

Abstract

Kurztitel: Wagner, Claus Turbulente Rohrerweiterungströmungen

Direkte numerische Simulation - turbulente Strömungen in einer Rohrerweiterung - vollentwickelte Zuströmung - Manipulation der Einströmung - Strömungsablösung - Rezirkulation - Wiederanlegen - Ein- und Zweipunktkorrelationen - Energiespektren - Vergleich zum Experiment

Thema dieser Arbeit ist die Berechnung sämtlicher Details der turbulenten Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung bei vollentwickelter und manipulierter Zuströmung. Mit einem Finite-Volumen-Verfahren zweiter Ordnung werden hierfür drei direkte numerische Simulationen durchgeführt. Durch Analyse der berechneten Daten werden Probleme, die die statistische Simulation und Grobstruktursimulation mit der Vorhersage dieser komplexen Strömung haben, erklärt und Erkenntnisse für die Entwicklung neuer Modellansätze gewonnen. Unter anderem werden hierfür Ein- und Zweipunktkorrelationen, Energiespektren, Bilanzgleichungen des Reynoldsschen Spannungstensors und Produktionsterme gefilterter Daten ausgewertet und dargestellt. Ein Vergleich der Ergebnisse mit einem Experiment gibt Aufschlüsse über den Einfluß, den unterschiedliche Zuströmungen auf die Größe des Rezirkulationsgebietes ausüben.

Direkte numerische Simulation turbulenter
Strömungen in einer Rohrerweiterung

Claus Wagner

Leerseite

Lehrstuhl für Fluidmechanik
Technische Universität München

Direkte numerische Simulation

turbulenter Strömungen

in einer Rohrerweiterung

Claus Wagner

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor-Ingenieurs

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ. Prof. Dr.-Ing. habil. R. Schilling

Prüfer der Dissertation:

1. Univ. Prof. Dr.-Ing. habil. R. Friedrich
2. apl. Prof. Dr.-Ing. habil. H. Wengle

Die Dissertation wurde am 23.05.1995 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 24.07.1995 angenommen.

Vorwort

Für ihre Beiträge zum Gelingen der vorliegenden Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken:

Vor allem bei meinem Doktorvater **Prof. Dr.-Ing. R. Friedrich**, dessen Menschlichkeit, Hilfsbereitschaft, Fachkompetenz und Freude an der Forschung mir stets ein Vorbild sein werden.

Für die Übernahme des Koreferats und die vielen hilfreichen Diskussionen bei Herrn **Prof. Dr.-Ing. H. Wengle**.

Bei Herrn **Prof. Dr.-Ing. R. Schilling**, der sich freundlicherweise als Vorsitzender der Prüfungskommission zur Verfügung stellte.

Bei Herrn **Prof. Dr.-Ing. B. Laschka** für die Möglichkeit, diese Arbeit am Lehrstuhl für Fluidmechanik der Technischen Universität München durchführen zu können.

Bei meinen Kolleginnen und Kollegen, insbesondere der von Prof. Friedrich betreuten Arbeitsgruppe 'Turbulenzforschung': **Ulla Allgayer, Richard Lechner, Thomas Hauser, Thomas Hüttl, Eberhard Güntsch** und **Gary Evans**, für die hervorragende Zusammenarbeit und angenehme Arbeitsatmosphäre. Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Ex-Kollegen **Dr.-Ing. F. Unger**, der mit seiner Arbeit eine solide Ausgangsbasis für die vorliegende Doktorarbeit geschaffen hat.

Bei Frau **E. Rathgen**, die mir während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl viele bürokratische Pflichten abnahm.

Bei meiner Frau **Cornelia** und meinem Sohn **Philipp**, die in den letzten Monaten auf so vieles verzichten mußten und mich in vielerlei Hinsicht unterstützten.

Ganz besonders dankbar bin ich meinen Eltern **Inge und Albrecht Wagner**. Bei Ihnen genoß die Bildung im allgemeinen und die Schule und das Studium im speziellen oberste Priorität. Ohne jemals Druck auszuü unterstützen sie mich und ermöglichten mir damit die Erfüllung eines Traums. Ihnen **widme** ich diese Arbeit.

Leerseite

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Bisherige theoretische und experimentelle Untersuchungen	3
1.2	Zielsetzung und Aufbau der vorliegenden Arbeit	11
2	Theoretische Grundlagen	14
2.1	Kurze Charakterisierung turbulenter Strömungen	14
2.2	Grundgleichungen	15
2.3	Berechnungsverfahren turbulenter Strömungen	16
2.4	Geometrie und Bezugsgrößen	17
2.5	Integrale Form der Grundgleichungen	18
3	Numerisches Verfahren	21
3.1	Approximation im Raum	21
3.2	Zeitintegration	22
3.3	Lösung der Druckgleichung in irregulären Gebieten	23
3.4	Randbedingungen	26
3.5	Anfangsbedingungen	29
3.6	Räumliche und zeitliche Auflösung	30
3.7	Parameter der DNS	33
4	Statistische Auswertung	35
4.1	Bemerkungen zur gewählten statistischen Mittelung	35
4.2	Mittlere Geschwindigkeitsprofile	36
4.3	Einpunkt-Korrelationen	36
4.4	Zweipunkt-Korrelationen	37

4.5	Leistungsdichtespektren	38
4.6	Die Wirbelstärke	39
4.7	Bilanzgleichungen des Reynoldsschen Spannungstensors	40
4.8	Produktion der Feinstrukturenergie	42
5	DNS bei vollentwickelter Zuströmung	44
5.1	Zeitliche Entwicklung und statistische Mittelung	44
5.2	Häufigkeitsverteilungen	48
5.3	Mittleres Strömungsfeld	55
5.4	Turbulenzintensitäten	60
5.5	Schiefe und Flachheitsgrad	66
5.6	Bilanzen des Reynoldsschen Spannungstensors	74
5.7	Leistungsdichtespektren	104
5.8	Auswertung der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen	109
5.9	Feinstruktur-Energietransfer	155
5.10	Auswertung des Wirbelvektors	167
5.11	Diskussion momentaner Strömungsfelder	179
6	Vergleich zwischen Simulation und Messung	195
6.1	Manipulation der Zuströmung	196
6.2	Mittlere Axial- und Radialgeschwindigkeit	200
6.3	<i>rms</i> -Geschwindigkeitsschwankungen und Reynoldssche Schubspannung	205
6.4	Wirbelstärke	213
6.5	Schlußfolgerung	219

7 Zusammenfassung	220
7.1 Numerische Methode	220
7.2 Zuströmung	221
7.3 Abgelöste Strömung	222
7.4 Rezirkulierende Strömung	222
7.5 Wiederanlegende Strömung	223
A Anhang	225
A.1 Laminare Strömung	225
8 Literatur	227

Verwendete Formelzeichen und Abkürzungen

Die folgende Liste umfaßt alle in der Arbeit vorkommenden Formelzeichen und Abkürzungen. Abweichungen werden an der entsprechenden Stelle im Text erläutert.

Formelzeichen

A	Fläche
C_α	Krümmungsterm in der Impulsgleichung für die α -Richtung
c_1, c_2, c_3	Koeffizienten zur Steuerung der zeitlichen Integration
D	Rohrdurchmesser
D_e	erweiterter Rohrdurchmesser
$D_{\alpha\beta}$	Diffusionsterme in der Impulsgleichung für die α -Richtung
E_ω	Stichprobe der Enstrophie
F_α	Flachheitsgrad der Geschwindigkeitskomponente u_α (\rightarrow <i>flatness</i>)
F_α^+, F_α^-	Massenflüsse durch Flächen senkrecht zur x_α -Richtung am positiven bzw. negativen Schnittufer
G	allgemeine Filterfunktion
G_1, \dots, G_6	Geometriefelder der Poisson-Gleichung für den Druck
H	Kanalhöhe
H_e	erweiterte Kanalhöhe
h	Stufenhöhe
h_m	mittlere Maschenweite des groben Rechengitters
h_f	mittlere Maschenweite des feinen Rechengitters
K_α^c	Grenzwellenzahl in der α -Richtung
$K_{\alpha\beta}$	Konvektionsterme in der Impulsgleichung für die α -Richtung
k	turbulente kinetische Energie
k_α	Komponente des Wellenzahlvektors in α -Richtung
l	allgemeines Längenmaß
L	Rohrlänge
L_z	Länge des Zuströmrohres
L_g	Länge der gesamten Rohrerweiterung
N_T	Anzahl der Zeitschritte
N_α	Anzahl der Gitterpunkte in α -Richtung, $\alpha = (z, \varphi, r)$
P_α	Druckterm in der Impulsgleichung für die α -Richtung
p	Druck
Q_{ij}	deviatorischer Anteil der Reynoldsspannungen

q	Rechte Seite der Poisson-Gleichung des Pseudodrucks
$q_{\alpha\beta}$	Feinstrukturspannungstensor
R	Rohrradius
R_e	Radius des erweiterten Rohres
$R_{u_\alpha u_\beta}$	räumliche Zweipunkt-Korrelationsfunktion der Geschwindigkeitsfluktuationen u''_α und u''_β
$Re_m = u_m D / \nu$	Reynoldszahl, gebildet mit der mittleren Durchflußgeschwindigkeit u_m und dem Rohrdurchmesser D
$Re_{cl} = u_{cl} _{z=0} D / \nu$	Reynoldszahl, gebildet mit der mittleren Axialgeschwindigkeit auf der Rohrachse in der Einströmebene $u_{cl} _{z=0}$ und dem Rohrdurchmesser D
$Re_\tau = u_\tau _{z=0} D / \nu$	Reynoldszahl, gebildet mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit der Einströmebene $u_\tau _{z=0}$ und dem Rohrdurchmesser D
r	radiale Koordinate des Zylinderkoordinatensystems
S_α	Schiefe der Geschwindigkeitskomponente u_α ($\rightarrow skewness$)
$S_{\alpha\alpha}$	Leistungsdichtespektrum der Geschwindigkeitskomponente u_α
$s_{\alpha\beta}$	Deformationstensor
t	Zeit
u	allgemeine Geschwindigkeit
$u_\alpha = (u_z, u_\varphi, u_r)$	Komponenten des Geschwindigkeitsvektors
u_m	mittlere Durchflußgeschwindigkeit
u_{cl}	mittlere Geschwindigkeit auf der Rohrachse
u_τ	Wandschubspannungsgeschwindigkeit
V	Volumen
x	allgemeine Koordinate
X_r	Wiederanlegelänge im kartesischen Koordinatensystem
y	Wandabstand
$y^+ = y u_\tau _{z=0} / \nu$	dimensionsloser Wandabstand in Wandeinheiten gebildet mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit der Einströmebene $u_\tau _{z=0}$
Z	axiale Koordinate des Zylinderkoordinatensystems (gemessen von der Stufenkante)
Z_r	Wiederanlegelänge im Zylinderkoordinatensystem
z	axiale Koordinate des Zylinderkoordinatensystems
∇	Nabla-Operator

X

Griechische Zeichen

α, β	Indizierung der Richtung im Zylinderkoordinatensystem
δ_α	zentraler Differenzenoperator
$\delta_{\alpha\beta}$	Kroneckersymbol
Δ	Laplace-Operator
Δx_α	Maschenweite in der x_α -Richtung
Δ_t	Zeitverschiebung in der zeitlichen Korrelationsfunktion
Δ_α	räumlicher Abstand in den Zweipunkt-Korrelationsfunktionen
η	Kolmogorovsches Mikromaß
ε	turbulente Dissipationsrate
$\Delta A_\alpha^+, \Delta A_\alpha^-$	Flächenelement, senkrecht zur x_α -Richtung am positiven bzw. negativen Schnittufer
Δt	Zeitschritt
ΔV	Volumenelement einer Rechenmasche
μ	dynamische (molekulare) Viskosität
ν	kinematische (molekulare) Viskosität
Ψ	Stichprobe des Leistungsdichtespektrums
ρ	Dichte
τ_w	Wandschubspannung
τ	Kolmogorovsches Zeitmaß
$\tau_{\alpha\beta}$	Deviatorischer Anteil des Feinstrukturspannungstensors
$\bar{\tau}_{\alpha\beta}$	Spannungstensor
φ	Koordinate in Umfangsrichtung des Zylinderkoordinatensystems
Φ	Allgemeine Strömungsgröße
ω	Kreisfrequenz
ω_α	Komponenten des Wirbelvektors

Vektoren, Matrizen und Tensoren

\mathbf{A}, \mathbf{B}	Koeffizientenmatrizen der 2D Helmholtz-Gleichung
\mathbf{C}	Einflußmatrix
$\mathbf{\Pi}$	Vektor des Pseudodruckfeldes
$\mathbf{\Phi}$	Allgemeiner Lösungsvektor
\mathbf{q}	Vektor der rechten Seite der 2D Helmholtz-Gleichung

τ	Spannungstensor
\mathbf{u}	Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{v}	Korrekturvektor in der Einflußmatrix-Technik
\mathbf{W}	Selektionsmatrix in der Einflußmatrix-Technik
\mathbf{x}, \mathbf{y}	allgemeine Ortsvektoren

Variationen einer Größe

$a = a(x_\alpha, t)$	Beispielgröße
${}^\alpha \bar{a}$	Flächenmittelwert über die Maschenfläche ΔA_α
\bar{a}	Volumenmittelwert über das Maschenvolumen ΔV
$\langle a \rangle$	statistischer Mittelwert
$a' = a - \bar{a}$	Fluktuation von a um den Flächen- bzw. Volumenmittelwert → Feinstrukturfluktuation
$a'' = a - \langle a \rangle$	Fluktuation von a um den statistischen Mittelwert → Fluktuation im Reynoldsschen Sinne
a_{rms}	<i>root-mean-square</i> -Wert
$a_w = a _{r=R \text{ bzw. } Re}$	Wert an der Wand
a_α	Komponente in α -Richtung
a_i	Komponente in i -Richtung (für die Einsteinsche Summationskonvention)
a^+	Wert in Wandeinheiten
a_b	Bezugsgröße
a_e	Größen des Experiments von Brouillette (1994)
\hat{a}	Fourier-Transformierte

Allgemeine Abkürzungen

ER	Erweiterungsverhältnis der Kanal- bzw. Rohrerweiterung
DNS	Direkte Numerische Simulation (→ <i>direct numerical simulation</i>)
GS	aufgelöste Grobstruktur (→ <i>grid-scale</i>)
HWA	Hitzdrahtmessung (→ <i>hot-wire anemometry</i>)
LDA	Laser-Doppler-Messung (→ <i>Laser-Doppler anemometry</i>)
LES	Grobstruktursimulation (→ <i>large-eddy simulation</i>)
PDD	Häufigkeitsverteilung (→ <i>probability density distribution</i>)

XII

PIV Geschwindigkeitsmessung auf der Basis digitaler
Bildverarbeitung (\rightarrow *particle image velocimetry*)
SGS nichtaufgelöste Feinstruktur (\rightarrow *subgrid-scale*)

Terme in den Bilanzgleichungen des Reynoldsschen Spannungstensors

CT Konvektion (\rightarrow *convective transport*)
DS Dissipation (\rightarrow *dissipation*)
PD Druck-Diffusion (\rightarrow *pressure diffusion*)
PR Produktion (\rightarrow *production*)
PS Druck-Scher-Korrelation (\rightarrow *pressure strain*)
TD Turbulente Diffusion (\rightarrow *turbulent diffusion*)
VD Viskose Diffusion (\rightarrow *viscous diffusion*)
VPG=PS+PD Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term
(\rightarrow *velocity pressure-gradient*)

1 Einleitung

Die im Alltag auftretenden Strömungen (z.B. der aus dem Wasserhahn austretende Strahl) können je nach Erscheinungsform in zwei Klassen eingeteilt werden. Bewegt sich Fluid mehr oder weniger gleichmäßig, geordnet und relativ geräuscharm, spricht man von einer laminaren Strömung. Erscheint die Bewegung dagegen unregelmäßig oder chaotisch, so handelt es sich um einen turbulenten Transportvorgang. Letzterer tritt in der Natur und Technik weitaus häufiger auf. Laminare Strömungsvorgänge können heute in der Regel ohne größeren Aufwand analytisch oder aber numerisch berechnet werden. Die rechnerische Beschreibung turbulenter Strömungen, deren Unregelmäßigkeit sich in einem breiten Spektrum angeregter Skalen widerspiegelt, stellt für den Forscher dagegen eine weitaus größere Herausforderung dar.

Motiviert durch die chaotischen Erscheinungsformen in der turbulenten Rohrströmung postulierte Reynolds [45] die Zerlegbarkeit einer physikalischen Größe in einen zeitlich gemittelten Anteil und einen momentanen Schwankungsanteil. Diese Philosophie liegt auch den numerischen Verfahren der statistischen Turbulenzmodellierung zugrunde, die bis heute das wichtigste Instrument für die ingenieurmäßige Beschreibung turbulenter Strömungen darstellen. Allerdings konnte die auf Mittelwerten basierende Darstellung nur wenig zu dem physikalischen Verständnis der im allgemeinen instationären, dreidimensionalen turbulenten Transportvorgänge beitragen. Diese Unzulänglichkeit wurde in der Simulation atmosphärischer Strömungen besonders deutlich, da zeitlich gemittelte Geschwindigkeitswerte in der Meteorologie geringe Aussagekraft haben. Mit der Verfügbarkeit leistungsfähiger Rechner wurde in diesem Forschungsgebiet die sogenannte Grobstruktursimulation (LES) entwickelt, in der durch Modellierung der vom Rechengitter nicht erfaßten Skalen eine zuverlässige Vorhersage der zeitlichen und räumlichen Entwicklung der großen Strukturen, die gerade in atmosphärischen Strömungen von besonderem Interesse sind, ermöglicht wurde. Die Anwendung auf allgemeinere Strömungsfälle (z.B. wandnahe Strömungen) zeigte jedoch, daß mit der LES nicht alle Vorgänge des Turbulenzgeschehens exakt wiedergegeben werden können.

Eine genaue Beschreibung turbulenter Strömungen ist daher nur durch die direkte numerische Simulation (DNS) möglich. Durch eine sowohl räumlich als auch zeitlich hohe Auflösung erfaßt die DNS das gesamte Spektrum turbulenter Skalen. Zwangsläufig ist damit auch ein hoher Bedarf an Speicherplatz und Rechenleistung verbunden, der dazu führt, daß die DNS nur für Strömungen bei relativ niedriger Reynoldszahl eingesetzt werden kann. Dementsprechend behandeln die seit Mitte der 80er Jahre durchgeführten DNS die aus technischer Sicht einfacheren Strömungen im Kanal, Rohr oder über eine Platte.

Strömungen durch Rohrgeometrien mit plötzlicher Erweiterung des Querschnittes, die in vielen praktischen Anwendungsgebieten auftreten, sind hingegen wesentlich komplexer. In der

medizinischen Technik wird die Entstehung von Thrombosen und das Auftreten von Kreislaufproblemen mit der Strömung durch sich plötzlich erweiternde Arterien in Verbindung gebracht (siehe Feuerstein et al. [19] und Karino und Goldsmith [32]). Strömungen durch plötzliche Rohrerweiterungen begegnet man im allgemeinen Maschinenbau beispielsweise in Motoren, Wärmetauschern, Dampferzeugern, Energiezerstörern (siehe Founti [20]) und in der Luft- und Raumfahrttechnik in den Brennkammern von Raketen und luftatmenden Triebwerken (Drewry [14] und Zucron [74]).

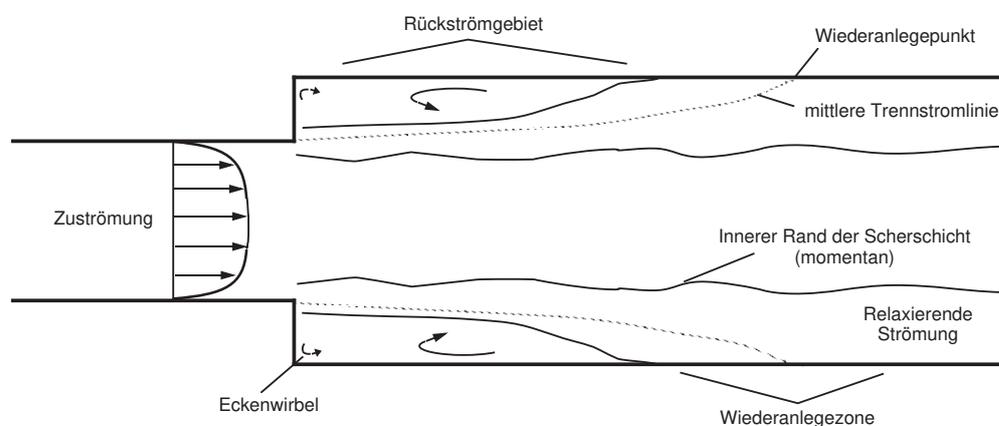


ABBILDUNG 1.1: Schematische Darstellung charakteristischer Strömungsbereiche in der plötzlichen Rohrerweiterung

Schematisch zeigt Abbildung 1.1 die komplexen Erscheinungsformen dieser Strömung. Ausgehend von der Stufenkante bewegt sich die abgelöste Scherschicht auf die Wand des erweiterten Rohrquerschnitts zu. Beim Auftreffen entsteht ein Wiederanlegebereich, über den die Strömung im Rückströmgebiet angetrieben wird. Innerhalb dieser Rezirkulationszone bildet sich nahe der Stufenwand ein kleiner Eckenwirbel aus, dessen Strömungsrichtung entgegen der Rückströmung zeigt. Zwischen dem Rückströmgebiet und der Innenströmung stellt sich im statistischen Mittel eine klar definierte Stromlinie mit verschwindender Geschwindigkeit in Längsrichtung ein, über deren Schnittpunkt mit der Wand des Ausströmquerschnitts der Wiederanlegepunkt definiert wird.

Gerade die Existenz dieser vielfältigen Strömungssituationen, mit Ablösung, Rezirkulation, Wiederanlegen und Relaxation, macht die Strömung durch die plötzliche Erweiterung für die Grundlagenforschung besonders interessant. Die DNS liefert das gesamte momentane Strömungsfeld zu jedem gewünschten Zeitpunkt. Durch Auswertung dieser Daten kann eine beliebige Anzahl von Korrelationen zwischen einzelnen Strömungsgrößen, wie z.B. Einpunkt- und Zweipunktkorrelationen, Energiespektren und vieles mehr, berechnet werden. Die Betrachtung

der Momentanfelder vermittelt einen Eindruck von der komplexen Natur turbulenter Strömungen und spiegelt instationäre Prozesse wider, die im statistischen Mittel unter Umständen verschwinden. Des Weiteren können so Strukturen identifiziert werden, die sich dann durch die Methode der bedingten Mittelung quantitativ nachweisen lassen. Zusammengefaßt liefert die direkte numerische Simulation bei hoher Genauigkeit Informationen über sämtliche Details der Strömung. Für die Grundlagenforschung ist sie dadurch in den letzten Jahren zu einem unverzichtbaren Werkzeug geworden.

1.1 Bisherige theoretische und experimentelle Untersuchungen

Experimentelle Untersuchungen

Obwohl die Strömung durch sich plötzlich erweiternde Geometrien in vielen Anwendungsgebieten auftritt, beschränkten sich Untersuchungen bis zum Ende der 50er Jahre dieses Jahrhunderts auf die Bestimmung von Druckverlustbeiwerten. Erst die Entwicklung neuer Meßmethoden, insbesondere die der Laser-Doppler-Anemometrie, ermöglichte detaillierte Untersuchungen dieser ablösenden Strömungen. Unter Verwendung verschiedener experimenteller Methoden, im einzelnen sind dies Strömungssichtbarmachung, Hitzdrahtmethode (HWA), Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) und *particle image velocimetry* (PIV), war die Strömung durch den sich einseitig bzw. beidseitig erweiternden Kanal in den letzten Jahrzehnten Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Aufgrund der gekrümmten Wände, die zu einer Brechung des Laserlichts führen, sind möglicherweise Arbeiten, die die plötzliche Rohrerweiterung zum Thema haben, etwas seltener anzutreffen. Neben der Strömungsumrandung unterscheiden sich diese Arbeiten durch unterschiedliche Strömungszustände in der Ebene der Querschnittserweiterung, dem untersuchten Reynoldszahlbereich und dem aus den Rohrdurchmessern bzw. Kanalhöhen stromab (D_e bzw. H_e) und stromauf (D bzw. H) der Stufenkante gebildeten Erweiterungsverhältnis $ER = D_e/D$ bzw. $ER = H_e/H$.

Zwischen der Strömung durch die plötzliche Kanalerweiterung und der durch die plötzliche Rohrerweiterung besteht eine enge Verwandtschaft, die sich in qualitativ ähnlichen Ergebnissen widerspiegelt. Aus diesem Grund werden zunächst einige Arbeiten zusammengestellt, die sich mit der abgelösten Strömung in der ebenen Geometrie befassen.

In einer der ersten detaillierten Untersuchungen der Strömung durch den Kanal mit ein- bzw. zweiseitiger Querschnittserweiterung verwenden Abbott und Kline [1] eine Methode zur Sichtbarmachung der Strömung. Bei Variation des Erweiterungsverhältnisses und der Turbulenzintensität der vollentwickelten Zuströmung werden im Reynoldszahlbereich $2 \cdot 10^4 < Re_m < 5 \cdot 10^4$ ($Re_m = u_m H / \nu$) Wiederanlegelängen ermittelt. Erweiterungsverhältnisse zwischen

$1.175 < ER < 3$ führen in der einstufigen Geometrie zu Werten der Wiederanlegelänge zwischen $1. < X_r/h < 16.$. Für $ER < 1.5$ werden in der zweistufigen Konfiguration ähnliche Wiederanlegelängen beobachtet. Für größere Erweiterungsverhältnisse bilden sich stromab der zwei Stufenkanten Rezirkulationsgebiete unterschiedlicher Größe aus.

Ein vergleichbares Experiment von Seki et al. [50], in dem für zweistufige Querschnittserweiterungen ($1.175 < ER < 3$) der Geschwindigkeitsbereich $4.3 \cdot 10^3 < Re_m < 2.5 \cdot 10^5$ untersucht wird, bestätigt die Beobachtung von Abbott und Kline. Auch in diesen Messungen wird für Erweiterungsverhältnisse $ER < 1.5$ ein unsymmetrisches Wiederanlegen der Strömung beobachtet, jedoch nicht erklärt. Im Gegensatz zu Abbott et al. weist das Geschwindigkeitsprofil im Bereich der Querschnittserweiterung einen ausgeprägten Potentialkern auf.

In der einseitigen Kanalerweiterung beobachten Adams und Johnston [2] für wachsende Erweiterungsverhältnisse (jedoch nur bis $ER = 2$) ein lineares Anwachsen in den Wiederanlegelängen zwischen $5 < X_r/h < 9$. Für turbulente Grenzschichtprofile stromauf der Erweiterungsebene erstreckt sich das Rückströmgebiet über 6 bis 7 Stufenhöhen, während laminare Grenzschichtprofile bis zu maximal 30% kürzere Wiederanlegelängen hervorrufen. Damit bestätigen die Autoren den von Chapman et al. [10] hervorgehobenen Einfluß der freien Scherschicht auf die Größe des Ablösegebietes.

Während die bisher aufgeführten Arbeiten die Abhängigkeit der Wiederanlegelängen von verschiedenen Strömungsparametern bei relativ hohen Reynoldszahlen untersuchen, präsentieren Armaly et al. [4] bei festem Erweiterungsverhältnis $ER = 2$ der einseitigen Kanalstufe den Verlauf dieser Größe in einem vergleichsweise niedrigen Reynoldszahlbereich $10^2 < Re_{cl} < 6 \cdot 10^3$. Mit der Intention, diesen Verlauf auf einen höheren Reynoldszahlbereich auszudehnen, werden von Tropea [66] Messungen für Reynoldszahlen zwischen $2 \cdot 10^3 < Re_{cl} < 3 \cdot 10^4$ und von Schmitt [51] zwischen $8 \cdot 10^3 < Re_{cl} < 2 \cdot 10^5$ durchgeführt. In beiden Arbeiten beträgt das Erweiterungsverhältnis $ER = 2.0$. Der Verlauf der Wiederanlegelänge zeigt für niedrige Reynoldszahlen $Re_{cl} < 900$ einen starken Anstieg; die abgelöste Strömung ist in diesem Bereich laminar. Für größere Reynoldszahlen kommt es in der freien Scherschicht zu einem laminar-turbulenten Übergang, bei dem die Strömungsinstabilitäten anwachsen und die Bildung von lokalen Wirbelschichten in der Scherschicht angefacht wird. Diese erhöhen den Massenaustausch zwischen dem Rückströmgebiet und der Innenströmung und verursachen so einen rasanten Abfall der Wiederanlegelänge. Am Ende des Transitionsgebietes stellt sich im Verlauf der Wiederanlegelängen ein Minimum ein. Für die Reynoldszahl $Re_{cl} \approx 10^4$, die den Anfang des vollturbulenten Bereichs markiert, wird das Wiederanlegen der Strömung bei Tropea und Schmitt übereinstimmend an der Stelle $X_r/h \approx 8$ beobachtet. Die Messungen von Schmitt zeigen ferner, daß sich dieser Wert auch bei weiterem Anwachsen der Reynoldszahl nicht verändert.

Mit dem Ziel, verschiedene Parametereinflüsse auf die Strömung durch die Kanalerweiterung zu untersuchen, vergleichen Eaton und Johnston [16] die Ergebnisse mehrerer Experimente. Die zusammengetragenen Daten werden zunächst auf die maximale mittlere Längsgeschwindigkeit der Zuströmung bezogen. Für $ER > 10$ dokumentieren die Autoren eine positive Korrelation zwischen dem Erweiterungsverhältnis und der Wiederanlegelänge. Unterhalb dieses Wertes wird kein nennenswerter Einfluß des Parameters ER beobachtet. Obwohl die betrachteten Experimente sehr unterschiedliche Wandgrenzschichtdicken stromauf der Stufenkante aufweisen, unterscheiden sich die Geschwindigkeitsprofile im Wiederanlegepunkt kaum. Maximalwerte der Turbulenz-Intensität in Hauptströmungsrichtung ($0.2 \cdot u_{cl}$) und der Reynoldsschen Schubspannung $\langle u''w'' \rangle / u_{cl}^2 \approx 0.0125$ werden übereinstimmend ca. 1 Stufenhöhe vor dem mittleren Wiederanlegepunkt ermittelt. Darüberhinaus werden die großskaligen Strukturen erwähnt, die sich in der Scherschicht (der häufig eine niederfrequente Bewegung überlagert ist) und in der Rezirkulationszone ausbilden.

Die folgende Übersicht experimenteller Untersuchungen widmet sich der Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden diese Arbeiten unter Angabe der Autoren, der Reynoldszahl, des Erweiterungsverhältnisses, der Meßtechnik und der gemessenen Größen in Tabelle 1.1 zusammengefaßt. In dieser tabellarischen Übersicht werden auch die gemessenen Wiederanlegelängen dokumentiert.

Chaturverdi [11] veröffentlicht eine der ersten detaillierten Untersuchungen der turbulenten Strömung durch die Rohrerweiterung. Für verschiedene Diffusorwinkel 15° , 30° , 45° und 90° (letzterer entspricht dem der plötzlichen Rohrerweiterung) werden mit Hilfe von HWA- und Pitot-Sonden gemessene Profile der mittleren Längsgeschwindigkeit, des mittleren Druckes und sämtlicher Komponenten der Geschwindigkeitsfluktuationen dargestellt. Für die plötzliche Rohrerweiterung $ER = 2.0$ ($Re_{cl} = 2 \cdot 10^5$) wird das Wiederanlegen der Strömung 9.5 Stufenhöhen stromab der Stufenkante beobachtet.

In Analogie zu dem von Armaly, Tropea und Schmitt gemessenen Verlauf der Wiederanlegelänge über der Reynoldszahl, präsentieren Back und Roschke [6] diese Abhängigkeit für die achsensymmetrische Geometrie ($ER = 2.6$). Wie im ebenen Fall wächst die Wiederanlegelänge Z_r/h im laminaren Bereich bei zunehmender Reynoldszahl an. Unter Anwendung von Ähnlichkeitsargumenten der Theorie freier Scherschichten wird gezeigt, daß sich dieser Anstieg linear verhält. Dieses Verhalten wird durch die Messungen von Feuerstein et al. [19], Iribarne et al. [29], Latornell und Pollard [35] und Macagno und Hung [41] bestätigt. Über die maximale Wiederanlegelänge für $Re_m = u_m D / \nu \approx 300$, wird der Beginn des transitionellen Bereichs definiert, in dem die Wiederanlegelängen für anwachsende Reynoldszahlen stark abfallen, um schließlich im Bereich des laminar-turbulenten Umschlags ein Minimum einzunehmen. Im vollturbulenten Bereich ($Re_m > 4000$) zeigt der Verlauf von Back und Roschke konstante Wiederanlegelängen

von $Z_r/h \approx 9$.

In einer technischen Notiz vergleichen Roschke et al. [48] die für unterschiedliche Reynoldszahlbereiche und Erweiterungsverhältnisse gemessenen Ergebnisse von Back und Roschke [6], Feuerstein et al. [19], Iribarne et al. [29] und Macagno und Hung [41]. Die relativ große Streubreite der gemessenen Wiederanlegelängen (6 bis 12 Stufenhöhen) im vollturbulenten Bereich wird auf die sich unterscheidenden Zuströmbedingungen zurückgeführt.

Freeman [21] stellen eine der ersten Arbeiten vor, die die Ergebnisse von LDA-Messungen dokumentieren. Für $ER = 2.1$ und $Re_{cl} = 3 \cdot 10^4$ wird für die Wiederanlegelänge der Wert $Z_r/h = 8.78$ angegeben. Neben dieser Größe werden mittlere und *rms*-Profile der Axialgeschwindigkeit präsentiert. Der im Rückströmgebiet gemessene Maximalwert der mittleren Axialgeschwindigkeit beträgt $0.12 \cdot u_{cl}$.

Für das Erweiterungsverhältnis $ER = 1.43$ untersuchen Moon und Rudinger [43] die Strömung in der plötzlichen Rohrerweiterung durch LDA-Messungen und Strömungssichtbarmachung bei vollentwickelter Zuströmung. In einem Reynoldszahlbereich $Re_{cl} = 10^5 - 4 \cdot 10^5$ zeigt sich eine mit steigender Reynoldszahl abnehmende Unsicherheit in der Bestimmung des Wiederanlegepunktes. Wie bei Back und Roschke [6] ergeben sich für die Wiederanlegelängen von Re unabhängige Werte zwischen 8 und 9 Stufenhöhen. Unter Verwendung eines (k, ε) -Turbulenzmodells werden ferner die reynoldsgemittelten Transportgleichungen gelöst, deren Ergebnisse stark von den experimentellen abweichen.

Für verschiedene Exzentrizitäten der Rohrachse ermitteln Khezzar et al. [33] im Reynoldszahlbereich $120 < Re_m < 40000$ Wiederanlegelängen durch Strömungssichtbarmachung. Die bei der Reynoldszahl $Re_m = 40000$ durchgeführten LDA-Messungen liefern ferner Verläufe der mittleren und fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten. Für die zentrierte Rohrachse wurde an der Stelle $Z/Z_r = 0.44$ (in Einheiten der Wiederanlegelänge gemessener Abstand von der Stufenkante) ein maximaler Wert der Rückströmgeschwindigkeit von $0.16 \cdot u_{cl}$ gemessen. Unabhängig von der Reynoldszahl ergeben sich für die Wiederanlegelänge Werte von ca. 9.3 Stufenhöhen. Zunehmende Exzentrizität der Rohrachse führen einerseits zu einem im statistischen Mittel unsymmetrischen Ablösegebiet und andererseits zu bis zu doppelt so großen Werten in den Turbulenz-Intensitäten.

In einer detaillierten Untersuchung der Diffusorströmung ($Re_m = 1.56 \cdot 10^4$) präsentieren Stiegemeier et al. [62] für die Diffusoröffnungswinkel 14° , 18° und 90° mittlere Geschwindigkeitsprofile, Verläufe der Reynoldsschen Schubspannung und der turbulenten kinetischen Energie. Für den 90° -Winkel werden ferner Energiespektren der fluktuierenden Längsgeschwindigkeitskomponente und eindimensionale Korrelationsfunktionen gezeigt. Die durch LDA-Messungen ermittelten Strömungsgrößen werden mit den Ergebnissen von Weiser und Nitsche ([69], [70])

verglichen, die dieselbe Strömungskonfiguration im Reynoldszahlbereich $Re_m = 10^4 - 7 \cdot 10^4$ mit Hilfe von Hitzdrahtmessungen untersuchen. Während die Profile der mittleren Geschwindigkeit gut übereinstimmen, weisen die Verläufe der *rms*-Geschwindigkeitskomponenten deutliche Unterschiede auf. In beiden Arbeiten wurde sichergestellt, daß die Zuströmung einem vollentwickelten Zustand entsprach. Das Wiederanlegen der Strömung wird übereinstimmend ca. 10 Stufenhöhen stromab der Stufenkante beobachtet. Im Gegensatz zu den Untersuchungen in der ebenen Geometrie weisen die innerhalb der Rezirkulationszone gemessenen Energiespektren keine dominante Frequenz auf. Die Autoren schließen daraus, daß die wiederanlegende Scherschicht stochastische Schwankungen um den mittleren Wiederanlegelinie ausführt.

Wie in der Arbeit von Weiser und Nitsche ([69], [70]) ist die Diffusorströmung bei unterschiedlichen Öffnungswinkeln Gegenstand der Untersuchung von Nitsche et al. [44]. Für das Erweiterungsverhältnis $ER = 1.6$ und die Reynoldszahl $Re_m = 5 \cdot 10^4$ wird die abgelöste Strömung bei vollentwickelter Zuströmung untersucht. Unter Verwendung von HWA und einer speziellen Meßtechnik zur Erfassung von Druckfluktuationen bestimmen die Autoren das mittlere und fluktuierende Geschwindigkeitsfeld in Längs- und Querrichtung sowie die Druckfluktuationen. Durch Approximation der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponente in Umfangsrichtung berechnen die Autoren sämtliche Terme in den Bilanzen der Reynoldsschen Schubspannungen und der turbulenten kinetischen Energie. Ein Vergleich mit den Ergebnissen einer numerischen Simulation, in der die statistisch gemittelten Transportgleichungen unter Verwendung eines (k, ε) -Turbulenzmodells gelöst wurden, zeigt eine gute Übereinstimmung in den Elementen des Reynoldsschen Spannungstensors. Für die einzelnen Terme in den Bilanzgleichungen ergeben sich allerdings abweichende Resultate.

Für die plötzliche Rohrerweiterung präsentieren Gould et al. [22] ebenfalls eine Bilanz der turbulenten kinetischen Energie. Hierfür werden die mittleren Geschwindigkeitskomponenten, Zweifach- und Dreifachkorrelationen der fluktuierenden Komponenten durch LDA gemessen. Wie bei Nitsche et al. [44] vergleichen die Autoren Terme der Bilanzgleichung mit den Ergebnissen einer statistischen Turbulenzmodellierung ((k, ε) -Turbulenzmodell). Während in den Profilen der mittleren Längsgeschwindigkeit, der turbulenten kinetischen Energie und der Reynoldsschen Schubspannung eine gute Übereinstimmung vorliegt, wird der numerisch ermittelte Diffusionsterm zu niedrig vorhergesagt. Darüberhinaus zeigen auch die Verläufe der mittleren und fluktuierenden Geschwindigkeit in radialer Richtung deutliche Unterschiede.

Für die Reynoldszahl $Re_m = 80000$, das Erweiterungsverhältnis $ER = 1.875$ und ein Geschwindigkeitsprofil mit ausgeprägtem Potentialkern stromauf der Stufenkante dokumentieren Devenport et al. [13] Profile der mittleren Geschwindigkeitskomponenten und des Wandschubspannungsverlaufs. Ausgehend von der Stufenkante erstreckt sich die Rezirkulationszone über 10.7 Stufenhöhen.

TABELLE 1.1: Experimentelle Untersuchungen der Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung.

Autoren	Re_m	D/D_e	Meßtechnik	Gemessene Größen	Z_r/h
Chaturverdi [11]	$2.0 \cdot 10^5$	2.0	HWA-und Pitot-Sonde	$Z_r, \langle u_z \rangle, p, pu_r,$ $\langle u_z''^2 \rangle, \langle u_\varphi''^2 \rangle,$ $\langle u_r''^2 \rangle, \langle u_z'' u_r'' \rangle$	9.3
Back und Roschke [6]	20– $4.2 \cdot 10^3$	2.6	Visualisierung	Z_r	2 – 24
Moon und Rudinger [43]	$1.0 \cdot 10^5$ - $5.0 \cdot 10^5$	1.4	LDA, Visualisierung	$Z_r, \langle u_z \rangle$	≈ 9
Freeman [21]	$3.0 \cdot 10^4$	2.1	LDA	$Z_r, \langle u_z \rangle, \langle u_z''^2 \rangle$	8.78
Khezzar et al. [33]	$4.0 \cdot 10^4$	1.75	LDA Visualisierung	$Z_r, P_w, \langle u_z \rangle, \langle u_r \rangle$ $\langle u_z''^2 \rangle, \langle u_\varphi''^2 \rangle, \langle u_r''^2 \rangle$	10.5
Stieglmeier et al. [62]	$2.0 \cdot 10^4$	1.8	LDA Visualisierung	$Z_r, E(k)$ $\langle u_z \rangle, \langle u_\varphi \rangle, \langle u_r \rangle$ $\langle u_z''^2 \rangle, \langle u_\varphi''^2 \rangle, \langle u_r''^2 \rangle,$ $\langle u_z'' u_\varphi'' \rangle, \langle u_z u_r'' \rangle$	≈ 10
Nitsche et al. [44]	$5.0 \cdot 10^4$	1.6	HWA	$Z_r, \langle u_z \rangle, \langle u_r \rangle$ $\langle u_z''^2 \rangle, \langle u_r''^2 \rangle, \langle p''^2 \rangle$	10
Devenport et al. [13]	$8.0 \cdot 10^4$	1.875	HWA	$Z_r, \tau_w,$ $\langle u_z \rangle, \langle u_r \rangle$	10.7
Sullivan et al. [63]	$2.0 \cdot 10^5$	2.0	LDA HWA	$Z_r, E(k),$ $\langle u_z \rangle, \langle u_\varphi \rangle, \langle u_r \rangle$ $\langle u_z''^2 \rangle, \langle u_\varphi''^2 \rangle, \langle u_r''^2 \rangle,$ $\langle u_z'' u_\varphi'' \rangle, \langle u_z u_r'' \rangle$	≈ 10
Brouillette [9]	$6.3 \cdot 10^3$ $1.7 \cdot 10^4$ $5.3 \cdot 10^4$	1.2	PIV	$Z_r, \tau_w, E(k)$ $\langle u_z \rangle, \langle u_r \rangle,$ $\langle u_z''^2 \rangle, \langle u_r''^2 \rangle$	8.4 5.2 5.8

Der Maximalwert der Rückströmgeschwindigkeit von $0.16 \cdot u_{cl}$ wird an der axialen Position $Z/Z_r = 0.48$ ermittelt.

Mit Hilfe von LDA und HWA untersuchen Sullivan et al. [63] die Strömung in der plötzlichen Rohrerweiterung bei der Reynoldszahl $Re_m = 2 \cdot 10^5$. Neben der mittleren Wiederanlegelänge, die etwa 10 Stufenhöhen beträgt, werden Verläufe der mittleren Geschwindigkeitskomponenten, mehrerer Elemente des Reynoldsschen Spannungstensors und des Dissipationsterms in der Bilanz der turbulenten kinetischen Energie sowie eines Energiespektrums präsentiert. Der Vergleich mit den Profilen der mittleren Längsgeschwindigkeit von Chaturverdi [11] und von Stieglmeier et al. [62] zeigt eine gute Übereinstimmung, während sich die Verläufe der *rms*-Geschwindigkeitskomponenten quantitativ leicht unterscheiden.

Mit der Zielsetzung, Ergebnisse einer PIV-Messung mit denen einer direkten numerischen Simulation zu vergleichen, untersucht Brouillette [9] die Strömung durch die Rohrerweiterung für das Erweiterungsverhältnis $ER = 1.2$. Neben der niedrigen Reynoldszahl $Re_{cl} = 7891$ werden auch höhere Reynoldszahlen, z.B. $Re_{cl} = 20940$ und $Re_{cl} = 62986$ untersucht. Wie der Autor anhand von Energiespektren im Bereich der Stufenkante nachweist, ist dem fluktuierenden Geschwindigkeitsfeld eine aus dem Gebläse stammende 30 Hz Frequenz überlagert. Die Ergebnisse werden mit denen von Wagner und Friedrich [68] verglichen. Innerhalb der Fehlergrenzen des Experiments zeigen die mittleren und *rms*-Geschwindigkeitsprofile eine gute Übereinstimmung mit den entsprechenden Ergebnissen der DNS.

Theoretische und numerische Untersuchungen

Im Gegensatz zu den vielen aufgeführten experimentellen Arbeiten existieren nur wenige numerische Untersuchungen der Strömung durch die plötzliche Kanalerweiterung.

Unter Verwendung des Schumannschen Feinstrukturmodells führten Schmitt und Friedrich [53] und Schmitt [54] eine Grobstruktursimulation der Strömung durch die plötzliche Kanalerweiterung durch. Bei einer Reynoldszahl (gebildet mit der Stufenhöhe und der Wandschubspannungsgeschwindigkeit in der Einströmebene) $Re_\tau = 6480$ und dem Erweiterungsverhältnis $ER = 2.0$ wird das Wiederanlegen der Strömung nach 11.08 Stufenhöhen berechnet. Dieser Wert ist um ca. 30 % höher als jener der korrespondierenden Experimente von Tropea [66] und Durst et al. [15]. Darüberhinaus werden in dieser Arbeit Wandschubspannungsverläufe, Druckverteilungen und Profile der mittleren und *rms*-Geschwindigkeiten dargestellt. Für die Reynoldszahl $Re_{cl} = 1.55 \cdot 10^5$ wird diese Arbeit von Arnal und Friedrich [5] fortgeführt. Die darin ermittelte Wiederanlegelänge von $X_r/h = 7.32$ unterschreitet den von Durst et al. [15] experimentell ermittelten Wert um ca. 14%. Der Vergleich der mittleren Geschwindigkeitsprofile mit den Ergebnissen dieser Messung zeigt eine zufriedenstellende Übereinstimmung. Neben der Präsentation von mittleren Stromlinien und Geschwindigkeitsprofilen werden Bilanzglei-

chungen der Reynoldsspannungen ausgewertet. Wie bei Eaton und Johnston [16] wird eine niederfrequente Bewegung der abgelösten und wiederanlegenden Strömung beobachtet.

In einer direkten numerischen Simulation berechnet Le et al. [37] und Le und Moin [38] die turbulente Strömung über die zurückspringende Kanalstufe für eine Reynoldszahl $Re_h = u_{cl}h/\nu = 5100$. Als Einströmprofil dient das vollentwickelte mittlere Grenzschichtprofil von Spalart [60], welches mit stochastischen Geschwindigkeitsfluktuationen überlagert wird. Bei dem Erweiterungsverhältnis $ER = 1.2$ wurde eine Wiederanlegelänge von 6.0 Stufenhöhen ermittelt, die gut mit dem von Jovic et al. [30] gemessenen Wert von 6.1 Stufenhöhen übereinstimmt. Für Wandschubspannungsverläufe und Geschwindigkeitsprofile erzielen die Autoren ebenfalls gute Übereinstimmung mit den Daten von Jovic et al. [30]. In einer Auswertung der Bilanzgleichung der turbulenten kinetischen Energie ergeben sich in der Scherschicht maximale Dissipationsraten, die 60% der maximalen Produktionsraten betragen und an derselben Stelle im Strömungsfeld zu finden sind. In unmittelbarer Wandnähe werden Dissipationsraten ermittelt, die die Produktionsraten um etwa 40% übersteigen. In sämtlichen Termen der Bilanzgleichungen wird stromab des Wiederanlegens ein Absinken der Amplituden beobachtet. Bei identischer Reynoldszahl und für dieselbe Geometrie führt Akselvoll et al. [3] eine Grobstruktursimulation dieser Strömung durch und vergleicht die Ergebnisse mit denen der DNS von Le et al. [37]. Als Feinstrukturmodell wurde das dynamische Modell von Germano et al. [23] verwendet. Sowohl die mittlere Wiederanlegelänge von 6.1 Stufenhöhen, als auch die Profile der mittleren Geschwindigkeitskomponente in Längsrichtung weisen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Daten der DNS auf. Allerdings ergeben sich auch leichte Unterschiede in den Profilen der mittleren Geschwindigkeitskomponente in wandnormaler Richtung und der *rms*-Geschwindigkeitsfluktuationen.

Im folgenden werden Simulationen besprochen, die bezüglich der Geometrie, des numerischen Verfahrens und der durchgeführten Auswertungen mit der vorliegenden Arbeit verwandt sind.

Unter Verwendung des Navier-Stokes-Codes, den L. Schmitt [54] im Rahmen seiner Dissertation entwickelte, führt F. Unger [67] eine direkte numerische Simulation der turbulenten Rohrströmung bei kleiner Reynoldszahl von $Re_m = 5300$ durch. Neben einer Auswertung von Einpunkt-Korrelationen der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten enthält diese Arbeit Verläufe der Zweipunkt-Korrelation der fluktuierenden Längsgeschwindigkeit, Energiespektren und Darstellungen des momentanen Strömungsfeldes. Die berechneten Ergebnisse werden ferner mit der DNS der Rohrströmung von Eggels [17], der DNS der Kanalströmung von Kim et al. [34] und mehreren Experimenten verglichen. Die sehr gute Übereinstimmung dieser Ergebnisse beweist eindrucksvoll, daß sich Finite-Volumen-Verfahren bei ausreichender Auflösung für den Einsatz direkter numerischer Simulationen bestens eignen.

Mit den Daten der DNS von Unger und denen einer DNS der turbulenten Kanalströmung

führt Härtel [27] eine Untersuchung durch, in der der Energiefluß zwischen der in einer LES aufgelösten Grobstruktur und der nichtaufgelösten Feinstruktur analysiert wird. Anhand beider Datensätze wird in der wandnahen Übergangsschicht zwischen viskoser Unterschicht und logarithmischem Bereich ein momentaner Energiefluß von der Feinstruktur zur Grobstruktur nachgewiesen. Mit diesen Erkenntnissen lassen sich die Unzulänglichkeiten der rein dissipativen Feinstrukturmodelle vom Viskositätstyp in wandnahen Strömungen erklären. Mit Hilfe der bedingten Mittelung wird gezeigt, daß dieser umgekehrte Energiefluß mit den bei hohen Scherraten beobachteten sporadischen Impulsaustauschereignissen (*sweeps*, *ejections*) verbunden ist.

1.2 Zielsetzung und Aufbau der vorliegenden Arbeit

Wie die Ausführungen des vorherigen Kapitels belegen, wurde bis heute weder eine Grobstruktursimulation noch eine direkte numerische Simulation der Strömung durch eine plötzliche Rohrerweiterung durchgeführt. Messungen zeigen ferner, daß die Strömung durch die achsensymmetrische Geometrie deutliche Unterschiede zu der in der ebenen Kanalerweiterung aufweist. Um ein besseres Verständnis der vorherrschenden Mechanismen in abgelösten rotationssymmetrischen Scherschichten zu erhalten, sollen hier drei direkte numerische Simulationen der Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung durchgeführt werden, die sich durch unterschiedliche Einströmrandbedingungen voneinander unterscheiden.

Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit war das von Schmitt [52] entwickelte Programm zur Simulation der turbulenten Strömung über die zurückspringende Stufe, welches auf kartesischen Koordinaten basiert. Ferner stand der von Unger [67] für die Berechnung der turbulenten Rohrströmung verwendete DNS-Code zur Verfügung.

Um hieraus ein leistungsfähiges und zuverlässiges Rechenprogramm zur Simulation turbulenter Strömungen in plötzlichen Rohrerweiterungen zu erstellen, waren folgende Probleme zu lösen:

- Modifikation des für Zylinderkoordinaten ausgelegten DNS-Rechenprogramms von Unger [67] zur Behandlung irregulärer Geometrien durch Einbau der von Schmitt [54] und Arnal und Friedrich [5] verwendeten Einflußmatrix-Technik.
- Implementierung der Ein- und Ausströmrandbedingungen
- Implementierung eines semi-impliziten Zeitintegrationsverfahrens zur Vermeidung unnötig kleiner Zeitschritte.
- Durchführung mehrerer Testsimulationen der laminaren Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung. Vergleich der Ergebnisse mit denen experimenteller Untersuchungen.

- Durchführung einer grob aufgelösten DNS der Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung. Mit den daraus gewonnenen Daten wurden Auswerte- und Graphikprogramme entwickelt und bereits bestehende modifiziert.

Die eigentliche physikalische Zielsetzung der Arbeit, die in der Analyse der Turbulenzstruktur in einer plötzlichen Rohrerweiterung und der Energietransfermechanismen zwischen turbulenter Grob- und Fein-Struktur besteht, verlangte die Bewältigung folgender Aufgaben:

- Durchführung direkter numerischer Simulationen der turbulenten Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung und das glatte Rohr sowie Erstellung einer Datenbank für die Auswertung der Ergebnisse.
- Durchführung von zwei weiteren direkten numerischen Simulationen bei manipulierten Einströmrandbedingungen, um deren Einfluß auf die Wiederanlegelänge zu demonstrieren.
- Detaillierte Auswertung der drei DNS-Datensätze.
- Vergleich statistischer Ergebnisse der DNS mit den durch PIV-Messungen gewonnenen Daten von Brouillette [9].

Der vorliegenden Arbeit liegt folgende Gliederung zugrunde:

- Eine Darstellung und Diskussion der Grundgleichungen in differentieller und integraler Form wird in Kapitel 2 vorgenommen.
- Gegenstand von Kapitel 3 ist das verwendete numerische Verfahren. In diesem Abschnitt wird die räumliche Diskretisierung, das verwendete Zeitintegrationsverfahren und die für eine direkte Lösung der Poisson-Gleichung verwendete Einflußmatrix-Technik vorgestellt. Darüberhinaus werden die Anfangs- und Randbedingungen diskutiert.
- Kapitel 4 beinhaltet einen theoretischen Überblick über die angewandten statistischen Auswerteverfahren.
- In den Kapiteln 5 und 6 werden die Ergebnisse der drei DNS diskutiert. Es werden Verläufe der Einpunkt- und Zweipunktkorrelationsfunktionen, der Energiespektren und Bilanzen des Reynoldsschen Spannungstensors besprochen und interpretiert. Eine Analyse des Grob- und Feinstrukturanteils der Turbulenzfelder wird Aufschluß über Ähnlichkeiten zwischen den Spannungstensoren beider Anteile und damit eine Datenbasis für die Entwicklung neuer Feinstrukturmodelle geben.

- Die Ergebnisse werden in 7 zusammengefaßt.
- Im Anhang wird eine laminare Testrechnung zur Verifikation des Rechenverfahrens vorgestellt.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Kurze Charakterisierung turbulenter Strömungen

Eine turbulente Strömung weist verschiedene charakteristische Merkmale auf. Lokale Meßwerte besitzen einen irregulären zeitlichen Verlauf, die Schwankungsbewegung verursacht eine erhöhte Durchmischung des Fluids sowie einen erhöhten Transport von Masse, Impuls und Wärme. Eine turbulente Strömung ist in der Regel dreidimensional und wirbelbehaftet. Ferner ist sie stets dissipativ, da die viskosen Scherspannungen die turbulente kinetische Energie in Wärme umwandeln.

Betrachtet man die möglichen Strömungszustände in einem glatten geraden Rohr, so kann man diese in Abhängigkeit einer Kennzahl, der sogenannten Reynoldszahl $Re_m = u_m D / \nu$, in zwei Bereiche unterteilen. u_m ist hierbei die mittlere Durchflußgeschwindigkeit, D der Durchmesser des Rohres und ν die kinematische Viskosität des Fluids. Für $Re_m \leq 2000$ ist die Strömung im allgemeinen laminar, während sie für größere Reynoldszahlen instabil wird und einen turbulenten Strömungszustand einnimmt. Der Umschlag laminar-turbulent hängt nicht nur von der Reynoldszahl ab, sondern auch von der Art und Amplitude der Störungen.

Die Reynoldszahl kann als Verhältnis zwischen den turbulenten und molekularen Zeitskalen interpretiert werden. Anders betrachtet beschreibt sie das Verhältnis von konvektivem und molekularem Transport von Impuls. Für große Reynoldszahlen entsteht durch die Dominanz des nichtlinearen konvektiven Transports eine Vielzahl von Längenmaßen, während bei vergleichsweise kleineren Reynoldszahlen die dem System zugeführte Energie über die viskosen Mechanismen der größeren Skalen dissipiert wird. Die Strömung ist in diesem Fall laminar.

Typischerweise bildet sich in einer turbulenten Strömung ein breites kontinuierliches Spektrum dieser Längenskalen aus. Wenngleich der zeitliche und räumliche Verlauf eines turbulenten Signals ungeordnet erscheint, lassen sich in einer turbulenten Strömung mit entsprechenden Meß- und Analysetechniken geordnete, sog. kohärente Strukturen ausmachen. Die Abmessungen dieser Strukturen werden der Strömung über die Geometrie aufgeprägt. Sie sind großskalig und langlebig. Die klassische Turbulenztheorie kennt den Begriff 'kohärente Struktur' nicht. Sie spricht etwas unscharf von Turbulenzelementen oder Eddies mit allen möglichen Abmessungen, von den größten bis zu den kleinsten, den sog. Kolmogorovschen Elementen. Sie hat auch die Vorstellung einer Energiekaskade entwickelt, nach der den größten Eddies aus der mittleren Strömung Energie zugeführt wird. Sie werden instabil und zerfallen in kleinere, wobei sie Energie an diese abgeben. Die kleinsten Eddies werden ihrerseits instabil und so fort, bis ein ganzes Spektrum von Turbulenzelementen mit kontinuierlich verteilten Längenmaßen vorliegt.

Man kann grobklassifizierend von einer turbulenten Makrostruktur, den energietragenden Längenskalen sprechen und einer Mikrostruktur, den energiedissipierenden Längenskalen. Der Verlust von kinetischer Energie der Makrostruktur wird durch die Dissipationsrate ε in den Einheiten Energie pro Masse und Zeit beschrieben, deren Wert von G.I. Taylor [64] abgeschätzt wurde zu:

$$\varepsilon = \frac{u^3}{l} \quad (2.1)$$

In 2.1 bezeichnet u ein Geschwindigkeitsmaß der Makrostruktur und l das dazugehörige Längenmaß.

Maßgebend für die Mikrostruktur ist die kinematische Viskosität ν . Sie entscheidet, wie klein die Eddies werden müssen, um die dem System zugeführte Energie in Wärme umwandeln zu können.

Die Dimensionsanalyse führt zu einem Längenmaß η und einem Zeitmaß τ , den sogenannten Kolmogorovschen Skalen, die die Abmessungen bzw. das konvektive Zeitmaß der kleinsten im Strömungsfeld existierenden Eddies abschätzen:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Eine ausführliche Darstellung der statistischen Turbulenztheorie geben die Bücher von Batchelor [7], Tennekes und Lumley [65], Rotta [49], Hinze [28] und Lesieur [39].

2.2 Grundgleichungen

Aus den Erhaltungsgesetzen für Masse, Impuls und Energie lassen sich die Grundgleichungen ableiten, die die räumliche und zeitliche Entwicklung eines Kontinuums beschreiben. Sie gelten sowohl für den laminaren, als auch für den turbulenten Strömungszustand (s.a. Tennekes und Lumley [65]). Im Fall der hier betrachteten inkompressiblen und isothermen Strömung entfällt die Lösung der Energiegleichung. In Operatorschreibweise ergeben sich für ein infinitesimales Volumenelement unter Vernachlässigung äußerer Volumenkräfte die folgenden differentiellen Bilanzgleichungen für Masse und Impuls, siehe Bird et al. [8]:

$$\nabla \circ \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \circ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \circ \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (2.4)$$

In Gleichung 2.3 und 2.4 beschreibt \mathbf{u} den Geschwindigkeitsvektor und p den skalaren Druck.

Für ein inkompressibles Newtonsches Fluid mit räumlich und zeitlich konstanter Dichte ρ und Viskosität μ läßt sich die Divergenz des Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$ in 2.4 auf einfache Weise über das Geschwindigkeitsfeld bestimmen:

$$\nabla \circ \boldsymbol{\tau} = \mu \nabla \circ (\nabla \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u})^T). \quad (2.5)$$

Unter den obigen Voraussetzungen erhält man durch Einsetzen der Operatoren für Zylinderkoordinaten die folgenden Erhaltungsgleichungen in differentieller Form (siehe z.B. Spurk [61]). Auf eine detaillierte Darstellung der Herleitung wird verzichtet, da diese bereits bei Schmitt ([52], [54]) und Unger [67] ausführlich beschrieben wurde.

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_r r) = 0 \quad (2.6)$$

und die Komponenten der Impulsbilanz, die sogenannten Navier-Stokes-Gleichungen, beschreiben eine isotherme turbulente Strömung aus mathematischer Sicht vollständig:

z -Komponente

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\rho \partial z} + \nu \Delta u_z \quad (2.7)$$

φ -Komponente

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r u_\varphi \right) + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} + \nu \left[\Delta u_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(u_\varphi - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

r -Komponente

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi^2 \right) + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ = -\frac{\partial p}{\rho \partial r} + \nu \left[\Delta u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Eine analytische Lösung des Gleichungssystems 2.6 bis 2.9 ist nur für wenige Spezialfälle bekannt.

2.3 Berechnungsverfahren turbulenter Strömungen

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, werden die Erhaltungsgleichungen in der klassischen Turbulenztheorie nach Reynolds einer Ensemble-Mittelung unterzogen. Man erhält Gleichungen für gemittelte Strömungsgrößen, in denen allerdings zusätzliche Unbekannte auftreten, deren Schließung entweder über zusätzliche Transportgleichungen (in denen allerdings wiederum

neue Unbekannte entstehen) oder über empirische Ansätze erfolgt. Der Einfluß der Fluktuationen auf das mittlere Geschwindigkeitsfeld wird bei dieser Methode durch den sogenannten Reynoldsschen Spannungstensor beschrieben.

Das Ziel einer Grobstruktursimulation ist es, die kleinen Wellenzahlen des Energiespektrums direkt numerisch aufzulösen und den vom Gitter nicht erfaßten Teil des Spektrums über einen Schließungs-Ansatz zu modellieren. Die verwendeten Modelle sollen einen Aufstau kinetischer Energie am Ende des aufgelösten Spektrums verhindern. Für isotrope Turbulenz wurde von Smagorinsky [59] und Lilly [40] unter der Annahme, daß Produktion und Dissipation in der Bilanzgleichung für die nichtaufgelöste kinetische Energie im Gleichgewicht sind, ein Modell entwickelt, dessen Modellkonstante analytisch bestimmbar ist. Dies ist der bis heute am weitesten verbreitete Modellansatz der Grobstruktursimulation. Für allgemeinere Strömungsfälle entwickelte Germano [24] ein Verfahren, mit dem die benötigte Konstante dynamisch berechnet werden kann. Die Grenzen dieser Ansätze werden insbesondere in wandnahen Strömungen sichtbar, da die Erfassung der Vorgänge in der Zone größter Turbulenzproduktion sehr schwierig ist. In diesem Bereich ist der lokale Energiefluß nicht mehr rein dissipativ, es kommt zu einem Transfer der turbulenten kinetischen Energie von den kleinen zu den großen Skalen.

Als optimalste Methode, die physikalischen Vorgänge in turbulenten Strömungen rechnerisch zu beschreiben, gilt die direkte numerische Simulation (DNS), bei der der gesamte Bereich der Längen- und Zeitskalen durch das verwendete Gitter aufgelöst wird. Zwar ist man mit dieser Methode auf Strömungen mit vergleichsweise kleiner Reynoldszahl beschränkt, dafür erlaubt sie jedoch detaillierte Studien der physikalischen Phänomene der turbulenten Strömung.

2.4 Geometrie und Bezugsgrößen

Die Geometrie der hier untersuchten Rohrerweiterung ist in Abb. 2.1 veranschaulicht. Der Ursprung des ruhenden Zylinderkoordinatensystems (z, φ, r) ist im Mittelpunkt der Einströmfläche eines Rohrstückes mit dem Durchmesser D und der Länge $L_z = 1.48D$ definiert. Bei $z/D = 1.48$ schließt sich ein Rohr mit dem Durchmesser $D_e = 1.2D$ und einer Länge von $L_g - L_z = 2.01D$ an. Hieraus ergibt sich ein Erweiterungsverhältnis von $ER = D_e/D = 1.2$. Wie in der Literatur üblich, werden die Gleichungen 2.3, 2.4 und 2.5 durch Einführen von Bezugsgrößen so dimensionslos gemacht, daß sich die Anzahl der Parameter auf die problemcharakterisierenden Kennzahlen reduziert. Die Wandschubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau(z/D = 0)$ der vollentwickelt turbulenten Rohrströmung dient als Bezugsgröße der Geschwindigkeitsvektoren, während der Durchmesser D die Bezugsgröße einer räumlichen Abmessung bildet. Die

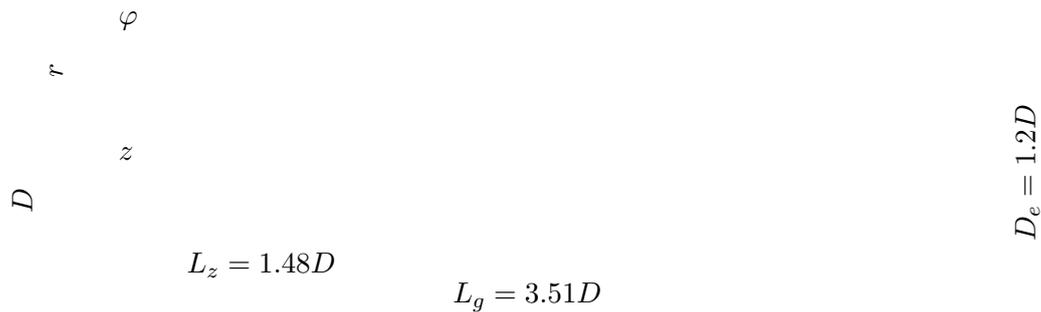


ABBILDUNG 2.1: Geometrie der Rohrerweiterung

Bezugsgrößen des Druckes und der Zeit werden über eine Dimensionsanalyse ermittelt:

$$p_b = \rho_b u_\tau^2 \quad \text{und} \quad t_b = \frac{D}{u_\tau} \quad (2.10)$$

Die Wahl der Größen ρ_b und μ_b ist bei dem in dieser Arbeit betrachteten dichtebeständigen, homogenen Fluid beliebig. Der Einfachheit halber sollen die dimensionslosen Größen ρ , μ daher den Wert 1 annehmen. In den dimensionslosen Bilanzgleichungen tritt die Reynoldszahl

$$Re_\tau = \frac{u_\tau D}{\nu} \quad (2.11)$$

als einzige Kennzahl auf.

Es wird hier darauf hingewiesen, daß die bisher verwendeten Formelzeichen der dimensionsbehafteten Größen im folgenden die entsprechenden dimensionslosen Größen beschreiben. Der Übersichtlichkeit halber wird auf die Einführung neuer Formelzeichen bzw. zusätzlicher Indizes verzichtet.

2.5 Integrale Form der Grundgleichungen

Die Transportgleichungen 2.6 bis 2.9 gelten für ein infinitesimales Volumenelement dV . Der Übergang zu den integralen Erhaltungsgleichungen eines endlichen Volumenelements ΔV erfolgt über eine Volumenintegration der differentiellen Grundgleichungen. Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes lassen sich dabei volumengemittelte Divergenzterme direkt in Differenzenbeziehungen umformen. In Zylinderkoordinaten treten zusätzliche Terme auf, welche nicht in eine Differenzenformulierung übergeführt werden können. Diese Krümmungsterme werden separat behandelt und zu einem Quellterm in der Impulsgleichung zusammengefaßt. Eine ausführlichere Beschreibung der verwendeten räumlichen Integrationsmethode ist bei Schmitt ([52], [54]) zu finden.

In der Finite-Volumen-Methode von Schumann [55], die dieser Arbeit zugrunde liegt, entspricht die Integration formal einer Tiefpass-Filterung mit einem Rechteck-Filter, dessen Filterweite der Maschenweite des Gitters entspricht.

Die Anwendung des Filters

$$G^V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} \frac{1}{\Delta V} & \text{für } |\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \in \Delta V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.12)$$

beziehungsweise

$$G^A(\mathbf{y} - \mathbf{y}') = \begin{cases} \frac{1}{\Delta A} & \text{für } |\mathbf{y}' - \mathbf{y}| \in \Delta A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.13)$$

auf die Strömungsvariable Φ ergibt die über ein Volumenelement bzw. Flächenelement gemittelte Größe $\bar{\Phi}$ bzw. ${}^\alpha\bar{\Phi}$.

$$\bar{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Delta V} G^V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Phi(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (2.14)$$

$${}^\alpha\bar{\Phi}(\mathbf{y}, t) = \int_{\Delta A_\alpha} G^{A_\alpha}(\mathbf{y} - \mathbf{y}') \Phi(\mathbf{y}', t) d\mathbf{y}' \quad (2.15)$$

Für eine direkte numerische Simulation mit den gefilterten Gleichungen müssen die endlichen Volumina so gewählt werden, daß die Differenz Φ' in 2.16 zwischen der ungefilterten und gefilterten Variable mit ausreichender Genauigkeit verschwindet. Nur so kann sichergestellt werden, daß das gesamte Spektrum der auftretenden turbulenten Längenmaße aufgelöst und die physikalisch relevante Information der turbulenten Strömung erfaßt wird:

$$\Phi' = \Phi - \bar{\Phi} \approx 0. \quad (2.16)$$

Es können nun die volumengemittelten Transportgleichungen angegeben werden. In einem finiten Volumen ΔV beschreibt die folgende Kontinuitätsgleichung die Massenflußbilanz exakt:

$$F_{z^+} - F_{z^-} + F_{\varphi^+} - F_{\varphi^-} + F_{r^+} - F_{r^-} = 0 \quad (2.17)$$

wenn in

$$F_{\alpha^+} = \Delta A_\alpha^+ {}^{\alpha^+}\bar{u}_\alpha \quad \text{bzw.} \quad F_{\alpha^-} = \Delta A_\alpha^- {}^{\alpha^-}\bar{u}_\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = (z, \varphi, r) \quad (2.18)$$

die exakten Flächenmittelwerte der Geschwindigkeit ${}^\alpha\bar{u}_\alpha$ enthalten sind. Positiv indizierte Terme werden hierbei am positiven Schnittufer der Flächenelemente senkrecht zur x_α -Richtung gebildet und negative Terme dementsprechend am negativen Schnittufer.

Auch die Impulsbilanzgleichung kann in physikalisch unterschiedlich wirkende Terme aufgeteilt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta V \bar{u}_\alpha + K_{\alpha z} + K_{\alpha \varphi} + K_{\alpha r} - D_{\alpha z} - D_{\alpha \varphi} - D_{\alpha r} + P_\alpha - C_\alpha = 0. \quad (2.19)$$

In Gleichung 2.19 werden mit $K_{\alpha\beta}$ die Konvektionsterme, mit $D_{\alpha\beta}$ die Diffusionsterme und durch P_α die Druckterme der Impulsgleichungen zusammengefaßt. Für $\alpha, \beta = (z, \varphi, r)$ sind diese im einzelnen folgendermaßen definiert:

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta V} \left(F_{\beta^+}^{\beta^+} \bar{u}_\alpha - F_{\beta^-}^{\beta^-} \bar{u}_\alpha \right), \quad (2.20)$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{Re_\tau \Delta V} \left(\Delta A_\beta^+ \beta^+ \bar{s}_{\alpha\beta} - \Delta A_\beta^- \beta^- \bar{s}_{\alpha\beta} \right), \quad (2.21)$$

$$P_\alpha = \frac{1}{\Delta V} \left(\Delta A_\alpha^+ \alpha^+ \bar{p} - \Delta A_\alpha^- \alpha^- \bar{p} \right) \quad (2.22)$$

Schließlich symbolisiert C_α in 2.19 den als Flächenmittelwert (über eine Fläche im Maschenzentrum) definierten Krümmungsterm:

$$C_z = 0, \quad (2.23)$$

$$C_\varphi = \frac{\Delta\varphi \Delta A_\varphi}{\Delta V} \left(- {}^\varphi \bar{u}_\varphi {}^\varphi \bar{u}_r + \frac{1}{Re_\tau} {}^\varphi \bar{s}_{\varphi r} \right), \quad (2.24)$$

$$C_r = \frac{\Delta\varphi \Delta A_\varphi}{\Delta V} \left({}^\varphi \bar{u}_\varphi {}^\varphi \bar{u}_\varphi + {}^\varphi \bar{p} - \frac{1}{Re_\tau} {}^\varphi \bar{s}_{\varphi\varphi} \right). \quad (2.25)$$

Die Reynoldszahl lautet:

$$Re_\tau = \frac{u_\tau D}{\nu}. \quad (2.26)$$

In Zylinderkoordinaten ergibt sich der folgende Deformationstensor:

$${}^\beta \bar{s}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 2 \delta_z^z \bar{u}_z & \frac{1}{r} \delta_\varphi^\varphi \bar{u}_z + \delta_z^\varphi \bar{u}_\varphi & \delta_r^r \bar{u}_z + \delta_z^r \bar{u}_r \\ \dots & \frac{2}{r} (\delta_\varphi^\varphi \bar{u}_\varphi + {}^\varphi \bar{u}_r) & r \delta_r^r ({}^r \bar{u}_\varphi / r) + \frac{1}{r} \delta_\varphi^r \bar{u}_r \\ \dots & \dots & 2 \delta_r^r \bar{u}_r \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

δ_α symbolisiert dabei einen zentralen räumlichen Differenzenoperator:

$$\delta_\alpha \Phi(x_\alpha) = \frac{\Phi(x_\alpha + \Delta x_\alpha / 2) - \Phi(x_\alpha - \Delta x_\alpha / 2)}{\Delta x_\alpha}. \quad (2.28)$$

Die obige Finite-Volumen-Form der Navier-Stokes-Gleichungen ist noch nicht auswertbar, da sie mehr Unbekannte enthält, als Gleichungen zur Verfügung stehen. Im folgenden werden die notwendigen Approximationen besprochen.

3 Numerisches Verfahren

3.1 Approximation im Raum

In der Kontinuitätsgleichung 2.17 sind die Geschwindigkeiten an den Flächen eines Volumenelements definiert. Wie in Abb. 3.1 veranschaulicht, bildet ein solches Volumenelement die Basismasche P des Rechengitters, in deren Mittelpunkt der Druck \bar{p} angeordnet ist. In

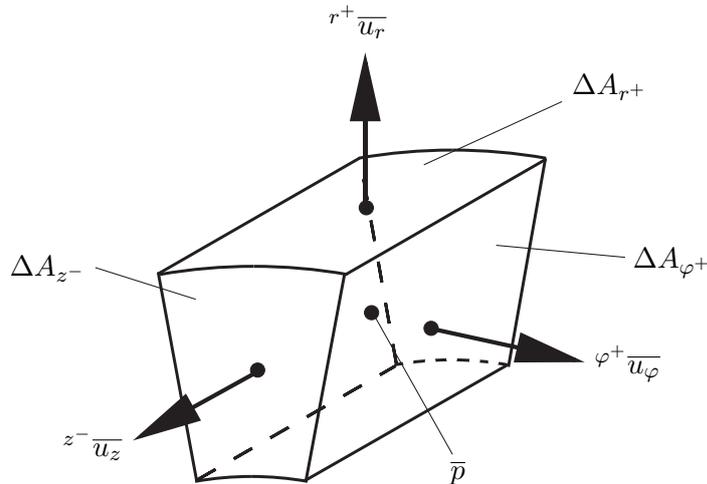


ABBILDUNG 3.1: Definitionspunkte der Lösungsvariablen in der Basismasche P.

versetzten Maschennetzen (*staggered grids*) kann die Massenbilanz bis auf Rechnergenauigkeit erfüllt werden. Weitere Vorteile dieser Gitter sind die direkte Realisierung der Druck-Geschwindigkeitskopplung und eine einfache Beschreibung der Randbedingungen.

Die Unbekannten in der Kontinuitätsgleichung 2.17 sind damit als Lösungsvariablen festgelegt. In den Impulsgleichungen 2.19 treten zusätzlich die Unbekannten ${}^\alpha \bar{p}$, \bar{u}_α , ${}^\beta \bar{u}_\alpha$ auf, welche durch Approximation aus den Lösungsvariablen bestimmt werden müssen. Unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgt, daß sich volumen- und flächengemittelte Variablen näherungsweise gleichen:

$$\bar{u}_\alpha \approx {}^\alpha \bar{u}_\alpha \quad \text{und} \quad {}^\alpha \bar{p} \approx \bar{p}. \quad (3.1)$$

Die Geschwindigkeitskomponente ${}^\alpha \bar{u}_\alpha$ ist per Definition Lösungsvariable in der versetzten u_α -Masche. In dieser Masche werden die Flüsse F_α und die Geschwindigkeitswerte ${}^\beta \bar{u}_\alpha$ auch an Stellen benötigt, an denen sie nicht definiert sind, woraus sich ein weiteres Schließungsproblem ergibt. Diese Unbekannten werden über eine Flächen- bzw. Volumeninterpolation 2. Ordnung aus den Lösungsvariablen bestimmt. Die Diskretisierung der im Diffusionsterm auftretenden Gradienten erfolgt durch zentrale Differenzen 2. Ordnung. Eine ausführliche Diskussion der oben beschriebenen Näherungen kann der Arbeit von Schmitt [52] entnommen werden.

3.2 Zeitintegration

Bei der zeitlichen Integration der räumlich diskretisierten Erhaltungsgleichungen wird ein semi-implizites Verfahren angewendet. In Zylinderkoordinaten ist durch die nahe der Rohrachse verschwindende Maschenweite in φ -Richtung eine implizite Behandlung einzelner Terme notwendig. Aus Stabilitätsgründen führt ein rein explizites Verfahren in diesem Fall zu einem aus physikalischer Sicht unnötig kleinen Zeitschritt, der eine Realisierung der DNS, wegen zu hoher Rechenzeiten, unmöglich machen würde. Eine Auswahl der zur Verfügung stehenden Verfahren wird bei Unger [67] und Eggels [17] diskutiert.

Zunächst wird die zeitliche Ableitung in Gleichung 2.19 durch deren zentrale Differenz ersetzt:

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial t} \approx \frac{\bar{u}_\alpha^{n+1} - \bar{u}_\alpha^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.2)$$

Sowohl die konvektiven Terme $K_{\alpha\varphi}$, die die Geschwindigkeitskomponente \bar{u}_φ enthalten, als auch die von einem Gradienten in φ -Richtung abhängigen diffusiven Terme $D_{\alpha\varphi}(\delta_\varphi)$ werden implizit behandelt. Die explizite Integration der übrigen Konvektionsterme ($K_{\alpha z}$, $K_{\alpha r}$) erfolgt mit einem Leapfrog-Schritt, während die restlichen Diffusionsterme ($D_{\alpha z}$, $D_{\alpha\varphi}(\delta_z, \delta_r)$, $D_{\alpha r}$) mit einem Euler-Schritt integriert werden.

Die Kopplung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes wird durch einen Projektionsschritt (Chorin [12]) gewährleistet. Unter Vernachlässigung des Druckgradienten in den Impulsgleichungen wird hierzu in einem ersten Schritt ein geschätzter Geschwindigkeitsvektor u_α^s berechnet. Durch direkte Lösung einer Poisson-Gleichung für den Druck kann diese Näherungslösung anschließend mit Hilfe des numerisch exakten Druckgradienten korrigiert werden.

Zusammengefaßt ergeben sich die folgenden zeitlich und räumlich diskretisierten Erhaltungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha \bar{u}_\alpha^s - c_3 \left(K_{\alpha\varphi}^s + D_{\alpha\varphi}^s(\delta_\varphi) \right) &= c_1 \alpha \bar{u}_\alpha^{n-1} + c_2 \alpha \bar{u}_\alpha^n + c_3 \left(K_{\alpha z}^n + K_{\alpha r}^n \right. \\ &\quad \left. + D_{\alpha z}^{n-1} + D_{\alpha\varphi}^{n-1}(\delta_z, \delta_r) + D_{\alpha r}^{n-1} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\alpha \bar{u}_\alpha^{n+1} = \alpha \bar{u}_\alpha^s - c_3 \delta_\alpha \bar{p}^{n+1} \quad \alpha = (z, \varphi, r), \quad (3.4)$$

in denen mittels der Steuerungsfaktoren $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, 2\Delta t)$ der explizite Leapfrog-Zeitschritt eingestellt wird. Die Indizes n bzw. $n-1$ symbolisieren eine Berechnung zum Zeitpunkt $n \cdot \Delta t$ bzw. $(n-1) \cdot \Delta t$, während mit dem Index s auf den Näherungswert des Geschwindigkeitsvektors hingewiesen wird. Für eine semi-implizite Integration wird der Konvektionsterm $K_{\alpha\varphi}^s$ der folgenden Linearisierung unterzogen:

$$K_{\alpha\varphi}^s = -\frac{\Delta A_\varphi}{\Delta V_\alpha} \left(\varphi^+ \bar{u}_\alpha^s \varphi^+ \bar{u}_\varphi^n - \varphi^- \bar{u}_\alpha^s \varphi^- \bar{u}_\varphi^n \right). \quad (3.5)$$

TABELLE 3.1: Vorfaktoren zur Steuerung der zeitlichen Diskretisierung.

Zeitschritt	c_1	c_2	c_3
Euler	0	1	Δt
Euler-Leapfrog	1	0	$2\Delta t$
Mittelung	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}\Delta t$

Das von Schumann ([55], [56]) um die diffusiven Terme erweiterte Courant-Friedrichs-Lewy Kriterium ermöglicht die Bestimmung eines hinreichenden Zeitschrittes für den expliziten Teil des Integrationsverfahrens:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \left[\frac{|\bar{u}_{z,max}|}{\Delta z} + \frac{|\bar{u}_{r,max}|}{\Delta r} + \frac{4}{Re} \left(\frac{1}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta r^2} \right) \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

Die oben beschriebene Vorgehensweise basiert auf der Annahme, daß für die Zeitniveaus n und $n - 1$ zwei vollständige Geschwindigkeitsfelder vorliegen. Zu Beginn der zeitlichen Integration wird der Leapfrog-Schritt durch einen Euler-Schritt ersetzt. Die Auswertung der diffusiven Terme erfolgt dann zum Zeitpunkt $n\Delta t$, und die zeitliche Ableitung in 2.19 wird durch die Vorwärtsdifferenz approximiert:

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial t} \approx \frac{\bar{u}_\alpha^{n+1} - \bar{u}_\alpha^n}{\Delta t} \quad (3.7)$$

Zur Vermeidung von $2\Delta t$ -Oszillationen, die bei einer Integration mit einem Euler-Leapfrog Schritt entstehen können (s.a. Werner [72]), wird nach jedem 49sten Zeitschritt ein Mittelungsschritt, der aus dem arithmetischen Mittel eines Leapfrog- und eines Euler-Schrittes besteht, vorgenommen. Die Vorfaktoren c_i , die zur Steuerung dieser zeitlichen Integration benötigt werden, sind in Tab. 3.1 zusammengefaßt. Detailliertere Ausführungen des beschriebenen Verfahrens finden sich bei Unger [67].

3.3 Lösung der Druckgleichung in irregulären Gebieten

Die Näherungslösung u_α^s ist im allgemeinen nicht divergenzfrei. Für die Lösung der Korrekturgleichung 3.4 wird das Pseudodruckfeld $\Pi = c_3 \bar{p}^{n+1}$ definiert. Einsetzen von Gleichung 3.4 in die Kontinuitätsgleichung 2.17 führt zu dem diskreten Analogon einer Poissongleichung, deren andere Seite die Divergenz des geschätzten Geschwindigkeitsvektors beschreibt:

$$\begin{aligned} q(z, \varphi, r) = & \quad \Pi(z - \Delta z, \varphi, r) - 2\Pi(z, \varphi, r) + \Pi(z + \Delta z, \varphi, r) \\ & + G_2(r) [\Pi(z, \varphi - \Delta \varphi, r) - 2\Pi(z, \varphi, r) + \Pi(z, \varphi + \Delta \varphi, r)] \\ & G_5(r)\Pi(z, \varphi, r - \Delta r) + G_4(r)\Pi(z, \varphi, r) + G_3(r)\Pi(z, \varphi, r + \Delta r) \end{aligned} \quad (3.8)$$

mit

$$q = G_1(r) \left(F_{z^+}^s - F_{z^-}^s + F_{\varphi^+}^s - F_{\varphi^-}^s + F_{r^+}^s - F_{r^-}^s \right). \quad (3.9)$$

Durch eine Fast-Fourier-Transformation in der homogenen Richtung φ kann die dreidimensionale Poisson-Gleichung in $N_\varphi + 2$ zweidimensionale Helmholtzgleichungen übergeführt werden, die dann von der Wellenzahl k_φ abhängen. N_φ repräsentiert dabei die Anzahl der Stützstellen in Umfangsrichtung:

$$\begin{aligned} \hat{q}(z, k_\varphi, r) = & \hat{\Pi}(z - \Delta z, k_\varphi, r) - 2\hat{\Pi}(z, k_\varphi, r) + \hat{\Pi}(z + \Delta z, k_\varphi, r) + \\ & G_5(r)\hat{\Pi}(z, k_\varphi, r - \Delta r) + \\ & G_6(r, k_\varphi)\hat{\Pi}(z, k_\varphi, r) + \\ & G_3(r)\hat{\Pi}(z, k_\varphi, r + \Delta r), \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit

$$G_6(r, k_\varphi) = (G_4(r) + G_2(r)) G_\varphi(k_\varphi) \quad (3.11)$$

und

$$G_\varphi(k_\varphi) = 2 \left[\cos \left(2\pi \frac{k_\varphi - 1}{N_\varphi} \right) - 1 \right]. \quad (3.12)$$

Für die Umformulierung von Gleichung 3.10 in ein algebraisches Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\hat{\Pi} = \hat{q} \quad (3.13)$$

werden die Vorfaktoren (G_5, G_6, G_3) in einer $(N_z \cdot N_r)^2$ Matrix \mathbf{A} zusammengefaßt. In Gleichung 3.13 beschreiben $\hat{\Pi}$ und \hat{q} Vektoren der Länge $N_z \cdot N_r$, wobei N_z und N_r die Anzahl der Stützstellen in axialer und radialer Richtung wiedergeben.

An den Rändern des Rechengebiets werden in dieser Arbeit Geschwindigkeitsrandbedingungen gesetzt, die über das Druckfeld nicht korrigiert werden sollen. Für den Pseudodruck müssen daher Neumann Randbedingungen, vom Typ Gradient gleich Null, spezifiziert werden. Die Identität des Randwertes mit dem ersten Wert innerhalb des Rechengebiets wird in die Matrix \mathbf{A} eingearbeitet.

Unter der Voraussetzung äquidistanter Gitter in z -Richtung ist das algebraische Gleichungssystem 3.13 in einem regulären Rechengebiet, in dem die Ränder des Maschennetzes denen der Geometrie entsprechen, separierbar und kann mit einem zyklischen Reduktionsverfahren (Schumann und Sweet [57]) direkt gelöst werden. Die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes ist dabei im gesamten Rechengebiet bis auf rechnerabhängige Rundungsfehler erfüllt. Die Bedingung der Separierbarkeit der $(N_z \cdot N_r)^2$ Matrix \mathbf{A} ist in einer irregulären Geometrie verletzt, da die Elemente dieser Matrix an den Positionen einer festen Wand so modifiziert werden müssen, daß diese eine Neumann-Randbedingung erfüllen.

Mit der von Schumann et al. [58] beschriebenen Einflußmatrixtechnik kann dieses Problem geschickt umgangen werden. In einem ersten Schritt wird hierbei ein durch die maximalen Abmessungen des Rechengebiets definierter Lösungsraum (er entspricht in dieser Arbeit dem eines geraden Rohres mit dem Durchmesser D_e) angenommen, der alle sogenannten irregulären Maschen enthält. Mit der resultierenden Matrix \mathbf{B} erhält man ein Gleichungssystem der Form Gleichung 3.13, welches zwar durch zyklische Reduktion gelöst werden kann, aber nicht dem letztendlich zu lösenden Gleichungssystem entspricht:

$$\mathbf{B}\tilde{\Pi} = \hat{\mathbf{q}} \quad (3.14)$$

Die Matrix $\mathbf{B} = b_{ij}$ ist der Matrix $\mathbf{A} = a_{ij}$ ähnlich, da sie sich nur durch wenige Elemente voneinander unterscheiden. Es gilt

$$a_{ij} \begin{cases} \neq & b_{ij} & : & 1 \leq j \leq m \\ = & b_{ij} & : & m+1 \leq j \leq n \end{cases} \quad (3.15)$$

Durch $m < n$ mit $n = N_z \cdot N_r$ in Gleichung 3.15 wird die Anzahl der irregulären Maschen beschrieben.

Die Lösung von Gleichung 3.13 ergibt sich durch Addition eines Korrekturtermes zur rechten Seite von Gleichung 3.14, der aus dem Produkt der Selektionsmatrix \mathbf{W}

$$\mathbf{W} = \begin{cases} \delta_{ij} & : & i, j = 1, m \\ 0 & : & i, j = m+1, n \end{cases} \quad (3.16)$$

(δ_{ij} entspricht einer Einheitsmatrix) und einem unbekanntem Vektor \mathbf{v} gewonnen wird:

$$\mathbf{B}\hat{\Pi} = \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{W}\mathbf{v} \quad (3.17)$$

Die algebraische Gleichung

$$\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{A}_1\hat{\Pi} \quad (3.18)$$

beschreibt die Bestimmungsgleichung für \mathbf{v} , die erneut durch zyklische Reduktion gelöst werden kann. In ihr tritt neben der Einflußmatrix \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_1\mathbf{B}^{-1}\mathbf{W} \quad (3.19)$$

die aus den Elementen ($i = 1, n$), ($j = 1, m$) der Matrix \mathbf{A} gebildete Untermatrix $\mathbf{A}_1 = a_{1ij}$ auf, die alle irregulären Elemente von \mathbf{A} enthält. Analog faßt der Vektor $\mathbf{q}_1 = q_{1j}$ für $j = (1, m)$ die irregulären Elemente des Vektors \mathbf{q} der rechten Seite von Gleichung 3.13 zusammen.

Da die 2-dimensionale Einflußmatrix \mathbf{C} nur von der Geometrie abhängt, muß sie nur einmal zu Beginn der Simulation berechnet werden (vergl. auch Schmitt [54]).

3.4 Randbedingungen

Durch die Finite-Volumen-Form Gleichung 2.19 ist ein Anfangs-Randwertproblem vorgegeben, für das an allen Rändern des Rechengebiets Randbedingungen spezifiziert werden müssen.

Die Art der Rohrgeometrie und die Tatsache, daß die ankommende Strömung drallfrei ist, erlauben die Anwendung periodischer Randbedingungen in Umfangsrichtung. Wie in Kapitel 3.3 bereits erwähnt, macht diese Periodizität auch die Verwendung der diskreten Fast-Fourier-Transformation möglich, die unter anderem bei der Lösung der Poisson-Gleichung des Pseudodruckes zur Anwendung kommt.

Die Undurchlässigkeitsbedingung führt zu verschwindenden wandnormalen Geschwindigkeitskomponenten an der Rohrwand.

Im einzelnen folgen daraus Dirichlet-Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten \overline{u}_r :

$$\overline{u}_r = 0 \begin{cases} \text{für} & 0 \leq z \leq 1.484 & \text{und} & r = 0.5 \\ \text{für} & 1.484 \leq z \leq 3.51 & \text{und} & r = 0.6 \end{cases} \quad (3.20)$$

Analog wird auch für die Geschwindigkeitskomponente normal zur Stufenwand die Undurchlässigkeitsbedingung vereinbart:

$$\overline{u}_z = 0 \quad \text{für} \quad z = 1.484 \quad \text{und} \quad 0.5 \leq r \leq 0.6 \quad (3.21)$$

Anstelle der zwei tangentialen Geschwindigkeitskomponenten an der Wand, welche in dem hier verwendeten Finite-Volumen-Verfahren nicht definiert sind, werden zwei Wandschubspannungen als Randbedingungen vorgegeben. Gleichung 3.22 beschreibt die diskrete Version dieser Spannungen entlang der Rohrwände $0 \leq z \leq 1.484, r = 0.5$ und $1.484 \leq z \leq 3.51, r = 0.6$:

$$\begin{aligned} \overline{\tau}_{rz} &= \frac{2}{Re_\tau} \frac{\overline{u}_z(z, \varphi, R - \Delta r/2, t)}{\Delta r}, \\ \overline{\tau}_{r\varphi} &= \frac{2}{Re_\tau} \frac{\overline{u}_\varphi(z, \varphi, R - \Delta r/2, t)}{\Delta r} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Analog werden die Schubspannungen an der Stufenwand bei $z = 1.484$ und $0.5 \leq r \leq 0.6$ diskretisiert:

$$\begin{aligned} \overline{\tau}_{zr} &= \frac{2}{Re_\tau} \frac{\overline{u}_r(z = 1.484 + \Delta z/2, \varphi, r, t)}{\Delta z}, \\ \overline{\tau}_{z\varphi} &= \frac{2}{Re_\tau} \frac{\overline{u}_\varphi(z = 1.484 + \Delta z/2, \varphi, r, t)}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Da der wandnächste Gitterpunkt bei einer DNS innerhalb der viskosen Unterschicht liegen muß, in der ein linearer Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und dem Wandabstand herrscht, genügt eine Differenzenapproxiamtion 1. Ordnung, um diese Gradienten korrekt wiederzugeben.

Rohrachse

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind auf der Rohrachse ($r = 0$) singularär. In ihrer diskreten Form und auf versetzten Gittern führt diese Singularität zu keinen ernstern Problemen. In den u_z - und u_φ -Impulsgleichungen wird die Geschwindigkeitskomponente u_r an der Stelle $r = 0$ nicht benötigt, da hier, wie in Abbildung 3.2 veranschaulicht, die korrespondierende Fläche $\Delta A_r^-(r = 0)$ verschwindet. Die Maschen der u_r -Impulsgleichung sind in radialer Richtung versetzt. Hieraus folgt eine von Null verschiedene Oberfläche am negativen Schnittufer der ersten, an der Stelle $r = \Delta r/2$ definierten, Masche. Zur Bestimmung der benötigten Randwerte wurden die folgenden Approximationen für die diffusiven Terme

$$\overline{s_{rr}}(z, \varphi, r = \Delta r/2) = \overline{s_{rr}}(z, \varphi, r = 3\Delta r/2) \quad (3.24)$$

und für die Geschwindigkeitskomponente u_r angewandt:

$$\overline{u_r}(z, \varphi, r = 0) = \overline{u_r}(z, \varphi, r = \Delta r). \quad (3.25)$$

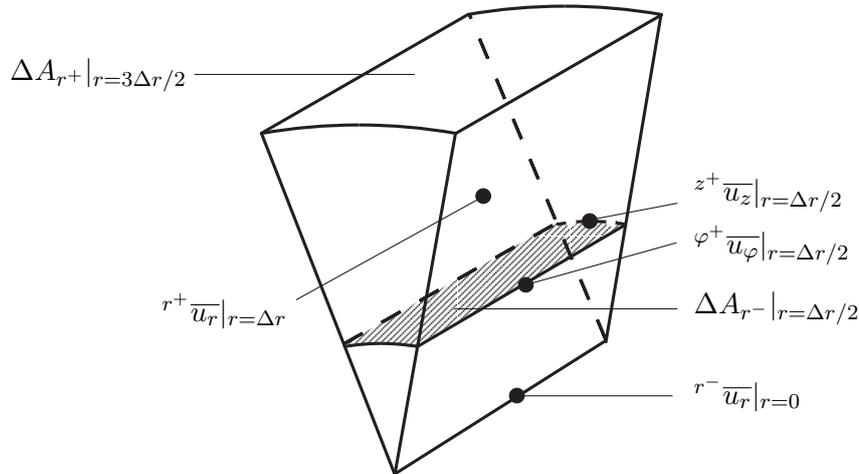


ABBILDUNG 3.2: Erste versetzte u_r -Masche im Rechengebiet.

Einströmrand

Für die Vergleichbarkeit der Simulationsergebnisse mit Messungen sind die Bedingungen am Einströmrand besonders bedeutsam. In einer DNS der zurückspringenden Stufe von Le und Moin [38] wurden den mittleren Geschwindigkeitsprofilen unkorrelierte stochastische Geschwindigkeitsfluktuationen überlagert, in der Annahme, daß sich räumliche und zeitliche Korrelationen über eine kurze Entfernung aufbauen. In den Arbeiten von F.Unger [67] und J. Eggels [17]

wurde für den Fall einer DNS der vollentwickelt turbulenten Strömung im geraden Rohr durch Verwendung periodischer Randbedingungen eine sehr gute Übereinstimmung mit Messungen erzielt. In dieser Arbeit wird eine zwar mühsamere, aber genauere Methode als die von Le und Moin [38] zur Bestimmung dieser Randbedingungen gewählt.

Eine DNS der vollentwickelt turbulenten Rohrströmung wurde für die Reynolds-Zahl $Re_\tau = 360$ gleichzeitig mit der DNS der Rohrerweiterungsströmung durchgeführt. Zu jedem Zeitpunkt konnte so der instationäre dreidimensionale Geschwindigkeitsvektor in der Einströmebene, dem Geschwindigkeitsvektor einer (φ, r) -Ebene der Rohrströmung gleichgesetzt werden. In Abb. 3.3 ist die Geometrie, in der die DNS der Rohrströmung durchgeführt wurde, schematisch dargestellt. Der Ursprung des Zylinderkoordinatensystems befindet sich im Mittelpunkt der Einströmebene. Das Rohr mit dem Durchmesser D weist eine Länge von $L = 5D$ auf. Die Strömung besitzt bei hinreichend langem Rohr zwei periodische Richtungen φ und z . Die Drucklösung kann daher mittels zweier Fast-Fourier-Transformationen gewonnen werden. Für eine detailliertere Beschreibung sei auf die Arbeit von F. Unger [67] verwiesen.

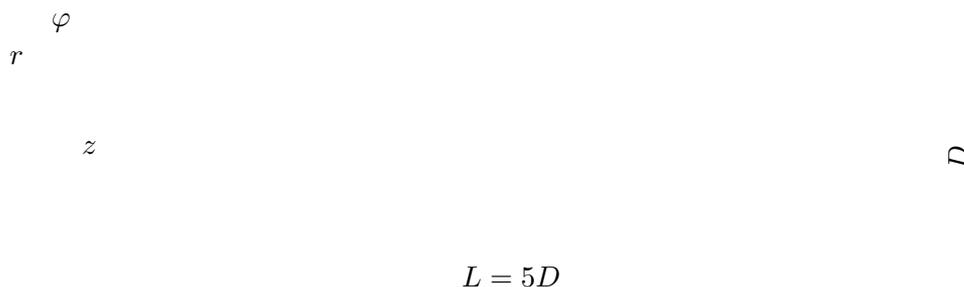


ABBILDUNG 3.3: Geometrie der Rohrströmung

Ausströmrandbedingung

Ein elliptisches Differentialgleichungssystem zeichnet sich dadurch aus, daß lokale Fehler oder Störungen die Lösung an stromauf gelegenen Positionen des Rechengebiets beeinflussen können. Die Randbedingungen am Ausströmrand sind a priori unbekannt, sie müssen daher durch geschickte Extrapolation der Strömungsgrößen bestimmt werden. Für den Fall einer Grobstruktursimulation der turbulenten Wandgrenzschicht wurde von Richter et al. [46] eine Ausströmrandbedingung entwickelt, die auch in der hier vorgestellten Arbeit angewendet wird. Die in Umfangsrichtung statistisch gemittelte axiale Geschwindigkeitskomponente wird hierzu linear extrapoliert und die entsprechende Radial- und Azimutalkomponente werden konstant extrapoliert:

$$\delta_z \delta_z \langle \bar{u}_z \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}\delta_z \langle \overline{u_\varphi} \rangle &= 0 \\ \delta_z \langle \overline{u_r} \rangle &= 0.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Die Geschwindigkeitsfluktuationen $\overline{u_\alpha}''$ mit $\alpha = (z, \varphi, r)$ werden mittels einer Konvektionsgleichung, in der die mittlere axiale Geschwindigkeitskomponente die Konvektionsgeschwindigkeit darstellt, durch die Ausströmebene transportiert:

$$\frac{\partial \overline{u_\alpha}''}{\partial t} + \langle \overline{u_z} \rangle \frac{\partial \overline{u_\alpha}''}{\partial z} = 0\tag{3.27}$$

Randbedingung für den Druck

Formal müßten die Geschwindigkeiten in den Gleichungen 3.20 bis 3.27 als Werte der Näherungslösung gekennzeichnet werden, da sie bei der Berechnung der rechten Seite von Gleichung 3.9 benötigt werden. Um eine Korrektur dieser Randbedingungen innerhalb der Projektionsmethode zu vermeiden, muß an den Rändern für das Pseudodruckfeld Π die Neumann Randbedingung (z.B. $\frac{\partial \Pi}{\partial r} |_w = 0$) gesetzt werden. Es sei darauf hingewiesen, daß damit an den Rändern kein Zusammenhang zwischen dem Druckfeld \bar{p} und dem Pseudodruckfeld Π besteht. Die Randbedingung des Potentialfeldes Π beschreibt lediglich, ob und wie die Geschwindigkeit am Rand des Rechengebiets korrigiert werden muß.

3.5 Anfangsbedingungen

Wäre man in der Lage, in einer spezifischen Geometrie, ein physikalisch korrektes, dreidimensionales turbulentes Strömungsfeld vorzugeben, würde sich die numerische Simulation der Strömung erübrigen. Da dies nicht möglich ist, begnügt man sich damit, die Anfangsbedingungen so vorzugeben, daß das numerische Verfahren auf ein physikalisch sinnvolles turbulentes Strömungsfeld zukonvergieren kann. Bei der DNS der turbulenten Rohrströmung (Unger [67]) wurden Profilen der mittleren Geschwindigkeitskomponenten Fluktuationen überlagert, die normierte Zufallszahlen und mit Faktoren so gewichtet waren, daß ihre rms-Werte den Messungen von Weiss [71] entsprachen. Um eine Relaminarisierung dieses unkorrelierten Geschwindigkeitsfeldes zu verhindern, wurde die Simulation zunächst mit einer Reynoldszahl $Re_\tau = 3000$ gestartet und innerhalb einer Problemzeit kontinuierlich auf die gewünschte Reynoldszahl $Re_\tau = 360$ gebracht. Im Fall der Rohrexpanionsströmung konnte das momentane Strömungsfeld in allen Maschen mit demselben Wert 1 für die Längsgeschwindigkeit (dies entspricht u_τ) und Null für die beiden anderen Komponenten vorbelegt werden. Die Vorgabe zeitabhängiger Einströmrandbedingungen liefert nach einiger Rechenzeit das richtige turbulente Strömungsfeld, da die unphysikalischen Anfangsdaten konvektiv aus dem Rechengebiet transportiert werden. Nach etwa sechs Problemzeiten D/u_τ war das Strömungsfeld unabhängig von den gewählten Anfangsbedingungen.

3.6 Räumliche und zeitliche Auflösung

Vor Beginn der sehr aufwendigen DNS wurde das an die Gebietsabmessungen der Rohrerweiterung angepasste Simulationsprogramm FLOWSI ausführlich getestet. Neben Simulationen im laminaren Geschwindigkeitsbereich ($Re_m = 20 - 200$), deren Ergebnisse auszugsweise im Anhang zusammengefasst sind, wurde eine Simulation der turbulenten Strömung ($Re_\tau = 360$) bei grober Auflösung des Rechengitters durchgeführt. Anhand der produzierten Strömungsfelder wurde die korrekte Implementierung der Ein- und Ausströmrandbedingungen überprüft und die modifizierten bzw. neu entwickelten Auswertprogramme getestet.

Beide Rechengitter, sowohl das grobe der Testsimulation, als auch das feine der DNS, wurden nach Kriterien ausgelegt, die Grötzbach [26] für eine DNS formulierte.

Die Gebietsabmessungen des Rohres mit konstantem Querschnitt entsprechen denen der Arbeit von F. Unger [67]. Obwohl das Simulationsprogramm FLOWSI die Verwendung von nichtäquidistanten Gittern in der r -Richtung zulässt, wurde in Anlehnung an diese Arbeit die Implementierung von äquidistanten Maschennetzen vorgezogen.

Über die Maschenweiten in Zylinderkoordinaten lässt sich die vom Rechengitter erfasste maximale Wellenlänge angeben. Es folgt:

$$k_{max} = \frac{\pi}{h_m} \quad \text{mit} \quad h_m = (r\Delta z\Delta\varphi\Delta r)^{1/3} \quad (3.28)$$

Hierbei wird durch $h_m = (r\Delta z\Delta\varphi\Delta r)^{1/3}$ eine mittlere Maschenweite definiert.

