{PGs} = 360°.0/\mathrm{d}$.

BEISPIEL 6: In den bisherigen Beispielen wurde stets angenommen, dass die Länge des Perigäums im Verlauf eines Tages um genau 360° verschoben wird, das Perigäum sich somit stets wieder über demselben Längengrad befindet. Im vorliegenden Beispiel wird untersucht, wie sich eine Veränderung der säkularen Drift des Perigäums auf die Bahnauswahl auswirkt. In jedem Fall wird wieder angenommen, dass der Start der Untersuchungen auf dem Äquator beginnt $\left(\bar{\omega}_0 = 0°\right)$. Es zeigt sich für unterschiedliche Driften des Perigäums, dass diese extrem sensitiv die Bahnauswahl beeinflussen. Das merkwürdige Verhalten wird in Bild 22-22 bis Bild 22-26 demonstriert. Entscheidend ist die Abweichung der Drift des Perigäums von der tropischen Rotation der Erde $\dot{\Theta} \approx 361°/d$.

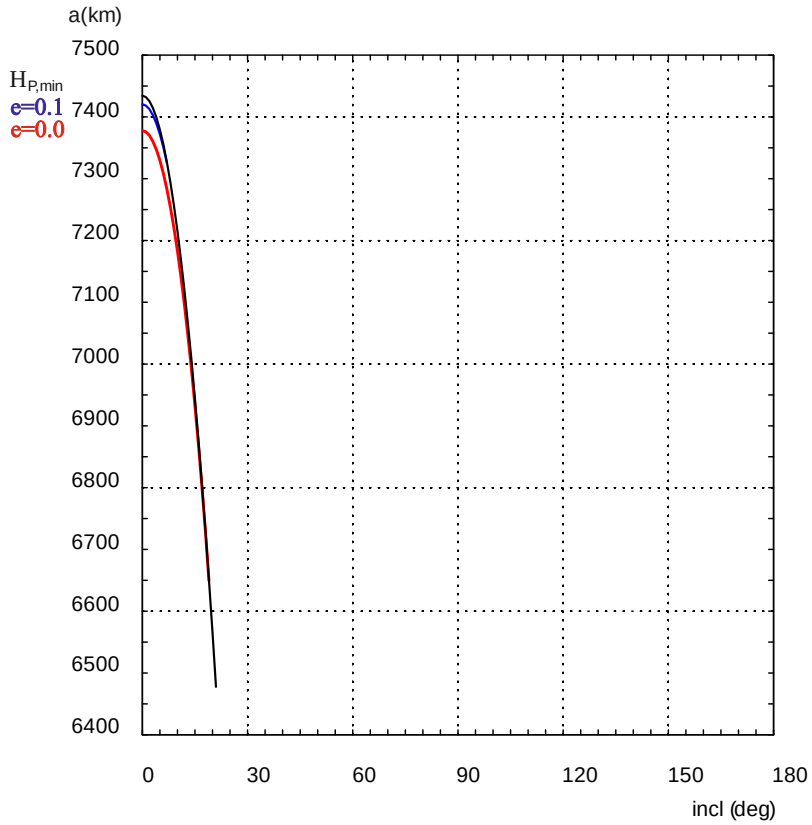


Bild 22-22: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ über der Inklination für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -355°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe H_p =200 km, $\bar{\omega}_0 = 0°$

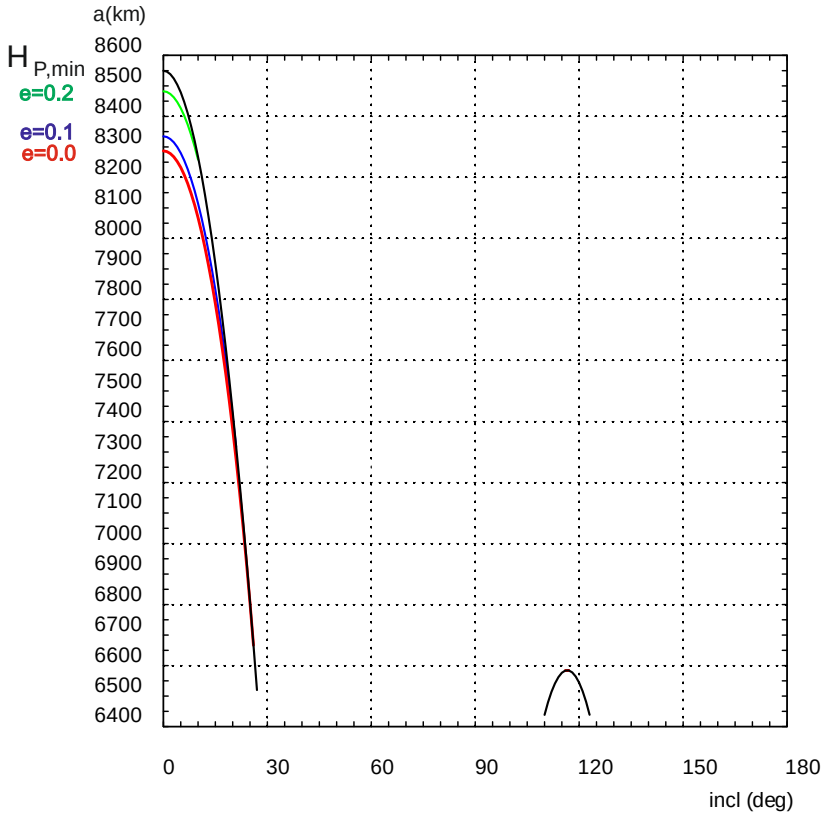


Bild 22-23: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -357°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe H_p =200 km, $\bar{\omega}_0 = 0°$

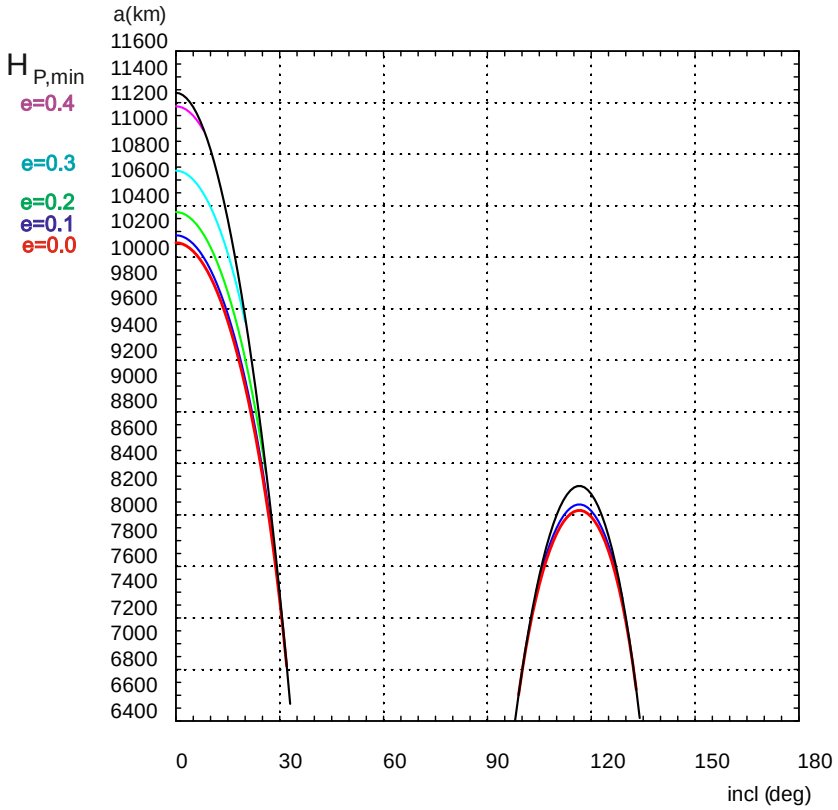


Bild 22-24: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -359°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe H_p =200 km, $\bar{\omega}_0 = 0°$

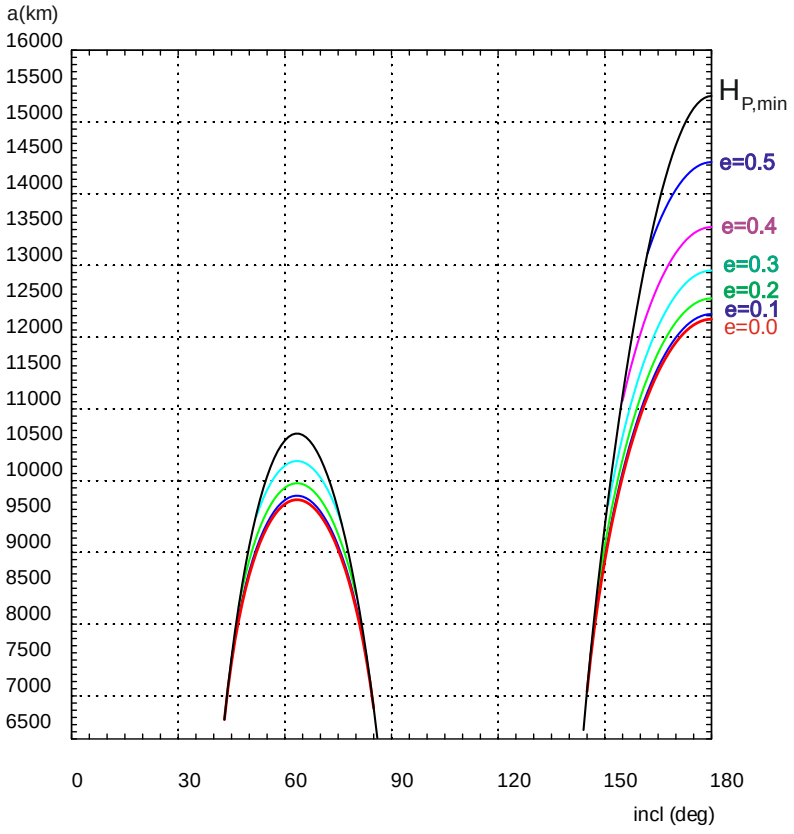


Bild 22-25: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ für Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -362°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe H_p =200 km, $\bar{\omega}_0 = 0°$.

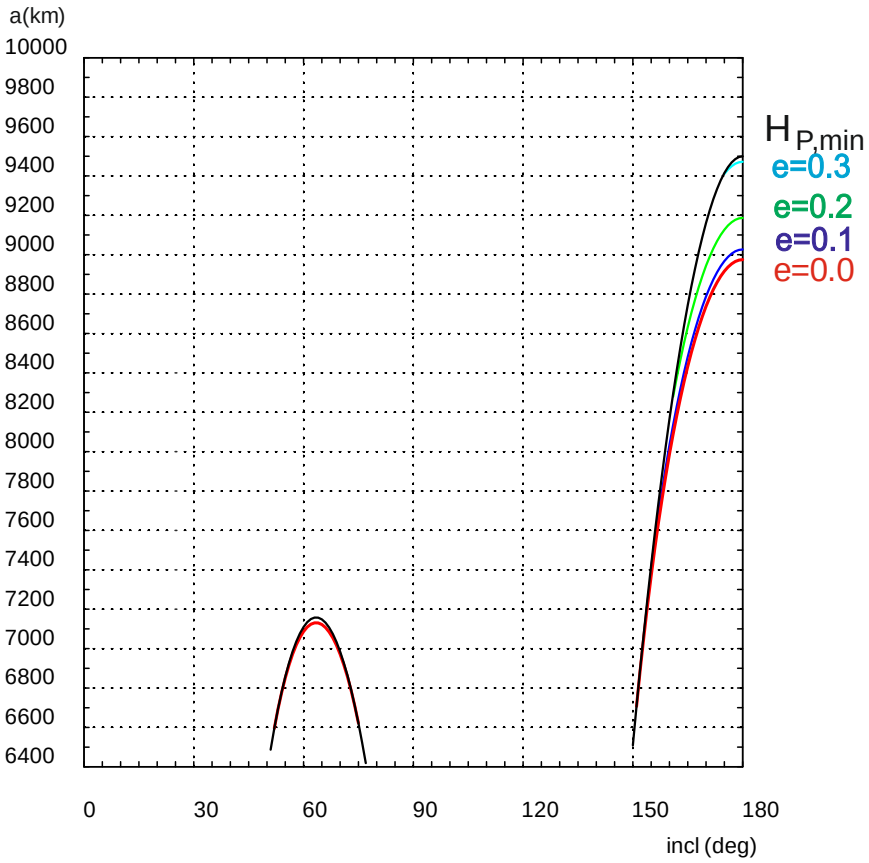


Bild 22-26: Verlauf der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ für die Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PGs} = -364°.0/\mathrm{d}$, minimale Perigäumshöhe H_p =200 km, $\overline{\omega}_0 = 0°$

Formel (22.224) zeigt Singularität für den Fall $\dot{\lambda}_{PGs} = -\dot{\Theta}$. In diesem Fall kann keine Bahn mit der vorgegebenen Drift gefunden werden. Allerdings sind für Driften nahe der tropischen Erdrotation Bahnen mit hohen Exzentrizitäten und bei vorgegebener Perigäumshöhe mit hoher Apogäumshöhe möglich. Mit zunehmendem Abstand von $\dot{\Theta}$ wird die Bahnauswahl immer geringer und dann auch nur noch für wenige Inklinationen möglich. Der singuläre Fall $\dot{\lambda}_{PGs} = -\dot{\Theta}$ wirkt als Spiegelung der Bahnauswahl: der Fall $\left|\dot{\lambda}_{PGs}\right| > \dot{\Theta}$ wird in Bild 22-25 und Bild 22-26 gezeigt[1]. Vergleiche dazu etwa Bild 22-24 und Bild 22-25. ◀

22.10.2 Mittlere Exzentrizität aus der säkularen Variation der Perigäumslänge

Neben der säkularen Variation $\dot{\lambda}_{PGs}$ seien die mittleren Epocheelemente $\overline{a}_0, \overline{i}_0, \overline{\omega}_0$ vorgegeben. Die mittlere Exzentrizität zur Epoche als Näherung erster Ordnung kann wieder aus dem Ausdruck (22.223) berechnet werden:

[1] Der exakte Wert ist in Tabelle 7 in Anhang E.2 (Band V) enthalten

$$\bar{e}_0^{(1)} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0}}\,\frac{J_2\,R_E^2\cos\bar{i}_0}{\bar{a}_0^3\left(\dot{\lambda}_{PGs}+\dot{\Theta}\right)}\left(\frac{5\cos^2\bar{i}_0-1}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right)}} \quad . \tag{22.230}$$

Als notwendige Vorbedingung für die Existenz der Exzentrizität muss die Bedingung

$$0 \le \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0}}\,\frac{J_2\,R_E^2\cos\bar{i}_0}{\bar{a}_0^3\left(\dot{\lambda}_{PGs}+\dot{\Theta}\right)}\left(\frac{5\cos^2\bar{i}_0-1}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right) \le 1 \tag{22.231}$$

erfüllt sein. Damit ist auch klar, dass die Formel (22.230) nur für elliptische Bahnen gültig sein kann.

Falls benötigt kann analog zur Bedingungsgleichung (22.225) eine Verbesserung erhalten werden mit der Gleichung

$$fct\left(\bar{e}_0^{(k)}\right) \equiv \dot{\lambda}_{PGs}^{(k)} - \dot{\lambda}_{PGs} = 0 \quad . \tag{22.232}$$

Die Ableitung nach der Exzentrizität lautet

$$\frac{d\dot{\lambda}_{PGs0}}{d\bar{e}_0} = 3\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,J_2\,\frac{\bar{e}_0\,R_E^2\cos\bar{i}_0}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\left[\frac{5\cos^2\bar{i}_0-1}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right]+O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{22.233}$$

BEISPIEL 1: Zur Überprüfung von Formel (22.230) wird mit den Ergebnissen aus dem vorstehenden Beispiel 1 bei Vorgabe der säkularen Drift $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$, der Inklination $i = 25°$, des Arguments des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 0°$ und der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10918.38742930\,\mathrm{km}$ die Exzentrizität mit Formel (22.230) berechnet: es ergibt sich $\bar{e}_0^{(0)} = 0.3478432916473$. Eine iterative Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (22.232) und der a-priori Forderung $\Delta e = 10^{-6}$ ergibt $\bar{e}_0^{(1)} = 0.3500003228973$, d.h. den gesuchten Wert 0.35 in ausreichender Genauigkeit. Zur Kontrolle wird die säkulare Drift der Perigäumslänge für diese Exzentrizität berechnet: sie lautet $\dot{\lambda}_{PGs}^{(1)} = -359°.9999994932/\mathrm{d}$ mit der a-posteriori Genauigkeit $\Delta\dot{\lambda}_{PGs} = 10^{-6}$ entsprechend besser als 4×10^{-4} Bogensekunden. ◀

BEISPIEL 2: Mit $\bar{\omega}_0 = 60°$ und der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 12108.73332653\,\mathrm{km}$ ergibt sich (wieder mit der Inklination i = 25°) der erste Näherungswert $\bar{e}_0^{(0)} = 0.3488634172138$. Die iterative Verbesserung ergibt $\bar{e}_0^{(1)} = 0.3500001359638$ entsprechend dem Kontrollwert $\dot{\lambda}_{PGs}^{(1)} = -359.9999997863/\mathrm{d}$. ◀

22.10.3 Mittlere Inklination aus der säkularen Variation der Perigäumslänge

Neben der säkularen Variation $\dot{\lambda}_{PGs}$ seien die mittleren Epocheelemente $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{\omega}_0$ vorgegeben. Die mittlere Inklination zur Epoche als Näherung erster Ordnung kann wieder aus dem Ausdruck (22.223) berechnet werden. Die Auflösung nach $\cos\bar{i}_0^{(1)}$ führt auf eine kubische Gleichung der Form

$$A\cos^3 \bar{i}_0^{(1)} + B\cos^2 \bar{i}_0^{(1)} + C\cos \bar{i}_0^{(1)} + D = 0 \tag{22.234}$$

mit den Abkürzungen

$$A := F\left(5 - 2\sin^2 \bar{\omega}_0\right), B := -\sin^2 \bar{\omega}_0, C := -F\left(3 - 2\sin^2 \bar{\omega}_0\right), D := -\cos^2 \bar{\omega}_0,$$
$$F := \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\frac{J_2 R_E^2}{\left(\dot{\lambda}_{PGs} + \dot{\Theta}\right)\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \tag{22.235}$$

Die Auflösung dieser Gleichung kann nach einer der bekannten Methoden, etwa mit der Cardanischen Formel oder mit einem numerischen Verfahren (*Newton* Iteration) durchgeführt werden. Letzteres empfiehlt sich in der praktischen Anwendung um eine eindeutige Lösung erhalten zu können. Falls für einen Näherungsprozess eine Anfangslösung benötigt wird, kann diese folgendermaßen hergeleitet werden[1]: mit den Hilfsgrößen

$$q := \frac{B^3}{27A^3} - \frac{BC}{6A^2} + \frac{D}{2A} \quad , \quad p := \frac{3AC - B^2}{9A^2} \tag{22.236}$$

wird die Diskriminante

$$\Delta := q^2 + p^3 \tag{22.237}$$

gebildet. Wenn diese positiv ist, hat die kubische Gleichung genau die eine reelle Lösung

$$\cos \bar{i}_0^{(1)} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \quad , \tag{22.238}$$

die beiden anderen Lösungen sind komplex. Falls die Diskriminante negativ ist, sind alle drei Wurzeln reell und es muss numerisch die passende Lösung gesucht werden.

Ausgehend von der hier hergeleiteten Näherungslösung kann eine Verbesserung gefunden werden analog Bedingungsfunktion (22.225) aus

$$fct\left(\bar{i}_0^{(k)}\right) \equiv \dot{\lambda}_{PGs}^{(k)} - \dot{\lambda}_{PGs} = 0 \quad . \tag{22.239}$$

Mit den Ausdrücken (22.220) - (22.222) wird in diesem Fall

$$\dot{\omega}_{Gs}^{(k)} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(5\cos^2 \bar{i}_0^{(k)} - 1\right) + O\left(J_2^2\right) \tag{22.240}$$

$$\dot{\Omega}_{Gs}^{(k)} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\, J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos \bar{i}_0^{(k)} + O\left(J_2^2\right) \tag{22.241}$$

und somit für die Drift der geographischen Länge des Perigäums

$$\dot{\lambda}_{PGs}^{(k)} = \dot{\Omega}_{Gs}^{(k)} + \frac{\cos \bar{i}_0^{(k)}}{1 - \sin^2 \bar{i}_0^{(k)} \sin^2 \bar{\omega}_0}\dot{\omega}_{Gs}^{(k)} - \dot{\Theta} \quad . \tag{22.242}$$

Um die sukzessive Iteration durchführen zu können, wird die Ableitung der Bedingungsgleichung (22.239) benötigt, die hier im Hinblick auf ein genähertes *Newton*-Verfahren nur für die Anfangslösung $\bar{i}_0^{(1)}$ verwendet wird:

[1] Siehe etwa in BRONSTEIN, I. AND K. SEMENDJAJEW [1962], p. 117

$$\frac{d\left(fct\right)}{d\bar{i}_0^{(k)}} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}_0^3\sqrt{\bar{a}_0}}\frac{J_2 R_E^2 \sin\bar{i}_0^{(k)}}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left[1+\frac{5\cos^2\bar{i}_0^{(k)}}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}\right]+$$
$$+\frac{\sin\bar{i}_0^{(k)}}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}\left[-1+\frac{2\cos^2\bar{i}_0^{(k)}\sin\bar{\omega}_0}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}\right]\dot{\omega}_{Gs}^{(k)}+\cdots \quad . \tag{22.243}$$

BEISPIEL 1: In Umkehrung der vorherigen Beispiele werden neben der Längendrift $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$ die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.35$ und die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 10918.387\,\mathrm{km}$ sowie eine rechtläufige Bahn $\mathrm{sgn}\left(\cos\bar{i}_0\right) = +1$ vorgegeben. Das mittlere Argument des Perigäums sei $\bar{\omega}_0 = 0°.0$. Die Diskriminante (22.237) ergibt $\Delta = 0.002065195911273$. Somit liefert Formel (22.238) nur eine reelle Lösung: $\bar{i}_0^{(0)} = 25°.04990814309$. Als Kontrolle wird die säkulare Drift der Perigäumslänge berechnet: $\dot{\lambda}_{PGs}^{(0)} = -360°.0/\mathrm{d}$. Eine Verbesserung mit Hilfe der Bedingungsgleichung (22.239) ergibt $\bar{i}_0^{(1)} = 25°.00000000533$. Die a-posteriori Genauigkeit liegt somit bei 2×10^{-5} Bogensekunden. ◀

BEISPIEL 2: Im Fall $\bar{\omega}_0 = 60°.0$ wird nach Beispiel 1 in Abschnitt 22.10.1 die mittlere große Halbachse $\bar{a}_0^{(1)} = 12108.73332653\mathrm{km}$ vorgegeben sowie die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.35$ und wie oben die säkulare Längendrift $\dot{\lambda}_{PGs} = -360°.0/\mathrm{d}$. Es wird eine rechtläufige Bahn angenommen $\left(\mathrm{sgn}(\cos\bar{i}_0) = +1\right)$. Die erste Näherung für die Inklination beträgt $\bar{i}_0^{(0)} = 32°.4964469167$ mit dem Kontrollausdruck $\dot{\lambda}_{PGs}^{(0)} = -360°.6654078993/\mathrm{d}$. Wie im vorherigen Beispiel sollte die Inklination *i* =25° betragen. Das Beispiel zeigt wie außerordentlich empfindlich diese Berechnungen sind, die ohne eine iterative Verbesserung kein brauchbares Ergebnis liefern. Die Iteration ergibt $\bar{i}_0^{(0)} = 25°.00000000757$, die a-posteriori Genauigkeit beträgt 2×10^{-10} Grad in der Perigäumslängendrift. ◀

Anmerkung: Die Auswahl der Inklination bei Vorgabe der Perigäumslängendrift ist wie etwa ein Blick auf Bild 22-17 bis Bild 22-26 zeigt, nicht eindeutig oder gar nicht möglich. In der praktischen Anwendung wird es deshalb vorteilhaft sein, an Hand eines solchen Diagramms eine erste Auswahl für Inklination und große Bahnhalbachse zu treffen um dann anschließend mit einem der hier geschilderten analytischen Verfahren eine verfeinerte Bahnauswahl zu finden. ◀

22.10.4 Mittleres Argument des Perigäums aus der säkularen Variation der Perigäumslänge

Neben der säkularen Variation $\dot{\lambda}_{PGs}$ seien die mittleren Epocheelemente $\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0$ vorgegeben.

Aus (22.223) kann erhalten werden:

$$\sin\bar{\omega}_0 = \pm\frac{1}{\sin\bar{i}_0}\sqrt{1-\frac{\left(5\cos^2\bar{i}_0-1\right)J_2\,R_E^2\cos\bar{i}_0}{2\,J_2\,R_E^2\cos\bar{i}_0+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\bar{a}_0^3}{\mu}}\left(\dot{\lambda}_{PGs}+\dot{\Theta}\right)\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}} \quad . \tag{22.244}$$

Die Berechnung ist nur unter Einschränkungen möglich: sie ist für Äquatorbahnen nicht definiert, außerdem ist die Lösung nicht eindeutig und erfordert daher eine zusätzliche Forderung. Sie dürfte in der Praxis nicht von direktem Interesse sein. Eine schrittweise Bearbeitung dürfte im Rahmen einer Auswahl der großen Bahnhalbachse (Abschnitt 22.10.1) zielführender sein. Dieser Fall soll hier nicht weiter verfolgt werden.

22.11 Vorgabe von anomal. Umlaufzeit und Variation der Perigäumslänge

Wenn zwei Bewegungsparameter vorgegeben sind, können aus ihnen zwei *Kepler*elemente oder andere vergleichbare Bahnparameter bestimmt werden. Je nach den analytischen Verknüpfungen dieser Parameter ist die umkehrbare Eindeutigkeit dieser Beziehungen nur mit einschränkenden Randbedingungen möglich. Im aktuellen Beispiel seien die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_A}$ und die säkulare Drift $\dot{\lambda}_{Ps}$ der geographischen Länge des Perigäums im Erdfeld vorgegeben. Damit können je nach Anforderung Paare von *Kepler*elementen berechnet werden. Dazu müssen im Prinzip die zwei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}\left|\overline{P_A}-\overline{P_A}^{(k)}\right| &\le \varepsilon_1\\ \left|\dot{\lambda}_{Ps}-\dot{\lambda}_{Ps}^{(k)}\right| &\le \varepsilon_2\end{aligned} \tag{22.245}$$

erfüllt sein. Hier sind $\overline{P_A}$ und $\dot{\lambda}_{Ps}$ die vorgegebenen Sollwerte, während die Parameter $\overline{P_A}^{(k)}$ und $\dot{\lambda}_{Ps}^{(k)}$ iterativ mit dem gegebenen Bahnmodell berechnet werden, bis nach *k* Iterationsschritten vorgegebene Genauigkeitsschranken $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ unterboten werden.

Um das Verfahren numerisch stabil zu halten, werden als Bedingungsgleichungen statt der Ausdrücke (22.245) die überlagerten Funktionen

$$\begin{aligned}fct_1\left(E^{(k)};t_0\right) &\equiv \sin\left[\upsilon^{(k)}\left(t_0+N\,\overline{P_A}\right)-\upsilon^{(k)}\left(t_0\right)\right]=0\\ fct_2\left(E^{(k)};t_0\right) &\equiv \sin\left[\lambda_P^{(k)}\left(t_0+N\,\overline{P_A}\right)-\lambda_P^{(k)}\left(t_0\right)-\dot{\lambda}_{Ps}\,N\,\overline{P_A}\right]=0\end{aligned} \tag{22.246}$$

gewählt. Die zu bestimmenden Bahnparameter sind für die Epoche t_0 zu berechnen. Die natürliche Zahl *N* gibt an, über wie viele anomalistische Umläufe die Berechnung zu erfolgen hat. $E^{(k)}$ bezeichnet den Vektor der zu berechnenden Parameter im *k*-ten Iterationsschritt. Die Verschiebung der Perigäumslänge über *N* anomalistische Umläufe hat die fest vorgegebene Größe

$$N\,\overline{\Delta\lambda_P} = N\,\dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} \quad . \tag{22.247}$$

Im Iterationsprozess sind daher nur die wahre Anomalie $\upsilon^{(k)}$ und die geographische Länge $\lambda_P^{(k)}$ zu den betreffenden Zeitpunkten mit Hilfe des vorgegebenen Bahnmodells zu berechnen. Die Epoche t_0 als Anfangszeitpunkt für das zu untersuchende Intervall ist eine feste Größe, ebenso die wahre Anfangsanomalie $\upsilon\left(t_0\right)=\upsilon_0$, die somit nicht in den Iterationsprozess

einbezogen werden muss. Damit liegt auch der Endzeitpunkt $t_2 := t_0 + N\,\overline{P_A}$ fest. Jedoch muss die wahre Anomalie am Ende des Intervalls in Abhängigkeit von den zu suchenden Bahnparametern in den Iterationsprozess einbezogen werden. Anders sind die Verhältnisse bei der geographischen Länge λ_P, da auch deren Wert am Anfangszeitpunkt von den zu iterierenden Bahnparametern abhängt (siehe die Systeme (22.196) - (22.198). Damit haben die Bedingungsgleichungen im Hinblick auf den Iterationsprozess die Gestalt

$$\begin{aligned} fct_1\left(E^{(k)};t_0\right) &\equiv \sin\left[\upsilon^{(k)}\left(t_2\right)-\upsilon_0\right]=0 \\ fct_2\left(E^{(k)};t_0\right) &\equiv \sin\left[\Delta\lambda_{NP}^{(k)}-N\,\overline{\Delta\lambda_P}\right]=0 \quad . \end{aligned} \tag{22.248}$$

Hier ist (nach Formel (22.212))

$$\Delta\lambda_{NP}^{(k)} = \dot{\lambda}_{Ps}^{(k)}\,\frac{2N\pi}{\overline{n_A}^{(k)}} \quad . \tag{22.249}$$

Der eventuelle Einfluss des Luftwiderstandes wird für die hier angestrebte langfristige Untersuchung vernachlässigt. Daher kann die säkulare Variation der Perigäumslänge in erster Ordnung nach Formel (22.223) verwendet werden. Die mittlere anomalistische mittlere Bewegung erster Ordnung ist mit Formel (22.40) gegeben. Damit ergibt sich die mittlere Verschiebung der Perigäumslänge pro mittlerem anomalistischem Umlauf in erster Näherung in jedem Iterationsschritt zu

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{NP} = 2N\pi\Bigg\{\frac{3}{4}\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\Bigg[\cos\overline{i}_0\left(\frac{5\cos^2\overline{i}_0-1}{1-\sin^2\overline{i}_0\sin^2\overline{\omega}_0}-2\right)- \\ -2\sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}\,\dot{\Theta}\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\overline{i}_0\right)\Bigg]-\dot{\Theta}\sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}\Bigg\} \quad . \end{aligned} \tag{22.250}$$

Mit dieser Formel können jetzt auch die „Nullstellen“ der Kurven der säkularen Drift der Perigäumslänge über der Inklination in Bild 22-17 auf Seite 84 abgeschätzt werden (d.h. die Schnittpunkte mit der $-\dot{\Theta}$-Geraden). Im Näherungsfall der säkularen Variation ergibt sich zunächst die Bedingung $\cos\overline{i}_0 = 0$, somit $\overline{i}_{01} = 90°$. Als zweite Bedingung muss

$$\frac{5\cos^2\overline{i}_{0/2,3}-1}{1-\sin^2\overline{i}_{0/2,3}\sin^2\overline{\omega}_0} = 2 \;,\; \text{somit} \;\; \cos\overline{i}_{0/2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{5+2\sin^2\overline{\omega}_0}} \tag{22.251}$$

erfüllt sein. Im vorliegenden Fall werde $\overline{\omega}_0 = 0°$ angenommen. Dann haben die beiden Schnittpunkte die Inklinationen $\overline{i}_{0/2} = 39°.231520484$ und $\overline{i}_{0/3} = 140°.768479516$.

22.11.1 Berechnung von Halbachse und Inklination

Vorgegeben seien neben den Parametern $\left(\overline{P_A}, \dot{\lambda}_{Ps}\right)$ der anomalistischen Bewegung die mittleren *Kepler*elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ für eine Epoche t_0, außerdem die Anzahl *N* der gewünschten anomalistischen Umläufe. Gesucht sind die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und die Inklination $\overline{i}_0$ zur Epoche.

In diesem Fall führt eine Taylorentwicklung erster Ordnung auf die Darstellungen

$$
\begin{aligned}
fct_1\left(\bar{a}_0^{(k+1)}, \bar{i}_0^{(k+1)}\right) &= fct_1\left(\bar{a}_0^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right) + \\
&+ \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_0^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \Delta \bar{a}_0^{(k+1)} + \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_0^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0} \Delta \bar{i}_0^{(k+1)} + R_1 \\
fct_2\left(\bar{a}_0^{(k+1)}, \bar{i}_0^{(k+1)}\right) &= fct_2\left(\bar{a}_0^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right) + \\
&+ \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_0^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \Delta \bar{a}_0^{(k+1)} + \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_0^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0} \Delta \bar{i}_0^{(k+1)} + R_2 \quad .
\end{aligned}
\tag{22.252}
$$

In den Restgliedern $\left(R_1, R_2\right)$ werden alle Anteile zweiter und höherer Ordnung zusammengefasst, die hier vernachlässigt werden. Die Korrekturterme sind

$$
\Delta \bar{a}_0^{(k+1)} := \bar{a}_0^{(k+1)} - \bar{a}_0^{(k)} \quad , \Delta \bar{i}_0^{(k+1)} := \bar{i}_0^{(k+1)} - \bar{i}_0^{(k)} \quad . \tag{22.253}
$$

Damit können die Parameter der $\left(k+1\right)-$ten Iteration berechnet werden unter der Bedingung, dass die linken Seiten in den Gleichungen (22.252) verschwinden sollen:

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_0^{(k+1)} &= \bar{a}_0^{(k)} - \frac{fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right) \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0} - fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right) \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0}}{\frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0}} \\
\bar{i}_0^{(k+1)} &= i_0^{(k)} - \frac{fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right) \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} - fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right) \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0}}{\frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0}}
\end{aligned}
\tag{22.254}
$$

Die Berechnung erfolgt als vereinfachtes *Newton*sches Verfahren, d.h. die Ableitungsmatrix

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}
\frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} & \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \\
\frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0} & \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0}
\end{pmatrix} = \\
&= \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} \frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0}
\end{aligned}
\tag{22.255}
$$

wird nur näherungsweise unter Verzicht auf periodische und höhere Bewegungseinflüsse („Störungen“) verwendet und nur einmal mit den Anfangswerten berechnet. Wenn die entsprechende Determinante verschwindet, konvergiert das Verfahren nicht und es müssen verbesserte Anfangswerte gesucht werden.

Die gegebene mittlere anomalistische Umlaufzeit werde als Näherung für die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit angenommen. Somit kann als Anfangsnäherung der großen Bahnhalbachse für den Iterationsprozess der Wert

$$
\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu \overline{P_A}^2}{4\pi^2}} \tag{22.256}
$$

gewählt werden. Eine Anfangsnäherung $\overline{i}_0^{(0)}$ für die Inklination kann mit dem in Abschnitt 22.10.3 geschilderten Verfahren mit Hilfe des zuvor gefundenen $\overline{a}_0^{(0)}$ berechnet werden.

Zur Durchführung der Iteration (22.254) werden die partiellen Ableitungen der Bedingungsfunktionen (22.248) nach den Variablen $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ benötigt. Um die erste der Bedingungsgleichungen (22.248) für die k-te Iteration

$$fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)}, \overline{i}_0^{(k)}; t_0\right) \equiv \sin\left[\upsilon_2^{(k)} - \upsilon_0\right] = 0 \tag{22.257}$$

zum Zeitpunkt $t_2 = t_0 + N\overline{P_A}$ berechnen zu können, wird zunächst die mittlere Anomalie

$$\begin{aligned} M_2^{(k)} &= \overline{M_0}\left(t_2\right) + \overline{n_{K0}}^{(k)}\left(t_2 - t_0\right) = \\ &= \overline{M_{00}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}\left(t_2 - t_0\right) + \overline{n_{K0}}^{(k)}\left(t_2 - t_0\right) = \overline{M_{00}} + \overline{n_{a0}}^{(k)}\, N\, \overline{P_A} \end{aligned} \tag{22.258}$$

mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (nach Formel (22.40))

$$\overline{n_{a0}}^{(k)} = \overline{n_{K0}}^{(k)} + \left(M_0\right)^{\cdot(k)}_{Gs0} = \overline{n_{K0}}^{(k)} \left[1 + \frac{3}{2}\, J_2\, \frac{R_E^2\, \sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\left(\overline{a}_0^{(k)}\right)^2 \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \overline{i}_0^{(k)} \right) \right] + \cdots . \tag{22.259}$$

benötigt. Die mittlere Anomalie zum Zeitpunkt t_2 erlaubt somit den Näherungsausdruck

$$M_2^{(k)} = \overline{M_{00}} + N\overline{P_A} \sqrt{\frac{\mu}{\left(\overline{a}_0^{(k)}\right)^3}} \left[1 - \frac{3}{2}\, J_2\, \frac{R_E^2\, \sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\left(\overline{a}_0^{(k)}\right)^2 \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \overline{i}_0^{(k)} \right) + \cdots \right] . \tag{22.260}$$

Durch Auflösung der *Kepler*gleichung

$$M_2^{(k)} = E_2^{(k)} - \overline{e}_0 \sin E_2^{(k)} \tag{22.261}$$

wird die zugehörige exzentrische Anomalie und mit den *Kepler*gleichungen

$$\cos \upsilon_2^{(k)} = \frac{\cos E_2^{(k)} - \overline{e}_0}{1 - \overline{e}_0 \cos E_2^{(k)}} \quad , \quad \sin \upsilon_2^{(k)} = \frac{\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\, \sin E_2^{(k)}}{1 - \overline{e}_0 \cos E_2^{(k)}} \tag{22.262}$$

die wahre Anomalie erhalten. Die gesuchten partiellen Ableitungen der ersten Bedingungsgleichung ergeben sich damit aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)},\, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{a}_0^{(k)}} &= \frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)},\, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \upsilon_2^{(k)}} \frac{\partial \upsilon_2^{(k)}}{\partial E_2^{(k)}} \frac{\partial E_2^{(k)}}{\partial M_2^{(k)}} \frac{\partial M_2^{(k)}}{\overline{a}_0^{(k)}} \\ \frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)},\, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \overline{i}_0^{(k)}} &= \frac{\partial fct_1\left(\overline{a}_0^{(k)},\, \overline{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \upsilon_2^{(k)}} \frac{\partial \upsilon_2^{(k)}}{\partial E_2^{(k)}} \frac{\partial E_2^{(k)}}{\partial M_2^{(k)}} \frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial \overline{i}_0^{(k)}} \quad . \end{aligned} \tag{22.263}$$

Im Einzelnen sind[1]

[1] Siehe etwa die Zusammenstellungen in Abschnitt 15.2, Band III, außerdem die erste der Formeln (22.95)

$$\frac{\partial fct_1\left(\bar{a}_o^{(k)},\ \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \upsilon_2^{(k)}} = \cos\left(\upsilon_2^{(k)} - \upsilon_0\right)$$

$$\frac{\partial \upsilon_2^{(k)}}{\partial E_2^{(k)}} = \frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{1-\bar{e}_0 \cos E_2^{(k)}} \tag{22.264}$$

$$\frac{\partial E_2^{(k)}}{\partial M_2^{(k)}} = \frac{1}{1-\bar{e}_0 \cos E_2^{(k)}}$$

$$\frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial \bar{a}_0^{(k)}} = -\frac{3}{2} N \overline{P_A} \frac{\sqrt{\mu}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^2 \sqrt{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)}} \left[1 - \frac{7}{2} \frac{J_2 R_E^2 \sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \bar{i}_0^{(k)}\right)\right] + \cdots$$

$$\frac{\partial M_2^{(k)}}{\partial \bar{i}_0^{(k)}} = \frac{9}{2} N \overline{P_A}\, \overline{n_{K0}}^{(k)} \frac{J_2 R_E^2 \sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \sin \bar{i}_0^{(k)} \cos \bar{i}_0^{(k)} + \cdots \quad .$$

Zur Berechnung der zweiten Bedingungsgleichung

$$fct_2\left(\bar{a}_0^{(k)}, \bar{i}_0^{(k)}; t_0\right) \equiv \sin\left[\Delta\lambda_{NP}^{(k)} - N\,\overline{\Delta\lambda_P}\right] = 0 \tag{22.265}$$

werden mit der Längenverschiebung $\Delta\lambda_{NP}^{(k)}$ des Perigäums nach Formel (22.250) die Partialausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)},\ \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_o^{(k)}} &= \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)},\ \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)} \frac{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0^{(k)}} \\ \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)},\ \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0^{(k)}} &= \frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)},\ \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)} \frac{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)}{\partial \bar{i}_0^{(k)}} \end{aligned} \tag{22.266}$$

benötigt. Hier ist zunächst

$$\frac{\partial fct_2\left(\bar{a}_o^{(k)},\ \bar{i}_0^{(k)}\right)}{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)} = \cos\left[\Delta\lambda_{NP}^{(k)} - N\,\overline{\Delta\lambda_P}\right] \quad . \tag{22.267}$$

Nach Formel (22.250) ergeben sich die Partialausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)}{\partial \bar{a}_0} = 3N\pi \Bigg\{ & -\frac{J_2 R_E^2 \cos \bar{i}_0^{(k)}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^3 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left(\frac{5\cos^2 \bar{i}_0^{(k)} - 1}{1 - \sin^2 \bar{i}_0^{(k)} \sin^2 \bar{\omega}_0} - 2\right) - \\ & + \frac{1}{2} \frac{J_2 R_E^2\ \dot{\Theta}}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)\left(1-\bar{e}_0^2\right)\sqrt{\mu\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)\left(1-\bar{e}_0^2\right)}} \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 \bar{i}_0^{(k)}\right) - \dot{\Theta}\sqrt{\frac{\bar{a}_0^{(k)}}{\mu}} \Bigg\} \end{aligned} \tag{22.268}$$

$$\frac{\partial\left(\Delta\lambda_{NP}^{(k)}\right)}{\partial\bar{i}_0}=\frac{3N\pi}{2}\frac{J_2\,R_E^2}{\left(\bar{a}_0^{(k)}\right)^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left\{-\sin\bar{i}_0\left(\frac{5\cos^2\bar{i}_0^{(k)}-1}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}-2\right)+\right.$$

$$+\frac{\cos\bar{i}_0^{(k)}}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}\left[-10\cos\bar{i}_0^{(k)}\sin\bar{i}_0^{(k)}+\frac{2\left(5\cos^2\bar{i}_0^{(k)}-1\right)\sin\bar{i}_0^{(k)}\cos\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}{1-\sin^2\bar{i}_0^{(k)}\sin^2\bar{\omega}_0}\right]+ \qquad (22.269)$$

$$\left.+6\sqrt{\frac{\bar{a}_0^3}{\mu}}\dot{\Theta}\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\sin\bar{i}_0^{(k)}\cos\bar{i}_0^{(k)}\right\}\ .$$

BEISPIEL 1: Um die hier entwickelten Formeln zu testen, werden bekannte Daten vorgegeben, die hier wieder reproduziert werden sollen. Vorgegeben seien die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PsG}$= -355°.0, die Inklination $\bar{i}_0=10°.0$, sowie die Exzentrizität $\bar{e}_0=0.0$, sowie das Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0=0°.0$. Nach Abschnitt 22.10.1 (ab Seite 89) ergibt sich mit diesen Daten die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0=7177.34865$ km sowie die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{a0}=6044.002436093$ sec. Mit den Vorgaben $\dot{\lambda}_{PsG}$= -355°.0 und $\overline{P}_{A0}=6044.00244$ sec sollen mit den Formeln dieses Abschnittes Halbachse und Inklination berechnet werden. Wird $\overline{P}_{A0}$ als *Kepler*sche Umlaufzeit angenommen, folgt als Näherungswert $\bar{a}_0^{(0)}=7182.981$ km. Die entsprechende Näherungslösung für die Inklination ergibt keine eindeutige Lösung der algebraischen Gleichung dritter Ordnung (22.234), da die Diskriminante (22.237) negativ ist. Um keinen willkürlichen Suchprozess starten zu müssen, wird auf Bild 22-17 auf Seite 84 verwiesen. Hier können die möglichen Bereiche einer Lösung entnommen werden. Danach werde mit der willkürlichen Annahme $\bar{i}_0^{(0)}=15°$ der Iterationsprozess (22.254) gestartet. Er liefert nach wenigen Schritten die Lösungen $\bar{a}_0^{(k)}=7177.348604968871$ km, $\bar{i}_0^{(k)}=10°.00078602465138$. Die Abweichungen gegenüber den Vorgaben sind eine Folge der auf 10 Stellen eingeschränkten Eingabe und damit folgenden Rundungsfehlern. Zur Kontrolle werden die anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{A0}^{(k)}=6044.002440000$ sec sowie die säkulare Drift der Perigäumslänge berechnet: $\dot{\lambda}_{PsG}$= -355°.000091. ◀

BEISPIEL 2: Vorgegeben seien die säkulare Drift der Perigäumslänge $\dot{\lambda}_{PsG}$= -360°.0, die Inklination $\bar{i}_0=25°.0$, sowie die Exzentrizität $\bar{e}_0=0.35$, sowie das Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0=60°.0$. Diese Daten führen auf die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0=12108.73332653$ km und die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P}_{A0}=13255.15106080\ \text{sec}\hat{=}3^h.681986406$. Mit den Vorgaben $\dot{\lambda}_{PsG}$= -360°.0 und $\overline{P}_{a0}=13255.1511$ sec wird zunächst die genäherte große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(0)}=12105.49265$ km mit Formel (22.256) berechnet. Als Anfangsinklination wird nach Bild 22-17 der Wert $\bar{i}_0^{(0)}=15°$ gewählt. Die Iteration (22.254) führt auf $\bar{a}_0^{(k)}=12108.727$ km,

$\bar{i}_0^{(k)} = 25°.07529624$, die Kontrolle ergibt $\dot{\lambda}_{PsG}{}^{(k)} = -360°.002280$ und $\overline{P_{A0}}^{(k)} = 13255.15109999 \text{ sec}$. ◀

22.11.2 Berechnung von Halbachse und Exzentrizität

Nach dem vorstehenden Muster können bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit und der säkularen Drift der geographischen Länge des Perigäums auch die große Bahnhalbachse und die Exzentrizität berechnet werden, sofern die übrigen Bahnparameter Inklination, Rektaszension des aufsteigenden Knotens, Argument des Perigäums und mittlere Epocheanomalie vorgegeben sind.

22.11.3 Berechnung von Halbachse und Argument des Perigäums

In analoger Weise können bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit und der säkularen Drift der geographischen Länge des Perigäums auch die große Bahnhalbachse und das Argument des Perigäums berechnet werden, sofern die übrigen Bahnparameter Exzentrizität, Inklination, Rektaszension des aufsteigenden Knotens und mittlere Epocheanomalie vorgegeben sind. Um die Berechnung eindeutig zu gestalten muss eventuell eine weitere Forderung erhoben werden. Siehe hierzu die Anmerkung in Abschnitt 22.10.4 auf Seite 99.

22.11.4 Berechnung von Exzentrizität und Inklination

Prinzipiell ist es auch möglich bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit und der säkularen Drift der geographischen Länge des Perigäums in analoger Weise die Exzentrizität und die Inklination zu berechnen, sofern die anderen Bahnparameter bekannt sind.

22.11.5 Berechnung von Exzentrizität und Argument des Perigäums

Schließlich ist es denkbar, dass in der praktischen Anwendung bei Vorgabe der mittleren anomalistischen Umlaufzeit und der säkularen Drift der geographischen Länge des Perigäums auch die Exzentrizität und das Argument des Perigäums gewünscht werden, wenn die restlichen Bahnparameter bekannt sind.

22.12 Äquivalenzbahnen

22.12.1 Begriffsbildung von Äquivalenzbahnen

Äquivalenzbahnen von Satelliten werden durch Kombination zweier (oder eventuell mehrerer) Bewegungsbezüge von Satellitenbahnen gebildet. Dazu können die verschiedenen Bewegungsbezüge beliebig kombiniert werden. In allen Fällen werden mittlere und wahre Äquivalenzen unterschieden. Die mittleren Äquivalenzbahnen werden aus dem Vergleich mittlerer Bewegungen bzw. mittlerer Umlaufzeiten erhalten. Die mittleren Bewegungen werden mit mittleren Epocheelementen in Ausdrücken säkularer Bewegungseinflüsse gebildet. Realitätsnaher sind wahre Äquivalenzbahnen. Sie werden mit wahren Umlaufzeiten gebildet. Diese werden entsprechend dem jeweiligen Bewegungsbezug durch Berechnung des wahren Bahnwinkels über einen Umlauf gebildet. Auch in diesem Fall werden mittlere Epochebahnparameter („Elemente“) berechnet. In beiden Fällen muss mehrfach iterativ gearbeitet werden. Dieser Prozess kann mit einem analytischen oder einem numerischen Bahnmodell durchgeführt werden. Dazu wird in der Regel ein Anfangswert für die große Bahnhalbachse benötigt. Dieser kann als Näherungswert in hinreichender Genauigkeit aus Ausdrücken der mittleren Bewegungen gebildet

werden. Die derart gekoppelten Bahnen können interessante spezielle Eigenschaften präsentieren.

Nicht in allen Fällen können Kopplungen von Bewegungen durch exakte Übereinstimmung erzielt werden. Durch Verallgemeinerung des Begriffes von Äquivalenzbahnen können auch Äquivalenzbahnen gefunden werden, bei denen die Übereinstimmung der Umlaufzeiten nur in einem eingeschränkten Rahmen möglich. Hierbei handelt es sich um Satellitenbewegungen deren Kurvenverlauf über der großen Halbachse sich nur wenig voneinander unterscheidet und sich nicht überschneidet. Das trifft zu für die mittlere anomalistische, drakonitische, *Hansen* und tropische Bewegung. Wir bezeichnen die entsprechenden Bahnen als *Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen*. Doch auch in einem solchen Rahmen können interessante Satellitenbahnen gefunden werden. Die Sonnen-synodische sowie die Mond-synodische Bewegung sind zwar auch nahe bei den erstgenannten Bewegungen, weichen aber etwas mehr ab, so dass exakte Schnittpunkte gefunden werden können, die für die Bestimmung von exakten Äquivalenzbahnen wesentliche Voraussetzung sind. Diese werden im Rahmen der Sonnen-synodischen bzw. der Mond-synodischen Bewegung untersucht (Kapitel 28 und 29, Band IV-B).

Im folgenden Abschnitt wird die prinzipielle Behandlung von Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen beispielhaft mit der Äquivalenz zwischen anomalistischen und *Hansen* Bewegungen vorgeführt.

22.12.2 Schreibweise von Äquivalenzbahnen

Zur übersichtlichen Charakterisierung der unterschiedlichen Arten der Äquivalenzbahnen werde die folgende Bezeichnungsweise eingeführt (im Beispiel Äquivalenz zwischen anomalistischer und *Hansen*sche Bewegung):

$\overline{P_A} \triangleq \overline{P_H}$ — Äquivalenz: für die Äquivalenz der mittleren anomalistischen mit der mittleren *Hansen* Umlaufzeit. Die mittleren Umlaufzeiten werden dazu mit Hilfe der mittleren Bewegungen berechnet.

$P_A \triangleq P_H$ — Äquivalenz: für die Äquivalenz der anomalistischen mit der wahren *Hansen* Umlaufzeit. Die wahren Umlaufzeiten werden dazu mit Hilfe der entsprechenden Bahnwinkel berechnet.

Wird durch Vorgabe einer bestimmten Äquivalenz und der *Kepler*parameter $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ die (mittlere) große Bahnhalbachse berechnet, so soll sie durch die Bezeichnung $\overline{a_{QAH}}$ gekennzeichnet werden.

In analoger Weise kann auch die Exzentrizität oder ein anderer Bahnparameter nach Vorgabe der anderen 5 Bahnparameter mit Hilfe einer Äquivalenzbedingung berechnet werden. Gegenüber der Berechnung der großen Bahnhalbachse sind in der Praxis die Berechnung der anderen Parameter von untergeordneter Bedeutung.

22.12.3 Exakte Äquivalenzbahnen

Exakte Äquivalenzbahnen finden statt, wenn die Umlaufzeiten der betrachteten Bewegungen exakt übereinstimmen: $\left(\overline{P_1} = \overline{P_2}\right)$ bzw. $\left(P_1 = P_2\right)$. Die Differenz zwischen den Umlaufzeiten sollte verschwinden. In der Praxis sollte mindestens die Genauigkeit $\left|\overline{P_1} - \overline{P_2}\right| < 10^{-9}\,\mathrm{sec}$ bzw. $\left|P_1 - P_2\right| < 10^{-9}\,\mathrm{sec}$ nachgewiesen werden können.

22.12.4 Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen

Als *Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen* werden solche Bahnen bezeichnet, bei denen kein exakter Schnitt mit der Nullkurve möglich ist, d.h. die Differenz $\left(\overline{P_1} - \overline{P_2}\right)$ bzw. $P_1 - P_2$ verschwindet nicht. Die Kurve $\left(\overline{P_1} - \overline{P_2}\right)$ bzw. $P_1 - P_2$ nähert sich mit wachsender Bahnhalbachse immer mehr der Nulllinie an, verläuft also immer paralleler, kommt aber nicht zum Schnitt. Bild 22-27 (auf Seite 111) zeigt dieses Verhalten im Fall der Äquivalenz von anomalistischen mit *Hansen* Bewegungen. Typische Eigenschaften von Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen werden am Beispiel von $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}\right)$– Äquivalenzbahnen im Folgenden erarbeitet.

22.13 Äquivalenzen zwischen *Hansen*- und anomalistischer Bewegung

Die Äquivalenz zwischen *Hansen*- und anomalistischer Bewegung bewirkt eine Kopplung der Apsidenlinie einer Satellitenbewegung mit dem Bahnebenen-festen *Hansen*-System.

22.13.1 Allgemeine Eigenschaften bei *Hansen* zu anomalistischer Äquivalenz

Die anomalistische Bewegung unterscheidet sich von der *Kepler*schen Bewegung durch die Eigenbewegung der Apside, also im Fall von Erdsatelliten von Perigäum und Apogäum. Die mittlere anomalistische mittlere Bewegung unterscheidet sich von der mittleren *Kepler*schen mittleren Bewegung durch die säkulare Drift der Epocheanomalie (Formel (22.68) in Abschnitt 22.4.2)

$$\overline{n_A} = \overline{n_K} + \dot{M}_{0s} \quad . \tag{22.270}$$

Die *Hansen*sche Bewegung eines Satelliten ist fest an die Bahnebene gebunden und auf einen in der Bahnebene festliegenden Anfangspunkt bezogen (Kapitel 21). Um die *Hansen*sche Bewegung eines Satelliten auf andere Bewegungsdarstellungen beziehen zu können, muss die mittlere *Hansen*sche mittlere Bewegung nach Formel (21.62) (in Abschnitt 21.3) in der Form

$$\overline{n_H} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\overline{i} = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\overline{i} \tag{22.271}$$

verwendet werden. Äquivalenz zwischen den beiden Bewegungsarten führt somit notwendig auf die

- ***Erste Bedingung*** *von* $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_H}\right)$*-Äquivalenzbahnen:*

$$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}\right)\text{-Äquivalenz-Bahn} \quad \Rightarrow \quad \overline{n_H} = \overline{n_A} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \cos\overline{i}_0 = 0 \quad . \tag{22.272}$$

Im Fall von Erdsatelliten wird bei Anwendung des *Brouwer*schen Bahnmodells[1] für eine Aussage erster Ordnung aus der Variation des Argumentes des Perigäums nach Formel (20.16) zunächst nur der von J_2 abhängige Anteil verwendet[2]:

---

[1] D. BROUWER [1959], BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961]

[2] Formel (20.16) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{Gs0} &= -\frac{3}{4}\overline{n}_{K0}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\left(1-5\cos^2\overline{i}_0\right)+\\ &\quad+\frac{3}{2^7}\overline{n}_{K0}\,\frac{R_E^4}{\overline{p}_0^4}\left\{J_2^2\left[-35+24\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+25\left(1-\overline{e}_0^2\right)+\right.\right.\\ &\qquad+\left(90-192\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-126\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^2\overline{i}_0+\\ &\qquad\left.+\left(385+360\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+45\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^4\overline{i}_0\right]-\\ &\quad-5\,J_4\left[21-9\left(1-\overline{e}_0^2\right)+\left(-270+126\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^2\overline{i}_0+\right.\\ &\qquad\left.\left.+\left(385-189\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^4\overline{i}_0\right]\right\}+\ldots\end{aligned} \tag{22.273}$$

Entsprechend wird auch von der Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens[1] nur der Anteil erster Ordnung verwendet:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_{Gs0} &= -\frac{3}{2}\overline{n}_{K0}\,J_2\,\frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0+\\ &\quad+\frac{3}{2^5}\overline{n}_{K0}\,\frac{R_E^4}{\overline{p}_0^4}\cos\overline{i}_0\left\{J_2^2\left[-5+12\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+9\left(1-\overline{e}_0^2\right)-\right.\right.\\ &\qquad\left.-\left(35+36\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+5\left(1-\overline{e}_0^2\right)\cos^2\overline{i}_0\right)\right]-\\ &\quad-5\,J_4\left[5-3\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right]\left(3-7\cos^2\overline{i}_0\right)\Big\}+\ldots\end{aligned} \tag{22.274}$$

Damit erhält man aus Bedingung (22.272) notwendig eine von großer Bahnhalbachse und Exzentrizität vollständig unabhängige Bedingungsgleichung für die einzig möglichen Inklinationen, die Bahnen mit $\left(\overline{P_H}\triangleq\overline{P_A}\right)$- in erster Ordnung $\left[O\left(J_2^2\right)\right]$ erlauben:

$$1-3\cos^2\overline{i}_0=0 \quad , \quad \cos\overline{i}_{1/2}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad . \tag{22.275}$$

Die beiden Inklinationen, die charakteristisch für $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_H}\right)$- Äquivalenzbahnen der Ordnung $O\left(J_2^2\right)$ sind, betragen

$$i_{char,1}=54°.7356 \quad , \quad i_{char,2}=125°.2644 \quad . \tag{22.276}$$

Zweite Bedingung *von* $\left(\overline{P_H}\triangleq\overline{P_A}\right)$*-Äquivalenzbahnen:*

- $\left(\overline{P_H}\triangleq\overline{P_A}\right)$*-Äquivalenzbahn haben die charakteristischen Inklinationen* $\overline{i}_{QaH1}$, $\overline{i}_{QaH2}$.

Gleichung (22.275) erlaubt noch einen Einblick in einen weiteren Zusammenhang. Im Rahmen der *Brouwer*schen Theorie ist die säkulare Variation der Mittleren Epocheanomalie[2] im Anteil erster Ordnung proportional zu $1-3\cos^2\overline{i}_0$:

[1] Formel (20.15) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

[2] Formel (20.17) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$\begin{aligned}\dot{M}_{0sG} \;=\; & -\frac{3}{4}\overline{n}_{K0}\,J_2\,\frac{R_E^2\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}}{\overline{p}_0^{\,2}}\left(1-3\cos^2\overline{i}_0\right)+\\ & +\frac{3}{2^7}\overline{n}_{K0}\,\frac{R_E^4\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}}{\overline{p}_0^{\,4}}\left\{J_2^2\left[-15+16\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}+25\left(1-\overline{e}_0^{\,2}\right)+\right.\right.\\ & \qquad +\left(30-96\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}-90\left(1-\overline{e}_0^{\,2}\right)\right)\cos^2\overline{i}_0+\\ & \qquad \left.+\left(105+144\sqrt{1-\overline{e}_0^{\,2}}+25\left(1-\overline{e}_0^{\,2}\right)\right)\cos^4\overline{i}_0\right]-\\ & \left.-15\overline{e}_0^{\,2}\,J_4\left[3-30\cos^2\overline{i}_0+35\cos^4\overline{i}_0\right]\right\}+\ldots\end{aligned} \tag{22.277}$$

Verschwindet dieser Faktor, verschwindet auch der Anteil erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\bullet}=O\left(J_2^2\right)$. Die Beziehung (22.271) führt dann auf die interessante Aussage:

Dritte Bedingung *von* $\left(\overline{P_H}\triangleq\overline{P_A}\right)$*-Äquivalenzbahnen:*

- *Im Fall einer* $\left(\overline{P_H}\triangleq\overline{P_A}\right)$*-Äquivalenzbahn, und nur in diesem Fall, stimmt die mittlere* Hansen*sche mit der mittleren* Kepler*schen mittleren Bewegung in erster Ordnung überein*:

$$\left(\overline{P_H}\triangleq\overline{P_A}\right)\quad\Rightarrow\quad\overline{n_H}=\overline{n_A}\quad\Leftrightarrow\quad\overline{n_H}=\overline{n_K}\quad . \tag{22.278}$$

Werden in den säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s,\dot{\omega}_s,\left(M_0\right)_s^{\bullet}$ auch die Anteile höherer Ordnung zugelassen, müssen wie bei nahen Äquivalenzen erwartet werden kann nicht nur exakt die Inklinationen (22.276) zutreffen. Vielmehr können um eine $\left(\overline{P_a}\triangleq\overline{P_H}\right)$-Äquivalenzbahn zu ermöglichen auch gering abweichende Inklinationen erlaubt sein. Zudem hängt auch in diesem Fall die Auswahl von Äquivalenzbahnen von der zugelassenen Genauigkeit $\Delta\overline{P}:=\overline{P_a}-\overline{P_H}$ ab. Zur Illustration werden in Bild 22-27 - Bild 22-29 für verschiedene Inklinationen und Exzentrizitäten in der Umgebung der charakteristischen Inklination (22.276) der Verlauf der Differenz $\Delta\overline{P}$ über der großen Bahnhalbachse dargestellt. Aus der Darstellung kann abgelesen werden, mit welcher Genauigkeit $\Delta\overline{P}$ eine Nahe-Parallele $\left(\overline{P_H}\triangleq\overline{P_A}\right)-$Äquivalenzbahn gewählt werden kann. In allen Fällen zeigt sich, dass geringere Genauigkeiten nur bei hohen bis sehr hohen Halbachsen zu erreichen sind. In der Darstellung wird die Bahnhalbachse in Schritten von $\Delta a=20$ km erhöht. Analoges kann auch für exzentrische Bahnen gezeigt werden. Auch hier nähern sich die Kurven der Nulllinie mit wachsender Bahnhalbachse an, mit zunehmender Exzentrizität verschieben sich mögliche Äquivalenzbahnen zu immer höheren Halbachsen.

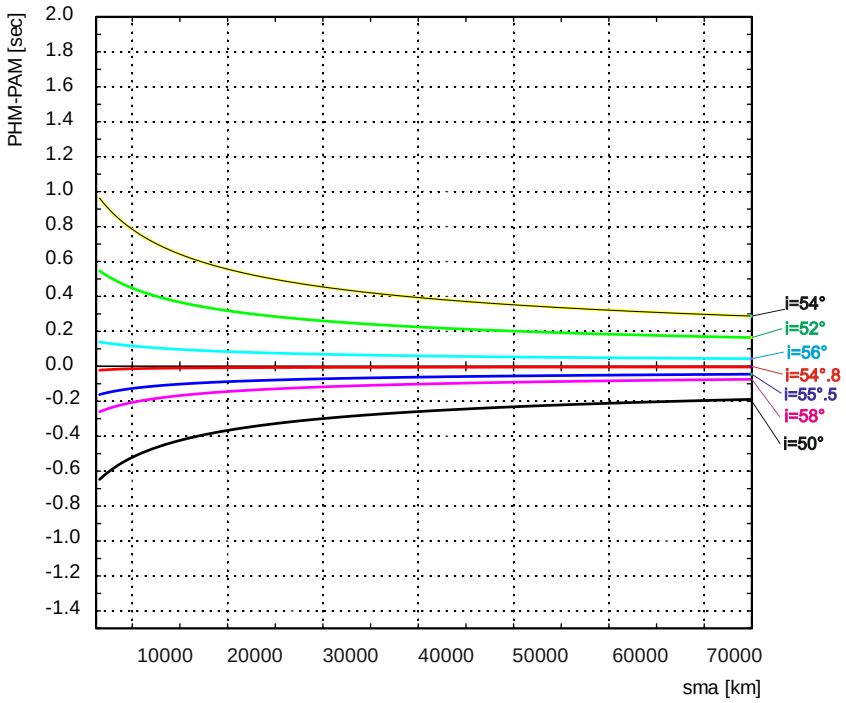


Bild 22-27: Verlauf der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_H} - \overline{P_A}$ für kreisförmige Bahnen mit verschiedenen Inklinationen in der Umgebung von $i_{char,1} = 54°.7356$. Die Differenzen werden jeweils mit der Genauigkeit $\Delta P = \left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| \le 10^{-3}$ sec berechnet. Die Bahnhalbachse wird in Schritten von $\Delta a = 20$ km erhöht. Es wird das *Brouwer*sche Bahnmodell inclusive aller säkularen und periodischen Bewegungseinflüsse durch die zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4 verwendet.

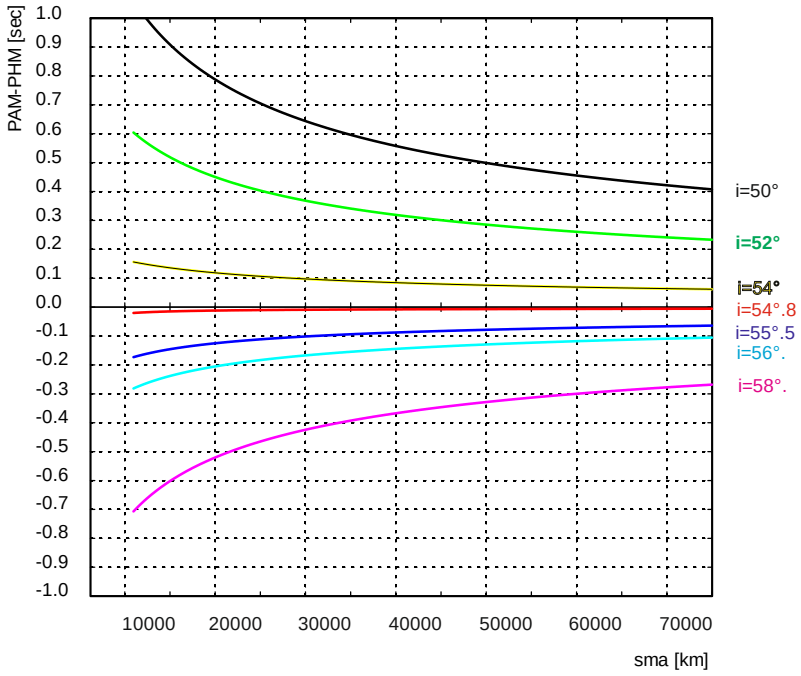


Bild 22-28: Verlauf der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_A} - \overline{P_H}$ für exzentrische Bahnen mit e=0.4 und verschiedenen Inklinationen in der Umgebung von $i_{char,1} = 54°.7356$. Die Differenzen werden jeweils mit der Genauigkeit $\Delta P = \left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| \le 10^{-3}$ sec berechnet..

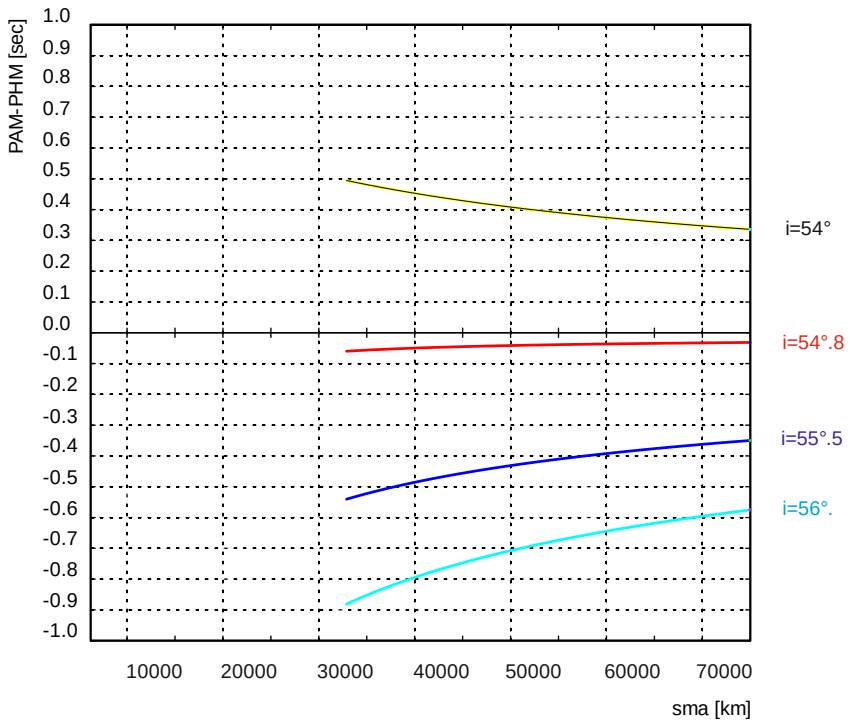


Bild 22-29: Verlauf der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_A} - \overline{P_H}$ mit der Genauigkeit $\Delta P = \left|\overline{P_A} - \overline{P_H}\right| \le 10^{-3}$ sec für exzentrische Bahnen mit e=0.8 und verschiedenen Inklinationen in der Umgebung von $\overline{i}_{QAH1} = 54°.7356$. Die Bahnhalbachse wird in Schritten von $\Delta a = 20$ km erhöht.

22.13.2 Bahnhalbachse bei *Hansen* zu anomalistischer Äquivalenz

Die mittlere große Bahnhalbachse von Nahe-Parallelen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_H}\right)$ – Äquivalenzbahnen können etwa nach Vorgabe einer Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ ausgehend bei Bezug auf eine minimale Perigäumshöhe gesucht werden, üblicherweise beginnend bei $H_P = 200$ km. Die Anfangshalbachse beträgt dann

$$\overline{a}_0^{(0)} := \left(R_E + 200\right) / \left(1 - \overline{e}_0\right) \quad [\text{km}] \quad , \tag{22.279}$$

es sei denn ein größerer Anfangswert für die große Bahnhalbachse ist vorgegeben. Die Bahnhalbachse werde dann schrittweise um einen vorgegebenen Betrag Δa erhöht. Damit können die mittleren Bewegungen $\overline{n}_{A0}$, $\overline{n}_{H0}$ sowie die mittleren Umlaufzeiten in jedem Schritt

$$\overline{P}_{H0} = \frac{2\pi}{\overline{n}_{H0}} \quad , \quad \overline{P}_{A0} = \frac{2\pi}{\overline{n}_{A0}} \tag{22.280}$$

gebildet werden. Der Iterationsprozess zur Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QAH}}$ wird mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QHA}}\right) \equiv \overline{P_H}\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_A}\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \prec \nu = 0,1,2,,3 \cdots \; . \tag{22.281}$$

durchgeführt. Wenn hier eine gewünschte Genauigkeitsgrenze $\left|\overline{P_A} - \overline{P_H}\right| < \Delta\overline{P}$ erreicht ist, wird die zuletzt errechnete Bahnhalbachse als Lösung vorgeschlagen.

$\lvert\overline{P_H}-\overline{P_A}\rvert$ sec	$\bar{a}_0$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\overline{P_A}$ [sec]	$\overline{P_H}$ [sec]
0.1	6578.137	0.0	54°.8 / 125°.2	5309.655674	5309.677915
0.01	14447.137	0.0	54°.8 / 125°.2	17281.597408	17281.607408
0.1	**15573.137**	**0.0**	**55°.5 / 124°.5**	**19340.930156**	**19341.030155**
0.1	7309.041	0.1	54°.8 / 125°.2	6218.740383	6218.760402
0.01	14907.041	0.1	54°.8 / 125°.2	18113.332564	18113.342564
0.1	8222.671	0.2	54°.8 / 125°.2	7420.464270	7420.483294
0.01	16426.671	0.2	54°.8 / 125°.2	20952.483528	20952.493527
0.1	9397.339	0.3	54°.8 / 125°.2	9066.066292	9066.085332
0.01	19512.339	0.3	54°.8 / 125°.2	27125.334551	27125.344551
0.1	10963.562	0.4	54°.8 / 125°.2	11424.546839	11424.566939
0.01	25471.562	0.4	54°.8 / 125°.2	40457.070374	40457.080374
0.1	13156.274	0.5	54°.8 / 125°.2	15017.954031	15017.976571
0.01	37829.274	0.5	54°.8 / 125°.2	73223.930939	73223.940939
0.1	16445.343	0.6	54°.8 / 125°.2	20988.225273	20988.252546
0.01	67892.343	0.6	54°.8 / 125°.2	176052.497371	176052.507371
0.1	21927.123	0.7	54°.8 / 125°.2	32313.481598	32313.518402
0.01	163343.123	0.7	54°.8 / 125°.2	656995.308897	656995.318897
0.1	32890.685	0.8	54°.8 / 125°.2	59363.647084	59363.706959
0.01	650681.685	0.8	54°.8 / 125°.2	5223527.133234	5223527.143234
0.1	106786.370	0.9	54°.8 / 125°.2	347283.993337	347284.093337

Tabelle 22-5: Die mittlere große Bahnhalbachse, sowie die mittlere anomalistische und mittlere *Hansen*sche Umlaufzeit einiger $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_H}\right)-$ Äquivalenzbahnen in Abhängigkeit von der vorgegebenen mittleren Exzentrizität, mittleren Inklination und Genauigkeitsgrenze. Die hervorgehobene Zeile enthält die Zahlenwerte im Fall einer gegenüber allen anderen Zeilen abweichenden Inklination. Basis Parameter:

$R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\oplus} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}=0.72921158573340\times10^{-4}/\text{s}$,

$J_2 = 0.001082625379977$

In Tabelle 22-5 sind für verschiedene mittlere Exzentrizitäten und etwas von den Grenzwerten (22.276) abweichenden Inklinationen sowie einer gewünschten Genauigkeitsgrenze $\Delta\overline{P}$ die entsprechenden großen Bahnhalbachsen berechnet. Außerdem sind die zugehörenden Werte für die mittleren anomalistischen und mittleren *Hansen* Umlaufzeiten zusammengestellt.

BEISPIEL 1: Es werde eine $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_H}\right)-$ Äquivalenzbahn mit der Inklination $\bar{i}_0 = 54°.4$ untersucht. Neben der Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.25$ seien die Schrittweite $\Delta a = 1\,\text{km}$ und die Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 0.05\,\text{sec}$ vorgegeben. Analog Tabelle 22-5 würden dieselben Bahnparameter mit der Inklination $\bar{i}_0 = 125°.6$ erhalten. Die berechnete große Bahnhalbachse und die

entsprechenden Bahnparameter sind in Tabelle 22-6 zusammengestellt. Die errechnete Differenz zwischen der mittleren anomalistischen und mittleren *Hansen* Umlaufzeit beträgt 0.0499990223288 sec.

Bei Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 0.1\text{sec}$ würde die Halbachse $\overline{a_{QAH}} = 8770.8493$ km erhalten, das ist der Startwert bezogen auf die minimale Perigäumshöhe 200 km. Bei Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 0.01\text{sec}$ würde die große Halbachse den Wert $\overline{a_{QAH}} =$ 385515.849 km haben. ◀

Anmerkung: In Tabelle 22-6 fällt auf, dass die wahren Umlaufzeiten mit den mittleren Umlaufzeiten (außer im Fall der meridionalen Umlaufzeiten) identisch übereinstimmen. Ursache ist, dass der Iterationsprozess für die Berechnung der wahren Umlaufzeiten mit den mittleren Umlaufzeiten beginnt. Auf Grund der im Zusammenhang mit den nahen Äquivalenzbahnen sehr geringen Genauigkeitsgrenzen setzt der Iterationsprozess zur Berechnung der wahren Zeiten nicht ein. Es bleibt daher bei der Anfangslösung. ◀

Zur Berechnung der entsprechenden wahren nahen $\left(P_A \triangleq P_H\right)$-Äquivalenzbahnen muss der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ aus einer vorgegebenen Ephemeride berechnet werden (siehe in Abschnitt 21.2.2). Mit fest vorgegebenen Bahnparametern Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ und der ν-ten Näherung der großen Bahnhalbachse $\left(\overline{a_{QAH\,0}}^{(\nu)}\right)$ kann der *Hansen*sche Bahnwinkel aus einer Ephemeridenrechnung erhalten werden.

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_H}\right)$	
$\overline{a_{QAH}} = 14359.849333\text{ km}, \overline{e}_0 = 0.25,\ \overline{i}_0 = 54.4°, \overline{\Omega}_0 = 0°, \overline{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 17125.206038$ sec	t_0 : 2020-08-07/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 17125.105853$ sec	$P_H = 17125.105853$ sec
$\overline{P_A} = 17125.155852$ sec	$P_A = 17125.155852$ sec
$\overline{P_D} = 17122.990776$ sec	$P_D = 17122.990776$ sec
$\overline{P_T} = 17126.624483$ sec	$P_T = 17126.624483$ sec
$\overline{P_R} = 21375.349811$ sec	$P_R = 19950.326491$ sec
$\overline{P_S} = 17135.924519$ sec	$P_S = 17135.924519$ sec
$\overline{P_L} = 17251.790479$ sec	$P_L = 17251.790479$ sec
$H_P = 4391.750000$ km	$H_A = 11571.674667$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P\,\overline{P_A} = -71°.600068$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -71°.617506$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -71°.600068$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -71°.617506$

Tabelle 22-6: Bahncharakteristika einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_H}\right)$– Äquivalenzbahn, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km, $\mu_\odot = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s, $J_2 = 0.001082625379977$, Berechnung der wahren Bahnparameter nur mit säkularen Bewegungseinflüssen, Suchschrittweite der Halbachse: $\Delta a = 1\text{km}$, Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| < 0.05\,\text{sec}$.

Damit wird die *Hansen*sche Umlaufzeit iterativ mit Hilfe der überlagerten Funktionsgleichung

$$fct\left(P_H\right) \equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{22.282}$$

erhalten. Entsprechend ergibt sich die wahre anomalistische Umlaufzeit mit Hilfe des Bahnwinkels des anomalistischen Systems, der wahren Anomalie, aus:

$$fct\left(P_A\right) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0 + P_A\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] = 0 \quad . \tag{22.283}$$

Schließlich wird die gewünschte große Bahnhalbachse der $\left(P_H \triangleq P_A\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QHA}}\right) \equiv P_H\left(\overline{a}^{(\nu)}\right) - P_A\left(\overline{a}^{(\nu)}\right) = 0 \quad \langle \nu = 0,1,2,\cdots \tag{22.284}$$

berechnet. Der gesamte Rechenprozess (22.282) - (22.284) muss mehrfach durchlaufen werden, bis die Funktionsgleichung unter der gewünschten Genauigkeitsgrenze ΔP liegt.

BEISPIEL 2: Es werde eine $\left(P_H \triangleq P_A\right)-$ Äquivalenzbahn mit der Inklination $\overline{i}_0 = 54°.4$ untersucht. Neben der Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.25$ seien wie im vorhergehenden Beispiel die Schrittweite $\Delta a = 1$ km und die Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 0.05$ sec vorgegeben. Bezogen auf die Epoche t_0 : 2021-02-08/12:00:0.0 beträgt die berechnete große Bahnhalbachse $\overline{a_{QHA}} = 14467.849$ km, die wahren Umlaufzeiten sind $P_A = 17318.6662527$ sec, $P_H = 17318.7160917$ mit der Differenz $\Delta P = \left|P_H - P_A\right| = 0.04983899$ sec. ◀

22.13.3 Die Inklination bei *Hansen* zu anomalistischer Äquivalenz

Analog zur Berechnung der großen Bahnhalbachse nach Vorgabe der Elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ kann auch die Inklination bei Vorgabe der Elemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ berechnet werden. Die grundlegende Eigenschaft (22.275) von $\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}$ – Äquivalenzbahnen lässt vermuten, dass derartige Berechnungen nur in einem Umfeld von den Inklinationen $\overline{i}_1$ =54°.7356, $\overline{i}_2$ =125°2644 sinnvoll durchgeführt werden können. Dazu kann etwa als nullte Näherung

$$\overline{i}_0^{(0)} := i_{char,1} \quad . \tag{22.285}$$

für einen iterativen Prozess angenommen werden. Werden die mittleren Bewegungen $\overline{n_A}$ und $\overline{n_H}$ als Funktionen der Inklination aufgefasst, lautet nach (22.272) mit den *Brouwer*schen Ausdrücken zweiter Ordnung (22.273) und (22.274) die benötigte Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{i_{QHA}}\right) \equiv \dot{\omega}_{Gs0} + \dot{\Omega}_{Gs0} \cos \overline{i_{QHA}}_0 = 0 \quad . \tag{22.286}$$

Da $\dot{\omega}_{GS0}$ und $\dot{\Omega}_{GS0}$ Funktionen (auch) der Inklination sind, kann eine weitere Näherung für die gesuchte Inklination berechnet werden aus

$$\cos \overline{i}_{QHA_0}^{(1)} = -\frac{\dot{\omega}_{Gs0}}{\dot{\Omega}_{Gs0}} \quad . \tag{22.287}$$

BEISPIEL: Es werde eine $\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}$ – Äquivalenzbahn mit der Halbachse $\overline{a}_0 = 9370$ km und der Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.25$ gewählt. Die zugehörige Inklination soll im Fall direkter Bahnen berechnet werden. Als erste Näherung wird nach (22.276) $\overline{i}_0^{(0)} = 54°.7356$ gewählt. Formel

(22.287) ergibt $\bar{i}_0^{(1)} = 54°.818493$. Die Iteration (22.286) wird mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.0001$ und der Genauigkeitsgrenze 10^{-5} durchgeführt. Die Ergebnisse lauten: $\bar{i}_0 = 54°.707993231$, $\overline{P_H} =$ 9026.51524396 sec, $\overline{P_A} = 9026.5152367$ sec, $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| =$ 0.0000072459643 sec .. ◀

Ausgehend von der charakteristischen Inklination als nullte Näherung kann eine Verbesserung der Inklination einer $P_H \triangleq P_A$ — Äquivalenzbahnen analog der Bedingung (22.284) iterativ mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{i_{QHA}}\right) \equiv P_H\left(\bar{i}_o^{(\nu)}\right) - P_A\left(\bar{i}_o^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \tag{22.288}$$

berechnet werden.

BEISPIEL: Es werde eine $P_H \triangleq P_A$ — Äquivalenzbahn mit der Halbachse $\bar{a}_0 = 9370$ km und der Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.25$ gewählt. Die zugehörige Inklination soll im Fall direkter Bahnen berechnet werden. Als erste Näherung wird wieder nach (22.276) $\bar{i}_0^{(0)} = 54°.7356$ gewählt. Formel (22.287) ergibt $\bar{i}_0^{(1)} = 54°.818493$. Die Iteration (22.288) wird mit der Schrittweite $\Delta i =$ 0°.001 und der Genauigkeitsgrenze 10^{-3} durchgeführt. Die Ergebnisse lauten bei Bezug auf die Epoche 2021-02-08/12:00:0.0:

$\bar{i}_0 = 54°.\ 741193$, $\overline{P_H} =$ 9026.522793 sec, $\overline{P_A} = 9026.\ 521370$ sec, $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| =$ 0.001423 sec. ◀

22.13.4 Die Exzentrizität bei *Hansen* zu anomalistischer Äquivalenz

Durch Vorgabe der Epoche-Bahnparameter $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ kann im Prinzip die Exzentrizität einer Nahe-Parallelen Äquivalenzbahn mit einer der folgenden Funktionsgleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} fct\left(\overline{e_{QHA}}\right) &\equiv \overline{P_H}\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_A}\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) = 0 \\ fct\left(\overline{e_{QHA}}\right) &\equiv P_H\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) - P_A\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) = 0 \end{aligned} \qquad \langle \nu = 1,2,3,\cdots. \tag{22.289}$$

Das Problem besteht darin, eine geeignete Anfangsnäherung $\bar{e}_0^{(0)}$ zu finden, wie aus Bild 22-30 ersehen werden kann. In diesem Bild ist der Verlauf der Exzentrizität über der großen Bahnhalbachse für Nahe-Parallele $\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}$ — Äquivalenzbahnen für verschiedene Inklinationen aufgetragen. Die charakteristische Inklination wird durch den Wert 54°.8 angenähert. Der Kurvenverlauf ist wesentlich durch die Genauigkeitsgrenze $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| \le 0.1\text{sec}$ geprägt. Mit wachsender Exzentrizität kann eine Bahn gefunden werden, welche die Genauigkeitsgrenze überschreitet. Im Fall der 54°.8 ist dies erstmals für die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.865$ der Fall. Die zugehörige große Bahnhalbachse ist $\bar{a}_0 = 48844.9407$ km. Von dieser Bahn aus wird die Bahnhalbachse in Schritten von $\Delta a =$ 1 km erhöht bis wieder eine Bahn gefunden ist, welche die Genauigkeitsgrenze unterschreitet. Dies ist der Fall für $\bar{e}_0 = 0.866$, $\bar{a}_0 = 49702.5746$ km. Die jeweiligen Halbachsen werden iterativ mit der Bedingungsgleichung (22.281) berechnet. Die Schrittweiten bis zur nächsten erlaubten Bahn werden immer größer. Dadurch erklären sich die Knicke im Kurvenlauf und der jeweils anschließende geradlinige Kurvenverlauf.

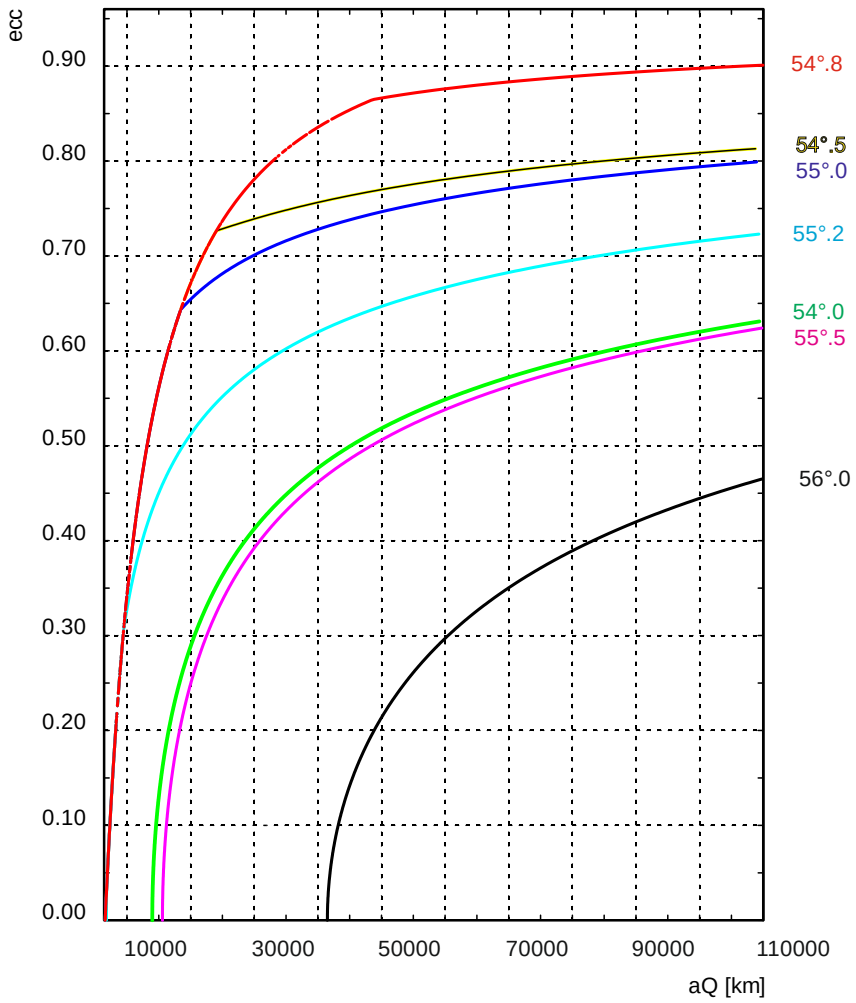


Bild 22-30: Verlauf der Exzentrizität über der großen Bahnhalbachse von $\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}$ — Äquivalenzbahnen für verschiedene Inklinationen in der Umgebung der ersten charakteristischen Inklination $i_{char,1}$=54°.735. Die Exzentrizität wird in Schritten von $\Delta e =$ 0.001, die Halbachse mit $\Delta a = 1$ km berechnet. Die zugelassene Genauigkeit beträgt $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| \le 0.1\text{sec}$.

Einen zweiten verwirrenden Kurvenverlauf zeigen die Kurven für die Inklinationen $\bar{i}_0 = 54°.5$ und $\bar{i}_0 = 54°.0$, da sie in „falscher“ Reihenfolge zwischen den Kurven mit Inklinationen größer als 54°.8 eingeordnet sind. Ein Rückblick auf Bild 22-27 - Bild 22-29 zeigt jedoch, dass diese Bahnen „von der anderen Seite“ sich der Bahn mit der charakteristischen Neigung nähern und somit einen anderen Näherungseffekt aufweisen.

Als drittes fällt auf, dass die Bahnen mit den Inklinationen $\bar{i}_0 = 54°.5$, $\bar{i}_0 = 55°.0$ und $\bar{i}_0 = 55°.2$ für kleine große Halbachsen auf der Kurve mit der charakteristischen Inklination $\bar{i}_0 = 54°.8$ verlaufen. Auch hier hilft ein Blick auf $\bar{i}_0 = 54°.5$: diese Kurven haben von der Nulllinie am Anfang den Abstand $|\Delta P| < 0.1\text{sec}$, so dass sich eine unterschiedliche Exzentrizität in Bezug auf die erlaubte Genauigkeit zunächst nicht auswirkt. Dies ist erst bei wachsender Exzentrizität der Fall, umso eher je größer die Abweichung der betreffenden Inklination von der charakteristischen Inklination ist.

Wegen der empfindlichen Bahnauswahl im Fall der Nahe -Parallelen $\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}$ — Äquivalenzbahnen ist es empfehlenswert entsprechend Tabelle 22-5 (auf Seite 113) oder Bild 22-30 eine geeignete Bahn näherungsweise durch Vorgabe der Parameter $\bar{a}_0$ und $\bar{i}_0$ und damit der Exzentrizität auszuwählen.

BEISPIEL: Vorgegeben seien die Bahnparameter $\bar{a}_0 = 14000\,\mathrm{km}$, $\bar{i}_0 = 55°.2$. Um die Exzentrizität einer $\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}$ — Äquivalenzbahn mit der Genauigkeit $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| < 0.1\,\mathrm{sec}$ zu berechnen, wird aus Bild 22-30 die Näherungslösung $\bar{e}_0^{(0)} = 0.44$ vorgegeben. Die Iteration mit der Bedingungsgleichung (22.289) ergibt als Lösung $\bar{e}_0 = 0.433$ mit der Genauigkeit $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| =$ 0.099955 sec. ◄

22.13.5 Übersicht über Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen mit Kopplung von anomalistischer mit *Hansen* Bewegung

Äquivalenzbahnen sind Satellitenbahnen, die bestimmte Bedingungen erfüllen. Exakte Äquivalenzbahnen erfüllen diese Bedingungen mit großer Genauigkeit, zumindest im Rahmen eines vorgegebenen Bahnmodells über lange Zeiträume.

Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen erfüllen diese Bedingungen in gewissen Näherungen über gewisse Zeiträume. Sie können daher gewählt werden, wenn bestimmte Bedingungen gewünscht werden. Je nach Genauigkeitsanforderungen können die Erfüllung der Bedingungen durch Bahnkorrekturen über längere Zeiteinheiten garantiert werden[1].

Einige graphische Darstellungen erläutern diese Überlegungen:

In Bild 22-31 (auf Seite 119) zeigt eine verfeinerte Darstellung von $\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}$ — Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen mit der Genauigkeit $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| \le 0.05\,\mathrm{sec}$ in der Umgebung der charakteristischen Inklination $\bar{i}_{QHA1} = 54°.7356$. Es fällt auf, dass für Inklinationen unterhalb Umgebung der charakteristischen Inklination keine Annäherung gefunden werden eine Asymmetrie der Anordnung der möglichen Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen bezüglich der ersten charakteristischen Inklination beobachtet werden.

[1] Siehe etwa in: Satellitenbewegungen, Band III, Kapitel 12

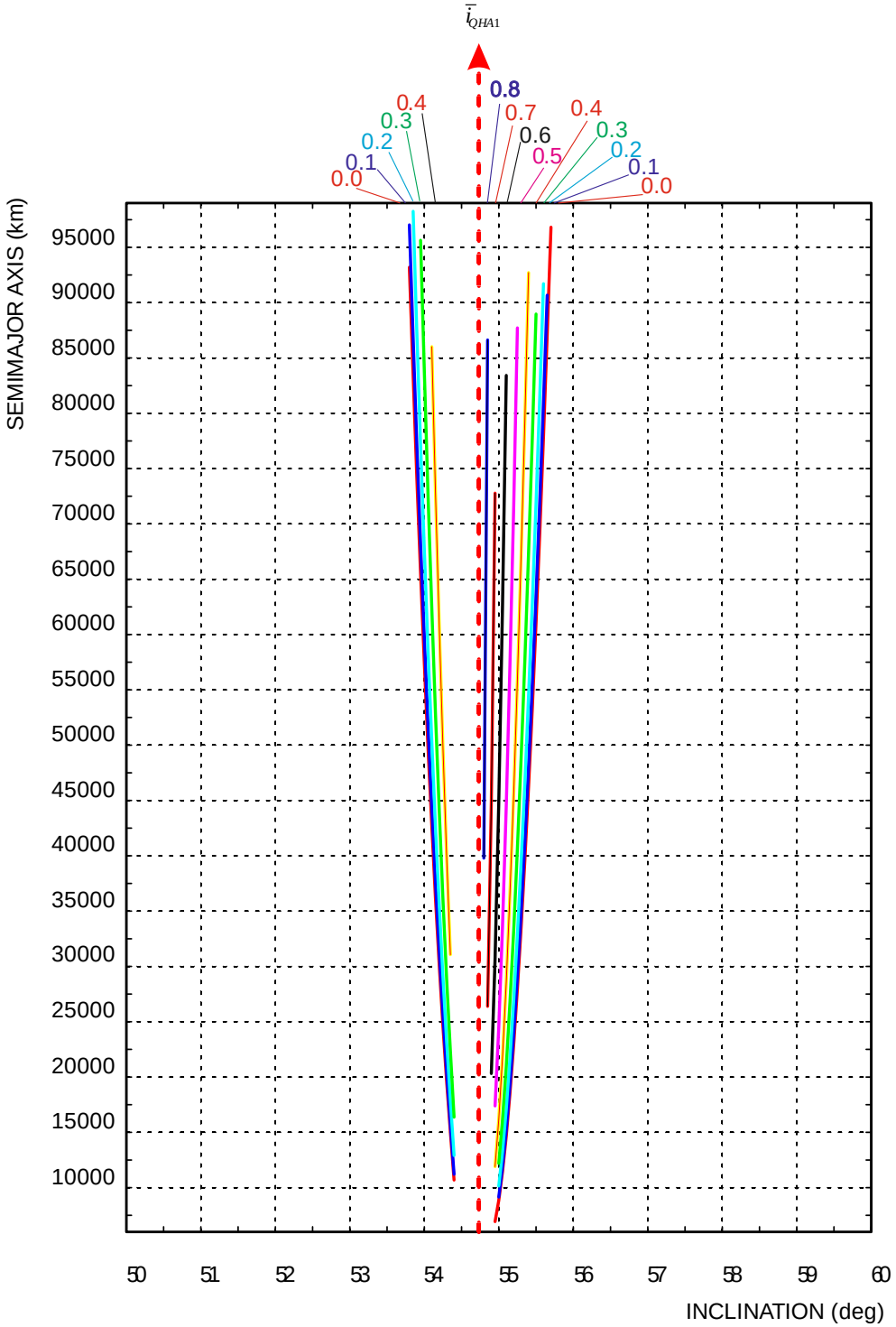


Bild 22-31: Mögliche Nahe -Parallele $\left(\overline{P_H} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_A}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der mit der Genauigkeit $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| = 0.05\,\text{sec}$ in der Umgebung der charakteristischen Inklination $\bar{i}_{QaH1} = 54°.7356$: große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Die Bahnen mit *e*=0.85 und *e*=0.9 liegen außerhalb der Zeichnung. Es gibt keine Grenzbahn. Die Zeichnung wurde mit den Parametern $\Delta a = 10$ km, $\Delta i = 0°.05$, $\Delta e = 0.01$ erstellt. Es wurde das *Brouwer*sche Bahnmodell inclusive aller säkularen Bewegungseinflüsse durch die zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4 verwendet.

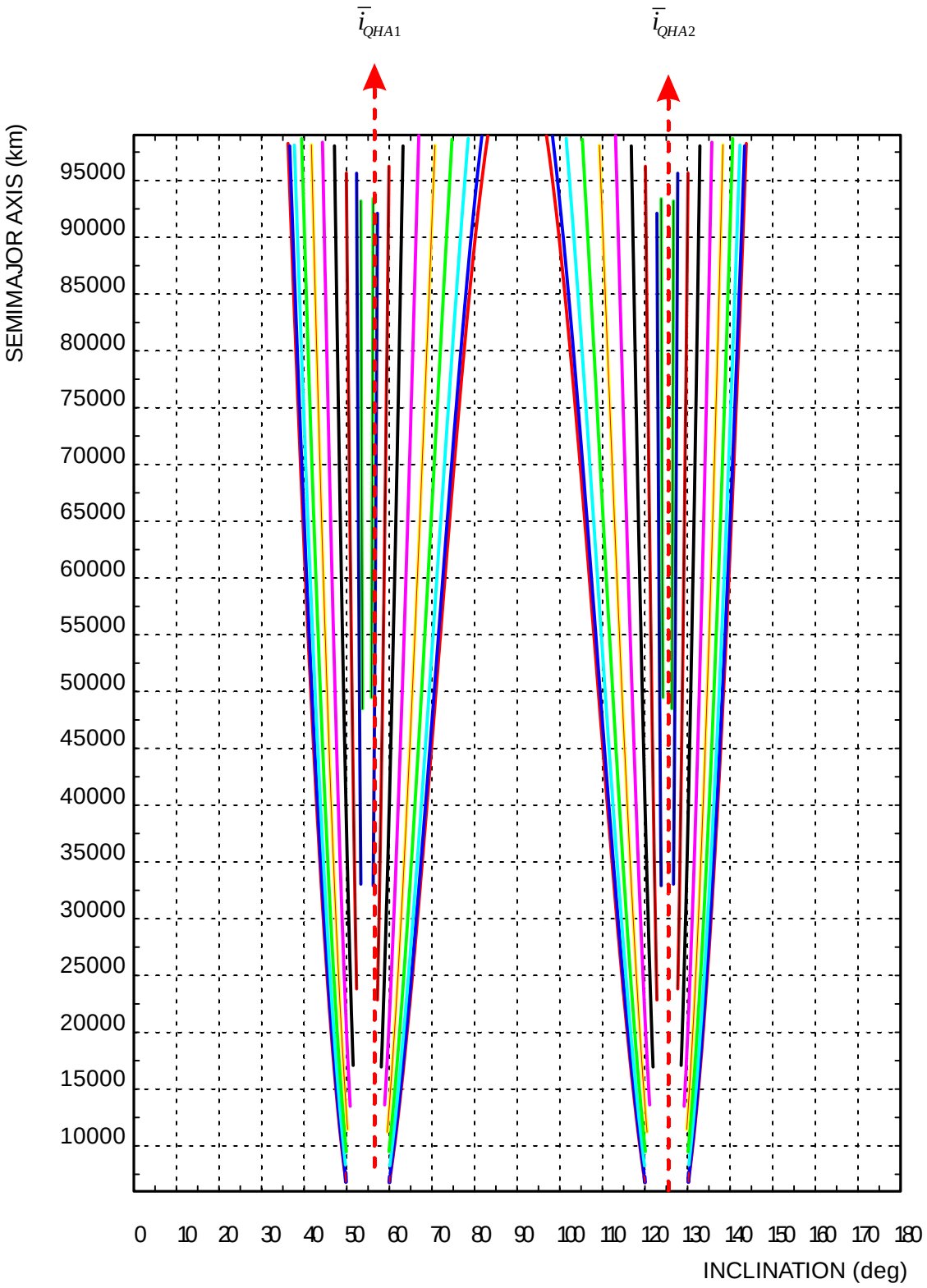


Bild 22-32: Mögliche Nahe-Parallele $\left(\overline{P_H} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_A}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der Genauigkeit $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| = 1\text{sec}$: große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Die Zeichnung wurde mit den Parametern $\Delta a = 10$ km , $\Delta i = 0°.1,\ \Delta e = 0.01$ erstellt. Es wurde das *Brouwer*sche Bahnmodell inclusive aller säkularen Bewegungseinflüsse durch die zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4 verwendet. Die Pfeile geben die Richtungen zu den charakteristischen Inklinationen an.

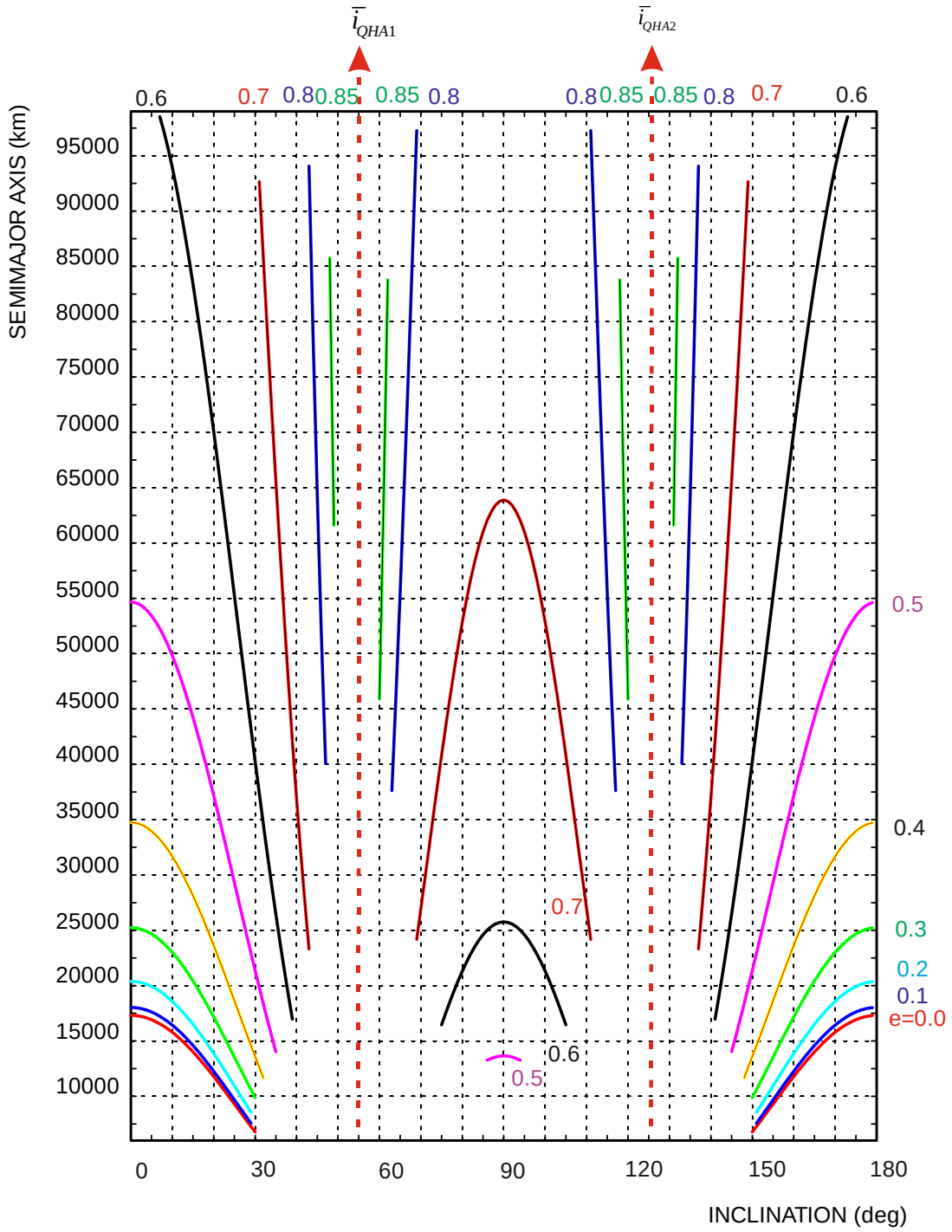


Bild 22-33: Mögliche Nahe-Parallele $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_H}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der Genauigkeit $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_H}\right|$=5 sec : große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Die Bahn mit e=0.9 liegt außerhalb der Zeichnung. Es gibt keine Grenzbahn. Die Zeichnung wurde mit den Parametern Δa =10 km , $\Delta i = 1°.0$, $\Delta e = 0.01$ erstellt. Es wird das *Brouwer*sche Bahnmodell inclusive aller säkularen Bewegungseinflüsse durch die zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4 verwendet. Die Pfeile geben die Richtungen zu den charakteristischen Inklinationen an.

Bild 22-32 zeigt eine Übersicht von $\overline{P_H} \mathrel{\triangleq} \overline{P_A}$ — Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen mit der Genauigkeit $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| \le 1\text{sec}$. Solche Bahnen kommen wie erwartet nur in der Umgebung der charakteristischen Inklinationen vor.

Falls eine Bahn mit den Eigenschaften einer $\overline{P_H} \mathrel{\triangleq} \overline{P_A}$ — Nahe-Parallelen Äquivalenzbahn mit beliebigen Inklinationen gefunden werden soll, ist dies nur mit sehr groben Genauigkeitsgrenzen möglich. Dies zeigt Bild 22-33 für Bahnen mit der Genauigkeitseinschränkung $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right| \le 5\text{sec}$.

Aufgabenstellungen:

- In Bild 22-31 (auf Seite 119) kann eine Asymmetrie der Anordnung der möglichen Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen bezüglich der ersten charakteristischen Inklination beobachtet werden. Untersuche diesen Sachverhalt, wird er vergrößert bei größeren Genauigkeitsgrenzen, kann er auf den Einfluss höherer Bahnmodelle zurückgeführt werden (vergleiche mit Abschnitt 23.7.1.2 – 23.7.1.3, 23.7.1.10)?
- Bei geringeren Genauigkeiten verschwimmt dieser Effekt allmählich (Bild 22-32, Bild 22-33).

22.14 Äquivalenzen zwischen *Kepler*- und anomalistischer Bewegung

Auch wenn die *Kepler* Bewegung bisher im Rahmen der Astrodynamik von rein theoretischem Interesse ist, kann ein formaler Zusammenhang mit Äquivalenzbahnen hergestellt werden. Ein solcher Zusammenhang wurde im Rahmen der dritten Bedingung (22.278) von $\overline{P_H} \mathrel{\triangleq} \overline{P_A}$ — Äquivalenzbahnen gefunden.

22.14.1 Allgemeine Eigenschaften *Kepler* zu anomalistischer Äquivalenz

Eine Äquivalenz zwischen anomalistischer Bewegung und *Kepler*bewegung führt notwendig auf die

- ***Erste Eigenschaft*** *von* $\left(\overline{P_K} \mathrel{\triangleq} \overline{P_H}\right)$*– Äquivalenzbahnen:*

$$\overline{n_K} \mathrel{\triangleq} \overline{n_A} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} \quad \Leftrightarrow \quad \left(M_0\right)_s^{\cdot} = 0 \quad . \tag{22.290}$$

Im Rahmen des *Brouwer*schen Bahnmodells ist die säkulare Variation der mittleren Epocheanomalie durch den Ausdruck (22.277) gegeben. In erster Näherung kann die entsprechende charakteristische Inklination aus

$$1 - 3\cos^2 \bar{i}_0 = 0 \tag{22.291}$$

berechnet werden. Sie stimmt also mit den charakteristischen Inklinationen (22.276) überein:

- ***Zweite Eigenschaft*** *von* $\left(\overline{P_K} \mathrel{\triangleq} \overline{P_H}\right)$*– Äquivalenzbahnen: die charakteristischen Inklinationen in erster Ordnung sind*

$$\overline{i_{QKA,1}} = \overline{i_{QHA,1}} = 54°.7356 \quad , \quad \overline{i_{QKA,2}} = \overline{i_{QHA,2}} = 125°.2644 \quad . \tag{22.292}$$

Eine überraschende Konsequenz ergibt sich aus folgender Überlegung: Äquivalenzbahnen nehmen das Verhalten der beiden Teil-Bewegungen an, welche die Äquivalenzbedingung erfüllen. Dies gilt auch im Fall von Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen zumindest in guter Näherung. Wenn also eine *Kepler*-Bewegung mit einer anderen Bewegung gekoppelt wird, bedeutet das, dass diese andere Bewegung die Äquivalenzbahn auf eine *Kepler*-Bahn zwingt. Im vorliegenden Fall bedeutet das die

- ***Dritte Eigenschaft*** *von* $\overline{P_K} \triangleq \overline{P_A}$ *— Äquivalenzbahnen: die anomalistische Bewegung zwingt die Satellitenbewegung auf eine reine* Kepler-*Bahn.*

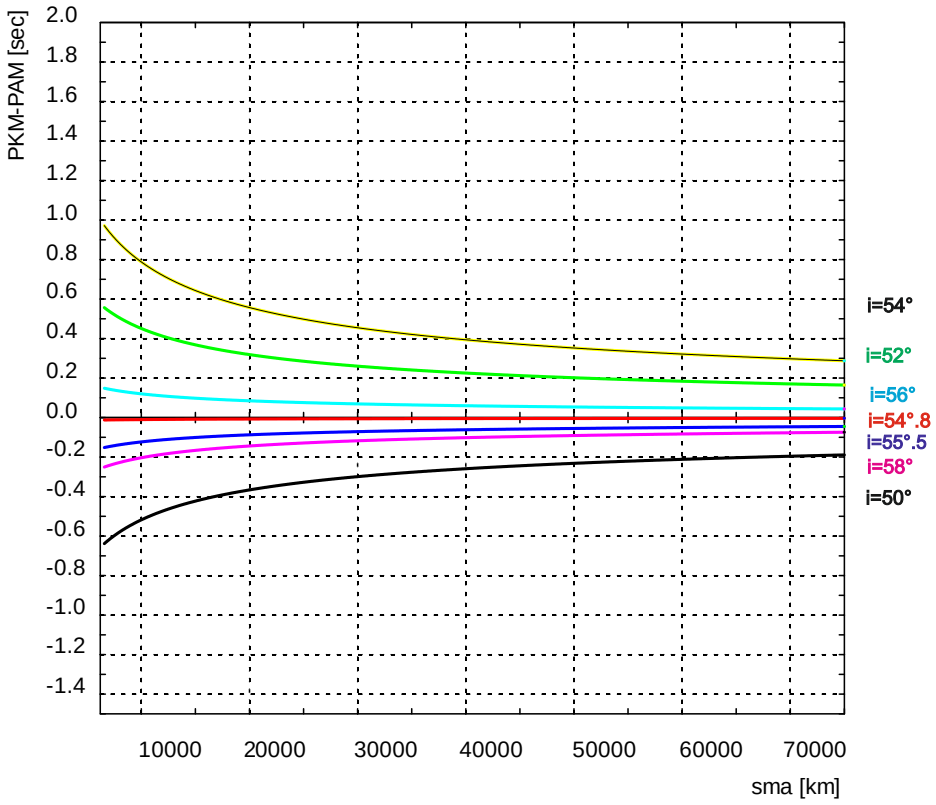


Bild 22-34: Verlauf der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_K} - \overline{P_A}$ für kreisförmige Bahnen mit verschiedenen Inklinationen in der Umgebung von $\overline{i}_{QKa1} = 54°.7356$. Die Differenzen werden jeweils mit der Genauigkeit $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_A}\right| \le 10^{-3}$ sec berechnet. Die Bahnhalbachse wird in Schritten von $\Delta a = 20$ km erhöht. Es wird das *Brouwer*sche Bahnmodell inclusive aller säkularen und periodischen Bewegungseinflüsse durch die zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4 verwendet.

Trotz der Übereinstimmungen in den charakteristischen Inklinationen können Unterschiede zwischen dem Verhalten von $\overline{P_H} \triangleq \overline{P_A}$ — und $\overline{P_K} \triangleq \overline{P_A}$ — Äquivalenzbahnen festgestellt werden. Im Fall von kreisförmigen Bahnen ist der Verlauf der Differenz $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right|$ in Bild 22-27 (auf Seite 111) und der Differenz $\left|\overline{P_K} - \overline{P_A}\right|$ in Bild 22-34 kaum feststellbar.

22.14.2 Die Bahnhalbachse bei *Kepler* zu anomalistischen Äquivalenz

Es sei ein Anfangswert $\overline{a}_0^{(0)}$ der großen Bahnhalbachse vorgegeben. Mit der ersten Eigenschaft *von* $\overline{P_K} \triangleq \overline{P_A}$ — Äquivalenzbahnen (22.290)

$$\overline{n_K} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)^3}} \quad , \quad \overline{n_A} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} \tag{22.293}$$

können die mittleren Umlaufzeiten bei vorgegebener großer Bahnhalbachse in jedem ν-ten Arbeitsschritt

$$\overline{P_K}^{(\nu)} = \frac{2\pi}{\overline{n_K}^{(\nu)}} \quad , \quad \overline{P_A}^{(\nu)} = \frac{2\pi}{\overline{n_A}^{(\nu)}} \tag{22.294}$$

gebildet werden. Der Iterationsprozess zur Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKA}}$ wird mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QKA}}\right) \equiv \overline{P_K}\left(\overline{a}^{(\nu)}\right) - \overline{P_a}\left(\overline{a}^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \prec \nu = 0,1,2,3, \ \cdots \tag{22.295}$$

durchgeführt. Wenn hier eine gewünschte Genauigkeitsgrenze $\left|\overline{P_K}^{(\nu)} - \overline{P_A}^{(\nu)}\right| \le \Delta\overline{P}$ erreicht ist, wird die zuletzt errechnete ν-te Bahnhalbachse als Lösung vorgeschlagen.

BEISPIEL 1: Gegeben seien die Inklination $\overline{i}_0 =$ 54°.4 und die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.25$.

Es werde eine mittlere Nahe-Parallele $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_A}\right)-$Äquivalenzbahn mit der Genauigkeit $\left|\overline{P_K}^{(\nu)} - \overline{P_A}^{(\nu)}\right| \le 0.05\,\text{sec}$ gewünscht. Das Ergebnis der Berechnung mit der Funktionsgleichung (22.295) ist in Tabelle 22-7 zusammengestellt. Die erhaltenen Umlaufzeiten unterscheiden sich um $\left|\overline{P_K}^{(\nu)} - \overline{P_A}^{(\nu)}\right| =$ 0.0499987007570 sec.

Damit die $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_A}\right)-$Äquivalenzbahn eine reine Keplerbahn ist, müssen neben der säkularen Variation der Epocheanomalie $\left(M_0\right)_s^{\cdot} = 0$ (nach Eigenschaft (22.290)) auch die säkularen Variationen in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens und des Argumentes des Perigäums verschwinden. Dies ist im Fall einer Nahe-Parallelen Äquivalenzbahn nicht zu erwarten. Tabelle 22-7 zeigt jedoch, dass diese Parameter zumindest kleiner als die üblichen Werte in der Größenordnung 10^{-6} rad/sec sind (vgl. die Abschätzungen in Abschnitt 22.5.2 ab Seite 65). ◀

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_A}\right)$	
$\overline{a_{QKa}} = 14467.849333\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.25,\ \bar{i}_0 = 54.4°, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 17318.766090$ sec	t_0 : 2020-08-07/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 17318.666253$ sec	$P_H = 17318.666253$ sec
$\overline{P_A} = 17318.716092$ sec	$P_A = 17318.716092$ sec
$\overline{P_D} = 17316.559081$ sec	$P_D = 17316.559081$ sec
$\overline{P_T} = 17320.179202$ sec	$P_T = 17320.179202$ sec
$\overline{P_R} = 21677.697032$ sec	$P_R = 20177.697032$ sec
$\overline{P_S} = 17329.690691$ sec	$P_S = 17329.690691$ sec
$\overline{P_L} = 17448.200859$ sec	$P_L = 17448.200859$ sec
$H_P = 4472.750000$ km	$H_A = 11706.674667$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -72°.408035$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -72°.425113$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -72°.408035$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -72°.425113$
$\dot{\Omega}_s = -0.75838360548180258\times10^{-7}$ rad/s	
$\dot{\omega}_s = 0.45191295986025398\times10^{-7}$ rad/s	
$\left(M_0\right)_s^{\cdot} = 0.10473840307891182\times10^{-8}$ rad/s	

Tabelle 22-7: Bahncharakteristika einer mittleren Nahe-Parallelen $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_A}\right)$ – Äquivalenzbahn. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340\times10^{-4}/\text{s}$, $J_2 = 0.001082625379977$, Berechnung der wahren Bahnparameter nur mit säkularen Bewegungseinflüssen, Suchschrittweite der Halbachse: $\Delta a = 1\,\text{km}$, Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| < 0.05\,\text{sec}$.

Zur Berechnung der großen Bahnhalbachse der entsprechenden wahren Nahen Parallelen $\left(P_K \triangleq P_A\right)$- Äquivalenzbahnen wird die wahre Anomalie als Bahnwinkel des anomalistischen Systems aus einer (analytischen oder numerischen) Ephemeridenrechnung erhalten. Mit vorgegebenen Bahnparametern und der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKA}}$ als Parameter wird die wahre anomalistische Umlaufzeit mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct\left(P_A\right) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0 + P_A\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{22.296}$$

berechnet. Die *Kepler*sche Umlaufzeit ist aus

$$n_K = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_{QKA}}}}\quad,\quad P_K = \frac{2\pi}{n_K} \tag{22.297}$$

bekannt. Die gewünschte große Bahnhalbachse der $\left(P_K \triangleq P_A\right)$ – Äquivalenzbahn wird dann mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QKA}}\right) \equiv P_K\left(\bar{a}^{(\nu)}\right) - P_a\left(\bar{a}^{(\nu)}\right) = 0 \tag{22.298}$$

berechnet. Der gesamte Rechenprozess (22.296) - (22.298) muss mehrfach durchlaufen werden, bis die Funktionsgleichung unter der gewünschten Genauigkeitsgrenze $\left|P_K - P_A\right| \le \Delta P$ liegt.

$\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_A\right)$	
$\overline{a_{QKA}} = 60874.339\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.3,\ \bar{i}_0 = 55.0°, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K} =$ 149472.866640 sec	t_0 : 2020-08-07/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 149472.907661$ sec	$P_H = 149472.907661$ sec
$\overline{P_A} =$ 149472.886640 sec	$P_A =$ 149472.886640 sec
$\overline{P_D} =$ 149471.849023 sec	$P_D = 149471.849023$ sec
$H_P = 36233.900000$ km	$H_A = 72758.503143$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -$ 624°.511826	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -$ 624°.508924
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -$ 624°.511826	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -$ 624°.508924
$\dot{\Omega}_s = -0.5190559448382633 \times 10^{-9}$ rad/s	
$\dot{\omega}_s = 0.29180658071523223 \times 10^{-9}$ rad/s	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s = -0.56245040396281871 \times 10^{11}$ rad/s	

Tabelle 22-8: Bahncharakteristika einer wahren Nahe-Parallelen $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_A}\right)$ – Äquivalenzbahn. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$, Berechnung der wahren Bahnparameter nur mit säkularen Bewegungseinflüssen, Suchschrittweite der Halbachse: $\Delta a = 1\,\text{km}$, Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| < 0.02\,\text{sec}$.

BEISPIEL 2: Gegeben seien die Inklination i= 55°.0 und die Exzentrizität e=0.3.

Es werde eine mittlere Nahe-Parallele $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_A}\right)$- Äquivalenzbahn mit der Genauigkeit $\left|\overline{P_K}^{(\nu)} - \overline{P_A}^{(\nu)}\right| \le 0.02\,\text{sec}$ gewünscht. Das Ergebnis der Berechnung mit dem System (22.296)-(22.298) ist in Tabelle 22-8 zusammengestellt.

Die erhaltenen Umlaufzeiten unterscheiden sich um $\left|\overline{P_K}^{(\nu)} - \overline{P_A}^{(\nu)}\right| =$ 0.0199999610486 sec. In diesem Fall haben die säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s, \dot{\omega}_s, \left(M_0\right)^{\cdot}_s$ extrem kleine Beträge. Dies liegt aber nicht nur an der Nähe zu einer reinen *Kepler*bahn, sondern ist auch eine Folge der großen Höhe der Bahn, in der sich die Anomalie des Schwerefeldes der Erde sehr gering auswirkt. ◀

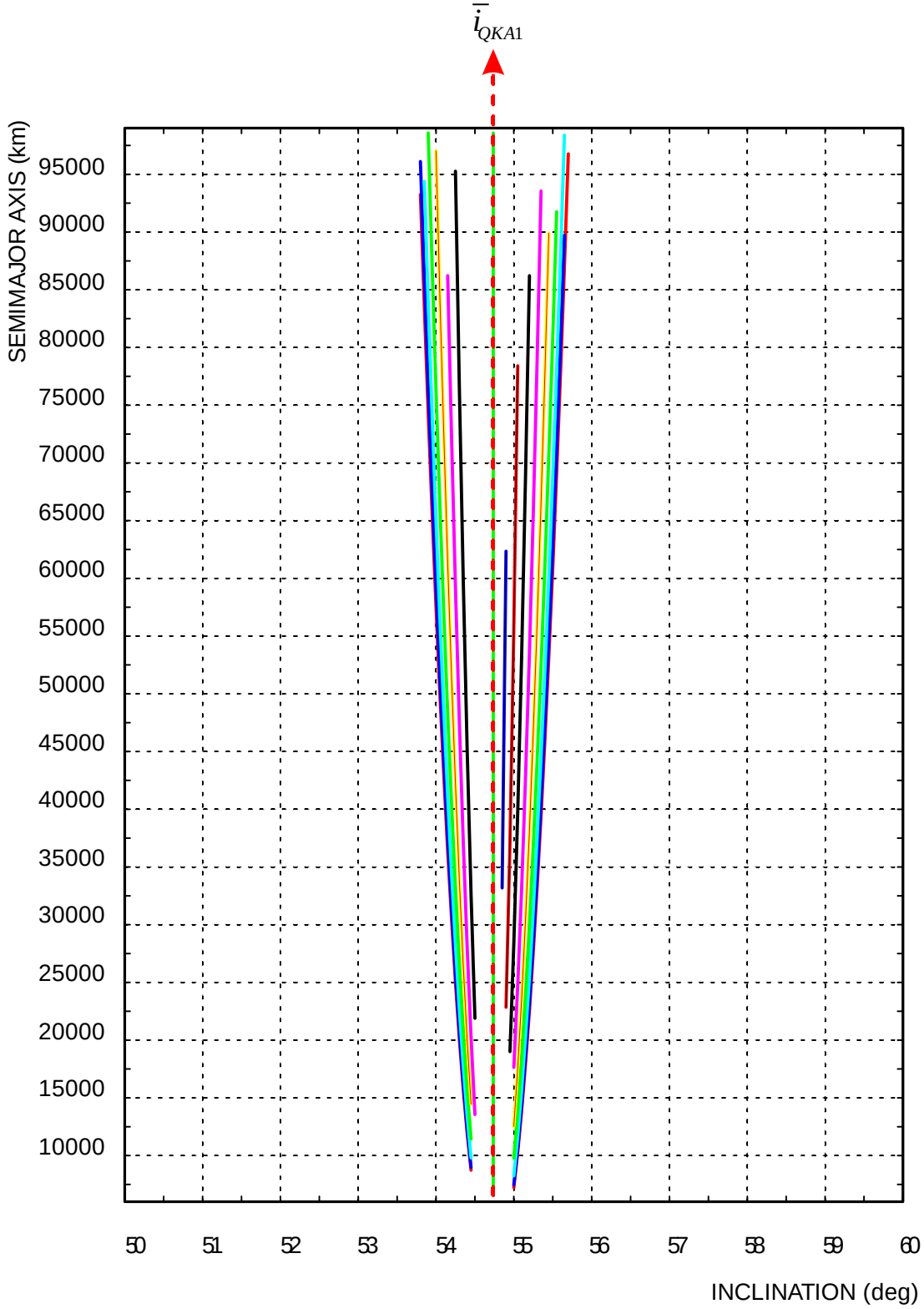


Bild 22-35: Mögliche Nahe-Parallele $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_A}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der Genauigkeitsgrenze $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_A}\right| < 0.05\,\text{sec}$: große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Es gibt keine Grenzbahn. Die Zeichnung wurde mit den Parametern $\Delta a = 10\,\text{km}$, $\Delta i = 0°.05$, $\Delta e = 0.01$ erstellt. Farbcodierung wie in Bild 22-32 (auf Seite 120).

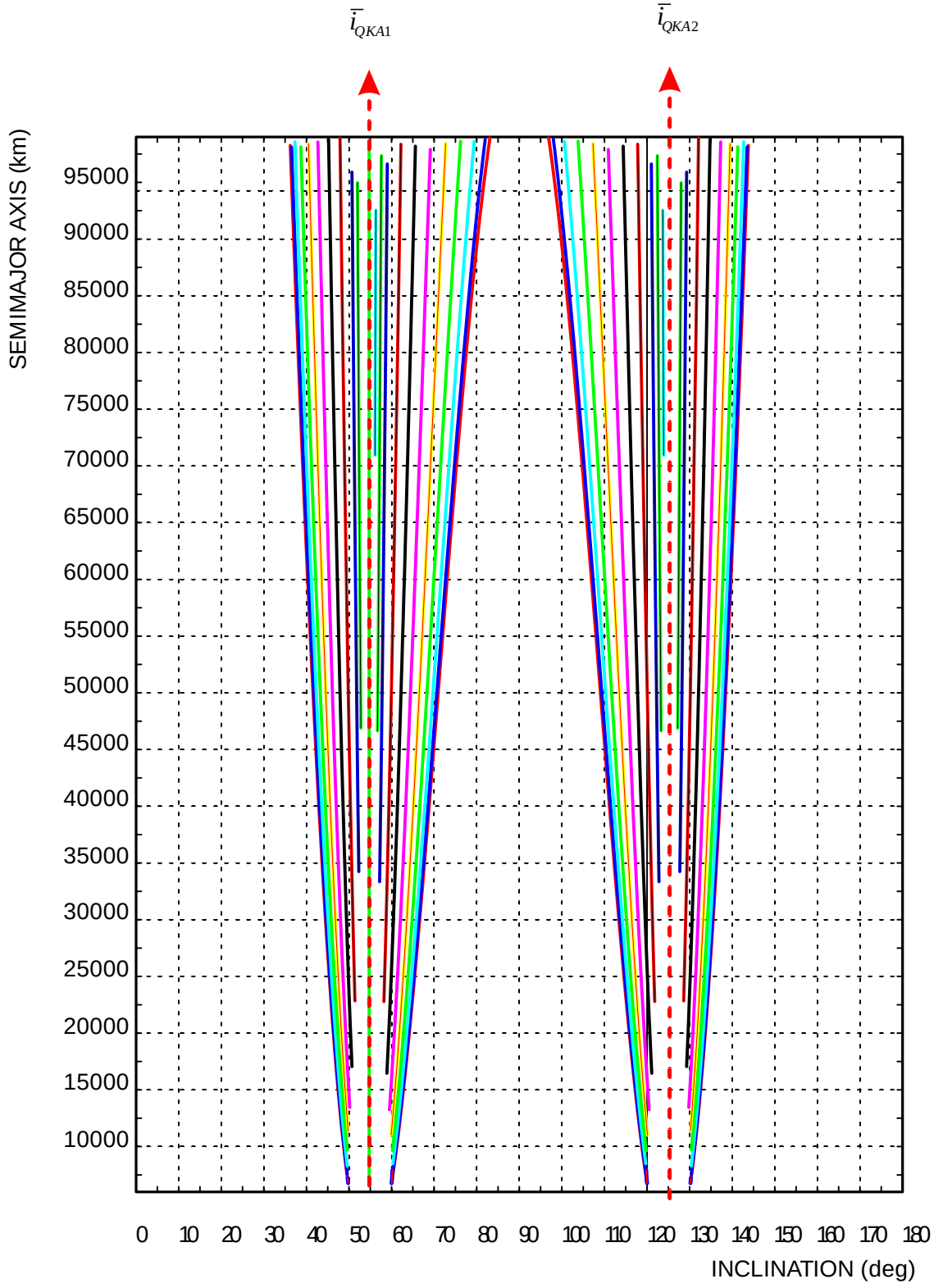


Bild 22-36: Mögliche Nahe-Parallele $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_A}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der Genauigkeitsgrenze $\left|\overline{P_K} - \overline{P_A}\right| \le 1$ sec: große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Es gibt keine Grenzbahn. Die Zeichnung wurde mit den Parametern $\Delta a = 10\,\text{km}$, $\Delta i = 0°.1$, $\Delta e = 0.01$, erstellt. Die Pfeile geben die Richtungen zu den charakteristischen Inklinationen an. Farbcodierung wie in Bild 22-32 (auf Seite 120).

22.14.3 Übersicht über Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen mit Kopplung von *Kepler* und anomalistischer Bewegung

Das näherungsweise Gebiet möglicher nahe-paralleler $\left(\overline{P_K} \hat{=} \overline{P_A}\right)$- Äquivalenzbahnen wird in Bild 22-36 für Genauigkeiten bis $\left|\overline{P_K} - \overline{P_A}\right| \le 0.05$ sec und in Bild 22-35 für Genauigkeiten bis $\left|\overline{P_K} - \overline{P_A}\right| \le 0.05$ dargestellt.

Mit Übereinstimmung der charakteristischen Inklinationen

$$\overline{i_{QKA,1}} = \overline{i_{QHA,1}} = 54°.7356 \quad , \quad \overline{i_{QKA,2}} = \overline{i_{QHA,2}} = 125°.2644$$

stimmen die entsprechenden Bilder der Übersichtsgebiete Übersicht der $\overline{P_H} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_A}$ — und $\left(\overline{P_K} \hat{=} \overline{P_A}\right)$- Äquivalenzbahnen mit großer Ähnlichkeit überein: Bild 22-31 mit Bild 22-36 im Fall von Genauigkeiten ≤ 0.05 sec sowie Bild 22-32 mit Bild 22-35 im Fall von Genauigkeiten ≤ 1 sec.

Aufgabenstellungen:

- Begründe die Asymmetrie der Kurven möglicher Nahe-Paralleler $\left(\overline{P_K} \hat{=} \overline{P_a}\right)$- Äquivalenzbahnen bezüglich der charakteristischen Inklination $\overline{i}_{QKA,1}$ in Bild 22-1.
- Vertiefe die Behandlung von $\left(\overline{P_K} \hat{=} \overline{P_a}\right)$- Äquivalenzbahnen, etwa insbesondere die Auswahl von weiteren Bahnparametern, wie Inklination, Exzentrizität, entsprechend den Abschnitten 22.13.3 (auf Seite 115) bis 22.13.4.

22.15 Äquivalenzen zwischen *Kepler*- und *Hansen*- Bewegung

22.15.1 Allgemeine Eigenschaften bei *Kepler* zu *Hansen* Äquivalenz

Ähnliches kann auch im Fall einer Äquivalenz zwischen *Kepler* und *Hansen* Bewegung ausgesagt werden. Vergleich der mittleren *Hansen* Bewegung (21.62) (in Abschnitt 21.3)

$$\overline{n_H} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i} \xrightarrow{!} \overline{n_K} \quad \Rightarrow \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i} = 0 \quad . \qquad (22.299)$$

- ***Erste Bedingung*** *von* $\left(\overline{P_K} \hat{=} \overline{P_H}\right)$- *Äquivalenzbahnen:*

$$\left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i} = 0 \quad . \qquad (22.300)$$

Mit den *Brouwer*schen Ausdrücken (22.273), (22.274) und (22.277) folgt notwendig die Bedingung erster Ordnung

$$\left(1 - 3\cos^2\bar{i}_0\right)\left(1 + \sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) = 0 \quad . \qquad (22.301)$$

Da sicherlich $\left(1 + \sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) > 0$ wird man auch in diesem Fall auf die (siehe Formel (22.275))

- ***Zweite Bedingung*** *von* $\left(\overline{P_K} \hat{=} \overline{P_H}\right)$- *Äquivalenzbahnen: die charakteristische Inklination in erster Ordnung*

$$\overline{i_{QKA,1}} = \overline{i_{QHA,1}} = \overline{i_{QKH,1}} = 54°.7356 \quad , \quad \overline{i_{QKA,2}} = \overline{i_{QHA,2}} = \overline{i_{QKH,2}} = 125°.2644 \qquad (22.302)$$

geführt.

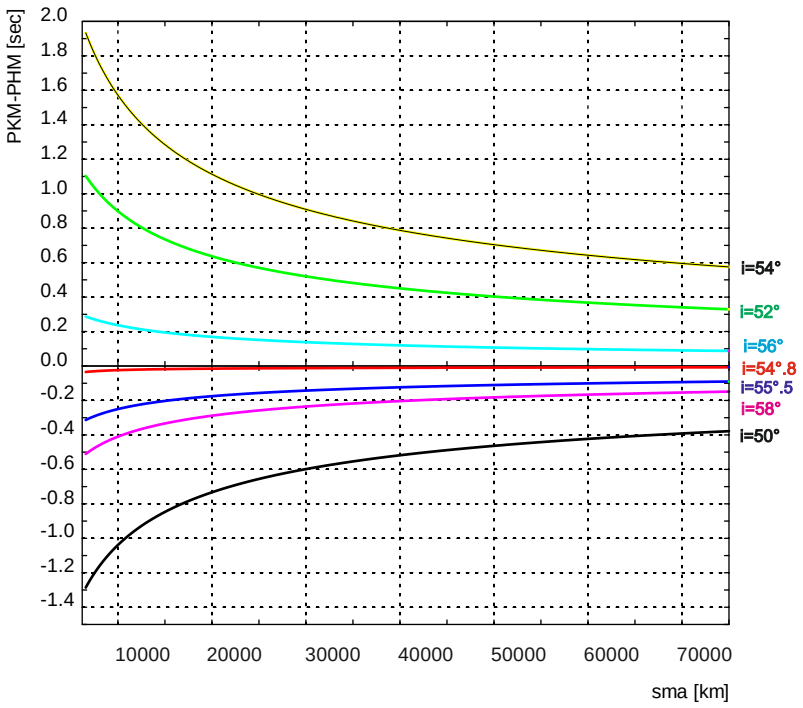


Bild 22-37: Verlauf der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_K} - \overline{P_H}$ für kreisförmige Bahnen mit verschiedenen Inklinationen in der Umgebung von $\overline{i}_{QKH1} = 54°.7356$. Die Differenzen werden jeweils mit der Genauigkeit $\Delta P = \left|\overline{P_K} - \overline{P_H}\right| \le 10^{-3}$ sec berechnet. Die Bahnhalbachse wird in Schritten von $\Delta a = 20$ km erhöht. Es wird das *Brouwer*sche Bahnmodell inclusive aller säkularen und periodischen Bewegungseinflüsse durch die zonalen Harmonischen J_2, J_3, J_4 verwendet.

Wie in allen Fällen einer Äquivalenzbahn, bei der die Keplerbewegung Teil der Bewegung ist, gilt

- ***Dritte Eigenschaft*** *von* $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$*-Äquivalenzbahnen: die* Hansen *Bewegung zwingt die Satellitenbewegung auf eine reine* Kepler*-Bahn.*

Vergleich der Kurven $\left|\overline{P_K} - \overline{P_H}\right|$ in Bild 22-37 mit den entsprechenden Kurven für $\left|\overline{P_H} - \overline{P_A}\right|$ in Bild 22-27 (auf Seite 111) sowie $\left|\overline{P_K} - \overline{P_a}\right|$ in Bild 22-36 zeigt erhebliche Unterschiede. Trotz derselben charakteristischen Inklinationen kann das Verhalten von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$- Äquivalenzbahnen als sehr eigenständig wahrgenommen werden.

22.15.2 Die Bahnhalbachse von *Kepler* zu *Hansen* Äquivalenzbahnen

Es sei ein Anfangswert der großen Bahnhalbachse vorgegeben. Entsprechend den mittleren Bewegungen (22.299) und der ersten Eigenschaft *von* $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$- Äquivalenzbahnen (22.300)

$$\overline{n_K} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)^3}} \quad , \; \overline{n_H} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\overline{i} \tag{22.303}$$

können die mittleren Umlaufzeiten bei vorgegebener großer Bahnhalbachse in jedem ν-ten Arbeitsschritt

$$\overline{P_K}^{(\nu)} = \frac{2\pi}{\overline{n_K}^{(\nu)}} \quad , \quad \overline{P_H}^{(\nu)} = \frac{2\pi}{\overline{n_H}^{(\nu)}} \tag{22.304}$$

gebildet werden. Der Iterationsprozess zur Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKH}}$ wird mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QKH}}\right) \equiv \overline{P_K}\left(\overline{a_{QKH}}^{(\nu)}\right) - \overline{P_H}\left(\overline{a_{QKH}}^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \prec \nu = 0,1,2,,3\cdots \tag{22.305}$$

durchgeführt. Wenn hier eine gewünschte Genauigkeitsgrenze $\left|\overline{P_K}^{(\nu)} - \overline{P_H}^{(\nu)}\right| \le \Delta\overline{P}$ erreicht ist, wird die zuletzt errechnete ν-te Bahnhalbachse als Lösung vorgeschlagen.

BEISPIEL 1: Die vorgegebene Inklination muss in der Nähe der charakteristischen Inklinationen (22.302) liegen. Gegeben sei eine Satellitenbahn mit der Inklination i= 54°.5. Es werde eine mittlere nahe-parallele $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$- Äquivalenzbahn mit der Genauigkeit $\left|\overline{P_K}^{(\nu)} - \overline{P_H}^{(\nu)}\right| \le 0.05\,\text{sec}$ gewünscht. Das Ergebnis der Berechnung mit der Funktionsgleichung (22.295) ist in Tabelle 22-9 zusammengestellt. Die erhaltenen Umlaufzeiten unterscheiden sich um $\left|\overline{P_K}^{(\nu)} - \overline{P_H}^{(\nu)}\right| =$ 0.0499999509702 sec. Tabelle 22-9 zeigt, dass die Parameter der säkularen Variation $\left(M_0\right)_s^{\cdot}$ der Epocheanomalie sowie die säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s$ in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens und des Argumentes des Perigäums $\dot{\omega}_s$ kleiner als die üblichen Werte in der Größenordnung 10^{-6} rad/sec sind (vgl. die Abschätzungen in Abschnitt 22.5.2 ab Seite 65). ◀

Zur Berechnung von $\left(P_K \triangleq P_H\right)$- Äquivalenzbahnen: Die *Kepler*sche Umlaufzeit ist aus

$$n_K = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_{QKA}}}} \quad , \quad P_K = \frac{2\pi}{n_K} \tag{22.306}$$

bekannt. Der *Hansen*sche Bahnwinkel ζ kann aus einer vorgegebenen (analytischen oder numerischen) Ephemeride berechnet werden (siehe in Abschnitt 21.2.2). Mit fest vorgegebenen Bahnparametern Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ und der ν-ten Näherung der großen Bahnhalbachse $\left(\overline{a_{QKH}}^{(\nu)}\right)$ kann der *Hansen*sche Bahnwinkel aus einer Ephemeridenrechnung erhalten werden. Mit diesem Bahnwinkel wird die *Hansen*sche Umlaufzeit iterativ mit Hilfe der überlagerten Funktionsgleichung

$$fct\left(P_H\right) \equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{22.307}$$

erhalten. Die gesuchte große Bahnhalbachse der $\left(P_K \triangleq P_H\right)$-Äquivalenz-Bahn wird dann mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QKH}}\right) \equiv P_K\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) - P_H\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) = 0 \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{22.308}$$

berechnet. Der gesamte Rechenprozess (22.306) - (22.308) muss mehrfach durchlaufen werden, bis die Funktionsgleichung unter der gewünschten Genauigkeitsgrenze $\left|P_K - P_H\right| \le \Delta P$ liegt.

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$	
$\overline{a_{QKH}} = 23105.137000\ \text{km}, \overline{e}_0 = 0.0,\ \overline{i}_0 = 54.5°, \overline{\Omega}_0 = 0°, \overline{\omega}_0 = 0°, \overline{M}_{0\,0} = 0°$	
$\overline{P_K} = 34952.142511$ sec	t_0 : 2020-08-07/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 34952.092511$ sec	$P_H = 34952.092511$ sec
$\overline{P_A} = 34952.117295$ sec	$P_A = 34952.117295$ sec
$\overline{P_D} = 34950.634018$ sec	$P_D = 34950.634018$ sec
$H_P = 16727.000000$ km	$H_A = 16727.000000$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -146°.035065$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -146°.052212$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -146°.035065$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -146°.052212$
$\dot{\Omega}_s = -0.12918197756840259\times10^{-7}$ rad/s	
$\dot{\omega}_s = 0.76291066072681061\times10^{-8}$ rad/s	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s = 0.12968692811722724\times10^{-9}$ rad/s	

Tabelle 22-9: Bahncharakteristika einer mittleren Nahe-Parallelen $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$– Äquivalenzbahn. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}=0.72921158573340\times10^{-4}/\text{s}$, $J_2 = 0.001082625379977$, Berechnung der wahren Bahnparameter nur mit säkularen Bewegungseinflüssen, Suchschrittweite der Halbachse: $\Delta a = 1\text{km}$, Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| < 0.05\,\text{sec}$.

BEISPIEL 2: Die vorgegebene Inklination muss in der Nähe der kritischen Inklinationen (22.302) liegen. Es seien die Inklination i= 55°.0 und die Exzentrizität e=0.3 gewählt.

Es werde eine mittlere Nahe-Parallele $\left(P_K \triangleq P_H\right)$– Äquivalenzbahn mit der Genauigkeit $\left|P_K^{(\nu)} - P_H^{(\nu)}\right| \le 0.02\,\text{sec}$ gewünscht. Das Ergebnis der Berechnung mit dem System (22.306) - (22.308) ist in Tabelle 22-10 zusammengestellt. Die erhaltenen Umlaufzeiten unterscheiden sich um $\left|P_K^{(\nu)} - P_H^{(\nu)}\right| = 0.0499999509702\text{sec}$.

In diesem Fall haben die säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s, \dot{\omega}_s, \left(M_0\right)^{\cdot}_s$ extrem kleine Beträge. Dies liegt aber nicht nur an der Nähe zu einer reinen *Kepler*bahn, sondern ist auch eine Folge der großen Höhe der Bahn, in der sich die Anomalie des Schwerefeldes der Erde sehr gering auswirkt. ◀

$\left(P_K \triangleq P_H\right)$	
$\overline{a_{QKH}} = 23943.041111\text{km}, \bar{e}_0 = 0.1,\ \bar{i}_0 = 54.5°, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K} =$ 36870.578126 sec	t_0 : 2020-08-07/12:00:0.0
$\overline{P_H} =$ 36870.528126 sec	$P_H =$ 36870.528126 sec
$\overline{P_A} =$ 36870.552984 sec	$P_A =$ 36870.552984 sec
$\overline{P_D} =$ 36869.066287 sec	$P_D =$ 36869.066287 sec
$\overline{P_T} =$ 36871.583719 sec	$P_T =$ 36871.583719 sec
$H_P =$ 15170.600000 km	$H_A =$ 19959.208222 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -154°.064058$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -154°.066274$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -154°.064058$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -154°.066274$
$\dot{\Omega}_s =$ -0.11635462525561707$\times 10^{-7}$ rad/s	
$\dot{\omega}_s = 0.6871639379261985 1\times 10^{-8}$ rad/s	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s = 0.11620288327279397\times 10^{9}$ rad/s	

Tabelle 22-10: Bahncharakteristika einer wahren Nahe-Parallelen $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$– Äquivalenzbahn. Basis Parameter: $R_E =$ 6378.1366 km , $\mu_{\odot} =$ 398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340$\times 10^{-4}$/s , $J_2 =$ 0.001082625379977 , Berechnung der wahren Bahnparameter nur mit säkularen Bewegungseinflüssen, Suchschrittweite der Halbachse: $\Delta a =$ 1km , Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\bar{P}\right| <$ 0.05sec .

22.15.3 Übersicht über Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen mit Kopplung von Kepler und Hansen Bewegung

Ein Vergleich von Bild 22-38 mit Bild 22-32 und Bild 22-36 sowie Bild 22-39 mit Bild 22-31 und Bild 22-35 bestätigt die Aussage, dass $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$- Äquivalenzbahnen sehr eigenständige Darstellungen haben.

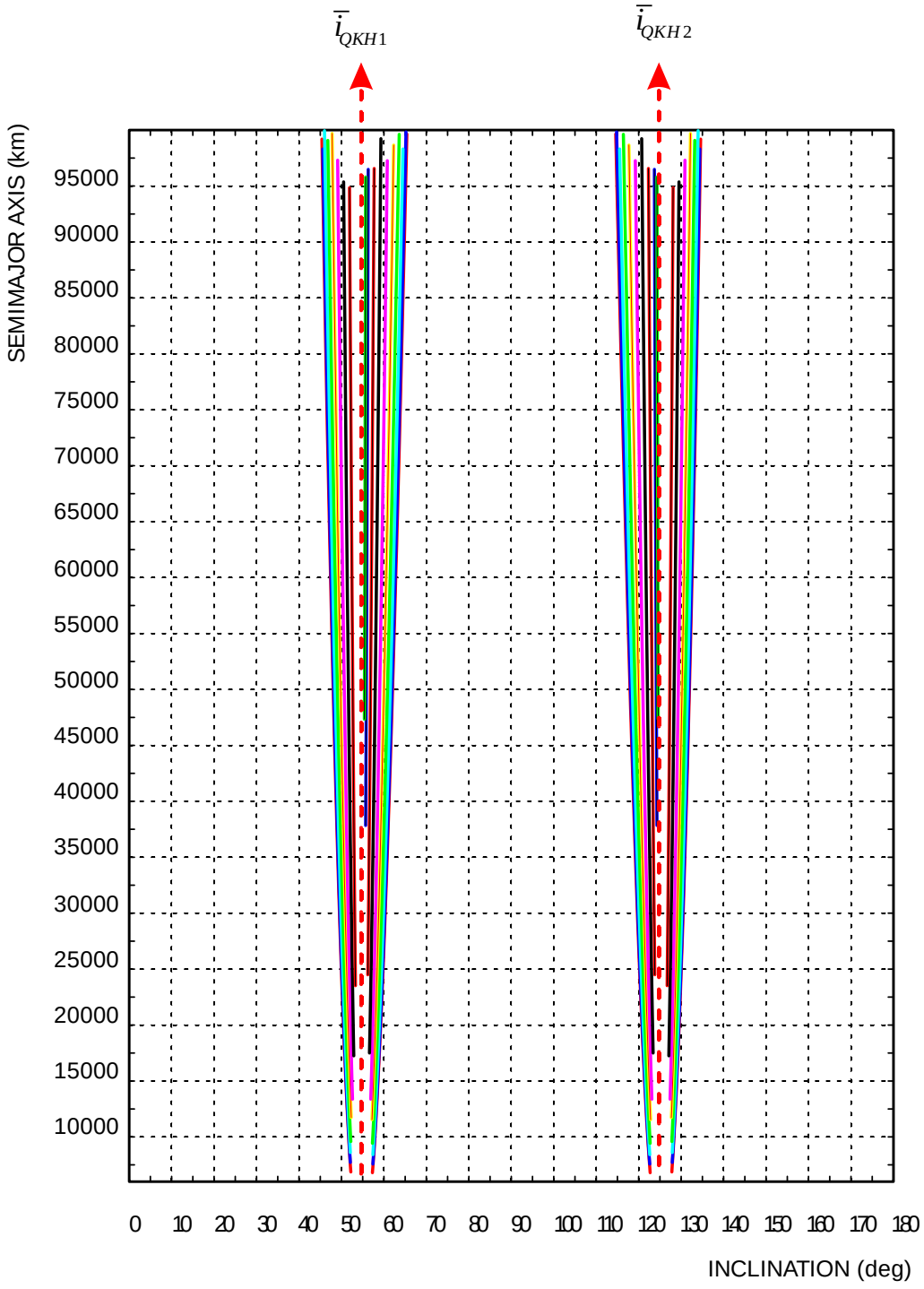


Bild 22-38: Mögliche Nahe-Parallele $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der Genauigkeit $\Delta fct = \left|\overline{P_K} - \overline{P_H}\right| < 1\text{sec}$: große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Es gibt keine Grenzbahn. Die Zeichnung wurde mit den Parametern $\Delta a = 10$ km , $\Delta i = 0°.1$, $\Delta e = 0.01$ erstellt. Die Pfeile geben die Richtungen zu den charakteristischen Inklinationen an. Die Rechnung wurde mit säkularen Bewegungseinflüssen mit den zonalen Harmonischen J_2 und J_4 im *Brouwer*schen Bahnmodell durchgeführt. Farbcodierung wie in Bild 22-32.

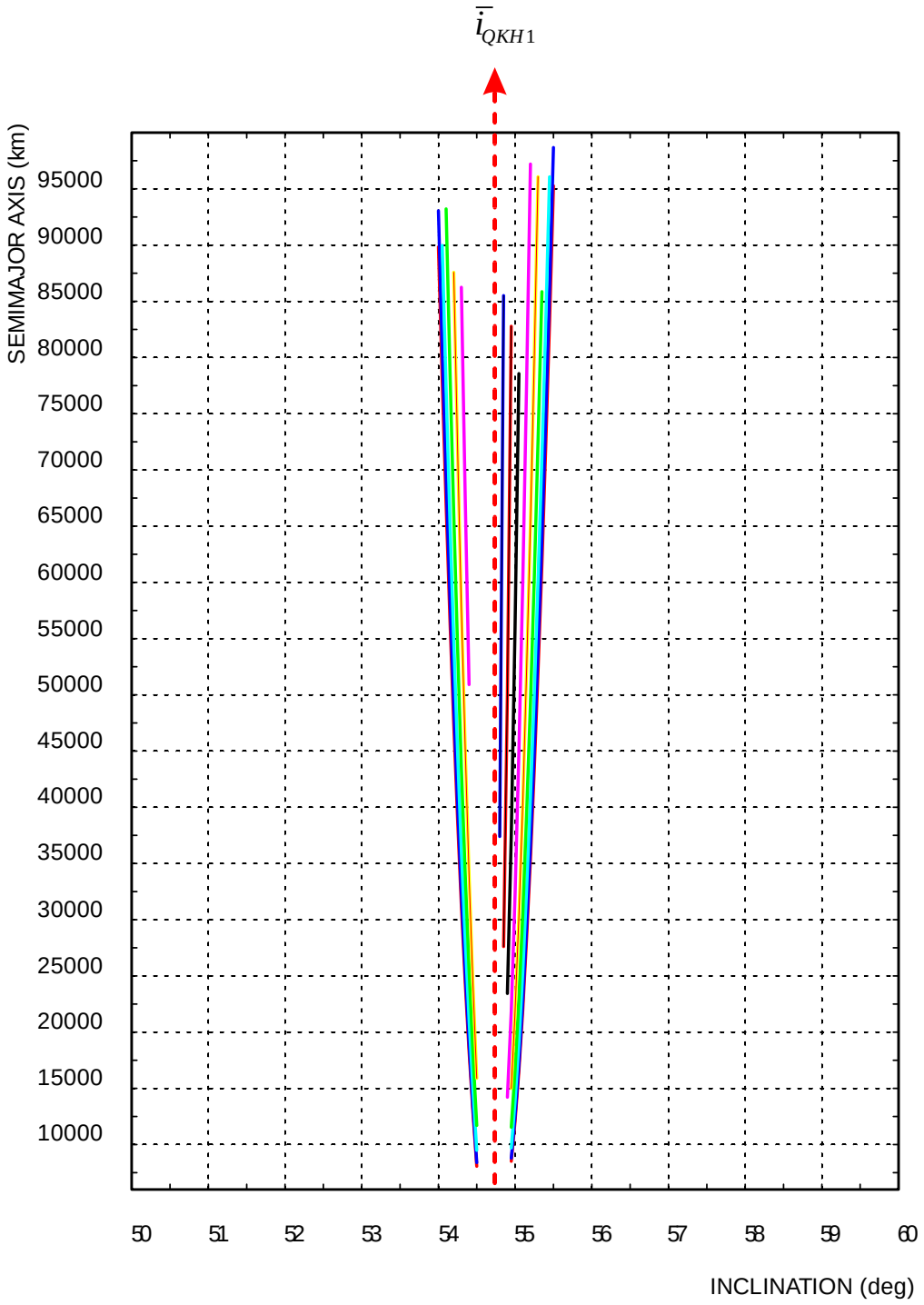


Bild 22-39: Mögliche Nahe-Parallele $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_H}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der Genauigkeit $\Delta fct = \left|\overline{P_K} - \overline{P_H}\right| < 0.08\,\mathrm{sec}$: große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Es gibt keine Grenzbahn. Die Zeichnung wurde mit den Parametern $\Delta a = 10$ km , $\Delta i = 0°.05$, $\Delta e = 0.01$ erstellt. Die Pfeile geben die Richtungen zu den charakteristischen Inklinationen an. Die Rechnung wurde mit säkularen Bewegungseinflüssen mit den zonalen Harmonischen J_2 und J_4 im *Brouwer*schen Bahnmodell durchgeführt. Farbcodierung der Exzentrizitäten wie in Bild 22-32.

Aufgabenstellungen:

- Untersuche die Asymmetrie im Verlauf der Nahe-Parallelen $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_H}\right)$- Äquivalenzbahnen bezüglich der charakteristischen Inklination $\bar{i}_{QKH,1}$ in Bild 22-38 und Bild 22-39 analog zu den Untersuchungen in den Abschnitten 22.13.5 und 22.14.3
- Vertiefe die Behandlung von $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_H}\right)$- Äquivalenzbahnen, insbesondere die Auswahl von Bahnparametern, etwa entsprechend dem in den vorhergehenden Abschnitten behandeltem Schema.

22.16 Eigenschaften von Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen

Aus heuristischen Überlegungen können folgende allgemeine Eigenschaften von Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen zusammengestellt werden:

1. Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen sind durch (eine oder aus symmetrischen Gründen zwei) charakteristische Inklinationen ausgezeichnet.
2. Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen mit Inklinationen nahe der charakteristischen Inklination nähern sich mit wachsender großer Bahnhalbachse immer mehr der Bahn mit der charakteristischen Inklination an, erreichen sie aber nie.
3. Mit wachsender Exzentrizität verschiebt sich die Annäherung an die Nullkurve zu immer größeren Halbachsen.
4. Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen sind durch den jeweiligen Abstand zur Nulllinie charakterisiert. Dieser Abstand ist ein Maß für die Genauigkeit mit der eine solche Bahn die Äquivalenzbedingung erfüllen kann.
5. Eine eindeutige Darstellung etwa eines (a,i)-Gebietes, in dem Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen gefunden werden können, ist nicht möglich wegen der Abhängigkeit von den Schrittweitender Parameter und wegen der extremen Abhängigkeit von der Genauigkeit bei der Berechnung der zuständigen Bedingungsgleichung.

22.17 Aufbau einer Satellitenformation mit anomalistischer Bewegung

22.17.1 Aufbau der Formation mit ganzzahligem Verhältnis anomalistischer Umläufe

Zwei Satelliten sollen sich auf ein- und derselben kreisförmigen Bahn getrennt durch einen großen zentralen Winkel γ hintereinander her bewegen. Der zweite Satellit S_2 werde so manövriert, dass die beiden Satelliten schließlich eine enge Formation bilden. Die Bewegung des ersten Satelliten S_1 bleibe unverändert. Das benötigte Geschwindigkeitsinkrement, der relative Treibstoffverbrauch und die Zeitdauer zum Aufbau der Konstellation sind abzuschätzen. Im Rahmen der anomalistischen Bewegung werde angenommen, dass der zweite Satellit in eine

elliptische Zwischenbahn eingeschossen wird. Für diese Bahn wird in der englischen Literatur gelegentlich der Begriff „Phasing Orbit“ verwendet.[1]

Die beiden Satelliten bewegen sich nach Bild 22-40 exakt auf derselben Bahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_1}$. Nach genau einem mittleren anomalistischen Umlauf $\overline{P_{A1}}$ befindet sich der Satellit wieder im selben Punkt der Bahn. Wird die Bahn kreisförmig angenommen, wird der Bahnbogen von S_2 nach S_1 im Zeitraum

$$\Delta t = \frac{\gamma}{360°}\overline{P_{A1}} \tag{22.309}$$

durchlaufen.

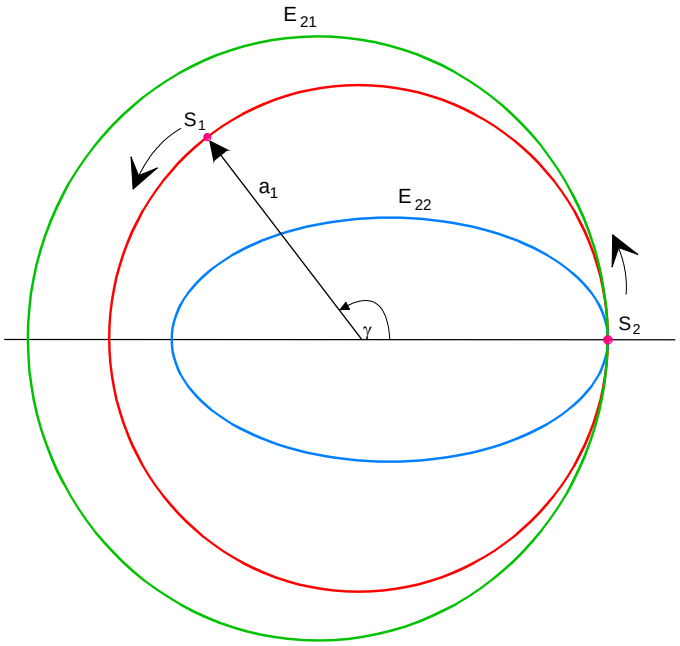


Bild 22-40: Zwei durch den Zwischenwinkel γ getrennte Satelliten werden durch Bahnmanöver des zweiten Satelliten über eine elliptische Zwischenbahn (E_1 außerhalb, E_2 innerhalb der gegebenen Kreisbahn mit Radius a_1) in eine enge Konstellation in der Position S_2 gebracht

Der Satellit S_2 werde nun durch ein Manöver $\Delta\dot{\mathbf{r}}$ in eine elliptische Bahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_2}$ und der mittleren Exzentrizität $\overline{e_2}$ eingeschossen. Die mittlere anomalistische Umlaufzeit auf dieser Bahn betrage $\overline{P_{A2}}$. Als Bedingung wird angestrebt, dass sich nach einigen Umläufen beide Satelliten im Punkt S_2 befinden. Bis zu diesem Zeitpunkt hat der zweite Satellit M anomalistische Umläufe ausgeführt, der erste N anomalistische Umläufe und zusätzlich den Winkel γ durchlaufen. Es muss daher die Bedingung

$$\left(N + \frac{\gamma}{360°}\right)\overline{P_{A1}} = M\ \overline{P_{A2}} \tag{22.310}$$

erfüllt sein. Wenn γ>0 befindet sich S_1 vor S_2, sonst dahinter. Mit Gleichung (22.309) wird auch

$$\overline{P_{A2}} = \frac{1}{M}\left[\, N\,\overline{P_{A1}} + \Delta t\right] \quad . \tag{22.311}$$

[1] siehe auch: DLR GSOC TN 2003-06: ‘Orbit Aspects of TS-L/CTW Formation Flight’

Die Übergangsbahn des zweiten Satelliten kann innerhalb oder außerhalb der ursprünglichen Bahn liegen. Entsprechend erfolgt das Manöver im Perigäum oder Apogäum der Übergangsbahn. Treffen sich nach dem Zeitraum $\left(M\,\overline{P_{A2}}\right)$ die beiden Satelliten an derselben Stelle, muss der zweite Satellit ein zweites Manöver ausführen, um wieder in die ursprüngliche Bahn einschwenken zu können. Dieses zweite Manöver hat denselben Betrag $\Delta V = \left|\Delta\dot{\mathbf{r}}\right|$ wie das erste Manöver, ist aber genau entgegengerichtet. Das Gesamtinkrement beträgt daher $2\,\Delta V$.

Die Abschätzung wird mit Formeln der speziellen *Kepler*bewegung und des *Hohmann* Transfers nach Abschnitt 12.3.3 durchgeführt. Auf der gegebenen Bahn hat ein Satellit im Manöverort die mittlere Geschwindigkeit

$$\overline{V_1} = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{\overline{r_1}} - \frac{1}{\overline{a_1}}\right)} \quad , \tag{22.312}$$

im Punkt S_2 habe er den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{r}}_2$.

Wir wollen annehmen, dass das Manöver (aus Gründen der Energieeinsparung als *Hohmann* Transfer) im Apogäum oder Perigäum der neuen Übergangsbahn stattfinde.

Falls die neue mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_{A2}}$ kleiner als die entsprechende Umlaufzeit $\overline{P_{A1}}$ auf der ursprünglichen Bahn ist, liegt die neue Bahn innerhalb der alten Bahn, das Manöver findet somit im Apogäum der neuen Bahn im Abstand

$$\overline{r_{2\,P}} = \overline{a_2}\left(1+\overline{e_2}\right) = \overline{r_1} \tag{22.313}$$

statt, wenn $\overline{r_1}$ der Radius der alten Bahn im Manöverort S_2 ist, $\overline{a_2}$ und $\overline{e_2}$ die noch zu bestimmenden große Bahnhalbachse und Exzentrizität der Übergangsbahn. Auf der neuen Bahn hat der Satellit im Moment des impulsiven Manövers die mittlere *Kepler*sche Apogäumsgeschwindigkeit

$$\overline{V_A} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_2}}\frac{1-\overline{e_2}}{1+\overline{e_2}}} = \sqrt{\frac{\mu\left(1-\overline{e_2}\right)}{\overline{r_1}}} \quad . \tag{22.314}$$

Im Fall $\overline{P_{A2}} > \overline{P_{A1}}$ befindet sich der Satellit während des Manövers im Perigäum der Bahn im Abstand

$$\overline{r_{2P}} = \overline{a_2}\left(1-\overline{e_2}\right) = \overline{r_1} \tag{22.315}$$

mit der mittleren *Kepler*schen Perigäumsgeschwindigkeit

$$V_P = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_{21}}}\frac{1+\overline{e_{21}}}{1-\overline{e_{21}}}} = \sqrt{\frac{\mu\left(1+\overline{e_{21}}\right)}{\overline{r_1}}} \quad . \tag{22.316}$$

Um die beiden Fälle in der Praxis einheitlich behandeln zu können, ist es nahe liegend den Faktor

$$\sigma_e := \begin{cases} +1 & \text{für } \overline{P_{A2}} > \overline{P_{A1}} \text{ , Bahn 2 außerhalb Bahn 1} \\ -1 & \text{für } \overline{P_{A2}} < \overline{P_{A1}} \text{ , Bahn 2 innerhalb Bahn 1} \end{cases} \tag{22.317}$$

zu verwenden. Der Satellit hat nach dem Manöver somit einheitlich die mittlere Geschwindigkeit

$$\overline{V_2} = \sqrt{\frac{\mu\left(1+\sigma_e\,\overline{e_2}\right)}{\overline{r_1}}} \quad . \tag{22.318}$$

Das Geschwindigkeitsinkrement, mit dem das Manöver durchgeführt wird, beträgt

$$\overline{\Delta V} := \overline{V_2} - \overline{V_1} \quad . \tag{22.319}$$

Es ist positiv bei einem Manöver in eine äußere Bahn, negativ in eine innere Bahn. Dies zeigt sich somit im Schubvektor

$$\Delta\dot{\mathbf{r}} = \overline{\Delta V}\,\frac{\dot{\mathbf{r}}_2}{|\dot{\mathbf{r}}_2|} \quad . \tag{22.320}$$

Um die Bahnparameter $\overline{a_2}$, $\overline{e_2}$ der Übergangsbahn zu bestimmen, werden zwei Bedingungsgleichungen benötigt.

Zunächst bietet sich die Radiusbedingung

$$\overline{r_1} = \overline{a_2}\left(1-\sigma_e\,\overline{e_2}\right) \tag{22.321}$$

an, welche das Apogäum bzw. Perigäum der neuen Bahn charakterisiert. Als weitere Bedingung wird die mittlere anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_{A2}}$ auf der Übergangsbahn verwendet, die durch Gleichung (22.311) definiert ist. In einer Theorie erster Ordnung nach Abschnitt 22.4.2 (ab Seite 46) ist

$$\overline{P_{Ai}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{ai}}} \qquad \langle i = 1,2 \tag{22.322}$$

mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung

$$\overline{n_{ai}} = \overline{n_{Ki}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{si} \quad \langle i = 1,2 \quad . \tag{22.323}$$

Hier ist in der üblichen Schreibweise die mittlere *Kepler*sche Bewegung gegeben durch

$$\overline{n_{Ki}} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a_i}^3}} \qquad \langle i = 1,2 \tag{22.324}$$

und die säkulare Variation der mittleren Anomalie in einer Theorie erdnaher Satellitenbahnen durch (siehe Formel (20.17))

$$\left(M_0\right)^{\cdot}_{Gsi} = -\frac{3}{4}\,\overline{n_{Ki}}\,J_2\,\frac{R_E^2\,\sqrt{1-\overline{e_i}^2}}{\overline{a_i}^2\left(1-\overline{e_i}^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\overline{i_0}\right) + ... \quad , \quad (i=1,2) \ . \tag{22.325}$$

Damit lauten die beiden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} f_1\left(\overline{a_2},\overline{e_2}\right) &\equiv \overline{P_A} - \overline{P_{A2}} = 0 \\ f_2\left(\overline{a_2},\overline{e_2}\right) &\equiv \overline{a_2}\left(1-\sigma_e\,\overline{e_2}\right) - \overline{r_1} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{22.326}$$

Eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung gibt

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{10} + \frac{\partial f_1}{\partial \overline{a_2}}\left(\overline{a_2}-\overline{a_{20}}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial \overline{e_2}}\left(\overline{e_2}-\overline{e_{20}}\right) + ... \\ f_2 &= f_{20} + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a_2}}\left(\overline{a_2}-\overline{a_{20}}\right) + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{e_2}}\left(\overline{e_2}-\overline{e_{20}}\right) + ... \end{aligned} \tag{22.327}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned}\overline{a_2} &= \overline{a_{20}} - \frac{f_{10}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{e_2}} - f_{20}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e_2}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a_2}}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{e_2}} - \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a_2}}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e_2}}} + \ldots \\ \overline{e_2} &= \overline{e_{20}} + \frac{f_{10}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{a_2}} - f_{20}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a_2}}}{\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a_2}}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{e_2}} - \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a_2}}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e_2}}} + \ldots \quad .\end{aligned} \tag{22.328}$$

Für die partiellen Ableitungen folgen

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a_2}} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{a_2}} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}}\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{a_2}} = -\frac{2\pi}{\overline{n_A}^2}\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{a_2}} \tag{22.329}$$

sowie mit den Beziehungen (22.323) - (22.325)

$$\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{a_2}} = \frac{3\sqrt{\mu}}{2\overline{a_2}^2\sqrt{\overline{a_2}}}\left\{-1+\frac{7}{4\overline{a_2}^2}J_2 R_E{}^2\frac{\sqrt{1-\overline{e_2}^2}}{\left(1-\overline{e_2}^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\overline{i_2}\right)\right\} \tag{22.330}$$

außerdem

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e_2}} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{e_2}} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}}\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{e_2}} = -\frac{2\pi}{\overline{n_A}^2}\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{e_2}} \tag{22.331}$$

mit

$$\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{e_2}} = -\frac{9}{4}\overline{n_0}\,J_2\frac{R_E{}^2}{\overline{a_2}^2}\frac{\overline{e_2}\sqrt{1-\overline{e_2}^2}}{\left(1-\overline{e_2}^2\right)^3}\left(1-3\cos^2\overline{i_2}\right) \quad . \tag{22.332}$$

Ferner sind

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial \overline{a_2}} &= \frac{\partial \overline{r_1}}{\partial \overline{a_2}} = 1-\sigma_e\,\overline{e_{20}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \overline{e_2}} &= \frac{\partial \overline{r_1}}{\partial \overline{e_2}} = -\sigma_e\,\overline{a_{20}} \quad .\end{aligned} \tag{22.333}$$

Um Anfangslösungen $\overline{a_{20}}$, $\overline{e_{20}}$ zu wählen, werde etwa zunächst $\overline{e_{20}} := 0.0$ angenommen. Dann kann aus der in Abschnitt 22.6.1 geschilderten Bahndefinition, die Halbachse aus der mittleren anomalistischen Umlaufzeit zu bestimmen, der Anfangswert $\overline{a_{20}}$ aus der vorgegebenen Umlaufzeit $\overline{P_2}$ hergeleitet werden. Mit diesem neuen Wert kann ein verbesserter Anfangswert für die Exzentrizität aus der zweiten der Gleichungen (22.326) berechnet werden:

$$\overline{e_{20}} = \sigma_e\left(1-\frac{\overline{r_1}}{\overline{a_{20}}}\right) \quad . \tag{22.334}$$

Mit den neuen Anfangswerten $\overline{a}_{20}, \overline{e}_{20}$ wird die Verbesserung mit dem System (22.328) gestartet. Dieser Vorgang kann bei Bedarf mehrfach iterativ angewendet werden.

Für die praktische Anwendung muss angemerkt werden, dass bei langen Manöverzeiten, also bei lang dauernden Transfers, die zusätzlichen Bewegungseinflüsse („Störeinflüsse“) zunehmend zur Auswirkung kommen: zum einen kann die Halbachse durch nichtgravitative Einflüsse, wie etwa den Luftwiderstand, verändert werden. Dadurch wird die (anomalistische) Umlaufzeit vermindert, was durch ein zusätzliches Bahnmanöver ausgeglichen werden muss. Zum anderen hat die Transferbahn infolge der von der Ursprungsbahn abweichenden großen Bahnhalbachse und Exzentrizität auch bei gleicher Inklination eine unterschiedliche säkulare Variation des aufsteigenden Knotens $\dot{\Omega}_s$, so dass durch ein weiteres Manöver das Abdriften der Bahnebene aufgehalten werden muss. Um diese zusätzlichen Manöver weitgehend vermeiden zu können, ist es also sinnvoll, möglichst kurze Transferzeiten zu wählen, daher einen Kompromiss zwischen geringem Manöveraufwand und Zeitbedarf zu suchen.

1. BEISPIEL: Gegeben sei ein Satellit auf einer kreisförmigen Bahn. Die mittlere große Bahnhalbachse und die mittlere Inklination betragen $\overline{a}_1 = 6883.509\,\text{km}, \overline{i}_1 = 97°.4221$, die mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{A1}} = 5687.394\,\text{s} \triangleq 94.78989590\ \text{min}$. Die Kreisbahngeschwindigkeit dieses Satelliten beträgt $\overline{V_K} = 7.60963765\ km/s$.

In der folgenden Tabelle werden einige Übergangsbahnen durch Vorgabe der Zahlenwerte *N* und *M* berechnet. Diese Werte legen die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_2$ und die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_2$ der Übergangsbahn fest. Ferner finden sich in der Tabelle Werte für das gesamte Geschwindigkeitsinkrement ΔV sowie das Verhältnis des Treibstoffanteils (siehe in Abschnitt 12.10.2.1)

$$\frac{m_T}{m_A} = \left| 1 - e^{-\frac{\Delta V}{V_e}} \right| \quad , \tag{22.335}$$

wenn m_T die Treibstoffmasse, m_A die Startmasse, sowie V_e die Austrittsgeschwindigkeit des Raketenmotors bedeuten. Die Berechnungen werden für Kaltgastriebwerke (V_e = 1.0 km/s) und Heißgastriebwerke (V_e = 2.8 km/s) durchgeführt. Die Gesamtdauer für das Manöver beträgt $T = M\ \overline{P_{a2}}$ [min]. Die beiden Satelliten sollen um die Strecke 50 km getrennt werden, wobei der zweite (kleine) Satellit in Flugrichtung „hinter“ dem Mastersatelliten positioniert werden soll. Das Zeitintervall, durch das die beiden Satelliten in ein und derselben Bahn getrennt sein sollen, beträgt dann $\Delta t = 6.5706151\text{sec}$, d.h. der Satellit S_1 befindet sich vor Satellit S_2 in seiner Bahn um den Winkel $\gamma = 2\pi\ \Delta t\ / \overline{P_{A1}} = 50\,\text{km} / \overline{a}_1 \approx 0°.4159$ getrennt. Bahnen mit Perigäumshöhen unter 200 km werden eliminiert. Wird ein Transfer von etwa 4 Tagen erlaubt, was nach etwa 61 anomalistischen Umläufen erreicht werden kann, ergeben sich nach der folgenden Tabelle die Werte: die zweite Bahn, die außerhalb der unbeeinflussten ersten Bahn verläuft, hat die anomalistische Umlaufzeit $\overline{P_{A2}} = 94.791691\,\text{min}$. Die mittlere große Bahnhalbachse beträgt $\overline{a}_2 = 6883.596310\,\text{km}$ und die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_2 = 0.000012684$. Das Gesamtmanöver erfordert das Geschwindigkeitsinkrement ΔV=0.096519m/s, der Transfer ist

nach 96.371553 Stunden abgeschlossen. Wird das Manöver mit einem Heißgastriebwerk durchgeführt, wird bei einer Gesamtmasse des Satelliten von 130 kg der Treibstoff $\Delta m = 0.00345 \times 130\,\text{kg}/100 = 0.00449\,\text{kg}$ benötigt. ◀

N - anomalistic periods of satellite 1

M - anomalistic periods of satellite 2

PA2 - anomalistic period of satellite 2

A2 - semimajor axis (km) satellite 2

E2 - eccentricity satellite 2

DV - velocity increment (km/s) for total maneuver

T - total period (h) of maneuver

DMC - relative mass budget for cold gas motor for transfer maneuver

DMH - relative mass budget for hot gas motor for transfer maneuver

A1 = 6883.509000 km

E1 = 0.000000

PAM1 = 94.78989590 min

required time difference Dt = 0.109510 min

required time difference Dt = 6.570600 sec

N	M	PAM2(min)	A2(km)	E2	DV(m/s)	T(h)	DMC(%)	DMH(%)
61	61	94.791691	6883.596310	0.0000127	0.096519	96.371553	0.00965	0.00345
61	62	93.262793	6809.311977	0.0108964	-83.144805	96.371553	8.66992	3.01399
62	60	97.951384	7035.856673	0.0216530	163.889337	97.951384	15.11640	5.68519
62	61	96.345624	6958.686164	0.0108034	81.988774	97.951384	7.87177	2.88572
62	62	94.791662	6883.594884	0.0000125	0.094942	97.951384	0.00949	0.00339

Tabelle 22-11: Beispiel für Übergangsbahnen und zugehörige Manöver zum Aufbau einer gegebenen Satellitenformation für verschiedene Verhältnisse N:M der ursprünglichen und der Übergangsbahn.

2. BEISPIEL: Gegeben sei wieder wie im ersten Beispiel ein Satellit auf einer kreisförmigen sonnensynchronen Bahn, die nach 11 Tagen und 167 drakonitischen Umläufen in der Bodenspur reproduzierbar ist. Die mittlere große Bahnhalbachse und die mittlere Inklination betragen $\overline{a_1} = 6883.509\,\text{km}, \overline{i_1} = 97°.422169$, die mittlere anomalistische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{A1}} = 94.789896\,\text{min}$. Die Kreisbahngeschwindigkeit dieses Satelliten beträgt $\overline{V_K} = 7.60963765\,km/s$. Es soll berechnet werden, welcher Energieaufwand nötig ist, um den Satelliten um 50 km vor einem Mastersatelliten zu positionieren.

Die neue Position, die längs der kreisförmigen Bahn um Δt = -6.5706 Sekunden zurückbleiben soll, wird entsprechend Formel (22.310) nach N = 61 anomalistischen Umläufen des ersten und M = 61 anomalistischen Umläufen des zweiten Satelliten erreicht werden. Die Transferbahn befindet sich dann innerhalb der ersten Bahn. Die neue anomalistische Umlaufzeit beträgt

$\overline{P_{A2}} = 94.788101\,\text{min}$, demnach die mittlere große Bahnhabachse und Exzentrizität $\overline{a_{2/2}} = 6883.422\,\text{km}$, $\overline{e_{2/2}} = 0.00001259$. Das Triebwerk muss zunächst gegen die Bewegungsrichtung gezündet werden, das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement beträgt $\Delta V_{2/2} = -0.095812\,\text{m/s}$ und der Treibstoffanteil $m_T / m_A = 0.00342\,\%$. Der Transfer benötigt in diesem Fall $\Delta t = 96^{\text{h}}.3679$. ◀

Anmerkung: Das zweite Beispiel zeigt, dass die Positionierung des zweiten Satelliten vor dem nicht beeinflussten Mastersatelliten etwas billiger ist als die Positionierung nach diesem. Dieser Effekt ist abhängig von dem verwendeten Störmodell. Die Methode im folgenden Abschnitt zeigt, dass ohne Berücksichtigung eines Störmodells dieser Unterschied nicht berücksichtigt werden kann. Darüber hinaus ist die hier vorgeschlagene Methode auch für große Manöver im erdnahen Bereich (Dominanz des Erdfeldes) relevant, während Näherungsmethoden, die aus dem dritten *Kepler*schen Gesetz (der speziellen *Kepler*bewegung) abgeleitet sind, nur für sehr kleine Manöver angewandt werden dürfen.◀

22.17.2 Zeitlich rascher Konstellationsaufbau durch kleine Manöver

Für Abschätzungen sehr kleiner Bahnänderungen wird das dritte *Kepler*sche Gesetz in der klassischen Form

$$P_K = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{2a\pi}{V_C} \quad ,$$

verwendet, wobei

$$n = \frac{2\pi}{P_K} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{V_C}{a} \tag{22.336}$$

die *Kepler*sche mittlere Bewegung und

$$V_C = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \tag{22.337}$$

die entsprechende Kreisbahngeschwindigkeit bedeutet. Eine kleine Änderung der großen Bahnhalbachse bewirkt die Änderung in der *Kepler*schen Umlaufzeit

$$\Delta P_K \approx -\frac{3P_K}{V_C}\Delta V_T \quad . \tag{22.338}$$

Nach Formel (12.90)[1] bewirkt eine Änderung in der großen Bahnhalbachse in Bezug auf kreisförmig angenäherte Bahnen eine Änderung der Geschwindigkeit in transversaler Richtung von

$$\Delta V_T = -\frac{V_C}{2a}\Delta a \quad . \tag{22.339}$$

Werden kleine Bahnänderungen durch ein Geschwindigkeitsinkrement in transversaler Richtung verursacht, wird die große Bahnhalbachse daher um

$$\Delta a \approx -\frac{2a}{V_C}\Delta V_T = -\frac{P_K}{\pi}\Delta V_T \tag{22.340}$$

[1] In Abschnitt 12.4.4, Band III

geändert. Deshalb entspricht einer Variation in der transversalen Geschwindigkeit eine Variation in der Umlaufzeit

$$\Delta P_K \approx -\frac{3P_K}{V_C}\Delta V_T \quad . \tag{22.341}$$

Die Verschiebung der Position eines Satelliten längs der kreisförmig angenommenen Bahn kann aus der Beziehung

$$\Delta x = V_C \, \Delta t \tag{22.342}$$

berechnet werden. Bezogen auf einen *Kepler*schen Umlauf P_K beträgt die Verschiebung längs der Bahn

$$\Delta x_P = V_c \, \Delta P_K \approx -\frac{6a\pi}{V_c}\Delta V_T \quad . \tag{22.343}$$

Auf Grund seiner relativen Bewegung hat ein Objekt, das sich mit dem Geschwindigkeitsinkrement ΔV_T gegenüber einem Bezugsobjekt bewegt, in Bezug auf einen *Kepler*schen Umlauf P_K im Zeitintervall Δt_r die relative Entfernung Δx_r durchlaufen, für welche die Beziehung

$$\frac{\Delta x_P}{P_K} = \frac{\Delta x_r}{\Delta t_r} \tag{22.344}$$

gilt. In einem Zeitintervall Δt_r verursacht durch das transversale Geschwindigkeitsinkrement ΔV_T durchläuft das Objekt somit die relative Distanz

$$\Delta x_r \approx -3 \, \Delta t_r \, \Delta V_T \quad . \tag{22.345}$$

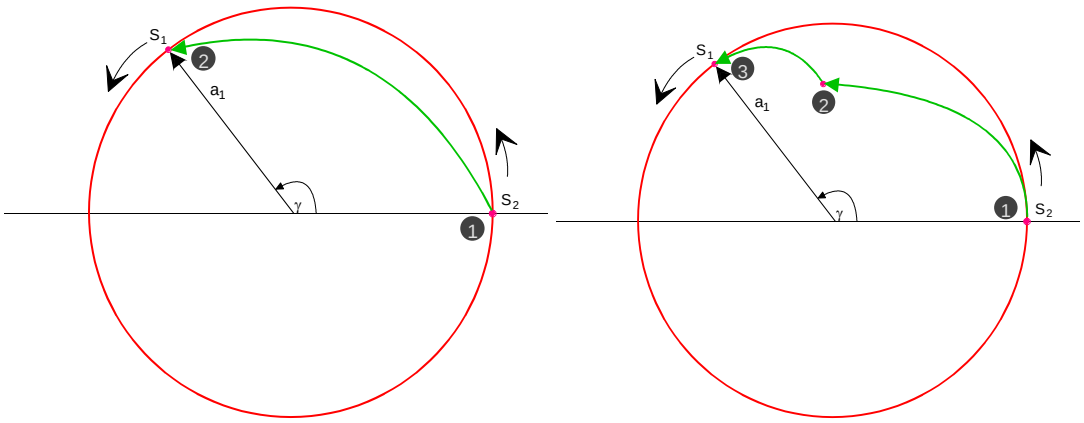


Bild 22-41: Zwei durch den Zwischenwinkel γ getrennte Satelliten werden durch zwei bzw. drei Bahnmanöver des zweiten Satelliten über einen elliptischen Bahnbogen in eine gewünschte Konstellation in der Position S_1 gebracht, während der erste Satellit in der Position S_2 verharrt

Bezogen auf diese Abschätzung beträgt umgekehrt das Zeitintervall, das benötigt wird um die relative Verschiebung Δx_r des Ortes eines Satelliten längs seiner Bahn zu erreichen, welche durch das transversale Geschwindigkeitsinkrement ΔV_T verursacht wird,

$$\Delta t_r \approx -\frac{\Delta x_r}{3\Delta V_T} \quad . \tag{22.346}$$

BEISPIEL: Es wird mit den Zahlenwerten der beiden Beispiele im vorigen Abschnitt gerechnet. Mit der Transferzeit $\Delta t_r = 97^h.3716$ und der Distanz $\Delta x_r = 50\,\mathrm{km}$ ergibt sich aus Formel (22.346) das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für die beiden benötigten Manöver ΔV_T=0.09509199 m/s. Im zweiten Fall mit der Transferzeit $\Delta t_r = 97^h.3796$ wird das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement $\Delta V_T = 0.0950956$ m/s benötigt.

Diese Werte liegen etwas unter den beiden im vorigen Abschnitt bei Berücksichtigung der Störungen durch J_2 berechneten Zahlenwerten. Ein direkter Vergleich der beiden Methoden ist wegen der unterschiedlichen Bahnmodelle nicht möglich. ◀

23 Drakonitische Bewegung

Der Begriff der drakonitischen Bewegung ist der Mondtheorie entnommen. Als drakonitischer Monat wird die Zeitspanne zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Mondes durch den aufsteigenden Knoten seiner Bahn bezeichnet. Als Knoten werden hier die Schnittpunkte der Mondbahnebene mit der Ekliptik bezeichnet.

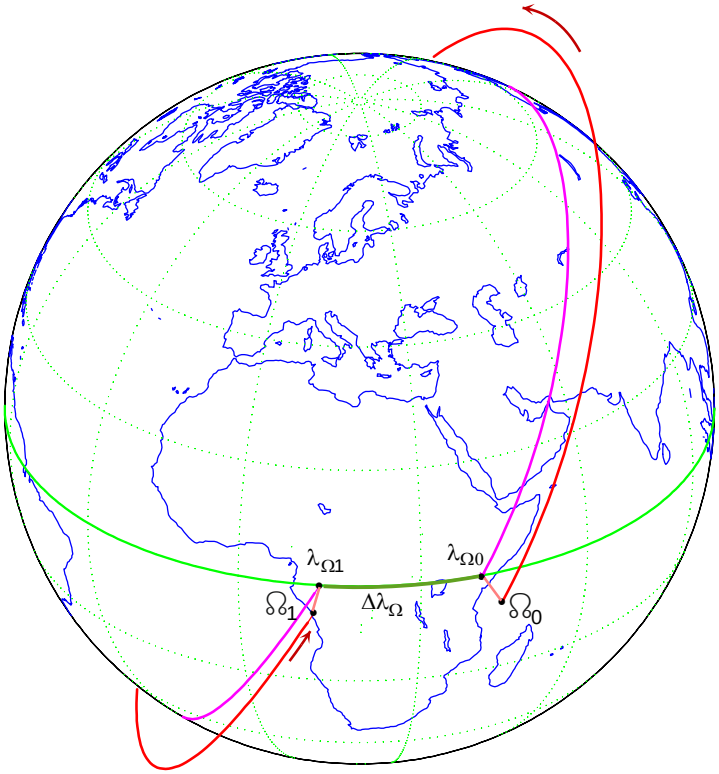


Bild 23-1: Ein drakonitischer Umlauf eines Satelliten auf kreisförmiger Bahn um die als fest angenommene Erde vom aufsteigendem Knoten Ω_0 zum nächsten aufsteigenden Knoten Ω_1.

In der Bewegungslehre von Satelliten werden als Knoten die Schnittpunkte der Satellitenbahnebene mit der Äquatorebene des Zentralkörpers bezeichnet. Entsprechend ist die drakonitische Bewegung die auf die Knotendurchgänge bezogene Bewegung. Sie ist für alle Bahnen außer Äquatorbahnen definiert, insbesondere auch für geneigte Kreisbahnen, für welche die anomalistische Bewegung nicht definiert ist. Kreisbahnen sind jedoch vor allem bei erdnahen Missionen üblich, etwa die bemannten Missionen (Space-Shuttle, MIR, ISS). Von besonderer Wichtigkeit sind die üblicherweise kreisnahen Bahnen von Erdbeobachtungssatelliten und Planetenorbitern. Diese können mit den Methoden der drakonitischen Bewegung ausgelegt werden.

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird die drakonitische Bewegung nicht für beliebige Bewegungen, sondern lediglich in Bezug auf die allgemeine *Kepler*bewegung untersucht[1].

[1] d.h. für eine Bewegung, für welche die *Kepler*schen Bahngesetze gelten, in denen aber alle Parameter als zeitabhängige Variable angesetzt werden können.

23.1 Das knotenbezogene Bahnsystem

Der Knoten einer Bahn ist von der Bewegung eines Objektes in dieser Bahn abhängig. Auch wenn die Bewegung in Bezug auf den Knoten alle anderen Bewegungbezüge außer Acht lässt, ist die Eigenbewegung des knotenbezogenen Bahnsystems nur im Gesamtzusammenhang der Bewegung zu verstehen, in Bezug auf das bewegungsbezogene Bahnsystem oder in Bezug auf das Frühlingspunkt - orientierte Äquatorsystem.

23.1.1 Eigenschaften des knotenbezogenen Bahnsystems

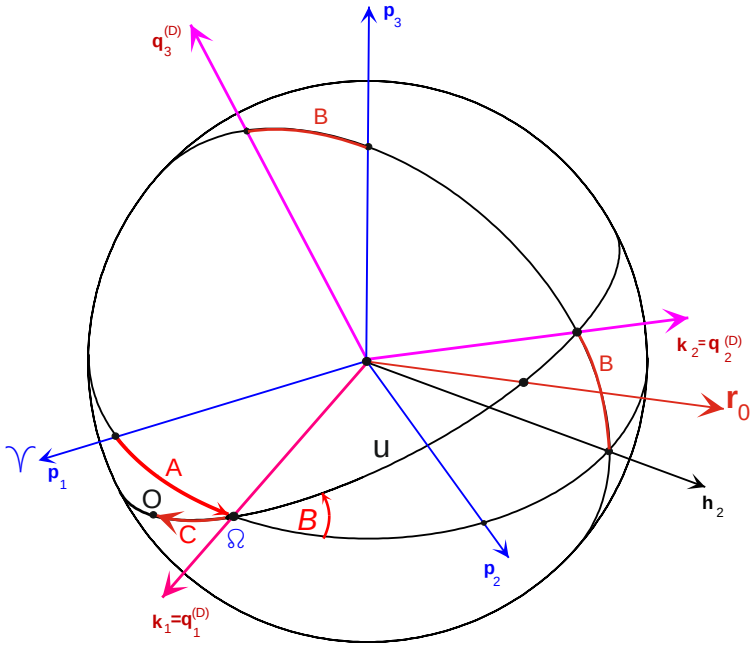


Bild 23-2: Das knotenbezogene $\mathbf{q}_j^{(D)}$ – Bahnsystem, Bezug auf das Frühlingspunkt-bezogene $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem mit Hilfe der *Euler*winkel *A, B, C*, wobei hier *C*=0 gesetzt werden kann, $\mathbf{r}_0$ ist der Richtungsvektor zu einem Ort auf der Bahn, $u = \sphericalangle\left(\mathbf{q}_1^{(D)}, \mathbf{r}_0\right)$ ist der Bahnwinkel im Knotensystem (Argument der Breite), O ist der Anfangspunkt eines *Hansen*-Systems

Das knotenbezogene Bahnsystem wird definiert durch den Knotenvektor d.h. den Richtungsvektor $\mathbf{q}_1^{(D)}$ zum aufsteigenden Knoten ☊ bezogen auf den Äquator (Ebene durch die Basisvektoren $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$), den Normalenvektor $\mathbf{q}_3^{(D)} = \mathbf{c}_0 = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{q}_0$ der momentanen Bahnebene und den zum Orthonormalsystem ergänzenden Vektor $\mathbf{q}_2^{(D)} = \mathbf{q}_3^{(D)} \times \mathbf{q}_1^{(D)}$, der so gewählt wird, dass er in der Bahnebene B liegt (vgl. Bild 23-2). Der Bahnwinkel ist in diesem Fall das Argument der Breite *u*, das bei geneigten Bahnen immer definiert ist, auch wenn kein Perizentrum der Bahn bekannt ist, d.h. auch für alle geneigten kreisförmigen Bahnen. Der radiale Richtungsvektor eines bewegten Objektes hat somit im Knotensystem die Darstellung

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_1^{(D)} \cos u + \mathbf{q}_2^{(D)} \sin u \tag{23.1}$$

und der transversale Richtungsvektor

$$\mathbf{q}_0 = -\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u + \mathbf{q}_2^{(D)} \cos u \quad . \tag{23.2}$$

Der normale Richtungsvektor stimmt mit dem normalen Richtungsvektor des mitgeführten Bahnsystems überein:

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{q}_3^{(D)} \quad . \tag{23.3}$$

Da das knotenbezogene System somit orthonormiert ist, gelten die Beziehungen

$$\mathbf{q}_3^{(D)} = \mathbf{q}_1^{(D)} \times \mathbf{q}_2^{(D)} \quad , \quad \mathbf{q}_1^{(D)} = \mathbf{q}_2^{(D)} \times \mathbf{q}_3^{(D)} \quad , \quad \mathbf{q}_2^{(D)} = \mathbf{q}_3^{(D)} \times \mathbf{q}_1^{(D)} \quad . \tag{23.4}$$

Der radiale Richtungsvektor hat die Variation

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \cos u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \sin u + \dot{u}\left(-\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u + \mathbf{q}_2^{(D)} \cos u\right) \ ,$$

somit

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \cos u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \sin u + \dot{u}\, \mathbf{q}_0 \quad . \tag{23.5}$$

Für die Variationen der Basisvektoren des knotenbezogenen Bahnsystems können aus dem allgemeinen Ansatz

$$\dot{\mathbf{q}}_i^{(D)} =: k_i^{\,j}\, \mathbf{q}_j^{(D)} \tag{23.6}$$

mit der schiefsymmetrischen Koeffizienten Matrix

$$k_i^{\,j} = -k_j^{\,i} \quad , \quad k_i^{\,i} = 0 \qquad \langle i, j = 1,2,3 \tag{23.7}$$

die Variationsformeln

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \qquad\qquad k_{12}\, \mathbf{q}_2^{(D)} + k_{13}\, \mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -k_{12}\, \mathbf{q}_1^{(D)} \qquad\quad + k_{23}\, \mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= -k_{13}\, \mathbf{q}_1^{(D)} - k_{23}\, \mathbf{q}_2^{(D)} \end{aligned} \tag{23.8}$$

aufgestellt werden. Die Eigenbewegung des knotenbezogenen Bahnsystems kann wie üblich auf einen Epoche Zustand dieses Systems oder ein entsprechendes anderes System mit den drei „*Euler*drehungen“ um die Winkel *A, B, C* (siehe etwa in Abschnitt 6.3.2, Band II) und daher mit den Formeln (6.136) bezogen werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \left(\dot{C} + \dot{A}\cos B\right)\mathbf{q}_2^{(D)} - \left(-\dot{B}\sin C + \dot{A}\sin B\cos C\right)\mathbf{q}_3^{(D)} + k_{12}^{(2)}\, \mathbf{q}_2^{(D)} - k_{31}^{(2)}\, \mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\left(\dot{C} + \dot{A}\cos B\right)\mathbf{q}_1^{(D)} + \left(\dot{B}\cos C + \dot{A}\sin B\sin C\right)\mathbf{q}_3^{(D)} - k_{12}^{(2)}\, \mathbf{q}_1^{(D)} + k_{23}^{(2)}\, \mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \left(-\dot{B}\sin C + \dot{A}\sin B\cos C\right)\mathbf{q}_1^{(D)} - \\ &\qquad -\left(\dot{B}\cos C + \dot{A}\sin B\sin C\right)\mathbf{q}_1^{(D)} + k_{31}^{(2)}\, \mathbf{q}_1^{(D)} - k_{23}^{(2)}\, \mathbf{q}_2^{(D)} \end{aligned} \tag{23.9}$$

Um die Koeffizienten $k_i^{\,j}$ zu bestimmen, wird zunächst die Variation des transversalen Richtungsvektors betrachtet:

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\dot{u}\, \mathbf{r}_0 - \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \sin u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \cos u \quad . \tag{23.10}$$

Werden hier die allgemeinen Variationsformeln (23.8) eingesetzt, folgt

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\mathbf{r}_0\left(\dot{u} + k_{12}\right) + \mathbf{c}_0\left(k_{13}\sin u + k_{23}\cos u\right) \quad .$$

Im mitgeführten Bahnsystem (*Leibniz*-System) hat der transversale Richtungsvektor nach dem System (4.319) die Variation

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = -\dot{\zeta}\, \mathbf{r}_0 + \dot{\eta}\, \mathbf{c}_0 \quad .$$

Da für den (*Hansen*schen) Bahnwinkel ζ die Variation, etwa mit den Formeln (4.257) und (4.259), wobei jetzt aktuell $C = \sigma$ gesetzt wird als *Hansen*winkel des aufsteigenden Knotens

$$\dot{\zeta} \;=\; \dot{u} + \dot{\sigma}$$

gilt, folgt

$$k_{12} \;=\; \dot{\sigma} \quad . \tag{23.11}$$

Ferner ist mit den *Frenet*schen Formeln des mitbewegten Bahnsystems[1] (*Leibniz* Systems)

$$\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} = \dot{\mathbf{c}}_0 \;=\; -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_0 \;=\; -k_{13}\,\mathbf{q}_1^{(D)} - k_{23}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \;=\; \dot{\eta}\;\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u - \dot{\eta}\;\mathbf{q}_2^{(D)} \cos u \;, \tag{23.12}$$

somit

$$k_{13} \;=\; -\dot{\eta} \sin u \quad , \quad k_{23} \;=\; \dot{\eta} \cos u \quad . \tag{23.13}$$

Die Variationsformeln der Eigenbewegung des knotenbezogenen Bahnsystems lauten daher

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \;&=\; \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_2^{(D)} - \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \sin u \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \;&=\; -\dot{\sigma}\,\mathbf{q}_1^{(D)} + \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \cos u \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} \;&=\; \dot{\eta}\,\mathbf{q}_1^{(D)} \sin u - \dot{\eta}\;\mathbf{q}_2^{(D)} \cos u \quad . \end{aligned} \tag{23.14}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor („Drehvektor“, „*Darboux*scher Vektor“) dieses Systems

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} = D^{j}_{q^{(D)}}\,\mathbf{q}_j^{(D)} \tag{23.15}$$

mit der Bedingung

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(D)} = \mathbf{D}_{q^{(D)}} \times \mathbf{q}_j^{(D)} \qquad (j = 1,2,3) \tag{23.16}$$

genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} \;&=\; D_{q^{(D)}3}\,\mathbf{q}_2^{(D)} - D_{q^{(D)}2}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} \;&=\; -D_{q^{(D)}3}\,\mathbf{q}_1^{(D)} + D_{q^{(D)}1}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \\ \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} \;&=\; D_{q^{(D)}2}\,\mathbf{q}_1^{(D)} - D_{q^{(D)}1}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \quad . \end{aligned}$$

Vergleich mit den Variationsformeln (23.14) ergibt die Komponenten (s.a. (8.509))

$$D_{q^{(D)}3} = \dot{\sigma} \;,\; D_{q^{(D)}2} = \dot{\eta} \sin u \;,\; D_{q^{(D)}1} = \dot{\eta} \cos u \quad . \tag{23.17}$$

Der absolute Eigenbewegungsvektor des knotenbezogenen Bahnsystems lautet daher

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} \;=\; \dot{\eta}\left(\mathbf{q}_1^{(D)} \cos u + \mathbf{q}_2^{(D)} \sin u \right) + \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_3^{(D)} \quad . \tag{23.18}$$

Mit Formel (23.1) lautet diese Beziehung bei Bezug auf das *Leibniz*-System auch (es ist nach (23.3) $\mathbf{q}_3^{(D)} = \mathbf{c}_0$)

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}} \;=\; \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\sigma}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{23.19}$$

In Bezug auf das bewegungsbezogene *Hansen*-System hat der **relative Eigenbewegungsvektor** des Knotensystems mit Formel (4.329) $\left(\mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 \right)$ die interessante Darstellung

---

[1] Siehe die Formeln (4.318) in Abschnitt 4.4.3 (Band II)

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}q^{(I)}} = \mathbf{D}_{q^{(D)}} - \mathbf{D}_{q^{(I)}} = \dot{\sigma}\,\mathbf{c}_0 \tag{23.20}$$

sowie wegen Formel (4.320) $\left(\mathbf{D}_{q^{(L)}} = \dot{\eta}\,\mathbf{r}_0 + \dot{\zeta}\mathbf{c}_0\right)$ zum mitgeführten Bahnsystem (*Leibniz*-System)

$$\mathbf{D}_{q^{(D)}q^{(L)}} = \mathbf{D}_{q^{(D)}} - \mathbf{D}_{q^{(L)}} = \left(\dot{\sigma} - \dot{\zeta}\right)\mathbf{c}_0 = -\dot{u}\,\mathbf{c}_0 \quad . \tag{23.21}$$

Der relative Eigenbewegungsvektor des Knotensystems in Bezug auf das *Leibniz*system ist somit in beiden Fällen zu einem Pol der Bahn gerichtet, jedoch mit gegensätzlicher Orientierung.

23.1.2 Bezug des knotenbezogenen Bahnsystems zu anderen Bahnsystemen

In Ergänzung zu den in Abschnitt 8.14 (Band II) hergeleiteten Beziehungen des Knotensystems werden in diesem Abschnitt die Beziehungen zu einigen anderen Systemen grundsätzlich zusammengestellt.

1. Knotensystem und *Leibniz*system

Der Bezug zwischen Knoten- und *Leibniz*system wird durch Drehung um das Argument der Breite in der Bahnebene hergestellt. Mit den Formeln des vorhergehenden Abschnitts wird

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1^{(D)}\cos u + \mathbf{q}_2^{(D)}\sin u \\
\mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1^{(D)}\sin u + \mathbf{q}_2^{(D)}\cos u \\
\mathbf{c}_0 &= \mathbf{q}_3^{(D)} \\
\dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\cos u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\sin u + \dot{u}\,\mathbf{q}_0 \\
\dot{\mathbf{q}}_0 &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\sin u + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos u - \dot{u}\,\mathbf{r}_0 \\
\dot{\mathbf{c}}_0 &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)}
\end{aligned} \tag{23.22}$$

Umkehrung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(D)} &= \mathbf{r}_0\cos u - \mathbf{q}_0\sin u \\
\mathbf{q}_2^{(D)} &= \mathbf{r}_0\sin u + \mathbf{q}_0\cos u \\
\mathbf{q}_3^{(D)} &= \mathbf{c}_0 \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \dot{\mathbf{r}}_0\cos u - \dot{\mathbf{q}}_0\sin u - \dot{u}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= \dot{\mathbf{r}}_0\sin u + \dot{\mathbf{q}}_0\cos u + \dot{u}\,\mathbf{q}_1^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\mathbf{c}}_0
\end{aligned} \tag{23.23}$$

2. Knotensystem und *Hansen*system

Das Knotensystem und das *Hansen*system sind Bahnsysteme, die fest in der (momentanen) Bahnebene liegen. Sie werden durch Drehung um die (auf den Ursprung O des *Hansen*systems bezogene) Länge in der Bahn σ des Knotens verknüpft[1].

[1] Siehe die Formelsysteme (8.496) – (8.499) in Band II, Abschnitt 8.14

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(I)} &= \mathbf{q}_1^{(D)}\cos\sigma - \mathbf{q}_2^{(D)}\sin\sigma \\
\mathbf{q}_2^{(I)} &= \mathbf{q}_1^{(D)}\sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(D)}\cos\sigma \\
\mathbf{q}_3^{(I)} &= \mathbf{q}_3^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\cos\sigma - \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\sin\sigma - \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_2^{(I)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\sin\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos\sigma + \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_1^{(I)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} \quad .
\end{aligned}
\tag{23.24}
$$

Umkehrung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(D)} &= \mathbf{q}_1^{(I)}\cos\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)}\sin\sigma \\
\mathbf{q}_2^{(D)} &= -\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\sigma + \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\sigma \\
\mathbf{q}_3^{(D)} &= \mathbf{q}_3^{(I)} \\
\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)} &= \dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\cos\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\sin\sigma + \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_2^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(D)} &= -\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)}\sin\sigma + \dot{\mathbf{q}}_2^{(I)}\cos\sigma - \dot{\sigma}\,\mathbf{q}_1^{(D)} \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(D)} &= \dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} \quad .
\end{aligned}
\tag{23.25}
$$

3. Knotensystem und Frühlingspunkt-bezogenes Äquatorsystem

Der Bezug des Knotensystems zum Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem, das in der Satellitenbahnmechanik meistens als Basissystem verwendet wird, erfolgt durch Drehung der Bahnebene um den Knotenvektor $\mathbf{q}_1^{(D)} = \mathbf{k}_1$ mit der Inklination i (=C) als Drehwinkel und anschließend durch Drehung um die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω (=A) in den Frühlingspunkt Υ als Anfangspunkt des Äquatorsystems[1]. Das Äquatorsystem habe die orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{p}_i \ (i = 1,2,3)$. Dann lauten die Umrechnungen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1^{(D)} &= \mathbf{p}_1\cos\Omega + \mathbf{p}_2\sin\Omega \\
\mathbf{q}_2^{(D)} &= -\mathbf{p}_1\cos i\sin\Omega + \mathbf{p}_2\cos i\cos\Omega + \mathbf{p}_3\sin i \\
\mathbf{q}_3^{(D)} &= \mathbf{p}_1\sin i\sin\Omega - \mathbf{p}_2\sin i\cos\Omega + \mathbf{p}_3\cos i
\end{aligned}
\tag{23.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= \dot{\Omega}\left(-\mathbf{p}_1\sin\Omega + \mathbf{p}_2\cos\Omega\right) + \dot{\mathbf{p}}_1\cos\Omega + \dot{\mathbf{p}}_2\sin\Omega \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\Omega}\cos i\left(-\mathbf{p}_1\cos\Omega - \mathbf{p}_2\sin\Omega\right) + (i)^{\cdot}\left(\mathbf{p}_1\sin i\sin\Omega - \mathbf{p}_2\sin i\cos\Omega + \mathbf{p}_3\cos i\right) - \\
&\quad - \dot{\mathbf{p}}_1\cos i\sin\Omega + \dot{\mathbf{p}}_2\cos i\cos\Omega + \dot{\mathbf{p}}_3\sin i \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\Omega}\sin i\left(\mathbf{p}_1\cos\Omega + \mathbf{p}_2\sin\Omega\right) + (i)^{\cdot}\left(\mathbf{p}_1\cos i\sin\Omega - \mathbf{p}_2\cos i\cos\Omega - \mathbf{p}_3\sin i\right) + \\
&\quad + \dot{\mathbf{p}}_1\sin i\sin\Omega - \dot{\mathbf{p}}_2\sin i\cos\Omega + \dot{\mathbf{p}}_3\cos i
\end{aligned}
\tag{23.27}
$$

Umkehrung

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{q}_1^{(D)}\cos\Omega - \mathbf{q}_2^{(D)}\cos i\sin\Omega + \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\sin\Omega \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1^{(D)}\sin\Omega + \mathbf{q}_2^{(D)}\cos i\cos\Omega - \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\cos\Omega \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{q}_2^{(D)}\sin i + \mathbf{q}_3^{(D)}\cos i
\end{aligned}
\tag{23.28}
$$

[1] siehe in Abschnitt 8.14.2.1 und Bild 8-21, Band II,

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \dot{\Omega}\left(-\mathbf{q}_1^{(D)}\sin\Omega - \mathbf{q}_2^{(D)}\cos i\cos\Omega + \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\cos\Omega\right) + (i)^{\cdot}\sin\Omega\left(\mathbf{q}_2^{(D)}\sin i + \mathbf{q}_3^{(D)}\cos i\right) +$$
$$+\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\cos\Omega - \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos i\sin\Omega + \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)}\sin i\sin\Omega$$
$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \dot{\Omega}\left(\mathbf{q}_1^{(D)}\cos\Omega - \mathbf{q}_2^{(D)}\cos i\sin\Omega + \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\sin\Omega\right) - (i)^{\cdot}\cos\Omega\left(\mathbf{q}_2^{(D)}\sin i + \mathbf{q}_3^{(D)}\cos i\right) + \quad (23.29)$$
$$+\dot{\mathbf{q}}_1^{(D)}\sin\Omega + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos i\cos\Omega - \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)}\sin i\cos\Omega$$
$$\dot{\mathbf{p}}_3 = (i)^{\cdot}\left(\mathbf{q}_2^{(D)}\cos i - \mathbf{q}_3^{(D)}\sin i\right) + \dot{\mathbf{q}}_2^{(D)}\cos i - \dot{\mathbf{q}}_3^{(D)}\sin i \quad .$$

Ein Ort S auf der Bahnebene hat vom Knoten als Abstand das Argument der Breite *u*. Im Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem sind seine Winkelkoordinaten die Rektaszension α und die Deklination δ. Nach Bild 23-3 gelten die Beziehungen[1]

$$\cos(\alpha-\Omega)\cos\delta = \cos u$$
$$\sin(\alpha-\Omega)\cos\delta = \sin u\cos i \quad (23.30)$$
$$\sin\delta = \sin u\sin i \quad .$$

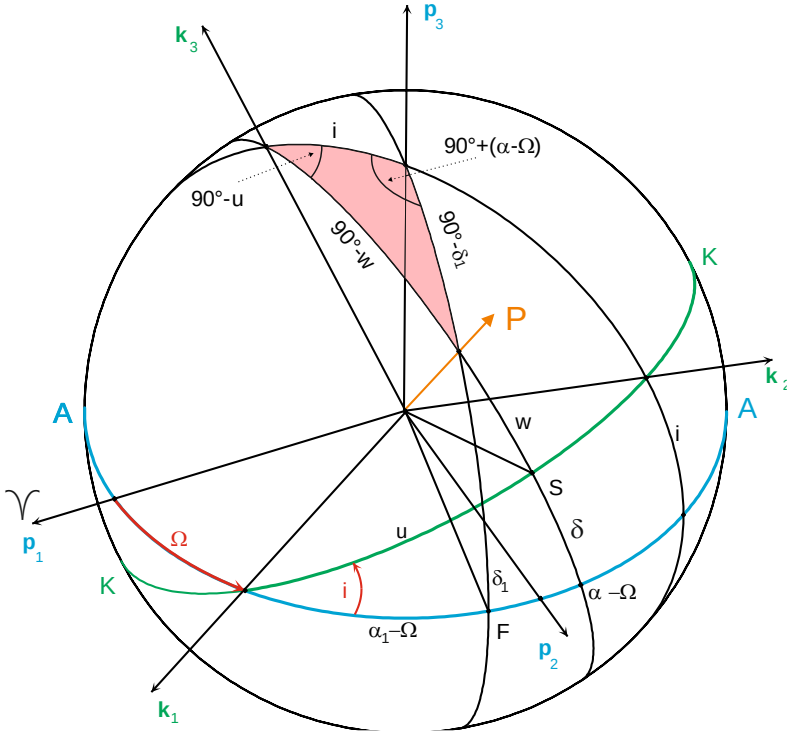


Bild 23-3: Bezug des $\mathbf{k}_j$ – Knotensystems (grüne Basisebene K-K, „Bahnebene“) auf das $\mathbf{p}_i$ – Äquator-System (blaue Basisebene A-A, „Äquator“) mit den *Euler*winkel Ω Rektaszension des aufsteigenden Knotens) und *i* („Inklination“). Eine Sichtrichtung P hat im $\mathbf{p}_i$ – System die Richtungswinkel α_1, bezogen auf $\mathbf{p}_1$, und δ_1 (Deklination), im $\mathbf{k}_j$ – System die Richtungswinkel *u* (Argument der Breite), bezogen auf $\mathbf{q}_1$, und *w* (Breite). Die Umrechnung dieser Winkel erfolgt im „Poldreieck“ P, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{k}_3$.

Die zugehörigen differentiellen Beziehungen sind

---

[1] vgl. auch Abschnitt 6.3.3 (Band II); $\alpha_N = \mathrm{sgn}(\cos i)(\alpha-\Omega)$ wird als die knotenbezogene Rektaszension bezeichnet

$$\begin{aligned}\left(\dot\alpha-\dot\Omega\right)\cos\delta &= \dot u\left[\cos i\cos u\cos\left(\alpha-\Omega\right)+\sin u\sin\left(\alpha-\Omega\right)\right]-(i)^{\cdot}\sin u\sin i\,\cos\left(\alpha-\Omega\right)\\ \dot\delta\cos\delta &= \dot u\cos u\sin i+(i)^{\cdot}\sin u\cos i\end{aligned} \tag{23.31}$$

oder auch

$$\begin{aligned}\dot\alpha-\dot\Omega &= \frac{\dot u\cos i-(i)^{\cdot}\sin i\sin u\cos u}{\cos^2\delta}\\ \dot\delta &= \dot u\left[\cos u\sin i\cos\delta+\left(-\cos i\cos u\sin\left(\alpha-\Omega\right)+\sin u\cos\left(\alpha-\Omega\right)\right)\sin\delta\right]+\\ &\quad+(i)^{\cdot}\sin\left(\alpha-\Omega\right)\ .\end{aligned} \tag{23.32}$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned}\dot u &= \left(\dot\alpha-\dot\Omega\right)\left[\cos i\cos\left(\alpha-\Omega\right)\cos u+\sin\left(\alpha-\Omega\right)\sin u\right]+\\ &\quad+\dot\delta\left\{\left[-\sin\left(\alpha-\Omega\right)\sin\delta\cos i+\cos\delta\sin i\right]\cos u+\cos\left(\alpha-\Omega\right)\sin\delta\sin u\right\}\ .\end{aligned} \tag{23.33}$$

Ein Ort P außerhalb der Bahnebene habe im Knotensystem die Koordinaten (u,w), im Äquatorsystem (α_1,δ_1). Die Beziehungen sind

$$\begin{aligned}\sin u\cos w &= \sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos\delta_1\cos i+\sin\delta_1\sin i\\ \cos u\cos w &= \cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos\delta_1\\ \sin w &= -\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos\delta_1\sin i+\sin\delta_1\cos i\end{aligned} \tag{23.34}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos\delta_1 &= \cos u\cos w\\ \sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos\delta_1 &= \sin u\cos w\cos i-\sin w\sin i\\ \sin\delta_1 &= \sin u\cos w\sin i\ +\sin w\cos i\ .\end{aligned} \tag{23.35}$$

Die zugehörenden differentiellen Beziehungen sind

$$\begin{aligned}\left(\dot\alpha_1-\dot\Omega\right)\cos\delta_1 &= \dot u\cos w\left[\cos i\cos u\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)+\sin u\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\right]-\\ &\quad-\dot w\left\{\left[\sin u\sin w\cos i+\cos w\sin i\right]\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)-\cos u\sin w\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\right\}-\\ &\quad-(i)^{\cdot}\sin\delta_1\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\end{aligned} \tag{23.36}$$

$$\begin{aligned}\dot\delta_1 &= \dot u\ \cos w\left\{\cos u\sin i\cos\delta_1+\left[-\cos i\cos u\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)+\sin u\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\right]\sin\delta_1\right\}+\\ &\quad+\dot w\left\{\left[-\sin u\sin w\sin i+\cos w\cos i\right]\cos\delta_1+\right.\\ &\quad\left.+\left[\left(\sin u\sin w\cos i+\cos w\sin i\right)\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)+\cos u\sin w\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\right]\sin\delta_1\right\}+\\ &\quad+(i)^{\cdot}\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\end{aligned} \tag{23.37}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned}\dot u\cos w &= \left(\dot\alpha_1-\dot\Omega\right)\cos\delta_1\left[\cos i\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos u+\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin u\right]+\\ &\quad+\dot\delta_1\left\{\left[-\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\cos i+\cos\delta_1\sin i\right]\cos u+\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\sin u\right\}+\\ &\quad+(i)^{\cdot}\sin w\cos u\end{aligned} \tag{23.38}$$

$$\begin{aligned}\dot{w} = &\left(\dot{\alpha}_1 - \dot{\Omega}\right)\cos\delta_1\left\{-\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin i\cos w + \right.\\ &\left. +\left[-\cos i\cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin u + \sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\cos u\right]\sin w\right\} + \\ &+\dot{\delta}_1\left\{\left[\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\sin i + \cos\delta_1\cos i\right]\cos w - \right.\\ &\left. -\left[\left(-\sin\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\cos i + \cos\delta_1\sin i\right)\sin u - \cos\left(\alpha_1-\Omega\right)\sin\delta_1\cos u\right]\sin w\right\} - \\ &+(i)^{\cdot}\sin u \quad .\end{aligned} \tag{23.39}$$

23.2 Das Argument der Breite als Bahnwinkel

23.2.1 Darstellung des Argumentes der Breite

Das Argument der Breite wird formal auf ein Perizentrum mit Hilfe der wahren Anomalie υ und auf den Knoten mit dem Argument des Perizentrums ω bezogen

$$u = \omega + \upsilon \quad . \tag{23.40}$$

Im Rahmen einer *Kepler*bewegung kann die wahre Anomalie durch die mittlere Anomalie mit einer Reihenentwicklung des Zweikörperproblems, wie in Abschnitt 22.2.2 hergeleitet wird, dargestellt werden. Mit dem mittleren Argument des Perizentrums $\bar{\omega}_0$ zu einem Anfangszeitpunkt t_0, seiner säkularen Variation $\dot{\omega}_s$ und der Zusammenfassung seiner periodischen Variationen in dem Term $\delta\omega\left[t,t_0\right]$ ergibt sich zusammen mit der Mittelpunktsgleichung für die Entwicklung der wahren Anomalie im Fall einer (hier allein betrachteten) elliptischen Bewegung der Ausdruck

$$\begin{aligned}u = u(t) = \upsilon(t) + \omega(t) = &\bar{\omega}(t_0) + \dot{\omega}_s(t_0)(t-t_0) + \delta\omega\left[t,t_0\right] + \\ &+M(t) + \left(2e - \frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin M + \\ &+\left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6 - \cdots\right)\sin 2M + \\ &+\left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{192}e^5 + \frac{95}{512}e^7 - \cdots\right)\sin 3M + \\ &+\left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6 + \cdots\right)\sin 4M + \\ &+\left(\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7 + \cdots\right)\sin 5M + \\ &+\left(\frac{1223}{960}e^6 - \cdots\right)\sin 6M + \\ &+\left(\frac{47273}{32256}e^7 - \cdots\right)\sin 7M + \cdots \quad .\end{aligned} \tag{23.41}$$

Wie in Formel (22.32) dargestellt, kann dieser Ausdruck in der Form

$$\begin{aligned}u = \bar{u} + \delta u = u(t) = &\overline{M_0}(t_0) + \bar{\omega}(t_0) + \left[\overline{n_{K0}} + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{n}_{Ks0}(t-t_0)\right](t-t_0) + \\ &+\delta M_0\left[t,t_0\right] + \delta n_K\left[t,t_0\right](t-t_0) + \Delta\upsilon_M(t)\end{aligned} \tag{23.42}$$

zusammengefasst werden. Hier sind

$$\bar{u}_0 = \bar{u}(t_0) := \overline{M_0}(t_0) + \bar{\omega}(t_0) = \overline{M_{0\,0}} + \bar{\omega}_0 \tag{23.43}$$

das mittlere Argument der Breite zur Epoche t_0 und

$$\bar{u} = \bar{u}(t) = \bar{u}(t_0) + \left[\overline{n_a}(t_0) + \dot{\omega}_{s0}\right](t - t_0) + \dot{n}_{Ks0}(t - t_0)^2 \tag{23.44}$$

das mittlere Argument der Breite zu einem beliebigen Zeitpunkt *t*. Die periodischen Anteile des Argumentes der Breite werden zusammengefasst in dem Ausdruck

$$\delta u := \delta u[t, t_0] = \delta M_0[t, t_0] + \delta n_K[t, t_0](t - t_0) + \Delta\upsilon_M(t) \quad . \tag{23.45}$$

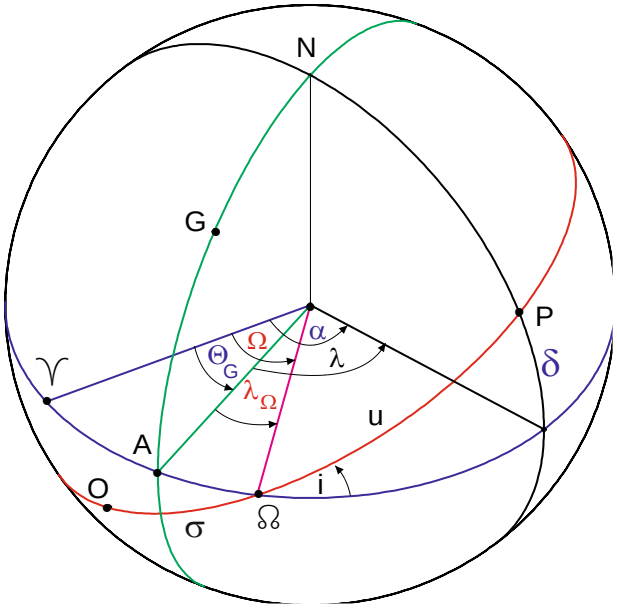


Bild 23-4: Das Argument der Breite *u* als Bahnwinkel bei Bezug der Bewegung auf den aufsteigenden Knoten ☊. $P \leftrightarrow$ Ort des Satelliten in seiner Bahn (mit Deklination bei Bezug auf ein zentrisches Äquatorsystem), Bogen $GG_0 \leftrightarrow$ 0-Meridian (auf Erde durch Greenwich *G*), Θ_G Sternzeit des Nullmeridians, Bezug auf das Frühlingspunkt-orientierte Äquatorsystem durch die Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens (mit $\Omega = A$) und Inklination $i\,(= B)$

23.2.2 Die drakonitische mittlere Bewegung in der Bahnmechanik für Erdsatelliten

In dem Ausdruck (23.42) können die säkularen Variationen als mittlere drakonitische mittlere Bewegung

$$\overline{n_D} := \overline{n_D}[t, t_0] = \overline{n_{K\,0}} + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \dot{n}_{Ks0}(t - t_0) \tag{23.46}$$

zum Zeitpunkt *t* bezogen auf den Anfangszeitpunkt t_0 zusammengefasst werden. Mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.27) lautet dieser Ausdruck (in vereinfachter Schreibweise)

$$\overline{n_D} = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \dot{n}_{Ks}(t - t_0) \quad . \tag{23.47}$$

Bei langfristigen Untersuchungen im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird die Variation der *Kepler*schen mittleren Bewegung vernachlässigt und es wird die (säkulare) mittlere drakonitische mittlere Bewegung verwendet

$$\overline{n_D} = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s \qquad \langle \dot{n}_{Ks} = 0 \quad . \tag{23.48}$$

Werden hier für einen Näherungsausdruck erster Ordnung die entsprechenden säkularen Variationen aus Abschnitt 20.2.1 (Band III) eingesetzt, wird

$$\overline{n_{D\,0}} = \overline{n_{K\,0}} \left\{ 1 - \frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2 \left(1-\overline{e}_o^2\right)^2} \left[1 + \sqrt{1-\overline{e}_0^2} - \left(5 + 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) \cos^2 \overline{i}_0 \right] \right\} + O\left(\overline{n_{K\,0}}\, J_2^2\right) \quad . \tag{23.49}$$

Sollen zusätzlich säkulare Einflüsse $\dot{n}_{ds}$ auf die Bahnelemente berücksichtigt werden, etwa durch die Einwirkung des Luftwiderstandes auf die große Bahnhalbachse der Bahn, erhält man analog zur Formel (22.42) mit der Näherung[1]

$$\dot{n}_{Ds} \approx \dot{n}_{Ks} = -\frac{3}{2} \frac{\overline{n_{K\,0}}}{\overline{a}_0} \dot{a}_s \tag{23.50}$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} \overline{n_D} = \overline{n_{K\,0}} \left\{ 1 - \frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2 \left(1-\overline{e}_o^2\right)^2} \left[1 + \sqrt{1-\overline{e}_0^2} - \left(5 + 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) \cos^2 \overline{i}_0 \right] - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}_s}{\overline{a}_0} \left(t - t_0\right) \right\} + \\ + O\left(\overline{n_{K\,0}}\, J_2^2\right) + O\left(\overline{n_{K\,0}}\, \dot{a}_s^2\right) \; . \end{aligned} \tag{23.51}$$

23.2.3 Zeit und Argument der Breite

Vorgegeben seien neben den Bahnparametern mit Bezug auf Anfangsbahnelemente zu einer Epoche t_0 ein Argument der Breite $u = u(t)$. Gesucht sei der entsprechende Zeitpunkt *t*. Die Bearbeitung dieser Aufgabe wird analog Abschnitt 22.2.4 durchgeführt. Die Ergebnisse lauten im Fall der drakonitischen Bewegung:

1. Näherungsweise Berechnung ohne säkulare Beeinflussung der mittleren Bewegung. Nach Formel (23.44) folgt

$$t = t_0 + \frac{u - \overline{M_{0\,0}}}{\overline{n_{d\,0}}} \quad . \tag{23.52}$$

2. Mit Berücksichtigung einer säkularen Variation in der drakonitischen mittleren Bewegung $\dot{n}_{Ds} \approx \dot{n}_{Ks}$ ist

$$t = t_0 + \frac{2\left(u - \overline{M_{0\,0}}\right)}{\overline{n_{D\,0}} + \sqrt{\left(\overline{n_{D\,0}}\right)^2 + 4\dot{n}_{Ks}\left(u - \overline{M_{0\,0}}\right)}} \quad . \tag{23.53}$$

3. Eine iterative Verbesserung kann mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct\left(t^{(\kappa)}\right) \equiv \sin\left[u\left(t^{(\kappa)}\right) - u\left(t_F\right)\right] = 0 \qquad \langle \kappa = 0, 1, 2, \cdots \tag{23.54}$$

gefunden werden, wenn mit dem gegebenen Argument der Breite $u =: u\left(t_F\right)$ der gesuchte Zeitpunkt t_F und als Anfangswert für die Iteration der zuvor gefundene Zeitpunkt $t^{(0)}$ eingesetzt wird.

---

[1] siehe hierzu die entsprechenden Bemerkungen in Abschnitt 22.2.3

BEISPIEL: Eine Erdsatellitenbahn habe zur Epoche 2015, 9, 25/11^h:30^m: 0^s.00, entsprechend der Tageszeit t_0=41400.00 sec, die Anfangsbahnelemente a=8300.000 km, e= 0.2, i=60°.000, Ω=33°.000, ω=221°.000, M_0=125°.000. Zu diesem Zeitpunkt beträgt das Argument der Breite $u_0 = 2°.12$. Der entsprechende Knotendurchgang vor der Epoche würde zur Tageszeit $t_{nod,0} = 41341.957\,\text{sec}$ stattfinden, der erste nach der Epoche zur Tageszeit $t_{nod,1} = 48867.03\,\text{sec}$, entsprechend 13^h:34^m:27^s.03. Dieser Zeitpunkt wurde mit Formel (23.54) gefunden, wobei ein Näherungswert mit Hilfe der *Kepler*schen Umlaufzeit $\overline{P_K} = 7525.374528\,\text{s}$ aus dem ersten Wert t_{n1} errechnet wurde[1]. Die Rechnung wurde mit der a priori Genauigkeit $10^{-3}\,\text{sec}$ durchgeführt. Zur Kontrolle wird das Argument der Breite zum Zeitpunkt $t_{nod,1}$ berechnet: es lautet $u_1 = 0°.00002$. Die erreichte Genauigkeit liegt somit unter $0''.1$. ◄

23.2.4 Die Variationen der *Kepler*bewegung in Bezug auf das Argument der Breite

Im Rahmen der drakonitischen Bewegung werden auch differentielle Beziehungen mit dem Argument der Breite als Bahnwinkel benötigt. In diesem Abschnitt werden die Variationsgleichungen der *Kepler*elemente in Bezug auf das Argument der Breite in erster Ordnung und die zugehörigen Integrationen zusammengestellt. Derartige Entwicklungen werden zum Beispiel bei der Berechnung der oskulierenden drakonitischen Umlaufzeit benötigt[2]. Da diese Formelsysteme von allgemeinerem Interesse sein können, werden sie hier im Zusammenhang mit dem Argument der Breite als Bahnvariable systematisch und umfassend behandelt.

Die Entwicklungen werden hier nur in erster Ordnung des Erdgravitationsfeldes (J_2) durchgeführt. Nach demselben Schema können auch Systeme höherer Ordnung erhalten werden. Die hierzu benötigten Integrale sind in Anhang D (Band V) zusammengestellt. Die Integrationen können auch mit einem geeigneten Formelmanipulator (etwa MAPLE) durchgeführt werden.

Die Variationsgleichungen nach dem Argument der Breite werden in gleicher Weise hergeleitet wie die entsprechenden Variationsgleichungen nach der wahren Anomalie[3].

In allen Fällen werden die Formeln um oskulierende Anfangsparameter entwickelt. Dadurch unterscheiden sich diese Systeme von den klassischen Satellitentheorien von *D. Brouwer* und *Y. Kozai* u.a., welche ihre Entwicklungen auf mittleren Bahnparametern aufbauen. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, dass diese klassischen Theorien allgemeingültig durch parallele Integrationen sind, während die hier durchgeführten Formeln als Taylorentwicklungen um einen Anfangspunkt nur für einen beschränkten Zeitraum (einige Umläufe) Gültigkeit haben. Dadurch bleiben auch die langfristig wirkenden periodischen Variationen verborgen[4].

---

1 ein verbesserter Näherungswert kann mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit erhalten werden (Abschnitt 23.3.2)

2 siehe in Abschnitt 23.3.7 ab Seite 193 etwa nach E. ROTH [1981]

3 vgl. hierzu bei H. G. L. KRAUSE [1956a], sowie in Abschnitt 22.4.5

4 Dieser Sachverhalt wurde bereits in den Anmerkungen zu den von *H. G. L. Krause* bis 1956 gefundenen Lösungen kritisch angemerkt (siehe in Abschnitt 2.9.4, Band I)

23.2.4.1 Die Variation der Zeit nach dem Argument der Breite

In allen Fällen geht die Untersuchung von der Variationsgleichung des Argumentes der Breite bezüglich der Zeit aus. Sie lautet in der *Gauß*schen Form[1]

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{G}{r^2} - \frac{r\cos i \sin u}{G \sin i} b_N = \frac{G}{r^2}\left(1 - \frac{r^3 \cos i \sin u}{G^2 \sin i} b_N\right) . \tag{23.55}$$

Der Bezug der Zeit auf das Argument der Breite wird nach Linearisierung in erster Ordnung durch die Variationsgleichung

$$\frac{dt}{du} = \frac{r^2}{G}\left(1 + \frac{r^3 \cos i \sin u}{G^2 \sin i} b_N + \cdots\right) \tag{23.56}$$

hergestellt. Die normale Beschleunigung b_N lautet im Erdschwerefeld in erster Ordnung[2]

$$b_N \approx b_{GN0} = -\frac{3\mu J_2 R_E^2 \sin i \cos i \sin u}{r^3} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.57}$$

Somit lautet in diesem Fall die Variationsgleichung der Zeit abhängig vom Argument der Breite in erster Ordnung[3]

$$\frac{dt}{du} = \frac{r^2}{G} - \frac{3r^2 \mu J_2 R_E^2 \cos^2 i \sin^2 u}{G^3} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.58}$$

Bemerkenswert an diesem Ausdruck ist das Verschwinden der Singularität für äquatoriale Bahnen.

Vorgegeben sei ein Anfangswert u_0 mit zugehörenden *Kepler*elementen und Bahnparametern

$$\begin{aligned} &a_0 := a(u_0)\ ,\ e_0 := e(u_0)\ ,\ p_0 := p(u_0)\ ,\ G_0 := G(u_0)\ , \\ &i_0 := i(u_0)\ ,\ \Omega_0 := \Omega(u_0)\ ,\ \omega_0 := \omega(u_0)\ ,\ r_0 := r(u_0)\ . \end{aligned} \tag{23.59}$$

Um eine (Taylor-) Entwicklung um diese oskulierenden Anfangswerte[4] durchführen zu können, werden die Differenzausdrücke eingeführt

$$\begin{aligned} &\Delta a := a(u) - a(u_0) = a - a_0\ ,\ \Delta e := e(u) - e(u_0) = e - e_0\ , \\ &\Delta p := p(u) - p(u_0) = p - p_0\ ,\ \Delta G := G(u) - G(u_0) = G - G_0\ , \\ &\Delta i := i(u) - i(u_0) = i - i_0\ ,\ \Delta\Omega := \Omega(u) - \Omega(u_0) = \Omega - \Omega_0\ , \\ &\Delta\omega := \omega(u) - \omega(u_0) = \omega - \omega_0\ . \end{aligned} \tag{23.60}$$

Im Rahmen einer (allgemeinen) *Kepler*bewegung gelten die Zuordnungen

$$r = r(u) = \frac{p(u)}{1 + e(u)\cos\left[u - \omega(u)\right]}\ ,\ G = G(u) = \sqrt{\mu\, p(u)} \quad . \tag{23.61}$$

---

1 Nach Formel (11.79), Abschnitt 11.1.5, Band III

2 Nach Abschnitt 17.2.2, Band III

3 Somit nach zweimaliger (!) Linearisierung

4 Da es sich hier um oskulierende Parameter handelt ist die in manchen Arbeiten zu findende Behauptung, es würde sich um „ungestörte“ Parameter handeln, in diesem Zusammenhang unsinnig

Damit wird in erster Ordnung die (Taylor-) Entwicklung nach dem Anfangswert $u_0 = u(t_0)$

$$\frac{dt}{du} = \frac{dt}{du}\bigg|^{(0)} + \frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)} \Delta p + \frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\bigg|^{(0)} \Delta e + \frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial i}\bigg|^{(0)} \Delta i + \frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial \omega}\bigg|^{(0)} \Delta\omega + \cdots \qquad (23.62)$$

gebildet. Hier erhält man wegen (23.58) zunächst mit

$$r_0 = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos(u - \omega_0)} \quad . \qquad (23.63)$$

die sofort integrierbare Differentialgleichung, die aus zwei unabhängigen Teilintegralen besteht

$$\frac{dt}{du}\bigg|^{(0)} = \frac{p_0^2}{G_0\left[1 + e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2} - \frac{3\, p_0^2\, \mu\, J_2\, R_E^2\, \cos^2 i_0\, \sin^2 u}{G_0^3\left[1 + e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2} \quad . \qquad (23.64)$$

Das erste Integral lautet (mit $p_0 = a_0\left(1 - e_0^2\right)$ und $G_0 = \sqrt{\mu\, p_0}$) und unter Verwendung der Integraltafel in Anhang D1 (Band V)

$$\Delta t_1 := \int_{u_0-\omega_0}^{u-\omega_0} \frac{p_0^2}{\sqrt{\mu p_0}\left[1 + e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2}\, du = \sqrt{\frac{a_0^3}{\mu}}\,(M - M_0) \quad . \qquad (23.65)$$

Hier ist *M* die der wahren Anomalie $\upsilon = u - \omega_0$ zugeordnete mittlere Anomalie.

Das zweite Teilintegral lautet

$$\Delta t_2 = -\frac{3\, p_0^2\, \mu\, J_2\, R_E^2\, \cos^2 i_0}{G_0^3} \int_{u_0}^{u} \frac{\sin^2 u}{\left[1 + e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2}\, du \quad . \qquad (23.66)$$

Da $du = d\upsilon$, kann dieses Integral zerlegt werden

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u} \frac{\sin^2 u}{\left[1 + e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2}\, du &= \cos^2\omega_0 \int_{\upsilon_0+\omega_0}^{\upsilon+\omega_0} \frac{d\upsilon}{\left[1 + e_0\cos\upsilon\right]^2} - \\ &- \cos 2\omega_0 \int_{\upsilon_0+\omega_0}^{\upsilon+\omega_0} \frac{\cos^2\upsilon\, d\upsilon}{\left[1 + e_0\cos\upsilon\right]^2} - \frac{\sin 2\omega_0}{2} \int_{\upsilon_0+\omega_0}^{\upsilon+\omega_0} \frac{\sin 2\upsilon\; d\upsilon}{\left[1 + e_0\cos\upsilon\right]^2} \quad . \end{aligned} \qquad (23.67)$$

Entsprechend der Integraltafel D1 (Band V) werde die exzentrische Anomalie *E* eingeführt mit der Zuordnung $\upsilon_0 + \omega_0 \to E_1,\ \upsilon + \omega_0 \to E_2$. Damit lautet die Lösung

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u} \frac{\sin^2 u}{\left[1 + e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2}\, du &= \cos^2\omega_0\, \frac{E_2 - E_1 - e_0\left(\sin E_2 - \sin E_1\right)}{\sqrt{\left(1 - e_0^2\right)^3}} - \\ &- \frac{\cos 2\omega_0}{e_0^2}\left\{\upsilon - \upsilon_0 - \frac{\left(1 - 2e_0^2\right)\left[E_2 - E_1\right] + e_0\left[\sin E_2 - \sin E_1\right]}{\sqrt{\left(1 - e_0^2\right)^3}}\right\} - \\ &- \frac{\sin 2\omega_0}{2e_0^2}\left\{\ln\left(1 + e_0\cos\upsilon\right) - \ln\left(1 + e_0\cos\upsilon_0\right) + \left[\frac{1}{1 + e_0\cos\upsilon} - \frac{1}{1 + e_0\cos\upsilon_0}\right]\right\} \quad . \end{aligned} \qquad (23.68)$$

Da in einer Theorie erster Ordnung angenommen werden kann, dass

$$\Delta G = O(J_2)\ ,\ \Delta p = O(J_2)\ ,\ \Delta e = O(J_2)\ ,\ \Delta i = O(J_2)\ ,\ \Delta\omega = O(J_2)\ ,\ \cdots \qquad (23.69)$$

können die hier benötigten partiellen Ableitungen in erster Ordnung (im Erdschwerefeld) erhalten werden:

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial G}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{G}\right)}{\partial G}\right|^{(0)} + O(J_2) = -\frac{r^2}{G_0^2} + O(J_2) \tag{23.70}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} + O(J_2) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,\frac{1}{\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2} + O(J_2) \tag{23.71}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} + O(J_2) = -2\sqrt{\frac{p_0^3}{\mu}}\,\frac{\cos(u-\omega_0)}{\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]^3} + O(J_2) \tag{23.72}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} + O(J_2) = -2\sqrt{\frac{p_0^3}{\mu}}\,\frac{e_0\,\sin(u-\omega_0)}{\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]^3} + O(J_2) \tag{23.73}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{r^2}{\sqrt{\mu\, p}}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} + O(J_2) = 0 + O(J_2) \quad . \tag{23.74}$$

Zur Bearbeitung der Variationsgleichung (23.62) fehlen noch die Differenzen $\Delta p, \Delta e, \Delta\omega$, während wegen (23.74) Δi in einer Rechnung erster Ordnung nicht jedoch bei höherer Ordnung benötigt wird. Werden die oskulierenden Anfangswerte p_0, e_0, i_0, ω_0 als Integrationskonstante aufgefasst, können die folgenden Integrale formuliert werden:

$$\begin{aligned}
p = p(u) &= p_0 + \Delta p &&= p_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{dp}{du}\,du \\
e = e(u) &= e_0 + \Delta e &&= e_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{de}{du}\,du \\
i = i(u) &= i_0 + \Delta i &&= i_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{di}{du}\,du \\
\omega = \omega(u) &= \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{d\omega}{du}\,du \quad .
\end{aligned} \tag{23.75}$$

Die hier benötigten Variationsgleichungen in Bezug auf das Argument der Breite werden aus den entsprechenden *Gauß*schen Variationsgleichungen nach der Zeit aus Abschnitt 11.1.5

(Band III) hergeleitet. Bevor die Variationsgleichung (23.62) weiter bearbeitet werden kann, müssen die Integrale (23.75) gelöst sein, was in den folgenden Abschnitten durchgeführt wird. Die Gesamtintegration wird im vorliegenden Bericht nur für den Fall der oskulierenden drakonitischen Umlaufzeit in Abschnitt 23.3.7 ab Seite 191 hergeleitet. Falls jedoch die Integrale

$$\int_{u_0}^{u}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\Delta p\right]du\,,\int_{u_0}^{u}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\Delta e\right]du\,,\int_{u_0}^{u}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial \omega}\Delta \omega\right]du \tag{23.76}$$

nicht über einen ganzen Umlauf, sondern nur über ein Teilintervall benötigt werden, können die Integrationen mit den allgemeinen Integralen in Anhang D1 (Band V) erhalten werden. Hier wird wegen (23.74) das Integral erster Ordnung mit der partiellen Differentiation nach der Inklination nicht benötigt.

