

OPTIMIERUNG VON LUFTAUSLASS- UND KANALGEOMETRIEN MIT ADJUNGIERTEN VERFAHREN

DISSERTATION
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt der
Fakultät für Maschinenbau der
Technischen Universität Ilmenau

von
Herrn Dipl.-Ing.
THOMAS KÖTHER
geboren am 14. 03. 1984
in Mühlhausen / Thüringen

Erstgutachter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Claus Wagner
Zweitgutachter: Priv.-Doz. Dr. rer. nat. habil. Thomas Boeck
Drittgutachter: Dr. Keith Weinman

Tag der Einreichung: 06. April 2021
Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 12. Oktober 2021

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2021000301

Kurzfassung

Die Auslegung von Belüftungssystemen in Flugzeugen, Zügen und Autos ist in erster Linie von der Erfahrung und dem Fachwissen der Entwicklungsingenieure sowie intensiven Tests abhängig. Mit numerischen Optimierungsverfahren ist es jedoch möglich, die Systeme noch weiter zu verbessern.

In der vorliegenden Arbeit werde ich eine Prozesskette entwickeln, die mit Hilfe der adjungierten Formoptimierung auf Grundlage numerischer Strömungsmechanik den Kabinenluftauslass des Dornier 728 Flugzeugs optimiert. Dabei soll in der Netzverformung eine hohe Zahl an Freiheitsgraden verwendet werden, die durch die adjungierte Formoptimierung zur Verfügung steht.

Zusätzlich wird die vorgestellte Prozesskette auf ein vektrowertiges Optimierungsproblem angewendet, wobei die Pareto-Front zweier Zielfunktionen für den Kabinenluftauslass bestimmt wird. Laut Stand der Technik wird für solche Problemstellungen die Methode der gewichteten Summe angewendet. Diese bedeutet zugleich einen enormen Rechenaufwand, wenn man komplexe Geometrien untersucht. Um diesen Aufwand zu reduzieren, präsentiere ich ein Verfahren, bei dem die Sensitivitätsfelder aus skalarwertigen Optimierungsproblemen kombiniert werden. Die Variation dieser Skalierungsfaktoren erfolgt mit einem genetischen Algorithmus. Im nächsten Schritt wird das Problem noch einmal umformuliert und die Variation der Wichtungsfaktoren wird mit einem ϵ -Schranken-Verfahren untersucht.

Im Vergleich zur Kombination der Zielfunktionen liefert das präsentierte Verfahren bei gleichbleibender Rechenzeit eine Verbesserung der Zielfunktion von ca. 70% bzw. ca. 40% Verbesserung bei einer Einsparung von 50% der Rechenzeit. Zusätzlich zeigt auch die bestimmte Pareto-Front geringere Werte für die untersuchten Zielfunktionen.

Im letzten Teil der Arbeit verwende ich Direkte Numerische Simulation einer turbulenten Kanalströmung als Grundlage der Optimierung. Das Ziel ist eine Reduzierung der Wandschubspannung durch eine Steuerung der wandnahen Transportprozesse

des Fluids durch eine Verformung der Oberfläche. Des Weiteren sollen die Fluktuationen in Spannweitenrichtung gedämpft und die dadurch entstehende Wandschubspannung reduziert werden. Dabei wird eine Reduzierung der Wandschubspannung an der oberen Kanalwand von ca. 13% erreicht.

Abstract

The design of air distribution systems in aircrafts, trains and cars still relies on the experience of the engineers and on extensive testing. However, the performance of these air distribution systems can be improved by applying numerical optimization techniques.

In this thesis I use adjoint Computational Fluid Mechanics to optimize a cabin outlet of the air distribution system of the Dornier 728 aircraft. The aim is to develop a process chain that takes into account the large number of degrees of freedom in the mesh deformation, which is provided by the adjoint shape optimization.

This procedure is also applied to a multi-objective optimization of the complete air distribution system. With state of the art techniques for multi-objective optimization, like the weighted-sum method, the computational costs are beyond the capability when it comes to complex geometries. To avoid these high costs I present a new approach which is based on optimized combinations of sensitivity fields obtained with single-objective optimizations in a post-processing step. It is shown that the variation of the scaling factors allows to minimize the objective functions and to approach the utopia point. To be able to systematically vary the scaling factors a multi-objective genetic algorithm is proposed. In the next section the multi-objective problem is reformulated with an ϵ -constraints method and the variation of the scaling factors is optimized with a conjugated gradients optimization method.

The presented approach shows a significant reduction of the computational costs. By comparing the computed pareto-fronts, the presented method is capable of finding combinations that are located closer to the utopia point compared to those of the weighted-sum method. With the same runtime, an improvement by 70% is possible. With a reduction in runtime of 50%, an improvement of 40% is possible.

In the last part of the thesis I use Direct Numerical Simulation of turbulent channel flow and use the results as input for the presented process chain. The aim is to reduce the skin friction by controlling the near-wall transport processes based on surface

modifications. The idea is further to damp the spanwise fluctuations of streaky structures and thus, to reduce the associated skin friction. A reduction of the skin friction by 13% can be achieved on the upper wall in the respective time interval.

Danksagung

In meiner Zeit als Mitarbeiter am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik in Göttingen hatte ich die Möglichkeit selbstständig zu forschen und meine Ergebnisse auf diversen internationalen Fachtagungen vorzustellen. Die vorliegende Dissertation bildet den Abschluss dieser Forschungstätigkeit, deren Durchführung in dieser Form nur durch verschiedenste Unterstützung möglich war. Dafür möchte ich mich an dieser Stelle aufrichtig bedanken.

Allen voran bedanke ich mich bei meinem Doktorvater Claus Wagner für seine stetige Unterstützung und die Freiräume, die es mir stets ermöglicht haben, die Forschungsarbeit nach meinen Vorstellungen zu gestalten. Auch die bereitgestellten Ressourcen auf dem abteilungseigenen Hochleistungsrechner SCART waren sehr wichtig, um die geplanten Ziele umzusetzen. Des Weiteren bedanke ich mich meinen Gutachtern Thomas Boeck und Keith Weinman für die Übernahme des Koreferats sowie bei der gesamten Prüfungskommission.

In der Zeit als Doktorand in Göttingen habe ich viele hervorragende Kollegen und Freunde kennengelernt, die mir jederzeit ihre fachliche Unterstützung zukommen ließen. Besten Dank für endlose Diskussionen sinniger sowie unsinniger Natur, konstruktive Kritik, moralische Unterstützung und die nötige Ablenkung.

Die größte Unterstützung habe ich jedoch von Beatrice erhalten, die alle meine Pläne, Visionen, Vorhaben immer unterstützt und gefördert hat. Dafür meinen herzlichsten Dank.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Stand der Technik	4
1.3	Zielstellung	15
2	Grundlagen	19
2.1	Mathematische Grundlagen	19
2.1.1	Allgemeines zur Optimierung	19
2.1.2	Variationsrechnung	21
2.1.3	Methode der Lagrange-Multiplikatoren	24
2.2	Transportgleichungen	27
2.2.1	Die Navier-Stokes-Gleichungen	27
2.2.2	Die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen	28
2.3	Adjungierte Transportgleichungen	32
2.3.1	Bestimmung der Lagrange-Multiplikatoren	34
2.3.2	Sensitivitätsanalyse	36
3	Numerische Methoden	41
3.1	RANS-Verfahren in OpenFoam [®]	41
3.1.1	Diskretisierung des Rechengebietes	42
3.1.2	Lösung der RANS-Gleichungen	46
3.1.3	Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeld	48
3.2	Direkte Numerische Simulation einer Kanalströmung	48
3.2.1	Instationäre, inkompressible NSG	49
3.2.2	Adjungierte, inkompressible NSG	51
3.3	Netzverformung	52
3.3.1	Arten von radialen Basisfunktionen	52

Inhaltsverzeichnis

3.3.2	Netzverformung mit radialen Basisfunktionen	54
3.3.3	Auswahl der Kontrollpunkte	58
3.3.4	Parametervariation	59
3.3.5	Erweiterung auf periodische Rechengebiete	61
4	Skalarwertige Optimierung	65
4.1	Vorhersage des Strömungsfeldes	66
4.2	Skalare Optimierungsprobleme	70
4.2.1	Zielfunktion homogene Geschwindigkeit	70
4.2.2	Zielfunktion dissipierte Leistung	78
5	Vektorwertige Optimierung	87
5.1	Kombination von Zielfunktionen	88
5.1.1	Methode der gewichteten Summe	88
5.1.2	Methode des gewichteten Produkts	94
5.2	Superposition von Sensitivitätsfeldern	96
5.2.1	Genetische Algorithmen	98
5.2.2	ϵ -Schranken Methode	99
6	Adjungierte DNS einer Kanalströmung	105
6.1	Die ebene Kanalströmung	106
6.2	Optimierung der turbulenten Kanalströmung	112
6.3	Zielfunktion	116
6.4	Adjungierte Formoptimierung	117
7	Zusammenfassung	139
A	Herleitung der adjungierten Gleichungen	143

Abbildungsverzeichnis

1.1	Versuchsträger Do728	3
2.1	Grundfunktion mit Nebenbedingung	26
2.2	Übersicht zu Lösungsverfahren	29
2.3	Methode der lokalen Variationen	37
3.1	Darstellung von zwei benachbarten finiten Volumen	42
3.2	Verlauf der verschiedenen RBFs	53
3.3	Kontrollpunkte c_i mit zugehörigen Radien.	54
3.4	Kontrollpunkte c_i mit überschneidenden Radien	55
3.5	Löschen von Nachbarpunkten auf dem Oberflächennetz	58
3.6	Verformte Geometrien unter Verwendung eines Kontrollpunktes.	59
3.7	Verformte Geometrien unter Variation des freien Parameters α	59
3.8	Ausgangsgeometrie mit Sensitivitäten und verformte Geometrie.	60
3.9	Vergleich reduzierte Kontrollpunkte	61
3.10	Nicht-periodische Interpolation im Kanal	62
3.11	Interpolation im Kanal	62
3.12	Periodische Interpolation im Kanal	63
4.1	Versuchsträger Passagierflugzeug Dornier 728	65
4.2	Darstellung des DoKLA	66
4.3	Rechennetz DoKLA	67
4.4	y^+ -Werte DoKla	67
4.5	Residuen der primalen Simulation	68
4.6	Visualisierung der Strömung im DoKLA	69
4.7	Magnitude der Geschwindigkeit an den Auslassflächen des DoKLA.	70
4.8	Residuen der adjungierten Simulation (J_h)	71
4.9	Sensitivitätswerte im DoKLA (J_h)	73

Abbildungsverzeichnis

4.10	Verformung des DoKLA (J_h)	74
4.11	Prozesskette skalarwertige Optimierung	75
4.12	Zielfunktion (J_h)	75
4.13	Endgültige Verformung des DoKLA (J_h)	76
4.14	Vergleich der Geschwindigkeitsmagnitude am Auslass	77
4.15	Vergleich der Geschwindigkeitsmagnitude am Auslass 2	78
4.16	Verteilung der Geschwindigkeitsmagnitude am Auslass	78
4.17	Sensitivitätswerte im DoKLA (J_d)	80
4.18	Residuen der adjungierten Simulation (J_d)	81
4.19	Verformung im DoKLA (J_d)	82
4.20	Zielfunktion (J_d)	83
4.21	Verformung im DoKLA (J_d) 2	84
4.22	Druck im verformten DoKLA (J_d)	85
5.1	Generischer Phasenraum	89
5.2	Prozesskette vektorwertige Optimierung	91
5.3	Wichtungsfaktoren in den ersten Schritten des Bisektionsverfahrens.	92
5.4	Pareto-Front (MGS)	93
5.5	Ergebnisse im Phasenraum (moga)	95
5.6	Prozesskette Superposition	97
5.7	Pareto-Front (moga)	99
5.8	Schema ϵ -Schranken Methode	100
5.9	Pareto-Front (ϵ SM)	101
5.10	Vergleich der Sensitivitätsfelder	103
6.1	Ablaufdiagramm adjungierte DNS	106
6.2	Rechengebiet der Kanalströmung	107
6.3	instantanes Geschwindigkeitsfeld	109
6.4	Geschwindigkeitsprofil im Kanal	110
6.5	RMS-Wert der mittleren Geschwindigkeit	111
6.6	Spannungen im Kanal	112
6.7	Wirbelarten	114
6.8	Iso-Konturflächen (Referenzsimulation)	115
6.9	Sensitivitäten	118
6.10	Zeitlich gemittelte Wandschubspannungen	118
6.11	Zeitlich gemittelte kohärente Strukturen	119

6.12 Normierte Sensitivitäten (obere Wand)	120
6.13 Normierte Sensitivitäten (untere Wand)	121
6.14 Vergleich der Wandauflösung	123
6.15 Wandauflösung der verformten Geometrie	124
6.16 Verformte Geometrie	125
6.17 RMS-Wert der mittleren Geschwindigkeit (verformt, nach $12t^+$)	126
6.18 Spannungen im Kanal (verformt, nach $12t^+$)	127
6.19 Zeitreihe des Druckgradienten und der Wandschubspannung ($12t^+$)	128
6.20 Wandschubspannungen obere Kanalwand	130
6.21 Wandschubspannungen untere Kanalwand	131
6.22 Kohärente Strukturen obere Kanalhälfte	132
6.23 Kohärente Strukturen untere Kanalhälfte	133
6.24 Iso-Konturflächen ($T = 12t^+$)	134
6.25 RMS-Wert der mittleren Geschwindigkeit (verformt, nach $65t^+$)	135
6.26 Spannungen im Kanal (verformt, nach $65t^+$)	136
6.27 Gleitender Mittelwert der Zeitreihe des Druckgradienten sowie der Wandschubspannung.	137

Tabellenverzeichnis

2.1	Adjungierte Randbedingungen (U)	36
2.2	Adjungierte Randbedingungen (q)	36
5.1	Scan des Phasenraums	93
5.2	Übersicht der ϵ -Schranken	100
5.3	Übersicht der Ergebnisse der vektorwertigen Optimierung	102

Symbolverzeichnis

Symbol	Einheit	Bezeichnung / Verwendung
α, γ	-	Wichtungsfaktoren
A	m^2	Flächeninhalt
β	-	Designvariablen
c	-	Kontrollpunkt
d	-	Vektor zwischen Zellmittelpunkten
d	m	Abstand im Phasenraum
δ	-	Variationssymbol
ϵ	-	Schwellenwert
ε	$\frac{m^2}{s}$	Dissipationsrate
$\eta(x)$	-	Hilfsfunktion
η	$\frac{kg}{m \cdot s}$	dynamische Viskosität
F^*	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$	Volumenkraft
F	$\frac{m}{s^2}$	spezifische Volumenkraft
F_τ	$\frac{kg \cdot m}{s^2}$	lokale Reibungskraft
f	-	beliebige Fläche
Γ	-	topologischer Rand von Ω
h	m	Kanalhöhe

Symbol	Einheit	Bezeichnung / Verwendung
$J(x)$	-	Zielfunktion
k	$\frac{m^2}{s^2}$	spezifische turbulente kinetische Energie
L	-	Lagrange-Funktion
λ	-	Lagrange-Multiplikatoren
Ma	-	Machzahl
\dot{m}	$\frac{kg}{s}$	Massenstrom
\mathbf{n}	-	Normalenvektor
N	-	Mittelpunkt der Nachbarzelle
ν	$\frac{m^2}{s}$	kinematische Viskosität
ν_t	$\frac{m^2}{s}$	Wirbelviskosität
ν_{eff}	$\frac{m^2}{s}$	effektive Viskosität $\nu + \nu_t$
Ω	-	Rechengebiet
ω	Hz	charakteristische Wirbelfrequenz
p	$\frac{kg}{m s^2}$	Druck
p'	$\frac{kg}{m s^2}$	Druckschwankung
p	$\frac{m^2}{s^2}$	spezifischer Druck
	$\frac{m^2}{s^2}$	mittlerer Druck in Kapitel 4 und 5
	-	dimensionsloser Druck in Kapitel 6
P	-	Zellmittelpunkt
P_τ	$\frac{kg m^2}{s^3}$	Wandreibungsleistung
Φ_{bb}	-	Dichtematrix
ϕ	-	skalare Transportgröße
q	$\frac{kg}{m s^2}$	mittlerer adjungierter Druck
r	m	Radius
Re	-	Reynoldszahl
$\mathcal{R}(x)$	-	Nebenbedingung
ρ	$\frac{kg}{m^3}$	Dichte
S	-	Oberflächensensitivitäten
t	s	Zeit
T	s	Mittelungsintervall

Symbol	Einheit	Bezeichnung / Verwendung
τ	$\frac{kg}{ms^2}$	Schubspannung
\mathbf{u}	$\frac{m}{s}$	Geschwindigkeit
	$\frac{m}{s}$	mittlere Geschwindigkeit in Kapitel 4 und 5
	-	dimensionslose Geschwindigkeit in Kapitel 6
\mathbf{u}_τ	$\frac{m}{s}$	Schubspannungsgeschwindigkeit
\mathbf{U}	$\frac{m}{s}$	mittlere adjungierte Geschwindigkeit
V	m^3	Volumen

Kennzeichnung von bearbeiteten Größen

Symbol	Verwendung
$\langle x \rangle_T$	über T gemittelte Größe
\bar{x}	zeitlich gemittelte Größe
x'	Schwankung einer Größe
x^+	Größe in Wandeinheiten
\hat{x}	entdimensionalisierte Größe

Akronymenverzeichnis

CAD	Computer aided design
CFD	Numerische Strömungsmechanik
CPU	Prozessor
DGL	Differentialgleichung
DNS	Direkte Numerische Simulation
DoKLA	Kabinenluftauslass des Do728 Passagierflugzeugs
ε SM	ε -Schrankenmethode
NSG	Navier-Stokes-Gleichung
FEM	Finite-Elemente-Verfahren
FDM	Finite-Differenzen-Methode
FVM	Finite-Volumen-Methode
IHV	Intervallhalbierungsverfahren
KLA	Kabinenluftauslass
LES	Large-Eddy-Simulation
MGP	Methode des gewichteten Produkts
MGS	Methode der gewichteten Summe
moga	multi-objective genetic algorithm
PDE	Partielle Differentialgleichung
RANS	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen
RBF	Radiale Basisfunktion
RMS	Root mean square
SIMPLE	Semi-implicit Method for Pressure Linked Equations
PIV	Particle Image Velocimetry

Einleitung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der adjungierten Formoptimierung von internen Strömungen, wie sie in Rohr- und Kanalgeometrien sowie in verschiedenen Belüftungssystemen auftreten. Dabei kommt ein Optimierungsverfahren zum Einsatz, das auf der Grundlage von numerisch vorhergesagten Strömungsfeldern die Geometrie zugunsten einer vordefinierten Zielfunktion verändert. Von Interesse sind dabei realitätsnahe Anwendungen sowie die für Belüftungssysteme relevanten Zielfunktionen. Des Weiteren spielt die Interaktion der vorgestellten Zielfunktionen miteinander eine zentrale Rolle.

Als Ausgangspunkt der Optimierung dienen Geometrien, die einer optimalen Geometrie bereits sehr nahe kommen, da diese durch verschiedene Restriktionen, wie z.B. Bauraumbeschränkungen, in ihrer Modifikation limitiert sind. Das Verfahren dient daher zur Feinabstimmung komplexer Geometrien und soll nicht das Fachwissen der Entwicklungsingenieure ersetzen.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das Verfahren auf instationäre Strömungsprobleme in Kanalgeometrien angewendet. Das Ziel hierbei ist, mögliche passive Maßnahmen zur Strömungskontrolle mittels Formoptimierung zu identifizieren. Die Strömungsfelder werden dabei mittels einer Direkten Numerischen Simulation (DNS) vorhergesagt, da diese detaillierte Informationen über das gesamte Strömungsfeld liefert.

1.1 MOTIVATION

Die Auslegung von Belüftungssystemen für Flugzeuge, Züge und Autos ist in hohem Maße von der Erfahrung der Entwicklungsingenieure abhängig. Durch die Anwendung numerischer Optimierungsverfahren kann die Leistung dieser Systeme jedoch weiter verbessert werden. Diese Belüftungssysteme bestehen in der Regel

1 Einleitung

aus langen Rohrnetzwerken, Krümmungen, Verzweigungen, Luftauslässen usw. Je komplexer eine Geometrie aufgebaut ist, desto mehr mögliche Ansatzpunkte bieten sich für die Optimierung, man spricht hier von Freiheitsgraden. Beispielsweise kann in einem Krümmer der Krümmungsradius als Freiheitsgrad dienen und ist somit der Designparameter, der während der Optimierung verändert wird. Bei steigender Komplexität steigt auch die Zahl der Freiheitsgrade. Um für die Formoptimierung einen hohen Freiheitsgrad der Geometrie zu gewährleisten, wird in der vorliegenden Arbeit ein adjungiertes Verfahren verwendet. In der Literatur ist es allgemein anerkannt, dass bei einer hohen Zahl von Freiheitsgraden im Optimierungsproblem adjungierte Methoden zu den leistungsstärksten Verfahren hinsichtlich der Rechenzeit zählen. Deshalb spielt die adjungierte Formoptimierung eine zentrale Rolle in der vorliegenden Arbeit.

Am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) in Göttingen werden neuartige Belüftungskonzepte für Flugzeugkabinen untersucht. Dabei sind die Kabinenluftauslässe von großer Bedeutung, da diese eine direkte Schnittstelle zwischen dem Belüftungssystem und der Kabine darstellen. Die Untersuchungen erfolgen dabei in einem realistischen Kabinenversuchsträger, der aus der „roll-out“ Version des Dornier 728 Flugzeugs (Do728) entwickelt wurde. Der Versuchsträger ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

Um neue Belüftungskonzepte zur Verbesserung des Passagierkomforts umzusetzen, müssen die Luftauslässe in der Kabinen-Testanlage besondere Eigenschaften aufweisen. Dabei ist die Homogenität der Austrittsgeschwindigkeit in die Kabine besonders wichtig, da diese für die Belüftungskonzepte von zentraler Bedeutung ist. Neben dem Komfort gilt es auch die Energieeffizienz der Kabinensysteme zu optimieren, da sich diese maßgeblich auf den Treibstoffverbrauch auswirkt. Dieses Ziel kann erreicht werden, indem die Systeme hinsichtlich des Druckverlustes optimiert werden. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Optimierung des Kabinenluftauslasses des Dornier 728 Versuchsträgers hinsichtlich der genannten Zielfunktionen. Dazu sollen beide Zielfunktionen sowie die Auswirkung der Geometrieänderung auf die Zielfunktionen untersucht werden.

In der Realität sind die verschiedenen Zielfunktionen nicht unabhängig voneinander, sondern beeinflussen sich gegenseitig und können sogar in direktem Widerspruch zueinander stehen. Die simultane Betrachtung mehrerer Zielfunktionen, die sogenannte Pareto- oder Vektoroptimierung, ist eine allgegenwärtige Herausforderung,



Abb. 1.1: Kabinen-Testanlage für Kabinenklimatisierung am DLR Göttingen. Oben: Außenansicht des Versuchsträgers Dornier 728. Unten: Innenansicht der Flugzeugkabine mit Dummies in Vorbereitung auf ein Experiment.

da sie in den meisten realitätsnahen Problemstellungen anzutreffen ist. Eine weitere Zielstellung der Arbeit liegt daher in der Vektoroptimierung der genannten Zielfunktionen am Beispiel des Kabinenluftauslass der Do728.

Der erste Teil der Arbeit zeigt das Potential der adjungierten Formoptimierung für stationäre Strömungen. Im zweiten Teil wird eine Erweiterung auf instationäre Problemstellungen vorgenommen. Am Beispiel einer voll ausgebildeten, turbulenten Kanalströmung wird die Eignung der adjungierten Formoptimierung für eine passive Maßnahme zur Strömungskontrolle untersucht. Das Ziel ist dabei die Reduzierung der Wandschubspannung. Die Vorhersage der Strömungsfelder erfolgt mittels Direkter Numerischer Simulation. Die Strömungsfelder werden zeitlich gemittelt, das Mittelungsintervall wird dabei so gewählt, dass starke Fluktuationen verschwinden, aber *Fußabdrücke* zurück bleiben. Die gemittelten Strömungsfelder werden dann als zeitlich konstant angesehen, um eine stationäre, adjungierte Optimierung vorzunehmen.

1 Einleitung

1.2 STAND DER TECHNIK

Im folgenden Kapitel wird eine kurze Übersicht über die Entwicklungen und den aktuellen Stand der Forschung im Bereich der adjungierten Formoptimierung gegeben. Diese Übersicht beschränkt sich auf Anwendungen und Entwicklungen mit Bezug zur Aerodynamik bzw. Fluidmechanik. Des Weiteren erfolgt eine kurze Übersicht über die Anwendung von Netzverformungstechniken und die simultane Optimierung mehrerer Zielfunktionen.

Für den zweiten Teil der Arbeit wird eine Übersicht über die Optimierung auf Grundlage einer Direkten Numerischen Simulation gegeben sowie deren Anwendung auf Kanalgeometrien.

Da die Optimierung ein sehr weitläufiges Fachgebiet ist, soll als erstes eine kurze Übersicht über allgemeine Lösungsverfahren gegeben werden.

OPTIMIERUNG

Die Optimierung als mathematisches Teilgebiet beschäftigt sich mit komplexen Systemen und deren unbekanntem Parametern. Letztere, auch Designvariablen genannt, sollen dabei so variiert werden, dass eine definierte Zielfunktion einen minimalen oder maximalen Wert erfährt. Dieser Wert wird dann als Optimum bezeichnet und entspricht einem Extremwert der Zielfunktion, also der Nullstelle der Ableitung der Zielfunktion. Um diesen Wert zu bestimmen, stehen eine Vielzahl von Verfahren zur Verfügung.

Auf der einen Seite stehen sogenannte „white box“-Methoden, die Informationen über die Struktur der Zielfunktion bzw. deren Ableitungen in die Suche integrieren. Hierbei handelt es sich überwiegend um *Gradientenverfahren* zur Bestimmung der Suchrichtung. Burden *et al.* [12] beschreiben als ableitungsfreies Verfahren das *Bisektionsverfahren* und Nelder *et al.* [76] das *Downhill-Simplex-Verfahren*. Hestenes *et al.* [42] nutzen das Verfahren der *konjugierten Gradienten*, das die erste Ableitung der Zielfunktion verwendet, um sich an das Optimum anzunähern. Ein Verfahren, das die zweite Ableitung der Zielfunktion auswertet, wird bereits 1774 von Isaac Newton [78] vorgestellt. Das Verfahren wird, mit leichten Änderungen, auch heute noch verwendet.

Demgegenüber stehen die sogenannten „black box“-Methoden, bei denen die Zielfunktion nur punktuell ausgewertet wird, um daraus neue Punkte zur Auswertung zu generieren. „black box“-Methoden arbeiten generell weniger effizient als „white

box“-Methoden, der Vorteil liegt jedoch in der Anwendbarkeit auf beliebige Funktionen. „black box“-Methoden lassen sich prinzipiell in drei Klassen einteilen. Die erste Klasse bilden die *deterministischen Suchverfahren*, mit denen, ausgehend von vorher definierten Startpunkten, Lösungen der Funktion berechnet werden, die die nächste Auswertungsstelle bestimmen. Dieses Vorgehen wird dann iteriert, bis sich Konvergenz einstellt. Eine umfassende Übersicht zu deterministischen Suchverfahren findet sich bei Kolda *et al.* [53]. Die zweite Klasse bilden die *stochastischen* und *metaheuristischen Verfahren*. Diese erzeugen, im Gegensatz zu deterministischen Verfahren, neue Suchpunkte durch zufällige Änderungen an Komponenten der Ausgangspunkte. Änderungen, die gute Eigenschaften hervorrufen werden beibehalten, bei schlechten Eigenschaften werden die Änderungen verworfen. In diese Klasse fallen u.a. die *genetischen Algorithmen*, die von John Holland [49] etabliert wurden. Eine Übersicht zu heuristischen Verfahren findet sich bei Michalewicz *et al.* [68]. Die dritte Klasse besteht aus Verfahren auf Basis von *Metamodellen*, mit denen Eigenschaften, die einen signifikanten Einfluss auf die Zielfunktion haben, in ein vereinfachtes Modell ausgelagert werden. Beispielsweise werden komplexe Geometrien stellvertretend an vereinfachten Geometrien untersucht oder Erhaltungsgleichungen werden durch Gleichungen geringerer Ordnung ersetzt. Es existieren eine Vielzahl von Varianten und Ansätzen, die z.B. von Myers *et al.* [73] dargestellt und diskutiert werden.

Wie der vorhergehende Abschnitt zeigt, existieren zahlreiche Algorithmen zur Lösung von Optimierungsproblemen. Welche der zur Verfügung stehenden Vorgehensweisen am effizientesten ist, hängt jedoch stark vom betrachteten Optimierungsproblem ab. Prinzipiell werden bei Letzteren zwei Arten unterschieden. Einerseits kann eine Einteilung in *lineare* und *nichtlineare Optimierungsprobleme* erfolgen, andererseits können Optimierungsprobleme mit und ohne Nebenbedingungen betrachtet werden. Lineare Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen haben sowohl eine lineare Zielfunktion, als auch lineare Nebenbedingungen und können exakt gelöst werden. Schwieriger zu lösen ist die Klasse der nicht linearen Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen, da die Zielfunktion und / oder die Nebenbedingungen nicht linear sind. Die generelle Vorgehensweise zur Lösung solcher Probleme besteht im Aufbau einer Hilfsfunktion, in der Zielfunktion und Nebenbedingungen kombiniert werden. Ein weit verbreitetes Verfahren dieser Klasse ist die *Methode der Lagrange-Multiplikatoren*, die auf Joseph-Louis Lagrange [56] zurückgeht. Das Auffinden eines Optimums erfolgt dabei durch Minimierung

1 Einleitung

bzw. Maximierung der Hilfsfunktion. Die Effizienz dieser Methode, hängt von der Art der Hilfsfunktion ab.

Im Bereich der Aerodynamik wird als Zielfunktion häufig ein strömungsmechanischer Beiwert herangezogen. Dieser kann zum Beispiel der Auftrieb, die Reibung, der Druckverlust oder eine beliebige andere Größe in Abhängigkeit der Zustandsvariablen sein. Als Nebenbedingungen gelten im Regelfall Erhaltungsgleichungen, die im allgemeinen Fall nichtlinearer Natur sind. Es handelt sich bei der „Aerodynamischen Optimierung“ also um nichtlineare Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen. Bei der Formoptimierung resultieren Designvariablen aus der geometrischen Form des untersuchten Objektes. Eine der ersten Studien zur Kopplung von numerischen Strömungssimulationen und numerischen Optimierungsverfahren stammt von Hicks *et al.* [43]. In deren Arbeit wird die Form der untersuchten Tragflügelprofile durch ein Polynom angenähert und die Koeffizienten der Polynome dienen als Designvariablen. Nachteilig an dieser Annäherung ist, dass sich bei Änderung einer Designvariable auch die Zustandsvariablen ändern, sodass nach jedem Änderungsschritt eine neue Strömungssimulation nötig ist. Mit steigender Zahl der Freiheitsgrade steigt die Zahl der benötigten Simulationen und damit der Bedarf an Rechenzeit stark an. Ein weiterer Nachteil entsteht bei der Modellierung komplizierter Geometrien, insbesondere komplexer 3D-Modelle, mit Hilfe von Polynomen. Eine etablierte Methode, mit der die Freiheitsgrade reduziert werden, stellt das sogenannte adjungierte Verfahren dar.

ADJUNGIERTE FORMOPTIMIERUNG

Bei der aerodynamischen Formoptimierung auf Grundlage numerischer Simulationen handelt es sich um ein nichtlineares Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen, wobei die Nebenbedingungen durch Differentialgleichungen beschrieben werden. Diese Problemklasse wird in der Mathematik als *Optimale Steuerung* bezeichnet und die Theorie wurde im Wesentlichen von Lions [61] begründet. Die Erhaltungsgleichungen, also die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems, werden im Folgenden als primale Gleichungen bezeichnet. Durch Lösung einer adjungierten Gleichung ermöglicht die *Optimale Steuerung* indirekt die Bestimmung des Gradienten der primalen Gleichung in Abhängigkeit spezifischer Größen. Dieser Ansatz erweist sich im Hinblick auf den Rechenaufwand signifikant effizienter als zum Beispiel die Verwendung von finiten Differenzen. Des Weiteren gilt, dass ein adjungiertes Problem entweder anhand von diskreten oder kontinuierlichen

Gleichungen formuliert werden kann.

Eine diskrete adjungierte Gleichung erhält man, indem alle Terme der bereits diskretisierten primalen Gleichung mit der Variation der Parameter multipliziert werden. Die Struktur der resultierenden Gleichung hängt daher vom Diskretisierungsschema der primalen Gleichung ab. Wird die diskret adjungierte Gleichung exakt gelöst, gibt diese den exakten Gradienten der bereits diskretisierten Zielfunktion wieder. Die Genauigkeit des Verfahrens wird also durch die Diskretisierung der primalen Gleichung vorgegeben, da der Diskretisierungsfehler direkt auf die diskrete adjungierte Gleichung übertragen wird.

Bei der Verwendung eines kontinuierlichen Ansatzes erfolgt die Herleitung der adjungierten Gleichung aus der kontinuierlichen Formulierung der primalen Gleichung. Durch die Anwendung des Verfahrens der Lagrange-Multiplikatoren [56] (auch adjungierte Variablen genannt), wird die Variation der Zielfunktion mit der primalen Gleichung kombiniert. Aus den Variationstermen lassen sich die adjungierte Gleichung sowie deren Randbedingungen ableiten. Dieses Gleichungssystem wird anschließend diskretisiert und gelöst. Wird die kontinuierlich adjungierte Gleichung analytisch gelöst, liegt auch eine exakte Gradienteninformation vor. Bei der numerischen Lösung ist die Genauigkeit der Lösung vom Diskretisierungsfehler der adjungierten Gleichung abhängig.

Zusätzliche Fehler entstehen bei beiden Ansätzen durch numerische Einflüsse (systematische Fehler) des jeweiligen numerischen Verfahrens. Ein Vergleich zwischen diskret und kontinuierlich adjungierten Vorgehensweisen findet sich bei Nadarajah *et al.* [74]. In der Arbeit wird die Genauigkeit der ermittelten Gradienteninformation verglichen. Als Testfall dienen hier die Widerstandsreduktion und die Reduktion des Überschallknalls bei der Umströmung eines Tragflügelprofils. Der Vergleich sowie eine weitere Arbeit des Autors [75] zeigen, dass die resultierenden Gradiententerme bei Betrachtung aller Fehlerquellen der Methoden ähnlich genau bestimmt werden. Ein weiterer Unterschied zwischen der diskreten und kontinuierlichen Formulierung besteht in der Implementierung des Verfahrens. Im diskreten Fall können Verfahren aus dem Bereich des *automatischen Differenzierens* (siehe dazu z.B. Rall [86]) zum Einsatz kommen, was die Implementierung erheblich vereinfacht. Jedoch muss die adjungierte Gleichung für jede Problemstellung neu hergeleitet werden. Die Herleitung einer kontinuierlich adjungierten Gleichung ist dabei umfangreicher und komplexer als bei der entsprechenden diskreten Gleichung. Wurde die kontinuierlich adjungierte Gleichung jedoch einmal hergeleitet, können damit verschiedene

1 Einleitung

Problemstellungen gelöst werden. Dafür ist nur der Austausch der Zielfunktion in der abgeleiteten Gleichung nötig. Da in der vorliegenden Arbeit verschiedene Zielfunktionen und deren Wechselwirkungen miteinander untersucht werden, wird in dieser Arbeit das kontinuierliche Verfahren eingesetzt.

Pironneau [84] wendet das Verfahren der *Optimalen Steuerung* erstmals auf Problemstellungen im Bereich der Fluidodynamik an. Es werden Strömungsprobleme behandelt, die durch elliptische Differentialgleichungen beschrieben werden. Die Grundgleichungen der Problemstellungen werden dabei mit finiten Elementen diskretisiert. Am Beispiel der Potentialströmung durch eine quaderförmige Düse wird eine Zielfunktion definiert, die eine vorgeschriebene Luftgeschwindigkeit in vorgeschriebenen Bereichen fordert. Pironneau kann hier durch die *Optimale Steuerung* verschiedene Geometrien erzeugen, die genau die Forderung der Zielfunktion erfüllen. Des Weiteren wird ein zweidimensionales Flügelprofil betrachtet, dessen Umströmung mit einer Stromfunktion beschrieben wird. Die Form des Profils kann dahingehend optimiert werden, dass eine Ablösung an der Hinterkante verhindert wird. Durch diese Arbeit wird eine völlig neue Möglichkeit zum Entwurf von technischen Vorrichtungen mit definierten, aerodynamischen Eigenschaften beschrieben. Im Bereich der numerischen Strömungsmechanik (CFD) mittels finiter Volumen leistet Jameson [44, 45] die Pionierarbeit zum Einsatz der adjungierten Gleichungen. In den Arbeiten wird erstmals ein Kontrollproblem auf Grundlage der Euler-Gleichungen betrachtet. Jameson wendet das Verfahren der *Optimalen Steuerung* auf strömungsphysikalische Fragestellungen an und präsentiert eine kontinuierliche Formulierung des adjungierten Verfahrens. In den Arbeiten werden transsonische Umströmungen von Flügelprofilen auf Grundlage der Potential- und der Euler-Gleichungen betrachtet. Durch die gezielte Steuerung der Designvariablen können Flügelquerschnitte generiert werden, die eine vorgeschriebene Druckverteilung auf der Profiloberfläche aufweisen. Die Erweiterung auf reibungsbehaftete Strömungen erfolgt ebenfalls durch Jameson [46]. Indem die Navier-Stokes-Gleichungen als Erhaltungsgleichungen verwendet werden, ist es möglich, dreidimensionale Flügelprofile hinsichtlich des Verhältnisses von Auftrieb und Reibungswiderstand zu optimieren. Die Ergebnisse zeigen ein verändertes Flügelprofil, das eine Widerstandsreduktion von ca. 7% bewirkt.

Die Entwicklung eines diskreten adjungierten Ansatzes macht durch die Arbeiten von Giles *et al.* [36] erhebliche Fortschritte, in denen die Herleitung der diskreten

adjungierten Gleichungen mit Fokus auf die Formulierung der Randbedingungen beschrieben wird. Dabei wird gezeigt, dass die Randbedingungen an einer Wand eine Funktion der linearisierten Druckvariation (reibungsfreier Fall) bzw. eine Funktion der Normal- und Tangentialkräfte an der Wand (viskoser Fall) sein müssen, um ein korrekt gestelltes Problem zu erhalten. Ebenfalls von Giles *et al.* [37] stammt eine Einführung zu aerodynamischen Entwürfen mittels adjungierter Verfahren, in der der Aufbau der Gleichungen und Randbedingungen diskutiert wird. Abschließend werden in der Arbeit beispielhaft vorangegangene Arbeiten diskutiert, in denen beim Entwurf eines Flugzeuges die adjungierten Verfahren zum Einsatz kommen. So berichten Elliot *et al.* [28] von einer Reduktion des quadratischen Mittelwertes von einer vordefinierten Druckverteilung um 75%. Des Weiteren erzielen Reuther *et al.* [88] eine Reduktion des Reibungskoeffizienten eines Geschäftsreiseflugzeugs für verschiedene Flugszenarien um 15% bzw. 23%.

Ein zentraler Aspekt der vorliegenden Arbeit ist die Formoptimierung von Luftauslassgeometrien von Flugzeugkabinen. Um eine Formoptimierung zu realisieren, ist es nötig, die zu untersuchende Geometrie zu parametrisieren und die verwendeten Parameter als Designvariablen zu nutzen. Erste Ansätze für eine adjungierte Formoptimierung finden sich bei Iollo *et al.* [21], durch die eine quasi eindimensionale Lavaldüse hinsichtlich einer homogenen Druckverteilung entlang der Abszisse optimiert wird. Als Transportgleichungen werden die Euler-Gleichungen verwendet, auf deren Grundlage eine kontinuierlich adjungierte Formulierung abgeleitet wird. Um die Form der Düse zu parametrisieren, wird eine generische Funktion in Abhängigkeit von Form-Koeffizienten verwendet. Die Form der Düse soll zu einer vorher definierten Druckverteilung führen. Das Vorgehen wird für den Fall ohne auftretende Schockwelle und mit auftretender Schockwelle demonstriert. Ein Nachteil des angewendeten Verfahrens ist, dass die Parametrisierung mit vergleichsweise einfachen Funktionen bei der Modellierung komplexer Geometrien schnell an ihre Grenzen stößt. Zusätzlich ist die Zahl der Freiheitsgrade durch die Anzahl der Form-Koeffizienten begrenzt.

Eine Erweiterung auf komplexe Geometrien findet sich bei Reuther *et al.* [87, 88], die in ihrer Arbeit ebenfalls die Euler-Gleichungen als Transportgleichungen verwenden und eine kontinuierlich adjungierte Formulierung ableiten. Als Testfall dient eine Flugzeugkonfiguration, welche zur Formvariation mit mehreren Hicks-Henne-Funktionen angenähert wird. Aufgrund der steigenden Komplexität wird der

1 Einleitung

Optimierungsalgorithmus für die Verwendung von Parallelrechnern ausgelegt. In dieser Arbeit kann der Reibungsbeiwert der Flugzeugkonfiguration für verschiedene Flugszenarien zwischen 15% und 23% reduziert werden.

Nielsen *et al.* [79] verwenden einen diskret adjungierten Ansatz, der auf der Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS-Gleichungen) basiert. Als Testfall dienen zweidimensionale Flügelprofile, welche durch B-Splines definiert sind. Durch den Optimierungsalgorithmus werden die Koeffizienten der Splines variiert, um den Auftrieb zu maximieren bzw. den Strömungswiderstand zu minimieren. Mit diesem Ansatz wird eine Reduzierung des Reibungswiderstandes um 43% gezeigt.

Ein weiterer Ansatz wird von Othmer [80] präsentiert, der auf Grundlage der RANS-Gleichungen eine kontinuierlich adjungierte Formulierung vorstellt. Zusätzlich spezialisiert er sich auf geführte Strömungen (*ducted flows*). Für die Optimierung dienen alle Oberflächenpunkte der räumlichen Diskretisierung als Designvariablen, für die Oberflächensensitivitäten bestimmt werden. Die Sensitivitäten entsprechen dabei einer Verschiebung des betreffenden Punktes in oberflächennormaler Richtung. Dieser Ansatz basiert auf einer Idee von Pironneau [84]. Er ermöglicht eine starke Erhöhung der Zahl der Freiheitsgrade für die Formvariation. Als Testfall wird ein S-förmiges Segment eines Luftkanals verwendet und hinsichtlich des Druckverlustes im Kanal optimiert. Das Ergebnis ist eine Sensitivitätsverteilung, die die neue, optimale Form des Kanals anzeigt. Eine Methode zum Generieren der neuen Geometrie sowie eine Strömungssimulation in der optimierten Geometrie und der Vergleich mit der Ausgangsgeometrie werden allerdings nicht geliefert.

Alle gezeigten Ansätze liefern eine Art Sensitivitätsverteilung, die zu einer neuen, optimalen Geometrie führen. Unabhängig davon, ob die Sensitivitäten für die Koeffizienten einer Funktion oder Verschiebung eines Oberflächenpunktes definiert sind, muss die veränderte Form der Oberfläche noch auf das Rechennetz übertragen werden. Lohner *et al.* [62] und Robinson *et al.* [91] verwenden CAD-Modelle und verknüpfen die berechneten Sensitivitäten mit den Parametern einer CAD-Umgebung. Da ein Großteil der CAD-Software kommerzieller Art ist, kann der Anwender keinen direkten Einfluss auf die Parametrisierung nehmen. Die CAD-Software muss daher als eine art *Black Box* verwendet werden. Um dieses Problem zu umgehen, kann das verwendete Rechennetz auch direkt verformt werden. Wang *et al.* [106] interpolieren die Verschiebungen am Rand eines Rechengebietes entlang der Netzlinien auf die

innenliegenden Punkte des Netzes. Dieses Verfahren der Transfiniten Interpolation lässt sich nur auf strukturierte Netze anwenden. Bei der Betrachtung realitätsnaher Geometrien ist jedoch meist die Verwendung unstrukturierter Gitter notwendig. Batina [2] bildet die Punkt-zu-Punkt-Verbindung zweier benachbarter Netzknoten durch eine lineare Feder ab. Diese Feder-Analogie eignet sich auch für die Deformation von unstrukturierten Gittern. Die Verformung erweist sich jedoch als wenig robust, wie bei Blom [6] gezeigt wird. Um die Methode zu verbessern, ersetzt Farhat *et al.* [29] die lineare Feder durch eine Torsionsfeder. Sederberg *et al.* [93] betten das zu verformende Objekt in eine Box, welche dann stellvertretend für das Objekt verformt wird. Diese Freiform-Deformation ist jedoch in der Zahl der Freiheitsgrade begrenzt.

In der vorliegenden Arbeit soll daher das Rechenetz auf Grundlage der ermittelten Sensitivitäten verformt werden, um so die größtmögliche Anzahl an Freiheitsgraden zu ermöglichen. Bei der Netzdeformation auf Grundlage von radialen Basisfunktionen ist es möglich, die Verformungen am Rand auf die internen Netzknoten zu interpolieren. Radiale Basisfunktionen sind ein weit verbreitetes Werkzeug bei der Interpolation verstreuter Daten, wie bei Buhmann [11] und Wendland [107] gezeigt ist. Ein Verfahren für eine Netzverformung mit radialen Basisfunktionen wird von de Boer *et al.* [18] vorgestellt.

Ein weiterer Aspekt, der in der vorliegenden Arbeit verfolgt wird, ist die Behandlung mehrerer Zielfunktionen. Die sogenannte Vektor- oder Pareto-Optimierung ist bereits Bestandteil zahlreicher Arbeiten und Lehrbücher und weist dabei ein sehr breites Anwendungsspektrum auf. Beispielhaft seien hier Vira *et al.* [102], Marler *et al.* [65], Deb [20] und Ehrgott [26] genannt.

Nachdem die Optimierung in der Aerodynamik einen wachsenden Stellenwert besitzt, steigt auch die Bedeutung der Pareto-Optimierung in diesem Fachgebiet. Periaux *et al.* [83] verwenden beispielsweise genetische Algorithmen, um die Ausgangsgeometrie eines umströmten Tragflügels so zu verändern, dass der Auftriebskoeffizient maximiert wird. Dabei sollen der Vorflügel, der Hauptflügel und die Tragflächenhinterkantenklappe separat optimiert werden. Die einzelnen Lösungen werden so kombiniert, dass der Wert der Gesamtkonfiguration optimiert wird. Die Arbeit von Mantel *et al.* [64] hat das Ziel, ein Tragflügelprofil dahingehend zu optimieren, dass die Reflexion von auftreffenden Radarwellen minimiert wird. Hierfür wird der Tragflügel für zwei verschiedene Szenarien optimiert, in denen der Einfallswinkel

1 Einleitung

der Wellen unterschiedlich ist. In Mantels Arbeit wird ein Kompromiss gesucht, der als Pareto-Problem für beide Einfallswinkel eine Verbesserung darstellt. In beiden genannten Arbeiten werden die Zielfunktionen kombiniert und die Wichtungsfaktoren variiert, bis sich ein Gleichgewicht entsprechend den Gesetzen der Spieltheorie einstellt. Ausführungen dazu finden sich bei Wang *et al.* [104]. Weitere Anwendungen finden sich bei Quagliarella *et al.* [85], in deren Arbeit die Auslegung von Flügelprofilen hinsichtlich mehrerer Zielfunktion von evolutionären Algorithmen gesteuert wird. Dabei soll der Auftriebskoeffizient maximiert und die Abweichung des Nickmoments von einem definierten Wert minimiert werden. Als Ergebnis wird die Pareto-Front der beiden Zielfunktionen präsentiert. In einem zweiten Beispiel soll der Auftriebskoeffizient maximiert und der Widerstandsbeiwert für Schockwellen minimiert werden. Auch hier wird die Pareto-Front des Optimierungsproblems präsentiert. Ein weiteres Beispiel ist die Arbeit von Zingg *et al.* [112], in der die Leistungsfähigkeit von genetischen Algorithmen mit der Leistungsfähigkeit von Gradienten-basierten Algorithmen anhand der jeweils ermittelten Pareto-Fronten verglichen wird. Der Autor kann zeigen, dass beide Verfahren zuverlässig gegen das gleiche Optimum konvergieren.

Ein verbreitetes Verfahren, um mehrere Zielfunktionen zu kombinieren, ist die Methode der gewichteten Summe, in welchem die verschiedenen Zielfunktionen zu einer einzelnen kombiniert werden. Mehr Details über die Methode der gewichteten Summe bietet die Arbeit von Marler *et al.* [66]. Nemeč *et al.* [77] stellen einen Algorithmus zur Formoptimierung von Tragflügelprofilen vor. Dieser Algorithmus nutzt die Methode der gewichteten Summe, um die Pareto-Front für die Zielfunktionen *maximaler Auftrieb* und *minimaler Reibungswiderstand* für verschiedene Reynolds- und Machzahlen zu bestimmen. Dagegen vergleichen Zingg *et al.* [112] ein adjungiertes Verfahren zur Minimierung einer kombinierten Zielfunktion mit einem genetischen Verfahren. An verschiedenen Beispielen der aerodynamischen Formoptimierung zeigen sie, dass beide Verfahren gegen das gleiche Ergebnis konvergieren, wobei der genetische Algorithmus etwa die 5- bis 200-fache Anzahl an Funktionsauswertungen benötigt. Zudem stellen Zhang *et al.* [110] eine adaptive Methode der gewichteten Summe vor, um multidisziplinäre Vektoroptimierungsprobleme zu lösen. Desweiteren zeigen Buckley *et al.* [10] die Formoptimierung eines Tragflügelprofils. Die Autoren verwenden die Methode der gewichteten Summe, um die Zielfunktionen *minimale Reibung* und *maximaler Auftrieb* zu kombinieren und für verschiedene Flugzustände zu minimieren.

Im Bereich der adjungierten Optimierung findet die Vektoroptimierung ebenfalls Anwendung auf aerodynamische Problemstellungen. Auch hier wird in den meisten Arbeiten das Verfahren der gewichteten Summe verwendet, um die Zielfunktionen zu kombinieren. Für das Auffinden optimaler Wichtungsfaktoren können auch hier Gleichgewichte aus der Spieltheorie eingesetzt werden, wie bei Zhili *et al.* [111] gezeigt wird, indem sie detailliert die Kopplung zwischen Spieltheorie und adjungierten Verfahren diskutieren. Als Anwendung dient die Optimierung eines Flügelprofils hinsichtlich der Maximierung des Auftriebskoeffizienten und der Minimierung des Reibungswiderstandes. Diese Optimierung erfolgt mit adjungierten Methoden. Um einen Kompromiss für verschiedene Flugzustände zu finden, werden die Gesetze der Spieltheorie angewendet und als Ergebnis die Pareto-Front des Problems gezeigt. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung von gradientenbasierten Verfahren. Nemeč *et al.* [77] verwenden einen gradientenbasierten *Newton-Krylow* Algorithmus um einen Tragflügel mit definierten Auftriebs- und Reibungskoeffizienten zu erhalten. Auch sie präsentieren die Pareto-Front des Problems, mit der ein Kompromiss für die Wichtung der Zielfunktionen aufgezeigt wird.

Ein weiteres Verfahren wird von de Villiers *et al.* [19] vorgestellt, bei dem eine Ansaugöffnung einer Brennkammer mittels adjungierter Topologieoptimierung verändert wird. Dabei werden die beiden Zielfunktionen Minimierung des Druckverlustes und Maximierung des Verwirbelungsgrades separat betrachtet. Die resultierenden Sensitivitätsverteilungen werden zur Laufzeit durch die Methode der gewichteten Summe kombiniert. Dabei werden die Wechselwirkungen der Zielfunktionen untereinander untersucht und dargelegt.

Die angeführten Arbeiten belegen, dass auch im Bereich der Vektoroptimierung verschiedene Optimierungsalgorithmen verwendet werden können. Speziell bei Verfahren, die verschiedene Zielfunktionen kombinieren, muss jedoch beachtet werden, dass nicht die Formoptimierung, also die Variation der Designvariablen, sondern die Wichtungsfaktoren des Kombinationsverfahrens, optimiert werden. Es handelt sich also um ein geschachteltes Optimierungsproblem, in dem verschiedene Optimierungsalgorithmen kombiniert werden.

INSTATIONÄRE OPTIMIERUNG VON KANALSTRÖMUNGEN

Im zweiten Teil der Arbeit steht die Optimierung einer vollentwickelten, turbulenten Kanalströmung im Fokus, um die Anwendbarkeit der adjungierten Formoptimierung auf instationäre Strömungsprobleme zu untersuchen. Die Optimierung erfolgt

1 Einleitung

dabei auf Grundlage von Strömungsfeldern, die in Direkten Numerischen Simulationen (DNS) berechnet werden.

Die ersten umfangreichen Studien zur DNS der vollentwickelten, turbulenten Kanalströmung stammen von Kim *et al.* [51], eine Erweiterung der genannten Arbeit stammt von Moser *et al.* [72]. In der Arbeit von Kim wird eine turbulente Kanalströmung mit der Reynoldszahl $Re_\tau = 180$ untersucht und umfangreiche Statistiken ausgewertet, die mit experimentellen Daten verglichen werden. Die von Kim *et al.* gewonnenen Daten stehen als Referenzfall zur Verfügung, sodass auch in der vorliegenden Arbeit die von Kim *et al.* präsentierte Konfiguration verwendet wird, um darin die Reduzierung der Wandreibung zu untersuchen.