Grobe räumliche Auflösung (Testlauf)

Unter der Voraussetzung isotroper Maschenweiten (die in Zylinderkoordinaten nicht erreichbar ist) und einer in den kleinen Skalen isotropen Strömung, leitet Grötzbach [26] die folgende Abschätzung für die mittlere Maschenweite h_g her:

$$h_g \leq 5.13 \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (3.29)$$

Einsetzen der aus der DNS der turbulenten Rohrströmung bekannten maximalen Dissipationsrate $\varepsilon_{Rohr,max} \approx 60$ (siehe Unger [67]) in Gleichung 3.29 führt zu einer mittleren Maschenweite in Wandeinheiten, die lediglich von der Reynoldszahl $Re_\tau = 360$ abhängt:

$$h_g^+ = \frac{h_g u_\tau}{\nu} = 5.13 \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon_{Rohr,max}} \right)^{1/4} \frac{u_\tau}{\nu} = 1.844 Re_\tau^{1/4} = 8.03, \quad (3.30)$$

Aus den globalen Abmessungen der Rohrgeometrie und den Maschenzahlen N_z , N_φ und N_r lassen sich die Maschenweiten der drei Koordinatenrichtungen berechnen. In Wandeinheiten

erhält man:

$$\Delta z^+ = \frac{\Delta z u_\tau}{\nu} = \frac{L}{N_z} \frac{u_\tau}{\nu} = \frac{L/D}{N_z} Re_\tau, \quad (3.31)$$

$$\Delta r^+ = \frac{\Delta r u_\tau}{\nu} = \frac{D/2}{N_r} \frac{u_\tau}{\nu} = \frac{1}{2N_r} Re_\tau, \quad (3.32)$$

$$(r\Delta\varphi)^+ = \frac{r\Delta\varphi u_\tau}{\nu} = r \frac{2\pi}{N_\varphi} \frac{u_\tau}{\nu} = \frac{r}{D} \frac{2\pi}{N_\varphi}, \quad (3.33)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2N_r} \frac{\pi}{N_\varphi} Re_\tau \leq (r\Delta\varphi)^+ \leq \left(1 - \frac{1}{2N_r}\right) \frac{\pi}{N_\varphi} Re_\tau.$$

Besonders wichtig ist die Auflösung in wandnormaler Richtung, da die Strömung in der viskosen Unterschicht steile Gradienten aufweist. Im groben Rechengitter soll diese viskose Unterschicht mit 2 Gitterpunkten aufgelöst werden.

Unter Berücksichtigung dieser Kriterien wurde für die Simulation der turbulenten Rohrströmung bei grober Auflösung ein Rechengitter mit $N_z = 162$ Gitterpunkten in axialer, $N_\varphi = 72$ in azimuthaler und $N_r = 70$ in radialer Richtung vereinbart. Eingesetzt in Gleichungen 3.31 bis 3.33 ergeben sich die Maschenweiten der drei Koordinatenrichtungen:

$$\Delta z^+ = 11.1, \quad 0.11 \leq (r\Delta\varphi)^+ \leq 15.6 \quad \Delta r^+ = 2.57, \quad (3.34)$$

die nach Gleichung 3.28 zu mittleren Maschenweiten zwischen $1.46 \leq h_m \leq 7.63$ führen.

Wie in Kapitel 3.4 besprochen, wird am Einströmrand der Rohrerweiterung ein auf dem Rechengitter der Rohrströmung erzeugter Geschwindigkeitsvektor vorgegeben. Diese Vorgehensweise erfordert gleiche Maschenweiten in den beiden Rechengittern. Einsetzen der Gebietsabmessungen der Rohrerweiterung in die Gleichungen 3.31, 3.32 und 3.33 führt zu den folgenden Maschenzahlen:

$$N_z = 115, \quad N_\varphi = 72, \quad N_r = 84. \quad (3.35)$$

Hohe räumliche Auflösung (Produktionslauf)

Auf dem Rechengitter der DNS müssen die kleinsten turbulenten Längenmaße aufgelöst werden. Die aus dem Kolmogorovschen Längenmaß gebildete Wellenzahl $\frac{1}{\eta}$ definiert das Ende des Wellenzahlbereichs im Energiespektrum. Um sicherzustellen, daß der gesamte Wellenzahlbereich erfasst wird, muß die in Gleichung 3.28 festgehaltene maximale Wellenzahl die Kolmogorovsche Wellenzahl $\frac{1}{\eta}$ übersteigen. Für die mittlere Maschenweite gilt in diesem Fall:

$$h_f \leq \pi\eta = \pi \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}. \quad (3.36)$$

Unbekannt ist erneut der Wert der Dissipationsrate ε . Für die weitere Berechnung wird die maximale Dissipationsrate von $\varepsilon_{g,max} \approx 300$ verwendet, die im Wiederanlegebereich der grob

aufgelösten Simulation ermittelt wurde. Es kann nun sowohl das Kolmogorovsche Längenmaß, als auch die mittlere Maschenweite abgeschätzt werden. In Wandeinheiten können beide als Funktion der Reynoldszahl dargestellt werden:

$$\eta^+ = \frac{\eta u_\tau}{\nu} = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon_{g,max}} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{u_\tau}{\nu} = 0.24 Re_\tau^{\frac{1}{4}} = 1.043, \quad (3.37)$$

$$h_f^+ = \frac{h_f u_\tau}{\nu} = \pi \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon_{g,max}} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{u_\tau}{\nu} = 0.755 Re_\tau^{\frac{1}{4}} = 3.29. \quad (3.38)$$

Der Arbeit von Grötzbach [26] folgend wird die viskose Unterschicht $y < 5\nu/u_\tau|_{z=0}$ mit drei Gitterpunkten aufgelöst.

Unter Beachtung dieser Kriterien wurde für die DNS der Rohrströmung ein Rechengitter mit den Maschenzahlen

$$N_z = 256, \quad N_\varphi = 128, \quad N_r = 96. \quad (3.39)$$

gewählt, woraus sich mit Gleichung 3.31 bis 3.33 die folgenden Maschenweiten ergeben:

$$\Delta z^+ = 7.031, \quad 0.046 \leq (r\Delta\varphi)^+ \leq 8.789, \quad \Delta r^+ = 1.875. \quad (3.40)$$

Analog zur groben Simulation ergibt sich hieraus auch das Rechengitter der Rohrerweiterung:

$$N_z = 180, \quad N_\varphi = 128, \quad N_r = 115. \quad (3.41)$$

Die ersten drei wandnächsten Gitterpunkte $y^+ = 0.94, 2.81, 4.68, \dots$ liegen innerhalb der viskosen Unterschicht. Obwohl die mittlere Maschenweite nicht in allen drei Koordinatenrichtungen unterschritten wurde, kann davon ausgegangen werden, daß alle relevanten Längenmaße erfasst werden. Zu ähnlichen Schlußfolgerungen kommen auch Le und Moin [38], deren DNS der Strömung über die zurückspringende Stufe die Gitterweiten $\Delta x^+ \approx 10.0$ in Hauptströmungsrichtung, $0.3 \leq \Delta y^+ \leq 31$ in Wandnormalenrichtung und $\Delta z^+ \approx 15.0$ in Spannweitenrichtung aufwies. Die Autoren weisen allerdings darauf hin, daß für eine zuverlässige Auswertung der Korrelationen zweiter und höherer Ordnung die Spannweitenrichtung besser aufgelöst werden sollte.

Zeitliche Auflösung

Mit Gleichung 2.2 kann auch das mit den Bezugsgrößen des Kapitels 2.4 dimensionslos gemachte Kolmogorovsche Zeitmaß in Abhängigkeit der Reynoldszahl ausgedrückt werden:

$$\tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon_{g,max}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{u_\tau}{D} = 0.058 Re_\tau^{-\frac{1}{2}} = 3.04 \cdot 10^{-3}. \quad (3.42)$$

Dieser physikalisch notwendige Zeitschritt liegt um eine Größenordnung über dem, mit Gleichung 3.6 ermittelten, numerisch notwendigen Zeitschritt $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ des semi-impliziten

Zeitintegrationsverfahrens. Auf eine vollimplizite Zeitintegration wurde dennoch verzichtet, da der dabei erforderliche höhere Rechenaufwand pro Zeitschritt die gewonnene Schrittweitensteigerung wieder aufheben würde.

3.7 Parameter der DNS

Auf einer Cray Y-MP 8/8128 wurden drei direkte numerische Simulationen der turbulenten Strömung durch die Rohrerweiterung und eine DNS der turbulenten Rohrströmung gerechnet. Die auf diesen Rechner bezogenen Daten des Navier-Stokes-Codes sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

TABELLE 3.2: Parameter des Programms FLOWSI für die direkten numerischen Simulationen der Strömung im Rohr und in der Rohrerweiterung auf der CRAY Y-MP 8/8128

Geometrie	Rohr	Rohrerweiterung
Gitter (N_z, N_φ, N_r)	256, 128, 96	180, 128, 115
Abmessungen (z, φ, r)	5, 2π , 0.5	3.51, 2π , 0.6
Zeitschritt Δt	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
CPU-Zeit pro Δt	6.8 sec	10.5 sec
CPU-Zeit pro Δt und Punkt	$2.16 \cdot 10^{-6}$ sec	$3.9 \cdot 10^{-6}$ sec
Kernspeicher in MWords	29.7	28.9
MFlops	180	175

Die erste DNS der Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung (DNS_2) weist in der Einströmebene ein Geschwindigkeitsfeld der vollentwickelt turbulenten Rohrströmung (DNS_1) auf.

Im Rahmen einer Absprache mit dem *Department of Mechanical Engineering* der *University of Illinois* (Prof. Adrian) wurde dort die Strömung durch die Rohrerweiterung ($ER = 1.2$ und $Re_{cl} = 7891$) mit Hilfe der PIV-Technik experimentell untersucht. Im Verlauf dieser Messungen wurde im Strömungsfeld nahe der Stufenkante eine aus dem Gebläse stammende Frequenz von 30Hz nachgewiesen, die im Vergleich zu der hier vorliegenden Arbeit zu deutlich kürzeren Wiederanlegelängen führte. Um zu untersuchen, inwieweit sich diese im Energiespektrum ausgezeichnete Frequenz auf die Dynamik der Scherschicht auswirkt, wurden zwei weitere DNS (DNS_3 und DNS_4) durchgeführt.

Mit dem Ziel, diese Daten statistisch auszuwerten, wurden für die vier Simulationen Stichproben in unterschiedlicher Anzahl abgespeichert. Der hierfür benötigte Speicherplatz, die Anzahl

der berechneten Zeitschritte und die verbrauchte CPU-Zeit sind in Tab. 3.3 zusammengefaßt.

Die Diskussion der Ergebnisse gliedert sich dementsprechend in zwei Teile. Im ersten Teil werden die Ergebnisse der DNS bei ungestörter Zuströmung besprochen, während sich der zweite Teil den Resultaten widmet, die sich mit manipulierten Einströmrandbedingungen ergaben. Die Diskussion beschränkt sich ferner auf die Strömung in der Rohrerweiterung, da die vollentwickelt turbulente Rohrströmung einerseits im Bereich der Zuströmung vorliegt und sie andererseits ausführlich in der Arbeit von Unger [67] dokumentiert wurde. Es bleibt zu vermerken, daß der turbulenten Rohrströmung in allen vier Simulationen der, in Gleichung 3.43 dargestellte, mittlere axiale Druckgradient (dimensionslos) aufgeprägt wurde:

$$\frac{d\langle\bar{p}\rangle}{dz} = -4 \quad (3.43)$$

TABELLE 3.3: Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf der durchgeführten Simulationen auf der CRAY Y-MP 8/8128.

Kennung	DNS_1	DNS_2	DNS_3	DNS_4
Anzahl der Zeitschritte	501250	311250	127000	63000
Anzahl der Stichproben	200	1050	467	212
gesamte CPU-Zeit in h	950	910	370	184
Benötigter Speicherplatz in GBytes	21	105	47	21

In den folgenden Kapiteln wird auf das in den Gleichungen 2.14 und 2.15 eingeführte Überstreichen der gemittelten Strömungsvariablen verzichtet.

4 Statistische Auswertung

4.1 Bemerkungen zur gewählten statistischen Mittelung

Das stochastische Verhalten einer turbulenten Strömung verhindert eine quantitative Auswertung der Ergebnisse mit deterministischen Methoden. Die aus der DNS gewonnenen instationären, dreidimensionalen Strömungsfelder werden daher für einen Vergleich mit experimentellen und numerischen Ergebnissen einer statistischen Mittelung im Reynoldsen Sinne unterworfen.

Das momentane Strömungsfeld wird dabei in einen statistisch stationären Mittelwert und eine Abweichung von diesem aufgespalten. Nach dem Ergodentheorem kann zusätzlich zu der zeitlichen Mittelung eine räumliche Mittelung in den homogenen Richtungen durchgeführt werden. Während für die turbulente Strömung im Rohr die zwei homogenen Richtungen z und φ für eine räumliche Mittelung herangezogen werden können, besitzt die Strömung in der Rohrerweiterung nur die homogene Richtung φ . Die Beziehung zwischen Momentanwert, Mittelwert und Fluktuation lautet:

$$\langle \Phi \rangle(z, r) = \Phi(z, \varphi, r, t) - \Phi''(z, \varphi, r, t) \quad (4.1)$$

In Gleichung 4.1 beschreibt $\Phi = (u_z, u_\varphi, u_r, p)$ den kompletten Lösungsvektor und $\langle \dots \rangle$ repräsentiert seinen statistischen Mittelwert. Im statistisch stationären Zustand sind die so gemittelten Strömungsfelder sowohl von der φ -Richtung als auch von der Zeit unabhängig.

Die Qualität der statistischen Mittelung wird einerseits von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Stichproben und andererseits von der statistischen Unabhängigkeit dieser Stichproben bestimmt. Da die diskreten Stützstellen in Umfangsrichtung im Bereich der Rohrachse sehr nahe beieinander liegen, verschwindet hier der Beitrag der räumlichen Mittelung zum gesamten Mittelwert.

Während der numerischen Simulation wird für eine einzelne zeitliche Stichprobe das vollständige dreidimensionale Geschwindigkeits- und Druckfeld ab gespeichert, was zu einem enormen Speicherbedarf führt. Es ist daher sinnvoll zwischen diesen Stichproben ein Zeitintervall zu wählen, welches sicherstellt, daß diese untereinander mehr oder weniger statistisch unabhängig sind. Mit $\Delta t = 0.05$ wurde das Zeitintervall so gewählt, daß die zeitlichen Korrelationsfunktionen der turbulenten Rohrströmung, die aus der Arbeit von Unger [67] bekannt sind, nahezu auf Null abgeklungen sind. Zusammenfassend kann daraus gefolgert werden, daß der zeitlichen Mittelung im Vergleich zu der räumlichen eine große Bedeutung zukommt.

4.2 Mittlere Geschwindigkeitsprofile

Die Strömung in der Rohrerweiterung besitzt mit der axialen und radialen zwei nichtverschwindende Komponenten der statistisch gemittelten Geschwindigkeit. Die Drallfreiheit der Strömung bedingt eine verschwindende Geschwindigkeitskomponente in Umfangsrichtung. Im Bereich der Zuströmung, in der der Zustand der vollentwickelten turbulenten Rohrströmung vorliegt, existiert auch keine mittlere radiale Geschwindigkeitskomponente.

Über die mittlere axiale Geschwindigkeitskomponente werden, wie in der Literatur üblich, drei charakteristische Geschwindigkeitsmaße definiert. Auf der Rohrachse gilt:

$$u_{cl}(z) = \langle u_z \rangle(z, r = 0) \quad (4.2)$$

Der über die Einströmebene integrierte Wert der mittleren Axialgeschwindigkeitskomponente definiert das statistische Mittel der Durchflußgeschwindigkeit. Im Fall einer quellfreien Strömung ist dieser Wert unabhängig von der Axialkoordinate:

$$u_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \langle u_z \rangle 2\pi r dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R \langle u_z \rangle r dr = \frac{2}{R_e^2} \int_0^{R_e} \langle u_z \rangle r dr \quad (4.3)$$

Schließlich wird in Gl. 4.4 aus dem Wandgradienten die Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ definiert:

$$u_\tau(z) = \sqrt{\frac{\tau_w(z)}{\rho}} = \sqrt{\nu \left(\frac{d\langle u_z \rangle(z)}{dr} \right)_{r=R \text{ bzw. } R_e}} \quad (4.4)$$

4.3 Einpunkt-Korrelationen

Durch Multiplikation zweier Geschwindigkeitsfluktuationen am selben Ort und anschließende statistische Mittelung erhält man die sechs Elemente des symmetrischen Reynoldsschen Spannungstensors:

$$\langle u''_\alpha u''_\beta \rangle = \langle u_\alpha u_\beta \rangle - \langle u_\alpha \rangle \langle u_\beta \rangle. \quad (4.5)$$

Die Diagonalelemente des Tensors beschreiben die Turbulenzintensitäten der korrespondierenden Geschwindigkeitskomponenten. Sie stellen ein Maß für die turbulente Schwankungsbewegung dar und sind daher für die Interpretation einer turbulenten Strömung von großer Bedeutung. Die Spur des Reynoldsschen Spannungstensors liefert ferner die turbulente kinetische Energie k .

$$k = \frac{1}{2} (\langle u''_z{}^2 \rangle + \langle u''_\varphi{}^2 \rangle + \langle u''_r{}^2 \rangle) \quad (4.6)$$

In der Statistik nennt man mittlere Schwankungsquadrate auch Varianzen. Deren Wurzeln sind die Standardabweichungen oder rms-Werte:

$$u_{\alpha,rms} = \sqrt{\langle u''_\alpha{}^2 \rangle}. \quad (4.7)$$

Die Drallfreiheit der Strömung und die Achssymmetrie der Rohrerweiterung führen dazu, daß mit $\langle u_z'' u_r'' \rangle$, der sogenannten Reynoldsschen Schubspannung, nur ein Element der Nebendiagonale des Tensors nicht verschwindet. Für den Fall der vollentwickelt turbulenten Rohrströmung, welche im Bereich der Zuströmung vorliegt, läßt sich über eine Kräftebilanz die folgende Beziehung (dimensionsbehaftet) herleiten:

$$\langle u_z'' u_r'' \rangle - \nu \frac{d\langle u_z \rangle}{dr} = -\frac{r}{2} \frac{1}{\rho} \frac{d\langle p \rangle}{dz} = \frac{r}{R} u_\tau^2. \quad (4.8)$$

Sie zeigt an, daß die Summe aus Reynolds- und Reibungsspannung ein lineares Profil aufweist. Ein so einfacher Zusammenhang existiert im Rezirkulationsgebiet und in der freien Scherschicht natürlich nicht mehr, da dort Konvektions- und molekulare Transportvorgänge in r - und z -Richtung eine Rolle spielen.

In einer anderen Betrachtungsweise folgen die mittleren Geschwindigkeiten und die Turbulenzintensitäten auch über die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen der jeweiligen Komponenten. Die dritte Potenz einer Geschwindigkeitsfluktuation stellt in der Statistik ein Maß für die Schiefe dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. Sind z.B. große positive Werte eines Signals häufiger als große negative Werte, so nimmt die durch Gleichung 4.9 definierte Schiefe einen positiven Wert an:

$$S_\alpha = \frac{\langle u_\alpha''' \rangle}{u_{\alpha,rms}^3}. \quad (4.9)$$

Über den Flachheitsgrad

$$F_\alpha = \frac{\langle u_\alpha''^4 \rangle}{u_{\alpha,rms}^4} \quad (4.10)$$

kann auf entsprechende Weise eine Aussage über die Intermitenz der turbulenten Strömung getroffen werden. Der Flachheitsgrad ist groß, wenn große Ausschläge eines Meßwertes mit einer hohen Wahrscheinlichkeit anzutreffen sind.

Für den Fall einer Gaußschen Normalverteilung lassen sich die Werte der Schiefe und des Flachheitsgrades auf analytische Weise bestimmen. Es gilt:

$$S_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad F_\alpha = 3. \quad (4.11)$$

4.4 Zweipunkt-Korrelationen

Die Zweipunkt-Korrelationsfunktion stellt eine Verallgemeinerung der Einpunkt-Korrelationsfunktion dar. Sie liefert Aufschluß über die räumliche Ausdehnung und Lebensdauer momentan nahezu einheitlich bewegter Fluidmassen. Aus ihr lassen sich integrale Längen- und Zeitmaße bilden. Der an einem Ort und zu einem Zeitpunkt berechnete Wert einer Strömungsvariable wird hierfür mit dem Wert einer beliebigen Variablen an einem anderen Ort und zu einem

anderen Zeitpunkt korreliert. Üblicherweise werden diese Funktionen mit den korrespondierenden *rms*-Werten normiert, wodurch sich für die Einpunkt-Korrelation der Wert 1 ergibt. Als Beispiel wählen wir die Zweipunktkorrelation von Geschwindigkeitsschwankungen:

$$R_{u_\alpha u_\beta}(z, \Delta z, \Delta \varphi, r, \Delta r, \Delta t) = \frac{\langle u''_\alpha(z, \varphi, r, t) u''_\beta(z + \Delta z, \varphi + \Delta \varphi, r + \Delta r, t + \Delta t) \rangle}{u_{\alpha, rms}(z, r) u_{\beta, rms}(z, r)}. \quad (4.12)$$

Der Tensor $R_{u_\alpha u_\beta}$ ist von φ unabhängig und laut Definition nicht symmetrisch. Werden die Zweipunkt-Korrelationsfunktionen entlang einer Koordinatenrichtung benötigt, reduziert sich Gleichung 4.12 auf:

$$R_{u_\alpha u_\alpha}(z, \Delta z, r) = \frac{\langle u''_\alpha(z, \varphi, r, t) u''_\alpha(z + \Delta z, \varphi, r, t) \rangle}{u_{\alpha, rms}^2(z, r)}, \quad (4.13)$$

$$R_{u_\alpha u_\alpha}(z, r, \Delta r) = \frac{\langle u''_\alpha(z, \varphi, r, t) u''_\alpha(z, \varphi, r + \Delta r, t) \rangle}{u_{\alpha, rms}^2(z, r)}. \quad (4.14)$$

Auf analoge Weise läßt sich die zeitliche Zweipunkt-Korrelationsfunktion berechnen:

$$R_{u_\alpha u_\alpha}(z, r, \Delta t) = \frac{\langle u''_\alpha(z, \varphi, r, t) u''_\alpha(z, \varphi, r, t + \Delta t) \rangle}{u_{\alpha, rms}^2(z, r)}. \quad (4.15)$$

4.5 Leistungsdichtespektren

Dem Energiespektrum kommt in der Turbulenzforschung eine besondere Bedeutung zu, da durch es die Verteilung der kinetischen Energie über ein breites Spektrum von Längenskalen aufgezeigt werden kann. Über eine Fourier-Transformation können aus einem kontinuierlichen Signal nach dem Wiener-Khinchine-Theorem sowohl die Autokorrelationsfunktionen $R_{\Phi\Phi}$ als auch die Leistungsdichtespektren $S_{\Phi\Phi}$ berechnet werden:

$$R_{\Phi\Phi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\Phi\Phi}(k_x) e^{ik_x x} dk_x, \quad S_{\Phi\Phi}(k_x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\Phi\Phi}(x) e^{-ik_x x} dx. \quad (4.16)$$

$R_{\Phi\Phi}$ und $S_{\Phi\Phi}$ bilden ein Paar von Fourier-Transformierten. Der Übergang zu einer diskreten Fourier-Transformation ist nur möglich, wenn sich das an den endlichen Stützstellen $n\Delta x$ definierte fluktuierende Signal

$$\Phi_n = \Phi(n\Delta x), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.17)$$

über $L = N\Delta x$ periodisch verhält. Für die in dieser Arbeit betrachtete Geometrie ist dies nur für die homogene Richtung φ und auf der Zeitachse der Fall. Im Wellenzahlraum erhält man das folgende diskrete Leistungsdichtespektrum:

$$\hat{\Phi}(m/\Delta x) = \hat{\Phi}_m = \Delta x \sum_{l=0}^{N-1} \Phi_l e^{-2\pi i \frac{ml}{N}}, \quad m = 0, 1, \dots, N/2 \quad (4.18)$$

Der Betrag der transformierten Fluktuation liefert eine Stichprobe des Leistungsdichtespektrums:

$$\Psi_{\Phi\Phi}(m) = \frac{2}{L} |\hat{\Phi}_m|^2, \quad m = 0, 1, \dots, N/2. \quad (4.19)$$

Durch statistische Mittelung der einzelnen Stichproben erhält man schließlich das von m abhängige Leistungsdichtespektrum:

$$S_{\Phi\Phi}(m) = \langle \Psi_{\Phi\Phi}(m) \rangle. \quad (4.20)$$

In den graphischen Darstellung wird im Fall der räumlichen Leistungsdichtespektren auf der Abszisse die Wellenzahl k_x aufgetragen.

$$k_x = 2\pi \frac{m}{N\Delta x} \quad (4.21)$$

Analog können die zeitliche Leistungsdichtespektren berechnet werden, wenn man die räumliche Schrittweite Δx und das Längenmaß L durch den Zeitschritt Δt und das Zeitmaß T ersetzt. In diesem Fall wird auf der Abszisse die Kreisfrequenz ω aufgetragen:

$$\omega = 2\pi \frac{m}{N\Delta t} \quad (4.22)$$

4.6 Die Wirbelstärke

Die kohärenten Strukturen eines turbulenten Strömungsfeldes treten unter anderem in Form von Wirbelstrukturen auf. Die Streckung bzw. Stauchung dieser Wirbelstrukturen hat einen direkten Einfluß auf die Anfachung bzw. Abschwächung der turbulenten Schwankungsbewegung und ist somit von zentraler Bedeutung.

Mathematisch berechnet sich der Wirbelstärkevektor aus der Rotation des Geschwindigkeitsfeldes, hier symbolisch dargestellt:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \quad (4.23)$$

Einsetzen des Nabla-Operators in Gleichung 4.23, führt zu den folgenden Komponenten des Wirbelstärkevektors in Zylinderkoordinaten.

$$\omega_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (u_\varphi r)}{\partial r} \right], \quad (4.24)$$

$$\omega_\varphi = \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial z}, \quad (4.25)$$

$$\omega_r = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}. \quad (4.26)$$

Die Berechnung der Wirbelstärkefluktuationen erfolgt analog zur Berechnung der Geschwindigkeitsfluktuationen, aus der Differenz zwischen dem Momentanwert und dem Mittelwert. Die

halbe Summe der Quadrate dieser Fluktuationen stellt ein Maß für die Stärke des fluktuierenden Wirbelvektors dar:

$$E_\omega = \frac{1}{2} (\omega_z''^2 + \omega_\varphi''^2 + \omega_r''^2). \quad (4.27)$$

Der statistische Mittelwert von E_ω heißt Enstrophie.

4.7 Bilanzgleichungen des Reynoldsschen Spannungstensors

Für die sechs voneinander verschiedenen Elemente des Reynoldsschen Spannungstensors können aus den Navier-Stokes-Gleichungen Bilanzgleichungen hergeleitet werden. Die bei F. Unger [67] in ihrer allgemeine Form dargestellten Gleichungen lassen sich unter der Voraussetzung einer drallfreien Strömung mit

$$\frac{\partial \langle \dots \rangle}{\partial \varphi} = 0, \quad \langle u_\varphi \rangle = 0, \quad \langle u_\alpha'' u_\varphi'' \rangle = 0. \quad (4.28)$$

entscheidend vereinfachen. Es ergeben sich vier relevante Transportgleichungen:

$\langle u_z'' u_z'' \rangle$ -Transportgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_z'' u_z'' \rangle}{\partial t} = & \underbrace{-\langle u_r \rangle \frac{\partial \langle u_z'' u_z'' \rangle}{\partial r} - \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle u_z'' u_z'' \rangle}{\partial z}}_{CT_{zz}} \quad \underbrace{-2 \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} \langle u_r'' u_z'' \rangle - 2 \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} \langle u_z'' u_z'' \rangle}_{PR_{zz}} \\ & \underbrace{-\frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u_r'' u_z'' u_z'' \rangle)}{\partial r} - \frac{\partial \langle u_z'' u_z'' u_z'' \rangle}{\partial z}}_{TD_{zz}} \quad \underbrace{-2 \frac{\partial \langle u_z'' p'' \rangle}{\partial z}}_{PD_{zz}} \\ & \underbrace{+2 \left\langle p'' \frac{\partial u_z''}{\partial z} \right\rangle}_{PS_{zz}} \quad \underbrace{+ \frac{1}{Re_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_z'' u_z'' \rangle}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \langle u_z'' u_z'' \rangle}{\partial z^2} \right]}_{VD_{zz}} \\ & \underbrace{-\frac{2}{Re_\tau} \left[\left\langle \left(\frac{\partial u_z''}{\partial r} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_z''}{\partial \varphi} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial u_z''}{\partial z} \right)^2 \right\rangle \right]}_{DS_{zz}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$\langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle$ -Transportgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}{\partial t} = & \underbrace{-\langle u_r \rangle \frac{\partial \langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}{\partial r} - \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}{\partial z}}_{CT_{\varphi\varphi}} \quad \underbrace{-\frac{2}{r} \langle u_r \rangle \langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}_{PR_{\varphi\varphi}} \\ & \underbrace{-\frac{2}{r} \frac{\partial (r \langle u_r'' u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle)}{\partial r} - \frac{1}{r} \langle u_r'' u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle - \frac{\partial \langle u_\varphi'' u_\varphi'' u_z'' \rangle}{\partial z}}_{TD_{\varphi\varphi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underbrace{-\frac{2}{r} \langle u_r'' p'' \rangle}_{PD_{\varphi\varphi}} + \underbrace{\frac{2}{r} \left\langle p'' \left(\frac{\partial u_\varphi''}{\partial \varphi} + u_r'' \right) \right\rangle}_{PS_{\varphi\varphi}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{Re_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}{\partial r} \right) - \frac{2}{r^2} (\langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle - \langle u_r'' u_r'' \rangle) + \frac{\partial^2 \langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle}{\partial z^2} \right]}_{VD_{\varphi\varphi}} \\
& \underbrace{-\frac{2}{Re_\tau} \left[\left\langle \left(\frac{\partial u_\varphi''}{\partial r} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_\varphi''}{\partial \varphi} + u_r'' \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial u_\varphi''}{\partial z} \right)^2 \right\rangle \right]}_{DS_{\varphi\varphi}} \quad (4.30)
\end{aligned}$$

$\langle u_r'' u_r'' \rangle$ -Transportgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle u_r'' u_r'' \rangle}{\partial t} &= \underbrace{-\langle u_r \rangle \frac{\partial \langle u_r'' u_r'' \rangle}{\partial r} - \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle u_r'' u_r'' \rangle}{\partial z}}_{CT_{rr}} - \underbrace{2 \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} \langle u_r'' u_r'' \rangle - 2 \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} \langle u_r'' u_z'' \rangle}_{PR_{rr}} \\
& \underbrace{-\frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u_r'' u_r'' u_r'' \rangle)}{\partial r} + \frac{2}{r} \langle u_r'' u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle - \frac{\partial \langle u_r'' u_r'' u_r'' \rangle}{\partial z}}_{TD_{rr}} \\
& \underbrace{-2 \frac{\partial \langle u_r'' p'' \rangle}{\partial r}}_{PD_{rr}} + \underbrace{+2 \left\langle p'' \frac{\partial u_r''}{\partial r} \right\rangle}_{PS_{rr}} \\
& + \underbrace{\frac{1}{Re_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_r'' u_r'' \rangle}{\partial r} \right) + \frac{2}{r^2} (\langle u_\varphi'' u_\varphi'' \rangle - \langle u_r'' u_r'' \rangle) + \frac{\partial^2 \langle u_r'' u_r'' \rangle}{\partial z^2} \right]}_{VD_{rr}} \\
& \underbrace{-\frac{2}{Re_\tau} \left[\left\langle \left(\frac{\partial u_r''}{\partial r} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_r''}{\partial \varphi} - u_\varphi'' \right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial u_r''}{\partial z} \right)^2 \right\rangle \right]}_{DS_{rr}} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

$\langle u_r'' u_z'' \rangle$ -Transportgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle u_r'' u_z'' \rangle}{\partial t} &= \underbrace{-\langle u_r \rangle \frac{\partial \langle u_r'' u_z'' \rangle}{\partial r} - \langle u_z \rangle \frac{\partial \langle u_r'' u_z'' \rangle}{\partial z}}_{CT_{zr}} \\
& \underbrace{-\frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} \langle u_r'' u_z'' \rangle - \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r} \langle u_r'' u_r'' \rangle - \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial z} \langle u_z'' u_z'' \rangle - \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} \langle u_r'' u_z'' \rangle}_{PR_{zr}} \\
& \underbrace{-\frac{1}{r} \frac{\partial (r \langle u_r'' u_r'' u_z'' \rangle)}{\partial r} + \frac{1}{r} \langle u_\varphi'' u_\varphi'' u_z'' \rangle - \frac{\partial \langle u_r'' u_z'' u_z'' \rangle}{\partial z}}_{TD_{zr}} \\
& \underbrace{-\frac{\partial \langle u_z'' p'' \rangle}{\partial r} - \frac{\partial \langle u_r'' p'' \rangle}{\partial z}}_{PD_{zr}} + \underbrace{\left\langle p'' \left(\frac{\partial u_r''}{\partial z} + \frac{\partial u_z''}{\partial r} \right) \right\rangle}_{PS_{zr}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{Re_\tau} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \langle u_r'' u_z'' \rangle}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \langle u_r'' u_z'' \rangle + \frac{\partial^2 \langle u_r'' u_z'' \rangle}{\partial z^2} \right] \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{VD_{zr}} \\
& - \frac{2}{Re_\tau} \left[\left\langle \frac{\partial u_r''}{\partial r} \frac{\partial u_z''}{\partial r} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_r''}{\partial \varphi} - u_\varphi'' \right) \frac{\partial u_z''}{\partial \varphi} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u_r''}{\partial z} \frac{\partial u_z''}{\partial z} \right\rangle \right] \\
& \underbrace{\hspace{10em}}_{DS_{zr}}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

4.8 Produktion der Feinstrukturenergie

In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, die es erlaubt, die Verhältnisse, die in einer Grobstruktursimulation bezüglich des Energieflusses zwischen den aufgelösten und nichtaufgelösten Längenskalen herrschen, zu analysieren. Für den Fall einer Rohr- und Kanalströmung konnte Härtel [27] nachweisen, daß es in der Übergangsschicht zu einem zeitweiligen Energierückfluß von den kleinsten zu den großen Längenskalen kommt. In dieser Arbeit soll untersucht werden, inwieweit dies auch in der freien Scherschicht der Fall ist.

Bei einer Grobstruktursimulation werden die Strömungsvariablen in einen durch das Gitter aufgelösten Grobstrukturanteil \bar{u}_α und den nicht berechenbaren Feinstrukturanteil u'_α aufgespalten.

$$u_\alpha(z, \varphi, r, t) = \bar{u}_\alpha(z, \varphi, r, t) + u'_\alpha(z, \varphi, r, t) \tag{4.33}$$

Der Arbeit von Härtel [27] folgend, wird \bar{u}_α durch Anwendung des idealen räumlichen Filters, das am einfachsten im Fourierraum dargestellt werden kann, berechnet:

$$\hat{G}(k_\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für } |k_\varphi| \leq K_\varphi^c = \pi/(r\Delta\varphi) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.34}$$

In Gleichung 4.34 wird durch k_φ eine Grenzwellenzahl beschrieben. Kleinere Wellenzahlen $k < k_\varphi$ werden vom Filter durchgelassen, während größere Wellenzahlen $k > k_\varphi$ unterdrückt werden. Die Anwendung dieses Filters auf die fouriertransformierten Geschwindigkeitskomponenten ergibt deren gefilterte Werte:

$$\hat{\bar{u}}_\alpha(z, k_\varphi, r, t) = \hat{G}(k_\varphi) \cdot \hat{u}_\alpha(z, k_\varphi, r, t). \tag{4.35}$$

Nach Rücktransformation in den physikalischen Raum, ermöglicht Gleichung 4.33 die Berechnung der Feinstrukturkomponente u'_α .

Aus ihr ergibt sich der deviatorische Anteil der Feinstrukturspannungen $\tau_{\alpha\beta}$, der sich mit Hilfe der Einsteinschen Summationskonvention folgendermaßen darstellen läßt:

$$\tau_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3} q_{kk} \delta_{ij}, \tag{4.36}$$

$$q_{ij} = \overline{u'_i u'_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j} \quad (4.37)$$

Das tensorielle Produkt von τ_{ij} mit dem gefilterten Deformationstensor \bar{s}_{ij} beschreibt die Produktion der Feinstrukturenergie oder, anders ausgedrückt, den Energiefluß zwischen turbulenter Grobstruktur und Feinstruktur. Der so ermittelte Term entspricht formal den in 4.29 bis 4.31 dargestellten Produktionstermen in den Bilanzgleichungen der Elemente der Reynoldsschen Spannungstensors. Wie von Härtel [27] vorgeschlagen, wird das statistische Verhalten dieses Termes diskutiert. Die Aufspaltung in Mittelwert und Reynoldsschen Schwankungswert führt zu:

$$\langle \tau_{ij} \bar{s}_{ij} \rangle = \langle \tau_{ij} \rangle \langle \bar{s}_{ij} \rangle + \langle \tau''_{ij} \bar{s}''_{ij} \rangle. \quad (4.38)$$

In Gleichung 4.38 stellen die zwei Terme der rechten Seite die Produktion durch mittlere und durch fluktuierende Scherraten dar.

5 DNS bei vollentwickelter Zuströmung

5.1 Zeitliche Entwicklung und statistische Mittelung

Wie in Kapitel 3.5 beschrieben, wurde die DNS der Strömung durch die Rohrerweiterung mit dem konstant belegten Anfangsfeld gestartet. Dementsprechend zeigt der zeitliche Verlauf der in Umfangsrichtung gemittelten turbulenten kinetischen Energie in Abbildung 5.1 zu Beginn verschwindende Werte, die kurz darauf stark ansteigen. Bereits nach $t = 0.5$ Problemzeiten weist diese Größe nahe des Austrittsquerschnitts $(z, r) = (3.4, 0.565)$ fluktuierende Werte auf. Wie in Kapitel 4 erwähnt, wird der Beitrag, den die räumliche Mittelung zum statistischen Mittelwert leistet, zur Rohrachse hin immer kleiner. Dies spiegelt sich auch in den vergleichsweise großen Amplituden an den Stellen nahe der Rohrachse in Abbildung 5.1 wider.

Zwischen der Simulationszeit $t = 6$ und $t = 62.25$ wurde das dreidimensionale Strömungsfeld alle $\Delta t = 0.05$ Problemzeiten abgespeichert. Die daraus resultierende Datenbank umfaßt 1050 zeitliche Stichproben. Inwieweit diese Strömungsfelder statistische Abhängigkeiten aufweisen, kann durch Auswertung der zeitlichen Korrelationsfunktionen überprüft werden. Hierzu wurden an den vier Positionen $P_1: (z, r) = (0.06, 0.487)$ (wandnahe Stelle im Bereich der Zuströmung), $P_2: (z, r) = (1.50, 0.487)$ (an der Stufenkante), $P_3: (z, r) = (2.32, 0.586)$ (wandnaher Wiederanlegebereich) und $P_4: (z, r) = (1.50, 0.01)$ (nahe der Rohrachse) entlang der φ -Koordinate N_φ Zeitreihen dieser lokalen Geschwindigkeitsvektoren über einen Zeitraum $\Delta t = 8$ abgespeichert. Mit dem Zeitschritt $\Delta t = 2 \cdot 10^{-4}$ liegen damit 40000 zeitliche und N_φ räumliche Stichproben vor.

Die Abbildungen 5.2 bis 5.5 zeigen die zeitlichen Korrelationsfunktionen der fluktuierenden Geschwindigkeitsfelder an den Stellen P_1 , P_2 , P_3 und P_4 . Die Korrelation der fluktuierenden Längsgeschwindigkeit zeigt bei $\Delta_t = 0.05$ an den Positionen P_1 , P_2 und P_3 noch deutlich positive Werte, während die der azimuthalen und radialen Komponente weitestgehend auf Null abgeklungen sind. Aufgrund der nahezu wirkungslosen räumlichen Mittelung bei P_4 weisen die in Abbildung 5.5 dargestellten Korrelationsfunktionen noch keine stabile Statistik auf. Dennoch wird deutlich, daß die Strömungsfelder innerhalb von $\Delta_t = 0.05$ keine relevanten Korrelationen aufweisen. Damit sind die durch das Zeitintervall $\Delta t = 0.05$ getrennten Stichproben in dem Bereich statistisch unabhängig, in dem die räumliche Mittelung nicht zur Verbesserung der Statistik beiträgt.

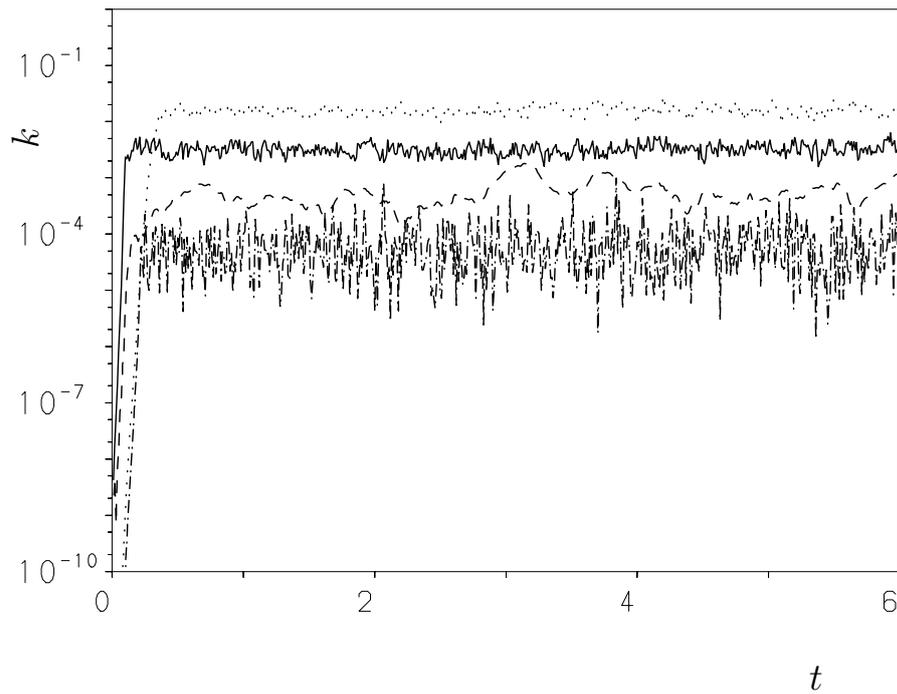


ABBILDUNG 5.1: Zeitliche Entwicklung der in Umfangsrichtung gemittelten turbulenten kinetischen Energie k an vier Positionen. Linien: (———): $(z, r) = (1.54, 0.347)$, (- - - -): $(z, r) = (1.54, 0.565)$, (- · - · - ·): $(z, r) = (3.4, 0.013)$, (· · · · ·): $(z, r) = (3.4, 0.565)$.

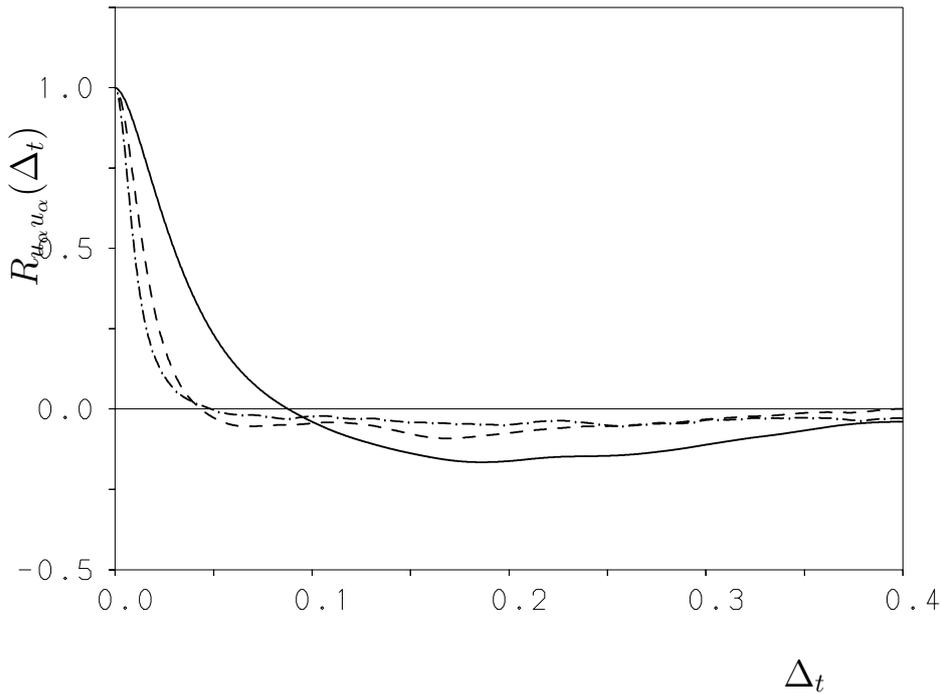


ABBILDUNG 5.2: Zeitliche Korrelationsfunktion der drei Geschwindigkeitskomponenten berechnet aus Zeitreihen der Position $P_1: (z, r) = (0.06, 0.487)$. Linien: $R_{u_z u_z}(\Delta t)$: (———), $R_{u_\varphi u_\varphi}(\Delta t)$: (- - - -), $R_{u_r u_r}(\Delta t)$: (- · - · - ·) .

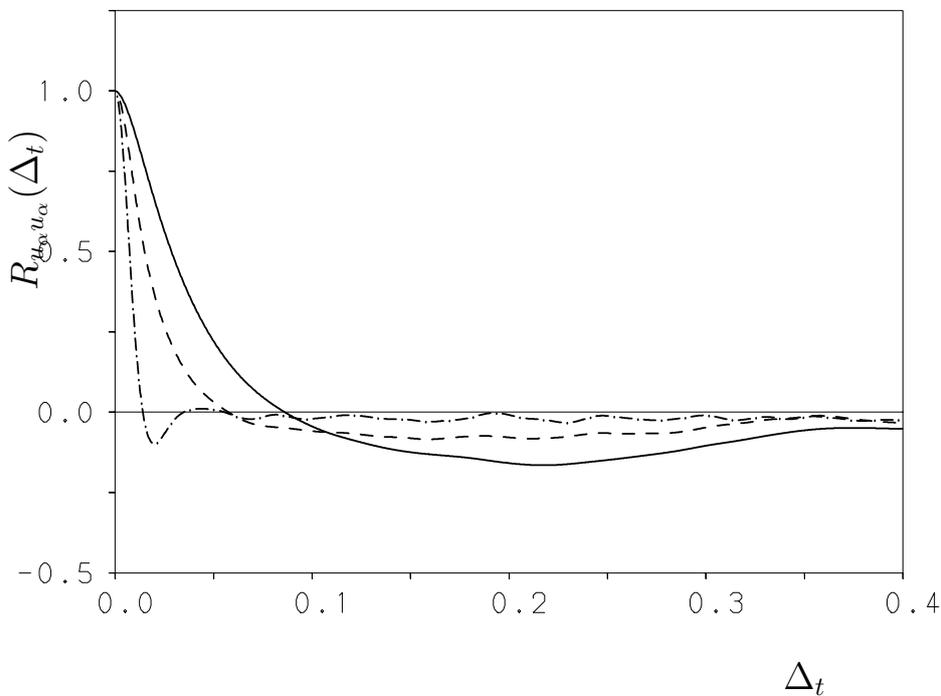


ABBILDUNG 5.3: Zeitliche Korrelationsfunktion der drei Geschwindigkeitskomponenten berechnet aus Zeitreihen der Position $P_2: (z, r) = (1.5, 0.487)$. Linien: $R_{u_z u_z}(\Delta t)$: (———), $R_{u_\varphi u_\varphi}(\Delta t)$: (- - - -), $R_{u_r u_r}(\Delta t)$: (- · - · - ·) .

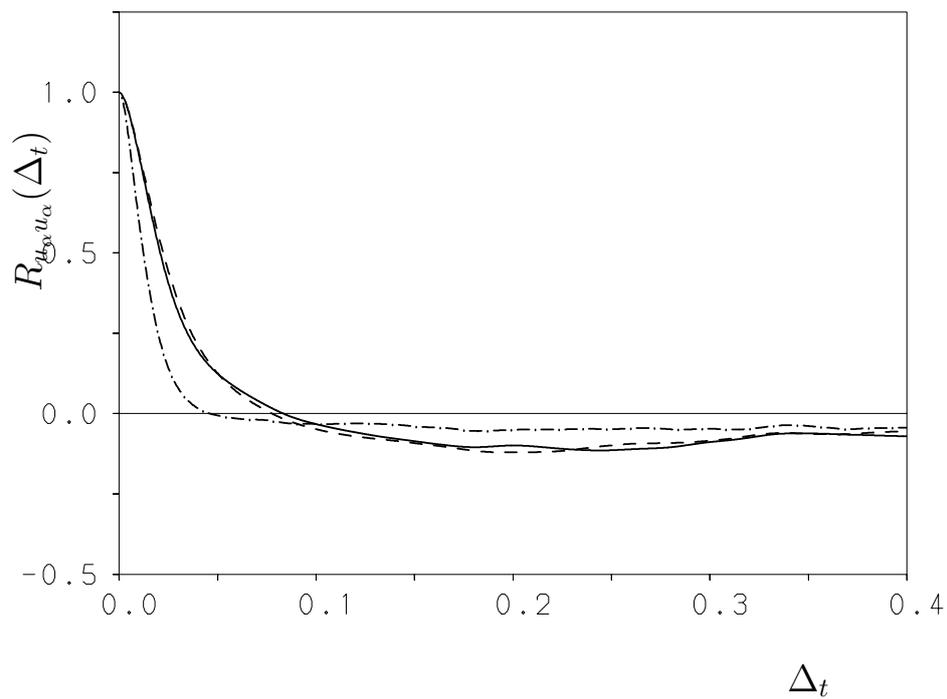


ABBILDUNG 5.4: Zeitliche Korrelationsfunktion der drei Geschwindigkeitskomponenten berechnet aus Zeitreihen der Position P_3 : $(z, r) = (2.32, 0.586)$. Linien: $R_{u_z u_z}(\Delta t)$: (———), $R_{u_\varphi u_\varphi}(\Delta t)$: (- - - -), $R_{u_r u_r}(\Delta t)$: (- · - · - ·) .

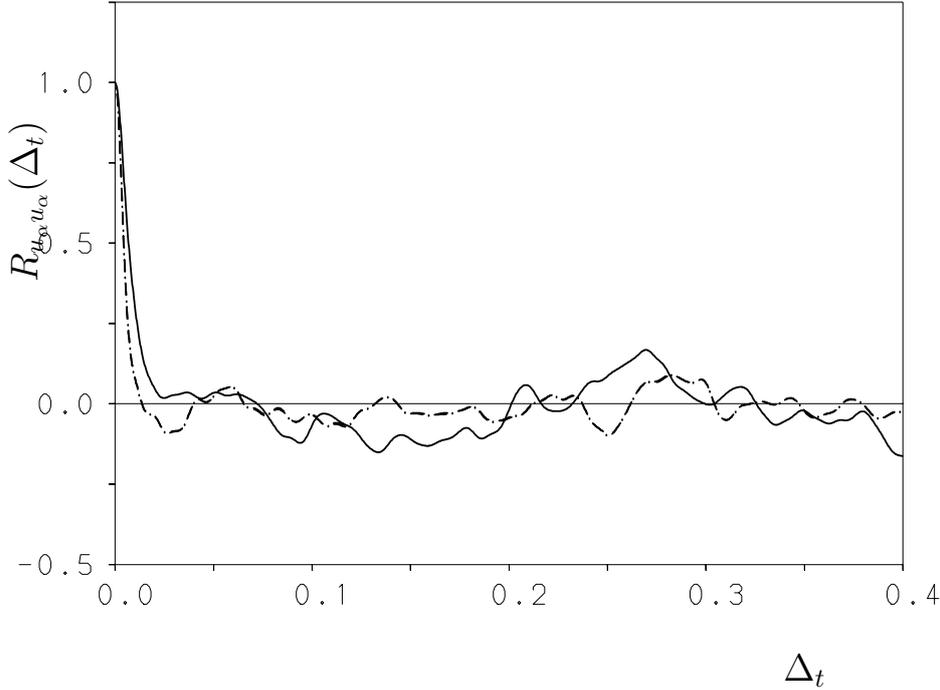


ABBILDUNG 5.5: Zeitliche Korrelationsfunktion der drei Geschwindigkeitskomponenten berechnet aus Zeitreihen der Position P_4 : $(z, r) = (1.5, 0.01)$. Linien: $R_{u_z u_z}(\Delta_t)$: (———), $R_{u_\varphi u_\varphi}(\Delta_t)$: (- - - - -), $R_{u_r u_r}(\Delta_t)$: (- · - · - ·) .

5.2 Häufigkeitsverteilungen

Häufigkeitsverteilungen beinhalten die gesamte aus statistischer Sicht interessante Information eines fluktuierenden Strömungsfeldes. Durch Momentenbildung können daraus die Turbulenzintensitäten, die Werte der Schiefe und des Flachheitsgrades berechnet werden. Sie werden hier der Diskussion der statistischen Größen vorangestellt, da die Form dieser Verteilungen zu einem besseren Verständnis der Schiefe und des Flachheitsgrade beiträgt.

Repräsentativ für den Bereich der Innenströmung $r/D = 0.1$ zeigen die Abbildungen 5.6 bis 5.8 die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen (PDD) der Geschwindigkeitskomponenten an den Positionen $(z/D = (0.08, 1.84, 2.23, 2.42))$. Bei nahezu unveränderter Form, gibt die Verschiebung der PDD der Längsgeschwindigkeit, die Verzögerung der Strömung stromab der Querschnittserweiterung wieder. An denselben Orten sind die azimuthale und radiale Geschwindigkeitskomponente praktisch normalverteilt und zeigen stromab nur unwesentliche Änderungen.

In unmittelbarer Wandnähe $r/D = 0.487$ ($y^+ = 5$) der Zuströmung wird die Schwankungsbewegung sämtlicher Geschwindigkeitskomponenten stark gedämpft, siehe Abbildung 5.9 bis 5.11. Am deutlichsten wird dies in der radialen Komponente (Abbildung 5.11), deren Verteilungsfunktion bei $z/D = 0.08$ fast nur noch Fluktuationen nahe Null aufweist. Die negativen

Fluktuationen der Längsgeschwindigkeitskomponente zeigen einen stärkeren Wanddämpfungseinfluß als die positiven, die vom Kernbereich der Strömung ständig mit schnellem Fluid versorgt werden. Hieraus resultiert die in Abbildung 5.9 veranschaulichte unsymmetrische Häufigkeitsverteilung der Axialgeschwindigkeit. In sämtlichen Geschwindigkeitskomponenten können sich stromab der Stufenkante starke Fluktuationen ausbilden. Die Verteilungsfunktionen besitzen mit zunehmendem z/D einen flacheren Verlauf.

Im Gegensatz zum wandnahen Zuströmbereich weisen die in Abbildung 5.12 bis 5.14 dargestellten Häufigkeitsverteilungen entlang der Wand des erweiterten Querschnittes größere Fluktuationen auf. Dies ist insofern überraschend, als die mittlere Strömung im Rezirkulationsgebiet impulsärmer ist als die ankommende Strömung.

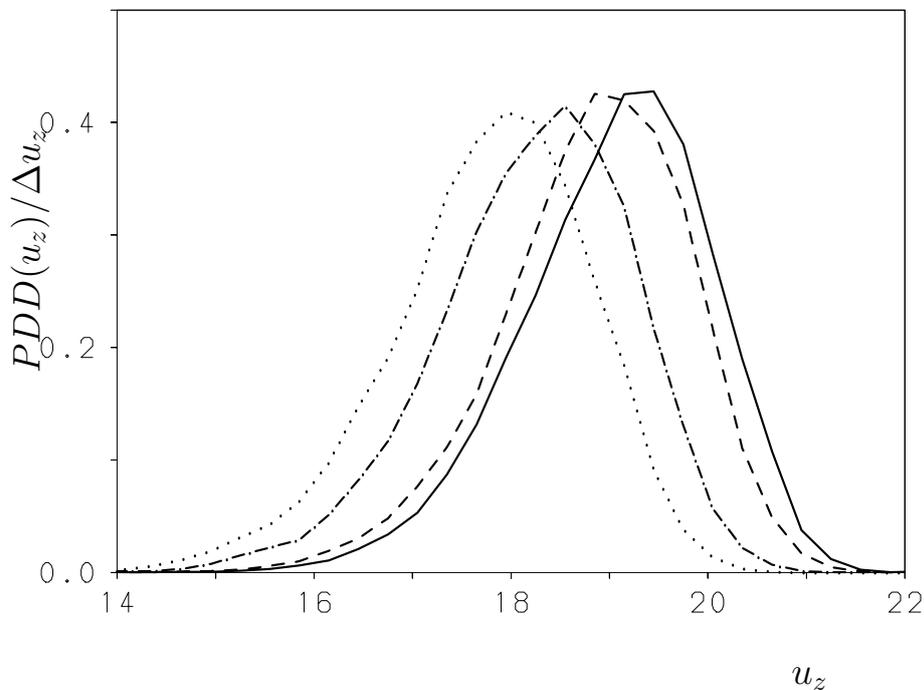


ABBILDUNG 5.6: Häufigkeitsverteilung der Längsgeschwindigkeit an vier axialen Positionen für $r/D = 0.1$, $\Delta u_z = 0.3$. Linien: (———): $z/D = 0.08$, (- - - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

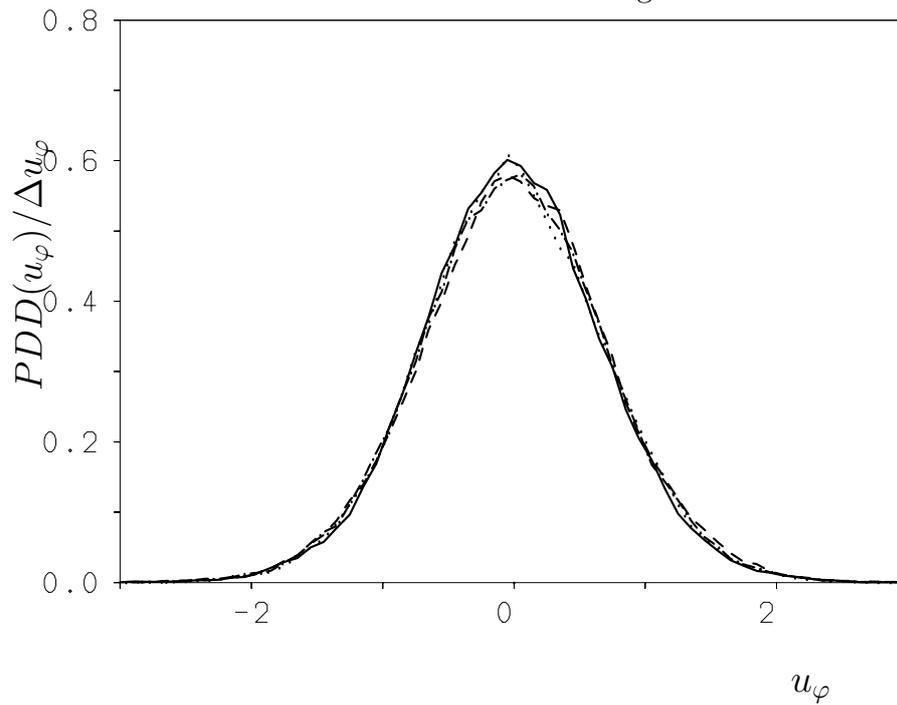


ABBILDUNG 5.7: Häufigkeitsverteilung der Umfangsgeschwindigkeit an vier axialen Positionen für $r/D = 0.1$, $\Delta u_\varphi = 0.1$. Linien: (—): $z/D = 0.08$, (- - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

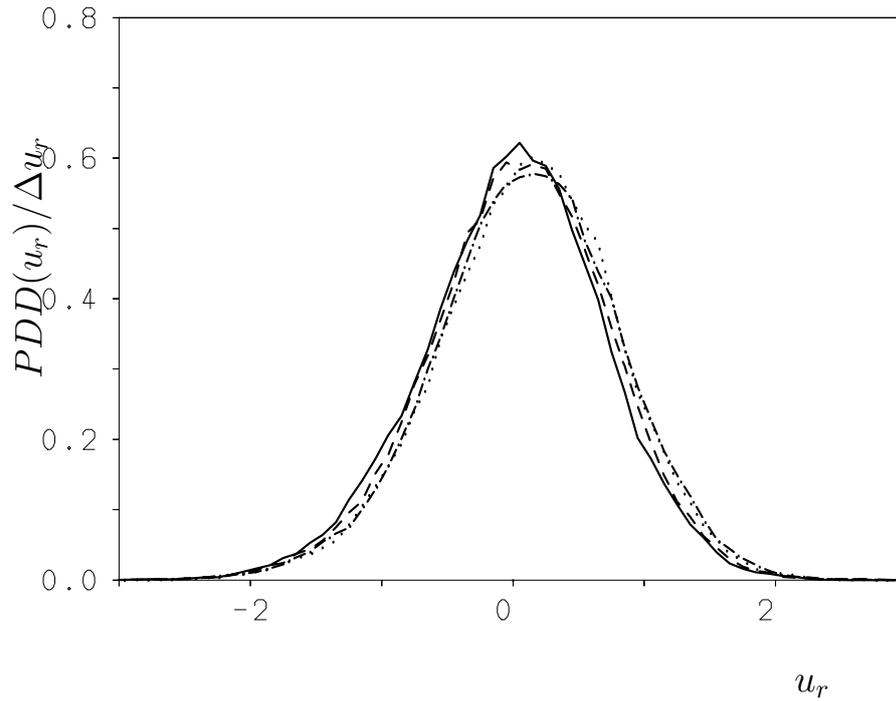


ABBILDUNG 5.8: Häufigkeitsverteilung der Radialgeschwindigkeit an vier axialen Positionen für $r/D = 0.1$, $\Delta u_r = 0.1$. Linien: (———): $z/D = 0.08$, (- - - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

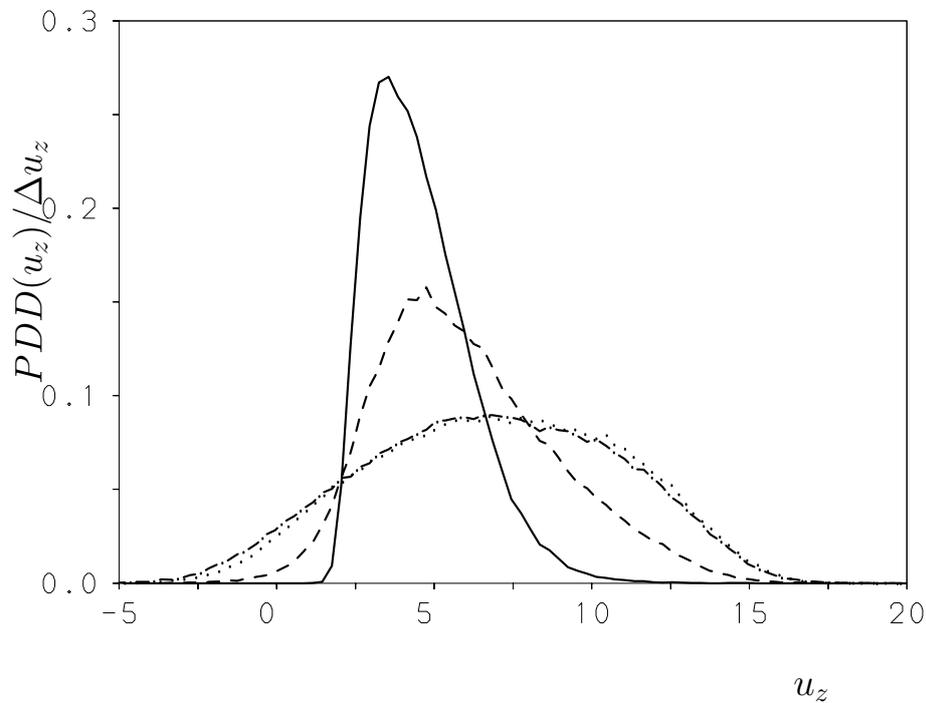


ABBILDUNG 5.9: Häufigkeitsverteilung der Längsgeschwindigkeit an vier axialen Positionen für $r/D = 0.487$, $\Delta u_z = 0.3$. Linien: (———): $z/D = 0.08$, (- - - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

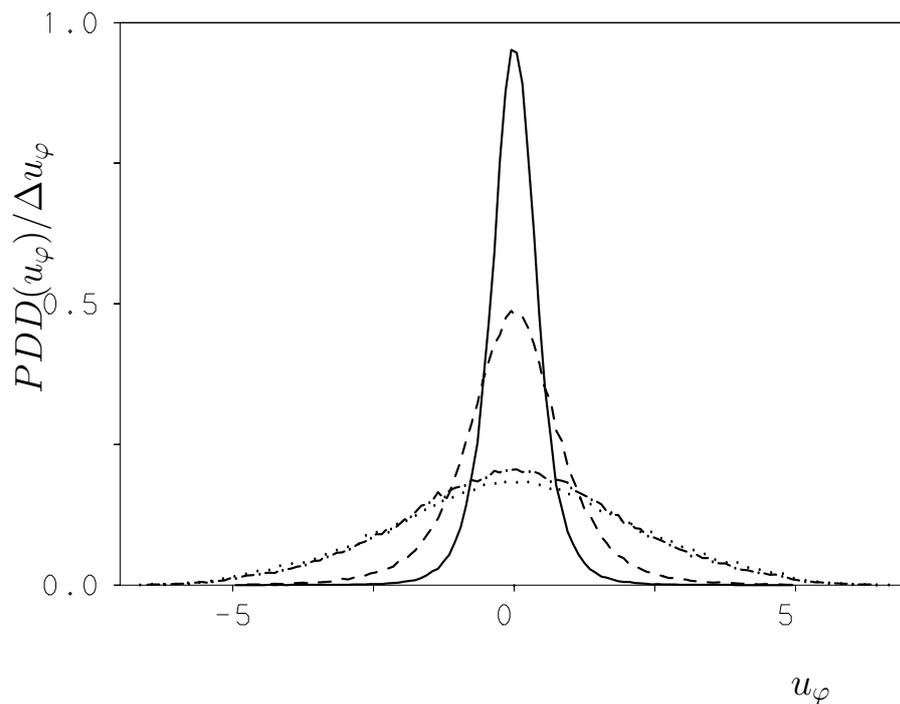


ABBILDUNG 5.10: Häufigkeitsverteilung der Umfangsgeschwindigkeit an vier axialen Positionen für $r/D = 0.487$, $\Delta u_\varphi = 0.1$: (—): $z/D = 0.08$, (- - - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

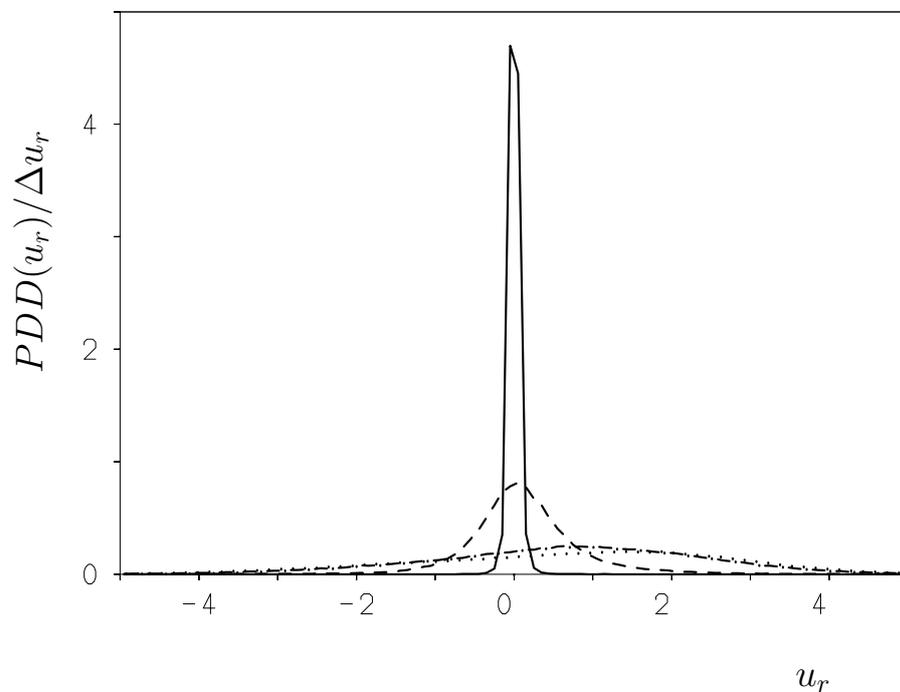


ABBILDUNG 5.11: Häufigkeitsverteilung der Radialgeschwindigkeit an vier axialen Positionen für $r/D = 0.487$, $\Delta u_r = 0.1$: (—): $z/D = 0.08$, (- - - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

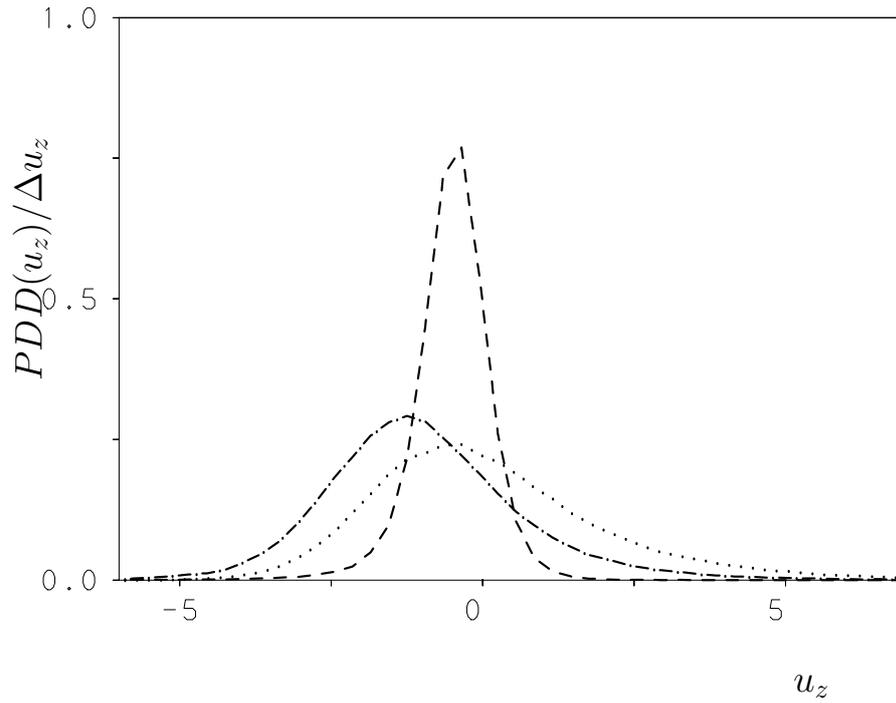


ABBILDUNG 5.12: Häufigkeitsverteilung der Längsgeschwindigkeit an drei axialen Positionen für $r/D = 0.586$, $\Delta u_z = 0.3$: (- - - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

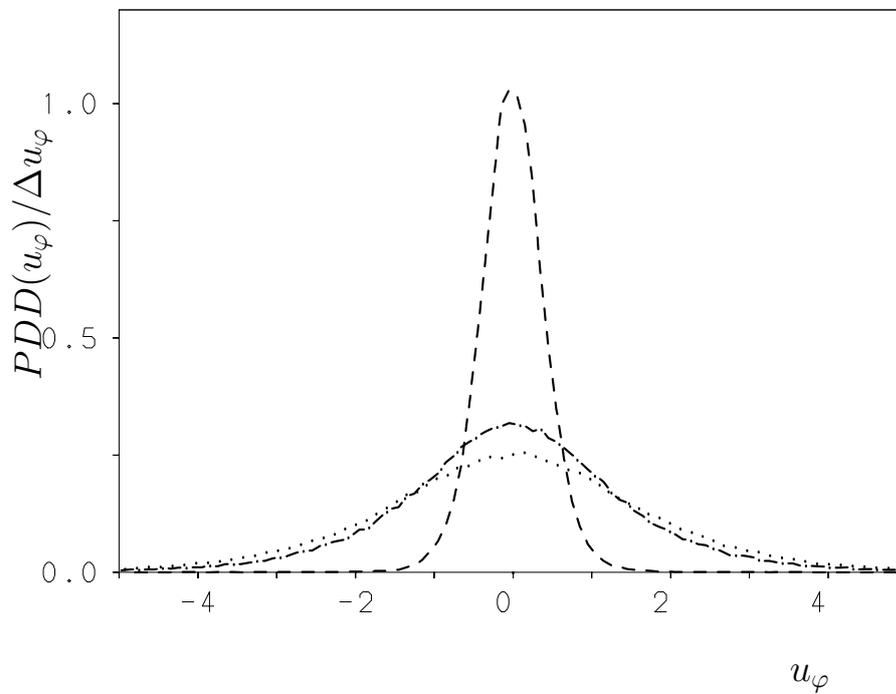


ABBILDUNG 5.13: Häufigkeitsverteilung der Umfangsgeschwindigkeit an drei axialen Positionen für $r/D = 0.586$, $\Delta u_\varphi = 0.1$: (- - - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

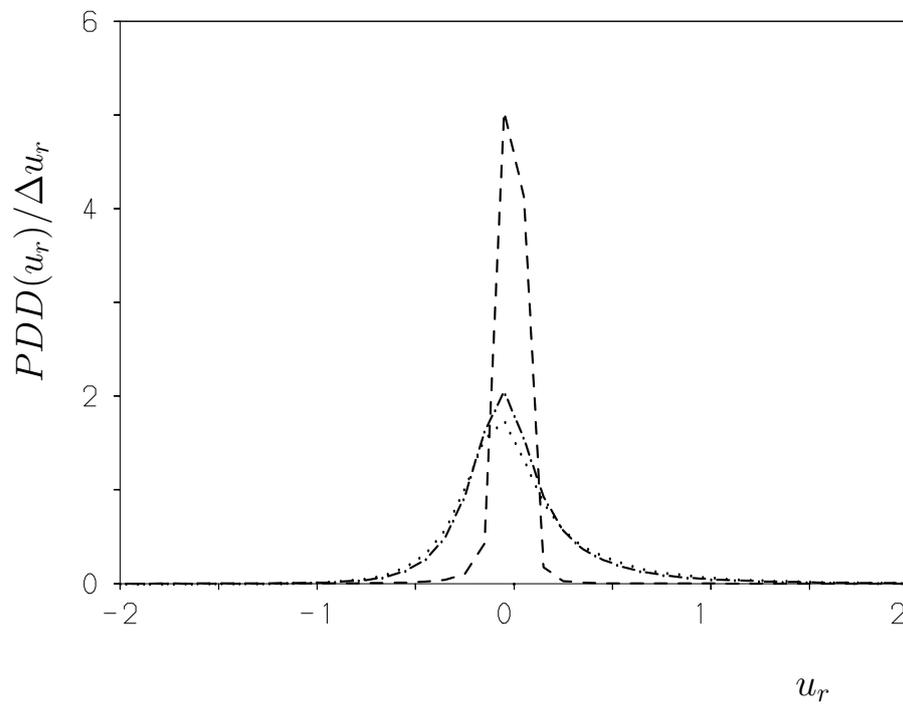


ABBILDUNG 5.14: Häufigkeitsverteilung der Radialgeschwindigkeit an drei axialen Positionen für $r/D = 0.586$, $\Delta u_r = 0.1$: (- - - -): $z/D = 1.84$, (- · - · - ·): $z/D = 2.23$, (· · · · ·): $z/D = 2.42$.

5.3 Mittleres Strömungsfeld

Das statistisch gemittelte Strömungsfeld ist axialsymmetrisch. Der gemittelte Geschwindigkeitsvektor besitzt daher mit $\langle u_z \rangle$ und $\langle u_r \rangle$ zwei nichtverschwindende Komponenten. Zur Veranschaulichung des gesamten Strömungsfeldes wurden in Abbildung 5.15 die Höhenlinien der mittleren Geschwindigkeitsfelder und der des Drucks an der Rohrachse gespiegelt. Die punktierte Linie beschreibt Orte verschwindender mittlerer Axialgeschwindigkeit. Ausgehend von der Stufenkante führt diese Linie zum Wiederanlegepunkt und trennt damit die Rückströmung von der Vorwärtsströmung. Die über den Abstand zwischen der Stufenwand und dem mittleren Wiederanlegepunkt definierte Wiederanlegelänge beträgt 10.2 Stufenhöhen. Dieser Wert stimmt mit dem von Stieglmeier et al. [62] und Nitsche et al. [44] gemessenen Wert von $Z_r/h \approx 10$ gut überein. Im Bereich der vollentwickelt turbulenten Zuströmung verschwindet die Radialkomponente des mittleren Geschwindigkeitsvektors. In der Nähe des Ausströmquerschnittes weist sie dagegen positive Werte auf. Offensichtlich ist an dieser Stelle noch kein vollentwickelter Zustand erreicht. Die stromab der Einströmung abnehmenden Werte des mittleren Drucks in Abbildung 5.15 zeigen an, daß ein Druckgradient die Strömung durch das Rohr treibt. Da nach der Erweiterung bei gleichem Volumenstrom eine Verzögerung der Strömung eintritt, stellt sich in diesem Bereich ein positiver mittlerer Druckgradient ein.

Für die vier Positionen $z/D = (0.08, 1.84, 2.23, 2.42)$ zeigen die Abbildungen 5.16 und 5.17 die Profile der mittleren axialen und radialen Geschwindigkeitskomponenten. Darüberhinaus werden in Abb. 5.18 die Profile des mittleren Druckes veranschaulicht. Die Stelle $z/D = 0.08$ liegt im Bereich der vollentwickelt turbulenten Zuströmung. Wie bei Unger [67] stimmen die LDA-Meßdaten von Westerweel et al. [73] gut mit dem Verlauf der mittleren axialen Geschwindigkeitskomponente überein. Das Profil die mittleren Druckes verläuft bis auf den wandnahen Bereich, in dem sich ein Maximum ausbildet, nahezu konstant.

Stromab der Stufenkante wird eine immer stärkere mittlere Strömung in radialer Richtung beobachtet. Die negative Geschwindigkeitskomponente $\langle u_r \rangle$ bewirkt an der Stelle $z/D = 1.84$ im Bereich $0.48 < r < 0.50$ eine Beschleunigung der Strömung in axialer Richtung. Im Gegensatz zu vollentwickelter Strömung bildet das dem negativen Druckgradienten entsprechende Profil mit negativen Druckwerten in der freien Scherschicht ein Minimum aus.

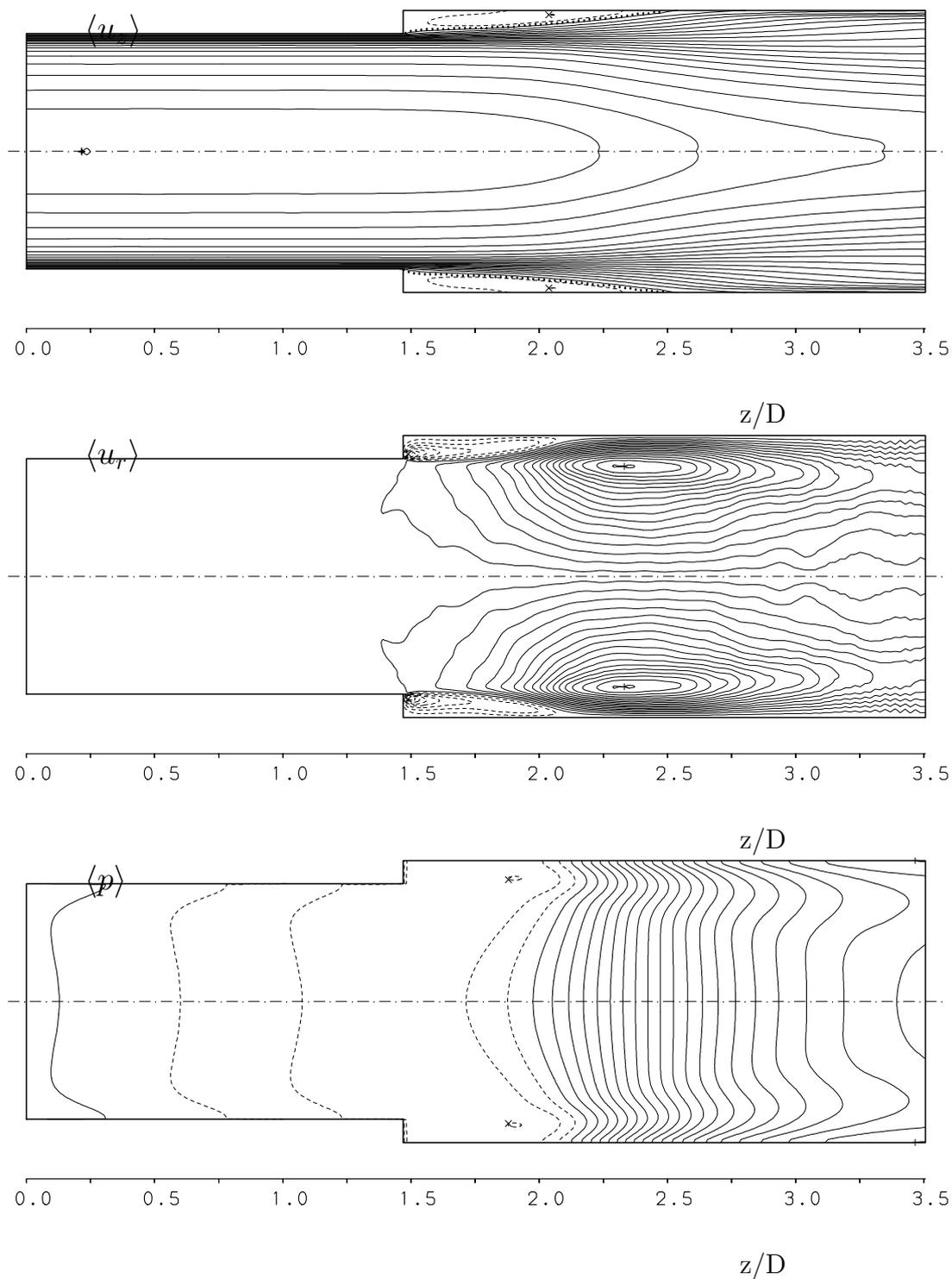


ABBILDUNG 5.15: Mittlere axiale und radiale Geschwindigkeitskomponente und mittlerer Druck, dargestellt durch Höhenlinien. Die strichlierte Linie verbindet Punkte verschwindender mittlerer Axialgeschwindigkeit. Wertebereich: $-1.35 < \langle u_z \rangle < 19.3$, $-0.279 < \langle u_r \rangle < 0.721$, $-4.62 < \langle p \rangle < 38.0$. Durchgezogene/gestrichelte Linien symbolisieren positive/negative Werte.

Etwas weiter stromab bei $z/D = 2.23$, hat sich der Bereich der Rückströmung so verkleinert, daß er in der Nähe des Wiederanlegepunktes, bei $z/D = 2.5$, ganz verschwindet. Über den gesamten Radius bildet sich ferner eine positive mittlere Radialgeschwindigkeitskomponente aus. Die Innenströmung erfährt eine, dem positiven Druckgradienten entsprechende, Verzögerung in Längsrichtung, während in der Scherschicht Beschleunigungs- und Verzögerungseffekte die Dynamik der Strömung bestimmen. Bei wieder anwachsendem mittleren Druckgradienten werden in der wiederanlegende Scherschicht deutlich ausgebildete Minima in den Profilen des mittleren Druckes erkennbar, die ebenfalls die Beschleunigungseffekte in der wiederanlegenden Scherschicht wiedergeben.

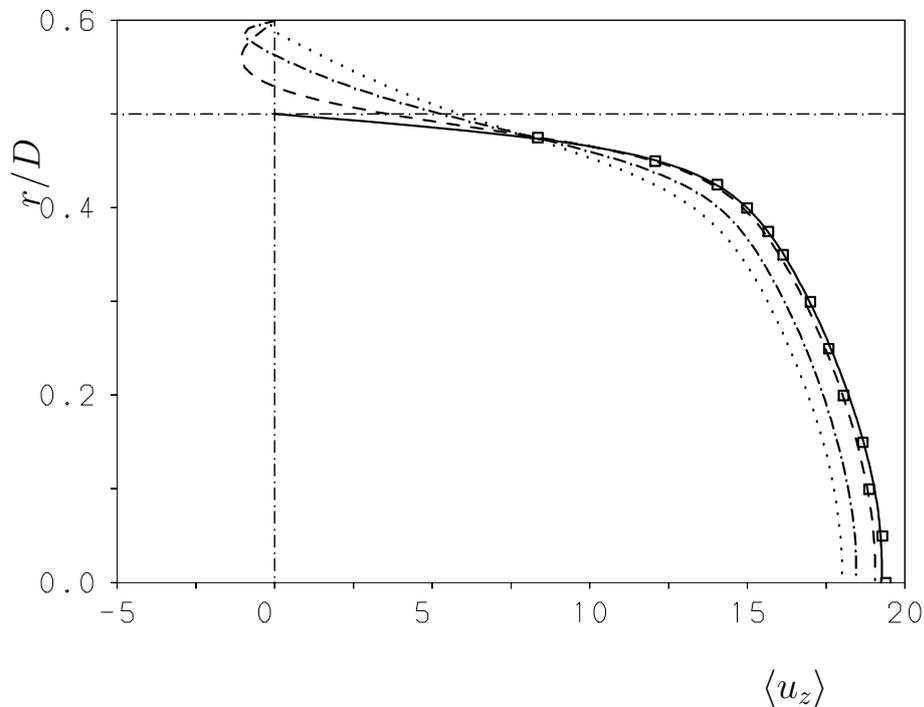


ABBILDUNG 5.16: Räumliche Entwicklung der mittleren axialen Geschwindigkeitsprofile. Linien: $z/D = 0.08$: (———), $z/D = 1.84$: (- - - -), $z/D = 2.23$: (- · - · - ·), $z/D = 2.42$: (· · · · ·), Rohr-LDA Westerweel et al. [73]: (□).

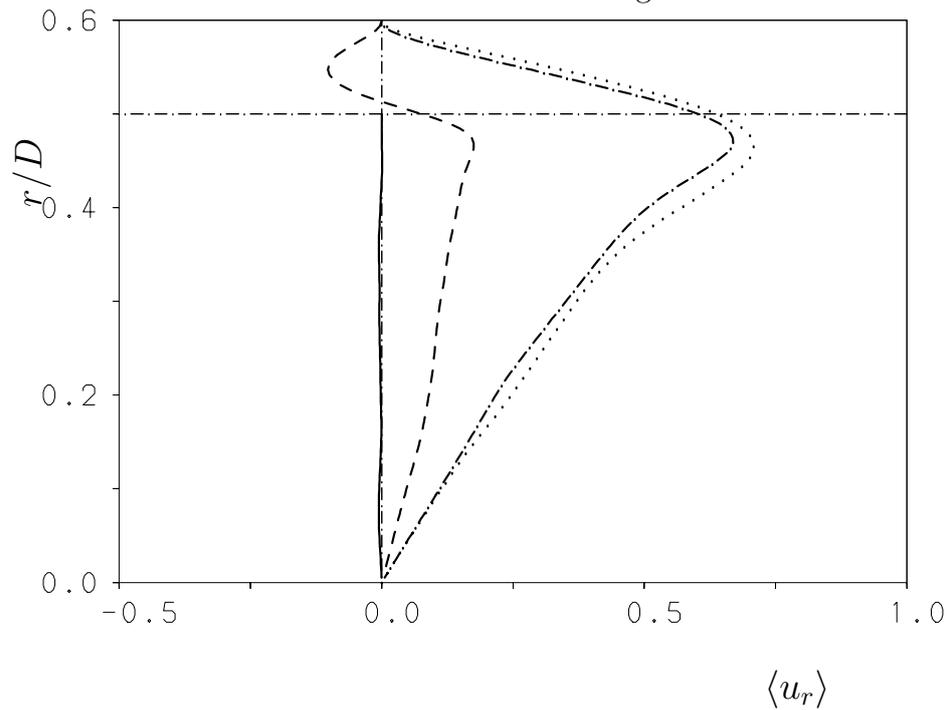


ABBILDUNG 5.17: Räumliche Entwicklung der mittleren radialen Geschwindigkeitsprofile. Linien: $z/D = 0.08$: (———), $z/D = 1.84$: (- - - -), $z/D = 2.23$: (- · - · - ·), $z/D = 2.42$: (· · · · ·).

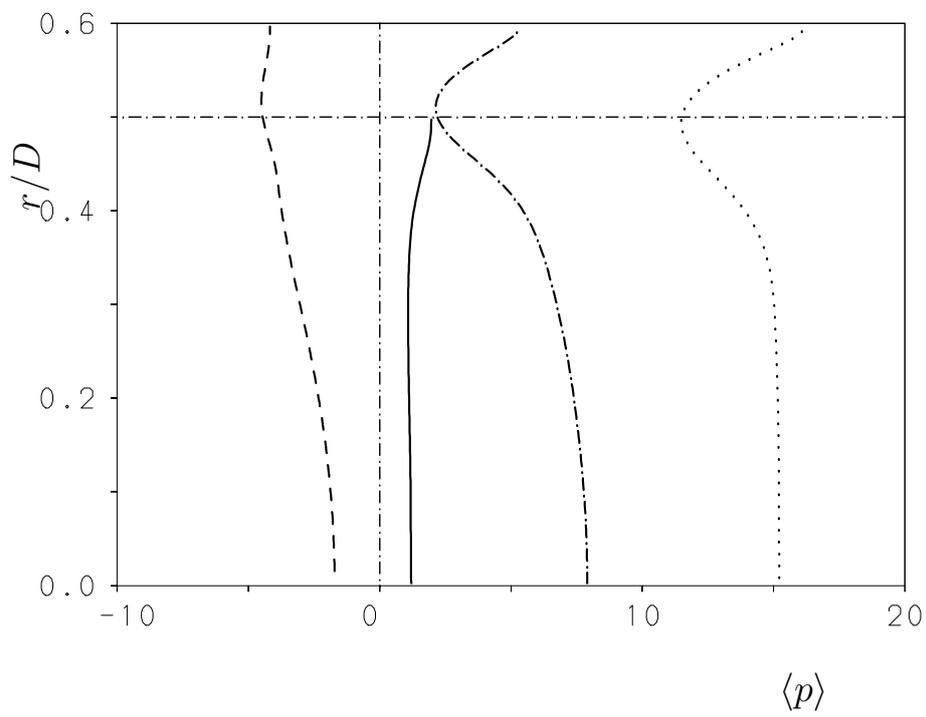


ABBILDUNG 5.18: Räumliche Entwicklung der mittleren Druckprofile. Linien: $z/D = 0.08$: (———), $z/D = 1.84$: (- - - -), $z/D = 2.23$: (- · - · - ·), $z/D = 2.42$: (· · · · ·).

5.4 Turbulenzintensitäten

Die Abbildungen 5.19 bis 5.20 enthalten Höhenliniendiagramme der vier von Null verschiedenen Elemente des Reynoldsschen Spannungstensors, der turbulenten kinetischen Energie und der Dissipationsrate. Wie in Kapitel 5.3 wurden die axialsymmetrischen Felder für diese Darstellungen an der Rohrachse gespiegelt. Im Bereich der vollentwickelten Zuströmung weist die Intensität der axialen Geschwindigkeitskomponente und die turbulente kinetische Energie in Wandnähe hohe Gradienten auf. Kurz vor der Stufenkante bei $z/D = 1.35$ wird in den Höhenlinien der Einfluß der Rohrerweiterung deutlich. Wie in der mittleren Radialgeschwindigkeit werden in der Nähe des Ausströmquerschnittes Störungen beobachtet. Sie sind eine Folge der verwendeten Ausströmrandbedingungen, jedoch ohne Einfluß auf die Vorgänge in der Rezirkulationszone und im Wiederanlegebereich.

Die Stellen maximaler Intensitäten und Reynoldsschen Schubspannung $\langle u''_z u''_r \rangle$ treten innerhalb der freien Scherschicht auf, unterscheiden sich aber deutlich in ihrer axialen Position. Dies weist auf die Existenz von komplizierten dynamischen Prozessen in dieser Strömung hin und zeigt, daß die Schwankungsbewegung jeder Geschwindigkeitskomponente ihren eigenen Gesetzen folgt. Da die Turbulenz-Intensitäten im (k, ε) -Turbulenzmodell über die Wirbelstärkeviskosität parametrisiert werden, können diese Maxima nicht richtig vorhergesagt werden.

Der Vollständigkeit halber werden den Höhenlinien der turbulenten kinetischen Energie in Abbildung 5.20 die der Dissipationsrate $\varepsilon = 2s''_{ij}s''_{ij}/Re_\tau$ gegenübergestellt. Obwohl die Höhenlinien dieser beide Größen im wandfernen Bereich qualitativ übereinstimmen, treten die Maxima an unterschiedlichen Stellen auf. Das Anwachsen der turbulenten Aktivität in der Scherschicht führt zu dem Maximum in der turbulenten kinetischen Energie, welches ca. 2 Stufenhöhen stromauf des Wiederanlegepunktes auftritt. Dagegen verursacht der Wiederanlegevorgang nahe der Wand höchste Dissipationsraten von $\varepsilon = 325$, die die der turbulenten Rohrströmung $\varepsilon_{Rohr,max} \approx 60$ um mehr als das fünffache übersteigen.

Für eine quantitative Diskussion werden in Abbildung 5.21 bis 5.24 die Standardabweichungen der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten und die Reynoldssche Schubspannung an den vier axialen Positionen $z/D = (0.08, 1.84, 2.23, 2.42)$ verglichen. Da sich die turbulente kinetische Energie aus der Summe der Turbulenz-Intensitäten ergibt, wird auf die entsprechende Darstellung dieser Größe, als auch auf die der Dissipationsrate, verzichtet.

Das *rms*-Profil der Längsgeschwindigkeitskomponente $u_{z,rms}$ stimmt an der Stelle $z/D = 0.08$ gut mit dem von Westerweel et al. [73] in der turbulenten Rohrströmung gemessenen Profil überein. Hieraus folgt, daß der Prozeß zur Generierung von Einströmrandbedingungen den Strömungszustand einer vollentwickelten turbulenten Rohrströmung erfolgreich auf die Einströmebene überträgt. Auch die Intensitäten der azimuthalen und radialen Geschwindigkeits-

komponente, sowie die Reynoldssche Schubspannung $\langle u''_z u''_r \rangle$ entsprechen bei $z/D = 0.08$ den Verläufen, die Unger [67] mit einer DNS der Rohrströmung ermittelt. Typisch ist der kleine Gradient der Intensität der radialen Geschwindigkeitskomponente in Wandnähe ($r/D = 0.5$).

Mit wachsendem Abstand von der Stufenkante erfährt die turbulente Schwankungsbewegung an den Stellen $z/D = 1.84, 2.23$ und 2.42 eine kontinuierliche Verstärkung. Mit einem im Vergleich zur Zuströmung 4fachen maximalen *rms*-Wert wird die Intensität der radialen Geschwindigkeitskomponente am stärksten angefacht, während die der axialen Komponente die geringste Verstärkung aufweist. Dies kann als Hinweis darauf gewertet werden, daß die Undurchlässigkeitsbedingung wesentlich stärker dämpfend wirkt als die Haftbedingung. Obwohl keine mittlere Strömung in Umfangsrichtung existiert, nimmt das Profil dieser Komponente maximale Werte an, die denen der axialen Geschwindigkeitskomponente in der vollentwickelten Zuströmung gleichkommen.

Die turbulente Schwankungsbewegung der Kernströmung verändert sich kaum. In einem Bereich $0 < r/D < 0.2$ nahe der Rohrachse weisen sämtliche Intensitäten nahezu deckungsgleiche Verläufe auf.

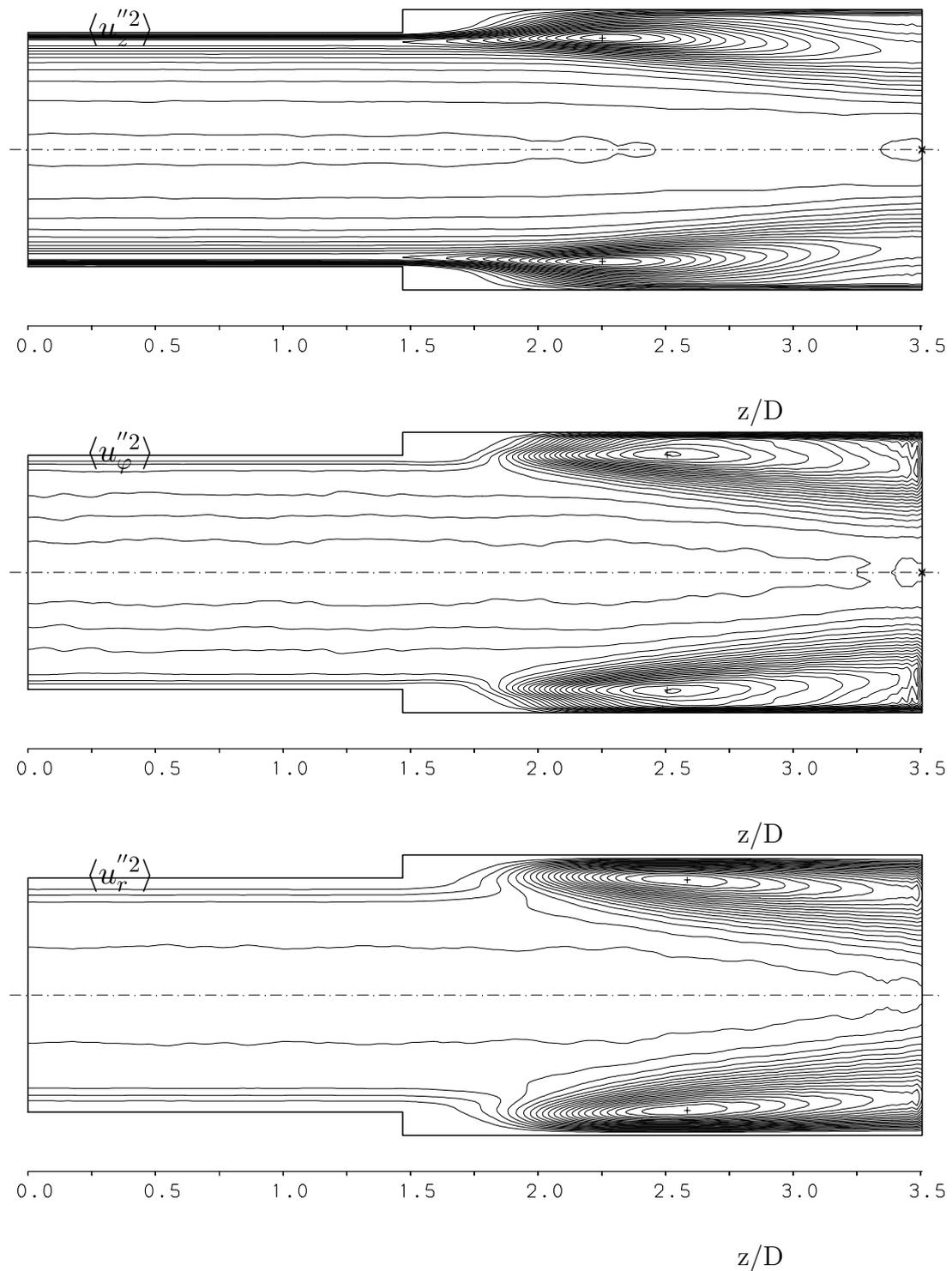


ABBILDUNG 5.19: Intensitäten der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten, dargestellt durch Höhenlinien. Wertebereich: $0.816 < \langle u_z''^2 \rangle < 16.20$, $0.537 < \langle u_\varphi''^2 \rangle < 5.74$, $0.000 < \langle u_r''^2 \rangle < 4.35$. Durchgezogene Linien symbolisieren positive Werte.

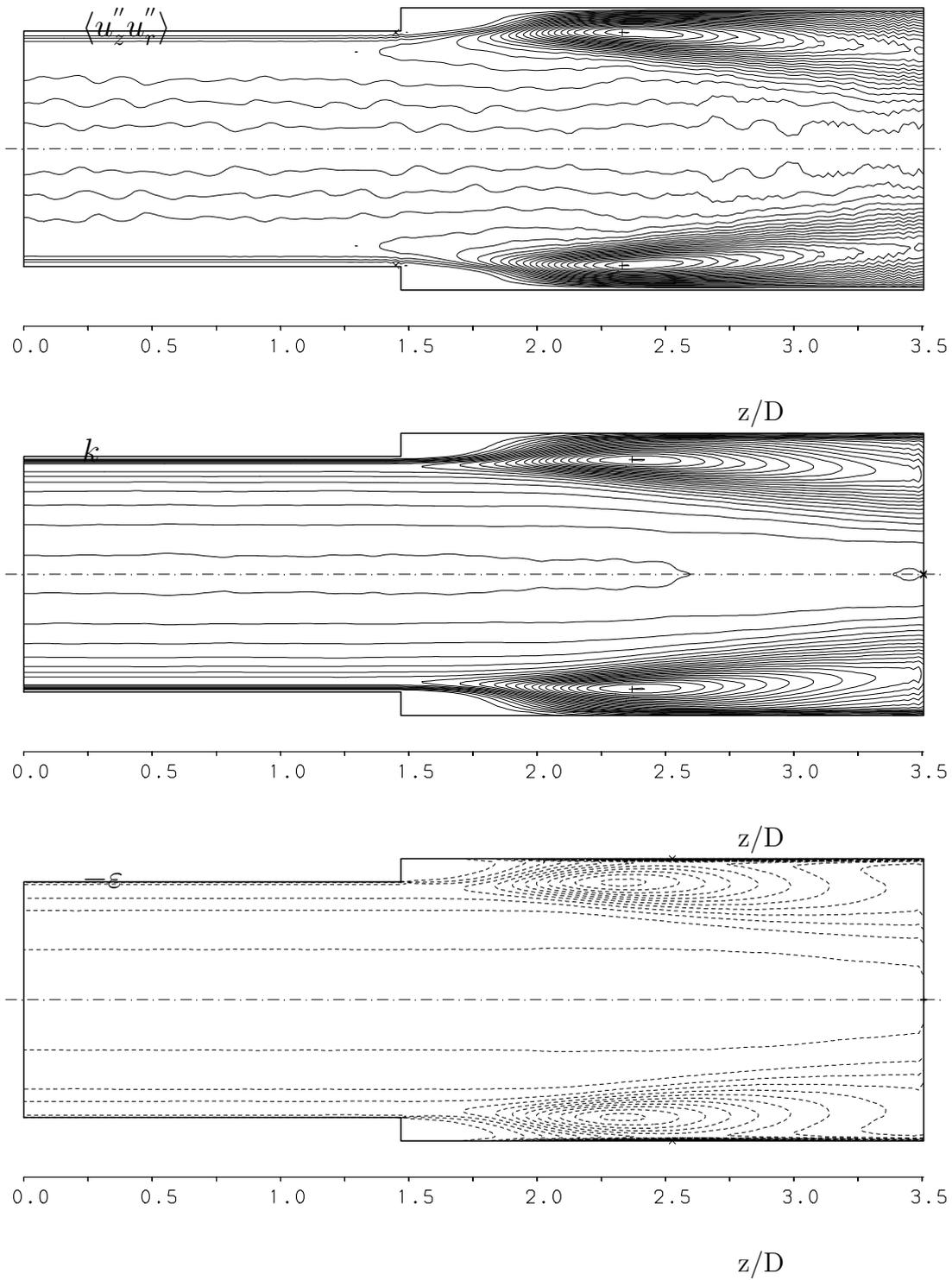


ABBILDUNG 5.20: Die Reynoldssche Schubspannung, turbulente kinetische Energie und Dissipationsrate, dargestellt durch Höhenlinien. Wertebereich: $0.00 < \langle u_z'' u_r'' \rangle < 4.28$, $0.89 < k < 12.1$, $6.08 < \varepsilon < 325.0$. Durchgezogene/gestrichelte Linien symbolisieren positive/negative Werte.

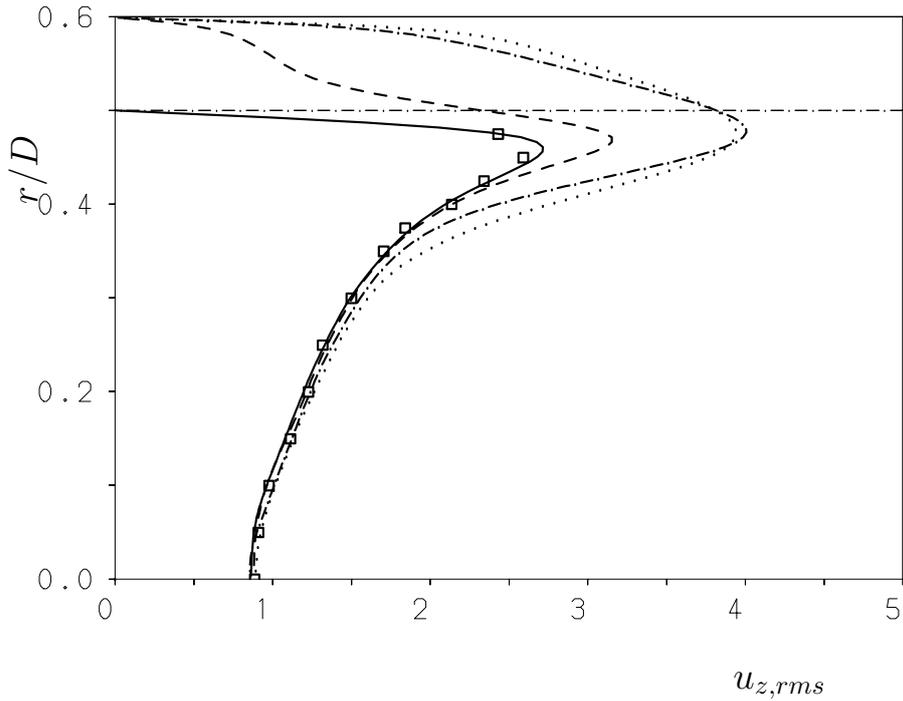


ABBILDUNG 5.21: Profile der axialen *rms*-Geschwindigkeitsfluktuation an vier Positionen in Längsrichtung. Zum Vergleich Rohr-LDA Messungen von Westerweel et al. [73]: (\square). Linien: $z/D = 0.08$: (———), $z/D = 1.84$: (- - - -), $z/D = 2.23$: (- · - · - ·), $z/D = 2.42$: (· · · · ·).