23.2.4.2 Die Variation des Flächenparameters nach dem Argument der Breite

Für den Flächenparameter G wird mit Hilfe der Variationsgleichung[1] (11.68) und (23.56) in erster Ordnung

$$\frac{dG}{du}=\dot{G}\frac{dt}{du}=r\,b_T\frac{dt}{du}=\frac{r^3}{G}b_T+O\left(J_2^2\right) \tag{23.77}$$

erhalten. Mit der tangentialen Beschleunigung im Erdschwerefeld[2] wird in erster Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{dG}{du}&=-\frac{3\mu J_2 R_E^2}{2rG}\sin^2 i\,\sin 2u+O\left(J_2^2\right)=\\&=-\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{2G^3}\left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]\sin^2 i\,\sin 2u+O\left(J_2^2\right).\end{aligned} \tag{23.78}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0=u\left(t_0\right)$ gibt

$$\frac{dG}{du}=\left.\frac{dG}{du}\right|^{(0)}+\left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial G}\right|^{(0)}\Delta G+\left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)}\Delta e+\left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)}\Delta i+\left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)}\Delta\omega\cdots\ . \tag{23.79}$$

Im Einzelnen gelten die Beziehungen:

$$\left.\frac{dG}{du}\right|^{(0)}=-\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{2G_0^3}\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\sin 2u+O\left(J_2^2\right)\ . \tag{23.80}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dG}{du}\right)}{\partial G}\right|^{(0)}=\frac{9\mu^2 J_2 R_E^2}{2G_0^4}\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\sin 2u \tag{23.81}$$

---

[1] In Abschnitt 11.1.5 (Band III)

[2] nach Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = -\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{2G_0^3}\sin^2 i_0 \cos\left(u-\omega_0\right)\sin 2u \tag{23.82}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = -\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{G_0^3}\sin 2i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\sin 2u \tag{23.83}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} = -\frac{3e_0\mu^2 J_2 R_E^2}{2G_0^3}\sin^2 i_0 \sin\left(u-\omega_0\right)\sin 2u \quad . \tag{23.84}$$

Alle diese Ausdrücke sind von erster Ordnung wie auch die Differenzen Δp usw.. Aus diesem Grund können in allen Fällen die Ausdrücke höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial G}\right|^{(0)} \Delta G = O\left(J_2^2\right) \;,\; \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} \Delta e = O\left(J_2^2\right) \;,\cdots . \tag{23.85}$$

Somit lautet die Variationsgleichung erster Ordnung für den Flächenparameter in Bezug auf das Argument der Breite

$$\frac{dG}{du} = \left.\frac{dG}{du}\right|^{(0)} + O\left(J_2^2\right) = -\frac{3\mu^2 J_2 R_E^2}{2G_0^3}\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]\sin 2u + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.86}$$

Zur Integration können die in Anhang D1 (Band V) zusammengestellten unbestimmten Integrale verwendet werden. Dies ergibt

$$\begin{aligned} G = G(u) = G_0 - \frac{3\mu^2 J_2 R_E^2 \sin^2 i_0}{4G_0^3}\Big\{&\cos\left(2u_0\right)-\cos\left(2u\right)+ \\ &+e_0\cos\omega_0\left[\frac{1}{3}\cos\left(3u_0\right)+\cos\left(u_0\right)-\frac{1}{3}\cos\left(3u\right)+\cos\left(u\right)\right]+ \\ &+e_0\sin\omega_0\left[-\sin\left(u_0\right)+\frac{1}{3}\sin\left(3u_0\right)+\sin\left(u_0\right)-\frac{1}{3}\sin\left(3u\right)\right]\Big\}+O\left(J_2^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{23.87}$$

23.2.4.3 Die Variation des Kegelschnittparameters nach dem Argument der Breite

Für den Kegelschnittparameter p wird mit Hilfe der Variationsgleichung (23.58) in erster Ordnung

$$\frac{dp}{du} = \dot{p}\frac{dt}{du} = \frac{2r^2}{\mu}b_T + O\left(J_2^2\right) \tag{23.88}$$

erhalten. Mit der tangentialen Beschleunigung im Erdschwerefeld (nach Abschnitt 17.2.2, Band III) wird in erster Ordnung

$$\frac{dp}{du} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{r} \sin^2 i \, \sin 2u + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.89}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u(t_0)$ gibt

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} = & -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0} \sin^2 i_0 \left[1 - e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right]^2 \sin 2u + \\ & + \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} \Delta p + \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} \Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} \Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} \Delta\omega \quad . \end{aligned} \tag{23.90}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = \frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2} \sin^2 i_0 \left[1 + e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right] \sin 2u \tag{23.91}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0} \sin^2 i_0 \cos\left(u - \omega_0\right) \sin 2u \tag{23.92}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0} \sin 2i_0 \left[1 + e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right] \sin 2u \tag{23.93}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} = -\frac{3 e_0 J_2 R_E^2}{p_0} \sin 2i_0 \sin\left(u - \omega_0\right) \sin 2u \quad . \tag{23.94}$$

Alle diese Ausdrücke sind von erster Ordnung wie auch die Differenzen Δp usw.. Aus diesem Grund kann in allen Fällen

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{dp}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} \Delta p = O\left(J_2^2\right) \ , \ \cdots \tag{23.95}$$

gesetzt werden und es bleibt in erster Ordnung die Variationsgleichung für den Kegelschnittparameter

$$\frac{dp}{du} = \left.\frac{dp}{du}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0} \sin^2 i_0 \left[1 - e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right]^2 \sin 2u + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.96}$$

Das Integral lautet

$$\begin{aligned} p = p(u) = p_0 - 3 J_2 R_E^2 \frac{\sin^2 i_0}{p_0} \Big\{ & \sin^2 u - \sin^2 u_0 - \frac{2}{3} e_0 \cos\omega_0 \left[\cos^3 u - \cos^3 u_0\right] + \\ & + \frac{2}{3} e_0 \sin\omega_0 \left[\sin^3 u - \sin^3 u_0\right] \Big\} + \ O\left(J_2^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{23.97}$$

23.2.4.4 Die Variation der Exzentrizität nach dem Argument der Breite

Für die Exzentrizität *e* wird mit Hilfe der Variationsgleichung (23.58) in erster Ordnung

$$\frac{de}{du} = \dot{e}\frac{dt}{du} = \frac{r^2}{\mu}\left\{ b_{R2}\sin(u-\omega) + b_T\left[\frac{e\,r}{p} + \left(1+\frac{r}{p}\right)\cos(u-\omega)\right]\right\} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.98}$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[1] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\begin{aligned}\frac{de}{du} = \frac{3J_2R_E^2}{2p^2}\Big\{&\left[1+e\cos(u-\omega)\right]^2\left[3\sin^2 i\,\sin^2 u\sin(u-\omega)-\sin(u-\omega)\right]- \\ &-\sin^2 i\left[1+e\cos(u-\omega)\right]\left[e+2\cos(u-\omega)+e\cos^2(u-\omega)\right]\sin 2(u-\omega)\Big\} + O\left(J_2^2\right) .\end{aligned} \tag{23.99}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u(t_0)$ gibt

$$\frac{de}{du} = \left.\frac{de}{du}\right|^{(0)} + \left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)}\Delta p + \left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)}\Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)}\Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)}\Delta\omega \quad . \tag{23.100}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen werden der Vollständigkeit halber hier zusammengestellt:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = -\frac{3J_2R_E^2}{p_0^3}\Big\{&\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]^2\left[3\sin^2 i_0\,\sin^2 u\sin(u-\omega_0)-\sin(u-\omega_0)\right]- \\ &-\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]\left[e_0+2\cos(u-\omega_0)+e_0\cos^2(u-\omega_0)\right]\sin 2(u-\omega_0)\Big\} + \\ &+O\left(J_2^2\right) .\end{aligned} \tag{23.101}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = \left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\Big\{&2\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]\cos(u-\omega_0)\times \\ &\times\left[3\sin^2 i_0\,\sin^2 u\sin(u-\omega_0)-\sin(u-\omega_0)\right]- \\ &-\sin^2 i_0\cos(u-\omega_0)\left[e_0+2\cos(u-\omega_0)+e_0\cos^2(u-\omega_0)\right]\sin 2(u-\omega_0)- \\ &-\sin^2 i_0\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]\left[1+\cos^2(u-\omega_0)\right]\sin 2(u-\omega_0)\Big\} + O\left(J_2^2\right) .\end{aligned} \tag{23.102}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\Big\{&3\left[1+e_0\cos(u-\omega\ )\right]^2\sin 2i\,\sin^2 u\,\sin(u-\omega_0)- \\ &-\sin 2i\left[1+e\cos(u-\omega)\right]\left[e+2\cos(u-\omega)+e\cos^2(u-\omega)\right]\sin 2(u-\omega)\Big\} + O\left(J_2^2\right) .\end{aligned} \tag{23.103}$$

---

[1] Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial\omega}\right|^{(0)} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\Big\{2e_0\sin(u-\omega)\big[1+e\cos(u-\omega)\big]\cdot$$

$$\cdot\big[3\sin^2 i\,\sin^2 u\sin(u-\omega)-\sin(u-\omega)\big]-$$
$$+\big[1+e_0\cos(u-\omega_0)\big]^2\big[-3\sin^2 i_0\,\sin^2 u\cos(u-\omega_0)+\cos(u-\omega_0)\big]+$$
$$+e\sin^2 i\sin(u-\omega)\big[e+2\cos(u-\omega)+e\cos^2(u-\omega)\big]\sin 2(u-\omega)- \quad . \qquad (23.104)$$
$$-\sin^2 i\big[1+e_0\cos(u-\omega_0)\big]\big[2\sin(u-\omega)+e\sin 2(u-\omega)\big]\sin 2(u-\omega)+$$
$$+2\sin^2 i_0\big[1+e_0\cos(u-\omega_0)\big]\big[e_0+2\cos(u-\omega_0)+e_0\cos^2(u-\omega_0)\big]\cdot$$
$$\cdot\cos 2(u-\omega_0)\Big\}+O\left(J_2^2\right)$$

Da sie alle von erster Ordnung sind, sind die Produkte

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{de}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)}\Delta p = O\left(J_2^2\right)\ ,\ \cdots \qquad (23.105)$$

von zweiter Ordnung. Es bleibt somit in erster Ordnung

$$\frac{de}{du} = \left.\frac{de}{du}\right|^{(0)} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\left\{I_1+\sin^2 i_0\,I_2\right\}+O\left(J_2^2\right) \qquad (23.106)$$

mit den beiden Teilfaktoren

$$I_1 := -\sin(u-\omega_0)-2e_0\cos(u-\omega_0)\sin(u-\omega_0)- \qquad (23.107)$$
$$-e_0^2\cos\,(u-\omega_0)\sin(u-\omega_0)+O\left(J_2^2\right)$$

$$I_2 := 3\sin(u-\omega_0)\sin^2 u+6e_0\cos(u-\omega_0)\sin(u-\omega_0)\sin^2 u+$$
$$+3e_0^2\cos^2(u-\omega_0)\sin(u-\omega_0)\sin^2 u-e_0\sin 2u-3e_0\cos^2(u-\omega_0)\sin 2u- \qquad (23.108)$$
$$-\left(2+e_0^2\right)\cos(u-\omega_0)\sin 2u-e_0^2\cos^3(u-\omega_0)\sin 2u+O\left(J_2^2\right) \quad .$$

Integration ergibt

$$\int_{u_0}^{u} I_1\,du = \cos(u-\omega_0)+e_0\cos^2(u-\omega_0)+\frac{e_0^2}{3}\cos^3(u-\omega_0)- \qquad (23.109)$$
$$-\cos(u_0-\omega_0)+e_0\cos^2(u_0-\omega_0)+\frac{e_0^2}{3}\cos^3(u_0-\omega_0)+O\left(J_2^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{u_0}^{u} I_2\, du = -3\left[\cos(u-\omega_0)-\cos(u_0-\omega_0)\right]+2\sin\omega_0\left[\sin u-\sin u_0\right]+\\
&+\cos^2 u\cos(u-\omega_0)-\cos^2 u_0\ \cos(u_0-\omega_0)+3e_0\cos 2\omega_0\left[\sin^4 u-\sin^4 u_0\right]-\\
&-\frac{3}{4}e_0\sin 2\omega_0\left[\sin 2u-\sin 2u_0\right]+\frac{3}{8}\sin 2\omega_0\left[\sin 4u-\sin 4u_0\right]+\\
&+\frac{e_0^2}{5}\cos\omega_0\left(4\cos^2\omega_0-3\right)\left[\cos^5 u-\cos^5 u_0\right]+\\
&+\frac{e_0^2}{3}\cos\omega_0\left(4-5\cos^2\omega_0\right)\left[\cos^3 u-\cos^3 u_0\right]-\\
&-3e_0^2\sin^2\omega_0\cos\omega_0\left[\cos u-\cos u_0\right]+\\
&+\frac{e_0^2}{5}\sin\omega_0\left(4\cos^2\omega_0-1\right)\left[\sin^5 u-\sin^5 u_0\right]-\\
&-e_0^2\cos^2\omega_0\sin\omega_0\left[\sin^3 u-\sin^3 u_0\right]-\\
&-e_0\left[\sin^2 u-\sin^2 u_0\right]+\\
&+\frac{3}{2}e_0\cos^2\omega_0\left[\cos 2u-\cos 2u_0\right]+\\
&+\frac{1}{6}\left(2+e_0^2\right)\left[\cos(3u-\omega_0)-\cos(3u_0-\omega_0)\right]+\\
&+\frac{1}{2}\left(2+e_0^2\right)\left[\cos(u+\omega_0)-\cos(u_0+\omega_0)\right]-\\
&-\frac{3}{4}e_0^2\sin 2\omega_0\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right]-\\
&-\frac{1}{4}e_0^2\sin 2\omega_0\left[\sin(3u+\omega_0)-\sin(3u_0+\omega_0)\right]+O\left(J_2^2\right)
\end{aligned}
\tag{23.110}
$$

Die Entwicklung der Exzentrizität nach dem Argument der Breite lautet somit in erster Ordnung

$$
e=e(u)=e_0+\frac{3J_2R_E^2}{2\,p_0^2}\left\{\int_{u_0}^{u} I_1\, du+\sin^2 i_0\int_{u_0}^{u} I_2\, du\right\}+O\left(J_2^2\right)\quad . \tag{23.111}
$$

23.2.4.5 Die Variation der Inklination nach dem Argument der Breite

Für die Inklination *i* wird mit den Variationsgleichungen[1] (11.70) und (23.56) in erster Ordnung

$$
\frac{di}{du}=\frac{di}{dt}\frac{dt}{du}=\frac{r}{G}\cos u\, b_N\,\frac{r^2}{G}\left(1+\frac{r^3\cos i\sin u}{G^2\sin i}\,b_N+\cdots\right)\quad . \tag{23.112}
$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[2] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

---

[1] Aus Abschnitt 11.1.5 (Band III)

[2] Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\frac{di}{du} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{4 p^2} \sin 2i \sin 2u \left[1 + e \cos\left(u - \omega\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \ . \tag{23.113}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u\left(t_0\right)$ gibt

$$\frac{di}{du} = \frac{di}{du}\bigg|^{(0)} + \frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)} \Delta p + \frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial i} \Delta i + \frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial \omega} \Delta \omega \quad . \tag{23.114}$$

Da die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial p}\bigg|^{(0)} = \frac{di}{du} = \frac{3 J_2 R_E^2}{2 p_0^3} \sin 2i_0 \sin 2u \left[1 + e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \ . \tag{23.115}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial e}\bigg|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{4 p_0^2} \sin 2i_0 \sin 2u \cos\left(u - \omega_0\right) + O\left(J_2^2\right) \ . \tag{23.116}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial i}\bigg|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{2 p_0^2} \cos 2i_0 \sin 2u \left[1 + e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \ . \tag{23.117}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{di}{du}\right)}{\partial \omega}\bigg|^{(0)} = -\frac{3 \, e_0 \, J_2 R_E^2}{4 p_0^2} \sin 2i_0 \sin 2u \, e \sin\left(u - \omega_0\right) + O\left(J_2^2\right) \ . \quad . \tag{23.118}$$

wieder alle von erster Ordnung sind, bleibt

$$\frac{di}{du} = \frac{di}{du}\bigg|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{4 p_0^2} \sin 2i_0 \sin 2u \left[1 + e_0 \cos\left(u - \omega_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \tag{23.119}$$

mit dem Integral

$$i = i\left(u\right) = i_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{di}{du}\bigg|^{(0)} du =$$

$$= i_0 + \frac{3 J_2 R_E^2 \sin 2i_0}{8 p_0^2} \left\{ \cos 2u + \frac{e_0}{3} \cos\left(3u - \omega_0\right) + e_0 \cos\left(u + \omega_0\right) - \right. \tag{23.120}$$

$$\left. - \cos 2u_0 - \frac{e_0}{3} \cos\left(3u_0 - \omega_0\right) - e_0 \cos\left(u_0 + \omega_0\right) \right\} + O\left(J_2^2\right) \ .$$

23.2.4.6 Die Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens nach dem Argument der Breite

Für die Rektaszension des aufsteigenden Knotens Ω wird mit den Variationsgleichungen[1] (11.71) und (23.56) in erster Ordnung die Variation nach dem Argument der Breite erhalten:

$$\frac{d\Omega}{du}=\frac{d\Omega}{dt}\frac{dt}{du}=\frac{r}{G}\frac{\sin u}{\sin i}b_N\frac{r^2}{G}\left[1+\frac{r^3}{G^2}\cot i\,\sin u\,b_N+\cdots\right] \quad . \tag{23.121}$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[2] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\frac{d\Omega}{du}=-\frac{3J_2R_E^2}{p^2}\cos i\sin^2 u\left[1+e\cos(u-\omega)\right]+O\left(J_2^2\right) \; . \tag{23.122}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0=u(t_0)$ gibt

$$\frac{d\Omega}{du}=\left.\frac{d\Omega}{du}\right|^{(0)}+\left.\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)}\Delta p+\left.\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)}\Delta e+\left.\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)}\Delta i+\left.\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)}\Delta\omega \tag{23.123}$$

mit den zugehörigen partiellen Ableitungen

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)}=\frac{6J_2R_E^2}{p_0^3}\cos i_0\sin^2 u\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]+O\left(J_2^2\right) \; . \tag{23.124}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)}=-\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}\cos i_0\sin^2 u\cos(u-\omega_0)+O\left(J_2^2\right) \; . \tag{23.125}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)}=\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}\sin i_0\sin^2 u\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]+O\left(J_2^2\right) \; . \tag{23.126}$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\Omega}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)}=-\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}e_0\cos i_0\sin^2 u\sin(u-\omega_0)+O\left(J_2^2\right) \; . \tag{23.127}$$

Sie sind wieder alle von erster Ordnung sind, so dass bleibt

$$\frac{d\Omega}{du}=\left.\frac{d\Omega}{du}\right|^{(0)}=-\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}\cos i_0\sin^2 u\left[1+e_0\cos(u-\omega_0)\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.128}$$

Das entsprechende Integral lautet

---

[1] Aus Abschnitt 11.1.5 (Band III)

[2] Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\Omega = \Omega(u) = \Omega_0 + \int_{u_0}^{u} \left.\frac{d\Omega}{du}\right|^{(0)} du = \Omega_0 - \frac{3 J_2 R_E^2 \cos i_0}{2 p_0^2} \left\{ u - u_0 - \frac{1}{2}\left(\sin 2u - \sin 2u_0\right) - \right.$$
$$- \frac{e_0}{2}\left[\sin\left(u+\omega_0\right) - \sin\left(u_0+\omega_0\right)\right] - \frac{e_0}{6}\left[\sin\left(3u-\omega_0\right) - \sin\left(3u_0-\omega_0\right)\right] + \qquad (23.129)$$
$$\left. + e_0\left[\sin\left(u-\omega_0\right) - \sin\left(u_0\omega_0\right)\right]\right\} + O\left(J_2^2\right) \quad .$$

Wie zu erwarten taucht hier der säkulare Term mit $\left(u-u_0\right)$ auf. Man erhält diesen Term mit der mittleren drakonitischen Bewegung $\overline{n_d}$ aus (23.48)

$$\left.\frac{d\Omega}{du}\right|_s^{(0)} := -\frac{3 J_2 R_E^2 \cos i_0}{p_0^2} \overline{n_d} + O\left(J_2^2\right) \quad . \qquad (23.130)$$

Diese Größe ist offensichtlich wegen $\overline{n_d}$ an die drakonitische Bewegung gekoppelt. Wenn noch mit $i_0 = \overline{i}_0 + \delta i$, $p_0 = \overline{p}_0 + \delta p$ periodische Anteile abgespalten werden, kann dieser Ausdruck auf den bekannten Fall mittlerer Bahnelemente zurückgeführt werden[1].

23.2.4.7 Die Variation der Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens nach dem Argument der Breite

Für die Länge in der Bahn des aufsteigenden Knotens σ bei Bezug auf den Anfangspunkt eines *Hansen*-Systems wird mit den Variationsgleichungen[2] (4.392) und (23.56) in erster Ordnung die Variation nach dem Argument der Breite erhalten:

$$\frac{d\sigma}{du} = \frac{d\sigma}{dt}\frac{dt}{du} = \dot{\Omega}\cos i \frac{dt}{du} = \frac{r}{G}\frac{\sin u \cos i}{\sin i} b_N \frac{r^2}{G}\left[1 + \frac{r^3}{G^2}\cot i \, \sin u \, b_N + \cdots\right] \quad . \qquad (23.131)$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[3] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\frac{d\sigma}{du} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p^2}\cos^2 i \sin^2 u\left[1 + e\cos\left(u-\omega\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \; . \qquad (23.132)$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u\left(t_0\right)$ gibt

$$\frac{d\sigma}{du} = \left.\frac{d\sigma}{du}\right|^{(0)} + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} \Delta p + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} \Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} \Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} \Delta\omega \quad . \qquad (23.133)$$

Die partiellen Ableitungen lauten dann

---

1 Siehe zum Vergleich bei Bezug auf die Zeit *t* Formel (20.15) (Band III)

2 Etwa aus Abschnitt 4.4.10 (Band II)

3 Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = \frac{6 J_2 R_E^2}{p_0^3}\cos^2 i_0 \sin^2 u\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.134)$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2}\cos^2 i_0 \sin^2 u\cos\left(u-\omega_0\right)+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.135)$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = \frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2}\sin 2i_0 \sin^2 u\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.136)$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\sigma}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2} e_0\cos^2 i_0 \sin^2 u\sin\left(u-\omega_0\right)+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.137)$$

Da diese Ausdrücke wieder alle von erster Ordnung sind, ebenso wie die Differenzen $\Delta p, \Delta e, \Delta i, \Delta\omega$ in (23.75), bleibt

$$\frac{d\sigma}{du} = \left.\frac{d\sigma}{du}\right|^{(0)} = -\frac{3 J_2 R_E^2}{p_0^2}\cos^2 i_0 \sin^2 u\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \qquad (23.138)$$

mit dem Integral

$$\sigma = \sigma(u) = \sigma_0 + \int_{u_0}^{u}\left.\frac{d\Omega}{du}\right|^{(0)} du = \sigma_0 - \frac{3 J_2 R_E^2 \cos i_0}{2 p_0^2}\left\{u-u_0-\frac{1}{2}\left(\sin 2u-\sin 2u_0\right)-\right.$$
$$-\frac{e_0}{2}\left[\sin\left(u+\omega_0\right)-\sin\left(u_0+\omega_0\right)\right]-\frac{e_0}{6}\left[\sin\left(3u-\omega_0\right)-\sin\left(3u_0-\omega_0\right)\right]+ \qquad (23.139)$$
$$\left.+e_0\left[\sin\left(u-\omega_0\right)-\sin\left(u_0\omega_0\right)\right]\right\}+O\left(J_2^2\right) .$$

Wie zu erwarten taucht hier der säkulare Term mit $\left(u-u_0\right)$ auf. Man erhält diesen Term mit der mittleren drakonitischen Bewegung $\overline{n_D}$ aus (23.48)

$$\left.\frac{d\sigma}{du}\right|_s^{(0)} := -\frac{3 J_2 R_E^2 \cos^2 i_0}{p_0^2}\overline{n_D}+O\left(J_2^2\right) . \qquad (23.140)$$

Auch diese Größe ist offensichtlich wegen $\overline{n_D}$ an die drakonitische Bewegung gekoppelt. Wenn noch mit $i_0 = \bar{i}_0 + \delta i$, $p_0 = \bar{p}_0 + \delta p$ periodische Anteile abgespalten werden, kann dieser Ausdruck auf den bekannten Fall mittlerer Bahnelemente zurückgeführt werden[1].

[1] Siehe zum Vergleich bei Bezug auf die Zeit *t* Formel (20.15) (Band III)

23.2.4.8 Die Variation des Argumentes des Perigäums nach dem Argument der Breite

Für das Argument des Perigäums ω wird mit den Variationsgleichungen[1] (11.73) und (23.56) in erster Ordnung die Variation nach dem Argument der Breite gebildet:

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{du} = \left\{ -\frac{G}{e\,\mu}\left[b_{R2}\cos\upsilon - b_T\left(1+\frac{r}{p}\right)\right] - b_N\,\frac{r\sin u\cos i}{G\sin i}\right\}\cdot \\ \cdot\frac{r^2}{G}\left(1+\frac{r^3\cos i\sin u}{G^2\sin i}\,b_N+\cdots\right). \tag{23.141}$$

Mit den Beschleunigungskomponenten erster Ordnung durch das Gravitationspotential[2] nimmt die Variationsgleichung die Gestalt an

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{3J_2R_E^2}{2p^2}\left\{ -\frac{1}{e}\left[\left(1+e\cos(u-\omega)\right)^2\left(3\sin^2 i\sin^2 u-1\right)\cos(u-\omega)+\right.\right. \\ +\sin^2 i\,\sin 2u\sin(u-\omega)\left(\left(1+e\cos(u-\omega)\right)^2+\left(1+e\cos(u-\omega)\right)\right)\Big]+ \\ \left.\left.+2\left(1+e\cos(u-\omega)\right)\sin^2 u\,\cos^2 i\right\} \quad +O\left(J_2^2\right). \tag{23.142}$$

Entwicklung um den oskulierenden Anfangspunkt $u_0 = u(t_0)$ gibt

$$\frac{d\omega}{du} = \left.\frac{d\omega}{du}\right|^{(0)} + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)}\Delta p + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)}\Delta e + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)}\Delta i + \left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial \omega}\right|^{(0)}\Delta\omega \quad . \tag{23.143}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)} = \\ = -\frac{3J_2R_E^2}{p_0^3}\left\{ -\frac{1}{e_0}\left[\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\cos(u-\omega_0)+\right.\right. \\ +\sin^2 i_0\,\sin 2u\sin(u-\omega_0)\left(\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2+\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\right)\Big]+ \\ \left.\left.+2\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\sin^2 u\,\cos^2 i_0\right\} \quad +O\left(J_2^2\right). \tag{23.144}$$

---

[1] Aus Abschnitt 11.1.5 (Band III)

[2] Aus Abschnitt 17.2.2 (Band III)

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)} = \frac{d\omega}{du} =$$

$$= \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\left\{\frac{1}{e_0^2}\left[\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\cos(u-\omega_0)+\right.\right.$$
$$+\sin^2 i_0\,\sin 2u\sin(u-\omega_0)\left(\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2+\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\right)\Big]-$$
$$-\frac{1}{e_0}\Big[2\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\cos^2(u-\omega_0)+ \qquad (23.145)$$
$$+\sin^2 i_0\,\sin(2u)\,\sin(u-\omega_0)\cos(u-\omega_0)(2+e_0\cos(u-\omega_0))+$$
$$+\sin^2 i_0\sin(2u)\sin(u-\omega_0)(1+e_0\cos(u-\omega_0))\cos(u-\omega_0)\Big]+$$
$$\left.+2\cos(u-\omega_0)\sin^2 u\,\cos^2 i_0\right\} \quad +O\left(J_2^2\right) \quad .$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial i}\right|^{(0)} = \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\left\{-\frac{1}{e_0}\left[6\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2\sin i_0\sin^2 u\cos i_0\cos(u-\omega_0)+\right.\right.$$
$$\left.+2\sin i_0\,\sin 2u\sin(u-\omega_0)\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\left(2+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\right]- \qquad (23.146)$$
$$\left.-2\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\sin^2 u\sin 2i_0\right\} \quad +O\left(J_2^2\right) \ .$$

$$\left.\frac{\partial\left(\frac{d\omega}{du}\right)}{\partial\omega}\right|^{(0)} =$$

$$= \frac{3J_2R_E^2}{2p_0^2}\left\{-\left[2\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\cos(u-\omega_0)\sin(u-\omega_0)+\right.\right.$$
$$+\frac{1}{e_0}\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)^2\left(3\sin^2 i_0\sin^2 u-1\right)\sin(u-\omega_0)- \qquad (23.147)$$
$$-\frac{1}{e_0}\sin^2 i_0\sin 2u\cos(u-\omega_0)\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\left(2+e_0\cos(u-\omega_0)\right)+$$
$$+\sin^2 i_0\sin 2u\sin^2(u-\omega_0)\left(\left(2+e_0\cos(u-\omega_0)\right)+\left(1+e_0\cos(u-\omega_0)\right)\right)\Big]+$$
$$\left.+2e_0\sin(u-\omega_0)\sin^2 u\,\cos^2 i_0\right\} \quad +O\left(J_2^2\right) \ .$$

wieder alle von erster Ordnung sind, bleibt

$$\frac{d\omega}{du} = \left.\frac{d\omega}{du}\right|^{(0)} + O\left(J_2^2\right) \quad , \qquad (23.148)$$

wobei in (23.142) alle Bahnparameter durch ihren festgehaltenen Wert an der Anfangsstelle $u_0 = u(t_0)$ ersetzt werden müssen. Damit kann die Integration durchgeführt werden und ergibt

$$\omega = \omega(u) = \int_{u_0}^{u} \left.\frac{d\omega}{du}\right|^{(0)} du = -\frac{3J_2 R_E^2}{2p_0^2}\left\{-2\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i_0\right)\left[u-u_0\right]-\right.$$
$$-\frac{1}{e_0}\left[\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right]-\frac{9e_0\sin^2 i_0}{16}\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u+\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{9e_0\sin^2 i_0}{8}\left[\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right]-\frac{3e_0\sin^2 i_0}{16}\left[\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{e_0\sin^2 i_0}{8}\left[\sin 3(u-\omega_0)-\sin 3(u_0-\omega_0)\right]+\frac{3e_0\sin^2 i_0}{4}\left[\sin 2(u-\omega_0)-\sin 2(u_0-\omega_0)\right]- \quad (23.149)$$
$$-\frac{3\sin^2 i_0}{16}\left[\sin(4u-2\omega_0)-\sin(4u_0-2\omega_0)\right]-\frac{3e_0\sin^2 i_0}{16}\left[\sin(u-3\omega_0)-\sin(u_0-3\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{3e_0\sin^2 i_0}{80}\left[\sin(5u-3\omega_0)-\sin(5u_0-3\omega_0)\right]-\frac{3\sin^2 i_0}{4}\left[\sin(2u)-\sin(2u_0)\right]-$$
$$-\frac{\sin^2 i_0}{4e_0}\left[\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right]-\frac{3\sin^2 i_0}{4e_0}\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{e_0}{12}\left[\sin 3(u-\omega_0)-\sin 3(u_0-\omega_0)\right]+\frac{3\sin^2 i_0}{2e_0}\left[\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{3e_0}{4}\left[\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right]-\frac{1}{2}\left[\sin 2(u-\omega_0)-\sin 2(u_0-\omega_0)\right]-$$
$$+\frac{1}{e_0}\sin^2 i_0\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{e_0\sin^2 i_0}{8}\left[\sin(u-3\omega_0)-\sin(u_0-3\omega_0)\right]-\frac{e_0\sin^2 i_0}{40}\left[\sin(5u-3\omega_0)-\sin(5u_0-3\omega_0)\right]+$$
$$+\frac{e_0\sin^2 i_0}{8}\left[\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right]-\frac{\sin^2 i_0}{3e_0}\left[\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right]-$$
$$-\frac{e_0\sin^2 i_0}{24}\left[\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right]-\frac{3\sin^2 i_0}{16}\left[\sin(4u-2\omega_0)-\sin(4u_0-2\omega_0)\right]-$$
$$-\cos^2 i_0\left[-\frac{1}{2}(\sin 2u-\sin 2u_0)-\frac{e_0}{2}\left(\sin(u+\omega_0)-\sin(u_0+\omega_0)\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{e_0}{6}\left(\sin(3u-\omega_0)-\sin(3u_0-\omega_0)\right)+e_0\left(\sin(u-\omega_0)-\sin(u_0-\omega_0)\right)\right]\right\}+O\left(J_2^2\right) \quad .$$

Wie zu erwarten taucht hier der säkulare Term mit $(u-u_0)$ auf. Man erhält diesen Term mit der mittleren drakonitischen Bewegung $\overline{n_d}$ aus (23.48)

$$\left.\frac{d\omega}{du}\right|_s^{(0)} := \frac{3J_2 R_E^2 \overline{n_d}}{p_0^2}\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i_0\right)+O\left(J_2^2\right) \quad . \qquad (23.150)$$

Diese Größe ist offensichtlich wegen des Faktors $\overline{n_D}$ an die drakonitische Bewegung gekoppelt. Wenn noch mit $i_0 = \overline{i}_0 + \delta i$, $p_0 = \overline{p}_0 + \delta p$ periodische Anteile abgespalten werden, kann dieser Ausdruck auf den bekannten Fall mittlerer Bahnelemente zurückgeführt werden[1].

[1] Siehe zum Vergleich bei Bezug auf die Zeit *t* Formel (20.16) (Band III)

23.3 Die drakonitische Umlaufzeit

Bei Satellitenbewegungen ist die drakonitische Umlaufzeit definiert als der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen des Satelliten durch den aufsteigenden Knoten seiner Bahn mit dem Äquator des Zentralkörpers. Die drakonitische Umlaufzeit ist bis auf Äquatorbahnen für alle Satellitenbahnen, insbesondere die nichtexzentrischen Beobachtungssatellitenbahnen erklärt. Die drakonitische Umlaufzeit ist ein zentraler Begriff für die Auslegung von Beobachtungssatellitenbahnen.

23.3.1 Wahre drakonitische Umlaufzeit

Der Bahnwinkel der drakonitischen Bewegung, das Argument der Breite, kann über einen gewissen Zeitraum durch Integration über der Variation des Argumentes der Breite $\dot{u}$ erhalten werden. Für einen drakonitischen Umlauf muss der Beginn der Integration nicht im Knoten erfolgen, sondern kann auf einen beliebigen Anfangspunkt bezogen werden. Die wahre drakonitische Umlaufzeit wird daher aus dem Integral

$$P_D = \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{du}{\dot{u}} \tag{23.151}$$

erhalten. Bei Bezug auf ein *Hansen*-System mit *Hansen*schem Bahnwinkel ζ und die auf den Anfangspunkt des *Hansen*-System bezogene Länge in der Bahn σ des aufsteigenden Knotens lautet die Variationsgleichung des Argumentes der Breite[1]

$$\dot{u} = \dot{\zeta} - \dot{\sigma} \quad . \tag{23.152}$$

Die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels ist durch den Flächensatz $r^2\,\dot{\zeta} = G$ mit dem Flächenparameter G gegeben[2], die Variation der Länge des aufsteigenden Knotens durch $\dot{\sigma} = \dot{\Omega}\cos i$. Die Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens ist aus Formel (11.71) bekannt[3]. Damit lautet die Variation des Argumentes der Breite[4]

$$\dot{u} = \frac{G}{r^2} - \frac{r\sin u\cos i}{G\sin i}\, b_N \quad . \tag{23.153}$$

Bemerkenswert an dieser Gleichung sind folgende Eigenschaften: wie die drakonitische Bewegung ist sie nicht für äquatoriale Bahnen $(\sin i = 0)$ definiert. Besonders interessant ist die Tatsache, dass sie im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung nur die normale Störbeschleunigung b_N explizit enthält. Dadurch wird der Ansatz für eine Integration in den meisten Anwendungen wesentlich vereinfacht.

---

1 Siehe die Formel (4.351) in Abschnitt 4.4.6 (Band II)

2 Formel (4.298) in Abschnitt 4.4.2

3 Abschnitt 11.1.5 (Band III)

4 Vgl. Formel (11.79)

BEISPIEL 1: Für erdnahe Satellitenbahnen lautet die Variationsgleichung erster Ordnung[1]

$$\dot{u} = \frac{G}{r^2} - b_{GN0}\frac{r\sin u\cos i}{G\sin i} + \cdots = \frac{G}{r^2} + \frac{3\mu J_2 R_E^2}{G}\sin^2 u\,\sin^2 i + \cdots \quad . \blacktriangleleft \qquad (23.154)$$

In der praktischen Anwendung kann die Integration (23.151) vermieden werden, wenn ein bekanntes Ephemeridenprogramm zur Verfügung steht. Die wahre drakonitische Umlaufzeit, die in diesem Fall als oskulierende aufgefasst werden kann, lässt sich dann mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct(P_D) \equiv \sin\left[u(t_0 + P_D) - u(t_0)\right] = 0 \qquad (23.155)$$

berechnen. Als Anfangswert $P_D^{(0)} = \overline{P_K}$ für die Iteration kann hierzu die *Kepler*sche Umlaufzeit (bzw. die im nächsten Abschnitt berechnete mittlere drakonitische Umlaufzeit) verwendet werden. $u(t_0) = u_0$ ist ein Anfangswert, auf den die drakonitische Umlaufzeit bezogen werden soll. Wird ein Knoten $u_0 = 0°$ oder $u_0 = 180°$ gewünscht, so kann dieser etwa mit Hilfe der überlagerten Funktion (23.54) gefunden werden: $u(t_F) = u_0$.

Anmerkung: Die Lösung der überlagerten Funktion kann mit einem vereinfachten *Newton* Verfahren bearbeitet werden, wie es für die wahre anomalistische Umlaufzeit in Abschnitt 22.4.4 beschrieben wurde. Damit ist auch die Möglichkeit verknüpft, Genauigkeitsabschätzungen analytisch durchzuführen. Anmerkungen zur numerischen Bearbeitung und Genauigkeitsfragen werden in Abschnitt 23.3.4 (Seite 182) gegeben. ◀

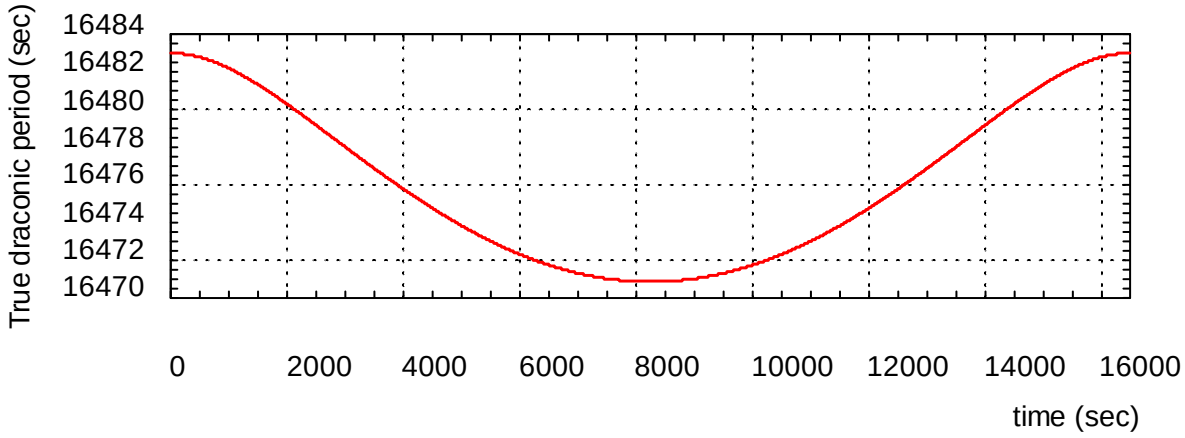


Bild 23-5: Verlauf der wahren drakonitischen Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für die Bahn: a=14000 km, e=0.5, i=50°, $\Omega = \omega = M_0$=0° (vollständiges Bahnmodell nach *Brouwer* mit J_2, J_3, J_4)

BEISPIEL 2: Zur Demonstration über die zu erwartenden Größenordnungen wird in Bild 23-5 der Verlauf der wahren drakonitischen Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für eine exzentrische Bahn dargestellt. Die Darstellung beginnt im aufsteigenden Knoten der Bahn. Während des Umlaufs schwankt in diesem Fall die Dauer eines drakonitischen Umlaufs um bis zu 12 Sekunden. Das bedeutet, dass die Umlaufzeit von absteigendem Knoten zum nächsten

[1] Mit den Ausdrücken (17.33) und (17.35) (Band III)

absteigenden Knoten kürzer als zwischen zwei aufeinanderfolgenden aufsteigenden Knoten ist (weitere Beispiele hierzu im nächsten Abschnitt 23.3.2). ◀

23.3.2 Mittlere drakonitische Umlaufzeit

Im Rahmen der allgemeinen *Kepler*bewegung kann die drakonitische Umlaufzeit üblicherweise in einen säkularen und in einen periodischen Anteil zerlegt werden:

$$P_D = \overline{P_D} + \delta P_D \quad . \tag{23.156}$$

Wenn in Analogie zur *Kepler*schen Umlaufzeit für die drakonitische Umlaufzeit

$$P_D = \frac{2\pi}{n_D} \tag{23.157}$$

mit der drakonitischen mittleren Bewegung

$$n_D = \overline{n_D} + \delta n_D \tag{23.158}$$

gesetzt wird, kann die drakonitische Umlaufzeit im Fall kleiner periodischer Anteile der drakonitischen mittleren Bewegung dargestellt werden durch

$$P_D = \frac{2\pi}{\overline{n_D}\left(1+\frac{\delta n_D}{\overline{n_D}}\right)} = \frac{2\pi}{\overline{n_D}} + 2\pi\left[-\frac{\delta n_D}{\overline{n_D}^2}+\cdots\right] \quad . \tag{23.159}$$

a [km]	$\overline{P_K}$ [s]	$\overline{P_A}$ [s]	$\overline{P_D}$ [s]	P_D [s]
6800	5580.515896	5584.141503	5587.525987429	5587.525987429
7000	5828.516638	5832.090086	5835.42592192	5835.42592192
7500	6464.022740	6467.475043	6470.69787317	6470.69787317
8000	7121.081578	7124.424274	7127.544850732	7127.544850732
8500	7799.008058	7802.250965	7805.27843687	7805.27843687
9000	8497.178560	8500.330112	8503.27234057	8503.27234057
9500	9215.022255	9218.089760	9220.9535606	9220.9535606
10000	9952.014050	9955.003893	9957.79521777	9957.79521777
10500	10707.668790	10710.586584	10713.3106699	10713.3106699
11000	11481.536433	11484.387148	11487.0486296	11487.0486296
11500	12273.198011	12275.986071	12278.5890742	12278.5890742
12000	13082.262211	13084.991573	13087.5397893	13087.5397893

Tabelle 23-1: Vergleich der mittleren *Kepler*schen und der mittleren anomalistischen mit der mittleren und der wahren drakonitischen Umlaufzeit für kreisförmige Bahnen mit unterschiedlicher großer Halbachse, sowie in allen Fällen der Inklination i=80°

Wird der periodische Anteil der drakonitischen Umlaufzeit durch

$$\delta P_D = -2\pi\left[\frac{\delta n_D}{\overline{n_D}^2} - + \cdots\right] \tag{23.160}$$

wiedergegeben, bleibt für die mittlere drakonitische Umlaufzeit mit der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung (23.47) und bei Vernachlässigung eines Einflusses des Luftwiderstandes (d.h. bei Annahme einer Bahnhaltung) für die mittlere drakonitische Umlaufzeit die Beziehung

$$\overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_D}} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s} \qquad \left\langle \dot{n}_{Ks} = 0 \quad . \right. \tag{23.161}$$

Für erdnahe Satellitenbahnen und ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes genügt die mittlere drakonitische Umlaufzeit mit der mittleren drakonitischen Bewegung (23.51) der Näherung

$$\overline{P_{D\,0}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{K\,0}}}\left\{1+\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_o^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right]\right\}+O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.162}$$

Die drakonitische Umlaufzeit beschreibt den Umlauf eines Satelliten in Bezug auf das drakonitische Bahnsystem, zum Beispiel von aufsteigendem Knoten zu aufsteigendem Knoten.

e	P_H [s]	$\overline{P_D}$ [s]	$P_{D,\mathrm{sec}}$ [s]	P_D [s]
0.00	28152.774777	28152.63461868	28152.63461344	28152.63461344
0.05	28152.588578	28152.65247723	28152.46088133	28152.46128490
0.10	28152.448771	28152.70680607	28152.33221018	28152.33234862
0.15	28152.350930	28152.79993818	28152.24362947	28152.24373267
0.20	28152.292555	28152.93601973	28152.19327036	28152.19321079
0.25	28152.272946	28153.12144580	28152.18022389	28152.18029856
0.30	28152.293261	28153.36558322	28152.20612260	28152.20631977
0.35	28152.356778	28153.68193377	28152.27458508	28152.27467821
0.40	28152.469463	28154.09001395	28152.39137650	28152.39143607
0.45	28152.640967	28154.61845970	28152.56622322	28152.56631636
0.50	28152.886389	28155.31033096	28152.81424800	28152.81446029
0.55	28153.229401	28156.23258216	28153.15920538	28153.15954858
0.60	28153.707990	28157.49392448	28153.63887151	28153.63955710
0.65	28154.385748	28159.28088747	28154.31701360	28154.31800974

Tabelle 23-2: Vergleich der wahren *Hansen*schen mit der mittleren, der säkularen und der wahren drakonitischen Umlaufzeit für Bahnen mit der großer Halbachse a=20000 km und der Inklination i=80° und variierend mit Exzentrizitäten $e \in [0.00, 0.65]$

BEISPIEL 1: In Tabelle 23-1 ist der Unterschied zwischen mittlerer und wahrer drakonitischer Umlaufzeit für kreisförmige Bahnen mit der Bahninklination i = 60° für verschiedene große Bahnhalbachsen aufgetragen. Der Unterschied ist vernachlässigbar. Zum Vergleich enthält die Tabelle auch die jeweilige mittlere *Kepler*sche und die mittlere anomalistische Umlaufzeit. ◀

BEISPIEL 2: Die Abhängigkeit des Unterschiedes der mittleren, der säkularen und wahren drakonitischen Umlaufzeiten von der Exzentrizität einer Bahn wird in Tabelle 23-2 am Beispiel einer Bahn mit der Halbachse a = 20000 km und der Bahnneigung i = 60° demonstriert.

Die säkulare drakonitische Umlaufzeit wird durch Iteration mit der Bedingungsgleichung (23.155) erhalten, wenn im verwendeten Bahnmodell nur die säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen“) durch $\left(J_2, J_4\right)$ zugelassen werden[1]. Zum Vergleich ist auch die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit in die Tabelle integriert. Da die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit nicht von der Exzentrizität einer Bahn abhängt, hat diese in allen Fällen den Wert $\overline{P_K} = 28148.546486 \text{ sec}$. Es zeigt sich, dass der Einfluss der Exzentrizität auf die wahre drakonitische Umlaufzeit sehr gering ist, wie dies auch im Fall der anomalistischen Umlaufzeit beobachtet worden war. ◀

i		P_H [s]	$\overline{P_D}$ [s]	$P_{D,\text{sec}}$ [s]	P_D [s]
5°		13071.257126	13057.681080	13067.919354	13067.932399
10°		13071.634039	13058.426552	13068.372803	13068.385105
20°		13073.084682	13061.295219	13070.117811	13070.127424
30°		13075.306892	13065.688248	13072.790085	13072.796193
40°		13078.032350	13071.073745	13076.065947	13076.068919
50°		13080.932144	13076.800796	13079.549806	13079.550488
60°		13083.656573	13082.178623	13082.821194	13082.821017
70°		13085.877152	13086.559902	13085.486495	13085.486357
80°		13087.326510	13089.418235	13087.225414	13087.225803
90°		13087.830002	13090.410675	13087.829086	13087.830003
100°		13087.326948	13089.418235	13087.225414	13087.226246
110°		13085.877814	13086.559902	13085.486495	13085.487051
120°		13083.657084	13082.178623	13082.821194	13082.821633
130°		13080.932082	13076.800796	13079.549806	13079.550649
140°		13078.031365	13071.073745	13076.065947	13076.068315
150°		13075.304812	13065.688248	13072.790085	13072.794660
160°		13073.081573	13061.295219	13070.117811	13070.125015
170°		13071.630228	13058.426552	13068.372803	13068.382088
175°		13071.253238	13057.681080	13067.919354	13067.929286

Tabelle 23-3: Vergleich der wahren *Hansen*schen und der mittleren anomalistischen mit der mittleren und der wahren drakonitischen Umlaufzeit für Bahnen mit der großer Halbachse a=12000 km und der Exzentrizität e=0.4, für alle Inklination $i \in [5°, 175°]$

BEISPIEL 3: Der Einfluss der Inklination auf die wahre drakonitische Umlaufzeit wird in Tabelle 23-3 für Bahnen mit der großen Halbachse a = 12000 km und der Exzentrizität e = 0.4 demonstriert. Der Unterschied zwischen mittlerer, säkularer und wahrer drakonitischer Umlaufzeit ist bemerkenswert. Ebenso bemerkenswert ist der Unterschied zur wahren *Hansen*schen Umlaufzeit (mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit $\overline{P_K}$ = 13082.262211 s). ◀

[1] Vgl. die Anmerkungen zur Begriffsbildung in Abschnitt 21.4

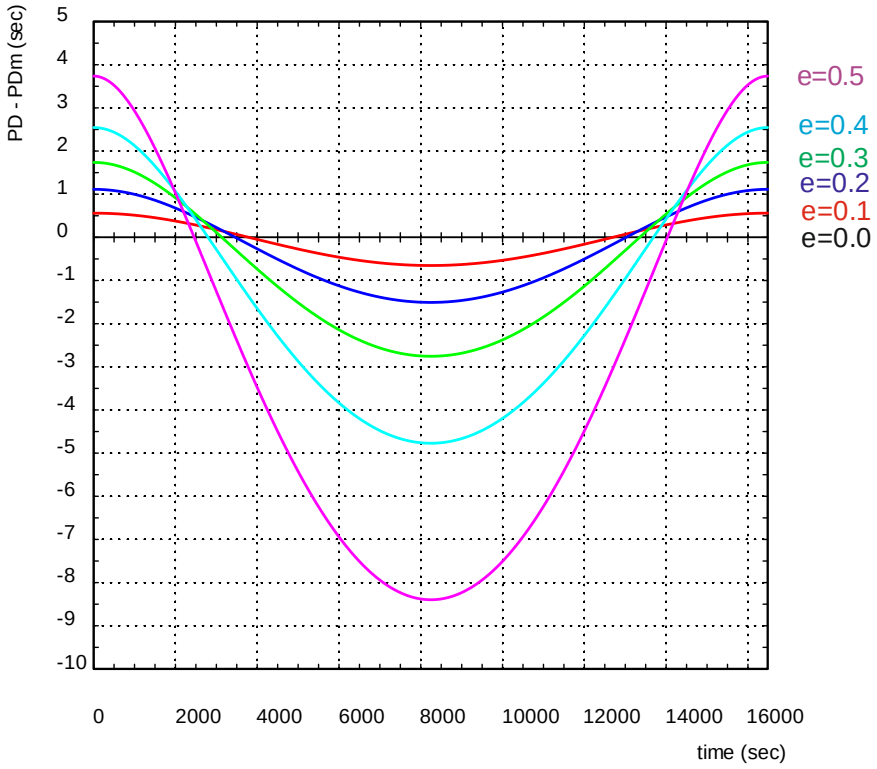


Bild 23-6: Die Differenz von wahrer zu mittlerer drakonitischer Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für das Bahnmodell nach *Brouwer* mit J_2, J_3, J_4 für die Bahnen: a=14000 km, e=0.0 -0.5, i=50°, $\Omega = \omega = M_0$=0°, beginnend im aufsteigenden Knoten

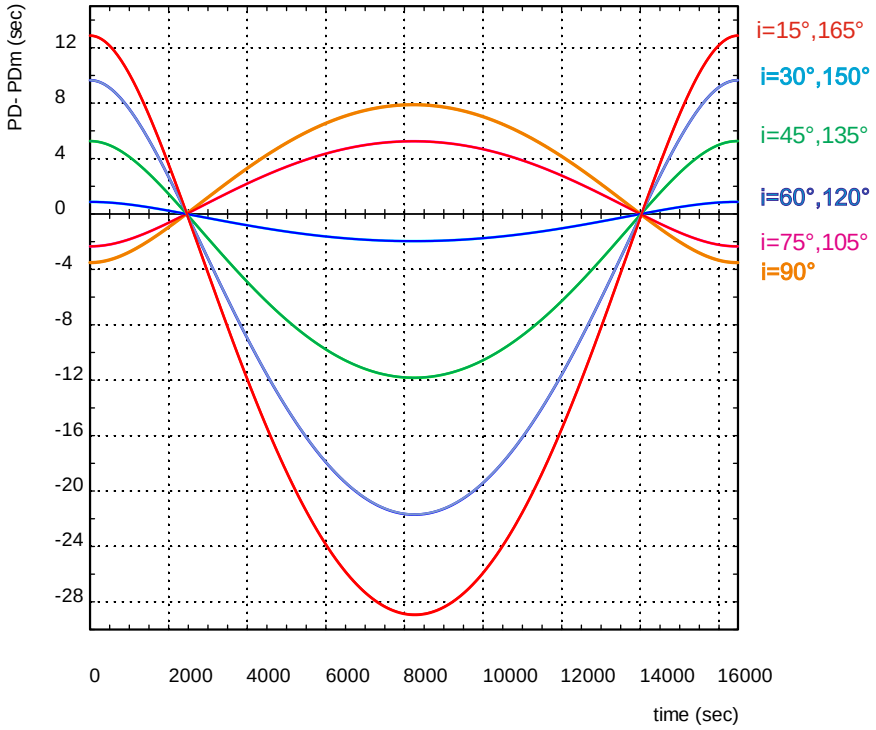


Bild 23-7: Die Differenz von wahrer zu mittlerer drakonitischer Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf für das Bahnmodell nach *Brouwer* mit J_2, J_3, J_4 für die Bahnen: a=14000 km, e=0.5, $\Omega = \omega = M_0$=0°, und verschiedene Inklinationen, beginnend im aufsteigenden Knoten

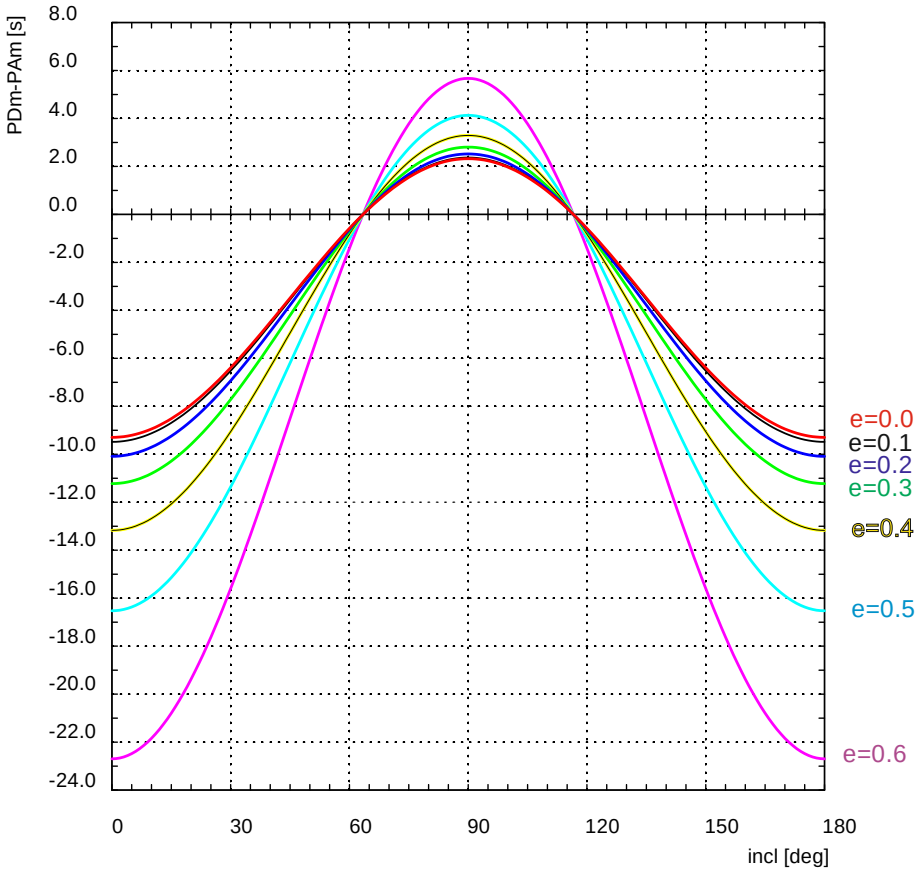


Bild 23-8: Die Differenz von mittlerer drakonitischer Umlaufzeit zur mittleren anomalistischen Umlaufzeit über alle Inklinationen, einige Exzentrizitäten und die große Bahnhalbachse a = 20000 km

BEISPIEL 4: In Ergänzung zu dem zweiten Beispiel in Abschnitt 23.3.1 wird in Bild 23-6 der Verlauf der wahren drakonitischen Umlaufzeit bezogen auf die mittlere drakonitische Umlaufzeit für verschiedene Exzentrizitäten über einen mittleren drakonitischen Umlauf dargestellt. Gewählt wurde eine Bahn mit der großen Bahnhalbachse a = 14000 km und der Inklination i = 50°. Während (siehe das vorstehende Beispiel 2) der Unterschied zwischen mittlerer und wahrer drakonitischer Umlaufzeit im aufsteigenden Knoten der Bahn von der Exzentrizität vernachlässigbar ist, ist dieser Unterschied während eines Umlaufs beträchtlich. ◀

BEISPIEL 5: Auch die Differenz zwischen wahrer und mittlerer drakonitischer Umlaufzeit über einen drakonitischen Umlauf ist erheblich von der Bahninklination abhängig, wie Bild 23-7 für Bahnen mit a = 14000 km und die Exzentrizität e = 0.5 zeigt. ◀

Die *Kepler*sche Umlaufzeit $P_K = \sqrt{\mu / a^3}$ ist in einer (allgemeinen) Theorie der Satellitenbewegung von theoretischem Interesse ohne physikalischen Bezug. Wenn daher die drakonitische Umlaufzeit auf andere Umlaufzeiten bezogen werden soll, bietet sich die anomalistische Umlaufzeit wegen beider physikalischem Bezug an. Entsprechend könnte hier auch die *Hansen*sche Umlaufzeit nach Kapitel 21 zur Anwendung kommen. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit ist der mittleren anomalistischen nach Formel (23.48) genau identisch gleich, wenn die Bahn als Neigung gegenüber der Äquatorebene wegen $\dot{\omega}_{s,krit} = 0.0\,\text{rad/s}$ die kritischen Neigungen $\cos \bar{i}_{krit-1/2} = \pm 1/\sqrt{5}$ hat. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D}$ ist dann größer als die mittlere anomalistische $\overline{P_a}$, wenn $\dot{\omega}_s < 0.0$. In diesem Fall erreicht der Satellit eher sein

Perigäum als den nächsten aufsteigenden Knoten, das Perigäum wandert also dem Satelliten entgegen. Dagegen ist $\overline{P_D} < \overline{P_A}$, wenn $\dot{\omega}_s > 0.0$, das Perigäum bewegt sich vom Satelliten weg, es wird daher später erreicht im Vergleich zum Durchlaufen das aufsteigenden Knotens. Diese Eigenschaften können in manchen Fällen der Bahnanalyse von Interesse sein.

BEISPIEL 6: Bild 23-8 zeigt symptomatisch die Unterschiede zwischen der mittleren drakonitischen und der mittleren anomalistischen Umlaufzeit über der Inklination und für einige Exzentrizitäten. Zur quantitativen Darstellung wurde die große Bahnhalbachse a = 20000 km gewählt. ◄

23.3.3 Die mittlere drakonitische Umlaufzeit mit Luftwiderstand

Mit Berücksichtigung der säkularen Abnahme der großen Bahnhalbachse kann die mittlere drakonitische Umlaufzeit zum Zeitpunkt *t* bei Bezug auf die Anfangsbahnelemente zur Epoche t_0 mit Hilfe des Argumentes der Breite in der Darstellung (23.44) berechnet werden aus der Beziehung

$$2\pi = \overline{n_D}\,\overline{P_D} + \dot{n}_{Ks}\,\overline{P_D}^{\,2} \quad . \tag{23.163}$$

Wenn die die säkulare Variation der Keplerschen mittleren Bewegung mit dem Ausdruck (23.50) auf die säkulare Variation der großen Bahnhalbachse zurückgeführt werden kann, lautet die mittlere drakonitische Umlaufzeit (analog zu den Darstellungen in Abschnitt 22.4.3) mit Berücksichtigung der säkularen Abnahme der großen Bahnhalbachse auf Grund des Luftwiderstandes

$$\overline{P_D} = \overline{P_D}\left[t, t_0\right] = \frac{4\pi}{\overline{n_{D\,0}} + \sqrt{\left(\overline{n_{D\,0}}\right)^2 - 12\pi\,\dot{a}_s\,\dfrac{\overline{n_{D\,0}}}{\overline{a}_0}}} \quad . \tag{23.164}$$

BEISPIEL: Ein Satellit bewege sich in 300 km Bahnhöhe auf einer kreisförmigen Bahn, die um i = 60° geneigt sei. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt ohne Berücksichtigung einer Bahnhöhenveränderung infolge des Luftwiderstandes

$$\overline{P_D} = 5431.02436374568\,\text{sec}\,.$$

Die entsprechende wahre drakonitische Umlaufzeit (bei Bezug auf das hier verwendete Bahnmodell) beträgt

$$P_D = 5431.02436735192\,\text{sec}\,.$$

Um die Wirkung des Luftwiderstandes zu beurteilen, werde angenommen, dass der Satellit die Masse $m_s = 300\,\text{kg}$ und die mittlere Anströmfläche $A_D = 10\,\text{m}^2$. Der Luftwiderstandsbeiwert werde zu $c_D = 2.3$ angenommen[1]. Für die Luftdichte kann im ungünstigsten Fall nach der Tabelle von *Harris-Priester*[2] $\rho_{\max}\left[H = 300\,\text{km}\right] = 35.260\,\text{g/km}^3$ gewählt werden. Die säkulare Abnahme der großen Bahnhalbachse beträgt nach Formel (17.43)

---

[1] Note: the index D in A_D and c_D is related to the air drag

[2] Tabelle 17-12 in Abschnitt 17.3.1 (Band III)

$$\dot{a}_s = -\rho_{\max}\, c_D\, \frac{A_D}{m_s}\sqrt{a\,\mu} = -0.13630278{*}10^{-3}\ \text{km/s} \quad . \tag{23.165}$$

Dies ergibt nach Formel (23.164) die mittlere drakonitische Umlaufzeit

$$\overline{P_{DL}} = 5430.56242386946\,\text{sec}\,.$$

Die wahre (zum Beginn der jeweiligen Epoche berechnete oskulierende) drakonitische Umlaufzeit beträgt

$$P_{DL} = 5430.562562579219\,\text{sec}\,.\blacktriangleleft$$

Anmerkungen: 1. Die säkulare Abnahme der Bahnhalbachse (23.165) gibt über längere Zeiträume eine unrealistische Abnahme der drakonitischen Umlaufzeit, sofern die mit abnehmender Bahnhöhe exponentiell sich ändernde Luftdichte ρ ad hoc berücksichtigt wird. Um diese Abnahme zu simulieren ist es üblich, die Tabelle von *Harris-Priester*[1] zu interpolieren. Falls dies nicht möglich ist, muss die Luftdichte durch Interpolation angepasst werden. ◄

2. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit ist im Rahmen einer Bahnauslegung von zentraler Bedeutung. Daher ist es erforderlich, insbesondere bei erdnahen Bahnen die Beeinflussung durch den Luftwiderstand ins Kalkül einzubeziehen, eventuell auch eine Bahnkorrektur systematisch einzuplanen (siehe in Abschnitt 23.10). ◄

3. Die mittlere drakonitische Bewegung in der allgemeinen Darstellung (23.47) zeigt den Zusammenhang und den Unterschied zwischen der anomalistischen und der drakonitischen Bewegung. Im Fall $\dot{\omega}_s = 0$ sind diese beiden Bewegungen jedoch identisch. Dies ist genau dann der Fall, wenn die durchflogene Bahn die kritische Neigung hat (siehe in Abschnitt 22.7.1). ◄

4. Als Faustregel für die minimale Umlaufzeit eines Erdsatelliten kann eine kreisförmige Bahn in etwa 200 km Bahnhöhe, somit $a_{\min} = 6758.140\,\text{km}$, gewählt werden. Für alle betrachteten Arten von Umlaufzeiten kann als untere Schätzung gewertet werden

$$P \le P_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{a_{\min}}{\mu}} = 5310\,\text{sec} \mathrel{\hat{=}} 88.5\,\text{min} \mathrel{\hat{=}} 1.5\,\text{h} \quad .\blacktriangleleft \tag{23.166}$$

23.3.4 Zur numerischen Berechnung der drakonitischen Umlaufzeit

Die überlagerte Funktion (23.155)

$$fct\left(P_D\right) \equiv \sin\left[u\left(t_0 + P_D\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{23.167}$$

kann mit dem vereinfachten *Newton*-Verfahren

$$P_D^{(\nu+1)} = P_D^{(\nu)} - \frac{fct\left(P_D^{(\nu)}\right)}{fct'\left(P_D^{(\nu)}\right)} \tag{23.168}$$

durch sukzessive Approximation bearbeitet werden. Als Anfangswert kann die mittlere drakonitische Umlaufzeit (aus Formel (23.161) oder (23.164)) gewählt werden $P_D^{(0)} = \overline{P_D}$ oder einfacher die (wahre) *Kepler*sche Umlaufzeit $P_K = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}$. Im Rahmen einer Bahnanalyse wird hier angenommen, dass die abgeleitete Funktion $fct'\left(P_D^{(\nu)}\right)$ nur die säkularen Störungen erster

[1] oder eine vergleichbare wie die in Anhang K (Band V) wiedergegebene MSIS Tabelle

Ordnung enthält. Damit ist es möglich, die Ableitung nur einmal zu berechnen und für die weitere Iteration konstant zu halten. Der Vorteil der quadratischen Konvergenz des *Newton* Verfahrens geht dadurch verloren, wird aber in den meisten Anwendungen einer Bahnanalyse durch den reduzierten Berechnungsaufwand und den in der Regel größeren Konvergenzradius mehr als ausgeglichen. Für eine reelle Zahl R_N werde in diesem Zusammenhang angenommen, dass

$$fct'\left(P_D^{(\nu)}\right) = R_N \; fct'\left(\overline{P_D}\right) \quad . \tag{23.169}$$

Das Verfahren (23.168) konvergiert, wenn für eine reelle positive Zahl *q* die Bedingung

$$0 \le \frac{1}{|\rho|}\left|\rho - fct'\left(P_D\right)\right| \le q < 1 \tag{23.170}$$

erfüllt ist. Mit einer reellen Zahl *m*

$$0 < m \le \left| fct'\left(P_D\right)\right| \tag{23.171}$$

erhält man nach ν Iterationsschritten die a priori Abschätzung für die Abweichung der erhaltenen Näherung $P_d^{(\nu)}$ vom Zielwert P_d

$$\left|P_D^{(\nu)} - P_D\right| \le \frac{q^\nu}{m}\left| fct\left(\overline{P_D}\right)\right| \quad . \tag{23.172}$$

Zur Abschätzung der Genauigkeit der Bedingungsfunktion (23.167) in Abhängigkeit der gewünschten Genauigkeit ΔP_D der zu berechnenden drakonitischen Umlaufzeit muss der Differenzen Ausdruck

$$\Delta fct = \frac{\partial fct}{\partial P_D}\Delta P_D \tag{23.173}$$

berechnet werden. Um die partielle Differentiation nach der drakonitischen Umlaufzeit berechnen zu können werden die Bezeichnungen $u_1 := u\left(t_0 + P_D\right), u_0 := u\left(t_0\right)$ eingeführt. Dann wird

$$\frac{\partial fct}{\partial P_D} = \frac{dfct}{du_1}\frac{\partial u_1}{\partial P_D} \quad . \tag{23.174}$$

Hier ist

$$\frac{dfct}{du_1} = \cos\left(u_1 - u_0\right) = \cos\left[u\left(t_0 + P_D\right) - u\left(t_0\right)\right] \; . \tag{23.175}$$

Da das Argument der Breite in die wahre Anomalie und das Argument des Perigäums zerlegt werden kann

$$u_1 = \upsilon_1 + \omega_1 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \upsilon_1} = \frac{\partial u_1}{\partial \omega_1} = 1 \tag{23.176}$$

wird

$$\frac{\partial u_1}{\partial P_D} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial P_D} + \frac{\partial \omega_1}{\partial P_D} \quad . \tag{23.177}$$

Hier ist zunächst

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial P_D} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial E_1}\frac{\partial E_1}{\partial M_1}\frac{\partial M_1}{\partial P_D} \; , \tag{23.178}$$

wobei (siehe etwa die Formeln (15.20) und (15.29)[1])

[1] In den Abschnitten 15.2.1 und 15.2.3 in Band III

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial E_1} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E_1} \quad , \quad \frac{\partial E_1}{\partial M_1} = \frac{1}{1-e\cos E_1} \quad . \tag{23.179}$$

Mit den Beziehungen (22.26) und (22.28) kann die mittlere Anomalie zum Zeitpunkt $t_1 = t_0 + P_d$ dargestellt werden in der Form

$$M_1 = M\left(t_1\right) = \overline{M_{0\,0}} + \left[\left(M_0\right)^{\cdot}_{s} + \overline{n_{K\,0}} + \dot{n}_{Ks}\, P_D\right] P_D + \delta M\left[t_0 + P_D; t_0\right] \ . \tag{23.180}$$

Werden die periodischen Variationen sowie der Einfluss des Luftwiderstandes vernachlässigt, bleibt

$$\frac{\partial M_1}{\partial P_D} = \left(M_0\right)^{\cdot}_{s} + \cdots \quad , \tag{23.181}$$

wobei die säkulare Variation der mittleren Epocheanomalie im Fall erdnaher Satellitenbahnen aus der Beziehung (20.17) bekannt ist[1]. Entsprechend kann das Argument des Perigäums in die Darstellung

$$\omega_1 = \omega\left(t_1\right) = \omega_0 + \dot{\omega}_s\, P_D + \delta\omega\left[t_0 + P_D; t_0\right] \tag{23.182}$$

entwickelt werden. Bei Vernachlässigung der periodischen Variationen bleibt

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial P_D} = \dot{\omega}_s + \cdots \ . \tag{23.183}$$

Die hier benötigte säkulare Variation des Argumentes des Perigäums findet sich in Formel (20.16).

23.3.5 Bahnauswahl aus drakonitischer Umlaufzeit

Eine der wichtigsten Problemstellungen einer Satellitenbahnanalyse ist die Auswahl der Bahnelemente nach Vorgabe von Projekt-relevanten Parametern. Im Rahmen der drakonitischen Bewegung ist eine derartige aus der drakonitischen Umlaufzeit eine Grundaufgabe, auf die viele weitere Problemstellungen zurückgeführt werden können.

23.3.5.1 Berechnung der großen Bahnhalbachse aus drakonitischer Umlaufzeit

Es sei die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{D\,0}} = 2\pi / \overline{n_{D\,0}}$ für eine bestimmte Epoche t_0 vorgegeben. Ferner seien die mittleren Epocheelemente Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ bekannt. Eine Grundaufgabe ist die Berechnung der zugehörigen mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$.

Diese Aufgabe kann in verschiedenen Schritten mit unterschiedlicher Genauigkeitsanforderung bearbeitet werden[2].

Als erster Schritt wird eine Näherungslösung mit Hilfe der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit erhalten:

---

1 In Abschnitt 20.2.1 in Band III

2 Die Entwicklungen in diesem Abschnitt folgen den entsprechenden im Rahmen der anomalistischen Bewegung in Abschnitt 22.5

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{P_{D0}}\right)^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\left(\overline{n_{D0}}\right)^2}} \quad . \tag{23.184}$$

Eine erste Verbesserung

$$\bar{a}_0^{(1)} = \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)} \tag{23.185}$$

wird (wenn der säkulare Einfluss durch den Luftwiderstand vernachlässigt werden kann) mit Hilfe der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung (23.49) erhalten

$$\begin{aligned} \overline{n_{D0}} &= \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)^3}}\left\{1-\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)^2\left(1-\bar{e}_o^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos^2\bar{i}_0\right]\right\}+\cdots \end{aligned} \tag{23.186}$$

Quadrierung und Entwicklung in erster Ordnung ergibt mit der Definition (23.185) den Korrekturterm erster Ordnung

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = -J_2\frac{R_E^2}{2\bar{a}_0^{(0)}\left(1-\bar{e}_o^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos^2\bar{i}_0\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.187}$$

bzw.

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}_0^{(0)}\left(1-\bar{e}_o^2\right)^2}\left[\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\bar{i}_0\right)+\frac{1}{2}\left(5\cos^2\bar{i}_0-1\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.188}$$

Diese Korrektur nimmt linear mit der mittleren Entfernung („große Bahnhalbachse“) zum Erdmittelpunkt ab.

Während die erste dieser beiden Darstellungen für die Rechnung geeigneter ist, zeigt die zweite den Einfluss der säkularen Variationen im Argument des Perigäums $\dot{\omega}_s$ bzw. in der mittleren Epocheanomalie $\left(M_0\right)^{\cdot}{}_s$. Falls der erstere Anteil verschwindet $\left(5\cos^2\bar{i}_0=0\right)$ bewegt sich der Satellit auf einer Bahn mit „kritischer Neigung“. Im zweiten Fall, der durch Verschwinden der säkularen Variation der Epocheanomalie gekennzeichnet ist (etwa in der Darstellung (22.35) in Abschnitt 22.2.3) $\left(\sin^2\bar{i}_0=2/3\right)$ bewegt sich der Satellit auf einer Bahn mit Neigung

$$\bar{i}_{0K1} = 54°.73561032 \quad \text{bzw.} \quad \bar{i}_{0K2} = 125°.26438968 \quad . \tag{23.189}$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, für welche Bahnen der Korrekturterm $\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ verschwindet. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Bahn die Neigung aus

$$\cos\bar{i}_{0K3/4} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}} \tag{23.190}$$

hat. Für kreisförmige Bahnen ist dies der Fall für die Inklinationen $\bar{i}_{0K3}=60°$ bzw. $\bar{i}_{0K4}=120°$, für hochexzentrische Bahnen mit $\bar{e}_0=0.9$ für die Inklinationen $\bar{i}_{0k3}=61°.5$, $\bar{i}_{0k4}=118°.5$.

Die Korrektur erster Ordnung in Formel (23.187) zeigt, dass der Ausdruck $\bar{a}_0^{(0)}\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ eine von der großen Bahnhalbachse unabhängige Größe ist, somit für alle Exzentrizitäten und

Inklinationen gültig. In Bild 23-9 und Bild 23-10 ist der Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)}\,\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ über alle Inklinationen und Exzentrizitäten e=0.0 bis e=0.5, bzw. bis e=0.9 aufgetragen. Keine Korrektur wird erforderlich für Inklinationen aus Bedingung (23.190).

Die hier gefundene erste Lösung $\bar{a}_0^{(1)}$ kann iterativ mit der überlagerten Funktion

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left[u\left(t_0 + P_{D0}; \bar{a}_0^{(\nu)}\right) - u\left(t_0; \bar{a}_0^{(\nu)}\right)\right] = 0 \qquad \langle \nu = 2,3,\cdots \tag{23.191}$$

im Rahmen des zur Verfügung stehenden Bahnmodells und einer gewünschten Genauigkeit verbessert werden.

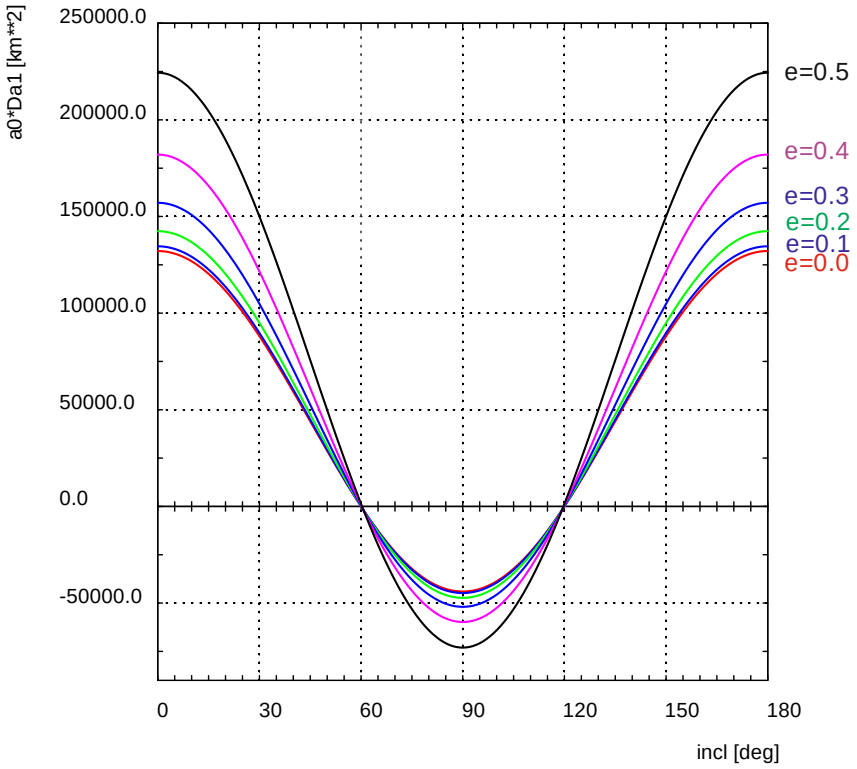


Bild 23-9: Der von der nullten Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\bar{a}_0^{(0)}\,\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit, berechnet über alle Inklinationen für Exzentrizitäten $e \le 0.5$

BEISPIEL: Vorgegeben seien für eine kreisförmige Bahn die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P}_{d\,0} = 6000.000\,\text{sec}$ sowie die Inklination $\bar{i}_0 = 10°$. Die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit ergibt für die zu bestimmende mittlere große Bahnhalbachse mit Formel (23.184) die Ausgangsnäherung $\bar{a}_0^{(0)} = 7136.635455699\,\text{km}$. Die Korrektur mit Formel (23.187) beträgt $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 17.76937497517\,\text{km}$, somit die erste verbesserte Lösung $\bar{a}_0^{(1)} = 7154.404830674\,\text{km}$. Die zugehörige mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P}_{D\,0}^{(1)} = 6000.08493585472\,\text{sec}$.

Eine weitere Verbesserung, die mit Hilfe der überlagerten Funktion (23.191) und ausschließlich mit säkularen Störgliedern $\left(J_2, J_4, \text{kein Luftwiderstand}\right)$ durchgeführt wird, ergibt $\bar{a}_0^{(2)} = 7154.337649278\,\text{km}$. Zur Kontrolle wird mit diesem Wert die mittlere drakonitische

Umlaufzeit berechnet: $\overline{P}_{D0}^{(2)} = 6000.00000507239747\,\text{sec}$, die a posteriori Genauigkeit ist also besser als $10^{-5}\,\text{sec}$.

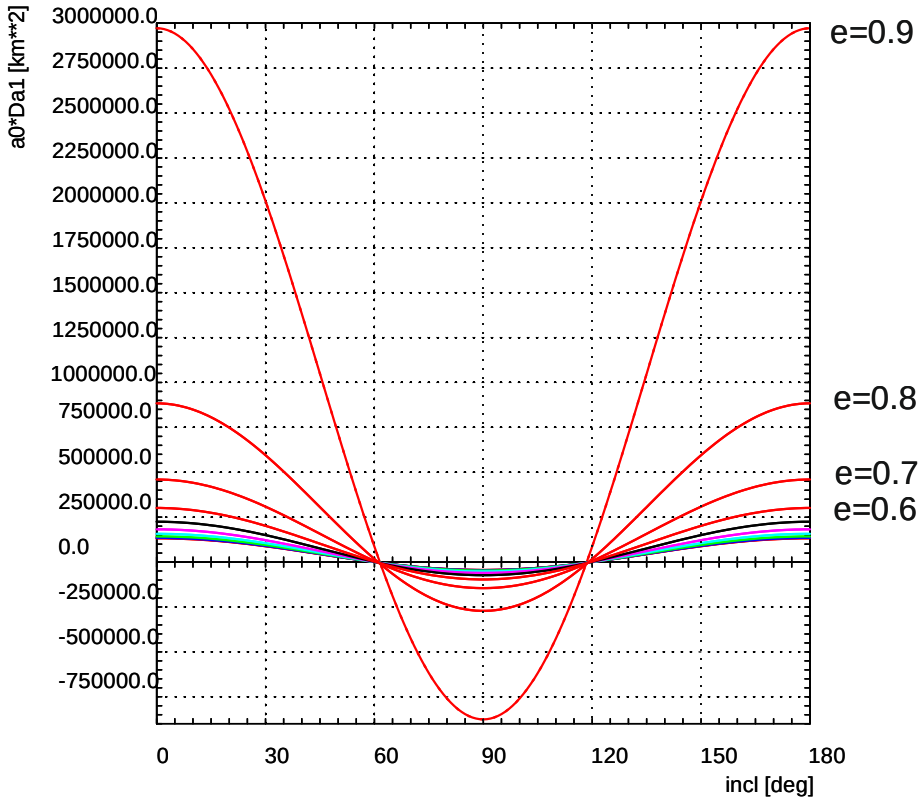


Bild 23-10: Der von der nullten Näherung $\overline{a}_0^{(0)}$ unabhängige Korrekturterm $\overline{a}_0^{(0)}\,\Delta\overline{a}_0^{(1)}$ zur Berechnung einer Näherung erster Ordnung der großen Bahnhalbachse bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit, über der Inklination für Exzentrizitäten e>0.5 (Ergänzung zu Bild 23-9)

Werden dagegen bei Lösung der überlagerten Funktion (23.191) die periodischen Störungen im verwendeten Bahnmodell (J_2, J_3, J_4) zugelassen, so ergibt sich der modifizierte Wert $\overline{a}_0^{(2p)} = 7154.337637071\text{km}$ mit der zugehörigen mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P}_{D0}^{(2p)} = 5999.99998964014139\,\text{sec}$, die - wie zu erwarten war – mit besser als $10^{-4}\,\text{sec}$ etwas ungenauer als der ohne die periodischen Störungen erhaltene Wert ist.

Zur Ergänzung: in diesem Fall hat der Korrekturterm nach Beziehung (23.187) den Wert $\overline{a}_0^{(0)}\,\Delta\overline{a}_0^{(1)} = 126813.6\,\text{km}^2$. Wird diese Zahl durch $\overline{a}_0^{(0)}$ dividiert, ergibt sich genau die obige Korrektur $\Delta\overline{a}_0^{(1)}$.

In Ergänzung sei neben den obigen Zahlenwerten $\overline{P}_{D0}$=6000 sec und $\overline{i}_0 = 10°$ die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.08$ gefordert, womit eine Perigäumshöhe von 202 km erhalten werden kann. Die entsprechende mittlere große Bahnhalbachse lautet $\overline{a}_0 = 7152.796\,\text{km}$. Wird zur Kontrolle die entsprechende mittlere drakonitische Umlaufzeit berechnet, erhält man den fehlerhaften Wert $\overline{P}_D^{(0)}$ = 5997.71492 sec. Da die Halbachse durch Iteration mit der Bedingungsgleichung (23.191) erhalten wurde, muss die entsprechende drakonitische Umlaufzeit mit der analogen Iteration nach (23.155) berechnet werden. In diesem Fall wurde die Halbachse nur mit säkularen

Bewegungseinflüssen $\left(J_2, J_4\right)$ berechnet. Dem entspricht die säkulare drakonitische Umlaufzeit $P_{D,\sec} = 5999.9999383\,\mathrm{s}$. Werden dagegen die periodischen Bewegungseinflüsse durch $\left(J_2, J_3, J_4\right)$ zugelassen, lautet die zugehörige große Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 7152.789\,\mathrm{km}$. Die mit diesem Wert berechnete wahre drakonitische Umlaufzeit beträgt $P_{D,\sec} = 5999.99999996\,\mathrm{s}$.◀

23.3.5.2 Berechnung der Exzentrizität aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

Mit Hilfe von Formel (23.161) kann bei Vorgabe der Epocheparameter, der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_{D\,0}}$, der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und der mittleren Inklination $\overline{i}_0$ die entsprechende mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0$ berechnet werden. Die benötigten mittleren Bewegungen sind

$$\overline{n_{D\,0}} = \frac{2\pi}{\overline{P_{D\,0}}} \quad , \quad \overline{n_{K\,0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \quad . \tag{23.192}$$

Die Berechnung muss iterativ durchgeführt werden. Um einen (nicht ganz willkürlichen) Anfangswert zu bekommen, kann die im Rahmen der anomalistischen Bewegung gefundene Anfangslösung gewählt werden[1]

$$\overline{e}_0^{(0)} = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_E}{\overline{a}_0}\right)^2 \frac{1 - 3\cos^2 \overline{i}_0}{1 - \frac{2\pi}{\overline{P_{D\,0}}} \sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}}}}^{\,3}} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.193}$$

Zur Durchführung der Iteration wird die Bedingungsfunktion

$$fct\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) \equiv \overline{P_D}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_{D\,0}} = 0 \qquad \langle \nu = 0, 1, 2, \cdots \tag{23.194}$$

gewählt. Mit der berechneten Näherung $\overline{e}_0^{(\nu)}$ können die säkulare Epocheanomalie und das Argument des Perigäums in erster Näherung berechnet werden. Die entsprechende mittlere drakonitische Umlaufzeit folgt dann (entsprechend dem Ausdruck (23.161), ohne Berücksichtigung der Einflüsse durch den Luftwiderstand) aus

$$\overline{P_D}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi}{\overline{n_D}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right)} \quad , \quad \overline{n_D}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = \overline{n_{K\,0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) + \dot{\omega}_s\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) \quad . \tag{23.195}$$

BEISPIEL: Gegeben seien $\overline{P_{D\,0}} = 43200\,\mathrm{sec}$, $\overline{a}_0 = 26614.6234\,\mathrm{km}$, $\overline{i}_0 = 23°$. Die Anfangsnäherung nach Formel (22.176) lautet $\overline{e}_0^{(0)} = 0.7496737072014$ mit $\overline{P_D}\left(\overline{e}_0^{(0)}\right) = 43165.95914\,\mathrm{sec}$. Die Iteration mit Hilfe d(22.176) er Bedingungsfunktion (23.194) ergibt nach etlichen Schritten die Exzentrizität $\overline{e}_0^{(\nu)} = 0.2375968048119$ mit der jetzt berechneten mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = 43199.99999998\,\mathrm{sec}$, die Genauigkeit beträgt somit $10^{-8}\,\mathrm{sec}$. Für eine weitere Kontrolle wird die Differenz im Argument der Breite zwischen Anfangs- und Endwert

---

[1] Siehe in Abschnitt 22.5.3

über einen drakonitischen Umlauf berechnet. Diese Differenz müsste exakt 360° betragen. Allerdings ergibt die Berechnung den Wert $\Delta u = 359°.9583514746 \mathrel{\hat{=}} 359°\,57'\,30''$. Eine bessere Näherung erlaubt das Verfahren nicht, was ein Hinweis auf die Sensitivität der Berechnung mit Hilfe der Exzentrizität ist. Weitere Berechnungen, die auf diesen Ergebnissen fußen, sollten daher mit höchstens der Genauigkeit 10^{-3} sec durchgeführt werden. Das Beispiel zeigt, dass die Näherungsformel (22.176) einen für sich allein genommen unbrauchbaren Wert liefert. Erst die iterative Verbesserung führt zu einem brauchbaren Ergebnis. In der praktischen Anwendung dürfte die Berechnung der Exzentrizität bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit nur untergeordnete Bedeutung haben. ◄

23.3.5.3 Berechnung der Inklination aus der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

Die mittlere drakonitische mittlere Bewegung (23.49) in erster Ordnung erlaubt die Auflösung nach der mittleren (Epoche-) Inklination

$$\cos^2 \bar{i}_0^{(0)} = \frac{1}{5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}} \left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2} - \frac{4\,\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2 \left(1-\frac{\overline{n_{D\,0}}}{\overline{n}_{K\,0}}\right)}{3\,J_2\,R_E^2} \right] \quad . \tag{23.196}$$

Bei Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P}_{d\,0}$, der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ kann somit die mittlere Inklination berechnet werden. Die entsprechenden mittleren Bewegungen können aus (23.192) übernommen werden. Zusätzlich zu diesen Vorgaben muss noch bekannt sein, ob die Bahn rechtläufig oder rückläufig sein soll. Der Faktor J_2 im Nenner des obigen Ausdrucks zeigt, dass diese ganze Theorie nur im Fall eines abgeplatteten Zentralkörpers mit $J_2 \neq 0$ sinnvoll ist.

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, muss durch Vorgabe des Faktors $\operatorname{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right)$ gewählt werden, ob die Bahn im auf- oder absteigenden Bahnast betrachtet werden soll. Die Lösung lautet dann

$$\cos \bar{i}_0^{(0)} = \operatorname{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right) \sqrt{\frac{1}{5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}} \left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2} - \frac{4\,\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2 \left(1-\frac{\overline{n_{D\,0}}}{\overline{n}_{K\,0}}\right)}{3\,J_2\,R_E^2} \right]} \quad . \tag{23.197}$$

Analog (23.195) wird die jeweilige mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P}_D\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right)$ in jedem Iterationsschritt mit den entsprechenden säkularen Variationen erster Ordnung in $\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ und $\dot{\omega}_s$ berechnet. Ausgehend von dieser Anfangslösung kann eine iterative Bearbeitung erfolgen mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) \equiv \overline{P}_D\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P}_{D\,0} = 0 \qquad \langle \nu = 0,1,2,\cdots \quad . \tag{23.198}$$

BEISPIEL: Gegeben seien die Bahnparameter $\bar{a}_0 = 20000\,\text{km}$, $\bar{e}_0 = 0.4$, $\text{sgn}\left(\cos \bar{i}_0\right) = -1$, $\overline{P_D} = 28154.0900\,\text{s}$. Formel (23.197) liefert die Näherungslösung $\bar{i}_0^{(0)} = 100°.00897$. Zur Kontrolle wird die entsprechende mittlere drakonitische Umlaufzeit berechnet: $\overline{P_{D\,0}^{(0)}} = 28154.08864634\,\text{sec}$, der Fehler liegt bei etwa $10^{-3}\,\text{sec}$. Wird eine Verbesserung mit der Bedingungsfunktion (23.198) gewünscht, kann nach einigen Iterationsschritten der Wert $\bar{i}_0^{(\nu)} = 100°.00008348$ erhalten werden. Die zugehörige drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{D\,0}^{(\nu)}} = 28154.09000123\,\text{sec}$ mit der Genauigkeit $10^{-6}\,\text{sec}$. Der Fehler im Argument der Breite nach einem drakonitischen Umlauf beträgt $\Delta u = 0°.0553018764$, was einen Hinweis auf die Sensitivität aber auch Zuverlässigkeit des Verfahrens gibt. ◄

23.3.6 Bahnauswahl aus drakonitischen Tagesumläufen

Die Anzahl der Umläufe eines Erdsatelliten pro Tag um die Erde ist ein anschaulich charakterisierender Parameter einer Erdsatellitenbahn. Wegen des Bezugs auf den Knotenüberflug wird der Umlauf um die Erde durch die drakonitische Umlaufzeit charakterisiert. Die Anzahl der Tagesumläufe beträgt daher

$$N_0 = \frac{86400\,\text{s}}{\overline{P_D}\left[\text{s}\right]} \triangleq \frac{1}{\overline{P_D}\left[\text{d}\right]} \quad . \tag{23.199}$$

Der ganzzahlige Anteil der Tagesumläufe, der für manche allgemeingültige Aussagen in einer Satellitenbahnanalyse von Bedeutung ist, kann mit der Funktion

$$\tilde{N}_0 = \text{int}\left(N_0\right) \tag{23.200}$$

berechnet werden. Wird als untere Schranke eine kreisförmige Erdsatellitenbahn in etwa 200 km Bahnhöhe gewählt, beträgt deren *Kepler*sche Umlaufzeit $\overline{P_{K0}} \approx 5310\,\text{s}$, somit gilt die Relation

$$\tilde{N}_0 \le 16 \quad . \tag{23.201}$$

Ganz allgemein gilt die Aussage:

- *Ein Erdsatellit kann pro Sonnentag höchstens 16 ganze Erdumläufe vollenden*.

An M_0 Tagen kann ein Erdsatellit

$$N_{0M} = M_0 \frac{86400\,\text{s}}{\overline{P_D}\left[\text{s}\right]} \quad \text{mit} \quad \frac{N_{0M}}{M_0} \le 16 \tag{23.202}$$

drakonitische Umläufe vollenden. Wird umgekehrt verlangt, dass ein Satellit an M_0 Tagen N_{0M} drakonitische Erdumläufe vollenden soll, muss seine mittlere drakonitische Umlaufzeit den Wert

$$\overline{P_D} = \frac{N_{0M}}{M_0} 86400\left[\text{s}\right] \tag{23.203}$$

haben. Damit kann etwa die große Bahnhalbachse nach Abschnitt 23.3.5.1 berechnet werden, wenn Exzentrizität und Inklination zusätzlich auf Grund anderer Vorgaben bekannt sind.

BEISPIEL: Auf einer kreisförmigen Bahn umlaufe ein Satellit die Erde unter der Bahnneigung i=50° in 12 Tagen 170 mal. In welcher Bahnhöhe fliegt der Satellit?

Die Relation (23.202) ist mit $N_{0M} / M_0 = 170/12 = 14.1666667 < 16$ erfüllt. Die gewünschte drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_d} = 1.694117647\,\mathrm{h} \triangleq 6098.82352942\,\mathrm{s}$. Als nullte Näherung folgt aus Formel (23.184) $\bar{a}_0^{(0)} = 7214.790\,\mathrm{km}$. Die Korrektur (23.187) $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 3.98435969\,\mathrm{km}$ ergibt in erster Näherung . $\bar{a}_0^{(1)} = 7218.76931683\,\mathrm{km}$. Eine weitere Verbesserung mit Hilfe der Bedingungsfunktion (23.191) ergibt $\bar{a}_0^{(2)} = 7218.75175768\,\mathrm{km}$. Zur Kontrolle wird die entsprechende mittlere drakonitische Umlaufzeit berechnet $\overline{P_{D0}}^{(2)} = 6098.82352941097997\,\mathrm{sec}$. Die Genauigkeit liegt somit bei $10^{-8}\,\mathrm{sec}$. Die gesuchte mittlere Bahnhöhe beträgt 840.615 km. ◄

23.3.7 Die oskulierende drakonitische Umlaufzeit

Die oskulierende drakonitische Umlaufzeit war in der Anfangszeit der Satellitenbahnmechanik von besonderem Interesse[1]. Die Herleitung ist aufwendig (und fehleranfällig). Die in diesem Abschnitt gewählte Entwicklung stützt sich auf die Arbeit von E. A. ROTH [1982][2] . Die benötigten unbestimmten und bestimmten Integrale über der wahren Anomalie bzw. dem Argument der Breite sind in Anhang D (Band V) zusammengestellt.

Bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten wird die oskulierende drakonitische Umlaufzeit entsprechend der Zerlegung (23.62) berechnet mit dem Integral

$$P_{D0} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{dt}{du}\right)du = \int_0^{2\pi}\left(\frac{dt}{du}\Big|^{(0)}\right)du + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\Big|^{(0)}\Delta p\right]du + \\ + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\Big|^{(0)}\Delta e\right]du + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial i}\Big|^{(0)}\Delta i\right]du + \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial \omega}\Big|^{(0)}\Delta \omega\right]du + \cdots \tag{23.204}$$

Nach Formel (23.64) kann das erste dieser Integrale aufgespalten werden in

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{dt}{du}\Big|^{(0)}\right)du =: \Delta t_1\Big|_0^{2\pi} + \Delta t_2\Big|_0^{2\pi} \quad . \tag{23.205}$$

Davon ergibt der erste Anteil die oskulierende *Kepler*sche Umlaufzeit im aufsteigenden Knoten

---

[1] Siehe etwa die Arbeiten von *I. D. Zhongolovich*, referiert in Abschnitt 2.10.8 (Band I), hochgenaue Formel bei A. J. CLAUS and A. G. LUBOWE [1963], ferner R. H. MERSON [1961] und [1963], L. BLITZER [1957] und [1964]. Vorsicht: in der englischsprachigen Literatur wird die drakonitische Umlaufzeit in verwirrender Weise als „nodal period" bezeichnet, nicht zu verwechseln mit „Umlaufzeit des Knotens".

[2] *Dr. Ernst A. Roth* (ESOC-Darmstadt) ist kurz nach Abschluss dieser Arbeit in Rente gegangen und kurz darauf verstorben. Daher darf diese Arbeit vielleicht als *Roth*s Vermächtnis bezeichnet werden.

$$P_{D1} := \Delta t_1\Big|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{p_0^2}{\sqrt{\mu p_0}\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2}\,du = 2\pi\sqrt{\frac{a_0^3}{\mu}} = P_{K0} \quad . \tag{23.206}$$

Es bleibt als zweiter Anteil der direkte Beitrag der Variation des Argumentes der Breite nach der Zeit

$$\begin{aligned}\Delta P_{D2} := \Delta t_2\Big|_0^{2\pi} &= -3\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}\,J_2\,R_E^2\,\cos^2 i_0\sqrt{\frac{a_0^3}{\mu}}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 u}{\left[1+e_0\cos\left(u-\omega_0\right)\right]^2}\,du = \\ &= -P_{K0}\,3\,J_2\,R_E^2\,\cos^2 i_0\left[\sin^2\omega_0+\cos 2\omega_0\,\frac{1-e_0^2}{1+\sqrt{1-e_0^2}}\right] \quad .\end{aligned} \tag{23.207}$$

Mit den partiellen Ableitungen (23.71) - (23.74) sowie den Integralen (23.97) $\left(\Delta p = p - p_0\right)$, (23.111) $\left(\Delta e = e - e_0\right)$, (23.149) $\left(\Delta\omega = \omega - \omega_0\right)$, sowie wegen (23.74) ergeben sich über einen drakonitischen Umlauf bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten und die dort geltenden oskulierenden Bahnparameter die folgenden weiteren Integrale:

$$\begin{aligned}\Delta P_{Dp} := \int_0^{2\pi}\left[\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial p}\right|^{(0)}\Delta p\right]du &= -P_{K0}\,\frac{9}{2p_0^2}\,\frac{J_2\,R_E^2}{e_0^2}\sin^2 i_0\left\{\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}\left(-1+2\cos^2\omega_0\right)+\right. \\ &\left.+\left[1+2e_0^3\cos\omega_0+\left(-2+3e_0^2\right)\cos^2\omega_0\right]\right\}+O\left(J_2^2\right)\end{aligned} \tag{23.208}$$

$$\begin{aligned}\Delta P_{De} := \int_0^{2\pi}\left[\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial e}\right|^{(0)}\Delta e\right]du &= \\ = P_{K0}\,\frac{3\,J_2\,R_E^2}{2\,p_0^2}&\left\{\frac{\sin^2 i_0\left(1-e_0^2\right)\left(-2+4\cos^2\omega_0\right)\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}}{e_0^4}+\right. \\ \left.+\left[\frac{\left(1+e_0\cos\omega_0\right)^3}{1-e_0^2}+\frac{\sin^2 i_0}{e_0^4}\left(2-5e_0^2+2e_0^4-2e_0^5\cos\omega_0+\left(-4+10e_0^2-7e_0^4\right)\cos^2\omega_0\right)\right]\right.&+O\left(J_2^2\right)\end{aligned} \tag{23.209}$$

$$\Delta P_{D\omega} := \int_0^{2\pi}\left[\left.\frac{\partial\left(\frac{dt}{du}\right)}{\partial\omega}\right|^{(0)}\Delta\omega\right]du = -P_{K0}\,\frac{3\,J_2\,R_E^2}{4e_0^5\,p_0^2}\left\{\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}\left[-2e_0^2+4e_0^2\cos^2\omega_0+\right.\right. \tag{23.210}$$

$$+\sin^2 i_0\left(-2+3e_0^2\right)\left(-1+2\cos^2\omega_0\right)\Big]+2e_0^2-2e_0^2\left(2-e_0^2\right)\cos^2\omega_0+$$

$$+2\sin^2 i_0\left[\left(1-2e_0^2\right)+\left(-2+4e_0^2-e_0^4\right)\cos^2\omega_0\right]\Bigg\}-$$

$$-P_{K0}\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i_0\right)\frac{1}{\left(1+e_0\cos\omega_0\right)^2}\quad+O\left(J_2^2\right)$$

Zusammenfassend lautet die oskulierende drakonitische Umlaufzeit bei Bezug auf den aufsteigenden Knoten in erster Ordnung

$$P_{D0}=P_{D1}+\Delta P_{D2}+\Delta P_{Dp}+\Delta P_{De}+\Delta P_{D\omega}$$

$$P_{D0}=P_{K0}\left\{1-\frac{3J_2R_E^2}{p_0^2}\left[\frac{\left(1+e\cos\omega_0\right)^3}{2\left(1-e_0^2\right)}+\left(1-\frac{5}{4}\sin^2 i_0\right)\frac{\sqrt{\left(1-e_0^2\right)^3}}{\left(1+e_0\cos\omega_0\right)}\right]+O\left(J_2^2\right)\right\}\quad . \tag{23.211}$$

Anmerkung: Eine weitere Diskussion dieser Formel und ihre historische Einordnung kann bei E. A. ROTH [1982] nachgelesen werden. ◀

23.3.8 Beispiel für die oskulierenden Geschwindigkeiten auf drakonitischen Umläufen

Um das Bewegungsverhalten erdnaher Satelliten über einen oder mehrere drakonitische Umläufe quantitativ beurteilen zu können, werden in den folgenden Bildern Bild 23-11 bis Bild 23-14 die oskulierenden Variationen von Radius und den Geschwindigkeiten dargestellt. Als Beispiel wurden die Bahndaten der D1-Mission gewählt (oskulierende Epocheparameter: a= 6704.529 km, e= 0.00080458, i= 57°.00321433, Ω= 174°.95883908, ω= 13°.49907356, M_0= 213°.8575965). Wegen der fast vernachlässigbaren Exzentrizität unterscheiden sich die absolute Geschwindigkeit *V* und die transversale Geschwindigkeit V_T kaum voneinander.

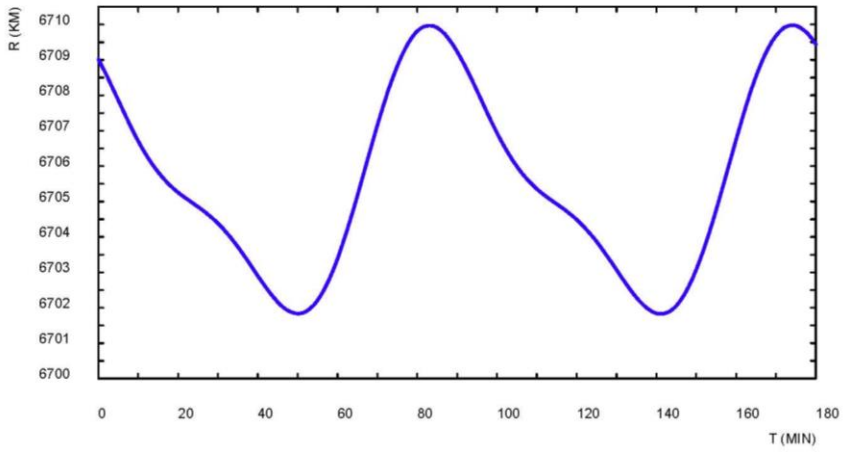


Bild 23-11: Verlauf des Bahnradius der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe

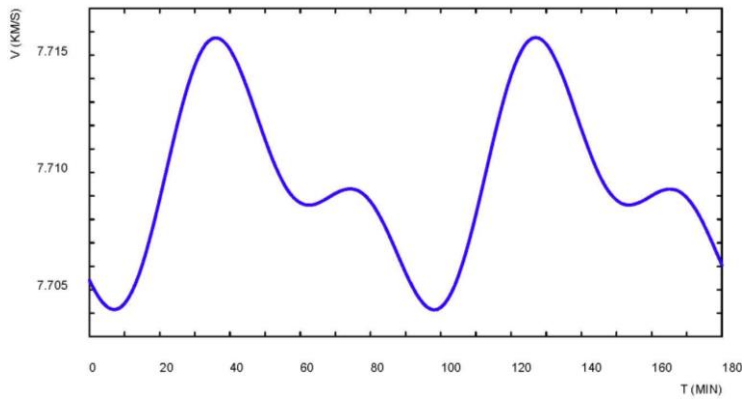


Bild 23-12: Verlauf der Bahngeschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe

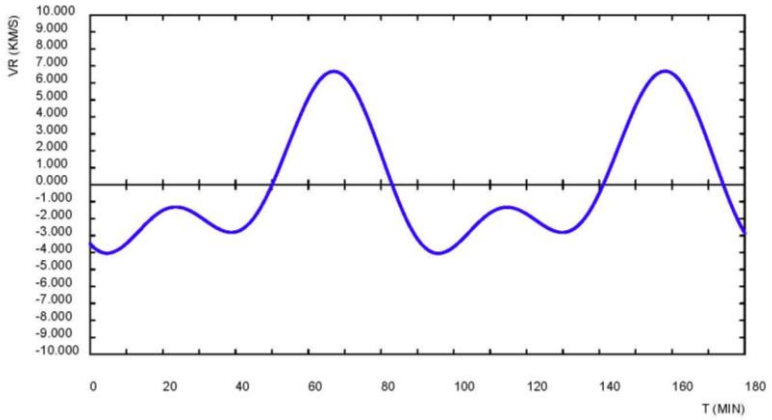


Bild 23-13: Verlauf der radialen Geschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe

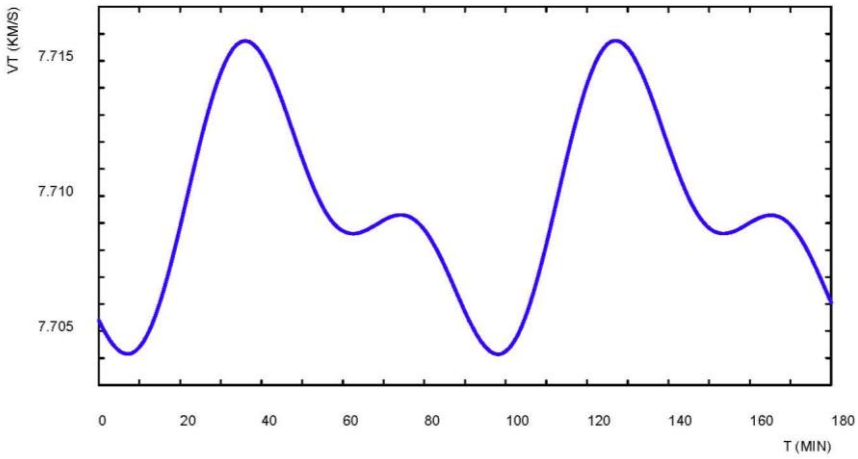


Bild 23-14: Verlauf der transversalen Geschwindigkeit der D1-Mission über zwei drakonitische Umläufe

23.4 Die inertiale Wanderung der Knoten

23.4.1 Die säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens

Die räumliche Beschreibung einer drakonitischen Bewegung erfordert neben der Kenntnis des Argumentes der Breite auch die Kenntnis der Wanderung der Knoten der Bahn längs der Äquatorebene. Die oskulierende Verschiebung der Knoten pro drakonitischem Umlauf kann mit

Kenntnis der Variationsgleichung der Rektaszension des aufsteigenden Knotens aus den Formeln[1] (11.104) durch Integration des Integrals

$$\Delta\Omega = \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \dot{\Omega}\, du = \int_{u_0}^{u_0+2\pi} \frac{r \sin u}{G \sin i}\, du \tag{23.212}$$

erhalten werden. Dieses Integral ist stets definiert, da der Flächenparameter in den normalen Fällen einer Satellitenbewegung als positive Größe $\left(\text{mit } G = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}| > 0\right)$ aufgefasst werden darf. Außerdem werden äquatoriale Bahnen im Fall der drakonitischen Bewegung nicht betrachtet, d.h. es kann immer $\sin i \neq 0$ angenommen werden.

Bei bahnanalytischen Untersuchungen interessiert nur die mittlere Knotenverschiebung, die bei konstanter säkularer Drift $\dot{\Omega}_s$ (etwa nach Formel (20.15)) im Zeitintervall $t_2 - t_1$

$$\Delta\bar{\Omega}[t_2, t_1] = \dot{\Omega}_s (t_2 - t_1) \tag{23.213}$$

beträgt. Entsprechend lautet sie mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

$$\Delta\bar{\Omega}\left[\overline{P_D}\right] = \dot{\Omega}_s\, \overline{P_D} \quad . \tag{23.214}$$

BEISPIEL 1: Um einen Eindruck über die für Erdsatelliten zu erwartenden quantitativen Größenordnungen zu bekommen, wird in Bild 23-15 die tägliche Drift des mittleren Knotens für schwach exzentrische Bahnen (e=0.1) und für verschiedene große Bahnhalbachsen über der Inklination aufgetragen. Es zeigt sich, dass für erdnahe Bahnen Driften in der Größenordnung von 6°/Tag zu erwarten sind, die allein auf den Einfluss der zonalen Harmonischen J_2 zurückzuführen sind. ◄

BEISPIEL 2: Um auch den Einfluss der Exzentrizität einer Erdsatellitenbahn abzuschätzen wird in Bild 23-16 die mittlere Knotendrift über einen drakonitischen Umlauf für Bahnen mit der großen Halbachse $\bar{a}_0 = 30000\,\text{km}$ für verschiedene Exzentrizitäten über der Inklination aufgetragen. Es zeigt sich, dass für kleine Exzentrizitäten (etwa im Bereich $0.0 \le e \le 0.2$) der Einfluss auf die Drift sehr klein ist, für große Exzentrizitäten (hier bis zu e=0.75) jedoch beträchtlich. ◄

23.4.2 Drehung der Knotenlinie und Wanderung der Knoten

Die Knotendrift wirkt sich auf die räumliche Orientierung einer Bahn erheblich aus. Es wandert die Knotenlinie einer Bahn, das ist die Verbindungslinie von aufsteigendem und absteigendem Knoten, längs der Bezugsebene, im Fall von Erdsatelliten längs des Äquators. Damit verschiebt sich auch die gesamte Bahnebene, welche dadurch im Raum verbogen erscheinen muss. Es ist wichtig zu wissen, dass diese Rotation der Bahnebene nichts mit der Rotation der Erde unter dieser Bahnbewegung zu tun hat.

BEISPIEL 1: Zur Veranschaulichung wird in Bild 23-17 die Verschiebung einer Satellitenbahn pro drakonitischem Umlauf als Folge der Erdabplattung demonstriert. Als Bahnelemente wurden *a*=7400 km, *e*=0.0, *i* = 57° verwendet. Für die Erdabplattung wurde der (unrealistische) Wert $J_2 = 0.05$ angesetzt. Die aufsteigenden Knoten der Bahn werden durch das Symbol ▲, die absteigenden Knoten durch X gekennzeichnet. ◄

---

[1] in Abschnitt 11.1.6, Band III

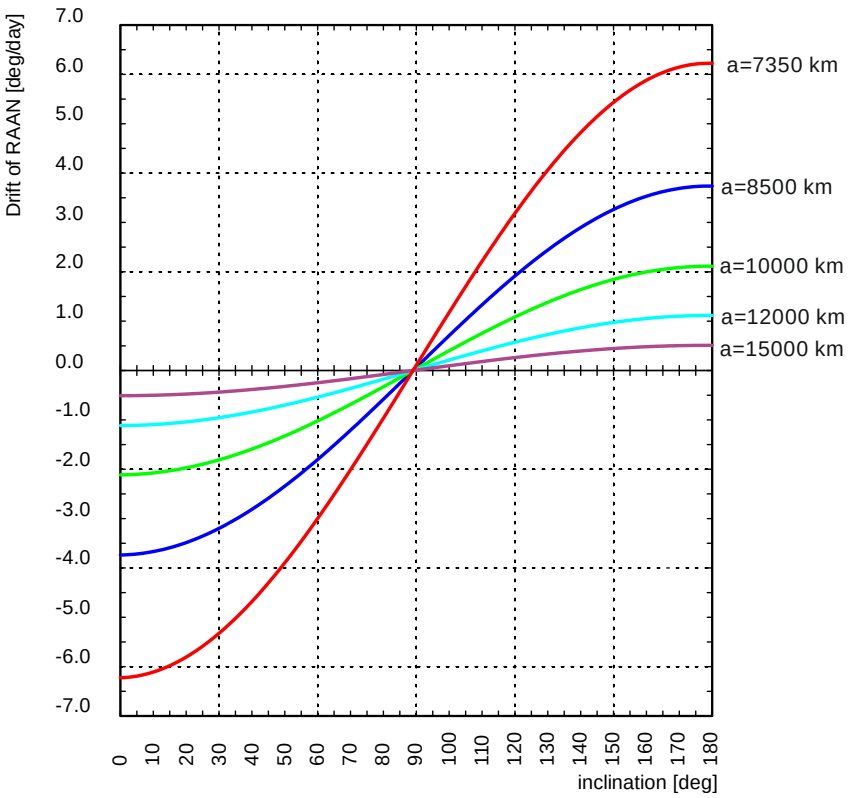


Bild 23-15: Tägliche Drift des aufsteigenden Knotens verschiedener Erdsatellitenbahnen mit unterschiedlichen großen Bahnhalbachsen, je mit der Exzentrizität e=0.1 über allen Inklinationen

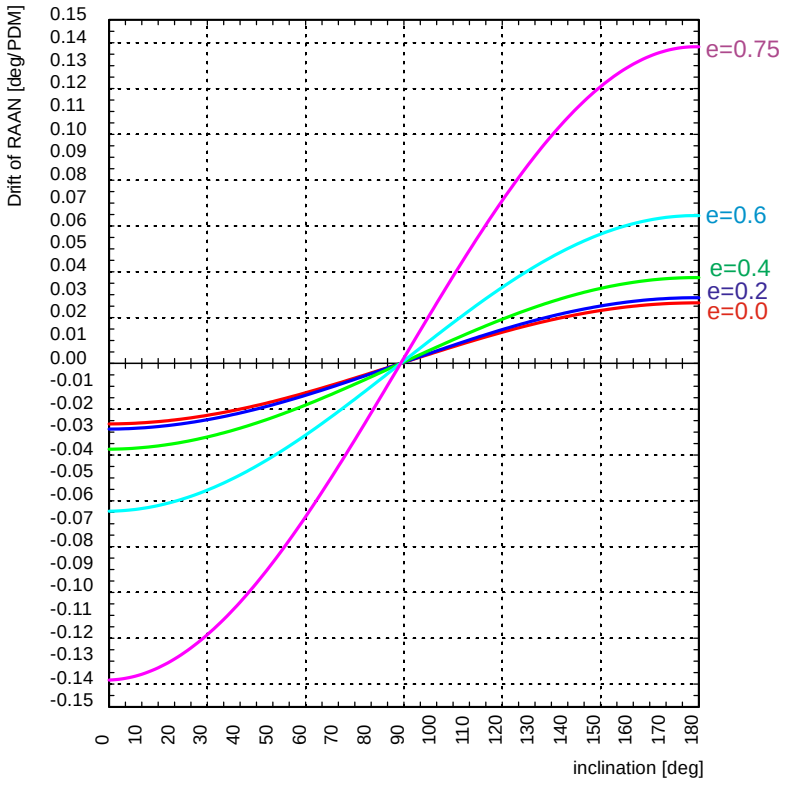


Bild 23-16: Tägliche Drift des aufsteigenden Knotens verschiedener Erdsatellitenbahnen je mit der großen Bahnhalbachse a=30000 km, mit verschiedenen Exzentrizitäten e=0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.75 und je über allen Inklinationen

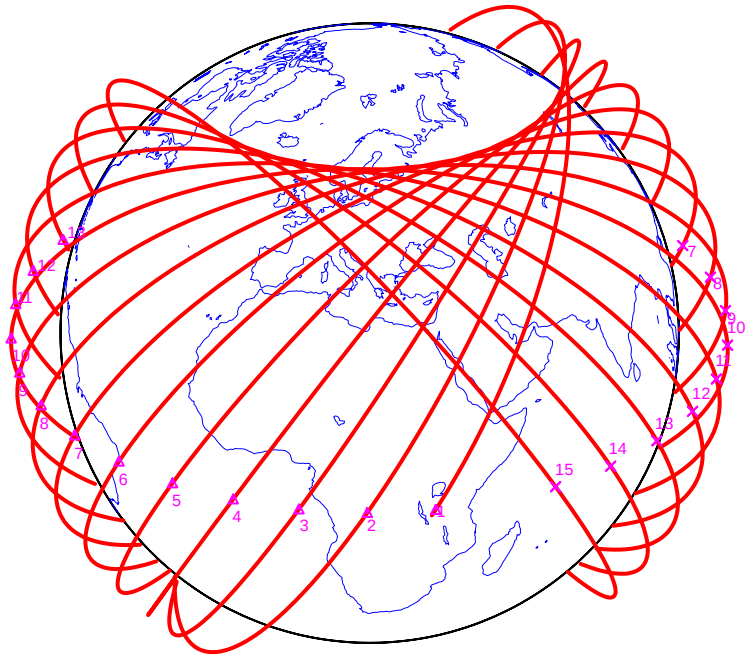


Bild 23-17: Qualitative Veranschaulichung der Verschiebung einer Bahn auf Grund der inertialen Knotenverschiebung als Folge der Erdabplattung. Zeitdauer 1 Tag (Die Erdrotation unter der inertialen Bahn ist nicht berücksichtigt)

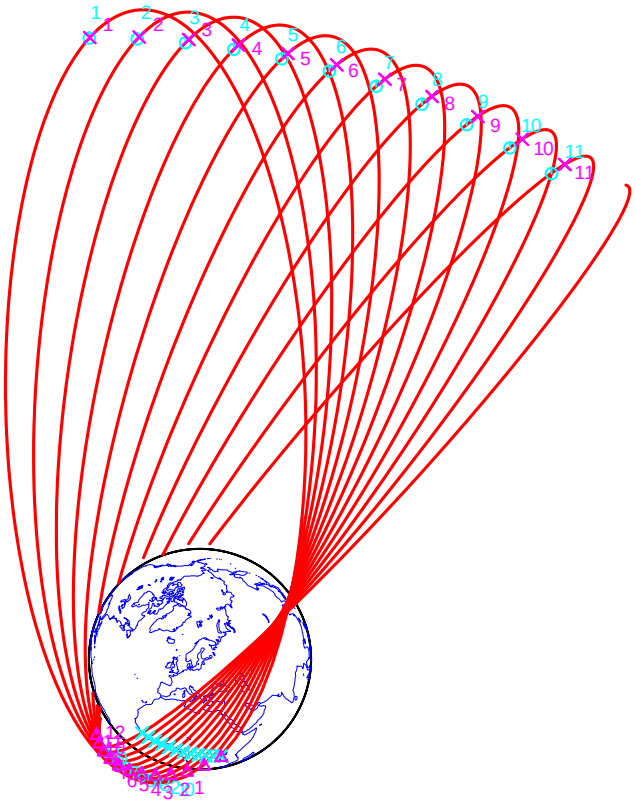


Bild 23-18: Qualitative Veranschaulichung der säkularen Bahnverschiebung auf Grund von Knoten- und Apsidendrift als Folge der Erdabplattung

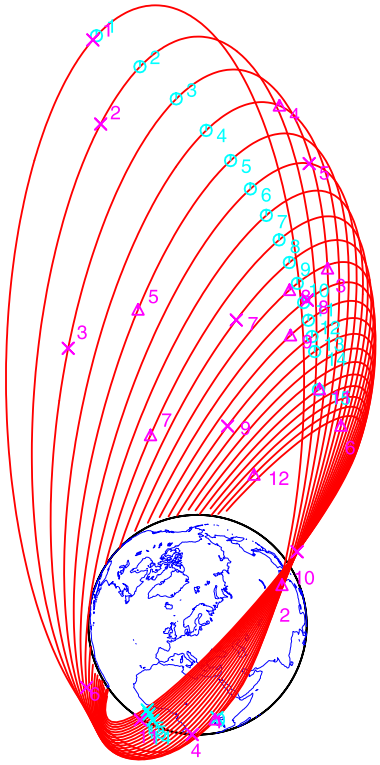


Bild 23-19: Wie Bild 23-18 jedoch zusätzlich mit Überlagerung durch den Luftwiderstand

BEISPIEL 2: In Bild 23-18 wird die Eigenbewegung einer Satellitenbahn infolge der Erdabplattung an einer hochexzentrischen Bahn demonstriert: es zeigt sich eine (inertiale) Drift der Apsiden sowie ein (inertiale) Drift der Knoten. Die Rotation des Erdkörpers ist nicht berücksichtigt (Die Darstellung der Erdoberfläche dient hier nur der Veranschaulichung). Bahndaten: a = 24354.797 km, e = 0.73, i = 60°.0, (Ω = 180°.0). Die Erdabplattung wird durch $J_2 = 0.02$ simuliert. Zeitdauer 5 Tage. ◄

BEISPIEL 3: In Bild 23-19 wird die Gesamtwirkung aus Erdabplattung und Luftwiderstand auf die Bewegung einer Satellitenbahn qualitativ dargestellt. Zusätzlich zu den Parametern der Bahn aus Bild 23-18 wird die Wirkung des Luftwiderstandes durch die säkulare Abnahme von großer Bahnhalbachse und Exzentrizität dargestellt: $\dot{a} = -30\,m/s, \dot{e} = -8\times10^{-7}$. Die Apsiden und Knoten sind charakterisiert und nummeriert. Zeitdauer: 5 Tage. ◄

23.5 Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift

Die Bahnebene eines Satelliten ist nicht raumfest. Ihre Eigenbewegung ist allerdings im Vergleich zur Erdrotation bei den meisten Bahnen (Ausnahmen sind geosynchrone Bahnen) verschieden, so dass der aufsteigende Knoten bezogen auf die Erdoberfläche nach einem drakonitischen Umlauf eine andere geographische Länge hat (vgl. Bild 23-1 auf Seite 146). Diese Knotenlängendifferenz

$$\Delta\lambda_\Omega := \lambda_\Omega\left(t_0 + P_D\right) - \lambda_\Omega\left(t_0\right) = \lambda_{\Omega 2} - \lambda_{\Omega 1} \tag{23.215}$$

ist für Untersuchungen der Beziehung einer Erdsatellitenmission zur Erdoberfläche von besonderer Wichtigkeit, somit insbesondere grundlegend für Erdbeobachtungssatelliten. Die für Erdbeobachtungssatelliten grundlegenden Größen mittlere Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift werden im folgenden Abschnitt hergeleitet und analysiert.

23.5.1 Herleitung von Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift

Ein Ort (λ, δ) im erdfesten (Greenwich-bezogenen) Äquatorsystem hat im Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystem die Winkelkoordinaten (α, δ) mit dem Bezug zwischen Rektaszension α und (östlicher) geographischer Länge λ

$$\alpha = \Theta_G + \lambda \quad . \tag{23.216}$$

Hier ist Θ_G die für den Meridian durch Greenwich gültige mittlere Sternzeit[1] zur Tageszeit t

$$\Theta_G = \Theta_G\left(t\right) = \Theta_{G0} + \dot{\Theta}\, t \quad , \tag{23.217}$$

wobei Θ_{G0} die mittlere Sternzeit für 0^h UT1 und die säkulare Variation $\dot{\Theta}$ das Verhältnis Sternzeit zur Sonnenzeit zur betreffenden Epoche somit der Betrag der tropischen Erdrotation (d.h. bei Bezug auf den Frühlingspunkt) ist:

$$\dot{\Theta} = 360°.9856473354\ \frac{1}{d} \triangleq 4°.17807461937\times10^{-3}\,\frac{1}{s} \triangleq 0.72921158573340\times10^{-4}\,\frac{1}{s}, \tag{23.218}$$

---

[1] Siehe hierzu die Zusammenstellung in Anhang E.2 (Band V)

Exakt gilt dieser Wert nur zur Fundamentalepoche J2000.0. Die Abweichungen relativ zur Fundamentalepoche sind zu einem anderen Zeitpunkt jedoch so gering, dass sie zumindest bei bahnanalytischen Untersuchungen vernachlässigt werden können. Die Variation der Winkelkoordinaten kann somit durch die Beziehung

$$\dot{\alpha} = \dot{\Theta} + \dot{\lambda} \tag{23.219}$$

dargestellt werden, wobei jedoch beachtet werden muss, dass $\dot{\Theta}$ ein säkularer Wert ist.

Für Untersuchungen der drakonitischen Satellitenbewegung wird der Bezug auf den aufsteigenden Knoten zwischen der Rektaszension Ω des aufsteigenden Knotens und der entsprechenden geographischen Länge λ_Ω entsprechend Beziehung (23.216)

$$\Omega = \Theta_G + \lambda_\Omega \tag{23.220}$$

durchgeführt. Die zugehörende Variation lautet

$$\dot{\Omega} = \dot{\Theta} + \dot{\lambda}_\Omega \quad . \tag{23.221}$$

In diesem Ausdruck sind säkulare und periodische Anteile enthalten:

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_s + \delta\left(\dot{\Omega}\right) \quad , \quad \dot{\lambda}_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s} + \delta\left(\dot{\lambda}_\Omega\right) \quad . \tag{23.222}$$

Für langfristige bahnanalytische Untersuchungen werden die periodischen Anteile vernachlässigt und es bleibt die grundlegende Beziehung

$$\dot{\Omega}_s = \dot{\Theta} + \dot{\lambda}_{\Omega s} \quad . \tag{23.223}$$

Die säkulare Variation des aufsteigenden Knotens für Erdsatelliten wird aus Formel (20.15) berechnet[1]. Dieser Wert ist für Erdsatelliten in der Größenordnung maximal 6° pro Tag, also wesentlich kleiner als die Erdrotation. Dies ergibt (wie auch aus der Anschauung unmittelbar ersichtlich):

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} \quad . \tag{23.224}$$

- *Die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ einer Erdsatellitenbahn ist stets negativ, die Bahnverschiebung erfolgt somit längs des Äquators stets in westlicher Richtung.*

Die mittlere Knotenlänge zu einem Zeitpunkt t hat (wenn $\bar{\Omega}_0$ ein mittlerer Anfangswert ist) die Beziehung

$$\overline{\lambda_\Omega}(t) = \bar{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_s\, t - \left(\Theta_{G0} + \dot{\Theta} t\right) \quad . \tag{23.225}$$

Die mittlere Knotenlängendifferenz zwischen in dem Zeitintervall $\left(t_2 - t_1\right)$ beträgt

$$\overline{\lambda_{\Omega 2}} - \overline{\lambda_{\Omega 1}} = \dot{\Omega}_s \left(t_2 - t_1\right) - \dot{\Theta}\left(t_2 - t_1\right) \quad . \tag{23.226}$$

Von besonderer Wichtigkeit ist ein mittlerer drakonitischer Umlauf mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$. In diesem Fall beträgt die mittlere Knotenlängenverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_D} \quad . \tag{23.227}$$

Diese Beziehung ist für die Untersuchung des Bahnverhaltens von Erdbeobachtungssatelliten von zentraler Bedeutung und soll deshalb als Fundamentalbeziehung *von Erdbeobachtungssatelliten* bezeichnet werden. Im Zusammenhang mit der Knotenlängendrift (23.224) ergibt sich die Aussage:

---

[1] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

➢ *Die mittlere Knotenlängenverschiebung über einen mittleren drakonitischen Umlauf ist bei Erdsatelliten stets negativ.*

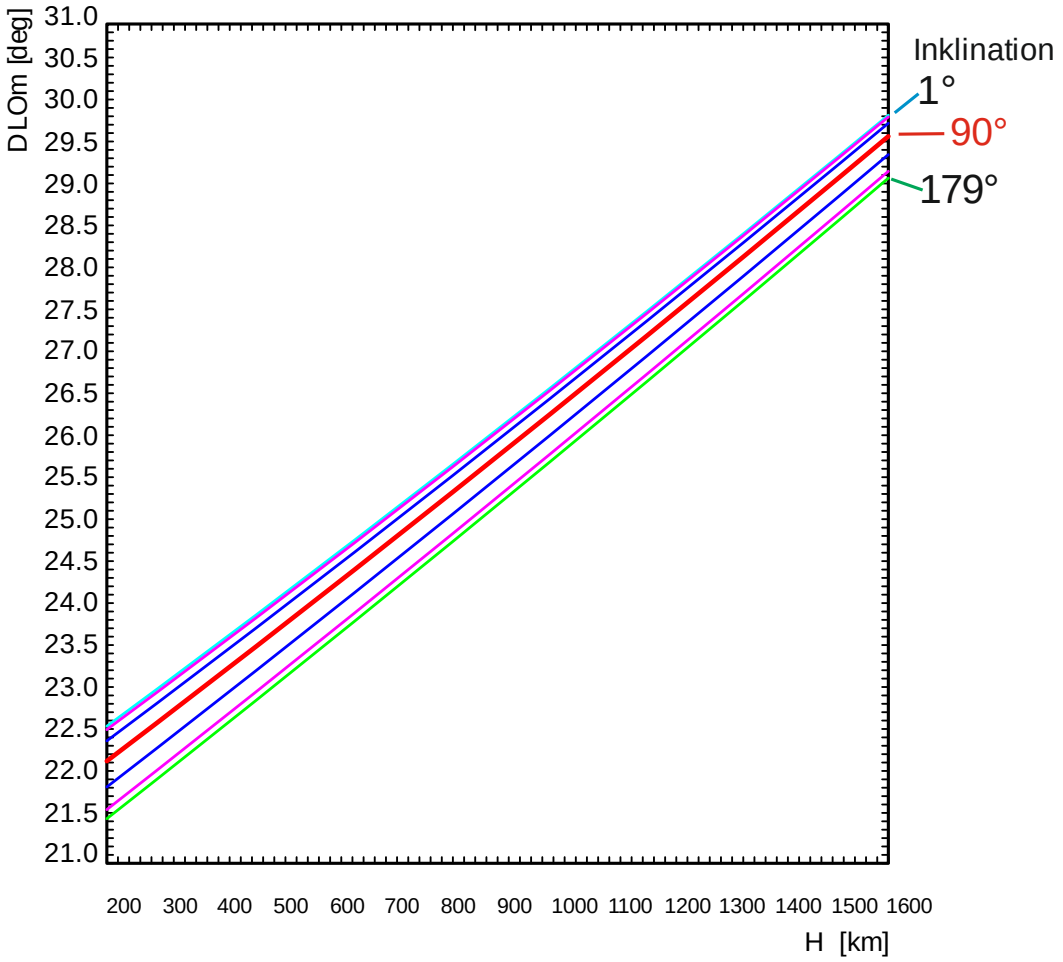


Bild 23-20: Die Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf für alle Kreisbahnen im Höhenbereich H = 200 – 1600 km für verschiedene Inklinationen (i=1°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 179°) (seine auch die Tabelle 23-4 auf Seite 202)

BEISPIEL 1: In Bild 23-20 wird die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf für einige Kreisbahnen aufgetragen. Die zugehörigen Abschätzungen sind in Tabelle 23-4 (auf Seite 202) enthalten. Diese Zahlenwerte schließen die Aussage über minimal mögliche Knotenlängenverschiebungen ein. ◄

In einer Bahnanalyse erster Ordnung ist die säkulare Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens gegeben durch den Ausdruck[1]

$$\dot{\Omega}_{s0} = -\frac{3}{2}\overline{n}_{K0}\, J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.228}$$

[1] siehe die Formel (20.15) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

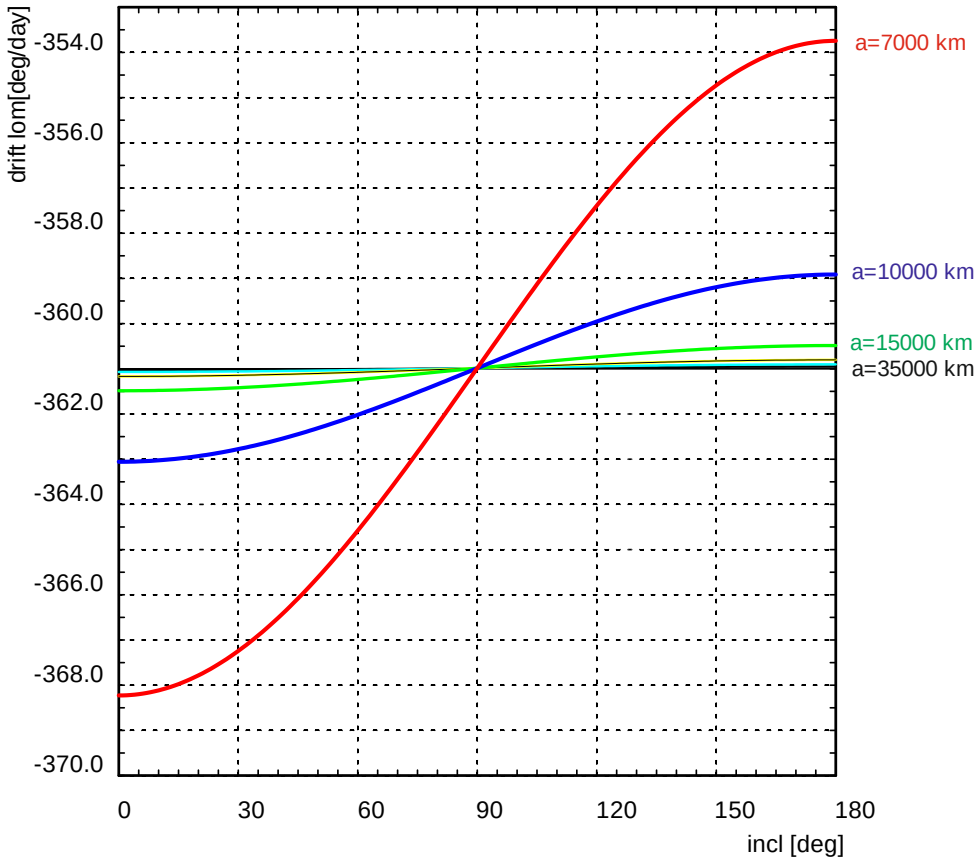


Bild 23-21: Die Knotenlängendrift über der Inklination für kreisförmige Bahnen und verschiedene große Bahnhalbachsen (a = 7000 km – a = 35000 km)

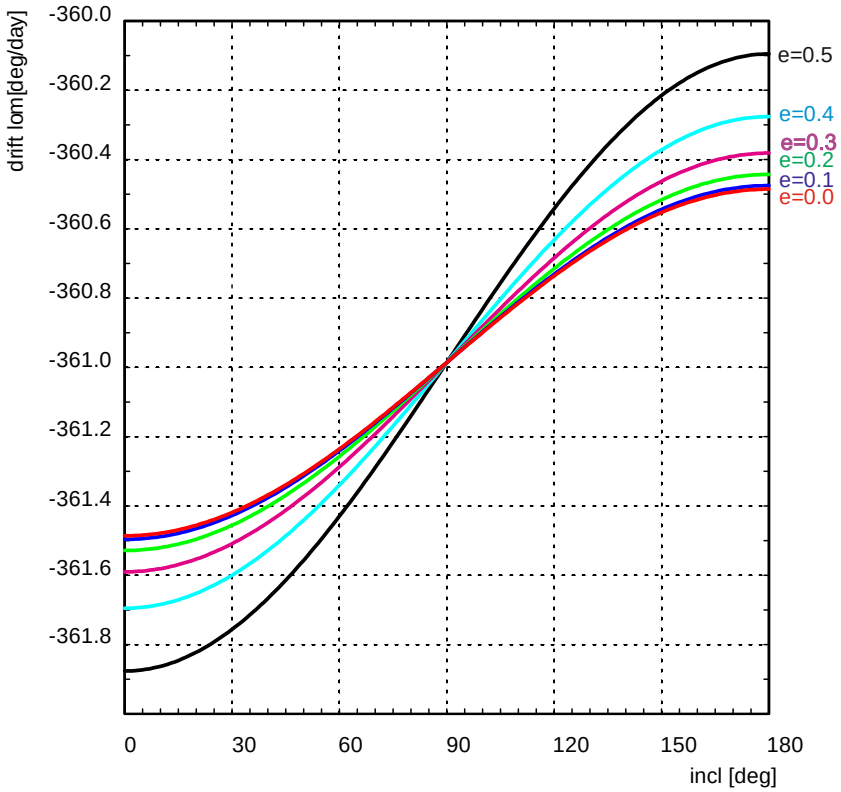


Bild 23-22: Die Knotenlängendrift über der Inklination für Bahnen mit der großen Halbachse a = 15000 km und verschiedene Exzentrizitäten von e =0.0 bis e = 0.5 über der Inklination

Entsprechend wird die säkulare Drift der Knotenlänge bei gegebener Exzentrizität am größten für erdnahe Bahnen sein, wie Bild 23-21 als quantitatives aber auch qualitatives Beispiel demonstriert. Der Verlauf der Kurve der Knotenlängendrift ist punktsymmetrisch zum entsprechenden Wert für die Inklination $i = 90°$. In diesem Fall verschwindet die säkulare Drift in der Rektaszension des aufsteigenden Knotens und die Knotenlängendrift wird ausschließlich durch die tropische Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde geprägt.

BEISPIEL 2: In Bild 23-1 ist die Knotenlängendrift über der Inklination für die kreisförmige Satellitenbahn mit Inklination i = 70° und verschiedenen großen Bahnhalbachsen von a = 7000 km bis 35000 km dargestellt. Ab etwa a = 20000 km ist die Variation der Knotenlängendrift über der Inklination nahezu vernachlässigbar, für erdnahe Bahnen ist sie jedoch äußerst beträchtlich. ◀

Inklination i	Mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$
1°	22°.63 – 29°.91
30°	22°.59 – 29°.89
60°	22°.46 – 29°.82
90°	22°.22 – 29°.89
120°	21°.91 – 29°.44
150°	21°.64 – 29°.25
179°	21°.53 – 29°.16

Tabelle 23-4: Variationsbereich der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf für Kreisbahnen über den Höhenbereich H = 200 – 1600 km für verschiedene Inklinationen (entsprechend der Grafik in Bild 23-20 auf Seite 200)

Ausgehend von diesen Kurven kann abgeschätzt werden, in welchem Bereich die Knotenlängendrift vorkommen kann. Dazu wird als erdnächste Bahn in der Bahnhöhe H = 200 km die große Bahnhalbachse a = 6578.140 km gewählt. Exzentrische Bahnen sind in dieser Höhe nicht sinnvoll, also e = 0.0. Der unterste Punkt der Verlaufskurve wird für i=0°, der oberste für i=180° erhalten. Somit hat das maximal mögliche Intervall für Erdsatelliten die Grenzen

$$-370° < \dot{\lambda}_{\Omega s} < -352° \quad . \tag{23.229}$$

Im Fall anderer Himmelskörper müssen diese Parameter entsprechend angepasst werden.

BEISPIEL 3: Um den Einfluss der Exzentrizität auf die Knotenlängendrift zu demonstrieren wird in Bild 23-22 der Verlauf der Knotenlängendrift über der Inklination für Satellitenbahnen mit der großen Bahnhalbachse a=15000 km über verschiedene Exzentrizitäten aufgetragen. Es zeigt sich, dass die Variation der Drift mit zunehmender Exzentrizität wächst, quantitativ jedoch nur mit mäßigen Beträgen. ◀

Die mittlere Knotenlängenverschiebung steht in engem grundsätzlichem Zusammenhang mit den Umläufen eines Satelliten um die Erde. Dazu wird längs des Äquators über eine Umdrehung der Erde um 360° die Relation $360° / \overline{\Delta\lambda_\Omega}$ betrachtet. Entscheidend ist, wann ein Satellit

nach einem Knotenumlauf wieder den Äquator überfliegt. Bezogen auf einen Anfangsknoten wird dies nach

$$N_1 = \text{int}\left[-\frac{360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1 \right] \tag{23.230}$$

drakonitischen Umläufen der Fall sein[1]. Diese Beziehung lässt sich erweitern auf den Fall von *K* Knotenumläufen um den Zentralkörper:

$$N_K = \text{int}\left[-\frac{K\ 360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1 \right] \qquad \langle\ K \in \mathbb{N} \quad . \tag{23.231}$$

BEISPIEL 4: Gegeben sei eine kreisförmige Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a} = 7089.597\,\text{km}$ und Inklination $\bar{i} = 70°$. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_D} = 5944.936\text{s} \hat{=} 1.651371\text{h}$. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25°$. Damit kann der Satellit pro Tag 14.533377 drakonitische Umläufe ausführen. Entsprechend Formel (23.230) befindet er sich nach $N_1 = 15$ drakonitischen Umläufen wieder in einem aufsteigenden Knoten seiner Bahn. Nach 7 Knotenumläufen (das sind **ungefähr** 7 Tage) und $N_7 = 101$ drakonitischen Umläufen wird wieder ein aufsteigender Knoten überflogen. ◄

Anmerkung: Es soll wiederholt darauf hingewiesen werden, dass der Begriff „Knotenumlauf" auf die Bewegung des Knotens somit der Bahn um den Zentralkörper bezogen ist. Er liegt quantitativ wegen Beziehung (23.224) im Bereich der Rotation $\dot{\Theta}$ des Zentralkörpers. Im Fall der Erde liegt dieser Parameter also im Größenbereich um 361°/Tag, wie etwa aus Bild 23-21 ersehen werden kann (exakter Wert in Formel (23.218)). Im Gegensatz dazu besagt der Begriff „drakonitische Bewegung" die Bewegung eines Satelliten bei **Bezug** auf den (aufsteigenden) Knoten. ◄

23.5.2 Die Knotenlängenverschiebung als Bezugsintervall

Die mittlere Knotenlängenverschiebung ist auch eine grundlegende Größe bei Untersuchungen des Bezugs gleichförmiger (in der Regel kreisnaher) Satellitenbahnen auf die Erdoberfläche. Hierzu wird die mittlere Knotenlängenverschiebung zwischen einem Anfangsknoten und dem nächsten aufsteigenden Knoten als Bezugsintervall gewählt. Alle in diesem Intervall untersuchten geometrischen Beziehungen etwa zwischen einem Sensor an Bord des Satelliten und der Erdoberfläche können dann auf die gesamte Satellitenbahn übertragen werden. Das bezieht sich zum Beispiel auf Überdeckungen mit feststehenden Sensorblickrichtungen und können vom Äquator auf einen beliebigen von dem betreffenden Satelliten aus erfassbaren Breitenkreis übertragen werden[2].

Von besonderem Interesse bei der Beobachtung der Erdoberfläche ist die Tatsache, dass die Projektion der Bodenspur rückläufiger Bahnen gegenüber rechtläufigen Bahnen gedehnt erscheint, wie in Bild 23-23 anschaulich demonstriert wird. Dies wirkt sich auf die Beobachtung

---

[1] Die Funktion <int> bezeichnet den ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl (BEISPIEL: int(7.52415) = 7)

[2] Näheres hierzu in den Kapiteln 32-34 (Band V)

von Zielgebieten auf der Erdoberfläche auf, wie sie etwa bei der Überdeckung eines Breitenkreises zu beobachten ist[1].

Allgemein können wir die Relation zwischen einem überflogenen Längenintervall in Bezug auf die rotierende Erde und dem entsprechenden Intervall im „inertialen“ Intervall untersuchen (als würde die Erde angehalten). Hier können wir über einem Überdeckungsintervall die *Verzerrungsrelation*

$$\Delta\lambda\left[t_2-t_1\right]=\Delta\alpha\left[t_2-t_1\right]-\mathrm{sgn}(\cos i)\dot{\Theta}\left(t_2-t_1\right) \tag{23.232}$$

herleiten. Für retrograde Bahnen wird das Überdeckungsintervall gedehnt, für rechtläufige Bahnen gestaucht. Wir können salopp formulieren:

- *„Erdbeobachtungsatelliten auf rückläufigen Bahnen sehen pro Umlauf mehr von der Erdoberfläche als auf rechtläufigen Bahnen“.*

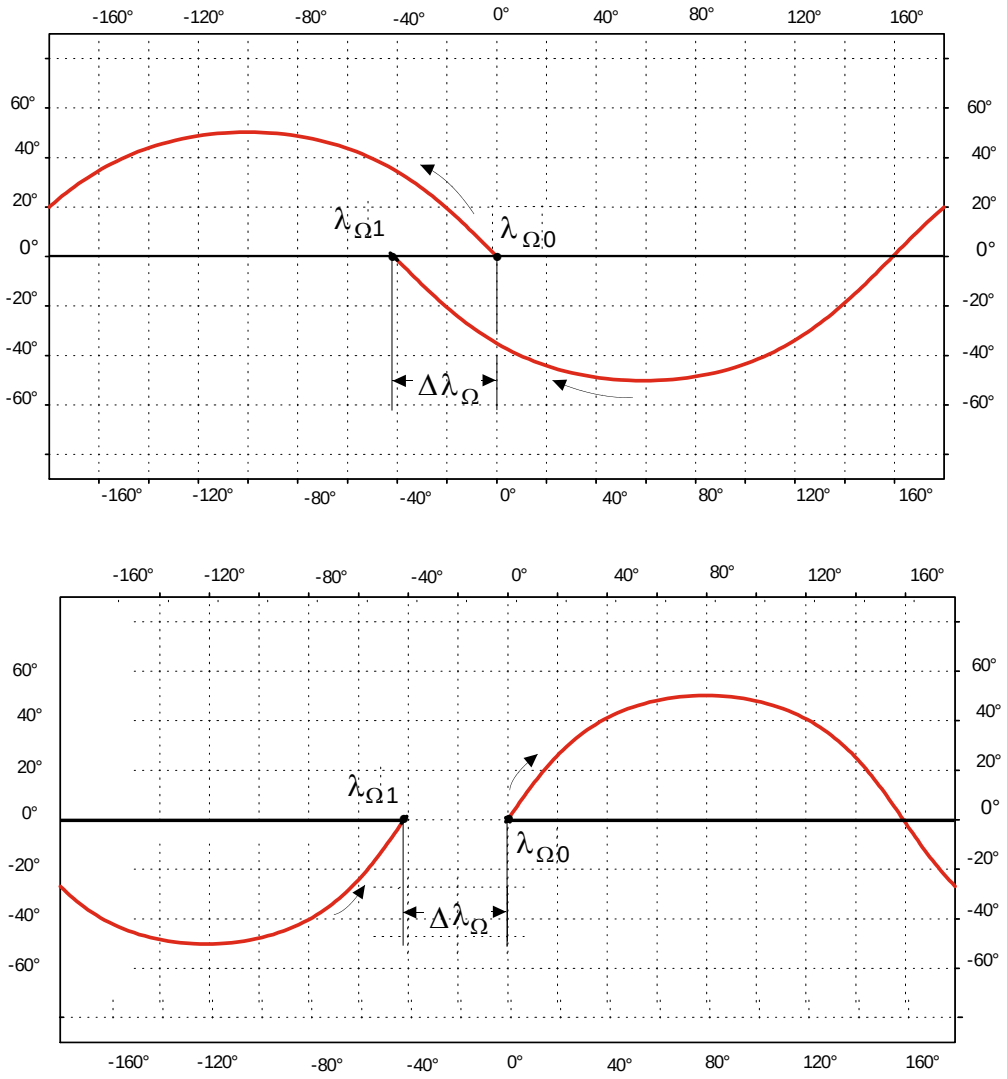


Bild 23-23: Ein drakonitischer Umlauf in Projektion auf die Erdoberfläche (auf einen Zentralkörper). Oben: Rückläufige Bahn (a = 10000 km, e=0.0, i = 130°), unten: rechtläufige Bahn (a = 10000 km, e=0.0, i = 50°)

[1] Siehe hierzu Kapitel 34, insbesondere Abschnitt 34.9 (Band V)

23.5.3 Bahnauswahl aus mittlerer Knotenlängenverschiebung

Die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ kann als ein Parameter zur Definition einer Satellitenbahn aufgefasst werden. Durch Vorgabe dieser Größe kann die große Bahnhalbachse berechnet werden. Dazu wird in der Fundamentalbeziehung (23.227) für eine erste Näherung eine spezielle *Kepler*bewegung angenommen. In diesem Fall wird der Bewegungseinfluss im Knoten vernachlässigt

$$\dot{\Omega}_s \approx 0°.0/s$$

und die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ wird auf

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} \approx -\dot{\Theta}$$

reduziert. Damit kann für die große Halbachse ein Näherungswert a_L definiert werden, so dass für eine vorgegebene Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ aus der Fundamentalbeziehung (23.227) die Beziehung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\dot{\Theta}\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a_L^{\,3}} \tag{23.233}$$

angesetzt werden kann. Der Näherungswert wird daraus berechnet zu

$$a_L = \sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)^2}{\dot{\Theta}^2\,4\pi^2}} \quad . \tag{23.234}$$

Die gesuchte mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ als einem Epochebahnelement wird durch Korrektur

$$\bar{a}_0 = a_L + \Delta a_L \tag{23.235}$$

erhalten. Für eine Näherung erster Ordnung wird die Fundamentalbeziehung (23.227) um a_L linearisiert und im Fall von erdnahen Satelliten die säkularen Variationen der Ordnung J_2 in Ω, ω und M_0 aus den Formeln (20.15) - (20.17) berücksichtigt[1]. Dafür müssen jetzt auch die Epochewerte für Exzentrizität $\bar{e}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ vorgegeben sein. Mit der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung (23.48)

$$\overline{n_D} = \frac{2\pi}{\overline{P_D}} = \overline{n_K} + \dot{M}_{0s} + \dot{\omega}_s \quad ,$$

der mittleren Keplerschen mittleren Bewegung zur Epoche t_0

$$\overline{n_{K\,0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^{\,3}}}$$

und der Abkürzung

---

[1] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$B := -\frac{3}{4}\, J_2 \frac{R_E^{\,2}}{\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}-\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}\right)\cos^2 \bar{i}_0\right] \tag{23.236}$$

liefert eine Linearisierung der Fundamentalbeziehung (23.227)

$$-\dot{\Theta}\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a_L^{\,3}} = 2\pi\left[-\frac{3}{2}J_2\frac{R_E^{\,2}\cos^2\bar{i}_0}{a_L^{\,2}\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}+\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^{\,2}\cos\bar{i}_0}{a_L^{\,3}\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}\Delta a_L - \frac{\dot{\Theta}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a_L^{\,3}}-\frac{3}{2}\frac{\dot{\Theta}}{\sqrt{\mu}}\sqrt{a_L^{\,3}}\frac{\Delta a_L}{a_L}\right]\cdot$$
$$\cdot\left(1+\frac{B}{a_L^{\,2}}-\frac{1}{2}B\frac{\Delta a_L}{a_L^{\,3}}\right)+\ldots\ .$$

Eine Näherung bei Bezug auf J_2 führt auf die Bedingung

$$0 = -\frac{3\cdot 2\pi}{2}J_2\frac{R_E^{\,2}\cos^2\bar{i}_0}{a_L^{\,2}\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}+\frac{3}{2}J_2\overline{\Delta\lambda_\Omega}\frac{\Delta a_L}{a_L}\ +\overline{\Delta\lambda_\Omega}\frac{B}{a_L^{\,2}}\ +\cdots,$$

somit schließlich für die Korrektur erster Ordnung, wenn noch berücksichtigt wird, dass die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ üblicherweise im Gradmaß gegeben ist,

$$\Delta a_L = \frac{1}{2}J_2\frac{R_E^{\,2}}{a_L\left(1-\bar{e}_0^{\,2}\right)^2}\left[\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}\right)\cos^2\bar{i}_0-\left(1+\sqrt{1-\bar{e}_0^{\,2}}\right)+2\frac{360^\circ}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}\cos\bar{i}_0\right]+\cdots. \tag{23.237}$$

Dieser rasch zu berechnende analytische Ausdruck liefert im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse gewöhnlich genügend genaue Ergebnisse. Ist ein höheres Bahnmodell mit säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s$, $\dot{\omega}_s$, $\dot{M}_{0s}$ und eventuell auch infolge einer Variation in den anderen Bahnparametern bekannt, kann eine weitere Verbesserung aus der überlagerten Funktion

$$f\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}-\frac{\left(\dot{\Omega}_s-\dot{\Theta}\right)360^\circ}{\overline{n_K}+\dot{M}_{0s}+\dot{\omega}_s}\right)=0 \tag{23.238}$$

iterativ entsprechend der Genauigkeit des verwendeten Bahnmodells erhalten werden.

Anmerkung: Da die Variationsformeln erster Ordnung in J_2 die mittleren Epochewerte für die große Bahnhalbachse, die Exzentrizität und die Inklination enthalten, können neben der großen Halbachse bei Vorgabe der Knotenlängenverschiebung auch die Exzentrizität oder die Inklination bei Vorgabe der jeweils anderen beiden Bahnparameter in analoger Weise wie die große Bahnhalbachse berechnet werden. Diese Fälle spielen in den Anwendungen eine untergeordnete Rolle und werden daher an dieser Stelle nicht bearbeitet. ◄

BEISPIEL 1: Es sei $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25^\circ.52432$ für eine kreisförmige ($\bar{e}_0 = 0.0$) und um $\bar{i}_0 = 10^\circ$ geneigte Bahn vorgegeben. Als Ausgangswert liefert Formel (23.234) den Wert

$$a_L = 7222.895654\ km\ .$$

Die Korrektur erster Ordnung nach Formel (23.237) lautet

$$\Delta a_L = -67.13765\ km\ ,\ \ \bar{a}_0^{(1)} = 7155.758262\ km\ .$$

Mit dieser Halbachse ergibt sich als ein erster Kontrollwert die Knotenlängenverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25°.53184 \quad .$$

Iterative Verbesserung der Halbachse nach der Forderung (23.238) unter Berücksichtigung des $J_4 -$ Terms gibt die verbesserte Halbachse

$$\bar{a}_0^{(2)} = 7153.811973\ km \quad .$$

Mit diesem Wert ergibt sich die Knotenlängenverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25°.524320 \quad ,$$

also genau der vorgegebene Wert. ◀

BEISPIEL 2: Die *Molnija* Satellitenbahnen (siehe Bild 23-24 und Bild 23-25) können obgleich hochexzentrisch vom Standpunkt der drakonitischen Bewegung definiert werden, da der Apogäumsbereich fest auf die Erdoberfläche bezogen sein soll. Dazu muss der Knoten in Bezug auf die Erdoberfläche exakt definiert sein. Dies kann durch Vorgabe eines Anfangsortes und dann der Knotenlängendifferenz erreicht werden.

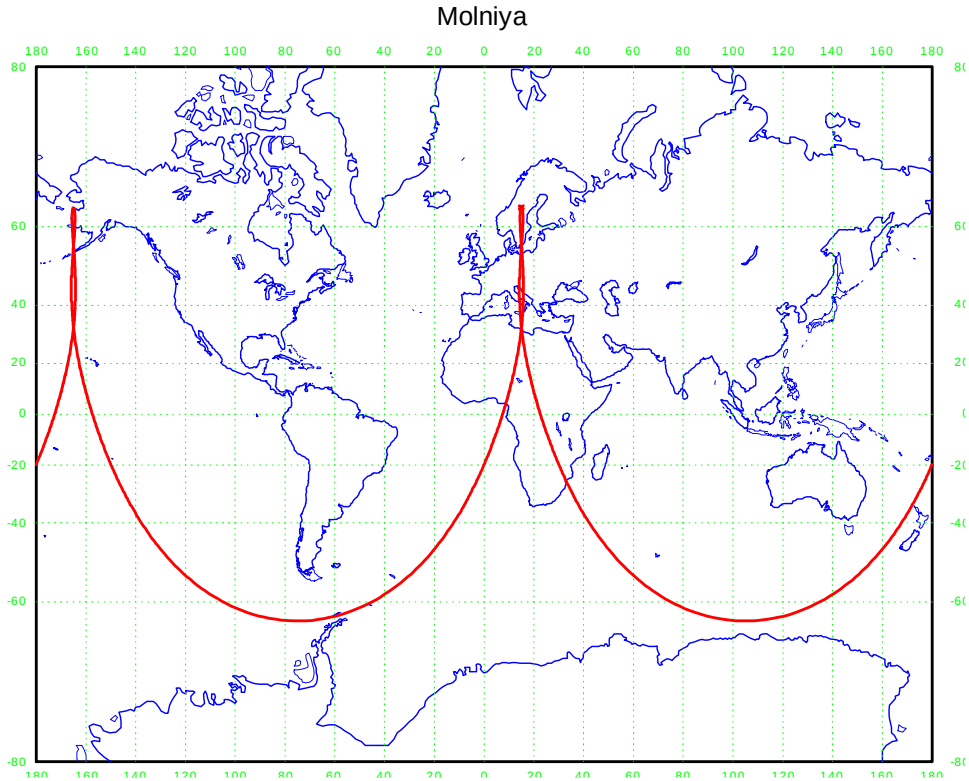


Bild 23-24: Die Bodenspur einer Molnija-typischen Satellitenbahn mit Apogäum über Mitteleuropa. $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180°$, a= 26554.2276 km, e = 0.7222, i = 63°.43495, ω = 270°, P_d = 43066.3 sec, H_A = 39354 km, H_P = 1000 km

Da die Molnija Satelliten nach zweimaligem Umlauf wieder über demselben Gebiet die Erdoberfläche beobachten sollen, muss die Knotenlängendifferenz mit dem Wert

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180°.0$$

vorgegeben werden. Als Ausgangswert liefert Formel (23.234) für die große Halbachse den Wert

$$a_L = 26561.762397\,km \quad .$$

Die Verbesserungen mit den Formeln (23.237) und (23.238) liefern die Werte

$$\begin{aligned} \Delta a_L &= -7.481349\ km \\ \bar{a}_0^{(1)} &= 26554.281057\ km \\ \bar{a}_0^{(2)} &= 26554.2276255\ km \quad . \end{aligned}$$

Eine Probe liefert genau $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = 180°.000000$ ◀

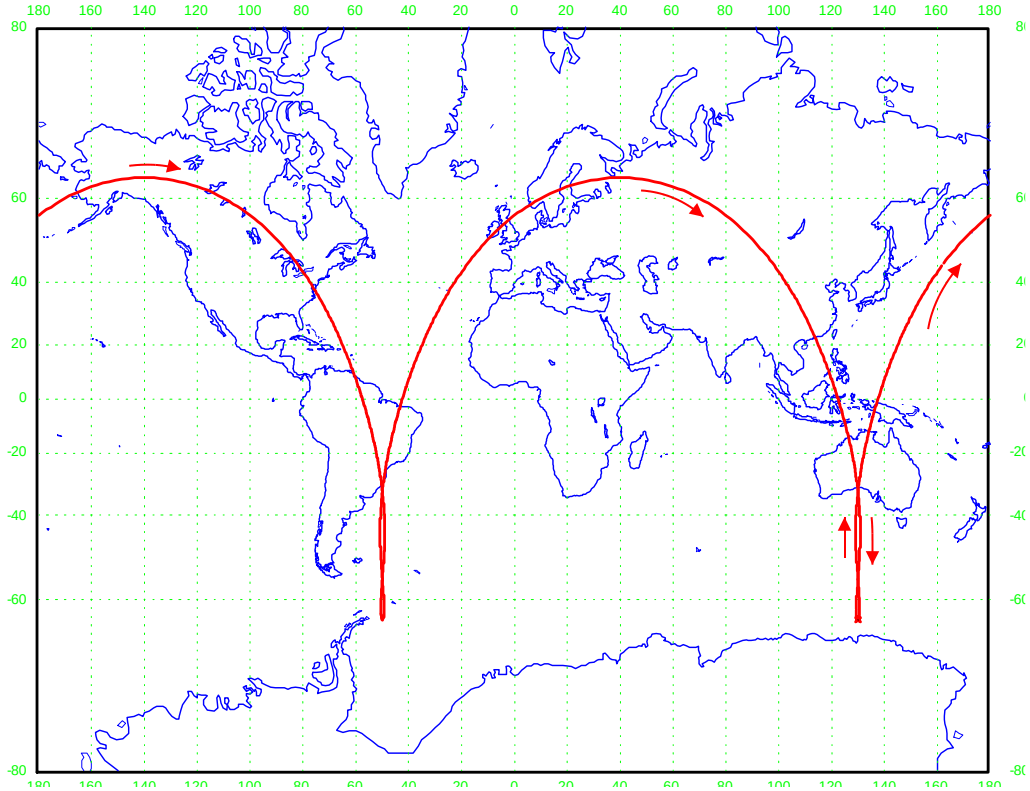


Bild 23-25: Die Bodenspur einer Molnija-typischen Satellitenbahn mit Apogäum südlich von Australien. $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180°$, a= 26554.2276 km, e = 0.7222, i = 63°.43495, ω = 90°, P_d = 43066.3 sec, H_A = 39354 km, H_P = 1000 km

23.5.4 Bahnauswahl aus Knotenlängendrift

Wird eine säkulare Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ vorgegeben, kann die entsprechende säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens aus Formel (23.224) berechnet werden:

$$\dot{\Omega}_{s0} = \dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta} \quad . \tag{23.239}$$

Damit ist es möglich, eines der drei Keplerelemente *a, e, i* nach Vorgabe der anderen Bahnparameter zu berechnen. Dies wird im Folgenden gezeigt.

23.5.4.1 Große Bahnhalbachse aus Knotenlängendrift

Neben $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ seien die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ vorgegeben. Aus Formel (23.228) ergibt die Auflösung nach der großen Bahnhalbachse den Näherungswert

$$\bar{a}_0^{(0)} = \sqrt[7]{\left[\frac{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \cos\bar{i}_0}{2\dot{\Omega}_{s0}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\right]^2} \quad . \tag{23.240}$$

Eine Ausnahme ist der Fall einer Polarbahn mit *i*=90°, da dann $\dot{\Omega}_{s0} = 0$. Ansonsten kann unter Einbeziehung von physikalischen Einflüssen höherer Ordnung eine Verbesserung mit Hilfe der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \dot{\lambda}_{\Omega s0} - \left[\dot{\Omega}_s\left(\bar{a}_0\right) - \dot{\Theta}\right] = 0 \tag{23.241}$$

erhalten werden.

BEISPIEL: Vorgegeben seien die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = -363°/d$, die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.4$, sowie die Inklination $\bar{i}_0 = 25°$. Formel (23.240) ergibt den Anfangsnäherungswert $\bar{a}_0^{(0)} = 10817.445381$ km, die Verbesserung mit der Bedingung (23.241) mit der Genauigkeitsschranke $\Delta a = 10^{-5}$ km lautet $\bar{a}_0^{(1)} = 10826.986397$ km. Zur Kontrolle wird mit diesem Ergebnis die Knotenlängendrift berechnet: $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ = -362°.9999998 /d. ◄

23.5.4.2 Exzentrizität aus Knotenlängendrift

Neben $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ vorgegeben. Für die gegebene Halbachse können die Grenzen für eine mögliche Knotenlängendrift mit i=0° für den unteren Wert und i=180° für den oberen Wert berechnet werden. Nur wenn die vorgegebene Drift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ zwischen diesen Werten liegt, kann die weitere Berechnung durchgeführt werden (vgl. auch die äußerste Abschätzung (23.229)).

Aus Formel (23.228) ergibt die Auflösung nach der Exzentrizität den Näherungswert

$$\bar{e}_0^{(0)} = \sqrt{1 - \sqrt{-\frac{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \cos\bar{i}}{2\bar{a}_0^3\sqrt{\bar{a}_0}\,\dot{\Omega}_{s0}}}} \quad . \tag{23.242}$$

Neben $\dot{\Omega}_{s0} \neq 0$ muss auch die Bedingung $\dot{\Omega}_{s0}\cos\bar{i}_0 < 0$ erfüllt sein. Andernfalls kann es keine Lösung für die vorgegebene Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ geben. Eine Verbesserung kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{e}_0\right) \equiv \dot{\lambda}_{\Omega s0} - \left[\dot{\Omega}_s\left(\bar{e}_0\right) - \dot{\Theta}\right] = 0 \tag{23.243}$$

gefunden werden.

BEISPIEL: Gegeben seien $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = -360°.339840/d$, die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ =11200.0 km und die Inklination $\bar{i}_0$ =111°.0. Das erlaubte Intervall für die Knotenlängendrift beträgt $\dot{\lambda}_{\Omega s} \in$ (-359°.5934286/d, -362°.3777959/d). Der Näherungswert nach Formel (23.242) beträgt $\bar{e}_0^{(0)}$ = 0.3494874041140569, die Verbesserung mit der Bedingung (23.243) mit der

Genauigkeit $\Delta e = 10^{-7}$ ergibt $\bar{e}_0^{(1)} = 0.3501870134890568$. Zur Kontrolle wird mit diesem Ergebnis die Knotenlängendrift berechnet: $\dot{\lambda}_{\Omega s} = \text{-}360°.3398402/\text{d}$. ◄

23.5.4.3 Inklination aus Knotenlängendrift

Neben $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ seien die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ vorgegeben. Wie im vorstehenden Fall sollte zunächst mit der gegebenen Halbachse abgeschätzt werden, ob die gegebene Drift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ in einem erlaubten Intervall liegt. Andernfalls muss eine mögliche andere Drift gesucht werden. Aus Formel (23.228) ergibt die Auflösung nach der Inklination den Näherungswert

$$\cos \bar{i}_0^{(0)} = -\frac{2\dot{\Omega}_{s0}\,\bar{a}_0^3\sqrt{\bar{a}_0}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}{3\sqrt{\mu}\,J_2\,R_E^2} \quad . \tag{23.244}$$

Eine Verbesserung kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{i}_0\right) \equiv \dot{\lambda}_{\Omega s0} - \left[\dot{\Omega}_s\left(\bar{i}_0\right) - \dot{\Theta}\right] = 0 \tag{23.245}$$

gefunden werden.

BEISPIEL: Vorgegeben seien die Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = \text{-}360°.99648/\text{d}$, die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 21000.0$ km und die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.7$. Das erlaubte Intervall der Knotenlängendrift beträgt mit der gegebenen Halbachse $\dot{\lambda}_{\Omega s} \in \left(\text{-}360°.39197/\text{d}, \text{-}361°.57926/\text{d}\right)$. Formel (23.244) ergibt $\bar{i}_0^{(0)} = 88°.94723689$, die Bedingungsfunktion (23.245) bringt mit der geforderten Genauigkeit $\Delta i = 0°.0001$ keine Verbesserung. Der Kontrollwert beträgt $\dot{\lambda}_{\Omega s} = \text{-}360°.9964591/\text{d}$. Die a posteriori Genauigkeit liegt in der Größenordnung $\Delta i = 0''.4$. ◄

23.6 Bahnauswahl aus Knotenlängendrift und drakonitischer Umlaufzeit

Eine besonders wichtige Methodik der Bahnauswahl besteht darin, zwei Keplerelemente durch Vorgabe von zwei anderen Bahnparametern zu bestimmen. Im vorliegenden Fall seien (bei Bezug auf eine Epoche t_0) neben der Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}$ oder die mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ vorgegeben. Die hier besprochene Methodik findet vielfache Anwendung in der Satellitenbahnanalyse.

Wenn $\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}$ gegeben ist, kann die Aufgabe auf Vorgabe von $\overline{P_{D0}}$ und $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ mit Hilfe der Fundamentalbeziehung (23.227) zurückgeführt werden:

$$\overline{P_{D0}} = \frac{\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}}{\dot{\lambda}_{\Omega s0}} \quad . \tag{23.246}$$

23.6.1 Erste Näherungslösung

Eine erste Näherung für die große Bahnhabachse kann mit der Formel (23.184) (auf Seite 185) für die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit erhalten werden:

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{P_{D\,0}}\right)^2}{4\pi^2}} \quad . \tag{23.247}$$

Wird noch die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ vorgeben, können die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ bestimmt werden. Dazu sind zwei Bedingungsgleichungen erforderlich.

Die erste dieser Bedingungsgleichungen folgt aus der säkularen Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens mit Formel (23.224) (auf Seite 199) aus

(I) $$\dot{\Omega}_{s0} = \dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta} \quad . \tag{23.248}$$

Dies führt auf die Inklination in Formel (23.244), die allerdings noch die unbekannte große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ enthält. Die zweite Bedingungsgleichung folgt aus der Definition der mittleren drakonitischen Umlaufzeit (23.161) (von Seite 177)

(II) $$\overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s} \quad , \tag{23.249}$$

wenn hier die säkularen Variationen erster Ordnung in der mittleren Epocheanomalie und dem Argument des Perigäums aus den Beziehungen (20.16) und (20.17) verwendet werden:

$$\begin{aligned}
\overline{n_K} \quad &\hat{=}\, \overline{n_{K\,0}} \quad = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \\
\dot{\omega}_s \quad &\hat{=}\, \dot{\omega}_{s0} \quad = -\frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \\
\left(M_0\right)^{\cdot}_s &\hat{=} \left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} = -\frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \quad .
\end{aligned} \tag{23.250}$$

Damit führt (23.249) mit der vorgegebenen mittleren drakonitischen Umlaufzeit bei Bezug auf die Epoche t_0 auf den Ausdruck

$$\frac{2\pi}{\overline{P_{d\,0}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left[\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos^2\bar{i}_0 - \left(1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \right] \right\} + \cdots \tag{23.251}$$

Wird hier die Beziehung für $\cos\bar{i}_0$ aus dem Ausdruck (23.244) eingesetzt, kann die Inklination eliminiert werden und es bleibt als Bedingung für die große Bahnhalbachse

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\overline{P_{D\,0}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \Bigg\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \Bigg[& -\left(1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) + \\
& + \left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \frac{4}{9} \frac{\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0}+\dot{\Theta}\right)^2 \bar{a}_0^7 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^4}{\mu J_2^2 R_E^4} \Bigg] \Bigg\} + \cdots \quad .
\end{aligned} \tag{23.252}$$

Für eine erste Verbesserung werde die große Bahnhalbachse ersetzt durch den Näherungswert

$$\bar{a}_0^{(1)} := \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)} \quad . \tag{23.253}$$

Zur übersichtlichen weiteren Berechnung seien die (konstanten) Hilfsgrößen

$$B_0 := \frac{\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2 \left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)}{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2}$$
$$B_1 := \frac{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2 \left(1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)}{4\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \tag{23.254}$$

eingeführt. Damit bleibt ein Ausdruck, der allein von der unabhängigen Variablen $\bar{a}_0$ abhängt:

$$\frac{2\pi}{\overline{P}_{D0}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\bar{a}_0^3}} - \frac{B_1}{\sqrt{\bar{a}_0^7}} + B_0\sqrt{\bar{a}_0^7} + \cdots \quad . \tag{23.255}$$

Wird hier ausgehend von der Näherung nullter Ordnung (23.247) die Näherung erster Ordnung (23.253) eingesetzt, ergibt die Linearisierung in erster Ordnung

$$\frac{2\pi}{\overline{P}_{D0}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} - \frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^5}}\Delta\bar{a}_0^{(1)} - \frac{B_1}{\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^7}} + B_0\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^7} + \cdots \quad . \tag{23.256}$$

Die Verbesserung erster Ordnung kann daraus berechnet werden:

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = \frac{2}{9}\frac{\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2 \left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)}{\mu\, J_2\, R_E^2}\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^6 - \frac{J_2\, R_E^2 \left(1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)}{2\left(1-\bar{e}_0^2\right)}\frac{1}{\bar{a}_0^{(0)}} \quad . \tag{23.257}$$

Wird mit diesem Ausdruck die Lösung erster Ordnung (23.253) gebildet, so kann mit dem Näherungswert (23.244) schließlich eine Näherung erster Ordnung für die Inklination gefunden werden:

$$fct\left(\cos\bar{i}_0\right) \equiv \cos\bar{i}_0^{(1)} + \frac{2\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0} + \dot{\Theta}\right)\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}{3\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2}\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)^3\sqrt{\bar{a}_0^{(1)}} = 0 \quad . \tag{23.258}$$

23.6.2 Iterative Verbesserung

Eine weitere Verbesserung kann nur iterativ unter Verwendung des gesamten bekannten Bahnmodells erfolgen. Da zwei unabhängige Variable $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ zu bestimmen sind, müssen zwei Funktionen dieser Variablen in eine Taylorreihe um die Anfangswerte $\left(\bar{a}_0^{(1)}, i_0^{(1)}\right)$ entwickelt werden. Als Bedingungsfunktionen empfehlen sich an Stelle der beiden Bedingungsgleichungen (I) und (II) die überlagerten Funktionen

$$f_1\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right) \equiv \sin\left[u\left(t_0 + \overline{P}_{D0}\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0$$
$$f_2\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right) \equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + \overline{P}_{D0}\right) - \lambda\left(t_0\right) - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{D0}\right] = 0 \quad . \tag{23.259}$$

Die erste Funktion besagt, dass genau nach der vorgegebenen mittleren drakonitischen Umlaufzeit wieder dasselbe Argument der Breite überflogen werden soll. Die zweite Funktion basiert auf der Bedingung, dass die geographische Knotenlänge längs des Erdäquators nach genau einem drakonitischen Umlauf um den vorgegebenen Betrag $\overline{\Delta\lambda}_{\Omega 0} = \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{D0}$ verschoben werden soll. Hier sind das Argument der Breite und die geographische Länge zur Epoche feste Anfangswerte, das Argument der Breite sowie die geographische Länge nach einem drakonitischen Umlauf werden mit Hilfe des gegebenen Bahnmodells in jedem Iterationsschritt neu berechnet.

Die *Taylor*entwicklung führt im ν-ten Iterationsschritt auf die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)+\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\left(\overline{a}_0^{(\nu+1)}-\overline{a}_0^{(\nu)}\right)+\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}\left(\overline{i}_0^{(\nu+1)}-i_0^{(\nu)}\right)=0 \\ f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)+\frac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\left(\overline{a}_0^{(\nu+1)}-\overline{a}_0^{(\nu)}\right)+\frac{f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}\left(\overline{i}_0^{(\nu+1)}-i_0^{(\nu)}\right)=0 \quad . \end{aligned} \tag{23.260}$$

Die Lösung lautet nach der *Cramer*schen Regel mit $\nu=1,2,3,\cdots$

$$\begin{aligned} \overline{a}_0^{(\nu+1)} &= \overline{a}_0^{(\nu)}-\frac{f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}-f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}}{\Delta} \\ \overline{i}_0^{(\nu+1)} &= \overline{i}_0^{(\nu)}-\frac{f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}-f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}}{\Delta} \\ \Delta &= \frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0}\frac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}-\frac{\partial f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{i}_0}\frac{\partial f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \overline{a}_0} \quad , \end{aligned} \tag{23.261}$$

sofern die Koeffizientendeterminante Δ nicht verschwindet.

Im Rahmen einer allgemeinen *Kepler*bewegung erster Ordnung können die hier benötigten partiellen Ableitungen wie folgt berechnet werden:

Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} & u_1 := u\left(t_0\right) \ , \ u_2 := u\left(t_0+\overline{P_{d0}}\right) \\ & M_1 := \overline{M_{00}} \ , \ M_2 := \overline{M_{00}}+\left(\overline{n_K}+\left(M_0\right)^{\cdot}_s\right)\overline{P_{d0}} \\ & M_{1/2} = E_{1/2}-\overline{e}_0\sin E_{1/2} \\ & \cos\upsilon_{1/2}=\frac{\cos E_{1/2}-\overline{e}_0}{1-\overline{e}_0\cos E_{1/2}} \ , \ \sin\upsilon_{1/2}=\frac{\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\sin E_{1/2}}{1-\overline{e}_0\cos E_{1/2}} \\ & \omega_1 := \overline{\omega}_0 \ , \ \omega_2 := \overline{\omega}_0+\dot{\omega}_s\,\overline{P_d} \quad , \quad \upsilon_1=u_1-\omega_1 \ , \ \upsilon_2=u_2-\omega_2 \\ & \overline{n_K}=\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \quad , \quad B_2 := \overline{n_K}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \\ & \dot{\omega}_s=\frac{3B_2}{4}\left(5\cos^2\overline{i}_0-1\right) \quad , \quad \left(M_0\right)^{\cdot}_s=\frac{3B_2\sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\overline{i}_0\right) \end{aligned} \tag{23.262}$$

Variation der ersten Funktionsgleichung nach der großen Halbachse:

$$f_1\left(\overline{a}_0,\overline{i}_0\right)=\sin\left(u_2-u_1\right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0}=\frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial \overline{a}_0}+\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \overline{a}_0} \ , \ \frac{\partial f_1}{\partial u_2}=\cos\left(u_2-u_1\right) \ , \ \frac{\partial f_1}{\partial u_1}=-\cos\left(u_2-u_1\right) \\ & \frac{\partial u_2}{\partial \overline{a}_0}=\frac{\partial u_2}{\partial \upsilon_2}\frac{\partial \upsilon_2}{\partial \overline{a}_0}+\frac{\partial u_2}{\partial \omega_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial \overline{a}_0}=\frac{\partial \upsilon_2}{\partial \overline{a}_0}+\frac{\partial \omega_2}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial u_1}{\partial \overline{a}_0}=0 \end{aligned} \tag{23.263}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s} = \overline{P_{D0}} \quad , \quad \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{a}_0} = -\frac{21}{8}\frac{\sqrt{\mu}\, J_2\, R_E^2}{\sqrt{(\bar{a}_0)^9}\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(5\cos^2 \bar{i}_0 - 1\right)$$

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \bar{a}_0}$$

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2} = \frac{1+\cos \upsilon_2}{1+\cos E_2}\sqrt{\frac{1+\bar{e}_0}{1-\bar{e}_0}} \quad , \quad \frac{\partial E_2}{\partial M_2} = \frac{1}{1-\bar{e}_0 \cos E_2}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{a}_0} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^5}}\left[1+\frac{7}{2}\frac{J_2\, R_E^2\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 \bar{i}_0\right)\right]\overline{P_{D0}} = -\frac{\overline{P_{D0}}}{2\,\bar{a}_0}\left[3\overline{n_K} + 7\left(M_0\right)^{\cdot}_s\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0} = \cos\left(u_2 - u_1\right)\left[\frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{a}_0}\right] \tag{23.264}$$

Variation der ersten Funktionsgleichung nach der Inklination:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial \bar{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial u_1}{\partial \bar{i}_0} = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial \bar{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s} = \overline{P_{d0}}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{i}_0} = -\frac{15}{4}\frac{\overline{n_K}\, J_2\, R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\sin 2\bar{i}_0$$

$$\frac{\partial \upsilon_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \bar{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial M_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial M_2}{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}_s\right]}\frac{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}_s\right]}{\partial \bar{i}_0} \quad , \quad \frac{\partial M_2}{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}_s\right]} = \overline{P_{D0}}$$

$$\frac{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}_s\right]}{\partial \bar{i}_0} = -\frac{9}{4}\overline{n_K}\, J_2\, R_E^2\frac{\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\sin 2\bar{i}_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0} = \cos\left(u_2 - u_1\right)\left[\frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}_s\right]}\frac{\partial\left[\left(M_0\right)^{\cdot}_s\right]}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_s}\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{i}_0}\right] \tag{23.265}$$

Variation der zweiten Funktionsgleichung nach der großen Halbachse:

Mit den Abkürzungen

$$\lambda_1 := \lambda\left(t_0\right) \quad , \quad \lambda_2 := \lambda\left(t_0 + \overline{P_{D0}}\right)$$

lautet die Funktionsgleichung

$$f_2\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right) = \sin\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}}\right] \quad .$$

Der Bezug auf den im Frühlingspunkt bezogenen aufsteigenden Knoten ☊ wird über die Rektaszension mit Hilfe der Sternzeit Θ_G hergestellt, die auf den Nullmeridian (Greenwich Meridian) bezogen ist (siehe die Definitionsgleichung (23.216) auf Seite 198):

$$\lambda_{2/1} = \alpha_{2/1} - \Theta_{G2/1} \quad , \quad \lambda_{\Omega 2/1} = \Omega_{2/1} - \Theta_{G2/1}$$

und es ist (mit Formel (23.217))

$$\Theta_{G2} = \Theta_{G1} + \dot{\Theta}\,\overline{P}_{d\,0} \quad .$$

Für die Rektaszension des aufsteigenden Knotens gilt die Entwicklung

$$\Omega = \Omega(t) = \bar{\Omega}(t_0) + \dot{\Omega}_s\,(t - t_0) + \delta\Omega \quad .$$

Unter Vernachlässigung der periodischen Variationen $\delta\Omega$ werden die Bezeichnungen

$$\Omega_1 := \bar{\Omega}(t_0) = \bar{\Omega}_0 \quad , \quad \Omega_2 := \bar{\Omega}_0 + \dot{\Omega}_s\,\overline{P}_{d\,0} \tag{23.266}$$

verwendet. Damit lauten die einzelnen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{a}_0}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} = \cos\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right] \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} = -\cos\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P}_{d\,0}\right]$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{a}_0}$$

Aus den Beziehungen (23.30) (auf Seite 152) folgen

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\cos i_2}{\cos^2 \delta_2}\frac{\partial u_2}{\partial \bar{a}_0} - \frac{\sin u_2\,\sin i_2\,\cos(\alpha_2 - \Omega_2)}{\cos^2 \delta_2}\frac{\partial i_2}{\partial \bar{a}_0}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\cos i_1}{\cos^2 \delta_1}\frac{\partial u_1}{\partial \bar{a}_0} - \frac{\sin u_1\,\sin i_1\,\cos(\alpha_1 - \Omega_1)}{\cos^2 \delta_1}\frac{\partial i_1}{\partial \bar{a}_0}$$

Hier sind

$$\frac{\partial i_2}{\partial \bar{a}_0} = 0 + O\left(J_2^2\right) \quad , \quad \frac{\partial i_1}{\partial \bar{a}_0} = 0$$

außerdem sind nach (23.263)

Aus (23.266) folgen $\frac{\partial \Omega_2}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{a}_0}\,\overline{P}_{d\,0}$, $\frac{\partial \Omega_1}{\partial \bar{a}_0} = 0$ somit $\frac{\partial \alpha_1}{\partial \bar{a}_0} = 0$

Nach (23.228) (auf Seite 200) ist

$$\dot{\Omega}_{s0} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\mu}}{\bar{a}_0^{\frac{7}{2}}}\frac{J_2\,R_E^2}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right)$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{21}{4}\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\bar{a}_0^9}}\frac{J_2\,R_E^2}{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + \cdots = -\frac{7}{2\,\bar{a}_0}\dot{\Omega}_{s0}$$

Damit lautet die Variation der zweiten Funktionsgleichung nach der großen Bahnhalbachse (für den Fall, dass ein exakter Polüberflug mit $\cos\delta_2 = 0$ ausgeschlossen werden kann):

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0} = \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D\,0}}\right)\left\{\frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{\Omega}_{s0}}\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\cos\bar{i}_0^{(\nu)}}{\cos^2\delta_2^{(\nu)}}\left[\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_{s0}}\frac{\partial \dot{\omega}_{s0}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \bar{a}_0}\right]\right\} \tag{23.267}$$

Variation der zweiten Funktionsgleichung nach der Inklination:

Aus $f_2\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right) = \sin\left[\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}}\right]$ folgt

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2}\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{i}_0}$$

Wie im vorherigen Fall ist $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{i}_0} = 0$ und es bleiben (bei fest vorgegebenen $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$, $\overline{P_{D0}}$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} = \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}}\right)$$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\cos i_2^{(\nu)}}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\frac{\partial u_2}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\sin i_2^{(\nu)} \cos u_2 \sin u_2}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\frac{\partial i_2}{\partial \bar{i}_0}$$

Da $\frac{\partial i_2}{\partial \bar{i}_0} = 1 + O\left(J_2^2\right)$ und $\frac{\partial u_2}{\partial \bar{i}_0}$ im Zusammenhang mit der ersten Funktionsgleichung bearbeitet worden ist, bleiben

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial \bar{i}_0} = \overline{P_{D0}}\,\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{i}_0}$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{i}_0} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{J_2 R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\sin \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right)$$

und damit schließlich

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0} = \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}}\right)\left\{\frac{\partial \Omega_2}{\partial \dot{\Omega}_{s0}}\frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\cos \bar{i}_0^{(\nu)}}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\left[\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\omega}_{s0}}\frac{\partial \dot{\omega}_{s0}}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial E_2}\frac{\partial E_2}{\partial M_2}\frac{\partial M_2}{\partial \bar{i}_0}\right] - \frac{\sin \bar{i}_0^{(\nu)} \sin u_2 \cos u_2}{\cos^2 \delta_2^{(\nu)}}\right\} \tag{23.268}$$

BEISPIEL: Gegeben sei eine kreisförmige Bahn, die zur Epoche die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D}$ =6000 sec und die säkulare Drift der Knotenlänge $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = -4°.244 \times 10^{-3}/\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} -366°.681/\mathrm{d}$ habe. Als Näherung nullter Ordnung mit den Formeln (23.247) ergibt für die große Bahnhalbachse den Wert $\bar{a}_0^{(0)} = 7136.635456$ km. Die Verbesserung erster Ordnung (23.257) lautet $\Delta\bar{a}_0^{(1)}$ =11.538360 km und führt auf die Lösung erster Ordnung $\bar{a}_0^{(1)} = \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)} = 7148.173815$ km. Damit ergibt sich der Wert erster Ordnung der Inklination mit Formel (23.258) zu $\bar{i}_0^{(1)} = 31°.590699$. Zur Durchführung der Iteration (23.261) seien die a-priori Genauigkeiten

$$\left|\Delta\bar{a}_0^{(\nu+1)}\right| = \left|\bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)}\right| \le \varepsilon_a = 10^{-5}\ \mathrm{km} \quad <\nu=1,2,3,\cdots>,$$

$$\left|\Delta\bar{i}_0^{(\nu+1)}\right| = \left|\bar{i}_0^{(\nu+1)} - \bar{i}_0^{(\nu)}\right| \le \varepsilon_i = 10^{-4} \mathrel{\hat{=}} 0°.00572957795$$

vorgegeben. Damit ergeben sich folgende Schritte:

ν=2: Funktionswerte: $f_1^{(\nu=2)} = 0.211094151350\times10^{-2}$, $f_2^{(\nu=2)} = -0.349396466414\times10^{-2}$

Korrekturen: $\Delta\bar{a}_0^{(\nu=2)} = -0.262178738301\times10^{-1}$ km , $\Delta\bar{i}_0^{(\nu=2)} = -0°.349396466414$

Elemente: $\bar{a}_0^{(\nu=2)} = 7148.20003327\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(\nu=2)} = 31°.9400953121$

ν=3: Funktionswerte: $f_1^{(\nu=3)} = -0.117849982082\times10^{-4}$, $f_2^{(\nu=3)} = 0.247034660339\times10^{-5}$

Korrekturen: $\Delta\bar{a}_0^{(\nu=3)} = -0.560595193767\times10^{-2}$ km , $\Delta\bar{i}_0^{(\nu=3)} = 0°.169176985117\times10^{-1}$

Elemente: $\bar{a}_0^{(\nu=3)} = 7148.20563922\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(\nu=3)} = 31°.9231776136$

ν=4: Funktionswerte: $f_1^{(\nu=4)} = 0.296308862113\times10^{-6}$, $f_2^{(\nu=4)} = 0.414680246807\times10^{-7}$

Korrekturen: $\Delta\bar{a}_0^{(\nu=4)} = 0.869201883777\times10^{-4}$ km , $\Delta\bar{i}_0^{(\nu=4)} = -0°.284752077478\times10^{-3}$

Elemente: $\bar{a}_0^{(\nu=4)} = 7148.20555230\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(\nu=4)} = 31°.9234623657$

ν=5: Funktionswerte: $f_1^{(\nu=5)} = -0.520441766072\times10^{-8}$, $f_2^{(\nu=5)} = -0.798089982990\times10^{-9}$

Korrekturen: $\Delta\bar{a}_0^{(\nu=5)} = -0.149022909435\times10^{-5}$ km , $\Delta\bar{i}_0^{(\nu=5)} = 0°.490646206235\times10^{-5}$

Elemente: $\bar{a}_0^{(\nu=5)} = 7148.20555379\,\text{km}$, $\bar{i}_0^{(\nu=5)} = 31°.9234574592$

Die Bedingungen für die Genauigkeiten der Elemente sind mit diesen Daten erfüllt: $\left|\Delta\bar{a}_0^{(\nu=5)}\right| < \varepsilon_a$, $\left|\Delta\bar{i}_0^{(\nu=5)}\right| < \varepsilon_i$. Zur Kontrolle wird mit den erhaltenen Elementen $\bar{a}_0 = 7148.205554\,\text{km}$, $\bar{i}_0 = 31°.92346$ die vorgegebenen Parameter mittlere drakonitische Umlaufzeit und säkulare Knotenlängendrift berechnet: $\overline{P}_{d\,0}^{(\nu=5)} = 6000.000000\,\text{s}$, $P_{d0}^{(\nu=5)} = 5999.999999991442\,\text{s}$, $\dot{\lambda}_{\Omega_S} = -366°.6809495\,/\text{d}$. ◄

23.6.3 Genauigkeitsabschätzungen

Im vorherigen Abschnitt wurden die Keplerelemente große Halbachse und Inklination mit Abschätzung der erreichbaren und erreichten Genauigkeit berechnet. Um einen Eindruck über die Sensitivität des geschilderten Verfahrens zu vermitteln, werden in diesem Abschnitt weitere differentielle Beziehungen zwischen den hier verwendeten Parametern untersucht.

Für eine a-priori Abschätzung der Bedingungsfunktionen f_1, f_2 können verschiedene Bezüge untersucht werden, welche sich auf die Messungen bzw. die Messgenauigkeiten stützen, die zur Verfügung stehen.

Interessante Abhängigkeiten betreffen die Sensitivitäten von Halbachse und Inklination, wenn Variationen der vorgegebenen Parameter drakonitische Umlaufzeit und Knotenlängendrift zugelassen werden. Entsprechend sind die Variationen von Halbachse und Inklination bzw. der beiden Bedingungsfunktionen von den vorgegebenen Parametern zu untersuchen.

1. Zunächst wird aus den Funktionen (23.259) der Zusammenhang zwischen den Funktionen und den Genauigkeiten der zu bestimmenden Bahnparameter $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ hergestellt

$$\begin{aligned}\Delta f_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0}\Delta \overline{a}_0 + \frac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0}\Delta \overline{i}_0 \\ \Delta f_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_0}\Delta \overline{a}_0 + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{i}_0}\Delta \overline{i}_0 \quad .\end{aligned} \tag{23.269}$$

Die hier benötigten partiellen Ableitungen wurden im vorhergehenden Abschnitt (Formeln (23.264) - (23.268)) hergeleitet. Damit kann abgeschätzt werden, wie genau die Funktionsgleichungen f_1, f_2 berechnet werden müssen, wenn Forderungen für die Genauigkeiten $\Delta \overline{a}_0$ für die Halbachse und $\Delta \overline{i}_0$ Inklination vorgegeben werden.

2. Für weitere Abschätzungen seien der Übersichtlichkeit halber die Abkürzungen

$$u_2 := u\left(t_0 + \overline{P_{D0}}\right) \quad , \quad u_1 := u\left(t_0\right) \quad , \quad \lambda_2 := \lambda\left(t_0 + \overline{P_{D0}}\right) \quad , \quad \lambda_1 := \lambda\left(t_0\right) \tag{23.270}$$

gesetzt. Da die Anfangswerte $\left(u_1, \lambda_1\right)$ als feste Größen vorgegeben sind, bleiben entsprechend (23.259) die Fehlergrößen

$$\Delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u_2}\Delta u_2 \quad , \quad \Delta f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2}\Delta \lambda_2 \quad . \tag{23.271}$$

Die erstere Bedingung gibt die Genauigkeit, die längs der Bahn mit dem Argument der Breite als Bahnwinkel erreicht werden kann, die zweite Bedingung die Genauigkeit des Schnittpunktes der Bahnebene längs des Äquators.

3. In beiden Fällen kann das Winkelintervall Δu_2 bzw. $\Delta \lambda_2$ durch eine Strecke ersetzt werden. Dazu muss allerdings die radiale Distanz des entsprechenden Satellitenortes bekannt sein, was aber wegen der noch unbekannten großen Bahnhalbachse nicht möglich ist. Bei erdnahen Satellitenbahnen kann in erster Näherung der Äquatorradius der Erde oder ein um eine geschätzte Bahnhöhe *H* erhaltener Bahnradius verwendet werden:

$$\Delta x_u \approx \left(R_\mathrm{E} + H\right)\Delta u_2 \quad , \quad \Delta x_L \approx \left(R_\mathrm{E} + H\right)\Delta \lambda_2 \quad . \tag{23.272}$$

4. Für eine weitere Untersuchung der ersten Bedingung (23.271) ist zunächst

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_2} = \cos\left(u_2 - u_1\right) \quad . \tag{23.273}$$

Mit Hilfe der Variation (15.113) wird das Differential[1]

$$\Delta u_2 = \frac{\left(1 + \overline{e}_0 \cos \upsilon_2\right)^2}{\sqrt{1 - \overline{e}_0^2}^3}\Delta M_2 + \frac{\sin \upsilon_2 \left(2 + \overline{e}_0 \cos \upsilon_2\right)}{1 - \overline{e}_0^2}\Delta e + \Delta \omega_2 \tag{23.274}$$

erhalten. Hier ist

$$\upsilon_2 = u_2 - \omega_2 \quad , \quad \omega_2 = \omega_1 + \dot{\omega}_s \overline{P_{D0}}\left(+\delta\omega\right) \quad . \tag{23.275}$$

Da im Zusammenhang mit der hier durchgeführten Bahnauswahl die Exzentrizität eine feste Eingangsgröße ist, die in Bezug auf das Gravitationsfeld der Erde in erster Ordnung keinen säkularen Einwirkungen unterliegt, kann $\Delta e = 0$ gesetzt werden. Somit bleiben die säkularen Einflüsse auf die mittlere Anomalie und das Argument des Perigäums in erster Ordnung zu berücksichtigen, während die Einflüsse infolge von periodischen Variationen vernachlässigt werden können.

Die mittlere Anomalie zum Zeitpunkt t_2 kann als Funktion

---

1 Abschnitt 15.2.14 (Band III)

$$M_2 = \overline{M_2} + \delta M_2 = \overline{M_{0\,0}} + \left(\overline{n_{K\,0}} + \dot{M}_{0s0}\right)\overline{P_{D\,0}} + \cdots = fct\left(\overline{M_{0\,0}},\, \overline{n_{K\,0}}, \dot{M}_{0s0}, \overline{P_{D\,0}}\right) + \cdots \qquad (23.276)$$

dargestellt werden. Da $\overline{M_{0\,0}}$ als feste Eingangsgröße betrachtet werden darf, bleibt für das Differential von M_2

$$\Delta M_2 \approx \Delta\overline{M_2} = \frac{\partial\overline{M_2}}{\partial\overline{n_{K\,0}}}\Delta\overline{n_{K\,0}} + \frac{\partial\overline{M_2}}{\partial\dot{M}_{0s0}}\Delta\dot{M}_{0s0} + \frac{\partial\overline{M_2}}{\partial\overline{P_{d\,0}}}\Delta\overline{P_{D\,0}} + \cdots \quad . \qquad (23.277)$$

Die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung $\overline{n_{K\,0}} = \sqrt{\mu}\left(\bar{a}_0\right)^{-\frac{3}{2}}$ führt auf

$$\Delta\overline{n_{K\,0}} = \frac{\partial\left(\overline{n_{K\,0}}\right)}{\partial\bar{a}_0}\Delta\bar{a}_0 = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^5}}\,\Delta\bar{a}_0 \quad . \qquad (23.278)$$

Ferner sind

$$\frac{\partial\bar{M}_2}{\partial\overline{n_{K\,0}}} = \frac{\partial\bar{M}_2}{\partial\dot{M}_{0s0}} = \overline{P_{d\,0}} \;,\quad \frac{\partial\bar{M}_2}{\partial\overline{P_{d\,0}}} = \overline{n_{K\,0}} + \dot{M}_{0s0} \quad . \qquad (23.279)$$

Nach Formel (21.43) können im Differential

$$\Delta\dot{M}_{0s0} = \frac{\partial\dot{M}_{0s0}}{\partial\bar{a}_0}\Delta\bar{a}_0 + \frac{\partial\dot{M}_{0s0}}{\partial\bar{i}_0}\Delta\bar{i}_0 \qquad (23.280)$$

die partiellen Ableitungen im Fall des Gravitationsfeldes der Erde erster Ordnung (mit $\dot{M}_{0s0} \triangleq \dot{M}_{0Gs0}$) verwendet werden. Das Differential der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

$$\overline{P_{D\,0}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{K\,0}} + \dot{M}_{0s0} + \dot{\omega}_s} \qquad (23.281)$$

kann wegen

$$\Delta\overline{P_{D\,0}} = \frac{\partial\overline{P_{D\,0}}}{\partial\overline{n_{K\,0}}}\Delta\overline{n_{K\,0}} + \frac{\partial\overline{P_{D\,0}}}{\partial\dot{M}_{0s0}}\Delta\dot{M}_{0s0} + \frac{\partial\overline{P_{D\,0}}}{\partial\dot{\omega}_s}\Delta\dot{\omega}_s \qquad (23.282)$$

zurückgeführt werden auf

$$\Delta\overline{P_{D\,0}} = -\frac{\left(\overline{P_{D\,0}}\right)^2}{2\pi}\left[\Delta\overline{n_{K\,0}} + \Delta\dot{M}_{0s0} + \Delta\dot{\omega}_s\right] \quad . \qquad (23.283)$$

Es fehlt noch das Differential für das Argument des Perigäums, das aus dem Ansatz $\omega_2 = \bar{\omega}_2 + \delta\omega_2 = \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,\overline{P_{D\,0}} + \cdots$ erhalten werden kann:

$$\Delta\omega_2 \approx \Delta\bar{\omega}_2 = \frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\dot{\omega}_s}\Delta\dot{\omega}_s + \frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\overline{P_{D\,0}}}\Delta\overline{P_{D\,0}} + \cdots = \overline{P_{D\,0}}\,\Delta\dot{\omega}_s + \dot{\omega}_s\,\Delta\overline{P_{D\,0}} + \cdots \quad . \qquad (23.284)$$

Hier sind $\Delta\overline{P_{D\,0}}$ aus (23.283) bekannt und $\Delta\dot{\omega}_s$ im Fall von Erdsatelliten aus Abschnitt 21.2.2.

5. Für die zweite Bedingung (23.271) wird

$$\frac{\partial f_2}{\partial\lambda_2} = \cos\left(\lambda_2 - \lambda_1 - \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D\,0}}\right) \quad . \qquad (23.285)$$

Aus

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}\left(+\delta\lambda_\Omega\right) \qquad (23.286)$$

wird nach Vernachlässigung aller periodischen Einflüsse für eine Abschätzung der geographischen Länge

$$\Delta\lambda_2 = \Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}\right) \triangleq \Delta\lambda \quad . \qquad (23.287)$$

Wegen $\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}} = \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D\,0}}$ lautet das zugehörige Differential

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right) = \overline{P_{D0}}\,\Delta\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0}\right) + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\Delta\overline{P_{D0}} \tag{23.288}$$

wobei wegen $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = \dot{\Omega}_{s0}$ auch

$$\Delta\left(\dot{\lambda}_{\Omega s0}\right) = \Delta\dot{\Omega}_{s0} \quad . \tag{23.289}$$

6. Von besonderem Interesse ist wegen des unmittelbaren Einflusses auf die Umlaufzeit der näherungsweise Zusammenhang der großen Bahnhalbachse mit den gegebenen Parametern mittlere drakonitische Umlaufzeit und Knotenlängenverschiebung bzw. Knotenlängendrift. Da im Fall von Erdsatelliten die numerischen Abschätzungen in Abschnitt 21.2 ergeben, dass

$$\Delta\dot{\Omega}_{s0} \approx \Delta\dot{\omega}_{s0} \approx \Delta\left(\left(M_0\right)^{\cdot}_{s0}\right) = O\left(J_2^2\right) \qquad \langle \text{für } ☥ \quad , \tag{23.290}$$

kann aus Formel (23.283) mit Hilfe der Näherung $\overline{P_{D0}} = \overline{P_{K0}} + O\left(J_2\right)$ und unter Verwendung des Differentials (23.278) die Näherungsabschätzung

$$\Delta\overline{P_{D0}} = \frac{3}{2}\frac{\overline{P_{D0}}}{\bar{a}_0}\Delta\bar{a}_0 + O\left(J_2^2\right) \tag{23.291}$$

erhalten werden. Hier ist die gesuchte Halbachse $\bar{a}_0$ zunächst noch unbekannt, so dass die nullte Näherung (23.247) einen ersten Anhaltswert liefern kann. Der Einfluss auf die Bahnhalbachse durch die Wahl der mittleren drakonitischen Umlaufzeit ergibt daher die Abschätzung

$$\Delta\bar{a}_0 = \frac{2}{3}\frac{\bar{a}_0^{(0)}}{\overline{\overline{P_{d0}}}}\Delta\overline{P_{D0}} \;+\; O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.292}$$

In analoger Weise kann mit den Beziehungen (23.287) und (23.288) die Abschätzung

$$\Delta\lambda = \Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right) = \dot{\lambda}_{\Omega s0}\;\Delta\overline{P_{D0}} = \frac{3}{2}\dot{\lambda}_{\Omega s0}\;\frac{\overline{P_{D0}}}{\bar{a}_0^{(0)}}\;\Delta\bar{a}_0 \tag{23.293}$$

erhalten werden, somit auch

$$\Delta\bar{a}_0 = \frac{2}{3}\frac{\bar{a}_0^{(0)}}{\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}}\Delta\lambda \;+\; O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.294}$$

23.7 Äquivalenzbahnen bei Bezug auf drakonitische Bewegung

23.7.1 Kopplung von anomalistischer mit drakonitischer Bewegung

Eine Kopplung der Satellitenbewegung bezogen auf die Apsidenlinie mit der Bewegung in Bezug auf die Knotenlinie wird durch die Äquivalenz zwischen der anomalistischen und der drakonitischen Bewegung erreicht.

23.7.1.1 Allgemeine Eigenschaften der Äquivalenz von anomalistischen zu drakonitischen Bewegungen

Um eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahn zu konstruieren wird die mittlere anomalistische mittlere Bewegung[1] (22.29) $\overline{n_A} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s}$ mit der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung[2] (23.48) $\overline{n_D} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s} + \dot{\omega}_s$ verglichen. Daraus folgt notwendig und hinreichend die

[1] Abschnitt 22.2.2

[2] Abschnitt 23.2.2

➢ ***Erste Eigenschaft*** *von* $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ *Äquivalenzbahnen*

$$\overline{n_D} = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s \xrightarrow{!} \overline{n_A} \quad \Leftrightarrow \dot{\omega}_s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_D}} = \frac{2\pi}{\overline{n_A}} = \overline{P_A} \quad . \tag{23.295}$$

Die säkulare Drift des Argumentes des Perigäums lautet im Bahnmodell von *D. Brouwer* unter Berücksichtigung der ersten vier der zonalen Harmonischen des Erdgravitationsfeldes[1]

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{Gs} \quad = \quad & -\frac{3}{4}\overline{n}_{K0}\, J_2\, \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\left(1-5\cos^2\overline{i}_0\right)+ \\ & +\frac{3}{2^7}\overline{n}_{K0}\,\frac{R_E^4}{\overline{p}_0^4}\left\{J_2^2\left[-35+24\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+25\left(1-\overline{e}_0^2\right)+\right.\right. \\ & \qquad +\left(90-192\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-126\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^2\overline{i}_0+ \\ & \qquad \left.\left.+\left(385+360\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+45\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^4\overline{i}_0\right]- \right. \\ & -5J_4\left[21-9\left(1-\overline{e}_0^2\right)+\left(-270+126\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^2\overline{i}_0+\right. \\ & \left.\left.\qquad +\left(385-189\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^4\overline{i}_0\right]\right\}+\ldots\end{aligned} \tag{23.296}$$

zeigt, dass diese Bedingung im Fall von Erdsatelliten in erster Näherung $\left[O\left(J_2\right)\right]$ auf eine Inklination führt, die wir als *charakteristische Inklination* von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahn bezeichnen wollen:

$$1-5\cos^2 i_{char} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{char1} = 63°.434949,\; i_{char2} = 116°.565051 \tag{23.297}$$

1. Dieser Wert einer Inklination ist in der Literatur als kritische Inklination bekannt[2]. Um Verwechslungen und Unsicherheiten zu vermeiden, wird im Zusammenhang mit der Untersuchung von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahn der Begriff „kritische Neigung“ grundsätzlich nicht verwendet.

Die charakteristischen Inklinationen (23.297) werden offensichtlich unabhängig von allen anderen Bahnparametern definiert.

Der Ausdruck (23.296) lässt vermuten, dass Bahnen mit Inklinationen nahe einer charakteristischen Inklination wesentlich durch das Verhalten des Anteils zweiter Ordnung geprägt wird. Im Fall von Erdsatellitenbahnen[3] sind normalerweise sowohl J_2^2 wie J_4 von der Größenordnung 10^{-6}. Es zeigt sich im Folgenden, dass zur Untersuchung von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahnen stets der volle Ausdruck (23.296) verwendet werden muss[4].

---

[1] Formel (20.16) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

[2] z.B. in BREAKWELL, J. V. [1959]

[3] Siehe in Tabelle E-6 (Band V, Abschnitt E.7)

[4] numerische Beispiele im nächsten Abschnitt 23.7.1.8

Eine weitere wesentliche Eigenschaft von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahnen kann aus dem Vergleich der Knotenlängendrift (23.224) $\dot{\lambda}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}$ mit der Perigäumslängendrift[1] (22.209)

$$\dot{\lambda}_{Ps} = \dot{\Omega}_s + \frac{\cos \bar{i}_0}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \cos^2 \bar{\omega}_0} \dot{\omega}_s - \frac{\sin \bar{i}_0 \sin \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_0}{1-\sin^2 \bar{i}_0 \cos^2 \bar{\omega}_0} (i)^{\cdot}_s - \dot{\Theta} \qquad (23.298)$$

erhalten werden. Für Bahnen in der Umgebung der charakteristischen Inklination kann $\left|\dot{\omega}_s\right| \ll 1.0$ angenommen werden. Für Erdsatellitenbahnen[2] gilt normalerweise auch $\left|(i)^{\cdot}_s\right| \ll 1.0$.

Wegen der Knotenlängendrift und der Äquivalenzbedingung (23.295) ergibt sich daher für den Vergleich der mittleren Knotenlängenverschiebung (23.227) pro mittlerem drakonitischem Umlauf mit der mittleren Perigäumslängenverschiebung (22.210) pro mittlerem anomalistischem Umlauf die Beziehung als

- ***Zweite Eigenschaft*** *von* $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ *Äquivalenzbahnen*

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_D} \approx \dot{\lambda}_{Ps}\, \overline{P_A} = \overline{\Delta\lambda_P} \qquad \left\langle \bar{i}_0 \approx i_{krit} \right. \quad . \qquad (23.299)$$

Wegen $\left|\dot{\omega}_s\right| \ll 1.0$ ändert sich das Argument des Perigäums

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s \left(t - t_0\right) \qquad (23.300)$$

über lange Zeiträume (in der Praxis über Jahre) so gut wie nicht. Die Satellitenbahn wird daher insgesamt in ihrer Entwicklung in sich parallel verschoben. Somit gilt die

- ***Dritte Eigenschaft*** *von* $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ *Äquivalenzbahnen: Im Fall einer Äquivalenz aus drakonitischer mit anomalistischer Bewegung bewegt sich das Perigäum (analog das Apogäum) einer Satellitenbahn auf einem festen Breitenkreis.*

Ein quantitatives Beispiel wird in Abschnitt 23.7.1.8 vorgestellt (insbesondere in Bild 23-35, Seite 236).

23.7.1.2 Besondere Eigenschaften der Äquivalenz von anomalistischen zu drakonitischen Bewegungen

Um einen Überblick über mögliche $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahnen zu bekommen, wird in Bild 23-26 der Verlauf der Differenz $\overline{P_A} - \overline{P_D}$ zwischen den mittleren Umlaufzeiten über der großen Bahnhalbachse für verschiedene Inklinationen nahe der charakteristischen Inklination aufgetragen. Für einen ersten Überblick werden nur kreisförmige Bahnen untersucht.

Das Ergebnis ist überraschend: für Bahnen mit Inklinationen größer als die charakteristische Inklination wird die Differenz $\overline{P_A} - \overline{P_D}$ mit wachsenden Halbachsen immer kleiner, verschwindet aber nie ganz. Hier handelt es sich um Bahnen, die zu *Nahe-parallel Äquivalenzbahnen* führen. Für Bahnen mit Inklinationen kleiner als die charakteristische Neigung können jedoch präzise Nullstellen beobachtet werden. In diesen Fällen handelt es sich um exakte Äquivalenzbahnen. Die Berechnung wurde mit dem gesamten *Brouwer*schen Bahnmodell durchgeführt.

---

[1] Abschnitt 22.9.3.1

[2] Vgl. etwa die numerischen Abschätzungen in H. KLINKRAD [1982]

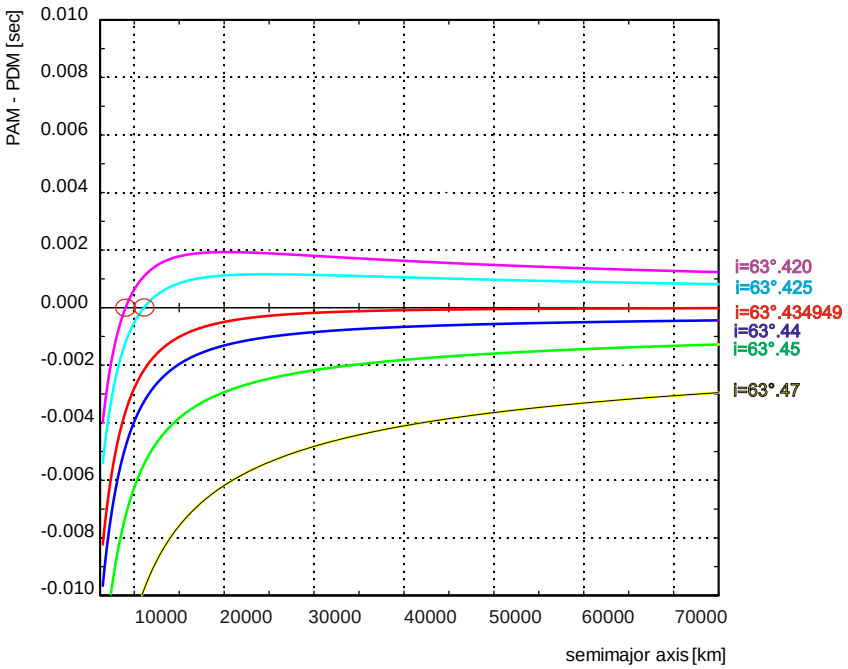


Bild 23-26: Kurven der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\left(\overline{P_A} - \overline{P_D}\right)$ von Kreisbahnen über der großen Bahnhalbachse für verschiedene Inklinationen in der Umgebung der charakteristischen Inklination $i_{char\,1}$. In die Berechnung werden alle J_2, J_3, J_4 Störungen der Bahnbewegung einbezogen. Die Nullstellen $\left(\overline{P_A} = \overline{P_D}\right)$ sind markiert. An diesen Stellen treten exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen auf.

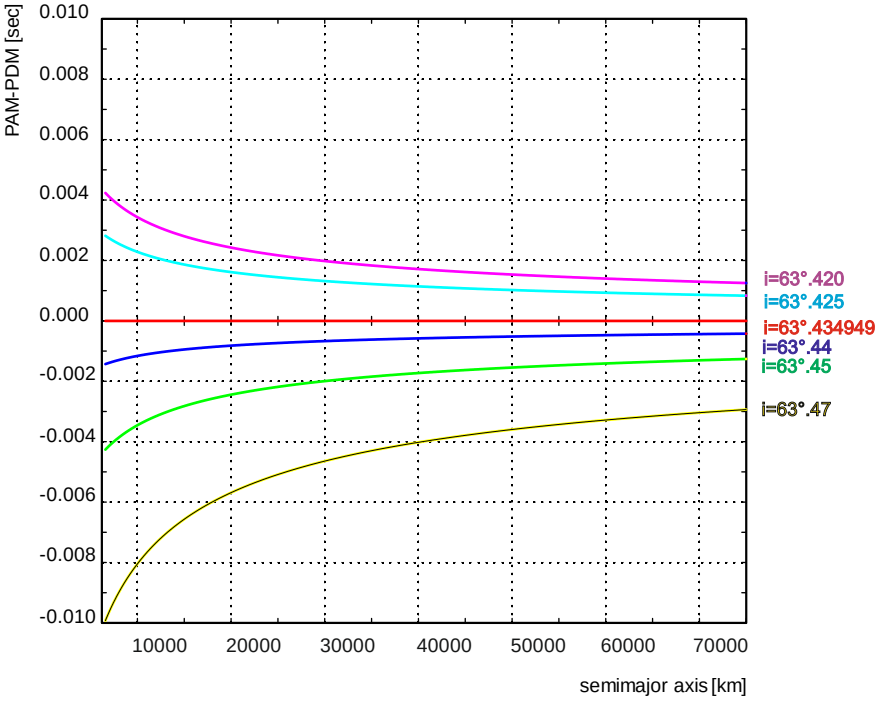


Bild 23-27: Kurven der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\left(\overline{P_A} - \overline{P_D}\right)$ von Kreisbahnen über der großen Bahnhalbachse für verschiedene Inklinationen in der Umgebung der charakteristischen Inklination $i_{char\,1}$. In die Berechnung werden nur die J_2 und J_2^2 Störungen der Bahnbewegung einbezogen. Es gibt keine Nullstellen $\left(\overline{P_A} = \overline{P_D}\right)$. Somit treten ausschließlich nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen auf.

Eine zweite Überraschung zeigt Bild 23-27: es wird dieselbe Rechnung wie für Bild 23-26 durchgeführt, jedoch wird nur ein Bahnmodell mit dem Einfluss von J_2 einbezogen. Alle Einflüsse durch J_4 werden hier vernachlässigt. Es tritt keine Nullstelle der Kurven $\overline{P_A} - \overline{P_D}$ über der großen Bahnhalbachse auf, es gibt dann keine exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen, vielmehr nur Nahe-parallele Äquivalenzbahnen. Dieses merkwürdige Verhalten wird in den folgenden Abschnitten näher untersucht. Es wird gezeigt, dass dieser Effekt auch bei exzentrischen Bahnen auftritt (siehe als Beispiel Bild 23-33 auf Seite 234).

23.7.1.3 Der Einfluss von J_4

Der Einfluss der einzelnen Anteile aus der säkularen Variation des Perigäums (23.296) soll getrennt untersucht werden:

$$\dot{\omega}_{Gs/1} := -\frac{3}{4}\overline{n}_{K0} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\left(1-5\cos^2\overline{i}_0\right) \tag{23.301}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{Gs/2} := +\frac{3}{2^7}\overline{n}_{K0}\frac{R_E^4}{\overline{p}_0^4}\Big\{J_2^2\Big[&-35+24\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+25\left(1-\overline{e}_0^2\right)+\\ &+\left(90-192\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-126\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^2\overline{i}_0+\\ &+\left(385+360\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+45\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^4\overline{i}_0\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{23.302}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{Gs/4} := -\frac{3}{2^7}\overline{n}_{K0}\frac{R_E^4}{\overline{p}_0^4}\Big\{5J_4\Big[&21-9\left(1-\overline{e}_0^2\right)+\left(-270+126\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^2\overline{i}_0+\\ &+\left(385-189\left(1-\overline{e}_0^2\right)\right)\cos^4\overline{i}_0\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{23.303}$$

Bild 23-28 zeigt den Verlauf der drei Anteile für eine kreisförmige Bahn mit Perigäumshöhe $H_P = 200\,\text{km}$ in der Umgebung der charakteristischen Neigung $i_{char\,1}$. Der Anteil $\dot{\omega}_{Gs/2}$ mit J_2^2 aus Beziehung (23.302) ist gegenüber dem Anteil $\dot{\omega}_{Gs/4}$ mit J_4 aus Beziehung (23.303) offensichtlich quantitativ vernachlässigbar. Der Unterschied zwischen diesen beiden Einflüssen wird mit zunehmender Exzentrizität geringer, verschwindet jedoch nicht ganz. Dies zeigen als Beispiele Bild 23-29 und Bild 23-30.

In den drei Bildern wird der Anteil $\dot{\omega}_{Gs/1}$ mit J_2 allein als blaue Kurve dargestellt. Die in hellblau gezeichnete Kurve mit den ($J_2 + J_2^2$)-Anteilen $\dot{\omega}_{Gs/1} + \dot{\omega}_{Gs/2}$ überlagert die blaue J_2 Kurve unmerkbar vollständig. Offensichtlich fügt der J_2^2-Anteil keinen wesentlichen Beitrag zur Berechnung der säkularen Drift $\dot{\omega}_{Gs}$ des Argumentes des Perigäums bei. Wegen der Dominanz des J_2-Anteils verschwindet der $J_2 + J_2^2$ Anteil stets auch an der charakteristischen Neigung $i_{char\,1}$.

Wird der Wert des J_4-Anteils $\dot{\omega}_{Gs/4}$ zu dem $J_2 + J_2^2$ Anteil $\dot{\omega}_{Gs/1} + \dot{\omega}_{Gs/2}$ addiert um die säkulare Gesamtvariation des Argumentes des Perigäums $\dot{\omega}_{Gs}$ zu erhalten, erhält man eine Verschiebung der Gesamtkurve zu kleineren Inklinationen hin. Dies ist eine Folge davon, dass der J_4-Anteil stets negativ ist.

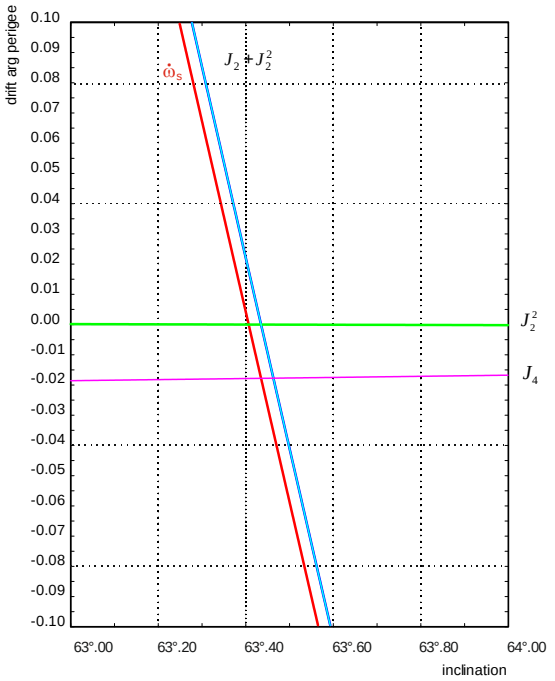


Bild 23-28: Die säkulare Drift des Perigäums $\left(\dot{\omega}_s \times 10^7 \text{ rad/sec}\right)$ und die separaten Anteile nach J_2, J_2^2 und J_4 über der Inklination in der Nähe der charakteristischen Inklination, für die kreisförmige Bahn mit der großen Bahnhalbachse 6367.140 km

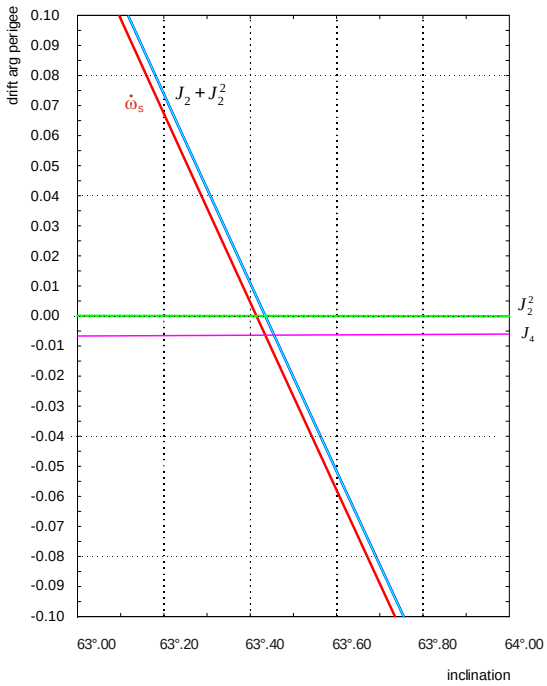


Bild 23-29: Die säkulare Drift des Perigäums $\left(\dot{\omega}_s \times 10^7 \text{ rad/sec}\right)$ und die separaten Anteile nach J_2, J_2^2 und J_4 über der Inklination in der Nähe der charakteristischen Inklination, für die exzentrische Bahn mit e=0.2 und der großen Bahnhalbachse 8222.67125 km

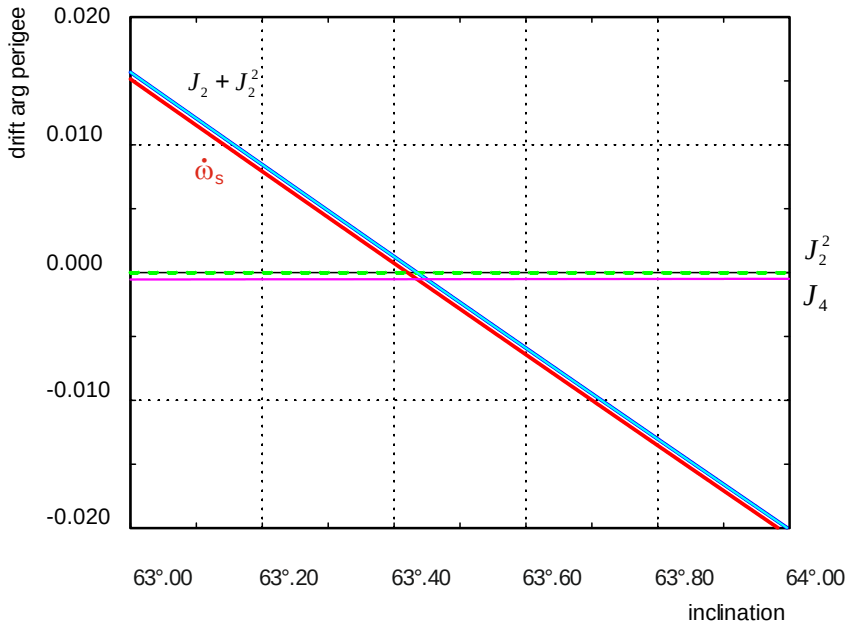


Bild 23-30: Die säkulare Drift des Perigäums $\left(\dot{\omega}_s \times 10^7 \text{ rad/sec}\right)$ und die separaten Anteile nach J_2, J_2^2 und J_4 über der Inklination in der Nähe der charakteristischen Inklination, für die exzentrische Bahn mit e=0.7 und der großen Bahnhalbachse 21927.123333 km.

Infolgedessen ist eine Nullstelle von $\dot{\omega}_s$, die notwendig für eine exakte Äquivalenzbahn ist, nur für Inklinationen kleiner als die charakteristische Neigung $i_{char\,1}$ zu erhalten.

e	$\overline{a_{QAD}}$ [km]	J_2^2	J_4	$\bar{i}_0\left(J_2+J_2^2\right)$	$\bar{i}_0\left(\dot{\omega}_{Gs}\right)$
0.0	6578.140	-2.0×10^{-4}	-2.0×10^{-2}	63°.435	63°.407
0.1	7309.041	-1.0×10^{-4}	-1.0×10^{-2}	63°.435	63°.411
0.2	8222.671	-8.0×10^{-5}	-6.0×10^{-3}	63°.435	63°.415
0.3	9397.339	-5.0×10^{-5}	-4.0×10^{-3}	63°.435	63°.417
0.4	10963.562	-4.0×10^{-5}	-3.0×10^{-3}	63°.435	63°.418
0.5	13156.274	-3.0×10^{-6}	-1.0×10^{-3}	63°.435	63°.419
0.6	16445.343	-3.0×10^{-6}	-1.0×10^{-4}	63°.435	63°.420
0.7	21927.123	-1.0×10^{-6}	-5.0×10^{-4}	63°.435	63°.421
0.8	32890.685	-2.0×10^{-7}	-3.0×10^{-4}	63°.435	63°.421
0.9	65781.370	-3.0×10^{-8}	-8.0×10^{-5}	63°.435	63°.421
0.0	21927.123	-2.0×10^{-7}	-2.0×10^{-5}	63°.435	63°.411

Tabelle 23-5: Zur Wirkung des Einflusses von J_4 auf die Inklination einer $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn in der Umgebung der charakteristischen Inklination für Bahnen mit unterschiedlichen Exzentrizitäten. Die Bahnhalbachse ist hier mit Bezug auf die minimale Perigäumshöhe H_P = 200 km ausgewählt. In der letzten Zeile ist zusätzlich der Einfluss auf eine kreisförmige MEO-Bahn enthalten. Die Inklination wird in Schritten von $\Delta i=\left(10^{-4}\right)$ Grad in jedem Rechenschritt vorgegeben

Die entsprechenden Zahlenwerte sind in Tabelle 23-5 für exzentrische Bahnen mit Exzentrizitäten $e\in\left[0.0,0.9\right)$ zusammengestellt. Die gewählten großen Bahnhalbachsen entsprechen mit der jeweils vorgegeben mittleren Exzentrizität der Perigäumshöhe $H_P=200\,\text{km}$. Nur für die Bahn mit Halbachse $\overline{a_{Q\,0}}$ = 21927.123 km wurde zusätzlich zum Vergleich eine Kreisbahn gewählt. Die (Näherungswerte) für die jeweiligen J_2^2- bzw. J_4-Anteile sind in der Tabelle enthalten, die Nullstelle für den $J_2+J_2^2$-Anteil, die jeweils die charakteristische Neigung ist, sowie die Nullstelle für den gesamten Wert von $\dot{\omega}_s$ mit der Inklination für eine exakte Äquivalenzbahn.

Aus den letzten Überlegungen ergibt sich

- *die **vierte Eigenschaft** von $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahne: Bahnen, die nur die zonale Harmonische J_2 enthalten, sind nahe-parallele Äquivalenzbahnen für alle Inklinationen in der gesamten Umgebung der charakteristischen Inklination. Bahnen, die die zonalen Harmonischen J_2 und J_4 enthalten, sind exakte Äquivalenzbahnen für alle Inklinationen unterhalb der charakteristischen Inklination.*

23.7.1.4 Berechnung der Halbachse von anomalistischen zu drakonitischen Äquivalenzbahnen

Die große Bahnhalbachse kann bei vorgewählten Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ entsprechend der ersten Eigenschaft von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahnen (23.295) mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAD}}\right) \equiv \overline{P_A}\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_D}\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi}{\overline{n_A}\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)} - \frac{2\pi}{\overline{n_D}\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)} = 0 \quad \langle \nu = 1,2,3,\cdots . \tag{23.304}$$

berechnet werden. Zum Start des Suchprozesses kann die Näherungshalbachse (z.B. $H_{P,\min}$:= 200 km)

$$\overline{a}_0^{(0)} := \frac{R_E + H_{P\min}}{1-\overline{e}_0} \quad . \tag{23.305}$$

verwendet werden. Mit diesem Wert startet der Suchprozess, bei dem die große Bahnhalbachse dann schrittweise um einen vorgegebenen Wert Δa erhöht wird

$$\overline{a}_0^{(\nu+1)} = \overline{a}_0^{(\nu)} + \Delta a \quad , \quad \nu = 0,1,2,3,\cdots , \tag{23.306}$$

bis die Differenz der mittleren anomalistischen und drakonitischen Umlaufzeit unter eine geeignet vorgewählte Schranke fällt:

$$\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le \Delta\overline{P} \tag{23.307}$$

BEISPIEL 1: Die große Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahn mit minimaler Perigäumshöhe $H_P = 200$ km mit der vorgegebenen Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.35$ ist zu bestimmen. Nach der ersten Eigenschaft (23.295) muss die vorgegebene Inklination in der Nähe der charakteristischen Inklination liegen. Es sei $\overline{i}_0 = 63°.428$ gewählt.

Die Funktionsgleichung (23.304) wird mit der Schrittweite $\Delta a = 1$ km und der Funktionsgenauigkeit 10^{-8} sec bearbeitet.

Die Lösung ist: $\overline{a_{QAD}}_0 =$ 15996.211 km mit den Umlaufzeiten

$\overline{P_A} = 20135.5695932$ sec, $\overline{P_D} = 20135.5695932$ sec, $\overline{P_A} - \overline{P_D} = 0.33665856 \times 10^{-7}$ sec. ◀

Die große Bahnhalbachse einer $\left(P_A \triangleq P_D\right)-$ Äquivalenzbahn bei vorgegebener Inklination $\overline{i}_0$ und Exzentrizität $\overline{e}_0$ kann mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAD}}\right) \equiv P_D\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) - P_A\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \tag{23.308}$$

berechnet werden. Die vorgegebene Inklination sollte wieder in der Nähe der charakteristischen Inklination liegen.

BEISPIEL 2: Die große Bahnhalbachse einer wahren $\left(P_A \triangleq P_D\right)-$ Äquivalenzbahn mit minimaler Perigäumshöhe $H_P = 200$ km und mit der vorgegebenen Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.35$ ist zu bestimmen. Es sei wie in Beispiel 1 die Inklination $\overline{i}_0 = 63°.428$ gewählt, die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.35$.

Die Funktionsgleichung (23.304) wird mit der Schrittweite $\Delta a = 1$ km und der Funktionsgenauigkeit 10^{-8} sec bearbeitet.

Die Lösung ist: $\overline{a_{QAD}}_0 =$ 15779.210769 km mit den Umlaufzeiten

$\overline{P_A} = 19727.2662657$ sec, $\overline{P_D} = 19727.266266$ sec, $\overline{P_A} - \overline{P_D} = -0.48752554 \text{ sec} \times 10^{-7}$ sec.
Weitere Beispiele zur Berechnung der großen Bahnhalbachse finden sich in den Abschnitten 23.7.1.8 und 23.7.1.9. ◀

23.7.1.5 Das (a,i) Gebiet von exakten anomalistischen mit drakonitischen Äquivalenzbahnen

Die Darstellung des Bereichs der möglichen exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen wird wie folgt numerisch berechnet:

Die für die Darstellung erforderliche Genauigkeitsgrenze $\Delta\overline{P}$ sei vorgegeben. Die Inklination $\overline{i}_0$ wird als unabhängiger Parameter angenommen. Für die Suche nach einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn wird jeweils eine bestimmte Exzentrizität $\overline{e}_0$ gewählt. Ausgehend von einer minimalen großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0^{(0)}$ werden die mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_A}, \overline{P_D}$ in jedem Inklinationsschritt $\overline{i}_0^{(\nu)}$ mit der vorgewählten Exzentrizität $\overline{e}_0$ berechnet. Wenn die Äquivalenzbedingung $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le \Delta\overline{P}$ erfüllt ist, wird die zuletzt erhaltene Halbachse $\overline{a}_0^{(\nu)} =: \overline{a_{QAD}}$ als Halbachse einer Äquivalenzbahn unter Verwendung der Bedingungsgleichung (23.304) erhalten. Ist die Äquivalenzbedingung nicht erfüllt, werden die fest vorgegebenen Parameter $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ verwendet, um die Halbachse um die Schrittweite Δa zu erhöhen und somit $\overline{a}_0^{(\nu+1)} \Rightarrow \overline{a}_0^{(\nu)} + \Delta a,\ \nu = 1, 2, 3, \cdots$ neue Umlaufzeiten $\overline{P_A}^{(\nu+1)}, \overline{P_D}^{(\nu+1)}$ zu berechnen. Dieser Vorgang wird so lange durchgeführt, bis die Äquivalenzbedingung mit der zuletzt berechneten großen Bahnhalbachse erfüllt ist. Danach wird eine neue Inklination mit der Schrittweite $\overline{i}_0 \Rightarrow \overline{i}_0 + \Delta i$ gewählt und der ganze Vorgang wiederholt, um die entsprechende neue große Bahnhalbachse zu berechnen. Dieser Vorgang wird in einem bestimmten Inklinationsintervall durchgeführt.

Der Rechenvorgang zur Berechnung der Grenzexzentrizität e_B beginnt ebenfalls mit einer Inklination $\overline{i}_0$ als Parameter. Allerdings wird in diesem Fall, ausgehend von der Exzentrizität $\overline{e}_0^{(0)}$ =0.0, die Exzentrizität mit der Schrittweite Δe zu $\overline{e}_0 \Rightarrow \overline{e}_0 + \Delta e$ so lange erhöht, bis die jeweils berechnete große Bahnhalbachse zu einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn führt, die die vorgegebene minimale Perigäumshöhe H_P hat. Bei jedem Schritt kann eine Verfeinerung unter Verwendung der Genauigkeitsgrenzen Δ(a) für die große Bahnhalbachse bzw. Δ (e) für die Exzentrizität vorgenommen werden. Dieser Vorgang wird dann für alle entsprechenden Inklinationen wiederholt.

Als Ergebnis dieses Berechnungsprozesses enthält Bild 23-31 (auf Seite 229) den Bereich möglicher exakter $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit den Grenzgenauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-11}$ sec, $\Delta(i) \le 10^{-9}$ deg, $\Delta(a) \le 10^{-3}$ km, $\Delta(e) \le 10^{-6}$, den Schrittweiten Δa = 1 km, Δi = 0°.0001, Δe = 0.01 und der minimalen Perigäumshöhe H_P =200 km.

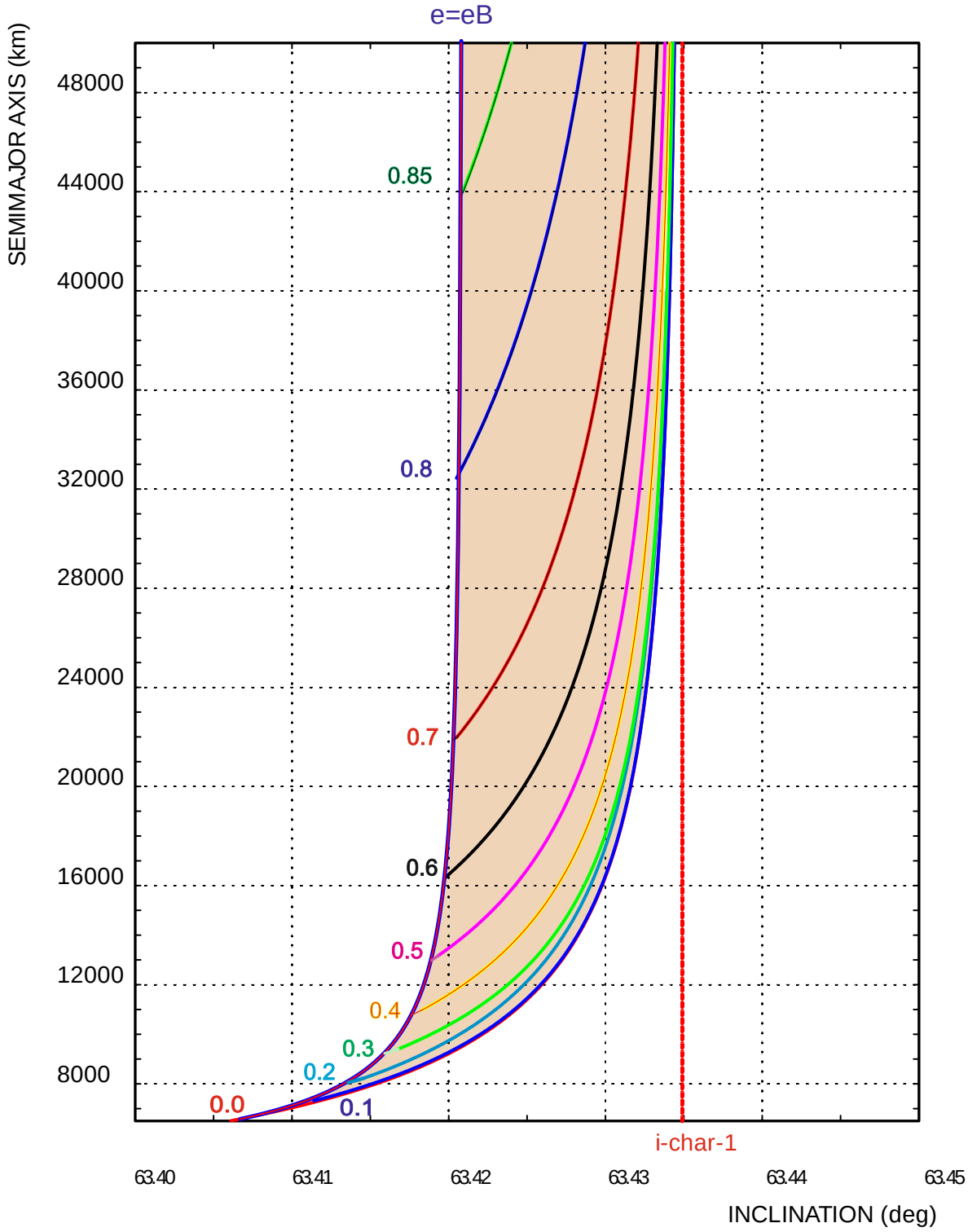


Bild 23-31: Übersicht über alle exakten $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen im Halbachsenbereich 6578 km < a < 50000 km, mit der Genauigkeit $\Delta\overline{P} = 10^{-8}$ und den Schrittweiten Δa= 1 km, Δ*i* = 0°.0001, Δ*e* = 0.01. Fundamentale Parameter (TCB): $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\ddot{O}} = 398600.4356\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}[1984] = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ rad/sec, $J_2 = 0.001082625379977$.

Die hier beschriebenen Berechnungsmethoden können im Prinzip auch für wahre $\left(P_A \triangleq P_D\right)$– Äquivalenzbahnen. sowie und auch mit einer numerischen Ephemeridenrechnung durchgeführt werden.

Die (rote) Kurve für kreisförmige exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen in Bild 23-31 nähert sich asymptotisch der charakteristischen Inklination $i_{char\,1}$ an. Die anderen Kurven mit zunehmender Exzentrizität $\overline{e}_0$ nähern sich der charakteristischen Inklination an, ohne sie zu erreichen, auch wenn für die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ immer größere Werte berechnet werden.

Anmerkung: In Bild 23-31 wird die Aussage bestätigt: Exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen sind auf Inklinationen kleiner als die charakteristische Inklination $i_{char\,1}$ beschränkt. (Eine spiegelbildliche Aussage gilt für Inklinationen größer als die charakteristische Inklination $i_{char\,2}$).◀

23.7.1.6 Berechnung der Inklination bei anomalistischen zu drakonitischen Äquivalenzen

Analog zur Berechnung der großen Bahnhalbachse nach Vorgabe der Elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ kann auch die Inklination bei Vorgabe der Elemente $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0\right)$ berechnet werden. Die erste grundlegende Eigenschaft (23.295) von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen lässt vermuten, dass derartige Berechnungen nur in einem Umfeld von der charakteristischen Inklination sinnvoll durchgeführt werden können. Für den iterativen Prozess kann daher als nullte Näherung

$$\overline{i_{QAD}}^{(0)} = i_{char,1} = 63°.434949\,, \quad \text{bzw.} \quad \overline{i_{QAD}}^{(0)} = i_{char,2} = 116°.565051 \tag{23.309}$$

angenommen werden. Die Funktionsgleichung zur Berechnung der Inklination $\overline{i_{QAD}}$ einer exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn lautet dann

$$fct\left(\overline{i_{Qad}}\right) \equiv \overline{P_A}\left(\overline{i}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_D}\left(\overline{i}_0^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \quad . \tag{23.310}$$

BEISPIEL 3: Es werde eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn mit der minimalen Perigäumshöhe $H_P = 200$ km und der Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.35$ gewählt. Dies ergibt die große Bahnhalbachse $\overline{a_0} =$ 10120.210769 km. Die zugehörige Inklination soll im Fall direkter Bahnen berechnet werden. Die Iteration (22.286) wird mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.001$ und der Genauigkeitsgrenze $\Delta fct = 10^{-7}$ sec durchgeführt. Die Inklination soll mit der Genauigkeit Δ(i)=10^{-7} Grad berechnet werden. Die Ergebnisse lauten bei Bezug auf die Epoche 2021-02-10/12:00:0.0 :

$\overline{i_{QAD}}$ =63°.417576, $\overline{P_D}$ = 10133.5906106895818 sec, $\overline{P_A}$ = 10133.906106954499 sec,

$$\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| = \ 0.5868059815839 \times 10^{-8} \text{ sec.} \blacktriangleleft$$

Die Berechnung der Inklination einer wahren $\left(P_A \triangleq P_D\right)$– Äquivalenzbahn bei vorgewählter großer Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und Exzentrizität $\overline{e}_0$ kann analog der Bedingung (22.286) iterativ mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{i_{QAD}}\right) \equiv P_A\left(\overline{i}_0^{(\nu)}\right) - P_D\left(\overline{i}_0^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \tag{23.311}$$

berechnet werden.

BEISPIEL 4: Es werde eine $\left(P_A \triangleq P_D\right)$ – Äquivalenzbahn mit der minimalen Perigäumshöhe $H_P = 200$ km und der Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.35$ gewählt. Die zugehörige Inklination soll im Fall retrograder Bahnen berechnet werden. Die Iteration (22.288) wird mit der Schrittweite $\Delta i =$ 0°.001 und der Genauigkeitsgrenze $\Delta fct = 10^{-9}$ sec durchgeführt. Die Inklination soll mit der Genauigkeit 10^{-7} Grad berechnet werden. Die nur mit säkularen Bewegungseinflüssen gerechneten Ergebnisse lauten bei Bezug auf die Epoche 2021-02-10/12:00:0.0 :

$\overline{i_{QAD}}$ =116°.582424108, $\overline{P_D}$ = 10133. 5906106742186 sec, $\overline{P_A}$ = 10133. 5906106899201 sec, $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right|$ = 0. 1570151653×10^{-7} sec. ◀

23.7.1.7 Berechnung der Exzentrizität von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – bzw. $\left(P_A \triangleq P_D\right)$ – Äquivalenzbahnen

Um eine geeignete nullte Näherungslösung für die Exzentrizität zu finden, wenn die anderen 5 Bahnparameter gegeben sind, muss der Ausdruck (23.296) nach $\overline{e}_0$ aufgelöst werden. Hier handelt es sich um ein Polynom der vierten Ordnung in der Exzentrizität, das nur sehr empfindlich bearbeitet werden kann. Aus Bild 23-31 (auf Seite 229) ist zu ersehen, dass die Bahnelemente große Bahnhalbachse und Inklination nur in einem eingeschränkten Umfeld vorgegeben werden können. Geringe Änderungen dieser Parameter beeinflussen die Berechnung der Exzentrizität äußerst empfindlich. Daher kann aus Bild 23-31 nach Vorgabe der mittleren Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ eine nahe gelegene Exzentrizität als Anfangsnäherung gewählt werden. Die endgültige Berechnung der Exzentrizität erfolgt dann mit einer der Funktionsgleichungen

$$\begin{aligned} &fct\left(\overline{e_{QAD}}\right) \equiv \overline{P_A}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_D}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi}{\overline{n_A}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right)} - \frac{2\pi}{\overline{n_D}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right)} = 0 \\ &\text{resp.} \quad fct\left(\overline{e_{QAD}}\right) \equiv P_D\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) - P_A\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \langle \nu = 1,2,3,\cdots . \end{aligned} \tag{23.312}$$

Wenn für eine gegebene Genauigkeitsgrenze $\Delta\overline{P}$ bzw. ΔP die Äquivalenzbedingung

$$\left|\overline{P_A}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_D}\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right)\right| \le \Delta\overline{P} \quad \text{resp.} \quad \left|P_A\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right) - P_D\left(\overline{e}_0^{(\nu)}\right)\right| \le \Delta P \tag{23.313}$$

erfüllt ist, ist der letzte Wert $\overline{e_{QAD}} := \overline{e}_0^{(\nu)}$ des Iterationsprozesses (23.312) die gesuchte Exzentrizität.

BEISPIEL 5: Für eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenz seien $\overline{a}_0 = 20000.0$ km und $\overline{i}_0 = 63°.43$ vorgegeben.

Aus kann die Anfangslösung $\overline{e}_0^{(0)} = 0.4$ abgelesen werden. Funktionsgleichung (23.312) liefert mit der Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta fct\right| \le 10^{-9}$ sec, sowie der Schrittweite $\Delta e = 0.001$ mit der

Genauigkeit für der Exzentrizität $\Delta(e) \le 10^{-7}$ als Lösung die Exzentrizität $\overline{e_{QAD\,0}}$ = 0.395145576. Die mittleren Umlaufzeiten sind

$\overline{P_A} =$ 28149.7453657524020 sec, $\overline{P_D} =$ 28149. 7453657523838sec, mit der Genauigkeit

$$\overline{P_A} - \overline{P_D} = 0.1818989 \times 10^{-10} \text{ sec} \; . \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 6: Für eine $\left(P_A \mathrel{\hat{=}} P_D\right)$ – Äquivalenz seien $\bar{a}_0 = 10000.0$ km und $\bar{i}_0 = 63°.422$ vorgegeben. Nach Bild 23-31 kann als Anfangslösung $\bar{e}_0^{(0)} = 0.1$ gewählt werden.

Mit der Funktionsgleichung (23.312) erfolgt im Fall wahrer Bahnen unter Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüssen mit der Genauigkeitsgrenze $|\Delta fct| \le 10^{-9}$ sec, sowie der Schrittweite $\Delta e = 0.001$ und der Genauigkeit für der Exzentrizität $|\Delta e| \le 10^{-7}$ als Lösung für die Exzentrizität $\overline{e_{QAD\,0}}$ = 0.13937508. Die wahren Umlaufzeiten sind

$$P_A = \text{ 9953.3663413577106 sec, } P_D = \text{ 9953.3663413577215 sec,}$$

$$|P_A - P_D| = 0.109139 \times 10^{-10} \text{ sec} \; . \blacktriangleleft$$

23.7.1.8 Exakte Äquivalenz von anomalistischen zu drakonitischen Bewegungen

Um exakte $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen näher zu untersuchen wird der Verlauf der Differenz $\overline{P_A} - \overline{P_D}$ der mittleren anomalistischen und der mittleren drakonitischen Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse untersucht. In Bild 23-32 als Ausschnitt von Bild 23-26 werden kreisförmige Bahnen, in Bild 23-33 (auf Seite 234) exzentrische Bahnen, je mit verschiedenen Inklinationen vorgestellt. Alle diese Bahnen müssen auf Grund der vorstehenden Überlegungen Inklinationen haben, die kleiner als die charakteristische Inklination sind. Exakte $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen treten an den Stellen der Kurven auf, an denen diese Kurven die Nulllinie überqueren. Alle diese Bahnen wurden unter Einschluss des gesamten Bahnmodells (mit den Einflüssen durch J_2, J_2^2 und J_4 nach *D. Brouwer*) berechnet.

$\bar{i}_0$	$\bar{e}_0$	$\bar{a}_0$ [km]	$\overline{P_A} = \overline{P_D}$ [sec]	$\overline{P_A} - \overline{P_D}$ [sec]	$\dot{\omega}_s$ [rad / sec]
63°.410	0.0	7000.278310	5830.431516	0.0	$0.48153078588856 \times 10^{-19}$
	0.3	---	---	---	---
	0.6	---	---	---	---
63°.417	0.0	8251.209228	7460.561035	0.0	$-0.4873014046368 \times 10^{-19}$
	0.3	9462.411894	9161.939926	0.0	$-0.1519391198531 \times 10^{-19}$
	0.6	---	---	---	---

63°.418	0.35	10245.888986	10322.902654	0.0	$-0.9485176686568\times10^{-21}$
63°.420	0.0	9040.389403	8555.822681	0.18189894×10^{-11}	$0.14224394268857\times10^{-18}$
	0.3	10367.478636	10507.081620	0.0	$0.52383254392058\times10^{-19}$
	0.6	16450.528302	21000.1365182	0.0	$-0.1227685955514\times10^{-19}$
63°.425	0.0	11079.745704	11607.86526	0.0	$0.26082710773810\times10^{-19}$
	0.3	12706.289499	14255.419404	0.0	$0.46411553206701\times10^{-20}$
	0.6	20161.929391	28492.900556	0.0	$0.11221028126708\times10^{-20}$
63°.430	0.0	15706.868140	19591.542156	0.0	$-0.1360272021714\times10^{-19}$
	0.3	18012.811228	24060.441323	0.0	$-0.1394653654628\times10^{-19}$
	0.6	28582.584443	48092.453754	0.0	$0.46840055382224\times10^{-20}$
63°.434	0.0	35865.137000	67596.495709	$0.8119968697\times10^{-8}$	$-0.1116862101037\times10^{-16}$
	0.3	41131.338571	83018.360482	$0.5529727786\times10^{-8}$	$-0.5035155229558\times10^{-17}$
	0.6	65268.342500	165946.266859	$0.4627509042\times10^{-8}$	$-0.1057591200615\times10^{-17}$

Tabelle 23-6: Die Bahnparameter einiger exakter $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen für verschiedene Inklinationen und Exzentrizitäten. Der Suchprozess erfolgt mit der Schrittweite $\Delta a = 1\text{km}$, der Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 10^{-8}$ sec und mit dem vollständigen Bahnmodell J_2, J_3, J_4.

Ergänzend werden in Bild 23-34 ALLE exakten $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen für die jeweilige Inklination in Abhängigkeit von der Exzentrizität über der großen Bahnhalbachse dargestellt. Mit wachsender Exzentrizität schränken sich die möglichen exakten $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen auf Inklinationen nahe der charakteristischen Inklination ein.
Ein krasses Beispiel ist die Kurve für die Inklination $\overline{i}_0 = 63°.411$: Während Bild 23-32 zeigt, dass für kreisnahe Bahnen eine exakte $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn möglich ist, ist für Bahnen mit der Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.3$ nach Bild 23-33 (auf Seite 234) keine exakte $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn möglich. Dies wird in Bild 23-34 bestätigt: die Kurve mit exakten $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen und der Inklination $\overline{i}_0 = 63°.411$ endet bereits mit der Exzentrizität 0.07.

Tabelle 23-6 enthält die Bahnparameter einiger exakter $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen für verschieden Exzentrizitäten und Inklinationen. Der Suchprozess erfolgt mit der Schrittweite $\Delta a = 1\text{km}$ und der Genauigkeit der Bedingungsfunktion $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 10^{-8}$ sec. Die jeweils erreichte Funktionsgenauigkeit und der Wert der säkularen Drift $\dot{\omega}_s$ des Argumentes des Perigäums ergänzen die Zahlenwerte. Die Aussage bedeutet: Die erreichte Genauigkeit liegt weit unter 10^{-11} sec.

