

Exakte gekoppelte akustisch-inkompressible Lösung der kompressiblen Navier-Stokes Gl.

Johannes Kreuzinger¹, Roland Ewert²

¹ *KM-Turbulenz GmbH, München, Email: j.kreuzinger@km-turbulenz.de*

² *DLR, Inst. für Aerodynamik und Strömungstechnik, Braunschweig, Email: Roland.Ewert@dlr.de*

Einleitung

Hybride strömungsakustische Zweischritt-Verfahren basierend auf skalenauflösender inkompressibler Navier-Stokes Simulation (CFD) und akustischer Störungssimulation (CAA) stellen eine gut validierte Methodik für das breitbandige Umströmungsgeräuschproblem bei kleiner Machzahl dar. Hybride Verfahren sind jedoch nicht in der Lage, tonale Quellen aus strömungsakustischer Rückkopplung zu beschreiben. Ausgehend von den kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen wird in dieser Arbeit eine exakte Aufspaltung in zwei gekoppelte Gleichungssysteme für Strömung und Akustik aufgezeigt, welche die strömungsakustische Rückkopplung berücksichtigt. Die akustische Propagation wird durch akustische Störungsgleichungen (APE) über der instationären Hintergrundströmung beschrieben, der strömungsmechanische Teil über eine den inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen äquivalente Form mit zusätzlichem CAA-nach-CFD Kopplungstermen. Das gekoppelte Gleichungssystem ist nicht in der Machzahl beschränkt. Die quasi-inkompressible Behandlung des Strömungsproblems bietet eine effiziente zeitgenaue Simulationsmethodik, die mit optimalen numerischen Verfahren für jeden Gleichungstyp auf unterschiedlichen Netzen für Strömung und Akustik realisiert werden kann. Die neue Methode wurde zur Simulation von zwei Fällen mit strömungsakustischer Rückkopplung eingesetzt (Parker-Mode im Kanal und Orgelpfeife). Die Ergebnisse werden mit Messungen bzw. der Lösung der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen verglichen.

Gesplittetes Gleichungssystem

Ausgangspunkt sind die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen in primitiver Schreibweise für Dichte ρ , Geschwindigkeit \mathbf{u} und Druck p :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho} = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = \theta \quad (3)$$

Der Term auf der RHS der Druckgleichung θ beschreibt Dissipation und Wärmeleitung.

Zur Aufspaltung des Gleichungssystems wird eine Geschwindigkeitszerlegung $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ angenommen. Es werden zunächst keine weiteren Eigenschaften vorgegeben. Speziell können also beide Geschwindigkeitskomponenten noch Wirbelstärke tragen, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\omega} :=$

$\nabla \times \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\Omega} := \nabla \times \mathbf{U}$, $\boldsymbol{\omega}' := \nabla \times \mathbf{u}'$. Im nächsten Schritt wird die Impulsgleichung in zwei getrennte Gleichungssysteme für die Zeitableitungen der Teilgeschwindigkeitskomponenten aufgespalten, so dass die aufsummierten Teilsysteme die Impulsgleichung reproduzieren. Die gewählte Aufspaltung sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho} \dots \\ \dots + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{u} = -\mathbf{X} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla \left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}' + \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) + \frac{\nabla p}{\rho} = +\mathbf{X} \quad (5)$$

Wie gezeigt, kann ein beliebiges instationäres Eichfeld $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ auf den rechten Seiten wechselseitig addiert bzw. subtrahiert werden, ohne dass die Realisierung der Impulsgleichung durch Summenbildung beeinflusst wird. Es wird durch $\mathbf{X} = \nabla P / \rho$ ein pseudo-inkompressibler Druck eingeführt, der die Projektion auf divergenzfreie Geschwindigkeit $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ erzwingt. Nach Einführung der Druckzerlegungen $p = P + p'$, sowie Addition und Subtraktion von $-p' \nabla \rho / \rho^2$ zur rechten Seite von (4) und (5), können dann die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in zwei gekoppelte Gleichungssysteme jeweils für Variablen (\mathbf{u}', p') und (ρ, \mathbf{U}) gebracht werden:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla \left(\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}' + \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \right) + \nabla \left(\frac{p'}{\rho} \right) = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\frac{Dp'}{Dt} + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}' = -\frac{DP}{Dt} + \theta \quad (7)$$

mit substanziellem Operator $D/Dt := \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ und