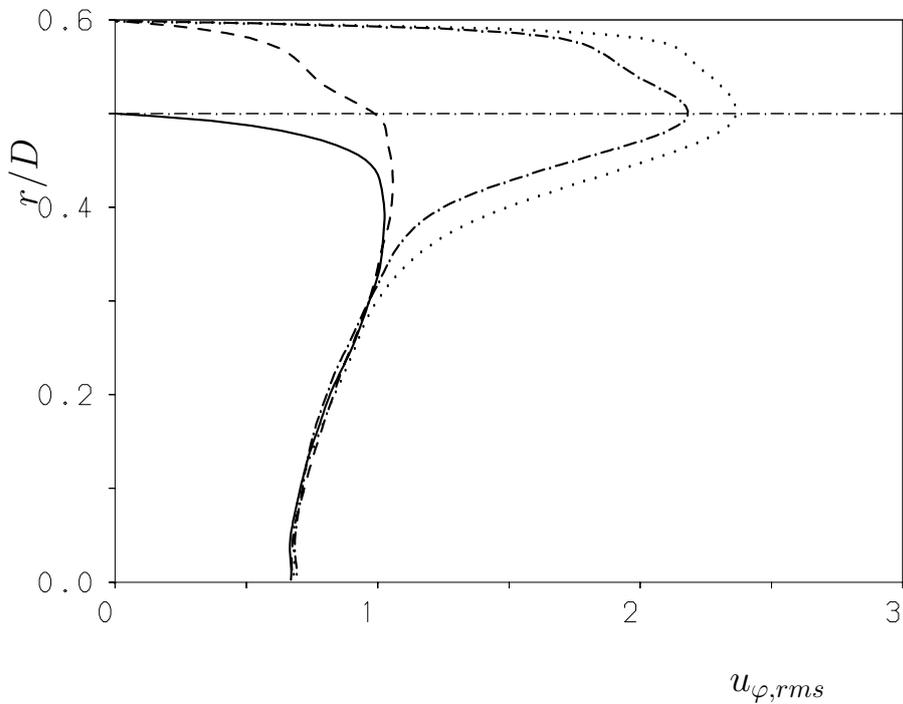


ABBILDUNG 5.22: Profile der azimuthalen *rms*-Geschwindigkeitsfluktuation an vier Positionen in Längsrichtung. Linien: $z = 0.08$: (———), $z = 1.84$: (- - - -), $z = 2.23$: (- · - · - ·), $z = 2.42$: (· · · · ·).

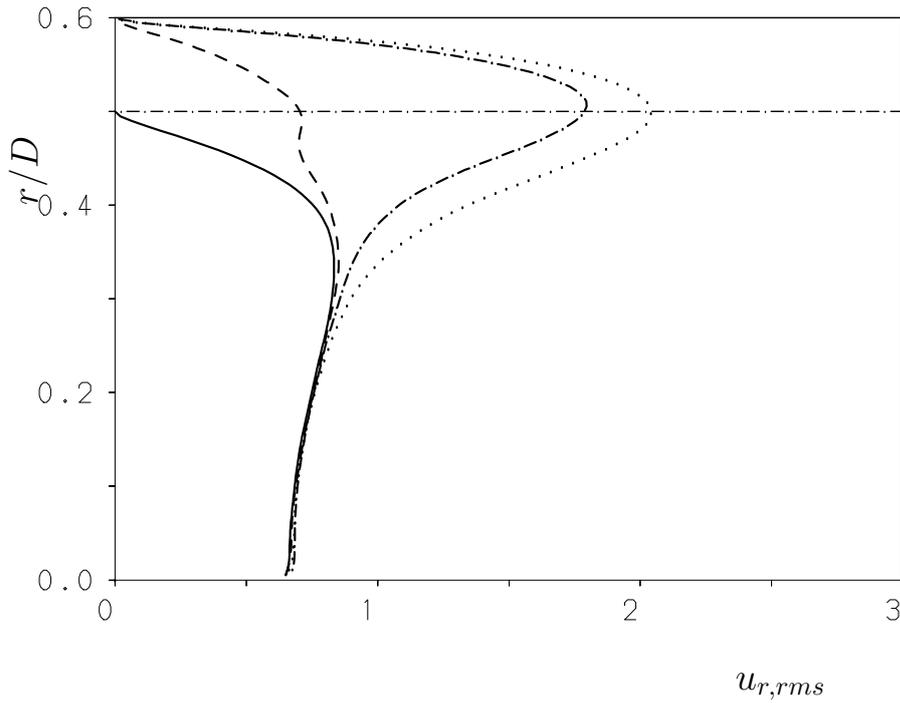


ABBILDUNG 5.23: Profile der radialen *rms*-Geschwindigkeitsfluktuation an vier Positionen in Längsrichtung. Linien: $z/D = 0.08$: (———), $z/D = 1.84$: (----), $z/D = 2.23$: (-·-·-·-·), $z/D = 2.42$: (·-·-·-·-·).

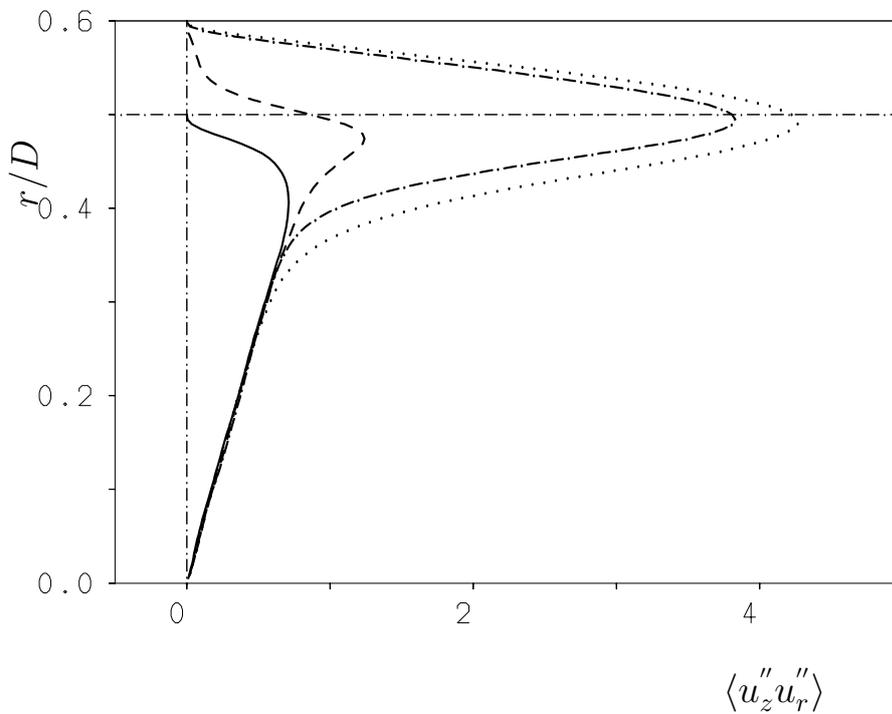


ABBILDUNG 5.24: Profile der Reynoldsschen Schubspannung an vier Positionen in Längsrichtung. Linien: $z/D = 0.08$: (———), $z/D = 1.84$: (----), $z/D = 2.23$: (-·-·-·-·), $z/D = 2.42$: (·-·-·-·-·).

5.5 Schiefe und Flachheitsgrad

In axialsymmetrischen Strömungen verschwinden die Korrelationen, in denen u_φ'' mit ungerader Potenz auftritt. Wie in den Profilen der S_φ -Komponente (Abb. 5.26 bis 5.29) deutlich wird, ist dies auch in dieser Strömung richtig. Abweichungen von der strich-punktierten Nulllinie sind auf eine noch nicht vollständig stabile Statistik zurückzuführen.

Die in Abbildung 5.25 durch Höhenlinien dargestellte Schiefe der axialen Geschwindigkeitsfluktuation zeigt in unmittelbarer Nähe der Rohrwände und in der freien Scherschicht große positive Werte. Unter Beachtung, der in Kapitel 5.2 diskutierten Häufigkeitsverteilungen folgt, daß die Dämpfung der Wand eine hochfrequente Schwankungsbewegung mit niedrigem Axialimpuls entstehen läßt, während die Kernströmung bei hoher Scherrate Fluid mit hohem Axialimpuls nachliefert. Ferner zeigen sich im Bereich der Stufenhecke positive Werte der Schiefe S_z , die durch eine im Momentanfeld beobachtbare sekundäre Rezirkulation hervorgerufen werden. Über den Bereich mit negativer Schiefe S_z kann der Teil des Rezirkulationsgebiets identifiziert werden, in dem die Rückströmung zum dominanten physikalischen Prozeß wird. Der Bereich, in dem S_z positiv wird, ist dagegen durch Wiederanlegeprozesse gekennzeichnet.

Ausgezeichnete Bereiche mit positiven Werten der radialen Komponente S_r sind die Stufenhecke und der wandnahe Wiederanlegebereich. Der Transport von Fluid in Längsrichtung an der Stufenwand ist großen positiven Fluktuationen der radialen Geschwindigkeitskomponente ausgesetzt, die offensichtlich erneut mit der Sekundärrezirkulation zusammenhängen. Im Wiederanlegebereich erfolgt der radiale Impulstransport zur Wand durch vermehrt auftretende positive Fluktuationen, die dort eine positive Schiefe S_r hervorrufen.

Diese mehr qualitativen Aussagen werden durch die Profildarstellungen in den Abbildungen 5.26 bis 5.29 an vier axialen Positionen quantifiziert.

Abbildung 5.26 zeigt die Schiefe der drei Geschwindigkeitskomponenten im Zuströmbereich für $z/D = 0.08$. Die radiale und axiale Komponente S_z und S_r weisen mit Ausnahme des wandnahen Bereich einen qualitativ ähnlichen Verlauf auf. Beide Komponenten steigen in Wandnähe zunächst stark an, wobei die Schiefe der radialen Geschwindigkeitsfluktuationen ein Maximum durchläuft, um dann wieder abzuklingen.

In der Rezirkulationszone weisen diese Komponenten (siehe Abbildung 5.27) in Wandnähe große negative Werte auf, die durch die Rückströmung entlang dieser Wand entstehen.

Im Wiederanlegebereich (Abbildung 5.28 und 5.29) zeigen die Schiefen S_z und S_r ein zu Abbildung 5.26 entgegengesetztes Verhalten. Während hier S_z in Wandnähe abklingt, ergeben sich für die radiale Komponente große maximale Werte von $S_r \approx 2.5$. Im Prinzip wird dadurch der *splating effect* widergespiegelt, bei dem ein starker, in Richtung Rohrwand ausgerichteter,

Impulstransport auf die Wand auftrifft und dort gleichmäßig in und entgegen der Hauptströmungsrichtung verteilt wird.

Höchste Flachheitsgrade der Komponente F_r werden in Abbildung 5.30 im wandnahen Bereich des Rückströmgebiets erkennbar. Bei nur mäßiger Turbulenz-Intensität kommt es hier (durch *sweeps* und *ejections*) zu seltenen, aber starken, Fluktuationen der radialen Geschwindigkeitskomponente (vergl. S_r Abb. 5.25).

In der freien Scherschicht bewirkt das aus der Rohrmitte herbeitransportierte schnelle Fluid, daß sich auch hier große Flachheitsgrade der axialen Geschwindigkeitskomponente ausbilden. Da die Strömung der abgelösten Scherschicht auch durch hohe Turbulenz-Intensitäten gekennzeichnet ist, spiegelt der Flachheitsgrad F_z eine stark intermittente Schwankungsbewegung wider.

Abbildung 5.31 widmet sich den Profilen der drei Flachheitsgrade F_z , F_φ und F_r bei $z/D = 0.08$. Mit maximalen Werten von $F_r \approx 20$ steigt die radiale Komponente in Wandnähe (im Einklang mit den Spektraldaten von Kim/Moin/Moser [34]) auf sehr große Werte an, während sie im Bereich der Innenströmung, wie auch F_φ und F_r den Wert einer Gaußverteilung $F_\alpha \approx 3$ annimmt. Ein Vergleich mit den Häufigkeitsverteilungen der radialen Geschwindigkeitskomponente in Kapitel 5.2 belegt, daß diese hohen Werte auf eine verschwindende Turbulenz-Intensität zurückzuführen sind. An der Stelle $z/D = 1.84$ in Abbildung 5.32 steigen die Flachheitsgrade der wandnormalen Komponente bis auf einen Wert von $F_r \approx 65$ an. Die fast sprunghafte Häufigkeitsverteilung in Abbildung 5.14 zeigt erneut, daß diese extrem hohen Flachheitsgrade durch niedrige Turbulenz-Intensität entstehen. Dagegen zeigt die Häufigkeitsverteilung im Wiederanlegebereich eine vergleichsweise selten auftretende, aber starke Schwankungsbewegung in radialer Richtung. Hieraus folgt, daß die in Abbildung 5.33 und 5.34 veranschaulichten Maximalwerte von F_r nahe der Wand, auf eine stark intermittente Schwankungsbewegung hinweisen.

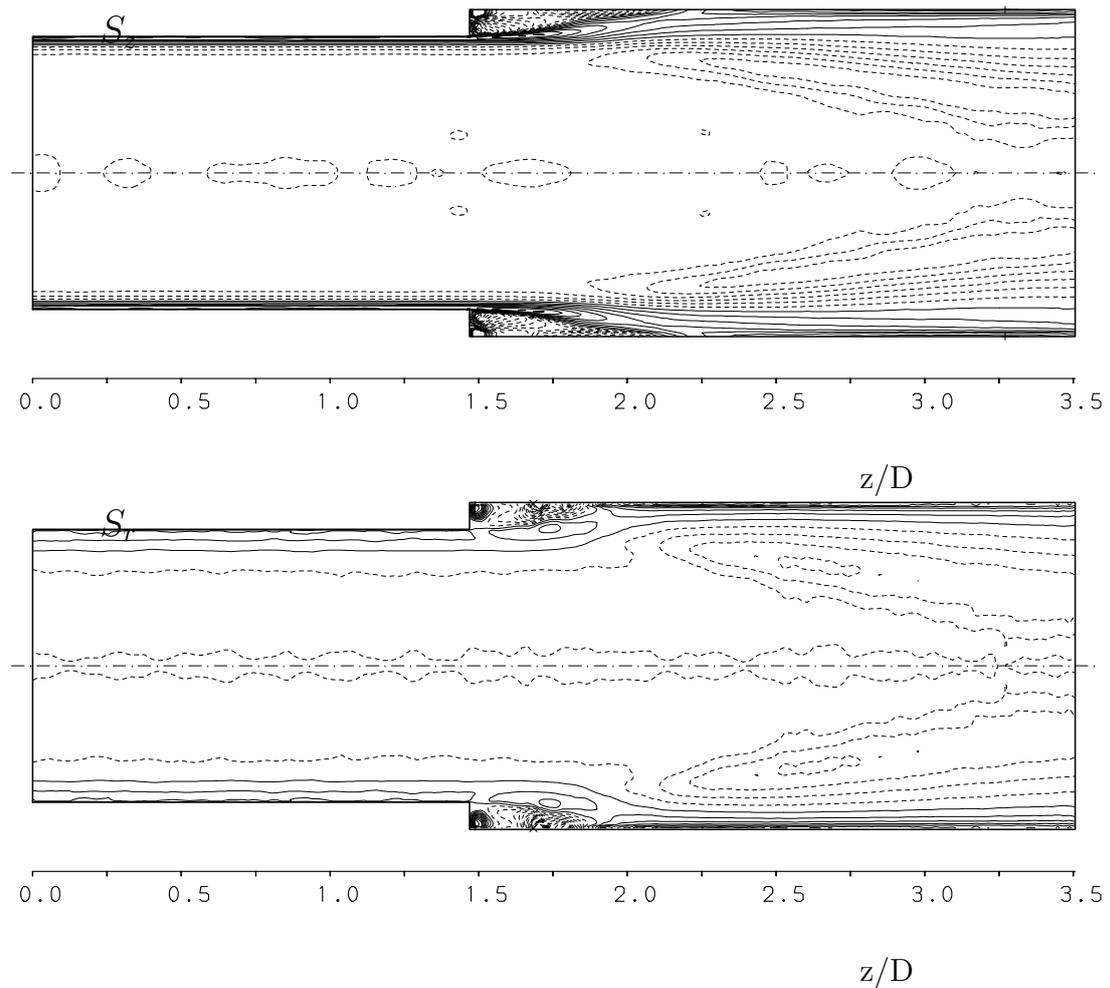


ABBILDUNG 5.25: Schiefe der axialen und radialen Geschwindigkeitskomponente, dargestellt durch Höhenlinien. Wertebereich: $-2.80 < S_z < 1.47$, $-4.34 < S_r < 3.18$. Durchgezogene/gestrichelte Linien symbolisieren positive/negative Werte.

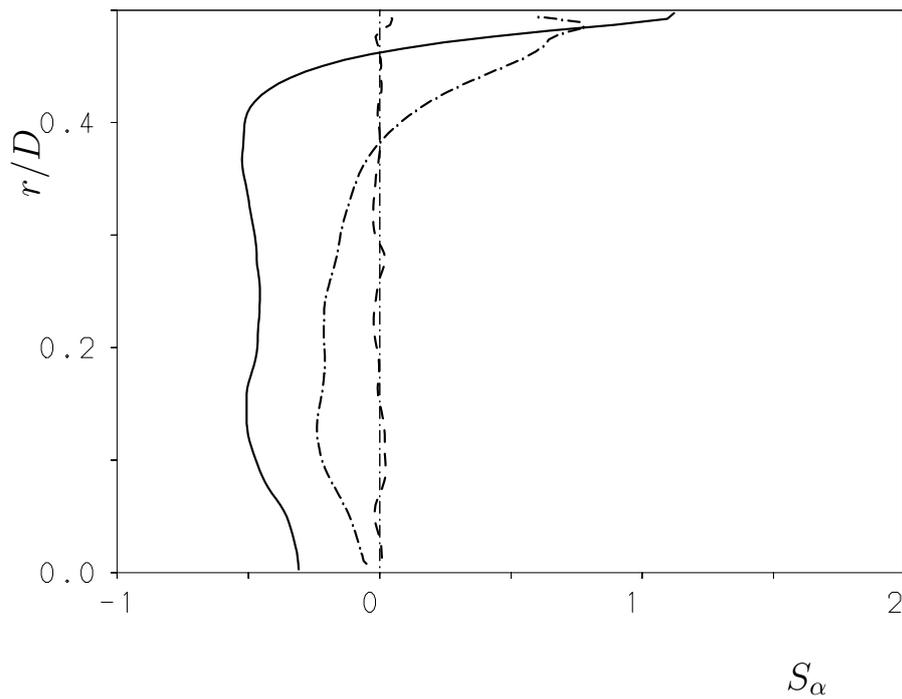


ABBILDUNG 5.26: Schiefe der drei Geschwindigkeitskomponenten an der Stelle $z/D = 0.08$.
 Linien: S_z : (———), S_φ : (- - - - -), S_r : (- · - · - ·) .

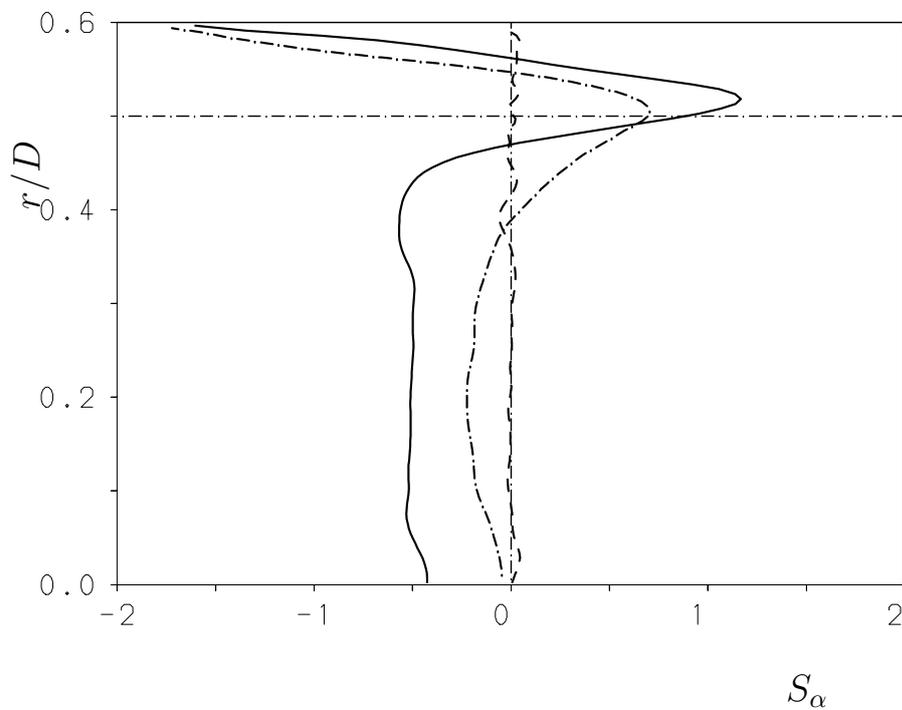


ABBILDUNG 5.27: Schiefe der drei Geschwindigkeitskomponenten an der Stelle $z/D = 1.84$.
 Linien: S_z : (———), S_φ : (- - - - -), S_r : (- · - · - ·) .

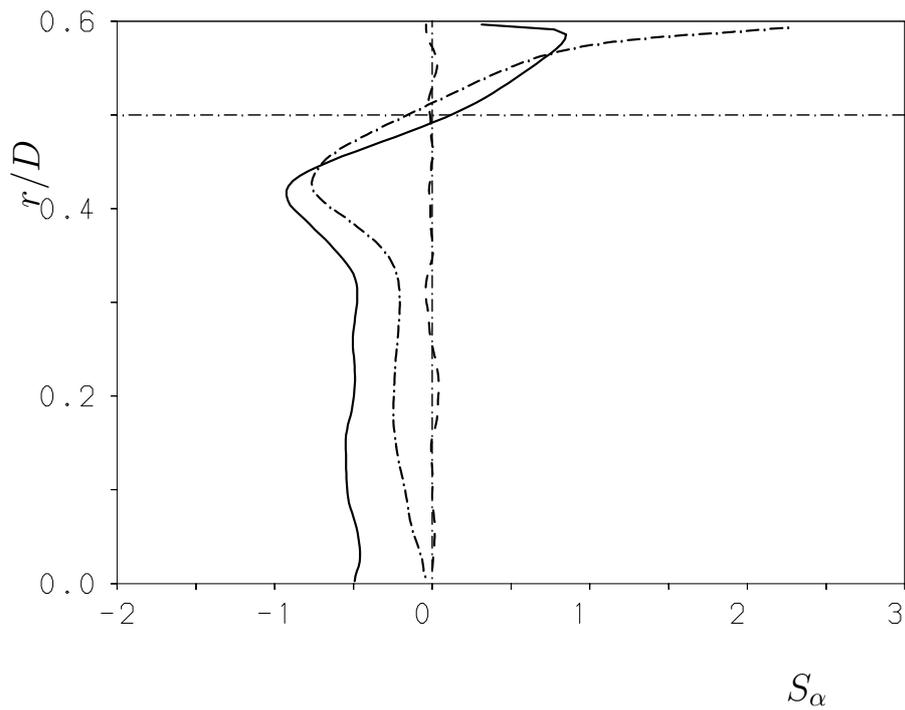


ABBILDUNG 5.28: Schiefe der drei Geschwindigkeitskomponenten an der Stelle $z/D = 2.23$.
 Linien: S_z : (———), S_φ : (- - - -), S_r : (- · - · - ·).

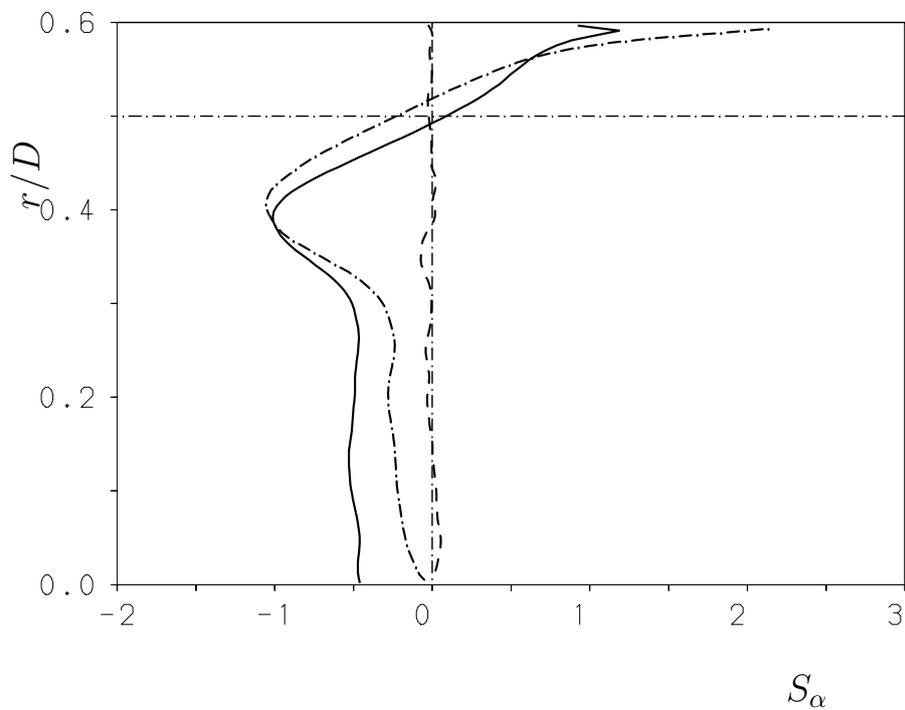


ABBILDUNG 5.29: Schiefe der drei Geschwindigkeitskomponenten an der Stelle $z/D = 2.42$.
 Linien: S_z : (———), S_φ : (- - - -), S_r : (- · - · - ·).

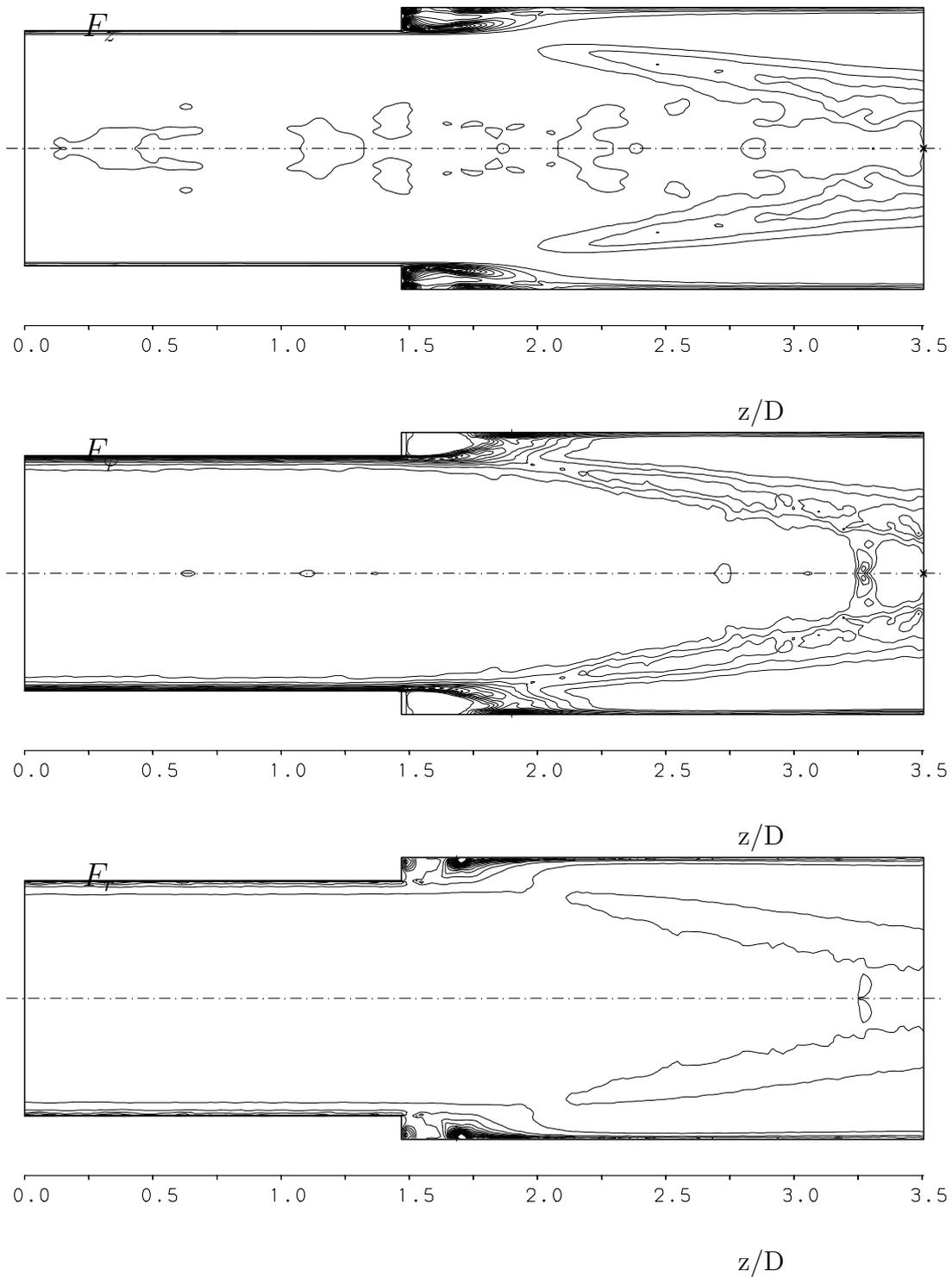


ABBILDUNG 5.30: Flachheitsgrade der drei Geschwindigkeitskomponenten, dargestellt durch Höhenlinien. Wertebereich: $3.43 < F_z < 25.2$, $3.62 < F_\varphi < 20.9$, $3.04 < F_r < 107.2$.

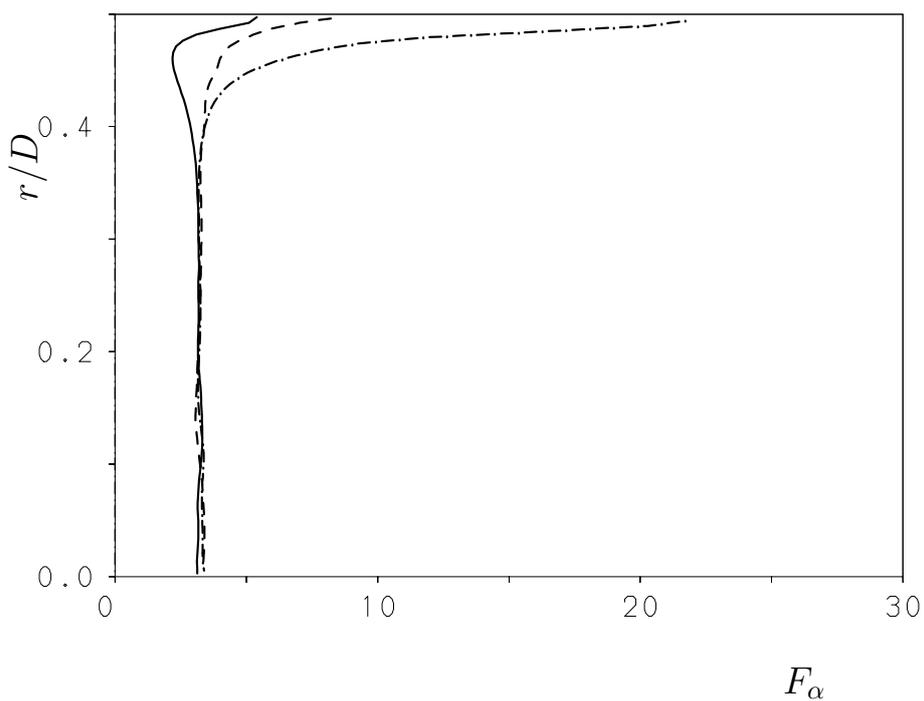


ABBILDUNG 5.31: Flachheitsgrade der drei Geschwindigkeitskomponenten an der Stelle $z/D = 0.08$. Linien: F_z : (———), F_φ : (- - - -), F_r : (- · - · - ·) .

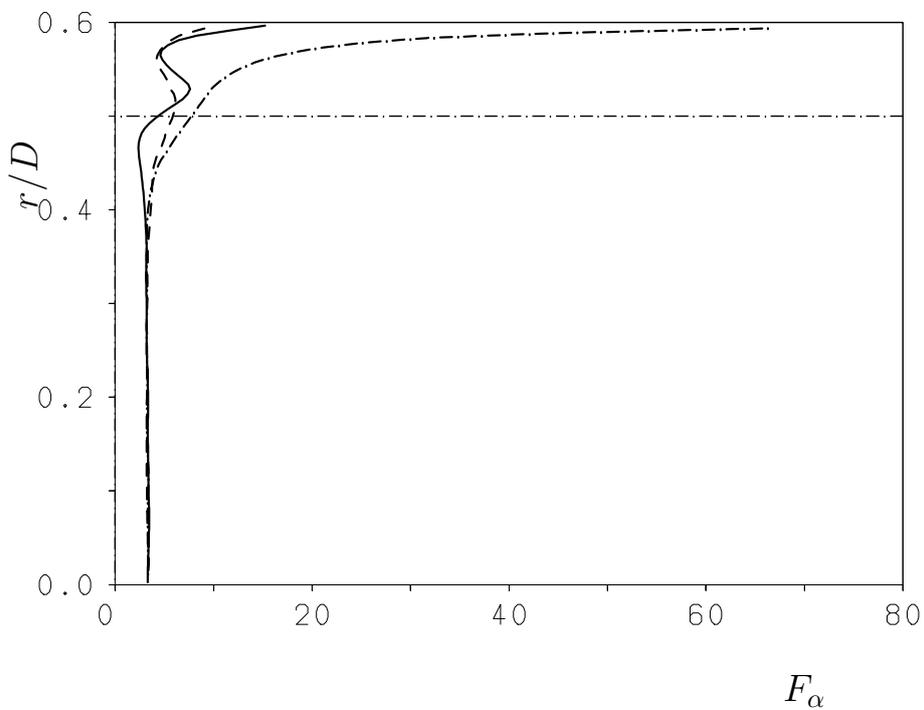


ABBILDUNG 5.32: Flachheitsgrade der drei Geschwindigkeitskomponenten an der Stelle $z/D = 1.84$. Linien: F_z : (———), F_φ : (- - - -), F_r : (- · - · - ·) .

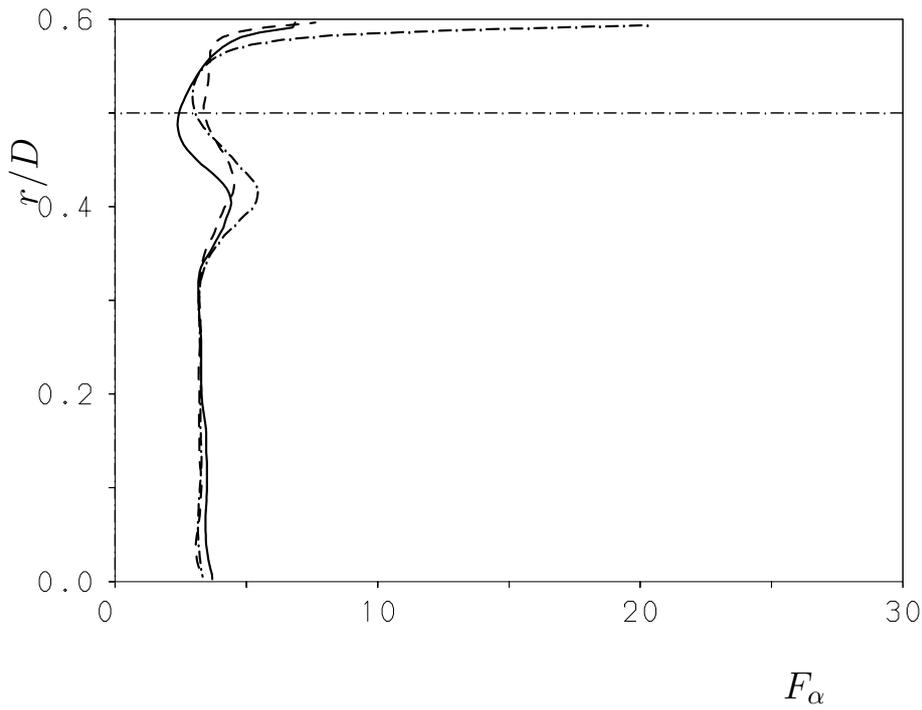


ABBILDUNG 5.33: Flachheitsgrade der drei Geschwindigkeitskomponenten an der Stelle $z/D = 2.23$. Linien: F_z : (———), F_φ : (- - - -), F_r : (- · - · - ·).

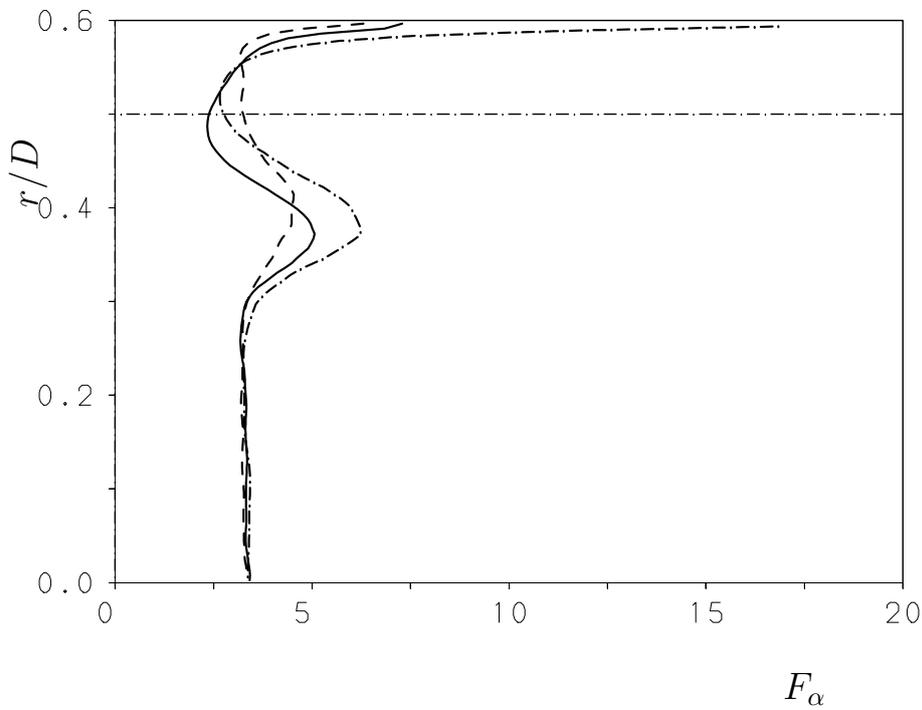


ABBILDUNG 5.34: Flachheitsgrade der drei Geschwindigkeitskomponenten an der Stelle $z/D = 2.42$. Linien: F_z : (———), F_φ : (- - - -), F_r : (- · - · - ·).

5.6 Bilanzen des Reynoldsschen Spannungstensors

Der Reynoldssche Spannungstensor beschreibt die Korrelationen der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten. Sie treten in den gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen als Unbekannte auf. In einem Schließungsansatz zweiter Ordnung werden für die Elemente dieses Tensors Bilanzgleichungen gelöst. In Kapitel 4.7 sind die rechten Seiten dieser Gleichungen 4.29 bis 4.32 in physikalisch unterschiedlich wirkende Anteile aufgespalten. Im einzelnen unterscheidet man zwischen der Produktion (PR), Konvektion (CT), turbulenten Diffusion (TD), Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelation (VPG), der viskosen Diffusion (VD) und Dissipation (DS). Im statistisch stationären Fall verschwinden die linken Seiten (die *balance differences* (BD)).

Den Zustand der vollentwickelten Zuströmung geben die Abbildungen 5.35 bis 5.40 in Form der Bilanzen der drei Turbulenzintensitäten, der Reynoldsschen Schubspannung und der turbulenten kinetischen Energie wieder. Die Profile der einzelnen Terme sind hierzu über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ aufgetragen. Um die zum Teil komplexe Bilanzierung nahe der Wand übersichtlich darstellen zu können, wurden die Profile lediglich im Intervall $0 \leq y^+ \leq 150$ gezeichnet, wobei y^+ unabhängig von der axialen Position mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit in der Einströmebene $u_\tau(z/D = 0)$ gebildet wurde. Da die Höhenliniendarstellungen der in Kapitel 5.4 bis 5.5 gezeigten Einpunkt-Korrelationen zwischen $0 \leq z/D \leq 1$ keine axiale Entwicklung erkennen lassen, wurden die Bilanzen über diesen Bereich zusätzlich in axialer Richtung gemittelt.

Vollentwickelte Zuströmung

Ausgehend von der Wand kann die $\langle u_z'^2 \rangle$ -Bilanz in Abbildung 5.35 in die drei klassischen Bereiche, viskose Unterschicht, Übergangsschicht und vollturbulentes Gebiet unterteilt werden. Der die Schwankungsbewegung dämpfende Einfluß der Wand führt dazu, daß die viskosen Terme sich in unmittelbarer Nähe mit positiver viskoser Diffusion und negativer Dissipation die Waage halten. Beide Terme nehmen hier, in der viskosen Unterschicht, ihre absoluten Extremwerte an. Mit zunehmendem Abstand von der Wand ist die Bilanz zusätzlich durch Produktion und turbulenten Transport bestimmt. Zunächst steigen die Werte des Produktionstermes und der turbulenten Diffusion rasch an und bilden zusammen mit der absinkenden viskosen Diffusion diejenigen positiven Bilanzterme, denen nur die viskose Dissipation als Senkenterm gegenübersteht. Im Bereich maximaler Produktionsrate $y^+ \approx 15$ (Übergangsschicht) stehen der Dissipation der Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term, die turbulente und viskose Diffusion als Energiesenke zur Seite, während im vollturbulenten Kernbereich ($y^+ > 25$) die durch den Produktionsterm erzeugte kinetische Energie einerseits durch die viskose Dissipation in Wärme umgewandelt und andererseits durch den negativen Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term entzogen wird. Der turbulente Transport TD_{zz} spielt hier ebenfalls eine beachtliche Rolle.

Bei verschwindender Druckdiffusion PD_{zz} entspricht der Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term der Druck-Scherkorrelation PS_{zz} (siehe Abbildung 5.38). Dieser Term verteilt Energie der axialen Komponente an die beiden anderen Komponenten. An den entsprechenden Stellen weisen die Terme $PS_{\varphi\varphi}$ und PS_{rr} daher positive Werte auf. Der Konvektionsterm und die Bilanzdifferenzen BD_{zz} verschwinden und sind von der durchgezogenen Nulllinie nicht zu unterscheiden.

Die $\langle u''^2 \rangle$ -Bilanz in Abbildung 5.36 weist im wandfernen Bereich ein Gleichgewicht zwischen Dissipation und Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelation auf und im wandnahen Bereich zwischen viskoser Diffusion und viskoser Dissipation. Der Produktions- und Konvektionsterm sowie die Bilanzdifferenz $BD_{\varphi\varphi}$ verschwinden.

Produktion, Konvektion und die Bilanzdifferenz BD_{rr} der $\langle u_r''^2 \rangle$ -Komponente (Abbildung 5.37) verschwinden ebenfalls. Im wandfernen Bereich der Zuströmung wird dieser Bilanz (ähnlich wie bei $\langle u_\varphi''^2 \rangle$) hauptsächlich über den Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term Energie zugeführt. Mit einem Vorzeichenwechsel bei $y^+ \approx 25$ erfolgt die Energiezufuhr zusätzlich auf konvektivem Wege über die turbulente Diffusion und in unmittelbarer Wandnähe bei verschwindender Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelation durch die viskose Diffusion. Dominanter Senkenterm ist die Dissipation, im Bereich maximaler Werte von $VP_{G_{rr}}$ sorgt jedoch auch die turbulente Diffusion, die hier ein Minimum aufweist, für den Abtransport von kinetischer Energie.

Die Geschwindigkeits-Druckgradienten-Terme der drei Turbulenzintensitäten sind in Abbildung 5.38 in ihre zwei Anteile, die Druckdiffusion und die Druck-Scherkorrelation aufgespalten. In der vollentwickelten Zuströmung ist die Druckdiffusion $PD_{\varphi\varphi}$ verschwindend klein, und die der axialen Komponente verschwindet ganz. Die bis auf den wandnahen Bereich durchwegs negative Druck-Scherkorrelation PS_{zz} zeigt, daß die $\langle u_z''^2 \rangle$ -Komponente Energie an die zwei anderen Komponenten abgibt. In Wandnähe erhält die Turbulenzintensität der radialen Komponente Energie über die Druckdiffusion und gibt diese über den negativen Druck-Scherkorrelation PS_{rr} ebenfalls an die Umfangskomponente ab. Bei nahezu verschwindender Druckdiffusion der Umfangskomponente erhält diese dementsprechend in Wandnähe Energie aus den zwei Komponenten, während sie sich diesen Gewinn im wandferneren Bereich mit der Radialkomponente teilt.

Die $\langle u_z'' u_r'' \rangle$ -Bilanz in Abbildung 5.39 wird von den Termen Produktion und Geschwindigkeits-Druckgradient dominiert. Während sich diese im wandfernen Bereich die Waage halten, gewinnt die turbulente Diffusion in Wandnähe an Bedeutung. In der viskosen Unterschicht $y^+ \leq 5$ wird die Bilanz durch die hohen Werte der viskosen Diffusion und der viskosen Dissipation bestimmt. Außerhalb dieses Bereichs verschwindet der Einfluß der viskosen Terme.

Mit Ausnahme des VPG-Termes, dessen Druck-Scherkorrelationsanteil verschwindet, stimmt die in Abbildung 5.40 veranschaulichte Bilanz der turbulenten kinetischen Energie qualitativ mit der $\langle u_z''^2 \rangle$ -Bilanz überein. Dies unterstreicht die Bedeutung, die die Schwankungsbewegung in axialer Richtung auf das Turbulenzgeschehen der vollentwickelten Zuströmung besitzt. Die Abbildung zeigt ferner, daß sich im Bereich vollturbulenter Strömung ($y^+ > 40$) kein Gleichgewicht zwischen Produktion und Dissipation einstellt. Während die Druckdiffusion verschwindet, spielt der turbulente Transport mit Annäherung an die Rohrachse eine immer größere Rolle. Daß dies auch bei Reynoldszahlen von 50000 der Fall ist, zeigen bereits Messungen von Laufer [36]. Auf Querkrümmungseffekte, die sich bei den hier betrachteten niedrigen Reynoldszahlen im Vergleich zur Kanalströmung bemerkbar machen, hat F. Unger [67] hingewiesen.

Abgelöste Strömung

In den Abbildungen 5.41 bis 5.46 sind die Bilanzen der Tensorkomponenten an der Stelle $z/D = 1.83$ d.h. stromab der Stufenkante wiedergegeben. Die Strömung besitzt hier im Mittel ein deutlich ausgebildetes Rezirkulationsgebiet (siehe Abbildung 5.15).

Mit Ausnahme der viskosen Dissipation und der viskosen Diffusion, die sich in unmittelbarer Nähe der Wand ausgleichen, gibt der Energiehaushalt der $\langle u_z''^2 \rangle$ -Komponente innerhalb des Rückstromgebiets $0 \leq y^+ \leq 20$ eine relativ schwache Schwankungsbewegung wieder. Im Vergleich zur Zuströmung kommt die Konvektion in der freien Scherschicht ($y^+ \approx 40$) als zusätzlicher Transportterm ins Spiel und zeigt eine ähnliche Wirkung wie der Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term. Im Kernbereich der Strömung ergeben sich für die restlichen Anteile geringfügige Abweichungen von der Bilanz stromauf (5.35). Der maximalen Produktion bei $y^+ \approx 40$ stehen neben der an dieser Stelle maximalen Dissipation die Terme TD_{zz} , VPG_{zz} und, mit einem kleineren Maximum, auch VD_{zz} gegenüber. Die erzeugte Schwankungsenergie wird demnach primär durch Konvektion und turbulente Diffusion abtransportiert, über den an dieser Stelle negativen Druck-Scherkorrelationsterm (siehe Abbildung 5.44) an die zwei anderen Komponenten verteilt und durch viskose Dissipation in Wärme umgewandelt. Ein Vergleich mit dem Zustand der ankommenden Strömung ergibt, daß die Produktionsrate in der freien Scherschicht nahezu dreimal so groß ist wie in vollentwickelter Rohrströmung. Die Ursache dafür ist u.a. in der starken Zunahme der Reynoldsschen Schubspannung zu suchen, die bei Wegfall des Wandeinflusses (kinematische Randbedingung) um ein entsprechendes Vielfaches ansteigt.

Wie in der Zuströmung gewinnt die $\langle u_\varphi''^2 \rangle$ -Bilanz der abgelösten Strömung ebenfalls Energie über den Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term. In der Scherschicht sorgen insbesondere die Konvektion und selbstverständlich die Dissipation für einen Ausgleich des Energiehaushaltes. Nahe der Wand steht der Dissipation erneut die dort ansteigende viskose Diffusion gegenüber. Die turbulente Diffusion weist in der freien Scherschicht einen qualitativ ähnlichen Verlauf auf

wie in Wandnähe der ankommenden Strömung. Unübersehbar sind die vergleichsweise großen Amplituden der Bilanzdifferenz $BD_{\varphi\varphi}$, obwohl über 10^3 Stichproben zur statistischen Mittelung verwendet wurden. Es hat den Anschein, als würde die zeitliche Änderung von $\langle u_{\varphi}''^2 \rangle$, also $BD_{\varphi\varphi}$, den Oszillationen des Konvektionsterms folgen. Abhilfe kann hier nur durch zusätzliche Stichproben geschaffen werden, was jedoch wegen des zu großen Aufwandes unterlassen wird. Die Ergebnisse sind bezüglich der Terme $CT_{\varphi\varphi}$, $DS_{\varphi\varphi}$ und $VPG_{\varphi\varphi}$ in der Scherschicht dennoch von hoher Aussagekraft.

Mit einem beachtlichen Minimalwert wird der Konvektionsterm der radialen Tensorkomponente (Abbildung 5.43) in der freien Scherschicht zu einem dominanten Term, der die Dissipation um ca. das 4-fache übersteigt. Die Produktion verschwindet innerhalb des Rezirkulationsgebietes und wechselt ihr Vorzeichen in der freien Scherschicht. In diesem Bereich steht dem positiven Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term neben der Dissipation auch die negative turbulente Diffusion TD_{rr} zur Seite.

Mit dem Vorzeichenwechsel der mittleren Geschwindigkeiten in axialer und radialer Richtung zwischen Rezirkulationsgebiet und freier Scherschicht, zeigen auch die Profile der Druckdiffusion und Druck-Scherkorrelationsterme PD_{zz} , PD_{rr} , PS_{zz} und PS_{rr} in Abbildung 5.44 in diesen Gebieten einen gegensätzlichen Verlauf. Während PD_{rr} und PS_{zz} in der Scherschicht Senkenterme darstellen, werden sie im Rückströmgebiet zu Quelltermen. Umgekehrt gilt dies auch für PD_{zz} und PS_{rr} . Dagegen weist die Umfangskomponente von PS in der Scherschicht hohe positive Werte auf und ist im Rückströmgebiet von untergeordneter Bedeutung. $PD_{\varphi\varphi}$ verschwindet überall. PD_{rr} verläuft qualitativ so wie in vollentwickelter Rohrströmung, mit dem Unterschied, daß sich im Rezirkulationsgebiet und in der freien Scherschicht um ca. eine Größenordnung höhere Amplituden einstellen. Dasselbe gilt für die Druck-Scherkorrelation PS_{rr} . Deren Vorzeichenwechsel in Wandnähe (dort gibt die r -Komponente Energie ab!) erklärten Moin und Kim (1982) mit dem sogenannten *splating*-Effekt, der durch *sweep*-Ereignisse hervorgerufen wird. Dabei wird Fluid hoher Axialgeschwindigkeit zur Wand transportiert, wobei es Übergeschwindigkeiten erzeugt (*sweeps*) und in die beiden anderen Richtungen umgelenkt wird. Von großem Interesse für die Turbulenzmodellierung ist in diesem Zusammenhang, daß PD_{rr} und PS_{rr} in Zonen mittlerer Rückströmung dieselben Vorzeichen haben wie in einfacher Scherströmung (vollentwickelte Rohrströmung). Bemerkenswert ist ferner die starke axiale Entwicklung der Strömung, die zu beachtlichen Werten der Druckdiffusion in z -Richtung führt sowie die Tatsache, daß die Positionen der Maxima von $PS_{\varphi\varphi}$ und PS_{rr} sich decken. Auch die Amplitude dieser Terme gleichen sich in diesem Bereich an, was zweifellos damit zu tun hat, daß die Schwankungsbewegung sich in der Scherschicht ohne kinematischen Zwang (durch die Wand) entwickeln kann.

Die hohen Produktionsraten PR_{zr} in Abbildung 5.45 werden in der Scherschicht teilweise über

die Transportterme CT_{zr} und TD_{zr} ausgeglichen. Im wandnäheren Bereich klingen diese Terme ab, so daß der Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term die einzig nennenswerte Senkenwirkung verursacht. In der Rezirkulationszone ist es erneut dieser Term, der nun als Quelle die restlichen Terme ausgleicht. Vorsicht bei der Dateninterpretation ist wiederum dort geboten, wo BD_{zr} die Größenordnung anderer Terme erreicht.

Abbildung 5.46 enthält die Bilanz der turbulenten kinetischen Energie. Wie in der vollentwickelten Zuströmung wird diese Bilanz von der Energie in axialer Richtung dominiert. In der Scherschicht verlaufen Produktion, Dissipation, turbulente und viskose Diffusion qualitativ ähnlich wie in der Übergangsschicht einer einfachen Scherströmung. Konvektion kommt jetzt mit einem beachtlichen Beitrag neu hinzu. Da der VPG -Term Amplituden erreicht, die mit denen der Bilanzdifferenz vergleichbar sind, soll sein Verlauf nicht diskutiert werden.

Wiederanlegende Strömung

An der Stelle $z/D = 2.23$, die sich gerade noch im Rezirkulationsgebiet befindet, ist die $\langle u_z''^2 \rangle$ -Bilanz (Abbildung 5.47) im Kernbereich der Strömung durch Produktion und turbulente Diffusion einerseits und Konvektion, Druckdiffusion, Umverteilung und Dissipation andererseits bestimmt. Die maximalen Produktionsraten von $PR_{zz} \approx 870$ bei $y^+ \approx 40$ werden in erster Linie durch den Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term VPG_{zz} ($\approx 50\%PR_{zz}$), aber auch durch die turbulente Diffusion TD_{zz} ($\approx 30\%PR_{zz}$) und viskosen Dissipation DS_{zz} ($\approx 20\%PR_{zz}$) ausgeglichen. Innerhalb des Rezirkulationsgebietes stellt sich, aufgrund der dort herrschenden Scherraten ein kleiner Bereich mit negativen Werten des Produktionstermes ein. Der VPG -Term und die turbulente Diffusion dienen hier als Energielieferanten, während Dissipation und Produktion diese Energie verzehren. Mit positiver viskoser Diffusion und negativer Dissipation stellt sich direkt an der Wand erneut ein Gleichgewicht zwischen den viskosen Termen ein. Der Vorzeichenwechsel von VPG_{zz} bei $y^+ \approx 8$ muß in Zusammenhang mit dem Vorzeichenwechsel von VPG_{rr} gesehen werden. Im Bereich $0 \leq y^+ \leq 18$ ist VPG_{rr} negativ, d.h. die radiale Geschwindigkeitskomponente gibt beim Aufprall von Fluid auf die Wand Energie an die beiden übrigen Komponenten ab (*splattling*). Interessanterweise deutet sich derselbe Effekt auch in der einfachen Rohrströmung bereits an (Abb. 5.37). Im Wiederanlegebereich ist er jedoch wegen der intensivierten Schwankungsbewegung wesentlich ausgeprägter.

In Abbildung 5.48 weist der Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term der Turbulenzintensität in Umfangsrichtung zwei Maxima auf. Über diesen Term wird der Schwankungsbewegung sowohl in der Scherschicht, als auch innerhalb des Rezirkulationsgebietes Energie zugeführt. Dominante Senkenterme sind die Dissipation (mit einem Maximalwert von $\approx 65\%DS_{zz}$ in der Scherschicht) und im wandferneren Bereich auch der Konvektionsterm. In der Nähe der Wand ist ein Ansteigen der viskosen Diffusion zu verzeichnen, die hier zusammen mit dem Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term der Dissipation das Gleichgewicht hält. Auch der

$BD_{\varphi\varphi}$ -Term zeigt in Wandnähe einen deutlichen Ausschlag, der jedoch auf Schwächen in der statistischen Mittelung zurückgeht.

Die wiederanliegende Strömung stromauf des mittleren Wiederanlegepunktes weist, wie Abbildung 5.49 zeigt, eine weitaus komplexere Bilanz der Komponente $\langle u_r'^2 \rangle$ auf als die vollentwickelte Rohrströmung. Prinzipiell können hier drei verschiedene Bereiche identifiziert werden. Nahe der Wand zwischen $0 < y^+ < 20$ herrscht Rückströmung, in der Energie zum Teil durch Produktion und turbulente Diffusion zugeführt und durch den Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term und durch Dissipation abgeführt wird. Im wandnäheren Bereich der Scherschicht wirken Produktion und der VPG -Term als Energielieferanten, denen die negativen Terme der Dissipation, turbulenten Diffusion und zum Teil auch der Konvektion gegenüberstehen. Im Bereich $50 < y^+ < 100$ steht dem Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term die turbulente Diffusion als Gewinnterm zur Seite. Zusammen mit der Dissipation ist hier die Konvektion der dominante Verlustterm. Auch die Produktion scheint hier einen negativen Beitrag zu leisten. Eine zuverlässige Aussage erfordert allerdings verbesserte statistische Mittelwerte (insbesondere des Produktionstermes).

In der Scherschicht gibt die Turbulenzintensität in axialer Richtung über die Druck-Scherkorrelation Energie an die anderen beiden Komponenten ab. Dementsprechend nimmt PS_{zz} in Abbildung 5.50 für $y^+ > 15$ negative und $PS_{\varphi\varphi}$ bzw. PS_{rr} positive Werte an. Im wandnahen Bereich erhält die Bilanz der radialen Komponente Energie über den Transportterm PD_{rr} und gibt diese über die Druck-Scherkorrelation PS_{rr} an die anderen beiden Komponenten ab. Auffallend ist dabei der hohe Energieanteil, den die Umfangskomponente in diesem Bereich über die Druck-Scherkorrelation erhält. Um die Genauigkeit der berechneten PS -Terme überprüfen zu können, wurde deren Summe gebildet und durch Kreuze (+) dargestellt. Es zeigt sich, daß PS_{ii} nur in einem schmalen wandnahen Bereich nicht verschwindet, was wieder auf Mängel in der statistischen Mittelung zurückgeht. Die Wiederanlegezone ist diesbezüglich ein kritischer Bereich.

Wie in Abbildung 5.47 und 5.49 können über den Verlauf der turbulenten Diffusion TD_{zr} , der zwei Vorzeichenwechsel aufweist, in der Bilanz der Reynoldsspannung in Abbildung 5.51 ebenfalls drei Bereiche identifiziert werden. Nahe der Wand liefern turbulente Diffusion und Produktion die Energie, die der VPG -Term wegschafft. Zwischen den zwei Nulldurchgängen bei $y^+ \approx 20$ und $y^+ \approx 50$ halten die turbulente Diffusion und der VPG -Term der Produktion die Waage, während TD_{zr} im Bereich $y^+ > 50$ erneut der Produktion als Energiequelle zur Seite steht. In diesem Bereich sorgen die negativen Werte der Konvektion und der Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelation für eine korrekte Bilanzierung. Im Bereich $0 < y^+ < 70$ erreicht die Bilanzdifferenz BD_{zr} Werte von der Größenordnung des Dissipationsterms, so daß der Beitrag von DS_{zr} zur Bilanz nicht diskutiert werden kann.

In der Bilanz der turbulenten kinetischen Energie erhält die Intensität der axialen Geschwindigkeitskomponente mit der Intensität $\langle u''_{\varphi}{}^2 \rangle$ einen gewichtigen Partner. Beide weisen vergleichbare Maximalwerte der Dissipation und Konvektion mit qualitativ ähnlichen Verläufen auf. Nur der Verlauf Produktionsrate mit einem Maximalwert von $PR_k \approx 450$ folgt qualitativ allein dem der $\langle u''_z{}^2 \rangle$ -Bilanz. Der Geschwindigkeits-Druckgradienten-Term weist an den Stellen $y^+ = 8$ und $y^+ \approx 70$ zwei Vorzeichenwechsel auf. Gerade solche Nulldurchgänge können durch Turbulenzmodelle nur sehr schwer vorhersagt werden. Wie bei der axialen Turbulenzintensität ergeben sich auch für die turbulente kinetische Energie negative Produktionswerte im wandnahen Wiederanlegebereich. Diese Beobachtung stimmt mit der von Le und Moin [38] überein, die im Wiederanlegebereich der Strömung durch die plötzliche Kanalerweiterung ebenfalls die negativen Produktionsraten feststellten.

Axiale Entwicklung

In den Abbildungen 5.53 bis 5.73 sind die einzelnen Terme der Bilanzgleichungen $\langle u''_z{}^2 \rangle$, $\langle u''_{\varphi}{}^2 \rangle$ und $\langle u''_r{}^2 \rangle$ jeweils an den Positionen $z/D = 0.08, 1.84, 2.23, 2.42$ wiedergegeben. Diese Darstellung wurde gewählt, um die axiale Entwicklung der einzelnen Terme diskutieren zu können.

Der in der Zuströmung verschwindende Konvektionsterm der $\langle u''_z{}^2 \rangle$ -Bilanz in Abbildung 5.53 entwickelt sich im wandfernen Bereich der Scherschicht zu einem anwachsenden Verlustterm, dessen absolutes Minimum in Richtung Rohrachse wandert. Im wandnäheren Bereich der Scherschicht übernimmt CT_{zz} die Rolle eines größer werdenden Quelltermes. Offensichtlich transportiert CT_{zz} kinetische Energie der Schwankungsbewegung von Kernbereich der Strömung in Richtung Wand. Qualitativ ähnlich, aber mit deutlich kleineren Maximalwerten, verhalten sich die Konvektionsterme der $\langle u''_{\varphi}{}^2 \rangle$ - und $\langle u''_r{}^2 \rangle$ -Bilanz in Abbildung 5.54 und 5.55.

Die in Abbildung 5.56 gezeigten Profile des Produktionstermes PR_{zz} geben bis zur Stelle $z/D = 2.23$ die enorme Verstärkung der Produktionsrate in der freien Scherschicht wieder. An der Stelle $z/D = 2.43$ (stromauf des Wiederanlegepunktes) klingt sie wieder ab. Auffällig ist ferner, daß sich die Maximalstellen kaum radial verändern. In einem kleinen Bereich $0 \leq y^+ \leq 5$ entstehen beim Wiederanlegen der Strömung die zuvor beobachteten negativen Produktionsraten. Mit weitaus kleineren Werten beschreibt die Produktion $PR_{\varphi\varphi}$ in Abbildung 5.57 im Bereich der Scherschicht einen in Längsrichtung anwachsenden Senkenterm. Bei drallfreier Strömung besteht $PR_{\varphi\varphi}$ nur aus dem Krümmungsterm $-2\langle u_r \rangle \langle u''_{\varphi}{}^2 \rangle / r$, der im Rezirkulationsgebiet wegen $\langle u_r \rangle < 0$ schwach positiv wird und sonst durch die Strömungserweiterung ($\langle u_r \rangle > 0$) negative Beiträge liefert. In ebener Strömung (Kanalerweiterung) tritt keine Produktion in Spannweitenrichtung auf. Die Produktion der $\langle u''_r{}^2 \rangle$ -Bilanz dagegen spiegelt steigende Maximalwerte im wandnahen Bereich der Scherschicht und schwächere negative Produktion von kinetischer Energie im wandferneren Bereich wider.

Die nun folgenden Terme müssen in Schließungsansätzen zweiter Ordnung parametrisiert werden. Die folgende Diskussion konzentriert sich auf Effekte in der freien Scherschicht und Rezirkulationszone.

Die Profile der turbulenten Diffusion TD_{zz} (Abbildung 5.59) stromab der Stufenkante stimmen qualitativ mit denen der Zuströmung überein. Der Verlauf an der Stelle $z/D = 1.84$ verdeutlicht, daß dort im Rückströmgebiet kein nennenswerter Transport von kinetischer Energie existiert. Dann setzt jedoch sowohl in der Rezirkulationszone als auch in der Scherschicht ein deutliches Anwachsen der Amplituden ein. Abbildung 5.60 zeigt die Entwicklung des Transportterms $TD_{\varphi\varphi}$. Im Gegensatz zu den verschwindenden Werten in der vollentwickelten Zuströmung stellen sich im Wiederanlegebereich Profile mit vier Nulldurchgängen und bemerkenswerten Amplituden ein. Gerade die Modellierung dieser Vorzeichenwechsel kann zu erheblichen Problemen führen. Der Vergleich mit den TD_{zz} -Profilen spiegelt einen mit Ausnahme des wandnahen Bereichs qualitativ ähnlichen Verlauf dieser beiden Komponenten wider. Dies gilt ebenfalls für die in Abbildung 5.61 dargestellte turbulente Diffusion in der $\langle u_r''^2 \rangle$ -Bilanz.

Die in Abbildung 5.62 dargestellte Druckdiffusion PD_{zz} verschwindet in vollentwickelter Strömung, übernimmt in rezirkulierender Strömung jedoch verschiedene Rollen. Während sie im Mittenbereich Energie herbeischafft, senkt sie im Wiederanlegebereich das Niveau der $\langle u_z''^2 \rangle$ -Komponente. In der Scherschicht weiter stromauf entsteht hingegen Energie durch Druckdiffusion. Die Rückströmung schließlich verzehrt Energie. Dieser Vorzeichenwechsel macht deutlich, daß Druckschwankungen bei inkompressibler Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld verbunden sind. Bei sehr viel kleineren Amplituden weist die Druckdiffusion PD_{zz} in Abbildung 5.62 einen qualitativ ähnlichen Verlauf auf. Die Betrachtung des entsprechenden Termes der $\langle u_r''^2 \rangle$ -Bilanz in Abbildung 5.64 eröffnet weitaus komplexere physikalische Vorgänge. Auffällig sind die großen Amplituden nahe der Wand, die offensichtlich durch den Wiederanlegevorgang hervorgerufen werden. Während die Zuströmung und die abgelöste Strömung $z/D = 1.84$ nur zwei Vorzeichenwechsel aufweisen, besitzen die Profile der Positionen $z/D = 2.23$ und $z/D = 2.42$ vier Nulldurchgänge.

Die Druck-Scherkorrelation in der Bilanz der $\langle u_z''^2 \rangle$ -Komponente zeigt, daß die Abgabe von Energie an die φ - und r -Komponenten in der wiederanlegenden Scherschicht auf einen fast 10-fachen Wert ansteigt (Abb. 5.65). In Wandnähe des Rezirkulationsgebietes dagegen erhält die Komponente Energie von der $\langle u_r''^2 \rangle$ -Komponente. In allen drei PS -Komponenten ist im Wiederanlegebereich $z/D = 2.23$ und $z/D = 2.42$ eine zunehmende Bedeutung des *splating*-Mechanismus gegenüber der vollentwickelten Zuströmung zu erkennen (Abb. 5.66 und 5.67).

Der Verlauf der viskosen Diffusion aller Normalkomponenten des Reynoldsschen Spannungstensors unterscheidet sich im Rückström- und Wiederanlegegebiet prinzipiell nicht von dem in vollentwickelter Rohrströmung. Lediglich die Amplituden erhöhen sich zum Teil erheblich.

Für den VD_{zz} -Term (Abb. 5.68) scheinen sich die Vorgänge, die für einfache Scherströmung in Wandnähe typisch sind, im Wiederanlegebereich zu wiederholen. Ähnliches gilt auch für die viskosen Diffusionsvorgänge der φ - und r -Komponenten in Abb. 5.69 und 5.70. Den Profilen in Abbildung 5.70, insbesondere für $z/D = 2.23$ und $z/D = 2.42$, entnimmt man schließlich, daß zusätzliche Stichproben (u.U. sehr viele) die Verläufe vermutlich glätten.

Die in Abbildungen 5.71 und 5.72 dargestellten Profile der Dissipation in den Bilanzen der axialen und azimuthalen Spannungskomponenten zeigen eine quantitativ verblüffend gute Übereinstimmung dieser beiden Komponenten im Wiederanlegebereich. Maximale Dissipationsraten von $DS_{zz} \approx 300$ und $DS_{\varphi\varphi} \approx 300$ werden bei $z/D = 2.43$ an der Wand beobachtet. Dagegen stellt sich der Maximalwert von DS_{rr} (Abbildung 5.73) in der freien Scherschicht ein.

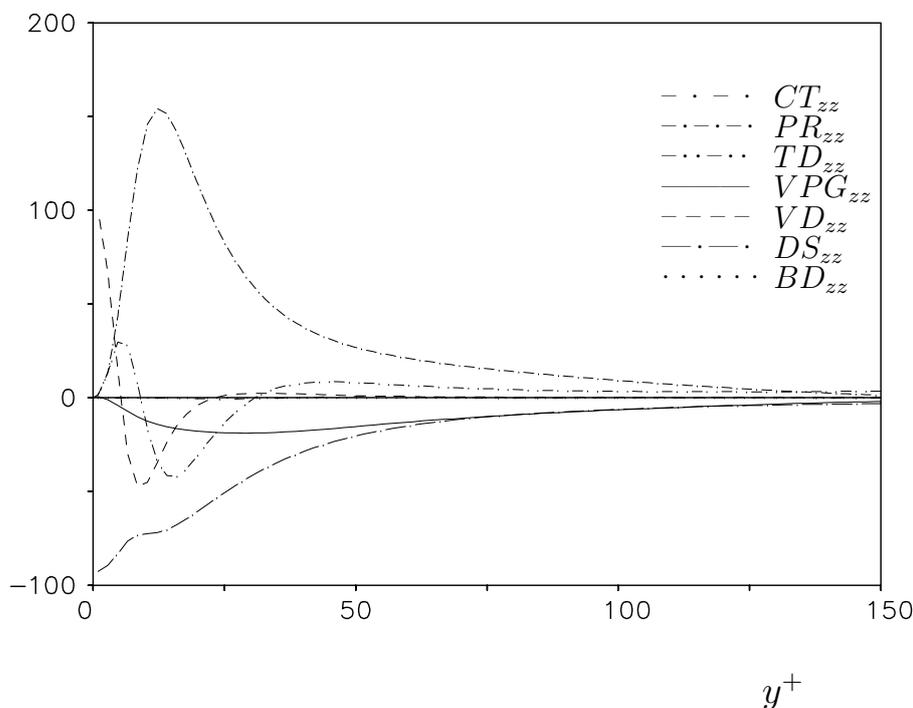


ABBILDUNG 5.35: Bilanz der Turbulenzintensität in Axialrichtung im Bereich der vollentwickelten Zuströmung.

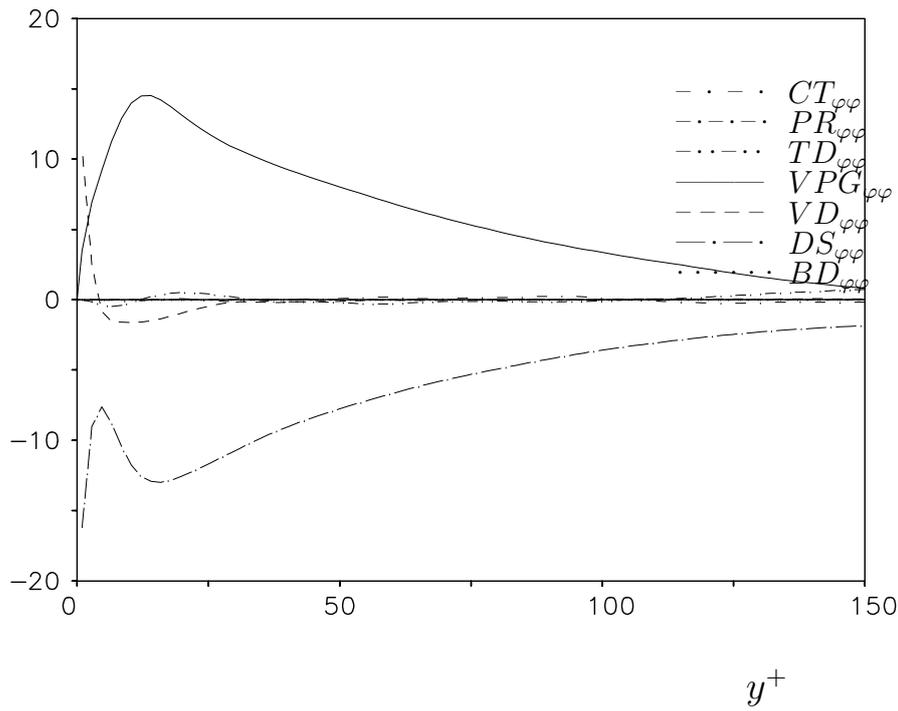


ABBILDUNG 5.36: Bilanz der Turbulenzintensität in Umfangsrichtung im Bereich der vollentwickelten Zuströmung.

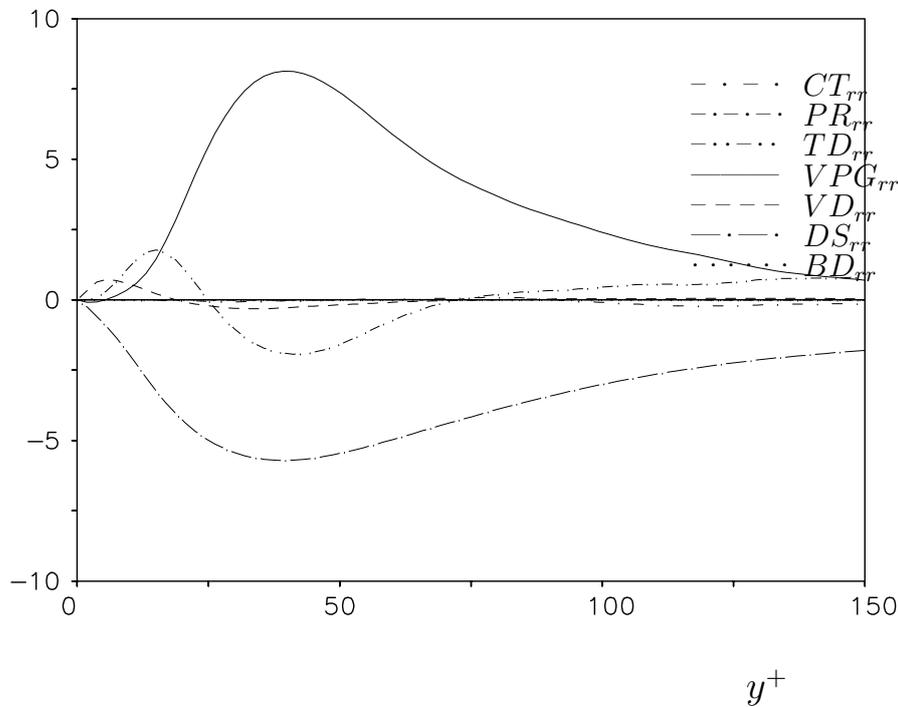


ABBILDUNG 5.37: Bilanz der Turbulenzintensität in Radialrichtung im Bereich der vollentwickelten Zuströmung.

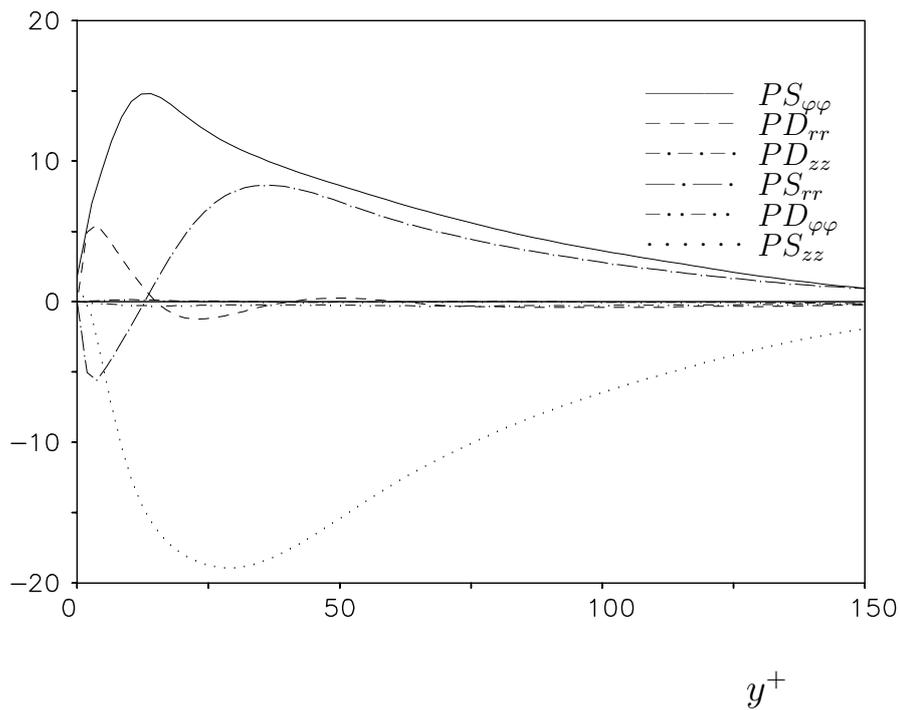


ABBILDUNG 5.38: Druckdiffusion und Druck-Scherkorrelation im Bereich der vollentwickelten Zuströmung.

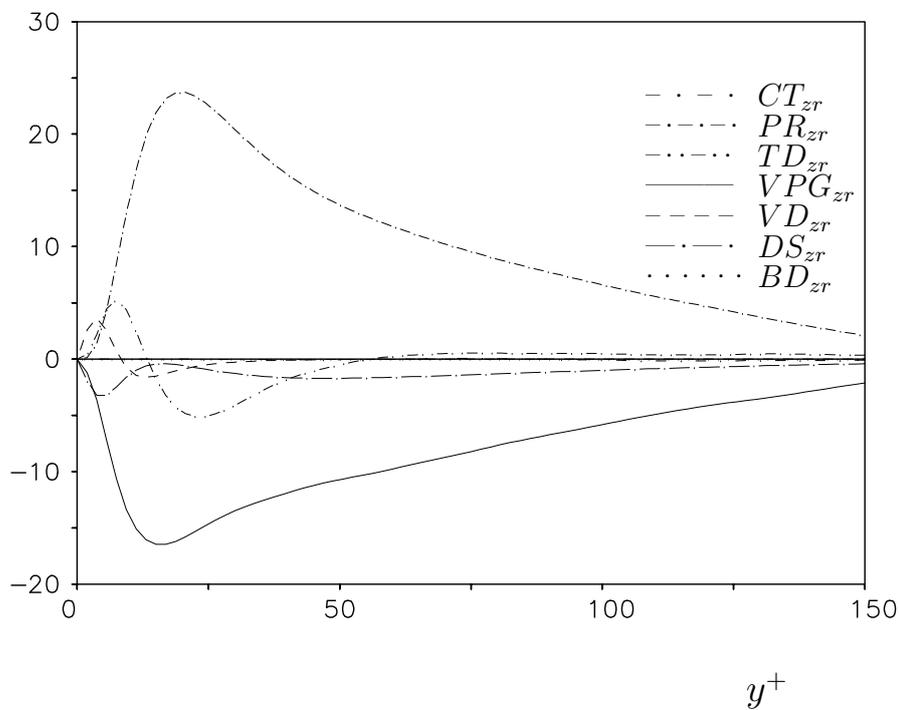


ABBILDUNG 5.39: Bilanz der Reynoldsschen Schubspannung im Bereich der vollentwickelten Zuströmung.

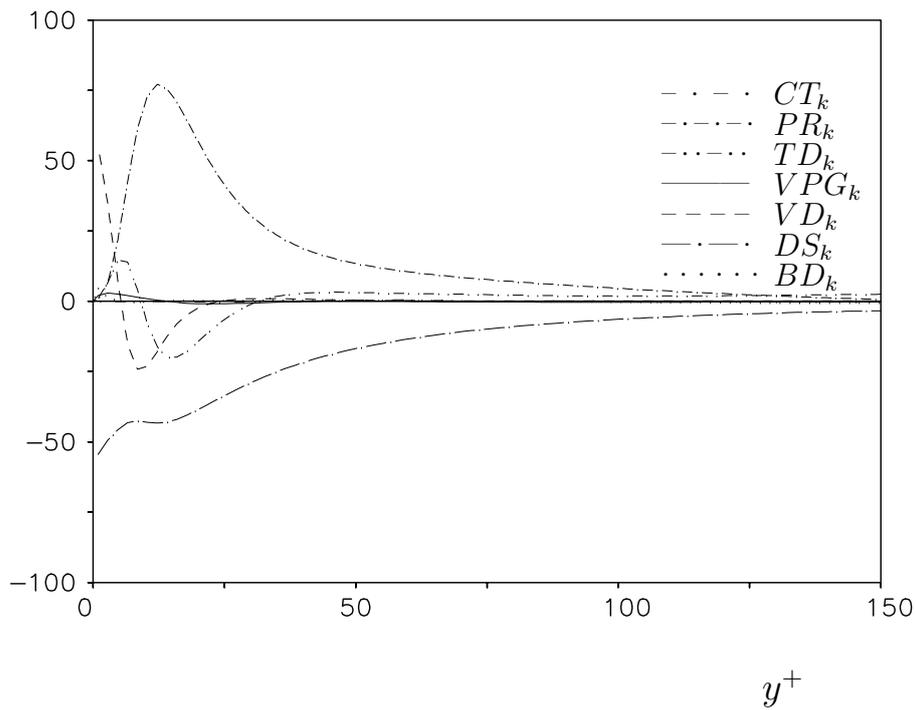


ABBILDUNG 5.40: Bilanz der turbulenten kinetischen Energie im Bereich der vollentwickelten Zuströmung.

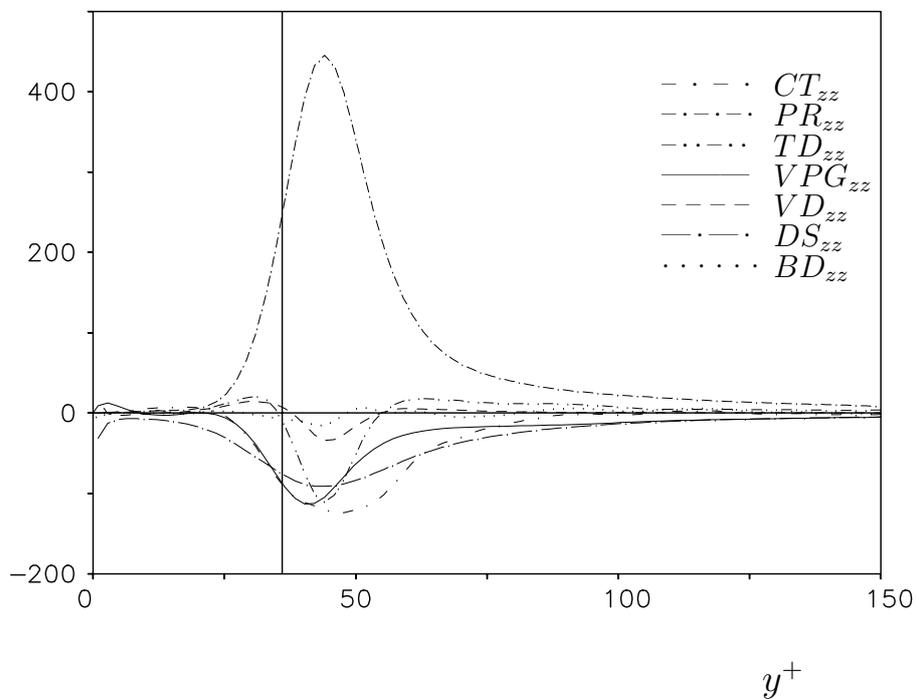


ABBILDUNG 5.41: Bilanz der Turbulenzintensität in Axialrichtung für die axiale Position $z/D = 1.84$.

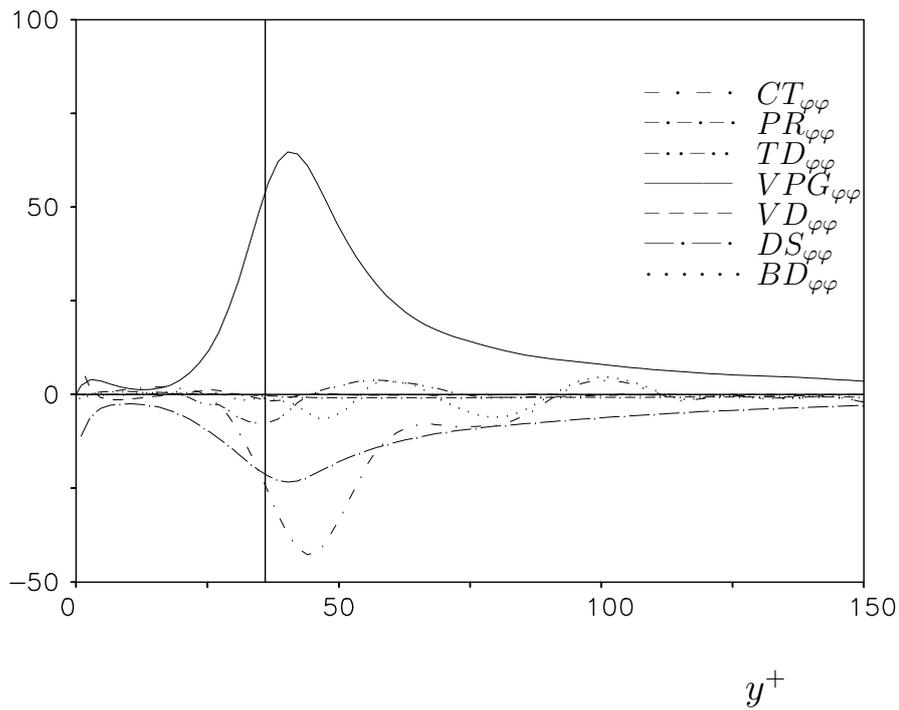


ABBILDUNG 5.42: Bilanz der Turbulenzintensität in Umfangsrichtung für die axiale Position $z/D = 1.84$.

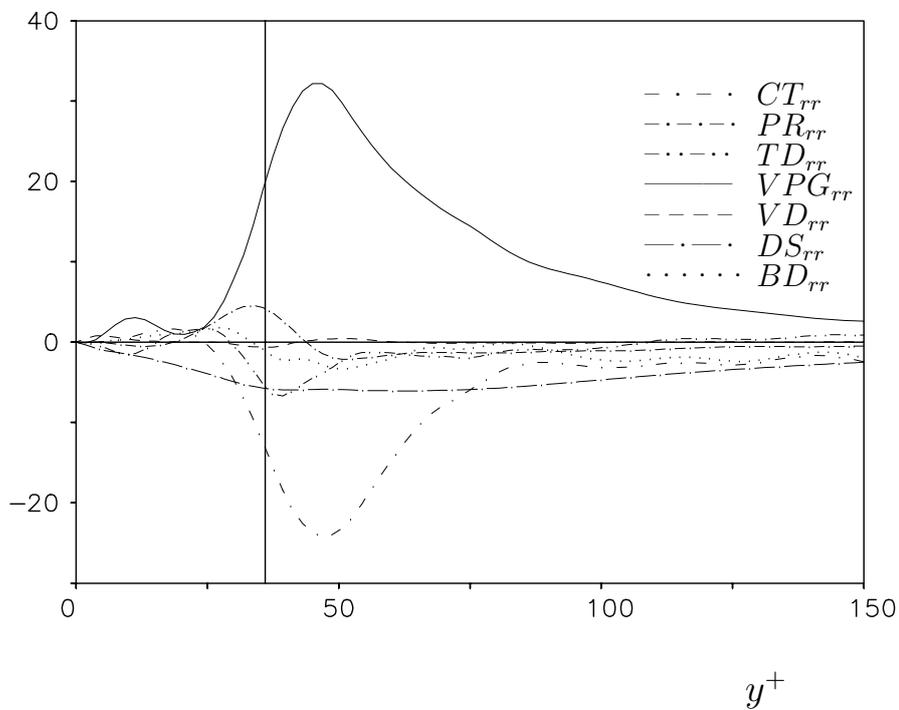


ABBILDUNG 5.43: Bilanz der Turbulenzintensität in Radialrichtung für die axiale Position $z/D = 1.84$.

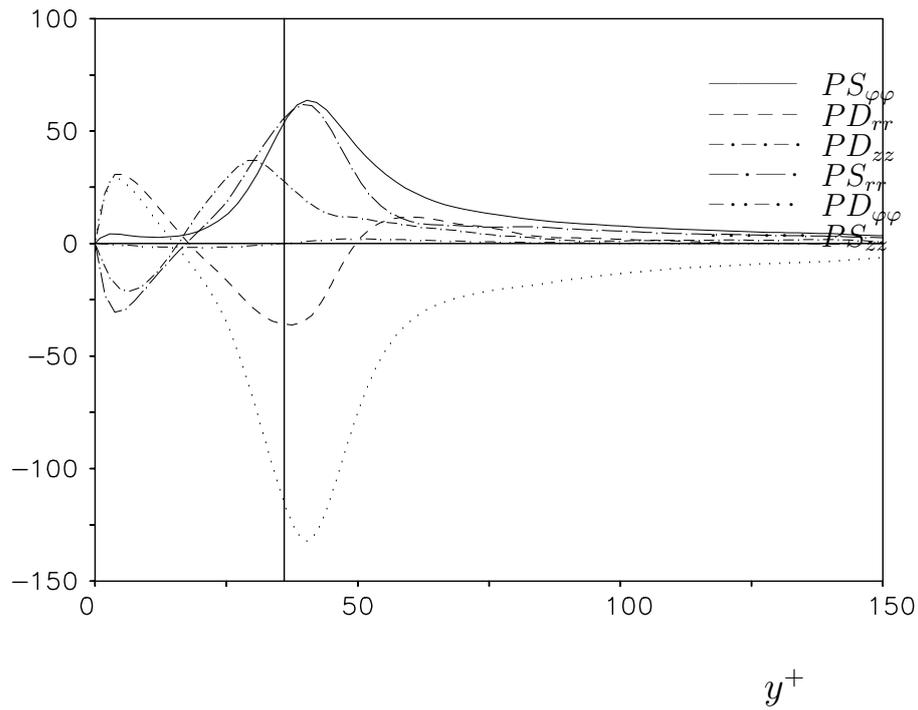


ABBILDUNG 5.44: Druckdiffusion und Druck-Scherkorrelation für die axiale Position $z/D = 1.84$.

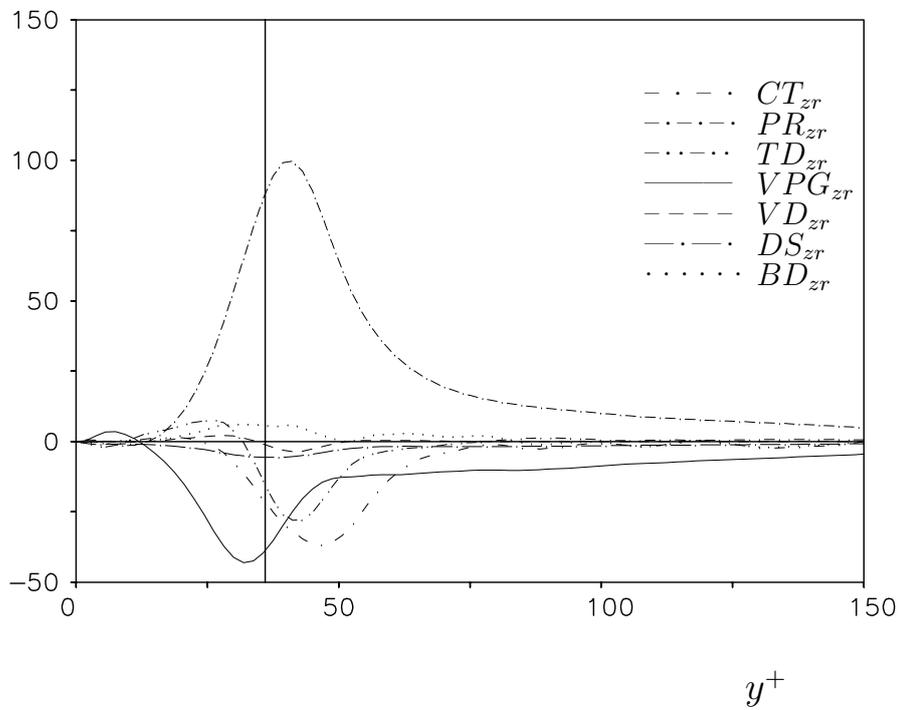


ABBILDUNG 5.45: Bilanz der Reynoldsschen Schubspannung für die axiale Position $z/D = 1.84$.

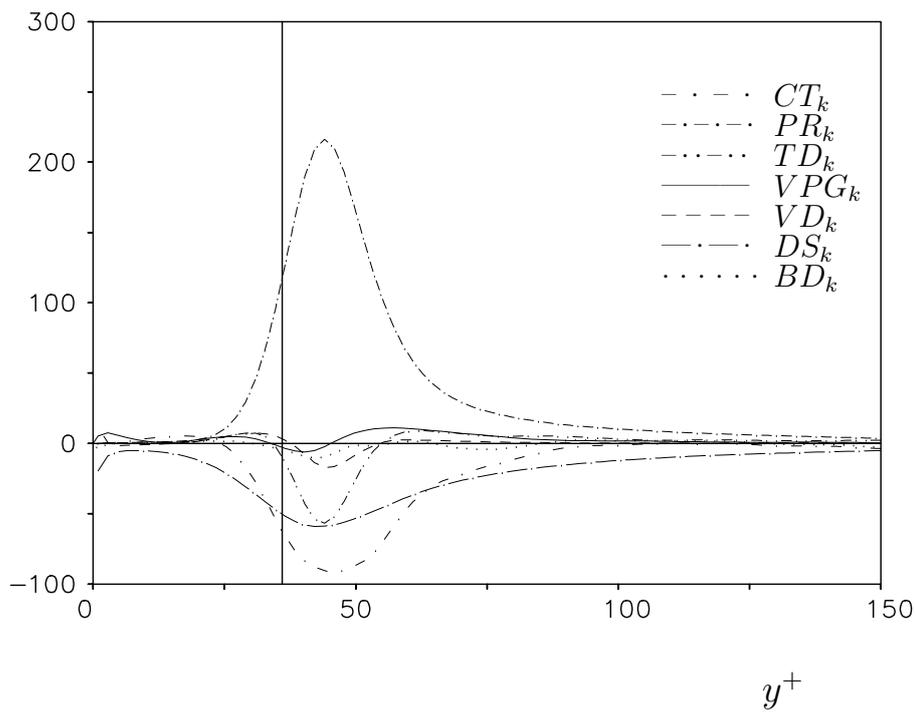


ABBILDUNG 5.46: Bilanz der turbulenten kinetischen Energie für die axiale Position $z/D = 1.84$.

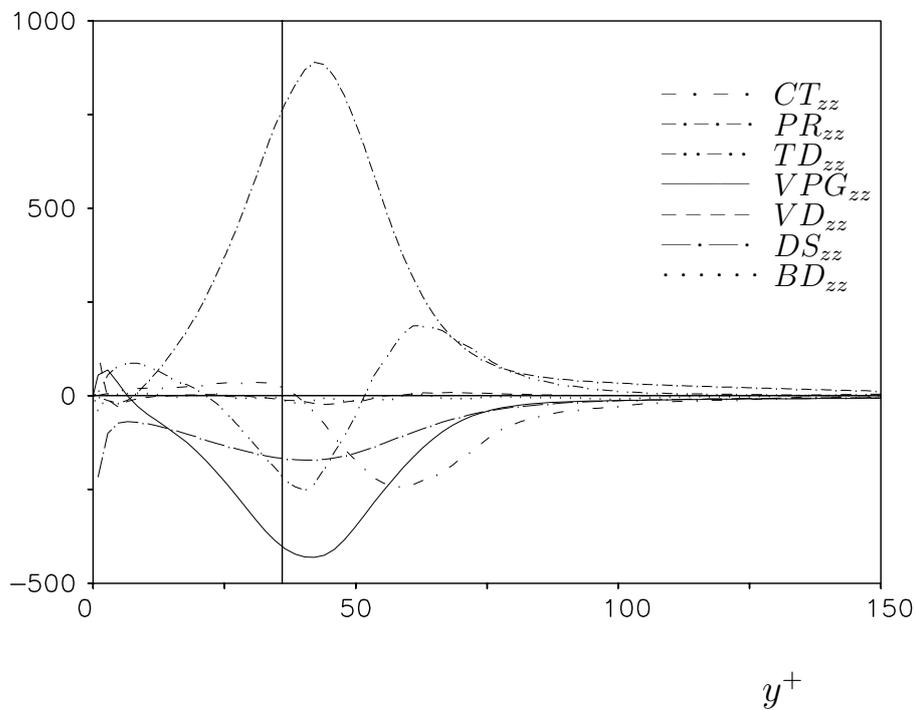


ABBILDUNG 5.47: Bilanz der Turbulenzintensität in Axialrichtung für die axiale Position $z/D = 2.23$ (Wiederanlegebereich).

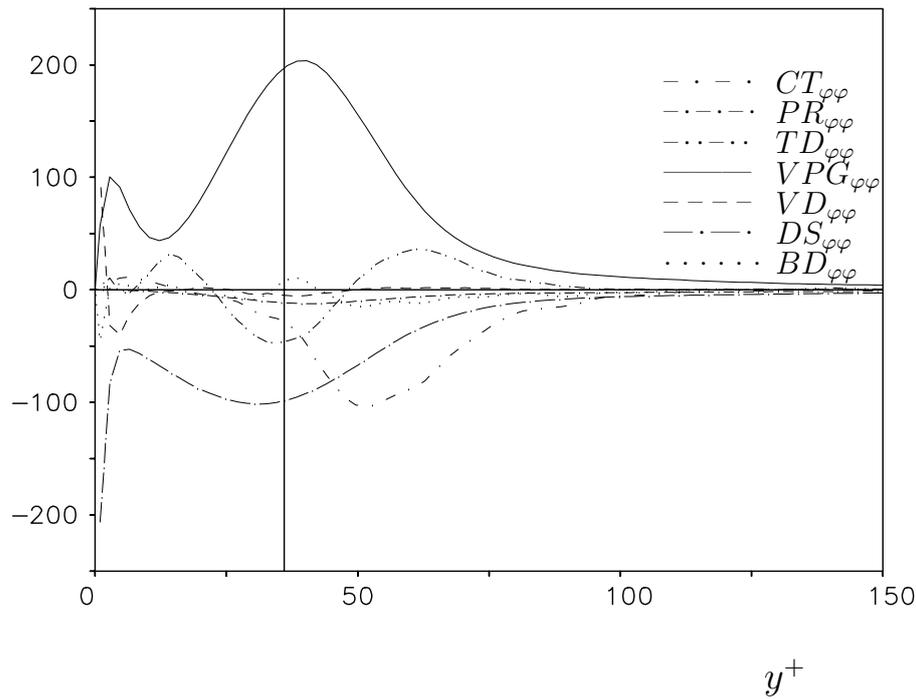


ABBILDUNG 5.48: Bilanz der Turbulenzintensität in Umfangsrichtung für die axiale Position $z/D = 2.23$ (Wiederanlegebereich).

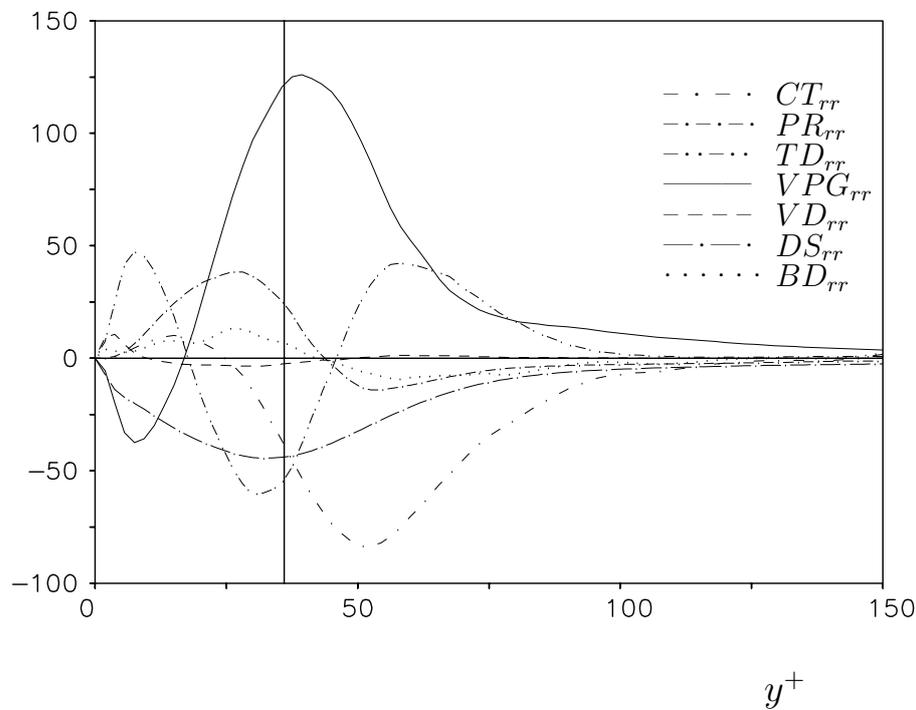


ABBILDUNG 5.49: Bilanz der Turbulenzintensität in Radialrichtung für die axiale Position $z/D = 2.23$ (Wiederanlegebereich).

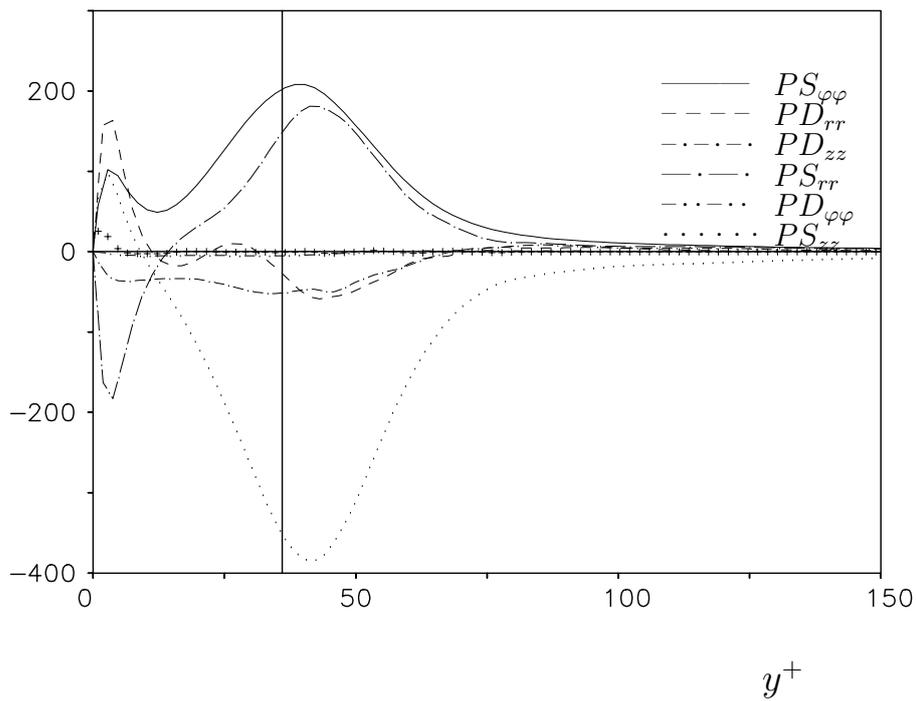


ABBILDUNG 5.50: Druckdiffusion und Druck-Scherkorrelation für die axiale Position $z/D = 2.23$ (Wiederanlegebereich). Summe der PS -Terme: (+).

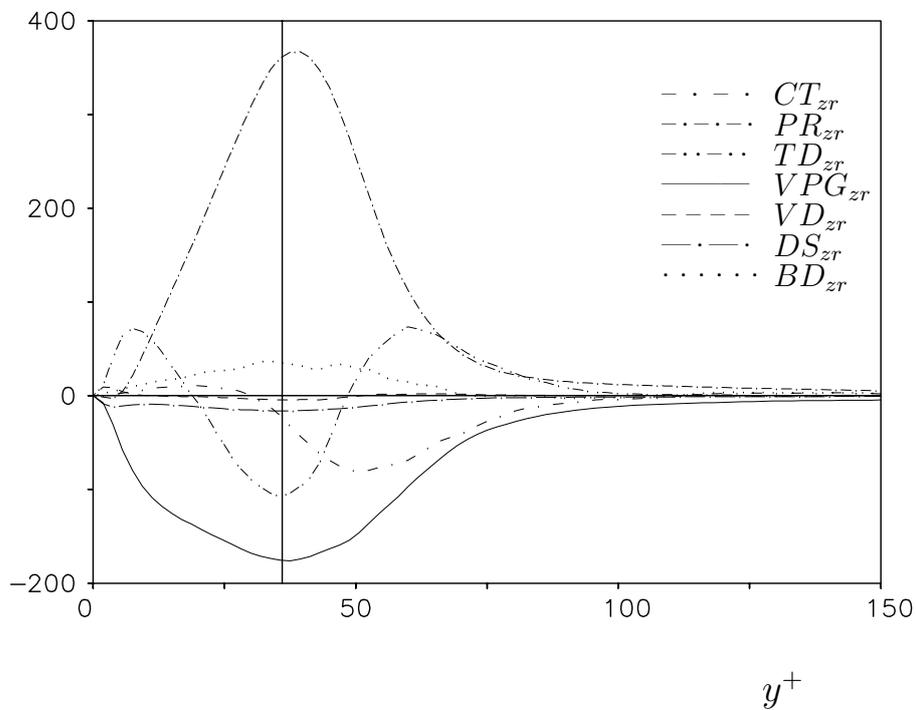


ABBILDUNG 5.51: Bilanz der Reynoldschen Schubspannung für die axiale Position $z/D = 2.23$ (Wiederanlegebereich).