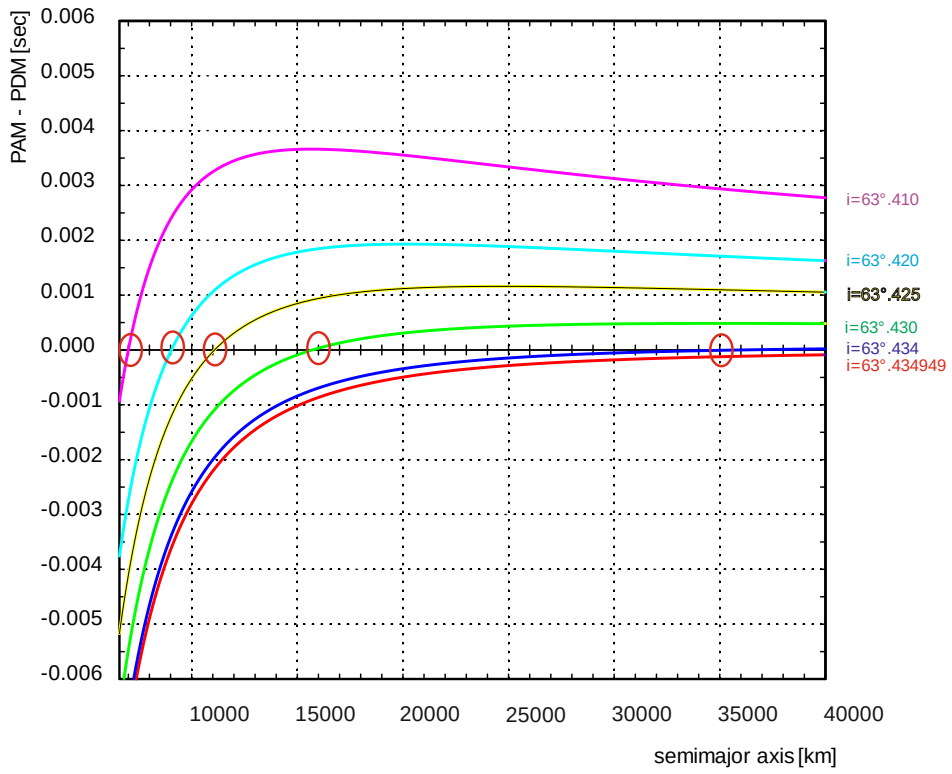


Bild 23-32: Kurven der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\left(\overline{P_A} - \overline{P_D}\right)$ von Kreisbahnen über der großen Bahnhalbachse für verschiedene Inklinationen, die kleiner als die charakteristische Inklination $i_{char\,1}$ sind. Die Nullstellen $\left(\overline{P_A} = \overline{P_D}\right)$ sind markiert. An diesen Stellen treten exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen auf.

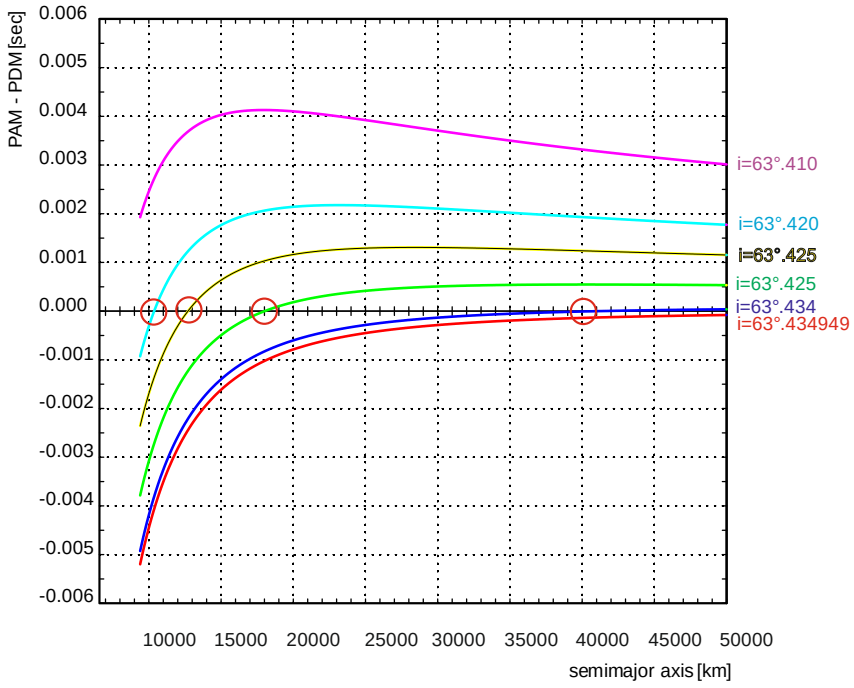


Bild 23-33: Kurven der Differenz der mittleren Umlaufzeiten $\left(\overline{P_A} - \overline{P_D}\right)$ exzentrischer Bahnen $\left(\overline{e}_0 = 0.3\right)$ über der großen Bahnhalbachse für verschiedene Inklinationen, die kleiner als die charakteristische Inklination $i_{char\,1}$ sind. Die Nullstellen $\left(\overline{P_A} = \overline{P_D}\right)$ sind markiert. An diesen Stellen treten exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen auf.

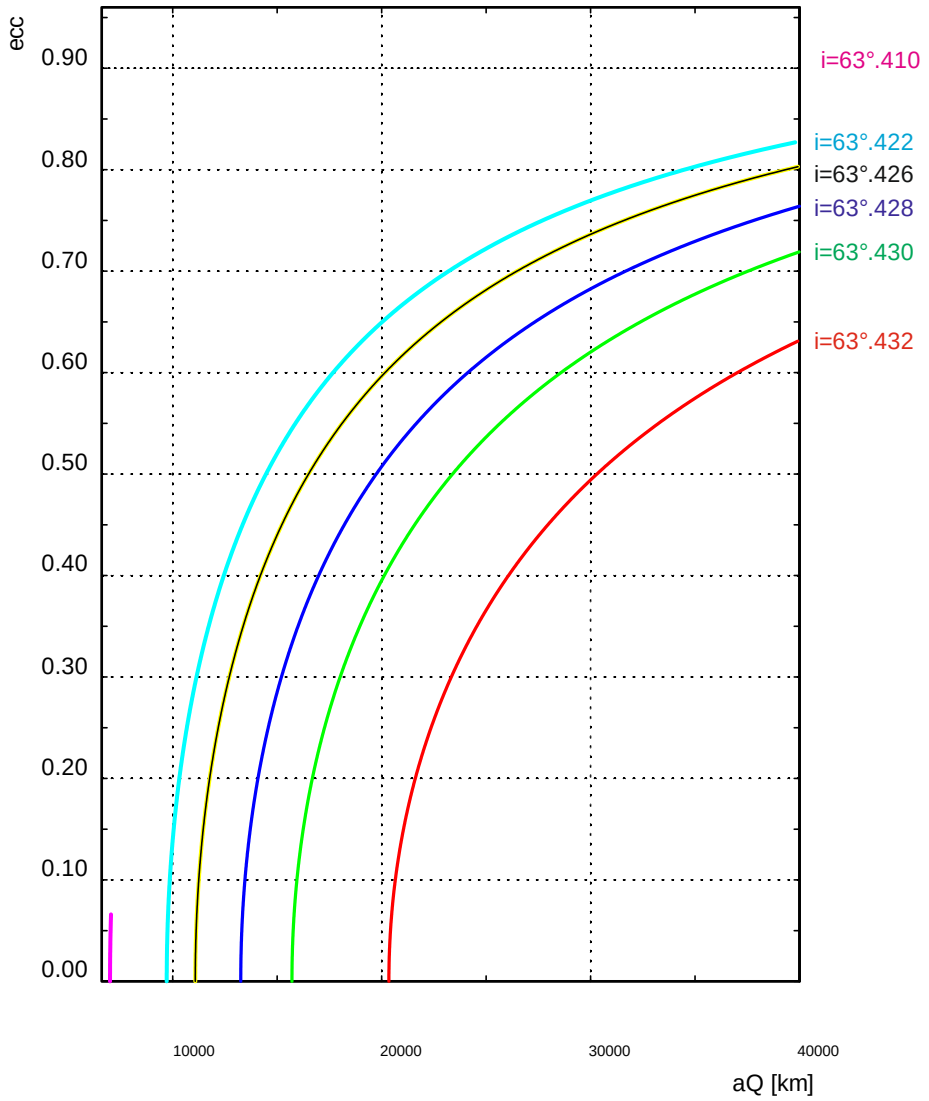


Bild 23-34: Bahnfamilien mit exakten exzentrischen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen über der großen Bahnhalbachse für verschiedene Inklinationen kleiner als die charakteristische Neigung $i_{char\,1}$, über der großen Bahnhalbachse

BEISPIEL: Konstruiere eine exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn mit der Inklination $\overline{i}_0 = 63°.418$ und der Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.35$.

Als Anfangswert für den Suchprozess wird mit der Mindest-Perigäumshöhe HP = 200 km die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0^{(0)}$=10120.210254 km gewählt.

Die Berechnung mit der Suchschrittweite Δa= 1 km und der geforderten Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 10^{-7}$ sec sowie der Berechnung unter Berücksichtigung der Bewegungseinflüsse durch J_2, J_2^2 und J_4 ergibt als Lösung die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$=10245.888 km. Die unabhängige Berechnung der Umlaufzeiten ergibt :

$$\overline{P_D} = 10322.9016718490075 \text{ sec}\,,\ \overline{P_A} = 10322.9016718490075 \text{ sec}\quad .$$

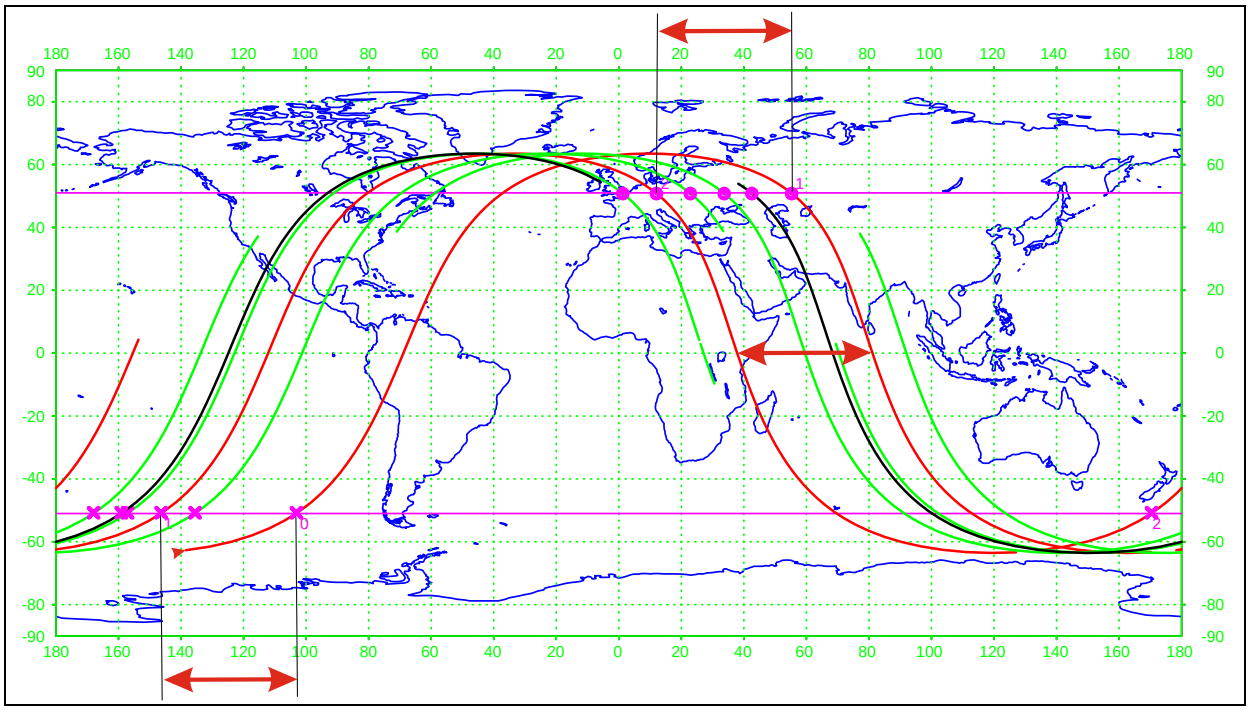


Bild 23-35: Entwicklung der exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn mit $\bar{e}_0 = 0.35$, $\bar{i} = 63°.418$, $\bar{\Omega}_0 = 220°.0$, $\bar{\omega}_0 = -60°.0$ über vier Umläufe im Abstand von 1 Woche sowie (in schwarz) nach einem Jahr. Die Perigäen (X) sowie die Apogäen (O) liegen jeweils auf ein und demselben Breitenkreis $\left(\varphi = \pm 51°\right)$. Die roten Pfeile markieren die übereinstimmenden Knotenlängen- bzw. die Perigäumslängenverschiebungen pro mittlerem anomalistischen bzw. drakonitischem Umlauf.

Somit wird entsprechend der geforderten Genauigkeit die Relation $\Delta\bar{P} = 0.0\,\text{sec}$. mit der Genauigkeit $10^{-13}\,\text{sec}$ übererfüllt. Die entsprechenden Bahnparameter sind in Tabelle 23-7 zusammengestellt. Man beachte, dass auch die Bedingung (23.299) für die Äquivalenz $\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = \overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D}$ der mittleren Knotenlängenverschiebung zur mittleren Perigäumslängenverschiebung quantitativ voll erfüllt ist. Das mittlere Argument $\bar{\omega}$ des Perigäums ändert mit der Relation (23.300) sich quantitativ über Jahre nur unmerklich, wie mit dem angegebenen Wert der säkularen Drift des Argumentes des Perigäums $\dot{\omega}_s$ berechnet werden kann. Dies zeigt Bild 23-35 (auf Seite 236). Perigäum (analog das Apogäum) bewegen sich stabil je auf einem Breitenkreis.

Die exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen haben im Wesentlichen folgende Eigenschaften, die in Bild 23-34, Bild 23-32 und Bild 23-33 sowie in den numerischen Beispielen in Tabelle 23-6 (auf Seite 233) visualisiert sind:

1. Exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen lassen sich nur finden, wenn ein vollständiges Bahnmodell zweiter (oder höherer) Ordnung verwendet wird.
2. Exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen kommen nur für Inklinationen kleiner als die charakteristische Inklination vor.

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$	
$\overline{a_{QAD}}$ =10245.888986 km, $\overline{e}_0$ =0.35, $\overline{i}_0$ =63°.418, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°	
$\overline{P_K}$ =10321.324907 sec	t_0 : 2020-12-30/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ =10324.591002 sec	P_H =10323.672796 sec
$\overline{P_A}$ = 10322.902654 sec	P_A = 19322.901733 sec
$\overline{P_D}$ = 10322.902654 sec	P_D = 10322.902222 sec
$\overline{P_T}$ = 10326.676489 sec	P_T = 10326.771077 sec
$\overline{H_P}$ = 281.690841 km	$\overline{H_A}$ = 7453.813131 km
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\, P_A = -43°.261414$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_D} = -43°.261414$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\, P_A = -43°.261410$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\, P_D = -43°.261412$
$\dot{\omega}_s$ = -0.94851766865689992×10^{-21} rad/sec	

Tabelle 23-7: Bahncharakteristika der mittleren drakonitischen und der mittleren anomalistischen exakten Äquivalenzbahn. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\odot}$ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 = 0.001082625379977 , geforderte Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 10^{-7}$ sec, erreichte Genauigkeit $\Delta\overline{P} \le 10^{-13}$ sec . ◀

3. Die mögliche große Bahnhalbachse einer kreisförmigen exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn ist umso kleiner je weiter die gewählte Inklination von der charakteristischen Neigung entfernt ist.
4. Bei exzentrischen exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn wächst die zu erwartende große Bahnhalbachse mit der Nähe der gewählten Inklination zur charakteristischen Inklination. Je größer die Exzentrizität ist umso größer ist die mögliche große Bahnhalbachse.
5. Je größer die Exzentrizität ist, desto näher muss die Inklination der charakteristischen Inklination benachbart sein um eine exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn erhalten zu können.
6. Knotenlängenverschiebung und Perigäumslängenverschiebung sind über Monate (eventuell sogar Jahre) quantitativ identisch. Perigäum und Apogäum bewegen sich daher stabil auf je einem Breitenkreis.
7. Für retrograde Bahnen (bei Bezug auf die charakteristische Neigung $i_{char,1} = 63°.434949$ bzw. $i_{char,2} = 116°.565051$) gelten diese Aussagen spiegelbildlich.

23.7.1.9 Die Konstruktion von Nahe-parallele anomalistischen zu drakonitischen Äquivalenzbewegungen

23.7.1.10 Äquivalenzbahnen

Die Bedingung (23.295) ist eine wesentliche Bedingung für die Existenz von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen: Daraus folgt, dass die Inklination eines solchen Orbits nahe an der charakteristischen Inklination $i_{char,1}$ (bzw. $i_{char,2}$) liegen muss.

Als Aufgabe soll z.B. die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAD}}$ einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn mit vorgegebener Exzentrizität $\bar{e}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ in Bezug auf ein vorgewähltes Bahnmodell berechnet werden. Die Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAD}}\right) \equiv \overline{P_A}\left(\bar{a}\right) - \overline{P_D}\left(\bar{a}\right) = \frac{2\pi}{\overline{n_A}\left(\bar{a}\right)} - \frac{2\pi}{\overline{n_D}\left(\bar{a}\right)} = 0 \tag{23.314}$$

wird zur Berechnung der großen Bahnhalbachse eingesetzt. Eine konstruktive Methode besteht darin, mit einer geeigneten kleinen Näherung $\bar{a}_0^{(0)}$ erster Ordnung zu beginnen. Diese wird dann um eine bestimmte Schrittweite a erhöht: $\bar{a}_0^{(\nu+1)} = \bar{a}_0^{(\nu)} + \Delta a$. Bei jedem neuen Schritt werden die Umlaufzeiten $\overline{P_A}, \overline{P_D}$ neu berechnet und verglichen. Unterschreitet die Differenz der Umlaufzeiten $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right|$ in Abhängigkeit von der jeweiligen Halbachse $\bar{a}_0^{(\nu)}$ als unabhängigem Parameter, gegebenenfalls verfeinert mit der Genauigkeit Δ(a) der Halbachse, einen vorgegebenen Grenzwert

$$\left|\overline{P_A}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) - \overline{P_D}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right)\right| < \Delta\bar{P} \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots, \tag{23.315}$$

kann der zuletzt ermittelte Wert $\bar{a}_0^{(\nu)} =: \overline{a_{QAD}}$ als Halbachse einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn angesehen werden. Dieser Wert ist also im Wesentlichen eine Funktion der Schrittweite a, der geforderten Funktionsgenauigkeit $\Delta\bar{P}$, Genauigkeit der Halbachse Δ(a), der unterschiedlichen Schrittweite Δa und des zugelassenen Bahnmodells.

Wie kann gezeigt werden, dass eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn eine nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn ist?

Wenn nicht aus anderen Überlegungen bekannt ist, dass eine Satellitenbahn mit einem gegebenen Bahnmodell ein nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn ist, kann man sich einer solchen Bahn schrittweise nähern. Gegeben seien die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ der gesuchten Bahn, deren große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAD}}$ als die einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn bestimmt werden soll.

Man beginnt mit der Annahme, dass die Bahn eine exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Genauigkeitsgrenze $\Delta\bar{P} = 10^{-8}$sec (oder noch feiner) sei. Wenn die Bahn keine exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn ist, konvergiert die Iteration zur Berechnung der großen Bahnhalbachse nicht. Im nächsten Schritt wird der Iterationsprozess mit reduzierter Genauigkeitsgrenze $\Delta\bar{P}$ sec wiederholt. Dieser Vorgang wird dann so lange wiederholt, bis der Iterationsprozess konvergiert und eine große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAD}}$ erhalten wird. Erfahrungsgemäß kann eine brauchbare Satellitenbahn im Falle eines Bahnmodells, das nur die säkularen Bahneinflüsse des *Brouwer*schen Bahnmodells enthält, erst ab der Genauigkeitsgrenze $\Delta\bar{P} = 10^{-3}$sec und gröber erhalten werden.

Im Fall von Erdsatellitenbahnen hat die Praxis gezeigt, dass die Genauigkeitsgrenze $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| = \left|\Delta\bar{P}\right| < 0.01$sec sinnvollerweise nicht unterschritten werden sollte.

Beispiele solcher Bahnen mit unterschiedlichen Genauigkeitsgrenzen und unterschiedlichem Bahnmodell sind in Tabelle 23-8 zusammengestellt.

$\lvert\Delta\overline{P}\rvert$ [sec]	J_2, J_4	$\overline{a}_0$ [km]	H_P [km]	$\overline{P_A} - \overline{P_D}$ [sec]	$\dot{\omega}_s$ [rad/sec]	Q
0.1×10^{-2}	J_2, J_4	10120.210769	200.000	0.1256×10^{-3}	-0.7682460×10^{-11}	N*
0.1×10^{-2}	J_2	255289.21015	200.000	0.9999×10^{-3}	0.3812937×10^{-14}	N*
0.1×10^{-3}	J_2, J_4	10146.210769	216.900	0.9907×10^{-4}	-0.601542×10^{-11}	N
0.1×10^{-3}	J_2	10120.210154	200.000	0.5011×10^{-2}	0.306629×10^{-9}	N*
0.1×10^{-7}	J_2, J_4	10245.888986	281.691	$<10^{-12}$	-0.9485177×10^{-21}	E
0.1×10^{-7}	J_2	10120.210154	200.000	0.5011×10^{-2}	0.306629×10^{-9}	N*

Tabelle 23-8: Auswahl verschiedener $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit den mittleren Epocheparametern $\overline{e}_0 = 0.35$, $\overline{i}_0 = 63°.418$, und der Schrittweite $\Delta a = 1$ km für den Suchprozess. N*: Bahn mit der Perigäumshöhe H_P = 200 km (Anfangswert des Suchprozesses). N: Bahn mit Perigäumshöhe H_P > 200 km. E: exakte Äquivalenzbahn mit hoher Genauigkeit, Perigäumshöhe über HP = 200 km.

Beispiele für die Vielfalt von Nahe-parallelen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen sind in Bild 23-36 zu erkennen. Für einige vorgewählte Inklinationen wird der Verlauf der großen Bahnhalbachse in Abhängigkeit von der Exzentrizität im Intervall $e \in [0.0\ ,\ 0.96]$ mit der Schrittweite $\Delta e = 0.001$ aufgetragen. Die Umlaufzeiten werden mit der Schrittweite $\Delta a = 1$ km und der Genauigkeitsgrenze $\lvert\Delta\overline{P}\rvert < 0.01$sec berechnet. Die Kurven wurden mit dem vollständigen *Brouwer* Modell J_2, J_3, J_4 gerechnet.

Eine Ausnahme bildet die Untersuchung für die Neigung =63°.425. Nach Bild 23-31 (auf Seite 229) ist durch Extrapolation auf e=0.95 zu erkennen, dass es sich um eine exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn handelt. Sie wird mit der Genauigkeit $\Delta\overline{P} < 10^{-9}$ sec berechnet. Die entsprechende Kurve ist in Bild 23-36 gestrichelt eingezeichnet. In diesem Fall hat die $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn bei einer Exzentrizität von $\overline{e}_0$ =0.92 eine Halbachse von $\overline{a}_0$ =97787.158916 km. Wird jedoch eine nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn für die Neigung $\overline{i}_0$ =63°.425 und die Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.92 mit einer Genauigkeit $\Delta\overline{P} < 10^{-2}$ sec gewünscht, so beträgt die entsprechende Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ =85685.707500 km. Der Unterschied zwischen den beiden Bahnen mit der gleichen Inklination ist in Bild 23-36 deutlich zu erkennen. Beide Kurven berühren sich nicht. Dies ist eine Folge der unterschiedlichen geforderten Genauigkeit. Bei einer Bahnauswahl mit Hilfe einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbedingung muss also sorgfältig berücksichtigt werden, welches Bahnmodell zugrunde gelegt worden ist.

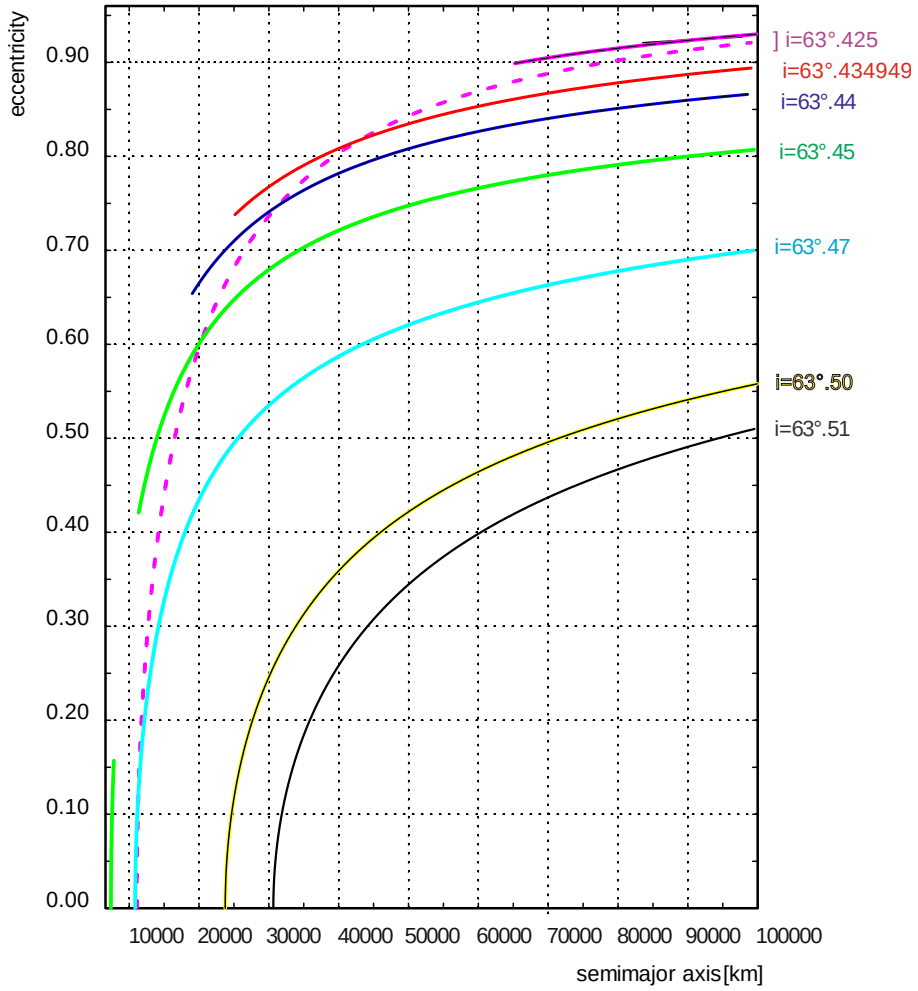


Bild 23-36: Der Zusammenhang zwischen Exzentrizität und großer Bahnhalbachse von nahe-parallelen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahnen für verschiedene Bahninklinationen, berechnet mit den Schrittweiten Δa = 1km, Δe = 0.001 , minimale Bahnhöhe H_P =200 km und $\left|\Delta\overline{P}\right|$<0.01 sec. Die grüne Kurve für i=63°.45 wird zwischen den (a,e)-Punkten (7804,0.157) – (11366,0.421) unterbrochen, weil dort die minimale Bahnhöhe H_P unterschritten wird. Man beachte, dass für $\overline{i}_0$ = 63°.425 eine kurze Kurve für eine nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn mit Genauigkeit 0.01 sec erhalten wird. Für einen Vergleich zeigt abweichend die lange $\overline{i}_0$ = 63°.425 Kurve eine exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn mit der Genauigkeit 10^{-9} sec .

BEISPIEL: Die große Bahnhalbachse einer retrograden $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn mit der Inklination $\overline{i}_0$ =116°.6, also in der Umgebung der zweiten charakteristischen Inklination $i_{char,2}$, soll konstruiert werden. Die Inklination liegt also in einem Bereich, in diesem Fall unterhalb $i_{char,2}$, in dem nach den bisherigen Überlegungen nur eine nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn existieren kann. Dafür ist die Genauigkeitsgrenze $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| < 10^{-2}$ sec erforderlich. Die Exzentrizität soll $\overline{e}_0$ =0.35 betragen. Das Ergebnis des Suchprozesses ist eine nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn mit der erreichten Genauigkeit $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right|$= $0.5205306855714 \times 10^{-2}$ sec. Die berechnete große Bahnhalbachse beträgt $\overline{a_{QAD}}$ = 10120,210154 km. Die Umlaufzeiten sind:

$$\overline{P_A} = 10133.586758 \text{ sec}, \quad \overline{P_D} = 10133{,}581553 \text{ sec}.$$

Diese Bahn erfüllt auch (mit begrenzter, aber über lange Zeiträume tolerierbarer Genauigkeit) die zweite Eigenschaft der $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen (6.54):

$$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -\ 42°.204034, \quad \overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -\ 42°203929.$$

Sowohl Perigäum als auch Apogäum bewegen sich über lange Zeiträume entlang eines festen Breitengrades. Man beachte die relativ kleinen Werte für die meridionalen Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} = 9070{,}247932 \text{ sec}, \quad P_R = 9281{,}450392 \text{ sec}$$

auf der retrograden Bahn. Nach einem mittleren meridionalen Umlauf $\overline{P_R}$ überquert der Satellit denselben Referenzmeridian, bevor er mit den anderen Referenzbahnpunkten wie Perigäum, Knotenpunkten usw. zusammenfallen kann. Die wahren Umlaufzeiten P_A, P_D sind, mit Ausnahme der wahren meridionalen Umlaufzeit P_R, identisch mit den entsprechenden mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_A}, \overline{P_D}$. Dies ist eine Folge der geringen geforderten Genauigkeit $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| < 10^{-2}$. Der Suchprozess für die wahre, nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn endet bei der ersten Näherungslösung, die unterhalb der erforderlichen Mindestgenauigkeit liegt. Sie zeigt auch die Mindesthöhe an, die der Perigäumshöhe H_P =200 km entspricht. Die Apogäumshöhe beträgt H_A =7284,147108 km. ◄

23.7.1.11 Veranschaulichung des gleitenden Übergangs von exakten zu nahezu parallelen anomalistischen mit drakonitischen Äquivalenzbahnen: hybride Äquivalenz

Der Übergang im aktuellen Fall einer hybriden $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn zwischen dem möglichen Bereich der exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn und dem möglichen Bereich der nahe-parallelen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn ist nicht abrupt, sondern allmählich, abhängig von der steigenden Toleranzschwelle. Dies wird in der Sequenz von Bild 23-37 bis Bild 23-40 gezeigt, wobei immer das vollständige *Brouwer*sche Bahnmodell angewendet wird. Ausgehend von der Übersicht der möglichen exakten Äquivalenzbahnen in Bild 23-31 (auf Seite 229) wird die Toleranzschwelle $\Delta\overline{P}$ für die Erstellung des Bereichs der möglichen nahe-parallelen Äquivalenzbahnen von Bild zu Bild erhöht. Dies führt systematisch zu einer Verschiebung des Bereichs möglicher Äquivalenzbahnen in Richtung aufsteigender Inklinationen über die charakteristische Inklination $i_{char,1}$ hinaus.

Im $\Delta\bar{P} \le 10^{-2}$sec Fall, d.h. dem typischen Fall der nahe-parallelen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen, ist der Bereich der möglichen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen fast vollständig über die charakteristische Inklination $i_{char,1}$ hinausgewachsen: Bild 23-39 (auf Seite 243). Wird die Toleranz weiter erhöht, so wird der Bereich der möglichen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen allmählich diffus und es gibt dann auch noch weitere mögliche nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen unterhalb $i_{char,1}$: Bild 23-40 . Je größer die Toleranzschwelle, desto weniger ausgeprägt ist die Grenzkurve mit dem Grenzwert e_B der Exzentrizität, wenn die Bahnen auf die minimale Perigäumshöhe H_P =200 km bezogen sind. Bei der Toleranzschwelle $\Delta\bar{P}$ < 1sec schließlich ist die Grenzkurve nicht mehr erkennbar, der Bereich möglicher nahe-paralleler $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen erstreckt sich auf beiden Seiten der charakteristischen Neigungen. In Bild 23-42 ist zusätzlich auch die Umgebung der zweiten charakteristischen Inklination dargestellt.

In Bild 23-37 bis Bild 23-41 wurden die Schrittweiten Δa = 1km, Δi = 0°.0001, Δe= 0.01 für die mit dem vollständigen *Brouwer*-Bahnmodell durchgeführten Berechnungen verwendet (nur Bild 23-42 verwendet ausschließlich säkulare Störungen). Die Kurve e_B zeigt die mögliche Grenze der Exzentrizität in Bezug auf die minimale Perigäumshöhe H_P=200 km. Die Farbkodierung der einzelnen Kurven stimmt in allen Bildern überein.

Bild 23-31 (auf Seite 229) bestätigt die Aussage: Exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen sind auf Inklinationen kleiner als die charakteristische Inklination $i_{char,1}$ beschränkt. (Spiegelbildliche Aussage für Inklinationen größer als die charakteristische Inklination $i_{char,2}$).

Bild 23 41 zeigt den Bereich möglicher erdnaher $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen für die Genauigkeitsgrenze $\Delta\bar{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 10^{-2}$ sec , die typisch für erdnahe $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen ist, wie sie in den vorangegangenen Betrachtungen abgeleitet wurden. Fast alle Bahnen in diesem Bereich haben Inklinationen oberhalb der charakteristischen Inklination $i_{char\,1}$. Ausnahmen gibt es nur für einige stark exzentrische Bahnen, wie zum Beispiel die Bahn mit der Inklination $\bar{i}_0$=63°.425 in Bild 23-36 (auf Seite 240). Bild 23-27 (auf Seite 223) zeigt darüber hinaus: Wird ein reduziertes Bahnmodell verwendet, das nur Bahneinflüsse ("Störungen") durch die Harmonische J_2 zulässt, lassen sich überhaupt keine exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen finden.

- *Typisch für hybride Äquivalenzorbits ist der fließende Übergang von exakten zu nahe-parallelen Äquivalenzbahnen.*

Anmerkung: Bislang wurde keine andere Äquivalenzbahn gefunden, für die ein so grundlegend unterschiedliches Verhalten ("Hybride Äquivalenzbahn") für verschiedene Bahnmodelle und verschiedene Parameterbereiche nachgewiesen werden kann.◀

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen grafischen Überblick über die Beziehung zwischen Funktionsgenauigkeit und großer Bahnhalbachse für nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen. ◀

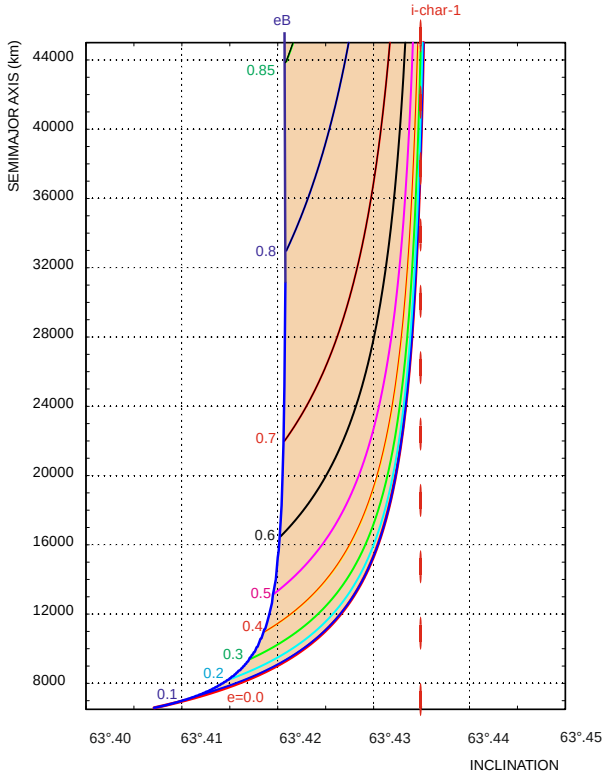


Bild 23-37 : Genauigkeit $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 0.0001\text{sec}$

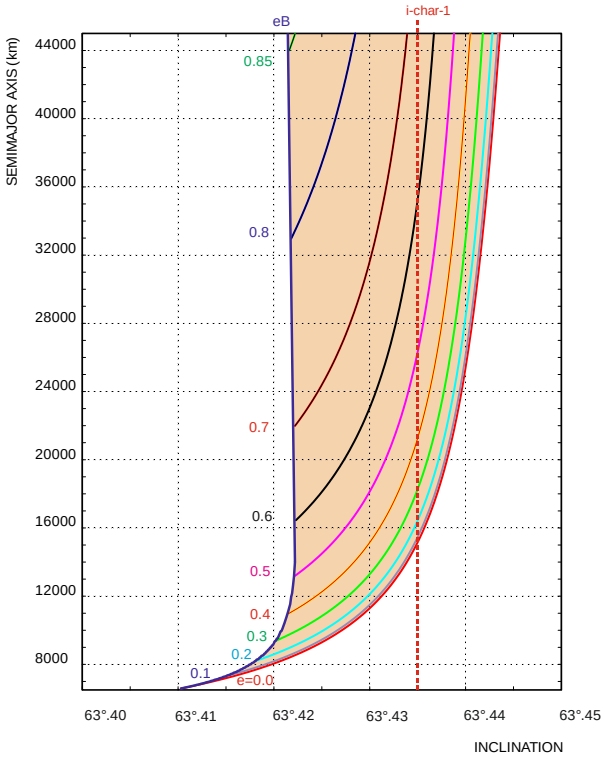


Bild 23-38 : Genauigkeit $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 0.001\text{sec}$

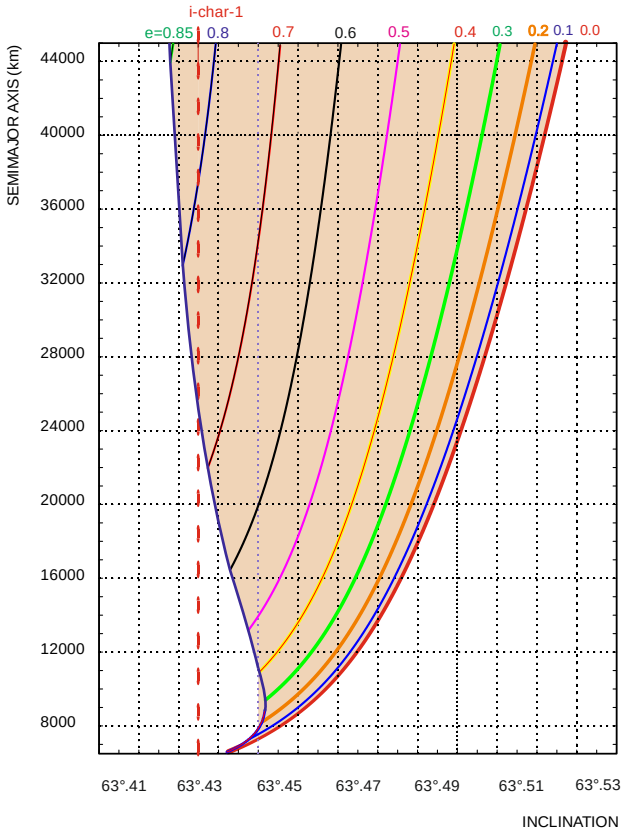


Bild 23-39: Genauigkeit $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 0.01\text{sec}$

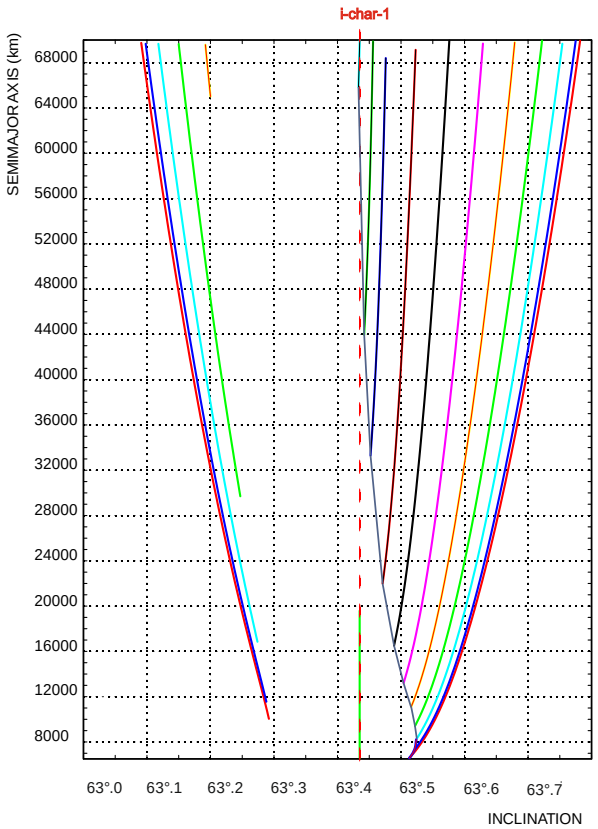


Bild 23-40: Genauigkeit $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 0.03\text{sec}$.

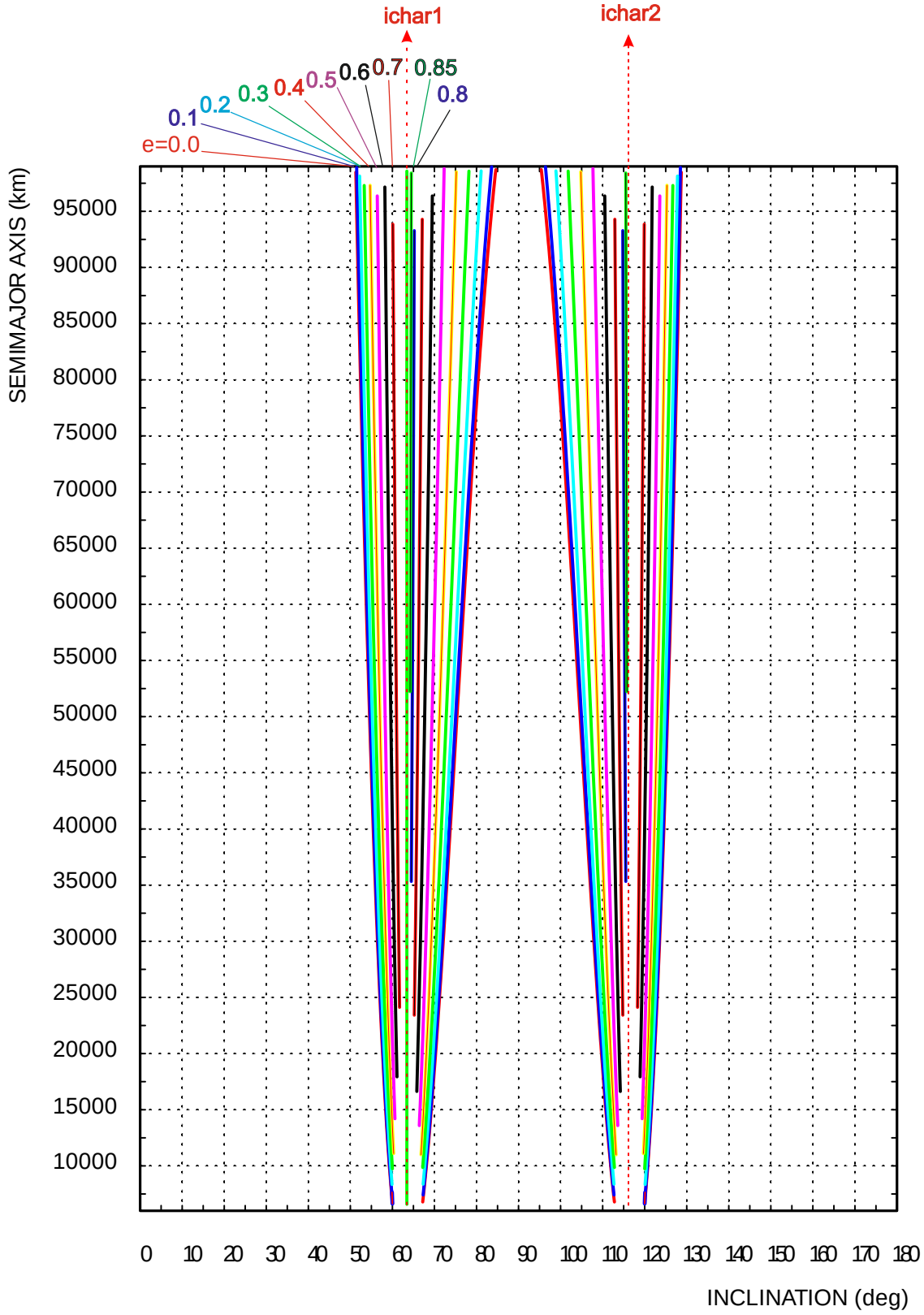


Bild 23-41: Übersicht über mögliche Nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Als Genauigkeit ist die Einschränkung $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 1\text{sec}$ zugelassen. Das Bahnmodell umfasst nur säkulare Störungen durch J_2, J_4. Die Berechnung erfolgt mit den Schrittweiten $\Delta a = 10\,\text{km}$, $\Delta i = 0°.1$, $\Delta e = 0.01$. Der Unterschied ob Berücksichtigung mit J_2 und J_4 oder mit J_2 allein wirkt sich hier kaum aus, siehe Bild 23-36.

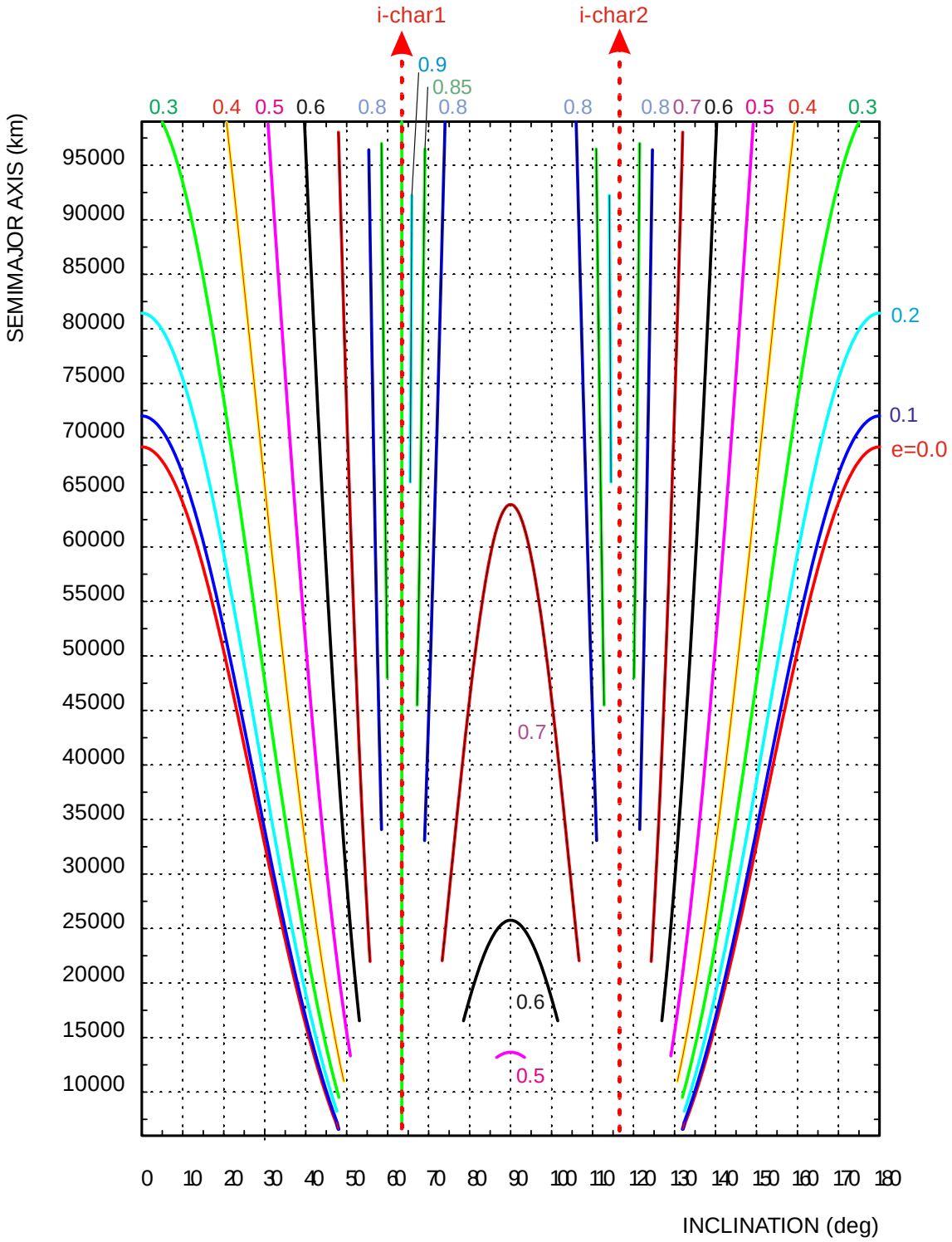


Bild 23-42: Übersicht über mögliche Nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Als Genauigkeit ist die Einschränkung $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \leq 5\,\text{sec}$ zugelassen. Das Bahnmodell umfasst alle säkularen Störungen durch J_2 und J_4. Die Berechnung erfolgt mit den Schrittweiten $\Delta a = 10\,\text{km}$, $\Delta i = 0°.1$, $\Delta e = 0.01$. Der Unterschied ob Berücksichtigung mit J_2 und J_4 oder mit J_2 allein wirkt sich hier kaum aus.

23.7.1.12 Wahre Nahe-Parallele anomalistische mit drakonitischen Äquivalenzbahnen

$\left(P_A \hat{=} P_D\right)-$ Äquivalenzbahnen werden durch die Äquivalenz der wahren anomalistischen und drakonitischen Umlaufzeiten gebildet. Hierzu werden Funktionsgleichungen (22.60) und (23.155)

$$fct\left(P_A\right) \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0 + P_A\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] = 0, \quad fct\left(P_D\right) \equiv \sin\left[u\left(t_0 + P_D\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{23.316}$$

benötigt. Die zugehörende große Bahnhalbachse wird mit der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv P_A\left(\bar{a}_0\right) - P_D\left(\bar{a}_0\right) = 0 \tag{23.317}$$

berechnet. Wie im Fall der mittleren Äquivalenzbahn kann auch hier etwa $\bar{a}_0^{(0)} = (R_E + 200) / (1.0 - \bar{e}_0)$ als Anfangswert gewählt werden. Werden nur säkulare Bewegungseinflüsse zugelassen, ergibt sich im Wesentlichen wegen der erlaubten Genauigkeitsgrenze $\left|P_A - P_D\right| \le \Delta P$ die im Fall der mittleren Bewegungen erhaltene Bahn. Der gesamte Rechenprozess (23.316) - (23.317) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden.

$\left(P_A \hat{=} P_D\right)$	
$\overline{a_{QAD}}$ = 40345.460000 km, $\bar{e}_0$ = 0.7222, $\bar{i}_0$ = 63°.43, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0	
$\overline{P_K}$ =80649.742977 sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ =80654.581063 sec	P_H =80652.045625 sec
$\overline{P_A}$ = 80651.720533 sec	P_A = 80651.720533 sec
$\overline{P_D}$ = 80651.720543sec	P_D = 80651.720543 sec
H_P =4829.832188 km	H_A =63104.814612 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -336°.997452$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -336°.997452$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -336°.997452$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -336°.997452$
$\dot{\omega}_s$ = -0.96583417370594472×10^{-14} rad/sec	

Tabelle 23-9: Bahncharakteristika der nahe-parallelen $\left(P_A \hat{=} P_D\right)-$ Äquivalenzbahn mit der Inklination $\bar{i}_0$ = 63°.45 und der Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.7222. Die Berechnung der Bahn erfolgt mit den a-priori Genauigkeiten $\left|\Delta P\right| = \left|P_A - P_D\right| \le 10^{-5}\,[\text{sec}]$, Δ(a)=$10^{-10}$ km, Schrittweite Δa=0.01 km, unter Verwendung des vollständigen *Brouwer* Bahnmodells. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , μ_δ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 = 0.001082625379977 . A posteriori Genauigkeit: $\left|P_A - P_D\right|$=-0.99988537841×10^{-5} deg, $\overline{a_{QAD}}$ =40345.4600000703795 km

BEISPIEL 9: Mit den Randbedingungen von Beispiel 5 soll eine $\left(P_A \hat{=} P_D\right)-$ Äquivalenzbahn berechnet werden[1]. Die Schrittweite beträgt Δa= 0.01 km, die Genauigkeitsgrenze muss kleiner als im Fall einer $\left(\overline{P_A} \hat{=} \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahn sein. Es sei $\left|P_A - P_D\right| \le 10^{-5}$ sec gewünscht. Die

[1] Abschnitt 23.7.1.7

berechnete Bahn (Tabelle 23-9) weicht etwas von der in Beispiel 5 erhaltenen Bahn ab. Die Iteration (23.316) mit Berücksichtigung von nur säkularen Bewegungseinflüssen ergibt $\bar{a}_0 = 40427.022705$ km mit den mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_A}$ = 80651.72053327 sec, $\overline{P_D}$ =80651.72054327 sec. Im vorliegenden Fall wurde für die Genauigkeit die Differenz $\overline{P_A} - \overline{P_D} =$ -0.9904674 $\times 10^{-5}$ sec erhalten. Bemerkenswert ist auch hier die Übereinstimmung der Perigäumslängenverschiebung mit der Knotenlängenverschiebung: $\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = \overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D}$. Die 2. Eigenschaft von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahnen (23.299) ist also auch in diesem Fall erfüllt. ◄

Aufgabenstellungen:

- Gib eine graphische Übersicht über den Zusammenhang von Funktionsgenauigkeit und großer Bahnhalbachse bei nahe-parallelen Äquivalenzbahnen. ◄

23.7.2 Mehrfache Kopplung von Äquivalenzbahnen

Zweifache, dreifache oder mehrfache Kopplung von bahnmechanischen Randbedingungen wie etwa Äquivalenzbedingungen, die zur Auswahl von zwei, drei oder mehr Bahnparametern führen sollen, erfordern eine größeren mathematischen Aufwand. Da diese Methoden in vielen Aufgaben der Satellitenbahnanalyse benötigt werden, werden sie in den folgenden Abschnitten in allgemeiner Formulierung zusammengestellt. Anschließend werden als Beispiele Anwendungen im Bereich von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahnen behandelt.

23.7.2.1 Analytische Herleitung mehrfach gekoppelter Bewegungen

Zur Herleitung dreifach gekoppelter Bewegungen kann keines der mittleren Keplerelemente $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ willkürlich gewählt werden. Vielmehr müssen zwei oder mehr Bedingungsgleichungen der Art

$$\begin{aligned} f_1\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) &= 0 \\ f_2\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) &= 0 \\ f_3\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) &= 0 \end{aligned} \tag{23.318}$$

gemeinsam erfüllt sein. In bahnmechanischem Zusammenhang können verschiedenartige derartiger Bedingungen zum Tragen kommen, wovon im Zusammenhang der Satellitenbewegungen mehrfach Gebrauch gemacht werden kann. Im Zusammenhang mit der Untersuchung von Äquivalenzbahnen können dazu interessierende Äquivalenzbedingungen gewählt werden. Basierend auf diesen Äquivalenzbedingungen wird versucht geeignete Näherungslösungen zu konstruieren, die anschließend mit Hilfe der Bedingungsgleichungen zu Lösungen erster oder zweiter Ordnung geführt werden.

23.7.2.2 Iterative Verbesserung

Eine Verbesserung der Näherungslösungen kann nur iterativ unter Verwendung des gesamten bekannten Bahnmodells erfolgen. Wenn drei unabhängige Variable $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ zu bestimmen

sind, können die drei Bedingungsgleichungen dieser Variablen in eine Taylorreihe um die Anfangswerte $\left(\bar{a}_0^{(0)}, \bar{e}_0^{(0)}, \bar{i}_0^{(0)}\right)$ entwickelt werden, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird.

Die *Taylor*entwicklung führt im ν-ten Iterationsschritt auf die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
&f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right) + \frac{\partial f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{a}_0}\left(\bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)}\right) + \\
&\quad + \frac{\partial f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{e}_0}\left(\bar{e}_0^{(\nu+1)} - \bar{e}_0^{(\nu)}\right) + \frac{\partial f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{i}_0}\left(\bar{i}_0^{(\nu+1)} - i_0^{(\nu)}\right) + \cdots = 0 \\
&f_2\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right) + \frac{\partial f_2\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{a}_0}\left(\bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)}\right) + \\
&\quad + \frac{\partial f_2\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{e}_0}\left(\bar{e}_0^{(\nu+1)} - \bar{e}_0^{(\nu)}\right) + \frac{\partial f_2\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{i}_0}\left(\bar{i}_0^{(\nu+1)} - i_0^{(\nu)}\right) + \cdots = 0 \\
&f_3\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right) + \frac{\partial f_3\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{a}_0}\left(\bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)}\right) + \\
&\quad + \frac{\partial f_3\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{e}_0}\left(\bar{e}_0^{(\nu+1)} - \bar{e}_0^{(\nu)}\right) + \frac{\partial f_3\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)}{\partial \bar{i}_0}\left(\bar{i}_0^{(\nu+1)} - i_0^{(\nu)}\right) + \cdots = 0
\end{aligned} \tag{23.319}$$

Dieses lineare Gleichungssystems kann mit der *Cramer*schen Regel gelöst werden. Dazu wird die Determinante

$$Det := \frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{e}_0}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0} - \frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0} - \frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0}\right) \tag{23.320}$$

verwendet. Die Korrekturen lauten

$$\begin{aligned}
\Delta a := \bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)} = \Bigg\{ & f_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0} - \frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0}\right) + \\
& + f_2\left(\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{e}_0} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0}\right) + \\
& + f_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0} - \frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{e}_0}\right) \Bigg\} \; / \; Det
\end{aligned} \tag{23.321}$$

$$\begin{aligned}
\Delta e := \bar{e}_0^{(\nu+1)} - \bar{e}_0^{(\nu)} = \Bigg\{ & f_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0}\right) + \\
& + f_2\left(\frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0}\right) + \\
& + f_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}\right) \Bigg\} \; / \; Det
\end{aligned} \tag{23.322}$$

$$\Delta i := \bar{i}_0^{(\nu+1)} - \bar{i}_0^{(\nu)} = \left\{ f_1 \left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0} \frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0} - \frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0} \right) + \right.$$
$$+ f_2 \left(\frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{e}_0} \frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0} \right) + \qquad (23.323)$$
$$\left. + f_3 \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{e}_0} \frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0} - \frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0} \frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0} \right) \right\} \; / \, Det$$

Dieses Verfahren zur Berechnung der Parameter $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ kann iterativ bearbeitet werden. Konvergenz kann nicht in allen Fällen erwartet werden. Dazu werden geeignete Werte $\left(\bar{a}_0^{(0)}, \bar{e}_0^{(0)}, \bar{i}_0^{(0)}\right)$ der Ausgangs-Näherung benötigt. Die Iteration wird abgebrochen, wenn vorgegebene Genauigkeitsgrenzen

$$\left|\bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)}\right| < \overline{\Delta(a)} \;,\; \left|\bar{e}_0^{(\nu+1)} - \bar{e}_0^{(\nu)}\right| < \Delta(e) \;,\; \left|\bar{i}_0^{(\nu+1)} - \bar{i}_0^{(\nu)}\right| < \Delta(i) \qquad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \qquad (23.324)$$

unterschritten werden. Alternativ kann als Genauigkeitsgrenze der Ausdruck

$$\sqrt{\left[f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\right]^2 + \left[f_2\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\right]^2 + \left[f_3\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\right]^2} < \varepsilon_f \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \quad (23.325)$$

mit der Grenzgenauigkeit ε_f verwendet werden. Eine Lösung des Problems kann nicht gefunden werden, wenn es aus den bahnmechanischen Randbedingungen nicht gelingt, ein widerspruchsfreies Problemfeld der Funktionsgleichungen f_1, f_2, f_3 auszuwählen.

Das Verfahren erfordert die Berechnung der partiellen Ableitungen der Funktionen nach den gesuchten Variablen. Einige der im Zusammenhang mit bahnanalytischen Untersuchungen benötigten partiellen Ableitungen werden im Folgenden systematisch zusammengestellt.

23.7.2.3 Partielle Ableitungen erster Ordnung der säkularen Störkoeffizienten

Wird das analytische Bahnmodell nach *D. Brouwer* (Abschnitt 20.2, Band III) den Berechnungen zugrunde gelegt, werden folgende partielle Ableitungen erster Ordnung erhalten:

$$\frac{\partial \overline{n_{K0}}}{\partial \bar{a}_0} = -\frac{3}{2\bar{a}_0}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} = -\frac{3\,\overline{n_{K0}}}{2\bar{a}_0} \qquad (23.326)$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \bar{a}_0} = \frac{21}{4}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \qquad (23.327)$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \bar{e}_0} = -6\bar{e}_0\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\cos\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \qquad (23.328)$$

$$\frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \bar{i}_0} = \frac{3}{2}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\sin\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \qquad (23.329)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{a}_0} = \frac{21}{8}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-5\cos^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \qquad (23.330)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{e}_0} = -3\bar{e}_0 \frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\left(1-5\cos^2 \bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \tag{23.331}$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{i}_0} = -\frac{15}{2}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos \bar{i}_0 \sin \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \tag{23.332}$$

$$\frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{21}{8}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^3 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2 \bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \tag{23.333}$$

$$\frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{e}_0} = -\frac{9\bar{e}_0}{4}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}\left(1-3\cos^2 \bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \tag{23.334}$$

$$\frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{i}_0} = -\frac{9}{2}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_{K0}}\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{\bar{a}_0^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\cos \bar{i}_0 \sin \bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \tag{23.335}$$

$$\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_{K0}}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{a}_0} = -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0} + \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{a}_0} \quad , \quad \overline{n_{K0}} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \tag{23.336}$$

$$\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \bar{e}_0} = \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{i}_0} \tag{23.337}$$

$$\frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_A}\right)^2} \tag{23.338}$$

$$\frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}}\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \bar{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \bar{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}}\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \bar{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}}\frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \bar{i}_0} \tag{23.339}$$

$$\frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_{K0}}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{a}_0} = -\frac{3}{2}\frac{\overline{n_{K0}}}{\bar{a}_0} + \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{a}_0} \tag{23.340}$$

$$\frac{\partial \overline{n_{D0}}}{\partial \bar{e}_0} = \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{e}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_{D0}}}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \bar{i}_0} \tag{23.341}$$

$$\frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{n_D}} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_D}\right)^2} \tag{23.342}$$

$$\frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{n_D}}\frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \bar{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \bar{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{n_D}}\frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \bar{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{n_D}}\frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \bar{i}_0} \tag{23.343}$$

$$\frac{\partial \overline{n_H}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \bar{a}_0} + \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \bar{a}_0}\cos \bar{i}_0 \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_H}}{\partial \bar{e}_0} = \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \bar{e}_0} + \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \bar{e}_0}\cos \bar{i}_0 \quad , \tag{23.344}$$

$$\frac{\partial \overline{n_H}}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \bar{i}_0} + \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \bar{i}_0}\cos \bar{i}_0 - \dot{\Omega}_s \sin \bar{i}_i \tag{23.345}$$

$$\frac{\partial \overline{P_H}}{\partial \overline{n_H}} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_H}\right)^2} \tag{23.346}$$

$$\frac{\partial \overline{P_H}}{\partial \bar{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_H}}{\partial \overline{n_H}}\frac{\partial \overline{n_H}}{\partial \bar{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_H}}{\partial \bar{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_H}}{\partial \overline{n_H}}\frac{\partial \overline{n_H}}{\partial \bar{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_H}}{\partial \bar{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_H}}{\partial \overline{n_H}}\frac{\partial \overline{n_H}}{\partial \bar{i}_0} \tag{23.347}$$

$$\frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_{K\,0}}}{\partial \overline{a}_0} + \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \overline{a}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{a}_0} + \sigma_i \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{a}_0} \tag{23.348}$$

$$\frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \overline{e}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{e}_0} + \sigma_i \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \overline{i}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{i}_0} + \sigma_i \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.349}$$

$$\frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{n_T}} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_T}\right)^2} \tag{23.350}$$

$$\frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{n_T}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{n_T}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{n_T}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.351}$$

$$\frac{\partial \overline{n_{sid}}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_{sid}}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_{sid}}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.352}$$

$$\frac{\partial \overline{P_{sid}}}{\partial \overline{n_{sid}}} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_{sid}}\right)^2} \tag{23.353}$$

$$\frac{\partial \overline{P_{sid}}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_{sid}}}{\partial \overline{n_{sid}}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_{sid}}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_{sid}}}{\partial \overline{n_{sid}}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_{sid}}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_{sid}}}{\partial \overline{n_{sid}}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.354}$$

$$\frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.355}$$

$$\frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \tag{23.356}$$

$$\frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.357}$$

$$\frac{\partial \overline{n_S}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_S}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_S}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.358}$$

$$\frac{\partial \overline{P_S}}{\partial \overline{n_S}} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_S}\right)^2} \tag{23.359}$$

$$\frac{\partial \overline{P_S}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_S}}{\partial \overline{n_S}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_S}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_S}}{\partial \overline{n_S}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_S}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_S}}{\partial \overline{n_S}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.360}$$

$$\frac{\partial \overline{n_L}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_L}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{n_L}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.361}$$

$$\frac{\partial \overline{P_L}}{\partial \overline{n_L}} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_L}\right)^2} \tag{23.362}$$

$$\frac{\partial \overline{P_L}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_L}}{\partial \overline{n_L}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_L}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_L}}{\partial \overline{n_L}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \overline{P_L}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_L}}{\partial \overline{n_L}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.363}$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{a}_0} \quad , \quad \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s}}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{e}_0} \quad , \quad \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{i}_0} \quad , \quad \dot{\lambda}_{\Omega s} = \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} \tag{23.364}$$

$$\frac{\partial\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\partial\overline{a}_0}=\frac{\partial\dot{\lambda}_{\Omega s}}{\partial\overline{a}_0}\overline{P_D}+\dot{\lambda}_{\Omega s}\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{a}_0}\ ,\qquad \overline{\Delta\lambda_\Omega}=\dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D}$$
$$\frac{\partial\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\partial\overline{e}_0}=\frac{\partial\dot{\lambda}_{\Omega s}}{\partial\overline{e}_0}\overline{P_D}+\dot{\lambda}_{\Omega s}\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{e}_0}\ ,\ \frac{\partial\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\partial\overline{i}_0}=\frac{\partial\dot{\lambda}_{\Omega s}}{\partial\overline{i}_0}\overline{P_D}+\dot{\lambda}_{\Omega s}\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{i}_0}\ , \tag{23.365}$$

23.7.2.4 Anomalistische mit drakonitischer gekoppelter Äquivalenzbahn mit vorgegebener Umlaufzeit und Knotenlängenverschiebung

Es sollen die mittleren Epocheelemente $\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0$ einer $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)-$Äquivalenzbahn hergeleitet werden, wenn die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}$ sowie die Knotenlängendifferenz $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ vorgegeben sind. Da alle drei Keplerelemente $\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0$ zu bestimmen sind, werden drei Bedingungsgleichungen benötigt.

Die erste Bedingungsgleichung folgt aus der Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}$:

$$f_1\left(\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0\right)\equiv\overline{n_D}\left(\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0\right)-2\pi/\overline{P_{D0}}=0\quad . \tag{23.366}$$

Als zweite Bedingungsgleichung wird die erste Eigenschaft von $\left(\overline{P_A}\triangleq\overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahnen (23.295) verwendet:

$$f_2\left(\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0\right)\equiv\overline{n_A}\left(\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0\right)-\overline{n_D}\left(\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0\right)=0\quad . \tag{23.367}$$

Als dritte Bedingung sei die mittlere Knotenlängenverschiebung (23.227) pro mittlerem drakonitischen Umlauf vorgewählt. Mit $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}=const.$ lautet die Bedingungsgleichung

$$f_3\left(\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0\right)\equiv\overline{\Delta\lambda_\Omega}\left(\overline{a}_0,\overline{e}_0,\overline{i}_0\right)-\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}=0\quad . \tag{23.368}$$

Eine erste Näherung der großen Bahnhalbachse kann entsprechend der ersten Bedingungsgleichung f_1 mit der vorgegebenen mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}$ aus der *Kepler*bedingung

$$\overline{a}_0^{(0)}:=\sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{P_{D0}}\right)^2}{4\pi^2}} \tag{23.369}$$

erhalten werden.

Als eine erste Näherung für die Inklination kann wegen der Bedingungsgleichung f_2 nach Beziehung (23.297) eine der charakteristischen Neigungen (aus Formel (23.297))

$$i_{0\ 1}^{(0)}=i_{char,1}=63°.434949\quad ,\quad i_{0\ 2}^{(0)}=i_{char,2}=116°.565051 \tag{23.370}$$

gewählt werden.

Die dritte Bedingungsgleichung f_3 kann mit den vorgegebenen Werten $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ und $\overline{P_{D0}}$, sowie den ersten Lösungen $\overline{a}_0^{(0)}$ und $\overline{i}_0^{(0)}$, schließlich eine erste Näherung für die Exzentrizität hergeleitet werden. Aus dem Ansatz

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}=\dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_{D0}}=\left(\dot{\Omega}_s-\dot{\Theta}\right)\overline{P_{D0}} \tag{23.371}$$

kann mit der Hilfsgröße

$$C_2 := -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\left(\overline{a}_0^{(0)}\right)^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\left(\overline{a}_0^{(0)}\right)^2}\,\cos\overline{i}_0^{(0)}$$

die Exzentrizität

$$\overline{e}_0^{(0)} = \sqrt{1-\sqrt{\frac{C_2\;\overline{P_{D\,0}}}{\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}} + \dot{\Theta}\,\overline{P_{D\,0}}}}} \tag{23.372}$$

berechnet werden. Dieser Ausdruck muss in die Randbedingung

$$0 \le \frac{C_2\;\overline{P_{D\,0}}}{\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}} + \dot{\Theta}\,\overline{P_{D\,0}}} < 1 \tag{23.373}$$

eingeordnet sein. Diese Bedingung ist sehr empfindlich, geringe Abweichungen in der vorgegebenen Umlaufzeit lassen diese Bedingung nicht erfüllen. Dieser Fall kann umgangen werden, indem eine willkürliche Exzentrizität, etwa $\overline{e}_0^{(0)} \approx 0.5$ gewählt wird und die nachfolgende Verbesserung angewandt wird.

Eine Verbesserung und damit verbunden auch die endgültige Lösung für die drei Bahnparameter kann mit Hilfe des Algorithmus (23.319) - (23.325) durchgeführt werden. Dazu werden noch die partiellen Ableitungen der drei Bedingungsgleichungen nach den drei gesuchten *Kepler*elementen $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0$ benötigt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{a}_0}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{e}_0}\;, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.374}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{a}_0} - \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{a}_0}\;, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{e}_0} - \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{e}_0}\;, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{i}_0} - \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{i}_0} \tag{23.375}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)}{\partial \overline{a}_0}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)}{\partial \overline{e}_0}\;, \quad \frac{\partial f_3}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)}{\partial \overline{i}_0}\;. \tag{23.376}$$

Die hierzu benötigten partiellen Ableitungen sind im Rahmen der systematischen Zusammenstellung in Abschnitt 23.7.2.3 (auf Seite 249) zu finden.

Anmerkung: Statt der mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_A}, \overline{P_D}$ werden hier die entsprechenden mittleren Bewegungen $\overline{n_A}, \overline{n_D}$ in den Bedingungsgleichungen f_1, f_2 verwendet. ◀

BEISPIEL 1: Vorgegeben sei die mittlere Umlaufzeit $\overline{P_{D\,0}}$ = 43066.1542 sec. Mit Formel (23.369) lautet damit die erste Näherung für die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0^{(0)}$ = 26555.230123 km. Wegen der Äquivalenz $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ werde $\overline{i}_0^{(0)} = i_{char,1}$ = 63°.434949 gewählt. Die Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischen Umlauf sei $\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}} = -180°.000$. Formel (23.372) ergibt als erste Näherung für die Exzentrizität $\overline{e}_0^{(0)} = 0.723493136$.

Der Algorithmus (23.319) - (23.325) wird mit den a-priori Genauigkeiten $\Delta(a) \le 10^{-5}$ km, $\Delta(e) \le 10^{-8}$, $\Delta(i) \le 10^{-6}$ Grad durchgeführt, wobei die Funktionsgleichungen auf $|\Delta fct| \le 10^{-14}$ genau berechnet werden sollen. Nach zwei Iterationen lautet die endgültige Lösung:

$\overline{a_{QADPL}}$ =26554.222867252 km, $\overline{e_{QADPL}}$ =0.723502582, $\overline{i_{QADPL}}$ =63°.423368967.

Die berechneten Parameter haben mit den Schrittweiten (23.321), (23.322), (23.323) die a posteriori Genauigkeiten

$$\Delta a = 0.3090072470256 \times 10^{-11} \text{ km} ,$$
$$\Delta e = 0.4332041583916 \times 10^{-13} ,$$
$$\Delta i = 0°.3041264435206 \times 10^{-14} .$$

Tabelle 23-10 mit den Parametern dieser Bahn vom *Molnija* Typ zeigt, dass die drei Bedingungen der Bahn, die mit den erhaltenen Parametern gerechnet werden, exakt erfüllt sind. Die Bahn ist in Bild 23-43 dargestellt. ◀

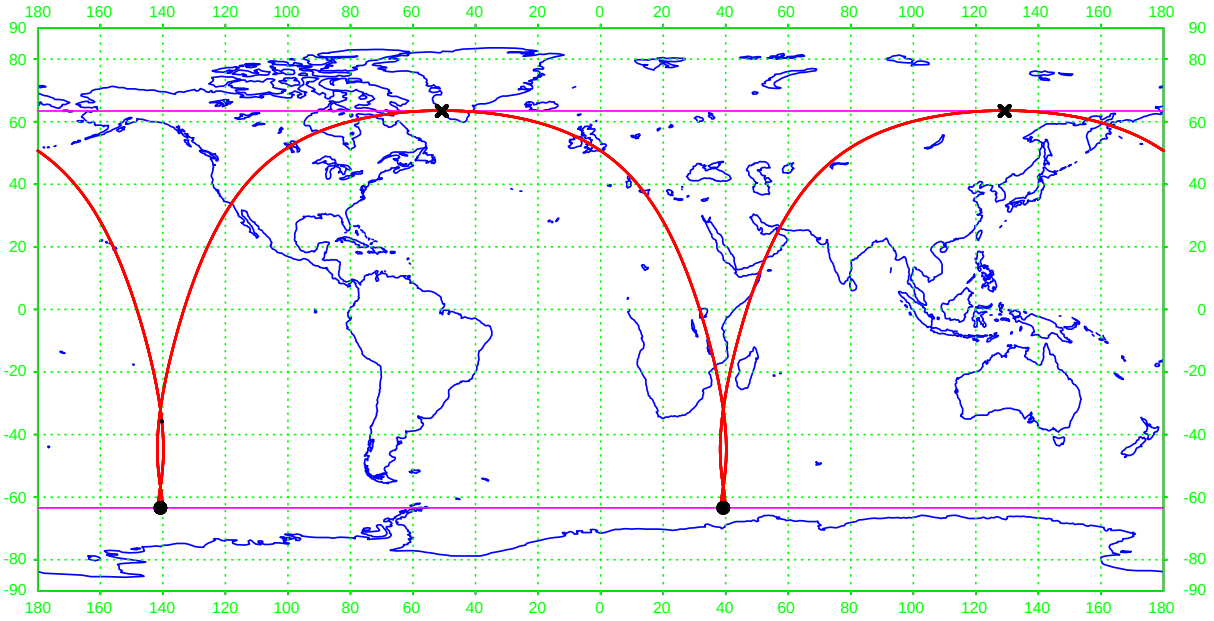


Bild 23-43: Exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenzbahn vom *Molnija* Typ mit Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_{D\,0}}$ =43066.1542 sec und der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}} = -180°$. Die Exzentrizität der Bahn beträgt $\overline{e}_0$ =0.723502582.

BEISPIEL 2: Die Herleitung von Bahnen mit den drei Bedingungen, mittlere drakonitische Umlaufzeit, $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$– Äquivalenz und mittlere Knotenlängendrift hängt empfindlich von der Auswahl der Umlaufzeit ab. Die Familie derartiger Bahnen ist sehr eingeschränkt. Dies wird an einigen Beispielen in Tabelle 23-11 demonstriert.

Die Tabelle zeigt, dass sich kleine Änderungen in der vorgegebenen Umlaufzeit wesentlich auf die Exzentrizität auswirken. Je kleiner die Umlaufzeit umso größer ist die Exzentrizität. Die Grenze wird erreicht, wenn die Exzentrizität einer Bahn so groß wird, dass das Perigäum die untere Schranke von 200 km unterschreitet. In der Tabelle ist das für die mit (*) gekennzeichnete Bahn der Fall. In allen Fällen wird eine Inklination unter der charakteristischen Neigung erhalten. Die erhaltenen Bahnen sind somit exakte Äquivalenzbahnen. ◀

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$	
$\overline{a_{QADPL}}$ =26554.2229 km, $\overline{e_{QADPL}}$ =0.723503, $\overline{i_{QADPL}}$ =63°.42337, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{00}$ =0	
$\overline{P_K} = 43063.703277$ sec	t_0 : 2021-02-10/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 43069.708904$ sec	$P_H = 43066.547813$sec
$\overline{P_A} = 43066.154200$ sec	$P_A = 43066.154194$ sec
$\overline{P_D} = 43066.154200$ sec	$P_D = 43066.154200$ sec
$\overline{P_T} = 43074.100360$ sec	$P_T = 43068.120892$ sec
$H_P = 964.037068$ km	$H_A = 39388.134666$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -180°.000000$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -180°.000000$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -180°.000000$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -180°.000000$
$\dot{\omega}_s = 0.45990200695718271 \times 10^{-15}$ rad/sec	

Tabelle 23-10: Bahncharakteristika der exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn mit Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}$ =43066.1542 sec und der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ =-180°.000. Die Berechnung der Bahn erfolgt mit den a priori Genauigkeiten , $\left|\Delta\overline{P}\right| = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 10^{-14}\,[\text{sec}]$, $\Delta(\text{a}) \le 10^{-5}$ km , $\Delta(e) \le 10^{-8}$, $\Delta(i) \le 10^{-6}$ Grad. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km , $\mu_{♁} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340$\times 10^{-4}$ / s , $J_2 = 0.001082625379977$. A posteriori Genauigkeit $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| < 10^{-15}$ sec.

BEISPIEL 3: Satellitenbahnen vom Typus *Tundra* sind $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der Umlaufzeit etwa 1 (Sonnen-) Tag und der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} \approx -360°$. Es kommen zwei unterschiedliche Bahntypen in Frage, die miteinander nicht kombinierbar sind. Bild 23-44 zeigt eine *Tundra*-Bahn, die mit der Vorgabe ein Umlauf in einem Tag ausgelegt ist. Die Bahn hat die Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.4239$ und als Inklination die charakteristischen Inklination $i_{char,1} = 63°.4349488$ (vgl. Abschnitt 22.8.1). Entsprechend der Herleitung in Abschnitt 23.3.5.1 ergibt sich notwendig die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 42240.815$ km. Die Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischen Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -360°.994450$. Die a posteriori Genauigkeit ist besser als $\Delta t = 0.001$sec. Das Perigäum habe den Wert $\overline{\omega}_0 = 270°$, der Einschuss erfolge über dem geographischen Ort λ = 15°, φ = 63°.4349488, also genau über der nördlichen Wende. Zur Epoche 1998-01 01/00:00:00.00 ergeben sich die Bahnparameter $\overline{\Omega}_0$ = 22°.08924835, $\overline{M}_{00} = 183°.35653632$. In der nördlichen Wende zeigt sich eine verschwindende Schleife, die zu einer Spitze schrumpft. Die Apogäumshöhe in diesem Punkt beträgt H_A = 53730.543 km, die Perigäumshöhe über der südlichen Wende H_P = 17994.814 km. Die drakonitische Umlaufzeit stimmt mit der anomalistischen Umlaufzeit in der obigen Genauigkeit überein. Perigäum und analog Apogäum bewegen sich daher über lange Zeiträume (es können Jahre sein) je auf einem festen Breitenkreis, im vorliegenden Fall mit den geographischen

Breiten φ = ± 63°.4349488. Die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit beträgt P_H = 86402.120 sec, die tropische Umlaufzeit P_T = 86402.122 sec. ◄

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenz		$\overline{a_{QADPL}}$ [km]	$\overline{e_{QADPL}}$	$\overline{i_{QADPL}}$
$\overline{P_{D0}}$ [sec]	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$			
43078.4300	–180°.000	26559.944124	0.03871873	63°.433211
43078.4000	–180°.000	26559.929729	0.07490819	63°.433189
43078.3000	–180°.000	26559.881779	0.13769509	63°.433117
43078.0000	–180°.000	26559.738194	0.23663253	63°.432899
43075.0000	–180°.000	26558.318776	0.53338173	63°.430616
43070.0000	–180°.000	26555.992606	0.67282270	63°.426578
43066.1522	–180°.000	26554.222867	0.723502582	63°.423369
43062.9000	–180°.000	26552.734268	0.75220654	63°.420610
(*) 43062.0	–180°.000	26552.323745	0.75872735	63°.419842

Tabelle 23-11: Überblick über Bahnen, welche die drei Bedingungen vorgegebene drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}$, $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn und mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = -180°$ erfüllen. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\oplus}$ = 398600.4418 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 = 0.001082625379977 . Charakteristische Neigung $i_{char,1}$ = 63°.434949.

$\overline{P_D}$ [sec]	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}$	$\overline{a_{QADPL}}$ [km]	$\overline{e_{QADPL}}$	$\overline{i_{QADPL}}$	$\left\lvert\Delta\overline{P}\right\rvert$ [sec]
86400.000000	-360.995000	42240.802549	0.45072924	63°.433655	0.5821×10^{-10}
86400.000000	-360°.999000	42240.713162	0.576831709	63°.432906	$<10^{-15}$
86400.000000	-361°.000000	42240.691932	0.596943507	63°.432715	0.2328×10^{-9}
86400.000000	-361°.005000	42240.590742	0.667472329	63°.431742	0.1746×10^{-9}
86400.000000	-361°.009000	42240.514494	0.703675526	63°.430948	0.3754×10^{-8}
86400.000000	-361°.010000	42240.495960	0.711068430	63°.430748	0.1455×10^{-10}

Tabelle 23-12: Exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen vom *Tundra* Typus mit Vorgabe der Umlaufzeit $\overline{P_{D0}} = 1^d$ und der Knotenlängenverschiebung im Bereich $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \approx -361°$

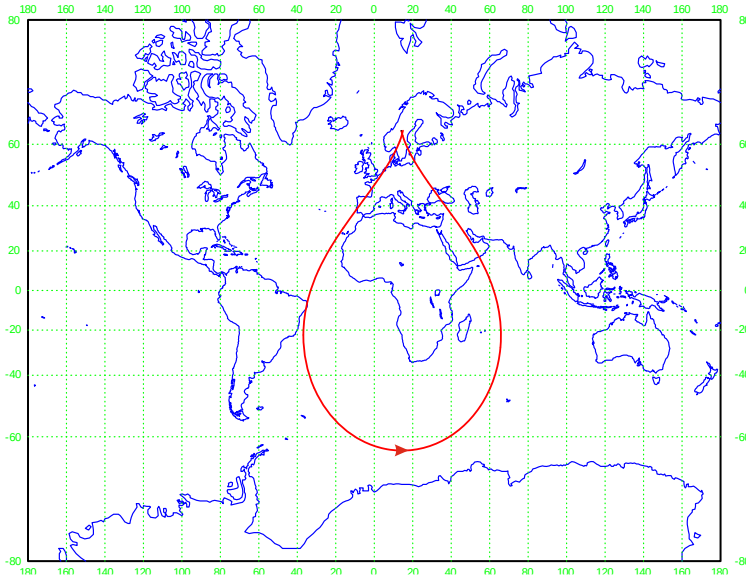


Bild 23-44: Das scheinbare Bewegungsverhalten einer *Tundra* Bahn über einen drakonitischen Umlauf $\overline{P_D}$: $\overline{a_{QADPL}}$ = 42240.815524 km, $\overline{e_{QADPL}}$ = 0.422771546, $\overline{i_{QADPL}}$ = 63°.433755106, $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ = -360°.994450, Einschuss: λ=15°, φ=63°.4. a posteriori Genauigkeit $<10^{-12}$ sec

$\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_D}\right)$	
$\overline{a_{QADPL}}$ =42240.802549060 km, $\overline{e_{QADPL}}$ =0.450729297, $\overline{i_{QADPL}}$ =63°.433654758, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 86399.098904 sec	t_0 : 2022-06-10/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ =86401.007652 sec	P_H =86400.340225 sec
$\overline{P_A}$ = 86400.000000 sec	P_A =86400.000000 sec
$\overline{P_D}$ = 86400.000000 sec	P_D =86400.000000 sec
$\overline{P_T}$ = 86402.253110 sec	P_T =86401.702674 sec
H_P =16823.500674 km	H_A =54901.830424 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -360°.995000$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -360°.995000$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -360°.995000$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -360°.995000$
$\dot{\omega}_s = 0.24998970532017655\times10^{-20}$ rad/sec	

Tabelle 23-13: Bahncharakteristika der exakten $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn vom *Tundra* Typus mit Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_{d\,0}}$ = 86400.000 sec und der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}} = -360°.995$. Die Berechnung der Bahn erfolgt mit den säkularen Bahneinflüssen nach *Brouwer* und mit den Genauigkeiten $\left|\Delta\overline{P}\right| = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 10^{-11}\,[\text{sec}]$, Δ(a) $<10^{-9}$ km, Δe $<10^{-12}$ Δ(i) $< 10^{-7}$ Grad. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_\ddagger$ = 398600.4418 km^3 / s^2, , $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 = 0.001082625379977 . A posteriori Genauigkeit $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| < \times10^{-11}$ sec

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$	
$\overline{a_{QADPL}}$ =42164.088586699 km, $\overline{e_{QADPL}}$ =0.124938511, $\overline{i_{QADPL}}$ =63°.434229383, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0} = 0°$	
$\overline{P_K} = 86163.841845$ sec	t_0 : 2021-02-10/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 86165.158829$ sec	$P_H = 86165.158829$ sec
$\overline{P_A} = 86164.497700$ sec	$P_A = 86164.497700$ sec
$\overline{P_D} = 86164.497700$ sec	$P_D = 86164.497700$ sec
$\overline{P_T} = 86165.976221$ sec	$P_T = 86165.976221$ sec
$H_P = 30463.316905$ km	$H_A = 41108.586105$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -360°.007840$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -360°.007840$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -360°.007840$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -360°.007840$
$\dot{\omega}_s = 0.14058943999861899\times10^{-21}$ rad/sec	

Tabelle 23-14: Bahncharakteristika der exakten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn vom *Tundra* Typus mit Vorgabe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit ein Sterntag $\overline{P_{D\,0}}$=86164.4977 sec und der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}$ =-360°.00784. Die Berechnung der Bahn erfolgt mit den Genauigkeiten $\left|\Delta\overline{P}\right| = \left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| \le 10^{-12}\,[\text{sec}]$, Δ(a)<$10^{-15}$ km, Δ(e)<10^{-12}, Δ(i)<10^{-10} deg. Die Berechnung erfolgt mit den säkularen Bahneinflüssen nach *Brouwer*. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km, $\mu_{\oplus} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s, $J_2 = 0.001082625379977$

1. Bahnen mit der Umlaufzeit ein Sonnentag $\overline{P_{D\,0}}$=86400 sec. Die entsprechenden $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen können nur mit der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} \approx -361°$ realisiert werden. Die Bahnparameter einer solchen Beispielbahn sind in Tabelle 23-13 zusammengestellt. Man beachte den extrem kleinen Wert der säkularen Variation des Argumentes des Perigäums. Tabelle 23-12 gibt einen Eindruck wie kleine Änderungen in der Vorgabe der Knotenlängenverschiebung sehr empfindlich die Exzentrizität der Bahn beeinflussen

2. Bahnen mit einem Sterntag $\overline{P_{d\,0}} = 86164.0906\,\text{sec} \triangleq 23^h56^m04^s.0906$ als vorgegebener drakonitischer Umlaufzeit. Bei derartigen Bahnen sind Knotenlängenverschiebungen von nahezu $\overline{\Delta\lambda_\Omega} \approx -360°$ möglich. Die Bahnparameter einer solchen Bahn sind beispielhaft in Tabelle 23-14 (auf Seite 258) zusammengestellt. Diese Bahnen können nur als nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen erhalten werden. Eine Übersicht derartiger Bahnen ist in Tabelle 23-15 enthalten: der Tabelle kann entnommen werden wie extrem empfindlich sich kleine Änderungen in der vorgegebenen Umlaufzeit auf die berechnete Exzentrizität auswirken.

Anmerkung 1: Es kann interessieren, ob es für retrograde Bahnen in der Nähe der zweiten charakteristischen Inklination $i_{char,2} = 116°.565051$ eine Lösung mit der Umlaufzeit $\overline{P_d} = 43200\,\text{sec}$ und der Knotenlängendifferenz $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -180°$ für eine $\left(\overline{P_a} \triangleq \overline{P_d}\right)$ – Äquivalenzbahn gibt. Wenn das der Fall wäre, würde ein Satellit die Apsiden seiner Bahn täglich zur selben Zeit und über demselben Längengrad überfliegen. Der Rechenprozess führt tatsächlich zu einer Lösung mit den vorgegebenen Randbedingungen. Allerdings ist die Exzentrizität mit e=0.9 so groß, dass das Perigäum weiter unterhalb der Erdoberfläche liegen würde. Dieser Fall einer retrograden Bahn kann also ausgeschlossen werden. ◄

Anmerkung 2: Im Allgemeinen kann aus diesen Beispielen mit drei Randbedingungen geschlossen werden, dass nur jeweils ein eingeschränkter Bereich die vorgegebenen Bedingungen erfüllen kann. Um diesen Bereich zu finden, kann es verschiedene Wege geben. Empfehlenswert könnten zeichnerische Darstellungen sind, die einen ersten Einblick ermöglichen. ◄

$\overline{P_D}$ [sec]	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\overline{a_{QADPL}}$ [km]	$\overline{e_{QADPL}}$	$\overline{i_{QADPL}}$	$\lvert\Delta\overline{P}\rvert$ [sec]
86164.563800	-360°.007930	42164.115006	0.020581782	63°.434261411	$<10^{-12}$
86164.700000	-360°.009000	42164.146456	0.199463267	63°.434174875	$<10^{-12}$
86164.266895	-360°.007930	42163.986449	0.300381184	63°.434045521	$<10^{-12}$
86164.090600	-360°.007000	42163.933781	0.27893745	63.434079338	$<10^{-12}$
86164.090600	-360°.003000	42164.020470	0.232008972	63.431661758	0.3095×10^{-3}
86163.773300	-360°.005200	42163.842298	0.212248248	63°.434162348	$<10^{-12}$
86163.162600	-360°.003000	42163.634132	0.263907050	63°.434100919	$<10^{-12}$
86163.162600	-360°.000400	42163.688755	0.277039647	63°.431958193	0.2785×10^{-3}
86162.019800	-360°.000400	42163.208309	0.434249900	63°.433711322	$<10^{-12}$
86162.019800	-360°.000200	42163.213040	0.42366595	63.433747731	$<10^{-12}$
86161.042900	-360.000888	42162.787238	0.581718851	63°.432854549	$<10^{-12}$
86160.559700	-360.012420	42162.637384	0.728744369	63°.430183554	$<10^{-12}$

Tabelle 23-15: Exakte und nahe-parallele $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen vom *Tundra* Typus mit Vorgabe der Umlaufzeit $\overline{P_{D\,0}} \approx 86164.090600$ sec = 1 Sterntag und der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}} \approx 360°$.

Aufgabenstellungen:

1. Erstelle ein mehrdimensionales Diagramm zur Übersicht über mögliche mehrfache $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit vorgegebener drakonitischer Umlaufzeit und Knotenlängenverschiebung (QADPL-Äquivalenzbahn). Kann als Grundlage Bild 23-31 (auf Seite 229) verwendet werden. ◄

2. Leite die analytischen Formeln zur Berechnung von exakten und nahe-parallelen QADPL-Äquivalenzbahnen her. ◄

23.7.3 Kopplung von *Hansen mit* drakonitischer Bewegung

23.7.3.1 Allgemeine Eigenschaften von Hansen *zu drakonitischen Äquivalenzbahnen*

Die Äquivalenz zwischen *Hansen*- und drakonitischer Bewegung bewirkt eine Kopplung der Knotenlinie einer Satellitenbewegung mit dem Bahnebenen-festen *Hansen*-System.

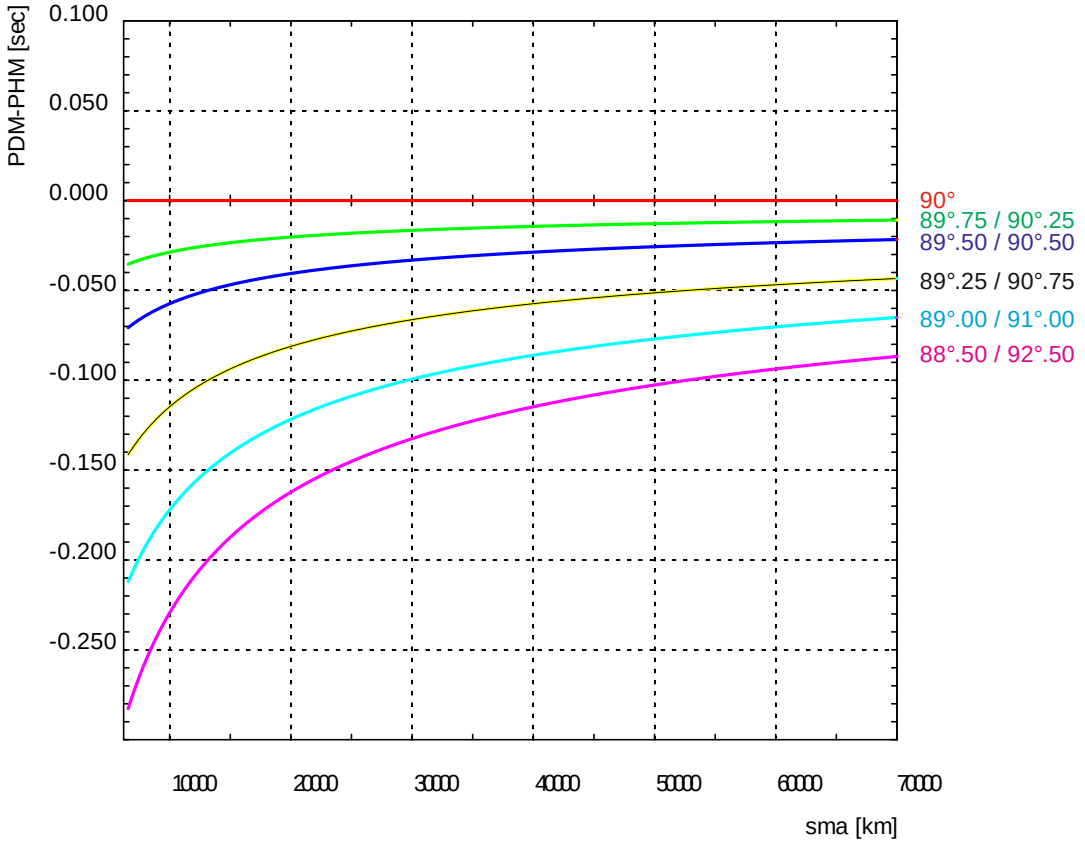


Bild 23-45: Das Verhalten der Differenz aus mittlerer drakonitischer und mittlerer *Hansen* Umlaufzeit $\Delta\overline{P} = \overline{P_D} - \overline{P_H}$ für polnahe Kreisbahnen

Die drakonitische Bewegung unterscheidet sich von der *Kepler*schen Bewegung durch die Eigenbewegung der Knotenlinie, also im Fall von Erdsatelliten von aufsteigendem bzw. absteigendem Knoten. Die mittlere drakonitische mittlere Bewegung unterscheidet sich von der mittleren *Kepler*schen mittleren Bewegung durch die säkulare Drift der Epocheanomalie und des Argumentes des Perigäums (Formel (23.48) in Abschnitt 23.2.2)

$$\overline{n_D} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s \quad . \tag{23.377}$$

Die *Hansen*sche Bewegung eines Satelliten ist fest an die Bahnebene gebunden und auf einen in der Bahnebene festliegenden Anfangspunkt bezogen (Kapitel 21). Um die *Hansen*sche Bewegung eines Satelliten auf andere Bewegungsdarstellungen beziehen zu können, muss die mittlere *Hansen*sche mittlere Bewegung nach Formel (21.62) (in Abschnitt 21.3) in der Form

$$\overline{n_H} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i} + \cdots = \overline{n_D} + \dot{\Omega}\cos\bar{i} + \cdots \tag{23.378}$$

verwendet werden, die auf das Äquatorsystem bezogen ist. Äquivalenz zwischen den beiden Bewegungsarten führt somit notwendig auf die Bedingung

$$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)\text{-Äquivalenz-Bahn} \quad \Rightarrow \quad \overline{n_H} = \overline{n_D} \quad \Leftrightarrow \; \dot{\Omega}_s \cos \bar{i}_0 = 0 \quad .\Leftrightarrow \tag{23.379}$$

Die säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens[1] (siehe etwa Formel (22.272) in Abschnitt 22.13.1) zeigt, dass die Bedingung $\cos \bar{i}_0 = 0.0$ im Fall von Erdsatelliten in erster Näherung Polbahnen ergibt:

$$\cos \bar{i}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{i}_0 = 90°.000 \tag{23.380}$$

Bild 23-45 zeigt das Verhalten der Differenz $\overline{P_D} - \overline{P_H}$ aus mittlerer drakonitischer und *Hansen* Umlaufzeit über der großen Bahnhalbachse für kreisförmige Bahnen mit einigen Inklinationen in der Nähe der Polbahn. Die Kurven wurden mit dem gesamten *Brower*schen Bahnmodell mit den Einflüssen durch J_2, J_3, J_4 gerechnet. Das Bild lässt vermuten, dass $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen nur als nahe-parallele Äquivalenzbahnen zu erwarten sind.

23.7.3.2 Die Bahnhalbachse von Hansen *zu drakonit. Äquivalenzbahnen*

Die große Bahnhalbachse kann bei vorgewählten Exzentrizität $\bar{e}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \overline{P_H} - \overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_H}} - \frac{2\pi}{\overline{n_D}} = 0 \tag{23.381}$$

berechnet werden. Zum Start des Suchprozesses kann die Näherungshalbachse

$$\bar{a}_0^{(0)} = \frac{R_E + 200}{1 - \bar{e}_0} \tag{23.382}$$

verwendet werden. Mit diesem Wert startet der Suchprozess, bei dem die große Bahnhalbachse dann schrittweise um einen vorgegebenen Wert Δa erhöht wird, bis die Differenz der mittleren anomalistischen und drakonitischen Umlaufzeit unter eine geeignet vorgewählte Schranke

$$\left|\overline{P_H} - \overline{P_D}\right| \le \Delta\bar{P} \quad , \; \left|P_H - P_D\right| \le \Delta P \quad . \tag{23.383}$$

fällt.

BEISPIEL: Berechne die große Bahnhalbachse einer Nahe-parallelen $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Inklination $\bar{i}_0 = 91°.0$ und der Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.3$.

Als erstes werde die Genauigkeit $\left|\Delta\bar{P}\right| \le 10^{-2}$ sec gefordert. Der Suchprozess startet mit der niedrigsten möglichen Bahn mit $\bar{a}_0^{(0)} = 9397.338571$ km. Auf dieser Bahn lauten die mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_D} =$ 9074.042673 sec, $\overline{P_H} = 9074.045167$ sec. Die Differenz $\overline{P_D} - \overline{P_H} =$ 0.002493 unterschreitet die geforderte Genauigkeit. Daher kann bereits diese Bahn mit Perigäumshöhe $H_P = 200$ km als Lösung für eine Nahe-parallele $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Genauigkeit $\left|\Delta\bar{P}\right| \le 10^{-2}$ sec gewählt werden.

---

[1] Formel (20.15) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

Die Zusammenstellung der Parameter dieser Bahn in Tabelle 23-16 zeigt den für nahe-parallele Äquivalenzbahnen typischen Betrag der wahren Umlaufzeiten, die wegen des Abbruchs des Suchprozesses wegen der vorgegebenen Genauigkeit fast immer identisch zu den mittleren Umlaufzeiten sind. Die Rechnungen wurden unter Anwendung des gesamten *Brower*schen Bahnmodells durchgeführt, also unter Berücksichtigung auch aller kurz- und langperiodischen Bewegungseinflüsse.

Wird dagegen die Genauigkeit $\left|\Delta\bar{P}\right| \le 10^{-3}$ sec gefordert, ergibt der Suchprozess eine Bahn mit der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 58476.338571$ km. Die Umlaufzeiten sind $\overline{P_D} =$ 140731.437835 sec, $\overline{P_H} = 140731.438835$ sec, somit der Genauigkeit $\left|\overline{P_D} - \overline{P_H}\right| = 0.0009999992$ sec. Diese Bahn hat ihr Perigäum in der Höhe $H_P = 34555.300$ km und das Apogäum $H_A =$ 69641.103 km.

$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)$	
$\overline{a_{QHD}} = 9397.338571$ km, $\bar{e}_0 = 0.3$, $\bar{i}_0 = 91°.00$, $\bar{\Omega}_0 = 0°$, $\bar{\omega}_0 = 0°$, $\overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 9066.053794$ sec	t_0 : 2021-02-10/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 9074.045167$ sec	$P_H = 9074.045167$ sec
$\overline{P_H} = 9069.956176$ sec	$P_A = 9069.956176$ sec
$\overline{P_D} = 9074.042673$ sec	$P_D = 9074.042673$ sec
$\overline{P_T} = 9074.185530$ sec	$P_T = 9074.185530$ sec
$\overline{P_R} = 8209.608396$ sec	$P_R = 7699.127976$ sec
$\overline{P_S} = 9071.577001$ sec	$P_S = 9071.577001$ sec
$\overline{P_L} = 9039.437557$ sec	$P_L = 8529.437557$ sec
$H_P = 200$ km	$H_A = 5838.403143$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -37°.886456$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -\text{-}37°.906356$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -37°.886456$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -\text{-}37°.906356$

Tabelle 23-16: Bahnparameter der nahe-parallelen $\left(P_H \triangleq P_D\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Inklination $\bar{i}_0 = 91°.00$ und Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.3$. Die Berechnung der Bahnparameter erfolgt mit der vorgegebenen Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\bar{P}\right| = \left|\overline{P_H} - \overline{P_D}\right| \le 10^{-2}\,[\text{sec}]$. Basis Parameter: $R_E = 6378.166$ km, $\mu_{\odot} = 398600.4418$ km^3/s^2, $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$

In Tabelle 23-16 fällt auf, dass die mittlere tropische Umlaufzeit $\overline{P_T}$ im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeitsgrenze mit der mittleren drakonitischen und *Hansen* Umlaufzeit übereinstimmt. Man kann daher von einer dreifachen $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_H} \triangleq \overline{P_T}\right)$ – Äquivalenzbahn sprechen. Der Grund hierfür wird in Kapitel 24 gefunden. ◄

Analog zu Abschnitt 23.7.1.7 können auch die Inklination sowie die Exzentrizität einer naheparallelen $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet werden, wenn die anderen Bahnparameter jeweils vorgegeben sind .

Aufgabenstellungen:

1. Berechne die Inklination von $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ und $\left(P_H \triangleq P_D\right)-$ Äquivalenzbahnen bei Vorgabe von Halbachse $\overline{a}_0$ und Exzentrizität $\overline{e}_0$.
2. Berechne die Exzentrizität von $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ und $\left(P_H \triangleq P_D\right)-$ Äquivalenzbahnen bei Vorgabe von Halbachse $\overline{a}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$.
3. Gib eine Darstellung des (a,i)-Bereichs von $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ bzw. $\left(P_H \triangleq P_D\right)-$ Äquivalenzbahnen.

23.7.4 Kopplung von *Kepler- mit* drakonitischer Bewegung

23.7.4.1 Allgemeine Eigenschaften von Kepler *zu drakonitischen Äquivalenzbahnen*

Nicht nur von theoretischem Interesse können $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ und auch $\left(P_K \triangleq P_D\right)-$ Äquivalenzbahnen sein, da sie durchaus in der Praxis realisiert werden können. Der Vergleich aus mittlerer drakonitischer mittlerer Bewegung aus Formel (23.48) ergibt die Bedingung

$$\overline{n_D} = \overline{n_K} + \dot{\overline{M}}_{0s} + \dot{\overline{\omega}}_s \xrightarrow{!} \overline{n_K} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\overline{M}}_{0s} + \dot{\overline{\omega}}_s = 0 \quad . \tag{23.384}$$

$\overline{e}_0$	$\overline{i}_{01}$	$\overline{i}_{02}$
0.0	60°.000000	120°.000000
0.1	60°.010385	119°.989616
0.2	60°.042108	119°.957891
0.3	60°.096999	119°.903001
0.4	60°.178504	119°.821496
0.5	60°.292510	119°.707490
0.6	60°.449074	119°.550926
0.7	60°.666501	119°.333499
0.8	60°.982859	119°.017141
0.9	61°.502636	118°.497364

Tabelle 23-17: Die Inklination erster Ordnung von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ Äquivalenzbahnen in Abhängigkeit von der Exzentrizität nach Formel (23.385)

Mit den *Brouwer*schen Ausdrücken für die säkularen Driften $\dot{\omega}_s$ des Argumentes des Perigäums (aus Formel (20.16)) und der mittleren Epocheanomalie (aus Formel (20.17))[1] folgt in erster Ordnung die Inklination in Abhängigkeit von der vorgegebenen Exzentrizität und unabhängig von der großen Bahnhalbachse

[1] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$\cos \bar{i}_0 = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}{5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}}} \quad . \tag{23.385}$$

Tabelle 23-17 zeigt die Inklination in Abhängigkeit von einigen Exzentrizitäten. Der Einfluss der Exzentrizität ist recht gering. Es ist daher erlaubt auch für diese Äquivalenz eine charakteristische Inklination festzuhalten:

$$\overline{i_{QKD1}}_{char,1} = 60° \quad , \quad \overline{i_{QKD2}}_{char,2} = 120° \quad . \tag{23.386}$$

Die folgenden Bilder Bild 23-46 und Bild 23-47 zeigen keine Überschneidung der Differenzkurven $\overline{P_K} - \overline{P_D}$ mit der Nullkurve. Es ist daher zu erwarten, dass es keine exakte $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_D}\right)$–Äquivalenzbahnen geben kann. Dieselbe Aussage kann auch für retrograde Bahnen in der Umgebung der charakteristischen Inklination $\overline{i_{QKD2}} = 120°$ gemacht werden.

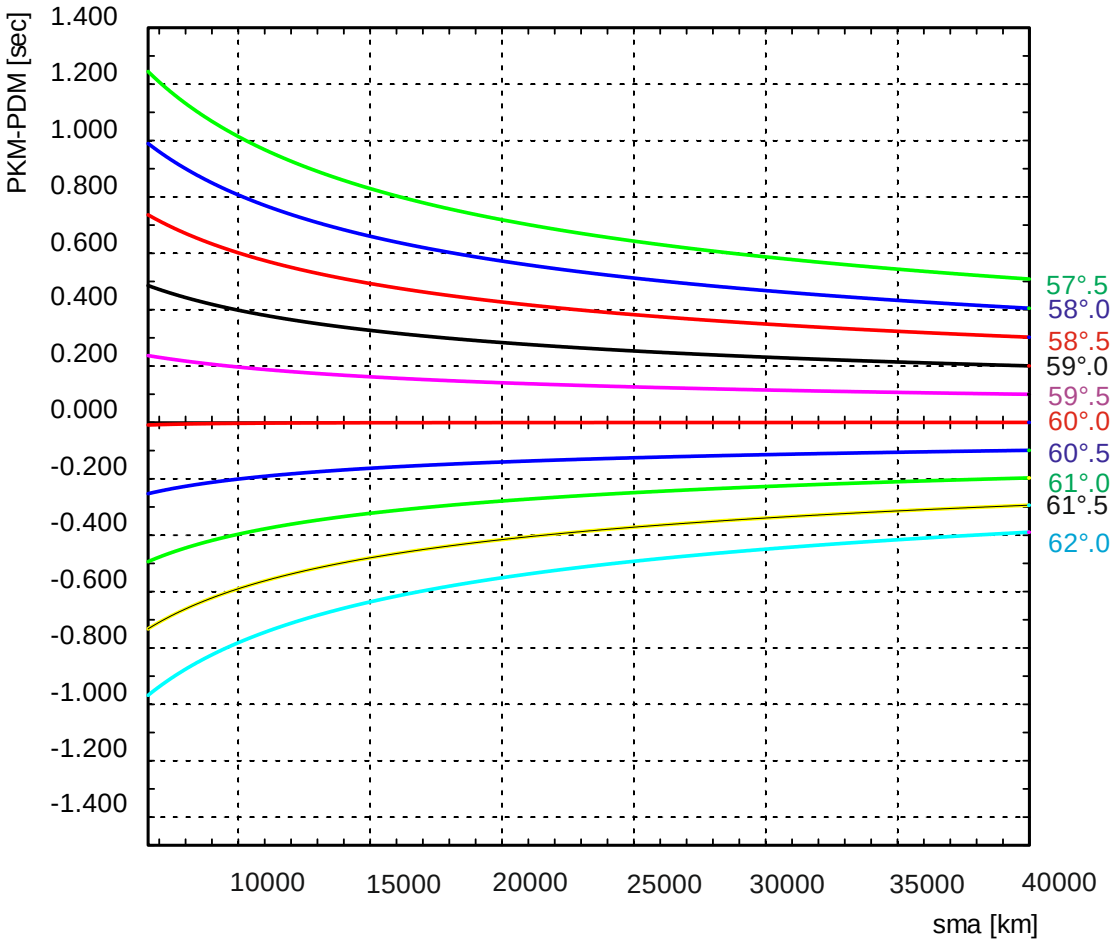


Bild 23-46: Das Verhalten der Differenz aus mittlerer *Kepler*scher und mittlerer drakonitischer Umlaufzeit für Kreisbahnen und verschiedene Inklinationen in der Umgebung der charakteristischen Neigung $\overline{i_{QKD1}} = 60°.0$.
Schrittweite $\Delta a = 5\text{km}$, gesamtes (analytisches) *Brouwer*-Modell

23.7.4.2 Die Bahnhalbachse bei Kepler *zu drakonitischen Äquivalenzen*

Die große Bahnhalbachse kann bei vorgewählten Exzentrizität $\bar{e}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a}\right) \equiv \overline{P_K} - \overline{P_D} = \frac{2\pi\overline{a}\sqrt{\overline{a}}}{\sqrt{\mu}} - \frac{2\pi}{\overline{n_D}} = 0 \tag{23.387}$$

berechnet werden. Zum Start des Suchprozesses kann die Näherungshalbachse

$$\overline{a}_0^{(0)} = \frac{R_E + 200}{1 - \overline{e}_0} \tag{23.388}$$

verwendet werden. Mit diesem Wert startet der Suchprozess, bei dem die große Bahnhalbachse dann schrittweise um einen vorgegebenen Wert Δa erhöht wird, bis die Differenz zwischen der mittleren *Kepler*schen und drakonitischen Umlaufzeit fällt unter eine geeignet vorgewählte Schranke

$$\left|\overline{P_K} - \overline{P_D}\right| \le \Delta\overline{P} \tag{23.389}$$

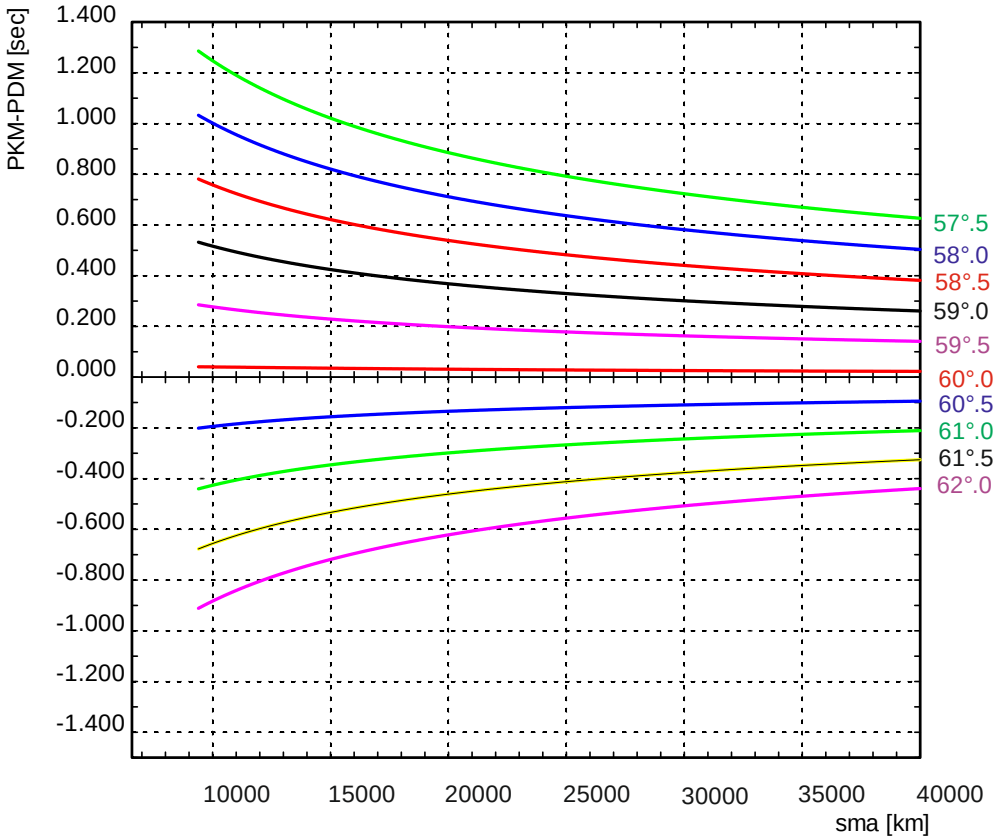


Bild 23-47: Das Verhalten der Differenz aus mittlerer *Kepler*scher und mittlerer drakonitischer Umlaufzeit für Satellitenbahnen mit der Exzentrizität e=0.3 und verschiedene Inklinationen in der Umgebung der charakteristischen Neigung $\overline{i_{QKD1}} = 60°.0$. Schrittweite $\Delta a = 5\text{km}$, gesamtes (analytisches) *Brouwer*-Modell

BEISPIEL: Der Konvergenzbereich für Lösungen einer großen Bahnhalbachse ist sehr eng auf die charakteristische Inklination $\overline{i_{QKD1}}$ =60° bzw. $\overline{i_{QKD2}}$ =120° beschränkt. Mit den Einstellungen $\overline{i}_0 = 60°.05$ und $\overline{e}_0 = 0.2$, ergibt die Iteration für die gewünschte Genauigkeit $\left|\Delta fct\right| \le 0.01\text{sec}$ eine nahe-parallele $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_d}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKD}} = 8352.6710\,\text{km}$. Die Bahnparameter sind in Tabelle 23-18 zusammengestellt. Die erreichte Genauigkeit ist $\left|\overline{P_K} - \overline{P_D}\right| = 0.0099972298676$ sec. ◀

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_D}\right)$	
$\overline{a_{QKD}} = 8352.671250\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.2, \bar{i}_0 = 60°.05, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 7597.121345\ \text{sec}$	t_0 : 2021-02-10/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 7599.076123\ \text{sec}$	$P_H = 7599.076123\ \text{sec}$
$\overline{P_a} = 7598.085967\ \text{sec}$	$P_a = 7598.085967\ \text{sec}$
$\overline{P_d} = 7597.131342\ \text{sec}$	$P_d = 7597.131342\ \text{sec}$
$\overline{P_t} = 7601.027795\ \text{sec}$	$P_t = 7601.027795\ \text{sec}$
$\overline{P_R} = 8336.432136\ \text{sec}$	$P_R = 8391.613591\ \text{sec}$
$\overline{P_S} = 7602.859074\ \text{sec}$	$P_S = 7602.859074\ \text{sec}$
$\overline{P_L} = 7625.581991\ \text{sec}$	$P_L = 7625.581991\ \text{sec}$
$H_P = 304.0000\ \text{km}$	$H_A = 3645.0685\ \text{km}$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P\,\overline{P_a} = -\text{-}31°.907350$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_d} = -31°.925922$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_P\,P_a = -31°.907350$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_d = -31°.925922$
$\dot{\Omega}_s = \text{-}0.4239623307358334\times10^{-6}\ \text{rad/sec}$	
$\dot{\omega}_s = 0.10391036058633073\times10^{-6}\ \text{rad/sec}$	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s = \text{-}0.10499869120700486\times10^{-6}\ \text{rad/sec}$	

Tabelle 23-18: Bahncharakteristika der *Kepler*bahn und der mittleren drakonitischen nahen parallelen Äquivalenzbahn, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_\odot = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}=0.72921158573340\times10^{-4}\ \text{/ s}$, $J_2 = 0.001082625379977$, Schrittweite $\Delta a = 10\ \text{km}$, mit der geforderten Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-2}\ \text{sec}$

Aufgabenstellungen:

1. Berechne die Inklination von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ und $\left(P_K \triangleq P_D\right)-$Äquivalenzbahnen bei Vorgabe von Halbachse $\bar{a}_0$ und Exzentrizität $\bar{e}_0$.

1. Berechne die Exzentrizität von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ und $\left(P_K \triangleq P_D\right)-$Äquivalenzbahnen bei Vorgabe von Halbachse $\bar{a}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$.
2. Gib eine Darstellung des (a,i)-Bereichs von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_D}\right)-$ und $\left(P_K \triangleq P_D\right)-$Äquivalenzbahnen. Gibt es Nullstellen für verschiedene Inklinationen?
3. Überprüfe, ob auch die Kreisbahn mit der charakteristischen Inklination $\overline{i_{QKD1}} = 60°.0$ eine Nahe-parallele Äquivalenzbahn ist. Vgl. Bild 23-46.
4. Zeichne den Verlauf der Differenz $\overline{P_K} - \overline{P_D}$ in der Umgebung der zweiten charakteristischen Inklination $\overline{i_{QKD2}} = 120°.0$.
5. Vergleiche die Ephemeride einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_D}\right)-$Äquivalenzbahn mit der Ephemeride einer entsprechenden ungestörten *Kepler*bahn.

6. Untersuche die entsprechenden Aussagen im Fall von wahren nahe-parallelen $\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_D\right)$ – Äquivalenzbahnen.

23.8 Der Knotenumlauf

Die Fundamentalbeziehung (23.227) kann für einfache Anwendungen verallgemeinert werden, wenn die säkulare Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$ bekannt ist.

Sei etwa eine (mittlere) Knotenlängenverschiebung, d.h. die Verschiebung der Bahnebene bezüglich des Äquators (ohne Berücksichtigung der Bewegung eines Satelliten in seiner Bahnebene) um den Betrag $\overline{\delta\lambda_\Omega}$, so kann die dazu benötigte Zeit berechnet werden mit Hilfe der Differenz

$$\Delta t = \frac{\overline{\delta\lambda_\Omega}}{\dot{\lambda}_{\Omega s0}}[\mathrm{d}] \tag{23.390}$$

BEISPIEL 1: Gegeben sei die Bahn $\bar{a}_0 = 6578.140\,\mathrm{km}, \bar{e}_0 = 0.0, \bar{i}_0 = 25°$. Die Knotenlängendrift beträgt $\dot{\lambda}_{\Omega s0} = -369°.1345940/\mathrm{d}$, die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = 1^h.469769$, die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischen Umlauf $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -22°.605934$. Wie lange dauert es, bis die Bahnebene um den Betrag $\overline{\delta\lambda_\Omega} = -130°$ verschoben wird? Ergebnis: $\Delta t = 8^h.4522$. ◄

Von besonderem Interesse ist die Zeitdauer für einen ganzen Knotenumlauf um die Erde. Sie errechnet sich aus

$$\overline{P_{\lambda\Omega}} = -\frac{360°}{\dot{\lambda}_{\Omega s}} \quad . \tag{23.391}$$

BEISPIEL 2: Für die Bahn des vorstehenden Beispiels ergibt sich: $\overline{P_{\lambda\Omega}} = 23^h\,24^m\,21^s.948$, also ungefähr aber keineswegs genau ein mittlerer Sonnentag[1]. ◄

23.9 Die Knotenlängenrestverschiebung

Nach einem Knotenumlauf des Bahnknotens längs des Äquators um die Erde befindet sich ein Satellit normalerweise nicht im Knoten (die einzige Ausnahme sind nach einem Knotenumlauf reproduzierbare Bahnen, die als „integer Bahnen“ bezeichnet werden). Vielmehr ist der erste aufsteigende Knoten der Satellitenbahn nach einem Knotenumlauf gegenüber einem Referenzknoten um einen bestimmten Betrag, der als „Knotenlängenrestverschiebung“ $\Delta\lambda_{\Omega K}$ bezeichnet wird, verschoben. Für bahnanalytische Untersuchungen ist die mittlere Knotenlängenrestverschiebung

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = \Delta\lambda_{\Omega K} - \delta\left(\Delta\lambda_{\Omega K}\right) \tag{23.392}$$

[1] Diese Aussage ist wichtig, da die Knotenumlaufzeit dann und nur dann einen mittleren Sonnentag beträgt, wenn die Bahn sonnensynchron ist (siehe in Kapitel 28)

von besonderer Wichtigkeit. Bei bahnanalytischen Untersuchungen bleibt der periodische Anteil $\delta(\Delta\lambda_{\Omega K})$ normalerweise unberücksichtigt.

23.9.1 Eigenschaften der mittleren Knotenlängenrestverschiebung

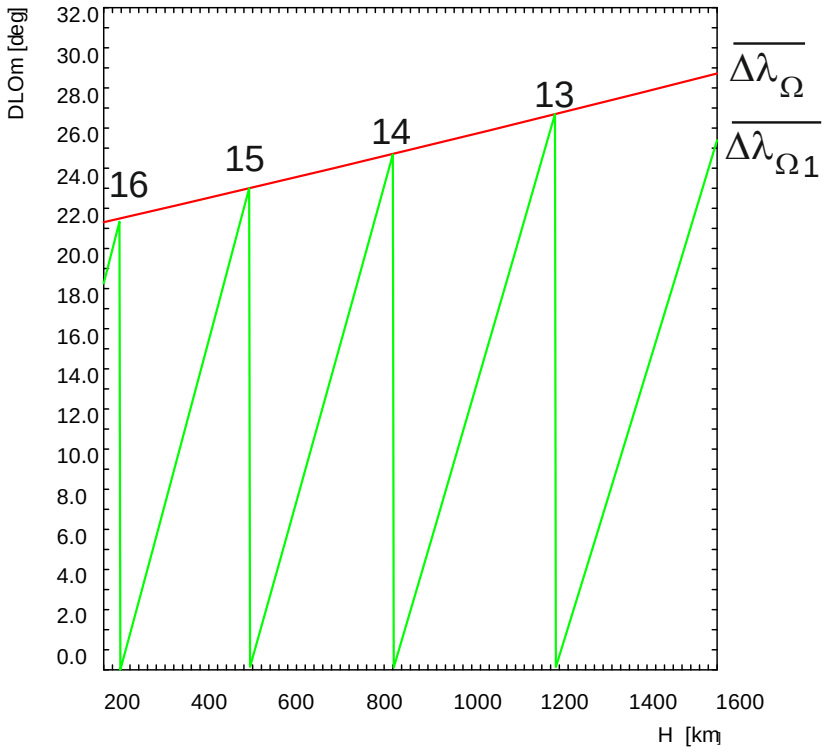


Bild 23-48: Verlauf der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf und der Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nach einem Knotenumlauf für die Kreisbahn mit Inklination i = 80° und variiert über den Höhenbereich $200\,\text{km} \le H \le 1600\,\text{km}$.

Die geographische Länge des aufsteigenden Knotens nach einem Knotenumlauf wird gegenüber einem Referenzknoten um die Knotenlängenrestverschiebung in westlicher Richtung verschoben (vgl. Formel (23.230)), wenn N_1 die Anzahl der drakonitischen Umläufe nach einem Knotenumlauf ist,

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} := N_1\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} + 360° = \text{int}\left[-\frac{360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1\right]\overline{\Delta\lambda_\Omega}\ + 360° \quad . \tag{23.393}$$

Entsprechend kann auch eine Knotenlängenrestverschiebung nach *K* Knotenumläufen bei N_D drakonitischen Umläufen definiert werden:

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} := N_D\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} + K \cdot 360° = \text{int}\left[-\frac{K \cdot 360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1\right]\overline{\Delta\lambda_\Omega}\ + K \cdot 360° \quad . \tag{23.394}$$

Offensichtlich gilt die Einschränkung

$$0° \le \left|\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}\right| \le \left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| \quad . \tag{23.395}$$

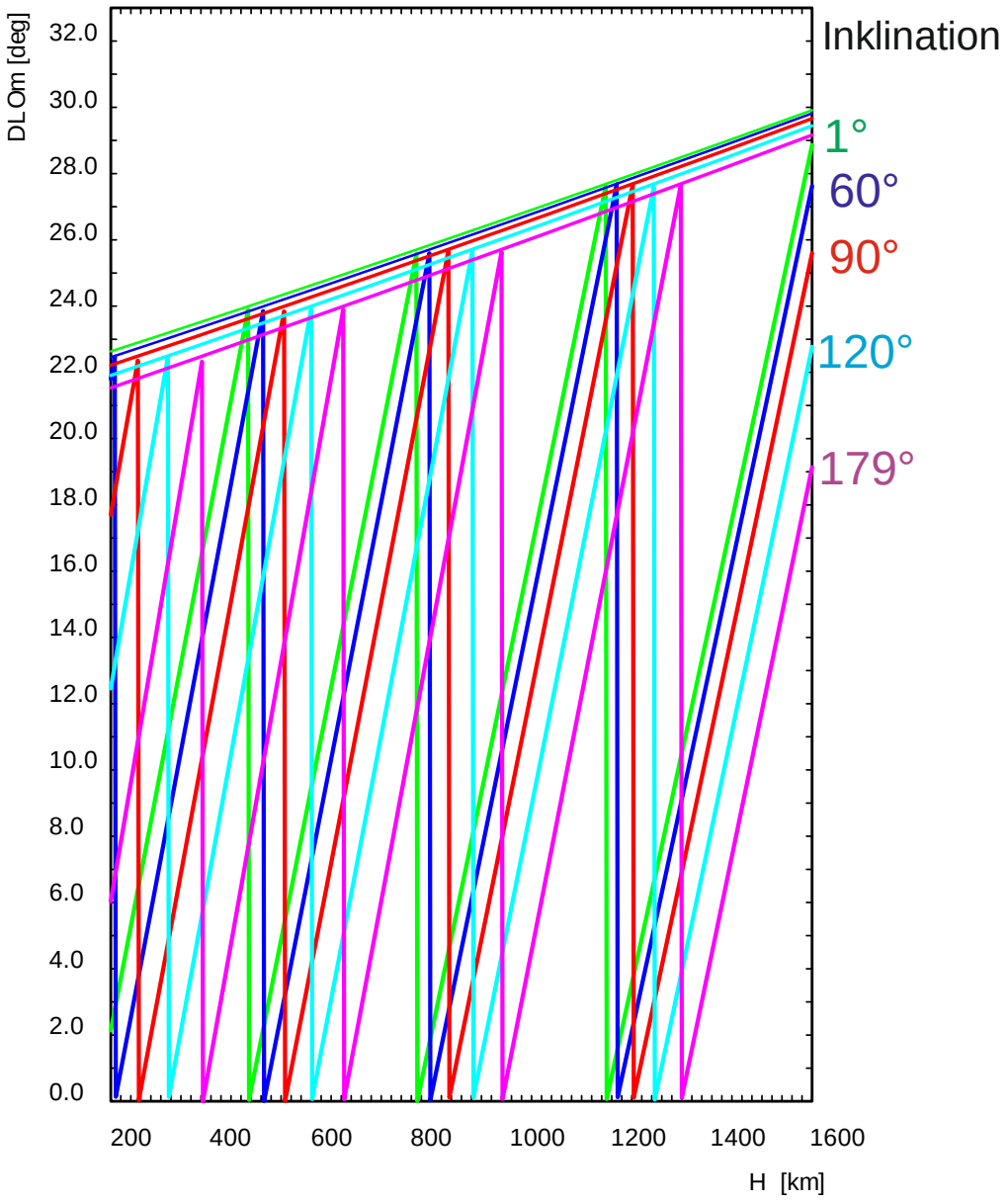


Bild 23-49: Verlauf der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf und der Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nach einem Knotenumlauf für Kreisbahnen mit den Inklinationen i = 1°, 60°, 90°, 120°, 179° in Abhängigkeit vom Höhenbereich $200\,\text{km} \le H \le 1600\,\text{km}$.

Die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ und die mittlere Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$ haben interessanterweise ein völlig unterschiedliches Verhalten. Die Knotenlängenverschiebung nimmt mit zunehmender (Kreis-) Bahnhöhe und entsprechender längerer (drakonitischer) Umlaufzeit allmählich stetig zu. Die Knotenlängenrestverschiebung durchläuft mit zunehmender Bahnhöhe rasch das Intervall der Länge $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ und trifft auf die Knotenlängenverschiebung jeweils, wenn beide Werte zusammenfallen: $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = \overline{\Delta\lambda_\Omega}$. Dies sind die Punkte, wenn der Satellit nach **einem** Knotenumlauf genau den Referenzknoten überfliegt, wenn sich der Satellit also auf einem „integer orbit“ bewegt. Dies wird in Abhängigkeit von der Bahnhöhe nach 16, 15, 14, 13,… drakonitischen Umläufen erreicht, wie aus Bild 23-48 ersehen werden kann.

Von besonderem Interesse ist, dass die Knotenlängenrestverschiebung im Gegensatz zur Knotenlängenverschiebung entscheidend von der Bahninklination beeinflusst wird. Dies wirkt sich auch auf die Position der „integer orbits“ aus, wie für einige Beispiele aus Bild 23-49 abgelesen werden kann. Eine beliebige Verschiebung der Anordnung der Knotenlängenrestverschiebung längs des Bahnhöhenverlaufs ist nicht möglich. Hier können nur einige diskrete Anordnungen eingestellt werden.

Die Knotenlängenrestverschiebung erlaubt eine Zuordnung von Bahn- und Bahnebene in Bezug auf die Erdoberfläche über längere Zeiträume. Dies erläutert folgendes

BEISPIEL: Die kreisförmige Bahn mit mittlerer Kreisbahnhöhe H = 750 km und der Inklination $\overline{i_0} = 98°.37$ hat die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -24°.98513$ sowie die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{D0}} = 1^h.6657$. Über einen längeren Zeitraum $\Delta t = N_K \cdot \overline{P_{D0}}$ ergibt sich mit Formel (23.396) und der Anzahl der drakonitischen Umläufe N_K bei K Knotenumläufen nach Formel (23.231) $N_K = \text{int}\left[-K \cdot 360° / \overline{\Delta\lambda_\Omega} + 1\right]$ die Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$. Die Tabelle 23-19 schließt die entsprechenden Werte bei Start sowie nach einem drakonitischen Umlauf $\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = \overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)$ ein. Das Beispiel zeigt eine sprunghafte Änderung der Knotenlängenrestverschiebung von Tag zu Tag, die zunächst willkürlich anmutet, über längere Zeiträume jedoch einen systematischen Gang aufweist. Man kann sich dieses Verhalten bei der Bahnauswahl eine Erderkundungssatelliten zunutze machen. Die Umlaufzeiten ungefähr ganzen Tagen entsprechen, jedoch nie exakt. Dies ist typisch in nahezu allen Anwendungen. ◄

23.9.2 Bahnauswahl aus der mittleren Knotenlängenrestverschiebung

Bei Vorgabe der Knotenlängenrestverschiebung nach N_D drakonitischen Umläufen kann nach Formel (23.394) die Knotenlängenverschiebung nach einem drakonitischen Umlauf berechnet werden aus

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \frac{\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} - K \cdot 360°}{N_D} \quad . \tag{23.396}$$

Mit bekannter Knotenlängenverschiebung sowie bei Vorgabe von Exzentrizität $\overline{e_0}$ und Inklination $\overline{i_0}$ kann mit dem in Abschnitt 23.5.3 ab Seite 205 hergeleiteten Verfahren die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a_0}$ zur Epoche berechnet werden. Die Formel (23.394) zeigt jedoch auch, dass Vorgabe der Knotenumlaufzahl K nicht ausreicht, um eine eindeutige Berechnung einer Bahn zu ermöglichen. In einem solchen Fall ist es nötig, etwa durch ungefähre Wahl einer geeigneten Bahnhöhe aus dem Bereich aller für ein gewünschtes K möglichen Bahnen eine passende Bahnen zu suchen.

K	N_K	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$	Δt
0	0	0°	0^h
0	1	24°.99	1^h.6657
1	15	14°.78	1^d.0411
2	29	4°.57	2^d.0127
3	44	19°.35	3^d.0538
4	58	9°.15	4^d.0254
5	73	23°.91	5^d.0665
6	87	13°.71	6^d.0382
7	101	3°.50	7^d.0098
8	116	18°.28	8^d.0509
9	130	8°.07	9^d.0225
10	145	22°.84	10^d.0636
11	159	12°.64	11^d.0353
12	173	2°.43	12^d.0069
13	188	17°.20	13^d.0480
14	202	7°.00	14^d.0196
15	217	21°.77	15^d.0607
16	231	16°.57	16^d.0324
17	245	1°.36	17^d.0040
18	260	16°.13	18^d.0451
19	274	5°.93	19^d.0167
20	289	20°.70	20^d.0578
21	303	10°.50	21^d.0295
22	317	0°.29	22^d.0011

Tabelle 23-19: Die Knotenlängenrestverschiebung nach *K* Knotenumläufen für die Bahn $\bar{a}_0 = 7128.140\,\text{km}$, $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 98°.37$

BEISPIEL 1: Nach 7 drakonitischen Umläufen soll der aufsteigende Bahnknoten einer Bahn bezüglich der Erdoberfläche um den Betrag 33°.742 nach Westen verschoben sein. Die gesuchte Bahn soll die Exzentrizität e=0.3 und um 111° gegenüber dem Äquator geneigt sein. Zu bestimmen ist die große Bahnhalbachse.

Nach Formel (23.396) muss die Bahn die Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ = -56°.248857 haben. Die Berechnung mit Formel (23.234) liefert die Näherung $\bar{a}_0^{(0)} = 12231.631276\,\text{km}$, die Verbesserung (23.237) liefert $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 7.919915\,\text{km}$ und ergibt die Näherung erster Ordnung $\bar{a}_0^{(1)} = 12239.551191\,\text{km}$, die iterative Verbesserung (23.238) schließlich die endgültige Lösung $\bar{a}_0^{(2)} = 12239.530508\,\text{km}$. Zur Kontrolle werden mit dieser

Halbachse die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -56°.248857$ und die Knotenlängenrestverschiebung pro drakonitischem Umlauf $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = -33°.741999$ berechnet. ◄

Für die Anwendungen der Knotenlängenrestverschiebung ist neben der Vorgabe eines Zahlenwertes von größerer Bedeutung die Vorgabe eines Bruchteiles, den die Knotenlängenverschiebung in dem Referenzintervall der Knotenlängenverschiebung einnehmen soll. Für natürliche Zahlen K_1, K_2 soll somit die Relation erfüllt sein:

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = \frac{K_1}{K_2}\overline{\Delta\lambda_\Omega} \qquad \langle K_1, K_2 \in \mathbb{N}, \quad K_1 < K_2 \quad . \tag{23.397}$$

Hier ist die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ selber eine unbekannte Größe, die mit Hilfe der Beziehung (23.394) berechnet werden muss:

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \frac{K \cdot 360°}{\frac{K_1}{K_2} - N_D} \quad . \tag{23.398}$$

Die Lösung ist aber nicht eindeutig, da die Anzahl N_K der drakonitischen Umläufe noch wählbar ist. Hier gilt lediglich für Erdsatelliten die Einschränkung (wie aus der *Kepler*schen Umlaufzeit für eine Kreisbahn in 200 km Höhe geschlossen werden kann)

$$N_D \le 16\,K \quad . \tag{23.399}$$

BEISPIEL 3: Für $K_1 = 1, K_2 = 7, N_1 = 13$ liefert Formel (23.398) die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -28°.0$. Die Knotenlängenrestverschiebung nach einem Knotenumlauf beträgt mit (23.397) $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = -4°.$ Eine Kreisbahn mit der Bahnneigung $\bar{i}_0 = 125°$ muss dann die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7726.220\,\text{km}$ haben. ◄

Die in diesem Abschnitt behandelte Knotenlängenrestverschiebung ist eine wichtige Größe im Zusammenhang mit Untersuchungen der Reproduzierbarkeit von Satellitenbewegungen.

23.10 Spur-reproduzierbare Bahnen

23.10.1 Reproduzierbarkeit und Knotenlängenverschiebung

Der Begriff einer Reproduzierbarkeit wird in der Satellitenbahnmechanik in verschiedenem Zusammenhang benötigt. Im Zusammenhang mit Fernerkundungssatelliten interessiert in erster Linie der Bezug auf die Erdoberfläche und damit der Begriff der *reproduzierbaren Subsatellitenbahn*. Die Problemstellung lautet dann: kann nach einer bestimmten Anzahl N_K drakonitischer Umläufe ein und dieselbe Subsatellitenspur (= Fußpunktkurve) wieder exakt überflogen werden? Bei Einschränkung auf das Hauptproblem der Satellitenbahnmechanik (Störungen durch $J_2 - J_4$ allein) und Vernachlässigung periodischer Bewegungseinflüsse („Störterme“) verändert sich die Bahnneigung nach Beziehung[1] (20.14) nicht. Unter diesen Voraussetzungen

[1] Abschnitt 20.2.1, Band III

wird eine bestimmte Stellung der Bahnebene in Bezug auf den Erdkörper nach jedem Knotenlängenumlauf wieder erreicht, wenn die mittlere geographische Länge $\overline{\lambda_\Omega}$ des momentanen aufsteigenden Knotens wieder denselben Wert annimmt. Reproduzierbar ist eine Satellitenbewegung jedoch erst dann, wenn sich der Satellit nach einer bestimmten Anzahl K von Knotenumläufen bei einem Bezug auf den aufsteigenden Knoten genau wieder im aufsteigenden Knoten befindet. Für ein bestimmtes Wertepaar K, N_d natürlicher Zahlen muss also mit der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ die Beziehung erfüllt sein

$$N_D \, \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -K \cdot 360° \quad . \tag{23.400}$$

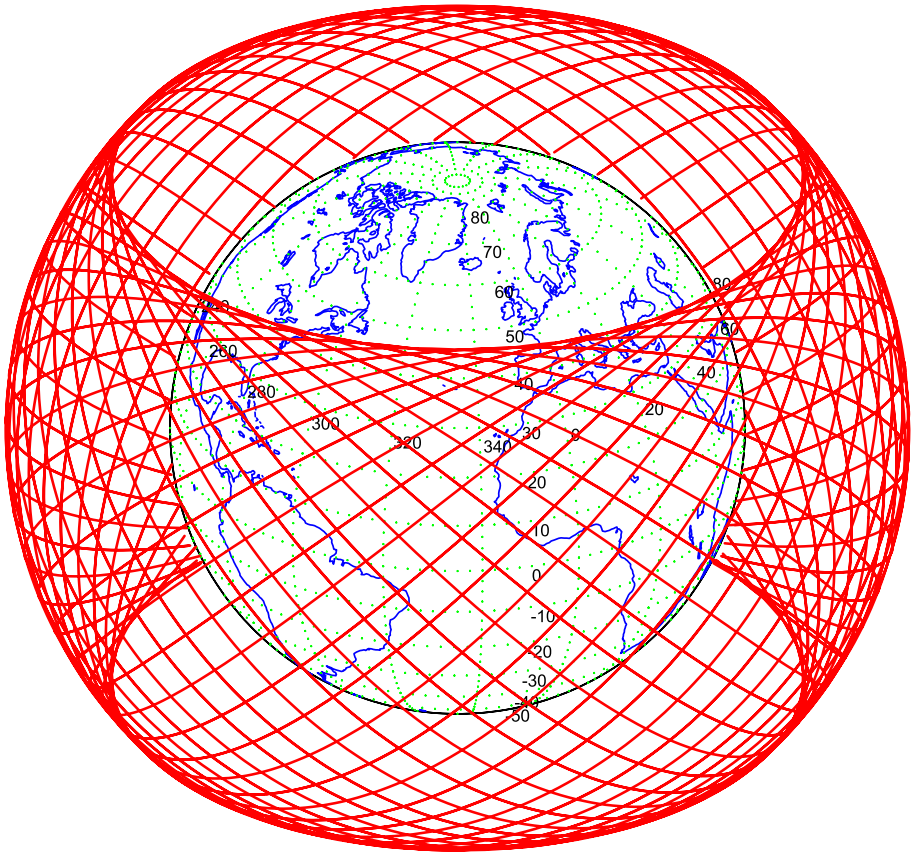


Bild 23-50: Das bezüglich der Erdoberfläche feststehende, daher mit der Erdrotation mit rotierende, Netz einer reproduzierbaren Bahn kreisförmigen Bahn unter der Inklination i=40° und mit dem Reproduktionsverhältnis $K{:}N_D = 5{:}43$

Diese Beziehung kann folgendermaßen formuliert werden:

- *Eine Subsatellitenbahn ist genau dann reproduzierbar, wenn ihre mittlere Knotenlängenverschiebung kommensurabel zum Vollkreis ist.*

Die Zahlen N_D und K unterliegen bei Erdsatellitenbahnen wegen einer sinnvollen Mindestbahnhöhe von etwa 200 km nach Bedingung (23.399) der Einschränkung $N_D \leq 16\,K$. Die Zahl K kann in diesem Fall als *Reproduktionszyklus* bezeichnet werden. Sie ist als Anzahl der

Knotenumläufe bezüglich der Erdoberfläche nahezu der Anzahl an Tagen zur Spurwiederholung gleich[1].

Im Fall von Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn kann die Zeitdauer T_d, nach der eine mittlere Subsatellitenbahn reproduziert wird, mit Hilfe der mittleren drakonitischen Umlaufzeit aus der Beziehung

$$T_D = N_K \; \overline{P_D} / 86400 \, [d] \tag{23.401}$$

berechnet werden. Diese Größe ist die *Reproduktionsdauer*. Sie hat als Dimension einen mittleren Sonnentag (für die Definitionsgleichung wird somit angenommen, dass die mittlere drakonitische Umlaufzeit in Sekunden gegeben ist).

BEISPIEL: Bild 23-50 zeigt das Netz einer im Verhältnis K:N_D = 5:43 kreisförmigen Bahn unter der Bahnneigung i = 40°. Die Bahn hat die mittlere große Bahnhalbachse a = 10021.741 km. Das Bahnnetz zeigt keinen Anfang und kein Ende, da die Bahn als eine reproduzierbare Bahn bezüglich der Erdoberfläche in sich geschlossen ist. Das Netz rotiert fest an die Erde gekoppelt zusammen mit der Erdrotation. ◄

23.10.2 Bahnauswahl für Spur-reproduzierbare Bahnen

Eine wichtige Anwendung der Spurreproduzierbarkeit von Satellitenbahnen ist die Bestimmung der Bahnparameter einer solchen Bahn. Wenn die Reproduktionsparameter K und N_K vorgegeben sind, kann aus der Definitionsgleichung (23.400) die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ berechnet werden. Damit kann mit den Methoden von Abschnitt 23.5.3 (auf Seite 205) die mittlere Bahnhalbachse $\overline{a_0}$ eindeutig erhalten werden, sofern die mittlere Anfangs-Inklination $\overline{i_0}$ sowie die mittlere Anfangs-Exzentrizität $\overline{e_0}$ bekannt sind. Damit wird ersichtlich, dass mit Hilfe der Reproduzierbarkeit einer Sub-Satellitenbahn ausschließlich mittlere Anfangs-Bahnparameter ausgewählt werden können. Dies muss bei der Berechnung einer Satelliten-Bahnakquisition sowie für eine eventuell nötige Bahnhaltung stets sorgfältig berücksichtigt werden.

BEISPIEL 1: Eine kreisförmige Erdsatellitenbahn ($\overline{e_0}$=0.0), deren Bahnebene unter der Inklination $\overline{i_0} = 70°$ geneigt sei, soll nach einer Repetitionsdauer von etwa K=17 Tagen und nach N_K =250 drakonitischen Umläufen wieder eine reproduzierbare Bodenspur haben. Die mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt nach Formel (23.400) $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = -24°.480$, was nach Abschnitt 23.5.3 auf die mittlere Anfangs-Bahnhalbachse $\overline{a_0} = 7024.517\,\text{km}$ und die mittlere auf den mittleren Äquator bezogene Bahnhöhe $\overline{H} = \overline{a_0} - R_E = 646.362\,\text{km}$ führt. Die zugehörige mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt (nach Formel (23.161)) $\overline{P_D} = 5819.772s \triangleq 1^d.616603.$ Die Reproduktionsdauer beträgt nach Formel (23.401) $T_D = 16^d 20^h 9^m 3^s.0$.◄

---

[1] Exakt gleich der Anzahl der Tage ist der Reproduktionszyklus ausschließlich im Fall sonnensynchroner Bahnen (siehe hierzu in Kapitel 28.9.4)

BEISPIEL 2: In der folgenden Tabelle 23-20 werden einige spur-reproduzierbare Erdsatellitenbahnen für die Bahnneigung i=57° zusammengestellt[1]. Weitere ausführliche Tabellen mit spur-reproduzierbaren Erdsatellitenbahnen finden sich in Anhang G (Band V). ◄

BEISPIEL 3: Ein typisches Beispiel für die Verteilung spurreproduzierbarer Bahnen ist in Bild 23-51 dargestellt. Gegeben sind kreisförmige Bahnen unter der Inklination i=70°. Im Bild sind die nach den Bahnhöhen geordneten Bahnen über der Anzahl *K* der Knotenumläufe durch ihren Ort im Diagramm gekennzeichnet. Die Zahlen an diesen Punkten geben die Anzahl N_K der je für die Reproduzierbarkeit benötigten drakonitischen Umläufe an.

K	N_K	a*[km]*	H[km]	i	$\overline{P_D / d}$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	$\overline{\Delta\lambda_0}$
1	16	6582.776	205	57°.000	16.259675	–22°.500	–22°.500	–22°.500
4	63	6654.415	276	57°.000	15.997219	–22°.857	–5°.714	–5°.714
3	47	6678.704	301	57°.000	15.910497	–22°.979	–7°.660	–7°.660
2	31	6727.913	350	57°.000	15.736195	–23°.226	–11°.613	–11°.613
3	46	6777.985	400	57°.000	15.562879	–23°.478	–15°.652	–7°.826
4	61	6803.353	425	57°.000	15.475090	–23°.607	–17°.705	–5°.903
1	15	6880.822	503	57°.000	15.214395	–24°.000	–24°.000	–24°.000
4	59	6960.411	582	57°.000	14.954099	–24°.407	–6°.102	–6°.102
3	44	6987.429	609	57°.000	14.867420	–24°.545	–8°.182	–8°.182
2	29	7042.220	664	57°.000	14.694192	–24°.828	–12°.414	–12°.414
3	43	7098.043	720	57°.000	14.521131	–25°.116	–16°.744	–6°.279
4	57	7126.352	748	57°.000	14.434663	–25°.263	–18°.947	–6°.316
1	14	7212.919	835	57°.000	14.175503	–25°.714	–25°.714	–25°.714
4	55	7302.039	924	57°.000	13.916703	–26°.182	–6°.545	–6°.545
3	41	7332.335	954	57°.000	13.830514	–26°.341	–8°.780	–8°.780
2	27	7393.840	1016	57°.000	13.658251	–26°.667	–13°.333	–13°.333

Tabelle 23-20**:** Spur-reproduzierbare kreisförmige Bahnen für die Inklination *i* = 57° bis zu 1000 km Bahnhöhe (*K* Anzahl der Knotenumläufe, N_K Anzahl der drakonitischen Umläufe, *H* – mittlere Bahnhöhe bei Bezug auf den mittleren Äquatorradius der Erde, $\overline{P_D / d}$ *-Anzahl der mitt*leren drakonitischen Umläufe pro mittlerem Sonnentag, $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ -mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf, $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ -mittlere Knotenlängenrestverschiebung nach einem Knotenumlauf, $\overline{\Delta\lambda_0}$ -kleinstes mögliches Intervall einer Knotenlängenverschiebung pro Reproduktionszyklus).

[1] DLR GSOC TN 95-03

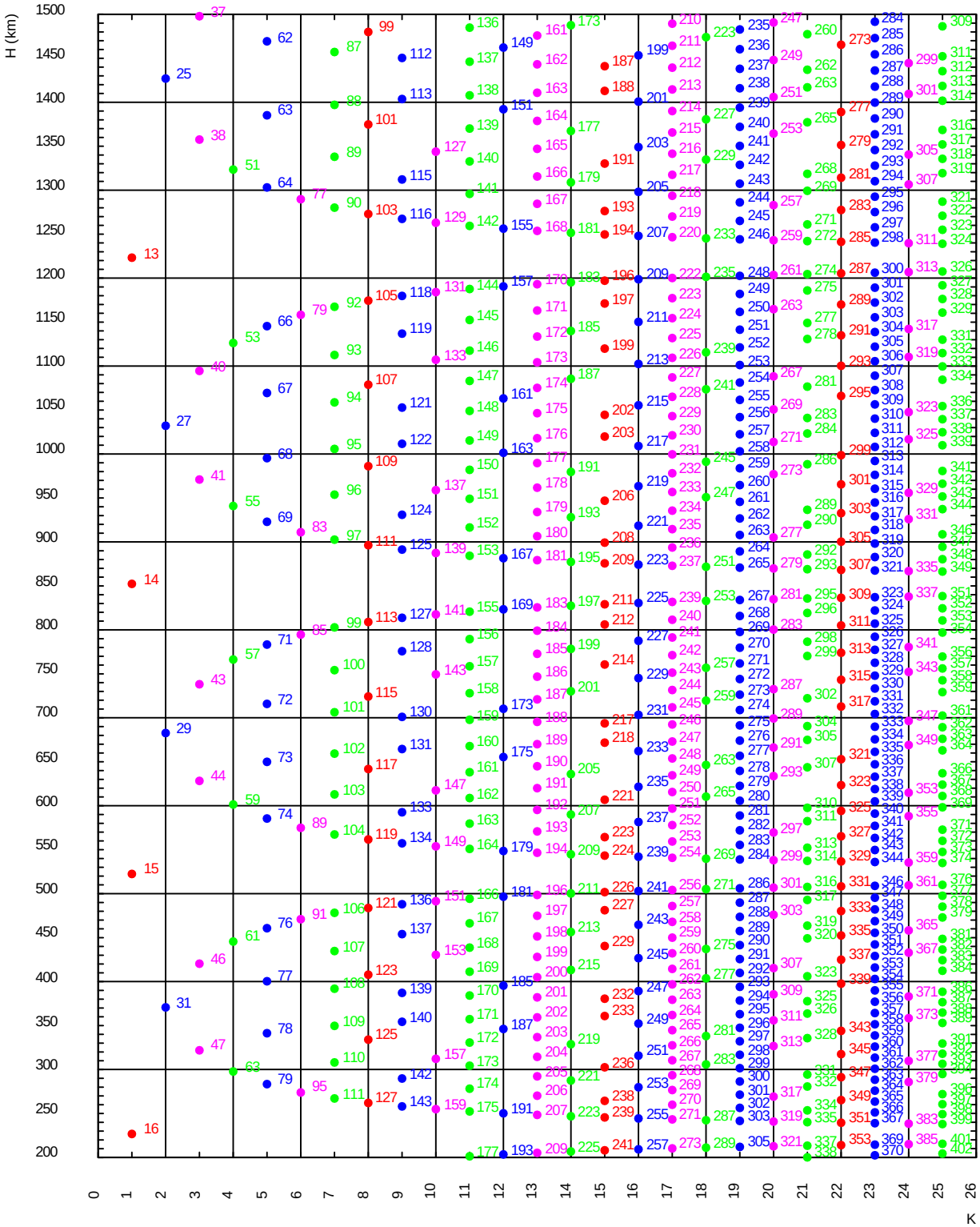


Bild 23-51: Übersicht über alle kreisförmigen spurreproduzierbaren Erdsatellitenbahnen unter der Neigung i = 70°, im Höhenbereich 200 km ≤ H ≤ 1500 km und im Bereich 1 bis 25 Knotenumläufe

Die Anzahl möglicher reproduzierbarer Bahnen ist für die Anzahl der Knotenumläufe sehr unterschiedlich, was eine Folge der Kommensurabilität unter verschiedenen Zahlenpaaren (K, N_K) ist. Die Bahnen mit K=1 werden als „Integer Bahnen" bezeichnet. Die Bahnen mit K=2 befinden sich genau auf Lücke zwischen den Integer Bahnen. Ihre Gesamtanzahl entspricht der Anzahl der Integer Bahnen. Für K=3 und K=6 gibt es dieselbe Anzahl von möglichen reproduzierbaren Bahnen, nämlich genau doppelt so viele wie integer Bahnen. Demgegenüber gibt es genau doppelt so viele Bahnen für K=5, K=8 und K=10. Dicht besetzt sind nur Bahnen, für die K eine Primzahl ist: K=5, K=7, K=11, K=13, K=17, K=19, K=23 usw.. Diese Überlegungen zeigen, dass bei der Planung von reproduzierbaren Bahnen die Berücksichtigung der Zahlenverhältnisse eine wichtige Rolle spielt.

Man beachte, dass in diesem Bild 23-51 ALLE kreisförmigen spurreproduzierbaren Bahnen mit der Bahninklination i=70° enthalten sind, die im Höhenintervall $200\,\mathrm{km} \le \mathrm{H} \le 1500\,\mathrm{km}$ vorkommen und die eine Knotenumlaufzahl bis zu 25 Umläufen haben können. ◄

23.10.3 Reproduzierbarkeit und Knotenlängenrestverschiebung

Vergleich der Formeln (23.400) und (23.394) erlaubt folgende Aussage:

- *Eine Satellitenbahn hat nach K Knotenumläufen und N_K drakonitischen Satellitenumläufen genau dann eine reproduzierbare Bodenspur, wenn ihre Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$ identisch verschwindet.*

Die Kenntnis der Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega K_0}}$ mit $K_0 < K$, wenn *K* der Reproduktionszyklus einer spurreproduzierbaren Satellitenbahn ist, ist für die Bahnauslegung von Beobachtungssatelliten von besonderer Bedeutung. Dies trifft insbesondere für Überdeckungsanalysen zu, wenn für bestimmte Projekte eine bestimmte Überdeckungsfolge ausgewählter Gebiete auf der Erdoberfläche gewünscht wird[1]. Ein Beispiel für derartige Untersuchungen ist eine Mehrpass-Interferometrie, die mit einem Sensor an Bord des Satelliten durchgeführt werden soll und eine globale Überdeckung erzielen soll.

Ebenfalls im Fall von Reproduzierbarkeit kann die kleinste mögliche Knotenlängenrestverschiebung während eines Reproduktionszyklus durch Betrachtung des Bezugsintervalls $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ aus der Beziehung

$$\overline{\Delta\lambda_0} = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{K} \tag{23.402}$$

berechnet werden. Diese Formel setzt voraus, dass die als Referenzintervall angesehene Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf während des Reproduktionszyklus von *K* Knotenumläufen in genau *K* gleichlange Teilintervalle gestückelt wird. Da je nach Bahnelementen nicht davon ausgegangen werden kann, dass diese Teilintervalle immer dieselbe Länge haben, müssen detaillierte Untersuchungen der Folge der Knotenlängenrestverschiebung auch im Fall von reproduzierbaren Bahnen durchgeführt werden.

---

[1] Untersuchungen des Überdeckungsverhaltens von optischen und oder scannenden Sensoren über der kugelförmigen Erdoberfläche siehe in Kapitel 34 , über einem Rotationsellipsoid in Abschnitt 38.4.3 (Band V)

Im Folgenden wird ein typisches Beispiel für die unterschiedliche Folge der Knotenlängenrestverschiebung während eines Reproduktionszyklus behandelt.

BEISPIEL 1: Verlangt seien kreisförmige Bahnen mit der Bahnneigung i=70°, die einen Reproduktionszyklus von K=7 Tagen haben sollen. Je nach Wahl der Anzahl N_K der drakonitischen Umläufe pro Zyklus stellt sich ein unterschiedliches Verhalten der Abfolge der Knotenlängenrestverschiebung ein. Damit kann die Aufgabe untersucht werden, wann die Verschiebung der Bahnebene in westlicher Richtung erfolgen soll: nach einem Tag, nach zwei Tagen usw.. In Bild 23-52 wird die Abfolge in Bezug auf das Referenzintervall $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ ergänzend zu den in Tabelle 23-21 berechneten Zahlenwerten veranschaulicht. Die Tabelle enthält die dem Zahlenpaar (K, N_K) zugeordnete Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf, die zugehörige große Bahnhalbachse nach Abschnitt 23.10.2, Knotenlängenrestverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$ nach einem Knotenumlauf nach Formel (23.393), sowie die kleinste mögliche Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_0}$. Außerdem ist die Reproduktionsdauer T_d berechnet, die von einem ganzen Tag abweicht, da die Bahn nicht sonnensynchron ist.

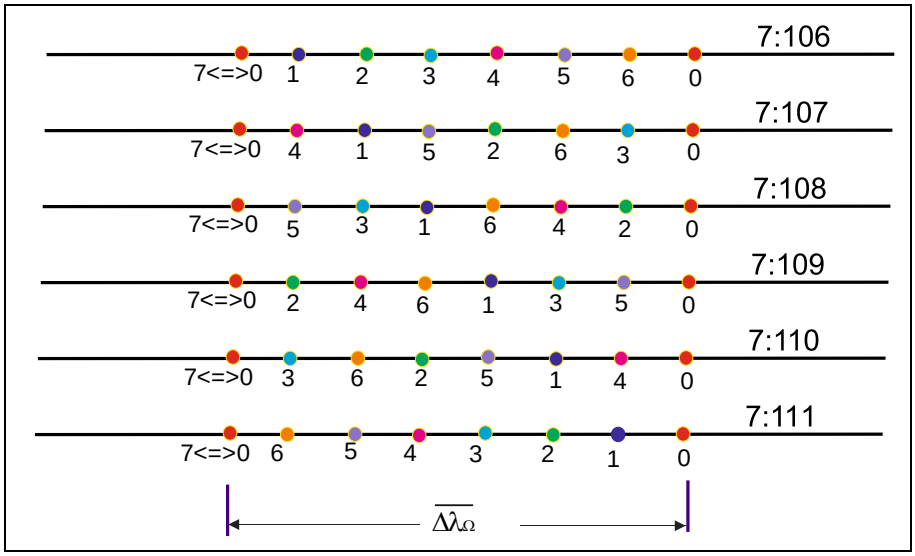


Bild 23-52: Die Anordnung der Knotenlängenrestverschiebung für einige nach 7 Tagen reproduzierbare kreisförmige Bahnen unter der Bahnneigung 70°

Die Bahn 7:111 liefert eine Verschiebung nach Westen von Tag zu Tag. Dagegen liefert die Bahn 7:106 eine entsprechende Verschiebung von Tag zu Tag nach Osten. Die Zwischenbahnen liefern Überdeckungen auf Lücke, die erst im Laufe des Reproduktionszyklus geschlossen werden. Damit können unterschiedliche Anforderungen an eine Überdeckungsfolge erfüllt werden. Die Bahnen 7:105 = 1:15 sowie 7:112=1:14 sind Integer Bahnen, mit denen somit eine Forderung nach vollständiger Überdeckung des Referenzintervalls und damit der gesamten Erdoberfläche nicht erfüllt werden kann. (vgl. auch in Bild 23-51).◀

N_K	a[km]	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	$\overline{\Delta\lambda_0}$	T_D [d]
111	6640.552	-22°.702703	-3°.243243	-3°.243243	6.92425439
110	6681.551	-22°.909091	-6°.545454	-3°.272727	6.92545018
109	6723.161	-23°.119266	-9°.908257	-3°.302752	6.92663105
108	6765.401	-23°.33333	-13°.333334	-3°.333333	6.92779703
107	6808.286	-23°.551402	-16°.822430	-3°.364486	6.92894818
106	6851.831	-23°.773585	-20°.377358	-3°.396226	6.93008458

Tabelle 23-21: Charakteristika des Verhaltens des Knotens für einige nach 7 Knotenumläufen reproduzierbaren kreisförmigen Bahnen unter der Bahnneigung i=70°, für verschiedene Anzahlen N_K von drakonitischen Umläufen.

Das letzte Beispiel legt nahe, die Überdeckungsfolge direkt anzugeben, also wie in der Beziehung (23.397) mit dem Verhältnis K_1/K_2 vorzugeben. In diesem Fall soll aber nach einem Knotenumlauf dieses Verhältnis zutreffen, d.h. nach $N_1 \le 16$ drakonitischen Umläufen. Die Zahl K_2 definiert dann den Reproduktionszyklus $K = K_2$. Die entsprechende Knotenlängenverschiebung errechnet sich dann statt (23.398) aus der Beziehung

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{K_2 \cdot 360°}{K_2 \cdot N_1 - K_1} \quad . \tag{23.403}$$

BEISPIEL 2: Gegeben sei eine kreisförmige Bahn unter der Inklination i=70°. Während des ersten Knotenumlaufs soll der Satellit N_1=16 drakonitische Umläufe ausführen. Die Knotenlängenrestverschiebung soll dem Verhältnis $K_1 / K_2 = 2:7$ unterliegen. Dies führt auf die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -22°.909091$. Der Reproduktionszyklus umfasst $K = K_2 = 7$ Knotenumläufe. Nach Formel (23.231) folgt für die Anzahl der drakonitischen Umläufe pro Zyklus $N_D = 110$. Diese Ergebnisse stimmen mit den Werten in Beispiel 1 überein.◀

BEISPIEL 3: Eine kreisförmige Erdsatellitenbahn ($\overline{e_0}$=0.0), deren Bahnebene unter der Inklination $\overline{i_0} = 100°$ geneigt sei, soll nach einer Repetitionsdauer von etwa K=28 Tagen und nach N_D =415 drakonitischen Umläufen wieder eine reproduzierbare Bodenspur haben. Die mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -24°.289152$ sowie die Reproduktionsdauer $T_d = 28^d.06742972$. Das kleinste überdeckbare Intervall beträgt daher mit Formel (23.402) $\Delta\lambda_0 = -0°.86746971$. Die Knotenlängenrestverschiebung nach Formel (23.394) beträgt $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} = -4°.33728$. Damit kann folgende Detailuntersuchung durchgeführt werden, welche das Auftreten dieses kleinsten möglichen Intervalls näher aufklären kann:

$$\Delta\lambda_1 = \ 6\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - \ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -1°.734528$$
$$\Delta\lambda_2 = 12\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - 2\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -3°.469056 \triangleq 0°.868224$$
$$\Delta\lambda_3 = 17\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - 3\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -0°.866304$$
$$\Delta\lambda_4 = 23\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - 4\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = -2°.600832 \triangleq 1°.736448$$
$$\Delta\lambda_5 = 28\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}} - 5\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} = 0°.0 \quad .$$

Dies bedeutet, dass nach 12 Tagen das kleinste Intervall von Osten her, nach 17 Tagen von Westen her erreicht werden kann. ◄

N_1	N_K	$\overline{\Delta\lambda_\Omega}$	$\overline{P_d}\,[\mathrm{s}]$	$\bar{a}_0\,[\mathrm{km}]$	$\bar{H}\,[\mathrm{km}]$
16	171	-23°.157895	5489.577	6724.045	345.908
15	160	-24°.750000	5875.235	7035.562	657.425
14	149	-26°.577181	6317.033	7384.157	1006.020
13	138	-28°.695652	6828.421	7777.660	1399.523
12	127	-31°.181102	7427.513	8226.353	1848.216
11	116	-34°.137931	8139.292	8744.041	2365.904
10	105	-37°.714286	8999.213	9349.745	2971.608
9	94	-42°.127660	10059.325	10070.506	3692.369
8	83	-47°.710843	11399.270	10946.242	4568.105
7	72	-55°.000000	13147.367	12038.734	5660.597
6	61	-64°.918033	15524.493	13449.539	7071.402
5	50	-79°.200000	18945.907	15359.595	8981.458
4	39	-101°.538462	24295.377	18129.750	11751.613
3	28	-141°.428571	33845.478	22614.263	16236.126
2	17	-232°.941176	55750.823	31541.914	25163.777
1	6	-660°.000000	157966.912	63159.022	56780.885

Tabelle 23-22: Alle spurreproduzierbaren kreisförmigen Erdsatellitenbahnen mit der Bahnneigung i=65° und dem Knotenverhältnis $K_1 : K_2 = 5 : 11$.

BEISPIEL 4: Die Knotenlänge einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn ($\overline{e_0}$=0.0), deren Bahnebene unter der Inklination 65° geneigt sei, werde nach einem Knotenumlauf um 5/11 der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf verschoben. Welche Kreisbahnhöhen sind möglich? Nach Formel (23.403) folgt die Knotenlängenverschiebung als Funktion der drakonitischen Umläufe N_1 pro erstem Knotenumlauf

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{3960°}{11N_1 - 5} \quad .$$

Damit sind die in Tabelle 23-22 gelisteten Bahnen möglich. ◄

23.10.4 Nachweis der Reproduzierbarkeit einer gegebenen Bahn

Für eine vorgegebene Bahn sei die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ pro drakonitischem Umlauf bekannt. Auf numerischem Wege kann bestimmt werden, ob diese Bahn spurreproduzierbar ist. Dazu wird mit Formel (23.394)

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}} = N_D\ \overline{\Delta\lambda_\Omega} + K\cdot 360° \qquad \langle K = 1,2,3,\cdots \tag{23.404}$$

die Knotenlängenrestverschiebung durch Vorgabe der Knotenumlaufzahl K berechnet. Die zugehörige Anzahl N_K der drakonitischen Umläufe wird aus Formel (23.231)

$$N_D = \mathrm{int}\left[-\frac{K\ 360°}{\overline{\Delta\lambda_\Omega}} + 1\right] \tag{23.405}$$

berechnet. Mit wachsendem K wird dieser Vorgang so lange durchgeführt, bis die Knotenlängenrestverschiebung verschwindet, bzw. unter einer vorgegebenen Grenze ε_K liegt:

$$\left|\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}\right| \le \varepsilon_K \quad . \tag{23.406}$$

K	N_D	$\overline{\Delta\lambda_{\Omega K}}$
0	1	-25°.454545
1	15	-21°.818175
2	29	-18°.181805
3	43	-14°.545435
4	57	-10°.909065
5	71	-7°.272695
6	85	-3°.636325
7	99	-0°.000045

Tabelle 23-23: Die Entwicklung der Knotenlängenrestverschiebung der kreisförmigen Bahn mit mittlerer Bahnhöhe H = 796.211 km und der Neigung i=68°

Das zuletzt gefundene Zahlenpaar (K, N_K) definiert die Reproduzierbarkeit dieser Bahn. In letzterem Fall spricht man auch von „näherungsweisen Reproduzierbarkeit“. Um jedoch diesen Vorgang nicht beliebig auszudehnen, kann in jedem Schritt die Reproduktionsdauer $T_D = N_K\ \overline{P_D}/86400\,[d]$ berechnet werden, wobei die drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D}$ der gegebenen Bahn als bekannt angenommen werden kann. Falls T_D einen sinnvollen Wert übersteigt, kann der Vorgang abgebrochen und die Bahn als nicht reproduzierbar gedeutet werden. Im Rahmen eine Satellitenbahnanalyse ist ein Jahr eine sinnvolle obere Grenze, die in der Praxis jedoch üblicherweise weit unterschritten wird. Dadurch kann der Einfluss möglicher „Störungen“ auf die Bahn berücksichtigt werden, welche die Reproduzierbarkeit einer Satellitenbahn ohne Bahnkorrektur über längere Zeiträume ohnehin einschränken.

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine Bahn mit der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ = -25°.524320. Mit einer Genauigkeit von etwa 20“ für die Berechnung der geographischen Länge ergibt sich

eine Reproduzierbarkeit nach K=2169 Knotenumläufen und N_K=30592 drakonitischen Umläufen. Das entsprechende kleinste Knotenlängenintervall ergibt sich zu $\overline{\Delta\lambda_0} = -0°.011768$. Dieser Fall dürfte allerdings in der Praxis keine Rolle spielen. ◄

BEISPIEL 2: Ist die Kreisbahn mit der mittleren Bahnhöhe $\bar{H} = 796.211\text{km}$ und der Bahnneigung $\bar{i}_0 = 62°$ in der Subsatellitenbahn reproduzierbar? Mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7174.348$ km hat die Bahn mit Formel (23.161) oder (23.162) die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D}$ = 6051.033 sec und mit den Formeln (23.224) und (23.227) die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ = -25°.454545. Damit ergibt sich über die Entwicklung der Knotenlängenrestverschiebung pro drakonitischem Umlauf die in Tabelle 23-23 aufgezeichneten Werte. Als Ergebnis kann geschlossen werden, dass eine Reproduzierbarkeit nach 7 Knotenumläufen (ungefähr 7 Tagen, genau $6^d\ 22^h\ 24^m\ 12^s.267$) bzw. 99 drakonitischen Umläufen zu erwarten ist. Die Genauigkeit liegt bei etwa $0''.16$ in der Knotenlänge. ◄

23.10.5 Subzyklen

Für manche Beobachtungsaufgaben wird eine kleine Veränderung einer Bahn benötigt, wodurch eine andere Überdeckungsfolge oder Größe des Überdeckungsintervalls erreicht werden kann. Das Verhältnis der Zahlen $(K : N_d)$ wird nur wenig geändert, so dass die wesentlichen Bahnelemente Halbachse a und Inklination i kaum geändert werden. Die Reproduzierbarkeit der Bahn kann jedoch beträchtlich modifiziert werden. Entscheidend für die Auswahl eines Subzyklus ist die auf diese Weise erreichbare kleinste Knotenlängenverschiebung.

BEISPIEL 1: In Bild 23-52 wird die Abhängigkeit der mittleren großen Bahnhalbachse von der mittleren Inklination kreisförmiger Bahnen für einige Reproduktionszyklen dargestellt. Gewählt wurde hier der Zyklus K=7, N_d=104 mit den Subzyklen K=35, N_d=512 sowie K=203, N_d=3019.

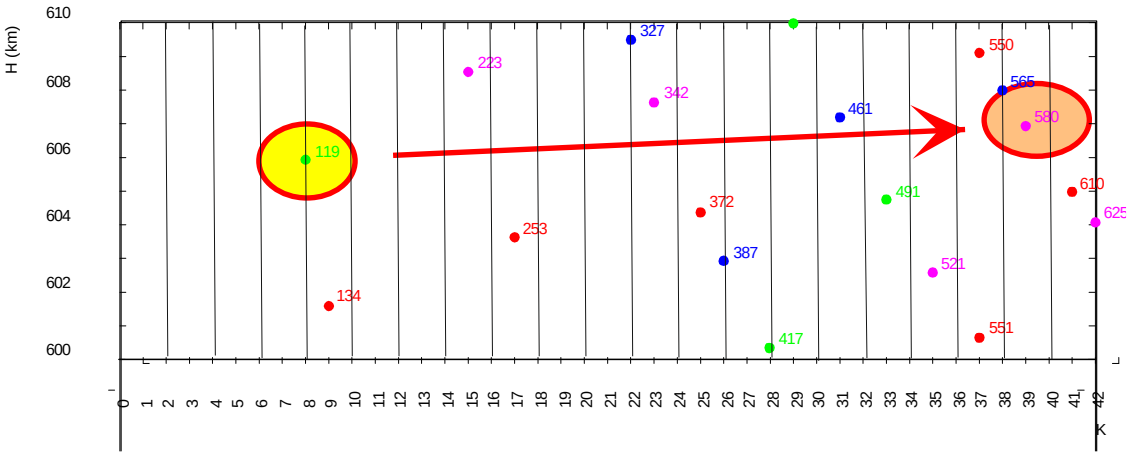


Bild 23-53: Suche nach einem geeigneten Subzyklus der kreisförmigen unter i=97°.8 geneigten 8:119 Bahn

Die Relationen sind:

104:7=14.857142857, 512:35=14.628571429, 3019:203=14.87192118

Zu erkennen ist der große Einfluss einer Variation der Bahninklination auf die Bahnhalbachse. Entsprechende Einflüsse sind auch bei einer Variation der Exzentrizität zu erwarten. Als Konsequenz muss berücksichtigt werden, dass bei einem Manöver zur Variation eines dieser

mittleren Bahnelemente auch mindestens eines der anderen Elemente durch ein gekoppeltes Manöver variiert werden muss um die gewünschte Reproduzierbarkeit erreichen zu können. ◄

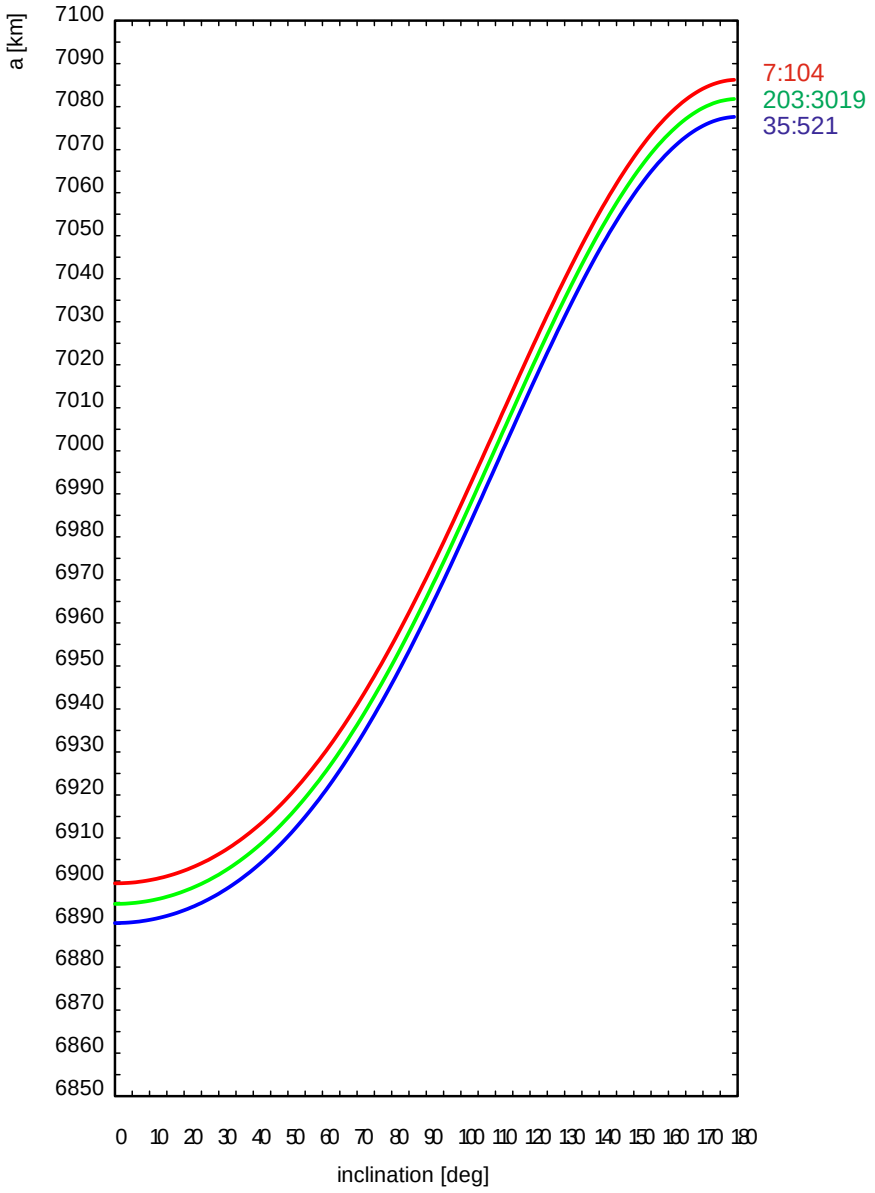


Bild 23-54: Verlauf der Abhängigkeit der Bahnhalbachse von der Inklination aller kreisförmigen Bahnen, die im Verhältnis K:N_D=7:104 reproduzierbar sind und für zwei Subzyklen

BEISPIEL 2: In einer Studie zur aktiven Beobachtung mit einem SAR Sensor[1] wird zunächst gefordert, dass eine interferometrische Beobachtung die gesamte Erdoberfläche in 8 Tagen überdeckt werden kann. Um von Knotenumlauf zum nächsten Knotenumlauf Überlappung der Beobachtungen zu erreichen, sind 119 drakonitische Umläufe in Reproduktionszyklus erforderlich. Siehe die entsprechenden Bahndaten der Basis-Bahn in Tabelle 23-24. Die erreichbare kleinste Knotenlängenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\lambda_0} = -3°.02521$. In einem zweiten Projektabschnitt soll stereoskopische Beobachtung ermöglicht werden, wozu eine sehr enge

[1] JOCHIM, E. F. et al. [2005]

Knotenabfolge benötigt wird[1]. Der Subzyklus 39:580 erlaubt das kleinste Knotenlängenintervall $\overline{\Delta\lambda_0} = -0°.6207$, womit die Beobachtungsbedingungen erfüllt werden können.

Wenn eine geeignete Übersicht über alle möglichen reproduzierbaren Bahnen wie in Bild 23-51 (auf Seite 276) zur Verfügung steht, kann wie in Bild 23-53 demonstriert wird eine vereinfachte Suche nach einem geeigneten Subzyklus gestartet werden. Das Bild zeigt, dass ein Subzyklus mit wenig abweichender großer Halbachse gefunden werden kann, weshalb nur ein wenig aufwendiges Bahnmanöver zum Übergang auf die Subzyklusbahn erforderlich wird.

In **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** wird die Überdeckungsfolge für die beiden reproduzierbaren kreisförmigen Bahnen demonstriert. Man beachte, dass die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ in beiden Bahnen etwas unterschiedlich lang ist. Der Unterschied der Knotenlängenrestverschiebung in beiden Bahnen ist wie gewünscht beträchtlich.◀

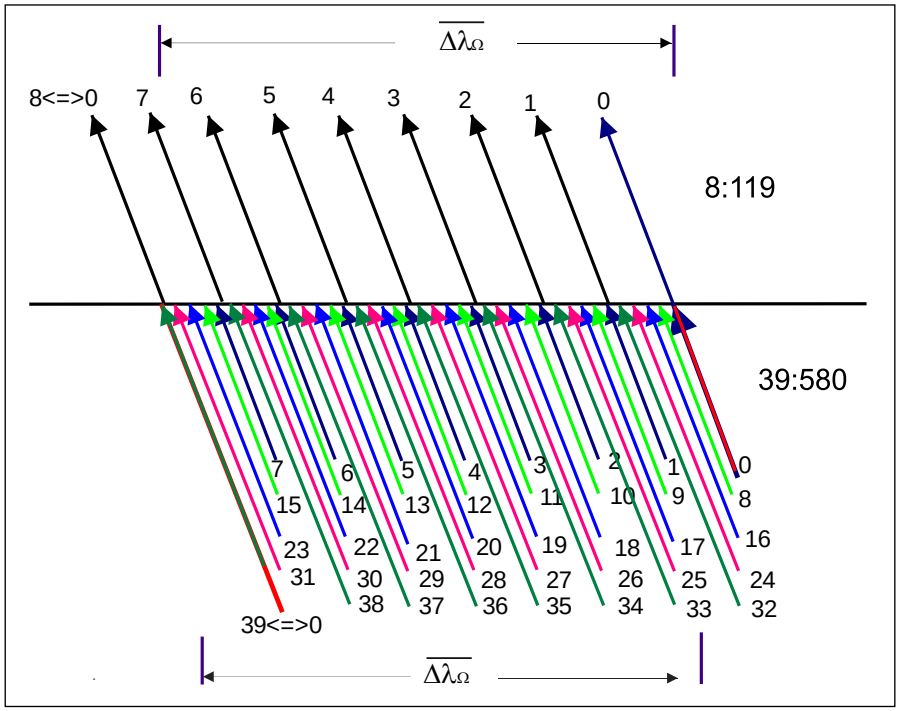


Bild 23-55: Veranschaulichung der Knotenlängenabfolge für die beiden Bahnen 8:119 und 39:580

Zusammenfassende allgemeine Aussagen zur Reproduzierbarkeit von Satellitenbahnen:

- *Die Repetitionsdauern reproduzierbarer Erdsatellitenbahnen sind nahezu ganze Tage.*

- *Reproduzierbare Satellitenbahnen sind eindeutig aus der Repetitionsdauer und der zugehörigen Anzahl der mittleren drakonitischen Umläufe bei gegebener Exzentrizität und Inklination bestimmt.*

[1] Es muss klar sein, dass eine derartige Knotenlängenabfolge nicht in aufeinanderfolgenden Umläufen, sondern systematisch nur während des gesamten Repetitionszyklus gefunden werden kann

➢ *Das Verhältnis von Knotenlängenrestverschiebung und Knotenlängenverschiebung erlaubt bei bekannter Exzentrizität und Inklination eine nur mehrdeutige Bahnfestlegung.*

23.10.6 Die Längen auf - und absteigender Knoten von reproduzierbaren Bahnen

Sei $\lambda_{\Omega 0}$ die momentane geographische Länge eines aufsteigenden Knotens einer in der Bodenspur reproduzierbaren Satellitenbahn. Der nächstfolgende absteigende Knoten nach einem halben drakonitischen Umlauf mit der Knotenlängenverschiebung $\Delta\lambda_\Omega$ hat die geographische Länge (vgl. Bild 23-56 auf Seite 285)

$$\lambda_{\mho 0} = \lambda_{\Omega 0} + 180° + \frac{\Delta\lambda_\Omega}{2} \quad . \tag{23.407}$$

Es wird im Folgenden untersucht, wie sich die Gesamtheit der geographischen Längen der mittleren auf - und absteigenden Knoten bei spur-reproduzierbaren Bahnen verhält.

Die Satellitenbahn habe bezüglich der Bodenspur den Reproduktionszyklus *K* und sei nach N_K drakonitischen Umläufen reproduzierbar. Die zugehörige mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt dann (nach Formel (23.400))

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{K}{N_K}\cdot 360° \quad . \tag{23.408}$$

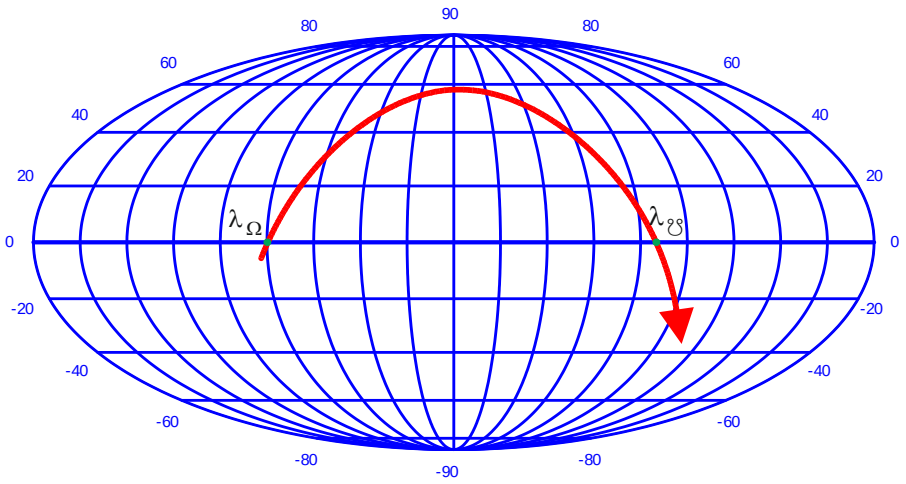


Bild 23-56**:** Die geographischen Längen von auf - und absteigenden Knoten einer auf die Oberfläche des zugehörigen Zentralkörpers projizierten Satellitenbahn. Beispiel: a=7528.155 km, e=0.0, i=57°.5, $\lambda_{\Omega 0} = 280°$, $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = -27°.38 / \overline{P_d}$, $\lambda_{\mho 0} = 61°.674$

Während eines Reproduktionszyklus *K* hat das mittlere kleinste Intervall zwischen zwei möglichen benachbarten aufsteigenden Knoten das geographische Längenintervall (siehe Formel (23.402))

$$\overline{\Delta\lambda_0} = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{K} \quad , \tag{23.409}$$

sofern nur *K* und N_K nicht kommensurabel sind. Andernfalls muss das Verhältnis N_K / K soweit es geht gekürzt werden; das dann erhaltene neue *K* definiert die Länge des Intervalls

$\overline{\Delta\lambda_0}$. Sei N_0 die Anzahl der (drakonitischen) Umläufe pro Knotenumlauf (das entspricht, wie vorher gezeigt wurde, in etwa einem Tag)[1]

$$N_0 = \text{int}\left(\frac{N_K}{K}\right) \quad , \quad N_0 = 1, 2, 3, \ldots, 16 \quad . \tag{23.410}$$

Parameter	Basis Bahn	Subzyklus
Reproduzierbarkeit K:N_K	8:119	39:580
Reproduktionsverhältnis N_K:K	14.8750000	14.8717949
Große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$	6978.044 km	6979.049 km
Gemittelte Bahnhöhe $\tilde{H}$	605.916 km	606.934 km
Exzentrizität $\overline{e}_0$	0.0	0.0
Inklination $\overline{i}_0$	97°.811304	97°.815257
Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\overline{\Omega}_0$	t.b.d.	t.b.d.
Argument des Perigäums $\overline{\omega}_0$	(90°)	(90°)
Mittlere Epocheanomalie $\overline{M_{0\,0}}$	t.b.d.	t.b.d.
Lokalzeit im aufsteigenden Knoten	t.b.d.	t.b.d.
Drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_d}$	96.80672 min	96.82759 min
Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Satellitenumlauf $\overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}$	-24°.201681	-24°.2069
Knotenlängenrestverschiebung nach einem Knotenumlauf $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 1}}$	-3°.02521	-3°.1034
Kleinstes mögliches Verschiebungsintervall $\overline{\Delta\lambda_0}$	-3°.02521	-0°.6207

Tabelle 23-24: Mittlere *Kepler*sche Bahnelemente für eine im Verhältnis 8:119 reproduzierbare Basisbahn und für eine Bahn im Subzyklus 39:580 mit erheblich verfeinerter kleinster Knotenlängenverschiebung[2]

Die Gesamtanzahl der drakonitischen Umläufe pro Reproduktionszyklus K kann dann in der Form

$$N_K = N_0 K + N_1 \quad , \quad \langle \text{mit} \quad N_1 \in (1, 2, 3, \ldots, K-1) \tag{23.411}$$

dargestellt werden. Um jetzt einen mittleren aufsteigenden Knoten mit dem mittleren absteigenden Knoten der geographischen Länge

---

[1] Die Funktion „int“ bezeichnet den ganzzahligen Anteil des folgenden Ausdrucks, 16 ist die Maximalzahl von N_0 für Erdsatelliten, der höchstens 16 Mal pro Tag die Erde umfliegen kann.

[2] Die hier betrachtete Bahn ist eine sonnensynchrone Bahn. Daher ist die Bahninklination der beiden Bahnen unterschiedlich.

$$\overline{\lambda_{\mathfrak{S}}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} - 180° + \frac{\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}}{2} \tag{23.412}$$

in Verbindung zu bringen, wird der aufsteigende Knoten nach einem halben Knotenumlauf verglichen. Hierzu müssen grundsätzlich zwei Fälle betrachtet werden, je nachdem ob nach einem Knotenumlauf eine gerade oder eine ungerade Anzahl von drakonitischen Umläufen vollendet werden:

Fall (1) N_0 geradzahlig:

Setze $N_0 =: 2\,N_2\,, \left(N_2 = 1, 2, 3, \ldots\right)$. Der mittlere aufsteigende Knoten hat nach einem halben Knotenumlauf die geographische Länge

$$\overline{\lambda_{\Omega/2}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \frac{N_0}{2}\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} \quad ; \quad N_0 = 2\,N_2 \quad . \tag{23.413}$$

Die Differenz zwischen den geographischen Längen von auf - und absteigendem Knoten beträgt dann

$$\overline{\Delta\lambda} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega/2}} - \overline{\lambda_{\mathfrak{S}}} \;=\; \frac{N_0}{2}\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} + 180° - \frac{\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}}{2} \quad ,$$

mit den Beziehungen (23.408) und (23.411) auch

$$\overline{\Delta\lambda} \;=\; \frac{N_0}{2}\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} + \frac{360°}{2} - \frac{\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}}{2} = \frac{1}{2}\left[N_0 - 1 - \frac{N_D}{K}\right]\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} \;,$$

somit schließlich

$$\overline{\Delta\lambda} \;=\; -\frac{1}{2}\left(\frac{N_1}{K} + 1\right)\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} \quad ; \quad \langle\; N_0 = 2\,N_2 \quad . \tag{23.414}$$

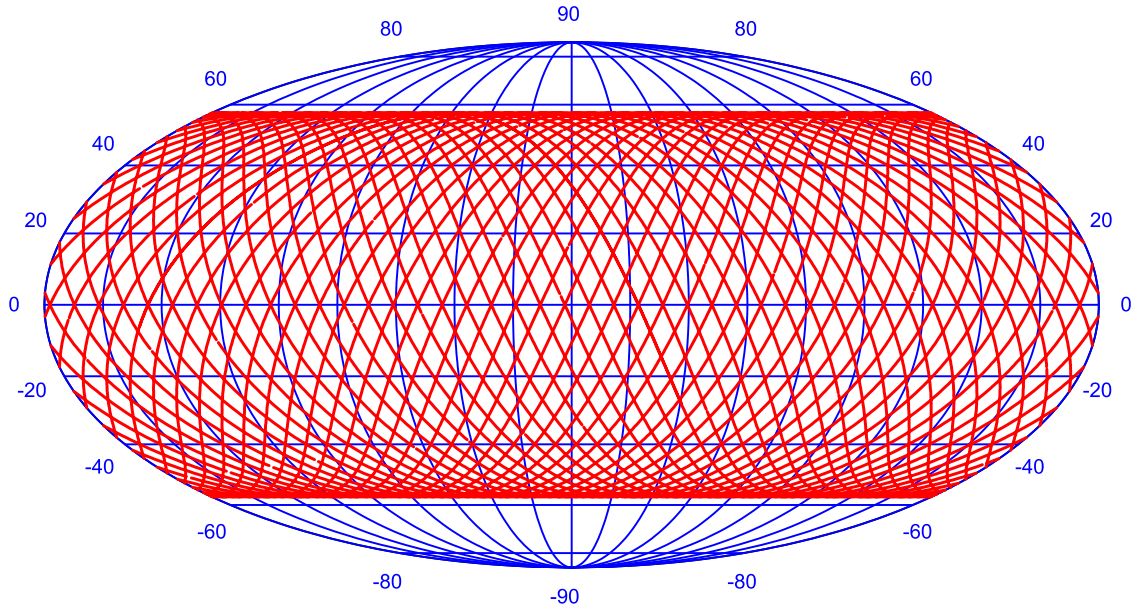


Bild 23-57**:** Zusammenfallende auf - und absteigende Knoten für die Bahn mit Reproduktionszyklus K = 3 nach N_K = 43 drakonitischen Umläufen, Inklination i = 57°, Kreisbahn

Fall (1.1) N_0 geradzahlig und K ungeradzahlig: Mit $K = 2\,K_1 - 1, (K_1 = 1,\ 2, 3, \ldots)$ wird mit Formel (23.409)

$$\begin{aligned} \Delta\lambda \;&=\; -\frac{1}{2}\,\frac{N_1 + 2\,K_1 - 1}{K}\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega}} \;=\; -\frac{N_1 + 2\,K_1 - 1}{2}\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \\ N_0 \;&=\; 2\,N_2 \quad , \quad K \;=\; 2\,K_1 - 1 \quad . \end{aligned} \tag{23.415}$$

Hier gibt es zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

Fall (1.1a) N_1 ungeradzahlig: Mit $N_1 = 2\,N_3 - 1$, $(N_3 = 1, 2, 3, \ldots)$ wird

$$\Delta\lambda = -(N_3 + K_1 - 1)\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 = 2\,N_2\,, \quad K = 2\,K_1 - 1, \quad N_1 = 2\,N_3 - 1 \quad . \qquad (23.416)$$

Die Differenz $\Delta\lambda$ zwischen auf - und absteigendem Knoten ist ein ganzzahliges Vielfaches der kleinsten möglichen Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_0}$. Während eines Reproduktionszyklus werden alle aufsteigenden und alle absteigenden Knoten somit jeweils in einem Punkt zusammenfallen, jeder Punkt auf dem Äquator, der aufsteigender Knoten ist, wird während eines Zyklus auch einmal ein absteigender Knoten sein.

BEISPIEL: Seien $K = 3$, $N_0 = 14$, $N_1 = 1$ vorgegeben (vgl. Bild 23-57). Mit Formel (23.411) werden $N_K = 43$, $N_3 = 1$, $K_1 = 2$ und die (mittlere) Knotenlängenverschiebung beträgt mit Formel (23.408) $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -25°.116279$. Mit der Inklination i =57° und für eine Kreisbahn (e = 0.0) liefert das in Abschnitt 23.5.3 ab Seite 205 hergeleitete Verfahren die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7098.043$ km, entsprechend die mittlere Kreisbahnhöhe $\overline{H}$ = 720 km. Bild 23-57 zeigt das Verhalten der Bodenspuren über der Erdoberfläche: auf - und absteigende Knoten fallen jeweils zusammen. Es ist $\overline{\Delta\lambda_0} = -8°.372093$ und nach einem halben Knotenumlauf wird

$$\Delta\lambda = 33°.488372 \Leftrightarrow 33°.4883720 + \overline{\Delta\lambda_\Omega} = 8°.372093 = -\overline{\Delta\lambda_0}\ .\blacktriangleleft$$

Fall (1.1b) N_1 geradzahlig: Mit $N_1 = 2\,N_3$, ($N_3 = 1, 2, 3, \ldots$) liefert die Beziehung (23.415) auf S. 287

$$\Delta\lambda = -\left(N_3 + K_1 + \frac{1}{2}\right)\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 = 2\,N_2 \quad , \quad K = 2\,K_1 - 1 \quad , \quad N_1 = 2\,N_3 \quad . \qquad (23.417)$$

Auf- und absteigende Knoten können niemals zusammenfallen, da ein absteigender Knoten stets genau in der Mitte zwischen zwei benachbarten aufsteigenden Knoten zu liegen kommt.

BEISPIEL: Seien K = 3, N_0= 14, N_1= 2 vorgegeben (vgl. Bild 23-58). Mit Formel (23.411) auf S. (23.411) werden N = 44, N_3= 1, K_1= 2 und die (mittlere) Knotenlängenverschiebung beträgt mit Formel (23.408) auf S. 285 $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ = –24°.545454. Mit der Inklination i = 57 und für eine Kreisbahn (e = 0.0) liefert Abschnitt 23.5.3 die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 6987.429$ km, entsprechend die mittlere Kreisbahnhöhe $\bar{H} = 609$ km. Bild 23-58 zeigt das Verhalten der Bodenspuren über einem äquatornahen Ausschnitt der Erdoberfläche: auf - und absteigende Knoten sind genau auf Lücke. Es ist $\overline{\Delta\lambda_0}$ = –8°.181818 und nach einem halben Knotenumlauf wird $\Delta\lambda = -\frac{7}{2}\overline{\Delta\lambda_0}$ = 4°.090909. ◄

Fall (1.2): Es seien N_0 =2 N_2 und K = 2 K_1 geradzahlig ($K_1 = 1, 2, 3, \ldots$). Dann liefert Formel (23.414) auf S. 287 mit Formel (23.409) auf S. 285

$$\Delta\lambda = -\frac{1}{2}\,\frac{N_1 + 2\,K_1}{K}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -\frac{N_1 + 2\,K_1}{2}\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 = 2\,N_2 \quad , \quad K = 2\,K_1 \quad . \qquad (23.418)$$

Auch hier gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

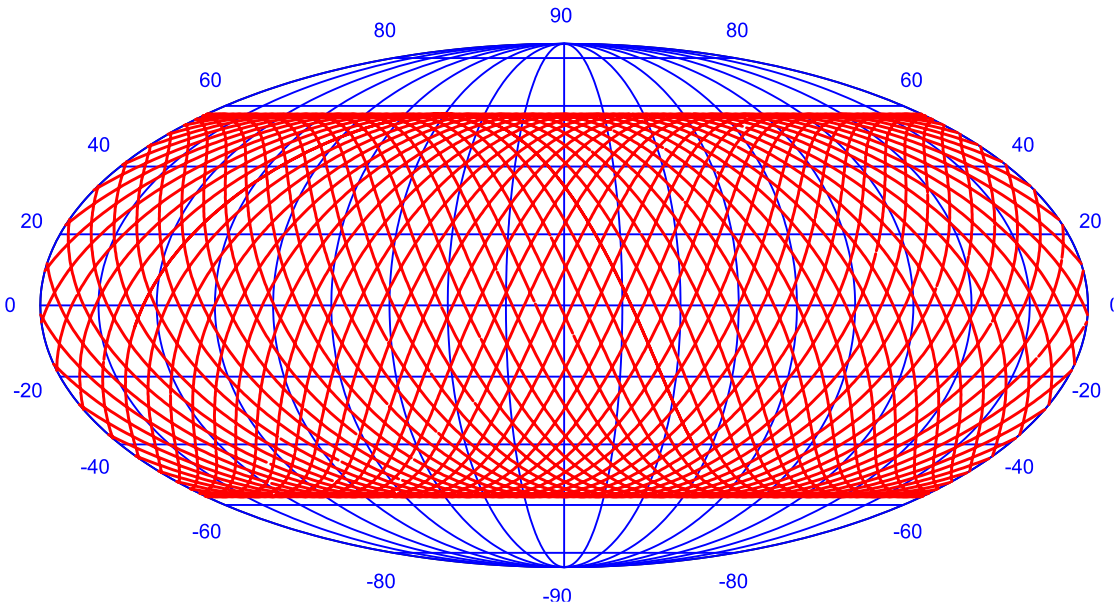


Bild 23-58: Auf- und absteigende Knoten auf Lücke für die Bahn mit Reproduktionszyklus K = 3 nach N = 44 drakonitischen Umläufen, Inklination i = 57°, Kreisbahn

Fall (1.2a) $N_1 = 2\,N_3$ geradzahlig, ($N_3 = 1, 2, 3, \ldots$): In diesem Fall sind K und N_K kommensurabel. Es gilt mit der Bezeichnung $K_2 := K_1\,N_0 + N_3$

$$\frac{K}{N} = \frac{2\,K_1}{2\,K_1\,N_0 + 2\,N_3} = \frac{K_1}{K_1\,N_0 + N_3} = \frac{\frac{K}{2}}{K_2} \quad . \tag{23.419}$$

Die Problemstellung wird auf den Reproduktionszyklus $K_1 = K/2$ zurückgeführt, während die Untersuchung wegen der kleinsten möglichen Knotenlängendifferenz $\overline{\Delta\lambda_0}$, die erreicht werden muss, wegen Formel (23.409) nur für den Zyklus K erfolgen darf. Dieser Fall ist also für die gegebene Aufgabenstellung nicht relevant.

Fall (1.2b) $N_1 = 2\,N_3 - 1$ ungeradzahlig, ($N_3 = 1, 2, 3, \ldots$): Die Beziehung (23.418) auf S. 288 liefert

$$\Delta\lambda \;=\; -\left(N_3 + K_1 - \frac{1}{2}\right)\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2\,N_2 \quad , \quad K \;=\; 2\,K_1 \quad , \quad N_1 \;=\; 2\,N_3 - 1 \quad . \tag{23.420}$$

Auf- und absteigende Knoten fallen niemals zusammen, sondern sind stets um Vielfache von $\overline{\Delta\lambda_0}/2$ getrennt.

Fall (2) N_0 ungeradzahlig: $N_0 = 2\,N_2 - 1, \left(N_2 = 1, 2, 3, \ldots\right)$.

Der (mittlere) aufsteigende Knoten hat nach einem halben Knotenumlauf die geographische Länge

$$\overline{\lambda_\Omega} \;=\; \lambda_{\Omega 0} + \frac{N_0 + 1}{2}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2\,N_2 - 1 \quad . \tag{23.421}$$

Die Differenz zwischen den geographischen Längen von auf - und absteigendem Knoten beträgt dann mit Gleichung (23.409) auf S. 285

$$\Delta\lambda \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{N_1}{K}\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} \;=\; -\frac{1}{2}\,N_1\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2\,N_2 - 1 \quad . \tag{23.422}$$

An dieser Gleichung ist bemerkenswert, dass die Zykluszahl K nicht mehr vorhanden ist, es muss jetzt also keine Unterscheidung gemacht werden, ob der Zyklus geradzahlig oder ungeradzahlig ist. An Unterscheidung bleibt daher:

Fall (2.1) N_1 ungeradzahlig. Mit $N_1 = 2N_3 - 1, \left(N_3 = 1, 2, 3, \ldots\right)$ wird

$$\Delta\lambda \;=\; -\left(N_3 - \frac{1}{2}\right)\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2N_2 - 1 \quad , \quad N_1 \;=\; 2N_3 - 1 \quad . \tag{23.423}$$

Auf- und absteigender Knoten fallen nicht zusammen, sondern sind um Vielfache von $\overline{\Delta\lambda_0}/2$ zueinander versetzt.

Fall	K	N_0	N_1	Auf- und absteigende Knoten fallen zusammen
(1.1a)	$2K_1 - 1$	$2N_2$	$2N_3 - 1$	ja
(1.1b)	$2K_1 - 1$	$2N_2$	$2N_3$	nein
(1.2a)	$2K_1$	$2N_2$	$2N_3$	nicht relevant
(1.2b)	$2K_1$	$2N_2$	$2N_3 - 1$	nein
(2.1)	$2K_1 - 1$ oder $2K_1$	$2N_2 - 1$	$2N_3 - 1$	nein
(2.2a)	$2\,K_1 - 1$	$2N_2 - 1$	$2N_3$	ja
(2.2b)	$2K_1$	$2N_2 - 1$	$2N_3$	nicht relevant

Tabelle 23-25**:** Zusammenfallende auf - und absteigende Knoten spur-reproduzierbarer Bahnen

Fall (2.2) N_1 geradzahlig. Mit $N_1 = 2N_3, \left(N_3 = 1, 2, 3, \ldots\right)$ liefert die Beziehung (23.422) auf S. 289

$$\Delta\lambda \;=\; -N_3\,\overline{\Delta\lambda_0} \quad ; \quad N_0 \;=\; 2N_2 - 1 \quad , \quad N_1 \;=\; 2N_3 \quad . \tag{23.424}$$

Auf- und absteigende Knoten fallen zusammen. Allerdings muss hier der Fall ausgeschlossen werden, dass der Zyklus geradzahlig ist: $K = 2K_1, \left(K_1 = 1, 2, 3, \ldots\right)$. Dann gilt für das Verhältnis von Zykluszahl und Anzahl der drakonitischen Umläufe wie in dem Ausdruck (23.419)

$$\frac{K}{N} \;=\; \frac{K}{K\,N_0 + N_1} \;=\; \frac{2K_1}{2K_1\left(2N_2 - 1\right) + 2N_3} \;=\; \frac{K_1}{K_1\,N_0 + N_3} \;=\; \frac{K_1}{K_2}$$

(mit $K_2 = K_1\,N_0 + N_3$). K und N_K sind also kommensurabel, der Fall scheidet wie Fall (1.2a) aus.

Die betrachteten Fälle sind in Tabelle 23-25 zusammengestellt.

Zusammenfassung

- *Kreisförmige in der Bodenspur reproduzierbare Satellitenbahnen haben bei geradzahligem Reproduktionszyklus niemals zusammenfallende auf - und absteigende Knoten über dem rotierenden Zentralkörper. Die absteigenden Knoten befinden sich stets genau in der Mitte zwischen zwei aufsteigenden Knoten.*

- *Kreisförmige in der Bodenspur reproduzierbare Satellitenbahnen mit ungeradzahligem Reproduktionszyklus haben zusammenfallende auf - und absteigende Knoten über dem rotierenden Zentralkörper, wenn entweder die Anzahl N_0 der drakonitischen Umläufe*

pro Tag (genauer: pro Knotenumlauf) oder die Restzahl N_1 ungeradzahlig ist. Sonst sind die auf - und absteigenden Knoten auf Lücke zueinander angeordnet.

23.11 Formstabile Bewegung

Die in der Literatur im Zusammenhang mit Beobachtungssatelliten bisweilen verwendeten sogenannten *eingefrorenen Bahnen* („Frozen Orbits“) sind ein Musterbeispiel dafür, wie elementare natürliche Eigenschaften von Satellitenbahnen für spezielle Anwendungen nutzbar gemacht werden können. Hier handelt es sich im Wesentlichen um Eigenschaften, die als Folge der Einwirkung der zonalen Harmonischen des Schwerefeldes des Zentralkörpers gedeutet werden können.

Die eingefrorenen Bahnen wurden von *Y. Kozai* [1959] entdeckt, der am Ende seiner Arbeit über die Integration der Bewegungsgleichungen erdnaher Satellitenbahnen den Fall sehr kleiner mittlerer Exzentrizitäten behandelte. *Kozai* fand im Fall von Erdsatelliten eine um das Argument des Perizentrums $\omega = 90°$ oszillierende langperiodische Bewegung des Perigäums. Für verschwindende mittlere Exzentrizitäten verschwindet diese langperiodische Bewegung: das gemittelte Perigäum wird für das Argument $\omega = 90°$ „eingefroren“. Variationen des Perigäums erfolgen dann ausschließlich im kurzperiodischen Bewegungsanteil. Die Bewegung über einem Rotationsellipsoid zeigt somit über einen drakonitischen Umlauf stets dasselbe Muster, die Bahnform ist pro drakonitischem Umlauf reproduzierbar. Sie kann deshalb in diesem Fall als *formstabil* bezeichnet werden.

Die Eigenschaft der Formstabilität kann im Fall von Beobachtungssatelliten genutzt werden: In jedem entsprechenden Bahnpunkt pro drakonitischem Umlauf herrschen im Wesentlichen dieselben körperzentrischen Beobachtungsbedingungen bezüglich der Oberfläche des Zentralkörpers. Der ozeanographische Beobachtungssatellit SEASAT A ist das erste bekannt gewordene Beispiel, für den expressis verbis eine „eingefrorene Bahn“ vorgeschlagen wurde[1]. Mittlerweile ist eine Flut von Veröffentlichungen zu weiteren Erdbeobachtungssatelliten und Marsbeobachtungs-Orbitern auf „eingefrorenen Bahnen“ aufgetaucht, die den Begriff der „eingefrorenen Bewegung“ nur unwesentlich zu vertiefen imstande waren. Lediglich in der Arbeit von *Coffey et.al.* [1994] wird eine systematische Untersuchung der eingefrorenen Bahnen als Bahnen auf Singularitäten um Gleichgewichtslagen untersucht. In diesem Zusammenhang bildet die charakteristische Inklination (für Inklinationen mit $\cos i = 1/\sqrt{5}$) eine wichtige Singularität[2].

Der Begriff *formstabile Bewegung* soll hier anstelle von „eingefrorene Bewegung“ verwendet werden, um auf die natürliche Eigenschaft dieser Bewegungsart im Rahmen der Grundformeln der Satellitenbahnmechanik hinzuweisen. Der Begriff ist eng mit der drakonitischen Bewegung gekoppelt, da er auf kreisnahe Bahnen von Beobachtungssatelliten eingeschränkt ist, die im Wesentlichen im Rahmen der drakonitischen Bewegung untersucht werden können. Insbesondere reproduziert sich die Formstabilität exakt über einen drakonitischen Umlauf. Aus diesem Grund erfolgt die Behandlung der formstabilen Bewegung in diesem Kapitel. Der größere theoretische Zusammenhang der formstabilen Bewegung weist freilich über den Rahmen der drakonitischen Bewegung hinaus.

---

1 CUTTING et al. [1977]. In dieser Arbeit taucht erstmals der Begriff „frozen orbit“ auf. Der Hinweis auf KOZAI [1959] fehlt.

2 siehe hierzu auch in 'Orbit Design and Analysis for the Atmospheric and Environmental Research Satellite ATMOS', AAS / AIAA Astrodynamics Conference, Durango, Colorado, August, 19 - 22, 1991; AAS 91-363

23.11.1 Notwendige Bedingung für eine formstabile Bewegung

In der Literatur finden sich verschiedene Wege zur Behandlung der formstabilen („eingefrorenen“) Bewegung. Auffallenderweise befindet sich darunter nicht die natürliche Herleitung aus den elementaren Ausdrücken für die *Kepler*elemente, wie sie etwa mutatis mutandis von *Kozai* [1959] durchgeführt wurde.

Wir wollen die Herleitung mit der *Brouwer*schen [1959] Darstellung der *Kepler*elemente durchführen. Danach lassen sich die Elemente in jedem Zeitpunkt t zusammensetzen aus dem mittleren Wert zur Epoche t_0, dem säkularen, langperiodischen und kurzperiodischen Bewegungsanteil[1]. Für Exzentrizität und Argument des Perizentrums ist also

$$\begin{aligned} e &= \bar{e}_0 + \dot{e}_s\,(t-t_0) + \delta e_l + \delta e_k \\ \omega &= \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,(t-t_0) + \delta\omega_l + \delta\omega_k \quad . \end{aligned} \tag{23.425}$$

Falls nur die Beschleunigungen durch die ersten zonalen Harmonischen J_2 , … , J_5 berücksichtigt werden, ist

$$\begin{aligned} e &= \bar{e}_0 + \delta e_{lG} + \delta e_{kG} + \ldots \\ \omega &= \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,(t-t_0) + \delta\omega_{lG} + \delta\omega_{kG} + \ldots \end{aligned} \tag{23.426}$$

Der säkulare und langperiodische Anteil werde durch Vernachlässigung des kurzperiodischen Anteils (exakt: durch Mittelung über einen anomalistischen Umlauf) gebildet. Es mögen die folgenden Bezeichnungen gelten:

$$\begin{aligned} e_l &:= \bar{e}_0 + \delta e_l \\ \omega_l &:= \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,(t-t_0) + \delta\omega_l \quad . \end{aligned} \tag{23.427}$$

Da für kreisnahe Bahnen das Perizentrum im Allgemeinen nicht definiert ist, wird der 1. Keplersche Vektor betrachtet. Da in der drakonitischen Bewegung der Knoten klar definiert ist, kann der 1. Keplersche Vektor (er wird bekanntlich gelegentlich auch als „Exzentrizitätsvektor“ bezeichnet) im knotenbezogenen Bahnsystem

$$\mathbf{d} = \left(e\cos\omega, e\sin\omega, 0\right) \tag{23.428}$$

gegeben sein. Die Zerlegung in den säkular-langperiodischen und den kurzperiodischen Anteil liefert bei Bezug auf das Gravitationsfeld des Zentralkörpers

$$\begin{aligned} e\cos\omega &= \left(e_l + \delta e_{kG}\right)\cos\left(\omega_l + \delta\omega_{kG}\right) + \ldots \\ e\sin\omega &= \left(e_l + \delta e_{kG}\right)\sin\left(\omega_l + \delta\omega_{kG}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{23.429}$$

Kann näherungsweise, wie bei Erdsatelliten der Fall,

$$\begin{aligned} \cos\delta\omega_{kG} &= 1 + O\left(J_2^2\right) \\ \sin\delta\omega_{kG} &= \delta\omega_{kG} + O\left(J_2^3\right) \\ \delta e_{kG}\,\delta\omega_{kG} &= O\left(J_2^4\right) \end{aligned} \tag{23.430}$$

angenommen werden, wird

---

[1] siehe in Abschnitt 20.3 (Band III)

$$\begin{aligned} e\cos\omega &= e_l\cos\omega_l + \delta e_{kG}\cos\omega_l - e_l\,\delta\omega_{kG}\sin\omega_l + \ldots \\ e\sin\omega &= e_l\sin\omega_l + \delta e_{kG}\sin\omega_l + e_l\,\delta\omega_{kG}\cos\omega_l + \ldots \end{aligned} \tag{23.431}$$

mit den kurzperiodischen Anteilen

$$\begin{aligned} \left(e\cos\omega\right)_{kG} &= \delta e_{kG}\cos\omega_l - e_l\,\delta\omega_{kG}\sin\omega_l + \ldots \\ \left(e\sin\omega\right)_{kG} &= \delta e_{kG}\sin\omega_l + e_l\,\delta\omega_{kG}\cos\omega_l + \ldots \end{aligned} \tag{23.432}$$

Es bleibt (entsprechend Formel (23.427), es ist im Erdschwerefeld $\bar{e} \equiv \bar{e}_0$) mit

$$\begin{aligned} e_{lG} &= \bar{e} + \delta e_{lG} \\ \omega_{lG} &= \bar{\omega} + \delta\omega_{lG} \end{aligned} \tag{23.433}$$

und mit der Annahme

$$\begin{aligned} \cos\delta\omega_{lG} &= 1 + O\left(J_2^2\right) \\ \sin\delta\omega_{lG} &= \delta\omega_{lG} + O\left(J_2^3\right) \\ \delta e_{kG}\,\delta\omega_{lG} &= O\left(J_2^4\right) \end{aligned} \tag{23.434}$$

schließlich

$$\begin{aligned} e_{lG}\cos\omega_{lG} &= \bar{e}\cos\bar{\omega} + \delta e_{lG}\cos\bar{\omega} - \bar{e}\,\delta\omega_{lG}\sin\bar{\omega} + \ldots \\ e_{lG}\sin\omega_{lG} &= \bar{e}\sin\bar{\omega} + \delta e_{lG}\sin\bar{\omega} + \bar{e}\,\delta\omega_{lG}\cos\bar{\omega} + \ldots \end{aligned} \tag{23.435}$$

Im Fall mittlerer Kreisbahnen $\bar{e}_0 = \bar{e} \equiv 0$ lauten die langperiodischen durch die ersten 5 Harmonischen verursachten Variationen in Exzentrizität und Argument des Perigäums mit den Ausdrücken (20.23) und (20.33) (Abschnitt 20.2.2, Band III)

$$\begin{aligned} \delta e_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i}\sin\bar{\omega} - \\ &\quad -\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^3}\sin\bar{i}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\sin\bar{\omega}+\ldots \quad , \end{aligned} \tag{23.436}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{e}\to 0}\left(\bar{e}\,\delta\omega_{lG}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i}\cos\bar{\omega} - \\ &\quad -\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^3}\sin\bar{i}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\cos\bar{\omega}+\ldots \quad . \end{aligned} \tag{23.437}$$

Diese Ausdrücke werden im System (23.435) eingesetzt und ergeben

$$\begin{aligned} e_{lG}\cos\omega_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= 0 \\ e_{lG}\sin\omega_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i} - \\ &\quad -\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^3}\sin\bar{i}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]+\ldots \end{aligned} \tag{23.438}$$

Dieses System ist etwa erfüllt, wenn $\sin\bar{i} = 0$, und es wird $e_l = 0$. Falls jedoch $\sin\bar{i} \neq 0$, wie im Zusammenhang mit der drakonitischen Bewegung gefordert, muss

$$\begin{aligned} \cos\omega_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= 0 \\ \sin\omega_{lG}\left[\bar{e}=0\right] &= \pm 1 \end{aligned} \tag{23.439}$$

gefordert werden. Dies führt mit den Formeln (23.438) **notwendig** auf die **konstante** gemittelte Exzentrizität

$$\begin{aligned} e_F = e_{lG}\left[\bar{e}=0\right] = \Bigg| & -\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}\frac{R_E}{\bar{a}}\sin\bar{i} - \\ & -\frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^3}\sin\bar{i}\left[1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]+\ldots\Bigg| \quad , \end{aligned} \tag{23.440}$$

die gelegentlich salopp als „*eingefrorene Exzentrizität*“ bezeichnet wird.

Da für die Exzentrizität stets $e \geq 0$ gilt, bleiben für den gemittelten Anteil des Argumentes des Perizentrums, sofern $|J_3| > |J_i|, i = 5, 7, \ldots$,

$$\begin{aligned} J_3 > 0 \quad &\succ \quad \omega_{lG} = 90° \\ J_3 < 0 \quad &\succ \quad \omega_{lG} = 270° \quad , \end{aligned} \tag{23.441}$$

das gemittelte Perizentrum wird also für das Argument 90° oder 270° „eingefroren“. Das mittlere Argument des Perizentrums ist in diesem Fall (da $\bar{e} \equiv 0$) nicht erklärt, auch wenn es über $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \dot{\omega}_s\,(t - t_0)$, da $\dot{\omega}_s$ bekannt ist, berechnet werden kann. Diese Berechnung ist jedoch sinnlos.

Die hier gewählte Herleitung zeigt, dass die so genannte eingefrorene Bahn nichts anderes als die natürliche Interpretation der mittleren Kreisbahn ist.

BEISPIEL: Gegeben sei ein Erdsatellit auf mittlerer kreisförmiger Bahn ($\bar{e} = 0$) mit der mittleren Bahnhalbachse $\bar{a}$ = 7253.134 km und der mittleren Inklination $\bar{i}$ = 98°.498. Es werden folgende Konstante verwendet: $J_2 = 1.082628 \cdot 10^{-3}$, $J_3 = -2.538 \cdot 10^{-6}$, $J_5 = -0.246 \cdot 10^{-6}$. Die gemittelte („eingefrorene“) Exzentrizität beträgt mit Formel (23.440) $e_F = e_{lG}\left[\bar{e}=0\right]$ = 0.001094938 + $O\left(J_7\right)$. Das gemittelte Perigäum wird für das Argument ω_{lG} = 90° eingefroren. ◀

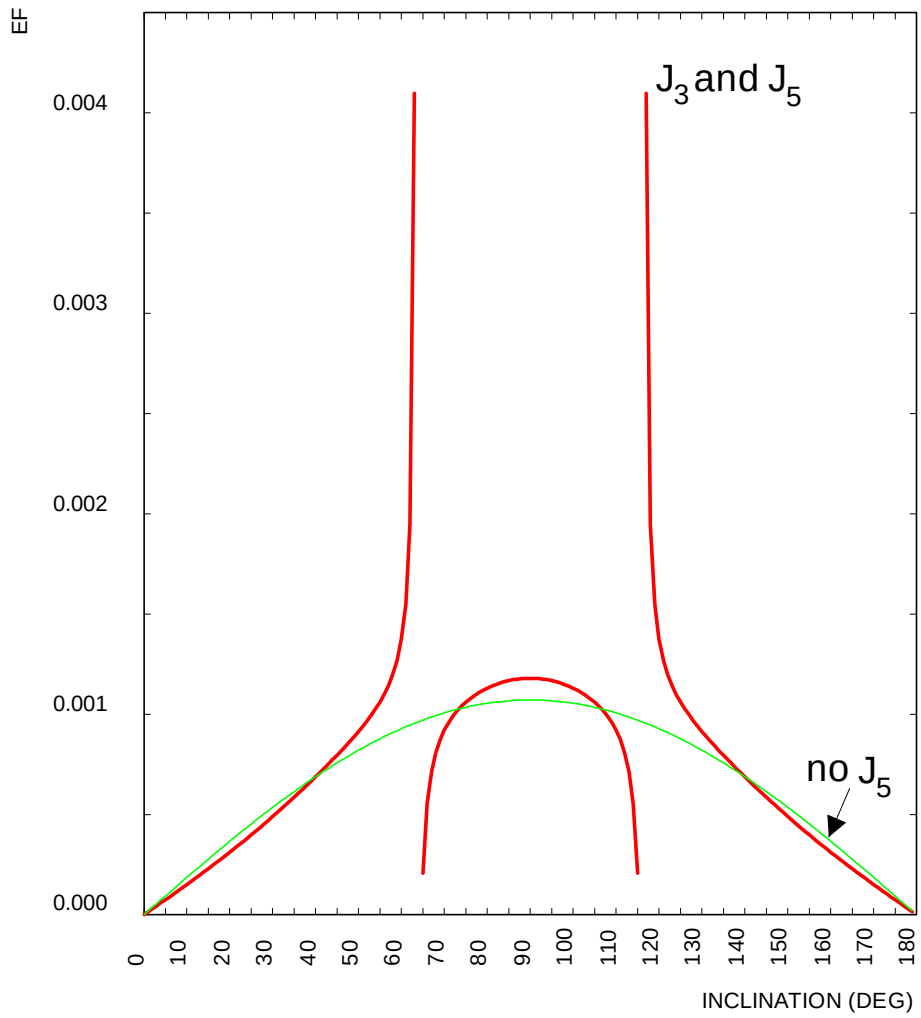


Bild 23-59:: Gemittelte Exzentrizität einer formstabilen Bewegung in Abhängigkeit von der Inklination für die mittlere Bahnhalbachse $\bar{a}$ = 6978.140 km, für J_3 allein (durchgezogene Kurve) und unter Einschluss von J_5 (Kurve mit Polstellen).

Bild 23-59 zeigt die gemittelte Exzentrizität einer im Mittel kreisförmigen Bahn für die mittlere Halbachse $\bar{a}$ = 6978.140 km über die mittlere Inklination berechnet mit Formel (23.440). Die untere Kurve ist nur mit dem ersten Teil der Formel unter Einschluss des J_3 - Anteils berechnet, die Kurve mit den beiden Polstellen an den kritischen Neigungen enthält die ganze Formel unter Einschluss des J_5 - Anteils. Man sieht, dass in der Umgebung der kritischen Neigungen, also etwa im Bereich $60° < \bar{i} < 70°$ und $110° < \bar{i} < 120°$, die obige Formel keine brauchbaren Ergebnisse liefern kann. Dies gilt für jede Bahnhalbachse. Bild 23-60 zeigt den Verlauf der eingefrorenen Exzentrizität über der Inklination für verschiedene große Halbachsen erdnaher Bahnen. Der Wert der eingefrorenen Exzentrizität nimmt mit zunehmender Bahnhöhe nur sehr geringfügig ab.

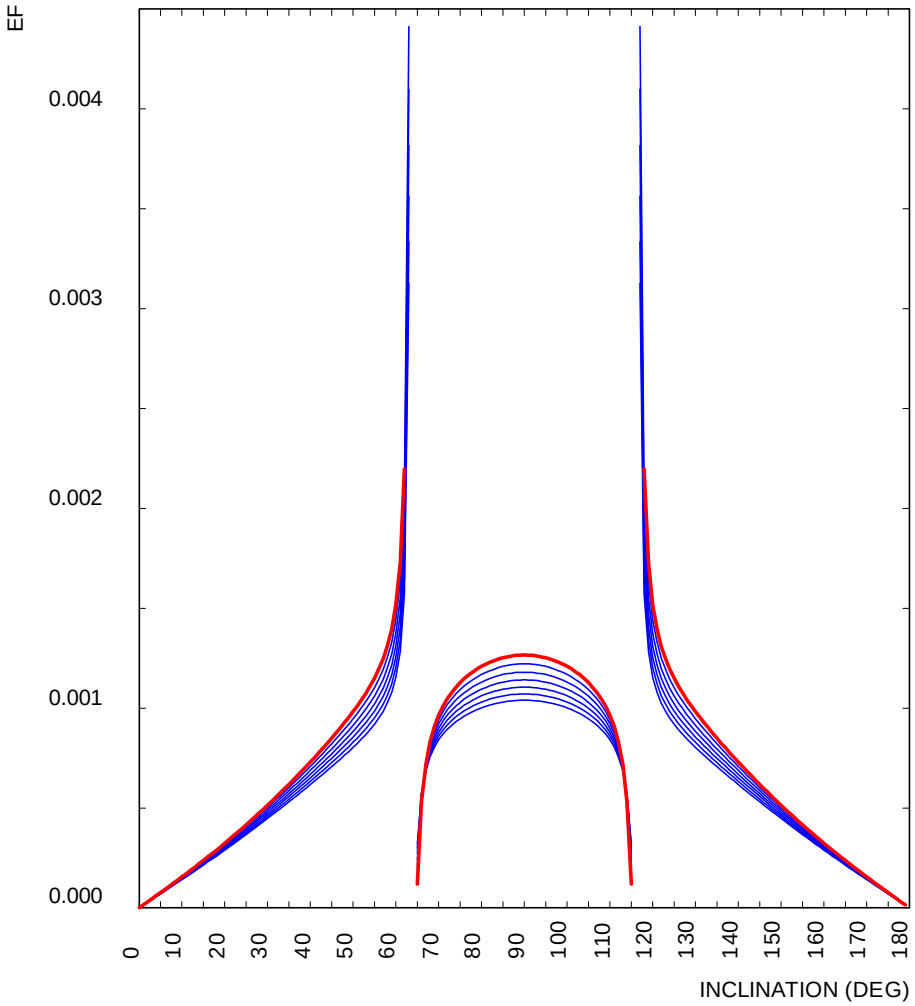


Bild 23-60 : Variation der eingefrorenen Exzentrizität über der Inklination für die großen Bahnhalbachsen a = 6578 km (äußere bzw. obere Kurve), 6778 km, 6978 km, 7178 km, 7378 km, 7578 km, 7778 km

23.11.2 Hinreichende Bedingungen für formstabile Bewegungen

Feinere Studien[1] zeigen, dass die höheren ungeradzahligen Harmonischen des Schwerefeldes der Erde den Wert von e_F leicht modifizieren können. Da in deren Größenordnungsbereich bereits die anderen auf die Bewegung eines Erdsatelliten einwirkenden Beschleunigungen, wie der Luftwiderstand, die Gravitationen dritter Körper, der Strahlungsdruck der Sonne usw. liegen, ist diese Aussage nur von theoretischem Wert.

23.11.3 Eigenschaften der formstabilen Bewegung

Die oskulierende Exzentrizität einer mittleren Kreisbahn kann nach der Beziehung (20.58) mit dem Ausdruck

1 siehe etwa H. KLINKRAD [1985]

$$\delta e_{kG}\left[\bar{e}=0\right] = \frac{1}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}^2}\left\{-3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\cos\bar{\upsilon} + \right. \\ \left. +\sin^2\bar{i}\left[4\cos\left(2\bar{u}-\bar{\upsilon}\right)+\cos\left(2\bar{u}\right)\cos\bar{\upsilon}\right]\right\} + \ \ldots \tag{23.442}$$

aus

$$e\left[\bar{e}=0\right] = e_F + \delta e_{kG}\left[\bar{e}=0\right]$$

berechnet werden, als Bahnwinkel das oskulierende mittlere Argument der Breite nach Formel (20.114) (Band III)

$$\delta\left(\omega+M\right)_{lG}\left[\bar{e}=0\right] = 0 \quad ,$$

sowie mit der Beziehung (20.110)

$$\left(\delta\omega_{kG}+\delta M_{kG}\right)\left[\bar{e}=0\right] = -\frac{1}{8} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}^2}\left\{ 6\left(1-5\cos^2\bar{i}\right)\left(\bar{\upsilon}-\bar{M}\right) - \right. \\ \left. -3\left(3-5\cos^2\bar{i}\right)\sin\left(2\bar{u}\right) \ \right\} + \ldots \quad , \tag{23.443}$$

somit

$$\omega+M = \overline{\omega+M} + \delta\left(\omega+M\right)_{kG}\left[\bar{e}=0\right] \quad .$$

Schließlich wird der oskulierende Bahnradius $r=\bar{r}+\delta r$ im Fall der Variationen durch das Gravitationspotential mit Formel (20.187) aus

$$\delta r_G\left[\bar{e}=0\right] = \frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2} R_E \sin\bar{i}\sin\bar{u} + \\ + \frac{5}{8}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{a}^2}\sin\bar{i}\left(1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\sin\bar{u} + \\ + \frac{1}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}}\left[3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+\sin^2\bar{i}\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.444}$$

erhalten. Mit der Beziehung (23.440) folgt daraus die bemerkenswerte Darstellung

$$\delta r_G\left[\bar{e}=0\right] = -\bar{a}\, e_F \sin\omega_{lG}\sin\bar{u} + \\ + \frac{1}{4} J_2\left[3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+\sin^2\bar{i}\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.445}$$

- *Der oskulierende Bahnradius enthält im Fall von mittleren Kreisbahnen* $\left(\bar{e}=0.0\right)$ *explizit die eingefrorene Exzentrizität* $\left(e_F\right)$ *als einen konstanten Parameter.*

BEISPIEL 1: Gegeben sei die mittlere Kreisbahn ($\bar{e}$ = 0) eines Erdsatelliten in 300 km mittlerer Äquatorhöhe. Ihre mittlere große Bahnhalbachse ist $\bar{a}_0 = 6678.140\,\mathrm{km}$. Beträgt die mittlere Inklination $\bar{i}_0 = 57°$, so hat die Bahn die gemittelte (= „eingefrorene“) Exzentrizität

$$e_F = e_{lG}\left[\bar{e}=0\right] = 9.396229\times10^{-4} + 2.802711\times10^{-4} = 0.00121989 + O\left(J_7\right) \quad .$$

Den Verlauf der oskulierenden Exzentrizität über einen drakonitischen Umlauf (das Argument der Breite ist wie in der drakonitischen Bewegung üblich die unabhängige Variable) zeigt Bild 23-63. Die Exzentrizität verschwindet in diesem speziellen Fall für das Argument u = 90°.

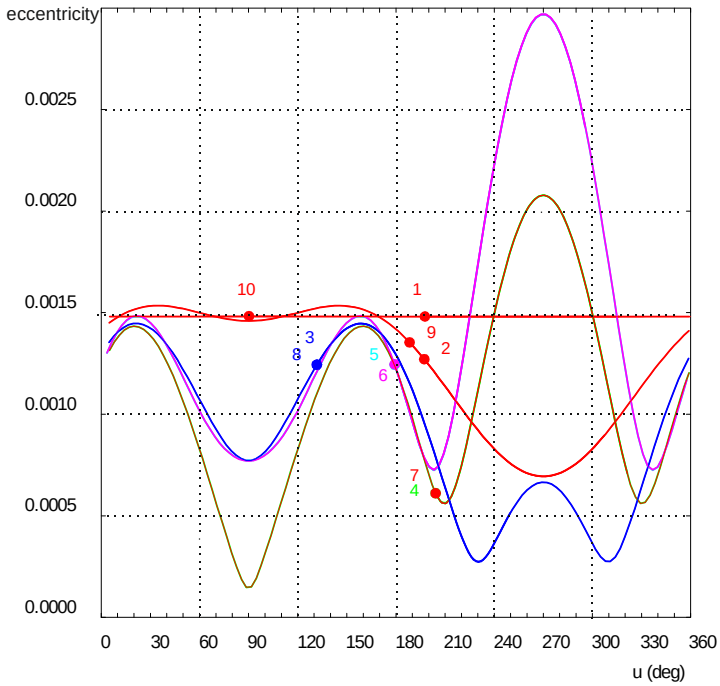


Bild 23-61: Verlauf der oskulierenden Exzentrizität einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a} = 6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.0$, für verschiedene Inklinationen über einen drakonitischen Umlauf: Kurve 1: i=0°, Kurve 2: i=20°, Kurve 3: i=40°, Kurve 4: i=60°, Kurve 5: i=80°, Kurve 6: i=100°, Kurve 7: i=120°, Kurve 8: i=140°, Kurve 9: i=160°, Kurve 10: i=180°. Die Kurven für die Inklinationen i und 180°-i sind identisch.

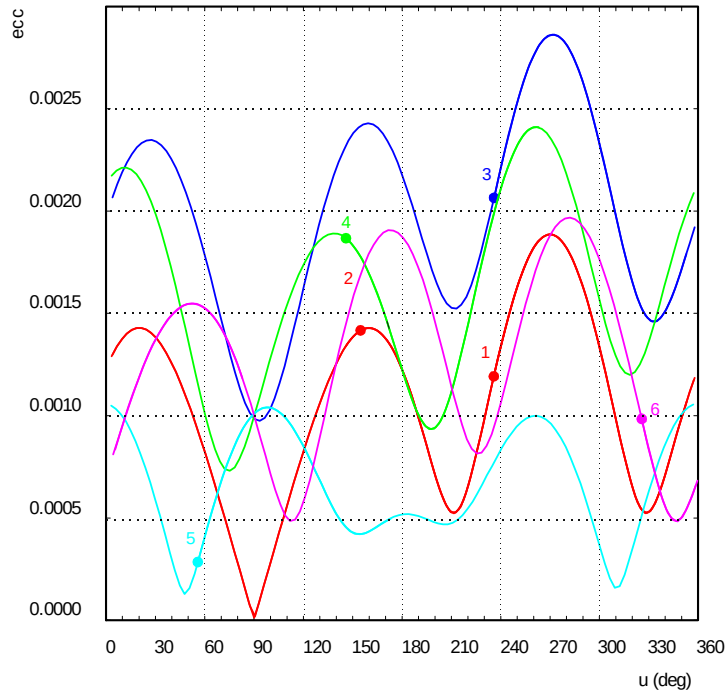


Bild 23-62: Verlauf der oskulierenden Exzentrizität für eine Bahn mit mittleren Bahnhalbachse $\bar{a} = 6678.140\,km$, der mittleren Exzentrizität $\bar{e} = 0.001$ und der mittleren Inklination $\bar{i}$ = 57°, für verschiedene mittlere Argumente des Perigäums über einen drakonitischen Umlauf: Kurve 3: $\bar{\omega}$=180°, Kurve 4: $\bar{\omega}$=90°, Kurve 5: $\bar{\omega}$=0°, Kurve 6: $\bar{\omega}$=270°. In Ergänzung zeigen die Kurven 1 und 2 das Verhalten der Kreisbahn $\bar{e} = 0.0$ wie in Bild 23-63 für die Perigäumsargumente $\bar{\omega}$=180° (Kurve 1) bzw. $\bar{\omega}$=90° (Kurve 2, diese beiden Kurven sind identisch, werden aber in unterschiedlicher Reihenfolge durchlaufen) ◀

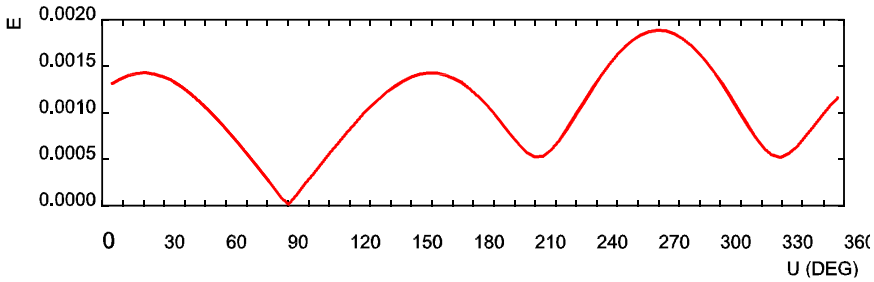


Bild 23-63: Variation der Exzentrizität einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a} = 6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.0$, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf.

Parametrisierte Untersuchungen zeigen jedoch im Allgemeinen ein nicht überschaubares Verhalten der oskulierenden Exzentrizität: Variationen im mittleren Argument des Perigäums zur Epoche sowie in der mittleren Epocheanomalie beeinflussen nicht das Verhalten der oskulierenden Exzentrizität, wenn die Epoche Exzentrizität verschwindet. Dagegen ist das Verhalten stark von der Inklination und der Bahnhöhe sowie der Exzentrizität abhängig. Bild 23-61 zeigt den Verlauf der oskulierenden Exzentrizität für Bahnen mit verschwindender mittlerer Epocheexzentrizität für verschiedene Inklinationen jedoch derselben mittleren Bahnhalbachse. Es fällt auf, dass für das Argument der Breite u=90° jeweils ein relatives oder sogar absolutes Minimum besteht.

Im Fall einer schwachen Exzentrizität $\left(\bar{e} = 0.001\right)$ ist das Verhalten der oskulierenden Exzentrizität jedoch auch stark vom mittleren Anfangsargument des Perigäums abhängig (siehe Bild 23-62).

BEISPIEL 2:

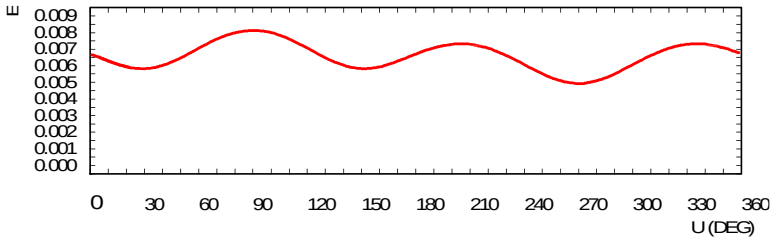


Bild 23-64: Variation der Exzentrizität einer mittleren kreisförmigen Umlaufbahn um den Mars mit der mittleren Höhe $\bar{H}$ = 300 km, $\bar{a} = 6678.140\,km$, mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.0$, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf

Gegeben sei die mittlere Kreisbahn eines Mars-Orbiters in der mittleren Äquatorhöhe $\bar{H} = 300\,\text{km}$. Die mittlere große Bahnhalbachse ist (mit den Werten von Tabelle 12 in Anhang E.7 (Band V)) $\bar{a} = 3697.2\,\text{km}$. Die mittlere Inklination sei $\bar{i} = 57°$. Da für den Mars $J_3 > 0$, wird das gemittelte Perimartium für das Argument $\bar{u}$ = 270° „eingefroren“. Die gemittelte Exzentrizität (vgl. Bild 23-64) beträgt

$$e_F = e_{lG}\left[\bar{e} = 0\right] = 7.062697 \times 10^{-3} - 3.6223439 \times 10^{-3} = 0.003440354 + O\left(J_7\right) \quad \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 3: Es werde das radiale Verhalten eines Erdsatelliten auf mittlerer Kreisbahn in 300 km mittlerer Äquatorhöhe betrachte. Formel (23.444) liefert für zunächst beliebige Inklinationen:

$$\begin{aligned}\delta r_G\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km}\right] \;=\;& -7.482\sin\bar{i}\,\sin\bar{u}\,- \\ & -0.826\sin\bar{i}\left(1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\sin\bar{u}\,+ \\ & +1.649\left[3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+\sin^2\bar{i}\,\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+\ldots\left[\text{km}\right] \quad .\end{aligned}$$

Im Fall der $\bar{i}$ = 57°-Bahn ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta r_G\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km},\,\bar{i}=57°\right] \;=\;& -6.275\sin\bar{u}\,- \\ & -1.872\sin\bar{u}\,+ \\ & +1.649\left[0.330+0.703\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+\ldots\left[\text{km}\right] \quad .\end{aligned}$$

Die von J_3 stammende Variation des Radius ist mehr als 5 mal so groß wie die von J_2 stammende, die selbst noch von der von J_5 stammenden Variation übertroffen wird. Dies zeigt Bild 23-65. Hier bezeichnet „3“ die Kurve des mittleren Bahnradius, „2“ die Kurve mit den von J_2 stammenden Variationen, Kurve „1“ die mit allen Einflüssen (d.h. analytisch mit J_2, J_3, J_4). Man ersieht das Minimum des Bahnradius für das Argument der Breite $\bar{u}$ = 90°, die größere Variation von *r* über der Nordhälfte der Erde (0° < $\bar{u}$ < 180°) sowie das dann völlig asymmetrische Verhalten über der Südhälfte. Der hier dargestellte oskulierende Verlauf des Bahnradius ist für jeden Umlauf identisch. Dies gilt bis auf höhere Einflüsse, derentwegen die Bahn eventuell von Zeit zu Zeit korrigiert werden muss (siehe hierzu den Abschnitt 23.11.5 auf Seite 307).

Zahlenwerte für eine polnahe Bahn:

$$\begin{aligned}\delta r_G\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km},\,\bar{i}=96°\right] \;=\;& -7.441\sin\bar{u}\,- \\ & -0.738\sin\bar{u}\,+ \\ & +1.649\left[2.902+0.989\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+\ldots\left[\text{km}\right] \quad .\end{aligned}$$

Die von J_3 herrührende Variation des Bahnradius mit Betrag 7.441 ist mehr als doppelt so stark wie der von J_2 stammende Anteil.

Im Fall einer äquatorialen Bahn artet auch der oskulierende Anteil des Bahnradius zu einem konstanten Wert aus, der Einfluss der ungeradzahligen Harmonischen verschwindet, der Satellit befindet sich (wie *Lyddane* [1963] als erster festgestellt hat) stets im Perigäum der Bahn:

$$\delta r_G\left[\bar{e}=0,\,\bar{H}=300\text{ km},\,\bar{i}=0°\right] \;=\; -9.893\left[\text{km}\right] \quad .$$

(Mehr zum Fall der äquatorialen Bewegung im Rahmen der meridianbezogenen Bewegung in Kapitel k26). ◀

BEISPIEL 4: Es werde zum Vergleich das radiale Verhalten eines Mars-Orbiters auf mittlerer Kreisbahn in 300 km mittlerer Äquatorhöhe betrachte. Formel (23.444) liefert für zunächst beliebige Inklinationen:

$$\delta r_{G\sigma}\left[\bar{e}=0,\ \bar{H}=300\ \text{km}\right] = 31.135\sin\bar{i}\sin\bar{u} - \\ -0.5898\sin\bar{i}\left(1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\sin\bar{u}+ \\ +1.533\left[3\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+\sin^2\bar{i}\cos\left(2\bar{u}\right)\right]+\ldots\left[\text{km}\right] \quad .$$

Im Fall der $\bar{i}$ = 57°-Bahn ergibt sich

$$\delta r_{G\sigma}\left[\bar{e}=0,\ \bar{H}=300\ \text{km},\ \bar{i}=57°\right] = 26.112\sin\bar{u} - \\ -1.3336\sin\bar{u}+ \\ +0.50635+1.0783\cos\left(2\bar{u}\right)+\ldots\left[\text{km}\right] \quad .$$

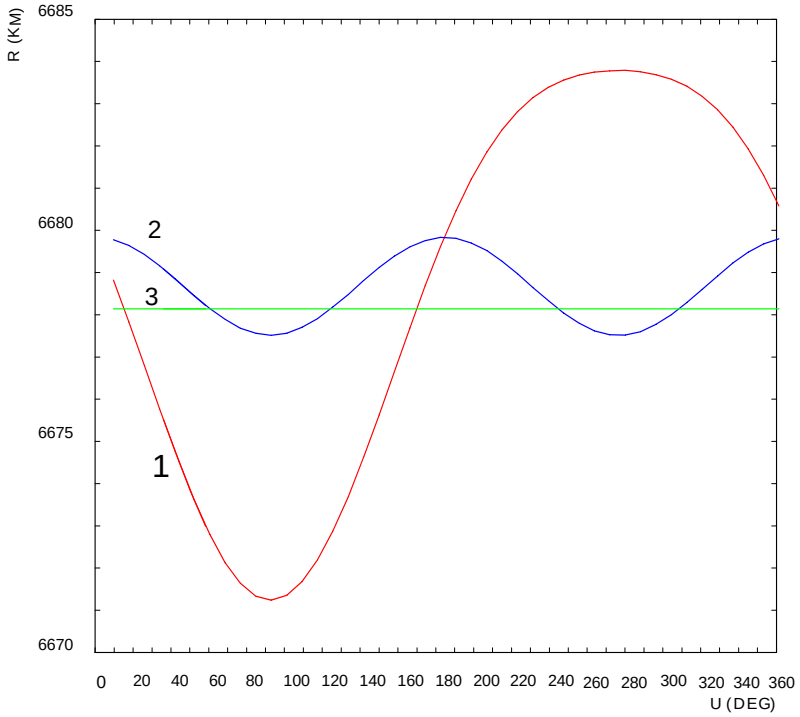


Bild 23-65: Variation des Bahnradius einer mittleren Kreisbahn über der Erdoberfläche der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf. Kurve 1: Verlauf des Bahnradius unter Einschluss der „Störungen“ durch J_2 und J_3 ; Kurve 2: nur Störungen durch J_2 ; Kurve 3: „mittlere“ Bahn

Die entsprechenden Kurven ohne Anomalien im Schwerefeld des Mars (Kurve 3), mit dem Einfluss von J_2 allein (Kurve 2) und unter Einschluss der Einflüsse durch J_2 und J_3 (Kurve 1) sind in Bild 23-66 zu sehen. Es fällt auf, dass der Einfluss von J_3 noch wesentlich größer als bei der Erde ist, was auf den gegenüber der Erde um das 10fache höheren Wert zurückzuführen ist. Der Mittelwert der Variation im Fall von J_2 allein ist um einen konstante kleine Verschiebung von 0.5 km gegenüber dem konstanten Wert bei Vernachlässigung aller „Stör“-einflüsse. Da für den Mars J_3 einen positiven Wert hat, verläuft die Variation des Radius über der Nordhalbkugel positiv und über der Südhalbkugel negativ. Das Gesamtverhalten im Vergleich Nord- zu Südhalbkugel ist wie bei der Erde asymmetrisch. ◀

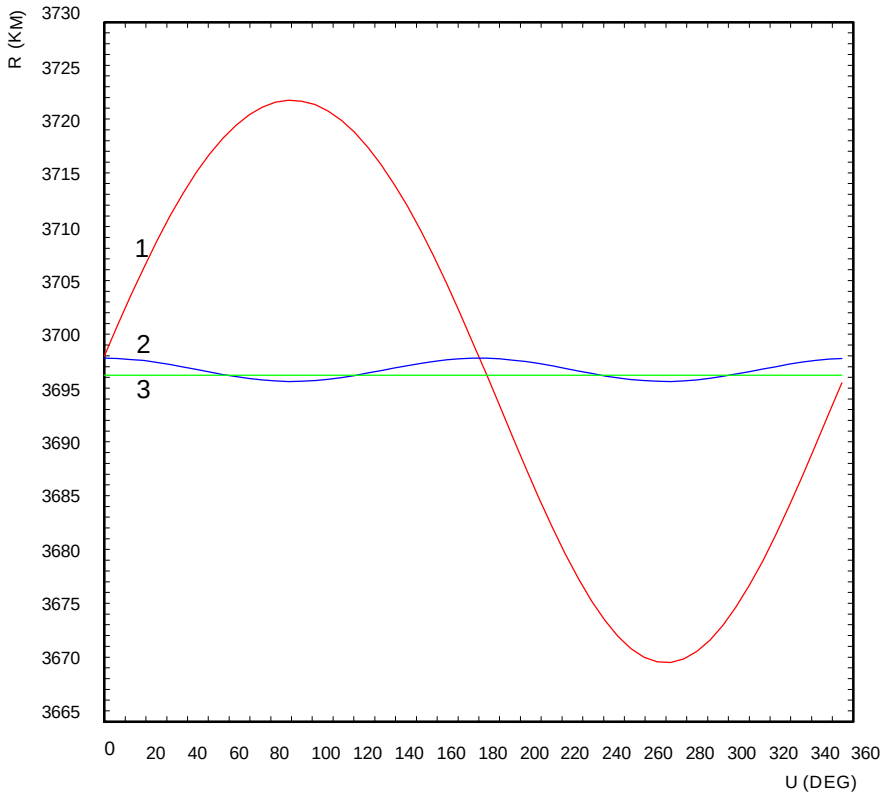


Bild 23-66: Bewegung eines Mars-Orbiters um das Massenzentrum des Mars (martiozentrische Bewegung): Variation des Bahnradius einer mittleren Kreisbahn der Höhe $\bar{H}$ = 300 km, Inklination $\bar{i}$ = 57° über einen drakonitischen Umlauf. Kurve 1: Verlauf des Bahnradius unter Einschluss der „Störungen“ durch J_2 und J_3 ; Kurve 2: nur Störungen durch J_2 ; Kurve 3: „mittlere“ Bahn.