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{\nabla P}{\rho} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho} + \dots \\ \dots + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{u} + \frac{p' \nabla \rho}{\rho^2} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9)$$

mit Nebenbedingung $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$. Gleichungen 6 und 7 entsprechen den APE-Gleichungen [1] (mit modifizierter Druckgleichung). Als wesentlicher Quellterm tritt dann die substanzielle Ableitung (basierend auf der i.A. instationären Strömung \mathbf{u}) des inkompressiblen Drucks auf. Alternativ kann als Quellterm auch der Gradient des Drucks verwendet werden, siehe nachfolgende Diskussion. Durch Einführung eines akustischen Potentials mit $\mathbf{u}' =: \nabla \varphi$, kann das modifizierte APE-System in eine konvektive Wellengleichung für Schallgeschwindigkeit

$c^2 := \gamma p / \rho$, $\gamma = 1.4$ für Luft, umgeschrieben werden¹:

$$\frac{D}{Dt} \left(\rho \frac{\bar{D}\varphi}{Dt} \right) - \rho c^2 \Delta \varphi = \frac{DP}{Dt} - \theta. \quad (10)$$

Das APE-System beschreibt daher die akustische Wellenausbreitung in der i.A. instationären Grundströmung. Das Gleichungssystem 8 und 9 sind die “variable density incompressible Navier-Stokes equations“ mit CAA-nach-CFD Kopplungstermen. Diese beschreiben die Dynamik konvektiver Entropie- und Dichte-Moden. Es ist also eine Aufspaltung der kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in zwei getrennte System gelungen, die jeweils durch akustische und konvektive Propagationsgeschwindigkeiten ausgezeichnet sind und die durch wechselseitige Terme gekoppelt sind. Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass das gekoppelte System in der Anwendung nicht auf sehr kleine Machzahlen beschränkt ist. Zusätzlich zu den üblichen Formulierungen sind nicht-lineare Effekte in den Transporttermen berücksichtigt. Diese liefern z.B. in den APE für höhere Machzahlen nichtverschwindende zeitgemittelte Größen als kompressible Korrektur zur inkompressiblen Strömung. Als Konsequenz der Form von Gl. (6) sind die resultierenden Geschwindigkeiten drehungsfrei, d.h. $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}' \equiv \mathbf{0}$. Als wesentlicher CAA-nach-CFD Kopplungsterm für wirbeldominierte Strömungen kann damit der Term $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}'$ identifiziert werden (der unterstrichene Term in (9) verschwindet)².

Die gekoppelten Gleichungssysteme sind für zwei Anwendungen interessant: (a) Allgemein für die Simulation kompressibler Strömung mit expliziten Zeitschrittverfahren bei Verwendung von jeweils angepassten Gittern und Zeitschritten für inkompressible Strömung und kompressible Korrektur. (b) Für die Berechnung von Strömungsschallproblemen mit Zweibege-Kopplung mit bewährten Methoden nach hybridem Ansatz.

Voraussetzung ist, dass der CAA-nach-CFD Kopplungsterm in der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung keine zusätzliche “akustische” Zeitschrittbeschränkung verursacht.

Validierung

Implementierung gekoppeltes Gleichungssystem

Ziel der Validierung ist es, zu zeigen, dass die gegenseitige Rückkopplung von Strömung und Schall richtig abgebildet wird und durch die Rückkopplungsterme kein zusätzliches Zeitschrittkriterium für die inkompressible Gleichung entsteht.

Um den Implementierungsaufwand gering zu halten, wurde das Gleichungssystem 6-9 für niedrige Machzahlen vereinfacht. Trifft man die für akustische Störgleichungen bei kleiner Machzahl üblichen Annahmen, insbesondere Vernachlässigung der nichtlinearen Terme in den kompressiblen Fluktuationen, Vernachlässigung von Entropiequellen, Vernachlässigung von Dichteveränderungen und

-gradienten, sowie rein inkompressible Reibungsterme, erhält man folgendes Gleichungssystem (mit $c_0^2 := \gamma p_0 / \rho_0$ und Umgebungsdruck p_0 & Dichte ρ_0):

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla (\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}') + \frac{\nabla p}{\rho_0} = \frac{\nabla P}{\rho_0} \quad (11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla p + \rho_0 c_0^2 \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ic}}{\rho_0} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' = -\frac{\nabla P}{\rho_0} \quad (13)$$

mit Nebenbedingung $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$. Hier wird, wie kurz diskutiert, die Variante mit inkompressiblen Druckgradienten als Quellterm verwendet. Insgesamt unterscheidet sich der vorstehende Ansatz von einem üblichen hybriden CFD-CAA-Ansatz alleine durch den zusätzlichen CAA-nach-CFD Kopplungsterm $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}'$.