Das Verfahren der adjungierten Optimierung von instationären Strömungsproblemen stellt ebenfalls einen eigenständigen Forschungsbereich dar. Arbeiten zu diesem Thema werden z.B. von Economou *et al.* [25], Srinath *et al.* [97] oder Vezyris *et al.* [101] vorgestellt. Um die adjungierte Gleichung eines zeitabhängigen Problems zu lösen, wird im ersten Zeitschritt der adjungierten Simulation die Lösung des letzten Zeitschritts der primalen Simulation benötigt. Im zweiten Schritt der adjungierten Simulation wird die Lösung des vorletzten Zeitschritts der primalen Simulation benötigt usw. (vgl. dazu Cyr *et al.* [17]). Für die daraus entstehende *rückwärts gewandte Integration* sind alle instantanen Zeitfelder der primalen Simulation notwendig, woraus ein enormer Speicherbedarf resultiert. Viele Arbeiten im Bereich der instationären, adjungierten Optimierung beschäftigen sich daher mit effektiven Speicheralgorithmen (vgl. z.B. Griewank *et al.* [38], Spears *et al.* [96] und Wang *et al.* [105]).

Ein Anwendungsgebiet der zeitabhängigen Optimierung stellt die aktive Strömungskontrolle dar. Letztere kann durch Absaugen und Einblasen realisiert werden. Dieses Prinzip wird bereits in den 60er Jahren von Sparrow *et al.* [95] und Moffat *et al.* [69] vorgestellt. Durch Absaugen und Einblasen wird bei Lee *et al.* [15] die Wandreibung in einer turbulenten Kanalströmung reduziert. Dabei wird die wandnormale Geschwindigkeitskomponente an einer Stelle mit einem Abstand von $10 y^+$ von der Wand als Kontrollparameter genutzt, um an der Wand mit einer gleichgroßen, entgegengesetzten Geschwindigkeit einzublasen und abzusaugen. Die Simulationen zeigen eine Reduktion der Wandreibung um ca. 25%. Das angewendete Verfahren erfordert jedoch einen enormen Rechenaufwand, da die benötigten Geschwindigkeitsinformationen nur durch eine Direkte Numerische Simulation verfügbar sind. Bewley und Moin [3] waren die ersten, die eine *suboptimale Kontrolle*

auf turbulente Kanalströmungen angewendet haben. Dabei werden die Kontrollparameter in vergleichsweise kurzen Zeitspannen gesucht, um eine langfristige Widerstandsreduktion zu erzielen. In der Arbeit wird eine Reduktion von ca. 17% erreicht. Ebenfalls von Bewley *et al.* [4] stammt eine umfangreiche Studie zur Reduzierung der turbulenten, kinetischen Energie und des Druckgradienten durch die Anwendung eines adjungierten Verfahrens zur Steuerung des Einblasens und Absaugens. Neben der Untersuchung verschiedener Zielfunktionen, die eine Widerstandsreduktion erzielen sollen, wird von einer Relaminarisierung und einhergehender Widerstandsreduktion von ca. 50% berichtet. Eine weitere Arbeit zum Thema *suboptimale Kontrolle* stammt von Lee *et al.* [59], in der für eine praktische Anwendung an der Wand verfügbare Daten genutzt werden.

Das Ziel einer passiven Strömungskontrolle in einer Kanalströmung ist die Kontrolle einer Zielgröße durch die Veränderung der Kanalwände. Ein prominentes Beispiel sind die Riblets, also in strömungsrichtung ausgebildete Rippen, mit denen in Experimenten von Walsh [103] durch die Variation der Höhe und Breite der Riblets eine Widerstandsreduktion von bis zu 8% erreicht wird. Direkte Numerische Simulationen einer turbulenten Strömung über Riblets stammen von Choi *et al.* [14], die von einer Widerstandsreduktion um 5 – 6% berichten.

1.3 ZIELSTELLUNG

Die Ausführungen des vorigen Kapitels belegen, dass die Optimierung ein breites Anwendungsspektrum bietet. Durch das Anwachsen der verfügbaren Rechenleistung ist auch die Bearbeitung komplexer Problemstellungen möglich geworden. Während die aerodynamische Optimierung in den Anfängen meist auf vereinfachten Transportgleichungen, wie z.B. die Euler'schen Bewegungsgleichungen, basiert, ist es nun möglich, eine Optimierung auf Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen durchzuführen. In Abschnitt 2 werden die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS-Gleichungen) als Transportgleichungen vorgestellt, sowie die Herleitung des adjungierten Verfahrens auf Grundlage der RANS-Gleichungen erläutert. Durch letztere ist es möglich, auch komplexe Strömungsprobleme zu untersuchen. Ein zentrales Thema der vorliegenden Arbeit besteht in der Implementierung einer automatisierten Prozesskette zur Optimierung komplexer Geometrien. Um die hohe Anzahl an Freiheitsgraden, die durch die adjungierte Formoptimierung zur Ver-

1 Einleitung

fügung gestellt werden, effektiv nutzen zu können, wird eine Verformung mit radialen Basisfunktionen implementiert. Bereits dieser Schritt stellt eine Erweiterung des Standes der Technik dar, da in der Forschung auf diesem Gebiet das Hauptaugenmerk auf der Verbesserung der Theorie der adjungierten Optimierung lag und nicht auf der Umsetzung auf anwendungsnahe Probleme. Zudem wurde in der Vergangenheit bei der sich anschließenden Verformung häufig mit einer reduzierten Anzahl an Freiheitsgraden operiert, wodurch das Potential der adjungierten Formoptimierung nicht voll ausgeschöpft werden kann. Um eine zuverlässige und leistungsfähige Optimierungsumgebung zu entwickeln, sind folgende Arbeitsschritte durchzuführen:

- Einsatz eines Simulationswerkzeugs zur adjungierten Formoptimierung an komplexen Geometrien,
- Implementierung eines Werkzeugs zur Netzverformung auf Grundlage von radialen Basisfunktionen zur Verformung unstrukturierter Rechnernetze bei Erhaltung der Netzqualität,
- Kombination der beiden Werkzeuge zum Aufbau einer automatisierten Prozesskette.

Um die Leistungsfähigkeit der Prozesskette zu untersuchen, wird als Anwendungsfall der Kabinenluftauslass eines Passagierflugzeuges betrachtet. In der Praxis ist die Auslegung eines solchen Belüftungssystems aufgrund von spezifischen Anforderungen, wie z.B. Bauraumbeschränkungen, von der Erfahrung der Konstrukteure abhängig. Gleichwohl kann die Leistung der entworfenen Systeme durch numerische Optimierungsverfahren weiter verbessert werden. Um das Potential der Verbesserung zu demonstrieren, werden industriell relevante Problemstellungen untersucht, wobei zwei Zielfunktionen mit besonderer praktischer Relevanz ausgewählt werden. Die Fragestellungen lauten:

- Lässt sich die Homogenität der Geschwindigkeit beim Eintritt in die Kabine um mindestens 10% verbessern? Wenn ja, welche Reduzierung lässt sich darüber hinaus erreichen?
- Lässt sich der Druckverlust der Luftauslassgeometrie um mindestens 10% reduzieren? Wenn ja, welche Reduzierung lässt sich darüber hinaus erreichen?

Im ersten Teil der Arbeit steht die Entwicklung der Prozesskette sowie die Untersuchung skalarer Optimierungsprobleme im Mittelpunkt. In der Realität stehen verschiedene Zielfunktionen in Wechselwirkung zueinander, sodass sich die Optimierung einer Zielfunktion negativ oder positiv auf eine zweite Zielfunktion auswirken kann. Daher soll im zweiten Teil der Arbeit die simultane Optimierung mehrerer Zielfunktionen untersucht werden. Auch hier ist die Anwendung auf industriell relevante Probleme von zentraler Bedeutung. Wie in Abschnitt 1.2 bereits erwähnt, gibt es bereits ein Vielzahl von Arbeiten, die sich mit vektorwertigen Optimierungsproblemen beschäftigen. Darunter befinden sich ebenfalls Arbeiten zur adjungierten Vektoroptimierung. Die am weitesten verbreitete Methode, um mehrere Zielfunktionen zu kombinieren, ist die Methode der gewichteten Summe. Sollte dabei eine Zielfunktion dominant gegenüber einer anderen sein, kann das Auffinden von geeigneten Wichtungsfaktoren eine große Herausforderung darstellen. Dieses Problem wird in Abschnitt 5 genauer diskutiert. Um das Lösungsverhalten zu verbessern, wird die Kombination der Zielfunktionen mit der Methode des gewichteten Produkts umgesetzt. Diese Methode wurde von Bridgman [9] als *product of powers* vorgestellt, bisher jedoch in der adjungierten Optimierung nicht verwendet. Als zweites wird die Kombination der ermittelten Sensitivitätsfelder aus der skalaren Optimierung in einem Nachbearbeitungsschritt vorgestellt, die in ihrer Umsetzung ein Novum darstellt. Mit dem zweiten Teil der Arbeit sollen daher folgende Fragen beantwortet werden:

- Kann die Methode des gewichteten Produkts die Dominanz einer Zielfunktion regulieren?
- Ermöglicht die vorgestellte Prozesskette, die Pareto-Front der oben genannten Zielfunktionen zu bestimmen? Und ist diese mit der Pareto-Front vergleichbar, die mit einem *state-of-the-Art* Verfahren bestimmt wurde?
- Kann die vom Autor vorgestellte Methode der Superposition von Sensitivitätsfeldern die benötigte Rechenzeit eines Optimierungsdurchlaufs signifikant reduzieren? Welche Einsparung an Rechenzeit kann damit erzielt werden?

Im dritten Teil der Arbeit steht die Widerstandsreduktion in der voll entwickelten, turbulenten Kanalströmung im Mittelpunkt. Dazu ist es notwendig, die Strömungsstrukturen detailliert vorherzusagen. Um dies zu realisieren, wird die Direkte Numerische Simulation verwendet. Da Letztere mit einem enormen Rechenaufwand einhergeht, können lediglich Problemstellungen akademischer Natur betrachtet wer-

1 Einleitung

den. Die voll entwickelte, turbulente Kanalströmung gehört dabei zu den am besten untersuchten Strömungssituationen. Da es sich um ein instationäres Problem handelt, lautet die zentrale Fragestellung des Kapitels, ob sich die vorgestellte Prozesskette zur adjungierten Formoptimierung auch auf instationäre Probleme erweitern lässt. Wenn die zugrunde liegenden Erhaltungsgleichungen eine Zeitabhängigkeit aufweisen, führt dieser Umstand zu extrem aufwändigen Simulationen. Um den Rechen- und Speicheraufwand gering zu halten, werden in der vorliegenden Arbeit die durch die Direkte Numerische Simulation vorhergesagten Strömungsfelder zeitlich gemittelt. Die Mittelungsdauer ist dabei so gewählt, dass starke Fluktuationen gedämpft werden und lediglich *Fußspuren* der fluktuierenden Strukturen in den gemittelten Feldern sichtbar bleiben. Diese Felder werden dann als zeitlich konstant betrachtet, wodurch die adjungierten Gleichungen stationär gelöst werden können. Als Anwendungsfall wird die Verminderung des Reibungswiderstands untersucht. In Kapitel 6 wird zuerst auf die nötigen Grundlagen der voll ausgeprägten, turbulenten Kanalströmung eingegangen, bevor das Optimierungsproblem genauer erläutert wird. Für eine Widerstandsreduktion spielt die Zielfunktion eine zentrale Rolle, die zunächst vorgestellt wird, um anschließend die Anwendung der adjungierten Formoptimierung auf die Kanalströmung aufzuzeigen. Da es sich bei Letzterer um ein periodisches Problem handelt, muss auch das Netzverformungswerkzeug an die periodischen Bedingungen angepasst werden. Mit diesem Kapitel sollen daher die folgenden Fragen beantwortet werden:

- Inwiefern lassen sich die Strömungsstrukturen eines instationären Strömungsproblems durch eine stationäre Optimierung beeinflussen?
- Lässt sich eine Zielfunktion definieren, um den Reibungswiderstand in der Kanalströmung zu reduzieren? Wenn ja, wie hoch ist die erreichbare Reduzierung?

Grundlagen

Da die adjungierte Formoptimierung auf einem multidisziplinären Ansatz basiert, ist es nötig, zuerst die Grundlagen darzustellen. Dabei wird nicht nur auf die mathematischen und strömungsmechanischen Grundlagen eingegangen, sondern auch das Prinzip der Lagrange-Multiplikatoren erläutert.

2.1 MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

Im folgenden Abschnitt soll auf die Grundlagen der Optimierung und der Variationsrechnung eingegangen werden.

2.1.1 ALLGEMEINES ZUR OPTIMIERUNG

Das Wort Optimum kommt aus dem Lateinischen und bedeutet soviel wie *Beste* oder *Bester* und beschreibt dabei im mathematischen Kontext den Extremwert einer vorher definierten Zielfunktion. Das Auffinden dieses Extremwerts bezeichnet man als Optimierung. Im Folgenden werden nun die verschiedenen Begrifflichkeiten definiert. Eine allgemeine Einführung in die Optimierung findet sich z.B. bei Jarre [47].

GRUNDBEGRIFFE DER OPTIMIERUNG

Zielfunktion:

Die Zielfunktion ist die Funktion, die optimiert werden soll. Das bedeutet, dass für diese ein Extremwert gefunden werden soll. Die Zielfunktion hängt von Parametern x ab, die variiert werden können. Die Optimierungsaufgabe stellt sich also wie folgt dar:

$$\text{minimiere } J(x) \text{ oder maximiere } J(x). \quad (2.1)$$

2 Grundlagen

Dabei kann die Zielfunktion verschiedenste Formen annehmen, wie z.B. den Flächeninhalt eines Rechtecks in der elementaren Extremwertaufgabe oder das Verhältnis von Auftrieb und Widerstand in der Aerodynamik.

Jedes Minimierungsproblem kann auch als Maximierungsproblem definiert werden und umgekehrt. In der vorliegenden Arbeit wird fortan von Optimierungsproblemen gesprochen, auch wenn in diesem Kontext ausschließlich Minimierungsprobleme gemeint sind.

Optimierung mit Nebenbedingungen:

Bei der Suche nach Parametern, die $J(x)$ minimieren, sind im praktischen Gebrauch meist die Parameter von Bedeutung, die zusätzlich Nebenbedingungen erfüllen. Diese Nebenbedingungen können z.B. Gleichheitsbedingungen der Form $\mathcal{R}(x) = 0$ oder Ungleichheitsbedingungen der Form $\mathcal{R}(x) \leq 0$ sein. Das Problem aus Gleichung (2.1) würde dann z.B.

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } J(x), \\ &\text{sodass } \mathcal{R}(x) = 0 \text{ gilt} \end{aligned} \tag{2.2}$$

lauten. Die Parameter, welche alle Nebenbedingungen erfüllen, bilden zusammen die zulässige Menge.

Wenn die Zielfunktion und die Nebenbedingungen in linearer Form auftreten, spricht man von linearer Optimierung. Die Komplexität der Optimierungsaufgabe erhöht sich, wenn die Zielfunktion und/oder die Nebenbedingung nicht linear ist. In diesem Fall spricht man von nicht linearer Optimierung. Die Problemstellungen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, fallen in diese Klasse der nicht linearen Optimierungsprobleme.

Lokale und globale Optimierung:

Wenn $J(x)$ eine beliebige, nicht lineare Funktion darstellt, treten im Verlauf der Funktion lokale Minima und Maxima auf. Sucht man ein lokales Minimum/Maximum, spricht man von lokaler Optimierung, bei der Suche nach dem globalen Minimum/Maximum spricht man hingegen von globaler Optimierung.

Designvariablen:

Als Designvariablen bezeichnet man die Parameter, die während der Optimierung verändert werden. Bei der Extremwertaufgabe der Maximierung eines Rechtecks entsprechen die Designvariablen den Kantenlängen. Bei der Optimierung des Verhältnisses von Auftrieb und Widerstand eines Flügelprofils entspräche die Form des Flügels den Designvariablen.

OPTIMIERUNGSVERFAHREN

Zur Lösung der Optimierungsprobleme stehen diverse Verfahren zur Verfügung, wobei jedes Teilgebiet der Optimierung mit speziell abgestimmten Verfahren arbeitet. Eine Übersicht über verschiedene Methoden findet sich zum Beispiel bei Fletcher [32]. Auch im Zusammenhang mit der numerischen Strömungsmechanik wurde bereits eine große Anzahl an Optimierungsverfahren eingesetzt, wie bei Thévenin [99] aufgeführt ist.

Das in der vorliegenden Arbeit verwendete Verfahren baut auf die Variationsrechnung auf, in der die Zielfunktion ein Funktional ist, also von einer Funktion und deren Ableitungen abhängt. Im nächsten Abschnitt wird daher nur auf die Variationsrechnung genauer eingegangen, für andere Optimierungsverfahren sei an dieser Stelle auf die bereits erwähnte Literatur verwiesen.

2.1.2 VARIATIONSRECHNUNG

Der Ursprung der Variationsrechnung liegt in einer Aufgabe, die Johann Bernoulli 1692 in der Leipziger Zeitschrift *Acta Eruditorum* veröffentlichte [35]. Die Aufgabe bestand im Auffinden einer Kurve zwischen zwei Punkten, die im Schwerfeld der Erde die kürzeste Fallzeit besitzt. Diese Aufgabe wurde als das Brachistochronenproblem bekannt. Unter den Einsendern richtiger Lösungen waren dabei Namen wie Isaak Newton, Gottfried Wilhelm Leibnitz, Guillaume de L'Hospital und Jakob Bernoulli. Letzterer schlug einen neuartigen Lösungsweg ein, den Leonard Euler

2 Grundlagen

später als Variationsrechnung bezeichnete.

In diesem Abschnitt soll ein kurzer Überblick über die für die vorliegende Arbeit wichtigsten Punkte gegeben werden. Die Herleitung der Gleichungen orientiert sich am Skript einer Vorlesung von Prof. em. Ulrich Gabbert [34], die der Autor während seines Studiums hörte. Da sich bereits viele Lehrbücher mit der Variationsrechnung beschäftigt haben, sei an dieser Stelle auch auf die Fachliteratur verwiesen, z.B. Funk [33] oder Bolza [7].

Im Unterschied zur elementaren Extremwertaufgabe, bei der die Extremwerte einer Funktion gesucht werden, beschäftigt sich die Variationsrechnung mit dem Finden von Extremwerten eines Funktionals, also einer Funktion, die wiederum von Funktionen abhängt. Funktionale treten häufig in Integralform auf und enthalten Funktionen und deren Ableitungen.

$$J\{y(x)\} = \int_{x=a}^{x=b} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \rightarrow \text{Extremwert} \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet $y(x)$ die gesuchte Funktion, die die Randbedingungen $y(x = a) = y_a$ und $y(x = b) = y_b$ erfüllt. Die Funktion $F(\dots)$ wird als Grundfunktion bezeichnet und als bekannt vorausgesetzt. Mit dem Argument in geschweiften Klammern $J\{\dots\}$ soll die Abhängigkeit des Funktionals von einer Funktion ausgedrückt werden.

Aus der Differentialrechnung ist bekannt, dass Funktionen häufig dann ein Minimum bzw. Maximum annehmen, wenn die Ableitung der Funktion verschwindet. Analog dazu kann man den Extremwert eines Funktionals ermitteln, wenn die Ableitung des Funktionals J verschwindet. Hierbei handelt es um die Ableitung des Funktionals nach einer Funktion. Um die Lösung zu finden, werden zunächst variierte Lösungen der Form

$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \cdot \eta(x) \quad (2.4)$$

mit dem Schwellenwert ϵ betrachtet. Die Funktion $\eta(x)$ hat dabei an den Intervallgrenzen die gleichen Randbedingungen wie $y(x)$. Damit ist sichergestellt, dass alle Vergleichsfunktionen diese Randbedingungen erfüllen.

Mit der so erzeugten Kurvenschar wird das Integral (2.3) zu

$$\begin{aligned} J\{\bar{y}(x)\} = J(\epsilon) &= \int_a^b F(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \dots) dx \\ &= \int_a^b F(x, y + \epsilon\eta(x), y' + \epsilon\eta'(x), y'' + \epsilon\eta''(x), \dots) dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Das Integral aus Gleichung (2.5) nimmt seinen Extremwert für $\epsilon = 0$ an, da $J\{y(x)\}$ per Definition einen Extremwert des Funktionals darstellt. Nach der elementaren Extremwerttheorie muss daher die erste Ableitung Null sein, d.h.

$$\left. \frac{dJ(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (2.6)$$

Mit Gleichung (2.5) folgt daraus

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_a^b [F(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \dots)] \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon}, \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \epsilon}, \frac{\partial F}{\partial \bar{y}''} \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \epsilon}, \dots \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Für die Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial \bar{y}}$ und $\frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon}$ sowie deren Ableitungen gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} &= \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \bar{y}'} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \\ \frac{\partial F}{\partial \bar{y}''} &= \frac{\partial F}{\partial y''} \frac{\partial y''}{\partial \bar{y}''} = \frac{\partial F}{\partial y''}, \quad \dots \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \epsilon} &= \eta, \\ \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \epsilon} &= \eta', \\ \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \epsilon} &= \eta'', \quad \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

2 Grundlagen

Wendet man diese Regeln auf Gleichung (2.5) an, ergibt sich

$$\left. \frac{dJ}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = J(\epsilon) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' + \frac{\partial F}{\partial y''} \eta'' + \dots \right] dx = 0. \quad (2.9)$$

Schreibt man Gleichung (2.4) in der Form

$$\epsilon \cdot \eta(x) = \bar{y}(x) - y(x) = \delta y(x), \quad (2.10)$$

kann durch die Einführung des Variationssymbols δ Gleichung (2.9) mit ϵ multipliziert und Gleichung (2.10) in Gleichung (2.9) eingesetzt werden. Man erhält

$$\delta J = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' + \dots \right] dx. \quad (2.11)$$

Man nennt δy die Variation von y , was sich bezüglich der Rechenregeln wie ein vollständiges Differential verhält. Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung [33] und anschließender partieller Integration ergibt sich daraus die Euler-Lagrange-Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \dots + (-1)^{(n)} \frac{d^n}{dx^{(n)}} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Die Lösung des Variationsproblems (2.3) ist identisch mit der Lösung einer partiellen Differentialgleichung (DGL) n -ter Ordnung. Gleichung (2.12) stellt somit eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines Extremums dar.

2.1.3 METHODE DER LAGRANGE-MULTIPLIKATOREN

Bei Problemstellungen, die mit der Variationsrechnung behandelt werden, ist es oft der Fall, dass zusätzlich zum Auffinden eines Extremums noch Nebenbedingungen \mathcal{R} erfüllt sein müssen. Wenn diese zusätzlich in Form eines bestimmten Integrals gegeben sind, spricht man von isoperimetrischen Problemen. Die Problemstellung

aus Gleichung (2.2) würde dann lauten:

$$J\{y(x)\} = \int_{x=a}^{x=b} F(x, y, y') dx \rightarrow \text{Extremwert,}$$

$$\text{sodass } \int_{x=a}^{x=b} \mathcal{R}(x, y, y') dx = K \text{ gilt.} \quad (2.13)$$

Mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren wird eine erweiterte Grundfunktion L der Form

$$L = J + \lambda \mathcal{R} \quad (2.14)$$

aufgestellt, wobei λ die Lagrange-Multiplikatoren bezeichnet. Analog zu der in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Vorgehensweise kann auch hier die Euler-Lagrange DGL aufgestellt werden. Diese lautet dann

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.15)$$

Das Funktional $J\{y(x)\}$ nimmt dann für die Lösung $y(x)$ einen Extremwert an, wobei die geforderten Nebenbedingungen \mathcal{R} stets erfüllt sind. Da das Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren den Grundbaustein des in der vorliegenden Arbeit angewandten Optimierungsverfahrens darstellt, soll im Folgenden noch etwas genauer darauf eingegangen werden.

Wenn man die Lagrange-Funktion mit zwei beliebigen Funktionen $J(x, y)$ und $\mathcal{R}(x, y)$ betrachtet

$$L(x, y, \lambda) = J(x, y) + \lambda \cdot (\mathcal{R}(x, y) - c) \quad (2.16)$$

und annimmt, dass $J(x_0, y_0)$ ein Extremum von $J(x, y)$ darstellt, dann muss ein λ_0 existieren, sodass (x_0, y_0, λ_0) einen Extremwert von $L(x, y, \lambda)$ darstellt. Die Lagrange-Multiplikatoren agieren daher als eine Art Strafterm, die Extremwerte von $J(x, y)$ bestrafen, die nicht zur zulässigen Menge gehören, also die Nebenbedingungen verletzen. Betrachtet man das Problem geometrisch, indem man die Funktion $J(x, y)$ zusammen mit der Nebenbedingung $\mathcal{R}(x, y) = c$ in einem Diagramm darstellt, können die

2 Grundlagen

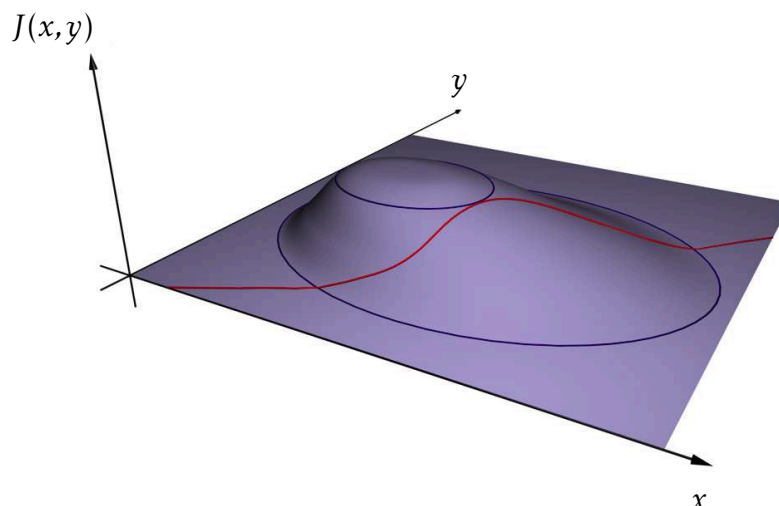


Abb. 2.1: Darstellung der Grundfunktion $J(x, y)$ mit Höhenlinien in blau, sowie der Nebenbedingung $\mathcal{R}(x, y) = c$ (rote Linie)

Höhenlinien der Funktion $J(x, y)$ ebenfalls dargestellt werden. Die Höhenlinie einer Funktion $J(x, y)$ zu einem Wert a beschreibt die Menge aller Punkte des Definitionsbereiches, für die $J(x, y) = a$ gilt. Wenn man nun an der Linie $\mathcal{R}(x, y) = c$ entlang läuft, trifft man auf verschiedene Höhenlinien von $J(x, y)$. Man sucht jedoch ausschließlich Punkte, an denen sich $J(x, y)$ nicht ändert, denn an diesen Punkten ist der Gradient von J Null, was auf einen Extremwert hinweist. Dies ist der Fall, wenn eine Höhenlinie $J(x, y) = a$ tangential zu $\mathcal{R}(x, y) = c$ verläuft und bedeutet, dass die Gradienten beider Funktionen an dieser Stelle parallel sind. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Wie bereits vorher erwähnt, hat das Funktional (2.16) einen Extremwert, wenn der Gradient verschwindet.

$$\nabla_{x,y} L = \nabla_{x,y} J(x, y) + \lambda \nabla_{x,y} \cdot (\mathcal{R}(x, y) - c) = 0 \quad (2.17)$$

Die Grundfunktion und Nebenbedingungen sind dann tangential zueinander, wenn deren Gradienten gleich sind. Aus Gleichung (2.17) ergibt sich

$$\nabla_{x,y} J(x, y) = -\lambda \cdot \nabla_{x,y} \cdot (\mathcal{R}(x, y) - c). \quad (2.18)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren λ dienen also als Skalierungsfaktoren, da die Gradienten zwar in die gleiche Richtung zeigen, jedoch eine unterschiedliche Länge besitzen können.

2.2 TRANSPORTGLEICHUNGEN

Da sich die vorliegende Arbeit mit aerodynamischer Optimierung beschäftigt, müssen die Erhaltungsgrößen, also das Geschwindigkeitsvektorfeld und das Druckfeld bekannt sein. Um die benötigten Strömungsfelder vorherzusagen, werden die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG) gelöst. Auf eine Herleitung soll hier verzichtet werden, da sich bereits viele Lehrbücher mit diesem Thema beschäftigt haben (siehe dazu z.B. Landau [57]). Die Herleitung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen wird kurz erläutert, da diese als Nebenbedingung für die Optimierung verwendet werden.

2.2.1 DIE NAVIER-STOKES-GLEICHUNGEN

Da sich die vorliegende Arbeit mit Strömungen bei geringen Geschwindigkeiten beschäftigt, kann von einer inkompressiblen Strömung ausgegangen werden. Dies ist der Fall, wenn die Machzahl $Ma < 0,3$ ist [41, Seite 285]. Daher bilden die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Fluide den Ausgangspunkt. Die Gleichungen werden in koordinatenfreier Vektorschreibweise als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{F} - \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2.19a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.19b)$$

beschrieben. Die Navier-Stokes-Gleichungen setzen sich dabei aus der Impulsgleichung (2.19a) und der Kontinuitätsgleichung (2.19b) zusammen. Dabei sind die Zustandsgrößen Geschwindigkeit als \mathbf{u} und der spezifische Druck als $p = \frac{p^*}{\rho}$ dargestellt, wobei der Druck mit p^* bezeichnet ist. Die spezifische Volumenkraft wird als $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}^*}{\rho}$ beschrieben, wobei \mathbf{F}^* die Volumenkraft darstellt. Die kinematische Viskosität ist definiert als $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Die Gleichungen (2.19b) und (2.19a) stellen somit die allgemeinen Bewegungsgleichungen für inkompressible Fluide dar.

Theoretische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen existieren nur für Sonderfälle unter verschiedenen Annahmen. Solche Sonderfälle sind meist ebene und axial-symmetrische Strömungen. Eine Übersicht dazu findet sich z.B. bei Schlichting [92]. Um die Gleichungen für praktische Anwendungen zu lösen, werden daher numerische Verfahren verwendet, um das Problem diskret zu betrachten. Als Diskretisierungsverfahren kommen dabei neben Finiten-Differenzen-, Finiten-Elemente- und

2 Grundlagen

Finiten-Volumen-Verfahren auch Spektralmethoden zum Einsatz. Werden die Gleichungen (2.19a) und (2.19b) direkt gelöst, spricht man von Direkter Numerischer Simulation (DNS), wobei darauf geachtet werden muss, dass alle Strömungsskalen räumlich und zeitlich aufgelöst werden. Die kleinsten Skalen werden als Mikroskalen von Kolmogorov [54] bezeichnet und für deren Auflösung ist eine sehr feine Diskretisierung in Raum und Zeit nötig. Bei der Untersuchung komplexer Objekte führt dies zu einem Rechenaufwand, der die verfügbare Rechenleistung schnell übersteigt. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, besteht die Möglichkeit, verschiedene Strömungsstrukturen zu modellieren und damit die Verwendung einer größeren Diskretisierung zu ermöglichen. Dabei gehören die Large Eddy Simulation (LES) und die Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) zu den am weitesten verbreiteten Methoden der Turbulenzsimulation. Bei der Herleitung der RANS-Gleichungen werden die Erhaltungsgrößen in einen Mittelwert und einen um diesen Mittelwert schwankenden Wert aufgeteilt. Durch die Mittelung dieser Schwankungsgrößen entstehen im Gleichungssystem neue Terme mit zusätzlichen Unbekannten. Um das nun unterbestimmte Gleichungssystem zu lösen, wird ein Turbulenzmodell verwendet, das die unbekanntenen Terme der Schwankungsgrößen beschreibt. So werden bei der LES großskalige Strukturen direkt berechnet, während kleinskalige Strukturen ebenfalls modelliert werden. Eine Übersicht über den Zusammenhang von Rechenaufwand und Grad der Modellierung ist in Abbildung 2.2 für die genannten Lösungsverfahren gegeben. Eine grundlegende Einführung zu den verschiedenen Lösungsverfahren findet sich z.B. bei Ferziger [31].

2.2.2 DIE REYNOLDS-GEMITTELTEN NAVIER-STOKES-GLEICHUNGEN

Da in der vorliegenden Arbeit komplexe Geometrien untersucht werden sollen, werden zur Vorhersage der Strömungsfelder die RANS-Gleichungen gelöst, deren Grundprinzip daher im Folgenden erläutert werden soll.

Bei einer turbulenten Strömung sind Druck und Geschwindigkeit unregelmäßigen Schwankungen unterlegen. Um den Betrag der Schwankung zu ermitteln, lassen sich die Zustandsgrößen der Strömung durch einen Superpositionsansatz von Reynolds [89] aufteilen. Wenn der Mittelwert einer beliebigen Größe a als \bar{a} und der Schwankungswert als a' bezeichnet wird, lassen sich die Geschwindigkeit und der Druck

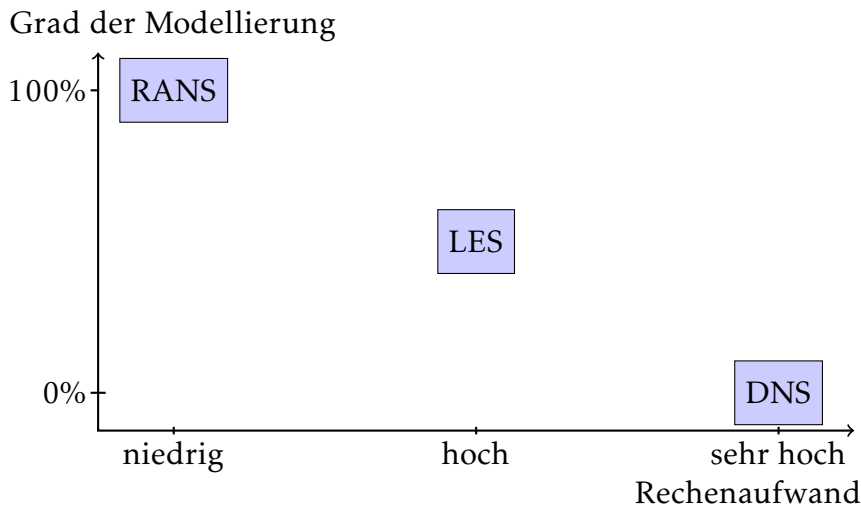


Abb. 2.2: Übersicht zum Verhältnis des Rechenaufwandes und dem Grad der Modellierung bei den verbreitetsten Lösungsverfahren der Navier-Stokes-Gleichungen.

als

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad \text{und} \quad p = \bar{p} + p', \quad (2.20)$$

darstellen. Die Mittelwerte werden in einem Zeitintervall von t_0 bis t_1 über

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u} \, dt \quad \text{und} \quad \bar{p} = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} p \, dt \quad (2.21)$$

gebildet. Das Zeitintervall sollte dabei groß genug gewählt werden, sodass die Mittelwerte von der Zeit unabhängig sind. Somit sind auch die zeitlichen Mittelwerte der Schwankungsgrößen gleich Null und es gilt

$$\mathbf{u}' = 0 \quad \text{und} \quad p' = 0. \quad (2.22)$$

Wenn man nun die superpositionierten Größen aus Gleichung (2.20) in die Kontinuitätsgleichung (2.19b) einsetzt, erhält man

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') = \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \mathbf{u}'. \quad (2.23)$$

Da bei der zeitlichen Mittelung die Schwankungsgrößen verschwinden, wird die Kontinuitätsgleichung sowohl von den Mittelwerten der Geschwindigkeit als auch

2 Grundlagen

von den Schwankungsgrößen erfüllt. Es gilt also

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \wedge \quad \nabla \mathbf{u}' = 0. \quad (2.24)$$

Als Nächstes erfolgt die Betrachtung der Impulsgleichung (2.19a), wobei sich durch das Einsetzen der superpositionierten Größen

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')}{\partial t} + ((\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \nabla)(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') = \mathbf{F} - \nabla(\bar{p} + p') + \nu \Delta(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \quad (2.25)$$

ergibt. Bei der anschließenden Bildung des zeitlichen Mittelwertes bleiben die in den überstrichenen Größen quadratischen Terme unverändert. Die in den Schwankungsgrößen linearen Glieder und die gemischten Terme verschwinden wegen Gleichung (2.22), die in den Schwankungsgrößen quadratischen Glieder bleiben jedoch erhalten. Mit der gemittelten Kontinuitätsgleichung (2.24) lässt sich die Gleichung (2.25) zu den Reynolds-gemittelten-Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Fluide vereinfachen. Da durch die zeitliche Mittelung auch der Einfluss des zeitabhängigen Terms verschwindet, erhält man die Impulsgleichung für eine im zeitlichen Mittel stationäre Strömung.

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F} - \nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - \nabla \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \quad (2.26a)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.26b)$$

Die Gleichungen (2.26) stellen ein Gleichungssystem dar, welches von den gemittelten Zustandsgrößen $\bar{\mathbf{u}}$ und \bar{p} abhängt. Zusätzlich bleiben im rechten Term noch Anteile der Schwankungsgrößen zurück, da diese durch die zeitliche Mittelung im Allgemeinen nicht verschwinden und somit für das Gleichungssystem zusätzliche unbekannte Größen darstellen. Es handelt sich also um ein unterbestimmtes Gleichungssystem. Der Einfluss des Terms $\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}$, der auch als Reynoldsche Spannung oder turbulente Scheinspannung bekannt ist, führt dazu, dass eine turbulente Strömung stets dreidimensionale Strömungsstrukturen ausprägt. Die genaue Herleitung des Zusammenhangs zwischen der mittleren Bewegung und den von der Schwankungsbewegung verursachten scheinbaren Spannungen findet sich bei Schlichting [92]. Diese Spannungen haben die Form eines symmetrischen Tensors und können durch eine erhöhte Viskosität modelliert werden. Eine Möglichkeit, das Gleichungssystem zu schließen, bietet die Wirbelviskositätshypothese von Boussinesq [8]. Dabei

wird

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} = -\nu_t (\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^T) + \frac{2}{3}k\mathbf{I} \quad (2.27)$$

gesetzt, wobei ν_t die turbulente Wirbelviskosität und \mathbf{I} die Einheitsmatrix bezeichnet. Die turbulente kinetische Energie k beschreibt dabei die mittlere kinetische Energie pro Masseneinheit in den turbulenten Strömungsstrukturen und ist als

$$k = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'} \quad (2.28)$$

definiert. Mithilfe dieses Ansatzes kann der Reynoldsspannungstensor mit den Diffusionsanteilen aus Gleichung (2.26a) wie folgt zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{F} - \nabla\bar{p} + \nu\Delta\bar{\mathbf{u}} - \nabla\overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \\ (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{F} - \nabla\bar{p} + \nu\Delta\bar{\mathbf{u}} + \nabla\left[\nu_t\Delta\bar{\mathbf{u}} - \frac{2}{3}k\mathbf{I}\right] \\ (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{F} - \nabla \cdot \left[\hat{p} - \nu_{eff} (\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^T)\right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Die in Gleichung (2.29) eingeführten Modellgrößen sind dabei als

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_t \quad (2.30)$$

$$\hat{p} = \bar{p} + \frac{2}{3}k \quad (2.31)$$

definiert. Aus den Gleichungen (2.24) und (2.28) ergibt sich, dass bei der Bildung des Gradienten von \hat{p} der Term, der von der turbulenten kinetischen Energie abhängt, verschwindet. Zusammen ergeben die Gleichungen die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen für stationäre, inkompressible Strömungen.

$$(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F} - \nabla \cdot \left[\hat{p} - \nu_{eff} (\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^T)\right] \quad (2.32a)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.32b)$$

Es entsteht ein Gleichungssystem, das nur von den gemittelten Zustandsgrößen $\bar{\mathbf{u}}$ und \hat{p} und der unbekanntem Modellgröße ν_{eff} abhängt. Die Lösung dieses Gleichungssystem wird im Folgenden als primales Strömungsfeld bezeichnet.

Um ν_{eff} zu ermitteln, benötigt man den konstanten Stoffwert ν des betrachteten Fluids, sowie die in Gleichung (2.27) eingeführte turbulente Wirbelviskosität ν_t .

2 Grundlagen

Die Bestimmung der Größe ν_t kann dabei auf verschiedene Arten erfolgen. Die am weitesten verbreitete Methode ist dabei die Berechnung von ν_t als Funktion der turbulenten kinetischen Energie k und deren Dissipationsrate ε , wobei für beide eine weitere Transportgleichung gelöst wird. Es ergibt sich ein sogenanntes Zweigleichungsmodell [58].

In der Nähe einer undurchlässigen Wand unterscheidet sich die Physik der Strömung stark von der Strömung in anderen Bereichen. Es ist daher nötig, den wandnahen Bereich fein genug aufzulösen, um die viskose Unterschicht hinreichend genau bestimmen zu können. Man spricht dabei von sogenannten *low-Re*-Ansätzen. Um Rechenzeit zu sparen, ist es möglich, eine gröbere Auflösung im wandnahen Bereich zu verwenden und diesen zu modellieren (*high-Re*-Ansatz). Durch sogenannte Wandfunktionen wird das Verhalten der Geschwindigkeit, der turbulenten kinetischen Energie und der Dissipationsrate im wandnahen Bereich modelliert.

Eine ausführliche Erläuterung zur Modellierung der Turbulenz findet sich bei Wilcox [108] oder Launder [58].

2.3 ADJUNGIERTE TRANSPORTGLEICHUNGEN

Das in Abschnitt 2.1.2 eingeführte Verfahren der Lagrange-Multiplikatoren soll nun angewendet werden. Als Nebenbedingung sollen die in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen RANS-Gleichungen gelten und die Zielfunktion soll minimiert werden. Das Optimierungsproblem stellt sich also folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } J = J(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}), \\ &\text{so dass } \mathcal{R}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) = 0 \text{ gilt.} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dabei bezeichnet $\bar{\mathbf{u}}$ die mittlere Geschwindigkeit und \bar{p} den mittleren Druck. Die Nebenbedingungen sind identisch mit Gleichung (2.29)

$$(R_1, R_2, R_3)^T := (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{p} - \nabla \cdot (2 \cdot \nu_{eff} \cdot D(\bar{\mathbf{u}})) = 0 \tag{2.34}$$

$$R_4 := -\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \tag{2.35}$$

wobei der dissipative Term $\frac{1}{2}(\nabla\bar{\mathbf{u}} + (\nabla\bar{\mathbf{u}})^T)$ mit $D(\bar{\mathbf{u}})$ abgekürzt wird.

Als erstes wird die Lagrange-Funktion

$$L := J + \int_{\Omega} \lambda \cdot \mathcal{R}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \cdot d\Omega \quad (2.36)$$

aufgestellt, wobei die Lagrange-Multiplikatoren

$$\lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ q \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

als mittlere adjungierte Geschwindigkeit \mathbf{U} und mittlerer adjungierter Druck q bezeichnet werden. Ω stellt das Rechengebiet dar, also das gesamte Volumen, in dem die Strömung betrachtet wird.

Die Lösung des Variationsproblems entspricht, wie in Abschnitt 2.1.2 bereits erläutert, der Ableitung des Funktionals nach den Funktionen $\bar{\mathbf{u}}$ und \bar{p} , für welche stellvertretend die Lösung einer DGL verwendet werden kann. Um letztere zu finden, benötigt man die totale Variation von L , also die Variation nach allen veränderlichen Größen, dazu zählen auch die Designvariablen, welche in Abschnitt 2.3.2 genauer beschrieben werden.

Zunächst wird die Lagrange-Funktion mit beliebigen Designvariablen β betrachtet. Durch eine Änderung der Designvariablen ändern sich auch die Zustandsgrößen, weshalb die totale Variation durch

$$\delta L = \delta_{\beta} L + \delta_{\bar{\mathbf{u}}} L + \delta_{\bar{p}} L \quad (2.38)$$

gegeben ist. Die Variation nach der Viskosität ν_{eff} wird dabei vernachlässigt, was eigentlich nur für laminare Strömungen gültig ist. Für turbulente Strömungen stellt diese Vernachlässigung jedoch eine übliche Annäherung dar, welche als *frozen turbulence* [24] bekannt ist.

Um Gleichung (2.38) zu lösen, müssen für jede Variation einer Designvariable die Zustandsgrößen neu bestimmt werden, was der Lösung der DGL (2.32) entspricht. Dies würde einen enormen Rechenaufwand bedeuten. Wenn man nun die Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{U} und q so wählt, dass

$$\delta_{\bar{\mathbf{u}}} L + \delta_{\bar{p}} L = 0 \quad (2.39)$$

2 Grundlagen

ergibt, vereinfacht sich die totale Variation zu einer Variation nach den Designvariablen $\delta L = \delta_\beta L$. Dieses Vorgehen ist das zentrale Element der adjungierten Verfahren und reduziert den Rechenaufwand enorm.

2.3.1 BESTIMMUNG DER LAGRANGE-MULTIPLIKATOREN

Um die Lagrange-Multiplikatoren zu bestimmen, ist es nötig, die zum Variationsproblem (2.36) gehörige DGL zu finden. Die folgende Herleitung ist der Arbeit von Othmer [80] entnommen, die vollständige Herleitung befindet sich im Anhang A. Wie bereits erwähnt, ist das zentrale Element des adjungierten Verfahrens die Forderung aus Gleichung (2.39). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{\bar{\mathbf{u}}}L + \delta_{\bar{\mathbf{p}}}L \\ &= \delta_{\bar{\mathbf{u}}}J + \delta_{\bar{\mathbf{p}}}J + \int_{\Omega} (\mathbf{U}, q) \delta_{\bar{\mathbf{u}}} \mathcal{R}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{p}}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{U}, q) \delta_{\bar{\mathbf{p}}} \mathcal{R}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{p}}) \cdot d\Omega. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Wenn man jetzt die Nebenbedingungen (2.34) in (2.40) einsetzt, ergibt sich für die einzelnen Terme

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\mathbf{u}}}(R_1, R_2, R_3)^T &= (\delta_{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \delta_{\bar{\mathbf{u}}} - \nabla \cdot (2 \cdot \nu_{eff} \cdot D(\delta_{\bar{\mathbf{u}}})) \\ \delta_{\bar{\mathbf{u}}}(R_4) &= \nabla \cdot \delta_{\bar{\mathbf{u}}} \\ \delta_{\bar{\mathbf{p}}}(R_1, R_2, R_3)^T &= \nabla \delta_{\bar{\mathbf{p}}} \\ \delta_{\bar{\mathbf{p}}}(R_4) &= 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.40) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\delta_{\bar{\mathbf{u}}}J + \delta_{\bar{\mathbf{p}}}J \\ &+ \int_{\Omega} d\Omega \mathbf{U} \cdot \left((\delta_{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \delta_{\bar{\mathbf{u}}} - \nabla \cdot (2 \cdot \nu_{eff} \cdot D(\delta_{\bar{\mathbf{u}}})) \right) \\ &- \int_{\Omega} d\Omega q \nabla \cdot \delta_{\bar{\mathbf{u}}} + \int_{\Omega} d\Omega \mathbf{U} \cdot \nabla \delta_{\bar{\mathbf{p}}} = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.3 Adjungierte Transportgleichungen

Die Zielfunktion J lässt sich in die Anteile im Volumen Ω und auf dessen topologischen Rand Γ aufteilen, sodass

$$J = \int_{\Omega} J_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} J_{\Gamma} d\Gamma \quad (2.43)$$

gilt. Mit dieser Aufteilung und einer partiellen Integration ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} d\Gamma \left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \bar{p}} \right) \delta \bar{p} + \int_{\Omega} d\Omega \left(-\nabla \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \bar{p}} \right) \delta \bar{p} \\ &+ \int_{\Gamma} d\Gamma \left(\mathbf{n} (\mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{U} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) + 2\nu_{eff} \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{U}) - q\mathbf{n} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}} \\ &- \int_{\Gamma} d\Gamma 2\nu_{eff} \mathbf{n} \cdot D(\delta \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{U} \\ &+ \int_{\Omega} d\Omega \left(-\nabla \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{u}} - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nabla \cdot (2\nu_{eff} D(\mathbf{U})) + \nabla q + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \right) \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Diese Gleichung muss für alle $\delta \bar{\mathbf{u}}$ und $\delta \bar{p}$ gelten, welche auch die Navier-Stokes-Gleichungen (2.34) erfüllen. Dies ist im Allgemeinen nur möglich, wenn jedes einzelne Integral für sich selbst Null ergibt. Daher kann aus den Volumenintegralen die zum Variationsproblem (2.36) gehörige DGL abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} -2D(\mathbf{U})\bar{\mathbf{u}} &= -\nabla q + \nabla \cdot (2\nu_{eff} D(\mathbf{U})) - \frac{\partial J}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{\partial J}{\partial \bar{p}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dabei wurde die transponierte konvektive Beschleunigung $-\nabla \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{u}} - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{U}$ als $-2D(\mathbf{U})\bar{\mathbf{u}}$ abgekürzt. Als Lösung der DGL (2.45), welche als adjungierte RANS-Gleichungen bezeichnet werden, ergeben sich die Lagrange-Multiplikatoren. Letztere werden im Folgenden als adjungiertes Strömungsfeld bezeichnet.

Analog zu den Volumenintegralen können aus den Oberflächenintegralen die Randbedingungen zum Lösen der DGL (2.45) abgeleitet werden. Bei durchströmten Objekten werden im Allgemeinen die typischen Strömungsränder Einlass, Auslass und Wand verwendet. Um die zugehörigen Randbedingungen für die adjungierten Größen zu bestimmen, werden die charakteristischen Werte der primalen Größen in die

2 Grundlagen

Tabelle 2.1: Randbedingungen der adjungierten Geschwindigkeit für typische Strömungsränder.

	\mathbf{U}
Wand	$\mathbf{U}_t = 0, \mathbf{U}_n = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \bar{p}}$
Einlass	$u_n = \frac{\partial J_\Gamma}{\partial \bar{p}}$
Auslass	$0 = v_n \mathbf{U}_t + \nu_{eff} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U}_t + \frac{\partial J_\Gamma}{\partial \bar{u}_t}$

Tabelle 2.2: Randbedingungen des adjungierten Druckes für typische Strömungsränder.

	q
Wand	$\mathbf{n} \cdot \nabla q = 0$
Einlass	$\mathbf{n} \cdot \nabla q = 0$
Auslass	$q = \mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{u}} + u_n v_n + \nu_{eff} (\mathbf{n} \cdot \nabla) u_n + \frac{\partial J_\Gamma}{\partial v_n}$

Oberflächenintegrale (2.44) eingesetzt. Die daraus resultierenden Randbedingungen sind in Tabelle 2.1 und 2.2 dargestellt [80]. Die vollständige Herleitung der Gleichungen, also der Schritt von Gleichung (2.44) zu Gleichung (2.45) und den Randbedingungen in Tabellen 2.1 und 2.2, befindet sich im Anhang A dieser Arbeit.

2.3.2 SENSITIVITÄTSANALYSE

Nach der Bestimmung der Lagrange-Multiplikatoren werden nun die in Gleichung (2.38) eingeführten Designvariablen β näher erläutert. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit aerodynamischer Formoptimierung. Dabei wird ein beliebiges um- oder durchströmtes Objekt betrachtet. Die Form des Objektes hat dabei Einfluss auf die Zustandsgrößen und somit auf die von den Zustandsgrößen abhängige Zielfunktion. Um die Zahl der Freiheitsgrade zu maximieren, können die möglichen Formänderungen als Überlagerung von lokalen, wandnormalen Verschiebungen beschrieben werden. Pironneau führt dazu die *Methode der lokalen Variationen* [84] ein. Die Ausgangsgeometrie wird als Ω beschrieben und deren Oberfläche als Γ . Eine zweite Geometrie soll Ω_β heißen und die Oberfläche Γ_β besitzen. Letztere ist folgendermaßen definiert

$$\Gamma_\beta = x + \beta(x)\mathbf{n}(x) \quad \text{mit } x \in \Gamma, \quad (2.46)$$

2.3 Adjungierte Transportgleichungen

wobei $n_i(x)$ den Normalvektor von Γ an der Stelle x bezeichnet und $\beta(x)$ eine reelle Funktion auf der Oberfläche Γ . Damit ist es möglich, an jedem diskreten Punkt der Oberfläche Γ eine Verschiebung aus der Ausgangsgeometrie Ω heraus ($\delta\Omega^+$), bzw. in Ω hinein ($\delta\Omega^-$) zu definieren, die dann die neue Oberfläche Γ_β beschreibt. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 2.3 illustriert. Mit $\beta(x)$ ist es möglich, jedem Punkt der Ober-

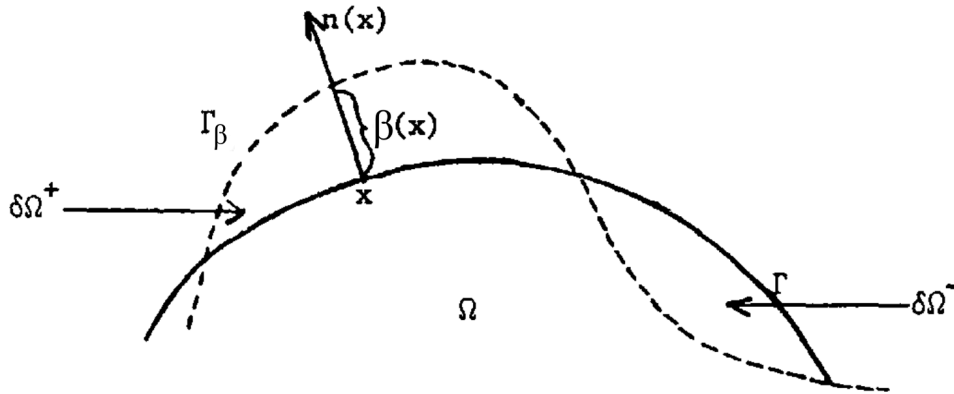


Abb. 2.3: Oberfläche der Ausgangsgeometrie Γ und Oberfläche der neuen Geometrie Γ_β , die als Funktion der Oberfläche Γ beschrieben werden kann. $\delta\Omega^+$ beschreibt dabei eine Verschiebung aus Ω heraus, $\delta\Omega^-$ eine Verschiebung in Ω hinein. Quelle: Pironneau [84]

fläche der Ausgangsgeometrie eine skalare Verschiebung in wandnormaler Richtung zuzuordnen. Die Änderung der Zielfunktion, die durch diese Oberflächenvariation auftritt, kann durch die Variation der Lagrange-Funktion beschrieben werden. Durch die Lösung von Gleichung (2.45) ist die Forderung aus Gleichung (2.39) erfüllt und die Variation ist nur noch von der Variation der Designvariablen abhängig.