23.11.4 Librationen um die formstabile Bewegung

Eine formstabile Bewegung wird erhalten, wenn die mittlere Exzentrizität $\bar{e}$ identisch verschwindet. Dieser Fall ist in der Praxis aus verschiedenen Gründen nicht zu erwarten. Es soll deshalb in diesem Abschnitt untersucht werden, was passiert, wenn die mittlere Exzentrizität kleine (konstante) von Null verschiedene Werte annimmt.

In diesem Fall ist das mittlere Argument des Perigäums $\bar{\omega}$ im Gegensatz zum eingefrorenen Fall $\left(\bar{e}=0\right)$ erklärt und kann das Intervall $\bar{\omega}\in\left[0°, 360°\right]$ mit $k\in\mathbb{N}$ durchlaufen. Der langperiodische Anteil δe_{lG} der Exzentrizität nach Beziehung (20.24) und $\delta\omega_{lG}$ des Argumentes des Perigäums in Beziehung (20.33) führen für kleine mittlere Exzentrizitäten langperiodische Oszillationen um den Wert der eingefrorenen Exzentrizität e_F mit $\omega_l = 90°$ aus. Dies zeigt sich in einer Art Librationsbewegungen des langperiodischen Anteils e_l der Exzentrizität über dem langperiodischen Anteil ω_l des Argumentes des Perigäums.

Bild 23-67 zeigt ein Beispiel hierzu mit der gemittelten Bahnhöhe $\bar{H} = 300\,km$, also der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a} = 6678.140\,km$ und der mittleren Inklination $\bar{i} = 57°.0$. Hier wurde der Einfluss durch J_5 nicht berücksichtigt. Für die mittlere Exzentrizität $\bar{e} = 0.00015$, was als Annahme für eine fehlerhafte mittlere Exzentrizität gewertet werden kann, schwankt der langperiodische Anteil der Exzentrizität im Intervall $e_l \in \left[0.000045,\, 0.001825\right]$, sowie der

langperiodische Anteil des Argumentes des Perigäums etwa für $\omega_l \in [17°, 153°]$. Die Dauer für eine solche Librationsbewegung wird aus der (konstanten) mittleren Bewegung $\dot{\omega}_s$ des Argumentes des Perigäums nach Formel (20.16) erhalten. Sie beträgt

$$P_{\omega_{lG}} = \frac{2\pi}{\dot{\omega}_{sG}} \quad , \tag{23.446}$$

im Fall von $\bar{e} = 0.0015$ somit $\dot{\omega}_s = 0.41028757\ 10^{-6}$ /s somit $P_{\omega_{lG}} = 177.2465\ d$.

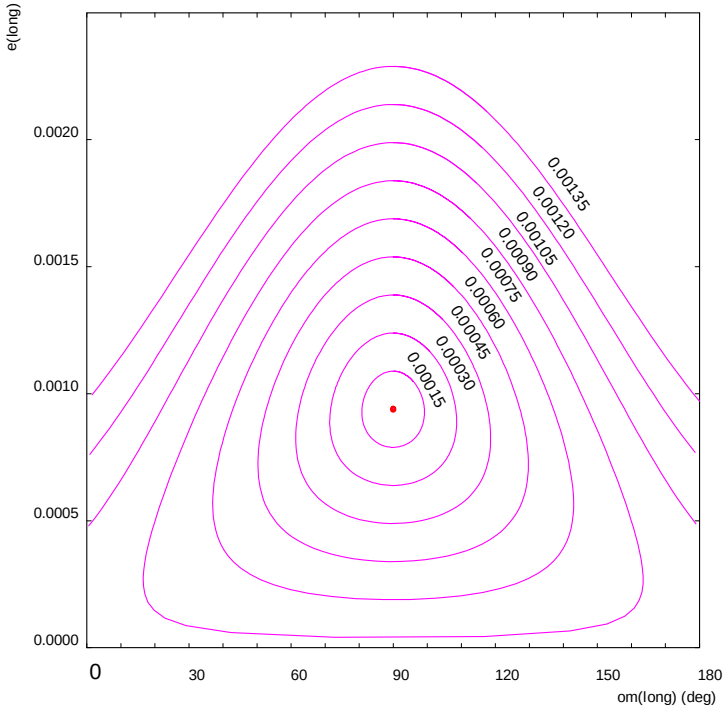


Bild 23-67: Librationen von kreisnahen Bahnen um die eingefrorene Bahn mit den Parametern Höhe $\bar{H}$ = 300 km (Bezug auf den Erdäquator $R_E = 6378.140\ km$), mittlere (Brouwerschen) Exzentrizität $\bar{e} = 0.0000$, Inklination $\bar{i} = 57°.0$. Das langperiodische Argument des Perigäums hat notwendig den Wert $\omega_l = 90°.0$. Für die Librationsbahnen wurde die jeweils vorgegebene mittlere Exzentrizität $\bar{e}$ variiert in Schritten von $\Delta e = 0.00015$. Die Abszisse enthält die langperiodische Bewegung des Argumentes des Perigäums, die Ordinate die langperiodische Variation der Exzentrizität unter Einschluss der Bewegungseinflüsse durch J_2, J_3, J_4. In diesem Modell hat die „eingefrorene“ Exzentrizität den Wert $e_F = 0.000939$. Die entsprechende „eingefrorene“ Bahn wird in diesem Bild durch einen Punkt in der Mitte der Librationskurven repräsentiert. Die Librationsperiode beträgt etwa 178 Tage.

Im Fall einer eingefrorenen Bahn zeigt die **oskulierende Exzentrizität**, d.h. unter Einschluss der kurzperiodischen Variationen in der *e* über ω - Ebene, ein eigentümliches Verhalten, wie es im Beispiel für dieselben Bahnparameter wie in Bild 23-67 durchgeführt in Bild 23-68 dargestellt wird. Hier zeigt sich eine mehrfache Schleifenbewegung um den Wert der eingefrorenen Bahn mit $e_F = 0.00939$ und $\omega_l = 90°$. Maximal kann die oskulierende Exzentrizität in diesem Fall Werte bis zu *e* = 0.00188 annehmen. Im Kurvenverlauf spiegeln sich die verschiedenen periodischen Anteile in den Beziehungen (20.58) für die Exzentrizität und (20.62) für das Argument des Perigäums wieder.

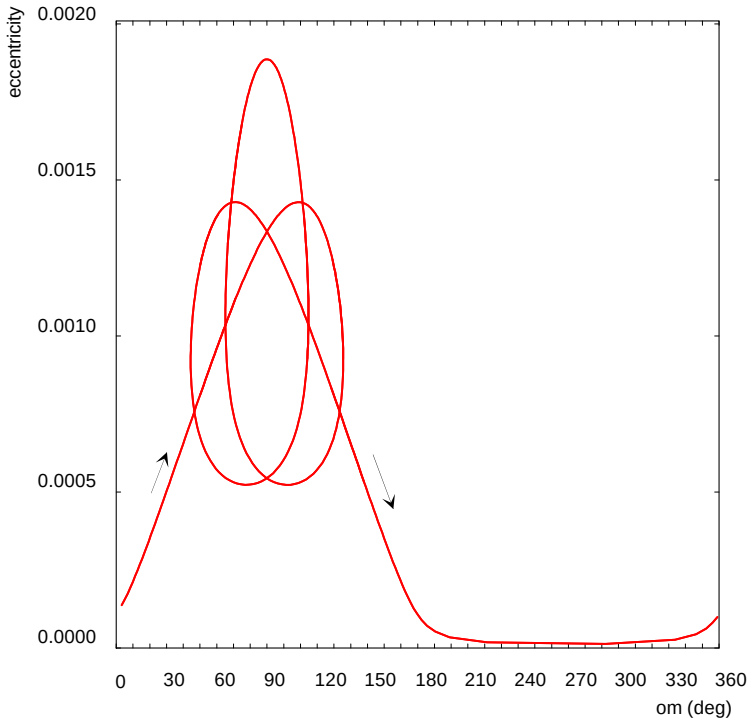


Bild 23-68: Die Variation der oskulierenden Exzentrizität *e* über dem oskulierenden Argument des Perigäums ω über einen drakonitischen Umlauf für eine mittlere Kreisbahn mit den mittleren Bahnparametern $\overline{a}_0 = 6678.140\,km$, $\overline{e}_0 = 0.0$, $\overline{i}_0 = 57°.0$.

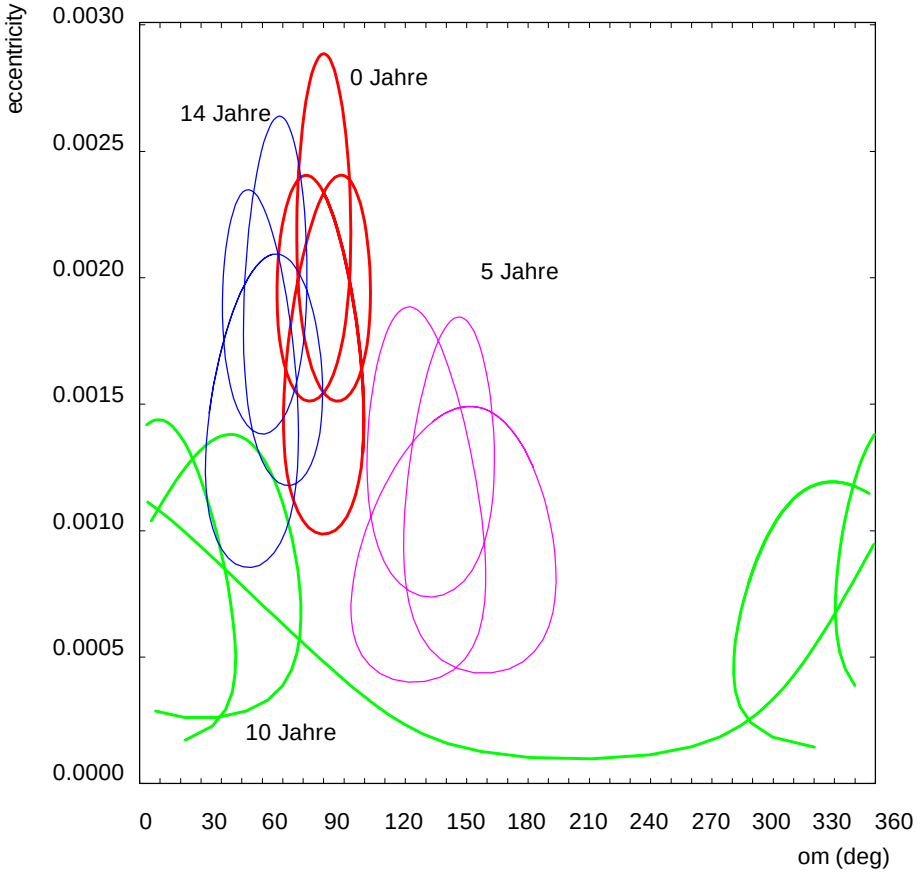


Bild 23-69: Die Variation der oskulierenden Exzentrizität *e* über dem oskulierenden Argument des Perigäums ω über einen drakonitischen Umlauf für eine nichtkreisförmige Bahn mit den mittleren Bahnparametern $\overline{a} = 6678.140\,km$, $\overline{e} = 0.001$, $i = 57°.0$, an der Epoche, nach 5, 10 und 14 Jahren

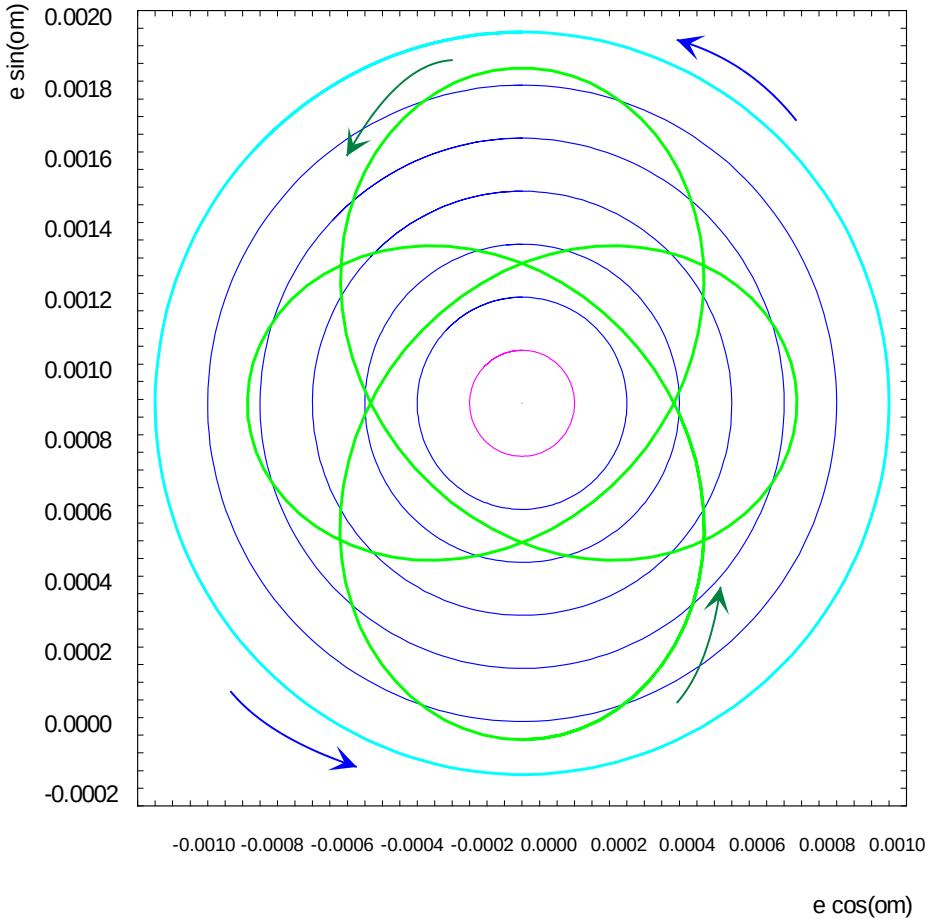


Bild 23-70: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung: Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreise: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittleren Exzentrizitäten $\overline{e}_0$ = 0.00015, 0.00030, 0.00045, 0.00060, 0.00075, 0.00090, 0.00105. Schleifenbewegung: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die formstabile Bewegung mit $\overline{e}_0$ = 0.0, bzw. e_F =0.00939 , $\bar{a}_0$ = 6678.155 km . Die Librationsbewegung hat die Periode 178 Tage.

Zur Ergänzung zeigt Bild 23-69 die kurzperiodische Schleifenbewegung für eine schwach elliptische Bahn, die sich von den vorstehenden Beispielen nur durch die mittlere Exzentrizität $\overline{e} = 0.001$ unterscheidet. Das Gebiet dieser Schleifen wandert im Verlauf eines längeren Zeitraumes über das ganze Bild. Hier dargestellt ist die Bewegung über einen drakonitischen Umlauf an der Epoche, nach 5 Jahren, 10 Jahren und 14 Jahren.

Ein grundsätzlich anderes Librationsverhalten zeigt Bild 23-71 für die sonnensynchrone Bahn in 629 km mittlere Bahnhöhe und die Inklination $\bar{i}_0 = 97°.93$. Man beachte vor allem den andersartigen Verlauf des Durchlaufsinnes sowie den Verlauf der kurzperiodischen Libration des Exzentrizitätsvektors.

Für kleine Exzentrizitäten etwa $\overline{e}_0$ = 0.00225 und die Bahnhöhe H = 629 km, die sonnensynchrone Inklination $\bar{i}_0$ = 97°.97 zeigt Bild 23-72 das langperiodische Librationsverhalten über die Periode 111 Tage und überlagert im Abstand von 28 Tagen das kurzperiodische Verhalten über einen drakonitischen Umlauf. Der Bezug zur jeweiligen Stellung der langperiodischen

Entwicklung ist als Mittelpunkt der kurzperiodischen Kurve klar zu erkennen. Die kurzperiodischen Variationen sind an der Kurve der langperiodischen Variationen wie an einer Perlenschnur aufgehängt.

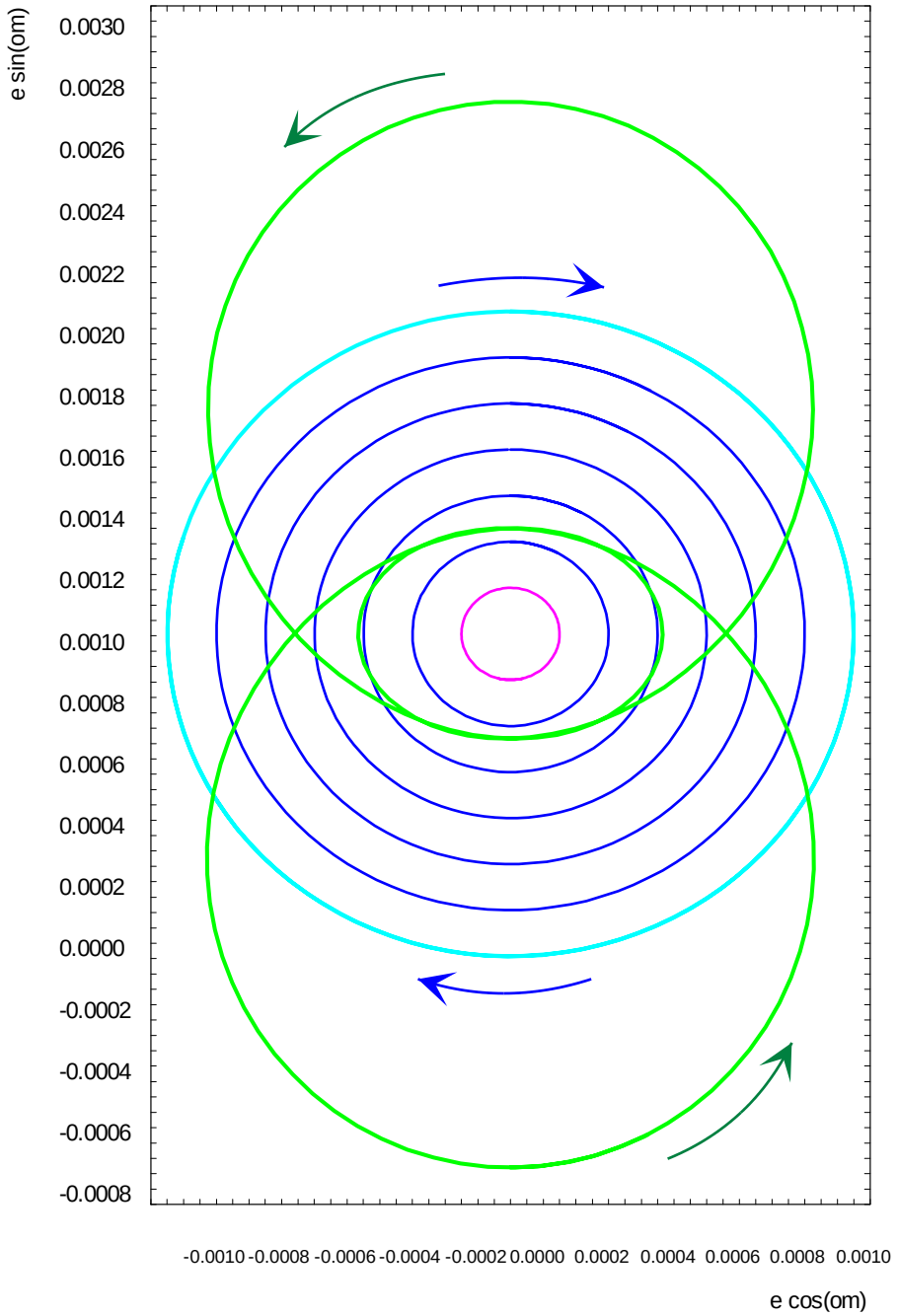


Bild 23-71: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung für die Bahn H = 629 km, $\bar{i}_0$ = 97°.93: Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreise: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittleren Exzentrizitäten $\bar{e}_0$ = 0.00015, 0.00030, 0.00045, 0.00060, 0.00075, 0.00090, 0.00105. Schleifenbewegung: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die formstabile Bewegung mit $\bar{e}_0$ = 0.0, bzw. $e_F = 0.001057$. Die Librationsbewegung hat die Periode 111 Tage

23.11.5 Korrekturen der formstabilen Bewegung

Infolge der langperiodischen Bewegung des Argumentes des Perigäums um die formstabile Bahn für kleine Abweichungen der Exzentrizität von der eingefrorenen Exzentrizität e_F spricht man gerne von einer passiven Kontrolle der Exzentrizität einer Satellitenbahn. Wird diese Abweichung jedoch zu groß, kann eine aktive Korrektur erforderlich werden. Dies ist insbesondere dann notwendig, wenn die Abweichung der Exzentrizität von der eingefrorenen Exzentrizität so groß wird, dass keine Librationsbewegung mehr um die eingefrorene Bahn stattfindet, wie es in Bild 23-67 für die äußeren Kurven der Fall ist. In diesen Fällen wird eine Korrektur des Arguments des Perigäums durchgeführt, wie in Bild 23-73 an einem Beispiel gezeigt wird. In Tabelle 23-26 ist der Verlauf der keplerschen Bahnparameter in der Umgebung einer eingefrorenen Bahn berechnet. Die zur eingefrorenen Bahn entsprechende Exzentrizität e_L auf der gegebenen Bahn wird für das Argument des Perigäums $\omega_L = 90°$ erhalten.

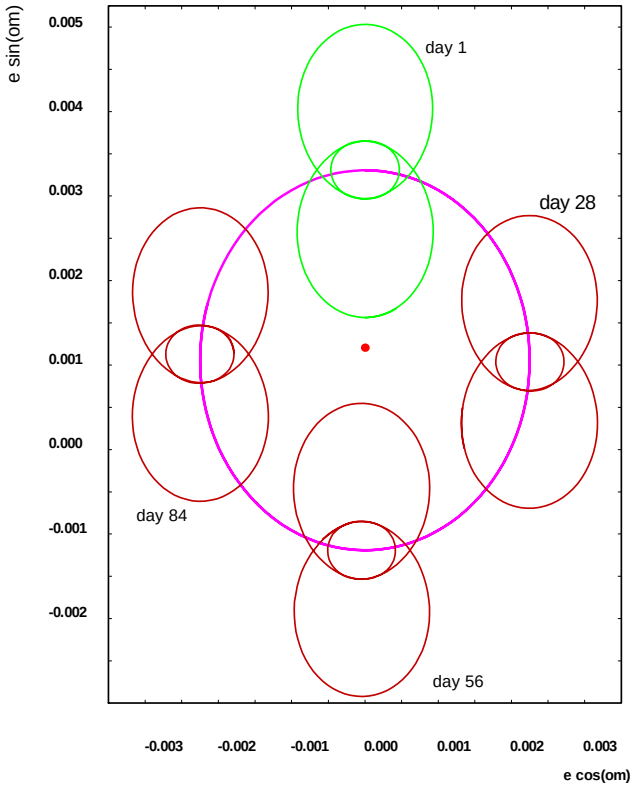


Bild 23-72: Verlauf des Exzentrizitätsvektors in der Umgebung einer eingefrorenen Bewegung für die Bahn H = 629 km, $\bar{i}_0$ = 97°.93: Punkt in der Mitte: formstabile Bewegung, Kreis: langperiodische Bewegung des Exzentrizitätsvektors für die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.00111. Schleifenbewegungen: kurzperiodischer Verlauf des Exzentrizitätsvektors für die Bewegung mit $\bar{e}_0$ = 0.00111, bzw. $e_{(F)} = 0.00225$ an vier verschiedenen Tagen des Librationszyklus 111 Tage.

Infolge der langperiodischen Bewegung des Argumentes des Perigäums um die formstabile Bahn für kleine Abweichungen der Exzentrizität von der eingefrorenen Exzentrizität e_F spricht man gerne von einer passiven Kontrolle der Exzentrizität einer Satellitenbahn. Wird diese Abweichung jedoch zu groß, kann eine aktive Korrektur erforderlich werden. Dies ist insbesondere dann notwendig, wenn die Abweichung der Exzentrizität von der eingefrorenen Exzentrizität so groß wird, dass keine Librationsbewegung mehr um die eingefrorene Bahn stattfindet, wie es in Bild 23-67 für die äußeren Kurven der Fall ist. In diesen Fällen wird eine Korrektur des

Arguments des Perigäums durchgeführt, wie in Bild 23-73 an einem Beispiel gezeigt wird. In Tabelle 23-26 ist der Verlauf der keplerschen Bahnparameter in der Umgebung einer eingefrorenen Bahn berechnet. Die zur eingefrorenen Bahn entsprechende Exzentrizität e_L auf der gegebenen Bahn wird für das Argument des Perigäums $\omega_L = 90°$ erhalten.

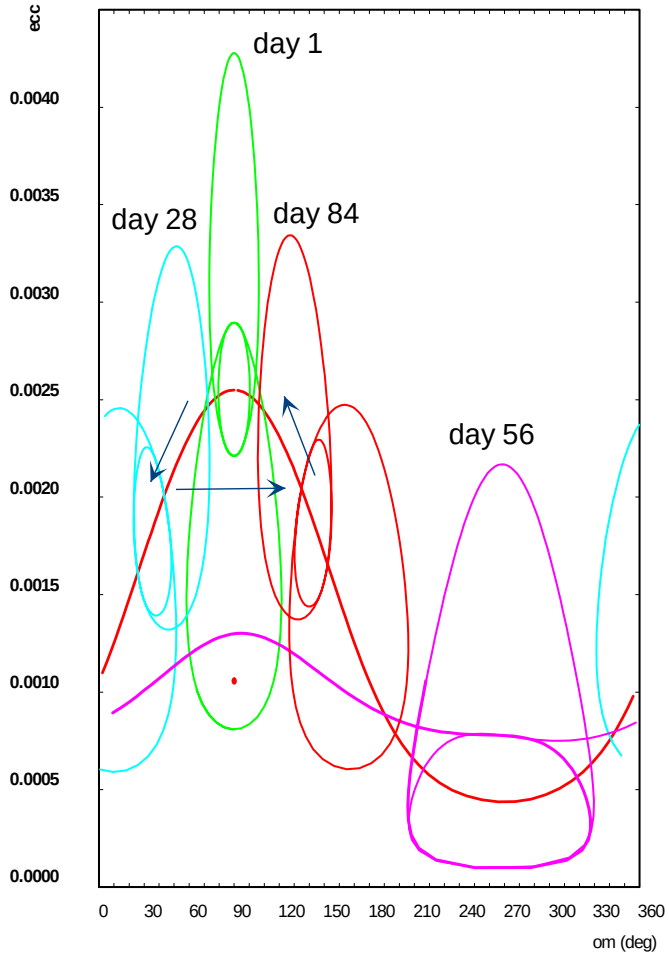


Bild 23-73: Langperiodische Bewegung der Exzentrizität e_L über dem Argument des Perigäums ω_L für die Bahn $\bar{a}_0 = 7007.137\,km$, $\bar{e}_0 = 0.001494$, $\bar{i}_0 = 97°.93$, $\bar{\omega}_0 = 90°.0$. Diese langperiodische Bewegung hat die Periode 111 Tage. Die Kurve der langperiodischen Bewegung ist überlagert mit den entsprechenden kurzperiodischen Verläufen über je einen drakonitischen Umlauf an den Tagen 1, 28, 56, 84 während des 111 tägigen Zyklus. Die Kurven für den jeweiligen kurzperiodischen Verlauf zeigen den typischen Doppel-Acht-Kurvenverlauf. Der Durchlaufsinn der langperiodischen Kurve ist angedeutet, ebenso das Manöver, das nötig ist, um die langperiodische Bewegung in der Nähe des zur formstabilen Bahn gehörigen Argumentes des Perigäums ω_L = 90° zu halten.[1]

Um diesen Punkt herum, den höchsten Punkt der Kurve, wird das Manöver so gelegt, dass das Perigäum längs dieser Kurve vor Erreichen des Maximums beginnt und nach Durchgang durch das Maximum bis zu einem zum Anfangspunkt symmetrischen Wert driftet. Dort wird dann das Perigäumsmanöver durchgeführt. Entsprechend Tabelle 23-26 sind in Tabelle 23-27 die Manöverparameter für die entsprechende Bahn mit den Formeln aus Abschnitt 12.4.2 (Band

[1] aus: GSOC TN 2003-06, 0ctober 28, 2003

III) berechnet. Man sieht in der ersten Spalte das Toleranzintervall $\pm\Delta\omega$, in der zweiten Spalte die Zeitdauer zwischen zwei Manövern, in der vorletzten Spalte das Geschwindigkeitsinkrement und in der letzten Spalte den Treibstoffverbrauch für einen bestimmten Satelliten der Masse m und ein Triebwerk mit vorgegebenem spezifischen Impuls c_e.

YEAR MO DA HO MI SEC	a	e	i	Ω	ω
2003 7 31 12 0 0.000	7007.65953	0.0025013	97.93067	353.09792	103.29136
2003 8 1 0 0 0.000	7007.62220	0.0025079	97.93062	353.59089	102.33887
2003 8 1 12 0 0.000	7007.58488	0.0025141	97.93057	354.08386	101.38709
2003 8 2 0 0 0.000	7007.54756	0.0025197	97.93053	354.57683	100.43596
2003 8 2 12 0 0.000	7007.51023	0.0025249	97.93048	355.06982	99.48541
2003 8 3 0 0 0.000	7007.47291	0.0025295	97.93043	355.56281	98.53540
2003 8 3 12 0 0.000	7007.43559	0.0025337	97.93039	356.05580	97.58586
2003 8 4 0 0 0.000	7007.39826	0.0025374	97.93034	356.54881	96.63674
2003 8 4 12 0 0.000	7007.36094	0.0025406	97.93029	357.04181	95.68798
2003 8 5 0 0 0.000	7007.32362	0.0025433	97.93025	357.53483	94.73953
2003 8 5 12 0 0.000	7007.28629	0.0025455	97.93020	358.02785	93.79133
2003 8 6 0 0 0.000	7007.24897	0.0025473	97.93015	358.52088	92.84334
2003 8 6 12 0 0.000	7007.21165	0.0025485	97.93011	359.01391	91.89548
2003 8 7 0 0 0.000	7007.17432	0.0025493	97.93006	359.50695	90.94772
2003 8 7 12 0 0.000	7007.13700	0.0025495	97.93001	360.00000	90.00000
2003 8 8 0 0 0.000	7007.09968	0.0025493	97.92997	0.49305	89.05226
2003 8 8 12 0 0.000	7007.06235	0.0025485	97.92992	0.98611	88.10446
2003 8 9 0 0 0.000	7007.02503	0.0025473	97.92987	1.47918	87.15653
2003 8 9 12 0 0.000	7006.98771	0.0025456	97.92983	1.97225	86.20843
2003 8 10 0 0 0.000	7006.95038	0.0025434	97.92978	2.46533	85.26010
2003 8 10 12 0 0.000	7006.91306	0.0025407	97.92973	2.95841	84.31149
2003 8 11 0 0 0.000	7006.87574	0.0025375	97.92968	3.45150	83.36254
2003 8 11 12 0 0.000	7006.83841	0.0025338	97.92964	3.94460	82.41320
2003 8 12 0 0 0.000	7006.80109	0.0025296	97.92959	4.43770	81.46341
2003 8 12 12 0 0.000	7006.76377	0.0025250	97.92954	4.93081	80.51312
2003 8 13 0 0 0.000	7006.72644	0.0025198	97.92950	5.42393	79.56227
2003 8 13 12 0 0.000	7006.68912	0.0025142	97.92945	5.91705	78.61080
2003 8 14 0 0 0.000	7006.65180	0.0025080	97.92940	6.41018	77.65865
2003 8 14 12 0 0.000	7006.61447	0.0025014	97.92936	6.90332	76.70576
2003 8 15 0 0 0.000	7006.57715	0.0024943	97.92931	7.39646	75.75208
2003 8 15 12 0 0.000	7006.53983	0.0024868	97.92926	7.88961	74.79753
2003 8 16 12 0 0.000	7006.46518	0.0024702	97.92917	8.87592	72.88560
2003 8 17 0 0 0.000	7006.42786	0.0024612	97.92912	9.36909	71.92808
2003 8 17 12 0 0.000	7006.39054	0.0024517	97.92907	9.86226	70.96943
2003 8 18 0 0 0.000	7006.35321	0.0024417	97.92903	10.35544	70.00959

Tabelle 23-26: Langperiodische Ephemeride für eine Bahn in der Umgebung einer formstabilen Bahn unter Berücksichtigung des analytischen Erdmodells unter Einschluss von J_2, J_3, J_4. Die zugehörige mittlere Bahn hat die Parameter $\overline{a}_0 = 7007.137\,km,\ \overline{e}_0 = 0.001494,\ \overline{i}_0 = 97°.93,\ \overline{\omega}_0 = 90°.0$.

Fall	$\Delta\omega$	ΔT	ω_L (begin)	υ_1	υ_2	$r_1 = r_2$
1	5°	2.6 d	92°.5	-2°.5	2°.5	6996.5415 km
2	10°	5.2 d	95°	-5°	5°	6996.5713 km
3	15°	7.9 d	97°.5	-7.5°	7.5°	6996.6208 km
4	20°	10.5 d	100°	-10°	10°	6996.6901 km
Fall	$\dot{r}_1$	$\dot{r}_2$	$V_1 = V_2$	γ	ΔV	Δm
1	-492 m/s	492 m/s	7.55355 km/s	0°.00747	0.985 m/s	0.0457 kg
2	-928 m/s	928 m/s	7.55352 km/s	0°.01492	1.967 m/s	0.0913 kg
3	-1471 m/s	1471 m/s	7.55346 km/s	0°.02234	2.945 m/s	0.1366 kg
4	-1957 m/s	1957 m/s	7.55339 km/s	0°.02967	3.912 m/s	0.1815 kg

Tabelle 23-27: Manöver zur Stabilisierung der Drift des Argumentes des Perigäums für die Bahn aus Tabelle 23-26. Es wurden vier verschiedene Fälle für unterschiedliche zulässige Toleranzintervalle und Manöverzeiten gerechnet. Angenommen ist ein Satellit der Masse m = 130 kg und einem Heißgastriebwerk mit dem spezifischen Impuls c_e = 2800m/s.

23.12 Variationen der drakonitischen Bewegung durch Einschussfehler

Beim Einschuss eines Satelliten in seine Umlaufbahn sind stets Einschussfehler zu erwarten. Muss eine vorgegebene Zielbahn erreicht werden, müssen die Einschussfehler mit einem Bahnkorrektursystem an Bord des Satelliten korrigiert werden. Die hierzu benötigten Geschwindigkeitsinkremente wurden in den Abschnitten 12.1 bis 12.3 (Band III) hergeleitet. Wenn es jedoch kein Bahnkorrektursystem an Bord des Satelliten gibt, sei es aus Platzgründen, sei es aus Kostengründen oder zur Gewichtsminimierung, muss untersucht werden, wie sich die Einschussfehler über die geplante Lebensdauer des Satelliten auswirken. Erst dann kann beurteilt werden, ob die Missionsziele eines Satellitenprojektes auch bei Verzicht auf ein Bahnkorrektursystem erreicht werden können.

Diese für ein Satellitenprojekt fundamentalen Aussagen können mit sehr einfachen Hilfsmitteln erhalten werden. Es seien die zu erwartenden Einschussfehler in den Keplerelementen Δa , Δe , Δi , $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$ sowie einem Zeitfehler Δt_0 oder entsprechenden anderen Bahnparametern, die Parameter $\bar{a}_n$, $\bar{e}_n$, $\bar{i}_n$, … seien die entsprechenden Nominalbahnelemente. Die Fehler Δa , Δe , … werden an den Nominalbahnelementen angebracht und jeweils die jetzt gültigen Bahnelemente

$$\bar{a} = \bar{a}_n \pm \Delta a \quad , \quad \bar{e} = \bar{e}_n \pm \Delta e \quad , \quad \bar{i} = \bar{i}_n \pm \Delta i \quad , \quad \ldots$$

und die aus ihnen folgenden weiteren Bahnparameter, etwa die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = \overline{P_D}\left(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \ldots\right)$, die mittlere Verschiebung der Knotenlänge $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \overline{\Delta\lambda_\Omega}\left(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \ldots\right)$ pro drakonitischem Umlauf usw. berechnet und auf die Nominalwerte $\overline{P_{d\,n}} = \overline{P_{d\,n}}\left(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \ldots\right)$, $\overline{\Delta\lambda_{\Omega n}} = \overline{\Delta\lambda_{\Omega n}}\left(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \ldots\right)$ bezogen.

Nach N_K drakonitischen Umläufen beträgt der Fehler in der Zeit des Knotenüberfluges

$$\Delta t_\Omega \;=\; N_K \left(\overline{P_D} - \overline{P_{D\,n}} \right) \quad . \tag{23.447}$$

Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} \;=\; \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_D}$$

hängt von den Einschussbahnelementen ab. Es werde in diesem Abschnitt angenommen, dass die Bahnelemente nicht durch weitere („Stör"-) Einflüsse variiert werden, so dass allein der Einfluss der Einschussfehler untersucht werden kann. (Der Einfluss einer weiteren Variation der Anfangsbahnelemente wird im nächsten Abschnitt 23.13 auf S. 315 untersucht). Somit kann in diesem Fall die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ als konstant angenommen werden.

Es seien $\Delta\Omega$ der Fehler im ersten aufsteigenden Knoten und $\Delta t_{\Omega 0}$ der Zeitfehler beim ersten Knotenüberflug. Der Fehler in der geographischen Knotenlänge infolge der Einschussfehler beträgt dann beim ersten Knotenüberflug unter Verwendung der Definition der Sternzeit Θ_G in Greenwich nach Formel (8.132) (Band II)

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 \;&\coloneqq\; \overline{\lambda_{\Omega,0}} - \overline{\lambda_{\Omega\,n,0}} \;= \\
&=\; \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{n0} + \Delta t_{\Omega 0}\right] - \overline{\lambda_{\Omega\,n}}\left[t_{n0}\right] \;= \\
&=\; \bar{\Omega}\left[t_{n0} + \Delta t_{\Omega 0}\right] - \Theta_G\left[t_{n0} + \Delta t_{\Omega 0}\right] - \bar{\Omega}\left[t_{n0}\right] + \Theta_G\left[t_{n0}\right] \;= \\
&=\; \bar{\Omega}\left[t_{n0}\right] + \dot{\Omega}_s\, \Delta t_{\Omega 0} - \bar{\Omega}_n\left[t_{n0}\right] - \Theta_G\left[t_{n0}\right] - \dot{\Theta}\, \Delta t_{\Omega 0} + \Theta_n\left[t_{n0}\right] \;= \\
&=\; \Delta\Omega + \left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) \Delta t_{\Omega 0} \quad ,
\end{aligned}$$

somit schließlich mit der säkularen Drift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ der geographischen Länge des aufsteigenden Knotens

$$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 \;=\; \Delta\Omega + \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \Delta t_{\Omega 0} \quad . \tag{23.448}$$

Mit den Einschussfehlern in den Bewegungsparametern und der fehlerhaften mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ beträgt der Fehler in der Knotenlänge dann nach einem drakonitischen Umlauf

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_1 \;&\coloneqq\; \overline{\lambda_{\Omega,1}} - \overline{\lambda_{\Omega\,n,1}} \;= \\
&=\; \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{n0} + \overline{P_d} + \Delta t_{\Omega 0}\right] - \overline{\lambda_{\Omega\,n}}\left[t_{n0} + \overline{P_{d\,n}}\right] \;= \\
&=\; \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{n0} + \Delta t_{\Omega 0}\right] + \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_d} - \overline{\lambda_{\Omega\,n}}\left[t_{n0}\right] - \dot{\lambda}_{\Omega s,n}\, \overline{P_{d\,n}} \;= \\
&=\; \Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 + \dot{\lambda}_{\Omega s}\, \overline{P_d} - \dot{\lambda}_{\Omega s,n}\, \overline{P_{d\,n}} \;= \\
&=\; \Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 + \overline{\Delta\lambda_\Omega} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega\,n}} \quad .
\end{aligned}$$

Allgemein gilt nach N_K drakonitischen Umläufen mit der Abkürzung

$$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_N \;\coloneqq\; \overline{\lambda_\Omega}\left[t_N\right] - \overline{\lambda_{\Omega\,n}}\left[t_{n,N}\right] \tag{23.449}$$

die Beziehung

$$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_N \;=\; \Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 + N\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega\,n}}\right) \quad , \tag{23.450}$$

wie durch vollständige Induktion bewiesen werden kann:

$$\begin{aligned}\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_{N+1} &:= \overline{\lambda_{\Omega,N+1}} - \overline{\lambda_{\Omega\, n,N+1}} \;= \\ &= \overline{\lambda_\Omega}\left[t_{N+1}\right] - \overline{\lambda_{\Omega\, n}}\left[t_{n,N+1}\right] \;= \\ &= \overline{\lambda_\Omega}\left[t_N\right] + \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} - \overline{\lambda_{\Omega\, n}}\left[t_{n,N}\right] - \dot{\lambda}_{\Omega s,n}\,\overline{P_{D\, n}} \;= \\ &= \Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_0 + (N+1)\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega\, n}}\right) \qquad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Der Fehler in der Zeit wird in der Zeit angegeben, in der die Ephemeride gerechnet wird, bei Satelliten also gewöhnlich in Weltzeit (U.T.C.). Es muss beachtet werden, dass diese Zeit nichts mit der Stellung der Sonne zum Satellitenort, also mit der lokalen Zeit (= mittleren Sonnenzeit), zu tun hat, welche mit der Stellung des Satelliten bezüglich der Erdoberfläche überhaupt nichts zu tun hat. Die Auswirkung des Einschussfehlers auf die mittlere Sonnenzeit wird in Abschnitt 28.7 untersucht.

Die Verschiebung des aufsteigenden Knotens ist ein Maß dafür, wie fehlerhaft der gesamte Bahnverlauf ist, also insbesondere die Spur über der Erdoberfläche. Die Größe $\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right)_N$ kann daher als der mittlere Spurfehler nach N drakonitischen Umläufen bezeichnet werden.

Fall	H_1 [km]	H_2 [km]	$\bar{a}$ [km]	$\bar{e}$	$\bar{V}_1$ [km/s]
1.	$\bar{H}$	$\bar{H}$	7266.47	0.0	7.40640
2.	$\bar{H}$	$\bar{H} + \Delta H$	7271.47	0.00069	7.40895
3.	$\bar{H}$	$\bar{H} - \Delta H$	7261.47	0.00069	7.40385
2b.	$\bar{H} + \Delta H$	$\bar{H}$	7271.47	0.00069	7.40895
4.	$\bar{H} + \Delta H$	$\bar{H} + \Delta H$	7276.47	0.0	7.40137
5.	$\bar{H} + \Delta H$	$\bar{H} - \Delta H$	7266.47	0.00138	7.39621
3b.	$\bar{H} - \Delta H$	$\bar{H}$	7261.47	0.00069	7.41405
5b.	$\bar{H} - \Delta H$	$\bar{H} + \Delta H$	7266.47	0.00138	7.41660
6.	$\bar{H} - \Delta H$	$\bar{H} - \Delta H$	7256.47	0.0	7.41150

Tabelle 23-28**:** Mögliche Bahnen bei Berücksichtigung des Einschussfehlers in der Bahnhöhe bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

BEISPIEL: Gegeben seien die Zielbahnelemente[1]

$$\bar{a}_n = 7266.47\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_n = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_n = 99°.007513 \quad , \quad \bar{\omega}_n = 90°.0 \quad .$$

Es handelt sich hier um eine ganzzahlige sonnensynchrone Bahn („integer orbit“) mit 14 drakonitischen Umläufen pro Tag. Als Einschussfehler werden für die Bahnhöhe und die Inklination

1 aus DLR-GSOC 94-05 und AIAA 96-3659

$$\Delta H = \pm 10\,\text{km} \quad , \quad \Delta i = \pm 0°.03 \quad , \quad \Delta\Omega = 0°.0 \quad , \quad \Delta t_{\Omega 0} = 0.0\,\text{s}$$

angenommen (diese Werte sind 3σ- Werte, die für eine Delta II 7320 gültig sind). Damit ergeben sich zunächst nur bei Berücksichtigung des Fehlers in der Bahnhöhe die sechs Bahnen in Tabelle 23-28. Die diesen Bahnen entsprechenden mittleren drakonitischen Umlaufzeiten $\overline{P_d}$ sind in Tabelle 23-29 enthalten. Hier wird auch der Fehler in der Inklination berücksichtigt, der sich allerdings in einem Umlauf kaum auswirkt.

	A	**B**	**C**
$\overline{P_D}$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	6171.432 s	6171.437 s	6171.427 s
2.	6177.793 s	6177.798 s	6177.788 s
3.	6165.073 s	6165.078 s	6165.068 s
4.	6184.157 s	6184.162 s	6184.152 s
5.	6171.432 s	6171.437 s	6171.427 s
6.	6158.716 s	6158.721 s	6158.711 s

Tabelle 23-29: Auswirkungen der Einschussfehler auf die drakonitische Umlaufzeit bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

In Tabelle 23-30 ist der Zeitfehler $\Delta t_\Omega = N\left(\overline{P_d} - \overline{P_{d\,0}}\right)$ nach zwei Jahren berechnet. Je nach Einschussfehler, in erster Linie bei fehlerhafter Bahnhöhe, müssen nach zwei Jahren entsprechend N = 10226 drakonitischen Umläufen der Nominalbahn beträchtliche Abweichungen gegenüber den Nominalbahnwerten erwartet werden.

	A	**B**	**C**
Δt_Ω	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	0*s*.0	50*s*.9	–51*s*.1
2.	18*h* 4*m* 10*s*.7	18*h* 5*m* 1*s*.5	18*h* 3*m* 19*s*.6
3.	–18*h* 3*m* 48*s*.1	–18*h* 2*m* 57*s*.2	–18*h* 4*m* 39*s*.2
4.	36*h* 8*m* 43*s*.6	36*h* 9*m* 34*s*.4	36*h* 7*m* 52*s*.6
5.	0*s*.2	51*s*.1	–50*s*.8
6.	–36*h* 7*m* 14*s*.0	–36*h* 6*m* 23*s*.0	–36*h* 8*m* 5*s*.1

Tabelle 23-30**:** Zeitfehler nach etwa 2 Jahren N = 10266 drakonitischen Umläufen der Nominalbahn für verschiedene Einschussfehler in Bahnhöhe und Inklination bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

	A	**B**	**C**
$\overline{\Delta\lambda_\Omega} \,/\, \overline{P_d}$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	–25°.714299	–25°.714553	–25°.713792
2.	–25°.740790	–25°.741043	–25°.740537
3.	–25°.687818	–25°.688072	–25°.687565
4.	–25°.767289	–25°.767542	–25°.767036
5.	–25°.714300	–25°.714533	–25°.714046
6.	–25°.661346	–25°.661600	–25°.661092

Tabelle 23-31**:** Fehler in der mittleren Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

	A	**B**	**C**
$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right) / \overline{P_d}$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	+0°.0	–0°.000254	+0°.000507
2.	–0°.026491	–0°.026744	–0°.026238
3.	+0°.026481	+0°.026227	+0°.026734
4.	–0°.052990	–0°.053243	–0°.052737
5.	–0°.000001	–0°.000234	+0°.000253
6.	+0°.052953	+0°.052699	+0°.053207

Tabelle 23-32: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf im Gradmaß bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

	A	**B**	**C**
$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right) / \overline{P_d}$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	+0.000 km	–0.028 km	+0.056 km
2.	–2.949 km	–2.977 km	–2.921 km
3.	+2.948 km	+2.920 km	+2.976 km
4.	–5.899 km	–5.927 km	–5.871 km
5.	–0.000 km	–0.026 km	+0.026 km
6.	+5.895 km	+5.866 km	+5.923 km

Tabelle 23-33: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge pro mittlerem drakonitischem Umlauf im Längenmaß bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713

Die Abweichungen der mittlerem Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf, also die Spurdrift pro Umlauf, ist $\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right) = \overline{\Delta\lambda_\Omega} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega\,0}}$ sind in Tabelle 23-32 im Winkelmaß und in Tabelle 23-33 im Längenmaß berechnet. Die zu erwartenden Fehler am Ende von zwei Jahren sind schließlich in Tabelle 23-34 enthalten. Die Ergebnisse zeigen, dass ohne ein Bahnkorrektursystem an Bord des Satelliten, das imstande ist, Einschussfehler zu korrigieren, keine vorgeschriebene Bodenspur auch nur annähernd garantiert werden kann. Wegen der

Verschiebung der Knotenüberflugzeit ist auch die Erde „unter“ der Bahn weiterrotiert, eine erhebliche Abweichung in der überflogenen Spur muss erwartet werden. Um die Spurdrift berechnen zu können, wird die mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ in den einzelnen fehlerhaften Bahnen nach Tabelle 23-31 benötigt.

	A	**B**	**C**
$\Delta\left(\overline{\lambda_\Omega}\right) / 2a$	$\bar{i}_0$	$\bar{i}_0 - \Delta i$	$\bar{i}_0 + \Delta i$
1.	+0°.000	–2°.598	+5°.185
2.	–270°.907	–273°.494	–269°.240
3.	+270°.805	+268°.207	+273°.392
4.	–541°.896	–544°.483	–539°.309
5.	–0°.010	–2°.393	+2°.587
9.	+541°.518	+538°.920	+544°.115

Tabelle 23-34: Fehler in der Verschiebung der Knotenlänge nach 2 Jahren bei gegebener Nominalbahn $\bar{a}_n$ = 7266.47 km, $\bar{e}_n$ = 0.0, $\bar{i}_n$ = 99°.005713 ◀

23.13 Variationen der drakonitischen Bewegung durch Bewegungseinflüsse

Die bisher hergeleiteten Beziehungen der drakonitischen Bewegung setzen voraus, dass die drakonitische Bewegung analytisch für alle Zeiten exakt darstellbar ist. Dies ist jedoch wegen der bekannten Einflüsse auf eine Bahn zumindest für langfristige Aussagen nur näherungsweise richtig. Die große Bahnhalbachse erdnaher Satellitenbahnen (Höhe < 1000 km) wird säkular durch den Luftwiderstand beeinflusst, die Inklination sonnensynchroner Bahnen durch die Gravitationseinwirkung der Sonne, je nach Bahntyp auch andere Bahnparameter durch weitere Einflüsse, die eine vorgegebene Sollbahn langfristig verändern. Bei Bedarf können diese Bahnänderungen wieder durch Bahnkorrekturen ausgeglichen werden. Diese Manöver können im Rahmen einer Bahnanalyse abgeschätzt werden. Damit wird es möglich, ein ausreichendes Bahnkorrektursystem – Triebwerk, Treibstoff, eventuell ein automatisches Steuersystem – an Bord eines Satelliten mitführen zu können. Während einer Mission werden die „Störeinflüsse“ auf die mittlere Sollbahn aus der Beobachtung der wahren Bahn ermittelt und daraus Korrekturzeitpunkt, Korrekturgröße, Richtung des Korrekturimpulses und eventuell weitere Manöverparameter berechnet.

Im Folgenden werden die Variationen einiger fundamentaler Größen der drakonitischen Bewegung in erster Ordnung in J_2 berechnet und ihre Wirkungen sowie ein eventuell aufzuwendender Korrekturaufwand an einigen Spezialfällen abgeschätzt.

23.13.1 Variation der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

Wir betrachten die genäherte mittlere drakonitische Umlaufzeit erster Ordnung nach Formel (23.162) auf Seite 177

$$\overline{P_D} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{\overline{a}^3}{\mu}}\left\{1+\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{p}^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)\cos^2\overline{i}\,\right]\right\}+O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.451}$$

Da sie nur von den Elementen $\overline{a}$, $\overline{e}$, $\overline{i}$ abhängt und da stets

$$\left(\overline{a}\right)_s^{\cdot} \;=\; \dot{a}_s \quad , \quad \left(\overline{e}\right)_s^{\cdot} \;=\; \dot{e}_s \quad , \quad \left(\overline{i}\right)_s^{\cdot} \;=\; \left(i\right)_s^{\cdot} \quad , \quad \left(\overline{P_d}\right)_s^{\cdot} \;=\; \left(P_d\right)_s^{\cdot} \quad , \tag{23.452}$$

lautet ihre säkulare Variation

$$\left.\frac{d\overline{P_D}}{dt}\right|_s \;=\; \left(P_D\right)_s^{\cdot} \;=\; \frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{a}}\,\dot{a}_s+\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{e}}\,\dot{e}_s+\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{i}}\left(i\right)_s^{\cdot} \tag{23.453}$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{a}} \;&=\; 3\pi\sqrt{\frac{\overline{a}}{\mu}}- \\ &\quad -\frac{3}{4}\pi J_2\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\overline{a}^3}\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)\cos^2\overline{i}\,\right]+O\left(J_2^2\right)\end{aligned} \tag{23.454}$$

$$\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{e}} \;=\; 3\pi J_2\frac{\overline{e}\,R_E^2}{\sqrt{\mu\,\overline{a}}\left(1-\overline{e}^2\right)^3}\left[2+\sqrt{1-\overline{e}^2}-\left(10+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)\cos^2\overline{i}\,\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.455}$$

$$\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{i}} \;=\; 3\pi J_2\frac{R_E^2\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}^2}\right)}{\sqrt{\mu\,\overline{a}}\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\cos\overline{i}\,\sin\overline{i}+O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.456}$$

Im Fall im Mittel kreisförmiger Bahnen ($\overline{e}\equiv\overline{e}_0=0$) vereinfachen sich diese Ausdrücke zu

$$\overline{P_D}\left[\overline{e}=0\right] \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{\overline{a}^3}{\mu}}\left[1+\frac{3}{2}J_2\frac{R_E^2}{\overline{a}^2}\left(1-4\cos^2\overline{i}\,\right)\right]+O\left(J_2^2\right) \tag{23.457}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{a}}\left[\overline{e}=0\right] \;&=\; 3\pi\sqrt{\frac{\overline{a}}{\mu}}-\frac{3}{2}\pi J_2\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,a^3}}\left(1-4\cos^2\overline{i}\,\right)+O\left(J_2^2\right) \\ \frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{e}}\left[\overline{e}=0\right] \;&=\; O\left(J_2^2\right) \\ \frac{\partial\overline{P_D}}{\partial\overline{i}}\left[\overline{e}=0\right] \;&=\; 24\,\pi J_2\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,a}}\cos\overline{i}\,\sin\overline{i}+O\left(J_2^2\right) \quad .\end{aligned} \tag{23.458}$$

Die Veränderung der mittleren drakonitischen Umlaufzeit verursacht langfristig einen Fehler in der Knotenüberflugzeit, der folgendermaßen abgeschätzt werden kann:

Es sei $\overline{P_{D0}}$ die mittlere drakonitische Umlaufzeit, welche aus Formel (23.451) mit den Epocheelementen $\overline{a}_0=\overline{a}\left(t_0\right)$, $\overline{e}_0=\overline{e}\left(t_0\right)$ und $\overline{i}_0=\overline{i}\left(t_0\right)$ berechnet werden kann. Linearisierung um diesen Wert liefert

$$\overline{P_D} \;\coloneqq\; \overline{P_{D0}}+\left(P_D\right)_s^{\cdot}\,\left(t-t_0\right)+\ldots \tag{23.459}$$

Falls $\left(P_D\right)_s^{\cdot} \neq 0$, die mittlere drakonitische Umlaufzeit also gestört wird, dauert der erste drakonitische Umlauf

$$\overline{P_{D1}} \;=\; t_{\Omega 1} - t_{\Omega 0} \;=\; \overline{P_{D0}} + \left(P_D\right)_s^{\cdot}\,\left(t_{\Omega 1} - t_{\Omega 0}\right)$$

bzw.

$$\overline{P_{D1}} \;=\; \frac{\overline{P_{D0}}}{1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}} \quad . \tag{23.460}$$

Nach zwei drakonitischen Umläufen hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit den Wert

$$t_{\Omega 2} - t_{\Omega 1} \;=\; \overline{P_{D1}} + \left(P_D\right)_s^{\cdot}\,\left(t_{\Omega 2} - t_{\Omega 1}\right) \quad ,$$

somit

$$\overline{P_{D2}} \;=\; \frac{\overline{P_{D1}}}{1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}} \;=\; \frac{\overline{P_{D0}}}{\left[1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^2} \quad . \tag{23.461}$$

Der N-te drakonitische Umlauf hat die Dauer

$$\overline{P_{DN}} \;=\; t_{\Omega N} - t_{\Omega,N-1} \;=\; \frac{\overline{P_{D0}}}{\left[1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^N} \quad , \tag{23.462}$$

wie man leicht durch vollständige Induktion sieht:

$$\overline{P_{D,N+1}} \;=\; t_{\Omega,N+1} - t_{\Omega N} \;=\; \overline{P_{DN}} + \left(P_D\right)_s^{\cdot}\,\left(t_{\Omega,N+1} - t_{\Omega N}\right)$$

$$\overline{P_{D,N+1}} \;=\; \frac{\overline{P_{DN}}}{1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}} \;=\; \frac{\overline{P_{D0}}}{\left[1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^{N+1}} \quad \text{q.e.d.}$$

Für kleine Variationen $\left(P_D\right)_s^{\cdot}$ kann näherungsweise

$$\frac{1}{\left[1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^{\nu}} \;\approx\; \left[1+\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^{\nu} \;\approx\; 1+\nu\left(P_D\right)_s^{\cdot} + O\left(\left(\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right)^2\right) \tag{23.463}$$

gesetzt werden. Damit hat der N-te drakonitische Umlauf nach Formel (23.462) näherungsweise die Dauer (= mittlere drakonitische Umlaufzeit)

$$\overline{P_{DN}} \;\approx\; \overline{P_{D0}}\left[1+N\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right] \quad . \tag{23.464}$$

Nach zwei drakonitischen Umläufen ist seit der Epoche $t_{\Omega 0}$ das Zeitintervall

$$t_{\Omega 2} - t_{\Omega 0} \;= \overline{P_{D1}} + \overline{P_{D2}} \;=\; \frac{\overline{P_{D0}}}{1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}}\left[1+\frac{1}{1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}}\right] \tag{23.465}$$

vergangen. Nach N drakonitischen Umläufen beträgt die Gesamtzeitdauer

$$t_{\Omega N} - t_{\Omega 0} \;=\; \overline{P_{D0}} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\left[1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^{\nu}} \quad , \tag{23.466}$$

wie die vollständige Induktion zeigt:

$$t_{\Omega,N+1} - t_{\Omega 0} \;=\; t_{\Omega,N+1} - t_{\Omega N} + t_{\Omega N} - t_{\Omega 0} \;=\; \overline{P_{D\,0}} \sum_{\nu=1}^{N+1} \frac{1}{\left[1-\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^{\nu}} \quad . \text{ q.e.d. } \blacktriangleleft$$

Das Zeitintervall für N drakonitische Umläufe errechnet sich mit der Näherung (23.464) aus

$$t_{\Omega N} - t_{\Omega 0} \;\approx\; \overline{P_{D\,0}} \left[N + \sum_{\nu=1}^{N} \nu \, \left(P_D\right)_s^{\cdot} \right] + O\left(\left(\left(P_D\right)_s^{\cdot} \right)^2 \right) \quad ,$$

somit

$$t_{\Omega N} - t_{\Omega 0} \;\approx\; N\,\overline{P_{D\,0}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(N+1\right) \left(P_D\right)_s^{\cdot} \right] + O\left(\left(\left(P_D\right)_s^{\cdot} \right)^2 \right) \quad . \tag{23.467}$$

Nach N_K drakonitischen Umläufen beträgt der Zeitfehler bei Knotenüberflug

$$\Delta t_{\Omega} \;\approx\; \frac{1}{2} N_K \left(N_K + 1\right) \overline{P_{D\,0}} \left(P_D\right)_s^{\cdot} \quad . \tag{23.468}$$

Für große N gilt die allgemeine Aussage:

- *Der Fehler in der Knotenüberflugzeit wächst quadratisch mit der Anzahl der drakonitischen Umläufe an.*

BEISPIEL: Für die sonnensynchrone kreisförmige Satellitenbahn mit Reproduktion der Subsatellitenbahn nach 3 Tagen und 43 drakonitischen Umläufen ergeben sich die Bahnelemente

$$\bar{a}_0 \;=\; 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 \;=\; 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 \;=\; 98°.498 \quad .$$

Mit den Variationen

$$\dot{a}_s \;=\; -1.28892 \times 10^{-7}\ \text{km/s} \quad ,$$

(was maximalem Solarfluss in der betreffenden Bahnhöhe entspricht[1]) und der Annahme[2]

$$\left(i\right)_s^{\cdot} \;=\; -9°.68737343 \times 10^{-5}\ \ 1/\text{d}$$

sowie der mittleren drakonitischen Umlaufzeit

$$\overline{P_{D\,0}} \;=\; 1^h\,40^m\,27^s.9 \;=\; 6027^s.9$$

folgen die partiellen Ableitungen nach den Formeln (23.454) und (23.456)

$$\left.\frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \bar{a}}\right|_0 \;=\; 1^s.262\,\frac{1}{\text{km}} \quad , \quad \left.\frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \bar{i}}\right|_0 \;=\; -9^s.089\,\frac{1}{\text{rad}} \quad ,$$

somit

$$\left(\overline{P_D}\right)_s^{\cdot} = -1.62522 \times 10^{-7}\ \text{rad/sec} \quad .$$

Nach N_K = 5235 Umläufen, also etwa einem Jahr, beträgt die mittlere drakonitische Umlaufzeit nach Formel (23.464) $5^s.12855$ weniger als zu Beginn, also nur noch

---

1 nach CAPELLARI ET AL. [1976], p. 4-55

2 aus H. KLINKRAD [1982]

$$\overline{P_{D\,N_K}} \;=\; 6022^{s}.8 \quad .$$

Der Satellit überfliegt den Knoten infolge der säkularen Variationen in der großen Bahnhalbachse und der Inklination nach Formel (23.468) um

$$\Delta t_{\Omega} \;=\; 7^{h}\,27^{m}\,33^{s}.1$$

früher als wenn die Bahnelemente nicht gestört würden. ◀

23.13.2 Die Spurdrift

Die vom Satelliten überflogene Bodenspur weicht infolge der langfristigen Variationen in den mittleren Elementen im Laufe der Zeit von einer Sollspur ab, welche durch die Vorgabe der mittleren Elemente ausgewählt wurde. Die oskulierenden Variationen der Spur pro drakonitischem Umlauf können in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden. Als Referenz der Spur einer Satellitenbahn wollen wir im Rahmen der drakonitischen Bewegung den Knotenüberflug wählen. Die charakterisierende Größe ist die mittlere geographische Länge $\overline{\lambda_{\Omega}}$ des aufsteigenden Bahnknotens. Sie werde um einen Anfangswert entwickelt

$$\overline{\lambda_{\Omega}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega\,0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,(t-t_0)^2 + \ldots \qquad (23.469)$$

Die Wanderung des aufsteigenden Knotens von $\overline{\lambda_{\Omega\,0}}$ zu $\overline{\lambda_{\Omega}}$ im Zeitintervall $t-t_0$ charakterisiert die Verschiebung der „Spur“ des Satelliten auf der Erdoberfläche, also die *„Spurdrift“* im Zeitintervall.

Die säkulare Drift der Knotenlänge zur Epoche t_0 ist nach Formel (23.224) auf (Seite 199) gegeben

$$\dot{\lambda}_{\Omega s0} \;=\; \dot{\Omega}_{s0} - \dot{\Theta} \quad . \qquad (23.470)$$

$\dot{\Omega}_{s0}$ ist die nominale säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens, $\dot{\Theta}$ die tropische Rotation des Zentralkörpers. $\dot{\Omega}_{s0}$ enthält nach Formel (20.60) (Band III, Abschnitt 20.2.3) nur die Anfangs-*Kepler*elemente $\overline{a}_0$, $\overline{e}_0$, $\overline{i}_0$. Somit hat die Variation der Knotenlängendrift infolge der langfristigen Variationen in den mittleren Epocheelementen die Form

$$\ddot{\lambda}_{\Omega s0} \;=\; \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{a}_0}\,\dot{a}_s + \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{e}_0}\,\dot{e}_s + \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{i}_0}\,(i)_s^{\cdot} \quad . \qquad (23.471)$$

Mit Formel (23.471) ist, wenn in $\dot{\Omega}_{s0}$ nur die J_2 - Störungen berücksichtigt werden,

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{a}_0} \;=\; \frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \overline{a}_0} \;=\; \frac{21}{4}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^3\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\cos\overline{i}_0 + \ldots \qquad (23.472)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{e}_0} \;=\; \frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \overline{e}_0} \;=\; -6\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2\,\overline{e}_0}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}^2\right)^3}\cos\overline{i}_0 + \ldots \qquad (23.473)$$

$$\frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s0}}{\partial \overline{i}_0} \;=\; \frac{\partial \dot{\Omega}_{s0}}{\partial \overline{i}_0} \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}}\,\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}^2\right)^2}\sin\overline{i}_0 + \ldots \quad , \qquad (23.474)$$

wobei die partiellen Ableitungen aus den Formeln (21.4) bis (21.6) erhalten worden sind. Wenn die mittlere Knotenlänge in Formel (23.469) nach dem Zeitraum $t-t_0$ den nominalen Sollwert $\overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}(t-t_0)$ annimmt, ist

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega}}\right) \;:=\; \frac{1}{2}\,\ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,(t-t_0)^2 + \ldots \tag{23.475}$$

der Anteil der Spurdrift, der eine Folge der Variationen der Anfangsbahnelemente ist. Er wird *Spurfehler* genannt. Für ihn gilt:

- *Der Spurfehler wächst quadratisch mit der Zeit.*

Nach dem Zeitintervall $t-t_0$ befindet sich der Satellit nicht notwendig wieder im aufsteigenden Knoten seiner Bahn, sondern kann sich an einer beliebigen anderen wenn auch wohldefinierten Stelle seiner Bahn aufhalten. Wird verlangt, dass der Satellit nach dem Zeitintervall $t-t_0$ wirklich den Knoten überfliegt, muss auch die Variation der mittleren drakonitischen Umlaufzeit berücksichtigt werden. Die Berechnung der Spurdrift erfordert daher zunächst die Kenntnis der Variation der Knotenlängenverschiebung.

23.13.3 Der Einfluss einer Variation der Knotenlängendrift

Die Anfangsepoche werde in den Moment des ersten Knotenüberflugs $t_{\Omega 0}$ gelegt. Die dann gültigen mittleren Bahnelemente definieren als Epocheelemente die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_{D0}}$ sowie die säkulare Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s0}$. Nach N drakonitischem Umläufen hat die mittlere Knotenlänge nach Formel (23.469) den Wert

$$\overline{\lambda_{\Omega N}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,(t_{\Omega N} - t_{\Omega 0}) + \frac{1}{2}\,\ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,(t_{\Omega N} - t_{\Omega 0})^2 + \ldots \tag{23.476}$$

Mit dem Näherungsausdruck für das Zeitintervall über N drakonitische Umläufe aus Formel (23.467) lautet dieser Ausdruck

$$\overline{\lambda_{\Omega N}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,N\,\overline{P_{D0}}\left[1+\frac{1}{2}(N+1)\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right] + \frac{1}{2}\,\ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,N^2\,\overline{P_{D0}}^2\left[1+\frac{1}{2}(N+1)\left(P_D\right)_s^{\cdot}\right]^2 + \ldots$$

Unter der Annahme

$$\begin{aligned} \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\left(P_D\right)_s^{\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \\ \left(P_D\right)_s^{\cdot 2} &= O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{23.477}$$

wird

$$\overline{\lambda_{\Omega N}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,N\,\overline{P_{D0}} + \frac{1}{2}\,\dot{\lambda}_{\Omega s0}\,N\,(N+1)\,\overline{P_{D0}}\,\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2}\,\ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,N^2\,\overline{P_{D0}}^2 + \ldots \tag{23.478}$$

Die Epocheelemente definieren den Sollwert der Knotenlänge nach N drakonitischen Umläufen mit dem Wert

$$\overline{\lambda_{\Omega N0}} \;:=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\, N\, \overline{P_{D0}} \;=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + N\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \quad , \tag{23.479}$$

wobei die zur Epoche gültige Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf mit

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \;:=\; \dot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}} \tag{23.480}$$

bezeichnet werde. Die Variationen der Nominalbahnelemente verursachen somit die Drift der Knotenlänge bei Knotenüberflug

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N}}\right) \;:=\; \overline{\lambda_{\Omega N}} - \overline{\lambda_{\Omega 0}} - N\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \tag{23.481}$$

bzw.

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N}}\right) \;=\; \frac{1}{2}\, N\,\overline{P_{D0}}\left[\dot{\lambda}_{\Omega s0}\left(N+1\right)\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\, N\,\overline{P_{D0}}\right] \quad . \tag{23.482}$$

Das N-te Knotenlängenintervall hat daher die Länge

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}} \;:=\; \overline{\lambda_{\Omega N}} - \overline{\lambda_{\Omega,N-1}} \quad , \tag{23.483}$$

somit

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}} \;=\; \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\, N\,\overline{P_{D0}}\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2}\,\ddot{\lambda}_{\Omega s0}\left(2N-1\right)\overline{P_{D0}}^{\,2} + \ldots \tag{23.484}$$

Die Veränderung des Wertes der Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt dann nach N drakonitischen Umläufen

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}\right) \;:=\; \overline{\Delta\lambda_{\Omega N}} - \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \quad , \tag{23.485}$$

somit

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}\right) \;=\; \left[\dot{\lambda}_{\Omega s0}\, N\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \frac{1}{2}\left(2N-1\right)\ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}}\right]\overline{P_{D0}} + \ldots \tag{23.486}$$

23.13.4 Der Einfluss einer Variation der Knotenlängenverschiebung

Die Kenntnis der Variation der Knotenlängenverschiebung kann für manche Untersuchungen und zur Klärung der Zusammenhänge von Nutzen sein. Sie wird daher im Folgenden hergeleitet und zu den bisher behandelten Variationen der drakonitischen Bewegung in Relation gestellt.

Nach N drakonitischen Umläufen hat die Knotenlängenverschiebung nach Formel (23.484) die Variation

$$\begin{aligned}\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}\right)_s^{\cdot} \;&=\; \left(\Delta\lambda_{\Omega N}\right)_s^{\cdot} \;= \\ &=\; \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\, N\,\overline{P_{D0}}\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \\ &\quad + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\, N\left(P_D\right)_s^{\cdot 2} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\, N\left(P_D\right)_s^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2}\,\dddot{\lambda}_{\Omega s0}\left(2N-1\right)\left(P_D\right)_s^{\cdot 2} + \\ &\quad + \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\left(2N-1\right)\overline{P_{D0}}\left(P_D\right)_s^{\cdot\cdot} + \ldots\end{aligned}$$

Hier dürfen neben den Näherungen

$$\begin{aligned} \left(P_D\right)_s^{\cdot\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \\ \ddot{\lambda}_{\Omega s0} &= O\left(J_2^2\right) \\ \dot{\lambda}_{\Omega s0}\left(P_D\right)_s^{\cdot\cdot} &= O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{23.487}$$

angenommen werden. Es bleibt daher

$$\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}\right)_s^{\cdot} = \ddot{\lambda}_{\Omega s0}\,\overline{P_{D0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s0}\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ldots = \left(\Delta\lambda_{\Omega o}\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{23.488}$$

Die säkulare Variation der Knotenlängenverschiebung durch die säkularen Variationen in den Elementen ist mit $\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)_s^{\cdot} = \left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}$ durch

$$\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)_s^{\cdot} = \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{a}_0}\,\dot{a}_s + \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{e}_0}\,\dot{e}_s + \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{i}_0}\left(i\right)_s^{\cdot} \tag{23.489}$$

gegeben. Im Fall von Erdsatellitenbahnen ist die durch das Erdschwerefeld verursachte säkulare Variation $\dot{\Omega}_{s0}$ aus Formel (20.15) (Band III) und die mittlere drakonitische Umlaufzeit aus Formel (23.451) (auf S. 316) gegeben. Damit ergibt sich in erster Näherung der Ausdruck (es ist $\overline{p}_0 = \overline{a}_0\left(1-\overline{e}_0^2\right), \overline{n}_0 = \sqrt{\mu/\overline{a}_0^3}$)

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} &= -3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0 - \\ &\quad - 2\pi\frac{\dot{\Theta}}{\overline{n}_0}\left\{1+\frac{3}{4}J_2\frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right]\right\} + O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{23.490}$$

sowie für mittlere Kreisbahnen

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\left[\overline{e}_0 = 0\right] = -2\pi\dot{\Theta}\sqrt{\frac{\overline{a}_0^3}{\mu}} - 3\pi J_2 R_E^2\left[\frac{\cos\overline{i}_0}{\overline{a}_0^2} + \frac{\dot{\Theta}}{\sqrt{\mu\,\overline{a}_0}}\left(1-4\cos^2\overline{i}_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{23.491}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{a}_0} &= -3\pi\dot{\Theta}\sqrt{\frac{\overline{a}_0}{\mu}} + 6\pi J_2\frac{R_E^2}{\overline{a}_0^3\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\cos\overline{i}_0 + \\ &\quad + \frac{3}{4}\pi J_2\dot{\Theta}\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\overline{a}_0^3}\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left[1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}-\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right] + \\ &\quad + O\left(J_2^2\right)\ \left[\frac{\text{rad}}{\text{km}}\right] \end{aligned} \tag{23.492}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\overline{e}_0} &= -12\pi J_2\frac{\overline{e}_0 R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^3}\cos\overline{i}_0 + \\ &\quad + 3\pi J_2\frac{\overline{e}_0 R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^3}\frac{\dot{\Theta}}{\overline{n}_0}\left[-\left(2+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)+\left(10+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)\cos^2\overline{i}_0\right] + \\ &\quad + O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{23.493}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{i}_0} &= 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2}\sin\bar{i}_0 - \\ &\quad - 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{p}_0^2}\frac{\dot{\Theta}}{\bar{n}_0}\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right)\cos\bar{i}_0\sin\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad ,\end{aligned} \tag{23.494}$$

im Fall kreisförmiger Bahnen ($\bar{e}_0 = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{a}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] &= -3\pi\dot{\Theta}\sqrt{\frac{\bar{a}_0}{\mu}} + 6\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^3}\cos\bar{i}_0 + \\ &\quad + \frac{3}{2}\pi J_2 \dot{\Theta}\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\bar{a}_0^3}}\left(1-4\cos^2\bar{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{km}}\right] \\ \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{e}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] &= O\left(J_2^2\right) \\ \frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{i}_0}\left[\bar{e}_0 = 0\right] &= 3\pi J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2}\sin\bar{i}_0 - 24\,\pi J_2 \dot{\Theta}\frac{R_E^2}{\sqrt{\mu\,\bar{a}_0}}\cos\bar{i}_0\sin\bar{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \quad .\end{aligned} \tag{23.495}$$

Mit dem jetzt bekannten $\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}$ können die Formeln (23.478) bis (23.486) zur Berechnung der Knotenlänge bei Überflug des Satelliten sowie der Knotenlängenverschiebung und ihrer Driften umformuliert werden. Man erhält

$$\overline{\lambda_{\Omega N}} = \overline{\lambda_{\Omega 0}} + N\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} + \Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N}}\right) \tag{23.496}$$

mit dem Spurfehler

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega N}}\right) = \frac{1}{2}N^2\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\,\overline{P_{D0}} + \frac{1}{2}N\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{23.497}$$

sowie die Knotenlängenverschiebung im N-ten Umlauf

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}} = \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} + \Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}\right) \tag{23.498}$$

mit der Abweichung vom Nominalwert

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}\right) = \left(N-\frac{1}{2}\right)\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\,\overline{P_{D0}} + \frac{1}{2}\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \ldots \tag{23.499}$$

BEISPIEL: Für die Bahn (siehe auch Beispiel in Abschnitt 23.13.1)

$$\bar{a}_0 = 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 98°.498$$

wird

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{a}}\right|_0 = -9.23669901\times10^{-5}\ \frac{\text{rad}}{\text{km}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial \bar{i}}\right|_0 = 8.68737343\times10^{-3} \quad .$$

Mit den säkularen Variationen

$$\dot{a}_s \;=\; -1.28892\times10^{-7} \;\; \text{km/s} \quad , \quad (i)_s^{\cdot} \;=\; -9°.68737343\times10^{-5} \;\; 1/\text{d}$$

lautet die säkulare Variation der mittleren Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf zur Epoche nach Formel (23.489)

$$(\Delta\lambda_{\Omega 0})_s^{\cdot} \;=\; 0''.209238265 \;\; 1/\text{d} \quad .$$

Von besonderem Interesse sind hier die Anteile der Knotenlängenvariation, die von der Variation in Halbachse und Inklination getrennt herrühren. Es ist

$$\left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{a}}\right|_0 \dot{a}_s \;=\; 0''.212165562 \;\; \frac{1}{\text{d}} \quad , \quad \left.\frac{\partial\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right)}{\partial\bar{i}}\right|_0 (i)_s^{\cdot} \;=\; -2''.927297344\times10^{-3} \;\; \frac{1}{\text{d}} \quad .$$

Die Variation der Knotenlänge wird also im Wesentlichen durch die Variation der großen Bahnhalbachse beeinflusst. Entsprechend dem numerischen Beispiel in Abschnitt 23.12 auf S. 310 wird

$$(P_d)_s^{\cdot} \;=\; -1.62522\times10^{-7} \quad .$$

Mit der mittleren drakonitischen Epocheumlaufzeit $\overline{P}_{d\,0}$ = 6027.9 sec lautet der Spurfehler nach 5235 drakonitischen Umläufen (ungefähr ein Jahr) mit Formel (23.497) auf S. 323

$$\Delta\left(\overline{\lambda_{\Omega}}_N\right) \;=\; 55°.575 \quad ,$$

wobei der zweite Teil in Formel (23.497) nur den Wert 0°.011 ausmacht, also vernachlässigbar ist. Die Knotenlängenverschiebung hat sich gegenüber dem Anfangswert $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ = –25°.116279 mit Formel (23.499) auf S. 323 um den Wert

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}_N\right) \;=\; 0°.021228$$

entsprechend Formel (23.498) auf

$$\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}_N \;=\; -25°.09051$$

geändert. ◀

Anmerkungen: Die in diesem Beispiel getrennt aufgeführten Variationsanteile können entgegengesetztes Vorzeichen und unter Umständen sogar dem Betrag nach nahezu gleich groß sein, so dass auch bei starker Einzelvariation nur eine schwache Gesamtvariation resultieren kann. Die Variation in der Inklination darf nur über einige Monate als konstante somit säkulare Variation aufgefasst werden. Im Allgemeinen ist sie jedoch langperiodisch. Ähnliches gilt auch für die Variation der großen Bahnhalbachse, die wegen der mehrfach periodischen Variabilität des Solarflusses ebenfalls über Monate, allenfalls ein bis zwei Jahre als konstant aufgefasst werden darf. Diese wechselseitigen Variabilitäten wirken sich auf die Drift der Knotenlänge sehr unterschiedlich aus, die für langfristige Analysen daher sehr sorgfältig mitberücksichtigt werden müssen.◀

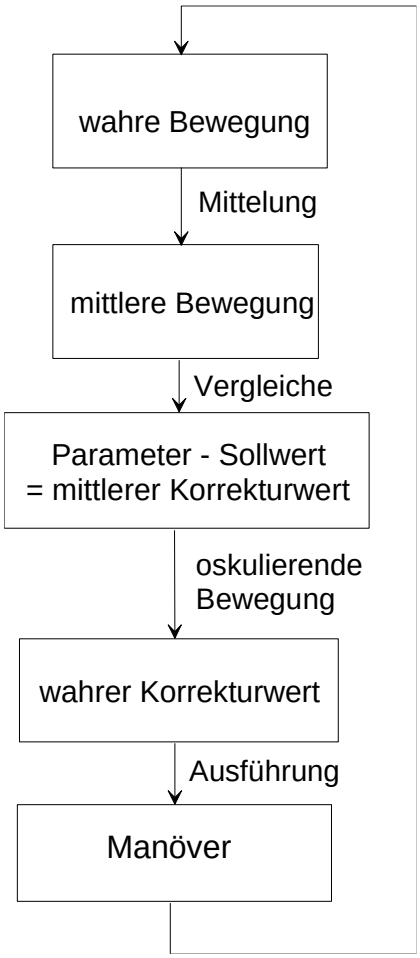


Bild 23-74: Berechnung von Manöver Parametern

Im operationellen Betrieb eines Satelliten wird die aktuelle Knotenlänge λ_Ω aus der beobachteten Bahn ständig berechnet, die zugehörige mittlere Knotenlänge $\overline{\lambda_\Omega}$ berechnet und mit der Solllänge $\overline{\lambda_{\Omega N}}$ verglichen, die aus den (mittleren) Sollwerten analytisch erhalten wird. Die wahre Abweichung beträgt also

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)_w \;:=\; \overline{\lambda_\Omega} - \overline{\lambda_{\Omega N}} \quad , \tag{23.500}$$

wobei der Sollwert aus den gegebenen Nominalwerten

$$\overline{\lambda_{\Omega N}} \;:=\; \overline{\lambda_{\Omega 0}} + N\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} \tag{23.501}$$

errechnet wird. Der mittlere Verlauf der Spurabweichung nach N drakonitischen Umläufen wird daher aus

$$\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right)_w \;=\; \overline{\lambda_\Omega} - \left(\overline{\lambda_{\Omega 0}} + N\,\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\right) \tag{23.502}$$

erhalten, der entsprechende wahre Verlauf aus dem entsprechenden oskulierenden Wert $\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_w$. Diese Größe ist jetzt allerdings von dem für die Mittelung verwendeten analytischen Bahnmodell abhängig und muss daher im Vergleich mit der wahren Bewegung überwacht werden.

23.13.5 Korrekturzyklus für Spurstabilität

Überschreitet der wahre Fehler in der Knotenlänge $\Delta\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_w$ aus Formel (23.502) ein vorgesehenes Toleranzintervall $\Delta\lambda_k$

$$\left|\Delta\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_w\right| > \left|\Delta\lambda_k\right| \quad ,$$

muss die Bahn korrigiert werden. Es wird angestrebt, möglichst selten korrigieren zu müssen, so dass die gesamte Toleranzbreite $\pm\Delta\lambda_k$ ausgenutzt werden kann.

Für eine Abschätzung des Zeitbedarfs, nach dem zu korrigieren ist, wird die wahre Abweichung $\Delta\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_w$ durch den vor der Mission abschätzbaren Spurfehler $\Delta\left(\overline{\Delta\lambda_{\Omega N}}\right)$ aus Formel (23.497) ersetzt. Da das Korrekturintervall ohne Einschränkung in der Form $\pm\Delta\lambda_k$ angenommen werden darf und die säkularen Variationen der Elemente eine stetige Variation der Knotenlängendrift gemäß Formel (23.488) verursachen, kann man für einen Korrekturzyklus folgendermaßen vorgehen wie in Bild 23-75 (auf Seite 328) anschaulich dargestellt wird. Es seien $\overline{a}_0$, $\overline{e}_0$, $\overline{i}_0$ und entsprechend $\overline{\lambda_{\Omega 0}}$ die Sollwerte in großer Halbachse, Exzentrizität, Inklination und Knotenlänge. Die Anfangswerte für Halbachse, Exzentrizität und Inklination für einen Korrekturzyklus werden durch Änderungen der Sollwerte um gewisse noch zu berechnende Beträge $\Delta\overline{a}$, $\Delta\overline{e}$, $\Delta\overline{i}$ so gewählt, dass die Knotenlänge das eine Ende des erlaubten Knotenintervalls erreicht (Punkt 1 in Bild 23-75):

$$\overline{a}_1 = \overline{a}_0 + \Delta\overline{a} \quad , \quad \overline{e}_1 = \overline{e}_0 + \Delta\overline{e} \quad , \quad \overline{i}_1 = \overline{i}_0 + \Delta\overline{i} \quad , \quad \overline{\lambda_{\Omega 1}} = \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \Delta\lambda_k \quad .$$

Für das einmalige Durchlaufen des gesamten erlaubten Toleranzintervalls $2\Delta\lambda_k$ kann mit Formel (23.497) die dazu benötigte Anzahl von drakonitischen Umläufen berechnet werden:

$$N_K = \frac{1}{\overline{P_{D0}}\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}}\left[-\frac{1}{2}\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}\left(P_D\right)_s^{\cdot} + \sqrt{\frac{1}{4}\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}^2\left(P_D\right)_s^{\cdot 2} + 4\overline{P_{D0}}\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\Delta\lambda_k}\right] \quad . \quad (23.503)$$

(In dieser Formel kann das negative Zeichen vor der Wurzel nicht stehen, da N_K stets als nicht negativ angenommen werden kann). Wird N_K in der Zeitformel (23.467) auf S. 318 eingesetzt, wird das benötigte Zeitintervall Δt_k zum einmaligen Durchlaufen des Toleranzintervalls erhalten. Somit wird das andere Ende des erlaubten Gesamtintervalls erreicht (Punkt 3)

$$\overline{a}_3 = \overline{a}_0 \quad , \quad \overline{e}_3 = \overline{e}_0 \quad , \quad \overline{i}_3 = \overline{i}_0 \quad , \quad \overline{\lambda_{\Omega 3}} = \overline{\lambda_{\Omega 0}} - \Delta\lambda_k \quad .$$

Die Elemente variieren nach weiteren $2\Delta\lambda_k$, da jetzt „unterhalb“ der Sollwerte, wieder im doppelten Längenintervall zurück bis zu den Werten (Punkt 5)

$$\overline{a}_1 = \overline{a}_0 - \Delta\overline{a} \quad , \quad \overline{e}_1 = \overline{e}_0 - \Delta\overline{e} \quad , \quad \overline{i}_1 = \overline{i}_0 - \Delta\overline{i} \quad , \quad \overline{\lambda_{\Omega 5}} = \overline{\lambda_{\Omega 1}} \quad .$$

Erst jetzt werden die Bahnelemente korrigiert, und zwar die Halbachse um den Wert $2\Delta\overline{a}$, die Exzentrizität um $2\Delta\overline{e}$ und die Inklination um $2\Delta\overline{i}$. Da während eines Zyklus das Intervall $2\left|\Delta\lambda_k\right|$ zweimal durchlaufen wird, beträgt der gesamte Korrekturzyklus wegen der quadratischen Gleichung (23.475) das Doppelte des Zeitintervalls Δt_k , also

$$Z_\lambda \;=\; 2\,\Delta t_k \qquad . \tag{23.504}$$

Für Abschätzungen ist der Fehler nicht allzu groß, wenn in Formel (23.503) sowie in Formel (23.467) die Faktoren mit $\left(P_d\right)_s^{\cdot}$ vernachlässigt werden. Man erhält dann in guter Näherung die bekannte Formel

$$Z_\lambda \;\approx\; 4\sqrt{\frac{\left|\Delta\lambda_k\right|\,\overline{P_{D\,0}}}{\left|\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot}\right|}} \qquad . \tag{23.505}$$

In der Mitte des erlaubten Längenintervalls wird der Sollwert $\overline{\lambda_{\Omega\,0}}$ erreicht (Punkt 2 bzw. Punkt 4). Dies ist nach dem ersten Zeitintervall $\Delta t_k / \sqrt{2} \approx 0.3\Delta t$ der Fall bzw. vor Ende des Zyklus. Die wahre Knotenlänge ist also zu etwa 70 % in der „linken“ Intervallhälfte. Diese Aussagen können in dem folgenden Satz zusammengefasst werden:

- *Für positive Fehlerdriften* $\left(\Delta\lambda_\Omega\right)_s^{\cdot}$ *liegt der Scheitel der Korrekturparabel im Westen, der Zyklus beginnt mit einer geographischen Länge östlich des Sollpunktes, zum halben Zyklus westlich, am Ende wieder im Osten. Während 70 % eines Korrekturzyklus liegt der wahre Knoten westlich des Sollpunktes.*

BEISPIEL: Für die sonnensynchrone kreisförmige Satellitenbahn (siehe auch die vorhergehenden Beispiele) mit Reproduktion der Subsatellitenbahn nach 3 Tagen und 43 drakonitischen Umläufen mit den Soll-Bahnelementen

$$\overline{a}_0 \;=\; 7153\,\mathrm{km} \quad , \quad \overline{e}_0 \;=\; 0.0 \quad , \quad \overline{i}_0 \;=\; 98°.498$$

mit der Variation

$$\left(\Delta\lambda_{\Omega 0}\right)_s^{\cdot} \;=\; 0''.209238265 \;\; 1/\mathrm{d} \quad ,$$

der drakonitischen Umlaufzeit zur Epoche $\overline{P_{D\,0}}$ = 6027*s*.9 und dem vorgegebenen Toleranzintervall

$$\Delta\lambda_k \;=\; \pm 10\,\mathrm{km} \;\cong\; 0°.0898$$

wird für den Korrekturzyklus nach Formel (23.505)

$$Z_\lambda \;=\; 41^d.53$$

erhalten.

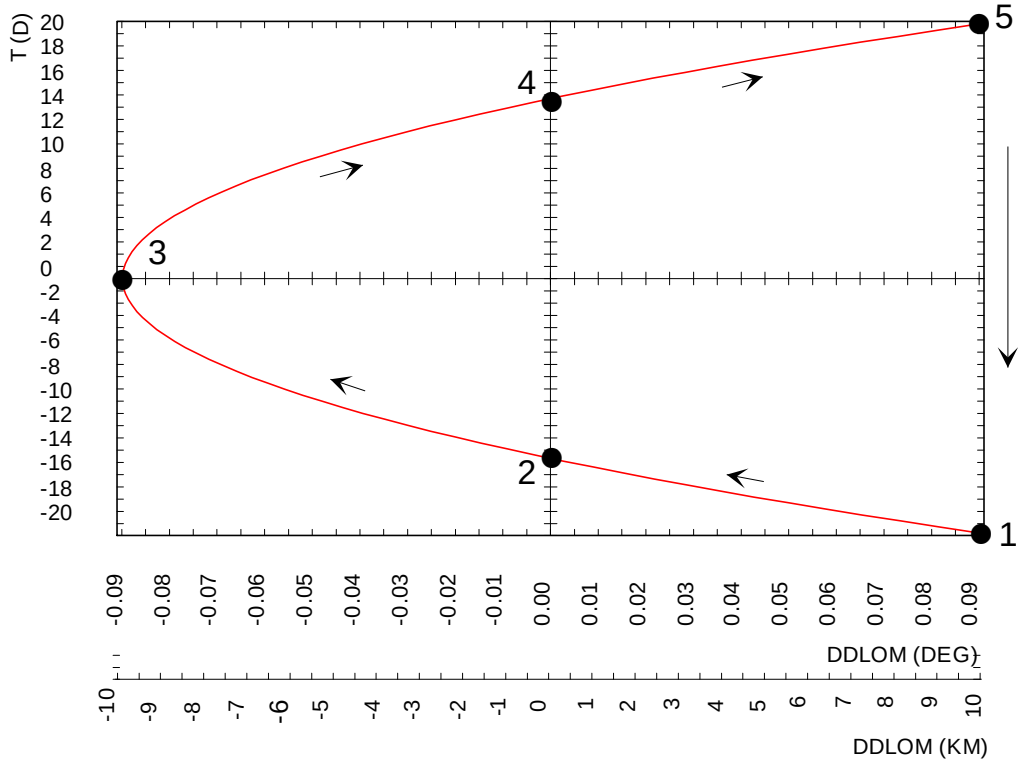


Bild 23-75: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Zeit für das Toleranz-Knotenlängenintervall ± 10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit

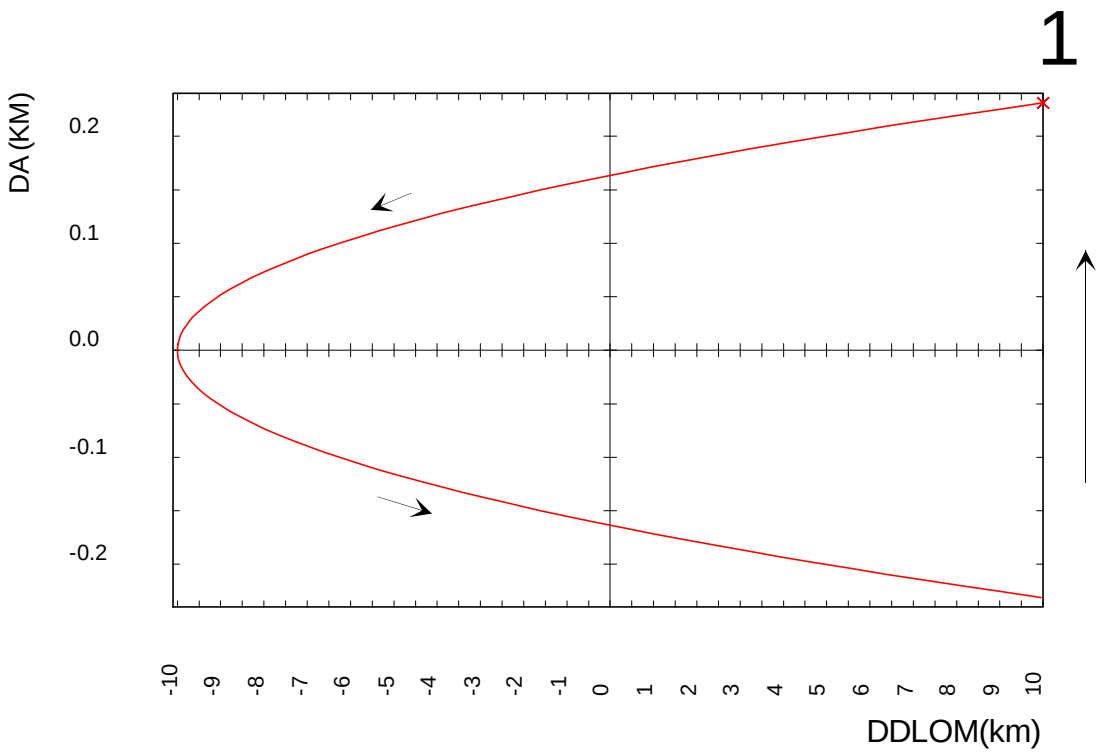


Bild 23-76: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Halbachse für das Toleranz-Knotenlängenintervall ±10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit

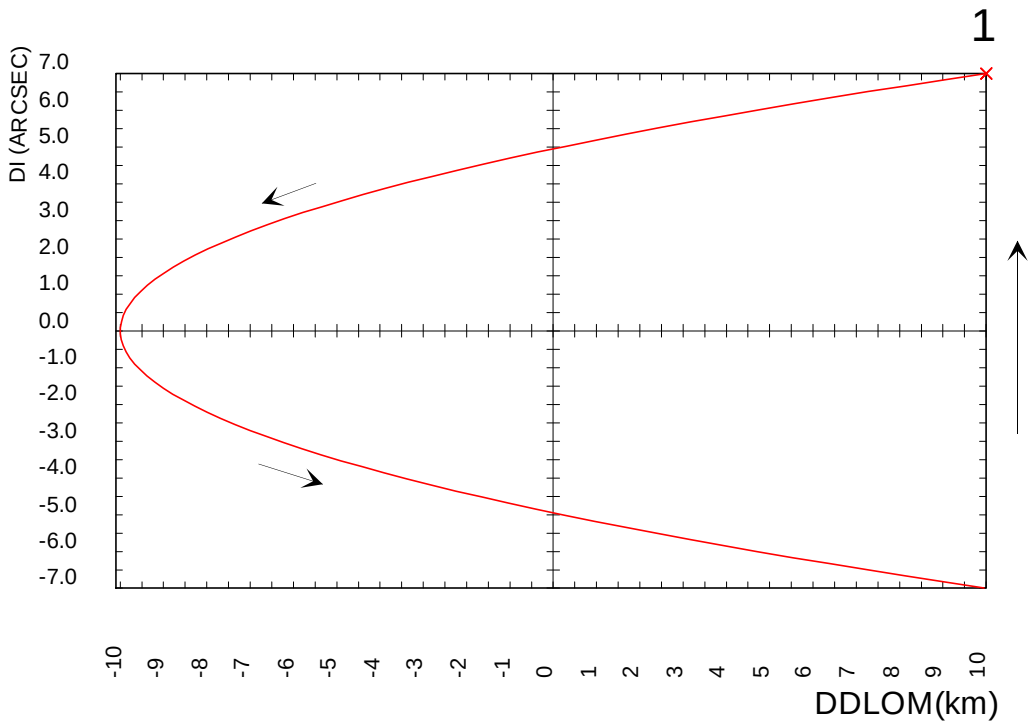


Bild 23-77: Korrekturzyklus zur Spurstabilität über der Inklination für das Toleranz-Knotenlängenintervall ± 10 km für die sonnensynchrone kreisnahe Bahn mit 3:43 Reproduzierbarkeit

In Bild 23-75 auf Seite 328 ist der Fehler in Knotenlänge (in Einheiten km bzw. im Gradmaß) auf die Mitte des erlaubten Knotenlängenintervalls $2\Delta\bar{\lambda}_k$ reduziert, entsprechend dem Sollwert $\overline{\lambda_{\Omega 0}}$. Das Zeitintervall umfasst das doppelte Durchlaufen des Toleranzintervalls, das vollständig ausgenutzt wird. Entscheidend ist somit die Wahl der Anfangsbahnelemente $\bar{a}_1$, $\bar{e}_1$, $\bar{i}_1$ bei Beginn des Zyklus in Punkt 1. Ergänzend zeigen Bild 23-76 auf Seite 328 und Bild 23-77 auf Seite 329 die entsprechenden Variationen in großer Bahnhalbachse und Inklination über dem Toleranzintervall. Der Verlauf der Korrektur nach Beendigung eines Zyklus ist jeweils durch einen Pfeil markiert.

Am Ende des Korrekturzyklus muss die Bahn korrigiert werden, die große Bahnhalbachse um den Wert

$$2\Delta\bar{a} \;=\; \dot{a}_s\, Z_\lambda \quad , \tag{23.506}$$

die Exzentrizität um

$$2\Delta\bar{e} \;=\; \dot{e}_s\, Z_\lambda \tag{23.507}$$

und die Inklination um

$$2\Delta\bar{i} \;=\; (i)^{\cdot}_s\, Z_\lambda \quad . \tag{23.508}$$

Die hier erforderlichen Bahnkorrekturen werden in transversaler und eventuell auch normaler Richtung durchgeführt. Die Bahnkorrekturen in transversaler Richtung werden am geschicktesten im Perizentrum der Bahn angebracht, da dann tangentialer und transversaler Richtungsvektor übereinstimmen. Aus dem absoluten Geschwindigkeitsvektor im *Leibniz*system[1]

[1] Siehe etwa Formel (4.290) in Abschnitt 4.4.2 (Band II)

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{r}_0 + r\dot{\zeta}\,\mathbf{q}_0 = V_R\,\mathbf{r}_0 + V_T\,\mathbf{q}_0 \tag{23.509}$$

folgt der Beschleunigungsvektor (4.303)

$$\ddot{\mathbf{r}} = b_R\,\mathbf{r}_0 + b_T\,\mathbf{q}_0 + b_N\,\mathbf{c}_0 \tag{23.510}$$

mit[1]

$$b_R = \dot{V}_R - \dot{\zeta}\,V_T \;\;,\;\; b_T = \dot{r}\,\dot{\zeta} + \dot{V}_T = \frac{\dot{G}}{r} \;\;,\;\; b_N = \dot{V}_N = \frac{G}{r}\dot{\eta} \quad . \tag{23.511}$$

Wird das Korrekturmanöver im Perizentrum der Bahn durchgeführt, ist kein Manöver in radialer Richtung erforderlich. Es bleibt daher das Manöver in transversaler Richtung zu betrachten. Dazu wird

$$\dot{V}_T = -\frac{G}{r^2}\dot{r} + \frac{1}{r}\dot{G} \quad . \tag{23.512}$$

Mit den Beziehungen (11.68), (11.69) und (11.81) wird

$$\dot{G} = \frac{\mu}{2G}\left[\left(1-e^2\right)\dot{a} - 2\,a\,e\,\dot{e}\right] \tag{23.513}$$

und die (23.512) entsprechende Differenzengleichung lautet

$$\Delta V_T = -\frac{G}{r^2}\Delta r + \frac{\mu}{2rG}\left[\left(1-e^2\right)\left(2\Delta\bar{a}\right) - 2\,a\,e\left(2\Delta\bar{e}\right)\right] \quad . \tag{23.514}$$

Der Satellit hat im Perizentrum keine radiale Bahnänderung $\left(\Delta r\left[\upsilon = 0°\right] = 0\right)$ und die Geschwindigkeit (12.82)

$$V_P = \sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}} \quad . \tag{23.515}$$

Dies führt (im Rahmen einer *Kepler*bewegung) im Perizentrum auf das transversale Geschwindigkeitsinkrement im Rahmen der in diesem Abschnitt behandelten Manöver

$$\Delta V_T\left[\upsilon = 0°\right] = \frac{\mu}{2a^2 V_P}\left(2\Delta\bar{a}\right) - \frac{eV_P}{\sqrt{1+e}}\left(2\Delta\bar{e}\right) \tag{23.516}$$

sofern Fehlergrößen in Halbachse und Exzentrizität vorgegeben sind.

Wird ein Bahnmanöver aus der Bahnebene heraus gewünscht, muss das Geschwindigkeitsinkrement in normaler Richtung ΔV_N bestimmt werden. Da (siehe Formel (4.391)) $(i)^{\cdot} = \dot{\eta}\cos u$ wird nach der letzten der Formeln in (23.511)

$$\Delta V_N = \frac{G}{r\cos u}\left(2\Delta\bar{i}\right) \quad . \tag{23.517}$$

und mit $G = \sqrt{\mu\,p}$ auch

$$\Delta V_N \;\; = \;\; \frac{p}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{1}{\cos u}\left(2\Delta\bar{i}\right) \tag{23.518}$$

benötigt, wobei, um den Schub zu minimieren, in einem Knoten (also $\cos u = 1$) korrigiert werden sollte.

---

[1] Unter Verwendung der Beziehungen (4.304), (4.306), (4.307) und (4.315)

BEISPIEL: Es werden unterschiedliche Einflüsse auf das Spurverhalten der (schon in den vorhergehenden Beispielen behandelten) Bahn

$$\bar{a}_0 = 7153\,\text{km} \quad , \quad \bar{e}_0 = 0.0 \quad , \quad \bar{i}_0 = 98°.498$$

abgeschätzt. Berücksichtigt wird maximale ($\rho_{\max}$) und minimale ($\rho_{\min}$) Luftdichte als Folge der Sonnenaktivität und unterschiedliche Einflüsse durch die Sonnengravitation. Entsprechend sind die säkularen Variationen in Halbachse bei

$$\rho_{\min}: \quad \dot{a}_{s,I} = -1.12016\times10^{-8} \quad \text{km/s}$$

$$\rho_{\max}: \quad \dot{a}_{s,II} = -1.28892\times10^{-7} \quad \text{km/s}$$

und in Inklination (berücksichtigend tageszeitliche [1, 2] bzw.[3, 4] und jahreszeitliche [1, 3] bzw. [2, 4] Schwankungen[1]):

$$(i)^{\cdot}_{s,1} = -4°.12\times10^{-5} \ \text{1/d} \qquad \left(T_\Omega = 11^h, \text{Juni}\right)$$

$$(i)^{\cdot}_{s,2} = -9°.36\times10^{-5} \ \text{1/d} \qquad \left(T_\Omega = 9^h\,40^m, \text{Juni}\right)$$

$$(i)^{\cdot}_{s,3} = -8°.00\times10^{-5} \ \text{1/d} \qquad \left(T_\Omega = 11^h, \text{Dezember}\right)$$

$$(i)^{\cdot}_{s,4} = -12°.12\times10^{-5} \ \text{1/d} \qquad \left(T_\Omega = 9^h\,40^m, \text{Dezember}\right)$$

Dies bewirkt die säkularen Variationen in der Knotenlänge im Winkelmaß

$(\Delta\lambda_\Omega)^{\cdot}_s$	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	0".0171509 1/d	0".0155124 1/d	0".0159377 1/d	0".0143800 1/d
$\dot{a}_{s,II}$	0".2108769 1/d	0".2092383 1/d	0".2096637 1/d	0".2081062 1/d

Tabelle 23-35: Säkulare Variation der Knotenlängenverschiebung in Bogensekunden infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination

sowie im Längenmaß

$(\Delta\lambda_\Omega)^{\cdot}_s$	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	0.53 m/d	0.48 m/d	0.49 m/d	0.44 m/d
$\dot{a}_{s,II}$	6.52 m/d	6.47 m/d	6.48 m/d	6.44 m/d

Tabelle 23-36: Säkulare Variation der Knotenlängenverschiebung in Meter infolge von Variation in großer Bahnhalbachse und Inklination

Für das Toleranzintervall $\Delta\lambda_k = 10\,\text{km}$ ergeben sich mit Formel (23.505) die Korrekturzyklen

1 aus Klinkrad [1982]

Z_λ	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	145*d*.1	152*d*.6	150*d*.5	158*d*.4
$\dot{a}_{s,II}$	41*d*.4	41*d*.5	41*d*.5	41*d*.7

Tabelle 23-37. Korrekturzyklus für Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination

Daher sind mit den Formeln (23.506) und (23.508) folgende Änderungen nötig in großer Bahnhalbachse

$2\Delta\bar{a}$	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	0.140 km	0.148 km	0.146 km	0.153 km
$\dot{a}_{s,II}$	0.461 km	0.462 km	0.462 km	0.464 km

Tabelle 23-38**:** Änderungen in der großen Bahnhalbachse zum Erhalt der Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination

und Inklination

$2\Delta\bar{i}$	$(i)^{\cdot}_{s,1}$	$(i)^{\cdot}_{s,2}$	$(i)^{\cdot}_{s,3}$	$(i)^{\cdot}_{s,4}$
$\dot{a}_{s,I}$	21“.5	51“.4	43“.3	74“.0
$\dot{a}_{s,II}$	6“.1	14“.0	12“.0	19“.5

Tabelle 23-39**:** Änderungen in der Inklination zum Erhalt der Spurstabilität als Folge der Variationen von großer Bahnhalbachse und Inklination

Der Korrekturbedarf kann mit den Formeln (23.516) und (23.518), da es sich um eine Kreisbahn handelt, näherungsweise aus

$$\Delta V_t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}}\left(2\Delta\bar{a}\right)$$

$$\Delta V_c = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}}\left(2\Delta\bar{i}\right)$$

abgeschätzt werden. Es ergeben sich die Werte für den Tangentialschub

ΔV_t	$(i)_{s,1}^{\cdot}$	$(i)_{s,2}^{\cdot}$	$(i)_{s,3}^{\cdot}$	$(i)_{s,4}^{\cdot}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.073 m/s	–0.077 m/s	–0.076 m/s	–0.080 m/s
$\dot{a}_{s,II}$	–0.241 m/s	–0.241 m/s	–0.241 m/s	–0.243 m/s

Tabelle 23-40**:** Halbachsenkorrektur pro Spurkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkrement

Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für den Tangentialschub über eine erwartete Lebensdauer von 2 Jahren enthält folgende Tabelle:

ΔV_t	$(i)_{s,1}^{\cdot}$	$(i)_{s,2}^{\cdot}$	$(i)_{s,3}^{\cdot}$	$(i)_{s,4}^{\cdot}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.368 m/s/2a	–0.369 m/s/2a	–0.364 m/s/2a	–0.369 m/s/2a
$\dot{a}_{s,II}$	–4.252 m/s/2a	–4.242 m/s/2a	–4.242 m/s/2a	–4.257 m/s/2a

Tabelle 23-41**:** Geschwindigkeitsinkrement zur Halbachsenkorrektur in 2 Jahren

Für den Normalschub sind folgende Werte zu erwarten:

ΔV_c	$(i)_{s,1}^{\cdot}$	$(i)_{s,2}^{\cdot}$	$(i)_{s,3}^{\cdot}$	$(i)_{s,4}^{\cdot}$
$\dot{a}_{s,I}$	–0.779 m/s	–1.861 m/s	–1.333 m/s	–2.679 m/s
$\dot{a}_{s,II}$	–0.222 m/s	–0.506 m/s	–0.433 m/s	–0.705 m/s

Tabelle 23-42**:** Inklinationskorrektur pro Spurkorrekturzyklus, Geschwindigkeitsinkremente

Das Gesamtgeschwindigkeitsinkrement für den Normalschub über eine Lebensdauer von 2 Jahren enthält folgende Tabelle:

ΔV_c	$(i)_{s,1}^{\cdot}$	$(i)_{s,2}^{\cdot}$	$(i)_{s,3}^{\cdot}$	$(i)_{s,4}^{\cdot}$
$\dot{a}_{s,I}$	–3.922 m/s/2a	–8.908 m/s/2a	–6.470 m/s/2a	–12.353 m/s/2a
$\dot{a}_{s,II}$	–3.917 m/s/2a	–8.907 m/s/2a	–7.622 m/s/2a	–12.350 m/s/2a

Tabelle 23-43**:** Geschwindigkeitsinkrement zur Inklinationskorrektur in 2 Jahren

Die vorstehenden Tabellen zeigen, dass die Inklinationskorrektur mehr Schub erfordern kann als die Halbachsenkorrektur. Der zu erwartende Gesamtschub beträgt im günstigsten Fall über 2 Jahre

$$|\Delta V| \approx 12\,\text{m/s/2a} \quad ,$$

im ungünstigsten Fall

$$|\Delta V| \approx 17\,\text{m/s/2a} \quad .$$

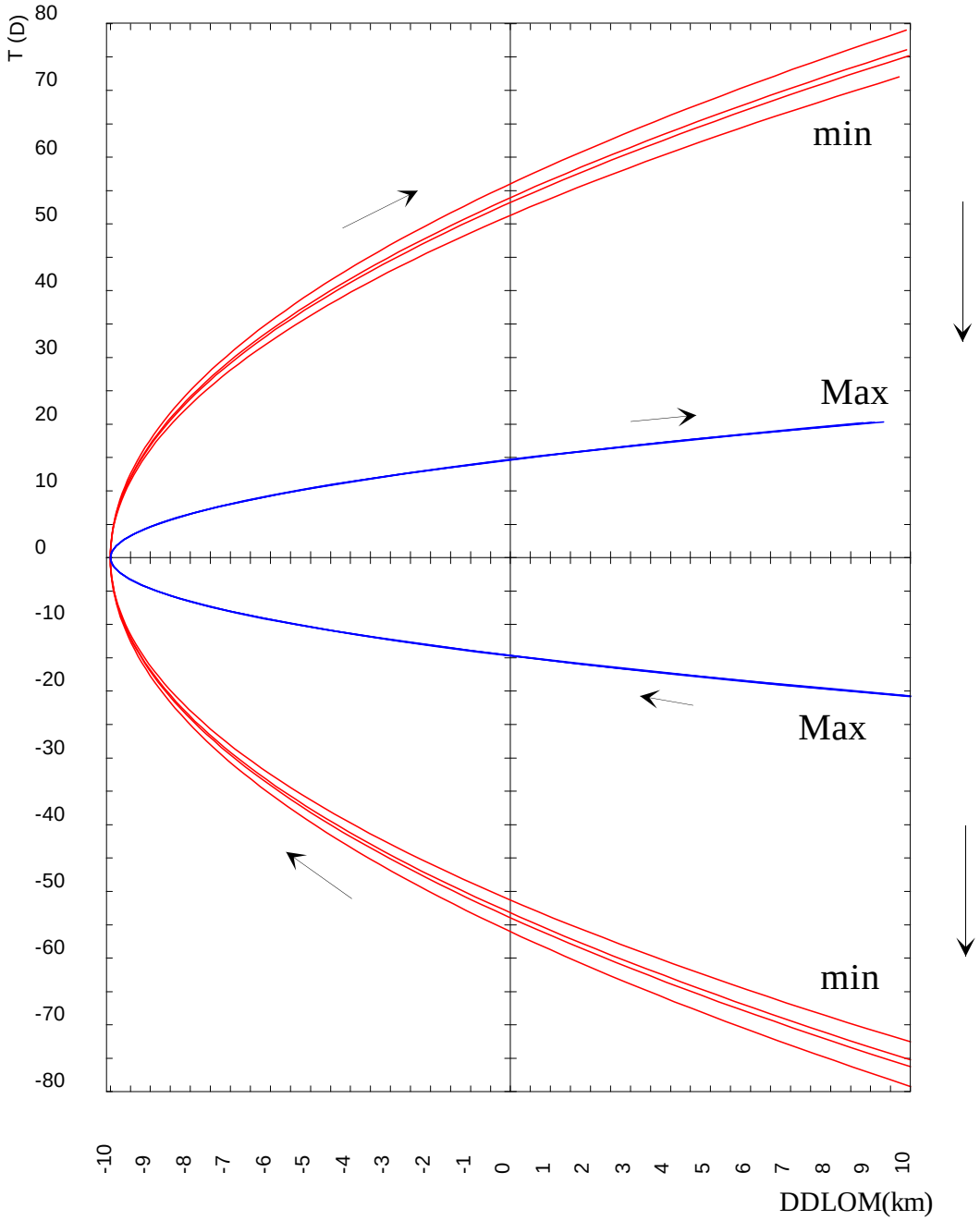


Bild 23-78**:** Korrekturzyklen zur Spurstabilität für minimalen und maximalen Sonnenstrahlungsfluss und verschiedene Tages- und Jahreszeiten für die Bahn $\bar{a}_0$ = 7153 km, $\bar{e}_0$ = 0.0, $\bar{i}_0$ = 98°.498. Die vier Kurven für minimalen Solarflux sind (von unten nach oben) folgenden Zeitpunkten für den Überflug des aufsteigenden Knotens zugeordnet: 9:40 Dezember, 9:40 Juni, 11:00 Dezember, 11:00 Juni

Bild 23-78 zeigt die Korrekturzyklen für die in diesem Beispiel behandelten Störeinflüsse. Die äußeren Kurven für minimalen Sonnenstrahlungsfluss (bezeichnet mit 'min') sind nach den unterschiedlichen Variationen in Inklination aufgefächert, die inneren Kurven für maximalen

Strahlungsfluss ('max') zeigen keine wesentlich signifikante Variation infolge der Sonnenanziehung auf die Bahninklination. ◀

23.13.6 Die relative Positionsbewegung

Wird eine Bahn durch äußere Einflüsse verändert, so dass sie nur durch einen Manöverzyklus stabilisiert werden kann, so wirkt sich dieser Vorgang auch auf den Ort eines Satelliten in seiner Bahn aus: seine wahre Position wird von der mittleren /"ungestörten") Position abweichen. Diese relative Abweichung kann in den Koordinaten eines mitgeführten Koordinatensystems als Längenfehler („long track error"), Querfehler („cross track error") und Höhenfehlers („height error"), also einem „H, C, L –System" berechnet werden. Am empfindlichsten zeigt sich dieser Effekt in einem Längenfehler, der im Folgenden berechnet werden soll. Die hier hergeleiteten Formeln können dann auch bei Untersuchung der relativen Bewegung zweier Satelliten in Formationsflug direkt verwendet werden[1].

Der „Fehlereinfluss" auf die Länge des Satelliten in seiner Bahn kann durch eine Variation der wahren Länge

$$\ell \;=\; \upsilon + \omega + \Omega \tag{23.519}$$

auf die Fehler in den Bahnelementen zurückgeführt werden:

$$\frac{d\ell}{dt} \;=\; \frac{\partial \ell}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial \ell}{\partial e}\dot{e} + \frac{\partial \ell}{\partial i}(i)^{\cdot} + \ldots \;. \tag{23.520}$$

Diese Beziehung kann angenähert werden durch den Ausdruck

$$\Delta\ell \;=\; \frac{\partial \ell}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial \ell}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial \ell}{\partial i}\Delta i + \;.... \tag{23.521}$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} \;=\; \frac{\partial \upsilon}{\partial a} + \frac{\partial \omega}{\partial a} + \frac{\partial \Omega}{\partial a} \tag{23.522}$$

mit

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial a} \;=\; \frac{\partial \upsilon}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial a} \quad . \tag{23.523}$$

Die mittlere Anomalie kann durch den Näherungsausdruck geschrieben werden

$$M = \bar{M}_0 \;+\; \dot{M}_{0s}\left(t - t_0\right) \;+ \bar{n}_0\left(t - t_0\right) \;+\; \delta M \;. \tag{23.524}$$

Somit wird

$$\frac{\partial M}{\partial a} \;\approx\; \frac{\partial \dot{M}_{0s}}{\partial \bar{a}_0}\left(t - t_0\right) + \frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{a}_0}\left(t - t_0\right) \;+\; \ldots \;. \tag{23.525}$$

Ferner ist (siehe etwa Anhang C1)

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial M} = \frac{\left(1 + e\cos\upsilon\right)^2}{\sqrt{1 - e^2}^3} = \frac{p^2}{r^2\sqrt{1 - e^2}^3} \quad . \tag{23.526}$$

---

[1] siehe etwa in: KIRSCHNER, M. et al. [2001] in: 'Flight Dynamics Aspects of the GRACE Formation Flying', 16th international symposium on Spaceflight Dynamics, Pasadena, CA, December 3-7, 2001

Aus $\mu = \bar{n}_0^2\, \bar{a}_0^3$ folgt die bekannte Relation

$$\frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{a}_0} = \frac{d\bar{n}_0}{d\bar{a}_0} = -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}_0}{\bar{a}_0} \tag{23.527}$$

und näherungsweise auf die Differenzengleichung

$$\Delta\bar{n}_0 = -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}_0}{\bar{a}_0}\,\Delta\bar{a}_0 \quad . \tag{23.528}$$

Speziell **für Kreisbahnen** $\left(\bar{e}_0 = 0.0\right)$ ist

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial M} \approx 1$$

und mit der Bezeichnung

$$\Delta t := t - t_0$$

wird für die Variation der Länge in der Bahn

$$\Delta\ell \approx \frac{\partial \upsilon}{\partial M}\,\Delta a \approx \frac{\partial \bar{n}_0}{\partial \bar{a}_0}\left(t - t_0\right)\Delta a$$

bzw. auch

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta t} \approx -\frac{3}{2}\frac{\bar{n}_0}{\bar{a}_0}\,\Delta a \tag{23.529}$$

Im Fall erdnaher Kreisbahnen hat eine Strecke auf der Bahn die Länge

$$\Delta x = a\,\Delta\ell \quad , \tag{23.530}$$

somit gilt auch der Näherungsausdruck

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \bar{a}_0\frac{\Delta\ell}{\Delta t} \approx -\frac{3}{2}\bar{n}_0\,\Delta a \quad \left[\frac{km}{s}\right] \quad . \tag{23.531}$$

Für kreisförmige Bahnen lautet die Variation des großen Bahnhalbachse (nach Formel (17.43), in Abschnitt 17.3.2, Band II)

$$\dot{a} \approx \dot{a}_s = -\rho\,\bar{a}_0\,B_D\,V \quad , \tag{23.532}$$

wenn $V = \sqrt{\mu / a}$ die Kreisbahngeschwindigkeit ist. Hier bedeuten

B_D	Ballistischer Koeffizient = $c_D\, A_D / m$	[km²/kg]
c_D	Luftwiderstandsbeiwert	
A_D	effektive Anströmfläche	[m²]
m	Gesamtmasse des Satelliten	[kg]
ρ	Luftdichte am Ort des Satelliten	[g/km³]

Nehmen wir nun an, dass zwei Satelliten nahe beieinander auf einer Kreisbahn fliegen und ihre relative Bewegung betrachtet wird. Dies schließt den Fall ein, dass einer der beiden Satelliten fiktiv als die Sollposition betrachtet wird, auf welche die wahre Bewegung des anderen Satelliten bezogen wird. Satellit 1 habe die Variation der großen Halbachse $\dot{a}_{1s}$ sowie den

ballistischen Koeffizienten B_{D1}, Satellit 2 entsprechend die Werte $\dot{a}_{2s}$ und B_{D2}. Dann lautet die relative Variation der großen Halbachse nach Gleichung (23.532)

$$\Delta\dot{a}_s = \dot{a}_{1s} - \dot{a}_{2s} = -\rho\,\bar{a}_0 V\left(B_{D2} - B_{D1}\right) = -\rho\,\bar{a}_0 V\,\Delta B_D \quad , \tag{23.533}$$

woraus

$$\frac{d\left(\Delta a\right)}{dt} = -\rho\,\bar{a}_0 V\,\Delta B_D \tag{23.534}$$

wird. Setzt man diese Gleichung in den Ausdruck (23.531) ein, erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{d\left(\Delta a\right)} = \frac{3}{2}\frac{\Delta a}{\rho\,\bar{a}_0\,\Delta B_D} \quad . \tag{23.535}$$

Hier kann näherungsweise $\Delta B_D = const.$ gesetzt werden. Dann ergibt die Integration mit einem Anfangswert für die relative Position x_0 des Satelliten

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{3\left(\Delta a\right)^2}{4\,\rho\,\bar{a}_0^{\,2}\,\Delta B_D} \quad . \tag{23.536}$$

Wird wie ursprünglich in diesem Abschnitt gefordert, die Bewegung nur eines Satelliten relativ zu einer Sollbewegung betrachtet, kann $B_{D2} = 0$ gesetzt werden. Δa ist der halbe Korrekturwert um das Bahnmanöver durchzuführen. Wird ein Toleranzintervall für eine erlaubte Abweichung der wahren Bewegung des Satelliten von der Sollbewegung vorgegeben, kann daraus die Halbachsenkorrektur Δa für ein Bahnhaltungsmanöver berechnet werden:

$$\Delta a = \sqrt{\Delta x \frac{4\,\rho\,\bar{a}_0^{\,2}\,\Delta B_D}{3}} \quad . \tag{23.537}$$

Bei vorgegebenem Toleranzintervall Δx kann die benötigte Zykluszeit zur Durchführung des Manövers mit Gleichung (23.534) berechnet werden, wenn dort noch die für Kreisbewegungen gültige Beziehung $V = V_K = \bar{n}_0\,\bar{a}_0$ eingesetzt wird. Die zugehörige Differentialgleichung lautet dann

$$dt = -\frac{d\left(\Delta a\right)}{\rho\,\bar{a}_0^{\,2}\,\bar{n}_0\,\Delta B_D} \tag{23.538}$$

mit der Lösung

$$t - t_0 = -\frac{2\,\Delta a}{\rho\,\bar{a}_0^{\,2}\,\bar{n}_0\,\Delta B_D} \quad . \tag{23.539}$$

Mit dem Halbachsenintervall Δa aus Gleichung (23.537) ergibt sich das entsprechende Zeitintervall

$$\Delta t = \frac{4}{\bar{a}_0\,\bar{n}_0}\sqrt{\frac{\Delta x}{3\,\rho\,\Delta B_D}} \quad . \tag{23.540}$$

Umgekehrt kann für eine vorgegebene Zykluszeit Δt und eine erlaubte Variation Δa in der großen Bahnhalbachse die erlaubte Variation im ballistischen Koeffizienten aus Formel (23.539) berechnet werden:

$$\left|\Delta B_D\right| = \frac{2\,\Delta a}{\rho\sqrt{\mu\,a}\;\Delta t} \quad . \tag{23.541}$$

BEISPIEL: Ein Kleinsatellit bewege sich auf kreisförmiger Bahn $(\bar{e}_0 = 0.0)$ mit der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 7069.785\,\text{km}$ (d.h. nominale mittlere Äquator-bezogene Bahnhöhe j) auf einer sonnensynchronen Bahn (somit $\bar{i}_0 = 98°.16$). Der Satellit mit der Masse m_0 =150 kg und der (mittleren auf den Luftwiderstand wirkende) Querschnittsfläche A_D = 2 m^2 habe infolge einer um 1% vom Nominalwert B_D abweichenden ballistischen Koeffizienten B_D - ΔB_D ein fehlerhaftes Bahnverhalten. Es soll untersucht werden, welcher Treibstoffverbrauch im Fall eines Flüssigkeitstriebwerks (spezifischer Impuls c_e = 2800 m/s, Reduktionsfaktor C = 0.85) zur Korrektur eines Längenfehlers („long track error“) ΔL im Verlauf einer geplanten Lebensdauer von $L_T = 2^a$ zur Korrektur dieses Fehlers im Fall maximaler und minimaler Sonnenaktivität benötigt wird. Als Luftwiderstandsbeiwert werde der Wert $c_D = 2.2$ gewählt.

Der ballistische Koeffizient beträgt nach Formel (17.41) (Abschnitt 17.3.1, Band III)

$$B_D = c_D \frac{A_D}{m} = 2.2 \frac{2\,m^2}{150\,kg} = 0.029333\ m^2/kg \quad .$$

Der Fehler im ballistischen Koeffizienten bei 1% relativem Fehler beträgt

$$\Delta B_D = 0.00029333 m^2/kg \quad .$$

Die Luftdichte ρ bei einer mittleren Höhe H = 700 km kann etwa aus Tabelle 17-12 (in Abschnitt17.3.1, Band III) entnommen werden[1]. Als erlaubte Längenfehler werden die beiden Fälle ΔL =100 m und ΔL = 1.5 km betrachtet. Die Abnahme Δa der (mittleren) großen Bahnhalbachse wird aus Formel (23.537) erhalten, das Geschwindigkeitsinkrement ΔV, das zur Korrektur aufgebracht werden muss, aus Formel (12.90) (Abschnitt 12.4.4, Band III), der zugehörige Treibstoffbedarf aus Formel (12.219) (Abschnitt 12.10.2.2, Band III) mit $\Delta m = m_T$. Die Zykluszeit für ein Manöver beträgt $t_{CYC} = \Delta t$ aus Formel (23.540), der Gesamttreibstoff nach 2 Jahren somit schließlich

$$m_T = \frac{\Delta m}{t_{cyc}} \cdot 2 \cdot 364.25 \ \ kg \quad .$$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 23-44 zusammengefasst dargestellt. Wie zu erwarten ist der Gesamttreibstoffbedarf nach der gewünschten Lebensdauer vom jeweiligen Geschwindigkeitsinkrement bzw. der Zykluszeit unabhängig, d.h. auch unabhängig von dem zu korrigierenden Längenfehler.

---

1 Siehe auch in Anhang K (Band V)

	Solarmax		Solarmin	
Startmasse m_0	150 kg			
Luftdichte	0.2185 g/km^3		0.02043 g/km^3	
Ballistischer Koeffizient B_D	0.02933 m^2/kg			
Relativer Fehler $\Delta B_D / B_D$	1%			
Fehler im ball. Koeff. ΔB_D	0.0002933 m^2/kg			
Längenfehler ΔL	100 m	1500 m	100 m	1500 m
Fehler in Halbachse Δa	0.65 m	2.53 m	0.20 m	0.77 m
Geschwindigkeitsinkrement ΔV	0.69 m/s	2.69 m/s	0.21 m/s	0.82 m/s
Treibstoffbedarf Δm	0.037 kg	0.144 kg	0.011 kg	0.044 kg
Zyklus für Manöver t_{cyc}	4.5 d	17.2 d	14.5 d	56.3 d
Gesamttreibstoffbedarf nach 2 Jahren Δm[2a]	6.1 kg	6.1 kg	0.6 kg	0.6 kg

Tabelle 23-44: Beispiel zur Korrektur eines Längenfehlers auf Grund der Einwirkung des Luftwiderstandes auf einen Kleinsatelliten

23.13.7 Variation in Länge (along track variation)

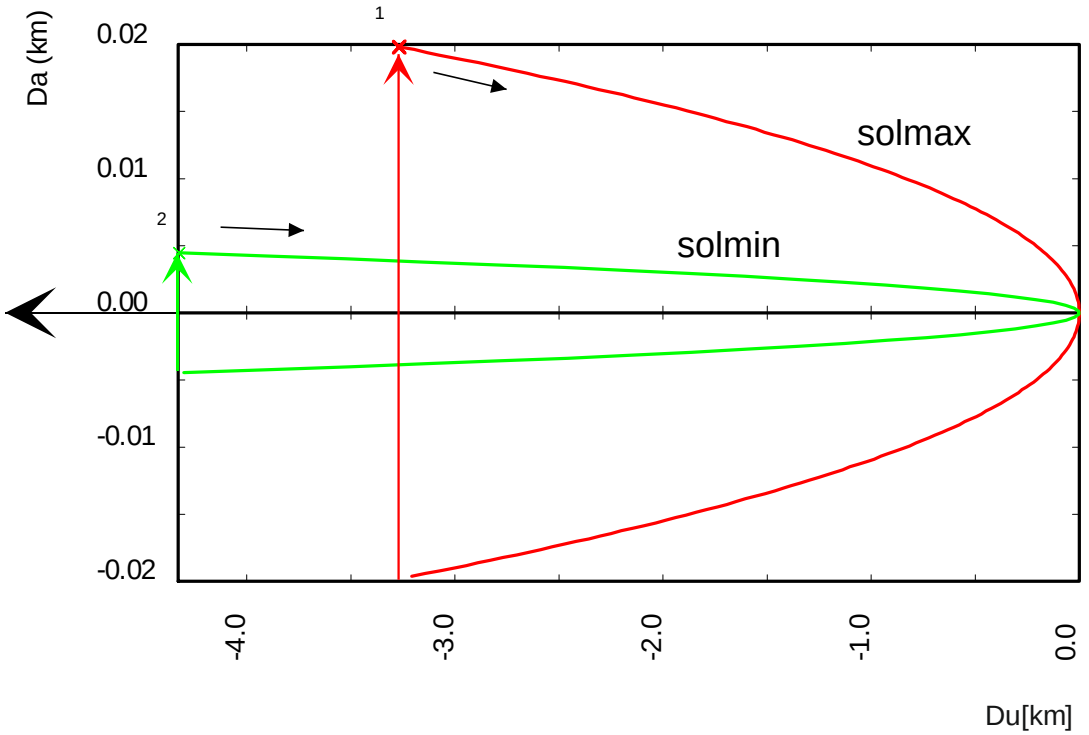


Bild 23-79: Verlauf der Abweichung der Position des Satelliten in Abhängigkeit vom Verlauf der großen Bahnhalbachse während eines Korrekturzyklus zur Bahnstabilisierung (Knotenüberflug). Die Satellitenbewegung erfolgt in rechtläufiger Richtung (großer Pfeil), die Along-track-bewegung in entgegengesetzter Richtung. Der Pfeil für die Korrektur der großen Bahnhalbachse ist ebenfalls eingezeichnet

Im Verlauf eines Zyklus zur Bahnstabilisierung wird auch der Satellit in der Position seiner Bahn etwas verschoben, was sich in erster Näherung wieder in einer Bewegung auf einer Kurve zweiter Ordnung, also einer Parabel, auswirkt. Diese Bewegung wird durch die Differenz im

Argument der Breite u_2 des Satelliten auf der korrigierten Bahn und auf der nominalen „Sollbahn“ mit Argument u_1 erfasst. Die Differenz $\Delta u = u_2 - u_1$ wird dann gegen die Variation der großen Bahnhalbachse aufgetragen. Da die Bewegung als rechtläufig aufgefasst wird, das Koordinatensystem aber positiv in entgegengesetzter Richtung geozentrisch gesehen dargestellt wird, hat diese Differenz negative Werte.

Bild 23-79 zeigt als Beispiel den Verlauf der Abweichung in along-track Δu in Abhängigkeit von der Variation der großen Bahnhalbachse für die Satellitenbahn a = 7007.140 km, e = 0.0, i = 97°.93.

23.14 Bewegungen im Formationsflug auf kreisnahen Bahnen

23.14.1 Satellitenkonstellationen mit kreisförmigen Bahnen nach *Walker*

Konstellationen mehrerer Satelliten mit der Aufgabe, eine gleichförmige Überdeckung der gesamten Erdoberfläche für Fernerkundungsaufgaben oder eines ausgewählten Teiles der Erdoberfläche etwa zu Kommunikationszwecken zu ermöglichen, stellen eine neue Herausforderung für die Satellitenbahnanalyse dar. *J. G. Walker*[1] hat einen Zugang zu einer Bahnanalyse von gleichmäßigen Satellitenkonstellationen durch Aufstellung der *Walkerkonstellation* gefunden. Dies gilt für die Annahme, dass alle Bahnebenen dieselbe Neigung gegenüber einer Referenzebene haben. Diese Referenzebene ist nicht notwendig die Äquatorebene, auch wenn sich diese in der Regel als Referenzebene anbietet. Außerdem wird angenommen, dass alle Satelliten in einer solchen Konstellation gleichförmig verteilt sind. Eine Walkerkonstellation lautet

$$\mathrm{T/P/F} \tag{23.542}$$

Hier bedeuten

T = Anzahl der Satelliten der gesamten Konstellation

P = Anzahl der Bahnebenen einer Konstellation

F = Das Phasing, d.h. den Abstand eines Satelliten in der Grundkonstellation vom Äquator.

Hieraus können berechnet werden:

Der Abstand zwischen zwei Bahnebenen am Äquator beträgt

$$\Delta\Omega = \frac{360°}{P} \quad . \tag{23.543}$$

Der Winkelabstand zwischen zwei Satelliten in einer Bahnebene errechnet sich aus

$$\Delta u = \frac{360°}{\frac{T}{P}} \tag{23.544}$$

und der Phasenwinkel, d.h. der Winkelabstand des ersten Satelliten der ersten Bahnebene von der Bezugsebene (üblicherweise vom Äquator)

---

[1] J. G. WALKER [1970], J. G. WALKER [1984]

$$\Phi = F\,\frac{360°}{T} \quad .$$

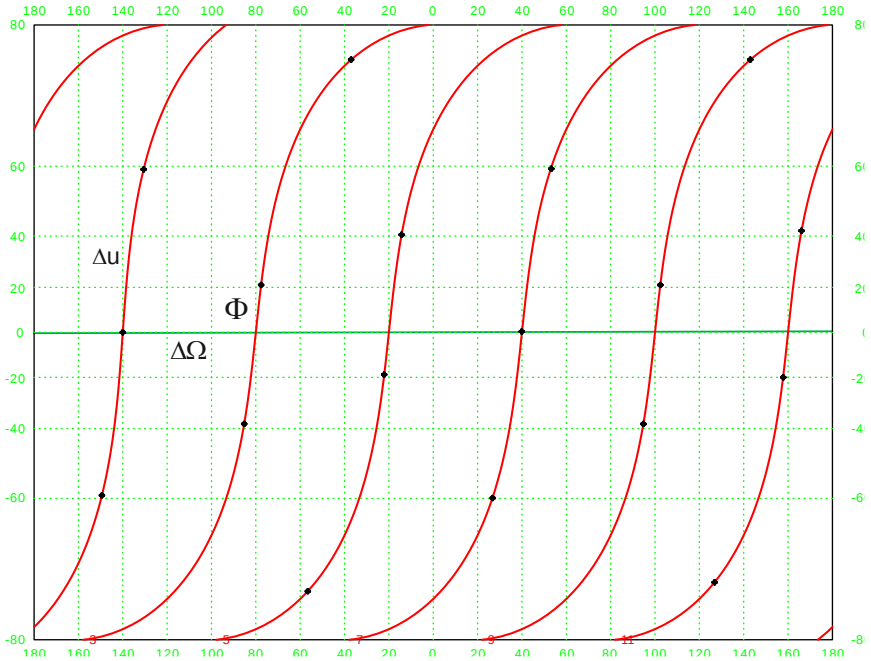


Bild 23-80: Beispiel einer *Walker*-Konstellation mit T/P/F = 18/6/1, somit Δu = 120°, ΔΩ = 60°, Φ = 20°

23.14.2 Relativbewegung zu einer Kreisbewegung

Als eine in der Satellitenbewegung von zunehmender Bedeutung wichtige Anwendung der kreisnahen und damit vor allem der drakonitischen Bewegung soll im Folgenden mit unterschiedlichen Genauigkeitsanforderungen untersucht werden, wie die Bewegung auf einer nach der Keplerbewegung verlaufenden elliptischen Bewegung relativ zu einer (im Mittel) kreisförmigen Bewegung mit derselben Umlaufzeit, also identischer mittlerer Bewegung verläuft. Dies soll zunächst für eine exakte („ungestörte“) Keplerbewegung durchgeführt werden.[1]

Wir wollen annehmen, dass sich der erste Satellit („Master Satellit“) auf einer Kreisbahn mit Radius *a* bewege:

$$\mathbf{r}_K = a\left(\mathbf{q}_1 \cos M + \mathbf{q}_2 \sin M\right) \quad . \tag{23.545}$$

Der zweite im Formationsflug befindliche Satellit auf einer elliptischen Bahn habe den Ortsvektor

$$\mathbf{r} = r\left(\mathbf{q}_1 \cos \upsilon + \mathbf{q}_2 \sin \upsilon\right) \quad . \tag{23.546}$$

Die auf den ersten Satelliten bezogene Relativbewegung lautet daher allgemein

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_K = \mathbf{q}_1\left(r\cos\upsilon - a\cos M\right) + \mathbf{q}_2\left(r\sin\upsilon - a\sin M\right) \quad . \tag{23.547}$$

[1] Dieses Problem wurde z.B. behandelt in RUPPE, H. O. [1967] Vol.2, pp.76-78, es findet sich etwa auch schon in Roman-Form bei CLARKE, A. C.

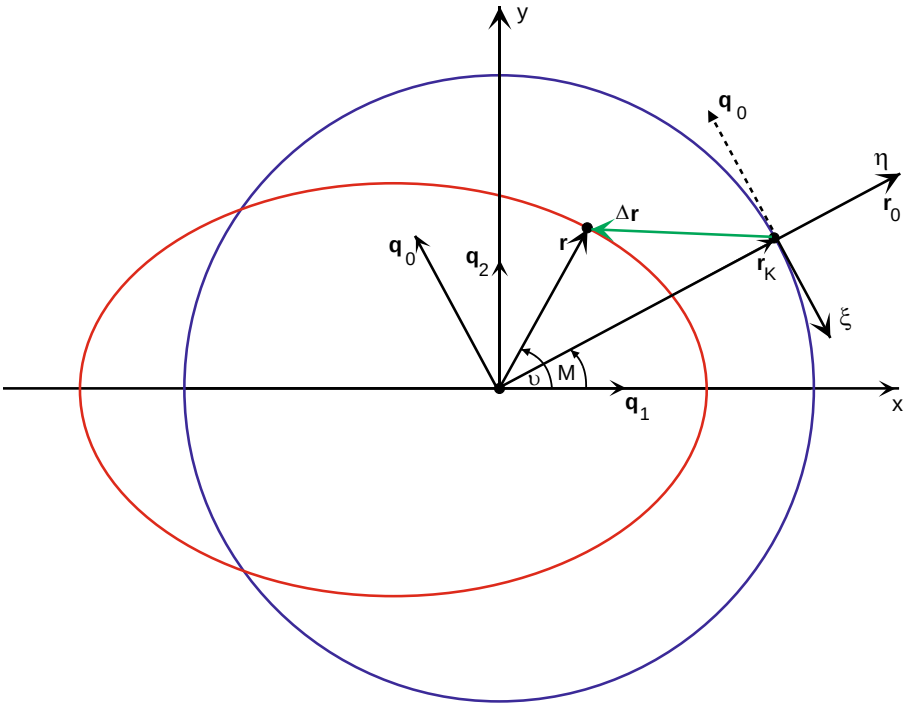


Bild 23-81: Relativbewegung zweier Satelliten in Formationsflug

Die Relativbewegung des zweiten Satelliten wird in einem System dargestellt, das auf den ersten Satelliten bezogen ist. Dieses mitgeführte System hat – in der Bahnebene – die Basisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{q}_1 \cos M + \mathbf{q}_2 \sin M \\ \mathbf{q}_0 &= -\mathbf{q}_1 \sin M + \mathbf{q}_2 \cos M \quad . \end{aligned} \tag{23.548}$$

In diesem System hat der relative Ortsvektor des zweiten Satelliten (entsprechend Bild 23-81) die Darstellung

$$\Delta\mathbf{r} = -\xi\,\mathbf{q}_0 + \eta\,\mathbf{r}_0 \quad . \tag{23.549}$$

Die Reihenentwicklungen des 2-Körperproblems für schwach elliptische Bewegungen ergeben in erster Ordnung in Exzentrizität[1]

$$\begin{aligned} r\cos\upsilon &= -\frac{3ea}{2} + a\cos M + \frac{ea}{2}\cos 2M + O(e^2) \\ r\sin\upsilon &= a\sin M + \frac{ea}{2}\sin 2M + O(e^2) \quad . \end{aligned} \tag{23.550}$$

Werden diese Beziehungen in Gleichung (23.547) mit Berücksichtigung von (23.548) eingesetzt, folgt

$$\Delta\mathbf{r} = ea\left(-\mathbf{r}_0 \cos M + 2\mathbf{q}_0 \sin M\right) + O(e^2) \quad . \tag{23.551}$$

[1] Siehe etwa die Formeln (1.196) in Abschnitt 1.9.3.2, sowie (2.26) in Abschnitt 2.2.3 (Band I)

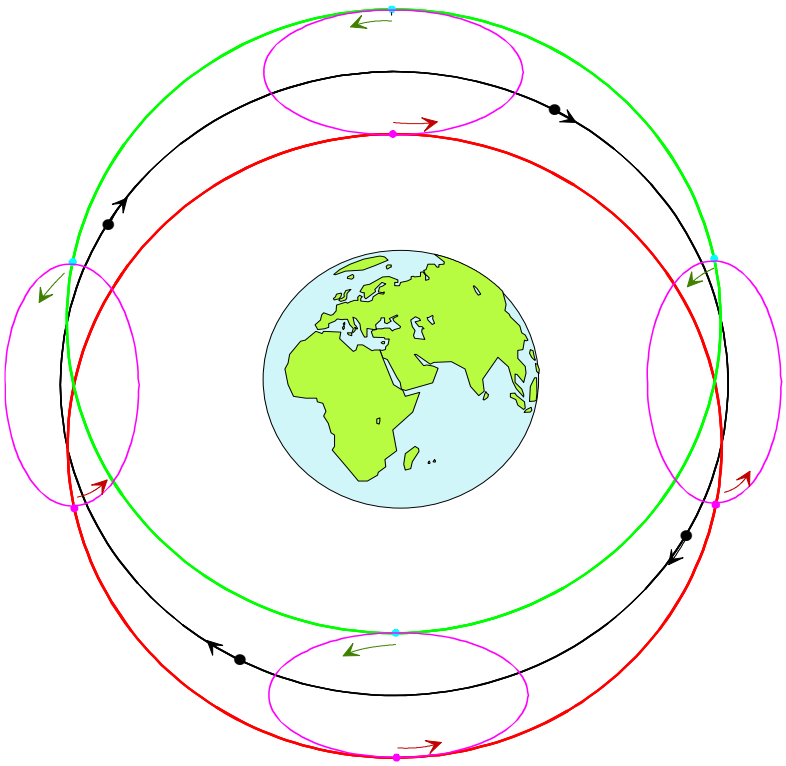


Bild 23-82: Die Relativbewegung zweier kleiner Satelliten in Bezug auf einen Master-Satelliten: Innerhalb der Master-Bahn bewegt sich ein kleiner Satellit schneller als der Master und eilt daher voraus. Deutlich zu erkennen ist das Achsenverhältnis 1:2 der Relativellipse. Man beachte die Bewegungsrichtung des Hauptsatelliten, die in Vergleich zu Bild 23-81 gegenläufig ist[1].

Dies ist die Gleichung einer Mittelpunktsellipse. Der zweite Satellit führt somit in erster Näherung, d.h. bei kleinen Exzentrizitäten der elliptischen Bewegung des zweiten Satelliten, eine elliptische Bewegung um den ersten (besser gesagt: relativ zum ersten Satelliten) aus. Für M=0° befindet sich der kleine Satellit auf der radialen Achse vom Master zum Erdmittelpunkt innerhalb der Masterbahn, für M = 90° in Bezug auf die Bewegungsrichtung des Master Satelliten vor dem Master auf der transversalen Achse (vgl. auch Bild 23-82).

23.14.3 Relativbewegung in der „CartWheel Ellipse“

Zur Durchführung von SAR interferometrischen Beobachtungen mit passiven (also nur beobachtenden Kleinsatelliten) und einem aktiven Sendersatelliten, hat *Didier Massonet*[2] erstmals

---

[1] Bild aus einer Studie für das CartWheel Project, February 2001 [RUNGE, H., R. BAMLER, J. MITTERMAYER, E. F. JOCHIM, D. MASSONNET, E. THOUVENOT [2001]: ‘The Interferometric CartWheel for Envisat‘’, 3rd IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, April 2-6, 2001 Berlin, Germany]

[2] MASSONNET, D. [1999], ‘Capabilities and Limitations of the Interferometric CartWheel’ , paper presented at the CEOS Workshop, Toulouse

VACARESSE, ANGELIQUE ; BROUSSE, PASCAL, [2000] : ‘Analyse de mission “Roue Interférométrique” associée au satellite japonais ALOS’, CNES Département de Mission de Mécanique Spatiale, Division Mathématiques Spatiales, Sema Group, Octobre 2000

den Vorschlag gemacht, drei Kleinsatelliten zu verwenden. Nach seinem Vorschlag sollen diese Satelliten in ein und derselben Bahnebene mit kleiner Elliptizität fliegen, während der Hauptsatellit („Mastersatellite“) auf einer kreisförmigen Bahn mit derselben drakonitischen Umlaufzeit wie die Kleinsatelliten fliegen soll. Dadurch kann erreicht werden, dass die drei passiven Satelliten sich stets auf derselben relativen „CartWheel Ellipse“ bewegen, wobei sich der Mittelpunkt dieser Ellipse stets in gleichbleibendem mittlerem Abstand zum Master bewegt. Unterscheiden sich die Apsidenlinien der drei kleinen Satelliten um je 120°, durchlaufen diese Satelliten die relative Ellipse in gleichem Abstand (siehe Bild 23-83). Durch Zusammenschaltung von je zwei dieser Satelliten kann jederzeit eine geeignete Basislinie („effective baseline“) zur interferometrischen Beobachtung erhalten werden.

Der Aufbau einer Satellitenkonstellation nach dem CartWheel Prinzip wird im Folgenden angedeutet:

Zunächst muss die mittlere Bahnhalbachse der absoluten CTW Bahnen der vorgegebenen drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P}_{d\,0}$ der Masterbahn angepasst werden. Da die CartWheel Ellipsen eine andere Bahnexzentrizität haben als der Mastersatellit, muss sich auch ihre mittlere große Bahnhalbachse ändern. Dies wird mit den Methoden durchgeführt, die in Abschnitt 23.3.3 ab Seite 181 besprochen werden. Die neue Bahnhalbachse sei $\overline{a}_{SL} = \overline{a}_0 + \Delta\overline{a}_{SL}$.

Die Exzentrizität der Bahnen der passiven Kleinsatelliten in der CartWheel Konfiguration wird aus der Beziehung

$$e_{SL} = \frac{b_{CTW}}{\overline{a}_{SL}} \tag{23.552}$$

berechnet, wobei b_{CTW} die kleine Halbachse in der relativen CartWheel Ellipse ist, während $\overline{a}_{SL}$ ihre große Bahnhalbachse der Referenzbahn ist. Die Größe b_{CTW} wird aus der geforderten Basislinie für die interferometrischen Beobachtungen errechnet und ist vom verwendeten Frequenzband abhängig. Entsprechend der Näherung (23.551) ist

$$b_{CTW} = \frac{a_{CTW}}{2} \quad . \tag{23.553}$$

Zur Abschätzung der großen Halbachse a_{CTW} der CartWheel Ellipse seien die drei passiven Satelliten entsprechend Bild 23-84 in der CartWheel Ellipse angeordnet: ein Satellit im maximalen Erdabstand (die Erde ist „unten“ im Bild zu denken), die beiden anderen symmetrisch zur kleinen Halbachse (näherungsweise im Abstand $\gamma_0 = 30°$ zur großen Halbachse).

Die effektive Basislänge wird auf die kleine Halbachse der CartWheel Ellipse projiziert und ergibt die Referenzlänge

$$B_{ref} = b_{CTW} + z_0 \quad . \tag{23.554}$$

Da es sich um eine Mittelpunktellipse handelt, können die in Kapitel 37 (Band V) hergeleiteten Formelsysteme verwendet werden. Die beiden unteren Satelliten in Bild 23-84 haben mit Formel (37.31) die zentrische Distanz

$$R'_{\gamma'} = a_{CTW}\sqrt{\frac{1-e_{CTW}^2}{1-e_{CTW}^2\cos^2\gamma'}} \quad . \tag{23.555}$$

Die Strecken x_0 und z_0 sind dann aus den Beziehungen (37.28) bekannt:

$$x_0 = R'_{\gamma'}\cos\gamma' \quad , \quad z_0 = R'_{\gamma'}\sin\gamma' \quad . \tag{23.556}$$

Im Fall der genäherten CartWheel Ellipse hat deren Exzentrizität stets den Betrag

$$e_{CTW} = \sqrt{1 - \frac{b_{CTW}^2}{a_{CTW}^2}} = \sqrt{0.75} = 0.866025404. \quad (23.557)$$

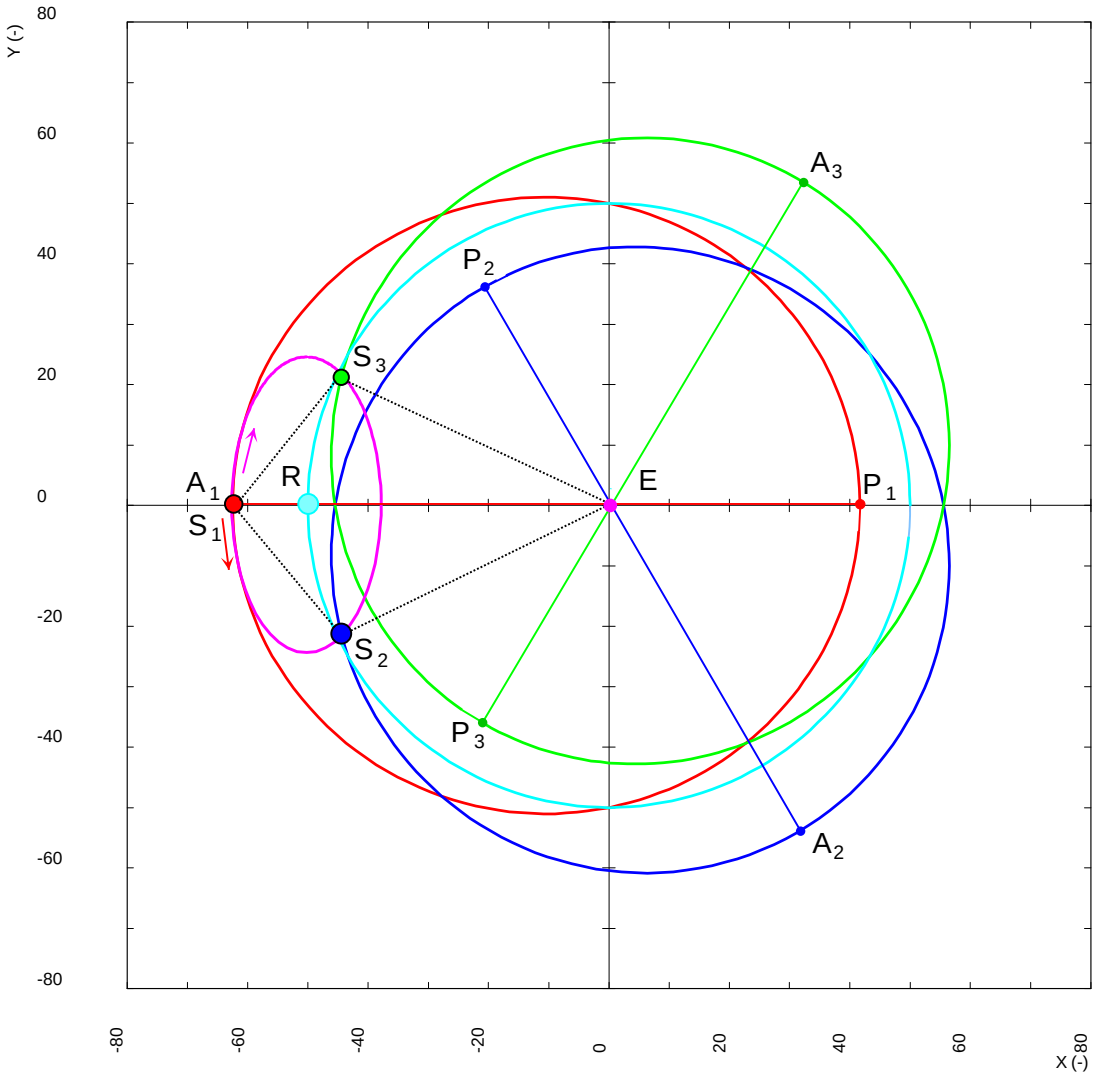


Bild 23-83: Absolute und relative Bewegung der drei CartWheel Satelliten: Trennung der Apsidenlinien der drei CTW Ellipsen um 120°.

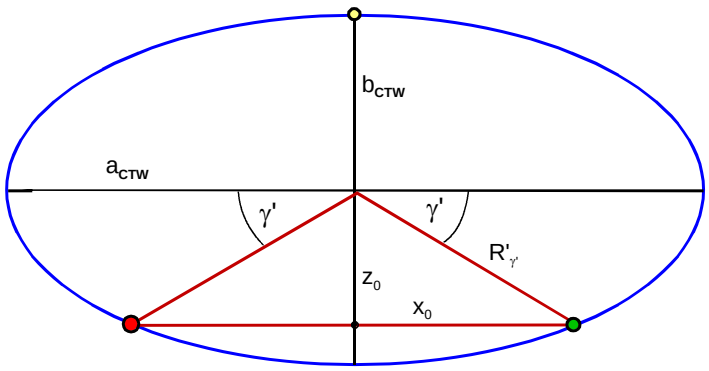


Bild 23-84: Zu Berechnung der großen Halbachse der relativen CartWheel Ellipse aus der effektiven Basislänge für SAR Interferometrie

Somit hat die effektive Basislänge die Größe

$$B_{ref} = a_{CTW}\left(\sin\gamma'\sqrt{\frac{1-e_{CTW}^2}{1-e_{CTW}^2\cos^2\gamma'}}+0.5\right) \quad . \tag{23.558}$$

Mit einer Annahme für den Winkel γ' (etwa zu 30°) kann aus dieser Beziehung a_{CTW} berechnet werden, damit b_{CTW} und aus Beziehung (23.552) die Exzentrizität der (absoluten) CartWheel Bahn um den Erdmittelpunkt. Die weiteren (mittleren) Bahnelemente sind in Tabelle 23-45 zusammengestellt.

Die sich ergebenden (absoluten) Bahnen der drei CartWheel Satelliten sind symptomatisch (d.h. mit übertriebenen Exzentrizitäten) in Bild 23-85 veranschaulicht.

Um den Treibstoffbedarf abzuschätzen, der für den Aufbau einer CartWheel Konfiguration benötigt wird, werde im Folgenden eine Einschussprozedur entsprechend Bild 23-83 verwendet. Alle drei Kleinsatelliten sollen bei gemeinsamem Start in die Position *R* der kreisförmig angenommen Masterbahn eingeschossen werden. Anschließend werden die drei Kleinsatelliten auf folgende Weise in ihre Position auf der relativen CartWheel Ellipse gebracht:

S_1 wird in das Apogäum A_1 seiner Bahnellipse durch ein Δa Manöver gebracht und anschließend auf seine elliptische Bewegung durch ein Δe Manöver. Die Apsidenlinien der beiden anderen CartWheel Satelliten unterscheiden sich gegenüber der Apsidenlinie des ersten Satelliten um die Zentralwinkel ±120°. Die Positionen dieser beiden Satelliten auf der CartWheel Ellipse in dem Augenblick, wenn sich S_1 in der Position A_1 befindet, liegen auf dem Schnittpunkt ihrer absoluten (elliptischen) Bahnen mit der relativen CartWheel Ellipse. Die Berechnung dieser Schnittpunkte wird dadurch erleichtert, dass diese Punkte in erster Näherung mit den Schnittpunkten der kreisförmig angenommenen Masterbahn mit der CartWheel Ellipse zusammentreffen.

	Große Bahnhalbachse	Exzentrizität	Inklination	Rektaszension des aufsteigenden Knotens	Argument des Perigäums	Mittlere Anomalie zur Epoche
Master	$\bar{a}_0$	$\bar{e}_0 = 0.0$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 0°$	$\overline{M_{00}} = \Delta\upsilon$
Sat 1	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 0°$	$\overline{M_{00}} = 0°$
Sat 2	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 120°$	$\overline{M_{00}} = 240°$
Sat 3	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 240°$	$\overline{M_{00}} = 120°$

Tabelle 23-45: Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten im Fall des CartWheel Konzeptes

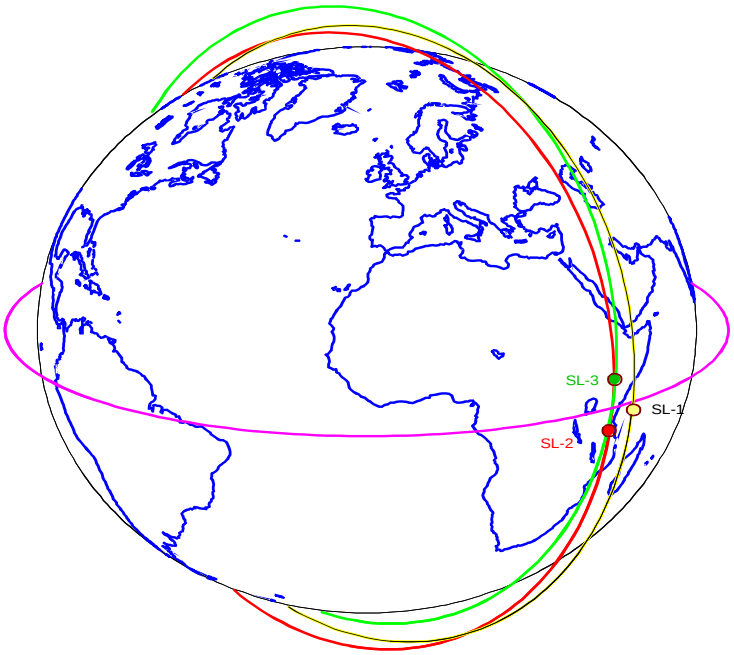


Bild 23-85: Bahnverhalten der drei Kleinsatelliten in der CartWheel-Konstellation über einen drakonitischen Umlauf. Die Bahnen haben die mittlere Kreisbahnhöhe 7000 km und die Inklination 97°.5. und verlaufen in derselben Bahnebene, die Exzentrizitäten der drei Bahnen haben den Wert $\overline{e}_0 = 0.05$. Dargestellt ist Satellit SL-1 im Moment des Apogäumsdurchganges, der in den aufsteigenden Knoten gelegt ist. Alle drei Satelliten bewegen sich auf der relativen CartWheel Ellipse im Verlauf eines drakonitischen Umlaufes

Deshalb kann folgender Vorgang zum Aufbau der CartWheel Formation empfohlen werden: bewege den Satelliten S_2 vorwärts (d.h. in Bewegungsrichtung von SL-1) und SL-3 rückwärts längs der Masterbahn bis die entsprechenden Positionen von SL-2 and SL-3 auf der relativen CartWheel Ellipse erreicht sind. Baue anschließend die absoluten Bahnellipsen dieser beiden Satelliten durch erreichen der Apsidenlinien $\overline{A_2P_2}$ bzw. $\overline{A_3P_3}$ auf, sowie durch Einstellung der Bahnexzentrizitäten $e_2 = e_3 = e_1 = e_{CTW}$. Die wesentliche Aufgabe besteht nun darin zu erreichen, dass die drei Satelliten zum selben Zeitpunkt ihre relativen Positionen in der relativen CartWheel Ellipse einnehmen.

Die Berechnung der Verschiebung der Satelliten 2 und 3 wird entsprechend der Skizze in Bild 23-86 durchgeführt. In einem mitbewegten ebenen x-y-Koordinaten System wird die CartWheel Ellipse durch die Beziehung

$$\frac{x^2}{a_{CTW}^2} + \frac{\left(y - \overline{a_0}\right)^2}{b_{CTW}^2} = 1 \tag{23.559}$$

beschrieben, wobei für nahezu kreisförmige Bahnen

$$a_{CTW} \approx 2\, b_{CTW} \tag{23.560}$$

gilt. Der Ort S_2 mit den kartesischen Koordinaten (x_1, y_1) muss die Bedingung

$$x_1^2 + y_1^2 = \overline{a_0}^2 \tag{23.561}$$

erfüllen. Dies führt auf

$$y_1 = \frac{1}{3}\left(4\overline{a_0} - \sqrt{\overline{a_0}^2 + 3a_{CTW}^2} \right) \quad , \quad x_1 = \pm\sqrt{\overline{a_0}^2 - y_1^2} \quad . \tag{23.562}$$

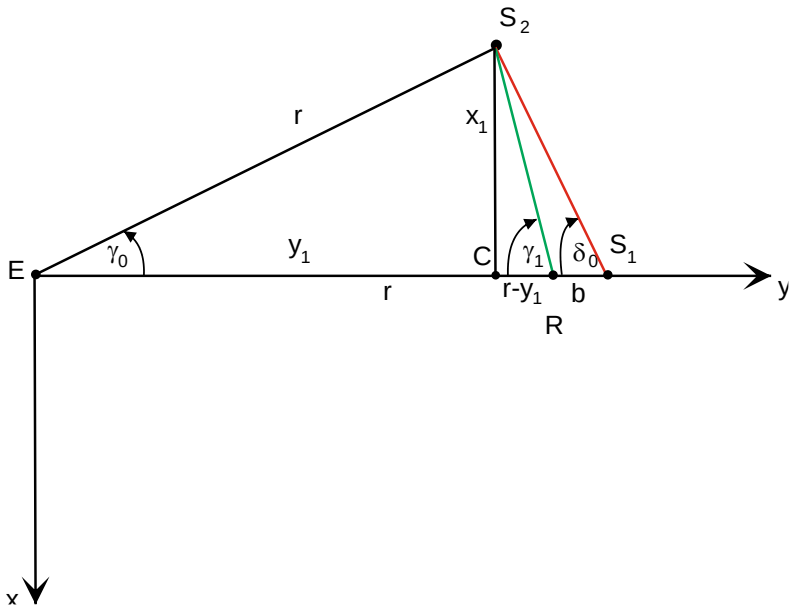


Bild 23-86: Geometrie zur Definition der Positionierung der drei CartWheel Satelliten innerhalb der relativen CartWheel Ellipse

(Die zweite Lösung für y_1 liegt außerhalb der kreisförmigen Masterbahn und kann deshalb vernachlässigt werden). Der Satellit muss längs der kreisförmigen Masterbahn um den Zentralwinkel γ_0 verschoben werden. In Bezug auf den Erdmittelpunkt *E* wird dieser Winkel aus der Beziehung

$$\tan\gamma_0 = \frac{x_1}{y_1} \tag{23.563}$$

berechnet. Außerdem werden die Winkel γ_1 und δ_0 aus den Beziehungen

$$\tan\gamma_1 = \frac{x_1}{\overline{a}_0 - y_1} \quad , \quad \tan\delta_0 = \frac{x_1}{\overline{a}_0 - y_1 + b_{CTW}} \quad . \tag{23.564}$$

erhalten.

Nach der Positionierung der Satelliten in ihren Positionen S_2 und S_3 werden die Exzentrizitäten ihrer absoluten Bahnellipsen entsprechend Formel (12.92) eingestellt, die Rotation der Apsidenlinien schließlich entsprechend dem Vorgang, der in Kapitel 12.4.2 (Band III) beschrieben wird.

Der Zeitaufwand um die relativen Positionen der drei CartWheel Satelliten zu erreichen ist eine äußerst empfindliche Größe. Es muss erwartet werden, dass deshalb nach einer Positionierung sofort eine Fehlerkorrektur zu erfolgen hat. Diese kann allerdings im Rahmen einer Bahnanalyse nur grob abgeschätzt werden und wird in einer ersten Analyse vernachlässigt.

Numerisches BEISPIEL[1]:

[1] aus: JOCHIM, E.F., H. FIEDLER, G. KRIEGER [2011] *Acta Astronautica* **68**, pp. 1002-1014

	Große Bahnhalbachse	Exzentrizität	Inklination	Rektaszension aufst. Knoten	Argument des Perigäums	Mittlere Anomalie zur Epoche
Master	6878.137 km	0.0	97°.42472	0°.0	0°.0	$\Delta\upsilon$
Sat 1	6878.141 km	0.000572911	97°.42472	0°.0	0°.0	0°.0
Sat 2	6878.141 km	0.000572911	97°.42472	0°.0	120°.0	240°.0
Sat 3	6878.141 km	0.000572911	97°.42472	0°.0	240°.0	120°.0

Tabelle 23-46: Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten im Fall des CartWheel Konzeptes als Beispiel für eine sonnensynchrone Bahn mit der mittleren theoretischen Bahnhöhe $\bar{H} = 500\,\text{km}$.

SL-Sat	Orbit Acquisition	Orbit Maintenance	Formation Acquisition	Formation Maintenance	Total fuel requirement
1	0.004485 kg	5.738 kg	0.103512 kg	0.587 kg	6.433 kg
2	0.004485 kg	5.738 kg	0.311775 kg	0.587 kg	6.641 kg
3	0.004485 kg	5.738 kg	0.312759 kg	0.587 kg	6.642 kg

Tabelle 23-47: Treibstoffbedarf für Positionierung sowie Bahn- und Formationshaltung eines Kleinsatelliten mit Startmasse 130 kg, der Luftwiderstandsangriffsfläche 2m^2 über die Lebensdauer 2 Jahre. Die mittleren Bahnparameter der drei Slave Satelliten gelten für eine sonnensynchrone Bahn mit der mittleren theoretischen Bahnhöhe $\bar{H} = 500\,\text{km}$. Der Treibstoffbedarf wurde für Heißgastriebwerke mit der Ausströmgeschwindigkeit

$$c_e = 2800\,\text{m/s}$$ gerechnet[1] ◄

23.14.4 Formationsflug dreier Satelliten mit unterschiedlichen Knoten und Perigäen

Als Alternative zu dem vorstehenden CartWheel Konzept wurden verschiedene „Pendulum“ Formationen vorgeschlagen[2], von denen das hier beschriebene „Trinodal Pendulum Concept“ das vielversprechendste Projekt zu sein scheint. Auch in diesem Konzept werden die drei kleinen passiven Radarsatelliten (slave satellites) als abwechselnde interferometrische Empfänger von Radarechos verwendet, welche von einem aktiven Hauptsatelliten (Master satellite) ausgesandt wurden. Der Hauptsatellit wird auf einer im Mittel kreisförmigen Bahn mit der großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$, der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.0$ und der mittleren Inklination $\bar{i}_0$ angenommen. Die Bahnen der drei kleinen Satelliten werden folgendermaßen definiert:

[1] Siehe in Tabelle 12-2 in Abschnitt 12.10.2.1 (Band III)

[2] MOREIRA, A., G. KRIEGER, J. MITTERMAYER [2002], Satellite Configuration for Interferometric and/or Tomographic Remote Sensing by Means of Synthetic Aperture Radar (SAR), US Patent 6,677,884, July 2002; siehe auch: DLR TN GSOC 2004-03/update 2006

Im Äquator befinden sich diese Satelliten auf der kreisförmig angenommenen Bahnhöhe des Masters in den Abständen $\Delta\Omega_1$ und $\Delta\Omega_2$. Diese Winkelabstände werden üblicherweise durch vorgegebene Abstände definiert, welche einen Zusammenstoß der Satelliten vermeiden, jedoch eine SAR Interferometrie durch eine geeignete Basislinie (baseline) erlauben sollen.

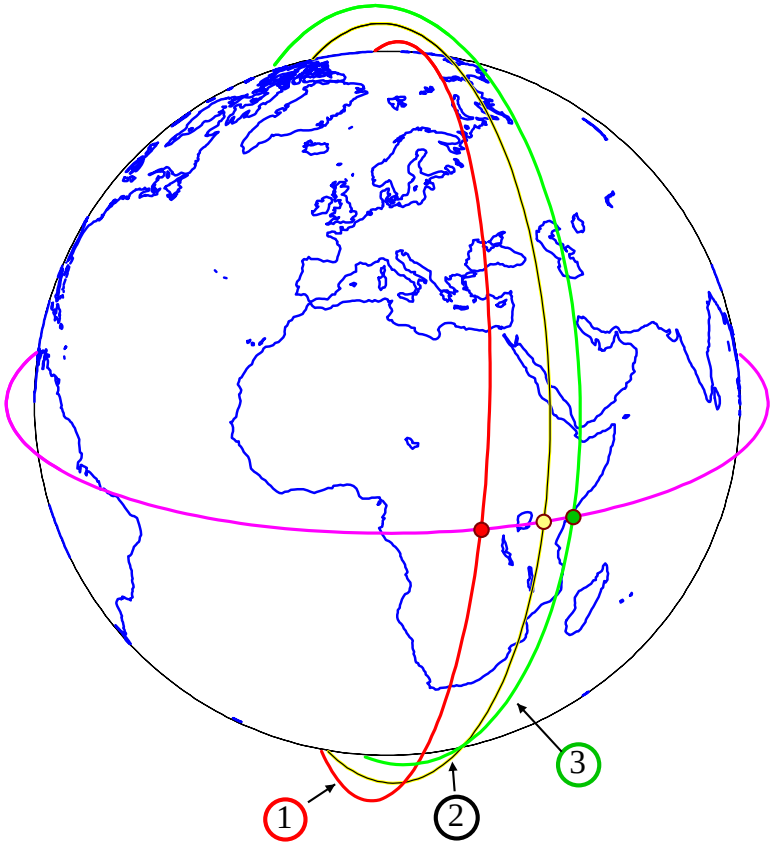


Bild 23-87: Bahnverhalten der drei Kleinsatelliten in der Dreiknoten-Pendulum-Konstellation (Trinodal Pendulum Konstellation) über einen drakonitischen Umlauf. Bahn 2 ist eine (mittlere) Kreisbahn, Bahn 1 mit kleiner Exzentrizität hat ihr Perigäum in der nördlichen Wende, Bahn 3 mit derselben Exzentrizität wie Bahn 1 hat ihr Perigäum in der südlichen Wende. (Die Bahnen haben die mittlere Kreisbahnhalbachse 6883.495 km und Inklination 97°.425. Die Abstände am Äquator betragen $\Delta\Omega_1$=-10° bzw. $\Delta\Omega_2$=5°, die Exzentrizitäten der Bahnen 1 und 3 haben den Wert $\overline{e}_0 = 0.05$)

Satellit 2 wird auf einer mittleren Kreisbahn mit denselben Parametern $\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0$ wie der Master angenommen. In der nördlichen Wende, also für das Argument der Breite u=90°, soll sich Satellit 1 in seinem Perigäum befinden im Abstand $\Delta H = \overline{a}_{SL}\,\overline{e}_{SL}$ unter dem ersten Satelliten. Bei vorgegebener Distanz ΔH kann daraus die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_{SL}$ dieses Satelliten berechnet werden. Der dritte Satellit soll sich in der nördlichen Wende im Apogäum seiner Bahn befinden, das sich um den Abstand $\Delta H = \overline{a}_{SL}\,\overline{e}_{SL}$ über der Position des ersten Satelliten befinden soll. Somit hat auch die Bahn des dritten Satellit die Exzentrizität $\overline{e}_{SL}$. Für alle drei Satelliten wird gefordert, dass sie gleichzeitig wieder den Knoten überfliegen, dass ihre drakonitische Umlaufzeit also identisch ist. Dies kann nach den Formeln in Abschnitt 23.3.3 ab Seite 181 nur erreicht werden, wenn neben einer Modifikation der Exzentrizität auch der Wert der großen Bahnhalbachse so angepasst wird, so dass die (mittlere) drakonitische Umlaufzeit (23.161) (auf Seite 177) unverändert bleibt: $\overline{a}_{SL} = \overline{a}_0 + \Delta a$. Dieser Prozess muss iterativ durchgeführt werden. In der Praxis bei sehr kleinen Höhendifferenzen ΔH kann eine Variation der großen

Bahnhalbachse von wenigen Metern vernachlässigt werden. In diesem Fall haben die drei Kleinsatelliten die in Tabelle 23-48 gelisteten Epoche Bahnelemente.

	Große Bahnhalb-achse	Exzentri-zität	Inklina-tion	Rektaszen-sion des aufsteigen-den Kno-tens	Argument des Peri-gäums	Mittlere Anoma-lie zur Epoche
Master	$\bar{a}_0$	0.0	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 90°$	$\overline{M}_{00} = 270° + \Delta\upsilon$
Sat 1	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0 + \Delta\Omega_1$	$\bar{\omega}_0 = 90°$	$\overline{M}_{00} = 270°$
Sat 2	$\bar{a}_0$	0.0	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0 = 90°$	$\overline{M}_{00} = 270°$
Sat 3	$\bar{a}_{SL}$	$\bar{e}_{SL}$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0 + \Delta\Omega_2$	$\bar{\omega}_0 = 270°$	$\overline{M}_{00} = 90°$

Tabelle 23-48: Die Bahnparameter der drei passiven Satelliten im Fall des Trinodal Pendulum Konzeptes. Als Referenz sind die Bahnparameter des aktiven Bezugssatelliten (Master Satellite) eingefügt

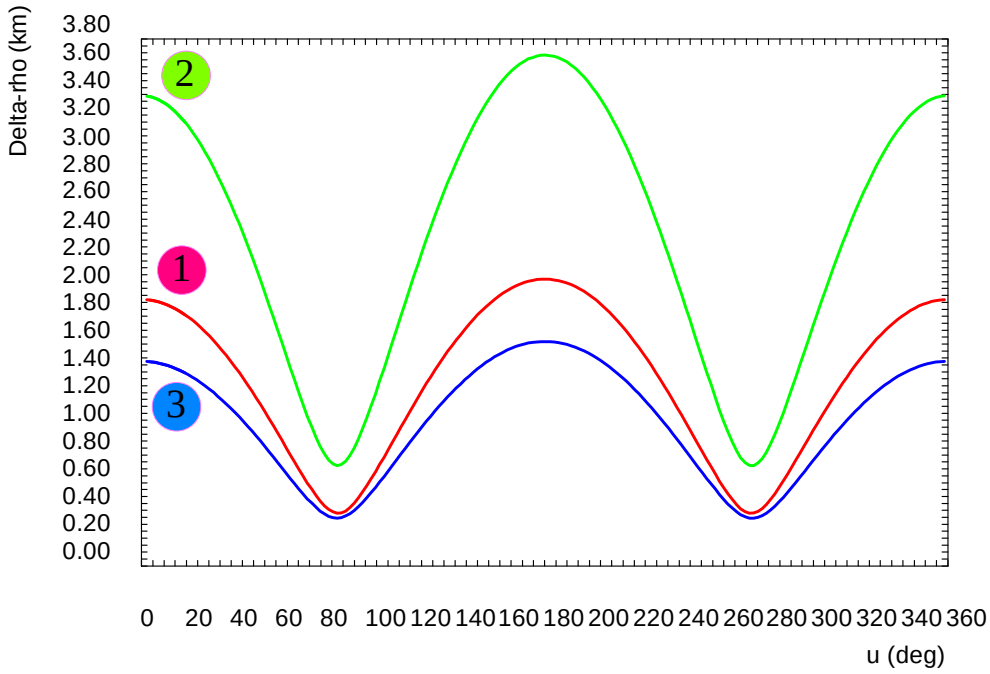


Bild 23-88: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Der Abstand von Satellit 2 zu Satellit 1 beträgt am Äquator $\Delta\Omega_2$=1.426 km, der Abstand des dritten Satelliten vom ersten $\Delta\Omega_1$=1.9 km. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den beiden Satelliten 1 und 3. (Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$)

Die spezielle Auswahl der Bahnparameter der drei Satelliten hat als Folge, dass sie stets eine Minimaldistanz zueinander aufweisen, also keine Kollisionsgefahr besteht, jedoch eine geeignete Baseline für die interferometrische Beobachtung zur Verfügung steht. Dies wird exemplarisch in Bild 23-88 gezeigt. Hier sind die relativen Abstände zwischen je zwei der drei Satelliten über einen drakonitischen Umlauf dargestellt. Der Minimalabstand in der nördlichen bzw. südlichen Wende wird nicht unterschritten. Die Abstände bei Knotenüberflug sind etwas größer als gefordert, was eine Folge der elliptischen Bewegung und des verwendeten Bahnmodells ist.

Dies zeigt sich auch in den unterschiedlichen Minima während der nördlichen bzw. der südlichen Wende.

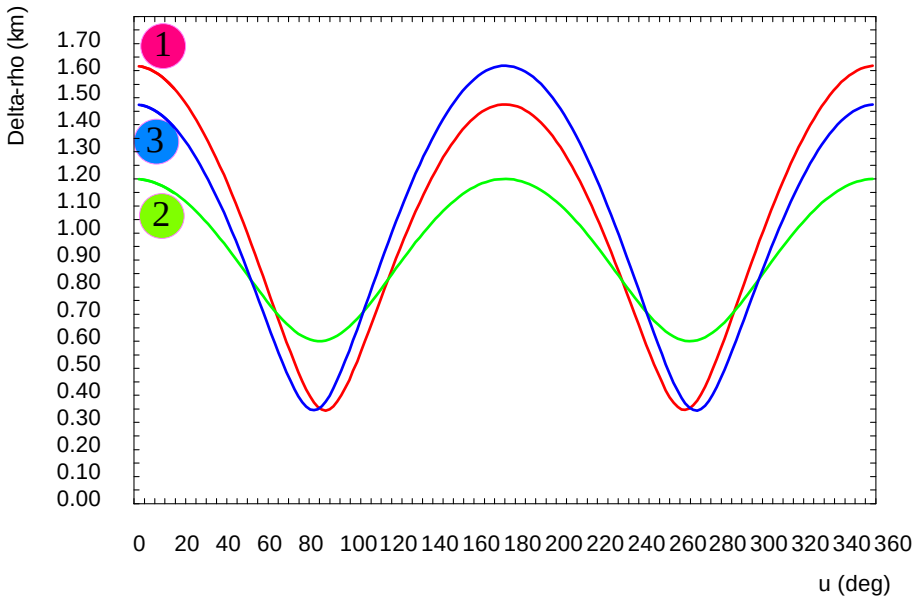


Bild 23-89: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Der Abstand der Satelliten 2 und 3 zu Satellit 1 beträgt am Äquator $\Delta\Omega_1$=1.426 km.. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 3.
(Bahndaten: $\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425$)

Es zeigt sich nun, dass wegen der elliptischen Bewegung der Satelliten 1 und 3 für diese beiden Satelliten sogar derselbe aufsteigende Knoten verwendet werden darf. Dies zeigt Bild 23-89. Kurve 2 zeigt den relativen Abstand der Satelliten 1 und 3, der offensichtlich über eine ausreichende Sicherheitsmarge verfügt.

Es liegt nahe zu untersuchen, ob auch für alle drei Satellitenbahnen derselbe aufsteigende Knoten ohne Kollisionsgefahr verwendet werden kann. Bild 23-90 zeigt den Verlauf der relativen Abstände im gewählten Beispiel über einen drakonitischen Umlauf. Kurve 2 zeigt den relativen Abstand der Satelliten 1 und 3 auf ihren elliptischen Bahnen, während der Verlauf der Abstände der kreisförmigen Satellitenbahn 2 zu den beiden anderen auf identischen Kurven verläuft, ein Hinweis auf das symmetrische Verhalten der Bahnen.

Der nächste Schritt einer Modifikation der Bahndaten einer Dreier – Konstellation kann sein, auch für die Bahn des Satelliten 1 eine Elliptizität anzunehmen. Falls für alle drei Satellitenbahnen dieselbe Exzentrizität gewählt wird, wird das im vorstehenden Abschnitt beschriebene CartWheel Konzept erhalten, das somit als ein Spezialfall einer großen Familie von geeigneten Bahnen von Dreier - Satellitenkonstellationen angesehen werden muss.

Im Rahmen einer Bahnauswahl kann man sich deshalb darauf konzentrieren herauszufinden, welches Bahnsystem am besten geeignet ist, eine vorgegebene Aufgabe zu lösen, wozu im Fall von SAR Interferometrie der Unterschied zwischen einer along track und einer cross track baseline gehören wird. Weiter muss der Aufwand für den Aufbau der Satellitenkonstellation und deren Bahnhaltung abgeschätzt werden.

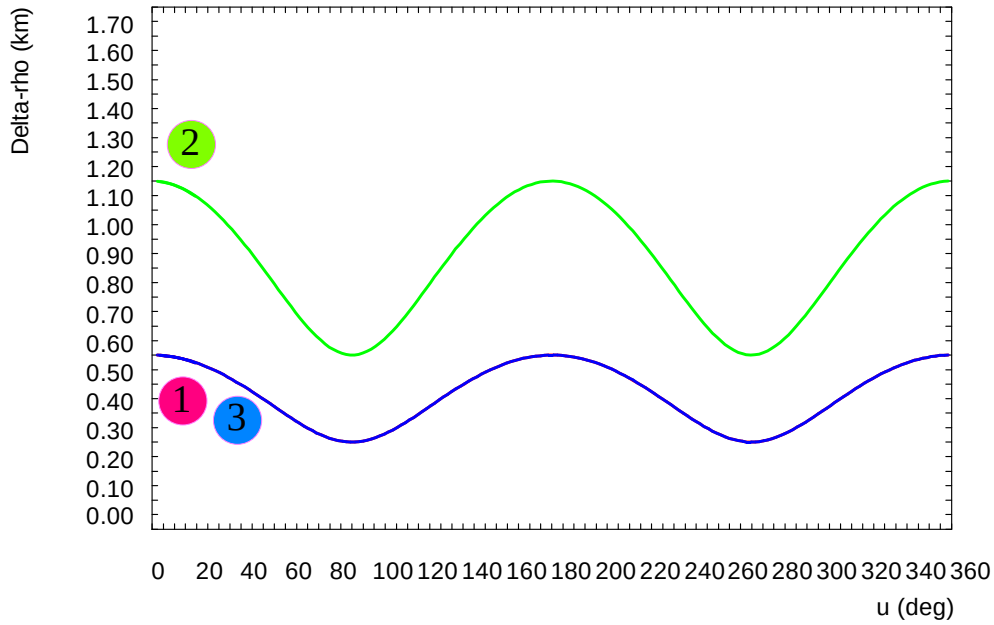


Bild 23-90: Die relativen Abstände zwischen den drei Kleinsatelliten während eines drakonitischen Umlaufs. Alle drei Satellitenbahnen haben denselben aufsteigenden Knoten. Der Minimalabstand von etwa 300 m, der während der Apsiden auftritt, wird nie unterschritten. Kurve 1: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 2; Kurve 2: Abstand zwischen den Satelliten 2 und 3; Kurve 3: Abstand zwischen den Satelliten 1 und 3. (Bahndaten:

$$\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425)$$

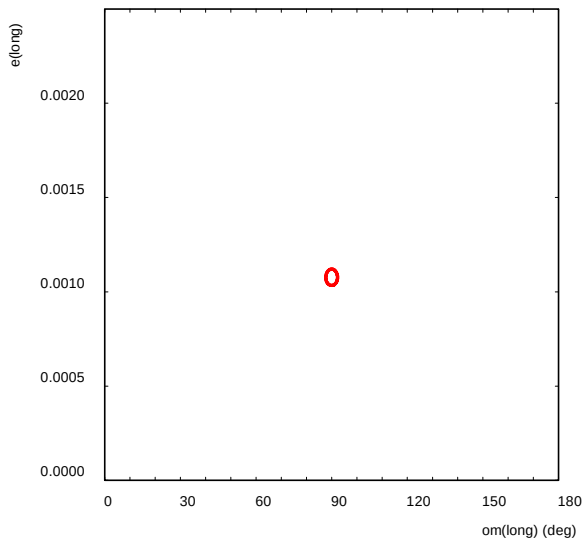


Bild 23-91: Langperiodische Librationsbewegung des gemittelten Argumentes des Perigäums für den dritten Kleinsatelliten, der mit dem mittlerem Argument des Perigäums 270° positioniert wurde. Die Librationsbewegung erfolgt auch in diesem Fall um die eingefrorene Exzentrizität. (Bahndaten:

$$\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425)$$

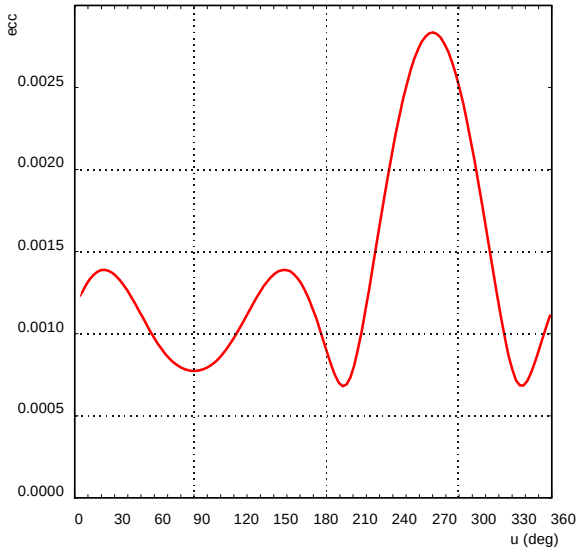
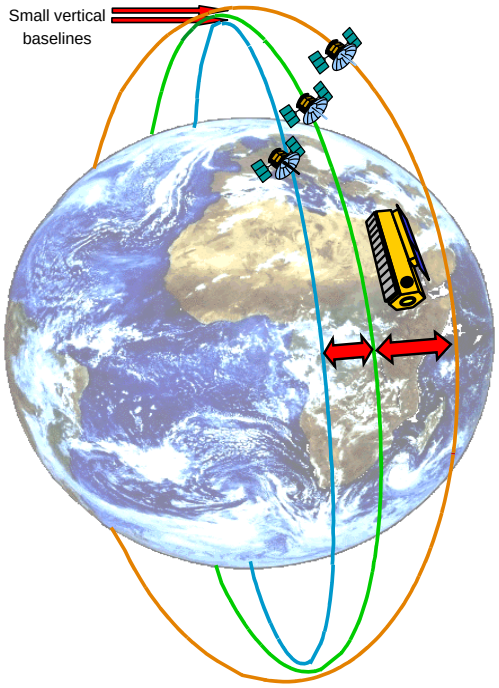


Bild 23-92: Kurzperiodischer Verlauf der Exzentrizität für den dritten Kleinsatelliten, der mit dem mittlerem Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0 = 270°$ positioniert wurde. (Bahndaten:

$$\bar{a}_0 = 6883.495 km, \bar{i}_0 = 97°.425)$$



Artist view of the Trinodal Pendulum with a small eccentric offset. The large horizontal baselines remain the same with an additional small vertical offset at the northern and southern turns.

Bild 23-93: Ergänzende Darstellung einer Trinodal Pendulum Konstellation (Doppel-Helix)[1]

Von besonderem Interesse ist der Fall des dritten Satelliten, dessen Perigäum in der südlichen Wende (u=270°) liegen soll. Die Entwicklung des langperiodischen Anteils der Exzentrizität in Bild 23-91 auf Seite 353 zeigt eine Librationsbewegung um die eingefrorene Exzentrizität, welche für die große Bahnhalbachse und Inklination dieser Bahnen gültig ist. Dies zeigt, dass das Bahnverhalten auch der Bahn des dritten Satelliten formstabil ist. Bild 23-92 zeigt den Verlauf des kurzperiodischen Anteils der Exzentrizität, der sich über die Lebensdauer dieses Satelliten nur unwesentlich ändern wird.

Die Installation der Satellitenkonstellation im Fall zweier oder dreier verschiedener Knoten kann folgendermaßen erfolgen: Gemeinsamer Einschuss der drei Satelliten, Änderung des Knotens in der nördlichen oder südlichen Wende entsprechend den Formeln in Abschnitt 12.3.1 oder 12.3.3 (Band III), außerdem Aufbau der elliptischen Bahn in der nördlichen bzw. südlichen Wende durch einen Hohmann Transfer mit zwei tangentialen Manövern (entsprechend Abschnitt 12.4.3).

Eine iterative Verbesserung um die Anfangsbedingungen besser zu erfüllen kann durch leichte Verschiebung der Satellitenörter längs ihrer Bahn um wenige Meter erreicht werden. Die Verhältnisse sind sehr empfindlich, was darauf hindeutet, dass beim Aufbau der Konstellationen mit sehr kleinen Schüben gearbeitet werden muss.

[1] Kopie aus: FIEDLER, H., G. KRIEGER, F. JOCHIM [2003]: Analysis of TerraSAR-L CartWheel Constellations, Amendment to WP 2100, Doc. No. TSLC-TN 2101, 27th November 2003

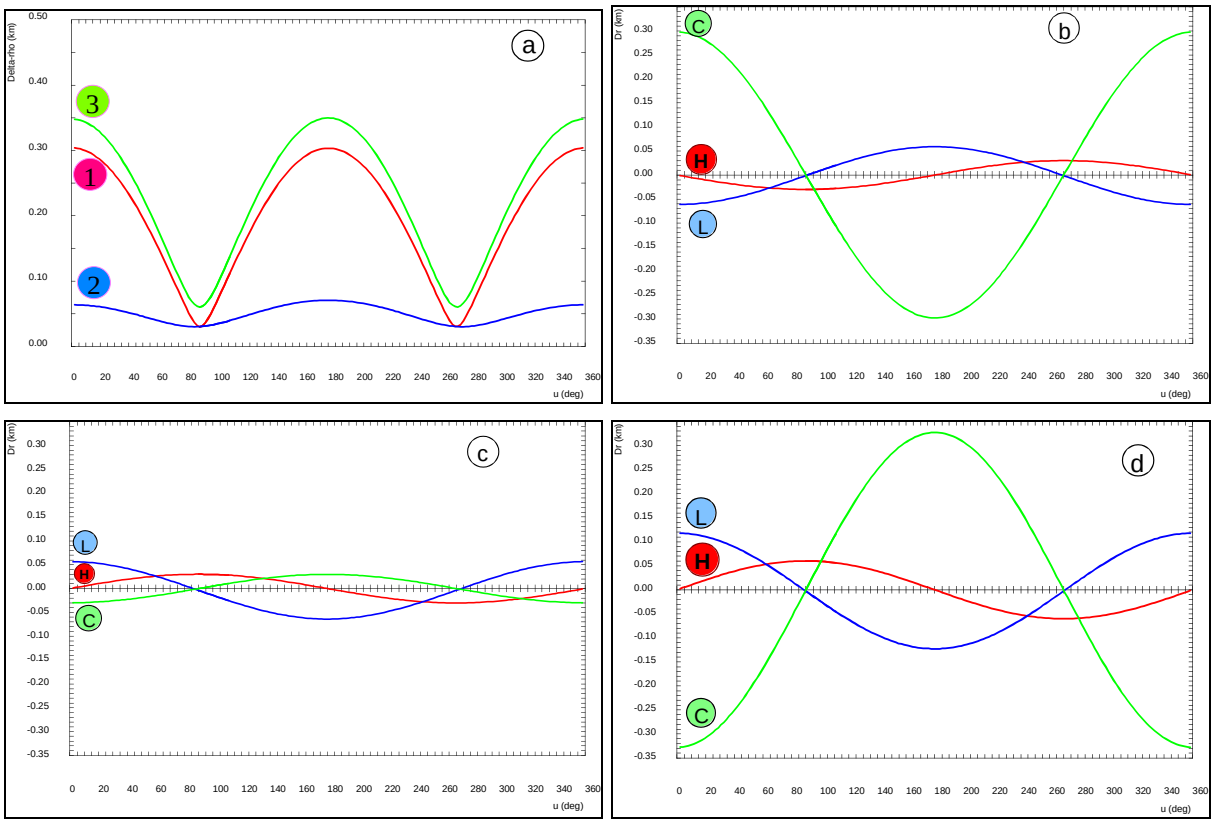


Bild 23-94: Das Bahnverhalten der drei Satelliten im Trinodal Pendulum Konzept: Bild (a) zeigt die jeweiligen Abstände zwischen den drei Satelliten über einen drakonitischen Umlauf, Kurve 1 den Abstand zwischen Satellit 1 und 2, Kurve 2 zwischen Sat 3 und Sat 2, sowie Kurve 3 zwischen den Satelliten 1 und 3 auf ihren schwach elliptischen Bahnen; die Bilder (b) – (d) zeigen die Zerlegung der jeweiligen Distanzvektoren in einem HCL-System (H – radiale, L-transversale, C – normale Komponente) eines Bezugssatelliten, in Bild (b) Sat 1 in Bezug auf Sat 2, in Bild (c) Sat 3 in Bezug auf Sat 2, in Bild (d) Sat 3 in Bezug auf Sat1. Die pendelnde Bewegung der drei Satelliten umeinander ist in diesen Darstellungen gut zu erkennen.

	$\bar{a}_0$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\bar{\Omega}_0$	$\bar{\omega}_0$	$\overline{M}_0$
Sat 1	6868.136	0.0000043799737	97°.38691	359°.997497497	90°	-0°.000166845
Sat 2	6868.136	0.0	97°.38691	0°.0	90°	0°.000166845
Sat 3	6868.136	0.0000043799737	97°.38691	0°.0002502678	270°	180°.000166845

Tabelle 23-49: Die Bahnparameter der drei passiven Satelliten für das Trinodal Pendulum Konzept im Fall des numerischen Beispiels

Als numerisches BEISPIEL werde eine Dreierkonstellation unter den folgenden Randbedingungen untersucht: Die Bahn in etwa 500km mittlerer Bahnhöhe sei sonnensynchron. Die mittlere Bahn des zweiten Satelliten werde als kreisförmige Referenzbahn angenommen. Die Bahn des ersten Satelliten habe im aufsteigenden Knoten gegenüber der Bahn des zweiten Satelliten den Abstand 300m in westlicher Richtung und in nördlicher Richtung einen Abstand von 30m unter der Bahn des zweiten Satelliten. Dies bedeutet, dass sich der erste Satellit in der nördlichen Wende in seinem Perigäum befindet. Der dritte Satellit habe im aufsteigenden Knoten den Abstand 30m zum zweiten Satelliten in östlicher Richtung, in der nördlichen Wende befinde er sich 30m über dem zweiten Satelliten, er nehme dort somit sein Apogäum ein. Um die Bedingung der exakten Positionierung übereinander in der nördlichen Wende zu erreichen, werden

die Satellitenörter um einige Meter in ihren jeweiligen Bahnen verschoben. Damit haben die drei Bahnen die in Tabelle 23-49 gelisteten mittleren *Kepler*elemente[1].

Das zugehörende Bahnverhalten ist in Bild 23-94 zusammenfassend dargestellt. Die Bilder zeigen die relativen Bewegungen im mitgeführten Bahnsystem, in dem sich die Pendelbewegung der Bahnen umeinander gut zu erkennen gibt. Wegen dieser relativen Bewegungsform wird diese Bewegung gelegentlich auch als „*Doppel-Helix-Bewegung*“ bezeichnet. ◀

23.14.5 Formationsflug zweier Satelliten in Helix-Konfiguration

Das Trinodal Pendulum Konzept wurde als Alternative zum CartWheel Konzept entwickelt um mit Hilfe von drei kleinen Hilfssatelliten SAR Interferometrie betreiben zu können, wozu ein separat fliegender Mastersatellit als Beleuchter dient. Die Bahnen der drei kleinen Satelliten winden sich scheinbar umeinander, so dass dieses Konzept den Namen Doppel-Helix erhielt. Abgeleitet davon wurde das Konzept von zwei eng beisammen fliegenden Satelliten entwickelt, deren Abstand als Basislinie für die SAR Interferometrie dienen soll. Um eine möglichst gleichbleibende Basislinie zu erreichen, aber auch eine Kollisionswahrscheinlichkeit zu minimieren, wurden wie im Fall des Trinodal Pendulum für beide Bahnen bei gleichbleibender Bahnhalbachse und Inklination die Exzentrizität und die Rektaszension des aufsteigenden Knotens etwas verändert. Dadurch wird erreicht, dass die beiden Satellitenbahnen sich scheinbar umeinander wie eine Helix winden, so dass für dieses Prinzip der Name Helix-Konzept gewählt wurde.

Oskulierende Elemente	TerraSAR-X	TanDEM-X
Große Bahnhalbachse	6883.5019 km	6883.5005 km
Exzentrizität	0.0012503369	0. 0011922565
Inklination	97° 26′ 49″.655	97° 26′ 49″.737
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	241° 25′ 39″.169	241° 65′ 14″.611
Argument des Perigäums	89° 48′ 32″.988	89° 48′ 58″.173
Mittlere Anomalie	160° 19′ 50″.560	160° 19′ 38″.143

Tabelle 23-50: Die mittleren Keplerelemente von TerraSAR-X und TanDEM-X für den Zeitpunkt 22. August 2016, 12:00:23.8 UTC[2]

BEISPIEL: Das Helix-Prinzip wurde erfolgreich bei den Projekten TerraSAR-X (gestartet am 15. Juni 2007) und dem baugleichen Satelliten TanDEM-X (gestartet am 21. Juni 2010) realisiert. Die beiden Satelliten bewegen sich seit Oktober 2010 in unterschiedlichen Helix-Formationen, die je nach Beobachtungszielen durch verschiedene Manöver eingestellt werden. Als numerisches Beispiel wurden für einen bestimmten Zeitpunkt die aktuellen Keplerparameter der beiden Satelliten ausgewählt (zusammengestellt in Tabelle 23-50). Mit diesen Werten wurde die relative Distanz der beiden Satelliten über einen drakonitischen Umlauf berechnet, dargestellt in Bild 23-97. Sie schwingt zwischen den Abständen 400 m und 1.6 km.

---

[1] Aus: ENDERLE, W. et al. [2006]

[2] Die Bahnelemente wurden von *Ralph Kahle* (DLR-RB) zur Verfügung gestellt (2016-Sep-22). Es zeigte sich, dass in diesem Fall die von NORAD zur Verfügung gestellten 2-line Elements wegen der nicht aktuellen Aktualisierungsrate unbrauchbar sind.

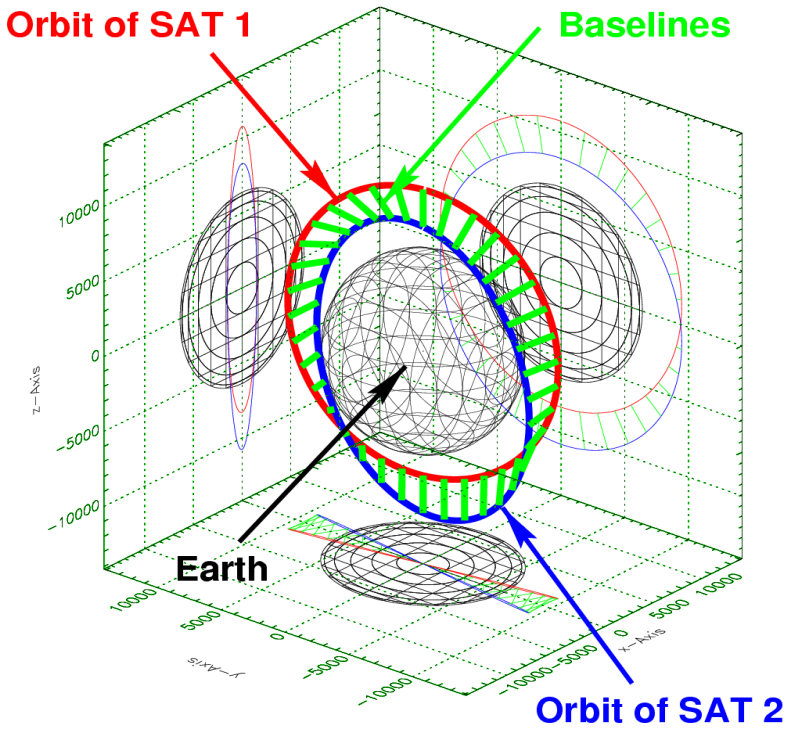


Bild 23-95: Demonstration einer Helix-Konfiguration[1]

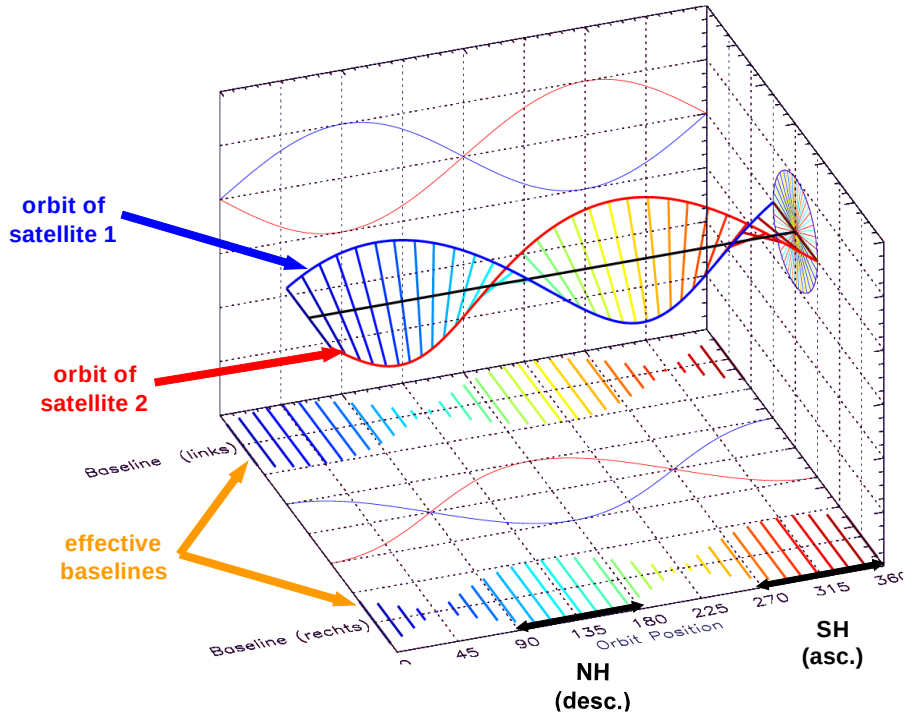


Bild 23-96: Das Bahnverhalten der zwei Satelliten in einer Helix Formation, dargestellt in Aufriss, Seitenriss und Grundriss. Eingezeichnet ist die effektive Basislinie für SAR Interferometrie[2]

---

[1] Kopie aus: FIEDLER, H., G. KRIEGER, M. WENDLER, J. MITTERMAYER, F. JOCHIM, M. KIRSCHNER, A. MOREIRA [2002]: *Analysis of Satellite Configurations for Spaceborne SAR Interferometry*, DLR Microwave and Radar Institute, Präsentationsfolien für Vortrag, Oktober 2002. Siehe auch FIEDLER, H. et. al. [2002 a]

[2] Kopie aus: FIEDLER, H. et. al. [2002], siehe auch Bild 23-95

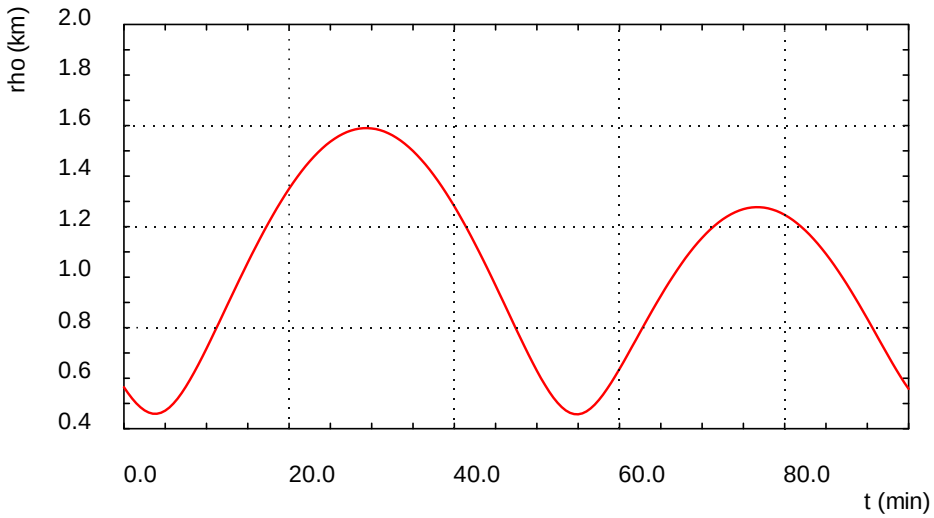


Bild 23-97: Verlauf der relativen Distanz der beiden Satelliten TerraSAR-X und TanDEM-X in Helix Formation über einen drakonitischen Umlauf (Epoche: 22. August 2016, Elemente aus Tabelle 23-50, gerechnet ab 12 Uhr UTC über 95 Minuten) ◀

23.14.6 Formationsflug mit Kreisbewegung in einer Bahnebene

Eine globale tägliche Überdeckung der Erdoberfläche ist mit mehreren Satelliten möglich, die in ein und derselben („inertialen“) Bahnebene angeordnet sind. Um dies zu untersuchen, wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Anordnung der Satelliten innerhalb der (inertialen) Bahnebene und dem Spurversatz der Bodenspuren bezüglich der Erdoberfläche berechnet.

Die Anordnung der Satelliten in der Bahnebene wird durch einen Längendifferenz ΔL beschrieben, der eine Differenz ΔM in mittlerer Anomalie zugeordnet ist. Diese Anomaliedifferenz ist einer Zeitdifferenz über die Beziehung

$$\Delta t = \frac{\Delta M}{n_K} \tag{23.565}$$

zugeordnet , wenn n_K die mittlere *Kepler*sche Bewegung der Satelliten ist. Mit der Fundamentalbeziehung (23.227) (auf Seite 199) beträgt die mittlere Knotenlängenverschiebung im Zeitintervall Δt

$$\overline{\delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\Delta t = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\overline{P_D}}\Delta t \quad . \tag{23.566}$$

Hier ist $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ die säkulare Knotenlängenvariation nach Formel (23.224). Zwei benachbarte Bodenspuren der Satellitenbahnen sind voneinander um genau die Längenverschiebung $\overline{\delta\lambda_\Omega}$ getrennt.

Als BEISPIEL sei eine gleichmäßige Verteilung von *N* Satelliten in der einen („inertialen“) Bahnebene angenommen. Die Winkelverteilung längs der Bahn bei (idealer) kreisförmiger Bewegung ist dann

$$\Delta M = \frac{360°}{N} \quad , \tag{23.567}$$

die zugehörige Zeitdifferenz, mit der Satelliten hintereinander herfliegen, beträgt

$$\Delta t = \frac{\overline{P_D}}{N} \tag{23.568}$$

und die Knotenlängendifferenz zwischen den Bodenspuren auf der Erdoberfläche

$$\overline{\delta\lambda_\Omega} \;=\; \Delta t \cdot \dot{\lambda}_{\Omega s} \;=\; \Delta t \,\frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{N} \quad . \tag{23.569}$$

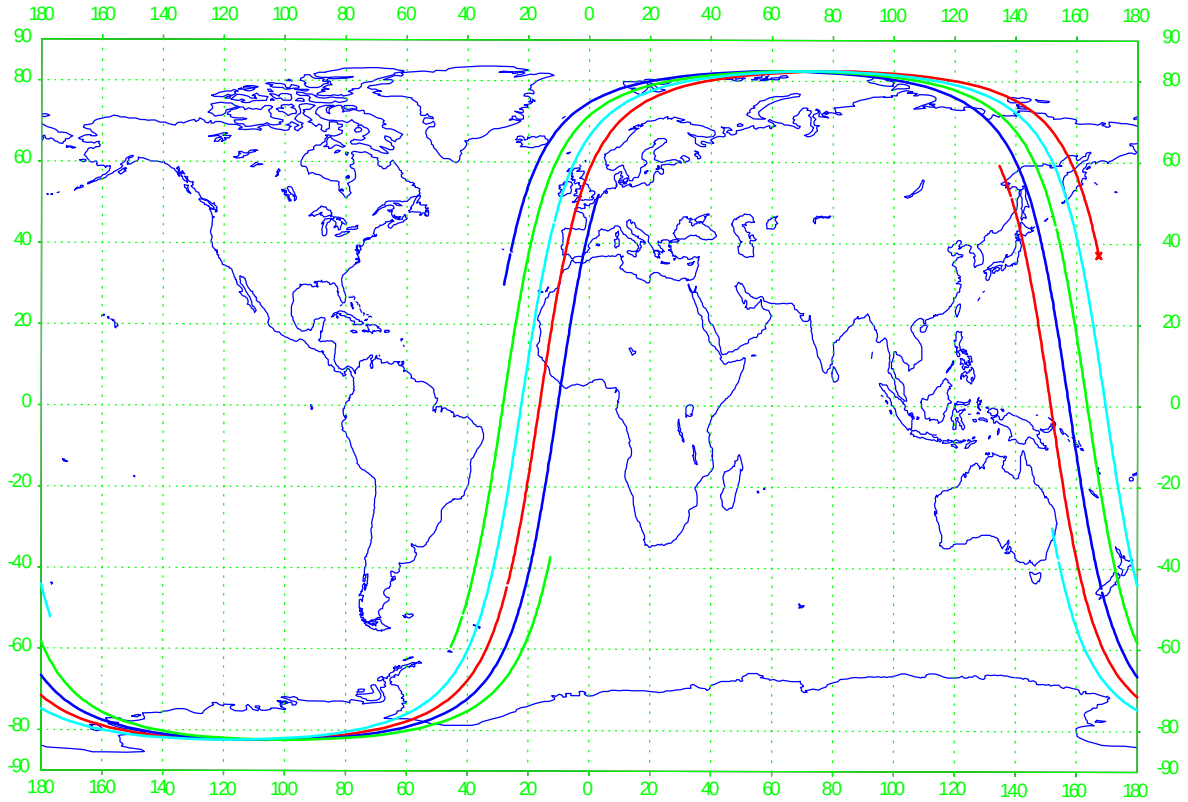


Bild 23-98: Bodenspuren von vier gleichartigen Satelliten gleichförmig verteilt auf ein und derselben („inertialen“) Kreisbahn über einen drakonitischen Umlauf

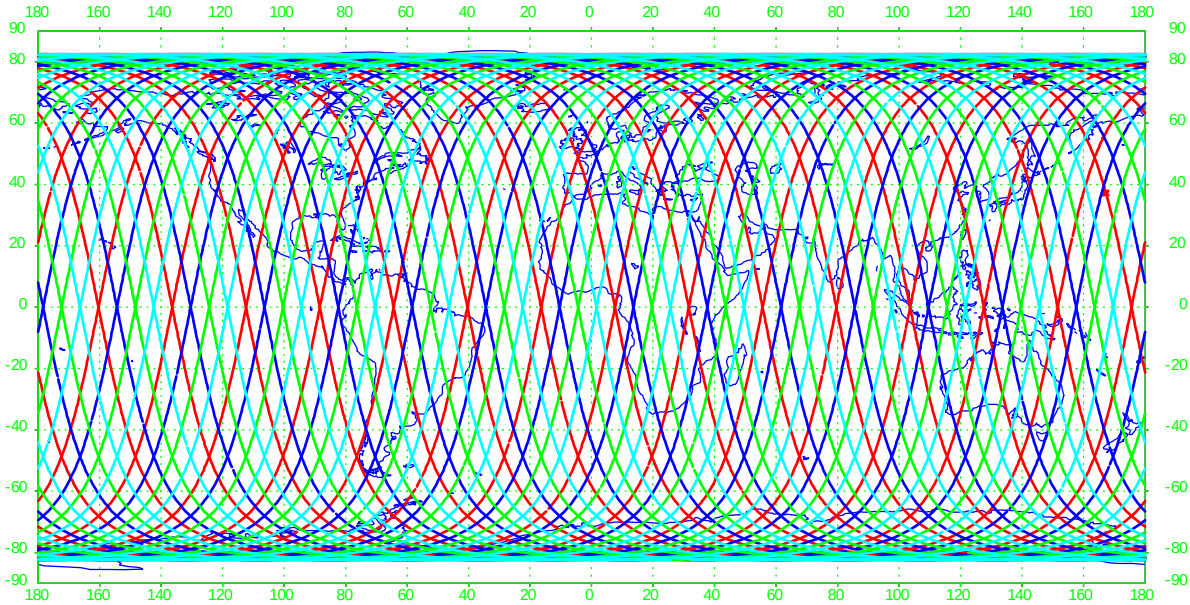


Bild 23-99: Bodenspuren von vier gleichartigen Satelliten gleichförmig verteilt auf ein und derselben („inertialen“) Kreisbahn über einen ganzen Tag

Als numerisches BEISPIEL werde die sonnensynchrone 1:15 Integer Bahn (Halbachse a = 6939.142 km, Inklination i = 97°.659) betrachtet, auf der vier gleichartige Satelliten gleichverteilt fliegen sollen.

Bild 23-98 zeigt die um jeweils die Knotenlängendifferenz $\overline{\delta\lambda_\Omega} = -6°$ versetzten Bodenspuren über einen drakonitischen Umlauf. Zu erkennen ist der um ein Viertel der mittleren drakonitischen Umlaufzeit ($\overline{P_D}$ = 5760 sec) versetzte Beginn der Bewegung auf der jeweiligen Bodenspur. Ergänzend zeigt Bild 23-99 die Bodenspuren über einen ganzen Tag. Da es sich um Integer Bahnen handelt, sind die jeweiligen Spuren geschlossen. ◀

23.14.7 Formationsflug mit Kreisbewegung über genau einer Bodenspur

Mehrere Satelliten sollen über derselben Bodenspur hintereinander herfliegen. Dies ist die umgekehrte Aufgabe des vorhergehenden Abschnitts.

Die Satelliten, welche sich alle abgesehen vom aufsteigenden Knoten dieselben Keplerschen Bahnelemente haben sollen, überfliegen dieselbe mittlere Referenzlänge $\overline{\lambda_\Omega}$ zu verschiedenen Zeiten *t*. Die Knotenlänge ist über die auf den Nullmeridian (auf der Erde der Meridian durch Greenwich) bezogene Sternzeit Θ_G (entsprechend Formel (23.217) mit der Rektaszension des aufsteigenden Knotens verbunden

$$\overline{\lambda_\Omega} = \overline{\lambda_{\Omega 0}} + \dot{\lambda}_{\Omega s}(t - t_0) = \overline{\Omega} - \Theta_G = \overline{\Omega}_0 + \Theta_{G0} + \left(\dot{\Omega}_s + \dot{\Theta}\right)(t - t_0) \quad . \quad (23.570)$$

Da von jedem Satelliten derselbe Knoten bezüglich der Erdoberfläche überflogen werden soll, muss für Satellit-1 und Satellit-2 die Bedingung

$$\overline{\lambda_{\Omega 2}} = \overline{\lambda_{\Omega 1}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\Omega}_2 - \Theta_{G2} = \overline{\Omega}_1 - \Theta_{G1} \quad (23.571)$$

erfüllt sein. Mit vorgegebenem Zeitintervall $\Delta t = t_2 - t_1$ zwischen zwei Satelliten mit derselben Bodenspur kann die Differenz in Rektaszension $\Delta\Omega$ des aufsteigenden Knotens, um die Bahnelemente des zweiten Satelliten relativ zum ersten Satelliten festzulegen, berechnet werden. Der zweite Satellit hat dann die Rektaszension des aufsteigenden Knotens

$$\overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}_1 + \dot{\Theta}(t_2 - t_1) \quad . \quad (23.572)$$

Hier ist $\dot{\Theta}$ die säkulare tropische Rate der Erdrotation (siehe den Zahlenwert in (23.218)).

24 Die tropische Bewegung

Unter tropischer Bewegung wird in der Himmelsmechanik die Darstellung der Bewegung eines Himmelskörpers in Bezug auf den Frühlingspunkt verstanden. In der Himmelsmechanik der Bewegungen der Körper des Sonnensystems ist die Basisebene die Ekliptik als intermediäre Ebene des Sonnensystems, der Pol dieses Systems der ekliptikale Nordpol. In der Erdsatellitenbahnmechanik ist die Basisebene die Erdäquatorebene. Dies ist das aus der sphärischen Astronomie bekannte „bewegliche Äquatorsystem“[1]. Es ist gegenüber der als fest gedachten Erde im täglichen Umschwung des Sternhimmels als Folge der Erdrotation scheinbar „beweglich“. In diesem System, das für eine Epoche als fest angesehen wird, derzeit ist J2000.0 die zugehörige Fundamentalepoche, müssen die Integrationen einer Satellitenbewegung durchgeführt werden. Damit ist dieses System auch das Fundamentalsystem zur Untersuchung einer Satellitenbewegung. Dazu benötigt dieses System einen fest definierten Bezugspunkt. Als solcher wird der mittlere Frühlingspunkt angesehen, der Schnittpunkt des festgehaltenen Äquators mit der mittleren scheinbaren Sonnenbahn um die Erde, der Ekliptik.

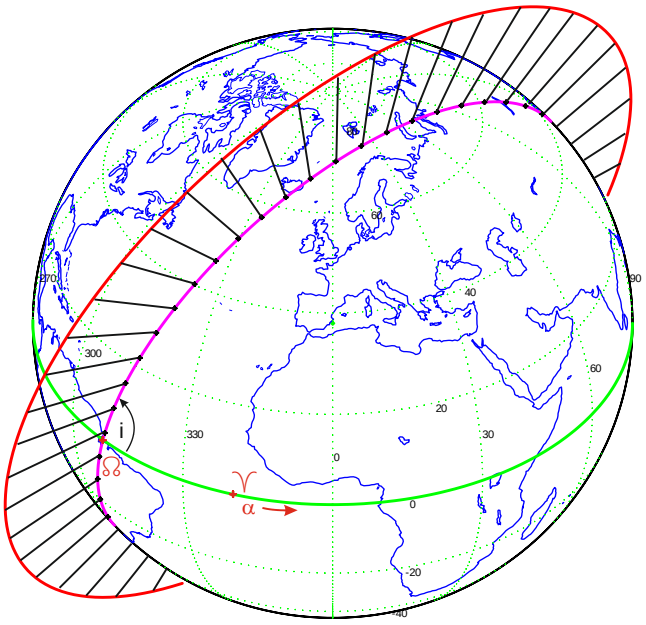


Bild 24-1: Oskulierende wahre und zugehörende Subsatellitenbahn ohne Rotation der Erde über einen tropischen Umlauf bei Bezug auf den Frühlingspunkt ♈ (Bahndaten: a=8578 km, e=0.15154, i=75°, ω=240°)

Für eine Satellitenbahnanalyse ist dieses System allerdings nicht von primärer Bedeutung. Es zeigt sich, dass im Rahmen der Untersuchung einer mittleren Satellitenbewegung und der damit verbundenen Auslegung einer Satellitenbahn, die auf den Frühlingspunkt bezogene, also tropische Bewegung logisch auf die in den vorstehenden Kapiteln behandelten Bewegungsarten bezogen werden kann.

[1] Ausführliche Beschreibung dieses Systems in Abschnitt 8.1 (Band II)

24.1 Das geozentrische Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem

24.1.1 Basissystem und Fundamentalsystem

Das Äquatorsystem habe die orthonormierte Basis $\mathbf{p}_i \,(i=1,2,3)$. $\mathbf{p}_1$ weise zum Frühlingspunkt (in der oben gegebenen Definition), $\mathbf{p}_2$ auf dem Äquator in rechtläufiger Richtung, $\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3$ zum Nordpol. Ein kartesisches System hat die Darstellung

$$\mathbf{r} = x^i \mathbf{p}_i \quad , \tag{24.1}$$

der zugehörige absolute Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}^i \mathbf{p}_i + x^i \dot{\mathbf{p}}_i \quad . \tag{24.2}$$

Der bezüglich dieses Äquatorsystems relative Geschwindigkeitsvektor werde mit

$$\dot{\mathbf{r}}_P \coloneqq \dot{x}^i \mathbf{p}_i \tag{24.3}$$

bezeichnet. Das System hat den zu diesem System relativen Eigenbewegungsvektor

$$\mathbf{D}_P \coloneqq D_p{}^i \mathbf{p}_i \tag{24.4}$$

und es gelten für die Variationen der Basisvektoren die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = p_i{}^j \mathbf{p}_j = \mathbf{D}_P \times \mathbf{p}_i \tag{24.5}$$

mit

$$D_{P1} = p_{23} \;,\; D_{P2} = p_{31} \;,\; D_{P3} = p_{12} \quad . \tag{24.6}$$

Mit diesen Zuordnungen können die Gleichungen (24.5) als die *Frenet*schen Gleichungen des Frühlingspunkt-bezogenen Äquatorsystems bezeichnet werden.

Wenn im Rahmen der Satellitenbahnmechanik die Eigenbewegung des Äquatorsystems vernachlässigt wird, wird das so festgehaltene System als ein Fundmentalsystem betrachtet. In einem solchen System erfolgt die Integration einer Satellitenbahn, alle externen Einflüsse auf die Bahn werden vernachlässigt. Diese Tatsache muss bei der Auswertung von Satellitendaten im Auge behalten werden. Der Eigenbewegungsvektor wird in diesem Fall als Nullvektor gedeutet. Der absolute Geschwindigkeitsvektor ist in diesem Fall gleich dem relativen Geschwindigkeitsvektor:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_P \quad \Leftarrow \quad \mathbf{D}_P = 0 \quad . \tag{24.7}$$

Anmerkung: Diese Bedingung ist nicht notwendig und hinreichend, da im Fall eines *Hansen* Systems absoluter und relativer Geschwindigkeitsvektor grundsätzlich identisch sind[1]. ◄

Wird ein Eigenbewegungsvektor eines Systems ausschließlich auf die Basisvektoren dieses Systems bezogen, wird er als „absoluter Eigenbewegungsvektor“ bezeichnet. Wird der Eigenbewegungsvektor auf ein anderes System bezogen, wird der Eigenbewegungsvektor als relativ bezeichnet, wenn dieses System selbst kein Fundamentalsystem ist. Wenn dieses System jedoch ein Fundamentalsystem ist, wird der Eigenbewegungsvektor auch in diesem Fall als absolut bezeichnet[2].

---

[1] Siehe etwa als Folge von Satz H16 (nach Formel (4.330)) in Abschnitt 4.4.3 (Band II)

[2] Siehe in Abschnitt 8.1.3 (Band II)

24.1.2 Bezug auf ein *Hansen* System

Das Basissystem für die Untersuchung einer Bewegung in der Bahnebene ist ein *Hansen* System. Das Basissystem für die Integration einer Bewegung im inertialen Raum ist das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem. Die Relation zwischen diesen beiden Systemen ist daher von grundlegender Bedeutung und soll daher hier überblickmäßig referiert werden[1].

Das *Hansen* System habe die orthonormierten Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(I)}$ $(i=,1,2,3)$. Die Drehung zwischen den beiden Systemen erfolgt mit den Eulerwinkeln Ω (Rektaszension des aufsteigenden Knotens), i (Inklination der Bahnebene bezüglich des Äquators), σ (Länge des aufsteigenden Knotens in der Bahnebene bezogen auf den Ursprung O des Hansen Systems). Mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos i \sin\sigma \sin\Omega + \cos\sigma \cos\Omega \\
a_{12} &= -\cos i \sin\sigma \cos\Omega + \cos\sigma \sin\Omega \\
a_{13} &= -\sin i \sin\sigma \\
a_{21} &= -\cos i \cos\sigma \sin\Omega + \sin\sigma \cos\Omega \\
a_{22} &= \cos i \cos\sigma \cos\Omega + \sin\sigma \sin\Omega \\
a_{23} &= \sin i \cos\sigma \\
a_{31} &= \sin i \sin\Omega \\
a_{32} &= -\sin i \cos\Omega \\
a_{33} &= \cos i \quad .
\end{aligned} \tag{24.8}$$

lauten die Transformationsformeln zwischen einem *Hansen* System und dem auf das Frühlingspunkt-bezogene Äquatorsystem

$$\mathbf{q}_j^{(I)} = a_j{}^i \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{p}_i = a^j{}_i \mathbf{q}_j^{(I)} \quad . \tag{24.9}$$

Die Variationen der *Euler*winkel nach der Zeit bei Bezug auf ein Frühlingspunktbezogenes Äquatorsystem, das nicht notwendig als ein Fundamentalsystem angenommen werden darf, sind aus den Variationsgleichungen (8.441) bekannt[2]

$$\begin{aligned}
(i)^{\cdot} &= \dot\eta \cos(\zeta-\sigma) - p_{31}\sin\Omega - p_{23}\cos\Omega \\
\dot\Omega \sin i &= \dot\eta \sin(\zeta-\sigma) - p_{12}\sin i - (p_{31}\cos\Omega - p_{23}\sin\Omega)\cos i \\
\dot\sigma \sin i &= \dot\eta \sin(\zeta-\sigma)\cos i - p_{31}\cos\Omega + p_{23}\sin\Omega \quad .
\end{aligned} \tag{24.10}$$

Hier genügen die Basisvektoren des Äquatorsystems den *Frenet*schen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{p}}_i = p_i{}^j \mathbf{p}_j \qquad \langle p_{ii} = 0 \,,\; p_{ij} = -p_{ji} \qquad . \tag{24.11}$$

Die Variationen der Basisvektoren der beiden Systeme haben die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} = \dot a_j{}^i \mathbf{p}_i + a_j{}^i \dot{\mathbf{p}}_i \quad , \quad \dot{\mathbf{p}}_i = \dot a^j{}_i \mathbf{q}_j^{(I)} + a^j{}_i \dot{\mathbf{q}}_j^{(I)} \tag{24.12}$$

mit den Variationen der Koeffizienten

---

[1] Die ausführliche Herleitung dieser Beziehungen findet sich in Abschnitt 8.12.2 (Band II), Formeln (8.423) – (8.431)

[2] In Abschnitt 8.12.3 (Band II)

$$
\begin{aligned}
\dot{a}_{11} &= -(i)^{\cdot} a_{31}\sin\sigma - \dot{\sigma} a_{21} - \dot{\Omega}\, a_{12} \\
\dot{a}_{12} &= -(i)^{\cdot} a_{32}\sin\sigma - \dot{\sigma} a_{22} + \dot{\Omega} a_{11} \\
\dot{a}_{13} &= (i)^{\cdot} a_{33}\sin\sigma - \dot{\sigma} a_{23} \\
\dot{a}_{21} &= (i)^{\cdot} a_{31}\cos\sigma + \dot{\sigma} a_{11} - \dot{\Omega} a_{22} \\
\dot{a}_{22} &= (i)^{\cdot} a_{32}\cos\sigma + \dot{\sigma} a_{12} + \dot{\Omega} a_{21} \\
\dot{a}_{23} &= (i)^{\cdot} a_{33}\cos\sigma + \dot{\sigma} a_{13} \\
\dot{a}_{31} &= (i)^{\cdot} a_{33}\sin\Omega - \dot{\Omega}\, a_{32} \\
\dot{a}_{32} &= -(i)^{\cdot} a_{33}\cos\Omega + \dot{\Omega}\, a_{31} \\
\dot{a}_{33} &= -(i)^{\cdot}\sin i \quad .
\end{aligned}
\tag{24.13}
$$

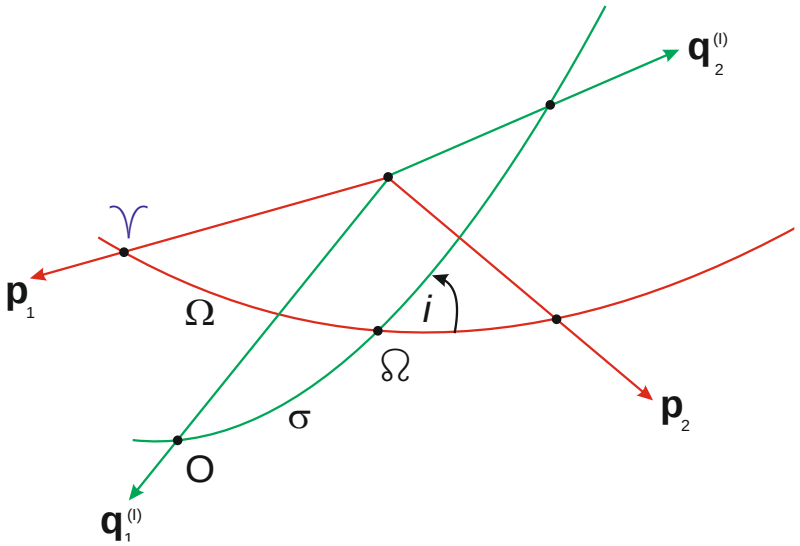


Bild 24-2: Zusammenhang zwischen dem Frühlingspunkt bezogenen $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem und einem $\mathbf{q}_j^{(I)}$ – *Hansen* System mit Drehungen um die drei *Euler*winkel (Ω, i, σ), bezogen auf den Frühlingspunkt ♈ als Bezugspunkt des (tropischen) Frühlingspunkt bezogenen Äquatorsystems, den aufsteigenden Knoten ☊, den (willkürlich auf der Bahnebene festgelegten) Anfangspunkt O des *Hansen* Systems

Die normale Beschleunigung b_N lautet in Bezug auf den zweiten *Hansen*schen Bahnwinkel[1]

$$\dot{\eta} = \frac{r}{G} b_N \quad . \tag{24.14}$$

Ein besonders interessanter Zusammenhang kann mit Hilfe der *Frenet*schen Gleichungen des *Hansen* Systems (4.325) hergeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_1^{(I)} &= -\dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(I)}\sin\zeta \\
\dot{\mathbf{q}}_2^{(I)} &= \dot{\eta}\,\mathbf{q}_3^{(I)}\cos\zeta \\
\dot{\mathbf{q}}_3^{(I)} &= \dot{\eta}\,(\mathbf{q}_1^{(I)}\sin\zeta - \mathbf{q}_2^{(I)}\cos\zeta) \quad .
\end{aligned}
\tag{24.15}
$$

[1] nach Formel (4.307) in Abschnitt 4.4.4, Band II

Es bestätigt sich, dass abgesehen von der Eigenbewegung des Äquatorsystems, alle Variationen zwischen dem Äquator- und dem *Hansen* System ausschließliche Folgen einer normalen Beschleunigung auf die Bahnebene des Satelliten sind.

24.1.3 Fundamentalsystem und *Hansen* System

In der Praxis wird das Äquatorsystem, auf das eine Bewegung bezogen wird, als ein Fundamentalsystem definiert. Es wird zu einem Zeitpunkt (etwa der zur Zeit noch gültigen Fundamentalepoche J2000.0) und entsprechende mittlere Parameter (Präzession, Nutation[1], usw.) festgehalten. Auf ein inertiales System kann nach Satz H14 bei eventuellen hochgenauen Messungen des *Hansen*schen Bahnwinkels ζ geschlossen werden[2]. Wenn die Variationsgleichungen der Eulerwinkel statt (24.10) (mit $u = \zeta - \sigma$) in der Form

$$\begin{aligned} \frac{di}{d\zeta} &= \frac{d\eta}{d\zeta}\cos(\zeta-\sigma) \\ \frac{d\Omega}{d\zeta}\sin i &= \frac{d\eta}{d\zeta}\sin(\zeta-\sigma) \qquad \langle \mathbf{D}_p = 0 \\ \frac{d\sigma}{d\zeta}\sin i &= \frac{d\eta}{d\zeta}\sin(\zeta-\sigma)\cos i \end{aligned} \tag{24.16}$$

verwendet werden, muss grundsätzlich im Auge behalten werden, dass feinere Beobachtungen, die $\mathbf{D}_p \neq 0$ zur Folge haben, die Berechnungen entscheidend beeinflussen können.

24.2 Der Bahnwinkel der tropischen Bewegung

Dir tropische Bewegung wird auf den Frühlingspunkt bezogen. Daher ist es sinnvoll diese Bewegung in äquatorialen Koordinaten darzustellen.

24.2.1 Die äquatorialen Koordinaten eines Satelliten

Die Richtung eines Ortes S auf der Bahnebene hat in äquatorialen Koordinaten (α,δ) die Darstellung

$$\begin{aligned} \cos\alpha\,\cos\delta &= -\cos i\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega \\ \sin\alpha\,\cos\delta &= \cos i\sin u\cos\Omega + \cos u\sin\Omega \\ \sin\delta &= \sin i\sin u \quad . \end{aligned} \tag{24.17}$$

bzw. relativ im Dreieck ΩFS

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \cos u \\ \sin(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \sin u\cos i \\ \sin\delta &= \sin u\sin i \quad . \end{aligned} \tag{24.18}$$

Das Argument der Breite *u* kann auch direkt berechnet werden aus

$$\begin{aligned} \cos u &= \cos(\alpha-\Omega)\cos\delta \\ \sin u &= \sin(\alpha-\Omega)\cos\delta\cos i + \sin\delta\sin i \quad . \end{aligned} \tag{24.19}$$

---

[1] Siehe hierzu in Kapitel 9 vor allem in den Abschnitten 9.3 und 9.4)

[2] Abschnitt 4.3.16 (Band II)

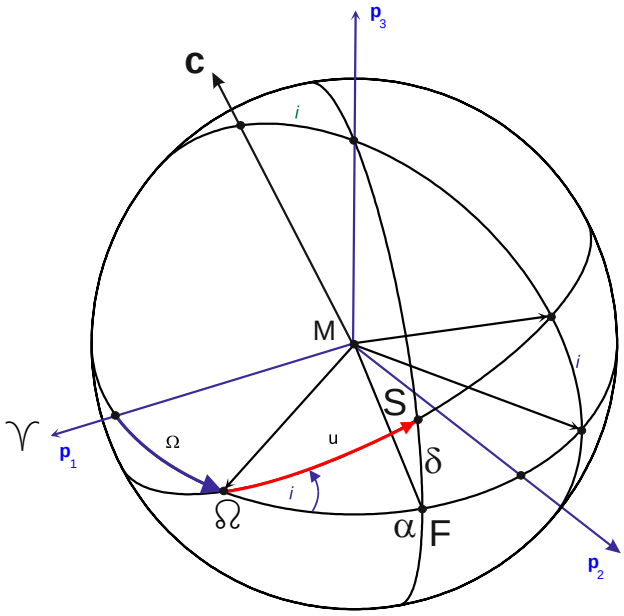


Bild 24-3: Zusammenhang zwischen dem Frühlingspunkt ♈ bezogenen Äquatorsystem mit den Winkelkoordinaten α (Rektaszension) und δ (Deklination) und der Satellitenbahn mit dem Argument der Breite u, ☊ – aufsteigender Knoten, S – Ort des Satelliten, F-Fußpunkt auf Äquator, M-Mittelpunkt der Sphäre, **c** – Normalenvektor der Bahnebene

Die zugehörenden Variationen sind[1]

$$\dot{\alpha} = \dot{\Omega} + \frac{\dot{u}\cos i - (i)^{\cdot}\sin i \sin u \cos u}{\cos^2\delta}$$
$$\dot{\delta} = \frac{\dot{u}\cos u \sin i + (i)^{\cdot}\sin u \cos i}{\cos\delta} \quad . \tag{24.20}$$

Mit den Variationsgleichungen (24.16), bzw. (11.70), (11.71) und (11.79)[2] werden diese Variationsausdrücke zurückgeführt auf

$$\dot{\alpha} = \dot{\zeta}\frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{G}{r^2}\frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{G}{r^2}\frac{\cos i}{1-\sin^2 u \sin^2 i}$$
$$\dot{\delta} = \dot{\zeta}\frac{\cos u \sin i}{\cos\delta} = \frac{G}{r^2}\frac{\cos u \sin i}{\sqrt{1-\sin^2 u \sin^2 i}} \quad . \tag{24.21}$$

bzw. in Abhängigkeit vom (ersten) *Hansen*schen Bahnwinkel auf

$$\frac{d\alpha}{d\zeta} = \frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{\cos i}{1-\sin^2(\zeta-\sigma)\sin^2 i}$$
$$\frac{d\delta}{d\zeta} = \frac{\cos u \sin i}{\cos\delta} = \frac{\cos(\zeta-\sigma)\sin i}{\sqrt{1-\sin^2(\zeta-\sigma)\sin^2 i}} \quad . \tag{24.22}$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass die tropische Bewegung für polare Bahnen nicht sinnvollerweise untersucht werden kann.

[1] vgl. in Abschnitt 23.1.2., insbesondere die Formeln (23.31) und (23.32)

[2] In Abschnitt 11.1.5 (Band II)

Anmerkung: Die vorstehenden Formeln gelten in dieser Form unabhängig von der Orientierung der Bahnebene, ob direkt $\left(0° \le i < 90°\right)$ oder retrograd $\left(90° < i \le 180°\right)$.◀

Aus der ersten der Formeln (24.21) folgt die wichtige allgemeingültige Beziehung zwischen der Richtung der Variation der Rektaszension und Recht- bzw. Rückläufigkeit der Satellitenbahn

$$\operatorname{sgn}\left(\dot{\alpha}\right) = \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) \quad . \tag{24.23}$$

24.2.2 Der tropische Bahnwinkel

Als Bahnwinkel der tropischen Bewegung wird der aus der klassischen Himmelsmechanik bekannte Knickwinkel „Länge in der Bahn“

$$l := \Omega + u \tag{24.24}$$

bezeichnet. Er wird in dieser Form in gleicher Weise für rechtläufige wie rückläufige Bahnen definiert. Die zugehörige Variationsgleichung kann mit den Variationsgleichungen (11.71) und (11.79) (Band III) abgeleitet werden:

$$\frac{dl}{dt} = \dot{\zeta} + \frac{r \sin u \left(1 - \cos i\right)}{G \sin i} \, b_N \quad \left\langle \sin i \neq 0 \,, \quad \dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} \quad . \right. \tag{24.25}$$

Mit den Variationsgleichungen (4.297) und (4.307) (Band II) kann diese Variation der Länge in der Bahn auf den *Hansen*schen Bahnwinkel bezogen werden:

$$\frac{dl}{d\zeta} = 1 + \frac{\sin\left(\zeta - \sigma\right)(1 - \cos i)}{\sin i} \frac{d\eta}{d\zeta} \quad \left\langle \sin i \neq 0 \right. \quad . \tag{24.26}$$

24.2.3 Die Reduktion auf den Äquator

Um die tropische Bewegung eines Satelliten in seiner Bahn auf eine gleichförmige mittlere Bewegung längs des Äquators zurückführen zu können, wird der Bahnwinkel der tropischen Bewegung, die Länge in der Bahn, zunächst durch eine mittlere Bewegung in der Bahnebene im Fall einer Ellipsennahen Bewegung mit Hilfe der Mittelpunktsgleichung ersetzt. In einem zweiten Schritt wird diese mittlere Bewegung in die Äquatorebene projiziert. Dieser Vorgang wird in diesem Abschnitt hergeleitet.

Der Begriff „Reduktion auf den Äquator“ geht auf *Hipparch* zurück, der im Zusammenhang mit seinen Beobachtungen der Mondbewegung periodische Schwankungen der Mittelpunktsgleichung mit der Periode eines halben Monats feststellte. Diese Beobachtung, die von *Ptolemäus* vertieft untersucht worden war, konnte als „Reduktion auf die Ekliptik“ beschrieben werden[1].

Zur Durchführung der Reduktion auf den Äquator im Fall einer Satellitenbewegung wird der Bahnbogen Argument der Breite *u* zwischen aufsteigendem Knoten und dem Ort des Satelliten auf den Äquator projiziert. Für rechtläufige Bahnen wird gemäß Bild 24-3 mit der Rektaszension α des Satelliten die knotenbezogene Rektaszension $\alpha_N \left[0° \le i < 90°\right] = \alpha - \Omega$ erhalten. Für rückläufige Bahnen lautet dagegen nach Bild 24-3 die knotenbezogene Rektaszension

[1] STUMPFF, K. [1959], p. 27

$\alpha_N\left[90° < i \le 180°\right] = \Omega - \alpha$. Um die Reduktion auf den Äquator für Satellitenbahnen einheitlich behandeln zu können, muss die knotenbezogene Rektaszension daher in der Form

$$\alpha_N := \sigma_i\left(\alpha - \Omega\right) \tag{24.27}$$

verwendet werden. Dazu wird der *retrograde Faktor* eingeführt

$$\sigma_i := \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma_i = 1 & \prec \ 0° \le i < 90° \\ \sigma_i = 0 & \prec \ i = 90° \\ \sigma_i = -1 & \prec \ 90° < i \le 180° \end{cases} . \tag{24.28}$$

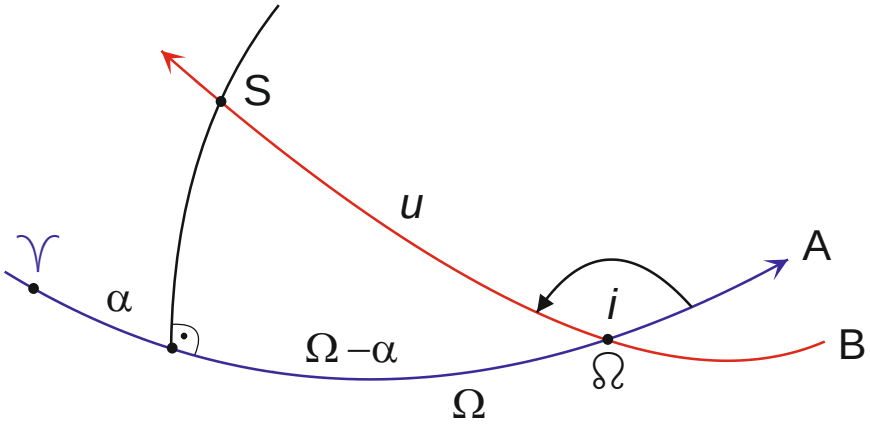


Bild 24-4: Projektion des Bahnbogens *u* auf den Äquator A bei rückläufigen Satellitenbahnen

Um eine einheitliche Darstellung zu gewährleisten werden die Formel (24.18) in diesem Fall in der verallgemeinerten Form

$$\begin{aligned} \cos\alpha_N \cos\delta &= \cos u \\ \sin\alpha_N \cos\delta &= \sin u \cos i \\ \sin\delta &= \sin u \sin i \end{aligned} \tag{24.29}$$

geschrieben.