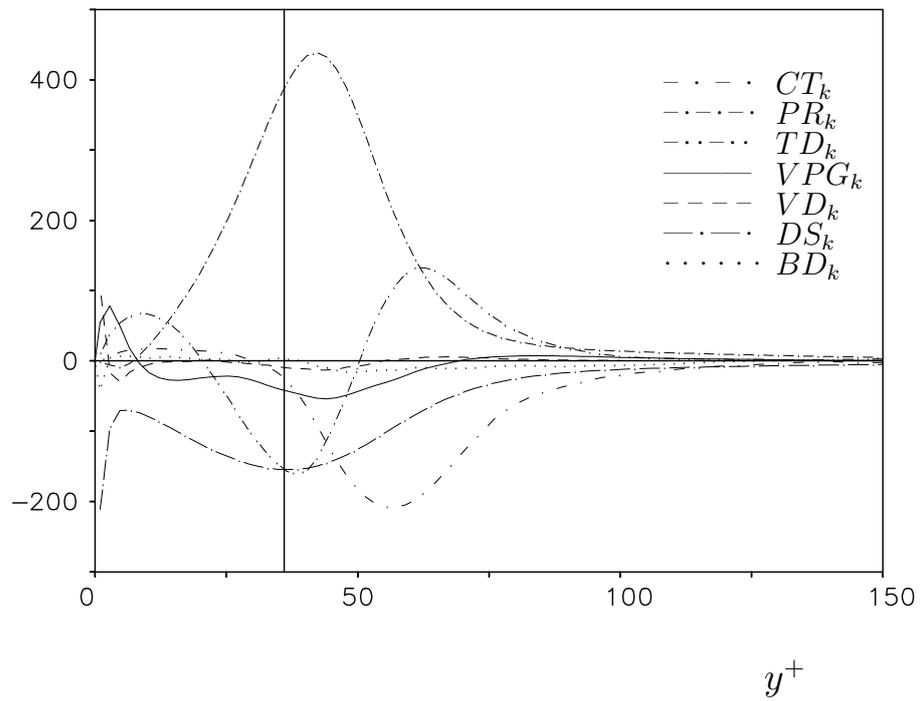


ABBILDUNG 5.52: Bilanz der turbulenten kinetischen Energie für die axiale Position $z/D = 2.23$ (Wiederanlegebereich).

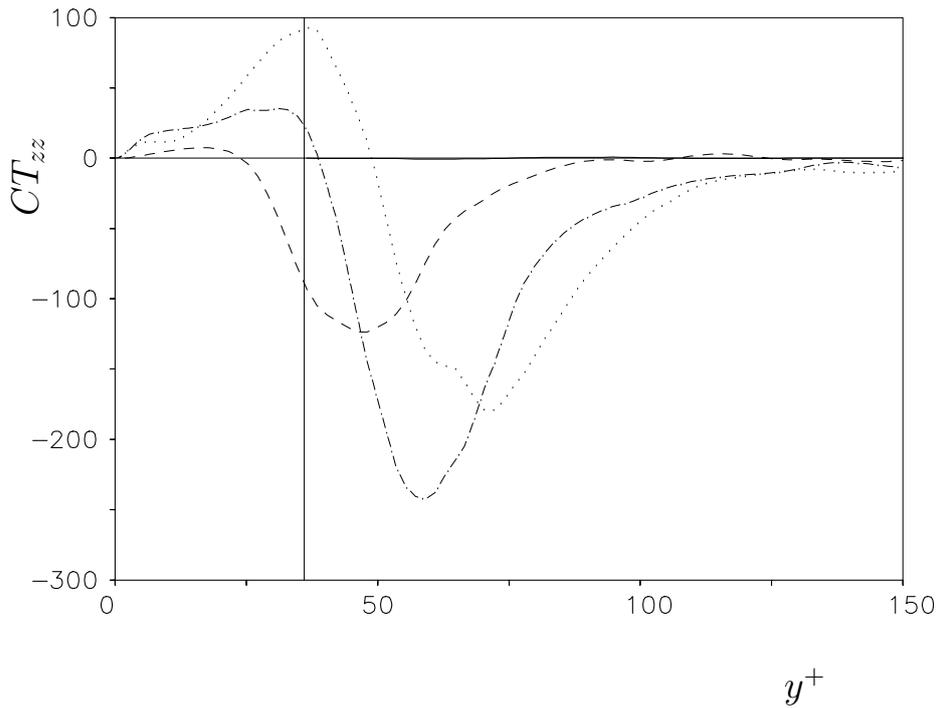


ABBILDUNG 5.53: Konvektion der Turbulenzintensität in axialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

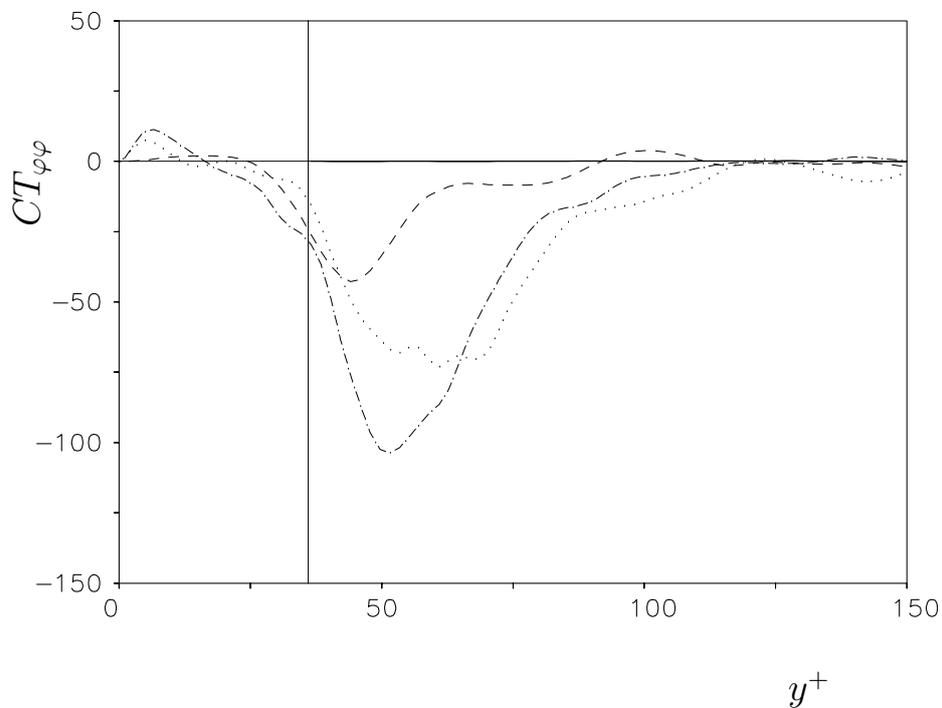


ABBILDUNG 5.54: Konvektion der Turbulenzintensität in azimuthaler Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

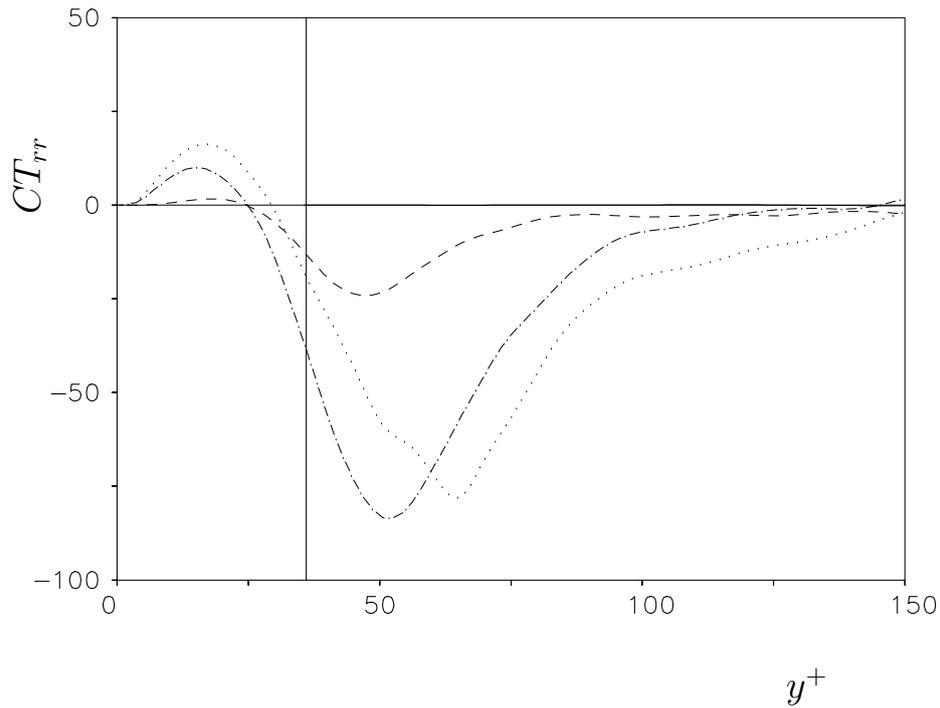


ABBILDUNG 5.55: Konvektion der Turbulenzintensität in radialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

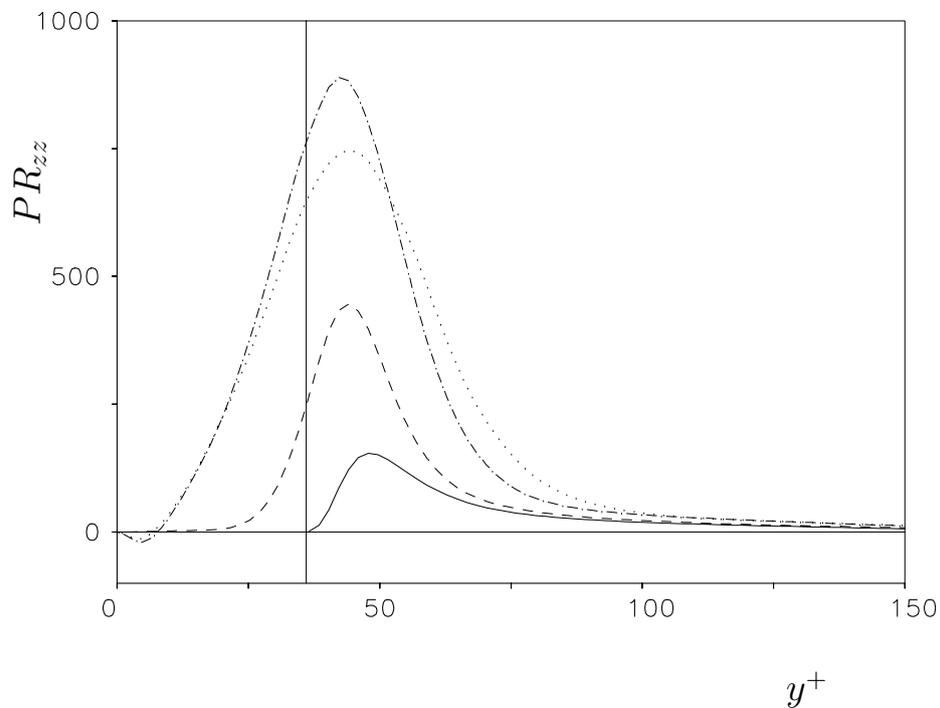


ABBILDUNG 5.56: Produktion der Turbulenzintensität in axialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

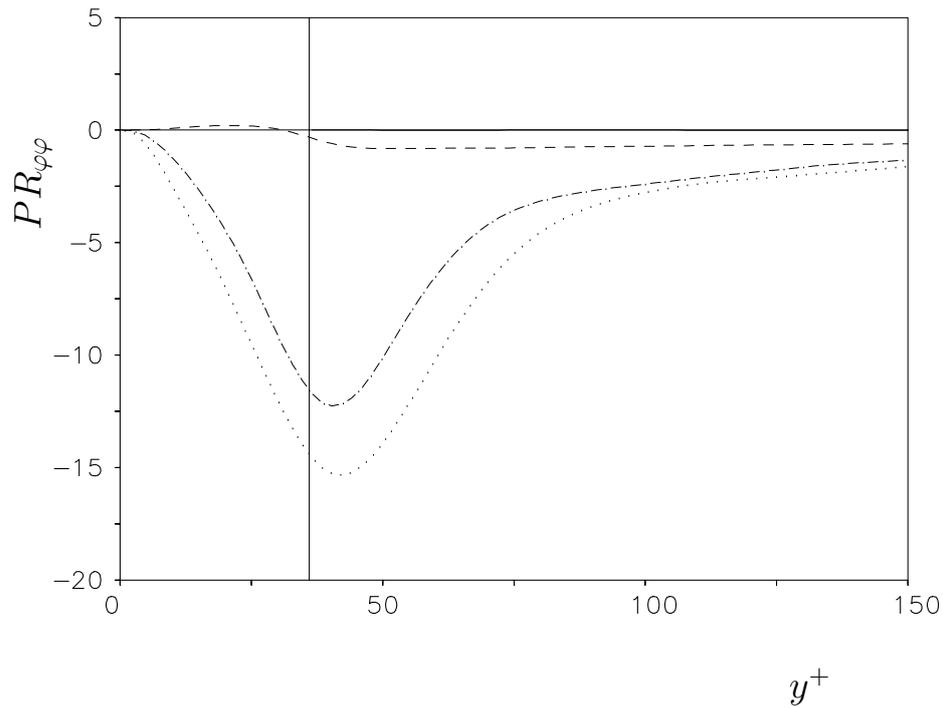


ABBILDUNG 5.57: Produktion der Turbulenzintensität in azimuthaler Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

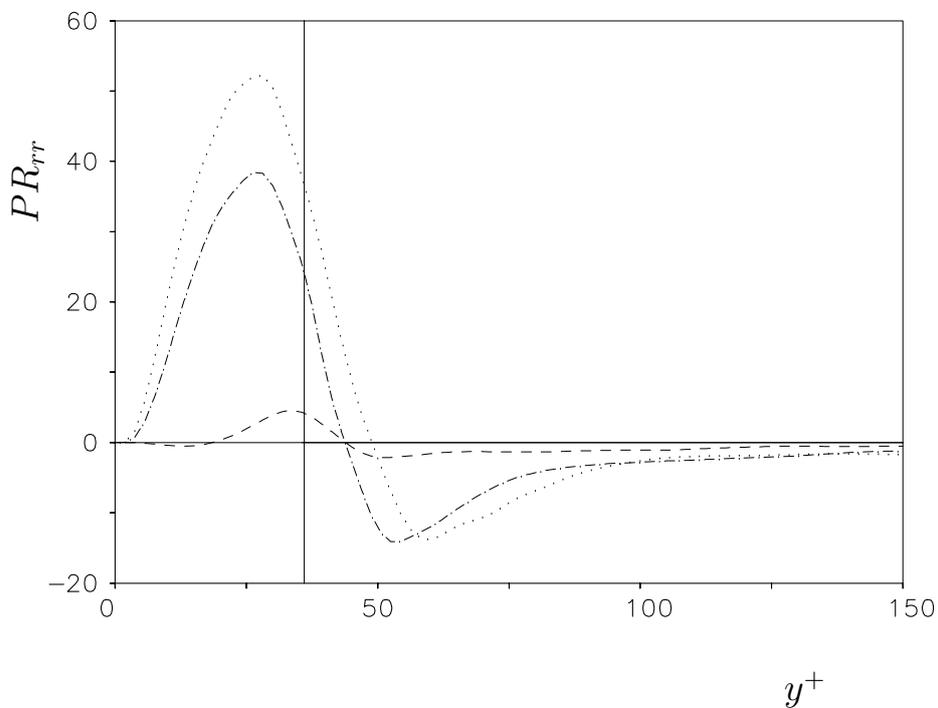


ABBILDUNG 5.58: Produktion der Turbulenzintensität in radialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

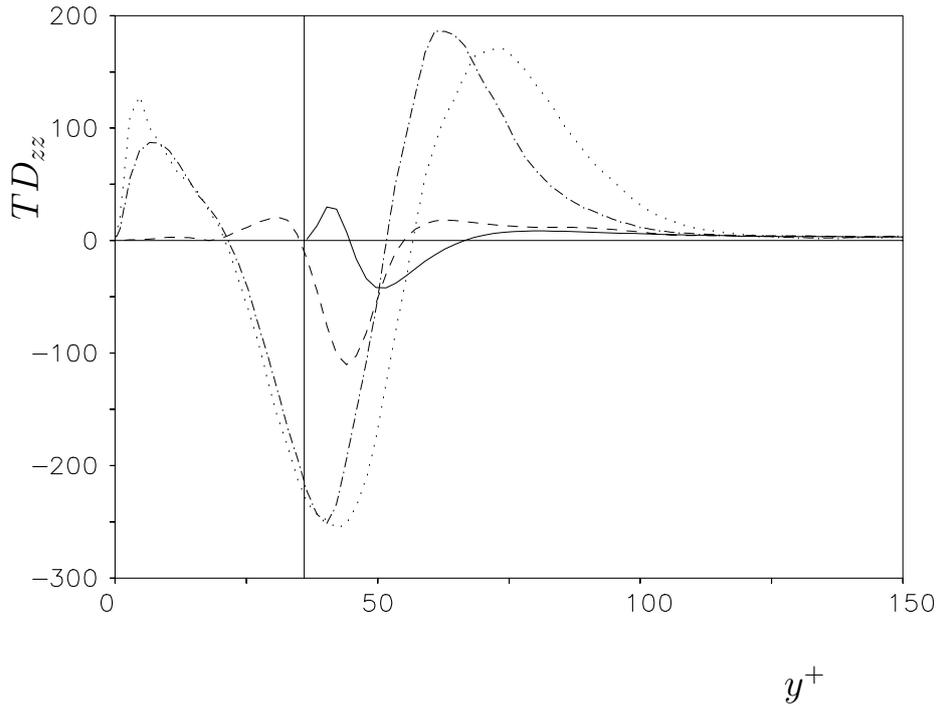


ABBILDUNG 5.59: Turbulente Diffusion der Turbulenzintensität in axialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (——), $z = 1.84$ (----), $z = 2.23$ (-·-·-·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

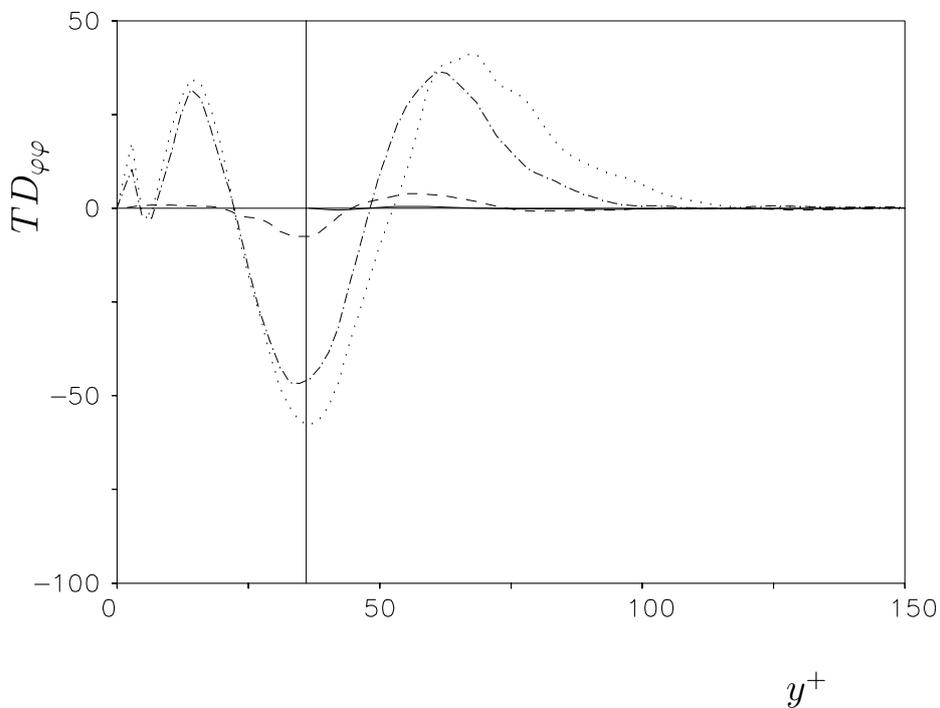


ABBILDUNG 5.60: Turbulente Diffusion der Turbulenzintensität in azimuthaler Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (——), $z = 1.84$ (----), $z = 2.23$ (-·-·-·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

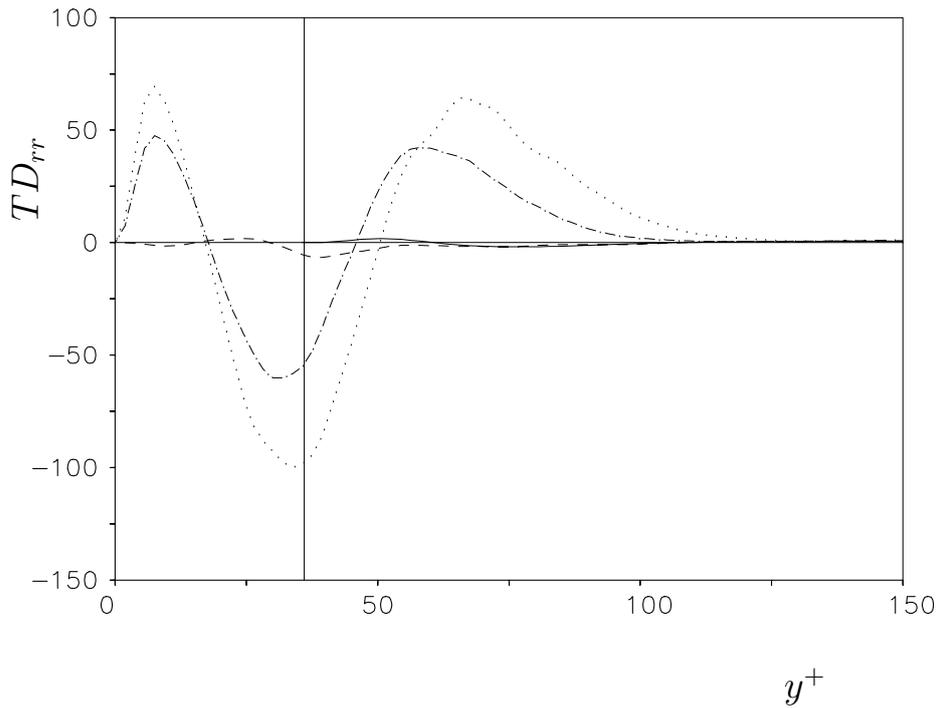


ABBILDUNG 5.61: Turbulente Diffusion der Turbulenzintensität in radialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

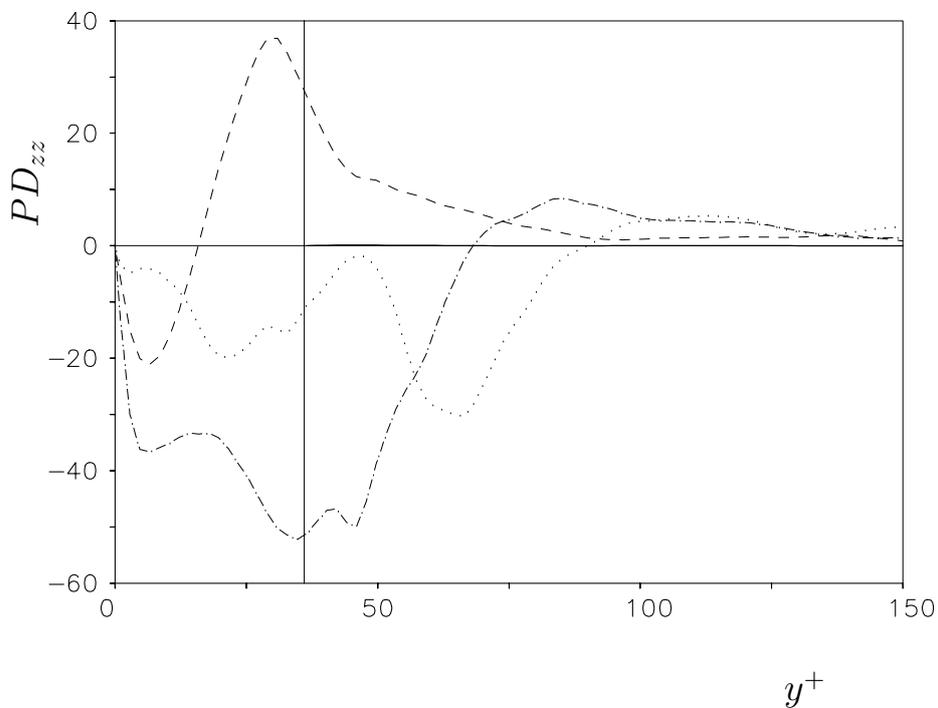


ABBILDUNG 5.62: Druckdiffusion der Turbulenzintensität in axialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

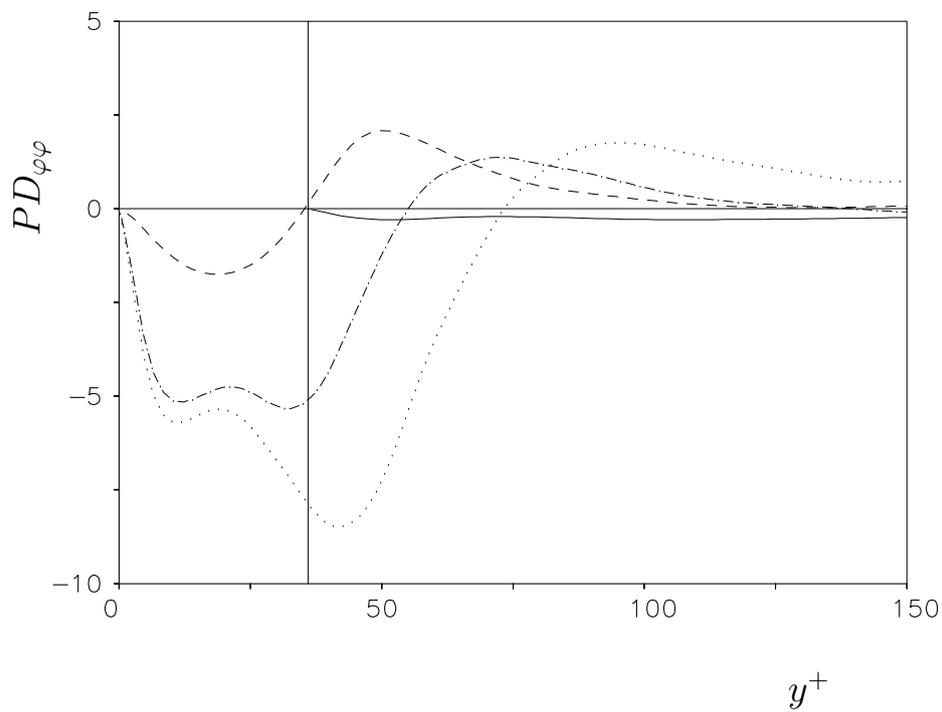


ABBILDUNG 5.63: Druckdiffusion der Turbulenzintensität in azimuthaler Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

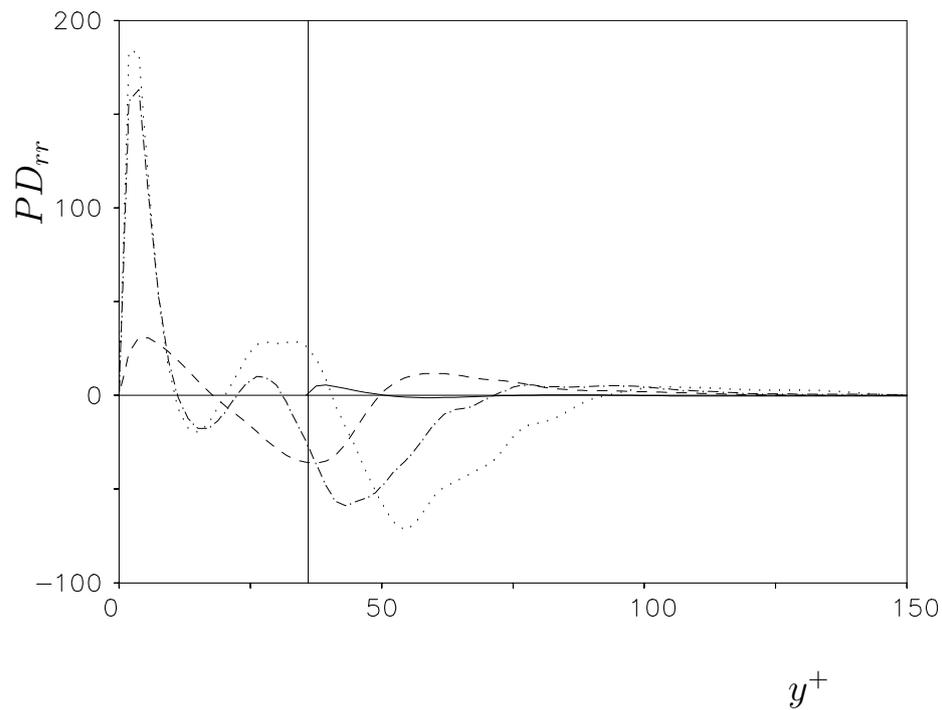


ABBILDUNG 5.64: Druckdiffusion der Turbulenzintensität in radialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

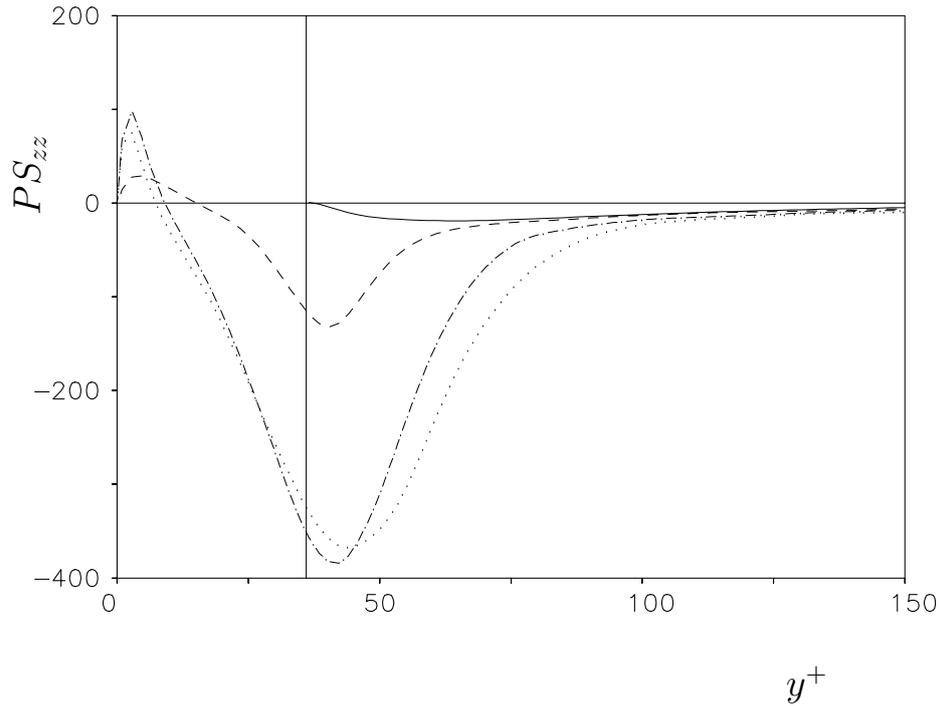


ABBILDUNG 5.65: Druck-Scherkorrelation der Turbulenzintensität in axialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (——), $z = 1.84$ (----), $z = 2.23$ (-·-·-·), $z = 2.42$ (·····).

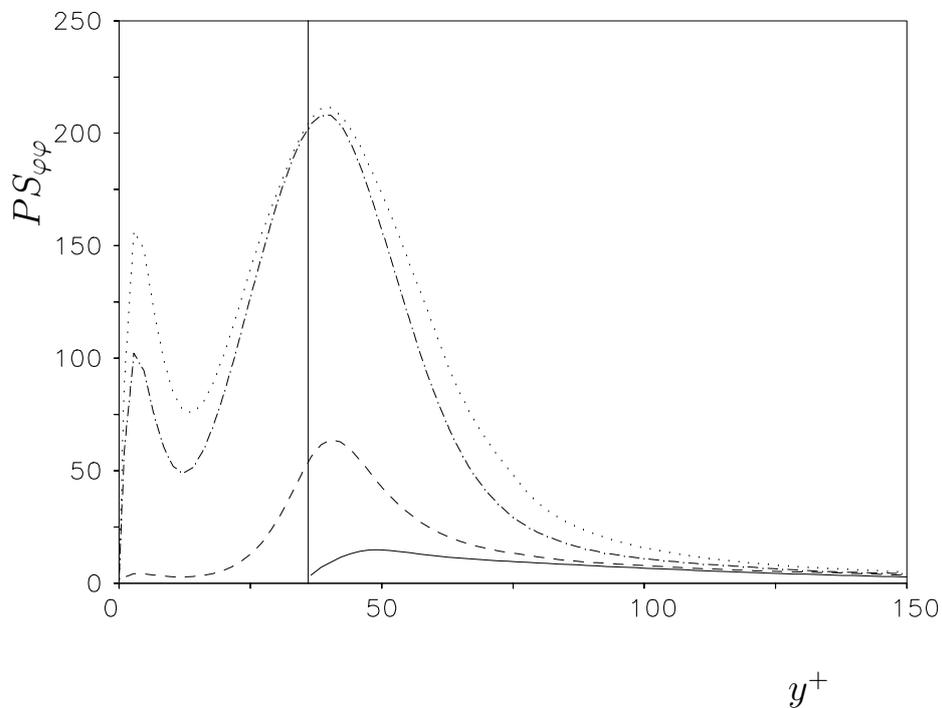


ABBILDUNG 5.66: Druck-Scherkorrelation der Turbulenzintensität in azimuthaler Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (——), $z = 1.84$ (----), $z = 2.23$ (-·-·-·), $z = 2.42$ (·····).

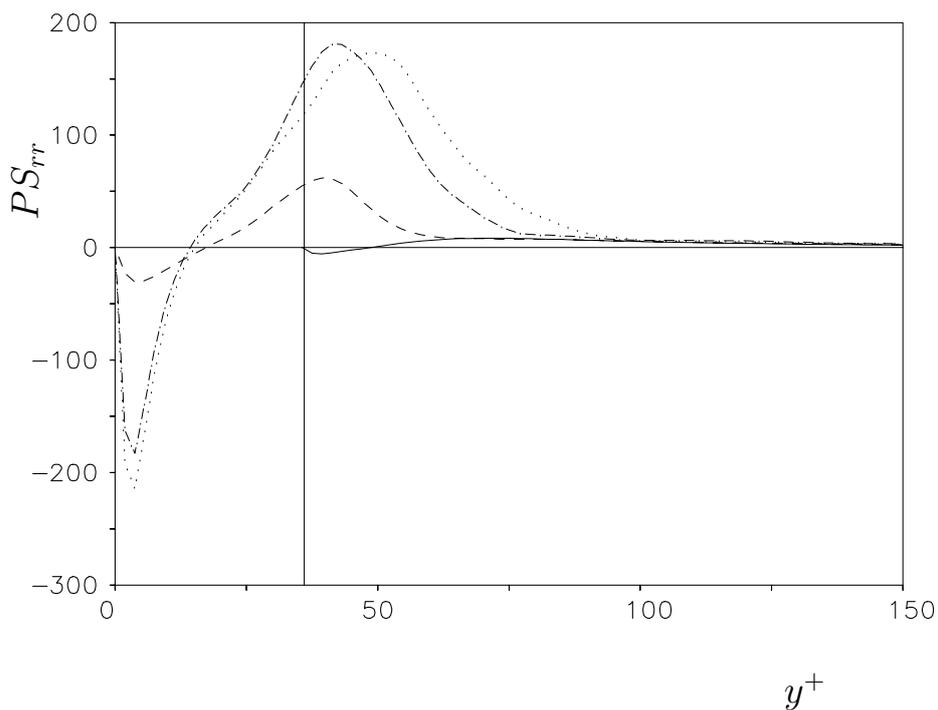


ABBILDUNG 5.67: Druck-Scherkorrelation der Turbulenzintensität in radialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (-----), $z = 2.23$ (-·-·-·-·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

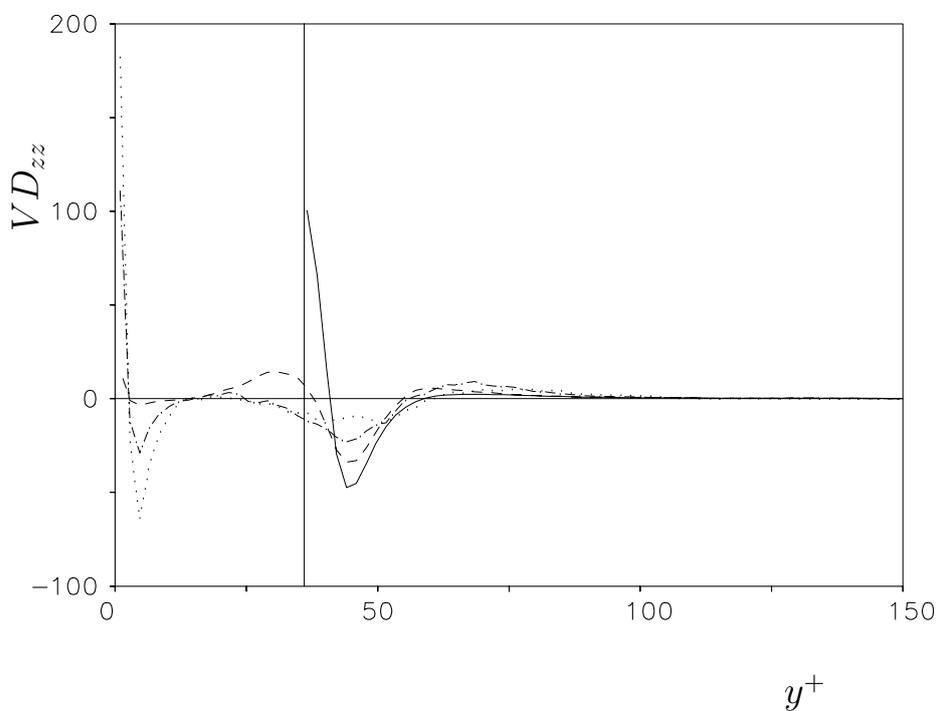


ABBILDUNG 5.68: Viskose Diffusion der Turbulenzintensität in axialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (-----), $z = 2.23$ (-·-·-·-·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

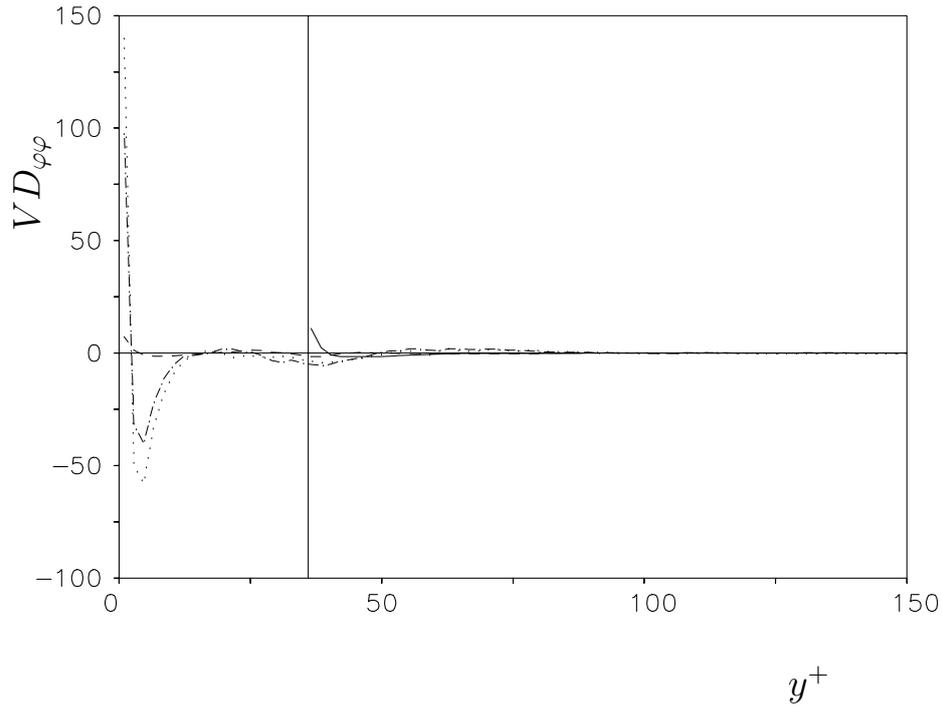


ABBILDUNG 5.69: Viskose Diffusion der Turbulenzintensität in azimuthaler Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

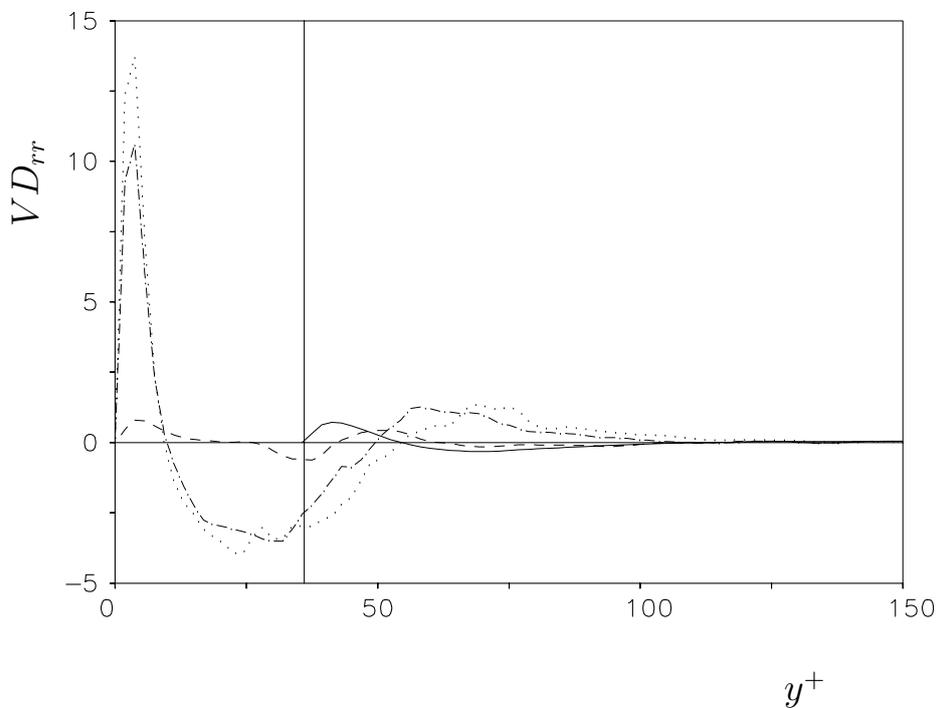


ABBILDUNG 5.70: Viskose Diffusion der Turbulenzintensität in radialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

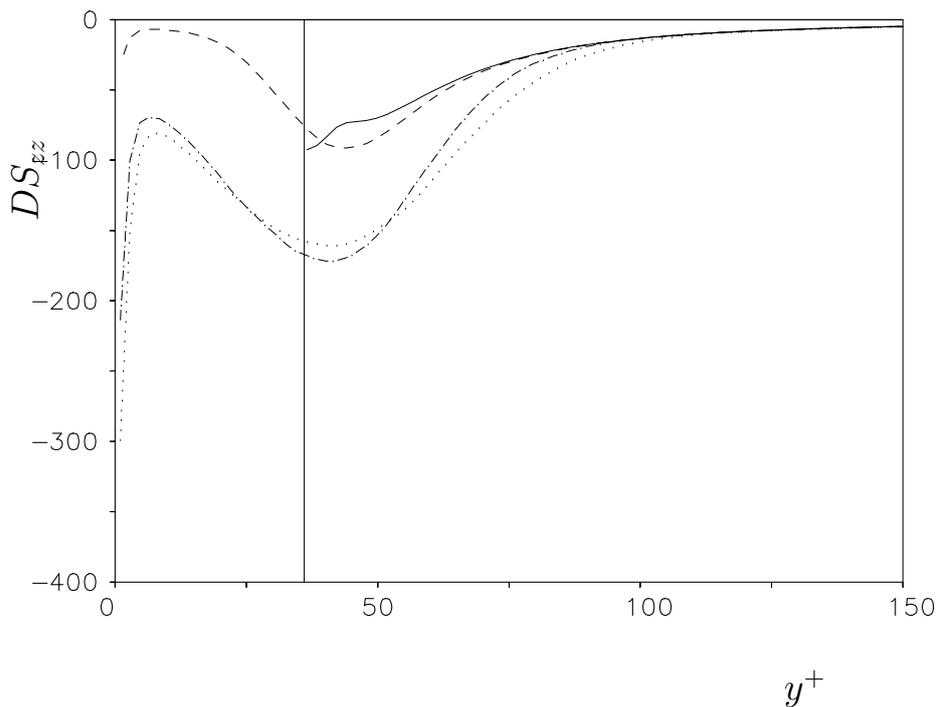


ABBILDUNG 5.71: Viskose Dissipation der Turbulenzintensität in axialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

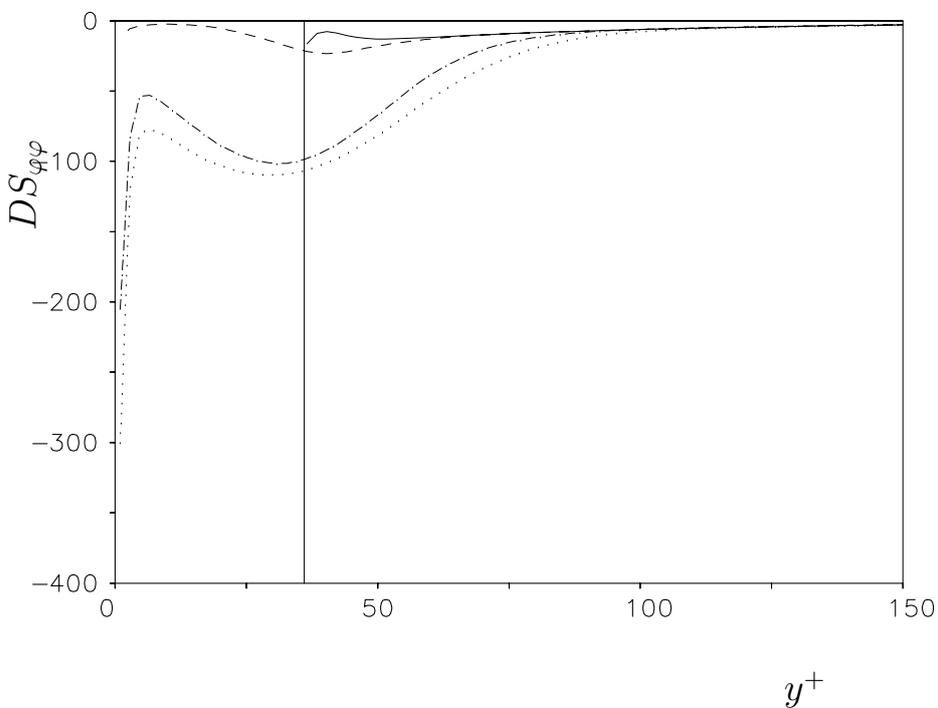


ABBILDUNG 5.72: Viskose Dissipation der Turbulenzintensität in azimuthaler Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

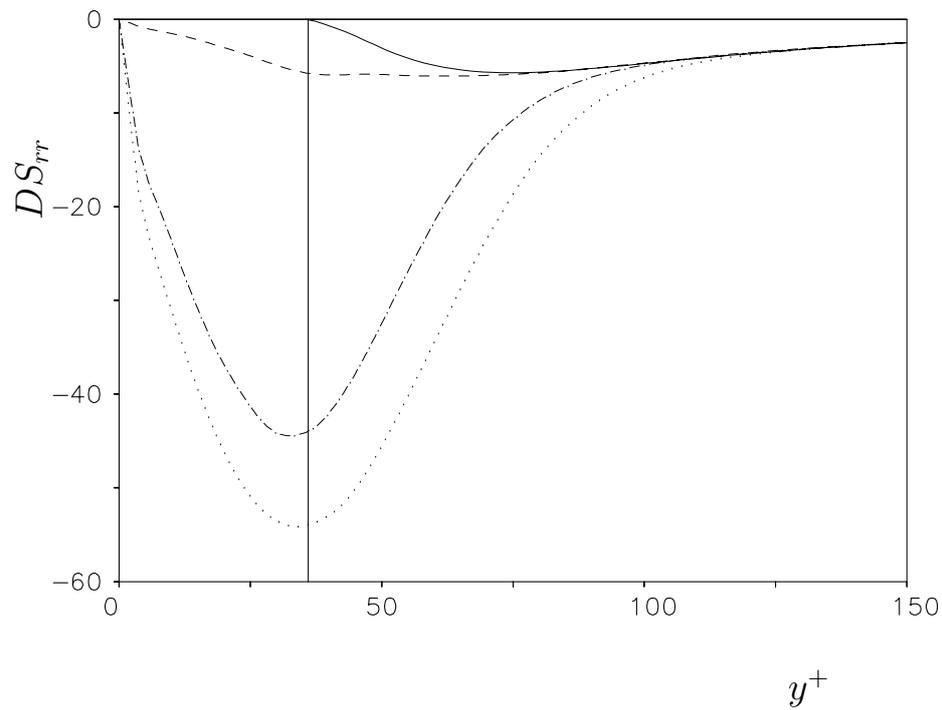


ABBILDUNG 5.73: Viskose Dissipation der Turbulenzintensität in radialer Richtung an vier axialen Positionen. Linien: $z = 0.1$ (———), $z = 1.84$ (- - - - -), $z = 2.23$ (- · - · - ·), $z = 2.42$ (· · · · ·).

5.7 Leistungsdichtespektren

Bei der Auswertung der Leistungsdichtespektren wird das Turbulenzfeld in seine Wellenanteile bzw. Frequenzen aufgespalten. In der vorliegenden Arbeit lassen sich die dafür benötigten diskreten Fourier-Transformationen nur in der homogenen φ -Richtung und auf der Zeitachse anwenden. Im Fall der räumlichen Leistungsdichtespektren muß darauf hingewiesen werden, daß diese im Bereich der Rohrachse wenig Sinn machen, da hier die Radien der Zylinderkoordinaten sehr klein werden.

Die in Kapitel 5.1 besprochenen Zeitreihen der Positionen P_1 bis P_4 wurden zur Bildung von Leistungsdichtespektren herangezogen. In Abbildung 5.74 sind diese über der Kreisfrequenz ω aufgetragen. Während der Abbildung 5.74a die Zeitreihe an der Position P_1 ($y^+ \approx 5$) der Zuströmung zugrunde liegt, zeigt Abbildung 5.74b die Energiespektren der Position P_2 in unmittelbarer Nähe der Stufenkante. Die Verläufe der beiden Spektraldichten unterscheiden sich lediglich durch geringfügig höhere Energie in der Radialkomponente und geben einen kontinuierlichen und (entsprechend der niedrigen Reynoldszahl) steilen Abfall wieder, der sich über einen relativ großen Frequenzbereich erstreckt.

Ein in der Literatur viel diskutierter Punkt ist die Bewegung der wiederanlegenden Scherschicht um den mittleren Wiederanlegepunkt. Während diese Bewegung in der Strömung durch die Kanalerweiterung eine ausgezeichnete Frequenz aufweist (siehe Eaton und Johnston [16], Arnal und Friedrich [5] u.a.), zeigen Stieglmeier et al. [62] anhand von Energiespektren im Wiederanlegegebiet, daß diese Bewegung in der achsensymmetrischen Geometrie stochastische Schwankungen um den mittleren Wiederanlegepunkt ausführt. Repräsentativ für den Wiederanlegebereich werden in Abbildung 5.74c die Leistungsdichtespektren an der Position $(z, r) = (2.32, 0.586)$ veranschaulicht. Mit dem kontinuierlichen Abfall wird einerseits die Beobachtung von Stieglmeier et al. [62] bestätigt und andererseits ein prinzipieller Unterschied zu der Strömung durch die ebene Geometrie wiedergegeben. Es bestätigt sich auch die im vorherigen Kapitel bemerkten Ähnlichkeiten im Verhalten der u_z - und u_φ -Komponente. Abbildung 5.74c läßt sogar den Schluß zu, daß im Wiederanlegebereich axialsymmetrische Turbulenz vorliegt, wobei die Wandnormale die Achse darstellt.

Die nahezu isotrope Strömung im Kernbereich wird durch die praktisch übereinstimmenden Energiespektren der drei Geschwindigkeitskomponenten der Position P_4 wiedergegeben. Wie aus den zeitlichen Korrelationsfunktionen (Kapitel 5.1) ersichtlich wird, sind statistische Mittelwerte nahe der Rohrachse weniger stabil (daher die Oszillationen in Abbildung 5.74d). Die spektrale Verteilung der in u_φ'' steckenden Energie deckt sich praktisch mit dem Verlauf von S_{rr} .

In Abbildung 5.75 werden die in Umfangsrichtung gebildeten eindimensionalen Leistungsdich-

tespektren vierer unterschiedlicher axialer Positionen mit konstanter Abstand von der Rohrachse $r/D = 0.487$ veranschaulicht. Im Vergleich zur Stufenkante $z/D = 1.54$ verlaufen alle Leistungsdichtespektren in der freien Scherschicht $z/D = 1.84$, $z/D = 2.14$ und $z/D = 2.42$ auf einem deutlich höheren Energieniveau. Besonders ausgeprägt sind die Anfachungsraten in der radialen Geschwindigkeitskomponente zwischen den Positionen $z/D = 1.54$ und $z/D = 1.84$. Bei kleinen Wellenzahlen bewirken sie Änderungen von zwei Größenordnungen in S_{rr} . Die Ursache hierfür ist darin zu suchen, daß das u_r'' -Feld sich frei entwickeln kann (ohne die stark dämpfende Wirkung einer Wand). Die Strömung erholt sich sozusagen von der kinematischen Zwangsbedingung $u_r'' = 0$, was gleichzeitig zu stark ansteigenden Reynoldsspannungen und Produktionsraten führt. Ein ähnliches Verhalten wird entlang der erweiterten Rohrwand beobachtet. Während die Energiespektren in den Abbildungen 5.76a und 5.76b im wandnahen Rückströmgebiet ($(z, r) = (1.54, 0.58)$ und $(z, r) = (1.84, 0.58)$) einen sehr kleinen Energiegehalt ausweisen, steigt dieser in den Abbildungen 5.76c und 5.76d mit zunehmender Annäherung an den mittleren Wiederanlegepunkt. Wie schon in Abb. 5.74c bemerkt, deutet Abb. 5.76c auf axialsymmetrische Turbulenz im Wiederanlegebereich hin.

Aus dem sich über einen großen Wellenzahlbereich erstreckenden starken Abfall der Leistungsdichtespektren folgt, daß die Simulation alle relevanten Bewegungsskalen des Turbulenzfeldes erfaßt hat. Dies ist ein wichtiges Indiz für die ausreichende räumliche Auflösung des Maschengitters. Bei der vorliegenden niedrigen Reynoldszahl bilden die räumlichen und zeitlichen Leistungsdichtespektren keinen $k^{-5/3}$ -Trägheitsbereich aus. Vielmehr gehen die Spektren der energiereichen Skalen direkt in den dissipativen Bereich über (s.a. Unger [67] und Härtel [27]).

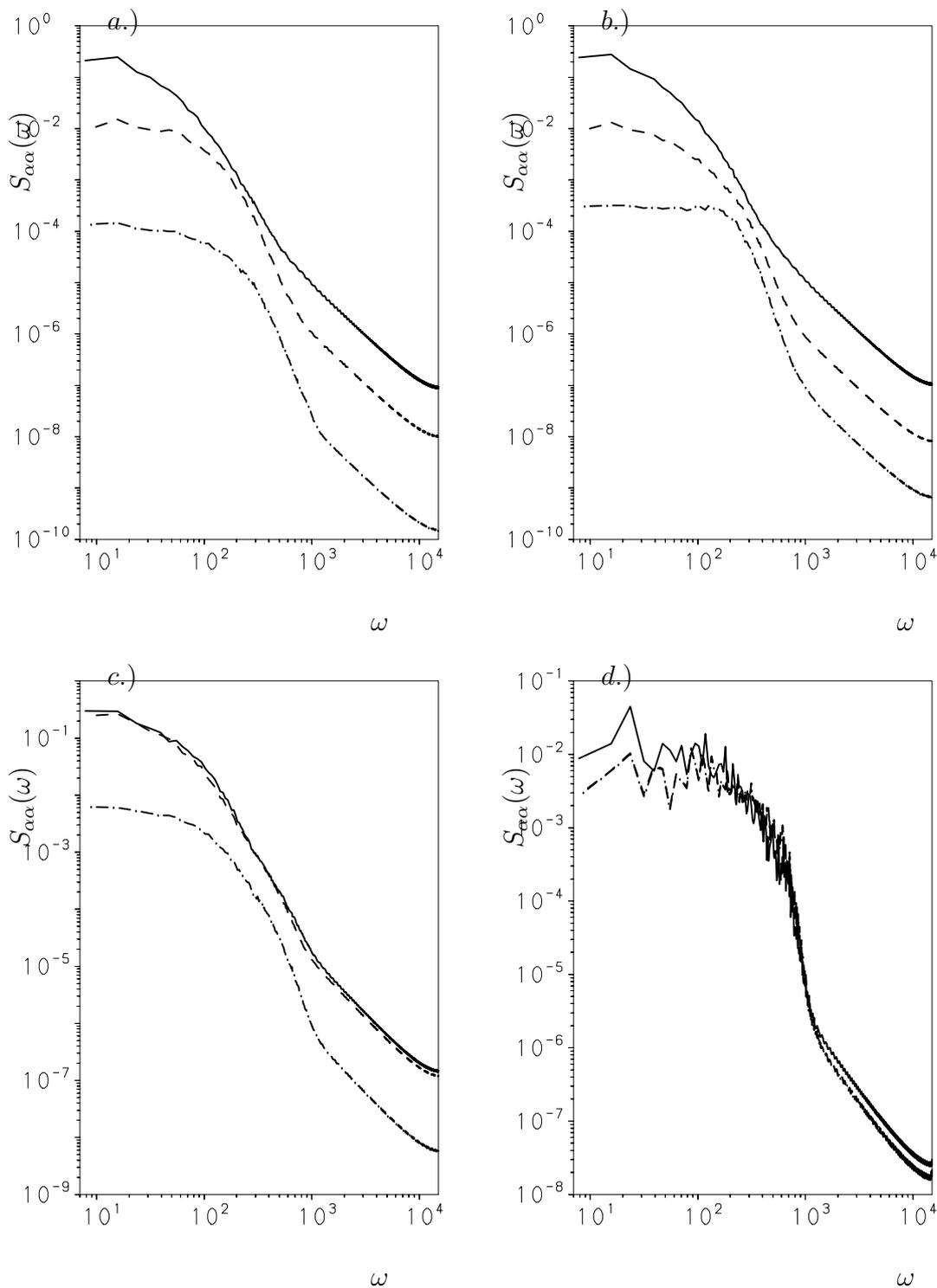


ABBILDUNG 5.74: Zeitliche Leistungsdichtespektren an den vier unterschiedlichen Positionen: a.) $(z, r) = (0.08, 0.487)$, b.) $(z, r) = (1.5, 0.487)$, c.) $(z, r) = (2.32, 0.586)$, d.) $(z, r) = (1.5, 0.01)$. Linien: S_{zz} : (———), $S_{\varphi\varphi}$: (- - - -), S_{rr} : (- · - · - ·).

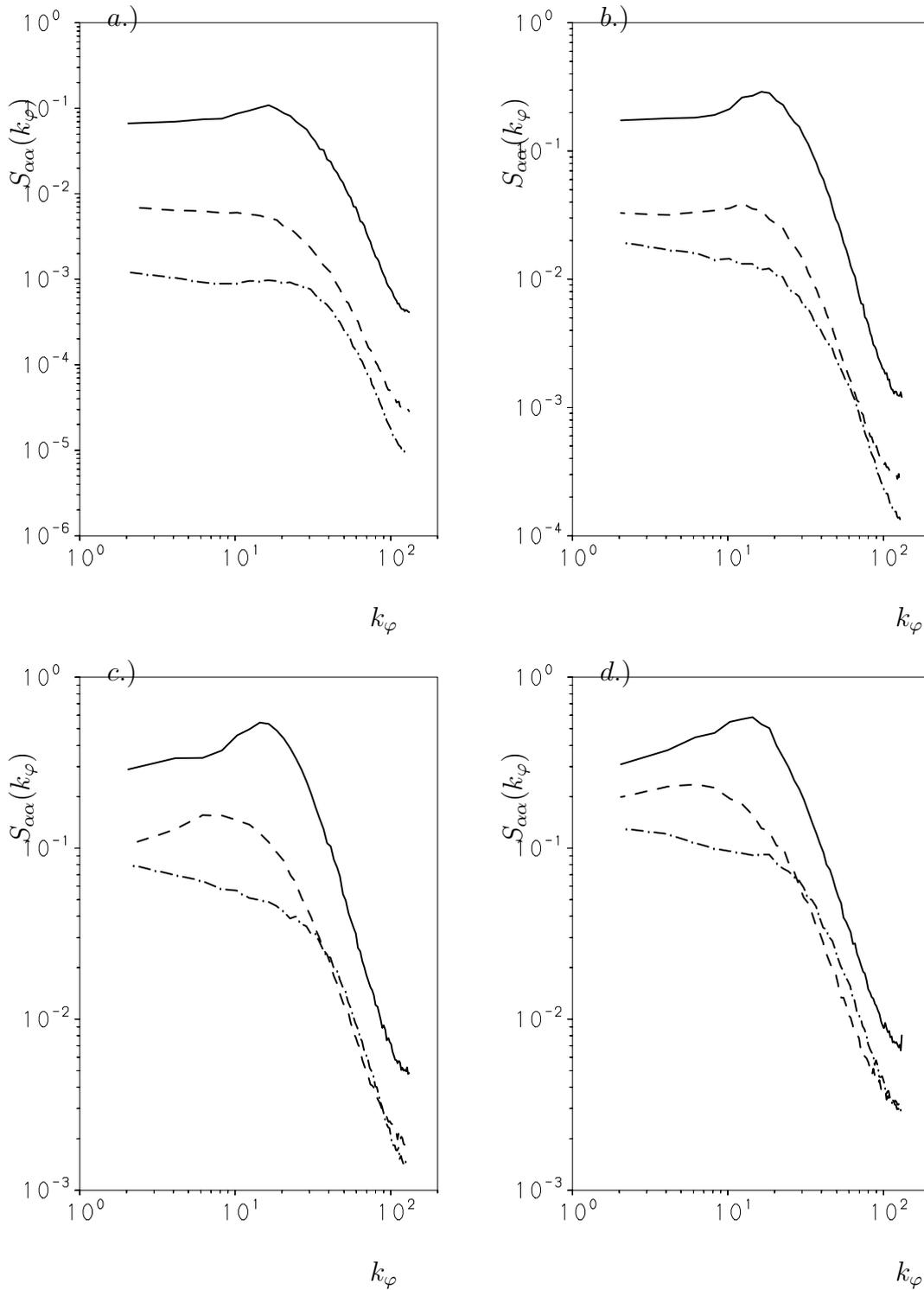


ABBILDUNG 5.75: Eindimensionale Leistungsdichtespektren in Umfangsrichtung an vier unterschiedlichen axialen Positionen: a.) $(z, r) = (1.54, 0.487)$, b.) $(z, r) = (1.84, 0.487)$, c.) $(z, r) = (2.14, 0.487)$, d.) $(z, r) = (2.42, 0.487)$. Linien: S_{zz} : (———), $S_{\varphi\varphi}$: (- - - -), S_{rr} : (- · - · - ·).

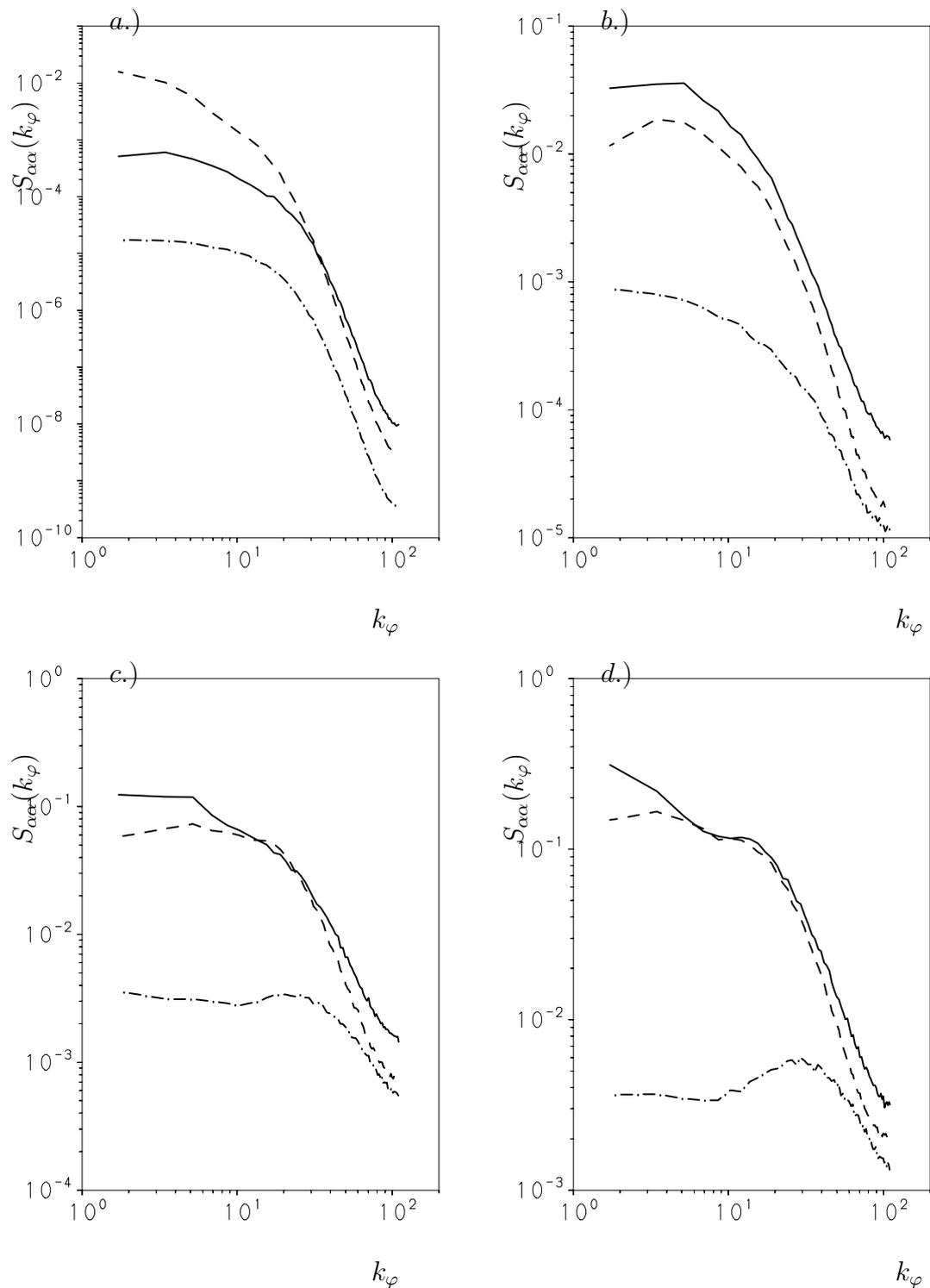


ABBILDUNG 5.76: Eindimensionale Leistungsdichtespektren in Umfangsrichtung an vier unterschiedlichen axialen Positionen: a.) $(z, r) = (1.54, 0.58)$, b.) $(z, r) = (1.84, 0.58)$, c.) $(z, r) = (2.14, 0.58)$, d.) $(z, r) = (2.42, 0.58)$. Linien: S_{zz} : (———), $S_{\varphi\varphi}$: (- - - -), S_{rr} : (- · - · - ·).

5.8 Auswertung der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen

Durch Auswertung der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen (\rightarrow Kapitel 4.4) können die im Strömungsfeld auftretenden Strukturen und Transportvorgänge besser verstanden werden. Im folgenden werden Korrelationsfunktionen diskutiert, deren Aufpunkt sieben unterschiedliche Positionen annimmt. Die erste Position $K_1 : (z, r) = (0.37, 0.20)$ liegt im Kernbereich und die zweite $K_2 : (z, r) = (0.37, 0.46)$ in der viskosen Unterschicht der vollentwickelten Zuströmung. Ebenfalls im Kernbereich, aber stromab der Querschnittserweiterung befindet sich $K_3 : (z, r) = (2.03, 0.20)$, während $K_4 : (z, r) = (2.03, 0.53)$ und $K_5 : (z, r) = (2.03, 0.59)$ die abgelöste Strömung und die Rückströmung untersuchen. Schließlich widmen sich $K_6 : (z, r) = (2.42, 0.53)$ und $K_7 : (z, r) = (2.42, 0.59)$ dem Turbulenzgeschehen im Wiederanlegebereich.

Vollentwickelte Zuströmung

Die Abbildungen 5.77 bis 5.81 zeigen Höhenlinien der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen K_1 in den drei zueinander senkrechten Ebenen (z, r) , (φ, r) und (z, φ) (abgewickelt). Verwendet man die Korrelationsfunktionen $R_{u_\alpha u_\alpha}$, um Aussagen über integrale Längenmaße (oder die Gestalt von Turbulenzstrukturen *eddies*) zu machen, so weisen die Abbildungen 5.77 bis 5.79 auf nur schwach anisotrope Turbulenz hin. Schlankere, d.h. ausgeprägtere Strukturen werden sich für Aufpunkte ergeben, die näher an der Wand liegen. (Übrigens wird in Abb. 5.78 bei $R_{u_\varphi u_\varphi}$ und $R_{u_r u_r}$ der singuläre Einfluß der Rohrachse sichtbar).

Wie die Funktionen $R_{u_z u_r}$ und $R_{u_r u_z}$ in Abbildung 5.80 zeigen, ist eine positive bzw. negative Schwankungsbewegung in Längsrichtung stark mit einer ebenfalls positiven bzw. negativen Schwankungsbewegung in radialer Richtung korreliert. Hieraus folgt, daß sich schnelles Fluid in Längsrichtung zur Wand hin und langsames Fluid in entgegengesetzter Richtung bewegt. In Wandnähe spricht man bei diesen Vorgängen von *sweep* und *ejection*. Daraus ergibt sich eine bevorzugte Richtung für den Transport von Impuls, die mit der Rohrachse einen spitzen Winkel von ca. 30° bildet. Interessanterweise deuten die Höhenlinien von $R_{u_\varphi u_\varphi}$ in der (z, r) -Ebene (Abb. 5.77) eine ebenfalls ausgeprägte Richtung an, die mit der Achse einen Winkel von ca. 150° einschließt. Bedenkt man, daß der die Reynoldsspannung speisende Impulstransportvorgang aus Kontinuitätsgründen auch die u_φ'' -Komponente beeinflusst, so wird klar, daß der Einflußbereich von $R_{u_\varphi u_\varphi}$ in φ -Richtung stärker ausgedehnt ist (Abb. 5.78 und 5.79).

Der Verlauf der Funktion $R_{u_r p}$ (Abbildung 5.80), der eine Korrelation zwischen einer beispielsweise positiven Fluktuation u_r'' am Ort (z_0, r_0) mit einer negativen bzw. positiven Druckfluktuation in der Umgebung von (z_0, r_0) erkennen läßt, zeigt, daß radiale Geschwindigkeitsfluktuationen stark mit Gradienten der Druckfluktuationen in axialer Richtung korreliert sind. Diese Beobachtung entspricht der in Kapitel 5.6 besprochenen Wirkung des *VP*G-Terms, welcher in Form der Korrelation $\langle u_r'' \partial p'' / \partial z \rangle$ zum Niveau der Reynoldsspannung $\langle u_r'' u_z'' \rangle$ beiträgt.

Analog gibt die Funktion R_{pu_r} die Beziehung zwischen Druckfluktuation und axialen Gradienten der radialen Geschwindigkeitsfluktuation wieder und entspricht damit einem Anteil der Druck-Scherkorrelation PS_{rz} .

Die in Abbildung 5.81 dargestellten Höhenlinien der Zweipunkt-Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_\varphi}$ und $R_{u_r u_\varphi}$ zeigen qualitativ übereinstimmende Einflußbereiche. Die zwischen der Rohrachse und dem Aufpunkt gelegenen Bereiche unterschiedlichen Vorzeichens mit Maximalwerten der Korrelation geben die Wirkung des Impulstransports während der Entstehung von $\langle u''_z u''_r \rangle$ auf die φ -Komponente wieder. Positives u''_z verursacht also positive oder negative u_φ -Fluktuationen eher im Mittenbereich als in Wandnähe (Transport zur Wand hin). $R_{u_\varphi u_z}$ verdeutlicht dagegen, daß positive u_φ -Fluktuationen rechts vom Aufpunkt hauptsächlich mit positiven und links vom Aufpunkt mit negativen u_z -Fluktuationen aus dem Wandbereich korreliert sind (*sweeps und ejections*, siehe auch $R_{u_\varphi u_r}$). Aus der Symmetrie der Höhenlinien kann gefolgert werden, daß positive und negative u''_φ -Schwankungen völlig gleichberechtigt sind und daß daher die Einpunkt-Korrelation $\langle u''_z u''_\varphi \rangle$, wie auch $\langle u''_r u''_\varphi \rangle$ verschwindet. Im übrigen gehen Nulllinien durch den Aufpunkt. Die Funktionen $R_{u_z u_r}$ und $R_{u_r u_z}$ haben natürlich ihre Maxima nahe beim Aufpunkt.

Das in den *sweeps* aus der Rohrmitte herbeitransportierte Fluid hohen Axialimpulses wird an der Rohrwand abgebremst, um dann evtl. über *ejections* wieder in Richtung Rohrmitte transportiert zu werden. Um den Impulsaustausch zwischen dem 'schnellen' und dem 'langsamen' Fluid zu untersuchen werden in Abbildung 5.86 unter anderem die Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_\varphi}$ und $R_{u_r u_\varphi}$ für einen wandnahen Aufpunkt veranschaulicht. Im Gegensatz zur Position K_1 ergeben sich hohe Werte in den zwei Bereichen zwischen Aufpunkt und Rohrwand, die belegen, daß der Impulsüberschuß eines *sweeps* an der Rohrwand an die Schwankungsbewegung u''_φ abgegeben wird (*splattling*). Nahe der Wand werden hauptsächlich in der u_z -Komponente langgezogene wandparallele Strukturen die sogenannten *streaky structures* (Abbildung 5.82 und 5.84) sichtbar. Im Falle der $R_{u_z u_z}$ und $R_{u_\varphi u_\varphi}$ Komponente reichen diese Einflußbereiche bis in die Rezirkulationszone hinein, wobei $R_{u_z u_z}$ auch im Bereich des Austrittsquerschnitts positive Werte aufweist. Diese in Längsrichtung nur schwach abklingende Korrelationsfunktion der axialen Geschwindigkeitskomponente wurde von Unger [67] in der turbulenten Rohrströmung beobachtet. Auch die Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}$ und $R_{u_r u_z}$ in Abbildung 5.85 bis 5.87 spiegeln diese wandparallelen Strukturen wider. Hieraus folgt, daß die Entstehung der *streaky structures* eng mit der Existenz der *sweeps* und *ejections* verknüpft ist. Die Frage, ob diese Strukturen einen wirbelartigen Charakter besitzen, kann erneut über die Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_\varphi}$ und $R_{u_r u_\varphi}$ beantwortet werden. Aus der Tatsache, daß die Geschwindigkeitsfluktuation u''_φ in den zwei Bereichen zwischen Aufpunkt und Rohrwand deutlich stärker mit der Schwankungsbewegung in axialer und radialer Richtung korreliert ist als in den Bereichen zwischen Aufpunkt und Rohrmitte folgt, daß diese Strukturen sehr häufig als fluktuierende

Scherschichten anzutreffen sind. Wären die Maxima bzw. Minima dieser den Aufpunkt umgebenden Bereiche gleich groß, so würde dies auf wirbelartige Strukturen hinweisen. Die Existenz dieser *streaky structures* wird durch die in Umfangsrichtung alternierend auftretenden Bereiche mit positiven und negativen Werten der Komponenten $R_{u_z u_z}$, $R_{u_\varphi u_\varphi}$, $R_{u_r u_r}$, $R_{u_r u_z}$ und $R_{u_r u_\varphi}$ in den Abbildungen 5.83, 5.84, 5.86 und 5.87 eindrucksvoll veranschaulicht.

Abgelöste Strömung

Vergleicht man die Zweipunkt-Korrelationen für K_3 (Abbildung 5.88 und 5.89) mit denen des Aufpunktes K_1 in den Abbildungen 5.77 und 5.78 so wird deutlich, daß die Querschnittserweiterung keinen merklichen Einfluß auf die Strömung im Kernbereich ausübt. Dort spielen sich die Transport- und sonstige Vorgänge praktisch so ab wie in vollentwickelter Rohrströmung.

In Abbildung 5.90 werden die Zweipunkt-Korrelationsfunktionen im Aufpunkt K_4 der (z, r) -Ebene veranschaulicht. Auch in der freien Scherschicht bildet die axiale Geschwindigkeitsfluktuation Strukturen aus, die in axialer Richtung stark ausgedehnt sind. Dementsprechend geben die Höhenlinien in der (z, φ) -Ebene (Abbildung 5.92) einen Einflußbereich der Geschwindigkeitsfluktuation u''_z wieder, der qualitativ mit dem der Position K_2 übereinstimmt. In der Korrelationsfunktion $R_{u_\varphi u_\varphi}$ werden Strukturen erkennbar, die, wie in Abbildung 5.90 gezeigt, offenbar von der Rückströmung verformt werden. Die auffälligste Änderung gegenüber der vollentwickelten Zuströmung vollzieht sich in der R_{u_r, u_r} -Korrelation. Es treten in axialer Richtung in rascher Folge alternierend positive und negative Bereiche auf, die den vermehrten Impulsaustausch zwischen Rückströmgebiet und Kernbereich der Strömung in radialer Richtung wiedergeben. Auch die R_{pp} -Komponente weist einen der Funktion R_{u_r, u_r} qualitativ ähnlichen Verlauf auf. Wie in der Zuströmung ergibt sich somit eine enge Beziehung zwischen Druckfluktuationen und radialen Geschwindigkeitsfluktuationen. Diese zunehmende Wirkung, die die Druckfluktuation auf die Entwicklung der Geschwindigkeitsfluktuationen in axialer und radialer Richtung hat, wird in den Abbildungen 5.93, 5.95 und 5.97, in denen die Korrelationsfunktionen $R_{u_z p}$, $R_{u_r p}$, $R_{p u_z}$ und $R_{p u_r}$ dargestellt sind, deutlich. Dagegen zeigen die Komponenten $R_{u_z u_r}$ und $R_{u_r u_z}$ abgeschwächte Korrelationen zwischen der Geschwindigkeitsfluktuationen in axialer und radialer Richtung.

Wie in Abbildung 5.98 und 5.100 veranschaulicht wird, verkürzt sich der Einflußbereich der Komponente $R_{u_z u_z}$ im wandnahen Rückströmgebiet (K_5). Stromauf und stromab des Aufpunktes bilden sich kleine Bereiche aus, in denen negative Korrelationen beobachtet werden (s.a. Abbildung 5.100). Auch der Einflußbereich der Geschwindigkeitsfluktuation u''_φ weist stromauf eine geringere Ausdehnung auf, wogegen die Struktur stromab den typischen Neigungswinkel mit der Rohrwand einschließt. Die Korrelationsfunktion R_{u_r, u_r} stimmt qualitativ mit der in der freien Scherschicht überein. Die in axialer und radialer Richtung stark kontrahierten Einflußbereiche der radialen und azimuthalen Geschwindigkeitsfluktuationen werden in Abbildung

5.100 deutlich erkennbar. Darüberhinaus werden durch diese Darstellung die hohen Gradienten demonstriert, die die Fluktuationen u''_φ und u''_r in dieser Ebene aufweisen. In der Schnittebene senkrecht zur Rohrachse zeigt die $R_{u_z u_z}$ -Komponente (Abbildung 5.99) einen in Umfangsrichtung stark ausgedehnten Einflußbereich der Schwankungsbewegung u''_z . Diese aufgeweitete Struktur spiegelt sich auch in den Funktionen $R_{u_z u_z}$ und $R_{p u_z}$ (Abbildungen 5.100 und 5.105) wider, wobei der Vergleich mit der Korrelationsfunktion R_{pp} ebenfalls eine enge Beziehung zu der Druckfluktuation nahelegt. Offensichtlich trifft das Fluid mit radialem Impulsüberschuß auf die Wand auf, der dann über die Druckfluktuationen an die axiale Geschwindigkeitskomponente abgegeben wird. Dieser *splating effect* führt in den Funktionen $R_{u_r u_z}$ und $R_{u_r u_\varphi}$ (Abbildung 5.104) zu zwei benachbarten Bereichen, in denen die Höhenlinien unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Wird beispielsweise eine positive Fluktuation u''_r beobachtet, findet man stromab des Aufpunktes häufig positive u''_z und stromauf negative u''_z . Dagegen werden aus Symmetriegründen links vom Aufpunkt negative u''_φ und rechts positive u''_φ beobachtet. Es entstehen so in Umfangsrichtung fluktuierende Scherschichten, deren Schwankungsbewegung wandparallel ausgerichtet ist.

Wie in der Komponente $R_{u_r u_r}$ entstehen in den Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}$ und $R_{u_r u_z}$ (Abbildung 5.101) positive und negative Bereiche, die in axialer Richtung alternierend auftreten. Erneut sind Korrelationen zwischen den Druckfluktuationen und den axialen bzw. radialen Geschwindigkeitsfluktuationen relativ hoch. In den drei Schnittebenen (Abbildungen 5.101, 5.103 und 5.105) weisen die aus diesen Größen gebildeten Korrelationsfunktionen daher hohe Werte auf.

Wiederanlegende Strömung

Die in der (z, r) -Ebene dargestellten Korrelationsfunktionen des Aufpunktes K_6 (Abbildung 5.106) lassen vermuten, daß die auf die Rohrwand auftreffende Scherschicht durch physikalische Mechanismen charakterisiert ist, die denen der Position K_4 ähnlich sind. Eine Betrachtung der Terme in den Bilanzgleichungen zeigt, daß diese Aussage bis auf die Druckdiffusion- und Druck-Scher-Terme qualitativ richtig ist (Kap. 5.6). Der Impulsaustausch zwischen Rückströmgebiet und Kernbereich ist allerdings deutlich abgeschwächt, wodurch der Einflußbereich der radialen Geschwindigkeitsfluktuation kleinere Werte in den negativen Bereichen aufweist. Die Funktionen $R_{u_z u_z}$, $R_{u_r u_r}$ (Abb. 5.106, und 5.107), $R_{u_z u_r}$, $R_{u_r p}$ (Abb. 5.109, 5.110 und 5.111) geben dagegen Einflußbereiche wieder, die denen der Position K_1 in vielerlei Hinsicht ähnlich sind. Hieraus folgt, daß sich die Transportvorgänge *sweep* und *ejection* bis in die Scherschicht im Wiederanlegbereich auswirken. Dem überlagert ist die Umverteilung von kinetischer Energie über die Druckfluktuationen, was sich in den hohen Korrelationen $R_{u_z p}$ und $R_{p u_z}$, die als Einpunktkorrelationen zum Niveau der axialen Geschwindigkeitsfluktuation beitragen, niederschlägt (Abbildung 5.109, 5.110, 5.111).

In den Abbildungen 5.112 bis 5.117 werden die Zweipunkt-Korrelationsfunktionen des Aufpunktes K_7 veranschaulicht, der nahe an der Wand liegt. In der Ebene (z, r) in Abbildung 5.112 reduzieren sich die negativen Bereiche in der Radialkomponente $R_{u_r u_r}$. Der negative Korrelationsbereich $R_{u_\varphi u_\varphi}$ stromab des Aufpunktes hat ebenfalls an Wirkung verloren.

Auch in Abbildung 5.113 wird ein in Umfangsrichtung ausgedehnter Bereich hoher Korrelation fluktuierender Längsgeschwindigkeit sichtbar, der auch in der Abwicklung in Abbildung 5.114 erkennbar ist. Diese schwachen Gradienten der Korrelation in Umfangsrichtung werden dem sogenannten *splating effect* zugeschrieben. Dabei trifft Fluid mit radialem Impulsüberschuß auf die Wand auf und wird großflächig auf die axiale und azimuthale Geschwindigkeitskomponente verteilt. Obwohl die Position K_7 stromauf des mittleren Wiederanlegepunktes liegt, wird in den aus zwei verschiedenen Strömungsgrößen gebildeten gemischten Korrelationsfunktionen eine höhere Ordnung der Strömung erkennbar. Besonders auffällig sind die sich über den halben Umfang erstreckenden Korrelation $R_{p u_z}$ in Abbildung 5.116. Bedenkt man, daß diese Korrelation zum Druckdiffusionsterm PD_{zz} (Kapitel 5.6) beiträgt, so wird deutlich, daß die statistische Mittelung in Umfangsrichtung in der Nähe des Wiederanlegepunktes nur zwei statistisch unabhängige Strukturen des Druck-Diffusionstermes erfaßt. Damit ist eine Erklärung für die große Zahl der benötigten zeitlichen Stichproben gegeben. Der große azimuthale Einflußbereich der Korrelationsfunktion $R_{u_r p}$ in Abb. 5.117 läßt entsprechende Schlüsse zu. Die Korrelation $\langle u_r'' p'' \rangle$ taucht in der Druckdiffusion der $\langle u_\varphi'' \rangle$ -Bilanz auf. Gerade im Wiederanlegebereich treten bei der Bilanzierung (siehe Abb. 5.48) beachtliche Bilanzdifferenzen auf, die sich durch zusätzliche zeitliche Stichproben sicher beheben lassen.

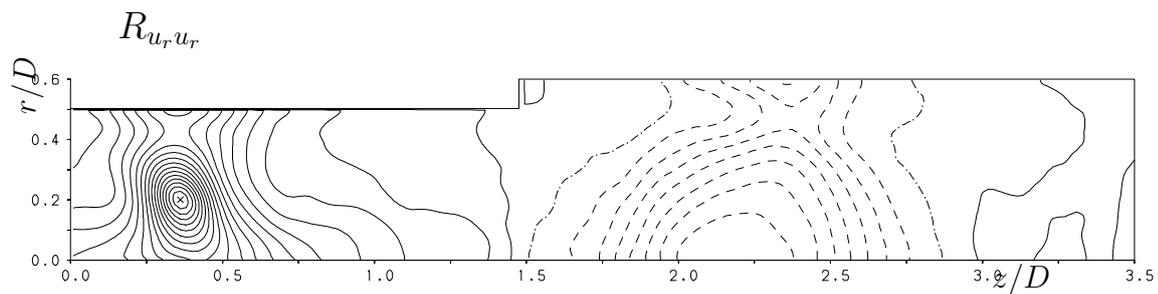
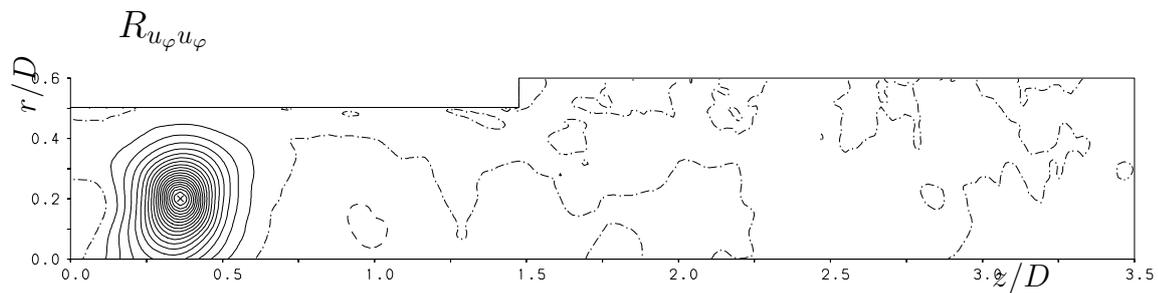
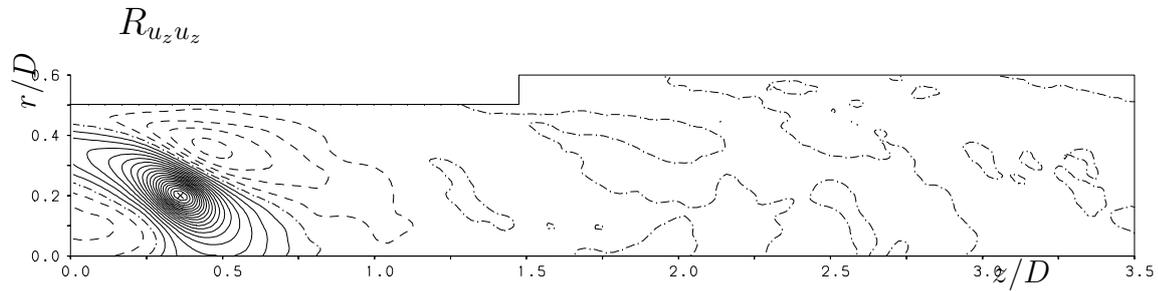
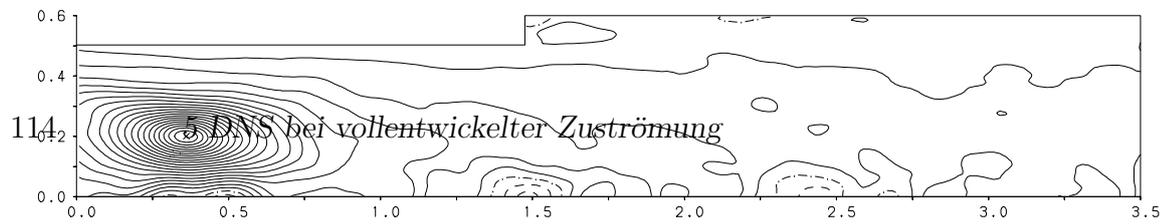


ABBILDUNG 5.77: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_1 : $(z_0, r_0) = (0.37, 0.20)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

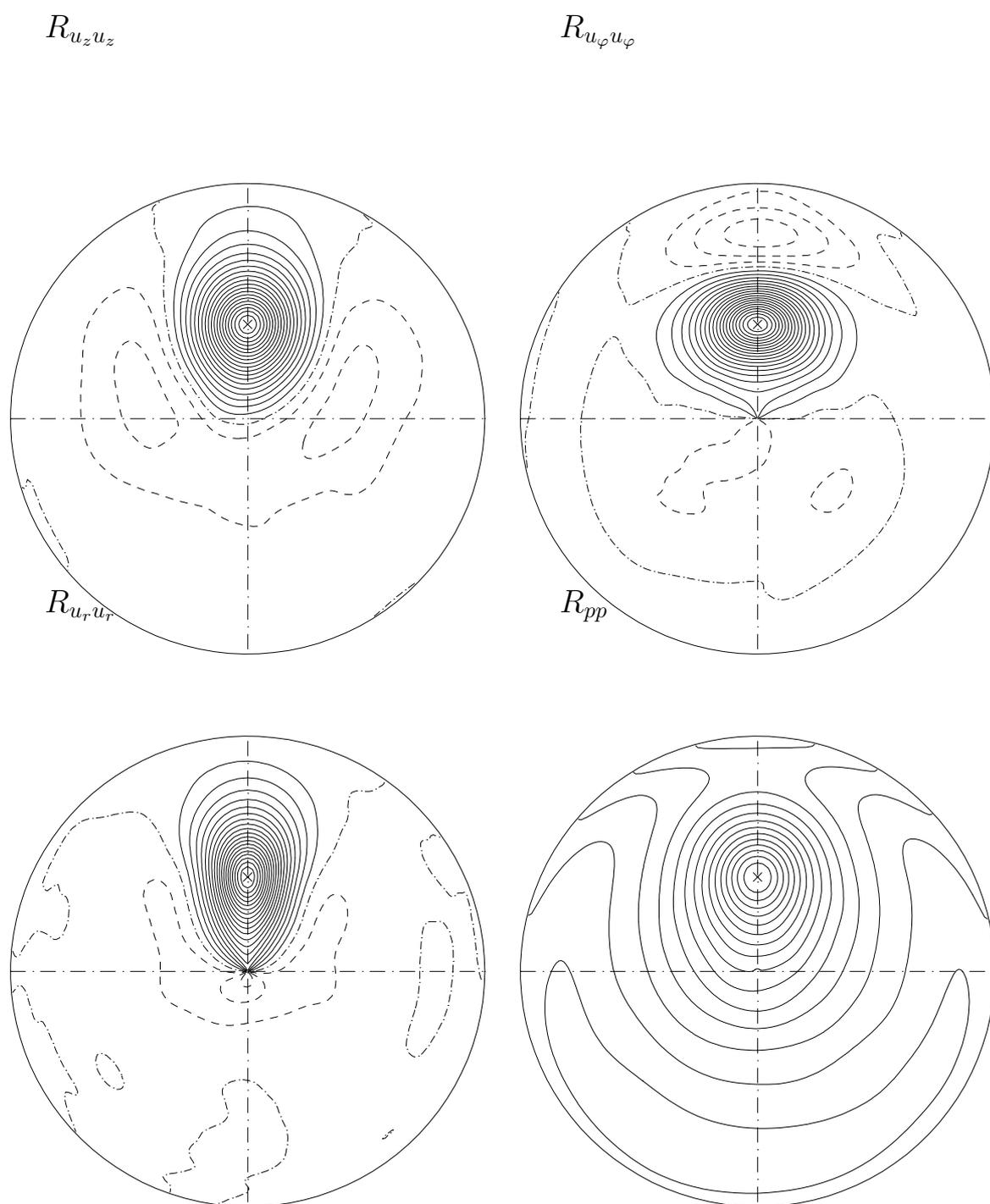


ABBILDUNG 5.78: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_1: (z_0, r_0) = (0.37, 0.20)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (———): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (-·-·-·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

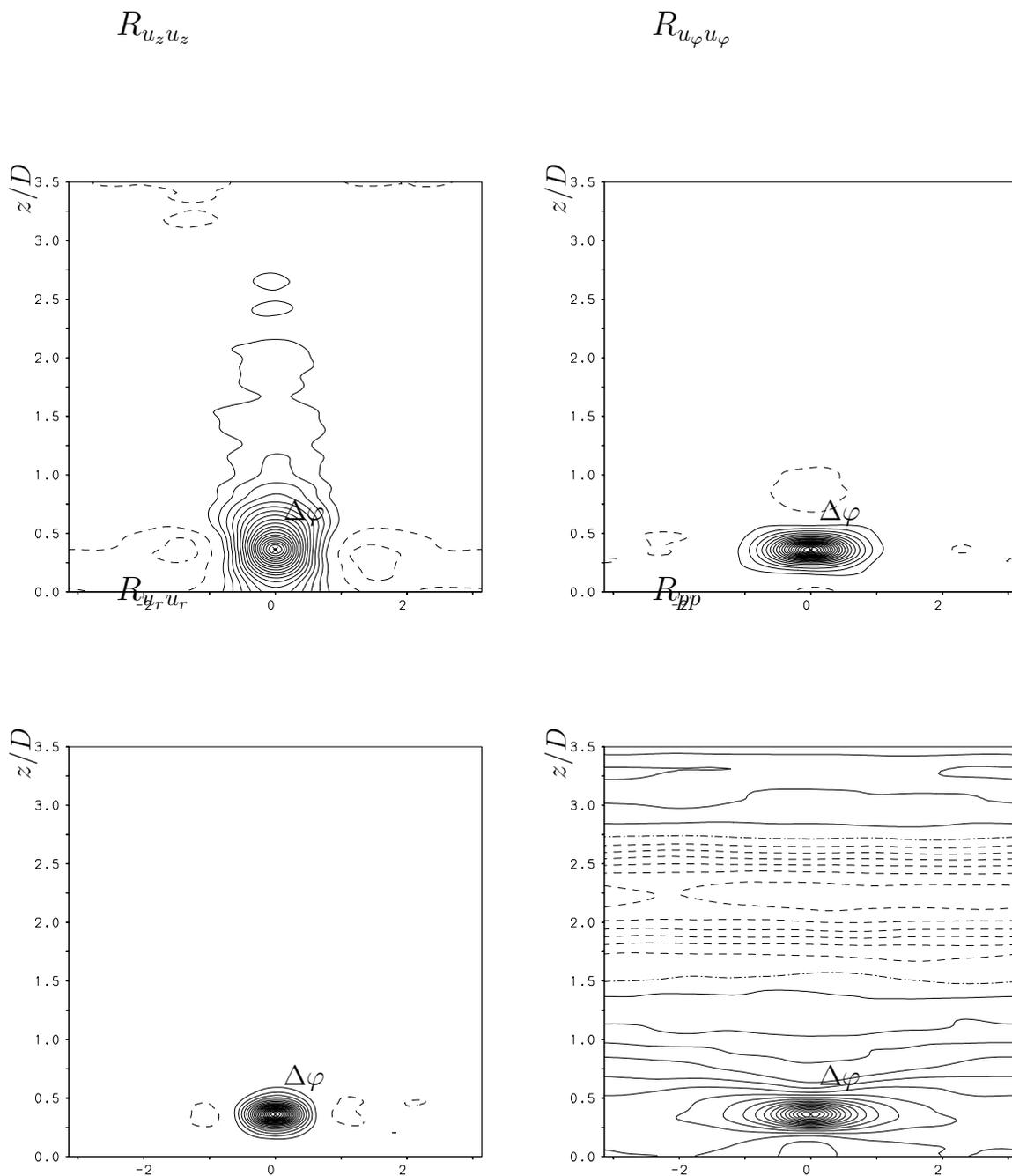


ABBILDUNG 5.79: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{pp}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes K_1 : $(z_0, r_0) = (0.37, 0.20)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (\cdots): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (---): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

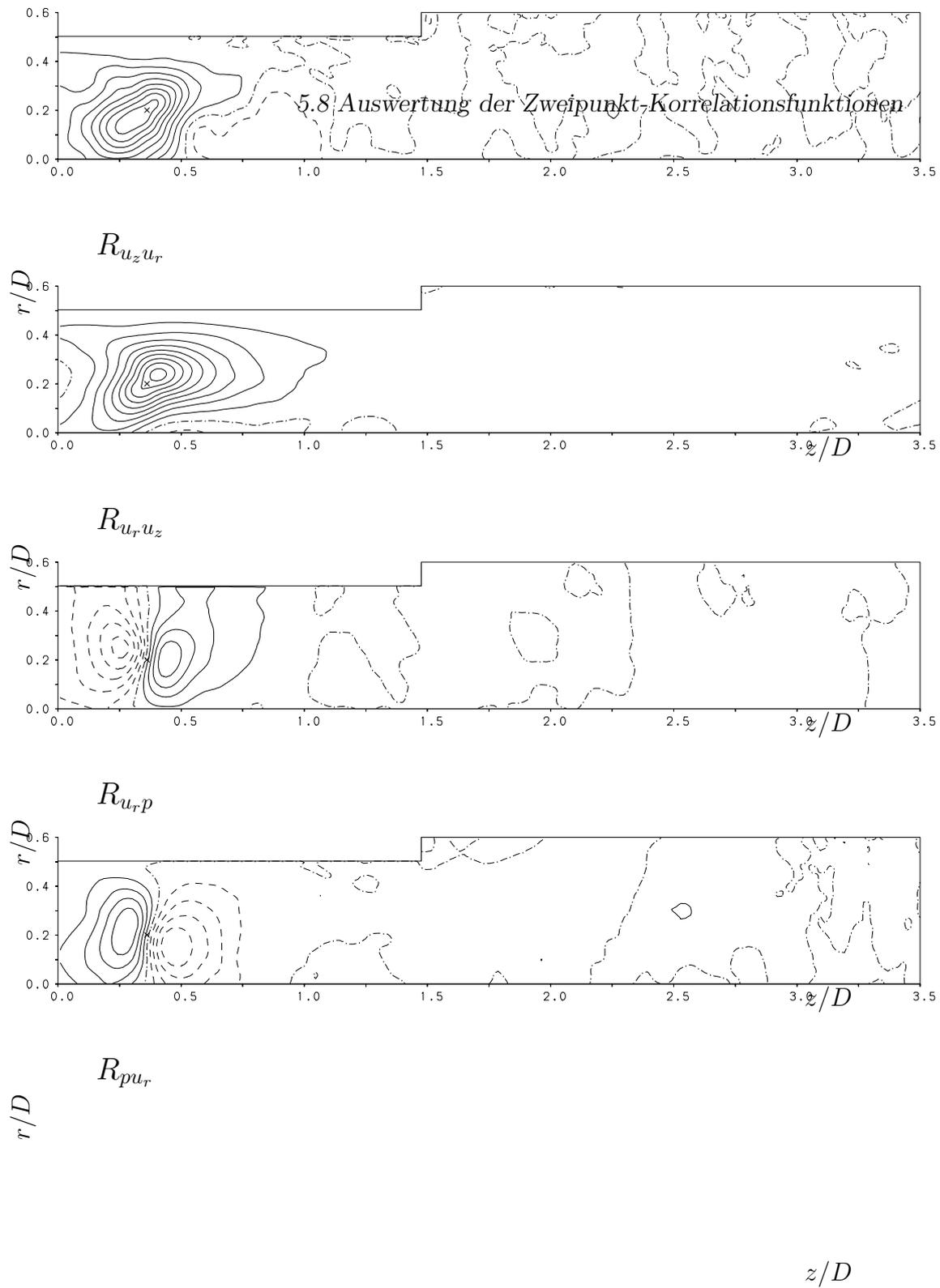


ABBILDUNG 5.80: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_1 : $(z_0, r_0) = (0.37, 0.20)$ und dem Inkrement 0.05. (×): Aufpunkt, (———): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

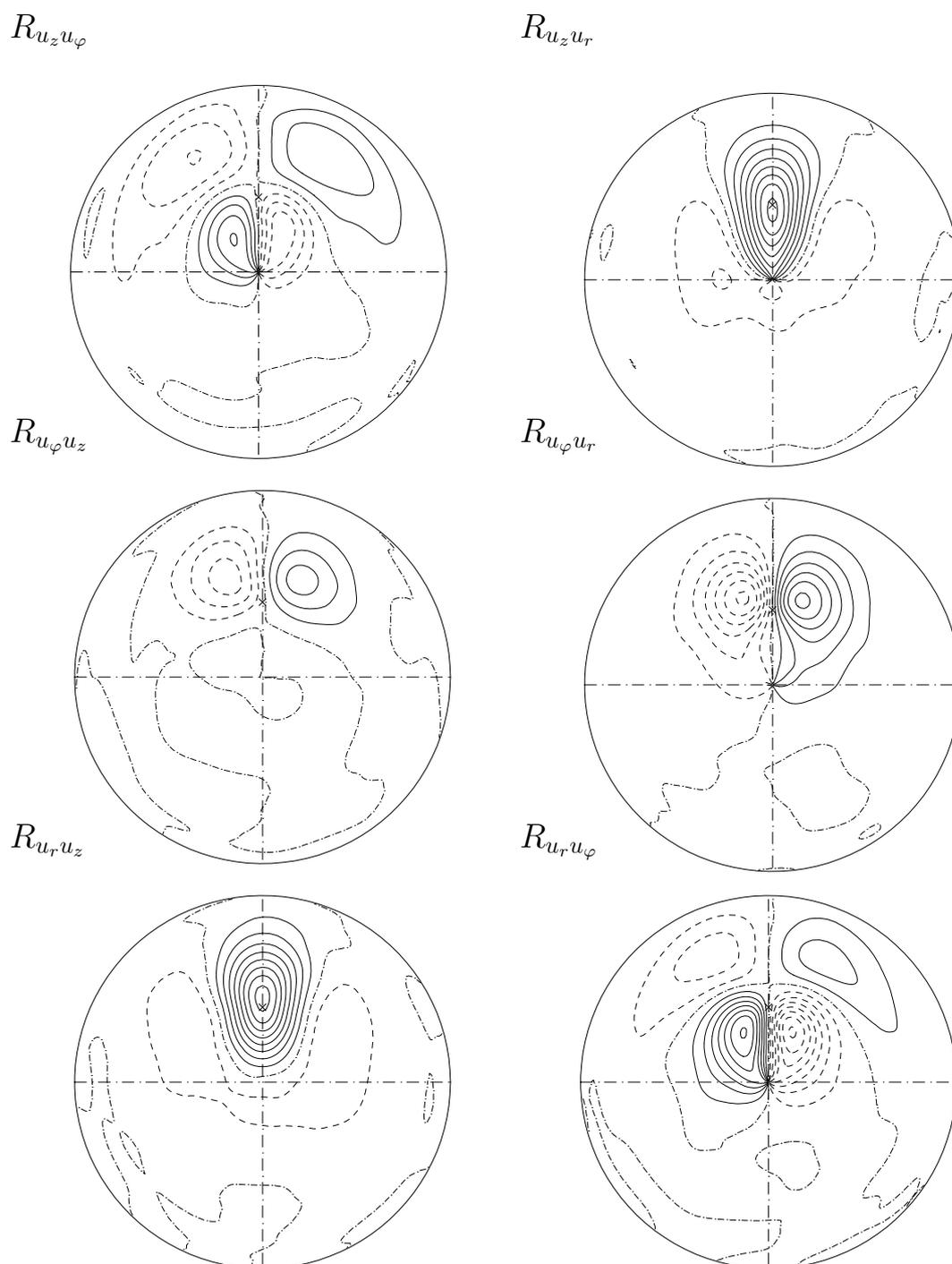


ABBILDUNG 5.81: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_z u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_1: (z_0, r_0) = (0.37, 0.20)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