Für die Validierung wurde der CFD-CAA-Code MGLET mit zusätzlich implementierten CAA-nach-CFD Kopplungsterm verwendet [2]. Zur Zeitintegration der inkompressiblen Gleichungen wird ein explizites Runge-Kutta-Verfahren 3. Ordnung, für die APE eines 4. Ordnung verwendet. Aus Stabilitätsgründen werden für die Akustik kleinere Zeitschritte verwendet, so dass während eines Strömungszeitschrittes mehrere akustische Zeitschritte durchgeführt werden.

Kompressible Simulation als Referenz

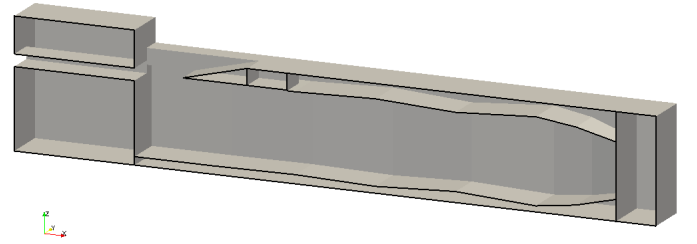


Abbildung 1: Geometrie der Orgelpfeife

Die Validierung des Zweibege gekoppelten Gleichungssystems erfolgt durch Vergleich von drei Simulationen:

1. kompressible Simulation eines Falles mit Strömung-Schall-Rückkopplung
2. Einweg-gekoppelte Simulation (Strömung → Schall) des selben Falles mit einem hybriden Verfahren
3. Zweibege-gekoppelte Simulation (Strömung → Schall) des selben Falles

Zuerst muss gezeigt werden, dass 3. konvergiert. Dann sollten Ergebnisse von 3. und 1. übereinstimmen, die von 2. und 1. nicht.

Erster Testfall ist eine verkleinerte Orgelpfeife, s. Abb. 1. Der abgeschlossene Resonator ist 60mm lang, die Zunge wird über einen 1.5mm hohen Kanal angeblasen. Die gegenseitige Rückkopplung von Strömung und Schall ist hier der grundlegende Mechanismus der Schallerzeugung. Geometrie und kompressible Lösung als Referenz

¹Mit substantiellem Operator $\bar{D}/Dt := \partial/\partial t + (\mathbf{U} + \mathbf{u}'/2) \cdot \nabla$.

²Der Term $p' \nabla \rho / \rho^2$ beschreibt eine Akustik-Entropie Kopplung bzw. einen nicht-linearen akustischen Quellterm.

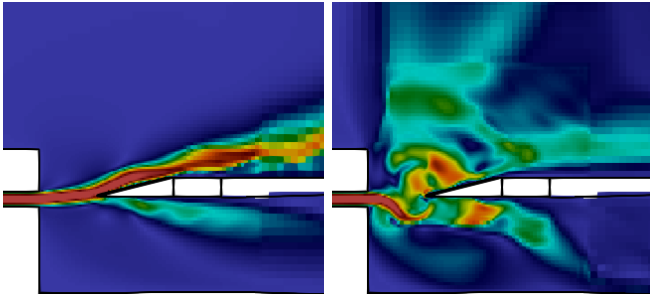


Abbildung 2: Schnitt durch das U -Feld, Farbskala $0 \dots 25m/s$. Links: ein-Wege-Kopplung; rechts: Zweiwege-Kopplung

sind [4] entnommen. Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen wurden dort mit einem Lattice-Boltzmann-Verfahren gelöst. Der Referenzsimulation folgend, wurden auch die aktuellen Simulationen mit einer gegenüber Luft um den Faktor 10 erhöhten Viskosität durchgeführt. Die Geschwindigkeit in der Mitte des Zuströmkanals ist $30m/s$, im Kanal sind damit $Re = 294$ und $Ma = 0.087$. Wegen der niedrigen Reynoldszahl ist eine DNS möglich.