Zur Herleitung der *Reduktion auf den Äquator* wird der Differenzwinkel $\alpha_N - u$ entwickelt. Die ersten beiden Gleichungen (24.29) ergeben

$$\tan\alpha_N = \tan u \cos i \tag{24.30}$$

umgeformt

$$\tan\left[\alpha_N - u\right] = -\frac{\left(1-\cos i\right)\tan u}{1+\cos i \tan^2 u} \quad . \tag{24.31}$$

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Identität

$$\tan^2\frac{i}{2} = \frac{1-\cos i}{1+\cos i} \tag{24.32}$$

umgeschrieben werden in

$$\tan\left[\alpha_N - u\right] = -\frac{\tan^2\dfrac{i}{2}\sin 2u}{1+\tan^2\dfrac{i}{2}\cos 2u} \quad . \tag{24.33}$$

Die Verwendung des halben Winkels der Inklination hat hier den Vorteil, dass unabhängig von der Orientierung der Bahn (ob recht- oder rückläufig) die Größe

$$Q := \tan^2 \frac{i}{2} \tag{24.34}$$

stets der Einschränkung

$$0 \le Q < 1 \qquad \langle i < 180° \tag{24.35}$$

unterliegt. Wird deshalb (24.33) umgeformt in

$$\alpha_N = u - \arctan\left(\frac{Q \sin 2u}{1 + Q \cos 2u} \right) \tag{24.36}$$

kann dieser Ausdruck entwickelt werden in die Potenzreihe

$$\alpha_N = u - \arctan\left[Q \sin 2u \left(1 - Q \cos 2u + Q^2 \cos^2 2u + \cdots \right) \right] \quad . \tag{24.37}$$

Eine Entwicklung der arctan-Funktion führt weiterhin auf den Näherungsausdruck

$$\alpha_N = u - Q \sin 2u + \frac{Q^2}{2} \sin 4u - \frac{Q^3}{3} \sin 6u + O\left(Q^4\right) \quad . \tag{24.38}$$

Das Argument der Breite *u* kann mit der Mittelpunktsgleichung[1] (23.41) im Fall einer elliptischen Bewegung auf die mittlere Anomalie M bezogen werden. Dies führt mit den Ausdrücken (22.19) und (23.42), mit einer Zerlegung der Parameter in einen mittleren und einen periodischen Anteil, schließlich auf den Näherungsausdruck[2]

$$\begin{aligned} \alpha_N = \overline{\alpha_N} + \delta\alpha_N = \bar{M} + \bar{\omega} + 2\bar{e}_0 \sin \bar{M} + \frac{5}{4} \bar{e}_0^2 \sin 2\bar{M} + \cdots - \\ - \tan^2 \frac{\bar{i}_0}{2} \left[\sin 2\left(\bar{\omega} + \bar{M} \right) + 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega} + 3\bar{M} \right) - 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega} + \bar{M} \right) \right] + \\ + O\left(\tan^4 \frac{\bar{i}_0}{2} \right) + O\left(\bar{e}_0^2 \right) + \delta M + \delta\omega \end{aligned} \tag{24.39}$$

mit Berücksichtigung der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung auch

$$\begin{aligned} \alpha_N = \overline{n_D}\, \Delta t + 2\bar{e}_0 \sin \bar{M} + \frac{5}{4} \bar{e}_0^2 \sin 2\bar{M} + \cdots - \\ - \tan^2 \frac{\bar{i}_0}{2} \left[\sin 2\left(\bar{\omega} + \bar{M} \right) + 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega} + 3\bar{M} \right) - 2\bar{e}_0 \sin\left(2\bar{\omega} + \bar{M} \right) \right] + \\ + O\left(\tan^4 \frac{\bar{i}_0}{2} \right) + O\left(\bar{e}_0^2 \right) + \delta M + \delta\omega \quad , \end{aligned} \tag{24.40}$$

wenn das Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$ auf einen Anfangszeitpunkt t_0 bezogen ist:

$$\bar{M} = M_0 + \left[\overline{n_{K0}} + \left(M_0 \right)^{\cdot}_s \right] \Delta t \quad , \quad \bar{\omega} = \omega_0 + \dot{\omega}_s \, \Delta t \quad . \tag{24.41}$$

Wenn jetzt noch die knotenbezogene Rektaszension α_N mit Ausdruck (24.27) ersetzt wird, folgt für die (näherungsweise) Berechnung der Rektaszension der Satellitenbewegung

---

[1] In Abschnitt 23.2.1

[2] Siehe etwa in DANJON, A. [1980], pp.43-45 et pp. 64-65; CAPDEROU, MICHEL [2003], pp.152-153z

$$\alpha = \alpha(t) = \bar{\alpha} + \delta\alpha = \sigma_i \alpha_N + \Omega = \bar{\Omega} + \delta\Omega + \sigma_i \left\{ \overline{n_{D0}}\, \Delta t + 2\bar{e}_0 \sin \bar{M} + \frac{5}{4}\bar{e}_0^2 \sin 2\bar{M} + \cdots - \right.$$
$$- \tan^2 \frac{\bar{i}_0}{2}\left[\sin 2(\bar{\omega} + \bar{M}) + 2\bar{e}_0 \sin(2\bar{\omega} + 3\bar{M}) - 2\bar{e}_0 \sin(2\bar{\omega} + \bar{M}) \right] + \qquad (24.42)$$
$$\left. + O\left(\tan^4 \frac{\bar{i}_0}{2} \right) + O(\bar{e}_0^2) + \delta M + \delta\omega \right\} \quad .$$

Dieser Ausdruck spielt im Rahmen der sphärischen Astronomie eine besondere Rolle. In ihm wird die doppeltperiodische Variation infolge der Mittelpunktsgleichung einerseits und des Verhaltens eines Himmelskörpers bei Bezug auf die Ekliptik bzw. eines Satelliten auf den Äquator andererseits augenscheinlich[1].

Die Variation der Rektaszension zur Beschreibung einer tropischen Bewegung lautet im Hinblick auf die Reduktion auf den Äquator nach (24.42)

$$\dot{\alpha} = \sigma_i \frac{d\alpha_N}{dt} + \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_s + \frac{d(\delta\Omega)}{dt} + \sigma_i \left\{ \overline{n_{D0}} + \frac{d}{dt}\left[2\bar{e}_0 \sin \bar{M} + \frac{5}{4}\bar{e}_0^2 \sin 2\bar{M} + \cdots \right] - \right.$$
$$- \frac{d}{dt}\left[\tan^2 \frac{\bar{i}_0}{2}\left[\sin 2(\bar{\omega} + \bar{M}) + 2\bar{e}_0 \sin(2\bar{\omega} + 3\bar{M}) - 2\bar{e}_0 \sin(2\bar{\omega} + \bar{M}) \right] \right] + \qquad (24.43)$$
$$\left. + \frac{d}{dt}\left[O\left(\tan^4 \frac{\bar{i}_0}{2} \right) + O(\bar{e}_0^2) + \delta M + \delta\omega \right] \right\} \quad .$$

Die mittlere tropische mittlere Bewegung wird so definiert, dass ein sich auf dem Äquator bewegender fiktiver Satellit gleichförmig derart bewegt, dass er sich mit dem wahren in seiner Bahn bewegenden Satelliten nach einem tropischen Umlauf wieder in einem Anfangspunkt $\alpha(t) = \alpha(t_0)$ trifft. Dazu werde der gesamte periodische Anteil in (24.43) in dem Symbol δ_P zusammengefasst. Da außerdem nach Beziehung (24.23) $\operatorname{sgn}(\dot{\alpha}) = \sigma_i$, kann

$$\sigma_i \dot{\alpha} = \sigma_i (\dot{\bar{\alpha}} + \delta\dot{\alpha}) = \sigma_i \dot{\Omega}_s + \overline{n_{K0}} + (M_0)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \sigma_i \delta_P > 0 \qquad (24.44)$$

gesetzt werden. Werde die Variation der Rektaszension in einen säkularen und einen periodischen Anteil aufgespalten $\dot{\alpha} = \dot{\bar{\alpha}} + \delta\dot{\alpha}$, kann die mittlere tropische mittlere Bewegung für einen Zeitpunkt t mit zu diesem Zeitpunkt gültigen mittleren Bahnparametern $(\bar{a}, \bar{e}, \bar{i})$ dargestellt werden

$$\overline{n_T} := \sigma_i \dot{\bar{\alpha}} = \overline{n_K} + (M_0)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s \quad . \qquad (24.45)$$

Entsprechend muss die säkulare Variation der Rektaszension auf einer Satellitenbahn festgehalten werden in der Form

$$\dot{\bar{\alpha}} = \sigma_i \left(\overline{n_K} + (M_0)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s \right) + \dot{\Omega}_s \quad . \qquad (24.46)$$

Da die mittlere *Kepler*sche mittlere Bewegung $\overline{n_K}$ die säkularen Variationen der anderen Parameter dominiert

$$\overline{n_K} > \left| (M_0)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \right| \geq 0 \quad , \qquad (24.47)$$

bleibt die mittlere tropische mittlere Bewegung stets eine positive Größe:

$$\overline{n_T} > 0 \ . \qquad (24.48)$$

---

[1] Die Verwendung dieser Formel bei Untersuchungen der scheinbaren Bewegung der Sonne und damit zusammenhängend der Zeitgleichung wird in den Abschnitten 28.2 und 28.3 (Band IV-B) demonstriert.

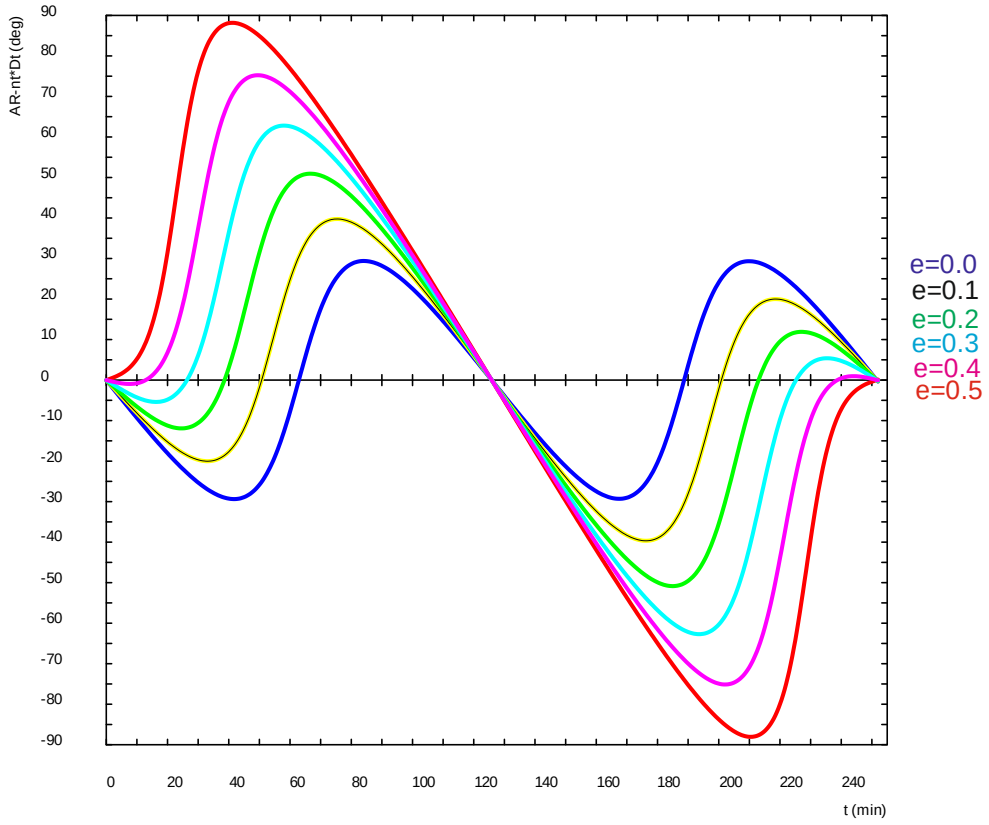


Bild 24-5: Reduktion auf den Äquator und auf gleichförmige Bewegung eines fiktiven Satelliten für verschiedene Exzentrizitäten während eines tropischen Umlaufs. Bahndaten: a=13200 km, i= 70°.

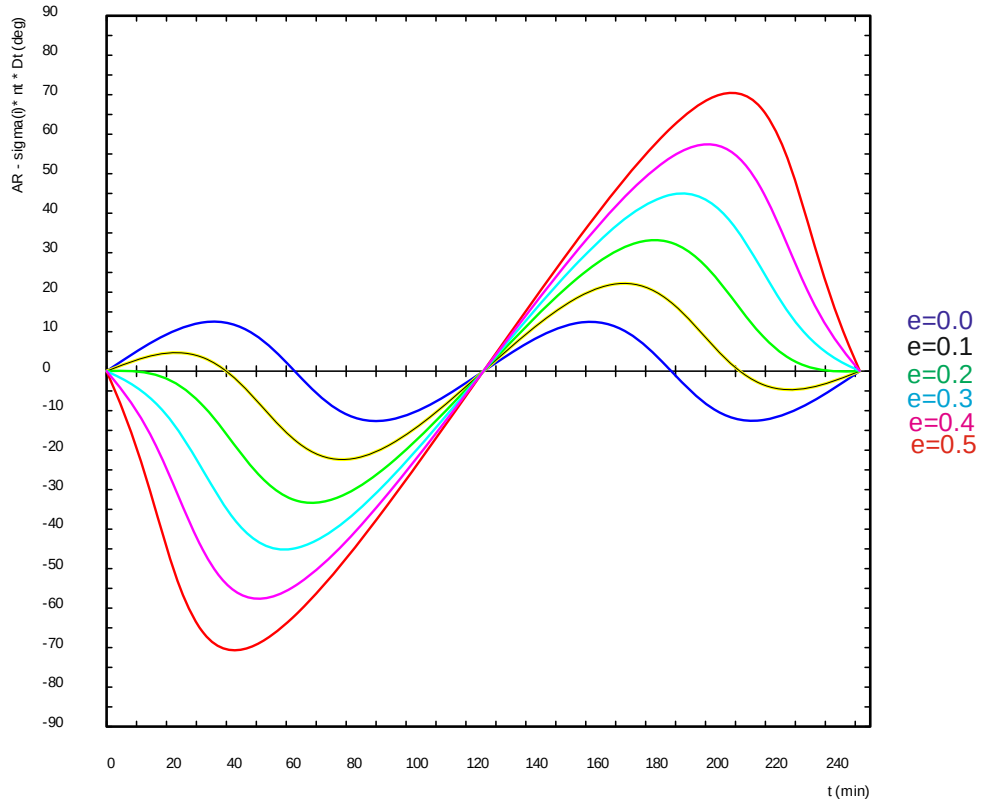


Bild 24-6: Reduktion auf den Äquator und auf gleichförmige Bewegung eines fiktiven Satelliten auf retrograder Bahn (i= 130°) mit großer Bahnhalbachse a=13200 km für verschiedene Exzentrizitäten während eines tropischen Umlaufs.

In vereinfachter Schreibweise lautet der Bezug der mittleren tropischen mittleren Bewegung zur mittleren anomalistischen mittleren Bewegung sowie zur mittleren drakonitischen mittleren Bewegung

$$\overline{n_T} = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s \tag{24.49}$$

$$\overline{n_T} = \overline{n_D} + \sigma_i \dot{\Omega}_s \quad . \tag{24.50}$$

Mit diesen Bezeichnungen kann die Rektaszension (24.42) in einen mittleren und einen periodischen Anteil aufgespalten werden

$$\alpha = \bar{\alpha} + \delta\alpha = \sigma_i \overline{n_T}\, \Delta t + \Delta R_T \quad . \tag{24.51}$$

Als *Reduktion auf den Äquator* wird der periodische Anteil in dieser Darstellung der tropischen Bewegung eines Satelliten bezeichnet

$$\Delta \mathrm{R}_T := \alpha - \sigma_i \overline{n_T}\, \Delta t \quad . \tag{24.52}$$

Hier ist als Epoche t_0 ein Anfangszeitpunkt gewählt, zu dem der wahre und der fiktive Satellit dieselbe Position einnehmen. Für genaue Berechnungen kann die exakte Formel (24.36) verwendet werden, womit die in Formel (24.42) verwendeten Näherungen und Vernachlässigungen der periodischen Bewegungsanteile der wahren Bewegung umgangen werden können.

Für eine Beurteilung des Verlaufs der Reduktion auf den Äquator ist der Näherungsausdruck (24.42) nützlich. Er zeigt den Unterschied zwischen den beiden betrachteten Bewegungen mit einer zweimal doppelperiodischen Variation, als Folge der Reduktion auf den Äquator und als Folge der Exzentrizität der wahren Bahn.

BEISPIEL 1: Bild 24-5 zeigt den Verlauf der Reduktion auf den Äquator über der Zeit für einen tropischen Umlauf für eine Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 13200\,\mathrm{km}$, mittlerer Inklination $\bar{i}_0 = 70°$ sowie für verschiedene Exzentrizitäten. In der Reduktion wird die mittlere tropische Bewegung verwendet: $\alpha - \overline{n_T}\, \Delta t$. ◄

BEISPIEL 2: Bild 24-6 zeigt den Verlauf der Reduktion auf den Äquator über der Zeit für einen tropischen Umlauf für eine Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 13200\,\mathrm{km}$, mittlerer Inklination $\bar{i}_0 = 130°$ sowie für verschiedene Exzentrizitäten. In der Reduktion wird die mittlere tropische mittlere Bewegung verwendet um die durch die Reduktion auf den Äquator verursachte Winkelverschiebung $\alpha + \overline{n_T}\, \Delta t$ zu berechnen. ◄

BEISPIEL 3: Bild 24-7 zeigt den Verlauf der Reduktion auf den Äquator über der mittleren Anomalie des fiktiven Satelliten auf dem Äquator für einen drakonitischen Umlauf $\overline{P_D}$ für die Bahn mit mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0 = 13200\,\mathrm{km}$, mittlerer Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.5$ und für verschiedene Inklinationen. Die Schnittpunkte der Kurven bei $\bar{n}_T\, \overline{P_D} \approx 35°.8$ bzw. $\bar{n}_T\, \overline{P_D} \approx 324°.2$ und Ordinaten $\alpha - \bar{n}_T\, \overline{P_D} \approx \pm 55°.2$ lassen sich damit erklären, dass für diese Werte in dem Näherungsausdruck (24.42) das Argument bei $\tan^2 i/2$ verschwindet. An diesen Punkten wirkt sich somit ausschließlich die Exzentrizität aus, nicht die Inklination. ◄

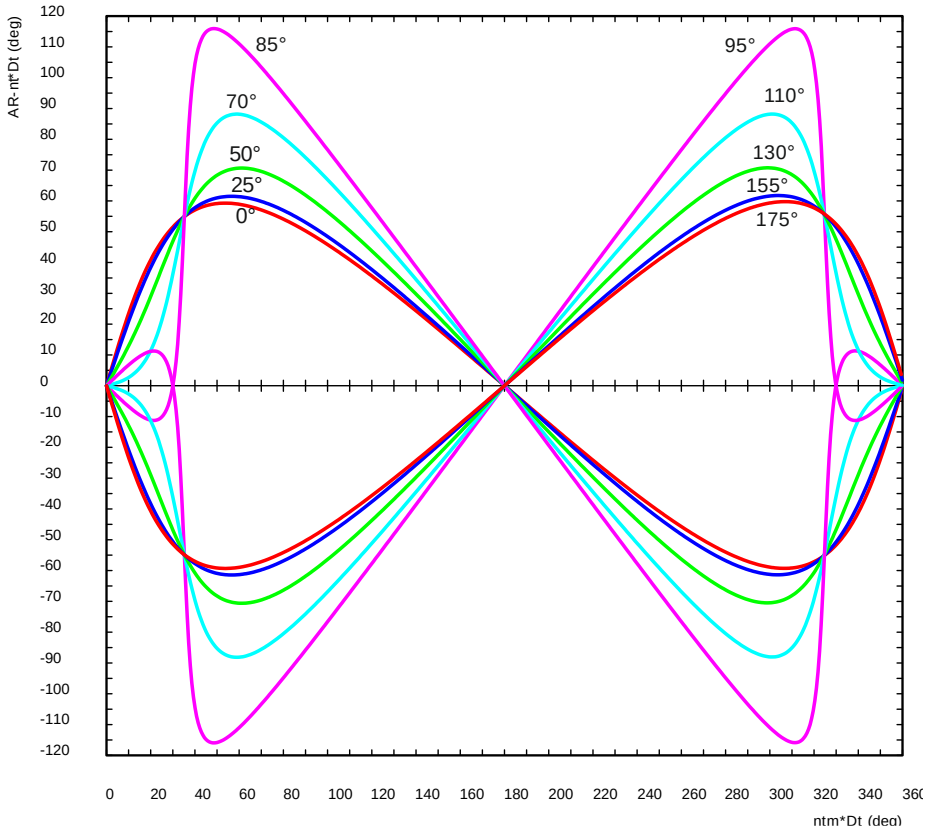


Bild 24-7: Reduktion auf den Äquator und auf gleichförmige Bewegung eines fiktiven Satelliten längs des Äquators für verschiedene Inklinationen. Bahndaten: a=13200 km, e= 0.5.

24.2.4 Bewegung des Knotens und Bewegung eines Satelliten

Die Eigenbewegung des Knotens wird bei der Untersuchung der Bahnen von Erdsatelliten nach den Formeln (20.15), (20.31) und (20.60) im Wesentlichen geprägt durch die säkulare Variation erster Ordnung

$$\dot{\Omega}_s = -\frac{3}{2}\overline{n_K}\, J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos \overline{i}_0 + \cdots \tag{24.53}$$

Die Rektaszension des Satelliten wird nach Formel (24.51) im Zeitraum $\Delta t = t_2 - t_1$ um den Bogen

$$\Delta\alpha = \alpha(t_2) - \alpha(t_1) = \alpha_2 - \alpha_1 = \sigma_i \overline{n_T}\,(t_2 - t_1) + \Delta(\Delta R_T) \tag{24.54}$$

verschoben. Wird ein aufeinanderfolgender Knotenüberflug betrachtet, d.h. nach einem drakonitischen Umlauf, verschiebt sich die Rektaszension des aufsteigenden Knotens unter Vernachlässigung der periodischen Variationen um den Bogen

$$\Delta\alpha \approx \sigma_i \overline{n_D}\,\overline{P_D} + \dot{\Omega}_s\,\overline{P_D} = \sigma_i 360° + \dot{\Omega}_s\,\overline{P_D}\ . \tag{24.55}$$

Da für rechtläufige Bahnen die säkulare Drift des aufsteigenden Knotens negativ ist, bewegt sich der Knoten in Richtung abnehmender Rektaszension, während der Satellit in Richtung zunehmender Rektaszension fliegt, nach einem Umlauf kommt also der Knoten dem Satelliten entgegen. Gleiches gilt für retrograde Bahnen: der Satellit fliegt nach Westen, der Knoten

bewegt sich nach Osten. Damit gilt der Satz (der auch unmittelbar aus Formel (24.53) geschlossen werden kann):

➢ *Der Knoten einer Erdsatellitenbahn bewegt sich stets dem Satelliten entgegen.*

BEISPIEL 1: Die kreisförmige Bahn mit mittlerer Bahnhöhe H=705 km, der Neigung i=48° hat die säkulare Knotendrift $\dot{\Omega}_s = \text{-}0°.5352335068 \times 10^{-4} [1/s]$ und die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = 5926.488\text{s}$. Da in diesem Fall $\sigma_i = \text{sgn}(\cos i) = 1$, befindet sich der Satellit (im Mittel) wieder im Knoten, wenn er entsprechend Formel (24.55) den Rektaszensionsbogen $\Delta\alpha = 360° - 0°.5352335068 \times 10^{-4}\, 1/s \cdot 5926.488\ \text{s} = 359°.6827945$ durchflogen hat. Entsprechend ist die Aussage: der aufsteigende Knoten hat sich während eines drakonitischen Umlaufs längs des Äquators um die Rektaszension $\Delta\Omega = 0°.317205$ in westlicher Richtung verschoben dem von Westen auf direkter Bahn kommenden Satelliten entgegen. ◄

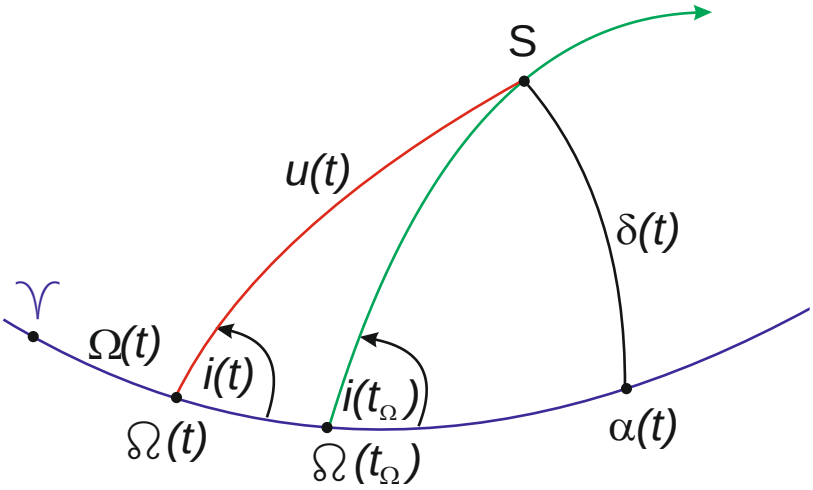


Bild 24-8: Oskulierender Knoten und oskulierendes Argument der Breite für erdnahe Satellitenbahnen, wahre Bahn in Grün, oskulierende Bahn in Rot, rechtläufige Bahn: Knoten wandert rückwärts

BEISPIEL 2: Die kreisförmige Bahn mit mittlerer Bahnhöhe H=705 km, der Neigung i=98° hat die säkulare Knotendrift $\dot{\Omega}_s = 1°.108722787 \times 10^{-5} [1/s]$ und die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = 5939.864748\text{s}$. Da in diesem Fall $\sigma_i = \text{sgn}(\cos i) = -1$, befindet sich der Satellit (im Mittel) wieder im Knoten, wenn er den Rektaszensionsbogen $\Delta\alpha = -360°.0656634 / \overline{P_D}$ durchflogen hat. Entsprechend ist die Aussage: der aufsteigende Knoten hat sich während eines drakonitischen Umlaufs längs des Äquators um die Rektaszension $\Delta\Omega = 0°.065856634 / \overline{P_D}$ in östlicher Richtung verschoben dem von Osten auf retrograder Bahn kommenden Satelliten entgegen. ◄

24.3 Die tropische Umlaufzeit von Erdsatelliten

Dir tropische Bewegung wird auf den mittleren Frühlingspunkt bezogen. Die Position des mittleren Frühlingspunktes wird durch die lunisolare Präzession bestimmt, ist also eine Folge der

Präzession der Erdachse[1]. Im Rahmen der tropischen Bewegung wird der Frühlingspunkt als fester Bezugspunkt betrachtet.

24.3.1 Definition der tropischen Umlaufzeit

Der Bahnwinkel der tropischen Bewegung ist die Länge in der Bahn $l = \Omega + u$. Die tropische Umlaufzeit wird daher definiert als der Zeitraum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchgängen durch denselben (Anfangs-) Bahnwinkel l_0:

$$P_T := \int_{l_0}^{l_0+2\pi} \frac{1}{\frac{dl}{dt}} dt \quad . \tag{24.56}$$

Die zeitliche Variation der Länge in der Bahn ist aus Formel (24.25) bekannt.

Mit Hilfe der Reduktion auf den Äquator (24.36), bzw. dem Näherungsausdruck (24.42) kann die tropische Umlaufzeit auch mit Bezug auf die Rektaszension des Satellitenortes definiert werden:

$$P_T := \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} \quad . \tag{24.57}$$

Die zeitbezogene Variation der Rektaszension ist aus der ersten der Beziehungen (24.20) bekannt. Bei Existenz eines geeigneten Ephemeridenprogramms kann die tropische Umlaufzeit iterativ mit Hilfe der überlagerten Funktion

$$fct(P_T) \equiv \sin\left[l(t_0 + P_T) - l(t_0) \right] = 0 \tag{24.58}$$

berechnet werden. Als Anfangswert der Iteration kann etwa die *Kepler*sche Umlaufzeit $P_T^{(0)} := P_K = \sqrt{\mu / a^3}$ verwendet werden. In gleicher Weise kann auch die Funktion

$$fct(P_T) \equiv \sin\left[\alpha(t_0 + P_T) - \alpha(t_0) \right] = 0 \tag{24.59}$$

angewendet werden. Hier wird die Rektaszension α an Stelle der Länge in der Bahn l als Bahnwinkel der tropischen Bewegung verwendet.

24.3.2 Die mittlere tropische Umlaufzeit

Wird eines der Integrale (24.56) oder (24.57) in eine Reihe nach der mittleren Anomalie entwickelt, kann (in der üblichen Weise) ein mittlerer Anteil der tropischen Umlaufzeit abgespalten werden:

$$\overline{P_T} = \frac{2\pi}{\overline{n_T}} = \frac{2\pi}{\overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s} \quad . \tag{24.60}$$

Entsprechend ihrer Zuordnungen sind die bisher behandelten (mittleren) Umlaufzeiten von zum Teil beträchtlichen quantitativen Unterschieden. Das relative Verhalten dieser Umlaufzeiten wird im Folgenden betrachtet.

[1] Siehe hierzu Abschnitt 9.3, Band II

24.3.3 Die mittlere tropische Umlaufzeit und andere mittlere Umlaufzeiten

Symptomatisch für den Vergleich der tropischen Umlaufzeit mit einer anderen ist die Relation zur drakonitischen Umlaufzeit. Der Vergleich der entsprechenden mittleren Bewegungen nach Formel (24.50) mit

$$\overline{n_T} = \overline{n_D} + \sigma_i \dot{\Omega}_s \tag{24.61}$$

zeigt, dass prinzipiell nach Rechtläufigkeit bzw. Rückläufigkeit der Bewegungsrichtung des Satelliten unterschieden werden muss. Der Unterschied ist eine Folge der säkularen Variation der Rektaszension des aufsteigenden Knotens nach Formel (24.53). Diese lautet in erster Ordnung

$$\dot{\Omega}_s = -\frac{3}{2}\overline{n}_{K0} J_2 \frac{R_E^2}{\overline{p}_0^2}\cos\overline{i}_0 + \cdots \tag{24.62}$$

geschrieben werden. Da offensichtlich stets $\sigma_i \dot{\Omega}_s < 0$, gilt für alle Erdsatellitenbahnen

$$\overline{n_T} < \overline{n_D} \quad . \tag{24.63}$$

Die Relation zwischen der mittleren tropischen und der mittleren drakonitischen Umlaufzeit lautet mit dem Ausdruck (24.61)

$$\overline{P_T} = \frac{2\pi}{\overline{n_T}} = \frac{2\pi}{\overline{n_D} + \sigma_i \dot{\Omega}_s} = \frac{\overline{P_D}}{1 + \overline{P_D}\dfrac{\sigma_i \dot{\Omega}_s}{2\pi}} \quad . \tag{24.64}$$

Somit gilt stets

$$\overline{P_T} > \overline{P_D} \tag{24.65}$$

Als Konsequenz wird hierdurch (in vollständiger Allgemeinheit) die Aussage von Abschnitt 24.2.4 bestätigt:

- *Ein Erdsatellit durchfliegt stets eher seinen Knoten als dieselbe Rektaszension nach einem tropischen Umlauf. Dies impliziert weiterhin die Aussage: Ein Erdsatellit kann nach einem tropischen Umlauf (abgesehen von Äquator- und Polbahnen) nicht dieselbe Deklination überfliegen.*◄

Infolge der Reduktion auf den Äquator zur Untersuchung der tropischen Bewegung eines Satelliten kann die Darstellung der auf den Äquator bezogenen Bewegung eines Satelliten von der in seiner Bahnebene erheblich abweichen. Diese kommt etwa in Bezug auf die *Kepler*sche, die anomalistische und die drakonitische Bewegung zum Ausdruck. Während die mittlere tropische Bewegung für qualitative Aussagen herangezogen werden kann, ist es sinnvoll für quantitative Untersuchungen an Stelle der mittleren die wahre tropische Bewegung zu betrachten.

BEISPIEL 1: Die Differenz der tropischen Umlaufzeit im Verhältnis zur mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit wird für Bahnen mit der großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\mathrm{km}$, für einige Exzentrizitäten über der Inklination in Bild 24-9 (auf Seite 377) dargestellt. Das Bild zeigt als interessantes Ergebnis, dass für **alle** Bahnen die mittlere tropische und die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit für die Inklinationen $i_{t1} = 50°.1792$ und $i_{t2} = 112°.9787$ übereinstimmen. Diese Inklinationen, die sich (vgl. etwa Bild 24-15 auf Seite 392) nur geringfügig mit wachsender Exzentrizität ändern, haben also einen im Wesentlichen allgemeingültigen Charakter für Erdsatellitenbahnen. Vergleiche auch mit Formel (24.87) in Abschnitt 24.4.4 auf Seite 390.◄

BEISPIEL 2: Die Bahn mit den mittleren Epocheelementen $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$, $\overline{e}_0 = 0.5, \overline{i}_0 = 60°.0$ hat die Umlaufzeiten, die wahren Umlaufzeiten werden unter Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüsse berechnet::

wahre *Hansen*sche Umlaufzeit	$P_H = 16485.534555\ \text{s}$
mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit	$\overline{P_K} = 16485.534555\text{s}$,
mittlere anomalistische Umlaufzeit	$\overline{P_A} = 16486.604461\text{s}$
wahre anomalistische Umlaufzeit	$P_A = 16486.604461\text{s}$,
mittlere drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_D} = 16485.375289\text{s}$,
wahre drakonitische Umlaufzeit	$P_D = 16486.249666\text{s}$,
mittlere tropische Umlaufzeit	$\overline{P_T} = 16490.313545\ \text{s}$..
wahre tropische Umlaufzeit	$P_T = 16489.100649\ \text{s}$ ◀

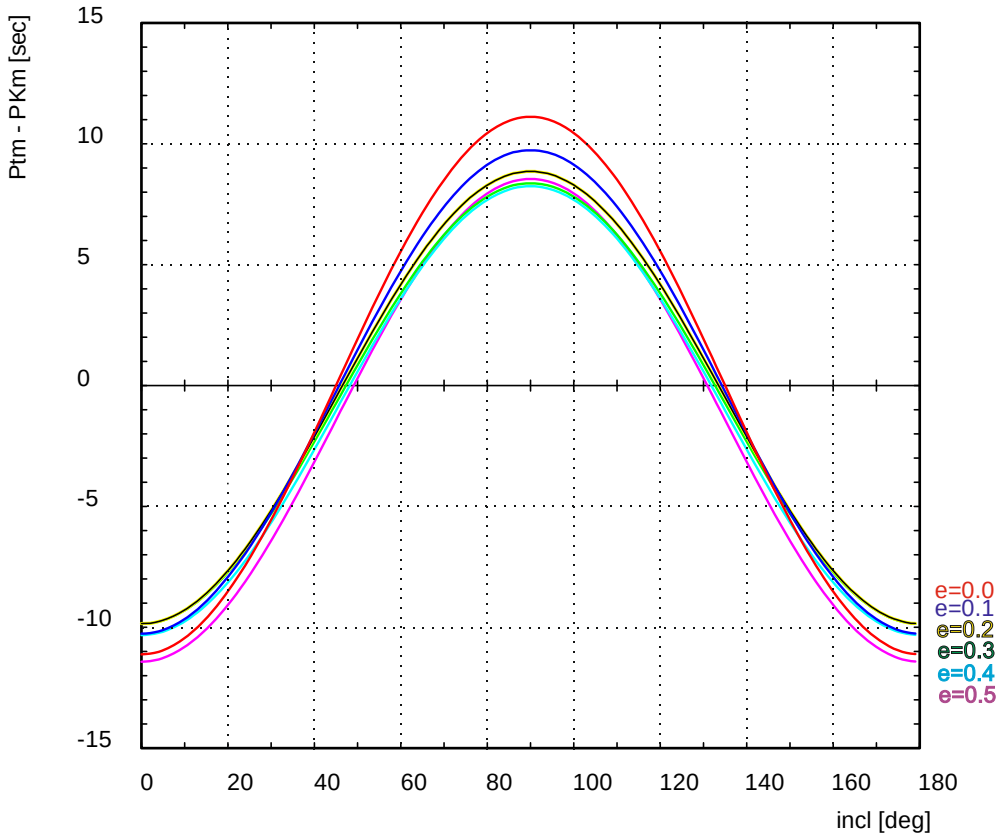


Bild 24-9: Der Unterschied der mittleren tropischen Umlaufzeit bei Bezug auf die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit für Bahnen mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$ über der Inklination für verschiedene Exzentrizitäten

BEISPIEL 3: Die Bahn mit den mittleren Epocheelementen $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$ $\overline{e}_0 = 0.5, \overline{i}_0 = 105°.0$ hat die mittleren Umlaufzeiten:

wahre *Hansen*sche Umlaufzeit	$P_H = 16490.091371\ \text{s}$
mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit	$\overline{P_K} = 16485.534555\text{s}$,

mittlere anomalistische Umlaufzeit	$\overline{P_A} = 16488.952202$ s
wahre anomalistische Umlaufzeit	$P_A = 16488.952202$ s,
mittlere drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_D} = 16492.237758$ s,
wahre drakonitische Umlaufzeit	$P_D = 16489.900544$ s,
mittlere tropische Umlaufzeit	$\overline{P_T} = 16494.793373$ s ..
wahre tropische Umlaufzeit	$P_T = 16492.750185$ s ◀

BEISPIEL 4: Gegeben sei eine Erdsatellitenbahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$ und die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.5$. Um den Unterschied der tropischen Umlaufzeit des Satelliten in Bezug auf die mittleren *Kepler*sche, die mittlere anomalistische und die mittlere drakonitische Umlaufzeit darzustellen wird die wahre tropische Umlaufzeit mit der überlagerten Funktion (24.59) unter Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüsse berechnet aufgetragen. Dadurch werden die großen Unterschiede der mittleren tropischen zur wahren tropischen Umlaufzeit vermieden. Der Bezug auf die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit entspricht Bild 24-9. ◀

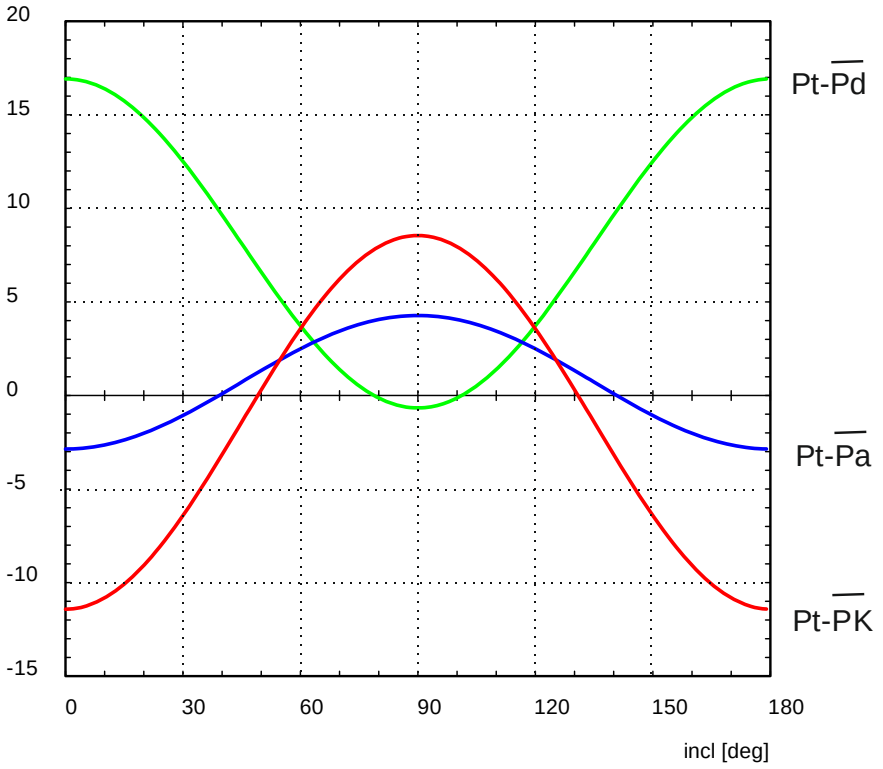


Bild 24-10: Die wahre tropische Umlaufzeit P_T (berechnet unter Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüsse) in Relation zur mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit $\overline{P_K}$, zur mittleren anomalistischen Umlaufzeit $\overline{P_A}$ und zur mittleren drakonitischen Umlaufzeit $\overline{P_D}$ für Bahnen mit dem mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\text{km}$ und Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.5$ über der Inklination

24.3.4 Bahnauswahl mit der mittleren tropischen Umlaufzeit

Auch im Fall der tropischen Bewegung kann durch Vorgabe einer mittleren tropischen Umlaufzeit $\overline{P_t}$ ein Bahnparameter bestimmt werden, wenn die anderen benötigten Parameter vorgegeben sind. Dies gilt etwa für die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}$. Eine nullte Näherung folgt aus der *Kepler*schen Umlaufzeit:

$$\overline{a_T}^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{P_T}\right)^2}{4\pi^2}} \quad .. \tag{24.66}$$

Eine erste Verbesserung kann erhalten werden, wenn für den Fall von Erdsatelliten im Ausdruck der mittleren tropischen mittleren Bewegung (24.45) die entsprechenden säkularen Ausdrücke erster Ordnung aus Abschnitt 20.2.1 (Band III) eingesetzt werden. Dazu wird die Vorgabe einer mittleren Exzentrizität $\bar{e}$ und einer mittleren Inklination $\bar{i}$ benötigt. Dann erhält man

$$\Delta\overline{a_T}^{(1)} = \frac{J_2 R_E^2}{2\overline{a_T}^{(0)}\left(1-\bar{e}^2\right)^2}\left[\cos^2\bar{i}\left(3\sqrt{1-\bar{e}^2}+5\right)-\left(1+\sqrt{1-\bar{e}^2}\right)-2\sigma_i\cos\bar{i}\right]+O\left(\overline{a_T}^{(0)}J_2^2\right) . \tag{24.67}$$

Dies führt auf den verbesserten Wert

$$\overline{a_T}^{(1)} = \overline{a_T}^{(0)} + \Delta\overline{a_T}^{(1)} \quad . \tag{24.68}$$

Die Korrektur (24.67) verschwindet, wenn die vorgegebenen Exzentrizität und Inklination die Bedingung (24.87) erfüllen, wenn also mittlere tropische und mittlere *Kepler*sche Bewegung zusammenfallen. Eine weitere Verbesserung kann iterativ mit Hilfe der überlagerten Funktion (24.59)

$$fct\left(\overline{a_T}\right) \equiv \sin\left[\alpha\left(t_0+P_T;\overline{a_T}^{(\nu)}\right)-\alpha\left(t_0;\overline{a_T}^{(\nu)}\right)\right]=0 \qquad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \tag{24.69}$$

gefunden werden. Als wesentlicher Parameter kann hier neben der mittleren tropischen Umlaufzeit $\overline{P_T}$ auch die wahre tropische Umlaufzeit P_T eingesetzt werden, die sich durch Wahl des benutzten Bahnmodells unterscheiden.

BEISPIEL 1: Gegeben sei eine Erdsatellitenbahn durch Vorgabe der tropischen Umlaufzeit $P_t = 6000\,\mathrm{s}$, die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.08$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0 = 10°$. Wird die gegebene Umlaufzeit als mittlere aufgefasst, liefern die Formeln (24.66) - (24.69) für die Auswahl der mittleren großen Bahnhalbachse die Werte

$$\bar{a}_0^{(0)} = 7136.635456\ \mathrm{km}, \qquad \Delta\bar{a}_0^{(1)} = 11.82386697\ \mathrm{km},$$
$$\bar{a}_0^{(1)} = 7148.459322671\mathrm{km}, \quad \bar{a}_0^{(2)} = 7147.501764\,\mathrm{km} \quad .$$

Der letzte, iterativ erhaltene Wert, liefert die mittlere tropische Umlaufzeit $\overline{P_T} = 5998.778646\mathrm{s}$, erst die Iteration mit Hilfe der überlagerten Funktion in Formel (24.59) ergibt mit den säkularen Bewegungseinflüssen $\left(J_2, J_4\right)$ als säkulare tropische Umlaufzeit den vorgegebenen Sollwert $P_{T,\mathrm{sec}} = 6000.000001\,\mathrm{s}$. Die Berechnung wurde mit den a-priori Fehlergrenzen $\Delta(t) = 10^{-8}\,\mathrm{s}, \Delta(\mathrm{fct}) = 10^{-8}, \Delta(a) = 10^{-6}\,\mathrm{km}$ durchgeführt.

Wird dagegen der vorgegebene Zahlenwert für die tropische Umlaufzeit als wahre Umlaufzeit aufgefasst, wird unter Einschluss der periodischen Bewegungseinflüsse durch $\left(J_2, J_3, J_4\right)$ die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(2)} = 7147.500566\,\mathrm{km}$ mit Hilfe der überlagerten Funktion

(24.69) erhalten. Auch hier muss zur Bestätigung des vorgegebenen Wertes die Iteration mit Hilfe der Funktion (24.59) durchgeführt werden. Man beachte den geringen Unterschied zwischen den Werten der großen Bahnhalbachse in den beiden Fällen. ◄

BEISPIEL 2: Es werde eine rückläufige Erdsatellitenbahn untersucht. Vorgegeben seien die Inklination $\bar{i}_0 = 130°$, die Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.02$, sowie die tropischen Umlaufzeit $P_T = 6000\,\mathrm{s}$. Diese werde als gemittelte Größe durch Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüsse aufgefasst. Es ergeben sich:

$$\bar{a}_0^{(0)} = 7136.635456\ \mathrm{km}, \Delta\bar{a}_0^{(1)} = 0.06109525678434\ \mathrm{km},$$
$$\bar{a}_0^{(1)} = 7136.696551\,\mathrm{km}, \bar{a}_0^{(2)} = 7134.595613\,\mathrm{km}.$$

Die Kontrolle mit der überlagerten Funktion (24.59) ergibt $P_{T,\mathrm{sec,contr}} = 6000.000000806\,\mathrm{s}$. Die mittlere tropische Umlaufzeit berechnet mit der mittleren Bewegung (24.45) beträgt $\overline{P_T} = 5997.358045\ \mathrm{s}$.

Bei Berücksichtigung der periodischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) ergibt sich kein Unterschied im Ergebnis. ◄

24.4 Nahe Äquivalenzbahnen mit der tropischen Bewegung

Nahe parallele Äquivalenzbahnen können ähnliche Eigenschaften wie entsprechende exakte Äquivalenzbahnen haben. Sie sind daher auch von grundsätzlichem Interesse, auch wenn ihre Äquivalenz nur mit geringerer Genauigkeit (in vielen Fällen etwa $\left|\Delta\bar{P}\right| \le 0.01\mathrm{sec}$) garantiert werden kann.

24.4.1 Nahe Äquivalenz zwischen anomalistischer und tropischer Bewegung

Eine Kopplung der Satellitenbewegung bezogen auf die Apsidenlinie mit der auf den Frühlingspunkt bezogenen Bewegung wird durch die Äquivalenz zwischen der anomalistischen und der tropischen Bewegung erreicht.

Um eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)$– Äquivalenzbahn zu konstruieren wird die mittlere anomalistische mittlere Bewegung[1] (22.53) $\overline{n_A}$ mit der mittleren tropischen mittleren Bewegung[2] (24.58) $\overline{n_T}$ verglichen. Daraus folgt notwendig die Bedingung

$$\overline{n_T} = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s = \overline{n_A} \ \Rightarrow\ \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s = 0 \ \Leftrightarrow\ \overline{P_A} = \frac{2\pi}{\overline{n_A}} = \frac{2\pi}{\overline{n_T}} = \overline{P_T} \quad \prec \sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos i\right) . \quad (24.70)$$

Die säkulare Drift des Argumentes des Perigäums $\dot{\omega}_s$ (siehe etwa in Formel (23.296) [Abschnitt 23.7.1.1)] und der Rektaszension des aufsteigenden Knotens[3] $\dot{\Omega}_s$ führen im Fall von Erdsatelliten in erster Näherung $O\left(J_2\right)$ notwendig auf die Bedingungsgleichung

$$1 - 5\cos^2 \bar{i}_0 + 2\sigma_i \cos \bar{i}_0 = 0 \quad . \quad (24.71)$$

---

[1] Abschnitt 22.2.4

[2] Abschnitt 24.3.3

[3] Formeln (20.15) und (20.16) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

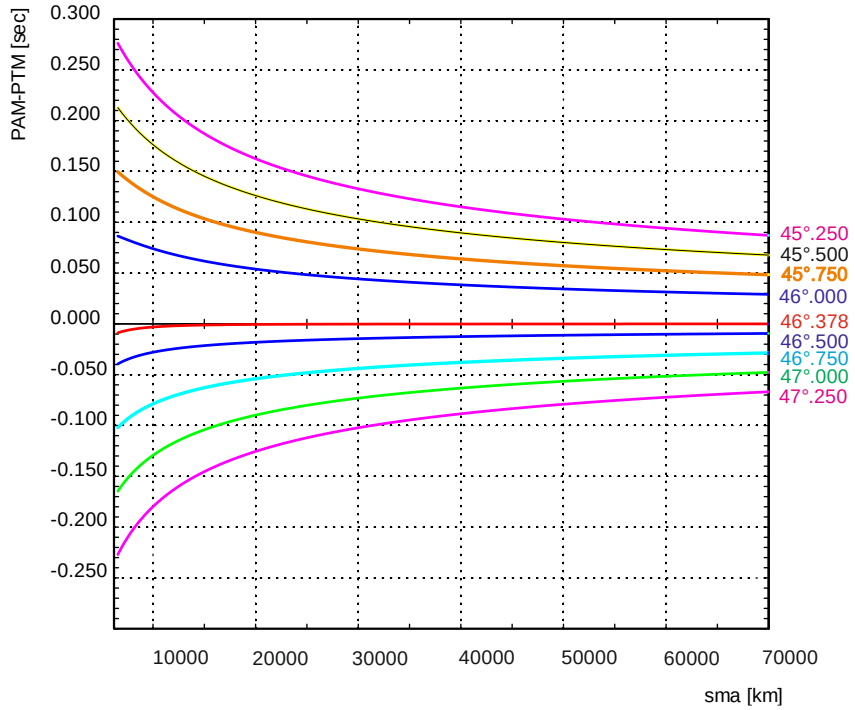


Bild 24-11: Das Verhalten der Differenz aus anomalistischer und tropischer Umlaufzeit $\left(\overline{P_A} - \overline{P_T}\right)$ über der großen Bahnhalbachse kreisförmiger Bahnen für einige Inklinationen in der Umgebung von $\overline{i_{QAT,1}} = 46°.378$.

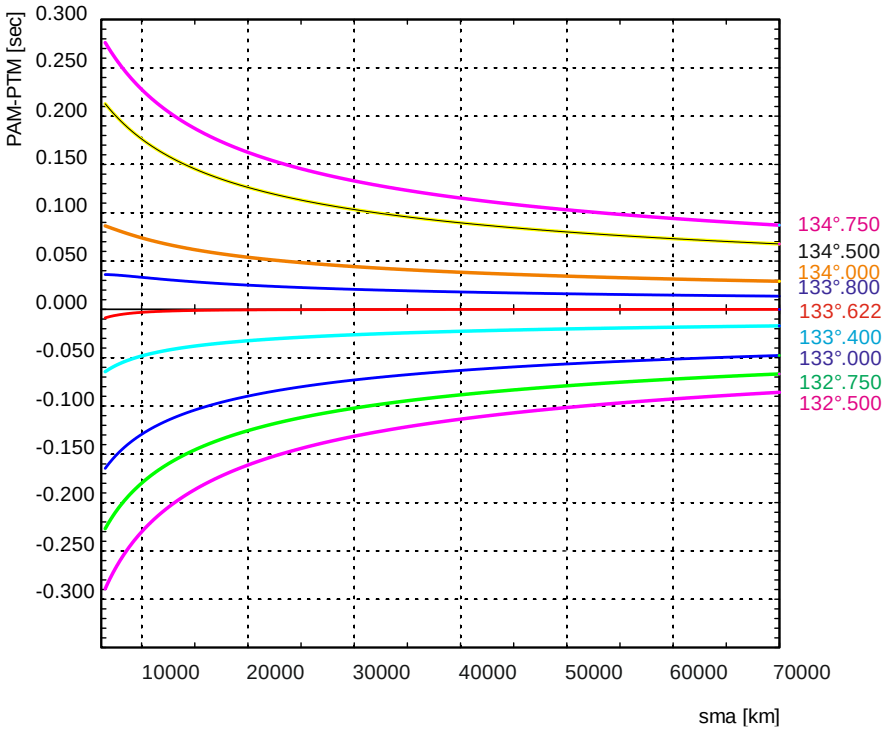


Bild 24-12: Das Verhalten der Differenz aus anomalistischer und tropischer Umlaufzeit $\left(\overline{P_A} - \overline{P_T}\right)$ über der großen Bahnhalbachse kreisförmiger Bahnen für einige Inklinationen in der Umgebung von $\overline{i_{QAT,2}} = 133°.622$.

Diese Gleichung ist nur von der mittleren Inklination $\overline{i_0}$ abhängig und schränkt dadurch den Umfang der möglichen Bahnfamilien des Typs $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ auf die Umgebung der zwei Lösungen

$$\cos\overline{i_{QAT,1/2}} = \frac{1}{5}\left(\sigma_i \pm \sqrt{6}\right) \qquad \prec \sigma_i \in [-1,0,+1] \tag{24.72}$$

ein:

$$\overline{i_{QAT,1}} = 46°.378,\ \overline{i_{QAT,2}} = 133°.622 \quad . \tag{24.73}$$

Die große Bahnhalbachse kann bei Vorgabe einer Exzentrizität $\overline{e_0}$ mit Hilfe der Funktionsgleichung berechnet werden

$$fct\left(\overline{a_{QAT}}\right) \equiv \overline{P_A} - \overline{P_T} = 0 \quad . \tag{24.74}$$

(Analoges würde für die Berechnung der Exzentrizität $\overline{e_0}$ nach Vorauswahl einer großen Bahnhalbachse gelten).

Wie bei nahen Äquivalenzen üblich, wird bei vorgegebenen Exzentrizität und Inklination die große Bahnhalbachse ab einem geeigneten Näherungswert mit einer frei wählbaren Schrittweite Δa erhöht. Die bei jedem Schritt berechneten Umlaufzeiten $\overline{P_A}$ und $\overline{P_T}$ werden verglichen. Liegt deren Differenz unter einer vorgegebenen Schranke ΔP, kann der dann erhaltene Wert $\overline{a_{QAT}}$ als große Bahnhalbachse einer nahen parallelen $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahn aufgefasst werden. Dieser Wert ist somit wieder eine Funktion von Schrittweite Δa und Genauigkeitsschranke ΔP. Es muss daher erwartet werden, dass unter diesen Randbedingungen eine große Menge an Näherungs-Äquivalenzbahnen gefunden werden können.

Das Verhalten der Differenz $\left(\overline{P_A} - \overline{P_T}\right)$ für Bahnen in der Umgebung der Inklinationen $\overline{i_{QAT,1}}$, $\overline{i_{QAT,2}}$ zeigen Bild 24-11 bzw. Bild 24-12 . Daraus kann abgelesen werden, dass $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahnen nur als nahe parallele Äquivalenzbahnen zu erwarten sind.

Ein Beispiel für die Vielfalt von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahnen kann in Tabelle 24-1 abgelesen werden. Für einige vorgewählte Exzentrizitäten $\overline{e_0}$ und Inklinationen $\overline{i_0}$ aus der Umgebung der Bahnen (24.73) wird die mittlere große Bahnhalbachse mit der Schrittweite $\Delta a = 1$ km und der Anfangsnäherung $\overline{a}_0^{(0)} = \left(R_E + 200.0\right)/\left(1.0 - \overline{e}_0\right)$ berechnet. Die Ergebnisse hängen entscheidend von der angesteuerten Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta P\right|$ ab. Je feiner die geforderte Genauigkeitsgrenze ist, umso länger dauert der Suchprozess und umso größer fällt die gesuchte große Bahnhalbachse aus.

BEISPIEL 1: Es werde eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahn durch Vorgabe von $\overline{e_0} = 0.3$ und $\overline{i_0} = 46°.0$ gesucht. Die berechneten Bahnparameter sind in Tabelle 24-2 zusammengestellt. Sie wurden mit den Parametern $\Delta a = 1\text{km}$ und der Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta P\right| < 0.1\text{sec}$ erhalten. Es handelt sich hier somit um die „unterste“ mögliche Bahn mit Perigäumshöhe $H_{P\min} = 200$ km.

Anmerkung: In den Tabellen der Bahncharakteristika fällt wieder auf, dass die wahren Umlaufzeiten mit den mittleren Umlaufzeiten (außer im Fall der meridionalen Umlaufzeiten)

identisch übereinstimmen. Ursache ist, dass der Iterationsprozess für die Berechnung der wahren Umlaufzeiten mit den mittleren Umlaufzeiten beginnt. Auf Grund der im Zusammenhang mit den nahen Äquivalenzbahnen sehr geringen Genauigkeitsgrenzen setzt der Iterationsprozess zur Berechnung der wahren Zeiten nicht ein. Es bleibt daher bei der Anfangslösung. ◀

$\Delta\bar{P}[\text{sec}]$	$\overline{a_{QAT}}[\text{km}]$	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\overline{P_A}[\text{sec}]$	$\overline{P_T}[\text{sec}]$
0.10	6578.137	0.0	46°.4 / 133°.6	5307.912595	5307.926857
0.01	8193.137	0.0	46°.4 / 133°.6	7378.958409	7378.968408
0.001	201584.136	0.0	46°.4 / 133°.6	900731.519694	900731.520694
0.1	7309.041	0.1	46°.4 / 133°.6	6217.061736	6217.074146
0.01	8387.041	0.1	46°.4 / 133°.6	7642.505257	7642.515257
0.001	209819.041	0.1	46°.4 / 133°.6	956485.049802	956485.050802
0.1	8222.671	0.2	46°.4 / 133°.6	7418.806931	7418.818422
0.01	9010.671	0.2	46°.4 / 133°.6	8510.724051	8510.734050
0.001	237193.671	0.2	46°.4 / 133°.6	1149649.647416	1149649.648416
0.1	9397.339	0.3	46°.4 / 133°.6	9064.386528	9064.397813
0.01	10203.339	0.3	46°.4 / 133°.6	10255.496152	10255.506152
0.001	293587.339	0.3	46°.4 / 133°.6	1583131.104183	1583131.105183
0.1	10963.562	0.4	46°.4 / 133°.6	11422.793321	11422.805077
0.01	12296.562	0.4	46°.4 / 133°.6	13568.565281	13568.575280
0.1	13156.274	0.5	46°.4 / 133°.6	15016.056708	15016.069776
0.01	16069.273	0.5	46°.4 / 133°.6	20270.705697	20270.715696
0.1	16445.342	0.6	46°.4 / 133°.6	20986.072465	20986.088196
0.01	23690.342	0.6	46°.4 / 133°.6	36286.634411	36286.644410
0.1	21927.123	0.7	46°.4 / 133°.6	32310.860707	32310.881881
0.01	43413.123	0.7	46°.4 / 133°.6	90018.881331	90018.891331
0.1	32890.685	0.8	46°.4 / 133°.6	59360.038769	59360.073196
0.01	131895.685	0.8	46°.4 / 133°.6	476711.065601	476711.075601
0.1	65781.370	0.9	46°.4 / 133°.6	167899.066946	167899.154006

Tabelle 24-1: Die mittlere große Bahnhalbachse, sowie die mittlere anomalistische und tropische Umlaufzeit einiger $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)$– Äquivalenzbahnen in Abhängigkeit von mittlerer Exzentrizität, mittlerer Inklination und Genauigkeitsgrenze. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}=0.72921158573340\times10^{-4}/\text{s}$, $J_2 = 0.001082625379977$

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)$	
$\overline{a_{QAT}} = 9397.338571\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.3, \bar{i}_0 = 46°, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 9066.053794\ \text{sec}$	t_0 : 2020-08-07/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 9062.476498\ \text{sec}$	$P_H = 9062.476498\ \text{sec}$
$\overline{P_A} = 9064.304757\ \text{sec}$	$P_A = 9064.304757\ \text{sec}$
$\overline{P_D} = 9058.525257\ \text{sec}$	$P_D = 9058.525257\ \text{sec}$
$\overline{P_T} = 9064.214382\ \text{sec}$	$P_T = 9064.214382\ \text{sec}$
$\overline{P_R} = 10129.844803\ \text{sec}$	$P_R = 9848.460225\ \text{sec}$
$\overline{P_S} = 9066.818679\ \text{sec}$	$P_S = 9066.818679\ \text{sec}$
$\overline{P_L} = 9099.153471\ \text{sec}$	$P_L = 9099.153471\ \text{sec}$
$H_P = 200.000000\ \text{km}$	$H_A = 5838.403143\ \text{km}$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -37°.937881$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -38°.073144$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -37°.937881$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -38°.073144$

Tabelle 24-2: Bahncharakteristika der $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)$– Äquivalenzbahn, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_\odot = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}=0.72921158573340\times10^{-4}/\text{s}$, $J_2 = 0.001082625379977$, Berechnung der wahren Bahnparameter nur mit säkularen Bewegungseinflüssen, Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| < 0.1\,\text{sec}$.

BEISPIEL 2: Zum Vergleich mit dem ersten Beispiel werde eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)$– Äquivalenzbahn mit denselben Randbedingungen jedoch für eine rückläufige Bahn mit der Inklination $\bar{i}_0 = 133°.0$ untersucht. Neben der Exzentrizität $\bar{e}_0 = 0.3$ werde wieder die Schrittweite $\Delta a = 1\,\text{km}$ und die Genauigkeitsgrenze $|\Delta P| < 0.1\,\text{sec}$ vorgegeben. Das Ergebnis ist eine Bahn mit völlig unterschiedlichen Eigenschaften. Entsprechend Tabelle 24-2 würden dieselben Bahnparameter wie im vorhergehenden Beispiel mit der Inklination $\bar{i}_0 = 134°$ erhalten. Die berechneten Bahnparameter sind in Tabelle 24-3 zusammengestellt. ◀

$\left(P_A \triangleq P_T\right)$– Äquivalenzbahnen werden durch die Äquivalenz der wahren drakonitischen und tropischen Umlaufzeiten gebildet. Mit den Funktionsgleichungen (22.60) und (24.56) wird

$$fct(P_A) \equiv \sin\left[\upsilon(t_0 + P_A) - \upsilon(t_0)\right] = 0, \quad fct(P_T) \equiv \sin\left[\alpha(t_0 + P_T) - \alpha(t_0)\right] = 0 \tag{24.75}$$

und die zugehörende große Bahnhalbachse wird erhalten aus

$$fct\left(\overline{a_{QAT}}\right) \equiv P_A - P_T = 0 \quad . \tag{24.76}$$

Wie im Fall der mittleren Äquivalenzbahn kann auch hier bezogen auf die minimale Perigäumshöhe $H_{P\min} = 200\,\text{km}$ etwa $\bar{a}_0^{(0)} = \left(R_E + H_P\right)/\left(1.0 - \bar{e}_0\right)$ als Anfangswert gewählt werden. Werden nur säkulare Bewegungseinflüsse zugelassen, ergibt sich im Wesentlichen die im Fall der mittleren Bewegungen erhaltene Bahn. Dies ist wieder eine Konsequenz aus der geringen Genauigkeitsgrenze bei nahen Äquivalenzen, was sowohl bei Berücksichtigung nur der säkularen wie auch beim Einschluss aller periodischen Bewegungseinflüsse der Fall ist.

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)$	
$\overline{a_{QAT}} = 23500.338571\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.3, \bar{i}_0 = 133°, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 35852.724123\ \text{sec}$	$t_0:\ \ 2020\text{-}08\text{-}07/12{:}00{:}0.0$
$\overline{P_H} = 35850.724166\ \text{sec}$	$P_H = 35850.724166\ \text{sec}$
$\overline{P_A} = 35851.747448\ \text{sec}$	$P_A = 35851.747448\ \text{sec}$
$\overline{P_D} = 35848.315373\ \text{sec}$	$P_D = 35848.315373\ \text{sec}$
$\overline{P_T} = 35851.847446\ \text{sec}$	$P_T = 35851.847446\ \text{sec}$
$\overline{P_R} = 25317.527927\ \text{sec}$	$P_R = 27989.933652\ \text{sec}$
$\overline{P_S} = 35811.162357\ \text{sec}$	$P_S = 35811.162357\ \text{sec}$
$\overline{P_L} = 35315.486505\ \text{sec}$	$P_L = 35315.486505\ \text{sec}$
$H_P = 10072.100000\ \text{km}$	$H_A = 24172.303143\ \text{km}$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -149°.779297$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -149°.741455$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -149°.779297$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -149°.741455$

Tabelle 24-3: Bahncharakteristika der $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T}\right)$– Äquivalenzbahn, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_\oplus = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}=0.72921158573340\times10^{-4}/\text{s}$, $J_2 = 0.001082625379977$, Berechnung der wahren Bahnparameter nur mit säkularen Bewegungseinflüssen, Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| < 0.1\,\text{sec}$.

24.4.2 Nahe Äquivalenz zwischen drakonitischer und tropischer Bewegung

Eine Kopplung der Satellitenbewegung bezogen auf die Knotenlinie mit der auf den Frühlingspunkt bezogenen Bewegung wird durch die Äquivalenz zwischen der drakonitischen und der tropischen Bewegung erreicht.

Um eine Nahe-Parallele $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)$– Äquivalenzbahn zu konstruieren wird die mittlere drakonitische mittlere Bewegung[1] (23.48) $\overline{n_D}$ mit der mittleren tropischen mittleren Bewegung[2] (24.58) $\overline{n_T}$ verglichen. Daraus folgt notwendig die Bedingung

$$\overline{n_T} = \overline{n_D} + \sigma_i\,\dot{\Omega}_s = \overline{n_D} \quad \Rightarrow \dot{\Omega}_s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_D}} = \frac{2\pi}{\overline{n_T}} = \overline{P_T} \quad \prec \sigma_i = \text{sgn}\left(\cos i\right)\,. \tag{24.77}$$

Die säkulare Drift der Rektaszension des aufsteigenden Knotens[3] zeigt, dass die Bedingung $\dot{\Omega}_s = 0.0/\,\text{sec}$ im Fall von Erdsatelliten in erster Näherung auf Polbahnen

$$\cos\bar{i}_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{i}_0 = 90°.000 \tag{24.78}$$

führt.

---

[1] Abschnitt 23.2.2

[2] Abschnitt 24.3.3

[3] Formel (20.15) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

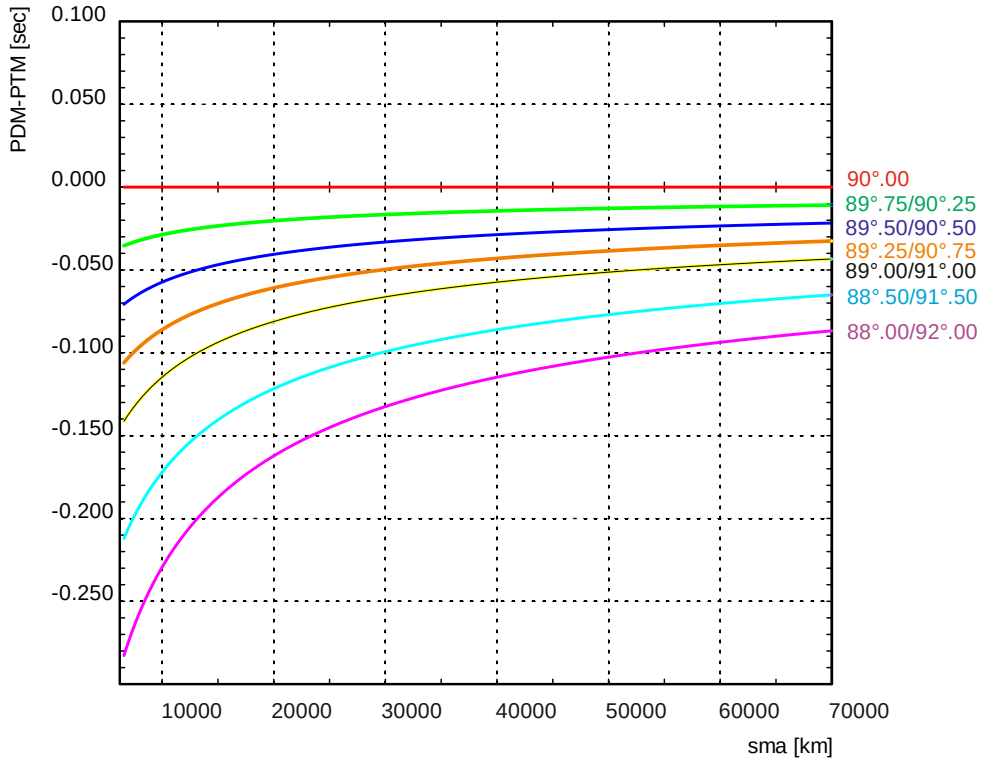


Bild 24-13: Das Verhalten der Differenz aus drakonitischer und tropischer Umlaufzeit $\left(\overline{P_D} - \overline{P_T}\right)$ über der großen Bahnhalbachse kreisförmiger Bahnen für einige Inklinationen in der Umgebung von Polbahnen.

Die große Bahnhalbachse (analog auch ein anderes Bahnelement wie $\overline{e}_0$ oder $\overline{i}_0$) wird berechnet mit Hilfe der Funktionsgleichung[1]

$$fct\left(\overline{a_{QDT}}\right) \equiv \overline{P_D} - \overline{P_T} = 0 \quad . \tag{24.79}$$

Wie bei nahen Äquivalenzen üblich, wird bei vorgegebenen Exzentrizität und Inklination die große Bahnhalbachse ab einem geeigneten Näherungswert mit einer frei wählbaren Schrittweite Δa erhöht. Die bei jedem Schritt berechneten Umlaufzeiten $\overline{P_D}$ und $\overline{P_T}$ werden verglichen. Liegt deren Differenz unter einer vorgegebenen Schranke $\Delta\overline{P}$, kann der jetzt erhaltene Wert $\overline{a_{QDT}}$ als große Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahn aufgefasst werden. Dieser Wert ist somit wieder eine Funktion von Schrittweite Δa und Genauigkeitsschranke $\Delta\overline{P}$. Es muss daher erwartet werden, dass unter diesen Randbedingungen eine beliebige Menge an Näherungs-Äquivalenzbahnen gefunden werden können. Im vorliegenden Fall hat die Praxis gezeigt, dass die Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\overline{P}\right| < 0.1\text{sec}$ nicht unterschritten werden sollte.

Für $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahnen ist die Bedingung (24.78) wesentlich: die vorgewählte Inklination muss in der Umgebung einer Polbahn liegen.

[1] analog kann auch ein anderes Bahnelement wie $\overline{e}_0$ oder $\overline{i}_0$ berechnet werden

$\overline{a_{QDT}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\overline{P_D}$	$\overline{P_T}$
6370.0 km	0.0	90°.0	5067.879724 sec	5067.879724 sec
7500.0 km	0.1	90°.0	6471.746436 sec	6471.746436 sec
13162.0 km	0.0	89°.0 / 91°.0	15033.467864 sec	15033.567863 sec
13702.0 km	0.1	89°.0 / 91°.0	15967.694740 sec	15967.794739 sec
15497.0 km	0.2	89°.0 / 91°.0	19204.834200 sec	19204.934199 sec
19195.0 km	0.3	89°.0 / 91°.0	26471.886579 sec	26471.986577 sec
26439.0 km	0.4	89°.0 / 91°.0	42789.201619 sec	42789.301619 sec
41605.0 km	0.5	89°.0 / 91°.0	84461.098709 sec	84461.198709 sec
78469.0 km	0.6	89°.0 / 91°.0	218760.235759 sec	218760.335759 sec
194607.0 km	0.7	89°.0 / 91°.0	854380.170697 sec	854380.270696 sec
52647.0 km	0.0	88°.0 / 92°.0	120221.384248 sec	120221.484247 sec
118396.0 km	0.0	87°.0 / 93°.0	405432.491132 sec	405432.591131 sec
210332.0 km	0.0	86°.0 / 94°.0	959996.486563 sec	959996.586563 sec
328344.0 km	0.0	85°.0 / 95°.0	1872426.872853 sec	1872426.972853 sec

Tabelle 24-4: Die mittlere große Bahnhalbachse einiger $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahnen in Abhängigkeit von mittlerer Exzentrizität und mittlerer Inklination, sowie die mittlerer drakonitische und tropische Umlaufzeit. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\dot{\Diamond}} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}=0.72921158573340\times10^{-4}/\text{s}$, $J_2 = 0.001082625379977$

Ein Beispiel für die Vielfalt von $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahnen kann in Tabelle 24-4 abgelesen werden. Für einige vorgewählte Exzentrizitäten $\bar{e}_0$ und Inklinationen $\bar{i}_0$ aus der Umgebung von Polbahnen wird die mittlere große Bahnhalbachse berechnet. Die Umlaufzeiten werden mit der Schrittweite $\Delta a = 1\ \text{km}$ und mit der Anfangsnäherung $\bar{a}_0^{(0)} = \left(R_E + 200.0\right)/\left(1.0-\bar{e}_0\right)$ berechnet. Die angesteuerte Genauigkeitsgrenze ist in diesem Fall $\left|\Delta\bar{P}\right| < 0.1\text{sec}$.

BEISPIEL: Es werde eine $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahn durch Vorgabe von $\bar{e}_0 = 0.1$ und $\bar{i}_0 = 87°$ gesucht. Die berechneten Bahnparameter sind in Tabelle 24-5 zusammengestellt. Sie wurden mit den Parametern $\Delta a = 1\text{km}$ und der Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta P\right| < 0.1\,\text{sec}$ erhalten. Die erreichte Genauigkeit beträgt $\overline{P_D} - \overline{P_T} = 0.0999996254104\,\text{sec}$.

Bemerkenswert an dieser Bahn sind die Längenverschiebung von Perigäum und aufsteigendem Knoten von jeweils nahezu 5x360°. Dadurch liegt die Subsatellitenbahn unverrückbar über der Erdoberfläche fest, ebenso der Ort der Apsiden wie der Knoten. Dieser Sachverhalt kann in Bild 24-14 eingesehen werden. Die Bodenspur zur Epoche ist als rote Kurve zu erkennen.

Überlagernd ist die Bahn in grüner Farbe nach einem Jahr dargestellt. Die Umlaufzeit auf dieser Bahn weicht geringfügig von 5 Sterntagen ab. Eine reproduzierbare Zuordnung der Position des Satelliten zur mittleren Sonnenzeit ist nicht möglich. ◀

$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)$	
$\overline{a_{QDT}} = 123253.041111\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.1, \bar{i}_0 = 87°, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 430633.137591\ \text{sec}$	t_0 : 2020-08-07/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 430635.027867\ \text{sec}$	$P_H = 430635.027867\ \text{sec}$
$\overline{P_A} = 430634.080355\ \text{sec}$	$P_A = 430634.080355\ \text{sec}$
$\overline{P_D} = 430635.022633\ \text{sec}$	$P_D = 430635.022633\ \text{sec}$
$\overline{P_T} = 430635.122633\ \text{sec}$	$P_T = 430635.122633\ \text{sec}$
$\overline{P_R} = 107716.715607\ \text{sec}$	$P_R = 95568.663791\ \text{sec}$
$\overline{P_S} = 436592.999668\ \text{sec}$	$P_S = 436592.999668\ \text{sec}$
$\overline{P_L} = 526723.958555\ \text{sec}$	$P_L = 526723.958555\ \text{sec}$
$H_P = 104549.600000\ \text{km}$	$H_A = 129200.208222\ \text{km}$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -\text{-1799°.221273}$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -1799°.225168$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -1799°.221273$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -1799°.225168$
$\dot{\Omega}_s = -0.33881251701040772\times10^{-11}\ \text{rad/s}$	

Tabelle 24-5: Bahncharakteristika der $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)$ – Äquivalenzbahn, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}=0.72921158573340\times10^{-4}/\text{s}$, $J_2 = 0.001082625379977$, Berechnung der wahren Bahnparameter nur mit säkularen Bewegungseinflüssen

Anmerkungen:

1. Die hier gefundene Bahn ist sehr hoch und daher in besonderem (hier numerisch nicht berücksichtigten) luni-solaren gravitativen Einflüssen ausgesetzt. Diese Einflüsse müssen im Anwendungsfall durch numerische Integration berücksichtigt werden.

2. Wird die Genauigkeitsgrenze $\Delta\bar{P}$ verändert, können Bahnen in ganz anderen Höhenbereichen gefunden werden. Wird zum Beispiel $\left|\Delta\bar{P}\right| < 0.3\text{sec}$ gefordert, wird eine Bahn mit der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QDT}} = 13692.041\ \text{km}$ erhalten.

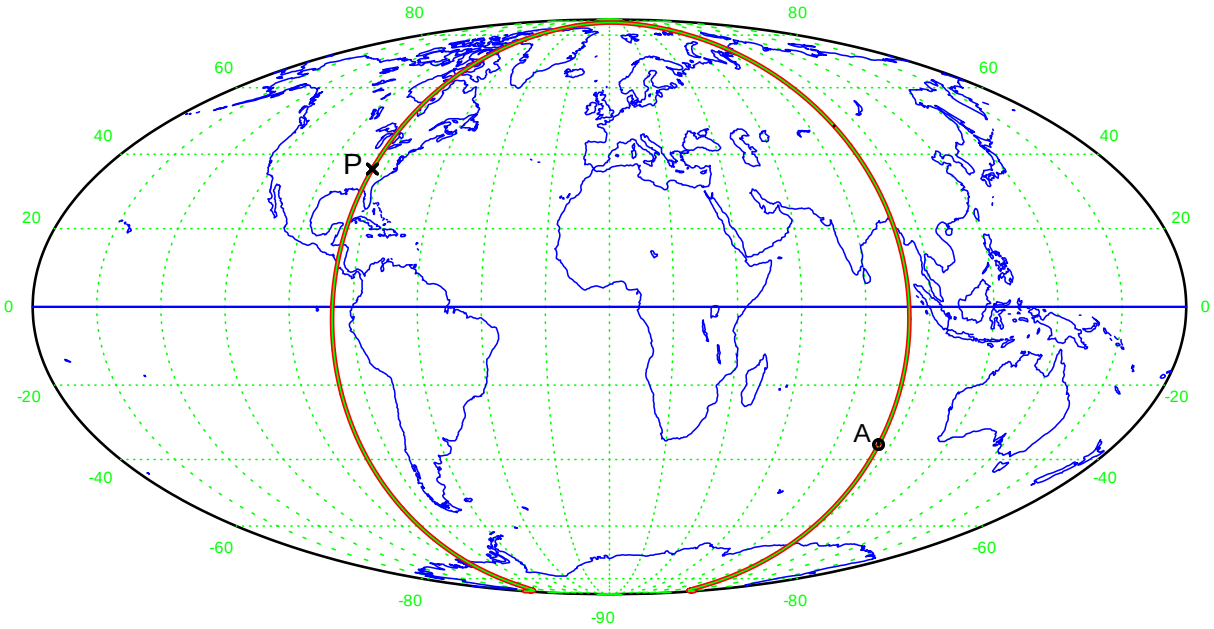


Bild 24-14: Bodenspur der $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)$ – Äquivalenzbahn mit den Bahnparametern

$\overline{a_{QDT}} = 123253.041111$ km, $\overline{e}_0 = 0.1$, $\overline{i}_0 = 87°$, $\overline{\Omega}_0 = 50°$, $\overline{\omega}_0 = 36°$, $\overline{M}_{0\,0} = 0°$, mit je einem Umlauf zur Epoche

t_0 : 2020-08-07/12:00:0.0 in roter Farbe und nach einem Jahr überlagert in grüner Farbe

$\left(P_D \triangleq P_T\right)-$ Äquivalenzbahnen werden durch eine Äquivalenz der wahren drakonitischen und der wahren tropischen Umlaufzeiten gebildet. Mit den Funktionsgleichungen (23.155) und (24.56) wird

$$fct\left(P_D\right) \equiv \sin\left[u\left(t_0 + P_D\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0, \quad fct\left(P_T\right) \equiv \sin\left[\alpha\left(t_0 + P_T\right) - \alpha\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{24.80}$$

und die zugehörende große Bahnhalbachse wird erhalten aus

$$fct\left(\overline{a_{QDT}}\right) \equiv P_D - P_T = 0 \quad . \tag{24.81}$$

Wie im Fall der mittleren Äquivalenzbahn kann auch hier etwa $\overline{a}_0^{(0)} = \left(R_E + H_{P\min}\right)/\left(1.0 - \overline{e}_0\right)$ als Anfangswert gewählt werden. Werden nur säkulare Bewegungseinflüsse zugelassen ergibt sich im Wesentlichen die im Fall der mittleren Bewegungen erhaltene Bahn.

24.4.3 Nahe Äquivalenz zwischen *Hansen*- und tropischer Bewegung

Die Äquivalenz zwischen *Hansen*- und tropischer Bewegung bewirkt eine Kopplung einer Satellitenbewegung zwischen dem Bezug auf den Frühlingspunkt mit dem Bahnebenen-festen *Hansen*-System.

Die tropische Bewegung unterscheidet sich von der *Kepler*schen Bewegung durch ihre Eigenbewegung bei Bezug auf den Frühlingspunkt. Die mittlere tropische mittlere Bewegung unterscheidet sich von der mittleren *Kepler*schen mittleren Bewegung durch die säkulare Drift der Rektaszension (Formel (24.45) in Abschnitt 24.2.3)

$$\overline{n_T} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s \ . \tag{24.82}$$

Die *Hansen*sche Bewegung eines Satelliten ist fest an die Bahnebene gebunden und auf einen in der Bahnebene festliegenden Anfangspunkt bezogen (Kapitel 21). Um die *Hansen*sche

Bewegung eines Satelliten auf andere Bewegungsdarstellungen beziehen zu können, muss die mittlere *Hansen*sche mittlere Bewegung nach Formel (21.62) (in Abschnitt 21.3) in der Form

$$\overline{n_H} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i}_0 + \cdots \tag{24.83}$$

verwendet werden. Äquivalenz zwischen den beiden Bewegungsarten führt somit notwendig auf die Bedingung

$$\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_T}\right)\text{-Äquivalenz-Bahn} \quad \Rightarrow \quad \overline{n_H} = \overline{n_T} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\Omega}_s\left(\sigma_i - \cos\bar{i}_0\right) = 0 \quad . \tag{24.84}$$

Mit der säkularen Variation des aufsteigenden Knotens[1] $\dot{\Omega}_s$ müssen die beiden Bedingungen erfüllt sein

1. $\cos\bar{i}_0 = 0 \;\Leftrightarrow\; \bar{i}_0 = 90°$
2. $\sigma_i = \cos\bar{i}_0 \;\Rightarrow\; \sigma_i = 1 \Leftrightarrow \bar{i}_0 = 0° \;,\; \sigma_i = -1 \Leftrightarrow \bar{i}_0 = 180° \;,\; \sigma_i = 0 \Leftrightarrow \bar{i}_0 = 90°$.

Wie in den beiden vorhergehenden Abschnitten kommen auch in diesem Fall polnahe Bahnen in Frage, zusätzlich rechtläufige oder rückläufige Äquatorbahnen.

Die in Tabelle 24-5 (auf Seite 388) behandelte Nahe-$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T}\right)$-Äquivalenzbahn zeigt auch nahezu Übereinstimmung der *Hansen* und der anomalistische Umlaufzeiten. Infolgedessen können in diesem Fall die polnahen Bahnen aus den letzten drei Abschnitten als mehrfach gekoppelte Nahe$-\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_H}\right)-$Äquivalenzbahnen mit besonderer Bahnstabilität bezeichnet werden.

24.4.4 Nahe Äquivalenz zwischen *Kepler*- und tropischer Bewegung

Die Äquivalenz zwischen *Kepler*- und tropischer Bewegung bewirkt eine Kopplung einer ungestörten Keplerbewegung mit einer Satellitenbewegung bei Bezug auf den Frühlingspunkt .

Die tropische Bewegung unterscheidet sich von der *Kepler*schen Bewegung durch ihre Eigenbewegung bei Bezug auf den Frühlingspunkt. Die mittlere tropische mittlere Bewegung hat bei Bezug auf die *Kepler*sche mittlere Bewegung die Darstellung (siehe Formel (24.45) in Abschnitt 24.2.3)

$$\overline{n_T} = \overline{n_K} + \dot{M}_{0s} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\,\dot{\Omega}_s \;. \tag{24.85}$$

Äquivalenz zwischen den beiden Bewegungsarten führt somit notwendig auf die Bedingung

$$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_T}\right)\text{-Äquivalenz-Bahn} \quad \Rightarrow \quad \overline{n_K} = \overline{n_T} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{M}_{0s} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\,\dot{\Omega}_s = 0 \quad . \tag{24.86}$$

Mit den säkularen Variationen[2] $\dot{\Omega}_s, \dot{\omega}_s, \left(M_0\right)_s^{\cdot}$ folgt aus der allgemeinen Beziehung (24.86) in erster Näherung die Bedingungsgleichung

$$\left(1 - 3\cos^2\bar{i}_0\right)\sqrt{1-\bar{e}_0^2} + \left(1 - 5\cos^2\bar{i}_0\right) + 2\,\sigma_i\cos\bar{i}_0 = 0 \quad . \tag{24.87}$$

Nach Vorgabe der Exzentrizität kann die Lösung für den Betrag $\left|\cos\bar{i}_0\right|$ mit Hilfe der Abkürzungen

---

[1] Siehe etwa Formel 20.15 in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

[2] Siehe etwa Formeln (20.15) – (20.17) in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$A_K := 5 + 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2} \;,\; B_K := -2 \;,\; C_K = -\left(1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) \;,$$
$$Q_K := -\frac{1}{2}\left(B_K + \operatorname{sgn}(B_K)\sqrt{B_K^2 - 4\,A_K\,C_K}\right) \tag{24.88}$$

berechnet werden:

$$\left|\cos\overline{i_{QKT,1}}\right| = \frac{Q_K}{A_K} \quad , \quad \left|\cos\overline{i_{QKT,2}}\right| = \frac{C_K}{Q_K} \quad . \tag{24.89}$$

Da $C_K < 0$, kann nur die erste Lösung verwendet werden. Die Lösungen (erster Ordnung) für die Inklinationen sind für einige Exzentrizitäten in Tabelle 24-1 zusammengestellt.

$\overline{e}_0$	$\overline{i_{QKT,1}}$	$\overline{i_{QKT,2}}$
0.0	50°.17922705	129°.8207730
0.1	50°.16876048	129°.8312395
0.2	50°.13674586	129°.8632541
0.3	50°.08121856	129°.9187814
0.4	49°.99845136	130°.0015486
0.5	49°.88204635	130°.1179536
0.6	49°.72097889	130°.2790211
0.7	49°.49497152	130°.5050285
0.8	49°.16128207	130°.8387179
0.9	48°.60049252	131°.3995075

Tabelle 24-6: Die charakteristischen Inklinationen von $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahnen für einige Exzentrizitäten

Bild 24-15 illustriert die Lösungen (24.89). Der Einfluss der Exzentrizität auf die charakteristischen Neigungen $\overline{i_{QKT,1}}$ und $\overline{i_{QKT,2}}$ ist marginal.

BEISPIEL: Die mittleren kreisförmigen $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahnen haben in erster Näherung die mittleren Bewegungen $\overline{n_K} = \overline{n_T} = 0°.058079/\sec$.◀

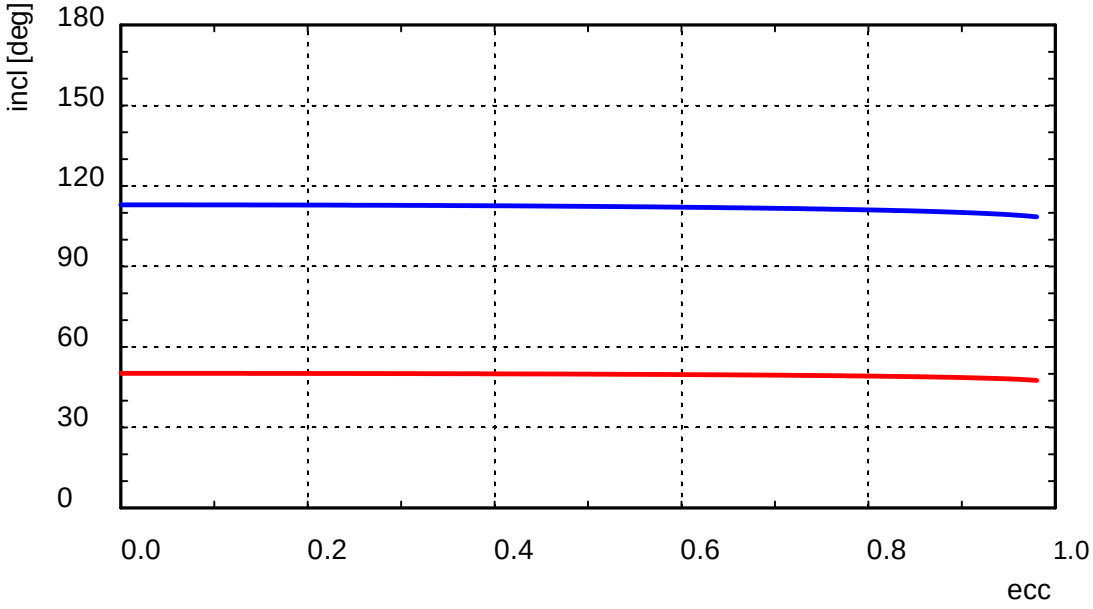


Bild 24-15: Die Lösungen von Gleichung (24.89) über der Exzentrizität ($\bar{e}_0$ <1)

Die große Bahnhalbachse kann berechnet werden mit Hilfe der Funktionsgleichung[1] (analog den früheren vergleichbaren Fällen)

$$fct\left(\overline{a_{QKT}}\right) \equiv \overline{P_K}\left(\bar{a}_0\right) - \overline{P_T}\left(\bar{a}_0\right) = 0 \quad . \tag{24.90}$$

Wie bei nahen Äquivalenzen üblich, wird bei vorgegebenen Exzentrizität und Inklination die große Bahnhalbachse ab einem geeigneten Näherungswert mit einer frei wählbaren Schrittweite Δa erhöht. Die bei jedem Schritt berechneten Umlaufzeiten $\overline{P_K}$ und $\overline{P_T}$ werden verglichen. Liegt deren Differenz unter einer vorgegebenen Schranke $\Delta\bar{P}$, kann der jetzt erhaltene Wert $\overline{a_{QKT}}$ als große Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahn aufgefasst werden. Dieser Wert ist somit wieder eine Funktion von Schrittweite Δa und Genauigkeitsschranke $\Delta\bar{P}$. Es muss daher erwartet werden, dass unter diesen Randbedingungen eine beliebige Menge an Näherungs-Äquivalenzbahnen mit unterschiedlicher Genauigkeitsgrenze gefunden werden können. Im vorliegenden Fall hat die Praxis gezeigt, dass die Genauigkeitsgrenze $\left|\Delta\bar{P}\right| < 1.0\,\text{sec}$ für sinnvolle (d.h. brauchbare) Äquivalenzbahnen nicht unterschritten werden sollte. Eine Übersicht über die Umgebung geeigneter Nahe Paralleler Äquivalenzbahnen ist in Bild 24-16 dargestellt.

Für $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_T}\right)-$ Äquivalenzbahnen ist die Bedingung (24.89) bzw. die Werte in Tabelle 24-1 wesentlich: die vorgewählte Inklination muss in der Umgebung der charakteristischen Inklinationen etwa $\bar{i}_0 \in \left(48°.60049252, 50°.17922705\right)$ liegen. In diesem Fall ist der mögliche Bereich

[1] analog kann auch ein anderes Bahnelement wie $\bar{e}_0$ oder $\bar{i}_0$ nach Vorgabe der anderen Bahnparameter berechnet werden

von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_T}\right)$ – Äquivalenzbahnen äußerst eingeschränkt, wie aus Bild 23-42 im Hinblick auf unterschiedliche Exzentrizitäten abgelesen werden kann.

BEISPIEL: Für einige vorgewählte Exzentrizitäten $\overline{e}_0$ und Inklinationen $\overline{i}_0$ aus der Umgebung der charakteristischen Neigungen $\overline{i_{QKT,1}}, \overline{i_{QKT,2}}$ werde die mittlere große Bahnhalbachse berechnet. Die Umlaufzeiten werden mit der Schrittweite $\Delta a = 1$ km und mit der Anfangsnäherung $\overline{a}_0^{(0)} = \left(R_E + 200\right)/\left(1-\overline{e}_0\right)$ berechnet. Die angesteuerte Genauigkeitsgrenze ist in diesem Fall $\left|\Delta\overline{P}\right| < 0.1\text{sec}$.

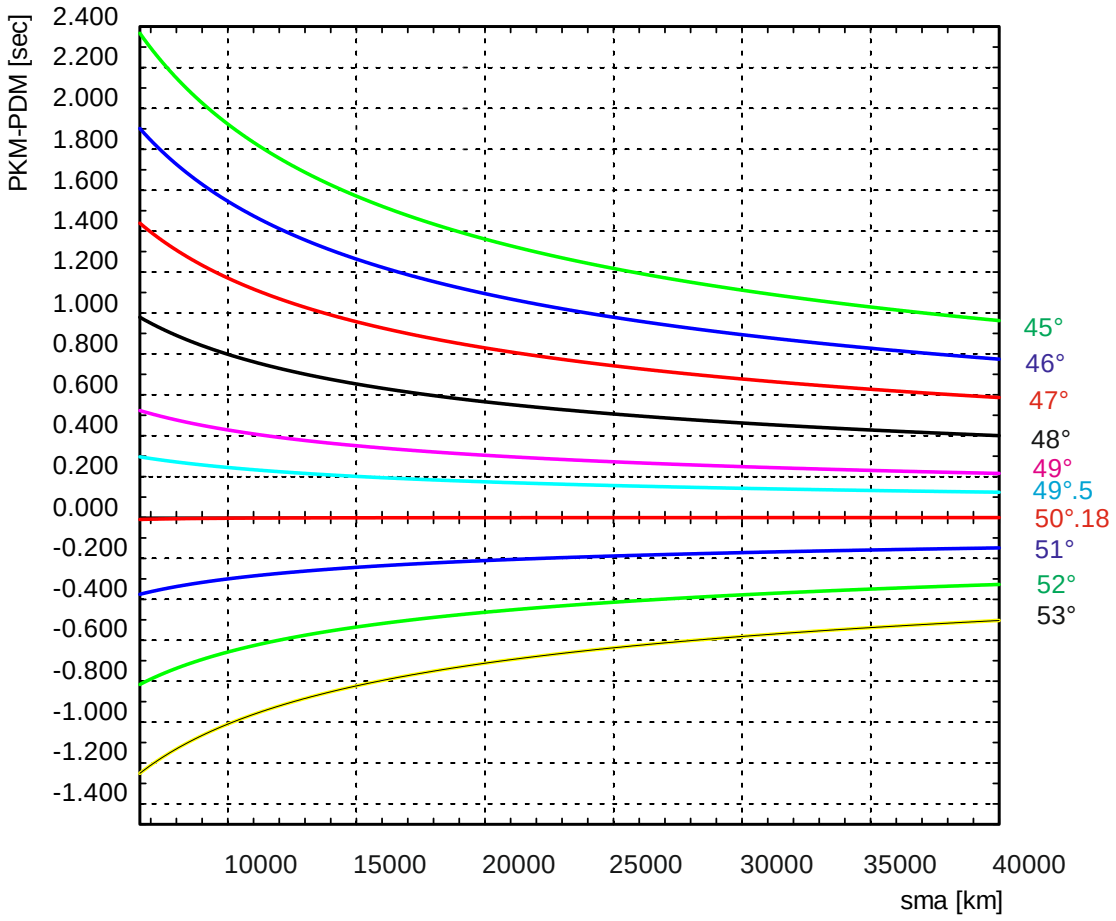


Bild 24-16: Das Verhalten der Differenz aus *Kepler*scher und tropischer Umlaufzeit $\left(\overline{P_K} - \overline{P_T}\right)$ über der großen Bahnhalbachse kreisförmiger Bahnen für einige Inklinationen in der Umgebung von $\overline{i_{QKT,1}} = 50°.17922705$. Vollständiges *Brouwer* Bahnmodell, $\Delta a = 5$ km.

Im Beispiel seien $\overline{e}_0 = 0.2$ und $\overline{i}_0 = 49°.7$ gegeben. Mit Hilfe der Funktionsgleichung (24.90) wird dir große Bahnhalbachse $\overline{a_{QKT}} = 29110.671250$ km erhalten. Die erreichte Genauigkeit beträgt $\left|\overline{P_K} - \overline{P_t}\right| = 0.0999996448663\text{sec}$. Die Bahnparameter dieser Bahn sind in Tabelle 23-18 zusammengestellt. ◀

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_T}\right)$	
$\overline{a_{QKT}} = 29110.671250\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.2, \bar{i}_0 = 49°.7, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 00°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K} = 49429.852001$ sec	t_0 : 2021-02-10/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 49428.796769$ sec	$P_H = 49428.796769$ sec
$\overline{P_A} = 49429.329631$ sec	$P_A = 49429.329631$ sec
$\overline{P_D} = 49427.047669$ sec	$P_D = 49427.047669$ sec
$\overline{P_T} = 49429.752001$ sec	$P_T = 49429.752001$ sec
$\overline{P_R} = 115942.446221$ sec	$P_R = 109042.44622$ sec
$\overline{P_S} = 49507.298640$ sec	$P_S = 49507.298640$ sec
$\overline{P_L} = 50486.92922$ sec	$P_L = 50486.929227$ sec
$H_P = 16910.40000$ km	$H_A = 28554.6685$km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -206°.528354$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -206°.529569$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -206°.528354$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -206°.529569$
$\dot{\Omega}_s = -0.6954835266550369 2 \times 10^{-8}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.5868659842117347 9 \times 10^{-8}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)_s^{\cdot} = 0.1343333747071921 4 \times 10^{-8}$ rad / sec	

Tabelle 24-7: Bahncharakteristika der mittleren Keplerschen mit der mittleren tropischen Äquivalenzbahn, Basis Parameter: $R_E = 6378.1366$ km , $\mu_{\ddot{O}} = 398600.4418$ km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s ,

$J_2 = 0.001082625379977$, Schrittweite $\Delta a = 1$ km, geforderte Genauigkeit $|\Delta P| < 10^{-2}$ sec

24.4.5 Übersicht einiger Eigenschaften von Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen

Aus heuristischen Überlegungen können folgende allgemeine Eigenschaften von Nahe-Parallelen Äquivalenzbahnen zusammengestellt werden:

1. Nahe-parallele Äquivalenzbahnen sind durch (eine oder aus symmetrischen Gründen zwei) charakteristische Inklinationen ausgezeichnet.
2. Nahe-Parallele Äquivalenzbahnen mit Inklinationen nahe der jeweiligen charakteristischen Inklination nähern sich mit wachsender großer Bahnhalbachse immer mehr der Bahn mit der charakteristischen Inklination an, erreichen sie aber nie.
3. Mit wachsender Exzentrizität verschiebt sich die Annäherung an die Nullkurve zu immer größeren Halbachsen.
4. Nahe-parallele Äquivalenzbahnen sind durch den jeweiligen Abstand zur Nulllinie charakterisiert. Dieser Abstand ist ein Maß für die Genauigkeit mit der eine solche Bahn die Äquivalenzbedingung erfüllen kann.
5. Eine eindeutige Darstellung etwa eines (a,i)-Gebietes, in dem nahe-parallele Äquivalenzbahnen gefunden werden können, ist nicht möglich wegen der Abhängigkeit von den Schrittweiten der Parameter und wegen der extremen Abhängigkeit von der Genauigkeit bei der Berechnung der zuständigen Bedingungsgleichung.

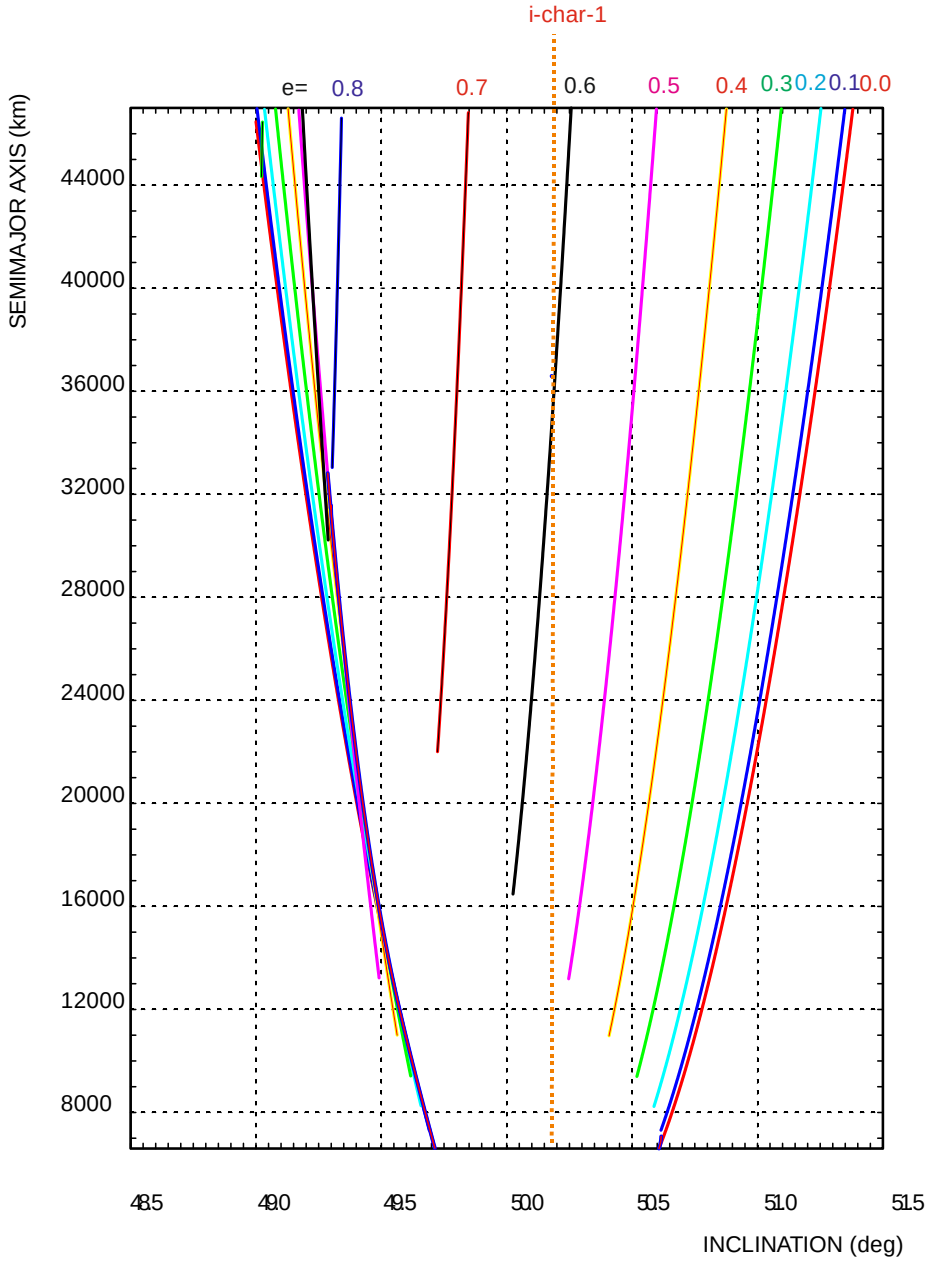


Bild 24-17: Übersicht über mögliche Nahe Parallele $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_T}\right)$ – Äquivalenzbahnen große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten. Als Genauigkeit ist die Einschränkung $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_K} - \overline{P_T}\right| \leq 0.2\,\text{sec}$ zugelassen. Das Bahnmodell umfasst alle säkularen Störungen durch J_2 und J_4. Die Berechnung erfolgt mit den Schrittweiten $\Delta a = 1\,\text{km}$, $\Delta i = 0°.001$.

25 Die siderische Bewegung

Aus der sphärischen Astronomie ist der Begriff des siderischen Umlaufs bekannt. Seine Übertragung in die Satellitenbahnmechanik sei kurz angedeutet. Der Frühlingspunkt bewegt sich infolge der Präzession der Erdachse gegenüber dem als fest betrachteten Fixsternhimmel. Wird der Umlauf eines Satelliten nicht auf den Frühlingspunkt, sondern auf den Fixsternhimmel bezogen, wird die so definierte siderische Bewegung von der auf den Frühlingspunkt bezogenen tropischen Bewegung abweichen. Um den Unterschied zwischen der siderischen und der tropischen Bewegung zu berechnen, wird die Kenntnis der Präzession benötigt.

25.1 Zur Definition der siderischen Bewegung eines Erdsatelliten

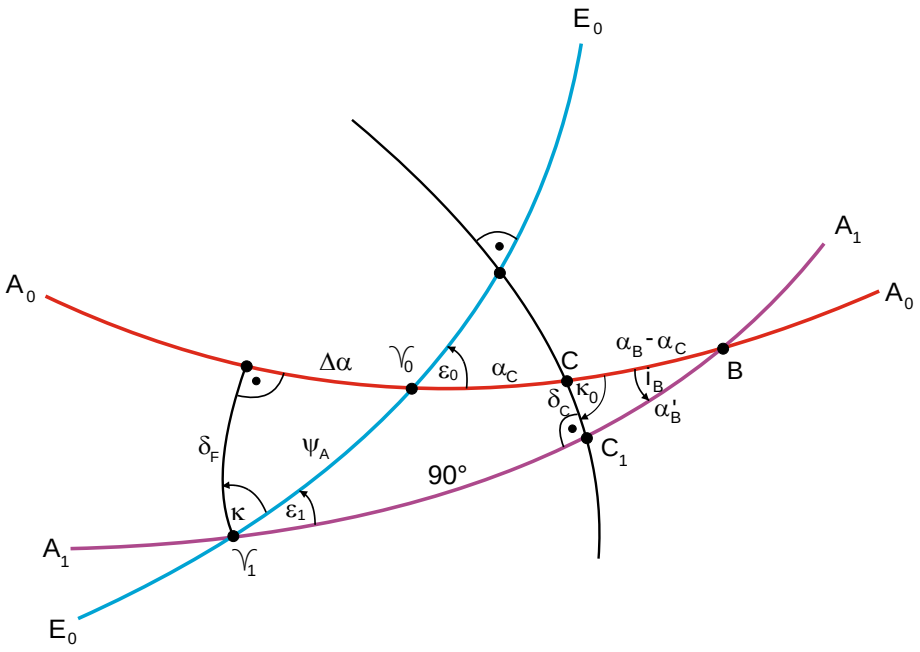


Bild 25-1: Transformation des Äquatorsystems als Folge der luni-solaren Präzession[1]

Der Hauptanteil der Präzession ist die lunisolare Präzession: der Frühlingspunkt bewegt sich längs der als fest angenommenen Ekliptik im Zeitintervall Δt um den Winkel (vgl. Bild 25-1)

$$\psi_A = p_L\left(t_1 - t_0\right) = p_L\,\Delta t \ . \tag{25.1}$$

Pro Jahr beträgt diese Verschiebung etwa $p_L \approx 50''$ in westlicher Richtung. Im IAU (1976) System der astronomischen Konstanten wird der Wert

$$p_L = 5029''.0966 \text{ pro Julianischem Jahrhundert} \tag{25.2}$$

[1] Kopie von Bild 9-6, Abschnitt 9.3.1, Band II

verwendet[1]. Allerdings ist dieser Parameter nicht konstant, sondern unterliegt (zumindest) säkularen Veränderungen im Verlauf von julianischen Jahrhunderten[2].

Der luni-solaren Präzession um den Winkel ψ_A entspricht auf dem Äquator die Differenz in Rektaszension $\Delta\alpha$, die nach Bild 25-1 aus den Formeln

$$\begin{aligned} \cos\Delta\alpha\ \cos\delta_F &= \cos\psi_A \\ \sin\Delta\alpha\ \cos\delta_F &= \sin\psi_A\ \cos\varepsilon_0 \\ \sin\delta_F &= \sin\psi_A\ \sin\varepsilon_0 \end{aligned} \tag{25.3}$$

berechnet werden kann. Hier ist ε_0 die momentane Schiefe der Ekliptik zum Anfangszeitpunkt t_0.

Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse wird der siderische Umlauf eines Satelliten längs einer oskulierenden Äquatorebene gerechnet, wobei die relative Verschiebung des Frühlingspunktes um $\Delta\alpha$ berücksichtigt wird. Wegen der im Vergleich zur langsamen Verschiebung des Frühlingspunktes kurzen Umlaufzeit eines Erdsatelliten, kann die Deklination δ_F des neuen Frühlingspunktes Υ_1 als sehr klein, somit $\cos\delta_F \approx 1$, aufgefasst werden. Nach der ersten der Gleichungen (25.3) kann daher in diesem Zusammenhang

$$\Delta\alpha \approx \psi_A \tag{25.4}$$

gesetzt werden. Die säkulare Variation infolge der luni-solaren Präzession bei der Berechnung der mittleren Bewegung eines Erdsatelliten kann daher auf den Wert p_L aus Formel (25.1) zurückgeführt werden. Die mittlere siderische mittlere Bewegung kann daher in Ergänzung der mittleren tropischen mittleren Bewegung (24.26)[3] angesetzt werden zu

$$\overline{n_{sid}} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - p_L\right) = \overline{n_T} - \sigma_i\ p_L \quad . \tag{25.5}$$

Die mittlere siderische Umlaufzeit lautet dann

$$\overline{P_{sid}} = \frac{2\pi}{\overline{n_{sid}}} \quad . \tag{25.6}$$

25.2 Numerische Abschätzungen der siderischen Satellitenbewegung

Für einen erdnahen Satelliten mit etwa 7000 sec Umlaufzeit bewirkt die lunisolare Präzession eine Verschiebung des Frühlingspunktes um etwa $\Delta\alpha \approx 0''.01$, für einen geosynchronen Satelliten mit 24^h ist $\Delta\alpha \approx 0''.14$ zu erwarten.

Für das Rechnen in einer Satellitenbahnanalyse wird die Rate der luni-solaren Präzession in Radian pro Sekunde benötigt:

$$p_L = \frac{5029''.0966 \times \pi \times 1°1^d}{180° \times 3600'' \times 36525^d \times 86400^s} = 7.76261098 \times 10^{-12}/s \quad . \tag{25.7}$$

---

[1] SEIDELMANN, P. K. ed. [1992], p. 103 und p. 696

[2] Siehe näheres in Abschnitt 9.3.1, Band II

[3] In Abschnitt 24.2.3

Damit kann im BEISPIEL der Unterschied der mittleren siderischen Umlaufzeit gegenüber einer mittleren tropischen Umlaufzeit abgeschätzt werden: In Abschnitt 24.3.3 wird für die Bahn $\bar{a}_0 = 14000\,\mathrm{km}, \bar{e}_0 = 0.5, \bar{i}_0 = 60°.0$ die mittlere tropische Umlaufzeit $\overline{P_T} = 16490.31355\,\mathrm{s}$ mit der mittleren tropischen mittleren Bewegung $\overline{n_T} = 3.81022792 \times 10^{-4} / s$. Die mittlere siderische Bewegung beträgt nach Formel (25.5) $\overline{n_{sid}} = 3.81022800 \times 10^{-4} / s$, somit die mittlere siderische Umlaufzeit $\overline{P_{sid}} = 16490.31321\mathrm{s}$. ◄

25.3 Einfluss der Präzession durch die Planeten

Der Vollständigkeit halber sei noch der Einfluss durch die Präzession durch die Planeten diskutiert[1]. Dieser Effekt verändert im Gegensatz zur luni-solaren Präzession auch die inertiale Lage der Ekliptik. Die Präzession durch die Planeten bewirkt eine Verschiebung des Frühlingspunktes im julianischen Jahrhundert um $12''$ und eine Abnahme der Schiefe der Ekliptik im Jahrhundert um $47''$. Da sich schon die lunisolare Präzession so gut wie nicht auf Aussagen der Satellitenbewegung auswirkt, kann die mehr als 400 mal so kleine Präzession durch die Planeten quantitativ keinen Einfluss auf Aussagen einer Satellitenbahnanalyse ausüben.

Diese Aussage trifft allerdings nicht für astronomische Beobachtungen zu, die mit äußerster Präzision durchgeführt werden müssen[2].

[1] siehe etwa in Abschnitt 9.3.2 (Band II)

[2] etwa nach Abschnitt 9.3.4 (Band II)

26 Die Meridian-bezogene Bewegung

Als Meridian-bezogene Umlaufzeit wird die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden gleichartigen Durchgängen des Satelliten durch ein- und denselben Meridian auf der Erdoberfläche definiert.

Die Untersuchung einer Satellitenbewegung bei Bezug auf einen Meridian über der Erdoberfläche ist insbesondere für äquatornahe Bahnen, vor allem bei geosynchronen Bahnen, von besonderem Interesse (Abschnitt 26.6). Hier kann beobachtet werden, wann ein Satellit wieder sichtbar wird. In der englisch-sprachigen Literatur wird die entsprechende Umlaufzeit deshalb auch als „Revisiting Period" bezeichnet[1]. Die Meridian-bezogene Bewegung ist somit auch für alle Bahnen von Interesse, für die weder eine drakonitische noch eine anomalistische Bewegung definiert werden können (Abschnitt 26.3 und 26.4).

Es darf im Allgemeinen nicht erwartet werden, dass nach einem Meridian-bezogenen Umlauf auch dieselbe geographische Breite überflogen wird, also derselbe Ort auf der Erdoberfläche getroffen werden kann. Infolge der Erdrotation erscheint die Bewegung eines Satelliten einem Beobachter auf der Erdoberfläche anders als er sich in seiner Bahn bewegt. Die Meridian-bezogene Bewegung ist daher grundlegend für die Untersuchung der scheinbaren Satellitenbewegung. Interessante Spezialfälle sind die scheinbar stationären Bahnpunkte (Abschnitt 26.7) sowie die Meridian-bezogenen Äquivalenzbahnen (Abschnitte 26.8-26.13).

26.1 Das geozentrische Meridian-bezogene Äquatorsystem

Soll eine Satellitenbewegung auf einen Meridian auf der Erdoberfläche bezogen werden, kann als Bezugsmeridian der 0-Meridian durch Greenwich gewählt werden, der Ortsmeridian durch einen bestimmten Beobachtungsort, oder einen beliebigen Meridian, den der Satellit zu einem bestimmten Zeitpunkt überfliegt. Ein Ortsmeridian hat zu einem bestimmten Zeitpunkt in Bezug auf den Frühlingspunkt als Winkelabstand den Stundenwinkel Θ, der in diesem Zusammenhang als Sternzeit des Ortsmeridians bezeichnet wird. Für die Untersuchung einer Satellitenbewegung bei Bezug auf die Erdoberfläche ist die Sternzeit Θ_G des 0-Meridians von grundlegender Bedeutung.

Nach Abschnitt 8.4.2 (Band II) errechnet sich die Sternzeit des 0-Meridians bei Bezug auf die Sternzeit Θ_{G_0}, die in Greenwich um $0^h\left[\text{U.T.1}\right]$ gültig ist. Dieser Wert wird in Formel (8.130) zur Verfügung gestellt. Die Sternzeit in Greenwich zu einem beliebigen Zeitpunkt $t\left[\text{U.T.1}\right]$ wird mit Formel (8.132) berechnet

$$\Theta_G = \Theta_{G_0} + \dot{\Theta} t \quad , \tag{26.1}$$

wenn *t* das Zeitintervall in Bezug auf Mitternacht in Greenwich ist. Hier ist der Faktor $\dot{\Theta}$ die Variation der Sternzeit, d.h. die tropische Rotationsgeschwindigkeit der Erde, gegeben nach (8.133) durch den Zahlenwert (die Zeit T_U ist die Anzahl in julianischen Jahrhunderten seit der Fundamentalepoche J2000.0, bezogen auf das julianische Datum J des betreffenden Datums, siehe in Definition (8.131))

[1] Dies ist auch der Grund, weshalb die Meridian-bezogene Bewegung im vorliegenden Bericht mit dem Index „R" charakterisiert wird.

$$\dot{\Theta} = 1.002737909350795 + 5.9006\times10^{-11} T_U + 5.9\times10^{-15} T_U^2 \quad \left[\text{Umläufe pro mittlerem Sonnentag}\right] \quad . \tag{26.2}$$

Diese die Erdrotation beschreibende Größe ist somit der entscheidende Faktor zur Umrechnung vom Frühlingspunkt-orientierten Äquatorsystem zu einem erdfesten Äquatorsystem. Sei die Rektaszension α eines Satellitenortes berechnet, so kann seine (östliche) geographische Länge λ bezogen auf den Greenwich Meridian (nach Bild 26-1) aus der Beziehung

$$\lambda = \alpha - \Theta_G \tag{26.3}$$

erhalten werden. Für die zeitliche Variation der geographischen Länge

$$\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta} \tag{26.4}$$

kann mit der Variation der Rektaszension aus Formel (24.21)

$$\dot{\lambda} = \dot{\zeta}\frac{\cos i}{\cos^2\delta} - \dot{\Theta} \tag{26.5}$$

gebildet werden. Die Größe $\dot{\lambda}$ ist somit die wahre auf einen Meridian bezogene Bewegung eines Satelliten. $\dot{\zeta}$ ist die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels, die durch der Flächensatz $r^2\dot{\zeta} = G$ definiert ist..

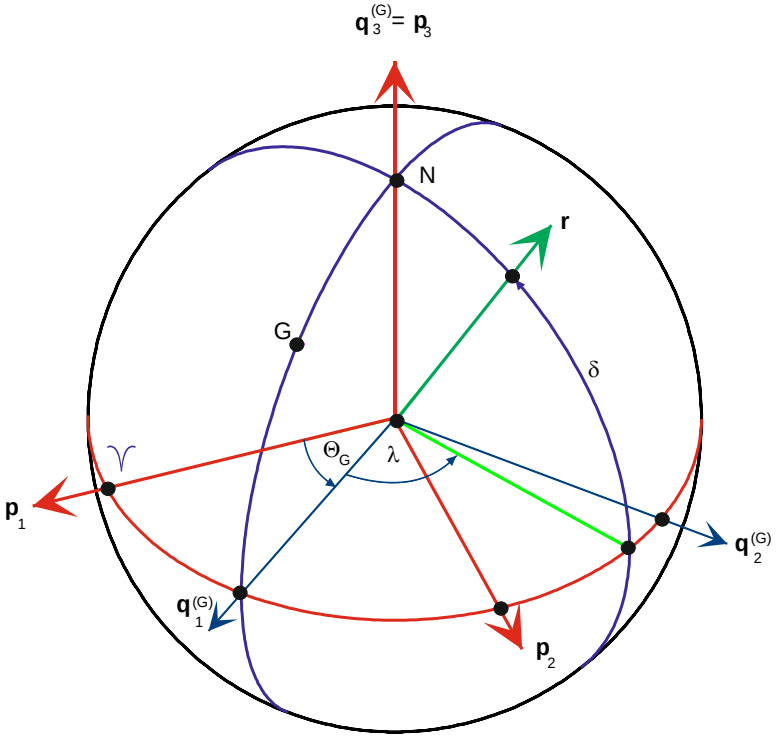


Bild 26-1: Das Meridian bezogene geozentrische erdfeste Koordinatensystem

26.2 Die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung

Da die geographische Länge λ als Bezugswinkel der Meridian-bezogenen Bewegung längs des Äquators gezählt wird, kann auch in diesem Fall die Reduktion auf den Äquator (24.42) verwendet werden. Zu einem Zeitpunkt t kann die geographische Länge mit zu diesem Zeitpunkt geltenden mittleren Bahnparametern berechnet werden aus

$$\begin{aligned}\lambda &= \alpha - \Theta_G = \sigma_i\,\alpha_N + \Omega - \Theta_G = \\ &= \bar{\Omega} + \delta\Omega - \Theta_G + \\ &\quad + \sigma_i \Big\{ \bar{M} + \bar{\omega} + 2\bar{e}\sin\bar{M} - \\ &\qquad - \tan^2\frac{\bar{i}}{2}\Big[\sin 2\left(\bar{\omega}+\bar{M}\right) + 2\bar{e}\sin\left(2\bar{\omega}+3\bar{M}\right) - 2\bar{e}\sin\left(2\bar{\omega}+\bar{M}\right)\Big] + \\ &\qquad\quad + O\left(\bar{e}^2\right) + O\left(\tan^4\frac{\bar{i}}{2}\right) + \delta M + \delta\omega \Big\} \quad .\end{aligned} \tag{26.6}$$

Um die entsprechende Bewegung untersuchen zu können, muss der Differentialquotient gebildet werden, der mit Hilfe der tropischen Bewegung in Ausdruck (24.50) bei Bezug auf die Projektion auf den Äquator hergeleitet werden kann:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \dot{\alpha} - \dot{\Theta} = \dot{\Omega}_s + \delta\dot{\Omega} - \dot{\Theta} + \\ &\quad + \sigma_i \left\{ \overline{n_d} + \frac{d}{dt}\Big[2\bar{e}\sin\bar{M}\Big] - \right. \\ &\qquad - \frac{d}{dt}\left[\tan^2\frac{\bar{i}}{2}\Big[\sin 2\left(\bar{\omega}+\bar{M}\right) + 2\bar{e}\sin\left(2\bar{\omega}+3\bar{M}\right) - 2\bar{e}\sin\left(2\bar{\omega}+\bar{M}\right)\Big]\right] + \\ &\qquad\quad \left. + \frac{d}{dt}\left\{ O\left(\bar{e}^2\right) + O\left(\tan^4\frac{\bar{i}}{2}\right) + \delta M + \delta\omega \right\} \right. \quad .\end{aligned} \tag{26.7}$$

Die Variation $\dot{\lambda}$ der geographischen Länge werde in einen säkularen und einen periodischen Anteil zerlegt

$$\dot{\lambda} = \dot{\bar{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} \quad . \tag{26.8}$$

Mit Beziehung (24.44) wird

$$\sigma_i\,\dot{\lambda} = \sigma_i\,\dot{\bar{\lambda}} + \sigma_i\,\delta\dot{\lambda} = \sigma_i\,\dot{\bar{\alpha}} - \sigma_i\,\dot{\Theta} + \sigma_i\,\delta\dot{\lambda} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}{}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) + \sigma_i\delta_p \quad . \tag{26.9}$$

Aus diesem Ausdruck kann die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung mit Bezug zur mittleren tropischen mittleren Bewegung definiert werden:

$$\overline{n_R} := \sigma_i\,\dot{\bar{\lambda}} = \overline{n_T} - \sigma_i\,\dot{\Theta} \quad . \tag{26.10}$$

Diese wird zunächst wie die bisher behandelten mittleren Bewegungen als im Wesentlichen positive Größe verstanden, kann aber je nachdem wie der Faktor $\sigma_i\,\dot{\Theta}$ ausfällt bei erdfernen Satellitenbahnen auch negativ sein, wenn es rechtläufige Bahnen mit $\overline{n_T} < \dot{\Theta}$ gibt[1]. Für die säkulare Knotenlängendrift bleibt dagegen

$$\dot{\bar{\lambda}} = \sigma_i\,\overline{n_R} = \sigma_i\,\overline{n_T} - \dot{\Theta} \quad . \tag{26.11}$$

Die Verwendung der beiden getrennten Größen $\overline{n_R}$ und $\dot{\bar{\lambda}}$ sind bei bahnanalytischen Untersuchungen von prinzipieller Bedeutung. Damit ergibt sich der Bezug der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung zur mittleren tropischen mittleren Bewegung

$$\overline{n_R} = \overline{n_T} - \sigma_i\,\dot{\Theta} \quad . \tag{26.12}$$

Der Bezug zur mittleren anomalistischen mittleren Bewegung lautet

$$\overline{n_R} = \sigma_i\,\dot{\bar{\lambda}} = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) \quad , \tag{26.13}$$

[1] Dies wird in den folgenden Abschnitten im Einzelnen näher untersucht.

zur mittleren drakonitischen mittleren Bewegung

$$\overline{n_R} = \overline{n_D} + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} \right) = \overline{n_D} + \sigma_i \, \dot{\lambda}_{\Omega s} \tag{26.14}$$

sowie zur mittleren *Kepler*schen mittleren Bewegung

$$\overline{n_R} = \overline{n_K} + \left(M_0 \right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} \right) \quad . \tag{26.15}$$

26.3 Die Meridian-bezogene Umlaufzeit

Der Bezug der Meridian-bezogenen Satellitenbewegung zu einem Zeitintervall $\Delta t = t - t_0$, in der ein Satellit das Intervall in geographischer Länge $\lambda - \lambda_0$ durchfliegt, wird durch das Integral

$$t = t_0 + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\dot{\lambda}} \tag{26.16}$$

beschrieben. Die Lösung dieses Integrals kann durch eine iterative Lösung der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\Delta t \right) \equiv \lambda\left(t_0 + \Delta t \right) - \lambda\left(t_0 \right) = 0 \tag{26.17}$$

bzw. die überlagerte Funktion

$$fct\left(\Delta t \right) \equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + \Delta t \right) - \lambda\left(t_0 \right) \right] = 0 \tag{26.18}$$

erhalten werden. Als Anfangslösung für den Iterationsprozess kann aus dem säkularen Anteil in Gleichung (24.42)

$$\left(\Delta t \right)^{(0)} := \frac{\overline{n_R}}{\left| \lambda - \lambda_0 \right|} \tag{26.19}$$

errechnet werden. Der Betragsstrich ist erforderlich, wenn im Fall rückläufiger Bahnen die Längendifferenz negativ wird, das Zeitintervall jedoch auch dann als positiv angenommen werden muss.

Ein Spezialfall des Zeitbezugs ist die Meridian-bezogene Umlaufzeit, die aus dem Integral

$$P_R = \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + 360^\circ} \frac{d\lambda}{\left| \dot{\lambda} \right|} \tag{26.20}$$

bezogen auf einen Anfangswert $\lambda_0 = \lambda\left(t_0 \right) = \lambda\left(\zeta_0 \right)$ berechnet werden kann. Auch hier kann unter Anwendung einer Ephemeridenrechnung mit einem gegebenen Bahnmodell die überlagerte Funktion

$$fct\left(P_R \right) \equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R \right) - \lambda\left(t_0 \right) \right] = 0 \tag{26.21}$$

verwendet werden. Als Anfangslösung kann die mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit dienen. Da wegen des Bezugs auf die rotierende Erdoberfläche erwartet werden muss, dass die Meridian-bezogene Umlaufzeit von der *Kepler*schen, aber auch den anderen bisher betrachteten Umlaufzeit beträchtlich abweicht, ist es geschickter, die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit als Anfangsnäherung zu verwenden. Diese wird mit der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung (26.15) aus

$$\overline{P_R} = \frac{2\pi}{\left| \overline{n_R} \right|} \tag{26.22}$$

erhalten. Damit kann $P_R^{(0)} := \overline{P_R}$ als Ausgangsnäherung der Iteration (26.21) gewählt werden.

Aus Formel (26.22) kann abgelesen werden: Je nach Bewegungssinn eines Satelliten unterscheidet sich die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit beträchtlich. Ein Satellit auf einer rechtläufigen Bahn läuft nach einem Umlauf der ebenfalls rechtläufigen Erddrehung hinterher, erreicht also den Ausgangsmeridian erheblich später als den Bezugspunkt einer anderen Bewegungsart. Umgekehrt läuft ein Satellit auf einer retrograden Bahn der Erddrehung nach einem Umlauf entgegen, seine Meridian-bezogene Bewegung ist somit kürzer als in Bezug auf eine der anderen Bewegungsarten. Da in allen Fällen die mittlere *Kepler*bewegung alle anderen Bewegungseinflüsse dominiert, kann im Fall rechtläufiger Satellitenbahnen aus den Beziehungen (26.10) - (26.15) geschlossen werden, dass die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit im Fall $\overline{n_t} > \dot{\Theta}$ stets größer als die mittlere tropische Umlaufzeit ist:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{n_R} < \overline{n_T} \Rightarrow \overline{P_R} > \overline{P_T} \\ \overline{n_R} < \overline{n_A} \Rightarrow \overline{P_R} > \overline{P_A} \\ \overline{n_R} < \overline{n_D} \Rightarrow \overline{P_R} > \overline{P_D} \\ \overline{n_R} < \overline{n_K} \Rightarrow \overline{P_R} > \overline{P_K} \end{array}\right\rangle \quad 0° \le i < 90°,\ \overline{n_T} > \dot{\Theta} \quad . \tag{26.23}$$

Anders ist es im Fall $0 \le \overline{n_T} < \dot{\Theta}$. In diesem Fall hat man

$$\overline{n_R} > \overline{n_T} \Rightarrow \overline{P_R} < \overline{P_T} \quad \rangle \quad 0° \le i < 90°,\ 0 \le \overline{n_T} < \dot{\Theta} \quad . \tag{26.24}$$

Die anderen Fälle müssen im Einzelnen untersucht werden. Direkte Bahnen, deren tropische (somit auf den Äquator bezogene) Bewegung langsamer als die Erdrotation ist, haben nach Definition (26.10) eine negative mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung. Dies ist im Wesentlichen für subgeosynchrone Bahnen der Fall[1]. Eine Meridian-bezogene Umlaufzeit sollte in diesem Fall mit der überlagerten Funktion (26.21) berechnet werden.

Dagegen gilt im Fall retrograder Bahnen stets

$$\left.\begin{array}{l} \overline{n_R} > \overline{n_T} \Rightarrow \overline{P_R} < \overline{P_T} \\ \overline{n_R} > \overline{n_A} \Rightarrow \overline{P_R} < \overline{P_A} \\ \overline{n_R} > \overline{n_D} \Rightarrow \overline{P_R} < \overline{P_D} \\ \overline{n_R} > \overline{n_K} \Rightarrow \overline{P_R} < \overline{P_K} \end{array}\right\rangle \quad 90° < i \le 180° \quad . \tag{26.25}$$

Wir können zusammenfassen:

- *Die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit ist auf rechtläufigen Bahnen unterhalb der geosynchronen Bahnen größer als die* Keplers*che (anomalistische bzw. drakonitische, tropische, siderische) Umlaufzeit, kürzer auf retrograden Bahnen. Sie ist auf Grund der Herleitung mit der Reduktion auf den Äquator exakt nur für Äquatorbahnen definiert.*

Ein Sonderfall sind die – eigentlich in Bezug auf die Meridian-bezogenen Umläufe nicht betrachteten – **Polbahnen**: Nach genau einer Erdrotation bewegt sich der gewählte Meridian wieder „unter" der Polarbahn hindurch. So dass dieser Moment die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit in diesem Fall definiert. Dies kann aus Formel (26.5) ersehen werden: wegen $\operatorname{sgn}(\cos 90°) = 0$ wird $\dot{\lambda}[i = 90°] = -\dot{\Theta}$ und es ergibt sich die Umlaufzeit aus

[1] detaillierte Untersuchungen dazu ab Abschnitt 26.5

$$\overline{P_R}\left[i = 90°\right] = 2\pi / \dot{\Theta} = 86164.090507\,\mathrm{s} \quad .\blacktriangleleft \tag{26.26}$$

- *Die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit eines Erdsatelliten auf einer Polbahn ist von der Bahnhöhe unabhängig und stets einem mittleren Sterntag gleich.*

$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	$\overline{P_R}$	$P_{R,\mathrm{sec}}$	P_R
0.0	0°	20368.913690 s	20368.913690 s	20368.913690 s
	30°	20376.277527 s	20410.972550 s	20409.818033 s
	60°	20390.164708 s	20509.871574 s	20509.280504 s
	85°	20394.893383 s	20597.949413 s	20597.941414 s
	95°	13842.093933 s	12544.075839 s	12544.262664 s
	120°	13839.915559 s	13239.634340 s	13239.748983 s
	150°	13833.516228 s	13693.710184 s	13693.382293 s
	180°	13830.121773 s	13830.121773 s	-----
0.5	0°	20357.694530 s	17659.652936 s	17657.345584 s
	30°	20370.043882 s	17718.520054 s	17716.401032 s
	60°	20393.222501 s	17882.255005 s	17882.199586 s
	80°	20400.899254 s	18028.597424 s	18029.568632 s
	100°	13844.860209 s	15025.443189 s	15024.710846 s
	120°	13841.324239 s	15244.396555 s	15244.155418 s
	150°	13830.642801 s	15426.752981 s	15427.551083 s
	180°	13824.948643 s	15480.429583 s	-----

Tabelle 26-1: Beispiele zum Vergleich der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit, sowie unter Berücksichtigung der säkularen und der periodischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) für eine Satellitenbahnen der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\mathrm{km}$, sowie mit unterschiedlichen Exzentrizitäten und Inklinationen. Für i=180° versagt der für die Ephemeride verwendete *Brouwer*-Formalismus (Singularität in den langperiodischen Störungen)

BEISPIEL 1: In Tabelle 26-1 (auf Seite 404) wird gezeigt, ob und wie unterschiedliche Zahlenwerte die mit Formel (26.22) gerechnete mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit $\overline{P_R}$ abweicht von der iterativ mit der überlagerten Funktion (26.21) unter Verwendung eines bestimmten Bahnmodells berechneten wahren Umlaufzeit unterscheidet. Gewählt wird die Bahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 = 14000\,\mathrm{km}$. Als Bahnmodell werden säkulare Bewegungseinflüsse erster und zweiter Ordnung durch die zonalen Harmonischen $\left(J_2, J_4\right)$ und außerdem die periodischen Einflüsse erster und zweiter Ordnung durch $\left(J_2, J_3, J_4\right)$ verwendet[1]. Die

[1] Abschnitt 20.2 (Band III)

periodischen Einflüsse werden auf die Epoche 2019-08-01/18:00:0.00 bezogen. Die Iteration erfolgt mit der Genauigkeit $\Delta t = 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

Es zeigt sich im Beispiel, dass für kreisförmige Bahnen die Unterschiede zwischen dem mittleren und den wahren Werten nur in geringem Maße von der Inklination abhängen, während für exzentrische Bahnen die Abweichungen beträchtlich werden können. Die Unterschiede zwischen den mit säkularen und periodischen Modellen berechneten Zahlenwerten sind gering. Die Iterationen mit der überlagerten Funktion, bei denen die mittlere Umlaufzeit $\overline{P_R} = P_R^{(0)}$ als Startwert verwendet wird, sind mit zunehmender Exzentrizität und Inklinationen nahe den Polbahnen numerisch empfindlich und müssen sorgfältig überprüft werden.

In dem hier verwendeten Bahnmodell von *D. Brouwer* sind die periodischen Variationen für rückläufige Äquatorbahnen nicht berücksichtigt[1]. ◄

BEISPIEL 2: Tabelle 26-2 (auf Seite 406) zeigt das Verhalten der säkularen Meridian-bezogenen Umlaufzeit, die somit nur mit den säkularen Bewegungseinflüssen durch $\left(J_2, J_4\right)$ mit Hilfe der überlagerten Funktion (26.21) gerechnet wird, für verschiedene Satellitenbahnen mit unterschiedlichen Bahnhöhen, Exzentrizitäten und Inklinationen. Aus dieser Tabelle lässt sich folgern: die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit $P_{R,\mathrm{sec}}$ hängt im Wesentlichen von der großen Bahnhalbachse ab, der Einfluss von Exzentrizität und Inklination ist (erwartungsgemäß) gering. Das Verhalten bezüglich der mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit zeigt sich hier deutlich, insbesondere bei höheren Bahnen: wesentlich größer bei rechtläufigen, wesentlich kleiner bei rückläufigen Bahnen.

Ein interessantes Verhalten zeigt sich bei geosynchronen Bahnen ($\bar{a}_0$ = 42166.260315 km): rechtläufige Bahnen haben einen feststehenden Knoten, es kann also keinen Meridian-bezogenen Umlauf geben. Rückläufige Bahnen dagegen bewegen sich dagegen dem Betrag nach mit der tropischen Rotation $\dot{\Theta}$ der Erde, jedoch entgegen der Erdrotation. Daher begegnet der Knoten dieser Bahnen der geographischen Anfangslänge (im Wesentlichen) nach einem halben Tag. ◄

BEISPIEL 3: Das Verhalten der kreisförmigen geosynchronen Bahnen über der Inklination wird in Bild 26-2 (auf Seite 407) für rechtläufige Bahnen, sowie in Bild 26-3 (auf Seite 407) für rückläufige Bahnen dargestellt. Die Meridian-bezogene Umlaufzeit der rechtläufigen Bahnen wird als unendlich groß verstanden, da der Satellit sich in seiner mittleren Bahn nicht bezüglich des Referenzmeridians bewegt. Anders ist es auf der rückläufigen Bahn: hier bewegt sich der Satellit mit derselben Geschwindigkeit rückläufig wie der Meridian rechtläufig. Die Begegnung erfolgt daher exakt nach einem halben Umlauf, d.h. nahezu nach einem halben Tag. Die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit beträgt in diesem Fall $\overline{P_R}\left[\overline{n_R} = -\dot{\Theta}\right] =$ 43080.456366 s. Die säkulare Längendrift $\dot{\bar{\lambda}} = \sigma_i \overline{n_t} - \dot{\Theta}$ des Satelliten auf seiner rückläufigen Bahn beträgt dann etwa 2 Umläufe pro Tag ($\overline{n_R} = -721°.1931110\,/\mathrm{d}$ auf kreisförmigen Äquatorbahnen) (Tabelle 26-2 auf Seite 406, vierte Spalte). ◄

[1] Abschnitt 20.2.2

Inkl.	$\bar{a}_0$ = 7000 km	$\bar{a}_0$ = 12000 km	$\bar{a}_0$ = 42166.260315 km	$\bar{a}_0$ = 51600 km
		$\bar{e}_0 = 0.0$		
	$\overline{P_K}$ =5828.5166 s	$\overline{P_K}$ =13082.2622 s	$\overline{P_K}$ =86170.4991 s	$\overline{P_K}$ =116650.2121 s
$\bar{i}_0 = 0°$	$P_{R,\sec}$ =6233.2720 s	$P_{R,\sec}$ =15407.4015 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	$P_{R,\sec}$ = 329739.1975s
30°	6300.9873 s	15543.0525 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	333456.6712 s
60°	6581.0972 s	15908.4902 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	341255.9186 s
90°	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)
120°	5208.5046 s	10778.1163 s	43083.644087 s	47466.8437 s
150°	5405.5180 s	11223.9916 s	43082.787134 s	49101.2718 s
180°	5445.4098 s	11348.7549 s	43082.044347 s	49556.8950 s
		$\bar{e}_0 = 0.2$	$\bar{e}_0 = 0.6$	$\bar{e}_0 = 0.5$
$\bar{i}_0 = 0°$		$P_{R,\sec}$ =14612.3792 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	$P_{R,\sec}$ =305711.6256 s
30°		14726.1605 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	304977.0733 s
60°		15060.7667 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	303286.8740 s
90°		(86164.0923 s)	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)
120°		11412.5011 s	43084.006163 s	45057.5271 s
150°		11753.6947 s	43081.309193 s	46159.1950 s
180°		11847.5623 s	43079.081565 s	46508.7583 s
		$\bar{e}_0 = 0.4$	$\bar{e}_0 = 0.8$	$\bar{e}_0 = 0.8$
$\bar{i}_0 = 0°$		$P_{R,\sec}$ =13993.4657 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	$P_{R,\sec}$ =303240.3307 s
30°		14073.7974 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	302958.7083 s
60°		14327.6804 s	$P_{R.\sec} \Rightarrow \infty$	302298.7843 s
90°		(86164.0923 s)	(86164.0923 s)	(86164.0923 s)
120°		11983.1712 s	43087.337942 s	44091.0512 s
150°		12216.4106 s	43078.385748 s	44733.3832 s
180°		12279.1306 s	43070.945468 s	44949.6705 s

Tabelle 26-2: Beispiele für die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit für einige Satellitenbahnen mit unterschiedlichen Bahnhöhen, Exzentrizitäten und Inklinationen

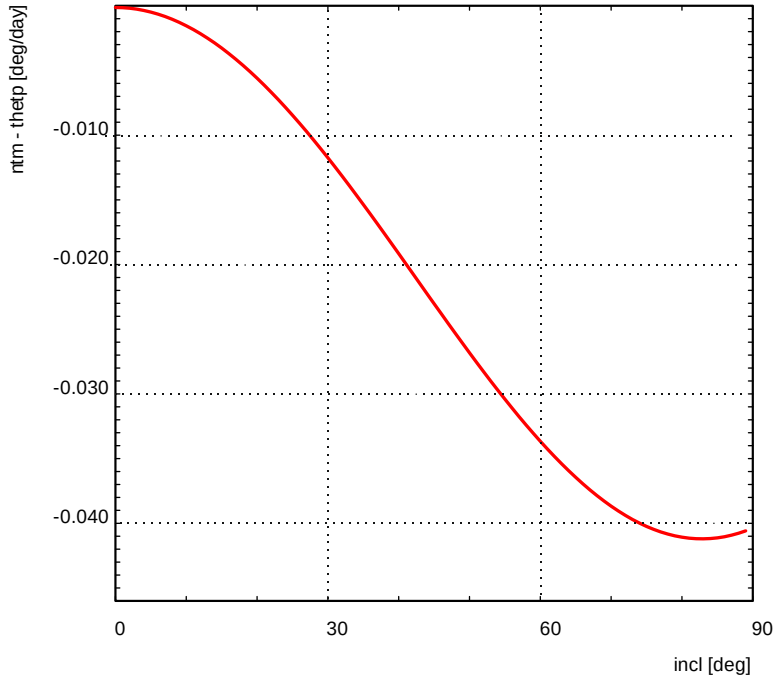


Bild 26-2: Die Knotenlängendrift $\dot{\bar{\lambda}} = \sigma_i \overline{n_T} - \dot{\Theta}$ für die kreisförmigen rechtläufigen geosynchronen Bahnen mit $\bar{a}_0$ = 42166.260315 km über alle Inklinationen $0° \le i < 90°$

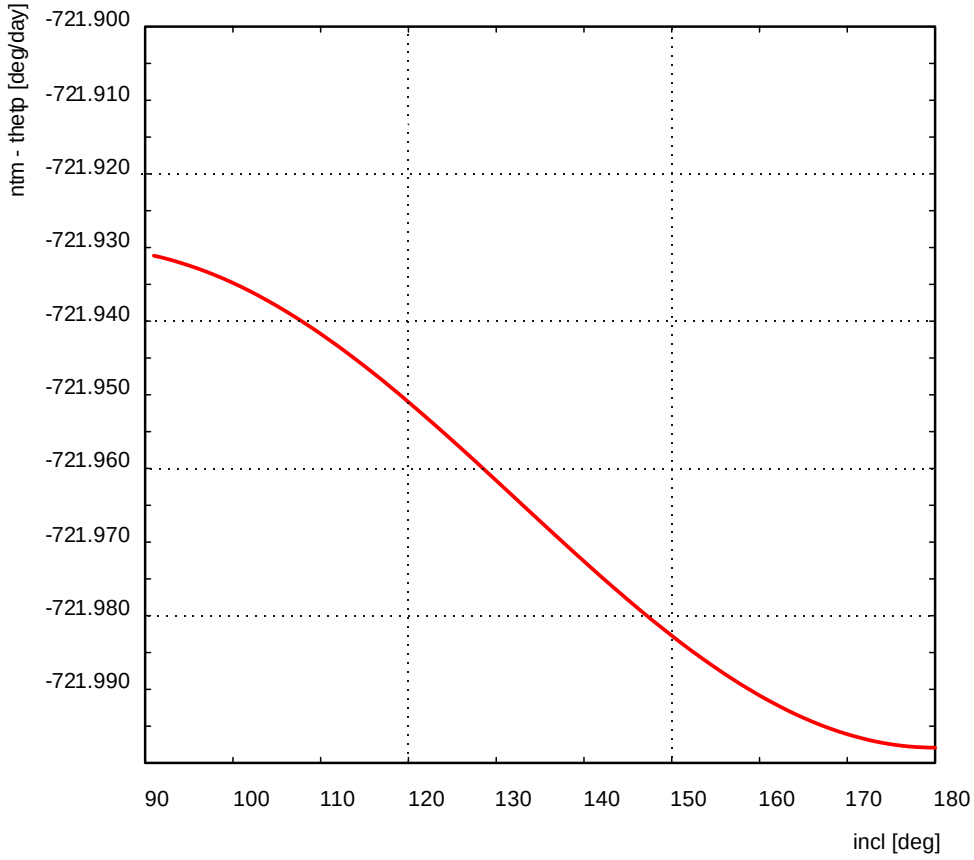


Bild 26-3: Die Knotenlängendrift $\dot{\bar{\lambda}} = \sigma_i \overline{n_T} - \dot{\Theta}$ für die kreisförmigen rückläufigen geosynchronen Bahnen mit $\bar{a}_0$ = 42166.260315 km über alle Inklinationen $90° < i < 180°$

BEISPIEL 4: Die retrograde Erdsatellitenbahn mit den mittleren Bahnelementen $\bar{a}_0$=6883.502 km, $\bar{e}_0$= 0.00125034, $\bar{i}_0$=97°.447126 hat die Umlaufzeiten:

mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit	$\overline{P_K}$	5683.621454 s
säkulare *Hansen*sche Umlaufzeit	$P_{H.\sec}$	5691.134976 s
wahre *Hansen*sche Umlaufzeit	P_H	5691.134841 s
mittlere anomalistische Umlaufzeit	$\overline{P_A}$	5687.383742 s
säkulare anomalistische Umlaufzeit:	$P_{A.\sec}$	5687.383742 s
wahre anomalistische Umlaufzeit	P_A	5686. 497563 s
mittlere drakonitische Umlaufzeit	$\overline{P_D}$	5691.011371 s
säkulare drakonitische Umlaufzeit	$P_{D,\sec}$	5691.002166 s
wahre drakonitische Umlaufzeit	P_D	5691.002247
mittlere tropische Umlaufzeit	$\overline{P_T}$	5692.038052 s
säkulare tropische Umlaufzeit	$P_{T.\sec}$	5698.912879 s
wahre tropische Umlaufzeit	P_T	5698.905800 s
mittlere Meridian bezogene Umlaufzeit	$\overline{P_R}$	5337.513742 s
säkulare Meridian bezogene Umlaufzeit	$P_{R.\sec}$	4594.085858 s
wahre Meridian bezogene Umlaufzeit	P_R	4594.720458 s

Tabelle 26-3: Vergleich der Umlaufzeiten bei unterschiedlichen Beziehungen für die Bahn mit den mittleren Bahnparametern $\bar{a}_0$=6883.502 km, $\bar{e}_0$= 0.00125034, $\bar{i}_0$=97°.447126 ◄

26.4 Bahnauswahl aus Meridian-bezogener Satellitenbewegung

Auf Äquatorbahnen ist die drakonitische Bewegung nicht definiert. Stattdessen kann die Meridian-bezogene Bewegung zur Charakterisierung eines Satellitenumlaufs herangezogen werden. Sie charakterisiert, wann ein Satellit wieder einen ausgewählten Meridian schneidet. Im Fall von Äquatorbahnen besagt sie den Zeitpunkt, zu dem ein Satellit wieder über einem ausgewählten Punkt auf dem Äquator zu sehen ist. Dies ist der Grund, dass die Meridian-bezogene Umlaufzeit in der englischsprachigen Literatur als „*Revisiting Period*“ bezeichnet wird. Allgemeiner kann die Aufgabe beantwortet werden, welche Bahnelemente eine Satellitenbahn haben muss, dass ein Satellit nach einem bestimmten Zeitintervall wieder denselben Meridian überfliegt.

Wie in den vorhergehenden Kapiteln behandelten Bewegungsbezügen kann durch Vorgabe von Bewegungsparametern, etwa der Umlaufzeit, ein *Kepler*parameter der Bahn bestimmt werden. Im vorliegenden Fall ist die Meridian-bezogene Umlaufzeit P_R als bestimmender Parameter vorgegeben. Entsprechend Formel (26.22) müssen die *Kepler*elemente Exzentrizität und Inklination bekannt sein, wenn mit Hilfe einer Umlaufzeit die große Bahnhalbachse berechnet werden soll. Mit Vorgabe der Inklination ist auch der Durchlaufsinn der Bahn, ob recht- oder rückläufig, bekannt. Der Lösungsvorgang kann nur iterativ erfolgen.

Aus der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung (26.15) wird die Bedingungsgleichung in der Form

$$\frac{2\pi}{P_R} + \sigma_i \dot{\Theta} \approx \overline{n_R} + \sigma_i \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s = \overline{n_T} \tag{26.27}$$

zugrunde gelegt. Eine Ausgangsnäherung für die gesuchte große Bahnhalbachse wird aus der Näherungsbedingung

$$\frac{2\pi}{P_R} + \sigma_i \dot{\Theta} =: \left(\overline{n_T}\right)^{(0)} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} \tag{26.28}$$

erhalten. Als nullte Näherung wird sodann mit Hilfe der *Kepler*schen Umlaufzeit und unter Vernachlässigung der Variationen in den Bahnelementen nach Formel (26.22)

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu}{\left[\frac{2\pi}{P_R} + \sigma_i \dot{\Theta}\right]^2}} \tag{26.29}$$

gebildet. Eine verbesserte Näherung erster Ordnung folgt mit dem Ansatz

$$\bar{a}_0^{(1)} := \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)} \quad . \tag{26.30}$$

Mit den säkularen Variationen (20.15), (20.16) und (20.17)[1] wird aus der Gleichung (26.27) für die erste Verbesserung der Ansatz

$$\sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(0)}\right)^3}} = \sqrt{\frac{\mu}{\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)^3}} \left\{ 1 - \frac{3}{4} J_2 \frac{R_E^2}{\left(\bar{a}_0^{(1)}\right)^2 \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left[\sqrt{1-\bar{e}_0^2} \left(1 - 3\cos^2 \bar{i}_0\right) + 1 - 5\cos^2 \bar{i}_0 + 2\sigma_i \cos \bar{i}_0 \right] \right\} \tag{26.31}$$

erhalten. Linearisierung mit (26.30) ergibt die erste Verbesserung

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = \frac{1}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^{(0)} \left(1-\bar{e}_0^2\right)^2} \left[\left(5 + 3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \cos^2 \bar{i} - \left(1 + \sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) - 2\sigma_i \cos \bar{i}_0 \right] + O\left(\bar{a}_0^{(0)} J_2^2\right) . \tag{26.32}$$

Diese Korrektur stimmt mit der entsprechenden Korrektur bei einer Bahnauswahl im Rahmen der tropischen Bewegung (Formel (24.61)) überein, da die zugehörigen Bedingungsgleichungen für die erste Näherung identisch sind. Allerdings ist in beiden Fällen die nullte Näherung völlig unterschiedlich und auch die weitere iterative Verbesserung mit einer überlagerten Funktion verschieden. Im Fall der Meridian-bezogenen Bewegung ist die geographische Länge die Bezugsgröße. Somit lautet die Bedingungsfunktion

[1] in Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$fct\left(P_R;\bar{a}_0\right)\equiv\sin\left[\lambda\left(t_0+P_R;\bar{a}_0^{(\nu)}\right)-\lambda\left(t_0;\bar{a}_0^{(\nu)}\right)\right]=0 \quad \langle\nu=1,2,3,\cdots \quad . \tag{26.33}$$

Für die Meridian-bezogene Umlaufzeit kann hier mit dem je nach Genauigkeitsanforderung verwendetem Bahnmodell die mittlere, die säkulare oder die wahre Umlaufzeit vorgegeben werden.

BEISPIEL 1: Gegeben sei die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit $P_{R,\sec}=10000\,\mathrm{s}$ für eine Erdsatellitenbahn mit der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0=0.2$ und die mittlere Inklination $\bar{i}_0=50°$. Mit den obigen Formeln folgen zur Berechnung der entsprechenden mittleren großen Bahnhalbachse die Werte

$$\bar{a}_0^{(0)}=9323.985778\,\mathrm{km},\ \Delta\bar{a}_0^{(1)}=0.038421\mathrm{km},\ \bar{a}_0^{(1)}=9324.024199\ \mathrm{km}\ .$$

Die Iteration mit der überlagerten Funktion (26.33) ergibt als endgültige Lösung

$$\bar{a}_0^{(2)}=9395.010202\,\mathrm{km}.$$

Dieser Wert entspricht der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R}=9664.1528069\ \mathrm{s}$. Sie kann als Anfangswert für eine Iteration mit der überlagerten Funktion (26.21) genommen werden. Mit der a-priori Genauigkeit $\Delta t=10^{-5}\,\mathrm{sec}$ ergibt sich schließlich $P_{R,\sec}^{(2)}=10000.000009\ \mathrm{s}$.

Wird dagegen der obige Wert bei Bezug auf die Epoche 2016-11-27/20:43:0.0 als wahre Meridian-bezogenen Umlaufzeit $P_R=10000\,\mathrm{s}$ vorgegeben, ergibt sich unter Berücksichtigung der periodischen Bewegungseinflüsse die mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_0^{(2)}=9395.159356\,\mathrm{km}$, der Kontrollwert lautet $P_{R,\sec}^{(2)}=100000.000023\mathrm{s}$. ◄

BEISPIEL 2: Gegeben sei wieder die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit $P_{R,\sec}=10000\,\mathrm{s}$ für eine Erdsatellitenbahn mit der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0=0.2$, jedoch für die retrograde Bahn mit der mittleren Inklination $\bar{i}_0=130°$. Mit den obigen Formeln folgen zur Berechnung der entsprechenden mittleren großen Bahnhalbachse die Werte

$$\bar{a}_0^{(0)}=10892.060405\,\mathrm{km},\ \Delta\bar{a}_0^{(1)}=0.0328898\ \mathrm{km},\ \bar{a}_0^{(1)}=10892.093294\ \mathrm{km}\ .$$

Die Iteration mit der überlagerten Funktion (26.33) ergibt als endgültige Lösung

$$\bar{a}_0^{(2)}=10790.170896\,\mathrm{km}.$$

Die Meridian-bezogene mittlere Bewegung beträgt $\overline{n_R}=0.636206271\times10^{-3}\,\mathrm{rad/s}$, entsprechend der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R}=2\pi/\left|\overline{n_R}\right|=9876.019131\ \mathrm{s}$, der Kontrollwert für die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit mit Hilfe der überlagerten Funktion (26.21) beträgt $P_{R,\sec}^{(2)}=10000.000008\ \mathrm{s}$. ◄

26.5 Scheinbare Satellitenbewegung mit Meridian-bezogener Bewegung

Mit Erddrehung und Satellitenbewegung überlagern sich zwei unabhängige Bewegungen. Von der rotierenden Erdoberfläche aus gesehen kann die Bewegung eines Satelliten anders erscheinen als in der Satellitenbahn selber. Die scheinbare Satellitenbewegung kann mit der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung klassifiziert werden, was in diesem Abschnitt erarbeitet wird. Eine ergänzende Untersuchung bei Bezug auf die Bewegung in geographischen Koordinaten wird im Hinblick auf kreisnahe Bahnen in Abschnitten 26.7 durchgeführt. Die Klassifikation mit Rückgriff auf die topozentrische Beschreibung der Satellitenbewegung wird in Kapitel 27 behandelt.

Mit Hilfe einer der Beziehungen (26.10) - (26.15) kann keine einheitliche Aussage zur Beschreibung einer scheinbaren Bewegung gemacht werden. Vielmehr müssen unterschiedliche Fälle betrachtet werden:

26.5.1 Rechtläufige Bahnen

Für rechtläufige Bahnen gilt $\sigma_i[0° \le i < 90°] = +1$. Dann ist mit Beziehung (26.10)

$$\overline{n_R} = \overline{n_T} - \dot{\Theta} \qquad \langle \sigma_i = \operatorname{sgn}(\cos i) = +1 \quad . \tag{26.34}$$

Das Bewegungsverhalten eines Satelliten auf rechtläufigen Bahnen in Bezug seiner Meridian-bezogenen $\overline{n_R}$ und tropischen Bewegung $\overline{n_T}$ kann in Bild 26-24 für die mittleren Bewegungen und in Bild 26-5 für den Bezug der entsprechenden Umlaufzeiten studiert werden. Im Einzelnen müssen drei Fälle unterschieden werden.

26.5.1.1 Untersynchrone Bahnen

Wenn $\overline{n_T} > \dot{\Theta}$ muss $\overline{n_R} > 0$ sein und somit

$$0 < \overline{n_R} < \overline{n_T} \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\ \overline{n_T} > \dot{\Theta} \quad . \tag{26.35}$$

Die Bewegung des Satelliten ist in Bezug auf seine Bahn rechtläufig und auch scheinbar rechtläufig. Bedingung (26.34) führt mit den Definitionen der mittleren Meridian-bezogenen und mittleren tropischen Umlaufzeit auf die Beziehung zwischen diesen beiden Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} = \frac{\overline{P_T}}{1 - \overline{P_T}\,\frac{\dot{\Theta}}{2\pi}} = \frac{\overline{P_T}}{1 - \frac{\dot{\Theta}}{\overline{n_T}}} \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\ \overline{n_t} > \dot{\Theta} \quad . \tag{26.36}$$

Dies bestätigt die Aussage nach Formel (26.22):

$$\overline{P_R} = \frac{2\pi}{\overline{n_R}} > \overline{P_T} = \frac{2\pi}{\overline{n_T}} \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\ \overline{n_T} > \dot{\Theta} \quad . \tag{26.37}$$

Somit gilt: ein Satellit erreicht auf einer rechtläufigen Bahn einen Bezugspunkt auf dem Äquator (etwa den Frühlingspunkt) bei gegebener Rektaszension eher als den Bezugsmeridian. Der Bedingung $\overline{n_T} > \dot{\Theta}$ äquivalent ist die Beziehung

$$\overline{P_T} < \frac{2\pi}{\dot{\Theta}} \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i) = +1,\ \overline{n_T} > \dot{\Theta} \quad . \tag{26.38}$$

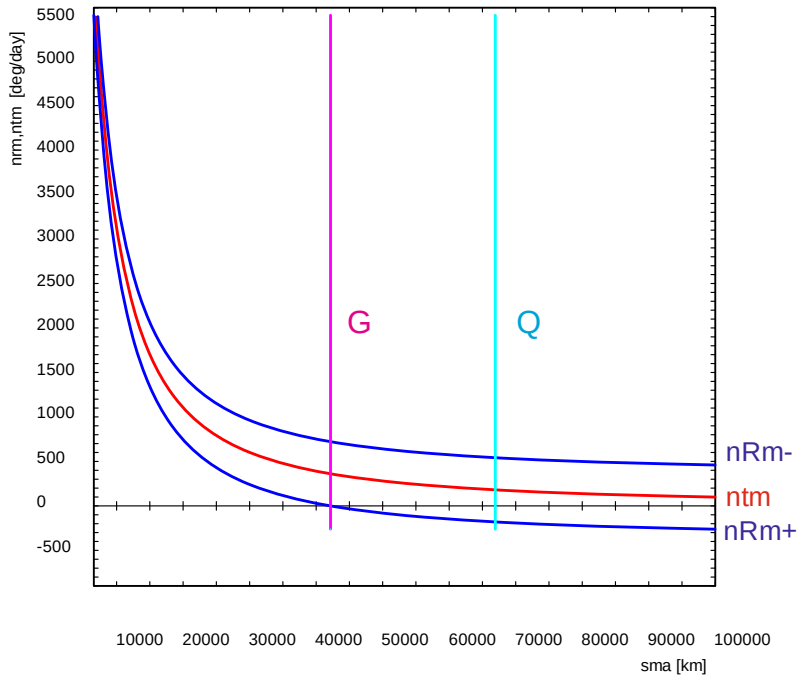


Bild 26-4: Vergleich der mittleren tropischen mittleren Bewegung ($\overline{n_T}$) mit der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung (nRm+) für rechtläufige Bahnen sowie $\overline{n_R}(-)$ für rückläufige Bahnen über der großen Bahnhalbachse. „G“ bezeichnet die geosynchrone Bahn, „Q“ die Äquivalenz von tropischer und Meridian- bezogener mittlerer Bewegung für a=66932.768 km („Äquivalenz -Bahn“)

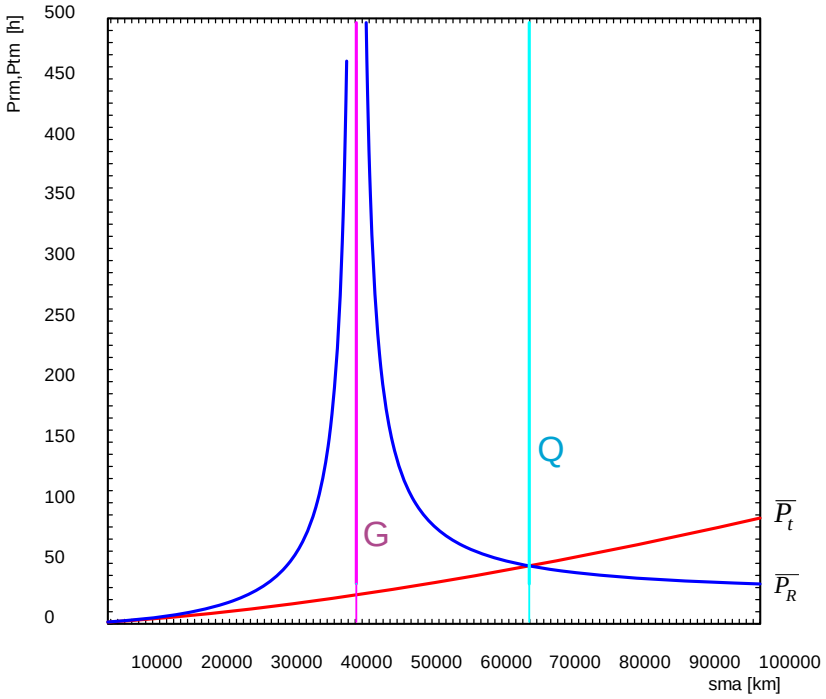


Bild 26-5: Vergleich der mittleren tropischen Umlaufzeit $\overline{P_T}$ mit der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R}$ über der großen Bahnhalbachse für rechtläufige Bahnen. „G“ bezeichnet die geosynchrone Bahn, „Q“ die Äquivalenz von tropischer und Meridian- bezogener Umlaufzeit für $a \approx 66932\,\text{km}$ („Äquivalenz -Bahn“)

Von Interesse ist auch die Relation der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit in Bezug auf die mittlere drakonitische Umlaufzeit. Aus Beziehung (26.14) folgt mit der Definition der Drift der Knotenlänge nach Formel (23.225) (in Abschnitt 23.5.1)

$$\overline{n_R} = \overline{n_D} + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = \overline{n_D} + \dot{\lambda}_{\Omega s} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i) = +1 \;,\; \overline{n_T} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.39}$$

Da die säkulare Knotenlängendrift $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ für Erdsatelliten (zumindest im erdnahen Bereich) eine negative Größe ist, kann $\overline{n_R} = \overline{n_D} - \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|$ gesetzt werden, somit ist

$$\overline{n_R} < \overline{n_D} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\; \overline{n_T} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.40}$$

Für die Relation der mittleren Umlaufzeiten gilt

$$\overline{P_R} = \frac{2\pi}{\overline{n_R}} = \frac{\overline{P_D}}{1 + \dfrac{\dot{\lambda}_{\Omega s}}{\overline{n_D}}} = \frac{\overline{P_D}}{1 - \overline{P_D}\dfrac{\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|}{2\pi}} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i) = +1 \;,\; \overline{n_T} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.41}$$

Im vorliegenden Fall ist daher die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit größer als die mittlere drakonitische Umlaufzeit

$$\overline{P_R} > \overline{P_D} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\; \overline{n_T} > \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.42}$$

Ein Satellit durchfliegt den aufsteigenden Knoten seiner Bahn bei rechtläufiger Bewegung stets früher, bevor er den Bezugsmeridian erreicht. Da in der Beziehung (26.41) offensichtlich

$$1 - \overline{P_D}\frac{\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|}{2\pi} > 0 \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i) = +1 \;,\; \overline{n_T} > \dot{\Theta} \right. \tag{26.43}$$

gelten muss, führt dies zur Äquivalenz der Aussagen

$$\overline{n_T} > \dot{\Theta} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{n_D} > \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right| \quad , \quad \overline{P_D} < \frac{2\pi}{\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i) = +1 \right. \quad . \tag{26.44}$$

In Bild 26-24 ist der Verlauf der Meridian-bezogenen Bewegung auf rechtläufiger Bahn durch die untere blaue Kurve dargestellt. Der dem Fall $\overline{n_T} > \dot{\Theta}$ entsprechende Bahnhöhenbereich befindet sich unterhalb der geosynchronen Bahnhöhe „G“.

26.5.1.2 Geosynchrone Bahnen

Wenn $\overline{n_T} = \dot{\Theta}$ muss $\overline{n_R} = 0$ sein. Somit ist

$$0 = \overline{n_R} < \dot{\Theta} = \overline{n_T} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\; \overline{n_T} = \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.45}$$

Da die mittlere tropische mittlere Bewegung gleich der tropischen Erdrotation ist, scheint der Satellit stationär und zwar „im Mittel geostationär“ zu sein. Dies schließt auch den Fall der geosynchronen Bewegung ein[1]. In Bild 26-24 ist die entsprechende Bahnkurve durch „G“ gekennzeichnet.

Der Satellit verharrt im Mittel auf dem gewählten Bezugsmeridian, seine mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit ist daher unendlich groß, wie in Bild 26-5 zu erkennen ist:

$$\overline{P_R} \to \infty \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\; \overline{n_t} = \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.46}$$

[1] Näheres in Abschnitt 26.6

Die mittlere tropische Umlaufzeit auf einer geosynchronen Bahn beträgt mit $\dot{\Theta}$ aus Tabelle 9-2 (Band II)

$$\overline{P_T} = \frac{2\pi}{\overline{n_T}} = \frac{2\pi}{\dot{\Theta}} = 86164.1006373 = 23^h\,56^m\,4^s.1006373 \quad . \tag{26.47}$$

- *Da $\dot{\Theta}$ nach Formel (26.2) kein konstanter Wert ist, darf auch die tropische Umlaufzeit auf einer geosynchronen Bahn nicht für alle Zeiten als konstant angenommen werden.*

- *Besonders bemerkenswert ist, dass die mittlere tropische Umlaufzeit auf einer geosynchronen Bahn unabhängig von den Bahnparametern ist.*

Das Verhalten der drakonitischen Bewegung im Fall einer scheinbar stationären Bewegung folgt unmittelbar aus Beziehung (26.39):

$$\overline{n_D} = \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right| \quad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i) = +1 \;,\; \overline{n_T} = \dot{\Theta} \quad . \right. \tag{26.48}$$

Entsprechend hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit in diesem Fall den Betrag

$$\overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_D}} = \frac{2\pi}{\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|} \quad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i) = +1 \;,\; \overline{n_T} = \dot{\Theta} \quad . \right. \tag{26.49}$$

26.5.1.3 Übersynchrone Bahnen

Wenn $\overline{n_T} < \dot{\Theta}$ muss $\overline{n_R} < 0$ sein und es wird

$$\overline{n_R} < 0 < \overline{n_T} < \dot{\Theta} \quad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\; \overline{n_T} < \dot{\Theta} \quad . \right. \tag{26.50}$$

Nach Beziehung (26.10) ist in diesem Fall die mittlere Drift der geographischen Länge des Satelliten sowie seine mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung negativ:

$$\dot{\bar{\lambda}}\left[\sigma_i = 1,\; \overline{n_T} < \dot{\Theta}\right] = \overline{n_R} = \overline{n_T} - \dot{\Theta} < 0 \quad . \tag{26.51}$$

Die wahre Satellitenbewegung ist rechtläufig, die auf einen Meridian bezogene mittlere Bewegung ist dagegen negativ, der Satellit bewegt sich scheinbar rückläufig.

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung ist dem Betrage nach kleiner als die mittlere tropische mittlere Bewegung

$$\left|\overline{n_R}\right| < \overline{n_T} \quad . \tag{26.52}$$

Dann ist die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit größer als die mittlere tropische Umlaufzeit

$$\overline{P_R} > \overline{P_T} \qquad \left\langle \operatorname{sgn}(\cos i = +1),\; \overline{n_T} < \dot{\Theta} \;,\; \left|\overline{n_R}\right| < \overline{n_T} \quad . \right. \tag{26.53}$$

Die Projektion des Satellitenortes auf den Äquator begegnet derselben Rektaszension eher als derselben geographischen Länge.

Dieser Fall befindet sich in Bild 26-24 sowie in Bild 26-5 im Halbachsenbereich „G“ bis „Q“. In Bezug auf die drakonitische Bewegung folgt aus der Beziehung

$$\left|\overline{n_R}\right| = \left|\overline{n_D} + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right| = \left|\overline{n_D} + \dot{\lambda}_{\Omega s}\right| \quad , \tag{26.54}$$

da $\dot{\lambda}_{\Omega s}$ stets negativ ist, die Relation

$$\left|\overline{n_R}\right| < \overline{n_D} \qquad \left\langle \ \mathrm{sgn}\left(\cos i = +1\right),\ \overline{n_T} < \dot{\Theta} \right. \tag{26.55}$$

und somit für die mittleren Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} > \overline{P_D} \qquad \left\langle \mathrm{sgn}\left(\cos i\right) = +1,\ \overline{n_T} < \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.56}$$

Aus der Beziehung

$$\overline{n_R} = \overline{n_D} + \dot{\lambda}_{\Omega s} = \overline{n_D} - \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right| < 0 \tag{26.57}$$

folgt

$$\overline{n_D} < \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right| \quad , \quad \overline{P_D} > \frac{2\pi}{\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|} \quad . \tag{26.58}$$

BEISPIEL 1: Die Satellitenbahn mit den mittleren Bahnelementen $\bar{a} = 55000\,\mathrm{km}$, $\bar{e} = 0.5$, $\bar{i} = 60°$ hat die mittlere tropische mittlere Bewegung $\overline{n_T} = 0.4894594349792 \times 10^{-4}$ rad/sec, die mittlere drakonitische mittlere Bewegung $\overline{n_D} = 0.4894689364572 \times 10^{-4}$ rad/sec und die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung $\overline{n_R} = -0.2397520796915 \times 10^{-4}$ rad/sec. Die Bahn ist rechtläufig, allerdings bewegt sich der Satellit scheinbar rückläufig. Die zugehörigen mittleren Umlaufzeiten sind

$$\overline{P_t} = 128369.888\ \mathrm{s} \triangleq 35^h\,39^m\,29^s.888,\ \overline{P_D} = 128367.843\mathrm{s} \triangleq 35^h\,39^m\,27^s.843,$$
$$\overline{P_R} = 2\pi / \left|\overline{n_R}\right| = \ 262070.107\ \mathrm{s} \triangleq 72^h\,47^m\,50^s.107\,.$$

Die Meridian-bezogene säkulare und die (auf die Epoche 2017-01-31/12:00:0. bezogene) wahre Umlaufzeit betragen

$$P_{R,\mathrm{sec}} = \ 251116.145455\ \mathrm{s}\ ,\ P_R = 251116.465365\ \mathrm{s} \quad . \ \blacktriangleleft$$

2. Von besonderem Interesse ist der Punkt, in dem die mittlere tropische mittlere Bewegung der mittleren Meridian-bezogenen mittleren Bewegung identisch gleich ist:

$$\left|\overline{n_R}\right| = \overline{n_T} \quad , \quad \overline{P_R} = \overline{P_T} \qquad \left\langle \ \overline{n_T} < \dot{\Theta} \right. \quad . \tag{26.59}$$

Dieser Fall ist in Bild 26-5 als Schnittpunkt der Kurven der Meridian-bezogenen Umlaufzeit und der tropischen Umlaufzeit erkennbar. Er entspricht der durch die Gerade „Q“ gekennzeichneten großen Bahnhalbachse. Wir wollen die Satellitenbahn mit dieser großen Bahnhalbachse als *Äquivalenzbahn* (Q-Bahn) bezeichnen, genauer als eine *Satellitenbahn mit Äquivalenz zwischen der tropischen und der Meridian-bezogenen Bewegung*. Da in diesem Fall

$$\overline{n_R} = -\overline{n_T} \quad , \tag{26.60}$$

folgt aus Beziehung (26.34)

$$\left|\overline{n_R}\right| = \overline{n_T} = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \tag{26.61}$$

Damit kann der Betrag der entsprechenden mittleren Umlaufzeiten der Äquivalenzbahnen direkt berechnet werden:

$$\overline{P_R} = \overline{P_t} = 2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}} \quad . \tag{26.62}$$

Mit der tropischen Erdrotation[1] $\dot{\Theta}$ ergibt dies für die *Kepler*sche Umlaufzeit einer mittleren Äquivalenzbahn den Zahlenwert

$$\overline{P_{RQ\,K}} = \overline{P_{TQ\,K}} = 2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}} = 172328.1811\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 47^h\,52^m\,08^s.1811 \quad . \tag{26.63}$$

Dies sind genau 2 Sterntage[2]. Die mittlere Bahnhalbachse der *Kepler*schen Äquivalenz -Bahn beträgt

$$\overline{a_{Q\,K}} = \sqrt[3]{4\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 66931.4468893\mathrm{km} \quad . \tag{26.64}$$

Die vorstehenden Zahlenwerte gelten für den Fall der sogenannten ungestörten (*Kepler*-) Bahn. Werden die Bewegungseinflüsse im Rahmen eines geeigneten Bahnmodells berücksichtigt, müssen eines der Bahnelemente und die Umlaufzeit iterativ berechnet werden. Seien etwa die Bahnparameter Exzentrizität und Inklination (je nach Modell auch ein anderer Parameter) bekannt, folgt die Halbachse a_Q der entsprechenden Äquivalenz-Bahn aus der allgemeingültigen Bedingungsgleichung

$$fct\left(a_Q\right) \equiv P_R - P_T = 0 \quad . \tag{26.65}$$

Im Fall der Betrachtung nur der mittleren Bewegungen kann diese Gleichung auch mit Beziehung (26.61) ersetzt werden durch[3]

$$fct\left(\overline{a_Q}\right) \equiv 2\overline{n_T} - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.66}$$

BEISPIEL 1: Werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse $\left(J_2, J_4\right)$ des *Brouwer*schen Bahnmodells[4] berücksichtigt, ergibt sich für eine Äquivalenz-Bahn zwischen tropischer und Meridian-bezogener Bewegung auf einer kreisförmigen Äquatorbahn die große Bahnhalbachse bei Bezug auf die Epoche t_0 :2019-10-16/00:00:0.0

$$\overline{a_{Q\,\mathrm{sec}}}\left[P_t = \mathrm{P}_R, \overline{\mathrm{e}}_0 = 0.0, \overline{i}_0 = 0°.0\right] = a_{T,\mathrm{sec}} = 66932.7654363807233\ km \quad .$$

und die tropische bzw. Meridian-bezogene Umlaufzeit

$$P_{R,\mathrm{sec}}\left[P_T = \mathrm{P}_R, \overline{\mathrm{e}}_0 = 0.0, \overline{i}_0 = 0°.0\right] = P_{T,\mathrm{sec}} = 172328.1894095721655\ \mathrm{sec} \mathrel{\hat{=}} 47^h\,52^m\,08^s.189410 \quad .$$

Werden auch die periodischen Bewegungseinflüsse für das Bahnmodell mit $\left(J_2, J_3, J_4\right)$ berücksichtigt, lauten die Ergebnisse

$$\overline{a_{Q\,\mathrm{sec}}}\left[P_T = \mathrm{P}_R, \overline{\mathrm{e}}_0 = 0.0, \overline{i}_0 = 0°.0\right] = 66932.7654363807233\ km \quad .$$

$$P_{R,\mathrm{per}}\left[P_T = \mathrm{P}_R, \overline{\mathrm{e}}_0 = 0.0, \overline{i}_0 = 0°.0\right] = P_{T,\mathrm{per}} = 172328.1894096099131\ \mathrm{sec} \mathrel{\hat{=}} 47^h\,52^m\,08^s.189410 \quad .$$

---

[1] Zahlenwert für $\dot{\Theta}$ aus Tabelle 9-2 (Band II), sowie in Anhang E.2, Tabelle 7 (Band V)

[2] zur Definition eines Sterntages siehe in Abschnitt 9.1.2.1 (Band II)

[3] In der praktischen Durchführung ist es sinnvoll zur Vermeidung zu kleiner nicht mehr vergleichbarer Faktoren diese Bedingungsgleichung etwa in der Form $fct\left(\overline{a_Q}\right) \equiv \left(2\overline{n_t} - \dot{\Theta}\right) \cdot 180 \cdot 86400 / \pi = 0$ zu verwenden.

[4] Abschnitt 20.2.1 (Band III)

Die Unterschiede sind in diesem Beispiel offenbar sehr gering. Die Berechnung wurde mit der Genauigkeit in der großen Bahnhalbachse $\Delta a = \pm 10^{-9}\,\mathrm{km}$ durchgeführt. ◄

In Fall einer „ungestörten“ Äquivalenz-Bahn hat die drakonitische Bewegung die Relationen

$$\overline{n_D} = \frac{\dot\Theta}{2} - \dot\Omega_s \quad , \quad \overline{P_D} = \frac{2\pi}{\frac{\dot\Theta}{2} - \dot\Omega_s} \quad , \quad \overline{P_R} = \frac{\overline{P_D}}{\left| 1 + \frac{\dot\Omega_s - \dot\Theta}{\overline{n_D}} \right|} \quad . \tag{26.67}$$

Eine Übersicht über weitere Eigenschaften der Äquivalenzbahnen sowie die Zahlenwerte der großen Bahnhalbachse bei unterschiedlichen Bahnen wird in Abschnitt 26.8 ab Seite 454 detailliert zusammengestellt. Dort wird auch die Äquivalenz-Relation der Meridian-bezogenen Bewegung zu anderen Bewegungsarten näher untersucht.

3. Wenn die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung dem Betrage nach größer als die mittlere tropische mittlere Bewegung ist, ist im Fall negativer Meridianbezogener Bewegung die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit kleiner als die mittlere tropische Umlaufzeit

$$\left|\overline{n_R}\right| > \overline{n_T} \;\Leftrightarrow\; \overline{P_R} < \overline{P_T} \qquad \left\langle \mathrm{sgn}\left(\cos i = +1\right),\, \overline{n_T} < \dot\Theta \right. \quad . \tag{26.68}$$

Die Projektion des Satellitenortes auf den Äquator begegnet demselben Punkt später als derselben geographischen Länge. Da sich die mittleren Bewegungen der *Kepler*bewegung $\overline{n_K}$, der anomalistischen Bewegung $\overline{n_A}$ sowie der drakonitischen Bewegung $\overline{n_D}$ nur geringfügig von der mittleren tropischen mittleren Bewegung unterscheiden, gelten in diesem Fall auch die Größenordnungen

$$\overline{P_K} > \overline{P_R}, \overline{P_A} > \overline{P_R}, \overline{P_D} > \overline{P_R} \;\left\langle \sigma_i = +1,\, \overline{n_T} < \dot\Theta \;,\; \left|\overline{n_R}\right| > \overline{n_T} \right. \quad . \tag{26.69}$$

Dieser Fall ist in Bild 26-24 und in Bild 26-5 im Halbachsenbereich größer als die durch „Q“ gekennzeichnete Bahnhalbachse dargestellt.

BEISPIEL 2: Die kreisförmige Satellitenbahn mit der mittleren Bahnhalbachse $\bar a = 70000\,\mathrm{km}$ und der Inklination $\bar i = 60°$ hat die mittlere Meridian-bezogene mittlere Bewegung $\overline{n_R} = -0.3883103635925 \times 10^{-4}$ rad/sec. Die Bahn ist rechtläufig, allerdings bewegt sich der Satellit auch in diesem Fall scheinbar rückläufig. Die zugehörigen mittleren bzw. wahren Umlaufzeiten sind bei Bezug auf die Epoche 2019-08-13/12:00: 0.00

$\overline{P_K} = 184313.879553\ \mathrm{s}$	$P_H = 184310.769031\ \mathrm{s}$
$\overline{P_A} = 184312.326445\ \mathrm{s}$	$P_A = 184308.916431\ \mathrm{s}$
$\overline{P_D} = 184308.909613\ \mathrm{s}$	$P_D = 184308.909613\ \mathrm{s}$
$\overline{P_T} = 184311.061647\ \mathrm{s}$	$P_T = 184311.393506\ \mathrm{s}$
$\overline{P_R} = 161808.334165\ \mathrm{s}$	$P_R = 163610.561642\ \mathrm{s}$ ◄

Wahre Bewegung	rechtläufig					rückläufig
Inklination	$0° \le i < 90°$					$90° < i \le 180°$
Mittlere Meridian-bezogene Bewegung	$\dot{\bar{\lambda}} = \overline{n_R} = \overline{n_T} - \dot{\Theta}$					$-\dot{\bar{\lambda}} = \overline{n_R} = \overline{n_T} + \dot{\Theta}$
	$\overline{n_R} > 0$	$\overline{n_R} = 0$	$\overline{n_R} < 0$			$\dot{\bar{\lambda}} = -\overline{n_R} < 0$
	Scheinbar rechtläufig	Scheinbar stationär	Scheinbar rückläufig			
Relation $\overline{n_R}$ zu $\overline{n_T}$	$\overline{n_T} > \dot{\Theta}$	$\overline{n_T} = \dot{\Theta}$	$\overline{n_T} < \dot{\Theta}$			
	$0 < \overline{n_R} < \overline{n_T}$	$\overline{n_R} = 0$	$\lvert\overline{n_R}\rvert < \overline{n_T}$	$\lvert\overline{n_R}\rvert = \overline{n_T}$	$\lvert\overline{n_R}\rvert > \overline{n_T}$	$\overline{n_R} > \overline{n_T} > 0$
			$\dot{\Theta} > \overline{n_T} > \frac{\dot{\Theta}}{2}$	$\overline{n_T} = \frac{\dot{\Theta}}{2}$	$\frac{\dot{\Theta}}{2} > \overline{n_T}$	
			$0 < \lvert\overline{n_R}\rvert < \frac{\dot{\Theta}}{2}$	$\overline{n_R} = -\frac{\dot{\Theta}}{2}$	$\lvert\overline{n_R}\rvert > \frac{\dot{\Theta}}{2}$	
Mittlere Bahnhalbachse	$\bar{a} < \overline{a_G}$	$\bar{a} = \overline{a_G}$	$\overline{a_G} < \bar{a} < \overline{a_Q}$	$\bar{a} = \overline{a_Q}$	$\overline{a_Q} < \bar{a}$	$\bar{a}$ beliebig
Relation $\overline{P_R}$ zu $\overline{P_T}$	$\overline{P_R} > \overline{P_T}$	$\overline{P_R} \to \infty$	$\overline{P_R} > 2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	$\overline{P_R} = 2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	$2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}} > \overline{P_R}$	$\overline{P_R} < \overline{P_T}$
			$\overline{P_R} > \overline{P_T}$	$\overline{P_R} = \overline{P_T}$	$\overline{P_R} < \overline{P_T}$	
	$\overline{P_T} < \frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	$\overline{P_T} = \frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	$\frac{2\pi}{\dot{\Theta}} < \overline{P_T} < 2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	$\overline{P_T} = 2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}}$	$2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}} < \overline{P_T}$	
Relation $\overline{n_R}$ zu $\overline{n_D}$	$\overline{n_R} < \overline{n_D}$	$\overline{n_R} = 0$	$\lvert\overline{n_R}\rvert < \overline{n_D}$	$\lvert\overline{n_R}\rvert = \lvert\overline{n_D} + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\rvert$	$\lvert\overline{n_R}\rvert > \overline{n_D}$	$\lvert\overline{n_R}\rvert > \overline{n_D} > 0$
	$\overline{n_D} > \dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s$	$\overline{n_D} = \dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s$	$\dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s > \overline{n_D}$ $\overline{n_D} > \frac{\dot{\Theta}}{2} - \dot{\Omega}_s$	$\overline{n_D} = \frac{\dot{\Theta}}{2} - \dot{\Omega}_s$	$\frac{\dot{\Theta}}{2} - \dot{\Omega}_s > \overline{n_D}$	
Relation $\overline{P_R}$ zu $\overline{P_D}$	$\overline{P_R} > \overline{P_D}$	$\overline{P_R} \to \infty$	$\overline{P_R} > \overline{P_D}$	$\overline{P_R} = \frac{\overline{P_D}}{\lvert 1 + \frac{\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}}{\overline{n_D}} \rvert}$	$\overline{P_R} < \overline{P_D}$	$\overline{P_R} < \overline{P_D}$
	$\overline{P_D} < \frac{2\pi}{\dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s}$	$\overline{P_D} = \frac{2\pi}{\dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s}$	$\frac{2\pi}{\dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s} > \overline{P_D}$ $\overline{P_D} > \frac{2\pi}{\frac{\dot{\Theta}}{2} - \dot{\Omega}_s}$	$\overline{P_D} = \frac{2\pi}{\frac{\dot{\Theta}}{2} - \dot{\Omega}_s}$	$\frac{2\pi}{\frac{\dot{\Theta}}{2} - \dot{\Omega}_s} < \overline{P_D}$	

Tabelle 26-4: Übersicht über das Verhalten der scheinbaren mittleren Satellitenbewegungen, mittlere *Kepler*sche Halbachse einer geosynchronen Bahn: $\overline{a_{G0}} = 42164.1712397\,\text{km}$, mittlere *Kepler*sche Halbachse einer Äquivalenz -Bahn: $\overline{a_{Q0}} = 66931.4465468\,\text{km}$

26.5.2 Rückläufige Bahnen

Für rückläufige Bahnen muss der Faktor $\sigma_i[90° < i \le 180°] = -1$ gesetzt werden. Mit Beziehung (26.10) gilt in diesem Fall die Bedingung

$$\overline{n_R} = \overline{n_T} + \dot{\Theta} > 0 \qquad \langle \sigma_i = \operatorname{sgn}(\cos i) = -1 \quad . \tag{26.70}$$

Die Relation zur mittleren tropischen mittleren Bewegung lautet

$$\overline{n_R} > \overline{n_T} \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i) = -1 \tag{26.71}$$

und daher für die mittleren Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} < \overline{P_T} \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i) = -1 \quad . \tag{26.72}$$

Die Beziehung zur drakonitischen Bewegung kann aus

$$\overline{n_R} = \overline{n_D} + \dot{\Omega}_s + \dot{\Theta} > 0 \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i) = -1 \tag{26.73}$$

hergeleitet werden: da für retrograde Satellitenbahnen $\dot{\Omega}_s > 0$, ist sicherlich

$$\overline{n_R} > \overline{n_D} > 0 \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i) = -1 \tag{26.74}$$

und daher für die mittleren Umlaufzeiten

$$\overline{P_R} < \overline{P_D} \qquad \langle \operatorname{sgn}(\cos i) = -1 \quad . \tag{26.75}$$

Die vorstehenden Überlegungen werden in Tabelle 26-4 auf Seite 418 systematisch zusammenfasst.

BEISPIEL 3: In Tabelle 26-2 auf Seite 406 sind die unterschiedlichen Umlaufzeiten einer rückläufigen Satellitenbahn aufgelistet. ◄

$\overline{P_K}$	5309.6470 s
Inklination	$P_{R,\text{sec}}$
91°	4036.990943 s
110°	4641.429831s
135°	4898.459376 s
170°	4983.805444 s
180°	4987.022077s

Tabelle 26-5: Die säkulare Meridian-bezogene Umlaufzeit für rückläufige Kreisbahnen in 200 km Bahnhöhe

BEISPIEL 4: Um einen Eindruck dafür zu bekommen, welche untere Schranke der Meridian-bezogenen Umlaufzeit zu erwarten ist, wird in Tabelle 26-5 auf Seite 419 für rückläufige Kreisbahnen mit der großen Bahnhalbachse $\bar{a} = R_E + 200\,\text{km} = 6578.140\,\text{km}$ die Umlaufzeit für verschiedene Inklinationen berechnet. Die zum Vergleich berechnete mittlere *Kepler*sche Umlaufzeit ist von der Inklination unabhängig. Der Vergleich zur entsprechenden mittleren *Kepler*schen Umlaufzeit zeigt (entsprechendes gilt für mittlere anomalistische, drakonitische und tropische Umlaufzeit), dass die Meridian-bezogene Umlaufzeit wesentlich kürzer sein kann, auf rückläufigen Bahnen kann ein Satellit daher viel eher „gesehen“ werden, als die entsprechende Umlaufzeit angibt. ◄

26.6 Geosynchrone Bahnen

Besonderes Interesse verdienen scheinbar stationäre mittlere Bahnen, die im Rahmen der Meridian-bezogenen Bewegung auf den Äquator bezogen werden können.

Wenn eine mittlere Bahn scheinbar stationär ist, kann ihre mittlere große Bahnhalbachse nach Formel (26.29) mit der Bedingung $\overline{n_R} = 2\pi / \overline{P_R} = 0$ unter der Annahme einer („ungestörten“) *Kepler*bewegung berechnet werden zu

$$\overline{a}_R^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 42164.1712397\,\text{km} \quad . \tag{26.76}$$

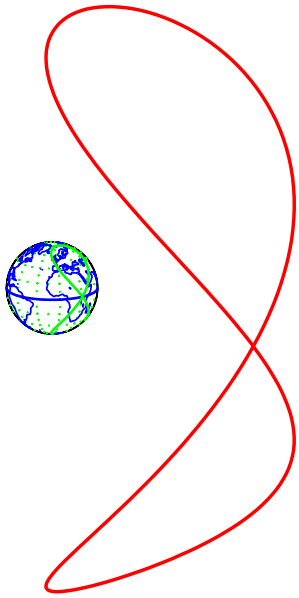


Bild 26-6: Kreisförmige geosynchrone Bahn mit der Inklinationen i=80° (Aufsichtspunkt der Parallelprojektion: λ=350°, φ=15°

Die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit $\overline{P_R}$ wächst in diesem Fall über alle Grenzen (vgl. Bild 26-5 auf Seite 412). Die Verbesserung erster Ordnung nach Formel (26.32) hängt von den verwendeten *Kepler*elementen Exzentrizität und Inklination ab. Entsprechend den Berechnungen (26.30) - (26.33) ist für jedes Elemente Paar (*e*, *i*) auch in diesem Zusammenhang eine zugehörige große Bahnhalbachse zu erwarten.
Bahnen, auf denen sich ein fiktiver mittlerer Satellit mit der Erdrotation mitbewegt, werden als geosynchrone Bahnen bezeichnet. Es gilt die Aussage:

- *Die mittlere große Bahnhalbachse geosynchroner Bahnen hat näherungsweise den Wert* $\overline{a_{Gs}} = 42164.1712397$ km .
- Dagegen gilt:[1] *Die oskulierende Halbachse der geostationärer Bahn (beeinflusst nur durch den* J_2 *– Faktor) hat den Wert* $\overline{a_{Go}} = 42166.27133$ km .

[1] siehe etwa in JOCHIM, E. F.; ECKSTEIN, M. C. [1980]; detaillierte Herleitung in Abschnitt 26.7.2.2 auf Seite 435

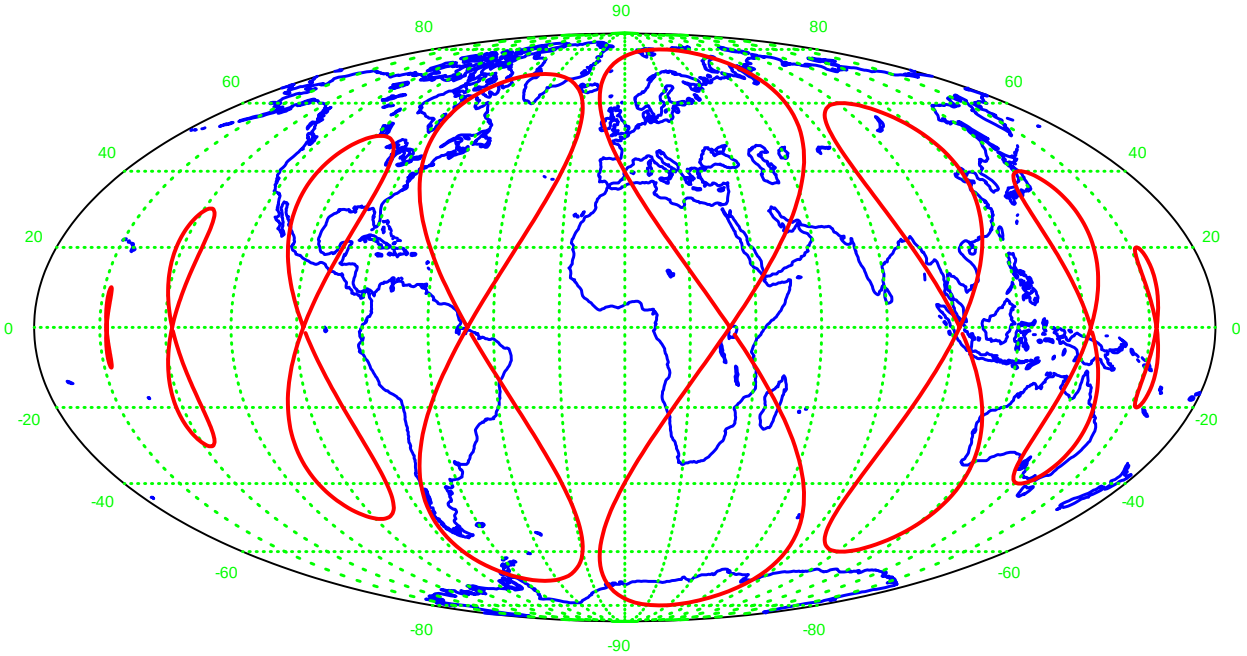


Bild 26-7: Kreisförmige geosynchrone Bahnen mit den Inklinationen (von links): i=10°, 30°, 50°, 70°, 80°, 60°, 40°, 20°

26.6.1 Einige Beispiele geosynchroner Satellitenbahnen

Ein Satellit auf einer geosynchronen Bahn ist nicht notwendig scheinbar stationär, auch wenn der zugehörige fiktive mittlere Satellit auf einer solchen Bahn stationär ist. Dies zeigen anschaulich folgende Beispiele:

BEISPIEL 1: In Bild 26-7 sind kreisförmige geosynchrone Bahnen mit Inklinationen i = 10° bis i = 80° dargestellt. Die Korrektur nach Formel (26.32) ist hier nahezu vernachlässigbar. Im Fall i=80° lautet sie $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 0.00007039110204\,\mathrm{km}$ und die modifizierte Halbachse beträgt $\overline{a}_{G\,0}^{(1)} = 42164.17175\,\mathrm{km}$. Bild 26-6 zeigt in realistischen Größenverhältnissen die kreisförmige geosynchrone Satellitenbahn mit der Inklination i=80°. ◀

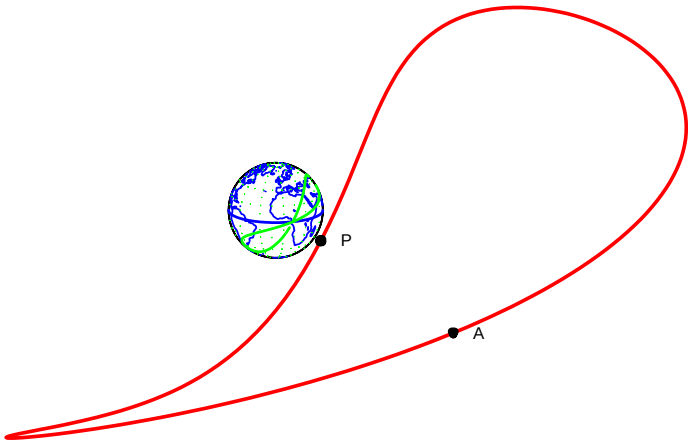


Bild 26-8: Geosynchrone Bahn mit Inklination i= 50° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 230°$. Räumliche Darstellung in Parallelprojektion mit der Blickrichtung $\lambda = 350°, \varphi = 15°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A.

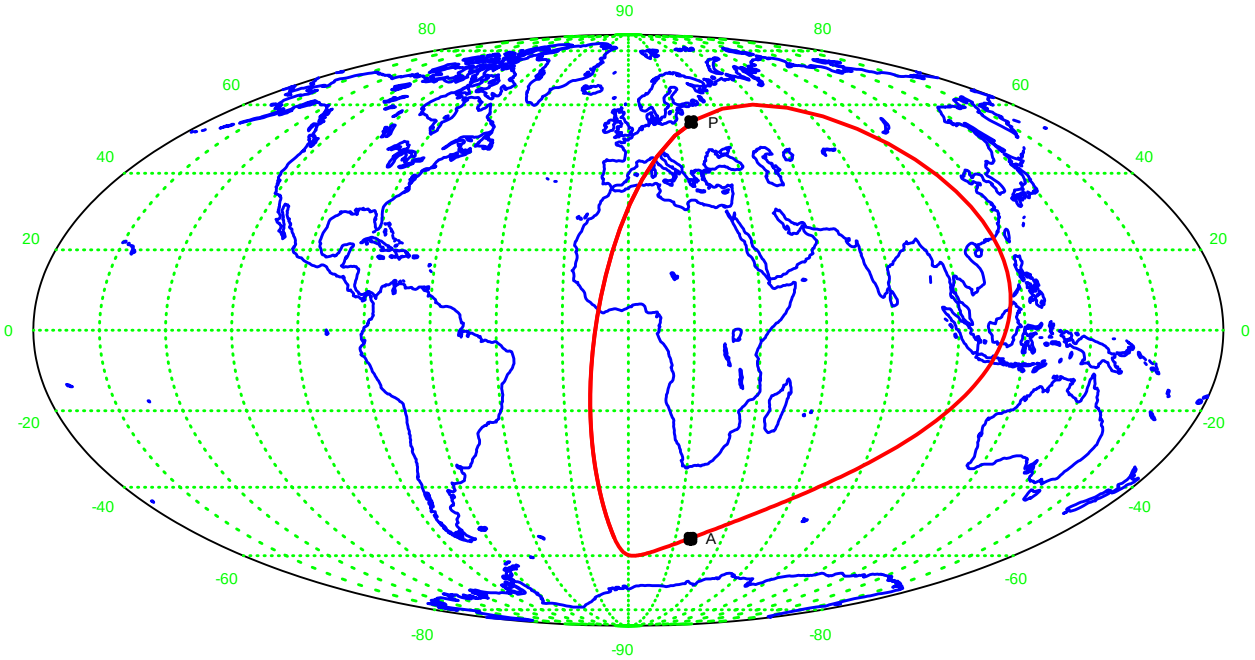


Bild 26-9: Geosynchrone Bahn mit Inklination i= 60° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 70°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A.

BEISPIEL 2: Eine besondere Herausforderung sind elliptische geosynchrone Bahnen, für die in den folgenden Bildern Bild 26-8, Bild 26-9 und Bild 26-10 einige Beispiele gegeben werden. Das scheinbare Bewegungsverhalten bezüglich der Erdoberfläche hängt nicht nur von der Exzentrizität der Bahn ab, sondern wesentlich auch vom Argument des Perigäums. In den räumlichen Darstellungen ist außerdem die Blickrichtung entscheidend zur Beurteilung einer Satellitenbahn. ◄

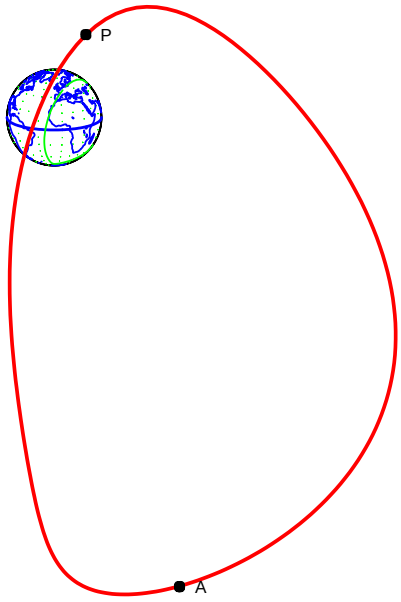


Bild 26-10: Wahre geosynchrone Bahn mit Inklination i= 60° und Exzentrizität e=0.6, Argument des Perigäums $\omega = 70°$. Markierung von Perigäum P und Apogäum A. Dieselbe Bahn wie in Bild 26-9, jedoch in räumlicher Darstellung in Parallelprojektion mit der Blickrichtung: $\lambda = 350°, \varphi = 15°$.

26.6.2 Einige Eigenschaften geosynchroner Satellitenbahnen

Aus der Beziehung (26.49) für scheinbar stationäre und damit auch den Fall geosynchroner Bewegungen wird im Fall rechtläufiger Bahnen für die mittlere drakonitische Umlaufzeit die Beziehung

$$\overline{P_D}\,\left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right| = 360° \tag{26.77}$$

erhalten. Da mit Beziehung (23.228) $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \overline{P_D}\,\dot{\lambda}_{\Omega s}$, ist im Fall geosynchroner Bewegungen

$$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = 360° \quad . \tag{26.78}$$

Die Knotenlängenverschiebung einer geosynchronen Bahn ist im Mittel genau ein Vollkreis. Im Fall retrograder Bewegung ist nach (26.73) und wegen (20.15) $\overline{n_D} = \left|-\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right| = \left|\left|\dot{\Omega}_s\right| - \dot{\Theta}\right| = \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|$, somit auch $\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| = 360°$. Demnach kann eine mittlere geosynchrone Bahn als spurreproduzierbar nach einem drakonitischen Umlauf bezeichnet werden[1].

Die tropische Umlaufzeit einer mittleren geosynchronen Bewegung beträgt nach Beziehung (26.10)

$$\overline{P_T} = \frac{2\pi}{\overline{n_T}} = \frac{2\pi}{\left|\dot{\Theta}\right|} = 86164.090507\,\mathrm{sec} \triangleq 23^h 56^m 04^s.090507 \quad . \tag{26.79}$$

Dies ist die Dauer eines mittleren Sterntages[2].

Damit können im Rahmen des Hauptproblems der Satellitenbahnmechanik einige notwendige und hinreichende Eigenschaften geosynchroner Satellitenbahnen zusammengestellt werden:

Eine Satellitenbahn ist genau dann eine mittlere geosynchrone Bahn, wenn

- *ihre mittlere tropische Umlaufzeit genau ein mittlerer Sterntag ist,*
- *ihre Meridian-bezogene mittlere Bewegung identisch verschwindet,*
- *ihre drakonitische mittlere Bewegung gleich der mittleren Knotenlängendrift ist,*
- *ihre mittlere Knotenlängenverschiebung genau ein Vollkreis ist,*
- *sie ein „integer orbit" mit genau einem drakonitischen Umlauf pro Knotenumlauf ist,*
- *sie Spur-reproduzierbar mit dem Reproduktionszyklus 1 ist,*
- *sie Spur-reproduzierbar mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit als Reproduktionsdauer ist.*

26.7 Scheinbares Bewegungsverhalten von Satellitenbahnen

Den folgenden Untersuchungen wird die äquatoriale Satellitenbewegung entsprechend der in Kapitel 24 behandelten tropischen Bewegung zugrunde gelegt. Dies führt zu einer Verallgemeinerung der Meridian-bezogenen Satellitenbewegung, die auf eine auf den Äquator ausgerichtete Bewegung konzentriert ist.

---

[1] sogenannter „integer orbit", siehe in den Abschnitten 23.8 und 23.9

[2] Siehe dazu Abschnitt 9.1.2.1, Formel (9.24), Band II

26.7.1 Scheinbares Bewegungsverhalten und scheinbar stationäre Bahnpunkte

Das scheinbare Bewegungsverhalten eines Satelliten über der Erdoberfläche werde durch die geographischen Koordinaten geographische Länge λ und Deklination δ und ihre Variationen (26.4)

$$\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta} \tag{26.80}$$

und $\dot{\delta}$ beschrieben. Diese vier Parameter können als Ergebnisse einer Ephemeridenrechnung als bekannt angenommen werden. Die Variation $\dot{\delta}$ der Deklination des Satellitenortes beschreibt die scheinbare Bewegung des Satelliten in Nord-Süd-Richtung. Die Variation $\dot{\lambda}$ in geographischer Länge beschreibt die scheinbare Bewegung in Ost-West-Richtung, die gemäß Tabelle 26-6 klassifiziert werden kann.

Bedingung		Scheinbare Satellitenbewegung in Ost-West-Richtung		
$\dot{\lambda} > 0$	$\dot{\alpha} > \dot{\Theta}$	von West nach Ost	rechtläufig	schneller als Erddrehung
$\dot{\lambda} = 0$	$\dot{\alpha} = \dot{\Theta}$	Stillstand		schnell wie Erddrehung
$\dot{\lambda} < 0$	$\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$	von Ost nach West	rückläufig	langsamer als Erddrehung

Tabelle 26-6: Klassifizierung der scheinbaren Bewegung von Erdsatelliten in Ost-West-Richtung

Drift in Rektaszension	Drift in Deklination	Deklination	Scheinbarer Bahnpunkt
$\dot{\lambda} = 0, \dot{\alpha} = \dot{\Theta}$	$\dot{\delta} \neq 0$	$\delta \neq 0$	Scheinbarer östlicher oder westlicher Wendepunkt
		$\delta = 0$	Stillstandpunkt (bei Äquatorüberflug)
	$\dot{\delta} = 0$	$\delta = 0$	Geostationärer Punkt
		$\delta \neq 0$	Spitzenpunkt (scheinbar stationärer Punkt)
$\dot{\lambda} > 0$, $\dot{\alpha} > \dot{\Theta}$			Scheinbarer nördlicher oder südlicher Wendepunkt, kein scheinbar stationärer Punkt
$\dot{\lambda} < 0$, $\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$			Keine scheinbar stationären Punkte

Tabelle 26-7: Besondere Punkte im Bewegungsverhalten eines Satelliten bei Bezug auf die Erdoberfläche

Das Schema in Tabelle 26-6 stellt eine Verallgemeinerung der Klassifizierung einer scheinbaren Satellitenbewegung auf Basis einer Meridian-bezogenen Bewegung in Abschnitt 26.5 dar. Wird zusätzlich die Nord-Süd-Bewegung eines Satelliten berücksichtigt, kann das scheinbar stationäre Verhalten einer Satellitenbewegung verfeinert klassifiziert werden. Ein Satellit ist dann und nur dann echt stationär, wenn auch die Nord-Süd-Drift mit $\dot{\delta} = 0$ verschwindet. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Satellitenbewegung geostationär sein muss. Solche Bahnpunkte können auch außerhalb des Äquators auftreten. Sie stellen Spitzen der scheinbaren Bahn dar. Falls jedoch eine Satellitenbewegung im Fall $\dot{\lambda} = 0$ eine nicht verschwindende Nord-Süd-Drift aufweist mit $\dot{\delta} \neq 0$, befindet sich der Satellit in einem Umkehrpunkt seiner Bahn: die

Bewegung geht aus einer Ost-West in eine West-Ost-Drift über oder umgekehrt. Es gibt auch ausgeartete Fälle, derart dass die Längendrift für einige Zeit verschwindet, der Satellit also scheinbar stillsteht, bevor er sich wieder in derselben Richtung weiter bewegt wie vorher. In diesem Zusammenhang kann auch der Fall betrachtet werden, dass der Satellit keine verschwindende Längendrift aufweist, während jedoch die Breitendrift verschwindet $\dot{\delta} = 0$. In diesem Fall befindet sich die scheinbare Satellitenbahn in ihrem nördlichen oder südlichen Wendepunkt, wie es für jede geneigte Bahn zu erwarten ist. Diese Überlegungen werden in Tabelle 26-7 zusammengefasst. Die vorstehenden Überlegungen werden im Folgenden mit Hilfe der zugehörenden Variationsgleichungen formelmäßig vertieft. *r* ist der geozentrische Radius des Satellitenortes mit dem Argument der Breite *u* und unter der Bahnneigung *i*. Gemäß den Formeln (24.18) haben die Bahnparameter zu den Koordinaten im Frühlingspunkt bezogenen Koordinatensystem die Beziehungen (siehe auch Bild 24-3), wobei alle Parameter auf denselben Zeitpunkt bezogen sind,

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \cos u \\ \sin(\alpha-\Omega)\cos\delta &= \sin u\cos i \\ \sin\delta &= \sin u\sin i \end{aligned}\right\rangle \quad \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.81}$$

Der Flächenparameter *G* ist im Fall einer elliptischen *Kepler*bewegung mit den Bahnparametern *a* und *e* durch den Flächensatz in der Form $G = \sqrt{\mu\, p} = \sqrt{\mu\left(1-e^2\right)}$ verknüpft. Für die Variation des zugehörigen (ersten) *Hansen*schen Bahnwinkels gilt der allgemeine Flächensatz $r^2\dot{\zeta} = G$. Somit lauten die Variationen der äquatorialen Winkelkoordinaten (nach (24.21)) ohne Einschränkung auf den Äquator (was in den Abschnitten 26.5 und 26.6 grundlegend ist) außer in den Polen

$$\dot{\alpha} = \dot{\zeta}\frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{G}{r^2}\frac{\cos i}{\cos^2\delta} = \frac{\sqrt{\mu\, p}}{r^2}\frac{\cos i}{1-\sin^2 u\sin^2 i} \tag{26.82}$$

$$\dot{\delta} = \dot{\zeta}\frac{\cos u\sin i}{\cos\delta} = \frac{G}{r^2}\frac{\cos u\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 u\sin^2 i}} \quad . \tag{26.83}$$

26.7.1.1 Besondere Punkte bei scheinbarer Nord-Süd-Bewegung

Ein Satellit befindet sich im nördlichen bzw. im südlichen Wendepunkt seiner Bahn, wenn seine Deklination maximalen Betrag annimmt, wenn sie also verschwindet: $\dot{\delta} = 0$. Für nichtäquatoriale Bahnen ergibt sich die notwendige Bedingung

$$\dot{\delta} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha-\Omega = u = 90°, \text{ bzw. } = 270° \qquad \langle i \neq 0,\ i \neq 180° \quad . \tag{26.84}$$

Nach der dritten der Gleichungen (26.81) hat die Bahn im nördlichen Wendepunkt die Deklination $\delta = i$, im südlichen Wendepunkt $\delta = -i$. Für äquatoriale Bahnen ist dagegen notwendig und hinreichend

$$\dot{\delta} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad i = 0° \quad \text{bzw.} \quad \text{i=180°} \quad . \tag{26.85}$$

Diese Überlegungen führen auf die folgende allgemeingültige Aussage:

- *Scheinbar stationäre Bahnpunkte einer Erdsatellitenbahn können außer auf Äquatorbahnen nur im nördlichen oder südlichen Wendepunkt der Bahn vorkommen.*

26.7.1.2 Besondere Punkte bei scheinbarer Ost-West-Bewegung

Aus Formel (24.23) folgt

$$\operatorname{sgn}\left(\dot{\alpha}\right)=\operatorname{sgn}\left(\cos i\right)=\sigma_i \quad . \tag{26.86}$$

Deshalb ist für retrograde Bahnen stets $\dot{\alpha}<0$, nach (26.80) auch $\dot{\lambda}=\dot{\alpha}-\dot{\Theta}<0$. Dies führt auf die Aussage:

- *Retrograde Bahnen von Erdsatelliten sind stets auch scheinbar rückläufig.*

Entsprechend gilt die Aussage auch für Polbahnen: da nach (26.82) für i=90° stets $\dot{\alpha}=0$, ist mit (26.80) in diesem Fall $\dot{\lambda}<0$ und es gilt

- *Polbahnen von Erdsatelliten sind stets scheinbar rückläufig.*

Beziehung (26.82) zeigt somit auch:

- *scheinbar stationäre Punkte können nur auf rechtläufigen Bahnen vorkommen.*

Dies bedeutet: Notwendig für die Existenz von stationären Punkten ist zusammen mit $\dot{\delta}=0$ und mit[1] $\dot{\zeta}=\dot{u}+\dot{\Omega}\cos i$ die Bedingung

$$\dot{\Theta}=\dot{\alpha}=\left(\dot{u}+\dot{\Omega}\cos i\right)\frac{\cos i}{1-\sin^2 i\sin^2 u}\Longrightarrow \text{ scheinbar stationäre Punkte möglich} \tag{26.87}.$$

26.7.2 Besondere scheinbare Bahnpunkte auf Kreisbahnen

Die Untersuchungen werden im Hinblick auf die charakterisierenden mittleren Bewegungen durchgeführt. Alle periodischen Variationen in den Bahnparametern werden zu diesem Zweck vernachlässigt. Aus der Zerlegung[2] (23.42) für das Argument der Breite

$$\begin{aligned} u=u\left(t\right)&=\overline{M_{0\,0}}+\bar{\omega}_0+\left(\overline{n_{K\,0}}+\left(M_0\right)^{\cdot}_{s0}+\dot{\omega}_{s0}+\cdots\right)\left(t-t_0\right)+\delta u \;= \\ &=\overline{M_{0\,0}}+\bar{\omega}_0+\overline{n_D}\left(t-t_0\right)+\delta_P\left(u\right) \end{aligned} \tag{26.88}$$

folgt für die Variation des Argumentes der Breite zunächst der Ausdruck

$$\dot{u}=\overline{n_D}+\frac{d\left[\delta_P\left(u\right)\right]}{dt} \quad . \tag{26.89}$$

Bei Vernachlässigung aller periodischen Störeffekte auf eine *Kepler*bahn wird dann aus der Bedingungsgleichung (26.87)

$$\dot{\Theta}=\left(\overline{n_d}+\dot{\Omega}_s\cos\bar{i}_0\right)\frac{\cos\bar{i}_0}{1-\sin^2\bar{i}_0\sin^2 u}+\delta_P\left(\dot{\alpha}\right) \qquad \left\langle \dot{\lambda}=0 \right. \quad . \tag{26.90}$$

Diese Zerlegung in einen säkularen und einen periodischen Anteil muss stets beachtet werden, wenn bei Vorgabe der tropischen Erdrotation $\dot{\Theta}$ diesem Wert ein Bahnparameter unter Vernachlässigung der periodischen Variationen $\delta_P\left(\dot{\alpha}\right)$ zugeordnet werden soll: es handelt sich immer um einen mittleren Epocheparameter, um den die wahren Bahnparameter periodische (oder auch quasiperiodische) Variationen ausführen.

---

[1] etwa nach Formel (4.257), Abschnitt 4.3.16, Band II

[2] aus Abschnitt 23.2.1

26.7.2.1 Äquatoriale Kreisbahnen mit stationären Punkten

Rechtläufige äquatoriale Kreisbahnen[1] haben nach Formel (26.82) mit der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels unter Verwendung der säkularen Störungen einer *Kepler*bewegung[2] die Variation in Rektaszension

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = \dot{\zeta} = \dot{\bar{\alpha}} + \frac{d\left[\delta_P(\alpha)\right]}{dt} &= \overline{n_T} + \frac{d\left[\delta_P(\alpha)\right]}{dt} = \\ &= \overline{n_{K0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \sigma_i \dot{\Omega}_{s0} + \cdots + \frac{d\left[\delta_P(\alpha)\right]}{dt} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\left[1 + 3J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2}\right] + \cdots + \frac{d\left[\delta_P(\alpha)\right]}{dt} \qquad \left\langle \bar{e}_0 = 0,\ \bar{i}_0 = 0^\circ \right. \quad .\end{aligned} \tag{26.91}$$

Um stationäre Punkte zu finden, wird mit Formel (26.90) die aus Tabelle 26-3 (Abschnitt 26.4.2) bekannte Beziehung erhalten

$$\dot{\bar{\alpha}} \triangleq \dot{\Theta} = \overline{n_{T0}} + \cdots = \overline{n_{K0}} + \left(M_0\right)^{\cdot}_{s0} + \dot{\omega}_{s0} + \sigma_i \dot{\Omega}_{s0} + \cdots \qquad \left\langle \dot{\lambda} = 0\ ,\ \bar{i}_0 = 0^\circ \right. \quad . \tag{26.92}$$

Diese ist notwendig für eine geosynchrone Bewegung.

Die entsprechende mittlere tropische Umlaufzeit beträgt wie im allgemeinen Fall einer geosynchronen Bewegung (siehe den Wert (26.47))

$$\overline{P_T} = \frac{2\pi}{\dot{\Theta}} = 86164.1006373\,\mathrm{s} = 23^h\,56^m\,4^s.1006373 \quad . \tag{26.93}$$

Sie ist offenbar unabhängig von den Bewegungsparametern. Um jedoch die zugehörige große Bahnhalbachse im Fall einer äquatorialen Kreisbahn zu berechnen, kann für eine erste Näherung die Beziehung

$$\dot{\bar{\alpha}} \triangleq \dot{\Theta} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\left[1 + 3J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2}\right] + \cdots \quad \left\langle \bar{e}_0 = 0, \bar{i}_0 = 0^\circ, \dot{\lambda} = 0 \right. \tag{26.94}$$

verwendet werden. Damit lautet wie in den Formeln (26.29) - (26.32) mit (26.76) eine nullte Näherung (entsprechend einer ungestörten *Kepler*bewegung)

$$\bar{a}_G^{(0)} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 42164.172366\,\mathrm{km} \quad . \tag{26.95}$$

Eine erste Verbesserung folgt mit $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 0^\circ.0$ und mit der Korrektur (26.32) aus

$$\Delta\bar{a}_G^{(1)} = 2J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}_G^{(0)}} = 2.089067\,\mathrm{km} \quad . \tag{26.96}$$

Dies führt auf die verbesserte Lösung

$$\bar{a}_G^{(1)} = \bar{a}_G^{(0)} + \Delta\bar{a}_G^{(1)} = 42166.261432\,\mathrm{km} \quad . \tag{26.97}$$

Eine Verbesserung mit der Bedingungsgleichung (26.33) ist in diesem Fall nicht möglich, da die entsprechende mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit über alle Schranken wächst. Stattdessen bietet sich eine iterative Verbesserung mit der notwendigen Bedingung $\dot{\alpha} \triangleq \dot{\Theta}$ an. Die Bedingungsfunktion lautet dann

$$fct\left(\bar{a}_G^{(\nu)}\right) \equiv \dot{\Theta} - \dot{\alpha}\left(\bar{a}_G^{(\nu)}\right) = 0 \quad \left\langle \nu = 2,3,\cdots \right. \quad . \tag{26.98}$$

---

[1] Da rückläufige und Polbahnen (mit Inklinationen $\bar{i}_0 \geq 90^\circ$) stets scheinbar rückläufig sind und nach Tabelle 26-7 auf Seite 430 keine scheinbar stationären Punkte haben können, werden sie hier nicht berücksichtigt

[2] In Abschnitt 20.2.1 (Band III)

Zur Berechnung von $\dot{\alpha}$ können hier alle bekannten höheren Störungen einer *Kepler*bahn berücksichtigt werden. Die mittlere große Bahnhalbachse der geostationären Bahn hat dann mit der a-priori Genauigkeit $\Delta a = 10^{-7}\,\mathrm{km}$ wieder den Betrag

$$\bar{a}_G := \bar{a}_G^{(\nu)} = 42166.261432\,\mathrm{km} \quad . \tag{26.99}$$

Die so gefundene Bahn erfüllt die Bedingungen:

$$\lambda \text{ beliebig},\ \dot{\lambda} = 0°/\mathrm{s},\ \delta \equiv 0°.0,\ \dot{\delta} = 0°/\mathrm{s} \ \Leftrightarrow\ \text{geostationäre Bahn} \quad . \tag{26.100}$$

Der Satellit scheint über einem Punkt über dem Äquator mit den geographischen Koordinaten $\left(\lambda \text{beliebig},\ \delta = \varphi = 0°\right)$ festzustehen.

Vergleich mit der großen Halbachse einer geostationären Bahn $a_G = \bar{a}_0^{(1)}$ in Formel (26.97) und von Formel (26.94) führt auf die Klassifikation in Tabelle 26-8.

Um der Frage nachzugehen, ob geostationäre Punkte auch auf elliptischen Äquatorbahnen mit der Exzentrizität $\bar{e}_0 \neq 0.0$ vorkommen können, werden die hierzu notwendigen Bedingungen $\dot{\alpha} \equiv \dot{\Theta}$ und $i \mathrel{\hat{=}} \bar{i}_0 = 0°.0$ in die Variation der Rektaszension in (26.82) eingesetzt:

$$\dot{\Theta} \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_G^3\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}}\left(1+\bar{e}_0\cos\upsilon\right)^2 \quad \left\langle \dot{\alpha} = \dot{\Theta},\ \dot{\delta} = 0°.0/\mathrm{s},\ \delta \equiv 0°.0 \right. \quad .$$

Hier ist die wahre Anomalie υ die einzige Variable, während alle anderen Parameter konstant sind. Diese Identität lässt sich also nur erfüllen, wenn die Exzentrizität identisch verschwindet.

$\bar{a}_0 < a_G$	$\dot{\alpha} > \dot{\Theta}$	Scheinbar rechtläufig
$\bar{a}_0 = a_G$	$\dot{\alpha} = \dot{\Theta}$	geostationär
$\bar{a}_0 > a_G$	$\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$	Scheinbar rückläufig

Tabelle 26-8: Scheinbares Bewegungsverhalten auf rechtläufigen äquatorialen Kreisbahnen. a_G ist die große Bahnhalbachse einer geostationären Bahn

Zusammenfassung einiger Eigenschaften geostationärer Satellitenbahnen:

- *Eine Erdsatellitenbahn ist genau dann geostationär, wenn sie eine äquatoriale Kreisbahn und in jedem Bahnpunkt stationär ist.*
- *Wenn eine Satellitenbahn geostationär ist,*
  - *ist ihre mittlere tropische Umlaufzeit ein mittlerer Sterntag:* $\overline{P_T} = 86164.090507\,\mathrm{s}$,
  - *beträgt ihre mittlere drakonitische Umlaufzeit* $\overline{P_D} = 86160.49456\,\mathrm{s}$,
  - *verschwindet ihre Meridian-bezogene mittlere Bewegung identisch* $\overline{n_R} \equiv 0.0/\mathrm{s}$,
  - *wächst ihre mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit über alle Schranken,*
  - *ist ihre drakonitische mittlere Bewegung gleich der mittleren Knotenlängendrift* $\overline{n_D} = \left|\dot{\lambda}_{\Omega s}\right|$,
  - *ist ihre mittlere Knotenlängenverschiebung genau ein Vollkreis:* $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = 360°$,
  - *ist sie ein „integer orbit" mit genau einem mittleren drakonitischen Umlauf pro Knotenumlauf,*

- *ist sie reproduzierbar mit dem Reproduktionszyklus K= 1,*
- *ist sie reproduzierbar mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit als Reproduktionsdauer:* $T_K = \overline{P_D}$,
- *beträgt die Tagesumlaufzahl* $N_0 = 24^h / \overline{P_D} = 1.002779759$.

Anmerkungen: Der Zusammenhang der geostationären Bahn mit der Bewegung der Sonne wird im Zusammenhang der Sonnen-bezogenen synodischen Bewegung in Kapitel 28 untersucht. Weitere Eigenschaften der geostationären Bahn werden in diesem Kapitel nicht untersucht[1]. ◄

26.7.2.2 Besonderheiten einer Satellitenbewegung auf kreisförmigen Äquatorbahnen

Bei der Auswertung der Bewegung geostationärer Satelliten fiel der befremdliche Effekt auf, dass die oskulierende große Bahnhalbachse während eines Meridian-bezogenen Umlaufs stets um einige Kilometer größer als der (mehr oder weniger) konstante Bahnradius ist. Nähere Untersuchungen[2] zeigten, dass dieser Effekt, der erstmals von *R. H. Lyddane*[3] entdeckt worden war, eine Folge der Erdabplattung ist, die sich auf äquatoriale Bahnen infolge der Symmetrie des Erdkörpers in erster Näherung auswirkt. Dieser Effekt und seine Genauigkeits-Einschränkungen werden in diesem Abschnitt untersucht.

Um zunächst der allgemeinen Frage nachzugehen, ob es prinzipiell kreisförmige Erdsatellitenbahnen geben kann, werde der Radius einer Satellitenbahn unter dem Einfluss des Erdgravitationsfeldes untersucht. Die Störungen einer *Kepler*bewegung werden unter Vernachlässigung der Bewegungseinflüsse durch den Luftwiderstand und anderer für erdnahe Bahnen wenig wirksamer Einflüsse etwa durch Sonne und Mond durchgeführt. In der *Brouwer*schen Satellitentheorie hat der Bahnradius unter Einschluss der sphärischen Harmonischen bis zu J_5 die Darstellung[4] (20.187)

$$\delta r_G = -\frac{1}{16}\frac{R_E^2}{\bar{p}}\frac{\bar{e}\sin^2\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\left[J_2\left(1-15\cos^2\bar{i}\right)+5\frac{J_4}{J_2}\left(1-7\cos^2\bar{i}\right)\right]\cos\left(2\bar{\omega}+\bar{\upsilon}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{J_3}{J_2}R_E\sin\bar{i}\sin\bar{u}+ \qquad (26.101)$$

[1] Dazu sei etwa verwiesen auf E. M. SOOP [1983]

[2] JOCHIM, E. F. and M. C. ECKSTEIN [1979], JOCHIM, E. F. M. [2015**],** FLURY, W. [1973], FLURY, W. [1976]

[3] LYDDANE, R. H. [1963]

[4] Abschnitt 20.2.4.13 (Band III)

$$+\frac{1}{4}J_2\frac{R_E^2}{\bar{p}}\left\{\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)\left[1+\frac{2\bar{r}}{\bar{a}\sqrt{1-\bar{e}^2}}+\frac{\bar{e}\cos\bar{\upsilon}}{1+\sqrt{1-\bar{e}^2}}\right]+\sin^2\bar{i}\cos 2\bar{u}\right\}+$$

$$+\frac{5}{32}\frac{J_5}{J_2}\frac{R_E^3}{\bar{p}^2}\sin\bar{i}\left\{\left(1-9\cos^2\bar{i}-\frac{24\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right)\left[\left(4+3\bar{e}^2\right)\sin\bar{u}+6\bar{e}^2\sin\bar{\upsilon}\cos\bar{\omega}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{7}{6}\left[1-5\cos^2\bar{i}-\frac{16\cos^4\bar{i}}{1-5\cos^2\bar{i}}\right]\bar{e}^2\sin\left(\bar{\upsilon}+3\bar{\omega}\right)\right\}+\ldots\quad .$$

Die hier verwendeten mittleren Bahnparameter $\bar{p}=\bar{a}\left(1-\bar{e}^2\right),\bar{a},\bar{e},\bar{i}$ unterliegen im Erdgravitationsfeld keinen säkularen Störungen und können somit als Anfangswerte $\bar{a}=\bar{a}_0=\bar{a}_G$, $\bar{e}=\bar{e}_0$, $\bar{i}=\bar{i}_0$ festgehalten werden. Man darf davon ausgehen, dass eine wahre Kreisbahn nahe an einer kreisförmigen *Kepler*bahn liegt. Es wird deshalb $\bar{e}=\bar{e}_0=0.0$ angenommen. Dies führt auf die mittleren Beziehungen $\bar{r}=\bar{p}=\bar{a}=\bar{a}_0$. Setzt man dies in den obigen Ausdruck für die periodischen Variationen des Bahnradius ein, sieht man, dass abhängig von der Inklination $\bar{i}$ erhebliche Schwankungen für den Bahnradius

$$r=\bar{r}+\Delta r=\bar{a}_0+\Delta r \tag{26.102}$$

auftreten können. Um auch diese Schwankungen auszuschließen, reduzieren wir die Untersuchung auf kreisförmige Äquatorbahnen. Dann bleibt

$$\Delta r=\delta r_G[\bar{e}=0,\bar{i}=0°.0]=-\frac{3}{2}J_2\frac{R_E^2}{\bar{a}_0}\quad . \tag{26.103}$$

Dieser Wert ist konstant, somit auch der Bahnradius *r*. Er ist somit kleiner als die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$. Dies kann so gedeutet werden, dass sich der Satellit stets im Perizentrum einer Ellipse befindet, die sich mit dem Satelliten um die Erde bewegt (vgl. Bild 26-11, links). Sei Δe die Exzentrizität dieser Ellipse, so hat der Bahnradius den konstanten Betrag $r=\bar{a}_0+\Delta r=\bar{a}_0\left(1-\Delta e\right)$. Daraus ergibt sich

$$\Delta e=-\frac{\Delta r}{\bar{a}_0}=\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_E}{\bar{a}_0}\right)^2\quad . \tag{26.104}$$

Zur vertieften Untersuchung dieses Verhaltens werden die lang- und kurzperiodischen Störungen einer *Kepler*bewegung mit den für erdnahe Satelliten gültigen Formeln in Abschnitt 20.2.2 (Band III) betrachtet. Mit den mittleren Epochewerten $\bar{e}_0=0.0$ und $\bar{i}_0=0°.0$ zeigt der Ausdruck (20.23), dass in diesem Fall keine langperiodischen Störungen existieren, während die kurzperiodischen Störungen nach (20.57) oder (20.58) einen nicht verschwindenden Betrag annehmen:

$$\delta e_{Gl}=0.0\quad ,\quad \delta e_{Gk}=\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_E}{\bar{a}_0}\right)^2\cos\bar{\upsilon}\quad . \tag{26.105}$$

Vergleich mit (26.104) führt notwendig auf $\cos\bar{\upsilon}\equiv 1$, somit $\bar{\upsilon}\equiv 0°$. Dies bestätigt die Aussage, dass sich in diesem Fall der Satellit stets im Perizentrum seiner oskulierenden Bahnellipse befindet.

Formel (26.103) zeigt: mit abnehmender Bahnhöhe wächst die Abweichung der Bahn von der zugehörigen großen Bahnhalbachse beträchtlich, ebenso die zugehörende scheinbare Bahnellipse. Die entsprechenden Zahlenwerte können aus Bild 26-11, rechts, abgelesen werden.

Die mittlere Bewegung auf einer solchen Bahn kann mit dem Flächensatz

$$\dot{\zeta} = \frac{G}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = \frac{\sqrt{\mu \bar{a}_0 \left[1 - (\Delta e)^2\right]}}{(\bar{a}_0 + \Delta r)^2} \qquad .(26.106)$$

berechnet werden. Hier ist ζ der *Hansen*sche Bahnwinkel. Seine Variation $\dot{\zeta}$ ist in diesem Fall konstant. Somit kann dieser Ausdruck als die *Hansen*sche mittlere Bewegung einer kreisförmigen Äquatorbahn bezeichnet werden.

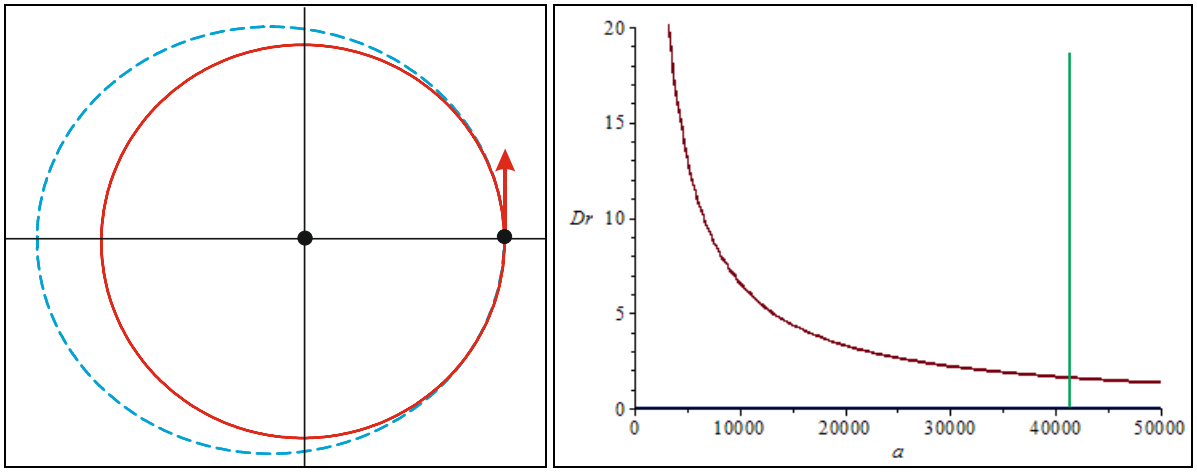


Bild 26-11: Die Bewegung eines Satelliten auf einer äquatorialen Kreisbahn im Gravitationsfeld seines Zentralkörpers mit Störeinfluss allein durch die zonale Harmonische J_2: Der bewegte Körper befindet sich stets im Perizentrum seiner elliptischen Bahn (blau gestrichelt). Dieses bewegt sich mit dem Körper längs seiner kreisförmigen Bahn (rote Kurve). Das rechte Bild zeigt die entsprechenden Zahlenwerte für den Fall von Erdsatelliten, die Abweichung $\Delta r\,[\mathrm{km}]$ des Bahnradius von der (mittleren) großen Bahnhalbachse $\bar{a}\,[\mathrm{km}]$. Grüne Linie: geostationäre Bahn.

BEISPIEL: Eine geostationäre Bahn hat nach Formel (26.97) die „gestörte“ große Bahnhalbachse $\bar{a}_G := \bar{a}_G^{(v)} = 42166.261432\,\mathrm{km}$. Der Bahnradius hat mit der Korrektur (26.103) $\Delta r = -1.566729128\,\mathrm{km}$ den konstanten Betrag $r = 42164.6935863\,\mathrm{km}$. Die zugehörige elliptische Bahn hat mit Formel (26.104) die Exzentrizität $\Delta e = 3.71558290 \times 10^{-5}$. Der Satellit bewegt sich nach Formel (26.106) mit der in diesem Fall konstanten *Hansen*schen Bewegung $\dot{\zeta} = 7.291573531116 \times 10^{-4}$ rad/sec.

Zum Vergleich: die ungestörte *Kepler*sche mittlere Bewegung beträgt $\overline{n_K} = \dot{\Theta} = 7.29211585468 \times 10^{-5}$ rad/sec. Sie muss kleiner als die Bewegung auf der gestörten Bahn sein, da sie „weiter außen“ liegt. Entsprechend beträgt die zugehörende Geschwindigkeit auf der oskulierenden Bahn $V = \sqrt{\mu / r} = 3.074640930\,\mathrm{km/s}$. Sie würde dagegen auf der Nominalbahn (erster Ordnung) $V = \sqrt{\mu / \bar{a}_G} = 3.074583809\,\mathrm{km/s}$ betragen. ◄

Anmerkungen:

1. Für kreisförmige Äquatorbahnen verschwindet die Variation δa_{kg} der großen Bahnhalbachse, siehe die Formeln (20.53) und (20.54) (Abschnitt 20.2.3, Band III). ◄

2. In den Theorien zur Beschreibung der Erdsatellitenbewegung von H. KRAUSE [1956 a] wie auch von Y. KOZAI [1959] wurde gegenüber dem ungestörten Wert eine konstante Verschiebung der großen Bahnhalbachse beobachtet, um welche die wahre Halbachse oszilliert. Der Betrag dieser Verschiebung ist in beiden Theorien im Fall einer kreisförmigen Äquatorbahn identisch, weicht jedoch von der Verschiebung Δr in Formel (26.103) um den Faktor 2/3 ab. Dies könnte gedeutet werden, dass eine fiktive große Halbachse a im Fall einer solchen Bahn als theoretischer Bezug angenommen werden könnte. In der am häufigsten in der Satellitenbahnmechanik verwendeten analytischen Theorie nach D. BROUWER [1959] wird jedoch im Fall der kreisförmigen Äquatorbahnen auch bei Berücksichtigung der periodischen Bewegungseinflüsse durch das Erdschwerefeld kein Unterschied zwischen mittlerer und oskulierender Bahnhalbachse gemacht. ◄

3. Nach Formel (26.103) wird die konstante Abweichung des Bahnradius zur großen Bahnhalbachse ausschließlich durch die Abplattung repräsentiert und durch die zonale Harmonische J_2 beschrieben. Diese Tatsache wird gelegentlich als eine Resonanz zwischen den *Hansen* Winkeln der Bewegung des Satelliten in seiner Bahn und des Perizentrums der Bahn gedeutet. ◄

26.7.2.3 Spitzenpunkte auf geneigten Kreisbahnen

Da retrograde und Polbahnen stets scheinbar rückläufig sind, werden die folgenden Untersuchungen wieder ausschließlich für rechtläufige Bahnen $\bar{i}_0 \in (0°, 90°)$ durchgeführt.

Können auf solchen Bahnen scheinbar stationäre Punkte auftreten, wie kann man sie berechnen?

Als erste Bedingung für stationäre Punkte folgt mit der Variationsgleichung (26.83)

$$\dot{\delta} = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos u = 0 \;\Leftrightarrow\; u_1 = 90°,\; u_2 = 270°,\; \sin u = \pm 1 \,. \tag{26.107}$$

Aus der zweiten Bedingung $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ mit der Variationsgleichung (26.82) folgt im Fall einer im Mittel kreisförmigen Bewegung $\bar{e}_0 = 0.0$ und für beliebige Inklinationen $\bar{i}_0 < 90°$

$$\dot{\Theta}\cos\bar{i}_0 = \dot{\zeta} \quad \langle \dot{\delta} = 0 \;,\; \dot{\alpha} = \dot{\Theta},\; \sin\bar{i}_0 \neq 0 \quad . \tag{26.108}$$

Hierzu wird der säkulare Anteil der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels mit den säkularen Variationen der Elemente $\overline{M_0}, \omega, \Omega$ verwendet:

$$\dot{\zeta}\left[\bar{e}_0 = 0.0\right] = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\left[1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2}\left(1 - 3\cos^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) + \delta\left(\dot{\zeta}\right) \quad . \tag{26.109}$$

Bei Vorgabe einer Inklination $\bar{i}_0 < 90°$ kann mit Hilfe der Zuordnung (26.108) die entsprechende mittlere Bahnhalbachse berechnet werden. Als erste Näherung kann der Wert

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu}{\left(\dot{\Theta}\cos\bar{i}\right)^2}} \tag{26.110}$$

verwendet werden. Eine erste Verbesserung mit Hilfe der Linearisierung $\bar{a}_0^{(1)} := \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)}$ ergibt die Korrektur

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = -J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^{(0)}}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right) \quad . \tag{26.111}$$

Eine weitere Verbesserung kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) \equiv \dot{\Theta}\cos\bar{i}_0 - \dot{\zeta}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) = 0 \qquad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \tag{26.112}$$

iterativ erreicht werden. Für langfristige Aussagen wird nicht der oskulierende Wert für die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels $\dot{\zeta} = G/r^2$ aus einer Ephemeridenrechnung verwendet, sondern der mittlere Wert aus Beziehung (21.62): $\dot{\zeta} \triangleq \dot{\bar{\zeta}} = \overline{n_H}$.

Mit diesem Verfahren einer Bahnauswahl ist eine spezielle Familie von Kreisbahnen gefunden, welche sich durch scheinbare Spitzenpunkte in der nördlichen und der südlichen Wende auszeichnet. Da es sich um Kreisbahnen handelt, sind die wesentlichen *Kepler*elemente wie häufig im Falle einer Bahnauswahl durch eine Relation zwischen der großen Bahnhalbachse und der Inklination gekennzeichnet. In Bild 26-12 ist diese Relation durch die obere (rote) Kurve dargestellt. Sie beginnt in der geostationären Bahn und verläuft asymptotisch zur Polbahn (grüne Kurve für *i*=90°).

Für eine weitere Abschätzung werde die Lösung (26.112) mit $a_{ok} := \bar{a}_0^{(\nu)}$ bezeichnet. Für Halbachsen $a > a_{ok}$ wird mit einer als fest angenommenen Inklination $\bar{i}_0$ die Relation

$$\dot{\Theta} = \sqrt{\frac{\mu}{a_{ok}^3}}\frac{1}{\cos\bar{i}_0} > \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{1}{\cos\bar{i}_0} = \dot{\alpha}\left[\sin^2 u = 1\right] > \dot{\alpha}\left[\sin^2 u = 0\right] = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\cos\bar{i} \quad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \tag{26.113}$$

erhalten.

Das bedeutet: für alle Bahnen oberhalb der Kurve mit Bahnen mit scheinbar stationären Punkten ist $\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$, sie sind somit alle scheinbar rückläufig. Auch der Erdmond kann als ein Erdsatellit aufgefasst werden, wenn seine mittlere geozentrische Entfernung[1] $a_{\leftmoon} = 384408\ \mathrm{km}$ als große Bahnhalbachse gedeutet wird. Der Mond bewegt sich also scheinbar rückläufig um die Erde (siehe in Bild 26-12). Dasselbe kann auch für die Sonne festgestellt werden, da die Bewegung der Sonne mathematisch als die eines Erdsatelliten um die Erde gedeutet werden kann. Damit bewegt sich also auch die Sonne scheinbar rückläufig um die Erde. Abgesehen von den stationären Punkten ist eine derartige Bahn stets scheinbar rückläufig.

BEISPIEL: Berechne die große Bahnhalbachse einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn unter der Neigung i=50°, wenn die Bahn scheinbar stationäre Bahnpunkte aufweisen soll.

Die erste Näherung aus (26.110) ergibt $\bar{a}_0^{(0)} = 56610.707453\ \mathrm{km}$, mit der Verbesserung (26.111) $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 0.186347\ \mathrm{km}$ lautet die Lösung $\bar{a}_0^{(1)} = 56610.893900\ \mathrm{km}$.

[1] Anhang E.5, Band V

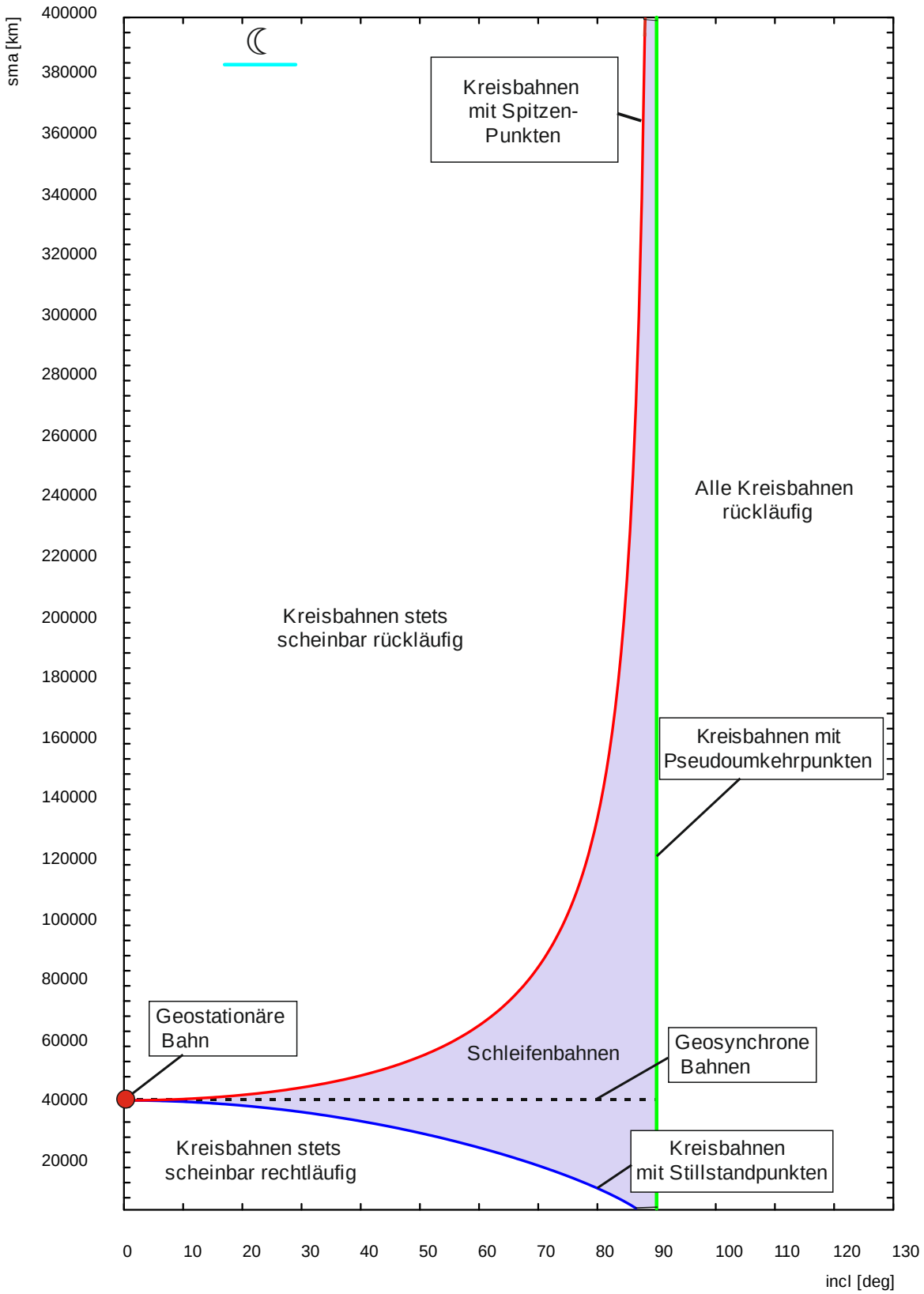


Bild 26-12: Familien von Kreisbahnen mit stationären Punkten (rote Kurve oben) und Stillstandpunkten (blaue Kurve unten), sowie Polbahnen mit Pseudoumkehrpunkten (grüne Kurve). Die Bahn des Mondes wird als scheinbare Erdsatellitenbahn gedeutet (in gleicher Weise auch die Sonne).

Die Iteration (26.112) mit der Genauigkeit $\left|\Delta fct\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)\right| < 4\times10^{-10}$ rad/s führt zu keiner weiteren Verbesserung. Die Projektion dieser Bahn auf die Erdoberfläche in Bild 26-13 zeigt die typischen Spitzen für die Argumente der Breite $u_1 = 90°, u_2 = 270°$. Außerhalb dieser beiden Punkte sind keine scheinbar stationären Bahnpunkte auf derartigen Kreisbahnen möglich. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \text{-}560°.060578\ /\overline{P_D}$. ◄

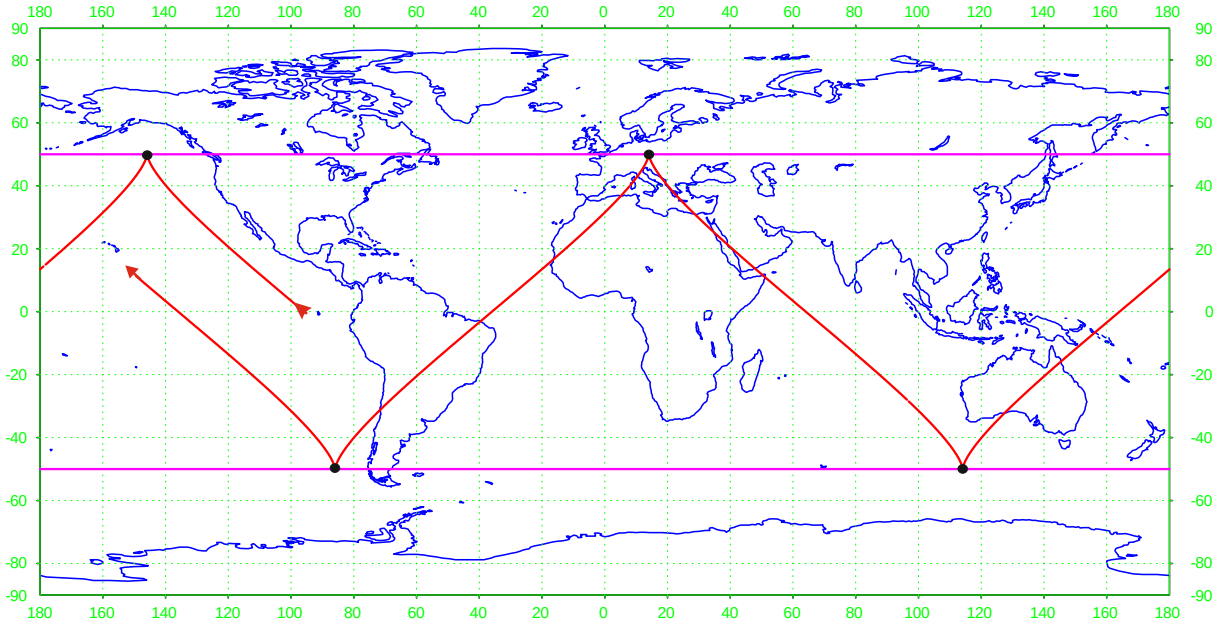


Bild 26-13: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=50° mit scheinbar stationären Bahnpunkten (Spitzenpunkte), große Bahnhalbachse $\bar{a} = 56610.894$ km

26.7.2.4 Wendepunkte auf geneigten Kreisbahnen

Für eine weitere Gruppe besonderer Bahnpunkte sei die Bedingung $\dot{\delta} = 0.0/\text{s}$ beibehalten, jedoch $\dot{\alpha} \neq \dot{\Theta}$ zugelassen. Auf geneigten Bahnen kommen derartige Bahnpunkte nach der Variationsgleichung (26.83) nur dann vor, wenn $\cos u = 0$, d.h. in der nördlichen und südlichen Wende der Bahn wie im Fall der Spitzenpunkte. Jedoch findet wegen $\dot{\alpha} \neq \dot{\Theta}$ keine Stationarität statt.