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta_\beta L \\ &= \delta_\beta J + \delta_\beta \int_{\Omega} (\mathbf{U}, q) \cdot \mathcal{R}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) \cdot d\Omega \end{aligned} \quad (2.47)$$

Der erste Term beschreibt dabei die Abhängigkeit der Zielfunktion von den Designvariablen. Wenn die Zielfunktion von einem Oberflächenintegral abhängt, ist dieser Term nicht Null und kann aus dem primalen Strömungsfeld berechnet werden. Für den zweiten Term ist nicht nur die Lösung des primalen und des adjungierten

2 Grundlagen

Strömungsfeldes nötig, sondern man benötigt auch Informationen über die Auswirkungen der Oberflächenvariationen auf die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen [62]. Eine Lösung für dieses Problem wird von Soto und Löhner [94] präsentiert, die das Volumenintegral in Gleichung (2.47) in ein Oberflächenintegral transformieren. Damit ist es möglich, Gleichung (2.47) in einem Nachbearbeitungsschritt aus dem primalen und dem adjungierten Strömungsfeld zu bestimmen. Dieses Vorgehen soll hier kurz erläutert werden (siehe dazu auch Othmer [80]).

Da durch jede zulässige Variation von $\bar{\mathbf{u}}$ und \bar{p} die totale Variation der Nebenbedingung \mathcal{R} verschwindet

$$\delta\mathcal{R} = 0 \leftrightarrow \delta_\beta\mathcal{R} + \delta_{\bar{\mathbf{u}}}\mathcal{R} + \delta_{\bar{p}}\mathcal{R} = 0, \quad (2.48)$$

lässt sich Gleichung (2.47) als

$$\delta_\beta L = \delta_\beta J + \int_{\Omega} (\mathbf{U}, q) \delta_{\bar{\mathbf{u}}}\mathcal{R}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{U}, q) \delta_{\bar{p}}\mathcal{R}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}) d\Omega \quad (2.49)$$

formulieren, wobei die Integrale bereits in Abschnitt 2.3.1 behandelt wurden (vgl. dazu auch Anhang A). Wenn die Zielfunktion keinen Volumenanteil besitzt ($J_\Omega = 0$), verschwinden auch die Volumenintegrale, da die Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{U} und q die adjungierten Gleichungen (2.45) erfüllen müssen. Für die Variation ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \delta_\beta L = \delta_\beta J - \int_{\Gamma} d\Gamma \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \delta\bar{p} - \int_{\Gamma} d\Gamma (\mathbf{n}(\mathbf{U} \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{U}(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \\ + 2\nu_{eff} \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{U}) - q\mathbf{n}) \cdot \delta\bar{\mathbf{u}} \\ + \int_{\Gamma} d\Gamma 2\nu_{eff} \mathbf{n} \cdot D(\delta\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

wobei $\delta\bar{\mathbf{u}}$ und $\delta\bar{p}$ unbekannte Größen darstellen. Für diese muss daher eine Näherung gefunden werden. Da die Verschiebung der Oberfläche, die von den Designvariablen β gesteuert wird, nur in wandnormaler Richtung stattfinden soll, können die unbekanntenen Größen als Taylorreihe entwickelt werden [94], so dass sich

$$\delta\bar{\mathbf{u}} = \beta(\mathbf{n} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\beta^2) \quad \text{und} \quad \delta\bar{p} = \beta(\mathbf{n} \cdot \nabla)\bar{p} + \mathcal{O}(\beta^2), \quad (2.51)$$

ergeben.

Bei der Betrachtung von durchströmten Objekten wird angenommen, dass die Geometrie von Ein- und Auslass konstant ist, es gilt $\beta = 0$. Die Zielfunktion J ist als Integral über Ein- und/oder Auslass definiert, Strömungsgrößen an der Wand werden nicht in die Zielfunktion einbezogen. Bei der Betrachtung der Zielfunktion an der Wand ist das Verfahren der unvollständigen Sensitivitäten, welches keine adjungierte Lösung benötigt, besser geeignet [70, 71]. Das bedeutet zusätzlich, dass die Zielfunktion J nicht von der Verformung β abhängig ist und somit $\partial J/\partial\beta = 0$ gilt. Aus der Randbedingung $\mathbf{U} = 0$ an der Wand (vgl. Tabelle 2.1 und 2.2) vereinfacht sich Gleichung (2.50) zu

$$\delta_\beta L = \int_{Wand} d\Gamma (2v_{eff} \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{U}) - q\mathbf{n}) \cdot \beta (\mathbf{n} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}, \quad (2.52)$$

wobei

$$2\mathbf{n} \cdot D(\mathbf{U}) = (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U} + \nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \quad (2.53)$$

entspricht. Durch die Divergenzfreiheit des adjungierten Geschwindigkeitsfeldes ($J_\Omega = 0$) und der Randbedingung $\mathbf{U} = 0$ an der Wand ergibt sich $(\mathbf{n} \cdot \nabla)u_n = 0$. Die Geschwindigkeit kann in einen normalen und einen tangentialen Anteil zerlegt werden, wobei sich durch $u_n = 0$ entlang der Wand für Gleichung (2.53) nur eine Abhängigkeit der tangentialen Anteile ergibt. Die resultierende Sensitivität für eine oberflächennormale Bewegung an einem beliebigen Punkt β ergibt sich daher zu

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -Av(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{U}_t \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}}_t, \quad (2.54)$$

was dem Produkt der wandnormalen Gradienten der Tangentialanteile von primaler und adjungierter Geschwindigkeit entspricht. A bezeichnet dabei die von der Verformung betroffene Fläche. Mit Gleichung (2.54) ist es nun möglich, die Sensitivitäten in einem Nachbearbeitungsschritt aus den primalen und adjungierten Geschwindigkeitsfeldern zu bestimmen.

Numerische Methoden

3.1 RANS-VERFAHREN IN OPENFOAM[®]

In Abschnitt 2 sind die Erhaltungsgleichungen erläutert, die der Arbeit zugrunde liegen. Ausgehend von den RANS-Gleichungen sind die adjungierten RANS-Gleichungen hergeleitet und liegen in kontinuierlicher Form vor. Da die RANS-Gleichungen grundlegender Bestandteil der vorliegenden Arbeit sind, soll die Arbeitsweise des verwendeten OpenFOAM[®]-Gleichungslösers im Folgenden genauer erläutert werden.

Um die adjungierten RANS-Gleichungen numerisch auszuwerten, müssen diese in eine diskrete Form übertragen werden. Prinzipiell existieren verschiedene Diskretisierungsverfahren, wobei die Finite-Differenzen-Methode (FDM), die Finite-Elemente-Methode (FEM) und die Finite-Volumen-Methode (FVM) am weitesten verbreitet sind. Die Grundidee aller drei Verfahren ist, die partielle Differentialgleichung (PDE) räumlich zu diskretisieren, d.h. die Lösung der Gleichung nur an diskreten Stellen zu berechnen.

Die FVM eignet sich besonders gut, um hyperbolische, partielle Differentialgleichungen, denen Erhaltungssätze zugrunde liegen, zu lösen. Da die Navier-Stokes-Gleichungen per Definition diese Voraussetzung erfüllen, hat sich die FVM bei der Lösung von anwendungsnahen Strömungsproblemen als Standardwerkzeug etabliert. Der sich daraus ergebende Vorteil ist, dass konservative Größen durch eine Finite-Volumen-Formulierung tatsächlich erhalten werden. Diese Tatsache ist gerade für strömungsmechanische Problemstellungen interessant, da die Massenerhaltung durch die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung stets gegeben ist.

Im folgenden Abschnitt soll eine kurze Übersicht über die Anwendung der FVM und die Lösung der RANS-Gleichungen gegeben werden, für eine ausführliche Beschreibung der verwendeten Methode sei hier auf Jasak [48] verwiesen.

3 Numerische Methoden

3.1.1 DISKRETISIERUNG DES RECHENGEBIETES

Um die Navier-Stokes-Gleichungen innerhalb eines beliebigen Objektes räumlich zu diskretisieren, wird das Rechengebiet in eine endliche Zahl kleiner Kontrollvolumina aufgeteilt. Einzelne Kontrollvolumina werden dabei als Zelle, die Gesamtheit aller Kontrollvolumina als Rechnetz bezeichnet. Die einzelnen Zellen dürfen sich dabei nicht überschneiden und müssen das gesamte Rechengebiet ausfüllen. Die Erhaltungsgleichungen werden dann für jedes Kontrollvolumen separat gelöst, wobei die Lösungen der Gleichungen als Mittelwert der Zelle im Zellmittelpunkt vorliegen. Das den Mittelpunkt der Zelle umgebende Zellvolumen ist Namensgeber des Verfahrens und wird als finites Volumen bezeichnet. Die Volumenintegrale der PDE, die einen Divergenzterm enthalten, werden mittels des Gaußschen Integralsatzes in Oberflächenintegrale umgewandelt und können als Fluss durch die Oberflächen der Zelle ausgewertet werden. Letztere können in zwei Gruppen unterteilt werden. Die erste Gruppe sind die internen Flächen, also jene Flächen zwischen zwei Kontrollvolumina. Die zweite Gruppe sind die Randflächen, die mit den Grenzen des Rechengebietes zusammenfallen.

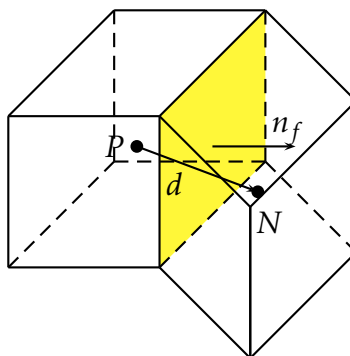


Abb. 3.1: Darstellung von zwei benachbarten finiten Volumina mit einer gemeinsamen Fläche (gelb) und deren Normalenvektor n_f . Der Vektor d entspricht der Verbindung des Zellmittelpunktes P mit dem Mittelpunkt der benachbarten Zelle N .

Um nun die Transportgleichungen auf dem diskretisierten Rechengebiet zu lösen, wird jede Zelle einzeln betrachtet. Die gerade betrachtete Zelle ist dabei mit dem Index P versehen, während die Nachbarzellen mit dem Index N versehen sind. Abbildung 3.1 zeigt zwei benachbarte Zellen und deren gemeinsame Fläche in gelb. Der

Normalenvektor \mathbf{n}_f zeigt dabei stets von der betrachteten Zelle zur Nachbarzelle und der Vektor \mathbf{d} zeigt vom Zellmittelpunkt der betrachteten Zelle zum Mittelpunkt der benachbarten Zelle.

Um eine Transportgleichung diskretisieren zu können, werden deren Terme einzeln betrachtet. Die inkompressible, stationäre Transportgleichung einer skalaren Größe ϕ kann durch die Gleichung

$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \phi) - \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) = n_\phi(\phi) \quad (3.1)$$

beschrieben werden, wobei der erste Term die Konvektion und der zweite Term die Diffusion beschreibt. Auf der rechten Seite befindet sich ein Quellterm. Bei der Gleichung (3.1) handelt es sich um eine PDE zweiter Ordnung. Um eine ausreichende Genauigkeit der Lösung zu gewährleisten, ist ein Lösungsverfahren zweiter Ordnung nötig. Die Grundlage für die räumliche Diskretisierung bildet der Gaußsche Integralsatz, der folgende Identitäten beinhaltet:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{n}, \quad (3.2)$$

$$\int_V \nabla \phi dV = \oint_{\partial V} \phi d\mathbf{n}, \quad (3.3)$$

$$\int_V \nabla \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{a} d\mathbf{n}, \quad (3.4)$$

wobei ∂V den Rand der Zelle und $d\mathbf{n}$ ein infinitesimales Flächenelement mit einem Normalenvektor normal zu ∂V beschreibt. Da jede Zelle durch eine Reihe ebener Flächen begrenzt ist, kann bei der Betrachtung eines Divergenzterms das Integral $\oint_{\partial V} d\mathbf{n}$ als Summe über alle Flächen einer Zelle betrachtet werden, so dass

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{n} = \sum_f \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{n} \quad (3.5)$$

gilt. \mathbf{n} beschreibt dabei den Normalenvektor der jeweiligen Fläche und der Index f soll hier die jeweilige Fläche beschreiben. Da die Divergenz als Fluss durch die Oberflächen betrachtet wird, muss bei internen Flächen auch die Nachbarzelle betrachtet

3 Numerische Methoden

werden, so dass:

$$\sum_f \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{n}_f = \sum_P \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{n}_f - \sum_N \mathbf{a}_f \cdot \mathbf{n}_f \quad (3.6)$$

gilt, wobei P die gerade betrachtete Zelle und N die Nachbarzelle der jeweiligen Fläche anzeigt. Diese Aufspaltung gilt für alle internen Flächen und soll im Folgenden vorausgesetzt werden. Die Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral ist nach dem Gauß-Theorem eine exakte Umwandlung. Das gezeigte Vorgehen stellt dennoch eine Linearisierung dar, denn die Umwandlung des Oberflächenintegrals in die Summe über alle Flächen impliziert, dass jeweils nur ein Flächenmittelwert je Zelle betrachtet wird.

Der konvektive Term aus Gleichung 3.1 kann mittels Gleichung 3.5 diskretisiert und linearisiert werden.

$$\begin{aligned} \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \phi)_f &= \sum_f \mathbf{n} \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}} \phi)_f \\ &= \sum_f \mathbf{n} \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}})_f \phi_f \\ &= \sum_f \dot{m} \phi_f, \end{aligned} \quad (3.7)$$

wobei $\dot{m} = \mathbf{n} \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}})_f$ den Massendurchfluss durch die Fläche f beschreibt. Dieser ergibt sich aus den Werten im Zellmittelpunkt der Zellen, welche sich die betrachtete Fläche teilen. Das Feld ϕ_f kann mittels einer Vielzahl von Schemata bestimmt werden. Zum einen besteht die Möglichkeit *zentrale Differenzen* (CD) zu verwenden. Die gesuchte Größe ϕ_f ergibt sich durch

$$\phi_f = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_N, \quad (3.8)$$

was einem Verfahren zweiter Ordnung entspricht.

f_x ist definiert als $f_x = \overline{fN}/\overline{PN}$, \overline{fN} ist dabei der Abstand der Fläche f vom Zellmittelpunkt der Zelle N und \overline{PN} ist der Abstand der beiden Zellmittelpunkte P und N . Der Nachteil des Verfahrens liegt in der fehlenden Beschränktheit. Letztere ist ein Stabilitätskriterium für numerische Diskretisierungsverfahren (siehe dazu auch Patankar [82]), welches im Regelfall nur von Verfahren erster Ordnung erfüllt

wird. Auf Kosten der Genauigkeit kann die Beschränktheit z.B. durch ein sogenanntes *Upwind-Verfahren* (UD) erzwungen werden. Hier wird die gesuchte Größe ϕ_f allein durch stromab vorliegende Werte bestimmt und es gilt

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{für } \dot{m} \geq 0 \\ \phi_N & \text{für } \dot{m} < 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Es besteht weiterhin die Möglichkeit, die beiden oben genannten Verfahren zu kombinieren. Dadurch ist es möglich, die Beschränktheit des Verfahrens bei angemessener Genauigkeit sicherzustellen. Man spricht dann von *gemischten Verfahren* und die gesuchte Größe ϕ_f ergibt sich aus

$$\phi_f = (1 - \gamma)(\phi_f)_{UD} + \gamma(\phi_f)_{CD}, \quad (3.10)$$

mit dem Mischkoeffizienten γ als Wichtungsfaktor.

Der diffusive Term aus Gleichung (3.1), der aufgrund des enthaltenen Laplace-Operators auch Laplace-Term genannt wird, wird analog zum konvektiven Term folgendermaßen

$$\begin{aligned} \int_{V_P} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV &= \sum_f \mathbf{n} \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f \\ &= \sum_f (\rho \Gamma_\phi)_f \mathbf{n} \cdot (\nabla \phi)_f \phi_f \end{aligned} \quad (3.11)$$

diskretisiert und linearisiert. Der Gradient der Transportgröße $(\nabla \phi)_f$ kann implizit berechnet werden, wenn der Vektor \mathbf{d} (siehe Abbildung 3.1) zwischen dem Zellmittelpunkt der betrachteten Zelle P und dem der Nachbarzelle N parallel zum Normalenvektor \mathbf{n}_f der Fläche ist. Es ergibt sich

$$\mathbf{n}_f \cdot (\nabla \phi)_f = |\mathbf{n}_f| \frac{\phi_N - \phi_P}{|\mathbf{d}|}. \quad (3.12)$$

Bei nicht-orthogonalen Rechennetzen sind \mathbf{n}_f und \mathbf{d} nicht parallel. Der Gradient wird dann mittels zentraler Differenzen aus den Gradienten in den Zellmittelpunkten berechnet. Die Bildungsvorschrift lautet

$$(\nabla \phi)_f = f_x (\nabla \phi)_P + (1 - f_x) (\nabla \phi)_N, \quad (3.13)$$

3 Numerische Methoden

der Gradient wird anschließend mit dem Normalenvektor \mathbf{n}_f multipliziert. Der Divergenzterm ist ein streng expliziter Term, der sich von dem konvektiven Term dadurch unterscheidet, dass die Divergenz einer Größe und nicht aus dem Produkt zweier Größen gebildet wird. Die Diskretisierung und Linearisierung erfolgt mittels

$$\int_V \nabla \cdot \phi \, dV = \int_S d\mathbf{n} \cdot \phi = \sum_f \mathbf{n}_f \cdot \phi_f. \quad (3.14)$$

Gradienten können durch Gauß-Integration, also die Anwendung des Gauß-Theorems, direkt bestimmt werden. Die Diskretisierung und Linearisierung erfolgt durch

$$\int_V \nabla \phi \, dV = \int_S d\mathbf{n} \phi = \sum_f \mathbf{n}_f \phi_f. \quad (3.15)$$

3.1.2 LÖSUNG DER RANS-GLEICHUNGEN

In Abschnitt 2 wurden die RANS-Gleichungen als Erhaltungsgleichungen präsentiert. Gleichung (2.32) lautet in Vektorschreibweise für die inkompressible Form

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) - \nabla \cdot (\nu_{eff} \nabla \bar{\mathbf{u}}) = -\nabla \bar{p} \quad (3.16a)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.16b)$$

wobei die Nichtlinearität der Momentengleichung sowie die Kopplung von Druck und Geschwindigkeit einen Einfluss auf die Lösung haben. Im folgenden Abschnitt wird daher der Lösungsprozess, so wie er in der vorliegenden Arbeit verwendet wurde, genauer erläutert.

Für die Diskretisierung des nichtlinearen Terms ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{u}}) &= \sum_f \mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{u}})_f (\bar{\mathbf{u}})_f \\ &= \sum_f \dot{m}(\bar{\mathbf{u}})_f \\ &= \sum_f a_P \bar{\mathbf{u}}_P + \sum_N a_N \bar{\mathbf{u}}_N, \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei \dot{m} , a_p und a_N Funktionen von $\bar{\mathbf{u}}$ sind und die Flüsse \dot{m} die Kontinuitätsgleichung erfüllen müssen. Um diese Forderung zu erfüllen, müssen die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung gekoppelt gelöst werden, was zu einem sehr großen, nicht linearen Gleichungssystem führt. Der nichtlineare Term wird linearisiert, indem angenommen wird, dass das Geschwindigkeitsfeld, mit dem die Koeffizienten a_p und a_N berechnet werden, bereits divergenzfrei ist. Die Linearisierung hat bei der Berechnung von stationären Problemen, wie sie in der vorliegenden Arbeit behandelt werden, keine Auswirkungen auf die Lösung selbst. Wenn ein konvergierter, stationärer Zustand erreicht ist, sind die nicht linearen Anteile von untergeordneter Bedeutung für die Lösung (siehe dazu [48]).

Um darzustellen wie die Druckgleichung hergeleitet werden kann, wird die Momentengleichung in semi-diskreter Form

$$a_p \bar{\mathbf{u}}_p = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}}) - \nabla p \quad (3.18)$$

verwendet, wobei $\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}}) = -\sum_N a_N \bar{\mathbf{u}}_N$ gilt. Die diskretisierte Form der Kontinuitätsgleichung lautet

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = \sum_f \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}_f = 0. \quad (3.19)$$

Das Geschwindigkeitsfeld $\bar{\mathbf{u}}$ kann durch Gleichung (3.18) als

$$\bar{\mathbf{u}}_p = \frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}})}{a_p} - \frac{1}{a_p} \nabla p \quad (3.20)$$

beschrieben werden. Die auf den Flächen berechneten Geschwindigkeiten werden auf den Zellmittelpunkt interpoliert, so dass sich

$$\bar{\mathbf{u}}_f = \left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}})}{a_p} \right)_f - \left(\frac{1}{a_p} \right)_f (\nabla p)_f \quad (3.21)$$

ergibt. Diese Gleichung wird zur Berechnung der Flüsse durch die Zellflächen verwendet. Durch Einsetzen in die diskretisierte Kontinuitätsgleichung (3.19) ergibt sich

3 Numerische Methoden

die Druckgleichung zu

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{1}{a_p} \nabla p \right) &= \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}})}{a_p} \right) \\ &= \sum_f \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}})}{a_p} \right)_f.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Die vollständig diskretisierte Navier-Stokes-Gleichung lautet dann

$$\begin{aligned}a_p \bar{\mathbf{u}}_p &= \mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}}) - \sum_f \mathbf{n}(p)_f, \\ \sum_f \mathbf{n} \cdot \left[\left(\frac{1}{a_p} \right)_f (\nabla p)_f \right] &= \sum_f \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}})}{a_p} \right)_f.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Die Flüsse werden durch Gleichung (3.21) bestimmt und es ergibt sich

$$F = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}_f = \mathbf{n} \cdot \left[\left(\frac{\mathbf{H}(\bar{\mathbf{u}})}{a_p} \right)_f - \left(\frac{1}{a_p} \right)_f (\nabla p)_f \right].\tag{3.24}$$

Wenn die Druckgleichung (3.22) erfüllt ist, ist auch sichergestellt, dass das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei ist.

3.1.3 KOPPLUNG VON DRUCK- UND GESCHWINDIGKEITSFELD

In der diskretisierten Form der Navier-Stokes-Gleichung hängt die Geschwindigkeit linear vom Druck ab und umgekehrt, wodurch ein hoher Bedarf an Rechenzeit und Speicherplatz entsteht. Wird die Gleichung iterativ gelöst, muss diese Abhängigkeit nicht vollständig aufgelöst werden, da die Lösungen der einzelnen Iterationsschritte sich nur gering voneinander unterscheiden. Es kann ein entkoppelter Ansatz gewählt werden. In der vorliegenden Arbeit wird ein SIMPLE-Algorithmus (Semi-implicit Method for Pressure Linked Equations) nach Patankar [82] im Softwarepaket OpenFOAM[®] verwendet.

3.2 DIREKTE NUMERISCHE SIMULATION EINER KANALSTRÖMUNG

Bei der Durchführung einer Direkten Numerischen Simulation wird die Navier-Stokes-Gleichung direkt ohne Verwendung von zusätzlichen Turbulenzmodellen gelöst. Um dies zu realisieren, muss das Rechengebiet ausreichend fein in Raum und

3.2 Direkte Numerische Simulation einer Kanalströmung

Zeit diskretisiert werden. Dabei ist zu beachten, dass die Kolmogorov Skalen [54] aufgelöst werden, was bei turbulenten Strömungen zu einer sehr feinen Auflösung führt. Mit der feinen Auflösung steigt die notwendige Rechenzeit stark an, weshalb die Direkte Numerische Simulation hauptsächlich zur Lösung von akademischen Problemen eingesetzt wird. Eine gut untersuchte Problemstellung ist die voll ausgeprägte, turbulente Kanalströmung, das heißt die Strömung zwischen zwei unendlich ausgedehnten, ebenen Platten. Um dieses unendlich große Rechenggebiet numerisch behandeln zu können, wird ein Abschnitt herausgeschnitten und an den Schnittflächen mit periodischen Randbedingungen versehen. Dabei ist zu beachten, dass die Größe des untersuchten Ausschnitts einen Filter darstellt, die Abmessungen müssen daher so gewählt werden, dass die größten zu erwartenden Strukturen in dem ausgewählten Abschnitt Platz finden.

3.2.1 INSTATIONÄRE, INKOMPRESSIBLE NSG

Die Strömungsfelder können mit der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung (2.19a) vorhergesagt werden. Mit dem Plattenabstand h , der Bulkgeschwindigkeit u_{bulk} und der Dichte ρ lässt sich die Gleichung entdimensionalisieren. Es entstehen die dimensionslosen Größen $\hat{x} = \frac{x}{h}$, $\hat{\Delta} = h\Delta$, $\hat{\nabla} = L^2\nabla$, $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{u_{bulk}}$, $\hat{t} = \frac{u_{bulk}}{L}$ und $\hat{p} = \frac{p}{\rho u_{bulk}^2}$ und es ergibt sich die entdimensionalisierte Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{Re} \hat{\Delta} \hat{\mathbf{u}}. \quad (3.25)$$

Ersetzt man den konvektiven Term mit $K = (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{u}}$ und den diffusiven Term mit $D = \frac{1}{Re} \hat{\Delta} \hat{\mathbf{u}}$ ergibt sich

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + K = \hat{\nabla} \hat{p} + D. \quad (3.26)$$

Der Term $\hat{\nabla} \hat{p}$ lässt sich in seinen Mittelwert und die Fluktuationen $\hat{\nabla} \bar{\hat{p}} + \hat{\nabla} \hat{p}'$ aufspalten. Der Druckgradient ist in Strömungsrichtung entlang der Kanalachse konstant und stellt somit einen Kraftterm in der Gleichung dar. Um die Gleichung zu lösen, erfolgt im ersten Schritt die Zeitdiskretisierung mithilfe eines expliziten Euler-

3 Numerische Methoden

Verfahrens zweiter Ordnung und man erhält

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_{n-1})} + K^n = \hat{\nabla}\hat{p} + \hat{\nabla}\hat{p}' + D^{n-1}, \quad (3.27)$$

wobei n den jeweiligen Zeitschritt bezeichnet. Die Gleichung wird nun um ein Geschwindigkeitshilfsfeld \mathbf{u}^{**} erweitert

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}^{n-1} + \hat{\mathbf{u}}^{**} - \hat{\mathbf{u}}^{**} \\ & = (\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_{n-1})(\hat{\nabla}\hat{p}' + \hat{\nabla}\hat{p}) + (\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_{n-1})(-K^n + D^{n-1}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Gleichung lässt sich nun in die beiden Gleichungen

$$\hat{\mathbf{u}}^{**} = \hat{\mathbf{u}}^{n-1} + (\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_{n-1})(-K^n + D^{n-1}) + \hat{\mathbf{F}} \quad (3.29)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{**} + (\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_{n-1})\hat{\nabla}\hat{p}' \quad (3.30)$$

aufspalten, wobei $\hat{\mathbf{F}} = (\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_{n-1})\hat{\nabla}\hat{p}$ die konstante Volumenkraft darstellt. Bei der Kanalströmung kann man diese Volumenkraft aus einer Volumenstromsteuerung oder einer Druckgradientensteuerung bestimmen. Bei der Volumenstromsteuerung wird ein konstanter Volumenstrom vorgegeben und der Druckgradient stellt sich als Ergebnisgröße ein. Wählt man eine Druckgradientensteuerung, treibt ein konstanter Druckgradient die Strömung an und der Volumenstrom stellt sich dementsprechend ein. In der vorliegenden Arbeit wird mit einer Volumenstromsteuerung gearbeitet, indem das Geschwindigkeitsfeld mit einem geschätzten Druckfeld berechnet wird. Das verwendete Druckfeld ergibt sich dabei aus den Anfangsbedingungen oder aus dem letzten Zeitschritt. In einem zweiten Schritt wird dann das Druckfeld so angepasst, dass sich der vorgegebene Volumenstrom einstellt.

Die Gleichung (3.29) kann nun nach $\hat{\mathbf{u}}^{**}$ gelöst werden, wobei für die Volumenkraft $\hat{\mathbf{F}}$ der Wert $\hat{\mathbf{F}}^{n-1}$ aus dem letzten Iterationsschritt gesetzt wird. Im ersten Iterationsschritt $n = 0$ wird $\hat{\mathbf{F}} = 0$ gesetzt.

Da für das Geschwindigkeitsfeld $\hat{\mathbf{u}}^{n+1}$ Divergenzfreiheit gelten muss, ergibt sich

$$\hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = 0. \quad (3.31)$$

Wendet man den $\hat{\nabla}$ -Operator auf Gleichung (3.30) an, ergibt sich

$$\hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^{**} + (\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_{n-1})\hat{\Delta}\hat{p}' = 0. \quad (3.32)$$

3.2 Direkte Numerische Simulation einer Kanalströmung

Wird nach $\hat{\mathbf{u}}^{**}$ aufgelöst, erhält man

$$\hat{\mathbf{u}}^{**} = -(\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_{n-1})\hat{\Delta}\hat{p}' = \hat{\Delta}\hat{F}. \quad (3.33)$$

Man erhält eine Poisson-Gleichung

$$\hat{\Delta}\hat{F} = \hat{\mathbf{u}}^{**}. \quad (3.34)$$

\hat{p}' wird nun so bestimmt, dass

$$\frac{\partial^2 \hat{F}}{x^2} + \frac{\partial^2 \hat{F}}{y^2} + \frac{\partial^2 \hat{F}}{z^2} = \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^{**} \quad (3.35)$$

gilt. Für $\hat{\mathbf{u}}^{**}$ wird der Wert aus der Lösung von Gleichung (3.29) verwendet. Da eine Volumenstromsteuerung verwendet wird, folgt im letzten Schritt noch eine Korrektur von \hat{F} , so dass $\hat{\mathbf{u}}$ den vorgegeben Volumenstrom erzeugt.

3.2.2 ADJUNGIERTE, INKOMPRESSIBLE NSG

Um eine adjungierte Gleichung für die Optimierung der voll ausgeprägten, turbulenten Kanalströmung zu entwickeln, kann Gleichung (2.45) als Ausgangspunkt verwendet werden. Da die Viskosität im Gegensatz zu RANS-Gleichungen eine Materialkonstante darstellt, ist eine Variation nach der Viskosität nicht nötig, so dass sich

$$\begin{aligned} -2D(\mathbf{U})\langle \mathbf{u} \rangle_T &= -\nabla q + \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{U})) - \frac{\partial J}{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_T} \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= \frac{\partial J}{\partial \langle p \rangle_T} \end{aligned} \quad (3.36)$$

ergibt. Die Zeitableitung der adjungierten Geschwindigkeit $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ entfällt ebenfalls, da das Optimierungsverfahren auf zeitlich gemittelte Strömungsfelder $\langle \dots \rangle_T$ angewendet wird. Das Vorgehen ist in Kapitel 6 genauer erläutert. Die adjungierte Impulsgleichung ergibt sich damit zu

$$-2D(\mathbf{U})\langle \mathbf{u} \rangle_T = -\nabla q + \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{U})) - \frac{\partial J}{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_T} \quad (3.37)$$

und kann mit einem SIMPLE-Algorithmus gelöst werden.

3.3 NETZVERFORMUNG

Bei der adjungierten Formoptimierung werden Sensitivitäten für jeden Punkt der Oberfläche eines Oberflächennetzes berechnet (vgl. dazu Abschnitt 2.3.2). Dieses Oberflächennetz ist Teil eines Volumennetzes, das zur Lösung der RANS-Gleichungen benötigt wird. Die Sensitivitäten entsprechen dabei einer lokalen, wandnormalen Verschiebung, die als Gradient einer vorher definierte Zielfunktion in Abhängigkeit der Designvariablen bestimmt werden. Aus der neuen Oberfläche muss nun ein verändertes Volumennetz erstellt werden, um den Wert der Zielfunktion auch in der optimierten Geometrie zu bestimmen. Wie bereits in Abschnitt 1.2 beschrieben, existiert dazu eine Vielzahl von Möglichkeiten. Eine Variante ist die Erstellung einer neuen Oberfläche aus der Ausgangsoberfläche und den zugehörigen Sensitivitäten. Dazu kann mittels rechnerunterstützter Konstruktion (CAD) der Vernetzungsprozess erneut durchlaufen werden. Da das vorgestellte Optimierungsverfahren in eine automatisierte Prozesskette eingebunden werden soll, soll der Schritt des Neuvernetzens vermieden werden. Dazu wird das bestehende Rechennetz verwendet, wobei die Sensitivitätsinformation von der Oberfläche auf das Volumennetz interpoliert wird.

In der Mathematik werden radiale Basisfunktionen (RBF) häufig für verschiedene Interpolationsaufgaben eingesetzt. De Boer *et. al* [18] haben bereits die Anwendung der RBF Interpolation auf Rechennetze beschrieben. Im Rahmen dieser Arbeit entstand am DLR Göttingen ein Netzdeformationswerkzeug, das auf dem von de Boer *et. al* beschriebenen Verfahren basiert. Die Grundlagen dazu sollen im folgenden Kapitel skizziert werden.

3.3.1 ARTEN VON RADIALEN BASISFUNKTIONEN

Im Zentrum des Interpolationsverfahrens stehen die radialen Basisfunktionen (RBF). Letztere sind Funktionen, deren Wert nur vom Abstand zum Ursprung abhängt. Es gilt also $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|)$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm beschreibt. Das Funktionsargument wird als Radius r bezeichnet, wobei $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ den Abstand zwischen zwei benachbarten Punkten beschreibt. Der Index i stellt die Nummerierung der Nachbarpunkte dar. Es existieren verschiedene Arten von RBFs. Die typischen Funktionen sind:

- Gaußsche RBF (GRBF):

$$\varphi(r) = e^{-(\alpha r)^2} \quad (3.38)$$

- Inverse multiquadratic RBF (IRBF):

$$\varphi(r) = \frac{1}{1 + (\alpha r)^2} \quad (3.39)$$

- Wendlandfunktion (WRBF)[107]:

$$\varphi(r) = |\alpha - r| \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^4 \cdot \left(1 + 4\frac{\alpha}{r}\right) \quad (3.40)$$

Die RBFs enthalten den freien Parameter α , der für die Netzverformung auf die zu verformende Geometrie abgestimmt werden kann. Darauf wird in Abschnitt 3.3.4 genauer eingegangen. Abbildung 3.2 zeigt den Verlauf der RBFs, wobei der gewählte Parameter der jeweiligen Funktion in der Legende in Klammern angegeben ist.

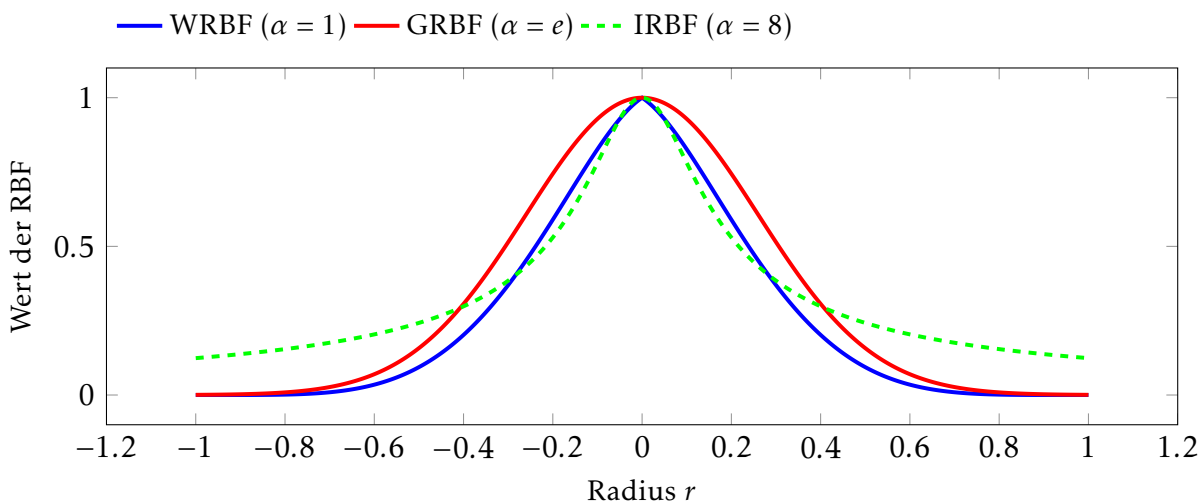


Abb. 3.2: Verlauf der verschiedenen RBFs mit dem in Klammern stehenden Wert für den freien Parameter α .

Eine RBF kann an einem beliebigen Punkt aufgespannt werden. Sie beschreibt den Einfluss des Punktes, an dem sie aufgespannt wurde, auf seine Umgebung.

3 Numerische Methoden

3.3.2 NETZVERFORMUNG MIT RADIALEN BASISFUNKTIONEN

Die Interpolation mittels RBF stellt eine netzfreie Methode dar, was bedeutet, dass die Zugehörigkeit von Punkten zu Netzstrukturen wie Zellen oder Flächen außer Acht gelassen wird. Das vorliegende Netz wird als Punktwolke betrachtet. Zusätzlich existieren beliebig im Raum verteilte Punkte, im Folgenden als Kontrollpunkte c bezeichnet, mit einem zugehörigen Sensitivitätswert S . In der Anwendung stellt jeder Punkt des Oberflächennetzes einen Kontrollpunkt dar, die zugehörigen Sensitivitäten entsprechen eine Verschiebung in oberflächennormaler Richtung. Letztere sind nur an den Kontrollpunkten definiert und sollen auf die Netzpunkte im Volumen interpoliert werden.

Der Funktionswert für die RBF ergibt sich aus dem Abstand eines Netzpunktes x zu einem Kontrollpunkt c , der Wert der RBF beträgt also $\varphi(\|x - c\|)$. Mittels der RBF $\varphi(r) = \varphi(\|x - c\|)$ wird nun der Einfluss der Kontrollpunkte auf die umliegenden Punkte bestimmt, mit der Sensitivität S am Punkt c multipliziert und auf die umliegenden Punkte interpoliert wird. Den Verlauf entlang des Radius beschreibt die Funktion φ (vgl. Abschnitt 3.3.1).

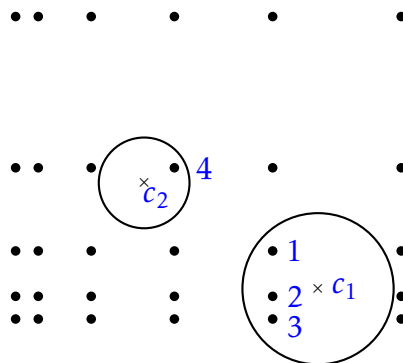


Abb. 3.3: Kontrollpunkte c_i mit zugehörigen Radien.

Abbildung 3.3 zeigt die Kontrollpunkte c_i sowie die zugehörigen Radien. Die Radien des Kontrollpunkts hängen vom freien Parameter α ab (vgl. Abschnitt 3.3.1). Innerhalb dieser Radien liegen Punkte, welche vom jeweiligen Kontrollpunkt beeinflusst werden. Um den Einfluss zu ermitteln, wird die radiale Basisfunktion $\varphi(r)$ für jeden Kontrollpunkt c_i ausgewertet. Um die resultierende Verformung zu bestimmen, wird

der Funktionswert mit der zugehörigen Sensitivität $S(\mathbf{c}_1)$ multipliziert.

$$f(\mathbf{x}_1) = \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_1\|) \cdot S(\mathbf{c}_1) \quad (3.41)$$

$$f(\mathbf{x}_2) = \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{c}_1\|) \cdot S(\mathbf{c}_1) \quad (3.42)$$

$$f(\mathbf{x}_3) = \varphi(\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{c}_1\|) \cdot S(\mathbf{c}_1) \quad (3.43)$$

$$f(\mathbf{x}_4) = \varphi(\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{c}_2\|) \cdot S(\mathbf{c}_2) \quad (3.44)$$

Die radiale Basisfunktion kann für beliebig viele Kontrollpunkte innerhalb der Punktwolke angewendet werden. Das gezeigte Beispiel beschreibt den einfachen Fall, in dem kein Punkt der Punktwolke im Einflussbereich von mehreren Kontrollpunkten liegt. Im Anwendungsfall werden die Netzpunkte in der Regel von mehreren Kontrollpunkten beeinflusst, was in Abbildung 3.4 dargestellt ist.

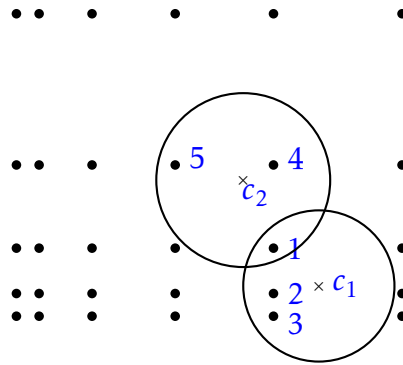


Abb. 3.4: Kontrollpunkte \mathbf{c}_i mit zugehörigen Radien. Punkt \mathbf{x}_1 liegt dabei im Radius von beiden Kontrollpunkten.

Um die Einflüsse mehrerer Kontrollpunkte bestimmen zu können, wird ein Wichtungsfaktor γ eingeführt. Um den Wichtungsfaktor zu bestimmen, wird eine Dichtematrix Φ_{bb} aufgestellt, welche die Einflüsse der Kontrollpunkte untereinander beschreibt. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem der Form $\Phi_{bb}\gamma = S$.

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2\|) & \cdots & \varphi(\|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_{N_c}\|) \\ \varphi(\|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2\|) & \cdots & \varphi(\|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_{N_c}\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|\mathbf{c}_{N_c} - \mathbf{c}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{c}_{N_c} - \mathbf{c}_2\|) & \cdots & \varphi(\|\mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{N_c}\|) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{N_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(\mathbf{c}_1) \\ S(\mathbf{c}_2) \\ \vdots \\ S(\mathbf{c}_n) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

N_c beschreibt dabei die Anzahl der Kontrollpunkte. Da eine RBF nur vom Ab-

3 Numerische Methoden

stand der betrachteten Punkte abhängt, haben weit entfernte Punkte keinen Einfluss aufeinander. Zusätzlich weisen die gezeigten Funktionen (vgl. Abbildung 3.2) ihr Maximum im Zentrum auf. Die Diagonalelemente der Matrix haben den größten Wert und man spricht von einem gut konditionierten Problem. Die Konditionszahl liegt nahe dem Wert 1, was sich positiv auf die Lösungseigenschaften des Gleichungssystems auswirkt.

Für das Beispiel aus Abbildung 3.4 ergibt sich das Gleichungssystem zu

$$\begin{bmatrix} \varphi(\|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2\|) \\ \varphi(\|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\|) & \varphi(\|\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_2\|) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(\mathbf{c}_1) \\ S(\mathbf{c}_2) \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Nachdem die Wichtungsfaktoren bestimmt wurden, können die RBFs für jeden Netzpunkt \mathbf{x} mittels

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_c} \gamma_i \cdot \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) \quad (3.47)$$

ausgewertet und die resultierende Verformung an jedem Punkt des Netzes $f(\mathbf{x})$ bestimmt werden. Die Information aus den Sensitivitätswerten sind dabei in den Wichtungsfaktoren γ enthalten. Für das Beispiel aus Abbildung 3.4 ergibt sich

$$f(x_1) = \gamma_1 \cdot \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_1\|) + \gamma_2 \cdot \varphi(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{c}_2\|) \quad (3.48)$$

$$f(x_2) = \gamma_1 \cdot \varphi(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{c}_1\|) \quad (3.49)$$

$$f(x_3) = \gamma_1 \cdot \varphi(\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{c}_1\|) \quad (3.50)$$

$$f(x_4) = \gamma_2 \cdot \varphi(\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{c}_2\|) \quad (3.51)$$

$$f(x_5) = \gamma_2 \cdot \varphi(\|\mathbf{x}_5 - \mathbf{c}_2\|). \quad (3.52)$$

Die Ordnung des Interpolationsverfahrens ist abhängig von der Zahl der Kontrollpunkte und lässt sich vorher nur schwer abschätzen. Eine Möglichkeit um eine Interpolation dritter Ordnung sicherzustellen, ist das Hinzufügen eines Polynoms dritter Ordnung $q(\mathbf{x})$ zu Gleichung (3.47).

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_c} \gamma_i \cdot \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) + q(\mathbf{x}) \quad (3.53)$$

Die Koeffizienten von $q = b_0 + b_1x + b_2y + b_3z$ werden mit dem erweiterten Glei-

chungssystem zusammen mit den Wichtungsfaktoren γ gelöst. Das sich ergebende Gleichungssystem hat die Struktur

$$\begin{bmatrix} f(\mathbf{c}_i) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{bb} & Q_b \\ Q_b^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

dabei sind

- $f(\mathbf{c}_i)$ die Funktionswerte an den Kontrollpunkten
- Φ_{bb} die Matrix aus Gleichung (3.45)
- γ die Wichtungsfaktoren γ_i
- β der Koeffizientenvektor von $q(\mathbf{x})$
- Q_b eine Rechteckmatrix mit $[1 \ c_{i,x} \ c_{i,y} \ c_{i,z}]$ in jeder Zeile

Das Gleichungssystem in Gleichung (3.54) stellt eine Dichtematrix dar und wird nach γ und β durch LU-Zerlegung gelöst. Dies ist aufgrund der gut konditionierten Matrix möglich.

Die Verwendung des Polynoms ist optional. Werden allerdings wenige Kontrollpunkte verwendet, ermöglicht die Addition des Polynoms dritter Ordnung eine C2-stetige Interpolation.

Um den Einfluss des Fernfeldes auf die lokale Interpolation zu vermeiden, werden zusätzlich Fokuspunkte \mathbf{x}_f eingeführt. Zu jedem Fokuspunkt wird ein innerer Radius r_i und ein äußerer Radius r_a definiert. Innerhalb von r_i werden die Werte der Kontrollpunkte entsprechend Gleichung (3.48) interpoliert, außerhalb von r_a wird der Wert der RBF auf Null gesetzt. Dazwischen wird ein C2-stetiger Übergang zwischen den Bereichen erzwungen. Es gilt also

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{für } \bar{x} < 0, \\ 1 - \bar{x}^2(3 - 2\bar{x}), & \text{für } 0 \leq \bar{x} \leq 1, \\ 0, & \text{für } \bar{x} > 1 \end{cases} \quad (3.55)$$

wobei $\bar{x} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_f| - r_i}{r_a - r_i}$ ist. Man erhält nun eine Interpolation mit Glättungsansatz, indem

3 Numerische Methoden

man Gleichung (3.53) um $\psi(\bar{x})$ erweitert.

$$f(\mathbf{x}) = \psi(\bar{x}) \left[\sum_{i=1}^{N_c} \gamma_i \cdot \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) + q(\mathbf{x}) \right] \quad (3.56)$$

Ein einzelner oder mehrere Fokuspunkte können beliebig in der Punktwolke verteilt liegen.

3.3.3 AUSWAHL DER KONTROLLPUNKTE

Bei der adjungierten Formoptimierung wird für jede Oberflächenzelle eine Sensitivität im Zellmittelpunkt berechnet. Diese Sensitivität entspricht einer Verformung in oberflächennormaler Richtung, mit der eine vorher gewählte Zielfunktion minimiert werden kann. Somit entspricht jeder Zellmittelpunkt des Oberflächennetzes einem Kontrollpunkt c . Die Sensitivität entspricht dem Verschiebungsvektor f . Bei der Verwendung jedes Zellmittelpunktes als Kontrollpunkt würde die Gleichung (3.54) schnell zu einem sehr großen Gleichungssystem anwachsen, dessen Lösung sehr hohe Rechenzeiten erfordern würde. Um dies zu verhindern, kann die Zahl der Kontrollpunkte sukzessiv verringert werden. Dazu wird die Anzahl der Kontrollpunkte halbiert, indem jeweils der Nachbarpunkt gelöscht wird. Die Verschiebungsvektoren der gelöschten Punkte werden dabei auf den verbleibenden Punkt gemittelt. Damit kann sichergestellt werden, dass keine signifikanten Informationen verloren gehen. Durch das Löschen der Nachbarpunkte bleibt die Verteilungsdichte der Punkte qualitativ gleich, was in Abbildung 3.5 dargestellt ist.

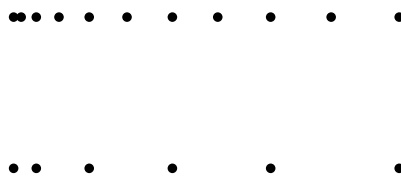


Abb. 3.5: Löschen von Nachbarpunkten auf dem Oberflächennetz mit der ursprünglichen Punkteverteilung (obere Reihe) und der reduzierten Punkteverteilung (untere Reihe). Die qualitative Verteilungsdichte bleibt erhalten.

Abbildung 3.5 veranschaulicht, dass durch Löschen der Nachbarpunkte die Verteilung der Kontrollpunkte erhalten bleibt und die Anzahl der Kontrollpunkte halbiert

wird. Dieser Vorgang kann wiederholt werden, bis die gewünschte Anzahl von Kontrollpunkten erreicht ist.

3.3.4 PARAMETERVARIATION

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 angesprochen, enthält die RBF einen freien Parameter α , mit dem der Einfluss der RBF auf die Geometrie gesteuert werden kann. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. In Abbildung 3.6 (a) ist ein Quader dargestellt, welcher in einem Punkt verformt werden soll. Als RBF wird dabei die Wendlandfunktion 2 verwendet.

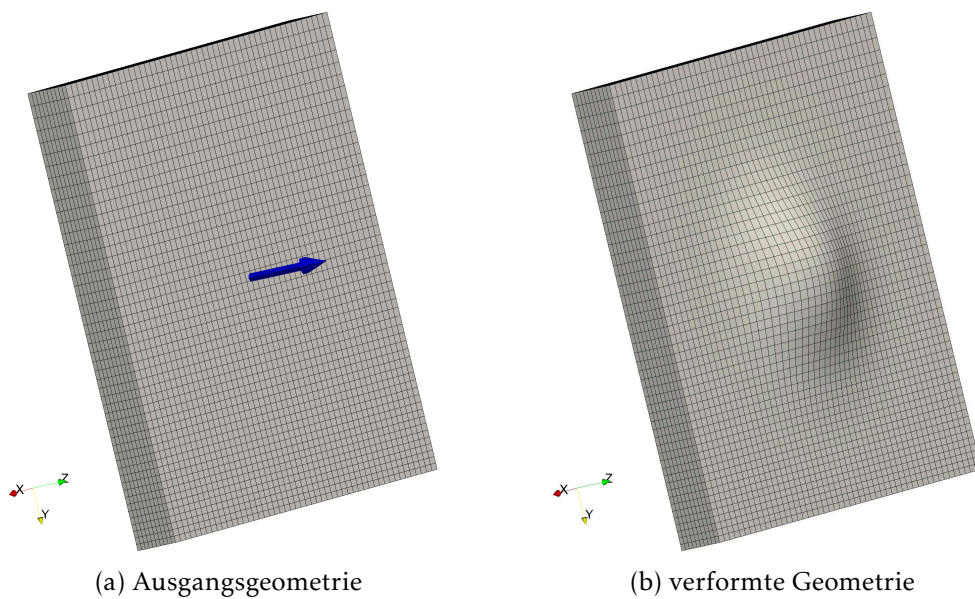


Abb. 3.6: Verformte Geometrien unter Verwendung eines Kontrollpunktes.

Abbildung 3.6 (b) zeigt die verformte Geometrie. Der freie Parameter α wurde dabei mit der halben Kantenlänge des Quaders angenommen. Bei Vergrößerung von α vergrößert sich der Einflussbereich des Kontrollpunktes ebenfalls.

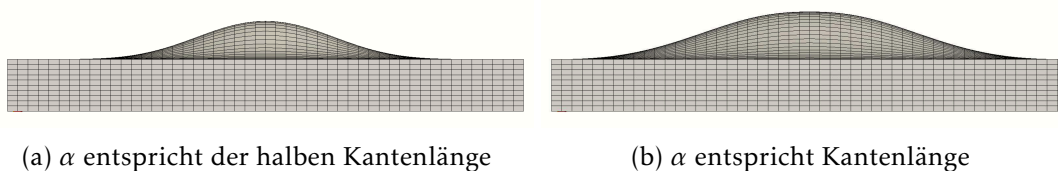


Abb. 3.7: Verformte Geometrien unter Variation des freien Parameters α .

3 Numerische Methoden

Abbildung 3.7 zeigt die beiden Verformungen mit unterschiedlichem α . In Abbildung 3.7 (a) ist der Einfluss des Kontrollpunktes auf das Zentrum des Quaders begrenzt, während in Abbildung 3.7 (b) der Einfluss bis zur Kante reicht. Über den freien Parameter lässt sich also der Einflussbereich eines Kontrollpunktes auf die zu verformende Geometrie regulieren. Zusätzlich ist die Form der RBF zu erkennen, welche bereits in Abbildung 3.2 gezeigt wurde.

Ein weiteres Beispiel zeigt den Einfluss der Anzahl der Kontrollpunkte.