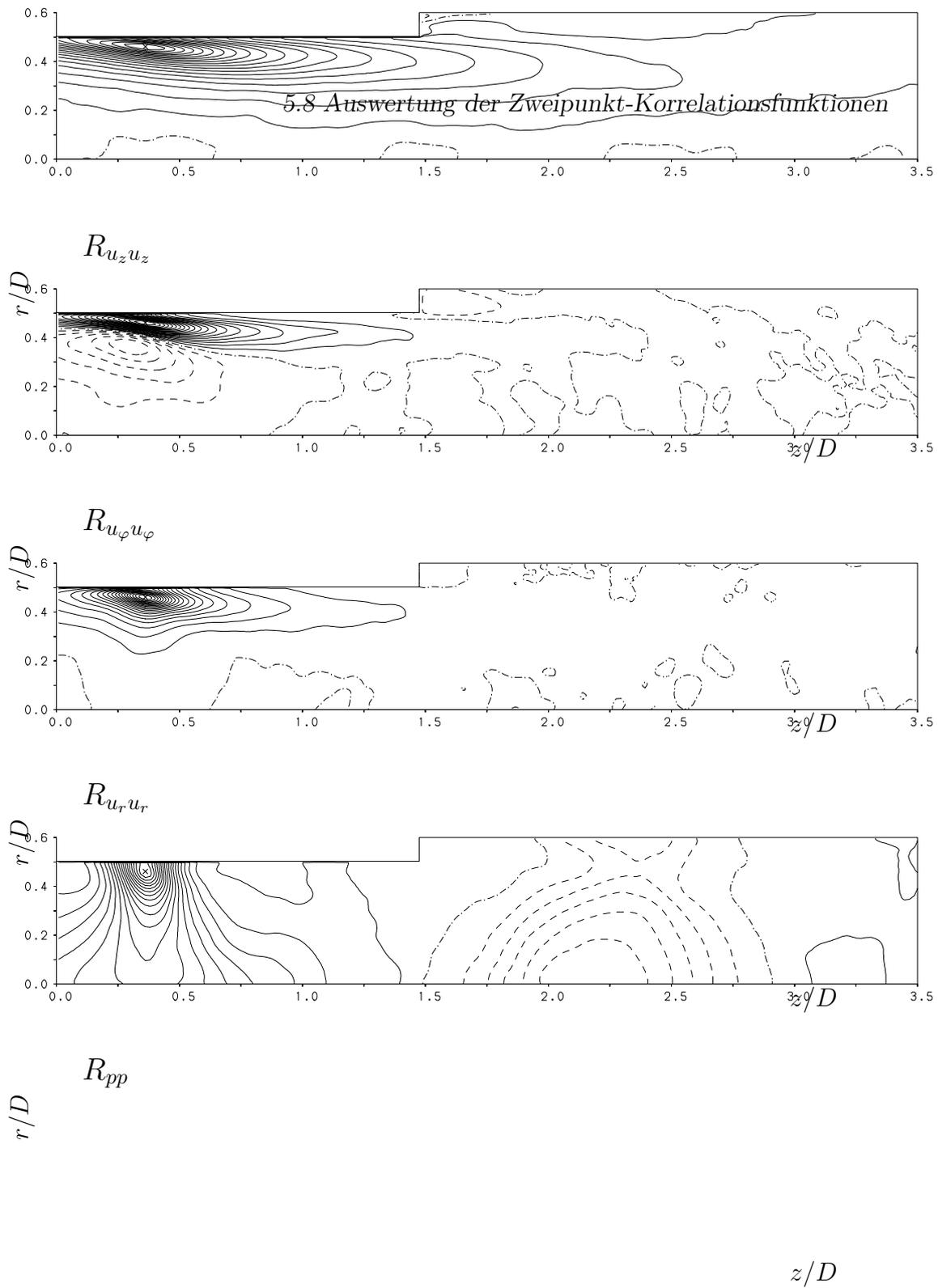


ABBILDUNG 5.82: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_2 : $(z_0, r_0) = (0.37, 0.46)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (---): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

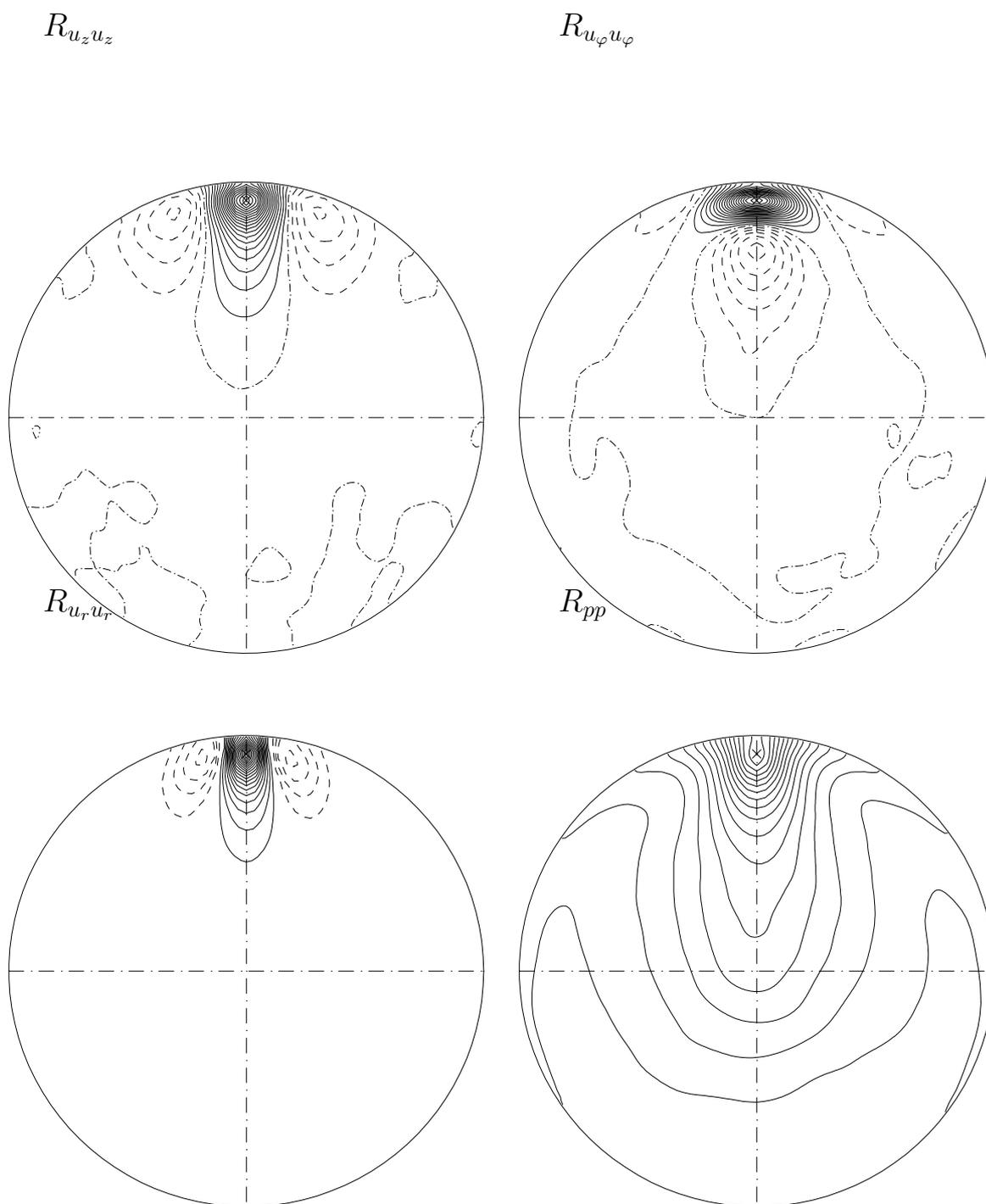


ABBILDUNG 5.83: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_2 : $(z_0, r_0) = (0.37, 0.46)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

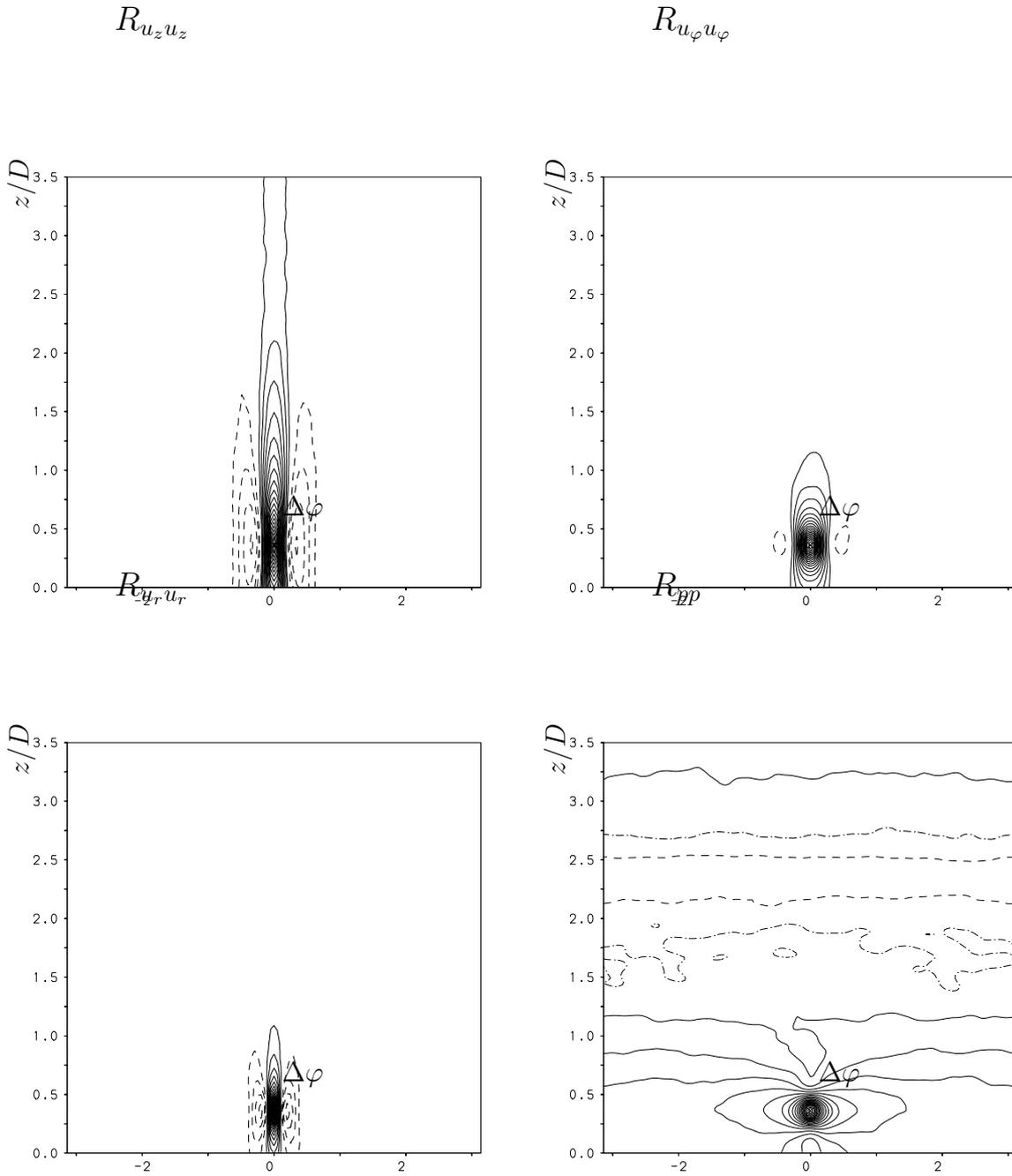


ABBILDUNG 5.84: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{pp}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes $K_2: (z_0, r_0) = (0.37, 0.46)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (———): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

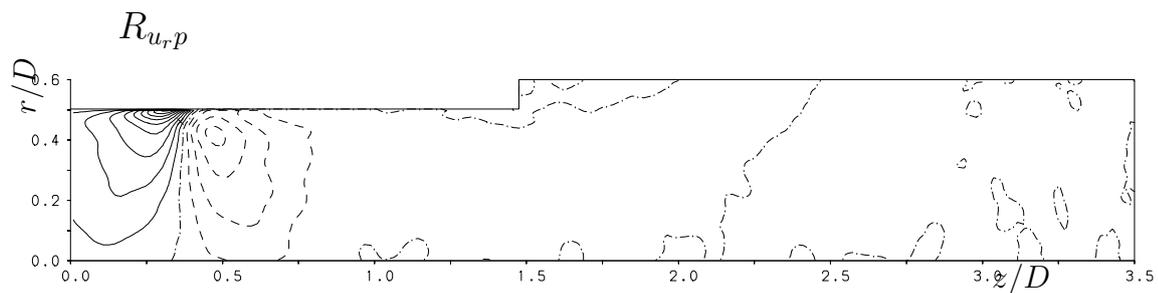
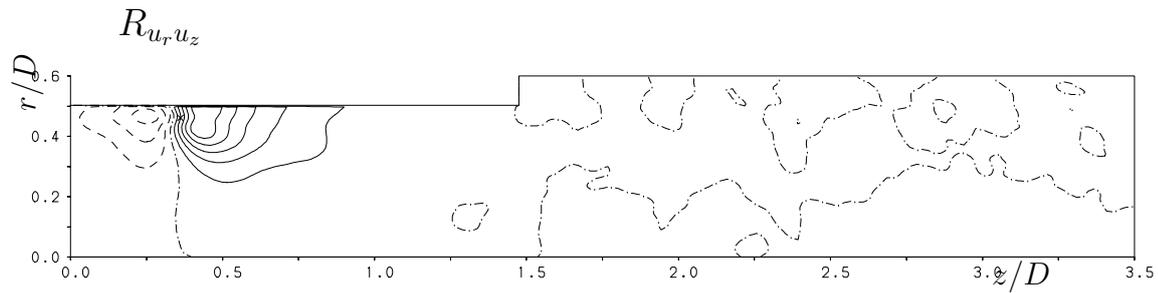
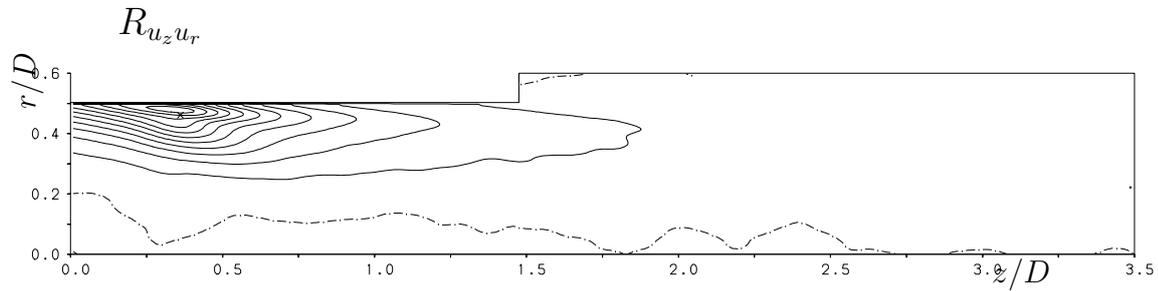
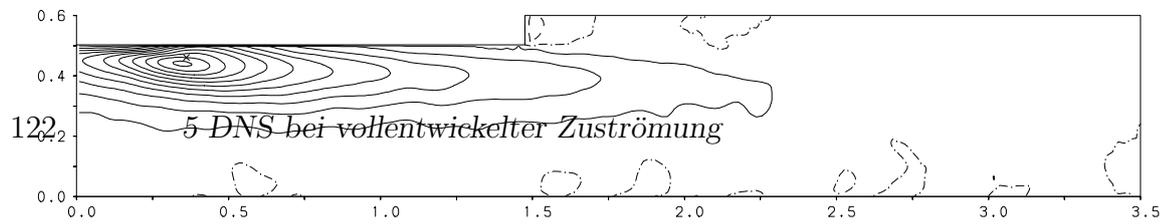


ABBILDUNG 5.85: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_2 : $(z_0, r_0) = (0.37, 0.46)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

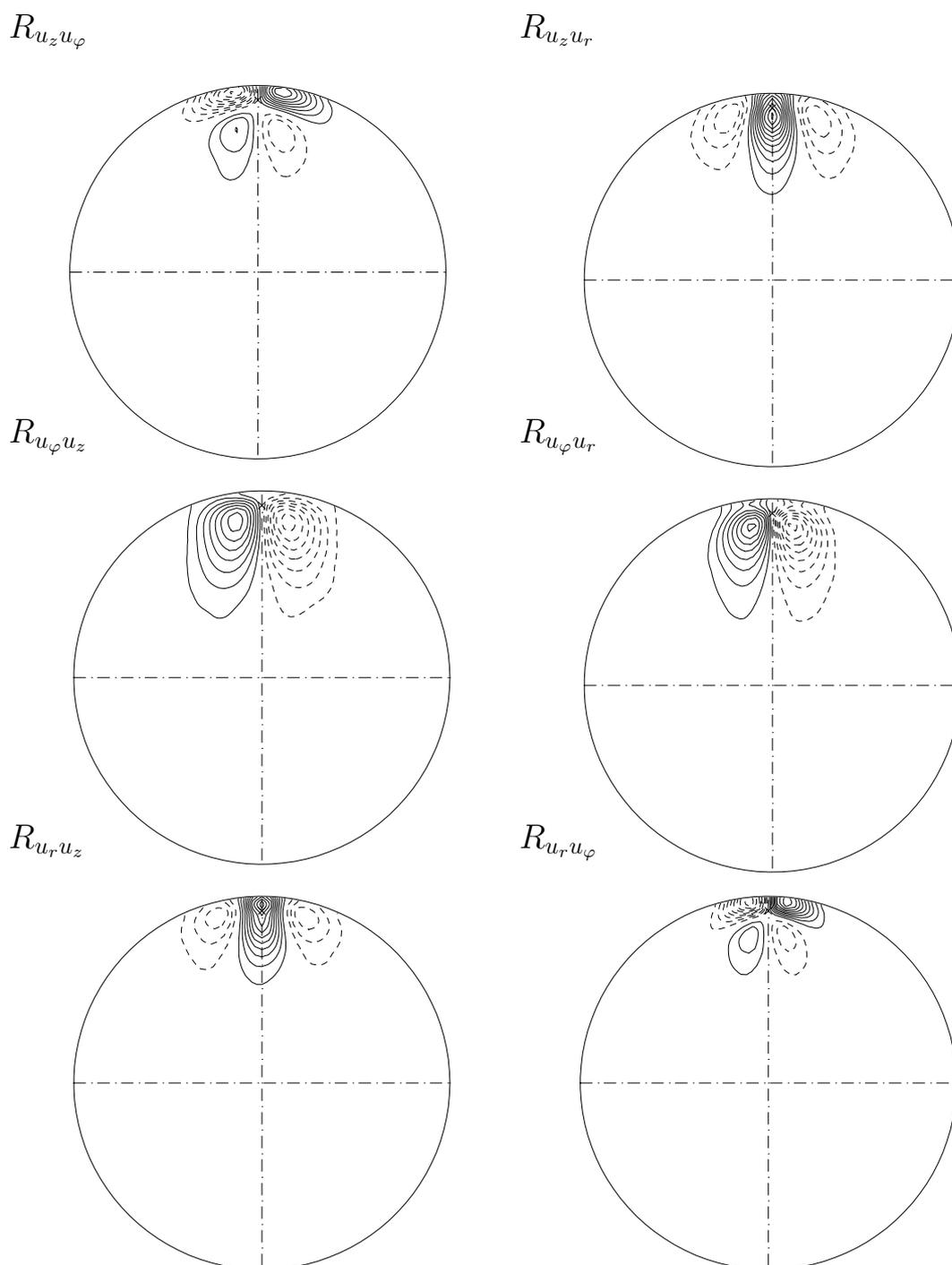


ABBILDUNG 5.86: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_\varphi}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_z u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_z}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes $K_2: (z_0, r_0) = (0.37, 0.46)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (———): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (-·-·-·): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

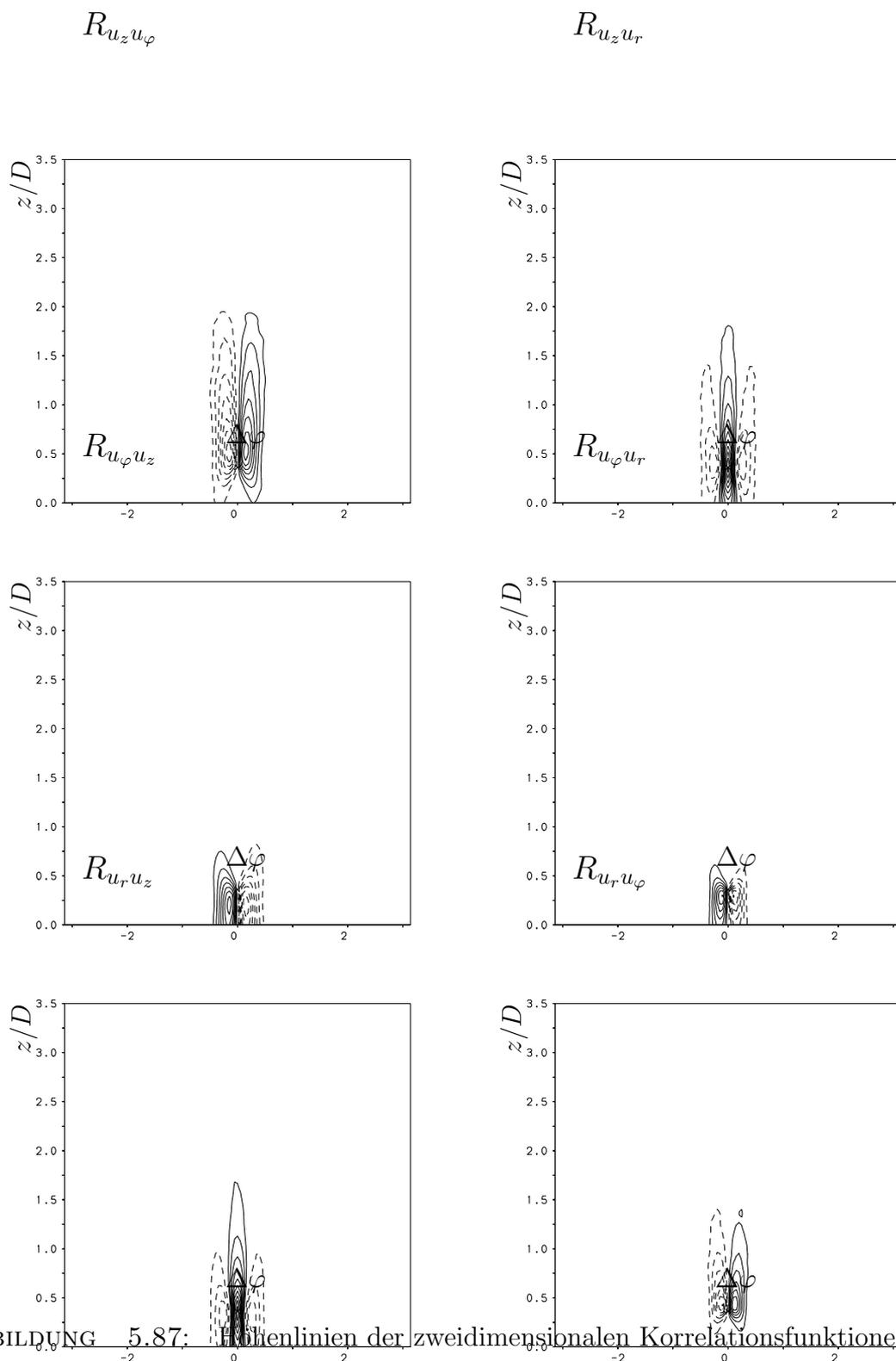


ABBILDUNG 5.87: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_\varphi}(z_0, z, \Delta_\varphi, r_0)$, $R_{u_z u_r}(z_0, z, \Delta_\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_z}(z_0, z, \Delta_\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_r}(z_0, z, \Delta_\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, z, \Delta_\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, \Delta_\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes $K_2: (z_0, r_0) = (0.37, 0.46)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

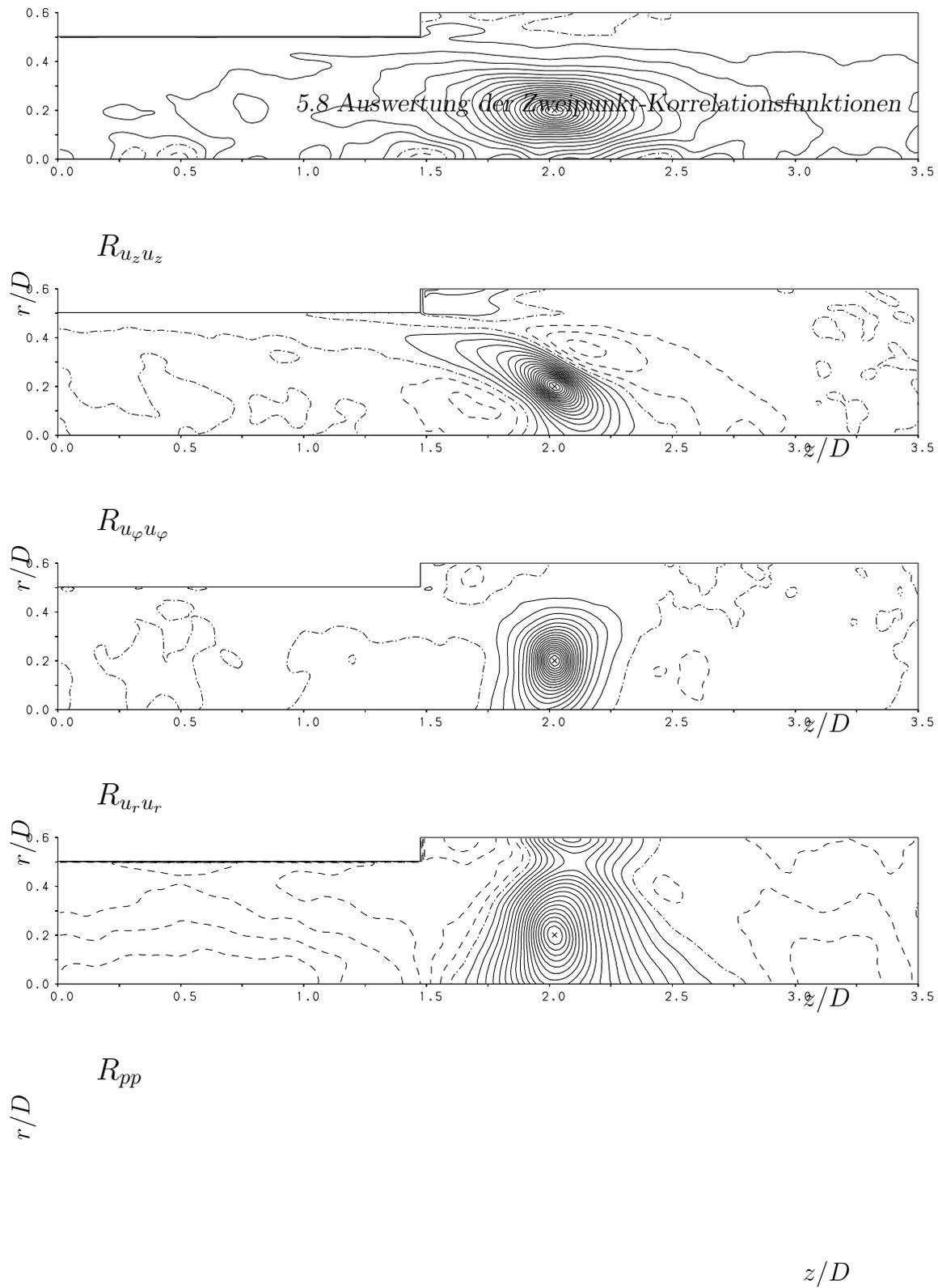


ABBILDUNG 5.88: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_\phi u_\phi}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_3 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.20)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (———): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

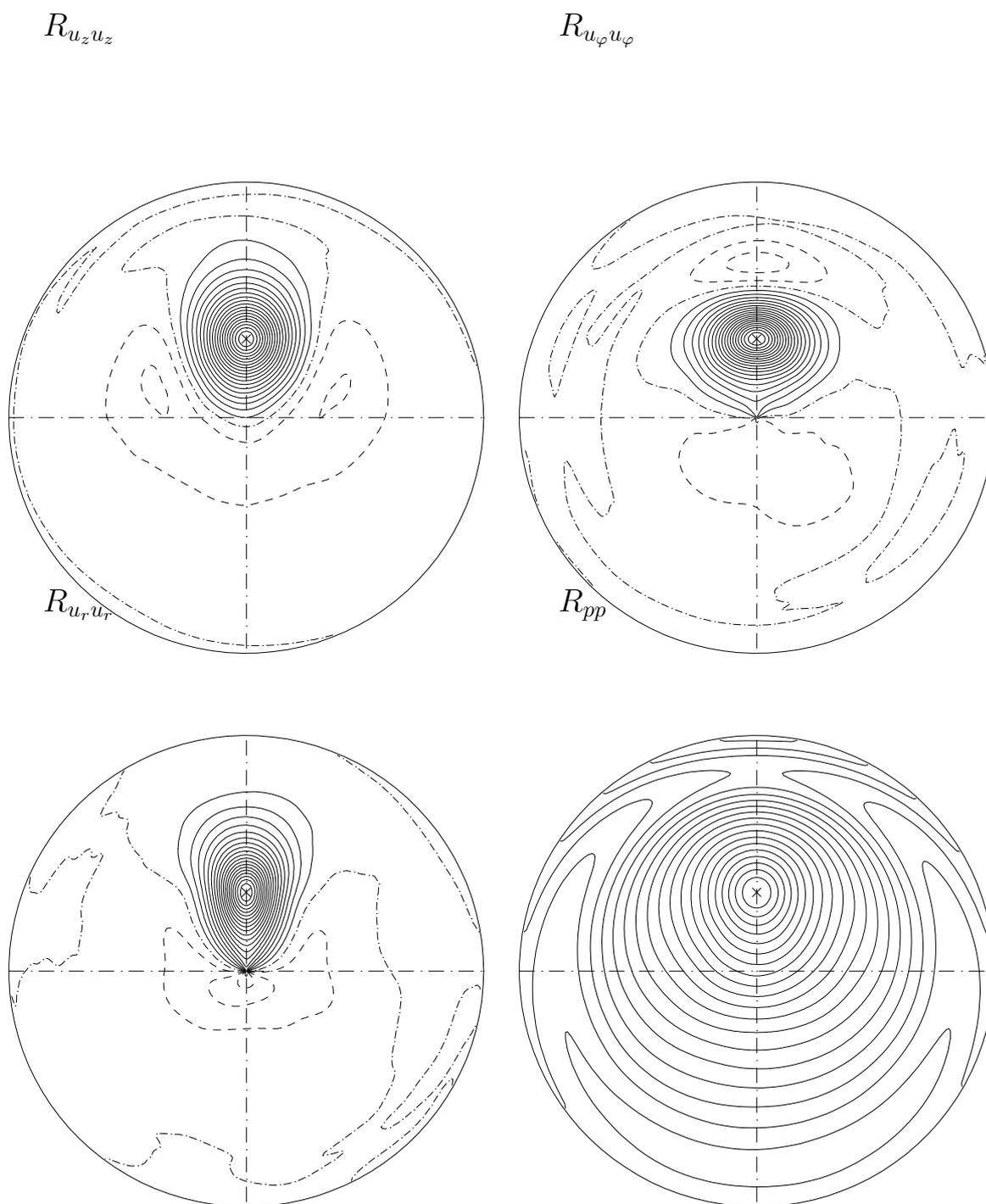


ABBILDUNG 5.89: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0)$, $R_{pp}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_3: (z_0, r_0) = (2.03, 0.20)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (---): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

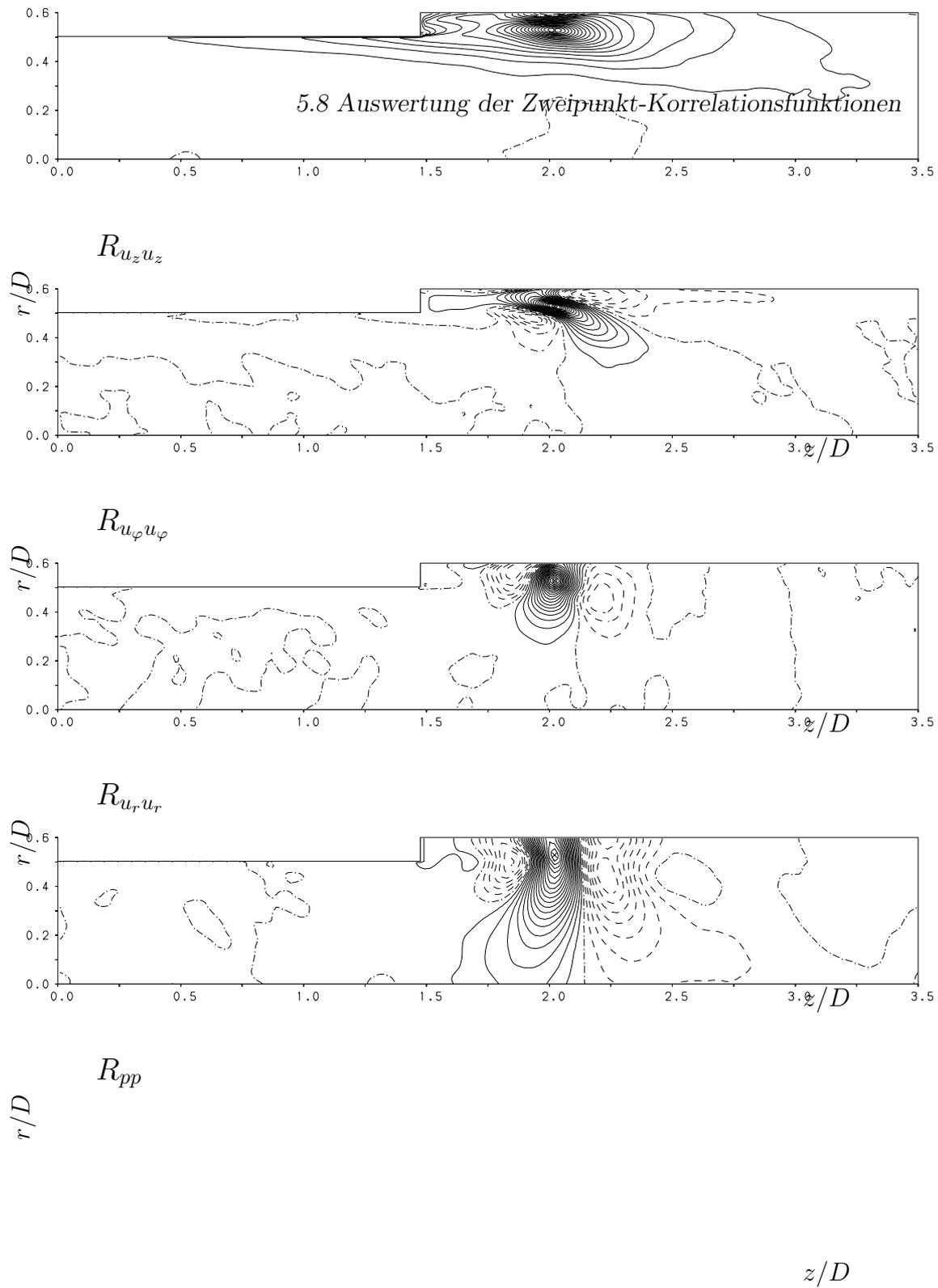


ABBILDUNG 5.90: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_4 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (———): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

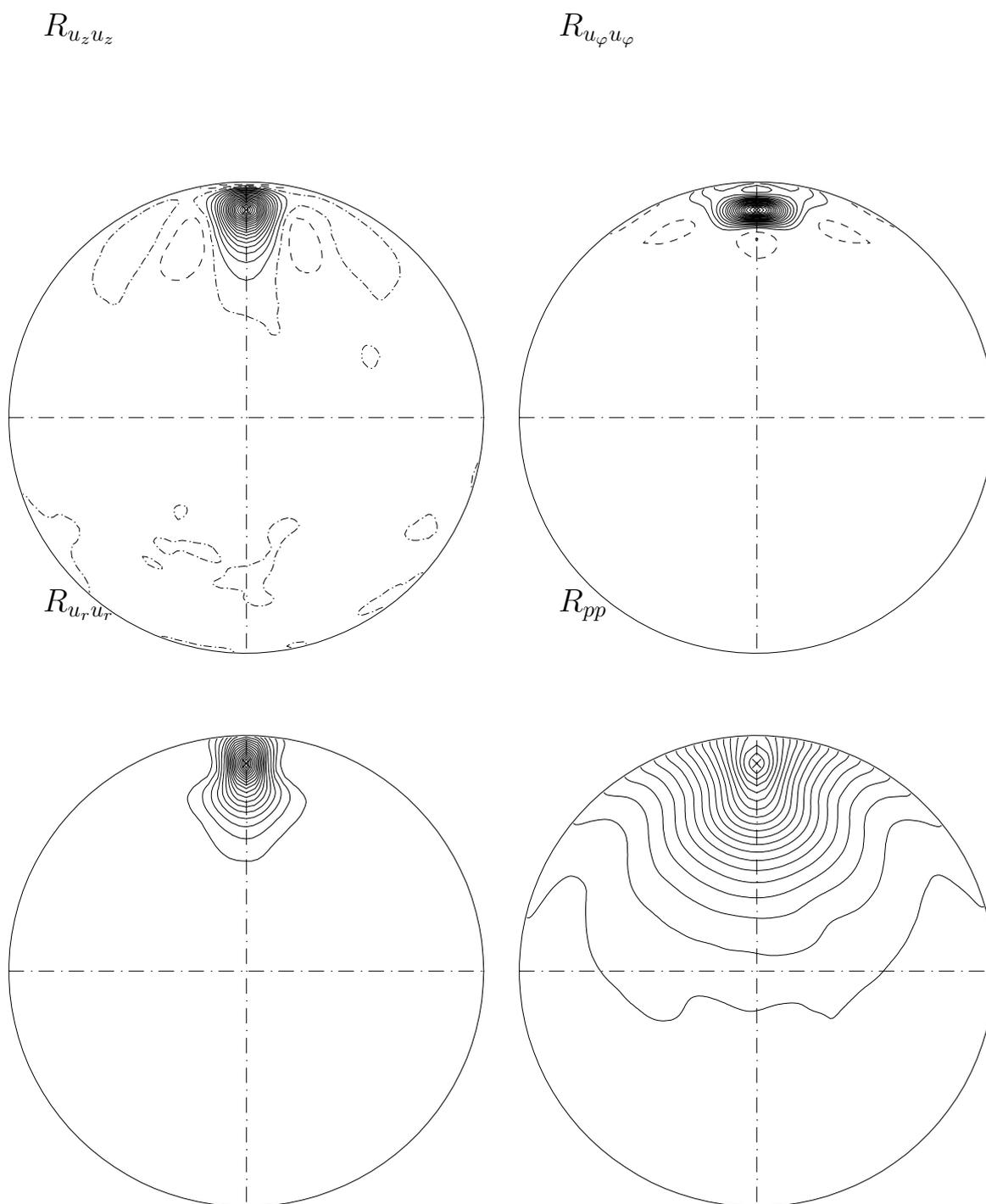


ABBILDUNG 5.91: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_4 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

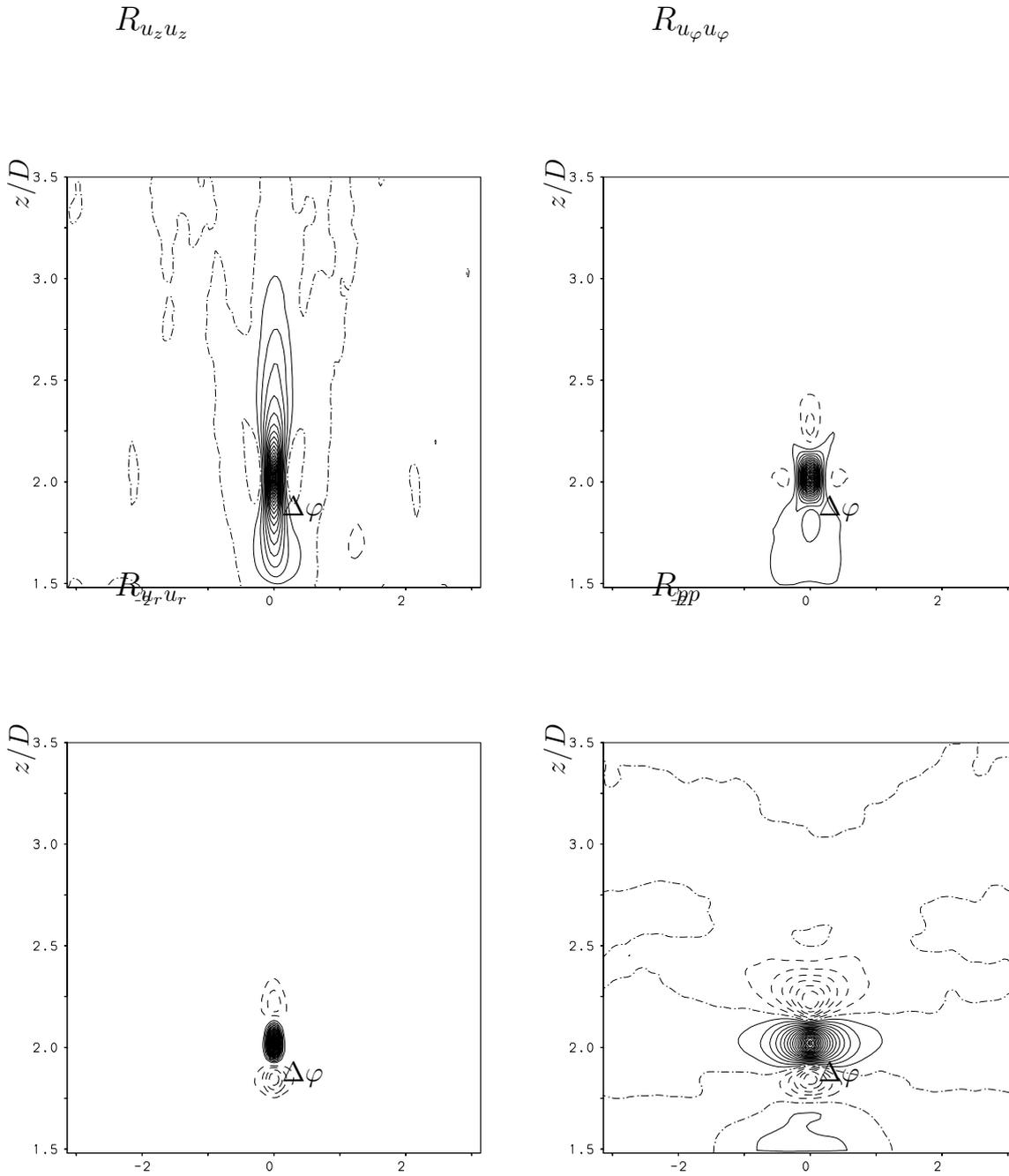


ABBILDUNG 5.92: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{pp}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes $K_4: (z_0, r_0) = (2.03, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (———): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

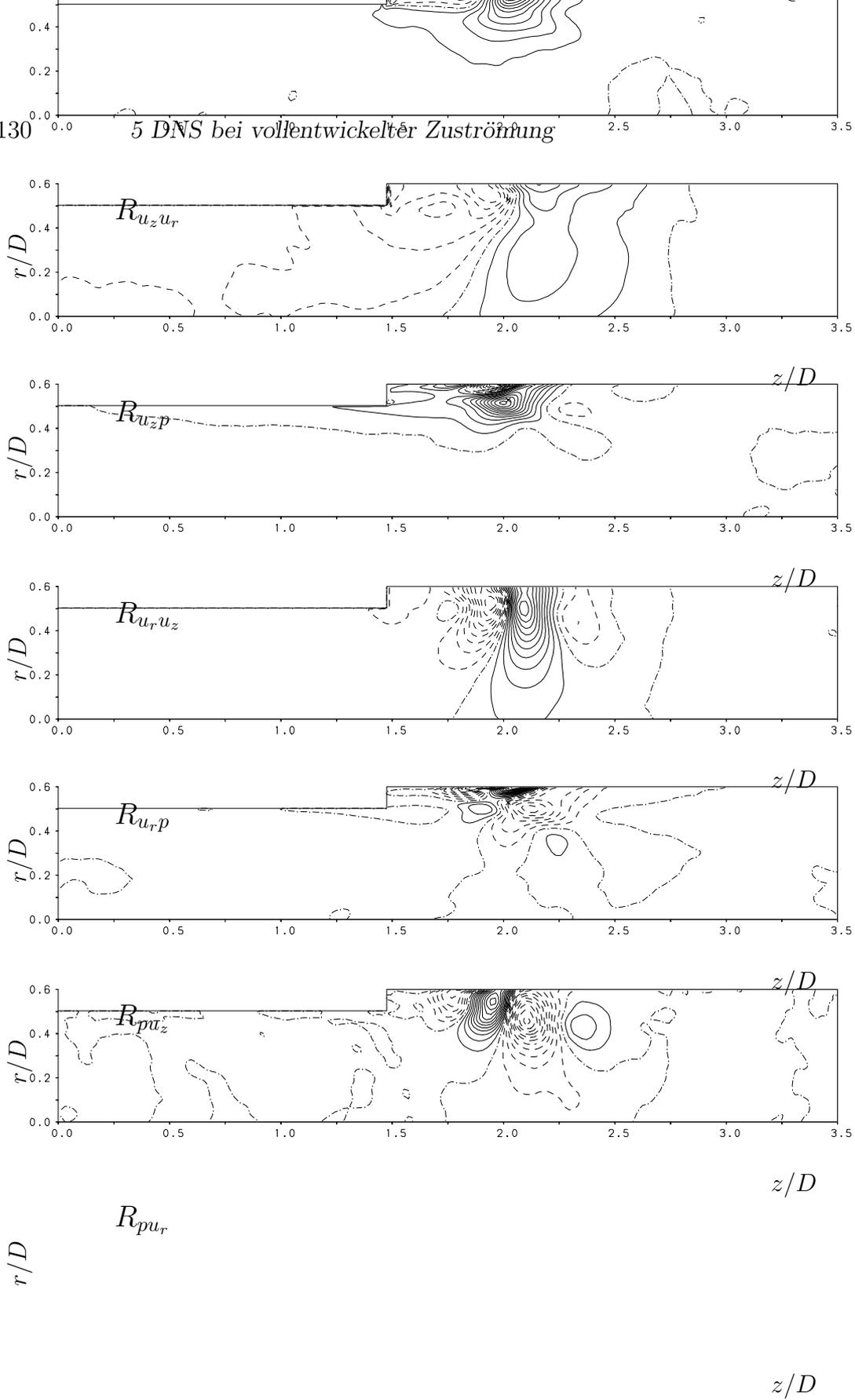


ABBILDUNG 5.93: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_z p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_4: (z_0, r_0) = (2.03, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. (\times) : Aufpunkt, (---) : $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -) : $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (---) : $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

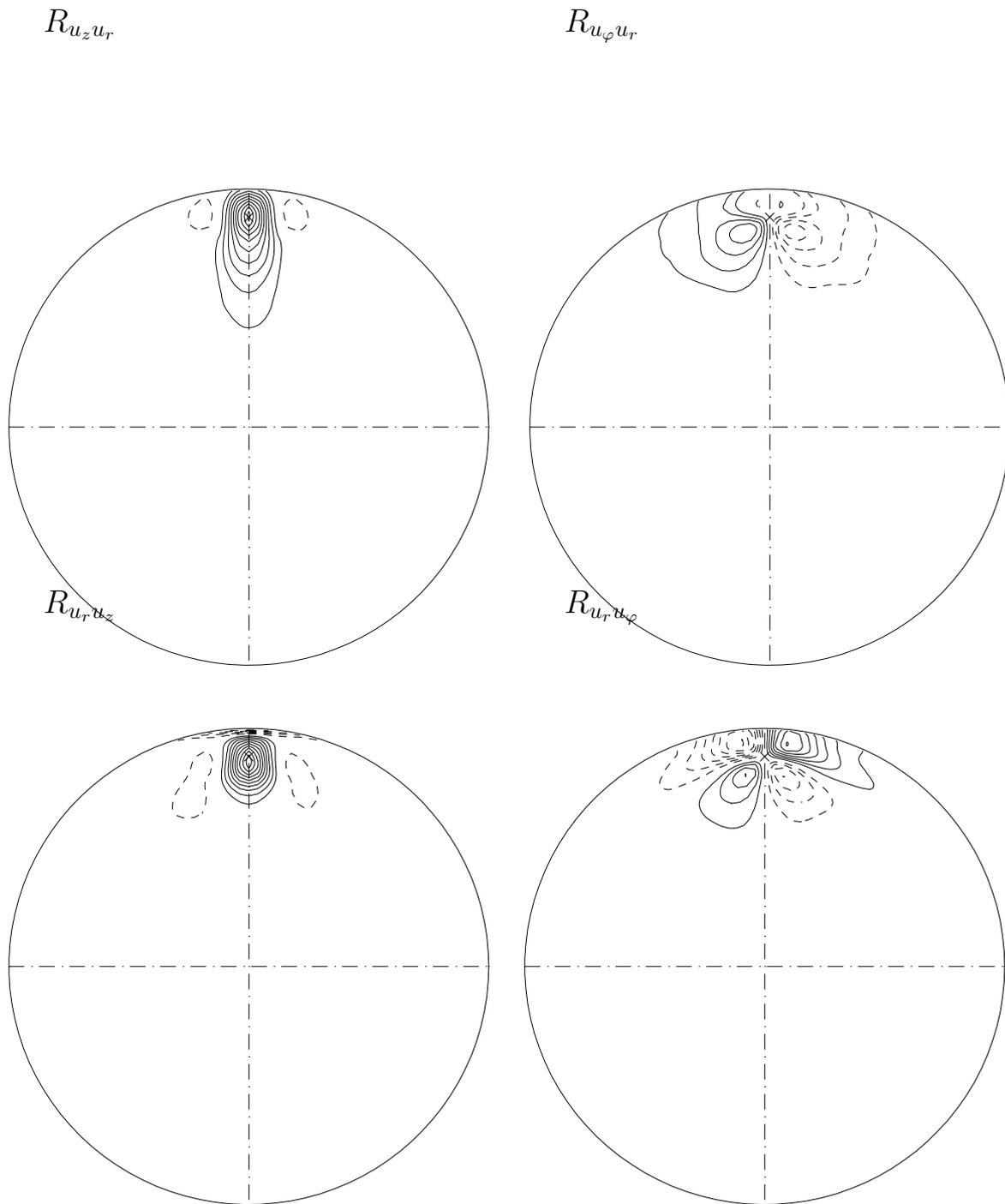


ABBILDUNG 5.94: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_4: (z_0, r_0) = (2.03, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (———): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

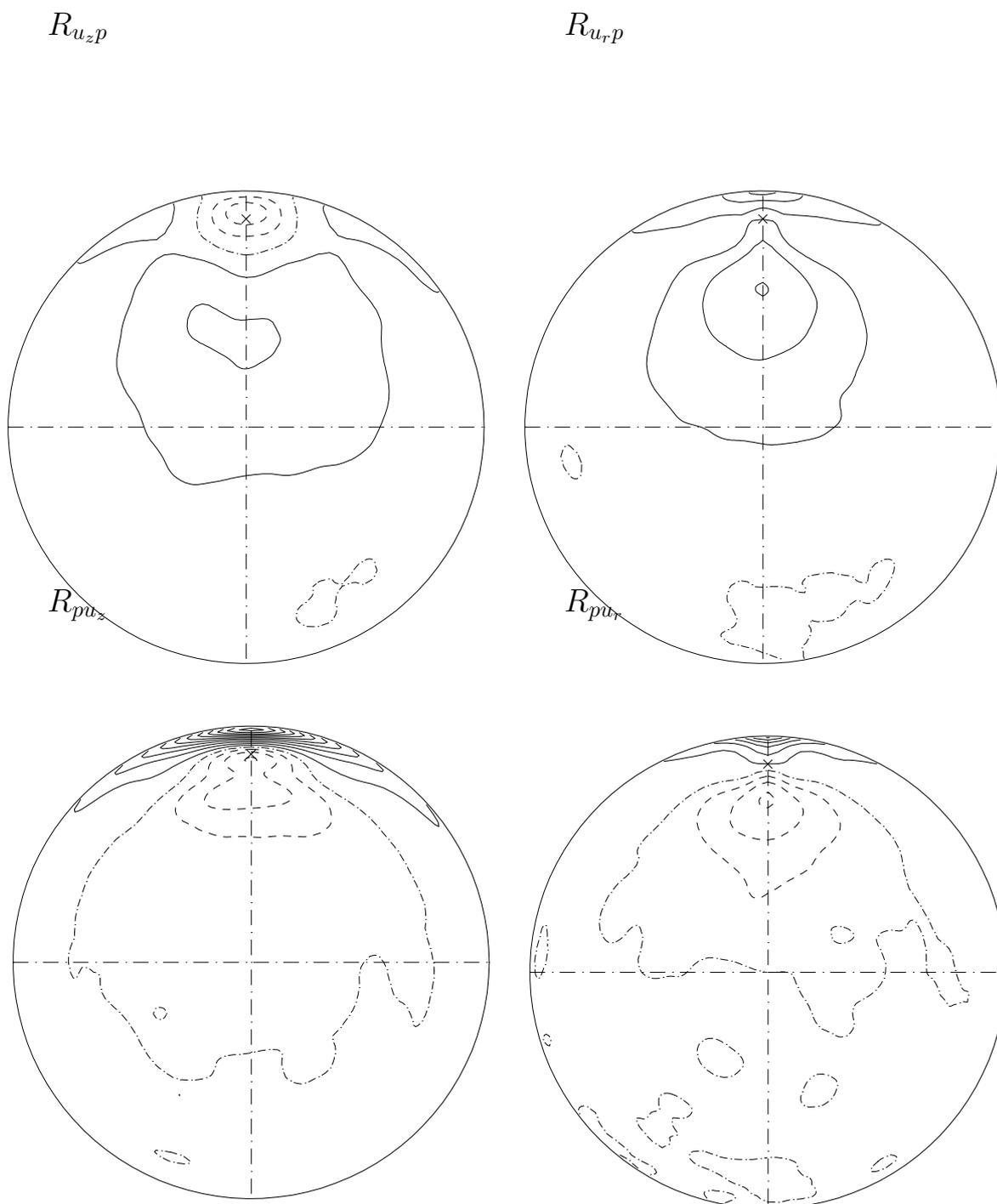


ABBILDUNG 5.95: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z p}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{p u_z}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_4 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (---): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

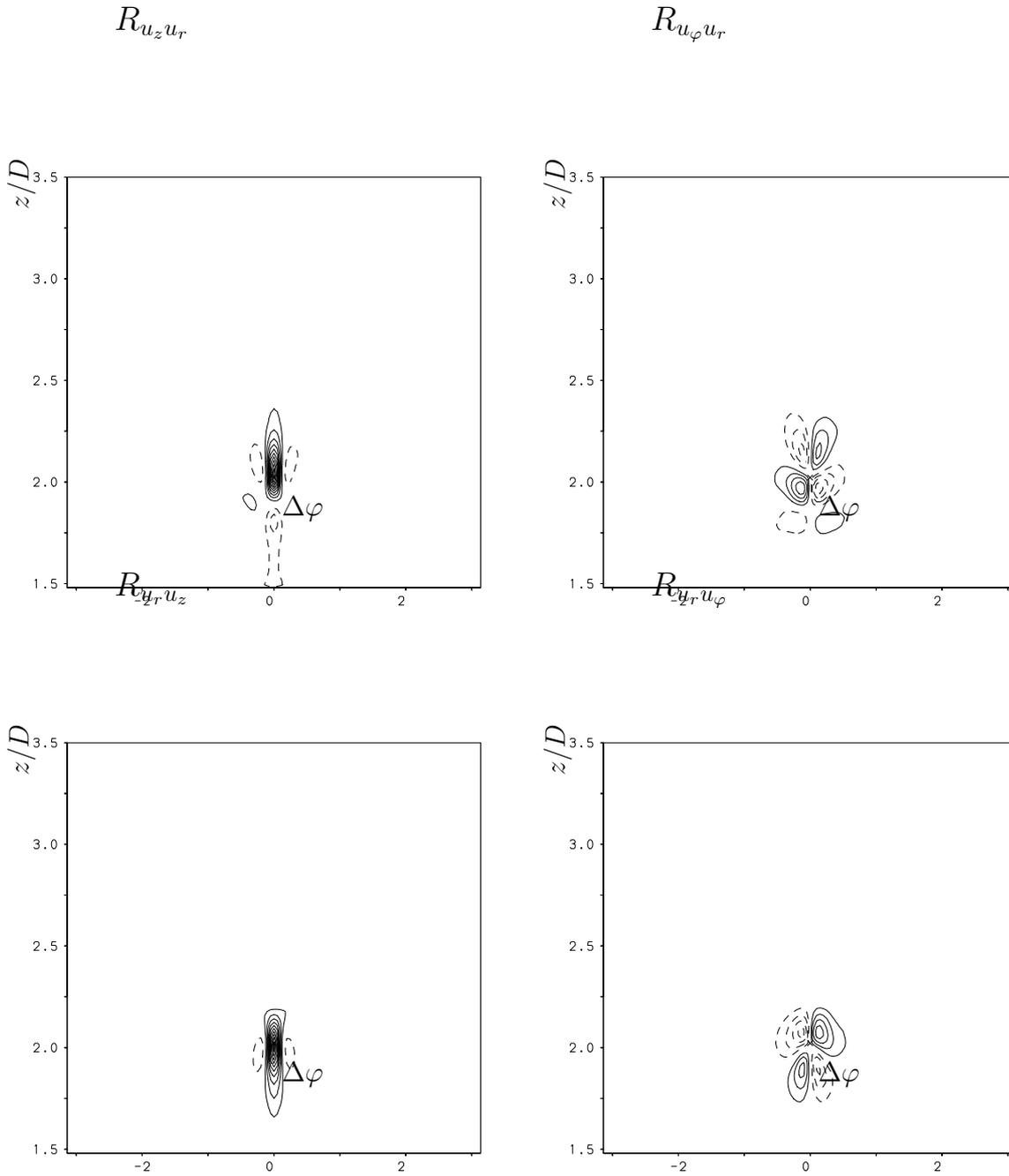


ABBILDUNG 5.96: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes K_4 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

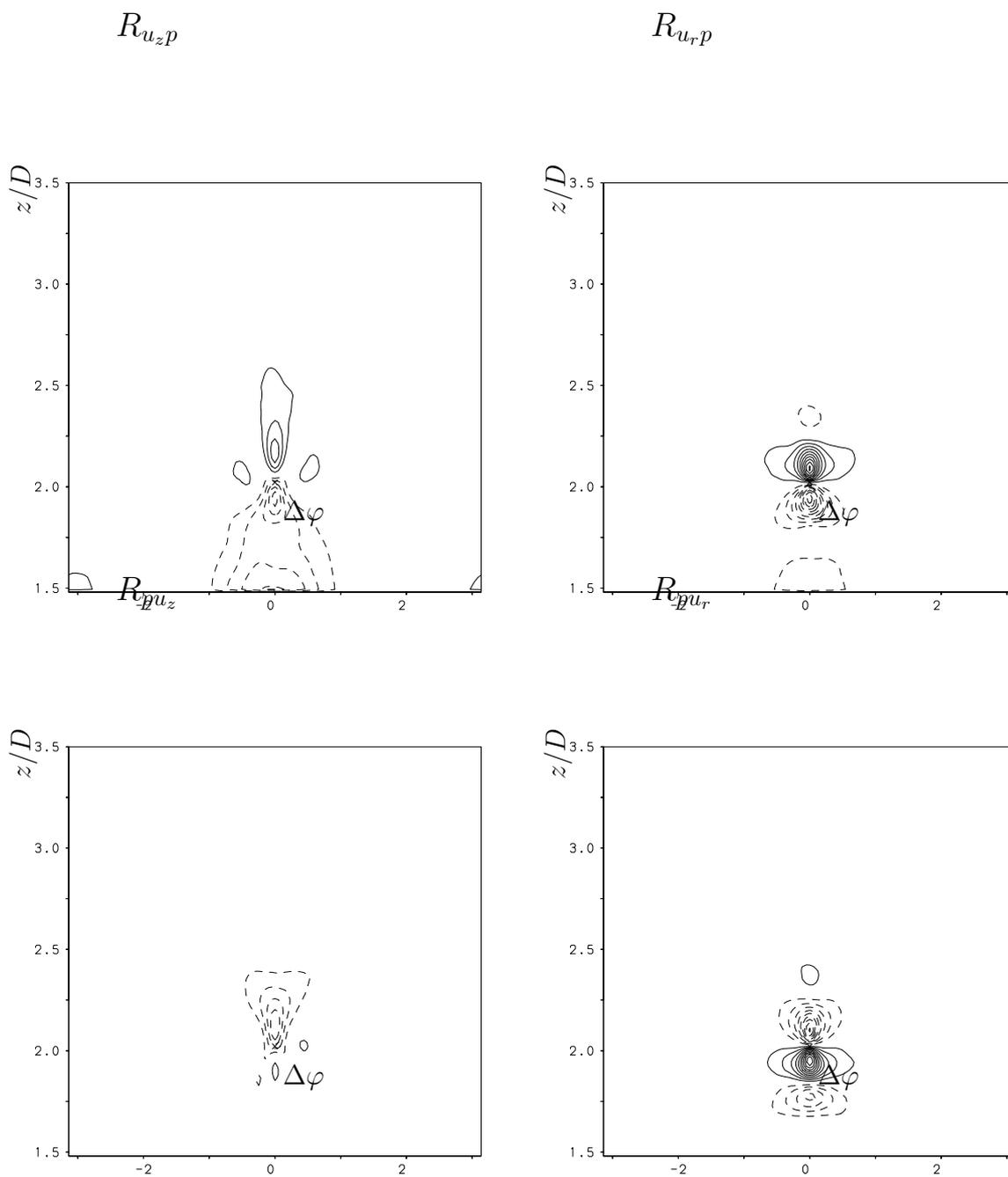


ABBILDUNG 5.97: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z p}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r p}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{p u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{p u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes $K_4: (z_0, r_0) = (2.03, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

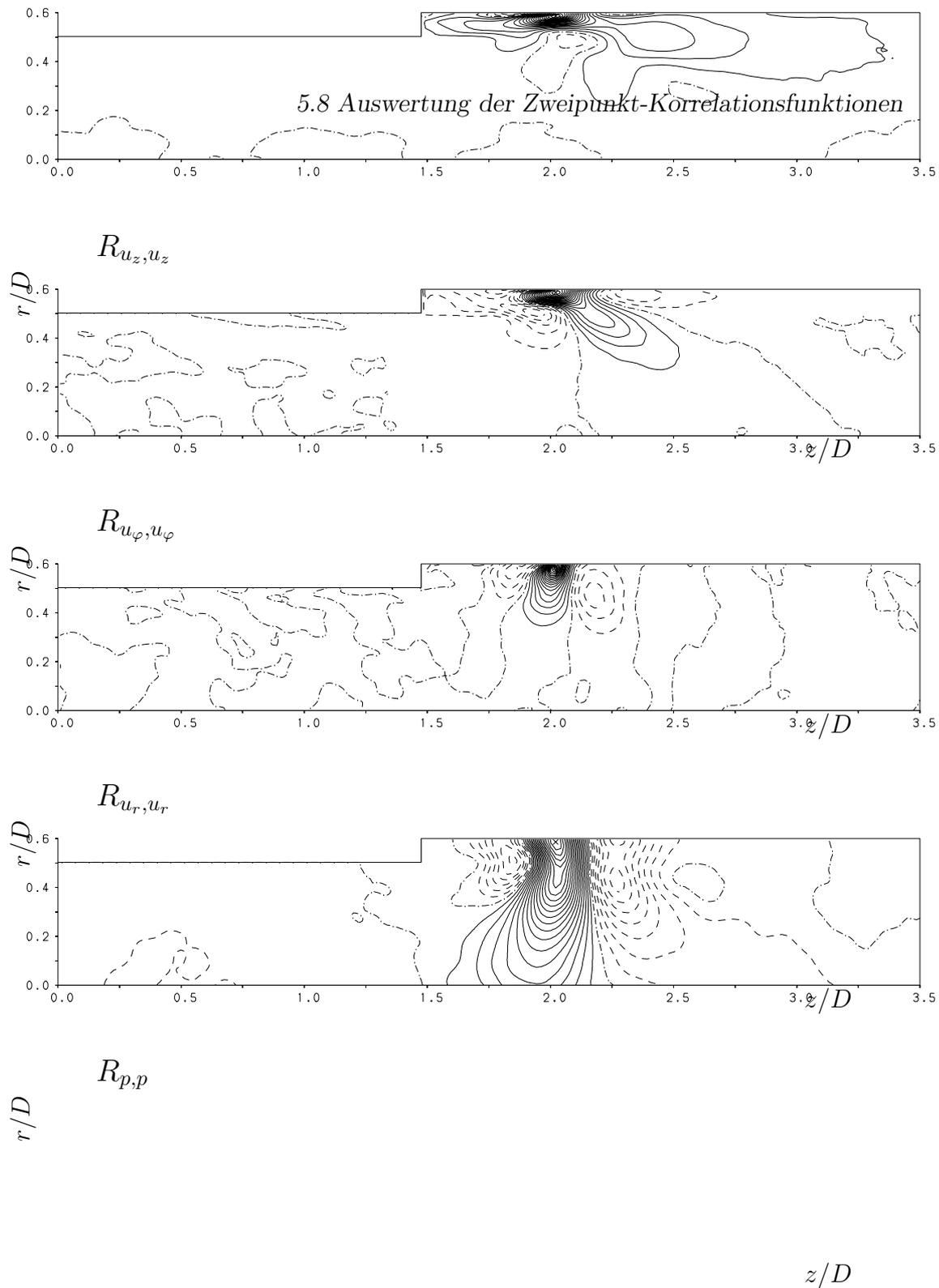


ABBILDUNG 5.98: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_5 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (- · - · - ·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

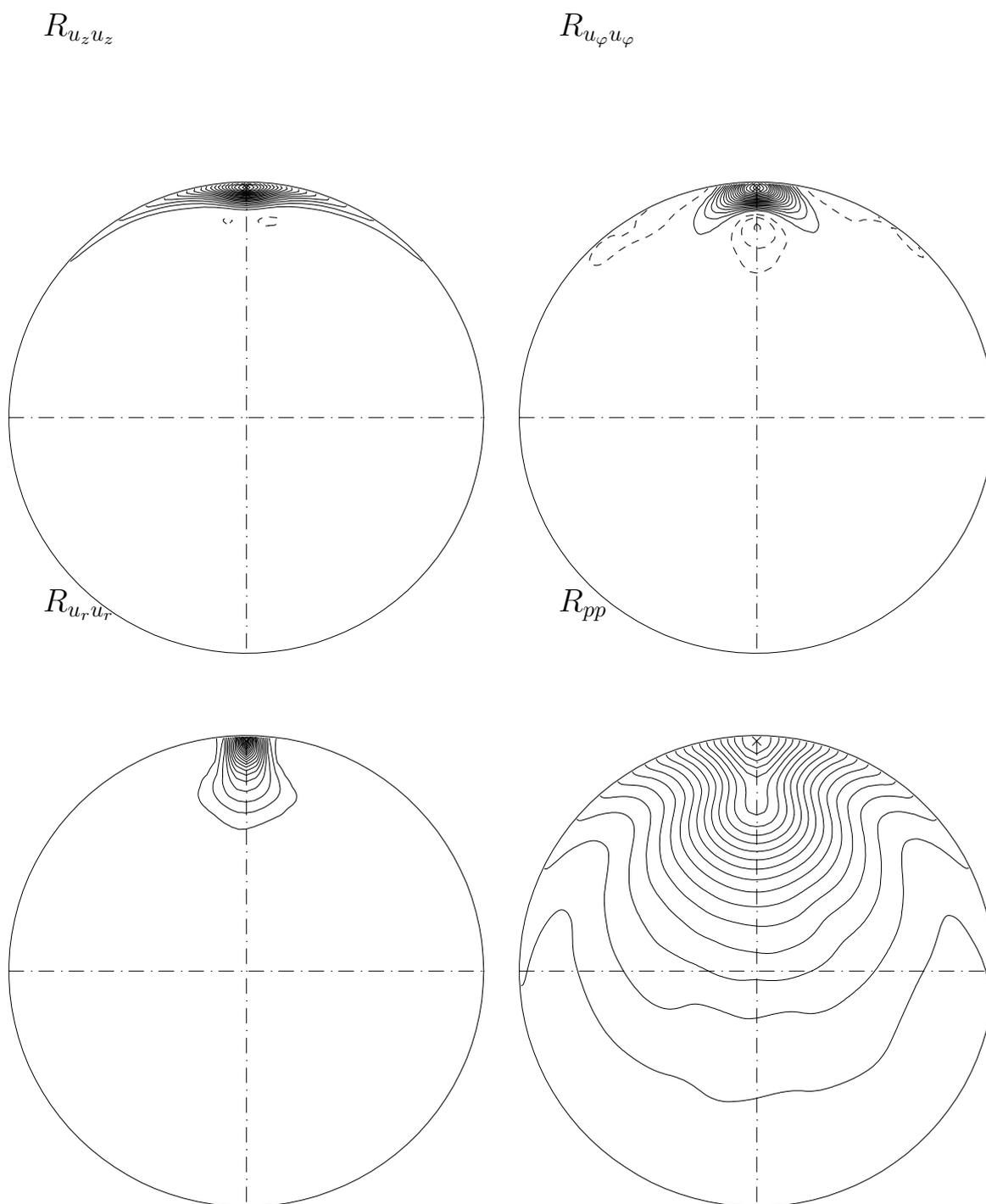


ABBILDUNG 5.99: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_5 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

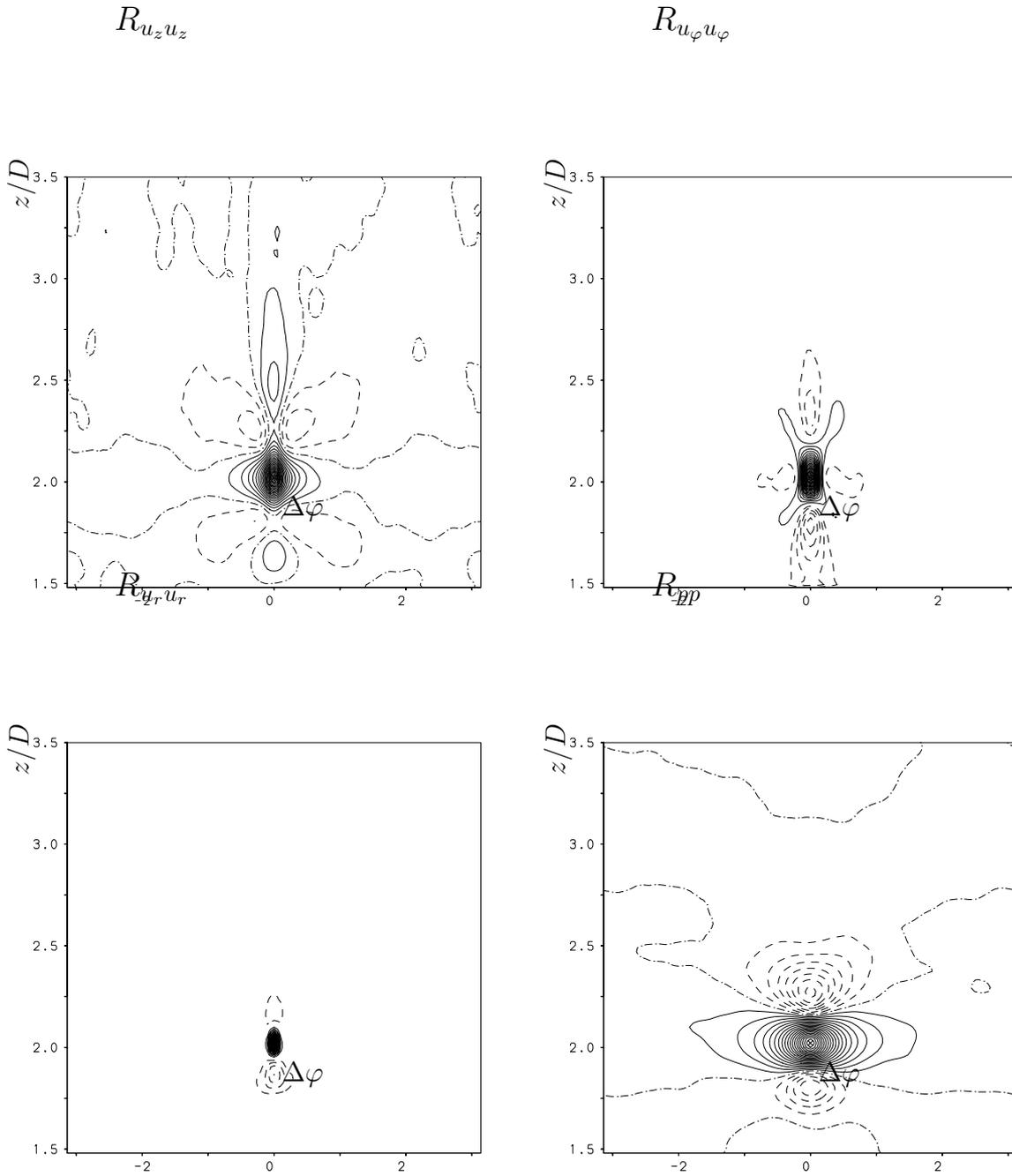


ABBILDUNG 5.100: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{pp}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes K_5 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (———): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

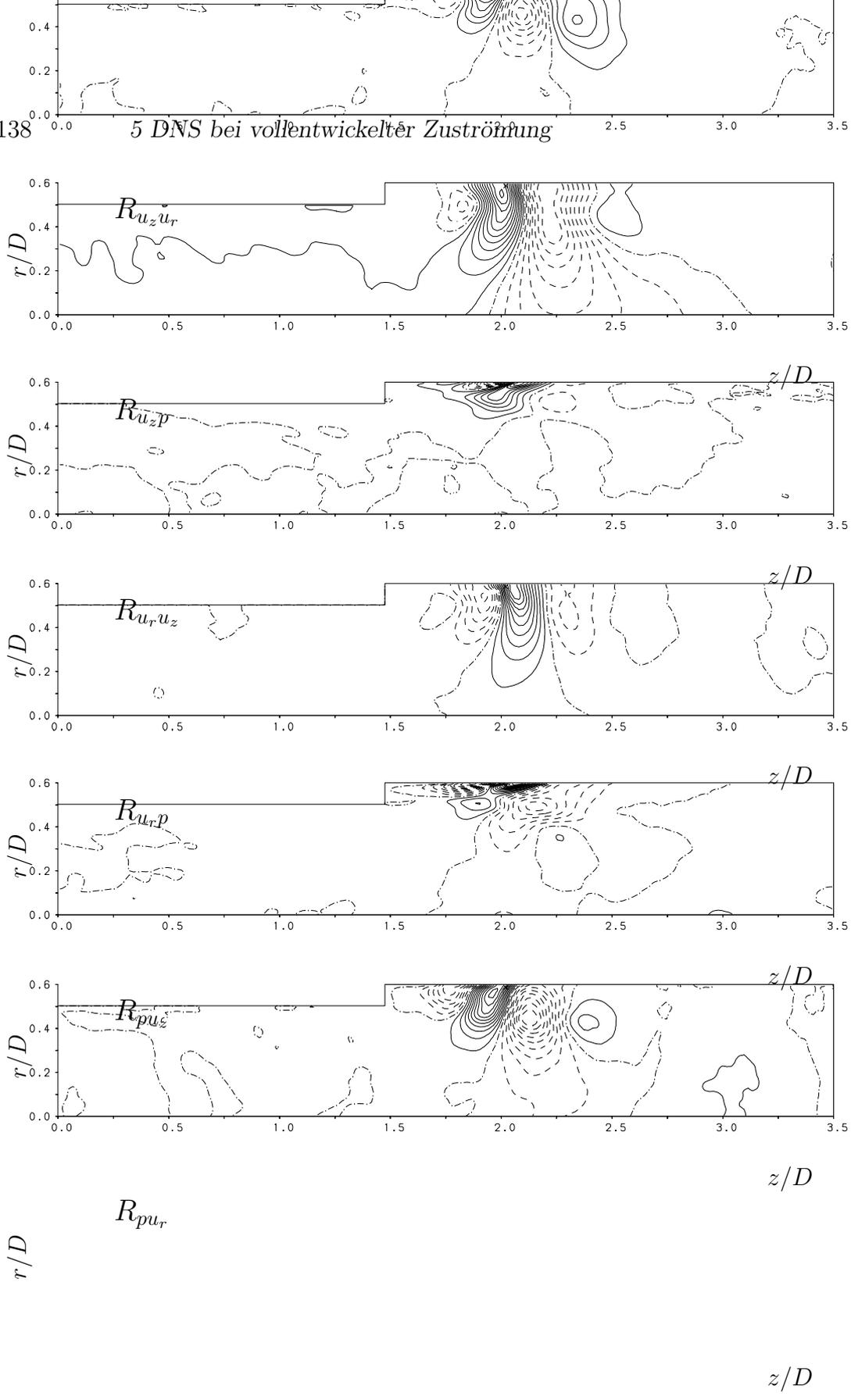


ABBILDUNG 5.101: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_5: (z_0, r_0) = (2.03, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

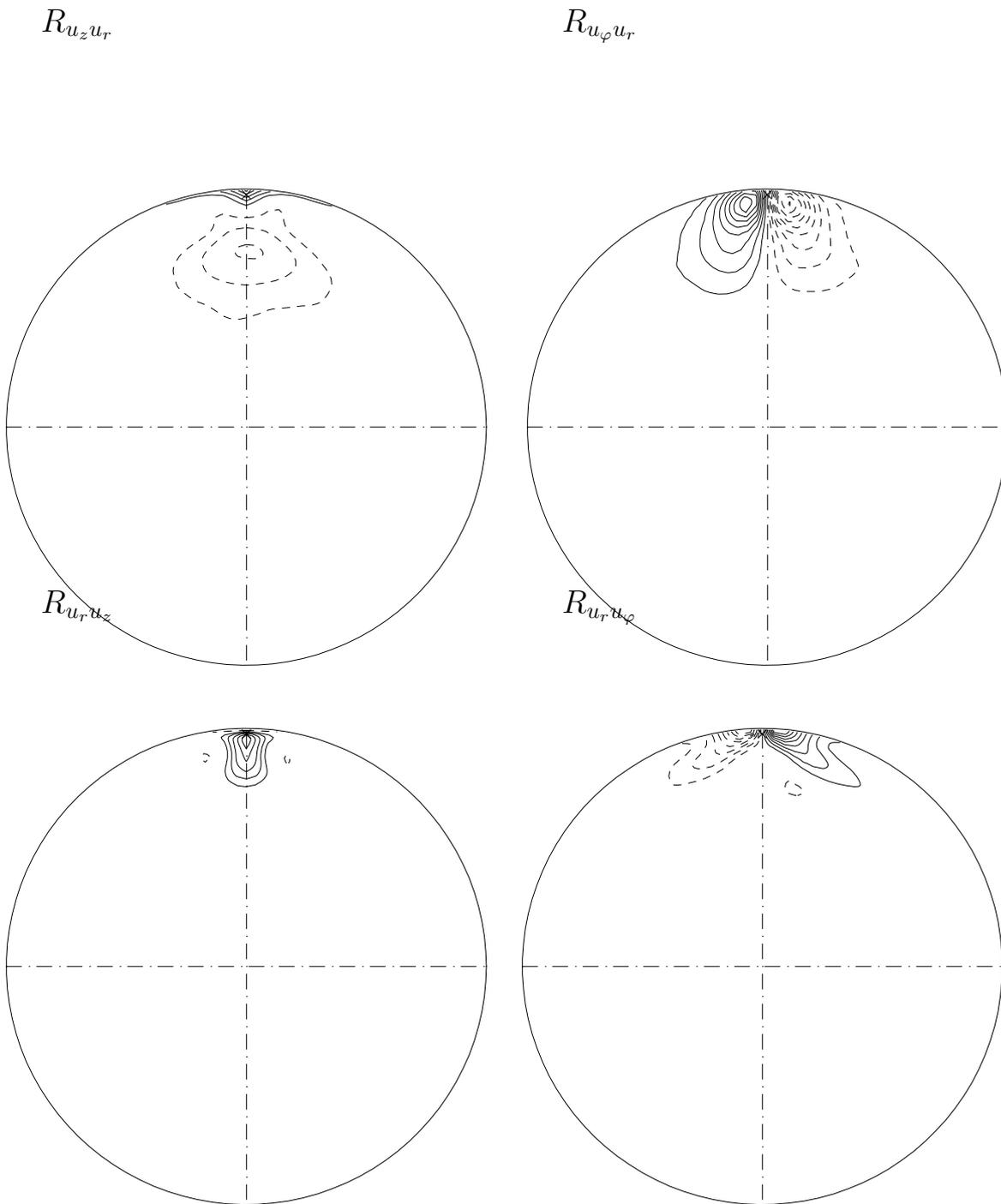


ABBILDUNG 5.102: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_5: (z_0, r_0) = (2.03, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (———): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

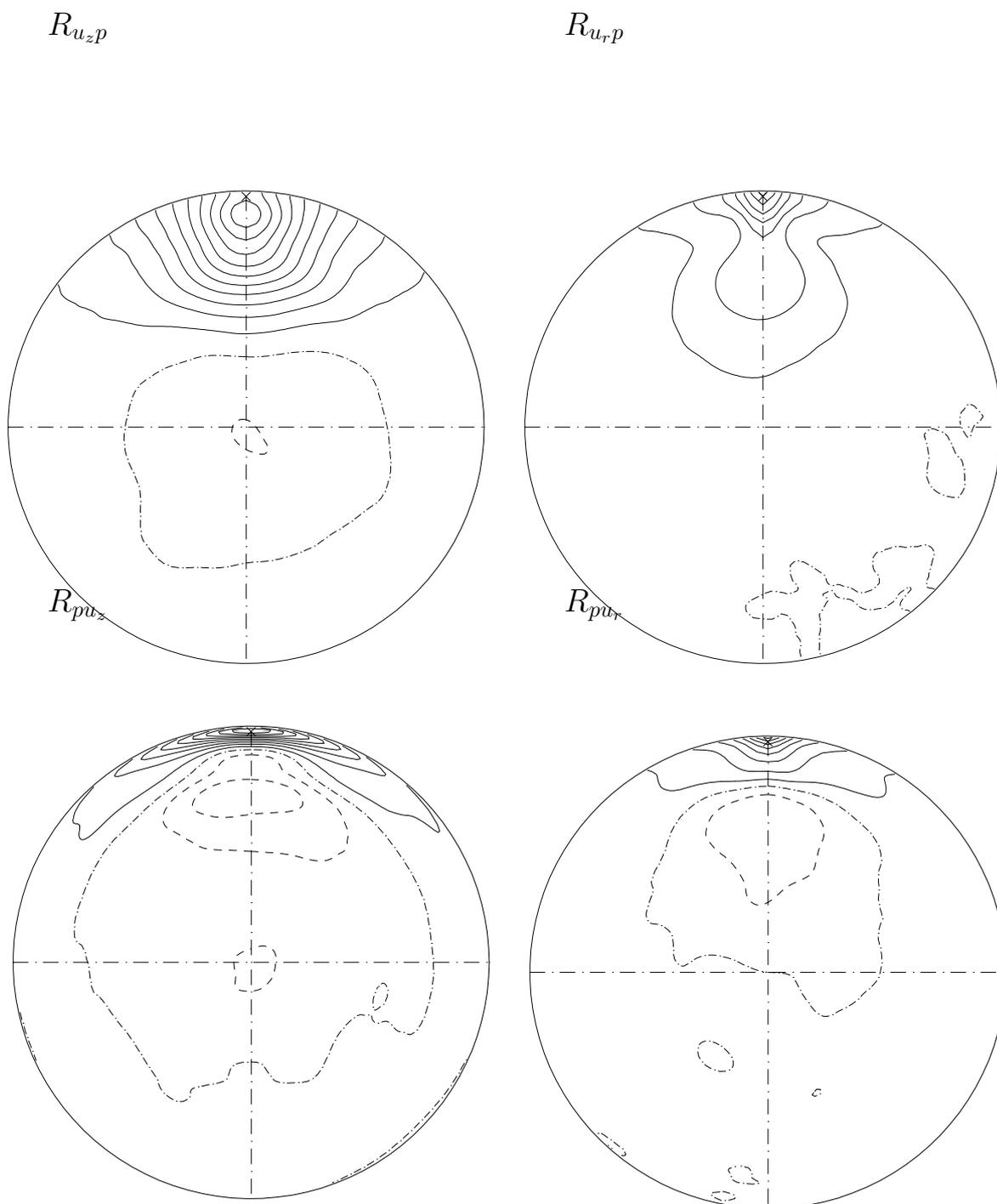


ABBILDUNG 5.103: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z p}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{p u_z}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_5: (z_0, r_0) = (2.03, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- · - · - ·): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

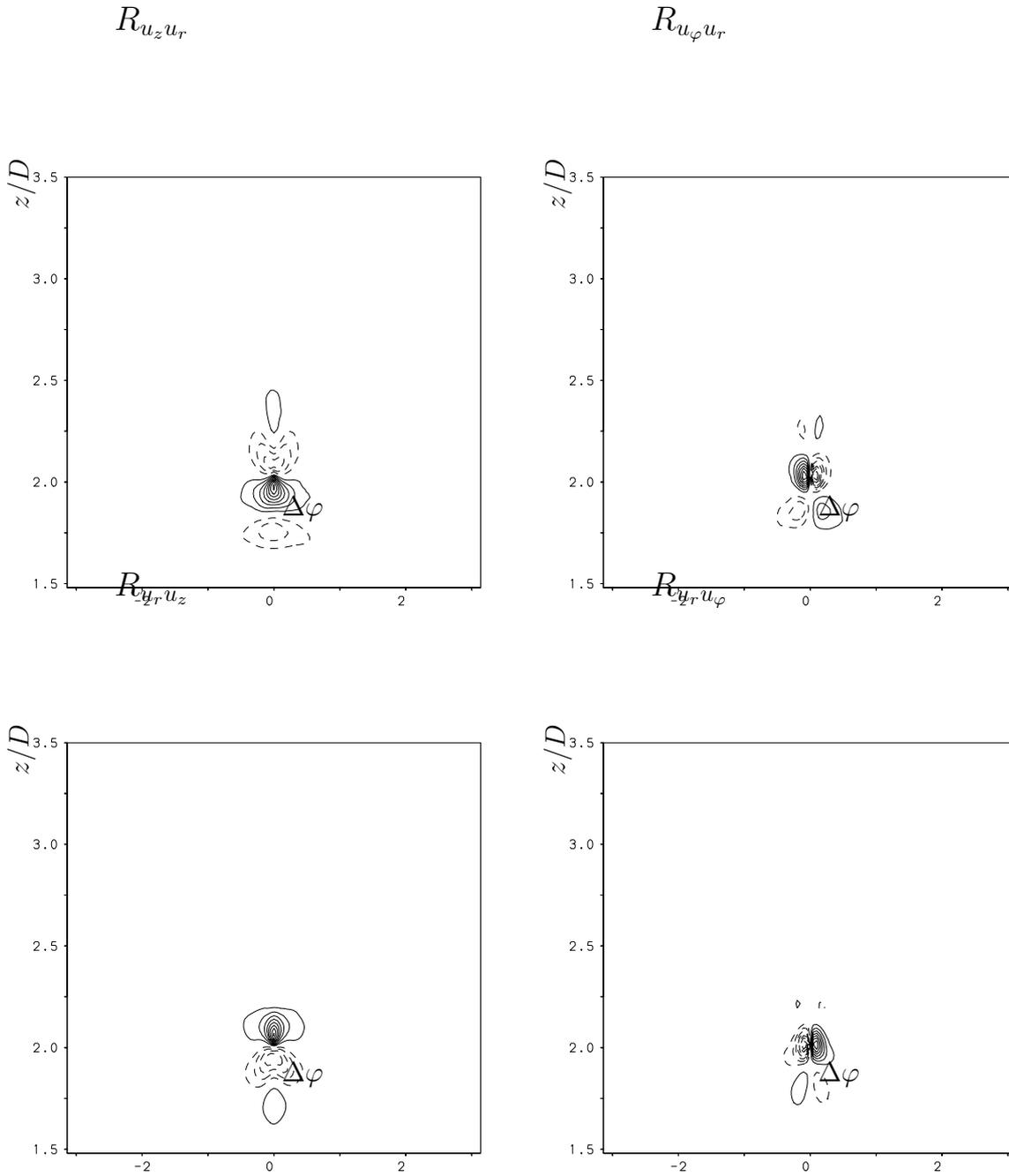


ABBILDUNG 5.104: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes K_5 : $(z_0, r_0) = (2.03, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (———): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

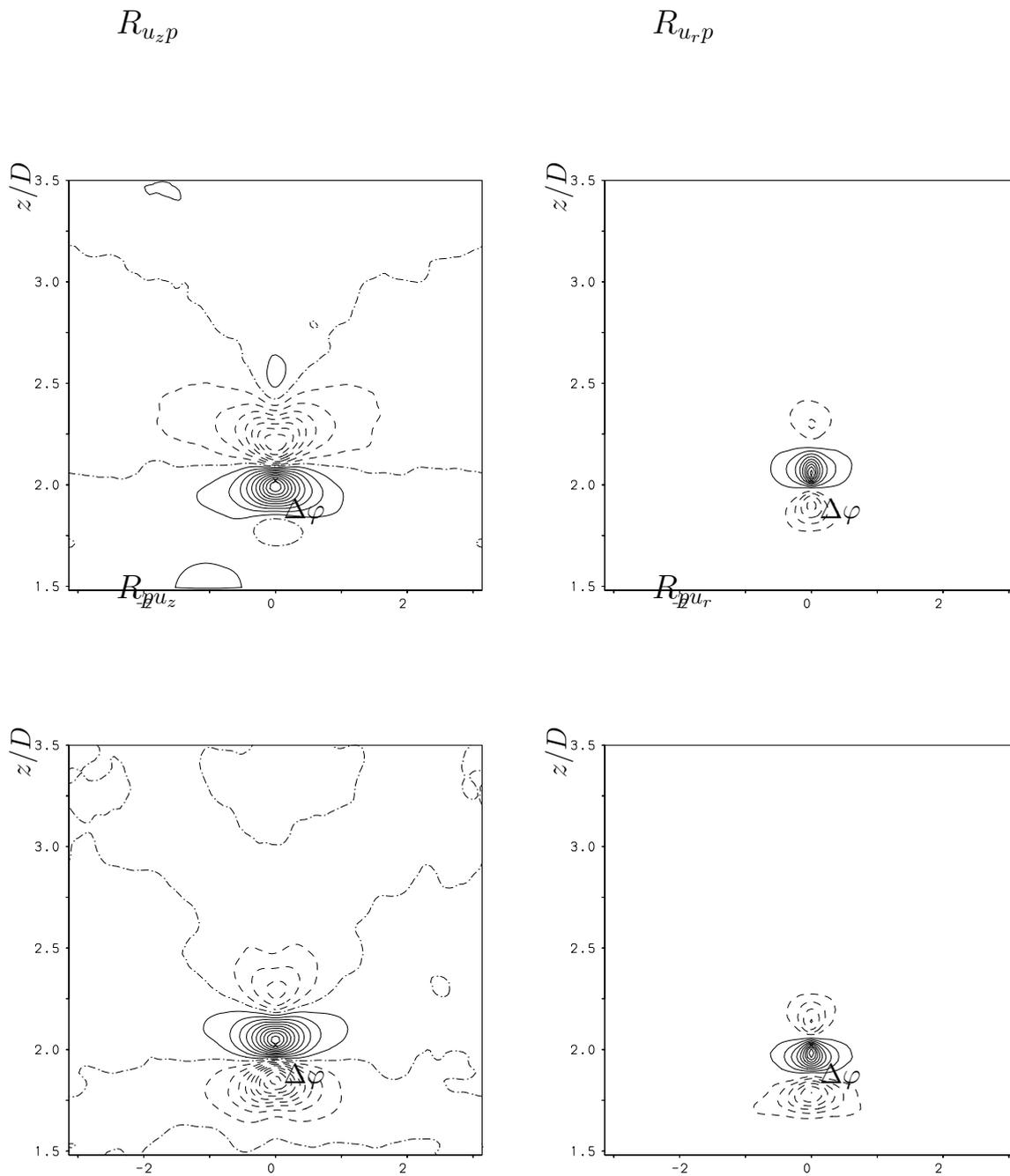


ABBILDUNG 5.105: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z p}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r p}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{p u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{p u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes $K_5: (z_0, r_0) = (2.03, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (-·-·-·-·): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

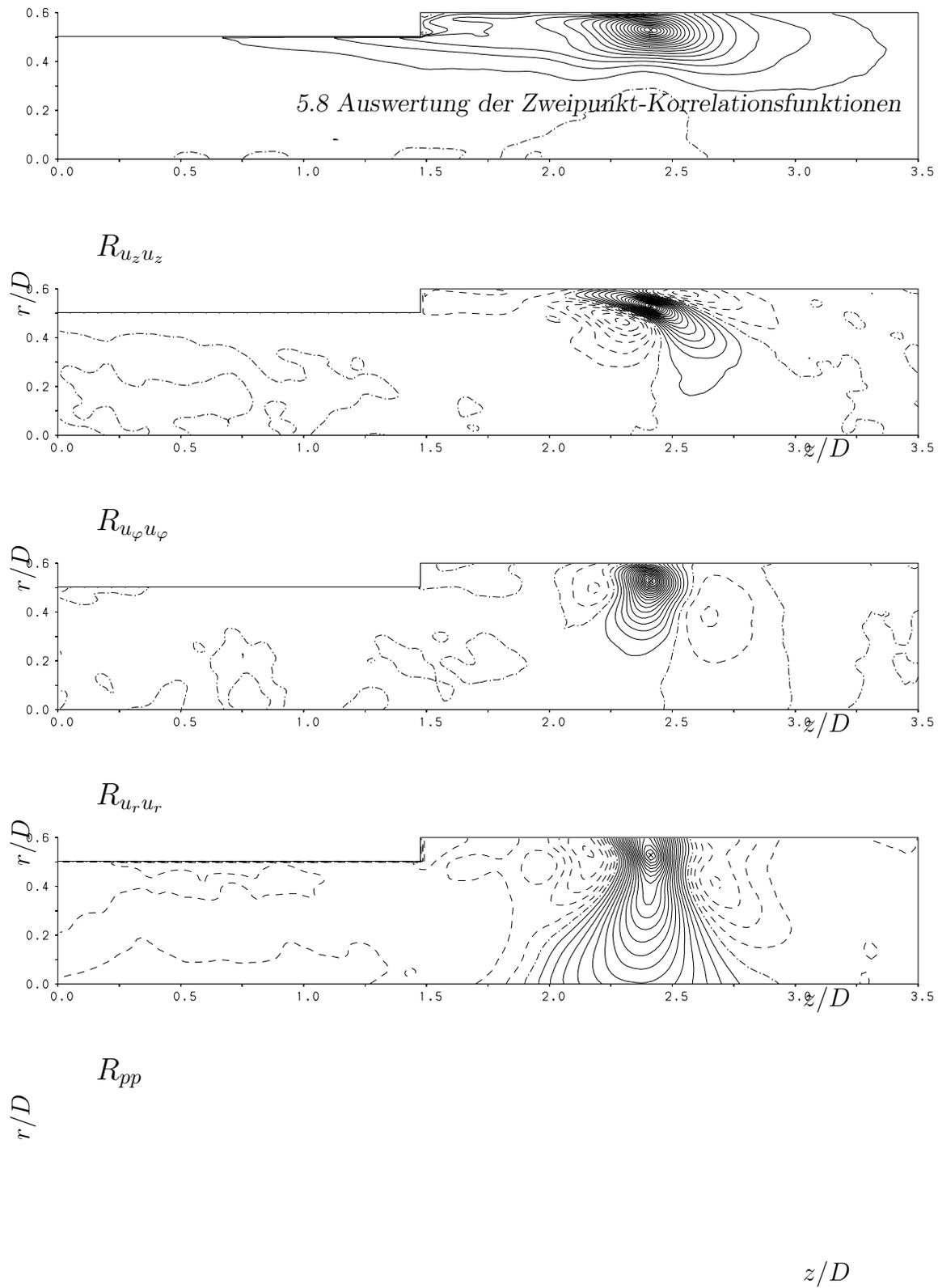


ABBILDUNG 5.106: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{uzuz}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u\phi u\phi}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_6 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

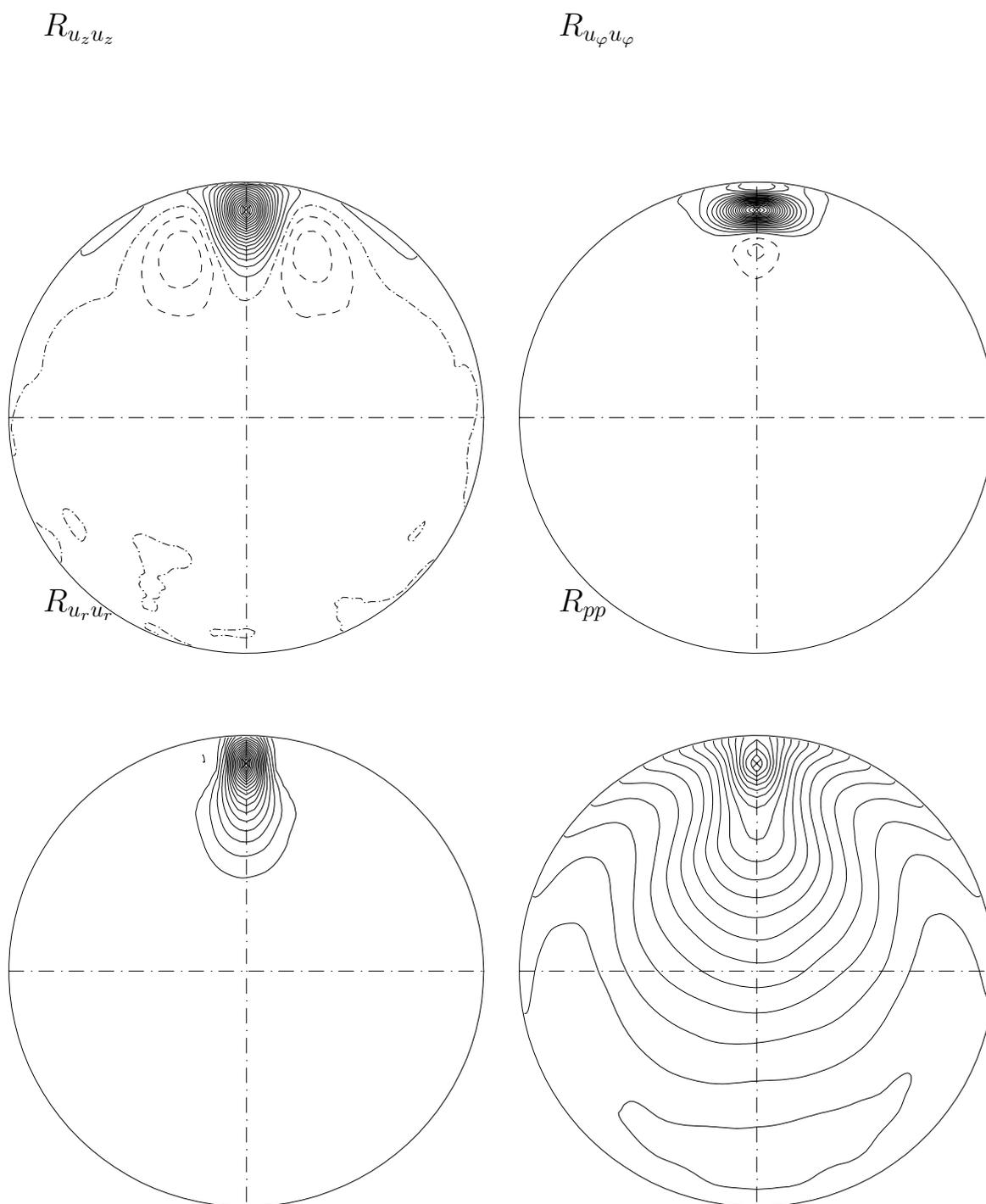


ABBILDUNG 5.107: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_6 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (-·-·-·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

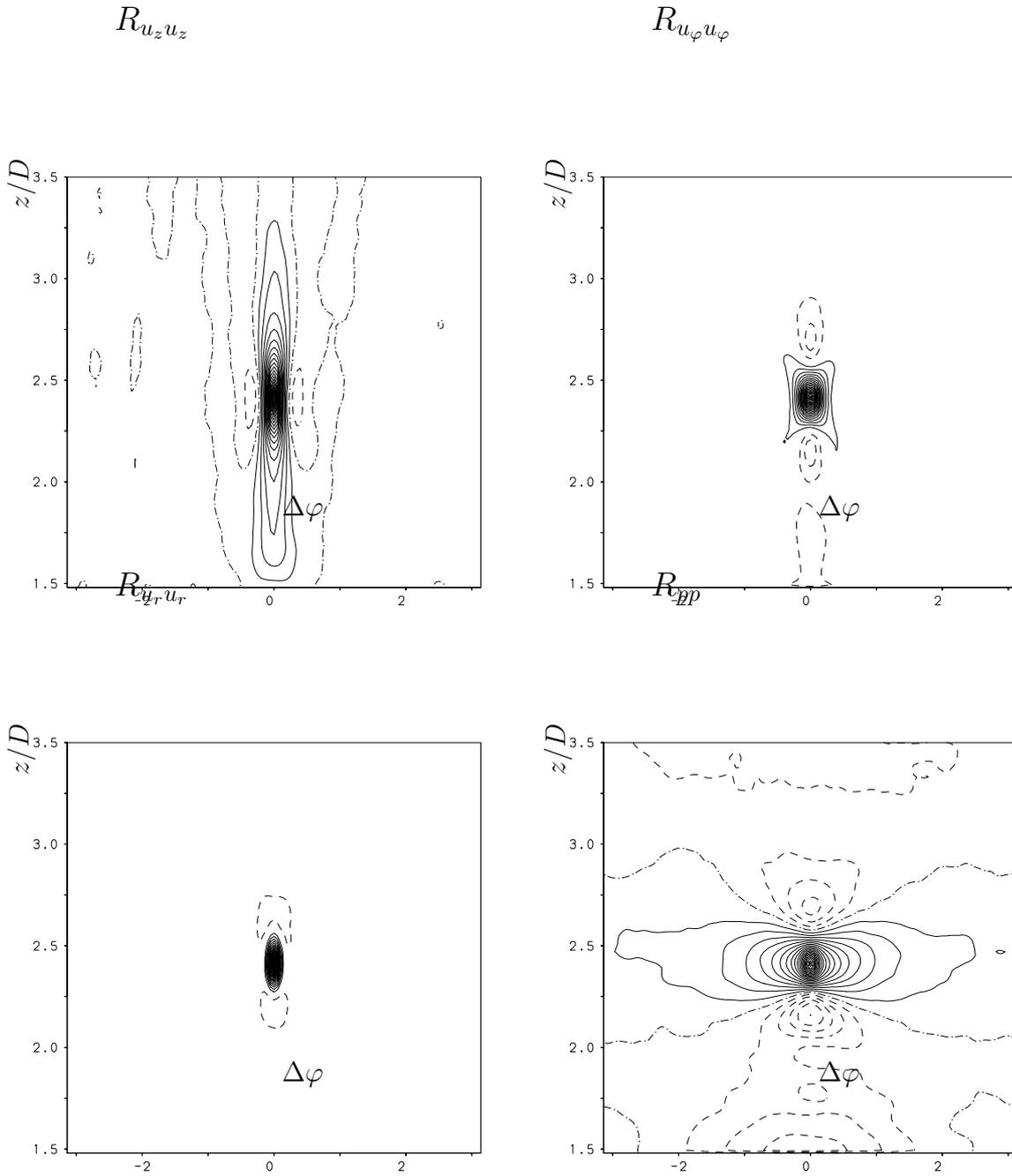


ABBILDUNG 5.108: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{pp}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes K_6 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (---): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

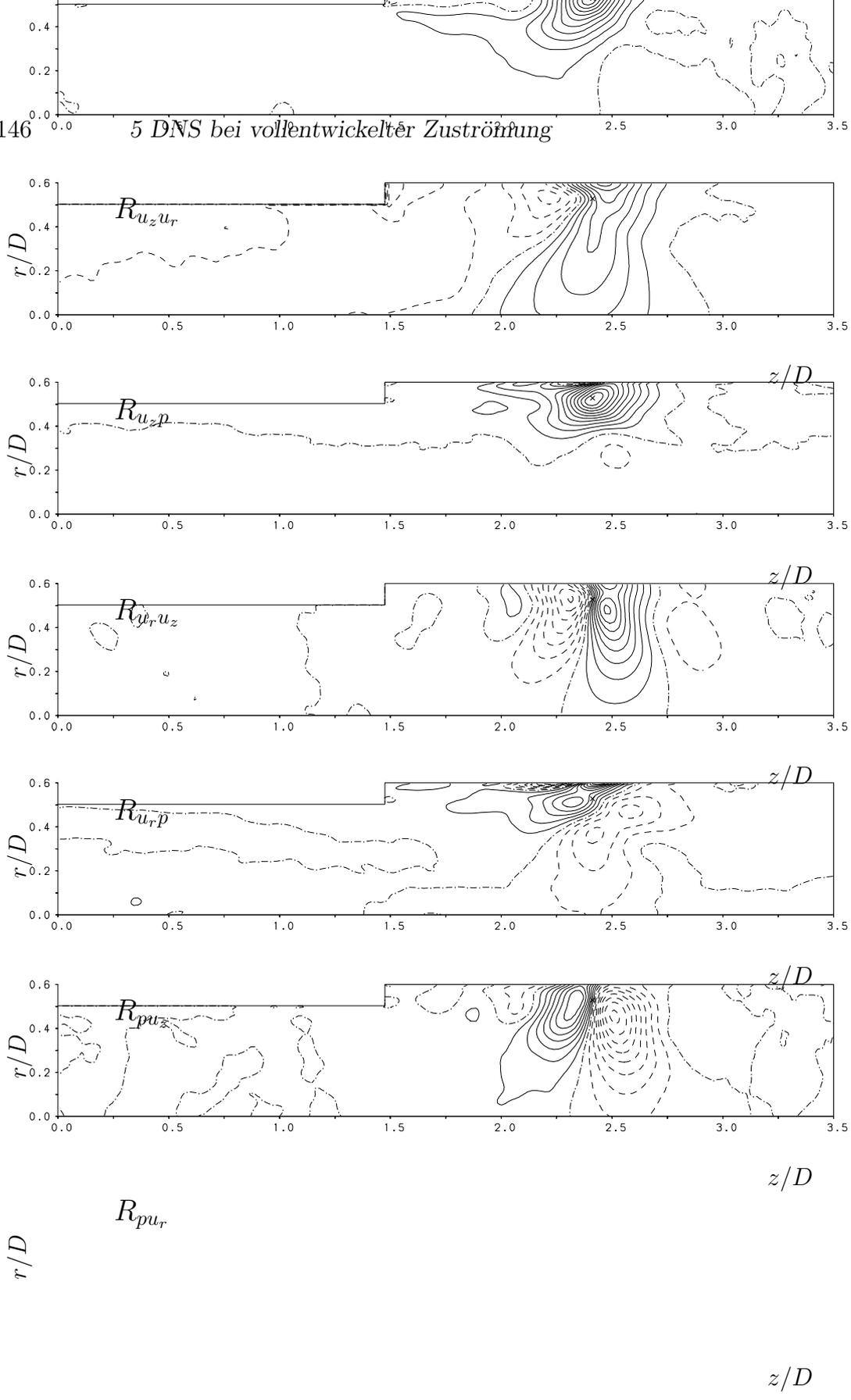


ABBILDUNG 5.109: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_z p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_6: (z_0, r_0) = (2.42, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (. . . .): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