26.7.2.5 Stillstandpunkte auf geneigten Kreisbahnen

Eine weitere Bahnfamilie erhalten wir, wenn die Satelliten eine Nord-Süd-Drift erfüllen $\left(\dot{\delta} \neq 0\right)$, jedoch Stillstand in Ost-West Richtung annehmen sollen. Aus der Bedingung $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ kann die Variationsgleichung (26.82) (auf Seite 425) für beliebige Inklinationen $0° < \bar{i}_0 \leq 90°$ nach dem Argument der Breite

$$\sin u = \pm\frac{1}{\sin\bar{i}_0\sqrt{\dot{\Theta}}}\sqrt{\dot{\Theta} - \dot{\zeta}\cos\bar{i}_0} \qquad \left\langle \dot{\alpha} = \dot{\Theta}\ ,\ 0° < \bar{i}_0 \leq 90° \right. \tag{26.114}$$

aufgelöst werden. Stationäre Bahnpunkte können somit nur dann auftreten, wenn die Bedingung

$$\dot{\Theta} \geq \dot{\zeta}\cos\bar{i}_0 \tag{26.115}$$

erfüllt wird. Die Grenzkurve lautet in diesem Fall

$$\dot{\Theta} = \dot{\zeta}\cos\bar{i}_0 \quad \left\langle \dot{\delta} \neq 0,\ \dot{\alpha} = \dot{\Theta},\ \sin\bar{i}_0 \neq 0 \right. \quad . \tag{26.116}$$

Sie folgert, dass die besonderen Bahnpunkte wegen $\sin u = 0$ auf dem Äquator liegen, mithin im auf- bzw. absteigenden Bahnknoten. Um die entsprechende mittlere kreisförmige Bahn zu erhalten, wird wie in der Beziehung (23.54) der säkulare Anteil der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels mit den säkularen Variationen der Elemente $\overline{M}_0, \omega, \Omega$ verwendet:

$$\dot{\zeta}\left[\bar{e}_0 = 0.0\right] = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\left[1 - \frac{3}{2} J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^2}\left(1 - 3\cos^2\bar{i}_0\right)\right] + O\left(J_2^2\right) + \delta\left(\dot{\zeta}\right) \quad . \tag{26.117}$$

Bei Vorgabe einer Inklination $\bar{i}_0 < 90°$ kann mit Hilfe der Zuordnung (26.116) die entsprechende mittlere Bahnhalbachse berechnet werden. Als erste Näherung erhalten wir

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu\cos^2\bar{i}}{\dot{\Theta}^2}} \quad . \tag{26.118}$$

Eine erste Verbesserung mit Hilfe der Linearisierung $\bar{a}_0^{(1)} := \bar{a}_0^{(0)} + \Delta\bar{a}_0^{(1)}$ ergibt wieder die Korrektur

$$\Delta\bar{a}_0^{(1)} = -J_2 \frac{R_E^2}{\bar{a}_0^{(0)}}\left(1 - 3\cos^2\bar{i}_0\right) \quad . \tag{26.119}$$

Eine weitere Verbesserung kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \dot{\Theta} - \dot{\zeta}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)\cos\bar{i}_0 = 0 \qquad \left\langle \nu = 1, 2, 3, \cdots \right. \tag{26.120}$$

iterativ erhalten werden. Um eine langfristig gültige Bahn mit den geforderten speziellen scheinbaren Bahnpunkten zu erreichen muss hier für die Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels dessen mittlerer Anteil nach Formel (21.62) (aus Abschnitt 21.3) verwendet werden.

Beim Äquatordurchgang ($\sin u = 0$) hat der Satellit nach Vorgabe keine Ost-West-Drift, jedoch wegen $\dot{\delta} \neq 0$ eine Nord-Süd-Drift. Auf Kreisbahnen ist die Drift des *Hansen*schen Bahnwinkels konstant: $\dot{\zeta} \triangleq \dot{\bar{\zeta}} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3} = \text{const.}$. Bewegt sich der Satellit vom Äquator weg, folgt aus der Variationsgleichung (26.82) der Rektaszension im Fall rechtläufiger Bahnen $\left(\cos\bar{i}_0 > 0\right)$, dass die Drift der Rektaszension dann größer als die tropische Erdrotation ist: $\dot{\Theta} < \dot{\alpha}$, in den Knoten ist $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ die untere Grenze der Drift der Rektaszension. Da dann[1] $\dot{\lambda} > 0$, ist die Bahn des Satelliten außerhalb der Knoten stets auch scheinbar rechtläufig. Dies gilt für die nördliche wie die südliche Erdhälfte. In den Knoten kommt die Ost-West-Drift zum Stillstand, die Knoten müssen also orthogonal zum Äquator überflogen werden. Wenn in der Bedingungsgleichung (26.116) $\sin\bar{i}_0 \to 0$ wird $\dot{\Theta} = \dot{\zeta}$, d.h. der Satellit bewegt sich so schnell wie die Erde rotiert, das bedeutet: der geostationäre Fall ist der Grenzfall der erhaltenen Bahnfamilie.

Die hier vorgestellte Bahnauswahl führt auf eine neue Familie von geneigten Kreisbahnen, welche sich durch scheinbare Stillstandpunkte bei Knotenüberflügen auszeichnet. Da es sich um Kreisbahnen handelt, sind die wesentlichen *Kepler*elemente auch in diesem Fall wie häufig im Falle einer Bahnauswahl durch eine Relation zwischen der großen Bahnhalbachse und der Inklination gekennzeichnet. In Bild 26-12 ist diese Relation durch die untere (blaue) Kurve dargestellt. Sie beginnt in der geostationären Bahn und verläuft asymptotisch zur Polbahn (grüne

[1] Siehe etwa Tabelle 26-6 auf Seite 430

Kurve für *i*=90°). Abgesehen von den Stillstandpunkten sind derartige Bahnen stets auch scheinbar rechtläufig.

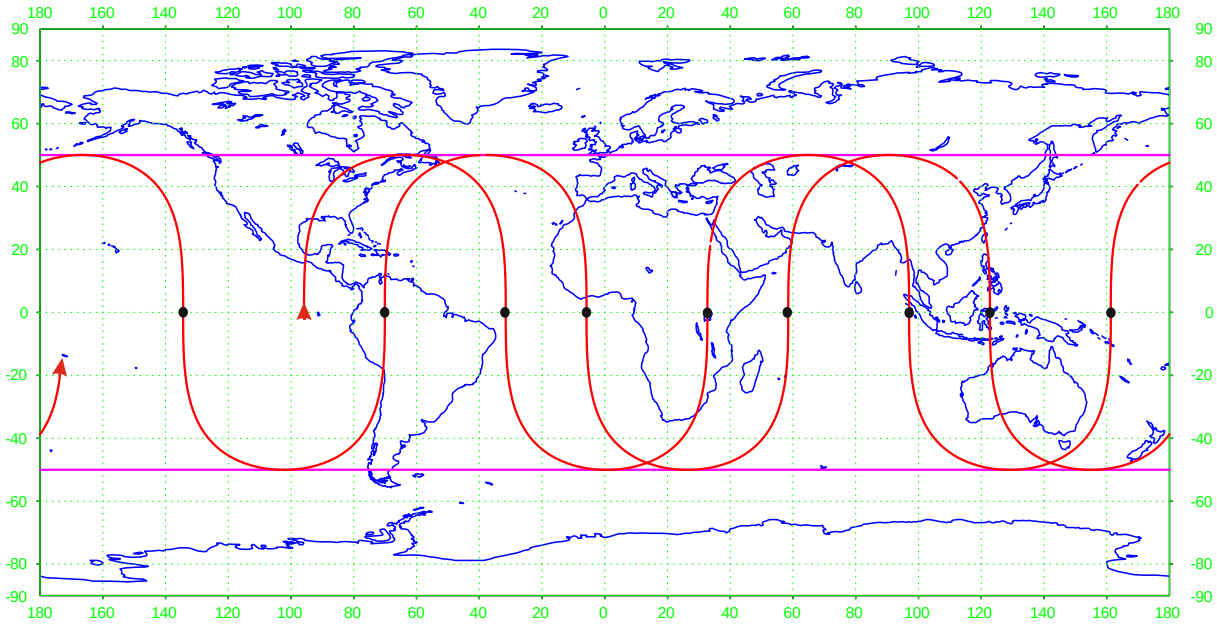


Bild 26-14: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=50° mit scheinbaren Stillstandbahnpunkten (d.h. keine Ost-West-Drift) in den Bahnknoten, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 31404.597$ km

Wegen $\dot{\Theta} < \dot{\alpha}$ sind alle Bahnen unterhalb dieser Kurve rechtläufig. Dies kann ersehen werden, wenn mit der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels im Fall kreisförmiger Satellitenbahnen $\dot{\zeta} = \sqrt{\mu / a^3}$ bei konstanter Inklination Halbachsen eingesetzt werden, die kleiner als die entsprechende Halbachse $a_{uK} := \bar{a}_0^{(\nu)}$ der Bahnen mit Stillstandpunkten aus den Iterationen (26.118) - (26.120). Nach Variationsgleichung (26.82) folgt daraus:

$$\dot{\Theta} = \sqrt{\frac{\mu}{a_{uk}^3}} \cos \bar{i} < \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \cos \bar{i} < \dot{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\cos \bar{i}}{1 - \sin^2 \bar{i}_0 \sin^2 u} \quad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \qquad (26.121)$$

BEISPIEL: Berechne die große Bahnhalbachse einer kreisförmigen Erdsatellitenbahn unter der Neigung i=50°, wenn die Bahn scheinbare Stillstandpunkte in den Knoten aufweisen soll. Die Näherungsformel (26.118) ergibt $\bar{a}_0^{(0)} = 31404.260983$ km. Mit der Verbesserung (26.119) $\Delta\bar{a}_0^{(1)} = 0.335918$ km wird der Wert $\bar{a}_0^{(1)} = 31404.596900$ km erhalten. Die Iteration (26.120) bringt keine weitere Verbesserung. Diese Bahn ist in Bild 26-14 dargestellt. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -231°.412636 \ / \overline{P_D}$. ◄

26.7.2.6 Kreisförmige Schleifenbahnen

Unter dem Begriff „Schleifenbahnen“ wollen wir Bahnen verstehen, die zwischen scheinbar rechtläufigen und rückläufigen Bahnabschnitten abwechseln. Dabei können Bahnen vorkommen, die in einem Umlauf scheinbare Überscheidungspunkte aufweisen.

Aus der Bedingung (26.87) $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ für stationäre Punkte in Ost-West-Richtung folgt die Gleichung (26.114) zur Berechnung dieser Punkte über die Lösung des zugehörigen Argumentes der Breite. Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Aufgabe gelöst, wenn die Wurzel auf der rechten Seite verschwindet, was zur Familie der Bahnen mit Stillstandpunkten bei Äquatorüberflug führte. Welche Aussagen lassen sich machen, wenn statt (26.116) die Relation

$$\dot{\Theta} > \dot{\zeta} \cos \bar{i}_0 \tag{26.122}$$

zugelassen wird? In diesem Fall kann das Argument der Breite aus der zentralen Bedingungsgleichung (26.114) berechnet werden. Es ergeben sich pro Satellitenumlauf vier Lösungen $u_\nu \left(\nu = 1,2,3,4\right)$. Die zugehörigen knotenbezogenen Rektaszensionen sind identisch mit den Längendifferenzen zu dem jeweiligen aufsteigenden Knoten

$$\alpha_N = \sigma_i \left(\alpha_\nu - \Omega_\nu\right) = \sigma_i \left[\left(\lambda_\nu - \Theta_{G\nu}\right) - \left(\lambda_{\Omega_\nu} - \Theta_{G\nu}\right)\right] = \sigma_i \left(\lambda_\nu - \lambda_{\Omega\nu}\right) \quad . \tag{26.123}$$

Im Fall von rechtläufigen Bewegungen $\left(\sigma_i = +1\right)$ können analog der Beziehungen (26.81) die geographischen Längen und entsprechenden Deklinationen der vier scheinbar stationären Punkte pro Satellitenumlauf berechnet werden aus

$$\begin{aligned} \cos\left(\lambda_\nu - \lambda_{\Omega\nu}\right)\cos\delta_\nu &= \cos u_\nu \\ \sin\left(\lambda_\nu - \lambda_{\Omega\nu}\right)\cos\delta_\nu &= \sin u_\nu \cos i_\nu \qquad \langle \nu = 1,2,3,4 \quad . \\ \sin\delta_\nu &= \sin u_\nu \sin i_\nu \end{aligned} \tag{26.124}$$

Hier bedeutet der Index ν für den Bahnparameter Inklination i die Zeitabhängigkeit beim Durchlaufen der vier scheinbar stationären Punkte. Im Fall einer Bahnauslegung wird diese Zeitabhängigkeit der Inklination üblicherweise vernachlässigt $\left(i_\nu \triangleq \bar{i}_0\right)$. Die Differenz in geographischer Länge kann auch berechnet werden aus

$$\tan\left(\lambda_\nu - \lambda_\Omega\right) = \tan u_\nu \sin \bar{i}_0 \quad . \tag{26.125}$$

Eine alternative Berechnung der geographischen Längen λ_ν kann mit einer Ephemeridenrechnung erfolgen. Dazu muss der zugehörige Zeitpunkt t_ν durch Vorgabe des mit (26.114) errechneten Argumentes der Breite u_ν errechnet werden. Der entsprechende Rechenvorgang ist in Abschnitt 23.3.2 beschrieben.

Mit Hilfe der Variation der Rektaszension (26.82) kann eine Analyse des scheinbaren Bewegungsverhaltens derartiger Bahnen durchgeführt werden. Da in diesem Fall die Bedingung für stationäre Punkte

$$\dot{\Theta} = \dot{\zeta} \frac{\cos \bar{i}_0}{\cos \delta_\nu} \tag{26.126}$$

erfüllt ist, ist für alle Punkte oberhalb der stationären Punkte die Bedingung

$$\dot{\alpha} > \dot{\Theta} \quad \langle |\delta| > |\delta_\nu| \quad , \cos\delta < \cos\delta_\nu \tag{26.127}$$

erfüllt. In diesem Teil der Bahn bewegt sich der Satellit scheinbar rechtläufig. Unterhalb dieser Punkte, also näher zum Äquator hin, bewegt sich der Satellit scheinbar rückläufig:

$$\dot{\alpha} < \dot{\Theta} \quad \langle |\delta| < |\delta_\nu| \quad , \cos\delta > \cos\delta_\nu \quad . \tag{26.128}$$

Dies führt auf die allgemeingültige Aussage:

- *Ein Satellit auf einer kreisförmigen Bahn mit scheinbar stationären Punkten außerhalb des Äquators und der nördlichen oder südlichen Wende bewegt sich bei*

Äquatorüberflug stets scheinbar rückläufig, im nördlichen und südlichen Wendepunkt stets scheinbar rechtläufig. ◄

Eine kreisförmige Schleifenbahn kann nur vorkommen, wenn sich das Parameterpaar (a,i) im Zwischenbereich der Kurven für stationäre Punkte und Stillstandpunkte entsprechend Bild 26-12 befindet. Außerhalb dieses Gebiets kann es keine kreisförmigen Schleifenbahnen geben. Dies zeigen die folgenden Abschätzungen:

1. Kreisbahnen mit Spitzenpunkten sind wegen $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ mit Bedingung (26.82) durch $\sin u = \pm 1$ gekennzeichnet. Sie haben nach (26.110) - (26.112) die große Bahnhalbachse $a_{oK} = \bar{a}_0^{(\nu)}$. Nach Beziehung (26.113) sind Kreisbahnen oberhalb der Kurve der Bahnen mit Spitzenpunkten, d.h. für Bahnen mit den großen Halbachsen $a > a_{oK}$, stets scheinbar rückläufig: $\dot{\alpha} < \dot{\Theta}$. Sie können also keine scheinbar stationären Bahnpunkte enthalten.
2. Kreisförmige Polbahnen haben nach Gleichung (26.114) scheinbar stationäre Punkte ebenfalls für $\sin u = \pm 1$, d.h. über den Polen. Da für Polbahnen stets $\dot{\alpha} = 0$, sind Polbahnen wegen $\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta} < 0$ stets scheinbar rückläufig. Die Pole zeigen sich als ein Grenzfall. Deshalb werden die Pole im Zusammenhang mit Schleifenbahnen als „Pseudoumkehrpunkte“ bezeichnet. Die kreisförmigen Polbahnen, auf denen kein Wechsel zwischen rechtläufigen und rückläufigen Bahnabschnitten stattfinden kann, sind in Bild 26-12 durch die Kurve i=90° (grüne Kurve) dargestellt.
3. Kreisbahnen mit scheinbaren Stillstandpunkten sind wegen $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ mit Bedingung (26.82) durch $\sin u = 0.0$ gekennzeichnet. Sie haben nach (26.118) - (26.120) die große Bahnhalbachse $a_{uK} = \bar{a}_0^{(\nu)}$. Nach Beziehung (26.121) sind Kreisbahnen unterhalb der Kurve der Bahnen mit scheinbaren Stillstandpunkten, d.h. für Bahnen mit den großen Halbachsen $a < a_{uK}$, stets scheinbar rechtläufig: $\dot{\alpha} > \dot{\Theta}$. Sie können also keine stationären Bahnpunkte enthalten.
4. Retrograde Bahnen wurden bereits als stets scheinbar rückläufig deklariert (siehe etwa in Tabelle 26-7 auf Seite 424). Diese Aussage kann auch mit Hilfe der Gleichung (26.114) bestätigt werden: für retrograde kreisförmige Bahnen ist, da auch immer $\dot{\zeta} = G / r^2 > 0$,

$$\sin u = \left| \pm \frac{1}{\sin \bar{i}_0} \sqrt{1 + \frac{\dot{\zeta} \left| \cos \bar{i}_0 \right|}{\dot{\Theta}}} \right| > 1 \qquad \left\langle \bar{i}_0 > 90° \right. \quad , \tag{26.129}$$

es kann also keine Lösung für $\sin u$ geben, somit keine scheinbar stationären Punkte mit $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$.

Inklination	a [Spitzenpunkte]	a [Stillstandpunkte]
0°	42166.261 km	42166.261 km
10°	42598.673 km	41738.053 km
20°	43951.061 km	49453.248 km
30°	46408.863 km	38310.130 km
40°	50363.202 km	35301.343 km
50°	56610.894 km	31404.597 km
60°	66931.287 km	26561.350 km
70°	86213.270 km	20619.692 km
80°	135465.270 km	13120.671 km
85°	214492.693 km	8283.275 km

Tabelle 26-9: Die Grenzen der großen Halbachsen kreisförmiger Satellitenbahnen mit scheinbar stationären Punkten bzw. Stillstandpunkten für einige Inklinationen. Im Zwischenbereich zwischen diesen Grenzpunkten befinden sich die großen Bahnhalbachsen der kreisförmigen Schleifenbahnen (siehe in Bild 26-12, auf Seite 434).

Zusammenfassung:

- *Kreisförmige Schleifenbahnen können nur dann auftreten, wenn das Parameterpaar* $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ *aus dem Zwischenbereich der Kurven für Bahnen mit scheinbar stationären Punkten, Stillstandpunkten und Pseudoumkehrpunkten genommen wird.* ◄

Das Parameterpaar $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ für kreisförmige Schleifenbahnen kann aus Bild 26-12 auf Seite 434 abgelesen werden. Die oberen und unteren Grenzen der großen Bahnhalbachsen solcher Bahnen sind für einige Inklinationen in Tabelle 26-9 zusammengestellt. Zur Erläuterung werden einige solcher Bahnen in den folgenden Beispielen dargestellt.

26.7.2.6.1 Kreisnahe geosynchrone Bahnen auf geneigten Bahnen

Eine zentrale Rolle innerhalb der Familien kreisnaher Schleifenbahnen nehmen die kreisnahen geosynchronen Bahnen ein. Dies lässt sich schon in Bild 26-12 durch die gestrichelte Linie ersehen, welche die Familie der kreisnahen geosynchronen Bahnen enthält.

Die Bewegung der Knotenlänge wird durch

$$\lambda_\Omega\left[t\right] = \lambda_{\Omega 0} + \dot{\lambda}_{\Omega s}\left(t - t_0\right) + \delta\left[\lambda_\Omega\right] \quad \left\langle \lambda_{\Omega 0} := \lambda_\Omega\left[t_0\right] \right. \tag{26.130}$$

beschrieben. Die säkulare Drift der Knotenlänge[1] ist aus

$$\dot{\lambda}_{\Omega s} = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\overline{P_D}} \tag{26.131}$$

bekannt, wenn $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf $\overline{P_D}$ ist. Mittlere geosynchrone Bahnen sind durch die Knotenlängenverschiebung

[1] nach Formel (23.228), Abschnitt 23.5.1

$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -360° \mathrel{\hat{=}} -2\pi$ gekennzeichnet[1]. Nach einem halben drakonitischen Umlauf beträgt die mittlere Knotenlängenverschiebung nach (26.130)

$$\lambda_\Omega - \lambda_{\Omega 0} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \frac{\overline{P_D}}{2} = -180°. \tag{26.132}$$

Die geographische Länge der Position eines Satelliten auf einer kreisnahen geosynchronen Bahn nach einem halben Umlauf kann mit $u = 180°$ aus den Transformationsformeln (26.124) berechnet werden: $\lambda[u = 180°] = \lambda_\Omega + 180°$. Bei Bezug auf einen Anfangswert zum Zeitpunkt t_0 mit Anfangsknotenlänge $\lambda_{\Omega 0}$ bedeutet dies, dass der Knoten der Bahn nach einem halben Umlauf die geographische Länge

$$\lambda = \lambda_\Omega - 180° = (\lambda_{\Omega 0} - 180°) + 180° = \lambda_{\Omega 0} \tag{26.133}$$

beträgt. Die Konsequenz ist:

- *Auf kreisnahen geosynchronen Satellitenbahnen haben aufsteigender und absteigender Knoten stets dieselbe geographische Länge.* ◄

Die Folge dieser Aussage ist die Bahnform der stehenden 8 für alle kreisnahen geosynchronen Bahnen.

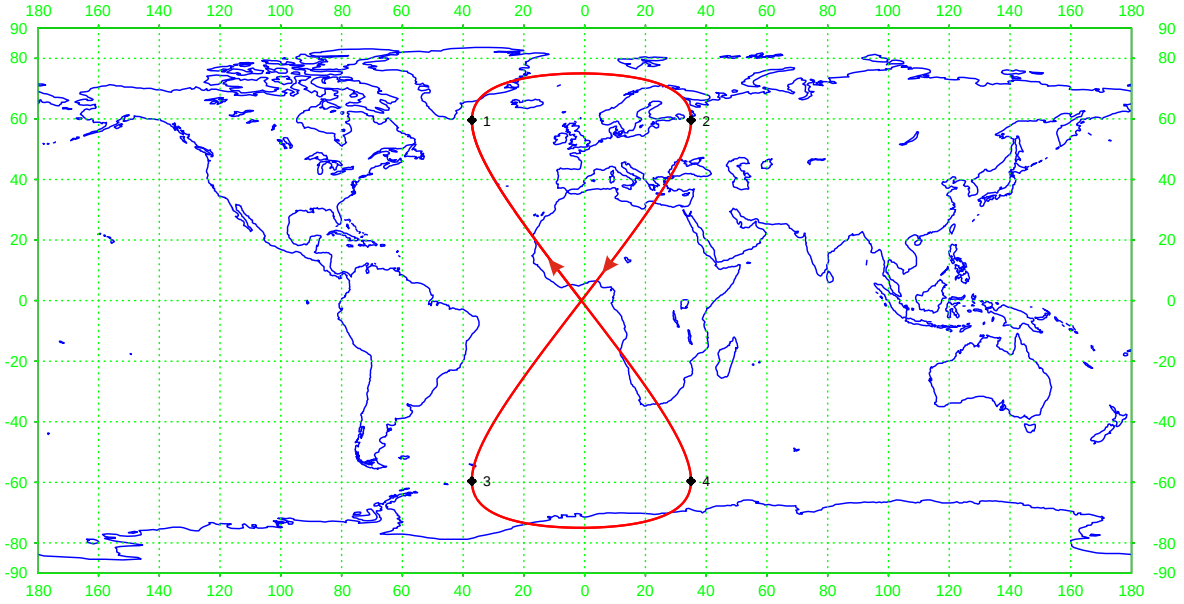


Bild 26-15: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 42166.2614$ km. Die vier Umkehrpunkte sind gekennzeichnet

BEISPIEL 1: Die geosynchrone kreisförmige Schleifenbahn mit großer Halbachse $\bar{a}_G^{(1)} = 42166.261432\,\text{km}$ und Inklination $\bar{i}_0 = 75°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = 86172.846$ s. Als Epoche wurde t_0 : 2017-02-15/20:00:0.00 gewählt. Die Rektaszension des aufsteigenden Knotens ist $\bar{\Omega}_0$ =85°, die mittlere Sternzeit Greenwich zur Epoche Θ_{G0} =86°.013426.

[1] Siehe in Abschnitt 26.6.2 die Formeln (26.77) und (26.78)

Die säkulare Knotenlängendrift pro Tag beträgt $\dot{\lambda}_{\Omega s} = -360°.989083 / d$, die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischem Umlauf[1] $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\ \overline{P_D} = -360°.0400.$

Die Bahn (siehe Bild 26-15) hat pro Umlauf die scheinbaren stationären Bahnpunkte:

u	$\lambda_\nu - \lambda_{\Omega\nu}$	λ_ν	δ	φ
63°.037080	26°.965840	322°.906349	59°.419410	59°.444873
116°.962920	153°.034160	35°.044918	59°.423552	59°.449012
243°.037080	206°.965840	322°.888040	-59°.422924	-59°.448385
296°.962920	333°.034160	35°.026600	-59°.423632	-59°.449093

◀

26.7.2.6.2 Schleifenbahnen mit Überschneidung pro Umlauf

Die kreisnahe geosynchrone Satellitenbahn kann als Idealfall einer Schleifenbahn angesehen werden. Bei Bahnen mit größerer Bahnhalbachse wird der Betrag der Knotenlängenverschiebung gegenüber der geosynchronen Bahn wachsen[2]: $\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| > 360°$. Daraus folgt, dass nach einem halben Umlauf der Betrag der Knotenlängendifferenz gegenüber dem Fall der geosynchronen Bahn größer ist, der absteigende Knoten ist somit gegenüber dem aufsteigenden Knoten nach Westen verschoben. Solange die Bahn unterhalb der Bahnen mit Spitzenpunkten liegt, hat sie zwei Umkehrpunkte, es muss somit eine Schleifenbildung mit Überschneidung stattfinden:

- *Auf kreisförmigen Satellitenbahnen mit Umkehrpunkten, deren große Bahnhalbachse größer als die der geosynchronen Bahn ist, durchläuft der Satellit Schleifen mit Überschneidungen.* ◀

Der Grenzfall ist die kreisförmige geosynchrone Bahn, deren Überschneidung über dem Äquator liegt. Bei den höheren Kreisbahnen mit zwei Umkehrpunkten kann der Überschneidungspunkt berechnet werden, wenn zu zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t_1, t_2 die geographischen Koordinaten der Satellitenbahn die Bedingung

$$\lambda(t_1) = \lambda(t_2)\ ,\quad \delta(t_1) = \delta(t_2) \tag{26.134}$$

erfüllen. Im ersten Punkt wächst die geographische Breite, es muss $\dot{\delta}_1 > 0$, im zweiten Punkt muss $\dot{\delta}_2 < 0$ sein. Infolge der Kreisbahn ist der Betrag dieser Variationen gleich

$$\dot{\delta}(t_2) = -\dot{\delta}(t_1) \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{26.135}$$

Wegen Variationsgleichung (26.83) gilt somit für die entsprechenden Argumente der Breite

$$\cos u_2 = -\cos u_1 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 180° - u_1 \quad . \tag{26.136}$$

Aus Symmetriegründen hat dann der Überschneidungspunkt zum vorhergehenden aufsteigenden Knoten die Längendifferenz

$$\Delta\lambda_K = \frac{\overline{\Delta\lambda_\Omega}}{4} \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{26.137}$$

---

[1] Der Rundungsfehler wird auf unzureichende Stellenzahl zurückgeführt.

[2] Vgl. etwa Formel (23.228) und die entsprechenden Ausdrücke für die säkulare Knotenlängendrift und die mittlere drakonitische Umlaufzeit

Habe der aufsteigende Knoten die geographische Länge $\lambda_{\Omega 0}$, so hat der Überschneidungspunkt die Länge

$$\lambda(t_1) = \lambda_{\Omega 0} - \frac{\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right|}{4} \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{26.138}$$

Analog erfolgt die Berechnung eines Überschneidungspunktes über der südlichen Hemisphäre. Zur Berechnung der entsprechenden Deklination wird das Argument der Breite $u_1 = u(t_1)$ benötigt, wozu die Zeit t_1 mit folgender Überlegung berechnet werden kann:

Wegen der ersten Bedingung (26.134) folgt mit den Formeln (26.1) und (26.3) für die Rektaszension $\alpha_{1/2} = \lambda_{1/2} + \Theta_{G1/2}$ und damit

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \dot{\Theta}(t_2 - t_1) \quad . \tag{26.139}$$

Das Zeitintervall $(t_2 - t_1)$ wird zum Durchlaufen der Schleife von einem Überschneidungspunkt und zu diesem zurück benötigt. Da der Satellit sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegen soll, ist dieses Zeitintervall mit der mittleren drakonitischen Umlaufzeit in Bezug auf die Knotendurchgangszeit t_Ω und aus Symmetriegründen berechenbar:

$$t_2 - t_1 = \frac{\overline{P_D}}{2} - 2(t_1 - t_\Omega) \quad . \tag{26.140}$$

Die Differenz in Rektaszension wird mit Hilfe der Transformationsformeln (26.81) berechnet:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_{1/2} - \Omega)\cos\delta &= \cos u_{1/2} \\ \sin(\alpha_{1/2} - \Omega)\cos\delta &= \sin u_{1/2}\cos\bar{i}_0 \\ \sin\delta &= \sin u_{1/2}\sin\bar{i}_0 \quad . \end{aligned} \tag{26.141}$$

Mit Hilfe der Zuordnung (26.136) folgt

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1)\cos^2\delta = \sin(2u_1)\cos\bar{i}_0 \quad . \tag{26.142}$$

Wegen der gleichmäßigen Bewegung des Satelliten ergibt sich das Argument der Breite mit der mittleren drakonitischen Bewegung[1] zu

$$u_1 = \overline{n_D}(t_1 - t_\Omega) \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \tag{26.143}$$

Die Bedingungsgleichung zur Berechnung des Zeitintervalls $(t_1 - t_\Omega)$ lautet dann:

$$\begin{aligned} &\sin\left[\dot{\Theta}\left(\frac{\overline{P_D}}{2} - 2(t_1 - t_\Omega)\right)\right]\left[1 - \sin^2\bar{i}_0\sin^2\left(\overline{n_D}(t_1 - t_\Omega)\right)\right] \\ &\qquad = \cos\bar{i}_0\sin\left[2\overline{n_D}(t_1 - t_\Omega)\right] \qquad \langle \bar{e}_0 = 0.0 \quad . \end{aligned} \tag{26.144}$$

Da die Knotendurchgangszeit t_Ω als bekannt angesehen werden kann, wird nach Berechnung des Zeitintervalls $(t_1 - t_\Omega)$ auch der benötigte Zeitpunkt t_1 erhalten. Damit kann das gesuchte Argument der Breite u_1 mit dem gegebenen Bahnmodell berechnet werden, mit Hilfe der dritten Gleichung (26.141) auch die gesuchte Deklination des Überschneidungspunktes. Falls gewünscht, liefert Gleichung (26.140) auch den zweiten Zeitpunkt t_2.

[1] siehe etwa Formel (23.48) in Abschnitt 23.2.1

BEISPIEL 2: Die kreisförmige Schleifenbahn mit großer Halbachse $\bar{a} = 70000.000\,\text{km}$ und Inklination $\bar{i}_0 = 70°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = 184315.202\,\text{s} \hat{=} 2^d\,3^h\,11^m\,55^s.202$ und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 161804.488\,\text{s}$. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -770°.084252 / \overline{P_d}$.

		t_v [d,h,m,s]	u	λ_v	δ	φ
1	westl. Wende 1	1/10:59:18.0	77°.26121	72°.271100	66.426611	66°.439453
2	nördl. Wende	1/12:47:58.0	89°.99844	78°.486583	69°.997592	70°.008855
3	östl. Wende 1	1/14:36:40.0	102°.735233	84°.704520	66°.426207	66°.439050
4	Kreuzung 1	1/09:12:08.0 1/16:23:49.0	64°.69992 115°.29891	78°.488692	58°.163257	58°.178953
5	Kreuzung 2	2 10 48 12.0 2 17 59 40.0	244°.72222 295°.27622	233°.446569	-58°.179339	-58°.195029
6	westl.Wende 2	2/12:35:18.0	257°.27095	227°.239807	-66°.431659	-66°.444496
7	Südl. Wende	2/14:23:56.0	269°.99922	233°.445084	-69°.997590	-70°.008850
8	östl. Wende 2	2/16:12:33.00	282°.72553	239°.651582	-66°.433476	-66°.446313

Tabelle 26-10: Die speziellen Punkte der kreisförmigen Schleifenbahn $\bar{a} = 70000.000\,\text{km}$, Inklination i=70°, über einen drakonitischen Umlauf

Die Bahn (siehe Bild 26-16) hat pro Umlauf die scheinbaren Umkehrpunkte. Die geographische Länge λ_v ist hier bezogen auf den ersten Umlauf mit Epoche t_0 : 2017-03-01/00:00:0.0 und der Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\bar{\Omega}_0$ =340°.0 mit der zugehörigen geographischen Länge $\lambda_{\Omega 0} = 181°.008855$.

BEISPIEL 3: Die kreisförmige Schleifenbahn mit großer Halbachse $\bar{a} = 45000.000\,\text{km}$ und Inklination $\bar{i}_0 = 50°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = 94999.322\,\text{s}$ und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 926276.293\,\text{s}$. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -396°.921765 / \overline{P_D}$. Die Bahn (siehe Bild 26-17) hat pro Umlauf die scheinbaren Parameter:

u	$\lambda_v - \lambda_\Omega$	λ_v	δ	φ
57°.456127	45°.207559	255°.846144	40°.220747	40°.247594
122°.543873	134°.792441	273°.665208	40°.221066	40°.247913
237°.456127	225°.207559	237°.385283	-40°.246244	-40°.219398
302°.543873	314°.792441	255°.204346	-40°.249261	-40°.222414

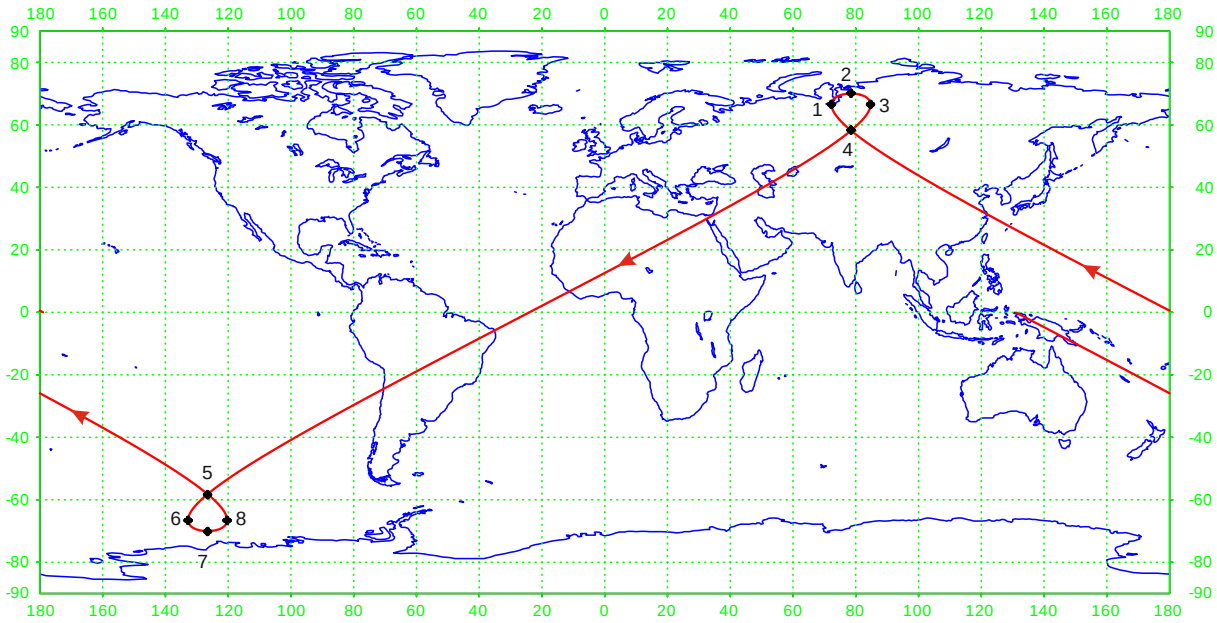


Bild 26-16: Kreisförmige Schleifenbahn mit der Bahnneigung i=70° mit Schleifenbahn, große Bahnhalbachse $\overline{a} = 70000.000\ \text{km}$. ◀

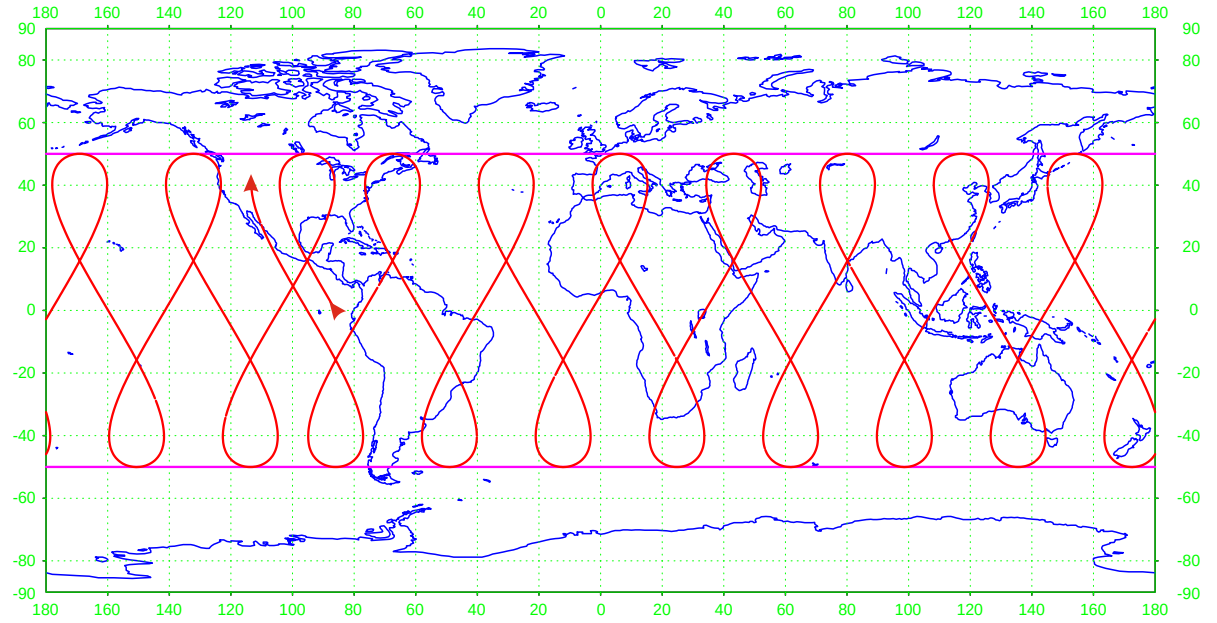


Bild 26-17: Kreisförmige Schleifenbahn mit Überschneidung, große Bahnhalbachse $\overline{a} = 45000.000\ \text{km}$, Bahnneigung i=50° ◀

26.7.2.6.3 Schleifenbahnen ohne Überschneidung

Kreisförmige Schleifenbahnen, deren große Bahnhalbachse unterhalb der einer geosynchronen Bahn liegt, haben eine Knotenlängenverschiebung die kleiner als die der geosynchronen Bahn ist

$$\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| < 360° \qquad \left\langle a < \overline{a_G} \right. \quad . \tag{26.145}$$

Eine solche Schleifenbahn kann daher keine Überschneidung haben, wie die folgenden Beispiele zeigen.

BEISPIEL 4: Die Bahn mit großer Halbachse $\bar{a} = 39000.000$ km und Inklination $\bar{i}_0 = 75°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = 76651.6838$ s und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 694386.8387$ s. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -320°.260471/\overline{P_D}$. Die Bahn (siehe Bild 26-18) hat pro Umlauf die scheinbaren stationären Bahnpunkte:

u	$\lambda_\nu - \lambda_\Omega$	λ_ν	δ	φ
42°.947166	13°.544852	158°.949357	57°.348644	57°.377198
137°.052834	166°.455148	237°.310189	57°.349539	57°.378092
222°.947166	193°.544852	178°.837590	-57°.359252	-57°.387792
317°.052834	346°.455148	257°.161516	-57°.358845	-57°.387385

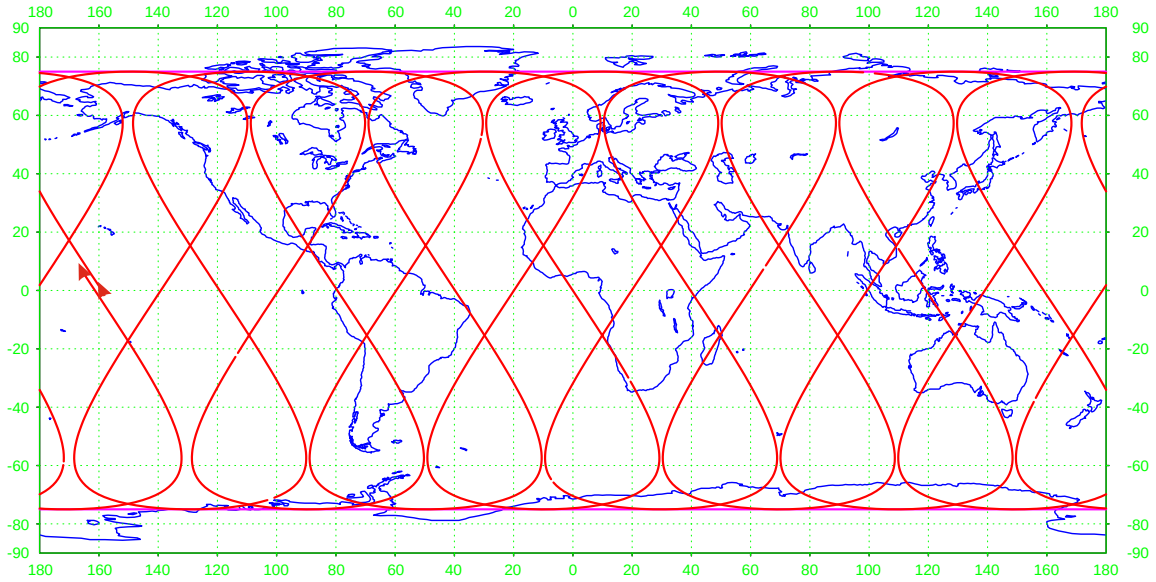


Bild 26-18: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 39000.000$ km ◄

BEISPIEL 5: Die kreisförmige Schleifenbahn mit großer Halbachse $\bar{a} = 25000.000$ km und Inklination $\bar{i}_0 = 75°$ hat die mittlere drakonitische Umlaufzeit $\overline{P_D} = 39341.834$ s und die mittlere Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R} = 72401.971$ s. Die mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem Umlauf beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -164°.382948/\overline{P_D}$. Die Bahn (siehe Bild 26-19) hat pro Umlauf die scheinbaren Umkehrpunkte (die geographische Länge λ_ν ist hier bezogen auf den ersten Umlauf):

u		Tageszeit	λ_v	δ	φ
42°.951728		4693.888 s	221°.295022	41°.137591	41°.328354
137°.049695		14977.184 s	331°.255209	41°.136254	41°.327016
222°.950305		24364.650 s	319°.125620	-41°.181651	-41°.372453
317°.049694		34648.101 s	69°.041663	-41.181651	-41°.372453
42°.950306		44035.566 s	56°.912074	41°.136255	41°.327016
137°.049695		54319.018 s	166°.872261	41°.136254	41°.327016
222°.950306		63706.483 s	154°.742672	-41°.181651	-41°.372453
317°.049694		73989.935 s	264°.658715	-41°.181651	-41°.372453
42°.950306		83377.400 s	252°.529126	41°.136255	41°.327017

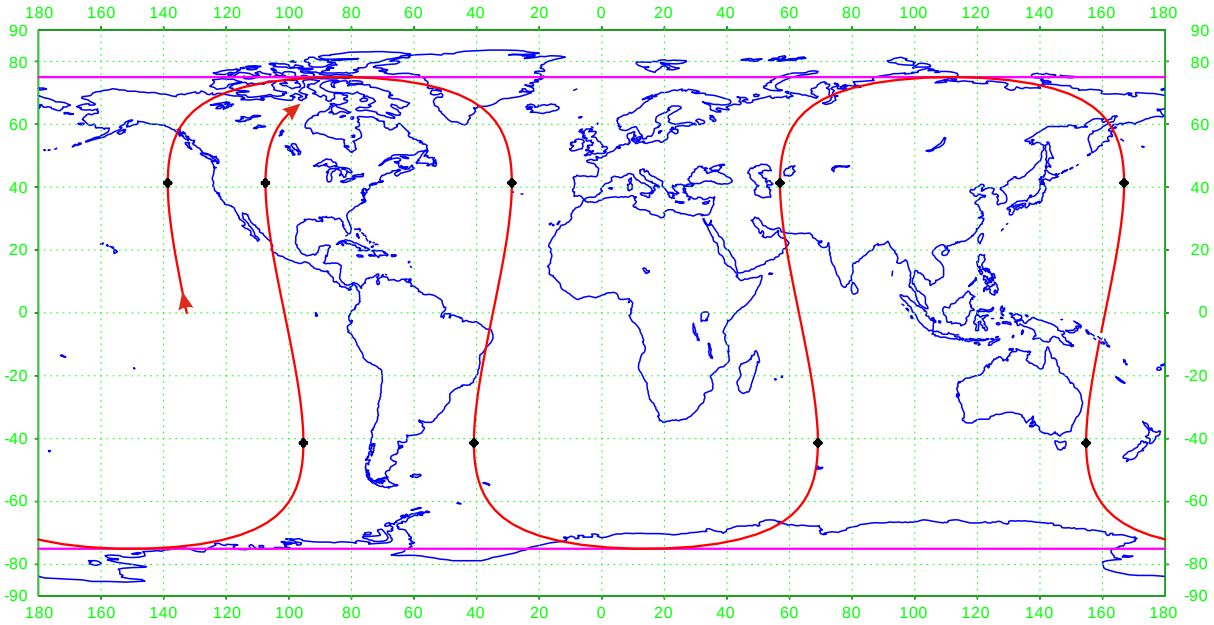


Bild 26-19: Kreisförmige Satellitenbahn mit der Bahnneigung i=75° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, große Bahnhalbachse $\bar{a} = 25000.000$ km ◀

BEISPIEL 6: Konstruiere eine kreisförmige Schleifenbahn mit der mittleren Knotenlängendifferenz $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -30° / \overline{P_D}$. Nach Bedingung (26.115) muss $\dot{\Theta} > \dot{\zeta} \cos \bar{i}_0$ sein. Mit den Beziehungen (26.1) und (26.4) kann wegen $\overline{\Delta\lambda_\Omega} < 0$ und $\dot{\Omega}_s < 0$ für 0°<i<90°

$$\dot{\Theta} = \frac{\Theta_G - \Theta_{G0}}{t - t_0} = -\left|\dot{\Omega}_s\right| + \frac{\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right|}{\overline{P_D}}$$

gesetzt werden. Im Fall von Kreisbahnen und Einschränkung auf mittlere Bewegungen kann die *Hansen*sche Bewegung angenähert werden durch[1]

$$\dot{\zeta} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}} \triangleq \frac{360°}{\overline{P_{K0}}} \quad .$$

Wenn außerdem $\overline{P_{K0}} \approx \overline{P_D}$ angenommen wird, kann die Bedingung $\dot{\Theta} > \dot{\zeta} \cos \bar{i}_0$ ersetzt werden durch

$$\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| > \dot{\Theta}\,\overline{P_{K0}} = \left|\overline{\Delta\lambda_\Omega}\right| - \left|\Delta\Omega\right| > 360° \cos \bar{i}_0 \quad .$$

Diese Bedingung kann also nur erfüllt werden, wenn mit der vorgegebenen Knotenlängendifferenz $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -30° / \overline{P_D}$ die Bahninklination der Bedingung $\bar{i}_0 \geq 85°.220$ genügt. Werde die Inklination $\bar{i}_0 = 87°$ gewählt, kann mit der in Abschnitt 23.5.3 geschilderten Methode die mittlere große Bahnhalbachse berechnet werden: $\bar{a} = 8035.461\,\text{km}$. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_D} = 7175.73429\,\text{s}$, die mittlere Meridian-bezogene Umlaufzeit $\overline{P_R} = 7828.07377$ s. Die Bahn (siehe Bild 26-20) hat pro Umlauf die scheinbaren Umkehrpunkte (die in der Tabelle berechneten Punkte sind auf 1 Sekunde genau berechnet. Wegen der schnellen Satellitenbewegung und der Berücksichtigung periodischer Bewegungseinflüsse können die erhaltenen Zahlenwerte nicht exakt übereinstimmen):

u	t_ν	λ_ν	δ	φ
37°.599938	43951.054 s	7°.857518	37°.537726	37°.723819
142°.376809	46036.350 s	174°.519037	37°.563000	37°.749136
217°.623176	47536.030 s	172°.871526	-37°.562935	-37°.749071
322°.376705	49627.570 s	339°.505037	-37°.563021	-37°.749157
37°.623295	51127.254 s	337°.857520	37.563070	37.749207
142°.376824	53212.085 s	144°.519037	37°.562985	37°.749121
217°.623176	54711.764 s	142°.871526	-37°.562935	-37.749071
322°.376705	56803.304 s	309°.505037	-37°.563021	-37.749157
37°.623295	58302.988 s	307°.857520	37°.563070	37°.749207

26.7.3 Scheinbares Bewegungsverhalten auf elliptischen Bahnen

Auch auf elliptischen Bahnen kann es nach Variationsgleichung (26.83) für die Deklination scheinbar stationäre Bahnpunkte nur in der nördlichen und südlichen Wende geben. Eine tiefer gehende Diskussion des scheinbaren Bewegungsverhaltens ist für elliptische Bahnen nicht mehr so übersichtlich wie im Fall von Kreisbahnen. Dies zeigen die Variationsgleichungen (26.82) und (26.83), die neben den Parametern große Bahnhalbachse *a* und Inklination *i* jetzt auch die Exzentrizität *e* und das Argument des Perigäums ω als unabhängige Parameter enthalten:

[1] vgl. die Beziehung (21.56) in Abschnitt 21.2.3

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3\left(1-e^2\right)^3}}\,\frac{\left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]^2\cos i}{1-\sin^2 u\sin^2 i} \tag{26.146}$$

$$\dot{\delta} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3\left(1-e^2\right)^3}}\,\frac{\cos u\sin i\left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]^2}{\sqrt{1-\sin^2 u\sin^2 i}} \quad . \tag{26.147}$$

Eine Übersicht lässt sich nicht mehr zweidimensional wie in Bild 26-12 auf Seite 434 geben, sondern muss vierdimensional durchgeführt werden. Um aus der Variationsgleichung (26.146) das Argument der Breite *u* berechnen zu können, für das mit der Bedingung $\dot{\Theta} = \dot{\alpha}$ Stillstandpunkte oder Umkehrpunkte auftreten, wird durch zweimalige Quadrierung eine algebraische Gleichung vierter Ordnung erhalten;

$$fct\left(\sin u\right) \equiv A_4\sin^4 u + A_3\sin^3 u + A_2\sin^2 u + A_1\sin u + A_0 = 0 \quad . \tag{26.148}$$

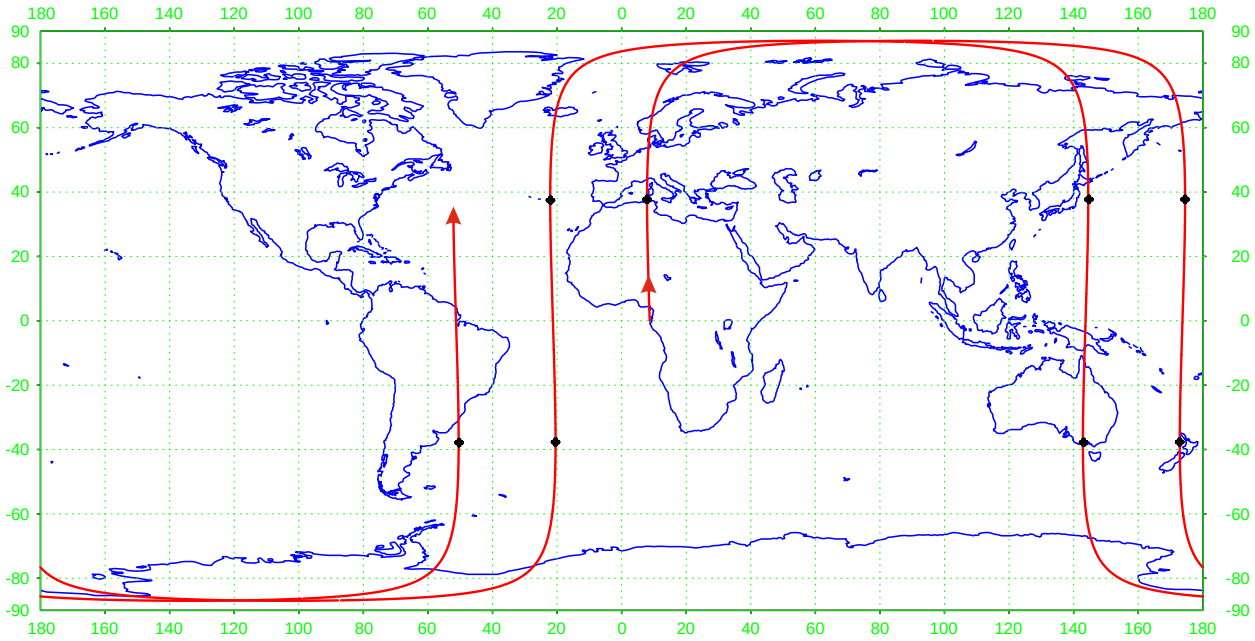


Bild 26-20: Kreisförmige Satellitenbahn ($\bar{a} = 8035.461\,\text{km}$) mit der Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -30°$, der Bahnneigung i=87° mit Schleifenbahn ohne Überschneidung, die Umkehrpunkte sind markiert. Die Bahn ist über 4 Stunden dargestellt.◀

Mit den mittleren Bahnparametern zur Epoche $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\omega}_0\right)$ und den Abkürzungen

$$B_0 := \sqrt{\frac{\mu}{\bar{p}_0^3}}\cos\bar{i}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}_0^3}}\,\frac{\cos\bar{i}_0}{\sqrt{\left(1-\bar{e}_0^2\right)^3}}$$

$$B_1 := \dot{\Theta} - B_0 - \bar{e}_0^2\,B_0\cos^2\bar{\omega}_0 \tag{26.149}$$

$$B_2 := -\dot{\Theta}\sin^2\bar{i}_0 + \bar{e}^2\,B_0\cos 2\bar{\omega}_0$$

$$B_3 := -2\,\bar{e}_0\,B_0\sin\bar{\omega}_0$$

lauten die fünf Parameter

$$
\begin{aligned}
A_4 &:= B_2^2 + \bar{e}_0^4\, B_0^2 \sin^2 2\bar{\omega}_0 \\
A_3 &:= 2\, B_2\, B_3 + 4\,\bar{e}_0^3\, B_0^2 \sin 2\bar{\omega}_0 \cos\bar{\omega}_0 \\
A_2 &:= B_3^2 + 2\, B_1\, B_2 - \bar{e}_0^4\, B_0^2 \sin^2 2\bar{\omega}_0 + 4\,\bar{e}_0^2\, B_0^2 \cos^2\bar{\omega}_0 \\
A_1 &:= 2\, B_1\, B_3 - 4\,\bar{e}_0^3\, B_0^2 \sin 2\bar{\omega}_0 \cos\bar{\omega}_0 \\
A_0 &:= B_1^2 - 4\,\bar{e}_0^2\, B_0^2 \cos^2\bar{\omega}_0 \quad .
\end{aligned}
\tag{26.150}
$$

In der Praxis wird man mit den vorgegebenen Bahnparametern die Existenz reeller Wurzeln $\left(u_\nu, \nu = 1,2,3,4\right)$ überprüfen[1]. Wenn die $u_\nu = 90°$ oder $u_\nu = 270°$ sind, erhält man wie im Fall kreisnaher Bahnen scheinbar stationäre Punkte, wenn u_ν =0° oder =180° scheinbare Stillstandpunkte. Das weitere Verhalten muss im Einzelfall studiert werden, etwa durch das Verfolgen einer Ephemeride.

Eine spezielle einheitliche Aussage, wie im Fall von Umkehrpunkten, die bei kreisnahen Bahnen bei Äquatordurchgang stets scheinbar rückläufig sind, ist im Fall elliptischer Bahnen nicht möglich. Dies zeigt etwa folgender Spezialfall.

26.7.3.1 Bahnen mit Perigäum auf dem Äquator

Unter der Annahme, dass Perigäum (bzw. Apogäum) über dem Äquator liegen $\left(\sin\bar{\omega}_0 = 0\right)$, verschwinden die Parameter $A_1 = A_3 = 0$. In diesem Fall vereinfacht sich die Berechnung[2] des Argumentes der Breite für mögliche Umkehrpunkte aus (26.148)

$$
\sin u = \pm \sqrt{\frac{2\, A_0}{-A_2 - \operatorname{sgn}\left(A_2\right)\sqrt{A_2^2 - 4\, A_4\, A_0}}} \quad . \tag{26.151}
$$

Die Existenz reeller Umkehrpunkte setzt als erstes die Bedingung für die innere Wurzel

$$
A_2^2 \geq 4\, A_4\, A_0 \tag{26.152}
$$

voraus, außerdem dass auch unter der äußeren Wurzel keine negative Zahl steht.

Dieser Fall spielt in der Praxis der Astronautik eine wichtige Rolle im Fall von Transferbahnen eines Kommunikationssatelliten in eine geostationäre Bahn. Da die geostationäre Position im Äquator liegt, ist es sinnvoll, auch für eine optimale Transferbahn Perigäum und Apogäum über dem Äquator zu wählen.

Die geographische Position der Umkehrpunkte kann auch in diesem Fall mit den Transformationsformeln (26.124) auf Seite 438 berechnet werden, sofern die geographische Länge des ersten aufsteigenden Knotens nach Einschuss des Satelliten in die Transferbahn aus den Anfangsbahnelementen vorgegeben ist.

---

[1] Üblicherweise mit der *Descartes*schen Zeichenregel oder der *Sturm*schen Kette (z.B. in BRONSTEIN, I. AND K. SEMENDJAJEW [1962] II-II-B-8

[2] Auflösung der quadratischen Gleichung hier nach PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. [1986], p. 145

BEISPIEL 1: Der erste europäische Kommunikationssatellit SYMPHONIE-A hat die mittleren Bahnparameter $\bar{a}_0 = 25646.172\,\text{km}$, $\bar{e}_0 = 0.73578634$, $\bar{i}_0 = 13°.27$, $\bar{\Omega}_0 = 314°.8397166$, $\bar{\omega}_0 \approx 180°$, $\overline{M_{00}} = 4°.11$, Epoche: 1974-12-19/03:12:0.0 (UTC) [1].

Die Hilfsgrößen (26.149) haben die Werte:

$B_0 = 0.0004817304865$, $B_1 = -0.0001480093433$, $B_2 = 0.0002569578724$, $B_3 = 0.0$

Die Koeffizienten der Bedingungsgleichung (26.148) lauten:

$A_4 = 6.602734819 * 10^{(-8)}$, $A_3 = 0.0$, $A_2 = 1.584184518 * 10^{(-7)}$, $A_1 = 0.0$,

$A_0 = -5.41645772 * 10^{(-8)}$.

Damit ist Bedingung (26.152) erfüllt: $A_2^2 - 4 A_4 A_0 = 3.940177946 \times 10^{(-14)} > 0$ und das Argument der Breite für die Umkehrpunkte kann aus (26.151) berechnet werden. Es ergeben sich folgende Zahlenwerte (die Berechnung wurde mit Berücksichtigung der periodischen Störungen durchgeführt):

u	$\lambda_\nu - \lambda_\Omega$	λ_ν	δ	φ
326.569817	327°.278911	118°.347343	-7°.220125	-7°.230166
33°.430183	32°.721089	73°.898473	7°.308719	7°.318878
146°.569817	147°.278911	307°.775153	-7°.159090	-7°.169049
213.430183	212.721089	263°.326714	7°.369473	7°.379714

Das Beispiel zeigt eine Bahn bei der sich ein Satellit unterschiedlich beim Äquatorüberflug verhält: rückläufig im aufsteigenden Knoten, rechtläufig im absteigenden Knoten.

Das Bewegungsverhalten einer hochexzentrischen Bahn bezüglich der Erdoberfläche kann mit Hilfe des Verlaufs der Variationen der geographischen Länge und der geodätischen Breite, bzw. der Deklination, untersucht werden. Bild 26-22 zeigt den Verlauf der Variation der Rektaszension $\dot{\alpha}$, der geographischen Länge $\dot{\lambda} = \dot{\alpha} - \dot{\Theta}$ und der Deklination $\dot{\delta}$ der Transferbahn des Satelliten SYMPHONIE-A über zwei Umläufe, d.h. über einen ganzen Tag. Klar zu erkennen sind die Bewegungsspitzen beim Durchlaufen des Perigäums, wie auch dem Bahnverlauf in Bild 26-21 zugeordnet werden kann. In der Nähe des Apogäums ist eine Veränderung der Variationen extrem gering, was sich auf eine sehr langsame Änderung der scheinbaren Satellitenposition auswirkt. Die Variationen von Rektaszension und geographischer Länge unterscheiden sich nur um den konstanten Betrag der tropischen Erdrotation $\dot{\Theta}$.

Während aber die Rektaszension stets rechtläufig verläuft, wird die Variation der geographischen Länge in der Umgebung des Apogäums unter die Null-Linie gedrückt, d.h. die Bewegung erfolgt scheinbar rückläufig, nur in der Umgebung des Perigäums kurzfristig extrem rasch rechtläufig. Entsprechend verläuft die Kurve für die Variation der Deklination nur kurzzeitig in negativer Richtung, wenn die Kurve das Perigäum durchläuft, nimmt danach an Betrag ab und wird weitgehend konstant im positiven Bereich. Der Verlauf der Kurve über der Zeit zeigt, dass

[1] Siehe etwa Beispiel 5 in Abschnitt 22.4.4

die scheinbare Position des Satelliten in der Umgebung des Apogäums nahezu unverändert bzw. sich nur sehr gering verändert.

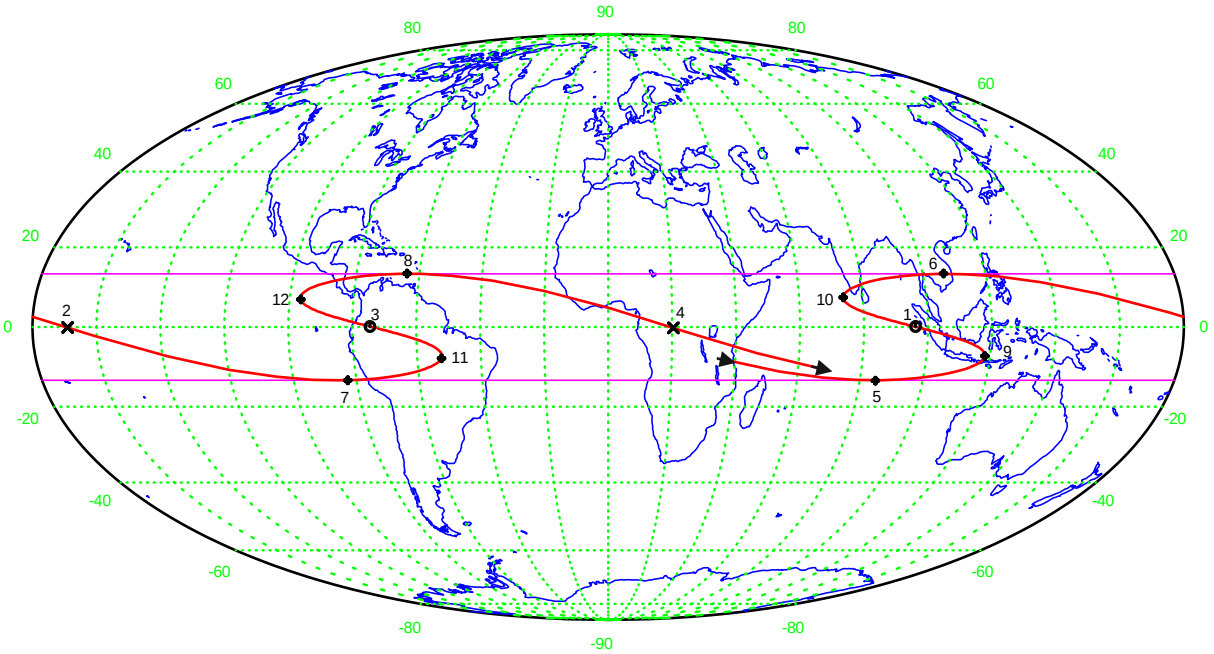


Bild 26-21: Scheinbare Bewegung einer hochexzentrischen Bahn am Beispiel der ersten beiden Umläufe der SYMPHONIE-A Transferbahn, Schleifenbahn ohne Überschneidung, die Apsiden (1, 2, 3, 4), die Nord-Süd-Umkehrpunkte (5, 6, 7, 8) und die Ost-West-Umkehrpunkte (9, 10, 11, 12) sind markiert

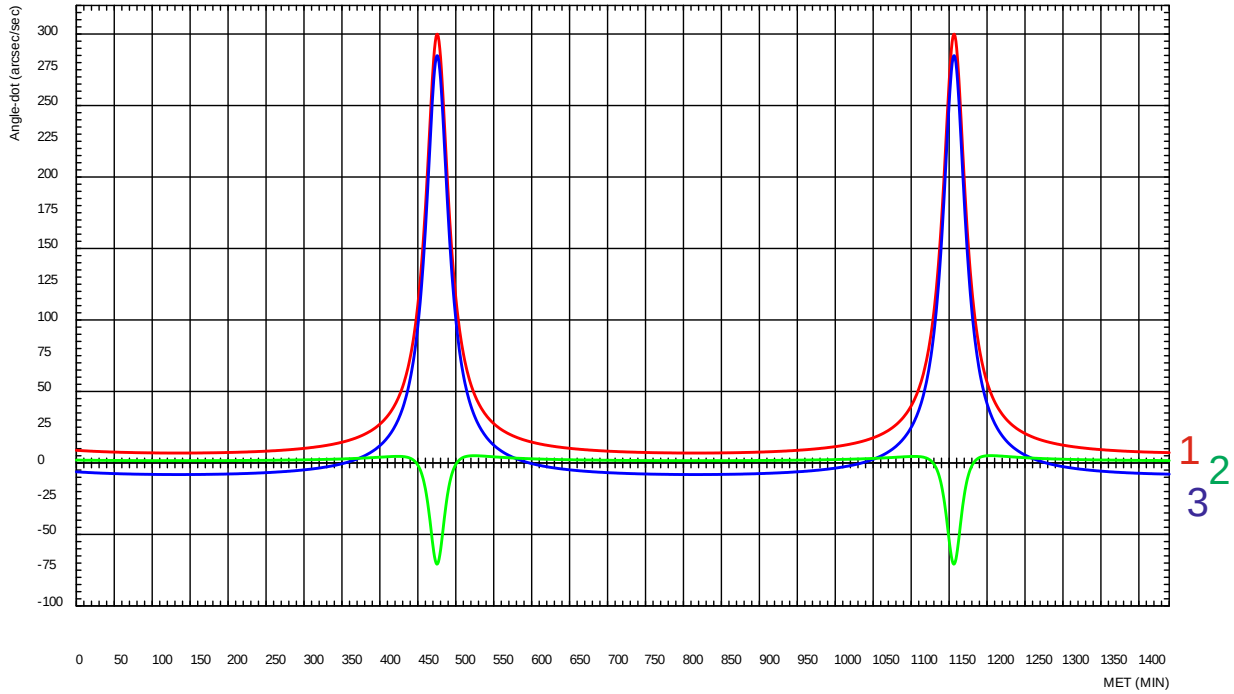


Bild 26-22: Das Bewegungsverhalten einer hochexzentrischen Bahn am Beispiel zweier Umläufe der SYMPHONIE-A Transferbahn, Variation der Rektaszension $\dot{\alpha}$ (Kurve 1, rot), der Deklination $\dot{\delta}$ (Kurve 2, grün), der geographischen Länge $\dot{\lambda}$ (Kurve 3, blau).

Die scheinbare Darstellung dieser Transferbahn gesehen von einer Beobachtungsstation aus, wird im Beispiel in Abschnitt 36.2.2 (Band V) behandelt. ◄

BEISPIEL 2: Das scheinbare Bewegungsverhalten einer hochexzentrischen Erdsatellitenbahn kann für gezielte Beobachtungen oder für Zwecke einer gesicherten Kommunikation genutzt werden. Ein Beispiel sind die *Molnija* Bahnen mit einer drakonitischen Umlaufzeit von 12 Stunden (siehe Bild 23-24 und 23-25). Ein vergleichbares weiteres Beispiel sind die *Tundra* Bahnen, die wie die *Molnija* Bahnen als Bahnneigung die kritische Inklination haben und somit keine säkulare Drift des Perigäums aufweisen, jedoch die drakonitische Umlaufzeit 24 Stunden haben sollen. Elliptische Bahnen mit Spitzenschleifen

Die in Abschnitt 26.7.2.3 hergeleitete Methode zur Berechnung von Satellitenbahnen mit Spitzenpunkten kann nur näherungsweise auf elliptische Bahnen übertragen werden. Werden nur mittlere Bahnen, die nur den säkularen Anteil der Variation des *Hansen*schen Bahnwinkels $\dot{\zeta}$ berücksichtigen, arten die Spitzen zu kleinen Schleifen aus. Dies zeigt das

BEISPIEL: Die Bahn mit Exzentrizität $\overline{e}_0$=0.2 und Inklination $\overline{i}_0$=30°.0 hat mit den Formeln (26.110) - (26.112) die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$=46408.863 km. Die mittlere drakonitische Umlaufzeit beträgt $\overline{P_D} = 99490.965\,\mathrm{s}$, die mittlere meridionale Umlaufzeit $\overline{P_R} = 643133.349\,\mathrm{s}$, die mittlere Knotenlängenverschiebung pro mittlerem drakonitischen Umlauf $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -415°.691013/\overline{P_D}$. Die Bahn ist übersynchron, die tägliche mittlere Knotenlängenverschiebung beträgt $\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -360°.9946/\mathrm{d}$. Die Bodenspur der Bahn (Bild 26-23) hat von Knoten zu Knoten pro drakonitischem Umlauf als Folge der Erdrotation eine Verschiebung von etwa $-55°$.

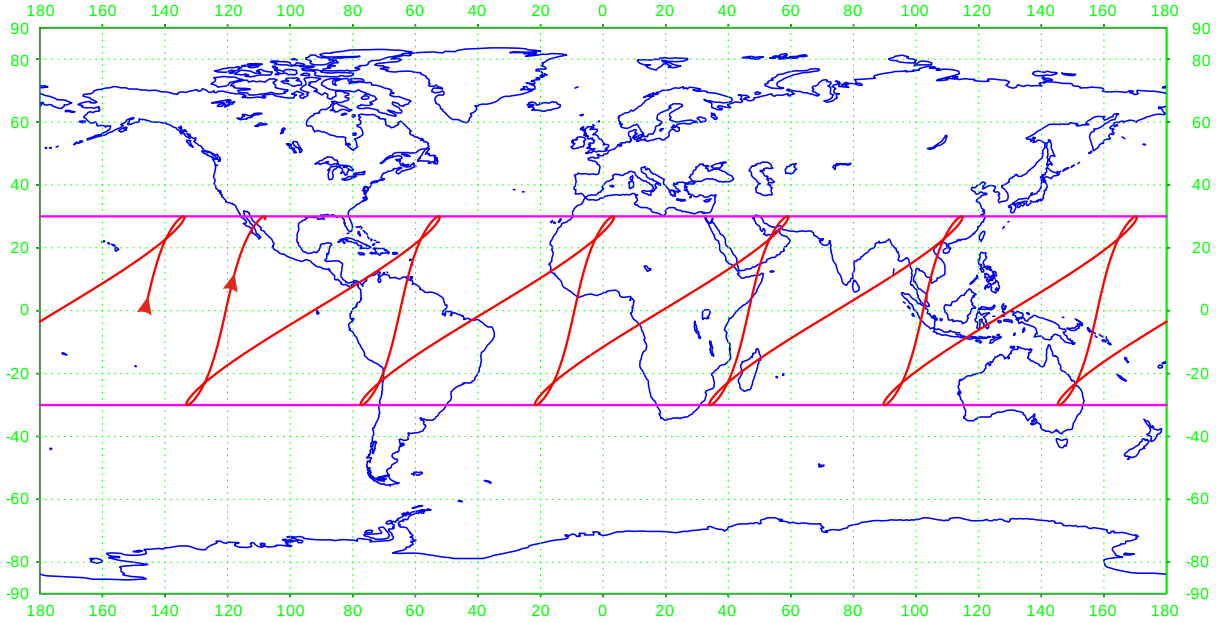


Bild 26-23: Bahn mit Spitzenschleifen: $\overline{a}_0 = 46408.863\,\mathrm{km}$, $\overline{e}_0 = 0.2$, $\overline{i}_0 = 30°.0$

26.7.3.2 Satellitenbahnen mit scheinbaren Überflugwinkeln über der Erdoberfläche

Eine weitere Vertiefung der Untersuchung des scheinbaren Bewegungsverhaltens von beliebigen Satellitenbahnen findet in Abschnitt 33.2.6 (Band V) statt: Dort wird untersucht, welche Bahnen gefunden werden können, für die der scheinbare Überflugwinkel über einem sphärischen Breitenkreis vorgegeben wird. Damit können Bahnen mit scheinbar stationären Punkten, scheinbare Schleifenbahnen, Bahnen mit scheinbarem Stillstand gefunden werden, und zwar nicht nur kreisnahe Bahnen sondern auch beliebige elliptische Bahnen.

26.8 Meridian-bezogene Äquivalenzbahnen

In Abschnitt 26.5.1.3 (ab Seite 414) wurde bei der Untersuchung übersynchroner Satellitenbahnen mit den Meridian-bezogenen Äquivalenzbahnen eine Bahnfamilie von rechtläufigen Bahnen gefunden, deren tropische sowie Meridian-bezogene Umlaufzeit genau zwei Sterntage beträgt. Ihre Umlaufzeit ist somit doppelt so groß wie die der mittleren geosynchronen Bahnen[1]. Diese Bahn wurde durch Vergleich der mittleren tropischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Bewegung hergeleitet[2]. Im vorliegenden Abschnitt werden die Eigenschaften einer solchen Äquivalenz vertieft untersucht, auf wahre Bewegungen erweitert, auf andere Relationen erweitert und mit Beispielen erläutert.

In Bild 26-24 auf Seite 457 wird der Verlauf der *Kepler*schen, der mittleren anomalistischen, drakonitischen, tropischen, *Hansen*, Sonnen-synodischen und Mond-synodischen Umlaufzeiten im Vergleich zur mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit über der mittleren großen Bahnhalbachse einer Erdsatellitenbahn aufgetragen. Es zeigt sich bei der hier gewählten Bildauflösung, dass abgesehen von der Meridian-bezogenen Bewegung der Kurvenverlauf aller anderen Bezüge im Wesentlichen übereinander liegen, die Unterschiede somit sehr klein sind. Nur der Verlauf der Sonnen-synodischen Bewegung kann als schwarze Kurve über dem roten Bereich des gesamten Kurvenverlaufs als etwas abweichend gedeutet werden.

Zur übersichtlichen Charakterisierung der unterschiedlichen Arten der Äquivalenzbahnen werde die folgende Bezeichnungsweise eingeführt (im Beispiel Äquivalenz zwischen tropischer und meridionaler Bewegung):

$\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}$ – Äquivalenz: für die Äquivalenz der mittleren tropischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit. Die mittleren Umlaufzeiten werden dazu mit Hilfe der mittleren Bewegungen berechnet.

$P_T \mathrel{\hat{=}} P_R$ – Äquivalenz: für die Äquivalenz der wahren tropischen mit der wahren Meridian-bezogenen Umlaufzeit. Die wahren Umlaufzeiten werden dazu mit Hilfe der entsprechenden Bahnwinkel berechnet.

Wird durch Vorgabe einer bestimmten Äquivalenz und der Keplerelemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ die (mittlere) große Bahnhalbachse berechnet, so soll sie durch die Bezeichnung $\overline{a_{QTR}}$ gekennzeichnet werden.

[1] August 2019

[2] vgl. Bild 26-5 auf Seite 418

Mittlere Äquivalenz -Bahn	Bahnhalbachse	Mittlere Umlaufzeit
Kepler $\left[\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{a_{QKR}} = 66931.4468893\,\text{km}$	$\overline{P_{KR}} = 172328.181015\,\text{s}$
Hansen $\left[\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{a_{QHR}} = 66932.763262\ \text{km}$	$\overline{P_{HR}} = 172328.181014\ \text{s}$
anomalistisch $\left[\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{a_{QAR}} = 66932.434252\ \text{km}$	$\overline{P_{AR}} = 172329.451707\ \text{s}$
drakonitisch $\left[\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{a_{QDR}} = 66933.092260\ \text{km}$	$\overline{P_{DR}} = 66933.092260\ \text{s}$
tropisch $\left[\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{a_{QTR}} = 66932.763262\ \text{km}$	$\overline{P_{TR}} = 172328.181014\ \text{s}$
Sonnen-synodisch $\left[\overline{P_S} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{a_{QSR}} = 66811.207620\ \text{km}$	$\overline{P_{SR}} = 172800.000000\ \text{s}$
Mond-synodisch $\left[\overline{P_L} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{a_{QLR}} = 65352.064256\ \text{km}$	$\overline{P_{LR}} = 178856.657271\ \text{s}$

Tabelle 26-11: Bahnhalbachse und mittlere Umlaufzeiten der mittleren kreisförmigen äquatorialen Äquivalenz - Bahnen in verschiedenen Äquivalenzen der Meridian-bezogenen Bewegung im überblickmäßigen Vergleich zu anderen Bewegungsbezügen. In allen Fällen werden kreisförmige Äquatorbahnen angenommen $\left[\overline{e}_0 = 0.0, \overline{i}_0 = \overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}} = 0°.0\right]$, Epoche: t_0 : 2019-08-13/12:00:0.0 . Basis Parameter:

$R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s, $J_2 = 0.001082625379977$

Es ist naheliegend Äquivalenzen von Satellitenbahnen auch mit anderen Bewegungsbezügen verallgemeinert zu untersuchen um so interessante Zusammenhänge von bestimmten Satelliten-Bahnfamilien zu erhalten. Tabelle 26-11 gibt einen ersten Eindruck von den numerischen Zusammenhängen. Damit ist eine Übersicht über die Untersuchungen in den folgenden Abschnitten gegeben. Die Eigenschaften der Äquivalenz der verschiedenen mittleren und wahren Bewegungen mit der Meridian-bezogenen mittleren bzw. wahren Bewegung werden im Einzelnen mit Beispielen detailliert betrachtet[1]. Es zeigt sich, dass die errechneten Zahlenwerte sehr empfindlich von den verwendeten astronomischen bzw. geodätischen Basisparametern abhängen. Für eine vollständige Beurteilung der Ergebnisse, müssen daher stets diese Zahlenwerte mit angegeben werden[2].

26.8.1 Äquivalenzbahnen mit Äquivalenz tropischer und meridionaler Bewegungen

26.8.1.1 Basiseigenschaften

Zur Herleitung einer Äquivalenz zwischen der tropischen und der Meridian-bezogenen Umlaufzeit wird gefordert (vgl. die Bedingung (26.58)):

[1] weitere Bezüge der Sonnen-synodischen Bewegung in Relation zur Meridian-bezogenen Bewegung werden im Hinblick auf Äquivalenz - Bahnen in Kapitel 28 (Band IV B), entsprechend der Mond-synodischen Bewegung in Kapitel 29 untersucht

[2] Man beachte die Zeitabhängigkeit dieser Parameter (siehe in Anhang E, Band V). Näheres zur Bedeutung der Parameter in Abschnitt 26.8.1.7 auf Seite 473

$$\left(P_T \triangleq P_R\right)\text{-Äquivalenz-Bahn} \quad \Leftrightarrow \quad P_T = P_R \quad \Leftrightarrow \quad n_T = \left|n_R\right| \quad . \tag{26.153}$$

Wird speziell Äquivalenz der mittleren Bewegungen gewünscht, wird auf Grund der für Meridian-bezogene Bewegungen allgemeingültigen Beziehung (26.10) und wegen

$$\overline{n_R} = \overline{n_T} - \dot{\Theta} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_T} = \overline{P_R} \quad \left\langle \sigma_i = \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1 \right. \tag{26.154}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung (vgl. Bild 26-5 auf Seite 412)

$$\text{mittlere Meridian-bezogene Äquivalenzbahn} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{n_R} = -\overline{n_T} \tag{26.155}$$

erhalten. Daraus folgt die charakterisierende Bedingung

$$\left|\overline{n_R}\right| = \overline{n_T} = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_R} = \overline{P_T} = 2\frac{2\pi}{\dot{\Theta}} \quad . \tag{26.156}$$

Die mittlere Umlaufzeit auf einer Äquivalenzbahn bei Äquivalenz zwischen tropischer und Meridian-bezogener Bewegung beträgt somit exakt 2 Sterntage. Der entsprechende Zahlenwert[1] lautet für die mittlere Umlaufzeit (vgl. die Zahlenwerte für geosynchrone Bahnen in Formel (26.79))

$$\overline{P_{QR\,K}} = \overline{P_{QT\,K}} = \frac{4\pi}{\dot{\Theta}} = 172328.181014 \triangleq 47^h 52^m 08^s.181014 \tag{26.157}$$

Hier zeigt sich eine fundamentale Eigenschaft der Meridian-bezogenen Äquivalenzbahnen:

- *Äquivalenzbahnen mit Kopplung von tropischer und meridionaler Bewegung haben eine von Bahnelementen vollständig unabhängige Umlaufzeit.*

Für die mittlere (*Kepler*sche) große Bahnhalbachse ergibt sich bei äquatorialen Kreisbahnen

$$\overline{a_{QR\,K}} = \sqrt[3]{4\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 66931.4468893\,\text{km} \quad . \tag{26.158}$$

Damit ist der mittlere Höhenbereich angedeutet, in dem derartige $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen vorkommen können.

26.8.1.2 Weitere generelle Eigenschaften von tropischen zu meridionalen Äquivalenzbahnen

1. Aus den Beziehungen (24.45) und (26.9) erhält man im vorliegenden Fall rechtläufiger Bewegung $\left(\sigma_i = +1\right)$, wegen der für den Fall übersynchroner Bahnen notwendigen Bedingung (26.50) $\left[\overline{n_R} < 0 < \overline{n_T} < \dot{\Theta}\right]$, sowie der Bedingung (26.60), die für mittlere Äquivalenzbahnen notwendig und hinreichend ist, die Beziehungen

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \dot{\bar{\alpha}} + \delta\dot{\alpha} = \overline{n_D} + \dot{\Omega}_s + \delta\dot{\alpha} = \overline{n_T} + \delta\dot{\alpha} \qquad \left\langle \sigma_i = \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1,\ \overline{n_T} < \dot{\Theta} \right. \\ \dot{\lambda} &= \dot{\bar{\lambda}} + \delta\dot{\lambda} = \overline{n_D} + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} + \delta\dot{\lambda} = \overline{n_T} - \dot{\Theta} + \delta\dot{\lambda} = \overline{n_R} + \delta\dot{\lambda} = -\overline{n_t} + \delta\dot{\lambda} \quad , \end{aligned} \tag{26.159}$$

Somit

$$\dot{\alpha} + \dot{\lambda} = \delta\dot{\alpha} + \delta\dot{\lambda} \quad . \tag{26.160}$$

---

[1] Hier werden wegen der übersichtlichen zusammenfassenden Darstellung des Themas Äquivalenzbahn die Zahlenwerte aus (26.63) und (26.64) in Abschnitt 26.5.1.3 ab Seite 420 wiederholt.

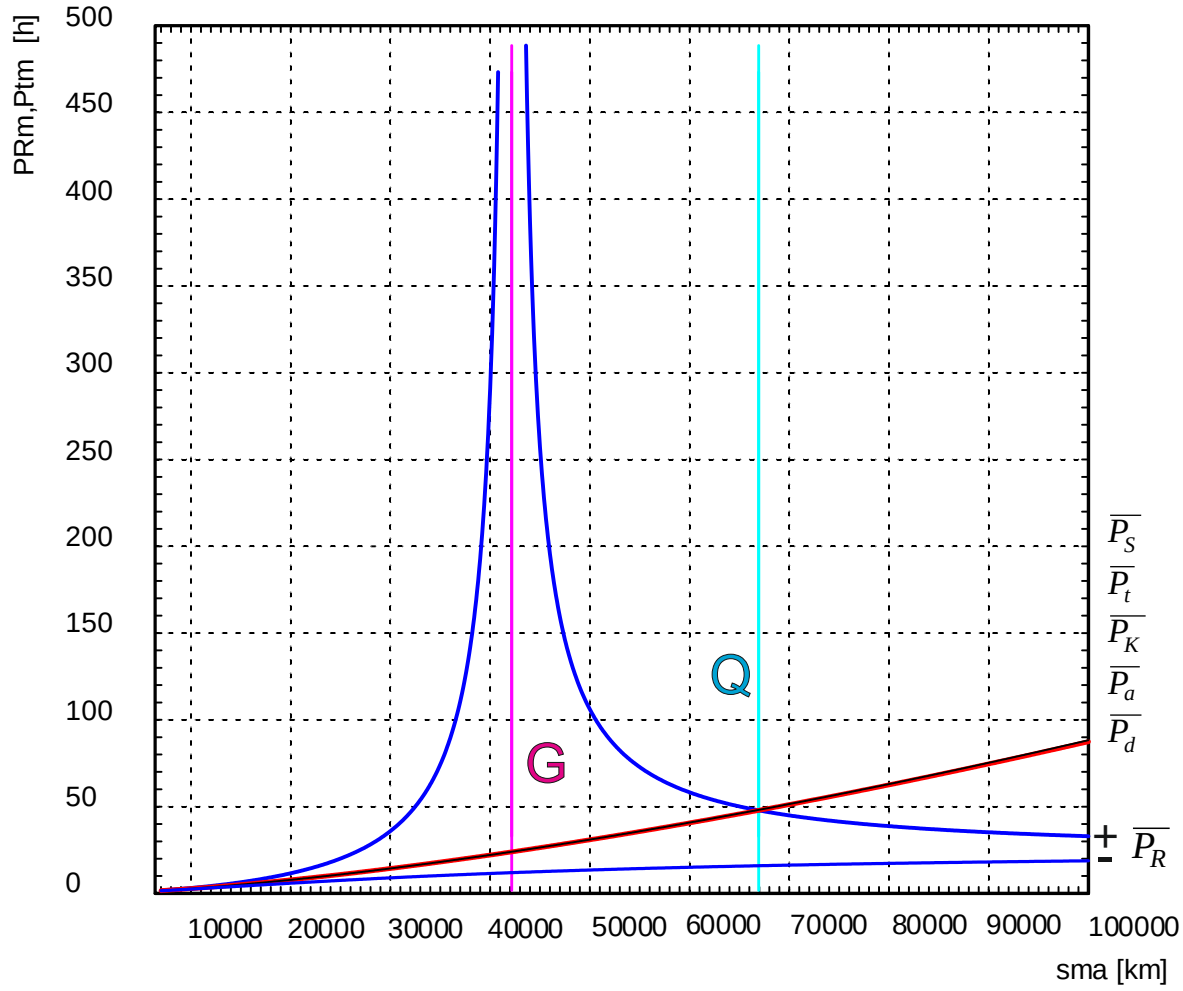


Bild 26-24: Vergleich der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R}$ mit anderen mittleren Umlaufzeiten über der großen Bahnhalbachse für rechtläufige Bahnen. In der hier gewählten Auflösung ist der Unterschied zwischen der tropischen, anomalistischen, drakonitischen und *Kepler*schen Umlaufzeit nicht zu erkennen, die schwarz gezeichnete Sonnen-synodische Umlaufzeit weicht minimal von den anderen Umlaufzeiten ab. „G" bezeichnet die geosynchrone Bahn, „Q" die Äquivalenz von tropischer und Meridian- bezogener Umlaufzeit für die mittlere Halbachse =66932.768 km (*Kepler*sche „TR-Äquivalenz -Bahn"). Für die Berechnung wurden die *Kepler*-Elemente $\overline{e}_0 = 0.5, \overline{i}_0 = 50°, \overline{\Omega}_0 = \overline{\omega} = 0°, \overline{M}_{00} = 180°$ verwendet. `+´ kennzeichnet die meridionale Bewegung auf rechtläufiger Bahn, `-´ auf retrograder Bahn (hier mit $\overline{i}$ = 110° gerechnet).

Werden die periodischen Anteile vernachlässigt, bleibt somit wegen (26.156)

$$\dot{\overline{\alpha}} + \dot{\overline{\lambda}} = 2\overline{n_T} - \dot{\Theta} = 0 \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_T} \right. \quad . \tag{26.161}$$

Integration ergibt für die Äquivalenzbahnen, die durch Kopplung der tropischen mit den Meridian-bezogenen Bewegungen gebildet werden, die notwendig und hinreichend charakterisierende Beziehung

$$\overline{\alpha} + \overline{\lambda} = const. =: \overline{Q} \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_T} \right. \quad . \tag{26.162}$$

Wenn sich der mittlere Satellitenort (es werden nur die säkularen Bewegungseinflüsse berücksichtigt) rechtläufig mit zunehmender Rektaszension bewegt, bewegt er sich mit abnehmender geographischer Länge scheinbar rückwärts. Die Summe der beiden Winkel ist bezogen auf den Erdäquator konstant. Die Konstante $\overline{Q}$ charakterisiert eine $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ Äquivalenzbahn.

Wenn in Beziehung (26.160) das Integral gebildet wird, erhält man mit dem periodischen Anteil

$$\delta Q := \int \left(\delta\dot{\alpha} + \delta\dot{\lambda} \right) dt \tag{26.163}$$

den allgemeinen Ausdruck

$$\alpha + \lambda = Q = \bar{Q} + \delta Q \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_T} \right. \quad . \tag{26.164}$$

Besonders bemerkenswert ist demnach, dass im Fall einer Äquivalenz zwischen tropischer und Meridian-bezogener Bewegung in der Summe aus Rektaszension und geographischer Länge wegen Beziehung (26.161) ausschließlich periodische Variationen zum Tragen kommen. Diese setzen sich aus periodischen Bewegungseinflüssen („Störungen" einer *Kepler*bewegung), der Mittelpunktsgleichung im Fall von elliptischen Bahnen sowie der Reduktion auf den Äquator im Falle geneigter Bahnen zusammen. Dagegen sind alle säkularen Einflüsse, welche in den mittleren Bewegungen zusammengefasst sind, eliminiert.

2. Die Verknüpfung zwischen Rektaszension und geographischer Länge ist mit Formel (26.3) über die momentane Sternzeit Θ_G in Greenwich gegeben, welche den Anteil der Erdrotation ausdrückt,

$$\alpha = \lambda + \Theta_G \quad . \tag{26.165}$$

Dies gilt auch den aufsteigenden Knoten:

$$\Omega = \lambda_\Omega + \Theta_G \quad . \tag{26.166}$$

Mit Formel (26.164) folgt für den (konstanten) Äquivalenzparameter $\bar{Q}$ die Beziehung

$$\bar{Q} = 2\Omega - \Theta_G - \delta Q \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_T} \right. \quad . \tag{26.167}$$

Bei Vernachlässigung des periodischen Anteils der Rektaszension des aufsteigenden Knotens $\delta\Omega = \Omega - \bar{\Omega}$ und des Faktors δQ ergibt sich der wichtige Zusammenhalt des Äquivalenzparameters $\bar{Q}$ mit der mittleren Rektaszension des aufsteigenden Knotens im Fall einer Äquivalenzbahn. Zur Epoche gilt somit

$$\bar{Q} = \bar{Q}_0 = 2\bar{\Omega}_0 - \Theta_{G0} \qquad \left\langle \sigma_i = +1,\ \overline{n_R} = -\overline{n_T} \right. \quad . \tag{26.168}$$

Der mittlere Äquivalenzparameter $\bar{Q}$ kann bei $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R} \right) -$ bzw. $\left(P_T \triangleq P_R \right) -$ Äquivalenzbahnen somit als Alternative für den mittleren Bahnparameter $\bar{\Omega}_0$ zur Epoche aufgefasst werden, wenn die Sternzeit Θ_{G0} zur Epoche bekannt ist.

3. Die aus Formel (26.157) ersichtliche Umlaufzeit von 2 Sterntagen der $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R} \right) -$ und $\left(P_T \triangleq P_R \right) -$ Äquivalenzbanen lässt eine sehr langsame Drift der Bahn bezüglich der Erdoberfläche erwarten. Die auf diese Weise begründete Stabilität der Bahn über der Erdoberfläche ist ein wesentliches Kriterium bei der Beurteilung einer Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn.
Ein wesentlicher Faktor ist hierbei die säkulare Verschiebung des Perigäums einer Bahn und somit der Bahnform über der Erdoberfläche pro anomalistischem Umlauf (nach Formel (22.210)):

$$\Delta\lambda_{Ps} = \dot{\lambda}_{Ps} P_A \quad .$$

Die Stabilität der Bodenspur wird durch Untersuchung der Wanderung des aufsteigenden Knotens durch die säkulare Verschiebung des Knotens pro drakonitischem Umlauf (siehe die Formeln (23.224), (23.227)) beurteilt

$$\Delta\lambda_{\Omega s} = \dot{\lambda}_{\Omega s} P_D \quad .$$

Diese Faktoren werden daher in die Tabellen der jeweiligen Bahncharakteristika mit aufgenommen.

26.8.1.3 Große Bahnhalbachse bei tropischer zu meridionaler Äquivalenz

Die mittlere Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ einer Äquivalenz -Bahn hängt neben der Äquivalenzbedingung von einer Vorauswahl der anderen Bahnparameter, üblicherweise der *Kepler*elemente ab. Im Fall einer $\left(\overline{P_t} \triangleq \overline{P_R}\right)$- Äquivalenz wird die große Bahnhalbachse iterativ mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QTR}}\right) \equiv \overline{P_T} - \overline{P_R} = \frac{2\pi}{\overline{n_T}} - \frac{2\pi}{\overline{n_R}} = 0 \tag{26.169}$$

berechnet. Sie sind aus den Beziehungen (24.57) sowie (26.15) bekannt: $\overline{P_T} = 2\pi / \overline{n_T}$, $\overline{P_R} = 2\pi / \left|\overline{n_R}\right|$. Als Anfangsnäherung kann der *Kepler*sche Wert (26.158) verwendet werden.

Im Fall einer $\left(P_T \triangleq P_R\right)$- Äquivalenz kann die große Bahnhalbachse nach Vorgabe der anderen Bahnparameter aus der Bedingungsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QTR}}\right) \equiv P_T - P_R = 0 \tag{26.170}$$

iterativ berechnet werden.

Die hier benötigten wahren Umlaufzeiten werden mit Hilfe einer Ephemeridenrechnung durch Lösung der überlagerten Funktionen (24.56) und (26.21)

$$fct\left(P_T\right) \equiv \sin\left[\alpha\left(t_0 + P_T\right) - \alpha\left(t_0\right)\right] = 0 \quad , \quad fct\left(P_R\right) \equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\right) - \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{26.171}$$

berechnet.

Als ein geeigneter Anfangswert für den im Allgemeinen erforderlichen iterativen Prozess (26.170)-(26.171) kann auch in diesem Fall der theoretische Wert (26.158) angenommen werden. Als Bahnmodell wird ein analytisches oder numerisches Modell verwendet. Im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse genügt häufig ein einfaches analytisches Modell erster oder zweiter Ordnung[1]. Werden die periodischen Einflüsse („Störungen von *Kepler*bahnen“) zugunsten der säkularen vernachlässigt, sind in den meisten Anwendungsfällen die numerischen Ergebnisse nur minimal unterschiedlich, in der Größenordnung von Dezimetern, bzw. Bruchteilen von Zeitsekunden. Auf diese Weise kann im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse Rechenzeit gespart werden.

[1] Siehe Satellitenbewegung, Band III, Kapitel 20

$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	$\overline{a_{QTR}}\left[\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{P_T} = \overline{P_R}$	$\overline{a_{QTR}}\left[P_T \triangleq P_R\right]$	$P_{T,\mathrm{sec}} = P_{\mathrm{R,sec}}$
0.0	0°	66932.763262 km	172328.181014	66932.763274 km	172328.181060 s
	30°	66932.193394 km	172328.181014	66932.105248 km	172328.181060 s
	60°	66931.118205 km	172328.181014	66930.789201 km	172328.181060 s
	85°	66930.751846 km	172328.181014	66930.151174 km	172328.181060 s
0.3	0°	66932.999861 km	172328.181014	66932.613417 km	172328.181060 s
	30°	66932.325413 km	172328.181014	66932.074049 km	172328.181060 s
	60°	66931.054479 km	172328.181014	66930.995335 km	172328.181060 s
	85°	66930.625382 km	172328.181014	66930.472376 km	172328.181060 s
0.5	0°	66933.630186 km	172328.181014	66932.798051 km	172328.181060 s
	30°	66932.675807 km	172328.181014	66932.207050 km	172328.181060 s
	60°	66930.881878 km	172328.181014	66931.025105 km	172328.181060 s
	85°	66930.287582 km	172328.181014	66930.452117 km	172328.181060 s
0.8	0°	66939.573455 km	172328.181014	66934.832860 km	172328.181060 s
	30°	66935.935768 km	172328.181014	66933.478300 km	172328.181060 s
	60°	66929.161745 km	172328.181014	66930.770132 km	172328.181060 s
	85°	66927.074292 km	172328.181014	66929.457648 km	172328.181060 s
0.9	0°	66957.658059 km	172328.181014	66939.818726 km	172328.181060 s
	30°	66945.695786 km	172328.181014	66936.571582km	172328.181060 s
	60°	66923.609455 km	172328.181014	66930.086780 km	172328.181060 s
	85°	66917.213816 km	172328.181014	66926.947454 km	172328.181060 s

Tabelle 26-12: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)-$ bzw. $\left(P_T \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenz -Bahn für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0}$ =0°, Säkulare Variationen des *Brouwer* Modells, Epoche: 2019-10-16/12:00:0.00, Genauigkeitsgrenzen $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-11}\,\mathrm{sec}$, $\Delta(a) < 10^{-11}\,\mathrm{km}$. Basis Parameter: (TCB) R_E =6738.1366 km, μ_{δ} =398600.4418 $\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 =0.001082625379977

$\overline{a_{QTR}}$	$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	$\overline{\Omega}_0$	$\overline{\omega}_0$	M_0	$P_T = P_{R,}$ [sec]
66926.945237 km	0.9	85°	0°	0°	0°	172328.181060
66777.612355 km	0.9	85°	0°	0°	90°	172328.181060
66777.337781 km	0.9	85°	120°	0°	90°	172328.181060
66829.648703 km	0.9	85°	120°	60°	90°	172328.181060
(*)66867.160965 km	0.9	85°	120°	120°	90°	172328.181060
(*)66827.647930 km	0.9	85°	120°	120°	150°	172328.181060
66703.645994 km	0.9	85°	0°	0°	180°	172328.181060
66703.636387 km	0.9	85°	150°	180°	180°	172328.181060
66815.916389 km	0.9	85°	120°	60°	180°	172328.181060
66815.734661 km	0.9	85°	120°	60°	120°	172328.181060

Tabelle 26-13: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(P_T \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenz -Bahn für die Exzentrizität e=0.9 und Inklination i=85°, für verschiedene $\overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}$, Epoche: 2019-10-16/12:00:0.00. Vollständiges *Brouwer* Bahnmodell, außer mit (*) nur säkulare Störungen. Genauigkeitsgrenzen $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-11}$ sec , $\Delta(a)<$ 10^{-11} km .Schrittweite Δa=10 km. Basis Parameter: (TCB) R_E =6738.1366 km, μ_{δ} =398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340$\times 10^{-4}$ / s , J_2 =0.001082625379977.

Tabelle 26-12 Bahnhalbachse bei $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$- Äquivalenz und bei $\left(P_T \triangleq P_R\right)$- Äquivalenz für verschiedene Exzentrizitäten $\overline{e}_0$ und Inklinationen $\overline{i}_0$. Tabelle 26-13 enthält zusätzlich die Berechnung der großen Bahnhalbachse, wenn auch verschiedene Knoten $\overline{\Omega}_0$, Argumente des Perigäums $\overline{\omega}_0$ und Werte der mittleren Epocheanomalie $\overline{M_{00}}$ angenommen werden. Die Umlaufzeit ist wegen der grundlegenden Beziehung (26.157) sowohl bei $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$- Äquivalenz wie bei $\left(P_t \triangleq P_R\right)$- Äquivalenz unabhängig von den gewählten Bahnparametern identisch gleich. Dies zeigen Tabelle 26-12 und Tabelle 26-13 bei Bezug auf ein und dieselbe Epoche. Allerdings sind die Umlaufzeiten indirekt von einer Epoche abhängig, da sie mit Epocheelementen gebildet werden. Man beachte, dass die in diesen Tabellen berechneten Umlaufzeiten nicht vorgegeben sind, sondern in jedem Schritt unabhängig berechnet werden.

Wird die Auswahl einer Äquivalenzbahn nicht auf das Perigäum, sondern einen anderen Ort einer Satellitenbahn bezogen, können erhebliche Abweichungen in den Zahlenwerten der großen Bahnhalbachse auftreten. Ein BEISPIEL dazu mit extremen Änderungen kann in Tabelle 26-13 eingesehen werden. In dieser Tabelle werden $\left(P_T \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenzbahnen mit der Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.9 untersucht. Diese sind von besonderem Interesse, da auf solchen Bahnen im Perigäum der Bahn eine Bahnhöhe von etwa $H_P \approx 316$ km erreicht werden kann. Der Satellit hat in diesem Fall beim Durchfliegen des Perigäums eine Geschwindigkeit in der Größenordnung $V_P \approx 10.6$ km/sec Die Apogäumshöhe liegt im Höhenbereich $H_A \approx 128000$ km. Man

beachte, dass auch in diesem Fall die wahren in jedem Fall unabhängig berechneten Umlaufzeiten bei Bezug auf dieselbe Epoche identisch gleich sind. Somit ist auch in diesen Fällen die Bedingung (26.156) mit Unabhängigkeit der Umlaufzeit von den Bahnelementen erfüllt.

26.8.1.4 Der (a,i)- Bereich aller tropischen zu meridionaler Äquivalenz

Bild 26-25 zeigt eine Übersicht aller möglichen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität $e_B \in$ [0.9016964-0.9018750]. Die Kurven sind für je eine Exzentrizität berechnet. Auffällig ist, dass sich alle Kurven in einem fast punktförmigen Gebiet, in der Nähe des Punktes $\left(\overline{a}_{cross} \approx 66931.4\,\mathrm{km}, \overline{i}_{cross} \approx 49°\right)$, schneiden. Um diesen Schnittpunkt (bzw. Schnittpunkte) zu berechnen, werden die Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten $\left(e_1, e_2\right)$ zum Schnitt gebracht. (Zum Vergleich: $\overline{a_{QR\,K}} = \sqrt[3]{4\mu / \dot{\Theta}^2}$ =66931.4468893 km).

Aus der Bedingungsgleichung (26.156) für $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen wird die Gleichung einer Kurve im Fall einer bei Äquivalenz mit einer meridionalen Bewegung stets rechtläufigen Bahn $\left(\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos i\right) = +1\right)$ erhalten

$$\overline{n_T} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad . \tag{26.172}$$

Mit den säkularen Anteilen der Variationsgleichungen[1] $\left(M_0\right)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ erster Ordnung und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \tag{26.173}$$

wird eine Trennung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse

$$f_e \equiv E\left[1+\sqrt{1-e^2} - \cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right) + 2\sigma_i \cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,n_K} - 1\right) \tag{26.174}$$

formal erhalten.

Wird hier jeweils die vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ eingesetzt und die beiden erhalten Ausdrücke subtrahiert, bleibt eine quadratische Gleichung für den Cosinus der Inklination

$$A_0 \cos^2 i + B_0 \cos i + C_0 = 0 \tag{26.175}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right) - E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ B_0 &:= 2\left(E_2 - E_1\right) \\ C_0 &:= E_2 - E_1 + E_2\sqrt{1-e_2^2} - E_1\sqrt{1-e_1^2} \quad . \end{aligned} \tag{26.176}$$

[1] aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

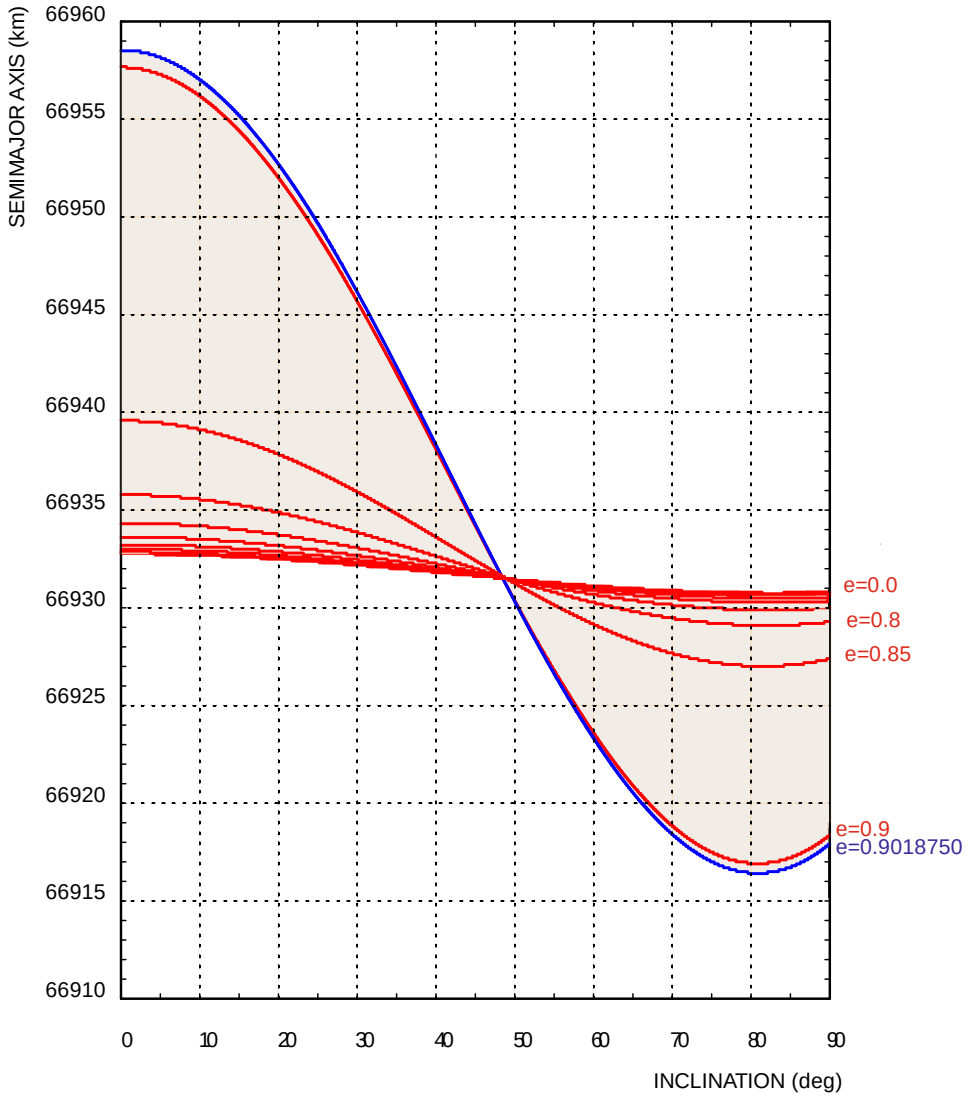


Bild 26-25: Der (a,i)-Bereich möglicher $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit parametrisierten Exzentrizitäten $\overline{e}_0 \in [0.0 , 0.9016964 – 0.9018750]$

Ihre Lösungen mit Hilfe der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0 + \mathrm{sgn}\left(B_0\right)\sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}\right] \quad , \quad \cos i_1 = \frac{Q_0}{A_0} \quad , \quad \cos i_2 = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \qquad (26.177)$$

Im Fall der Äquivalenz unter Einschluss der meridionalen Bewegung kann nur die positive Lösung verwendet werden.

In Tabelle 26-14 sind ergänzend zu Bild 26-25 besondere Parameter der einzelnen Kurve zusammengestellt. Als charakteristische Größen sind die Parameter der Überschneidungen (i_{cross} , a_{cross}) für Kopplungen der Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 gerechnet. Nach Berechnung der charakteristischen Inklination wurde die Halbachsen a_{cross} mit den laufenden Exzentrizitäten nach der Methodik in Abschnitt 26.8.1.3 gerechnet.

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	66932.76	---	---	66930.75	66930.79
e=0.1	66932.79	49°.586764	66931.468831	66930.74	66930.78
e=0.2	66932.86	49°.571270	66931.469397	66930.70	66930.74
e=0.3	66933.00	49°.543758	66931.470401	66930.62	66930.67
e=0.4	66933.23	49°.501236	66931.471953	66930.49	66930.55
e=0.5	66933.63	49°.438354	66931.474244	66930.28	66930.35
e=0.6	66934.34	49°.345395	66931.477618	66929.89	66930.00
e=0.7	66935.78	49°.203399	66931.482713	66929.10	66929.27
e=0.8	66939.57	48°.969895	66931.490660	66927.01	66927.38
e=0.85	66944.50	48°.787815	66931.495754	66924.28	66924.91
e=0.9	66957.66	48°.520089	66931.496606	66916.92	66918.33
$e_B =$	66958.49	48°.508522	66931.496242	66916.47	66917.93

Tabelle 26-14: Besondere Parameter von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, nach der Exzentrizität parametrisiert, Grenzexzentrizität $e_B \in [0.9016964 – 0.9017580]$,

Aufgabenstellungen:

1. Lässt sich die Kreuzung zwischen den Kurven der Bahnen mit verschiedenen Exzentrizitäten analytisch deuten?

2. Berechne den Kreuzungspunkt der (a,i)-Kurven mit Hilfe der verschwindenden Krümmung.

3. Berechne den Kreuzungspunkt der (a,i)-Kurven mit einem höheren Bahnmodell unter Einschluss von J_3 und J_4. Gibt es besondere, wesentlich abweichende Ergebnisse?

4. Berechne den Kreuzungspunkt der (a,i)-Kurven durch Kombination von Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten.

5. Untersuche Fehl-Ergebnisse bei hohen Exzentrizitäten: bahnmechanische oder numerische Ursache?

26.8.1.5 Die Inklination bei tropischer zu meridionaler Äquivalenz

Bild 26-25 auf Seite 463 zeigt, dass im Zusammenhang mit Äquivalenzbahnen neben der großen Bahnhalbachse vor allem Exzentrizität und Inklination einer Bahn von besonderem Interesse sind. Es muss also auch möglich sein etwa bei Vorgabe von mittlerer großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und mittlerer Exzentrizität $\bar{e}_0$ die mittlere Inklination $\overline{i_{QTR}}$ zu berechnen. Wird dazu die mittlere tropische mittlere Bewegung $\overline{n_T}$ als Funktion der Inklination aufgefasst, lautet mit der grundlegenden Beziehung (26.156) die benötigte Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{i}_0\right) \equiv 2\overline{n_T} - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.178}$$

Mit der mittleren tropischen mittleren Bewegung (24.45) (Abschnitt 24.2.3) lautet diese Bedingung ausführlich

$$\overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \tag{26.179}$$

Um die Funktionsgleichung (26.178) iterativ bearbeiten zu können, wird ein erster Näherungswert benötigt. Dieser kann mit der *Kepler*schen mittleren Bewegung $\overline{n_K} = \sqrt{\mu / \overline{a}_0^3}$ und den Ausdrücken erster Ordnung für die säkularen Variationen (20.15), (20.16), (20.17) erhalten werden aus

$$\overline{n_K}\left\{1 - \frac{3}{4}\frac{J_2 R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left[\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\left(1-3\cos^2\overline{i}_0\right) + \left(1-5\cos^2\overline{i}_0\right) + 2\cos\overline{i}_0\right\} = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \tag{26.180}$$

Mit den Abkürzungen

$$C_2 := -\frac{3}{4}\frac{J_2 R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2},\ A_1 := 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2} + 5\ , B_1 := \left(\frac{\dot{\Theta}}{2\overline{n_K}} - 1\right)\frac{1}{C_2} - \left(1 + \sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) \tag{26.181}$$

folgen die zwei Näherungslösungen

$$\cos\overline{i}_{QTR0,1/2}^{(0)} = \frac{1}{A_1}\left[1 \pm \sqrt{1 - A_1 B_1}\right] \quad . \tag{26.182}$$

Ob beide oder welche der beiden Lösungen oder überhaupt eine Lösung die gegebenen Vorgaben erfüllen, muss vor einer Weiterverwendung der Ergebnisse geprüft werden. Mit einer gültigen Lösung kann eine Verbesserung in Bezug auf $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ oder $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenz analog den Funktionalgleichungen (26.169) bzw. (26.170) erhalten werden mit

$$fct\left(\overline{i_{QTR}}\right) \equiv \overline{P_T}\left(\overline{i}\right) - \overline{P_R}\left(\overline{i}\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \quad fct\left(\overline{i_{QTR}}\right) \equiv P_T\left(\overline{i}\right) - P_R\left(\overline{i}\right) = 0 \quad . \tag{26.183}$$

BEISPIEL: Gegeben seien die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$=66931.4 km und die Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.5 (vgl. Bild 26-25 auf Seite 463)

Gleichung (26.182) liefert die beiden Lösungen $\overline{i}_{0,1}^{(0)} = 50°.661895$ und $\overline{i}_{0,2}^{(0)} = 111°.756997$. Da es bei Bezug auf meridionale Bewegungen keine rückläufige Äquivalenzbahn geben kann, kann nur die erste Lösung akzeptiert werden.

Eine Verbesserung bei Bezug auf mittlere Äquivalenzbahnen ergibt mit der ersten der Funktionalgleichungen (26.183) $\overline{i}_0^{(1)}$=50°.6613528. Hier wurden die folgenden Parameter verwendet:

$R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\ddot{O}} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s, $J_2 = 0.001082625379977$.

Nach Beziehung (26.178) müsste mit diesen Parametern und den verwendeten Bahnelementen exakt die Bedingung $\dot{\Theta} = 2\overline{n_t}$ erfüllt sein. Jedoch ist dies im vorliegenden Fall nur mit der Genauigkeit etwa 10^{-11} rad/sec der Fall: $\dot{\Theta}_Q$ =0.7292113243607×10^{-4}/sec. Die mittleren Umlaufzeiten lauten

$$\overline{P_T} = 172328.1810137536668\ \text{sec}$$

$$\overline{P_R} = 172328.1810137537250\ \text{sec}$$

Eine Verbesserung bei Bezug auf wahre Äquivalenzbahnen ergibt mit der zweiten der Funktionalgleichungen (26.183) gerechnet unter Einschluss aller bekannten analytischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) $\overline{i_{QTR}}$ = 50°.2665396. Der Kontrollwert für die tropische Erdrotation

lautet $\dot{\Theta}_Q$ =0.7292115857335×10^{-4}/sec, also auf 10^{-14} rad/sec genau. Die Umlaufzeiten stimmen bis auf 10^{-8} sec überein. ◄

26.8.1.6 Die Exzentrizität bei tropischer zu meridionaler Äquivalenz

Um eine geeignete nullte Näherungslösung für die Exzentrizität zu finden, wenn die anderen 5 Bahnparameter gegeben sind, muss der Ausdruck (26.180) nach $\overline{e}_0$ aufgelöst werden. Hier handelt es sich um ein Polynom der vierten Ordnung in der Exzentrizität, das nur sehr empfindlich bearbeitet werden kann. Um dieses Polynom zu umgehen, kann ausgehend von einem willkürlichen Näherungswert etwa $\overline{e}_0^{(0)} = 0.5$ mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{e}_0\right) \equiv 2\overline{n_T} - \dot{\Theta} = 0 \tag{26.184}$$

iterativ eine Lösung erhalten werden. Aus Bild 26-25 ist zu ersehen, dass die Bahnelemente große Bahnhalbachse und Inklination nur in einem eingeschränkten Umfeld vorgegeben werden können. Geringe Änderungen dieser Parameter beeinflussen die Berechnung der Exzentrizität äußerst empfindlich. Daher kann aus dieser Tabelle nach Vorgabe der mittleren Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ eine nahe gelegene Exzentrizität als Anfangsnäherung gewählt werden. Die endgültige Berechnung der Exzentrizität erfolgt dann mit einer der Funktionsgleichungen

$$fct\left(\overline{e_{QTR}}\right) \equiv \overline{P_T} - \overline{P_R} = 0 \qquad \text{bzw.} \quad fct\left(\overline{e_{QTR}}\right) \equiv P_T - P_R = 0 \quad . \tag{26.185}$$

BEISPIEL 1: Für eine $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz seien $\overline{a}_0$ =66931.0 km und $\overline{i}_0$ =59° vorgegeben. Mit der Funktionsgleichung (23.312) erfolgt im Fall mittlerer Bahnen für die Exzentrizität $\overline{e_{QTR\,0}}$ =0.438221748. Eine geringfügige Änderung der vorgegebenen Inklination auf $\overline{i}_0$ =62° ergibt $\overline{e_{QTR\,0}}$ =0.274064613. ◄

BEISPIEL 2: Für eine $\left(P_T \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz seien $\overline{a}_0$ =66931.0 km und $\overline{i}_0$ =59° vorgegeben. Mit der Funktionsgleichung (23.312) erfolgt im Fall wahrer Bahnen aber nur mit säkularen Bewegungseinflüssen für die Exzentrizität $\overline{e_{QTR\,0}}$ = 0.229310799, mit Berücksichtigung des gesamten analytischen Bahnmodells jedoch $\overline{e_{QTR\,0}}$ =0.229208708. Wird die vorgegebene Inklination auf $\overline{i}_0$ =60° geändert, ergibt sich (bei Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells) $\overline{e_{QTR\,0}}$ =0.314415031 (mit $\overline{i}_0$ =62° folgt keine Lösung: vgl. Bild 26-25 auf Seite 463). ◄

BEISPIEL 3: Für eine $\left(P_T \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz seien $\overline{a}_0$ =66937.0 km und $\overline{i}_0$ =28° vorgegeben. Aus Bild 26-25 werde als Anfangsnäherung die Exzentrizität $\overline{e}_0^{(0)}$ =0.9 vorgegeben. Formel (26.184) liefert den verbesserten Wert $\overline{e}_0^{(1)}$ =0.8810. Funktionsgleichung (23.312) ergibt mit Berücksichtigung des gesamten analytischen Bahnmodells den endgültigen Wert $\overline{e_{QTR}}$ =0.9005721511841. ◄

26.8.1.7 Überprüfung der Konsistenz der geodätisch-astronomischen Basisparameter

Der mit der Basisformel (26.157) hergeleitete Zahlenwert der Umlaufzeit wird in Tabelle 26-12 weder für die mittlere noch für die wahre Bahn exakt erreicht. Dies kann auf verschiedene Ursachen zurückgeführt werden:

1. Rundungsfehler können mit den zum Teil aufwendigen Berechnungen (26.169) und (26.170) mit (26.171) erwartet werden. Allerdings wurden die Berechnungen mit der Genauigkeit $10^{-9}\,\mathrm{sec}$ durchgeführt und es zeigen sich zwischen den mit sehr unterschiedlichen Berechnungsarten erhaltenen Ergebnissen keine Unterschiede.

2. Jede Programmierung ist erfahrungsgemäß fehleranfällig. Werden also Abweichungen zu dem Sollergebnis $4\pi / \dot{\Theta}^2$ beobachtet, kann dies als ein wichtiger Hinweis zur Notwendigkeit einer Programmierfehlersuche verstanden werden.

3. Die Berechnungen verwenden ein analytisches oder numerisches Bahnmodell. Ein solches Bahnmodell muss immer als unvollständige Näherung an die wahre Satellitenbahn verstanden werden. Um widerspruchsfreie Ergebnisse zu liefern, muss ein solches Bahnmodell mathematisch in sich konsistent sein. Fehlerhafte Ergebnisse können daher nur mathematischer Natur sein und müssen entsprechend korrigiert werden.

4. Die Abweichungen können aber auch auf nicht konsistente astronomische und geodätische Basisparameter zurückgeführt werden. Umgekehrt kann mit der hier hergeleiteten Methodik nachgewiesen werden ob ein Parametersatz in sich konsistent ist. Es ist daher absolut erforderlich, dass allen Berechnungen die benutzten Parametersätze erwähnt werden. Dazu muss beachtet werden, dass die physikalischen „Konstanten“ grundsätzlich zeitabhängig sind, auch wenn die Zeitabhängigkeit bei manchen dieser Parameter noch nicht oder nur sehr ungenau bekannt ist[1]. Parametersätze sind etwa IAU76, WGS84, Astronomical Almanach 2010, GFZ Potsdam[2], u.a..

Die generelle Aussage lautet:

- *Die Konsistenz von astronomischen Basisparametern im Zusammenhang mit Aufgaben der Satellitenbahnanalyse kann mit Hilfe von Äquivalenzbahnen überprüft werden, die aus der Kopplung von tropischen mit meridionalen Bewegungen gebildet werden. Die Bedingungsgleichung ist* $\dot{\Theta} = 2\overline{n_T}$.

Bei dieser Aussage sollte beachtet werden, dass es sich um mathematische Aussagen und nicht um physikalische handelt. Man kann also nicht notwendig etwa auf Messfehler schließen.

[1] Siehe u.a. die Zusammenstellung der Parameter in Anhang E (Band V)

[2] http://podaac.jpl.nasa.gov/grace/data_access.html#Level2

26.8.1.8 Beispiele aus der Äquivalenz der mittleren tropischen und meridionalen Umlaufzeiten

Wie schon die primäre Herleitung der Äquivalenzbahnen (in Abschnitt 26.5.1.3 auf Seite 414) können weitere Untersuchungen von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen überblickmäßig das symptomatische Verhalten dieser Bahnen beleuchten. Allerdings muss beachtet werden, dass die zugehörigen graphischen Darstellungen mit einer Ephemeridenrechnung erstellt werden, die das gesamte zur Verfügung stehende Bahnmodell enthalten. Für eine spezifische Bahnauswahl im Rahmen einer Bahnanalyse ist daher die Betrachtung von $\left(P_T \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahnen im Einzelnen sinnvoll. Dies wird mit Beispielen im nachfolgenden Abschnitt 26.8.1.9 ab Seite 482 vorgeführt.

Um $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen zu untersuchen wird die große Bahnhalbachse mit der Funktionsgleichung (26.169) berechnet.

$\left(\overline{P_T} \hat{=} \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QTR}} = 66932.763262\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0., \bar{i}_0 = 0°, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{00}} = 0°$	
$\bar{Q} = 218°.361652$	t_0 : 2019 08-13/12:00:0.0
$\overline{P_K} = 172333.263653\,\text{sec}$	
$\overline{P_H} = 172328.181014\,\text{sec}$	$P_H = 172328.181014\,\text{sec}$
$\overline{P_A} = 172330.722376\,\text{sec}$	$P_A = 172330.722376\,\text{sec}$
$\overline{P_D} = 172325.639763\,\text{sec}$	$P_D = 172325.639763\,\text{sec}$
$\overline{P_T} = 172328.181014\ \text{sec}$	$P_T = 172328.181014\ \text{sec}$
$\overline{P_R} = 172328.181014\ \text{sec}$	$P_R = 172328.181014\ \text{sec}$
$\overline{P_S} = 173274.409571\,\text{sec}$	$P_S = 173228.668544\,\text{sec}$
$\overline{P_L} = 185899.259922\,\text{sec}$	$P_L = 192776.102066\,\text{sec}$
$\overline{H_P} = 60554.626662\ \text{km}$	$\overline{H_A} = 60554.626662\ \text{km}$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720°.005309$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.994691$
$\Delta\lambda_{Ps} = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -720°.005309$	$\Delta\lambda_{\Omega s} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719°.994691$

Tabelle 26-15: Bahncharakteristika der mittleren tropischen und der mittleren Meridian-bezogenen kreisförmigen und äquatorialen Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66932.763262 km. Genauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-12} km, Schrittweite Δa=1km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_\odot = 398600.4356\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}[1984] = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ rad/sec, $J_2 = 0.001082625379977$

BEISPIEL 1: Gegeben sei die mit der Bedingung $\overline{P_T} = \overline{P_R}$ berechnete kreisförmige äquatoriale Äquivalenzbahn mit den mittleren Bahnparametern (siehe Tabelle 26-12 auf 460) $\overline{a_{QtR}} = 66932.763262\ \text{km}$, $\bar{e}_0 = 0.0$, $\bar{i}_0 = 0°.0$, $\bar{\Omega}_0 = 0°.0$, $\bar{\omega}_0 = 0°.0$ $M_0 = 0°.0$ und der Epoche

t_0 : 2019 08-13/12:00:0.0 . Zu dieser Epoche beträgt die Sternzeit in Greenwich $\Theta_G = 141°.638348$. Mit Formel (26.168) hat der mittlere Äquivalenzparameter den Betrag $\overline{Q} = 218°.361652$. Die Bahncharakteristika sind in Tabelle 23-7 zusammengestellt.

Die mit diesen Parametern gerechnete Bahn ist in Bild 26-26 dargestellt: über dem Argument der Breite *u* sind über einen Umlauf der Verlauf der Rektaszension α und der gegenläufige Verlauf der geographischen Länge λ aufgetragen sowie der Verlauf der Summe $\alpha + \lambda$. Obwohl mit einem vollständigen analytischen Bahnmodell unter Berücksichtigung aller bekannten kurzperiodischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) gerechnet, macht die Kurve $\alpha + \lambda$ einen konstanten Eindruck. Dies täuscht, denn nach Formel (26.164) steht am Beginn der Kurve der konstante Parameter $\overline{Q}$, während die Kurve selber nur wegen der hier gewählten Anfangsparameter kaum wahrnehmbaren Variationen um den konstanten Äquivalenzparameter $\overline{Q}$ unterliegt. ◄

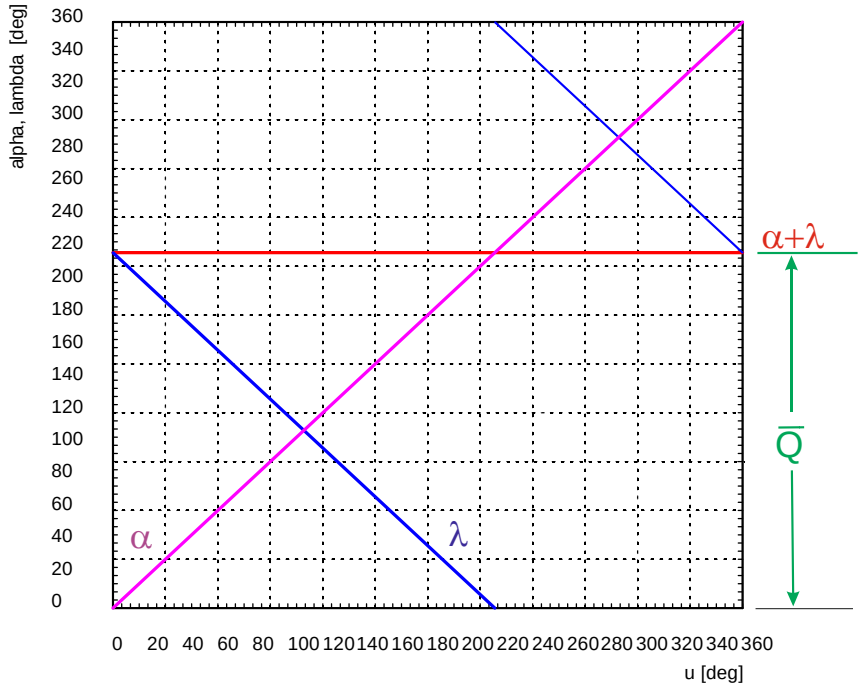


Bild 26-26: Rektaszension und geographische Länge sowie deren Summe über einen Umlauf (2 Sterntage) der kreisförmigen äquatorialen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ = 66932.763262 km

BEISPIEL 2: Um den Einfluss der Inklination auf den Verlauf des wahren Äquivalenzparameters $Q = \overline{Q} + \delta Q$ zu demonstrieren, wird eine $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit Inklination $\overline{i}_0$ =30° gewählt. Die übrigen Kepler Elemente sind $\overline{\Omega}_0$ =60, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°. Die Berechnung der großen Bahnhalbachse wird mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_T} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-9}$, Δ(a)<10^{-12} km und der Schrittweite Δa=1 km mit der Bedingungsgleichung (26.169) durchgeführt. Es ergibt sich $\overline{a_{QTR}}$ =66932.193394 km.

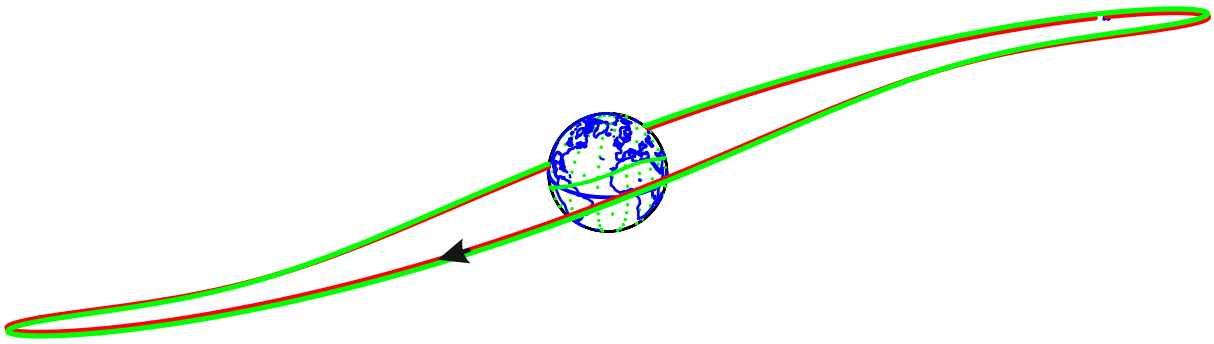


Bild 26-27: Räumlicher Verlauf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit den Parametern $\overline{a_{QTR}}$ =66932.193394 km, $\bar{i}_0$ =30°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°, über einen Umlauf (2 Sterntage), (rote Kurve), Bahn nach einem Jahr (grüne Kurve). Sichtachse der Darstellung: $\lambda = 340°, \varphi = 25°$. Die Bodenspur auf der Erdoberfläche ist eingezeichnet.

Zur Epoche t_0 :2019-09-12/12:00:0.0 beträgt die mittlere Greenwich- Sternzeit Θ_G =313°.476905. Folglich hat der mittlere Äquivalenzparameter mit Formel (26.168) den Wert $\bar{Q}$ =166°.523095.

Die Bodenspur ist über einen Umlauf von zwei Sterntagen in Bild 26-28 dargestellt. Diese Spur ändert sich unwesentlich. Eine Abschätzung mit dem zur Verfügung stehenden Bahnmodell zeigt im Verlauf eines Jahres eine Verschiebung des aufsteigenden Knotens um etwa 0°.8 in geographischer Länge.

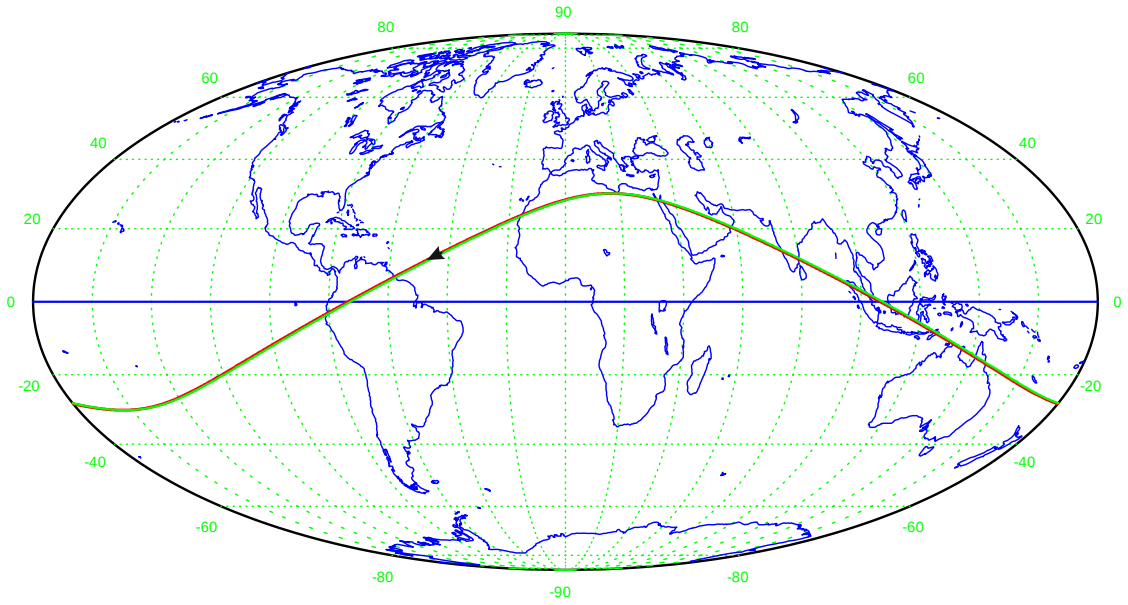


Bild 26-28: Verlauf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Inklination $\bar{i}_0$ =30° und der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66932.193394 km über einen Umlauf (2 Sterntage), (rote Kurve), sowie überlagert nach einem Jahr (grüne Kurve)

Andererseits ist ein voller Umlauf des Knotens in Bezug auf den Frühlingspunkt nach etwa 428 tropischen Jahren zu erwarten. Gravitationsstörungen durch die Attraktion von Sonne und Mond, eventuell durch Solarflux und andere Einflüsse dürften diese Bahn nachhaltiger beeinflussen und Bahnkorrekturen erfordern als der in dieser Bahnhöhe geringer werdende Einfluss des Erdgravitationsfeldes.

$\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QTR}} = 66932.193394\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0., \bar{i}_0 = 30°, \bar{\Omega}_0 = 60°, \bar{\omega}_0 = 0°, \overline{M_{00}} = 0°$	
$\bar{Q} = 166°.523095$	t_0 : 2019-09-19/21:00:0.0
$\overline{P_K} = 172331.062777\,\text{sec}$	
$\overline{P_A} = 172329.474474\,\text{sec}$	$P_A = 172325.980197\,\text{sec}$
$\overline{P_D} = 172325.980215\,\text{sec}$	$P_D = 172325.980215\,\text{sec}$
$\overline{P_T} = 172328.181014\,\text{sec}$	$P_T = 172328.181014\,\text{sec}$
$\overline{P_R} = 172328.181014\,\text{sec}$	$P_R = 172327.920999\,\text{sec}$
$\overline{H_P} = 60554.056794\ \text{km}$	$\overline{H_A} = 60554.056794\ \text{km}$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -\,720°.001701$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -\,719°.995402$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.987102$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -\,719°.995402$

Tabelle 26-16: Bahncharakteristika der mittleren tropischen und der mittleren Meridian-bezogenen kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66932.193394 km und Inklination $\bar{i}_0$ =30°. Genauigkeiten $\Delta\bar{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-12} km, Schrittweite Δa=1km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\odot}$ = 398600.4356 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}[1984] = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ rad/sec, J_2 = 0.001082625379977 .

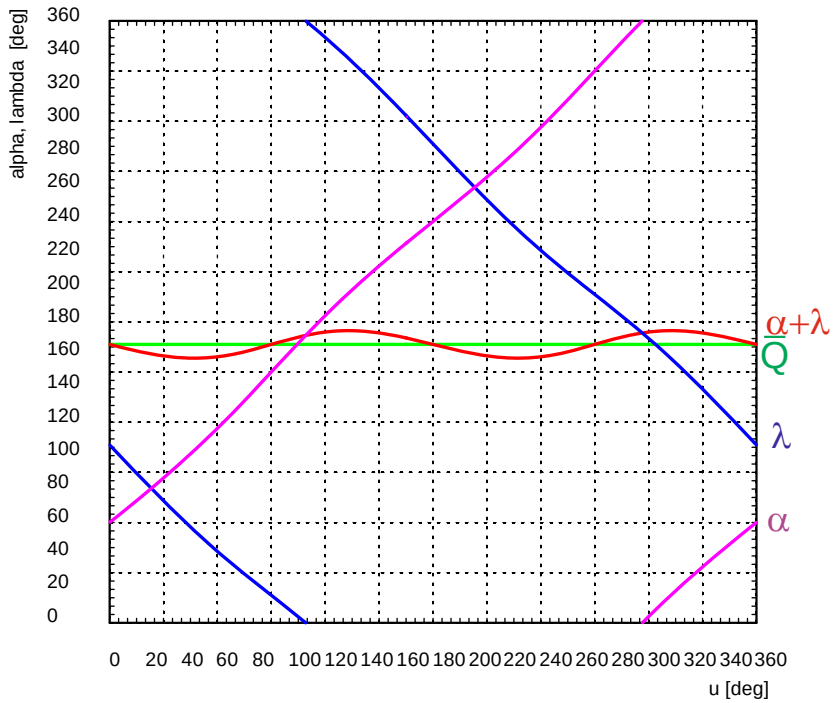


Bild 26-29: Verlauf von Rektaszension und geographischer Länge sowie deren Summe über einen Umlauf (2 Sterntage) auf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Inklination $\bar{i}_0$ =30° und der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66932.193394 km

Anmerkung: Bild 26-29 wurde mit allen bekannten periodischen Einflüssen gerechnet. Diese wirken sich in dem Bild im Vergleich zur Darstellung mit säkularem Einfluss nur unmerklich aus. Auch wenn sich der Satellit rechtläufig bewegt erscheint er von der rotierenden Erde aus gesehen rückläufig. Dieser Sachverhalt kann auch aus Bild 26-12 (auf Seite 434) abgelesen werden. ◄

BEISPIEL 3: Für eine weitere Untersuchung des Einflusses der Inklination auf den Verlauf des wahren Äquivalenzparameters $Q = \overline{Q} + \delta Q$, wird eine $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit Inklination $\overline{i}_0$ =60° gewählt. Die übrigen *Kepler* Elemente sind $\overline{\Omega}_0$ =60, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°. Die Berechnung der großen Bahnhalbachse wird mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_T} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-9}$, $\Delta(a)<10^{-12}$ km und der Schrittweite Δa=1 km mit der Bedingungsgleichung (26.169) durchgeführt. Es ergibt sich $\overline{a_{QTR}}$ = 66931.122553 km.

Zur Epoche t_0 :2019-09-12/12:00:0.0 beträgt die mittlere Greenwich- Sternzeit Θ_G =313°.476905. Folglich hat der mittlere Äquivalenzparameter mit Formel (26.168) den Wert $\overline{Q}$ =166°.523095.

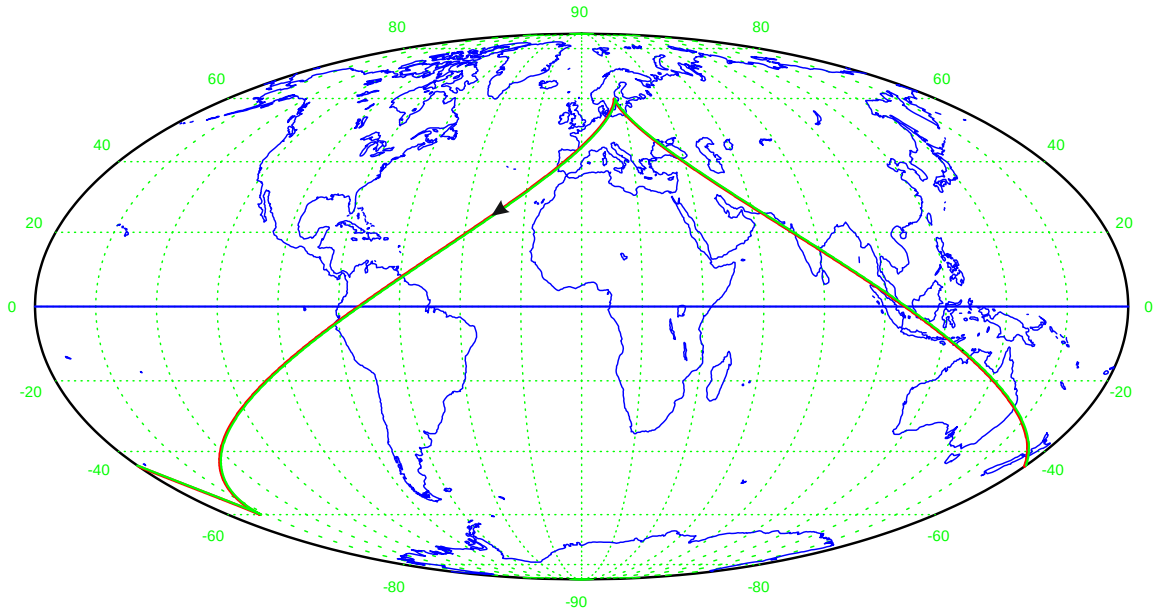


Bild 26-30: Verlauf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Inklination i=60° und der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66931.118205 km über einen Umlauf (2 Sterntage) mit Spitzenpunkten, rote Bahn nach Epoche, grüne Bahn nach einem Jahr

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-17 zusammengefasst.

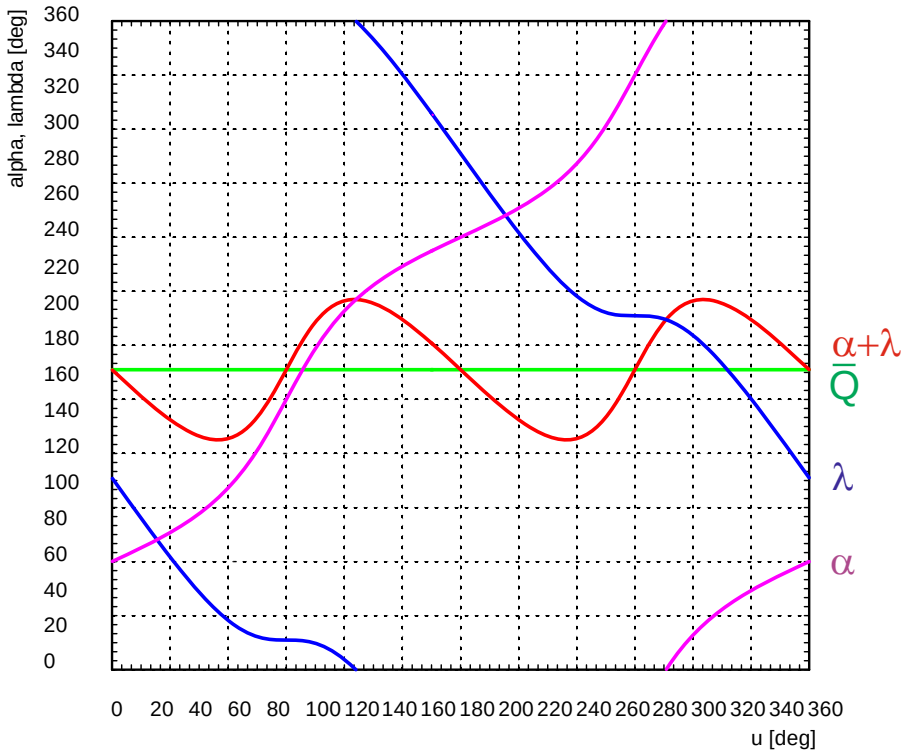


Bild 26-31: Verlauf von wahrer Rektaszension und wahrer geographischer Länge sowie deren Summe über einen Umlauf (2 Sterntage) auf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahn mit der Inklination $\overline{i}_0$ =60° und der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66931.118205 km

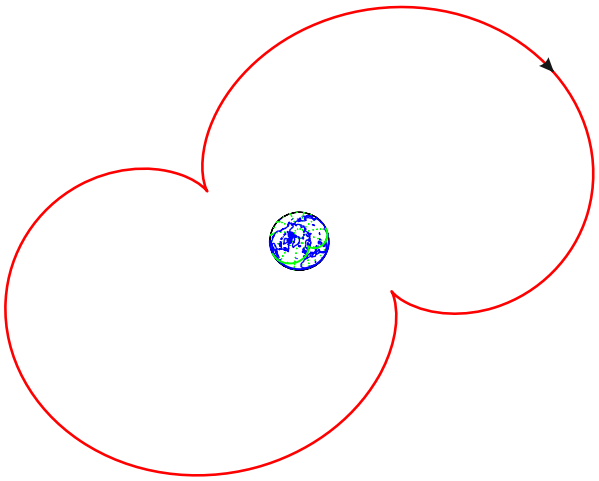


Bild 26-32: Räumlicher Verlauf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahn mit Spitzenpunkten. Bahnparameter $\overline{a_{QTR}}$ =66931.118205 km, $\overline{i}_0$ =60°, $\overline{\Omega}_0$ =60°, $\overline{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0}$ =0°, über einen Umlauf (2 Sterntage) , Sichtachse der Darstellung: $\lambda = 340°, \varphi = 75°$. Die Bodenspur auf der Erdoberfläche ist eingezeichnet.

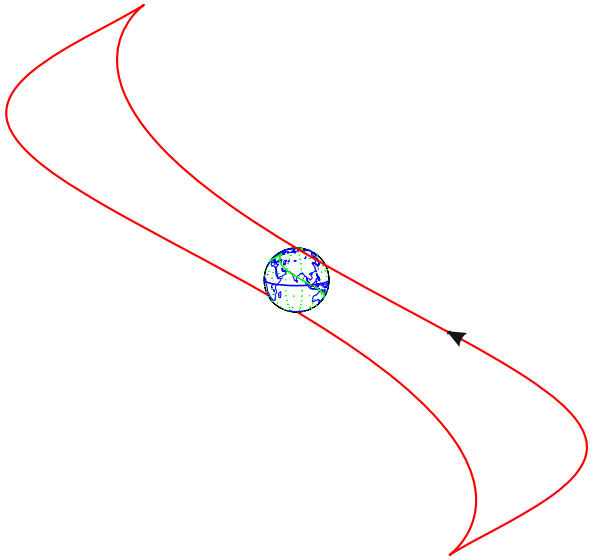


Bild 26-33: Räumlicher Verlauf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit Spitzenpunkten. Bahnparameter $\overline{a_{QTR}}$ =66931.118205 km, $\overline{i}_0$ =60°, $\overline{\Omega}_0$ =60°, $\overline{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0}$ =0°, über einen Umlauf (2 Sterntage) , Bahn wie in Bild 26-32, jedoch mit Sichtachse: $\lambda = 80°, \varphi = 10°$. Die Bodenspur auf der Erdoberfläche ist eingezeichnet.

$\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QTR}}$ =66931.118205 km, $\overline{e}_0$ =0.0, $\overline{i}_0$ =60°, $\overline{\Omega}_0$ =60°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°	
$\overline{Q}$ =166°.523095	t_0 ; 2019-09-19/21:00:0.0
$\overline{P_K}$ = 72326.910343sec	
$\overline{P_H}$ = 172327.545687 sec	P_H = 172327.545687 sec
$\overline{P_A}$ = 172327.228004sec	P_D = 172326.910370 sec
$\overline{P_D}$ = 172326.910371sec	P_D = 172326.910371sec
$\overline{P_T}$ = 172328.181014 sec	P_T = 172329.451656 sec
$\overline{P_R}$ = 172328.181014 sec	P_R = 172327.757466sec
$\overline{P_S}$ = 173274.409571sec	P_S = 174057.501241sec
$\overline{P_L}$ = 185899.259922 sec	P_L = 183475.246452 sec
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A}$ = – 719°.997368	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D}$ = – 719°.997346
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A}$ = – 719°.996041	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D$ = – 719°.997346

Tabelle 26-17: Bahncharakteristika der mittleren tropischen und der mittleren Meridian-bezogenen kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66931.118205 km und Inklination $\overline{i}_0$ =60°. Genauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-12} km, Schrittweite Δa=1km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell.

BEISPIEL 4: Für eine weitere Untersuchung des Einflusses der Inklination auf den Verlauf des wahren Äquivalenzparameters $Q = \overline{Q} + \delta Q$, wird eine $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit Inklination $\overline{i}_0$ =85° gewählt. Die übrigen *Kepler* Elemente sind $\overline{\Omega}_0$ =60, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°. Die Berechnung der großen Bahnhalbachse wird mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_T} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-9}$, $\Delta(a)<10^{-12}$ km und der Schrittweite Δa=1 km mit der Bedingungsgleichung (26.169) durchgeführt. Es ergibt sich $\overline{a_{QTR}}$ = 66930.751846 km.

Zur Epoche t_0 :2019-09-12/12:00:0.0 beträgt die mittlere Greenwich- Sternzeit (wie in Beispiel 3) Θ_G =313°.476905. Folglich hat der mittlere Äquivalenzparameter mit Formel (26.168) den Wert $\overline{Q}$ =166°.523095.

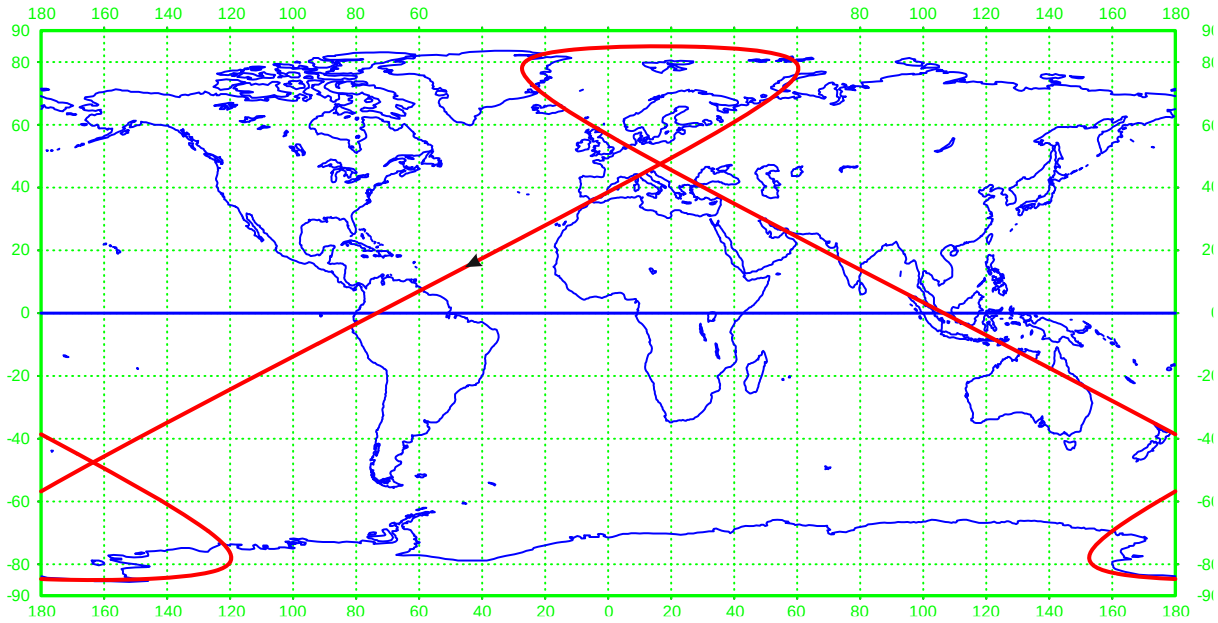


Bild 26-34: Verlauf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Inklination $\overline{i}_0$ =85° und der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66930.751846 km über einen Umlauf (2 Sterntage) mit Bahnschleifen.

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-18 zusammengefasst.

Die Bodenspur ist über einen Umlauf von zwei Sterntagen in Bild 26-34 dargestellt. Wie aus Bild 26-12 zu erwarten, handelt es sich bei dieser Bahn um eine Schleifenbahn. Sie liegt im Wesentlichen unveränderlich über der Erdoberfläche fest. Bild 26-36 zeigt den Verlauf der Rektaszension und der geographischen Länge. Im Verlauf der geographischen Länge kann die Schleife als Schwingung um etwa 60° in der Umgebung des Argumentes der Breite *u*=90° bzw. *u*=270° abgelesen werden. Die Schleifen der Bahn können auch in der räumlichen Darstellung Bild 26-35 erkannt werden. ◄

$\left(\overline{P_T} \hat{=} \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QSR}}$ =66930.751846 km, $\overline{e}_0$ =0.0, $\overline{i}_0$ =85°, $\overline{\Omega}_0$ =60°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{Q}$ =166°.523095	t_0 : 2019-09-19/21:00:0.0
$\overline{P_K}$ = 172325.495455 s	
$\overline{P_H}$ = 172327.978830 s	P_H = 172327.978830 s
$\overline{P_A}$ = 172326.737146 s	P_A = 172327.959527 s
$\overline{P_D}$ = 172327.959526 s	P_D = 172327.959526 s
$\overline{P_T}$ = 172328.181014 s	P_T = 172330.500820 s
$\overline{P_R}$ = 172328.181014 s	P_R = 172328.181014 s
$\overline{P_S}$ = 173274.409571 s	P_S = 182267.179757 s
$\overline{P_L}$ = 185899.259922 s	P_L = 185899.259922 s
$\overline{H_P}$ =60552.615246 km	$\overline{H_A}$ = 60552.615246 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720.017620$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719.999537$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720.022728$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719.999537$

Tabelle 26-18: Bahncharakteristika der mittleren tropischen und der mittleren Meridian-bezogenen kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \hat{=} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66931.118205 km und Inklination $\overline{i}_0$ =85°. Genauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-12} km, Schrittweite Δa=1km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\odot}$ = 398600.4356 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}[1984]$ = 0.72921158573340 ×10^{-4} rad/sec, J_2 = 0.001082625379977

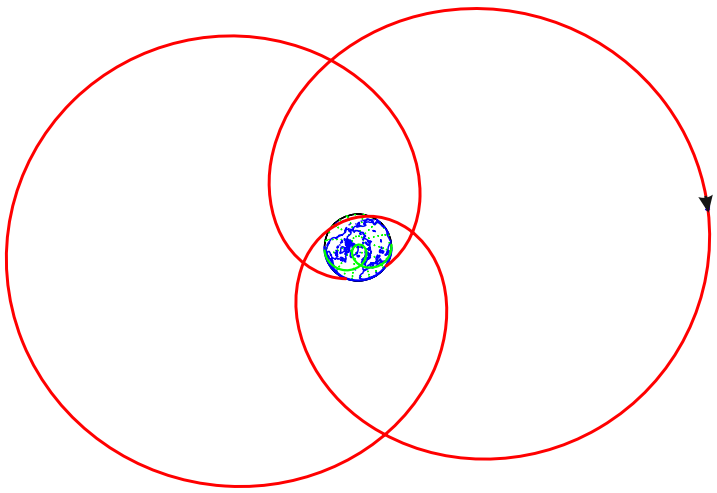


Bild 26-35: Räumlicher Verlauf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \hat{=} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit den Parametern, $\overline{a_{QTR}}$ =66930.751846 km, $\overline{i}_0$ =85°, $\overline{\Omega}_0$ =60°, $\overline{\omega}_0 = \overline{M_{00}}$ =0°, über einen Umlauf (2 Sterntage) , Sichtachse: $\lambda = 340°, \varphi = 80°$. Die Bodenspur auf der Erdoberfläche ist eingezeichnet. Die Bahnschleifen können auch in dieser Darstellung identifiziert werden

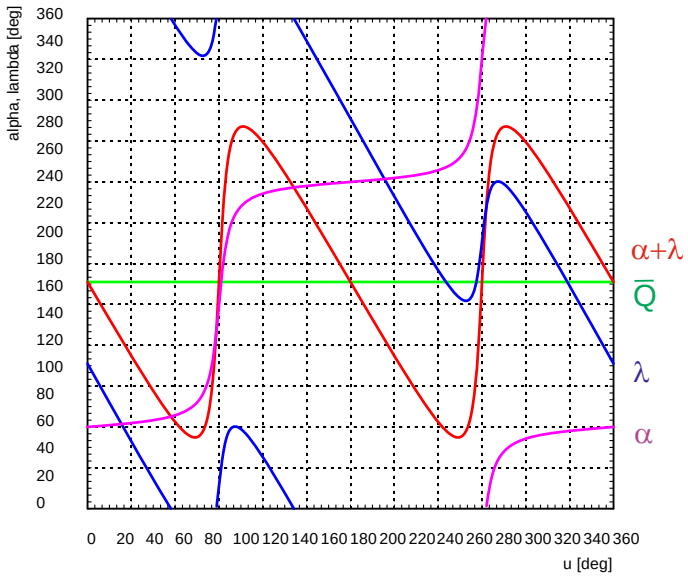


Bild 26-36: Verlauf von Rektaszension und geographischer Länge sowie deren Summe über einen Umlauf (2 Sterntage) auf der kreisförmigen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Inklination i=85° und der mittleren Halbachse $\overline{a_{Qt}}$ = 66930.751846 km

BEISPIEL 5: Um den Einfluss einer Bahninklination und einer mittleren Exzentrizität zu demonstrieren wird eine $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit den Bahnparametern $\overline{a_{QTR}}$ =66930.475528 km, $\bar{e}_0$ =0.5, $\bar{i}_0$ =70°, $\bar{\Omega}_0$ =320°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0° zur Epoche t_0 :2019-09-19/21:00:0.0 betrachtet.

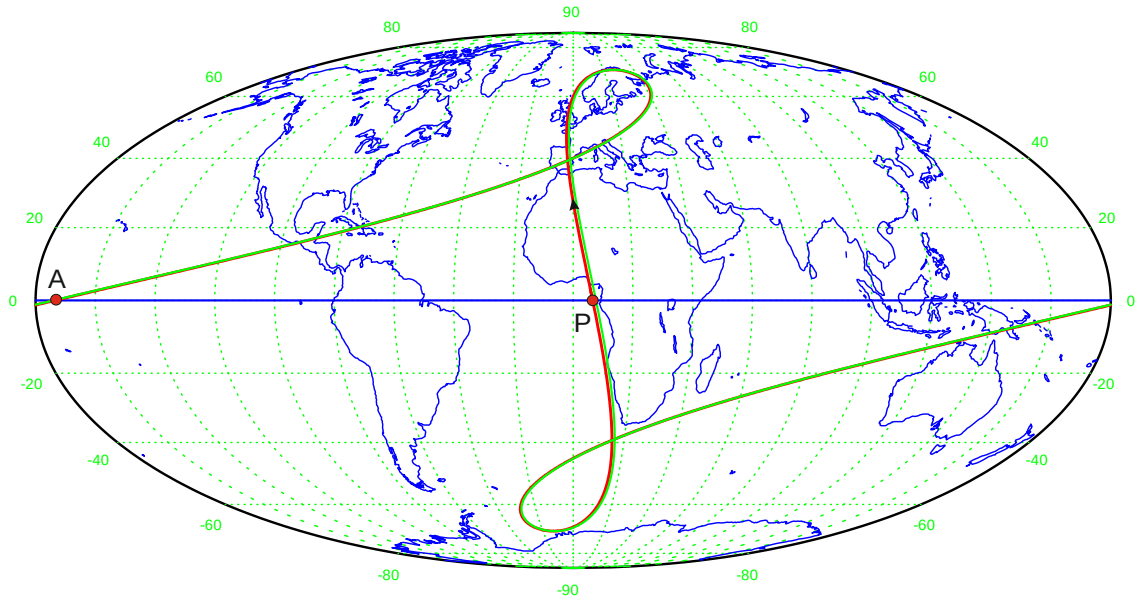


Bild 26-37: Verlauf der elliptischen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit e=0.5, i=70°, $\bar{\Omega}_0$ = 320°.0 , $\omega = M_0 = 0°$ und der mittleren Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66930.475528 km über je einen Umlauf (2 Sterntage), rote Kurve nach Epoche, überlagerte grüne Kurve nach einem Jahr. Bahn mit scheinbaren Bahnschleifen, die Apsiden sind markiert, Perigäum (P), Apogäum (A)

Die Bahn ist wieder eine Schleifenbahn. Um außerdem das langfristige Verhalten dieser Bahn zu untersuchen, wird der Bahnverlauf nach einem Jahr mit der Epoche t_{02}:2020-09-19/12:00:0.0 dargestellt. Die Bodenspur ist über je einen Umlauf von zwei Sterntagen in Bild 26-37 dargestellt, in roter Farbe zur Epoche, überlagert in grüner Farbe nach einem Jahr. Die Bahn ist extrem stabil. Dies kann aus den Stabilitätsparametern $\overline{\Delta\lambda_P}$, $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ abgelesen werden. Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn einschließlich der Perigäums- und der Apogäumshöhe werden in Tabelle 26-19 zusammengefasst.

$\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QTR}}$ =66930.475528 km, $\bar{e}_0$ =0.5, $\bar{i}_0$ =70°, $\bar{\Omega}_0$ =320°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\bar{Q} = 326°.523095$	t_0 :2019-09-19/21:00:0.0
$\overline{P_K}$ =172324.428308sec	
$\overline{P_H}$ =172327.164302sec	P_H =172326.121330sec
$\overline{P_A}$ = 172325.698075sec	P_A = 172325.698075sec
$\overline{P_D}$ = 172326.635835sec	P_D = 172325.968773sec
$\overline{P_T}$ = 172328.181014 sec	P_T = 172327.272988 sec
$\overline{P_R}$ = 172328.181014 sec	P_R = 172329.500638 sec
$\overline{P_S}$ =173274.409571sec	P_S =173051.944851sec
$\overline{P_L}$ =185899.259922sec	P_L = 185899.259922sec
$\overline{H_P}$ = 27087.101164 km	$\overline{H_A}$ = 94017.576692 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -\,719°.993524$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -\,719°.996772$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -\,719°.993524$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -\,719°.993985$

Tabelle 26-19: Bahncharakteristika der mittleren tropischen und der mittleren Meridian-bezogenen elliptischen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66930.475528 km, Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.5 und Inklination $\bar{i}_0$ =70°. Genauigkeiten $\Delta\bar{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-12} km, Schrittweite Δa=50 km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km, $\mu_{\ddot{O}}$ = 398600.4356 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$[1984] = 0.72921158573340 ×10^{-4} rad/sec, J_2 = 0.001082625379977

Zur Epoche beträgt die mittlere Sternzeit (wie in Beispiel 3) bezogen auf den Greenwich-Meridian Θ_G =313°.476905, der mittlere Äquivalenzparameter somit $\bar{Q}$ =326°.523095.

Die Bodenspur liegt (im Wesentlichen) unveränderlich fest. Das Perigäum hat die Bahnhöhe H_P =27087.101km, das Apogäum H_A =94017.577 km. Die mittlere Bahnhöhe beträgt in Bezug auf den Äquator $\tilde{H}$ =6055.808 km. Die Apsiden werden in diesem Beispiel wegen $\bar{\omega}_0$ =0° durchflogen, wenn der Satellit das Argument der Breite *u*=0° bzw. *u*=180° durchfliegt. Die Schleifen der Umlaufbahn liegen also symmetrisch zum Äquator.

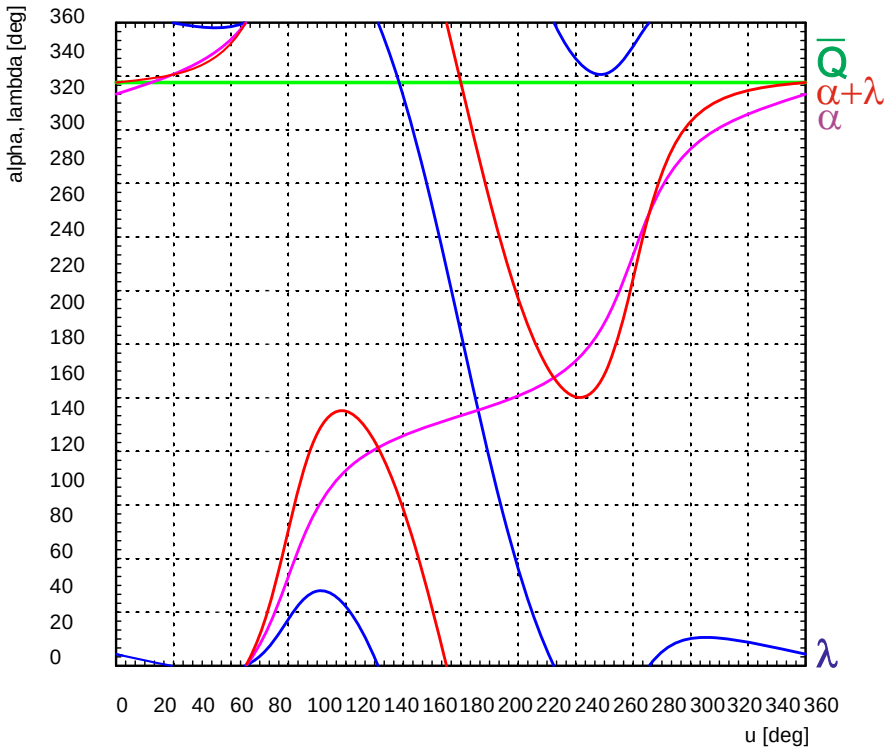


Bild 26-38: Verlauf von Rektaszension und geographischer Länge sowie deren Summe über einen Umlauf (2 Sterntage) auf der $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66930.475528 km, $\overline{e}_0$ =0.5, $\overline{i}_0$ =70°, $\overline{\Omega}_0$ =320°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°.

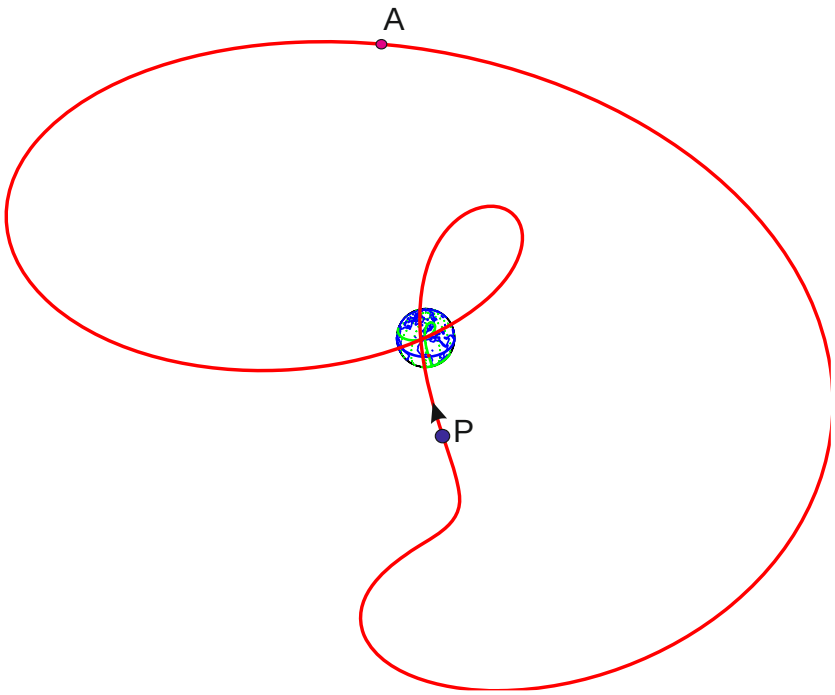


Bild 26-39: Dreidimensionale Darstellung des Verlaufs der elliptischen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit e=0.5, i=70° und der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66930.475528 km über einen Umlauf (2 Sterntage) mit Bahnschleifen, die Apsiden sind markiert, Perigäum (P), Apogäum (A), Blickrichtung $\lambda = 0°,\ \varphi = 40°$.

Die Schleifen der Bahn zeigen sich sowohl im Verlauf der geographischen Länge wie auch der Summe $\alpha+\lambda$ (vgl. Bild 26-38). Eine dreidimensionale Darstellung der Bahn zeigt jedoch in Abhängigkeit von der Sichtlinie ein sehr merkwürdiges Verhalten. In Bild 26-39 ist nur die Schleife über der Vorderseite der Erdoberfläche ausgeprägt, während die zweite Schleife über der Rückseite ausgeartet erscheint. ◄

BEISPIEL 6: Es soll die langfristige Entwicklung einer $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit extremen Bahnparametern in Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.8 und Inklination $\bar{i}_0$=80° über einen längeren Zeitraum untersucht werden. Es wird das gesamte Brouwersche Bahnmodell verwendet, die angestrebten Genauigkeitsgrenzen sind $\Delta\bar{P} = \left|\overline{P_T} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-9}$ sec, $\Delta(a)<10^{-12}$ km, die Schrittweite für die Iteration ist Δa=50 km.

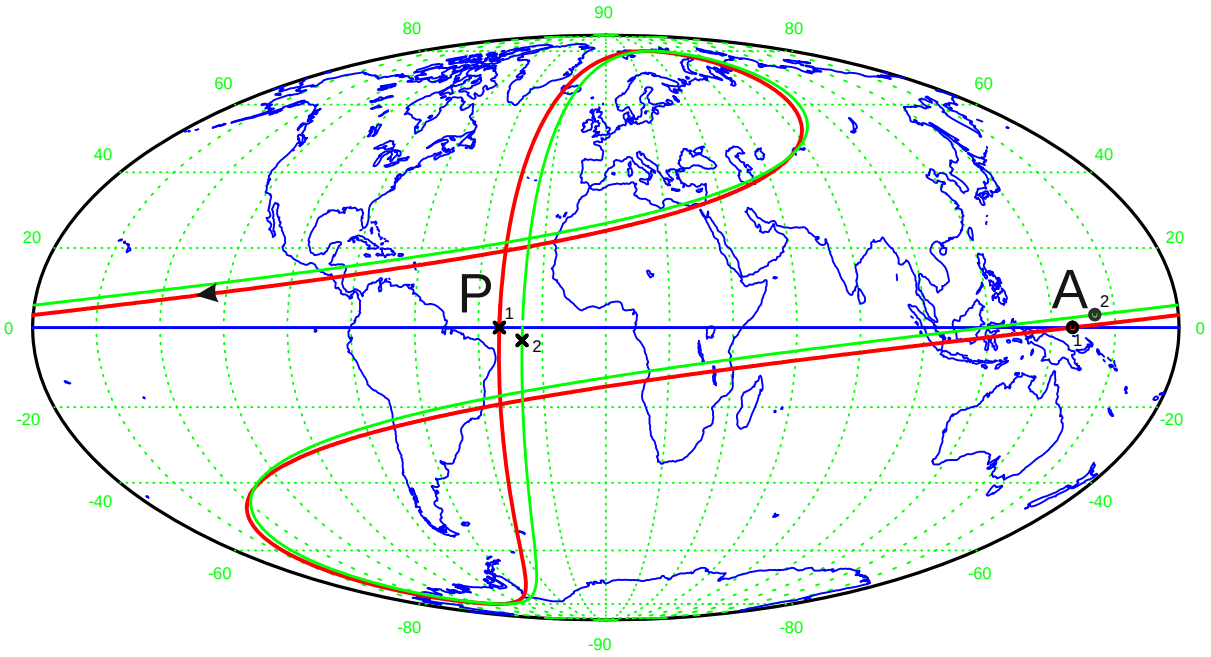


Bild 26-40: Verlauf der elliptischen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn und der mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66927.024449 km, und den Parametern $\bar{e}_0$=0.8, $\bar{i}_0$=80°, $\bar{\Omega}_0$=120°, $\bar{\omega}_0$=0°, $\overline{M_{0\,0}}$=0° über einen Umlauf (2 Sterntage) mit Bahnschleifen. In Bezug auf die rote Bahn zeigt die ein ganzes Jahr später gerechnete grüne Bahn eine Verschiebung infolge der abweichenden Drift der Apsidenlinie (Drift der Perigäen) und der Drift des aufsteigenden Knotens.

Aus der Äquivalenz der mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_T} = \overline{P_R}$ wird die mittlere Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66927.024449 km berechnet. Die Subsatellitenbahn mit den weiteren Parametern $\bar{e}_0$=0.8, $\bar{i}_0$ =80°, $\bar{\Omega}_0$=120°, $\bar{\omega}_0$=0°, $\overline{M_{0\,0}}$=0° und der Epoche t_0 :2019-08-25/12:00:0.0 wird in Bild 26-40 als rote Kurve dargestellt. Der Verlauf dieser Bahn zur Epoche 2020-08-25/12:00:0 ist als eine grüne Kurve zu erkennen. Die Orte der Perigäen sowie der Apogäen sind durch P bzw. A gekennzeichnet. Die Subsatellitenkurve hat sich über den großen Zeitraum von 12 Monaten geringfügig verschoben. Diese für Meridian-bezogene Äquivalenzbahnen typische Tatsache kann für Aufgaben zur langfristigen Beobachtung gewisser Gebiete von Interesse sein.

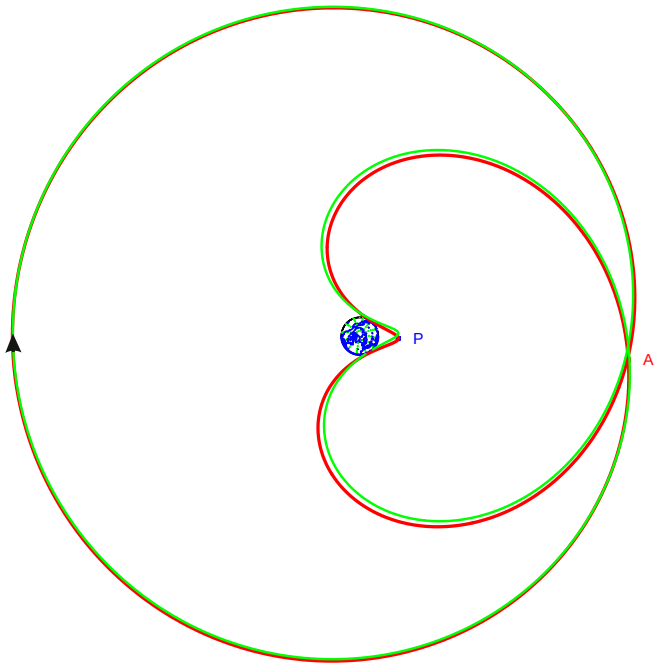


Bild 26-41: Wahrer Verlauf der $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn $\overline{a_{QTR}}$ =66927.024449 km, $\overline{e}_0$ =0.8, $\overline{i}_0$ =80°, $\overline{\Omega}_0$ =120°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0° über je zwei Tage, beginnend zur Epoche t_0 :2019-08-25/12:00:0.0 (rote Bahnkurve) bzw. ab Datum t_{02} :2020-08-25/12:00:0.0 (grüne Bahnkurve). Sichtachse: $\lambda = 340°, \varphi = 83°$.

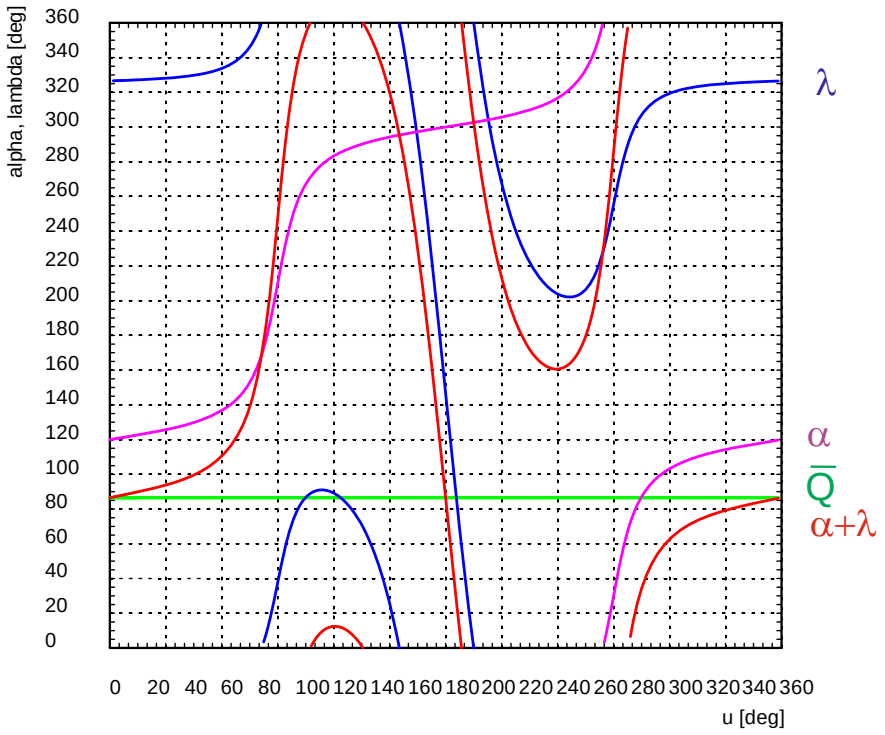


Bild 26-42< SAB Meridian-QTR-04-a-m-grid.cdr>: Verlauf von Rektaszension und geographischer Länge sowie deren Summe über einen Umlauf (2 Sterntage) auf der $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der mittleren Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66927.024449 km, $\overline{e}_0$ =0.8, $\overline{i}_0$ =80°, $\overline{\Omega}_0$ =120°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°

$\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QTR}}$ =66927.024449 km, $\overline{e}_0$ =0.8, $\overline{i}_0$ =80°, $\overline{\Omega}_0$ =120°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{Q}$ =86°.533884	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_K}$ = 172311.100353sec	
$\overline{P_H}$ = 172325.367639sec	P_H = 172317.044787sec
$\overline{P_A}$ = 172316.450727sec	P_A = 172316.450299sec
$\overline{P_D}$ = 172324.776564sec	P_D = 172317.005393sec
$\overline{P_T}$ = 172328.181014 sec	P_T = 172318.312225 sec
$\overline{P_R}$ = 172328.181014 sec	P_R = 172285.709321 sec
$\overline{P_S}$ = 173274.409571sec	P_S = 172655.813722sec
$\overline{P_L}$ = 185899.259922sec	P_L = 190923.697732sec
$\overline{H_P}$ = 7007.268290 km	$\overline{H_A}$ =114090.507408 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A}$ = – 719°.961122	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D}$ = – 719°.992888
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A}$ = – 719°.961120	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D$ = – 719°.960421

Tabelle 26-20: Bahncharakteristika der mittleren tropischen und der mittleren Meridian-bezogenen elliptischen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66927.024449 km, Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.8 und Inklination $\overline{i}_0$ =80°. Genauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-12} km, Schrittweite Δa=50 km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\odot}$ = 398600.4356 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}[1984]$ = 0.729211585733 40 ×10^{-4} rad/sec, J_2 = 0.001082625379977

Die Stabilitätsparameter zeigen eine relativ kleine aber nicht zu vernachlässigende Drift von Knoten und Apside, die sich im Verlauf eines Jahres merkbar auswirkt. Sehr groß ist die Drift der Bahn bezüglich der fiktiven mittleren Sonne.

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-20 zusammengefasst.

Die Rektaszension α und geographischer Länge λ, sowie deren Summe α+λ ist in Bild 26-42 dargestellt. Der mittlere Äquivalenzparameter beträgt $\overline{Q}$ =86°.533884. Auch hier kann der konstante säkulare Anteil vom periodischen getrennt gesehen werden. ◄

26.8.1.9 Beispiele aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten

Eine detaillierte Untersuchung des langfristigen Verhaltens von Äquivalenzbahnen erfordert den Bezug auf die wahren Bahnen. In allen Fällen erfolgt die Darstellung der Bahn in Bezug auf das gesamte zur Verfügung stehende Bahnmodell, analytisch oder numerisch.

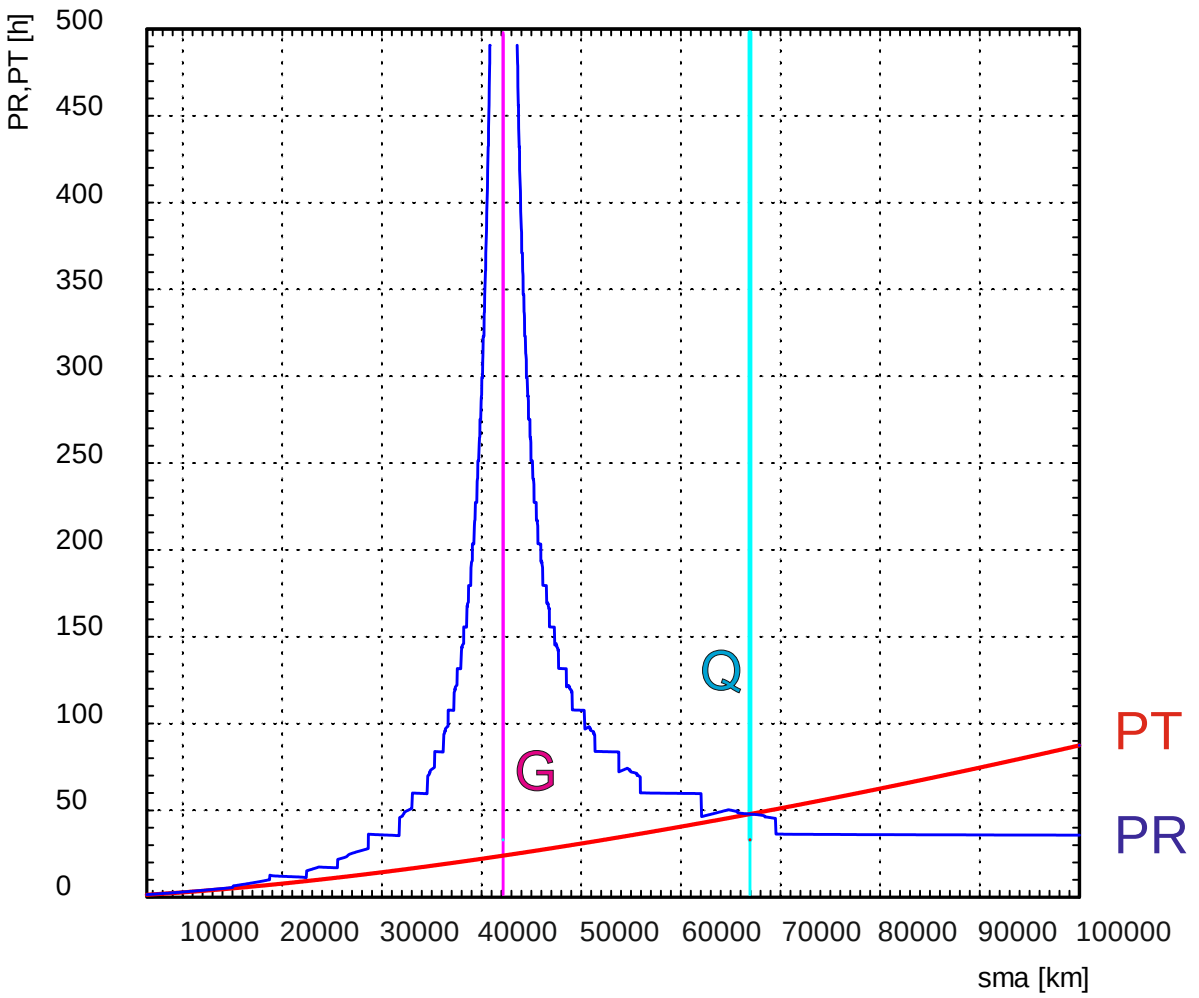


Bild 26-43: Verlauf der oskulierenden tropischen Umlaufzeit P_T (rote Kurve) und Meridian-bezogenen Umlaufzeit P_R (blaue Kurve) einer rechtläufigen Satellitenbahn mit den Bahnparametern $\overline{e}_0$=0.5, $\overline{i}_0$=80°, $\overline{\Omega}_0$=0°, $\overline{\omega}_0$=0°, $\overline{M_{0\,0}}$=0° bezogen auf die Epoche t_0:2019-10-20/12:00:0.0 über der mittleren großen Bahnhalbachse. In der Umgebung der Äquivalenzbahn verläuft die Kurve der wahren Meridian-bezogenen Umlaufzeit weitgehend stetig ohne Sprünge. Die Berechnung erfolgt mit der Schrittweite $\Delta a = 10\,\mathrm{km}$.

Eine oskulierende Meridian-bezogene Umlaufzeit P_R kann nicht widerspruchsfrei definiert werden. Ursache ist der Bezug zur rotierenden Erdoberfläche mit scheinbaren Schleifen, Stillstands- und Umkehrpunkten. Bild 26-43 zeigt den oskulierenden Verlauf der tropischen Umlaufzeit (rote Kurve) und der Meridian-bezogenen Umlaufzeit (blaue Kurve) über der großen Bahnhalbachse für Bahnen mit der Exzentrizität $\overline{e}_0$=0.5, Inklination $\overline{i}_0$=50°, bei Start im Apogäum $\overline{M_{0\,0}}$=180°. Die Sprünge zeigen die Problematik, die mit der Berechnung der Meridian-bezogenen Umlaufzeit aus der Bedingungsgleichung

$$fct\left(P_R\right) \equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\right) - \lambda\left(t_0\right)\right] = 0$$

verknüpft ist. Jedoch ist in der Umgebung der Äquivalenzbahnen Q der Verlauf der P_R-Kurve weitgehend stetig, so dass eine sichere Berechnung der hier interessierenden $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenzbahnen erwartet werden darf.

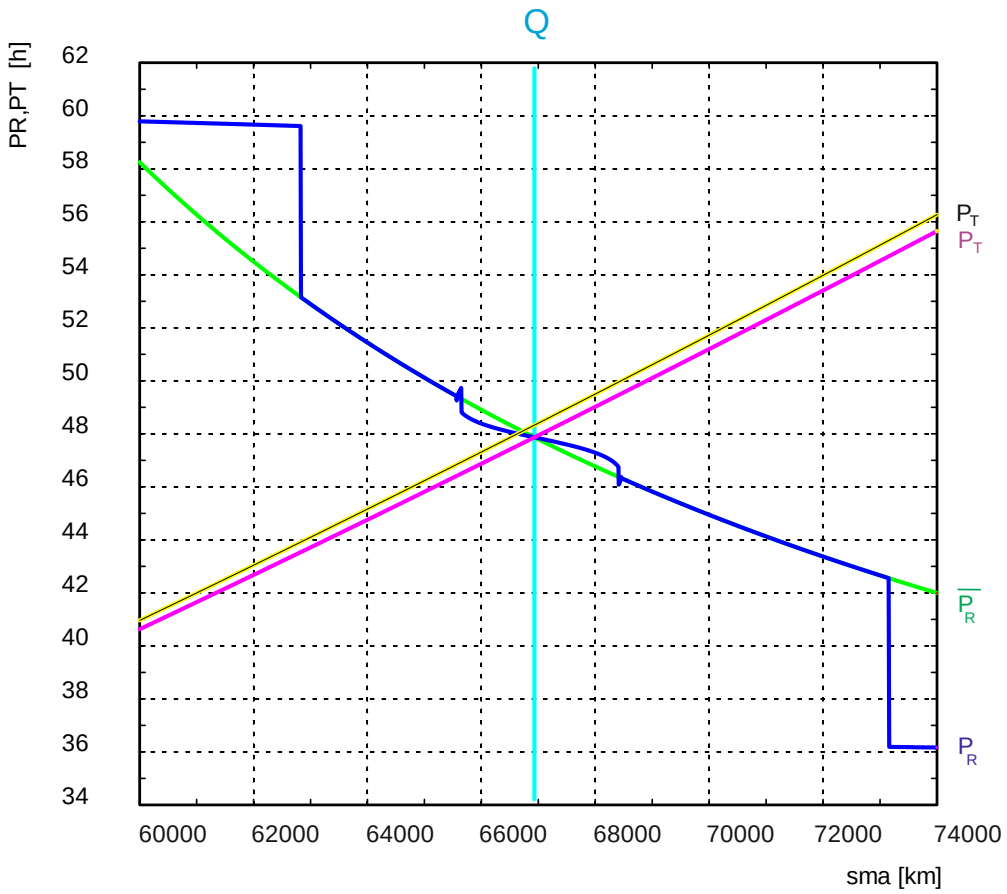


Bild 26-44: Verlauf der oskulierenden tropischen Umlaufzeit P_T (rote Kurve), der oskulierenden Meridian-bezogenen Umlaufzeit P_R (blaue Kurve) und der mittleren Meridian-bezogenen Umlaufzeit $\overline{P_R}$ (grüne Kurve) einer Satellitenbahn mit den Bahnparametern $\overline{e}_0$ =0.5, $\overline{i}_0$ =80°, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0° mit Epoche t_0 :2020-03-16/22:00:0.0 über der mittleren großen Bahnhalbachse. Die Berechnung erfolgt mit der Schrittweite $\Delta a = 1.5\,\mathrm{km}$. Die hier zur Ergänzung eingetragene gelbe Kurve zeigt den Verlauf der entsprechenden mittleren Sonnen-synodischen Umlaufzeit $\overline{P_S}$.

Einen Ausschnitt aus dem vorstehenden Bild 26-43 in der Umgebung der $\left(P_T \triangleq P_R\right)-$Äquivalenzbahn an der Position Q zeigt Bild 26-44. Der Verlauf der wahren tropischen Umlaufzeiten zeigt in der hier dargestellten Auflösung keine Variationen. Die Zeichnung zeigt den geradlinigen Verlauf der mittleren meridionalen Umlaufzeiten sowie die aus den genannten Gründen mit Sprüngen versehenen wahren meridionalen Umlaufzeiten. Diese überlagern die Kurve der mittleren meridionalen Umlaufzeiten nur stückweise, die auf der Zeichnung nur stückweise angedeuteten Sprünge sind stochastisch, abhängig von der Rechengenauigkeit, der Epoche, der Zeichnungsauflösung. Interessant ist vor allem, dass auch die Kurve der wahren meridionalen Umlaufzeiten in der Umgebung der Äquivalenzbahn stetig verläuft. Dies ist ein Hinweis auf den Stabilisierungseffekt der Äquivalenzbahnen, was mittlere wie wahre Umlaufzeiten einschließt. Die gelbe Kurve zeigt ergänzend den Verlauf der wahren Sonnen-synodischen Umlaufzeit, die etwas vom Verlauf der wahren tropischen Umlaufzeit abweicht. Diese Abweichung kann wegen der geringeren Auflösung in Bild 26-44 nicht erkannt werden.

Um den Unterschied zwischen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)-$ und $\left(P_T \triangleq P_R\right)-$Äquivalenzbahnen zu demonstrieren wird die Bahn des letzten Beispiels im vorherigen Abschnitt 26.8.1.8 aufgenommen.

BEISPIEL 7: Es soll analog zu Beispiel 6 die langfristige Entwicklung einer $\left(P_T \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn mit extremen Bahnparametern in Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.8 und Inklination $\overline{i}_0$ =80° über den Zeitraum von einem tropischen Jahr untersucht werden. Aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten $P_T = P_R$ unter Berücksichtigung der säkularen Bewegungseinflüsse („Störungen" der entsprechenden *Kepler*bahn) wird die mittlere Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}_{\text{sec}} = 66929.579760$ km berechnet. Werden die periodischen Bewegungseinflüsse mitgerechnet, erhält man den Wert $\overline{a_{QTR}}_{per} = 66929.579770$ km . Der Unterschied liegt im Centimeter-Bereich. Man beachte aber den wesentlichen Unterschied im Betrag der Bahnhalbachse von etwa 2.5 km im Vergleich zur entsprechenden $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn. Einen Eindruck von der Genauigkeit der Rechnung kann mit Formel (3.8) erhalten werden:

$$2\overline{n_T} = 0.729169830325072 \times 10^{-4} \text{ rad/sec}$$
$$\dot{\Theta} = 0.729211585733400 \times 10^{-4} \text{ rad/sec}$$
$$\left|2\overline{n_T} - \dot{\Theta}\right| = 0.417554083276012056 \times 10^{-8} \text{ rad/sec} \ .$$

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-21 (auf Seite 486) zusammengefasst.

Die Subsatellitenbahn mit den weiteren Parametern $\overline{\Omega}_0$ =120°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0° und der Epoche t_0 :2019-08-25/12:99:0.0 wird in Bild 26-45 als rote Kurve dargestellt. Der Verlauf dieser Bahn ein Jahr später zur Epoche t_{02} :2020-08-25/12:00:0 ist als eine überlagernde grüne Kurve zu erkennen. Die Orte der Perigäen sowie der Apogäen sind durch P bzw. A gekennzeichnet. Die Subsatellitenkurve hat sich in der Umgebung des Perigäums trotz des großen Zeitraums von einem Jahr nur geringfügig verschoben. Hier zeigt sich die wesentliche Eigenschaft der Kopplung zwischen der tropischen und der Meridian-bezogenen Bewegung. Da die Beträge der Verschiebung von Perigäumslänge und Knotenlänge größer als 720° sind, erfolgt die Verschiebung in westlicher Richtung.

Aus einer parallel durchgeführten Ephemeridenrechnung ergeben sich folgende Zahlenwerte, wobei die Ephemeride analytisch unter Berücksichtigung säkularer Bewegungseinflüsse mit der Schrittweite Δt=1 sec berechnet wurde:

Zum Zeitpunkt t_0 :2019-08-25/12:00:0.0 hat der Satellit die geographischen Koordinaten

$$r_P\left(t_1\right) = 13387.706 \text{ km}, \lambda\left(t_1\right) = 326°.523305, \varphi\left(t_1\right) = -0°.002982, \ \alpha\left(t_1\right) = 119°.997899 \ .$$

Der wahre Sonnenwinkel (Bezug auf die wahre Sonne) und der mittlere Sonnenwinkel (Bezug auf die fiktive mittlere Sonne) sind (gerechnet längs des Äquators):

$$\tau_1 = 325°.706875, \ \overline{\tau}_1 = 326°.519305 \ .$$

Die Bahnwinkel (gerechnet längs der oskulierenden Bahnebene) wahre Anomalie, Argument der Breite, *Hansen*scher Bahnwinkel sind: $\upsilon_1 = 359°.8788, u_1 = 359°.9026, \zeta_1 = 359°.8056.$

Auf dieser Bahn hat der Satellit die mittlere Apogäumshöhe H_A =114090.514834 km und die Geschwindigkeit V_A =0.813619 km/sec, die mittlere Perigäumshöhe H_P =7007.268759 km mit der Geschwindigkeit V_P =7.321335 km/sec.

Nach einem Jahr errechnen sich folgende Werte:

Basierend auf der Umlaufzeit $P_T = P_R = 172328.181060\,\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 1^d\ 23^h\ 52^m\ 8^s.181060$ hat der Satellit zum Zeitpunkt t_2 : 2020-08-26/11:53:00.00 die Koordinaten :

$$r(t_2) = 13486.591\mathrm{km},\ \lambda(t_2) = 326°.523634,\ \varphi(t_2) = 7°.131812,\ \alpha(t_2) = 119°.963382\,.$$

$(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R)$	
$\overline{a_{QTR}}$ =66929.579782 km, $\bar{e}_0$ =0.8, $\bar{i}_0$ =80°, $\bar{\Omega}_0$ =120°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{Q}$ =86°.533884	t_0 :2019-08-25/12:00:0.0
$\overline{P_K}$ = 172320.968934 sec	
$\overline{P_H}$ = 172335.236039 sec	P_H = 172326.913668 sec
$\overline{P_A}$ = 172326.319206 sec	P_A = 172326.319238 sec
$\overline{P_D}$ = 172334.644884 sec	P_D = 172326.874274 sec
$\overline{P_T}$ = 172338.049268 sec	P_T = 172328.181060 sec
$\overline{P_R}$ = 172318.313889 sec	P_R = 172328.181060 sec
$\overline{P_S}$ = 173284.386497 sec	P_S = 172662.142800 sec
$\overline{P_L}$ = 185910.743707 sec	P_L = 185910.743707 s
H_P = 7007.779356 km	H_A = 114095.107008 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -\ 720°.002352$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -\ 720°.034118$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -\ 720°.002352$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -\ 720°.001652$

Tabelle 26-21: Bahncharakteristika der wahren tropischen und der wahren Meridian-bezogenen elliptischen $(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R})$ – Äquivalenzbahn mit Berücksichtigung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells. Große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66929.579782 km, Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.8 und Inklination $\bar{i}_0$ =80°. Genauigkeiten $\Delta\bar{P} \le 10^{-9}$ sec, $\Delta(a) < 10^{-12}$ km, Schrittweite Δa=1 km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell. Basis Parameter: $R_E = 6378.1366\,\mathrm{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4356\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta}[1984] = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ rad/sec, $J_2 = 0.001082625379977$. A posteriori Genauigkeit $\Delta\bar{P} = 0.6 \times 10^{-9}$ sec.

Der Satellit kehrt auch nach einem längeren Zeitabschnitt mit entsprechend vielen tropischen bzw. Meridian-bezogenen Umläufen im Wesentlichen zu den Anfangswerten in geographischer Länge bzw. Rektaszension zurück. Die Ungenauigkeit ist durch die Zeitschrittweite und durch Rundungsfehler bedingt. Allerdings zeigt sich deutlich an der unterschiedlichen geographischen Breite φ, dass der Bezug bei einer solchen Äquivalenz nicht auf denselben Punkt auf der Erdoberfläche sondern nur auf denselben Meridian erfolgen kann. Der Ort des Satelliten zum

Zeitpunkt t_{02} ist in Bild 26-45 durch den grünen Punkt mit R gekennzeichnet. Ergänzend wird in Bild 26-46 der Verlauf von Rektaszension und geographischer Länge sowie ihre Summe dargestellt.

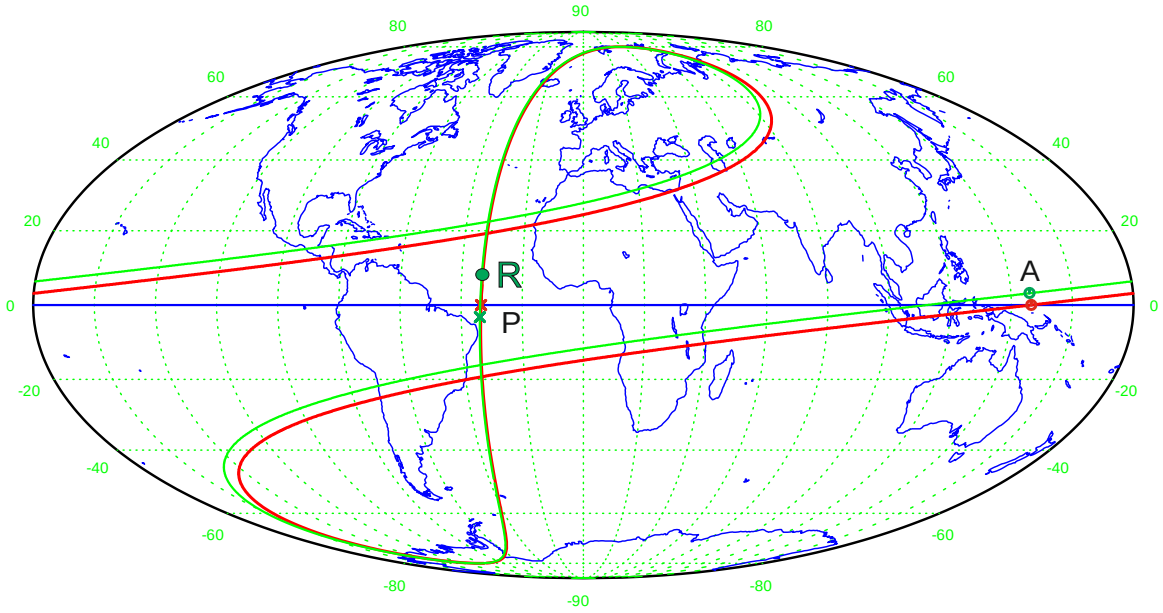


Bild 26-45: Verlauf der elliptischen $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R\right)-$ Äquivalenzbahn mit den Bahnparametern e=0.8, i=80°, Ω=120° und der aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten $P_T = P_R$ gerechneten mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66929.579782 km über einen Umlauf (2 Sterntage) mit Bahnschleifen. Im Vergleich zur roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 :2019-08-25/12:00:0.0 wird die grüne Bodenspur mit Epoche t_{02} :2020-08-25/12:00:0.0 gerechnet. In der Umgebung des aufsteigenden Knotens ist kaum eine Verschiebung der Bodenspur nach dem langen Zeitraum zu erkennen.[1]

Auch im Fall wahrer Bewegung kann der mittlere Äquivalenzparameter als konstanter Faktor abgespalten werden. Zur Epoche t_0 lautet die Sternzeit Θ_G =153°.466116. Entsprechend Formel (26.168) hat der mittlere Äquivalenzparameter auch im Fall der mittleren Bewegungen den Betrag $\overline{Q} = 2\overline{\Omega}_0 - \Theta_G$ =86°.533884, wie auch zu erwarten ist. Es bleiben die periodischen Variationen als Folge der periodischen Bewegungseinflüsse, der Mittelpunktsgleichung und der Reduktion auf den Äquator.

Die Bahn wurde in diesem Beispiel im Hinblick auf die Äquivalenz zwischen tropischer und Meridian-bezogener ausgewählt. Daher hat der Satellit in Bezug auf die Apsidenlinie sowie den aufsteigenden Knoten unterschiedliche Umlaufzeiten.

Die mit periodischen Bewegungseinflüssen gerechnete wahre **anomalistische Umlaufzeit** beträgt $P_A = 172326.319160 \text{ sec} \mathrel{\hat{=}} 1^d\ 23^h\ 52^m\ 6^s.319160$. In der Umgebung des Zeitpunktes t_2, an dem

[1] Im Zahlenwert für die mittlere große Bahnhalbachse der hier verwendeten Äquivalenzbahn werden möglichst alle berechneten Stellen nach dem Komma mitgeführt, da sich bei den hier demonstrierten langfristigen Untersuchungen Abweichungen in den Nachkommastellen sehr sensitiv auswirken können

ein $\left(P_T \triangleq P_R\right)-$Umlauf vollendet ist, befindet sich der Satellit zum Zeitpunkt t_{2A}: 2020-08-26/11:47:27.00 in einem Perigäum mit den geographischen Koordinaten

$$r\left(t_{2A}\right)=13388.166\text{ km},\ \lambda\left(t_{2A}\right)=326°.104077,\ \varphi\left(t_{2A}\right)=-3°.127860,\ \alpha\left(t_{2A}\right)=118°.810856.$$

Die Abweichungen gegenüber der tropischen Bewegung betragen

$$\Delta t=-5^m\,33^s.0,\ \Delta\lambda=-0°.419557,\ \Delta\varphi=-10°.259672,\ \Delta\alpha=-1°.810856.$$

Der im Vergleich zum Anfangszeitpunkt jetzt unterschiedliche Perigäums-Radius ist eine Folge der anderen Position über dem abgeplatteten Erdkörper. Hier wirkt sich im Wesentlichen der geodynamische Formfaktor J_2 aus.

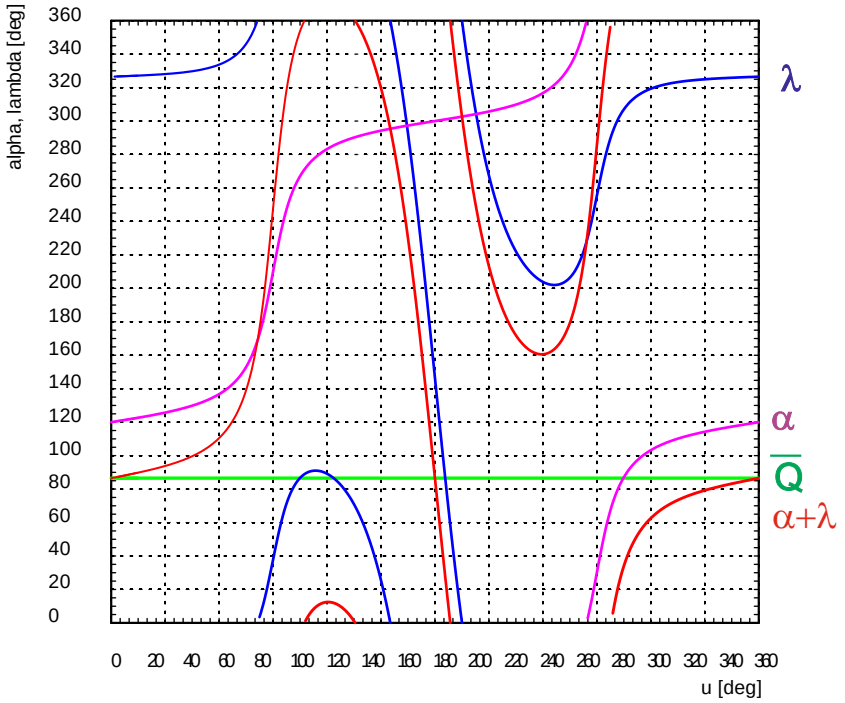


Bild 26-46: Verlauf von Rektaszension und geographischer Länge sowie deren Summe über einen Umlauf (2 Sterntage) auf der $\left(P_T \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenzbahn mit der mittleren Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66929.579782 km, sowie den Parametern $\overline{e}_0$ =0.8, $\overline{i}_0$ =80°, $\overline{\Omega}_0$ =120°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°. Auch in diesem Fall kann der mittlere Äquivalenzparameter $\overline{Q}$ abgespalten werden.

Die mit periodischen Bewegungseinflüssen gerechnete **drakonitische Umlaufzeit** beträgt P_D =172326.8742279 sec $\triangleq 1^d23^h52^m6^s.8742279$. Sie unterscheidet sich in diesem Beispiel also nur geringfügig von der anomalistischen Umlaufzeit. In der Umgebung des Zeitpunktes t_2, befindet sich der Satellit zum Zeitpunkt t_{2D} :2020-08-26/11:49:08.0.. in einem aufsteigenden Knoten mit den Koordinaten

$$r\left(t_{2D}\right)=13397.314\text{ km},\ \lambda\left(t_{2D}\right)=326°.232178,\ \varphi\left(t_{2D}\right)=-0°.001976,\ \alpha\left(t_{2D}\right)=118°.702613.$$

Die Abweichungen gegenüber der tropischen Bewegung betragen

$$\Delta t=-3^m\,59^s.92,\ \Delta\lambda=-0°.419557,\ \Delta\varphi=0°.001007,\ \Delta\alpha=-1°.260769.$$

Eine weitere interessante Untersuchung kann sich auf den unterschiedlichen Verlauf der Bewegung **in** der Bahnebene, also in Bezug auf die ***Hansen*sche Bewegung** des Satelliten beziehen. Die mit periodischen Bewegungseinflüssen gerechnete *Hansen*sche Umlaufzeit beträgt $P_H = 172326.913622\,\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 1^d\,23^h\,52^m\,6^s.91362228$. Sie ist um 1.267 sec kürzer als die tropische bzw. Meridian-bezogene Umlaufzeit.

Der Satellit durchläuft den Anfangswinkel ζ_1 zum Zeitpunkt t_{2H} : 2020-08-26/11:49:12.00 mit den Koordinaten

$$r(t_{2H}) = 13398.049\,\mathrm{km},\ \lambda(t_{2H}) = 326°.237209,\ \varphi(t_{2H}) = 0°.121705,\ \alpha(t_{2H}) = 118°.724356.$$

Die Abweichungen gegenüber der tropischen Bewegung betragen

$$\Delta t = -3^m\,48^s.0,\ \Delta\lambda = -0°.286425,\ \Delta\varphi = -7°.010107,\ \Delta\alpha = -1°.239026.$$

Gegenüber dem Anfangswert der *Hansen*-Bewegung („departure point“) hat bei Bezug auf die mittlere Sonnenzeit dieser Anfangspunkt jetzt die Abweichung $-10^m\,51^s.0$.

Schließlich soll untersucht werden, wie sich im Beispiel die $(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R)$ – Äquivalenz auf die **Sonnen-synodische Bewegung** auswirkt. Die mit periodischen Bewegungseinflüssen gerechnete Sonnen-synodische Umlaufzeit beträgt $P_S = 172662.142754\,\mathrm{s} \mathrel{\hat{=}} 1^d\,23^h\,57^m\,42^s.142754$. Sie ist um 5 min 33.962 sec kürzer als die tropische bzw. Meridian-bezogene Umlaufzeit. Ein wahrer Sonnenumlauf ist vollendet, wenn der wahre Sonnenwinkel $\tau = \alpha - \alpha_\odot$ um genau 360° und Vielfache fortgeschritten ist. Dies ist der Fall zum Zeitpunkt (Rechengenauigkeit Schrittweite 1 sec) t_{2S} : 2020-08-26/11:58:0.000 mit Solarwinkel $\tau_{2S} = 325°.707244$ mit den Koordinaten

$$r(t_{2S}) = 13738.721\,\mathrm{km},\ \lambda(t_{2S}) = 326°.923317,\ \varphi(t_{2S}) = 16°.124725,\ \alpha(t_{2S}) = 121°.616487.$$

Die Abweichungen der Sonnen-synodischen gegenüber der tropischen Bewegung betragen nach einem Jahr

$$\Delta t = +5^m\,00^s.0,\ \Delta\lambda = 0°.399683,\ \Delta\varphi = -8°.992913,\ \Delta\alpha = 1°.653105.\ \blacktriangleleft$$

BEISPIEL 8: Es soll wie im vorigen Beispiel 7 die langfristige Entwicklung einer $(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R)$ – Äquivalenzbahn mit extremen Bahnparametern in Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.8, $\bar{i}_0$ =80°, $\bar{\Omega}_0$ =120°, $\overline{M_{00}}$ =0° über den Zeitraum 1 Jahr untersucht werden. Jedoch werde in diesem Beispiel angenommen, dass sich das Perigäum über einem bestimmten Zielgebiet auf der Erdoberfläche liegt. Dazu werde das mittlere Argument des Perigäums $\bar{\omega}_0$ =60° gewählt.

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten $(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R)$ – Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-22 zusammengefasst.

Aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten $P_T = P_R$ wird bezogen auf die Epoche t_0 :2019-08-25/12:00:0.0 die mittlere Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66929.825883 km berechnet. Die

Subsatellitenbahn wird in Bild 26-47 über einen Umlauf als rote Kurve dargestellt. Der Verlauf dieser Bahn zur Epoche t_2 :2020-08-25/12:00:0.0 ist als eine grüne Kurve zu erkennen. Die Orte der Perigäen sowie der Apogäen sind durch P bzw. A gekennzeichnet. Die Subsatellitenkurve hat sich über den großen Zeitraum von 12 Monaten nur geringfügig verschoben. Dieses typische Verhalten der meisten Äquivalenzbahnen, die durch tropische und meridionale Bewegungen gekoppelt sind, könnte für die langfristige Fernerkundungsbeobachtung spezieller Regionen auf der Erde oder von Bereichen in der Atmosphäre über der Erdoberfläche von Interesse sein ◄

$\left(P_T \triangleq P_R\right)$	
$\overline{a_{QTR}}$ =66929.825883 km, $\overline{e}_0$ =0.8, $\overline{i}_0$ =80°, $\overline{\Omega}_0$ =120°, $\overline{\omega}_0$ =60°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{Q}$ =86°533834	t_0 :2019-08-25/12:00:0.0
$\overline{P_K}$ = 172321.919376 sec	
$\overline{P_T}$ = 172338.999679 sec	P_T = 172328.181060 sec
$\overline{P_R}$ = 172317.363707 sec	P_R = 172328.181060 sec
H_P = 7007.828577 km	H_A = 114095.549990 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720.014394$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -720.038089$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720.014401$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720.005623$

Tabelle 26-22: Bahncharakteristika der wahren tropischen und der wahren Meridian-bezogenen elliptischen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit Berücksichtigung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells. Große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66929.825883 km, Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.8 und Inklination $\overline{i}_0$ =80°, $\overline{\Omega}_0$ =120°, $\overline{\omega}_0$ =60°. Genauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-12} km, Schrittweite Δa=10 km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell. Basis Parameter: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\odot}$ = 398600.4356 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}[1984]$ = 0.72921158573340 ×10^{-4} rad/sec, J_2 = 0.001082625379977 . A posteriori Genauigkeit $\Delta\overline{P} = 6.0\times10^{-8}$ sec

BEISPIEL 9: Ein Satellit auf einer $\left(P_T \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn soll ein bestimmtes Gebiet auf der Erdoberfläche aus möglichst geringer Höhe beobachten. Das bedeutet, dass der Satellit sein Perigäum in etwa 300 km Höhe überfliegen soll. Dazu ist die Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.9 erforderlich. Das Gebiet soll etwa die nördliche Breite φ=50° haben. Die entsprechende Bahn habe zur Epoche t_0 :2019-08-19/12:00:0.0 die mittleren Parameter: $\overline{a_{QTR}}$ =66932.448184 km, $\overline{e}_0$ =0.9, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =90°, $\overline{M_{00}}$ =0°.

Die (säkular gerechnete) Umlaufzeit beträgt $P_T = P_R$ = 172328.181060 sec

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-23 zusammengefasst.

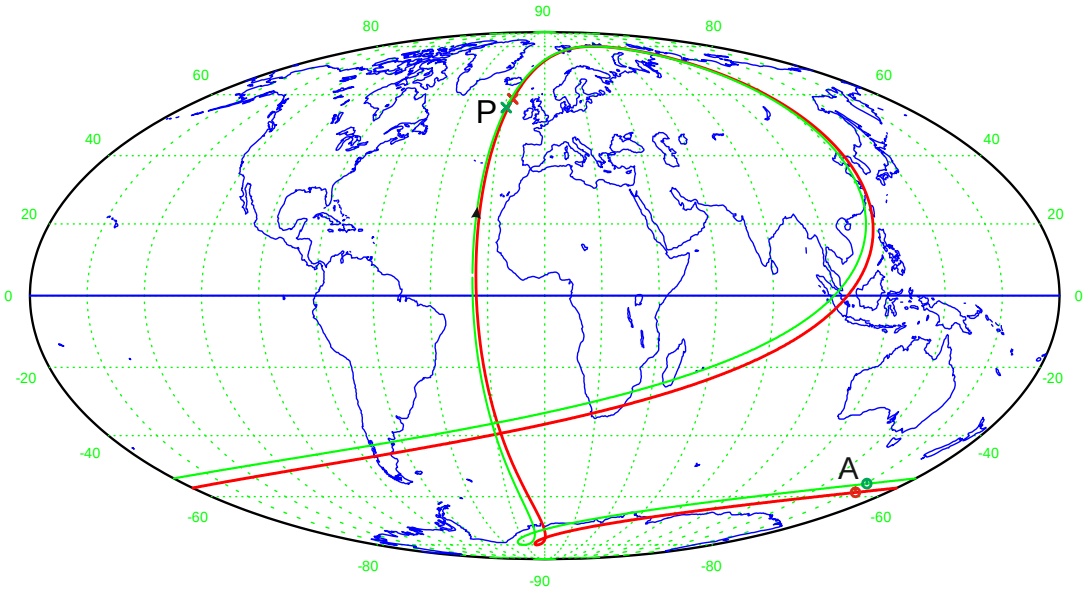


Bild 26-47: Verlauf der elliptischen Äquivalenzbahn mit den Bahnparametern $\overline{e}_0$ =0.8, $\overline{i}_0$ =80°, $\overline{\Omega}_0$ =120°, $\overline{\omega}_0$ =60°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0° und der aus der $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten gerechneten mittleren Halbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66929.825883 km über einen Umlauf (2 Sterntage) mit Bahnschleifen. Im Vergleich zur roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 :2019-08-25/12:00:0.0 wird die überlagernde grüne Bodenspur zur Epoche t_2 :2020-08-25/12:00:0.0 gerechnet. In der Umgebung des Perigäums ist kaum eine Verschiebung der Bodenspur nach dem langen Zeitraum zu erkennen. Die Verschiebung von Perigäum und aufsteigendem Knoten erfolgt in westlicher Richtung.

Zur Epoche befindet sich der Satellit über einem Ort mit den geographischen Koordinaten λ=7°.446280, φ=50°.181456. In der Apogäumshöhe H_A = 120793.514950 km beträgt die Geschwindigkeit V_A =3.4962786 km/sec, im Perigäum mit der Höhe H_P = 315.108218 km beträgt die Geschwindigkeit V_P =11.183048 km/sec. Diese hohe Geschwindigkeit könnte eine besondere Herausforderung für die Beobachtungssensoren darstellen.

Bild 26-48 zeigt die Bodenspur der Ausgangsbahn als rote Kurve, die Bodenspur nach einem Jahr als grüne etwas in westlicher Richtung verschobene überlappende Kurve. Wegen der Kopplung der Meridian-bezogenen Bewegung mit der tropischen überfliegt der Satellit nach einem Umlauf wieder denselben Meridian, Knoten und Perigäum aber werden verschoben. Die Verschiebung des aufsteigenden Knotens nach einem Jahr beträgt etwa 17° (vgl. Tabelle 26-23). Man beachte: im vorliegenden Fall gibt allerdings die mittlere Knotenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ die falsche Richtung an: sie zeigt nach Osten während die wahre Knotenverschiebung $\Delta\lambda_\Omega$ pro wahrem drakonitischen Umlauf P_D die Drift in westlicher Richtung zeigt. Dies wird durch den Verlauf der Bahn in Bild 26-48 bestätigt. Wegen der relativ großen Knotenverschiebung kippt die Bahn um den Referenzmeridian in der geforderten nördlichen geographischen Breite. Da die zeichnerischen Darstellungen stets unter Verwendung des gesamten zur Verfügung stehenden Bahnmodells gerechnet werden, müssen sie als unabhängige Referenz akzeptiert werden.

$\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\overline{a_{QTR}}$ =66932.448184 km, $\overline{e}_0$ =0.9, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =90°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172332.046796 sec	t_0 : 2019-08-19/03:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172319.982674 sec	P_H = 172328.181060 sec
$\overline{P_A}$ = 172328.377619 sec	P_A = 172328.371169 sec
$\overline{P_D}$ = 172290.898122 sec	P_D = 172327.516965 sec
$\overline{P_T}$ = 172336.149897 sec	P_T = 172328.181060 sec
$\overline{P_R}$ = 172320.212867 sec	P_R = 172328.181060 sec
H_P = 315.108218 km	H_A = 120793.514950 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.973607$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.938758$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.973580$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.091774$

Tabelle 26-23: Bahncharakteristika der wahren tropischen und der wahren Meridian-bezogenen elliptischen $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit Schleifen bei Berücksichtigung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells. Große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTR}}$ =66932.448184 km, Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.9 und Inklination $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =90°. Genauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-10} km, Schrittweite Δa=10 km. Die Berechnung erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell. Fundamentale Konstante: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\odot}$ = 398600.4356 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}[1984]$ = 0.72921158573340 ×10^{-4} rad/sec, J_2 = 0.001082625379977 . A posteriori Genauigkeit $\Delta P = \left|P_T - P_R\right| < 10^{-12}$ sec.

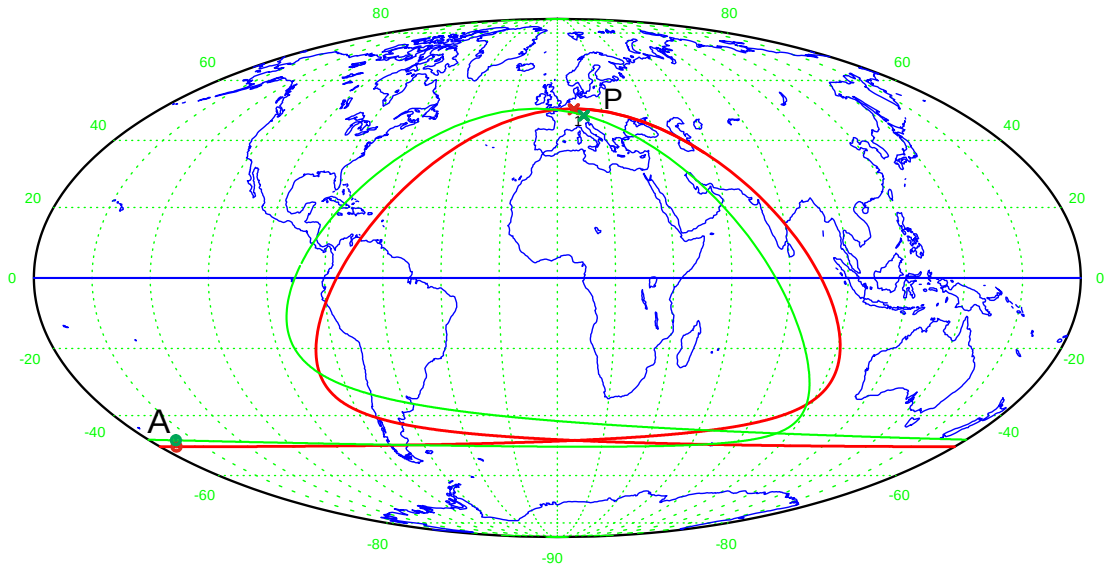


Bild 26-48: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenz. Die *Kepler*schen Bahnparameter sind $\overline{a_{QTR}}$ =66932.448184 km, $\overline{e}_0$ =0.9, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =90°. Im Vergleich zur roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 :2019-08-19/03:00:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_2 :2020-08-19/12:00:0.0 gerechnet. Es ist jeweils ein Umlauf (2 Sterntage) dargestellt.

Das Bild zeigt diese Verschiebung nach einem Jahr, die Verschiebung ist gering, jedoch ist das Perigäum etwas nach Süden gewandert. Soll diese Wanderung vermieden werden, könnte ein Bahnkorrekturmanöver durchgeführt werden. Dagegen sinnvoller wäre es jedoch, die Kopplung der Meridian-bezogenen Bewegung mit der anomalistischen Bewegung herzustellen, wodurch das Perigäum stets über demselben Meridian erhalten werden könnte. Dies soll im nächsten Abschnitt untersucht werden. ◄

Bei Äquivalenzbezügen zu anderen Bewegungen müssen in den überlagerten Funktionen (26.171) die entsprechenden Bahnwinkel verwendet werden (die hierzu benötigten Berechnungen werden in den nachfolgenden Abschnitten durchgeführt).

Aufgabenstellungen:

1. Zeichne die Kurven in Bezug auf den Äquivalenzfaktor Q in den Beispielen 8 und 9.
2. Deute die verschiedenen unterschiedlichen mittleren und wahren Umlaufzeiten in Tabelle 3-12. ◄

26.8.2 Äquivalenz zwischen anomalistischer und meridionaler Bewegung

Die Kopplung zwischen der anomalistischen mit der Meridian-bezogenen Bewegung bedeutet, dass beim Überflug des Satelliten über einem Meridian stets dieselbe wahre Anomalie längs der Satellitenbahn überflogen wird. Insbesondere wird die Apsidenlinie festgehalten, d.h. das Perigäum der Bahn, analog das Apogäum, bleiben fest mit einem Meridian verknüpft.

26.8.2.1 Basiseigenschaften

Eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahn wird durch Vergleich der entsprechenden mittleren Bewegungen erhalten. Mit den Ausdrücken (22.38) und (26.13) wird

$$\begin{aligned} \overline{n_A} &= \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} \\ \overline{n_R} &= \overline{n_k} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) \quad . \end{aligned} \tag{26.186}$$

Analog zu Bedingung (26.155) ist auch in diesem Fall (vgl. Bild 26-24 auf Seite 457)

$$\overline{n_R} = -\overline{n_A} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_A} = \frac{2\pi}{\overline{n_A}} = \overline{P_R} = \frac{2\pi}{\left|\overline{n_R}\right|} \quad \langle \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.187}$$

In extenso:

$$2\overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \quad \langle \sigma_i = 1 \quad . \tag{26.188}$$

Die anomalistische mittlere Bewegung und die entsprechende mittlere Umlaufzeit folgen daher aus

$$\overline{n_A} = \frac{1}{2}\left(\dot{\Theta} - \dot{\omega}_s - \dot{\Omega}_s\right) \quad , \quad \overline{P_A} = \frac{2\pi}{\overline{n_A}} = \overline{P_R} \quad \prec \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.189}$$

26.8.2.2 Die große Bahnhalbachse bei anomalistischer zu meridionaler Äquivalenz

Die zugehörige große Bahnhalbachse kann nach Vorgabe der mittleren Epoche- *Kepler*elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ wegen Bedingung (26.187) iterativ mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAR}}\right) \equiv 2\,\overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \qquad \prec \sigma_i = +1 \tag{26.190}$$

berechnet werden. Als Anfangswert für die iterative Bearbeitung kann der theoretische Zahlenwert (26.158) gewählt werden. Anstelle von Bedingungsgleichung (26.190) kann die mittlere Bahnhalbachse auch mit der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAR}}\right) \equiv \overline{P_A} - \overline{P_R} = 0 \tag{26.191}$$

mit direkter Anwendung der mittleren Bewegungen (26.186) berechnet werden.

Bei Vorgabe der *Kepler*parameter kann die wahre anomalistische Umlaufzeit mit Hilfe der Funktionsgleichung (22.60) durch Anwendung eines Bahnmodells mit der wahren Anomalie υ als Bahnwinkel iterativ berechnet werden. Entsprechend folgt die wahre Meridian-bezogene Umlaufzeit mit der Funktionsgleichung (26.21) mit dem auf den Äquator bezogenen Bahnwinkel geographische Länge λ. Nach Vorgabe der Keplerelemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ und einem geschätzten Wert für die große Bahnhalbachse, als Ausgangsnäherung empfiehlt sich wieder der Wert (26.158), werden die Umlaufzeiten mit den Funktionsgleichungen

$$\begin{aligned} fct\left(P_A\right) &\equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0 + P_A\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(P_R\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{26.192}$$

berechnet. Anschließend wird die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAR}}$ der $\left(P_A \triangleq P_R\right)$–Äquivalenzbahn durch Lösung der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAR}}\right) \equiv P_A - P_R = 0 \tag{26.193}$$

erhalten. Der gesamte Prozess (26.192)-(26.193) muss so lange durchlaufen werden, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist. In der Praxis etwa wird für die Funktionswerte die Genauigkeit unter $\Delta t < \left|10^{-9}\right|$ gefordert.

In Tabelle 26-24 sind beispielhaft die Bahnhalbachsen und mittleren Umlaufzeiten einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahn sowie die wahren Umlaufzeiten einer $\left(P_A \triangleq P_R\right)$–Äquivalenzbahn für einige verschiedene Bahnparameter $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ berechnet. Im Beispiel sind die periodischen Bewegungseinflüsse berücksichtigt.

Die Umlaufzeiten sind in jedem Fall unterschiedlich. Das muss darauf zurückgeführt werden, dass in der Berechnung der mittleren Bewegung mit der Bedingung (26.189) die Anfangselemente in den säkularen Variationen $\left(\dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s\right)$ voll zum Tragen kommen. Eine konstante von den Bahnelementen unabhängige Umlaufzeit kann es also in diesem Fall nicht geben.

BEISPIEL: Um einen Eindruck vom Einfluss der Kopplung der anomalistischen mit der Meridian-bezogenen Bewegung zu bieten, wird das Beispiel 9 im vorhergehenden Abschnitt übernommen, jetzt jedoch für eine $\left(P_A \triangleq P_R\right)$–Äquivalenzbahn. Mit den Bahnparametern $\overline{e}_0$=0.9, $\overline{i}_0$=50°, $\overline{\Omega}_0$=65°, $\overline{\omega}_0$=90°, $\overline{M_{00}}$=0° wird für die Epoche t_0:2019-08-25/12:00:0.0 die große

Bahnhalbachse $\overline{a_{QAR}}$ =66934.075915 km mit der (mit periodischen Einwirkungen gerechneten) Umlaufzeit $P_A = P_R = 172334.657670$ s .

$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	$\overline{a_{QAR}}\left[\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{P_A} = \overline{P_R}$	$\overline{a_{QAR}}\left[P_A \triangleq P_R\right]$	$P_A = P_R$
0.0	0°	66932.434252 km	172329.451708 s	66932.434264 km	172329.451734 s
	30°	66932.025938 km	172328.827747 s	66931.965341 km	172328.593719 s
	60°	66931.241587 km	172327.704510 s	66931.221038 km	172327.625148 s
	85°	66930.938779 km	172327.459084 s	66931.083254 km	172328.017050 s
0.3	0°	66932.602551 km	172329.715502 s	66932.602551 km	172329.715503 s
	30°	66932.123196 km	172328.962002 s	66932.0550018 km	172328.679382 s
	60°	66931.203475 km	172327.605592 s	66931.178658 km	172327.509748 s
	85°	66930.851119 km	172327.309226 s	66931.025598 km	172327.982998 s
0.6	0°	66933.535783 km	172331.283594 s	66933.535788 km	172331.283501 s
	30°	66932.659314 km	172329.759999 s	66932.511387 km	172329.188691 s
	60°	66930.985325 km	172327.017618 s	66930.935152 km	172326.823850 s
	85°	66930.362911 km	172326.418536 s	66930.715623 km	172327.780635 s
0.9	0°	66948.531628 km	172363.454784 s	66948.528492 km	172363.440273 s
	30°	66941.055961 km	172346.107465 s	66939.381589 km	172339.637497 s
	60°	66927.031488 km	172314.968378 s	66926.465304 km	172312.781523 s
	85°	66922.390857 km	172308.195549 s	66926.389160 km	172323.638511 s

Tabelle 26-24: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz -Bahn mit Äquivalenz zwischen anomalistischer und Meridian-bezogener Bewegung für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0} = 0$, Epoche: 2019-08-19/12:00:0.00, vollständiges *Brouwer*sches Bahnmodell, Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} \le 10^{-9}$ sec, Δ(a)<10^{-10} km, Schrittweite Δa=5 km. Fundamentale Konstante (TCB): $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\oplus} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}$=$0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$.

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-25 in zusammengefasst.

Bild 26-49 (auf Seite 497) zeigt den Verlauf der Subsatellitenbahn über vier Monate nach der Epoche (rote Kurve) sowie genau ein Jahr später (nach 183 Umläufen, in grüner Farbe) über

einen Umlauf. Die Apsiden befinden sich auch nach einem Jahr wieder genau über dem Ursprungsmeridian, sind allerdings längs dieses Meridians etwas „verrutscht“. Ursache ist, dass die anderen Bewegungsbezüge, insbesondere die drakonitische Bewegung, von der anomalistischen Bewegung abweichen, so dass die Bahn im Raum anders orientiert wird. Das Bild zeigt, dass die Veränderung der räumlichen Orientierung relativ klein ist, was Zeichen der gekoppelten Bewegung ist.

$\left(P_A \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\overline{a_{QAR}}$ =66934.075927 km, $\bar{e}_0$ =0.9, $\bar{i}_0$ =50°, $\bar{\Omega}_0$ =65°, $\bar{\omega}_0$ =90°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172338.333297 sec	t_0 :2019-08-25/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172326.269320 sec	P_H = 172334.467608 sec
$\overline{P_A}$ = 172334.664165 s	P_A = 172334.657715 s
$\overline{P_D}$ = 172297.185122 sec	P_D = 172333.803521 sec
$\overline{P_T}$ = 172342.436347 sec	P_T = 172334.467608 sec
$\overline{P_R}$ = 172313.928039 sec	P_R = 172334.657715 sec
$\overline{P_S}$ = 173288.821888 sec	P_S = 172347.441357 sec
$\overline{P_L}$ = 185915.849025 sec	P_L = 331883.039078 sec
H_P = 315.270993 km	H_A = 120796.607661 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.999874$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.965021$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.999874$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.118035$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.95750223473836900×10^{-8} rad / sec	

Tabelle 26-25: Bahncharakteristika der wahren $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn bei Berücksichtigung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells. Große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAR}}$ =66934.075927 km, Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.9 und Inklination $\bar{i}_0$ =50°, $\bar{\Omega}_0$ =65°, $\bar{\omega}_0$ =90°. Genauigkeiten $\Delta\bar{P} \le 10^{-8}$ sec, Δ(a)<10^{-8} km, Schrittweite Δa=10 km. Fundamentale Konstante: R_E = 6378.1366 km , $\mu_\odot$ = 398600.4356 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$[1984] = 0.72921158573340 ×10^{-4} rad/sec, J_2 = 0.001082625379977 . A posteriori Genauigkeit $\Delta P = \left|P_T - P_R\right| = 0.22\times10^{-8}$ sec

Im Beispiel ist der Knoten nach einem Jahr um $\Delta\Omega = 17.°4$ nach Westen verschoben. Je nach Aufgabenstellung kann diese natürliche Drift toleriert werden, oder durch ein Bahnmanöver ausgeglichen werden. Ein solches Manöver muss allerdings wegen der gekoppelten Inklinationsänderung mit der Korrektur des Knotens in mehreren Schritten ausgeführt werden[1]. ◄

26.8.2.3 Der (a,i)- Bereich möglicher anomalistischer zu meridionaler Äquivalenzbahnen

Bild 26-50 zeigt eine Übersicht aller möglichen $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität

[1] Näheres in Abschnitt 12.3, Band III

$e_B \in \left[0.9017045 - 0.9018750\right]$. Die Kurven sind für je eine Exzentrizität berechnet. Wie im Fall von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen (siehe Bild 26-25, Seite 463) schneiden sich alle Kurven in einem fast punktförmigen Gebiet, hier in der Nähe des Punktes $\left(\bar{a}_{cross} \approx 66931.44\,\text{km}, \bar{i}_{cross} \approx 50°\right)$.(Zum Vergleich: $\overline{a_{QTR\,K}} = \sqrt[3]{4\mu / \dot{\Theta}^2} = 66931.4468893\,\text{km}$). Um diesen Schnittpunkt (bzw. Schnittpunkte) zu berechnen, werden die Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten $\left(e_1, e_2\right)$ zum Schnitt gebracht

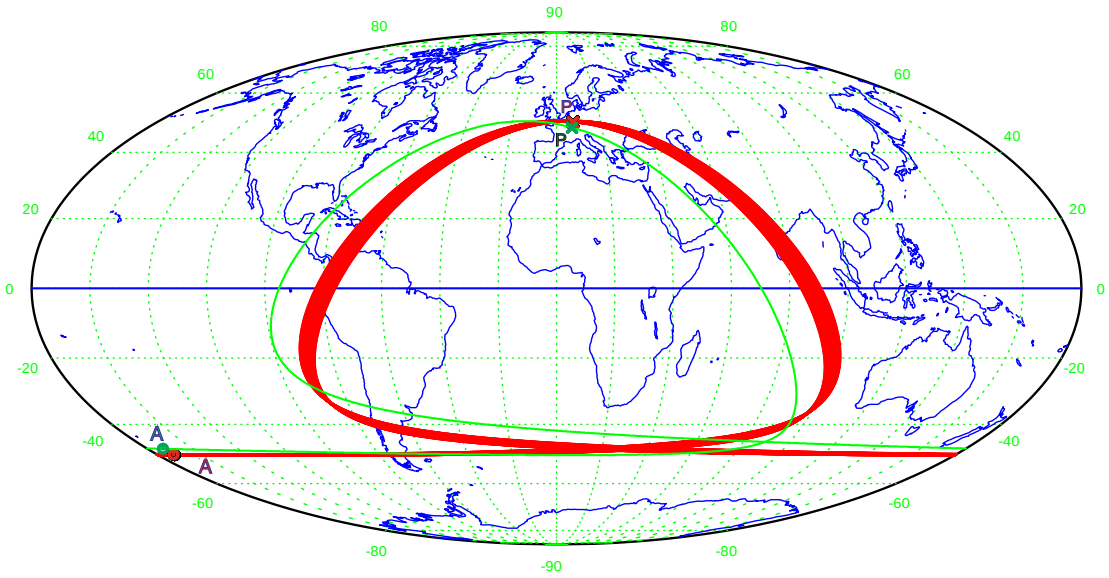


Bild 26-49: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit $\left(P_A \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz der anomalistischen und der Meridian-bezogenen Bewegung, Die *Kepler*schen Bahnparameter sind $\bar{e}_0$ =0.9, $\bar{i}_0$ =50°, $\bar{\Omega}_0$ =65°, $\bar{\omega}_0$ =90°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°. Die aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten $P_A = P_R$ berechnete mittlere Halbachse beträgt $\overline{a_{QAR}}$ =66934.075927 km,. Im Vergleich zur über vier Monate gerechneten roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 :2019-08-25/12:00:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_2 :2020-08-25/12:00:0.0 nur über einen Umlauf gerechnet. Die Apsiden (Perigäen und Apogäen) verharren jeweils auf ein und demselben Meridian.

Aus der Bedingungsgleichung (26.187) für $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen wird die Gleichung einer Kurve im Fall einer bei Äquivalenz mit einer meridionalen Bewegung stets rechtläufigen Bahn $\left(\sigma_i = \text{sgn}\left(\cos i\right) = +1\right)$ erhalten

$$\overline{n_A} = \frac{1}{2}\left(\dot{\Theta} - \dot{\omega}_s - \dot{\Omega}_s\right) \quad , \quad \overline{P_A} = \frac{2\pi}{\overline{n_A}} = \overline{P_R} \qquad \prec \sigma_i = +1 \ . \tag{26.194}$$

Mit den säkularen Anteilen der Variationsgleichungen[1] $\left(M_0\right)^{\cdot}_s, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ erster Ordnung und mit den Abkürzungen

[1] aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \tag{26.195}$$

wird eine Trennung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse

$$f_e \equiv E_i\left[1+2\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+6\sqrt{1-e^2}\right)+2\cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K}-2\right) \tag{26.196}$$

formal erhalten.

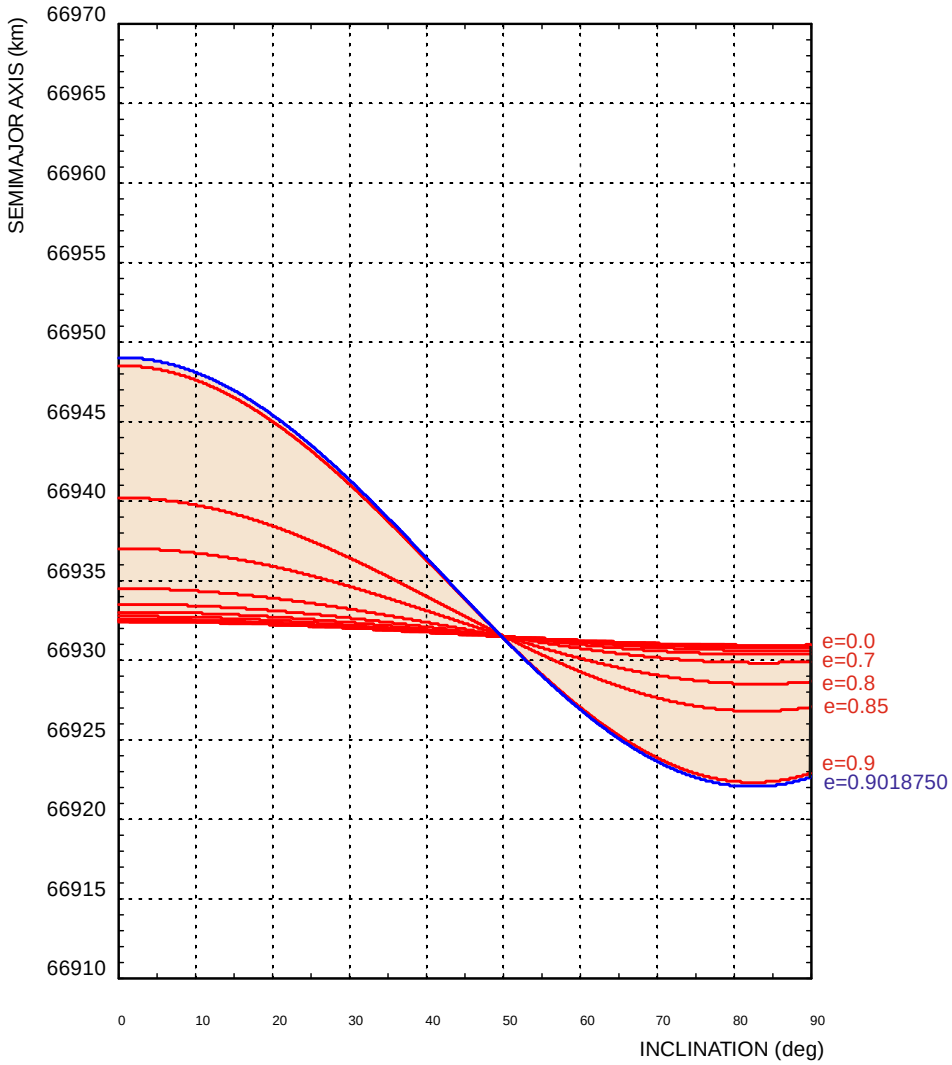


Bild 26-50: Das (a,i)-Gebiet von möglichen $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert mit Exzentrizitäten

$$e \in \left[0.0, 0.9017045 - 0.9018750\right]$$

Wird hier jeweils die vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ eingesetzt und die beiden erhalten Ausdrücke subtrahiert, bleibt eine quadratische Gleichung für den Cosinus der Inklination

$$A_0 \cos^2 i + B_0 \cos i + C_0 = 0 \tag{26.197}$$

mit den Abkürzungen

$$A_0 := E_1\left(5+6\sqrt{1-e_1^2}\right)-E_2\left(5+6\sqrt{1-e_2^2}\right)$$
$$B_0 := 2\left(E_2-E_1\right) \qquad (26.198)$$
$$C_0 := E_2-E_1+2E_2\sqrt{1-e_2^2}-2E_1\sqrt{1-e_1^2} \quad .$$

Ihre Lösungen mit Hilfe der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0+\mathrm{sgn}\left(B_0\right)\sqrt{B_0^2-4A_0C_0}\right] \;,\; \cos i_1=\frac{Q_0}{A_0} \;,\; \cos i_2=\frac{C_0}{Q_0} \quad . \qquad (26.199)$$

Im Fall der Äquivalenz unter Einschluss der meridionalen Bewegung kann nur die positive Lösung verwendet werden.

In Tabelle 26-26 sind ergänzend zu Bild 26-50 besondere Parameter der einzelnen Kurve zusammengestellt. Als charakteristische Größen sind die Parameter der Überschneidungen (i_{cross} , a_{cross}) für Kopplungen der Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 gerechnet. Nach Berechnung der charakteristischen Inklination wurde die Halbachsen a_{cross} mit den laufenden Exzentrizitäten nach der Methodik in Abschnitt 26.8.2.2 (auf Seite 494) gerechnet .

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	66932.43	---	---	66930.94	66930.95
e=0.1	66932.45	51°.022756	66931.462711	66930.93	66930.94
e=0.2	66932.50	51°.006550	66931.463139	66930.90	66930.92
e=0.3	66932.60	50°.977666	66931.463900	66930.85	66930.87
e=0.4	6693.27	50°.932749	66931.465084	6693.07	66930.79
e=0.5	66933.05	50°.865704	66931.466851	6693.06	66930.65
e=0.6	66933.54	50°.765214	66931.469491	66930.36	66930.40
e=0.7	66934.52	50°.608459	66931.473578	66929.84	66929.91
e=0.8	66937.03	50°.341761	66931.480293	66928.51	66928.65
e=0.85	66940.23	50°.125701	66931.485117	66926.80	66927.05
e=0.9	66948.53	49°.794298	66931.488821	66922.32	66922.91
e_B	66949.04	49°.779597	66931.488765	66922.05	66922.66

Tabelle 26-26: Besondere Parameter von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, nach der Exzentrizität parametrisiert,

Grenzexzentrizität e_B = 0.9017266

Im Vergleich zu den möglichen Kurven im Fall von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen ist das Gebiet möglicher $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen erheblich kleiner. Dies bestätigt den Eindruck, dass jede Art von Äquivalenzbahnen ein sehr charakteristisches Bild von möglichen Bahnen überdeckt.