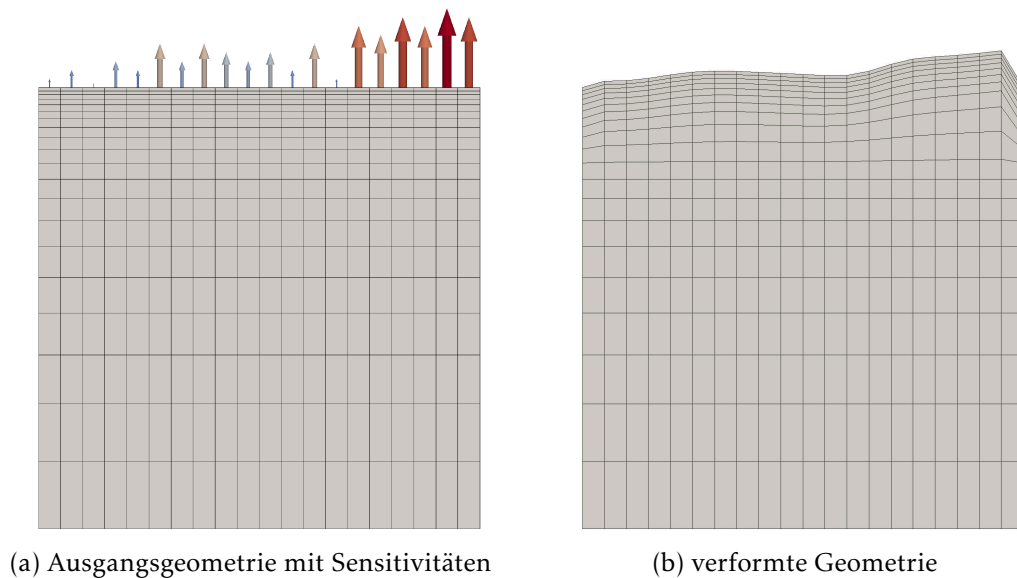


Abb. 3.8: Ausgangsgeometrie mit Sensitivitäten und verformte Geometrie.

Abbildung 3.8 (a) zeigt eine einfache Ausgangsgeometrie mit zufällig erzeugten Sensitivitäten. Da diese eine Verformung in oberflächennormaler Richtung anzeigen, werden diese als Pfeile dargestellt. Abbildung 3.8 (b) zeigt die verformte Geometrie, wobei jeder Zellmittelpunkt an der Oberseite als Kontrollpunkt verwendet wurde, insgesamt also 20 Kontrollpunkte. Um den Einfluss der Anzahl der Kontrollpunkte zu verdeutlichen, sind in Abbildung 3.9 die erzielten Verformungen entlang der Oberfläche aufgetragen. Dabei wurde bei den einzelnen Verformungsschritten die Anzahl der Kontrollpunkte jeweils halbiert. In Schritt 1 wurden alle 20 Kontrollpunkte verwendet, in Schritt 2 zehn und in Schritt 3 fünf Kontrollpunkte.

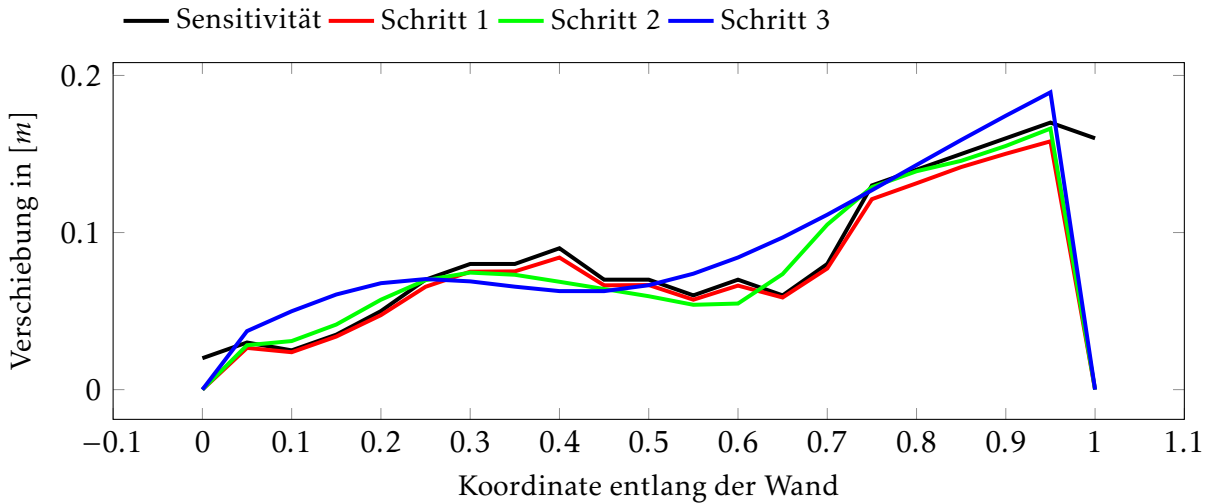


Abb. 3.9: Verformte Geometrie im Vergleich zu den Sensitivitäten bei verschiedener Anzahl der Kontrollpunkte.

Abbildung 3.9 zeigt den Einfluss der Anzahl der Kontrollpunkte. Man erkennt in Schritt 1 eine sehr gute Übereinstimmung mit den Sensitivitäten. Mit verringerter Anzahl der Kontrollpunkte nimmt die Qualität der Übereinstimmung ab. Dabei verringert sich auch die Rechenzeit, die für das Lösen von Gleichung (3.54) benötigt wird. Für komplexe Anwendungen ist es daher ratsam, einen Kompromiss zwischen dem Rechenzeitbedarf und der Anzahl der Kontrollpunkte zu finden.

3.3.5 ERWEITERUNG AUF PERIODISCHE RECHENGEBIETE

Im zweiten Teil der Arbeit soll die Widerstandsreduktion einer voll entwickelten, turbulenten Kanalströmung untersucht werden. Da die Simulationen einer solchen Strömung in einem periodischen Rechengebiet durchgeführt werden, ist eine Erweiterung des vorgestellten Verformungsalgorithmus notwendig. Da der Kanal auch nach der Verformung periodisch sein soll, muss die Interpolation über die Grenzen des Rechengebietes hinaus durchgeführt werden. Abbildung 3.10 zeigt ein Rechenetz mit nicht-periodischen Randpunkten, wobei nur jene Punkte, die im Interpolationsradius um den Kontrollpunkt in schwarz liegen, in die Interpolation eingehen.

Im Fall einer periodischen Randbedingung muss der Interpolationsradius über den Strömungsrand hinausgehen, sodass die Gebiete am gegenüberliegenden Rand be-

3 Numerische Methoden

rücksichtigt werden. Dieses Prinzip ist in Abbildung 3.11 veranschaulicht.

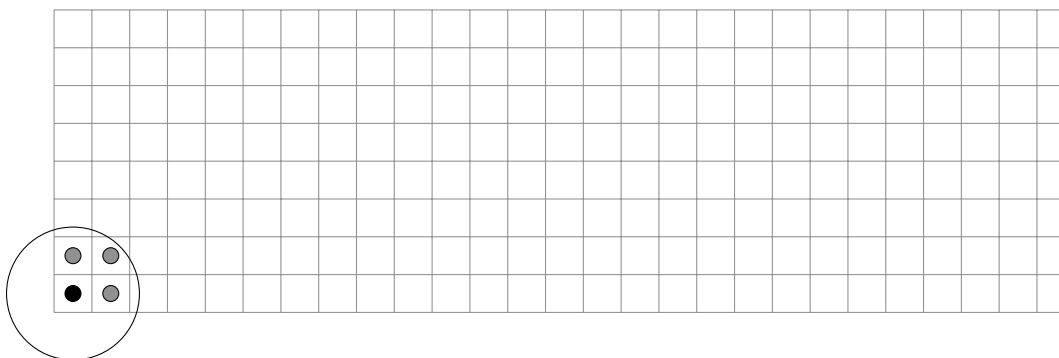


Abb. 3.10: Konfiguration für eine Interpolation eines Kontrollpunktes (schwarz) am Strömungsrand im nicht periodischen Fall. Alle Punkte innerhalb des Interpolationsradius (grau) werden für die Interpolation berücksichtigt.

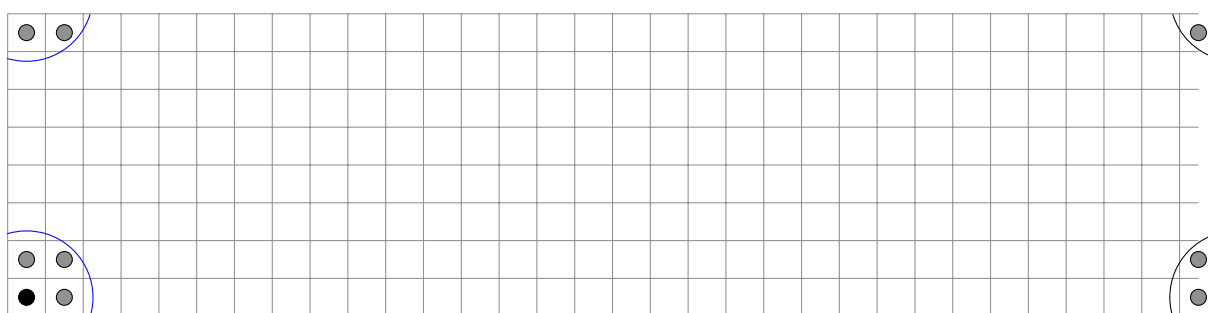


Abb. 3.11: Konfiguration für eine Interpolation eines Kontrollpunktes (schwarz) am Strömungsrand im nicht periodischen Fall. Alle Punkte innerhalb des Interpolationsradius (blau) werden für die Interpolation berücksichtigt.

Um eine periodische Interpolation über den Strömungsrand hinaus zu realisieren, muss die Dichtematrix (3.45) dementsprechend erweitert werden. Dazu werden am Strömungsrand zusätzliche Kontrollpunkte erzeugt, die auf den Wert der Kontrollpunkte am gegenüberliegenden Rand gesetzt werden. Der hinzugefügte Rand muss dabei größer sein als der gewählte Interpolationsradius. Abbildung 3.12 zeigt ein Strömungsgebiet, das um Kontrollpunkte außerhalb des Rechengebietes erweitert wird.

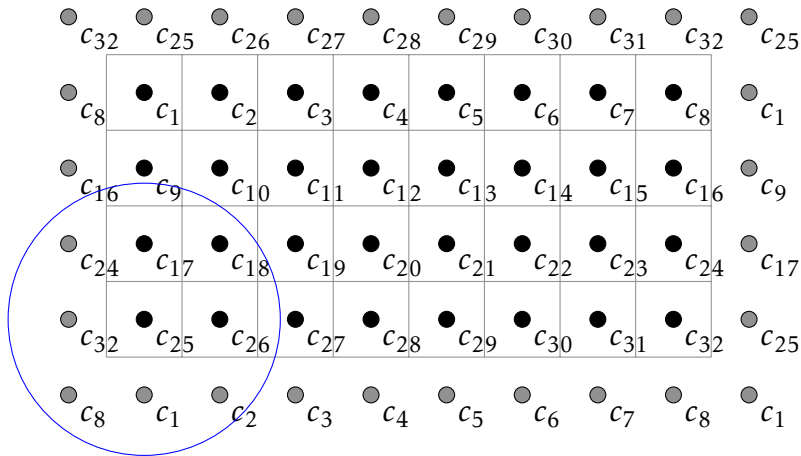


Abb. 3.12: Konfiguration für eine Interpolation eines Kontrollpunktes (schwarz) am Strömungsrand für einen periodischen Fall. Alle Punkte innerhalb des Interpolationsradius (blau) werden für die Interpolation berücksichtigt, wobei der Interpolationsradius über den Strömungsrand hinaus reicht.

Wendet man nun die Interpolation wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben auf die Konfiguration aus Abbildung 3.12 an, findet eine Interpolation über die Ränder des Strömungsgebietes hinaus statt. Der resultierende Lösungsvektor der Wichtungsfaktoren enthält nun einen Eintrag für jeden Kontrollpunkt (schwarz) und für jeden hinzugefügten Punkt (grau). Im letzten Schritt extrahiert man die zu den Kontrollpunkten gehörigen Wichtungsfaktoren und kann die resultierenden Verformungen an jedem Netzpunkt bestimmen, wobei die Periodizität erhalten bleibt.

Skalarwertige Optimierung

Die Klimatisierung von Flugzeugkabinen erfährt in den letzten Jahren eine stetig wachsende Bedeutung. Zum einen spielt der Komfort eine wichtige Rolle für die Passagiere, zum anderen müssen durch die Zunahme der Unterhaltungselektronik auch immer größere Wärmelasten abgeführt werden. Am Deutschen Zentrum für Luft- und Raumfahrt werden daher am Passagierflugzeug Dornier 728, welches als Versuchsträger zur Verfügung steht, neue Klimatisierungskonzepte erforscht.



Abb. 4.1: Versuchsträger Passagierflugzeug Dornier 728 zur Erforschung neuer Klimatisierungskonzepte am DLR Göttingen.

Diese neuen Klimatisierungskonzepte stellen auch neue Anforderungen an die Kabinenluftauslässe (KLA), welche eine direkte Schnittstelle zwischen der Klimaanlage und der Kabine des Flugzeugs darstellen. Diese KLAs sollen nun mittels adjungierter Formoptimierung verbessert werden. Als Anwendungsbeispiel dient der Kabinenluftauslass des Versuchsträgers (DoKLA). Die Position des untersuchten KLAs in der Kabine sowie dessen wichtigste Elemente sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

4 Skalarwertige Optimierung

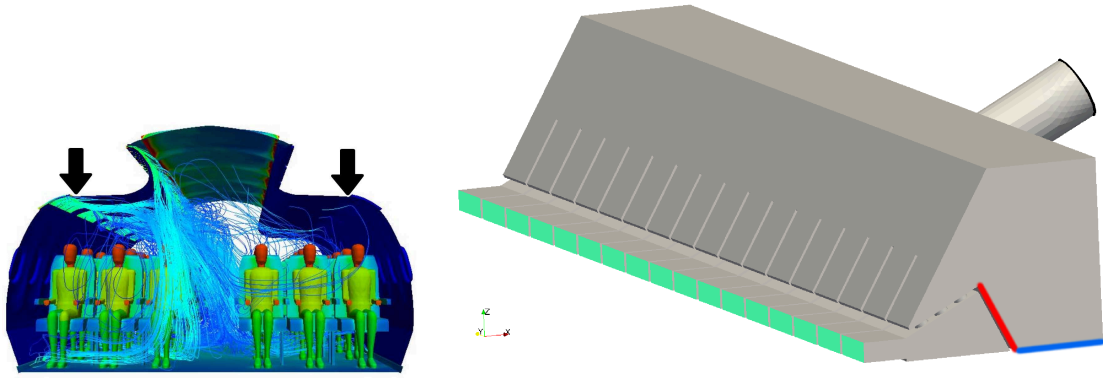


Abb. 4.2: Darstellung der Position des DoKLA in der Kabine (links, entnommen von Konstantinov *et al.* [55]). Rechts ist der DoKLA dargestellt. Die Prall- (rot), die Bodenplatte (blau), die Auslassflächen (grün) sowie der Einlass (schwarz) sind farblich hervorgehoben.

4.1 VORHERSAGE DES STRÖMUNGSFELDES

In den Kapiteln 4 und 5 werden die Lösungen der RANS-Gleichungen verwendet. Die Zustandsgrößen mittlere Geschwindigkeit \bar{u} und mittlerer Druck \bar{p} werden aus Gründen der Übersichtlichkeit in den genannten Kapiteln als u und p bezeichnet. Es werden also stets mittlere Zustandsgrößen betrachtet.

Die Simulationen wurden auf dem Hochleistungsrechencluster SCART des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrttechnik in Göttingen durchgeführt. SCART verfügt über 256 Rechenknoten, die jeweils mit zwei 10-core Intel Chips (2.8 GHz) ausgestattet sind. Genauere Informationen zur Konfiguration finden sich auf der Website des SCART Clusters [22].

Die Optimierung des DoKLA erfolgt auf der Grundlage von Lösungen der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS-Gleichungen). Die Diskretisierung der Geometrie aus Abbildung 4.2 basiert auf einem unstrukturierten Gitter, bestehend aus 7.177.424 Zellen, wovon 5.554.910 Tetraederzellen für das Volumen und 1.622.514 Prismenzellen in drei Schichten zur Auflösung der Grenzschicht verwendet wurden. Das Gitter wurde in Bereichen mit großen Geschwindigkeitsgradienten verfeinert, um die Strömungsvorgänge besser darzustellen. Die wandnahen Bereiche wurden durch drei Schichten von Prismenzellen aufgelöst. Damit ergeben sich y^+ -

Werte im Bereich von 0 bis 16,3, welche durch Gleichung (4.1) definiert sind.

$$y^+ = \frac{Y \cdot \mathbf{u}_\tau}{\nu}, \quad (4.1)$$

Dabei stellt Y den Wandabstand in wandnormaler Richtung, $\mathbf{u}_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ die Schubspannungsgeschwindigkeit und ν die kinematische Viskosität dar. Da für die korrekte Auflösung der viskosen Unterschicht y^+ -Werte < 1 nötig sind, wurden Wandfunktionen verwendet, um die viskose Unterschicht zu modellieren. Die y^+ -Werte im wandnahen Bereich des DoKLA sind in Abbildung 4.4 dargestellt.

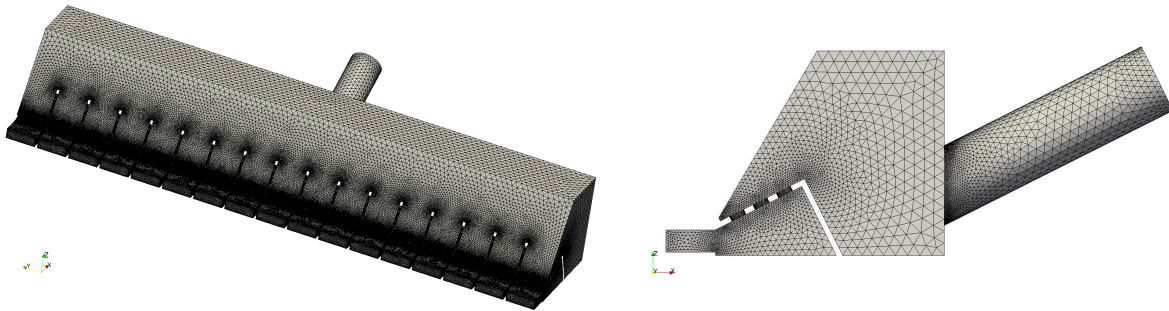


Abb. 4.3: Rechenetz (räumliche Diskretisierung) des DoKLA in der Vorderansicht (links) und der Seitenansicht (rechts).

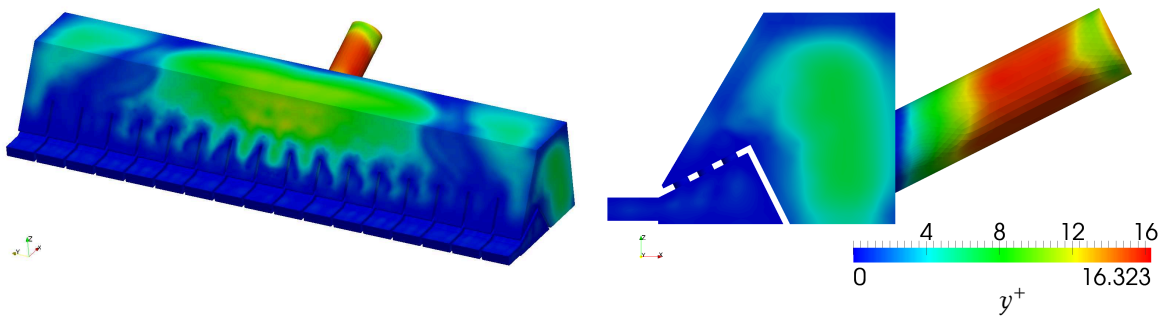


Abb. 4.4: Oberflächenverteilung von y^+ -Werten in der Vorderansicht (links) und der Seitenansicht (rechts).

Die stationären, inkompressiblen RANS-Gleichungen werden mit dem Softwarepaket OpenFOAM[®] gelöst. Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 erläutert wurde, müssen für die Lösung der RANS-Gleichungen die Elemente des Reynoldsspannungstensors modelliert werden. In der vorliegenden Arbeit wurde dies durch Verwendung des $k - \omega$ SST Turbulenzmodells [67] realisiert. Dabei steht k für die turbulente

4 Skalarwertige Optimierung

kinetische Energie und ω für die charakteristische Frequenz der energiedissipierenden Wirbel. Nach jedem Simulationsschritt wird der Grad der Änderung der Strömungsgrößen im Vergleich zum vorherigen Schritt berechnet und als Residuumswert gespeichert. Zeigt die Lösung keine bzw. nur noch geringe Änderungen zum vorherigen Iterationsschritt, spricht man von einer konvergierten Lösung. Wie in Abbildung 4.5 dargestellt, spiegeln die Residuen der in dieser Arbeit berechneten Strömungsgrößen ein konvergentes Verhalten wider.

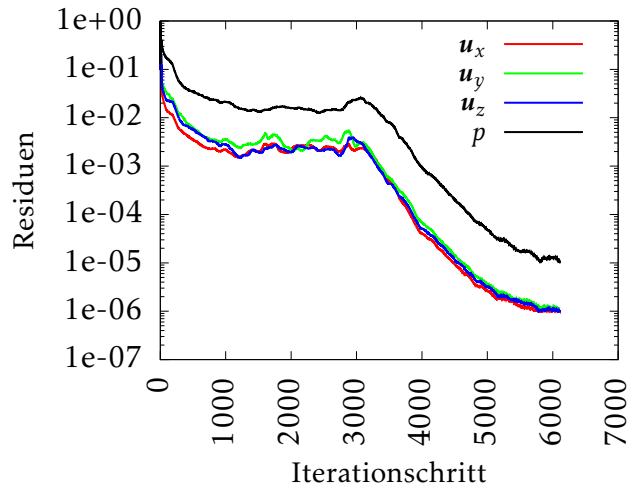


Abb. 4.5: Logarithmische Darstellung der Residuen der Strömungsgrößen im Verlauf der primalen Simulation.

Als Randbedingung für die Simulation wurde am Einlass des DoKLA ein mittlerer Geschwindigkeitswert von $\mathbf{u} = 7 \frac{m}{s}$ vorgegeben, was einem Volumenstrom von $\dot{V} = 0.0181 \frac{m^3}{s}$ entspricht. Mit einem Durchmesser des Einlassrohrs von $d = 0,057m$ und einer kinematischen Viskosität von $\nu = 1,49 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ für Luft bei $20^\circ C$ ergibt sich eine Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{\mathbf{u} \cdot d}{\nu} \quad (4.2)$$

von 26.800. Die Profile der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} sowie der turbulenten kinetischen Energie k und der charakteristischen Frequenz der energiedissipierenden Wirbel ω entsprechen am Einlass den Verläufen einer voll entwickelten Rohrströmung. Das Fluid strömt daher mit einem parabelförmigen Geschwindigkeitsprofil aus dem Einlassrohr in die Mischkammer ein, trifft auf die Prallplatte und wird in der Mischkammer verteilt. Beim Aufprall wird das Fluid zur Seite gedrängt (Abbil-

4.1 Vorhersage des Strömungsfeldes

dung 4.6 oben), so dass in der Mischkammer ein Wirbel entsteht (Abbildung 4.6 unten). Durch die obere Wand der Mischkammer wird das Fluid durch die Lochbleche zu den Auslassflächen geführt. Die Geschwindigkeitsmagnitude an den Auslassflächen ist in Abbildung 4.7 gezeigt. Dabei zeigen sich an den äußeren Auslassflächen deutlich höhere Ausströmgeschwindigkeiten als an den zentralen Auslassflächen.

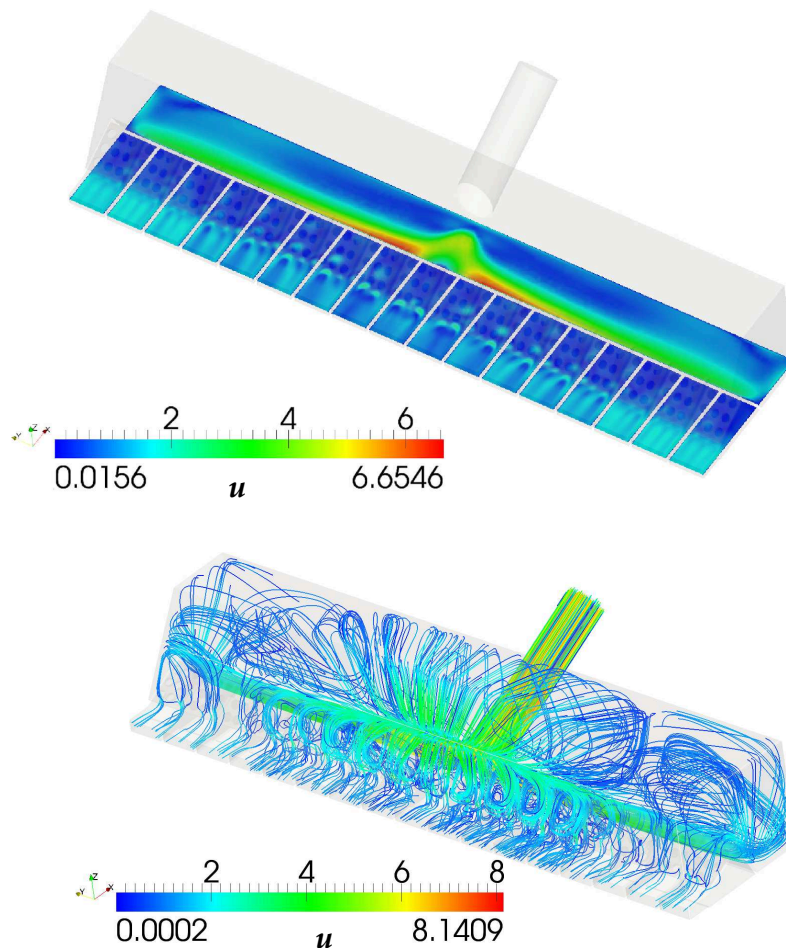


Abb. 4.6: Visualisierung des vorhergesagten Strömungsfeldes \mathbf{u} im Querschnitt in Höhe der Auslassflächen (oben) sowie als Stromliniendarstellung (unten).

4 Skalarwertige Optimierung

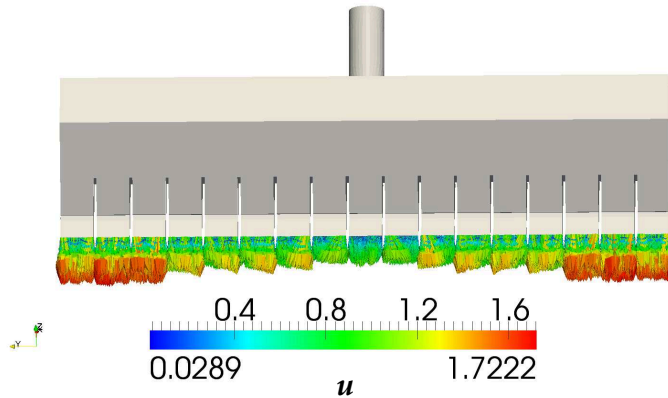


Abb. 4.7: Magnitude der Geschwindigkeit an den Auslassflächen des DoKLA.

4.2 SKALARE OPTIMIERUNGSPROBLEME

Im ersten Anwendungsteil werden skalare Optimierungsprobleme behandelt. Dabei wird eine Formoptimierung durchgeführt, um eine definierte Zielfunktion zu minimieren. Die Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Zielfunktionen werden dabei nicht berücksichtigt. Die Wahl der einzelnen Zielfunktionen beruht auf Anforderungen, die in realen Anwendung an die Kabinenluftauslässe gestellt werden.

4.2.1 ZIELFUNKTION HOMOGENE GESCHWINDIGKEIT

Der Betrag des mittleren Geschwindigkeitsvektorfeldes, kurz Geschwindigkeitsmagnitude, an den Auslassflächen des DoKLA zeigt ein sehr unregelmäßiges Profil (vgl. Abbildung 4.7). Da in der Kabine mehrere KLA's nebeneinander angebracht sind, führt das dargestellte inhomogene Geschwindigkeitsprofil zu einer entlang der Kabine variierenden Auslassgeschwindigkeit. Eine Forderung für die Umsetzung neuer Klimatisierungskonzepte ist jedoch, dass sich das Geschwindigkeitsprofil in Längsrichtung der Kabine möglichst wenig ändert. Daraus ergibt sich die erste Zielfunktion der Homogenität der Geschwindigkeit am Auslass.

$$J_h = \int_{\Gamma_{Auslass}} \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^d)^2 d\Gamma_{Auslass} \quad (4.3)$$

Durch Minimierung von Gleichung (4.3) soll die Abweichung der tatsächlichen Geschwindigkeit am Auslass von einem vorgegebenen Geschwindigkeitswert möglichst gering ausfallen. Letzterer ist durch die Massenerhaltung gegeben. Der Initialwert der Zielfunktion liegt bei $J_{h0} = 0.0692471 \frac{m^2}{s^2}$.

Aufbauend auf den in Abschnitt 4.1 vorhergesagten Strömungsfeldern kann nun die adjungierte Simulation durchgeführt werden. Wie in Abbildung 4.8 dargestellt, zeigen auch die Residuen der Lagrange-Multiplikatoren im Verlauf der Simulation ein konvergentes Verhalten.

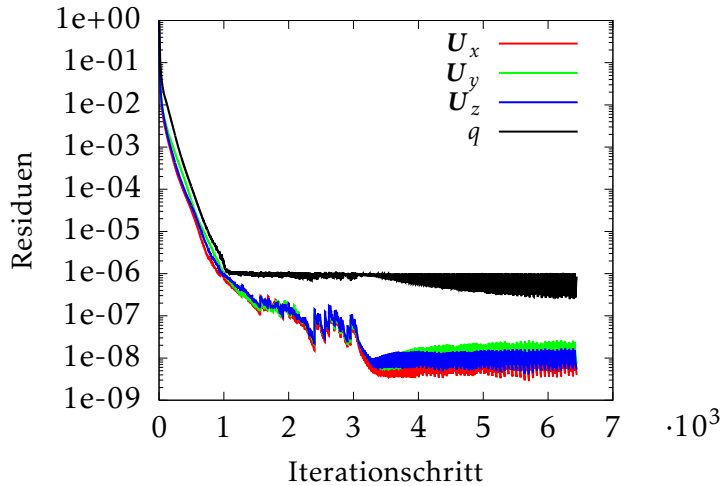


Abb. 4.8: Logarithmische Darstellung der Residuen der Lagrange-Multiplikatoren im Verlauf der adjungierten Simulation für die Zielfunktion J_h .

Die aus den Ergebnissen der primalen und der adjungierten Simulation berechnete Verteilung der Sensitivität ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Dabei treten die größten Sensitivitätswerte direkt entlang der Oberkante der Prallplatte auf. Eine Verformung anhand solcher singularer Sensitivitätswerte ist jedoch problematisch. Ein Grund hierfür ist, dass Sensitivitätswerte als Skalarfelder vorliegen, wobei jeder Skalarwert eine Verformung in oberflächennormaler Richtung anzeigt. Oberflächensensitivitäten, die in den Zellmittelpunkten definiert sind, deren Zellen an die Kante der Prallplatte grenzen, würden dabei auf die Kante interpoliert werden. An dieser Stelle ist jedoch keine eindeutig zuordenbare Normalenrichtung bestimmbar, da diese nur für Flächen definiert ist. Um dieses Problem zu umgehen, werden die Sensitivitätswerte vernachlässigt, die nach der Interpolation entlang der Kante gelten. Die Sensitivitätswerte entlang der Kante sind im oberen Teil von Abbildung 4.9 dargestellt und sind betragsmäßig deutlich größer als die Sensitivitätswerte auf der Prallplatte. Somit würden die Werte die Verformung dominieren.

Die übrigen Sensitivitätswerte auf der Prallplatte werden mithilfe eines Gauß-Filters geglättet. Dazu wird ein beliebiger Punkt der Oberfläche c betrachtet und der Ab-

4 Skalarwertige Optimierung

stand zum Nachbarpunkt cn bestimmt. Dieser Abstand wird als Argument $r = |c - cn|$ an die Gaußsche Verteilungsfunktion $f(r) = e^{-\frac{r^2}{\sigma^2}}$ übergeben. Letztere dient dabei als radiale Basisfunktion. Als Steuerparameter für den Wirkungsradius der RBF dient dabei die Standardabweichung σ . Der Wert der Sensitivität $S(cn)$ am Punkt cn wird folgendermaßen bestimmt:

$$S(cn) = S(c) \cdot e^{-\frac{|c-cn|^2}{\sigma^2}}. \quad (4.4)$$

Dieser Wert wird für alle Nachbarpunkte cn_i ermittelt, die innerhalb des Wirkungsradius der RBF liegen. Das beschriebene Vorgehen wird für jeden Punkt der Oberfläche c wiederholt, so dass die geglätteten Sensitivitätswerte eines Punktes c durch

$$S(c) = \sum_i S(cn_i) \cdot e^{-\frac{|c-cn_i|^2}{\sigma^2}} \quad (4.5)$$

bestimmt werden. Das Vorgehen ist analog zur Interpolation der Sensitivitätswerte für die Verformung, die in Abschnitt 3.3.2 ausführlich beschrieben wurde.

Die geglätteten Sensitivitätswerte sind ebenfalls in Abbildung 4.9 gezeigt und werden nach der Glättung an das Verformungswerkzeug übergeben.

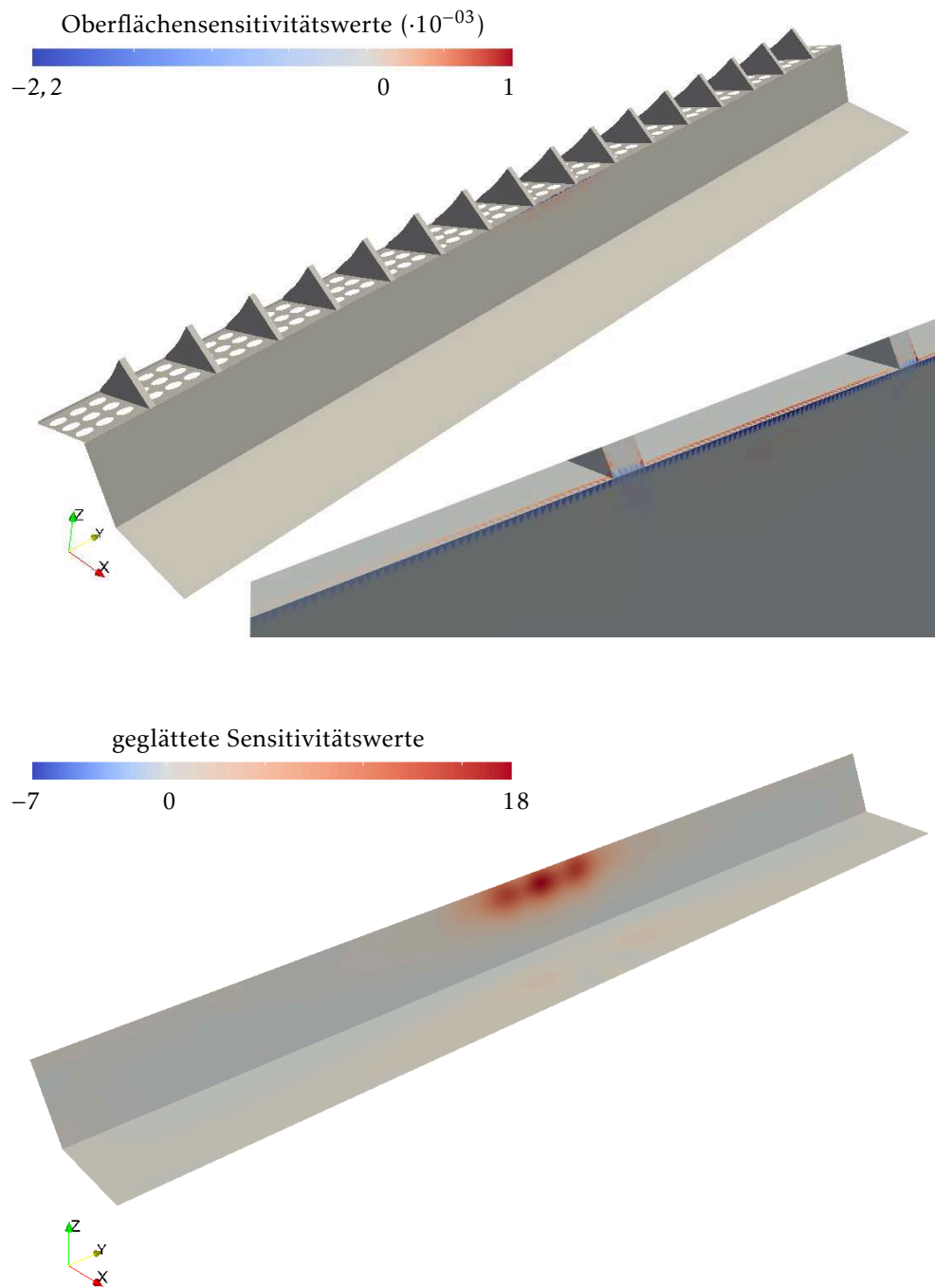


Abb. 4.9: Verteilung der Sensitivitätswerte auf der Prallplatte. Die berechneten Sensitivitätswerte sind in der oberen Abbildung dargestellt, wobei die Werte entlang der Kante dominieren. Im unteren Teil der Abbildung sind die Werte an der Kante vernachlässigt und die verbleibenden Werte geglättet.

4 Skalarwertige Optimierung

Abbildung 4.9 verdeutlicht die Dominanz der Sensitivitätswerte entlang der Kante. Diese sind deutlich größer als im übrigen Feld. Werden diese Werte vernachlässigt und die übrigen Sensitivitätswerte geglättet, ergibt sich die Verteilung im unteren Bild. Nach Übergabe der Werte an das Verformungswerkzeug werden sie von diesem auf alle Netzpunkte interpoliert. Die daraus resultierende Verformung wurde auf einen Maximalwert von 1 mm normiert, der in etwa der Höhe des Grenzschichtgitters entspricht. Dieser Wert wurde bewusst klein gewählt, da die Optimierung letztendlich in einer Prozesskette iterativ erfolgen soll. Der Wert sollte allerdings auch nicht zu klein gewählt werden, da ein zu kleiner Maximalwert eine Vielzahl von Durchläufen der Prozesskette zur Folge hätte.

Abbildung 4.10 zeigt, dass nur die Prallplatte eine relevante Verformung erfährt. An allen anderen Flächen des Strömungsrandes liegt die maximale Verformung in der Größenordnung von 10^{-3} mm . Insgesamt zeigen die resultierenden Verformungen eine Ausbeulung der Prallplatte zum Einlassrohr hin. Die Verformungen sind in Abbildung 4.10 für jeden Oberflächenpunkt dargestellt. Im nächsten Schritt wird dann eine erneute Strömungssimulation mit Hilfe des verformten Gitters vollzogen.

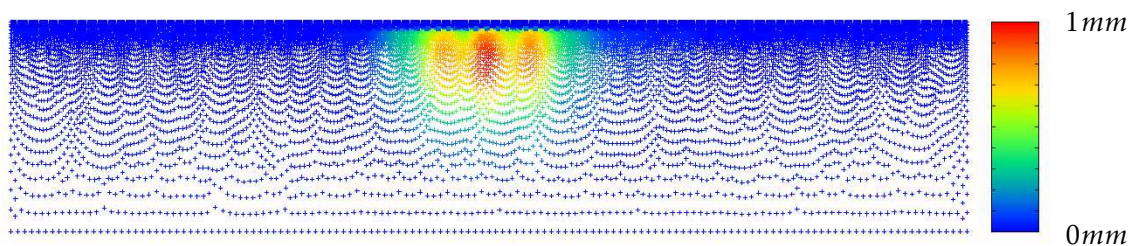


Abb. 4.10: Darstellung der Verformungen, die jeder einzelne Punkt erfährt, als Draufsicht auf die Bodenplatte. Der Farbwert entspricht dabei der resultierenden Verformung.

Eine Auswertung der Zielfunktion nach der Strömungssimulation auf dem modifizierten Rechenetz ergibt einen Wert von $J_{h1} = 0.0649621 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$, was einer Reduzierung der Zielfunktion um ca. 6,2% entspricht. Bevor die Veränderung der Strömungsgrößen durch die optimierte Form genauer diskutiert wird, soll eine iterative Optimierung des KLA erfolgen. Dazu wird aufbauend auf der neuen Strömungssimulation erneut eine adjungierte Simulation durchgeführt. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis die Zielfunktion ein konvergentes Verhalten zeigt. Die dazu entwickelte Prozesskette ist in Abbildung 4.11 dargestellt.

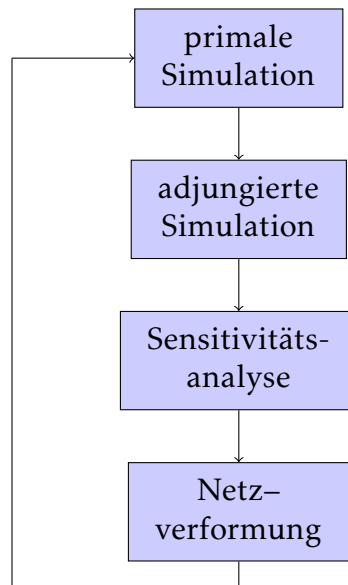


Abb. 4.11: Darstellung der einzelnen Schritte in der Prozesskette zur iterativen Optimierung des KLA.

In jedem Durchlauf der Prozesskette werden auf der Grundlage der Geometrie aus dem vorherigen Durchlauf die primale und die adjungierte Gleichung gelöst. Dem folgt die Sensitivitätsanalyse und die Verformung des Rechengitters. Der finale Wert der Zielfunktion liegt nach fünf Optimierungsschritten bei $J_{h5} = 0,0588965$, was einer abschließenden Reduzierung um 14,95% entspricht. Der Verlauf der Zielfunktion über den einzelnen Optimierungsschritten ist in Abbildung 4.12 dargestellt, wobei Iterationsschritt 1 den Ausgangswert darstellt.

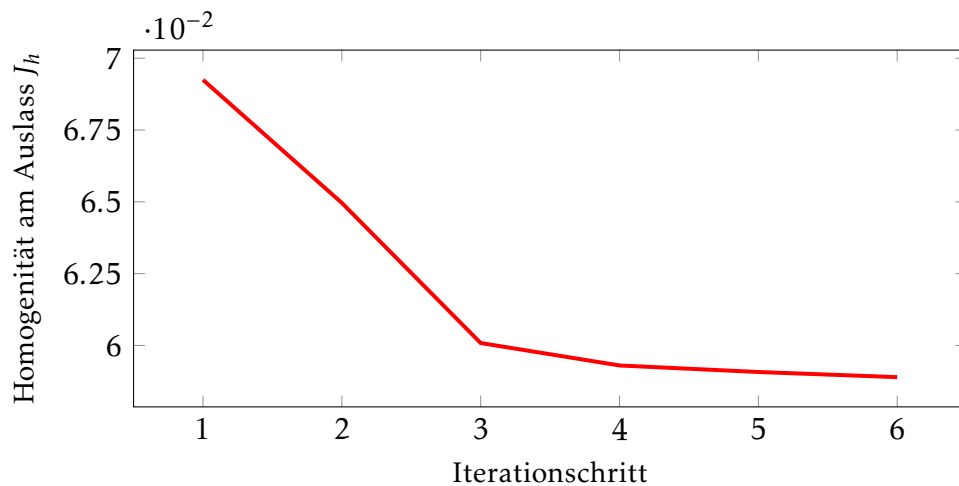


Abb. 4.12: Verlauf der Zielfunktion über den Iterationsschritten beim Durchlauf der Prozesskette.

4 Skalarwertige Optimierung

Die aus den fünf Durchläufen der Prozesskette resultierenden Zielfunktionswerte werden kontinuierlich kleiner, sodass letztendlich Konvergenz erzielt wird. Dabei stellt die Geometrie aus dem letzten Optimierungsschritt die optimierte Form dar. Die resultierende Verformung beschränkt sich weiterhin auf die Prallplatte. Die abschließende Geometrie ist als Verformung jedes einzelnen Punktes auf der Prallplatte in Abbildung 4.13 dargestellt. Die aus der Prozesskette resultierende Geometrie zeigt Ähnlichkeiten zur Geometrie nach dem ersten Iterationsschritt, der Maximalwert der Verformung in der optimalen Geometrie liegt jedoch bei $2,5\text{mm}$.

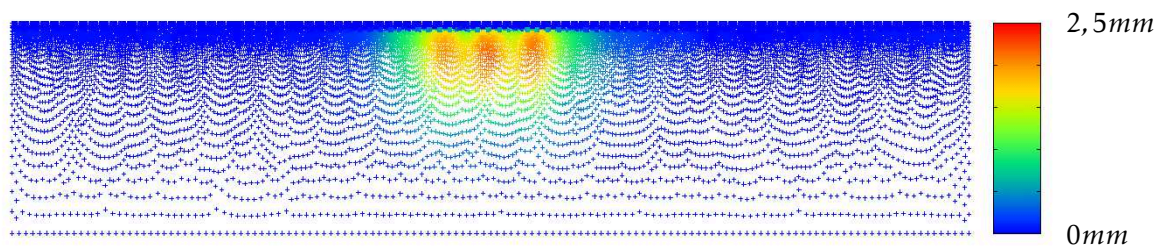


Abb. 4.13: Darstellung der Verformungen die jeder einzelne Punkt erfährt als Draufsicht auf die Bodenplatte. Der Farbwert entspricht dabei der resultierenden Verformung.

Die Optimierung ergab eine Verbesserung der Zielfunktion um ca. 15%. Damit wurde die in Abschnitt 1.3 als Ziel ausgegebene Reduzierung von 10% deutlich übertroffen.

Dass die Geschwindigkeitsverteilung am Auslass nach Optimierung der Geometrie deutlich homogener ist, zeigt der Vergleich der Geschwindigkeitsmagnitude an den Auslassflächen in Abbildung 4.14, der höhere Geschwindigkeiten in der Mitte der Austrittsflächen widerspiegelt. Die Geschwindigkeitsmagnitude an den äußeren Auslassflächen zeigt jeweils geringere Werte. In Abbildung 4.15 ist zusätzlich die Verteilung der Geschwindigkeitsmagnitude in den jeweiligen Auslassflächen gezeigt. Die Reduzierung der Zielfunktion führt zu größeren Geschwindigkeitsmagnituden an den mittleren Auslassflächen und zu geringeren Geschwindigkeitsmagnituden an den äußeren Auslassflächen. Diese Verbesserung ist in Abbildung 4.14 deutlich zu sehen.

Durch die iterative Verformung bildet sich auf der Prallplatte eine Beule aus (vgl. Abbildung 4.13), wodurch das Fluid in der Mitte der Prallplatte einen steileren Anstieg überwinden muss. Das beeinflusst auch den Austritt des Fluids aus der Mischkammer, da es die Prallplatte nun über einen spitzeren Winkel verlässt. Der Winkel

beim Aufprall auf die Stirnseite des DoKLA wird dadurch kleiner. Die Geschwindigkeitsmagnitude für die ursprüngliche und die modifizierte Geometrie ist in Abbildung 4.16 im Querschnitt des KLA gezeigt.

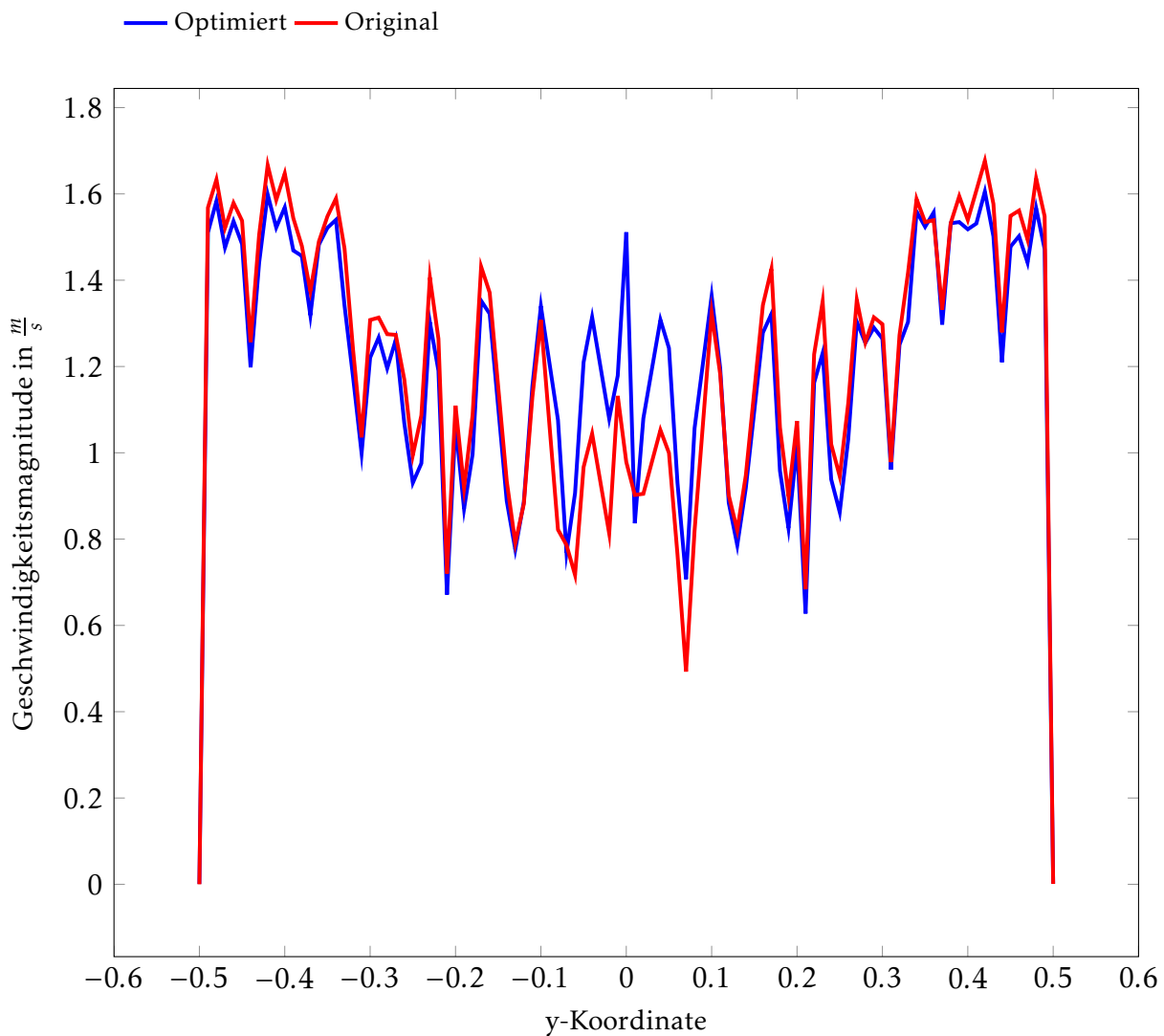


Abb. 4.14: Vergleich der Geschwindigkeitsmagnitude der Strömung durch den optimierten KLA in der Auslassebene mit der Magnitude am Auslass der Originalgeometrie.

4 Skalarwertige Optimierung

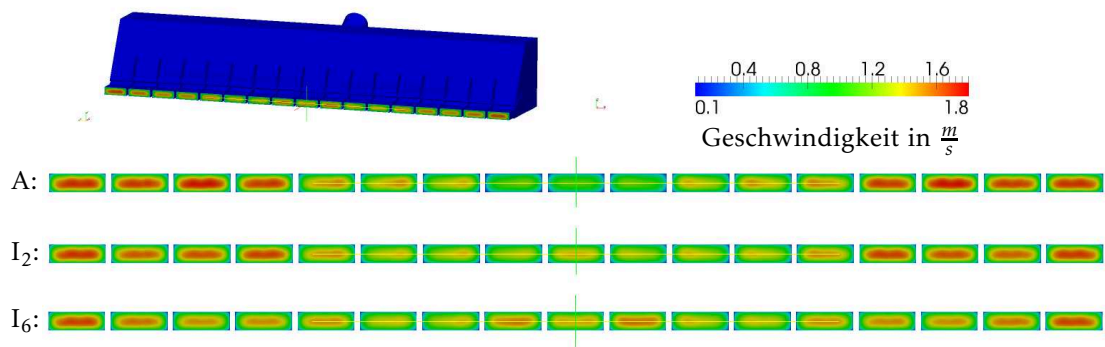


Abb. 4.15: Vergleich der Geschwindigkeitsmagnitude der Strömung durch den optimierten KLA an den einzelnen Auslassflächen. A: Ausgangswert, I₂: nach der zweiten Iteration, I₆: nach der sechsten Iteration.

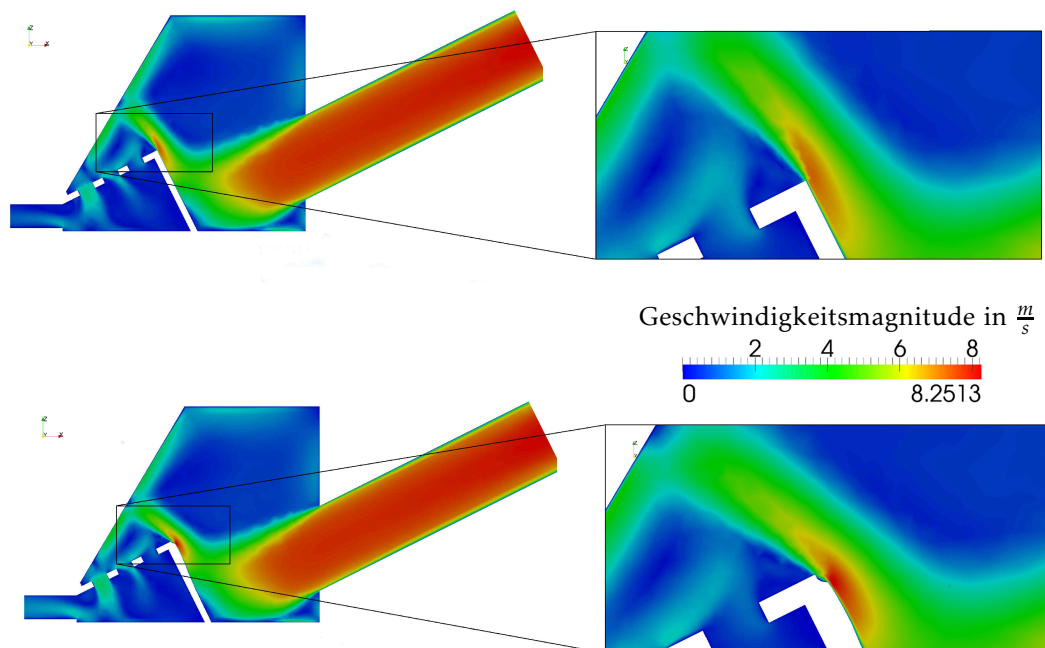


Abb. 4.16: Verteilung der Geschwindigkeitsmagnitude im Querschnitt des DoKLA. Oben ist die Verteilung in der Originalgeometrie gezeigt, unten die im modifizierten KLA.