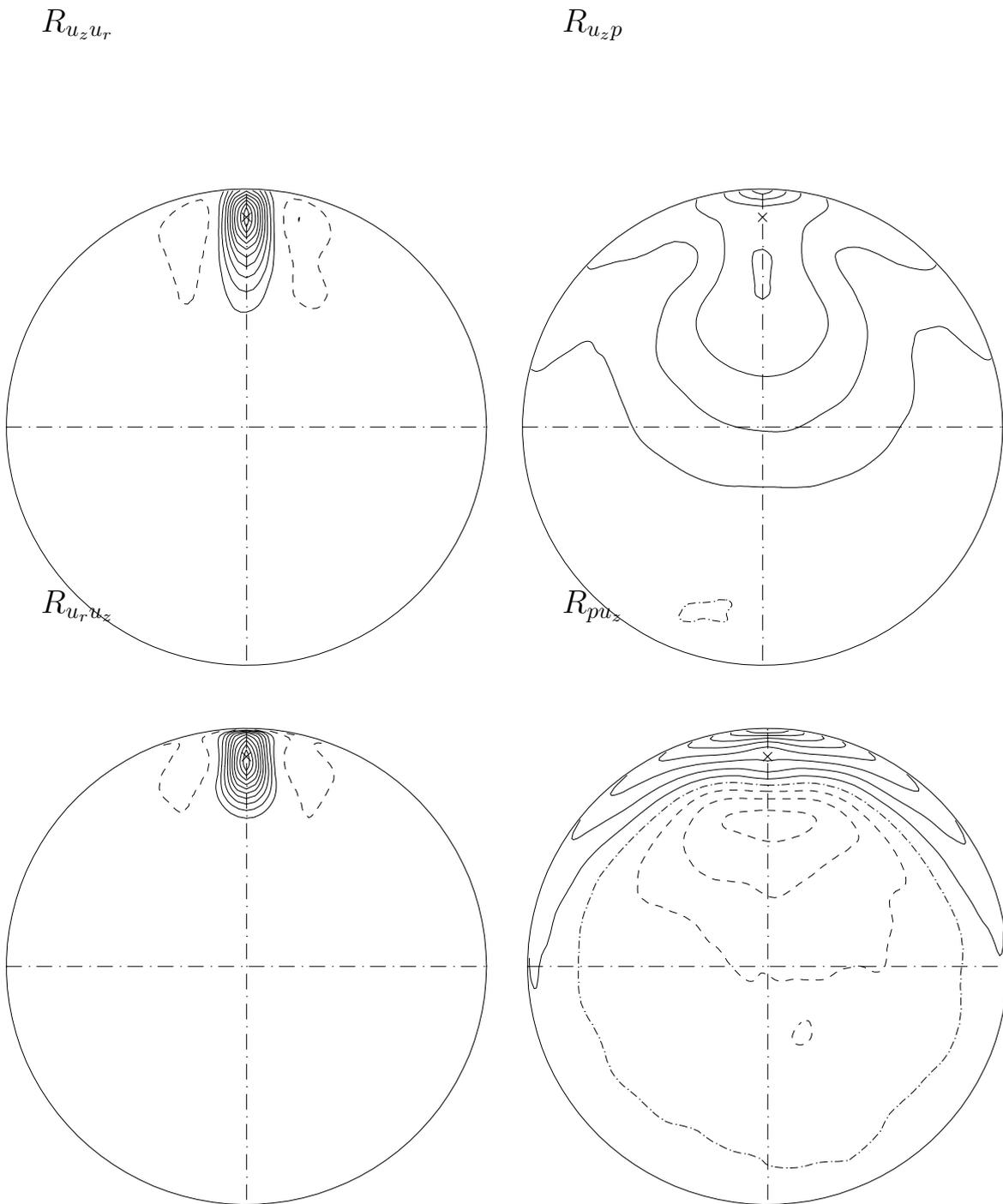


ABBILDUNG 5.110: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_z p}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, \Delta\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_6: (z_0, r_0) = (2.42, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

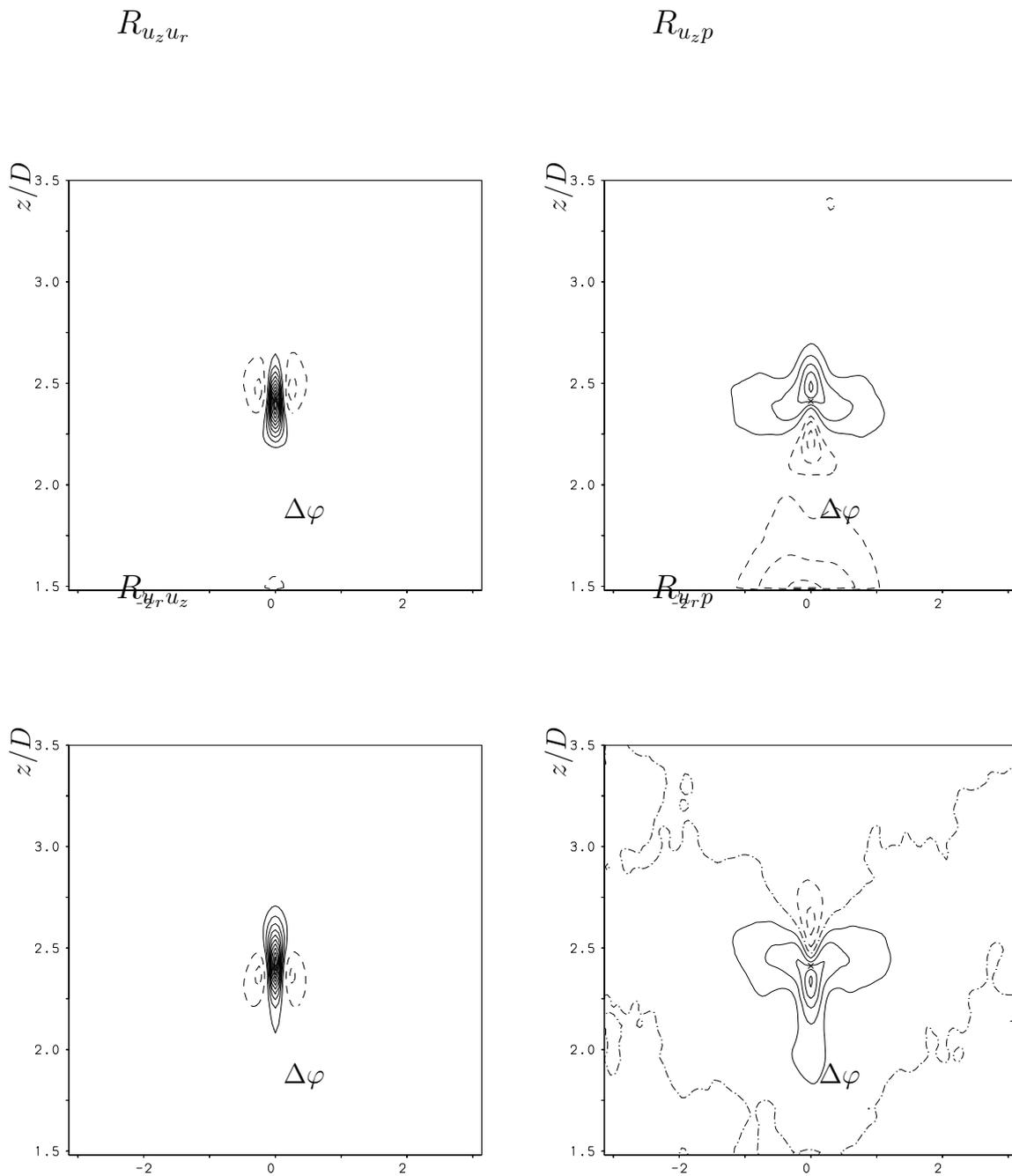


ABBILDUNG 5.111: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_z p}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{p u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, für die Position des Aufpunktes K_6 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.53)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (———): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (······): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

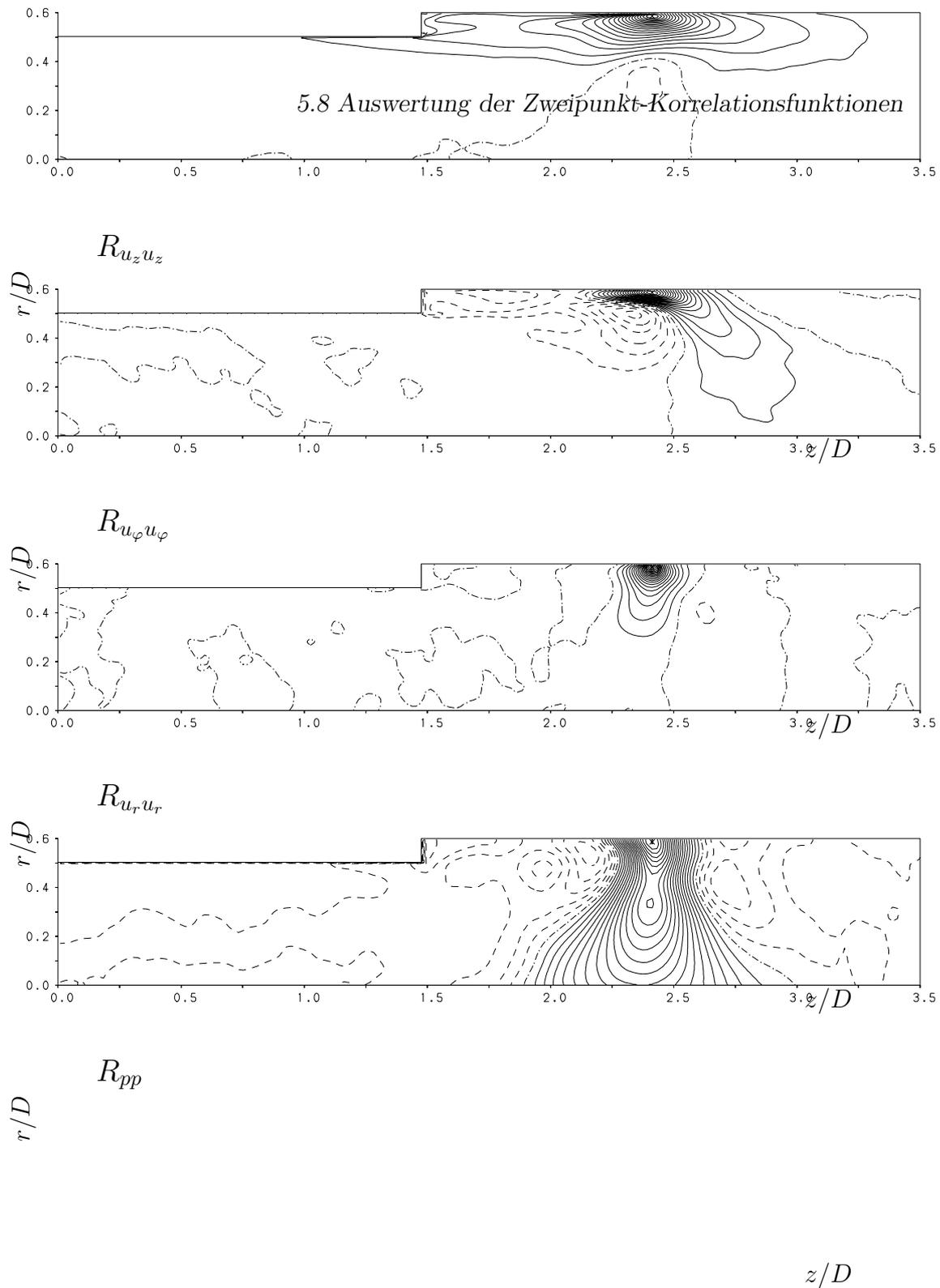


ABBILDUNG 5.112: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_\phi u_\phi}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{pp}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_7 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

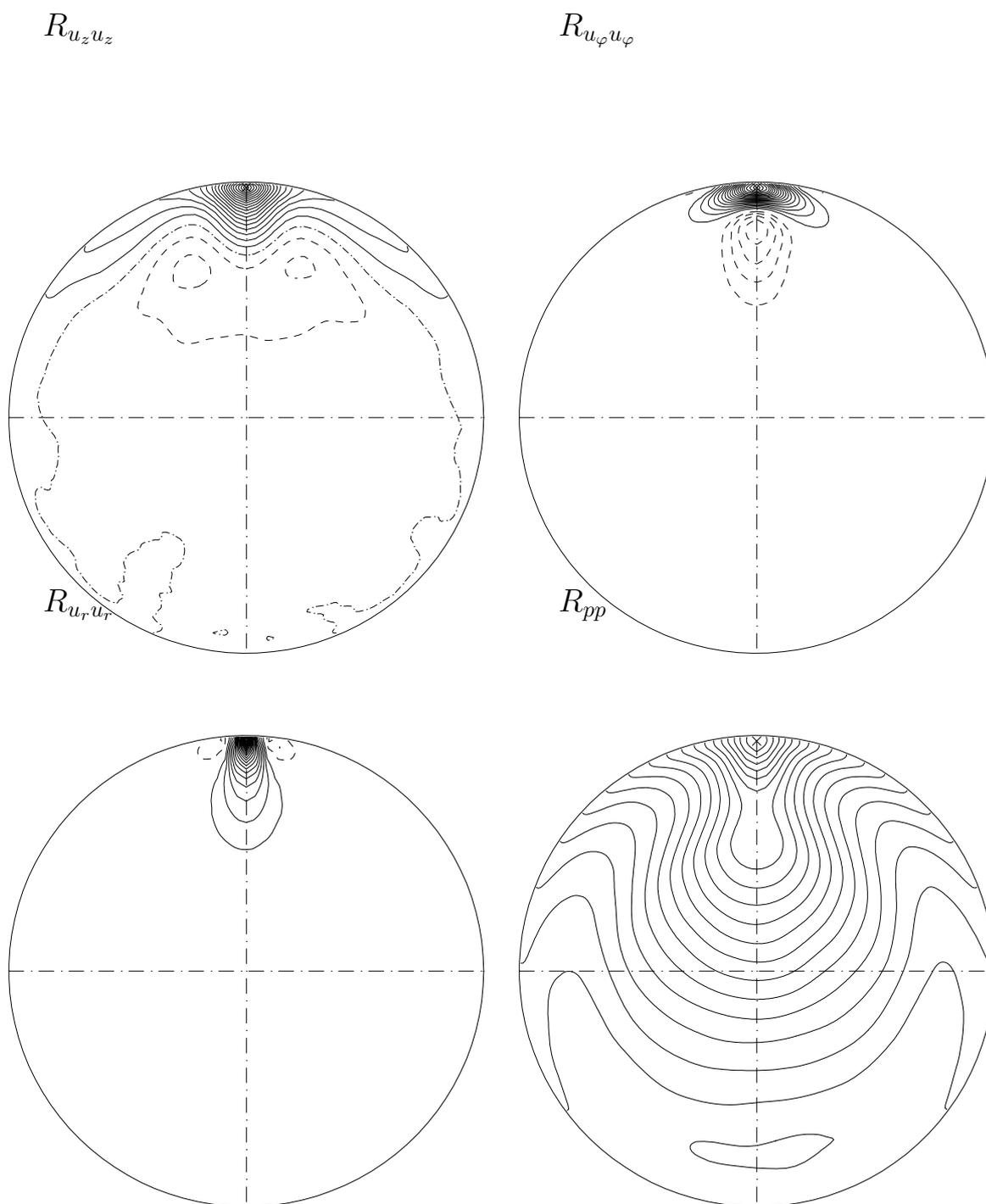


ABBILDUNG 5.113: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\alpha u_\alpha}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_7 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (· · · · ·): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

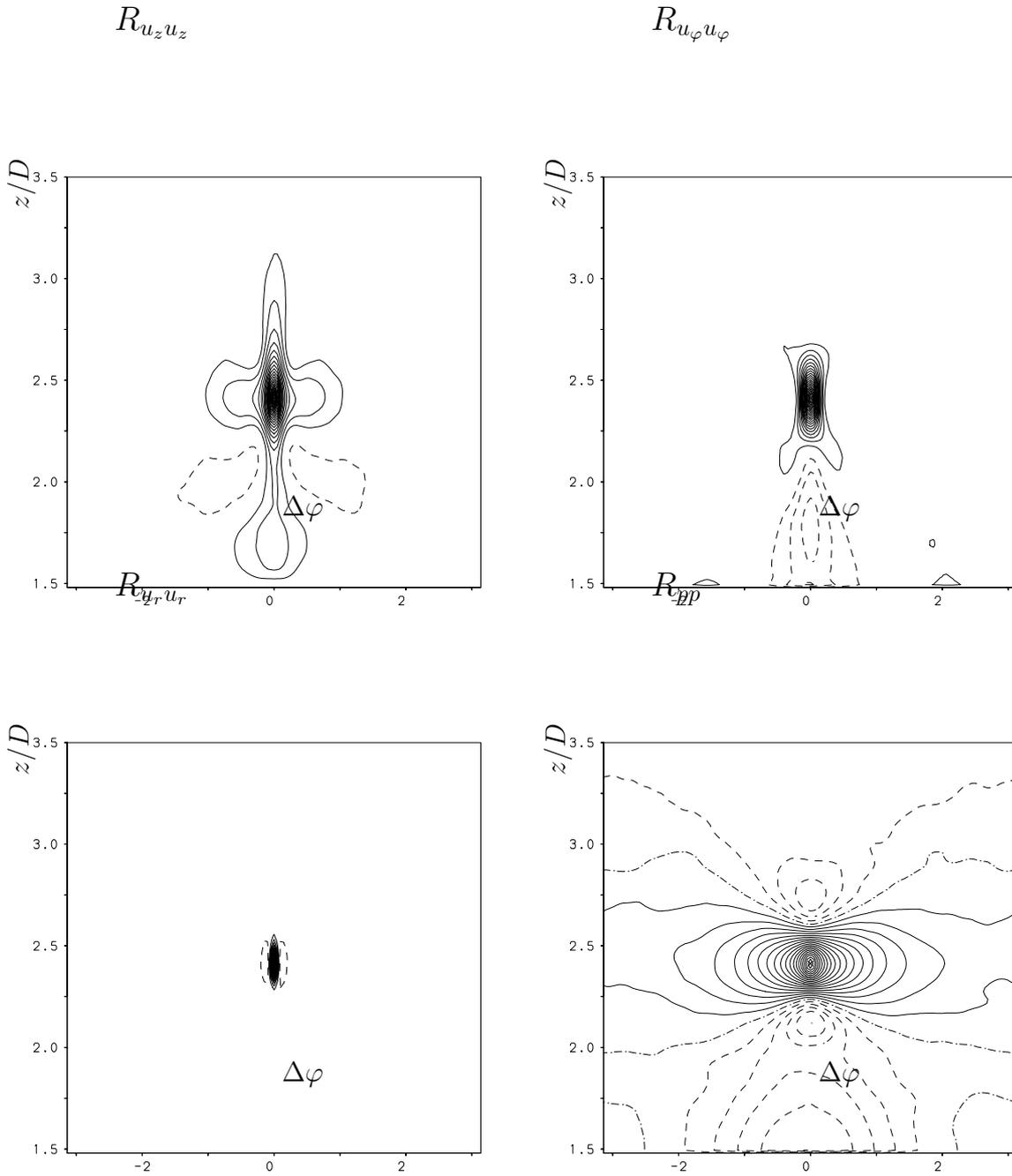


ABBILDUNG 5.114: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_\varphi u_\varphi}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{pp}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes K_7 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. Aufpunkt (\times): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 1$, (—): $R_{u_\alpha u_\alpha} > 0$, (---): $R_{u_\alpha u_\alpha} = 0$, (----): $R_{u_\alpha u_\alpha} < 0$.

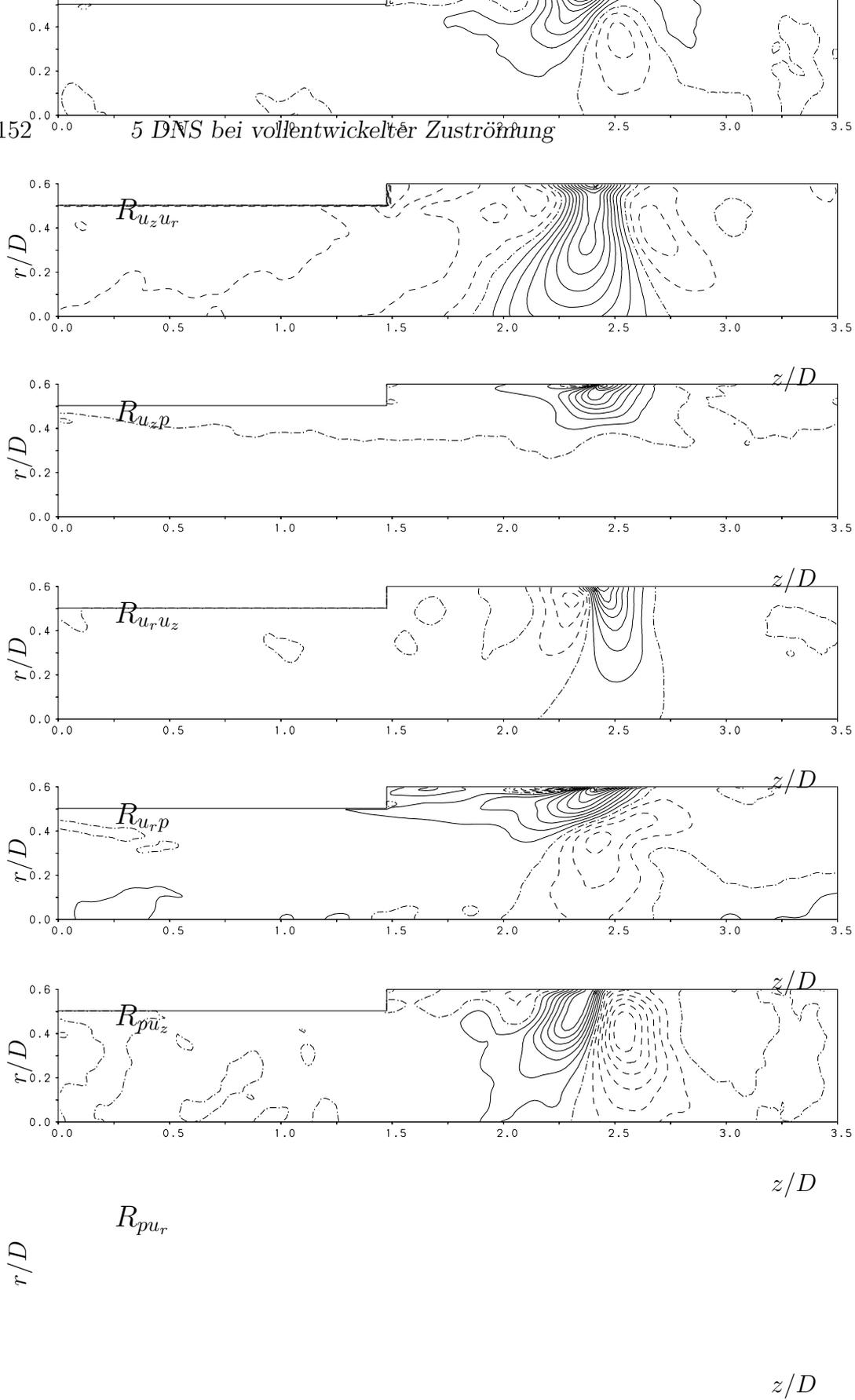


ABBILDUNG 5.115: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{u_r p}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_z}(z_0, z, r_0, r)$, $R_{p u_r}(z_0, z, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes $K_7: (z_0, r_0) = (2.42, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (- - - -): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

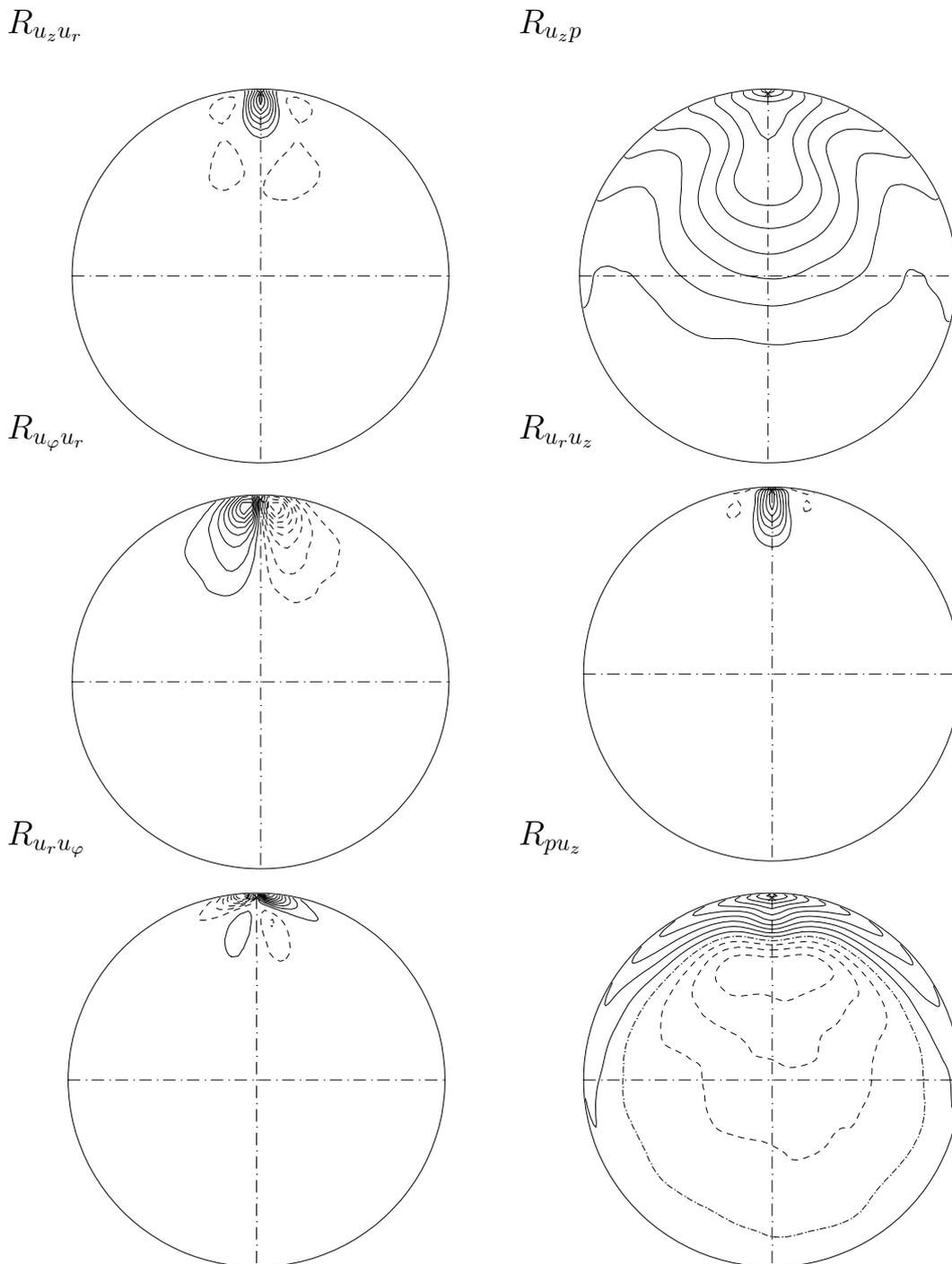


ABBILDUNG 5.116: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_z p}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_\varphi u_r}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{u_r u_\varphi}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$, $R_{p u_z}(z_0, \Delta_\varphi, r_0, r)$ für die Position des Aufpunktes K_7 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (---): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

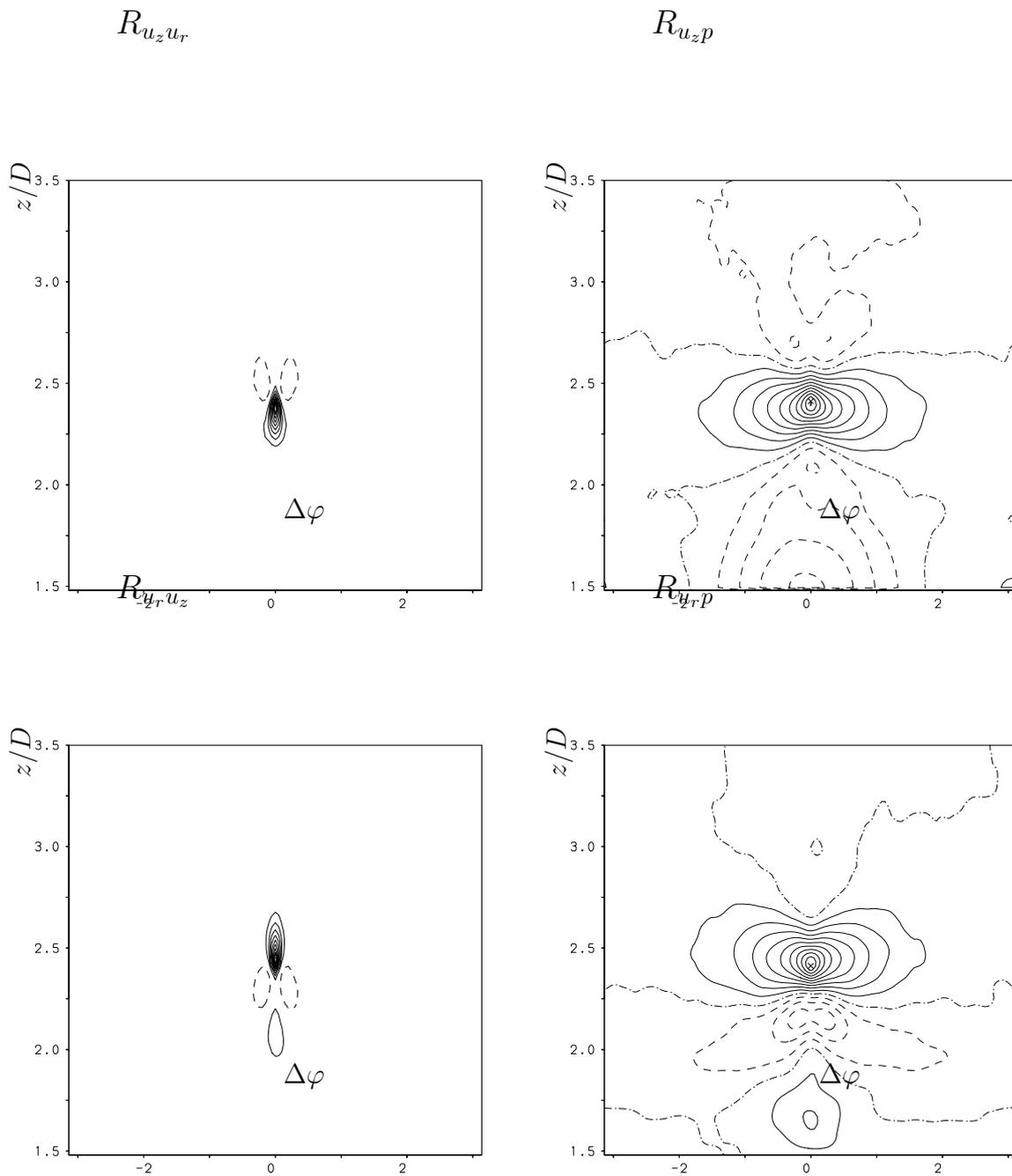


ABBILDUNG 5.117: Höhenlinien der zweidimensionalen Korrelationsfunktionen $R_{u_z u_r}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_z p}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{u_r u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$, $R_{p u_z}(z_0, z, \Delta\varphi, r_0)$ für die Position des Aufpunktes K_7 : $(z_0, r_0) = (2.42, 0.59)$ und dem Inkrement 0.05. (\times): Aufpunkt, (—): $R_{u_\alpha u_\beta} > 0$, (---): $R_{u_\alpha u_\beta} = 0$, (·····): $R_{u_\alpha u_\beta} < 0$.

5.9 Feinstruktur-Energietransfer

Bei nahezu allen praxisnahen Strömungssimulationen muß auf die Berechnung mindestens eines Teiles der turbulenten Skalen verzichtet werden. Dementsprechend versucht die Grobstruktur-simulation den am stärksten anisotropen Wellenzahlbereich des Energiespektrums direkt aufzulösen und die Feinstruktur, von der man meist annimmt, daß sie sich näherungsweise isotrop verhält, zu modellieren.

Die Daten einer direkten numerischen Simulation können durch Anwendung der in Kapitel 4.8 beschriebenen Filteroperation in Grob- und Feinstrukturanteile aufgespalten werden. Da das dazu verwendete ideale Filter nur in periodischen Richtungen angewendet werden kann, wurden die Daten der vorliegenden DNS lediglich in der φ -Richtung gefiltert. Die hierfür gewählte Grenzwellenzahl $K_{\varphi+}^c = 0.065$ läßt diejenigen Wellenzahlen passieren, die von einem Rechengitter mit 22 Gitterpunkten in Umfangsrichtung erfaßt werden können. Es muß allerdings darauf hingewiesen werden, daß die Wirkung dieser Filterung aufgrund der in Zylinderkoordinaten variablen Krümmungsradien mit zunehmender Annäherung an die Rohrachse verschwindet.

Abbildung 5.118 zeigt Profile der Elemente des mittleren (deviatorischen) Feinstrukturspannungstensors an den zwei axialen Positionen $z/D = 0.58$ (Zuströmbereich) und $z/D = 2.24$ (Wiederanlegebereich). Dieser Vergleich zwischen der einfachen Scherströmung und der abgelösten Strömung zeigt nur quantitative Unterschiede in den Größen $\langle \tau_{zz} \rangle$ und $\langle \tau_{zr} \rangle$, während sich $\langle \tau_{rr} \rangle$ und $\langle \tau_{\varphi\varphi} \rangle$ im Bereich der Rezirkulationszone deutlich von den Werten in Wandnähe der vollentwickelten Zuströmung unterscheiden. Innerhalb der wiederanlegenden Scherschicht erreichen die Feinstrukturspannungen Werte, die jene der einfachen Scherströmung ($z/D = 0.58$) um mehr als das 5-fache übersteigen. Den Feinstrukturspannungen sind in Abbildung 5.119 die in Gleichung 5.1 definierten deviatorischen Anteile der Reynoldsschen Spannungen Q_{ij} gegenübergestellt.

$$Q_{ij} = \langle u_i'' u_j'' \rangle - \frac{1}{3} \langle u_k'' u_k'' \rangle \delta_{ij} \quad (5.1)$$

Die sowohl für $z/D = 0.58$ als auch für $z/D = 2.24$ qualitativ ähnlichen Verläufe geben die Skalen-Ähnlichkeit dieser Strömungsgrößen wieder. Eine verblüffende quantitative Ähnlichkeit läßt sich dadurch erzielen, daß $\langle \tau_{ij} \rangle$ mit $1/2 \langle q_{kk} \rangle$ und die deviatorischen Reynoldsspannung mit der turbulenten kinetischen Energie normiert wird, siehe die Abb. 5.120 und 5.121. Der entsprechend normierte deviatorische Anteil der Grobstrukturspannung führt zu vergleichbaren Ergebnissen aus denen sich ein Feinstrukturmodell für komplexe Strömungen unmittelbar ableiten läßt. Das von Goutorbe et al. [25] entwickelte Feinstrukturmodell nützt die Ähnlichkeit von Grobstrukturspannungen mit unterschiedlichem Filterungsgrad, um daraus mit Hilfe eines dynamischen Modells analog dem von Germano [24] jede einzelne Feinstrukturspannung zu errechnen. In ersten Grobstruktursimulationen der turbulenten Kanalströmung wurden damit

ermutigende Ergebnisse erzielt.

Abbildung 5.122 zeigt die Grobstrukturscherraten $\langle \overline{s_{zr}} \rangle$ der beiden Positionen. Während die vollentwickelte Zuströmung durch negative Scherraten, deren absolutes Minimum in Wandnähe auftritt, gekennzeichnet ist, entstehen im Rückströmgebiet positive Scherraten, die die negativen Scherraten der freien Scherschicht übersteigen. Die drei Hauptdiagonalelemente des gefilterten Deformationstensors $\langle \overline{s_{zz}} \rangle$, $\langle \overline{s_{rr}} \rangle$, $\langle \overline{s_{\varphi\varphi}} \rangle$ in Abbildung 5.123 (sie verschwinden für $z/D = 0.58$) spiegeln die in der Rezirkulationszone beobachteten Beschleunigungs- und Verzögerungseffekte wider.

Die derzeit verwendeten Modelle der Grobstruktursimulation beschreiben einen Energiefluß von der Grobstruktur zur Feinstruktur und sind damit nicht nur im Mittel, sondern auch momentan stets rein 'dissipativ'. Dies entspricht der klassischen Vorstellung einer Energiekaskade, bei der Energie von den größeren an die kleineren Strukturen weitergegeben wird. Mit dem Ziel, den Energiefluß zwischen der Grobstruktur und der Feinstruktur zu analysieren, wurde von Härtel [27] die in Gleichung 4.38 dargestellte Aufspaltung der mittleren Feinstrukturproduktion in Feinstrukturproduktion durch mittlere Scherraten (Pms) und Feinstrukturproduktion durch fluktuierende Scherraten (Pfs) vorgeschlagen.

Graphisch werden diese drei Anteile für die Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung in den Abbildungen 5.124 bis 5.126 dargestellt. Abbildung 5.124 zeigt die gesamte mittlere Energieproduktion der Feinstruktur an den vier axialen Positionen $z/D = (0.58, 2.03, 2.23, 2.42)$. Stromab der Stufenkante gibt die Grobstruktur der freien Scherschicht einen bis zu 5-mal so großen Energieanteil als in vollentwickelter Rohrströmung an die Feinstruktur ab. Für $z/D = 2.23$ stellt sich sogar ein kleiner Bereich mit negativer Produktion der Feinstrukturenergie ein, der durch die dort herrschenden Scherraten verursacht wird. Der Vergleich mit dem in Kapitel 5.6 (Abb. 5.52) präsentierten Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie gibt die qualitative Übereinstimmung dieser Verläufe wieder.

Die in Abbildung 5.125 veranschaulichten Profile der Feinstrukturproduktion durch mittlere Scherraten zeigen qualitativ ähnliche Verläufe. Mit Ausnahme des Rezirkulationsgebietes, in dem sowohl das Profil $z/D = 2.03$, als auch das für $z/D = 2.23$ negative Werte aufweist, unterscheiden sich die Profile der abgelösten Strömung mit erheblich höheren Maximalwerten nur quantitativ von denen der vollentwickelten Zuströmung.

Die Produktion infolge fluktuierender Scherraten $\langle \overline{\tau_{ij}'' s_{ij}''} \rangle$ in Abbildung 5.126 vermittelt einen ersten Eindruck von der Komplexität des Energieflusses zwischen Grobstruktur und Feinstruktur. Die verschiedenen Positionen weisen dabei deutliche unterschiedliche Produktionsraten auf. Das Profil für Position $z/D = 0.58$ spiegelt mit seinem Minimum bei $y^+ \approx 13$, welches in der Übergangsschicht der vollentwickelten Zuströmung liegt, einen Energiefluß von der

Feinstruktur zur Grobstruktur wider. Wie Härtel (1994) anhand von a-priori-Tests verschiedener Feinstrukturmodelle zeigt, können diese das lokale Minimum nicht vorhersagen. Vielmehr liefern die untersuchten Wirbelzähigkeitsmodelle (Smagorinsky-Modell, Struktur-Funktions-Modell, Germano-Modell) einen Verlauf für die Feinstrukturproduktion infolge fluktuierender Scherraten, der mit den in Abbildung 5.125 dargestellten Pms -Profilen qualitativ übereinstimmt, was in der Summe ($Pms + Pfs$) zu überhöhten Produktionsraten führt. Darüberhinaus wird in dieser Arbeit gezeigt, daß der Energierückfluß von kleinen zu großen Skalen durch eine systematische Phasenverschiebung zwischen den wandnormalen Komponenten der fluktuierenden Feinstrukturspannungen und den Scherraten der Grobstruktur verursacht wird.

Dieser umgekehrte Energietransfer wird auch in der freien Scherschicht an der Position $z/D = 2.03$ beobachtet. Auch wenn die Profile weiter stromab ($z/D = 2.23, 2.42$) stets im positiven Wertebereich verlaufen, spiegeln sie doch deutliche Minima im Bereich der Scherschicht wider. Die komplexeren Mechanismen der abgelösten Strömung führen dazu, daß die Produktionsraten Pfs in der freien Scherschicht Maximalwerte annehmen, die bis zu 30% der mittleren Feinstrukturproduktion betragen. Hieraus folgt, daß die Modellierung der Feinstrukturproduktion Pfs in der abgelösten Strömung bei jeder einzelnen Feinstrukturspannung ansetzen muß (siehe Goutorbe et al. [25]). Wirbelzähigkeitsmodelle scheinen diesen Anforderungen nicht gewachsen zu sein.

Um die Bedeutung der einzelnen Summanden von $\langle \tau_{ij}'' \overline{s_{ij}''} \rangle$ untersuchen zu können, werden diese in den Abbildungen 5.127 bis 5.132 einzeln dargestellt.

Für $z/D = 0.58$ wird das Profil $\langle \tau_{ij}'' \overline{s_{ij}''} \rangle$ durch fünf Summanden bestimmt. Lediglich $\langle \tau_{\varphi r}'' \overline{s_{\varphi r}''} \rangle$ trägt praktisch nichts bei (Abb. 5.132).

Weiter stromab sind die Verhältnisse wie zu erwarten, wesentlich komplizierter. So wird $\langle \tau_{ij}'' \overline{s_{ij}''} \rangle$ an der Stelle $z/D = 2.03$ im Bereiche der Scherschicht primär von der (z, z) -Komponente (Abb. 5.128) und schwächer von den (r, r) - und (φ, φ) -Komponenten bestimmt (Abb. 5.130 und 5.131). Die negativen Produktionswerte Pfs zwischen Scherschicht und Wand für $z/D = 2.03$ werden durch die an dieser Stelle ebenfalls negativen Bereiche der (z, z) -, (z, φ) - und (r, r) -Komponenten (Abb. 5.130 - 5.130) verursacht, während das Maximum in der Rezirkulationszone hauptsächlich aus der (z, r) -Komponente stammt. Weiter stromab werden die Profile durch die (z, r) und (z, z) Komponente bestimmt, aber auch die (r, r) -, (φ, φ) - und (φ, r) -Komponenten (Abb. 5.131, 5.132) tragen einen erheblichen Teil zu der Summe $\langle \tau_{ij}'' \overline{s_{ij}''} \rangle$ bei. Insbesondere die (z, r) -, (z, φ) -, (φ, φ) - und (φ, r) -Komponenten weisen bei $y^+ \approx 40$ in Übereinstimmung mit der Gesamtsumme ein lokales Minimum auf.

Die Betrachtung dieser einzelnen Komponenten verdeutlicht die starken Anisotropieeffekte, denen die Feinstrukturbewegung in der Scherschicht und im Wiederanlegebereich unterliegt.

Da die Wirbelzähigkeitsmodelle ausnahmslos auf der Annahme einer isotropen Feinstruktur beruhen, sind Schwierigkeiten bei der Grobstruktursimulation abgelöster Strömungen vorprogrammiert.

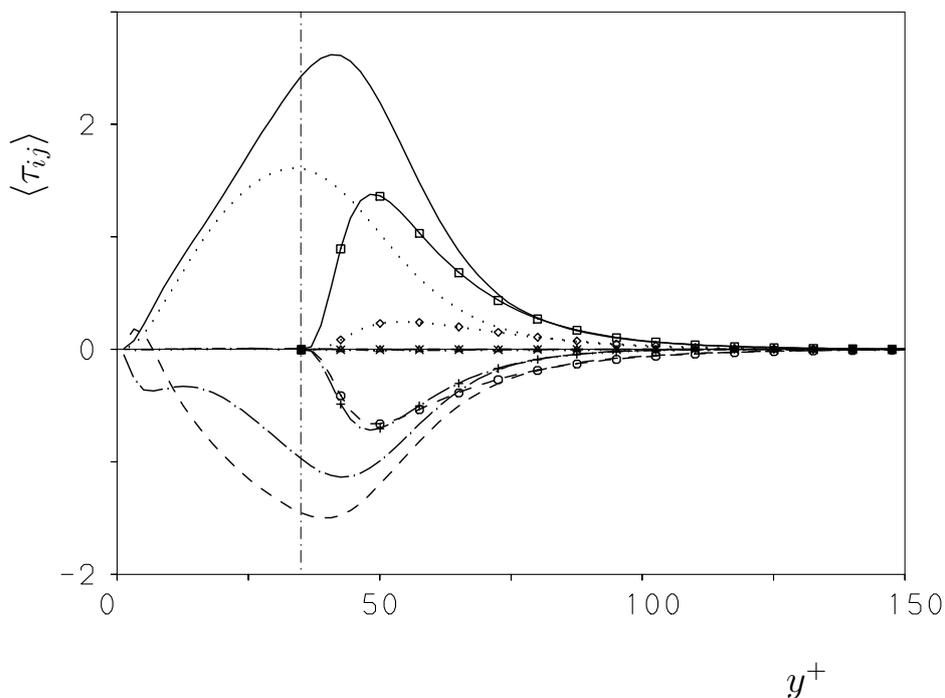


ABBILDUNG 5.118: Mittlere Feinstrukturspannungen (deviatorischer Anteil) an den Positionen $z/D = 0.58$ und 2.23 . $\langle \tau_{zr} \rangle$: \cdots , $\langle \tau_{zz} \rangle$: — , $\langle \tau_{rr} \rangle$: $-\cdot-\cdot$, $\langle \tau_{\varphi\varphi} \rangle$: $----$. Linien mit Symbolen entsprechen der Position $z/D = 0.58$.

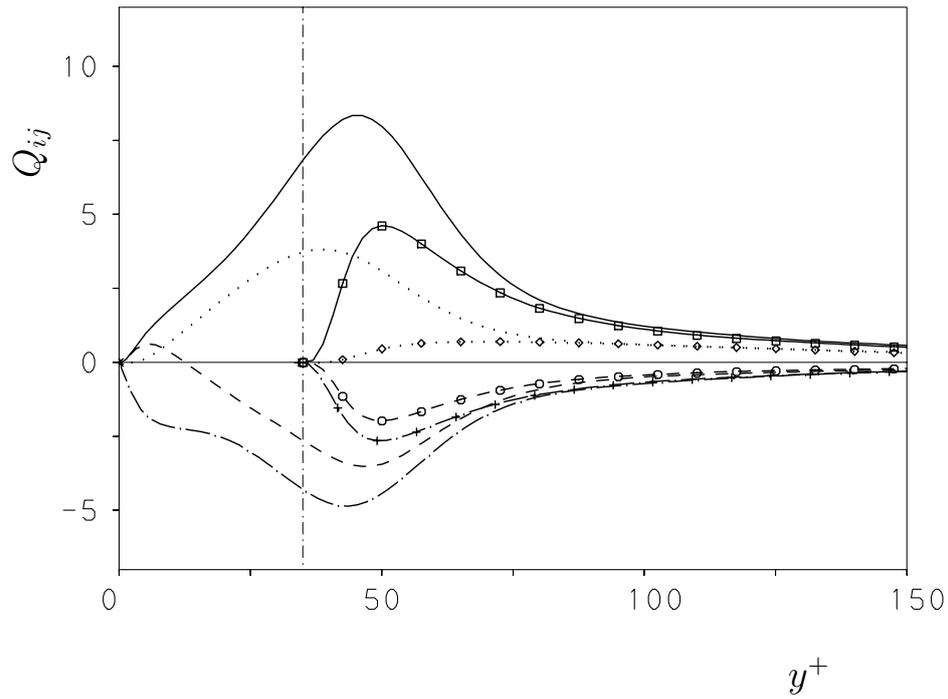


ABBILDUNG 5.119: Reynoldsspannungen (deviatorischer Anteil) an den Positionen $z/D = 0.58$ und 2.23 . Q_{zr} $\cdots\cdots\cdots$, Q_{zz} ——— , Q_{rr} $\text{—}\cdot\text{—}\cdot\text{—}$, $Q_{\varphi\varphi}$ ---- . Linien mit Symbolen entsprechen der Position $z/D = 0.58$.

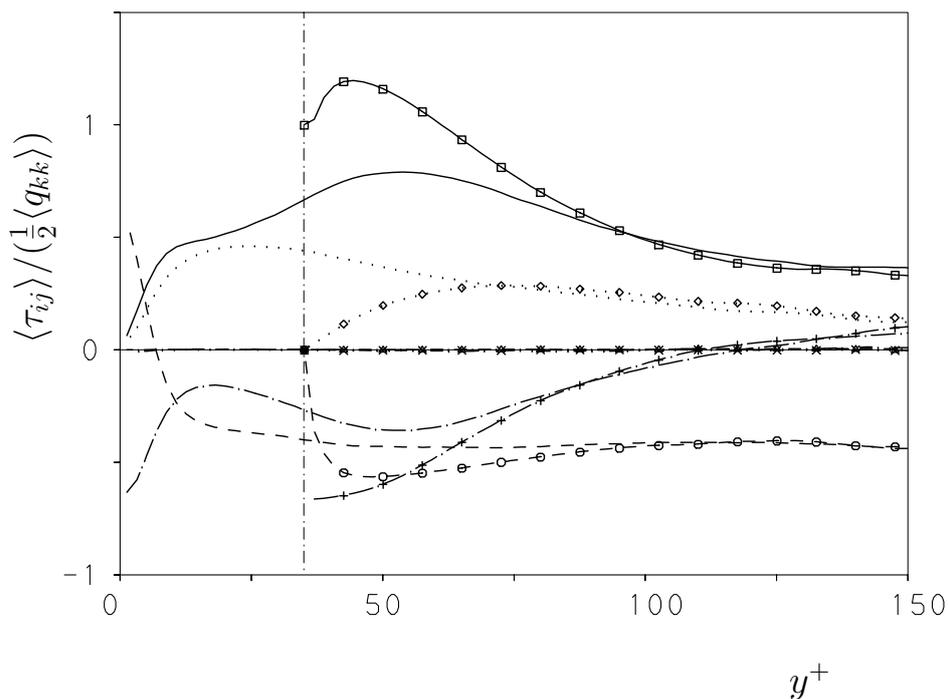


ABBILDUNG 5.120: Deviatorischer Anteil der mittleren Feinstrukturspannungen normiert mit $\langle \tau_{kk} \rangle / 2$ an den Positionen $z/D = 0.58$ und 2.23 . $\langle \tau_{zr} \rangle$ \cdots , $\langle \tau_{zz} \rangle$ — , $\langle \tau_{rr} \rangle$ $\text{—}\cdot\text{—}$, $\langle \tau_{\varphi\varphi} \rangle$ --- . Linien mit Symbolen entsprechen der Position $z/D = 0.58$.

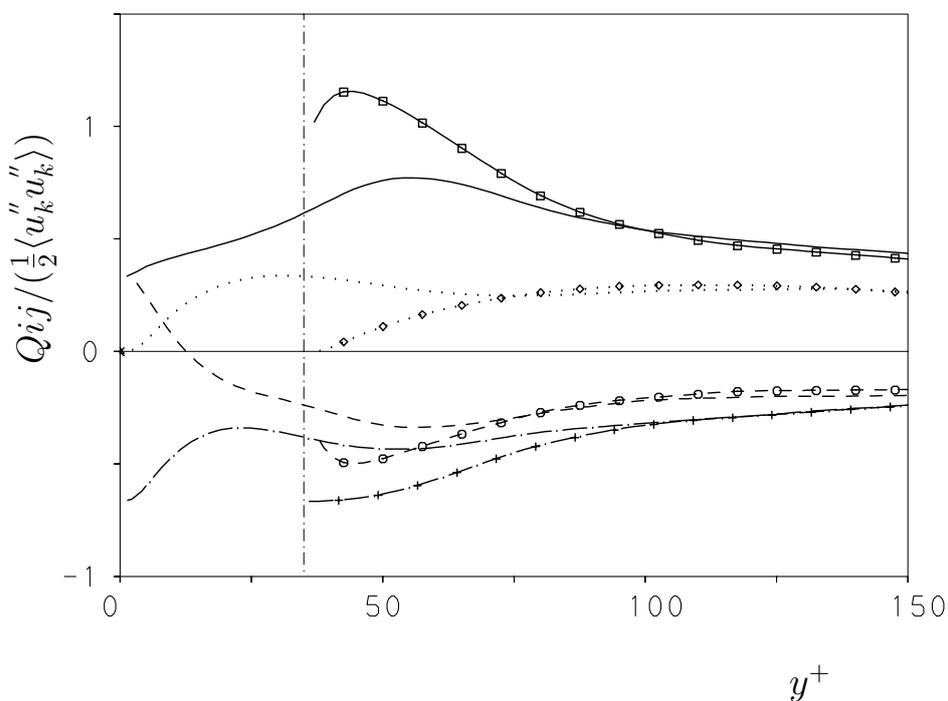


ABBILDUNG 5.121: Deviatorischer Anteil der Reynoldsspannungen normiert mit der turbulenten kinetischen Energie an den Positionen an den Positionen $z/D = 0.58$ und 2.23 . Q_{zr} \cdots , Q_{zz} — , Q_{rr} $\text{—}\cdot\text{—}$, $Q_{\varphi\varphi}$ --- . Linien mit Symbolen entsprechen der Position $z/D = 0.58$.

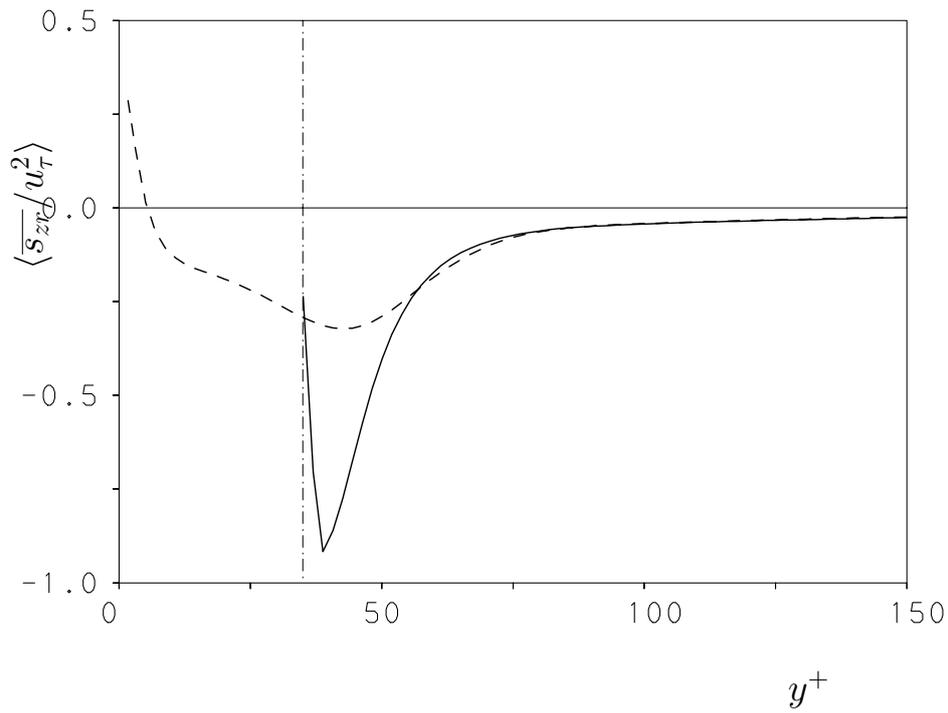


ABBILDUNG 5.122: Mittlere Grobstrukturscherrate $\langle \overline{s_{zr}} \rangle$ für $z/D = 0.58$ und 2.23.

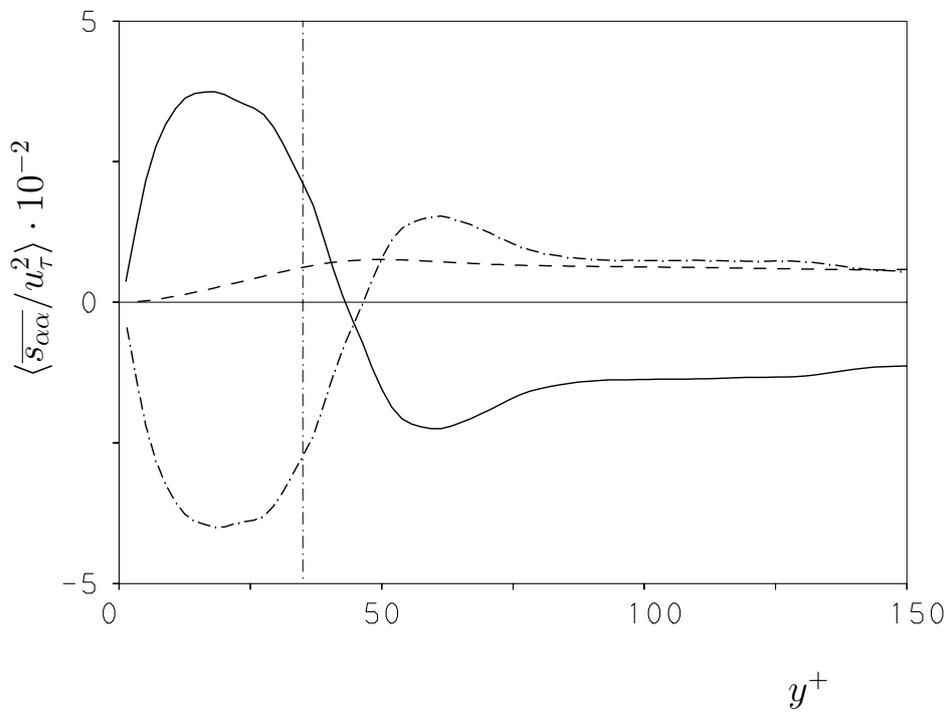


ABBILDUNG 5.123: Mittlere Normalspannungen der Grobstruktur für $z/D = 2.23$. $\langle \overline{s_{zz}} \rangle$ ———, $\langle \overline{s_{rr}} \rangle$ —·—·—, $\langle \overline{s_{\varphi\varphi}} \rangle$ - - - - .

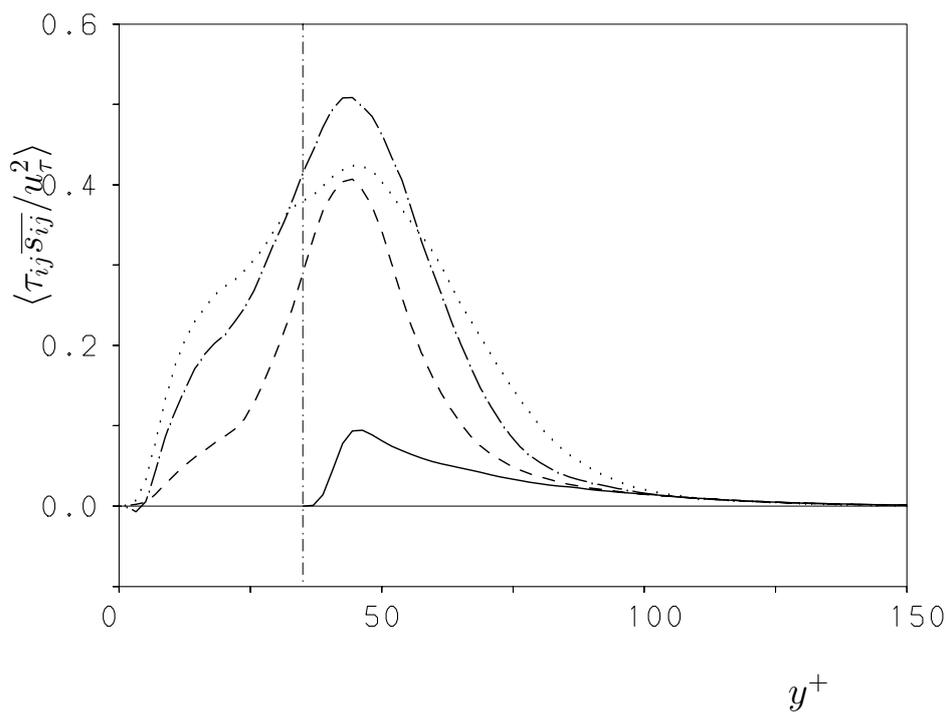


ABBILDUNG 5.124: Mittlere Produktion der Feinstrukturenergie an den Positionen $z/D = 0.58$
 —, 2.03 — — —, 2.23 — · — ·, 2.42 · · · · ·

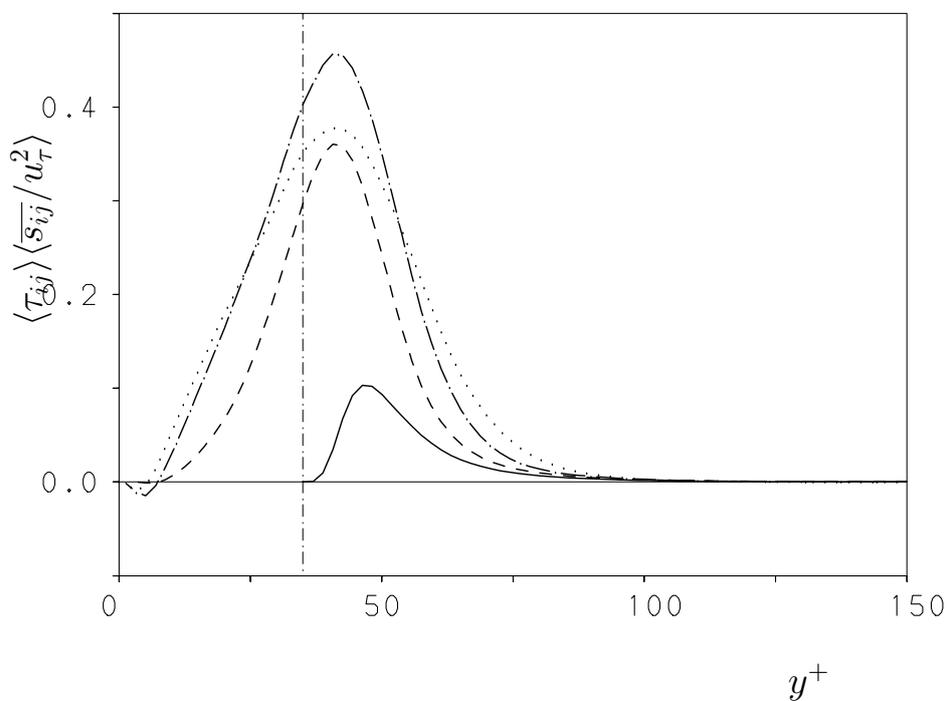


ABBILDUNG 5.125: Feinstrukturenergieproduktion durch mittlere Scherraten an den Positionen $z/D = 0.58$
 —, 2.03 — — —, 2.23 — · — ·, 2.42 · · · · ·

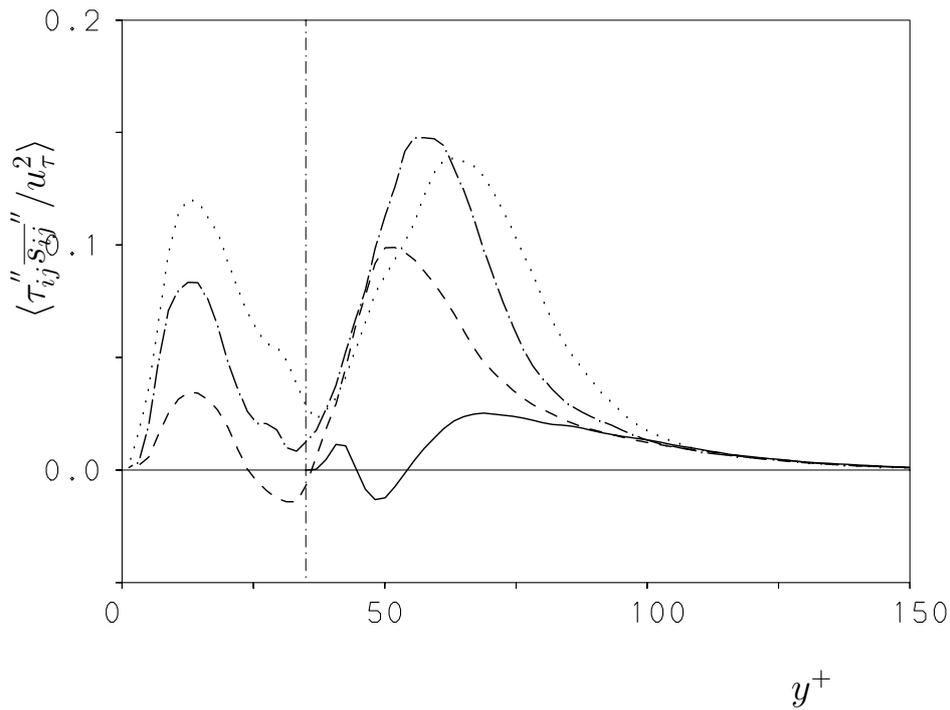


ABBILDUNG 5.126: Mittlere Feinstrukturenergieproduktion durch fluktuierende Scherraten an den Positionen $z/D = 0.58$ ———, 2.03 - - - - -, 2.23 — · — ·, 2.42 · · · · ·.

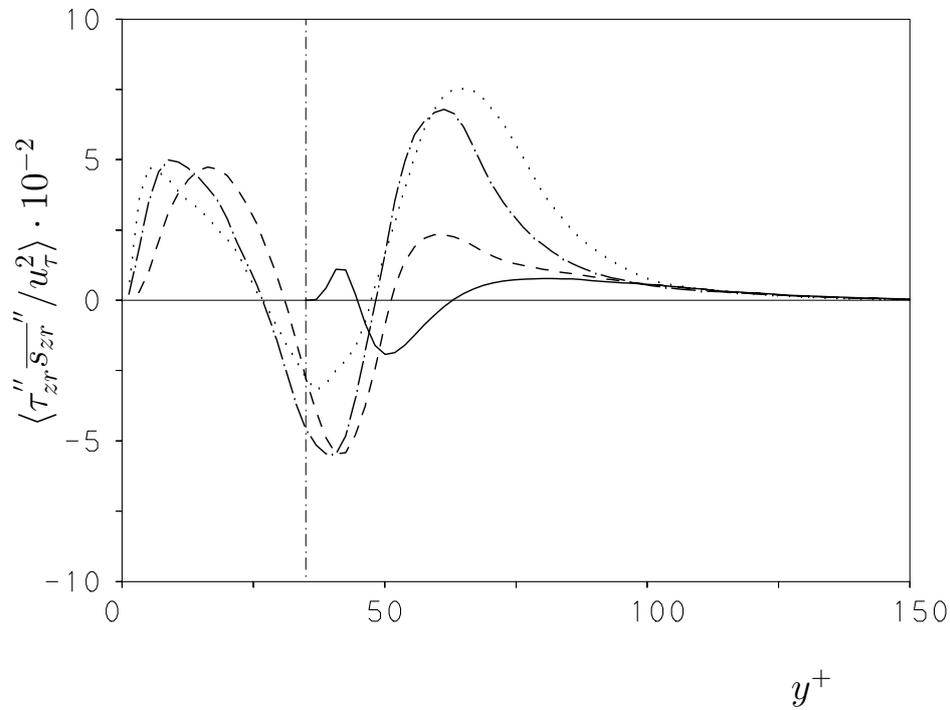


ABBILDUNG 5.127: (z, r) -Komponente von $\langle \tau_{ij}'' \overline{s_{ij}''} \rangle$ an den Positionen $z/D = 0.58$ ———, 2.03 - - - - -, 2.23 — · — ·, 2.42 · · · · ·.

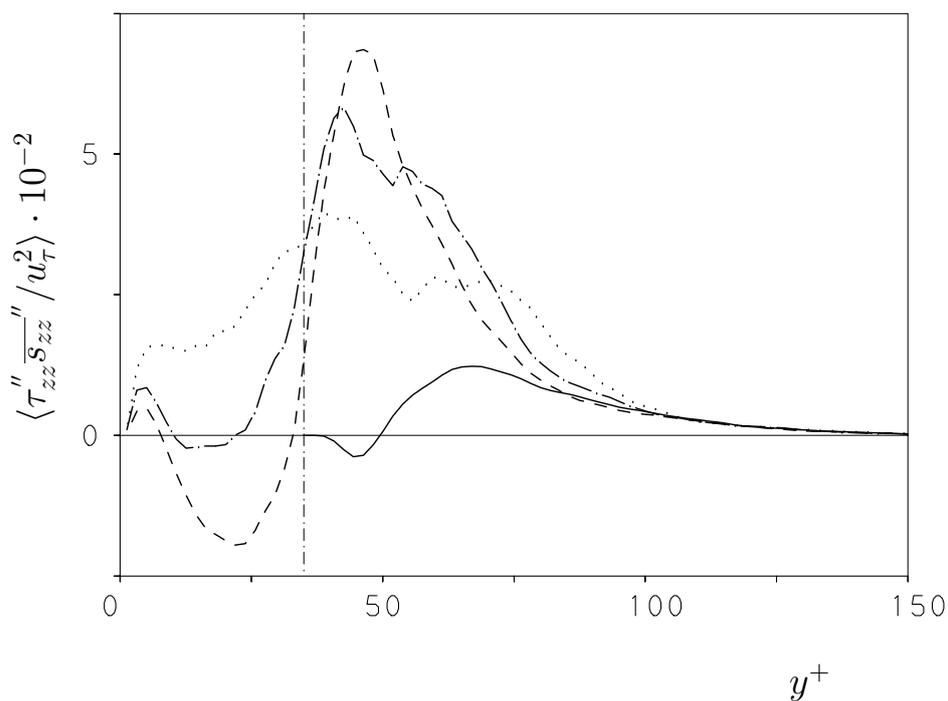


ABBILDUNG 5.128: (z, z) -Komponente von $\langle \tau''_{ij} \overline{s''_{ij}} \rangle$ an den Positionen $z/D = 0.58$ ———, 2.03 ———, 2.23 —·—·—, 2.42 ·····.

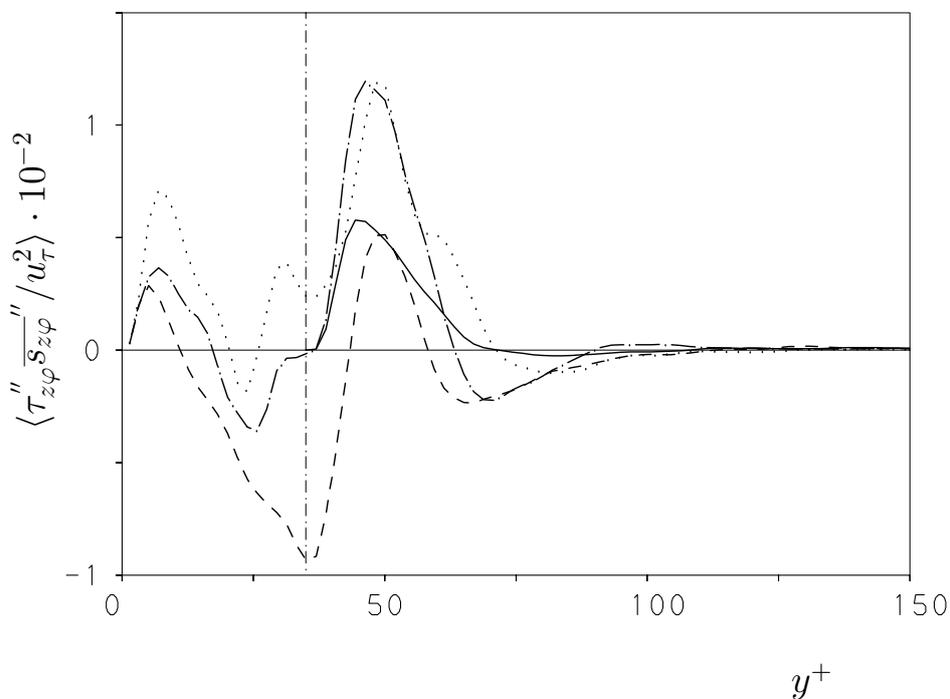


ABBILDUNG 5.129: (z, φ) -Komponente von $\langle \tau''_{ij} \overline{s''_{ij}} \rangle$ an den Positionen $z/D = 0.58$ ———, 2.03 ———, 2.23 —·—·—, 2.42 ·····.

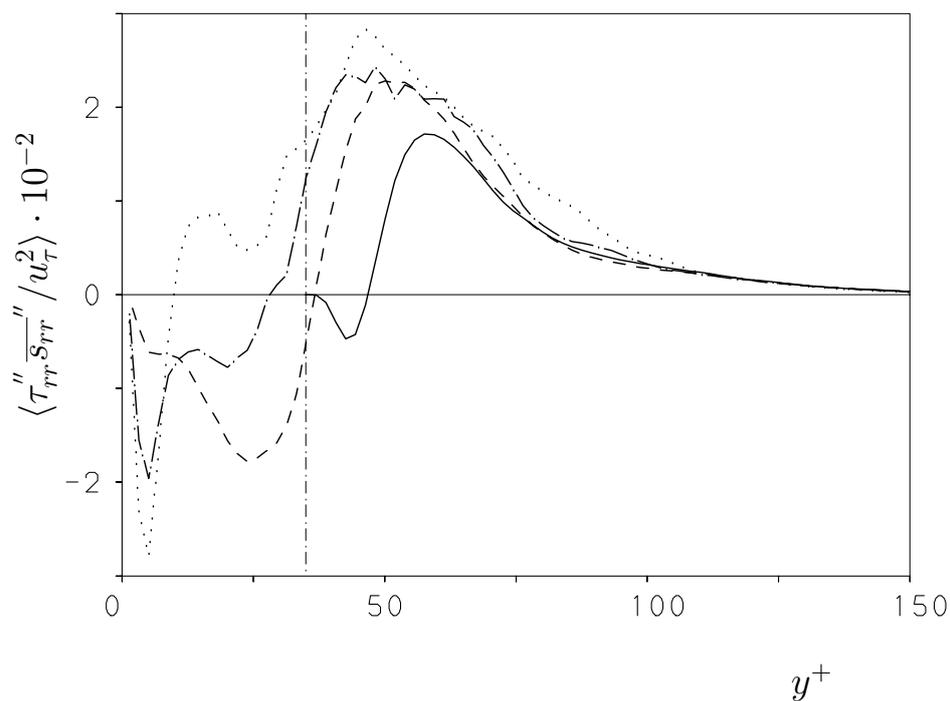


ABBILDUNG 5.130: (r, r) -Komponente von $\langle \tau_{ij}'' \overline{s_{ij}''} \rangle$ an den Positionen $z/D = 0.58$ ———, 2.03 ———, 2.23 —·—·, 2.42 ·····.

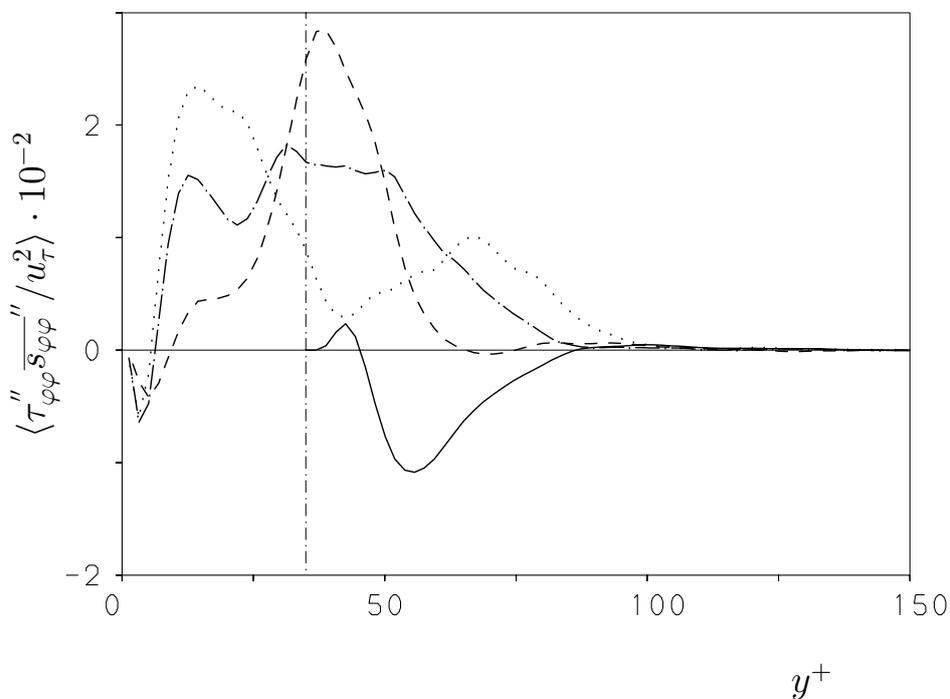


ABBILDUNG 5.131: (φ, φ) -Komponente von $\langle \tau_{ij}'' \overline{s_{ij}''} \rangle$ an den Positionen $z/D = 0.58$ ———, 2.03 ———, 2.23 —·—·, 2.42 ·····.

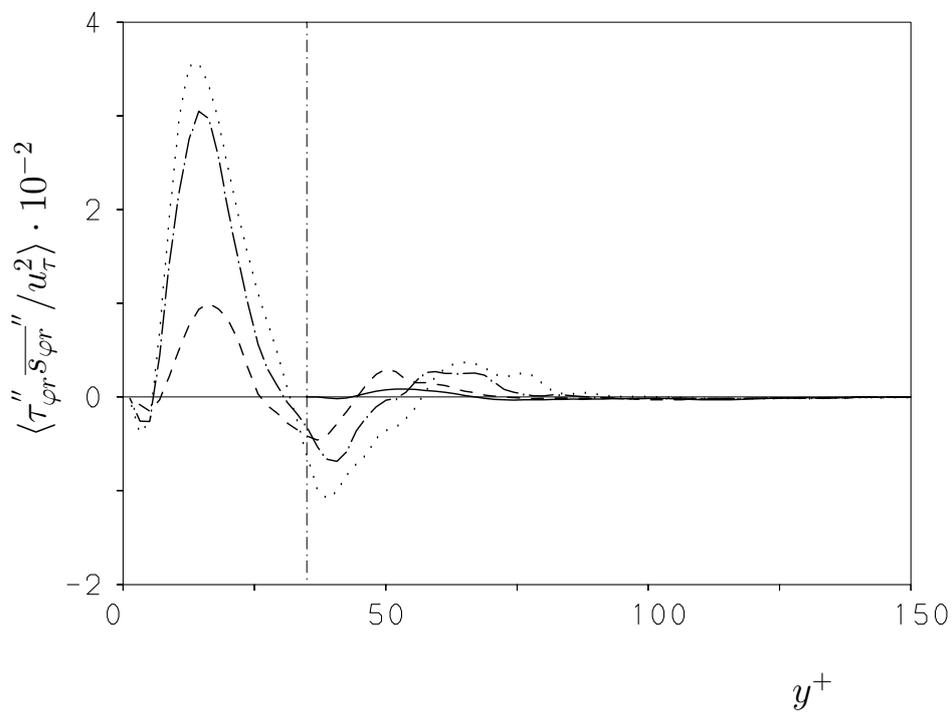


ABBILDUNG 5.132: (φ, r) -Komponente von $\langle \tau''_{ij} \overline{s''_{ij}} \rangle$ an den Positionen $z/D = 0.58$ ———, 2.03 ———, 2.23 —·—, 2.42 ·····.

5.10 Auswertung des Wirbelvektors

In den Abbildungen 5.133 und 5.134 sind die drei Komponenten des fluktuierenden Wirbelvektors durch Höhenlinien in der (r, z) -Ebene dargestellt. Zusätzlich zeigt Abbildung 5.134 die Größe E_ω , die ein Maß für die Intensität dieses Vektors darstellt. Im wandnahen Zuströmbe- reich werden in Längsrichtung stark ausgedehnte Strukturen seiner φ -Komponente beobachtet. Sie kennzeichnen Schichten hoher Scherrate ($\omega_\varphi'' = \frac{\partial u_z''}{\partial r} - \frac{\partial u_r''}{\partial z}$), nämlich die für Wandturbu- lenz typischen Scherschichten, die sich zwischen Zonen ausbilden, in denen schnelles Fluid zur Wand (*sweep*) und langsames von ihr wegtransportiert wird (*ejection*). Ihre relative Langle- bigkeit und räumliche Ausdehnung findet sich in ähnlicher Weise in den charakteristischen Strukturen des u_z'' -Feldes (*streaky structures*) wieder. Die Fluktuationen der drei Vektorkom- ponenten werden in der Scherschicht und im Wiederanlegebereich stark angefacht. Besonders deutlich wird dies bei Betrachtung der Größe E_ω , deren Höhenlinien sich fast ausnahmslos auf die freie und wiederanlegende Scherschicht konzentrieren.

In der zur Rohrachse senkrechten (φ, r) -Ebene werden in Abbildung 5.136 die Höhenlinien derselben Größen an der Position $z/D = 0.08$ dargestellt. Es wird deutlich, daß sich die Strukturen der axialen und azimuthalen Wirbelstärkefluktuationen in Umfangsrichtung über große Bereiche erstrecken. Die Radialkomponente zeigt dagegen kleinskalige Strukturen, die in Umfangsrichtung alternierend positives und negatives Vorzeichen aufweisen. Wir werden später, bei der Diskussion momentaner Geschwindigkeitsfelder, noch einmal auf diese Struk- turen zurückkommen.

Etwas stromab der Stufenkante an der Stelle $z/D = 1.6$ (Abbildung 5.136) weist der Strömungs- zustand in der Scherschicht im Vergleich zur vollentwickelten Zuströmung eine nur wenig veränderte Dynamik auf. Besonders eindrucksvoll wird dies durch die Größe E_ω verdeutlicht, die im Rezirkulationsgebiet durch keine Höhenlinie repräsentiert wird. Die radiale Schwan- kungsbewegung ist eben noch nicht intensiv genug, um Impuls aus der Kernströmung in das Rezirkulationsgebiet zu transportieren.

Das Wiederanlegegebiet (Abbildung 5.138) ist durch sehr viel kleinskaligere Strukturen in den drei Wirbelstärkefluktuationen und der Größe E_ω gekennzeichnet, durch die auch die verstärkte Schwankungsbewegung im Vektor der Wirbelstärkefluktuation wiedergegeben wird.

Die unterschiedliche Dynamik der wandnahen Turbulenz stromauf und stromab der Stufenkan- te wird in Abbildung 5.139 eindrucksvoll veranschaulicht. Die abgewickelte (z, φ) -Ebene wurde hierfür aus zwei Teilebenen zusammengesetzt, die beide dieselben Wandabstände von $y^+ = 14$ von den Rohrwänden $r/D = 0.5$ bzw. $r/D = 0.6$ aufweisen. Die positiven Höhenlinienbereiche der Komponente ω_r'' wurden schwarz eingefärbt, die negativen weiß gelassen. In der Strömung stromauf der Stufenkante sind die in Längsrichtung ausgedehnten *streaky structures* deutlich

auszumachen, denn ω_r'' ist im wesentlichen ein Abbild der azimuthalen Gradienten von u_z'' . Eine derartige Ordnung fehlt im Wiederanlegebereich. Hier erzeugt das Aufprallen der Scherschicht kleinskaligere Turbulenz. Immerhin führen die noch vorhandenen geringen Scherraten zu Strukturen, die in z -Richtung gestreckt sind (im Gegensatz zu reiner Staupunktströmung).

Die starke Zunahme sämtlicher Wirbelstärkefluktuationen läßt sich in den zweidimensionalen Höhenliniendarstellungen (Abb. 5.140) der *rms*-Werte quantitativ belegen. Wie früher wurden die statistisch gemittelten Strömungsfelder hierfür an der Rohrachse gespiegelt. Bei qualitativ ähnlichen Verläufen nehmen die drei Komponenten Maximalwerte gleicher Größenordnung an. Im Gegensatz dazu unterscheiden sich die Stellen maximaler *rms*-Werte deutlich. Während das Maximum der axialen Komponente an einer Stelle beobachtet wird, die mit dem mittleren Wiederanlegepunkt ungefähr übereinstimmt, liegt das Maximum der Umfangskomponente direkt an der Wand stromab des Wiederanlegepunktes. Dagegen wird die maximale *rms*-Wirbelstärkefluktuation in radialer Richtung weiter entfernt von der Wand in der wiederanlegenden Scherschicht beobachtet.

Die Abbildungen 5.141 bis 5.144 zeigen die Profile der drei *rms*-Wirbelstärkefluktuationen an vier unterschiedlichen axialen Positionen $z/D = (0.08, 1.84, 2.23, 2.42)$. Mit einem Maximalwert von 0.37 nimmt die azimuthale Komponente $\omega_{\varphi,rms}\nu/u_\tau^2$ in Abbildung 5.141 ($z/D = 0.08$) den höchsten Wert der drei Komponenten an. Ausgehend vom Kernbereich durchläuft die radiale Komponente ein Maximum in Wandnähe und klingt mit zunehmendem Wanddämpfungseffekt auf Null ab. Den interessantesten Verlauf weist die z -Komponente auf. An der Extremstelle von $\omega_{r,rms}$ besitzt sie ein lokales Maximum. Zwischen dieser Stelle und dem absoluten Maximum direkt an der Wand nimmt diese Komponente bei $y^+ \approx 5$ ein lokales Minimum ein, was Kim et al. [34] als Spiegelbild der axial ausgerichteten Quasi-Wirbel in der wandnahen Zone auffassen.

Durch die ähnlichen Verläufe der drei Komponenten zwischen $0 \leq r/D \leq 0.35$ wird die Lokalisotropie der Strömung im Kernbereich veranschaulicht. (Die Gradienten in Achsnähe sind nicht physikalischer Natur, sondern eine Folge der geometrischen Singularität).

Stromab der Stufenkante ($z/D = 1.84$) gibt Abbildung 5.142 zwischen $0 \leq r/D \leq 0.5$ nur wenig veränderte Profile wieder. Interessanterweise zeigen die z - und φ -Komponenten im Rückströmgebiet Verläufe, die denen der axialen Komponente in Abbildung 5.141 qualitativ entsprechen. Auch die Profile der weiter stromab gelegenen Positionen (Abbildungen 5.143 und 5.144) stimmen qualitativ mit denen in Abbildung 5.142 überein. Insbesondere die schon fast quantitative Übereinstimmung in den Verläufen von $\omega_{z,rms}$ und $\omega_{\varphi,rms}$ läßt wieder an die weiter oben angedeutete 'Axialsymmetrie' der Turbulenzstruktur denken. Die ω_r -Komponente zeigt keine nennenswerten qualitativen Änderungen. Im Vergleich zur Position $z/D = 0.08$ sind die Maximalwerte der Umfangskomponente auf einen ungefähr doppelt so großen Wert

angestiegen. Eine noch stärkere Anfachung erfährt die axiale Komponente, die sich vom Profil mit dem kleinsten Maximalwert (Abbildung 5.141) zu dem mit dem größten Maximalwert entwickelt (Abbildung 5.144). Der Wiederanlegeprozeß ist demnach durch hohe Wirbelfluktuationen in axialer aber auch azimuthaler Richtung gekennzeichnet. Der Vollständigkeit halber sei hier darauf hingewiesen, daß die Strömung im Kernbereich nahezu keine Veränderung in axialer Richtung erfährt (s.a. Kapitel 5.3,5.4).

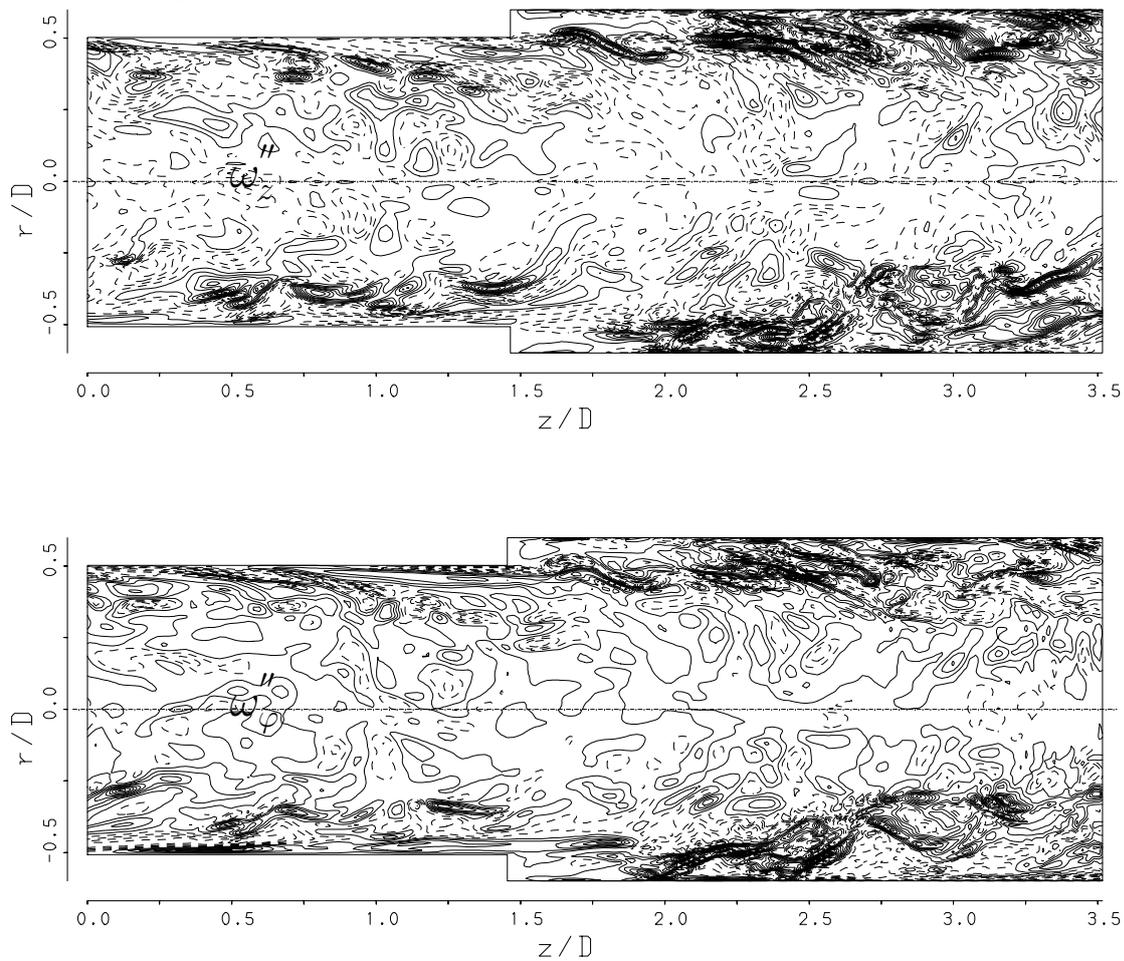


ABBILDUNG 5.133: Höhenlinien der axialen (oben) und azimuthalen (unten) Wirbelstärkefluktuationen in der Ebene $\varphi = 9\pi/32$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

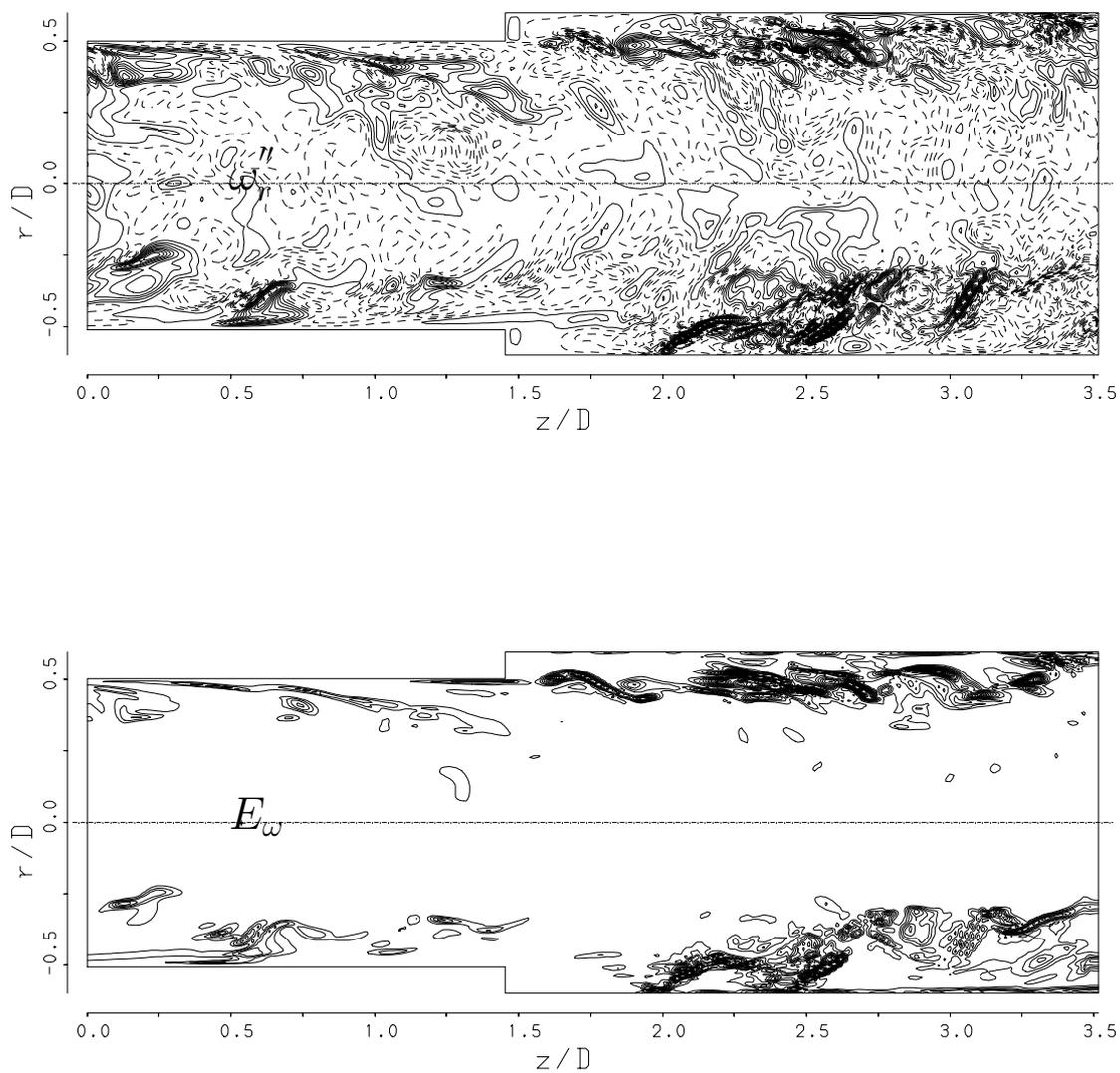


ABBILDUNG 5.134: Höhenlinien der radialen Wirbelstärkefluktuation (oben) und der Größe E_ω (unten) in der Ebene $\varphi = 9\pi/32$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

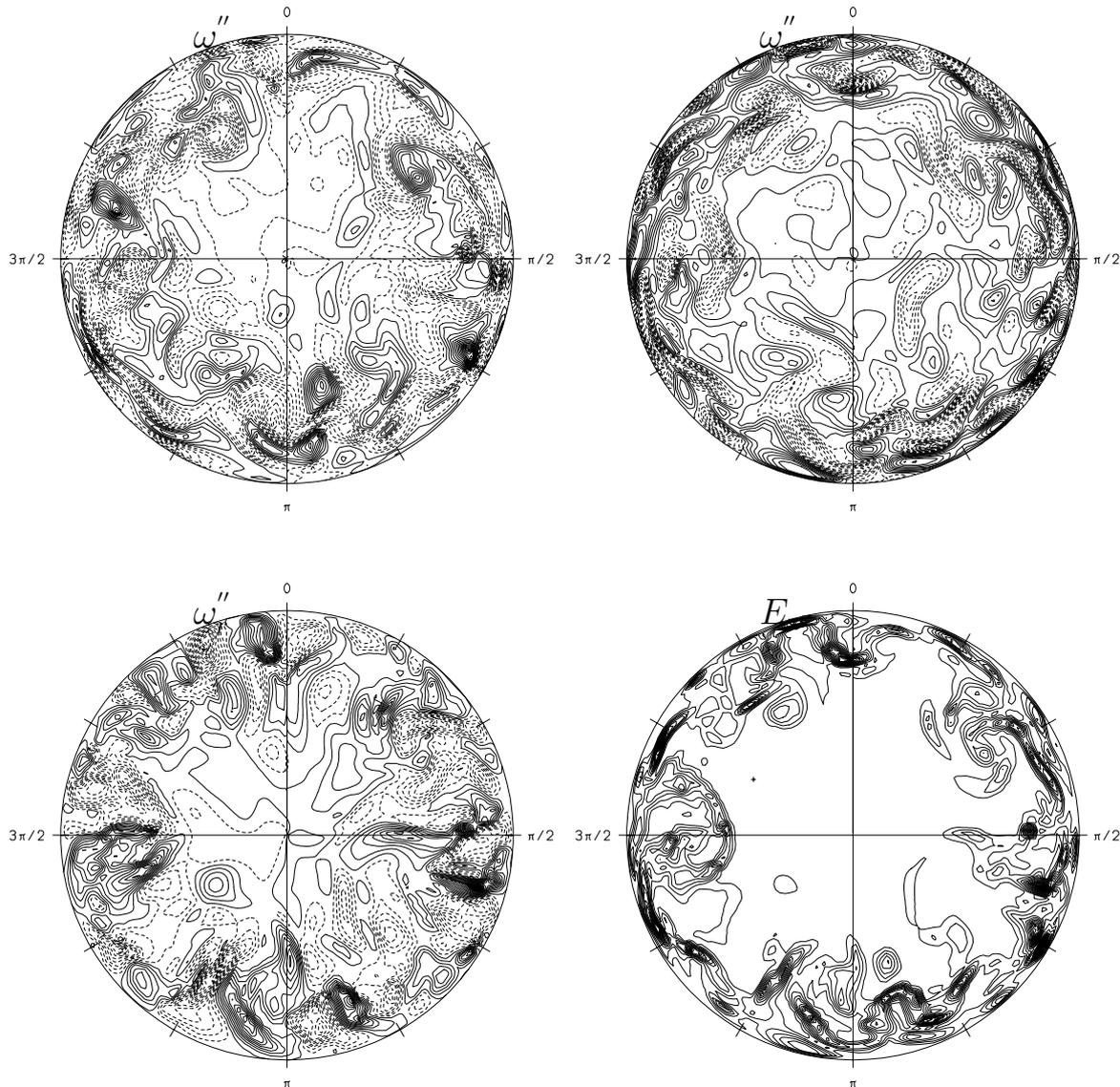


ABBILDUNG 5.135: Höhenlinien der drei fluktuierenden Wirbelstärkekomponente und der Größe E_ω in der (r, φ) -Ebene der Position $z/D = 0.08$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

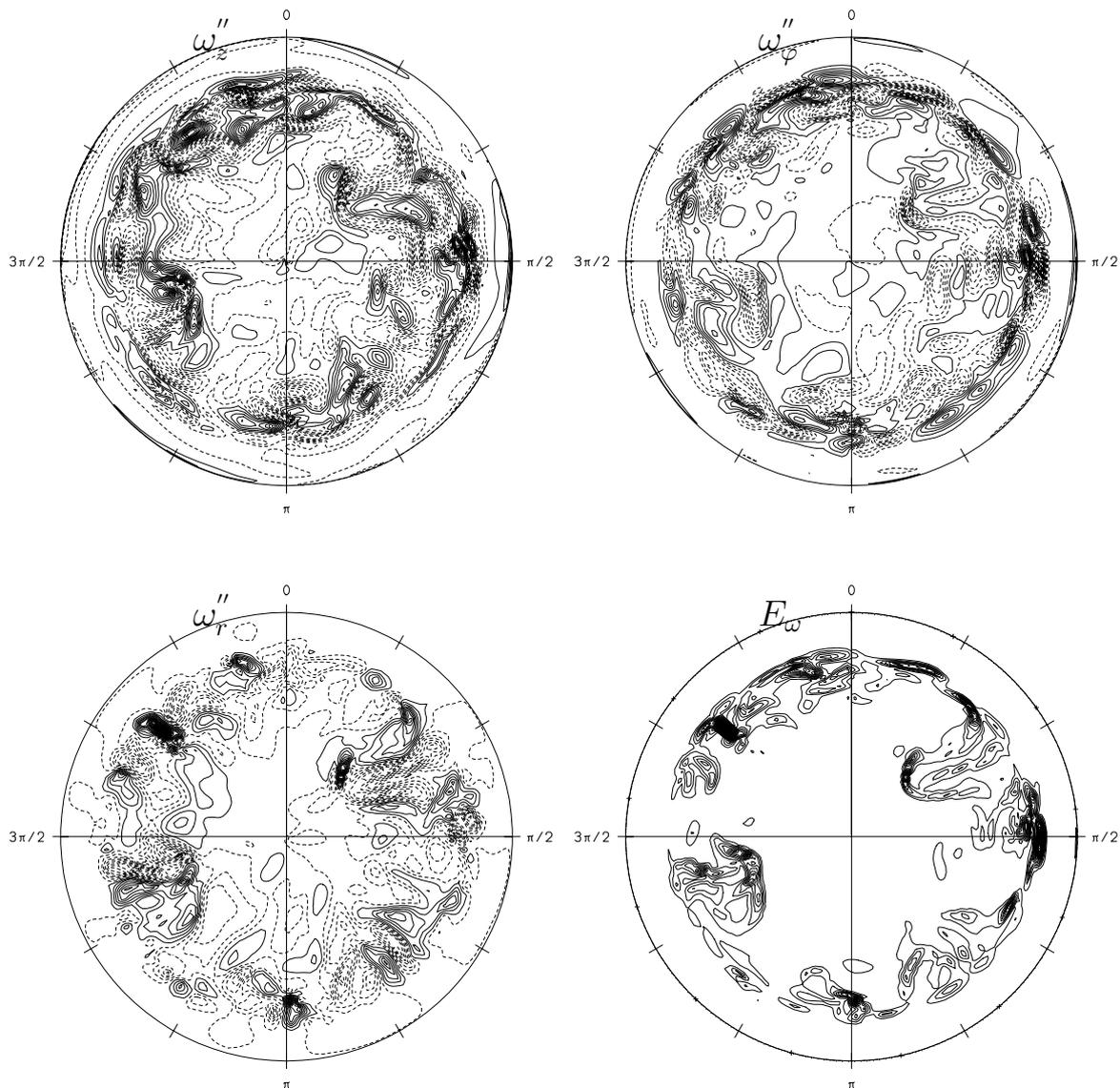


ABBILDUNG 5.136: Höhenlinien der drei fluktuierenden Wirbelstärkekomponente und der Größe E_ω in der (r, φ) -Ebene $z/D = 1.6$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

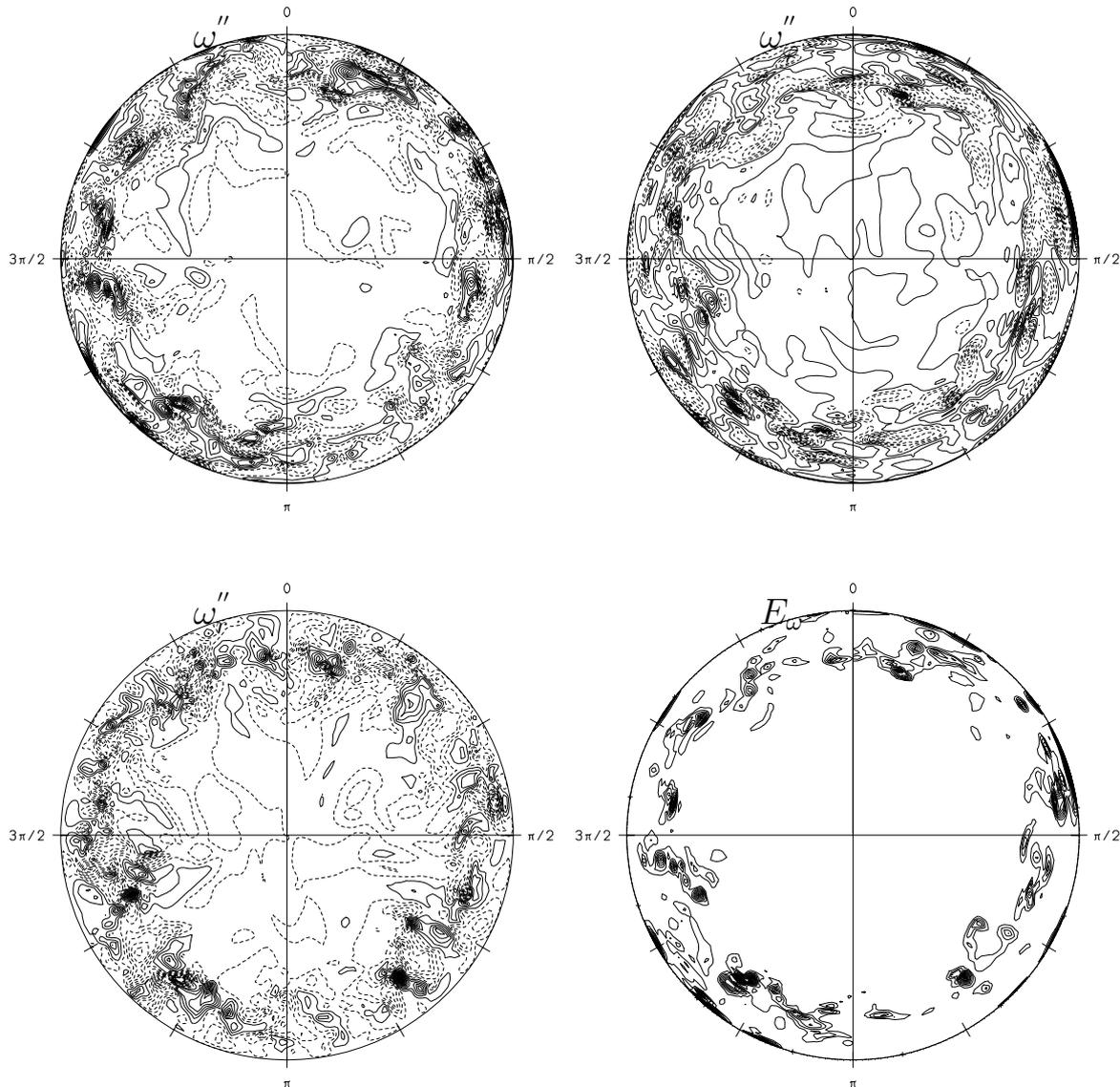


ABBILDUNG 5.137: Höhenlinien der drei fluktuierenden Wirbelstärkekomponenten und der Größe E_w in der (r, φ) -Ebene $z/D = 2.23$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

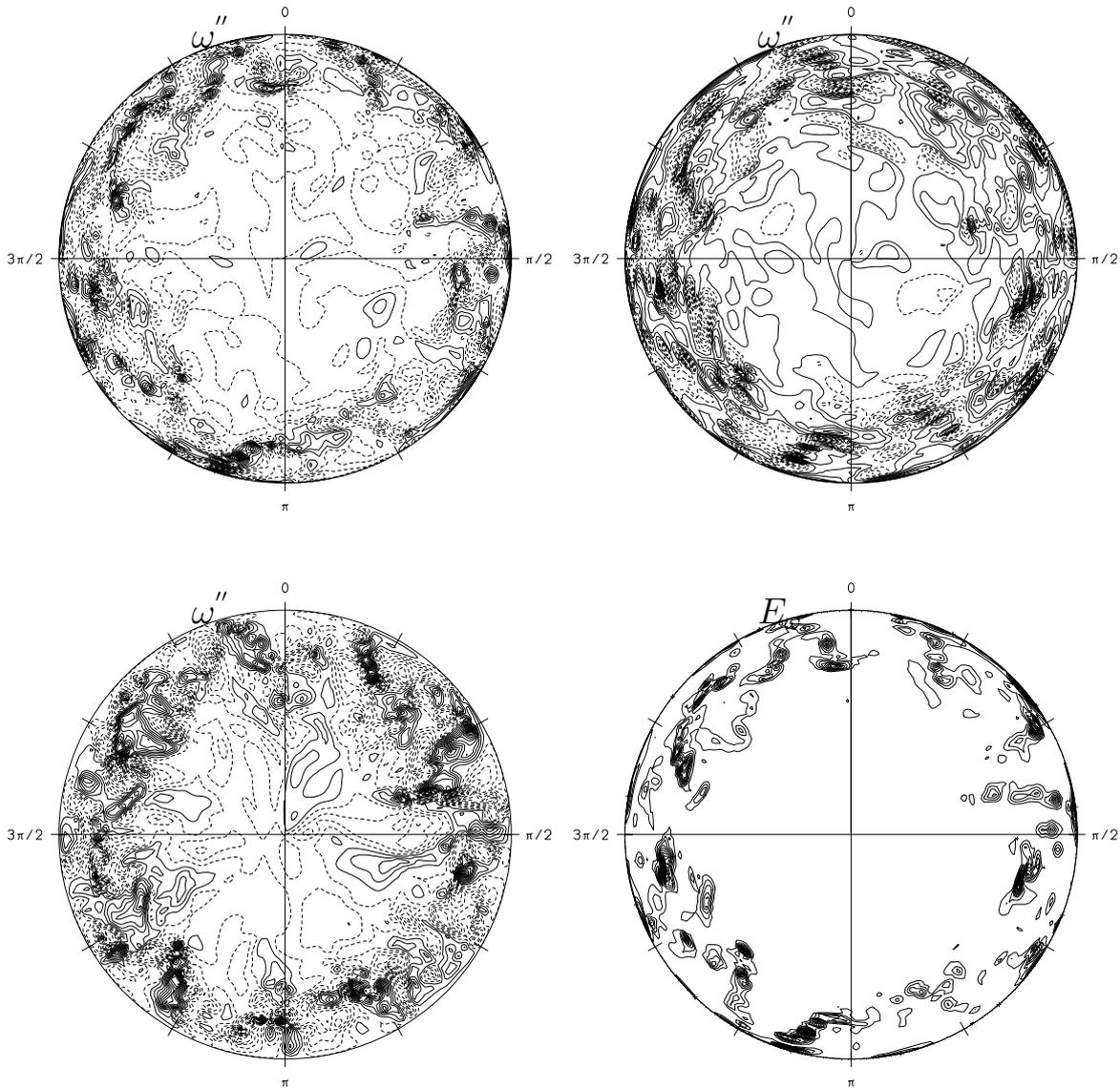


ABBILDUNG 5.138: Höhenlinien der drei fluktuierenden Wirbelstärkekomponenten und der Größe E_w in der (r, φ) -Ebene $z/D = 2.42$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

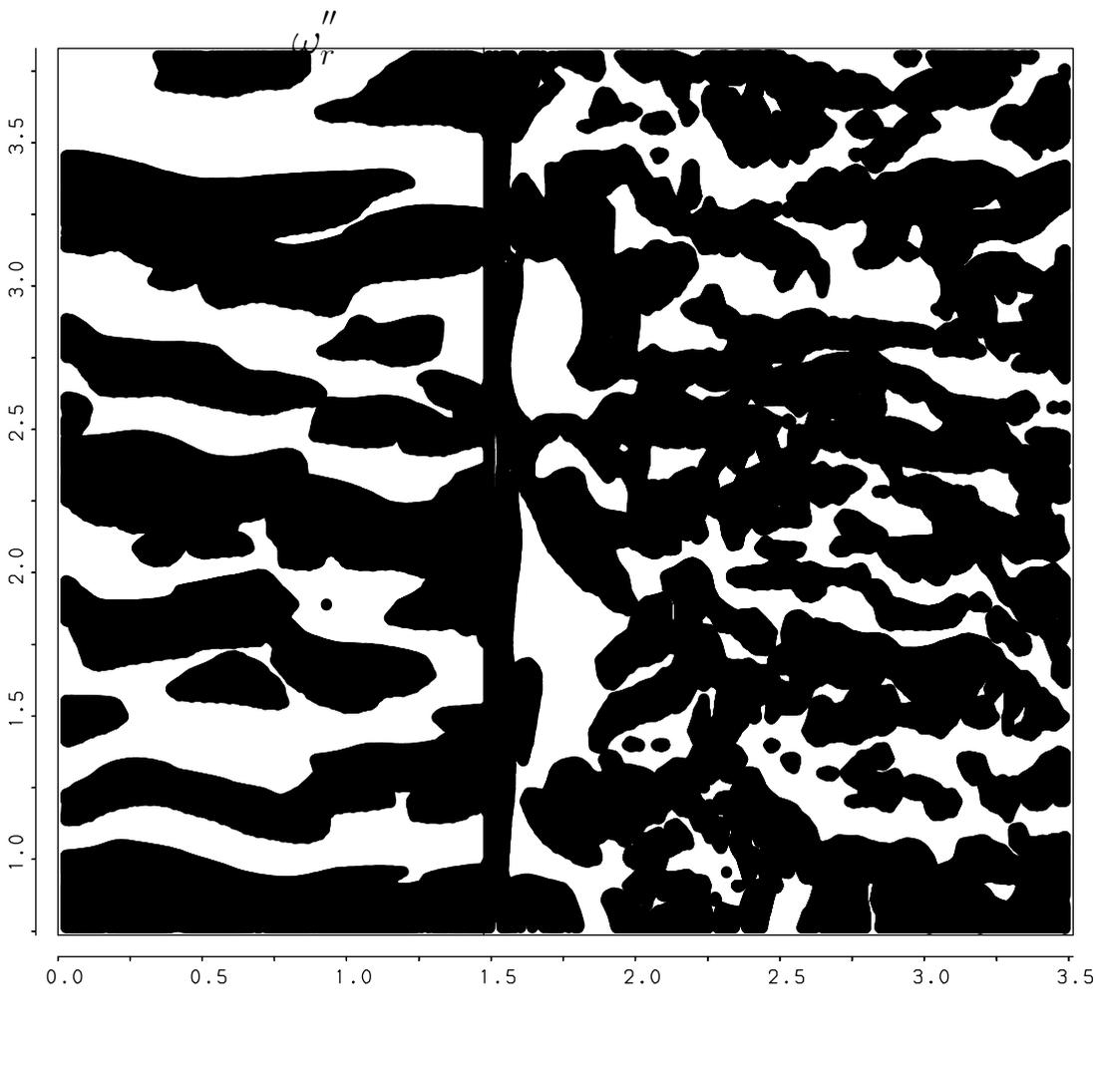


ABBILDUNG 5.139: Höhenlinien der radialen Wirbelstärkefluktuation in der (z, φ) -Ebene mit dem Wandabstand $y^+ = 14$. Schwarz: $\omega_r'' \geq 0$, weiß: $\omega_r'' < 0$.