26.8.2.4 Die Inklination bei anomalistischer zu meridionaler Äquivalenz

Alternativ zur Berechnung der großen Bahnhalbachse nach Vorgabe der Elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ kann auch im vorliegenden Fall die Inklination bei Vorgabe der Elemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ berechnet werden. Tabelle 26-24 (auf Seite 495) lässt vermuten, dass derartige Berechnungen nur in einem speziellen Umfeld sinnvoll durchgeführt werden können. Wird dazu die mittlere anomalistische mittlere Bewegung $\overline{n_A}$ als Funktion der Inklination aufgefasst, lautet analog zu (26.190) die benötigte Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{i_{QAR}}\right) \equiv 2\,\overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \qquad \prec \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.200}$$

Mit der mittleren anomalistischen mittleren Bewegung (22.68) (Abschnitt 22.4.2) lautet diese Bedingung ausführlich

$$\overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \frac{\dot{\omega}_s}{2} + \frac{\dot{\Omega}_s}{2} = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \tag{26.201}$$

Um die Funktionsgleichung (26.200) iterativ bearbeiten zu können, wird ein erster Näherungswert benötigt. Dieser kann mit der *Kepler*schen mittleren Bewegung $\overline{n_K} = \sqrt{\mu / \overline{a}_0^3}$ und den Ausdrücken erster Ordnung für die säkularen Variationen (20.15), (20.16) und (20.17) erhalten werden aus

$$\overline{n_K}\left\{1 - \frac{3}{4}\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left[\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\left(1-3\cos^2\overline{i}_0\right) + \frac{1}{2}\left(1-5\cos^2\overline{i}_0\right) + \cos\overline{i}_0\right]\right\} = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \tag{26.202}$$

Mit den Abkürzungen

$$C_2 := -\frac{3}{4}\frac{J_2\,R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2},\ A_3 := 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2} + \frac{5}{2}, D_3 := \left(\frac{\dot{\Theta}}{2\overline{n_K}} - 1\right)\frac{1}{C_2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) \tag{26.203}$$

folgen die zwei Näherungslösungen

$$\cos\overline{i}_{QAR,1/2}^{(0)} = \frac{1}{2A_3}\left[1 \pm \sqrt{1-4A_3\,D_3}\right] \quad . \tag{26.204}$$

Ob beide oder welche der beiden Lösungen oder überhaupt eine Lösung die gegebenen Vorgaben erfüllen, muss vor einer Weiterverwendung der Ergebnisse geprüft werden. Mit einer gültigen Lösung kann eine Verbesserung in Bezug auf $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$ oder $\left(P_A \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz analog den Funktionalgleichungen (26.183) erhalten werden mit

$$fct\left(\overline{i_{QAR}}\right) \equiv \overline{P_A} - \overline{P_R} = 0 \quad \text{bzw.} \quad fct\left(\overline{i_{QAR}}\right) \equiv P_A - P_R = 0 \quad . \tag{26.205}$$

BEISPIEL 1: Eine $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn soll mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0 =$ 66932 km und der mittleren Exzentrizität $\overline{e}_0 = 0.5$ konstruiert werden. Aus Gleichung (26.204) ergeben sich die beiden Lösungen $\overline{i}_{01}$ =41°781053 und $\overline{i}_{02}$ =121°.884869. Wegen des Bezugs auf eine meridionale Bewegung kann die gesuchte Bahn nur rechtläufig sein. Mit $\overline{i}_{01}$ als Anfangsnäherung liefert die erste der Funktionsgleichungen (26.205) den endgültigen Wert für die mittlere Inklination $\overline{i_{QAR}} = 38°.8783212$. Die mittlere anomalistische und mittlere

meridionale Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{QA}} = \overline{P_{QR}}$ =172328.715449 sec. Zur Kontrolle wird mit dem Ausdruck (26.200) gerechnet $\tilde{\dot{\Theta}} = 2\overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s$ =0.72933341328×10^{-4} / sec
(Vergleichswert: $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s). ◄

BEISPIEL 2: Eine $\left(P_A \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenzbahn soll wie im ersten Beispiel mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 66932 km und der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.5 konstruiert werden. Mit $\bar{i}_{01}$ als Anfangsnäherung liefert die zweite der Funktionsgleichungen (26.205) den endgültigen Wert für die mittlere Inklination $\overline{i_{QAR}} = 35°.99516155$. Die wahre anomalistische wie die wahre meridionale Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{QA}} = \overline{P_{QR}} = 172328.430496\,\text{sec}$. Die Kontrolle ergibt $\tilde{\dot{\Theta}} = 2\overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s$ =0.7292253826288×10^{-4} / sec .
(Vergleichswert: $\dot{\Theta} = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ / s). ◄

26.8.2.5 Die Exzentrizität bei anomalistischer zu meridionaler Äquivalenz

Falls die Exzentrizität im Fall einer solchen Äquivalenzbahn berechnet werden soll, kann sie nach dem Muster der in Abschnitt 26.8.1.6 (auf Seite 466466) vorgestellten Methodik erhalten werden.

26.8.2.6 Stabilisierung in der Umgebung von anomalistischer zu meridionaler Äquivalenz

Zur Abschätzung des Verhaltens der mittleren und der wahren Bahnen werden die Differenzen der mittleren und der wahren Umlaufzeiten

$$\overline{\Delta P_{AR}} = \overline{P_A} - \overline{P_R} \quad , \quad \Delta P_{AR} = P_A - P_R \tag{26.206}$$

in der Umgebung der $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ - Äquivalenzbahn verglichen.

BEISPIEL 1: Bild 26-51 zeigt die schleifende Übereinstimmung der ΔP_{AR} -Werte um die Kurve der $\overline{\Delta P_{AR}}$ -Werte für Bahnen mit den mittleren Parametern $\bar{e}_0 = 0.3, \bar{i}_0 = 70°$, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}} = 0°.0$. ◄

In analoger Weise können die Unterschiede in der Längenverschiebung des Perigäums betrachtet werden. Die säkulare Längendrift des Perigäums ist nach Formel (22.201)[1] gegeben durch

$$\dot{\lambda}_{Ps} = \dot{\Omega}_s + \frac{\cos \bar{i}_0}{1 - \sin^2 \bar{i} \sin^2 \bar{\omega}_0} \dot{\omega}_s - \frac{\sin \bar{i}_0 \sin \bar{\omega}_0 \cos \bar{\omega}_0}{1 - \sin^2 \bar{i} \sin^2 \bar{\omega}_0} \left(i\right)_s^{\cdot} - \dot{\Theta}_s \ . \tag{26.207}$$

[1] Abschnitt 22.9.2

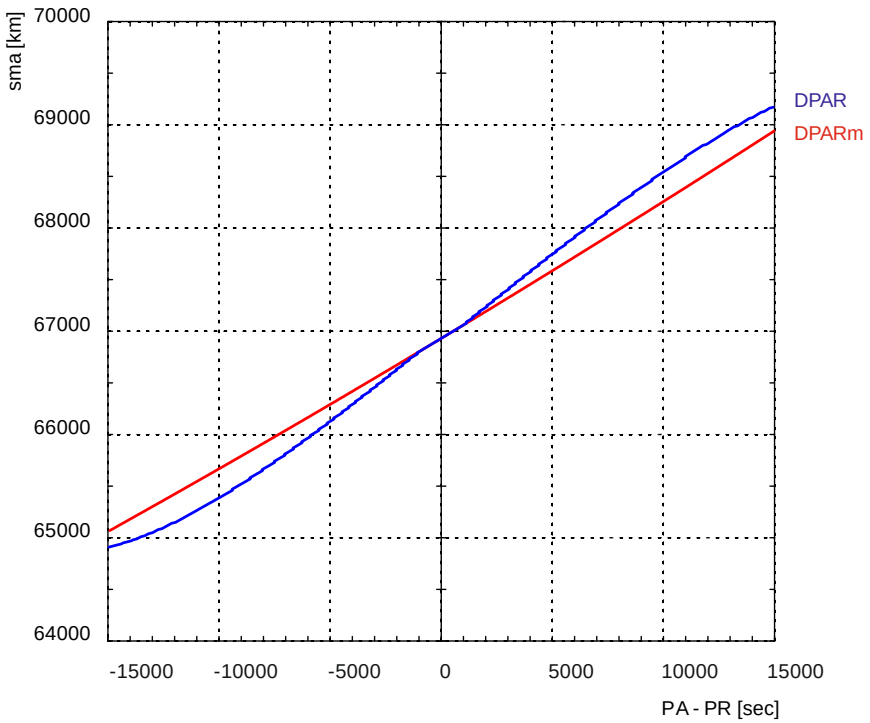


Bild 26-51: Vergleich des Verlaufs der wahren Umlaufdifferenz ΔP_{AR} (blau) zur mittleren Umlaufdifferenz $\overline{\Delta P_{AR}}$ (rot) für Bahnen mit $\bar{e}_0$ =0.3, $\bar{i}_0$ =70°, $\bar{\Omega}_0$ = $\bar{\omega}_0$ = $\overline{M_{0\,0}}$ =0° gegen die große Bahnhalbachse.

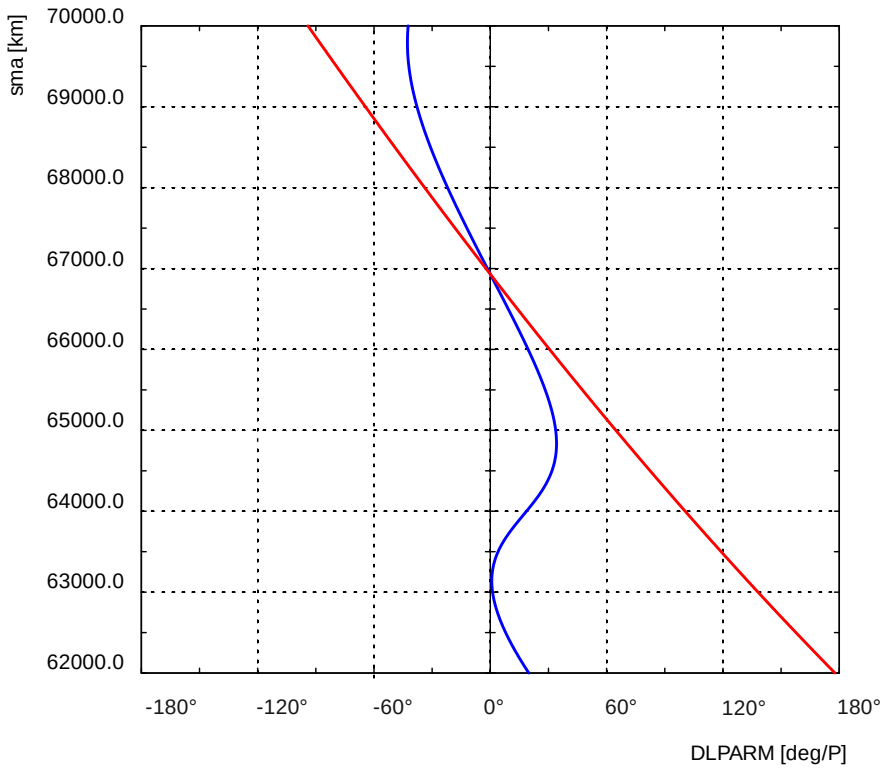


Bild 26-52: Vergleich des Verlaufs der $\Delta\lambda_{PAR}$ -Kurve (blau) zur $\overline{\Delta\lambda_{PAR}}$ -Kurve (rot) für Bahnen mit $\bar{e}_0$ =0.3, $\bar{i}_0$ =70°, $\bar{\Omega}_0$ = $\bar{\omega}_0$ = $\overline{M_{0\,0}}$ =0° gegen die große Bahnhalbachse.

Damit kann der Unterschied in der Verschiebung der Perigäumslänge pro mittlerem anomalistischem Umlauf und pro mittlerem meridionalem Umlauf dargestellt werden:

$$\overline{\Delta\lambda_{PAR}} := \dot{\lambda}_{Ps}\left(\overline{P_A} - \overline{P_R}\right) \quad . \tag{26.208}$$

Der entsprechende Unterschied der Verschiebung der Perigäumslänge pro wahrem anomalistischem und wahrem meridionalem Umlauf kann berechnet werden aus

$$\Delta\lambda_{PAR} := \lambda_P\left(t_0 + P_a\right) - \lambda_P\left(t_0 + P_R\right) \quad . \tag{26.209}$$

Die hier benötigten geographischen Längen des Perigäums im Fall von anomalistischem bzw. meridionalem Umlauf können durch eine analytische bzw. numerische Ephemeridenrechnung bereitgestellt werden.

BEISPIEL 2:: Bild 26-52 (auf Seite 502) zeigt den Verlauf der $\Delta\lambda_{PAR}$-Kurve gegenüber der $\overline{\Delta\lambda_{PAR}}$-Kurve wie im vorhergehenden Beispiel für Bahnen mit den mittleren Bahnparametern

$$\bar{e}_0 = 0.3,\ \bar{i}_0 = 70°,\ \overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{0\,0} = 0°. \blacktriangleleft$$

Aufgabenstellungen:

1. Berechne den Kreuzungspunkt der (a,i)-Kurven in Bild 26-50 (auf Seite 498) mit Hilfe der verschwindenden Krümmung κ.
2. Wiederhole die Rechnungen unter Einschluss höherer Störungen $\left(J_3, J_4\right)$.
3. Wiederhole die Rechnungen mit einem numerischen Ephemeridenprogramm.
4. Leite die Formeln zur Berechnung der mittleren Exzentrizität $\overline{e_{QAR}}$ ab.

26.8.3 Äquivalenz zwischen drakonitischer und meridionaler Bewegungen

Die Kopplung der drakonitischen mit der Meridian-bezogenen Bewegung erzwingt die Verknüpfung eines bestimmten Argumentes der Breite mit einem Meridian. Insbesondere werden die Knoten je über einem Meridian festgehalten, wenn die Epoche auf einen Knoten bezogen werden soll.

26.8.3.1 Basiseigenschaften

Eine $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)-$ Äquivalenzbahn wird durch Vergleich der entsprechenden mittleren Bewegungen erhalten. Mit den Ausdrücken (23.46) und (26.13) wird[1]

$$\begin{aligned} \overline{n_D} &= \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s \\ \overline{n_R} &= \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) \end{aligned} \tag{26.210}$$

Analog zu Bedingung (26.155) ist auch in diesem Fall (vgl. Bild 26-24 auf Seite 457)

$$\overline{n_R} = -\overline{n_D} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_D} = \overline{P_R} \quad \langle \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.211}$$

Die drakonitische mittlere Bewegung und die entsprechende mittlere Umlaufzeit folgen aus

[1] Die in Formel (23.46) berücksichtigte säkulare Abnahme der Bahnhalbachse infolge des Luftwiderstandes wird in der Bahnhöhe der Meridian bezogenen Äquivalenzbahnen normalerweise nicht benötigt.

$$\overline{n_D} = \frac{1}{2}\left(\dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s\right) = \left|\overline{n_R}\right| \quad , \quad \overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_D}} = \overline{P_R} \quad . \tag{26.212}$$

26.8.3.2 Bahnhalbachse bei drakonitischer zu meridionaler Äquivalenz

Die zugehörige große Bahnhalbachse kann nach Vorgabe der mittleren Epoche- *Kepler*elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ iterativ wegen Bedingung (26.211) mit der Funktionsgleichung[1]

$$fct\left(\overline{a_{QDR}}\right) \equiv 2\,\overline{n_D} + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \tag{26.213}$$

berechnet werden. Als Anfangswert für die iterative Bearbeitung kann der theoretische Zahlenwert (26.158) gewählt werden. Zur Berechnung einer $\left(P_D \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz werden die wahren Umlaufzeiten verglichen. Mit dem Argument der Breite *u* als Bahnwinkel wird die wahre drakonitische Umlaufzeit mit der Funktionsgleichung (23.155) berechnet. Analog zum Rechenprozess (26.192) ergibt sich sodann mit den Funktionsgleichungen

$$\begin{aligned} fct\left(P_D\right) &\equiv \sin\left[u\left(t_0 + P_d\right) + u\left(t_0\right)\right] = 0 \\ fct\left(P_R\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_d\right) + \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{26.214}$$

und dem Vergleich der Umlaufzeiten in Abhängigkeit

$$fct\left(\overline{a_{QDR}}\right) \equiv P_D - P_R = 0 \tag{26.215}$$

die gesuchte mittlere Bahnhalbachse $\overline{a_{QDR}}$. Als Anfangswert für die iterative Bearbeitung wird etwa der Wert (26.158) eingesetzt.

Einige $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$– und $\left(P_D \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahnen sind für verschiedene Exzentrizitäten und verschiedenen Inklinationen zusammen mit den zugehörigen Umlaufzeiten in Tabelle 26-27 zusammengestellt. Es ist offenbar, dass ähnlich wie im vorstehenden Fall der anomalistischen Bewegung in jedem Fall unterschiedliche Umlaufzeiten auftreten.

BEISPIEL 1: Eine $\left(P_D \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn soll im aufsteigenden Knoten mit dem geographischen Koordinatensystem gekoppelt werden. Der Einschuss soll außerdem im Perigäum der exzentrischen Bahn erfolgen.

Die Bahn habe zur Epoche t_0 :2019-08-19/12:00:0.0 die Parameter $\overline{e}_0$ =0.7, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$. Die große Bahnhalbachse errechnet sich zu $\overline{a_{QDR}}$ =66931.020423 km. Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn sind in Tabelle 26-29 zusammengestellt.

Bild 26-53 zeigt den Verlauf im ersten Umlauf als rote Kurve, nach genau einem tropischen Jahr zur Epoche t_{02} :2020-08-19/12:00:0.0 einen Umlauf auf grüner Kurve.

Die Bahn mit der Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.7 ist nahezu stabil über der Erdoberfläche. Aus Tabelle 26-28 kann abgelesen werden, dass der aufsteigende Knoten wie verlangt an der vorgegebenen

[1] Man beachte wieder, dass die hier untersuchten Meridian-bezogenen Äquivalenzbahnen stets rechtläufig sind $\left[\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos i\right) = +1\right]$.

Position unveränderlich fest gezurrt ist: $\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\, P_D = -720°.000001$. Das Perigäum wandert jedoch allmählich in östlicher Richtung. Der absteigende Knoten ist nach Osten verschoben, die Bahn ist in der Nähe des Apogäums etwas nach Süden gekippt.

$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	$\overline{a_{QDR}}\left[\overline{P_D} = \overline{P_R}\right]$	$\overline{P_D} = \overline{P_R}$	$\overline{a_{QDR}}\left[P_D = P_R\right]$	$P_D = P_R$
0.0	0°	66933.092260 km	172326.910401 s	66932.763426 km	172328.180474 s
	30°	66932.478318 km	172327.080624 s	66932.478330 km	172327.080670 s
	60°	66931.282710 km	172327.545696 s	66931.282722 km	172327.545742 s
	85°	66930.780521 km	172328.070270 s	66930.780533 km	172328.070316 s
0.3	0°	66933.397154 km	172326.646639 s	66932.602568 km	172329.715551 s
	30°	66932.669484 km	172326.852200 s	66932.138126 km	172326.852241 s
	60°	66931.253132 km	172327.413816 s	66931.204844 km	172327.413861 s
	85°	66930.660010 km	172328.047282 s	66930.845908 km	172328.047328 s
0.6	0°	66935.142307 km	172325.078858 s	66933.535818 km	172331.283673 s
	30°	66933.763771 km	172325.494485 s	66931.996631 km	172325.494558 s
	60°	66931.085702 km	172326.629970 s	66930.925115 km	172326.630017 s
	85°	66929.976539 km	172327.910653 s	66930.594727 km	172327.910696 s
0.9	0°	66966.779614 km	172292.952524 s	66948.534734 km	172363.465539 s
	30°	66953.593067 km	172297.684758 s	66929.096544 km	172297.701149 s
	60°	66928.165931 km	172310.589057 s	66925.949932 km	172310.590198 s
	85°	66918.007632km	172325.116015 s	66926.569900 km	172325.114940 s

Tabelle 26-27: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer Äquivalenz -Bahn mit Äquivalenz zwischen drakonitischer und Meridian-bezogener Bewegung für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°, Epoche t_0 : 2019-08-19/12:00:0.00, vollständiges *Brouwer* Modell, Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_D} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-10}$ sec, Δ(a)< 10^{-12} km, Schrittweite Δa=5 km. Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_\oplus$ =398600.4418 $\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 =0.00108262537997.

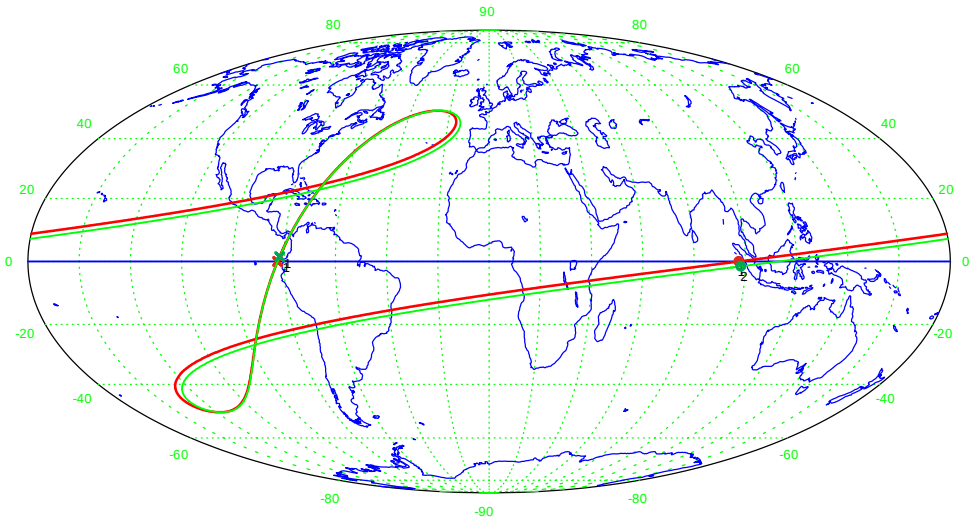


Bild 26-53: Bodenspur der $\left(P_D \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenzbahn mit den Bahnparametern $\overline{a_{QDR}}$ =66931.0204225 km, $\overline{e}_0$ =0.7, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =0°. Der aufsteigende Knoten ist am ausgewählten Ort fixiert. Die erste Bahn zur Epoche t_0 :2019-08-19/12:00:0.0 ist in Rot dargestellt. Überlappend ist die Bahn nach einem Jahre zum Startzeitpunkt t_{02} :2020-08-19/12:00:0.0 in grüner Farbe zu erkennen. Der Ort des Perigäums (analog des Apogäums) wird in östlicher Richtung verschoben.

$\left(P_D \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\overline{a_{QDR}}$ =66931.020423 km, $\overline{e}_0$ =0.7, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172326.532705 sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_A}$ = 172325.697152 sec	P_A = 172325.697152 sec
$\overline{P_D}$ = 172320.490715 sec	P_D = 172325.040988 sec
$\overline{P_T}$ = 172326.771048 sec	P_T = 172326.272211 sec
$\overline{P_R}$ = 172329.591002 sec	P_R = 172325.040988 sec
H_P = 13701.169527 km	H_A = 107404.598118 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.995751$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.980989$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -719°.995751$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.000001$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.13288405099777748×10^{-8} rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.11016242023583453×10^{-8} rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = 0.17678753093316892×10^{-9} rad / sec	

Tabelle 26-28: Bahncharakteristika der wahren $\left(P_D \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenzbahn bei Berücksichtigung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells. Große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDR}}$ =66931.0204225 km, $\overline{e}_0$ =0.7, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =0°°, Epoche: 2019-08-19/12:00:0.00, Schrittweite Δa=10 km, Genauigkeitsgrenzen $\Delta P < 10^{-10}$ sec , $\Delta(a) < 10^{-10}$ km . Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. A posteriori Genauigkeit: $\Delta P = 0.29\times10^{-10}$ sec.

BEISPIEL 2: Im Vergleich zu Beispiel 1 wird eine hochexzentrische $\left(P_D \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn mit Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.9 untersucht. Wieder soll die Bahn im aufsteigenden Knoten mit dem geographischen Koordinatensystem gekoppelt werden. Auch der Einschuss soll im Perigäum der exzentrischen Bahn erfolgen.

Die Bahn habe zur Epoche t_0 :2019-08-19/12:00:0.0 die Parameter $\bar{e}_0$ =0.9, $\bar{i}_0$ =50°, $\bar{\Omega}_0$ =65°, $\bar{\omega}_0 = \overline{M}_{00} = 0°$. Die große Bahnhalbachse errechnet sich zu $\overline{a_{QDR}}$ =66926.763226 km. Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-29 zusammengefasst.

Bild 26-54 zeigt den Verlauf im ersten Umlauf als rote Kurve, nach genau einem tropischen Jahr zur Epoche t_{02} :2020-08-19/12:00:0.0 einen Umlauf auf grüner Kurve.

Der aufsteigende Knoten bleibt wie gewünscht an der gleichen Position auf dem Äquator. Wie in Tabelle 26-29 zu sehen ist, ist die Verschiebung in einem Jahr kleiner als $40''$, d.h. vernachlässigbar. Allerdings verschiebt sich das Perigäum um etwa $\Delta\omega = 14°.4$ nach Osten. Daher erscheint die Bahn in der Umgebung des aufsteigenden Knoten etwa im Gebiet $-90° \le u \le +90°$ unverändert und daher sehr stabil. In der Umgebung des Apogäums scheint die Bahn jedoch über die Seite nach Süden zu kippen. Der absteigende Knoten ist daher erheblich nach Osten verschoben. ◄

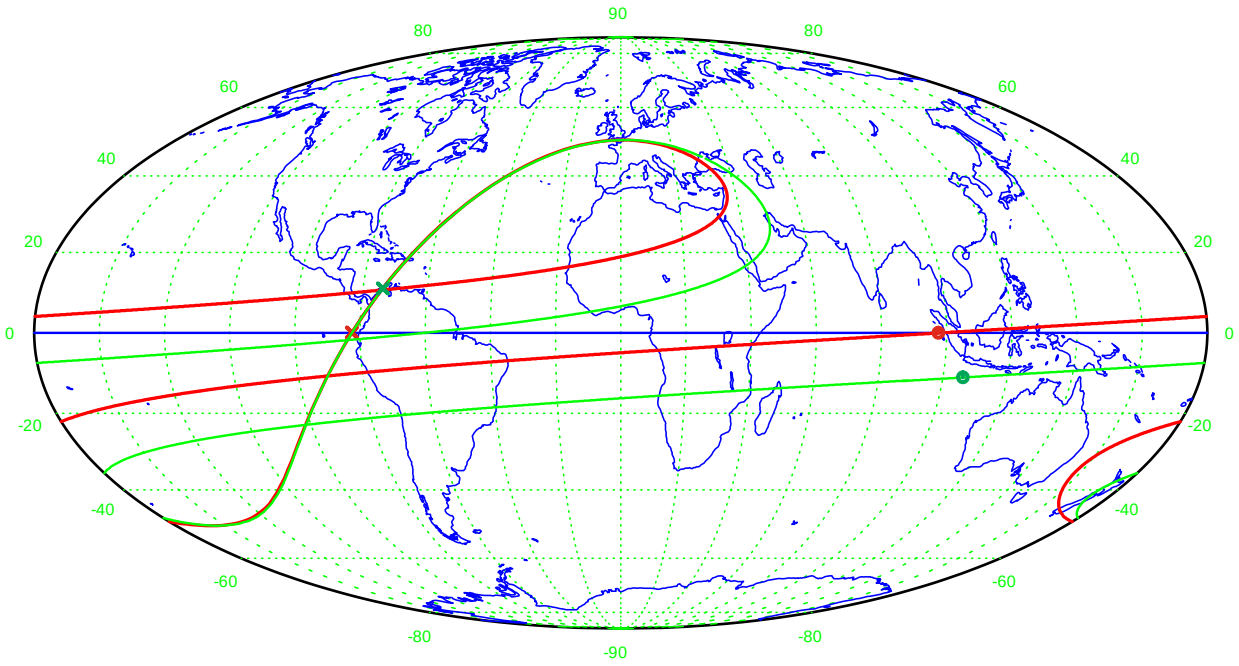


Bild 26-54: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit Äquivalenz der drakonitischen und der Meridian-bezogenen Bewegung bei Start der Bahnen im aufsteigenden Knoten. Die *Kepler*schen Bahnparameter sind $\overline{a_{QDR}}$ =66926.764550 km, $\bar{e}_0$ =0.9, $\bar{i}_0$ =50°, $\bar{\Omega}_0$ =65°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°. Im Vergleich zur roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 :2019-08-19/12:00:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02} :2020-08-19/12:00:0.0 gerechnet. Es ist jeweils ein Umlauf (2 Sterntage) dargestellt.

$\left(P_D \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\overline{a_{QDR}}$ =66926.764550 km, $\overline{e}_0$ =0.9, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172310.096645 sec	t_0 :2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172298.032018 sec	P_H = 172306.229916 sec
$\overline{P_A}$ = 172306.427314 sec	P_A = 172306.423244 sec
$\overline{P_D}$ = 172268.946232 sec	P_D = 172305.564620 sec
$\overline{P_T}$ = 172314.199929 sec	P_T = 172307.176110 sec
$\overline{P_R}$ = 172342.164368 sec	P_R = 172305.564620 s
$\overline{P_S}$ = 173260.274535 sec	P_S = 172338.655406 sec
$\overline{P_L}$ = 185882.990175 s	P_L = 340508.599678 sec
H_P = 314.539855 km	H_A = 120782.716045 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719.953349$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719.847057$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719.953332$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720.000071$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.95786844835301719×10^{-8} rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.79338413688413198×10^{-8} rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = 0.77652353569100751×10^{-9} rad / sec	

Tabelle 26-29: Bahncharakteristika der wahren $\left(P_D \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenzbahn bei Berücksichtigung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells. Große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDR}}$ =66926.764550 km, Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.9 und Inklination $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =0°. Genauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-10}$ sec, Δ(a)<10^{-10} km, Schrittweite Δa=10 km. Fundamentale Konstante: R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\odot}$ = 398600.4356 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$[1984] = 0.72921158573340 ×10^{-4} rad/sec, J_2 = 0.001082625379977 . A posteriori Genauigkeit $\Delta P = \left|P_D - P_R\right| = 0.58\times10^{-10}$ sec

BEISPIEL 3: Anknüpfend an die in den vorstehenden Abschnitten untersuchten Bahnen in Bild 26-48 (auf Seite 492) und Bild 26-49 (auf Seite 497) zeigt Bild 26-55 eine $\left(P_D \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenzbahn mit Einschuss in der nördlichen Wende, d.h. für *u*=90°. In diesem Fall ist die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDR}}$ = 66926.760692 km geringfügig gegenüber dem im vorhergehenden Beispiel verschieden. Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden Tabelle 26-30 in zusammengefasst.

Im Fall einer Äquivalenz der drakonitischen Bewegung mit der Meridian-bezogenen Bewegung kann in diesem Fall nicht der Knoten der Bahn über dem Meridian festgehalten werden, der im ersten Umlauf überflogen wird. Vielmehr wird im Meridian der nördlichen Wende der Bahnwinkel der drakonitischen Bewegung eingekoppelt, in diesem Fall somit das Argument der Breite $u = 90°$. Wie im vorstehenden Beispiel wandert das Perigäum um etwa $\Delta\omega = 14°.4$ in Flugrichtung weiter, der Bereich um das Apogäum kippt etwas zur Seite. ◄

$\left(P_D \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\overline{a_{QDR}}$ =66926.760692 km, $\overline{e}_0$ =0.9, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =90°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172310.081748 sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172298.017120 sec	P_H = 172306.215848 sec
$\overline{P_A}$ = 172306.412416 sec	P_A = 172306.405965 sec
$\overline{P_D}$ = 172268.931333 sec	P_D = 172305.551726 sec
$\overline{P_T}$ = 172314.185031 sec	P_T = 172306.215848 sec
$\overline{P_R}$ = 172342.212863 sec	P_R = 172305.551726 sec
$\overline{P_S}$ = 173260.259473 sec	P_S = 172319.185335 sec
$\overline{P_L}$ = 185882.972839 sec	P_L = 331823.112119 sec
H_P = 314.539469 km	H_A = 120782.708715 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719.881760$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719.846925$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719.881733$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719.999947$
$\dot{\omega}_s = 0.7933842968731275 5\times10^{-8}$ rad / sec	

Tabelle 26-30: Bahncharakteristika der wahren $\left(\overline{P_D} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn bei Berücksichtigung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells. Große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDR}}$ =66926.760692 km, Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.9 und Inklination $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =90°. Genauigkeiten $\Delta\overline{P} \le 10^{-10}$ sec, Δ(a)<10^{-10} km, Schrittweite Δa=10 km. Fundamentale Konstante: R_E = 6378.1366 km , $\mu_\odot$ = 398600.4356 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$[1984] = 0.72921158573340 ×10^{-4} rad/sec, J_2 = 0.001082625379977 . A posteriori Genauigkeit $\Delta P = \left|P_T - P_R\right| = 0.87\times10^{-10}$ sec

26.8.3.3 Die Inklination bei drakonitischer zu meridionaler Äquivalenz

Alternativ zur Berechnung der großen Bahnhalbachse nach Vorgabe der Elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\right)$ kann wieder die Inklination bei Vorgabe der Elemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0\right)$ berechnet werden. Tabelle 26-27 (auf Seite 505) lässt vermuten, dass derartige Berechnungen nur in einem speziellen Umfeld sinnvoll durchgeführt werden können. Wird dazu die mittlere drakonitische mittlere Bewegung $\overline{n_D}$ als Funktion der Inklination aufgefasst, lautet analog zu (26.190) die benötigte Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{i_{QdR}}\right) \equiv 2\,\overline{n_D} + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \qquad \prec \sigma_i = +1 \quad . \qquad (26.216)$$

Mit der mittleren drakonitischen mittleren Bewegung (23.48) (Abschnitt 23.2.2) und der mittleren meridionalen Bewegung (26.10) (Abschnitt 26.2) lautet diese Bedingung ausführlich

$$\overline{n_{K\,0}} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \frac{\dot{\Omega}_s}{2} = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \qquad (26.217)$$

Um die Funktionsgleichung (26.216) iterativ bearbeiten zu können, wird ein erster Näherungswert benötigt.

Dieser kann mit der *Kepler*schen mittleren Bewegung $\overline{n_{K0}} = \sqrt{\mu / \overline{a}_0^3}$ und den Ausdrücken erster Ordnung für die säkularen Variationen (20.15), (20.16) und (20.17) erhalten werden aus

$$\overline{n_{K0}} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{J_2 R_E^2}{\overline{a}_0^2 \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2} \left[\sqrt{1-\overline{e}_0^2} \left(1-3\cos^2 \overline{i}_0\right) + \left(1-5\cos^2 \overline{i}_0\right) + \cos \overline{i}_0 \right] \right\} = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \quad (26.218)$$

Mit den Abkürzungen

$$C_2 := -\frac{3}{4} \frac{J_2 R_E^2}{\overline{a}_0^2 \left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}, \; A_2 := 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2} + 5, D_2 := \left(\frac{\dot{\Theta}}{2\overline{n_{K0}}} - 1 \right) \frac{1}{C_2} - \left(1 + \sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) \quad (26.219)$$

folgen die zwei Näherungslösungen

$$\cos \overline{i_{QDR}}^{(0)}_{1/2} = \frac{1}{2A_2} \left[1 \pm \sqrt{1-4A_2 D_2} \right] \quad . \quad (26.220)$$

Ob beide oder welche der beiden Lösungen oder überhaupt eine Lösung die gegebenen Vorgaben erfüllen, muss vor einer Weiterverwendung der Ergebnisse geprüft werden. Mit einer gültigen Lösung kann eine Verbesserung in Bezug auf $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$bzw. $\left(P_D \triangleq P_R\right)$– Äquivalenz analog den Funktionalgleichungen (26.213) und (26.215) erhalten werden mit

$$fct\left(\overline{i_{QDR}}\right) \equiv \overline{P_D} - \overline{P_R} = 0 \quad \text{bzw.} \quad fct\left(\overline{i_{QDR}}\right) \equiv P_D - P_R = 0 \quad . \quad (26.221)$$

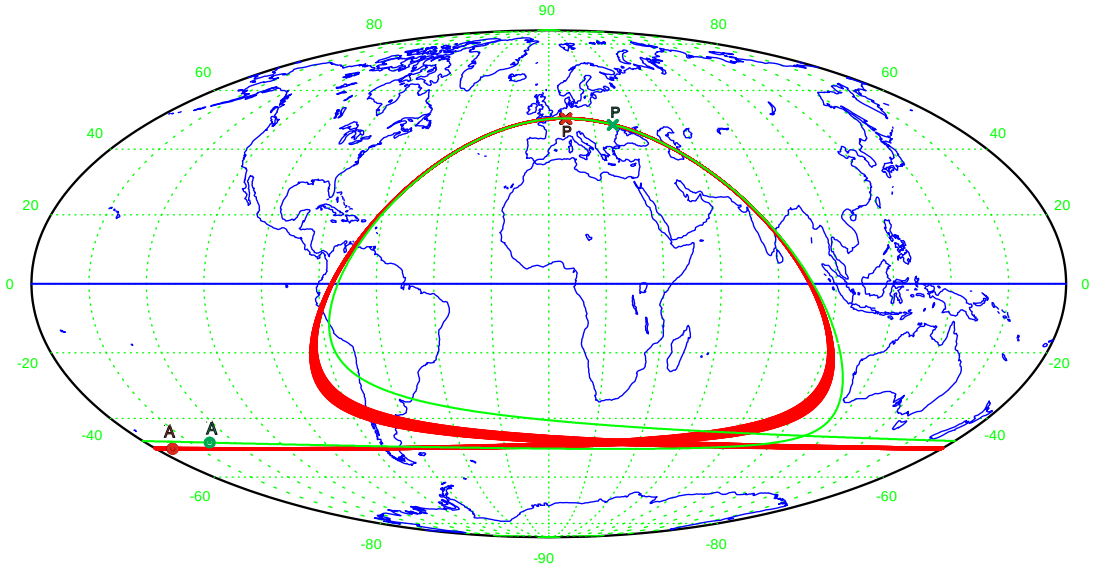


Bild 26-55: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit Äquivalenz der drakonitischen und der Meridian-bezogenen Bewegung bei Start in der nördlichen Wende. Die *Kepler*schen Bahnparameter sind $\overline{a_{QDR}}$ =66926.760692 km, $\overline{e}_0$ =0.9, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =90°, $\overline{M}_{00}$ =0°, t_0 :2019-08-19/12:00:0.0 ist die Epoche der über 4 Monate gerechneten roten Bodenspur der Äquivalenzbahn. Die grüne Bodenspur ist auf die Epoche t_{02} :2020-08-19/12:00:0.0 bezogen und nur über einen Umlauf (zwei Sterntage) gerechnet. Die Knoten verändern sich infolge der Wanderung der Apsidenlinie, während der geographische Ort der nördlichen Wende unverändert bleibt. Der Ort des Perigäums ist nach einem Jahr in östlicher Richtung verschoben

BEISPIEL 1 : Eine $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$– Äquivalenzbahn soll mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$= 66932 km und der mittleren Exzentrizität $\overline{e}_0$=0.35 konstruiert werden. Es wird mit dem

gesamten *Brouwer*schen Bahnmodell gerechnet. Die Genauigkeitsgrenzen sind $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_D} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-10}$ sec, $\Delta(i)=10^{-10}$ Grad.

Aus Gleichung (26.220) ergeben sich die beiden Lösungen $\overline{i}_{0/1}$=44°.738084 und $\overline{i}_{0/2}$ =125°.612115. Wegen des Bezugs auf eine meridionale Bewegung kann die gesuchte Bahn nur rechtläufig sein. Mit $\overline{i}_{0/1}$ als Anfangsnäherung liefert die erste der Funktionsgleichungen (26.221) den endgültigen Wert für die mittlere Inklination $\overline{i_{QDR}}$ =44°.7380436. Die mittlere anomalistische und mittlere meridionale Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{QD}} = \overline{P_{QR}}$ =172327.008857 sec mit der a posteriori Genauigkeit $\left|\overline{P_D} - \overline{P_R}\right| \le 1.5\times10^{-10}$ sec.

Zur Kontrolle wird mit dem Ausdruck (26.216) gerechnet: $\tilde{\dot{\Theta}} = 2\overline{n_D} + \dot{\Omega}_s$ =0.729218225×10^{-4} /sec. Der Fehler liegt in der Größenordnung von 10^{-10} rad/sec (Vergleichswert: $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s). ◀

BEISPIEL 2 : Eine $\left(P_D \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenzbahn soll wie im ersten Beispiel mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$=66932 km und der mittleren Exzentrizität $\overline{e}_0$=0.35 konstruiert werden. Es wird wieder mit dem gesamten *Brouwer*schen Bahnmodell gerechnet. Die Genauigkeitsgrenzen sind $\Delta P = \left|P_D - P_R\right| \le 10^{-10}$ sec, $\Delta(i)=10^{-10}$ Grad.

Mit $\overline{i}_{0/1}$ als Anfangsnäherung (aus Beispiel 1) liefert die zweite der Funktionsgleichungen (26.221) den endgültigen Wert für die mittlere Inklination $\overline{i_{QDR}}$ =33°.5962519. Die wahre anomalistische und die wahre meridionale Umlaufzeit betragen $P_{QD} = P_{QR}$ =172326.806584 sec, mit der a posteriori Genauigkeit $\left|P_D - P_R\right| \le 2.6\times10^{-10}$ sec..

Die Kontrolle ergibt $\tilde{\dot{\Theta}} = 2\overline{n_D} + \dot{\Omega}_s$ =0.7292304041466×10^{-4} /sec.◀

26.8.3.4 Die Exzentrizität bei drakonitischer zu meridionaler Äquivalenz

Falls die Exzentrizität im Fall einer solchen Äquivalenzbahn berechnet werden soll, kann sie nach dem Muster der in Abschnitt 26.8.1.6 (auf Seite 466) vorgestellten Methodik erhalten werden.

26.8.3.5 Der (a,i)- Bereich möglicher drakonitischer zu meridionaler Äquivalenzbahnen

Bild 26-56 zeigt eine Übersicht aller möglichen $\left(\overline{P_D} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität $e_B \in \left[0.9016979 - 0.9018750\right]$. Die Kurven sind für je eine Exzentrizität berechnet. Wie im Fall von $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen (siehe Bild 26-25, Seite 463) schneiden sich alle Kurven in einem fast punktförmigen Gebiet, hier in der Nähe des Punktes $\overline{a}_{cross} \approx 66931.44\,\text{km}$,

$\overline{i}_{cross} \approx 56°$. (Zum Vergleich: $\overline{a_{QR}}_K = \sqrt[3]{4\mu/\dot{\Theta}^2}$ =66931.4468893 km). Um diesen Schnittpunkt (bzw. Schnittpunkte) zu berechnen, werden die Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten (e_1, e_2) zum Schnitt gebracht.

Aus der Bedingungsgleichung (26.212) für $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen wird die Gleichung einer Kurve im Fall einer bei Äquivalenz mit einer meridionalen Bewegung stets rechtläufigen Bahn $\left(\sigma_i = \mathrm{sgn}(\cos i) = +1\right)$ erhalten

$$\overline{n_D} = \frac{1}{2}\left(\dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s\right) = \left|\overline{n_R}\right| \quad , \quad \overline{P_D} = \frac{2\pi}{\overline{n_D}} = \overline{P_R} \quad . \tag{26.222}$$

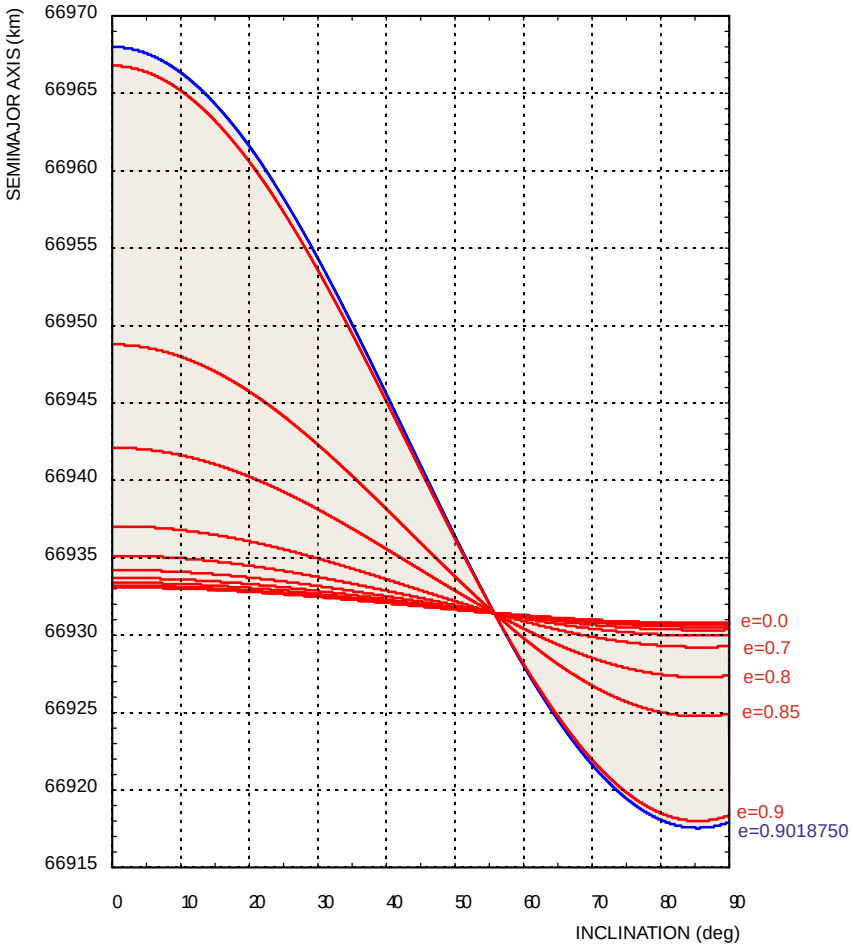


Bild 26-56: Das (a,i)-Gebiet von möglichen $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert mit Exzentrizitäten

$$e \in [0.0, 0.9016979 - 0.9018750]$$

Mit den säkularen Anteilen der Variationsgleichungen[1] $(M_0)^{\cdot}_s, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ erster Ordnung und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad , \quad B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \quad , \quad E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \quad , \quad E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \tag{26.223}$$

[1] aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

wird eine Trennung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse

$$f_e \equiv E_i\left[1+\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)+\cos i\right]=\frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,n_K}-1\right) \tag{26.224}$$

formal erhalten. Wird hier jeweils die vorgegebene Exzentrizität (e_1, e_2) eingesetzt und die beiden erhalten Ausdrücke subtrahiert, bleibt eine quadratische Gleichung für den Cosinus der Inklination

$$A_0\cos^2 i + B_0\cos i + C_0 = 0 \tag{26.225}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_2\left(5+6\sqrt{1-e_2^2}\right)-E_1\left(5+6\sqrt{1-e_1^2}\right) \\ B_0 &:= E_1-E_2 \\ C_0 &:= E_1-E_2+E_1\sqrt{1-e_1^2}-E_2\sqrt{1-e_2^2} \quad . \end{aligned} \tag{26.226}$$

Ihre Lösungen mit Hilfe der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0+\mathrm{sgn}(B_0)\sqrt{B_0^2-4A_0C_0}\right] \;,\quad \cos i_1=\frac{Q_0}{A_0} \;,\quad \cos i_2=\frac{C_0}{Q_0} \;. \tag{26.227}$$

Im Fall der Äquivalenz unter Einschluss der meridionalen Bewegung kann nur die positive Lösung verwendet werden.

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	66933.09	---	---	66930.78	66930.79
e=0.1	66933.12	55.592502	66931.443726	66930.77	66930.78
e=0.2	66933.22	55.594873	66931.443635	66930.73	66930.74
e=0.3	66933.40	55.599082	66931.443471	66930.66	66930.67
e=0.4	66933.70	55.605580	66931.443218	66930.54	66930.55
e=0.5	66934.21	55.615177	66931.442839	66930.34	66930.35
e=0.6	66935.14	55.629334	66931.442265	66929.97	66930.00
e=0.7	66937.05	55.650891	66931.441329	66929.24	66929.28
e=0.8	66942.11	55.686167	66931.439367	66927.29	66927.38
e=0.85	66948.78	55.713527	66931.436769	66924.76	66924.92
e=0.9	66966.78	55.753528	66931.426563	66918.00	66918.35
e_B	66967.93	55.755225	66931.425748	66917.59	66917.95

Tabelle 26-31: Besondere Parameter von $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, nach der Exzentrizität parametrisiert, Grenzexzentrizität $e_B = 0.9016979$

In Tabelle 26-31 sind ergänzend zu Bild 26-56 besondere Parameter der einzelnen Kurve zusammengestellt. Als charakteristische Größen sind die Parameter der Überschneidungen (i_{cross}

, a_{cross}) für Kopplungen der Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 gerechnet. Nach Berechnung der charakteristischen Inklination i_{cross} werden die Halbachsen a_{cross} mit den laufenden Exzentrizitäten nach der Methodik in Abschnitt 26.8.2.2 gerechnet .

Im Vergleich zu den möglichen Kurven im Fall von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen und $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen ist das Gebiet möglicher $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen erheblich umfangreicher. Dies bestätigt wieder den Eindruck, dass jede Art von Äquivalenzbahnen ein sehr charakteristisches Bild von möglichen Bahnen überdeckt.

26.8.4 Äquivalenz zwischen *Hansen*- und meridionaler Bewegung

Die Kopplung der *Hansen*- mit der Meridian-bezogenen Bewegung erzwingt die Verknüpfung eines *Hansen*schen Bahnwinkels mit einem Meridian. Damit kann ein Ort in dem als unveränderlich mit der Bahnebene verknüpften *Hansen* System über einem bestimmten Meridian über der Erdoberfläche festgehalten werden.

26.8.4.1 Basiseigenschaften

Eine $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn wird durch Vergleich der entsprechenden mittleren Bewegungen erhalten. Die mittlere *Hansen*sche mittlere Bewegung ist durch den Ausdruck (21.62) bekannt[1]. Mit der mittleren meridionalen Bewegung (26.13) wird daher[2]

$$\begin{aligned}
&\overline{n_H} = \dot{\bar{\zeta}} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i} + \cdots = \overline{n_A} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}\cos\bar{i} + \cdots = \overline{n_D} + \dot{\Omega}\cos\bar{i} + \cdots \quad . \\
&\overline{n_R} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) = \overline{n_D} + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{26.228}$$

Analog zu Bedingung (26.155) ist auch in diesem Fall (vgl. Bild 26-24 auf Seite 457)

$$\overline{n_R} = -\overline{n_H} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_H} = \overline{P_R} = \frac{2\pi}{\left|\overline{n_R}\right|} \quad \langle \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.229}$$

. Die *Hansen*sche mittlere Bewegung und die entsprechende mittlere Umlaufzeit folgen aus

$$\overline{n_H} = \frac{1}{2}\left[\dot{\Theta} - \dot{\Omega}_s\left(1 - \cos\bar{i}_0\right)\right] = \left|\overline{n_R}\right| \quad , \quad \overline{P_H} = \frac{2\pi}{\overline{n_H}} = \overline{P_R} \quad . \tag{26.230}$$

26.8.4.2 Große Bahnhalbachse bei Hansen- zu meridionaler Äquivalenz

Die zugehörige große Bahnhalbachse kann nach Vorgabe der mittleren Epoche-*Kepler*elemente $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ iterativ mit der Funktionsgleichung[3]

$$fct\left(\overline{a_{QHR}}\right) \equiv 2\,\overline{n_H} + \dot{\Omega}_s\left(1 - \cos\bar{i}_0\right) - \dot{\Theta} = 0 \tag{26.231}$$

---

[1] Vgl. Abschnitt 21.2.3

[2] Die in Formel (23.46) berücksichtigte beispielhafte säkulare Abnahme der Bahnhalbachse infolge des Luftwiderstandes wird in der Bahnhöhe der Meridian bezogenen Äquivalenzbahnen nicht benötigt.

[3] Man beachte stets, dass die hier untersuchten Meridian-bezogenen Äquivalenzbahnen stets rechtläufig sind $\left[\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos i\right) = +1\right]$.

berechnet werden. Als Anfangswert für die iterative Bearbeitung kann der theoretische Zahlenwert (26.158) gewählt werden

$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\overline{a_{QHR}}\left[\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right]$	$\overline{P_H} = \overline{P_R}$	$\overline{a_{QHR}}\left[P_H \triangleq P_R\right]$	$P_H = P_R$
0.0	0°	66932.763262 km	172328.181014 s	66932.763274 km	172328.181060 s
	30°	66932.231567 km	172328.033587 s	66932.198122 km	172327.907135 s
	60°	66931.200458 km	172327.863353 s	66931.158814 km	172327.705250 s
	85°	66930.778022 km	172328.079922 s	66930.775753 km	172328.071157 s
0.3	0°	66932.999861 km	172328.181014 s	66932.591726 km	172331.249957 s
	30°	66932.371510km	172328.002982s	66932.090070 km	172327.848848 s
	60°	66931.153806km	172327.797412 s	66931.152468 km	172327.605656 s
	85°	66930.656992 km	172328.058938 s	66930.843071 km	172328.048344 s
0.6	0°	66934.339073km	172328.181014 s	66934.017742 km	172334.385571 s
	30°	66933.161343 km	172327.821071s	66932.277390 km	172329.509402 s
	60°	66930.884892 km	172327.405480 s	66930.945193 km	172327.017756 s
	85°	66929.970438 km	172327.934216 s	66930.592818 km	172327.912749 s
0.9	0°	66957.658059 km	172328.181014 s	66957.220853 km	172398.623782 s
	30°	66946.754065 km	172324.093201 s	66934.701800 km	172320.555548 s
	60°	66925.887867 km	172319.383539s	66926.983329 km	172314.984145 s
	85°	66917.938448 km	172325.383133 s	66926.572748 km	172325.138205 s

Tabelle 26-32: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer Äquivalenz -Bahn mit Äquivalenz zwischen *Hansen*- und Meridian-bezogener Bewegung für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen, , $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°, Epoche t_0 : 2019-08-19/12:00:0.00, vollständiges *Brouwer* Modell, Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} = \left|\overline{P_D} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-10}$ sec, Δ(a)< 10^{-12} km, Schrittweite Δa=5 km. Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, μ_δ =398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 =0.00108262537997.

Alternativ zu (26.231) kann die mittlere Bahnhalbachse bei $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$– Äquivalenz mit der Bedingungsgleichung

$$fct\left[\overline{a_{QHR}}\right] \equiv \overline{P_H} - \overline{P_R} = \frac{2\pi}{\overline{n}_H} - \frac{2\pi}{\overline{n}_R} = 0 \tag{26.232}$$

berechnet werden.

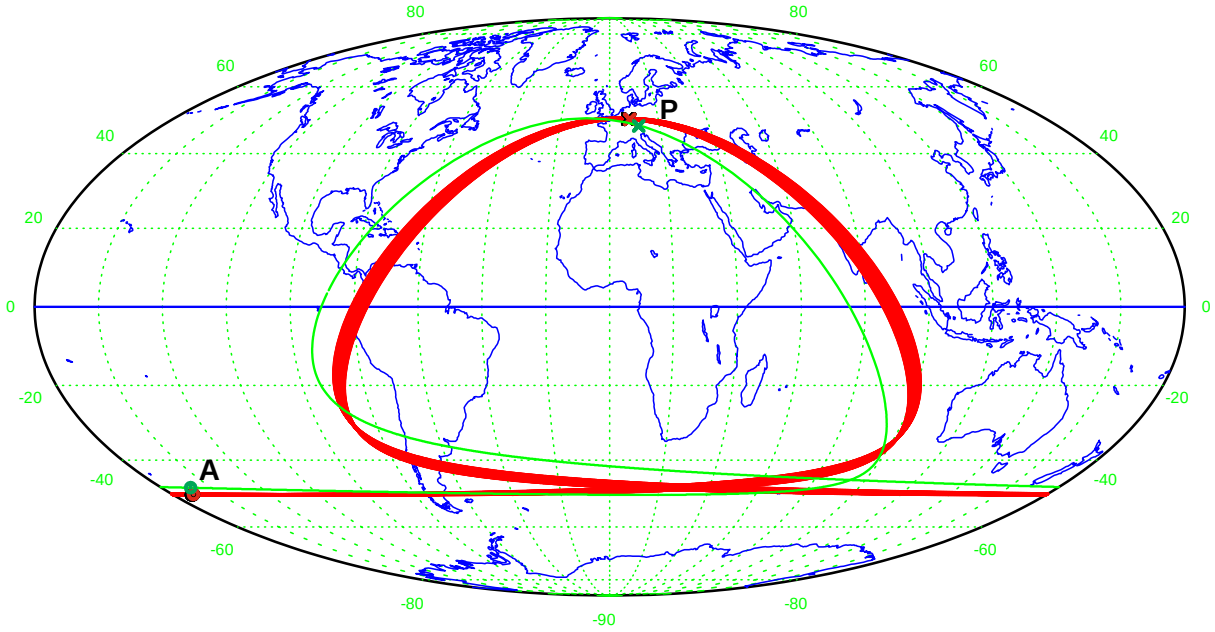


Bild 26-57: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit Äquivalenz der *Hansen* und der Meridian-bezogenen Bewegung bei Start in der nördlichen Wende. Die *Kepler*schen Bahnparameter sind $\overline{e}_0$ =0.9, $\overline{i}_0$ =50°, $\overline{\Omega}_0$ =65°, $\overline{\omega}_0$ =90°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°. Die aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten $P_H = P_R$ berechnete mittlere Halbachse beträgt $\overline{a_{QHR}}$ =66931.416513 km Im Vergleich zur über 4 Monate gerechneten roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 :2019-08-19/12:00:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02} :2019-08-19/12:00:0.0 nur über einen Umlauf dargestellt.

Zur Berechnung einer $\left(P_H \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz werden die wahren Umlaufzeiten verglichen. Mit dem (ersten) *Hansen*schen Bahnwinkel ζ wird die wahre *Hansen*sche Umlaufzeit mit der Funktionsgleichung (21.60) berechnet[1]. Dazu müssen alle benötigten Bahnparameter vorgegeben sein, etwa die Keplerelemente $\left(a,e,i,\Omega,\omega,M_0\right)$. Analog zum Rechenprozess (26.192) ergeben sich sodann mit einer Näherungslösung der mittleren großen Bahnhalbachse aus den Funktionsgleichungen

$$\begin{aligned} fct\left(P_H\right) &\equiv \sin\left[\zeta\left(t_0+P_H\right)+\zeta\left(t_0\right)\right]=0 \\ fct\left(P_R\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0+P_R\right)+\lambda\left(t_0\right)\right]=0 \end{aligned} \tag{26.233}$$

die wahren Umlaufzeiten P_H und P_R. Sind fünf der Bahnparameter bekannt, kann das fehlende sechste Element, etwa die mittlere große Bahnhalbachse als unabhängige Variable mit der Äquivalenzbedingung

$$fct\left(\overline{a_{QHR}}\right) \equiv P_H - P_R = 0 \tag{26.234}$$

berechnet werden. Der gesamte Prozess (26.233) - (26.234) muss iterativ bearbeitet werden.

Als Beispiel wird zur Berechnung der Zahlenwerte in Tabelle 26-32 das analytische Bahnmodell von *D. Brouwer* verwendet um die mittlere Bahnhalbachse $\overline{a_{QHR}}$ nach Vorgabe der

[1] Abschnitt 21.4

mittleren Epocheelemente $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ zu berechnen. Als Anfangswert für die iterative Bearbeitung kann etwa der Wert (26.158) eingesetzt werden.

BEISPIEL: Auch im Fall einer $\left(P_H \triangleq P_R\right)$– Äquivalenzbahn wird an die in den vorstehenden Abschnitten untersuchten Bahnen in Bild 26-48 (auf Seite 492), Bild 26-49 (auf Seite 497) sowie Bild 26-55 (auf Seite 510) angeschlossen. In Bild 26-57 wird eine Äquivalenzbahn mit Einschuss in der nördlichen Wende untersucht. Der Bezugspunkt in der als fest betrachteten Bahnebene wird über dem Einschuss-Meridian fest gekoppelt. Die mittlere große Bahnhalbachse errechnet sich zu $\overline{a_{QHR}} = 66932.448172$ km. Es zeigt sich auch in diesem Fall eine über viele Monate dauernde Stabilität der Bahn, die zumindest über dem Einschussort von Bedeutung ist.

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn werden in Tabelle 26-33 zusammengefasst. ◄

$\left(P_H \triangleq P_R\right)$	
$\overline{a_{QHR}}$ =66931.416513 km, $\bar{e}_0$ =0.9, $\bar{i}_0$ =50°, $\bar{\Omega}_0$ =65°, $\bar{\omega}_0$ =90°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°	
$\overline{P_K} = 172328.062422$ sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H} = 172315.998208$ sec	$P_H = 172324.196656$ sec
$\overline{P_A} = 172324.393217$ sec	$P_A = 172324.386767$ sec
$\overline{P_D} = 172286.913432$ sec	$P_D = 172323.532556$ sec
$\overline{P_T} = 172332.165556$ sec	$P_T = 172324.196656$ sec
$\overline{P_R} = 172324.196656$ sec	$P_R = 172324.196656$ sec
$\overline{P_S} = 173278.437991$ sec	$P_S = 172337.168856$ sec
$\overline{P_L} = 185903.896761$ sec	$P_L = 331861.252622$ sec
$H_P = 315.005051$ km	$H_A = 120791.554775$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.956959$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.922112$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -719°.956932$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.075130$

Tabelle 26-33: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(P_H \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz -Bahn für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen, $\bar{\Omega}_0$ =65°, $\bar{\omega}_0$ =90°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°, Epoche: 2019-10-16/12:00:0.00, Schrittweite Δa=50 km Genauigkeitsgrenzen $\Delta P < 10^{-11}$ sec , $\Delta(a) < 10^{-11}$ km . Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, μ_δ =398600.4418 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. A posteriori Genauigkeit: $\Delta P = 0.29\times10^{-10}$ sec

26.8.4.3 Die Inklination bei Hansen- zu meridionaler Äquivalenz

Alternativ zur Berechnung der großen Bahnhalbachse nach Vorgabe der Elemente $\left(\bar{e}_0, \bar{i}_0\right)$ soll auch im Zusammenhang mit der *Hansen* Bewegung die Inklination bei Vorgabe der Elemente $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ berechnet werden. Tabelle 26-32 (auf Seite 515) lässt wieder vermuten, dass derartige Berechnungen nur in einem speziellen Umfeld sinnvoll durchgeführt werden können. Wird dazu die mittlere *Hansen*sche mittlere Bewegung $\overline{n_H}$ als Funktion der Inklination aufgefasst, lautet analog zu (26.231) die benötigte Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{i_{QHR}}\right) \equiv 2\,\overline{n_H} + \dot{\Omega}_s\left(1-\cos\bar{i}_0\right) - \dot{\Theta} = 0 \qquad \prec \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.235}$$

Mit der mittleren *Hansen*schen mittleren Bewegung (21.62) (Abschnitt 21.3) lautet diese Bedingung ausführlich

$$\overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \frac{\dot{\Omega}_s}{2}\left(1+\cos\bar{i}_0\right) = \frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \tag{26.236}$$

Um die Funktionsgleichung (26.235) iterativ bearbeiten zu können, wird ein erster Näherungswert benötigt. Dieser kann mit der *Kepler*schen mittleren Bewegung $\overline{n_K} = \sqrt{\mu / \bar{a}_0^3}$ und den Ausdrücken erster Ordnung für die säkularen Variationen (20.15), (20.16) und (20.17) erhalten werden aus

$$\overline{n_{K\,0}}\left\{1-\frac{3}{4}\frac{J_2\,R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2}\left[\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}_0\right)+\left(1-5\cos^2\bar{i}_0+\cos^2\bar{i}_0+\cos\bar{i}_0\right]\right\}=\frac{\dot{\Theta}}{2} \quad . \tag{26.237}$$

Mit den Abkürzungen

$$C_2 := -\frac{3}{4}\frac{J_2\,R_E^2}{\bar{a}_0^2\left(1-\bar{e}_0^2\right)^2},\ A_4 := 3\sqrt{1-\bar{e}_0^2}+4, B_4 := \left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,\overline{n_{K\,0}}}-1\right)\frac{1}{C_2}-\left(1+\sqrt{1-\bar{e}_0^2}\right) \tag{26.238}$$

folgen die zwei Näherungslösungen

$$\cos\bar{i}_{0,1/2}^{(0)} = \frac{1}{2A_4}\left[1\pm\sqrt{1-4A_4\,B_4}\right] \quad . \tag{26.239}$$

Ob beide oder welche der beiden Lösungen oder überhaupt eine Lösung die gegebenen Vorgaben erfüllen, muss vor einer Weiterverwendung der Ergebnisse geprüft werden. Mit einer gültigen Lösung kann eine Verbesserung in Bezug auf $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$ bzw. $\left(P_H \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz analog den Funktionalgleichungen (26.232) und (26.234) erhalten werden aus

$$fct\left(\overline{i_{QHR}}\right) \equiv \overline{P_H} - \overline{P_R} = 0 \qquad \text{bzw.} \quad fct\left(\overline{i_{QHR}}\right) \equiv P_H - P_R = 0 \quad . \tag{26.240}$$

BEISPIEL 1 : Zu bestimmen sei die mittlere Inklination $\overline{i_{QHR}}$ einer mittleren $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 66932 km und der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.35. Es wird das vollständige *Brouwer*sche Bahnmodell verwendet, mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta\bar{P} = \left|\overline{P_H} - \overline{P_R}\right| \le 10^{-9}$ sec, $\Delta(i)<10^{-10}$ Grad, der Schrittweite Δi=0°.1.

Aus Gleichung (26.239) ergeben sich die beiden Lösungen $\bar{i}_{0/1}$=39°.998853 und $\bar{i}_{0/2}$ =128°.259183. Wegen des Bezugs auf meridionale Bewegung kann die gesuchte Bahn nur rechtläufig sein. Mit $\bar{i}_{0/1}$ als Anfangsnäherung liefert die erste der Funktionsgleichungen (26.240) als endgültigen Wert für die mittlere Inklination wieder $\overline{i_{QHR}}$ =39°.9989105. Die

mittlere *Hansen* und mittlere meridionale Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{QH}} = \overline{P_{QR}}$ =172327.8852784 mit der a posteriori Genauigkeit $\left|\overline{P_H} - \overline{P_R}\right| \le 1.5\times10^{-10}$ sec.

Zur Kontrolle wird mit dem Ausdruck (26.216) gerechnet: $\tilde{\dot{\Theta}} = 2\overline{n_D} + \dot{\Omega}_s\left(1+\cos\overline{i}_0\right)$ =0.7292115857334×10^{-4}/sec. Dieser Wert entspricht exakt dem vorgegebenen Wert: $\dot{\Theta}$ =0.7292115857334×10^{-4}/sec. ◄

BEISPIEL 2 : Zu bestimmen sei die mittlere Inklination $\overline{i_{QHR}}$ einer wahren $\left(P_H \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn wie im ersten Beispiel mit der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ = 66932 km und der mittleren Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.35. Es wird das vollständige Brouwersche Bahnmodell verwendet, mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta P = \left|P_H - P_R\right| \le 10^{-9}$ sec, Δ(*i*)=10^{-10} Grad, der Schrittweite Δ*i*=0°.1. Mit $\overline{i}_{0/1}$=39°.998853 als Anfangsnäherung liefert die zweite der Funktionsgleichungen (26.240) den endgültigen Wert für die mittlere Inklination $\overline{i_{QHR}}$ =32°.975475870. Die wahre *Hansen* und die wahre meridionale Umlaufzeit beträgt $\overline{P_{QH}} = \overline{P_{QR}}$ =172327. 770959 sec mit der a posteriori Genauigkeit $\left|P_D - P_R\right| \le 6.7\times10^{-10}$ sec.

Die Kontrolle ergibt $\tilde{\dot{\Theta}} = 2\overline{n_D} + \dot{\Omega}_s\left(1+\cos\overline{i}_0\right)$=0.7292166371526×10^{-4}/sec. ◄

Beachte die unterschiedlichen Ergebnisse für die gesuchte Inklination $\overline{i_{QHR}}$ zwischen den Berechnungen mit mittleren und wahren Äquivalenzbahnen.

26.8.4.4 Die Exzentrizität bei Hansen- zu meridionaler Äquivalenz

Falls die Exzentrizität im Fall einer solchen Äquivalenzbahn berechnet werden soll, kann sie nach dem Muster der in Abschnitt 26.8.1.6 (auf Seite 466) vorgestellten Methodik mit Hilfe der Funktionsgleichungen

$$fct\left(\overline{e_{QHR}}\right) \equiv \overline{P_H} - \overline{P_R} = 0 \qquad \text{bzw.} \quad fct\left(\overline{e_{QHR}}\right) \equiv P_H - P_R = 0 \quad . \tag{26.241}$$

erhalten werden.

26.8.4.5 Der (a,i)- Bereich möglicher Hansen- zu meridionaler Äquivalenz

Bild 26-56 zeigt eine Übersicht aller möglichen $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität $e_B \in \left[0.9016995 - 0.9018750\right]$. Die Kurven sind für je eine Exzentrizität berechnet. Wie im Fall von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen (siehe Bild 26-25, Seite 463) schneiden sich alle Kurven in einem fast punktförmigen Gebiet, hier in der Nähe des Punktes $\overline{a}_{cross} \approx 66931.44\,\text{km}$, $\overline{i}_{cross} \approx 52°$. (Zum Vergleich: $\overline{a_{QR}}_K = \sqrt[3]{4\mu/\dot{\Theta}^2} = 66931.4468893\,\text{km}$). Um diesen Schnittpunkt (bzw. Schnittpunkte) zu berechnen, werden die Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten $\left(e_1, e_2\right)$ zum Schnitt gebracht.

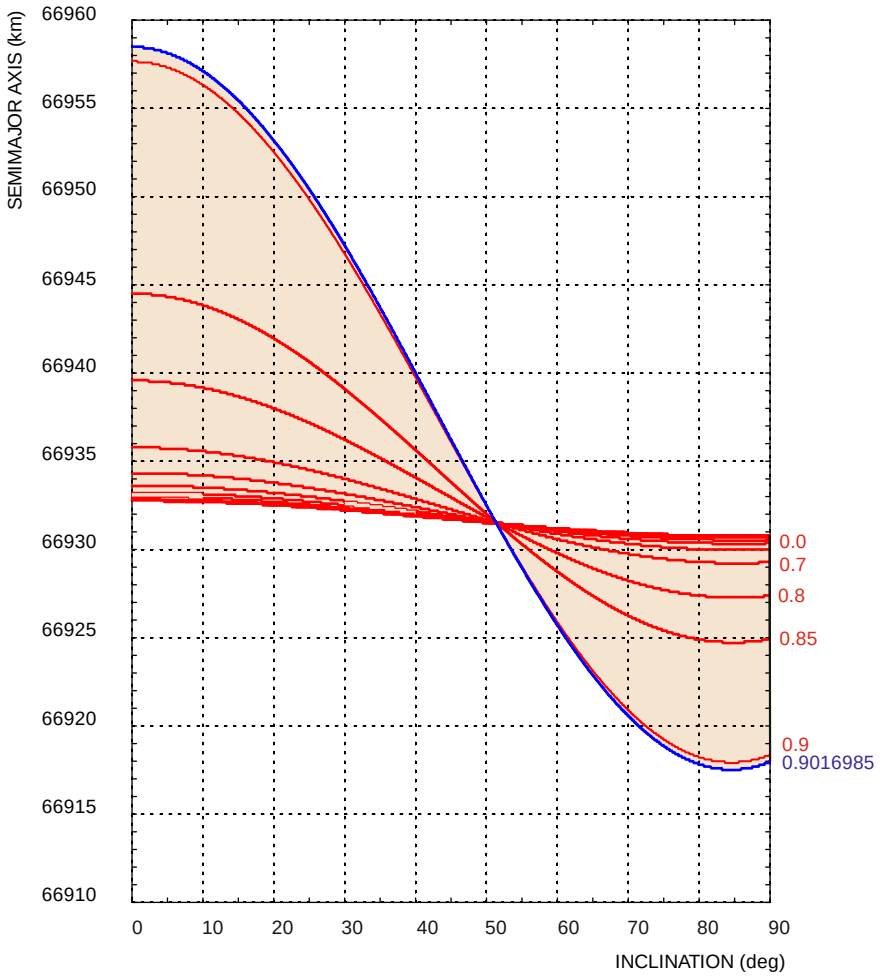


Bild 26-58: Das (a,i)-Gebiet der $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert mit Exzentrizitäten

$$e \in \left[0.0, 0.9016985\text{-}0.9017580\right]$$

Aus der Bedingungsgleichung für $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen wird die Gleichung einer Kurve im Fall einer bei Äquivalenz mit einer meridionalen Bewegung stets rechtläufigen Bahn $\left(\sigma_i = \mathrm{sgn}\left(\cos i\right) = +1\right)$ erhalten

$$2\overline{n_K} + 2\left(M_0\right)_s^{\cdot} + 2\dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s\left(1 + \cos \bar{i}_0\right) = \dot{\Theta} \tag{26.242}$$

Mit den säkularen Anteilen der Variationsgleichungen[1] $\left(M_0\right)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ erster Ordnung und mit den Abkürzungen

$$\overline{n_{K\,0}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1 - e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1 - e_2^2\right)^2} \tag{26.243}$$

wird eine Trennung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse

$$f_e \equiv E_i\left[1 + \sqrt{1 - e^2} - \cos^2 i\left(4 + 3\sqrt{1 - e^2}\right) + \cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,\overline{n_{K\,0}}} - 1\right) \tag{26.244}$$

formal erhalten.

[1] aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

Wird hier jeweils die vorgegebene Exzentrizität (e_1, e_2) eingesetzt und die beiden erhalten Ausdrücke subtrahiert, bleibt eine quadratische Gleichung für den Cosinus der Inklination

$$A_0 \cos^2 i + B_0 \cos i + C_0 = 0 \tag{26.245}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_2\left(4+3\sqrt{1-e_2^2}\right) - E_1\left(4+3\sqrt{1-e_1^2}\right) \\ B_0 &:= E_1 - E_2 \\ C_0 &:= E_1 - E_2 + E_1\sqrt{1-e_1^2} - E_2\sqrt{1-e_2^2} \quad . \end{aligned} \tag{26.246}$$

Ihre Lösungen mit Hilfe der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0 + \mathrm{sgn}(B_0)\sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}\right] \;,\; \cos i_1 = \frac{Q_0}{A_0} \;,\; \cos i_2 = \frac{C_0}{Q_0} \;. \tag{26.247}$$

Im Fall der Äquivalenz unter Einschluss der meridionalen Bewegung kann nur die positive Lösung verwendet werden.

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	66932.76	---	---	66930.78	66930.79
e=0.1	66932.79	52°.033420	66931.458435	66930.77	66930.78
e=0.2	66932.86	52°.024825	66931.458730	66930.73	66930.74
e=0.3	66933.00	52°.009555	66931.459254	66930.66	66930.67
e=0.4	66933.23	51°.985936	66931.460062	66930.54	66930.55
e=0.5	66933.63	51°.950961	66931.461254	66930.34	66930.36
e=0.6	66934.34	51°.899160	66931.463007	66929.97	66930.00
e=0.7	66935.78	51°.819805	66931.465629	66929.23	66929.28
e=0.8	66939.57	51°.688704	66931.469529	66927.28	66927.38
e=0.85	66944.50	51°.585945	66931.471495	66924.73	66924.92
e=0.9	66957.66	51°.433991	66931.467873	66917.94	66918.36
e_B	66958.49	51°.427266	66931.467310	66917.52	65781.37

Tabelle 26-34: Besondere Parameter von $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen entsprechend Bild 26-58.

In Tabelle 26-34 sind ergänzend zu Bild 26-58 besondere Parameter der einzelnen Kurve zusammengestellt. Als charakteristische Größen sind die Parameter der Überschneidungen (i_{cross}, a_{cross}) für Kopplungen der Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 gerechnet. Nach Berechnung der charakteristischen Inklination i_{cross} wird die Halbachse a_{cross} mit der laufenden Exzentrizität nach der Methodik in Abschnitt 26.8.4.2 (auf Seite 514) gerechnet .

Im Vergleich zu anderen möglichen Kurven Meridian bezogener Äquivalenzbahnen ist der Bereich möglicher $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen sehr umfangreich.

Aufgabenstellungen:

1. Berechne den Kreuzungspunkt der (a,i)-Kurven in Bild 26-58 mit Hilfe der verschwindenden Krümmung κ.
2. Wiederhole die Rechnungen unter Einschluss höherer Störungen $\left(J_3, J_4\right)$.
3. Wiederhole die Rechnungen unter Verwendung eines numerischen Ephemeriden Programms.
4. Deute die wahre Mond-synodische Umlaufzeit P_L in Tabelle 26-33 auf Seite 517.

26.8.5 Äquivalenz zwischen *Kepler*- und meridionaler Bewegung

Die Kopplung einer *Kepler*schen mit der meridionalen Satellitenbewegung bewirkt die Verknüpfung einer *Kepler*bahn mit einem Meridian auf der Erdoberfläche. Auf diese Weise kann eine bestimmte Position auf einer *Kepler*bahn fest mit einem Meridian verknüpft werden. Nach einem mittleren meridionalen Umlauf hat der Satelliten exakt einen mittleren *Kepler*schen Umlauf zurückgelegt.

26.8.5.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer Kepler- mit einer meridionalen Bewegung

Eine $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz Bahn kann durch Vergleich der entsprechenden mittleren Bewegungen nach Kepler und der Basisformel (26.10) erhalten werden

$$\overline{n_K} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}^3}} \quad , \quad \overline{n_R} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) = \overline{n_d} + \sigma_i\left(\dot{\Omega}_s - \dot{\Theta}\right) \qquad (26.248)$$

Analog zu (26.59) wird entsprechend Bild 26-24 die Bedingung

$$\overline{n_R} = -\overline{n_K} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P_K} = \overline{P_R} = \frac{2\pi}{\left|\overline{n_R}\right|} \quad \langle \sigma_i = +1 \quad . \qquad (26.249)$$

erhalten. Die mittlere *Kepler* Bewegung kann dann aus folgender Bedingungsgleichung berechnet werden[1]

$$2\overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s = \dot{\Theta} \quad . \qquad (26.250)$$

In erster Näherung kann mit den säkularen Variationen[2] (20.15), (20.16), (20.17) und vorgegeben Exzentrizität $\overline{e}_0$ und Inklination $\overline{i}_0$ und entsprechend konstanten Abkürzungen

$$C_5 := -\frac{3}{4}\frac{J_2 R_E^2}{\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}, \; A_5 := -\cos^2\overline{i}_0\left(5+3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) + 2\cos\overline{i}_0 + \left(1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) \qquad (26.251)$$

---

[1] Beachte: alle Satellitenbahnen, die durch Äquivalenz mit der meridionalen Bewegung gebildet werden, können nur rechtläufige Bahnen sein: $\left[\sigma_i = \operatorname{sgn}\left(\cos i\right) = +1\right]$.

[2] Abschnitt (20.2.1) (Band III der Satellitenbewegung)

ein Ausdruck für die große Bahnhalbachse gefunden werden:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} = \overline{n_K} = \frac{\dot{\Theta}}{2 - \frac{C_5 A_5}{\bar{a}^2}} + O\left(J_2^2\right) \quad . \tag{26.252}$$

Dieser Ausdruck ist für Abschätzungen geeignet, nicht für exaktes Rechnen.

26.8.5.2 Die große Bahnhalbachse bei Kopplung der Kepler- mit der meridionalen Bewegung

Alternativ zur Abschätzungsformel (26.252) kann die mittlere große Bahnhalbachse im Fall einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz mit Hilfe der numerisch stabilen Bedingungsgleichung

$$fct\left[\bar{a}_0\right] \equiv \overline{P_K}\left(\bar{a}_0\right) - \overline{P_R}\left(\bar{a}_0\right) = \frac{2\pi\,\bar{a}_0\sqrt{\bar{a}_0}}{\sqrt{\mu}} - \frac{2\pi}{\left|\overline{n_R}\left(\bar{a}_0\right)\right|} = 0 \quad . \tag{26.253}$$

In den mittleren Umlaufzeiten $\overline{P_K}, \overline{P_R}$ können die gesamten säkularen Bewegungseinflüsse enthalten sein. Für die iterative Lösung dieser Gleichung kann als Startwert der *Kepler*sche Wert (26.158)

$$\bar{a}_0^{(0)} := \overline{a_{QR\,K}} = \sqrt[3]{4\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 66931.4468893\,\text{km} \quad , \tag{26.254}$$

gewählt werden. Die Iteration

$$\overline{P_K}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_R}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)\sqrt{\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)}}{\sqrt{\mu}} - \frac{2\pi}{\left|\overline{n_R}\left(\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)\right)\right|} = 0 \quad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \tag{26.255}$$

wird abgebrochen, wenn die geforderte Genauigkeit

$$\left|\overline{P_K}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) - \overline{P_R}\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)\right| \le \Delta\bar{P} \quad , \quad \bar{a}_0^{(\nu)} < \Delta(a) \tag{26.256}$$

unterschritten wird. Der in der Iteration zuletzt erhaltene Wert wird als die endgültige Lösung $\overline{a_{QKR}} := \bar{a}_0^{(\nu)}$ betrachtet.

BEISPIEL 1: Die große Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit vorgegebenen Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.3 und Inklination $\bar{i}_0$=20° ist mit den Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-9}\,\text{sec}$ und $\Delta(a) \le 10^{-12}\,\text{km}$ zu berechnen. Mit vorgegebener Anfangsachse $\bar{a}_0^{(0)} = 60000\,\text{km}$ wird die große Bahnhalbachse mit der Suchschrittweite $\Delta a = 50\,\text{km}$ erhöht. Die berechneten Bahnparameter dieser Bahn sind in Tabelle 26-35 zusammengestellt.

Die berechnete Bahn wird mit der Genauigkeit $\left|\overline{P_K} - \overline{P_R}\right| < 10^{-22}\,\text{sec}$ erhalten. ◀

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QHR}}$ =66932.068818 km, $\bar{e}_0$ =0.3, $\bar{i}_0$ =20°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172330.582996 sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172325.638771 sec	P_H = 172326.869422 sec
$\overline{P_A}$ = 172328.169194 sec	P_A = 172328.169194 sec
$\overline{P_D}$ = 172322.928951 sec	P_D = 172325.477544 sec
$\overline{P_T}$ = 172325.812684 sec	P_T = 172327.053815 sec
$\overline{P_R}$ = 172330.582996 sec	P_R = 172330.582996 sec
$\overline{P_S}$ = 173272.015163 sec	P_S = 172845.892528 sec
$\overline{P_L}$ = 185896.503890 sec	P_L = 181090.684542 sec
H_P = 40474.311572 km	H_A = 80633.552863 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.995618$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.984011$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -719°.995618$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719°.994659$
$\dot{\Omega}_s$ =-0.61015689936195913×10^{-9} rad/s	
$\dot{\omega}_s$ =0.11087456153236085×10^{-8} rad/s	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ =0.51069663592254627×10^{-9} rad/s	

Tabelle 26-35: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)-$ bzw. $\left(P_t \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenz -Bahn für $\bar{e}_0$ =0.3, $\bar{i}_0$ =20°, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}}$ =0°, Epoche: 2019-10-16/12:00:0.00. Die Berechnung erfolgt mit dem gesamten Bahnmodell von D. Brouwer, Schrittweite Δa=50 km, Grenzgenauigkeiten $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-9}$ sec, $\Delta(a)<$ 10^{-12} km . Fundamentale Parameter: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 =0.001082625379977. A posteriori Genauigkeit: $\Delta P = 0.12\times10^{-9}$ sec.

Wahre $\left(P_K \triangleq P_R\right)-$Äquivalenzbahn:

Um die große Bahnhalbachse einer $\left(P_K \triangleq P_R\right)-$Äquivalenzbahn zu erhalten, müssen die wahren Umlaufzeiten unter Einschluss alle bekannten Bewegungseinflüsse mit Hilfe der entsprechenden Bewegungen berechnet werden. Die iterative Berechnung kann als Startwert mit dem *Kepler*schen Wert (26.158) $\bar{a}_0^{(0)} := \overline{a_{QR\,K}}$ oder einer willkürliche Halbachse beginnen. Alternativ kann die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ als Anfangsnäherung verwendet werden, die für die entsprechende $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)-$Äquivalenzbahn mit der Funktionsgleichung (26.255) errechnet wurde.

$\left(P_K \triangleq P_R\right)$	
$\overline{a_{QHR}}$ =66932.068818 km, $\overline{e}_0$ =0.3, $\overline{i}_0$ =20°, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{00}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172330.582996 sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172325.638771 sec	P_H = 172326.869422 sec
$\overline{P_A}$ = 172328.169194 sec	P_A = 172328.169194 sec
$\overline{P_D}$ = 172322.928951 sec	P_D = 172325.477544 sec
$\overline{P_T}$ = 172325.812684 sec	P_T = 172327.053815 sec
$\overline{P_R}$ = 172330.582996 sec	P_R = 172330.582996 sec
$\overline{P_S}$ = 173272.015163 sec	P_S = 172818.126222 sec
$\overline{P_L}$ = 185896.503890 sec	P_L = 179168.171168 sec
H_P = 40474.311572 km	H_A = 80633.552863 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.995618$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.984011$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -719°.995618$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719°.994659$
$\dot{\Omega}_s$ =-0.61015689936195913$\times 10^{-9}$ rad/s	
$\dot{\omega}_s$ =0.11087456153236085$\times 10^{-8}$ rad/s	
$\left(M_0\right)_s^{\bullet}$ =0.51069663592254627$\times 10^{-9}$ rad/s	

Tabelle 26-36: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz -Bahn für $\overline{e}_0$ =0.3, $\overline{i}_0$ =20°, $\overline{\Omega}_0 = \overline{\omega}_0 = \overline{M}_{00}$ =0°, Epoche: 2019-10-16/12:00:0.00, Schrittweite Δa=50 km, Grenzgenauigkeiten $\Delta\overline{P} < 10^{-11}$ sec , $\Delta(a) < 10^{-11}$ km . Fundamentale Parameter: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{♁}$ =398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340$\times 10^{-4}$ / s , J_2 =0.001082625379977. A posteriori Genauigkeit: $\Delta P = 0.12\times 10^{-9}$ sec.

Die wahren Umlaufzeiten können analog dem Rechenvorgang (26.192) berechnet werden mit dem System

$$\left.\begin{aligned} P_K\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) &= \frac{2\pi\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)\sqrt{\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)}}{\sqrt{\mu}} \\ fct\left(P_R\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)\right) - \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\rangle \nu = 0,1,2,3,\cdots . \qquad (26.257)$$

Die Bedingungsgleichung für die Umlaufzeiten lautet

$$fct\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) \equiv P_K\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) - P_R\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) = 0 \quad , \quad \langle 0,1,2,3,\cdots . \qquad (26.258)$$

Das gesamte System muss iterativ durchlaufen werden, bis die vorgegebenen Genauigkeitsschranken $\left|P_K - P_R\right| \le \Delta P$ und $\Delta(a)$ unterschritten werden.

BEISPIEL 2:: Die große Bahnhalbachse einer $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn mit vorgegebenen Exzentrizität $\overline{e}_0$=0.3 und Inklination $\overline{i}_0$=20° ist mit den Genauigkeit $\left|\Delta P\right| < 10^{-9}$ sec und $\Delta a \le 10^{-12}$ km zu berechnen. Mit vorgegebener Anfangsachse $\overline{a}_0^{(0)}$=60000.0 km wird die große Bahnhalbachse mit der Suchschrittweite Δa=50 km erhöht. Die berechneten Bahnparameter dieser Bahn sind in Tabelle 26-36 zusammengestellt.

$\left|\overline{P_K} - \overline{P_R}\right|$=0.291038304567337×10^{-10} sec ist die a posteriori Genauigkeit der berechneten Bahn.
◀

26.8.5.3 Der (a,i)- Bereich möglicher Kepler zu meridionalen Äquivalenzbahnen

Bild 26-56 zeigt eine Übersicht aller möglichen $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen Halbachse über der Inklination und parametrisiert nach der Exzentrizität bis zur Grenzexzentrizität $e_B \in \left[0.9017072 - 0.9017377\right]$. Die Inklination wird in Schritten $\Delta i = 0°.01$ vorgegeben, die zugehörende Halbachse mit Bedingungsgleichung (26.253) berechnet. Die Kurven sind für je eine Exzentrizität berechnet. Wie im Fall von $\left(\overline{P_t} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen (siehe Bild 26-25, Seite 463) schneiden sich alle Kurven in einem fast punktförmigen Gebiet, hier in der Nähe des Punktes[1] $\overline{a}_{cross} \approx 66931.44\,\text{km}$, $\overline{i}_{cross} \approx 47°$. Um diesen Schnittpunkt (bzw. Schnittpunkte) zu berechnen, werden die Kurven mit zwei verschiedenen Exzentrizitäten $\left(\overline{e}_1, \overline{e}_2\right)$ zum Schnitt gebracht.

Aus der Bedingungsgleichung (26.250) für $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen wird die Gleichung einer Kurve im Fall einer bei Äquivalenz mit einer meridionalen Bewegung stets rechtläufigen Bahn $\left(\sigma_i = \text{sgn}\left(\cos i\right) = +1\right)$ erhalten

$$\overline{n_R} + \overline{n_K} = 2\overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \quad \left\langle \sigma_i = \text{sgn}\left(\cos \overline{i}_0\right) = +1 \right. . \tag{26.259}$$

Mit den säkularen Anteilen der Variationsgleichungen[2] $\left(M_0\right)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ erster Ordnung und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \tag{26.260}$$

wird eine Trennung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse

$$f_e \equiv E_i\left[1 + \sqrt{1-e^2} - \cos^2 i\left(5 + 3\sqrt{1-e^2}\right) + 2\cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K} - 2\right) \tag{26.261}$$

formal erhalten.

---

[1] zum Vergleich: $\overline{a_{QR}}_K = \sqrt[3]{4\mu / \dot{\Theta}^2} = 66931.4468893\,\text{km}$

[2] aus Abschnitt 20.2.1 (Band III)

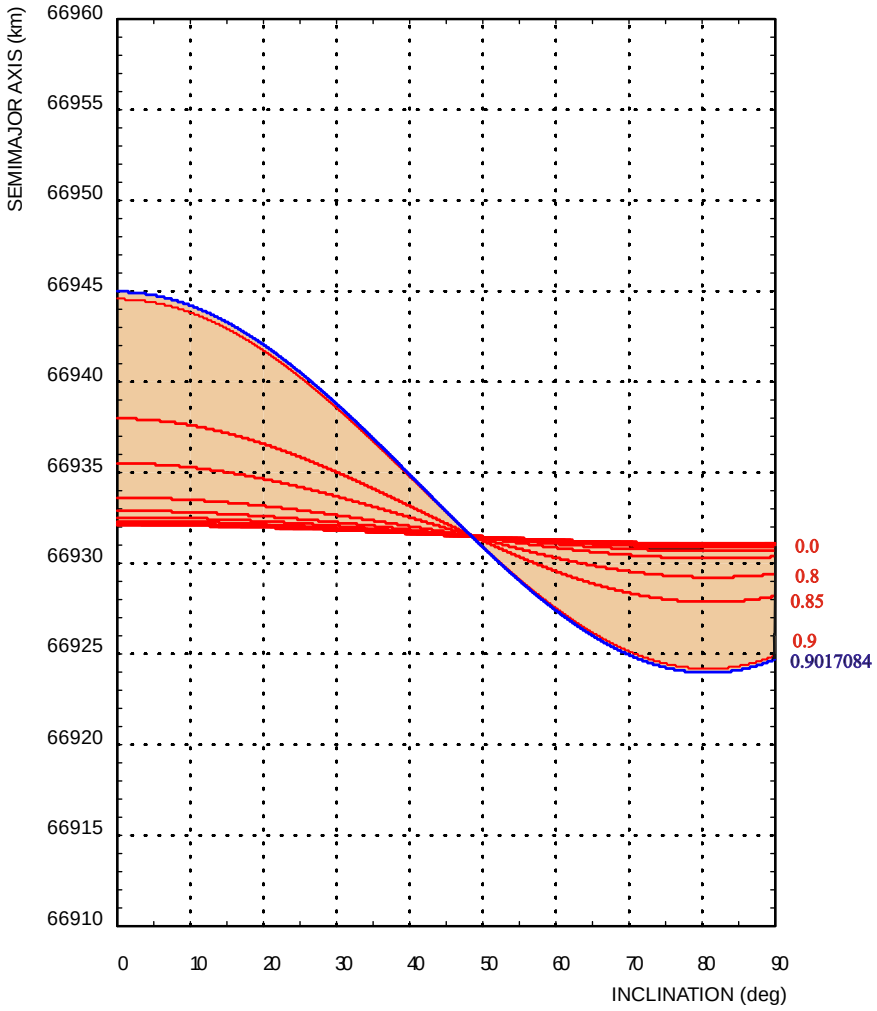


Bild 26-59: Das (a,i)-Gebiet der $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert mit Exzentrizitäten $\overline{e}_0 \in [0.0$, 0.9017072 – 0.9017377], $\Delta i = 0°.01$, $\Delta a = 5\,\mathrm{km}$, $\Delta e = 0.01$, Genauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| \le 10^{-6}$ deg

Wird hier jeweils die vorgegebene Exzentrizität $\left(\overline{e}_1, \overline{e}_2\right)$ eingesetzt und die beiden erhalten Ausdrücke subtrahiert, bleibt mit den Abkürzungen

$$A_0 := E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) - E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right)$$

$$B_0 := 2\left(E_1 - E_2\right) \qquad (26.262)$$

$$C_0 := E_1 - E_2 + E_1\sqrt{1-e_1^2} - E_2\sqrt{1-e_2^2} \quad .$$

eine quadratische Gleichung für den Cosinus der Inklination

$$A_0\cos^2 i + B_0\cos i + C_0 = 0 \qquad (26.263)$$

Ihre Lösungen mit Hilfe der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0 + \mathrm{sgn}\left(B_0\right)\sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}\right] \quad , \quad \cos i_1 = \frac{Q_0}{A_0} \quad , \quad \cos i_2 = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \qquad (26.264)$$

Im Fall der Äquivalenz unter Einschluss der meridionalen Bewegung kann nur die positive Lösung verwendet werden.

ecc	$a_{\max}$ [km]	i_{cross}	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	a_{end} [km]
e=0.0	66932.11	---	---	66931.10	66931.12
e=0.1	66932.12	49°.586764	66931.458026	66931.09	66931.11
e=0.2	66932.15	49°.571270	66931.458309	66931.07	66931.09
e=0.3	66932.22	49°.543758	66931.458811	66931.03	66931.06
e=0.4	66932.34	49°.501236	66931.459587	66930.97	66931.00
e=0.5	66932.54	49°.438354	66931.460732	66930.86	66930.90
e=0.6	66932.89	49°.345395	66931.462419	66930.67	66930.72
e=0.7	66933.62	49°.203399	66931.464966	66930.27	66930.36
e=0.8	66935.51	48°.969895	66931.468940	66929.23	66929.41
e=0.85	66937.98	48°.787815	66931.471487	66927.86	66928.18
e=0.9	66944.56	48°.520089	66931.471913	66924.19	66924.90
e_B	66944.97	48°.508420	66931.471729	66923.96	66924.70

Tabelle 26-37: Besondere Parameter von $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen, nach der Exzentrizität parametrisiert, Grenzexzentrizität e_B =0.9017072

In Tabelle 26-37 sind ergänzend zu Bild 26-59 besondere Parameter der einzelnen Kurve zusammengestellt. Als charakteristische Größen sind die Parameter der Überschneidungen $\left(a_{cross}, i_{cross}\right)$ für Kopplungen der Kurven mit verschiedenen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 gerechnet. Nach Berechnung der charakteristischen Inklination i_{cross} werden die Halbachsen a_{cross} mit den ausgewählten Exzentrizitäten nach der Methodik in Abschnitt 26.8.5.2 (auf Seite 523) gerechnet.

Im Vergleich zu den möglichen Kurven anderer auf einen Meridian bezogenen Äquivalenzbahnen ist das Gebiet möglicher $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen extrem eingeschränkt[1].

26.8.5.4 Die Inklination bei Kopplung der Kepler*- mit der meridionalen Bewegung*

Die Inklination einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn kann nach Vorgabe der Keplerelemente große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und Exzentrizität $\bar{e}_0$ berechnet werden. Zuvor muss jedoch das Elemente Paar $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0\right)$ nach Bild 26-59 als erlaubt qualifiziert sein. Die iterative Bearbeitung der Bedingungsgleichung

$$fct\left[\bar{i}_0^{(\nu)}\right] \equiv \overline{P_K}\left(\overline{a_0}\right) - \overline{P_R}\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi\,\bar{a}_0\sqrt{\bar{a}_0}}{\sqrt{\mu}} - \frac{2\pi}{\left|\overline{n_R}\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right)\right|} = 0 \quad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \quad (26.265)$$

[1] Vgl. in den Abschnitten 26.8.1.4, 26.8.2.3, 26.8.3.5, 26.8.4.5

kann mit einer Anfangsnäherung $\bar{i}_0^{(0)}$ gestartet werden, die aus Bild 26-59 abgelesen ist. Die Iteration wird abgebrochen, wenn die geforderte Genauigkeiten

$$\left|\overline{P_K} - \overline{P_R}\right| \le \Delta\bar{P}\left[\bar{i}_0\right] \ , \ \Delta(i) \tag{26.266}$$

unterschritten werden. Der letzte Wert wird als gesuchte Lösung betrachtet $\bar{i}_{QKR}^{(0)} := \bar{i}_0^{(\nu)}$.

BEISPIEL 3: Die Inklination einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn ist zu berechnen. Entsprechend Bild 26-59 seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$=66930.4 km mit der Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.8 vorgegeben. Als Anfangsnäherung der Inklination werde $\bar{i}_0^{(0)}$=70° gewählt. Die Berechnung soll mit den Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-11}$ sec und $\left|\Delta(i)\right| \le 10^{-10}$ deg erfolgen. Mit vorgegebenem Anfangswert $\bar{i}_0^{(0)}$=70° wird die Inklination mit der Suchschrittweite $\Delta i = 0°.01$ erhöht. Die berechneten Bahnparameter dieser Bahn sind in Tabelle 26-38 zusammengestellt.

Die erreichte Genauigkeit beträgt $\left|\overline{P_K} - \overline{P_R}\right|$ =2.910383045667337×10^{-11}sec.

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\bar{a}_0$=66930.4 km, $\bar{e}_0$=0.7, $\overline{i_{QKR}}$ =72.303509, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172324.137958 sec	t_0 :2021-09-27/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172330.190784 sec	P_H = 172327.104677 sec
$\overline{P_a}$ = 172326.659629 sec	P_a = 172326.659576 sec
$\overline{P_d}$ = 172329.288052 sec	P_d = 172326.990908 sec
$\overline{P_t}$ = 172332.257848 sec	P_t = 172328.222310 sec
$\overline{P_R}$ = 172324.137958 sec	P_R = 172324.137958 sec
H_p = 13700.983400 km	H_A = 107403.543400 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720°.001446$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -720°.010759$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -720°.001446$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.001161$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.62831996542961601×10^{-9} rad/s	
$\dot{\omega}_s$ = -0.55611365424662944×10^{-9} rad/s	
$\left(M_0\right)_s^{\cdot}$ = -0.53354326996797921×10^{-9}rad/s	

Tabelle 26-38: Bahnparameter der $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$=66930.4 km und Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.7. Die Berechnung der mittleren Umlaufzeiten erfolgt mit dem vollständigen Bahnmodell (inklusiv allen verfügbaren periodischen Bahneinflüssen). Schrittweite Δi=0°.01, geforderte Bahngenauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-9}$ sec, $\left|\Delta(i)\right| \le 10^{-12}$ Grad.

Inklination einer $\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$–Äquivalenzbahn:

Die Inklination einer $\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$–Äquivalenzbahn kann nach Vorgabe der Keplerelemente große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und Exzentrizität $\bar{e}_0$ berechnet werden. Zuvor muss jedoch das Elemente Paar $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0\right)$ nach Bild 26-59 als erlaubt qualifiziert sein. Ein Anfangswert $\bar{i}_0^{(0)}$ kann aus Bild 26-59 gewählt werden Die Bearbeitung des Systems

$$\left.\begin{aligned} P_K &= \frac{2\pi\sqrt{\left(\bar{a}_0\right)^3}}{\sqrt{\mu}} \\ fct\left(P_R\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right)\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right)\right) + \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\rangle \nu = 0,1,2,3,\cdots . \qquad (26.267)$$

mit der Bedingungsgleichung für die wahren Umlaufzeiten

$$fct\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) \equiv P_K\left(\bar{a}_0\right) - P_R\left(\bar{i}_0^{(\nu)}\right) = 0 \quad \langle \nu = 1,2,3,\cdots \qquad (26.268)$$

muss iterativ erfolgen, bis die vorgegebenen Genauigkeitsschranken $\left|P_K - P_R\right| \le \Delta P$ und $\Delta(i)$ unterschritten werden.

$\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\bar{a}_0$=66931.6 km, $\bar{e}_0$=0.2, $\bar{i}_0$=42°.742973271, $\bar{\Omega}_0$=0°, $\bar{\omega}_0$=0°, $\overline{M_{00}}$=0°	
$\overline{P_K}$ = 172328.772397 sec	t_0 : 2021-07-27/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172327.085363 sec	P_H = 172327.380872 sec
$\overline{P_a}$ = 172327.937476 sec	P_A = 172327.937529 sec
$\overline{P_d}$ = 172325.598125 sec	P_D = 172326.409426 sec
$\overline{P_t}$ = 172327.623222 sec	P_T = 172328.210580 sec
$\overline{P_R}$ = 172328.772397 sec	P_R = 172328.772397 sec
H_P = 47167.1434 km	H_A = 73939.7834 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P\,\overline{P_A} = -719°.999554$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.993369$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P\,\overline{P_A} = -719°.999554$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719°.996759$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.14076029256641854×10^{-8} rad/s	
$\dot{\omega}_s$ =0.13622753946834136×10^{-8} rad/s	
$\left(M_0\right)_s^{\cdot}$ = 0.28846581953597083×10^{-9} rad/s	

Tabelle 26-39: Bahnparameter der $\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$–Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$=66931.6 km und Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.7. Die Berechnung der wahren Umlaufzeiten erfolgt mit dem vollständigen Bahnmodell (inklusiv allen verfügbaren periodischen Bahneinflüssen). Schrittweite $\Delta i = 0°.01$, geforderte Bahngenauigkeit $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-9}$ sec , $\left|\Delta\left(i\right)\right| \le 10^{-10}$ Grad. Fundamentale Parameter: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 =0.001082625379977. a posteriori Genauigkeit:

$$\Delta P = 0.29\times10^{-10} \text{ sec}$$

BEISPIEL 4: Die Inklination einer $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn ist zu berechnen. Entsprechend Bild 26-59 seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 66931.6 km mit der Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.2 vorgegeben. Als Anfangsnäherung der Inklination werde $\bar{i}_0^{(0)}$ =20° gewählt. Ausgehend von dem vorgegebenem Anfangswert wird die Inklination mit der Suchschrittweite Δi=0°.01 erhöht. Die Berechnung soll mit den Genauigkeiten $\Delta P < 10^{-9}$ sec und $\Delta(i) \le 10^{-12}$ Grad erfolgen..

Die berechneten Bahnparameter dieser Bahn sind in Tabelle 26-39 zusammengestellt.

Die erreichte Genauigkeit beträgt $\left|P_K - P_R\right|$ =5.82076609134674×10^{-11} sec.

26.8.5.5 Die Exzentrizität bei Kopplung der Kepler- mit der meridionalen Bewegung

Die Exzentrizität einer $\left(P_K \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn kann nach Vorgabe der Keplerelemente große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ berechnet werden. Zuvor muss jedoch das Elemente Paar $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ nach Bild 26-59 als erlaubt qualifiziert sein. Aus diesem Bild kann einer erste Näherung $\bar{e}_0^{(0)}$ abgelesen werden. Auf Grund der Basisrelation (26.156) kann eine erste Verbesserung mit der Bedingungsgleichung, erhalten werden

$$fct\left(e_0^{(1)}\right) \equiv 2\overline{n_T}\left[\bar{e}_0^{(1)}\right] - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.269}$$

Der mit dieser Bedingungsgleichung erhaltene Wert $\bar{e}_0^{(1)}$ ist exakt für eine $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn, führt aber in jedem Fall in die Nähe einer Meridian-bezogenen Satellitenbewegung.

Um die endgültige Lösung zu erhalten, erfolgt die weitere Bearbeitung ausgehend von der verbesserten Näherung $\bar{e}_0^{(1)}$ mit der Bedingungsgleichung

$$fct\left[\bar{e}_0^{(\nu)}\right] \equiv \overline{P_K}\left(\bar{a}_0\right) - \overline{P_R}\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) = \frac{2\pi\sqrt{\left(\bar{a}_0\right)^3}}{\sqrt{\mu}} - \frac{2\pi}{\overline{n_R}\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right)} = 0 \quad \langle \nu = 1, 2, 3, 4 \cdots . \tag{26.270}$$

Die Iteration dieser Gleichung wird abgebrochen, wenn die geforderte Genauigkeit

$$\left|\overline{P_K} - \overline{P_R}\right| \le \Delta\bar{P}\left[\bar{e}_0^{(\nu)}\right] \tag{26.271}$$

unterschritten wird. Die Exzentrizität wird mit der Genauigkeitsgrenze Δ(e) berechnet. Der letzte erhaltene Wert für die Exzentrizität wird als der gesuchte Werte $\overline{e_{QKR}} := \bar{e}_0^{(\nu)}$ aufgefasst.

BEISPIEL 5: Die Exzentrizität einer $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn ist zu berechnen. Entsprechend Bild 26-59 seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ = 66932.2 km mit der Inklination $\bar{i}_0$ =40°.0 vorgegeben. Als Anfangsnäherung der Exzentrizität werde $\bar{e}_0^{(0)}$ =0.3 gewählt. Die Berechnung soll mit den Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-11}$ sec und $\Delta\left(e\right) \le 10^{-12}$ erfolgen.

Bedingungsgleichung (26.269) liefert die erste Verbesserung $\bar{e}_0^{(1)}$ =0.545000. Mit diesem Anfangswert wird die Exzentrizität mit der Suchschrittweite schrittweise Δe=0.001 erhöht. Die Genauigkeitsgrenzen sind für $\overline{e_{QKR}}$ =0.744396994 erfüllt. Die erreichte Funktions-Genauigkeit beträgt $\left|\overline{P_K} - \overline{P_R}\right| < 10^{-22}$ sec.

Die berechneten Bahnparameter dieser Bahn sind in Tabelle 26-40 zusammengestellt.

$\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\bar{a}_0$ =66932.2 km, $\overline{e_{QKR}}$ =0.744396994, $\bar{i}_0$ =40°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172331.088292 sec	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172322.982668 sec	P_H = 172327.367160 sec
$\overline{P_A}$ = 172327.842766 sec	P_A = 172327.842756 sec
$\overline{P_D}$ = 172315.481091 sec	P_D = 172326.633437 sec
$\overline{P_T}$ = 172325.273834 sec	P_T = 172327.883860 sec
$\overline{P_R}$ = 172331.088292 sec	P_R = 172331.088292 sec
H_P = 10729.934947 km	H_A = 110378.191853 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.999263$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.967397$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -719°.999263$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.013993$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.20721012550080694×10^{-8} rad/s	
$\dot{\omega}_s$ =0.26156368868543155×10^{-8} rad/s	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = 0.68666643985392748×10^{-9} rad/s	

Tabelle 26-40: Bahnparameter der $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ =66932.2 km und Inklination $\bar{i}_0$ =40°. Die Berechnung der mittleren Umlaufzeiten erfolgt mit dem vollständigen Bahnmodell nach *Brouwer* (inklusiv allen verfügbaren periodischen Bahneinflüssen). Schrittweite Δe=0.001, geforderte Bahngenauigkeit $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-9}$ sec , $\Delta(e) \le 10^{-12}$. Fundamentale Parameter: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4}/s, J_2 =0.001082625379977. a posteriori Genauigkeit: $\left|\Delta\overline{P}\right| < 10^{-15}$ sec.

Exzentrizität einer wahren $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn:

Die Exzentrizität einer $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn kann nach Vorgabe der *Kepler*elemente große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ und Inklination $\bar{i}_0$ berechnet werden. Zuvor muss jedoch das Elemente Paar $\bar{a}_0, \bar{i}_0$ nach Bild 26-59 als erlaubt qualifiziert sein. Ein Anfangswert $\bar{e}_0^{(0)}$ kann aus Bild 26-59 gewählt werden. Eine erste Verbesserung $\bar{e}_0^{(1)}$ kann auch in diesem Fall mit der Bedingungsgleichung (26.269) berechnet werden.

Die Bearbeitung des Systems, in dem die geographischen Längen λ mit einem beliebigen Ephemeridenprogramm berechnet werden,

$$\left.\begin{aligned} P_K &= \frac{2\pi\sqrt{\left(\bar{a}_0\right)^3}}{\sqrt{\mu}} \\ fct\left(P_R\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right)\right) &\equiv \sin\left[\lambda\left(t_0 + P_R\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right)\right) + \lambda\left(t_0\right)\right] = 0 \end{aligned}\right\rangle \nu = 1, 2, 3, \cdots . \qquad (26.272)$$

erfolgt mit der Bedingungsgleichung für die wahren Umlaufzeiten

$$fct\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) \equiv P_K\left(\bar{a}_0\right) - P_R\left(\bar{e}_0^{(\nu)}\right) = 0 \quad \langle \nu = 2,3,4,\cdots \quad . \tag{26.273}$$

Die Berechnung muss im Allgemeinen iterativ erfolgen, bis die vorgegebenen Genauigkeitsschranken $\left|P_K - P_R\right| \le \Delta P$ und $\Delta(e)$ unterschritten werden. Als endgültiges Ergebnis wird die Exzentrizität $\overline{e_{QKR}} := \bar{e}_0^{(\nu)}$ erhalten.

BEISPIEL 6: Die Exzentrizität einer wahren $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn ist zu berechnen. Entsprechend Bild 26-59 seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ =66928.1 km mit der Inklination $\bar{i}_0$ =58° vorgegeben. Als Anfangsnäherung der Exzentrizität sei $\bar{e}_0^{(0)}$ =0.85 gewählt. Die Berechnung soll unter Verwendung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells mit den Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-11}$ sec und $\Delta(e) \le 10^{-12}$ erfolgen..

Mit Bedingungsgleichung (26.269) wird als verbesserte Näherung $\bar{e}_0^{(1)}$ = 0.761000 berechnet. Ausgehend von diesem Anfangswert wird die Exzentrizität mit der Suchschrittweite Δe=0.001 schrittweise erhöht. Die geforderten Genauigkeitsgrenzen sind für

$$\overline{e_{QKR}} = 0.8359840106908$$

erfüllt. Die erreichte Funktions-Genauigkeit beträgt $\left|P_K - P_R\right| = 0.873114913702011 \times 10^{-10}$ sec.

Die berechneten Bahnparameter dieser Bahn sind in Tabelle 26-41 zusammengestellt. ◀

Anmerkung:

Wahre und mittlere *Kepler*sche Umlaufzeiten sind bei vorgegebener mittlerer großer Bahnhalbachse identisch

$$\overline{P_K} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(\bar{a}_0\right)^3} = P_K \quad . \tag{26.274}$$

Wird mit denselben vorgegebenen Bahnparametern $\bar{a}_0$ =66930.1 km, $\bar{i}_0$ =58° die Exzentrizität einer mittleren $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet, ergibt sich unter Berechnung ausschließlich mit säkularen Bewegungseinflüssen wieder exakt der obige Wert für die gesuchte Exzentrizität

$$\overline{e_{QKR}} = 0.8359840106908 \quad ,$$

wie er für die Kopplung mit einer wahren meridionalen Bewegung $\overline{n_R} = 2\pi / \left|P_R\right|$ erhalten wurde. Hier zeigt sich offensichtlich wieder die bemerkenswerte Eigenschaft einer mit der *Kepler*schen Bewegung gekoppelten Äquivalenzbahn.. Man beachte, dass auch in diesem Fall die mittlere meridionale Umlaufzeit identisch der wahren, mit der vollständigen Ephemeridenrechnung (vgl. die Bedingungsgleichung (26.272)) berechneten, Äquivalenzbahn ist. ◀

$\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\bar{a}_0$ =66930.1 km, $\overline{e_{QKR}}$ =0.835984011, $\bar{i}_0$ =58°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 172322.978015 sec	t_0 : 2019-08-13/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172326.403419 sec	P_H = 172324.298718 sec
$\overline{P_A}$ = 172324.190488 sec	P_A = 172324.190436 sec
$\overline{P_D}$ = 172318.534561 sec	P_D = 172323.913110 sec
$\overline{P_T}$ = 172333.384327 sec	P_T = 172325.286738 sec
$\overline{P_R}$ = 172322.978015 sec	P_R = 172322.978015 sec
$\overline{P_S}$ = 173279.670184 sec	P_S = 172408.167451 sec
$\overline{P_L}$ = 185905.315056 sec	P_L = 338007.518684 sec
H_P = 4599.469966 km	H_A = 116504.456834 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720°.008089$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.990717$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -720°.008089$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.013190$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.31419412567535091×10^{-8} rad/s	
$\dot{\omega}_s$ =0.11967554956920737×10^{-8} rad/s	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = -0.25654452815134836×10^{-9} rad/s	

Tabelle 26-41: Bahnparameter der $\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$ – Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ =66930.1 km und Inklination $\bar{i}_0$ =58°. Nach Bild 26-59 wird die Exzentrizität $\bar{e}_0^{(0)}$ =0.85 als Anfangsnäherung gewählt. Die Berechnung der wahren Umlaufzeiten erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell (inklusiv allen verfügbaren periodischen Bahneinflüssen). Schrittweite Δe=0.001, geforderte Bahngenauigkeit $|\Delta P| < 10^{-10}$ sec , $\Delta(e) \le 10^{-12}$. Fundamentale Parameter: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_\odot$ =398600.4418 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. A posteriori Genauigkeit: ΔP=0.873×10^{-10} sec.

Anmerkung:

Wahre und mittlere *Kepler*sche Umlaufzeiten sind bei vorgegebener mittlerer großer Bahnhalbachse identisch

$$\overline{P_K} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\left(\bar{a}_0\right)^3} = P_K \quad . \tag{26.275}$$

Wird mit denselben vorgegebenen Bahnparametern $\bar{a}_0$ =66930.1 km, $\bar{i}_0$ =58° die Exzentrizität einer mittleren $\left(\overline{P_K} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet, ergibt sich unter Berechnung ausschließlich mit säkularen Bewegungseinflüssen wieder exakt der obige Wert für die gesuchte Exzentrizität

$$\overline{e_{QKR}} = 0.8359840106908 \quad ,$$

wie er für die Kopplung mit einer wahren meridionalen Bewegung $\overline{n_R} = 2\pi/|P_R|$ erhalten wurde. Hier zeigt sich offensichtlich wieder die bemerkenswerte Eigenschaft einer mit der *Kepler*schen Bewegung gekoppelten Äquivalenzbahn.. Man beachte, dass auch in diesem Fall

die mittlere meridionale Umlaufzeit identisch der wahren, mit der vollständigen Ephemeridenrechnung (vgl. die Bedingungsgleichung (26.272)) berechneten, Äquivalenzbahn ist. ◀

BEISPIEL 7: Ergänzend zu Beispiel 6 soll wieder die Exzentrizität einer wahren $\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$–Äquivalenzbahn berechnet werden, jetzt jedoch mit anderen weiteren *Kepler*elementen.

$\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$	
$\bar{a}_0$ =66930.1 km, $\overline{e_{QKR}}$ =0.835984011, $\bar{i}_0$ =58°, $\bar{\Omega}_0$ =60°, $\bar{\omega}_0$ =85°, $\overline{M_{00}}$ =35°	
$\overline{P_K}$ = 172322.978015 sec	t_0 : 2019-08-13/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172326.403419 sec	P_H = 172327.414947 sec
$\overline{P_A}$ = 172324.190488 sec	P_A = 172324.207020 sec
$\overline{P_D}$ = 172318.534561 sec	P_D = 172316.028107 sec
$\overline{P_T}$ = 172333.384327 sec	P_T = 172340.773643 sec
$\overline{P_R}$ = 172322.978015 sec	P_R = 172322.978015 sec
$\overline{P_S}$ = 173279.670184 sec	P_S = 173901.162933 sec
$\overline{P_L}$ = 185905.315056 sec	P_L = 208680.665731 sec
H_P = 4599.469966 km	H_A = 116504.456834 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.992479$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.990717$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -719°.992548$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719°.980245$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.31419412567535326×10^{-8} rad/s	
$\dot{\omega}_s$ =0.11967554956920826×10^{-8} rad/s	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = -0.25654452815134986×10^{-9} rad/s	

Tabelle 26-42: Bahnparameter der $\left(P_K \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$–Äquivalenzbahn mit großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ =66930.1 km und Inklination $\bar{i}_0$ =58°. Nach Bild 26-59 wird die Exzentrizität $\bar{e}_0^{(0)}$ =0.25 als Anfangsnäherung gewählt. Die Berechnung der wahren Umlaufzeiten erfolgt mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell (inklusiv allen verfügbaren periodischen Bahneinflüssen). Schrittweite Δe=0.001, geforderte Bahngenauigkeit $\left|\Delta P\right| < 10^{-10}$ sec , $\Delta\left(e\right) \le 10^{-12}$. Fundamentale Parameter: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. A posteriori Genauigkeit: ΔP=0.873×10^{-10} sec.

. Entsprechend Bild 26-59 seien die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ =66928.1 km mit der Inklination $\bar{i}_0$ =58° gewählt. In diesem Fall werden die weiteren Bahnelemente $\bar{\Omega}_0$ =60°, $\bar{\omega}_0$ =85°, $\overline{M_{00}}$ =35° willkürlich vorgegeben. Um die Stabilität des Verfahrens zu zeigen, werde als Anfangsnäherung der Exzentrizität $\bar{e}_0^{(0)}$ =0.25 gewählt. Die Berechnung soll unter Verwendung des gesamten *Brouwer*schen Bahnmodells mit den Genauigkeiten $\left|\Delta\bar{P}\right| < 10^{-11}$ sec und $\Delta\left(e\right) \le 10^{-12}$ erfolgen.

Mit Bedingungsgleichung (26.269) wird zunächst als verbesserte Näherung $\bar{e}_0^{(1)} = 0.748000$ berechnet. Ausgehend von diesem Anfangswert wird die Exzentrizität mit der Suchschrittweite $\Delta e=0.001$ schrittweise erhöht. Die geforderten Genauigkeitsgrenzen sind wieder für exakt

$$\overline{e_{QKR}} = 0.8359840106908$$

erfüllt und zwar für eine $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – wie auch eine $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn.

Die erreichte Funktions-Genauigkeit beträgt wieder $\left|P_K - P_R\right| = 0.873114913702011 \times 10^{-10}$ sec.

Die berechneten Bahnparameter dieser Bahn sind in Tabelle 26-42 zusammengestellt.

Auch in diesem allgemeineren Fall wird das Ergebnis erhalten

$$P_K = P_R = \overline{P_R} \quad .\blacktriangleleft$$

Aufgabenstellungen:

1. Berechne den Kreuzungspunkt der (a,i)-Kurven in Bild 26-59 (auf Seite 527) mit Hilfe der verschwindenden Krümmung κ.
2. Wiederhole die Rechnungen unter Einschluss höherer Störungen $\left(J_3, J_4\right)$.
3. Wiederhole die Rechnungen mit Hilfe eines numerischen Bahnpropagators mit unterschiedlichen Bahnmodellen.
4. Was ist die Ursache dafür, dass mittlere und wahre meridionale Umlaufzeiten übereinstimmen, obwohl die Berechnungen in Tabelle 26-40 für die wahre $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahn durchgeführt wurden.
5. Untersuche den beträchtlichen Unterschied zwischen der mittleren und der wahren Mond-synodischen Umlaufzeit in Tabelle 26-40, Tabelle 26-41 und Tabelle 26-42.
6. Vergleiche die mittleren Umlaufzeiten in Tabelle 26-41 und Tabelle 26-42, sowie die wahren Umlaufzeiten in diesen beiden Tabellen.
7. Überprüfe, ob die Relation $P_K = P_R = \overline{P_R}$ auch mit einem beliebigen numerischen Ephemeridenprogramm erhalten werden kann.
8. Begründe die Eigenart von $\left(P_K \triangleq P_R\right)$ – und $\left(\overline{P_K} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen.
9. Die säkularen Variationen $\dot{\Omega}_s, \dot{\omega}_s, \left(M_0\right)_s^{\cdot}$ stimmen in Tabelle 26-41 und Tabelle 26-42 nicht exakt überein. Handelt es sich hier um Rundungsfehler?

26.9 Mit der Erdrotation gekoppelte Äquivalenzbahnen

Im Rahmen der Theorien von Äquivalenzbahnen können besondere Familien von Satellitenbahnen betrachtet werden, bei denen eine der beteiligten Bewegungsarten durch unveränderliche Vorgabe etwa der Umlaufzeit oder eines anderen Bahnparameters festgelegt ist. Auch diese Arten von Satellitenbahnen können durch den Formalismus der Äquivalenzbahnen behandelt werden.

Bahnmechanisch interessant sind vor allem Bahnen, bei denen die gewünschte Umlaufzeit ein Sterntag ist, was geosynchrone Bahnen einschließt (Kapitel 26.9.1 bis 26.9.5), sowie zwei Sterntage (Kapitel 26.10.1 bis 26.10.5), was in den Bereich der Bahnen in der Nähe von Meridian-bezogenen Äquivalenzbahnen in Kapitel 3 hinausläuft. Schließlich werden als Muster für die praktische Anwendung interessante Äquivalenzbahnen bei Kopplung mit einer beliebigen aber fest vorgegebenen Umlaufzeit betrachtet (Kapitel 26.11 auf Seite 579).

Die von *Eudoxos von Knidos* entdeckte Bewegung längs einer Lemniskate („Hippopede“) kann im Zusammenhang mit Satellitenbewegungen als eine Äquivalenzbahn gedeutet werden. Hier handelt es sich um eine 1:1 Äquivalenz zwischen der Satellitenbewegung und der Erdrotation. Die erhaltenen Bahnen werden als geosynchrone Bahnen gedeutet.

Im Zusammenhang mit einer Satellitenbahnanalyse kann die tropische Erdrotation $\dot{\Theta}$ als eine Konstante angenommen werden, auch wenn sie kleinen Variationen unterliegt[1]. Um in diesem Buch eine einheitliche numerische Aussage zu erhalten, wird der Wert

$$\dot{\Theta} = \dot{\Theta}_{WGS1984} = 0.72921158573340 \times 10^{-4} \text{ rad/sec} \tag{26.276}$$

verwendet. Die tropische Erdrotation hat damit die Umlaufdauer

$$P_E = \frac{2\pi}{\dot{\Theta}} = 86164.090507 \sec \triangleq 23^h 56^m 04^s.090507 \quad . \tag{26.277}$$

Trotz des Bezugs auf den Frühlingspunkt wird diese Umlaufzeit als Sterntag bezeichnet. Sei die Dauer eines tropischen Sonnenjahres unter Vernachlässigung der säkularen Veränderungen angenommen zu

$$P_{\odot,t} = 365^d.2421896698 \quad (+\cdots) \ , \tag{26.278}$$

dauert der Umlauf der (fiktiven mittleren) Sonne um die Erde

$$P_{\odot,sid} = P_{\odot,t} + 1 = 366.2421896698 \quad (+\cdots) \tag{26.279}$$

mittlere Sterntage. Wenn die Dauer der Erdrotation bekannt ist, kann mit einer Anwendung des dritten *Kepler*schen Gesetzes die mittlere *Kepler*sche große Bahnhalbachse einer geosynchronen Bahn berechnet werden

$$\overline{a_{QG}}_K = \sqrt[3]{\mu / \dot{\Theta}^2} = 42164.169626 \text{ km} \quad . \tag{26.280}$$

26.9.1 Kopplung von tropischer Bewegung mit der Erdrotation

Wegen des gemeinsamen Bezugs der tropischen Satellitenbewegung und der Erdrotation auf den Frühlingspunkt kann die Äquivalenz dieser beiden Bewegungen als Basisaufgabe zur Untersuchung von Äquivalenzbahnen betrachtet werden, die mit der Erdrotation gekoppelt werden.

26.9.1.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer tropischen Bewegung mit der Erdrotation

Mit der mittleren tropischen Satellitenbewegung[2] (24.30) muss eine $\left(\overline{P_T} \triangleq P_E\right)$–Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_T} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \tag{26.281}$$

erfüllen. Damit kann ein *Kepler*sches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa für die große Bahnhalbachse,

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \overline{n_T}\left(\bar{a}\right) - \dot{\Theta} = 0 \tag{26.282}$$

---

[1] Näheres in Anhang E2 (Band V)

[2] Abschnitt 24.2.3 (Band IV A)

iterativ berechnet werden. Als Anfangswert empfiehlt sich ein Wert unterhalb der mittleren geosynchronen großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKG\,0}} = \sqrt[3]{\mu / \dot{\Theta}^2} = 42164.1712397\,\text{km}$.

	$\overline{a_{QTE}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$
$\left(\overline{P_T} \hat{=} P_E\right)-$	42163.647328	0.0	60°
$\left(P_T \hat{=} P_E\right)-$	42163.125049	0.0	60°
$\left(\overline{P_T} \hat{=} P_E\right)-$	42163.272127	0.5	60°
$\left(P_T \hat{=} P_E\right)-$	42163.499506	0.5	60°
$\left(\overline{P_T} \hat{=} P_E\right)-$	42162.328816	0.5	85°
$\left(P_T \hat{=} P_E\right)-$	42162.589892	0.5	85°
$\left(\overline{P_T} \hat{=} P_E\right)-$	42166.548833	0.5	155°
$\left(P_T \hat{=} P_E\right)-$	42165.643773	0.5	155°

Tabelle 26-43: Die große Bahnhalbachse einiger mittlerer bzw. wahrer Äquivalenzbahnen bei Kopplung der tropischen Satellitenbewegung mit der Erdrotation.

Falls eine wahre $\left(P_T \hat{=} P_E\right)-$ Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit der Rektaszension α des Satellitenortes als Bahnwinkel die wahre tropische Umlaufzeit P_T mit der überlagerten Funktion

$$fct\left[P_T\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\alpha\left(t_0 + N_P\, P_T\right) - \alpha\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{26.283}$$

berechnet werden. Anschließend muss mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse $\bar{a}$ die Funktionsgleichung[1] (24.56)

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv P_T\left(\bar{a}\right) - P_E = 0 \tag{26.284}$$

gelöst werden. Der gesamte Vorgang (26.283)-(26.284) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis eine vorgegebene Grenze $\left|P_T - P_E\right| < \Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Tabelle 26-43 enthält die Berechnung der mittleren Halbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination.

26.9.1.2 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen bei Kopplung tropischer Satellitenbewegung mit der Erdrotation

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_T} \hat{=} P_E\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ vorgegeben. Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.9.1.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung

[1] Abschnitt 24.3.1

von großer Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ zur Inklination $\overline{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_T} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\overline{e}_0$=0,1, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit einer der Methoden in Abschnitt 28.8.2.3 oder 28.9.3 berechnet werden.

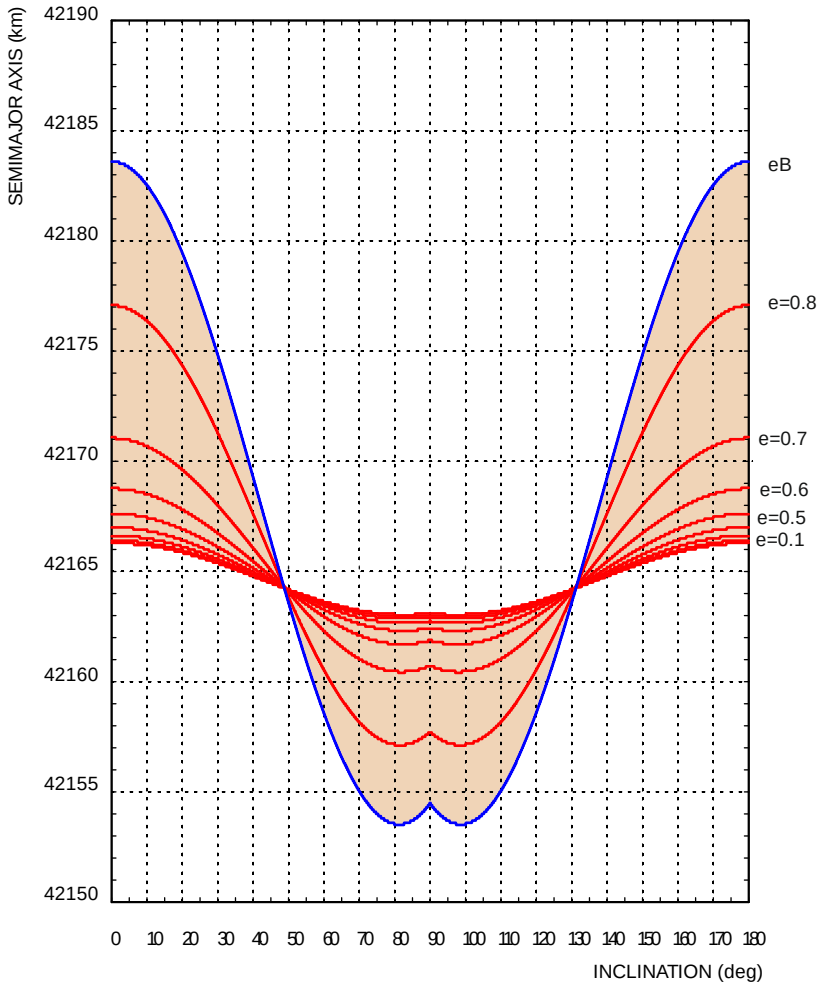


Bild 26-60: Das (a,i)-Gebiet von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen parametrisiert mit Exzentrizitäten $e \in [0.1, 0.8440594]$

Das Ergebnis ist in Bild 26-60 dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in [0°, 180°]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe =200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in [0.8439482 - 0.8440594]$. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität $e_B = 0.8440594$ für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QTE}} = 42183.6$ km.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QTE\ cross}} \approx 48°.6$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTE\ cross}} \approx 42164\,\text{km}$ (zum Vergleich: $\overline{a_{QK\ 0}} = \sqrt[3]{\mu / \dot{\Theta}^2} = 42164.1712397\,\text{km}$). Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_T} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der

einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	42166.26	---	---	---	---
e=0.1	42166.30	49°.586764	42164.203914	42163.04	130°.413236
e=0.2	42166.41	49°.571270	42164.204809	42162.98	130°.428730
e=0.3	42166.63	49°.543758	42164.206396	42162.86	130°.456242
e=0.4	42167.01	49°.501236	42164.208843	42162.66	130°.498764
e=0.5	42167.63	49°.438354	42164.212446	42162.32	130°.561646
e=0.6	42168.76	49°.345395	42164.217716	42161.70	130°.654605
e=0.7	42171.06	49°.203399	42164.225515	42160.45	130°.796601
e=0.8	42177.08	48°.969895	42164.236577	42157.13	131°.030105
e_B	42183.60	48°.812946	42164.240623	42153.53	131°.187054

Tabelle 26-44: Ausgewählte Parameter von $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert für einige Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität $e_B = 0.8440594$

Aus der Bedingungsgleichung (26.281) für Äquivalenzbahnen ergibt sich

$$\overline{n_T} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.285}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{26.286}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[1+\sqrt{1-e^2} - \cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right) + 2\sigma_i \cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K} - 1\right) \tag{26.287}$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$A_0 \cos^2 i + B_0 \left|\cos i\right| + C_0 = 0 \tag{26.288}$$

mit den Abkürzungen

$$A_0 := E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right)-E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right)$$
$$B_0 := 2\left(E_2-E_1\right) \qquad (26.289)$$
$$C_0 := E_2-E_1+E_2\sqrt{1-e_2^2}-E_1\sqrt{1-e_1^2} \quad .$$

Ihre Lösungen unter Verwendung der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0+\mathrm{sgn}\left(B_0\right)\sqrt{B_0^2-4A_0C_0}\right] \;,\; \left|\cos i_1\right| = \frac{Q_0}{A_0} \;,\; \left|\cos i_2\right| = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \quad (26.290)$$

In Tabelle 26-44 sind in Ergänzung zu Bild 26-60 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0,0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.9.1.1 berechnet .

26.9.2 Kopplung von anomalistischer Bewegung mit der Erdrotation

26.9.2.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer anomalistischen Bewegung mit der Erdrotation

Mit der mittleren anomalistischen Satellitenbewegung[1] (22.40) muss eine $\left(\overline{P_A} \triangleq P_E\right)-$Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_A}-\dot{\Theta} = \overline{n_K}+\left(M_0\right)_s^{\cdot}-\dot{\Theta} = 0 \qquad (26.291)$$

erfüllen. Damit kann ein *Kepler*sches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa für die große Bahnhalbachse,

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \overline{n_A}\left(\bar{a}\right)-\dot{\Theta} = 0 \qquad (26.292)$$

iterativ berechnet werden. Als Anfangswert für die Berechnung der großen Bahnhalbachse empfiehlt sich ein Wert unterhalb der mittleren geosynchronen großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKG\,0}} = \sqrt[3]{\mu/\dot{\Theta}^2} = 42164.1712397\,\mathrm{km}$. Falls eine wahre $\left(P_A \triangleq P_E\right)-$ Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit der wahren Anomalie als Bahnwinkel die wahre anomalistische Umlaufzeit P_A mit der überlagerten Funktion (22.60)

$$fct\left[P_A\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0+P_A\right)-\upsilon\left(t_0\right)\right] = 0 \qquad (26.293)$$

berechnet werden. Anschließend muss mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse $\bar{a}$ die Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv P_A\left(\bar{a}\right)-P_E = 0 \qquad (26.294)$$

gelöst werden. Der gesamte Vorgang muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis eine vorgegebene Grenze $\left|P_A-P_E\right| < \Delta P$ unterschritten wird.

[1] Abschnitt 22.2.3

BEISPIEL: Tabelle 26-45 enthält die Berechnung der mittleren Halbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination.

	$\overline{a_{QAE}}$ [km]	$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$
$\left(\overline{P_A} \triangleq P_E\right)-$	42164.037077	0.1	60°
$\left(P_A \triangleq P_E\right)-$	42164.037056	0.1	60°
$\left(\overline{P_A} \triangleq P_E\right)-$	42163.968594	0.5	60°
$\left(P_A \triangleq P_E\right)-$	42163.968590	0.5	60°
$\left(\overline{P_A} \triangleq P_E\right)-$	42163.383869	0.5	85°
$\left(P_A \triangleq P_E\right)-$	42163.383940	0.5	85°
$\left(\overline{P_A} \triangleq P_E\right)-$	42165.346981	0.5	155°
$\left(P_A \triangleq P_E\right)-$	42165.347093	0.5	155°

Tabelle 26-45: Die große Bahnhalbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen bei Kopplung einer anomalistischen Bewegung mit der Erdrotation

26.9.2.2 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen bei Kopplung anomalistischer Satellitenbewegung mit der Erdrotation

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_A} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird die Neigung $\overline{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ angegeben. Wird eine Exzentrizität $\overline{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.9.2.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ zur Inklination $\overline{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_A} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\overline{e}_0$=0,1, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit einer der Methoden in Abschnitt 28.8.2.3 oder 28.9.3 berechnet werden.

Das Ergebnis ist in Bild 26-61 dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in [0°, 180°]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe =200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in [0.8439750 - 0.8440126]$. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität $e_B = 0.8440126$ für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QAE}} = 42160.79\text{km}$.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QTE\,cross}} \approx 55°$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTE\,cross}} \approx 42164\,\text{km}$. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_E}\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

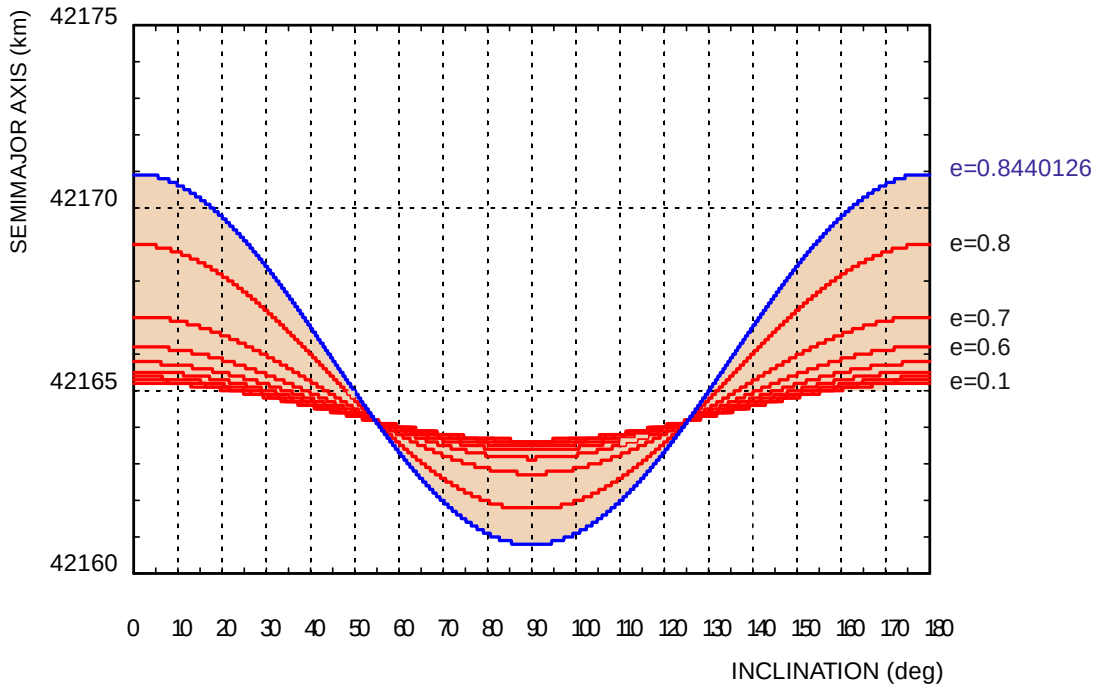


Bild 26-61: Das (a,i)-Gebiet möglicher $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen parametrisiert mit Exzentrizitäten $e \in [0.1, 0.8440126]$

Aus der Bedingungsgleichung (26.291) für $\left(\overline{P_A} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich

$$\overline{n_A} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.295}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\cdot}$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{26.296}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[\sqrt{1-e^2}\left(1-3\cos^2 i\right)\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K} - 1\right) \tag{26.297}$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, kann die Inklination direkt berechnet werden aus

$$f_{e1} - f_{e2} \equiv \left(E_2 - E_1\right)\left(1-3\cos^2 i\right) = 0 \tag{26.298}$$

Da $E_2 \neq E_1$ folgen die einzigen Lösungen erster Ordnung

$$\cos i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad i_1 = 54°.735610 \quad , \quad i_2 = 125°.234690 \quad . \tag{26.299}$$

In Tabelle 26-46 sind in Ergänzung zu Bild 26-61 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung

werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.9.2.1 berechnet . Auch wenn in allen Fällen derselbe Wert für die Inklination i_{cross} verwendet wird, ist die zugehörige große Bahnhalbachse unter Verwendung des vollständigen Bahnmodells minimal verändert.

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	42165.21	---	---	---	---
e=0.1	42165.23	54°.735610	42164.169628	42163.64	125°.234690
e=0.2	42165.28	54°.735610	42164.169627	42163.61	125°.234690
e=0.3	42165.37	54°.735610	42164.169626	42163.57	125°.234690
e=0.4	42165.53	54°.735610	42164.169622	42163.49	125°.234690
e=0.5	42165.78	54°.735610	42164.169614	42163.37	125°.234690
e=0.6	42166.21	54°.735610	42164.169592	42163.15	125°.234690
e=0.7	42167.04	54°.735610	42164.169515	42162.74	125°.234690
e=0.8	42169.01	54°.735610	42164.169115	42161.75	125°.234690
e_B	42170.95	54°.735610	42164.168362	42160.79	125°.234690

Tabelle 26-46: Ausgewählte Parameter von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert nach Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität e_B =0.8440126

26.9.3 Kopplung von drakonitischer Bewegung mit der Erdrotation

26.9.3.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer drakonitischen Bewegung mit der Erdrotation

Mit der mittleren drakonitischen Satellitenbewegung[1] (23.46) muss eine $\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_D} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \tag{26.300}$$

erfüllen. Damit kann ein *Kepler*sches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa die große Bahnhalbachse,

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \frac{2\pi}{\overline{n_A}\left(\bar{a}\right)} - \frac{2\pi}{\dot{\Theta}} = \overline{P_D}\left(\bar{a}\right) - P_E = 0 \tag{26.301}$$

iterativ berechnet werden. Als Anfangswert für die Berechnung der großen Bahnhalbachse empfiehlt sich ein Wert unterhalb der mittleren geosynchronen großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKG}}_0 = \sqrt[3]{\mu / \dot{\Theta}^2} = 42164.1712397\,\text{km}$. Falls eine wahre $\left(P_D \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit dem Argument der Breite *u* als Bahnwinkel und der näherungsweisen

[1] Abschnitt 23.2.2

großen Bahnhalbachse die wahre drakonitische Umlaufzeit P_D mit der überlagerten Funktion (23.155)

$$fct\left[P_D(t_0)\right] \equiv \sin\left[u(t_0+P_D)-u(t_0)\right]=0 \tag{26.302}$$

berechnet werden. Anschließend wird mit der erhaltenen wahren Umlaufzeit P_D die Funktionsgleichung

$$fct(\bar{a}) \equiv P_D(\bar{a})-P_E=0 \tag{26.303}$$

gelöst. Der gesamte Vorgang (26.302) – (26.303) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis für die berechnete große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDE}}$ eine vorgegebene Grenze $\left|P_D-P_E\right|<\Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Tabelle 26-47 enthält die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination.

	$\overline{a_{QDE}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$
$\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)-$	42164.170264	0.1	60°
$\left(P_D \triangleq P_E\right)-$	42164.145503	0.1	60°
$\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)-$	42164.200597	0.5	60°
$\left(P_D \triangleq P_E\right)-$	42164.035572	0.5	60°
$\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)-$	42163.490660	0.5	85°
$\left(P_D \triangleq P_E\right)-$	42163.126011	0.5	85°
$\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)-$	42168.231673	0.5	155°
$\left(P_D \triangleq P_E\right)-$	42166.179685	0.5	155°

Tabelle 26-47: Die große Bahnhalbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen bei Kopplung einer drakonitischen Bewegung mit der Erdrotation

26.9.3.2 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen bei Kopplung drakonitischer Satellitenbewegung mit der Erdrotation

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ angegeben. Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.9.3.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zur Inklination $\bar{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\bar{e}_0$=0,1, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit einer der Methoden in Abschnitt 28.8.2.3 oder 28.9.3 berechnet werden.

Das Ergebnis ist in Bild 26-62 dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in [0°, 180°]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe =200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in [0.8439517 - 0.8441061]$. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität $e_B = 0.8441061$ für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QDE}} = 42196.25$ km.

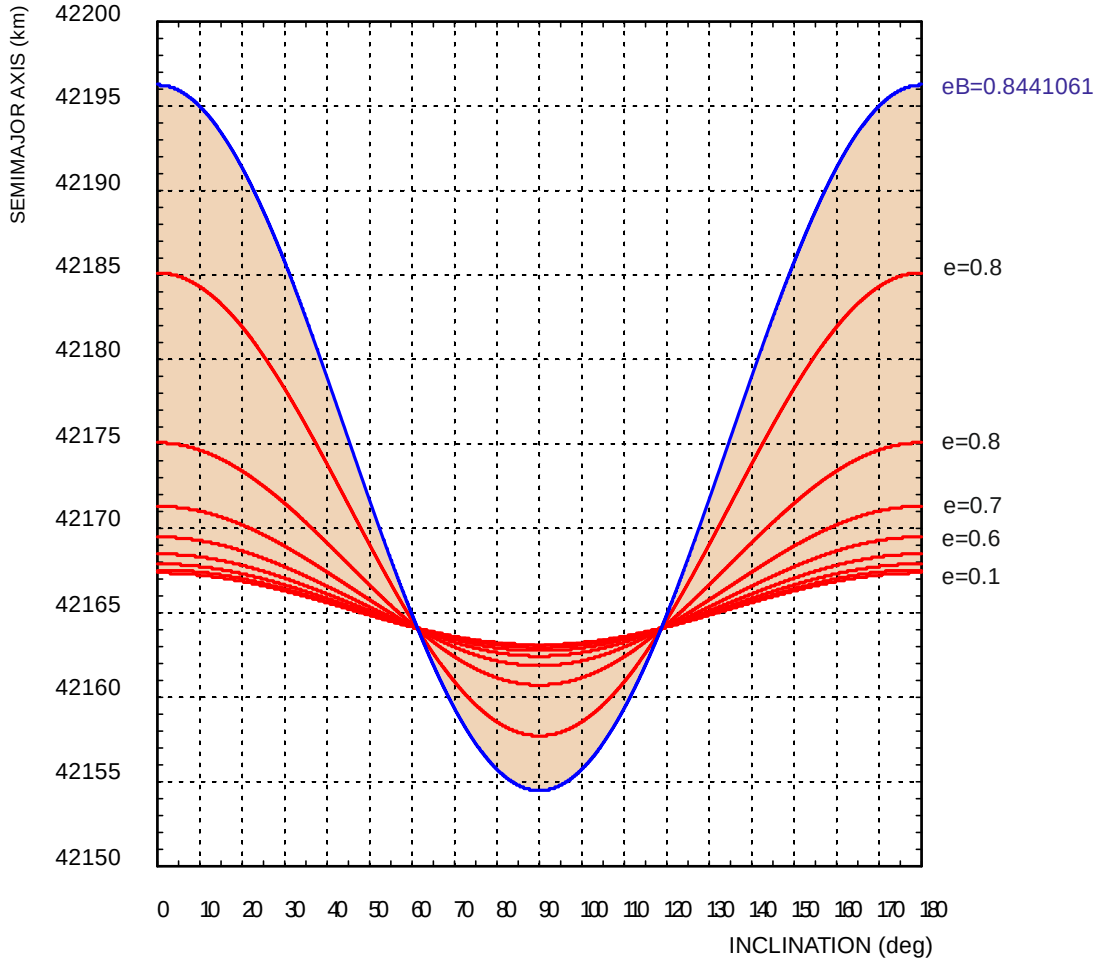


Bild 26-62: Das (a,i)-Gebiet von $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen parametrisiert mit Exzentrizitäten $e \in [0.1, 0.8441061]$

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QDE\ cross}} \approx 50°.1$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDE\ cross}} \approx 42164\,\text{km}$. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (26.300) für Äquivalenzbahnen ergibt sich

$$\overline{n_D} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.304}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \qquad (26.305)$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[1+\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K}-1\right) \qquad (26.306)$$

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	42167.30	---	---		---
e=0.1	42167.36	60°.578507	42164.133278	42163.11	119°.421493
e=0.2	42167.55	60°.593390	42164.132344	42163.05	119°.406610
e=0.3	42167.90	60°.619787	42164.130686	42162.94	119°.380213
e=0.4	42168.49	60°.660509	42164.128124	42162.75	119°.339491
e=0.5	42169.49	60°.720565	42164.124332	42162.44	119°.279435
e=0.6	42171.31	60°.808985	42164.118700	42161.87	119°.191015
e=0.7	42175.07	60°.943229	42164.109920	42160.73	119°.056771
e=0.8	42185.14	61°.161884	42164.093981	42157.72	118°.838116
e_B	42196.25	61°.307240	42164.080218	42154.48	118°.692760

Tabelle 26-48: Ausgewählte Parameter von $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert für einige Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität e_B=0.8440126

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$f_{e2} - f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + C_0 = 0 \qquad (26.307)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right) - E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ C_0 &:= E_2 - E_1 + E_2\sqrt{1-e_2^2} - E_1\sqrt{1-e_1^2} \quad . \end{aligned} \qquad (26.308)$$

Ihre Lösungen sind

$$\cos i_1 = \sqrt{-\frac{C_0}{A_0}} \quad , \quad \cos i_2 = -\sqrt{-\frac{C_0}{A_0}} \quad . \qquad (26.309)$$

In Tabelle 26-48 sind in Ergänzung zu Bild 26-62 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0,0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung

werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.9.3.1 berechnet.

26.9.3.3 Beispiel einer rückläufigen QDE Äquivalenzbahn

In diesem Beispiel wird eine hochexzentrische retrograde geosynchrone Bahn demonstriert. Mit der Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.5 und der Inklination $\bar{i}_0$=155° wird mit den Formeln in Abschnitt 26.9.3.1 (auf Seite 544) die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDE}}$=42168.234 km einer $\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahn errechnet. Die Bahnparameter sind Tabelle 26-49 zusammengestellt.

$\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)$	
$\overline{a_{QDE}} = 42168.234\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.5, \bar{i}_0 = 155°, \bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 00°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
t_0 : 2021-12-06/12-0000.000.	
$\overline{P_K} = 86176.550624$ sec	$P_E = 86164.098904$ sec
$\overline{P_H} = 86168.774305$ sec	$P_H = 86171.739249$ sec
$\overline{P_A} = 86172.941768$ sec	$P_A = 86172.941768$ sec
$\overline{P_D} = 86164.098904$ sec	$P_D = 86170.388715$ sec
$\overline{P_T} = 86169.257667$ sec	$P_T = 86172.026191$ sec
$\overline{P_R} = 43083.339104$ sec	$P_R = 43082.136712$ sec
$\overline{P_S} = 85934.604859$ sec	$P_S = 86088.970093$ sec
$\overline{P_L} = 83134.567184$ sec	$P_L = 84949.694137$ sec
$H_P = 14705.980606$ km	$H_A = 56874.215018$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -360°.048876$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -359.978448$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_s\,P_A = -360°.048876$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -360.004725$
$\dot{\Omega}_s = 0.43656284857320872\times10^{-8}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.74829969388423226\times10^{-8}$ rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s = 0.30534397223108194\times10^{-8}$ rad / sec	

Tabelle 26-49: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_D} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenz -Bahn für die Exzentrizität e=0.5 und die Inklination=155°, Epoche: 2021-12-06/12:00:0.00, Fundamental Konstante: (TCB)

$R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4418\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s, $J_2 = 0.001082625379977$.

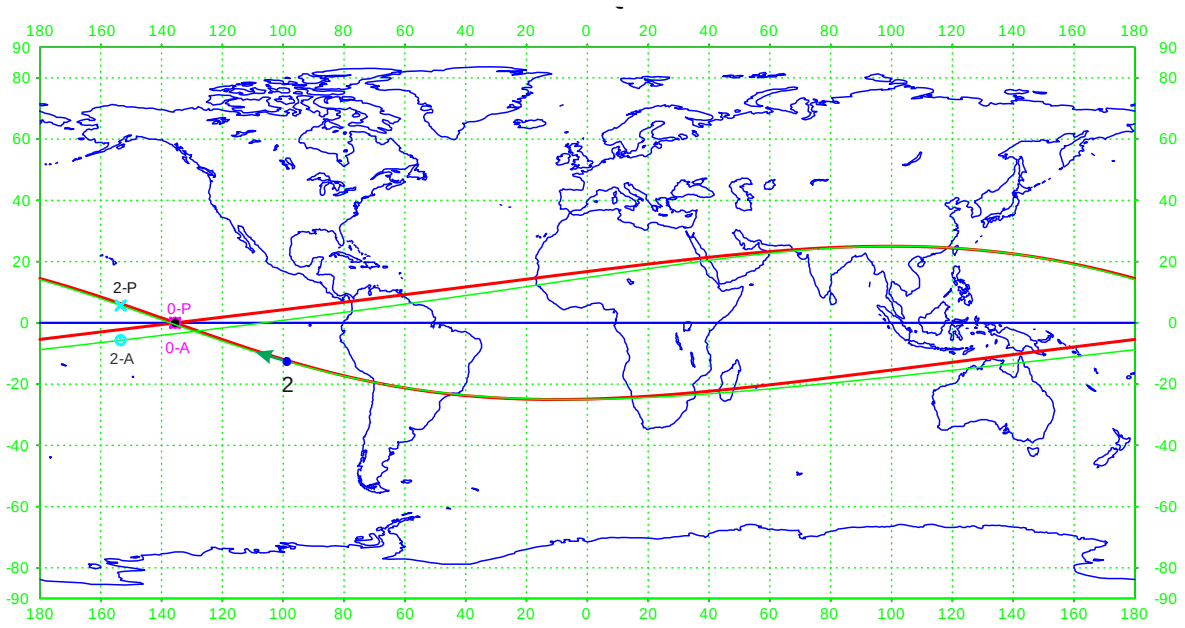


Bild 26-63: Subsatellitenbahnen der rückläufigen Sonnen-synodischen

$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahn, a=42168.231 km, e=0.5, i=155°, Ω=120°, rote Bahn zur Epoche: 2021-12-06/12:00:0.0, grüne Bahn zur Epoche: 2022-12-06/12:00:0.00

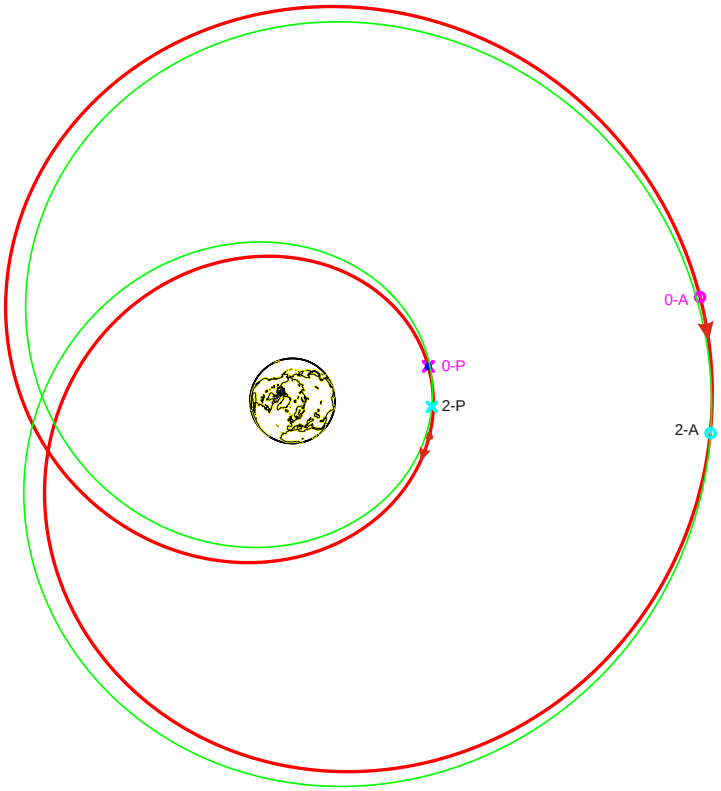


Bild 26-64: Wahre räumliche Umläufe der rückläufigen $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahn, a=42168.231 km, e=0.5, i=155°, Ω=120°, rote Bahn zur Epoche: 2021-12-06/12:00:0.0, grüne Bahn zur Epoche: 2022-12-06/12:00:0.0. Parallel Projektion, Blickrichtung: λ=0°, φ=80°

Bild 26-63 zeigt die Subsatellitenbahn über einen Umlauf zur Epoche 2021-12-06/12:00:0.0 in roter Farbe. Der Start findet im Perigäum 0-P im aufsteigenden Knoten statt. Nach einem halben Umlauf schneidet die Bahn denselben Punkt 0-A im Apogäum der Bahn und im absteigenden Knoten. Nach einem Jahr wird zur Epoche 2022-12-06/12:00:0.0 ein Umlauf in grüner Farbe gezeigt. Der Anfangspunkt hat sich entgegen der Bahnbewegung verschoben: Punkt 2. Der aufsteigende Knoten ist unverändert, der absteigende Knoten hat sich verändert: die Bahn kippt im Apogäum etwas von der ursprünglichen Bahn weg. Verschoben gegenüber der ursprünglichen Bahn hat sich das Perigäum 2-P sowie das Apogäum 2-A. Bild 26-64 zeigt die beiden Bahnen in räumlicher Darstellung.

26.9.4 Kopplung von Hansen Bewegung mit der Erdrotation

26.9.4.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer Hansen Bewegung mit der Erdrotation

Mit der mittleren *Hansen* Satellitenbewegung[1] (21.62) muss eine $\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_H} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\bullet} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \cos \bar{i}_0 - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.310}$$

erfüllen. Damit kann eine *Kepler*sches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa für die große Bahnhalbachse,

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \overline{n_H}\left(\bar{a}\right) - \dot{\Theta} = 0 \tag{26.311}$$

iterativ berechnet werden. Als Anfangswert empfiehlt sich ein Wert unterhalb der mittleren geosynchronen großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKG}}_0 = \sqrt[3]{\mu / \dot{\Theta}^2} = 42164.1712397\,\mathrm{km}$. Falls eine wahre $\left(P_H \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit der Rektaszension α des Satellitenortes als Bahnwinkel die wahre *Hansen* Umlaufzeit P_H mit der überlagerten Funktion (21.60)

$$fct\left[P_H\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{26.312}$$

berechnet werden. Anschließend muss mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse $\bar{a}$ die Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv P_H\left(\bar{a}\right) - P_E = 0 \tag{26.313}$$

gelöst werden. Der gesamte Vorgang muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis eine vorgegebene Grenze $\left|P_H - P_E\right| < \Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination (Tabelle 26-50).

[1] Abschnitt 21.3

26.9.4.2 Das Gebiet möglicher Äquivalenzbahnen bei Kopplung der Hansen Satellitenbewegung mit der Erdrotation

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ angegeben.

Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.9.4.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zur Inklination $\bar{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0,1, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit einer der Methoden in Abschnitt 28.8.2.3 oder 28.9.3 berechnet werden.

	$\overline{a_{QHE}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)-$	42166.271595	0.1	5°
$\left(P_H \triangleq P_E\right)-$	42166.075701	0.1	5°
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)-$	42163.903831	0.1	60°
$\left(P_H \triangleq P_E\right)-$	42163.928609	0.1	60°
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)-$	42163.736373	0.5	60°
$\left(P_H \triangleq P_E\right)-$	42163.901570	0.5	60°
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)-$	42162.476555	0.5	85°
$\left(P_H \triangleq P_E\right)-$	42162.121939	0.5	85°
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)-$	42166.706515	0.5	155°
$\left(P_H \triangleq P_E\right)-$	42166.739501	0.5	155°

Tabelle 26-50: Die große Bahnhalbachse einiger mittlerer bzw. wahrer Äquivalenzbahnen bei Kopplung der *Hansen*schen Satellitenbewegung mit der Erdrotation

Das Ergebnis ist in Bild 26-65 dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in [0°, 180°]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe =200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in [0.8439517 - 0.8440594]$. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität $e_B = 0.8440594$ für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QHE}} = 42183.60$ km.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QHE\,cross}} \approx 54°$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QHE\,cross}} \approx 42164\,\text{km}$. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_H} \triangleq P_E\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (26.310) für Äquivalenzbahnen ergibt sich

$$\overline{n_H} - \dot{\Theta} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \cos \bar{i}_0 - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.314}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{26.315}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet, wobei die Exzentrizität als Parameter stehen bleibt,

$$f_e \equiv E\left[1+\sqrt{1-e^2}-3\cos^2 i\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K}-1\right) \tag{26.316}$$

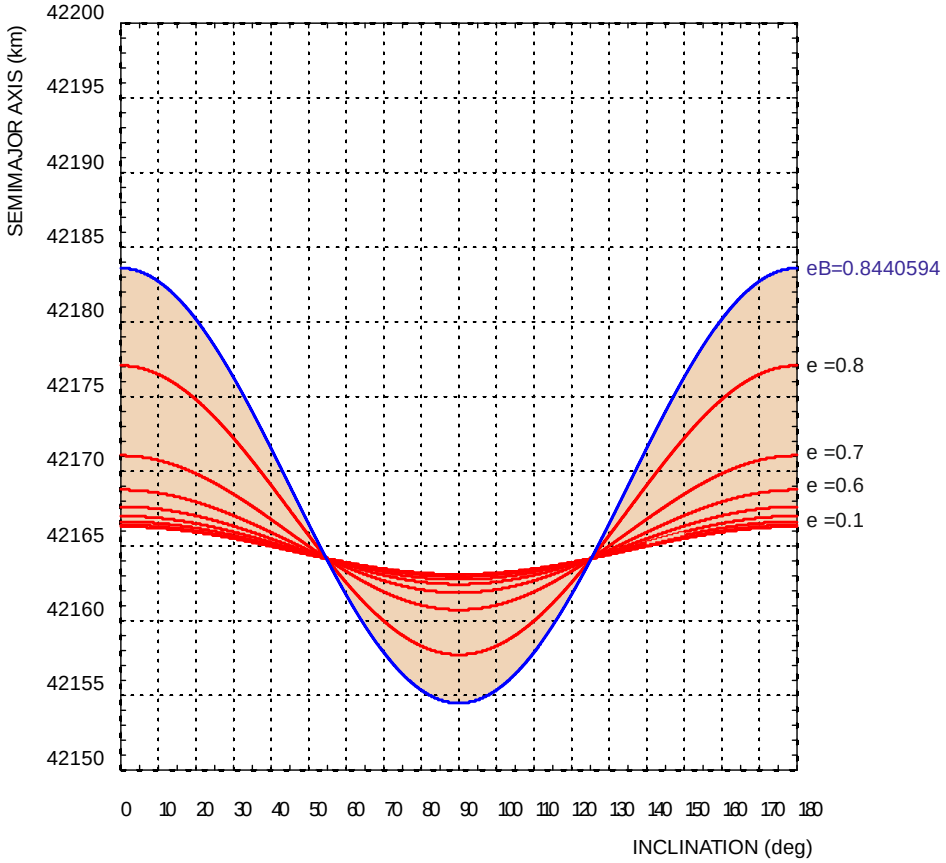


Bild 26-65: Das (a,i)-Gebiet von $\left(\overline{P_H} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen parametrisiert mit Exzentrizitäten

$$e \in \left[0.1, 0.8440594\right]$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$f_{e2} - f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + C_0 = 0 \tag{26.317}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= -3E_1\left(1+\sqrt{1-e_1^2}\right) + 3E_2\left(1+\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ C_0 &:= E_2 - E_1 + E_2\sqrt{1-e_2^2} - E_1\sqrt{1-e_1^2} \quad . \end{aligned} \tag{26.318}$$

Ihre Lösungen sind

$$\cos i_1 = \sqrt{-\frac{C_0}{A_0}} \quad , \quad \cos i_2 = -\sqrt{-\frac{C_0}{A_0}} \quad . \tag{26.319}$$

In Tabelle 26-51 sind in Ergänzung zu Bild 26-65 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0,0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.9.4.1 berechnet. Es fällt auf, dass sich die Kopplung der *Hansen* Bewegung mit der Erdrotation nur je für genau ein und dieselbe charakteristische Neigung ereignet, während sich die zugehörigen charakteristischen großen Bahnhalbachsen geringfügig ändern .

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	42166.26	---	---		---
e=0.1	42166.30	54°.735610	42164.169597	42163.11	125°.264390
e=0.2	42166.41	54°.735610	42164.169591	42163.05	125°.264390
e=0.3	42166.63	54°.735610	42164.169580	42162.94	125°.264390
e=0.4	42167.01	54°.735610	42164.169555	42162.75	125°.264390
e=0.5	42167.64	54°.735610	42164.169501	42162.44	125°.264390
e=0.6	42168.76	54°.735610	42164.169363	42161.87	125°.264390
e=0.7	42171.06	54°.735610	42164.168899	42160.73	125°.264390
e=0.8	42177.08	54°.735610	42164.166407	42157.72	125°.264390
e_B	42183.60	54°.735610	42164.161442	42154.48	125°.264390

Tabelle 26-51: Ausgewählte Parameter von $\left(\overline{P_H} \triangleq \overline{P_E}\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert für einige Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität e_B =0.8440594

26.9.5 Kopplung von *Kepler* Bewegung mit der Erdrotation

26.9.5.1 Elementares Verhalten bei Verknüpfung einer Kepler Bewegung mit der Erdrotation

Mit der mittleren *Keplerschen* Satellitenbewegung $\overline{n_K} = \sqrt{\mu / \overline{a}^3}$ muss eine $\left(\overline{P_K} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_K} - \dot{\Theta} = 0 \quad . \tag{26.320}$$

erfüllen. Damit ist die große Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_K} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn eindeutig festgelegt (siehe (26.280))

$$\sqrt{\frac{\mu}{(\overline{a}_0)^3}} - \dot{\Theta} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{a_{QKE}} = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 42164.169626\,\text{km} \quad . \tag{26.321}$$

Dieser Wert ist in gleicher Weise für eine wahre $\left(P_K \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn gültig, wenn wie im *Brower*schen Bahnmodell üblich die mittlere Bahnhalbachse $\overline{a}$ als Bahnparameter benötigt wird.

$\left(\overline{P_K} \triangleq P_E\right)$	
$\overline{a_{QKE}} = 42164.169626\ \text{km}, \overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 85°, \overline{\Omega}_0 = 0°, \overline{\omega}_0 = 00°, \overline{M}_{0\,0} = 0°$	
t_0 : 2021-12-06/12:00:0.00	
$\overline{P_K} = 86164.090507$ sec	$P_E = 86164.090507$ sec
$\overline{P_H} = 86167.781786$ sec	$P_H = 86166.863034$ sec
$\overline{P_A} = 86165.892656$ sec	$P_A = 86165.892442$ sec
$\overline{P_D} = 86167.752417$ sec	$P_D = 86166.847948$ sec
$\overline{P_T} = 86168.089393$ sec	$P_T = 86168.834050$ sec
$\overline{P_R} = 1856665937.056570$ sec	$P_R = 1856656682.567520$ sec
$\overline{P_S} = 86404.020788$ sec	$P_S = 87715.732820$ sec
$\overline{P_L} = 89432.636255$ sec	$P_L = 96727.114990$ sec
$H_P = 23136.782138$ km	$H_A = 48435.283914$ km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -360°.009614$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -360°.016708$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -360°.009614$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -360°.012929$
$\dot{\Omega}_s = -0.28515947895473310\times10^{-9}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = -0.15738262986375909\times10^{-8}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s = -0.15251369026242822\times10^{-8}$ rad / sec	

Tabelle 26-52: Bahn Parameter einer $\left(\overline{P_K} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn

26.9.5.2 Beispiel von Bahnparametern einer Äquivalenzbahn bei Kopplung der Keplerschen Bewegung mit der Erdrotation

Wird eine *Kepler*-Bewegung mit der Erdrotation gekoppelt, kann es nach Beziehung (26.321) nur genau eine mittlere große Bahnhalbachse für ALLE $\left(\overline{P_K} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahnen unabhängig von allen anderen Bahnparametern geben. Eine solche Bahn zeigt folgendes

BEISPIEL: Eine $\left(\overline{P_K} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn habe die Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.3 und Inklination $\overline{i}_0$ =85°. Die Bahnparameter sind in Tabelle 26-52 zusammengestellt.◀

26.10 Äquivalenzbahnen mit zwei Sterntagen Umlaufzeit

Nach dem WGS 1984 System haben 2 Sterntage die Dauer

$$P_Q := \frac{4\pi}{\dot{\Theta}} = 172328.18104\,\mathrm{sec} \triangleq 47^h 52^m 08^s.18104 \quad . \tag{26.322}$$

Bei Bezug auf die meridionale Bewegung haben $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen[1] exakt die Umlaufzeit 2 Sterntage P_Q. Die Umlaufzeiten anderer auf die meridionale Bewegung bezogener Äquivalenzbahnen haben Umlaufzeiten nahe P_Q. Satellitenbewegungen die auf 2 Sterntage P_Q bezogen werden, können daher als Alternative zu den Meridian bezogenen Bewegungen aufgefasst werden. Allerdings ist der Unterschied zu diesen beiden Bewegungsarten wesentlich:

1. Es werden keine zwei Bewegungsarten gekoppelt. Vielmehr wiederholt sich ein spezieller Bewegungsbezug nach genau 2 Sterntagen. Beispiel: der aufsteigende Knoten einer $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn findet genau alle zwei Sterntage statt.

2. Während Meridian bezogene Äquivalenzbahnen ausschließlich für rechtläufige Bahnen auftreten können, kommen die auf P_Q bezogenen Äquivalenzbahnen für alle Bahnneigungen vor.

26.10.1 Tropische Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit

Wegen des gemeinsamen Bezugs der tropischen Satellitenbewegung und der Berechnung von zwei Sterntagen auf den Frühlingspunkt kann die Äquivalenz dieser beiden Bewegungen als Basisaufgabe zur Untersuchung von Äquivalenzbahnen betrachtet werden, welche die Umlaufzeit zwei Sterntage haben.

26.10.1.1 Basiseigenschaften der tropischen Bewegung mit Umlauf in zwei Sterntagen

Auf Grund der Beziehung[2] (26.157) $P_Q = \overline{P_{QT}} = \overline{P_{QR}} = 4\pi / \dot{\Theta}$ ist die Überlegung naheliegend, anstelle eine Satellitenbewegung auf die meridionale Bewegung zu beziehen, die Bewegung auf die Umlaufzeit 2 Sterntage auszurichten. Auch ein solcher Bezug kann quasi als eine Äquivalenz untersucht werden.

In diesem Fall soll etwa die tropische Bewegung mit der Umlaufzeit 2 Sterntage gekoppelt werden. Damit kann eine $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)-$ oder eine $\left(P_T \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn hergestellt werden.

Auch in diesem Fall wird die mittlere große Bahnhalbachse einer Äquivalenzbahn nicht nur durch die Äquivalenzbedingung, sondern auch durch die Angabe der übrigen Bahnparameter beeinflusst. Im üblichen Fall von physikalischen Einflüssen auf die Bahnen ("gestörte *Kepler*-sche Bahnen") muss ein geeignetes Bahnmodell[3] verwendet werden. Unter Anwendung dieses Modells muss die mittlere Halbachse einer solchen Äquivalenzbahn in der Regel iterativ

---

[1] Abschnitt 26.8.1, ab Seite 461

[2] Abschnitt 26.8.1

[3] Siehe z.B. in BROUWER [1959]

berechnet werden. Wenn die übrigen Bahnparameter, z. B. die mittleren *Kepler*-Elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$, zu einer Epoche vorgegeben sind und wenn eine Näherung erster Ordnung für die große Bahnhalbachse bekannt ist, z. B. aus der Beziehung (26.158) kann die mittlere Umlaufzeit der tropischen Bewegung aus Beziehung (24.60) erhalten werden[1]. Die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTQ}}$ bezogen auf eine Epoche t_0 kann somit berechnet werden durch Anwendung der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\overline{a_{QTQ\,0}}\right) \equiv \overline{P_T} - P_Q = 0 \quad \left\langle \overline{P_T} = 2\pi / \overline{n_T}, \;\; P_Q = 4\pi / \dot{\Theta} \right. \tag{26.323}$$

In ähnlicher Weise wie für mittlere Bewegungen kann eine analoge Darstellung für wahre Bewegungen hergeleitet werden. Die große Bahnhalbachse einer $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)-$Äquivalenzbahn wird erhalten durch eine iterative Lösung der Bedingungsfunktion

$$fct\left(\overline{a_{QTQ\,0}}\right) \equiv P_T - P_Q = 0 \;\; . \tag{26.324}$$

In jedem Schritt muss die wahre tropische Umlaufzeit P_T mit der Beziehung[2] (24.59) berechnet werden, wobei die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}$ als unabhängige Variable aufgefasst wird:

$$fct\left[P_T\left(\overline{a}\right)\right] \equiv \sin\left[\alpha\left(t_0 + P_T\right) - \alpha\left(t_0\right)\right] = 0. \tag{26.325}$$

Der gesamte Prozess (26.324)-(26.325) muss wiederholt durchlaufen werden. Die Genauigkeitsbedingung wird in der Regel für die Funktion $fct\left(\overline{a_{QTQ}}\right)$ gewählt. Als Anfangswert für die Halbachse kann der Wert (26.158) $\overline{a_{QTR}}_K = \sqrt[3]{4\mu / \dot{\Theta}^2}$ =66931.4512142 km gewählt werden[3]. Der Iterationsprozess ist numerisch meist sehr stabil.

Dies wird in Tabelle 26-53 für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen sowie in Tabelle 26-12 für einige verschiedene Rektaszensionen des aufsteigenden Knotens, Argumente des Perigäums und mittlere Anomalien zur Epoche gezeigt. Als Folge der Beziehung[4] (26.157) sind die Umlaufzeiten bei $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)-$Äquivalenz in allen verschiedenen Fällen der Elemente identisch. Diese Tatsache gilt auch für den Fall einer $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)-$Äquivalenz. Der Bezug auf eine andere Epoche kann den in diesen Tabellen berechneten Wert der mittleren großen Bahnhalbachse geringfügig verändern. Es ist zu beachten, dass jede einzelne Berechnung in diesen Tabellen völlig unabhängig durchgeführt wird.

Auch wenn Tabelle 26-53 nahezu identisch zu Tabelle 26-12 (auf Seite 460) ist, so muss ein prinzipieller Unterschied zwischen den beiden Tabellen beachtet werden: in Tabelle 26-12 sind nach Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse die Umlaufzeiten das Ergebnis der Berechnung als $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)-$ bzw. $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R\right)-$Äquivalenzbahnen. Im Fall der Tabelle 26-53 ist jedoch die Umlaufzeit P_Q fest vorgegeben.

---

[1] Abschnitt 24.3.2

[2] Abschnitt 24.3.1

[3] Abschnitt 26.8.1

[4] Abschnitt 26.8.1.1

$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$	$\overline{a_{QTQ}}\left[\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} P_Q\right]$	$\overline{P_T} = P_Q$	$\overline{a_{QTQ}}\left[P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right]$	$P_{T,\mathrm{per}} = P_Q$
0.0	0°	66932.763262 km	172328.181014	66932.763262 km	172328.181014 s
	30°	66932.193394 km	172328.181014	66932.105238 km	172328.181014 s
	60°	66931.118205 km	172328.181014	66930.789194 km	172328.181014 s
	85°	66930.751846 km	172328.181014	66930.151168 km	172328.181014 s
0.3	0°	66932.999861 km	172328.181014	66932.613399 km	172328.181014 s
	30°	66932.325413 km	172328.181014	66932.074039 km	172328.181014 s
	60°	66931.054479 km	172328.181014	66930.995323 km	172328.181014 s
	85°	66930.625382 km	172328.181014	66930.472354 km	172328.181014 s
0.5	0°	66933.630186 km	172328.181014	66932.798024 km	172328.181014 s
	30°	66932.675807 km	172328.181014	66932.207042 km	172328.181014 s
	60°	66930.881878 km	172328.181014	66931.025091 km	172328.181014 s
	85°	66930.287582 km	172328.181014	66930.452078 km	172328.181014 s
0.8	0°	66939.573455 km	172328.181014	66934.832642 km	172328.181014 s
	30°	66935.935768 km	172328.181014	66933.478334 km	172328.181014 s
	60°	66929.161745 km	172328.181014	66930.770114 km	172328.181014 s
	85°	66927.074292 km	172328.181014	66929.457339 km	172328.181014 s
0.9	0°	66957.658059 km	172328.181014	66939.816686 km	172328.181014 s
	30°	66945.695786 km	172328.181014	66936.5719480km	172328.181014 s
	60°	66923.609455 km	172328.181014	66930.086978 km	172328.181014 s
	85°	66917.213816 km	172328.181014	66926.945226 km	172328.181014 s

Tabelle 26-53: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)-$ und einer $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)-$ Äquivalenzbahn für unterschiedliche Exzentrizitäten und Inklinationen, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0$, Epoche: 2019-10-16/12:00:0.00, Fundamentale Parameter [TCB]: $R_E = 6378.1366\,\mathrm{km}$, $\mu_{\ddot{\odot}} = 398600.4418\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, $J_2 = 0.001082625379977$, Schrittweite $\Delta a = 1$ km, Genauigkeitsgrenzen $|\Delta\bar{P}| = 10^{-9}$ sec, Δ(a)=10^{-9} km.

Die zugehörigen großen Bahnhalbachsen werden dann als Folge der fest vorgegebenen $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)$ – bzw. $\left(P_T \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenz berechnet. Entsprechendes gilt für den Vergleich von Tabelle 26-54 mit Tabelle 26-13 in Abschnitt 26.8.1.3 (auf Seite 459).

Dies wird in Tabelle 26-53 für verschiedene Exzentrizitäten und Inklinationen sowie in Tabelle 26-54 für einige verschiedene Rektaszensionen des aufsteigenden Knotens, Argumente des Perigäums und mittlere Anomalien zur Epoche gezeigt. Als Folge der Beziehung (26.157) sind die Umlaufzeiten bei $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenz in allen verschiedenen Fällen der Elemente identisch. Diese Tatsache gilt auch für den Fall einer $\left(P_T \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenz. Der Bezug auf eine andere Epoche kann den in diesen Tabellen berechneten Wert der mittleren großen Bahnhalbachse geringfügig verändern. Es ist zu beachten, dass jede einzelne Berechnung in diesen Tabellen völlig unabhängig durchgeführt wird.

$\overline{a_{QTR}}$	$\overline{e}_0$	$\overline{i}_0$	$\overline{\Omega}_0$	$\overline{\omega}_0$	M_0	$P_{T,\mathrm{per}} = P_Q$
66926.945226 km	0.9	85°	0°	0°	0°	172328.181014 s
66777.612343 km	0.9	85°	0°	0°	90°	172328.181014 s
66777.337769 km	0.9	85°	120°	0°	90°	172328.181014 s
66829.648691 km	0.9	85°	120°	60°	90°	172328.181014 s
(*) 66867.160953 km	0.9	85°	120°	120°	90°	172328.181014 s
66827.765815 km	0.9	85°	120°	120°	150°	172328.181014 s
66703.645982 km	0.9	85°	0°	0°	180°	172328.181014 s
66703.636375 km	0.9	85°	150°	180°	180°	172328.181014 s
66815.916377 km	0.9	85°	120°	60°	180°	172328.181014 s
66815.734649 km	0.9	85°	120°	60°	120°	172328.181014 s

Tabelle 26-54: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer wahren $\left(P_T \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.9 und der Inklination $\overline{i}_0$ =85°, für verschiedene Bahnparameter $\overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}$, zur Epoche: 2019-10-12/00:00:0.00, Fundamental Konstante: $R_E = 6378.1366\,\mathrm{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4418\ \mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340 ×10^{-4} / s, $J_2 = 0.001082625379977$. Schrittweite $\Delta a = 1$ km, Genauigkeitsgrenzen $\left|\Delta\overline{P}\right| = 10^{-9}$ sec, Δ(a)=10^{-9} km. Die Berechnung erfolgt mit allen periodischen Bahneinflüssen nach *Brouwer*, außer der Bahn mit (*)

Auch wenn Tabelle 26-53 nahezu identisch zu Tabelle 26-12 (auf Seite 460), ist, so muss ein prinzipieller Unterschied zwischen den beiden Tabellen beachtet werden: in Tabelle 26-12 sind nach Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse die Umlaufzeiten das Ergebnis der Berechnung als $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – bzw. $\left(P_T \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenzbahnen. Im Fall der Tabelle 26-53 ist jedoch die Umlaufzeit P_Q fest vorgegeben. Die zugehörigen großen Bahnhalbachsen werden dann als Folge der fest vorgegebenen $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)$ – bzw. $\left(P_T \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenz berechnet.

Entsprechendes gilt für den Vergleich von Tabelle 26-53 mit Tabelle 26-13 in Abschnitt 26.8.1.3 (auf Seite 459).

BEISPIEL 1: Berechne die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTQ}}$ einer rechtläufigen $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$–Äquivalenzbahn mit den *Kepler*elementen $\bar{e}_0$=0.3, $\bar{i}_0$=30°, $\bar{\Omega}_0$=55°, $\bar{\omega}_0$=75° . Die Bahnparametern sind in Tabelle 26-55 zusammengestellt. Man beachte den Betrag der wahren meridionalen Umlaufzeit P_R, die von den vorgegebenen 2 Sterntagen um weniger als 5×10^{-4} sec abweicht. ◄

$\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$	
$\overline{a_{QTQ}} = 66932.169279$ km, $\bar{e}_0 = 0.3, \bar{i}_0 = 30°, \bar{\Omega}_0 = 55°, \bar{\omega}_0 = 75°, \overline{M_{00}} = 0°$	
t_0 : 2022-01-07/10:30:0.00	
$\overline{P_K}$ = 172330.969644 sec	P_Q = 172328.181014 sec
$\overline{P_H}$ = 172327.221944 sec	P_H = 172328.154622 sec
$\overline{P_A}$ = 172329.139976 sec	P_A = 172329.139217 sec
$\overline{P_D}$ = 172324.920349 sec	P_D = 172326.972412 sec
$\overline{P_T}$ = 172327.578008 sec	P_T = 172328.181014 sec
$\overline{P_R}$ = 172328.784024 sec	P_R = 172328.180554 sec
$\overline{P_S}$ = 173273.799925 sec	P_S = 172801.557825 sec
$\overline{P_L}$ = 185898.558202 sec	P_L = 177498.037778 sec
H_P = 40474.381895 km	H_A = 80633.683462 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P \overline{P_A} = -719°.999602$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \overline{P_D} = -719°.991929$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_P P_A = -719°.999599$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s} P_D = -720°.000502$

Tabelle 26-55: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer rechtläufigen wahren $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$–Äquivalenzbahn. Schrittweite Δa=1 km, Genauigkeitsgrenzen $|\Delta\overline{P}| = 10^{-11}$ sec, Δ(a)=10^{-9} km.. Fundamental Konstante (TCB):

$R_E = 6378.1366$ km, $\mu_\oplus = 398600.4356$ km^3/s^2, $\dot{\Theta}[1984] = 0.729211585733 40\times10^{-4}$ rad/sec,

$J_2 = 0.001082625379977$.

$\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$–bzw. $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$–Äquivalenzbahnen sind (im prinzipiellen Gegensatz zu $\left(\overline{P_T} \mathrel{\hat{=}} \overline{P_R}\right)$–bzw. $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_R\right)$–Äquivalenzbahnen) auch für rückläufige Bahnen definiert. Dies zeigt folgendes

BEISPIEL 2: Berechne die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTQ}}$ einer rückläufigen $\left(P_T \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$–Äquivalenzbahn mit den *Kepler*elementen $\bar{e}_0$ =0.3, $\bar{i}_0$=125°, $\bar{\Omega}_0$ =55°, $\bar{\omega}_0$ =75°. Die Bahnparameter sind in Tabelle 26-56 zusammengestellt. Es fällt auf, dass die wahre meridionale Umlaufzeit total von der tropischen Umlaufzeit abweicht. Dies bestätigt die Aussage von Abschnitt

26.5.1.3 (ab Seite 414), dass es keine rückläufigen Bahnen geben kann, die durch Äquivalenz mit der meridionalen Bewegung gebildet werden. ◄

$\left(P_T \triangleq P_Q\right)$	
$\overline{a_{QTQ}} = 66931.421294\ \text{km}, \bar{e}_0 = 0.3, \bar{i}_0 = 125°, \bar{\Omega}_0 = 55°, \bar{\omega}_0 = 75°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
t_0 : 2022 1 7 10 30 0.00	
$\overline{P_K} = 172328.080886\ \text{sec}$	$P_Q = 172328.181014\ \text{sec}$
$\overline{P_H} = 172328.119998\ \text{sec}$	$P_H = 172328.110157\ \text{sec}$
$\overline{P_A} = 172328.099960\ \text{sec}$	$P_A = 172328.099660\ \text{sec}$
$\overline{P_D} = 172327.110396\ \text{sec}$	$P_D = 172327.591656\ \text{sec}$
$\overline{P_T} = 172328.870591\ \text{sec}$	$P_T = 172328.181014\ \text{sec}$
$\overline{P_R} = 57442.803624\ \text{sec}$	$P_R = \mathbf{53583.802014}\ \text{sec}$
$\overline{P_S} = 171392.912891\ \text{sec}$	$P_S = 171976.390480\ \text{sec}$
$\overline{P_L} = 160604.333317\ \text{sec}$	$P_L = 168061.463400\ \text{sec}$
$H_P = 40473.858306\ \text{km}$	$H_A = 80632.711082\ \text{km}$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P\,\overline{P_A} = -719°.999155$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.991850$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_P\,P_A = -719°.999154$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719°.993861$

Tabelle 26-56: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer rechtläufigen wahren $\left(P_T \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn. Schrittweite Δa=1 km, Genauigkeitsgrenzen $|\Delta\overline{P}| = 10^{-11}$ sec, $\Delta(a) = 10^{-9}$ km.. Fundamental Konstante (TCB): $R_E = 6378.1366\,\text{km}$, $\mu_{\odot} = 398600.4356\ \text{km}^3/\text{s}^2$, $\dot{\Theta}[1984] = 0.72921158573340 \times 10^{-4}$ rad/sec, $J_2 = 0.001082625379977$.

26.10.1.2 Der (a,i)- Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung der tropischen Bewegung mit der Erdrotation

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird, ähnlich wie in ähnlichen Fällen[1], die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.1$ angegeben. Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.10.1.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zur Inklination $\bar{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\bar{e}_0$=0,1, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Y\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.0, die

[1] z.B. in Abschnitt 26.9.1.2 auf Seite 544

obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct(e_B) \equiv r_P - r_{P,\min} \tag{26.326}$$

berechnet werden, wenn sie auf die vorgegebene Mindesthöhe $r_{P,\min} = H_{P,\min} + R_E$ bezogen werden soll. Hier ist r_P der momentane Perigäumsradius, der in der Iteration dem Minimalwert angepasst werden soll.

Das Ergebnis ist in Bild 26-66 (auf Seite 563) dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in [0°, 180°]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe $H_{P,\min}$=200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in [0.9016964 - 0.9017580]$. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität e_B=0.9017580 für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QTQ}}$ =66958.49km.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QTQ}}_{cross,1} \approx$ 48°.8 bzw. $\overline{i_{QTQ}}_{cross,2} \approx 131°.2$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTQ}}_{cross} \approx 66931.2$ km (zum Vergleich: siehe in Formel (26.158)[1]: $\overline{a_{QTR}}_{K} = \sqrt[3]{4\mu/\dot{\Theta}^2}$ = 66931.4512142 km). Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $(\overline{P_T} \triangleq P_Q)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus Bedingungsfunktion (26.323) für Äquivalenzbahnen ergibt sich

$$\overline{n_T} - n_Q = \overline{n_T} - \frac{2\pi}{P_Q} = \dot{\Theta} = \overline{n_K} + (M_0)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \sigma_i \dot{\Omega}_s - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad . \tag{26.327}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $(M_0)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{26.328}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[1+\sqrt{1-e^2} - \cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right) + 2\sigma_i \cos i\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,n_K} - 1\right) \tag{26.329}$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität (e_1, e_2) ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$A_0 \cos^2 i + B_0 |\cos i| + C_0 = 0 \tag{26.330}$$

mit den Abkürzungen

[1] Abschnitt 26.8.1.1

$$A_0 := E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right)-E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right)$$
$$B_0 := 2\left(E_2-E_1\right) \qquad (26.331)$$
$$C_0 := E_2-E_1+E_2\sqrt{1-e_2^2}-E_1\sqrt{1-e_1^2} \quad .$$

Ihre Lösungen unter Verwendung der Diskriminante Q_0 sind

$$Q_0 := -\frac{1}{2}\left[B_0+\mathrm{sgn}\left(B_0\right)\sqrt{B_0^2-4A_0C_0}\right] \;,\; \left|\cos i_1\right| = \frac{Q_0}{A_0} \;,\; \left|\cos i_2\right| = \frac{C_0}{Q_0} \quad . \quad (26.332)$$

In Tabelle 26-57 sind in Ergänzung zu Bild 26-66 einige spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0,0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung i_{cross} werden die großen Bahnhalbachsen a_{cross} mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.10.1.1 (auf Seite 555) berechnet .

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	66932.76	---	---	---	---
e=0.1	66932.79	49°.586764	66931.468831	66930.74	130°.413236
e=0.2	66932.86	49°.571270	66931.469397	66930.70	130°.428730
e=0.3	66933.00	49°.543758	66931.470401	66930.62	130°.456242
e=0.4	66933.23	49°.501236	66931.471953	66930.49	130°.498764
e=0.5	66933.63	49°.438354	66931.474244	6930.28	130°.561646
e=0.6	66934.34	49°.345395	66931.477618	66929.89	130°.654605
e=0.7	66935.78	49°.203399	66931.482713	66929.10	130°.796601
e=0.8	66939.57	48°.969895	66931.490660	66927.01	131°.030105
e=0.85	66944.50	48°.787815	66931.495754	66924.28	131°.212185
e=0.9	66957.66	48°.520089	66931.496606	66916.92	131°.479911
e_B	66958.49	48°.508283	66931.496233	66916.47	131°.491717

Tabelle 26-57: Einige ausgewählte Bahnparameter von $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen mit aufsteigenden Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität e_B =0.9017580.

Man beachte, dass die mittlere Inklination i_{cross} in Bild 26-66 und Tabelle 26-57 mit den entsprechenden Werten im Fall einer $\left(\overline{P_T} \triangleq P_E\right)$ – Äquivalenzbahn übereinstimmen. Dies ist eine Folge der Übereinstimmung der betreffenden Formeln (26.288) und (26.330). Auch wenn die Zahlenwerte der entsprechenden großen Bahnhalbachsen a_{cross} natürlicher Weise weit auseinander liegen, sind die graphischen Darstellungen der (a,i)-Bereiche in Bild 26-60 und Bild

26-66 sehr ähnlich. Allerdings sind die Grenzexzentrizitäten in den beiden Fällen unterschiedlich.

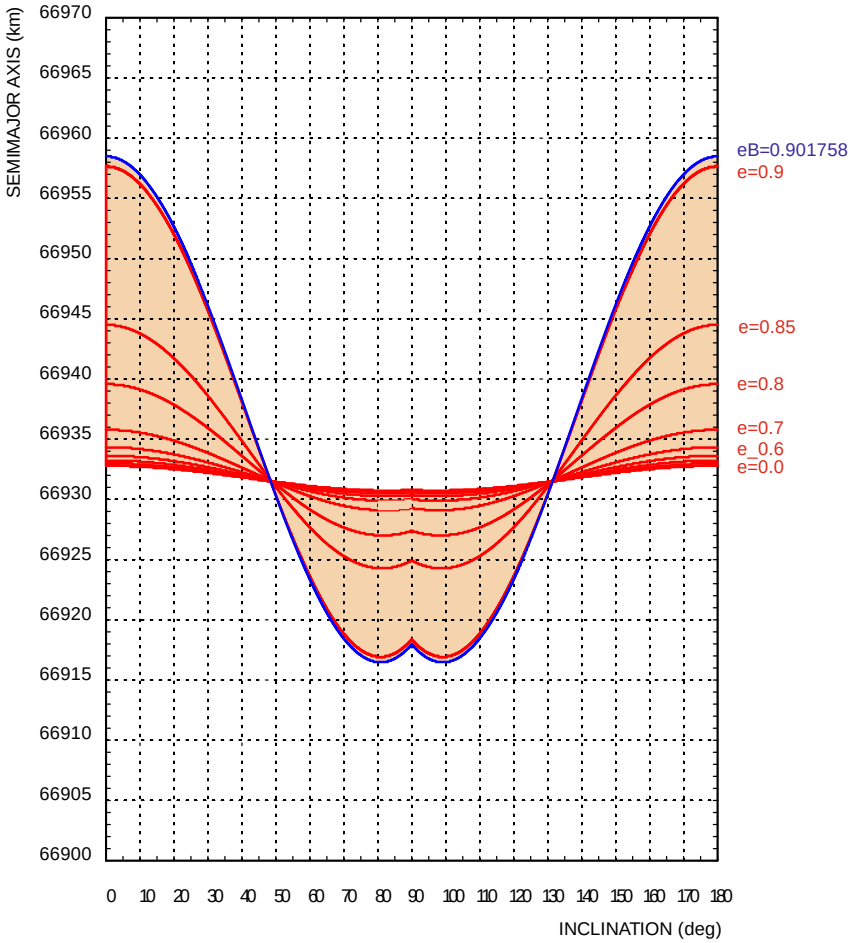


Bild 26-66: Das (a,i) -Gebiet aller möglichen $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahnen für einige ausgewählte Exzentrizitäten

Aufgabenstellungen:

1. Deute die unterschiedlichen Umlaufzeiten in Tabelle 26-55 und in Bezug auf die Satellitenbewegung. Was kann daraus auf verschiedene Anwendungen, wie etwa die Erdbeobachtung, geschlossen werden?
2. Bestimme an Stelle der Kreuzungspunkte in Bild 26-66 die Änderung des Kurvenverlaufs mit Hilfe der verschwindenden Krümmung der einzelnen Kurven.
3. Berechne die Inklination $\overline{i_{QTQ}}$ einer $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)-$ und einer $\left(P_T \triangleq P_Q\right)-$Äquivalenzbahn, wenn die Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ vorgegeben sind.
4. Berechne die Exzentrizität $\overline{e_{QTQ}}$ einer $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Q\right)-$ und einer $\left(P_T \triangleq P_Q\right)-$Äquivalenzbahn, wenn die Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ vorgegeben sind.

26.10.2 Anomalistischer Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit

26.10.2.1 Eigenschaften der anomalistischen Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit

Mit der mittleren anomalistischen Satellitenbewegung[1] (22.40) muss eine $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_A} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \tag{26.333}$$

erfüllen. Damit kann ein *Kepler*sches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa für die große Bahnhalbachse,

$$fct\left(\overline{a_{QAQ}}\right) \equiv \overline{n_A}\left(\bar{a}\right) - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \tag{26.334}$$

iterativ berechnet werden.

Äquivalenzbahn	$\overline{a_{QAQ}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$
$\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)-$	66931.364969	0.0	60°
$\left(P_A \triangleq P_Q\right)-$	66931.447213	0.0	60°
$\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)-$	66931.320582	0.5	60°
$\left(P_A \triangleq P_Q\right)-$	66931.320581	0.5	60°
$\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)-$	66930.952224	0.5	85°
$\left(P_A \triangleq P_Q\right)-$	66930.952241	0.5	85°
$\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)-$	66932.188895	0.5	155°
$\left(P_A \triangleq P_Q\right)-$	66932.188923	0.5	155°

Tabelle 26-58: Die mittlere große Bahnhalbachse einiger mittlerer $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)$ – und wahrer $\left(P_A \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen bei Kopplung der anomalistischen Bewegung mit zwei Sterntagen mittlerer Umlaufzeit

Als Anfangswert für die Berechnung der großen Bahnhalbachse empfiehlt sich der Wert (26.158) $\overline{a_{QTR\,K}} = \sqrt[3]{4\mu / \dot{\Theta}^2}$ =66931.4512142 km. Falls eine wahre $\left(P_A \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit der wahren Anomalie als Bahnwinkel die wahre anomalistische Umlaufzeit P_A mit der überlagerten Funktion (22.60)

$$fct\left[P_A\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\upsilon\left(t_0 + P_A\right) - \upsilon\left(t_0\right)\right] = 0 \quad . \tag{26.335}$$

berechnet werden. Anschließend muss mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse $\bar{a}$ die Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a_{QAQ}}\right) \equiv P_A\left(\bar{a}\right) - P_E = 0 \tag{26.336}$$

[1] Abschnitt 22.2.3

gelöst werden. Der gesamte Vorgang (26.335) - (26.336) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis eine vorgegebene Grenze ΔP mit der Bedingung $\left|P_A - P_Q\right| < \Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Tabelle 26-58 enthält die Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination.

26.10.2.2 Der (a,i)- Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung der anomalistischen Bewegung mit zwei Sterntagen mittlerer Umlaufzeit

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird die Neigung $\overline{i_0}$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ angegeben. Wird eine Exzentrizität $\overline{e_0}$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\overline{a_0}$ nach der Methode in Abschnitt 26.10.2.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\overline{a_0}$ zur Inklination $\overline{i_0}$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\overline{e_0}$=0.0, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B.

Das Ergebnis ist in Bild 26-67 (auf Seite 566) dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in [0°, 180°]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe $H_{P,\min}$=200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in$[0.9017303--0.9017303]. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität e_B = 0.9017303 für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QAQ}} = 66939.60$ km.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QTQ\,cross,1}} \approx 55°$ bzw. $\overline{i_{QAQ\,cross,2}} \approx 125°$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QTQ\,cross}} \approx 66931.5$ km. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte. Die Grenzexzentrizität kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(e_B\right) \equiv r_P - r_{P,\min} \tag{26.337}$$

berechnet werden, wenn sie auf die vorgegebene Mindesthöhe $r_{P,\min} = H_{P,\min} + R_E$ bezogen werden soll. Hier ist r_P der momentane Perigäumsradius, der in der Iteration dem Minimalwert angepasst werden soll.

Aus der Bedingungsgleichung (26.333) für $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich die Gleichung für eine Kurve große Bahnhalbachse über der Inklination für einige Exzentrizitäten

$$\overline{n_A} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad . \tag{26.338}$$

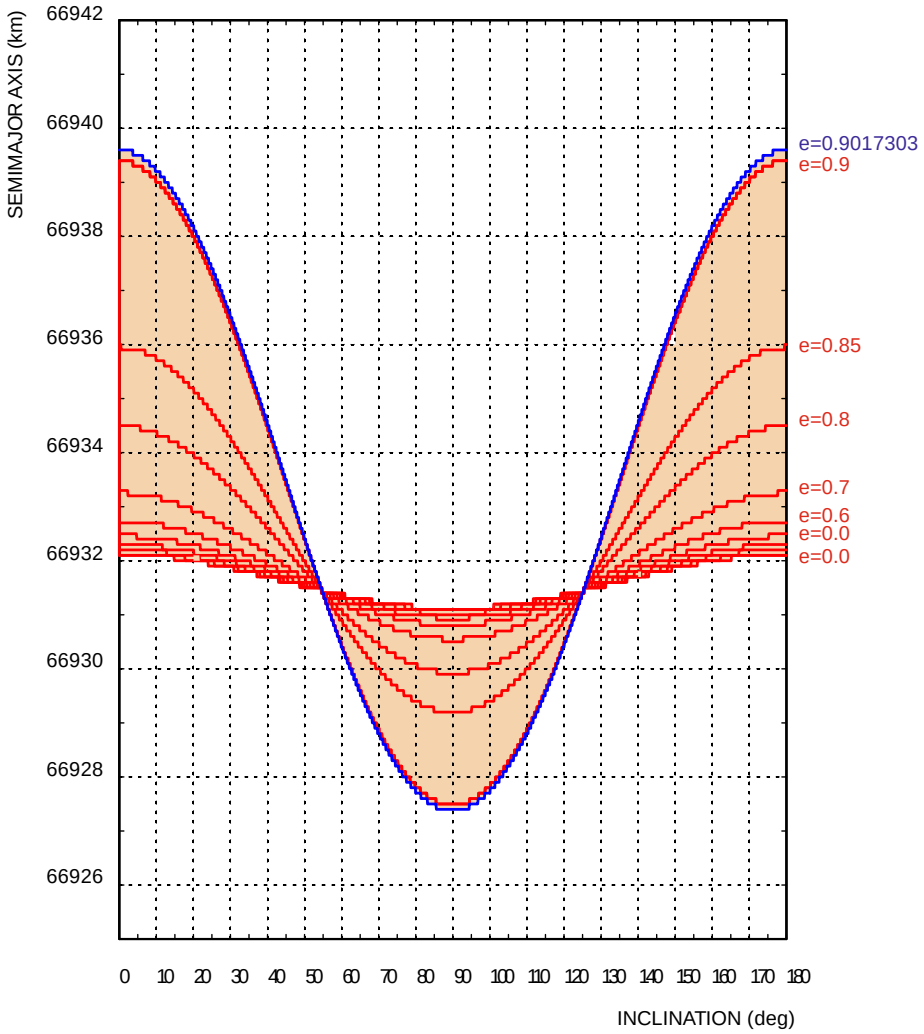


Bild 26-67: Das (a,i)-Gebiet möglicher $\left(\overline{P_A} \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen parametrisiert mit Exzentrizitäten $e \in$ [0.0 – 0.9017303]. Als mittlere minimale Bahnhöhe wird der Wert $H_{P,\min}$ =200 km angenommen.

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\cdot}$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{26.339}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E_{1,2}\left[\sqrt{1-e^2}\left(1-3\cos^2 i\right)\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,n_K}-1\right) \tag{26.340}$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, kann die Inklination direkt berechnet werden aus

$$f_{e1} - f_{e2} \equiv \left(E_2 - E_1\right)\left(1-3\cos^2 i\right) = 0 \tag{26.341}$$

Da $E_2 \neq E_1$ folgen die einzigen Lösungen erster Ordnung

$$\cos i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad i_1 = 54°.735610 \quad , \quad i_2 = 125°.264390 \;. \tag{26.342}$$

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	66939.40	---	---	66927.48	---
e=0.1	66932.11	54°.735610	66931.447221	66931.11	125°.264390
e=0.2	66932.21	54°.735610	66931.447220	66931.10	125°.264390
e=0.3	66932.21	54°.735610	66931.447220	66931.07	125°.264390
e=0.4	66932.30	54°.735610	66931.447219	66931.02	125°.264390
e=0.5	66932.46	54°.735610	66931.447217	66930.94	125°.264390
e=0.6	66932.73	54°.735610	66931.447212	66930.81	125°.264390
e=0.7	66933.25	54°.735610	66931.447192	66930.54	125°.264390
e=0.8	66934.49	54°.735610	66931.447092	66929.92	125°.264390
e=0.85	66935.95	54°.735610	66931.446856	66929.20	125°.264390
e=0.9	66939.40	54°.735610	66931.445665	66927.48	125°.264390
e_B	66939.60	54°.735610	66931.445566	66927.38	125°.264390

Tabelle 26-59: Einige ausgewählte Bahnparameter von $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert nach aufsteigenden Exzentrizitäten. Die Grenzexzentrizität beträgt e_B =0.9017303. Als mittlere minimale Bahnhöhe wird der Wert $H_{P,\min}$ =200 km angenommen.

In Tabelle 26-59 sind in Ergänzung zu Bild 26-67 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigungen $\overline{i_{QAQ\,cross,1,2}}$ werden die großen Bahnhalbachsen $\overline{a_{QAQ\,cross}}$ mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.10.2.2 berechnet . Auch wenn in allen Fällen dieselben Werte für die Inklination $\overline{i_{QAQ\,cross,1,2}}$ verwendet werden, ist die zugehörige große Bahnhalbachse unter Verwendung des vollständigen Bahnmodells minimal verändert.

Aufgabenstellungen:

1. Berechne die Inklination $\overline{i_{QAQ}}$ einer $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)-$ und einer $\left(P_A \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahn, wenn die Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ vorgewählt sind
2. Berechne die Exzentrizität $\overline{e_{QAQ}}$ einer $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Q\right)-$ und einer $\left(P_A \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahn, wenn die Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ vorgewählt sind
3. Bestimme an Stelle der Kreuzungspunkte in Bild 26-67 die Änderung des Kurvenverlaufs mit Hilfe der verschwindenden Krümmung der einzelnen Kurven.

26.10.3 Drakonitische Satellitenbewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit

26.10.3.1 Basiseigenschaften der drakonitischen Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit

Mit der mittleren drakonitischen Satellitenbewegung[1] (23.46) muss eine $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)-$Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_D} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \tag{26.343}$$

erfüllen. Damit kann ein Keplersches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa die große Bahnhalbachse,

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \frac{2\pi}{\overline{n_A}\left(\bar{a}\right)} - \frac{4\pi}{\dot{\Theta}} = \overline{P_D}\left(\bar{a}\right) - P_Q = 0 \tag{26.344}$$

iterativ berechnet werden. Als Anfangswert für die Berechnung der großen Bahnhalbachse empfiehlt sich der Wert (26.158) $\overline{a_{QTR}}_K = \sqrt[3]{4\mu / \dot{\Theta}^2}$ =66931.4512142 km.

Äquivalenzbahn	$\overline{a_{QDQ}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$
$\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)-$	66931.447213	0.0	60°
$\left(P_D \triangleq P_Q\right)-$	66931.447213	0.0	60°
$\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)-$	6931.466779	0.5	60°
$\left(P_D \triangleq P_Q\right)-$	66931.362787	0.5	60°
$\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)-$	66930.389537	0.5	85°
$\left(P_D \triangleq P_Q\right)-$	66930.789787	0.5	85°
$\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)-$	66934.006155	0.5	155°
$\left(P_D \triangleq P_Q\right)-$	66932.713484	0.5	155°

Tabelle 26-60: Die mittlere große Bahnhalbachse einiger mittlerer und wahrer Äquivalenzbahnen bei Kopplung der drakonitischen mittleren Satelliten Bewegung mit einer Umlaufzeit in zwei mittleren Sterntagen.

Falls eine wahre $\left(P_D \triangleq P_Q\right)-$Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit dem Argument der Breite *u* als Bahnwinkel und der näherungsweisen großen Bahnhalbachse die wahre drakonitische Umlaufzeit P_D mit der überlagerten Funktion[2] (23.167)

$$fct\left[P_D\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[u\left(t_0 + P_D\right) - u\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{26.345}$$

berechnet werden. Anschließend wird mit der erhaltenen wahren Umlaufzeit P_D die Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv P_D\left(\bar{a}\right) - P_Q = 0 \tag{26.346}$$

[1] Abschnitt 23.2.2

[2] Abschnitt 23.3.4

gelöst. Der gesamte Vorgang (26.345) - (26.346) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis für die berechnete große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDQ}}$ eine vorgegebene Grenze $\left|P_D - P_Q\right| < \Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Tabelle 26-60 enthält die Berechnung der mittleren Halbachse einiger mittlerer sowie wahrer Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination.

26.10.3.2 Der (a,i)- Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung der drakonitischen Bewegung mit der Erdrotation

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird die Neigung $\overline{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ angegeben. Wird eine Exzentrizität $\overline{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.10.3.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ zur Inklination $\overline{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\overline{e}_0$=0.0, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann etwa durch Anwendung der Formel (26.337) berechnet werden.

Das Ergebnis ist in Bild 26-68 (auf Seite 570) dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in [0°, 180°]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe $H_{P,\min}$ =200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in [0.9016985, 0.9017857]$. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität $e_B = 0.9017857$ für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QDQ}} = 6697737$ km.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QDQ\,cross}} \approx 50°.1$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDQ\,cross}} \approx 66931$ km. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (26.343) für Äquivalenzbahnen ergibt sich

$$\overline{n_D} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad . \tag{26.347}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{26.348}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet

$$f_e \equiv E\left[1+\sqrt{1-e^2}-\cos^2 i\left(5+3\sqrt{1-e^2}\right)\right]=\frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,n_K}-1\right) \tag{26.349}$$

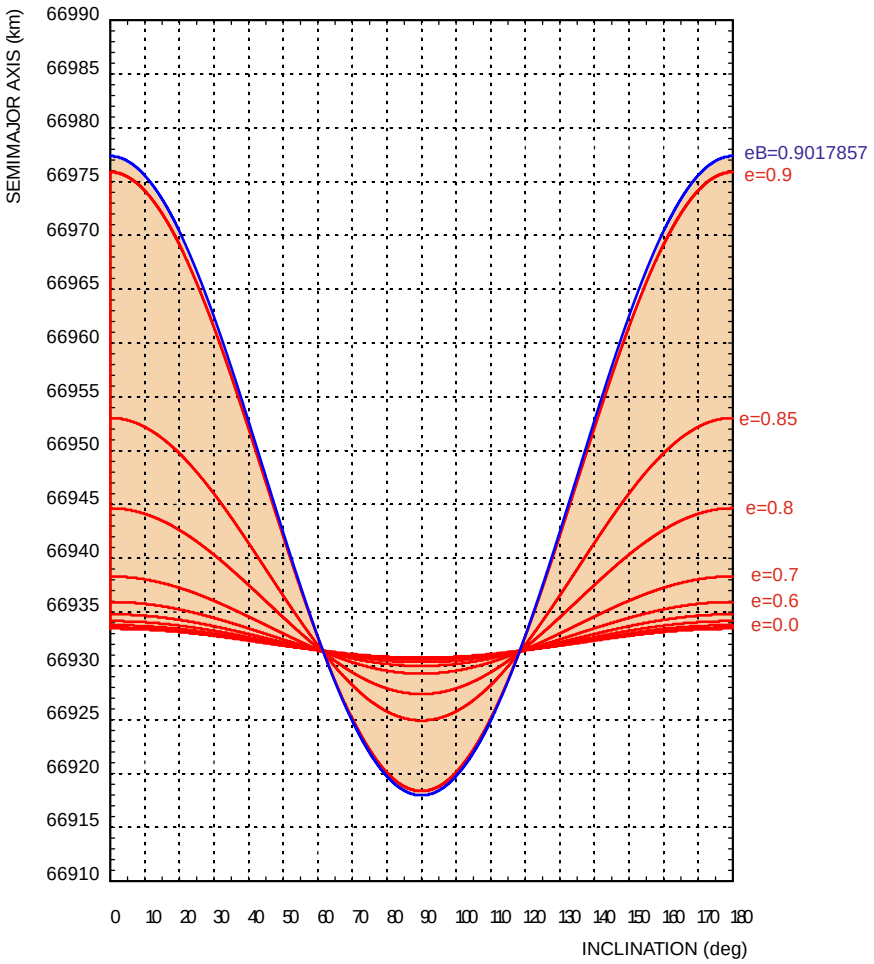


Bild 26-68: Der (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen für einige Exzentrizitäten aus dem Intervall $e \in$ [0.0 - 0.9017857]

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$f_{e2}-f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + C_0 = 0 \tag{26.350}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_0 &:= E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right)-E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right) \\ C_0 &:= E_2-E_1+E_2\sqrt{1-e_2^2}-E_1\sqrt{1-e_1^2} \quad . \end{aligned} \tag{26.351}$$

Ihre Lösungen sind

$$\cos i_1 = \sqrt{-\frac{C_0}{A_0}} \quad , \quad \cos i_2 = -\sqrt{-\frac{C_0}{A_0}} \quad . \tag{26.352}$$

In Tabelle 26-61 sind in Ergänzung zu Bild 26-68 einige spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen

Neigungen $\overline{i_{QDQ\,cross,1,2}}$ werden die großen Bahnhalbachsen $\overline{a_{QDQ\,cross}}$ mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.10.3.1 berechnet .

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	66975.90	---	---	66918.37	---
e=0.1	66933.46	60°.578507	66931.424333	66930.78	119°.421493
e=0.2	66933.57	60°.593390	66931.423747	66930.74	119°.406610
e=0.3	66933.79	60°.619787	66931.422707	66930.67	119°.380213
e=0.4	66934.17	60°.660509	66931.421102	66930.55	119°.339491
e=0.5	66934.80	60°.720565	66931.418734	66930.36	119°.279435
e=0.6	66935.95	60°.808985	66931.415237	66930.00	119°.191015
e=0.7	66938.31	60°.943229	66931.409880	66929.28	119°.056771
e=0.8	66944.65	61°.161884	66931.400763	66927.39	118°.838116
e=0.85	66953.05	61°.330617	66931.392704	66924.92	118°.669383
e=0.9	66975.90	61°.575992	66931.374791	66918.37	118°.424008
e_B	66977.37	61°.586910	66931.373604	66917.97	118°.413090

Tabelle 26-61: Ausgewählte Parameter einiger $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert nach aufsteigenden Exzentrizitäten, Grenz Exzentrizität e_B =0.9017857. Minimale Perigäumshöhe $H_{P,\min}$ =200 km

26.10.3.3 Beispiel einer rückläufigen drakonitischen Bewegung in 2 Sterntagen Umlaufzeit

Während Meridian-bezogene Satellitenbahnen ausschließlich rechtläufige Bahnen sind, können im Höhenbereich der Meridian-bezogenen Äquivalenz-Bewegungen auch rückläufige Bahnen gefunden werden. Solche Bahnen werden auf die Umlaufzeit P_Q = 2 Sterntage bezogen. In diesem Abschnitt werden eine rückläufige hochexzentrische mittlere $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – und eine wahre $\left(P_D \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn untersucht. Der Unterschied der meridionalen retrograden Bewegung zur vorgegebenen drakonitischen Bewegung ist eklatant.

BEISPIEL 1: Berechne eine hochexzentrische ($\overline{e}_0$=0.8) rückläufige ($\overline{i}_0$=120°) mittlere $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn. Die Bahnparameter sind in Tabelle 26-62 zusammengestellt. ◄

$\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$	
$\overline{a_{QDQ}}$ =66931.700258 km, $\bar{e}_0$ =0.8, $\bar{i}_0$ =120°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°	
t_0 : 2021-12-06/12-0000.000.	
$\overline{P_K}$ = 172329.158259 sec	P_Q = 172328.181014 sec
$\overline{P_H}$ = 172333.082680 sec	P_H = 172330.792769 sec
$\overline{P_A}$ = 172330.629331 sec	P_A = 172330.629332 sec
$\overline{P_D}$ = 172328.181014 sec	P_D = 172330.466079 sec
$\overline{P_T}$ = 172337.984625 sec	P_T = 172331.773149 sec
$\overline{P_R}$ = 57443.816253 sec	P_R = 57443.816253 sec
$\overline{P_S}$ = 171401.928191 sec	P_S = 172192.623048 sec
$\overline{P_L}$ = 160612.249349 sec	P_L = 46240.415031 sec
H_P = 7008.203452 km	H_A = 114098.923865 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.992307$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.979521$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_s\,P_A = -719°.992307$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719°.989068$
$\dot{\Omega}_s$ =0.20740949375589088×10^{-8} rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ =0.51799874338192529×10^{-9} rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ =-0.31123786553500709×10^{-9} rad / sec	

Tabelle 26-62: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer rückläufigen mittleren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenz - Bahn für die Exzentrizität e=0.8 und die Inklination=120°, Epoche: 2021-12-06/12:00:0.00, Die Bahnparameter werden mit dem vollständigen Brouwerschen Bahnmodell berechnet. Fundamental Konstante: (TCB)

R_E = 6378.1366 km , $\mu_{\odot}$ = 398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 = 0.001082625379977 .

BEISPIEL 2: Berechne eine hochexzentrische ($\bar{e}_0$ =0.8) rückläufige ($\bar{i}_0$ =120°) wahre $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn. Die Bahnparameter sind in Tabelle 26-63 zusammengestellt. ◄

Aufgabenstellungen

1. Man deute die Meridian-bezogene Bewegung
2. Berechne die Inklination $\overline{i_{QDQ}}$ einer $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – und einer $\left(P_D \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahne, wenn die Bahnelemente $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ vorgewählt sind.
3. Berechne die Exzentrizität $\overline{e_{QDQ}}$ einer $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$ – und einer $\left(P_D \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahne, wenn die Bahnelemente $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ vorgewählt sind.
4. Man überlege den Grund für den großen Unterschied der mittleren $\overline{P_L}$ und der wahren P_L Mond-synodischen Bewegung.

$\left(\overline{P_D} \triangleq P_Q\right)$	
$\overline{a_{QDQ}}$ = 66931.108584 km, $\bar{e}_0$=0.8, $\bar{i}_0$=120°, $\bar{\Omega}_0$=0°, $\bar{\omega}_0$=0°, $\overline{M_{00}}$=0°	
t_0 : 2021-12-06/12-0000.000.	
$\overline{P_K}$ = 172326.873188 sec	P_Q = 172328.181014 sec
$\overline{P_H}$ = 172330.797627 sec	P_H = 172328.507706 sec
$\overline{P_A}$ = 172328.344266 sec	P_A = 172328.344268 sec
$\overline{P_D}$ = 172325.895939 sec	P_D = 172328.181014 sec
$\overline{P_T}$ = 172335.699593sec	P_T = 172329.488090 sec
$\overline{P_R}$ = 57443.562378 sec	P_R = 57443.562378 sec
$\overline{P_S}$ = 171399.667914 sec	P_S = 172190.341678 sec
$\overline{P_L}$ = 160610.264680 sec	P_L = 46240.043474 sec
H_P = 7008.085117 km	H_A = 114097.858852 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.982760$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -719°.969973$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_s\,P_A = -719°.982760$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -719°.979520$
$\dot{\Omega}_s = 0.20741591067884946\times10^{-8}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.51801476016362497\times10^{-9}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = -0.31124749693023691×10^{-9} rad / sec	

Tabelle 26-63: Berechnung der großen Bahnhalbachse einer rückläufigen wahre $\left(P_D \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenz -Bahn für die Exzentrizität e=0.8 und die Inklination=120°, Epoche: 2021-12-06/12:00:0.00. Die Bahnparameter werden mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell berechnet. Fundamentale Konstanten: (TCB)

R_E = 6378.1366 km , $\mu_\odot$ = 398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 = 0.001082625379977

26.10.4 *Hansen* Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit

26.10.4.1 Basiseigenschaften der Hansen Bewegung in zwei Sterntagen Umlaufzeit

Mit der mittleren *Hansen* Satellitenbewegung[1] (21.62) muss eine $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_H} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)^{\cdot}_s + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \cos\bar{i}_0 - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad . \tag{26.353}$$

erfüllen. Damit kann eine *Kepler*sches Bahnelement nach Vorgabe der anderen Bahnelemente mit Hilfe der Funktionsgleichung, etwa für die große Bahnhalbachse,

[1] Abschnitt 21.3

$$fct\left(\bar{a}\right) \equiv \overline{n_H}\left(\bar{a}\right) - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \tag{26.354}$$

iterativ berechnet werden. Als Anfangswert empfiehlt sich der Wert (26.158) $\overline{a_{QTR_K}} = \sqrt[3]{4\mu / \dot{\Theta}^2}$ =66931.4512142 km. Falls eine wahre $\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahn berechnet werden soll, muss mit dem *Hansen*schen Bahnwinkel ζ (21.45) die wahre *Hansen* Umlaufzeit P_H mit der überlagerten Funktion (21.66)

$$fct\left[P_H\left(t_0\right)\right] \equiv \sin\left[\zeta\left(t_0 + P_H\right) - \zeta\left(t_0\right)\right] = 0 \tag{26.355}$$

berechnet werden. Anschließend wird mit der erhaltenen großen Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ die Funktionsgleichung (21.72)

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \sin\left(\zeta\left[t_0 + P_H; \bar{a}_0\right] - \zeta\left[t_0; \bar{a}_0\right]\right) \triangleq P_H\left(\bar{a}\right) - P_Q = 0 \quad . \tag{26.356}$$

gelöst werden. Der gesamte Vorgang (26.355) - (26.356) muss mehrfach iterativ durchlaufen werden, bis eine vorgegebene Grenze $\left|P_H - P_Q\right| < \Delta P$ unterschritten wird.

BEISPIEL: Die Berechnung der mittleren Halbachse einiger mittlerer $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)-$ sowie wahrer $\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$Äquivalenzbahnen nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination (siehe in Tabelle 26-64).

Äquivalenzbahn	$\overline{a_{QHQ}}$ [km]	$\bar{e}_0$	$\bar{i}_0$
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)-$	66932.748267	0.0	5°
$\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$	66932.747558	0.0	5°
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)-$	66931.282710	0.0	60°
$\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$	66931.282004	0.0	60°
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)-$	66931.174331	0.5	60°
$\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$	66931.278366	0.5	60°
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)-$	66930.380651	0.5	85°
$\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$	66930.787222	0.5	85°
$\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)-$	66933.045317	0.5	155°
$\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$	66932.436137	0.5	155°

Tabelle 26-64: Die große Bahnhalbachse einiger mittlerer und wahrer Äquivalenzbahnen bei Kopplung der Hansen Bewegung mit der Umlaufzeit in zwei Sterntagen .

26.10.4.2 Der (a,i)- Bereich möglicher Äquivalenzbahnen durch Kopplung der Hansen Bewegung mit der Umlaufzeit in zwei Sterntagen

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird, ähnlich wie in ähnlichen (vorherigen) Fällen, die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.02$ vorgegeben. Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann

die entsprechende große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.10.4.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ zur Inklination $\overline{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\overline{e}_0$=0.0, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(e_B\right) \equiv r_P - r_{P,\min} \tag{26.357}$$

berechnet werden, wenn sie auf die vorgegebene Mindesthöhe $r_{P,\min} = H_{P,\min} + R_E$ bezogen werden soll. Hier ist r_P der momentane Perigäumsradius, der in der Iteration dem Minimalwert $r_{P,\min}$ angepasst werden soll.

Das Ergebnis ist in Bild 26-69 (auf Seite 576) dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in \left[0°, 180°\right]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe $H_{P,\min}$=200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in$ [0.9016985, 0.9017580]. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität e_B= 0.9017580 für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QHQ}}$ =66958.49 km.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QHE\,cross}} \approx 54°$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QHQ\,cross}} \approx 66931.5$ km. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)$- Äquivalenzbahnen bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Aus der Bedingungsgleichung (26.353) für Äquivalenzbahnen ergibt sich die Kurvengleichung

$$\overline{n_H} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s + \dot{\Omega}_s \cos \overline{i}_0 - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad . \tag{26.358}$$

Unter Verwendung der säkularen Anteile der Variationsgleichungen erster Ordnung $\left(M_0\right)_s^{\cdot}, \dot{\omega}_s, \dot{\Omega}_s$ und mit den Abkürzungen

$$n_K = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;,\; E_2 = \frac{1}{\left(1-e_2^2\right)^2} \quad , \tag{26.359}$$

wird eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet, wobei die Exzentrizität als Parameter stehen bleibt,

$$f_e \equiv E\left[1+\sqrt{1-e^2} - 3\cos^2 i\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{2\,n_K} - 1\right) \tag{26.360}$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, bleibt eine quadratische Gleichung für den Kosinus der Neigung

$$f_{e2} - f_{e1} \equiv A_0 \cos^2 i + C_0 = 0 \tag{26.361}$$

mit den Abkürzungen

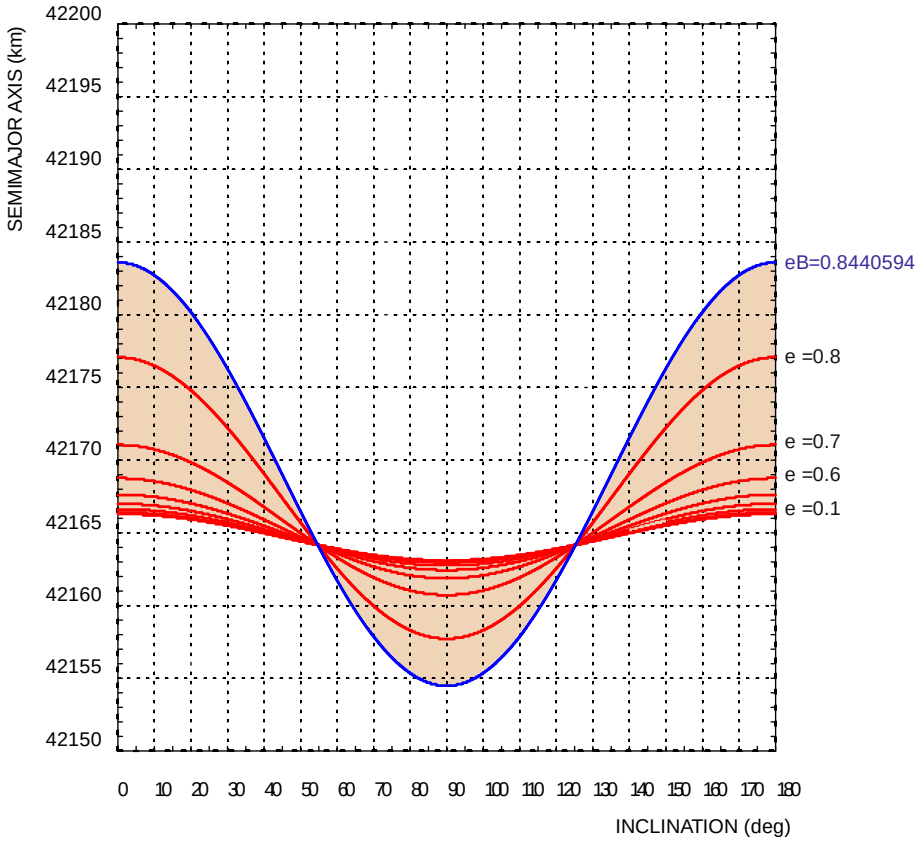


Bild 26-69: Das (a,i)-Gebiet von $\left(\overline{P_H} \mathrel{\hat{=}} P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen parametrisiert mit den Exzentrizitäten $e \in$ [0.0, 0.9017580). Minimale Perigäums Höhe $H_{P,\min}$ = 200 km.

$$A_0 := -3E_1\left(1+\sqrt{1-e_1^2}\right)+3E_2\left(1+\sqrt{1-e_2^2}\right)$$
$$C_0 := E_2 - E_1 + E_2\sqrt{1-e_2^2} - E_1\sqrt{1-e_1^2} \quad . \tag{26.362}$$

Ihre Lösungen sind

$$\cos i_1 = \sqrt{-\frac{C_0}{A_0}} \quad , \quad \cos i_2 = -\sqrt{-\frac{C_0}{A_0}} \quad . \tag{26.363}$$

In Tabelle 26-65 sind in Ergänzung zu Bild 26-69, spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(\overline{i_{QHQ\ cross,1,2}}, \overline{a_{QHQ\ cross}}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit $\overline{e}_0$=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung $\overline{i_{QHQ\ cross,1,2}}$ werden die großen Bahnhalbachsen $\overline{a_{QHQ,cross}}$ mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.10.4.1 berechnet. Es fällt auf, dass sich die Kopplung der *Hansen* Bewegung in 2 Sterntagen nur je für jeweils genau ein und dieselbe charakteristische Neigung ereignet, während sich die zugehörigen charakteristischen großen Bahnhalbachsen geringfügig ändern.

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	66957.66	---	---	66918.37	---

e=0.1	66932.79	54°.735610	66931.447213	66930.78	125°.264390
e=0.2	66932.86	54°.735610	66931.447211	66930.74	125°.264390
e=0.3	66933.00	54°.735610	66931.447208	66930.67	125°.264390
e=0.4	66933.23	54°.735610	66931.447202	66930.55	125°.264390
e=0.5	66933.63	54°.735610	66931.447189	66930.36	125°.264390
e=0.6	66934.34	54°.735610	66931.447154	66930.00	125°.264390
e=0.7	66935.78	54°.735610	66931.447038	66929.28	125°.264390
e=0.8	66939.57	54°.735610	66931.446415	66927.39	125°.264390
e=0.85	66944.50	54°.735610	66931.444851	66924.92	125°.264390
e=0.9	66957.66	54°.735610	66931.436118	66918.37	125°.264390
e_B	66958.49	54°.735610	66931.435324	66917.97	125°.264390

Tabelle 26-65: Spezielle Parameters von $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahnen, parametrisiert nach aufsteigenden Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität e_B =0.9017580. Minimale Perigäums Höhe $H_{P,\min}$ = 200 km

Aufgabenstellungen:

(1) Berechne den Richtungswechsel der Kurven Bild 26-6 in der Umgebung der Kreuzungspunkte durch Anwendung der verschwindenden Krümmung für die einzelnen Kurven.

(2) Berechne die Inklination $\overline{i_{QHQ}}$ von mittleren $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)-$ und von wahren $\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahnen bei Vorgabe der Bahnparameter $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$.

(3) Berechne die Exzentrizität $\overline{e_{QHQ}}$ von mittleren $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Q\right)-$ und von wahren $\left(P_H \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahnen bei Vorgabe der Bahnparameter $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$.

26.10.5 *Kepler* Bewegung mit zwei Sterntagen Umlaufzeit

26.10.5.1 Basiseigenschaften der Kepler Bewegung mit zwei Sterntagen Umlaufzeit

Mit der mittleren *Keplerschen* Satellitenbewegung $\overline{n_K} = \sqrt{\mu / \overline{a}^3}$ muss eine $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahn die Bedingung

$$\overline{n_K} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \quad . \tag{26.364}$$

Erfüllen. Damit ist die große Bahnhalbachse einheitlich für ALLE $\left(\overline{P_K} \triangleq P_E\right)-$ Äquivalenzbahnen eindeutig festgelegt (siehe Formel (26.280)):

$$\sqrt{\frac{\mu}{(\overline{a}_0)^3}} - \frac{\dot{\Theta}}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \overline{a_{QKQ}} = \sqrt[3]{\frac{4\mu}{\dot{\Theta}^2}} = 66931.447220 \text{ km} \quad . \tag{26.365}$$

Dieser Wert ist in gleicher Weise für eine wahre $\left(P_K \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn gültig, wenn wie im *Brower*schen Bahnmodell üblich die mittlere Bahnhalbachse benötigt wird.

26.10.5.2 Beispiel der Bahnparameter einer Äquivalenzbahn aus der Kopplung der Kepler*schen Bewegung in 2 Sterntagen*

BEISPIEL 1: Eine mittlere $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn habe die Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.3 und Inklination $\bar{i}_0$=85°. Die Bahnparameter sind in Tabelle 26-66 zusammengestellt.

BEISPIEL 2: Eine wahre $\left(P_K \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn habe die Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.3 und Inklination $\bar{i}_0$=85°. Die Bahnparameter stimmen mit den in Tabelle 26-66 zusammengestellten Bahnparametern identisch überein. Entsprechend Formel (26.365) stimmen auch die mittlere und wahre *Kepler*sche Umlaufzeit überein.

$\left(\overline{P_K} \triangleq P_Q\right)$	
$\overline{a_{QKQ}}$ =66931.447220 km, $\bar{e}_0$=0.3, $\bar{i}_0$=85°, $\bar{\Omega}_0$=0°, $\bar{\omega}_0$=0°, $\overline{M_{00}}$=0°	
t_0 : 2022-03-24/12:00:0.0	
$\overline{P_K}$ = 172328.181014 sec	P_Q =172328.181014 sec
$\overline{P_H}$ = 172331.110810 sec	P_H = 172330.381581 sec
$\overline{P_A}$ = 172329.611385 sec	P_A = 172329.611317 sec
$\overline{P_D}$ = 172331.087499 sec	P_D = 172330.369607 sec
$\overline{P_T}$ = 172331.354961 sec	P_T = 172331.945950 sec
$\overline{P_R}$ = 172325.007184 sec	P_R = 172325.007184 sec
H_P = 40473.876454 km	H_A = 80632.744786 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720°.006804$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -720°.012702$
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -720°.006803$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.009703$

Tabelle 26-66: Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKQ}}$ einer mittleren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$ – bzw. einer wahren $\left(P_K \triangleq P_Q\right)$ – Äquivalenzbahn zur Epoche: 2022-03-24/12:00:0.0, mit der Schrittweite Δa=5 km, den Genauigkeitsgrenzen $\left|\Delta\overline{P}\right| = 10^{-10}$ sec, $\Delta(a) = 10^{-10}$ km . Fundamentale Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 $\mathrm{km}^3/\mathrm{s}^2$, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. A posteriori Genauigkeit:

$$\Delta P = 0.58\times10^{-10}\ \text{sec}$$

Aufgabenstellungen:

1. Berechne die Inklination $\overline{i_{QKQ}}$ von mittleren $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Q\right)-$ und von wahren $\left(P_K \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahnen bei Vorgabe der Bahnparameter $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$.

2. Berechne die Exzentrizität $\overline{e_{QKQ}}$ von mittleren $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Q\right)-$ und von wahren $\left(P_K \triangleq P_Q\right)-$ Äquivalenzbahnen bei Vorgabe der Bahnparameter $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$.◀

+++

26.11 Satellitenbahnen bei Bezug auf eine beliebige fest vorgegebene Umlaufzeit

In diesem Kapitel sei eine feste Umlaufzeit P_Y vorgewählt. Eine der bekannten Satellitenbewegungen, anomalistisch, drakonitisch, tropisch usw., habe abhängig von vorgegebenen Bahnparametern, etwa den mittleren *Kepler*-Elementen $\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0, \bar{\Omega}_0, \bar{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ zur Epoche t_0 die mittlere Umlaufzeit $\overline{P_1}$ bzw. die wahre Umlaufzeit P_1. Mit einer geeigneten Ephemeridenrechnung können die Epocheelemente mit dem Formalismus der Äquivalenzbahnen berechnet werden. Wenn oskulierende Epocheparameter gewünscht werden, muss der Formalismus entsprechend wie üblich angepasst werden.
Die entsprechenden Äquivalenzbahnen $\left(\overline{P_1} \triangleq P_Y\right)$ und $\left(P_1 \triangleq P_Y\right)$ unterliegen bei geeigneter Wahl der Bahnparameter den Äquivalenzbedingungen

$$\overline{P_1} - P_Y = 0 \quad \text{bzw.} \quad P_1 - P_Y = 0 \ . \tag{26.366}$$

Beispielhaft werde, wie schon in der vorhergehenden Kapiteln vielfach demonstriert, aus der Äquivalenzbedingung die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach Vorauswahl der Exzentrizität $\bar{e}_0$ und der Inklination $\bar{i}_0$ und eventuell weiterer Bahnparameter im Fall einer mittleren Umlaufzeit $\overline{P_1}$ mit Hilfe der Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \overline{P_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)} - P_Y = 0 \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.367}$$

berechnet. Als Anfangsnäherung kann mit dem Formalismus des dritten *Kepler*schen Planetengesetzes der Ausdruck

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu P_Y^2}{4\pi^2}} \tag{26.368}$$

berechnet werden. Der Iterationsprozess wird abgebrochen, wenn für eine vorgewählte Genauigkeitsgrenze ΔP die Äquivalenzbedingung

$$\left|\overline{P_1} - P_Y\right| < \Delta P \tag{26.369}$$

erfüllt ist. Das numerische Verfahren mit fortgeschrittener Halbierung verlangt zur Verfeinerung des Ergebnisses für die große Bahnhalbachse eine Genauigkeitsgrenze Δ(a).

Im Fall einer wahren Umlaufzeit P_1 muss mit Hilfe des Bahnwinkels *x* der betreffenden Bewegungsart zunächst die Umlaufzeit mit Hilfe der überlagerten Bedingungsfunktion

$$fct\left(P_1\right) \equiv \sin\left[x\left(t_0 + P_1^{(\nu)}\right) - x\left(t_0\right)\right] = 0 \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.370}$$

berechnet werden. Als Anfangsnäherung kann die feste vorgegebene Umlaufzeit P_Y gewählt werden:

$$P_1^{(0)} := P_Y \quad . \tag{26.371}$$

Die entsprechende Anfangshalbachse folgt aus Beziehung (26.368). Die Bedingungsfunktion (26.370) wird mit einer Halbachse $\overline{a}_0^{(\nu)}$ $\left(\nu = 0,1,2,3,\cdots\right)$ und den vorgewählten Bahnparametern $\overline{e}_0, \overline{i}_0, ...$ gelöst. Dazu werden die Schrittweite Δt und die Genauigkeitsgrenzen $\left|\sin\left[x\left(t_0 + P_1^{(\nu)}\right) - x\left(t_0\right)\right]\right| < \Delta P_1$ für die Funktion und $\Delta(t)$ für die Zeit verwendet. Als Ergebnis dieses ersten Prozesses wird die Umlaufzeit

$$P_1^{(\nu)} = P_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.372}$$

erhalten. Um schließlich die große Bahnhalbachse $\overline{a_{Q1Y}}$ einer $\left(P_1 \triangleq P_Y\right)-$ Äquivalenzbahn zu berechnen, wird mit den Genauigkeitsgrenzen ΔP und $\Delta(a)$ die Äquivalenzbedingung

$$\left|P_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) - P_Y\right| < \Delta P \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.373}$$

bearbeitet. Der gesamte Prozess (26.370) - (26.373) muss mehrfach durchlaufen werden.

26.11.1 Anomalistische Satellitenbewegung bezogen auf eine fest vorgegebene Umlaufzeit

Eine Satellitenbahn soll ausgewählt werden, die jeweils nach dem Zeitintervall P_Y den aufsteigenden Knoten bzw. einen anderen speziellen Bahnpunkt überfliegen soll. Die Aufgabe kann als eine $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Y\right)-$ oder $\left(P_A \triangleq P_Y\right)-$Äquivalenzbahn bearbeitet werden.

Im Fall mittlerer drakonitischer Umlaufzeit lautet die Äquivalenzbedingung

$$\overline{P_A} - P_Y = 0 \quad . \tag{26.374}$$

Mit der festen mittleren Bewegung $n_Y = 2\pi / P_y$ und der mittleren anomalistischen Bewegung (2.33) lautet die Äquivalenzbedingung für die mittleren Bewegungen

$$\overline{n_A} - n_Y = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} - n_Y = 0 \quad . \tag{26.375}$$

Ein Näherungsausdruck erster Ordnung kann mit den säkularen Ausdrücken erster Ordnung und mit den Abkürzungen

$$\overline{n_K} = \frac{1}{\overline{a}}\sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1 - e_{1/2}^2\right)^2} \;, \tag{26.376}$$

gebildet werden:

$$\overline{n_K}\left\{1 + B_2 \frac{E_{1/2}}{\overline{a}^2}\left[\sqrt{1-\overline{e}_{1/2}^2}\left(1 - 3\cos^2 \overline{i}\right)\right]\right\} = n_Y \quad . \tag{26.377}$$

26.11.1.1 Große Bahnhalbachse bei Kopplung von anomalistischer Bewegung an beliebige feste Umlaufzeit

Die große Bahnhalbachse einer $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Y\right)-$ Äquivalenzbahn kann nach (26.367) aus der Funktionsgleichung

$$fct\left(\overline{a}_0\right) \equiv \overline{P_A\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right)} - P_Y = 0 \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.378}$$

berechnet werden.

BEISPIEL 1: Berechne die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAY}}$ einer $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn bei Bezug der anomalistischen Bewegung auf die feste Umlaufzeit $P_Y = 2^h 15^m \triangleq 8100\,\text{sec}$. Gegeben seien die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.15 und die mittlere Inklination $\overline{i}_0$ =70°.

Die Näherungsgröße beträgt nach Formel (26.368) $\overline{a}_0^{(0)}$ =8717.314052 km.. Mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta P < 10^{-12}$ sec und Δ(a)<10^{-10} km liefert die Äquivalenzbedingung (26.378) die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAY}}$ =8715.617305 km. Die weiteren Bahnparameter sind in Tabelle 26-67 zusammengestellt. Die erreichte Genauigkeit liegt weit unter der vorgeschriebenen Genauigkeit $\Delta P \ll 10^{-12}$.◀

$\left(\overline{P_A} \triangleq P_Y\right)$	
$\overline{a_{QAY}}$ =8715.617305 km, $\overline{e}_0$ =0.15, $\overline{i}_0$ =70°, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0°	
$\overline{P_K}$ =8097.635227 sec	$\overline{P_Y}$ = 8100.000000 sec
$\overline{P_H}$ =8102.394003 sec	P_H =8101.748907 sec
$\overline{P_A}$ = 8100.000000 sec	P_A =8101.119399 sec
$\overline{P_D}$ = 8101.532163 sec	P_D =8101.119399 sec
$\overline{P_T}$ = 8104.052531 sec	P_T =8106.506053 sec
$\overline{P_R}$ = 8945.400666 sec	P_R =9269.347246 sec
$\overline{P_S}$ = 8106.134246 sec	P_S =8110.629228 sec
$\overline{P_L}$ = 8131.970153 sec	P_L =8160.232166 sec
H_P =1030.138110 km	H_A =3644.823301 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -33°.977619$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -33°.960766$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -33°.977589$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -33°.959036$
$\dot{\Omega}_s$ =-0.24119840545839660×10^{-6} rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ =-0.14670081894655856×10^{-6} rad / sec	
$(M_0)^{\cdot}_s$ =-0.22653016692610207×10^{-6} rad / sec	

Tabelle 26-67 : Berechnung der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QAY}}$ einer $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn mit fester Umlaufzeit $P_Y = 2^h 15^m$ und den *Kepler*-Elementen $\overline{e}_0$ =0.15, $\overline{i}_0$ =70°, zur Epoche: t_0 : 2022-04-03/12:00:0.0. Schrittweite Δa=1 km, Grenzgenauigkeiten $\Delta\overline{P} < 10^{-12}$ sec , Δ(*a*)=10^{-12} km . Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\ddot{\delta}}$ =398600.4418 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. a posteriori Genauigkeit: $\Delta P \ll 10^{-12}$ sec.

BEISPIEL 2: Berechne die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAY}}$ einer $\left(P_A \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn bei Bezug der anomalistische Bewegung auf die feste Umlaufzeit $P_Y = 2^h 15^m \triangleq 8100\,\text{sec}$. Gegeben seien die mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0$ =0.15 und die mittlere Inklination $\overline{i}_0$ =137°.

Die Näherungsgröße beträgt nach Formel (26.368) $\bar{a}_0^{(0)}$ = 8717.314052 km. Mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta P < 10^{-12}$ sec und Δ(a)=10^{-10} km liefert der Algorithmus (26.370) - (26.373) die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAY}}$ = 8718.888047 km. Die weiteren Bahnparameter sind in Tabelle 26-68 zusammengestellt. ◀

$\left(P_A \hat{=} P_Y\right)$	
$\overline{a_{QAY}}$ = 8718.888047 km, $\bar{e}_0$ =0.15, $\bar{i}_0$ =137°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{00}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ =8102.193898 sec	$\overline{P_Y}$ = 8100.000000 sec
$\overline{P_H}$ =8097.766022 sec	P_H = 8098.363574 sec
$\overline{P_A}$ = 8099.990581 sec	P_A = 8100.000000 sec
$\overline{P_D}$ = 8093.825498 sec	P_D = 8095.485930 sec
$\overline{P_T}$ = 8099.214448 sec	P_T = 8100.868674 sec
$\overline{P_R}$ = 7403.320381 sec	P_R = 7437.315415 sec
$\overline{P_S}$ = 8097.136285 sec	P_S = 8098.945056 sec
$\overline{P_L}$ = 8071.520895 sec	P_L = 8076.002175 sec
H_P = 1032.918240 km	H_A = 3648.584654 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -33°.803147$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -33°.577075$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -33°.803186$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -33°.583963$
$\dot{\Omega}_s = 0.51652020772859305\times10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.59085434923640788\times10^{-6}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s = 0.21094528833213631\times10^{-6}$ rad / sec	

Tabelle 26-68: Berechnung der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QAY}}$ der rückläufigen $\left(P_A \hat{=} P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn mit der fest vorgegebenen Umlaufzeit $P_Y = 2^h 15^m$ und den mittleren *Kepler*-Elementen $\bar{e}_0$ =0.15, $\bar{i}_0$ =137°, zur Epoche: t_0 : 2022-04-03/12:00:0.0. Schrittweite Δa=1 km, Genauigkeitsgrenzen $\Delta P < 10^{-10}$ sec , Δ(a)= 10^{-12} km . Fundamentale Konstanten: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. A posteriori Genauigkeit: $\Delta P < 2.7\times10^{-12}$ sec.

26.11.1.2 Der (a,i)-Bereich möglicher Satellitenbahnen bei Kopplung von anomalistischer Bewegung an ein beliebige feste Umlaufzeit

Um den (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_A} \hat{=} P_Y\right)$- Äquivalenzbahnen zu konstruieren, wird die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite Δi =0°.1 angegeben. Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.11.1.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zur Inklination $\bar{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher

$\left(\overline{P_A} \triangleq P_Y\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\overline{e}_0$=0.0, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(e_B\right) \equiv r_P - r_{P,\min} \tag{26.379}$$

berechnet werden, wenn sie auf die vorgegebene Mindesthöhe $r_{P,\min} = H_{P,\min} + R_E$ bezogen werden soll. Hier ist r_P der momentane Perigäumsradius, der in der Iteration dem Minimalwert angepasst werden soll.

Aus der Bedingungsgleichung (26.377) für $\left(\overline{P_A} \triangleq P_Y\right)$- Äquivalenzbahnen kann eine Aufteilung in einen Anteil mit der Inklination und der großen Bahnhalbachse formell hergeleitet werden

$$f_{e1,2} \equiv E_{1,2}\left[\sqrt{1-e_{1,2}^2}\left(1-3\cos^2 i\right)\right] = \frac{a^2}{B_2}\left(\frac{\dot{\Theta}}{n_K}-1\right) \tag{26.380}$$

Setzt man hier jeweils eine vorgegebene Exzentrizität $\left(e_1, e_2\right)$ ein und subtrahiert die beiden erhaltenen Ausdrücke, kann die Inklination direkt berechnet werden aus

$$f_{e1} - f_{e2} \equiv \left(E_2\sqrt{1-e_2^2} - E_1\sqrt{1-e_1^2}\right)\left(1-3\cos^2 i\right) = 0 \tag{26.381}$$

Da $E_2\sqrt{1-e_2^2} \neq E_1\sqrt{1-e_2^2}$, folgen die einzigen Lösungen erster Ordnung

$$\cos i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad i_1 = 54°.735610 \quad , \quad i_2 = 125°.264390 \quad . \tag{26.382}$$

Diese Lösungen für die charakteristischen Neigungen $\overline{i_{QAY}}_{char1} = i_1$ und $\overline{i_{QAY}}_{char2} = i_2$ sind somit unabhängig von der vorgewählten festen Umlaufzeit P_Y (entsprechend wie in den zuvor behandelten Fällen der Umlaufzeiten P_E und P_Q).