4.2.2 ZIELFUNKTION DISSIPIERTE LEISTUNG

Bei der Konstruktion und Auslegung von Belüftungssystemen für Flugzeuge ergibt sich der Strömungswiderstand des Systems aus den Widerständen der einzelnen Teile. Um den Energieverbrauch eines Belüftungssystems so gering wie möglich zu halten, ist es notwendig, bereits bei der Konstruktion der einzelnen Komponenten und Systeme einen energieeffizienten Aufbau zu gewährleisten. Das für die Klimatisie-

nung notwendige Belüftungssystem besteht aus langen Rohrsystemen, Verzweigungen und Luftauslässen etc. Die Energie, die benötigt wird, um die Luft durch das Rohrsystem bzw. einzelne Rohrsegmente zu transportieren, entspricht dem Druckverlust des gesamten Systems bzw. Teilsystems. Um eine energieeffiziente Belüftung zu gewährleisten, soll der Druckverlust innerhalb des DoKLA, als Teil des gesamten Klimatisierungsapparates, minimiert werden.

Die Leistung, die in einem durchströmten Objekt dissipiert wird, kann durch den Energiefluss in Form des totalen Drucks durch die Ränder des durchströmten Objekts berechnet werden. Die Zielfunktion [80] lautet

$$J := - \int_{\Gamma} \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma. \quad (4.6)$$

Über feste Wände kann dabei per Definition keine Energie aus dem System austreten, man kann also ein durchströmtes Objekt als Kontrollvolumen betrachten, wobei der Energiefluss am Ein- und Auslass bilanziert wird [81]. Die Leistung, die in einem System, das von einem Fluid mit konstanter Dichte durchströmt wird, dissipiert wird, beträgt

$$J_d = - \int_{\Gamma_{Einlass}} \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_{Einlass} - \int_{\Gamma_{Auslass}} \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_{Auslass}. \quad (4.7)$$

Auf Grundlage der Simulationen aus Abschnitt 4.1 ergibt sich für die Zielfunktion ein initialer Wert von $0,543997 \frac{m^5}{s^3}$.

Mit der neuen Zielfunktion kann die adjungierte Simulation durchgeführt werden, um die Lagrange-Multiplikatoren zu bestimmen. Auch in diesem Fall stellt sich eine konvergierte Lösung ein, wie Abbildung 4.18 zeigt. Aufbauend auf der bereits gezeigten Strömungsvorhersage und den bestimmten Lagrange-Multiplikatoren können die Sensitivitätswerte berechnet werden. Ähnlich wie bei der Zielfunktion J_h sind die Sensitivitätswerte auch im vorliegenden Fall räumlich begrenzt. Der Haupteinflussbereich der Geometrie auf die Zielfunktion J_d liegt dabei am Übergang zwischen dem Einlassrohr und der Mischkammer. Die Sensitivitätswerte werden, wie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben, geglättet und an das Verformungswerkzeug übergeben.

4 Skalarwertige Optimierung

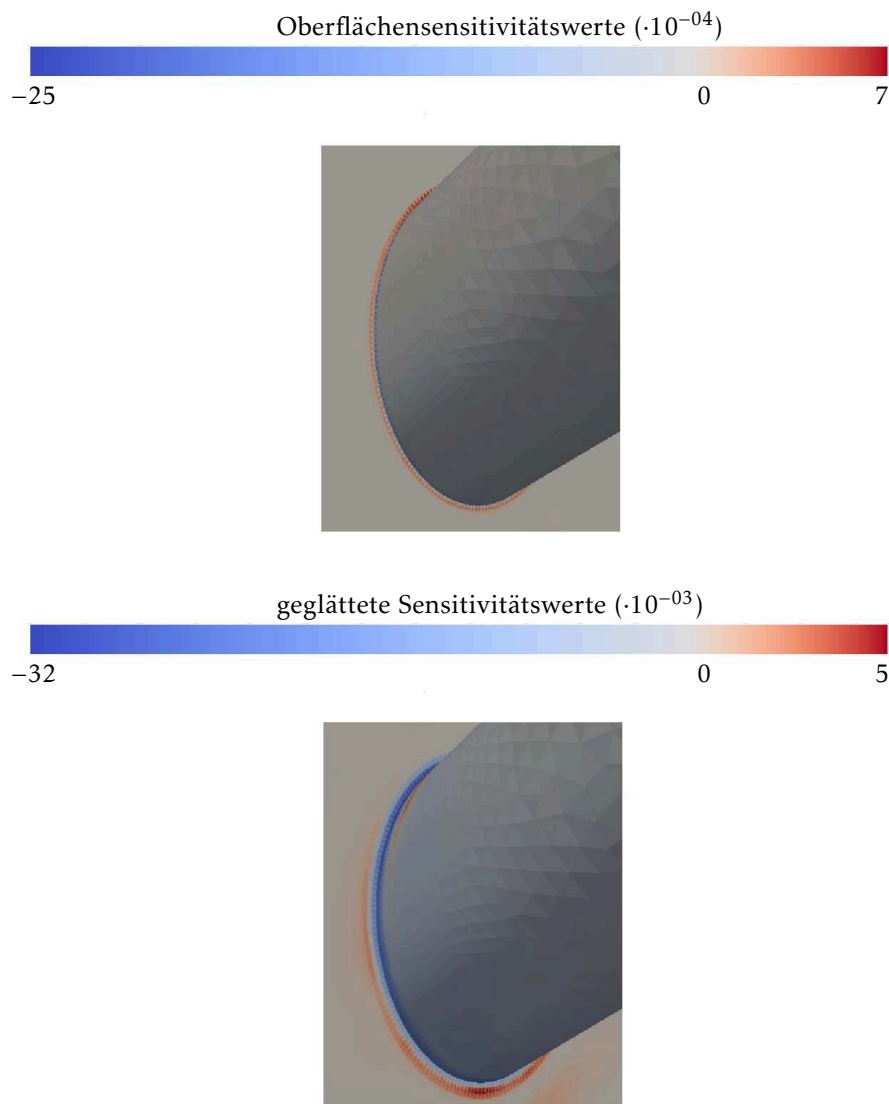


Abb. 4.17: Verteilung der Oberflächensensitivitätswerte am Übergang zwischen Einlassrohr und Mischkammer. Die berechneten Sensitivitätswerte sind auf der linken, die geglätteten auf der rechten Seite dargestellt.

Wie der in Abbildung 4.19 oben rechts gezeigte Konturverlauf deutlich macht, führt die Verformung zu einem weicheren Übergang zwischen Einlassrohr und Mischkammer. Der Querschnitt weitet sich auf und entspricht einer Form, welche man bereits als Diffusor bezeichnen kann (vgl. Abb. 4.19). Um den Einfluss der Verformung auf die Zielfunktion zu ermitteln, wird die Strömungssimulation auf dem verformten Gitter durchgeführt.

Die Strömungssimulation auf dem verformten Rechenetz ergibt einen Wert für die Zielfunktion $J_{d1} = 0,513962$, was einer Reduzierung um ca. 5,5% entspricht. Auch

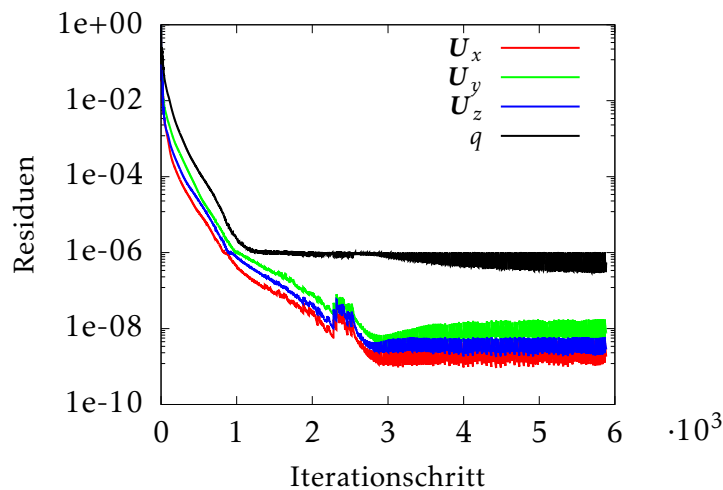


Abb. 4.18: Logarithmische Darstellung der Residuen der Lagrange-Multiplikatoren im Verlauf der adjungierten Simulation für die Zielfunktion J_d .

die Optimierung hinsichtlich der zweiten Zielfunktion erfolgt mit der in Abbildung 4.11 dargestellten Prozesskette. Für die Zielfunktion der dissipierten Leistung wurden 10 Optimierungsschritte durchlaufen. Der finale Wert der Zielfunktion liegt bei $J_{d10} = 0,443034$, was einer Reduzierung um 18,56% entspricht. Auch dieser Wert liegt deutlich über dem in Abschnitt 1.3 ausgegebenen Ziel von 10%. Abschließend ist der Verlauf der Zielfunktion über den durchlaufenen Optimierungsschritten in Abbildung 4.20 dargestellt.

4 Skalarwertige Optimierung

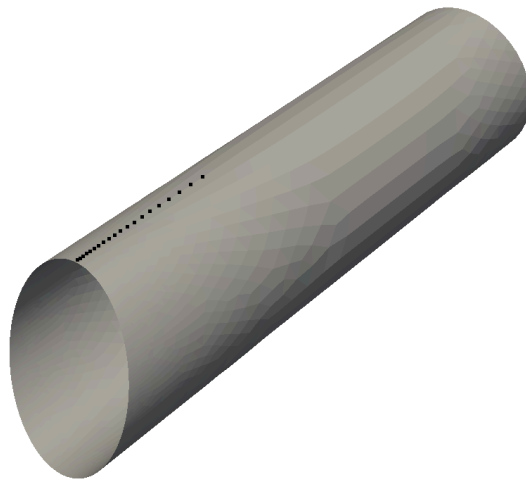
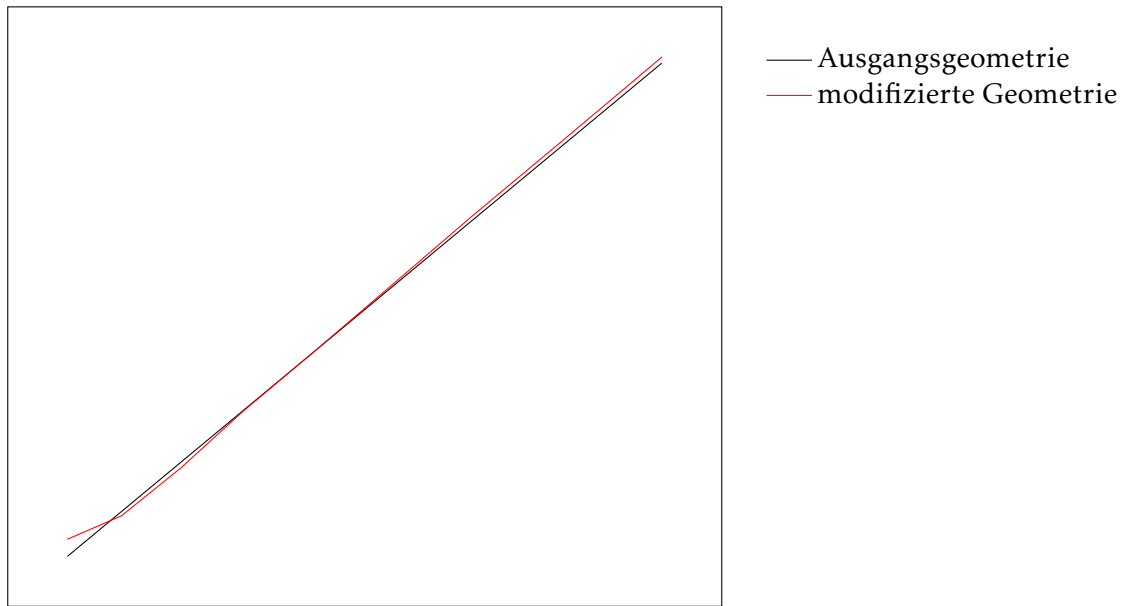


Abb. 4.19: Angenäherte Diffusorform am Ende des Einlassrohrs. Die links dargestellten Konturen wurden aus den Koordinaten der rechts auf dem Einlassrohr gezeigten Punkte generiert. Die Konturen zeigen die Ursprungsgeometrie (schwarz) und die modifizierte Geometrie (rot).

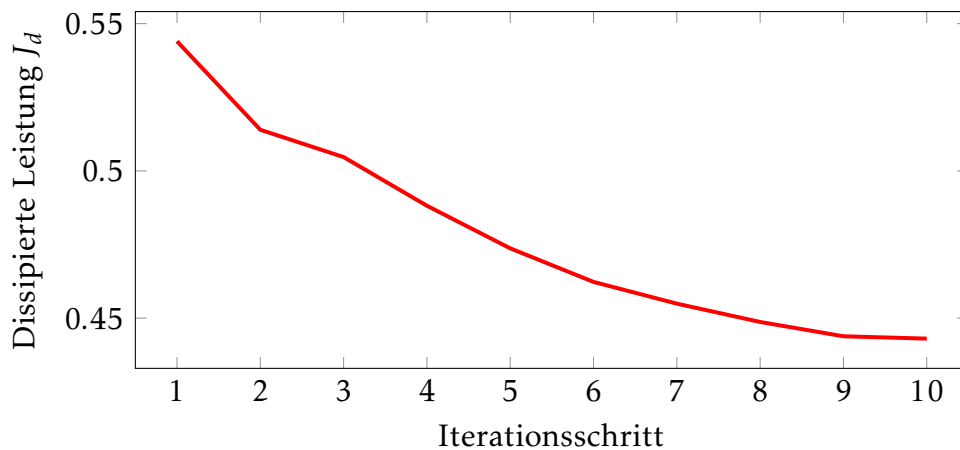


Abb. 4.20: Verlauf der Zielfunktion über den Iterationsschritten beim Durchlauf der Prozesskette.

Wie Abbildung 4.21 zeigt, führt die Verformung zu einer Aufweitung des Querschnitts beim Übergang vom Einlassrohr in die Mischkammer. Dadurch nimmt das Ende des Einlassrohrs eine Diffusorform an (vgl. Abbildung 4.19). Durch die Diffusorform wird die Geschwindigkeit am Ausgang des Einlassrohrs verlangsamt und der Öffnungswinkel des austretenden Strahls vergrößert sich. Somit vergrößert sich auch die Aufprallfläche auf beiden Platten. Der Widerstand, den ein Fluid beim Aufprall auf eine Wand erfährt, hängt quadratisch von der Strömungsgeschwindigkeit und linear von der Querschnittsfläche des Strahls beim Aufprall ab. Die Geschwindigkeitsverringerung hat daher einen größeren Einfluss auf den resultierenden Druckverlust als die vergrößerte Fläche, was zu einer Reduzierung des resultierenden Drucks auf der Prall- und der Bodenplatte führt. Die daraus resultierende Druckverteilung auf der Prall- und Bodenplatte ist Abbildung 4.22 dargestellt.

4 Skalarwertige Optimierung

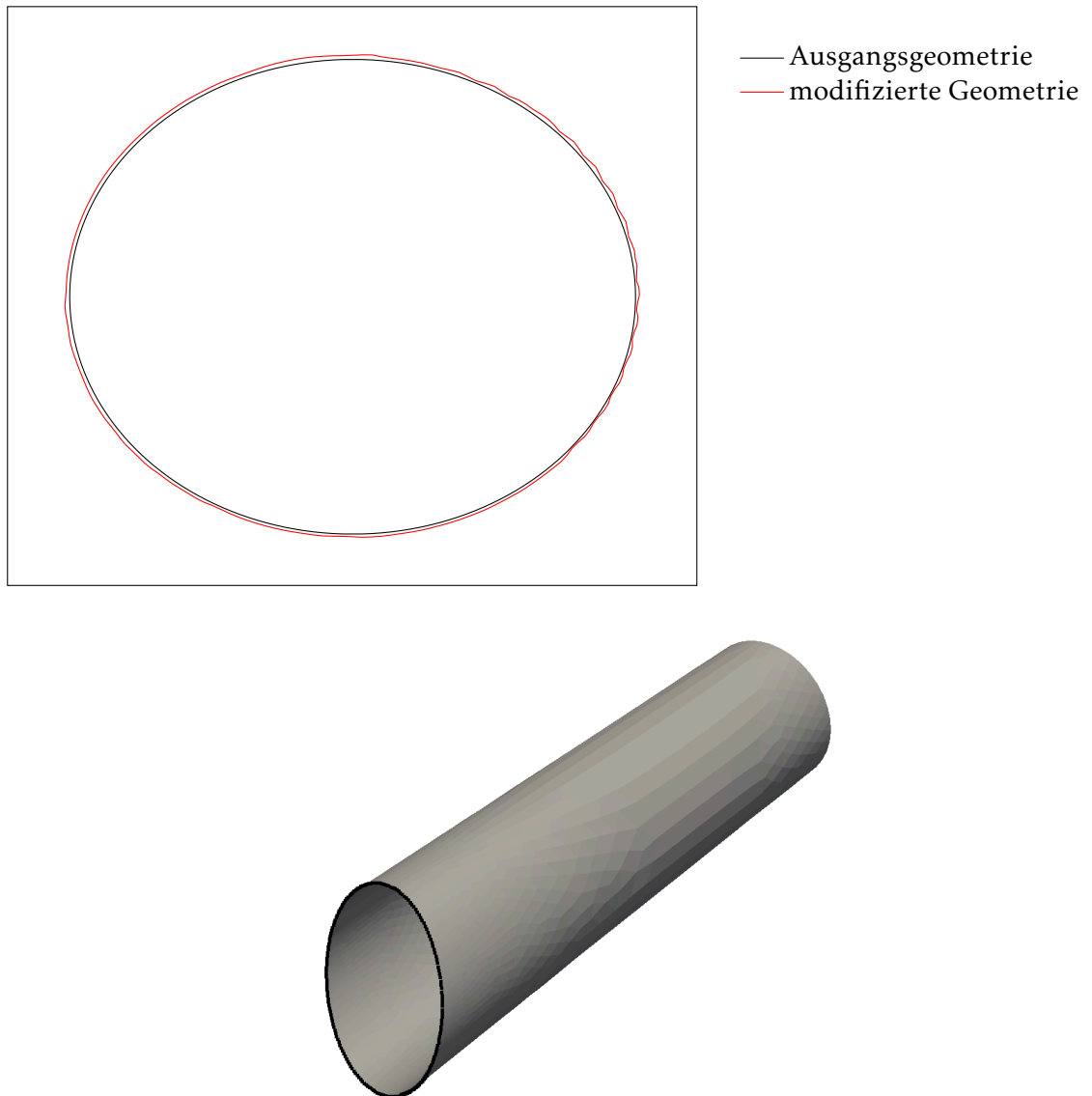


Abb. 4.21: Veränderter Eintrittsquerschnitt vom Einlassrohr in die Mischkammer. Die links dargestellten Konturen wurden aus den Koordinaten der rechts auf dem Einlassrohr gezeigten Punkte generiert. Die Konturen zeigen die Ursprungsgeometrie (schwarz) und die modifizierte Geometrie (rot).

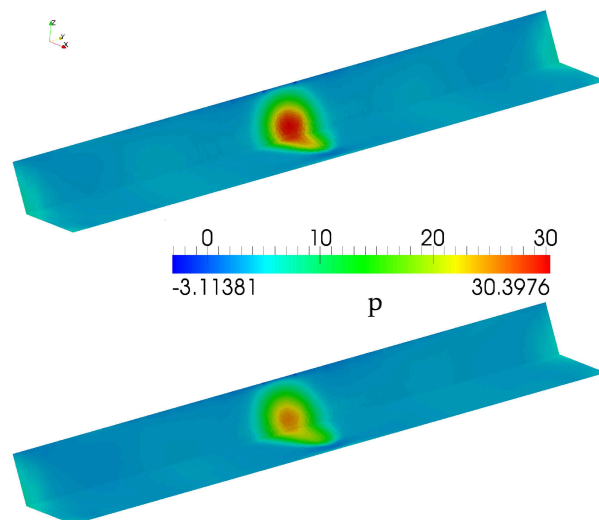


Abb. 4.22: Resultierender Druck auf der Prall- und Bodenplatte durch Auftreffen des Strahls aus dem Einlassrohr. Oben ist die Druckverteilung der ursprünglichen, unten die der modifizierten Geometrie gezeigt.

Der vorangegangene Abschnitt beschreibt die Anwendung der adjungierten Formoptimierung auf eine komplexe Geometrie mit industrieller Relevanz. Dabei hat die Untersuchung verschiedener Zielfunktionen gezeigt, dass bereits ein Optimierungsschritt Verbesserungen der Zielfunktionen zwischen 5 und 6% herbeiführen kann. Wendet man die Optimierung nun iterativ in einer Prozesskette an, kann dieser Wert sogar auf bis zu 20% erhöht werden.

Da der KLA von erfahrenen Ingenieuren für den Einsatz in einem Linienflugzeug entwickelt wurde, erfüllt bereits die Ausgangsgeometrie die an ihn gestellten Anforderung, die hier mittels Zielfunktionen formuliert werden. Dennoch konnte mit der adjungierten Formoptimierung eine deutliche Verbesserung der Zielfunktionen erreicht werden, was das Potential der adjungierten Formoptimierung aufzeigt. Zudem konnten die in Abschnitt 1.3 gesetzten Ziele der Entwicklung einer Prozesskette und einer 15%-igen Reduzierung der gewählten Zielfunktion erreicht werden. Darüber hinaus konnte der im Rahmen von numerischen Simulationen erzielte Erfolg in einer experimentellen Untersuchung, für die das Strömungsfeld der hinsichtlich der Homogenität am Auslass optimierten Geometrie mit Hilfe der Particle Image Velocimetry (PIV) vermessen wurde, bestätigt werden. Eine genaue Beschreibung des Experiments und der Ergebnisse findet sich bei Lincke *et al.* [60].

Vektorwertige Optimierung

Im vorherigen Kapitel wird die Optimierung skalarwertiger Optimierungsprobleme behandelt, bei der Zielfunktionen unabhängig voneinander untersucht werden. In der Realität stehen die verschiedenen Zielfunktionen jedoch in Wechselwirkungen zueinander. Wird eine Zielfunktion optimiert, ändert sich der Wert der zweiten Zielfunktion ebenfalls. Die Zielfunktionen können sogar in direktem Widerspruch zueinander stehen. Bei der Betrachtung mehrerer Zielfunktionen spricht man von einer vektorwertigen Optimierung. Diese Problemklasse soll im folgenden Abschnitt behandelt werden. Nach Stand der Technik werden mehrere Zielfunktionen zu einer neuen Zielfunktion kombiniert. Dazu wird in der Regel die Methode der gewichteten Summe verwendet. Letztere basiert auf Wichtungsfaktoren, deren Bestimmung sehr aufwendig sein kann. Unabhängig von den gefundenen Wichtungsfaktoren besteht die Gefahr, dass eine Zielfunktion die anderen dominiert. Um dieses Problem zu umgehen, soll die bereits bekannte Methode des gewichteten Produkts auf die adjungierte Formoptimierung angewendet werden. Des Weiteren wird mit der Superposition von Oberflächensensitivitäten ein neues Verfahren eingeführt. Die beiden Verfahren werden an der Luftauslassgeometrie aus dem vorherigen Kapitel getestet und mit dem Stand der Technik verglichen.

Das Ziel dieses Kapitels ist die Vektoroptimierung der beiden Zielfunktionen und die Ermittlung einer Pareto-Front. Als Zielfunktionen dienen dabei die im vorigen Kapitel behandelten Zielfunktionen. Das neue Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } \begin{bmatrix} J_1(\mathbf{u}, p) \\ J_2(\mathbf{u}, p) \end{bmatrix}, & (5.1) \\ &\text{sodass } \mathcal{R}(\mathbf{u}, p) = 0. \end{aligned}$$

5 Vektorwertige Optimierung

Um beiden Zielfunktionen Rechnung zu tragen, kann ein Pareto-effizienter Zustand angestrebt werden. Dazu betrachten wir zunächst den Phasenraum zweier beliebiger Zielfunktionen. Die Ausdehnung für die jeweilige Zielfunktion reicht vom Initialwert bis zum optimierten Wert aus der skalarwertigen Optimierung. Der Lösung aus Gleichung 5.1 wird nun eine Position im Phasenraum zugeordnet.

Im Phasenraum existiert ein Lösungsraum des Vektoroptimierungsproblems. Lösungen außerhalb dieses Lösungsraumes stellen keine Lösung von Gleichung (5.1) dar, weil dort z.B. die Nebenbedingungen R nicht erfüllt sind oder die Zielfunktion über den Initialwert hinaus ansteigt. Das Ziel der im Folgenden diskutierten Vektoroptimierung ist die Ermittlung eines Pareto-effizienten Zustandes, in dem es unmöglich ist, eine Zielfunktion zu verbessern, ohne eine zweite Zielfunktion zu verschlechtern. Zur Verdeutlichung ist eine Kurve eines Pareto-effizienten Zustands in Abbildung 5.1 gezeigt. Der Lösungsraum liegt oberhalb der blauen Linie, nicht durchführbare Lösungen darunter. Wenn man sich nun eine beliebige Lösung g_1 (vgl. Abbildung 5.1) im Lösungsraum anschaut, so ist diese nicht als effizient zu bezeichnen, da J_1 verbessert werden kann, ohne J_2 zu verschlechtern und umgekehrt. Die Lösung g_2 hingegen, welche auf der blauen Linie liegt, zeigt eine Pareto-effiziente Lösung an, da eine Verbesserung einer Zielfunktion nur mit der Verschlechterung der anderen Zielfunktion erreicht werden kann. Gesucht werden also Lösungen auf der sogenannten Pareto-Front.

5.1 KOMBINATION VON ZIELFUNKTIONEN

Durch die Kombination mehrerer Zielfunktionen kann eine Vektoroptimierung durchgeführt werden, indem, stellvertretend für alle Zielfunktionen, die kombinierte Zielfunktion minimiert wird. Im folgenden Abschnitt werden die Methode der gewichteten Summe und die Methode des gewichteten Produkts vorgestellt.

5.1.1 METHODE DER GEWICHTETEN SUMME

Die Methode der gewichteten Summe (MGS) [109] kombiniert verschiedene Zielfunktionen durch Multiplikation von Wichtungsfaktoren und anschließender Addition. Mit der MGS kann ein vektorwertiges Optimierungsproblem in ein skalarwertiges Problem umgewandelt werden, wobei eine positiv gewichtete Summe konvexer

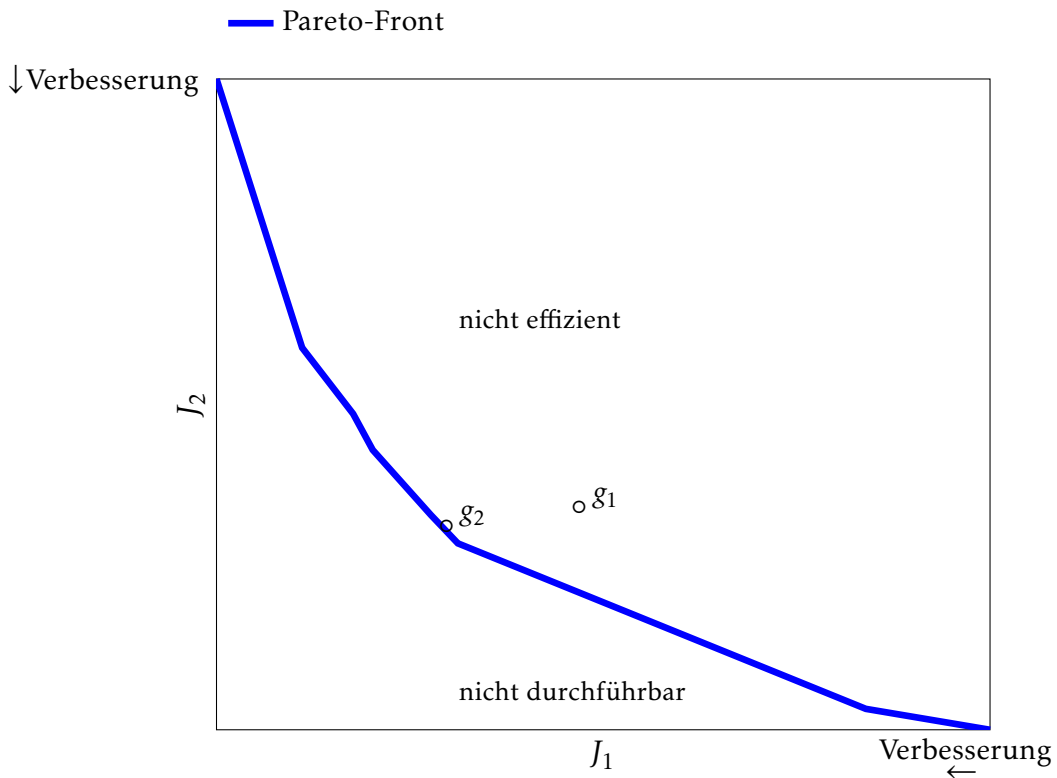


Abb. 5.1: Phasenraum zweier Zielfunktionen mit einem Teil des Lösungsraums des Problems und einem Bereich außerhalb dieses Lösungsraumes. Die blaue Linie ist mit der Pareto-Front des Problems gleichzusetzen. g_1 zeigt dabei eine ineffiziente Lösung, g_2 eine Pareto-effiziente Lösung an.

5 Vektorwertige Optimierung

Zielfunktionen minimiert [13] wird. Die neue, kombinierte Zielfunktion lautet

$$J = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot J_i. \quad (5.2)$$

Die Summe der Wichtungsfaktoren soll dabei gleich eins sein. Dabei sollen die Wichtungsfaktoren so kombiniert werden, dass die Ergebnisse im Phasenraum möglichst nahe an den Wert heranreichen, der bei der skalarwertigen Optimierung erreicht wurde. Der Punkt im Phasenraum, an dem beide Zielfunktionen diesen Wert einnehmen, wird Utopia-Punkt genannt. Es handelt sich also um ein geschachteltes Optimierungsproblem, bei dem beliebige Startwerte für die Wichtungsfaktoren gesetzt werden. Mit diesen Startwerten wird nun die Formoptimierung durchgeführt (innerer Lauf). Im Anschluss werden die Wichtungsfaktoren variiert (äußerer Lauf) und das Formoptimierungsproblem erneut gelöst. Dann werden die beiden Lösungen hinsichtlich ihres Abstandes zum Utopia-Punkt verglichen. Als Abstandsfunktion wird dabei die euklidische Distanz

$$\|d_i(J_h, J_d)\| = \sqrt{\left(\frac{J_{h,i} - J_{h,utopia}}{J_{h,init}}\right)^2 + \left(\frac{J_{d,i} - J_{d,utopia}}{J_{d,init}}\right)^2} \quad (5.3)$$

ausgewertet, wobei J_{init} der Ausgangswert der Zielfunktion in der ursprünglichen Geometrie darstellt und J_{utopia} den reduzierten Wert der Zielfunktion nach der skalarwertigen Optimierung. Die Wichtungsfaktoren werden in jedem äußeren Lauf neu kombiniert, um so eine geeignete Kombination von Wichtungsfaktoren zu ermitteln, die den Abstand zum Utopia-Punkt aus Gleichung (5.3) minimiert. Im Unterschied zur vorher gezeigten Prozesskette wird nach der Auswertung der Zielfunktion das modifizierte Netz gelöscht. Die adjungierte Simulation mit den neuen Wichtungsfaktoren erfolgt stets auf dem originalen Rechengitter. Der gesamte Optimierungszyklus ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

Für die Simulation wurden 60 Prozessorkerne des Scart Clusters verwendet. Für jeden Optimierungsschritt ist eine Rechenzeit von ca. 7 Stunden nötig, das entspricht ≈ 414 Prozessorstunden pro Durchlauf. Dieser Wert wird später als Vergleichswert für die Untersuchung der benötigten Rechenzeit herangezogen.

Die größte Herausforderung bei der Verwendung der Methode der gewichteten Summe ist die Identifikation geeigneter Wichtungsfaktoren, deren zugehörige Lösung einen möglichst kleinen Abstand zum Utopia-Punkt aufweist. Eine systematische

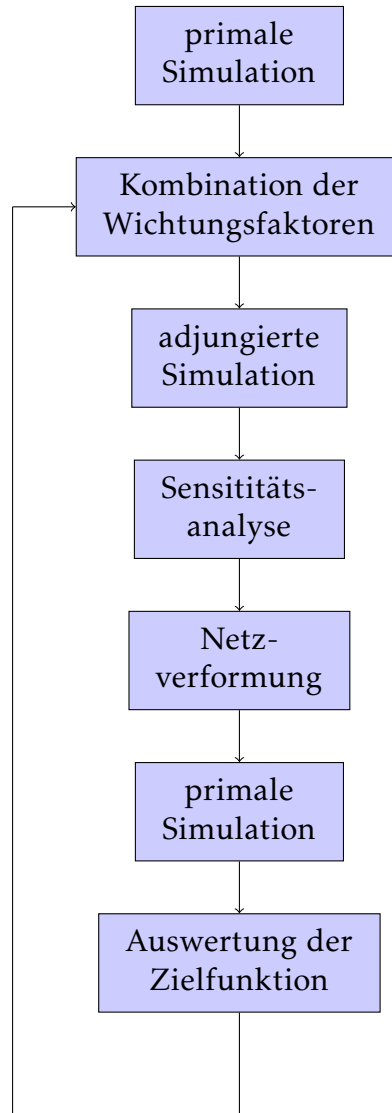


Abb. 5.2: Darstellung des Optimierungszyklus zum Auffinden geeigneter Wichtungsfaktoren. Die adjungierte Simulation erfolgt dabei immer auf dem ursprünglichen Rechengitter.

5 Vektorwertige Optimierung

Variation führt nicht zwangsläufig zur gesamten Pareto-Front [98], besonders wenn letztere nicht konvexe Anteile enthält. In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der gewichteten Summe für eine erste Abschätzung der Pareto-Front verwendet, die Wichtungsfaktoren werden durch ein Bisektionsverfahren (BSV) bestimmt. Als Anfangswert wird ein Verhältnis der Wichtungsfaktoren von eins verwendet, so dass $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,5$ ist. Dieser Startwert halbiert den Definitionsbereich der Wichtungsfaktoren ($0 \leq \alpha_i \leq 1$), so dass zwei symmetrische Teilintervalle entstehen. Die Mitte der neuen Teilintervalle liegt bei $\alpha = 0,25$ für den ersten und $\alpha = 0,75$ für den zweiten Teilintervall. Mit der Forderung $\sum_i \alpha_i = 1$ ergibt sich der Wert für α_2 . Um zu entscheiden welches Teilintervall weiterverfolgt wird, wird die Gleichung (5.3) ausgewertet. Die Richtung mit dem geringeren Abstand wird das im nächsten Schritt zu halbierende Intervall. Die Wichtungsfaktoren aus den ersten Schritten des Bisektionsverfahrens sind in Abbildung 5.3 dargestellt.

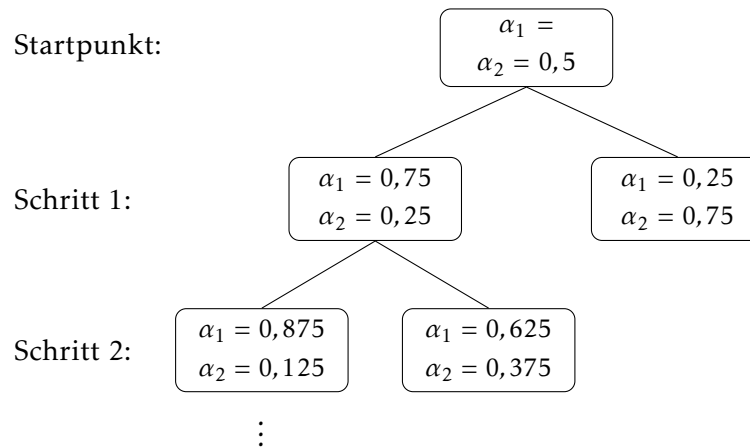


Abb. 5.3: Wichtungsfaktoren in den ersten Schritten des Bisektionsverfahrens.

Mit dem Bisektionsverfahren werden drei Iterationsschritte durchgeführt, deren Ergebnisse durchgehend in der unteren rechten Ecke des Lösungsraumes liegen. Es führt also zu einer Minimierung von J_d , während J_h nahezu unverändert bleibt. Dieses Lösungsverhalten deutet auf eine Dominanz von J_d gegenüber J_h hin. Um beide Zielfunktionen in etwa gleichem Maße zu minimieren, ist daher eine stärkere Wichtung zugunsten von J_h nötig. Da kein a-priori-Zusammenhang zwischen der Wichtung und der Lösung besteht [13], ist es die Aufgabe des Entscheidungsträgers, eine geeignete Wichtung zu finden. Um einen ersten Eindruck zur Wichtung der Zielfunktionen zu bekommen, wird der Lösungsraum mit verschiedenen Wichtungsverhält-

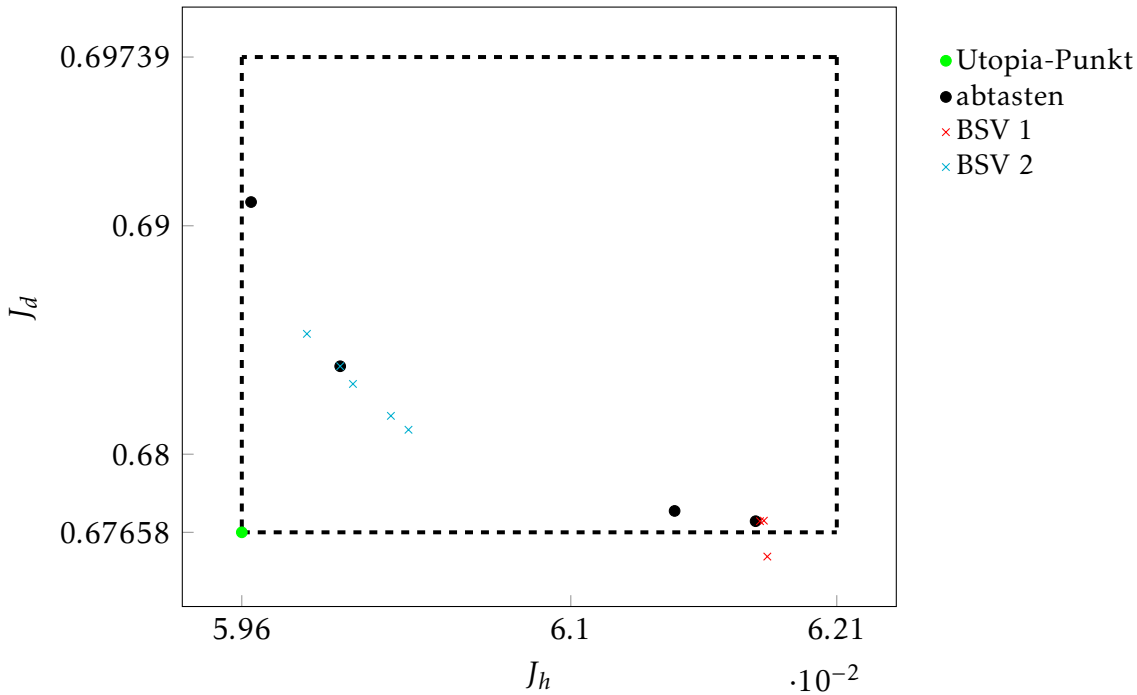


Abb. 5.4: Ergebnisse der MGS für das Abtasten des Phasenraums sowie der beiden Bisektionsverfahren.

nissen abgesucht. Das Verhältnis der Wichtungsfaktoren $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ wird dem Verhältnis der Initialwerte der Zielfunktionen ($\frac{J_h}{J_d}$) angepasst. Außerdem wird das Verhältnis noch in der zweiten, dritten und vierten Potenz auf die Wichtungsfaktoren übertragen. Die resultierenden Abstände, die sich mittels (5.3) im Phasenraum ergeben, sind in Tabelle 5.1 dargestellt.

Tabelle 5.1: Ergebnis für verschiedene Verhältnisse $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ für das Absuchen des Phasenraums.

Verhältnis	1	$\frac{J_{1,initial}}{J_{2,initial}}$	$\left(\frac{J_{1,initial}}{J_{2,initial}}\right)^2$	$\left(\frac{J_{1,initial}}{J_{2,initial}}\right)^3$	$\left(\frac{J_{1,initial}}{J_{2,initial}}\right)^4$
$\ d_i(J_1, J_2)\ $	0.0369	0.0363	0.0306	0.0128	0.0214

Das Abtasten des Phasenraumes ergibt, dass ein kubisches Verhältnis der Wichtungsfaktoren den bisher geringsten Abstand zum Utopia-Punkt aufweist. Dieses Verhältnis wird nun als Startwert für ein erneutes Bisektionsverfahren verwendet. Die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Der minimale ermittelte Abstand zum Utopia-Punkt ist $\|d_{min}\| = 0,01198$. Es wurden insgesamt 22 verschiedene Paramtervariationen berechnet. Wie eingangs erwähnt, sind für einen Durchlauf der Prozesskette 414 Prozessorstunden Rechenzeit nötig. Mit 22 Iterationen ist in Summe eine Rechenzeit von 9100 Prozessorstunden nötig. Der Nach-

5 Vektorwertige Optimierung

teil dieser Vorgehensweise ist, dass eine gleichmäßige Verteilung von Wichtungsfaktoren nicht zwangsläufig eine gleichmäßige Verteilung von Lösungen auf der Pareto-Front liefert [13]. Daher besteht an nicht-konvexen Abschnitten die Gefahr, dass Teile der Pareto-Front nicht gefunden werden. Ein weiterer Nachteil der MGS wird deutlich, wenn eine Zielfunktion die andere dominiert, denn trotz breiter Variationen der Wichtungsfaktoren ist nicht gewährleistet, dass die Lösungen das gesamte Spektrum des Phasenraums abdecken. Aus den in Abbildung 5.4 gezeigten Ergebnissen wird die Pareto-Front interpoliert und als Vergleichswert für die folgenden Berechnungen herangezogen.

Trotzdem bietet die Methode der gewichteten Summe eine Möglichkeit zur Abschätzung der Pareto-Front vektorwertiger Optimierungsprobleme, auch bei komplexen Geometrien.

Um die Suche nach Pareto-optimalen Lösungen eines vektorwertigen Optimierungsproblems zu vereinfachen bzw. zu verbessern, werden im Folgenden zwei Möglichkeiten untersucht, die in der aerodynamischen Formoptimierung bisher nicht eingesetzt wurden. Die bisher gezeigten Ergebnisse dienen als Vergleichsbasis für die in den folgenden Abschnitten vorgestellten Verfahren.

5.1.2 METHODE DES GEWICHTETEN PRODUKTS

Wie in Abschnitt 5.1.1 bereits erläutert wurde, hat die Methode der gewichteten Summe zwei entscheidende Nachteile, die das Auffinden optimaler Wichtungsfaktoren erschweren. Einerseits führt eine gleichmäßige Verteilung von Wichtungsfaktoren nicht zwangsläufig zu einer gleichmäßigen Verteilung der Lösungen im Phasenraum. Insbesondere im Falle von konvexen Pareto-Fronten folgt daraus, dass nicht die gesamte Pareto-Front ermittelt und somit das Potential der Optimierung nicht vollständig genutzt werden kann. Des Weiteren besteht die Gefahr der Dominanz einer Zielfunktion gegenüber einer anderen, was bei algorithmischer Variation der Wichtungsfaktoren dazu führen kann, dass der Suchalgorithmus in einem Bereich des Phasenraums "feststeckt". Abhilfe kann nur geschaffen werden, wenn ein größerer Parameterraum abgesucht wird. Dies hat jedoch eine signifikante Erhöhung des Rechenzeitbedarfs zur Folge.

Im folgenden Abschnitt wird die Methode der gewichteten Produkte (MGP) beschrieben. Die Methode wurde bereits 1922 von Bridgman [9] als *product of powers* vorgestellt. Nach Kenntnis des Autors gibt es jedoch im Bereich der aerodynamischen Optimierung bisher keine Anwendungen. Ähnlich der MGS besteht der Ansatz für die

MGP aus der Kombination verschiedener Zielfunktionen. Die kombinierte Zielfunktion wird als

$$J = \prod_{i=1}^n J_i^{\alpha_i} \quad (5.4)$$

definiert. Für die Untersuchungen wird im ersten Schritt ein Bisektionsverfahren angewendet. Die Vorgehensweise entspricht dabei der in Abbildung 5.3 dargestellten. Im zweiten Schritt wird der Phasenraum ebenfalls mit Wichtungsfaktoren, die Verhältnissen der Initialwerte der Zielfunktionen entsprechen, abgesucht.

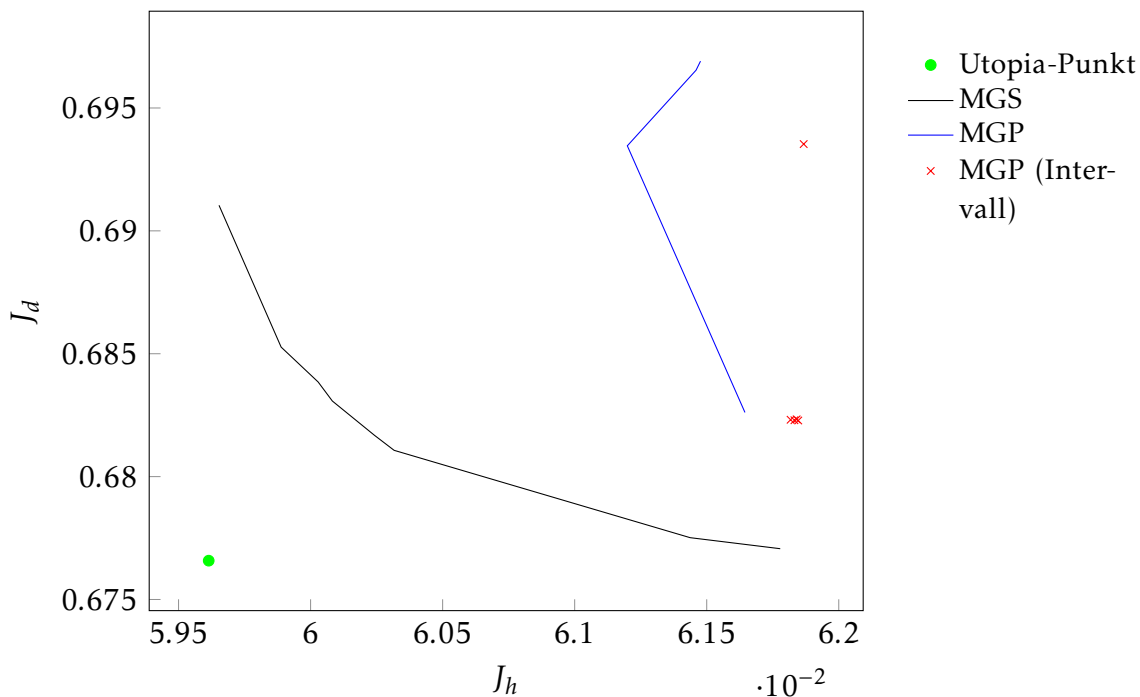


Abb. 5.5: Lösungen (moga) verteilt im Phasenraum. Als Referenzpunkte dienen der Utopia-Punkt und die Pareto-Front, die mit der Methode der gewichteten Summe ermittelt wurde.

Abbildung 5.5 zeigt, dass die MGP ein ähnliches Verhalten wie die MGS aufweist. Mit dem Bisektionsverfahren wird erneut die Dominanz der Zielfunktion J_d gegenüber J_h deutlich. Das Abtasten des Phasenraums liefert eine Pareto-Front, die im Vergleich zur Pareto-Front der MGS schlechtere Optimierungsergebnisse liefert. Auch eine stärkere Gewichtung zugunsten J_h zeigt keine Verbesserung. Die MGP wird daher in der vorliegenden Arbeit nicht weiterverfolgt.

5.2 SUPERPOSITION VON SENSITIVITÄTSFELDERN

Wie im ersten Abschnitt bereits erläutert, besteht bei der Kombination der Zielfunktionen das Problem, geeignete Wichtungsfaktoren zu finden. Ein wesentlicher Zeitfaktor ist dabei die adjungierte Simulation, die einen erheblichen Anteil an der Gesamtrechenzeit verbraucht. Um dieses Problem zu umgehen, wird die Wichtung der Zielfunktionen in einen Nachbearbeitungsschritt ausgelagert. Aus der skalarwertigen Optimierung in Abschnitt 4.2 können die berechneten Sensitivitätsfelder verwendet werden, um diese linear zu superpositionieren. Für die gewichtete Summe werden anstelle Zielfunktionen in Gleichung (5.2) die Sensitivitätsfelder aus den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 kombiniert

$$S = \gamma_1 \cdot S_h + \gamma_2 \cdot S_d. \quad (5.5)$$

Dieser Ansatz stellt eine Linearisierung der adjungierten Transportgleichung (2.45) dar, da eine Linearkombination der Lösungen eine *homogene lineare Gleichung* voraussetzt. Die zugrundeliegende Gleichung ist jedoch nicht linear, weshalb die Wechselwirkungen der einzelnen Zielfunktionen in der Lösung der adjungierten Transportgleichung (2.45) vernachlässigt werden. Die Annahme ist nach Auffassung des Autors vertretbar, da der Rechenzeitbedarf in der praktischen Anwendung den limitierenden Faktor darstellt. Bei der Kombination von Zielfunktionen lässt sich nie ausschließen, dass eine Zielfunktion dominiert, was dazu führt, dass in der Optimierung eine Zielfunktion *bevorzugt* behandelt wird. Da die einzelnen Sensitivitätsfelder normiert sind, tritt dieses Problem bei der Kombination von Sensitivitätsfeldern nicht auf. Der zugehörige Optimierungskreislauf ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Er zeigt, dass die adjungierte Simulation für jede Zielfunktion nur einmal benötigt wird. Dadurch kann eine Vielzahl von Wichtungsfaktoren γ ausgewertet werden. Diese Simulation konvergiert in wenigen Iterationsschritten, da als Startwert die Lösung der primalen Gleichung auf dem ursprünglichen Rechnernetz verwendet wird und die applizierte Verformung nur geringe Änderungen am Rechnernetz verursacht (vgl. dazu Abschnitt 4.2.1).

Das neue Optimierungsproblem besteht nun im Auffinden optimaler Wichtungsfaktoren $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$, um $\begin{bmatrix} J_h \\ J_d \end{bmatrix}$ zu minimieren. Erneut wird in jedem Optimierungszyklus die ursprüngliche Geometrie betrachtet. Die Netzverformung dient nur zur Auswertung der Zielfunktion, anschließend wird das modifizierte Netz gelöscht. Der Vorteil der

5.2 Superposition von Sensitivitätsfeldern

Kombination der Sensitivitätsfelder liegt in der Einsparung von Rechenzeit, da die adjungierte Simulation für jede Zielfunktion nur einmal durchgeführt werden muss. Die Rechenzeit für einen Durchlauf reduziert sich dadurch um ca. 87% auf ≈ 54 CPU-Stunden. Damit ist auch das zu Beginn der Arbeit formulierte Ziel, die benötigte Rechenzeit eines Optimierungsdurchlaufs um bis zu 85% zu reduzieren, erreicht. Die Umsetzung des Optimierungskreislaufs aus Abbildung 5.6 erfolgt mit Hilfe des Softwarepakets Dakota [1]. Letzteres bietet verschiedene Optimierungsalgorithmen, mit denen optimale Wichtungsfaktoren für die Sensitivitätsfelder ermittelt werden können. Diese werden im Folgenden im Detail diskutiert.

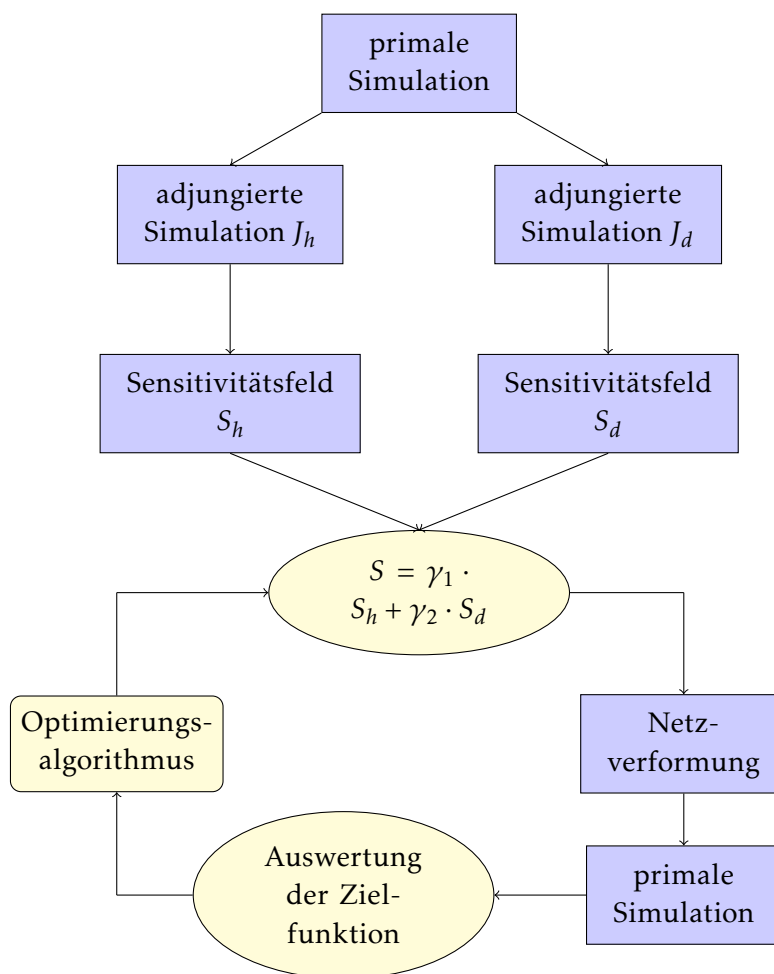


Abb. 5.6: Darstellung des Optimierungszyklus für die Superposition von Sensitivitätsfeldern zum Auffinden geeigneter Wichtungsfaktoren für die Überlagerung der Sensitivitätsfelder. Die adjungierte Simulation muss dabei für jede Zielfunktion nur einmal durchgeführt werden.