Die Gitterweiten der aktuellen Simulation gehen von $\Delta x = 0.1875mm$ im Bereich des Kanals und der Zunge bis $\Delta x = 6mm$ im Außenbereich, insgesamt besteht das Gitter aus 2.5 Mio. Zellen. Eine Gitterstudie zeigte, dass bei dieser Gitterweite eine gitterunabhängige Lösung erreicht wird. Der Zeitschritt die Strömungssimulation beträgt $\Delta t_F = 1.875 \cdot 10^{-6}s$ was einer CFL-Zahl von ≈ 1.2 entspricht. Der akustische Zeitschritt ist, bedingt durch das numerische Stabilitätskriterium, $\Delta t_A = 1.705 \cdot 10^{-7}s$ und damit um den Faktor 11 kleiner als Δt_F . Die Konvergenz der Lösung des Zweiwege-gekoppelten Gleichungssystems demonstriert für dieses Beispiel die Erhaltung der numerischen Stabilität des hydrodynamischen Systems mit Rückkopplung.

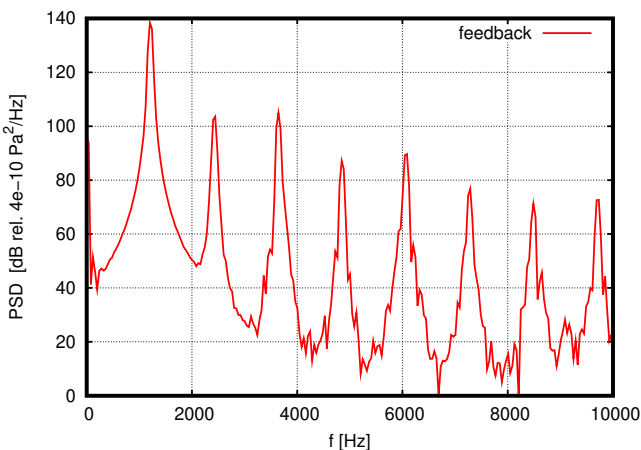


Abbildung 3: Druckspektren am geschlossenen Ende der Orgelpfeife

Ein Vergleich der Frequenz und des Pegels des Grundtons der Pfeife in Tabelle 1 zeigt, dass die Ergebnisse von Zweiwege-gekoppelter und kompressibler Simulation [4] gut übereinstimmen. Im Spektrum (Abb.3) sieht man die für nichtlineare Schwingungen typische Oberton-

Tabelle 1: Orgelpfeife. Peak-Frequenz und Pegel am geschlossenen Ende

	f	SPL
1-Wege-Koppl.	$1434Hz$	$131dB$
2-Wege-Koppl.	$1212Hz$	$157dB$
komp. N.-S. [4]	$1180Hz$	$153dB$

reihe. Die Ergebnisse der Einweg-gekoppelten Simulation weichen deutlich von der Zweiwege-gekoppelten bzw. kompressiblen Simulation ab: Die Frequenz ist deutlich höher und der Pegel um zwei Größenordnungen geringer. Abb.2 zeigt die grundsätzlich unterschiedliche Strömung: Ohne Rückwirkung des Schalls auf die Strömung legt sich der Strahl beinahe ungestört auf die Zunge. Mit Rückwirkung wird der Freistrah durch die normal zum Strahl wirkende Schallschnelle zu einer flatternden Bewegung angeregt. Ursächlich hierfür ist eindeutig die Wirkung des zusätzlichen CAA-nach-CFD Kopplungsterms.

Experimentelle Daten als Referenz

Beim zweiten Testfall dienen anstelle einer kompressiblen Simulation Messwerte als Referenz. Es handelt sich um die Parker-Mode um eine dicke Platte (Strebe) in einem durchströmten quadratischen Kanal. Zugehörige Messungen sind in Welsh et al. [3] beschrieben. Der Aufbau ist in Abb.4 skizziert. Beim Hochfahren der Geschwindigkeit steigt die Wirbelablösefrequenz im Nachlauf der Platte zunächst linear mit der Geschwindigkeit (konstante Strouhalzahl $St = f \cdot d/U_{bulk}$ des Wirbelabwerfens). Kommt sie in die Nähe der akustischen Resonanzfrequenz der Parker- β -Mode des Kanals, rastet die Eigenfrequenz auf dieser ein, um erst bei einer deutlichen Erhöhung der Geschwindigkeit weiter zu steigen.