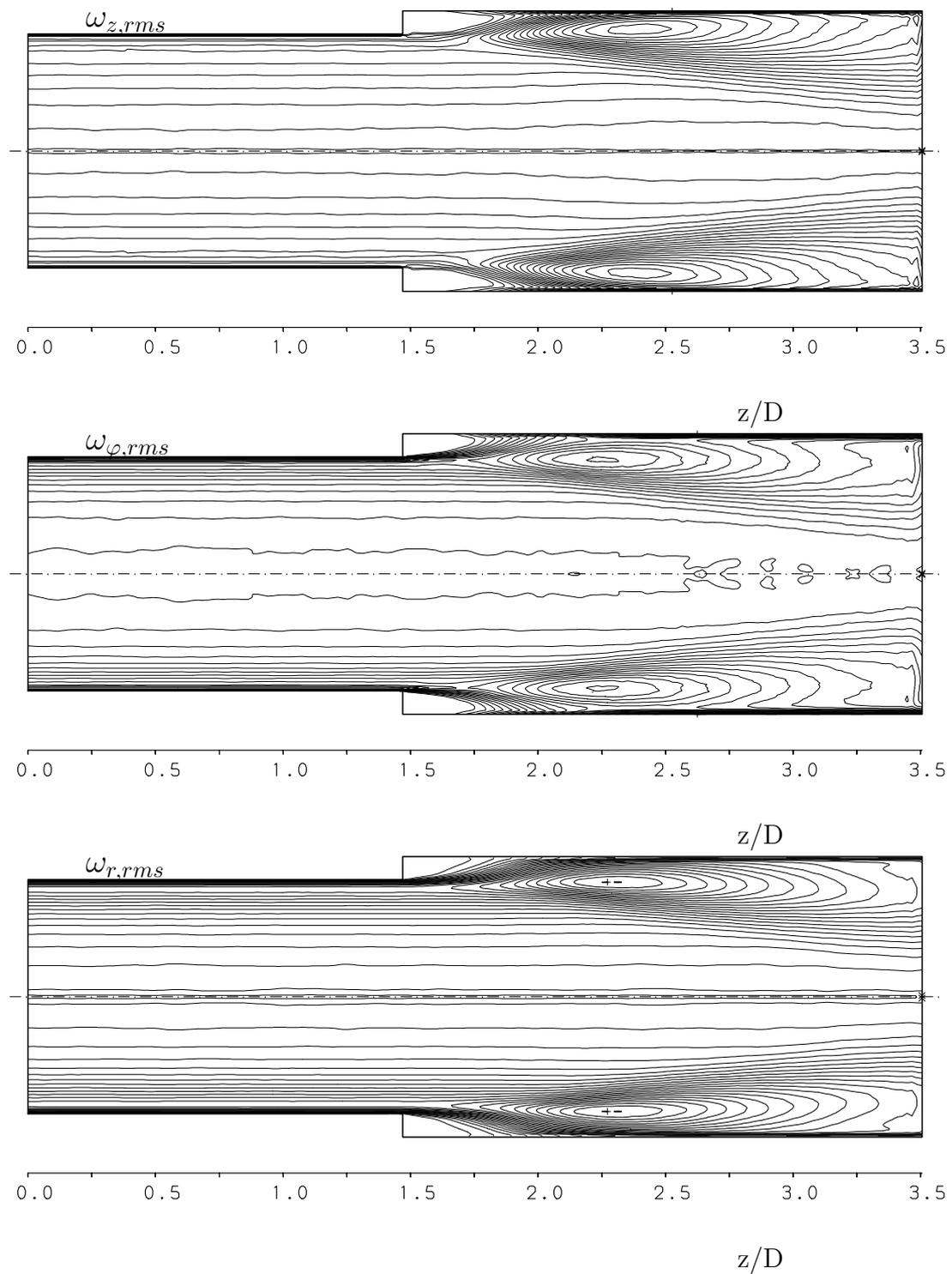


ABBILDUNG 5.140: Höhenlinien der drei rms-Wirbelstärkefluktuationen. Werte zwischen : $18.9 < \omega_{z,rms} < 247.0$, $21.1 < \omega_{\phi,rms} < 243.0$, $7.92 < \omega_{r,rms} < 117.0$.

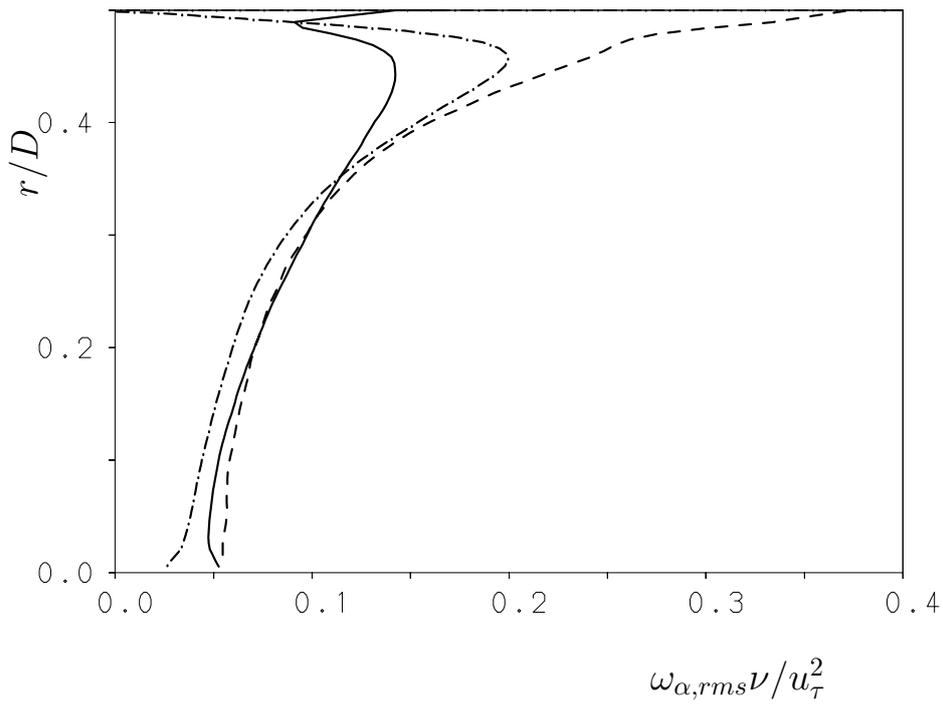


ABBILDUNG 5.141: Profile der drei *rms*-Wirbelstärkefluktuationen an der Stelle $z/D = 0.08$.
 Linien: (—): $\omega_{z,rms}$, (- - -): $\omega_{\phi,rms}$, (- · - · - ·): $\omega_{r,rms}$.

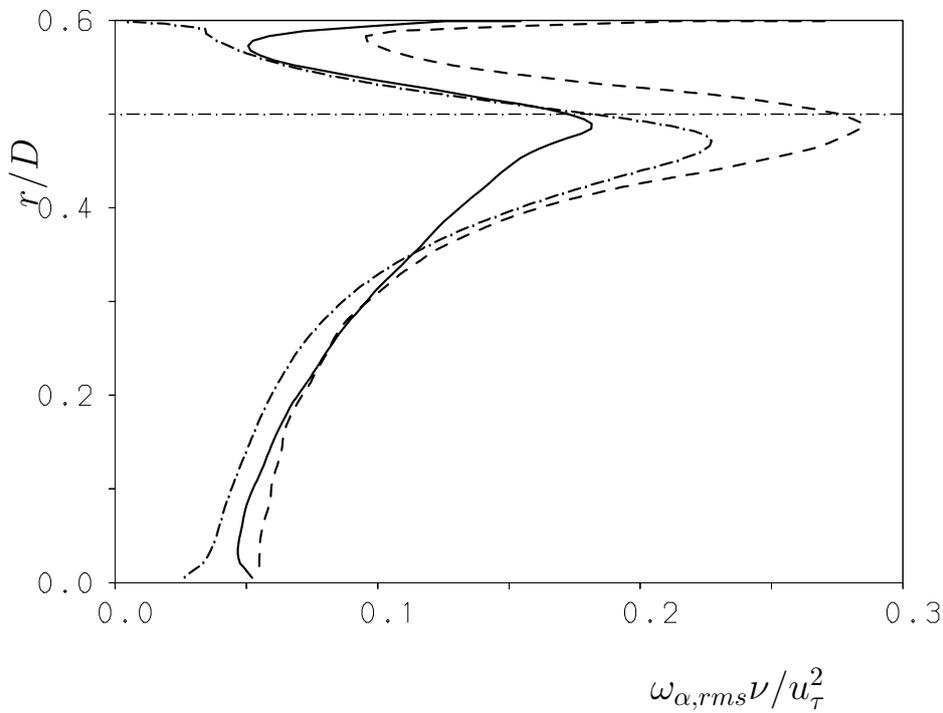


ABBILDUNG 5.142: Profile der drei *rms*-Wirbelstärkefluktuationen an der Stelle $z/D = 1.84$.
 Linien: (—): $\omega_{z,rms}$, (- - -): $\omega_{\phi,rms}$, (- · - · - ·): $\omega_{r,rms}$.

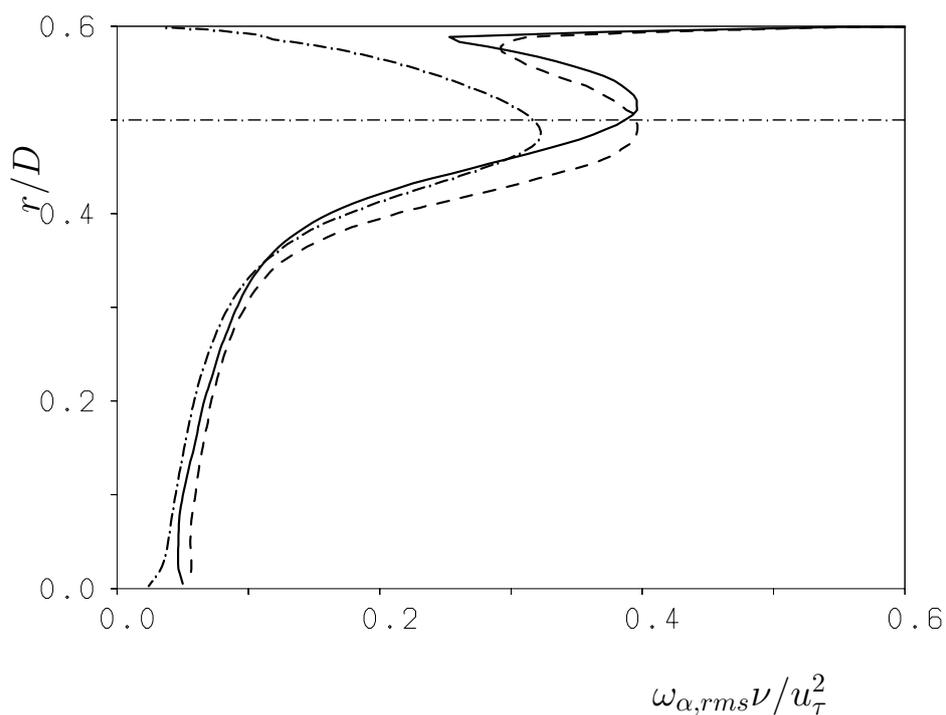


ABBILDUNG 5.143: Profile der drei *rms*-Wirbelstärkefluktuationen an der Stelle $z/D = 2.23$.

Linien: (———): $\omega_{z,rms}$, (- - - -): $\omega_{\phi,rms}$, (- · - · - ·): $\omega_{r,rms}$.

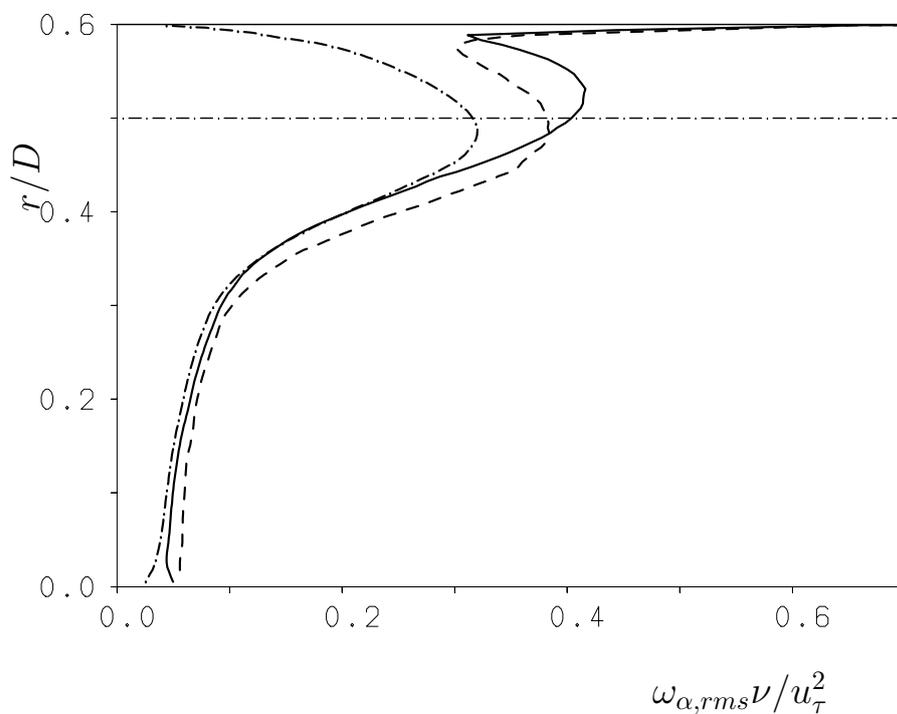


ABBILDUNG 5.144: Profile der drei *rms*-Wirbelstärkefluktuationen an der Stelle $z/D = 2.42$.

Linien: (———): $\omega_{z,rms}$, (- - - -): $\omega_{\phi,rms}$, (- · - · - ·): $\omega_{r,rms}$.

5.11 Diskussion momentaner Strömungsfelder

In den Abbildungen 5.145 und 5.146 werden die Höhenlinien der drei momentanen Geschwindigkeitskomponenten und des Druckes in einer perspektivischen Sicht veranschaulicht. Da der Ursprung des Zylinderkoordinatensystems auf der Rohrachse definiert ist, wechseln die Komponenten u_r und u_φ an der Achse ihr Vorzeichen. Wir beheben diesen Vorzeichenwechsel. Danach besagen die Höhenlinien von u_φ'' und u_r'' in der (z, r) -Ebene (Abb. 5.148 und 5.149), daß Fluid entweder aus der Ebene heraus oder in sie hineinströmt bzw. einheitlich nach oben oder unten fließt.

Die axiale Geschwindigkeitskomponente ist im Bereich $0 \leq z \leq 1.48$ durch hohe Gradienten in Wandnähe gekennzeichnet, die für derartige Strömungen typisch sind. Da die Wand besonders die Bewegung des Fluids in wandnormaler Richtung behindert, ergeben sich in ihrer Nähe die geringen Gradienten der radialen Geschwindigkeitskomponente. Die ausgeprägten Strukturen der Umfangskomponente u_φ , die sich unter einem spitzen Winkel zur der Rohrachse anordnen, wurden bereits in den Zweipunkt-Korrelationsfunktionen $R_{u_\varphi u_\varphi}$ (Kapitel 5.8) beobachtet. Die Winkel nehmen (mit der u_r -Komponente) von der Wand zur Rohrachse hin zu. Die von der Stufenkante ($z/D = 1.48$) ausgehende freie Scherschicht zeichnet sich durch eine in Achsrichtung bis $z/D \approx 2.6$ zunehmende Aktivität in den Radialfluktuationen aus. Sie ist verantwortlich dafür, daß die u_φ -Strukturen mit Annäherung an den mittleren Wiederanlegepunkt ($z/D \approx 2.5$) steiler werden, was auch aus den Zweipunktkorrelationen hervorgeht. In der wiederanlegenden Strömung werden in den Fluktuationen u_r'' und p'' Höhenlinienbereiche sehr geringer Ausdehnung sichtbar. Damit wird das durch die verringerte mittlere Scherung der Strömung im Wiederanlegebereich verursachte geänderte dynamische Verhalten der Schwingungsbewegung deutlich.

Um einen besseren Einblick in Strömungsgeschehen innerhalb der abgelösten Scherschicht zu erhalten, werden in den Abbildungen 5.147 die Höhenlinien der axialen Geschwindigkeitskomponenten in den (r, φ) -Ebenen $z/D = 1.6$, $z/D = 2.23$ dargestellt. Ebenfalls in (r, φ) -Ebenen zeigen die Abbildungen 5.151 bis 5.153 die Fluktuationen aller Geschwindigkeitskomponenten und die des Druckes an den Positionen $z/D = 1.6$, 2.23 und 2.42. Die Mischungsschicht besitzt bei $z/D = 1.6$ eine relativ glatte äußere Oberfläche und bildet eine klar definierte Grenze zwischen der Rückströmung und der in Längsrichtung ausgerichteten Strömung im Kernbereich. Etwas weiter stromab bei $z/D = 2.23$ wird diese äußere Zone der Mischungsschicht durch das aus der Rohrmitte herantransportierte schnelle Fluid stark zerklüftet. Lokal kann hier Fluid mit positiven Impulsfluktuationen in axialer Richtung auf die Wand durchschlagen, obwohl die Strömung im statistischen Mittel zurückströmt. Dieser Vorgang wird bei einfachen Scherströmungen als *sweep* bezeichnet. Die Parallelen in den Mechanismen beider Strömungen kommen deutlich zum Vorschein, wenn zunächst die Höhenlinien von $(u_z'', u_\varphi'', u_r'', p'')$ eingehend

diskutiert werden. Die axiale Geschwindigkeitsschwankung zeigt in Abb. 5.150 eine alternierende Folge von *sweeps* und *ejections*. Beide Vorgänge sind jeweils mit positiven und negativen u_r'' -Fluktuationen verbunden. Das Druckfeld zeigt ferner, z.B. bei $\varphi = \pi/16$ und $\varphi = 8\pi/16$, daß durch das Auftreffen des schnellen Fluid auf die Wand sich der Druck lokal erhöht bzw. erniedrigt, wenn langsames Fluid die Wand verläßt (*ejection*, z.B. bei $\varphi = 2\pi/2$). Die früher diskutierten dünnen Scherschichten entstehen zwischen Zonen, in denen schnelles Fluid zur Wand hin und langsames von ihr wegtransportiert wird. Ein Vergleich zwischen den Höhenlinien von u_z'' und denen von ω_φ'' und E_ω in Abb. 5.141 ist diesbezüglich sehr aufschlußreich. Das u_z'' -Feld ließe sich in Wandnähe aus dem E_ω -Feld durchaus qualitativ rekonstruieren. Robinson [47] weist darauf hin, daß *sweeps* und *ejections* eng mit dem Prozeß der Turbulenzenergieerzeugung verknüpft sind und daß die häufig zitierten Längswirbel zwischen einem *sweep*- und einem *ejection*-Ereignis in der Übergangszone liegen und selten paarweise auftreten und von gleicher Stärke sind. In Abbildung 5.141 läßt sich die ω_z'' -Struktur bei $\varphi = 19\pi/12$ durchaus als ein solcher 'Längswirbel' deuten, zumal dort im p'' -Feld (Abb. 5.150) ein Minimum vorliegt. Aus dieser Sicht werden die Abb. 5.151 bis 5.153 besser interpretierbar und gewinnen noch mehr an Bedeutung.

Wenn wir nun das Turbulenzgeschehen in abgewickelten Flächen $r = const$ betrachten, ergibt sich folgendes Bild:

Im Bereich der Zuströmung findet man in Wandnähe die schon in Kapitel 5.8 besprochenen Strukturen (*streaky structures*) der Komponente u_z'' , die sich in Längsrichtung über einen großen Bereich erstrecken (Abb. 5.154). Die in diese Ebene projizierten fluktuierenden Geschwindigkeitsvektoren (Abbildung 5.156), die in der wandnahen Zuströmung nahezu parallel zu der Rohrwand verlaufen, zeigen, daß die Strömung über einen weiten Bereich einen fast zweidimensionalen Charakter besitzt. Bei näherer Betrachtung dieser wandnahen Strukturen in der (z, r) -Ebene (Abb. 5.148) können durch die gestrichelten Höhenlinien bei $r/D \approx -0.49$ nahe der Einströmebene und durch die durchgezogenen Höhenlinien stromauf der Stufenkante zwei *streaks* mit unterschiedlicher Strömungsrichtung identifiziert werden. Die Geschwindigkeitsvektoren (Abbildung 5.156) sind hier über einen großen Bereich parallel zur Rohrachse ausgerichtet. Die in die (z, r) -Ebene projizierten zum Koordinatenursprung ausgerichteten Vektoren geben eine *ejection* wieder. Die geringe Zahl der Höhenlinien im u_φ'' -Feld der (z, φ) -Ebene (Abb. 5.154) und in den u_r'' - und p'' -Feldern (Abb. 5.155) stromauf der Stufenkante zeigt qualitativ, wie groß die Unterschiede zwischen einfachen Scherschichten und rezirkulierenden, wiederanlegenden Strömungen sind. An der Stelle $(z, \varphi) = (2.7, 0.3)$ weisen die Höhenlinien der Fluktuationen der Radialkomponente u_r'' einen Bereich mit positiven Werten auf. Gleichzeitig liegen dort positive u_z'' -Schwankungen vor, was auf ein *sweep*-Ereignis hindeutet. Verglichen mit dem Geschehen stromauf sind im Wiederanlegebereich die hohen Intensitäten aller Fluktuationen bemerkenswert. Während das u_r'' -Feld in kleinskaligen Strukturen organisiert ist, lassen

die u_z'' - und p'' -Felder eine im Wiederanlegebereich erhöhte azimuthale Korrelation erkennen. In einfachen Scherströmungen hat das momentane Druckfeld sonst einen kleinfleckigen (*spotty*) Charakter.

Die Strukturen der vollentwickelten Zuströmung bleiben stromab der Stufenkante, in der freien Scherschicht, zunächst stabil, was ihre Gestalt und Orientierung betrifft. Ohne den dämpfenden Einfluß der Wand können sich die Fluktuation der Radialkomponente in der freien Scherschicht frei ausbilden, wodurch sich die Strukturen der axialen und azimuthalen Geschwindigkeitskomponenten so drehen, daß deren Längsachse im Wiederanlegebereich wieder einen größeren Winkel mit der Rohrwand einschließen als stromauf.

In den Abbildungen 5.150 bis 5.153 wurden die fluktuierenden Größen in (r, φ) -Ebenen an den vier axialen Positionen $z/D = 0.08, 1.6, 2.23, 2.42$ durch Höhenlinien veranschaulicht. Abb. 5.157 zeigt abschließend Projektionen des fluktuierenden Geschwindigkeitsvektors in diese Ebenen. Die Vektorbilder enthalten weitere nützliche Information über die Dynamik der Turbulenz. Z.B. läßt sich die ω_z'' -Struktur in Abb. 5.135 in der $(z/D = 0.08)$ -Ebene bei $\varphi \approx 19\pi/12$ im Vektorbild 5.157 jetzt wirklich als Längswirbel identifizieren.

Entsprechende Längswirbel finden sich auch in der freien Scherschicht bei $z/D = 2.23$, wenngleich sie dort geringere Abmessung (Durchmesser) haben, als in der einfachen Wandscherschicht. Dies hängt mit der veränderten spektralen Energieverteilung in der freien Scherschicht und im Wiederanlegebereich zusammen. Die eindimensionalen Leistungsdichtespektren in den Abbildungen 5.75, 5.76 hatten gezeigt, daß die kinetische Energie in allen drei Geschwindigkeitskomponenten im ganzen Spektralbereich ansteigt, wenn man sich von der Stufenkante stromabwärts bewegt. Längswirbelartige Strukturen einer bestimmten Intensität bilden sich daher auch schon bei größeren Wellenzahlen aus. Wie die Vektoren in der (z, φ) -Abwicklung (Abb. 5.156) vermuten lassen, sind auch ihre Längsabmessungen entsprechend klein. Die Kleinskaligkeit der Strukturen des fluktuierenden Wirbelvektors im Wiederanlegebereich (verglichen mit der ankommenden Strömung) geht schließlich aus den Höhenlinienbildern von E_ω in (r, z) - und (r, φ) -Schnittebenen (Abb. 5.134, 5.137, 5.138) und aus den Profilen von $\omega_{\alpha,rms}$ (Abb. 5.143 und 5.144 hohe Werte in Wandnähe für $\omega_{z,rms}$ und $\omega_{\varphi,rms}$) hervor.

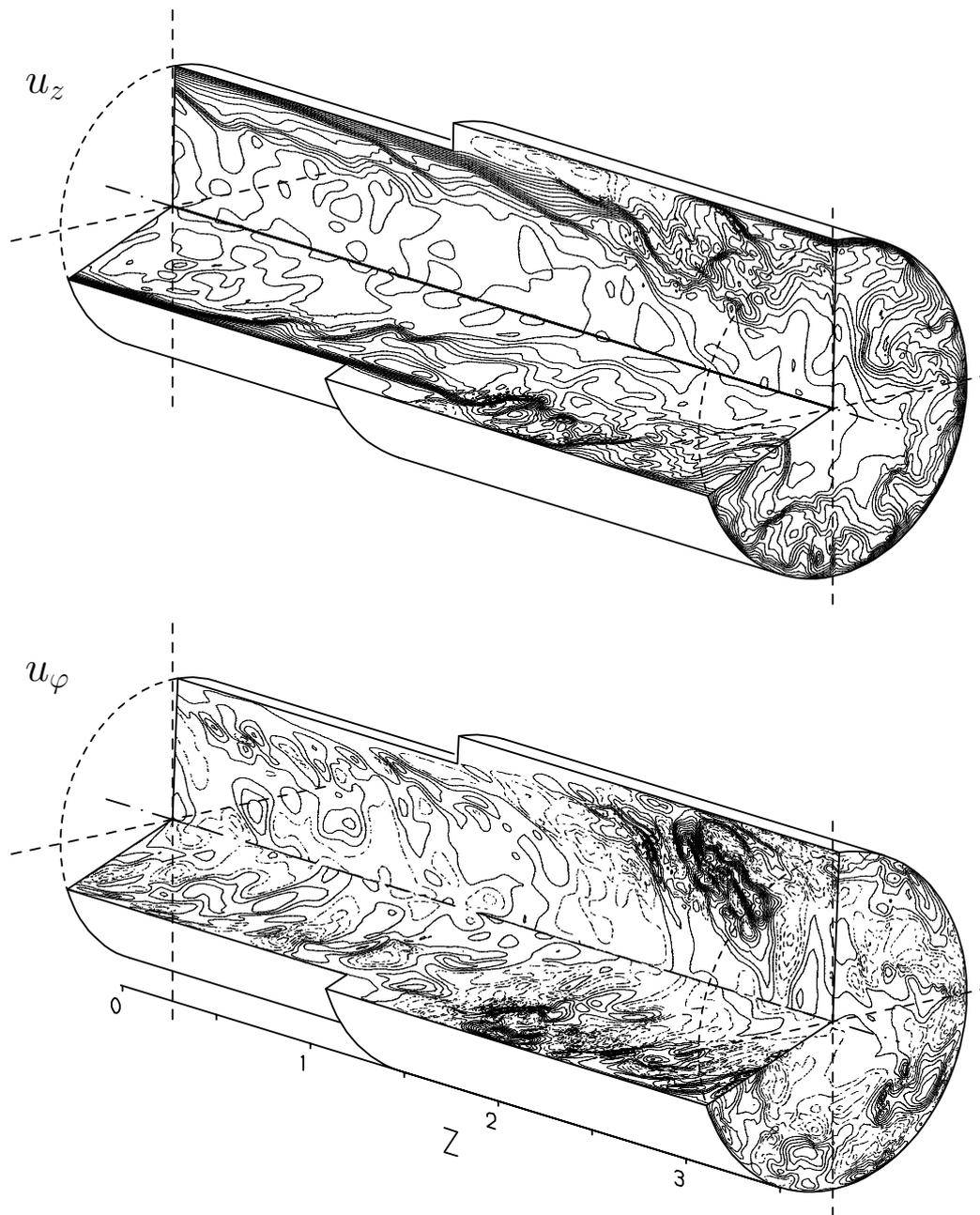


ABBILDUNG 5.145: Schnappschüsse der Geschwindigkeitskomponenten u_z und u_φ , dargestellt durch Höhenlinien. Positive/negative Werte entsprechen durchgezogenen/strichlierten Linien.

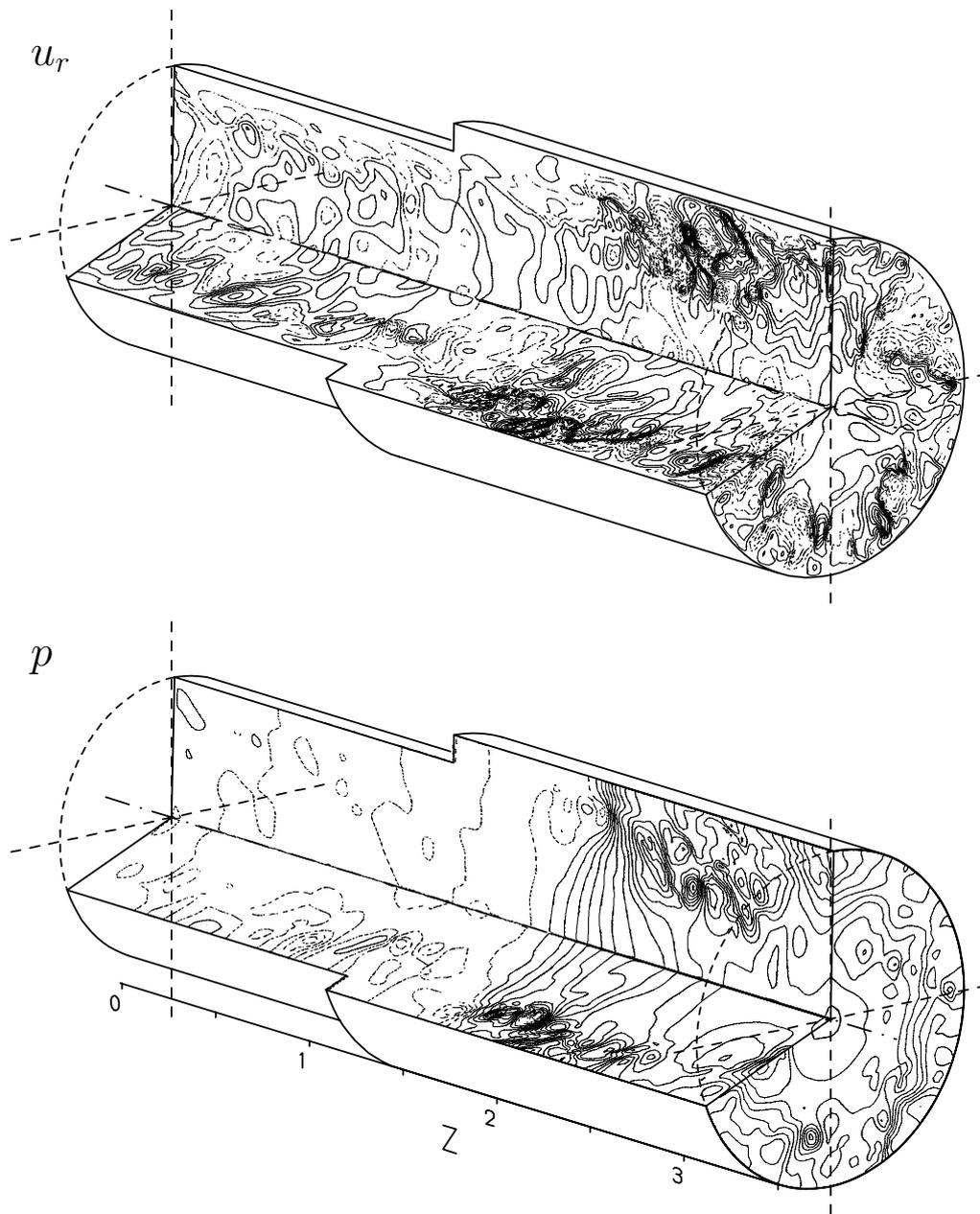


ABBILDUNG 5.146: Schnappschüsse der Geschwindigkeitskomponente u_r und des Druckes p , dargestellt durch Höhenlinien. Positive/negative Werte entsprechen durchgezogenen/strichlierten Linien.

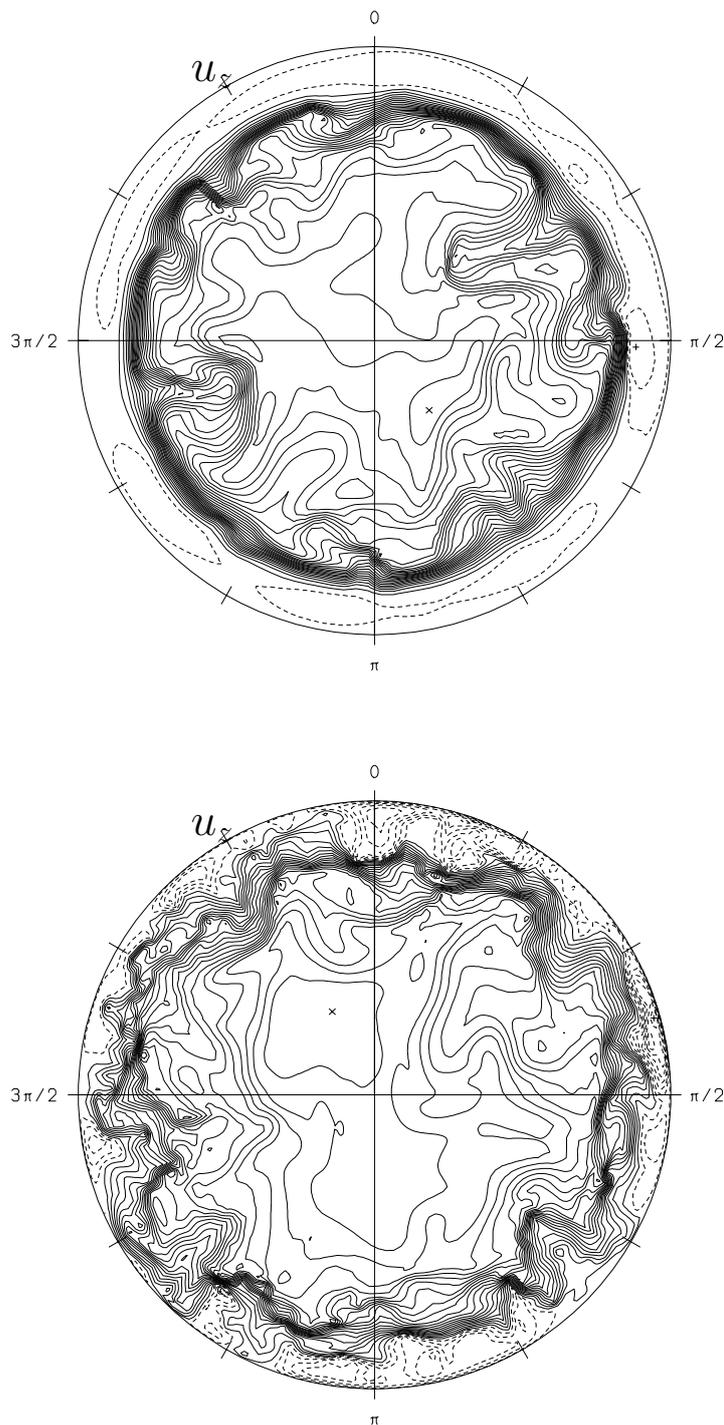


ABBILDUNG 5.147: Höhenlinien der momentanen axialen Geschwindigkeitskomponente in Ebenen $z/D = 1.6$ (oben) und $z/D = 2.23$ (unten). Werte zwischen: $-1.957 < u_z < 20.61$, $-4.813 < u_z < 20.35$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

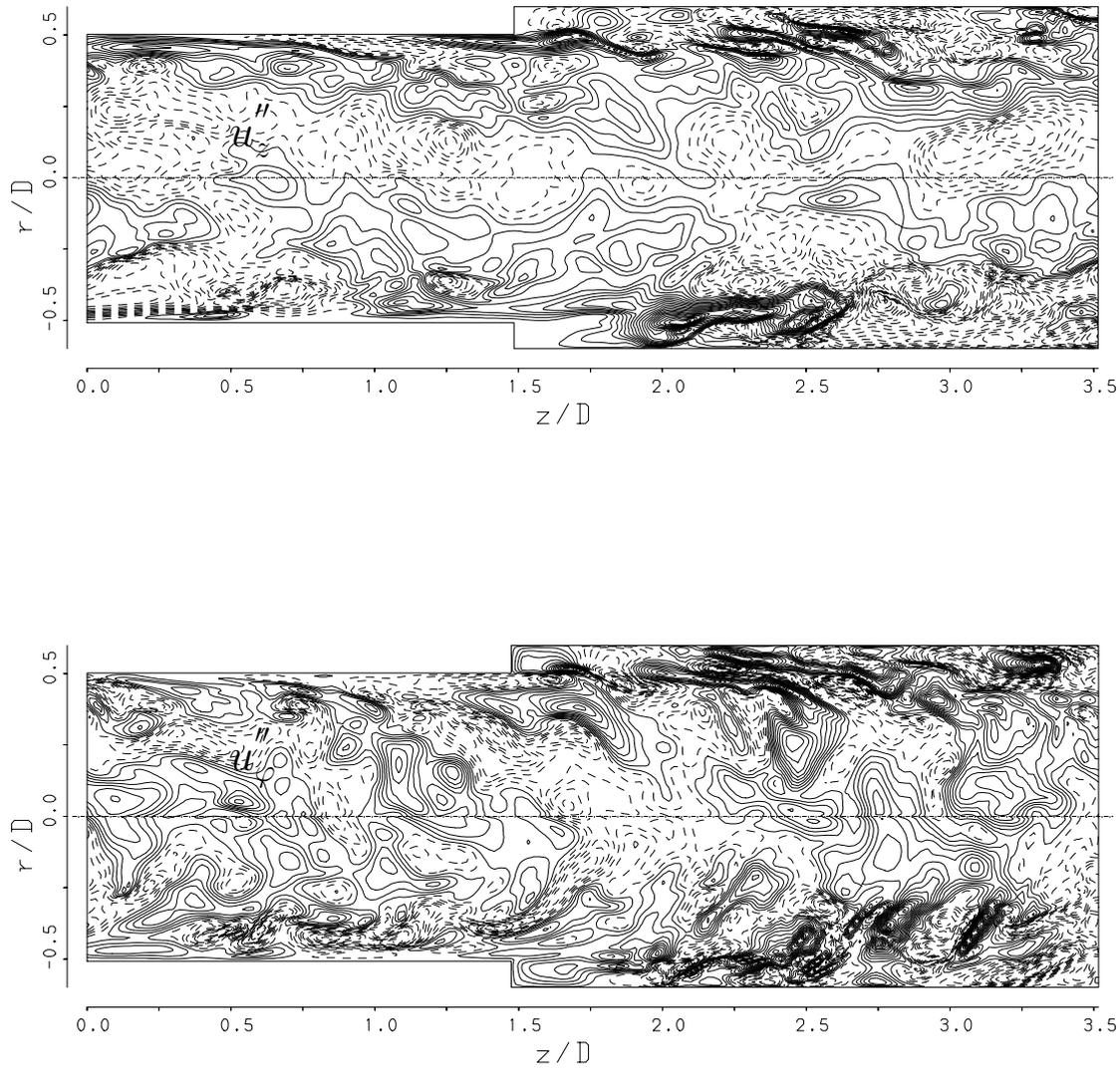


ABBILDUNG 5.148: Höhenlinien der fluktuierenden axialen (oben) und azimuthalen (unten) Geschwindigkeitskomponente in der Ebene $\varphi = 9\pi/32$. Werte zwischen: $-8.222 < u_z'' < 9.319$, $-6.269 < u_\varphi'' < 5.027$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

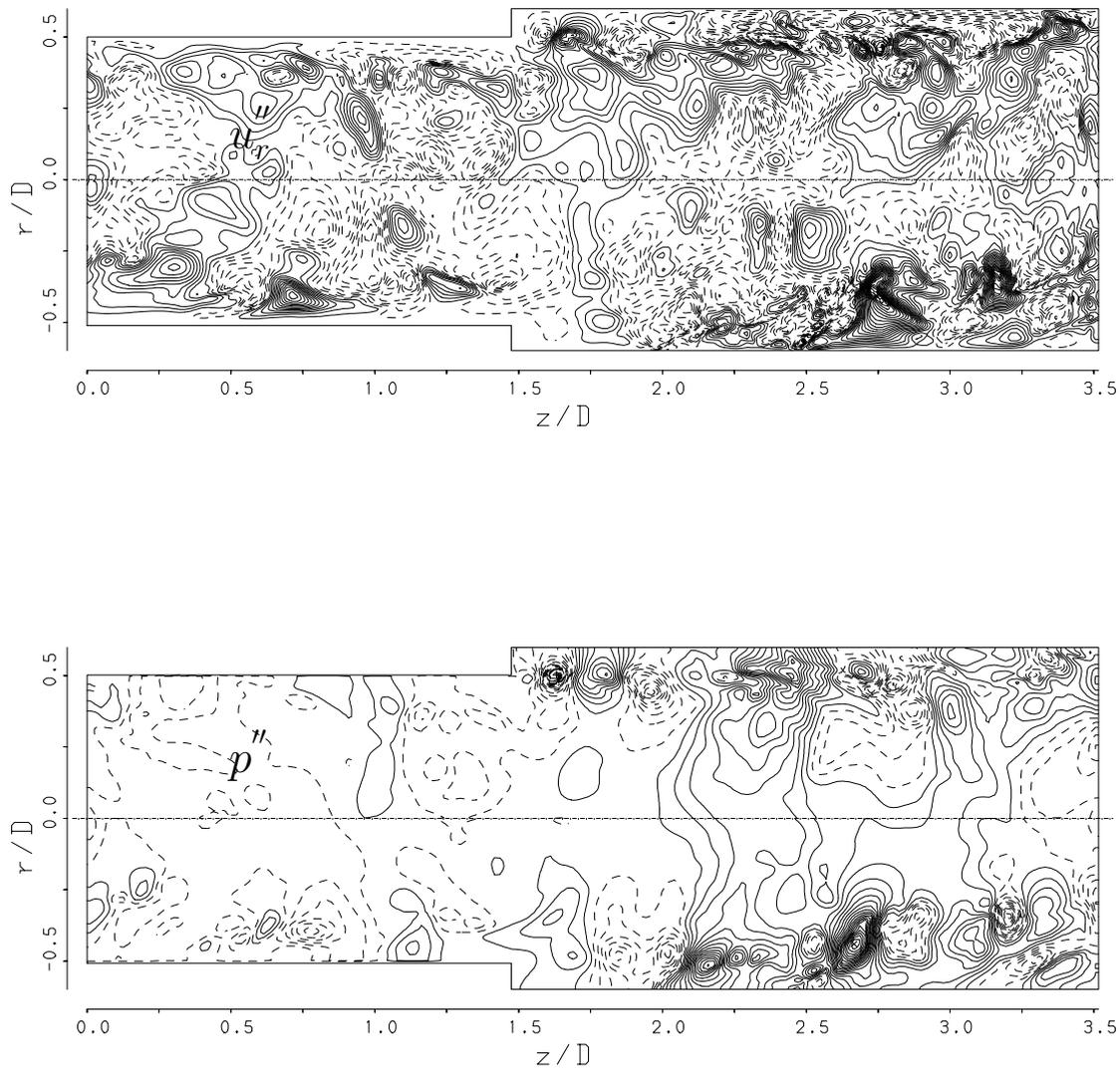


ABBILDUNG 5.149: Höhenlinien der fluktuierenden radialen Geschwindigkeitskomponente (oben) und des fluktuierenden Druckes (unten) in der Ebene $\varphi = 9\pi/32$. Werte zwischen: $-4.703 < u_r'' < 5.883$, $-27.22 < p'' < 29.99$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

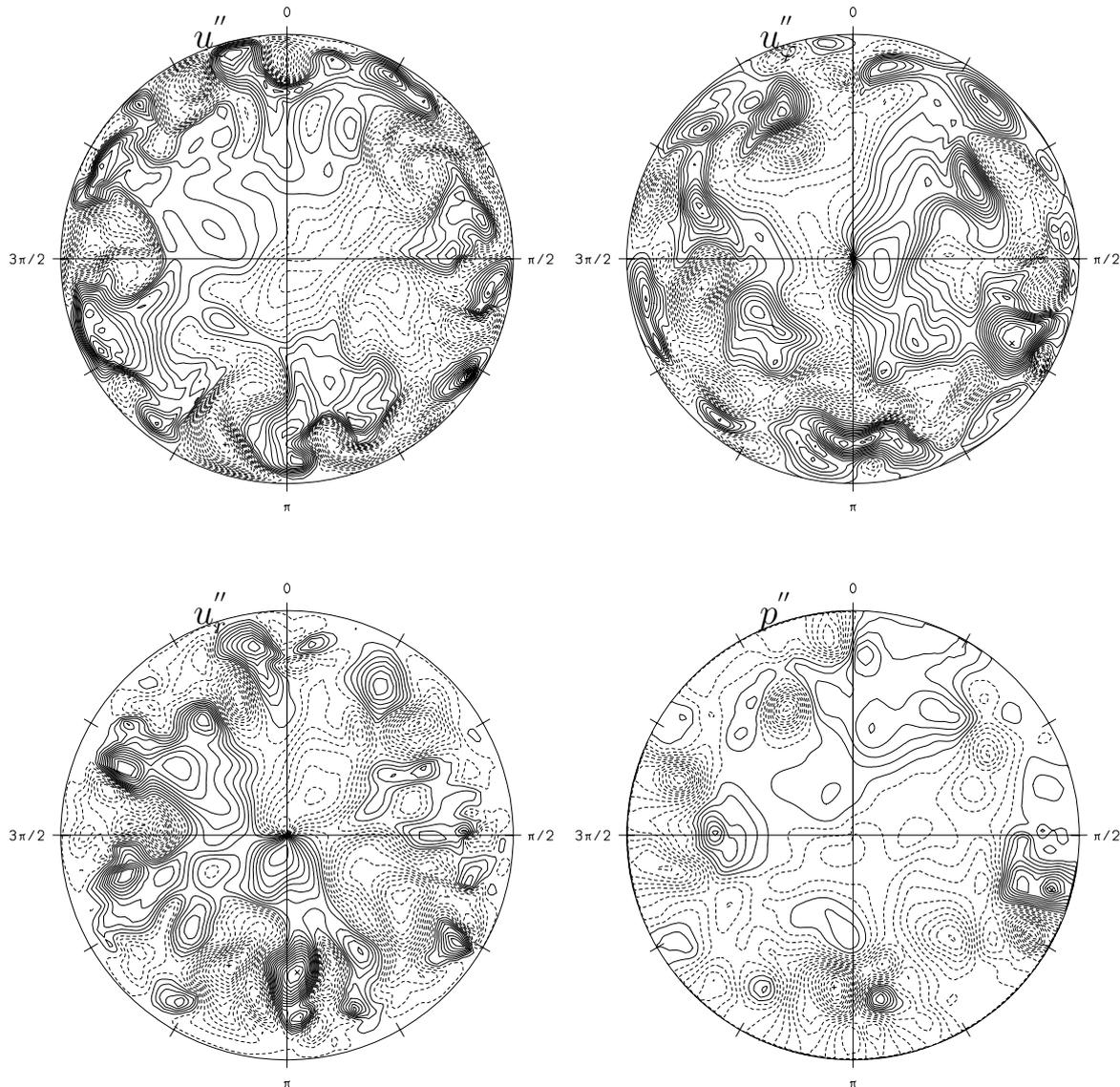


ABBILDUNG 5.150: Höhenlinien der drei fluktuierenden Geschwindigkeitskomponente und des fluktuierenden Druckes in der (r, φ) -Ebene $z/D = 0.08$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

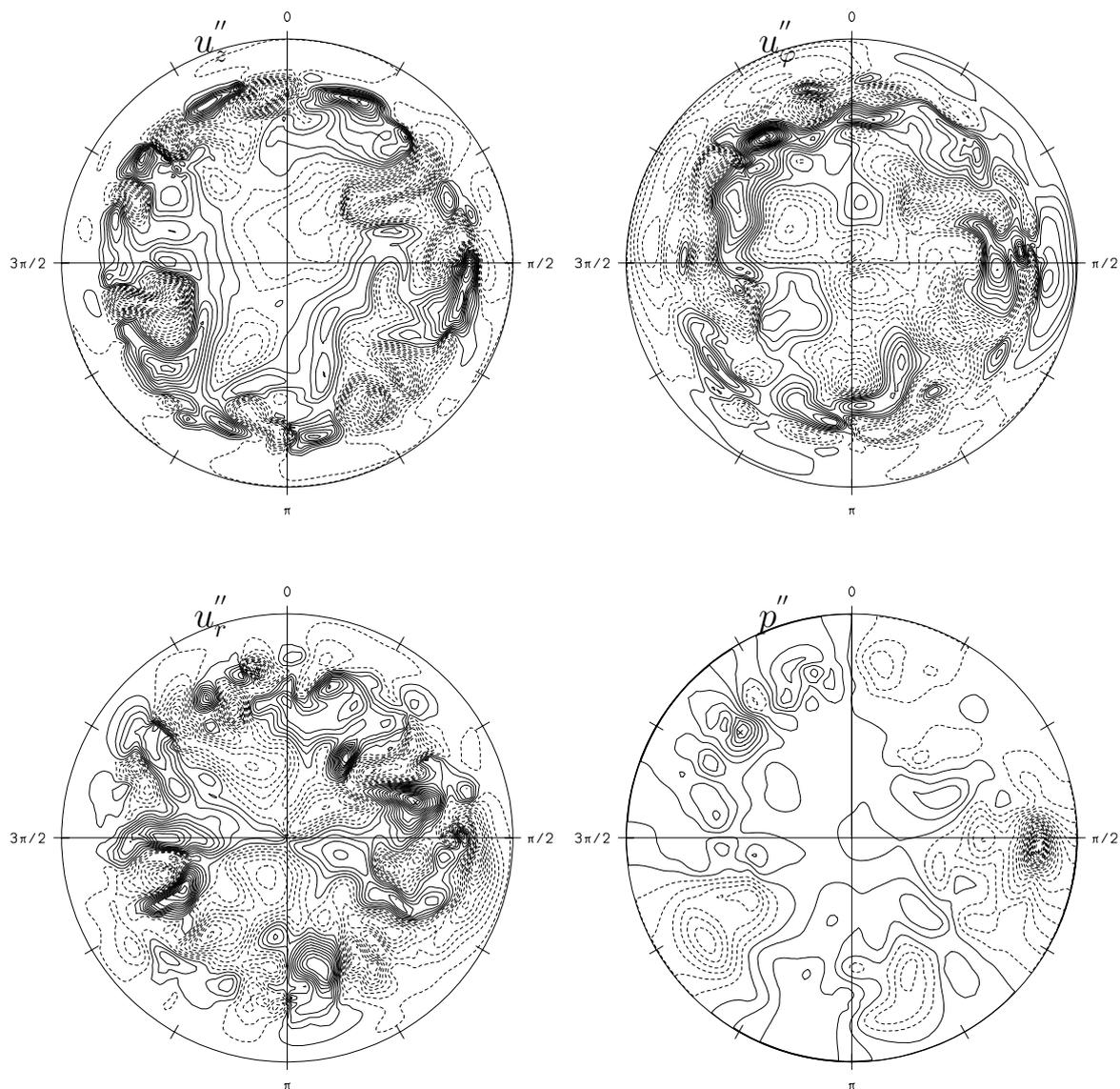


ABBILDUNG 5.151: Höhenlinien der drei fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten und des fluktuierenden Druckes in der (r, φ) -Ebene $z/D = 1.6$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

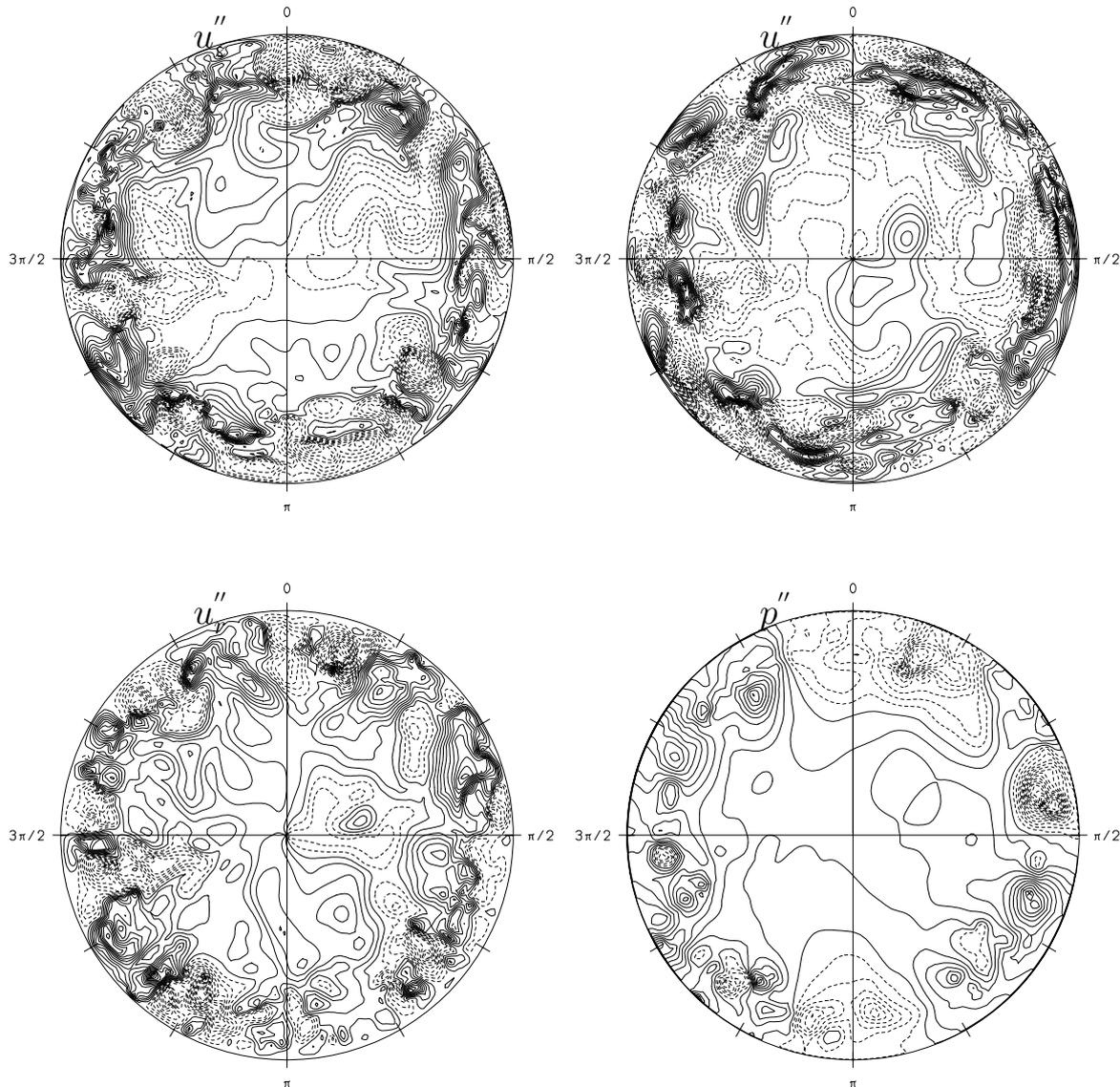


ABBILDUNG 5.152: Höhenlinien der drei fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten und des fluktuierenden Druckes in der (r, φ) -Ebene $z/D = 2.23$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.

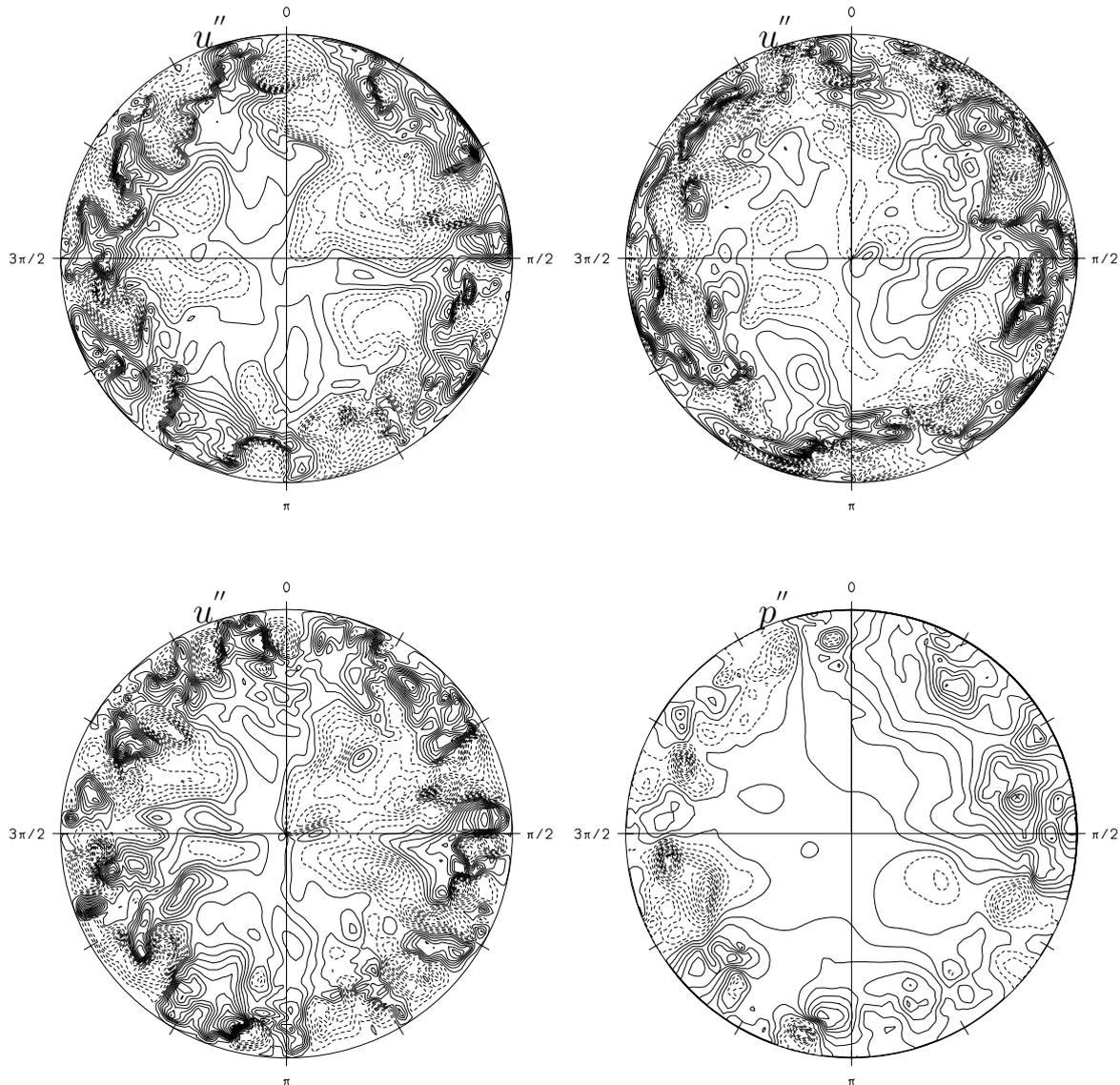
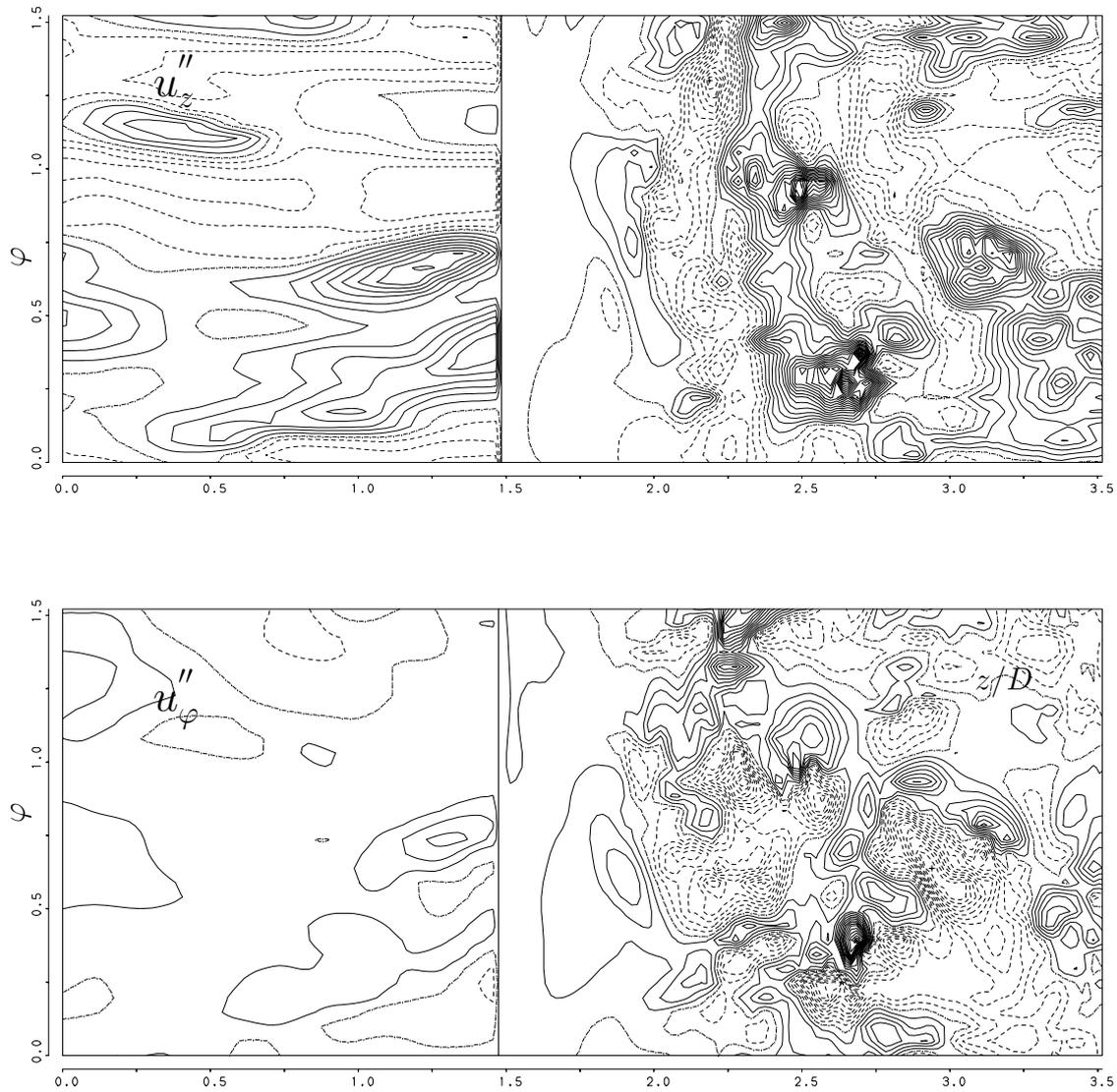


ABBILDUNG 5.153: Höhenlinien der drei fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten und des fluktuierenden Druckes in der (r, φ) -Ebene $z/D = 2.42$. Durchgezogene/gestrichelte Linien repräsentieren positive/negative Werte.



$$z/D$$

ABBILDUNG 5.154: Höhenlinien der fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten in axialer und azimuthaler Richtung in der abgewickelten (z, φ) -Ebene $y^+ = 14$ (von z unabhängiger Bezugswert $u_\tau(z = 0)$). Durchgezogene/gestrichelte bzw. strichpunktierte Linien repräsentieren positive/negative Werte bzw. Nullwerte.

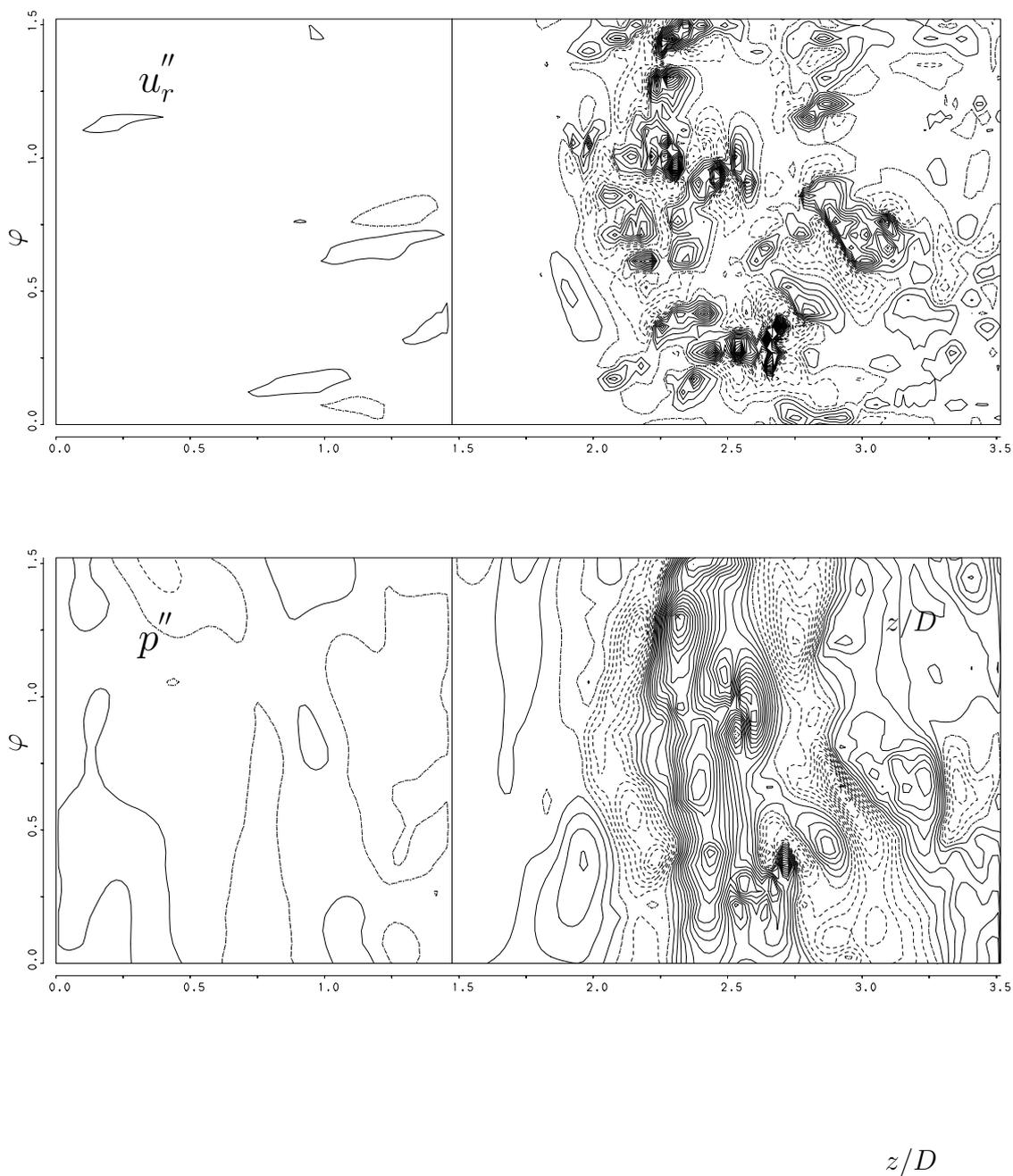


ABBILDUNG 5.155: Höhenlinien der fluktuierenden radialen Geschwindigkeitskomponente und des fluktuierenden Druckes in der (z, φ) -Ebene $y^+ = 14$ (von z unabhängiger Bezugswert $u_r(z = 0)$). Durchgezogene/gestrichelte bzw. strichpunktierte Linien repräsentieren positive/negative Werte bzw. Nullwerte.

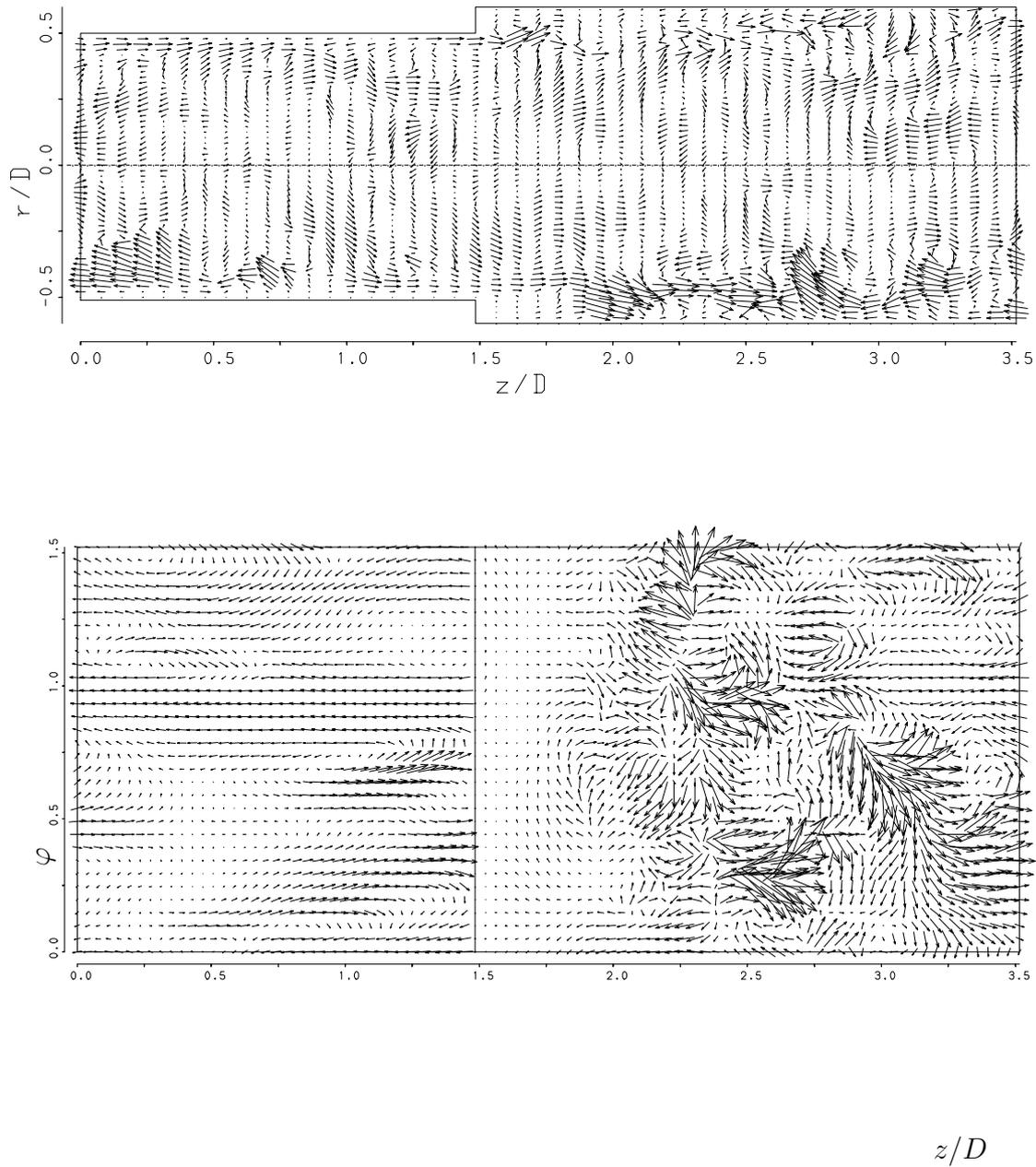


ABBILDUNG 5.156: Projektionen des fluktuierenden Geschwindigkeitsvektors in eine (z, r) -Ebene (oben) und eine (z, φ) -'Ebene' (unten). Ausdünnung oben: Jeder 2. Vektor in z - und 4. Vektor in r -Richtung, unten: Jeder 2. Vektor in z - und in φ -Richtung.

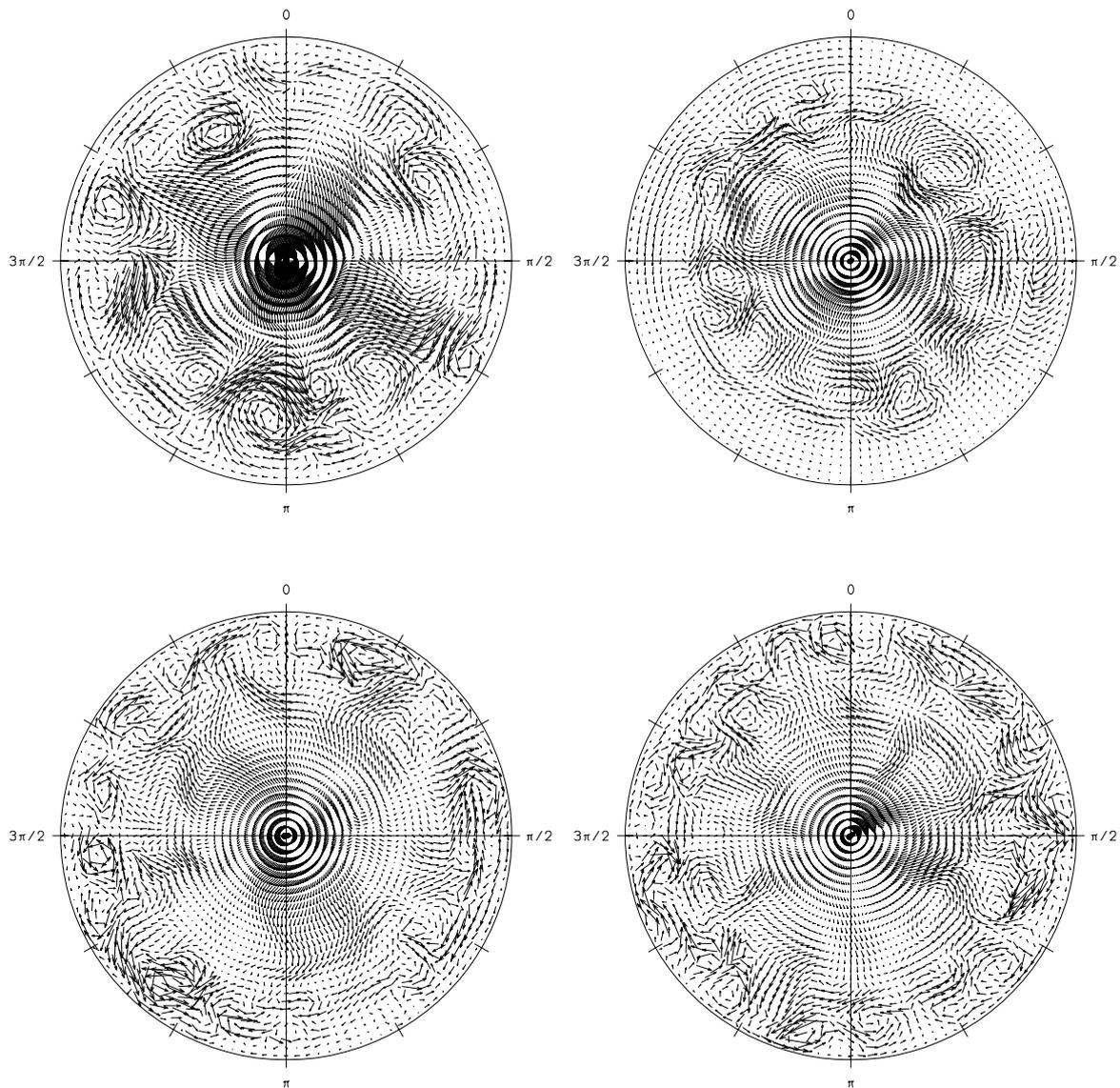


ABBILDUNG 5.157: Projektionen des fluktuierenden Geschwindigkeitsvektors in die vier (r, φ) -Ebenen: $z/D = 0.2$ (oben links), $z/D = 1.6$ (oben rechts), $z/D = 2.2$ (unten links), $z/D = 2.4$ (unten rechts). Ausdünnung: Jeder 4. Vektor in r -Richtung.

6 Vergleich zwischen Simulation und Messung

Der direkten numerischen Simulation wird häufig der Stellenwert eines 'numerischen Windkanals' zugeschrieben. In der Tat ist die DNS in der Lage, alle nur denkbaren Informationen zu liefern, auch solche die im physikalischen Experiment heute noch nicht erzielbar sind (z.B. die Einpunkt-Korrelationen zwischen Druck- und Geschwindigkeitsschwankungen). Ihre Ergebnisse sind dann zuverlässig, wenn das verwendete numerische Verfahren z.B. zweiter Ordnung genau und zentral ist und die kleinsten turbulenten Skalen im Rechennetz sorgfältig aufgelöst werden. Selbst wenn diese Kriterien erfüllt sind, ist es dennoch empfehlenswert, anhand des Vergleichs zwischen Rechnung und Messung, die Zuverlässigkeit der DNS-Daten nachzuweisen.

Für vollentwickelte Rohrströmung hat F. Unger [67] in seiner Dissertation und in einer Publikation (siehe Eggels et al. [18]) diesen Nachweis erbracht. Um für die vorliegende Strömung einen entsprechenden Vergleich durchführen zu können, hat Brouillette [9] im Rahmen seiner *Master-Thesis* an der *University of Illinois* unter Anleitung von Prof. Adrian PIV-Messungen unter nahezu gleichen globalen Bedingungen durchgeführt. In seinem Experiment wird Luft durch ein Gebläse bei $1800 U/min$ beschleunigt. Nach Passieren einer Beruhigungskammer strömt das Fluid durch ein 16 m langes glattes gerades Rohr (Durchmesser $d_1 = 127mm$) in dem die Strömung im Prinzip einen vollentwickelten Zustand erreichen sollte. Der eigentliche Meßbereich liegt in einem im Verhältnis $ER = d_2/d_1 = 1.2$ erweiterten Rohr (Durchmesser $d_2 = 152.4mm$), welches sich direkt an das Zuströmrohr anschließt. Brouillette erhält Ergebnisse für die momentanen, mittleren und fluktuierenden Geschwindigkeitskomponenten in axialer und radialer Richtung sowie für die mittlere und fluktuierende Wirbelstärkekomponente in Umfangsrichtung. Aus Spannungssignalen von Heißfilm-Sonden ermittelt er ferner Energiespektren.

Aufgrund begrenzter Kapazität an Rechenzeit und Speicherplatz kann er nur 64 momentane Strömungsfelder für die statistische Auswertung abgespeichern und numerisch verarbeiten. Die den gemittelten Geschwindigkeitsfeldern entnommene maximale Axialgeschwindigkeit von $u_{cl,e} = 0.937m/s$ entspricht einer Reynoldszahl von $Re_{cl,e} = 7891$. Damit weist die Strömung des Experiments eine um ca. 13% höhere Reynoldszahl auf, als die vorliegenden Simulationen. Unter Verwendung einer nicht näher erläuterten Beziehung berechnet Brouillette eine Wandschubspannungsgeschwindigkeit $u_{\tau,e} = 0.0515m/s$ und die Reynoldszahl $Re_{\tau,e} = 418$. Für den in den folgenden Kapiteln präsentierten Vergleich zwischen Simulation und Experiment werden die gemessenen Strömungsfelder analog zu denen der DNS mit der Wandschubspannungsgeschwindigkeit $u_{\tau,e}$ und räumliche Abmessungen mit dem Durchmesser des Zuströmrohres d_1 dimensionslos gemacht.

Abbildung 6.1 zeigt ein gemessenes, in den Einheiten $Volt^2$ aufgetragenes, zeitliches Ener-

giespektrum der ablösenden Scherschicht (die exakte Position der Heißfilm-Sonde ist nicht dokumentiert). Um die auf der Abszisse dargestellte Kreisfrequenz einfacher mit den Leistungsdichtespektren der DNS vergleichen zu können, wurde sie mit der Bezugsgröße $2\pi u_{\tau,e}/d_1$ dimensionslos gemacht. Für $\omega_s \approx 464$ wird im abfallenden Frequenzbereich des Spektrums eine ausgeprägte Energiespitze erkennbar, die mit größter Wahrscheinlichkeit durch Störungen des Gebläses verursacht wurde. Brouillette schließt nicht aus, daß das Gebläse unrund lief. Die Gebläsedrehzahl von $1800 U/min$ entspricht einer Störfrequenz von $30 Hz$. Bezüglich einer detaillierten Beschreibung dieses Experiments sei auf die Arbeit von Brouillette [9] verwiesen.

Aus den Meßdaten hat Brouillette eine mittlere Wiederanlegelänge von 8.4 Stufenhöhen ermittelt. Damit bildet diese Strömung ein im Vergleich zur DNS_2 ($Z_r/h = 10.2$) wesentlich kürzeres Rezirkulationsgebiet aus. Inwieweit die in Abbildung 6.1 festgestellte ausgeprägte Frequenz von $30 Hz$ die Größe des Rückströmgebiets beeinflusst, wird in den direkten numerischen Simulationen DNS_3 und DNS_4 untersucht, die nachfolgend besprochen werden.

6.1 Manipulation der Zuströmung

Es ist bekannt, daß sich turbulente Scherschichten durch Störungen gezielt beeinflussen lassen. Häufig werden akustische Signale verwendet, um die räumliche Entwicklung freier Scherschichten (Freistrahlen, Vermischungsschichten) zu steuern. Man stellt sich vor, daß Störungen bestimmter Frequenz und Amplitude auf die Dynamik der kohärenten Strukturen einwirken und das Wachstum der Scherschichten beschleunigen. So ließe sich auch erklären, daß die an der Rohrerweiterung entstehende Scherschicht früher anlegt. Die DNS bildet die Möglichkeit, diese Hypothese zu überprüfen.

Im folgenden werden Ergebnisse zweier weiterer Strömungen diskutiert, die in der Einströmebene harmonisch gestört wurden. Dabei wurde der axialen Geschwindigkeitskomponente eine kosinusartige Störung überlagert. Die neue axiale Geschwindigkeitskomponente $u_{z,m}(z = 0)$ der DNS_3 und DNS_4 errechnet sich dabei folgendermaßen:

$$u_{z,m} = u_z + a \cdot u_z'' \cdot \cos(\omega_s t) \quad (6.1)$$

Durch Variation des Parameters a in Gleichung 6.1 kann die von der Schwankungsbewegung abhängige Amplitude der Störung eingestellt werden. Die Simulationen DNS_3 bzw. DNS_4 unterscheiden sich von der DNS_2 ($a = 0$) nur durch die Vorgabe des Parameters $a = 0.5$ bzw. $a = 0.75$.

In Abbildung 6.2 sind die Verläufe des Reibungsbeiwertes $c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_{cl}^2}$ der drei DNS über der Koordinate z/D aufgetragen. Darüberhinaus enthält diese Darstellung auch die aus den Datensätzen von Brouillette berechneten Reibungsbeiwerte, denen, wie unschwer zu erkennen ist,

eine deutlich schlechtere Statistik zugrunde liegt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde nur jeder zweite Meßwert gezeichnet.

Der Abstand zwischen den beiden Nulldurchgängen entspricht den mittleren Wiederanlegelängen. Übereinstimmend geben die c_f -Verläufe von DNS_3 und DNS_4 eine Wiederanlegelänge von 9.4 Stufenhöhen wieder. Hieraus folgt, daß die manipulierte Zuströmung im Vergleich zur DNS_2 , ein um ca. 8% kürzeres Rückströmgebiet liefert. Mit zunehmender Amplitude a steigen die Absolutwerte der Minima im Rezirkulationsgebiet an. Im Gegensatz dazu nimmt das Minimum des gemessenen Reibungswertes einen kleineren Betrag an. Offenbar erklärt die Störampplitude dieses experimentelle Ergebnis nicht. Vielmehr kann, unter Berücksichtigung des von Jovic und Driver [31] beobachteten Abklingens des größten negativen Reibungsbeiwertes mit der Reynoldszahl, dieses Verhalten der höheren Reynoldszahl der experimentell untersuchten Strömung zugeschrieben werden.

Die zeitlichen Leistungsdichtespektren der DNS_3 werden in Abbildung 6.3 an den in Kapitel 5.1 besprochenen Positionen P_1 bis P_4 dargestellt.

Abbildung 6.3a zeigt das Energiespektrum der manipulierten Zuströmung im wandnahen Punkt P_1 . Die nach Gleichung 6.1 erzeugte Frequenz wird durch Energiespitzen in den Komponenten $S_{\alpha\alpha}$ für die drei Geschwindigkeiten wiedergegeben. In Übereinstimmung mit dem in Abbildung 6.1 gezeigten Spektrum des Experiments treten diese lokalen Maxima bei der Kreisfrequenz $\omega_s \approx 464$ auf. Gleichzeitig bildet sich in der radialen Geschwindigkeitskomponente eine höherharmonische Frequenz aus, die sich in u_z nur schwach andeutet. An der nahe der Stufenkante gelegenen Position P_2 weisen die in Abbildung 6.3b dargestellten Energiespitzen der Axial- und Radialkomponente deutlich kleinere Amplituden auf, während das Spektrum der Umfangskomponente keine diskrete Frequenz mehr aufweist. Ferner verschwindet die stromauf beobachtete höherharmonische Frequenz der Radialkomponente. Hieraus folgt, daß die durch Gleichung 6.1 eingebrachte Störung stromab der Eintrittsebene stark gedämpft wird. Dementsprechend weisen die Leistungsdichtespektren der Positionen P_3 (Abb. 6.3c) und P_4 (Abb. 6.3d) diese angeregte Frequenzen nicht mehr auf und entsprechen damit im Prinzip denen der DNS_2 (Abb. 5.74).

Für den Vergleich zwischen den experimentellen und numerischen Ergebnissen wird die Koordinate $Z/Z_r = (z/D - 1.484)/Z_r$ eingeführt, über die der Abstand zur Stufenkante gemessen wird. An den vier axialen Positionen $Z/Z_r = (0; 1/3; 2/3; 1)$ werden Profile der statistisch gemittelten Strömungsgrößen mit den entsprechenden PIV-Meßwerten verglichen. Hierbei entspricht $Z/Z_r = 0$ der Ebene der Querschnittserweiterung und $Z/Z_r = 1$ der axialen Position der mittleren Wiederanlegelinie. Die Positionen $Z/Z_r = 1/3$ und $2/3$ erfassen die Rückströmung und den Beginn des Wiederanlegens.

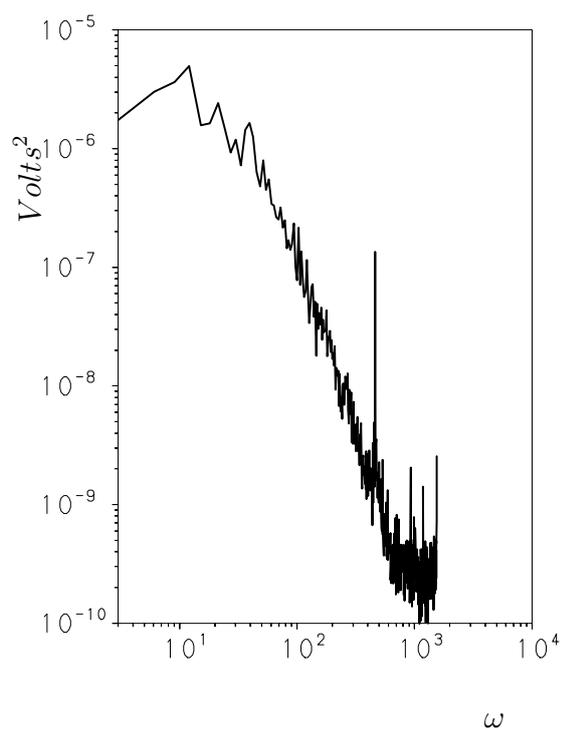


ABBILDUNG 6.1: Aus dem Spannungssignal einer Heißfilm-Sonde ermitteltes zeitliches Leistungsdichtespektrum der abgelösten Strömung. Aus dem Experiment von Brouillette [9].

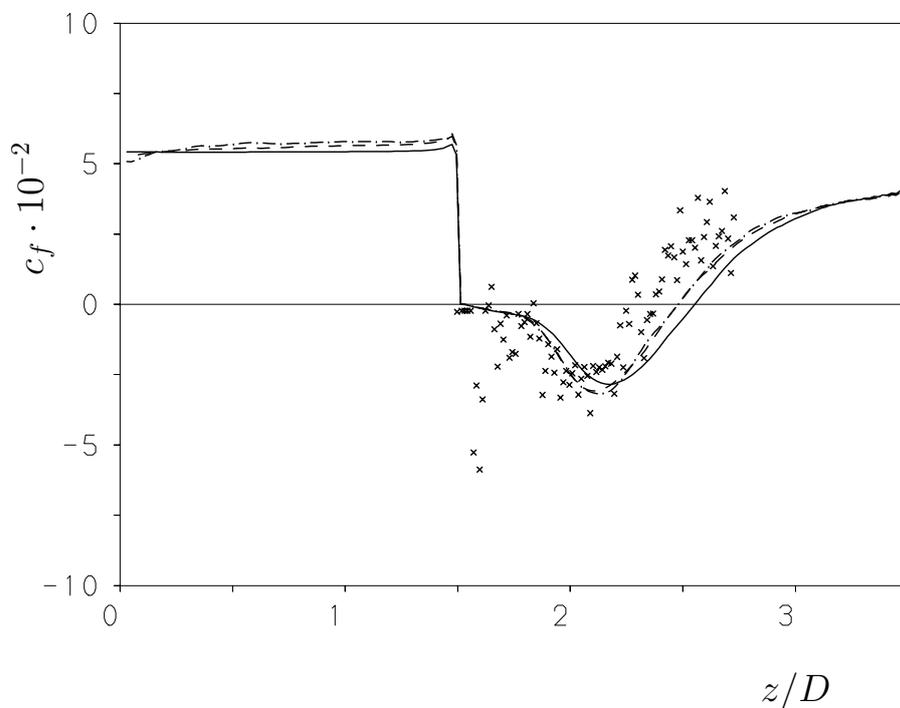


ABBILDUNG 6.2: Verläufe des Reibungsbeiwertes aufgetragen über der Axialkoordinate z/D . Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·). PIV-Messungen von Brouillette [9]: (×).

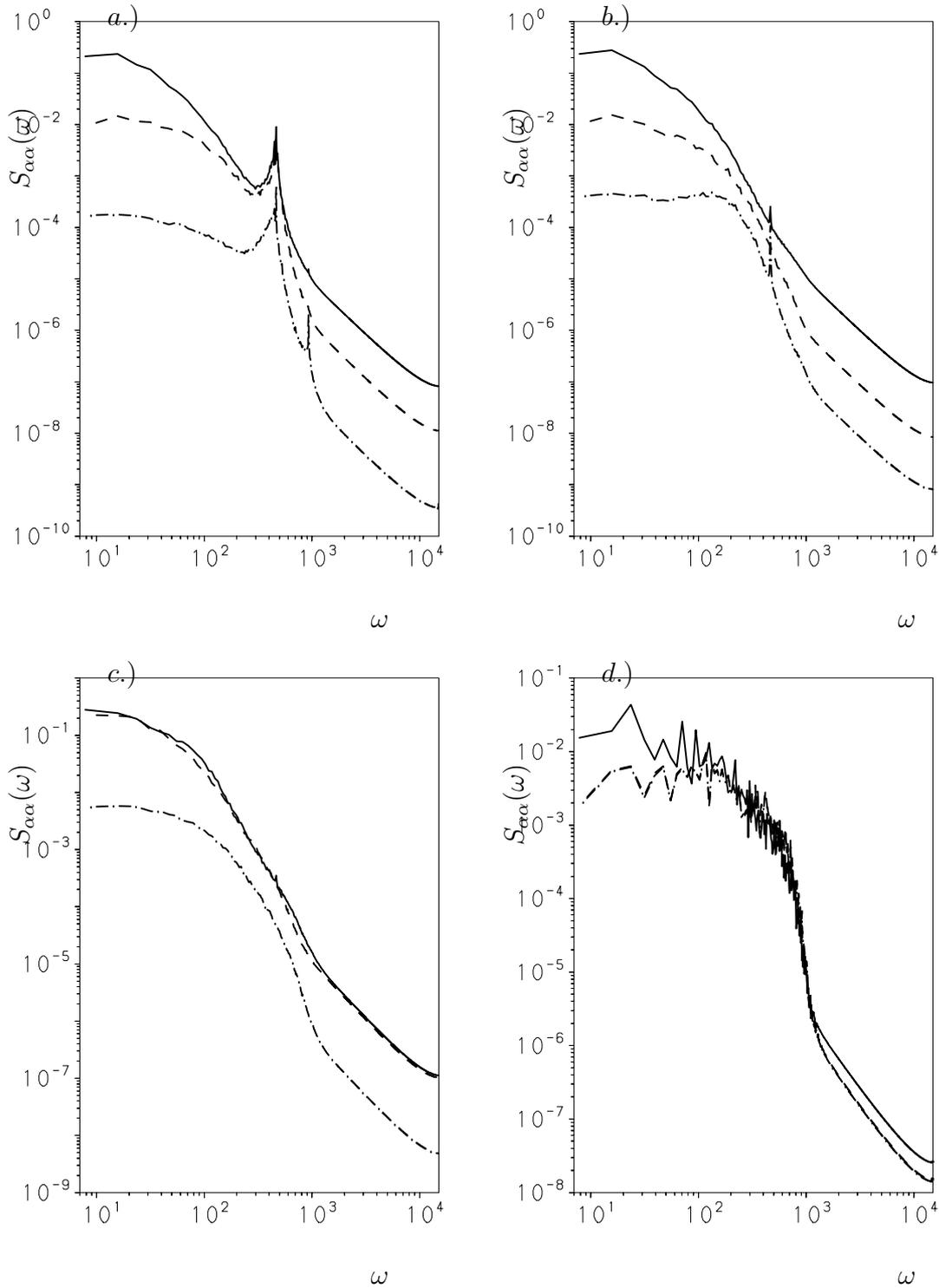


ABBILDUNG 6.3: Zeitliche Leistungsdichtespektren der DNS_3 an den vier unterschiedlichen Positionen: a.) $(z, r) = (0.08, 0.487)$, b.) $(z, r) = (1.5, 0.487)$, c.) $(z, r) = (2.32, 0.586)$, d.) $(z, r) = (1.5, 0.01)$. Linien: S_{zz} : (———), $S_{\varphi\varphi}$: (- - - -), S_{rr} : (- · - · - ·).

6.2 Mittlere Axial- und Radialgeschwindigkeit

In der Ebene der Querschnittserweiterung ($Z/Z_r = 0$) werden in Abbildung 6.4 gerechnete und gemessene Profile der mittleren Axialgeschwindigkeit untereinander verglichen. Die Verläufe der drei Simulationen unterscheiden sich kaum. Interessanterweise führt die manipulierte Einströmung der DNS_3 ($a = 0.5$) zu einer leicht beschleunigten Strömung im Kernbereich, während das Profil der DNS_4 ($a = 0.75$) sich mit dem der DNS_2 nahezu deckt. Die Profile der Simulationen stimmen im wandnahen Bereich gut mit den Werten der PIV-Messung überein. Die deutlichen Unterschiede im Kernbereich der Strömung werden einerseits der höheren Reynoldszahl des Experiments und andererseits der vermutlich ungenauen Bezugsgröße $u_{r,e}$ zugeschrieben. In den Abbildungen 6.5 und 6.6 geben die in Wandnähe negativen Meßwerte der mittleren Längsgeschwindigkeit eine Rückströmung wieder, die in dieser Ausprägung weder von der Simulation DNS_2 noch von den Simulationen mit manipulierter Zuströmung vorgesagt wird. Es ist naheliegend, auch hierfür die sehr ungenaue Statistik des Experiments verantwortlich zu machen. Dennoch ergibt sich insgesamt eine gute Übereinstimmung mit den Profilen der Simulationen. Deutliche Unterschiede zwischen Experiment und Simulation werden in der mittleren Radialgeschwindigkeit der Position $Z/Z_r = 0$ (Abbildung 6.8) erkennbar. Die um einen Wert von $\langle u_r \rangle \approx -0.4$ schwankenden Meßwerte sind möglicherweise ein Abbild des unrunderen Gebläselaufs. Die daraus resultierende Strömung ist nicht achsensymmetrisch und unterscheidet sich damit deutlich von der der Simulation. Die Profile der direkten numerischen Simulation geben einen in der Ebene der Querschnittserweiterung beginnenden konvektiven Impulstransport vom Kernbereich der Strömung in Richtung Rückströmgebiet wieder. Wie die größeren Amplituden der DNS_3 und DNS_4 zeigen, wird dieser Massenaustausch durch die Störfrequenz verstärkt. Die unterschiedlichen Verläufe der Simulationen im Bereich der Rohrachse sind auf eine nicht völlig stabile Statistik der DNS_3 und DNS_4 zurückzuführen. Wie in Abbildung 6.9 deutlich erkennbar wird, nimmt der Impulsaustausch zwischen Rückströmgebiet und Kernbereich der Strömung weiter stromab deutlichere Formen an. Die größeren Maxima der DNS_3 und DNS_4 belegen, daß die Manipulation die axiale Entwicklung der mittleren Geschwindigkeit in wandnormaler Richtung anfacht. Zwangsläufig ist damit auch ein erhöhter Impulsaustausch in radialer Richtung verbunden. Auch die Messungen geben diesen Transport von Fluid in Richtung Rohrwand zumindest tendenziell wieder. Wie die negativen Werte im Bereich der Rohrachse von ≈ -0.3 belegen, ist die gemessene Strömung an der Stelle $Z/Z_r = 1/3$ nach wie vor asymmetrisch. Mit zunehmender Annäherung an die Wiederanlegelinie (Abb. 6.10 und Abb. 6.11) erhöht sich auch die Axialsymmetrie in den PIV-Daten, so daß die Meßwerte in Abbildung 6.11 im Bereich der Rohrachse praktisch keinen Vorzeichenwechsel mehr aufweisen. Insgesamt verbessert sich damit auch die Übereinstimmung mit den DNS-Profilen. Während sich die in Abbildung 6.11 veranschaulichten mittleren Radialgeschwindigkeiten der drei DNS kaum unterscheiden, differieren die Maximalwerte an der Position $Z/Z_r = 1.0$.