5 Vektorwertige Optimierung

5.2.1 GENETISCHE ALGORITHMEN

Das Prinzip der genetischen Optimierungsalgorithmen, als Klasse der evolutionären Algorithmen [49], ist an Darwins Evolutionstheorie angelehnt, nach der das stärkste Individuum überlebt. Letztere entsprechen Designparametern, die gemessen an einer Fitnessfunktion den besten Wert ergeben. Die Fitnessfunktion im hier gezeigten Beispiel ist der Abstand einer Lösung im Phasenraum zum Utopia-Punkt (5.3). Eine zufällige Verteilung von Wichtungsfaktoren stellt den Ursprung dar, von welchem aus verschiedene Kombinationsmöglichkeiten getestet werden. Der Wert der Fitnessfunktion entscheidet darüber, welche Eigenschaften sich fortpflanzen dürfen, also an die nächste Generation übergeben werden. Der hier verwendete Algorithmus wird von der Softwarebibliothek Dakota [1] zur Verfügung gestellt und wird als *multi-objective genetic algorithm* (moga) bezeichnet. Die Optimierung stoppt, wenn Konvergenz oder eine festgeschriebene Obergrenze von Optimierungszyklen erreicht ist. Eine Eigenschaft evolutionärer Algorithmen ist die Abdeckung eines breiten Spektrums an Parametervariationen, was im Gegenzug einen erhöhten Rechenaufwand zur Folge hat. Da die Superposition von Sensitivitätsfeldern (vgl. Abbildung 5.6) eine signifikante Ersparnis an Rechenzeit verspricht, wird der moga zur ersten Abschätzung des Lösungsraumes eingesetzt.

Die Ergebnisse der genetischen Optimierung von superpositionierten Sensitivitätsfeldern ergeben eine breite Verteilung im Phasenraum. Es werden 187 verschiedene Parametervariationen berechnet. Dabei erkennt man, dass einzelne Ergebnisse deutlich näher an den Utopia-Punkt heranreichen als die Lösungen der Methode der gewichteten Summe. Der kleinste gefundene Abstand beträgt $\|d(J_h, J_d)_{min}\| = 0.00338$, bei einer Rechenzeit von ≈ 10000 CPU-Stunden. Im Vergleich zur Methode der gewichteten Summe steigt die Rechenzeit nur um $\approx 10\%$ an, obwohl mehr als 8 mal so viele Parametervariationen berechnet werden.

Die berechneten Lösungen sind in Abbildung 5.7 gezeigt. Wie bereits erwähnt, deckt ein genetischer Algorithmus ein breites Spektrum an Variationen ab, sodass Ergebnisse im gesamten Lösungsraum berechnet werden. Dadurch wird auch eine Vielzahl von ineffizienten Lösungen berechnet. Um dies zu vermeiden, soll nun versucht werden, relevante Lösungen direkt zu ermitteln.

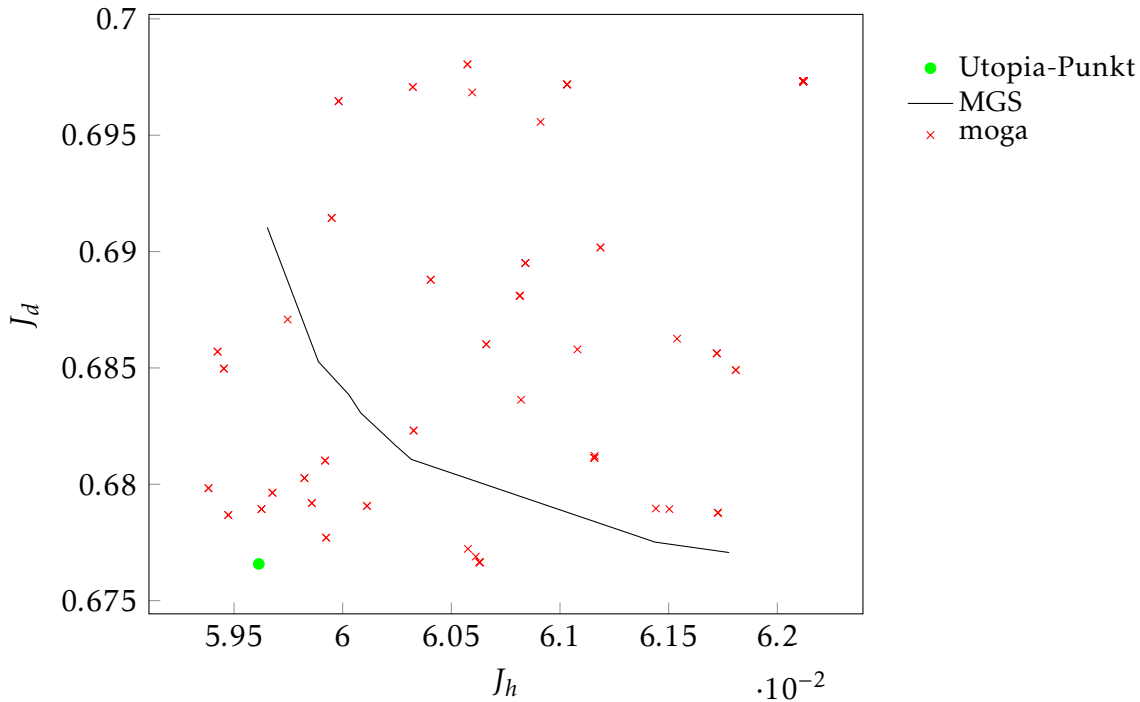


Abb. 5.7: Lösungen (moga) verteilt im Phasenraum. Als Referenzpunkte dienen der Utopia-Punkt und die Pareto-Front, die mit der Methode der gewichteten Summe ermittelt wurde.

5.2.2 ϵ -SCHRANKEN METHODE

Die ϵ -Schranken Methode (ϵ SM) [102] ist ein Verfahren zur Umwandlung eines vektorwertigen Optimierungsproblems in ein skalarwertiges Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen. Der Optimierungszyklus bleibt unverändert (vgl. Abbildung 5.6), während das umformulierte Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } J_1(x), \\ &\text{so dass } J_2(x) \leq \epsilon \text{ gilt,} \end{aligned} \tag{5.6}$$

lautet. Die für eine spezifische ϵ -Schranke ermittelte Lösung ergibt einen Punkt im Phasenraum, der Teil der Pareto-Front ist. Wird dieses Vorgehen für verschiedene ϵ -Schranken durchgeführt, lässt sich daraus die gesamte Pareto-Front abschätzen. Dieses Vorgehen ist schematisch in Abbildung 5.8 dargestellt.

5 Vektorwertige Optimierung

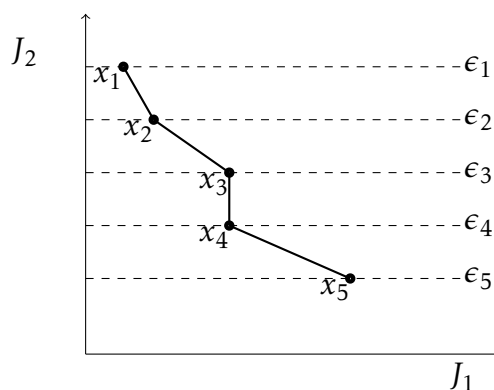


Abb. 5.8: Schematische Darstellung der ϵ -Schranken Methode. Durch die Lösung des Optimierungsproblems mit verschiedenen ϵ -Schranken lässt sich die Pareto-Front im Phasenraum der Zielfunktionen abschätzen.

Für das Anwendungsbeispiel wird festgelegt, dass J_h die zu minimierende Zielfunktion darstellt, während J_d als Nebenbedingung eingesetzt wird. Um die Lösung des Optimierungsproblems für eine ϵ -Schranke zu ermitteln, sind im Mittel acht Durchläufe des Optimierungszyklus notwendig. Als Optimierungsalgorithmus wird ein Verfahren des steilsten Abstiegs [100] aus der Softwarebibliothek Dakota [1] verwendet.

Tabelle 5.2: Übersicht über die festgelegten ϵ -Schranken für J_d und dem zugehörigen Wert nach der Verformung, sowie die zugehörigen Optimierungsergebnisse für J_h .

Schritt	ϵ für J_d	J_d	J_h
1	1	0.680609	0.0602984
2	0.697324	0.680109	0.0600117
3	0.695	0.679984	0.0604164
4	0.69	0.679976	0.0604153
5	0.6875	0.682594	0.0600667
6	0.685	0.680796	0.0598699
7	0.6825	0.680544	0.0602973
8	0.681	0.679973	0.0604154
9	0.68	0.679971	0.0604153
10	0.678	0.677701	0.0602036

Um die Pareto-Front abzuschätzen, werden für das Anwendungsbeispiel 10 vordefinierte ϵ -Schranken benutzt. Im ersten Schritt wird ein ϵ -Wert gewählt, der deutlich über dem Wert für J_d in der Ausgangsgeometrie liegt. Im zweiten Schritt wird der Wert für J_d in der Ausgangsgeometrie verwendet. Danach wird ϵ schritt-

weise verringert. Für jedes ϵ wird nun eine Optimierung entsprechend Gleichung (5.6) durchgeführt. In Tabelle 5.2 sind für jeden Optimierungsschritt die gewählte ϵ -Schranke sowie die zugehörigen Werte für J_h und J_d aufgeführt, die sich aus der Simulation mit dem deformierten Rechengitter ergeben.

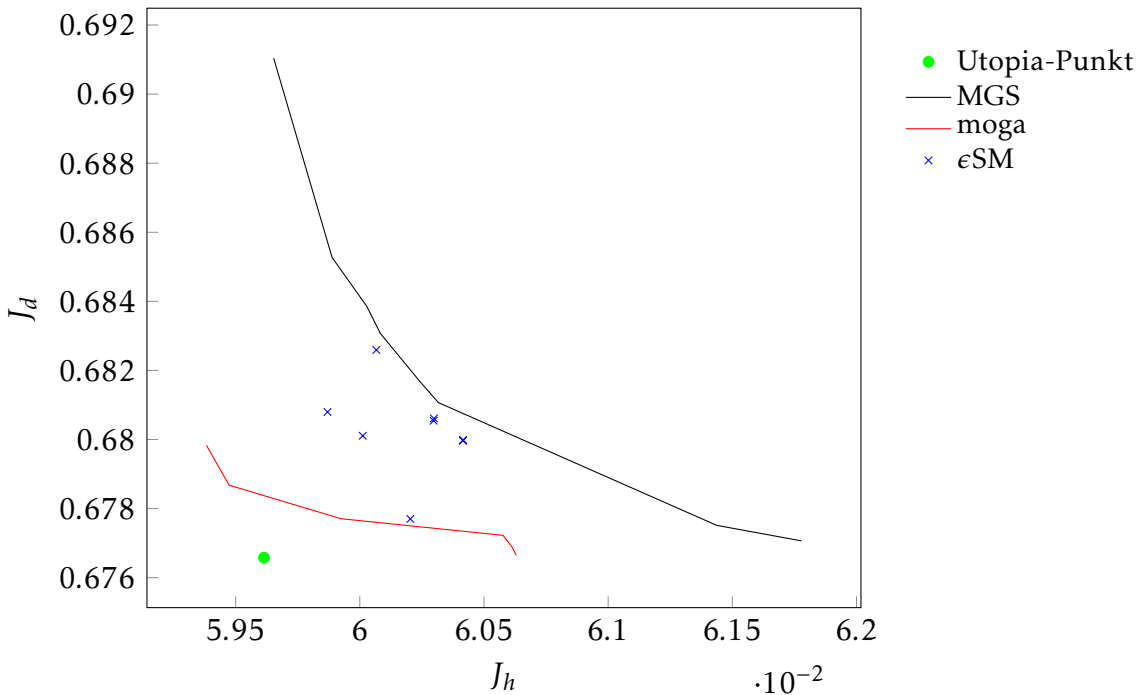


Abb. 5.9: Lösungen (ϵ SM) verteilt im Phasenraum. Als Referenzpunkte dienen der Utopia-Punkt und die Pareto-Fronten, die durch MGS und moga ermittelt wurden.

Die Ergebnisse im Phasenraum sind in Abbildung 5.9 dargestellt. Sie liegen zwischen den Ergebnissen von MGS und moga. Der kleinste ermittelte Abstand beträgt $\|d_{min}\| = 0.0073$. Durch die acht Optimierungszyklen pro ϵ -Schranke und 10 vordefinierte ϵ -Schranken sind in Summe 80 Optimierungszyklen nötig, für die 4320 CPU-Stunden an Rechenzeit anfallen. Im Vergleich zur gewichteten Summe kann die Rechenzeit um ca. 50% reduziert werden. Die Ergebnisse liegen auch unterhalb der durch die MGS ermittelten Pareto-Front. Daraus folgt, dass durch die ϵ -Schranken-Methode sowohl die Rechenzeit gegenüber der MGS reduziert, als auch das Ergebnis verbessert werden kann. Die Untersuchung verschiedener Methoden zur Behandlung vektorwertiger Optimierungsprobleme hat gezeigt, dass die Methode der gewichteten Summe eine Abschätzung der Pareto-Front möglich macht. Die Nachteile des Verfahrens liegen in der Suche nach geeigneten Wichtungsfaktoren und der Forderung nach konkaven Zielfunktionen. Des Weiteren ist ein großer Rechenaufwand nö-

5 Vektorwertige Optimierung

tig, um eine große Zahl an Parametervariationen auszuwerten, besonders bei der Betrachtung komplexer Geometrien.

Durch die Superposition von Sensitivitätsfeldern kann Rechenzeit eingespart werden, da nur eine adjungierte Simulation pro Zielfunktion nötig ist. Zusätzlich sind die neu erzeugten Geometrien nur leicht verändert. Dadurch konvergiert die Strömungssimulation auf dem modifizierten Netz in ca. 500 Iterationsschritten. Durch diese Einsparung im Vergleich zur Methode der gewichteten Summe hat der Anwender die Wahl, eine größere Anzahl an Parametervariationen auszuwerten oder Rechenzeit einzusparen. Für die Variation der Wichtungsfaktoren steht dann eine Vielzahl von Algorithmen zu Verfügung.

Die ermittelten minimalen Abstände zum Utopia-Punkt der Lösungen im Phasenraum sowie die zugehörigen Rechenzeiten und die Anzahl der ausgewerteten Parametervariationen sind in Tabelle 5.3 zusammengestellt.

Tabelle 5.3: Übersicht über die ermittelten minimalen Abstände für die verschiedenen Verfahren und den zugehörigen Rechenzeiten sowie der Anzahl der ausgewerteten Parametervariationen. Dabei ist:

a - $\|d(J_h, J_d)\|_{min}$

b - Parametervariationen

c - CPU-Stunden je Durchlauf

d - gesamte CPU-Stunden.

Methode	Superposition von Sensitivitätsfeldern		
	MGS	moga	ϵ SM
a	0.01198	0.00338	0.0073
b	22	187	80
c	$\approx 414h$	$\approx 54h$	$\approx 54h$
d	9100h	10098h	4320h

Ein abschließender Vergleich der resultierenden Sensitivitätsfelder zeigt für die Verfahren MGS und moga eine ähnliche Verteilung. Die Sensitivitäten am Übergang zwischen Einlassrohr und Mischkammer sind durch Bestimmung mittels MGS deutlich größer. Das ist darauf zurückzuführen, dass diese aus der Zielfunktion J_d resultieren. Letztere ist gegenüber J_h dominant, eine Eigenschaft, die bei der Superposition von Sensitivitätsfeldern nicht mehr relevant ist, da bereits normierte Felder überlagert werden.

Das Verhältnis der Wichtungsfaktoren, die zum minimalen Abstand vom Utopia-Punkt führen, liegt bei der MGS bei $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1257,5$. Bei der Superposition von Sensitivitätsfeldern liegt dieses Verhältnis bei $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2,86$. Auch hier zeigt sich ein deutlich

geringeres Verhältnis der Wichtungsfaktoren, da die Dominanz der Zielfunktion J_d stark abgeschwächt werden kann. Das führt zu einer schnelleren Lösung des Optimierungsproblems, da der zu durchsuchende Parameterraum kleiner wird.

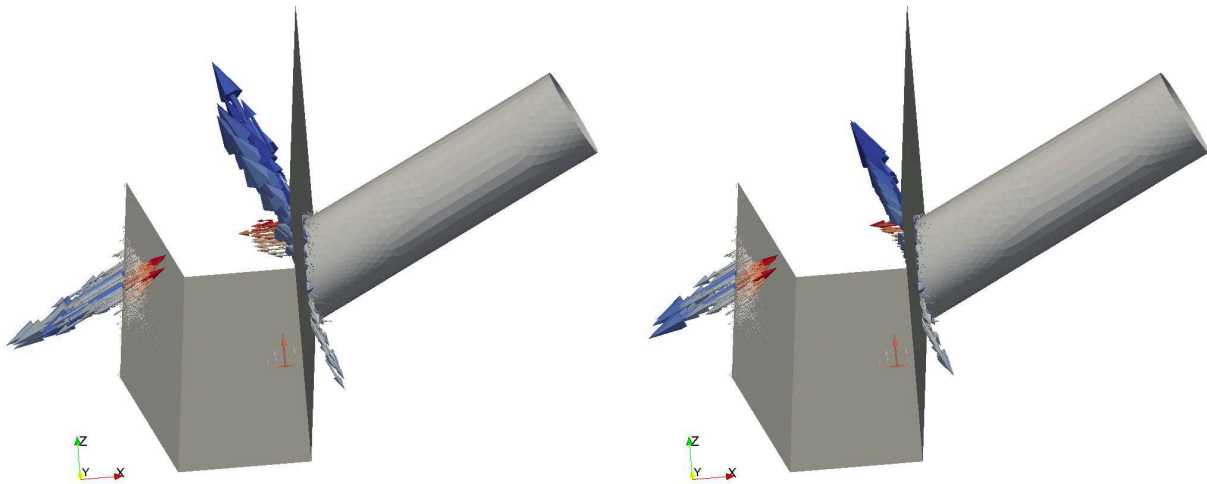


Abb. 5.10: Resultierende Sensitivitätsfelder, deren Verformung zum minimalen Abstand zum Utopia-Punkt führt. Auf der linken Seite ist das Sensitivitätsfeld nach der MGS gezeigt, auf der rechten Seite das durch Superposition von Sensitivitätsfeldern (mo-ga).

Abschließend lässt sich feststellen, dass die Methode des gewichteten Produkts die Nachteile aus der Methode der gewichteten Summe nicht umgehen kann. Betrachtet man daher die MGS als Stand der Technik, ist es mit der adjungierten Formoptimierung, eingebettet in die vorgestellte Prozesskette, möglich, die Pareto-Front eines vektorwertigen Optimierungsproblems abzuschätzen. Die aus der Literatur bekannten Probleme treten dementsprechend auch auf. Durch die vom Autor vorgestellte Methode der Superposition von Sensitivitätsfeldern ist es möglich, eine Pareto-Front für das betrachtete, vektorwertige Optimierungsproblem zu präsentieren. Hier wird die Annahme getroffen, dass eine Linearkombination von Lösungen möglich ist, was zwar mathematisch eine Linearisierung einer nicht-linearen Gleichung darstellt, jedoch eine signifikante Einsparung an Rechenzeit von bis zu 85% je Optimierungszyklus bietet. Zusätzlich liefert das Verfahren eine Pareto-Front, die gegenüber der mit der MGS ermittelten Pareto-Front geringere Werte für die Zielfunktion liefert. Auch die Dominanz einer Zielfunktion gegenüber der anderen Zielfunktion ist im

5 Vektorwertige Optimierung

vorgestellten Verfahren unproblematischer. Somit lässt sich die Linearisierung des Problems aus der Sicht der praktischen Anwendung rechtfertigen.

Adjungierte DNS einer Kanalströmung

Das folgende Kapitel befasst sich mit der adjungierten Formoptimierung eines zeitabhängigen Strömungsproblems. Genauer gesagt, wird die Widerstandsreduktion in der voll ausgebildeten, turbulenten Kanalströmung untersucht. Anders als zuvor werden entdimensionalisierte Größen betrachtet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf das entsprechende Symbol \wedge über den Größen in diesem Kapitel verzichtet. Die gezeigten Größen repräsentieren damit entdimensionalisierte Größen.

Die dazu entwickelte und implementierte Prozesskette setzt sich aus den folgenden fünf Schritten zusammen. Erstens: Die Simulation beginnt zum Zeitpunkt t_0 mit einem initialen Feld für die Geschwindigkeit und den Druck. Die Simulation läuft, bis das System einen statistisch stationären Zustand erreicht hat (Zeitpunkt t_1). Zweitens: Ab dem Zeitpunkt t_1 erfolgt eine zeitliche Mittelung aller relevanten Strömungsgrößen über das Mittelungsintervall T . Der Zeitpunkt t_2 ergibt sich also aus $t_2 = t_1 + T$. Drittens: Die adjungierte Simulation wird auf Basis der gemittelten Größen, welche mit $\langle \dots \rangle_T$ gekennzeichnet sind, durchgeführt. Viertens: Mit den Ergebnissen der primalen und der adjungierten Simulation kann nun die Sensitivitätsanalyse erfolgen. Auf Basis der resultierenden Sensitivitäten erfolgt die Netzverformung. Die entstandene, deformierte Geometrie wird an den Zeitpunkt t_1 übergeben. Fünftens: Es erfolgt eine erneute Direkte Numerische Simulation in der verformten Kanalgeometrie, wobei erneut eine zeitliche Mittelung der relevanten Strömungsgrößen über das Intervall T erfolgt. Anschließend können die Ergebnisse aus der glatten und der verformten Kanalgeometrie ausgewertet und miteinander verglichen werden. Das beschriebene Vorgehen ist in Abbildung 6.1 veranschaulicht.

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

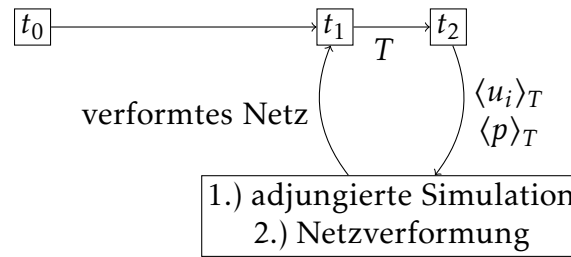


Abb. 6.1: Ablaufdiagramm der Optimierung mit den verschiedenen Zeitpunkten der Simulation. Die Pfeile stehen für den Transfer von Daten zwischen primaler und adjungierter Simulation.

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte genauer erläutert.

6.1 DIE EBENE KANALSTRÖMUNG

Als Kanalströmung bezeichnet man die Strömung eines Fluids zwischen zwei unendlich ausgedehnten ebenen Platten im Abstand $2h$. Die Reynoldszahl wird mit der mittleren Durchflussgeschwindigkeit, die auch Bulkgeschwindigkeit u_{bulk} genannt wird, dem halben Plattenabstand h und der kinematischen Viskosität ν gebildet und ergibt sich zu

$$Re = \frac{u_{bulk} \cdot h}{\nu}. \quad (6.1)$$

Der universelle Charakter aller wandnahen, turbulenten Strömungen wird deutlich, wenn man die relevanten Strömungsgrößen in viskosen Wandeinheiten skaliert. Die entsprechende Reynoldszahl ist die Schubspannungs- oder Scher-Reynoldszahl

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \cdot h}{\nu}, \quad (6.2)$$

die auf dem halben Plattenabstand h , der Dichte des Fluids ρ und der Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$ basiert, wobei $\tau_w = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$ der Wandschubspannung entspricht. Um einen numerischen Zugang zur Kanalströmung zu finden, betrachtet man einen Ausschnitt zwischen beiden Platten und setzt an den Rändern des Gebietes in Strömungs- und Spannweitenrichtung periodische Randbedingungen für alle Größen. Der obere und untere Rand des Gebietes wird als nicht durchströmte Wand mit einer Haftbedingung (Dirichlet Randbedingung) für die Geschwindigkeit und einer Neumann-Randbedingung für den Druck modelliert. In der vorliegenden Arbeit orientieren sich die Abmessungen des Simulationsgebietes an Kim *et al.* [51] und

betragen $2\pi h$ in Spannweitenrichtung und $4\pi h$ in Strömungsrichtung. Das Simulationsgebiet und das verwendete kartesische Koordinatensystem sind in Abbildung 6.2 skizziert.

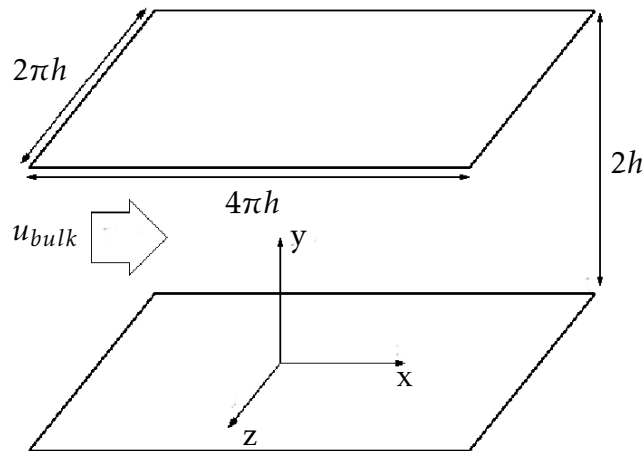


Abb. 6.2: Skizze des Rechengebietes und des verwendeten Koordinatensystems mit der Hauptströmungsrichtung x , der wandnormalen Richtung y und der Spannweitenrichtung z .

Für den Vergleich der Ergebnisse mit jenen anderer Untersuchungen werden folgende dimensionsbehaftete Größen gewählt. Die Bulkgeschwindigkeit wird zu $u_{bulk} = 1 \frac{m}{s}$ gesetzt, der Plattenabstand zu $2h = 1m$, sodass die kinematische Viskosität ν als Steuerparameter verbleibt. Eine Festlegung auf $\nu = 3,57 \cdot 10^{-4}$ führt zu einer Reynoldszahl von $Re = 2800$. Der Volumenstrom wird dabei konstant gehalten, indem der Druckgradient in jedem Zeitschritt korrigiert wird. Somit ist sowohl das treibende Druckgefälle als auch die resultierende Schubspannungsgeschwindigkeit ein Ergebnis der Simulation. Die im statistisch stationären Zustand gemittelte Schubspannungsgeschwindigkeit ergibt sich zu $\langle \tau \rangle_T = 0.062 \frac{m}{s}$, was zu einer Schubspannungs-Reynoldszahl von $Re_\tau = 174$ führt.

Eine Umskalierung der Strömungsgrößen mit Hilfe von ν und u_τ führt zu einer Darstellung in viskosen Wandeinheiten, die für gewöhnlich mit einem + gekennzeichnet sind. Für den Wandabstand gilt zum Beispiel

$$(x, y, z)^+ = \frac{u_\tau \cdot (x, y, z)}{\nu}. \quad (6.3)$$

Die räumliche Diskretisierung der Geometrie erfolgt in x -Richtung mit 288 Zellen, in y -Richtung mit 180 Zellen und in z -Richtung mit 560 Zellen, wobei in wandnorma-

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

ler Richtung eine feinere Auflösung an der Wand verwendet wird. Letztere wird mit einer Tangens-Hyperbolicus-Funktion realisiert. In Wandeinheiten ergibt sich somit eine Auflösung von $\Delta x^+ = 7,57$, $\Delta y_{Wand}^+ = 0,23$ an der Wand, $\Delta y_{bulk}^+ = 4,33$ in der Kanalmitte und $\Delta z^+ = 1,95$. Die Auflösung ist somit feiner als in der spektralen Referenzsimulation von Moser *et al.* [72] und mit neueren Finite-Volumen-Simulationen von Rohrströmungen wie z.B. von Feldmann *et al.* [30] oder spektrale Simulationen wie z.B. von El Khoury *et al.* [27] vergleichbar. Walsh [103] hat gezeigt, dass in Strömungsrichtung ausgebildete Rippen, sogenannte Riblets, eine Widerstandsreduktion zur Folge haben können. In Spannweitenrichtung sind diese Strukturen sehr schmal. Der widerstandsminimierende Bereich der Ribletabstände wurde von Keck [50] von $5 < \Delta z^+ < 30$ identifiziert. Da in der vorliegenden Untersuchung ähnliche Strukturen erwartet werden, wird die Auflösung in Spannweitenrichtung verdoppelt, um diese feinen Strukturen mit den numerischen Rechengitter auflösen zu können. Die Höhe der Riblets beträgt ca. $2\Delta z^+$ in wandnormaler Richtung, auch hier ist die Auflösung ausreichend fein.

Um die Strömungsfelder vorherzusagen, werden die Erhaltungsgleichungen direkt gelöst (vgl. dazu Abschnitt 3.2). Für die räumliche Auflösung wurde ein zentrales Differenzenverfahren zweiter Ordnung verwendet. Die Zeitintegration erfolgt mit einem expliziten Euler-Verfahren zweiter Ordnung. Die Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeldern erfolgt mittels der Projektionsmethode nach Chorin [16]. Die Ergebnisse werden mit der Referenzsimulation von Moser *et al.* [72] verglichen. Als Ausgangspunkt der Simulation (t_0) dient ein laminares Strömungsfeld, das mit Störungen versehen ist, um die Transition zu einem turbulenten Strömungszustand anzuregen. Vom Ausgangspunkt wird eine Direkte Numerische Simulation durchgeführt, bis sich das System in einem statistisch stationären Zustand befindet (t_1).

Die räumliche und zeitliche Entwicklung der Turbulenz ist ein sehr komplexer Vorgang, da Strömungsstrukturen auf allen Größenskalen auftreten. Die instantanen Felder bilden daher eine Momentaufnahme, die lediglich qualitative Aussagen zulässt. Um verschiedene turbulente Strömungen miteinander vergleichen und quantitative Aussagen zu den Eigenschaften einer turbulenten Strömung treffen zu können, werden statistische Methoden verwendet. Auch wenn die instantanen Felder der Erhaltungsgrößen chaotisch und nicht vorhersagbar erscheinen, sind ihre statistischen Eigenschaften reproduzierbar. Daher erfolgt eine zeitliche Mittelung der instantanen Felder, um daraus statistische Größen ableiten zu können. Abbildung 6.3 zeigt beispielhaft ein instantanes Bild des Kanals, an den Rändern ist im Querschnitt das

Geschwindigkeitsfeld in Strömungsrichtung zu sehen.

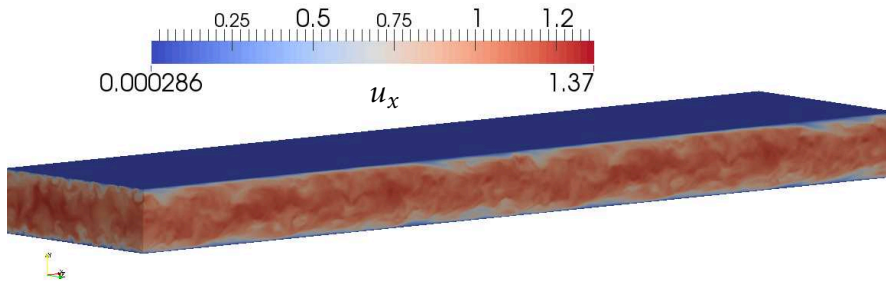


Abb. 6.3: Darstellung eines instantanen Geschwindigkeitsfeldes in Strömungsrichtung u_x .

Entsprechend des Superpositionsansatzes von Reynolds in Gleichung (2.20) lässt sich eine Erhaltungsgröße u in ihren Mittelwert \bar{u} und eine von diesem Mittelwert abweichende Schwankungsgröße u' aufteilen. Durch eine ausreichende zeitliche Mittelung (arithmetisches Mittel) verschwindet der zeitliche Mittelwert der Schwankungsgrößen per Definition. Das Quadrat der Schwankungsgrößen verschwindet jedoch nicht und lässt sich somit zur quantitativen Beschreibung der Strömung verwenden.

MITTLERE GESCHWINDIGKEIT

Das erste statistische Moment bezeichnet das arithmetische Mittel der instantanen Geschwindigkeitsfelder. Die mittlere Geschwindigkeit in Strömungsrichtung ergibt sich durch eine zeitliche Mittelung über einen ausreichend großen Zeitraum. Letzterer muss so gewählt werden, dass sich der zeitliche Mittelwert nicht mehr ändert. Da die Vorhersage der Strömungsfelder mittels DNS erfolgt, ist dafür ein enormer Rechenaufwand nötig. Da die Hauptströmungsrichtung entlang der x-Achse verläuft, ist die Strömung in Strömungs- und Spannweitenrichtung homogen. Durch die periodischen Randbedingungen in Strömungs- und Spannweitenrichtung entspricht eine Mittelung über diese Raumrichtungen auch einer zeitlichen Mittelung. Die Geschwindigkeitsfelder werden über einen Zeitraum von ca. 40 dimensionslosen Zeiteinheiten gemittelt. Daraus resultiert die mittlere Geschwindigkeit in Strömungsrichtung in Abhängigkeit vom Wandabstand. Die mittleren Geschwindigkeiten in wandnormaler und Spannweitenrichtung ergeben sich zu 0. Die mittlere Geschwindigkeit trifft somit eine statistische Aussage über den Durchfluss im Kanal und kann quantitativ mit anderen Daten verglichen werden. Nachfolgend wird die mittlere Geschwindigkeit mit den Referenzsimulationen von Moser *et al.* [72] und dem viskosen

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

Wandgesetz verglichen. Letzteres besagt, dass die Geschwindigkeit an der Wand zunächst linear verläuft und nach einem Übergangsbereich - dem sogenannten Buffer Layer - in einen logarithmischen Verlauf übergeht (vgl. dazu z.B. Schlichting [92]). Abbildung 6.4 zeigt den Verlauf der mittleren Geschwindigkeit über dem Wandabstand y^+ .

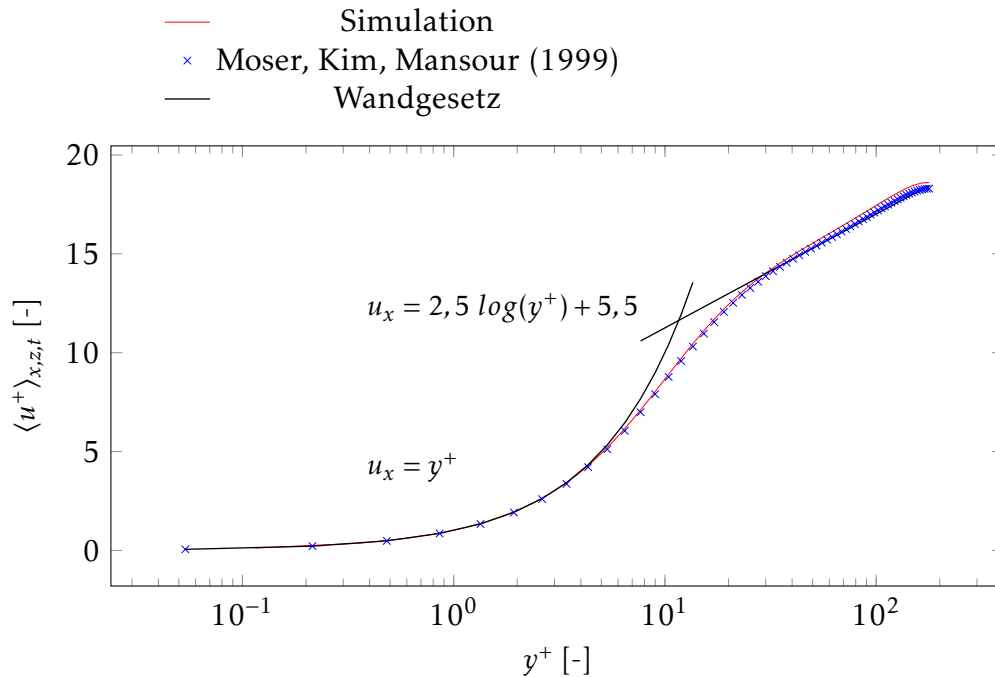


Abb. 6.4: Logarithmische Darstellung des Geschwindigkeitsprofils entlang der Kanalhöhe (rot), verglichen mit der Theorie des logarithmischen Wandgesetzes (schwarz) und der Referenzsimulation (blau).

Das Strömungsprofil zeigt, dass die größte Geschwindigkeit in der Mitte des Kanals herrscht, direkt an der Wand verschwindet die Geschwindigkeit dagegen. Der Verlauf des Profils der mittleren Geschwindigkeit zeigt sehr gute Übereinstimmungen mit der Theorie und der Referenzsimulation.

TURBULENZINTENSITÄT

Das zweite statistische Moment wird durch das quadratische Mittel der Geschwindigkeit, den RMS-Wert (Root mean square), beschrieben

$$u_{rms} = \sqrt{\langle u'^2 \rangle} = \sqrt{\langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2} \quad (6.4)$$

und gibt die Intensität der Schwankungsgröße um den Mittelwert an. u_{rms} beschreibt die Standardabweichung der Schwankungsgröße vom Mittelwert und ist - im Gegensatz zur mittleren Geschwindigkeit - in allen drei Raumrichtungen ungleich Null. Die Standardabweichung gibt an, wie stark die betrachtete Größe um den Mittelwert schwankt und ist ein Maß für die Turbulenzintensität. Letztere ist dabei in der Nähe der Wand am geringsten, erreicht ihr Maximum in der Übergangsschicht zwischen viskoser Unterschicht $y^+ < 5$ und dem logarithmischen Bereich $y^+ > 300$ und fällt zur Kanalmitte hin wieder ab. Die Turbulenzintensität ist in Strömungsrichtung deutlich höher als in wandnormaler und Spannweitenrichtung. Der RMS-Wert wird ebenfalls mit den Ergebnissen der Referenzsimulation verglichen und ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Auch dieser Vergleich zeigt eine gute Übereinstimmung der erzeugten DNS-Daten mit jenen der Referenzsimulation.

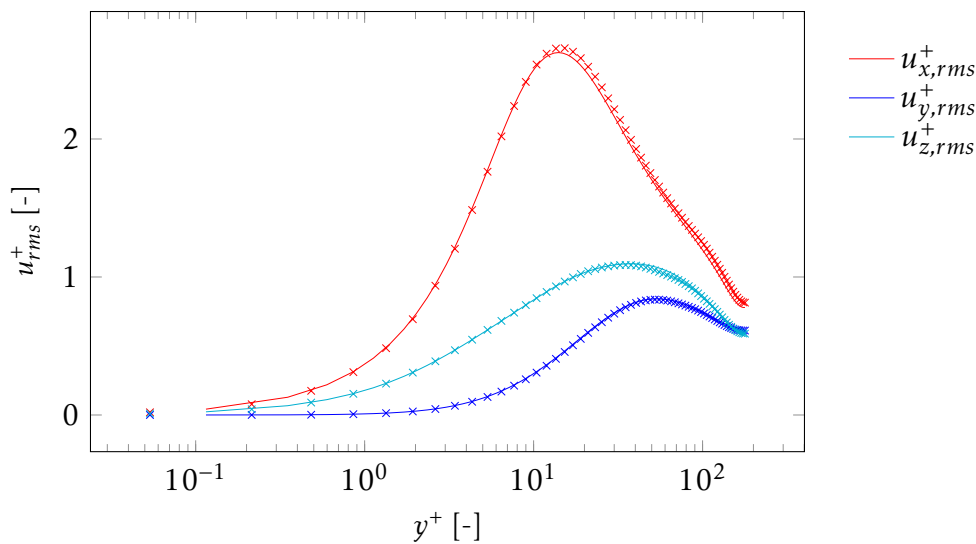


Abb. 6.5: RMS-Wert der mittleren Geschwindigkeit in allen drei Raumrichtungen (durchgehende Line), verglichen mit dem Ergebnis der Referenzsimulation (x-Marker).

SCHUBSPANNUNGEN

Die zeitlich gemittelte Schubspannung in wandnormaler Richtung $\langle \tau(y) \rangle$ setzt sich aus der Reynoldsspannung $\langle u'_x u'_y \rangle$ und der viskosen Spannung $\frac{1}{Re_\tau} \frac{d\langle u_x \rangle}{dy}$ zusammen. Es ergibt sich der Zusammenhang

$$\langle \tau(y) \rangle = \langle u'_x u'_y \rangle + \frac{1}{Re_\tau} \frac{d\langle u_x \rangle}{dy}. \quad (6.5)$$

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

Die viskosen Spannungen entstehen durch den Gradienten der mittleren Geschwindigkeit, haben ihr Maximum an der Kanalwand, dominieren im Kräftegleichgewicht im wandnahen Bereich (viskose Unterschicht) und fallen dann stark ab. Die Reynoldsspannungen resultieren aus den Schwankungsbewegungen und verschwinden an der Kanalwand, steigen dann deutlich an und dominieren das Kräftegleichgewicht in der Übergangsschicht. Sie erreichen ihr Maximum bei $y^+ = 30$. Die Schubspannungen sind in Abbildung 6.6 dargestellt. Insgesamt lässt sich festhalten, dass die in der DNS vorhergesagten statistischen Größen gut mit den Ergebnissen der Referenzsimulation übereinstimmen. Das verwendete Lösungsverfahren in OpenFoam ist also geeignet, um eine Direkte Numerische Simulation einer voll ausgeprägten, turbulenten Kanalströmung durchzuführen. Die Ergebnisse können nun als Ausgangspunkt für Widerstandsreduktion verwendet werden.

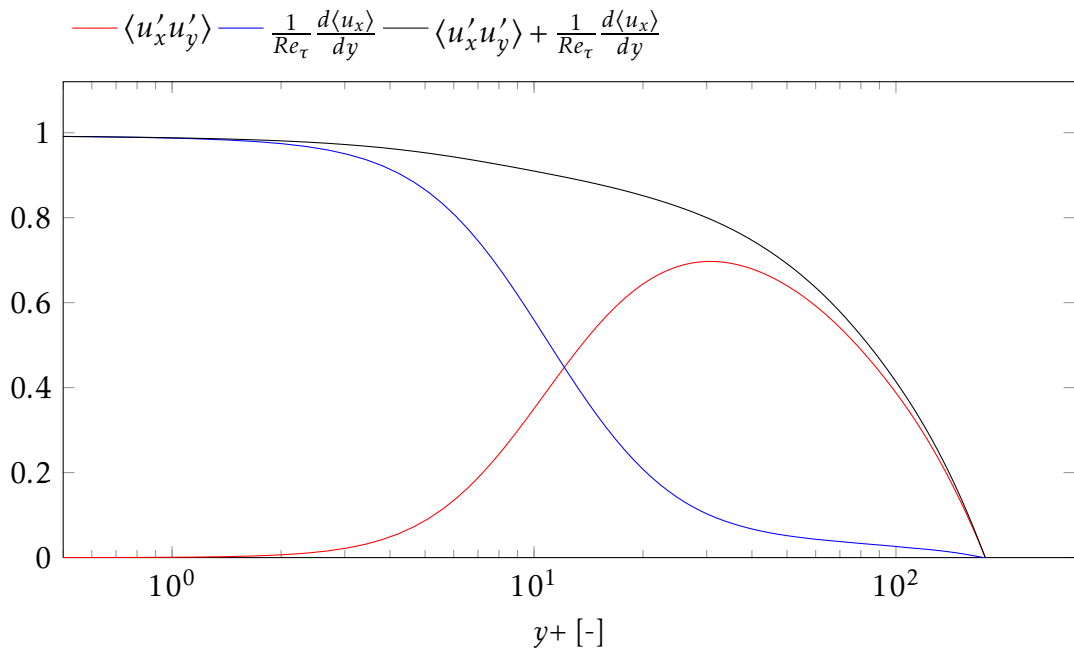


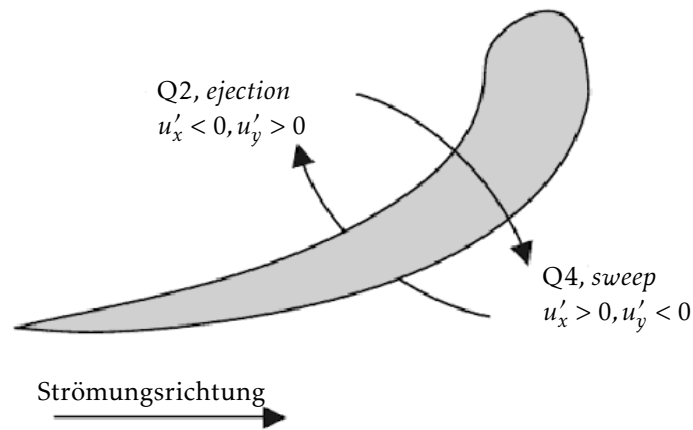
Abb. 6.6: Zeitlich gemittelte Schubspannung (schwarz), viskose Spannung (blau) und Reynoldsspannung (rot) über dem Wandabstand.

6.2 OPTIMIERUNG DER VOLL AUSGEBILDETEN, TURBULENTEN KANALSTRÖMUNG

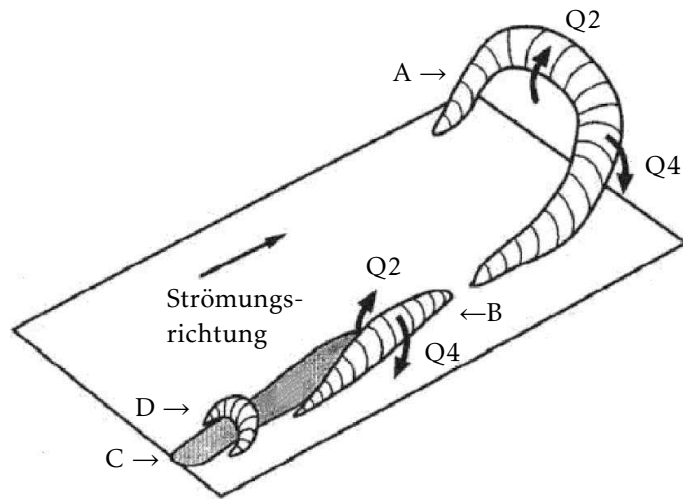
Maßgebend für den Widerstand in einer voll ausgeprägten, turbulenten Kanalströmung ist die Wandreibung. Laut Kim *et al.* [51] wird Letztere vom wandnormalen Transport des Fluids beeinflusst, welcher in sogenannten *Sweeps* und *Ejections* ab-

6.2 Optimierung der turbulenten Kanalströmung

läuft. Um diese zu erkennen, werden die Geschwindigkeitsfluktuationen bei einem Wandabstand von $15y^+$ betrachtet. Ausschlaggebend sind die Fluktuationen in Strömungsrichtung u'_x und wandnormaler Richtung u'_y , die als *kohärente Strukturen*, bzw. *streaky structures* bezeichnet werden. Besitzen beide das gleiche Vorzeichen, spricht man von *inward interaction* (beide negativ) bzw. *outward interaction* (beide positiv), es findet jedoch kein wandnormaler Transport statt. Wenn $u'_x < 0$ und $u'_y > 0$, spricht man von einer *Ejection*, wobei Fluid von der Wand wegtransportiert wird. Wenn $u'_x > 0$ und $u'_y < 0$ handelt es sich um einen *Sweep*, wobei Fluid zur Wand transportiert wird. Diese Einteilung ist in Abbildung 6.7 schematisch dargestellt. Weitere Informationen zur Fluidbewegung in einer turbulenten Grenzschicht finden sich z.B. bei Guo *et al.* [39].



(a) Einfluss auf den Fluidtransport



(b) Wirbelstrukturen in der Strömung

Abb. 6.7: Darstellung des Einflusses eines Wirbels auf den wandnormalen Transport des Fluids (a), sowie verschiedene Anordnungen von Wirbeln in einer Strömung (b):

- A: Hufeisenwirbel
 - B: Wirbel in Strömungsrichtung
 - C: grauer Bereich mit $u'_x < 0$
 - D: Ausbildung eines neuen Wirbels
- Bilder entnommen von Robinson [90].

Um diese unterschiedlichen Strukturen identifizieren zu können, werden Isokon-
 turflächen der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung u'_x mit einem
 Schwellenwert von $u'_x = 2,42u_\tau$ (*high-speed streaks*) bzw. $u'_x = -2,42u_\tau$ (*low-speed stre-*
aks) dargestellt. Der Schwellenwert ist frei gewählt, wobei Werte zwischen $0,5u_\tau$ und
 $2,5u_\tau$ in der Literatur häufig verwendet werden [40, 52, 63]. Die *high-speed streaks*

sind Bereiche, in denen sich das Fluid schneller als die lokale mittlere Geschwindigkeit bewegt. *Low-speed streaks* dagegen bewegen sich langsamer als die lokale mittlere Geschwindigkeit. In Abbildung 6.8 sind die Isokonturflächen eines instantanen Geschwindigkeitsfeldes für die untere Kanalhälfte als Draufsicht dargestellt. Da es sich um ein symmetrisches Problem handelt, wird nur die untere Hälfte gezeigt.

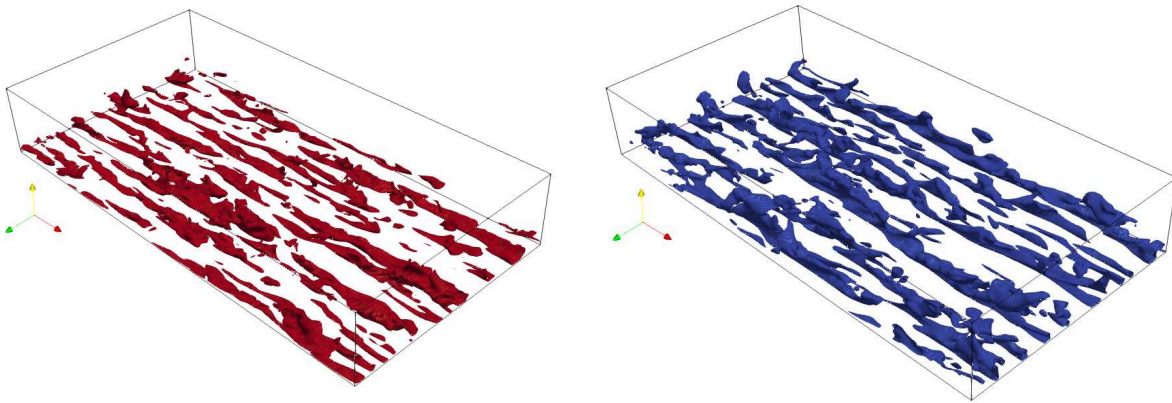


Abb. 6.8: Isokonturflächen der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung u'_x mit *high-speed streaks* ($u'_x = 0,15$) in rot und *low-speed streaks* ($u'_x = -0,15$) in blau.

In einer Studie von Bewley *et al.* [3] wird vorgeschlagen, den wandnormalen Transport durch Einblasen und Absaugen zu unterbinden bzw. zu reduzieren. Trifft Fluid auf die Wand, wird mit einer betragsmäßig identischen, jedoch entgegengesetzten Geschwindigkeit Fluid eingeblasen. Damit soll der wandnormale Fluidtransport reduziert werden. Im umgekehrten Fall, wenn Fluid von der Wand weg transportiert wird, wird ebenfalls mit einer betragsmäßig identischen, jedoch entgegengesetzten Geschwindigkeit abgesaugt, um das Fluid an der Wand zu halten. Mit diesem Vorgehen konnten beachtliche Ergebnisse erzielt werden und der Widerstand um bis zu 20 % reduziert werden. Bei der vorgeschlagenen Methode handelt es sich um eine aktive Maßnahme zur Strömungskontrolle, da für das Einblasen und Absaugen zusätzliche Energie in das System eingebracht werden muss.

In der vorliegenden Arbeit soll eine passive Methode zur Strömungskontrolle vorgestellt werden, die sich an der Idee von Bewley *et al.* [3] orientiert. Ziel ist es, den wandnormalen Transport durch Veränderungen der Oberfläche der Kanalwände zu reduzieren. Trifft Fluid auf die Wand, wird die Wand lokal aus dem Rechengebiet hinaus bewegt, um das Auftreffen des Fluids auf der Wand zu verhindern. Wird Fluid von der Wand wegtransportiert, folgt die Wand dem Fluid in das Rechengebiet hin-

ein. Somit entsteht eine Wandoberfläche, die die kohärenten Strukturen räumlich begrenzen soll und die Geschwindigkeitsfluktuationen reduziert. Dies führt zu einem verringerten Transport in wandnormaler Richtung, was die damit verbundene Wandschubspannung reduziert.