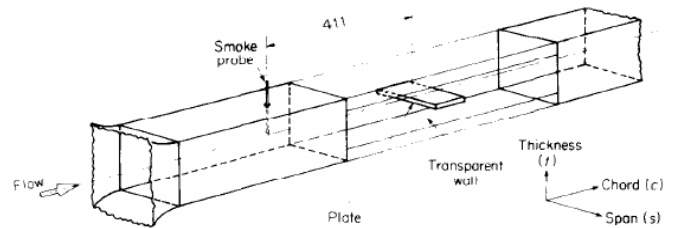


Abbildung 4: Kanal mit Platte, Skizze des Versuchsaufbaus aus [3]

Der Kanal hat einen Querschnitt von $0.244m \times 0.244m$. Betrachtet werden Geschwindigkeiten um $30m/s$. Damit ist $Ma = 0.087$ und mit der Dicke der Platte von $12.1mm$ ergibt sich $Re = 23700$. In der Messung beträgt die Resonanzfrequenz der Parker-Mode $f_R = 530Hz$, die Strouhalzahl der Wirbelablösung im nicht eingerasteten Zustand $St = 0.21$.

Da zur Abbildung dieses Verhaltens eine ganze Reihe von Simulationen durchgeführt werden muss, wurde zum einen das Gebiet in spannwertiger Richtung auf eine $96mm$ breite Scheibe mit periodischen Randbedingungen beschränkt, zum anderen die LES auf sehr grobes

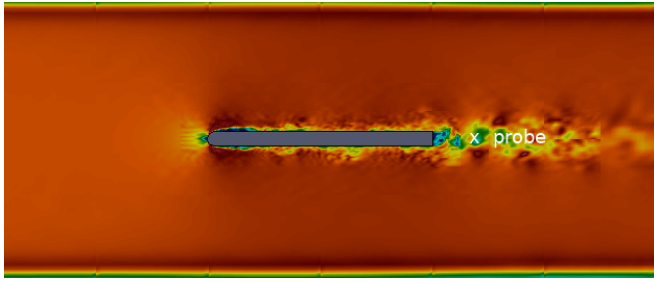


Abbildung 5: Schnitt durch das U -Feld, Farbskala 0...45m/s

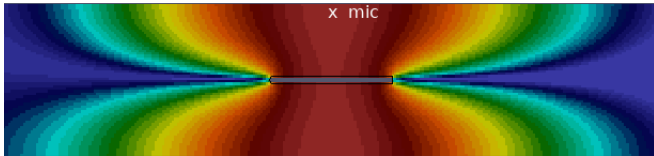


Abbildung 6: PSD des kompressiblen Druckanteils $p' = p - P$ bei der Resonanzfrequenz, Farbskala umfasst 40dB

Gitter von $\Delta x = 1mm$ in Umgebung der Platte durchgeführt. Insgesamt umfasst das Gitter 2.4 Mio. Zellen. Es wurden 12 Simulationen mit Einweg-Kopplung in einem Bereich von Anströmgeschwindigkeiten von $U_{bulk} = 24 \dots 35 \frac{m}{s}$ in Schritten von $1m/s$ durchgeführt und ebenso 12 Simulationen mit Zweiwege-Kopplung. Für den Strömungszeitschritt wurde eine CFL-Zahl von ≈ 1.2 gewählt, der akustische Zeitschritt war um den Faktor 6 kleiner.

Auch in diesem Fall war die Simulation des Zweiwegegekoppelten Gleichungssystems stabil, der CAA-nach-CFD Kopplungsterm hatte keinen Einfluss auf die mögliche Zeitschrittweite der Strömungslösung. Abb.5 zeigt das Strömungsfeld mit der Wirbelablösung im Nachlauf, Abb. 6 die Form der Parker- β -Mode.