Um ein spezielles BEISPIEL für den Verlauf eines (a,i)-Bereichs vorzuführen, werde die feste Umlaufzeit $P_Y = 4^h30^m \triangleq 16200$ sec gewählt. Das Ergebnis ist in Bild 26-70 dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in \left[0°, 180°\right]$ auf. Nach Formel (26.368) beträgt der Anfangswert für die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0^{(0)}$ = 13837.873496 km. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe $H_{P,\min}$ =200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in \left[0.5245395 - 0.5248054\right]$. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität e_B=0.5248054 für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert von etwa $\overline{a_{QAY}}$ =13843.04 km.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklination $\overline{i_{QAY}}_{cross} \approx 55°$ und die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QAY}}_{cross} \approx 13838$ km. Dieser Bereich kann als charakteristisches Zentrum der mittleren $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_Y}\right)$- Äquivalenzbahnen mit der Umlaufzeit $P_Y = 4^h30^m \triangleq 16200$ sec bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

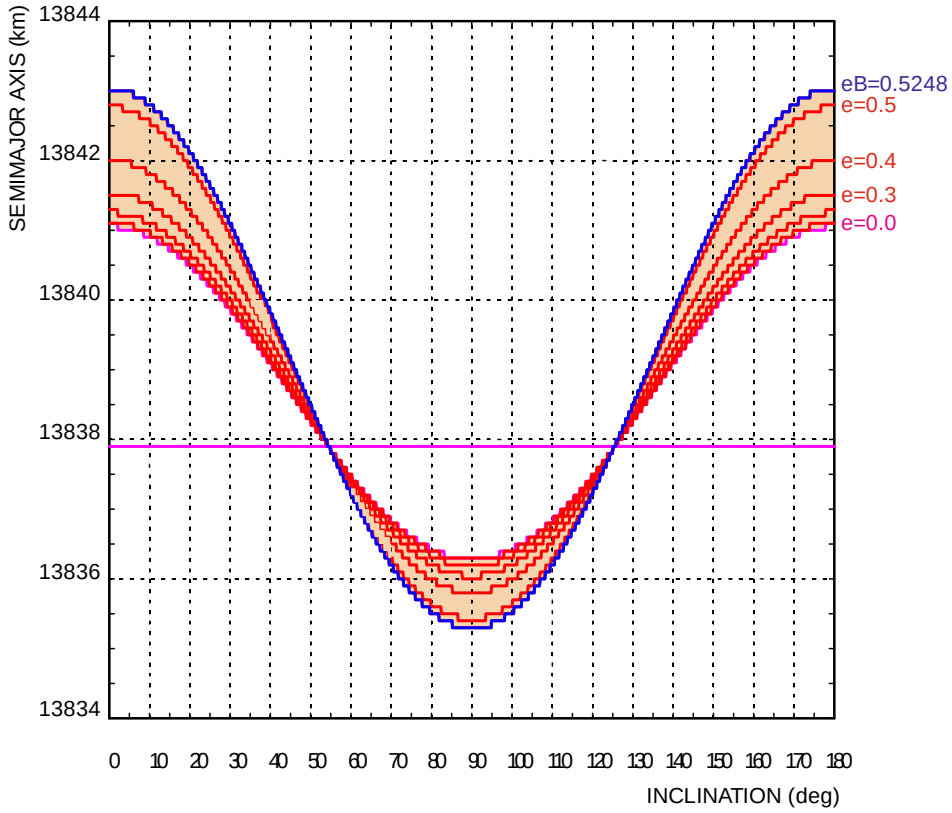


Bild 26-70: Das (a,i)-Gebiet der $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_Y}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der festen Umlaufzeit $P_Y = 4^h 30^m$, parametrisierte Exzentrizitäten $e \in [0.0, 0.5248054]$

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	13841.06	---	---	13836.28	---
e=0.1	13841.10	54°.735610	13837.873542	13836.26	125°.264390
e=0.2	13841.26	54°.735610	13837.873522	13836.18	125°.264390
e=0.3	13841.54	54°.735610	13837.873478	13836.04	125°.264390
e=0.4	13842.01	54°.735610	13837.873380	13835.81	125°.264390
e=0.5	13842.77	54°.735610	13837.873148	13835.42	125°.264390
e_B	13843.03	54°.735610	13837.873048	13835.29	125°.264390

Bild 26-71: Spezielle Parameter von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_Y}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der Umlaufzeit $P_Y = 4^h 30^m$, parametrisiert entsprechend aufsteigender Exzentrizitäten, Grenz-Exzentrizität e_B=0.5248054

In Tabelle 26-79 sind in Ergänzung zu Bild 26-70 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigungcharakter i_{cross} werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt in Abschnitt 26.11.1.1 berechnet . Auch wenn in allen Fällen derselbe

Wert für die charakteristische Inklination i_{cross} verwendet wird, ist die zugehörige große Bahnhalbachse unter Verwendung des vollständigen Bahnmodells minimal verändert.

26.11.2 Drakonitische Satellitenbewegung bezogen auf eine beliebige feste Umlaufzeit

Eine Satellitenbahn soll ausgewählt werden, die jeweils nach dem fest vorgewählten Zeitintervall P_Y den aufsteigenden Knoten bzw. einen anderen speziellen Bahnpunkt überfliegen soll. Die Aufgabe kann als eine $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)-$ oder $\left(P_D \triangleq P_Y\right)-$Äquivalenzbahn bearbeitet werden.

Im Fall mittlerer drakonitischer Umlaufzeit lautet die Äquivalenzbedingung

$$\overline{P_D} - P_Y = 0 \quad . \tag{26.383}$$

Mit der festen mittleren Bewegung $n_Y = 2\pi / P_y$ und der mittleren drakonitischen Bewegung (2.52) lautet die Äquivalenzbedingung für die mittleren Bewegungen

$$\overline{n_D} - n_Y = \overline{n_K} + \left(M_0\right)_s^{\cdot} + \dot{\omega}_s - n_Y = 0 \quad . \tag{26.384}$$

Ein Näherungsausdruck erster Ordnung kann mit den säkularen Ausdrücken erster Ordnung[1] und mit den Abkürzungen

$$\overline{\overline{n_K}} = \frac{1}{\bar{a}}\sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}}} \;,\; B_2 = -\frac{3}{4} J_2 R_E^2 \;,\; E_1 = \frac{1}{\left(1-e_1^2\right)^2} \;, \tag{26.385}$$

gebildet werden:

$$\overline{n_K}\left\{1 + B_2 \frac{E_1}{\bar{a}^2}\left[\sqrt{1-\bar{e}_1^2}\left(1-3\cos^2\bar{i}\right)+1-5\cos^2\bar{i}\right]\right\} = n_Y \quad . \tag{26.386}$$

Exzentrizität und Inklination können separiert werden im Vergleich zu anderen Bahnparametern in dem später benötigten Ausdruck

$$E_1\left[1+\sqrt{1-\bar{e}_1^2}-\cos^2\bar{i}\left(5+3\sqrt{1-\bar{e}_1^2}\right)\right] = \frac{\bar{a}^2}{B_2}\left(\frac{n_Y}{\overline{\overline{n_K}}}-1\right) \quad . \tag{26.387}$$

26.11.2.1 Große Bahnhalbachse bei Kopplung von drakonitischer Bewegung an beliebige feste Umlaufzeit

Die große Bahnhalbachse einer mittleren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)-$Äquivalenzbahn kann nach (26.367) aus der Funktionsgleichung

$$fct\left(\bar{a}_0\right) \equiv \overline{P_D\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right)} - P_Y = 0 \quad \langle \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.388}$$

berechnet werden.

BEISPIEL 1: Berechne die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDY}}$ einer mittleren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)-$Äquivalenzbahn bei Bezug der drakonitischen Bewegung auf die feste Umlaufzeit $P_Y = 1^h 30^m \triangleq 5200\,\text{sec}$. Gegeben seien die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.01 und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$=55°.

Die Näherungsgröße für die große Bahnhalbachse beträgt nach Formel (26.368) $\bar{a}_0^{(0)}$ =6652.555701 km. Mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta P < 10^{-12}\,\text{sec}$ und Δ(a)=10^{-9} km liefert die

[1] Etwa mit den Formeln (26.173) in Abschnitt 26.8.1.4

Äquivalenzbedingung (26.388) die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDY}}$ =6654.639296 km. Die weiteren Bahnparameter sind in Tabelle 26-69 zusammengestellt. ◀

$\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$	
$\overline{a_{QDY}}$ =6654.639296 km, $\overline{e}_0$ =0.01, $\overline{i}_0$ =55°, $\overline{\Omega}_0$ =0°, $\overline{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ =5402.537135 sec	$\overline{P_Y}$ = 5400.000000 sec
$\overline{P_H}$ =5402.650717 sec	P_H = 5402.647716 sec
$\overline{P_A}$ = 5402.589110 sec	P_A = 5402.751383 sec
$\overline{P_D}$ = 5400.000000 sec	P_D = 5400.051397 sec
$\overline{P_T}$ = 5404.623072 sec	P_T = 5407.951071 sec
$\overline{P_R}$ = 5766.313799 sec	P_R = 5982.008329 sec
$\overline{P_S}$ = 5405.548857 sec	P_S = 5409.421006 sec
$\overline{P_L}$ = 5417.025499 sec	P_L = 5428.332055 sec
H_P = 209.956303 km	H_A = 343.049089 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -22°.781080$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -22°.869544$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -22°.781764$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -22°.869762$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.99529382528089578×10^{-6} rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.55761527204087166×10^{-6} rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = -0.11188450119741518×10^{-7} rad / sec	

Tabelle 26-69: Berechnung der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QDY}}$ einer $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$– Äquivalenzbahn mit den mittleren *Kepler*-Elementen $\overline{e}_0$ =0.01, $\overline{i}_0$ =55°, zur Epoche: t_0 : 2022-03-15/12:00:0.0. Schrittweite Δa=50 km, Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} < 10^{-12}$ sec , $\Delta(a) < 10^{-9}$ km . Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. a posteriori Genauigkeit: $\Delta P < 10^{-12}$ sec.

Die große Bahnhalbachse einer wahren $\left(P_D \triangleq P_Y\right)$– Äquivalenzbahn kann mit dem Formelsystem (26.370) - (26.373) berechnet werden.

$\left(P_D \triangleq P_Y\right)$	
$\overline{a_{QDY}}$ =6654.597096 km, $\bar{e}_0$ =0.01, $\bar{i}_0$ =55°, $\bar{\Omega}_0$ =0°, $\bar{\omega}_0$ =0°, $\overline{M_{0\,0}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ = 5402.485746 sec	P_Y = 5400.000000 sec
$\overline{P_H}$ = 5402.599329 sec	P_H = 5402.596327 sec
$\overline{P_A}$ = 5402.537721 sec	P_A = 5402.699997 sec
$\overline{P_D}$ = 5399.948603 sec	P_D = 5400.000000 sec
$\overline{P_T}$ = 5404.571689 sec	P_T = 5407.899699 sec
$\overline{P_R}$ = 5766.255309 sec	P_R = 5981.946634 sec
$\overline{P_S}$ = 5405.497457 sec	P_S = 5409.369607 sec
$\overline{P_L}$ = 5416.973881 sec	P_L = 5428.280295 sec
H_P = 209.914525 km	H_A = 343.006467 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -22°.780868$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -22°.869333$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -22°.781552$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -22°.869551$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.99531591543612991×10^{-6} rad / sec	
$\dot{\omega}_s$ = 0.55762762327678867×10^{-6} rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = -0.11188696968246905×10^{-7} rad / sec	

Tabelle 26-70: Berechnung der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QDY}}$ einer $\left(P_D \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn mi den mittleren *Kepler*-Elementen $\bar{e}_0$ =0.01, $\bar{i}_0$ =55°, zur Epoche: t_0 : 2022-03-15/12:00:0.0. Die Berechnung erfolgt mit dem gesamten *Brouwer*'schen Bahn Modell. Schrittweite Δa=50 km, Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} < 10^{-12}$ sec , $\Delta(a) = 10^{-9}$ km . Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3 / s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 =0.001082625379977. a posteriori Genauigkeit: $\Delta P < 10^{-12}$ sec.

BEISPIEL 2: Berechne die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDY}}$ einer $\left(P_D \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn bei Bezug der drakonitischen Bewegung auf die feste Umlaufzeit $P_Y = 1^h 30^m \triangleq 5200\,\text{sec}$. Gegeben seien die mittlere Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.01 und die mittlere Inklination $\bar{i}_0$ =55°.

Die große Bahnhalbachse hat nach Formel (26.368) die Näherungsgröße $\bar{a}_0^{(0)}$ =6652.555701 km. Mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta P < 10^{-12}\,\text{sec}$ und $\Delta(a) = 10^{-9}\,\text{km}$ liefert der Algorithmus (26.370) - (26.373) die große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDY}}$ =6654.597096 km. Die weiteren Bahnparameter sind in Tabelle 26-70 zusammengestellt. Zur Veranschaulichung des Verhaltens einer $\left(P_D \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn ist in Tabelle 26-71 eine Ephemeride über einige Umläufe dieser Bahn im Abstand $P_Y = 1^h 30^m$ berechnet, so dass stets der Durchgang durch den aufsteigenden Knoten der Bahn dargestellt wird. Auch wenn das mittlere Argument des Perigäums den Wert $\bar{\omega}_0$ =0°.0 hat, weicht der oskulierende Wert auf der hier dargestellten wahren Bahn unter Berücksichtigung des gesamten Brouwerschen Bahnmodells etwas von dem mittleren Wert ab (siehe Tabelle 26-71). Infolgedessen weicht der wahre aufsteigende Knoten minimal vom

mittleren aufsteigenden Knoten ab, was sich in den abweichenden Werten des Argumentes der Breite *u* und der geodätischen Breite φ wiederspiegelt. Auch wenn nach jedem Umlauf P_Y der Satellit den aufsteigenden Knoten überfliegt (was auch für jeden anderen Referenzpunkt auf der Bahn im drakonitischen System zutreffen würde), verändern sich demgegenüber das Perigäum der Bahn, der Bezugspunkt zum Frühlingspunkt, zu einem Referenzmeridian; zur Sonne usw. von Umlauf zu Umlauf. Dies kann aus den abweichenden Umlaufzeiten in Tabelle 26-71 abgelesen werden. ◄

YEAR	MO	DA	HO	MI	SECOND	U	P
2022	3	15	12	0	0.000	359.89376	-0.089111
2022	3	15	13	30	0.000	359.89376	-0.089119
2022	3	15	15	0	0.000	359.89376	-0.089127
2022	3	15	16	30	0.000	359.89376	-0.089135
2022	3	15	18	0	0.000	359.89376	-0.089143
2022	3	15	19	30	0.000	359.89376	-0.089151
2022	3	15	21	0	0.000	359.89376	-0.089159
2022	3	15	22	30	0.000	359.89376	-0.089166
2022	3	16	0	0	0.000	359.89376	-0.089173
2022	3	16	1	30	0.000	359.89377	-0.089180
2022	3	16	3	0	0.000	359.89377	-0.089187
2022	3	16	4	30	0.000	359.89377	-0.089194
2022	3	16	6	0	0.000	359.89377	-0.089200
2022	3	16	7	30	0.000	359.89377	-0.089206
2022	3	16	9	0	0.000	359.89378	-0.089211
2022	3	16	10	30	0.000	359.89378	-0.089216
2022	3	16	12	0	0.000	359.89378	-0.089221
2022	3	16	13	30	0.000	359.89379	-0.089225
2022	3	16	15	0	0.000	359.89379	-0.089229

Tabelle 26-71: Ephemeride der $\left(P_D \triangleq P_Y\right)-$ Äquivalenzbahn mit P_Y =1.5 h, $\bar{e}_0$ =0.01, $\bar{i}_0$ =55°, über 2 Tage, vollständiges Brouwersches Bahnmodell, Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\oplus}$ =398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4} / s, J_2 =0.001082625379977

26.11.2.2 Der (a,i)-Bereich möglicher Satellitenbahnen bei Kopplung von drakonitischer Bewegung an ein beliebige feste Umlaufzeit

In diesem Abschnitt werde der (a,i)-Bereich aller möglichen $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$- Äquivalenzbahnen mit der festen Umlaufzeit $P_Y = 3^h$ konstruiert. Wie in den früheren Untersuchungen wird die Neigung $\bar{i}_0$ als unabhängige Variable mit der Schrittweite $\Delta i = 0°.1$ angegeben. Wird eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ als Parameter gewählt, so kann die entsprechende große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ nach der Methode in Abschnitt 26.11.2.1 berechnet werden. Durch die eindeutige Zuordnung von großer Bahnhalbachse $\bar{a}_0$ zur Inklination $\bar{i}_0$ kann für eine vorgegebene Exzentrizität eine Kurve gezeichnet werden, die den Zusammenhang zwischen $\bar{a}_0$ und $\bar{i}_0$ eindeutig markiert. Der untere Bereich möglicher $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$- Äquivalenzbahnen ergibt sich für die Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.0, die obere Grenze durch den Verlauf der Grenzexzentrizität e_B. Die Grenzexzentrizität kann mit der Bedingungsfunktion

$$fct\left(e_B\right) \equiv r_P - r_{P,\min} \tag{26.389}$$

berechnet werden, wenn sie auf die vorgegebene Mindesthöhe $r_{P,\min} = H_{P,\min} + R_E$ bezogen werden soll. Hier ist r_P der momentane Perigäumsradius, der in der Iteration dem Minimalwert angepasst werden soll.

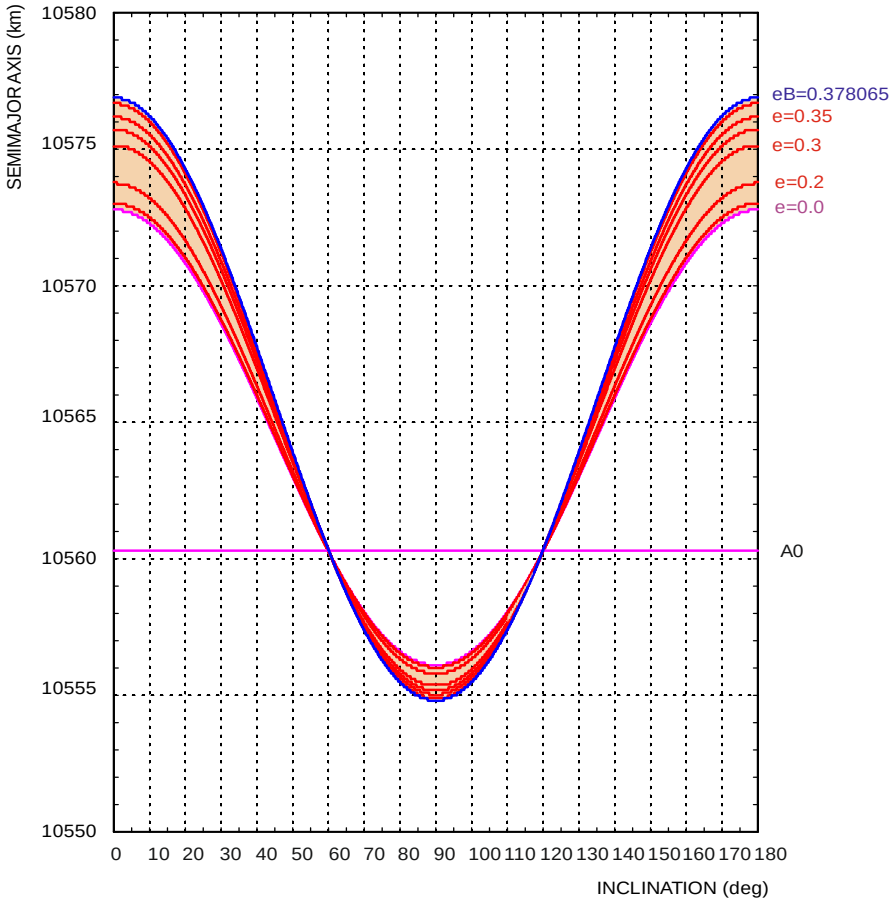


Bild 26-72: Der (a,i)- Bereich möglicher $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der festen drakonitischen Umlaufzeit $P_Y = 3^h$ für verschiedene Exzentrizitäten, Grenzexzentrizität $e_B \in [0.3767646, 0.3780649]$

Das Ergebnis ist in Bild 26-72 dargestellt. Gültige Inklinationen treten im gesamten Inklinationsbereich $i \in [0°, 180°]$ auf. Die Grenzexzentrizität, die sich auf die minimale mittlere Bahnhöhe $H_{p,\min}$ =200 km bezieht, hat Werte im Bereich $e_B \in [0.3767646, 0.3780649]$. Das Maximum der großen Bahnhalbachse wird mit der Grenzexzentrizität $e_B = 0.3780649$ für i= 0° erreicht. In diesem Fall hat die große Bahnhalbachse den Wert $\overline{a_{QDY}} = 10576.89$ km.

Alle Kurven ändern ihre Krümmung in einem schmalen Bereich um die Inklinationen $\overline{i_{QDY\ cross,1}} \approx 60°$ und $\overline{i_{QDY\ cross,2}} \approx 120°$ mit der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QDY\ cross}} \approx 10560.3$ km (zum Vergleich: $\overline{a_{QK\ 0}} = \sqrt[3]{\mu P_Y^2 / 4\pi^2}$ =10560.273918 km). Diese Bereiche können als die charakteristischen Zentren der mittleren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$- Äquivalenzbahnen mit $P_Y = 3^h$ bezeichnet werden. Die charakteristischen Punkte der einzelnen Kurven können gefunden werden, indem man zwei Kurven mit zwei unterschiedlichen Exzentrizitäten schneidet. Für unterschiedliche Exzentrizitäten ergeben sich leicht unterschiedliche Schnittpunkte.

Hierzu werden die Bedingungsgleichungen (26.387) für die beiden Exzentrizitäten e_1 und e_2 zum Schnitt gebracht. Die Inklinationen können aus folgendem Ausdruck berechnet werden

$$\cos^2 i = \frac{E_2\left(1+\sqrt{1-e_2^2}\right)-E_1\left(1+\sqrt{1-e_1^2}\right)}{E_2\left(5+3\sqrt{1-e_2^2}\right)-E_1\left(5+3\sqrt{1-e_1^2}\right)} \quad . \tag{26.390}$$

In Tabelle 26-72 sind in Ergänzung zu Bild 26-72 spezielle Parameter der einzelnen Kurven zusammengestellt. Als charakteristische Größen werden die Parameter des Schnittpunktes $\left(i_{cross}, a_{cross}\right)$ für die Überschneidungen der Kurven mit unterschiedlichen Exzentrizitäten in Bezug auf die Bahn mit e=0.0 berechnet. Nach der Berechnung der charakteristischen Neigung werden die großen Bahnhalbachsen mit den aktuellen Exzentrizitäten nach der Methode in Abschnitt 26.11.2.1 berechnet.

ecc	$a_{\max}$ [km]	$i_{cross,1}$	a_{cross} [km]	$a_{\min}$ [km]	$i_{cross,2}$
e=0.0	10572.78	---	---	10556.10	---
e=0.1	10573.02	60°.578507	10560.127022	10556.03	119°.421493
e=0.2	10573.76	60°.593390	10560.122960	10555.79	119°.406610
e=0.3	10575.15	60°.619787	10560.115635	10555.35	119°.380213
e=0.33	10575.73	60°.630325	10560.112662	10555.17	119°.369675
e=0.35	10576.18	60°.638110	10560.110445	10555.03	119°.361890
e=0.37	10576.67	60°.646546	10560.108024	10554.87	119°.353454
e_B	10576.89	60°.650141	10560.106985	10554.82	119°.349859

Tabelle 26-72: Die näherungsweise charakteristischen Parameter $\left(a_{cross}, i_{cross1,2}\right)$ von $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen, die an die feste drakonitische Umlaufzeit $P_Y = 3^h$ gekoppelt werden . Grenzexzentrizität e_B = 0.3780649.

26.11.2.3 Der Reproduzierbare drakonitische Bewegung in Kopplung mit fester Umlaufzeit

Die Subsatellitenbahn einer Satellitenbahn ist genau dann reproduzierbar, wenn ihre mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ kommensurabel zum Vollkreis ist[1]. Nach N_D mittleren drakonitischen Umläufen und *K* Umläufen des Knotens (ungefähre mittlere Sonnentage) besteht für Reproduzierbarkeit die Beziehung

$$N_D\,\overline{\Delta\lambda_\Omega} = -K\,360° \quad . \tag{26.391}$$

Vorgabe einer Reproduzierbarkeit führt somit notwendig auf eine mittlere Knotenlängenverschiebung als Bedingung. Es genügt somit, das Verhalten der mittleren Knotenlängenverschiebung im Zusammenhang mit reproduzierbaren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$- Äquivalenzbahnen zu betrachten. Seien eine Exzentrizität $\bar{e}_0$ und eine mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ vorgewählt, so

[1] Siehe Abschnitt 23.7.2

können die große Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ und die Inklination $\overline{i}_0$ aus der Bedingung einer zweifach gekoppelter Äquivalenzbahn berechnet werden:

$$\begin{aligned} f_1\left(\overline{a}_0,\overline{i}_0\right) &\equiv \overline{P_D}\left(\overline{a}_0,\overline{i}_0\right) - P_Y = 0 \\ f_2\left(\overline{a}_0,\overline{i}_0\right) &\equiv \overline{\Delta\lambda_\Omega}\left(\overline{a}_0,\overline{i}_0\right) - \overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{26.392}$$

Nach Bedingungssystem (23.321) – (23.323) kann die Lösung aus dem System berechnet werden

$$\left.\begin{aligned} \Delta a^{(\nu)} &= \overline{a}_0^{(\nu+1)} - \overline{a}_0^{(\nu)} = \frac{-f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{e}_0,\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\dfrac{\partial f_2}{\partial \overline{i}_0} + f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{e}_0,\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0}\dfrac{\partial f_2}{\partial \overline{i}_0} - \dfrac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0}\dfrac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_0}} \\ \Delta i^{(\nu)} &= \overline{i}_0^{(\nu+1)} - \overline{i}_0^{(\nu)} = \frac{-f_2\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{e}_0,\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0} + f_1\left(\overline{a}_0^{(\nu)},\overline{e}_0,\overline{i}_0^{(\nu)}\right)\dfrac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_0}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0}\dfrac{\partial f_2}{\partial \overline{i}_0} - \dfrac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0}\dfrac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_0}} \end{aligned}\right\rangle \quad \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.393}$$

Die hier benötigten partiellen Ableitungen können in Abschnitt 23.7.2.3 gefunden werden:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{n_D}}\frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{a}_0} = \left(-\frac{2\pi}{\left(\overline{n_D}\right)^2}\right)\left(-\frac{3}{2}\frac{\overline{n_K}}{\overline{a}_0} + \frac{\partial\left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \overline{a}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{a}_0}\right) \quad , \left\langle \quad \overline{n_K} = \sqrt{\frac{\mu}{\overline{a}_0^3}} \right.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{n_D}}\frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{i}_0} = \left(-\frac{2\pi}{\left(\overline{n_D}\right)^2}\right)\left(\frac{\partial\left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \overline{i}_0} + \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{i}_0}\right) \tag{26.394}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_0} &= \frac{\partial \overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s}}{\partial \overline{a}_0}\overline{P_D} + \dot{\lambda}_{\Omega s}\frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{a}_0}\overline{P_D} + \dot{\lambda}_{\Omega s}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \overline{i}_0} &= \frac{\partial \overline{\Delta\lambda_\Omega}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \dot{\lambda}_{\Omega s}}{\partial \overline{i}_0}\overline{P_D} + \dot{\lambda}_{\Omega s}\frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{i}_0}\overline{P_D} + \dot{\lambda}_{\Omega s}\frac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0} \end{aligned}\right\rangle \left\langle \begin{aligned} \overline{\Delta\lambda_\Omega} &= \dot{\lambda}_{\Omega s}\overline{P_D} \\ \dot{\lambda}_{\Omega s} &= \dot{\Omega}_s - \dot{\Theta} \end{aligned}\right. \tag{26.395}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \overline{a}_0} &= \frac{21}{8}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_K}\sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\overline{a}_0^3\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left(1-3\cos^2\overline{i}\right)_0 + O\left(J_2^2\right) \\ \frac{\partial\left(M_0\right)_s^{\cdot}}{\partial \overline{i}_0} &= -\frac{9}{2}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_K}\sqrt{1-\overline{e}_0^2}}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\cos\overline{i}_0\sin\overline{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{26.396}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{a}_0} &= \frac{21}{8}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_K}}{\overline{a}_0^3\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\left(1-5\cos^2\overline{i}_0\right) + O\left(J_2^2\right) \\ \frac{\partial \dot{\omega}_s}{\partial \overline{i}_0} &= -\frac{15}{2}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_K}}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\cos\overline{i}_0\sin\overline{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{26.397}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{a}_0} &= \frac{21}{4}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_K}}{\overline{a}_0^3\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\cos\overline{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \\ \frac{\partial \dot{\Omega}_s}{\partial \overline{i}_0} &= \frac{3}{2}\frac{J_2 R_E^2 \overline{n_K}}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2}\sin\overline{i}_0 + O\left(J_2^2\right) \end{aligned} \tag{26.398}$$

Als Anfangswert für die Iteration können eventuell die Werte

$$\bar{a}_0^{(0)} := \sqrt[3]{\frac{\mu\left(\overline{P_Y}\right)^2}{4\pi^2}} \quad , \quad \bar{i}_{0/1}^{(0)} = 45° \quad \text{or} \quad \bar{i}_{0/2}^{(0)} = 135° \tag{26.399}$$

verwendet werden. Während die partiellen Ableitungen Ausdrücke erster Ordnung sind, können die Funktionen f_1, f_2 mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell berechnet werden.

BEISPIEL: Es soll eine reproduzierbare $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.3 , der gewünschten festen Umlaufzeit $P_Y = 3^h$ =10800 sec und mit der Reproduzierbarkeit der Bodenspur nach 8 drakonitischen Umläufen und einem Knotenumlauf (etwa 1 Tag) konstruiert werden.

Nach Formel (26.391) ergibt sich mit N_D =8 und *K*=1 als vorgegebene mittlere Knotenlängenverschiebung pro drakonitischem der Wert $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ =-45°. Als Anfangswert für die große Bahnhalbachse ergibt (26.399) den Wert $\bar{a}_0^{(0)}$ =10560.273918 km. Die diesem Wert zugehörige mittlere Knotenlängenverschiebung ist $\overline{\Delta\lambda_{\Omega Y}}$:= 45°.252. Als Anfangsnäherung für die Inklination sei $\bar{i}_0^{(0)}$:= 60° willkürlich vorgewählt.

Die Berechnung mit dem vollständigen *Brouwer*schen Bahnmodell wird mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta P = \left|\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \Delta\lambda_{\Omega 0}\right| \le 10^{-11}$ sec, Δ(a)=10^{-10} km, Δ(i)=10^{-11} deg durchgeführt.

Nach 6 Iterationen des Systems (26.415) ergeben sich als Lösungen

$$\overline{a_{QDYL}} = 10559.886061426 \text{ km}, \qquad \overline{i_{QDYL}} = 118°.596206720.$$

Die erreichten Genauigkeiten sind

$$\left|\overline{P_D} - P_Y\right| \ll 10^{-12} \text{ sec}, \ \left|\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \Delta\lambda_{\Omega 0}\right| \ll 10^{-15} \text{ deg}.$$

Die insgesamt erhaltenen Bahnparameter sind in Tabelle 26-73 zusammengestellt. ◄

Bemerkenswert ist, dass die dem Anfangswert $\bar{a}_0^{(0)}$ entsprechende mittlere Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega Y}}$:=-45°.252, in der Nähe der gewünschten Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_{\Omega 0}}$ =-45°.0 liegt. Das ist kein Zufall. Es zeigt sich nämlich nach vielen Rechenvorgängen, dass nur in einer sehr engen Umgebung um die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ =-45°.252 eine Lösung für eine reproduzierbare $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn möglich ist. Dies kann aus dem sehr engen Kurvenverlauf des $\left(\bar{a}_0, \bar{i}_0\right)$ – Bereichs in Bild 26-72 geschlossen werden. Der Einfluss der Exzentrizität ist gering. Die hier gefundene Äquivalenzbahn ist wegen $\overline{P_D} = \overline{P_S}$ auch eine sonnensynchrone Bahn.

$\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$	
$\overline{a_{QDYL}}$ =10559.88606 km, $\bar{e}_0$ =0.3, $\overline{i_{QDYL}}$ =118°.5962, $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}}$ =0°	
$\overline{P_K}$ =10799.405013 sec	$\overline{P_Y}$ = 10800.000000 sec
$\overline{P_H}$ =10801.769405 sec	P_H =10801.179961 sec
$\overline{P_A}$ = 10800.557552 sec	P_A =10800.557552 sec
$\overline{P_D}$ = 10800.000000 sec	P_D =10800.271088 sec
$\overline{P_T}$ = 10803.697443 sec	P_T =10804.239454 sec
$\overline{P_R}$ = 9600.000000sec	P_R =9774.000000 sec
$\overline{P_S}$ = 10800.000000 sec	P_S =10800.570106 sec
$\overline{P_L}$ = 10754.477384 sec	P_L =10756.633402 sec
H_P =1013.783643 km	H_A =7349.715280 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -45°.011219$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -45°.000000$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -45°.011219$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -45°.001130$
$\dot{\Omega}_s = 0.1991064069096008 4 \times 10^{-6}$ rad / sec	
$\dot{\omega}_s = 0.3003278671226320 2 \times 10^{-7}$ rad / sec	
$\left(M_0\right)^{\cdot}_s$ = -0.6208543488535066 9 $\times 10^{-7}$ rad / sec	

Tabelle 26-73: Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QDL}}$ einer reproduzierbaren $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn mit der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.3, Reproduzierbarkeit nach N_D = 8 drakonitischen Umläufen in 1 in einem Umlauf des aufsteigenden Knotens (Tage), Epoche: t_0 : 2022-03-15/12:00:0.0. Schrittweite Δa=1 km, Genauigkeitsgrenzen $\Delta\overline{P} < 10^{-11}$ sec, Δ(*a*)= 10^{-10} km, Δ(i)= 10^{-11} deg. Fundamental Konstante: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s , J_2 =0.001082625379977. a posteriori Genauigkeiten: $\left|\overline{P_D} - P_Y\right| < 1.8 \times 10^{-12}$ sec, $\left|\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \Delta\lambda_{\Omega\,0}\right| < 7.1 \times 10^{-15}$ deg.

- *Nach Vorgabe einer festen Umlaufzeit P_Y wird für eine willkürlich gewählte Inklination die Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ berechnet. Nur in deren Umgebung kann eine reproduzierbare $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn gefunden werden.*

Anmerkung: Die Berechnungen sind außerordentlich empfindlich: Bei Vorgabe der mittleren Knotenlängenverschiebung $\overline{\Delta\lambda_\Omega}$ =-45°.3 würde die mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a_{QDYL}}$ = 10564.693021781 km und die mittlere Inklination $\overline{i_{QDYL}}$ =46°.607248804 erhalten.

26.11.3 Kopplung einer *Kepler*-Bewegung bezogen mit einer beliebigen festen Umlaufzeit

26.11.3.1 Elementares Verhalten einer Kepler Bewegung bei Bezug auf eine beliebige feste Umlaufzeit

Mit der mittleren *Kepler*schen Satellitenbewegung $\overline{P_K} = \sqrt{\mu / \overline{a}^3} = 2\pi / \overline{n_K}$ und einer vorgewählten festen Umlaufzeit P_Y muss eine $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn die folgende Bedingung erfüllen

$$\overline{P_K} - P_Y = 0 \quad . \tag{26.400}$$

Die vorgegebene Umlaufzeit hat die mittlere Bewegung

$$n_Y := 2\pi / P_y \tag{26.401}$$

Damit ergibt sich die Bedingungsgleichung zur Äquivalenz der mittleren Bewegungen

$$\overline{n_K} - n_Y = 0 \quad . \tag{26.402}$$

Daraus folgt:

- *die große mittlere Bahnhalbachse ist einheitlich für ALLE* $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Y\right)$ *– Äquivalenzbahnen bestimmt durch*[1]

$$\sqrt{\frac{\mu}{\left(\overline{a}_0\right)^3}} - n_Y = 0 \;\Rightarrow\; \overline{a_{QKY}} = \sqrt[3]{\frac{\mu P_Y^2}{4\pi^2}} \quad . \tag{26.403}$$

Dieser Wert ist in gleicher Weise gültig für eine wahre $\left(P_K \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn, wenn die mittlere große Bahnhalbachse wie üblich mit dem *Brouwer*schen Bahnmodell berechnet werden soll.

26.11.3.2 Beispiel von Kepler Bahnen bei Bezug auf eine beliebige feste Umlaufzeit

Tabelle 26-74 enthält die Berechnung der mittleren Halbachse einiger $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen mit der festen Umlaufzeit $P_Y = 3^h 15^m =$ sec und nach Vorgabe von Exzentrizität und Inklination.

Aufgabenstellungen:

1. Berechne die Inklination $\overline{i_{QKY}}$ einer $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Y\right)-$ und einer $\left(P_K \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn wenn die mittleren Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ vorgegeben sind.
2. Berechne die Exzentrizität $\overline{e_{QKY}}$ of a $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Y\right)-$ und einer $\left(P_K \triangleq P_Y\right)-$ Äquivalenzbahn wenn die mittleren Bahnelemente $\left(\overline{a}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{0\,0}}\right)$ vorgegeben sind.
3. Wiederhole die Berechnung in Beispiel 1 (Abschnitt 26.11.2.1) für eine rückläufige Bahn.

---

[1] vgl. Formel (26.280)

$\left(\overline{P_K} \triangleq P_Y = 3^h 15^m\right)$ – Äquivalenzbahnen		
$\overline{e_0}$	$\overline{i_0}$	$\overline{a_{QKY}}$ [km]
0.0	60°	66931.447213
0.0	60°	66931.447213
0.5	60°	66931.466779
0.5	60°	66931.362787
0.5	85°	66930.389537
0.5	85°	66930.789787
0.5	155°	66934.006155
0.5	155°	66932.713484

Tabelle 26-74: Berechnung der mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QKY}}$ einer $\left(\overline{P_K} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn zur Epoche: 2022-03-24/12:00:0.0, Schrittweite Δa=5 km, Genauigkeitsgrenzen $\left|\Delta\overline{P}\right| = 10^{-10}$ sec , $\Delta(a) = 10^{-13}$ km . Fundamentale Konstanten: (TCB) R_E =6738.1366 km, $\mu_{\odot}$ =398600.4418 km^3/s^2 , $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s , J_2 =0.001082625379977. a posteriori Genauigkeit: $\Delta P \ll 10^{-12}$ sec

4. Berechne eine $\left(\overline{P_D} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahn mit der Umlaufzeit eines Sonnentages $P_Y = 24^h$.
5. Wiederhole die numerischen Berechnungen für andere feste willkürlich gewählte Umlaufzeiten P_Y .
6. Programmiere und berechne die Inklination bei Vorgabe von großer Bahnhalbachse und Exzentrizität
7. Programmiere und Berechne die Exzentrizität bei Vorgabe von großer Bahnhalbachse und Inklination
8. Wiederhole die Untersuchungen für $\left(\overline{P_T} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen
9. Wiederhole die Untersuchungen für $\left(P_T \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen
10. Wiederhole die Untersuchungen für $\left(\overline{P_H} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen
11. Wiederhole die Untersuchungen für $\left(P_H \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen
12. Wiederhole die Untersuchungen für $\left(\overline{P_S} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen
13. Wiederhole die Untersuchungen für $\left(P_S \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen
14. Wiederhole die Untersuchungen für $\left(\overline{P_L} \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen
15. Wiederhole die Untersuchungen für $\left(P_L \triangleq P_Y\right)$ – Äquivalenzbahnen
16. Gibt es bei den vorstehenden Untersuchungen Einschränkungen unterschiedlicher Art?
17. Lassen sich den vorstehenden Untersuchungen spezielle neuartige oder spezielle Aussagen finden?
18. Übertrage den Äquivalenz Formalismus auf die Vorgabe anderer Bahnparameter: z.B. die mittlere Verschiebung der geographischen Länge $\overline{\Delta\lambda_{\Omega}}$ des aufsteigenden

Knotens bei Vorgabe der Größe Δ_Y mit Hilfe der Äquivalenzgleichung $\overline{\Delta\lambda_\Omega} - \Delta_Y = 0.$

26.12 Mehrfach gekoppelte Äquivalenzbahnen

In den bisherigen Abschnitten wurde je eine Kopplung zwischen zwei Bewegungsarten untersucht, wobei in den meisten untersuchten Fällen der Bezug auf die Meridian-bezogene Bewegung gerichtet ist. Es hat sich gezeigt, dass die Wahl der *Kepler*elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0, \overline{\Omega}_0, \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ die große Bahnhalbachse $\overline{a_Q}$ einer Äquivalenzbahn wesentlich beeinflusst. Tabelle 26-24, Tabelle 26-27 und Tabelle 26-32 zeigen bei Kopplung mit der meridionalen Bewegung, dass diese Beeinflussung sowohl die Bahnhalbachse wie die Umlaufzeit bei Äquivalenzen mit der anomalistischen, der drakonitischen und der *Hansen*-Bewegung betrifft, jedoch nicht die Umlaufzeit bei tropischen Bewegungen. Dies legt nahe, bei Vorgabe der Umlaufzeit bei tropischer bzw. Sonnen-synodischer Äquivalenz durch geeignete Anpassung der *Kepler*elemente $\left(\overline{e}_0, \overline{i}_0\left[<90°\right], \overline{\omega}_0, \overline{M_{00}}\right)$ eine passende Bahn der anomalistischen oder drakonitischen oder *Hansen* Bewegung zu suchen, die in Halbachse und Umlaufzeit mit einer Bahn der tropischen Äquivalenzbahnen übereinstimmt. Eine solche Bahn mit mehrfacher Äquivalenz kann bei der Suche nach langfristig stabilen Bahnen von großem Interesse sein.

26.12.1 Heuristische Untersuchung mehrfach gekoppelter Bewegungen

Durch Vergleich von Tabelle 26-12 bis Tabelle 26-32 kann bereits ein Hinweis auf dreifache oder gar mehrfache Äquivalenz geeigneter Bahnen erhalten werden. Dies ist eine Folge der Beobachtung, dass die entsprechenden Zahlenwerte in vielen Fällen sehr empfindlich nahe beieinander liegen können.

BEISPIEL: Die Bahn $\left(\overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 85°\right)$ hat folgende Vergleichswerte, die aus den entsprechenden Tabellen herausgezogen werden:

Tabelle 26-12 $\left(\overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 85°\right)$	$\overline{a_{QTR}} = 66930.472364$ km	$P_T = P_R = 172328.181014$ s
Tabelle 26-24 $\left(\overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 85°\right)$	$\overline{a_{QAR}} = 66931.025570$ km	$P_A = P_R = 172327.982958$ s
Tabelle 26-27 $\left(\overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 85°\right)$	$\overline{a_{QDR}} = 66930.845896$ km	$P_D = P_R = 172328.047282$ s
Tabelle 26-32 $\left(\overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 85°\right)$	$\overline{a_{QHR}} = 66930.843059$ km	$P_H = P_R = 172328.048298$ s

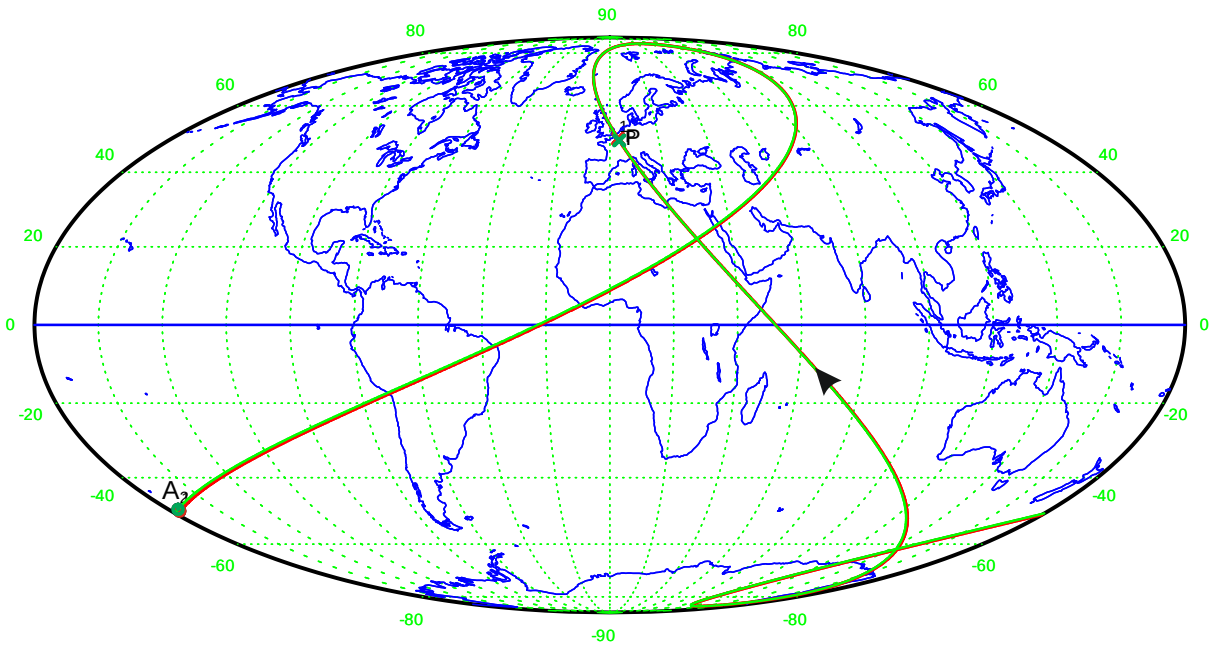


Bild 26-73: Verlauf der Subsatellitenbahn einer Bahn mit (nahezu) mehrfacher Äquivalenz der tropischen, anomalistischen, drakonitischen, *Hansen*- und der Meridian-bezogenen Bewegung. Die *Kepler*schen Bahnparameter sind $\overline{e}_0$ =0.3, $\overline{i}_0$ =85°, $\overline{\Omega}_0$ =145°, ω=50°, $\overline{M}_{0\,0}$ =0° . Die aus der Äquivalenz der wahren Umlaufzeiten $P_D \triangleq P_R \approx P_D \approx P_T \approx P_H$ berechnete mittlere Halbachse beträgt $\overline{a}_{QdR}$ = 66930.845896 km Im Vergleich zur roten Bodenspur der Äquivalenzbahn mit Epoche t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0 wird die grüne Bodenspur zur Epoche t_{02} : 2020-08-19/12:00:0.00 gerechnet. Es ist jeweils ein Umlauf (genau 2 Tage) dargestellt.

Die charakteristischen Eigenschaften der hier behandelten Äquivalenzbahn sind in Tabelle 26-75 zusammengefasst. Bild 26-73 zeigt die Äquivalenzbahn $(\overline{e}_0 = 0.3, \overline{i}_0 = 85°, \overline{\Omega}_0 = 145°, \overline{\omega}_0 = 50°, M_0 = 0°)$ mit mehrfacher Äquivalenz zwischen tropischer, anomalistischer, drakonitischer, *Hansen*- mit Meridian-bezogener Bewegung, d.h. eine $\left(P_T \triangleq P_A \triangleq P_D \triangleq P_H \triangleq P_R\right)$ – Äquivalenz . Es zeigt sich im Verlauf eines ganzen (tropischen) Jahres (rote Kurve erster Umlauf, grüne Kurve ein Umlauf nach genau einem Jahr), dass nicht nur Perigäen und Apogäen, wie auch die Knoten, (nahezu) festliegen, sondern dass in verblüffender Weise die gesamte Bahn fest an das geographische Netz und damit auch an das tropische Äquatornetz gekoppelt ist. Man beachte die Knotenlängendifferenz pro wahrem drakonitischem Umlauf $\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s} P_D = -720°.000000$(!). Abweichungen („Störungen“) sind vor allem durch gravitative Sonne-Mond-Einflüsse zu erwarten, die in dieser Darstellung nicht berücksichtigt sind. Mit Hilfe geeigneter Algorithmen sollten weitere noch perfektere Mehrfachkopplungen gefunden werden können (siehe die folgenden Abschnitte). ◄

Dieses Beispiel zeigt, dass es interessante auch exzentrische und geneigte Äquivalenzbahnen mit extrem großer Stabilität gibt. Es darf erwartet werden, dass weitere gezielte Untersuchungen zu anderen Äquivalenzbahnen mit vielfacher Äquivalenz führen können. Interessant wären vor allem Bahnen mit geringerer Inklination. Hier kommt es darauf an, eine geeignete Kombination aus Exzentrizität und Inklination zu finden. Äquatorbahnen mit geringer Exzentrizität sind jedoch solche Bahnen, bei denen sich eine mehrfache Äquivalenz nicht sonderlich für Anwendungen ausprägt.

$\left(P_H \triangleq P_A \triangleq P_D \triangleq P_T \triangleq P_R\right)$	
$\overline{a_{QdR}} =$ 66930.845896 km, $\bar{e}_0 = 0.3, \bar{i}_0 = 85°, \bar{\Omega}_0 = 145°, \bar{\omega}_0 = 50°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{Q}$ =142°447768	t_0 : 2019-08-19/12:00:0.0
$\overline{P_K}$ = 172325.858678 sec	
$\overline{P_H}$ = 172328.788488 sec	P_H = 172328.059254 sec
$\overline{P_A}$ = 172327.289055 sec	P_A = 172327.289479 sec
$\overline{P_D}$ = 172328.765176 sec	P_D = 172328.047283 sec
$\overline{P_T}$ = 172329.032639 sec	P_T = 172328.705691 sec
$\overline{P_R}$ = 172327.329397 sec	P_R = 172328.047283 sec
$\overline{P_S}$ = 172375.270757 sec	P_S = 174180.054104 sec
$\overline{P_L}$ = 185900.250963 sec	P_L = 192041.352703 sec
H_P = 40473.455527 km	H_A = 80631.963065 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.997476$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -720°.002999$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -719°.997479$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = -720°.000000$

Tabelle 26-75: Bahncharakteristika der wahren *Hansen*-, anomalistischen, drakonitischen, tropischen und der wahren Meridian-bezogenen näherungsweisen mehrfachen Äquivalenzbahn (numerisch mit Einschluss periodischer Störungen berechnet als $\left(P_D \triangleq P_R\right)-$ Äquivalenzbahn) . Fundamentale Konstante: R_E = 6378.1366 km , μ_δ = 398600.4418 km^3 / s^2, $\dot{\Theta}$=0.72921158573340×10^{-4} / s , J_2 = 0.001082625379977

26.12.2 Zweifach gekoppelte Bewegungen mit meridionaler Bewegung

Zur Erläuterung des Verfahrens werden einige Beispiele vorgestellt.

26.12.2.1 Grundlegende Beziehungen für eine PA-PD-PR Äquivalenzbahn

(1) Als erste Bedingung für eine Bahnauswahl mit Äquivalenzbahnen betrachten wir die Kopplung von mittlerer tropischer mit der mittleren meridionalen Bewegung: $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$. Mit der fundamentalen Beziehung (26.156) lautet die erste Funktionalgleichung

$$f_1\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0, \bar{i}_0\right) \equiv \overline{P_T} - \overline{P_R} = \frac{2\pi}{\overline{n_t}} - \frac{4}{\dot{\Theta}} = 0 \qquad \prec \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.404}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{n_T}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{a}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_T}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{a}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{a}_0} \quad ,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{n_T}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{e}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_T}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{e}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \tag{26.405}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_T}}{\partial \overline{n_T}} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{i}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_T}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_T}}{\partial \overline{i}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{i}_0} \quad .$$

(2) Als zweite Bedingung werde Äquivalenz zwischen drakonitischer und meridionaler mittlerer Bewegung gewünscht: $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$. Bedingung (26.212) führt auf die Funktionsgleichung

$$f_2\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0\right) \equiv \overline{P_D} - \overline{P_R} = 0 \qquad \prec \sigma_i = +1 \quad . \tag{26.406}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f_2}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{n_D}} \frac{\partial \overline{n_d}}{\partial \overline{a}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{a}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_D}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{a}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{a}_0} \quad ,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_d}}{\partial \overline{n_d}} \frac{\partial \overline{n_d}}{\partial \overline{e}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{e}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_D}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{e}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \tag{26.407}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_D}}{\partial \overline{n_D}} \frac{\partial \overline{n_d}}{\partial \overline{i}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{i}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_D}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_D}}{\partial \overline{i}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{i}_0} \quad .$$

(3) Als dritte Bedingung werde Äquivalenz zwischen anomalistischer und meridionaler Bewegung gefordert: $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right)$. Bedingung (26.190) führt auf die Funktionsgleichung

$$f_3\left(\overline{a}_0, \overline{e}_0, \overline{i}_0\right) \equiv \overline{P_A} - \overline{P_R} = 0 \qquad \prec \sigma_i = +1 \tag{26.408}$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f_3}{\partial \overline{a}_0} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}} \frac{\partial \overline{n_a}}{\partial \overline{a}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{a}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_A}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{a}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{a}_0} \quad ,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \overline{e}_0} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}} \frac{\partial \overline{n_a}}{\partial \overline{e}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{e}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_A}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{e}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{e}_0} \quad , \tag{26.409}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \overline{i}_0} = \frac{\partial \overline{P_A}}{\partial \overline{n_A}} \frac{\partial \overline{n_a}}{\partial \overline{i}_0} - \frac{\partial \overline{P_R}}{\partial \overline{n_R}} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{i}_0} = -\frac{2\pi}{\left(\overline{n_A}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_A}}{\partial \overline{i}_0} + \frac{2\pi}{\left(\overline{n_R}\right)^2} \frac{\partial \overline{n_R}}{\partial \overline{i}_0} \quad .$$

Bedingung (1) bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Halbachse in der Umgebung einer theoretischen $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn gewählt werden muss, nach Ausdruck (26.158) etwa mit dem Näherungsausdruck $\overline{a}_0^{(0)} \approx \overline{a_{QK\,0}} = 66931.4468893\,\mathrm{km}$. Unter Vorgabe von großer Bahnhalbachse und Exzentrizität kann die Inklination aus den Gleichungen (26.204) bzw. (26.220) mit den Abkürzungen

$$C_2 := -\frac{3}{4}\frac{J_2 R_E^2}{\overline{a}_0^2\left(1-\overline{e}_0^2\right)^2},\quad A_1 := 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+5, D_1 := \left(\frac{\dot{\Theta}}{2\overline{n}_K}-1\right)\frac{1}{C_2}-\left(1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)$$

$$A_2 := 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+5, D_2 := \left(\frac{\dot{\Theta}}{2\overline{n}_K}-1\right)\frac{1}{C_2}-\left(1+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right) \qquad (26.410)$$

$$A_3 := 3\sqrt{1-\overline{e}_0^2}+\frac{5}{2}, D_3 := \left(\frac{\dot{\Theta}}{2\overline{n}_K}-1\right)\frac{1}{C_2}-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-\overline{e}_0^2}\right)$$

berechnet werden. Dazu werden je zwei der folgenden Gleichungen gekoppelt:

$$\cos\overline{i}_{QTR,1/2}^{(0)} = \frac{1}{A_1}\left[1\pm\sqrt{1-A_1 D_1}\right] \quad ,$$

$$\cos\overline{i}_{QDR,1/2}^{(0)} = \frac{1}{2A_2}\left[1\pm\sqrt{1-4A_2 D_2}\right] \quad , \qquad (26.411)$$

$$\cos\overline{i}_{QAR,1/2}^{(0)} = \frac{1}{2A_3}\left[1\pm\sqrt{1-4A_3 D_3}\right] \quad .$$

26.12.2.2 PA-PD-PR-Äquivalenzbahn mit vorgegebener großer Bahnhalbachse

Aus den vorstehenden Gleichungen (26.411) kann die Inklination eliminiert werden. Es bleibt bei fest vorgegebener großer Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ eine Funktionsgleichung zur Bestimmung der Exzentrizität. Dazu kann der Ausdruck

$$fct\left(\overline{e}_0\right) \equiv \cos\overline{i}_{QDR,1/2}^{(\nu)} - \cos\overline{i}_{QAR,1/2}^{(\nu)} = 0 \quad \prec \nu = 0,1,2,3,\cdots \qquad (26.412)$$

verwendet werden. Die iterative Lösung führt mit der vorgegebenen mittleren großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ nicht nur auf die gesuchte mittlere Exzentrizität $\overline{e}_0^{(0)}$, sondern zugleich auf die entsprechende mittlere Inklination $\overline{i}_0^{(0)}$. Unter den vier möglichen Lösungen (je nach Vorzeichen vor der Wurzel in der entsprechenden Gleichung (26.411)) muss die passende gefunden werden. Ein Kriterium dafür ist Konvergenz der Iteration der Funktionsgleichung (26.412).

Für eine weitere Verbesserung werden nach Vorgabe der großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0$ unter Anwendung der *Cramer*schen Regel[1] (23.316) – (23.321) und mit Verwendung der benötigten partiellen Ableitungen aus Abschnitt 23.7.2.2 die Korrekturen in Exzentrizität und Inklination iterativ mit $\nu = 0,1,2,3,\cdots$ erhalten aus

[1] Zusammenstellung in Abschnitt 23.7.2.1

$$\Delta e^{(\nu)} = \bar{e}_0^{(\nu+1)} - \bar{e}_0^{(\nu)} = \frac{-f_2\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0} + f_3\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0}}{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0}}$$

$$\Delta i^{(\nu)} = \bar{i}_0^{(\nu+1)} - \bar{i}_0^{(\nu)} = \frac{-f_3\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0} + f_2\left(\bar{a}_0, \bar{e}_0^{(\nu)}, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0}}{\frac{\partial f_2}{\partial \bar{e}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{e}_0}} \quad . \tag{26.413}$$

BEISPIEL: Es sei die große Bahnhalbachse $\bar{a}_0$=66930.0 km gewählt. Als Näherung werde für die Iteration (26.412) die Exzentrizität $\bar{e}_0^{(0)} = 0.9$ vorgegeben. Damit lauten die Inklinationen aus (26.411)

$$\bar{a}_0^{(0)} = 66930.000\,\text{km},\ \bar{\text{e}}_0^{(0)} = 0.9 \Rightarrow \bar{i}_{QDR,1}^{(0)} = 57°.577238\ ,\ \bar{i}_{QAR,1}^{(0)} = 53°.002983 \quad .$$

Die Iteration (26.412) wird mit den Genauigkeitsgrenzen $\Delta e < \left|10^{-12}\right|$, $\Delta i < \left|1°.0 * 10^{-12}\right|$, $\Delta\left(fct\left(\bar{e}_0\right)\right) < \left|10^{-20}\right|$ durchgeführt. Nach 160 Schritten lautet die Lösung

$$\bar{a}_0 = 66930.000\,\text{km},\ \bar{\text{e}}_{07}^{(0)} = 0.775316933 \Rightarrow \bar{i}_{QDR0,1}^{(0)} = \bar{i}_{QAR0,1}^{(0)} = 63°.434948823 \quad .$$

Die berechnete Inklination ist exakt die kritische Inklination bei rechtläufigen Bahnen. Die anomalistische und drakonitische Bewegung werden über ihre Verknüpfung mit der meridionalen Bewegung auch untereinander verknüpft. Somit ist die hier berechnete Äquivalenz ein Spezialfall der in Abschnitt 23.7.1 untersuchten $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenz. Die Verbesserung mit dem Algorithmus (26.413) führt auf kleine aber wesentliche Korrekturen. Mit den obigen a-priori Genauigkeiten lautet nach 3 Iterationsschritten die endgültige Lösung

$$\bar{a}_0 = 66930.000\,\text{km},\ \bar{\text{e}}_0 = 0.775330662 \Rightarrow \bar{i}_0 = 63°.432216527 \quad .$$

Um einen Einblick in die mit dem hier geschilderten Verfahren erwartbaren Ergebnisse zu bekommen, werden in Tabelle 23-18 die Bahndaten zusammengestellt, wie sie mit der ersten Näherung (26.412) erhalten wurden. Zur Kontrolle werden die mittleren Umlaufzeiten in der anomalistischen, drakonitischen und meridionalen Bewegung verglichen. Sie stimmen in der Größenordnung 10^{-2} sec überein. Die weitere Verbesserung mit Iteration (26.413) ergibt die in Tabelle 26-77 zusammengestellte Bahn. Hier stimmen die Umlaufzeiten mit einer Genauigkeit besser als 10^{-6} sec überein: $\overline{P_A} = \overline{P_D} = \overline{P_R}$.

Die sehr empfindliche Wirkung auf die Exzentrizität bei Vorgabe einer großen Bahnhalbachse im Zusammenhang mit meridionalen Äquivalenzbahnen zeigen folgende mit den Iterationen (26.412) und (26.413) berechneten Beispiele in Tabelle 26-78. In allen Fällen führt die Iteration in die Umgebung der kritischen Inklination. Der gesamte Bereich zwischen kreisnahen und hochexzentrischen Bahnen mit kritischer Inklination und Meridian bezogener Bewegung ist damit auch in diesem Fall erfassbar und zwar als eindeutig exakte Bahnen. In allen Fällen, die mit dem vollständigen analytischen Modell berechnet wurden, werden Inklinationen kleiner als die kritische Neigung erhalten. Dies bestätigt die in Abschnitt 23.7.1.3 erhaltene Aussage, wonach $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenzbahnen mit Neigungen kleiner als die kritische Neigung exakte Äquivalenzbahnen sind. ◀

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\bar{a}_0 = 66930 \text{ km}, \overline{e_{QADR}} = 0.77531693, \overline{i_{QADR}} = 63°.434949, \bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K}$ = 172322.591814 sec	t_0 : 2020-07-02/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172327.805207 sec	P_H = 172324.865082 sec
$\overline{P_A}$ = 172324.609554 sec	P_A = 172324.609554 sec
$\overline{P_D}$ = 172324.611077 sec	P_D = 172324.609762 sec
$\overline{P_T}$ = 172331.753532 sec	P_T = 172325.886218 sec
$\overline{P_R}$ = 172324.608643 sec	P_R = 172324.609581 sec
H_P = 8659.901053 km	H_A = 112443.825747 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P \overline{P_A} = -720°.000000$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \overline{P_D} = -$ -720°.000005
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps} P_A = -720°.000000$	$\Delta\lambda_{\Omega s} = \dot{\lambda}_{\Omega s} P_D =$ -720°.000000

Tabelle 26-76: Berechnung nur mit Iteration (26.412): Bahncharakteristika einer drakonitischen und anomalistischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Berücksichtigung nur der säkularen Störungen einer Keplerbahn). Genauigkeit´: 10^{-2} sec . $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| = 3\times10^{-11}$ sec . Fundamentale Konstante: R_E = 6378.166 km, $\mu_{\odot}$ = 398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times10^{-4}$ / s , J_2 = 0.001082625379977

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\bar{a}_0 = 66930.000 \text{ km}, \overline{e_{QADR}} = 0.775330662, \overline{i_{QADR}} = 63°.432216527, \bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K}$ = 172322.591814 sec	t_0 : 2020-07-02/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172327.804219 sec	P_H = 172324.864504 sec
$\overline{P_A}$ = 172324.609138 sec	P_A = 172324.609138 sec
$\overline{P_D}$ = 172324.609138 sec	P_D = 172324.609138 sec
$\overline{P_T}$ = 172331.753037 sec	P_T = 172325.885695 sec
$\overline{P_R}$ = 172324.609138 sec	P_R = 172324.609138 sec
H_P = 8658.982219 km	H_A = 112444.744581 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P \overline{P_A} = -720°.000000$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \overline{P_D} = -720°.000000$
$\Delta\lambda_{Ps} = \dot{\lambda}_P P_A = -720°.000000$	$\Delta\lambda_{\Omega s} = \dot{\lambda}_{\Omega s} P_D =$ -720°.000000

Tabelle 26-77:: Bahncharakteristika einer drakonitischen und anomalistischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, (Berücksichtigung nur der säkularen Störungen einer *Kepler*bahn). Berechnung mit den Iterationen (26.412) und (26.413). Erreichte Genauigkeit $\left|\overline{P_A} - \overline{P_D}\right| = 3\times10^{-11}$ sec . Fundamentale Konstante: R_E = 6378.166 km, $\mu_{\odot}$ = 398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times10^{-4}$ / s , J_2 = 0.001082625379977

$\bar{a}_0^{(0)}$	$\overline{e_{QADR}}$	$\overline{i_{QADR}}$	ΔP[sec]
66925.7000	0.90082666	63°.42111098	0.2910×10^{-10}
66926.000	0.897760173	63°.421926	0.0
66929.5000	0.813034598	63°.431025	0.2910×10^{-10}
66930.5000	0.704314856	63°.433349	0.0
66931.0000	0.483897331	63°.434377	0.2910×10^{-10}
66931.1000	0.341851784	63°.434559	0.2910×10^{-10}
66931.1500	0.189001795	63°.434645	0.0
66931.1684	0.012997696	63°.434676	0.2910×10^{-10}

Tabelle 26-78: Beispiele einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz bei Vorgabe der großen Bahnhalbachse. In allen Fällen ist mit $\bar{i}_0 < i_{\text{krit}}$ eine exakte $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_D}\right)$ – Äquivalenz erhalten.

26.12.2.3 PA-PT-PR- Äquivalenzbahn mit vorgegebener Exzentrizität

Die anomalistische Bewegung werde mit der tropischen über die meridionale Bewegung gekoppelt. Mit den zwei entsprechenden Gleichungen in (26.411) kann wieder die Inklination eliminiert werden. Es bleibt bei fest vorgegebener Exzentrizität $\bar{e}_0$ eine Funktionsgleichung zur Bestimmung der großen Bahnhalbachse. Dazu kann mit Hilfe der Berechnungen der Inklination aus (26.411) der Ausdruck

$$fct\left(\bar{a}_0^{(\nu)}\right) \equiv \cos \bar{i}_{D1,1/2}^{(\nu)} - \cos \bar{i}_{T2,1/2}^{(\nu)} = 0 \quad \prec \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.414}$$

verwendet werden. Die iterative Lösung führt mit der vorgegebenen mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ und der Vorgabe einer großen Bahnhalbachse $\bar{a}_o^{(0)}$, die in der Nähe einer $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn liegen muss, nicht nur auf eine verbesserte mittlere große Bahnhalbachse $\bar{a}_o^{(1)}$, sondern zugleich auf die entsprechende mittlere Inklination $\bar{i}_0^{(1)}$. Allerdings muss auch in diesem Fall unter den vier möglichen Lösungen (je nach Vorzeichen vor der Wurzel in der entsprechenden Gleichung (26.411)) die passende durch Überprüfung der Konvergenz der Funktionsgleichung (26.414) gefunden werden.

Für eine weitere Verbesserung werden nach Vorgabe der Exzentrizität unter Anwendung der *Cramer*schen Regel[1] (23.316) – (23.321) und mit Verwendung der benötigten partiellen Ableitungen aus Abschnitt 23.7.2.2 die Korrekturen in großer Bahnhalbachse und Inklination iterativ mit $\nu = 0,1,2,3,\cdots$ erhalten aus

[1] Zusammenstellung in Abschnitt 23.7.2.1

$$\Delta a^{(\nu)} = \bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)} = \frac{-f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0} + f_3\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0}}$$

$$\Delta i^{(\nu)} = \bar{i}_0^{(\nu+1)} - \bar{i}_0^{(\nu)} = \frac{-f_3\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0} + f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_3}{\partial \bar{a}_0}} \quad . \tag{26.415}$$

BEISPIEL: Vorgabe der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.75 und des Näherungswertes $\bar{a}_0^{(0)} = 66932.5\ km$ für die große Bahnhalbachse, ergibt mit den entsprechenden Ausdrücken (26.411) $\bar{i}_{QTR0,1}^{(0)} = 45°.978615$, $\bar{i}_{QAR0,1}^{(0)} = 45°.790157$. Die Verbesserung mit der Iteration (26.414) führt nach 36 Iterationen auf

$$\overline{a_{QATR}}^{(1)} = 66931.933684 \text{ km}, \ \overline{i_{QATR}}^{(1)} = \bar{i}_{0A0,1}^{(0)} = \bar{i}_{0T0,1}^{(0)} = 46°.377969 \quad .$$

Mit Hilfe der Korrekturformeln (26.415) folgt die endgültige Lösung

$$\overline{a_{QATR\,0}} = \overline{a_{QATR}}^{(2)} = 66931.933813 \text{ km}, \ \overline{i_{QATR\,0}} = \overline{i_{QATR}}^{(2)} = 46°.375209 \quad .$$

$\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QATR}} = 66931.933813 \text{ km}, \bar{e}_0 = 0.75, \bar{i}_0 = 46°.375209, \bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{0\,0}} = 0°$	
$\overline{P_K}$ = 172330.060261 sec	t_0: 2020-07-02/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172325.340585 sec	P_H = 172327.912541 sec
$\overline{P_A}$ = 172328.181014 sec	P_A = 172328.181014 sec
$\overline{P_D}$ = 172319.020661 sec	P_D = 172327.315367 sec
$\overline{P_T}$ = 172328.181014 sec	P_T = 172328.570038 sec
$\overline{P_R}$ = 172328.181014 sec	P_R = 172328.716796 sec
$\overline{P_S}$ = 173274.409571 sec	P_S = 172463.424079 sec
$\overline{P_L}$ = 185899.259922 sec	P_L = 333624.878781 sec
H_P = 10354.846853 km	H_A = 110752.747573 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_P \overline{P_A} = -720°.005934$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s} \overline{P_D} = -719°.980864$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps} P_A = -720°.005934$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s} P_D = -$ -720°.015521

Tabelle 26-79: Bahncharakteristika einer anomalistischen und tropischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn, Berücksichtigung nur der säkularen Störungen einer Keplerbahn). Berechnung mit Iterationen (26.412) und (26.413). Fundamentale Konstante: R_E = 6378.166 km, μ_δ = 398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ = 0.72921158573340 $\times 10^{-4}$ / s, J_2 = 0.001082625379977.

Die entsprechenden Bahnparameter sind in Tabelle 26-79 zusammengestellt. Als mittlere Umlaufzeit ergibt sich die aus Tabelle 26-12 (auf Seite 460) bekannte Umlaufzeit 172328.181014

sec, die notwendig für $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen ist. Auch im Fall von $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_R}\right) + \left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen kann das gesamte Spektrum von Kreis- bis hochexzentrischen Bahnen abgedeckt werden. Dies zeigen die Beispiele in Tabelle 26-80. ◀

	$\overline{e}_0^{(0)}$	$\overline{i}_0^{(0)}$	$\overline{P_A} = \overline{P_T} = \overline{P_R}$
66931.588002 km	0.0	46°.377633	172328.181014 sec
66931.590140 km	0.1	46°.377622	172328.181014 sec
66931.596892 km	0.2	46°.377589	172328.181014 sec
66931.609397 km	0.3	46°.377526	172328.181014 sec
66931.630087 km	0.4	46°.377415	172328.181014 sec
66931.663975 km	0.5	46°.377219	172328.181014 sec
66931.722203 km	0.6	46°.376848	172328.181014 sec
66931.833809 km	0.7	46°.376033	172328.181014 sec
66932.099196 km	0.8	46°.373689	172328.181014 sec
66933.149280 km	0.9	46°.361005	172328.181014 sec

Tabelle 26-80: Beispiele einer $\left(\overline{P_A} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz bei Vorgabe der Exzentrizität

26.12.2.4 PD-PT-PR- Äquivalenzbahn mit vorgegebener Exzentrizität

Die drakonitische Bewegung werde mit der tropischen über die meridionale Bewegung gekoppelt. Entsprechend den Untersuchungen in Abschnitt 24.4.2 ist zu erwarten, dass derartige Äquivalenzbahnen nur in der Nähe von Polbahnen vorkommen können. Wegen des Bezugs auf die meridionale Bewegung kann die große Bahnhalbachse nach Abschnitt 26.8.1.1 (Seite 455) nur in der Umgebung des *Kepler*schen Wertes (26.158) $\overline{a_{QK}}_0$ =66931.4468893 km vorkommen.

Die Inklination der hier gesuchten Bahn kann mit den zwei entsprechenden Gleichungen in (26.411) eliminiert werden. Es bleibt bei fest vorgegebener Exzentrizität $\overline{e}_0$ eine Funktionsgleichung zur Bestimmung der großen Bahnhalbachse. Dazu kann mit Hilfe der Berechnungen der Inklination aus (26.411) der Ausdruck

$$fct\left(\overline{a}_0^{(\nu)}\right) \equiv \cos \overline{i}_{D1,1/2}^{(\nu)} - \cos \overline{i}_{T2,1/2}^{(\nu)} = 0 \quad \prec \nu = 0,1,2,3,\cdots \tag{26.416}$$

verwendet werden. Die iterative Lösung führt mit der vorgegebenen mittleren Exzentrizität $\overline{e}_0$ und der Vorgabe einer großen Bahnhalbachse $\overline{a}_0^{(0)}$, die in der Nähe einer $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn liegen muss, nicht nur auf eine verbesserte mittlere große Bahnhalbachse $\overline{a}_0^{(1)}$, sondern zugleich auf die entsprechende mittlere Inklination $\overline{i}_0^{(1)}$. Allerdings muss auch in diesem Fall unter den vier möglichen Lösungen (je nach Vorzeichen vor der Wurzel in der entsprechenden Gleichung (26.411)) die passende durch Überprüfung der Konvergenz der Funktionsgleichung (26.416) gesucht werden.

Für eine weitere Verbesserung werden nach Vorgabe der Exzentrizität mit der unter Anwendung der *Cramer*schen Regel[1] (23.316) – (23.321) und mit Verwendung der benötigten partiellen Ableitungen aus Abschnitt 23.7.2.2 die Korrekturen in großer Bahnhalbachse und Inklination iterativ mit $\nu = 0,1,2,3,\cdots$ erhalten aus

[1] Zusammenstellung in Abschnitt 23.7.2.1

$$\Delta a^{(\nu)} = \bar{a}_0^{(\nu+1)} - \bar{a}_0^{(\nu)} = \frac{-f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0} + f_2\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0}}$$

$$\Delta i^{(\nu)} = \bar{i}_0^{(\nu+1)} - \bar{i}_0^{(\nu)} = \frac{-f_2\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0} + f_1\left(\bar{a}_0^{(\nu)}, \bar{e}_0, \bar{i}_0^{(\nu)}\right)\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0}}{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{a}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{i}_0} - \frac{\partial f_1}{\partial \bar{i}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \bar{a}_0}} \quad . \tag{26.417}$$

BEISPIEL 1: Vorgabe der mittleren Exzentrizität $\bar{e}_0$ = 0.86 und dem Näherungswert $\bar{a}_0^{(0)}$ = 66932.0 km für die große Bahnhalbachse, ergibt mit den entsprechenden Ausdrücken (26.411) , wobei hier das negative Vorzeichen bei der Lösung dieser Gleichungen gewählt werden muss, $\bar{i}_{0T0,2}^{(0)} = 111°.626580$, $\bar{i}_{0D0,2}^{(0)} = 115°.339456$.

Die Verbesserung mit der Iteration (26.416) führt (mit den Genauigkeitsforderungen $\Delta(a) = 0.1\text{km}$, $\Delta(i) = 10^{-7}$ [deg], $|\Delta fct| = 10^{-2}$ sec und der Schrittweite Δa=0.1 km nach 80 Iterationsschritten) auf

$$\overline{a_{QDTR}}^{(1)} = 66924.2 \text{ km}, \; \overline{i_{QDTR,1}}^{(1)} = 90°.474517 \; , \; \overline{i_{QDTR,2}}^{(1)} = 90°.885378 \; .$$

Wenn nur säkulare Bewegungseinflüsse („Störungen“) berücksichtigt werden, ergibt sich schließlich (mit den Genauigkeitsforderungen $\Delta(a) = 10^{-10}$ km, $\Delta(i) = 10^{-7}$ [deg], $|\Delta fct| = 10^{-9}$ sec nach 3 Iterationen) mit Hilfe der Korrekturformeln (26.417)

$$\overline{a_{QDTR\,0}} = \overline{a_{QDTR}}^{(2)} = 66924.120410277 \text{ km}, \; \overline{i_{QDTR\,0}} = \overline{i_{QDTR}}^{(2)} = 90°.000000000 \; .$$

Die erreichten Genauigkeiten sind $|\Delta a| = 8.3 \times 10^{-12}$ km, $|\Delta i| = 2°.94 \times 10^{-10}$.

Die entsprechenden Bahnparameter der gefundenen Äquivalenzbahn sind in Tabelle 26-81 zusammengestellt. Die mittlere Umlaufzeit lautet wieder wie im vorhergehenden Beispiel 172328.181014 sec, die notwendig für mittlere $\left(\overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen ist.

Wenn es möglich ist die Iteration (26.416) zu vermeiden, kann der Algorithmus (26.417) eventuell allein angewendet werden. Vorgegeben sei die Exzentrizität $\bar{e}_0$=0.85. Es seien als erste Näherungen $\bar{a}_0^{(0)} = 66932.0\,\text{km}$ und $\bar{i}_0^{(0)} = 20°$ gewählt. Nach 8 Iterationen wird mit dem Algorithmus (26.417) exakt das obige Resultat erhalten.

$\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$	
$\overline{a_{QDTR}}$ =66924.120410 km, $\bar{e}_0$ =0.86, $\overline{i_{QDTR}}$ =90°.0. $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$	
$\overline{P_K}$ = 172299.885317 sec	t_0 : 2020-07-02/12:00:0.0
$\overline{P_H}$ = 172328.181014 sec	P_H = 172310.162232 sec
$\overline{P_A}$ = 172309.446673 sec	P_A = 172309.446673 sec
$\overline{P_D}$ = 172328.181014 sec	P_D = 172310.168806 sec
$\overline{P_T}$ = 172328.181014 sec	P_T = 172328.181014 sec
$\overline{P_R}$ = 172328.181014 sec	P_R = 172328.181014 sec
$\overline{P_S}$ = 172328.181014 sec	P_S = 169660.729842 sec
$\overline{P_L}$ = 172328.181014 sec	P_L = 169660.729842 sec
H_P = 2991.240257 km	H_A = 118100.727363 km
$\overline{\Delta\lambda_P} = \dot{\lambda}_{Ps}\,\overline{P_A} = -719°.921727$	$\overline{\Delta\lambda_\Omega} = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,\overline{P_D} = -720°.000000$
$\Delta\lambda_P = \dot{\lambda}_{Ps}\,P_A = -719°.921727$	$\Delta\lambda_\Omega = \dot{\lambda}_{\Omega s}\,P_D = --719°.924744$
$\dot{\Omega}_s$ = -0.43210287663223486×10^{-21} rad/sec	

Tabelle 26-81: Bahncharakteristika einer drakonitischen und tropischen mit der mittleren Meridian-bezogenen Äquivalenzbahn bei Vorgabe der Exzentrizität $\bar{e}_0$ =0.85, (Berücksichtigung nur der säkularen Störungen einer Keplerbahn). Berechnung mit Iterationen (26.416) und (26.417). Fundamentale Konstante (TCB): R_E =6738.1366 km, $\mu_\oplus$ =398600.4418 km^3/s^2, $\dot{\Theta}$ =0.72921158573340×10^{-4}/s, J_2 =0.001082625379977.

Mit der hier hergeleiteten Äquivalenzbahn ist das Musterbeispiel einer vielfachen Äquivalenz gefunden:
$\overline{P_H} \triangleq \overline{P_D} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R} \triangleq \overline{P_S} \triangleq \overline{P_L}$.
Auch mit $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen kann das gesamte Spektrum von mittleren Kreis- bis hochexzentrischen Bahnen abgedeckt werden. Dies zeigen die Beispiele in Tabelle 26-82. Während der (mittlere) aufsteigende Knoten der Bahn (im Wesentlichen) festliegt, wandert das Perigäum in Verlauf eines Jahres (183 Umläufe) um etwa 15° in östlicher Richtung. Entsprechend kippt die wahre Bahn allmählich nach Westen. Dies kann aus Bild 26-75 (auf Seite 609) abgelesen werden. ◀

Alternativen unter Berücksichtigung der periodischen Bewegungseinflüsse für oskulierende Bahnen:

BEISPIEL 2: Ein Unterschied zwischen säkular und periodisch beeinflussten Bahnen kann sich auf Grund der analytischen Herleitung des Verfahrens nur in der Iteration (26.417) auswirken. Das Ergebnis bei Berücksichtigung der periodischen Bewegungseinflüsse ist nicht von der Epochezeit sondern dem Bezugsort in der Bahn, d.h. dem Argument der Breite *u*, abhängig. Eine befriedigende Äquivalenz kann nicht erwartet werden. Das Ergebnis mit Vorgabe der Bahnparameter $\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega}_0 = \overline{M_{00}} = 0°$ lautet dann

$$\overline{a_{QDTR\,0}} = \overline{a_{QDTR}}^{(2\,per)} = 66727.125151 \text{ km}, \quad \bar{e}_0 = 0.86 \quad , \overline{i_{QDTR\,0}} = \overline{i_{QDTR}}^{(2\,per)} = 90°.000000$$

mit den entsprechenden Umlaufzeiten

$\overline{P_D} = \overline{P_T} = \overline{P_R}$ =171564.908369 sec◀

BEISPIEL 3: Die Bahndaten einer oskulierenden Bahn, die unter Einschluss aller bekannten periodischen Bewegungseinflüsse („Störungen“) berechnet werden, hängen wesentlich vom Bezugsort in der Bahn innerhalb eines Umlaufs ab. Dies zeigt folgendes Beispiel mit den Startwerten $\bar{\Omega}_0 = 0°, \bar{\omega}_0 = 270°, \overline{M_{0\,0}} = 0°$. Es ergeben sich die die Bahnparameter

$\overline{a_{QDTR\,0}} = \overline{a_{QDTR}}^{(2om)}$ =67318.151670 km , $\bar{e}_0$ =0.86 , $\overline{i_{QDTR\,0}} = \overline{i_{QDTR}}^{(2om)}$ =90°.000000

mit den entsprechenden Umlaufzeiten

$\overline{P_D} = \overline{P_T} = \overline{P_R}$ =173848.921156 sec.

BEISPIEL 4: Werden die mittleren Bahnparameter einer oskulierenden Bahn unter Berücksichtigung der periodischen Bewegungseinflüsse in Abhängigkeit der Startortes in der Bahn berechnet, ergeben sich erhebliche Variationen in der Bahnhalbachse und damit in den (gemeinsamen) Umlaufzeiten. Dieser Sachverhalt kann in Bild 26-74 (auf Seite 609) gesehen werden. Derartige Darstellungen sind für generelle Aussagen im Rahmen einer Satelllitenbahnanalyse nicht mehr geeignet. ◀

Während der (mittlere) aufsteigende Knoten der Bahn (im Wesentlichen) festliegt, wandert das Perigäum in Verlauf eines Jahres (183 Umläufe) um etwa 15° in östlicher Richtung. Entsprechend kippt die wahre Bahn allmählich nach Westen. Dies kann aus Bild 26-75 (auf Seite 609) abgelesen werden. ◀

$\overline{a_{QDTR}}$	$\bar{e}_0^{(0)}$	$\overline{i_{QDTR}}$	$\overline{P_D} = \overline{P_T} = \overline{P_R}$
66930.789203 km	0.0	90°.000000	172328.181014 sec
66930.777526 km	0.1	90°.000000	172328.181014 sec
66930.740439 km	0.2	90°.000000	172328.181014 sec
66930.670911 km	0.3	90°.000000	172328.181014 sec
66930.553586 km	0.4	90°.000000	172328.181014 sec
66930.355780 km	0.5	90°.000000	172328.181014 sec
66930.001398 km	0.6	90°.000000	172328.181014 sec
66929.279002 km	0.7	90°.000000	172328.181014 sec
66927.385672 km	0.8	90°.000000	172328.181014 sec
66918.365486 km	0.9	90°.000000	172328.181014 sec

Tabelle 26-82: Beispiele einer $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenz bei Vorgabe der Exzentrizität

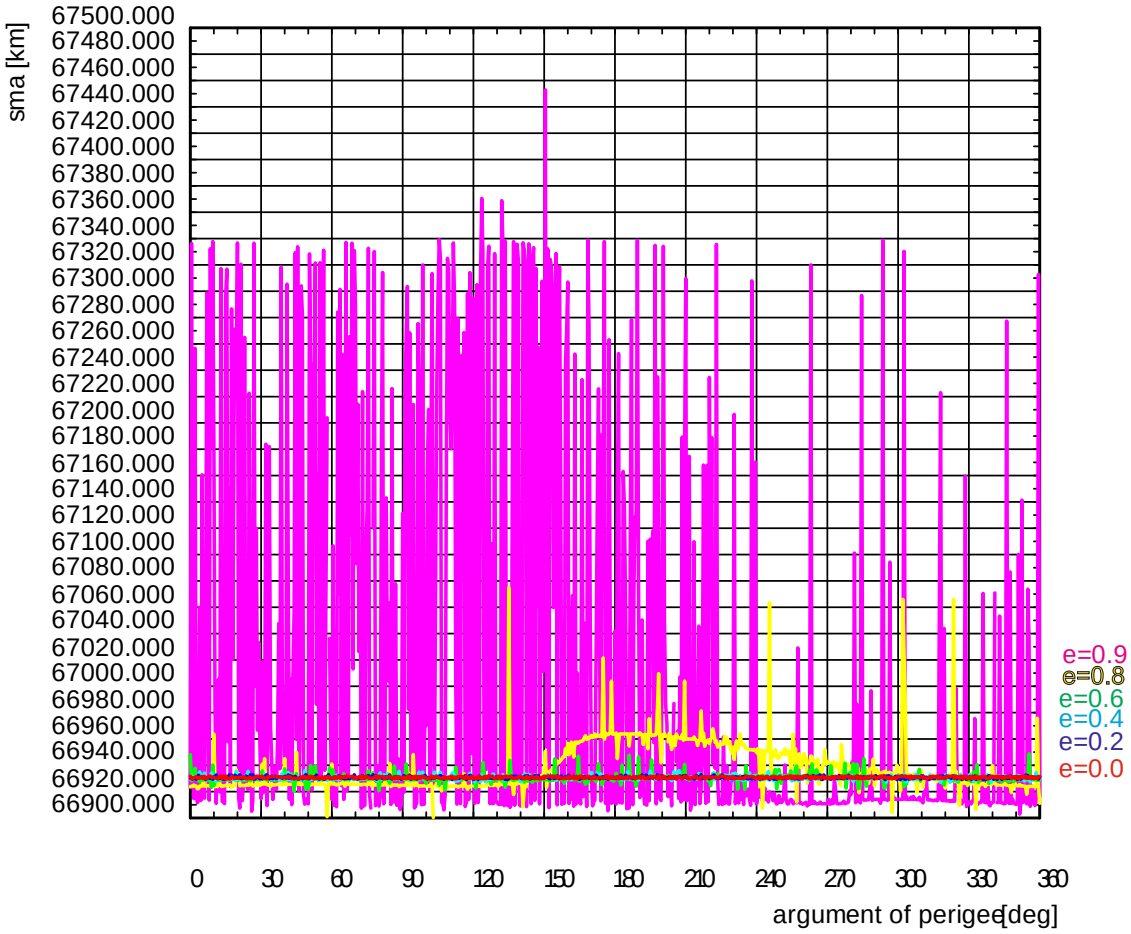


Bild 26-74: Die periodischen Variationen der großen Bahnhalbachse als Funktion des Argumentes des Perigäums von $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahnen für verschiedene Exzentrizitäten ($\overline{e}_0$ =0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9), $\overline{i}_0$ =90°.0. Epoche t_0 : 2021-03-17/12:00:0.0

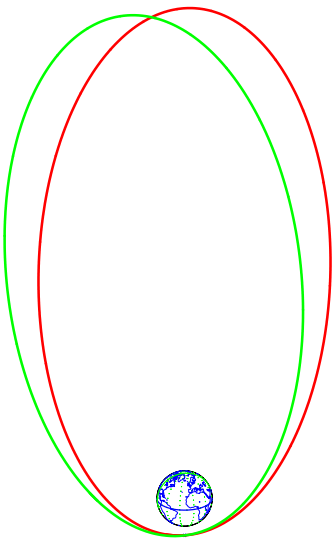


Bild 26-75: Verlauf der hochexzentrischen ($\overline{e}_0$ =0.86) über die Pole verlaufenden $\left(\overline{P_D} \triangleq \overline{P_T} \triangleq \overline{P_R}\right)$ – Äquivalenzbahn mit der großen Bahnhalbachse $\overline{a_{QDTR}}$ =66924.120410 km, $\overline{i}_0 = 90°.0$. Die rote Bahn mit Epoche ist bezogen auf die Epoche t_0 : t_{02} : 2020-07-04/12:00:0.0,, die grüne Bahn auf die Epoche t_{02} : 2021-07-04/12:00:0.0, jeweils über einen Umlauf dargestellt.

26.12.3 Mehrfach gekoppelte Bewegungen mit unterschiedlichen Bedingungen

Ein Beispiel ist in Abschnitt 23.7.2.4 (Seite 252) zusammengestellt.

26.13 Zusammenstellung einiger Eigenschaften von Äquivalenzbahnen

(I) Allgemeine Eigenschaften

(1) Äquivalenzbahnen werden durch die Kopplung zweier Satellitenbewegungen bezogen auf ein geeignetes Bahnmodell gebildet.

(2) Die Bedingung einer Äquivalenz kann im Rahmen einer Satellitenbahnanalyse zur Auswahl eines mittleren Bahnelementes verwendet werden, wenn die anderen Bahnelemente vorgegeben sind.

(3) Mehrfach gekoppelte Äquivalenzbahnen können zur Auswahl von zwei oder mehreren Bahnelementen führen.

(4) Im Hinblick auf himmelsmechanische Grundlagen kann die Eigenschaft von Äquivalenzbahnen als eine Art Resonanzeffekt zwischen verschiedenen Bewegungsarten gedeutet werden.

(5) Unterschiedliche Äquivalenzbahnen können ein völlig unterschiedliches Bahnverhalten aufweisen.

(II) Äquivalenzbahnen mit Bezug auf meridionale Bewegungen

(1) Diese Bahnen sind stets rechtläufig.

(2) Äquivalenzbahnen, die durch Kopplung einer beliebigen Satellitenbewegung mit der meridionalen Bewegung gebildet werden, haben eine mittlere große Bahnhalbachse in der Größenordnung 66931.447 km.

(3) Meridian bezogene Äquivalenzbahnen können ein langfristig außerordentlich stabiles Bahnverhalten über der Erdoberfläche aufweisen.

(4) Äquivalenzbahnen, die durch Kopplung von tropischen mit meridionalen Bewegungen gebildet werden, haben folgende bemerkenswerte Eigenschaften:

(5) Die Umlaufzeit beträgt exakt 2 Sterntage.

(6) Die Summe aus Rektaszension und geographischer Länge unterliegt nur periodischen Schwankungen, die Summe der mittleren Werte ist konstant (der Äquivalenzfaktor).

(7) Der Äquivalenzfaktor ist über die Sternzeit zur Epoche mit der Rektaszension des aufsteigenden Knotens als ein Bahnelement gekoppelt.

(8) Die mathematische Formulierung der Äquivalenz zwischen tropischer und meridionaler Bewegung kann zum Nachweis der Konsistenz der zugrunde liegenden physikalischen Parameter verwendet werden.

(III) Nahe Äquivalenzbahnen

(1) Als nahe Äquivalenzbahnen in Bezug auf zwei Satellitenbewegungen können Bahnen bezeichnet werden, wenn diese Bewegungen sich relativ nahe kommen aber kein wohldefinierter Schnitt möglich ist. Solche Bahnen können durch Vorgabe einer Genauigkeitsgrenze und durch einen Suchprozess mit einem geeigneten Bahnelement (gewöhnlich der großen Bahnhalbachse) mit geeigneter Schrittweite gefunden werden. Entsprechend können durch diesen Prozess mehrere Äquivalenzbahnen erhalten werden.

(2) Als ein Beispiel werde die nahe Kopplung aus mittlerer anomalistischer und drakonitischer Bewegung betrachtet.

(3) Bahnen mit dieser Äquivalenz haben als Bahninklination Werte in der Umgebung 63°.44 bzw. 116°.56. Es sind Bahnen mit allen Exzentrizitäten $e \in [0°,90°)$ möglich. Die große Bahnhalbachse einer solchen Bahn hängt von Exzentrizität und Inklination ab.

(4) *Molnija* und *Tundra* Bahnen können als nahe Äquivalenzbahnen gedeutet werden.

(IV) Hybride Äquivalenzbahnen

(1) Hybride Äquivalenzbahnen sind Bahnen, die für bestimmte Bahnparameter das Verhalten von nahezu parallelen Äquivalenzbahnen mit geringer Genauigkeit im Vergleich der Umlaufzeiten zeigen, für bestimmte Bahnparameter jedoch überraschenderweise das Verhalten von exakten Äquivalenzbahnen.
(2) Äquivalenzbahnen, die durch die Kopplung von anomalistischer und drakonitischer Bewegung entstehen, wurden als hybride Äquivalenzorbits erkannt. (Abschnitt 23.7.1 ab Seite 220)
(3) In diesen Bahnen fällt die Drift der geografischen Länge des aufsteigenden Knotens weitgehend mit der Drift der geografischen Länge des Perigäums zusammen.
(4) Die praktische Bedeutung dieser Äquivalenzbahnen besteht folglich darin, dass sich das Perigäum mit großer Genauigkeit auf einem festen Breitenkreis über der Erdoberfläche über sehr lange Zeiträume auf einem festen Breitenkreis über der Erdoberfläche über sehr lange Zeiträume (bis zu einigen Jahren) bewegt. (Analoges gilt für das Apogäum).
(5) Die charakteristische Neigung der Bahnen, die sich aus der Kopplung der anomalistischen und drakonitischer Bewegung ergibt, ist in erster Näherung gleich der kritischen Inklination.
(6) Äquivalenzbahnen mit Neigungen größer als die erste charakteristische Neigung sind nahezu parallele Äquivalenzbahnen, mit Neigungen kleiner als die charakteristische Neigung exakte Äquivalenzbahnen. (Analoges gilt für die zweite charakteristische Inklination).
(7) Typisch für hybride Äquivalenzbahnen ist der fließende Übergang von exakten zu nahezu parallelen Äquivalenzbahnen.

27 Topozentrische Bewegung

Die Untersuchung der Bewegung eines Satelliten bei Bezug auf ein erdfestes Topozentrum ist eine Erweiterung und Verallgemeinerung der im vorhergehenden Kapitel 26 behandelten Meridian-bezogenen Bewegung. Überschneidungen der Darstellungen in diesem Kapitel mit denen des vorhergehenden sind unvermeidlich. Die hier benötigten relativen Bewegungsdaten können zu jedem Zeitpunkt aus einer Ephemeridenrechnung berechnet werden. Damit ist es möglich eine auf die feste Erdoberfläche und damit auf jeden beliebigen Punkt auf der Oberfläche bezogene Satellitenbewegung zu charakterisieren.

Im vorliegenden Kapitel werden die benötigten Formelsysteme auf der Basis der in Kapitel 8 (Band II) zusammengestellten Koordinatensysteme entwickelt. Dies führt zu einer verallgemeinerten Darstellung der scheinbaren Satellitenbewegung, insbesondere zu einer vertieften Betrachtung der geostationären Bewegung.

Die Darstellung der topozentrischen Bewegung wird erweitert und ergänzt mit der Entwicklung von Formeln der Beobachtungsgeometrie in Band V, insbesondere Kapitel 35 und 36. Der Fall, dass das betrachtete Topozentrum auf einem Satelliten liegt, von dem aus ein anderer Satellit beobachtet werden soll, wird im Zusammenhang mit der synodischen Bewegung zweier Satelliten in Kapitel 31 (Band IV-B) untersucht.

27.1 Topozentrische Koordinaten

Die Bewegung eines Erdsatelliten wird auf den Erdmittelpunkt bezogen. Um von diesem auf ein Topozentrum („Bodenstation“) schließen zu können, muss ein erdfestes System verwendet werden. Es ist naheliegend dazu das geozentrische Greenwich-System $\mathbf{q}_j^{(G)}\left[\,j=1,2,3\right]$ als Basissystem zu verwenden[1]. Seine $\mathbf{q}_1^{(G)}$-Achse weist zum Schnittpunkt des Meridians durch Greenwich mit dem Erdäquator, die $\mathbf{q}_3^{(G)}$-Achse zum Nordpol, die Achse $\mathbf{q}_2^{(G)}=\mathbf{q}_3^{(G)}\times\mathbf{q}_1^{(G)}$ liegt in der Äquatorebene und ergänzt das System zu einem orthonormierten Rechtssystem.

Ein Topozentrum auf der Erdoberfläche, die durch ein Rotationsellipsoid angenähert werden möge, hat in diesem System die geographische Länge λ_B und die geographische Breite φ_B. Bei Bezug auf das Rotationsellipsoid mit der Abplattung f entspricht der geographischen Breite φ_B die geozentrische Deklination δ_B aus[2]

$$\tan\delta_B=\left(1-f\right)^2\tan\varphi_B$$

$$\sin\delta_B=\frac{\left(1-f\right)^2\sin\varphi_B}{\sqrt{\cos^2\varphi_B+\left(1-f\right)^4\sin\varphi_B}}\quad,\quad\cos\delta_B=\frac{\cos\varphi_B}{\sqrt{\cos^2\varphi_B+\left(1-f\right)^4\sin\varphi_B}}\quad. \tag{27.1}$$

Mit dem mittleren Äquatorradius R_E des Referenzellipsoids[3] hat das Topozentrum den geozentrischen Radius[4]

---

[1] im Detail zusammengestellt in Abschnitt 8.5 (Band II)

[2] etwa nach Formeln (37.36) und (37.42), Kapitel 37 (Band V)

[3] z.B. im WGS84 System

[4] Formel (8.193) bzw. (37.54)

$$R_B = R_E \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi_B + (1-f)^4 \sin^2 \varphi_B}{\cos^2 \varphi_B + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_B}} \quad . \tag{27.2}$$

Der entsprechende Ortsvektor lautet[1]

$$\mathbf{R}_B = y_B^{(G)j}\, \mathbf{q}_j^{(G)} := R_B \left[\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\delta_B \cos\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\delta_B \sin\lambda_B + \mathbf{q}_3^{(G)} \sin\delta_B \right] \quad . \tag{27.3}$$

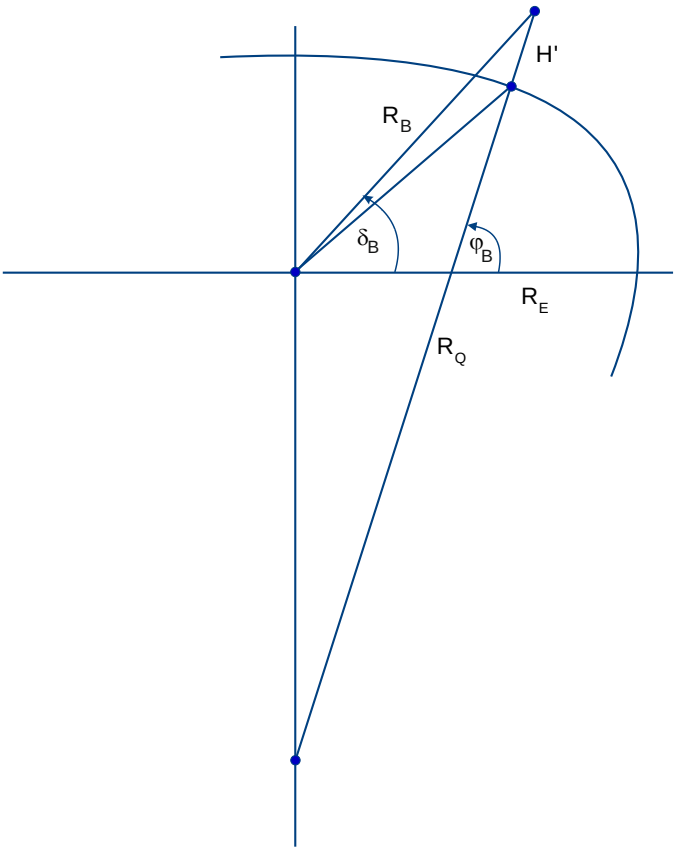


Bild 27-1: Beziehungen im geographischen System[2] (φ_B – geodätische Breite des Topozentrums, δ_B – Deklination des Topozentrums, R_B – geozentrische Distanz des Beobachters, R_Q – Querkrümmungsradius, H' – Höhe des Beobachters über dem Referenzellipsoid)

Der Ort des Satelliten sei zu einem bestimmten Zeitpunkt *t* im geozentrischen Frühlingspunkt-orientierten Koordinatensystem aus einer Ephemeridenrechnung durch die Polarkoordinaten $r(\alpha,\delta)$ bekannt. Diese sind auf das Frühlingspunkt bezogene $\mathbf{p}_i$ – Äquatorsystem[3] bezogen. In diesem System hat mit dem Querkrümmungsradius

$$R_Q = \frac{R_E}{\sqrt{\cos^2 \varphi_B + (1-f)^2 \sin^2 \varphi_B}} \tag{27.4}$$

und der lokalen Sternzeit

$$\Theta_B = \Theta_G + \lambda_B \tag{27.5}$$

der Beobachtungsort den geozentrischen Ortsvektor

---

[1] vgl. auch Formel (8.266)

[2] Kopie von Bild 8-9 (Band II)

[3] Abschnitt 8.1 (Band II)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_B = {} & \mathbf{p}_1\left(R_Q + H'\right)\cos\varphi_B\cos\Theta_B + \\ & + \mathbf{p}_2\left(R_Q + H'\right)\cos\varphi_B\sin\Theta_B + \\ & + \mathbf{p}_3\left[R_Q\left(1-f\right)^2 + H'\right]\sin\varphi_B \quad .\end{aligned} \tag{27.6}$$

Mit der zum Beobachtungszeitpunkt geltenden Sternzeit Θ_G in Greenwich[1] hat der Satellit die geographische Länge

$$\lambda = \alpha - \Theta_G \quad . \tag{27.7}$$

Im Greenwich System beträgt seine Ortskoordinate

$$\mathbf{r} = y^{(G)j}\,\mathbf{q}_j^{(G)} := r\left[\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\delta\cos\lambda + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\delta\sin\lambda + \mathbf{q}_3^{(G)}\sin\delta\right] \quad . \tag{27.8}$$

Der topozentrische Ortsvektor lautet

$$\mathbf{r}_T := \mathbf{r} - \mathbf{R}_B = \rho\left[\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\delta_T\cos\lambda_T + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\delta_T\sin\lambda_T + \mathbf{q}_3^{(G)}\sin\delta_T\right] \quad . \tag{27.9}$$

Hier sind $\rho = \left|\mathbf{r}_T\right|$ die topozentrische Schrägentfernung, $\left(\lambda_T, \delta_T\right)$ die topozentrische geographische Länge bzw. Deklination des Satelliten. Diese werden berechnet aus

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_B + R_B^2} \tag{27.10}$$

$$\begin{aligned}\rho\cos\lambda_T\cos\delta_T &= r\cos\lambda\cos\delta - R_B\cos\lambda_B\cos\delta_B \\ \rho\sin\lambda_T\cos\delta_T &= r\sin\lambda_T\cos\delta_T - R_B\sin\lambda_B\cos\delta_B \\ \rho\sin\delta_T &= r\sin\delta - R_B\sin\delta_B \quad .\end{aligned} \tag{27.11}$$

Der Kontakt von einem Topozentrum zu einem Satelliten wird durch den lokalen Horizont limitiert. Um diesen berechnen zu können, wird der topozentrische Ortsvektor in horizontalen Koordinaten benötigt[2]. Die Basisvektoren $\mathbf{q}_j^{(H)}$ des Horizontsystems werden auf das Greenwich-System zurückgeführt durch

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_3^{(H)} &= \mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda_B\cos\varphi_B + \mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda_B\cos\varphi_B + \mathbf{q}_3^{(G)}\sin\varphi_B \\ \mathbf{q}_2^{(H)} &= -\mathbf{q}_1^{(G)}\sin\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)}\cos\lambda_B \\ \mathbf{q}_1^{(H)} &= -\mathbf{q}_1^{(G)}\cos\lambda_B\sin\varphi_B - \mathbf{q}_2^{(G)}\sin\lambda_B\sin\varphi_B + \mathbf{q}_3^{(G)}\cos\varphi_B = \mathbf{q}_3^{(H)}\times\mathbf{q}_2^{(H)} \quad .\end{aligned} \tag{27.12}$$

Der Satellit hat im Horizontsystem die Polarkoordinaten $\rho\left(A,h\right)$ mit Azimut *A* und Elevation („Höhe“) *h*. Die Winkelkoordinaten des Satelliten im Horizontsystem können aus den topozentrischen Greenwich-bezogenen Winkelkoordinaten berechnet werden[3]

$$\begin{aligned}\cos A\cos h &= -\cos\left(\lambda_B - \lambda_T\right)\cos\delta_T\sin\varphi_B + \sin\delta_T\cos\varphi_B \\ \sin A\cos h &= -\sin\left(\lambda_B - \lambda_T\right)\cos\delta_T \\ \sin h &= \cos\left(\lambda_B - \lambda_T\right)\cos\delta_T\cos\varphi_B + \sin\delta_T\sin\varphi_B \quad .\end{aligned} \tag{27.13}$$

Der topozentrische Ortsvektor lautet im Horizontsystem[4]

$$\mathbf{r}_T = \rho\left[\mathbf{q}_1^{(H)}\cos h\cos A + \mathbf{q}_2^{(H)}\cos h\sin A + \mathbf{q}_3^{(H)}\sin h\right] \quad . \tag{27.14}$$

---

[1] aus Abschnitt 8.4.2, Formeln (8.129) – (8.133), sowie Abschnitt 9.1.2 (Band II)

[2] aus Abschnitt 8.9 (Band II)

[3] System (8.280)

[4] Formel (8.278)

Der absolute Eigenbewegungsvektor des Greenwich-Systems ist hier dem relativen Eigenbewegungsvektor bei Bezug auf ein inertiales Fundamentalsystem $\left(\dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0\right)$ gleich:

$$\mathbf{D}_{q^{(G)}p} = \dot{\Theta}_G \, \mathbf{q}_3^{(G)} \quad . \tag{27.15}$$

In diesem Fall lautet der geozentrische Geschwindigkeitsvektor des Topozentrums

$$\dot{\mathbf{R}}_B \approx \mathbf{D}_{q^{(G)}p} \times \mathbf{R}_B = \dot{\Theta}\left(-y_2^{(G)} \, \mathbf{q}_1^{(G)} + y_1^{(G)} \, \mathbf{q}_2^{(G)}\right) \quad . \tag{27.16}$$

27.2 Bahnabschätzung aus topozentrischer Bewegung

Ein sehr einfaches aber auch effizientes Beispiel für die Nutzung der topozentrischen Bewegungsdarstellung ist bei großen Einschussdispersionen die im Wesentlichen allein mögliche Erstbahnabschätzung. Dazu ist folgende Problemstellung vorgegeben: Ein Satellit wird mit einer Rakete gestartet, die (weil Feststoffrakete) eine sehr große Einschussungenauigkeit aufweist. Diese Ungenauigkeit zeigt sich in erster Linie in einer großen Variation der Perigäumshöhe und vor allem der Apogäumshöhe, während die anderen Bahnparameter (Inklination, Knoten, Argument des Perizentrums, Mittlere Anomalie) geringer beeinflusst werden. Auch wenn Trackingdaten (Radarbeobachtungen) nach dem Einschuss vorliegen, kann wegen der üblicherweise großen Unsicherheit (Rauschen) dieser Beobachtungen keine zuverlässige (bzw. überhaupt konvergierende) Bahnbestimmung durchgeführt werden. Die erste Beobachtungsstation am Boden werde einige Zeit nach Einschuss überflogen, so dass erst dann die Qualität des Einschusses überprüft werden kann. Hierzu können zunächst nur Winkeldaten (Azimut, Elevation) ausgewertet werden. Mit diesen Daten ist es nämlich möglich, eine erste zuverlässige Bahnbestimmung (Apogäums- und Perigäumshöhe bzw. große Bahnhalbachse und Exzentrizität) aus einer graphischen Darstellung zu erhalten, welche die Einschussdispersionen berücksichtigt. Dazu wird der wahre topozentrische Bahnverlauf verglichen mit den gezeichneten Kurven und den entsprechenden Bahnparametern zugeordnet.

BEISPIEL: Die japanische Rakete M3-SII hat folgende 3σ-Dispersionen:

Apogäumshöhe	$H_A \in [-140 \text{ km}, +160 \text{ km}]$
Perigäumshöhe	$H_P \in [-20 \text{ km}, +5 \text{ km}]$
Inklination	$i \in [\pm 0°.2]$

Es soll folgende Bahn mit Nominal Bahnelementen erreicht werden:

Nominalbahn (2)	$H_A = 398.930$ km, $H_P = 209.912$ km
Inklination	$i = 31°.072$
Rektaszension des aufsteigenden Knotens	$\Omega = 31°.072$
Argument des Perigäums	$\omega = 31°.072$
Mittlere Anomalie	$M_0 = 31°.072$
Epoche	t_0 :1995, Jan, $15/13^h : 53^m 0^s.0$:

Startgelände	Kagoshima (Japan)

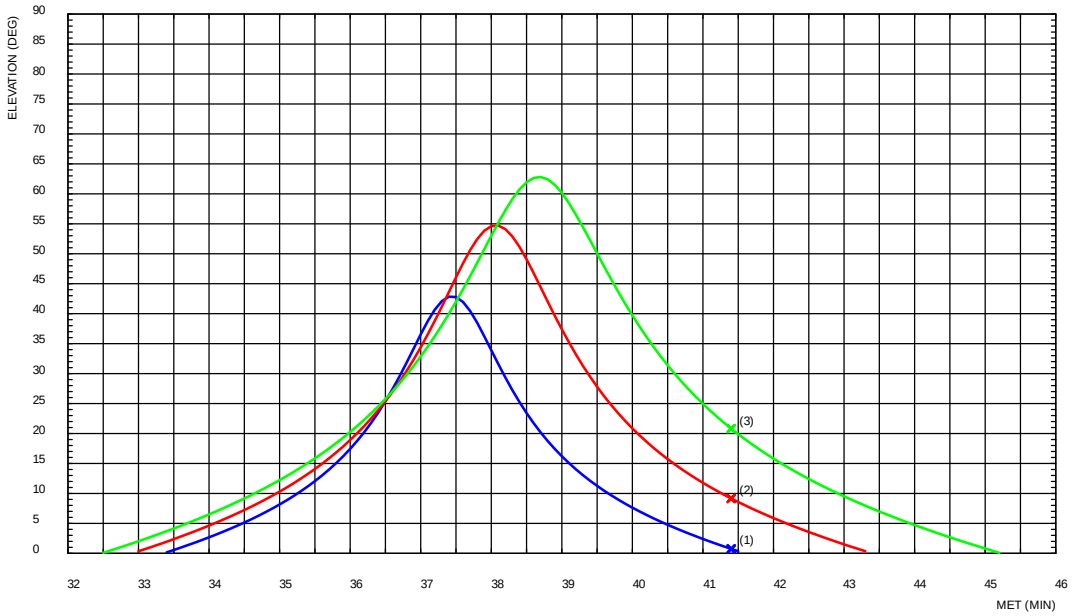


Bild 27-2: Verlauf der Elevation dreier Satelliten über der Zeit, Beurteilung einer Einschussdispersion

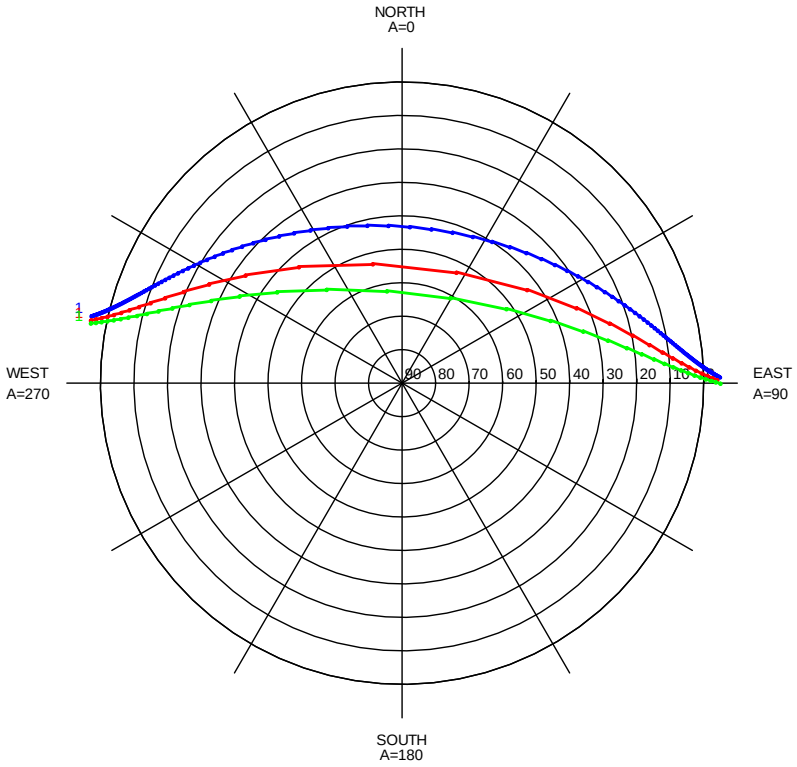


Bild 27-3: Sichtwinkelplot zur Beurteilung der Einschussgenauigkeit eines Satelliten unter Berücksichtigung der nominalen Einschussdispersion: mittlere Kurve (rot) Nominalbahn, obere Kurve (blau): Bahn zu tief, untere Kurve (grün): Bahn zu hoch[1].

[11] Dieses Beispiel ist auch im Zusammenhang mit der Beschreibung der Sichtwinkelplots in Abschnitt 36.2.1 (BEISPIEL 36.3) aufgenommen

Mit den möglichen Einschussdispersionen ergeben sich folgende extremale Bahnen:

Niedrige Bahn (1)	H_A = 258.930 km, H_P = 289.962 km
Hohe Bahn (3)	H_A = 558.934 km, H_P = 214.965 km

Die erste Bodenstation, die nach Einschuss des Satelliten in seine Bahn überflogen wird, liegt in Santiago de Chile (λ = 70°.669 West, φ = –33°.149, H = 681 m). Die topozentrische Beobachtung von dieser Station aus ist für die drei ausgewählten Bahnen in Bild 27-2 für den Verlauf der Elevation über der Zeit und in Bild 27-3 für den Verlauf der Elevation über dem Azimut aufgetragen. Wird die wahre Bahn von Santiago aus beobachtet (wobei in Ermangelung einer geeigneten Ephemeride zur Nachführung der Antenne mit Skintracking, also mit automatischer Nachführung beobachtet werden muss), können aus diesen Kurven mit einer gewissen Zuverlässigkeit die wahren Bahnparameter (Apogäumshöhe, Perigäumshöhe) abgeschätzt werden. Diese Parameter werden dann für eine folgende Bahnbestimmung als Ausgangsschätzparameter verwendet.

Bild 27-3 zeigt darüber hinaus, dass die Antenne in eine Richtung von etwa A = 282° am Horizont eingestellt werden muss, um den Satelliten bei seinem Aufgang auch aufnehmen zu können, wenn die Halbwertsbreite der Antenne genügend groß (etwa 2°) ist. Oder aber bei kleinerer Halbwertsbreite muss den Horizont entlang mit abnehmendem Azimut und in zeitlich wohldefinierter Weise gesucht werden, wodurch das Auffinden des Satelliten gesichert werden kann. Voraussetzung ist nur, dass die erwarteten Einschussgenauigkeiten auch eingehalten werden. Diese sind im vorliegenden Fall allerdings ohnehin sehr großzügig angenommen.

Die gezeichneten Bahnkurven wurden mit der mittleren Inklination i= 31°.072 gerechnet. Wird auch die Einschussgenauigkeit in der Inklination $\Delta i = \pm 0°.2$ berücksichtigt, werden die drei Kurven jeweils etwas verbreitert. An der wesentlichen Struktur der topozentrischen Bewegung wird jedoch nichts geändert. Die wahre Inklination kann also aus den Kurven nicht abgelesen werden, sondern muss mit dem nominalen Wert als Ausgangsschätzung dann im Bahnbestimmungsvorgang mit geschätzt werden. Das Beispiel zeigt, dass in diesem Fall der Plot Elevation über der Zeit (in Bild 27-2) geeigneter ist, um eine zuverlässige Qualifizierung der Einschussgenauigkeit zu erlauben. ◄

27.3 Topozentrische Bewegungsgrößen

Um das topozentrische Bewegungsverhalten eines Erdsatelliten untersuchen zu können, werden zu jedem Zeitpunkt t die entsprechenden Geschwindigkeitsvektoren benötigt. Im vorliegenden Abschnitt werden die benötigten Formeln nach Abschnitt 8.6.1 (Band II) zitiert.

Das Bewegungsverhalten des Greenwich-Systems wird wesentlich durch die Erdrotation mit der tropischen Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ geprägt. Bezogen auf eine Epoche t_0 lautet die mittlere Sternzeit zu einem Zeitpunkt t

$$\Theta_G = \Theta_{G0} + \dot{\Theta}\left(t - t_0\right) \quad . \tag{27.17}$$

Die tropische Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ ist selber zeitabhängig[1], was aber im Zusammenhang mit Untersuchungen der Satellitenbewegung vernachlässigt werden kann.

[1] siehe die exakte Formel in (8.133), sowie in Abschnitt 9.1.2.1 mit den Zahlenwerten in verschiedenen Einheiten in Tabelle 9-2

Das Topozentrum, auf das die Bewegung eines Satelliten bezogen werden soll, ist nicht notwendig auf einen festen Punkt auf dem Rotationsellipsoid bezogen. Werde angenommen, dass das Topozentrum die Höhe H' über dem Erdellipsoid habe und seien $\left(R_B, \lambda_B, \varphi_B\right)$ die geodätischen Koordinaten des Topozentrums, errechnet sich die Höhe aus[1]

$$H' = R_B\,(\cos\varphi_B \cos\delta_B + \sin\varphi_B \sin\delta_B) - R_E \sqrt{1-\left[1-(1-f)^2\right]\sin^2\varphi_B} \quad . \qquad (27.18)$$

Die Basisvektoren des Greenwich-Systems haben die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_j^{(G)}$, die bei Bezug auf ein äquatoriales Bezugssystem nach Formel (8.159) berechnet werden können. Wird das Bezugssystem als ein Fundamentalsystem aufgefasst (was im Rahmen einer Satellitenbahnmechanik häufig stillschweigend angenommen wird[2]), ist

$$\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} = \dot{\Theta}\mathbf{q}_2^{(G)} \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} = -\dot{\Theta}\mathbf{q}_1^{(G)} \quad , \quad \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} = 0 \quad \langle \dot{\mathbf{p}}_i \equiv 0, \quad i = 1,2,3 \quad . \qquad (27.19)$$

Hier wird auch der „Querkrümmungsradius“ benötigt[3]

$$R_Q = R_B \frac{\cos\delta_B}{\cos\varphi_B} - H' \qquad (\cos\varphi_B \neq 0) \quad . \qquad (27.20)$$

Unter der Annahme, dass das Topozentrum selbst bewegt ist (Auto, Flugzeug, Ballon, usw.) mit den eigenen Bewegungen $\left(\dot{H}', \dot{\lambda}_B, \dot{\varphi}_B\right)$, und zusätzlichen Änderungen des Erdellipsoids $\left(\dot{R}_E, \dot{f}\right)$ errechnet sich die Variation des Querkrümmungsradius aus

$$\dot{R}_Q\, R_Q = \frac{R_E}{\left[1-(1-f)^2\right]\sin^2\varphi}\left[\dot{R}_E - \frac{\dot{f}\, R_E\,(1-f)}{1-(1-f)^2} - \frac{\dot{\varphi}\, R_E \cos\varphi}{\sin\varphi}\right] \quad . \qquad (27.21)$$

Für die Hilfsgröße e_f gilt

$$e_f^2 =: 1-(1-f)^2 \quad , \quad \dot{e}_f\, e_f = \dot{f}\,(1-f) \quad . \qquad (27.22)$$

Der geozentrische Ortsvektor des Topozentrums hat unter diesen allgemeingültigen Annahmen den Geschwindigkeitsvektor[4]

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{R}}_B = {} & \left(R_Q + H'\right) \cos\varphi_B \left(\dot{\mathbf{q}}_1^{(G)} \cos\lambda_B + \dot{\mathbf{q}}_2^{(G)} \sin\lambda_B\right) + \dot{\mathbf{q}}_3^{(G)} \left[R_Q\,(1-f)^2 + H'\right] \sin\varphi_B + \\
& + \dot{R}_Q \left[\cos\varphi_B \left(\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda_B\right) + \mathbf{q}_3^{(G)}\,(1-f)^2 \sin\varphi_B\right] + \\
& + \dot{H}' \left[\cos\varphi_B \left(\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda_B\right) + \mathbf{q}_3^{(G)} \sin\varphi_B\right] - \\
& - \dot{f}\;\; 2\mathbf{q}_3^{(G)}\, R_Q\,(1-f) \sin\varphi_B + \\
& + \dot{\lambda}\;\; \left(R_Q + H'\right) \cos\varphi_B \left[-\mathbf{q}_1^{(G)} \sin\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \cos\lambda_B\right] + \\
& + \dot{\varphi}\;\; \left\{-\left(R_Q + H'\right) \sin\varphi_B \left[\mathbf{q}_1^{(G)} \cos\lambda_B + \mathbf{q}_2^{(G)} \sin\lambda_B\right] + \right. \\
& \left. \quad + \mathbf{q}_3^{(G)} \left[R_Q\,(1-f)^2 + H'\right] \cos\varphi_B\right\} \quad .
\end{aligned} \qquad (27.23)$$

---

[1] Formel (8.191)

[2] Kann das Frühlingspunkt-bezogene Basissystem nicht als fundamental angenommen werden, hat es also eine nicht vernachlässigbare Eigenbewegung, müssen die Formeln (8.159) (Band II) verwendet werden

[3] Die Herleitung findet sich in Abschnitt 37.2.12 (Band V)

[4] Formel (8.198) in Abschnitt 8.6.1 (Band II)

Die Variation des geozentrischen Radius des Topozentrums lautet[1]

$$\begin{aligned}\dot{R}_B &= \left[\left(\dot{R}_Q + \dot{H}'\right)\cos\varphi_B - \dot{\varphi}_B\left(R_Q + H'\right)\sin\varphi_B\right]\cos\delta_B + \\ &+ \left\{\left[\dot{R}_Q\,(1-f)^2 - 2\,\dot{f}\,(1-f)\,R_Q + \dot{H}'\right]\sin\varphi_B + \dot{\varphi}_B\left[R_Q\,(1-f)^2 + H'\right]\cos\varphi_B\right\}\sin\delta_B \quad .\end{aligned} \tag{27.24}$$

Die Variation der Deklination des Topozentrums wird erhalten aus

$$\begin{aligned}&\dot{\delta}_B\; R_B\cos(\varphi_B - \delta_B)\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi_B} \;\; = \\ &= \dot{\varphi}_B \;\; \left\{R_B\cos(\varphi_B-\delta_B)\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi_B} - \frac{e_f^2\,R_B\sin(\varphi_B-\delta_B)\sin 2\varphi_B}{\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi_B}} - e_f^2\,R_E\cos 2\varphi_B\right\} + \\ &+ \dot{R}_B\,\sin(\varphi_B-\delta_B)\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi_B} - \;\dot{R}_E \quad \frac{e_f^2}{2}\sin 2\varphi_B - \\ &- \dot{e}_f \;\; e_f\left[\frac{\sin^2\varphi_B}{\sqrt{1-e_f^2\sin^2\varphi_B}} + R_E\sin 2\varphi_B\right] \quad .\end{aligned} \tag{27.25}$$

Die Variation $\dot{\lambda}_B$ der geographischen Länge des Beobachters muss aus seiner Eigenbewegung als bekannt vorausgesetzt werden. Auch bei einem auf der Erdoberfläche feststehenden Beobachter (Antenne) kann es prinzipiell eine Eigenbewegung geben (etwa durch ein Erdbeben oder eine andere Verrückung der Position des Beobachters). Diese Eigenbewegungen können jedoch nicht mit allgemeingültigen Formelsystemen erfasst werden.

Der Zustandsvektor $(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}})$ des Satelliten sei aus einer Ephemeride bekannt. Der topozentrische Zustandsvektor lautet

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r} - \mathbf{R}_B \;\; , \;\; \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}_B \quad . \tag{27.26}$$

Die Schrägentfernung des Satelliten hat nach (27.10) bezogen auf die Eigenbewegung des Beobachters die Entfernungsänderung („range rate“)

$$\rho\,\dot{\rho} = r\,\dot{r} + R_B\,\dot{R}_B - \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{R}_B - \mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{R}}_B \quad . \tag{27.27}$$

Die Transformationsformeln (27.11) führen auf die Variationsgleichungen für die topozentrischen Winkelkoordinaten

$$\begin{aligned}\rho\,\dot{\lambda}_T\cos\delta_T &= \left[\dot{r}\sin(\lambda-\lambda_T) + r\,\dot{\lambda}\cos(\lambda-\lambda_T)\right]\cos\delta - r\,\dot{\delta}\sin(\lambda-\lambda_T)\sin\delta - \\ &- \left[\dot{R}_B\sin(\lambda_B-\lambda_T) + R_B\,\dot{\lambda}_B\cos(\lambda_B-\lambda_T)\right]\cos\delta_B + R_B\,\dot{\delta}_B\sin(\lambda_B-\lambda_T)\sin\delta_B \\ \rho\,\dot{\delta}_T\sin\delta_T &= \dot{r}\sin\delta + r\,\dot{\delta}\cos\delta - \dot{R}_B\sin\delta_B + R_B\,\dot{\delta}_B\cos\delta_B - \dot{\rho}\sin\delta_T \quad .\end{aligned} \tag{27.28}$$

Die Variationen der horizontalen Winkelkoordinaten (A,h) können aus den Transformationsformeln (27.13) erhalten werden:

$$\begin{aligned}\dot{A}\cosh &= \left(\dot{\lambda}_B - \dot{\lambda}_T\right)\left[-\sin\varphi_B\sin A\sin(\lambda_B-\lambda_T) - \cos A\cos(\lambda_B-\lambda_T)\right]\cos\delta_T + \\ &+ \dot{\delta}_T\left\{\left[-\sin\varphi_B\sin A\cos(\lambda_B-\lambda_T) + \cos A\sin(\lambda_B-\lambda_T)\right]\sin\delta_T - \right. \\ &\left. - \sin A\cos\delta_T\cos\varphi_B\right\} + \\ &+ \dot{\varphi}_B\left[\cos(\lambda_B-\lambda_T)\cos\delta_T\cos\varphi_B + \sin\delta_T\sin\varphi_B\right]\end{aligned} \tag{27.29}$$

[1] Formeln (8.201) und (8.202)

$$\begin{aligned}\dot{h}\cosh = &-\left(\dot{\lambda}_B - \dot{\lambda}_T\right)\sin\left(\lambda_B - \lambda_T\right)\cos\delta_T\cos\varphi_B - \\ &-\dot{\delta}_T\left[\cos\left(\lambda_B - \lambda_T\right)\sin\delta_T\cos\varphi_B - \cos\delta_T\sin\varphi_B\right] - \\ &-\dot{\varphi}_B\left[\cos\left(\lambda_B - \lambda_T\right)\cos\delta_T\sin\varphi_B - \sin\delta_T\cos\varphi_B\right] \quad .\end{aligned} \tag{27.30}$$

In der Praxis können üblicherweise die kartesischen Koordinaten und ihrer Geschwindigkeiten im horizontalen System als Ergebnis einer Ephemeridenrechnung unter Berücksichtigung des gesamten Bahnmodells unter Einschluss aller Systemvariationen erhalten werden[1]:

$$\mathbf{r}_T = y_T^{(H)j}\,\mathbf{q}_j^{(H)} \;,\; \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{y}_T^{(H)j}\,\mathbf{q}_j^{(H)} + y_T^{(H)j}\,\dot{\mathbf{q}}_j^{(H)} \tag{27.31}$$

$$y_{T1}^{(H)} = \rho\cos h\cos A,\; y_{T2}^{(H)} = \rho\cos h\sin A, y_{T3}^{(H)} = \rho\sin h \quad . \tag{27.32}$$

Die Variationen der horizontalen Winkelkoordinaten werden dann erhalten aus

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= \frac{y_T^{(H)i}\,\dot{y}_{Ti}^{(H)}}{\rho} \\ \dot{A} &= \frac{y_{T1}^{(H)}\,\dot{y}_{T2}^{(H)} - y_{T2}^{(H)}\,\dot{y}_{T1}^{(H)}}{\rho^2\cos^2 h} \quad , \quad \langle\left|\rho\cos h\right| > 0, \rho > 0 \\ \dot{h} &= \frac{1}{\rho^2}\left[-\left(y_{T3}^{(H)}\,\dot{y}_{T1}^{(H)} - y_{T1}^{(H)}\,\dot{y}_{T3}^{(H)}\right)\cos A + \left(y_{T2}^{(H)}\,\dot{y}_{T3}^{(H)} - y_{T3}^{(H)}\,\dot{y}_{T2}^{(H)}\right)\sin A\right] \quad .\end{aligned} \tag{27.33}$$

27.4 Bewegung eines Satelliten gesehen von einem Topozentrum aus

Die klassische optische Beobachtung einer Satellitenbewegung mit Hilfe etwa einer Baker-Nunn-Kamera[2] ergibt den Verlauf einer Satellitenspur in Azimut *A* und Elevation („Höhe“) *h*. Doch bereits bei der Beobachtung der ersten Erdsatelliten wurden vornehmlich wetterunabhängige Radarbeobachtungen eingesetzt[3].

27.4.1 Darstellung einer topozentrischen Bewegung

Die topozentrische Beobachtung von Satellitenbahnen kann in Sichtwinkelplots veranschaulicht werden[4]. In Kreisen um den Zenit werden die Höhen (Elevationen) dargestellt, in Radien das Azimut. Durch Zeittaktung kann neben dem geometrischen Verlauf auch der Zeitbezug in die Veranschaulichung einbezogen werden.

Die topozentrische Bewegung eines Satelliten über einem Beobachter kann mit Hilfe der Ephemeride der Polarkoordinaten (A, h) verfolgt werden. Falls der Beobachter selbst relativ zur Erdoberfläche bewegt ist, ist statt eines Sichtwinkelplots die Darstellung der Sichtwinkel in einem Diagramm Elevation über dem Azimut und insbesondere Elevation über der Zeit sinnvoller bzw. im Hinblick auf eine Missionsanalyse übersichtlicher.

---

[1] Sieh in Abschnitt 8.9.1m Formeln (8.258)-(8.264)

[2] Etwa in R. H. Giese [1966], pp. 153-159

[3] Siehe hierzu etwa in Abschnitt 2.10.7 (Band I), insbesondere Tabelle 2-1

[4] Weitere Details zu den Sichtwinkelplots und Herleitung ihrer mathematische Formulierung siehe in Abschnitt 36.2 (Band V). Dort auch weitere Beispiele zur topozentrischen Beobachtung.

BEISPIEL 1: Die Sichtwinkel des TerraSAR-X Satelliten über der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau ist in Bild 27-4 über einen Tag dargestellt. Da auf Grund der Refraktion die Akquisition des Satelliten bereits möglich sein kann, wenn der Satellit noch unter dem Horizont ist, wurden in diesem Plot die Sichtwinkel ab der der Elevation h=-10° berechnet. Da TerraSAR-X in enger Konstellation mit dem Schwestersatelliten TanDEM-X fliegt[1], ist die Beobachtung mit einer zweiten unabhängigen Antenne erforderlich. Die Darstellung in einem Sichtwinkelplot ist zu grob, um die Bewegung der beiden Satelliten unabhängig darstellen zu können.

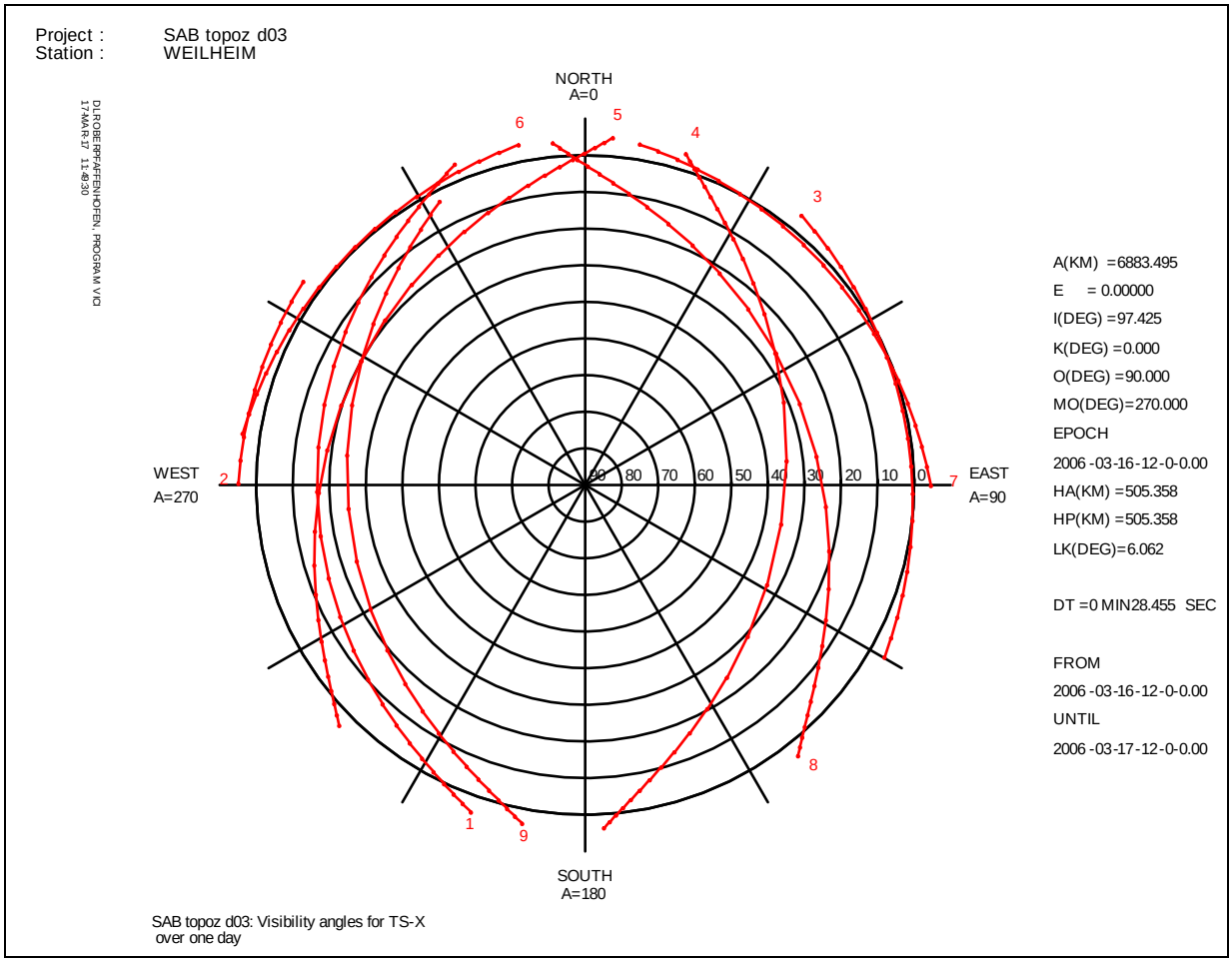


Bild 27-4: Sichtwinkelplot des Satelliten TerraSar-X gesehen von der Bodenstation in Weilheim aus über einen Tag. Die Sichtbarkeit beginnt mit der Elevation h=-10° ◄

BEISPIEL 2: Bild 27-5 zeigt die Folge der Sichtbarkeiten eines Satelliten auf einer kreisnahen, erdnahen Bahn (a=6904.252km, e=0.00136340, i=52°.992833, Ω= 24°.191391, ω=123°.142840, M_0=237°.088386, Epoche: 2000-5-4/2:43:6.86, (unkontrollierte Bahn des ROSAT nach Beendigung der Mission) gesehen von der Bodenstation in Weilheim im Verlauf eines Tages. ◄

BEISPIEL 3: Im Rahmen einer Missionsanalyse für den Einschuss eines Satelliten in eine geostationäre Bahn wird eine geeignete Sichtbarkeit zur Kommandierung des Apogäumsmotors

[1] Siehe in Abschnitt 23.13.5

gesucht. Dazu wird im Tagesverlauf der Verlauf der Sichtbarkeit (Elevation über der Zeit) für verschiedene Bodenstationen untersucht.

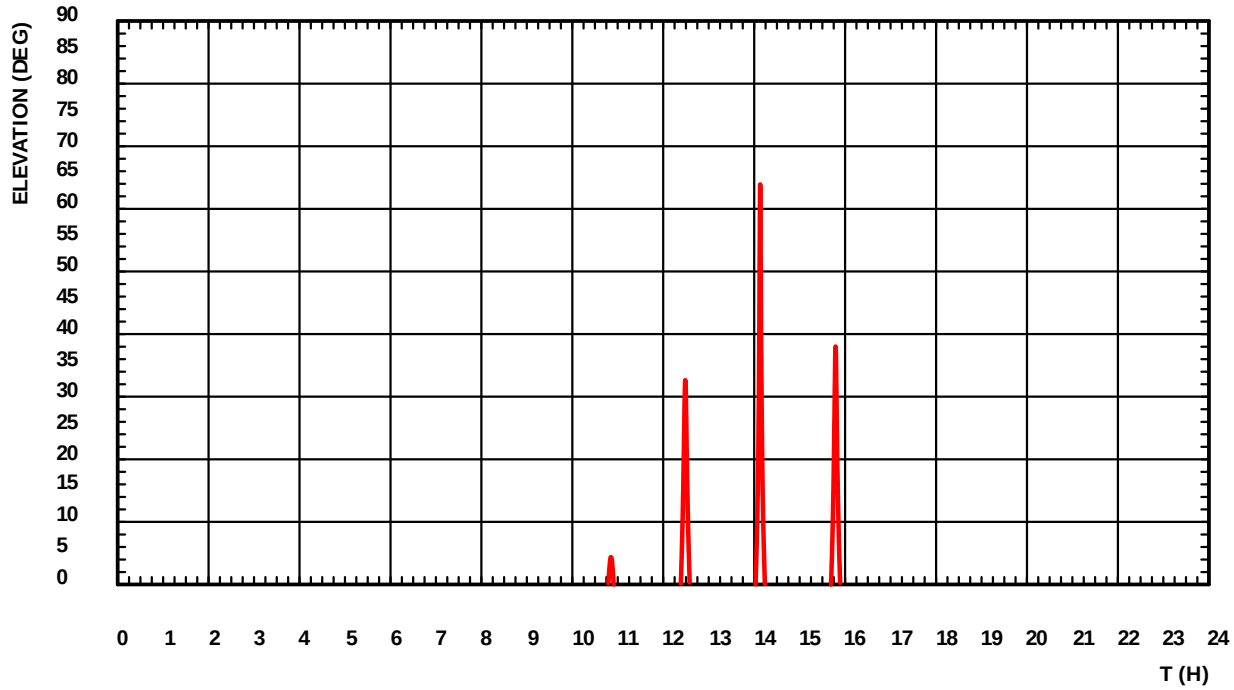


Bild 27-5: Verlauf der Sichtbarkeit (Elevation) eines Satelliten auf einer kreisnahen erdnahen Bahn (Höhe zwischen 527 km und 556 km, i = 53°) über einen Tag, beobachtet von der Bodenstation bei Weilheim ◀

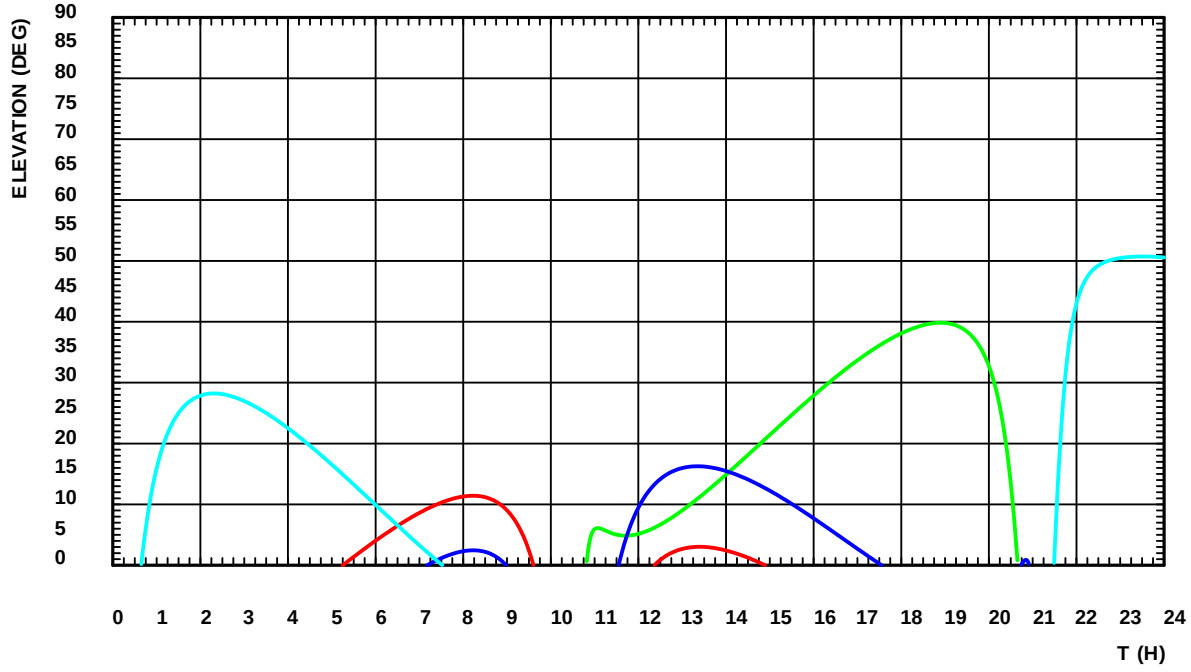


Bild 27-6: Verlauf der Sichtbarkeit (Elevation) für eine Transferbahn (GTO) in eine geostationäre Position über einen Tag beobachtet von verschiedenen Bodenstationen: Weilheim (rot), Madrid (blau), Goldstone (grün), Canberra (hellblau). Eine lückenlose Überwachung der Transferbahn ist mit den ausgewählten Bodenstationen nicht erreichbar.

Die Transferbahn ist durch die folgenden Einschussbahnelemente gegeben (für die fiktive Epoche t_0: 2002-03-01/00^h:00^m:0^s.0):

Apogäumshöhe : H_A=35975 km , Perigäumshöhe: H_P=200 km

Inklination: i = 7°.0,

Geographische Länge des ersten absteigenden Knotens: $\lambda_{\Omega} = -11°.0$

Argument des Perigäums: $\omega = 178°.0$, Mittlere Anomalie zur Epoche : $M_0 = 0°.0$.

Daraus ergeben sich die *Kepler*elemente:

a=24465.637 km, e=0.73112750, i=7°.0, Ω=327°.62921424, ω=178°, $M_0 = 0°.0$.

Bild 27-6 zeigt den Verlauf der Elevation der Transferbahn über einen Tag für das Stationskonzept Weilheim, Madrid (NASA), Goldstone, Canberra. ◀

27.4.2 Entfernung und Lichtzeit

Der topozentrische Abstand[1] ρ eines Satelliten von einer Bodenstation wird heute vornehmlich mit Radar[2], bei optischem Kontakt hochgenau mit Laser vermessen. Die topozentrische Entfernungsänderung[3] $\dot{\rho}$ kann mit Hilfe einer *Doppler*messung bestimmt werden[4]. Sei f_0 die bekannte Trägerfrequenz, mit der ein Signal vom Satelliten aus gesandt wird, f_B die Frequenz, mit der das Signal von der Bodenstation empfangen wird, *c* die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, gilt näherungsweise (d.h. unter Vernachlässigung relativistischer Effekte)

$$\dot{\rho} = c\,\frac{f_B - f_0}{f_0} \quad . \tag{27.34}$$

Aus Messungen von ρ und $\dot{\rho}$ bzw. allein $\dot{\rho}$ kann eine Satellitenerstbahnbestimmung durchgeführt werden[5].

Der topozentrische Zustandsvektor $(\mathbf{r}_T, \dot{\mathbf{r}}_T)$ eines Satelliten[6] hat mit den Größen ρ und $\dot{\rho}$ die Zusammenhänge

$$\mathbf{r}_T = \rho\,\mathbf{r}_{T0} \quad , \quad \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\rho}\,\mathbf{r}_{T0} + \rho\,\dot{\mathbf{r}}_{T0} \quad \langle |\mathbf{r}_{T0}| = 1, \dot{\mathbf{r}}_{T0} = \dot{\zeta}_B\,\mathbf{q}_{T0}, \dot{\zeta}_B = |\dot{\mathbf{r}}_{T0}|, |\mathbf{q}_{T0}| = 1 \quad . \tag{27.35}$$

Aufgabe der Bahnbestimmung ist es, über mehrere Messungen den noch unbekannten Richtungsvektor $\mathbf{r}_{T0}$ und seine Variation $\dot{\mathbf{r}}_{T0}$ zu bestimmen. Dann ist

$$\rho = |\mathbf{r}_T| \quad . \quad \dot{\rho} = \frac{\mathbf{r}_T \cdot \dot{\mathbf{r}}_T}{\rho} \quad . \tag{27.36}$$

Die Größe

$$V_{tB} := |\dot{\mathbf{r}}_T| \tag{27.37}$$

ist die topozentrische Geschwindigkeit eines Satelliten, wie sie für einen Beobachter erscheint. Als weitere interessante topozentrische Beobachtungsgröße ist die transversale Komponente des topozentrischen Geschwindigkeitsvektors berechenbar aus

---

[1] in der englischsprachigen Literatur „range“, gelegentlich auch „slant range“ genannt

[2] Neuere Verfahren sind Range-Tone („side-tone“)-Verfahren, PN-Verfahren u.a.. Allgemeine Übersicht in PH. HARTL [1977], Kapitel 5, *Funktechnische Verfahren*, insbesondere Seite 168 (siehe auch in: HARTL, PHILIPP: *Fernwirktechnik der Raumfahrt*, Springer 1988, ISBN 13-3978-3-540-18881-3.)

[3] „range rate“

[4] in Abschnitt 27.5 ab Seite 638 wird die Berechnung unter Berücksichtigung mit Hilfe der speziellen Relativitätstheorie präziser untersucht. Siehe auch in Abschnitt 8.17 (Band II)

[5] siehe etwa in ESCOBAL, R. P. [1965], Abschnitt 8.3.

[6] Der Bezug auf das Horizontsystem des Beobachtungsortes wird in Abschnitt 8.9 (Band II) untersucht

$$\dot{\mathbf{r}}_{T0} = \frac{1}{\rho}\left(\dot{\mathbf{r}}_T - \dot{\rho}\,\mathbf{r}_{T0}\right) = \frac{\dot{\mathbf{r}}_T}{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2}\mathbf{r}_T \quad . \tag{27.38}$$

Die topozentrische Entfernungsvariation bedingt auch eine entsprechende Laufzeitänderung eines Signals zwischen Satellit und Bodenstation. Die Laufzeit eines solchen Signals, die als Lichtzeit bezeichnet wird, ist der topozentrischen Distanz ρ proportional und beträgt mit der Vakuumslichtgeschwindigkeit *c* näherungsweise, d.h. unter Vernachlässigung der Abweichung der Lichtgeschwindigkeit von *c* bei Durchlaufen eines Mediums um den Erdkörper,

$$\tau = \frac{\rho}{c} \quad . \tag{27.39}$$

Abschätzungen (siehe in den folgenden Beispielen) lassen folgern, dass die Berücksichtigung der Lichtzeit für die gewöhnlichen Aufgabenstellungen der Bahnbestimmung und der Ephemeridenrechnung uninteressant ist. Dagegen ist ihre Kenntnis wichtig etwa zur Entzerrung von Bildern bei der Bildverarbeitung von Satellitenaufnahmen in der Meteorologie oder der Fernerkundung der Erde (oder einer Planetenoberfläche usw.). Da sich der Satellit während der Bildübertragung bewegt, ändert sich mit der topozentrischen Distanz nach Formel (27.39) die Lichtzeit τ. Dies bedingt die Laufzeitänderung

$$d\tau = \frac{d\rho}{c} \quad . \tag{27.40}$$

Die Entfernungsänderung $d\rho$ kann bei Kenntnis der topozentrischen Distanzen an zwei unterschiedlichen Zeitpunkten t_1, t_2 als Differential $d\rho \approx \rho_2 - \rho_1$ aufgefasst werden. Falls andererseits an einem Zeitpunkt nur die aus einer Beobachtung abgeleitete Entfernungsänderung $\dot{\rho}$ bekannt ist, lässt sich näherungsweise schreiben

$$d\tau \approx \frac{\dot{\rho}\,dt}{c} \quad . \tag{27.41}$$

BEISPIEL 1: Zur Abschätzung typischer Größenordnungen der Lichtzeit sei eine kreisnahe sonnensynchrone Erdbeobachtungsmission mit den *Kepler*parametern (LANDSAT-A) a=7298.160 km, e=0.0, i=99° untersucht. Für eine derartige Mission aus etwa 919 km Bahnhöhe (Bild 27-7 bis Bild 27-11) unterliegt die Lichtzeit während eines Überflugs der Bodenstation Schwankungen zwischen 3 und 12 ms. Entsprechend später kommt ein Signal vom bzw. bei einer Kommandierung beim Satelliten an. Dies muss für hochgenaue Beobachtungen während einer Beobachtungspassage berücksichtigt werden. Dem entspricht längs der genannten Bahn eine Ortsverschiebung von 22 m bzw. 90 m, was den geozentrischen Winkeln $0''.6$ bzw. $2''.5$ proportional ist. Diesen Werten sind (im Beispiel bei Bezug auf die Bodenstation in Weilheim) die topozentrischen Winkel in äquatorialen Koordinaten $\Delta\alpha = 2''.02\,\text{bzw.}\,0''.14$, in topozentrischen Winkelkoordinaten $\Delta A = 12''.35\,\text{bzw.}\,0''.00$, $\Delta h = 4''.14\,\text{bzw.}\,0''.61$ zugeordnet. Im Fall eines geostationären Satelliten der Position $\lambda = 11°.3$ und der Entfernung zur Bodenstation in Weilheim $\rho = 38170\,\text{km}$ betragen die entsprechenden Werte mit der Lichtzeit $\tau = 127.3\,\text{ms}$ etwa das 10-fache (siehe das nächste Beispiel mit Bild 27-15 und Bild 27-16). Bild 27-8 zeigt den typischen Verlauf der Entfernungsänderung („range rate“) für eine erdnahe Kreisbahn.

Die Darstellung der topozentrischen Geschwindigkeit V_{TB} in Bild 27-9 zeigt im Vergleich mit den vorhergehenden Bildern, dass das Maximum dieser Geschwindigkeit nicht im Moment des nahesten Vorbeiflugs $\left(\dot{\rho} = 0.0\,\text{m/s}\right)$ stattfindet. Der Verlauf der Lichtzeit und der Entfernung in Bild 27-10 und Bild 27-11 sind identisch. Sie können daher durch Anpassung der richtigen Dimensionierung ineinander übergeführt werden. ◄

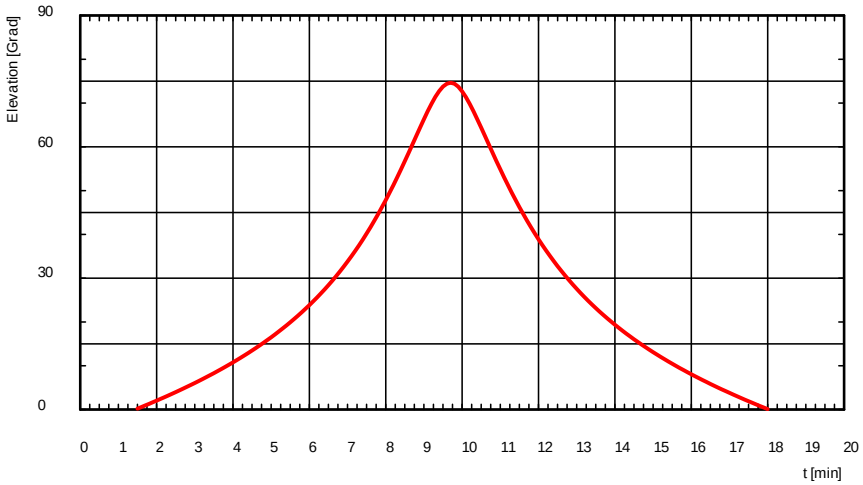


Bild 27-7: Verlauf der Elevation („Höhe“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim

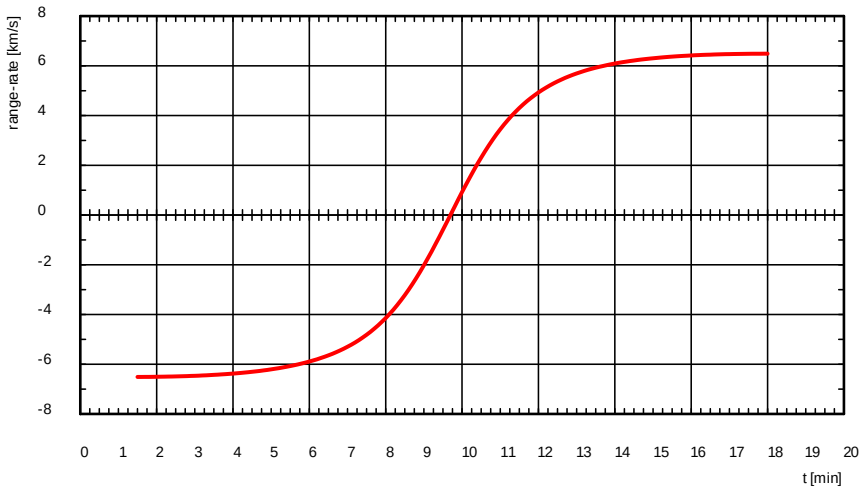


Bild 27-8: Verlauf der Entfernungsänderung („range rate“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim

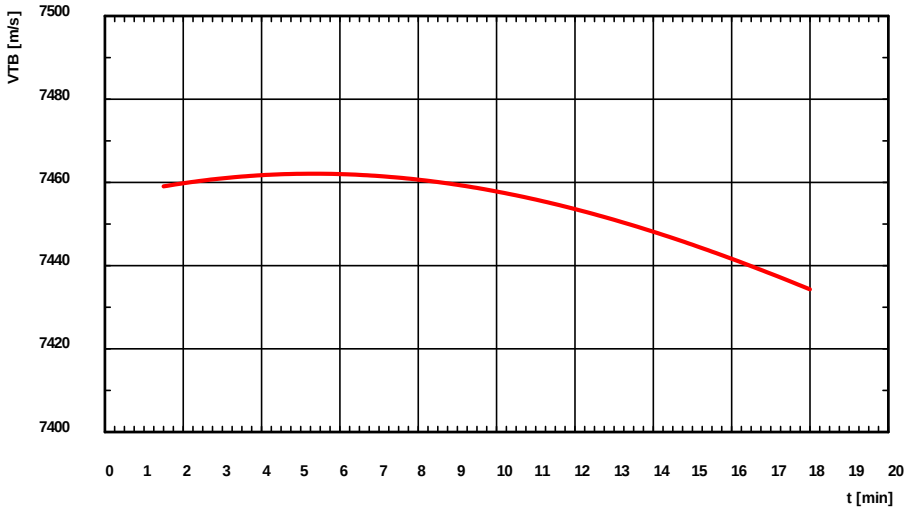


Bild 27-9: Verlauf der topozentrischen Geschwindigkeit des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug über der Bodenstation Weilheim

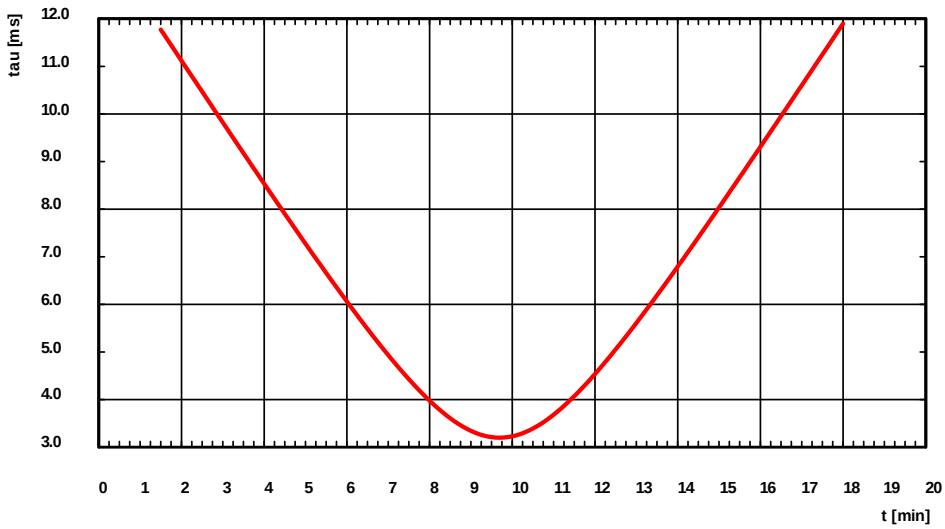


Bild 27-10: Verlauf der Lichtzeit zwischen dem Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° und der Bodenstation Weilheim für einen Überflug der Station

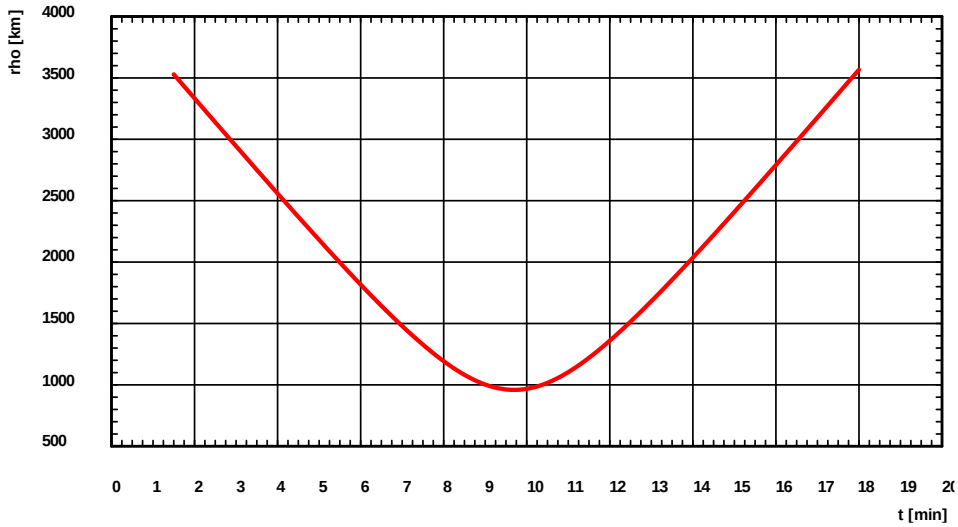


Bild 27-11: Verlauf der Entfernung („slant range“) des Satelliten mit der Bahn a=7298.160 km, e=0.0, i=99° für einen Überflug von der Bodenstation Weilheim

BEISPIEL 2: Ein völlig anderes Bild der topozentrischen Bewegung stellt eine hochexzentrische Bahn dar. Als Beispiel werde eine Transferbahn in eine geostationäre Bahn (GTO) gewählt (Daten des SYMPHONIE-A Satelliten). Die *Kepler*elemente dieser Bahn seien bei Einschuss in die Transferbahn a=24465.637 km, e=0.73112750, i=7°.0, Ω=327°.629214, ω=178.0°, M_0=0°.0. Ausgewählt wurde eine Passage mit 10h Sichtbarkeit von der Bodenstation in Weilheim aus (Bild 27-12 bis Bild 27-16). Diese Passage enthält fast eine ganze Transferphase bis in die geostationäre Bahnhöhe.

Während der Elevationsverlauf und der Verlauf der Entfernungsänderung ein anomales Verhalten zeigen, sind die Verläufe der topozentrischen Geschwindigkeit sowie der Lichtzeit bzw. der topozentrischen Distanz trotz der Überlagerung der nicht korrelierten Eigenbewegung des Satelliten und der Station sehr ebenmäßig.

Das hier vorgestellte Beispiel eines GTO wird im nächsten Abschnitt unter anderem Gesichtspunkt wieder aufgenommen. Allerdings wird dort ein anderer Zeitraum betrachtet, was im Unterschied des Elevationsverlaufs (Bild 27-12 im Vergleich zu Bild 27-19) zum Ausdruck kommt. ◄

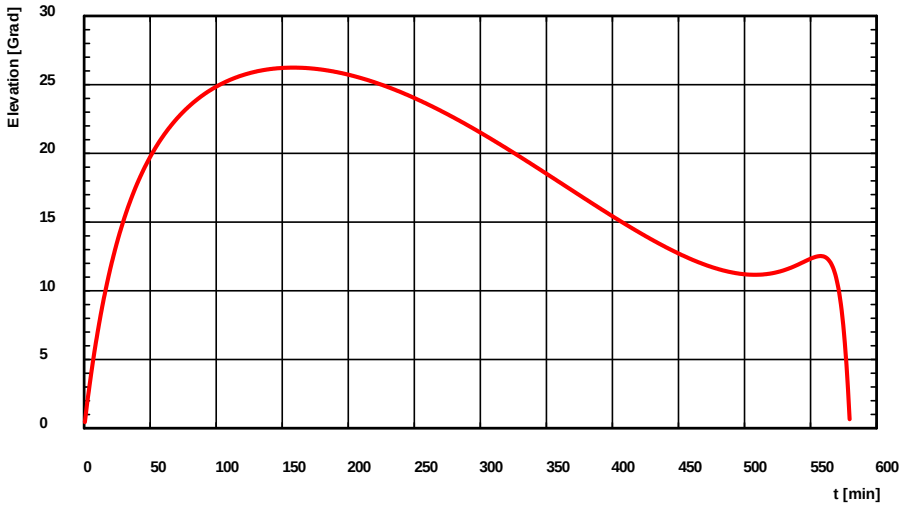


Bild 27-12: Verlauf der Elevation („Höhe“) einer geostationären Transferbahn beobachtet von der Bodenstation in Weilheim über eine Sichtbarkeitspassage von etwa 10h Dauer.

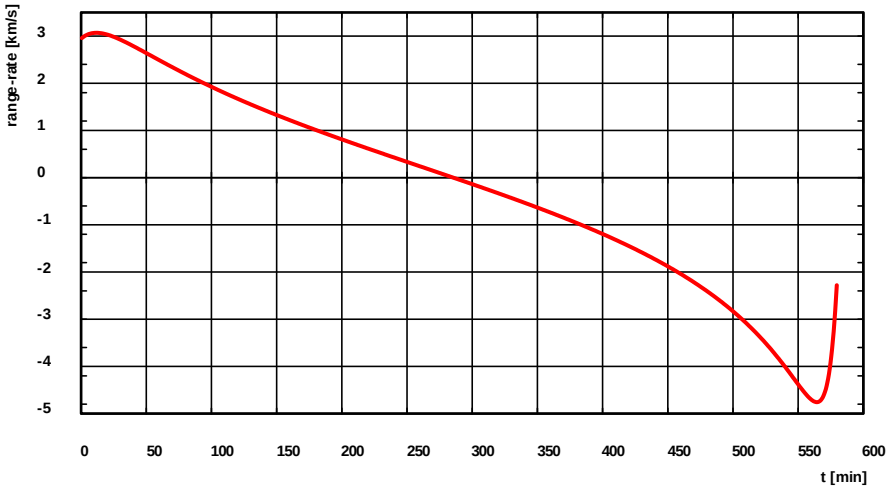


Bild 27-13: Verlauf der Entfernungsänderung („range rate“) einer hochexzentrischen GTO Bahn: Annäherung an die Station über fast die ersten 5 Stunden des Bodenkontaktes, danach Entfernung.

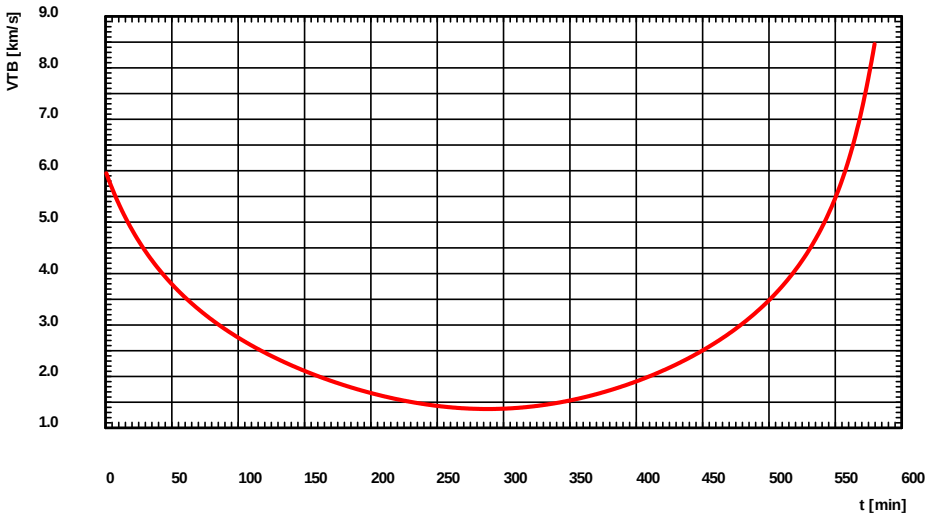


Bild 27-14: Die topozentrische Geschwindigkeit des Satelliten auf einer GTO über den gesamten Verlauf des Bodenkontaktes mit Weilheim: die geringste Geschwindigkeit wird im Apogäum durchlaufen.

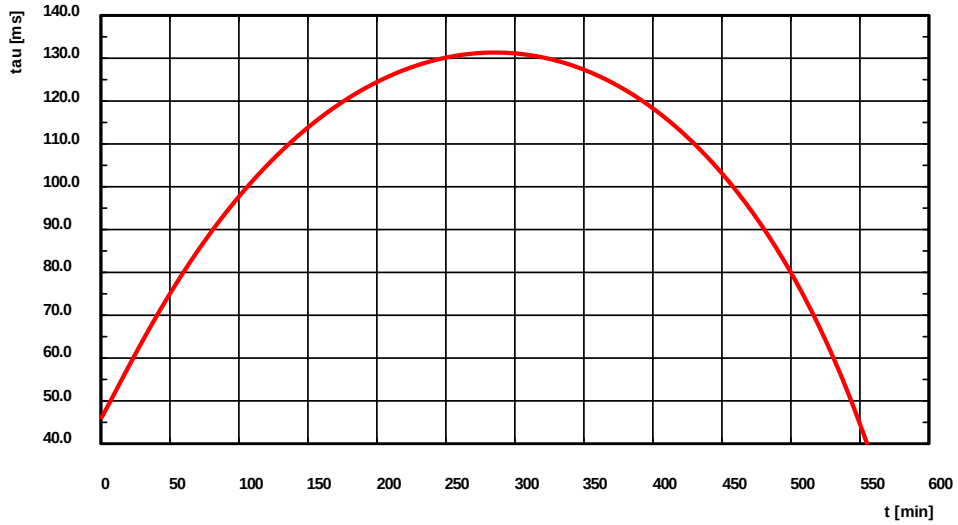


Bild 27-15: Verlauf der Lichtzeit vom Satelliten auf einer GTO zu Weilheim.

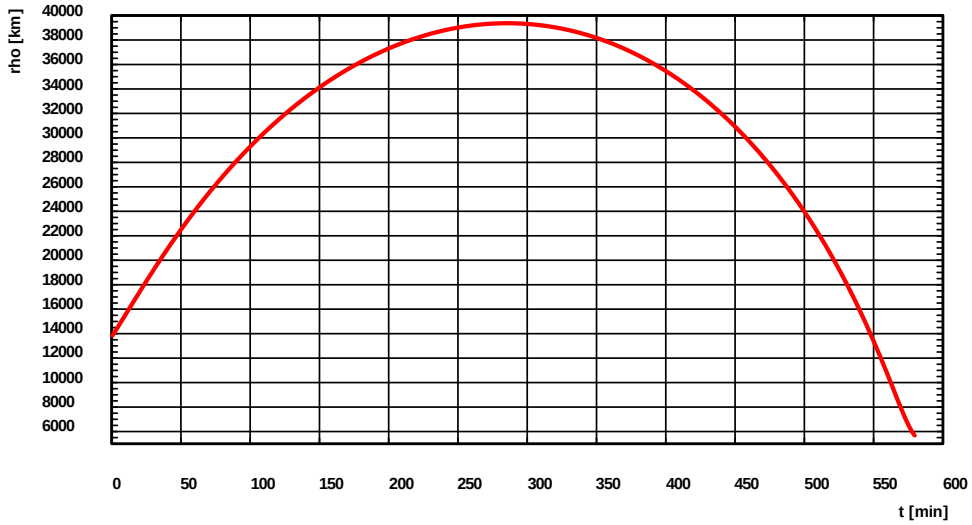


Bild 27-16: Verlauf der topozentrischen Distanz („slant range“) vom Satelliten auf einer GTO.

27.4.3 Spezielle Punkte der scheinbaren topozentrischen Bewegung

Die von einem Topozentrum aus zu beobachtende Bewegung kann mit dem Verlauf des topozentrischen Geschwindigkeitsvektors $\left(\dot{\rho}, \dot{A}, \dot{h}\right)$ verfolgt werden. Besondere Ereignisse wie scheinbar stationäre Punkte, Stillstandpunkte, Wendepunkte, Überschneidungspunkte, wie sie im Rahmen der Meridian-bezogenen Satellitenbewegung erhalten wurden, können ähnlich auch im Rahmen der topozentrischen Bewegung erarbeitet werden.

Scheinbar stationäre Punkte müssen die Bedingung $\left(\dot{A}=0, \dot{h}=0\right)$ erfüllen, dazu zählen auch scheinbare Spitzenpunkte, wenn diese Bedingung für einen Moment erreicht wird. Eine Übersicht über spezielle Punkte der topozentrischen Bewegung in Tabelle 27-1 (auf Seite 630) zusammengestellt.

Eine Auswahl von Bahnen mit einem gewünschten topozentrischen Bewegungsverhalten kann numerisch mit Hilfe der Variationsgleichungen (27.29), (27.30) durchgeführt werden. Eine Beurteilung des topozentrischen Bewegungsverhaltens kann mit Hilfe einer Ephemeride und Darstellung des Verlaufs der horizontalen Winkelkoordinaten sowie deren Variationen über der Zeit erhalten werden. Dies zeigt folgende

BEISPIEL: Es wird die topozentrische Darstellung einer Transferbahn in eine geostationäre Bahn mit den Bahndaten des SYMPHONIE-A Satelliten gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau untersucht. Die scheinbare Bewegung auf dieser Bahn wurde in Bezug auf die Erdoberfläche in Abschnitt 26.7.3.1 auf Seite 450 sowie in Bild 26-21 und Bild 26-22 untersucht. Das Erscheinungsbild gesehen von der Bodenstation aus ist völlig anders, wie der Sichtwinkelplot in

Bild 27-17 demonstriert. Dies ist eine Folge davon, dass die Bewegung des Satelliten nur über dem Horizont mit unterschiedlicher Blickrichtung und mit spezieller vom Breitenkreis der Station bedingten Eigenbewegung beobachtet werden kann. Charakteristisch ist die langsame rückläufige Bewegung bis zu einem plötzlichen spitzen Umkehrpunkt, von dem aus der Satellit sich rasch rechtläufig zum Untergang bewegt.

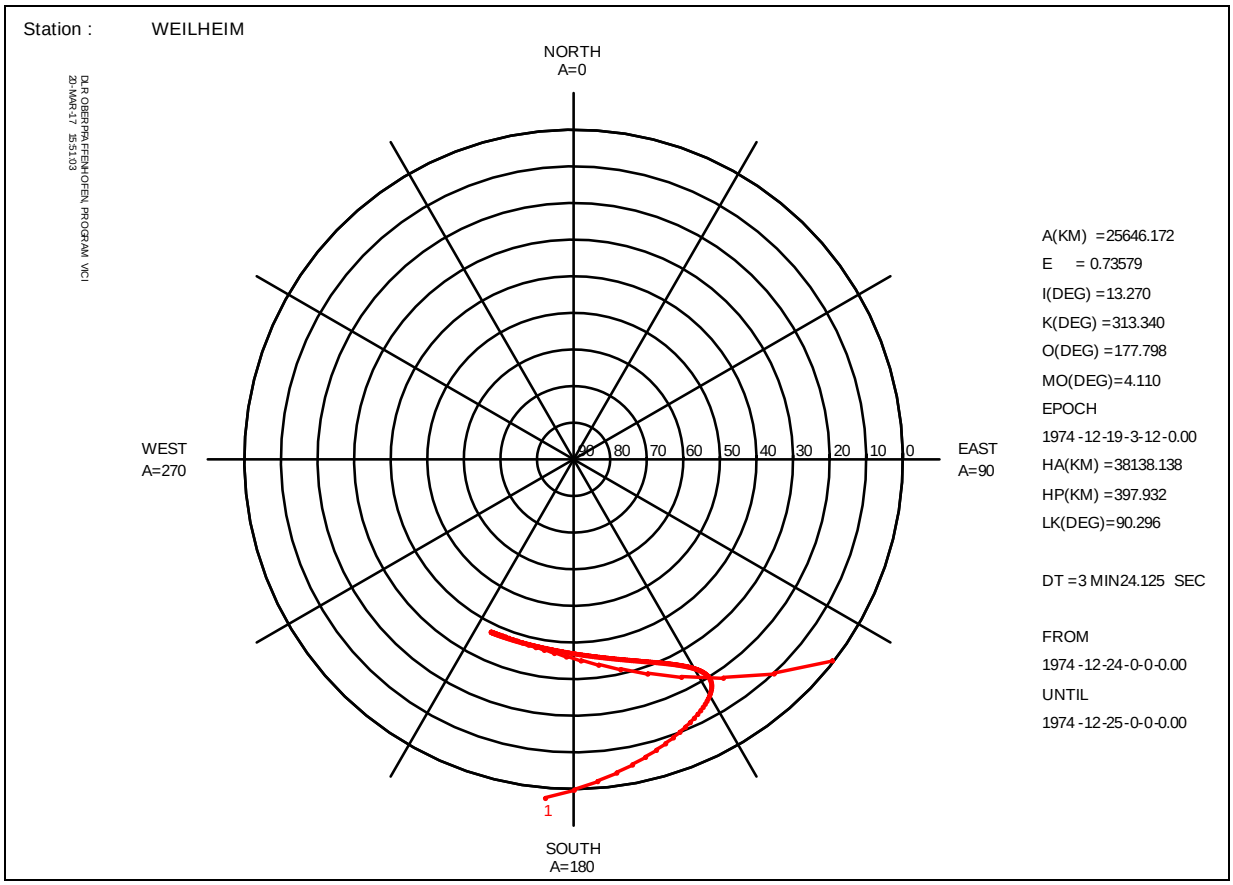


Bild 27-17: Sichtwinkelplot einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten des SYMPHONIE-A) gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau aus

Schrägentfernung	Azimut	Elevation	Spezieller Punkt
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} < 0$	$\dot{h}$ beliebig	Scheinbar rechtläufig
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} > 0$	$\dot{h}$ beliebig	Scheinbar rückläufig
$\dot{\rho}_{min}$	$\dot{A}$ beliebig	$\dot{h}$ beliebig	Kürzester Abstand, „Vorbeiflug“
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} = 0$	$\dot{h} = 0$	Stationärer Punkt
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} = 0$	$\dot{h} \neq 0$	Stillstandpunkt
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} \neq 0$	$\dot{h} = 0$	Wendepunkt
$\dot{\rho}$ beliebig	$\dot{A} \neq 0$	h=90°	Über Kopf Bewegung („cone of silence problem“)

Tabelle 27-1: Spezielle Punkt der topozentrischen Satellitenbewegung

Ausgewählt für diese Untersuchungen wurde eine Passage mit optimaler Sichtbarkeit von der Station aus. Es ist geplant, während einer solchen Passage, in der sich der Satellit im Apogäum seiner Bahn befindet, die Kommandos zum Zünden des Apogäumsmotors zu senden.

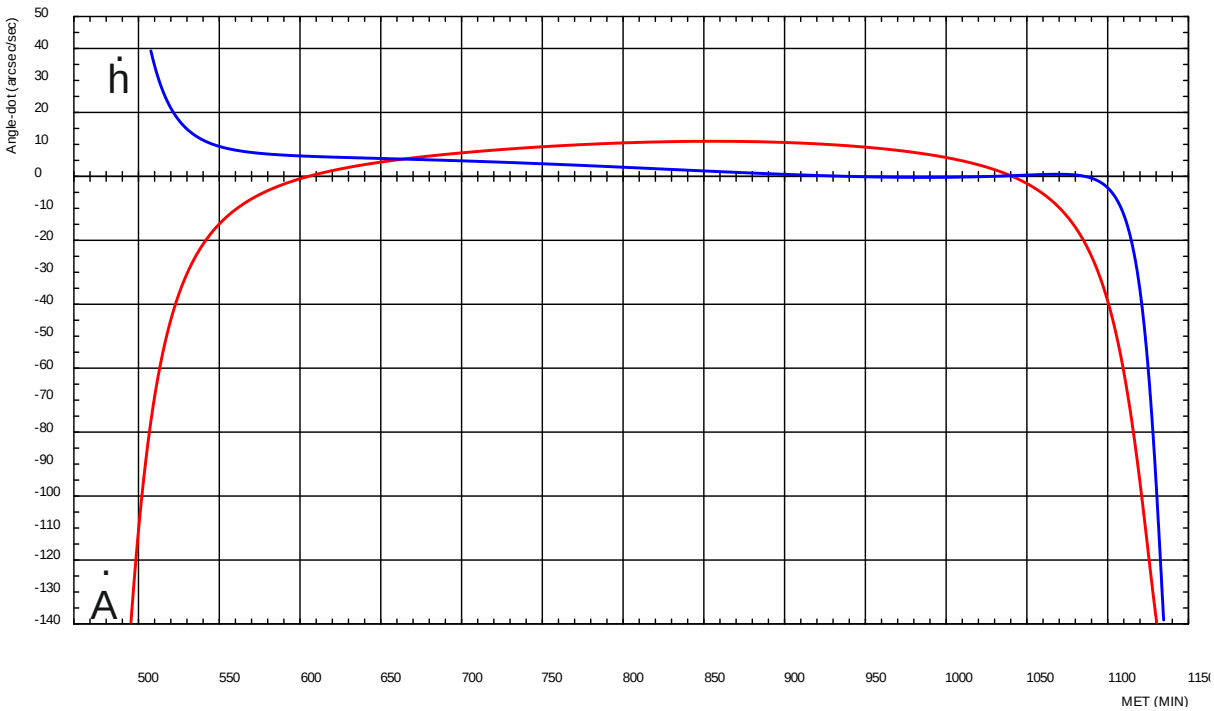


Bild 27-18: Verlauf der Variation des Azimuts $\dot{A}$ (rote Kurve) und der Elevation $\dot{h}$ (blaue Kurve) einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten des SYMPHONIE-A) gesehen von der Bodenstation in Weilheim-Lichtenau

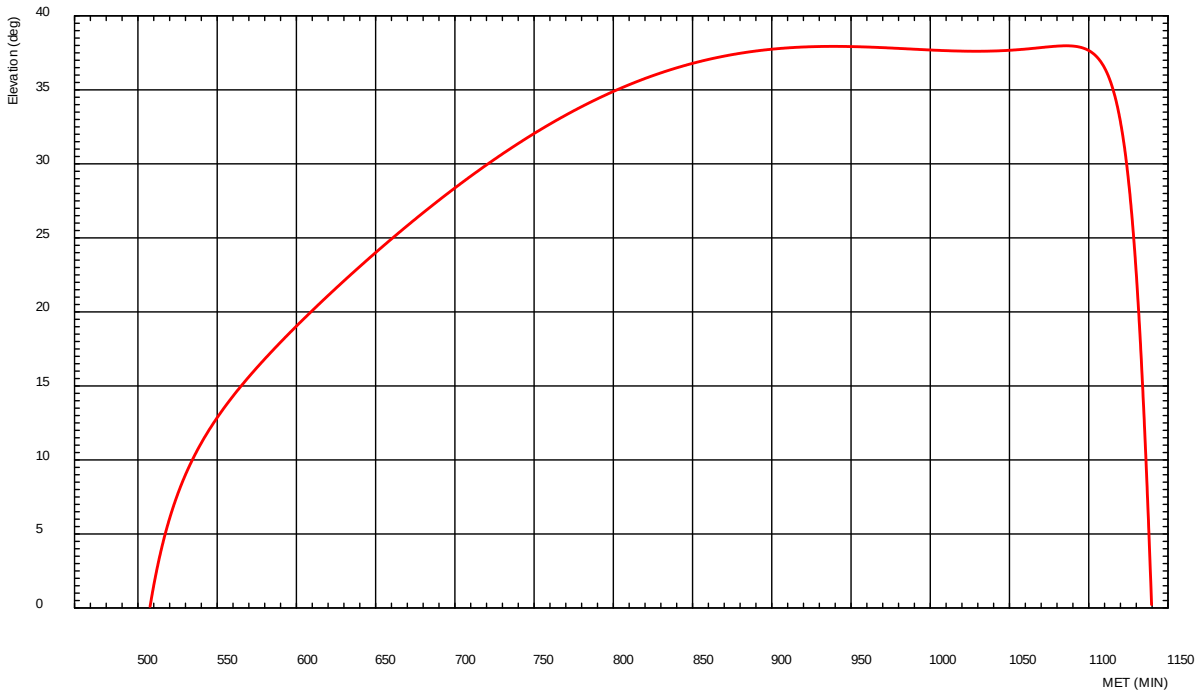


Bild 27-19: Verlauf der Elevation h einer geostationären Transferbahn über einen Überflug (Bahndaten der Transferbahn des SYMPHONIE-A Satelliten)

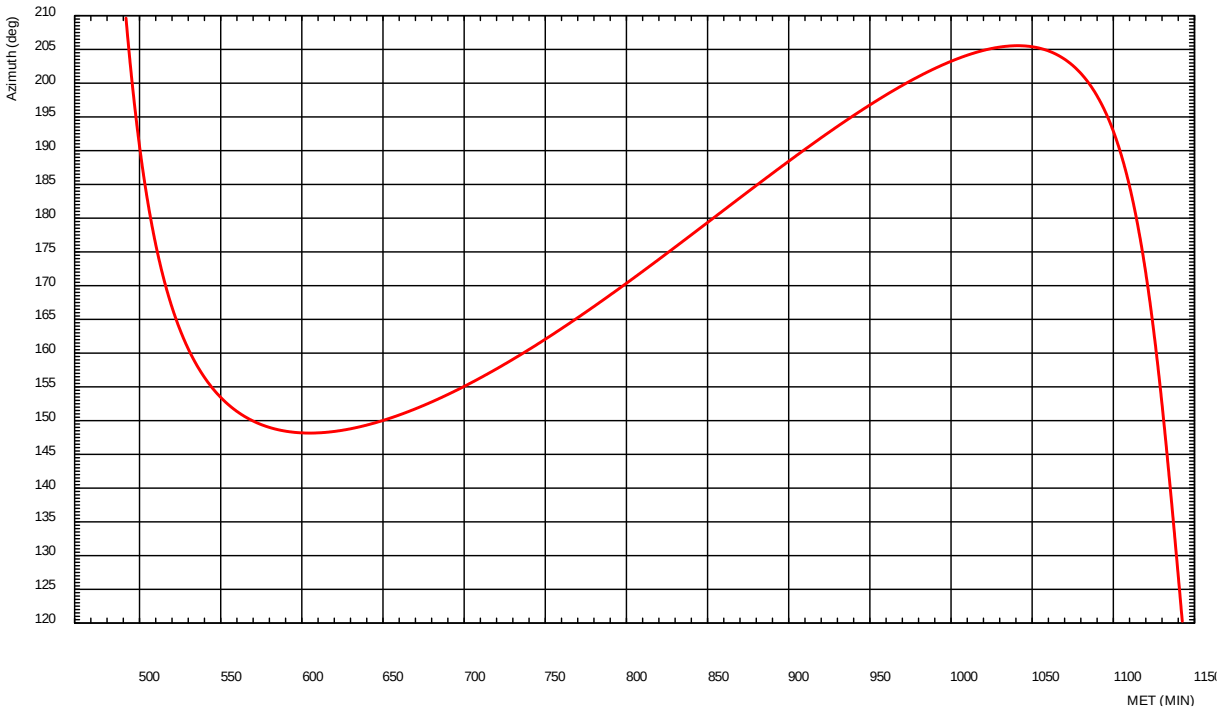


Bild 27-20: Verlauf des Azimut *A* einer geostationären Transferbahn über einen Durchgang (Bahndaten der Transferbahn des SYMPHONIE-A Satelliten)

Wenn der Satellit über dem Horizont aufsteigt, unterliegt seine Elevation maximaler Geschwindigkeit, die mit zunehmender Höhe über dem Horizont rasch abnimmt. Diese Höhe erreicht über einen langen Zeitraum ein nahezu konstantes Niveau, um dann plötzlich rasch an Höhe zu

verlieren und unter dem Horizont zu verschwinden. Bild 27-18 zeigt den Geschwindigkeitsverlauf der Elevation, die Elevation selbst ist in Bild 27-19 dargestellt.

Völlig anders verhält sich das Azimut. Da das Azimut im Horizontalsystem von Nord über Ost nach Süd und dann nach Westen definiert ist, bewegt sich der Satellit dann rechtläufig, wenn sein Azimut abnimmt, rückläufig bei zunehmendem Azimut. Die Variation des Azimut kann aus Bild 27-18 abgelesen werden: fast während der gesamten Passage bewegt sich der Satellit rückläufig, der westliche scharfe Umkehrpunkt, der im Sichtwinkelplot deutlich zu erkennen ist, ist aus dem Verlauf der Variation des Azimut und dem Betrag des Azimut nach Bild 27-20 nicht ablesbar. Die Beurteilung einer solchen Bewegung muss also aus verschiedenen Darstellungen begründet werden. ◀

27.5 Doppler Beobachtungen

Doppler Beobachtungen von erdgebundenen und interplanetaren Raumfahrtkörpern erlauben Aussagen über topozentrische Geschwindigkeiten und ihre Variationen. Diese Parameter können zur Bahnbestimmung dieser Körper verwendet werden und sind etwa 1000-mal besser als die Berechnungen aus Entfernungsmessungen[1].

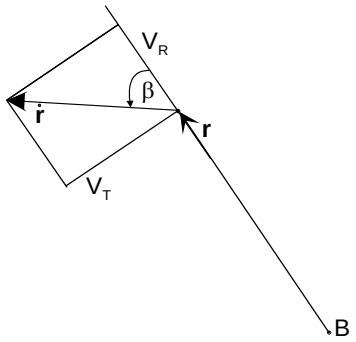


Bild 27-21: Beobachtung von radialer ($V_R = \dot{\rho}$) und transversaler (V_T) Geschwindigkeit eines Objektes mit Zustandsvektor $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, gesehen von einem Beobachter B aus

Die Frequenz eines Signals, das von einem Objekt ausgesandt wird, das die (absolute) Geschwindigkeit V hat, hat bei einem Beobachter den Wert[2]

$$f_B = f_0 \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\beta} \quad , \tag{27.42}$$

wobei f_0 die Frequenz beim Aussenden ist („Trägerfrequenz"), c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und β der Winkel zwischen topozentrischem Orts- und Geschwindigkeitsvektor des bewegten Objektes. Die radiale Geschwindigkeit ist dann bekannt aus der Beziehung

$$V_R = \dot{\rho} = V\cos\beta \quad . \tag{27.43}$$

Sie kann somit berechnet werden bei bekannter Träger-Frequenz f_0 und gemessener Frequenz f_B aus

[1] siehe etwa in HARTL, P. [1973], p. 17, auch in Abschnitt 16.1.6 (Band III)

[2] Weiteres zur hier benötigten *Lorentz*-Transformation in Abschnitt 8.17 (Band II)

$$\dot{\rho} = c\left(\frac{f_0}{f_B}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} -1 \right) \quad . \tag{27.44}$$

Ein Spezialfall ist die Variation der Frequenz zwischen einem etwa erwarteten und einem empfangenen Signal, die beide durch den Dopplereffekt gegenüber der Trägerfrequenz beeinflusst sind. Die „erwartete" Frequenz sei f_{BC}, die zugehörige (absolute) Geschwindigkeit V_C und die Entfernungsvariation $\dot{\rho}_C$. Die Abweichung in der Entfernungsvariation beträgt somit

$$\Delta\dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_C = c\, f_0 \left[\frac{1}{f_B}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - \frac{1}{f_{BC}}\sqrt{1-\frac{V_C^2}{c^2}} \right] \quad . \tag{27.45}$$

Schrittweise Näherungsausdrücke:

In der Praxis ist häufig die absolute Geschwindigkeit V bzw. V_C nicht bekannt, sondern nur die radiale Geschwindigkeit (27.43) $\dot{\rho}, \dot{\rho}_C$. Mit $V \cong V_R = \dot{\rho}$ ergibt dann Formel (27.44)

$$\dot{\rho} = -c\, \frac{f_B^2 - f_0^2}{f_B^2 + f_0^2} + \cdots \quad . \tag{27.46}$$

Mit der Zuweisung $\Delta f_B := f_B - f_0$ wird

$$\dot{\rho} = -c\, \frac{\Delta f_B}{f_0} \frac{2+\dfrac{\Delta f_B}{f_0}}{2+2\dfrac{\Delta f_B}{f_0}+\left(\dfrac{\Delta f_B}{f_0}\right)^2} + \cdots \quad .$$

Bei Vernachlässigung des quadratischen Terms $\left(\Delta f_B / f_0\right)^2$ und Entwicklung des Nenners wird

$$\dot{\rho} = -c\frac{\Delta f_B}{f_0}\frac{2+\dfrac{\Delta f_B}{f_0}}{2\left(1+\dfrac{\Delta f_B}{f_0}\right)} + \cdots = -c\frac{\Delta f_B}{f_0}\frac{1}{2}\left(2+\frac{\Delta f_B}{f_0}\right)\left(1-\frac{\Delta f_B}{f_0}\right) + \cdots \quad .$$

Nochmalige Vernachlässigung der quadratischen Terme führt schließlich auf die bekannte Form

$$\dot{\rho} = -c\frac{\Delta f_B}{f_0} + \cdots \quad . \tag{27.47}$$

Im Fall des erwarteten Wertes wird $\Delta f_{BC} := f_{BC} - f_0$, somit

$$\dot{\rho}_C = -c\frac{\Delta f_{BC}}{f_0} + \cdots \quad . \tag{27.48}$$

Wird jetzt die Differenz in der Entfernungsvariation zwischen beobachtetem und erwartetem Wert berechnet

$$\Delta\dot{\rho} := \dot{\rho} - \dot{\rho}_C \quad , \quad \Delta f := f_B - f_{BC} \quad , \tag{27.49}$$

erhält man die Formel

$$\Delta\dot{\rho} = -c\frac{\Delta f}{f_0} + \cdots \quad . \tag{27.50}$$

Bei Anwendung dieser Formel muss also stets berücksichtigt werden, dass vier Näherungsschritte bzw. Annahmen zu ihrer Herleitung benötigt wurden[1].

27.6 Anmerkungen zur Genauigkeit einer geostationären Bahn

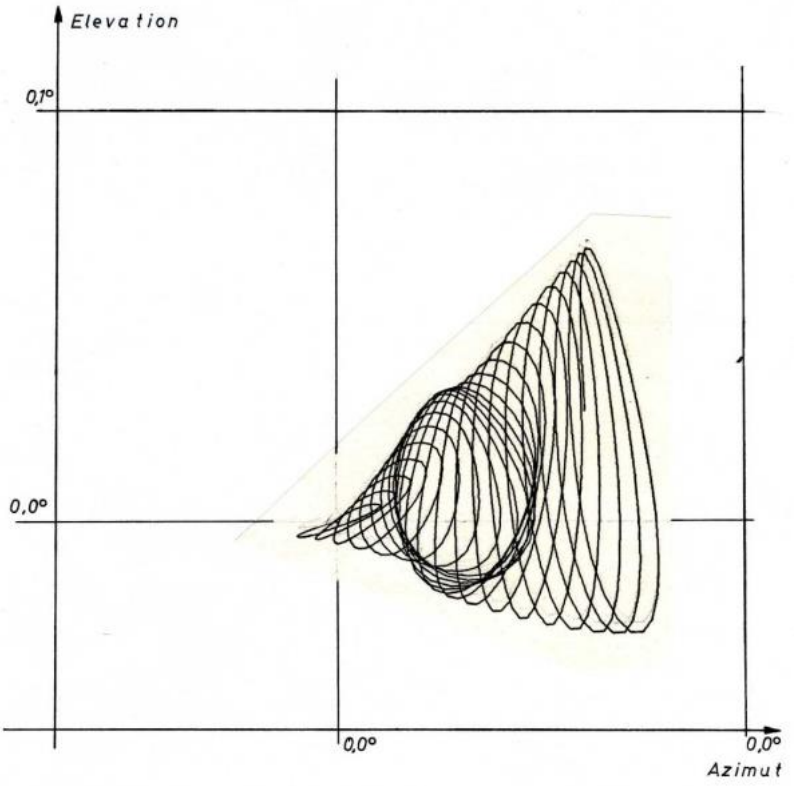


Bild 27-22: Topozentrische Bewegung des Satelliten SYMPHONIE-A in horizontalen Koordinaten infolge Störungen durch Sonne und Mond, gesehen von der ZdBS in Weilheim-Lichtenau aus, im Zeitraum 15.3.1975 bis 7.4.1975[2]

Der Sonderfall geostationärer Bewegung als kreisförmige Äquatorbahn wurde mit Hilfe der Entwicklung (26.101) bis einschließlich der zonalen Harmonischen J_5 hergeleitet. Höhere Effekte können im Fall geostationärer Bahnen vernachlässigt werden, da andere Effekte auf den Betrag der großen Bahnhalbachse, etwa durch lunisolare Attraktionen im Bereich von etwa -704 m bis -264 m, wesentlich größer angenommen werden müssen[3]. Diese wirken sich auch auf die Position eines geostationären Satelliten aus, wie in Bild 27-22 für den Fall einer topozentrischen Beobachtung demonstriert wird. Entsprechend muss in regelmäßigen Abständen die Bahn eines solchen Satelliten sowohl längs seiner Bahn („in plane maneuver“) wie aus der Bahnebene heraus („out of plane maneuver“) korrigiert werden. Diese Berechnungen sind nicht Gegenstand des vorliegenden Berichtes[4].

---

[1] Beispiele z.B. in dem Paper: JOCHIM, E. F.: On one-way Doppler measurements of space craft and celestial objects , *Acta Astronautica* **66** (2010) 309-330

[2] Zeichnungen auf Grund von Berechnungen von *M. C. Eckstein* (1975)

[3] Zahlenwerte nach W. FLURY [1973]

[4] Hierzu ist eine sehr umfangreiche Literatur vorhanden, etwa E. M. SOOP [1983]

Schrifttum zu Band IV-A

In diesem Literaturverzeichnis sind nur Basiswerke, weiterführende und vertiefende Literatur aufgenommen. Einige weitere Einzelreferenzen sind in direktem Bezug im fortlaufenden Text enthalten. Siehe zur Ergänzung auch das ausführliche Literaturverzeichnis in Band I.

AA 1984 [1983]: *The Astronomical Almanac for the Year 1984*, Washington: U. S. Government Printing Office, London: Her Majesty's Stationary Office

AA 2004 [2002]: *The Astronomical Almanac for the Year 2004*, Washington: U. S. Government Printing Office, London: Her Majesty's Stationary Office

AA 2015 [2014]: The Astronomical Almanac for the year 2015 , ISBN 978-0-7077-41499, ISSN 0737-6421, published by the United Kingdom Hydrographic Office http://www.ukho.gov.uk , Crown Copyright 2014

AKILA, S. AND C. K. RAJASINGH [1983]: 'Statistical Visibility Analysis of near Earth circular orbits', Orbital Mechanics Section, Mission Operations and Planning Division, ISRO Satellite Centre, Bangalore – 560058, December 1983, Doc. No. ISAC-42-83-12-05-016

BATTIN, R. H. [1987]: *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, J. S. Przemieniecki / Series Editor-in-Chief, New York

BAUSCHINGER, J. [1928]: *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, Zweite Auflage, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig

BECKER, Friedrich [1968]: *Geschichte der Astronomie*, BI Hochschultaschenbücher, 298/298a, Mannheim

BIALAS, V. [1998]: *Vom Himmelsmythos zum Weltgesetz – Eine Kulturgeschichte der Astronomie*, Ibera Verlag, Wien, ISBN 3 900436 52 5

BLITZER, L. [1957]: 'Effect of Earth's Oblateness on the Period of a Satellite', *Jet Propulsion*, Vol. **27**, p.405-406

BLITZER, L. [1964]: 'Nodal Period of an Earth Satellite', *AIAA Journal* ***2***, No. 8, 1459-1460

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1996]: *Theory of Orbits, Volume 1: Integrable Systems and Non-perturbative Methods*, ISBN 3-540-58963-5 Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York,

BOCCALETTI, D. AND PUCACCO, G. [1998]: *Theory of Orbits, Volume 2: Perturbative and Geometrical Methods*, ISSN 0941-7834, ISBN 3-540-60355-7 Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

BÖHNARDT, H., H. RUEDER, M. SCHNEIDER [1981]: 'Modelle des Strahlungsdrucks für die Theorie der Satellitenbahnen', *Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, Reihe **A**, Theoretische Geodäsie, Heft Nr. 93; ISBN 3-7696-81754

BOHRMANN, A. [1963]: *Bahnen künstlicher Satelliten*, BI Hochschultaschenbücher Nr. 40, Mannheim; zweite Auflage 1966

BREAKWELL, J. V. [1959]: 'On the Anomalies in the Movement of the Perigee due to Oblateness and Air Drag for Critical Values of the Inclination', *Proceedings of the NASA Conference on Orbit and Space Trajectory Determination*

BRONSTEIN, I. AND K. SEMENDJAJEW [1962]: *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch, Frankfurt/Main

BROUWER, D. [1959]: 'Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag', *Astronomical Journal* **64**, 378–397

BROUWER, D. AND CLEMENCE, G. M. [1961]: *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press

BRUMBERG, V. A. [1995]: *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

BUCERIUS, H., SCHNEIDER, M. [1968]: *Himmelsmechanik II*, BI Hochschultaschenbücher, 144/144a, Bibliographisches Institut Mannheim

BURNS, RICH. et al. [2000]: 'Solar Radiation Pressure Effects on Formation Flying of Satellites with Different Area to Mass Ratios', Paper AIAA-2000-4132, presented at AIAA/AAS Astrodynamics Specialists Conference, Denver, Co.

CAPDEROU, MICHEL [2003]: *Satellites, Orbites et Missions* , Springer-Verlag France, ISBN 2-287-59772-7

CAPELLARI, J. O., VELEZ, C. E. AND FUCHS, A. J. [1976]: *Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Md., X-582-76-77

CLAUS, A. J. AND LUBOWE, A. G. [1963]: 'A High Accuracy Perturbation Method with Direct Application to Communication Satellite Orbit Prediction', *Astronautica Acta*, Vol. **IX** Fasc. 5-6, 275–301

CLOHESSY, W. H. AND WILTSHIRE, R. S. [1960]: 'Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous', *Journal of the Aerospace Sciences*, **27** (9), 653–674

COFFEY, S. L., DEPRIT, A. AND DEPRIT E. [1994]: 'Frozen Orbits for Satellites close to an Earth-like Planet', *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **59**, 37-72

COOK, G. E. [1962]: 'Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite', *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, Vol **6**, 271

COOK, RICHARD A.; ANDREY B. SERGEYEVSKY; EDWARD A. BELBRUNO and THEODORE H. SWEETSER [1990]: 'Return to the Moon: the lunar observer mission', AIAA-90-2888-CP

COOK, RICHARD A. and THEODORE H. SWEETSER [1992]: 'Orbit Maintenance for low altitude near-circular lunar orbits', AIAA-92-185

CUTTING, E., BORN, G. H., FRAUTNICK, J. C., MCLAUGHLIN, W. I., NEILSON, R. A., THIELEN, J. A. [1977]: 'Mission Design for SEASAT-A, An Oceanographic Satellite', AIAA 15th Aerospace Sciences Meeting , Los Angeles, Calif. January 24–26, 1977, AIAA 77-31

CUTTING, E., BORN, G. H., FRAUTNIK, J. C. [1978], 'Orbit Analysis for SEASAT-A', The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. **XXVI**, No. 4, pp. 315-342, Oct.-Dec., 1978

DANJON, A. [1980]: *Astronomie Générale, Astronomie Sphérique et éléments de Mécanique Céleste*, Seconde Edition, revue et corrigée, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 9, Rue de Médicis, 75006 Paris

DURIEZ, L. [1988]: 'Long-Term Evolution of the Orbits of Natural Satellites', *Celestial Mechanics* **43**, pp. 331-348

ECKART, P. [2006], *The Lunar Base Handbook: An Introduction to Lunar Base Design, Development and Operations*, New York, McGraw-Hill

ECKSTEIN, M. C. [1980]: 'Optimal Station Keeping by Electric Propulsion with Thrust Operation Constraints', Cel. Mech. **21**, pp. 129–147

ECKSTEIN, M. C. [1983]: 'Approximate TV-SAT Orbit Injection Optimization by Means of Impulsive Hohmann Transfers', DFVLR-FB 83-02

EDENHOFER, P., GLESNER, D., STEIN, V. [1973]: 'Ausbreitungsfehler elektromagnetischer Wellen bei der Bahnvermessung von Erdsatelliten. Korrektur der systematischen und Abschätzung der statistischen Ausbreitungsfehler', DLR-FB 73-56

EL'YASBERG, P. E. [1967]: *Introduction to the Theory of Flight of Artificial Earth Satellites* , translated from Russian, Moskva 1965, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem

ENDERLE, WERNER; HAUKE FIEDLER; SERGIO DE FLORIO; GERHARD KRIEGER; FRIEDRICH JOCHIM; SIMONE D'AMICO; SHANNON DAWSON; WILLIAM KELLAR [2006]: 'Next Generation GNSS for Navigation of Future SAR Constellations', IAC-06-C1.8.06

ESCOBAL, P. R. [1965]: *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., New York

EXPLANATORY SUPPLEMENT [1971] *to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac*, prepared jointly by the Nautical Almanac Offices of the United Kingdom and the United States of America, London, Her Majesty's Stationary Office, Reprinted with corrections 1962

FARQUHAR, R. W.; MUHONEN, D.; NEWMAN, CH.; HEUBERGER, H. [1979]: 'The first Libration Point Satellite: Mission Overview and Flight History', AAS 79-126

FAUVEL, J.; FLOOD, R.; SHORTLAND, M.; WILSON, R. ed. [1993]: *Newtons Werk, Die Begründung der modernen Naturwissenschaft*, Birkhäuser Verlag, Basel – Boston – Berlin, ISBN 3-7643-2890-8

FEKETE, THOMAS A., LESTER L. SACKETT and ANDREAS H. VON FLOTOW [1992]: 'Trajectory design for solar sailing from low-Earth orbit to the Moon', AAS 92-184

FIEDLER, H., G. KRIEGER, E. F. JOCHIM, M. KIRSCHNER, A. MOREIRA [2002 a]: 'Analysis of Bistatic Configurations for Spaceborne SAR Interferometry', EUSAR 2002, Koeln, 4.-6. June 2002, ITG VDE, Proceedings EISAR 2002, VDE Verlag, ISBN: 3-8007-2697-1, pp. 29-32

FIEDLER, H., G. KRIEGER, E. F. JOCHIM, M. KIRSCHNER, A. MOREIRA [2002 b]: 'Analysis of Satellite Configurations for Spaceborne SAR Interferometry'' , CNES, Formation Flying, Toulouse, France, 29-31. Oct. 2002, published in: International Symposium Formation Flying Missions & Technologies, Proceedings

FLURY, W. [1973]: 'Station Keeping of a Geostationary Satellite', ELDO-CECLES/ESRO-CERS Scient. And Techn. Rev. **5**, 131-156

FLURY, W. [1976]: 'The Drift of a Near-Geostationary Satellite', ESOC, IHD.M.A.D. Working Paper No. 12

FRAUTNIK, J. C. [1976]: 'Dynamics of Frozen Orbits', JPL Interoffice Memorandum, 392.6-922, 3 February 1976

GIACAGLIA, G. E. O. [1973], 'Lunar Perturbations on Artificial Satellites of the Earth', SAO, Special Report 352, and [1974], *Celestial Mechanics* **9**, pp. 239-267

GIACAGLIA, G. E. O. [1973], 'Lunar Perturbations on Artificial Satellites of the Earth', SAO, Special Report 352, and [1974], *Celestial Mechanics* **9**, pp. 239-267

GIACAGLIA, G. E. O. [1976]: 'A note on Hansen's Coefficients in Satellite Theory', *Celest. Mech.* **14,** 515-523

GIACAGLIA, G. E. O. et alii [1975], 'Evaluation of Geopotential and Luni-Solar Perturbations by a Recursive Algorithm', Appl. Mech. Res. Lab. Paper No. 1073, Univ. of Texas at Austin

GIACAGLIA, GIORGIO EUGÊNIO OSCARE; PRADO, ANTONIO FERNANDO BERTACHINE DE ALMEIDA [2003]: *Third Body Perturbations on Satellites*, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, Sâo José dos Campos, SP, Brazil, ISBN 85-17-00010-2

GIESE, R. H. [1966]: *Weltraumforschung I*, Bibliographisches Institut, Mannheim, Hochschultaschenbücher 107/107a

GREEN, R. M. [1985]: *Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

HALBRITTER, J-P. [1981]: 'Study on the Extension of the Stroboscopic Method to the Second Order', Analytical and Computational Mathematics, ACM Schänis AG, Switzerland, ESA Report Reference CR(P) 1488, ESA Contract No. 3856/79/D/JS(SC), April 1981

HALBRITTER, J-P. [1982]: 'Study on the Extension of the Stroboscopic Method to the Second Order, Volume 2, Perturbation by the Higher Degree Zonal Harmonics', Analytical and Computational Mathematics, ACM Schänis AG, Switzerland, ESA Report Reference CR(P) 1488, ESA Contract No. 3856/79/D/JS(SC)/Rider No.2, February 1982

HANSEN, P.A. [1838/1]: *Fundamenta Nova Investigationis Orbitae verae quam Luna perlustrat*, Gotha

HANSEN, P. A. [1838/2]: 'Bemerkungen über die Behandlung der Theorie des Störungen des Mondes', Astron. Nachr., Vol.XIX, Cols. 33-92, (cit. nach: E. W. BROWN [1896/1960], p. 161)

HANSEN, P.A. [1864]: 'Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, erste, zweite Abhandlung', Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, sechster und siebenter Band [1865], bei S. Hirzel, Leipzig

HARRISON, E. F., NASA Langley Research Center, Hampton, Va., and G. G. GIBSON, Kentron International, Inc. [1980]: 'Orbital Analysis for the Upper Atmosphere Research Satellite Mission', *AIAA 18th Aerospace Sciences Meeting*, January 14-16, 1980/Pasadena, California, AIAA-80-0236

HARTL, PH. [1973]: 'Die Bedeutung der Doppler- und Laufzeitmessung für erdferne Raumfahrt-Missionen', DLR-FB 73-104

HARTL, PH. [1977]: *Fernwirktechnik der Raumfahrt, Telemetrie, Telekommando, Bahnvermessung*, Nachrichtentechnik, herausgegeben von H. Marko, Band 2, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, ISBN 3-540-08172-0

HENRARD, J. [1974]: 'Virtual Singularities in the Artificial Satellite Theory', *Celest. Mech.* ***10***, 437

Hill, G. W. [1881], 'Note on Hansen's Theory of Perturbations', *Am. J. Math.*, **4**, 256-259 (oder in: *Coll. Math. Works* **1**, 348)

HOOTS, FELIX R. AND RONALD L. ROEHRICH [1980]: 'Models for Propagation of NORAD Element Sets', *Office of Astrodynamics, Peterson AFB, Co.*, Spacetrack Report No.3, ADA 093 554, pp.1–100

IERS [1989]: 'IERS Standards 1989, IERS Technical Note 3', Central Bureau of IERS, Observatoire de Paris, 61, avenue de l'observatoire, F-75014 Paris, France

JAZWINSKI, ANDREW H. [1970]: *Stochastic Processes and Filtering Theories*, Volume 64 in the series *Mathematics in Science and Engineering*, ed. by Richard Bellman, Academic Press New York-San Francisco-London,

JENSEN, J., TOWNSEND, G., KORK, J., KRAFT, D. [1962]: *Design Guide to Orbital Flight*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

JOCHIM, E. F. [1983]: 'The Synodic Motion of Satellites Related to Sun'. *Proceedings of AAS/AIAA Astrodynamics Conference*, Lake Placid, New York, August, 22 - 25, 1983. AAS 83-334

JOCHIM, E. F. M. [2011] 'Die Verwendung von Hansen-Systemen in Himmelsmechanik und Astronautik', ISSN 1434-8454, ISRN DLR-FB 2011-04

JOCHIM, E. F. M. [2012]: 'The Significance of the Hansen Ideal Space frame', ASTR. NACHR. / AN 333, NO. 8, 774-783 (2012) / DOI 10.1002/ASNA.202222711

JOCHIM, E. F. M. [2015]: 'The Circle will Now be Closed, finally (On the Inability to Adapt Circular Motions)', *Journal of Space Operations and Communicator*, April 02, 2015, Vol. 12 Issue 2, ISSN 2410-0005

JOCHIM, E. F. M. [2016]: 'Rectilinear Motion: A Basis for the Adaptation of Arbitrary Motion', *Journal of Space Operations and Communicator* (ISSN 2410-0005), Vol. **13** Issue 2, 2016

JOCHIM, E. F. M. [2018 a]: *Satellitenbewegung, Band III, Natürliche und gesteuerte Bewegung* (Satellite Motion, Vol. III.: Natural and Guided Motion), ISRN DLR FB 2014-36, ISSN 1434-8454

JOCHIM, E. F. M. [2018 b]: *Satellitenbewegung, Band IV, Bewegungsanalyse* (Satellite Motion, Vol. IV.: Satellite Orbit Analysis), ISRN DLR FB 2018-31, ISSN 1434-8454

JOCHIM, E. F. M. [2020]: 'Satellite Equivalence Orbits', *Acta Astronautica* 179 (2021), 213-227 (https://doi.org/10.1016/j.actaastro,2020.10.045, Available online 1 November 2020, 0094-5765/© 2020 Published by Elsevier Ltd on behalf of IAA)

JOCHIM, E. F. M. [2022]: 'Hybrid-Equivalences while Coupling Anomalistic with Draconitic Satellite Motions', *Journal of Space Operations & Communicator (ISSN 2410-0005)*, Vol **18**, Nr. 3, Year 2022

JOCHIM, E. F.; ECKSTEIN, M. C. [1980]: 'On the True Circular Orbit of a Satellite'. *Celest. Mech.* ***21***, 1980, pp. 149 - 153

JOCHIM, E. F.; MÁRIO M. QUINTINO DA SILVA; REINHARD SCHRÖDER; IRENA HAJNSEK; JÜRGEN PULS [2005]: 'Orbit Analysis for the Brazilian-German Space Project MapSar based on User Requirements', Paper IAA-B5-1001,Selected Proceedings of the 5th International Symposium of the International Academy of Astronautics, Berlin, April 4 – 8, 2005, ed. By Hans-Peter Röser, Rainer Sandau, Arnoldo Valenzuela, de Gruyter, Berlin, New York, ISBN: 3-11-018851-1

JOCHIM, E. F. M.; HAUKE FIEDLER; GERHARD KRIEGER [2010]: 'Fuel Consumption and Collision Avoidance Strategy in Multi-Static Orbit Formations', *Acta Astronautica*, AA-68 (2011) 1002-1014

JONES, BRIAN L. and ROBERT H. BISHOP [1993]: 'Stable rendezvous for a small radius translunar halo orbit', AAS 93-144Springer, published in association with Praxis Publishing, Chichester, UK, ISBN 3_540-25448-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

JORDAN-ENGELN, GISELA; FRITZ REUTTER [1981]: *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN-Programmen*, BI Hochschultaschenbücher, Band 106, 3. Auflage, ISBN 3-411-06106-5

KAULA, W. M. [1962]: 'A Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite', *NASA Technical Note* , D-1126, NASA, Washington, January 1962; [1962]: Astronomical Journal, Vol. **67**, n.2., pp. 300-303

KELSO, D. T. [1995] „Satellite Times Orbit Determination," July 1995., [Online]. Available: http://celestrak.com/columns/v01n06/

KIEDRON, K., COOK, R. [1991], 'Frozen Orbits in the J_2 + J_3 Problem', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Durango, Colorado, August 19-22, 1991, Paper AAS 91-426

KIRSCHNER, M., JOCHIM, E. F. [2000], **'**Project CartWheel, Assessment of Collision and Contamination Risks', DLR GSOC IB 2000-07, 21 Dec. 2000

KLINKRAD, H. [1982]: 'ERS-1 Orbit Maintenance Manoeuvre Strategy and Fuel Consumption Estimation', ESOC Working Paper No. 212, Darmstadt, Nov 1982

KLINKRAD, H. [1983]: *Analytische Berechnung erdnaher Satellitenbahnen unter Verwendung eines realistischen Luftwiderstandsmodells*, von der Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Dissertation

KLINKRAD, H. [1985]: 'Orbit Design of the First ESA Remote Sensing Satellite ERS-1', IAF-85-254

KLINKRAD, H. [2006]: *Space Debris, Models and Risk Analysis*, Springer, published in association with Praxis Publishing, Chichester, UK, ISBN 3_540-25448-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

KOELLE, H. H. ED. [1961]: *Handbook of Astronautical Engineering*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London

KOZAI, YOSIHIDE [1959]: 'The Motion of a Close Earth Satellite', *Astronomical Journal* **64**, 367–377

KRAMER, HERBERT J. [2002]: *Observation of the Earth and Its Environment*, 4th Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ISBN 3-540-42388-5

KRIEGER, GERHARD, ALBERTO MOREIRA, HAUKE FIEDLER, IRENA HAJNSEK, MARIAN WERNER, MARWAN YOUNIS, MANFRED ZINK [2007]: 'TanDEM-X: A Satellite Formation for High-Resolution SAR Interferometry', *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. **45**, No. 11, November 2007

KRISCH, A. [etwa 1901]: *Astronomisches Lexikon*, A. Hartlebens Verlag, Wien. Pest. Leipzig

KUGA, HELIO KOITI, VALCIR ORLANDO [2003], 'Assessing Orbit Determination Through One Way Doppler Signals', 17th International Symposium on Space Flight Dynamics, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, June, 16th – 20th, Aerospace Sciences and Technology, Paper 12-3

KUZNIK, F. [1983]: 'Visit to a Small Comet', *Space World*, July 1983, 23–26

LEIPOLD, M. [2000]: 'Solar Sail Mission Design', Dissertation, Lehrstuhl für Flugmechanik und Flugregelung, Technische Universität München

LENSE, JOSEF [1940]: 'Die sphärische Trigonometrie in der sphärischen Astronomie', *Astronomische Nachrichten **271***, 121–132

LEXIKON DER ASTRONOMIE, Band 1 [1989], Band 2 [1990], Herder Verlag, Freiburg – Basel - Wien

LONG, ANNE C. et al. [1989]: 'Goddard Trajectory Determination System (GTDS), Mathematical Theory (Revision 1)', FDD/552-89/001 and CSC/TR-89/6001, Goddard Space Flight Center, NASA

LYDDANE, R. H. [1963]: 'Small Eccentricities or Inclinations in the Brouwer Theory of the Artificial Satellite', *Astronomical Journal **68***, 555–558

MASSONNET, D. [2001]: 'Capabilities and Limitations of the Interferometric Cartwheel', IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, Vol. **39**, No3, pp.506-520

MC CLAIN, W. D. [1987]: 'Eccentricity Control and the Frozen Orbit Concept for the Navy Remote Ocean Sensing System (NROSS) Mission', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Kalispell, Montana, August 10-13, 1987, Paper AAS 87-516

MCINNES, COLIN R. [1999]: *Solar Sailing, Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer–Praxis Series in Space Science and Technology, Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK, ISBN 1-85233-102-X

MERSON, R. H. [1961]: 'The Motion of a Satellite in an Axi-symmetric Gravitational Field', *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **4**, 17–52

MERSON, R. H. [1963]: 'The Perturbations of a Satellite Orbit in an Axi-symmetric Gravitational Field', *Technical Note*, No. Space 26, Royal Aircraft Establishment [Farnborough], U.D.C No. 629.195.077.3 : 531.261

MITTERMAYER, J., F. JOCHIM, G. KRIEGER, M. EINEDER, M. HUBIG, KH. ZELLER, S. BUCKREUß [2000]: 'Preliminary Performance Estimation for CartWheel Combined with ASAR', 2nd ENVISAT – CartWheel Technical Meeting, 14 November 2000, ESA HQ, Paris

MITTERMAYER, J., F. JOCHIM, G. KRIEGER [2000]: 'Timing and Squint Angle Analysis', ASAR – CartWheel Workshop, DLR Oberpfaffenhofen 10 November 2000

MORANDO, B. [1974]: *Mouvement d'un satellite artificiel de la terre*, Gordon & Beach, Paris, London, New York

MORBIDELLI, A. [2002]: *Modern Celestial Mechanics, Aspects of Solar System Dynamics*, ISBN 0-415-27939-9, Taylor & Francis, London

MUELLER, I. I. [1977]: *Spherical and Practical Astronomy as applied to Geodesy*, Second Printing, Frederick Ungar Publishing Co., New York

MURRAY, CARL. D. AND DERMOTT, STANLEY, F. [1999]: *Solar System Dynamics,* Cambridge University Press

MUSEN, P. [1968 b]: 'Investigations in Hansen's Planetary Theory', [NASA TN D-4169, 19 pages], *Bulletin Astronomique,* Série 3, **3,** Fascicule 3, 253–263

MUSEN, P. [1969]: 'A Discussion of Hill's Method of Secular Perturbations and its Application to the Determination of the Zero-Rank Effects in Non-Singular Vectorial Elements of a Planetary Motion', *Celestial Mechanics*, **2**, pp. 41-59

MUSEN, P. [1971]: 'The Influence of the Great Inequality on the Secular Disturbing Function of the Planetary System', *Celestial Mechanics,* **4**, pp. 378-396

MUSEN, P., A. BAILIE AND E. UPTON [1961]: 'Development of the Lunar and Solar Perturbations in the Motion of an Artificial Satellite', Technical Note NASA TN D-494, Washington D.C., January 1961

NEUGEBAUER, O. [1975]: *A History of Ancient Mathematical Astronomy,* 3 Vol., Springer, Heidelberg

PARK, SANG-YOUNG and JOHN L. JUNKINS [1994]: 'Orbital mission analysis for a lunar mapping satellite', AIAA-94-3717-CP

PRESS, W. H.; FLANNERY, B. P.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. [1986]: *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing,* Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney

ROSBOROUGH, G. W., OCAMPO, C. A. [1991], 'Influence of Higher Degree Zonals on the Frozen Orbit Geometry', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Durango, Colorado, August 19-22, 1991, Paper AAS 91-428

ROSENGREN, M. [1988/1]: 'The Duration of the Orbit Control Cycle for ERS', ESOC OAD Working Paper No. 363, Darmstadt March 1988

ROSENGREN, M. [1988/2]: 'Study of the Optimal Eccentricity Control of ERS', OAD Working Paper No. 367, Orbit Attitude Division, ESA Computer Department, ESOC (European Space Operations Centre), Darmstadt, April 1988

ROSENGREN, M. [1989]: 'Improved Technique for Passive Eccentricity Control', Paper AAS 89-155

ROTH, ERNST A. [1975]: 'Perturbation of a Satellite Orbiter by the Oblateness of the Primary Planet', ESA Scientific Report SR-26 (ESOC)

ROTH, ERNST A. [1981]: 'On the Perturbations of the Anomalistic Period of a Highly Eccentric Orbit Satellite due to the Zonal Harmonics', *Celestial Mechanics* **23** , pp. 83-87

ROTH, ERNST A. [1982]: 'Construction of a consistent semianalytic theory of a planetary or Moon orbiter perturbed by a third body', *Celestial Mechanics* **28** , pp. 155-169

ROTH, ERNST A. [1982]: 'On the Nodal Period of a Satellite perturbed by the Earth Oblateness (J2)', ESA M.A.O. Working Paper No. 167, April 1982

ROY, A. E. [1982]: *Orbital Motion,* Adam Hilger Ltd, Bristol, ISBN 0-85274-462-5

RUNGE, H., R. BAMLER, J. MITTERMAYER, E. F. JOCHIM, D. MASSONNET, E. THOUVENOT [2001]: 'The Interferometric CartWheel for Envisat', 3rd IAA Symposium on Small Satellites for Earth Observation, April 2-6, 2001 Berlin, Germany

RUPPE, H. O. [1966/1967]: *Introduction to Astronautics*, Vol. 1, 1966, Vol. 2, 1967, Academic Press, New York and London, Library of Congress Catalog Card Number: 66-14469

SCHNEIDER, M. [1992]: *Himmelsmechanik, Band I: Grundlagen, Determinierung*, BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut & D. A. Brockhaus AG, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, ISBN 3-411-15223-0

SCHNEIDER, M. [1993]: *Himmelsmechanik, Band II: Systemmodelle*, BI-Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut & D. A. Brockhaus AG, Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich, ISBN 3-411-15981-2

SCHNEIDER, M. [1996]: *Himmelsmechanik, Band III: Gravitationstheorie,* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin, ISBN-10: 3860257188 , ISBN-13: 978-3860257180

SCHNEIDER, M. [1999]: *Himmelsmechanik, Band IV: Theorie der Satellitenbewegung, Bahnbestimmung*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin, ISBN 3-8274-0484-3, ISBN-13: 978-3827404848

SCHULZ, W. ED. [1980]: 'Vorträge auf dem Walter-Hohmann-Symposium der DGLR über Raumflugmechanik', Köln, 12. und 13. März 1980, DLR-Mitt. 80-01

SEIDELMANN, P. K. ED. [1992]: *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, A Revision to the Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, Prepared by the Nautical Almanac Office, U. S. Naval Observatory with Contributions from H. M. Nautical Almanac Office, Royal Greenwich Observatory, Jet Propulsion Laboratory, Bureau des Longitudes, and the Time Service and Astrometry Departments, U. S. Naval Observatory, University Science Books, Mill Valley, California (ISBN 0-935702-68-7)

SIRY, J. W. [1970], 'Goddard astronomic and geodynamic parameters', *Goddard Space Flight Center, Preprint Nr*. X-550, pp. 70-481

SMITH, J. C. [1986], 'Analysis and Application of Frozen Orbits for the TOPEX Mission', JPL, California Institute of Technology, Pasadena, CA, AIAA/AAS Astrodynamics Conference, August 18-20, 1986/Williamsburg, Virginia, Paper AIAA 86

SOOP, E. M. [1983]: *Introduction to Geostationary Orbits*, ESA SP-1053

STANEK, B. [1983]: *Raumfahrtlexikon*, Hallwag Verlag, Bern und Stuttgart

STIEFEL, EDUARD [1965]: *Einführung in die numerische Mathematik*, 3. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart

STIEFEL, E. AND SCHEIFELE, G. [1971]: *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

STRÖMGREN, E. UND STRÖMGREN, B. [1933]: *Lehrbuch der Astronomie*, Springer-Verlag, Berlin

STUMMEL, F. und HAINER, K. [1971]: *Praktische Mathematik*, B. G. Teubner Stuttgart, ISBN 3-519-02040-8

STUMPFF, K. [1959, 1965, 1974]: *Himmelsmechanik I* [1959); *Himmelsmechanik II* [1965]; *Himmelsmechanik III* [1974], DVW Berlin

SWENSON, B. I. [1971]: 'Orbit Selection Considerations for Earth Resources Observations', Office of Advanced Research and Technology, Mission Analysis Division, Moffett

Field, Calif., 94035, *Report No .NASA TM X-2156*, Performing Organisation Report No. a-3640, Work Unit No. 130-06-13-15, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C. 20546, February 1971

SYNNES, D. C. [1993], 'Precision Control of Frozen, Exact Repeat Orbits', AAS 93-726

SZEBEHELY, VICTOR G. (ed.) [1978]: Proceedings of the 14th Colloquium of the International Astronomical Union, Cambridge, England 17-19 August, 1976, Astrophysics and Space Science Library, Volume 72, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht: Holland, Boston: U.S.A., ISBN 90-277-0869 x

TANG, C. C. H. [1987], 'A Second – Order Analytic Analysis for Frozen Orbits', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Kalispell, Montana, August 10-13, 1987, Paper AAS 87-447

TISSERAND, F. [1889-1896]: *Traité de Mécanique Céleste*, Tome I – Tome IV, Gauthiers-Villars, Paris

UPHOFF, C. [1985], 'Identification of Frozen Orbits Without Integration', JPL Interoffice Memorandum, 312/85.2-942, 3 April 1985

URBAN, S. and P. K. SEIDELMANN, (eds.) [2012], *Explanatory Supplement to The Astronomical Almanac*. Mill Valley, CA: University Science Books

VALLADO, DAVID A. [2001]: *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, with contributions by Wayne D. McClain, Second Edition, Space Technology Library, Microcosm Press El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London

VINCENT, M. A. [1991], 'Eccentricity and Argument of Perigee Control for Orbits with Repeat Ground Tracks', AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Durango, Colorado, August 19-22, 1991, Paper AAS 91-516

VOIGT, H.-H. [1983]: *Abriss der Astronomie I*, BI Hochschulskripten, 807/807a, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich, *Band II*, 819/819a

VOLK, O. [1969]: 'Eulers Beiträge zur Theorie der Bewegungen der Himmelskörper', in: Leonhard Euler 1707-1783, Beiträge zu Leben und Werk, Basel 1983, pp. 345-362

WALKER, J. G. [1970]: 'Circular Orbit Patterns Providing Continuous Whole Earth Coverage', *Royal Aircraft Establishment, Technical Report 70211*, Departmental Reference: Space 350, November 1970 [UDC 629.195 : 521.6]

WALKER, J. G. [1977/1]: 'Continuous Whole-Earth Coverage by circular Orbit Patterns', *Royal Aircraft Establishment, Technical Report 77044*, Departmental Reference: Space 522, 24 March 1977 [UDC 629.195 : 527]

WALKER, J. G. [1977/2]: 'Satellite Patterns for Continuous Multiple Whole Earth Coverage', *Space Department, Royal Aircraft Establishment, Farnborough, UK*, Published in IEE Conference Publication No. 160, pp 119-122

WALKER, J. G. [1984]: 'Satellite Constellations', *Journal of the British Interplanetary Society, 37*, 559–571

WALTER, U. [2008]: *Astronautics*, Wiley-VCH Verlag GmbH&Co. KGaA, Weinheim, ISBN 978-3-527-40685-2

WERTZ, JAMES R. [2001]: *Mission Geometry; Orbit and Constellation Design and Management*, Space Technology Library, Microcosm Press, El Segundo, California, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, ISBN 0-7923-6903-3

WERTZ, JAMES R. and WILEY J. LARSON (editors) [1999, ninth printing 2007]: *Space Mission Analysis and Design*, Space Technology Library, Space Technology Series, Microcosm Press, Hawthorne, California, Springer New York, ISBN 978-1881883-10-4, ISBN 978-0-7923-5901-2

WILLIAMS, J. G., NEWHALL X. X., and DICKEY, J. O. [1996]: 'Relativity parameters determined from lunar laser ranging', *Physical Review D,* Vol. **53**, No. 11, 6730-6730, copyright: The American Physical Society

WOOLARD, E. W. and CLEMENCE, G. M. [1966]: *Spherical Astronomy*, Academic Press, New York and London

YANG, WEILIAN [1990]: 'FROZEN ORBITS WITH ITS APPLICATION', Chinese Academy of Sciences, Beijing, People's Republic of China, *Chinese Society of Astronautics, Journal*, No. **1** , pp. 23-32, in Chinese with Abstract in English

ZHONGOLOVITCH, I. D. [19*60*]*:* 'Nekotorye formuly otonosyashchiesya k dvizheniyu material'noi tochki i pole tyagoteniya urovennogo ellipsoida vrashcheniya', (Quelques formules qui ont lieu dans le mouvement d'un point matériel dans le champ d'attraction d'une ellipsoide de niveau à deux axes), *Bjull. ITA **7***, 521–536

In Ergänzung zur gedruckten Version *Astronomical Almanac* sind die aktuellen astronomischen Daten auch in der Online Version (*The Astronomical Almanac Online*) erhältlich:

http://asa.usno.navy.mil , http://asa.hmnao.com

(weitere Anmerkungen dazu in AA2015)

Index

2-line elements 71, *356*
absoluter
  Eigenbewegungsvektorr 362
anomalistische Umlaufzeit
  wahre 44
Approximation
  sukzessive 182
Apsidenlinie
  säkulare Drift im Erdgravitationsfeld 80
Äquatorsystem
  geozentrisches Frühlingspunkt bezogenes 362
Äquivalenz
  vielfache 607
Äquivalenzbahn 415
  dreifache 262
  mit 2 Sterntagen 555
  Nahe Parallele 385
  reproduzierbare 593
Äquivalenzbahnen IV, 29
  Begriffsbildung 106
  dritte Eigenschaft von PA zu PD Bahnen 222
  erste Eigenschaft von PA zu PD Bahnen 221
  exakte 107, 222, 232
  nahe-parallele 261
  Nahe-parallele 222
  Nahe-Parallele 107, 108
  nahe-parallele, Eigenschaften 394
  Nahe-Parallele, Eigenschaften 136
  Schreibweise 107, 454
  vierte Eigenschaft von PA zu PD Bahnen 226
  zweite Eigenschaft von PA zu PD Bahnen 222
Äquivalenzbedingung 581
Argument der Breite
  differentielle Beziehungen 157
Argument des Perizentrums
  säkulare Drift 77
Bahn
  eingefrorene 291
  frozen orbit 291
  geostationäre 36
  integer 267, 270
Bahnänderungen 315
Bahnänderungen, kleine 62
Bahnauswahl
  aus anomal- Umlaufzeit und Drift der Perigäumslänge 100
  aus Äquivalenz von anomalistischer und drakonitischer Bewegung 227
  aus Argument der Breite 156
  aus drakonitischen Tagesumläufen 190
  aus drakonitischer Umlaufzeit 184
  aus drakonitischer Umlaufzeit und Knotenlängendrift 210
  aus Drift der Perigäumslänge 88
  aus Knotenlängendrift 208
  aus Knotenlängenrestverschiebung 270
  aus Knotenlängenverschiebung 205
  aus Knotenlängenverschiebung und Knotenlängendrift 210
  aus Meridian-bezogener Satellitenbewegung 408
  aus mittlerer anomalistischer Umlaufzeit 68
  bei Äquivalenz von Hansen und drakonitischer Bewegung 261
  bei Äquivalenz von Kepler- und drakonitischer Bewegung 264
  bei mehrfacher Äquivalenz 252
  Exzentrizität aus drakonitischer Umlaufzeit 188
  für Spur-reproduzierbare Bahnen 274
  Halbachse aus drakonitischer Umlaufzeit 184
  Inklination aus drakonitischer Umlaufzeit 189
  Kreisbahnen mit Spitzen 433, 436
  mit Stillstandpunkten 435
Bahnebene
  Bewegung der 195
Bahnelemente
  Argument des Perizentrums 63
  Mittlere Anomalie 64
  Rektaszension des aufsteigenden Knotens 62
Bahnen
  sonnensynchrone IV
Bahnhalbachse
  mittlere einer geosynchronen Bahn 537
Bahnkorrekturen 62, 315
Bahnkorrektursystem 310
Bahnmodell 15
  Brouwersches 587
Bahnradius 15
  oskulierender 297
Bahnstabilität 390
Bahnwinkel
  erster Hansenscher 11
  in Hansen-System 20
  zweiter Hansenscher 12
Baker-Nunn-Kamera 620
ballistischer
  Koeffzient 73
Basislinie 356
Beschleunigung
  Keplersche 15
Bewegung
  anomalistische 1, 31, 107, 220, 390, 581
  anomalistische mittlere 38
  Bahnwinkel der tropischen 365
  drakonitische 1, 107, 146, 220, 260, 291, 385, 585
  drakonitische mittlere 155
  drakonitische, identisch mit anomalistischer 182
  eingefrorene 291
  formstabile 291

frozen motion 291
Hansen- 260
Hansensche 107, 389
intermediäre 15
Keplersche 389, 390, 577
Keplersche mittlere 37
Korrekturen der drakonitischen 315
martiozentrische 302
Meridian bezogene 2
Meridian-bezogene IV
meridionale IV
mittlere drakonitische mittlere 155
mittlere Keplersche 110
mittlere Keplersche mittlere 37
Mond-synodische- 107
scheinbar rückläufig 433
scheinbare 2
scheinbare von Kreisbahnen 423
siderische 1, 396
Sonnen-synodische- 107
topozentrische 620
topozentrische, Bahnabschätzung 615
tropische 1, 107, 385, 389, 390
Bewegungseinflüsse 15, *Siehe*
Bewegungsgrößen
topozentrische 617
BIALAS, V. III
Bildverarbeitung 624
BREAKWELL, J. V. 221
BROUWER, D. 73, 108, 221, 222, 232, 239, 292, 405, 432, 516
Bahn Modell 578
Bahnmodell 249
CartWheel 352, 356
CAYLEY, A. 13
Chaldäern III
charakteristische
große Bahnhalbachse 463, 499, 514, 521, 541, 544, 553, 562, 567, 571, 576, 583, 584, 590
Inklination 394, 576
charakteristische Neigung 463, 499, 514, 521, 541, 544, 553, 562, 567, 571, 583, 584, 590
charakteristische Punkte 583
charakteristisches Zentrum 583, 589
CLEMENCE, G. M. 108
*Cramer*sche Regel 213, 248, 253
CRAMERsche Regel 600, 603, 605
CUTTING, E. 291
departure point 13
Doppel-Helix 356
Doppel-Helix-Bewegung 356
Doppler Beobachtungen 632
*Doppler*messung 623
Drehvektor
knotenbezogenes Bahnsystem 149
ECKSTEIN, M. C. 429, 634
Eigenbewegungsvektor
absoluter 362
des Äquatorsystems 362
des Greenwich-Systems 615
des Hansen Systems 14
des Leibniz-Systems 12
knotenbezogenes Bahnsystem 149
relativer 362
Einschussdispersion 615
Einschussfehler 312
Ekliptik 361
Epocheanomalie
säkulare Drift 77
Erdgravitationsfeld 157
Erdmond
scheinbare Bewegung um Erde 433
Erdrotation
tropische 400, 537
Erdsatellitenbahn
polnahe 261, 385, 390
Erstbahnabschätzung 615
ESCOBAL, R. B. 623
Eudoxos von Knidos 537
Exzentrizität
eingefrorene 294, 295
oskulierende 296, 297, 303
Exzentrizitätsvektor 292
Fernerkundung 624
FIEDLER, H. 354, 357
Flächenparameter 15
Flächensatz 11
FLURY, W. 429, 634
Formationsflug
Aufbau einer Formation 136
Bewegung in Länge 335
Frenetsche Formeln
der Astrodynamik 12
des Apsidensystems 33
des Leibniz Systems 149
*Frenet*sche Gleichungen
des Äquatorsystems 362
Frühlingspunkt 361
Fundamentalbeziehung
von Erdbeobachtungssatelliten 199
Fundamentalsystem 13
Funktion
überlagerte 22, 100, 156, 175, 182, 186, 206, 212, 375, 379, 402, 404, 410
*Gauß*sche Variationsgleichung
der Deklination des Perigäums 84
der geographischen Länge des Perigäums 83
geostationäre Bahn 429
geostationäre Satellitenbahnen
Eigenschaften 428
geosynchrone Bahnen 420
kreisnahe 440
Geschwindigkeitsinkrement 139
Geschwindigkeitsvektor
absoluter im Hansen-System 13
relativer 362
Gravitationskonstante
geozentrische 15
Greenwich
0-Meridian 399
große Bahnhalbachse

charakteristische 463, 499, 514, 521, 541, 544, 553, 562, 567, 571, 576, 583, 584, 590
Größenordnung
Drift der Epocheanomalie 68
Drift des Perigäums 67
Knotendrift 66
GTO 626
Halbierung
Verfahren der fortgesetzten 28, 91
HANSEN, P. A.
Äquivalenzbahn 129
Bahnwinkel 14
Bahnwinkel, Variation des 400
Bewegung III, 107, 576
Hansenbewegung 1
Hansen-System 10, 11, 21
Umlaufzeit 178
Hansenwinkel 432
HARTL, PHILIPP 623
HCL-System 355
Helix-Konzept 356
Hipparch IV
HIPPARCH 367
Hippopede 537
HOHMANN, W.
Transfer 138
Horizontsystem 614
HORNER, W. G.
Horner-Zahl 21
ideale Koordinaten 10
Inklination
charakteristische 394
kritische 78, 182, 185, 221
kritische bei Äquivalenzbahnen 601
integer orbit 423, 428
ISS 146
KAHLE, RALPH 356
KARP, E. E. 58
KEPLER, J.
Äquivalenzbahn 129
Beschleunigung 15
Bewegung 122
*Kepler*bewegung 1
exakte 41
Keplersche
Satelliten Bewegung 577
Keplersche Bewegung
Kopplung mit Äquivalenzbahn 533, 534
Keplerscher Vektor
erster 292
KIRSCHNER, M. 335, 357
KLINKRAD, H. 222, 296
Knoten
Wanderung der 194
Knotenlängendifferenz 442
Knotenlängendrift 199, 423
Knotenlängenrestverschiebung 267
kleinste mögliche für reproduzierbare Bahnen 277
Knotenlängenverschiebung 423, 428
mittlere 199, 590
Knotenumlauf 203, 267
Koeffizient
ballistischer 73
Koeffizientendeterminante 213
Konstellation
Walker- 340
Konstellationen
kreisförmige Bewegung 340
Koordinaten
ideale 10
topozentrische 612
Koordinatensystem
Apsidensystem 32
Hansen-System 32
HCL-System 355
Leibniz-System 32
Perizentrum-bezogenes 32
Kopplung
Mehrfach IV
synodische mit drakonitischer Bewegung IV
von Bewegungen 108
von Monaten III
Korrekturzyklus 326
KOZAI, Y. 292
KOZAI, Y. 291, 432, 640
KRAUSE, H. G. L. 157, 432
KRIEGER, G. 349, 354, 357
kritische Inklination 78
Kultur
babylonische III
LANDSAT 624
Länge in der Bahn 367
Längenverschiebung
Knotenlänge 387
Perigäumslänge 387
Langzeituntersuchungen 62
LAPLACE, P. S. 35
Laufzeitänderung 624
Leibniz System
Frenetsche Formeln 149
LEIBNIZ, G. W.
Leibniz-Gleichung 12
Leibniz-System 11, 12
Lemniskate 537
Lichtzeit 624
Luftwiderstandsbeiwert 73
LYDDANE, R. H. 429
MAPLE 157
Marsorbiter 299
MASSONET, D. 343
Mehrfache Kopplung 390
Mehrpass-Interferometrie 277
Meridian-bezogene
mittlere Umlaufzeit 402
Umlaufzeit 402
Meridian-bezogene Bewegung
mittlere 401
wahre 400
Mir 146
mittlere Bewegung
anomalistische 38
Hansensche einer kreisförmigen Äquatorbahn 431

in Hansen-System 21
Keplersche 38
mittlere anomalistische 46
mittlere Keplersche 37
MOE, M. M. 58
Molnija 78, 207, 254, 453
Bahnen 611
Monat
anomalistischer IV
drakonitischer III
siderischer IV
synodischer III
tropischer IV
MOREIRA, A. 349
Neigung
charakteristische 463, 499, 514, 521, 541, 544, 553, 562, 567, 571, 583, 584, 590
kritische 182, 185
NEUGEBAUER, O. IV
Newton-Verfahren
vereinfachtes 182
nodal period 191
NORAD 73
Nord-Süd-Richtung
Bewegung in 424
Ost-West-Richtung
Bewegung in 424
Parameterachse 32
Partialausdrücke 62
Argument des Perizentrums 63
Mittlere Anomalie 64
Rektaszension des aufsteigenden Knotens 62
partielle Ableitungen 249
Perigäumsgeschwindigkeit 138
period
nodal 191
Perizentrum 1
Perizentrumsdurchgangszeit 41
Phasing 340
Phasing Orbit 137
Polbahnen 403
Präzession
durch die Planeten 398
Pseudoumkehrpunkt
auf kreisförmigen Polbahnen 439
PTOLEMÄUS 367
Q-Bahn 415, 454
Querkrümmungsradius 613, 618
range 623
slant range 623
range rate 623
Reduktion auf den Äquator 367
Reduktion auf die Ekliptik 367
Referenzellipsoid 612
Rektaszension
knotenbezogene 368
relativer
Eigenbewegungsvektorr 362
Reproduktionsdauer 274, 423, 429
Reproduktionszyklus 273, 285, 423, 429
reproduzierbare
Äquivalenzbahn 593
Reproduzierbarkeit 272, 590
Nachweis 281
näherungsweise 281
retrograder Faktor 368
Revisiting Period 399, 408
ROSAT 621
Rotation
der Erde 195
Rotationsellipsoid 291, 612
ROTH, E. A. 157, 191
anomalistische Umlaufzeit 58
SAR Interferometrie 356
Saroszyklus III
Satelliten Konstellationen
CartWheel Concept 344
Trinodal Pendulum Concept 349
Satellitenbahnmechanik
Hauptproblem 16
Satellitenbewegung
tropische 361
Satellitenformation 136
Satellitenkonstellationen
kreisförmige Bewegung 340
scheinbare Bewegung 423
äquatoriale Kreisbahnen 427
elliptischer Bahnen 448
Spitzenpunkte 432
stationäre Bahnpunkte 424, 426
Stillstandpunkte geneigter Kreisbahnen 435
Wendepunkte geneigter Kreisbahnen 435
Schiefe der Ekliptik 398
Schleifenbahn
kreisförmige ohne Überschneidung 446
Schleifenbahnen
kreisförmige 437
Schleifenbildung
mit Überschneidung 442
Schwerefeld 62
SEASAT 291
SGP4 71
Sichtwinkelplot 620
Sonne
fiktive mittlere 537
scheinbare Bewegung um Erde 433
sonnensynchrone
Bahnen IV
sonnensynchrone Bahn 592
Space Shuttle 146
Spiralbewegung
quasiperiodische 80
Spitzen
der scheinbaren Bahn 424
Spitzenpunkte 628
Spur einer Satellitenbahn 319
Spurdrift 319
Spurfehler 320
Stabilitätsparameter 478
stationäre Punkte
scheinbare 450, 628
Sterntag 423

Sterntage 388
Sternzeit 399, 614
  für Greenwich Meridian 399
Stillstandpunkte 450
Subsatellitenbahn
  reproduzierbare 272, 590
Symphonie-A 629
SYMPHONIE-A 451, 626, 634
Tagesumläufe
  drakonitische 190
Tagesumlaufzahl 429
TanDEM-X 356, 621
*Taylor*entwicklung 213, 248
TerraSAR-X 356, 621
Topozentrum 618
Transferbahn 139
Transferbahnen 450
Trinodal Pendulum Konzept 356
Tundra 255, 256, 259, 453
  Bahnen 611
überlagerte
  Funktion 21
überlagerte Funktion 402
Überschneidungspunkte
  von Schleifenbahnen 443
Umkehrpunkt 424, 450
Umlaufzeit
  anomalistische 44, 454
  drakonitische 174, 177, 374, 454, 585
  Hansen 454
  Keplersche 53, 180, 454
  Meridian-bezogene 402
  minimale von Erdsatelliten 182
  mittlere anomalistische 46, 68
  mittlere drakonitische 176, 177, 443
  mittlere drakonitische mit Luftwiderstand 181
  mittlere Hansensche 21, 25
  mittlere tropische 427
  Mond-synodische 454
  oskulierende anomalistische 58
  säkulare anomalistische 48
  säkulare drakonitische 178, 188
  Sonnen-synodische 454
  tropische 375, 454
  tropische auf geosynchroner Bahn 414
  wahre anomalistische 44
  wahre drakonitische 174
  wahre Hansensche 24
Variation
  der mittleren Epocheanomalie 109
  der Rektaszension des aufsteigenden Knotens 109
  des Argumentes des Perigäums 108
Vektor
  Drehvektor, knotenbezogenes Bahnsystem 149
  Eigenbewegungs- 149
  Exzentrizitätsvektor 292
Verzerrungsrelation 204
WALKER, J. G.
  Konstellation 340
Weilheim 621
Widerstandskoeffizient
  im SGP4 Modell 72
Zarya 72
ZHONGOLOVICH, I. D. 61
  anomalistische Umlaufzeit 58
Zweizeilenelemente 71, 356
  Genauigkeitsfragen 73