6.3 ZIELFUNKTION

Das Ziel der Optimierung ist die Reduktion der Wandschubspannung, welche auch als Zielfunktion dient. In den Kapiteln 4 und 5 wird die Zielfunktionen über die Randbedingungen am Ein- und Auslass in das Gleichungssystem integriert. Da in der vorliegenden, periodischen Geometrie keine physikalischen Ein- und Auslassränder definiert sind, steht diese Möglichkeit hier nicht zur Verfügung. An der Wand geht die Ableitung der Zielfunktion nach dem Druck $\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p}$ in das Gleichungssystem ein (vgl. Tabelle 2.2). Die Wandschubspannung $\tau_w = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$ enthält jedoch keine Ableitung nach dem Druck p . Um dieses Problem zu umgehen, wird der Umstand genutzt, dass Gradienten an der Wand über die Zellen im Volumen berechnet werden. Daher wird die Zielfunktion im Volumen definiert. Die Zielfunktion geht dann über den Term $\frac{\partial J_\Gamma}{\partial u}$ in das Gleichungssystem ein (vgl. Gleichung (3.37)). Um die Zielfunktion effizient im Rahmen des adjungierten Optimierungsverfahrens einsetzen zu können, wird eine lokale Wandreibungskraft $P_\tau = F_\tau \cdot u_i$ an jedem Punkt der Oberfläche definiert, wobei $F_\tau = \int_A \tau_w dA$ die lokale Reibungskraft bezeichnet. Die Zielfunktion ist dann definiert als die Reibungsleistung, zeitlich integriert über ein spezifisches Zeitintervall T und ergibt sich zu

$$J = \int_T \left[\alpha_i \cdot \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot A_w \cdot u_i \right] dt, \quad (6.6)$$

mit der Fläche A_w der jeweils betrachteten Zelle. α_i fungiert dabei als Schalter und ist in der ersten Zelle an der Wand mit $\alpha_i = 1$ definiert, im restlichen Volumen gilt $\alpha_i = 0$. Somit wird die Zielfunktion ausschließlich im relevanten Bereich nahe der Wand ausgewertet und nicht im Bulk. Die numerische Bestimmung des Geschwindigkeitsgradienten an der Wand erfolgt mit einem Verfahren erster Ordnung.

Für den Optimierungsprozess werden zeitlich gemittelte Strömungsfelder zur Simulationsumgebung transferiert, in der sie die Nebenbedingung der adjungierten Navier-Stokes-Gleichung bilden. Die Mittelungsdauer in den präsentierten Ergebnis-

sen beträgt $T = 12t^+$, mit $t^+ = \frac{t \cdot u_\tau}{h}$. Bei zeitabhängigen Problemen müssen während der adjungierten Simulation alle instantanen Felder der primalen Simulation vorliegen. Wenn für die primale Simulation \mathcal{R} , n Zeitschritte berechnet wurden und somit für jeden Zeitschritt eine Lösung $\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_1, p_1), \mathcal{R}_2(\mathbf{u}_2, p_2), \dots, \mathcal{R}_n(\mathbf{u}_n, p_n)$ vorliegt, ist für den ersten Zeitschritt der adjungierten Lösung Q die n -te primale Lösung nötig, es gilt also $Q_1(\mathcal{R}_n(\mathbf{u}_n, p_n)), Q_2(\mathcal{R}_{n-1}(\mathbf{u}_{n-1}, p_{n-1})), \dots, Q_n(\mathcal{R}_1(\mathbf{u}_1, p_1))$. Das führt zu einem enormen Speicherbedarf, da alle primalen Lösungen gespeichert werden müssen. Die damit verbundenen Herausforderungen sind bei Griewank *et al.* [38] beschrieben. Um dieses Problem zu umgehen, wird daher angenommen, dass die gemittelten Größen zeitlich invariant sind und somit die entsprechenden Terme bei der Herleitung der adjungierten Gleichung entfallen. Dadurch entfällt die aufwendige, zeitabhängige adjungierte Simulation.

Die gewählte Mittelungsdauer T ist nicht ausreichend, um vollständig konvergierte statistische Größen zu erhalten. Dies ist aber auch gar nicht das Ziel der Mittelung, da sich in Hauptströmungs- und Spannweitenrichtung zeitlich invariante Größen ergeben würden. Dies würde zu einer gleichmäßigen Verschiebung der Kanalwand führen und lediglich h verändern. Das entspricht den Erwartungen aus dem Gesetz von Hagen-Poiseuille [23], wonach der Druckgradient in einem Rohr sinkt, wenn der Radius vergrößert wird. Die Mittelungsdauer ist daher mit Bedacht so gewählt, dass in den gemittelten Feldern noch deutliche *Fußabdrücke* der dominanten Strukturen erhalten bleiben. Die gewählten 12 dimensionslosen Zeiteinheiten entsprechen dem von Bewley *et al.* [3] empfohlenen Wert.

Für die adjungierte Simulation wird Gleichung (3.37) gelöst, die sich mit den gemittelten Feldern zu

$$-2D(\mathbf{U})\langle \mathbf{u} \rangle_T = -\nabla q + \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{U})) - \frac{\partial J}{\partial \langle \mathbf{u} \rangle_T} \quad (6.7)$$

ergibt.

6.4 ADJUNGIERTE FORMOPTIMIERUNG

Mit den zeitlich gemittelten Strömungsfeldern und der Zielfunktion (6.6) kann Gleichung (6.7) gelöst werden. Mit der Lösung für die adjungierten Größen und den zeitlich gemittelten Zustandsvariablen können nun die Sensitivitäten S berechnet werden. Die resultierenden Sensitivitätsverteilungen an den Kanalwänden sind in Abbildung 6.9 in Form von eingefärbten Konturwerten dargestellt. Sie spiegeln in Strö-

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

mungsrichtung gedehnte Struktur wider. Im Gegensatz zu Riblets, die einen konstanten Querschnitt haben und in Strömungsrichtung verlaufen, variieren die Strukturen in den Sensitivitätsverteilungen.

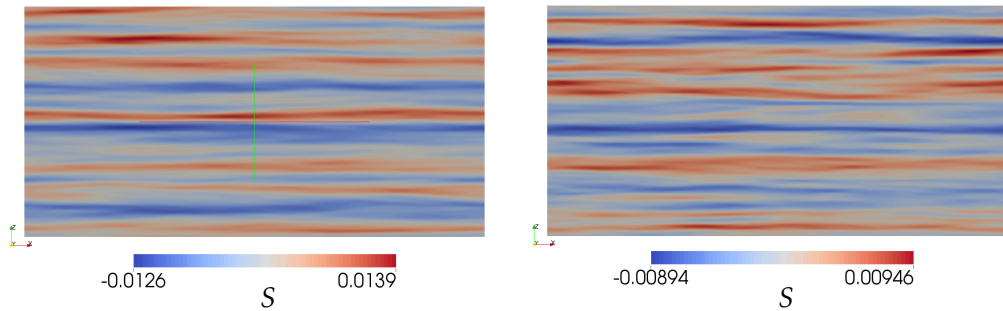


Abb. 6.9: Resultierende Oberflächensensitivitäten für die obere Kanalwand (links) und die untere Kanalwand (rechts).

Der Vergleich der Sensitivitätsverteilung S mit den zugehörigen Wandschubspannungen $\langle \tau_w \rangle_T$ in Abbildung 6.10 weist aufgrund der Ähnlichkeiten auf eine hohe Korrelation dieser beiden Größen hin.

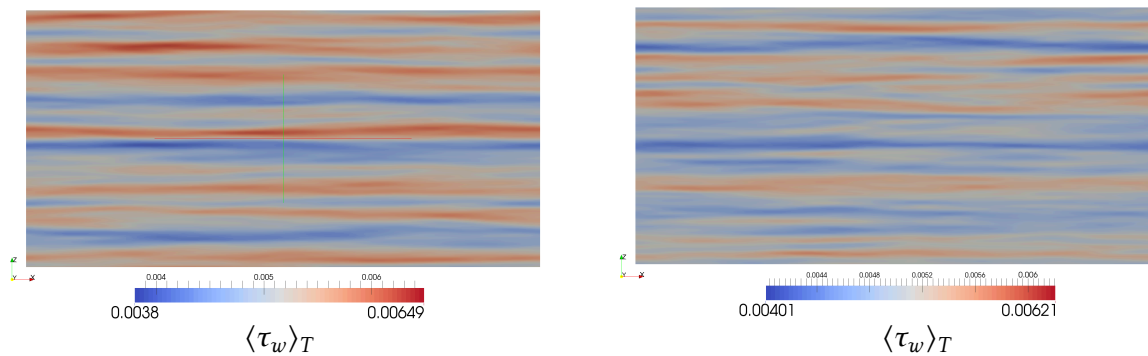


Abb. 6.10: Zeitlich gemittelte Wandschubspannungen für die obere Kanalwand (links) und die untere Kanalwand (rechts).

Um die Ähnlichkeit genauer zu untersuchen, wird der Korrelationskoeffizient nach Pearson [5] durch

$$r_{xy} := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})(\tau_{w,i} - \bar{\tau}_w)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\tau_{w,i} - \bar{\tau}_w)^2}} \quad (6.8)$$

bestimmt, wobei \bar{S} und $\bar{\tau}_w$ die Mittelwerte der Sensitivitäten bzw. der Wandschubspannungen darstellen. Gleichung (6.8) ergibt eine Korrelation von 0,99891 für die

obere Kanalwand und 0,99931 für die untere. Das bedeutet, dass die beiden Größen stark miteinander korrelieren. Wie bei Kim *et al.* [51] erläutert, tragen die kohärenten Strukturen, also die Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung u'_x im Abstand zur Wand von $y^+ = 15$, maßgeblich zum Verhalten der Wandschubspannungen bei. Als Hypothese steht im Raum, dass die aus den Sensitivitäten resultierende Verformung die Ausdehnung der Strömungsstrukturen verändert und damit eine Reduktion der Wandschubspannungen einhergeht. Die zeitlich gemittelten kohärenten Strukturen $\langle u'_x \rangle_T$ sind in Abbildung 6.11 gezeigt.

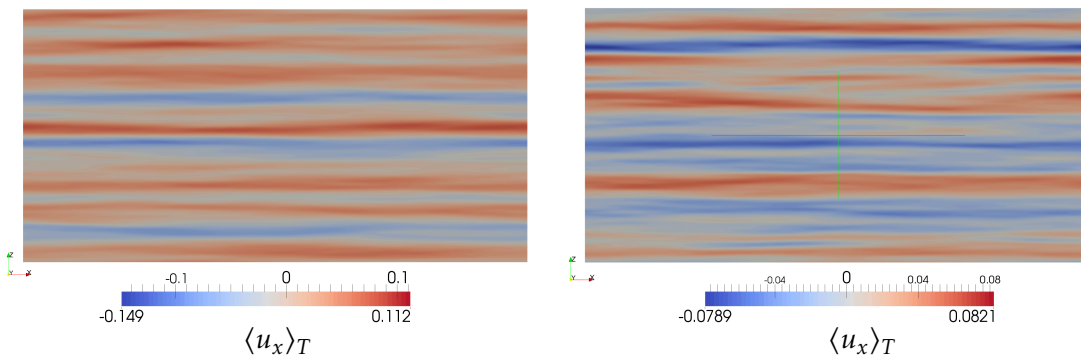


Abb. 6.11: Zeitlich gemittelte kohärente Strukturen im Abstand von $15y^+$ von der Wand für die obere Kanalwand (links) und die untere Kanalwand (rechts).

Der Verlauf der Sensitivitäten folgt den kohärenten Strukturen, was der eingangs getroffenen Annahme entspricht. Kommt es zu wandnormalem Fluidtransport, entsteht im Fall von negativen kohärenten Strukturen eine *Ejection*, bei der Fluid von der Wand wegtransportiert wird. Die Sensitivitäten weisen in diesem Fall ebenso ein negatives Vorzeichen auf, was einer Verformung in die Kanalgeometrie, also in Richtung des konvektiven Transports, bedeutet. Bei positiven kohärenten Strukturen entsteht ein *Sweep*, es wird Fluid zur Wand hin transportiert. Die Sensitivitätswerte sind in diesem Fall positiv, was einer Verformung der Kanalwand nach außen entspricht. Die Wand weicht also vor dem Fluid zurück. Diese Vorgänge sind in den Abbildungen 6.12 und 6.13 veranschaulicht. Die Grafiken zeigen den Verlauf der normierten Sensitivitäten und kohärenten Strukturen in Strömungsrichtung. Als Position in Strömungsrichtung wurde die Kanalmitte gewählt. Der Verlauf der beiden Größen ist jedoch an jedem Punkt in Strömungsrichtung identisch. Die vorgestellte Methode ist somit in der Lage, die Idee von Bewley *et al.* [3] aufzugreifen und entsprechend den Vorgaben abzuändern. Statt des Ein- und Ausblasens wird eine Sensitivitätsverteilung erzeugt, die den kohärenten Strukturen folgt. Durch die Netz-

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

verformung auf Grundlage der erzeugten Sensitivitätswerte soll eine Wandoberfläche erzeugt werden, die die kohärenten Strukturen räumlich begrenzt und somit die Geschwindigkeitsfluktuationen reduziert.

In den Abbildungen sind nur die Fluktuationen in Strömungsrichtung dargestellt, die wandnormale Richtung ist dabei nicht berücksichtigt. Das führt dazu, dass die Sensitivitäten nicht zwischen *Ejection* und *inward interaction* bzw. *Sweep* und *outward interaction* unterschieden werden.

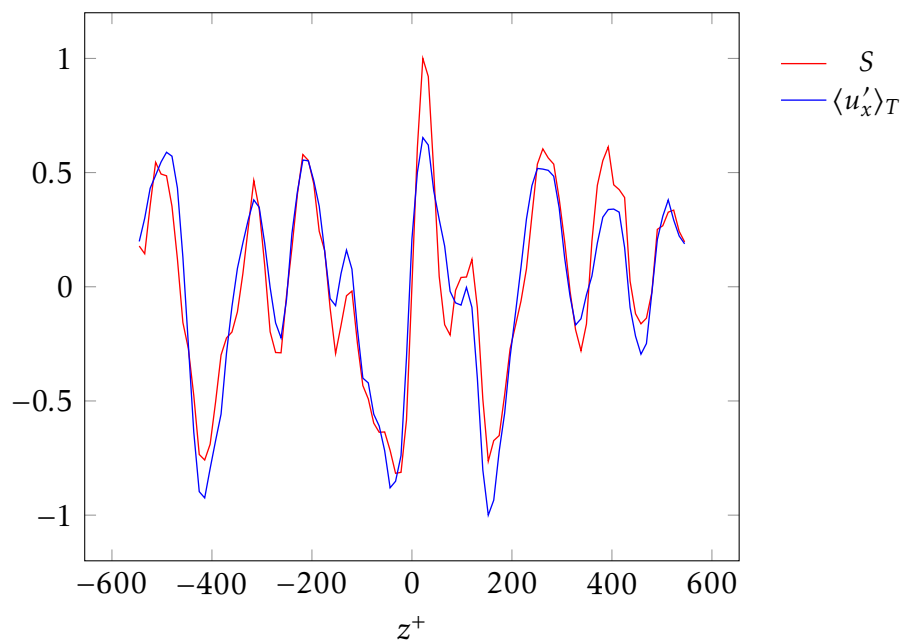


Abb. 6.12: Verlauf der normierten Sensitivitäten und kohärenten Strukturen in der Kanalmitte für die obere Wand.

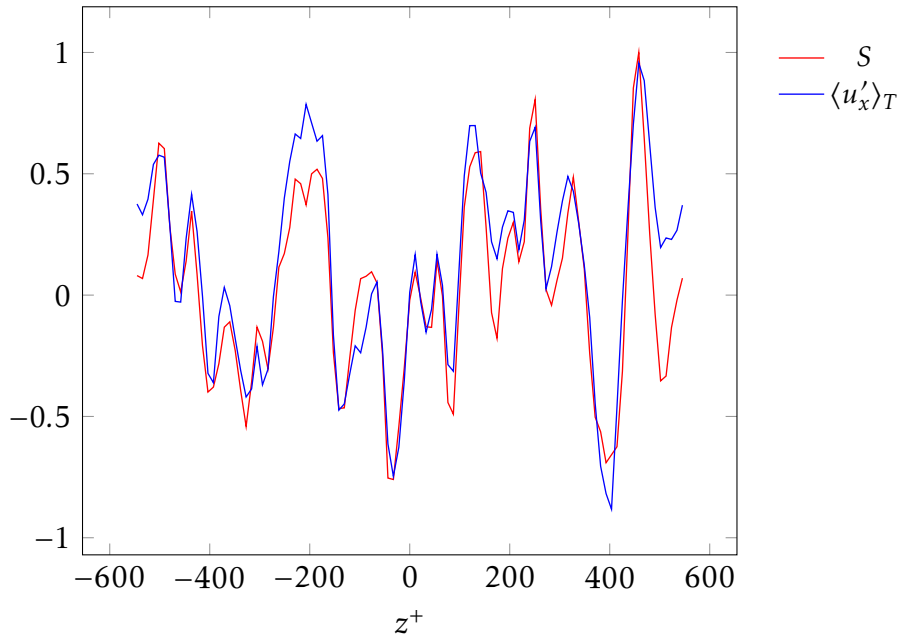


Abb. 6.13: Verlauf der normierten Sensitivitäten und kohärenten Strukturen in der Kanalmitte für die untere Wand.

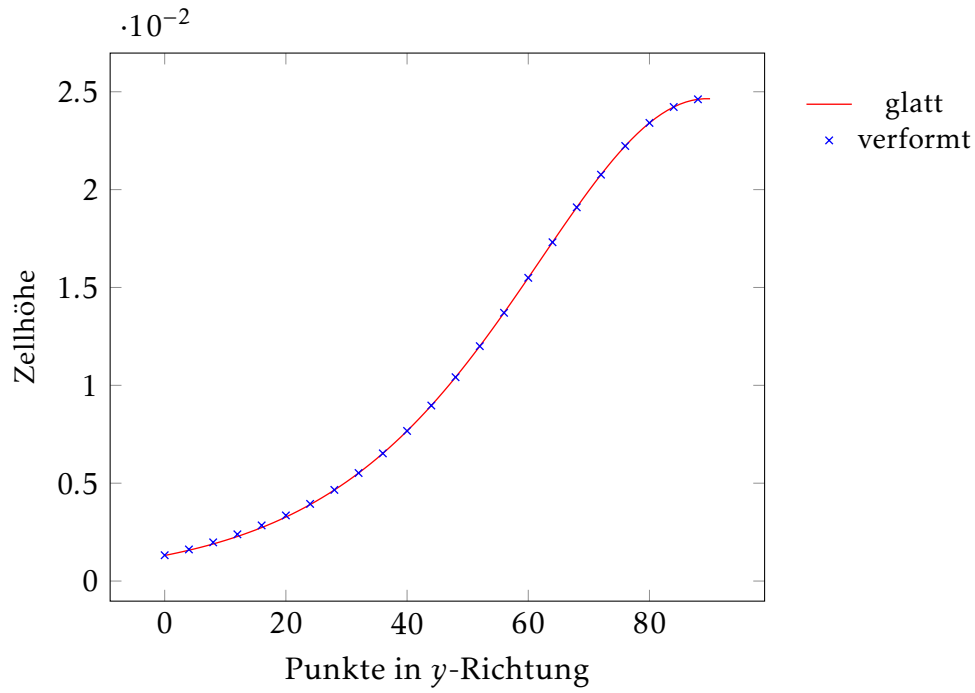
Im nächsten Schritt erfolgt die Deformation der Geometrie. Die zur Bestimmung der Deformationen berechneten Sensitivitäten sind im Mittelpunkt der jeweiligen Oberflächenzelle gespeichert und dienen als Kontrollpunkte. Mit Hilfe von Gleichung (3.54) werden diese auf alle Netzpunkte interpoliert. Die Interpolation erfolgt dabei über die periodischen Ränder hinaus, wie in Abschnitt 3.3.5 beschrieben. Dadurch ergibt sich eine Verschiebung für jeden Punkt des Rechengebiets. Um sicherzustellen, dass das Volumen des Kanals konstant bleibt, wird an jeder Wand die durchschnittliche Verschiebung jedes Punktes bestimmt. Dieser Durchschnittswert wird dann von jedem Verschiebungswert der betreffenden Kanalhälfte abgezogen. Der Kanal wird dadurch gestreckt bzw. gestaucht und eine Änderung des Volumens wird durch eine Vergrößerung bzw. Verringerung der Höhe der Zellen in der Kanalmitte ausgeglichen. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass die Größe der Zellen an der Wand und damit die Auflösung in dimensionslosen Wandeinheiten erhalten bleibt.

Die aus der Verformung resultierende Oberfläche des Kanals ist in Abbildung 6.16 (a) am Beispiel der unteren Kanalwand dargestellt. In Abbildung 6.16 (b) ist eine Detailansicht der Verformung entlang der schwarzen Linie in dimensionslosen Wandeinheiten Δy^+ gezeigt. Die Auflösung an der Wand bleibt durch die Verformung erhalten, was in der vergrößerten Ansicht des Netzes in Abbildung 6.15 deutlich wird. In dem verformten Rechengebiet wird anschließend die Direkte Numerische Simu-

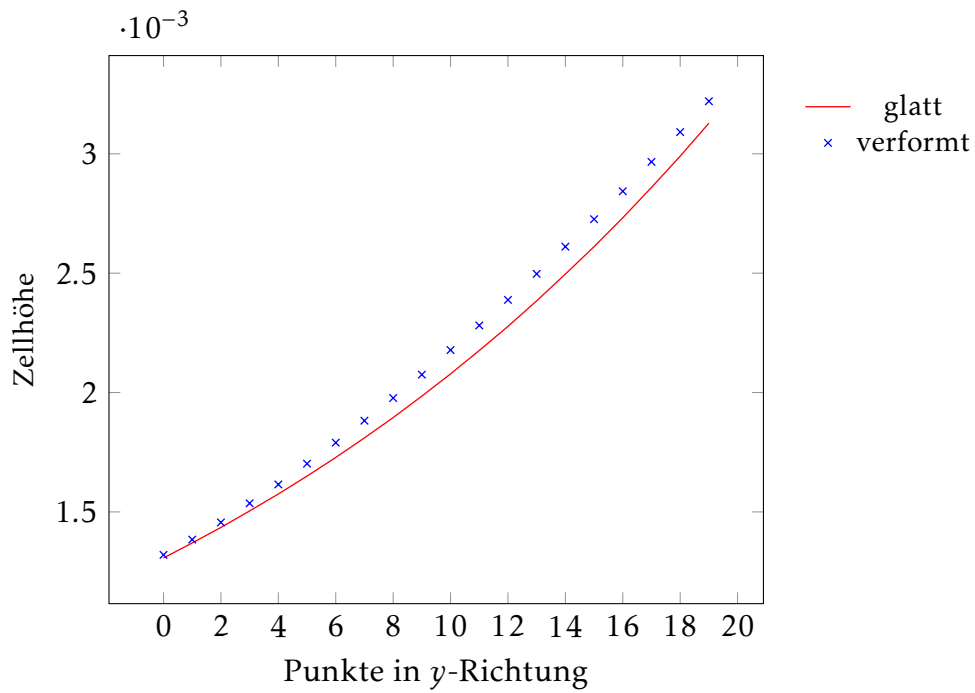
6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

lation gestartet, wobei die instantanen Felder aus Zeitpunkt t_1 (vgl. Abbildung 6.1) als Anfangsfeld dienen. Es erfolgt eine erneute zeitliche Mittelung der Zustandsvariablen über den Zeitraum T , so dass anschließend die Wandschubspannung für die glatte und verformte Geometrie miteinander verglichen werden können.

Die Auflösung an der Wand bleibt nach der Verformung erhalten. Abbildung 6.14 zeigt die Zellhöhe über die Punkte in wandnormaler Richtung. Von der verformten Geometrie ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nur jeder vierte Punkt gezeigt. Die Zellhöhen der beiden Geometrien zeigen dabei ein identisches Verhalten. Abbildung 6.14 zeigt die Zellhöhen der ersten 20 Zellen ausgehend von der Wand. Direkt an der Wand sind die Zellhöhen mit einer maximalen Abweichung von 1% nahezu identisch. Mit zunehmendem Abstand von der Wand wachsen die Zellhöhen nach der Verformung bis zur 15. Zelle an, deren Höhe 4% größer ist. Mit zunehmenden Abstand werden die Unterschiede zwischen den Zellhöhen geringer, so dass Letztere ab der 24. Zelle weniger als 1% von der ursprünglichen Zellhöhe unterscheidet.



(a) alle Punkte



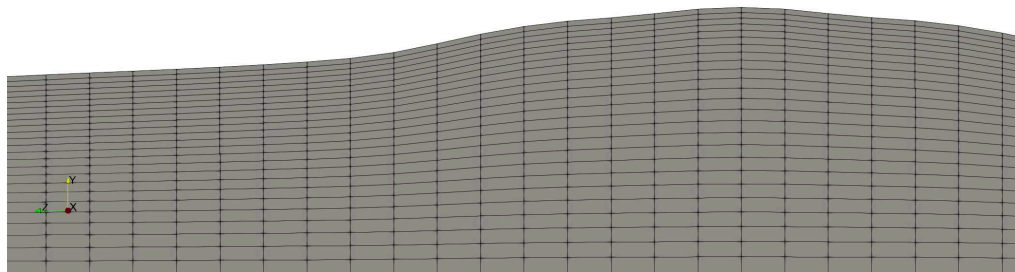
(b) erste 20 Punkte von der Wand

Abb. 6.14: Abstand aller Netzpunkte (oben) bzw. der ersten 20 Punkte (unten) in y -Richtung von der Wand. Die Punkte sind durchnummeriert, wobei Punkt 0 die Wand darstellt und Punkt 90 die Kanalmitte. Die Verteilung im glatten und verformten Kanal ist identisch.

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

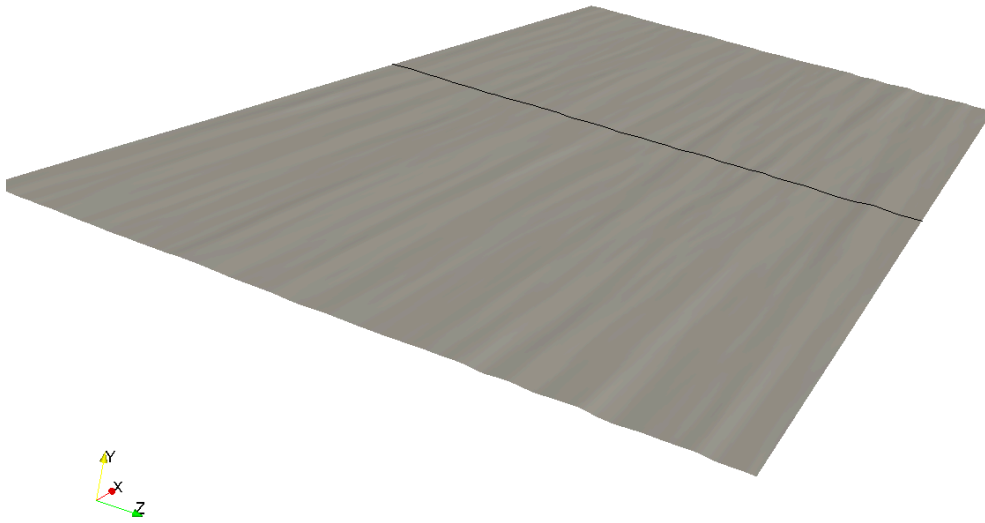


(a) Draufsicht in Strömungsrichtung mit Vergrößerungsausschnitt in schwarz.

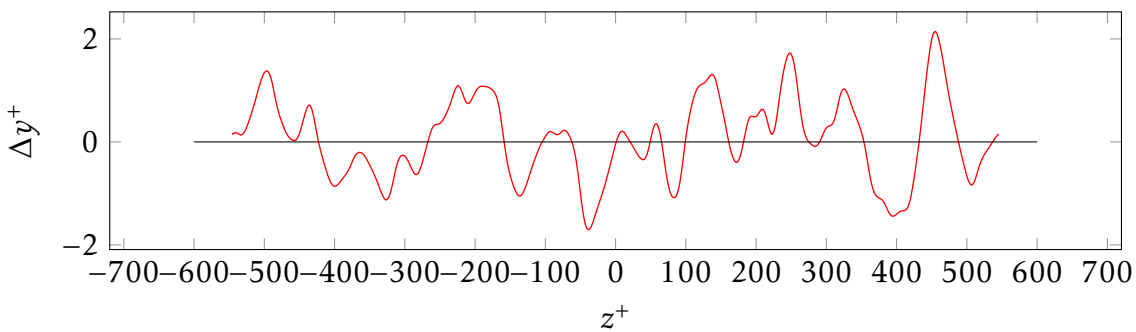


(b) Vergrößerung

Abb. 6.15: In der vergrößerten Ansicht ist die Auflösung des wandnahen Bereichs dargestellt. Diese bleibt erhalten und die Zellhöhe bleibt gleichmäßig verteilt.



(a) untere Kanalwand



(b) Detailansicht

Abb. 6.16: Verformung der unteren Kanalwand (a) mit Detailansicht der Verformung entlang der schwarzen Linie (b).

STATISTISCHE MITTELUNG ÜBER $T = 12t^+$

Die für die Verformung des Kanals ermittelten Sensitivitätsverteilungen werden auf Grundlage von zeitlich gemittelten Strömungsfeldern bestimmt. Die Mittelungsdauer beträgt $T = 12t^+$. Um die verformte Kanalgeometrie mit dem glatten Kanal zu vergleichen, erfolgt ebenfalls eine zeitliche Mittelung über $T = 12t^+$. Vergleicht man die Turbulenzintensität der Strömung im verformten Kanal mit der des glatten Kanals, so zeigt diese nur leichte Veränderungen. In Strömungsrichtung weist die Turbulenz-

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

intensität ein unwesentlich geringeres Maximum auf, ist aber in der Kanalmitte leicht erhöht. Die Schwankungsbewegung in wandnormaler Richtung und in Spannweitenrichtung ist gemäß der etwas höheren RMS-Werte in diesen Richtungen etwas stärker ausgeprägt. Da die Unterschiede mit Werten von weniger als 1% sehr klein sind, sind sie in den Profilen in Abbildung 6.17 nicht erkennbar.

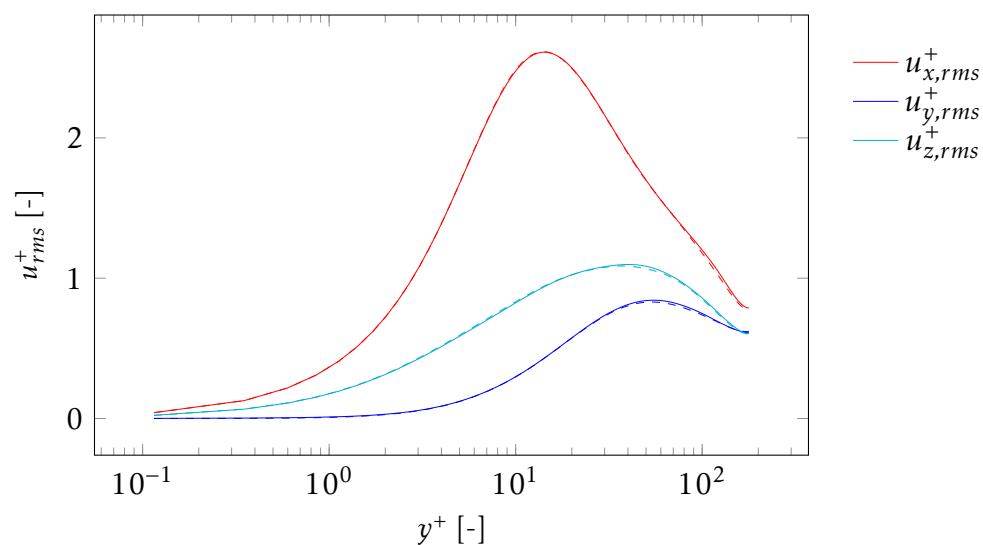


Abb. 6.17: RMS-Wert der mittleren Geschwindigkeit in allen drei Raumrichtungen für den verformten Kanal (durchgehende Linie), verglichen mit dem Ergebnis im glatten Kanal (gestrichelte Linie).

Die Betrachtung der Schubspannungen im verformten Kanal zeigt im Vergleich zum glatten Kanal um 1,6% geringere viskose Spannungen an der Kanalwand, was auf eine geringere Wandschubspannung hindeutet. Die Reynoldsspannungen steigen im verformten Kanal weniger stark an und weisen auch einen geringeren Maximalwert auf. Im verformten Kanal liegt der Maximalwert 6,2% unter dem im glatten Kanal. Die Schubspannungen im verformten Kanal und im glatten Kanal sind in Abbildung 6.18 dargestellt.

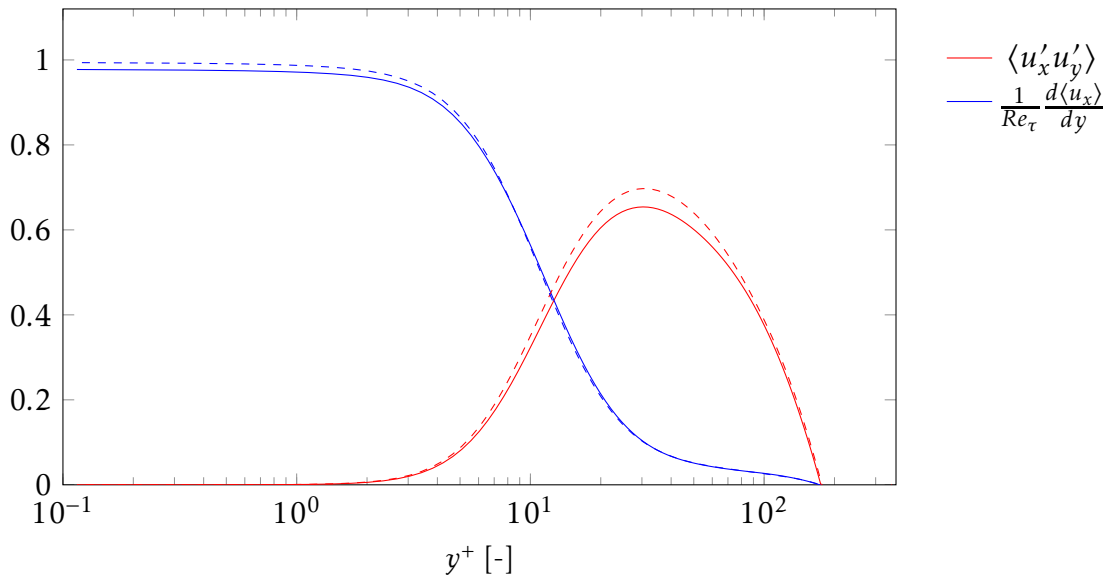
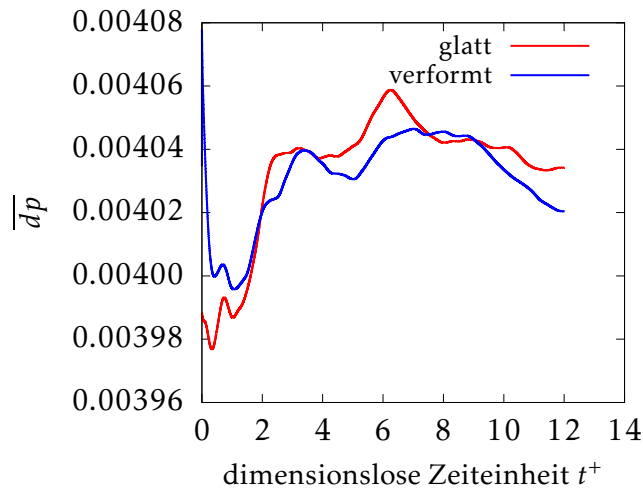


Abb. 6.18: Viskose Spannung (blau) und Reynoldsspannung (rot) über dem Wandabstand, die gestrichelten Linien entsprechen den Werten aus dem glatten Kanal, die durchgehenden Linien zeigen die Werte aus dem verformten Kanal.

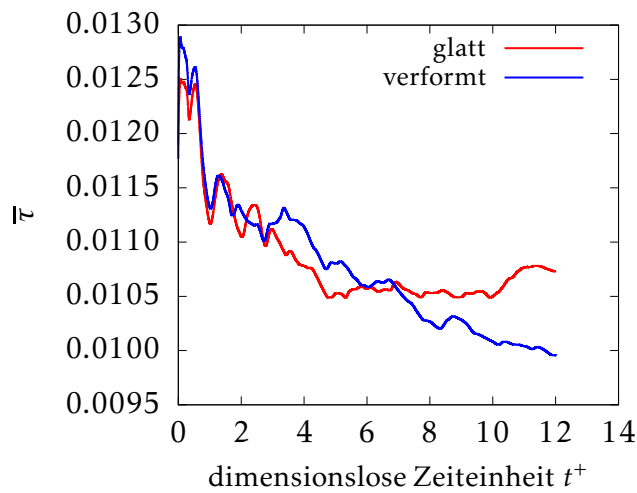
Da es sich bei der vorliegenden Simulation um eine Volumenstromsteuerung handelt, stellt sich der Druckgradient als Ergebnisgröße ein. Abbildung 3.8 (a) zeigt, dass der mittlere Druckgradient im verformten Kanal kleiner ist als im glatten Kanal. Nach Mittelung über $T = 12t^+$ beträgt der mittlere Druckgradient für den glatten Kanal 0,00403422 im Vergleich zu einem mittleren Druckgradienten von 0,00402039 für den verformten Kanal. Das entspricht einer Reduzierung um 0,34%. Für die Bestimmung der mittleren Wandschubspannungen werden die Wandschubspannungsverteilungen über die gesamte Kanaloberfläche integriert. In Abbildung 3.8 (b) ist das Ergebnis einer gleitenden Mittelwertbildung dargestellt. Nach der Mittelung ergibt sich für den glatten Kanal eine Wandschubspannung von 0,010729 und für den verformten Kanal von 0,0099540, was einer Reduzierung von 7,22% entspricht.

Die Reduzierung der Wandschubspannung sollte sich im statistischen Mittel in einer Reduzierung des mittleren Druckgradienten niederschlagen. Allerdings ist der oben bestimmte mittlere Druckgradient kleiner als erwartet. Eine Erklärung könnte sein, dass sich der mittlere Druckgradient zeitverzögert einstellt. Die Reduzierung der Wandschubspannung ist durch die geringeren viskosen Spannungen an der Kanalwand, die in Abbildung 6.18 gezeigt sind, belegt.

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung



(a) resultierender Druckgradient



(b) Wandschubspannung

Abb. 6.19: Gleitender Mittelwert der Zeitreihe des Druckgradienten sowie der Wandschubspannung.

Die Maximalwerte der gemittelten Wandschubspannungen des verformten Kanals sind höher als die des glatten Kanals. Das bedeutet, dass es lokal zu einer Erhöhung der Wandschubspannung kommt. Demgegenüber stehen jedoch auch geringere Minimalwerte, was umgekehrt eine lokale Reduzierung der Wandschubspannung widerspiegelt.

Wie zu Beginn des Kapitels erläutert, findet ein wandnormaler Fluidtransport nur dann statt, wenn das Produkt aus $(u'_x \cdot u'_y) < 0$ ist (*Sweep* bzw. *Ejection*). In der Zielfunktion wird jedoch nur der Gradient der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung (u_x) ausgewertet, es wird also nicht zwischen *Sweep / Ejection* und *inward / outward*

interaction unterschieden, was dazu führt, dass eine Verformung auch dann erfolgen kann, wenn eigentlich kein wandnormaler Fluidtransport stattfindet. Dieser Umstand kann zu einer lokalen Erhöhung der Wandschubspannung führen.

Wird die Wandschubspannung über die Oberfläche integriert, ergibt sich ein geringerer Wert für den verformten Kanal und es kommt integral zu einer Reduzierung der Wandschubspannung (vgl. Abbildung 6.19 (b)). Dabei unterscheiden sich die Auswirkungen der Verformung an den verschiedenen Kanalwänden. Der integrale Wert der unteren Wand sinkt von 0,00541734 auf 0,0053140, was einer Reduzierung um 1,9% entspricht. An der oberen Kanalwand sinkt der Wert von 0,0053120 auf 0,00464, was einer Reduzierung um 12,7% entspricht. Diese Asymmetrie ist eine Folge der Mittelung. Die Strömungsfelder weisen nach der Mittelung über $T = 12t^+$ ebenfalls noch Asymmetrien auf. Die statistische Mittelung ist dabei nicht konvergiert, wie zu Beginn des Abschnitts erörtert wurde. Die resultierenden Wandschubspannungen für den glatten und den verformten Kanal sind in Abbildungen 6.20 und 6.21 dargestellt.

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

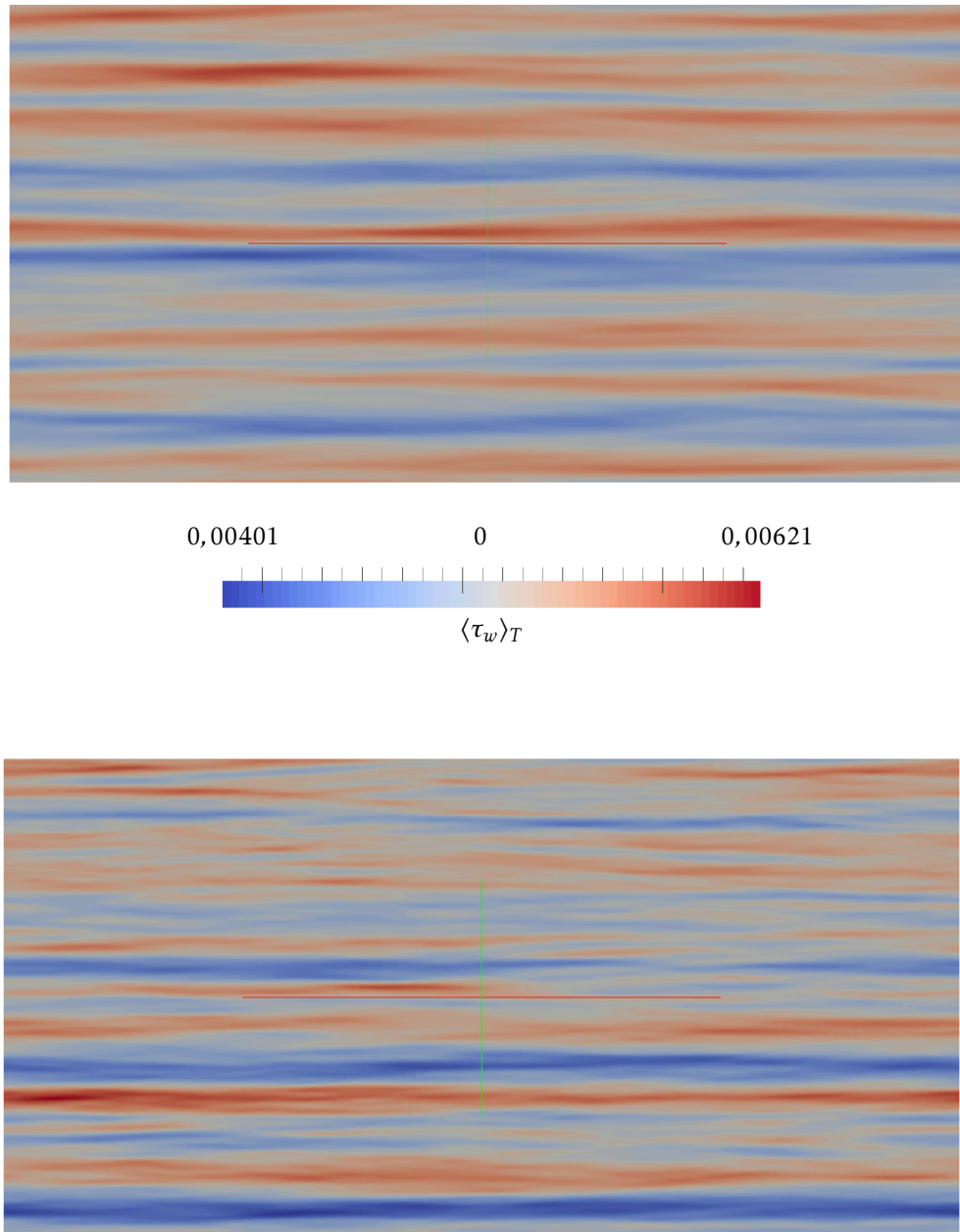


Abb. 6.20: Vergleich der Wandschubspannungen an der oberen Kanalwand für den glatten (oben) und den verformten Kanal (unten).

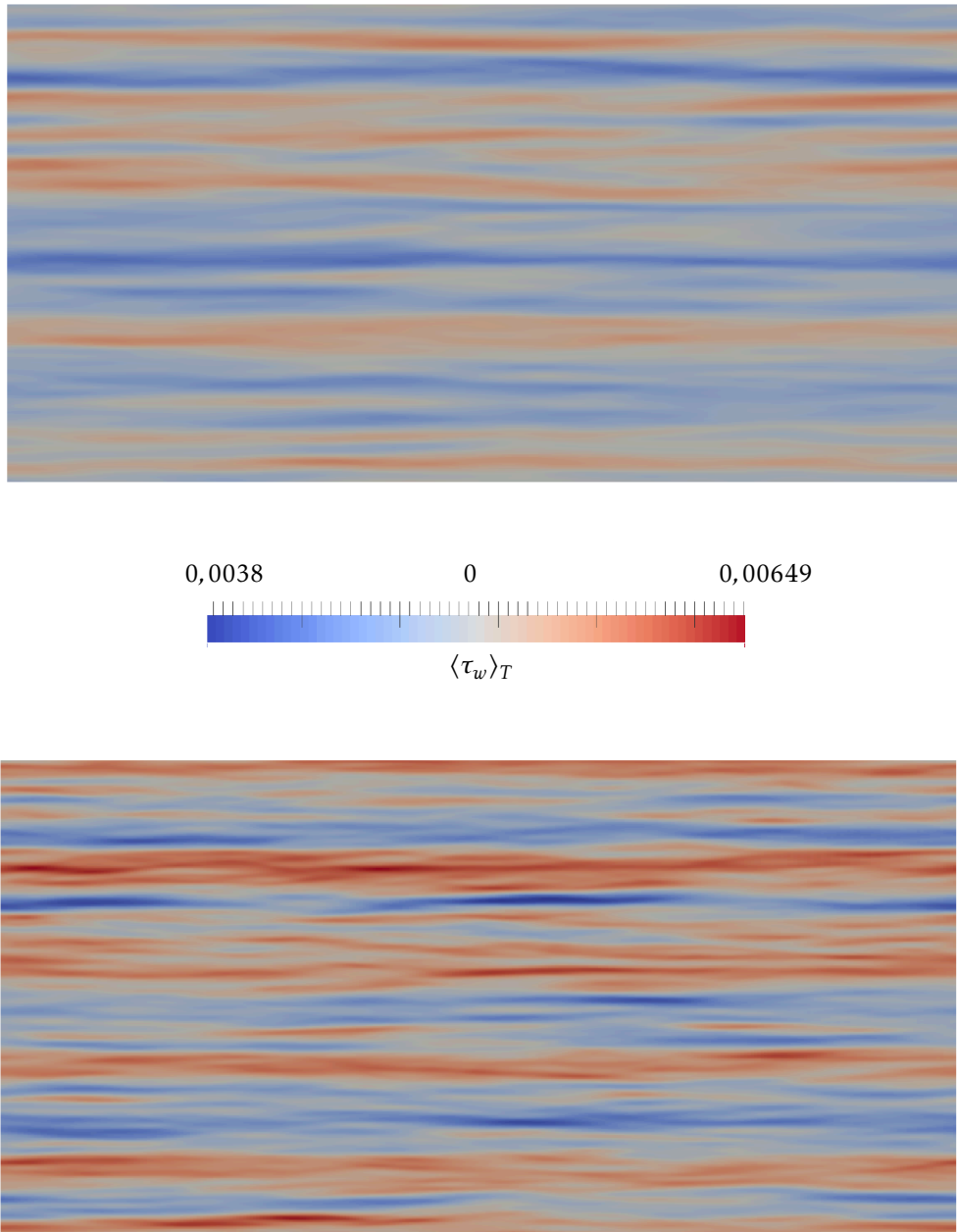


Abb. 6.21: Vergleich der Wandschubspannungen an der unteren Kanalwand für den glatten (oben) und den verformten Kanal (unten).

Die kohärenten Strukturen zeigen ein ähnliches Verhalten. Auch hier zeigt sich eine Erhöhung der Geschwindigkeitsfluktuationen in beide Richtungen.

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

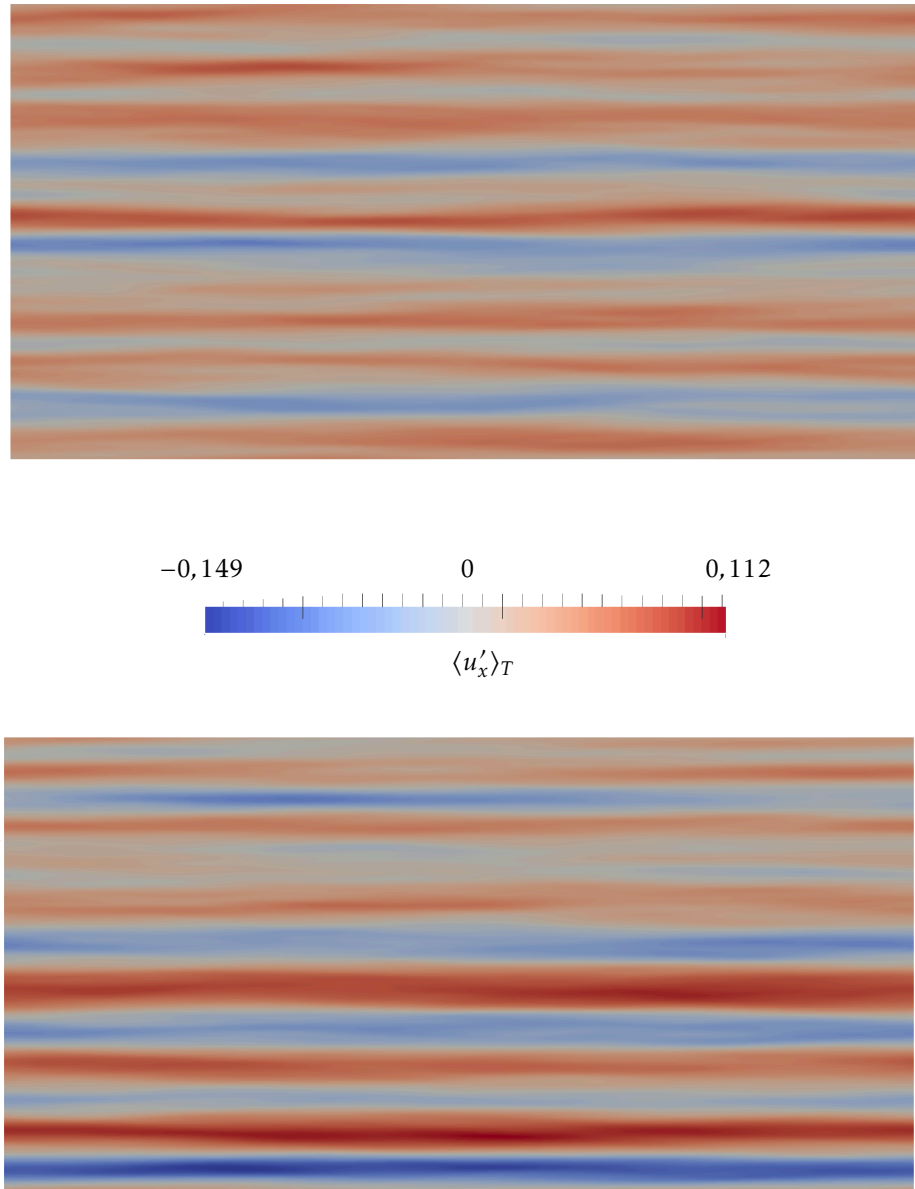


Abb. 6.22: Vergleich der kohärenten Strukturen für den glatten (oben) und den verformten Kanal (unten). Die Strukturen sind in einem Abstand von $15y^+$ von der oberen Kanalwand ausgewertet.

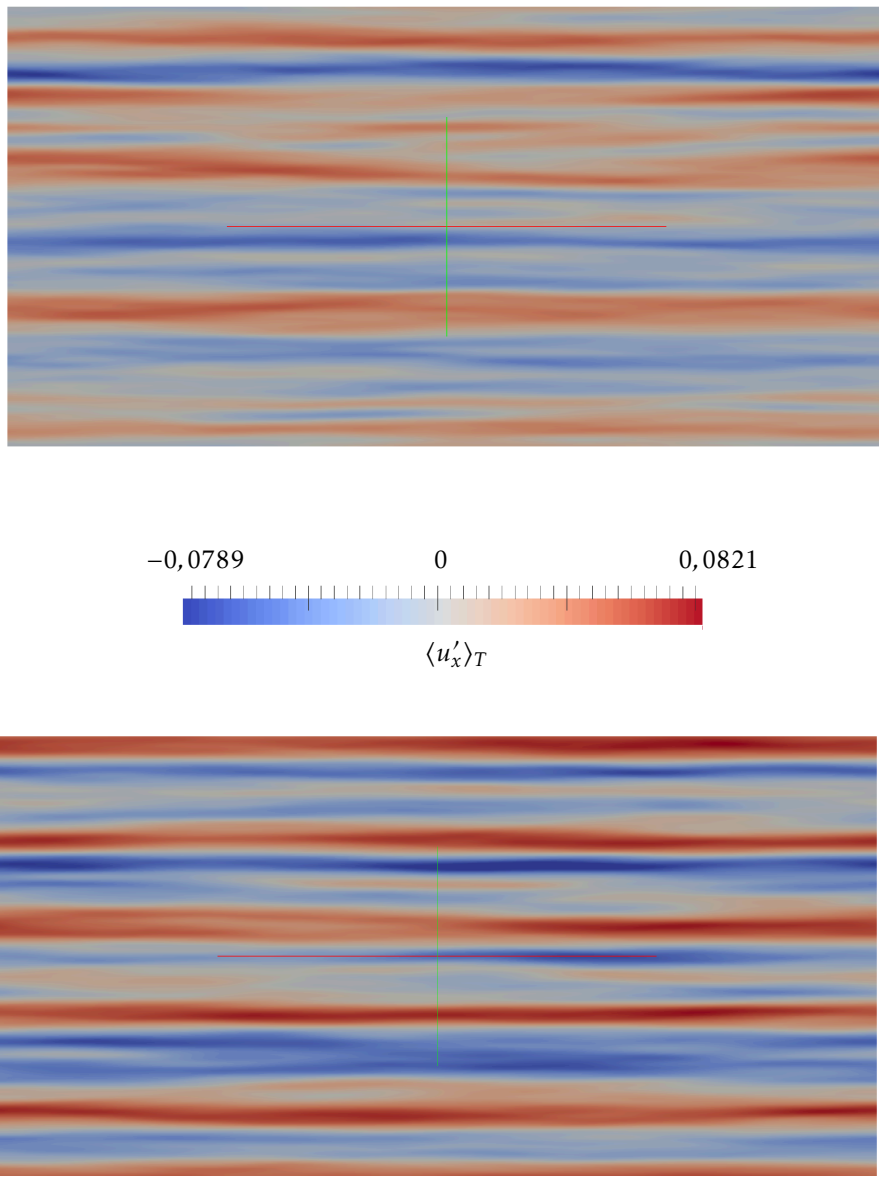


Abb. 6.23: Vergleich der kohärenten Strukturen für den glatten (oben) und den verformten Kanal (unten). Die Strukturen sind in einem Abstand von $15y^+$ von der unteren Kanalwand ausgewertet.