Die akustische Resonanzfrequenz in der Simulation liegt bei $520Hz$, die Wirbelablösung erfolgt im nicht eingerasteten Zustand mit $St = 0.22$, beides nahe an den Messwerten. Die Simulationen mit Einwegkopplung zeigen das proportionale Anwachsen der Wirbelablösefrequenz mit der Geschwindigkeit, s. Abb.7 oben, rote Linie. Bei $U_{bulk} = 28 \frac{m}{s}$ sind Wirbelablösefrequenz und Resonanzfrequenz gleich, was zu maximalen Pegeln der Parker-Mode führt, s. Abb.7 unten. Die Zweiwegegekoppelten Simulationen zeigen für den Bereich $U_{bulk} = 27 \dots 30 \frac{m}{s}$ das auch in der Messung beobachtete Einrasten der Wirbelablösung auf die Resonanzfrequenz. Die höchsten Pegel werden jetzt bei $29 \frac{m}{s}$ und $30 \frac{m}{s}$ erreicht, sie liegen höher als die in den Simulationen ohne Rückkopplung und stimmen quantitativ mit der Messung überein.

Zusammenfassung

Gezeigt wurde die allgemeine Herleitung eines Zweiwegegekoppelten inkompressibel-kompressiblen Gleichungssystems mit einem zusätzlich einen CAA-nach-CFD Kopplungsterm $\Omega \times u'$ in der inkompressiblen Impulsgleichung.

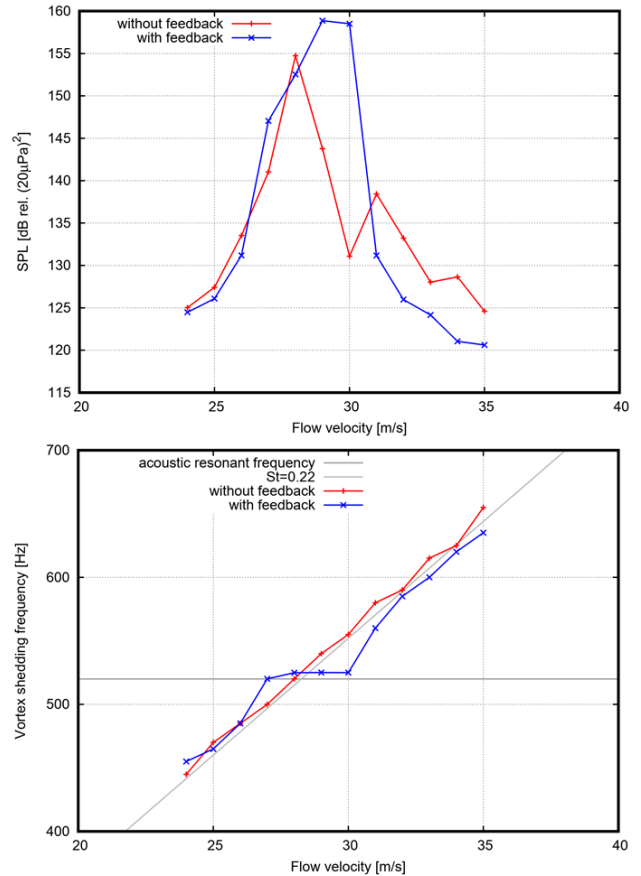


Abbildung 7: oben: Wirbelablösefrequenz an einem Punkt im Nachlauf; unten: Pegel an der Kanalwand über der Platte

Dieser Term wurde in einen erprobten CFD-CAA-Code implementiert. Anhand von zwei Testfällen wurde gezeigt, dass das Zweiwegegekoppelte Gleichungssystem ohne zusätzliche Zeitschrittbeschränkungen stabil gelöst werden kann und strömungsakustische Feedbackmechanismen richtig abbildet.

Danksagung

Großen Dank an Helmut Kühnelt, der uns die Geometrie der Orgelpfeife zur Verfügung stellte.

Literatur

- [1] Ewert, R. & Schröder, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *J. Comp. Phys.* 188 (2003).
- [2] Schwertfirm, F. und Kreuzinger, J.: Validation of a Hybrid Simulation Method for Flow Noise Prediction. *AIAA Paper* 2012-2192.
- [3] Welsh, M.C., Stokes, A.N. und Parker, R.: Flow resonant sound interaction in a duct containing a plate. Part I: Semi-circular leading edge. *J. Sound & Vib.* 95 (1984).
- [4] Kühnelt, H.: Studying the Vortex Sound of Recorder and Flute-like Instruments by Means of the Lattice Boltzmann Method and Helmholtz Decomposition. *Dissertation* mdw Wien (2016).