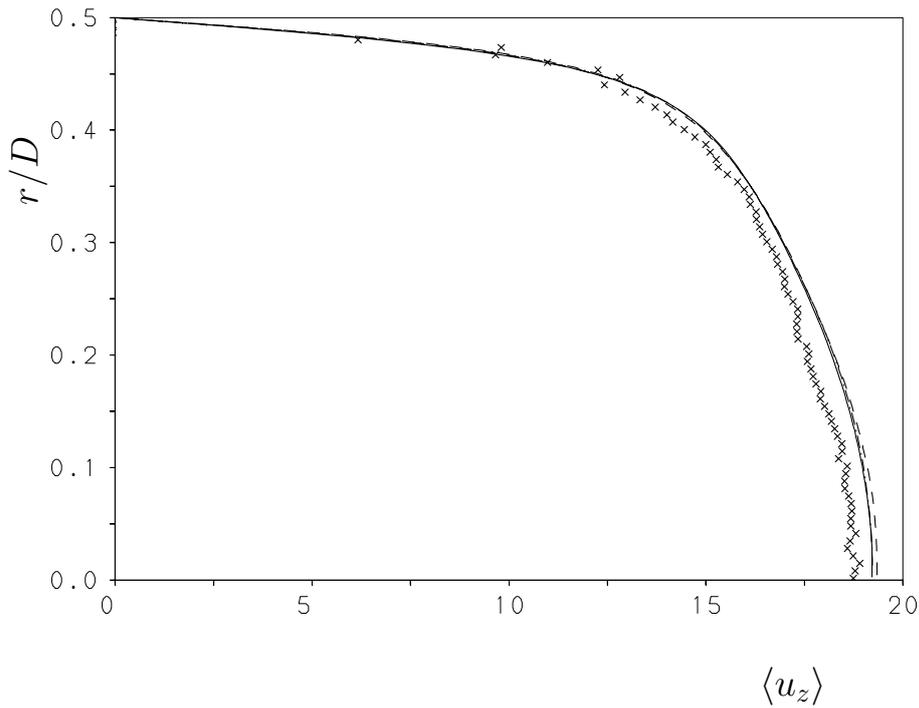


ABBILDUNG 6.4: Vergleich von Profilen der mittleren Axialgeschwindigkeit an der axialen Position $Z/Z_r = 0$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

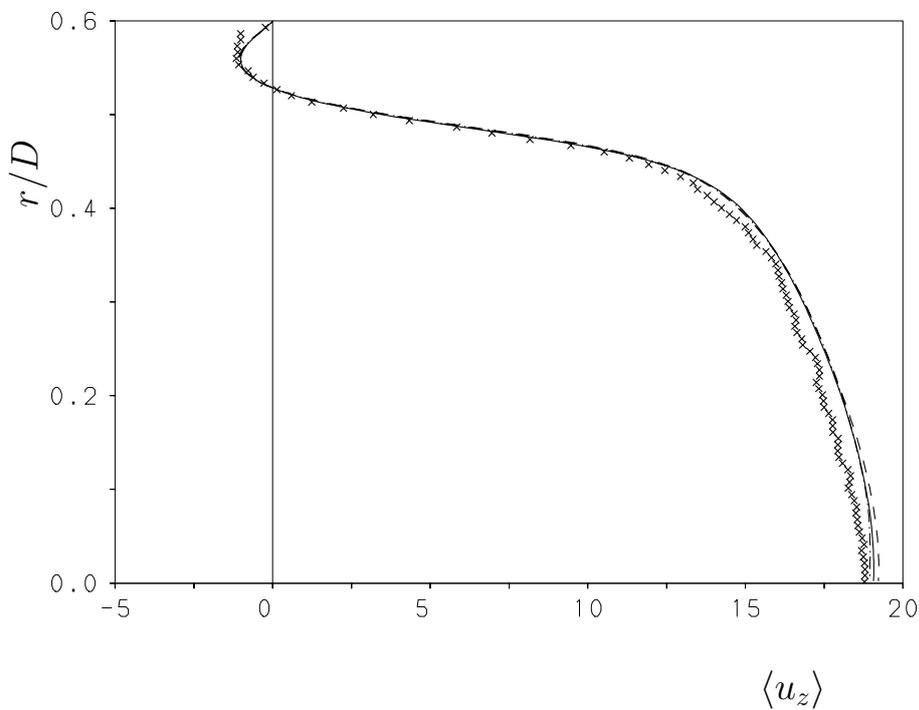


ABBILDUNG 6.5: Vergleich von Profilen der mittleren Axialgeschwindigkeit an der axialen Position $Z/Z_r = 1/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

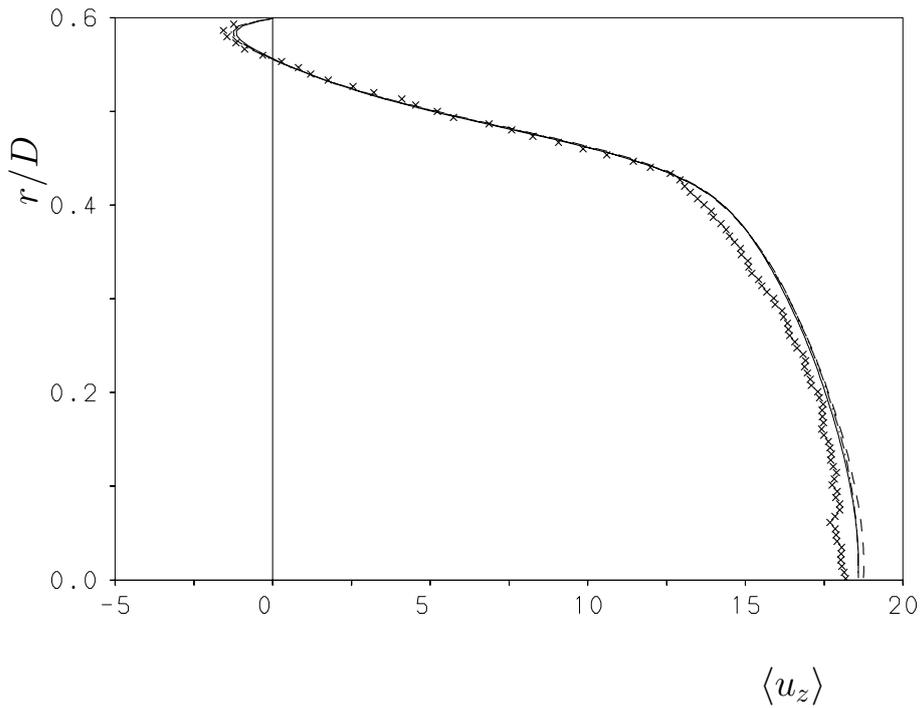


ABBILDUNG 6.6: Vergleich von Profilen der mittleren Axialgeschwindigkeit an der axialen Position $Z/Z_r = 2/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

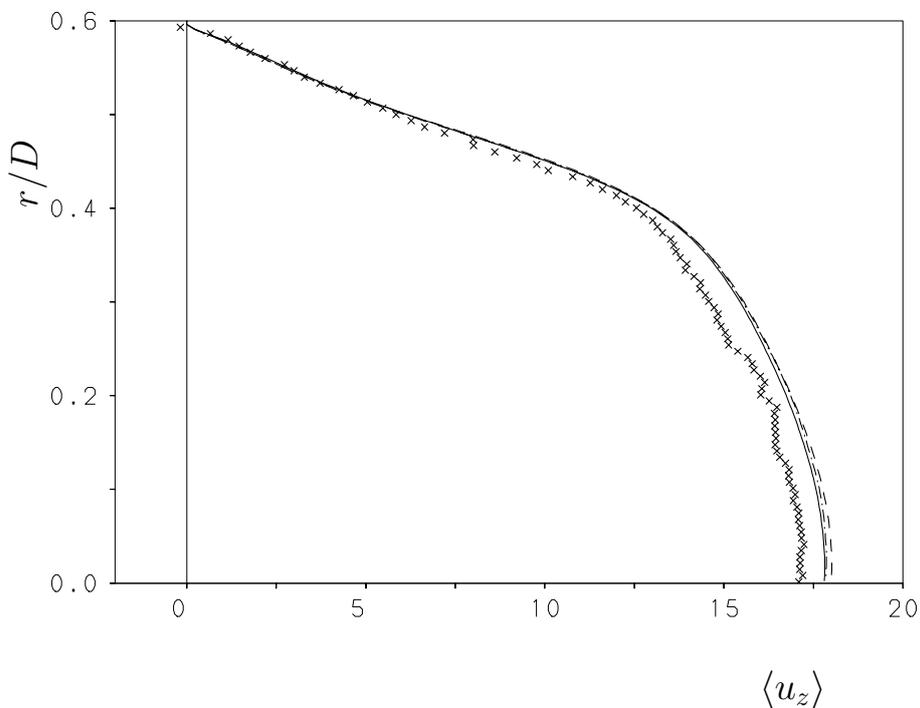


ABBILDUNG 6.7: Vergleich von Profilen der mittleren Axialgeschwindigkeit an der axialen Position $Z/Z_r = 1$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

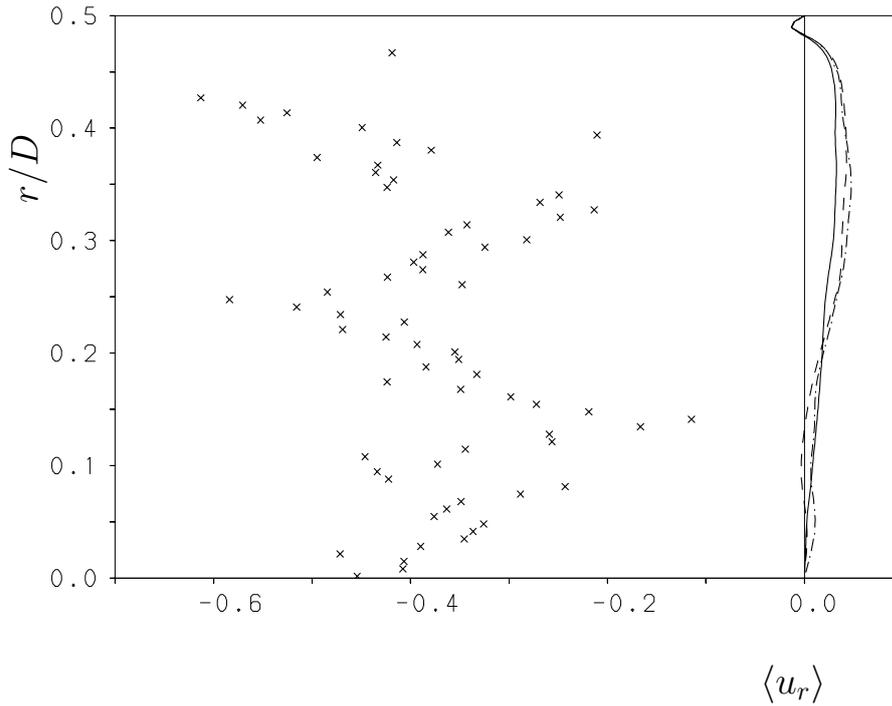


ABBILDUNG 6.8: Vergleich von Profilen der mittleren Radialgeschwindigkeit an der axialen Position $Z/Z_r = 0$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

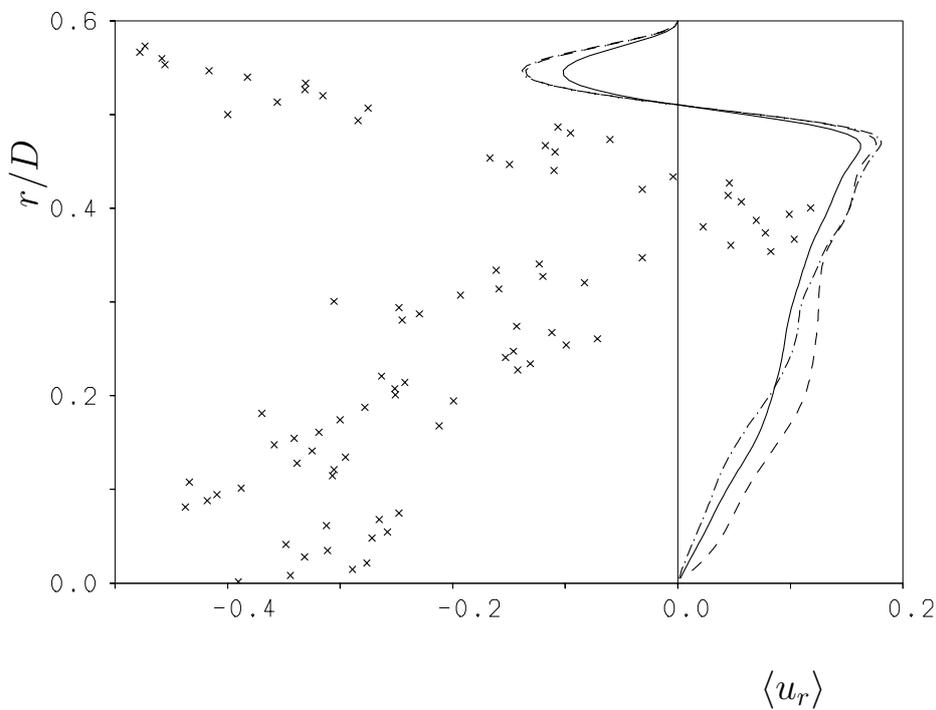


ABBILDUNG 6.9: Vergleich von Profilen der mittleren Radialgeschwindigkeit an der axialen Position $Z/Z_r = 1/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

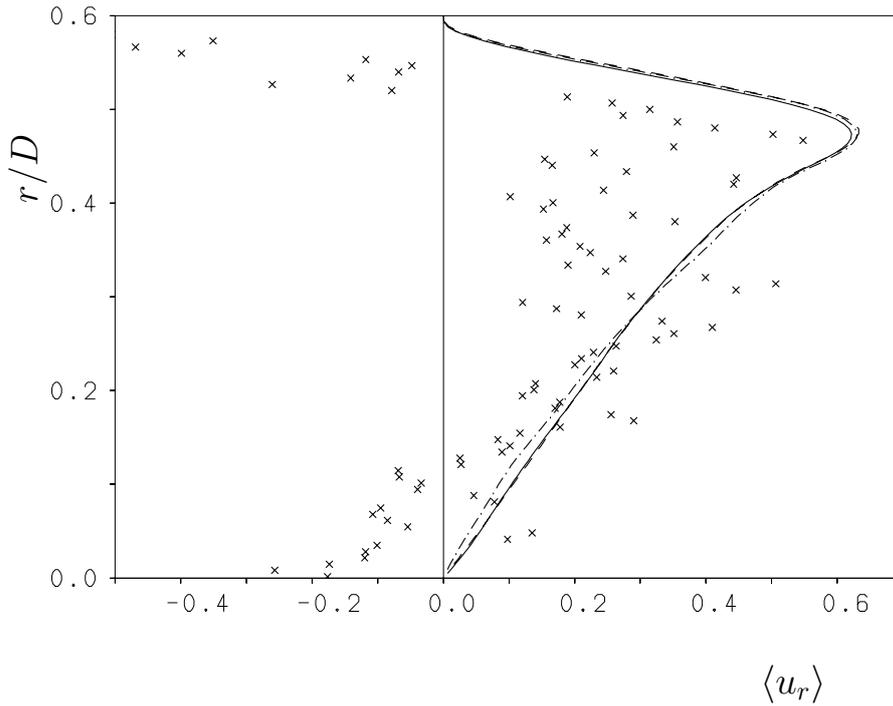


ABBILDUNG 6.10: Vergleich von Profilen der mittleren Radialgeschwindigkeit an der axialen Position $Z/Z_r = 2/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

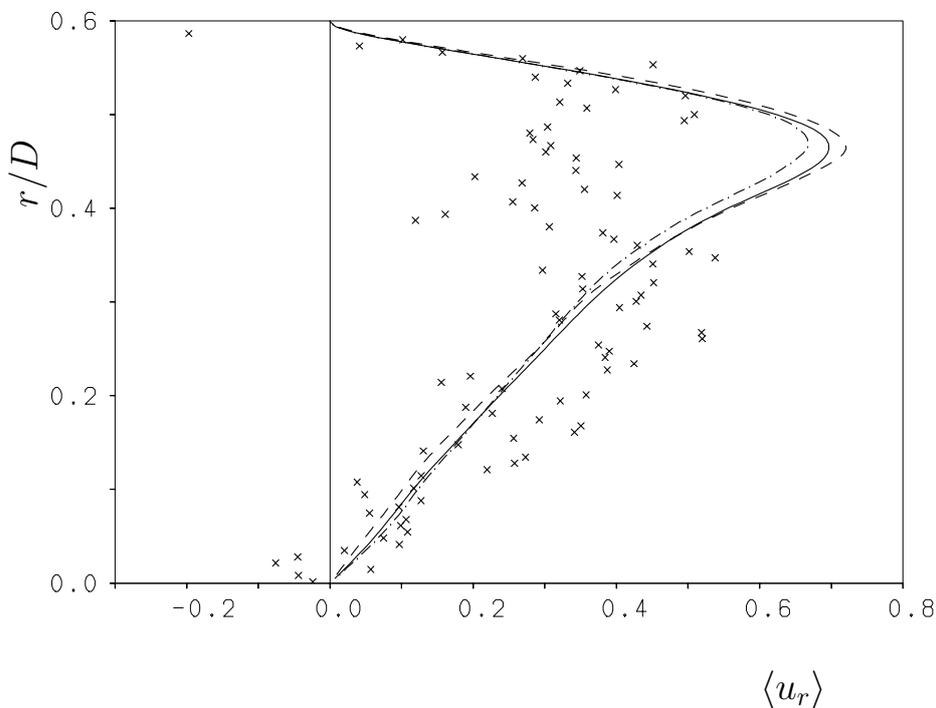


ABBILDUNG 6.11: Vergleich von Profilen der mittleren Radialgeschwindigkeit an der axialen Position $Z/Z_r = 1$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

6.3 *rms*-Geschwindigkeitsschwankungen und Reynoldssche Schubspannung

Abbildung 6.12 zeigt die Verläufe der axialen *rms*-Geschwindigkeitsschwankungen in der Ebene der Querschnittserweiterung $Z/Z_r = 0$. Gemessen an dem Vergleich der mittleren Radialgeschwindigkeiten ist die Übereinstimmung zwischen dem Experiment und den Simulationen überraschend gut. An den Positionen $Z/Z_r = 0$ und $Z/Z_r = 1/3$ liegen die maximalen *rms*-Werte der Messung über denen der Simulationen, die untereinander nahezu deckungsgleiche Verläufe aufweisen. Khezzar et al. [33] untersuchen die nicht achsensymmetrische Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung und stellen dabei fest, daß diese im Vergleich zur achsensymmetrischen in der freien Scherschicht höhere Turbulenz-Intensitäten hervorruft. Dementsprechend werden die höheren *rms*-Meßwerte auf die beobachtete Asymmetrie der experimentellen Strömung zugeführt. In den weiter stromab gelegenen Positionen (Abb. 6.14 und 6.15) wird mit den in axialer Richtung anwachsenden Amplituden eine bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten erkennbar. Die Daten der Simulationen und des Experiments unterscheiden sich lediglich durch die etwas geringeren Maximalwerte in den DNS mit manipulierter Zuströmung und das leicht zur Wand verschobene Maximum der Meßwerte.

Die radialen *rms*-Geschwindigkeitsfluktuationen sind in den Abbildungen 6.16 bis 6.19 an denselben Positionen veranschaulicht. Bei $Z/Z_r = 0$ ist die Aussagekraft der Meßwerte gering. Die Profile der Simulationen zeigen eine zwar kleine aber dennoch deutliche Zunahme der *rms*-Verläufe von der DNS_2 zur DNS_3 und DNS_4 , wobei letztere die höchsten Maximalwerte aufweist.

In der abgelösten Scherschicht (Abb. 6.17) geben die Verläufe der Simulationen zwei lokale Maxima wieder. Während die in der Scherschicht ansteigende Produktionsrate die Entwicklung des wandnahen Maximums vorantreibt, spiegelt das wandferne Maximum die in der Zuströmung vorhandene Schwankungsbewegung wider. Die DNS_3 und DNS_4 weisen deutlich höhere lokale Maxima auf, als die DNS_2 . Die schlechte Übereinstimmung mit den Meßwerten wird erneut auf Mängel im Experiment zurückgeführt. Tendenziell zeigen sich aber auch zwei Maxima.

Eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation wird in den Abbildungen 6.18 und 6.19 erkennbar. Wie bei den axialen *rms*-Geschwindigkeitsschwankungen zeigt das Experiment eine höhere Intensität der radialen Geschwindigkeitsschwankungen. Während in der DNS_3 und DNS_4 an der Position $Z/Z_r = 2/3$ eine im Vergleich zur DNS_2 verstärkte Schwankungsbewegung festgestellt wird, verschwinden diese Unterschiede in Abbildung 6.19. Die Profile der Simulationen sind bei $Z/Z_r = 1$ nahezu deckungsgleich.

Die von der manipulierten Zuströmung am stärksten beeinflusste Größe ist die Reynoldssche

Schubspannung. Mit zunehmender Amplitude a (Gleichung 6.1) zeigen die Profile der drei DNS in der Ebene der Querschnittserweiterung (Abb. 6.20) einen stark ansteigenden Maximalwert. Auch die Meßwerte weisen hier einen zumindest qualitativ ähnlichen Verlauf auf. Die gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation an den Positionen $Z/Z_r = 1/3$ und $Z/Z_r = 2/3$ (Abb. 6.21 und 6.22) dürfte im Hinblick auf die Abweichungen im Bereich der Wiederanlegelinie (Abb. 6.23) zufällig sein.

Die Tatsache, daß die Manipulation die Strömung im Wiederanlegepunkt kaum beeinflußt, wird auch durch die sich nahezu deckenden Profile der drei DNS bestätigt. Die in Kapitel 5.8 geführte Diskussion belegt, daß die Reynoldssche Schubspannung die Intensität der radialen Impulstransportvorgänge quantifiziert. Aus der Tatsache, daß die im Spektrum ausgezeichnete Frequenz ($30Hz$) einen großen Einfluß auf die Amplitude der Reynoldsschen Schubspannung in der freien Scherschicht ausübt, zeigt, daß die Manipulation diese Transportvorgänge anfacht. Durch Erhöhung des Impulsaustausches zwischen Rückströmgebiet und dem Kernbereich der Strömung führt die Manipulation der Zuströmung zu einer Verkürzung der Rezirkulationszone, ohne dabei die Dynamik der wiederanlegenden Strömung stark zu beeinflussen.

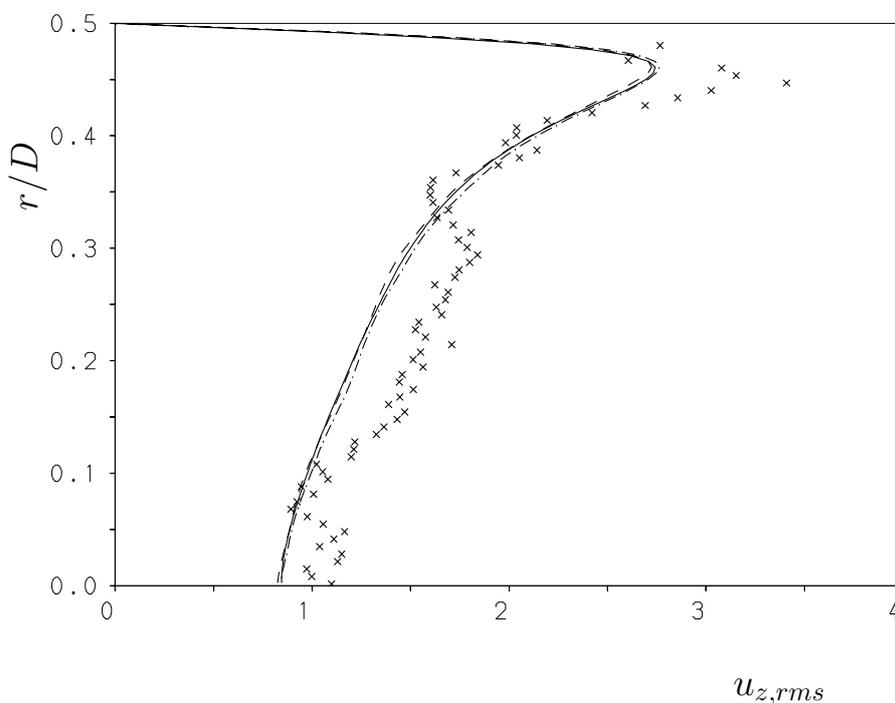


ABBILDUNG 6.12: Vergleich von Profilen der axialen rms -Geschwindigkeitsschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 0$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (—), DNS_3 : (---), DNS_4 : (-·-·-·).

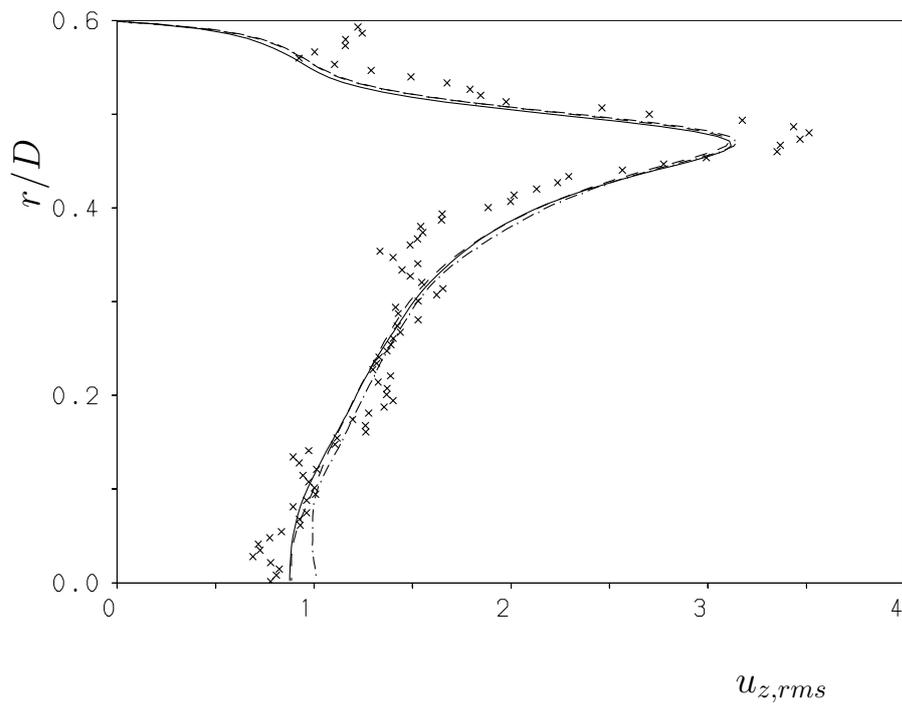


ABBILDUNG 6.13: Vergleich von Profilen der axialen *rms*-Geschwindigkeitsschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 1/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (×). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

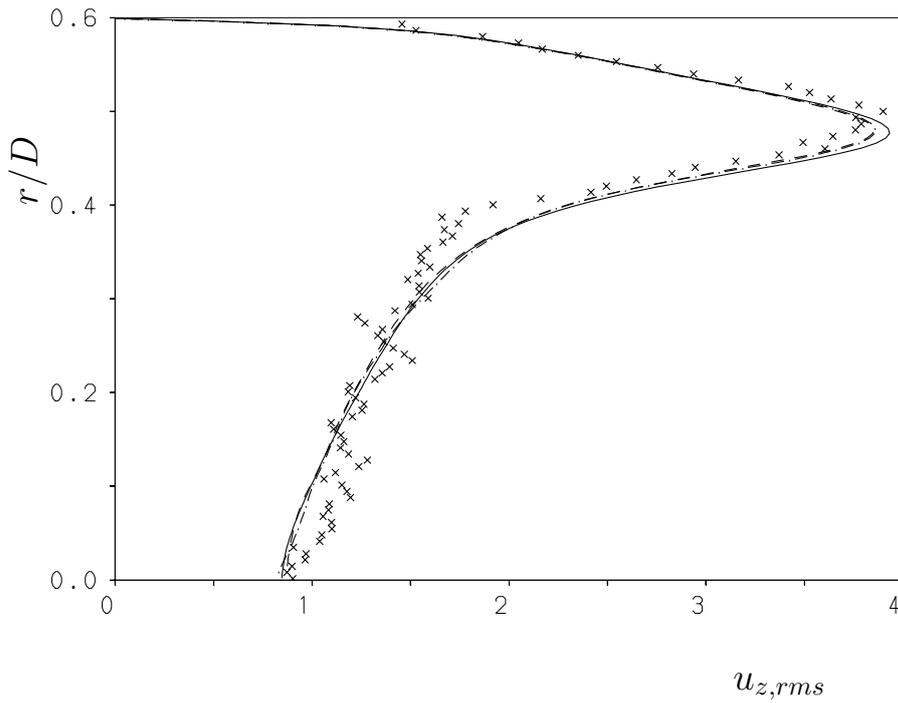


ABBILDUNG 6.14: Vergleich von Profilen der axialen rms -Geschwindigkeitsschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 2/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -) , DNS_4 : (- · - · - ·).

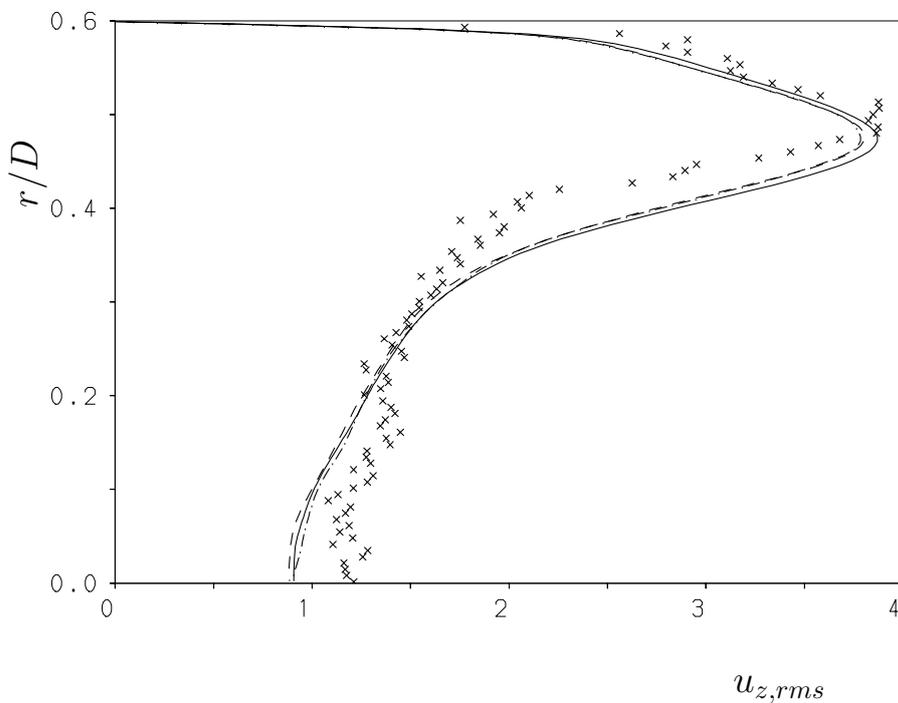


ABBILDUNG 6.15: Vergleich von Profilen der axialen rms -Geschwindigkeitsschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 1$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -) , DNS_4 : (- · - · - ·).

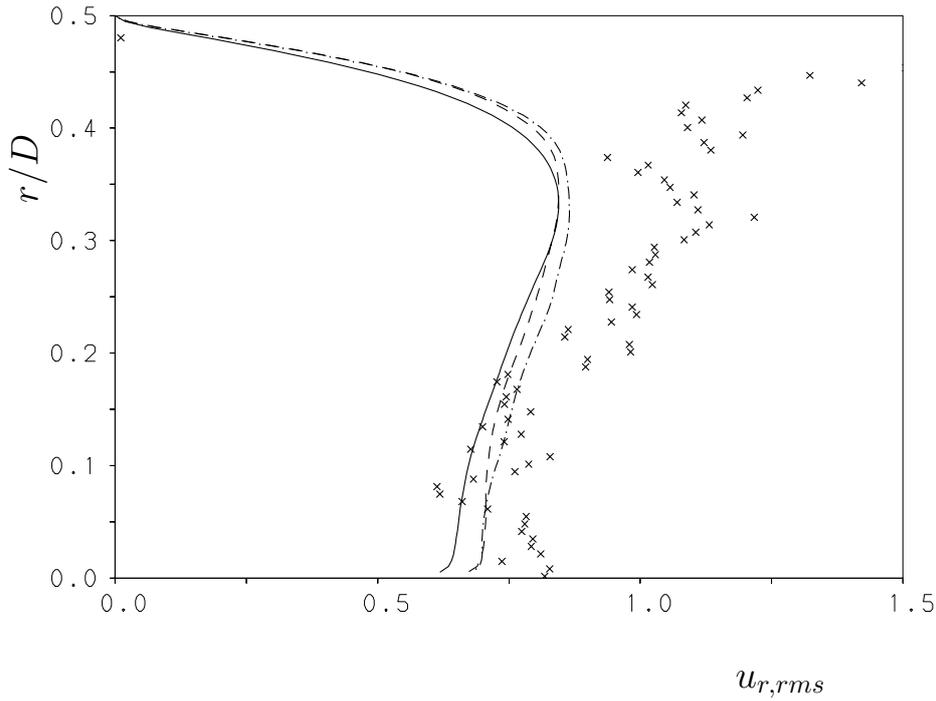


ABBILDUNG 6.16: Vergleich von Profilen der radialen *rms*-Geschwindigkeitsschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 0$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

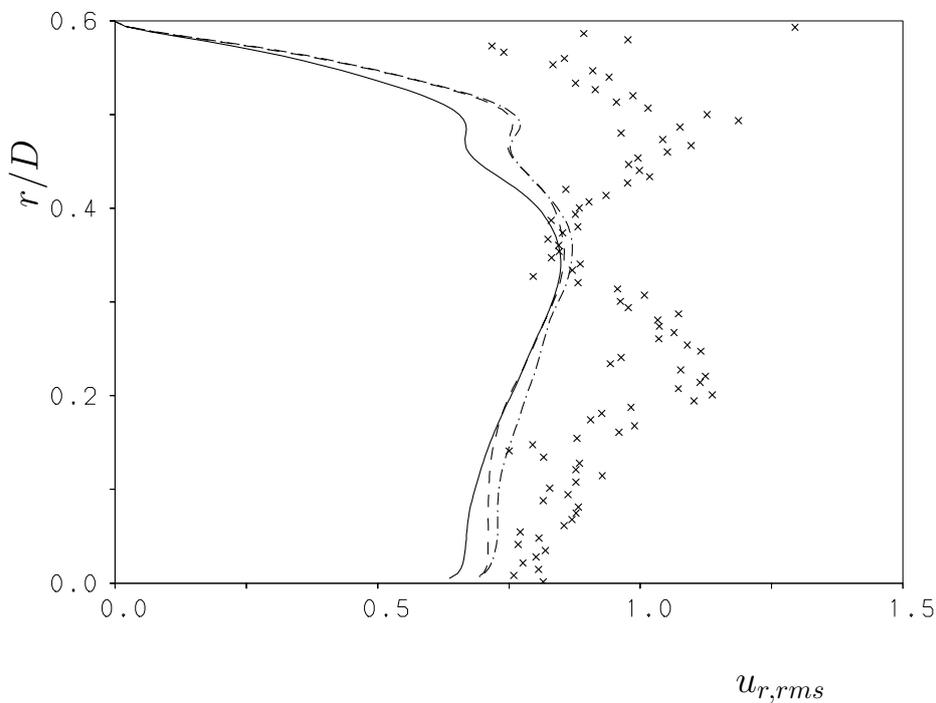


ABBILDUNG 6.17: Vergleich von Profilen der radialen *rms*-Geschwindigkeitsschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 1/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

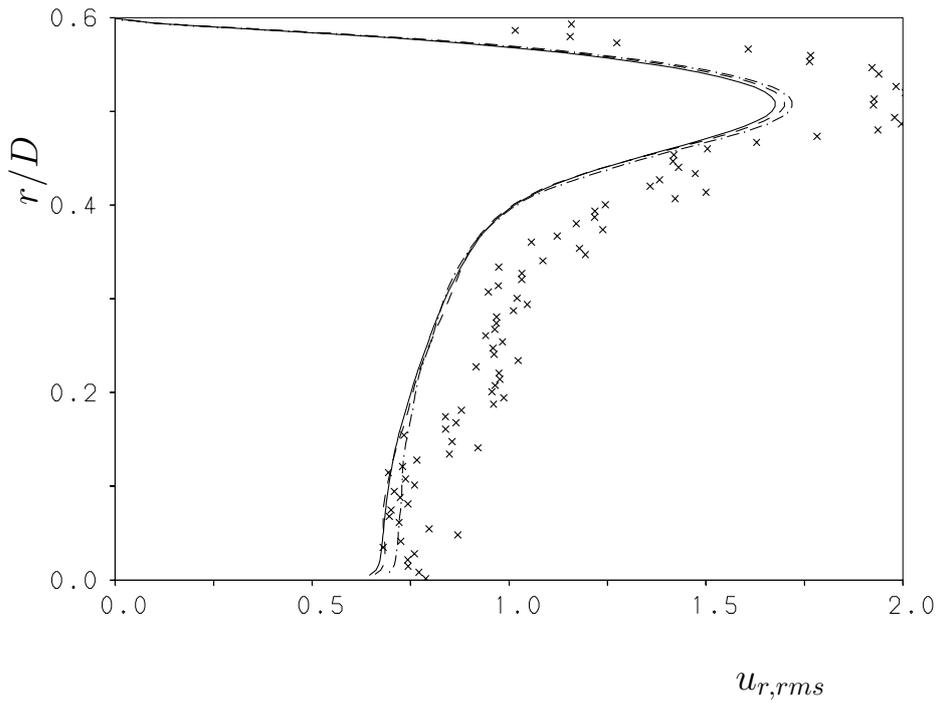


ABBILDUNG 6.18: Vergleich von Profilen der radialen rms -Geschwindigkeitsschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 2/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -) , DNS_4 : (- · - · - ·).

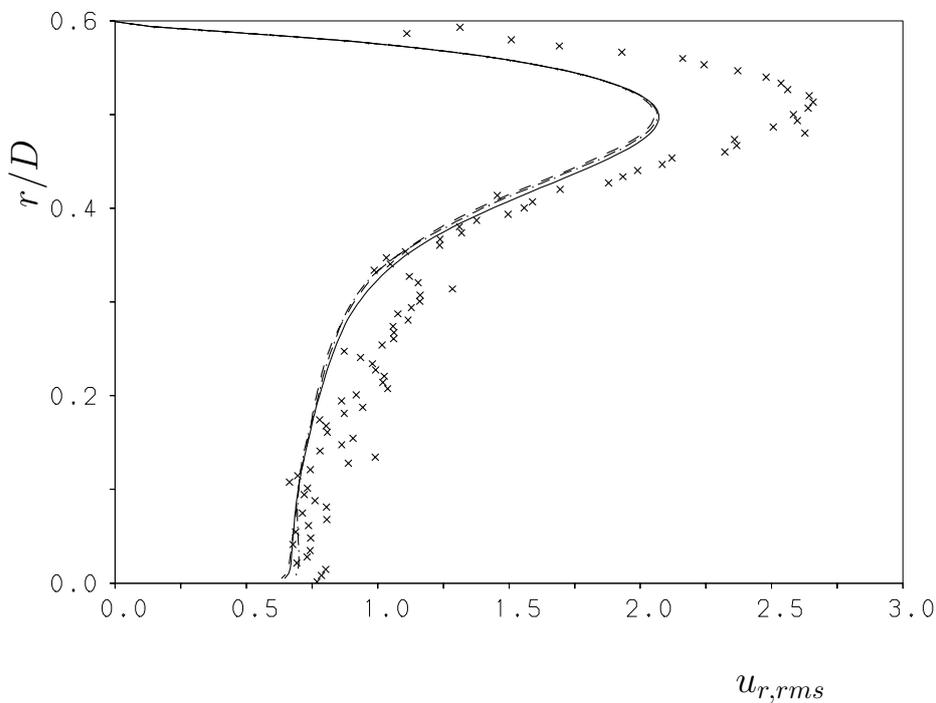


ABBILDUNG 6.19: Vergleich von Profilen der radialen rms -Geschwindigkeitsschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 1$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -) , DNS_4 : (- · - · - ·).

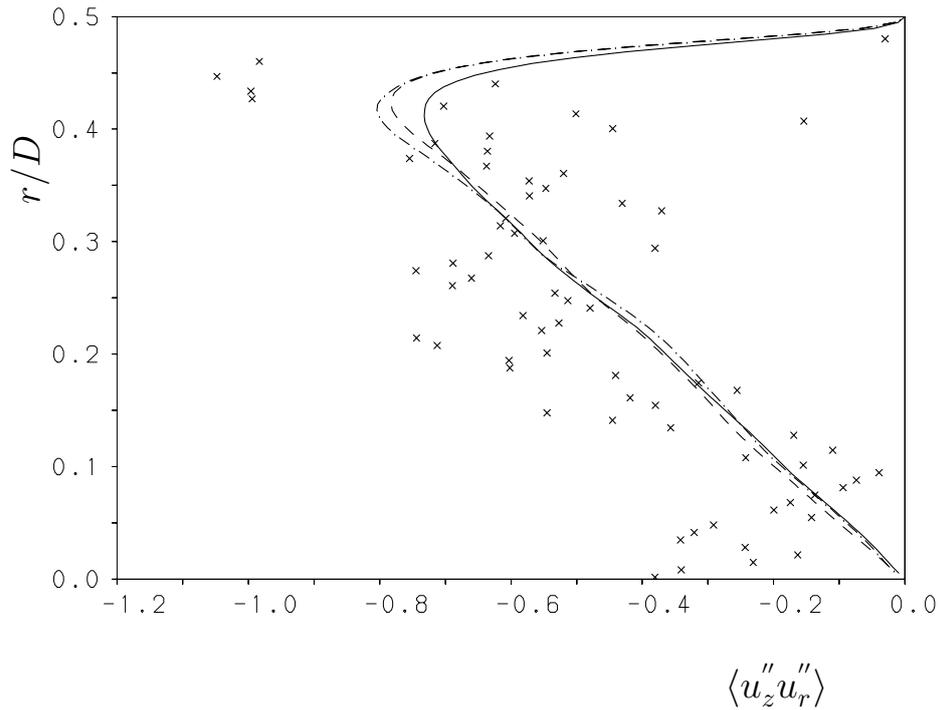


ABBILDUNG 6.20: Vergleich von Profilen der Reynoldsschen Schubspannung an der axialen Position $Z/Z_r = 0$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

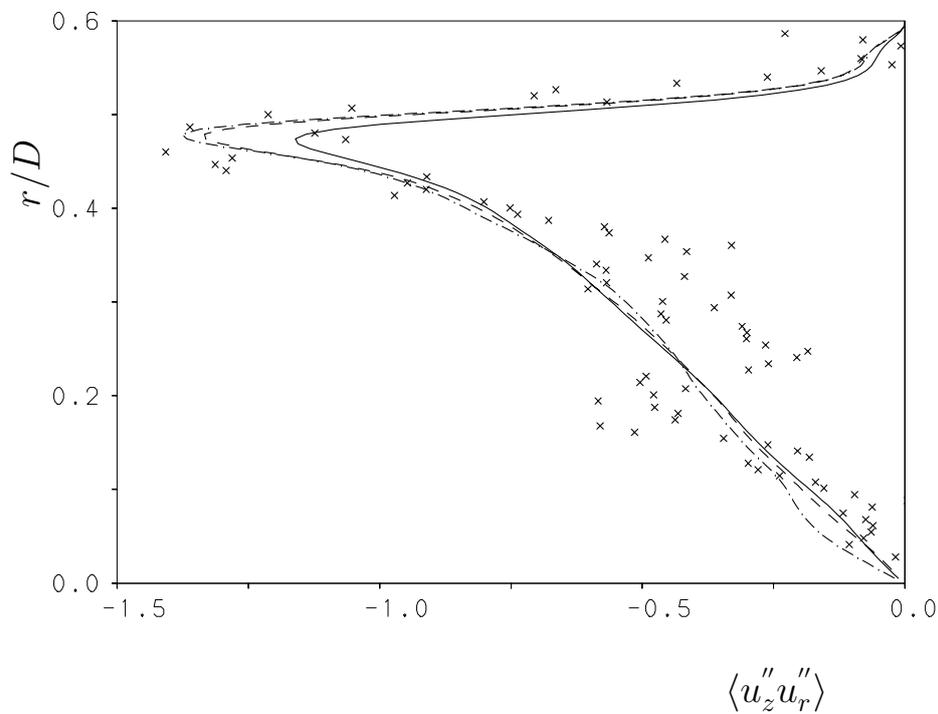


ABBILDUNG 6.21: Vergleich von Profilen der Reynoldsschen Schubspannung an der axialen Position $Z/Z_r = 1/3$. Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

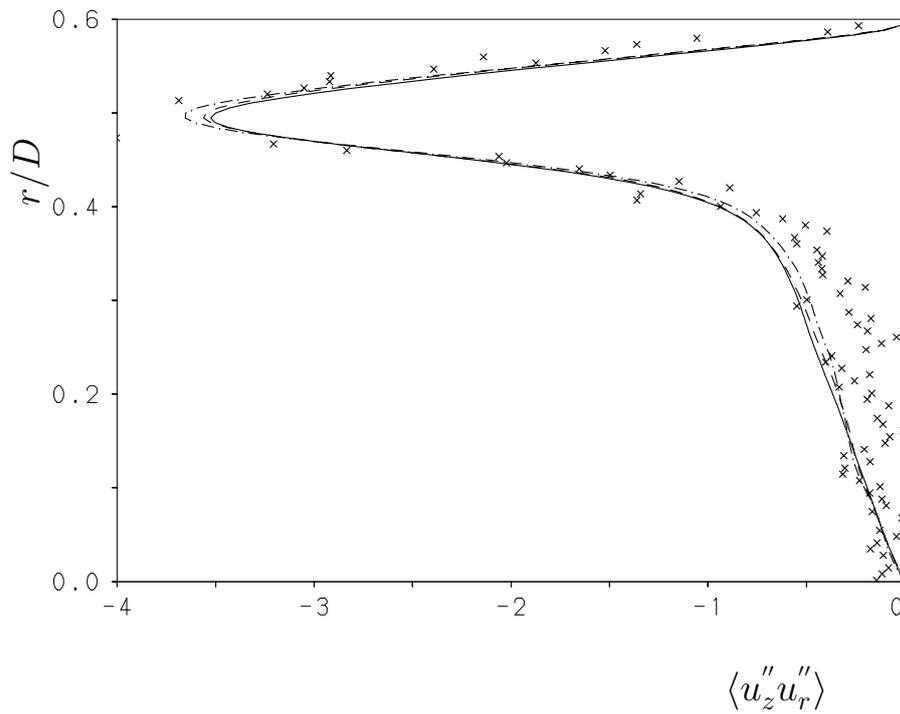


ABBILDUNG 6.22: Vergleich von Profilen der Reynoldsschen Schubspannung an der axialen Position $Z/Z_r = 2/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (—), DNS_3 : (---), DNS_4 : (-·-·-·).

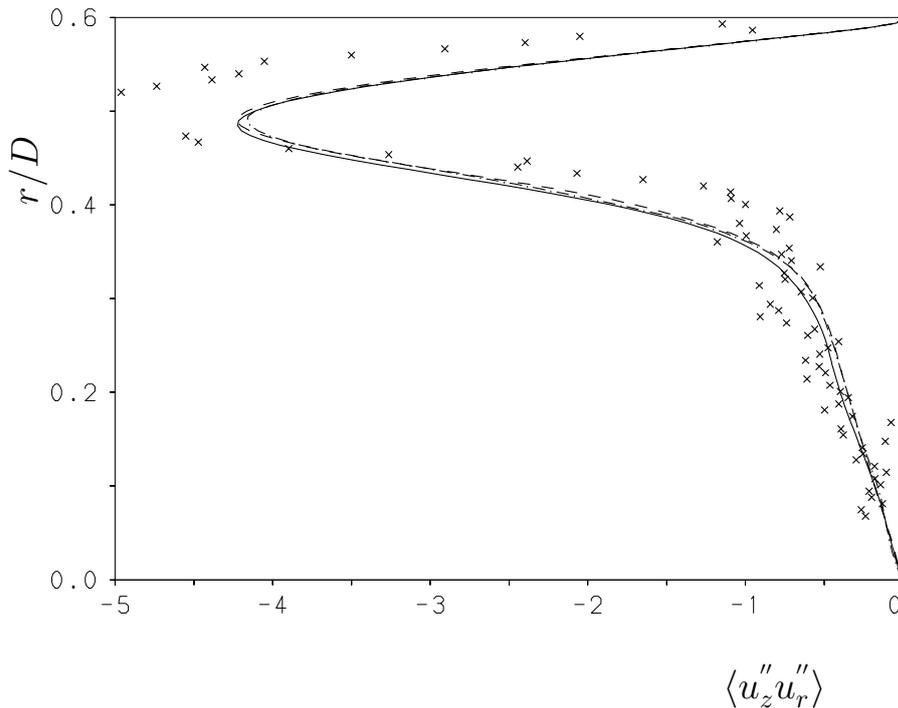


ABBILDUNG 6.23: Vergleich von Profilen der Reynoldsschen Schubspannung an der axialen Position $Z/Z_r = 1$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (—), DNS_3 : (---), DNS_4 : (-·-·-·).

6.4 Wirbelstärke

Laut Definition (vergl. Kapitel 4.6) mißt die mittlere Wirbelstärke in einfachen Scherströmungen die im Strömungsfeld vorherrschenden mittleren Scherraten.

In Abbildung 6.24 sind die Profile der Umfangskomponente des gemittelten Wirbelvektors an der axialen Position $Z/Z_r = 0$ dargestellt. Die Verläufe der Simulationen und die des Experiment stimmen gut überein. Dies gilt auch für die weiter stromab gelegenen Positionen $Z/Z_r = 1/3$, $2/3$ und 1 , deren Ergebnisse in den Abbildungen 6.25, 6.26 und 6.27 veranschaulicht werden. In der Ebene $Z/Z_r = 1$ zeigen die Simulationen DNS_3 und DNS_4 im Vergleich zur DNS_2 höhere Maximalwerte, woraus folgt, daß die Störfrequenz hier höhere mittlere Scherraten hervorruft. Dieser Effekt findet sich allerdings nicht in den *rms*-Geschwindigkeitsschwankungen und der Reynoldsspannung wieder, wie man das bei einfachen Scherströmungen erwarten würde. Dies zeigt indirekt wieder die Komplexität der Transportvorgänge in der wiederanliegenden freien Scherschicht an. Obwohl die Meßwerte (mit der üblichen Streubreite) auch an der Position $Z/Z_r = 1$ gut mit den Verläufen der Simulationen übereinstimmen, ist ihnen bei den geringeren Amplituden ein stärkeres Rauschen überlagert.

In der Ebene der Querschnittserweiterung schwanken die Werte der gemessenen *rms*-Wirbelstärkefluktuationen in Umfangsrichtung (Abb. 6.28) um einen Kurve, die qualitativ mit den Profilen der DNS übereinstimmt, aber im Kernbereich der Strömung ungefähr doppelt so große Absolutwerte aufweist. Weiter stromab (Abb. 6.29 bis 6.31) bleiben diese Unterschiede zwischen der Kernströmung der DNS und des Experiments erhalten. Da sich die einzelnen Simulationen dort untereinander kaum unterscheiden, sind die abweichenden Meßwerte offensichtlich nicht durch die Störfrequenz hervorgerufen worden.

In der abgelösten Scherschicht zeigen die DNS_2 bis DNS_4 mit zunehmender Amplitude a höhere Maximalwerte, die sich tendenziell denen des Experiments nähern. Für die DNS_4 ergibt sich damit ein Profil, dessen Maximalwert bei $r/D \approx 0.5$ relativ gut mit dem experimentellen Wert übereinstimmt. Ähnliches gilt auch an der Position $Z/Z_r = 1$ (Abb. 6.30), wobei hier die Meßwerte unterhalb denen der Simulationen liegen. Dagegen stimmen diese in Abbildung 6.31 wieder relativ gut mit den Profilen der drei DNS überein. Zusammengefasst zeigt der Vergleich der PIV-Messungen in den *rms*-Wirbelstärkefluktuationen in Umfangsrichtung eine qualitative Übereinstimmung mit den Verläufen der DNS.

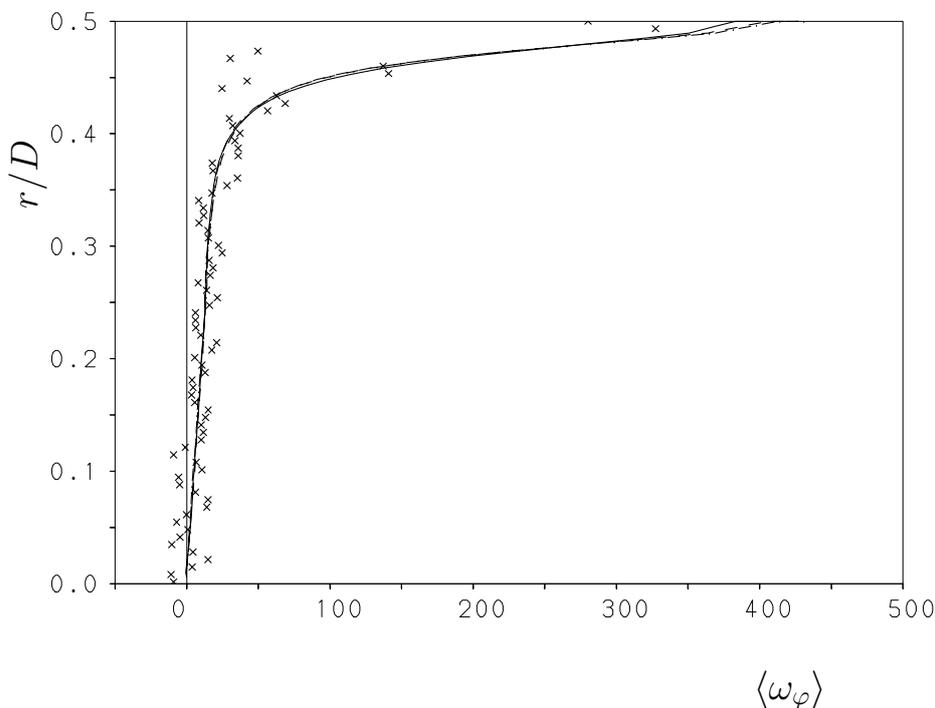


ABBILDUNG 6.24: Vergleich von Profilen der mittleren Wirbelstärke an der axialen Position $Z/Z_r = 0$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (—), DNS_3 : (---), DNS_4 : (-·-·-·).

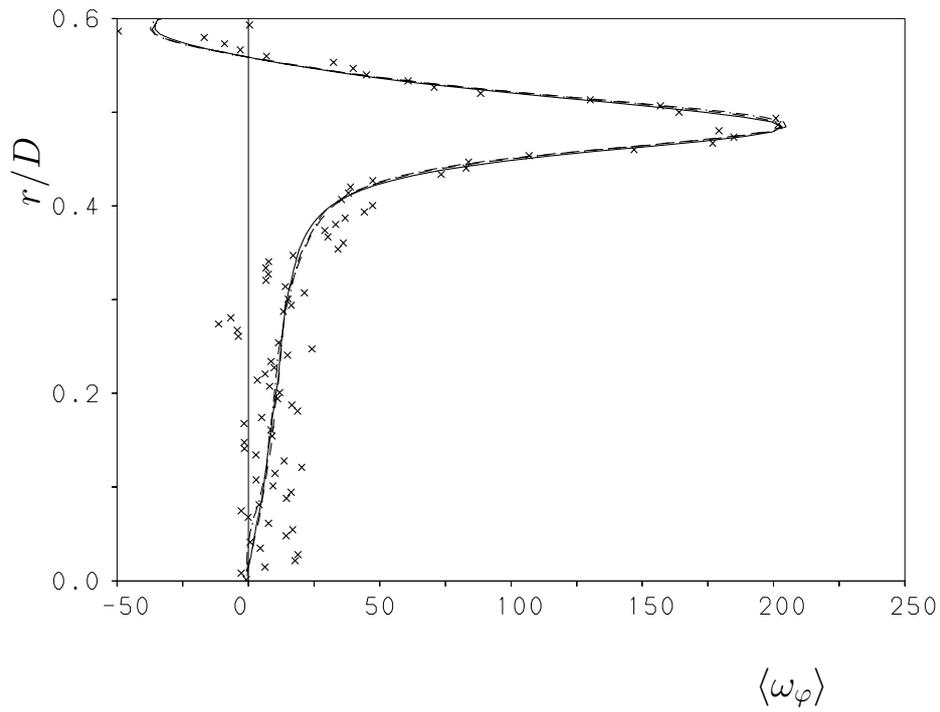


ABBILDUNG 6.25: Vergleich von Profilen der mittleren Wirbelstärke an der axialen Position $Z/Z_r = 1/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

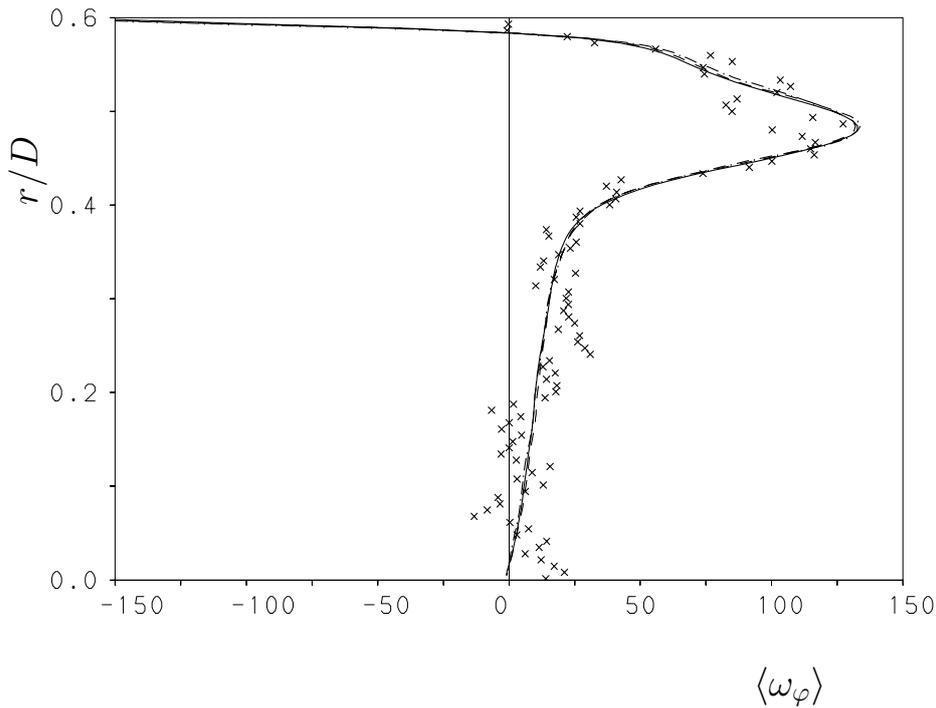


ABBILDUNG 6.26: Vergleich von Profilen der mittleren Wirbelstärkeprofile an der axialen Position $z/Z_r = 2/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

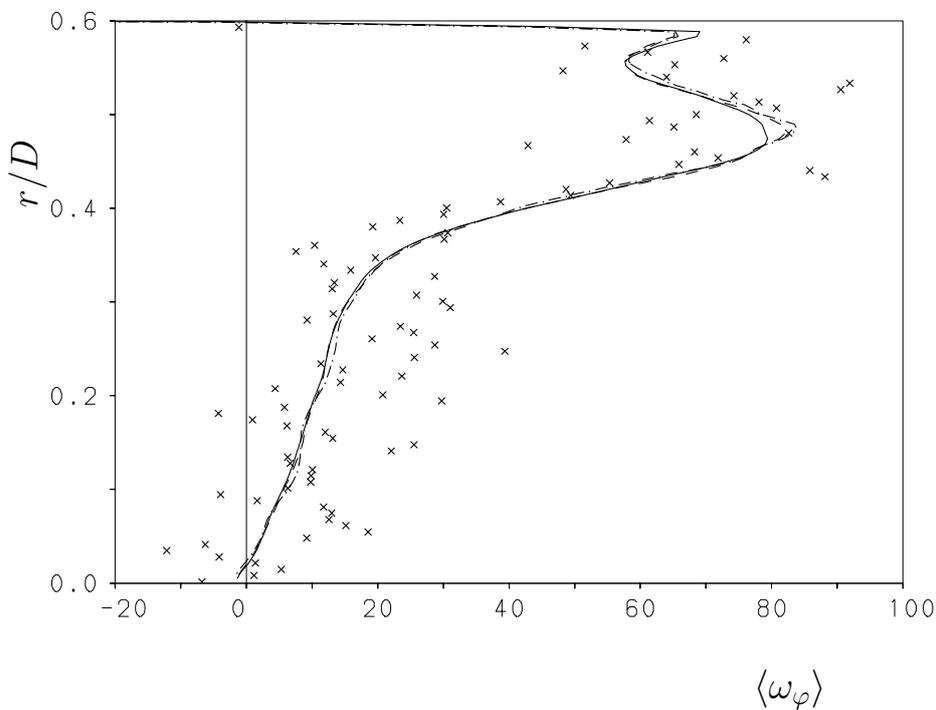


ABBILDUNG 6.27: Vergleich von Profilen der mittleren Wirbelstärkeprofile an der axialen Position $Z/Z_r = 1$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

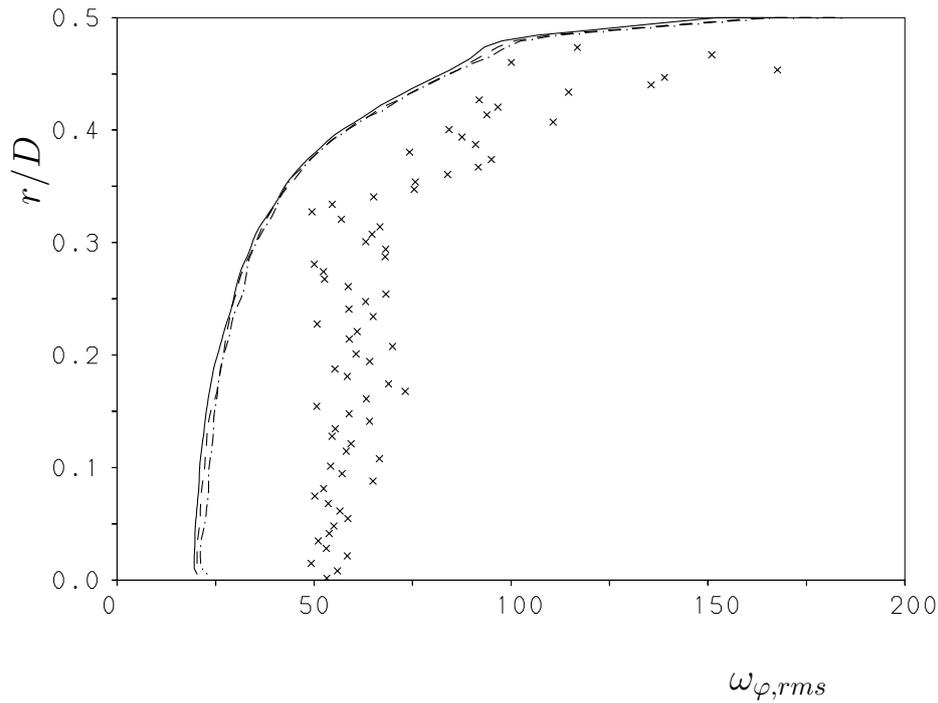


ABBILDUNG 6.28: Vergleich von Profilen der *rms*-Wirbelstärkeschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 0$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (×). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

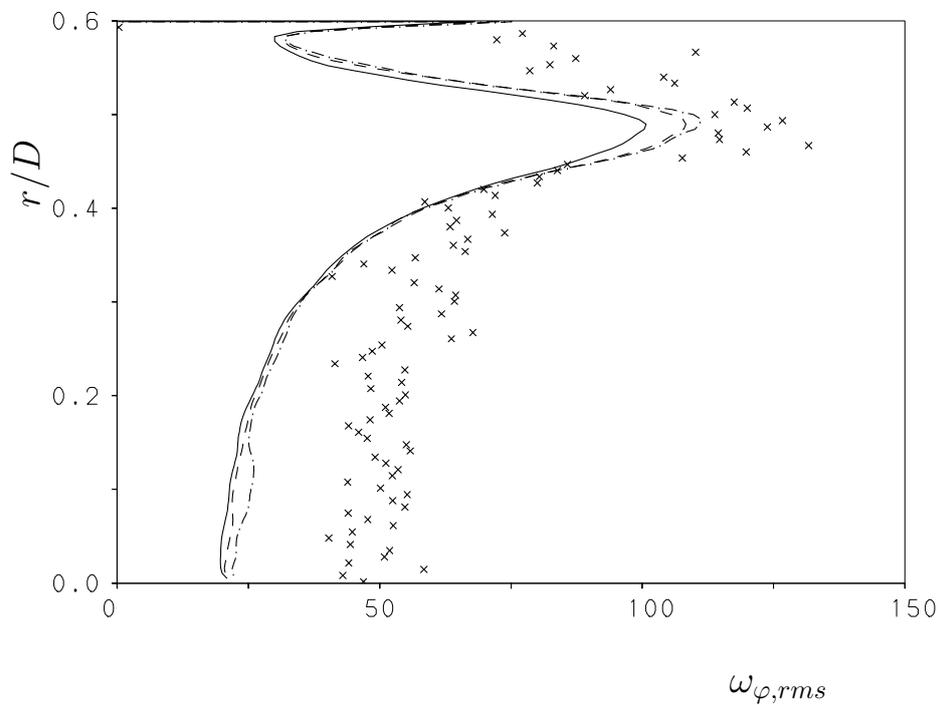


ABBILDUNG 6.29: Vergleich von Profilen der *rms*-Wirbelstärkeschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 1/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (×). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

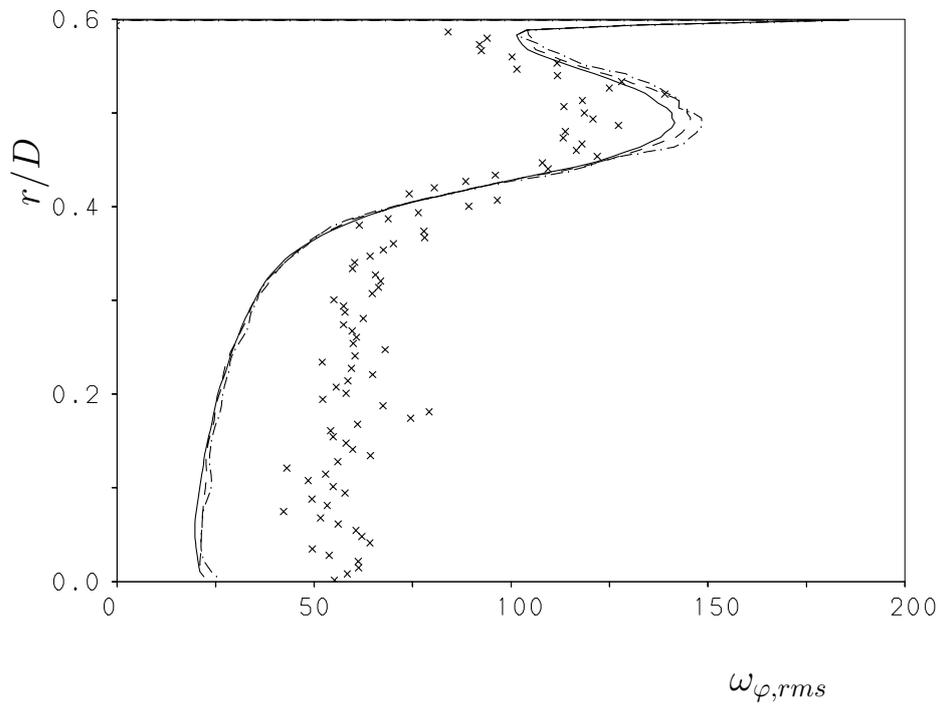


ABBILDUNG 6.30: Vergleich von Profilen der *rms*-Wirbelstärkeschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 2/3$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

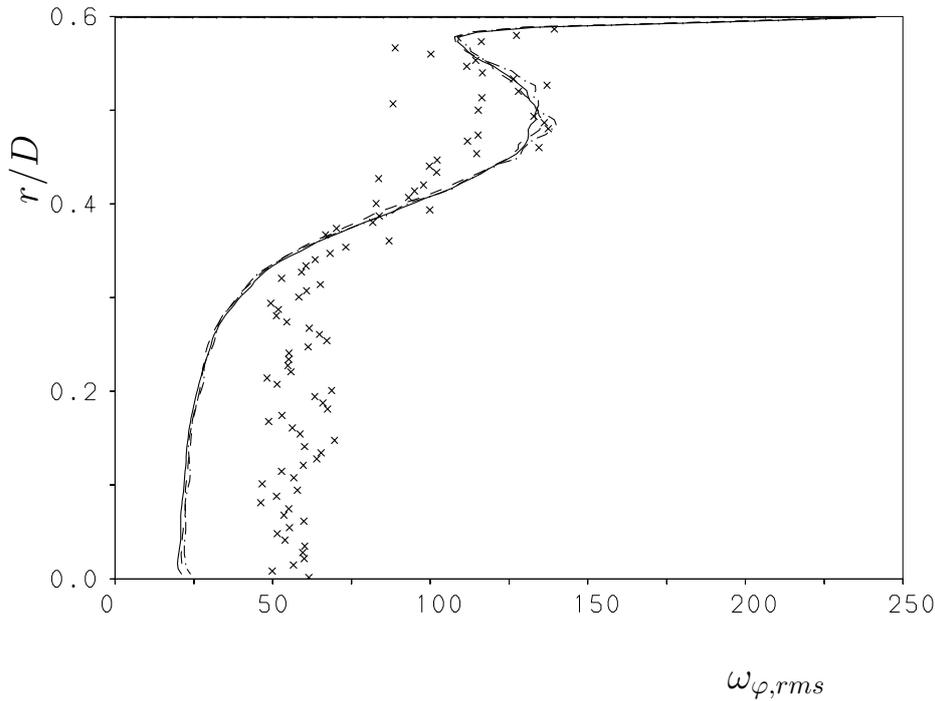


ABBILDUNG 6.31: Vergleich von Profilen der *rms*-Wirbelstärkeschwankungen an der axialen Position $Z/Z_r = 1$. PIV-Messungen Brouillette [9]: (\times). Linien: DNS_2 : (———), DNS_3 : (- - - -), DNS_4 : (- · - · - ·).

6.5 Schlußfolgerung

Der Vergleich zwischen PIV- und DNS-Daten hat zum Teil dramatische Diskrepanzen aufgezeigt, die sich weder aus Fehlern der Meßmethode noch aus einer harmonischen Störung der axialen Geschwindigkeitsschwankungen heraus erklären lassen. Das Experiment hat offenbar andere Mängel besessen, deren genaue Ursache aus der Arbeit von Brouillette [9] nicht hervorgeht. Auf alle Fälle zeigt die Manipulation der Zuströmung in der DNS, daß selbst starke Störungen mit zeitlicher wechselnder Amplitude von 75% der axialen *rms*-Geschwindigkeitsschwankungen, die in den Spektren bis zur mittleren Wiederanlegelinie bereits abgeklungen sind, im Ablösegebiet aber sichtbar werden, insgesamt betrachtet doch relativ wirkungslos sind, da sie von der turbulenten Schwankungsbewegung auf relativ kurzer Lauflänge eliminiert werden.

Andere, zuverlässige Experimente (etwa LDA-Messungen) werden dringend benötigt, um die Qualität der vorliegenden DNS überprüfen zu können.

7 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war eine detaillierte Analyse des turbulenten Strömungsgeschehens in der plötzlichen Rohrerweiterung. Hierfür wurde eine direkte numerische Simulationen (DNS_2) bei vollentwickelter Zuströmung durchgeführt. In zwei weiteren DNS (DNS_3 und DNS_4) wurde der Einfluß untersucht, den eine manipulierte Zuströmung auf die Größe des Rückströmgebiets ausübt. Aus der Literaturübersicht geht hervor, daß die Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung in den letzten Jahrzehnten Gegenstand zahlreicher experimenteller Arbeiten war, dagegen existiert keine numerische Untersuchung, in der das instationäre dreidimensionale Strömungsfeld in allen Details berechnet wird. Die Existenz vielfältiger Strömungsprobleme, wie Zuströmung, Ablösung, Rezirkulation und Wiederanlegen macht die betrachtete Strömung sowohl für die Technik als auch für die Turbulenzforschung besonders interessant. Die DNS-Daten der Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung (DNS_2) wurde anhand von Häufigkeitsverteilungen, Einpunkt-Korrelationsfunktionen, räumliche und zeitliche Zweipunkt-Korrelationsfunktionen, räumliche und zeitliche Leitungsdichtespektren, Bilanzen des Reynoldsschen Schubspannungstensors, einer Analyse des Energieflusses zwischen Grob- und Feinstruktur und momentaner Strömungsfelder ausgewertet und graphisch dargestellt. Darüberhinaus werden Einpunkt-Korrelationen der drei DNS mit denen aus PIV-Messungen von Brouillette [9] verglichen.

7.1 Numerische Methode

Das an den Fall der plötzlichen Rohrerweiterung angepasste Simulationsprogramm FLOWSI beruht auf einer Finite-Volumen Formulierung der Navier-Stokes Gleichungen. Durch eine exzellente Übereinstimmung zwischen Ergebnissen seiner DNS und denen mehrerer Experimente der turbulenten Rohrströmung demonstrierte F. Unger [67], daß sich das Finite-Volumen-Verfahren, unter der Voraussetzung einer ausreichenden Auflösung, gut für den Einsatz in direkten numerischen Simulationen eignet. Dieses auf zentralen Differenzen beruhende Verfahren ist räumlich und im wesentlichen auch zeitlich von 2. Ordnung genau. Durch das halbimplizite Zeitintegrationsverfahren werden die in Zylinderkoordinaten numerisch bedingten und aus physikalischer Sicht unnötig kleinen Zeitschritte vermieden. Hierfür werden sowohl konvektive als auch diffusive Terme in Umfangsrichtung implizit abgearbeitet, während die restlichen Terme mit einem expliziten Euler-Leapfrog-Verfahren in der Zeit voranschreiten. Die Kopplung des Druck- und Geschwindigkeitsfeldes wird durch einen Projektionsschritt gewährleistet, aus dem ein dreidimensionales Poisson-Problem für den Druck hervorgeht. Durch schnelle Fourier-Transformationen in der homogenen Umfangsrichtung kann dieses in 2D-Helmholtzprobleme überführt werden. Die daraus resultierenden irregulären Gleichungssysteme werden mit Hilfe

der Einflußmatrix-Technik und zyklischer Reduktionsalgorithmen direkt gelöst.

Die Erzeugung von Einströmrandbedingungen erfolgt in einer DNS der turbulenten Rohrströmung (DNS_1), die in punkto Geometrie, Gitter und Reynoldszahl mit der von F. Unger [67] durchgeführten Simulation übereinstimmt. Zu jedem Zeitpunkt werden die Geschwindigkeitsvektoren einer bestimmten Gitterebene der Rohrströmung auf die Einströmebene der Rohrerweiterung übertragen.

7.2 Zuströmung

Vergleicht man Ergebnisse der DNS_2 mit den LDA-Messungen von Westerweel et al. [73] (turbulente Rohrströmung) wird stromauf der Stufenkante eine hervorragende Übereinstimmung erzielt. Im Fall der DNS bei manipulierter Zuströmung geben die Leistungsdichtespektren eine ausgezeichnete Frequenz wieder, die mit der von Brouillette [9] gemessenen ebenfalls gut übereinstimmt.

Charakteristisch für die vollentwickelte Zuströmung ist einerseits die von der Rohrmitte zur Wand kontinuierlich zunehmende mittlere Scherrate $\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r}$, mit der ein Ansteigen der Energieproduktion in der Bilanz der axialen Geschwindigkeitsschwankung verbunden ist und andererseits der dämpfende Einfluß der Wand, der dazu führt, daß der Produktionssterm dieser Bilanz in der Übergangsschicht ein Maximum aufweist und dann in der viskosen Unterschicht abklingt. Die über die Längsgeschwindigkeitskomponente erzeugte Energie wird über den Druck-Scherkorrelationsterm an die anderen beiden Geschwindigkeitskomponenten abgegeben. Die Strömung in der Wandgrenzschicht ist somit auch durch maximale Turbulenz-Intensitäten gekennzeichnet.

Bei geringen Scherraten setzt im Kernbereich der Strömung ein Transportvorgang ein, in dem Fluid mit hohem Axialimpuls zur Wand hin und mit niedrigem in Richtung Rohrmitte bewegt wird. Mit diesem Prozeß ist ein lineares Anwachsen der Reynoldsschen Schubspannung verbunden. Mit zunehmender Annäherung an die Wand ist die Schwankungsbewegung einer starken Dämpfung ausgesetzt, wodurch die Turbulenz-Intensitäten und die Reynoldssche Schubspannung, nach durchlaufen eines Maximums in Wandnähe abklingen. Am stärksten wirkt sich diese Dämpfung in der wandnormalen Geschwindigkeitsfluktuation aus. Bei nahezu verschwindenden *rms*-Werten in der viskosen Unterschicht entstehen so die hohen Flachheitsgrade der Radialkomponente. Mit Hilfe von Zweipunktkorrelationen konnte gezeigt werden, daß dieser schräg zur Rohrachse verlaufende Transportvorgang in Wandnähe die sogenannten *sweeps* und *ejections* hervorbringt, zwischen denen sich in axialer Richtung ausgedehnte fluktuierende Scherschichten ausbilden. Diese werden in Höhenliniendarstellungen von Zweipunktkorrelationen und momentanen Strömungsfeldern eindrucksvoll veranschaulicht.

Durch Filterung der DNS-Daten konnte der von Härtel [27] beobachtete Energierückfluß von der Feinstruktur zur Grobstruktur reproduziert werden. Ferner wird die Skalen-Ähnlichkeit zwischen Elementen des Feinstrukturspannungstensors und des Reynoldsschen Spannungstensors hervorgehoben und dokumentiert.

7.3 Abgelöste Strömung

Aus Kontinuitätsgründen wird die Strömung im Kernbereich stromab der Querschnittserweiterung verzögert. Ferner entwickelt sich eine mittlere Radialgeschwindigkeit, über die mittlerer Impuls zwischen Rückströmgebiet und Kernströmung ausgetauscht wird. Da sich die mittleren Scherraten im Kernbereich der Strömung kaum verändern, sind hier auch sämtliche Schlußfolgerungen gültig, die für den Kernbereich der Zuströmung gemacht wurden.

Auch in der freien Scherschicht werden stromab der Stufenkante die wandparallelen in Längsrichtung stark ausgedehnten Strukturen der axialen Geschwindigkeitsfluktuation beobachtet. Durch den Wegfall des Wandeinflusses können sich die Schwankungsbewegungen in allen Richtungen frei ausbilden, wodurch die Turbulenz-Intensitäten mit zunehmender Entfernung von der Stufenkante stark angefacht werden. Wie die Bilanzgleichungen des Reynoldsschen Spannungstensors zeigen, wird diese Energie wie in vollentwickelter Strömung hauptsächlich über den Produktionsterm P_{zz} erzeugt und über den Druck-Scherkorrelationsterm an die anderen beiden Komponenten abgegeben. Den wesentlich höheren Turbulenz-Intensitäten entsprechend nimmt der Produktionsterm in der freien Scherschicht allerdings viel höhere Maximalwerte an. Die Tatsache, daß hier auch die Transportterme Konvektion und turbulente Diffusion an Bedeutung gewinnen, spiegelt den Impulsaustausch mit dem Rückströmgebiet wider. In den Zweipunkt-Korrelationen führt dieser starke Austauschvorgang zu einem in axialer Richtung stark kontrahierten Einflußbereich der radialen Geschwindigkeitsfluktuation, während die axiale Geschwindigkeitskomponente wie in vollentwickelter Strömung in Längsrichtung stark ausdehnte Strukturen aufweist. Eng verbunden mit diesem Impulsaustausch ist ein starker Anstieg in der Reynoldsschen Schubspannung, der sich im Fall der DNS mit manipulierter Einströmung deutlich verstärkt.

Bei einem insgesamt angefachten Energiefluß von der Grobstruktur zur Feinstruktur wird in der freien Scherschicht ebenfalls ein Energierückfluß von der Fein- zur Grobstruktur erkennbar.

7.4 Rezirkulierende Strömung

Im Gegensatz zur Strömung durch die plötzliche Kanalerweiterung wird in der achsensymmetrischen Geometrie keine Sekundärrezirkulation in der mittleren Längsgeschwindigkeit beob-

achtet. Daß diese im Momentanfeld zeitweise existiert, zeigen die im Bereich der Stufenecke positiven Werte der axialen Schiefekomponente. Ausgehend von der Querschnittserweiterung erstreckt sich das Rückströmgebiet über 10.2 Stufenhöhen. Dieser Wert weicht von der experimentell ermittelten Wiederanlegelänge von 8.4 Stufenhöhen (Brouillette [9]) deutlich ab. Die Tatsache, daß diese zum Teil auf eine aus dem Gebläse stammende Frequenz zurückzuführen ist, wird mit zwei DNS bei manipulierter Zuströmung nachgewiesen. Hierbei wurde der Axialgeschwindigkeit in der Einströmebene eine dem Experiment entsprechende Frequenz aufgeprägt, die zu einer deutlichen Reduzierung der Wiederanlegelänge (9.4 Stufenhöhen) führt.

Anhand von zeitlichen Leistungsdichtespektren konnte ferner nachgewiesen werden, daß die momentane Ausdehnung des Rückströmgebiets stochastische Schwankungen um die mittlere Wiederanlegelinie ausführt. Hiermit wurde ein weiterer Unterschied zur Strömung durch die ebene Querschnittserweiterung dokumentiert, in der dieser Bewegung eine bestimmte Frequenz zugeordnet werden kann.

7.5 Wiederanlegende Strömung

Der Wiederanlegevorgang ist einerseits durch hohe Turbulenz-Intensitäten in der Scherschicht und andererseits durch den *splating effect* gekennzeichnet, bei dem Fluid mit hohem Radialimpuls auf die Wand auftrifft.

Mit einem im Vergleich zur vollentwickelten Strömung auf mehr als das 5-fache angestiegenen Wert, wird in der Bilanz der axialen Geschwindigkeitsfluktuation Energie produziert und über den Druck-Scherkorrelationsterm an die anderen beiden Komponenten abgegeben. Aus Sicht der statistischen Turbulenzmodellierung ist hier besonders das vermehrte Auftreten von Nulldurchgängen in den Termen der turbulenten Diffusion und Druck-Scherkorrelation bedeutsam. In einem kleinen wandnahen Bereich werden negative Produktionsraten in der Bilanz der axialen Geschwindigkeitskomponente und der turbulenten kinetischen Energie beobachtet, die auf die dort herrschenden mittleren Scherraten zurückzuführen sind. In der Nähe der Wand zeigen die Dissipationsraten der axialen und azimuthalen Geschwindigkeitskomponenten übereinstimmend maximale Werte von ≈ -300 . Die Ähnlichkeit dieser beiden Geschwindigkeitskomponenten zeigt sich auch in den Leistungsdichtespektren und Momentanfeldern. Hieraus folgt, daß bei dem durch eine verschwindende mittlere Axialgeschwindigkeit definierten Wiederanlegen, Radialimpuls mehr oder weniger gleichmäßig auf die wandparallelen Geschwindigkeitskomponenten verteilt wird, was die Entstehung einer achsensymmetrischen Strömung zur Folge hat.

Wie die Zweipunktkorrelationen zeigen, ist der Einfluß der Druckfluktuation auf das Geschwindigkeitsfeld im Wiederanlegebereich besonders bedeutsam. Die aus der axialen Geschwindigkeitsfluktuation und der Druckfluktuation gebildete Korrelation zeigt in Umfangsrichtung aus-

gedehnte Einflußbereiche, mit denen die Schwierigkeiten bei der Bildung einer stabilen Statistik erklärt werden. Dieser starke Einfluß der Druckfluktuationen beim *splating effect* wird auch durch die hohen Amplituden der Druck-Scherkorrelation in der Bilanz der radialen Geschwindigkeitsfluktuation verdeutlicht.

Die in vollentwickelter Strömung beobachtete Skalen-Ähnlichkeit wird in einem Vergleich der Elemente des Feinstrukturspannungstensors und des Reynoldsschen Spannungstensors auch für die wiederanlegende Strömung dokumentiert. Dadurch wird gezeigt, daß sich das von Goutorbe et al. [25] für anisotrope Feinstrukturspannungen entwickelte Modell auch auf komplexere Strömungsformen anwenden läßt

Die Analyse des Energieflusses zwischen Grob- und Feinstruktur gibt ferner stark anisotrope Effekte wieder, die durch die in der Grobstruktursimulation üblicherweise verwendeten Wirbelviskositätsansätze nicht vorhergesagt werden können.

A Anhang

A.1 Laminare Strömung

Die ersten Tests des Rechenprogramms zur Simulation der Strömung durch die plötzliche Rohrerweiterung wurden im laminaren Geschwindigkeitsbereich für die Reynoldszahlen $Re_m = u_m R / \nu = (20, 40, 60, 80, 100)$ durchgeführt. Dem Experiment von Iribarne et al. [29] entsprechend wurde ein Erweiterungsverhältnis von $ER = 2.0$ gewählt.

Das hierfür benötigte laminare Einströmprofil kann aus der folgenden Kräftebilanz am Volumenelement (zunächst dimensionsbehaftet) analytisch bestimmt werden:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \nu \frac{du_z}{dr} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz}. \quad (\text{A.1})$$

Mit den Randbedingungen $\frac{du_z}{dr}|_{r=0} = 0$ und $u_z|_{r=R} = 0$ folgt der gesuchte laminare Geschwindigkeitsverlauf nach zweimaliger Integration in r -Richtung:

$$u_z = \frac{1}{4} \frac{1}{\nu \rho} \frac{dp}{dz} (r^2 - R^2). \quad (\text{A.2})$$

Im Gegensatz zum turbulenten Geschwindigkeitsbereich wurden die Durchflußgeschwindigkeit u_m , die in Gleichung 4.3 definiert wurde und der Radius des Einströmrohres R als Bezugsgrößen für Geschwindigkeiten und räumliche Abmessungen herangezogen. Hieraus folgt die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung:

$$u_z = 2(1 - r^2) \quad (\text{A.3})$$

und der ebenfalls dimensionslosen Druckgradient:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{8}{Re_m} \quad (\text{A.4})$$

In Abbildung A.1 werden die für die 6 Reynoldszahlen numerisch ermittelten Wiederanlegelängen denen des Experiments von Iribarne et al. [29] gegenübergestellt. Zusätzlich wurde auch die Wiederanlegelänge (10.2 Stufenhöhen) eingetragen, die mit der DNS für die turbulente Strömung $Re_m = 5300$ berechnet wurde. Sowohl im laminaren als auch im turbulenten Reynoldszahlbereich zeigt dieser Vergleich eine gute Übereinstimmung.

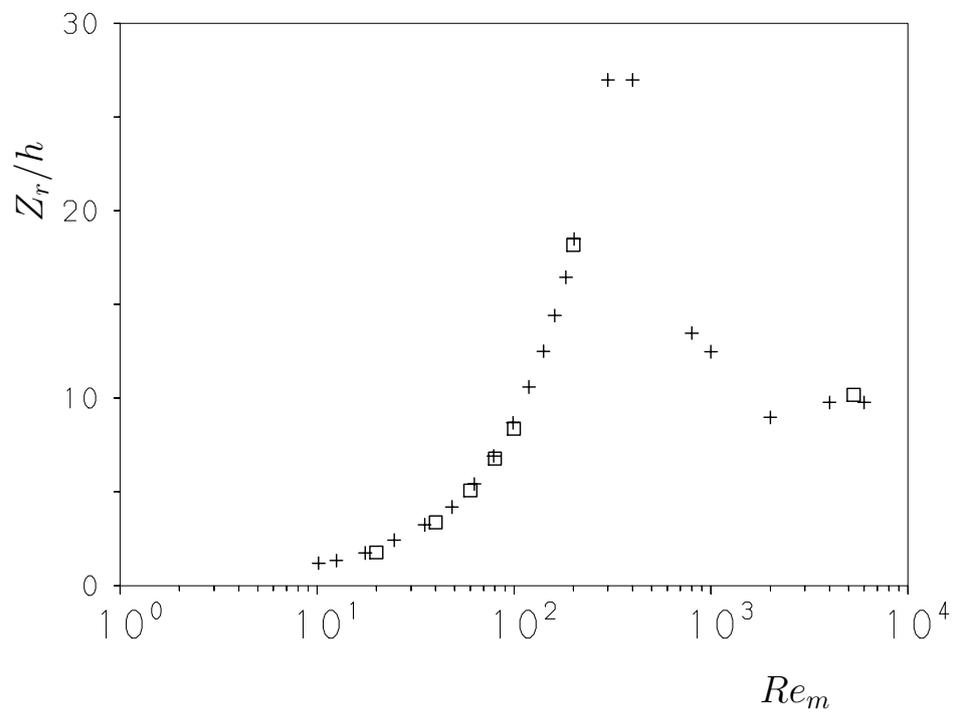


ABBILDUNG A.1: Vergleich der Wiederanlegelängen Z_r/h . Experiment Iribarne et al. [29]: (\times). Numerische Simulation der vorliegenden Arbeit: (\square).

8 Literatur

- [1] Abbott, D.E., Kline, S.J.: “Experimental investigation of subsonic turbulent flow over single and double backward facing steps.”, *J. of Basic Eng.*, pp. 317-325, 1962.
- [2] Adams, E.W., Johnston, J.P.: “Effect of the separating shear layer on the reattachment flow structure.”, *Experiments in Fluids*, 6 , pp. 493-499, 1988.
- [3] Akselvoll, K., Moin, P.: “Application of the dynamic localization model to large eddy simulation of turbulent flow over a backward facing step.”, *Engineering Applications of Large Eddy Simulations, FED-Vol 162*, pp. 1-6, 1993.
- [4] Armaly, B., Durst, F., Schönung, B.: “Measurements and predictions of flow downstream of a twodimensional single backward-facing step.”, *Rept. SFB 80/ET/172, Univ. Karlsruhe*, 1980.
- [5] Arnal, M., Friedrich, R.: “Large-eddy simulation of a turbulent flow with separation.”, *Turbulent Shear Flows 8, Springer-Verlag, Heidelberg, Deutschland*, pp. 169-187, 1993.
- [6] Back, L.H., Roschke, E.J.: “Shear-layer flow regions and wave instabilities and reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion.”, *J. Biomechanics*, 9, pp. 677-681, 1972.
- [7] Batchelor, G.K.: “The theory of homogeneous turbulence.”, *Cambridge University Press*, 1953.
- [8] Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N.: “Transport phenomena.”, *New York: Wiley*, 1960.
- [9] Brouillette, J.,N.: “Incompressible turbulent flow through a sudden axisymmetric expansion using particle image velocimetry.”, *Master thesis, Univ. of Illinois, Urbana-Champaign, Illinois, USA*, 1994.
- [10] Chapman, D.R., Kühn, D.M., Schönung, B.: “Measurements and predictions of flow downstream of a twodimensional single backward-facing step.”, *NACA Report 1256*, 1958.
- [11] Chaturverdi, M.C.: “Flow characteristics of axisymmetric expansion.”, *J. of the Hydraulics Division*, May 1963, pp. 61-92, 1963.
- [12] Chorin, A.J.: “Numerical solution of the Navier-Stokes equations.”, *Mathematics of Computations*, 22, pp. 745-762, 1968.

- [13] Devenport, W.J., Sutton, E.P.: "An experimental study of two flows through an axisymmetric sudden expansion.", *Experiments in Fluids*, 14, pp. 423-432, 1993.
- [14] Drewry, J.E.: "Fluid dynamic characterization of sudden-expansion ramjet combustor flow-fields.", *AIAA J.*, 16, pp. 313-319, 1978.
- [15] Durst, F., Schmitt, F.: "Experimental study of high reynolds number backward-facing step flow.", *Proc. 5th Symp. on Turbulent Shear Flows*, August 7.-9., Cornell University, Ithaca, NY, 1985.
- [16] Eaton, J.K., Johnston, J.P.: "A review of research on subsonic turbulent flow reattachment.", *AIAA-80-1438*, *AIAA 13th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, Snowmass, Colorado, 1980.
- [17] Eggels, J.G.M.: "Direct and large eddy simulation of turbulent flow in a cylindrical geometry.", *Dissertation*, Delft University Press, Netherlands, 1994.
- [18] Eggels, J.G.M., Unger, F., Weiss, M.H., Westerweel, J., Adrian, R.J., Friedrich, R., Nieuwstadt, F.T.M.: "Fully developed turbulent pipe flow: A comparison between direct numerical simulation and experiment.", *J. Fluid Mech.*, 268, pp. 175-209, 1994.
- [19] Feuerstein, I.A., Pike, G.K., Round, G.F.: "Flow in an abrupt expansion as a model for biological mass transfer experiments.", *J. Biomechanics*, 8, pp. 41-51, 1975.
- [20] Founti, M.A.: "Flows in a model furnace and heat exchanger.", *Ph.D. thesis*, Univ. of London, 1983.
- [21] Freeman, A.R.: "Laser anemometer measurements in the recirculating region downstream of a sudden pipe expansion.", *Proceedings of the LDA-Symposium*, Copenhagen, pp. 704-709, 1975.
- [22] Gould, R.D., Stevenson, W.H., Thompson, H.D.: "Investigation of turbulent transport in an axisymmetric sudden expansion.", *AIAA J.*, 28, pp. 276-283, 1990.
- [23] Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., Cabot, W.H.: "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model.", *Phys. Fluids A*, 3, pp. 1760-1765, 1991.
- [24] Germano, M.: "Turbulence: The filtering approach.", *J. Fluid Mech.*, 238, pp. 325-336, 1992.
- [25] Goutorbe T., Laurence, D.: "Modelling anisotropy and backscatter effects in the subgrid scale stress tensor", *AGARD Conference Proceedings of the 74th Fluid Dynamics Symposium on Application of direct and large eddy simulation to transition and turbulence*, April 1994, Chania, Crete, Greece, pp. 16.1-16.7, 1994.

- [26] Grötzbach, G.: "Spatial resolution requirements for direct numerical simulation of the Rayleigh-Bénard convection.", *J. Comp. Phys.*, 49, pp. 241-264, 1983.
- [27] Härtel, C.: "Analyse und Modellierung der Feinstruktur im wandnahen Bereich turbulenter Scherströmungen.", Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1994.
- [28] Hinze, J.O.: "Turbulence.", New York: McGraw-Hill, 1975.
- [29] Iribarne, A., Frantisak, F., Hummel, R.L., Smith, J.W.: "An experimental study of instabilities and other flow properties of a laminar pipe jet.", *AIChE J.*, 18, pp. 689-698, 1972.
- [30] Jovic, S., Driver, D.M.: "Backward-facing step measurements at low Reynolds number, $Re_h = 5000$.", NASA Technical Memorandum, No. 108807, 1994.
- [31] Jovic, S., Driver, D.M.: "Reynolds number effects on the skin friction in separated flows behind a backward facing step", accepted for publication in *Experiments in Fluids*, 1995.
- [32] Karino, T., Goldsmith, H.L.: "Flow behaviour of blood cells and rigid spheres in an annular vortex", *Phil. Trans. of the Royal Soc. of London B*, 279, pp. 413-445, 1977.
- [33] Khezzar, L., Whitelaw, J.H., Yianneskis, M.: "An experimental study of round sudden-expansion flows.", *Proceedings of TSF 5*, 1985, pp. 5.25-5.30, 1985.
- [34] Kim, J., Moin, P., Moser, R.: "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number.", *J. Fluid Mech.*, 177, pp. 133-166, 1987.
- [35] Latornell, D.J., Pollard, A.: "Some observation on the evolution of shear layer instabilities in laminar flow over a backward-facing step.", *Phys. Fluids Vol.29*, 9, pp. 2828-2835, 1986.
- [36] Laufer, J.: "The structure of turbulence in fully-developed pipe flow.", NACA Rep. 1174, 1954.
- [37] Le, H., Moin, P., Kim, J.: "Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step.", *Proc. 9th Symp. on Turbulent Shear Flows*, August 16-18, pp. 13/2/1 - 13/2/6, Kyoto, Japan, 1993.
- [38] Le, H., Moin, P.: "Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step.", Report No. TF-58, Stanford University, Stanford, California, USA, 1995.
- [39] Lesieur, M.: "Turbulence in fluids.", Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1990.

- [40] Lilly, D.K.: "On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems.", *Monthly Weather Rev.*, 93, no. 1, pp. 11-26, 1965.
- [41] Makagno, E.O., Hung, T.K.: "Computational and experimental study of a captive annular eddy.", *J. Fluid Mech.*, 28, pp. 43-64, 1967.
- [42] Moin, P., Kim, J.: "Numerical investigation of turbulent channel flow.", *J. Fluid Mech.*, 118, pp. 341-377, 1982.
- [43] Moon, L.F., Rudinger, G.: "Velocity distribution in an abruptly expanding circular duct.", *Trans. ASME, J. of Fluids Eng.*, March 1977, pp. 226-230, 1977.
- [44] Nitsche, W., Naseri, M., Bartsch, P.: "Investigation on turbulent transport processes in relaxing diffuser flows.", *Proceedings of the Second International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, June 1993, Florence, Italy, 1993.
- [45] Reynolds, O.: "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and determination of the criterion.", *Phil. Trans. Roy. Soc. London, A* , 186 , pp. 123-164, 1895.
- [46] Richter, K., Friedrich, F., Schmitt, L.: "Large-eddy simulation of turbulent wall boundary layers with pressure gradients.", *Proc. 6th Symp. on Turbulent Shear Flows*, Paul Sabatier University, Toulouse, pp. 22.3.1 -7, 1987.
- [47] Robinson, S.K.: "Coherent motions in the turbulent boundary layer.", *Annual Rev. Fluid Mech.*, 23 , pp. 601-639, 1991.
- [48] Roschke, E.J., Back, L.H.: "The influence of upstream conditions on flow reattachment lengths downstream of an abrupt circular channel expansion ", *J. Biomechanics*, 9 , pp. 481-483, 1976.
- [49] Rotta, J.: "Turbulente Strömungen.", Stuttgart: Teubner, 1972.
- [50] Seki, N., Fukusako, S., Hirata, T.: "Turbulent fluctuations and heat transfer for separated flow associated with a double step at entrance to an enlarged flat duct.", *J. of Heat Transfer*, 98, pp. 588-593, 1976.
- [51] Schmitt, F.: "Untersuchungen der turbulenten Stufenströmung bei hohen Reynoldszahlen.", *Forschungsber. VDI Reihe 7, Nr.117*, VDI-Verlag, 1987.
- [52] Schmitt, L.: "Numerische Simulation turbulenter Grenzschichten (LES). Teil 1: Grundlagen.", *Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, Bericht Nr. 82/2*, 1982.

- [53] Schmitt, L., Friedrich, R.: "Grobstruktursimulation der turbulenten Strömung über eine zurückspringende Kanalstufe.", Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, TUM-LSM-87/5, 1987.
- [54] Schmitt, L.: "Grobstruktursimulation turbulenter Grenzschicht-, Kanal- und Stufenströmungen.", Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1988.
- [55] Schumann, U.: "Ein Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen in Platten- und Ringspaltkanälen und über seine Anwendung zur Untersuchung von Turbulenzmodellen." Dissertation, Univ. Karlsruhe, 1973.
- [56] Schumann, U.: "Linear stability of finite difference equations for three-dimensional flow problems.", *J. Comp. Phys.*, 18, pp. 465-470, 1975.
- [57] Schumann, U. , Sweet, R.A.: "A direct method for the solution of Poisson's equation with Neumann boundary conditions on a staggered grid of arbitrary size.", *J. Comp. Physics*, 20, pp.117-182, 1976.
- [58] Schumann, U. , Benner, J.: "Direct solution of the diskretized Poisson-Neumann Problem on a domain composed of rectangles.", *J. Comp. Physics*, 46, pp.1-14, 1981.
- [59] Smagorinsky, J.S.: "General circulation experiments with the primitive equations.", *Monthly Weather Rev.*, 91, pp. 99-164, 1963.
- [60] Spalart, P.R.: "Direct simulation of a turbulent boundary layer up to Re_θ .", *J. Fluid Mech.*, 187, pp. 61-98, 1988.
- [61] Spurk, J.H.: "Strömungslehre: Einführung in die Theorie der Strömungen.", Berlin: Springer, 1989.
- [62] Stieglmeier, M., Tropea, C., Weiser, N., Nitsche, W.: "Experimental investigation of the flow through axisymmetric expansions.", *Trans. ASME, J. of Fluids Eng.*, 111, pp. 464-471, 1989.
- [63] Sullivan, P., Glauser, M.: "LDA measurements in a sudden expansion.", Rodi und Ganic, Editors, Elsevier Science Publishing, pp. 727-736, 1990.
- [64] Taylor, G.I.: "The spectrum of turbulence.", *Proc. Roy. Soc. London, A* 164, pp 467-468, 1938.
- [65] Tennekes, H., Lumley, J.L.: "A first course in turbulence.", Cambridge, Massachusetts, London: The MIT Press, 1972.

- [66] Tropea, C.: “Die turbulente Stufenströmung in Flachkanälen und offenen Gerinnen.”, Dissertation, Univ. Karlsruhe, 1982.
- [67] Unger, F.: “Numerische Simulation turbulenter Rohrströmungen.”, Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1994.
- [68] Wagner, C., Friedrich, F.: “Direct numerical simulation of turbulent flow in a sudden pipe expansion.”, AGARD Conference Proceedings of the 74th Fluid Dynamics Symposium on Application of direct and large eddy simulation to transition and turbulence, April 1994, Chania, Crete, Greece, pp. 6.1-6.11, 1994.
- [69] Weiser, N., Nitsche, W.: “Experimentelle und numerische Untersuchungen zur abgelösten Strömung an einer Rohrstufe mit variablen Öffnungswinkel.”, ILR-Mitteilungen, 177, Berlin, 1987.
- [70] Weiser, N., Nitsche, W.: “Zur rotationssymmetrischen Innenströmung mit Ablösung an Querschnittserweiterungen.”, ILR-Mitteilungen, 193, Berlin, 1988.
- [71] Weiss, M.H.: “Drag reduction with riblets in pipe flow.”, Ph.D. thesis, University of Calgary, Canada, 1993.
- [72] Werner, H.: “Grobstruktursimulation der turbulenten Strömung über eine querliegende Rippe in einem Plattenkanal bei hoher Reynoldszahl.”, Dissertation, Lehrstuhl für Fluidmechanik, TU München, 1991.
- [73] Westerweel, J., Adrian, R.J., Eggels, J.G.M., Nieuwstadt, F.T.M.: “Measurements with particle image velocimetry on fully developed pipe flow at low Reynolds number.”, Proc. of the 6th Int. Symposium on Applications of Laser Tech. to Fluid Mechanics, Lisbon, Portugal, July 20-23, 1992.
- [74] Zucron, M.J.: “Aircraft and missile propulsion.”, John Wiley and Sons, 2, N.Y., 1969.

Lebenslauf

Vor- und Zuname	Claus Wagner
Geburtstag	20. Juni 1962
Geburtsort	Münsingen, Kreis Reutlingen
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	verheiratet
1969 - 1973	Grundschule Münsingen
1973 - 1979	Gymnasium Münsingen
1979 - 1980	Auslandsaufenthalt als Austauschschüler an der <i>Juda High School</i> , Juda, Wisconsin, USA.
1980 - 1983	Gymnasium Münsingen Abitur, 14. Juni 1983
1983 - 1984	Offiziersschule der Luftwaffe, Fürstenfeldbruck
1984 - 1986	Studium der Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität der Bundeswehr, Neubiberg. Vordiplom, 27. September 1985
1986 - 1989	Studium des Maschinenwesens, Fachrichtung Luft- und Raumfahrttechnik an der Technischen Universität München. Diplom, 22. Dezember 1989
1987	Werkstudent der Firma Messerschmitt-Bölkow-Blohm. Am Physikdepartment der Technischen Universität München bearbeitetes Forschungsvorhaben: <ul style="list-style-type: none">• Resonante Steuerung nichtlinearer mechanischer Systeme
1990 - 1991	NASA-Stipendiat am <i>NASA Langley Research Center</i> , Hampton, Virginia, USA und am <i>Department of Chemical Engineering</i> an der <i>University of Florida</i> , Gainesville, Florida, USA. Bearbeitung des Forschungsvorhaben: <ul style="list-style-type: none">• Stabilitätstheoretische Untersuchungen der Marangoni-Konvektion

1991 - 1992

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für
Fluidmechanik der Technischen Universität München.

Bearbeitung des Forschungsvorhaben:

- Simulation thermischer Auftriebsströmungen

1992

Gastwissenschaftler am *Department of Chemical Engineering*
an der *University of Florida*, Gainesville, Florida, USA.

1993 - 1995

Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für
Fluidmechanik der Technischen Universität München.

Bearbeitung der Forschungsvorhaben:

- Simulation turbulenter Rohrströmungen
- Simulation turbulenter Rohrerweiterungströmungen