Abbildung 6.24 zeigt die Isokonturflächen der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung u'_x für den glatten und den verformten Kanal zu einem beliebigen Zeitpunkt. Dabei sind die *high-speed streaks* ($u'_x = 0,15$) rot und die *low-speed streaks* ($u'_x = -0,15$) blau eingefärbt. Die Abbildung dient lediglich als Beispiel, da

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

ein instantanes Feld visualisiert wird. Der tatsächliche Einfluss der Verformung kann nur mit statistischen Mittelwerten quantifiziert werden.

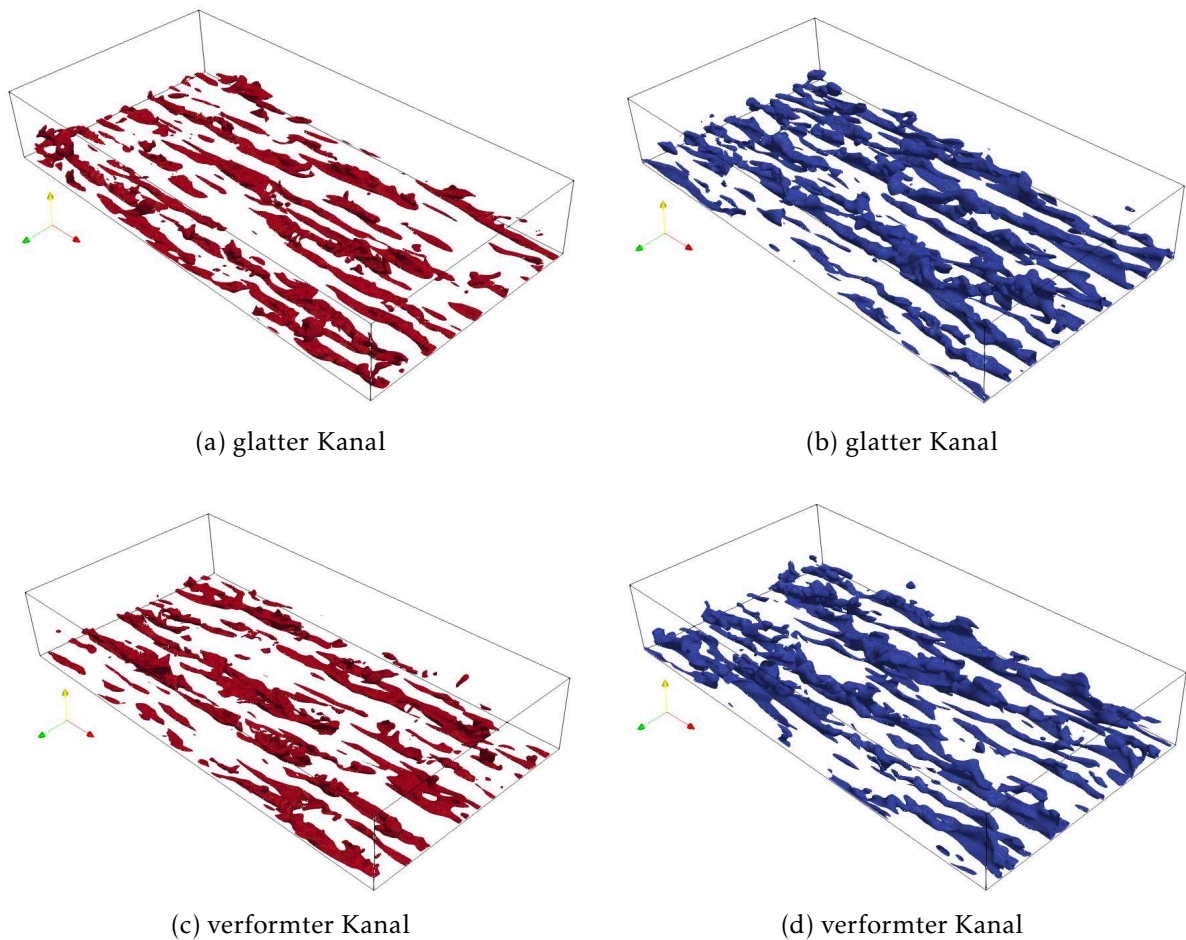


Abb. 6.24: Isokonturflächen der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung u'_x mit *high-speed streaks* ($u'_x = 0,15$) in rot und *low-speed streaks* ($u'_x = -0,15$) in blau für die Mittelung über $T = 12t^+$ im glatten und im verformten Kanal.

STATISTISCHE MITTELUNG ÜBER $T = 65t^+$

Im nächsten Schritt wird untersucht, wie sich das Optimierungsergebnis verändert, wenn über ein längeres Zeitintervall statistisch gemittelt wird. Da die statistische Mittelung über $T = 12t^+$ im vorigen Kapitel nicht konvergiert, besteht die Möglichkeit, dass die erreichte Reduzierung der Wandschubspannung bei längerer Mittelung nicht reproduziert werden kann. Um dies auszuschließen, wird die obige Untersuchung für ein längeres Mittelungsintervall $T = 65t^+$ wiederholt. Diese Untersuchung

führt zu Turbulenzintensitäten, deren Werte sich wenig von jenen im glatten Kanal unterscheiden. Trotzdem ist der RMS-Wert in Strömungsrichtung des verformten Kanals leicht erhöht, wie die Vergrößerung in Abbildung 6.25 sichtbar macht.

Bei der Betrachtung der Schubspannungen fällt auf, dass die viskosen Spannungen an der Wand nach der Mittelung über $T = 65t^+$ 0,9% geringer ausfallen im Vergleich zu 1,6% nach $T = 12t^+$. Auch die Reduzierung des Wertes der Reynoldsspannungen um 2,1% fällt geringer aus als die 6,2%, die aus der Mittelung über $T = 12t^+$ resultiert. Die Reynoldsspannungen des glatten Kanals sind zum Vergleich in Abbildung 6.26 gezeigt.

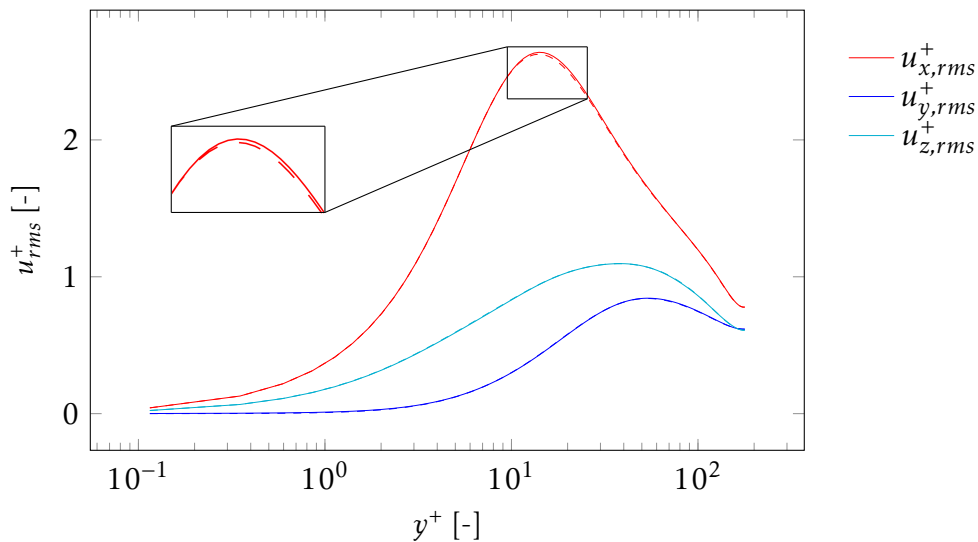


Abb. 6.25: RMS-Wert der mittleren Geschwindigkeit in allen drei Raumrichtungen für den verformten Kanal (durchgehende Linie), verglichen mit dem Ergebnis des glatten Kanals (gestrichelte Linie).

6 Adjungierte DNS einer Kanalströmung

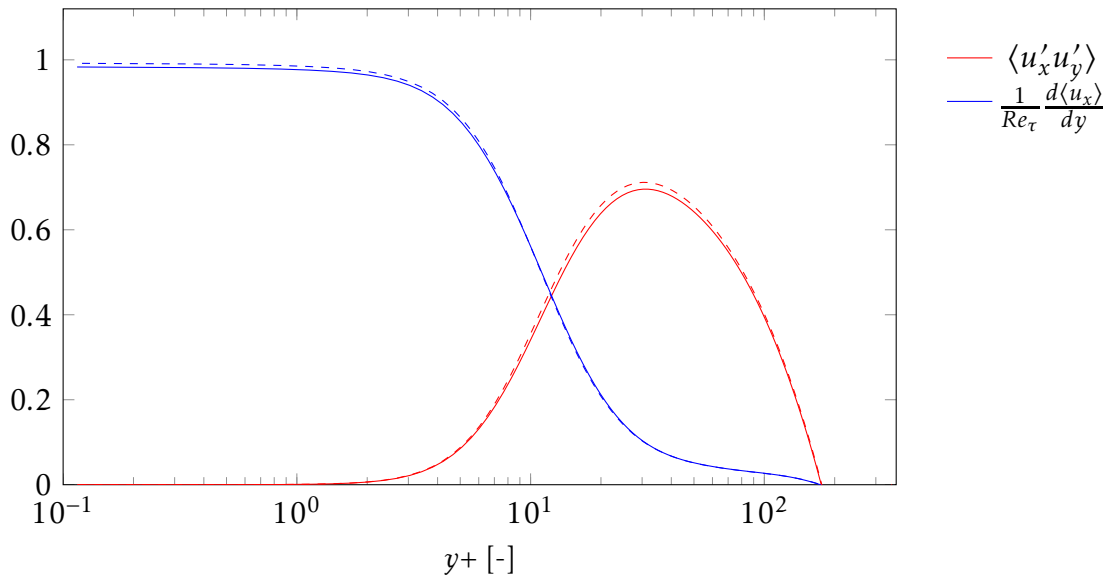
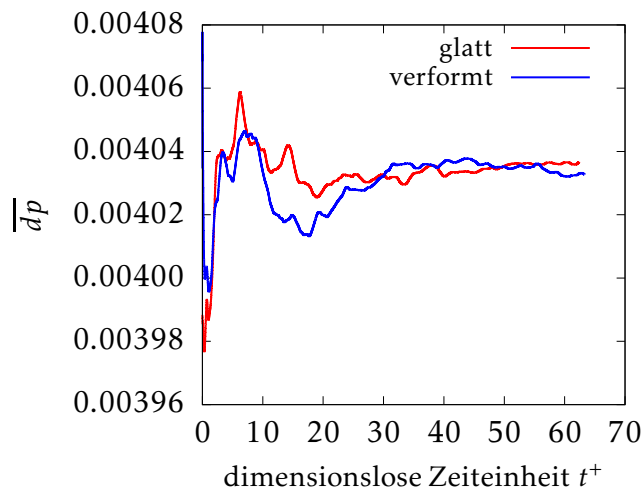


Abb. 6.26: Viskose Spannung (blau) und Reynoldsspannung (rot) über dem Wandabstand, die gestrichelten Linien entsprechen den Werten aus dem glatten Kanal, die durchgehenden Linien zeigen die Werte aus dem verformten Kanal.

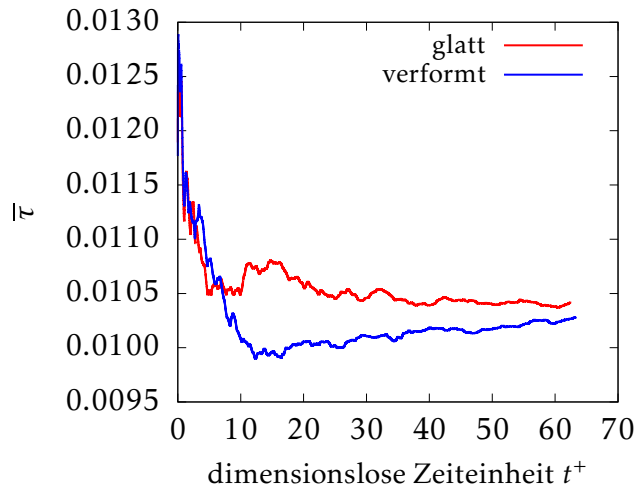
Der mittlere Druckgradient und die resultierende Wandschubspannung werden ebenfalls kleiner. Diese Abnahme fällt allerdings mit zunehmender Mittelungsdauer geringer aus. Der Verlauf beider Größen ist in Abbildung 6.27 gezeigt. Allgemein lässt sich für alle betrachteten Größen feststellen, dass der Einfluss der Verformung mit zunehmender Mittelungsdauer geringer wird. Daher bleibt festzuhalten, dass die größte Abnahme der Wandschubspannung für das von Bewley *et al.* [3] postulierte und entsprechend oben gewählte Mittelungsintervall $T = 12t^+$ erzielt wird. Betrachtet man den zeitlichen Mittelwert über einen größeren Zeitraum, bleibt der Effekt in abgeschwächter Form erhalten.

Abschließend lässt sich festhalten, dass das gewählte Optimierungsverfahren sehr gut geeignet ist, um die Strömungsstrukturen einer voll entwickelten turbulenten Kanalströmung in einem gewählten Zeitfenster zu beeinflussen. Die Korrelation zwischen Zielfunktion und Sensitivitäten zeigt, dass das vorgestellte Optimierungsverfahren in der Lage ist, den Gradienten einer im Volumen definierten Zielfunktion auf die Wand zu projizieren. Somit kann das in Kapitel 1.3 formulierte Ziel der Anwendung auf instationäre Strömungsprobleme für ein gewähltes Mittelungsintervall als erfüllt betrachtet werden. Auch die geforderte Reduzierung der Wandschubspannung um 7% wurde erreicht.

In weiterführenden Arbeiten könnte eine Verbesserung des Optimierungsverfahrens durch eine Filterung der Sensitivitäten nach *Ejections* bzw. *Sweeps* erreicht werden. Es würde also nur dann zu einer Verformung kommen, wenn lokal auch tatsächlich ein wandnormaler Fluidtransport stattfindet. Zusätzlich kann die Effizienz anderer Zielfunktionen untersucht werden, um so eine dauerhafte Reduzierung der Wandschubspannung über das gewählte Mittelungsintervall hinaus zu erreichen. Vorstellbar wäre auch der Einsatz einer adjungierten Formoptimierung zur aktiven Strömungskontrolle. Dabei wäre die Form der Kanalwände in der Zeit veränderlich und könnte in kleineren Intervallen T neu bestimmt und angepasst werden, um für dieses Intervall die Zielfunktion effizient zu reduzieren.



(a) resultierender Druckgradient



(b) Wandschubspannung

Abb. 6.27: Gleitender Mittelwert der Zeitreihe des Druckgradienten sowie der Wandschubspannung.

Zusammenfassung

Das Thema der vorliegenden Dissertation ist die adjungierte Formoptimierung in der Anwendung auf komplexe Geometrien sowie stationärer und instationärer Problemstellungen. Für den stationären Fall wird die Strömungssituation in einem komplexen Luftauslass eines Passagierflugzeuges mit industrieller Relevanz untersucht, wobei das Hauptziel darin besteht, eine zuverlässige Prozesskette für die gesamte Formoptimierung zu implementieren. Als Grundlage für die Optimierung von Kabinenluftauslässen dienen Strömungsfelder, die durch Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen berechnet werden. Dagegen wird für die Optimierung eines instationären Strömungsproblems eine Direkte Numerische Simulation der ebenen Kanalströmung durchgeführt, um den strömungsinduzierten Widerstand durch gezielte Verformung der Wände zu reduzieren.

Für die Formoptimierung der Luftauslassgeometrie wird eine Prozesskette implementiert, deren integrale Bestandteile die Vorhersage der Strömungsfelder, die Sensitivitätsanalyse und die Verformung des verwendeten Diskretisierungsgitters sind. Dazu werden zwei Zielfunktionen vorgestellt, mit denen die implementierte Prozesskette durchlaufen wird. Die zentrale Zielstellung, der Aufbau einer Prozesskette, die die vorher genannten Punkte kombiniert, kann erfolgreich umgesetzt werden. Dabei kann gezeigt werden, dass für die Zielfunktion der *homogenen Geschwindigkeit* bereits im ersten Schritt eine Reduzierung von ca. 6% erreicht werden kann. Bei iterativem Durchlaufen der Prozesskette kann die Inhomogenität insgesamt um ca. 15% reduziert werden. Für die Zielfunktion *dissipierte Leistung* liegen die Verbesserungen bei ca. 19%. Die adjungierte Formoptimierung in Form der vorgestellten Prozesskette bietet somit die Möglichkeit, durch Entwicklungsingenieure mit Fachwissen und Erfahrung ausgelegte Belüftungssysteme nochmals signifikant zu verbessern.

7 Zusammenfassung

Da in der Praxis eine Optimierung hinsichtlich einer Zielfunktion einen Sonderfall darstellt, wird die Mehrfachoptimierung, also die gleichzeitige Optimierung mehrerer Zielfunktionen, untersucht. Es wird die Methode der gewichteten Summe verwendet, um eine Referenzlösung zu berechnen. Mit der Methode des gewichteten Produkts kann keine Verbesserung erzielt werden. Es ist jedoch möglich, mit Hilfe der vorgestellten Prozesskette eine Pareto-Front des Systems aus Zielfunktionen zu präsentieren.

Das vom Autor entwickelte Verfahren der Superposition von Sensitivitätsfeldern kombiniert nicht die Zielfunktionen, sondern Sensitivitätsfelder, die bei der Optimierung einer einzelnen Zielfunktion entstehen. Für die Kombination wird erneut die gewichtete Summe verwendet, um normierte Sensitivitätswerte zu superpositionieren. Dadurch kann die Dominanz einer Zielfunktion gegenüber der anderen eliminiert werden. Die Variation der Wichtungsfaktoren für die Sensitivitätswerte erfolgt mit zwei verschiedenen Verfahren, dabei können im Vergleich zur gewichteten Summe folgende Ergebnisse erzielt werden:

genetischer Algorithmus: Optimierungsergebnis um ca. 72% verbessert, bei vergleichbarer Rechenzeit

ϵ -Schranken Methode: Optimierungsergebnis um ca. 39% verbessert, bei Einsparung von ca 50% Rechenzeit

Pro Optimierungsdurchlauf kann eine Einsparung der notwendigen Rechenzeit um bis zu 85% erzielt werden.

Für den instationären Fall wird die adjungierte Formoptimierung zur passiven Strömungskontrolle eingesetzt, um durch eine veränderte Kanalwand eine Reduktion der Wandschubspannung zu erreichen. Da für diese Untersuchungen die turbulenten Strukturen in ausreichender Auflösung vorliegen müssen, kommt zur Vorhersage der grundlegenden Strömungsfelder die Direkte Numerische Simulation zum Einsatz. Als Strömungsfall wird die ebene Kanalströmung betrachtet, da zum Einen Referenzlösungen für diese verfügbar sind und zum Anderen der zeitliche Aufwand durch die hochauflösenden Simulationen überschaubar bleibt. Die stationäre Formoptimierung wird auf ein instationäres Strömungsproblem angewendet, indem die Optimierung über definierte Zeiträume stattfindet. Dazu werden die

instantanen Felder gemittelt und als zeitlich invariant betrachtet. Anschließend wird die vorgestellte Prozesskette mit adjungierter Simulation, Sensitivitätsanalyse und Gitterverformung durchlaufen. Da es sich bei der Kanalströmung um ein periodisches Problem handelt, wird für die Netzdeformation eine ebenfalls periodische Interpolation umgesetzt. Somit kann gezeigt werden, dass die vorgestellte Prozesskette auch auf das Problem der Kanalströmung anwendbar ist.

Als Zielfunktion wird eine lokale Reibungsleistung im Volumen nahe der Wand definiert. Die Ergebnisse zeigen, dass das vorgestellte Verfahren in der Lage ist, relevante Strukturen in Sensitivitätswerte an der Kanalwand zu übertragen. Die Analogie des Ein- und Ausblasens kann somit durch eine Formänderung der Wände nachempfunden werden.

Durch die anschließende Verformung kann die Wandschubspannung über dem Mittelungsintervall an der oberen Kanalwand um ca. 13% reduziert werden. Somit kann gezeigt werden, dass die adjungierte Formoptimierung für eine passive Strömungskontrolle geeignet ist, um die Wandschubspannung in einem gewählten Zeitfenster zu verringern. Zusätzlich kann eine dauerhafte Reduzierung um ca. 4% nachgewiesen werden.

A

Herleitung der adjungierten Gleichungen und Randbedingungen

Das Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\text{minimiere } J = J(v_i, p), \\ &\text{sodass } \mathcal{R}(v_i, p) = 0 \text{ gilt} \end{aligned} \tag{A.1}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i &:= \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_{eff} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ Q &:= -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \end{aligned} \tag{A.2}$$

wird als Lagrange-Funktion umformuliert

$$L := J + \int_{\Omega} [u_i \mathcal{R}_i + qQ] d\Omega \tag{A.3}$$

Ziel ist es nun, ein Extremum von L zu finden. Eine Methode, um den Extremwert eines Funktionals zu finden, ist die Variationsrechnung. Handelt es sich um ein Variationsproblem mit Nebenbedingungen, kann die Methode der Lagrange Multiplikatoren angewendet werden. Die totale Variation von L lautet

$$\delta L = \delta_{\beta} L + \delta_{v_i} L + \delta_p L, \tag{A.4}$$

wobei β für beliebige Designvariablen steht. Da sich bei der Änderung einer Designvariable auch die Geschwindigkeits- und Druckverteilung ändern, ist bei der Va-

A Herleitung der adjungierten Gleichungen

riation einer Designvariable auch immer eine neue Lösung der Nebenbedingung nötig. Um diesen Aufwand zu reduzieren, wird ein adjungiertes Verfahren eingesetzt, dessen zenrales Element ist, die Lagrange-Multiplikatoren so zu wählen, dass die Forderung

$$\delta_{v_i}L + \delta_pL = 0 \quad (\text{A.5})$$

erfüllt ist. Damit ist die totale Variation von L nur noch von der Variation der Designvariablen abhängig und es gilt $\delta L = \delta_p L$. Auf die Designvariablen wird später noch genauer eingegangen.

Wenn die Lagrange-Multiplikatoren so gewählt werden, dass (A.5) gilt, ist nur noch eine Simulation zur Lösung der Nebenbedingung und eine Simulation zur Bestimmung der Lagrange-Multiplikatoren nötig. Entsprechend der Lagrange-Funktion, ergibt sich die Forderung $\delta_{v_i}L + \delta_pL$ zu

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_{v_i}J + \delta_pJ \\ &+ \int_{\Omega} \delta_{v_i} [u_i \mathcal{R}_i + qQ] d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \delta_p [u_i \mathcal{R}_i + qQ] d\Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Im ersten Schritt wird nun die Zielfunktion J in einen Volumenanteil, der für das Volumen Ω gilt, und einen Randanteil, der am Rand $\Gamma = \partial\Omega$ von Ω gilt, aufgespaltet. Somit gilt $J = J_{\Omega} + J_{\Gamma}$. In integraler Formulierung ergibt sich

$$J = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \right] d\Gamma \quad (\text{A.7})$$

Im nächsten Schritt wird die Variation Term für Term ausgeführt:

$$\begin{aligned}
\delta_{v_i} J &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} \delta v_i \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} \delta v_i \right] d\Gamma \\
\delta_p J &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \right] d\Gamma \\
\delta_{v_i} R_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_i v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \delta v_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_{eff} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] \\
\delta_{v_i} Q &= - \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_j} \\
\delta_p R_i &= \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \\
\delta_p Q &= 0
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Einsetzen in (A.6) ergibt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} \delta v_i \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} \delta v_i \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \right] d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_i v_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \delta v_j) \right] d\Omega \\
&- \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_{eff} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \right] d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} q \left[- \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_j} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \right] d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.9}$$

A Herleitung der adjungierten Gleichungen

Einzelbetrachtung der Terme

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} \delta v_i \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} \delta v_i \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \right] d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \right] d\Gamma + \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_i v_j) \right] d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \delta v_j) \right] d\Omega - \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_{eff} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \right] d\Omega - \int_{\Omega} q \left[\frac{\partial \delta v_j}{\partial x_j} \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Um aus (A.10) nun die adjungierten Gleichungen sowie deren Randbedingungen abzuleiten, muss der Ableitungsoperator in den einzelnen Termen auf die jeweiligen Glieder angewendet werden. Das kann durch eine partielle Integration durchgeführt werden. Anschließend kann durch die Gauß'sche Integraltransformation aus einem der Volumenintegrale ein Oberflächenintegral abgeleitet werden. Es ergibt sich für die einzelnen Terme:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_i v_j) \right] d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \delta v_i v_j) - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\delta v_i v_j) \right] d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \delta v_i v_j) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\delta v_i v_j) \right] d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} [n_j u_i \delta v_i v_j] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\delta v_i v_j) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \delta v_j) \right] d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_i \delta v_j) - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (v_i \delta v_j) \right] d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_i \delta v_j) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} (v_i \delta v_j) \right] d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} [n_j u_i v_i \delta v_j] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} (v_i \delta v_j) \right] d\Omega
\end{aligned}$$

Indextausch: (A.12)

$$= \int_{\Gamma} [n_i u_j v_j \delta v_i] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} (v_j \delta v_i) \right] d\Omega \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_{eff} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] d\Omega \\
\rightarrow & - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \\
= & - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] d\Omega \\
& + v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Omega \\
= & - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] d\Omega \\
& + v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Omega + v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right] d\Omega
\end{aligned}$$

(A.14)

A Herleitung der adjungierten Gleichungen

Indextausch:

$$\begin{aligned}
&= -v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] d\Omega \\
&\quad + v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Omega + v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Omega \\
&= -v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right] d\Omega \\
&\quad + v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta v_i \right) \right] d\Omega - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \delta v_i \right] d\Omega \\
&\quad + v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta v_i \right) \right] d\Omega - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \delta v_i \right] d\Omega \\
&= -v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Gamma \\
&\quad + v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta v_i \right] d\Gamma - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \delta v_i \right] d\Omega \\
&\quad + v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \delta v_i \right] d\Gamma - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \delta v_i \right] d\Omega \\
&= -v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Gamma + v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta v_i \right] d\Gamma \\
&\quad - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta v_i \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \right] d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} u_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta p) \right] d\Omega \\
& \rightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \delta p) - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} (\delta p) \right] d\Omega \\
& = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \delta p) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} (\delta p) \right] d\Omega \\
& = \int_{\Gamma} [n_i u_i \delta p] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} (\delta p) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} q \left[\frac{\partial \delta v_j}{\partial x_j} \right] d\Omega \rightarrow \int_{\Omega} q \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_j) \right] d\Omega \\
& \rightarrow - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (q \delta v_j) - \frac{\partial q}{\partial x_j} (\delta v_j) \right] d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (q \delta v_j) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial q}{\partial x_j} (\delta v_j) \right] d\Omega
\end{aligned}$$

Indextausch:

$$\begin{aligned}
& = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (q \delta v_i) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial q}{\partial x_i} (\delta v_i) \right] d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma} [n_i q \delta v_i] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial q}{\partial x_i} (\delta v_i) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{A.17}$$

A Herleitung der adjungierten Gleichungen

Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} \delta v_i \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} \delta v_i \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \right] d\Omega \\
& + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} [n_j u_i \delta v_i v_j] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} (\delta v_i v_j) \right] d\Omega \\
& + \int_{\Gamma} [n_i u_j v_j \delta v_i] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} (v_j \delta v_i) \right] d\Omega \\
& - v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Gamma \\
& + v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta v_i \right] d\Gamma \\
& - v_{eff} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \delta v_i \right] d\Omega \\
& + \int_{\Gamma} [n_i u_i \delta p] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_i} (\delta p) \right] d\Omega \\
& - \int_{\Gamma} [n_i q \delta v_i] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial q}{\partial x_i} (\delta v_i) \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Gamma} \left[n_i u_i + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \right] \delta p \, d\Gamma + \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \right] \delta p \, d\Omega \\
&+ \int_{\Gamma} \left[n_j u_i v_j + n_i u_j v_j + v_{eff} n_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right. \\
&\quad \left. - n_i q + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} \right] \delta v_i \, d\Gamma \\
&- v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Gamma \\
&+ \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j \right. \\
&\quad \left. - v_{eff} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} \right] \delta v_i \, d\Omega \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Gleichung (A.19) muss 0 ergeben. Diese Forderung ist erfüllt, wenn jeder Term für sich selbst zu 0 wird. Aus (A.19) können daher aus den Volumentermen (Ω) die Gleichung und aus den Randtermen (Γ) die Randbedingungen abgeleitet werden.

Volumenterme:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j \right. \\
&\quad \left. - v_{eff} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} \right] \delta v_i \, d\Omega \\
&= -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} v_j - v_{eff} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} \\
0 &= -v_{eff} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - v_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial v_i} \tag{A.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \right] \delta p \, d\Omega \\
\frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \tag{A.21}
\end{aligned}$$

A Herleitung der adjungierten Gleichungen

Randbedingungen:

$$0 = \int_{\Gamma} \left[n_i u_i + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \right] \delta p \, d\Gamma \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Gamma} \left[n_j u_i v_j + n_i u_j v_j \right. \\ & + v_{eff} n_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + n_i q + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} \left. \right] \delta v_i \, d\Gamma \\ & - v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Der vierte Term im ersten Integral von (A.23) und das zweite Integral können folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j \delta v_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - n_j u_i \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \right] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j \delta v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + n_j \delta v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - n_j u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} - n_j u_i \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j \delta v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - n_j u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Gamma \\
&+ \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j \delta v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - n_j u_i \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j \delta v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - n_j u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j u_i \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} - n_j \delta v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j \delta v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - n_j u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma} v_{eff} \left[u_n \frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_j - \delta v_n \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right] d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j \delta v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - n_j u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial x_i} v_{eff} \left[u_n \delta v_j - \delta v_n u_j \right] d\Gamma \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Der zweite Term wird zu 0, da $\frac{\partial}{\partial x_i} v_{eff} = 0$. Somit kann der erste Term wieder in

$$= \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j \delta v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] d\Gamma - \int_{\Gamma} v_{eff} \left[n_j u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Gamma \tag{A.25}$$

A Herleitung der adjungierten Gleichungen

aufgespaltet werden und in (A.22) eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$0 = \int_{\Gamma} \left[n_i u_i + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \right] \delta p \, d\Gamma \quad (\text{A.26})$$

$$0 = \int_{\Gamma} \left[n_j u_i v_j + n_i u_j v_j + v_{eff} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + n_i q + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} \right] \delta v_i \, d\Gamma$$

$$- v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Gamma \quad (\text{A.27})$$

Aus diesen Integralen lassen sich nun die Randbedingungen ableiten.

Im ersten Schritt werden die Randbedingungen für den Einlass und die Wand bestimmt. Da hier die Geschwindigkeit einen festen Wert zugewiesen bekommt (no slip wall und konstanter Wert am Einlass), ist die Variation der Geschwindigkeit $\delta v_i = 0$ und der erste Term in (A.27) verschwindet. Es verbleibt:

$$0 = \int_{\Gamma} \left[n_i u_i + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \right] \delta p \, d\Gamma \quad (\text{A.28})$$

$$0 = -v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j u_i \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \right] d\Gamma \quad (\text{A.29})$$

Durch eine Aufspaltung des Gradienten der Geschwindigkeitsvariation in einen Normalanteil und einen Anteil in der Ebene $v_i = v_{n_i} + v_{t_i} = n_i v_n + v_{t_i}$ ergibt sich:

$$\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_{t_i} = n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_n + \frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_{t_i} \quad (\text{A.30})$$

Da $\delta v_{t_i} = 0$ entlang von Wand und Einlass gilt, muss auch

$$\left(n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \delta v_n = 0 \quad (\text{A.31})$$

gelten. Durch die bereits erwähnte Aufteilung in Normal- und Tangentialanteil ergibt sich der Zusammenhang

$$\left(n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \delta v_i \right) = \left(n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \delta v_{t_i} \quad (\text{A.32})$$

Damit vereinfachen sich (A.28) und (A.29) zu :

$$0 = \int_{\Gamma} \left[n_i u_i + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \right] \delta p \, d\Gamma \quad (\text{A.33})$$

$$0 = -v_{eff} \int_{\Gamma} \left[n_j u_{t_i} \frac{\partial \delta v_{t_i}}{\partial x_j} \right] d\Gamma \quad (\text{A.34})$$

Als Randbedingungen für Wand und Einlass ergeben sich daher:

$$u_{t_i} = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$u_n = -\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \quad (\text{A.36})$$

Die Herleitung beinhaltet keine Bedingung für den adjungierten Druck. Da Letzterer auf gleiche Weise in adjungierten Navier-Stokes-Gleichungen eingeht, wie der primale Druck in die primale Gleichung, wird an den Wänden und dem Einlass ebenfalls eine Neumann-Randbedingung

$$n_i \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{A.37})$$

vorgegeben. Somit sollte das Problem weiterhin korrekt gestellt sein.

Nun werden die Randbedingungen für den Auslass ermittelt. Die primalen Größen erhalten hier eine Neumann-Randbedingung (v_i) und eine Dirichlet-Randbedingung (p) mit den Werten 0.

$$n_j \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$p = 0 \quad (\text{A.39})$$

Damit ist (A.26) erfüllt und in (A.27) verschwindet das zweite Integral. Die beiden adjungierten Größen u_i und q müssen daher

$$0 = \int_{\Gamma} \left[n_j u_i v_j + n_i u_j v_j + v_{eff} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + n_i q + \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial v_i} \right] \delta v_i \, d\Gamma \quad (\text{A.40})$$

A Herleitung der adjungierten Gleichungen

erfüllen. Um die Randbedingungen abzuleiten werden auch hier die Terme im den Normal- und den Tangentialanteil zerlegt. Es ergibt sich:

$$\text{Normal :} \quad (A.41)$$

$$u_i v_i + u_n v_n + v_{eff} \frac{\partial}{\partial x_i} n_i u_n - q + \frac{\partial J_\Gamma}{\partial v_n} = 0 \quad (A.42)$$

$$\text{Tangential :} \quad (A.43)$$

$$v_n u_{t_i} + v_{eff} n_j \frac{\partial u_{t_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial J_\Omega}{\partial v_{t_i}} = 0 \quad (A.44)$$

Aus (A.41) ergibt sich direkt die Randbedingung für q , aus (A.44) für u am Auslass:

$$q = u_i v_i + u_n v_n + v_{eff} \frac{\partial}{\partial x_i} n_i u_n + \frac{\partial J_\Gamma}{\partial v_n} \quad (A.45)$$

$$0 = v_n u_{t_i} + v_{eff} n_j \frac{\partial u_{t_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial J_\Omega}{\partial v_{t_i}} \quad (A.46)$$

Literaturverzeichnis

- [1] B. Adams, L. Bauman, W. Bohnhoff, K. Dalbey, M. Ebeida, J. Eddy, M. Eldred, P. Hough, K. Hu, J. Jakeman, L. Swiler, and D. Vigil. Dakota, a multilevel parallel object-oriented framework for design optimization, parameter estimation, uncertainty quantification, and sensitivity analysis: Version 5.4 user's manual. Sandia Technical Report SAND2010-2183, December 2009. updated April 2013.
- [2] J. T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. AIAA journal, 28(8):1381–1388, 1990.
- [3] T. Bewley and P. Moin. Optimal control of turbulent channel flows. Active Control of Vibration and Noise, 75:221–227, 1994.
- [4] T. R. Bewley, P. Moin, and R. Temam. Dns-based predictive control of turbulence: an optimal benchmark for feedback algorithms. Journal of Fluid Mechanics, 447:179–225, 2001.
- [5] O. Beyer, H. Hackel, V. Pieper, and T. Jürgen. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, volume 8. Vieweg+Teubner Verlag, 1999.
- [6] F. J. Blom. Considerations on the spring analogy. International journal for numerical methods in fluids, 32(6):647–668, 2000.
- [7] O. Bolza. Vorlesungen über Variationsrechnung. BoD–Books on Demand, 2013.
- [8] J. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes, volume 23. Memoires Acad. des Sciences, 1872.
- [9] P. W. Bridgman. Dimensional analysis. Yale University Press, 1922.

- [10] H. P. Buckley, B. Y. Zhou, and D. W. Zingg. Airfoil optimization using practical aerodynamic design requirements. Journal of Aircraft, 47(5):1707–1719, 2010.
- [11] M. D. Buhmann. Radial basis functions. Acta Numerica 2000, 9:1–38, 2000.
- [12] R. L. Burden and J. D. Faires. 2.1 the bisection algorithm. Numerical Analysis. Prindle, Weber & Schmidt, Boston, MA., pp. x, 676, 1985.
- [13] M. Caramia and P. Dell’Olmo. Multi-objective optimization. In Multi-objective management in freight logistics: Increasing capacity, service level and safety with optimization algorithms, pages 11 – 36. Springer, 2008.
- [14] H. Choi, P. Moin, and J. Kim. Direct numerical simulation of turbulent flow over riblets. Journal of fluid mechanics, 255:503–539, 1993.
- [15] H. Choi, P. Moin, and J. Kim. Active turbulence control for drag reduction in wall-bounded flows. Journal of Fluid Mechanics, 262:75–110, 1994.
- [16] A. J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. Mathematics of computation, 22(104):745–762, 1968.
- [17] E. C. Cyr, J. Shadid, and T. Wildey. Towards efficient backward-in-time adjoint computations using data compression techniques. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 288:24–44, 2015.
- [18] A. De Boer, M. Van der Schoot, and H. Bijl. Mesh deformation based on radial basis function interpolation. Computers & structures, 85(11):784–795, 2007.
- [19] E. de Villiers and C. Othmer. Multi-objective adjoint optimization of intake port geometry. Technical report, SAE Technical Paper, 2012.
- [20] K. Deb. Multi-objective optimization. In Search methodologies, pages 403–449. Springer, 2014.
- [21] K. Dems and Z. Mroz. Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis—ii: Structure shape variation. International Journal of Solids and Structures, 20(6):527–552, 1984.
- [22] G. Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt. Scart high performance cluster. scart.dlr.de/site/index.htm, 2016. Accessed: 2016.

- [23] H. Dubbel. DUBBEL: Taschenbuch für den Maschinenbau. Springer-Verlag, 2013.
- [24] R. Dwight and J. Brezillon. Effect of various approximations of the discrete adjoint on gradient-based optimization. In Proceedings of the 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno NV, AIAA-2006-0690, 2006.
- [25] T. D. Economon, F. Palacios, and J. J. Alonso. Unsteady continuous adjoint approach for aerodynamic design on dynamic meshes. AIAA Journal, 53(9):2437–2453, 2015.
- [26] M. Ehrgott. Multicriteria optimization, volume 491. Springer Science & Business Media, 2013.
- [27] G. K. El Khoury, P. Schlatter, A. Noorani, P. F. Fischer, G. Brethouwer, and A. V. Johansson. Direct numerical simulation of turbulent pipe flow at moderately high reynolds numbers. Flow, turbulence and combustion, 91(3):475–495, 2013.
- [28] J. Elliott and J. Peraire. Practical three-dimensional aerodynamic design and optimization using unstructured meshes. AIAA journal, 35(9):1479–1485, 1997.
- [29] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. Computer methods in applied mechanics and engineering, 163(1):231–245, 1998.
- [30] D. Feldmann and C. Wagner. Direct numerical simulation of fully developed turbulent and oscillatory pipe flows at. Journal of Turbulence, (13):N32, 2012.
- [31] J. H. Ferziger and M. Peric. Numerische Strömungsmechanik. Springer Science & Business, 2008.
- [32] R. Fletcher. Practical methods of optimization. John Wiley & Sons, 2013.
- [33] P. Funk. Variationsrechnung und ihre anwendung in physik und technik. 1962.
- [34] U. Gabbert. Mathematische und numerische methoden der mechanik I. Vorlesungsskript, 10 2003. Lehrstuhl für Numerische Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.

- [35] I. M. Gelfand, R. A. Silverman, et al. Calculus of variations. Courier Corporation, 2000.
- [36] M. B. Giles and N. A. Pierce. Adjoint equations in cfd: duality, boundary conditions and solution behaviour. AIAA paper, 97:1850, 1997.
- [37] M. B. Giles and N. A. Pierce. An introduction to the adjoint approach to design. Flow, Turbulence and Combustion, 65(3-4):393–415, 2000.
- [38] A. Griewank and A. Walther. Algorithm 799: revolve: an implementation of checkpointing for the reverse or adjoint mode of computational differentiation. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 26(1):19–45, 2000.
- [39] H. Guo, V. Borodulin, Y. Kachanov, C. Pan, J. Wang, Q. Lian, and S. Wang. Nature of sweep and ejection events in transitional and turbulent boundary layers. Journal of turbulence, (11):N34, 2010.
- [40] L. H. Hellström, A. Sinha, and A. J. Smits. Visualizing the very-large-scale motions in turbulent pipe flow. Physics of Fluids, 23(1):011703, 2011.
- [41] H. Herwig. Strömungsmechanik AZ: eine systematische Einordnung von Begriffen und Konzepten der Strömungsmechanik. Vieweg+ Teubner, 2004.
- [42] M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems, volume 49. NBS, 1952.
- [43] R. M. Hicks, E. M. Murman, and G. N. Vanderplaats. An assessment of airfoil design by numerical optimization. 1974.
- [44] A. Jameson. Aerodynamic design via control theory. Journal of scientific computing, 3(3):233–260, 1988.
- [45] A. Jameson. Optimum aerodynamic design using cfd and control theory. AIAA paper, 1729:124–131, 1995.
- [46] A. Jameson, L. Martinelli, and N. Pierce. Optimum aerodynamic design using the navier-stokes equations. Theoretical and computational fluid dynamics, 10(1-4):213–237, 1998.
- [47] F. Jarre and J. Stoer. Optimierung. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

- [48] H. Jasak. Error analysis and estimation for finite volume method with applications to fluid flow. 1996.
- [49] H. John. Holland, adaptation in natural and artificial systems, 1992.
- [50] M. Keck. Experimentelle untersuchungen zur Wirksamkeit von Riblets in verzögerten Grenzschichten. PhD thesis, Verlag nicht ermittelbar, 2008.
- [51] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. Journal of Fluid Mechanics, 177:133–166, 1987.
- [52] J.-S. Kim, J. Hwang, M. Yoon, J. Ahn, and H. J. Sung. Influence of a large-eddy breakup device on the frictional drag in a turbulent boundary layer. Physics of Fluids, 29(6):065103, 2017.
- [53] T. G. Kolda, R. M. Lewis, and V. Torczon. Optimization by direct search: New perspectives on some classical and modern methods. SIAM review, 45(3):385–482, 2003.
- [54] A. Kolmogorov. Die lokale struktur der turbulenz in einer inkompressiblen zähen flüssigkeit bei sehr großen reynoldsschen zahlen. Compt. Rend. Acad. Sc. USSR, 30(4), 1958.
- [55] M. Konstantinov, W. Lautenschlager, and C. Wagner. Projektgruppe/fachkreis: Numerische simulation numerische simulation der strömung und des thermischen komforts in der flugzeugkabine.
- [56] J. L. Lagrange, J. B. J. Delambre, L. Lalanne, J. A. Serret, and G. Darboux. Œuvres de Lagrange: Mécanique analytique. 4. éd, volume 11. Gauthier-Villars, 1888.
- [57] L. Landau and E. Lifshitz. Hydrodynamik, lehrbuch der theoretischen physik, volume vi, 1991.
- [58] B. E. Launder and D. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. Computer methods in applied mechanics and engineering, 3(2):269–289, 1974.
- [59] C. Lee, J. Kim, and H. Choi. Suboptimal control of turbulent channel flow for drag reduction. Journal of Fluid Mechanics, 358:245–258, 1998.

- [60] A. Lincke, G. Lauenroth, T. Rung, and C. Wagner. Fluid-dynamic optimization of the cabin air outlet do728-kla with adjoint sensitivity analysis. In New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics IX, pages 75–82. Springer, 2014.
- [61] J. L. Lions. Optimal control of systems governed by partial differential equations, volume 170. Springer Verlag, 1971.
- [62] R. Löhner, O. Soto, and C. Yang. An adjoint-based design methodology for cfd optimization problems. AIAA-030299, 2003.
- [63] A. Lozano-Durán, O. Flores, and J. Jiménez. The three-dimensional structure of momentum transfer in turbulent channels. Journal of Fluid Mechanics, 694:100–130, 2012.
- [64] B. Mantel, J. Periaux, M. Sefrioui, B. Stoufflet, J. Desideri, S. Lanteri, and N. Marco. Evolutionary computational methods for complex design in aerodynamics. In Proc. AIAA Aerospace Sciences Conference, AIAA, pages 98–0222, 1998.
- [65] R. T. Marler and J. S. Arora. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. Structural and multidisciplinary optimization, 26(6):369–395, 2004.
- [66] R. T. Marler and J. S. Arora. The weighted sum method for multi-objective optimization: new insights. Structural and multidisciplinary optimization, 41(6):853–862, 2010.
- [67] F. R. Menter. Zonal two equation k-turbulence models for aerodynamic flows. Proceedings of the 24th Fluid Dynamics Conference, Orlando/Florida, AIAA paper 93-2906:1993, 1993.
- [68] Z. Michalewicz and D. B. Fogel. How to solve it: modern heuristics. Springer Science & Business Media, 2013.
- [69] R. J. Moffat and W. M. Kays. The turbulent boundary layer on a porous plate: experimental heat transfer with uniform blowing and suction. International Journal of Heat and Mass Transfer, 11(10):1547IN171551–15501566, 1968.

- [70] B. Mohammadi, R. Bharadwaj, J. Molho, and J. Santiago. Incomplete sensitivities in design and control of fluidic channels. Annual Research Briefs - 2001, Center for turbulence research, Stanford University, page 249, 2001.
- [71] B. Mohammadi, O. Pironneau, B. Mohammadi, and O. Pironneau. Applied shape optimization for fluids, volume 28. Oxford University Press Oxford, 2001.
- [72] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re = 590$. Phys. Fluids, 11(4):943–945, 1999.
- [73] R. H. Myers, D. C. Montgomery, G. G. Vining, C. M. Borrer, and S. M. Kowalski. Response surface methodology: a retrospective and literature survey. Journal of quality technology, 36(1):53, 2004.
- [74] S. Nadarajah and A. Jameson. A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization. AIAA paper, 667:2000, 2000.
- [75] S. Nadarajah and A. Jameson. Studies of the continuous and discrete adjoint approaches to viscous automatic aerodynamic shape optimization. AIAA paper, 2530:2001, 2001.
- [76] J. A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. The computer journal, 7(4):308–313, 1965.
- [77] M. Nemec, D. W. Zingg, and T. H. Pulliam. Multipoint and multi-objective aerodynamic shape optimization. AIAA journal, 42(6):1057–1065, 2004.
- [78] I. Newton. Methodus fluxionum et seriarum infinitarum. Opuscula mathematica, philosophica et philologica, 1, 1774.
- [79] E. J. Nielsen and W. K. Anderson. Aerodynamic design optimization on unstructured meshes using the navier-stokes equations. AIAA journal, 37(11):1411–1419, 1999.
- [80] C. Othmer. A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 58(8):861–877, 2008.

- [81] C. Othmer, E. de Villiers, and H. G. Weller. Implementation of a continuous adjoint for topology optimization of ducted flows. In 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, June, 2007.
- [82] S. V. Patankar. Numerical heat transfer and fluid flow: Computational methods in mechanics and thermal science. 1980.
- [83] J. Périaux, M. Sefrioui, B. Mantel, D. Aviation, and Q. M. Dassault. Multi-objective strategies for complex optimization problems in aerodynamics using genetic algorithms. In Proceedings of the 21st ICAS Congress, page 11p, Melbourne, Australia, volume 13, page 18, 1998.
- [84] O. Pironneau. Optimal shape design for elliptic systems. In R. Drenick and F. Kozin, editors, System Modeling and Optimization, volume 38 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, pages 42–66. Springer Berlin Heidelberg, 1982.
- [85] D. Quagliarella, A. Vicini, and C. I. R. A. CIRA. Gas for aerodynamic shape design ii: multiobjective optimization and multi-criteria design. Von Karman Institute Lecture Series 2000-07. Genetic Algorithms for Optimisation in Aeronautics and Turbomachinery, 535, 2000.
- [86] L. B. Rall. Automatic differentiation: Techniques and applications. 1981.
- [87] J. J. Reuther, A. Jameson, J. J. Alonso, M. J. Rimllnger, and D. Saunders. Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers. 1997.
- [88] J. J. Reuther, A. Jameson, J. J. Alonso, M. J. Rimllnger, and D. Saunders. Constrained multipoint aerodynamic shape optimization using an adjoint formulation and parallel computers, part 2. Journal of aircraft, 36(1):61–74, 1999.
- [89] O. Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. Proceedings of the royal society of London, 35(224-226):84–99, 1883.
- [90] S. K. Robinson. Coherent motions in the turbulent boundary layer. Annual Review of Fluid Mechanics, 23(1):601–639, 1991.

- [91] T. Robinson and C. Armstrong. Sensitivity-based optimization of parameterized cad geometries. 2010.
- [92] H. Schlichting and K. Gersten. Grenzschicht–Theorie. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [93] T. W. Sederberg and S. R. Parry. Free-form deformation of solid geometric models. ACM SIGGRAPH computer graphics, 20(4):151–160, 1986.
- [94] O. Soto and R. Löhner. On the computation of flow sensitivities from boundary integrals. In Proceedings of the 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno NV, volume 112, 2004.
- [95] E. Sparrow and R. Cess. Free convection with blowing or suction. Journal of Heat Transfer, 83(3):387–389, 1961.
- [96] Z. Spears, A. Corrigan, and K. Kailasanath. Checkpointing methods for adjoint-based supersonic jet noise reduction. In 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, page 2472, 2014.
- [97] D. Srinath and S. Mittal. An adjoint method for shape optimization in unsteady viscous flows. Journal of Computational Physics, 229(6):1994–2008, 2010.
- [98] I. P. Stanimirovic, M. L. Zlatanovic, and M. D. Petkovic. On the linear weighted sum method for multi-objective optimization. Facta Universitatis (Niš Series Mathematics and Informatics), 26:49–63, 2011.
- [99] D. Thévenin and G. Janiga. Optimization and Computational Fluid Dynamics. Springer, 2008.
- [100] G. N. Vanderplaats. Conmin: A fortran program for constrained function minimization: User’s manual. 1973.
- [101] C. K. Vezyris, I. S. Kavvadias, E. M. Papoutsis-Kiachagias, and K. C. Giannakoglou. Unsteady continuous adjoint method using pod for jet-based flow control. In ECCOMAS conference, 2014.
- [102] C. Vira and Y. Y. Haimes. Multiobjective decision making: theory and methodology. In North Holland series in system science and engineering, number 8. Elsevier Science Publishing, 1983.

- [103] M. J. Walsh. Riblets as a viscous drag reduction technique. *AIAA journal*, 21(4):485–486, 1983.
- [104] J. F. Wang and J. Periaux. Multi-point optimization using gas and nash/stackelberg games for high lift multi-airfoil design in aerodynamics. In *Evolutionary Computation, 2001. Proceedings of the 2001 Congress on*, volume 1, pages 552–559. IEEE, 2001.
- [105] Q. Wang, P. Moin, and G. Iaccarino. Minimal repetition dynamic checkpointing algorithm for unsteady adjoint calculation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31(4):2549–2567, 2009.
- [106] Z. Wang and A. Przekwas. Unsteady flow computation using moving grid with mesh enrichment. *AIAA Paper*, 285:1994, 1994.
- [107] H. Wendland. *Scattered data approximation*, volume 17. Cambridge University Press, 2005.
- [108] D. C. Wilcox et al. *Turbulence modeling for CFD*, volume 2. DCW industries La Canada, CA, 1998.
- [109] L. Zadeh. Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 8(1):59–60, 1963.
- [110] K.-S. Zhang, Z.-H. Han, W.-J. Li, and W.-P. Song. Bilevel adaptive weighted sum method for multidisciplinary multi-objective optimization. *AIAA journal*, 46(10):2611–2622, 2008.
- [111] T. Zhili and D. Jun. Couplings in multi-criterion aerodynamic optimization problems using adjoint methods and game strategies. *Chinese Journal of Aeronautics*, 22(1):1–8, 2009.
- [112] D. W. Zingg, M. Nemec, and T. H. Pulliam. A comparative evaluation of genetic and gradient-based algorithms applied to aerodynamic optimization. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 17(1-2):103–126, 2008.